

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เมษายน 2561

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เมษายน 2561

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เมษายน 2561

เสถียรวุฒิ เฟื่องเจริญ. (2561). การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม.
ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาโท: อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสระและ,
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธิวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล.

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปี
การศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร
จำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 12 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 44 คน นักเรียนเหล่านี้ได้มาจากการ
สุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้อง
แบบละความสามารถของนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

ในการวิจัยครั้งนี้ใช้เวลาทั้งสิ้น 13 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้แบบแผนการวิจัยแบบ
One – Group Pretest – Posttest ผู้วิจัยเริ่มทดลองการวิจัยด้วยการนำแบบทดสอบวัด
ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนด้วยกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวน
สอบสวนเรื่องวงกลม ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทำการทดสอบกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง เป็นเวลา
1 คาบ แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดลองครั้งนี้ เป็นคะแนนก่อนเรียน (Pre - Test)
จากนั้นดำเนินการทดลองโดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ในภาคเรียนที่ 2
ปีการศึกษา 2560 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการทดลอง 11 คาบ เมื่อเสร็จสิ้นการจัดการเรียนรู้
แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ทำการทดสอบหลังเรียน (Post - test) เป็นเวลา 1 คาบ

ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 3 ภายหลังการเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อน
เรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA III STUDENTS' PROOF ABILITIES IN GEOMETRY
THROUGH A LEARNING MANAGEMENT WITH INQUIRY-BASED METHOD
FOR CIRCLE TOPICS



Presented in Partial Fulfillment of the Requirement for the
Master of Education Degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

April 2018

Sadetawut Pengjaroen. (2018). *A Study of Mathayomsuksa III Students' Proof Abilities in Geometry Through A Learning Management with Inquiry-Based Method for Circle Topics*. Master's thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor : Dr.Sukanya Hajisalah, Asst. Prof. Dr. Pisuttawan S. Sirininlakul.

Proof is a crucial process in learning mathematics. The purpose of this study was to examine the proofing abilities of geometry before and after being taught by a designed learning management for circle topics with a method of inquiry-based learning

This study was an experimental research conducted and took place during the second semester of the 2017 academic year. The participants consisted of forty-four Mathayomsuksa III students from Debsirin School in Bangkok, Thailand and were selected by cluster random sampling from twelve classrooms containing students with similar abilities.

The duration of the experiment was thirteen periods of fifty minutes each. The One – Group Pretest – Posttest Design was used in this study. A learning management method was developed to encourage students to engage in inquiry-based learning. A pretest on proofing abilities in geometry was given at the beginning as a part of the pretest-posttest design. The researcher taught the subjects according to the lesson plans in the learning management for eleven periods. A parallel-structure posttest was provided at the end of the lesson plans. The dependent t-test was employed in the data analysis process.

The findings revealed that the students gained significant in terms of proofing abilities in geometry by learning through inquiry-based lesson plans and learning at a level of .01.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ของ

เสกฐวุฒิ เพ็งเจริญ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นายแพทย์ฉัตรชัย เอกปัญญาสกุล)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ที่ปรึกษาหลัก

.....ประธาน

(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสำและ)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด)

.....ที่ปรึกษาร่วม

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล)

(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสำและ)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล)

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจาก อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีสถาและ ประธานควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ สิรินิลกุล กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ท่านทั้งสองได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาแนะนำในการดำเนินงานวิจัยทุกขั้นตอน ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย อาจารย์ที่ปรึกษาประจำชั้นปีของผู้วิจัย ตั้งแต่การศึกษาระดับปริญญาตรี จนกระทั่งการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา ที่สละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาแนะนำในการดำเนินงานวิจัยมาโดยตลอด

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์เอนก จันทระจัญญ อาจารย์ ดร.วิศรุต โพธิ์อัน และอาจารย์ อรชา อิศรางกูร ณ อยุธยา ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียน บดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนีย์) โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์สมศรี แจ่มสุทิมล อาจารย์พรสิทธิ์ เลิศเสรีพัฒน์กุล อาจารย์ชาคริต แจ่มศรี อาจารย์สุนิสา เกาจำปา และนักเรียนที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียน เทพศิรินทร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์เอกธัช แซ่จ้ง อาจารย์มณฑิชา ศิริรัตน์ และนักเรียนที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอบพระคุณพี่สกล ตั้งเก้าสกุล ที่คอยให้คำปรึกษาและเป็นแรงผลักดันให้แก่ผู้วิจัยตั้งแต่เริ่มหาหัวข้อวิจัย จนกระทั่งงานวิจัยในครั้งนี้เสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ให้กำลังใจ และเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้วิจัยมีความมุ่งมั่นต่อการศึกษามาโดยตลอด และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคน ที่ให้กำลังใจและความช่วยเหลือจนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา พี่สาว และครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

เสฏฐวุฒิ เพ็งเจริญ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	6
ความสำคัญของการวิจัย	6
ขอบเขตของการวิจัย	6
ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	6
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	6
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	6
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	6
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	7
ตัวแปรที่ศึกษา	7
นิยามศัพท์เฉพาะ	7
กรอบแนวคิดในการวิจัย	9
สมมติฐานของการวิจัย	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	10
การพิสูจน์	10
ความหมายของการพิสูจน์	10
ความสำคัญของการพิสูจน์	11
รูปแบบของการเขียนพิสูจน์	12
กระบวนการพิสูจน์	14
การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	15
ความหมายของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	15
ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	18
บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	26
ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	29

2 (ต่อ)

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	31
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์.....	31
งานวิจัยต่างประเทศ	32
งานวิจัยภายในประเทศ	33
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน	34
งานวิจัยต่างประเทศ	34
งานวิจัยในประเทศ	35
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง วงกลม	36
3 วิธีดำเนินการวิจัย	38
การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง	38
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	38
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	38
การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	38
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	39
การตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	41
การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	43
แบบแผนการวิจัย.....	43
การดำเนินการทดลอง.....	43
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	44
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	44
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	45
ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลัง	
การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน.....	45
ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน.....	45
การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย	46

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	48
ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป	48
สรุปการวิจัย.....	50
อภิปรายผลการวิจัย	50
 บรรณานุกรม	 55
 ภาคผนวก.....	 64
ภาคผนวก ก.....	65
ภาคผนวก ข.....	72
ภาคผนวก ค.....	77
ภาคผนวก ง.....	126
ภาคผนวก จ.....	137
ภาคผนวก ฉ.....	139
 ประวัติย่อผู้วิจัย.....	 141

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แบบแผนการทดลอง	43
2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบ วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	45
3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบ วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	46
4 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย	47
5 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ก่อนการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	67
6 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	68
7 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้ แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	70
8 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้ แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	71
9 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้ แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	73

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1 กรอบแนวคิดในการวิจัย.....	9
2 ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนของแอลเบอร์ตาลีร์นึ่ง	19
3 กระบวนการสืบสวนสอบสวน เพื่อนำไปสู่การสร้างความรู้ใหม่	23



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

เรขาคณิตเป็นศาสตร์หนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีบทบาทในการดำเนินชีวิตของมนุษย์มาอย่างยาวนาน เมื่อประมาณ 4000 ปีก่อนคริสตศักราช พบว่าชาวบาบิโลเนียนสามารถหาพื้นที่ของสนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้โดยใช้ความยาวด้านกว้างคูณความยาวด้านยาว หรือการสร้างพีระมิดกิซา (Gizeh) ของชาวอียิปต์ เมื่อประมาณ 2900 ปีก่อนคริสตศักราช ซึ่งเป็นอีกหลักฐานหนึ่งที่ทำให้ทราบว่ามีการใช้ความรู้เรขาคณิตในการออกแบบสถาปัตยกรรม ถัดมาประมาณ 600 ปีก่อนคริสตกาล ทาเลสแห่งมิลีตุส (Thales of Miletus ประมาณ 640 – 550 B.C.) เริ่มมีการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางเรขาคณิต โดยพยายามใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) มากกว่าการลองผิดลองถูก ซึ่งนับว่าเป็นยุคสำคัญที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในการศึกษาเรขาคณิตรวมทั้งศาสตร์อื่น ๆ ต่อมาในยุคของยุคลิดแห่งอเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria ประมาณ 450 – 380 B.C.) เกิดการเปลี่ยนแปลงครั้งสำคัญอีกครั้งหนึ่งเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ยุคลิดได้เขียนหนังสืออีลิเมนต์ (Elements) ทั้งหมด 13 เล่ม ซึ่งเป็นตำราเรียนที่ถือว่าประสบความสำเร็จมากที่สุดเท่าที่เคยมีมา ในหนังสืออีลิเมนต์มีการเรียบเรียงอย่างเป็นระบบและเขียนลำดับอย่างมีเหตุผลโดยใช้เหตุผลแบบนิรนัย แต่วิธีการเรียบเรียงตำราอีลิเมนต์โดยใช้วิธีเชิงสัจพจน์ของยุคลิดนั้นยังไม่มีข้อกำหนดคำนิยามที่จะนำมาใช้ช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งแตกต่างจากในปัจจุบันที่ได้มีการพัฒนาระบบเชิงสัจพจน์อันประกอบด้วย คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และนาตรรกศาสตร์มาใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ต่าง ๆ เพื่อสรุปเป็นทฤษฎีบท

การศึกษาเรขาคณิตมีพัฒนาการมาตามยุคสมัย สำหรับประเทศไทยได้กำหนดให้เรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ตามที่หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (กระทรวงศึกษาธิการ. 2551: 50) ระบุไว้ในสาระการเรียนรู้ที่ 3 และเมื่อพิจารณาจากตัวชี้วัดช่วงชั้น หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานระบุไว้ว่าคุณภาพของนักเรียนหลังจากจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จะต้องสามารถนำเสนอสมบัติและทฤษฎีบททางเรขาคณิตไปใช้ประกอบการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2551: 52) เพราะเนื้อหาวิชาเรขาคณิตสำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะเน้นเรื่องการพิสูจน์ การนำเสนอสมบัติของรูปเรขาคณิต บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาใช้ประกอบการให้เหตุผลเป็นส่วนใหญ่

จากการศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นพบว่า มีเนื้อหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เส้นขนาน ความคล้าย การให้เหตุผล เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และวงกลม

สาระการเรียนรู้เรขาคณิตเรื่องวงกลมเป็นเนื้อหาหนึ่งของรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งพบว่านักเรียนมักเกิดปัญหา ในการทำความเข้าใจอยู่บ่อยครั้ง เนื่องจากในการเรียนรู้เกี่ยวกับสมบัติของวงกลม นักเรียนจะต้องมี พื้นฐานการเรียนรู้ทางเรขาคณิตในเรื่องอื่น ๆ เพื่อนำความรู้เดิมเกี่ยวกับสมบัติ กฎ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางเรขาคณิตที่เคยเรียนมาแล้วมาประกอบสำหรับการเรียนรู้ทฤษฎีใหม่ในเรื่องวงกลม รวมถึง นักเรียนจะต้องอาศัยทักษะการให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ แต่จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเรื่องวงกลม พบว่านักเรียนส่วนหนึ่งใช้วิธีการท่องจำสมบัติของวงกลมเท่านั้น นักเรียน บางคนขาดการฝึกทักษะการคิดอย่างมีเหตุผลในการเรียน (ศราญลักษณ์ บุตรรัตน์. 2553: 3) ส่งผล ให้นักเรียนไม่สามารถพลิกแพลงใช้ประโยชน์ในสิ่งที่เรารู้มาแล้วประกอบการพิสูจน์หรือ การแก้ปัญหาทางเรขาคณิตได้ รวมถึงครูคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งยังคงให้ความสำคัญกับการอธิบาย เนื้อหาที่เป็นบทนิยาม กฎ ทฤษฎีบท (ยุทธชัย ไชยคำภา. 2557: 1) โดยยึดการสอนของตนเองเป็น ศูนย์กลาง เนื่องจากกังวลว่าจะสอนเนื้อหาได้ไม่ครบตามที่หลักสูตรกำหนดไว้ภายในเวลาที่กำหนด ทำให้นักเรียนขาดการคิด การเรียนรู้แก้ปัญหาด้วยตนเอง ดังนั้น นอกจากการได้รับความรู้ตาม เนื้อหาวิชาแล้วนักเรียนควรได้รับการปลูกฝังทักษะการคิดอย่างมีเหตุผลควบคู่กันไปด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่มุ่งหวังจะเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมในช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) ผู้ที่ ต้องการศึกษาต่อทางด้านวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ควรจะต้องมีพื้นฐานที่ดีเกี่ยวกับความรู้เรื่อง สมบัติของวงกลม เพราะจะเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นที่สูงขึ้น (สุภัทรา เกิดมงคล. 2550: 3)

จากงานวิจัยของไดมาโกสที่กล่าวถึงการสอนเรขาคณิตว่าสิ่งหนึ่งที่ควรให้ความสำคัญ ในการเรียนการสอนเรขาคณิตคือการสอนพิสูจน์ (Dimakos. 2007: 1) ซึ่งสอดคล้องกับเยาเวเรต สิงหนันท์ (2533: 3) ที่กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์เป็นหัวใจของการเรียนเรขาคณิต เนื่องจาก เรขาคณิตเป็นตัวแทนของการพิสูจน์เชิงนิรนัย การพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญ อย่างหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยพัฒนาข้อความคาดคะเนในระบบคณิตศาสตร์เรื่องนั้น ๆ ว่าเป็น ข้อความที่เป็นจริงหรือไม่ หรือสมเหตุสมผลจนสามารถยอมรับเป็นทฤษฎีเพื่อนำไปเป็นเหตุผล ในการสรุปข้อความใหม่ได้หรือไม่ อีกทั้งในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงนักเรียนจะต้องมี

ความสามารถในด้านการพิสูจน์ พร้อมทั้งเห็นคุณค่าและตระหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์ (ขวัญ เพียชัย. 2547: 1) ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตควรสร้างพื้นฐานที่ดีในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้แก่นักเรียน เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นที่นำไปสู่ความสามารถในการพิสูจน์ในระดับที่สูงขึ้น

การพิสูจน์ถือเป็นสิ่งสำคัญในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งยังเป็นเครื่องมือหนึ่งที่ช่วยพัฒนานักเรียนในด้านต่าง ๆ นอกจากนี้ อัมพร ม้าคนอง (2557: 67) กล่าวว่า การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความสำคัญต่อการหาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผล และใช้การอ้างอิงหลักการทางคณิตศาสตร์ ครูควรฝึกให้นักเรียนพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ (Informal proof) ก่อนเพื่อให้ นักเรียนคุ้นเคยกับกระบวนการคิดลักษณะต่าง ๆ เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดเชิงตรรกะ หลังจากนั้น จึงค่อยฝึกการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ (Formal proof) ที่ต้องมีการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติทางเรขาคณิตมาประกอบอย่างสมเหตุสมผล อีกทั้ง บทบาทของการพิสูจน์มีส่วนช่วยในการส่งเสริมและพัฒนานักเรียนในด้านของการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ การอธิบายแสดงความเป็นเหตุเป็นผล ความเชื่อมโยงของบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ฝึกการอธิบาย และการเขียนสื่อสารเพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์ว่ามีความถูกต้องอย่างเป็นระบบ (สุกัญญา หะยีสานและ; และ เอนก จันทรรุ่งบุญ. 2560: 339) ถึงแม้ว่าการสอนให้นักเรียนเขียนพิสูจน์จะเป็น องค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญสำหรับการสอนเรขาคณิตในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา แต่จากการสัมภาษณ์ครูที่มีประสบการณ์ในการสอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและนักเรียน โรงเรียนเทพศิรินทร์ที่ผ่านการเรียนวิชาเรขาคณิตมาแล้ว กลับพบว่าการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็น เรื่องที่นักเรียนให้ความสำคัญน้อยที่สุด นักเรียนส่วนใหญ่ยกให้เรขาคณิตเป็นวิชาที่ไม่ชอบมากที่สุด และเป็นเรื่องที่ยากมากที่สุดในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของโกมล ไพศาล (2540: 2) ที่พบว่าโดยทั่วไปนักเรียนส่วนใหญ่ไม่ชอบวิชาเรขาคณิต มักคิดว่าเรขาคณิตเป็นเรื่องยากและมีปัญหาในการเรียนทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศ วีเบอร์ (Weber. 2003) พบว่าการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่มีการพิสูจน์มาแล้วในตำราเรียนเป็นสิ่งที่นักเรียนรู้สึกว่ายาก รวมไปถึงการทำความเข้าใจสัจพจน์ง่าย ๆ ในเรขาคณิตระบบยูคลิดที่นักเรียนรู้สึกว่าเป็นเรื่องยากเช่นกัน จากการศึกษาพบว่านักวิจัยหลายท่าน ต่างสนับสนุนว่าการเขียนพิสูจน์เป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนส่วนใหญ่ (Healy; & Hoyles. 1998; Usiskin. 1982; Senk. 1985: 448-456) ปัญหาในการพิสูจน์ของนักเรียนเกิดขึ้นจาก 2 ปัจจัยหลัก คือตัวนักเรียนเองและกระบวนการสอนของครู แซงค์ (Senk. 1985: 448-456) แสดงให้เห็นว่าแม้ว่า

นักเรียนจะได้รับการสอนการพิสูจน์แล้ว นักเรียนบางส่วนกลับยังไม่ตระหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์แบบนิรนัย รวมถึงยังไม่สามารถแยกประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ ยิ่งไปกว่านั้นยังพบว่านักเรียนที่จบไปแล้วหลายคนไม่รู้ว่าองค์ประกอบของการพิสูจน์มีอะไรบ้าง (Recio; & Godino. 2001: 83-99) และไม่สามารถที่จะแสดงการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง (Selden; & Selden. 2003) ในการเรียนการสอนเกี่ยวกับการพิสูจน์ หากครูแสดงการพิสูจน์ประกอบการอธิบาย หรือมีการแสดงวิธีการพิสูจน์ในหนังสือหรือใบความรู้มาให้แล้วโดยที่นักเรียนไม่ต้องทำการพิสูจน์ด้วยตนเอง นักเรียนจะรู้สึกว่าจะไม่จำเป็นที่จะต้องพิสูจน์ด้วยตัวเองอีกครั้ง (Hadas; Hershkowitz; & Schwarz. 2000: 127-150) เมื่อนักเรียนไม่ได้ฝึกฝนการเขียนพิสูจน์จึงส่งผลให้ไม่สามารถพิสูจน์ข้อความเหล่านั้นด้วยตนเองได้ เคลเมนต์และบาติस्ता (Clements; & Battista. 1992) กล่าวว่าหนึ่งในเหตุผลหลักที่ทำให้เกิดปัญหาในการเรียนเรขาคณิตคือรูปแบบการสอนที่ครูใช้ นอกจากนี้ เซเมน (Cemen. 1987) ระบุว่าปัญหาในการเรียนเรขาคณิตซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ได้เกิดขึ้นแค่กระบวนการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ยังเกิดจากวิธีการสอนของครูอีกด้วย จะเห็นได้ว่าการจัดการเรียนรู้ถือเป็นองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญในการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังนั้น จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ครูจะต้องมีการพัฒนาและปรับปรุงการจัดการเรียนการสอน เทคนิคและวิธีการต่าง ๆ โดยเน้นนักเรียนเป็นสำคัญและคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลตามแนวการจัดการศึกษาของพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติพุทธศักราช 2542 แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 และ แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2553 (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2553: 8) การสอนคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลงไปเพื่อพัฒนาศักยภาพทางสมองในการคิด การให้เหตุผล ตลอดจนการรู้จักแก้ปัญหาให้สูงขึ้น เพราะปัจจุบันเป็นยุคที่ผู้คนเข้าถึงข้อมูลข่าวสารได้อย่างง่ายดาย จึงต้องมีทักษะที่จะคัดกรองข้อมูลที่น่าเชื่อถือ รู้จักรับข่าวสารอย่างมีประสิทธิภาพ จึงจะสามารถดำรงชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยการเรียนการสอนเรขาคณิตควรเน้นกิจกรรมในลักษณะที่เป็นการตั้งและสำรวจข้อความคาดการณ์ทางเรขาคณิตและเรียนการให้เหตุผลด้วย ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ออกแบบอย่างดี มีเครื่องมือที่เหมาะสม โดยอาศัยความช่วยเหลือจากครูผู้สอน (สุรินทร์ บุญพัฒนาภรณ์. 2549: 2-3)

ลาสเลย์ แมทซินสกี และโรเลย์ (Lasley, T. J.; Matczynski, T. J.; & Rowley, J. B. 2002: 76) ได้กล่าวถึงรูปแบบการสอนที่ช่วยพัฒนาการให้เหตุผล นั่นคือการสอนแบบสืบสวนสอบสวน (Inquiry) โดยให้ความหมายไว้ว่าเป็นการสอนเพื่อให้นักเรียนได้ตั้งคำถาม สร้างสมมติฐาน และตรวจสอบทฤษฎี โดยการใช้เหตุการณ์ที่ขัดแย้งหรือสถานการณ์ที่ซับซ้อนเป็นฐานในการอภิปรายของนักเรียน รูปแบบการสอนแบบสืบสวนสอบสวนจะช่วยให้นักเรียนพัฒนาทักษะการให้เหตุผล

ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยสอดคล้องกับงานวิจัยของวัชร น้อยมี (2551: 124) ซึ่งพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภายหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 จากการศึกษาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมีส่วนช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน (Inquiry Method) เป็นรูปแบบการจัดการเรียนรู้ที่ยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางวิธีหนึ่ง การสอนวิธีนี้เป็นกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการแสวงหาความรู้ของนักเรียน ให้นักเรียนค้นคว้าข้อมูลด้วยตนเอง โดยกระบวนการคิดหาเหตุผลจนสามารถค้นพบความรู้หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง (ไสว พักขาว. 2544: 102) การสอนแบบสืบสวนสอบสวนเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่ผสมผสานระหว่างการใช้กระบวนการคิดและทักษะต่าง ๆ เพื่อที่จะแก้ปัญหาหรือค้นหาคำตอบ ทำให้เกิดความเข้าใจและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ ซึ่งเป็นแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้มีการพัฒนาอย่างเต็มศักยภาพ ส่งเสริมการคิด รู้จักการคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล รักการเรียนรู้และสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง โดยแนวการสอนวิธีนี้มีความเชื่อที่ว่า การเรียนรู้ที่เน้นการฝึกให้นักเรียนรู้จักศึกษาค้นคว้าหาความรู้โดยครูตั้งคำถามกระตุ้น ให้นักเรียนใช้กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนค้นพบความรู้ สรุปเป็นหลักการ กฎเกณฑ์ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสภาพการณ์อื่น ๆ ได้อย่างกว้างขวาง (สุวิทย์ มูลคำ; และ อรทัย มูลคำ. 2558: 136) นอกจากนี้การสอนวิธีนี้ยังเป็นวิธีการสอนที่ใช้เสริมสร้างผลการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 (พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์; และ พเยาว์ ยินดีสุข. 2558: 86) ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนเป็นศูนย์กลางของการจัดการเรียนการสอน พัฒนาให้นักเรียนให้สามารถแก้ไขปัญหา และคิดวิเคราะห์สถานการณ์ได้อย่างเชี่ยวชาญ ฝึกให้นักเรียนรู้จักวิธีการเรียนรู้ตลอดชีวิตอย่างไม่สิ้นสุด

จากผลการศึกษาดังกล่าว ผู้วิจัยเห็นว่ากระบวนการสอนแบบสืบสวนสอบสวนเหมาะสมกับการนำมาใช้จัดการเรียนรู้ในเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนต่อไปในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ความสำคัญของการวิจัย

เป็นข้อมูลให้แก่บุคลากรทางการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อจะได้กำหนดแนวทางและวางแผนกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้เหมาะสม และพัฒนาความสามารถด้านการพิสูจน์ในเรื่องอื่น ๆ ของนักเรียนต่อไปในอนาคต

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 12 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 44 คน นักเรียนเหล่านี้ได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารถของนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการทดลองเป็นช่วงภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2560 ใช้เวลาทดลอง 11 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้เวลาเรียนในคาบเรียนปกติ และใช้เวลาในการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จำนวน 2 คาบเรียน ในเวลาเรียนปกติ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ เป็นเนื้อหาในสาระการเรียนรู้เรื่องวงกลม ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นตามแนวทางของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 2 (มัธยมศึกษาปีที่ 3) ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ดังนี้

หน่วยที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและความยาวส่วนโค้ง

คาบที่ 1	เรื่อง ส่วนประกอบของวงกลม	จำนวน 1 คาบ
คาบที่ 2	เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในครึ่งวงกลม	จำนวน 1 คาบ
คาบที่ 3	เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม	จำนวน 1 คาบ
คาบที่ 4-5	เรื่อง มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม	จำนวน 2 คาบ

หน่วยที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและความยาวส่วนโค้ง

คาบที่ 6-8	เรื่อง คอร์ด	จำนวน 3 คาบ
------------	--------------	-------------

หน่วยที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและเส้นสัมผัสวงกลม

คาบที่ 9-11	เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม	จำนวน 3 คาบ
-------------	------------------------	-------------

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หมายถึง ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยการอ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิต หรือข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริง แบ่งพิจารณาเป็นความสามารถใน 4 ด้านดังต่อไปนี้

1. ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. เขียนภาพประกอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

3. เขียนแสดงการพิสูจน์ หมายถึง เขียนแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยการอ้างบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิต หรือข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริง รวมถึงสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน

4. เขียนสรุปการพิสูจน์

การประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต พิจารณาจากคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หมายถึง แบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แบ่งเป็นข้อสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ดังนี้

1. ก่อนเรียนเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน จำนวน 5 ข้อ

2. หลังเรียนเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องวงกลม จำนวน 5 ข้อ

3. กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน หมายถึง กระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองเป็นหลักซึ่งครูเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนเกิดข้อสงสัยใคร่รู้ เกิดกระบวนการคิดหาคำตอบ และลงมือเสาะแสวงหาความรู้ เพื่อนำมาหาข้อสรุปด้วยตนเอง ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ (Engagement) เป็นขั้นที่ครูกระตุ้นความสนใจให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเห็นผ่านกิจกรรมสั้น ๆ เพื่อให้นักเรียนดึงเอาประสบการณ์เดิมมาใช้ประกอบการสร้างความคาดหวังหรือใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

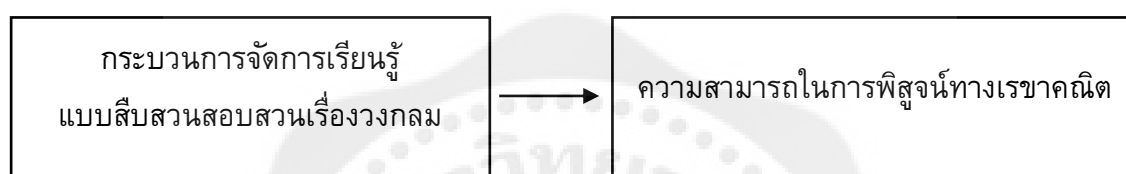
2. ขั้นสำรวจค้นคว้า (Exploration) เป็นขั้นที่นักเรียนเริ่มทำการพิสูจน์ ขั้นนี้เป็นขั้นรวบรวมความรู้เดิมที่มีและนำข้อมูลที่ได้จากสถานการณ์ใหม่มาใช้ในการสร้างความรู้โดยผ่านกระบวนการวางแผน ดำเนินการสำรวจ สืบค้น รวบรวมข้อมูล แล้วสร้างข้อความคาดการณ์หรือกำหนดแนวทางให้การพิสูจน์จากการทำกิจกรรมที่กำหนดให้ โดยครูจะมีบทบาทในการส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้า รวมถึงแนะนำแนวทางโดยการตั้งคำถามที่เป็นประโยชน์ในการสืบค้นเพื่อให้ได้ข้อมูลที่เพียงพอสำหรับการเขียนพิสูจน์

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป (Explanation) เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือเขียนพิสูจน์หรือเขียนสรุปสิ่งที่ค้นพบเป็นข้อความคาดการณ์ รวมถึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจสิ่งที่ได้ลงมือปฏิบัติไปในขั้นที่ 2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อน ในขั้นนี้นักเรียนสามารถสอบถามข้อมูลหรือข้อเท็จจริงเพิ่มเติมจากครูเพื่อให้มีความเข้าใจที่ชัดเจนมากขึ้น โดยครูจะมีบทบาทในการชี้แนะเกี่ยวกับการสรุปและการอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น

4. **ชั้นขยายความรู้ (Elaboration)** เป็นชั้นที่พัฒนาความเข้าใจของนักเรียนโดยการหยิบยกข้อความใหม่ขึ้นมา นักเรียนจะต้องนำข้อความคาดการณ์ ความรู้ กฎเกณฑ์ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ทราบอยู่เดิมหรือค้นพบใหม่ไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ต่อไปในอนาคต

5. **ชั้นประเมินผล (Evaluation)** เป็นชั้นที่ให้นักเรียนได้ประเมินความเข้าใจของตนเอง หลังจากที่ผ่านมากระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน รวมถึงเป็นชั้นที่ครูประเมินความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนตามวัตถุประสงค์ของการเรียนด้วย

กรอบแนวคิดในการวิจัย



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานของการวิจัย

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยที่ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การพิสูจน์

- 1.1 ความหมายของการพิสูจน์
- 1.2 ความสำคัญของการพิสูจน์
- 1.3 รูปแบบของการเขียนพิสูจน์
- 1.4 กระบวนการพิสูจน์

2. กระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

- 2.1 ความหมายของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
- 2.2 ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
- 2.3 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
- 2.4 ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- 3.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
- 3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
- 3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องวงกลม

1. การพิสูจน์

1.1 ความหมายของการพิสูจน์

นักการศึกษาได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ (Proof) ไว้หลายท่าน ดังต่อไปนี้

มัวร์ (Moore, 1990: 51) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่าหมายถึงลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยคโดยเริ่มจากสมมติฐานไปจนถึงข้อสรุป ซึ่งมีลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. อาศัยสมมติฐานพื้นฐาน
2. อาศัยบทนิยามหรือสัจพจน์

3. อาศัยสิ่งที่พิสูจน์มาแล้ว

4. อาศัยกฎของการให้เหตุผล

สไตล์เลียนิเดส (Stylianides. 2007: 107) ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่าเป็นการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยเชื่อมโยงลำดับของข้อความที่ใช้ยืนยันหรือข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ใช้ข้อความที่ได้รับการยอมรับว่าเป็นจริงและนำมาใช้ได้โดยไม่ต้องมีเหตุผลเพิ่มเติม

