

๑๕/๑๑/๒๕๓๕
๑๖/๑๑/๒๕๓๕
๑๗/๑๑/๒๕๓๕

ผลงานการระดับและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง

ปริญญาโท

ของ

สุทธิพงษ์ เสงี่ยมเกียรติกุล

ห้องสมุดอิเล็กทรอนิกส์

๒๕๓๕

๑๑ พ.ค. ๒๕๓๕

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กันยายน ๒๕๒๘

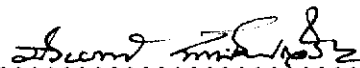
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

178669

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิต และคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้
แล้ว เห็นสมควรรับ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

..... สัทกัณท์ บกั๊ณ ประธาน

.....  กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

..... สัทกัณท์ บกั๊ณ ประธาน

.....  กรรมการ

.....  กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ก็เพราะได้รับการควบคุมดูแลเป็นอย่างดีจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน ตลอดจนได้รับการอนุเคราะห์จาก รองศาสตราจารย์ ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร. ชัยวัฒน์ ตูประตกุล ในการเป็นกรรมการตรวจสอบ ปริญญานิพนธ์ ซึ่งข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณไว้เป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณ อาจารย์วิภา วิฑูวงศ์ หัวหน้าหมวดวิทยาศาสตร์ โรงเรียนสตรีศรีกระสัง ที่ให้การสนับสนุนการศึกษาค้นคว้าของข้าพเจ้า อาจารย์ศิริบุษ เกียนรุ่งโรจน์ และ คุณวิศาล จิตต์วาริน ที่ให้คำปรึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และ คุณรุ่งลาภวรรณ เขวงเกียรติกุล ที่ให้ความช่วยเหลือด้านการพิมพ์มาโดยตลอด

ท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบเท้าขอบพระคุณบิดามารดาที่เป็นขวัญและกำลังใจในการศึกษาของข้าพเจ้า

สุทธิพงษ์ เขวงเกียรติกุล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
สมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์	2
สมบัติเชิงไฟฟ้า	4
สมบัติเชิงแม่เหล็ก	4
พลังงานกระตุ้นของอีเล็กตรอน	6
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
ปัญหาและจุดมุ่งหมายของการวิจัย	13
ขอบเขตของการวิจัย	15
นิยามศัพท์เฉพาะ	15
3 วิธีการวิจัย	17
จำนวนพลังงานกระตุ้นในกรณี $l \neq 0$ หรือ $l \geq 1$	22
จำนวนพลังงานกระตุ้นในกรณี $l = 0$	35
ความหนาแน่นสถานะ	48
4 ผลการวิจัย	54
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	62
สรุปผลการวิจัย	62
อภิปรายผล	63
ความสำคัญของการวิจัย	64
ข้อเสนอแนะ	64
บรรณานุกรม	66
ภาคผนวก	67

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงธาตุต่าง ๆ ที่สามารถเป็นและไม่ใช่ตัวนำยิ่งยวด	1
2 แสดงความร้อนจำเพาะต่ออะตอม (C) ในตัวนำยิ่งยวดเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็ก เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T)	3
3 แสดงพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวด F_S และของโลหะปกติ F_N เป็นฟังก์ชัน ของอุณหภูมิ (T)	3
4 แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะปกติบริสุทธิ์และตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ เป็น ฟังก์ชันของอุณหภูมิ (ก) แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะปกติบริสุทธิ์ดังสมการ $\rho(T) = \rho_0 + BT^5$ โดยที่ ρ เป็นสภาพต้านทานไฟฟ้าที่อุณหภูมิ T ไต ๆ ρ_0 และ B เป็นค่าคงที่	4
(ข) แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์เมื่อ $T \leq T_C$ จะได้ $\rho = 0$	4
5 แสดงความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤตเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ	5
6 แสดงการบิดเบือนของสนามแม่เหล็กรอบตัวนำยิ่งยวด ถ้าสนามนี้ไม่รุนแรง ตัวนำยิ่งยวดจะผลักเส้นแรงออกอย่างสมบูรณ์	6
7 แสดงความหนาแน่นสถานะในสเปกตรัมของพลังงาน E และพลังงานของ สถานะวัดจากพลังงานเฟอร์มี E_F	7
8 แสดงโลหะปกติ (N) รูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ (S).	9
9 แสดงพลังงานกระตุ้นสำหรับสถานะที่ $\ell = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$ ภาพนี้แสดงให้เห็นถึงแถบพลังงานทั้ง 4 แถบซึ่งได้จากการ แก้สมการ (2.9) หาค่า ϵ โดยมี $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$	12