2. ใช้รูปแบบของการให้เหตุผลหรือข้อโต้แย้งที่ถูกต้องและเป็นที่ยอมรับ

3. ใช้การสื่อสารโดยผ่านการเขียนแสดงการอ้างเหตุผลที่เหมาะสม

แฮนนาและบาร์บีว (Hanna; & Barbeau. 2008: 345) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นภาษาสากลทางคณิตศาสตร์ที่นักคณิตศาสตร์ใช้ในการสื่อสารระหว่างกัน

เฮมมี (Hemmi. 2010: 273) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์โดยใช้ความรู้และสัญลักษณ์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์

แฮนนาและวิลลิอาร์ (Hanna; & de Villiers. 2012: 44) กล่าวว่า การพิสูจน์คือการนำข้อโต้แย้งหรือข้อสนับสนุนที่เหมาะสมมาใช้ในการให้เหตุผลเพื่อแสดงว่าข้อสมมติฐานที่ตั้งขึ้นเป็นจริง สอดคล้องกับยุพิน พิพิธกุล และปรีชา เนาว์เย็นผล (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. 2537: 118) กล่าวว่า การพิสูจน์คือการแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่สมเหตุสมผล โดยใช้ข้อเท็จจริงที่ยอมรับแล้วและข้อมูลที่กำหนดเป็นข้ออ้าง แล้วใช้รูปแบบการให้เหตุผลนำไปสู่ผลสรุปที่ต้องการ ในทำนองเดียวกัน กรรณิการ์ กวักเพฑูร์ย์ (2542: 35) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์เป็นการให้เหตุผลเพื่อแสดงว่าข้อความเป็นจริง และขวัญ เพียชัย (2547: 10) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่าหมายถึง การใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท กฎการให้เหตุผล หรือข้อมูลที่กำหนดให้ แล้วใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยเพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริงนำไปสู่การสรุปผลตามที่ต้องการ

จากความหมายของการพิสูจน์ข้างต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ความหมายของการพิสูจน์ทางเรขาคณิตว่าหมายถึงการแสดงเหตุผลแบบนิรนัย โดยใช้บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิต หรือข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงลำดับของข้อความที่เป็นจริงนำไปสู่การสรุปผลตามที่ต้องการ

1.2 ความสำคัญของการพิสูจน์

นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของการพิสูจน์ ซึ่งสรุปได้ดังต่อไปนี้

บาลาเซฟ (Balacheff. 2010: 117) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์ทำให้นักเรียนฝึกการให้เหตุผลภายใต้กฎและข้อความเป็นที่ยอมรับทั่วไป ซึ่งเป็นปัจจัยหนึ่งในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์

โค (Ko. 2010: 1109) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์ที่ดีจะช่วยให้เข้าใจความหมายของทฤษฎีบทและข้อความที่พิสูจน์

ฮุย จัน (Hui Jun. 2015: 16) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์ทำให้นักคณิตศาสตร์สร้างความรู้ใหม่ ๆ โดยพัฒนาจากสัจพจน์ ทฤษฎีบท และแนวคิดที่มีอยู่เดิม แล้วต่อยอดแนวคิดไปสู่ความรู้ใหม่ เช่น การพัฒนาทฤษฎีจำนวนจากจำนวนจริงสู่จำนวนเชิงซ้อน เช่นเดียวกับวีเบอร์และเมจิ รามอส (Weber; & Meiji-Ramos. 2010: 329) ที่กล่าวว่าการศึกษาวิธีการใหม่จากการพิสูจน์ที่มีอยู่เดิมจะนำไปสู่การค้นพบความรู้ใหม่

เยาเวเรต สิงหนันท์ (2533: 3) กล่าวโดยสรุปว่าการพิสูจน์ทำให้นักเรียนฝึกการใช้เหตุผล รู้จักวิเคราะห์แก้ไขปัญหามีระบบ

พัฒน์ อุดมกะวานิช (2541: 1) กล่าวโดยสรุปว่าการมีแนวคิดทฤษฎีใหม่ ๆ ย่อมเป็นผลจากการศึกษาทฤษฎีบทที่มีอยู่ว่ามีแนวคิดมาอย่างไร และใช้การพิสูจน์ในการยืนยันความถูกต้อง

ขวัญ เพี้ยซ้าย (2547: 1) กล่าวโดยสรุปว่าการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงนักเรียนจะต้องมีความสามารถในการพิสูจน์เห็นคุณค่าและตระหนักในความสำคัญของการพิสูจน์ เพราะการได้มาของกฎ ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยทักษะความสามารถในการพิสูจน์

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการพิสูจน์มีความสำคัญหลายประการ ทั้งเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการให้เหตุผล เป็นความรู้พื้นฐานที่มีความสำคัญต่อการเรียนในระดับชั้นที่สูงขึ้น และเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีบทต่าง ๆ

1.3 รูปแบบของการเขียนพิสูจน์

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีรูปแบบต่าง ๆ กัน ซึ่งพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548: 4) ระบุว่า การพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยคเงื่อนไข แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1. การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง เป็นการพิสูจน์ที่ต้องใช้เหตุผลเพื่อแสดงว่าเมื่อเหตุเป็นจริงแล้วเหตุนั้นทำให้ผลเป็นจริงเสมอ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้แล้วอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง และสมบัติต่าง ๆ อย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่างประกอบกันมาให้เหตุผลเพื่อให้ได้ว่าผลที่ต้องการเป็นจริง

2. การพิสูจน์ว่าข้อความไม่จริง ทำได้โดยยกตัวอย่างที่เป็นจริงตามสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือเหตุ แต่ผลสรุปที่ได้ไม่เป็นจริงตามที่ต้องการ

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2555: 4-11) ระบุว่า การพิสูจน์ทางเรขาคณิตมี 2 รูปแบบ คือ

1. การพิสูจน์แบบตาราง มี 2 สดมภ์

ข้อความ	เหตุผล
1.	
2.	

2. การพิสูจน์แบบบรรยายความ

ข้อความที่เชื่อมต่อกัน ข้อความแรกเป็นเหตุ แล้วใช้บทนิยาม สมบัติทางเรขาคณิต หรือทฤษฎีบทในการสรุปผล คือข้อความที่ตามมาซึ่งจะทำหน้าที่เป็นเหตุในการพิสูจน์ต่อ ๆ ไป จนกระทั่งได้สิ่งที่ต้องการ

พิจารณาตัวอย่างการพิสูจน์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง จุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ จงพิสูจน์ว่า AC และ CB มีขนาดเท่ากับครึ่งหนึ่งของ AB

สิ่งที่กำหนดให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $AC = \frac{1}{2}AB$ และ $CB = \frac{1}{2}AB$

พิสูจน์แบบตาราง

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$	1. กำหนดให้
2. $AC = CB$	2. บทนิยามจุดกึ่งกลาง
3. $AC + CB = AB$	3. ผลบวกส่วนของเส้นตรง
4. $AC + AC = AB$	4. การแทนค่า
5. $2AC = AB$	5. ผลจากข้อ 4.
6. $AC = \frac{1}{2}AB$	6. สมบัติการคูณ
7. $CB = \frac{1}{2}AB$	7. พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

พิสูจน์แบบบรรยายความ

เพราะว่าจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

โดยบทนิยามของจุดกึ่งกลาง จะได้ว่า $AC = CB$ แต่ $AC + CB = AB$

แทนค่า CB ด้วย AC จะได้ว่า $AC + AC = AB$

ดังนั้น $2AC = AB$

โดยสมบัติการคูณ จะได้ว่า $AC = \frac{1}{2}AB$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า $CB = \frac{1}{2}AB$

นั่นคือ $AC = \frac{1}{2}AB$ และ $CB = \frac{1}{2}AB$

จากการศึกษารูปแบบการเขียนการพิสูจน์เห็นได้ว่ามีรูปแบบที่แตกต่างกัน ดังนั้นในการเลือกวิธีการพิสูจน์ขึ้นอยู่กับโจทย์และการพิจารณาความเหมาะสมของรูปแบบที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งบางโจทย์สามารถแสดงการพิสูจน์ได้หลายวิธี หรือบางโจทย์สามารถแสดงการพิสูจน์ได้วิธีเดียว สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยเลือกใช้การพิสูจน์แบบตารางสำหรับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1.4 กระบวนการพิสูจน์

กรณิการ์ กวักเพทวร์ย์ (2542: 52-58) กล่าวว่า การพิสูจน์ข้อความในแบบ $p \rightarrow q$ สามารถทำได้ 3 วิธี คือ วิธีตรง (Direct proof) วิธีการแย้งสลับที่ (Contrapositive proof) และวิธีข้อขัดแย้ง (Contradiction proof) อีกทั้งยังสรุปการพิสูจน์ทั้ง 3 แบบไว้ดังนี้

1. วิธีตรง สมมติ p เป็นจริง

.

. (ส่วนของการพิสูจน์)

.

ดังนั้น q

2. วิธีการแย้งสลับที่ สมมติ $\sim q$ เป็นจริง

.

. (ส่วนของการพิสูจน์)

.

ดังนั้น $\sim p$

3. วิธีข้อขัดแย้ง สมมติ p และ $\sim q$ เป็นจริง

.
.
(ส่วนของการพิสูจน์)
.

ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

ศิริจันทร์ เวสารัชศาค (2551: 32-35) กล่าวว่า การพิสูจน์ข้อความที่เป็นประโยคเงื่อนไขแบ่งออกเป็น 2 วิธี ดังนี้

1. การพิสูจน์ตรง (Direct proof) คือการพิสูจน์ที่เริ่มต้นพิสูจน์จากเหตุ หรือสิ่งที่กำหนดให้ จากนั้นอาศัยบทนิยาม กฎ ทฤษฎี สัจพจน์ หรือข้อความที่เคยได้พิสูจน์มาแล้วก่อนหน้านี้มาอ้างอิงจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

2. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect proof or proof by Contradiction) เป็นการพิสูจน์ที่ทำได้โดยการสมมติข้อความที่ต้องการพิสูจน์ให้เป็นเท็จ แล้วดำเนินการพิสูจน์ไปจนกระทั่งเกิดข้อขัดแย้ง

จากการศึกษา สรุปได้ว่ากระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ใช้ในการศึกษาวิจัยในครั้งนี้จะใช้การพิสูจน์โดยวิธีตรง คือ

เหตุ :	p	สิ่งที่กำหนดให้
	$p \rightarrow q$	บทนิยาม ทฤษฎีบท หรือสมบัติที่เกี่ยวข้อง
ผลสรุป :	q	สิ่งที่ต้องการ

2. การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

2.1 ความหมายของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

วิธีการสอนที่เรียกว่า Inquiry ได้มีนักการศึกษาหลายท่านเรียกชื่อแตกต่างกันออกไป เช่น “การสืบเสาะหาความรู้” “การสืบสอบ” “การสืบสวนสอบสวน” “การสืบเรื่องราว” “การสืบเสาะ” เป็นต้น สำหรับการกล่าวถึง Inquiry ในครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้คำว่า “การสืบสวนสอบสวน”

วิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน (Inquiry Method) เริ่มนำมาใช้สอนครั้งแรกที่รัฐอิลลินอยส์ ประเทศสหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ. 1957 ซึ่งเป็นช่วงที่สหรัฐอเมริกากำลังตื่นตัวเนื่องจากสหพันธรัฐรัสเซียมีความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ถึงขั้นส่งจรวดขึ้นสู่อวกาศได้สำเร็จ จึงมีการปรับปรุงการเรียนการสอนด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์กันอย่างกว้างขวาง และได้มีผู้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมาโดยตลอด งานวิจัยที่สำคัญ ได้แก่ งานวิจัยของซัคแมน (Suchman. 1962: 79-80) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบสืบสวนสอบสวน

ที่มหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ โดยเน้นการสอนวิทยาศาสตร์ด้วยตนเอง ในปี พ.ศ. 2513 วีระยุทธ วิเชียรโชติ ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยการเรียนแบบสืบสวนสอบสวนในประเทศไทยจากมูลนิธิเอเชีย โดยทดลองสอนครั้งแรกที่วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตรและที่โรงเรียนสายน้ำทิพย์ ปี พ.ศ. 2515 รัฐบาลไทยได้ตั้งสถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีขึ้น เพื่อส่งเสริมและพัฒนาหลักสูตร โดยเฉพาะวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ซึ่งนำวิธีการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมาใช้ จึงทำให้การสอนด้วยวิธีดังกล่าวเป็นที่รู้จักอย่างกว้างขวาง (สุระ สนั่นเสียง. 2536: 38; อ้างอิงจาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2533. เอกสารการประชุมปฏิบัติการสอนสิ่งแวดล้อมศึกษาด้วยวิธีสืบสอบ.)

สำหรับความหมายของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายไว้ ซึ่งพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

กูด (Good. 1973: 303) อธิบายความหมายของการสืบสวนสอบสวนไว้ 3 แนวทางดังนี้

1. เป็นวิธีหนึ่งในการศึกษา เพื่อให้ได้มโนทัศน์ใหม่ โดยดำเนินการเพื่อให้ได้ความรู้ที่เป็นไปได้ในกรณีนั้น ๆ ซึ่งเป็นความรู้ที่อาจเปลี่ยนแปลงได้ และได้มายาก
2. เป็นเทคนิคหรือกลวิธีหนึ่งในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาวิทยาศาสตร์ โดยมีการกระตุ้นให้นักเรียนอยากรู้ อยากเห็น ตั้งคำถาม แล้วหาคำตอบด้วยตนเอง
3. เป็นวิธีแก้ปัญหาวิธีหนึ่งที่มีกิจกรรมเพื่อให้นักเรียน เรียนรู้โดยเผชิญกับเหตุการณ์ที่ท้าทายความคิด วิธีการนี้เริ่มต้นด้วยการสังเกตอย่างเป็นระบบ ออกแบบ การแยกสิ่งที่สังเกตกับสิ่งที่อ้างอิง คิดหาวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ และเป็นวิธีการที่ทดสอบได้ และสรุปผลอย่างมีเหตุผล

คาริน (Carin. 1993: 86) และควีน (Queen. 2009: 152) กล่าวในทำนองเดียวกันว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการที่นักเรียนเรียนรู้จากการตั้งคำถาม ตั้งสมมติฐานหรือหาวิธีการแก้ปัญหาที่เป็นไปได้ ทดสอบสมมติฐานนั้นภายใต้ข้อมูลที่กำหนด และนำข้อสรุปที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาหรือสถานการณ์ใหม่ การสืบสวนสอบสวนมุ่งเน้นไปที่กระบวนการ (processes) มากกว่าผลลัพธ์ (products) ซึ่งช่วยให้นักเรียนตระหนักในกระบวนการเรียนรู้ที่จะสามารถนำไปปรับใช้ในชีวิตจริงได้

อัลเบอร์ตาลิ์นนิ่ง (Alberta Learning. 2004: 1) ระบุว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้นั้น มีการสร้างข้อคำถามขึ้น สืบค้นข้อมูลและสร้างความเข้าใจ ความรู้และประสบการณ์ใหม่ สิ่งที่ค้นพบอาจเป็นคำตอบของ

คำถามที่เคยตั้ง เป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนรู้หรือเป็นข้อสนับสนุนแนวคิดที่คาดการณ์ไว้ นักเรียนจะต้องมีการแลกเปลี่ยนความรู้หรือสิ่งที่ค้นพบนั้นกับผู้อื่น

กรมวิชาการ (2544: 36) ระบุว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนหมายถึง การสอนที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ โดยใช้กระบวนการคิดหาเหตุผล จนค้นพบความรู้หรือแนวทางแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง โดยครูตั้งคำถามประเภทกระตุ้นให้นักเรียนใช้ความคิดหาวิธีการแก้ปัญหาและสามารถนำวิธีการแก้ปัญหานั้นมาแก้ปัญหาได้

สันติ อธิพิณนาวกุล (2550: 27) กล่าวว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนหมายถึง การจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางโดยมีลักษณะของกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ ที่ต้องการให้นักเรียนค้นหาคำตอบด้วยตนเอง โดยที่ครูคอยมีหน้าที่ส่งเสริมช่วยเหลือ หรือใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้ค้นพบวิธีแก้ปัญหาและนำไปประยุกต์ใช้

วัชร น้อยมี (2551: 47) กล่าวว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนหมายถึง วิธีการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยอาศัยหลักการและวิธีการทางวิทยาศาสตร์ ในการหาคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ที่ครูกำหนดขึ้น โดยครูมีหน้าที่คอยแนะนำปรึกษา ส่งเสริม ช่วยเหลือ และใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้ นักเรียนได้ค้นพบวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์นั้น ๆ

อ้อมฤดี แซ่มอุบล (2553: 15) กล่าวว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนหมายถึง การเรียนการสอนที่เน้นการฝึกให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาโดยอาศัยกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งครูเป็นผู้ตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความคิดสงสัย มีการตอบโต้กันระหว่างนักเรียนและครู จนกระทั่งนักเรียนค้นพบข้อสรุป หลักการหรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วยตนเองและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้

ทีศนา แคมมณี (2555: 141) กล่าวว่าจัดการเรียนรู้โดยเน้นกระบวนการสืบสวนสอบสวน (Inquiry Instruction) หมายถึง การดำเนินการเรียนการสอนโดยครูกระตุ้นให้นักเรียนเกิดคำถาม เกิดความคิด และลงมือแสวงหาความรู้เพื่อนำมาประมวลหาคำตอบหรือข้อสรุปด้วยตนเอง โดยที่ครูช่วยอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ในด้านต่าง ๆ ให้แก่นักเรียน เช่น ในด้านการสืบค้นหาแหล่งความรู้ การศึกษาข้อมูล การวิเคราะห์ การสรุปข้อมูล การอภิปรายโต้แย้งทางวิชาการและการทำงานร่วมกับผู้อื่น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) (2555: 64) ระบุว่าจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นกระบวนการการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

และการนำเสนอที่ต้องการให้นักเรียน สร้างข้อคำถาม (Asking Questions) สืบหาคำอธิบาย (Investigating Solutions) สร้างความรู้ใหม่ (Creating New Knowledge) อธิบายสิ่งที่ค้นพบ (Discussing Discoveries) และสะท้อนความรู้ใหม่ (Reflecting on the New Knowledge) ซึ่งเป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ มีความสุขกับการเรียน และมีความคงทนในความรู้ที่ได้

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2558: 136) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนคือกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักศึกษาหาความรู้ โดยครูตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนใช้กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนค้นพบความรู้หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่ถูกต้องด้วยตนเอง สรุปเป็นหลักการ กฎเกณฑ์หรือวิธีการในการแก้ปัญหา และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ในการควบคุม ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง หรือสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง

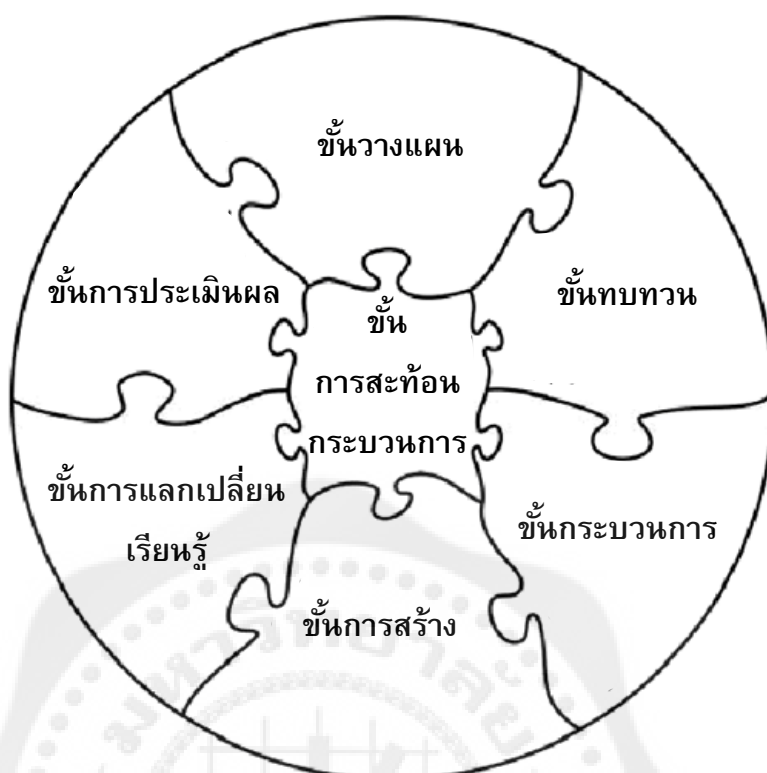
สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยให้ความหมายของกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนว่าหมายถึง กระบวนการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน โดยเน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองเป็นหลัก ซึ่งครูผู้สอนเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนเกิดข้อสงสัยใคร่รู้ เกิดกระบวนการคิดหาคำตอบ และลงมือเสาะแสวงหาความรู้ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิต เพื่อนำมาหาข้อสรุปด้วยตนเอง

2.2 ขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

เอ็กเกนและเกาแซ็ค (Eggen; & Kauchak. 1996: 238-239) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เป็นวิธีการจัดการเรียนรู้ที่ออกแบบมาเพื่อสอนนักเรียนให้รู้ถึงวิธีการสืบค้นปัญหาและคำถามด้วยความจริง แบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ระบุคำถามหรือปัญหา (Identifying a question or problem)
2. สร้างสมมติฐาน (Making hypotheses)
3. เก็บรวบรวมข้อมูล (Gathering data)
4. ประเมินสมมติฐาน (Assessing hypotheses)
5. สรุปผล (Generalizing)

แอลเบอร์ตาเลิร์นนิ่ง (Alberta Learning. 2004: 10) ได้อธิบายขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังแสดงได้ด้วยแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนของแอลเบอร์ตาเลิร์นนิ่ง

ที่มา: Alberta Learning. (2004). *Focus on Inquiry: A Teacher's Guide to Implementing Inquiry-based Learning*. p. 10.

จากแผนภูมิข้างต้น สามารถอธิบายได้ดังนี้

ในการสืบสวนสอบสวน ขั้นวางแผน (Planning) นักเรียนกำหนดประเด็นปัญหาในการศึกษา กำหนดแหล่งข้อมูลในการสืบค้น และวางแผนการสืบสวนสอบสวน ขั้นทบทวน (Retrieving) นักเรียนพิจารณาข้อมูลที่สืบค้น รวบรวมข้อมูล ประเมินข้อมูล หาข้อมูลที่ควรสืบค้นเพิ่มเติมตามประเด็นในการศึกษา และตรวจสอบแผนที่วางไว้แล้วปรับเปลี่ยนให้เหมาะสม ขั้นกระบวนการ (Processing) นักเรียนสืบค้น ทดลอง รวบรวมข้อมูล วิเคราะห์หาแหล่งอ้างอิง จากนั้นนำข้อมูลมาเชื่อมโยงกับความรู้เดิม ขั้นการสร้าง (Creating) นักเรียนจัดการกับข้อมูล แลกเปลี่ยนข้อมูลกับเพื่อน ตรวจสอบและแก้ไขเพื่อนำมาสร้างข้อสรุป ขั้นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ (Sharing) นำเสนอข้อสรุปกับเพื่อน อภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้ความเข้าใจซึ่งกันและกัน และนำมาปรับแก้ข้อสรุปให้เหมาะสม ขั้นการประเมินผล (Evaluating) นักเรียนประเมินข้อสรุป ประเมินกระบวนการทำงาน และนำความรู้ไปปรับใช้กับสถานการณ์ใหม่ การสะท้อนกระบวนการ

(Reflecting on the Process) จะปรากฏสอดแทรกอยู่ในทุกชั้น พิจารณาการเชื่อมโยงในกระบวนการเรียนรู้กับความรู้ความเข้าใจในบทเรียน

ควีน (Queen. 2009: 152) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นเผชิญปัญหา ครูอธิบายกระบวนการสืบสวนสอบสวน จากนั้นนำเสนอสถานการณ์ที่แตกต่างออกไป ครูและนักเรียนใช้ภาษาของกระบวนการสืบสวนสอบสวน นักเรียนสามารถถามคำถามได้เฉพาะคำถามที่ตอบว่า “ใช่” หรือ “ไม่” ถ้าต้องการคำตอบที่นอกเหนือจากนั้น นักเรียนจะถูกถามกลับ เพื่อให้นักเรียนได้พัฒนาการสร้างความรู้หรือทฤษฎีด้วยวิธีของตนเอง ครูจะไม่ทำการประเมินความรู้และทฤษฎีของนักเรียน แต่ครูจะสนับสนุนให้นักเรียนเชื่อมั่นในสิ่งที่ตนเองคิดค้นมา และถามนักเรียนเพื่อให้นักเรียนได้สนับสนุนความคิดของตนเองด้วยข้อเท็จจริง ขณะทำการสืบสวนสอบสวน นักเรียนสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนได้

2. ขั้นเก็บรวบรวมข้อมูล เพื่อนำไปใช้พิสูจน์ในการยืนยันข้อเท็จจริง ในขั้นนี้ นักเรียนเริ่มถามคำถาม เช่น หากครูยกสถานการณ์เกี่ยวกับสะพานแขวน นักเรียนอาจตั้งข้อสงสัยว่าอะไรยึดสะพานให้ลอยไว้ ครูจะตอบคำถามเพื่อแสดงให้เห็นถึงธรรมชาติของวัตถุ เงื่อนไข และแสดงให้เห็นถึงสิ่งที่เกิดขึ้นในสถานการณ์ปัญหา

3. ขั้นรวบรวมข้อมูลและทดลอง ขั้นนี้ต้องการให้นักเรียนแยกแยะความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ และเริ่มตั้งสมมติฐานที่สามารถอธิบายอธิบายสถานการณ์ที่แตกต่างออกไปได้

4. ขั้นรวบรวม คิดค้น และอธิบาย ขั้นนี้เป็นประโยชน์ในการช่วยให้นักเรียนเข้าใจในการอธิบายสถานการณ์ที่แตกต่างออกไป

5. ขั้นวิเคราะห์ ครูถามนักเรียนเกี่ยวกับกระบวนการสืบสวนสอบสวน จุดประสงค์หลักของกระบวนการสืบสวนสอบสวนไม่ใช่เพื่อให้นักเรียนได้ความรู้แต่เป็นการช่วยให้นักเรียนได้กระบวนการ ในขั้นตอนสุดท้ายนี้ ครูอาจถามนักเรียนด้วยคำถามเหล่านี้ เช่น คำถามใดที่ช่วยให้นักเรียนเริ่มต้นตั้งสมมติฐาน นักเรียนได้เรียนรู้อะไรจากกระบวนการสืบสวนสอบสวน นักเรียนมีคำแนะนำอะไรบ้างที่จะช่วยให้กระบวนการสืบสวนสอบสวนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ไบบี (Bybee. 2014: 10-12) ได้เสนอขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ Inquiry cycle หรือ 5Es Instructional Model ไว้ดังนี้

1. ขั้นการสร้าง ความสนใจ (Engagement) จุดประสงค์ของขั้นตอนนี้ คือ ทำให้นักเรียนสนใจ ใคร่รู้ในกิจกรรมที่จะนำเข้าสู่บทเรียน ซึ่งกิจกรรมควรจะเชื่อมโยงประสบการณ์การเรียนรู้เดิมกับปัจจุบัน และช่วยให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับความคิดรวบยอดที่ได้จากกิจกรรม

2. ขั้นการสำรวจและค้นหา (Exploration) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่นักเรียนทำกิจกรรมการสำรวจและค้นหาสิ่งที่นักเรียนต้องการเรียนรู้ตามความคิดเห็นนักเรียนแต่ละคน หลังจากนั้นนักเรียนแต่ละคนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับความคิดรวบยอด กระบวนการ และทักษะในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจและค้นหา ในการทำกิจกรรมนักเรียนควรเชื่อมโยงประสบการณ์เดิมในการสร้างข้อคำถาม สร้างแนวคิด และวางแผนแนวทางในการสืบหาข้อมูล

3. ขั้นการอธิบาย (Explanation) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่มุ่งให้นักเรียนได้อธิบายความคิดรวบยอดที่ได้จากการสำรวจและค้นหา ขั้นนี้ครูสามารถเสริมแนวคิด กระบวนการ หรือทักษะให้นักเรียนได้

4. ขั้นการขยายความรู้ (Elaboration) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่ให้นักเรียนได้ขยายความคิดรวบยอดและทักษะให้กว้างขวางและลึกซึ้งยิ่งขึ้น โดยนำความคิดรวบยอดมาปรับใช้ในสถานการณ์ใหม่

5. ขั้นการประเมินผล (Evaluation) ขั้นตอนนี้จะช่วยให้นักเรียนได้ประเมินความรู้ความเข้าใจของตนเอง และเป็นขั้นที่ครูได้ประเมินกระบวนการและความรู้ความเข้าใจของนักเรียนด้วย

มัวร์ (Moore, 2015: 359-360) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นระบุปัญหา (Identifying the Problem) ครูควรคำนึงถึงความพร้อมทางด้านความรู้และทักษะในการระบุปัญหาของนักเรียน คอยสังเกตและคอยให้คำแนะนำในการระบุปัญหาของนักเรียน

2. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา (Working Toward Solutions) เป็นขั้นที่นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาโดยไม่มีกฎเกณฑ์หรือข้อบังคับ ครูควรให้คำแนะนำหรือให้อิสระแก่นักเรียนในหาวิธีการแก้ปัญหาเพื่อให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา และเป็นการแสดงให้เห็นการสืบสวนสอบสวนในชีวิตจริง

3. ขั้นสร้างข้อสรุป (Establishing Solution) ขั้นตอนสุดท้ายของการสืบสวนสอบสวนไม่จำเป็นที่จะต้องได้ข้อสรุปตามที่กำหนดไว้ ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ (ความสามารถ แนวคิด ทักษะ และการตัดสินใจ) ของแต่ละบุคคลที่จะนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างข้อสรุป

ไสว พักขาว (2544: 102-104) กล่าวถึง ขั้นตอนการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ไว้ 6 ขั้น ดังนี้

1. ชื่อนำเสนอสถานการณ์หรือสิ่งที่ปัญหา โดยครูอาจเล่าเรื่องโดยใช้สื่อ/อุปกรณ์ภาพประกอบหรือนำของจริงมาแสดงก็ได้
2. ขั้นสังเกต ครูให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่ครูนำเสนอ โดยใช้ประสาทสัมผัสทั้ง 5 หรืออาจใช้เครื่องมือบางอย่างช่วยก็ได้
3. ขั้นอธิบาย ครูให้นักเรียนคิดสาเหตุของปัญหาแล้วตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับปัญหานี้จากความรู้และประสบการณ์เดิมของนักเรียน
4. ขั้นทดสอบ ครูให้นักเรียนช่วยกันตั้งคำถามเพื่อรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาให้มากที่สุด เพื่อทดสอบสมมติฐาน โดยครูจะไม่พยายามตอบคำถามในลักษณะที่จะอธิบายคำตอบของปัญหา แต่อาจตอบเพียง “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” เท่านั้น นอกจากการถามแล้วครูอาจให้นักเรียนศึกษาหรือทำการทดลอง เพื่อพิสูจน์สมมติฐานด้วยก็ได้ ในกรณีที่เรื่องไม่ยุ่งยาก และใช้เวลาไม่มาก
5. ขั้นสรุป ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้จากขั้นทดสอบเพื่ออธิบายคำตอบของปัญหา
6. ชื่อนำความรู้ไปใช้ ครูกระตุ้นให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้ประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ในชีวิตประจำวัน

สันติ อธิพลนาวกุล (2550: 35) อธิบายขั้นตอนในการสอนแบบสืบสวนสอบสวนไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นสังเกต เป็นขั้นที่ครูได้จัดสถานการณ์ ที่เป็นปัญหาเพื่อให้นักเรียนได้คิด วิเคราะห์ ทำการสังเกต พยายามค้นพบหลักการ หรือประเมินสถานการณ์ที่ได้รับ โดยครูจะใช้คำถามต่าง ๆ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้สำรวจปัญหาจากกิจกรรมที่กำหนดให้
2. ขั้นอธิบาย เป็นขั้นที่ครูกระตุ้นให้นักเรียนทำการค้นหาคำตอบเพื่อจัดข้อสงสัย โดยการใช้เหตุผล วิเคราะห์ข้อมูลและค้นหาวิธีที่จะอธิบายปัญหาจากขั้นสังเกต
3. ขั้นพยากรณ์และทดสอบ เป็นขั้นที่นักเรียนนำข้อมูลมาอภิปรายและตั้งสมมติฐาน แล้วทำการทดลองหรือพยากรณ์เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้ จนนำไปสู่ข้อสรุป
4. ชื่อนำไปใช้ เป็นขั้นที่ครูได้ให้สถานการณ์หรือตัวอย่างใหม่ที่คล้ายกับปัญหาที่นักเรียนได้เคยทำการสืบสวนสอบสวนมาแล้ว เพื่อให้นักเรียนได้นำหลักการใหม่ที่ค้นพบมาปรับขยายโครงสร้างการรับรู้ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเนื้อหาอื่น ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

ชนาธิป พรกุล (2554: 134) กล่าวถึงขั้นตอนในการสืบสวนสอบสวนว่ามีความแตกต่างกันไปตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครูต้องการให้นักเรียนบรรลุ โดยทั่วไปมีขั้นตอนหลัก 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ระบุปัญหา และทำปัญหาให้กระจ่างชัดเจน ปัญหาที่เหมาะสมจะทำการสืบสอบควรเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจใคร่รู้ หรือเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับนักเรียน ครูช่วยให้นักเรียนเข้าใจปัญหา และมโนทัศน์ที่ซ่อนอยู่ในปัญหา

2. ตั้งสมมติฐาน ครูกระตุ้นให้นักเรียนคิดคำตอบของปัญหา หลังจากได้สมมติฐานมาจำนวนหนึ่ง ให้นักเรียนประเมินเหลือไว้เฉพาะสมมติฐานที่ทำการค้นคว้า

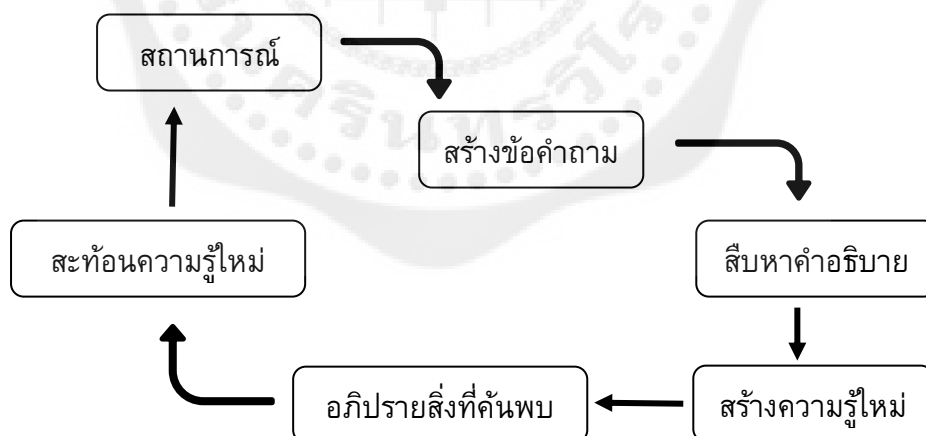
3. รวบรวมข้อมูล จากแหล่งข้อมูลที่สมมติฐานให้แนวทางไว้ ครูพิจารณาว่าจะให้นักเรียนทำเป็นกลุ่ม ทั้งชั้น หรือรายบุคคล

4. วิเคราะห์ และตีความข้อมูล เพื่อทดสอบสมมติฐาน ครูดูแลให้ตีความตามข้อมูลไม่ใช่ตามสมมติฐาน

5. ลงข้อสรุปว่ายอมรับ หรือปฏิเสธสมมติฐาน หรือเปลี่ยนสมมติฐาน ตามการตีความข้อมูล

การสอนแบบสืบสวนสอบสวนใช้สอนได้ทั้งเนื้อหา และกระบวนการในเวลาเดียวกัน จุดประสงค์ของบทเรียนเป็นตัวกำหนดว่าในการสอนครั้งนั้น ครูจะเน้นเนื้อหา หรือกระบวนการ นักเรียนได้เรียนรู้ (เนื้อหา) และประสบการณ์ (กระบวนการ) ขณะทำการสืบค้น และตรวจสอบ

สสวท. (2555: 65-66) ระบุว่า ขั้นตอนในกระบวนการสืบสวนสอบสวนว่ามีความสัมพันธ์กันดังแสดงได้ด้วยแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2 กระบวนการสืบสวนสอบสวน เพื่อนำไปสู่การสร้างความรู้ใหม่

จากแผนภูมิข้างต้น สามารถอธิบายได้ดังนี้

ในการสืบสวนสอบสวน เมื่อเผชิญสถานการณ์ที่สนใจ นักเรียนจะต้อง คิด โดยอาจต้องระดมสมองกันเพื่อสร้างข้อคำถาม เกี่ยวกับสถานการณ์นั้น เช่น ทำไมจึงเกิดเหตุการณ์เช่นนั้น เหตุสำคัญใดที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ของปัจจัยต่าง ๆ ในเหตุการณ์ และจะมีวิธีแก้ปัญหา นั้น

อย่างไร ซึ่งข้อคำถามที่ดีควรเป็นคำถามปลายเปิด ที่อาจมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบหรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้ หลังจากนั้นนักเรียนต้องสืบหา คำอธิบาย ซึ่งอาจทำโดยการศึกษา สืบค้น ทดลอง สังเกต หรือสัมภาษณ์ ตลอดจนวิเคราะห์ข้อมูลซึ่งอาจใช้ตารางหรือกราฟมาช่วย จนกระทั่งค้นพบ แบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุป ซึ่งเป็นการสร้างความรู้ใหม่จากข้อสรุปที่พบ ต่อจากนั้นร่วมกันอภิปราย สิ่งที่เกิดขึ้น ในแง่ของความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่เป็นความรู้ใหม่และวิธีการที่ใช้ สืบหาคำอธิบาย สุดท้ายนักเรียนต้องสะท้อนความรู้ใหม่ หรือมองย้อนกลับไปยังสถานการณ์ และ ข้อคำถามที่สร้าง วิธีการที่ใช้ และความรู้ใหม่ที่พบ แล้วพิจารณาว่ามีข้อคำถามอย่างอื่นอีกหรือไม่ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของความรู้ใหม่ และวิธีการสืบหาคำอธิบายที่ใช้ อีกครั้ง

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2558: 138-141) กล่าวถึง ขั้นตอนการจัดกิจกรรม การเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ ดังนี้

1. ขั้น “สน” คือ ขั้นของการให้สังเกตกับแนวทาง (Concept) ซึ่งได้แก่ การเตรียมความพร้อมทางการเรียนให้กับนักเรียน โดยการดึงเอาความรู้และประสบการณ์เดิมของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่สอนมาให้สัมพันธ์กันรวมทั้งปูพื้นฐานความรู้ใหม่ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ เนื้อหาสาระใหม่ให้กับนักเรียน
2. ขั้น “ส” คือ ขั้นของการสังเกตสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในขั้นนี้จะสร้างสถานการณ์ปัญหาขึ้น เพื่อให้นักเรียนได้สังเกตและวิเคราะห์องค์ประกอบและธรรมชาติของปัญหาอย่างละเอียด การเรียนรู้ที่สำคัญในขั้นนี้คือ การเรียนรู้สังเกตกับ ลักษณะร่วมของสถานการณ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ในสถานการณ์ที่เป็นปัญหา
3. ขั้น “อ” คือ ขั้นของการอธิบายปัญหาข้อใจ โดยอาศัยความสามารถในการหาเหตุผลมาอธิบายถึงสาเหตุของปัญหา ส่วนมากการอธิบายมักจะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลแบบฟังก์ชัน ขั้นนี้เป็นจุดเริ่มต้นของความสามารถในการสร้างทฤษฎีขึ้นมาสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ การเรียนที่สำคัญที่สุดในขั้นนี้ คือการเรียนรู้หลักว่า เมื่อปรากฏผลออกมาในรูปของปัญหาอย่างนี้อะไรควรจะเป็นเหตุหรือสาเหตุของการเกิดผลอันนั้น
4. ขั้น “ท” คือ ขั้นของการทำนายผลเมื่อเราแปรเหตุเป็นขั้นตอนของการตั้งสมมติฐานเพื่อทดสอบดูว่าคำอธิบายขั้นที่ 3 ว่าถูกต้องมากน้อยเพียงใด และยังเป็น การคาดคะเนผลของสาเหตุต่าง ๆ ทั้งนี้ เพื่อฝึกให้นักเรียนคิดอย่างรอบคอบ การเรียนที่สำคัญในขั้นนี้ คือ การเรียนรู้วิธีแก้ปัญหโดยนำหลักการที่เรียนรู้ในขั้นที่ 3 มาใช้

5. ขั้น “ค” คือ ขั้นของการควบคุมและสร้างสรรค์ทั้งสิ่งแวดล้อมภายนอกและภายใน เป็นขั้นที่นำผลของการแก้ปัญหา มาปฏิบัติใช้ในชีวิตจริง เพื่อให้เกิดการควบคุมสิ่งแวดล้อมภายใน (ทางจิตใจ) ขั้นนี้ส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ฉะนั้นการเรียนรู้ที่สำคัญในขั้นนี้ คือ การเรียนรู้วิธีสร้างสรรค์

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสรุปว่า ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นสร้างความสนใจ (Engagement) เป็นขั้นที่ครูกระตุ้นความสนใจให้นักเรียน เกิดความอยากรู้อยากเห็นผ่านกิจกรรมสั้น ๆ รวมทั้งการทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน เพื่อให้ นักเรียนดึงเอาประสบการณ์เดิมมาใช้ประกอบการสร้างข้อความคาดการณ์หรือใช้ในการพิสูจน์ ทางเรขาคณิต

2. ขั้นสำรวจค้นคว้า (Exploration) เป็นขั้นที่นักเรียนเริ่มทำการพิสูจน์ ขั้นนี้เป็น ขั้นรวบรวมความรู้เดิมที่มีและข้อมูลที่ได้จากสถานการณ์ใหม่มาใช้ในการสร้างความรู้ โดยผ่าน กระบวนการวางแผน ดำเนินการสำรวจ สืบค้น รวบรวมข้อมูล แล้วสร้างข้อความคาดการณ์หรือ กำหนดแนวทางให้การพิสูจน์ จากการทำกิจกรรมที่กำหนดให้ โดยครูจะมีบทบาทในการส่งเสริมให้ นักเรียนค้นคว้า รวมถึงแนะนำแนวทางการตั้งคำถามที่เป็นประโยชน์ในการสืบค้น เพื่อจะได้ข้อมูลที่ เพียงพอสำหรับการเขียนพิสูจน์

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป (Explanation) เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือเขียนพิสูจน์ หรือข้อความคาดการณ์ รวมถึงเป็นขั้นที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบ ยอด ทักษะกระบวนการที่ใช้ และสิ่งที่ได้ลงมือปฏิบัติไปในขั้นที่ 2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อน ในขั้น นี้ นักเรียนสามารถสอบถามข้อมูล ข้อเท็จจริงเพิ่มเติมจากครูเพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ชัดเจนมาก ขึ้น โดยครูจะมีบทบาทในการชี้แนะเกี่ยวกับการสรุปและการอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมให้นักเรียน เข้าใจยิ่งขึ้น

4. ขั้นขยายความรู้ (Elaboration) เป็นขั้นที่พัฒนาความเข้าใจของนักเรียนโดย การหยิบยกข้อความใหม่ขึ้นมา นักเรียนจะต้องนำข้อความคาดการณ์ ความรู้ กฎเกณฑ์ ทฤษฎีบท ต่าง ๆ ที่ทราบอยู่เดิม หรือค้นพบใหม่ ไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ต่อไปในอนาคต

5. ขั้นประเมินผล (Evaluation) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้ประเมินความเข้าใจของ ตนเอง หลังจากที่ได้รับ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนรวมถึงเป็นขั้นที่ครูประเมิน ความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนตามวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ด้วย

2.3 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

เอ็กเก็นและเกาแซ็ก (Eggen; & Kauchak. 1996: 240) กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนว่าแตกต่างจากการจัดการเรียนรู้แบบเดิม กล่าวคือในกระบวนการสืบสวนสอบสวนครูจะเป็นผู้ให้ความช่วยเหลือมากกว่าการบรรยายให้นักเรียนฟังเพียงอย่างเดียว

โจเซฟ ลีโอนาร์ดและ ริชาร์ด (Joseph; Leonard; & Richard. 1998: 261-262) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการสอนแบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งสรุปไว้ดังนี้

1. ครูมีหน้าที่ให้คำแนะนำกับนักเรียนแทนที่จะสอนโดยตรงหรือบอกให้นักเรียนทำตาม ยกเว้นในกรณีที่ต้องการพัฒนาทักษะเฉพาะ
2. ครูเสนอปัญหา ตั้งประเด็น และออกแบบคำถามเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ให้เริ่มคิดและส่งเสริมให้นักเรียนตรวจสอบข้อเท็จจริง
3. ครูควรสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ส่งเสริมการคาดเดา การตั้งข้อสงสัย และการใช้ความคิดโดยสัญชาตญาณ
4. ครูจะต้องฝึกให้นักเรียนวางแผน ครูช่วยสร้างความมั่นใจให้กับนักเรียนโดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ถามคำถามอย่างอิสระ ส่งเสริมให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ไม่ปิดโอกาสสำหรับคำถามที่แตกต่าง และให้นักเรียนสามารถโต้แย้งได้
5. ครูสนับสนุนให้นักเรียนตั้งสมมติฐานและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตรวจสอบสมมติฐานด้วยตนเอง และให้ความช่วยเหลือเมื่อนักเรียนเกิดข้อผิดพลาด
6. ช่วยนักเรียนในการวิเคราะห์และประเมินความคิดของตนเอง โดยเปิดโอกาสให้มีการอภิปรายในชั้นเรียน และพยายามกระตุ้นให้นักเรียนพยายามคิดโดยไม่มีการทำโทษเมื่อคำตอบไม่เป็นไปตามที่คาดไว้

เดรย์ตัน และฟอล์ค (Drayton; & Falk. 2001: 26-31) กล่าวถึงบทบาทของครูและนักเรียนในการจัดการสอนแบบสืบสวนสอบสวน โดยกล่าวถึงบทบาทของครูไว้ว่า ครูควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนต้องการสืบสวนสอบสวน ควรจัดบรรยากาศให้เอื้อต่อการสืบหาข้อมูลและการนำเสนอข้อมูล ควรมีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนให้มากกว่าการเรียนแบบบรรยาย และครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ ได้แสดงความคิดเห็น ตรวจสอบ และให้ข้อมูลย้อนกลับกับนักเรียน และได้กล่าวถึงบทบาทของนักเรียนไว้ว่า นักเรียนควรเป็นเจ้าของการเรียนรู้ กล่าวคือ นักเรียนควรทำความเข้าใจคำถาม และสืบหาคำอธิบายด้วยตนเอง

แอลเบอร์ตาลิรัณนิง (Alberta Learning. 2004: 5-11) ระบุว่าบทบาทของครูในการจัดการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมีดังนี้

1. ครูควรจัดบรรยากาศให้เอื้อต่อการเรียนรู้โดยกระตุ้นให้นักเรียนสนใจ ให้เอื้อต่อกระบวนการเรียนรู้

2. ครูควรใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนต้องการสืบสวนสอบสวน

3. ครูควรใช้เทคโนโลยีในหัวข้อที่เหมาะสม

และได้กล่าวถึงบทบาทของนักเรียน ไว้ว่า

1. นักเรียนควรพิจารณาคำถามที่ควรสืบสวนสอบสวน

2. นักเรียนควรสืบหาข้อมูลที่จำเป็นเกี่ยวกับประเด็นนั้น ๆ

3. นักเรียนควรมีส่วนร่วมในการนำเสนอข้อมูล

4. นักเรียนควรมีส่วนร่วมในการสร้างกฎเกณฑ์การประเมินกระบวนการเรียนรู้

กรมวิชาการ (2544: 36) ระบุว่าบทบาทของครูในการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมีดังนี้

1. ครูจะต้องจัดสภาพแวดล้อม สถานการณ์หรือสิ่งเร้าต่าง ๆ ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต เปรียบเทียบ จนเห็นปัญหาและเกิดความสงสัยใคร่รู้

2. ครูกระตุ้นให้นักเรียนหาสาเหตุของปัญหานั้นด้วยการตั้งคำถาม

3. ให้นักเรียนตั้งสมมติฐานเชิงทำนายแล้วพิสูจน์ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุป

4. ครูส่งเสริมให้นักเรียนนำหลักการและกฎเกณฑ์ที่ค้นพบไปใช้ในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดการควบคุมและสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง

วัชร น้อยมี (2551: 57-58) กล่าวถึงบทบาทที่สำคัญของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

1. ครูต้องจัดเตรียมแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญ สภาพแวดล้อม สถานการณ์หรือสิ่งเร้าต่าง ๆ ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต เปรียบเทียบ จนเห็นปัญหาและเกิดความสงสัยใคร่รู้

2. ครูกระตุ้นให้นักเรียนมีความสนใจ คิดปัญหา วางแผนและแก้ปัญหาอย่างมีขั้นตอนและมีเหตุผลในตัวเอง

3. ครูกระตุ้นให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี และใช้ทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ช่วยในการแก้ปัญหา

4. ให้นักเรียนตั้งสมมติฐานเชิงทำนายแล้วพิสูจน์ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุป

5. ครูส่งเสริมให้นักเรียนนำหลักการและนำหลักเกณฑ์ที่ค้นพบไปใช้ในการแก้ปัญหา เพื่อให้เกิดการควบคุมและสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมในสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง

6. เสริมแรงหรือให้กำลังใจแก่นักเรียน

7. ช่วยเหลือ แนะนำ กำกับอย่างใกล้ชิด ตลอดจนเป็นผู้อำนวยความสะดวกเพื่อให้กระบวนการเรียนรู้ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย

8. เป็นผู้ให้ข้อมูลย้อนกลับทั้งข้อดีและข้อบกพร่องแก่นักเรียน

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2558: 141-142) กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ดังนี้

1. กระตุ้นให้นักเรียนมีความสนใจ คิดปัญหา วางแผนและแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน มีเหตุผลด้วยตนเอง

2. กระตุ้นให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี และใช้ทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ช่วยในการแก้ปัญหา

3. เสริมแรงหรือให้กำลังใจแก่นักเรียน

4. ช่วยเหลือ แนะนำ กำกับอย่างใกล้ชิด ตลอดจนเป็นผู้อำนวยความสะดวกเพื่อให้กระบวนการเรียนรู้ดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย

5. จัดเตรียมแหล่งการเรียนรู้ที่สำคัญให้แก่นักเรียน

6. จัดบรรยากาศและสภาพแวดล้อมให้เอื้อต่อการเรียนรู้ของนักเรียน

7. เป็นผู้ให้ข้อมูลย้อนกลับทั้งข้อดีและข้อบกพร่องแก่นักเรียน

จากการศึกษาค้นคว้า ผู้วิจัยสรุปบทบาทที่สำคัญของครูในการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนได้ดังนี้

1. ครูต้องจัดสถานการณ์หรือสิ่งเร้าต่าง ๆ ที่เป็นปัญหาให้นักเรียนได้ฝึกสังเกต เพื่อให้นักเรียนอยากที่จะเรียนรู้หรืออยากที่จะค้นหาคำตอบนั้น

2. ครูตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ วิเคราะห์ วางแผนและดำเนินการพิสูจน์อย่างมีขั้นตอนและมีเหตุผล

3. ส่งเสริมให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ ตั้งข้อสงสัยและคิดหาวิธีพิสูจน์

4. เปิดโอกาสให้นักเรียนตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยตนเอง

5. เสริมแรงหรือให้กำลังใจแก่นักเรียน

2.4 ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

อัลเบอร์ต้า (Alberta Learning. 2004: 3) ระบุว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวน มีข้อดีคือจะช่วยให้นักเรียนสามารถ

1. พัฒนาทักษะที่จำเป็นสำหรับการใช้ชีวิตในอนาคต
2. เรียนรู้ที่จะจัดการกับปัญหาที่ไม่มีวิธีการแก้ปัญหาที่ชัดเจน
3. รับมือกับการเปลี่ยนแปลงและอุปสรรคในการเรียนรู้ได้
4. สร้างองค์ความรู้เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา สำหรับปัจจุบันและในอนาคตได้

ควีน (Queen. 2009: 152) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนได้ฝึกการทำงานร่วมกัน
2. นักเรียนได้มีอิสระทางความคิด

ข้อจำกัด

1. ค่อนข้างใช้เวลานาน
2. เหมาะกับเนื้อหาในบางรายวิชา
3. นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำอาจไม่สามารถตั้งคำถาม และไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้ด้วยตนเอง

สามารถสร้างข้อสรุปได้ด้วยตนเอง

ไสว พักขาว (2544: 103-104) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการสอนแบบสืบสวนสอบสวน ไว้ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนได้มีส่วนร่วมคิดอย่างมีเหตุผล และสรุปความรู้ด้วยตนเอง
2. นักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหา
3. ส่งเสริมการแสดงออกของนักเรียน
4. สร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองระหว่างนักเรียนกับครู

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลาในการสอนมาก
2. เหมาะสำหรับวิชาที่ต้องให้เหตุผล
3. ครูต้องมีเทคนิคที่ดีในการกระตุ้นให้นักเรียนกล้าถาม
4. ปัญหาที่นำเสนอต้องไม่ยุ่งเกินไป และต้องท้าทาย

วัชร น้อยมี (2551: 60-61) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนเป็นศูนย์กลางในการเรียนรู้ มีส่วนร่วมคิดแก้ปัญหา และสรุปความรู้ด้วยตนเอง ดังนั้น บทบาทของนักเรียนจึงเป็นผู้มีความกระฉับกระเฉงไม่เป็นผู้ที่เฉื่อยชาต่อไป
2. เป็นการเรียนโดยการเน้นด้วยปัญหาจะมีประโยชน์ต่อนักเรียนในแง่ที่ว่าฝึกให้เขาเป็นผู้ที่รู้จักลักษณะวิธีการแก้ปัญหา
3. เป็นวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนรู้ มีความอิสระ มีชีวิตชีวา และสนุกสนานกับการเรียนรู้
4. ความรู้ที่ได้มีคุณค่า มีความหมายสำหรับนักเรียน เป็นประโยชน์และจดจำได้นานสามารถเชื่อมโยงความรู้และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
5. บทบาทของครูเปลี่ยนแปลงไป ไม่เป็นผู้ควบคุมการเรียนการสอน กลายเป็นนักเรียนไปกับนักเรียนด้วย
6. บทบาทของครูเปลี่ยนจากผู้บอกมาเป็นผู้ถาม ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะทำให้นักเรียนกระตือรือร้นมากขึ้น
7. ไม่ส่งเสริมการเรียนในเชิงแข่งขันเพื่อคะแนน แต่นักเรียนสามารถเรียนไปโดยมุ่งที่จะบรรลุเป้าหมายของตนเอง

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลามากในการเรียนรู้แต่ละครั้ง บางครั้งอาจได้สาระการเรียนรู้ไม่ครบถ้วนตามที่กำหนด
2. ถ้าปัญหาหรือสถานการณ์ง่ายหรือยากเกินไป ไม่เข้าใจหรือไม่สนใจ จะทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่ายไม่อยากเรียน
3. เป็นวิธีการที่มีการลงทุนสูง ครูต้องใช้เวลามากในการวางแผน ซึ่งบางครั้งอาจได้ผลไม่คุ้มค่ากับการลงทุน
4. ในบางครั้งนักเรียนเกิดความรู้สึกว่าปัญหาหรือประเด็นที่ครูหยิบยกขึ้นมาเพื่อการสืบเสาะหาความรู้ นั้น แท้จริงแล้วครูมีคำตอบอยู่ในใจไว้ก่อนซึ่งดูเหมือนว่านักเรียนถูกตะล่อมให้ เป็นไปตามสิ่งที่ครูกำลังคิดไว้แล้ว

อ้อมฤดี แซ่มอบล (2553: 26) กล่าวว่าข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน คือ เป็นวิธีที่เน้นให้นักเรียนลงมือปฏิบัติจริง มีอิสระทางความคิด ค้นหาความรู้และ

การแก้ปัญหาด้วยตนเองทำให้นักเรียนมีชีวิตชีวาในการเรียน เกิดความรู้ที่คงทน ส่วนข้อจำกัดของวิธีการสอนนี้ก็คือ การรอเวลาเพื่อให้นักเรียนค้นพบข้อสรุปด้วยตนเองอาจใช้เวลามากทำให้เสียเวลาในการเรียนเนื้อหาต่อ ๆ ไป และถ้าจัดสถานการณ์ปัญหาที่ไม่ดึงดูดความสนใจของนักเรียนหรือไม่มีการวางแผนการสอน อาจทำให้นักเรียนเกิดความเบื่อหน่ายได้

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2558: 142) กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้ ดังนี้

ข้อดี

1. นักเรียนได้รู้วิธีค้นหาความรู้และการแก้ปัญหาด้วยตนเอง
2. ความรู้ที่ได้มีคุณค่ามีความหมายสำหรับนักเรียน เป็นประโยชน์และจดจำได้นานสามารถเชื่อมโยงความรู้และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
3. เป็นวิธีการที่ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนรู้ มีความอิสระมีชีวิตชีวาและสนุกสนานกับการเรียนรู้
4. ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิธีและกระบวนการทางวิทยาศาสตร์

ข้อจำกัด

1. ใช้เวลามากในการเรียนรู้แต่ละครั้ง และบางครั้งอาจได้สาระการเรียนรู้ไม่ครบถ้วนตามที่กำหนด
2. ถ้าปัญหาหรือสถานการณ์ง่ายหรือยากเกินไป ไม่เข้าใจหรือไม่น่าสนใจ จะทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่ายไม่อยากเรียน
3. เป็นวิธีการที่มีการลงทุนสูง ซึ่งบางครั้งอาจได้ผลไม่คุ้มค่ากับการลงทุน
4. ครูต้องใช้เวลาในการวางแผนมาก

จากการศึกษาค้นคว้า สรุปได้ว่าข้อดีของการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน คือ เป็นวิธีที่เสริมสร้างความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน นักเรียนได้ใช้อิสระทางความคิด ในการสืบค้นความรู้ ดำเนินการพิสูจน์ และสรุปความรู้ด้วยตนเอง ส่วนข้อจำกัด คือ ครูต้องใช้เวลาในการวางแผนและใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาก

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

ปีเตอร์ (Peter. 2001: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการเรียนรู้ในการสร้างวิธีการพิสูจน์สำหรับการเรียนการสอนพิสูจน์ในระยะแรก การศึกษานี้ต้องการทดสอบความคิดรวบยอดในการพิสูจน์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ว่าพวกเขามีวิธีการพัฒนาทักษะอย่างไรในการวางแผนและรายงานการพิสูจน์กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตชั้นปีที่ 2 และนักศึกษาชั้นปีที่ 3 วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 16 คน ก่อนการทดลองและการสัมภาษณ์ได้มีการเตรียมเครื่องมือในการวัดความเข้าใจพื้นฐานของนักศึกษาภายหลังการประเมินจะแสดงให้เห็นว่านักศึกษามีวิธีการอย่างไรในการสร้างวิธีการพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และการพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นักศึกษาจำนวนครึ่งหนึ่งแสดงให้เห็นว่าพวกเขาเข้าใจข้อความที่ต้องพิสูจน์และยอมรับในบทนิยามที่ใช้ในการพิสูจน์ นักศึกษา 10 ใน 16 คนยังแสดงให้เห็นสิ่งที่เป็นการขัดแย้งของข้อความโดยใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน

ไดมาโกส (Dimakos. 2007: 101-102) ได้คิดค้นและทดลองใช้ เมทริกซ์ควบคุมการให้เหตุผลสำหรับกระบวนการพิสูจน์ (RECOMPP) โดยทำการทดลองกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ในช่วงอายุ 15 ปี โดยทำการสุ่มนักเรียนมา 2 โรงเรียน และทำการคัดเลือกนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับที่ 2 มาเป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยได้กลุ่มตัวอย่างทั้งสิ้น 89 คน ซึ่งนักเรียนในกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนเขียนพิสูจน์โดยใช้ RECOMPP ประกอบการฝึกเขียนพิสูจน์ มีจำนวน 44 คน และนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ มีจำนวน 45 คน โดยใช้เวลาในการศึกษา 3 เดือน ผลการทดลองพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีคะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมมีคะแนนระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

นิโคลัสตาคิส (Nikolousdakis. 2009: 45) ได้พัฒนาโมเดลเฟสเมทีอดคอมบิเนชันซึ่งได้แนวคิดมาจากการผสมผสานของกระบวนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดตามทฤษฎีแวนฮิลล์ และวิธีการฝึกหัดทางปัญญาของโคลิน โดยทดลองจัดกิจกรรมการสอนพิสูจน์เรขาคณิตกับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในช่วงอายุ 15 ปี ซึ่งยังไม่เคยเรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาก่อน ใช้กลุ่มตัวอย่างจำนวน 250 คน แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง 138 คน และกลุ่มควบคุม 112 คน โดยใช้เวลาในการสอนเป็นระยะเวลา 2 เดือน ผลการทดลองพบว่า 1) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ระหว่างก่อนและหลังเรียนของนักเรียนทั้งหมดไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนในกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติระหว่างก่อนและหลังเรียนไม่มีความแตกต่างกัน

อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) คะแนนความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนในกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท้อดคอมบิเนชันระหว่างก่อนและหลังเรียนมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองจะสามารถทำแบบฝึกหัดการพิสูจน์โจทย์ที่มีลักษณะต่อเนื่องกันได้ ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมไม่สามารถทำได้