- 10 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_0}$
- (ก) ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้คือ $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แลพพลังงาน
แถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.390$ 13
- (ข) ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้คือ $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แลพพลังงาน
แถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.285$ และแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่
 $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.830$ 13
- 11 แสดงตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม (S_1) รัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง
(S_2) ที่มีขนาดใหญ่ 14
- 12 แสดงศักย์ของการจับคู่
- $$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} \Delta_1 & \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ใน } S_1 \\ \Delta_2 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ใน } S_2 \end{cases}$$
- ในกรณีนี้ในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (S_1) $\Delta_1 \neq 0$ และในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2
(S_2) $\Delta_2 \neq 0$ 14
- 13 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในสถานะ s ซึ่ง $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ
 $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ และ 0.8
เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของซูยและ
สเตราด์
- (ก) สำหรับแถบพลังงานแถบแรก 54
- (ข) สำหรับแถบพลังงานแถบที่สอง 55
- 14 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในสถานะ s ที่ $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ
 $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01
- (ก) สำหรับแถบพลังงานแถบแรก 56
- (ข) สำหรับแถบพลังงานแถบที่สอง 57

15 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน เป็นฟังก์ชันของ $\frac{E}{\Delta_2}$ โดยมี

$$k_F a = 300 \text{ และ } \frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01 \text{ เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัย}$$

นี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของซูยและสเตราด์

(ก) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = 0.390 \dots\dots$ 58

(ข) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = 0.647 \dots\dots$ 59

16 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน เป็นฟังก์ชันของ $\frac{E}{\Delta_2}$ โดยมี

$$k_F a = 450 \text{ และ } \frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01 \text{ เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัย}$$

นี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของซูยและสเตราด์

(ก) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = 0.285 \dots\dots$ 60

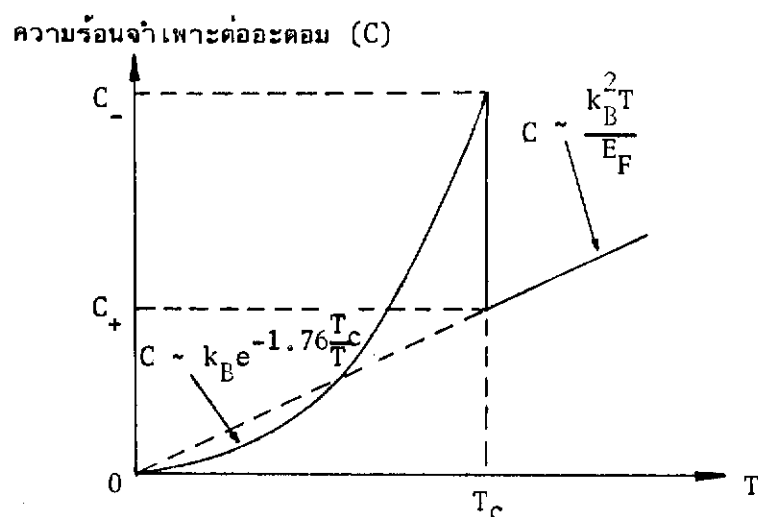
(ข) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = 0.566 \dots\dots$ 61

ปัจจุบันเราเชื่อว่าสาเหตุสำคัญที่ทำให้โลหะธรรมดากลายเป็นตัวนำยิ่งยวดคือการเกิดอันตรกิริยาแบบดึงดูด (attractive interaction) ระหว่างอิเล็กตรอน 2 ตัวโดยอาศัยโฟนอนเป็นสื่อ อิเล็กตรอนทั้งสองมีสปินและโมเมนตัมสวนทิศทางกัน คู่อิเล็กตรอนนี้เรียกว่าคูคูเปอร์ (Cooper pairs) (Tinkham, 1975 : 28) ทฤษฎีที่นับว่าประสบความสำเร็จในการอธิบายสมบัติโดยทั่วไปของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์คือทฤษฎีของบาร์ดีน คูเปอร์ และชรีเฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer, 1957 : 1175) ทฤษฎีนี้เรียกโดยย่อว่าทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ซึ่งวิเคราะห์หาเหตุผลโดยวิธีคำนวณ พบว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (electron - phonon interaction) เป็นกลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด ทั้งนี้พบว่าสอดคล้องกับข้อเสนอของฟร็อบลิช (Fröhlich, 1950 : 845)

สมบัติพื้นฐานที่สำคัญของตัวนำยิ่งยวดมีหลายประการ เช่น สมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ สมบัติเชิงไฟฟ้า สมบัติเชิงแม่เหล็กและพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน แต่ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็น สมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ (thermodynamic properties)

ความร้อนจำเพาะเป็นปริมาณที่แสดงอัตราการดูดกลืนหรือคายปริมาณความร้อนต่ออุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง จากการทดลองพบว่าที่อุณหภูมิวิกฤตความร้อนจำเพาะของตัวนำยิ่งยวดจะมีค่าไม่ต่อเนื่อง ดังภาพประกอบ 2

สำหรับพลังงานอิสระของสภาพตัวนำยิ่งยวด (F_S) นั้นเราสามารถคำนวณหาได้จากข้อมูลเกี่ยวกับความร้อนจำเพาะ ในภาพประกอบ 3 เส้นทึบแสดง F_S ส่วนเส้นประแสดงพลังงานอิสระของโลหะปกติ (F_N) ครึ่งที่เส้นโค้งทั้งสองสัมผัสกัน T ที่นั้นความชันเท่ากันอุณหภูมิ T ที่นั้นคืออุณหภูมิวิกฤต $T = T_C$ ครึ่งที่ $T = 0$ ผลต่างของ $F_N - F_S$ คือพลังงานความแน่นมีค่าประมาณ $\frac{(k_B T_C)^2}{E_F}$ โดยที่ E_F เป็นพลังงานเฟอร์มีของอิเล็กตรอนในโลหะปกติ โดยปกติแล้ว $E_F \approx 1 \text{ eV}$ และ $k_B T_C \approx 10^{-3} \text{ eV}$ ดังนั้นโดยประมาณแล้ว $\frac{k_B T_C}{E_F} \approx 10^{-3}$ % ของอิเล็กตรอนในโลหะปกติจะเปลี่ยนแปลงค่าพลังงานมากเมื่อโลหะปกติเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวด



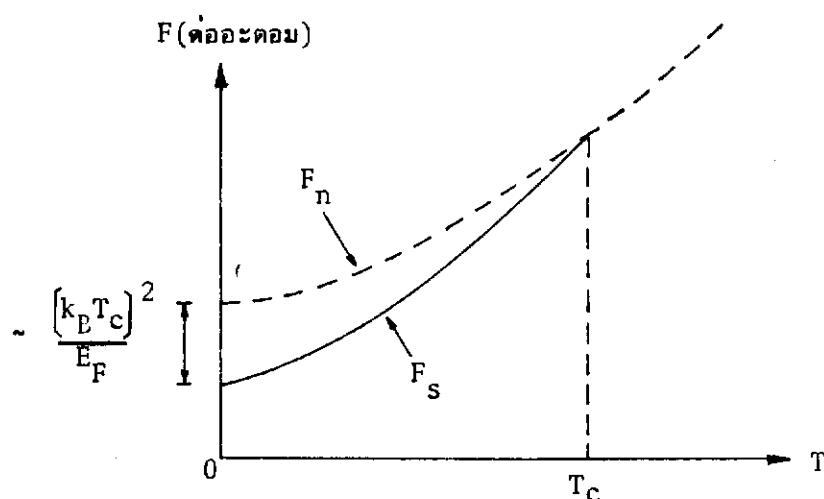
ภาพประกอบ 2 แสดงความร้อนจำเพาะต่ออะตอม (C) ในตัวนำยิ่งยวดเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็ก เป็น-

ฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T)

เมื่อ $T > T_c$ ในสถานะโลหะปกติ $C \sim \frac{k_B^2 T}{E_F}$ โดยที่ E_F เป็นพลังงานเฟอร์มี

เมื่อ $T = T_c$ คือที่อุณหภูมิวิกฤต C มีค่าไม่ต่อเนื่อง

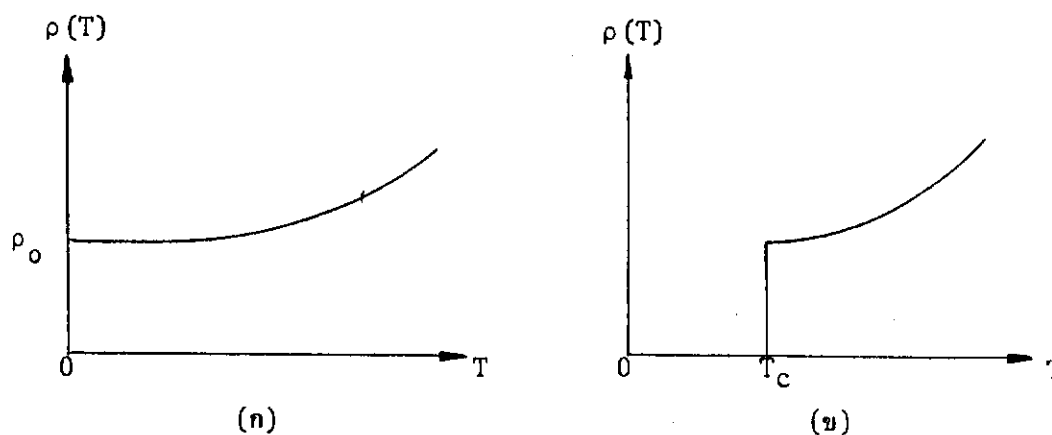
เมื่อ $T \ll T_c$ C ลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียล โดยที่ $C \sim k_B e^{-1.76 \frac{T_c}{T}}$



ภาพประกอบ 3 แสดงพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวด F_S และของโลหะปกติ F_N เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ T

สมบัติเชิงไฟฟ้า (electric properties)