โมฮาน มัตตุมมาและคริสติน (2009: 882-885) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความรู้ที่ใช้ในการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนศรีลังกา โดยเลือกนักเรียนกลุ่มทดลองจากศรีลังกา จำนวน 166 คน มาทำการศึกษาความรู้ที่นักเรียนนำมาใช้ในการสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งพิจารณาความรู้เป็น 3 ด้าน ได้แก่ ความรู้ด้านเนื้อหาเรขาคณิต ทักษะในการแก้ปัญหา และทักษะในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ทั้ง 3 ด้านที่พิจารณามีบทบาทสำคัญในการพัฒนาการพิสูจน์ ในขณะที่นักเรียนต้องเรียนรู้เนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิต ควรมีการส่งเสริมทักษะในการแก้ปัญหาและทักษะในการให้เหตุผลเชิงเรขาคณิตควบคู่ไปด้วย

มาร์ค (Mark. 2016: 335-336) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูชั้นปีที่ 2 ในการสอนพิสูจน์เรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า มีนักศึกษาครู 9 คน จากทั้งหมด 13 คน มีความเข้าใจเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตอย่างชัดเจนแต่ไม่มีใครที่จะสามารถอธิบายเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ได้ ส่วนในด้านการพิสูจน์ พบว่า นักศึกษาครู 10 คน จากทั้งหมด 13 คน มีสามารถแสดงการพิสูจน์ได้หากมีแนวทางการพิสูจน์ให้ปฏิบัติตาม แต่ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์สำหรับกรณีทั่วไปได้ ส่งผลให้ นักศึกษาครู 7 คน จากทั้งหมด 13 คน รู้สึกไม่มั่นใจในความสามารถของตนเองที่จะสอนการพิสูจน์ จากการสัมภาษณ์พบว่า แม้นักศึกษาครูส่วนใหญ่จะให้ความสำคัญกับบทบาทของการให้เหตุผลในการสอนคณิตศาสตร์ เพราะเห็นว่าเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาการพิสูจน์ แต่พวกเขากลับมองว่า การพิสูจน์เป็นเรื่องจำเป็นเฉพาะนักเรียนที่มีผลการเรียนในระดับสูงเท่านั้น จากข้อมูลและความเชื่อที่ได้จากการสัมภาษณ์นักศึกษาครูทำให้ทราบว่าพวกเขายังต้องฝึกฝนประสบการณ์อีกมาก ทั้งในส่วนของความรู้ในเรื่องการพิสูจน์ และการศึกษากระบวนการเรียนรู้ที่จะช่วยพัฒนาให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการพิสูจน์

งานวิจัยภายในประเทศ

บุญเสริม ยุพจันทร์ (2547: 53) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดกิจกรรมตามลำดับขั้นของ แวน ฮีลี ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนการสอนตามลำดับขั้นของแวน ฮีลี เรื่องการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีค่าประสิทธิภาพ E_1 เท่ากับ 65.55 และ E_2 เท่ากับ

71.82 ซึ่งไม่เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตคิดเป็นร้อยละ 40.74 และนักเรียนร้อยละ 51.85 สามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับ 2 ไประดับ 3

นวลศรี ชำนาญกิจ (2550: 83) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามตัวแบบแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ ผลการวิจัยพบว่า 1) นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีระดับความคิดทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน 2) นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับ 2 ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 92.9 ซึ่งไม่ต่ำกว่าเกณฑ์จำนวนที่คาดหวังไว้ร้อยละ 80 3) นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน 4) นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ร้อยละ 60 มีจำนวนร้อยละ 53.57 ซึ่งไม่ต่ำกว่าเกณฑ์จำนวนที่คาดหวังไว้ร้อยละ 50 5) ระดับความคิดทางเรขาคณิตกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จำเริญ อนันตรธรรมรส (2553: 73-74) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลการใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมปิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมปิเนชันมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับเป็นจำนวนมากที่สุด 2) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมปิเนชันมีระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับ 3 กับ ระดับ 4 มากกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ 3) นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมปิเนชันมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

บรูเน (Brune. 2010: 45) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งทำการศึกษาเกี่ยวกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในคาบเรขาคณิต โดย

เปรียบเทียบผลการทดลองระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีปกติจำนวน 2 ห้องเรียน และนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน ผ่านการทำแบบทดสอบก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้ แบบวัดเจตคติ และกิจกรรมที่วัดความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบกระบวนการสืบสวนสอบสวนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนรู้ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และการจัดการเรียนรู้แบบกระบวนการสืบสวนสอบสวนทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ฟีลด์อิง-เวลล์; โดล; และเมกการ (Fielding-Wells; Dole; & Makar. 2014: 47) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่พัฒนาการให้เหตุผลเชิงสัจส่วนของนักเรียนระดับประถมศึกษา (เกรด 4) ผลการวิจัยพบว่า การสอนแบบสืบสวนสอบสวนสามารถพัฒนาความคิดเชิงสัจส่วนที่ช่วยให้นักเรียนสามารถตอบคำถามในการสืบสวนสอบสวนได้ และพบว่าการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน และบรรยากาศห้องเรียนที่มีการตอบโต้ ช่วยพัฒนาการให้เหตุผลเชิงสัจส่วน

เมการ (Makar. 2016: 431-438) ได้ศึกษาการพัฒนาคุณภาพทางปัญญา (IQ) ผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน วิชาคณิตศาสตร์ ในระดับประถมศึกษา ผลการวิจัยพบว่า คุณภาพทางปัญญา (IQ) ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแบบปกติ และในการศึกษาระยะยาว (เวลา 3 ปี) พบว่าคุณภาพทางปัญญา (IQ) ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแบบปกติ โดยเฉพาะในด้านของความรู้ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาและการคิดระดับสูง

งานวิจัยในประเทศ

วัชร น้อยมี (2551: 124) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการวิจัยพบว่า ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

พิชิต ทองลั่น (2554: 135-137) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ (5Es) ที่เน้นทักษะการคิดวิเคราะห์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต และใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า 1) การพัฒนาจัดกิจกรรมการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้รูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ (5Es) ที่เน้นทักษะการคิดวิเคราะห์ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต และใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมและสำรวจค้นหาความรู้ด้วยตนเอง มีการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มที่เปิดโอกาสให้แสดงความคิดเห็น ก่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ และช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ทักษะการคิดวิเคราะห์ สามารถสร้างความรู้ได้ด้วยตนเอง 2) มีจำนวนนักเรียนไม่น้อยกว่าร้อยละ 70 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไป 3) มีจำนวนนักเรียนไม่น้อยกว่าร้อยละ 70 ได้คะแนนทักษะการคิดวิเคราะห์เฉลี่ยตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไป

3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องวงกลม

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องวงกลม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้ ศราวุฒ์ บุตรัตน์ (2553: 100-101) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลเรื่อง “วงกลม” โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล เรื่อง วงกลม โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 และ 3) นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล เรื่อง วงกลม โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

ปิยะนาฏ นุ่มอ่อน (2554: 59) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน เรื่อง วงกลม ตามแนวคิดของ แวน ฮีลี โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า 1) แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง วงกลม ตามแนวคิดของ แวน ฮีลี 3 ขั้นตอนแรก โดยการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีประสิทธิภาพ 76.12/75.94 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ 75/75 2) ความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน ตามลำดับขั้นการคิดของ แวน ฮีลี ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้แผนการจัด

การเรียนรู้ เรื่อง วงกลม ซึ่งพัฒนาขึ้นโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad อยู่ในระดับ 3 ขั้นการสรุปที่ไม่เป็นแบบแผนมากที่สุด ร้อยละ 59.39 3) ความคิดเห็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีต่อการจัดการเรียนรู้เรื่อง วงกลม ตามแนวคิดของ แวน ฮีลี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad อยู่ในระดับมาก

ธนวิทย์ ชารนำทิพย์ (2555: 58-59) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง รูปวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโยธินบูรณะ กรุงเทพมหานคร ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง รูปวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 2) นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง รูปวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

สิริจันทร์ นิสกนันท์ (2555: 80-81) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง วงกลม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการคิดวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนรู้แบบกลุ่มเพื่อนช่วยเพื่อน กิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ และกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ มีประสิทธิภาพและประสิทธิผลช่วยเสริมสร้างการเรียนรู้ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ส่วนกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ ช่วยพัฒนาความสามารถด้านการคิดวิเคราะห์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ยุทธชัย ไชยคำภา (2557: 86-87) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม เพื่อเสริมสร้างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยผสานทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์กับแนวคิดการใช้ปัญหาเป็นฐาน ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนรู้ โดยผสานทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์กับแนวคิดการใช้ปัญหาเป็นฐาน มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล และนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยรูปแบบดังกล่าว ได้รับการพัฒนาความคิดรวบยอดวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม รวมทั้งความสามารถในการให้เหตุผลในแต่ละวงรอบเพิ่มขึ้นและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพิ่มขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 44 คน นักเรียนเหล่านี้ได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบคละความสามารถของนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การสร้างและการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และแบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งมีรายละเอียดในการดำเนินการดังนี้

2.1 การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1.1 แผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง วงกลม

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่อง วงกลมสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 11 แผน แผนละ 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 50 นาที โดยมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

1. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนเทพศิรินทร์ และแนวการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องวงกลมของกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากหนังสือคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ
2. ศึกษาเนื้อหาเรื่อง วงกลม จากหนังสือและเอกสารที่เกี่ยวข้อง
3. ศึกษากระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
4. กำหนดจุดประสงค์และขอบเขตของกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน
5. จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้ และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบด้วย

5.1 จุดประสงค์การเรียนรู้

5.2 สาระการเรียนรู้

5.3 สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

5.4 กิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วย

5.4.1 ขั้นสร้างความสนใจ

5.4.2 ขั้นสำรวจค้นคว้า

5.4.3 ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป

5.4.4 ขั้นขยายความรู้

5.4.5 ขั้นประเมินผล

5.5 การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

5.6 บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

6. นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

7. นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมที่ได้รับการตรวจสอบมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท แล้วนำเสนอให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบจนผ่านการพิจารณา เพื่อนำเสนอผู้เชี่ยวชาญ

2.1.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จำนวน 2 ชุด ประกอบด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน เป็นแบบทดสอบที่ใช้ทดสอบก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องวงกลม เป็นแบบทดสอบที่ใช้ทดสอบภายหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน โดยมีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

1. ศึกษาหลักสูตร คู่มือครู แบบเรียน และวิธีสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน และเรื่องวงกลม จากหนังสือเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง วิเคราะห์สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่ใช้ทดลองเพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน และเรื่องวงกลม

3. สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ ประกอบด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ จำนวน 6 ข้อ และเรื่อง เส้นขนาน จำนวน 4 ข้อ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง วงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ โดยสร้างให้มีความสอดคล้องกับตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ และครอบคลุมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน และเรื่องวงกลม

4. นำแบบวัดทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่ได้รับการตรวจสอบมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท

แล้วนำเสนอให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบจนผ่านการพิจารณา เพื่อนำเสนอผู้เชี่ยวชาญ

2.1.3 แบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

แบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นมาเป็นแบบสัมภาษณ์เชิงโครงสร้างที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้คำถามปลายเปิด เพื่อสอบถามเกี่ยวกับกระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นนักเรียนกลุ่มเป้าหมายจำนวน 4 คน โดยผู้วิจัยทำหน้าที่สัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มเป้าหมายแต่ละคนหลังการทดลอง ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. ศึกษาวิธีการสร้างสัมภาษณ์ จากหนังสือ เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. สร้างแบบสัมภาษณ์เพื่อสอบถามเกี่ยวกับกระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
3. นำแบบสัมภาษณ์ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข

2.2 การตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

2.2.1 แผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง วงกลม

1. นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง วงกลม ที่ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตร เสนอผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสม ความถูกต้องชัดเจน ความสอดคล้องของสาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้ และระยะเวลาที่ใช้ ตลอดจนภาษาที่ถูกต้อง เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข

2. ปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ แล้วนำไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนีย์)

3. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผ่านการทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง มาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง แล้วนำเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อตรวจสอบอีกครั้งก่อนนำไปทดลอง

2.2.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

1. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตร เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน

เพื่อตรวจสอบความสอดคล้องเชิงเนื้อหา ความถูกต้องและเหมาะสม โดยพิจารณาจากค่า $IOC \geq 0.5$ แล้วนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไขโดยมีการให้คะแนนข้อสอบแต่ละข้อ ดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อสอบใช้ได้

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบใช้ได้หรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อสอบใช้ไม่ได้

2. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่ได้รับการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ มาคัดเลือกเฉพาะข้อที่มีดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป จากผู้เชี่ยวชาญพบว่าแบบทดสอบในแต่ละข้อมีค่า IOC เป็น 1.00 ซึ่งสามารถแปลผลว่าใช้ได้ และนำไปคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบอีกครั้ง

3. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่แก้ไขเรียบร้อยแล้ว ไปทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนีย์) เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

4. นำคะแนนที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างมาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.20-0.80 และมีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป จำนวนชุดละ 5 ข้อ จากผู้เชี่ยวชาญพบว่าค่าความยากง่ายของข้อสอบในแต่ละข้อมีค่าระหว่าง 0.39 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบในแต่ละข้อมีค่าระหว่าง 0.21 – 0.44

5. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ที่ได้ในข้อ 4. โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) ซึ่งค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ที่ผู้วิจัยหามาได้ มีค่าเท่ากับ 0.797 และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ที่ผู้วิจัยหามาได้ มีค่าเท่ากับ 0.697

6. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้ง 2 ชุด ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

2.2.3 แบบสัมภาษณ์

1. นำแบบสัมภาษณ์ที่ได้รับการตรวจสอบมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท แล้วนำเสนอให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบจนผ่านการพิจารณา
2. นำแบบสัมภาษณ์ที่ผ่านการพิจารณาไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างหลังการทดลอง จำนวน 3 คน
3. นำแบบสัมภาษณ์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้แบบแผนการทดลองแบบ One – Group Pretest – Posttest ซึ่งมีรายละเอียดของแบบแผนการทดลองดัง ตารางต่อไปนี้

ตาราง 1 แบบแผนการทดลอง

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E	T ₁	X	T ₂

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

E หมายถึง กลุ่มทดลอง

X หมายถึง การจัดกระทำ (Treatment)

T₁ หมายถึง การทดสอบก่อนที่จะจัดกระทำการทดลอง (Pretest)

T₂ หมายถึง การทดสอบหลังการจัดกระทำการทดลอง (Posttest)

การดำเนินการทดลอง

การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองตามแบบแผนการวิจัย โดยมีขั้นตอนต่อไปนี้

1. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการเรียนรู้โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อที่นักเรียนจะได้ปฏิบัติตนได้ถูกต้อง
2. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทำการทดสอบกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

เป็นเวลา 1 คาบเรียน แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดลองครั้งนี้ เป็นคะแนนก่อนเรียน (Pre - Test)

3. ดำเนินการทดลองโดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการทดลอง 11 คาบเรียน

4. นำแบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทำการสัมภาษณ์กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 3 คน โดยทำการสัมภาษณ์จำนวน 2 ครั้ง หลังจบการจัดการเรียนรู้ในแผนที่ 6 และแผนที่ 11

5. เมื่อเสร็จสิ้นการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ทำการทดสอบ หลังเรียน (Post - test) เป็นเวลา 1 คาบ โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่องวงกลม

6. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบ นำคะแนนที่ได้วิเคราะห์วิธีทางสถิติเพื่อตรวจสอบ สมมติฐานต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยมีลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ก่อนเรียน (Pre-test) และหลังเรียน (Post-test) มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน ด้วยการทดสอบค่าที (t-test for Dependent Samples)

5. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของ ครอนบัค (Cronbach)
3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน คือ การทดสอบค่าที (t test for Dependent Samples)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ข้อมูลที่ได้จากการรวบรวมนำมาวิเคราะห์เชิงปริมาณ โดยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ผู้วิจัยนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ไปหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	35	13.88	39.66	4.39

จากตาราง 2 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม เท่ากับ 13.88 ซึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.39

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม	35	25.82	73.77	5.91

จากตาราง 3 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม เท่ากับ 25.82 ซึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5.91

การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน ผู้วิจัยนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ไปทดสอบสมมติฐานของการวิจัยซึ่งใช้การทดสอบสมมติฐาน โดยใช้สถิติทดสอบ t (t test for Dependent Samples) ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัยแสดงดังตาราง 4

ตาราง 3 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

คะแนน	$\bar{x}$	S.D.	$\bar{d}$	$S_{\bar{d}}$	t	p
จากการทำแบบทดสอบวัด ความสามารถในการพิสูจน์ ทางเรขาคณิตก่อนเรียน	13.88	4.39	11.94	0.96	12.49**	0.000
จากการทำแบบทดสอบวัด ความสามารถในการพิสูจน์ ทางเรขาคณิตหลังเรียน	25.82	5.91				

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน
เรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

บทที่ 5

สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

สมมติฐานของการวิจัย

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนเทพศิรินทร์ แขวงวัดเทพศิรินทร์ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 12 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 44 คน นักเรียนเหล่านี้ได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster random sampling) ซึ่งโรงเรียนได้จัดนักเรียนแต่ละห้องแบบละความสามารถของนักเรียนที่มีผลการเรียนแบบเก่ง ปานกลาง และอ่อน

2. การสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม จำนวน 11 แผน ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ โดยแต่ละแผนใช้เวลาในการดำเนินการ 1 คาบ คาบละ 50 นาที 2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้

แบบสืบสวนสอบสวน และ 3) แบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบกระบวนการพิสูจน์ที่นักเรียนดำเนินการในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์

หลังจากสร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเครื่องมือที่ผ่านการพิจารณาเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของปัญหา และความชัดเจนของข้อคำถาม แล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ จากนั้นนำเครื่องมือไปทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 34 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 โรงเรียนบดินทรเดชา (สิงห์ สิงหเสนีย์) แล้วปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทราบถึงการเรียนรู้โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อที่นักเรียนจะได้ปฏิบัติตนได้ถูกต้อง
2. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการและเส้นขนาน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทำการทดสอบกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเป็นเวลา 1 คาบ แล้วบันทึกคะแนนกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทดลองครั้งนี้ เป็นคะแนนก่อนเรียน (Pre - Test)
3. ดำเนินการทดลองโดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2560 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการทดลอง 11 คาบเรียน
4. นำแบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทำการสัมภาษณ์กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 3 คน โดยทำการสัมภาษณ์จำนวน 2 ครั้ง หลังจบการจัดการเรียนรู้ในแผนที่ 6 และแผนที่ 11
5. เมื่อเสร็จสิ้นการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ทำการทดสอบหลังเรียน (Post - test) เป็นเวลา 1 คาบ โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่องวงกลม
6. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบ นำคะแนนที่ได้วิเคราะห์วิธีทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม แล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลดังนี้

1. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียน (Pre-test) และหลังเรียน (Post-test) มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. ผู้วิจัยนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมมาทดสอบสมมติฐานที่ว่าความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน ด้วยการทดสอบค่าที (t-test for Dependent Samples)

สรุปการวิจัย

ผลการวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปรากฏผลดังนี้

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้ออกแบบกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

จากผลการวิจัยที่พบ สามารถพิจารณาเป็นประเด็นได้ดังนี้

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนเรียน ทั้งนี้อาจเป็นเพราะสาเหตุดังต่อไปนี้

1. การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ โดยมีกิจกรรมที่สร้างขึ้นเพื่อมากระตุ้นให้นักเรียนเกิดความรู้สึกสงสัย ใคร่รู้ มีการสร้างข้อความคาดการณ์จากสิ่งที่ค้นพบก่อนลงมือพิสูจน์ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง นักเรียนสามารถค้นคว้าความรู้ได้อย่างอิสระ โดยมีครูคอยให้คำแนะนำ คอยอำนวยความสะดวกให้นักเรียนในการปฏิบัติกิจกรรม พร้อมทั้งใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความคิดเท่าที่จำเป็น ซึ่งมีขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ 5 ขั้นตอน ได้แก่ 1) ขั้นสร้างความสนใจ (Engagement) เป็นขั้นที่ครูกระตุ้นความสนใจให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเห็นผ่านกิจกรรมสั้น ๆ เพื่อให้นักเรียนดึงเอาประสบการณ์เดิมมาใช้ประกอบการสร้างข้อความคาดการณ์หรือใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 2) ขั้นสำรวจค้นคว้า (Exploration) เป็นขั้นที่นักเรียนเริ่มทำการพิสูจน์ ขั้นนี้เป็นขั้นรวบรวมความรู้เดิมที่มีและข้อมูลที่ได้จากสถานการณ์ใหม่มาใช้ในการสร้างความรู้โดยผ่านกระบวนการวางแผน ดำเนินการสำรวจ สืบค้น รวบรวมข้อมูล แล้วสร้างข้อความคาดการณ์หรือกำหนดแนวทางในการพิสูจน์จากการทำงานที่กำหนดให้ โดยครูจะมีบทบาทในการส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้า รวมถึงแนะนำแนวทางการตั้งคำถามที่เป็นประโยชน์ในการสืบค้นเพื่อให้ได้ข้อมูลเพียงพอสำหรับการเขียนพิสูจน์ เช่น หากนักเรียนจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าว นักเรียนคิดว่าทฤษฎีบทใดที่จะสามารถนำมาใช้ประกอบการพิสูจน์ข้อความนี้บ้าง 3) ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป (Explanation) เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือเขียนพิสูจน์หรือข้อความคาดการณ์ รวมถึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความเข้าใจสิ่งที่ได้ลงมือปฏิบัติไปในขั้นที่ 2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อน ในขั้นนี้นักเรียนสามารถสอบถามข้อมูล หรือข้อเท็จจริงเพิ่มเติมจากครูเพื่อให้มีความเข้าใจที่ชัดเจนมากขึ้น โดยครูจะมีบทบาทในการชี้แนะเกี่ยวกับการสรุปและการอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น 4) ขั้นขยายความรู้ (Elaboration) เป็นขั้นที่พัฒนาความเข้าใจของนักเรียนโดยการหยิบยกข้อความใหม่ขึ้นมา นักเรียนจะต้องนำข้อความคาดการณ์ ความรู้ กฎเกณฑ์ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ทราบอยู่เดิมหรือค้นพบใหม่ไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์ต่อไปในอนาคต 5) ขั้นประเมินผล (Evaluation) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนได้ประเมินความเข้าใจของตนเอง หลังจากที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน รวมถึงเป็นขั้นที่ครูประเมินความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนตามวัตถุประสงค์ของการเรียนด้วย และจากแบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตทำให้ทราบว่า นักเรียนได้นำกระบวนการสืบสวนสอบสวนไปใช้ในการดำเนินการพิสูจน์ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวทำให้นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น มีการเรียนรู้ที่จะจัดเตรียมข้อมูล ทฤษฎีบท และบทนิยามเบื้องต้นที่สันนิษฐานว่าอาจจะมีประโยชน์ต่อไปในการพิสูจน์ ซึ่งกระบวนการตรงนี้เป็นประโยชน์อย่างมากทำให้นักเรียนเห็นความเชื่อมโยงของ

ข้อมูลต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น รวมถึงสามารถหมวดข้อมูลต่าง ๆ ที่สับสนมาเข้ากับข้อมูลเดิมที่มีและเรียบเรียงก่อนจะเขียนอธิบายและสรุปการพิสูจน์ได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น หากพิจารณาเป็นรายละเอียดย่อย พบว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบสวนสอบสวน ในชั้นสำรวจค้นคว้าช่วยส่งเสริมความสามารถในการระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์รวมถึงความสามารถในการเขียนภาพประกอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ นอกจากนั้นยังส่งเสริมให้นักเรียนจดจำทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้อย่างแม่นยำมากยิ่งขึ้น เพราะนักเรียนได้ลงมือค้นคว้าและพิสูจน์ทฤษฎีบทเหล่านั้นด้วยตนเอง ส่งผลให้นักเรียนจดจำทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้จากการระลึกถึงกิจกรรมที่ลงมือปฏิบัติไป นักเรียนจดจำทฤษฎีจากภาพที่ได้ลงมือค้นคว้าความรู้ และเมื่อต้องนำทฤษฎีเหล่านั้นไปใช้ประโยชน์ต่อไป นักเรียนก็สามารถนำไปใช้ได้อย่างคล่องแคล่วด้วยความเข้าใจ ในชั้นอธิบายและลงข้อสรุปช่วยส่งเสริมความสามารถของนักเรียนในด้านการเขียนแสดงการพิสูจน์และเขียนสรุปการพิสูจน์ สังเกตได้ชัดเจนจากใบงานที่นักเรียนทำ พบว่า นักเรียนมีการเขียนอธิบายการพิสูจน์ได้ดีขึ้นตามลำดับ ส่งผลให้ผลการวัดความสามารถในการเขียนอธิบายการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนดีขึ้นกว่าก่อนเรียน ซึ่งแนวทางการจัดกิจกรรมดังกล่าว สอดคล้องกับแนวคิดของ ฟิลด์ิง เวลล์ โดล และเมกการ์ (Fielding-Wells; Dole; & Makar. 2014: 47) ที่กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนทางคณิตศาสตร์มีจุดประสงค์เพื่อมุ่งเน้นการเรียนรู้ในการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งจำเป็นสำหรับนักเรียนที่จะทำการวิเคราะห์ข้อมูล อธิบายและยืนยันโดยใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ในขณะที่นักเรียนดำเนินการสืบสวนสอบสวนในทางคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนได้ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์ หรือสมมติฐานโดยตรง และยังสอดคล้องกับแนวคิดของ เบอร์รี (Berry. 2014: 23-26) ซึ่งได้ทำการออกแบบกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้วิธีสืบสวนสอบสวน ผลการศึกษาพบว่าการสืบสวนสอบสวนสามารถพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับแนวคิดของมอลลอย (Malloy. 1999: 13-21) ที่กล่าวว่า การใช้การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งต่อครูและต่อนักเรียน ให้เกิดการพัฒนาและตื่นตัวในการนำสิ่งแวดล้อมรอบตัว หรือสถานการณ์ปัญหา มาใช้ในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

2. การจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมที่ผู้วิจัยจัดทำขึ้นได้แบ่งหน่วยการเรียนรู้ออกเป็น 3 หน่วยย่อย ได้แก่ 1) ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและความยาวส่วนโค้ง 2) ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและความยาวส่วนโค้ง และ 3) ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสวงกลม

กับมุมมอง โดยแต่ละหน่วยการเรียนรู้ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาจากง่ายไปหายาก มีการนำทฤษฎีที่เรียนก่อนหน้าไปใช้ต่อยอดในการพิสูจน์ทฤษฎีต่อไป มีการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เข้าใจง่าย และตัวอย่างการพิสูจน์มีรูปแบบการนำเสนอการพิสูจน์อย่างละเอียดทุกขั้นตอน ตั้งแต่การทำความเข้าใจโครงสร้างในการพิสูจน์ การเรียบเรียงลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูลในการพิสูจน์ และจากโครงสร้างดังกล่าวพร้อมทั้งผลการวิเคราะห์นำมาเรียบเรียงในการเขียนสรุปการพิสูจน์ การอธิบายลำดับขั้นตอนข้างต้นโดยละเอียดทำให้นักเรียนเห็นแนวทางในการดำเนินการพิสูจน์ด้วยตนเองรวมถึงซึมซับกระบวนการพิสูจน์โดยวิธีสืบสวนสอบสวนได้อย่างลึกซึ้งมากกว่าการท่องจำ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ สกินเนอร์ (Skinner. 1971) ที่กล่าวว่า “ถ้าแบ่งเนื้อหาวิชาที่จะถ่ายทอดให้นักเรียนเป็นตอน ๆ ที่ละน้อย เหมาะสมกับบุคลิกภาพของนักเรียน นักเรียนจะสามารถรับความรู้ได้ดีกว่าถ่ายทอดความรู้ให้นักเรียนทีละมาก ๆ”

3. นักเรียนมีความตั้งใจเรียน และแสดงให้เห็นถึงความสนใจในกิจกรรมอย่างดี สังเกตได้จากระหว่างที่ผู้วิจัยแสดงการพิสูจน์เป็นตัวอย่างให้ดูในช่วงเริ่มของบทเรียน นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจอย่างมากในการเรียน และพยายามทำความเข้าใจในเนื้อหาตามที่คุณวิจัยนำเสนอ หากมีข้อสงสัยนักเรียนก็กล้าที่จะยกมือเพื่อสอบถามทำให้เกิดการความเข้าใจที่ดีจากข้อสงสัยนั้น นอกจากนี้ในช่วงที่ผู้วิจัยให้นักเรียนดำเนินการพิสูจน์ด้วยตนเอง ซึ่งนักเรียนจะต้องพิจารณาถึงขอบเขตของการนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หลักการที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ ส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีการระดมความคิดกับเพื่อนที่นั่งข้าง ๆ มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น หรือปรึกษากัน ทำให้นักเรียนได้สื่อสารเหตุผลของตนเองกับเพื่อนร่วมชั้นและครูผู้สอน สอดคล้องกับการศึกษาของ อัสเชบเชอร์ และ อัลอนโซ (Aschbacher & Alonzo. 2004) ที่กล่าวว่า นักเรียนจะได้รับการเรียนรู้ที่มีความหมาย เมื่อมีส่วนร่วมในการสะท้อนความคิดผ่านการแนะนำที่ดีในระหว่างกระบวนการเรียนรู้

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่ากระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนมีผลต่อความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนอย่างชัดเจน ทั้งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนในการเรียนรู้ด้วยตนเองเป็นสำคัญ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับเพื่อนร่วมชั้นเรียนรวมถึงผู้วิจัย ทำให้นักเรียนได้ฝึกทักษะในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ฝึกการวิเคราะห์ข้อมูลและฝึกการเขียนพิสูจน์ อีกทั้งเนื้อหาที่นำมาใช้ประกอบการในการจัดการเรียนรู้นั้นก็มีการนำเสนอที่ชัดเจน ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ที่เข้าใจง่าย ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้น และให้ความสนใจในการเรียนรู้อย่างดี ประกอบกับผู้วิจัยคอยอำนวยความสะดวกในการจัดการเรียนรู้ กระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความคิด และให้คำแนะนำเมื่อนักเรียน

ประสบปัญหา ทำให้บรรยากาศในการเรียนเป็นไปอย่างราบรื่น ส่งผลให้ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนภายหลังการเรียนผ่านการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากการวิจัยพบว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมสูงกว่าก่อนเรียน ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หรือเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ควรมีใช้การจัดกระบวนการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไว้เป็นองค์ประกอบหนึ่ง เพื่อจะได้ปรับปรุงทั้งกับกระบวนการจัดการเรียนรู้ของครู และกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน

1.2 ควรมีการนำกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ในเนื้อหาที่แตกต่างออกไป

1.3 ในการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องวงกลม เนื้อหาส่วนใหญ่จะเชื่อมโยงต่อยอดมาจากเนื้อหาในระดับที่ต่ำกว่า ดังนั้นพื้นฐานความรู้ของนักเรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ครูจะต้องมีการปรับพื้นความรู้ของนักเรียนให้พร้อมสำหรับการเรียนรู้ต่อไปในอนาคต

1.4 การเรียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตเรื่องวงกลม ความรู้สึกเชิงปริภูมิเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่สำคัญ ครูจะต้องจัดกิจกรรมที่พัฒนาในด้านนี้ประกอบกันไปด้วยเพื่อช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ได้ดียิ่งขึ้น

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาดูว่ามีองค์ประกอบใดบ้างที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน

2.2 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาดูว่ามีรูปแบบการจัดการเรียนรู้ใดอีกบ้างที่เหมาะสมและช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน

2.3 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาดูว่าการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนจะช่วยส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านอื่นอีกหรือไม่ หรือในเนื้อหาที่แตกต่างออกไปจากที่ผู้วิจัยศึกษามาแล้ว

2.4 ควรนำกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปดัดแปลงหรือปรับปรุงแก้ไข แล้วนำไปทดลองซ้ำกับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือในระดับอื่น ๆ



บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ. (2544). เทคนิคการจัดการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนสำคัญที่สุด การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์การศาสนา.
- กรรณิการ์ กวักเพฑูรย์. (2542). หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- โกมล ไพศาล. (2540). การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ขวัญ เพี้ยชัย. (2547). การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่นักเรียนสำคัญที่สุด ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จำเริญ อนันตรธรรมรส. (2553). ผลการใช้โมเดลเฟสเมทออดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- ชนาธิป พรกุล. (2554). การสอนกระบวนการคิด: ทฤษฎีและการนำไปใช้. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: วี พรินท์.
- เชวงศักดิ์ ช้อนบุญ. (2546). บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรม คิด - จับคู่ - เล่าสู่กันฟัง. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปิยะนาฏ นุ่มอ่อน. (2554). การวิเคราะห์ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน เรื่อง วงกลมตามแนวคิดของ แวน ฮีลี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษาศาสตรนเทศ). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา. ถ่ายเอกสาร.

- ทิตนา แคมมณี. (2555). ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ. พิมพ์ครั้งที่ 16. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธนวิทย์ ชารนำทิพย์. (2555). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ เรื่อง รูปวงกลม โดยใช้โปรแกรม *The Geometer's Sketchpad (GSP)* สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโยธินบูรณะ กรุงเทพมหานคร. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- นวลศรี ชำนาญกิจ. (2550). ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามตัวแบบแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของ นักศึกษาคู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. นครสวรรค์: มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. ถ่ายเอกสาร.
- บุญเสริม ยุพจันทร์. (2547). การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดกิจกรรมตามลำดับขั้นของ แวน ฮีลี. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: สำนักงานโครงการบัณฑิตศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร. ถ่ายเอกสาร.
- ปิยะนาฏ นุ่มอ่อน. (2554). การวิเคราะห์ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน เรื่อง วงกลม ตามแนวคิดของ แวน ฮีลี โดยใช้โปรแกรม *The Geometer's Sketchpad* สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษาสารสนเทศ). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา. ถ่ายเอกสาร.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2541). หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: พิกษ์การพิมพ์.
- พิชิต ทองลั่น. (2554). การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการสอนแบบสืบเสาะหาความรู้ (5Es) ที่เน้นทักษะการคิดวิเคราะห์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต และใช้โปรแกรม *The Geometer's Sketchpad* เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (หลักสูตรและการสอน). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- พิมพ์นธ์ เดชะคุปต์; และ เพียว ยินดีสุข. (2558). การจัดการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- ยุทชัย ไชยคำภา. (2557). การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม เพื่อเสริมสร้างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยผลงานทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์กับแนวความคิดการใช้ปัญหาเป็นฐาน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.
- ยุพิน พิพิธกุล; และ ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). “รูปแบบการเรียนการสอนพิสูจน์” ในประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยาวิธีทางวิชาคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8-11. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
- เยาวเรศ สิงห์นนท์. (2533). การเปรียบเทียบความสารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและเอกชน เขตการศึกษา 6. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบัณฑิต ภาคศึกษามัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- วัชร น้อยมี. (2551). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ศราวุธลักษณ์ บุตรรัตน์. (2553). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลเรื่อง “วงกลม” โดยการใช้โปรแกรม *The Geometer's Sketchpad* สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี. วิทยานิพนธ์ ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- ศิริจันทร์ เวสารัชชาต. (2551). คณิตศาสตร์พื้นฐาน. กรุงเทพฯ: พิกษ์การพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2548). คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.

- สันติ อธิพิณนาวกุล. (2550). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรม GSP (The Geometer's Sketchpad) เพื่อส่งเสริมความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช. (2555). คณิตศาสตร์สำหรับครู. พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2553). พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542 แก้ไขเพิ่มเติม ฉบับที่ 2 พ.ศ. 2545 และฉบับที่ 3 พ.ศ. 2553. สำเนา.
- สิริจันทร์ นิสนันท์. (2555). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง วงกลม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการคิดวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.
- สุกัญญา หะยีสและ; และ เอนก จันทรเจริญ. (2560, มีนาคม 21). ทฤษฎีบทเมเนแลัสและทฤษฎีบทเซวา กับบทบาทของการพิสูจน์. วารสารวิทยาศาสตร์ มศว. 33(1): 339.
- สุรินทร์ บุญพัฒนามารณ์. (2549). กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุภัทรา เกิดมงคล. (2550). กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุวิทย์ มูลคำ; และ อรทัย มูลคำ. (2558). 21 วิธีจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนากระบวนการคิด. พิมพ์ครั้งที่ 10. กรุงเทพฯ: ภาพพิมพ์.
- สุระ สนั่นเสียง. (2536). การพัฒนาชุดการเรียนรู้ด้วยตนเองเรื่องการใช้คำถามที่ส่งเสริมการสอนแบบสืบสวนสำหรับครูกลุ่มสร้างเสริมประสบการณ์ชีวิต. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (ประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ไสว พักขาว. (2544). หลักการสอนสำหรับการเป็นครูมืออาชีพ. กรุงเทพฯ: เอ็มพันธ์.

- อ้อมฤดี แซ่มอบล. (2553). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนที่เน้นการใช้คำถาม
 หมวกความคิดหกใบ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้น
 มัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย
 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อัมพร ม้าคนอง. (2557). คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Achbacher, P. R. & Alonzo, A. C. (2004). *Using science notebooks to assess students' conceptual understanding*. Paper presented at the American Educational Research Association, San Diego.
- Alberta Learning. (2004). *Focus on Inquiry: A Teacher's Guide to Implementing Inquiry-based Learning*. Edmonton: AB.
- Balacheff, N. (2010). *Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective*. *Explanation and Proof in Mathematics*, 115-135.
- Berry, J. (2014). Developing Mathematical Reasoning. *Mathematics in School*. 34(1).
- Brune, Michael C. (2010). *The Inquiry Learning Model as an Approach to Mathematics Instruction*. Thesis M.D. (Science in Mathematics Education). Boise State University.
- Bybee, Rodger W. (2014). The BSCS 5E Instructional Model: Personal Reflections and Contemporary Implications. In *Science and Children*. pp. 10-13. Guest Editorial.
- Carin. (1993). *Teaching Science Through Discovery*. 7th ed. Macmillan: NY.
- Cemen, P. B. (1987). *The nature of mathematics anxiety*: Report No. SE 048 689. Stillwater, OK: Oklahoma State University.
- Clements; D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial understanding. In *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan Publishing Company.
- Dimakos, G.; Nikoloudakis, E.; Ferentinos, S.; & Choustoulakis, E. (2007). Developing a Proof – Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students. In *The Teaching of Mathematics 2* : 87-106.

- Drayton, B.; & Falk, J. K. (2001). Tell-Tale Signs of the Inquiry-Oriented Classroom. In *NASSP Bulletin*, V.85(623). pp. 24-34. SAGE Publications.
- Eggen, Paul D.; & Kauchak, Donald P. (1996). *Strategies for Teachers Teaching Content and Thinking Skills*. 3rd ed. Allyn and Bacon: MA.
- Fielding-Wells, Jill; Dole, Shelly; & Makar, Katie. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. In *Mathematics Education Research Journal*, 26(1): 47-77. Springer.
- Good, Carter V. (1973). *Dictionary of Education*. 3rd ed. New York: Teacher College Press.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in Dynamic Geometry environment*. Educational Studies in Mathematics. 44: 127-150.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). *Proofs as bearers of mathematical knowledge*. Zdm, 40(3), 345-353.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds). (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. (New ICMI Study Series, Vol. 15). New York: Springer.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. In *Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK, Research Report Mathematical Sciences*. London: Institute of Education University of London.
- Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*. 75(3); 271.
- Hui Jun, D. (2015). *A Study on Pre-Service Teachers' Conceptions of Proofs*. Dissertation, M.D. (Teaching Department of Curriculum). Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto. Photocopied.
- Joseph F. Callahan; Leonard H. Clark; & Richard D. Kellough. (1998). *Teaching in Middle and Secondary Schools*. 6th ed. U.S.A.: Macmillan.

- Ko, Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6); 1109-1129.
- Lasley, T. J.; Matczynski, T. J.; & Rowley, J. B. (2002). *Strategies for Teaching in Diverse Society : Instructional Models*. Belmont, CA: Wardworth.
- Makar, Katie. (2016). Improving the Intellectual Quality of Pedagogy in Primary Classrooms through Mathematical Inquiry. In *Opening up Mathematics Education Research*. White, B; & Chinnappan, M; & Trenholm, S. pp. 431-438. Adelaide: MERGA.
- Malloy, C. (1999). Developing Mathematical Reasoning in the Middle Grades Recognizing Diversity. In *Developing Mathematical Reasoning In Grades K-12 Yearbook*. pp. 13-21. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mark Andrew Creager. (2016). *The Mathematical Knowledge of Secondary Pre-Service Teachers for Teaching Geometric Proof*. Dissertation, Ph.D. (Graduate Faculty). Indiana University. Photocopied.
- Mohan Chinnappan, Madduma B. Ekanayake and Christine Brown. (2009). Knowledge Use In The Construction of Geometry Proof by Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education* (2012) 10: 865-887. National Science Council, Taiwan 2011
- Moore, Kenneth D. (2015). *Effective Instructional Strategies: From Theory to Practice*. 2th ed. Los Angeles: SAGE.
- Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. 1990. PhD Thesis. University of Georgia. Photocopied.
- Nikolousdakis, E. (2009). A Proposed Model to Teach Geometry to First-Year Senior High School Students. *International Journal for Mathematics in Education HMS I JME* 2.
- Peter, R. Atwood. (2001). *Learning to Construct Proofs in a First Course on Mathematical Proof*. Dissertation, Ph.D.(Department of Mathematics). Michigan: Western Michigan University. Photocopied.
- Queen, Allen J. (2009). *The Block Scheduling Handbook*. 2th ed. U.S.A.: Corwin Press.

- Recio, A. M.; & Godino, J. D. (2001). *Institutional and personal meaning of proof*. Educational Studies in Mathematics. 48: 83-99.
- Selden, A.; & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for Research in Mathematics Education*. 34(1): 4-36.sx
- Senk, S. L. (1985). *How well do students write geometry proofs?*. Mathematics Teacher. 78: 448-456.
- Skinner, B. F. (1971). *Beyond freedom and dignity*. New York: Knopf.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 38, 289-321.
- Suchman, J. Richard. (1962). *The Elementary School Training Program in Scientific Inquiry*. Urbana: University of Illinois.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. CDASSG Project. Columbus: OH, ERIC.
- Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In *Teaching and Learning: Research Sampler*. Mathematical Association of Americas MAA.
- Weber, K.; & Mejia-Ramos, J. (2011). *Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study*. Educational Studies in Mathematics. 76(3): 329-344.





ภาคผนวก ก

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

แบบทดสอบที่ใช้เป็นเครื่องมือในการวัดผล คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จำนวน 2 ฉบับ ได้แก่ แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ โดยผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของแบบทดสอบ ดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญเห็นว่ามีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา
 คะแนน 0 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญไม่แน่ใจว่ามีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาหรือไม่
 คะแนน -1 สำหรับข้อคำถามที่ผู้เชี่ยวชาญเห็นว่าไม่มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

1.2 คำนวณค่า IOC เป็นรายข้อ แล้วเลือกข้อคำถามที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ

$$IOC = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้อง

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

i แทน จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง N

R_i แทน คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i

ตาราง 1 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
ก่อนการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

ตาราง 2 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
หลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

2. หาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2.1 หาค่าความยากง่าย (p) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้สูตร

$$p_i = \frac{(H_i + L_i)}{[T_i(N_H + N_L)]}$$

เมื่อ p_i แทน ค่าความยากง่าย ข้อที่ i

H_i แทน คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง

L_i แทน คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

T_i แทน คะแนนเต็มของข้อที่ i

N_H แทน จำนวนผู้ตอบถูกทั้งหมดในกลุ่มสูง

N_L แทน จำนวนผู้ตอบถูกทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.2 หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้สูตร

$$r_i = \frac{(H_i - L_i)}{[T_i \times \frac{1}{2}(N_H + N_L)]}$$

เมื่อ r_i แทน อำนาจจำแนก ข้อที่ i

H_i แทน คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มสูง

L_i แทน คะแนนรวมข้อที่ i ของผู้ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

T_i แทน คะแนนเต็มของข้อที่ i

N_H แทน จำนวนผู้ตอบถูกทั้งหมดในกลุ่มสูง

N_L แทน จำนวนผู้ตอบถูกทั้งหมดในกลุ่มต่ำ

2.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient)

ตาราง 3 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้
แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.68	0.21
2	0.78	0.25
3	0.64	0.21
4	0.62	0.21
5	0.58	0.21
6	0.60	0.21
7	0.57	0.24
8	0.66	0.21
9	0.59	0.27
10	0.48	0.25

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อน
การเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม โดยวิธีการหาค่า
สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) มีค่าเท่ากับ .797

ตาราง 4 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
วัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบ
สืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.67	0.21
2	0.76	0.25
3	0.80	0.21
4	0.57	0.21
5	0.58	0.38
6	0.66	0.32
7	0.57	0.23
8	0.40	0.22
9	0.61	0.44
10	0.50	0.37

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อน
การเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม โดยวิธีการหาค่า
สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) มีค่าเท่ากับ .697



ภาคผนวก ข

การทดสอบสมมติฐาน

ตาราง 5 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการเรียนรู้ผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

คนที่	ก่อนเรียน (35 คะแนน)	หลังเรียน (35 คะแนน)	ผลต่าง	
			D	D ²
1	18.5	25.25	6.75	45.5625
2	15.5	25	9.5	90.25
3	10	34	24	576
4	15	34.5	19.5	380.25
5	20.75	34	13.25	175.5625
6	2.75	22.75	20	400
7	15.5	27	11.5	132.25
8	6.5	27.25	20.75	430.5625
9	19	23.25	4.25	18.0625
10	17	35	18	324
11	9	25.5	16.5	272.25
12	14.5	24.5	10	100
13	18.5	18.5	0	0
14	6.25	20.75	14.5	210.25
15	7.25	13.75	6.5	42.25
16	13.75	33	19.25	370.5625
17	14.25	31.25	17	289
18	16.25	29	12.75	162.5625
19	10.75	27.25	16.5	272.25
20	12.5	26.5	14	196
21	18.5	21.25	2.75	7.5625
22	15.75	28.25	12.5	156.25
23	15.5	27.25	11.75	138.0625

ตาราง 9 (ต่อ)

คนที่	ก่อนเรียน (35 คะแนน)	หลังเรียน (35 คะแนน)	ผลต่าง	
			D	D ²
24	10.5	16.75	6.25	39.0625
25	8.75	15.75	7	49
26	12.5	16.5	4	16
27	10.25	24.5	14.25	203.0625
28	6.75	30.5	23.75	564.0625
29	19.5	21.25	1.75	3.0625
30	10.25	18.75	8.5	72.25
31	14.25	29.25	15	225
32	12	18.75	6.75	45.5625
33	18	23	5	25
34	18	30	12	144
35	21	34.25	13.25	175.5625
36	15	33.75	18.75	351.5625
37	16.75	34	17.25	297.5625
38	16.75	24.25	7.5	56.25
39	11	26.25	15.25	232.5625
40	17.5	28.75	11.25	126.5625
41	14.75	19.25	4.5	20.25
42	10.25	33.25	23	529
43	13.25	17	3.75	14.0625
44	20.25	25.5	5.25	27.5625
ผลรวม	610.5	1136	525.5	8006.5

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังผ่านการเรียนรู้ด้วยกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม โดยใช้สถิติทดสอบ t (t-test for Dependent Samples)

สมมติฐาน คือ $H_0: \mu_D = 0$

$H_1: \mu_D > 0$

สูตรที่ใช้ $t = \frac{\bar{D}}{\sigma_D} = \frac{\bar{D}}{S_D / \sqrt{n}} ; df = n - 1$

เมื่อ n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

i แทน จำนวนตั้งแต่ 1 ถึง n

D_i แทน ความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังของนักเรียนคนที่ i

D_i แทน ความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังของนักเรียนคนที่ i

$\sum_{i=1}^n D_i$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังของ

นักเรียนคนที่ i

$\sum_{i=1}^n D_i^2$ แทน ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนและหลังของ

นักเรียนคนที่ i แต่ละคนยกกำลังสอง

เนื่องจาก $\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \quad S_D = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n D_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n D_i\right)^2}{n(n-1)}}$

จะได้ $t = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{\sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n D_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n D_i\right)^2}{n-1}}} ; df = n - 1$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^n D_i = 525.5$; $\sum_{i=1}^n D_i^2 = 8006.5$; $(\sum_{i=1}^n D_i)^2 = 276,150.25$; $N = 44$

ดังนั้น

$$t = \frac{525.5}{\sqrt{\frac{44(8006.5) - (525.5)^2}{44 - 1}}}$$

$$= \frac{525.5}{\sqrt{\frac{352,286 - 276,150.25}{43}}}$$

$$= \frac{525.5}{\sqrt{1770.598837}}$$

$$= \frac{525.5}{42.078484}$$

$$= 12.488$$

(เปิดตาราง t จะได้ ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t เท่ากับ 2.4163 ที่ระดับนัยสำคัญ .01 เมื่อ $df = 44 - 1 = 43$)

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $t > t_{.01}$

จากตารางได้ $t_{.01} = 2.4163$

และ $12.488 > 2.4163$ อยู่ในบริเวณวิกฤต

เพราะฉะนั้นปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังการเรียนผ่านกระบวนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่อง วงกลมสูงวก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560 ภาคเรียนที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เรื่อง วงกลม

เวลา 1 คาบ 50 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

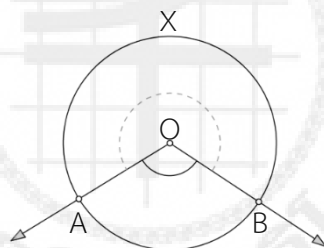
เพื่อให้นักเรียน

1. นำสมบัติเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้
2. นำสมบัติเกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้

2. สาระการเรียนรู้

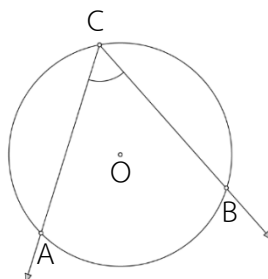
มุมที่จุดศูนย์กลาง

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม



จากรูป $\angle AOB$ และมุมกลับ $\angle AOB$ แต่ละมุมเป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O โดยที่ $\angle AOB$ รองรับด้วยส่วนโค้ง AB และมุมกลับ $\angle AOB$ รองรับด้วยส่วนโค้ง AXB

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม



จากรูป $\angle ACB$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม O ที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB

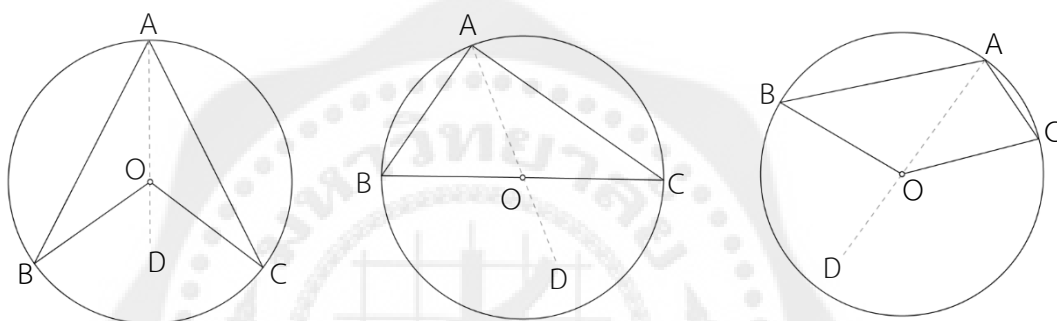
ทฤษฎีบท 1 ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน

พิสูจน์ทฤษฎีบท

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งมี A เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวง

ดังนั้น บนส่วนโค้ง BC มี $\widehat{BOC}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง
จะต้องพิสูจน์ว่า $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$

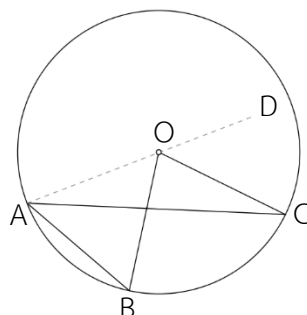
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{AD}$ ให้ผ่านจุด O
พิสูจน์ในกรณีที่จุด D อยู่ระหว่างจุด B กับจุด C



ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
2. $\widehat{BOD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
3. $\widehat{COD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
4. $\widehat{BOD} + \widehat{COD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ และ $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
6. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAO} + 2\widehat{CAO}$	ผลบวกของข้อ 2. และ ข้อ 3. และแทนค่าด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากันในข้อ 4.
7. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$	ผลจากข้อ 6.

สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน

พิสูจน์ในกรณีที่จุด D ไม่อยู่ระหว่างจุด B กับจุด C



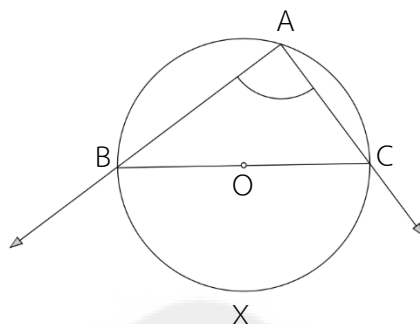
พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
2. $\widehat{BOD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
3. $\widehat{COD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
4. $\widehat{BOD} - \widehat{COD} = (\widehat{ABO} + \widehat{BAO}) - (\widehat{ACO} + \widehat{CAO})$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ และ $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
6. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAO} - 2\widehat{CAO}$ $= 2(\widehat{BAO} - \widehat{CAO})$	ผลจากข้อ 4. และข้อ 5.
7. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$	ผลจากข้อ 6.

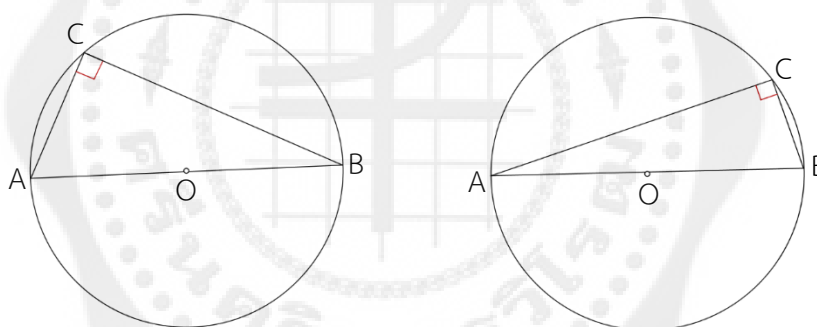
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน

มุมในครึ่งวงกลม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง



จากรูป $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O
 $\angle BAC$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้ง BXC
ทฤษฎีบท 2 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก

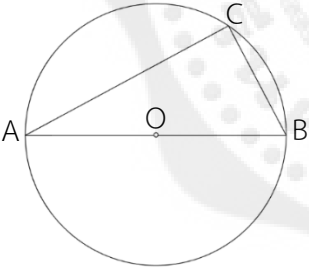


พิสูจน์ทฤษฎีบท

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง มี $\angle ACB$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\angle ACB = 90^\circ$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่เราสร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{CO}$ - สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว - ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม

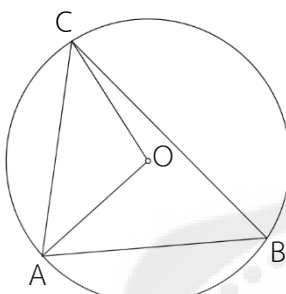
ข้อความพิสูจน์	
1. $\hat{A}CO = \hat{CAO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. $\hat{BCO} = \hat{CBO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. $\hat{ACO} + \hat{BCO} = \hat{CAO} + \hat{CBO}$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน (จากข้อ 1. และ ข้อ 2.)
4. $\hat{ACO} + \hat{BCO} + \hat{CAO} + \hat{CBO} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม
5. $\hat{ACO} + \hat{BCO} + \hat{ACO} + \hat{BCO} = 180^\circ$	แทน $\hat{CAO} + \hat{CBO}$ ด้วย $\hat{ACO} + \hat{BCO}$
6. $2\hat{ACO} + 2\hat{BCO} = 180^\circ$	ผลจากข้อ 5.
7. $\hat{ACO} + \hat{BCO} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
8. $\hat{ACB} = 90^\circ$	ผลจากข้อ 8.
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก	

พิสูจน์ทฤษฎีบท (วิธีที่ 2)

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง มี $\hat{ACB}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\hat{ACB} = 90^\circ$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน - มุมตรง
ข้อความพิสูจน์	
1. $\hat{AOB} = 2\hat{ACB}$	มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
2. $\hat{AOB} = 180^\circ$	มุมตรง
3. $2\hat{ACB} = 180^\circ$	ผลจากข้อ 1. และข้อ 2.
4. $\hat{ACB} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก	

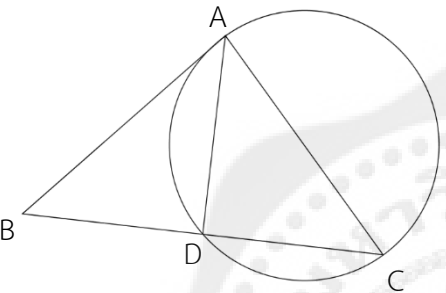
ตัวอย่างที่ 1 $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมแหลม จงพิสูจน์ว่า $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมแหลม	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{AC}$, $\overline{AO}$ และ $\overline{CO}$ - ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม - สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว - มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
ข้อความพิสูจน์	
1. $\hat{AOC} + \hat{CAO} + \hat{ACO} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม AOC
2. $\hat{CAO} = \hat{ACO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. $\hat{CAO} + \hat{ACO} = 2\hat{CAO}$	ผลจากข้อ 2.
4. $\hat{AOC} = 2\hat{ABC}$	มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
5. $2\hat{ABC} + 2\hat{CAO} = 180^\circ$	จากข้อ 1., ข้อ 2., ข้อ 3 และข้อ 4.
6. $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ แล้ว $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$	

ตัวอย่างที่ 2 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ ให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และเส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $BD = CD$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ สร้างวงกลมให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ให้เส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BD = CD$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{AD}$ - ความเท่ากันทุกประการ
ข้อความพิสูจน์	
1. $\angle ADC = 90^\circ$	มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก
2. $\angle ADB = 90^\circ$	ผลจากข้อ 1. และ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
3. $AD = AD$	เป็นด้านร่วม
4. $AB = AC$	กำหนดให้
5. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
6. $BD = CD$	ด้านที่สมนัยกัน (ผลจากข้อ 5.)
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ ให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และเส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D แล้ว $BD = CD$	

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม
- 3.2 โปรแกรม Geometer Sketch Pad เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม
- 3.3 ใบงานที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นสร้างความสนใจ

4.1.1. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ 2

4.1.2. นักเรียนสังเกตสิ่งที่ได้ลงมือปฏิบัติไป จากนั้นใช้ความรู้เดิมที่มีมาประกอบในการสร้างข้อความคาดการณ์

4.1.3. นักเรียนแลกเปลี่ยนสิ่งที่ได้ค้นพบกับเพื่อนที่นั่งใกล้เคียงกัน หากมีประเด็นที่แตกต่างกัน

ครูจะให้เลือกนักเรียนออกมานำเสนอสิ่งที่ได้ค้นพบ จากนั้นนักเรียนแต่ละคนเขียนข้อความคาดการณ์ลงในใบกิจกรรมที่ 2

4.1.4. นักเรียนอภิปรายข้อความคาดการณ์ที่ได้ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

4.1.5. ครูใช้คำถามกระตุ้นว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจะเป็นจริงสำหรับกรณีทั่วไปหรือไม่ ถ้าต้องการรู้ว่าเป็นจริงสำหรับทุกกรณีจะต้องทำอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า พิสูจน์]

4.2 ขั้นสำรวจค้นคว้า

4.2.1. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายลักษณะของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมโดยให้นักเรียนทดลองวาด จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเป็นความคิดรวบยอด

4.2.2. ครูอธิบายว่าในการที่จะแสดงว่าข้อความคาดการณ์ข้างต้นเป็นจริงสำหรับทุกกรณีหรือไม่

จะต้องแสดงการพิสูจน์

4.2.3. จากนั้นครูอธิบายการพิสูจน์ด้วยกระบวนการสืบสวนสอบสวนโดยแสดงกระบวนการประกอบการอธิบายเป็นตัวอย่าง ซึ่งขั้นตอนในการพิสูจน์ ขั้นแรกเราจะต้องทำความเข้าใจสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ก่อนว่าต้องการพิสูจน์อะไร ทราบอะไรจากสิ่งที่กำหนดมาให้บ้าง เขียนเป็นภาพประกอบการพิสูจน์ จากนั้น สำรวจความรู้เดิม ดึงเอาความรู้ ทฤษฎี กฎต่าง ๆ ที่เคยเรียนมาแล้วมาใช้ประกอบการพิสูจน์

4.2.4. ครูแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์โดยใช้กระบวนการสืบสวนสอบสวน ด้วยการ

ใช้คำถามกระตุ้นดังนี้

- สิ่งที่เราต้องการจะพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน]