สมบัติเชิงไฟฟ้านับว่าเป็นสมบัติที่เด่นที่สุดของตัวนำยิ่งยวดคือสภาพต้านทานไฟฟ้าของตัวนำยิ่งยวดมีค่าเป็นศูนย์ และเมื่อปล่อยให้กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำไหลในวงแหวนตัวนำยิ่งยวดนี้แล้วกระแสไฟฟ้านี้จะไหลอยู่เช่นนี้เรื่อยไปเป็นเวลานานนับเป็นปี ๆ เราเรียกกระแสไฟฟ้าที่ไหลอยู่เช่นนี้ตลอดไปว่ากระแส - ไฟฟ้ายิ่งยวด (supercurrent) สภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะปกติบริสุทธิ์และตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์มีลักษณะดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะปกติบริสุทธิ์และตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ

(ก) แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะปกติบริสุทธิ์ดังสมการ $\rho(T) = \rho_0 + BT^5$ โดยที่ ρ เป็นสภาพต้านทานไฟฟ้าที่อุณหภูมิ T ใด ๆ ρ_0 และ B เป็นค่าคงที่

(ข) แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้าของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์เมื่อ $T \leq T_c$ จะได้ $\rho = 0$

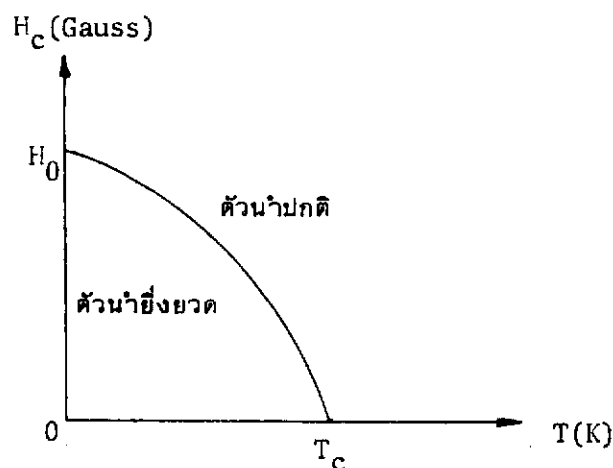
สมบัติเชิงแม่เหล็ก (magnetic properties)

อนเนสพบว่าสนามแม่เหล็กจากภายนอกที่มีความเข้มสูงสามารถบังคับให้ตัวนำยิ่งยวดกลับสภาพเป็นตัวนำปกติได้ สภาพตัวนำยิ่งยวดจะเกิดได้เฉพาะเมื่อสนามแม่เหล็กจากภายนอกมีค่าไม่เกินค่า ๆ หนึ่งเท่านั้น สนามแม่เหล็กนั้นคือสนามแม่เหล็กวิกฤต (critical magnetic field H_c) ค่า H_c ของสารหนึ่ง ๆ จะมีค่าได้ตั้งแต่ศูนย์ไปจนถึง H_0 โดยที่ H_0 เป็นสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิต่ำสุด

ไทน์ (Tuyn) ได้แสดงความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิไว้เรียกว่ากฎของไทน์

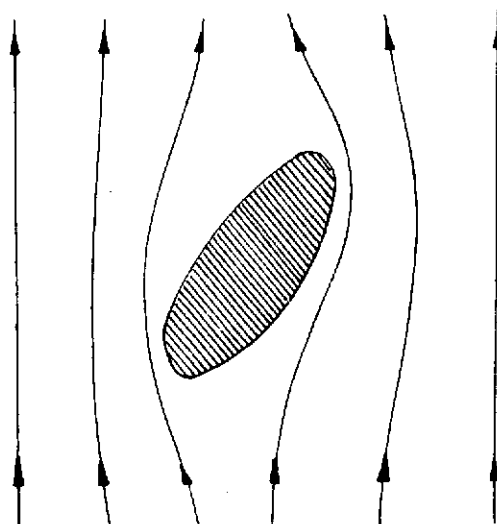
(Tuyn's law) ในปี ค.ศ.1924 (Blakemore, 1969 : 234 - 244) ว่า

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$



ภาพประกอบ 5 แสดงความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤต เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ

ไมสส์เนอร์และออกเซนเฟลด์ (Meissner and Ochsenfeld, 1933 : 787) ได้พบปรากฏการณ์นี้ก่อนไทน์จะคำนวณได้ เขาแสดงให้เห็นว่า ณ ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กภายนอกจะไม่สามารถพุ่งผ่านสารตัวนำยิ่งยวดได้ กล่าวคือสารนั้นจะผลักสนามแม่เหล็กให้เบนออกจากตัวนำยิ่งยวด ทำให้สารตัวนำยิ่งยวดมีสมบัติของสารแม่เหล็กไดอา (diamagnetic) เขายังอธิบายต่อไปอีกด้วยว่าสาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิวของสารตัวนำยิ่งยวดสร้างสนามแม่เหล็กต่อต้านการผ่านเข้ามาของเส้นแรงแม่เหล็กไว้ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์ (Meissner's effect) ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แสดงการบิดเบือนของสนามแม่เหล็กรอบตัวนำยิ่งยวด ถ้าสนามนี้ไม่รุนแรงตัวนำยิ่งยวด จะผลักเส้นแรงออกอย่างสมบูรณ์

พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน (excitation energy of electron)

จากการคำนวณโดยทฤษฎีบีซีเอสนั้นพบว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์มีค่าเป็น

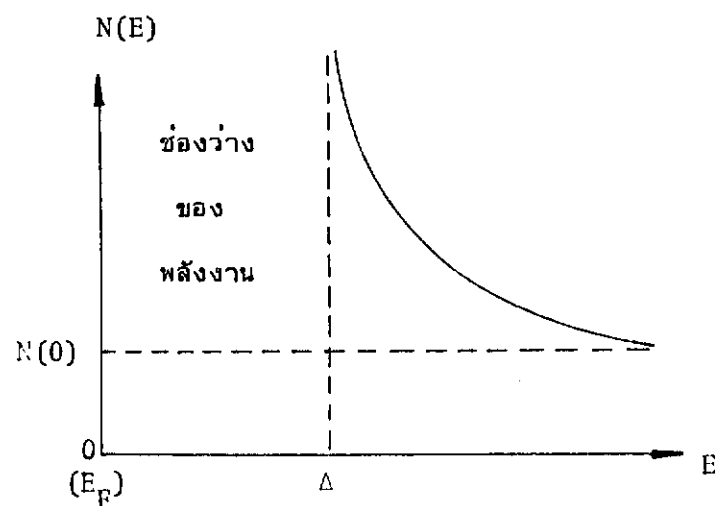
$$E_k = (\Delta^2 + \epsilon_k^2)^{1/2} \quad (1.2)$$

โดยที่ E_k เป็นพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม k ϵ_k เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม k และ Δ เป็นช่องว่างในแถบสเปกตรัมของพลังงานซึ่งมีค่าเป็น

$$\Delta \approx 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (1.3)$$

โดยที่ $\hbar\omega_D$ เป็นพลังงานเดบาย (Debye energy) $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะ (density of states) ที่ระดับพลังงานเฟอร์มี และ V เป็นศักย์ของอันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอน จากสมการ (1.2) เราจะเห็นว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ Δ ดังนั้นการทำให้คู่อิเล็กตรอนแยกจากกันจะต้องใช้พลังงานอย่างน้อยที่สุด 2Δ และตามทฤษฎีบีซีเอสนั้นพบว่าความหนาแน่นสถานะในสเปกตรัมของพลังงานคือ

$$\begin{aligned}
 N(E) &= \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dE} = N(0) \frac{d\epsilon}{dE} = \frac{N(0)}{dE/d\epsilon} \\
 &= \begin{cases} N(0) \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & \text{เมื่อ } E > \Delta \\ 0 & \text{เมื่อ } E < \Delta \end{cases} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

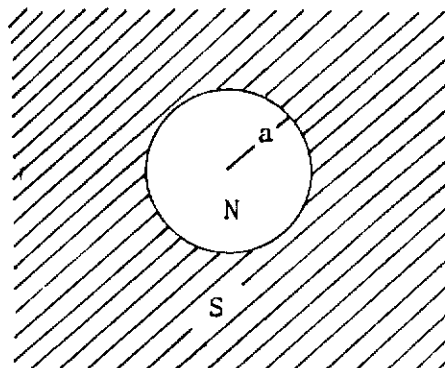


ภาพประกอบ 7 แสดงความหนาแน่นสถานะในสเปกตรัมของพลังงาน E และพลังงานของสถานะวัดจากพลังงานเฟอร์มี E_F

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1958 ไมสส์เนอร์ (Meissner. 1958 : 686) ได้ทำการทดลองเรื่องระบบ
ผสมระหว่างโลหะปกติ (N) กับตัวนำยิ่งยวด (S) พบว่าโลหะปกติที่ติดอยู่กับตัวนำยิ่งยวดกลายเป็น
ตัวนำยิ่งยวดได้ ที่เป็นเช่นนี้เพราะขณะที่โลหะปกติอยู่ติดกับตัวนำยิ่งยวดคู่เปอร์จะไหลจาก S ไปยัง N
และอิเล็กตรอนโคตเดี่ยวจะไหลจาก N ไปยัง S ซึ่งมีผลให้ N กลายเป็น S โดยการเหนี่ยวนำ เรา
เรียกปรากฏการณ์นี้ว่าพรอกซีมิตีเอฟเฟกต์ (proximity effect) หลังจากนั้นนักวิทยาศาสตร์ก็สนใจ
พรอกซีมิตีเอฟเฟกต์กันมากขึ้นทั้งทางด้านทฤษฎีและการทดลอง ดังเช่น สมิธและคนอื่น ๆ (Smith and
others. 1961 : 686) ได้วัดค่ากระแสไฟฟ้าและความต้านทานของจังก์ชัน (junction) ที่
ประกอบด้วย Pb - I - Ag - Pb พบว่าโลหะ N มีช่องว่างพลังงานเกิดขึ้น และยังพบอีกว่าช่องว่าง
พลังงานของสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งมีค่าขึ้นอยู่กับโลหะปกติที่อยู่ใกล้ เดอ เจนเนส (De Gennes.
1964 : 225) ได้แก้สมการโบโกลิบูอฟ (Bogoliubov equations) สำหรับพรอกซีมิตีเอฟเฟกต์
ในกรณีที่มี N มีความหนาแน่นมาก และหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบใน
การจับคู่ (order parameter) ใน N เขาได้พบเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมตรงรอยต่อของ N กับ
S แมคมิลแลน (Mc Millan. 1968 : 537) ได้ใช้แบบจำลองการทะลุทะลวง (Mc Millan
tunneling model MTM) คำนวณการส่งผ่านอิเล็กตรอนระหว่างรอยต่อของ N กับ S โดยสมมติว่า
ระหว่างรอยต่อนั้นมีกำแพงศักย์ และเพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้นแมคมิลแลนถือว่าพารามิเตอร์ความเป็น
ระเบียบของตัวนำเป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าคงที่และคำนวณค่าที่ต้องการแบบ เซลฟ์ - คอนซิสแตนต์
(self - consistant) แต่การคำนวณนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีที่แผ่น N กับ S บางมาก หลังจากนั้น
แอดกินส์และคิงตัน (Adkins and Kington. 1969 : 777) ได้ทดลองวัดช่องว่างพลังงานทางด้าน
N อันเนื่องมาจากพรอกซีมิตีเอฟเฟกต์ปรากฏว่าได้ผลสอดคล้องกับทฤษฎีของแมคมิลแลน ส่วนการทะลุ
ทะลวงของอิเล็กตรอนจากด้าน N เข้าไปทางด้าน S นั้น ฟรีกและแอดกินส์ (Freake and Adkins.
1969 : 382) ได้ทดลองวัดช่องว่างพลังงานทางด้าน S ได้ผลสรุปที่สอดคล้องกับทฤษฎีของแมคมิลแลน

เมื่อเร็ว ๆ นี้ฮุยและสเตราด์ (Hui and Stroud. 1985 : 584) ได้คำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะในโลหะปกติรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ - ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 แสดงโลหะปกติ (N) รูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ (S)

ฮุยและสเตราด์ได้กำหนดว่า

- (1) พลังงานเฟอร์มิของทั้งโลหะปกติและตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่ากัน และ
- (2) ศักย์ของการจับคู่ (pair potential Δ) มีค่าคงที่เป็น

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } r < a \text{ ในโลหะปกติ (N)} \\ \Delta_0 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ในตัวนำยิ่งยวด (S)} \end{cases}$$

เขาได้หาสเปกตรัมของพลังงานกระตุ้นโดยการแก้สมการโบโกลิวอฟ (De Gennes. 1966 : 137)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta v &= \epsilon u \\ \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta u &= \epsilon v \end{aligned} \tag{2.1}$$

โดยที่ u และ v เป็นอัมปลิจูดฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนและโฮลด์ตามลำดับ ϵ เป็นพลังงานไอเกน Δ เป็นศักย์ของการจับคู่ m เป็นมวลของอิเล็กตรอน และ $\hbar$ เป็นค่าคงที่ของพลังค์ เขากำหนดให้ u และ v เป็นสัดส่วนกัน คือ $v = \alpha u$

โดยการแก้สมการ (2.1) สหและสเตราค์สามารถหาค่าคงที่ α ได้ 2 ค่าคือ

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} + \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} + i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \alpha_2 &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} - \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} - i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (2.2)$$

และฟังก์ชันคลื่น

$$\begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell m} \begin{pmatrix} h_{\ell}^{(1)}(k_1 r) \\ \alpha_1 h_{\ell}^{(1)}(k_1 r) \end{pmatrix} + B_{\ell m} \begin{pmatrix} h_{\ell}^{(1)}(k_2 r) \\ \alpha_2 h_{\ell}^{(1)}(k_2 r) \end{pmatrix} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (2.3)$$

โดยที่ $h_{\ell}^{(1)}(x)$ เป็นฟังก์ชันเกลทิงก์อันดับที่ ℓ (spherical Hankel function of order ℓ) (Davis, 1965 : 437), $A_{\ell m}$ และ $B_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า, $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม θ และ ϕ ในฮาร์โมนิกทรงกลม (spherical harmonics), k_1 และ k_2 เป็นเวกเตอร์คลื่นซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned}k_1 &= \left[E_F - i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \\ k_2 &= \left[E_F + i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (2.4)$$

เมื่อ $r < a$ คือในโลหะปกติ (N) $\Delta = 0$ สมการ (2.1) กลายเป็น

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u &= \epsilon u \\ \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v &= \epsilon v\end{aligned}\quad (2.5)$$