- หากกำหนดจุดให้มุมที่จุดศูนย์กลางคือ $\widehat{BOC}$ และมุมในส่วนโค้งของวงกลมคือ $\widehat{BAC}$ จะแสดงว่าสองมุมนี้สัมพันธ์กันอย่างไร และทำอย่างไร

- ครูให้เวลานักเรียนประมาณ 2 - 3 นาที ในการค้นหาวิธีการเพื่อแสดงว่า

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$$

- เราทราบข้อมูลอะไรเพิ่มเติมบ้าง หรือเขียนเป็นภาพประกอบการพิสูจน์ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า จะต้องแสดงว่า $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ โดยต้องสร้างรูปเพิ่มเติมเพื่อประกอบการพิสูจน์ นั่นคือ ลาก $\overline{AD}$ ผ่านจุด O]

- จากนั้น ครูใช้คำถามกระตุ้นนักเรียนว่าจะนำความรู้เรื่องใด มาใช้ประกอบการพิสูจน์เพื่อสรุปให้ได้ว่า $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$

[นักเรียนควรตอบว่า ใช้ความรู้เรื่องมุมประชิดของรูปสามเหลี่ยม และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว]

- จากรูป พบว่าข้อมูลใดสัมพันธ์กันบ้าง อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า 1. $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะมีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน

2. $\widehat{BOD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO}$ เพราะมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

3. $\widehat{COD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$ เพราะมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

4. จะได้ว่า $\widehat{BOD} + \widehat{COD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$

5. $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ และ $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$ เพราะมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

6. จะได้ว่า $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAO} + 2\widehat{CAO}$

จึงสรุปได้ว่า $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$]

4.3 ขัณธธิบายและลงข้อสรุป

4.3.1. นักเรียนเขียนแสดงการพิสูจน์และข้อสรุปลงในตารางพิสูจน์ จากนั้น ครูสรุปว่า ข้อความ

คาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุกกรณี และจากการพิสูจน์ข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทเพื่อใช้อ้างอิงประกอบการพิสูจน์ต่อไป

4.4 ขั้วขยายความรู้

4.4.1. ครูกำหนดเงื่อนไขว่าถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาด 180° แล้วให้นักเรียนพิจารณาว่ามุมที่

เส้นรอบวงมีขนาดเท่าใด จากนั้นครูให้นักเรียนลองเขียนภาพประกอบ

4.4.2. ครูให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์จากเงื่อนไขข้างต้น จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับมุมในครึ่งวงกลม

4.4.3. จากนั้นให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริงทุกกรณีหรือไม่ โดยครูคอยให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนเกิดข้อสงสัยในการแสดงการพิสูจน์

4.4.4. ครูและนักเรียนอภิปรายผลการพิสูจน์ร่วมกัน จากนั้นครูสรุปว่าข้อความที่พิสูจน์นั้นคือ

ทฤษฎีบท 2

4.4.5. ครูให้นักเรียนพิจารณา ตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ในใบงาน จากนั้นนักเรียนแสดง

การพิสูจน์ โดยนักเรียนจะต้องทำความเข้าใจข้อความที่ต้องการพิสูจน์ วางแผนและสำรวจค้นคว้า นำทฤษฎีบทดังกล่าวรวมถึงทฤษฎีบททางเรขาคณิตอื่น ๆ ที่เคยเรียนมาแล้ว มาใช้ประกอบการพิสูจน์

4.5 ขั้นประเมินผล

4.5.1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนประเมินสิ่งที่ตนได้เรียนรู้/ลงมือปฏิบัติไปในคาบนี้ ดังนี้

- ในคาบนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรไปบ้าง
- ทฤษฎีบทที่ 1 มีความสำคัญอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน]

- ทฤษฎีบทที่ 2 มีความสำคัญอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก]

- ขั้นตอนในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีวิธีการอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ สิ่งที่ต้องพิจารณาให้พิสูจน์ เขียนภาพประกอบการพิสูจน์ อาจมีการสร้างเพื่อการพิสูจน์เพิ่มเติม สืบค้นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องที่อาจจะนำมาใช้ประกอบการพิสูจน์ เรียบเรียงลำดับการพิสูจน์ จากนั้นเขียนแสดงการพิสูจน์]

4.5.2. ครูประเมินความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนจากใบงาน

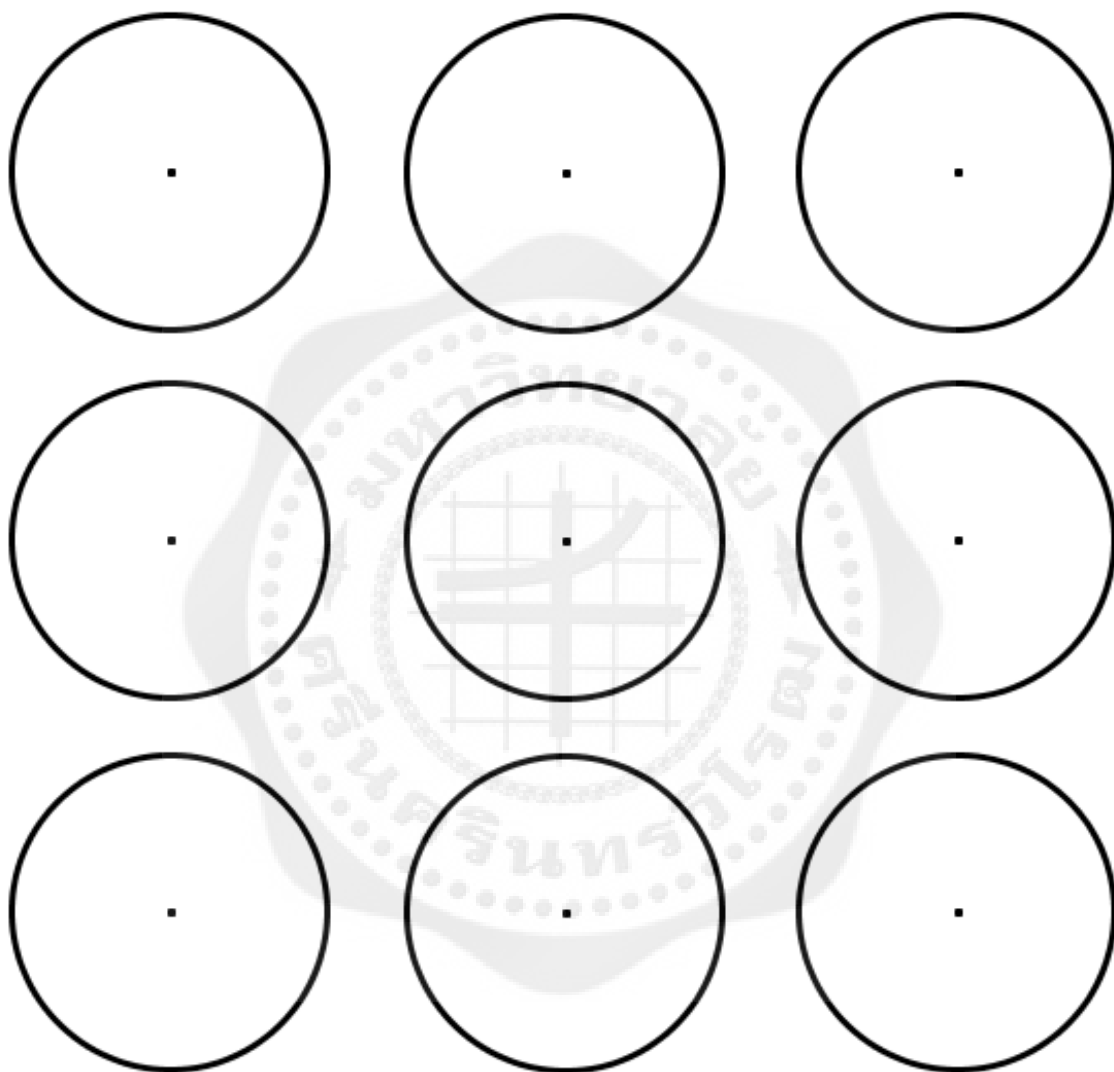
5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดผลและ ประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
1. นำสมบัติเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้ 2. นำสมบัติเกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้	วิธีวัดผล : พิจารณาจากการเขียนแสดงการพิสูจน์ในใบงานที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม เครื่องมือวัดผล : ใบงานที่ 2 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมจำนวน 4 ข้อ	เกณฑ์การให้คะแนน : พิจารณาจากเกณฑ์การให้คะแนนดังแนบไว้ท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ เกณฑ์การประเมินผล : ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 50% ของคะแนนรวมขึ้นไปถือว่าผ่าน

ใบกิจกรรมที่ 2

ให้นักเรียนลากส่วนของเส้นตรง 4 เส้นในวงกลม(ลากเส้นต่อเนื่องกัน) โดยที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดเดียวกันคือจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดปลายของเส้นที่เหลืออยู่บนเส้นรอบวง



ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปที่สร้าง

.....

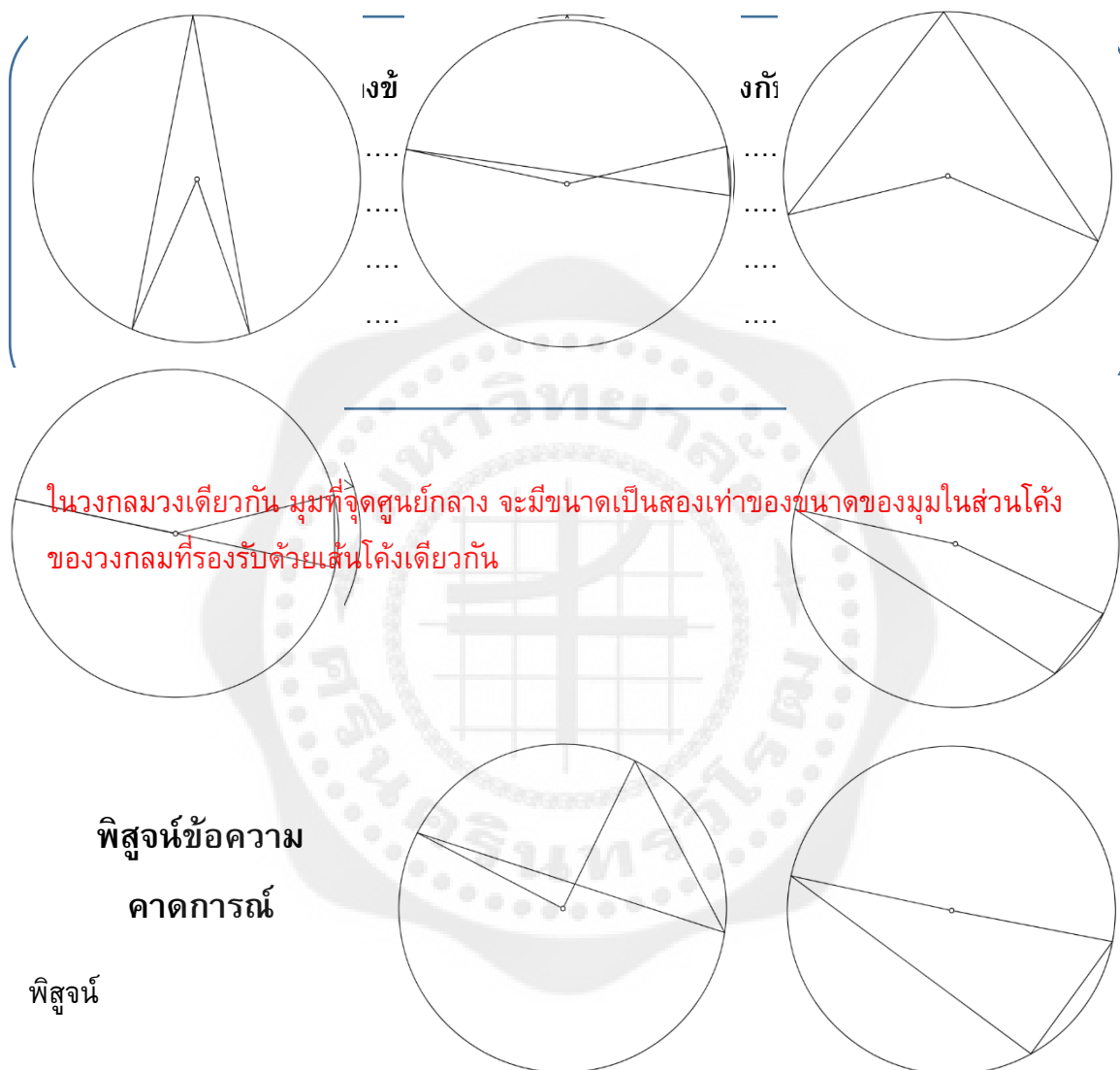
.....

.....

.....

เฉลยใบกิจกรรมที่ 2

ให้นักเรียนลากส่วนของเส้นตรง 4 เส้นในวงกลม(ลากเส้นต่อเนื่องกัน) โดยที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดเดียวกันคือจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดปลายของเส้นที่เหลืออยู่บนเส้นรอบวง



**พิสูจน์ข้อความ
คาดการณ์**

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

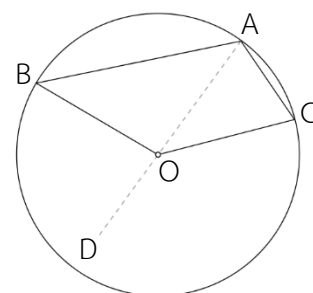
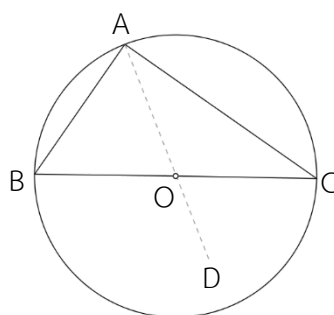
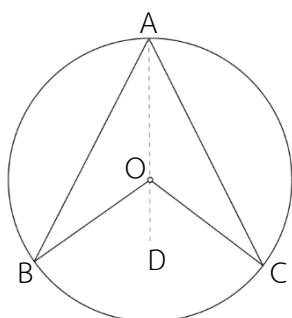
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

เฉลยพิสูจน์ข้อความคาดการณ์

ทฤษฎีบท 1 ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน



พิสูจน์ทฤษฎีบท

กำหนดให้

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งมี A เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวง
ดังนั้น บนส่วนโค้ง BC มี $\widehat{BOC}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง

จะต้องพิสูจน์ว่า

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$$

สร้างเพื่อการพิสูจน์

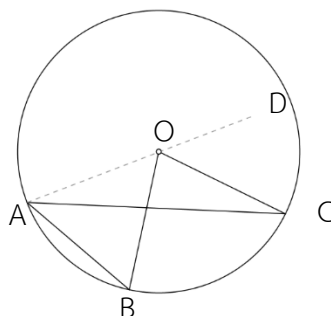
ลาก $\overline{AD}$ ให้ผ่านจุด O

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
2. $\widehat{BOD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
3. $\widehat{COD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
4. $\widehat{BOD} + \widehat{COD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO} + \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ และ $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
6. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAO} + 2\widehat{CAO}$	ผลบวกของข้อ 2. และ ข้อ 3. และแทนค่าด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากันในข้อ 4.
7. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$	ผลจากข้อ 6.

สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน

พิสูจน์ในกรณีที่จุด D ไม่อยู่ระหว่างจุด B กับจุด C



พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\triangle ABO$ และ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยม	มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน

หน้าจั่ว	
2. $\widehat{BOD} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
3. $\widehat{COD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด
4. $\widehat{BOD} - \widehat{COD} = (\widehat{ABO} + \widehat{BAO}) - (\widehat{ACO} + \widehat{CAO})$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. $\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ และ $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
6. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAO} - 2\widehat{CAO}$ $= 2(\widehat{BAO} - \widehat{CAO})$	ผลจากข้อ 4. และข้อ 5.
7. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$	ผลจากข้อ 6.

สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยเส้นโค้งเดียวกัน

ใบงานที่ 2

จงแสดงการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยละเอียด

1 $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\widehat{ABC}$ เป็นมุมแหลม จงพิสูจน์ว่า

$$\widehat{ABC} + \widehat{CAO} = 90^\circ$$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

2 $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\triangle ABC$ เป็นมุมบ้าน จงพิสูจน์ว่า $\angle ABC - \angle CAO = 90^\circ$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ A	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

3 กำหนดให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\angle ACB = \angle ACD$ จงพิสูจน์ว่า $AB = AD$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

4 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ สร้างวงกลมให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ให้เส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $BD = CD$
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

เฉลยใบงานที่ 2

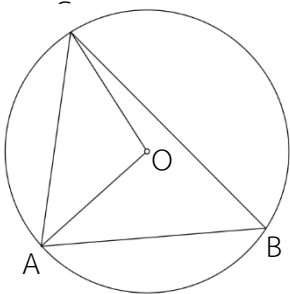
จงแสดงการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยละเอียด

1 $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\widehat{ABC}$ เป็นมุมแหลม จงพิสูจน์ว่า

$$\widehat{ABC} + \widehat{CAO} = 90^\circ$$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	$\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\widehat{ABC}$ เป็นมุมแหลม
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	$\widehat{ABC} + \widehat{CAO} = 90^\circ$

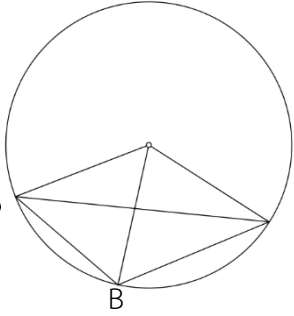
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ ลาก $\overline{AC}$, $\overline{AO}$ และ $\overline{CO}$												
ข้อความพิสูจน์ <table border="1" data-bbox="256 723 1385 1104"> <tr> <td>1. $\hat{AOC} + \hat{CAO} + \hat{ACO} = 180^\circ$</td><td>ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม</td></tr> <tr> <td>2. $\hat{CAO} = \hat{ACO}$</td><td>มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว</td></tr> <tr> <td>3. $\hat{CAO} + \hat{ACO} = 2\hat{CAO}$</td><td>ผลจากข้อ 2.</td></tr> <tr> <td>4. $\hat{AOC} = 2\hat{ABC}$</td><td>มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน</td></tr> <tr> <td>5. $2\hat{ABC} + 2\hat{CAO} = 180^\circ$</td><td>จากข้อ 1. และข้อ 2.</td></tr> <tr> <td>6. $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$</td><td>การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน</td></tr> </table> สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมแหลม แล้ว $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$		1. $\hat{AOC} + \hat{CAO} + \hat{ACO} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม	2. $\hat{CAO} = \hat{ACO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	3. $\hat{CAO} + \hat{ACO} = 2\hat{CAO}$	ผลจากข้อ 2.	4. $\hat{AOC} = 2\hat{ABC}$	มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน	5. $2\hat{ABC} + 2\hat{CAO} = 180^\circ$	จากข้อ 1. และข้อ 2.	6. $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
1. $\hat{AOC} + \hat{CAO} + \hat{ACO} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม												
2. $\hat{CAO} = \hat{ACO}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว												
3. $\hat{CAO} + \hat{ACO} = 2\hat{CAO}$	ผลจากข้อ 2.												
4. $\hat{AOC} = 2\hat{ABC}$	มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน												
5. $2\hat{ABC} + 2\hat{CAO} = 180^\circ$	จากข้อ 1. และข้อ 2.												
6. $\hat{ABC} + \hat{CAO} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน												

2 $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมป้าน จงพิสูจน์ว่า

$$\hat{ABC} - \hat{CAO} = 90^\circ$$

พิสูจน์

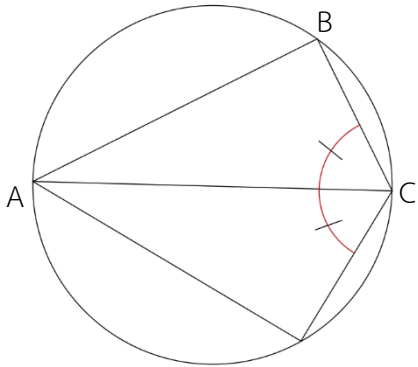
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	$\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\hat{ABC}$ เป็นมุมป้าน
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	$\hat{ABC} - \hat{CAO} = 90^\circ$

จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ ลาก $\overline{AC}$, $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$
ข้อความพิสูจน์	
1. มุมกลับ $\widehat{AÔC} = 2\widehat{ABC}$	มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
2. $\widehat{AÔC} = 360^\circ - \text{มุมกลับ } \widehat{AÔC}$ $\widehat{AÔC} = 360^\circ - 2\widehat{ABC}$	$\widehat{AÔC} + \text{มุมกลับ } \widehat{AÔC} = 360^\circ$
3. $\widehat{AÔC} + \widehat{CÔA} + \widehat{AÔC} = 180^\circ$	ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม
4. $(360^\circ + 2\widehat{ABC}) + \widehat{CÔA} + \widehat{AÔC} = 180^\circ$	ผลจากข้อ 2. แทน $\widehat{AÔC}$ ด้วย $360^\circ + 2\widehat{ABC}$
5. $\widehat{CÔA} + \widehat{AÔC} = 2\widehat{CÔA}$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
6. $(360^\circ - 2\widehat{ABC}) + 2\widehat{CÔA} = 180^\circ$ $- 2\widehat{ABC} + 2\widehat{CÔA} = -180^\circ$	ผลจากข้อ 4.
7. $\widehat{ABC} - \widehat{CÔA} = 90^\circ$	การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O ที่ทำให้ $\widehat{ABC}$ เป็นมุมป้าน แล้ว $\widehat{ABC} - \widehat{CÔA} = 90^\circ$	

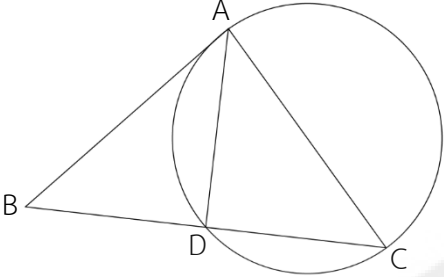
3 กำหนดให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$ จงพิสูจน์ว่า $AB = AD$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	$\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$
----------------------	---

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $AB = AD$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่เราสร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{AD}$
ข้อความพิสูจน์	
1. $\hat{A}BC = \hat{A}DC$	มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก
2. $\hat{A}CB = \hat{A}CD$	กำหนดให้
3. $AC = AC$	เป็นด้านร่วม
4. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
5. $AB = AD$	ด้านที่สมนัยกัน (ผลจากข้อ 4.)
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\hat{A}CB = \hat{A}CD$ แล้ว $AB = AD$	

4 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ สร้างวงกลมให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
 ให้เส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า $BD = CD$
 พิสูจน์

สิ่ง โจทย์กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ สร้างวงกลมให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ให้เส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BD = CD$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่เราเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ ลาก $\overline{AD}$
ข้อความพิสูจน์	
1. $\angle ADC = 90^\circ$	มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือ หนึ่งมุมฉาก
2. $\angle ADB = 90^\circ$	ผลจากข้อ 1. และ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$
3. $AD = AD$	เป็นด้านร่วม
4. $AB = AC$	กำหนดให้
5. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
6. $BD = CD$	ด้านที่สมนัยกัน (ผลจากข้อ 5.)
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ สร้างวงกลมให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ให้เส้นรอบวงตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D แล้ว $BD = CD$	

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560 ภาคเรียนที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เรื่อง วงกลม

เวลา 1 คาบ 50 นาที

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียน

1. นำสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดและจุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้
2. นำสมบัติเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมไปใช้ประกอบการพิสูจน์ได้

2. สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบท 12

1. ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
2. ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดมุมทั้งสี่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

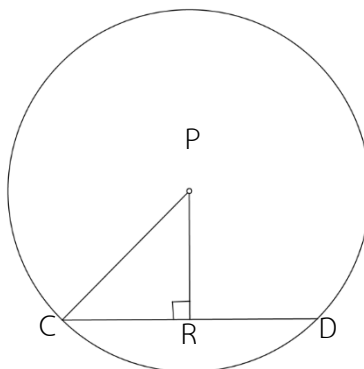
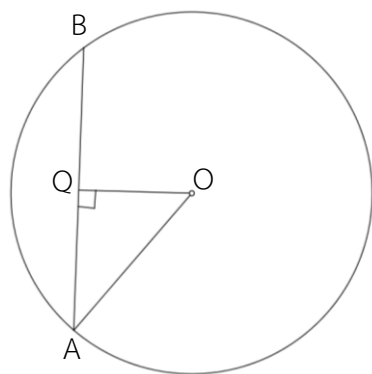
ทฤษฎีบท 13 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้

พิสูจน์ทฤษฎีบท 12.1

กำหนดให้ O และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงที่เท่ากัน $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O และ P ตามลำดับ ทำให้ $AB = CD$ ลาก $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ ที่จุด Q และลาก $\overline{PR} \perp \overline{CD}$ ที่จุด R

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $OQ = PR$

จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้



สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

- ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{PC}$
- ความเท่ากันทุกประการ

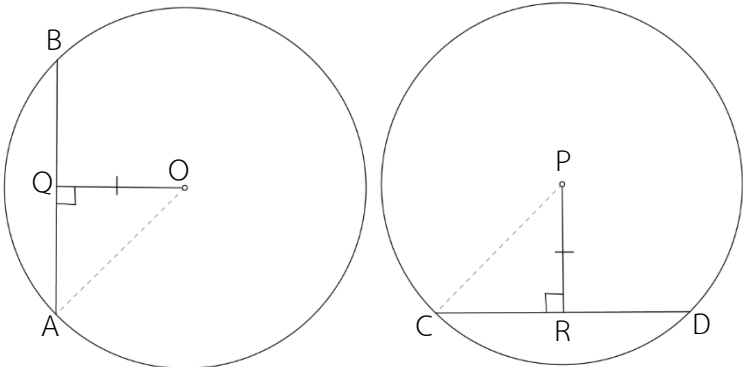
ข้อความพิสูจน์

1. $AB = CD$	กำหนดให้
2. $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$	สมบัติการคูณ
3. $\hat{A}QO = \hat{C}RP$	$\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{PR} \perp \overline{CD}$
4. $AQ = CR$	ผลจากข้อ 2.
5. $AO = CP$	รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน
6. $\therefore \triangle AOQ \cong \triangle CPR$	มีความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน
7. $\therefore OQ = PR$	ผลจากข้อ 6.

สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

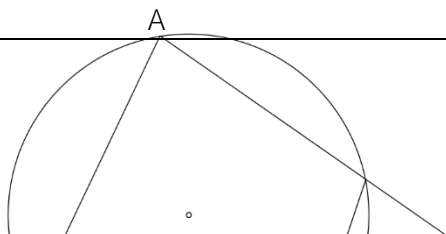
พิสูจน์ทฤษฎีบท 12.2

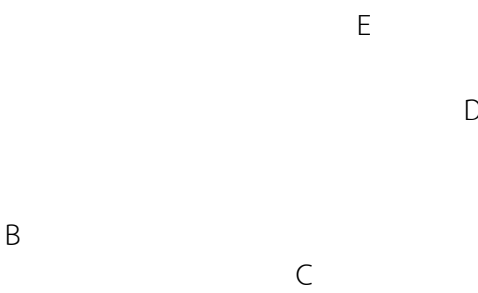
กำหนดให้	O และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงที่เท่ากัน $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O และ P ตามลำดับ ลาก $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{PR} \perp \overline{CD}$ ที่ทำให้ $OQ = PR$
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	$AB = CD$

จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{PC}$ - ความเท่ากันทุกประการ														
ข้อความพิสูจน์ <table border="1" data-bbox="252 792 1390 1288"> <tr> <td>1. $\hat{A}QO = \hat{C}RP$</td><td>$\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{PR} \perp \overline{CD}$</td></tr> <tr> <td>2. $AO = CP$</td><td>รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน</td></tr> <tr> <td>3. $OQ = PR$</td><td>กำหนดให้</td></tr> <tr> <td>4. $\therefore \triangle AOQ \cong \triangle CPR$</td><td>มีความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน</td></tr> <tr> <td>5. $\therefore AQ = CR$</td><td>ผลจากข้อ 4.</td></tr> <tr> <td>6. $\therefore 2AQ = 2CR$</td><td>สมบัติการคูณ</td></tr> <tr> <td>7. $\therefore AB = CD$</td><td>ส่วนของเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับคอร์ด ย่อมแบ่งครึ่งคอร์ด ($AB = 2AQ = 2BQ$ และ $CD = 2CR = 2DR$)</td></tr> </table>		1. $\hat{A}QO = \hat{C}RP$	$\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{PR} \perp \overline{CD}$	2. $AO = CP$	รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน	3. $OQ = PR$	กำหนดให้	4. $\therefore \triangle AOQ \cong \triangle CPR$	มีความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน	5. $\therefore AQ = CR$	ผลจากข้อ 4.	6. $\therefore 2AQ = 2CR$	สมบัติการคูณ	7. $\therefore AB = CD$	ส่วนของเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับคอร์ด ย่อมแบ่งครึ่งคอร์ด ($AB = 2AQ = 2BQ$ และ $CD = 2CR = 2DR$)
1. $\hat{A}QO = \hat{C}RP$	$\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{PR} \perp \overline{CD}$														
2. $AO = CP$	รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน														
3. $OQ = PR$	กำหนดให้														
4. $\therefore \triangle AOQ \cong \triangle CPR$	มีความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน														
5. $\therefore AQ = CR$	ผลจากข้อ 4.														
6. $\therefore 2AQ = 2CR$	สมบัติการคูณ														
7. $\therefore AB = CD$	ส่วนของเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับคอร์ด ย่อมแบ่งครึ่งคอร์ด ($AB = 2AQ = 2BQ$ และ $CD = 2CR = 2DR$)														
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน															

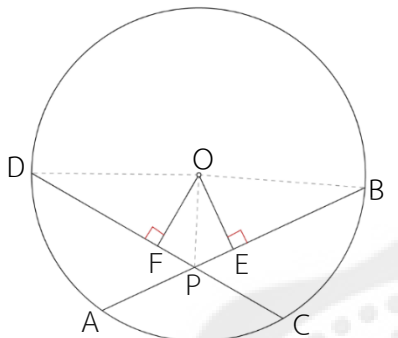
พิสูจน์ทฤษฎีบท 13

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ซึ่งมี $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	จุด A, B, C และ D ร่วมวงกลมเดียวกัน
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

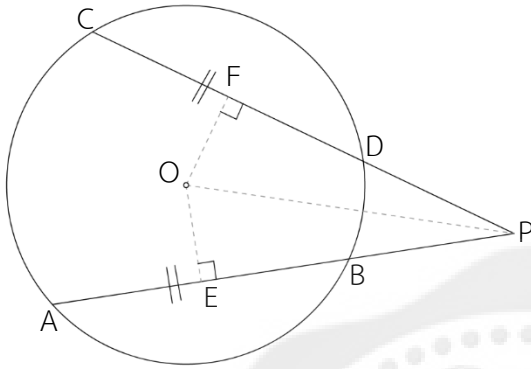


	- เขียนวงกลมผ่านจุด A, B และ C (วงกลมย่อมผ่านจุด 3 จุด ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน) - ถ้าววงกลมไม่ผ่านจุด D ย่อมตัด $\overline{AD}$ หรือส่วนต่อของ $\overline{AD}$ ที่จุด ๆ หนึ่ง สมมติว่าเป็นจุด E ลาก $\overline{CD}$ (วงกลมย่อมตัดส่วนของเส้นตรงได้ไม่เกิน 2 จุด) - มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมรวมกันได้ 180°
ข้อความพิสูจน์	
1. $\hat{ABC} + \hat{AEC} = 180^\circ$	มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมรวมกันได้ 180°
2. $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$	กำหนดให้
3. $\hat{ABC} + \hat{AEC} = \hat{ABC} + \hat{ADC}$	ผลจากข้อ 1. และข้อ 2.
4. $\therefore \hat{AEC} = \hat{ADC}$	สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. $\therefore$ จุด E ทับ จุด D	มุมที่มีขนาดเท่ากันย่อมทับกันสนิท
6. $\therefore$ D อยู่บนเส้นรอบวง ซึ่งผ่านจุด A, B, C	ผลจากข้อ 5.
7. $\therefore$ จุด A, B, C และ D ร่วมวงกลมเดียวกัน	ผลจากข้อ 6.
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้	

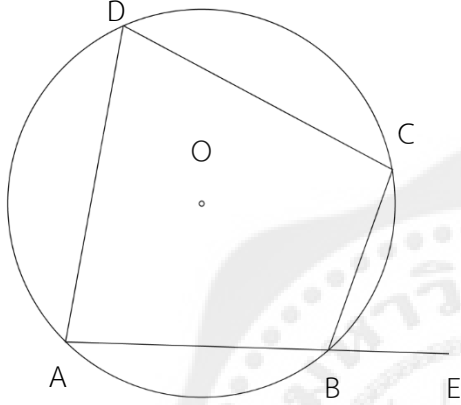
ตัวอย่างที่ 1 จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BP = DP$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{OP}$, $\overline{OD}$ และ $\overline{OB}$ - ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน - ความเท่ากันทุกประการ
ข้อความพิสูจน์	
1. พิจารณา $\triangle OPF$ และ $\triangle OPE$	
2. $\angle FPO = \angle EPO$	$\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$
3. $OF = OE$	ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
4. $OP = OP$	เป็นด้านร่วม
5. $\triangle OPF \cong \triangle OPE$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
6. $FP = EP$	ผลจากข้อ 5.
7. $OD = OB$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน
8. $\triangle FOD \cong \triangle EOB$	จากข้อ 2., 3. และ 7. เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
9. $DF = BE$	ผลจากข้อ 8.
10. $DF + FP = BE + EP$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
11. $DP = BP$	ผลจากข้อ 10.
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ แล้ว $BP = DP$	

ตัวอย่างที่ 2 $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BP = DP$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่เราสร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ และลาก $\overline{OP}$ - ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน - ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด - ความเท่ากันทุกประการ
ข้อความพิสูจน์	
1. พิจารณา $\triangle PFO$ และ $\triangle PEO$	
2. $\angle PFO = \angle PEO$	ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$
3. $FO = EO$	ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
4. $OP = OP$	เป็นด้านร่วม
5. $\triangle PFO \cong \triangle PEO$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน
6. $FP = EP$	ผลจากข้อ 5.
7. $FD = EB$	ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด
8. $FP - FD = EP - EB$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
9. $DP = BP$	ผลจากข้อ 8.
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P แล้ว $BP = DP$	

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\widehat{CBE} = \widehat{ADC}$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทางด้านจุด B ได้ $\overline{AE}$ - ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับสองมุมฉาก
ข้อความพิสูจน์	
1. $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180^\circ$	$\widehat{ABE}$ เป็นมุมตรง
2. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$	ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับสองมุมฉาก
3. $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC}$	สมบัติของการเท่ากัน
4. $\widehat{CBE} = \widehat{ADC}$	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น	

5. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 ใบกิจกรรมที่ 8 เรื่อง คอร์ด
- 3.2 ไม้บรรทัด ไม้โปรแทรกเตอร์
- 3.3 ใบงานที่ 8 เรื่อง คอร์ด

6. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นสร้างความสนใจ

- 4.1.1. ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนความรู้ ทฤษฎีบทที่เคยเรียนมาทั้งหมด

4.1.2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ 8

4.1.3. นักเรียนสังเกตสิ่งที่ได้ลงมือปฏิบัติไป จากนั้นใช้ความรู้เดิมที่มีมาประกอบในการสร้างข้อความคาดการณ์

4.1.4. นักเรียนแลกเปลี่ยนสิ่งที่ได้ค้นพบกับเพื่อนที่นั่งใกล้เคียงกัน หากมีประเด็นที่แตกต่างกัน

ครูจะให้เลือกนักเรียนออกมานำเสนอสิ่งที่ได้ค้นพบ จากนั้นนักเรียนแต่ละคนเขียนข้อความคาดการณ์ลงในใบกิจกรรมที่ 8

4.1.5. นักเรียนอภิปรายข้อความคาดการณ์ที่ได้ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดและจุดศูนย์กลางของวงกลม

4.1.6. ครูใช้คำถามกระตุ้นว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้มาจะเป็นจริงสำหรับกรณีทั่วไปหรือไม่ ถ้าต้องการรู้ว่าเป็นจริงสำหรับทุกกรณีจะต้องทำอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า พิสูจน์]

4.2 ขั้นสำรวจค้นคว้า

4.2.1. ครูอธิบายว่าในการที่จะแสดงว่าข้อความคาดการณ์ข้างต้นเป็นจริงสำหรับทุกกรณีหรือไม่

จะต้องแสดงการพิสูจน์

4.2.2. จากนั้นครูอธิบายการพิสูจน์ด้วยกระบวนการสืบสวนสอบสวนโดยแสดงกระบวนการประกอบการอธิบายเป็นตัวอย่าง ซึ่งขั้นตอนในการพิสูจน์ ขั้นแรกเราจะต้องทำความเข้าใจสิ่งที่จะทำการพิสูจน์ก่อนว่าต้องการพิสูจน์อะไร ทราบอะไรจากสิ่งที่กำหนดมาให้บ้าง เขียนเป็นภาพประกอบการพิสูจน์ จากนั้น สำรวจความรู้เดิม ดึงเอาความรู้ ทฤษฎี กฎต่าง ๆ ที่เคยเรียนมาแล้วมาประกอบประกอบการพิสูจน์

4.2.3. ครูแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์โดยใช้กระบวนการสืบสวนสอบสวน ด้วยการ

คำถามกระตุ้นดังนี้

- สิ่งที่เราต้องการจะพิสูจน์คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน]

- หากกำหนดให้ O และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 2 วงที่เท่ากัน $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดของวงกลม O และ P ตามลำดับ ทำให้ $AB = CD$ ลาก $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ ที่จุด Q และลาก $\overline{PR} \perp \overline{CD}$ ที่จุด R แล้ว OQ และ PR สัมพันธ์กันอย่างไร

- ครูให้เวลานักเรียนประมาณ 2 - 3 นาที ในการค้นหาวิธีการเพื่อแสดงว่า $OQ = PR$
- เราทราบข้อมูลอะไรเพิ่มเติมบ้าง หรือเขียนเป็นภาพประกอบการพิสูจน์ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{PC}$ เพื่อแสดงว่า $OQ = PR$]

- จากนั้น จะนำความรู้เรื่องใด มาใช้ประกอบการพิสูจน์ เพื่อสรุปให้ได้ว่า $OQ = PR$

[นักเรียนควรตอบว่า ความเท่ากันทุกประการ]

- จากรูป พบว่าข้อมูลใดสัมพันธ์กันบ้าง อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า 1. $AB = CD$ กำหนดให้

$$2. \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \text{ สมบัติการคูณ}$$

$$3. AQ = CR$$

$$4. AO = CP \text{ รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน}$$

$$5. \angle A Q O = \angle C R P \text{ เพราะ } \overline{OQ} \perp \overline{AB} \text{ และ } \overline{PR} \perp \overline{CD}$$

$$6. \triangle A O Q \cong \triangle C P R \text{ เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน}$$

$$7. \text{ดังนั้น } OQ = PR$$

จึงสรุปได้ว่า ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน

แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน]

4.3 ขั้นตอนอธิบายและลงข้อสรุป

4.3.1. นักเรียนเขียนแสดงการพิสูจน์และข้อสรุปลงในตารางพิสูจน์ จากนั้น ครูสรุปว่า ข้อความ

คาดการณ์ดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุกกรณี และจากการพิสูจน์ข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทเพื่อใช้อ้างอิงประกอบการพิสูจน์ต่อไป

4.4 ขันขยายความรู้

4.4.1. ครูกำหนดเงื่อนไขว่าถ้าเราทราบว่าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็น

ระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากันหรือไม่

[นักเรียนร่วมกันอภิปราย]

4.4.2. จากนั้นให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริงทุกกรณีหรือไม่ โดยครูคอยให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนเกิดข้อสงสัยในการแสดงการพิสูจน์

4.4.3. ครูและนักเรียนอภิปรายผลการพิสูจน์ร่วมกัน จากนั้นครูสรุปว่าข้อความที่พิสูจน์นั้นคือทฤษฎีบท 12.2

4.4.4. ครูให้นักเรียนสังเกตลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

4.4.5. จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

4.4.6. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่ม 4-5 คน จากนั้น ทำกิจกรรม เรื่อง สร้างรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมพร้อมทั้งสร้างข้อความคาดการณ์

4.4.7. ครูให้นักเรียนพิจารณาข้อความคาดการณ์ที่ว่า “ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาด

ของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมได้”

4.4.8. จากนั้นนักเรียนแสดงการพิสูจน์โดยจะต้องทำความเข้าใจข้อความที่ต้องการพิสูจน์ก่อน

วางแผนและสำรวจค้นคว้า นำทฤษฎีบทดังกล่าวรวมถึงทฤษฎีบททางเรขาคณิตอื่น ๆ ที่เคยเรียนมาแล้ว มาใช้ประกอบการพิสูจน์

4.4.9 ครูและนักเรียนอภิปรายผลการพิสูจน์ร่วมกัน จากนั้นครูสรุปว่าข้อความที่พิสูจน์นั้นคือ

ทฤษฎีบท 13

4.4.10 นักเรียนทำใบงานที่ 8

4.5 ขั้นประเมินผล

4.5.1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนประเมินสิ่งที่ตนได้เรียนรู้/ลงมือปฏิบัติไปในคาบนี้ ดังนี้

- ทฤษฎีบทที่ 12 มีใจความสำคัญว่าอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า

1. ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

2. ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน]

- ทฤษฎีบทที่ 13 มีใจความสำคัญว่าอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมได้]

- ขั้นตอนในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีวิธีการอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ เขียนภาพประกอบการพิสูจน์ อาจมีการสร้างเพื่อการพิสูจน์เพิ่มเติม สืบค้นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องที่อาจจะนำมาใช้ประกอบการพิสูจน์ เรียบเรียงลำดับการพิสูจน์ จากนั้นเขียนแสดงการพิสูจน์]

4.5.2. ครูประเมินความสามารถในการเขียนพิสูจน์ของนักเรียนจากใบงาน

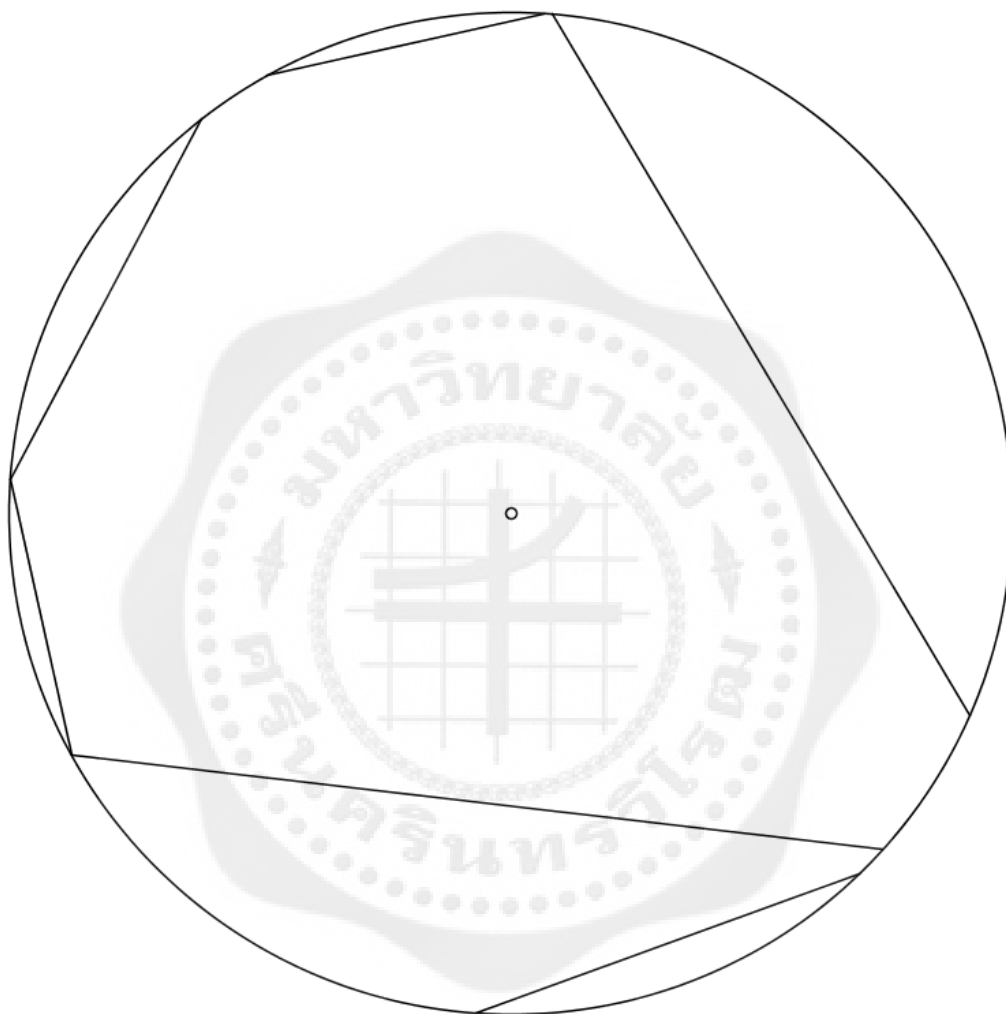
5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดผลและ ประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
1. นำสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดและ จุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ ประกอบการพิสูจน์ได้ 2. นำสมบัติเกี่ยวกับรูป สี่เหลี่ยมแนบในวงกลมไปใช้ ประกอบการพิสูจน์ได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาจากการเขียนแสดง การพิสูจน์ ในใบงานที่ 8 เรื่อง คอร์ด <u>เครื่องมือวัดผล :</u> ใบงานที่ 8 เรื่อง คอร์ด จำนวน 3 ข้อ	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> พิจารณาจากเกณฑ์การให้ คะแนนดังแนบไว้ท้ายแผนการ จัดการเรียนรู้ <u>เกณฑ์การประเมินผล :</u> ถ้านักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 50% ของคะแนนรวมขึ้นไป ถือว่าผ่าน

ใบกิจกรรมที่ 8

1. ให้นักเรียนหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังคอร์ดแต่ละเส้น จากนั้นสังเกตความสัมพันธ์



ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปที่สร้าง

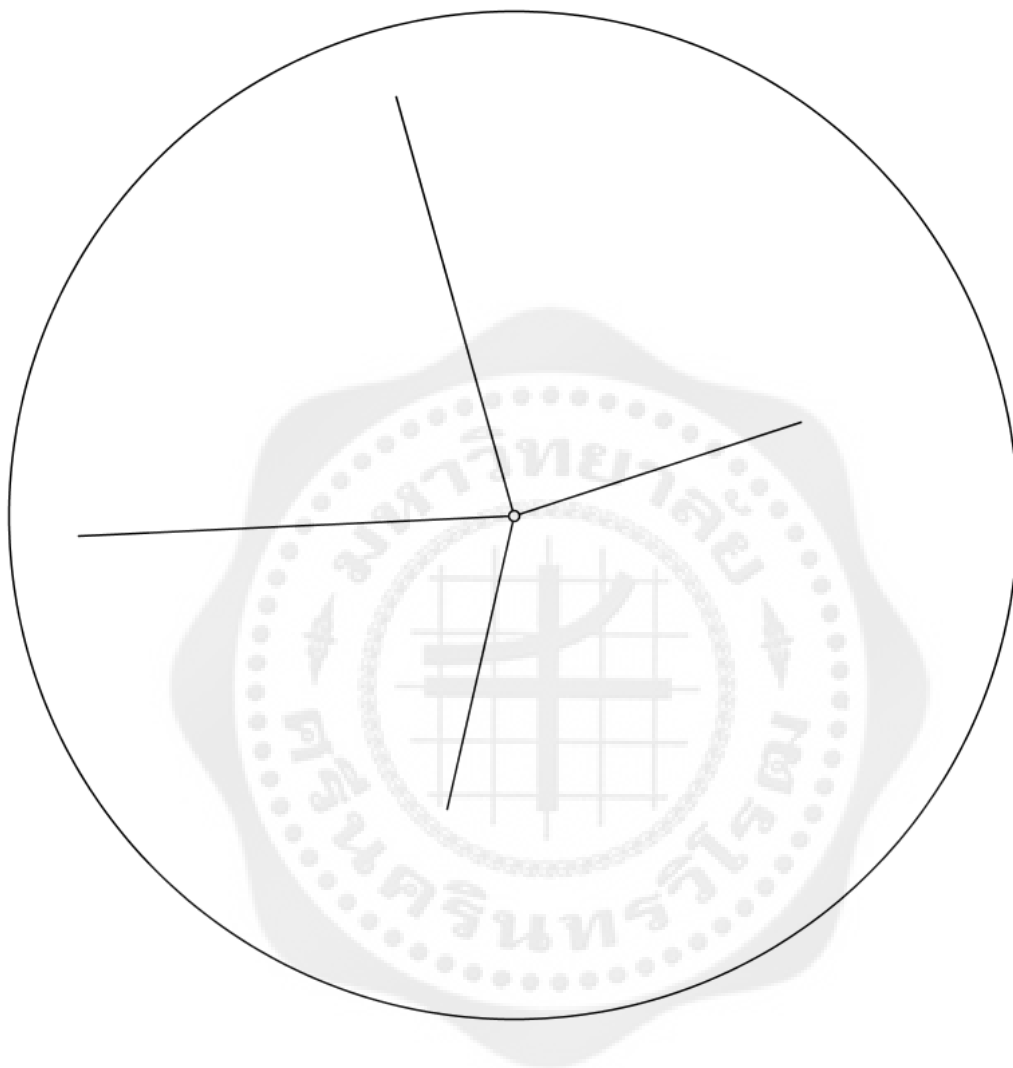
.....

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนสร้างคอร์ดที่ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางที่กำหนดให้ จากนั้นสังเกตความสัมพันธ์



ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปที่สร้าง

.....

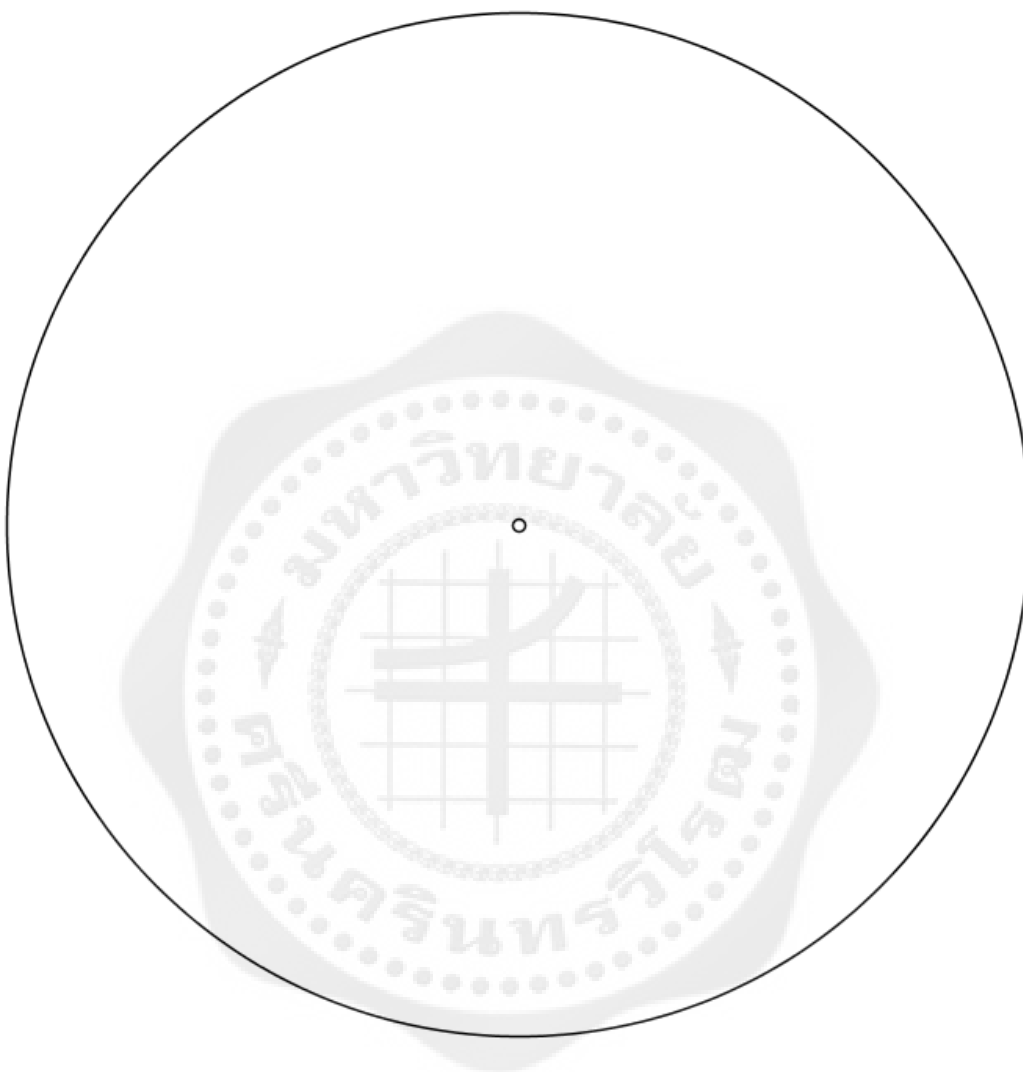
.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 8.1

ให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมตามความเข้าใจ



ให้นักเรียนสังเกตและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมที่สร้างขึ้น

.....

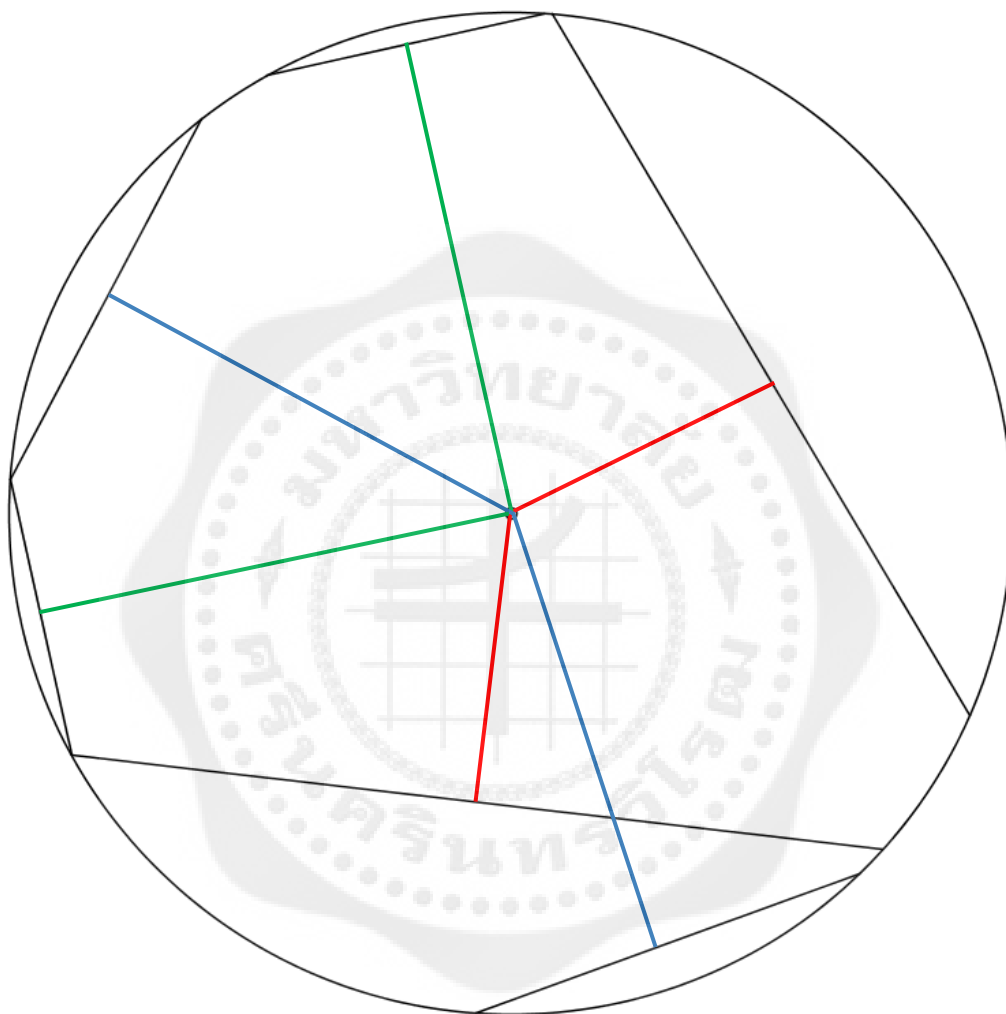
.....

.....

.....

เฉลยใบกิจกรรมที่ 8

1. ให้นักเรียนหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังคอร์ดแต่ละเส้น จากนั้นสังเกตความสัมพันธ์

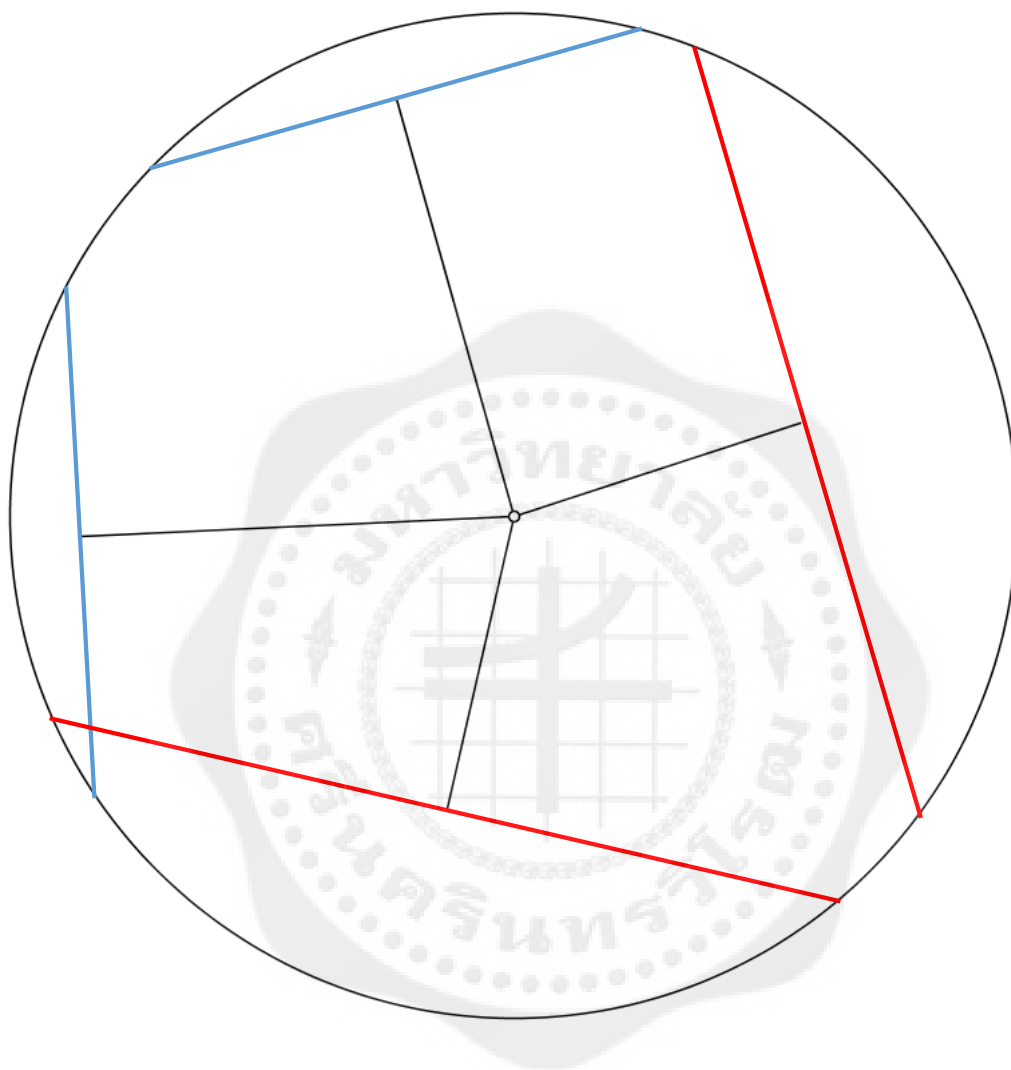


ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปที่สร้าง

.....
 ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจาก

 จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน

2. ให้นักเรียนสร้างคอร์ดที่ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางที่กำหนดให้ จากนั้นสังเกตความสัมพันธ์



ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปที่สร้าง

ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน.....

แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

.....

.....