สมการ (2.5) มีคำตอบเป็น

$$\begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{\ell, m} \begin{pmatrix} C_{\ell m} j_{\ell}(kr) \\ D_{\ell m} j_{\ell}(k'r) \end{pmatrix} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (2.6)$$

โดยที่ $j_{\ell}(x)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (spherical Bessel function of order ℓ) (Davis, 1965 : 437), $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า, k และ k' เป็นเวกเตอร์คลื่นซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} k &= (E_F + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ k' &= (E_F - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

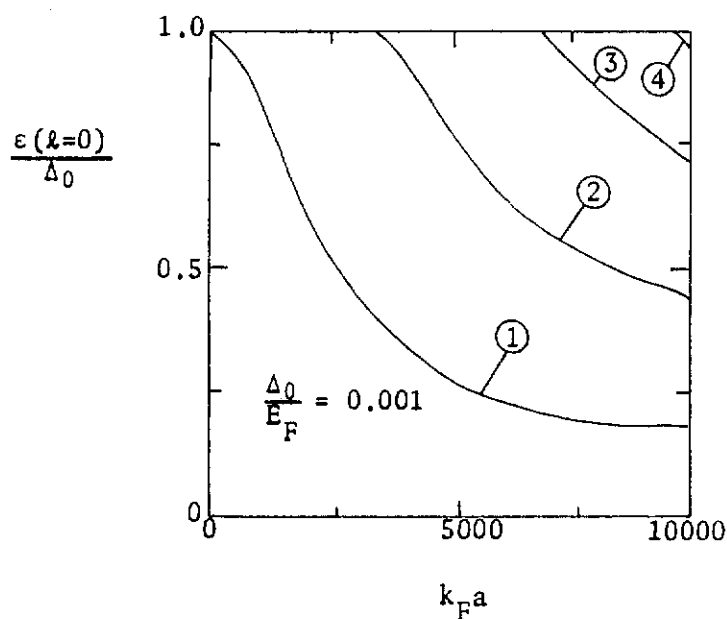
ที่ $r = a$ นั้นมีข้อกำหนดว่าฟังก์ชันคลื่นมีค่าต่อเนื่องและอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันคลื่นก็มีค่าต่อเนื่องด้วย ถ้าค่าคงที่ $A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$, $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด เงื่อนไขที่จะได้สมการสำหรับใช้หาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่สถานะ $\ell \geq 1$ คือ

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\begin{bmatrix} kk'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -k_1k'h_{\ell}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(k'a)j_{\ell}(ka) \\ -kk_2h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell}(k'a) \\ +k_1k_2h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell}(ka)j_{\ell}(k'a) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} kk'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -k_2k'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(k'a)j_{\ell}(ka) \\ -kk_1h_{\ell}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell}(k'a) \\ +k_1k_2h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell}(ka)j_{\ell}(k'a) \end{bmatrix}} \quad (2.8)$$

สำหรับสถานะที่ $l = 0$ สมการ (2.8) จะลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{[k \cot(ka) - ik_1][k' \cot(k'a) - ik_2]}{[k \cot(ka) - ik_2][k' \cot(k'a) - ik_1]} \quad (2.9)$$