ใบงานที่ 8

จงแสดงการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยละเอียด

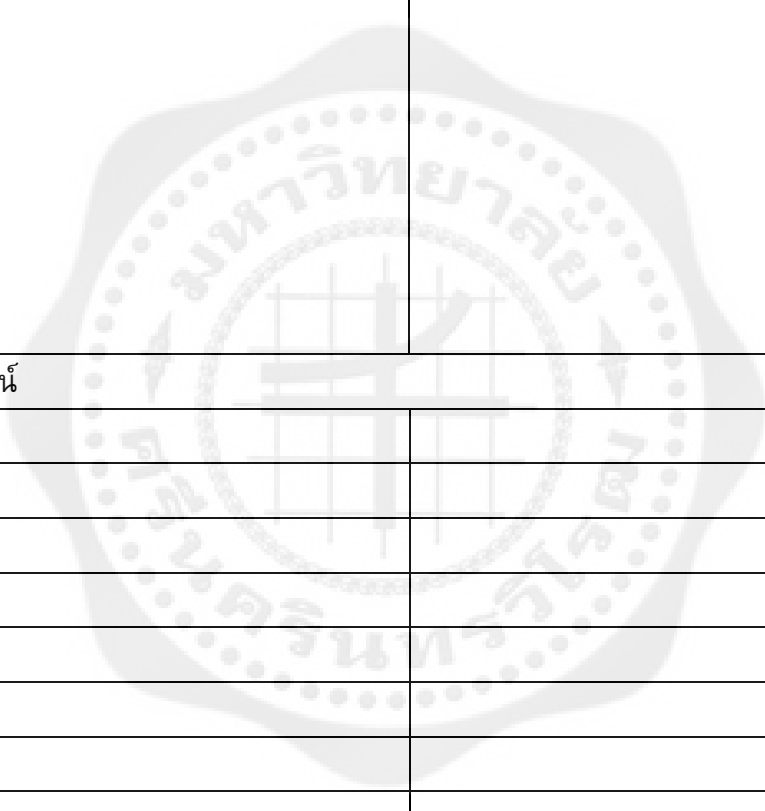
- 1 จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$
- พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้																									
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์																									
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำไปใช้																								
ข้อความพิสูจน์ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="height: 20px;"></td><td style="height: 20px;"></td></tr> </table>																									
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์																									

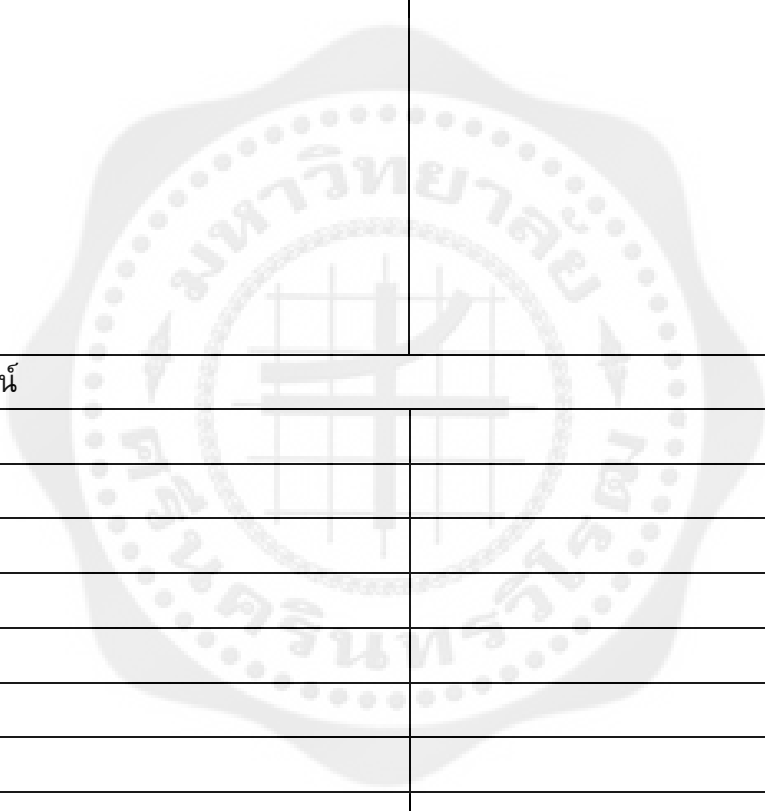
2 $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P

จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำไปใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

3 จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำไปใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

เฉลยใบงานที่ 8

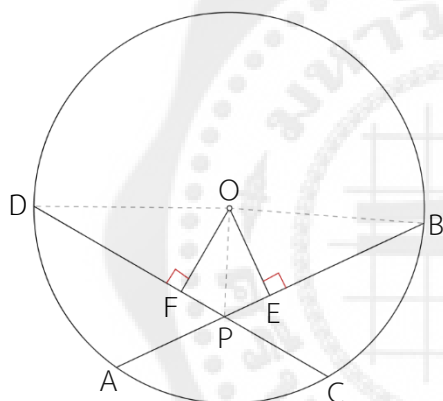
จงแสดงการพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยละเอียด

- 1 จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$
- พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BP = DP$

จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้



สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้

- ลาก $\overline{OP}$, $\overline{OD}$ และ $\overline{OB}$
- ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
- ความเท่ากันทุกประการ

ข้อความพิสูจน์

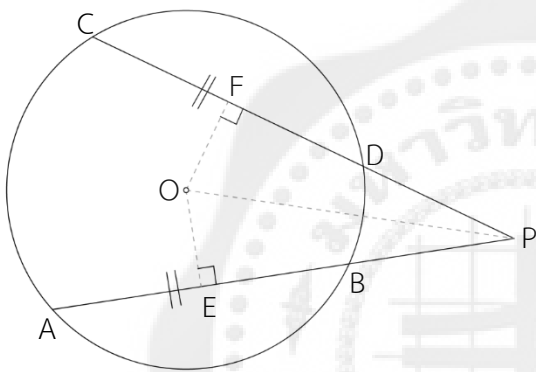
1. พิจารณา $\triangle OPF$ และ $\triangle OPE$	
2. $\angle PFO = \angle PEO$	$\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$
3. $OF = OE$	ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
4. $OP = OP$	เป็นด้านร่วม
5. $\triangle OPF \cong \triangle OPE$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
6. $FP = EP$	ผลจากข้อ 5.
7. $OD = OB$	รัศมีของวงกลมเดียวกัน

8. $\triangle FOD \cong \triangle EOB$	จากข้อ 2., 3. และ 7. เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน
9. $DF = BE$	ผลจากข้อ 8.
10. $DF + FP = BE + EP$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
11. $DP = BP$	ผลจากข้อ 10.

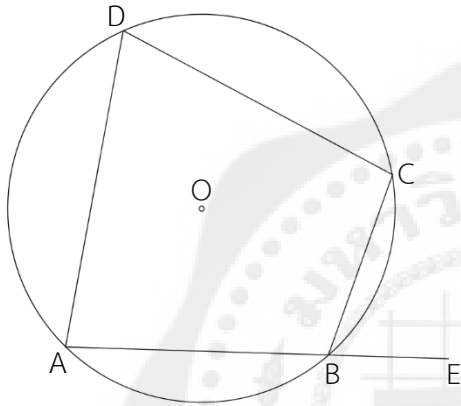
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และตัดกันที่จุด P ลาก $\overline{OE}$ และ $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ แล้ว $BP = DP$



2 $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P
จงพิสูจน์ว่า $BP = DP$
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $BP = DP$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ที่จุด E และจุด F ตามลำดับ และลาก $\overline{OP}$ - ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน - ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด - ความเท่ากันทุกประการ
ข้อความพิสูจน์	
1. พิจารณา $\triangle PFO$ และ $\triangle PEO$	
2. $\angle PFO = \angle PEO$	ลาก $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$
3. $FO = EO$	ในวงกลมวงหนึ่ง ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
4. $OP = OP$	เป็นด้านร่วม
5. $\triangle PFO \cong \triangle PEO$	เท่ากันทุกประการแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน
6. $FP = EP$	ผลจากข้อ 5.
7. $FD = EB$	ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด
8. $FP - FD = EP - EB$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
9. $DP = BP$	ผลจากข้อ 8.
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน และไม่ขนานกัน ต่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ไปตัดกันที่จุด P แล้ว $BP = DP$	

3 จงพิสูจน์ว่าถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\widehat{CBE} = \widehat{ADC}$	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้ 	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้ - ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทางด้านจุด B ได้ $\overline{AE}$ - ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับสองมุมฉาก
ข้อความพิสูจน์	
1. $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180^\circ$	$\widehat{ABE}$ เป็นมุมตรง
2. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$	ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับสองมุมฉาก
3. $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC}$	สมบัติของการเท่ากัน
4. $\widehat{CBE} = \widehat{ADC}$	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น	



ภาคผนวก ง

แบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

แบบทดสอบก่อนเรียน วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2560

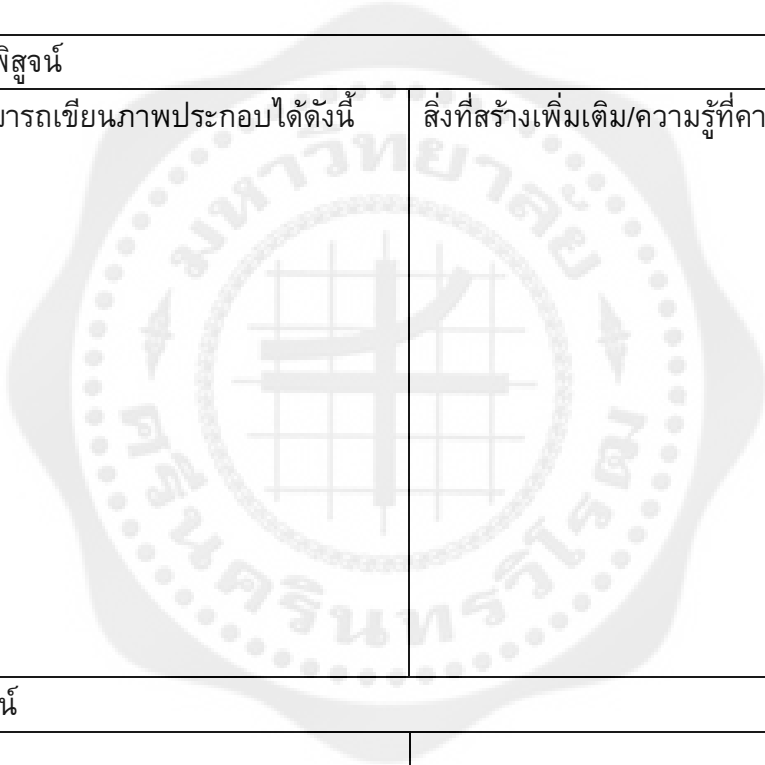
เรื่อง การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เวลาในการสอบ 50 นาที

1. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ จงพิสูจน์ว่า

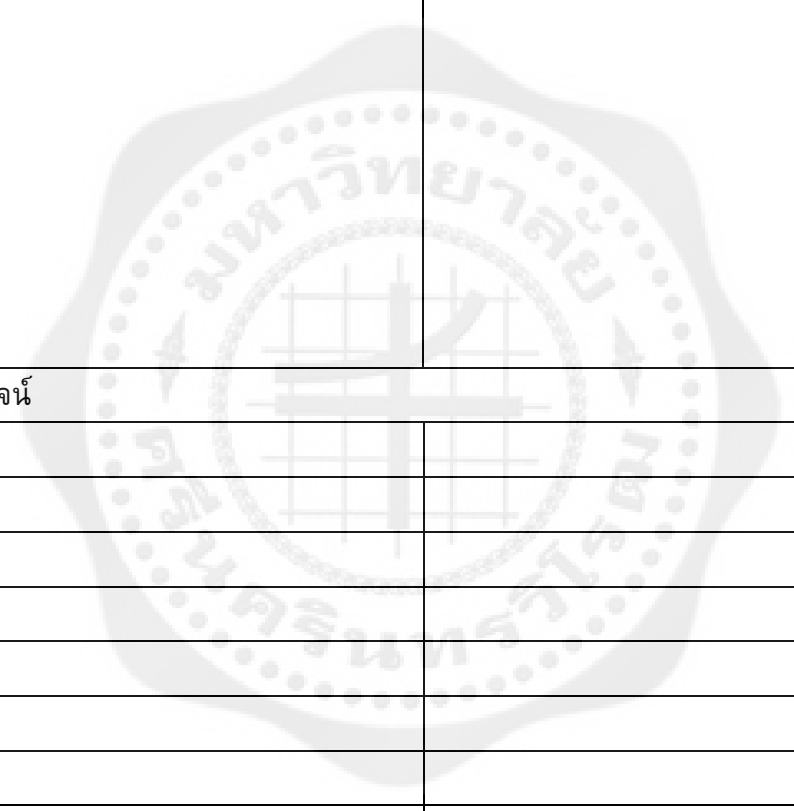
$$\triangle ADM \cong \triangle BCM$$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

2. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงพิสูจน์ว่า $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

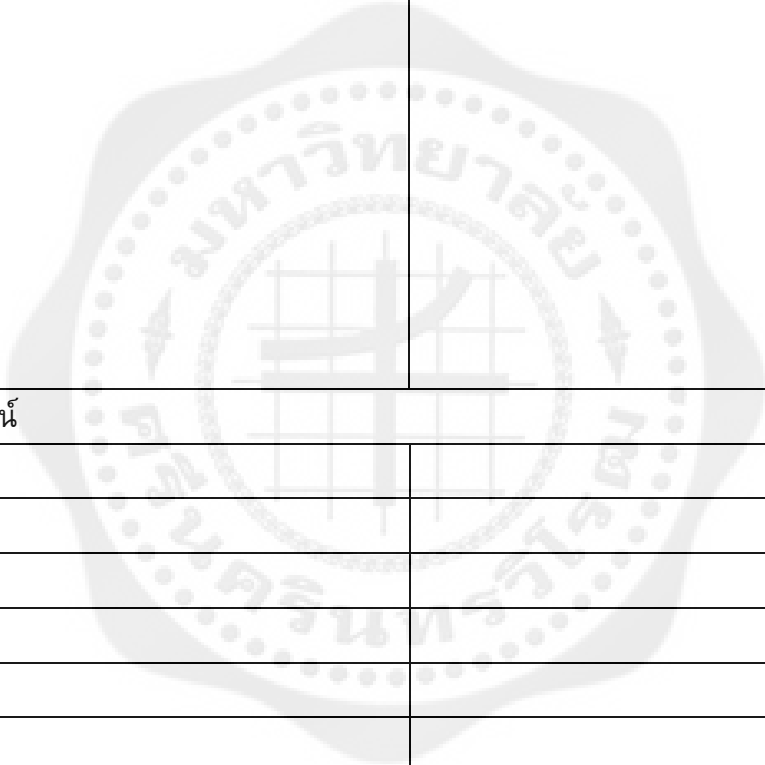
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

3. กำหนดให้ จุด C เป็นจุดบน $\overline{BE}$ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ และ $AB = DC$ จงพิสูจน์ว่า

$$\triangle ABC \cong \triangle DCE$$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

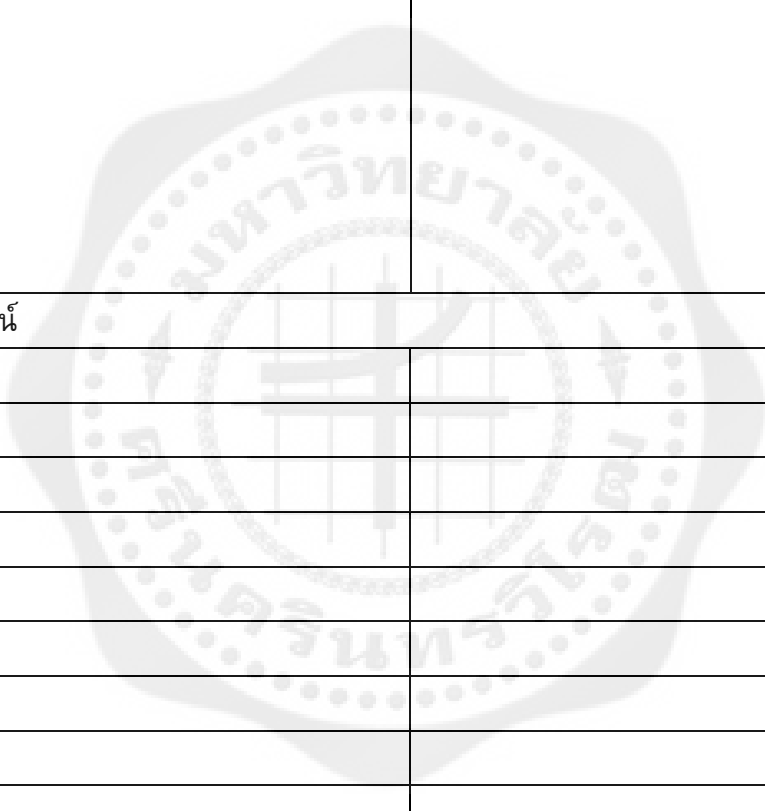
4. จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AC = BC$, $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BD}$ เกิดจากการต่อ $\overrightarrow{BC}$ ไปทางด้าน C จงพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{CE}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{ACD}$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

5. จงพิสูจน์ว่า มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

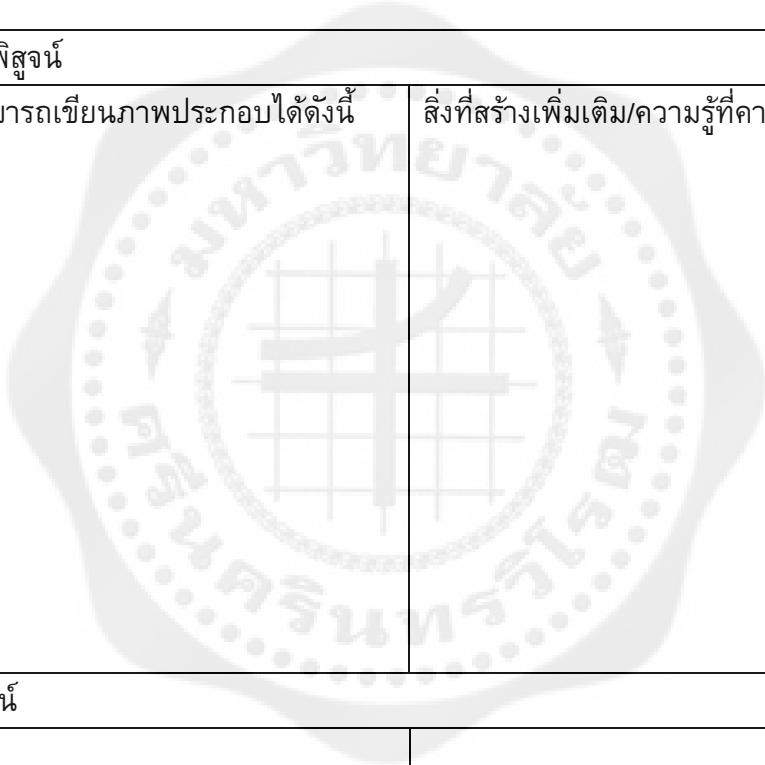
แบบทดสอบหลังเรียน วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2560

เรื่อง การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

เวลาในการสอบ 50 นาที

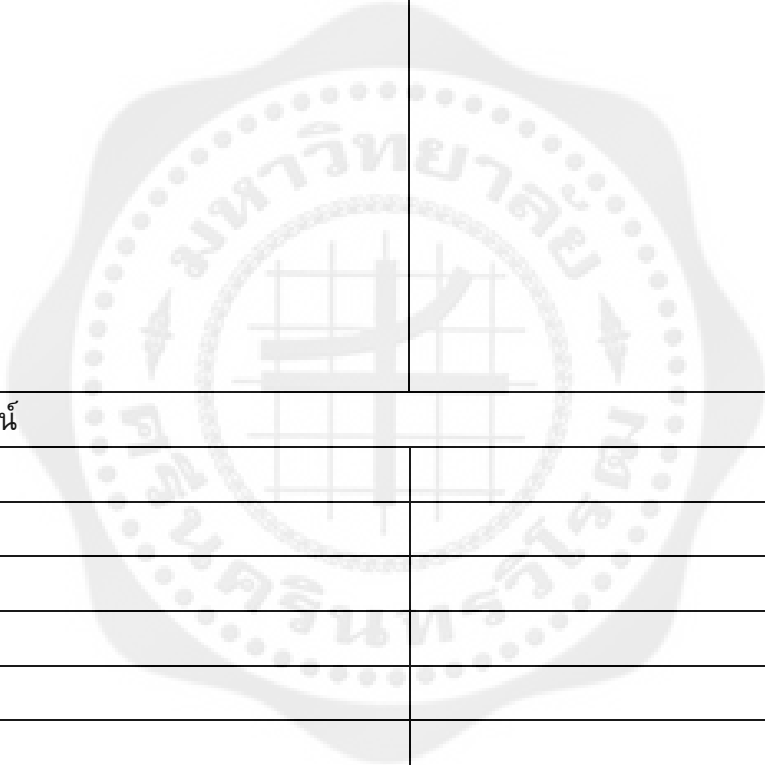
1. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ บรรจุในวงกลม ถ้าออร์ด AD แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

2. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด A และเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด B ขนานกัน

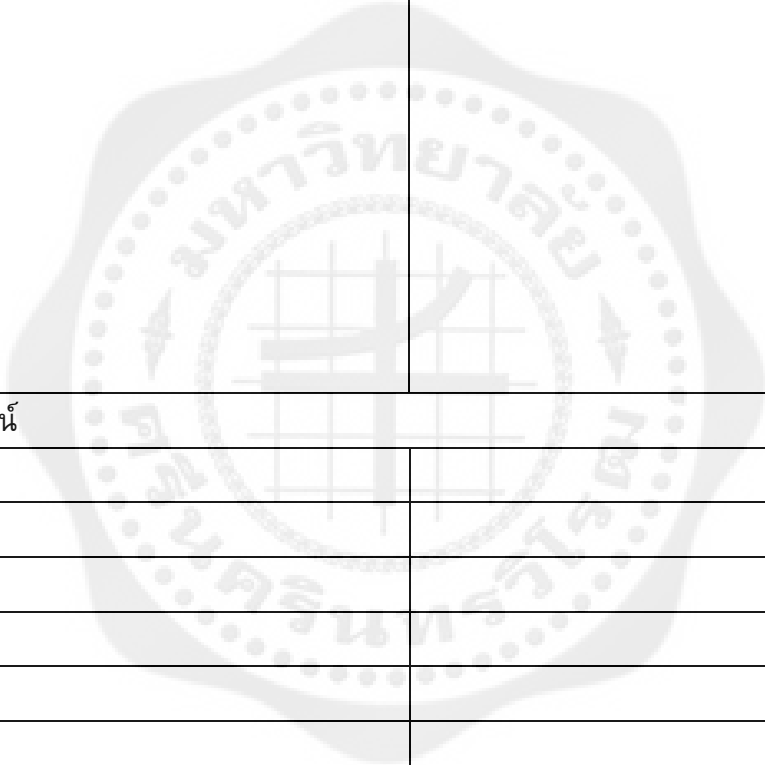
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

3. $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O มี $\overline{PQ}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด T ลาก $\overline{AC} \perp \overline{PQ}$

จงพิสูจน์ว่า $\widehat{CAT} = \widehat{BAT}$

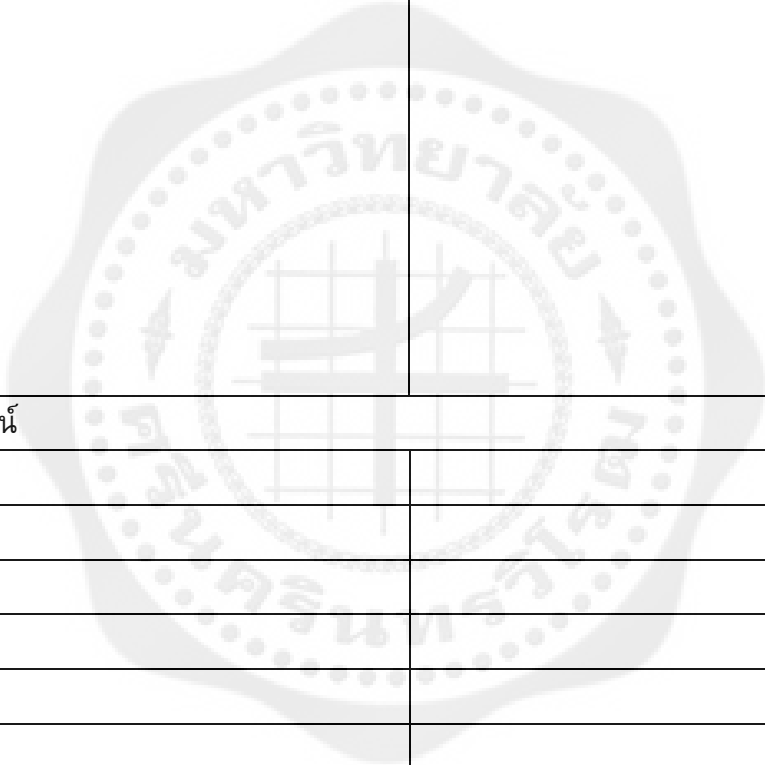
พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

4. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ บรรจุในวงกลม จุด D เป็นจุดใด ๆ บน BAC จงพิสูจน์ว่า

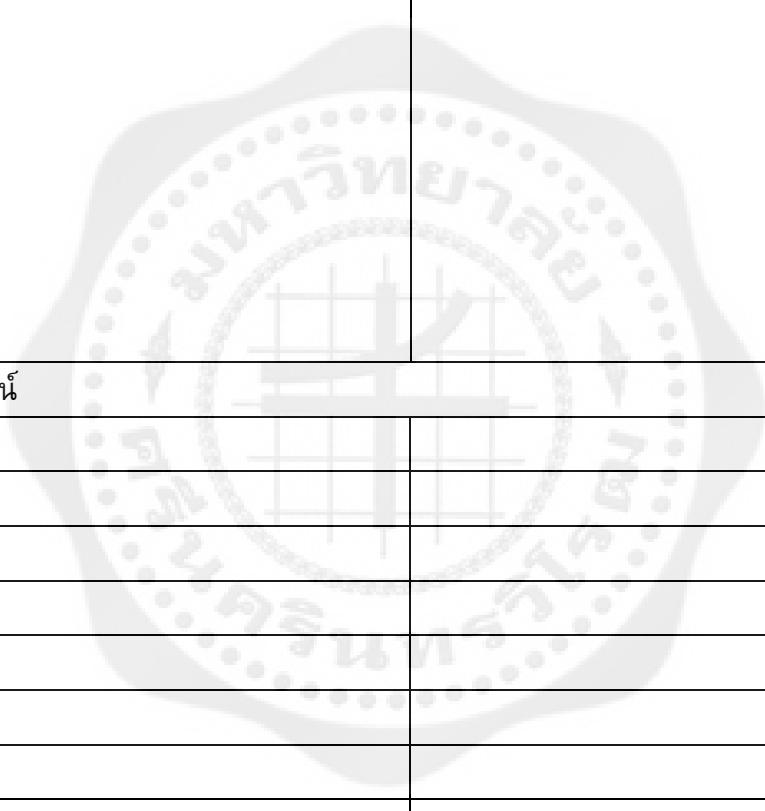
$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{CBD} + \widehat{BCD}$$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	

5. $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{OE}$ แบ่งครึ่งคอร์ด AC ที่จุด E
จงพิสูจน์ว่า $\angle AOE = \angle OCB$

พิสูจน์

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	
จากโจทย์สามารถเขียนภาพประกอบได้ดังนี้	สิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำมาใช้
	
ข้อความพิสูจน์	
สิ่งที่ได้จากการพิสูจน์	



ภาคผนวก จ

แบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

แบบสัมภาษณ์กระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนเป้าหมาย

ชื่อนักเรียน.....

วันที่ เวลา

แบบสัมภาษณ์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง โดยใช้คำถามปลายเปิด เพื่อดึงข้อมูลเชิงลึกจากกลุ่มตัวอย่างว่ามีการดึงความรู้ ใช้วิธีการสืบสวนสอบสวนในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

โดยมีแนวคำถามดังนี้

1. ในขั้นระบุสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ สิ่งที่กำหนดมาให้ นักเรียนปฏิบัติอะไรไปบ้าง

.....

.....

.....

2. ในขั้นสร้างเพื่อการพิสูจน์ นักเรียนปฏิบัติอะไรไปบ้าง

.....

.....

.....

3. ในขั้นเขียนสิ่งที่สร้างเพิ่มเติม/ความรู้ที่คาดว่าจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ นักเรียนปฏิบัติอะไรไปบ้าง

.....

.....

.....

4. ในขั้นเขียนแสดงการพิสูจน์ นักเรียนปฏิบัติอะไรไปบ้าง

.....

.....

.....

5. ในขั้นเขียนสรุปการพิสูจน์ นักเรียนปฏิบัติอะไรไปบ้าง

.....

.....

.....



ภาคผนวก จ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนเรื่องวงกลม และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีดังนี้

1. อาจารย์ เอนก จันทระจัญญ

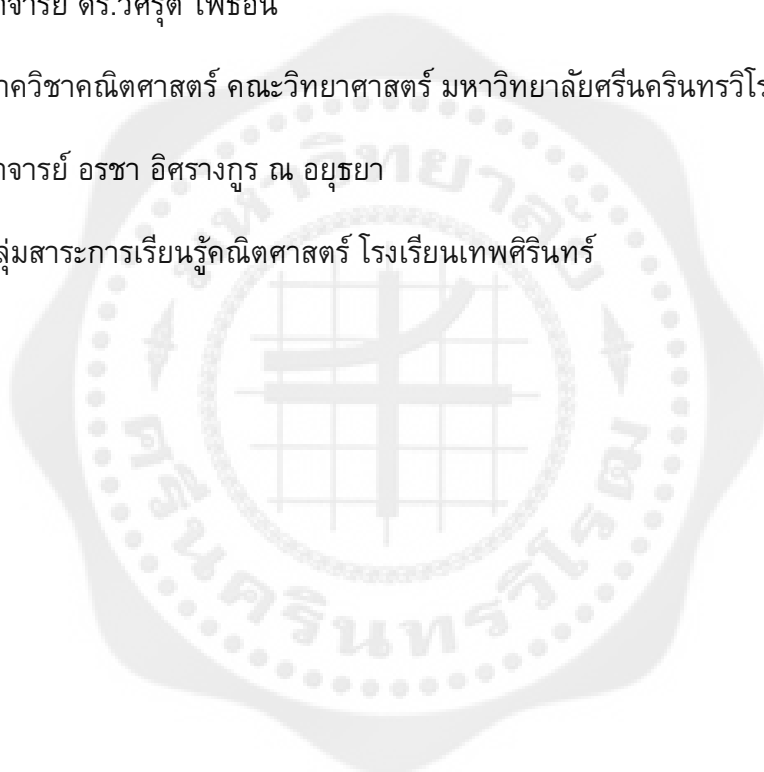
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์ ดร.วิศรุต โพธิ์อ้น

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. อาจารย์ อรชา อิศรางกูร ณ อยุธยา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทพศิรินทร์





ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายเสฏฐวุฒิ เฟื่องเจริญ
วันเดือนปีเกิด	3 กันยายน 2535
สถานที่เกิด	อำเภอเกาะสมุย จังหวัดสุราษฎร์ธานี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	38/2 หมู่ 2 ตำบลอ่างทอง อำเภอเกาะสมุย จังหวัดสุราษฎร์ธานี 84140
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2554	มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
พ.ศ. 2559	ปริญญาการศึกษาบัณฑิต (กศ.บ.) (เกียรตินิยมอันดับ 1) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2561	ปริญญาการศึกษาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