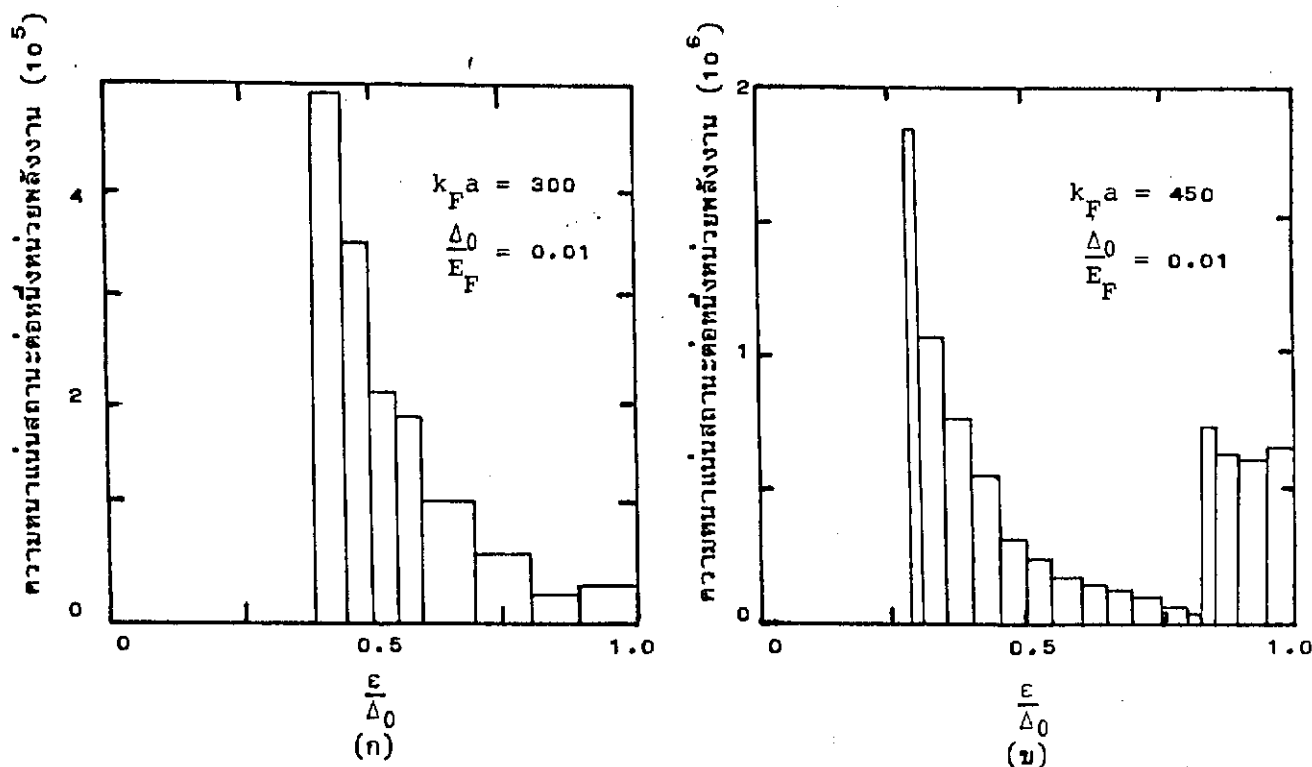
สมการ (2.8) และ (2.9) คือผลลัพธ์ของฮูและสเตราค์สำหรับสถานะที่ $l \geq 1$ และ $l = 0$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถใช้คำนวณหาค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะได้ โดยการแทนค่าของพารามิเตอร์ $k_F a$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F}$ ตามชนิดของโลหะในสมการ ดังตัวอย่างภาพประกอบ 9 และ 10



ภาพประกอบ 9 แสดงพลังงานกระตุ้นสำหรับสถานะที่ $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$

ภาพนี้แสดงให้เห็นถึงแถบพลังงานทั้ง 4 แถบซึ่งได้จากการแก้สมการ (2.9) หาค่า ϵ โดยมี -

$$\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$$



ภาพประกอบ 10 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน เป็นฟังก์ชันของ $\frac{E}{\Delta_0}$

(ก) คำพารามิเตอร์ที่ใช้คือ $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่

$$\frac{E}{\Delta_0} = 0.390$$

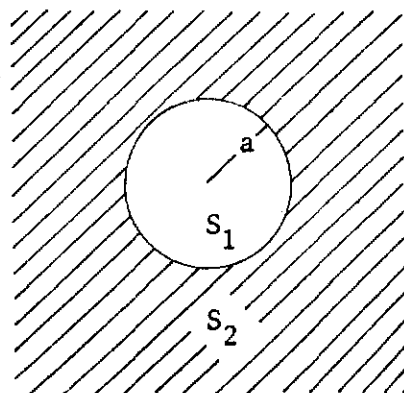
(ข) คำพารามิเตอร์ที่ใช้คือ $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่

$$\frac{E}{\Delta_0} = 0.285 \text{ และ แถบพลังงานแถบที่สอง เริ่มต้นที่ } \frac{E}{\Delta_0} = 0.830$$

ปัญหาและจุดมุ่งหมายของการวิจัย

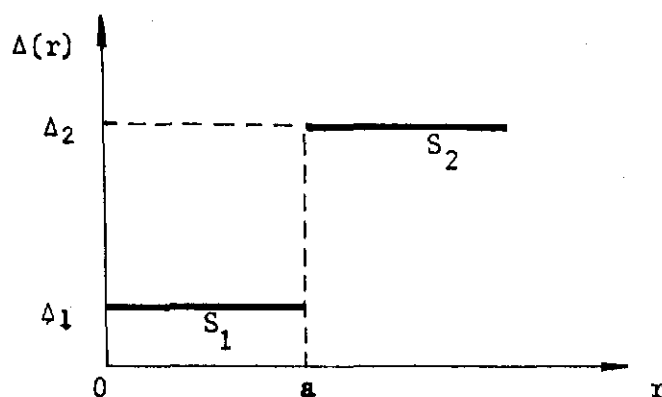
ดังได้กล่าวมาแล้วว่าตัวนำยิ่งยวดต่างกับตัวนำปกติตรงที่ในตัวนำยิ่งยวดมีคู่คูเปอร์แต่ในตัวนำปกติมีอิเล็กตรอนโดดเดี่ยว สมบัติการจับคู่ของอิเล็กตรอนนี้ในทางคำนวณเราแทนด้วยศักย์ของการจับคู่ Δ ดังนั้นในตัวนำปกติ $\Delta = 0$ และในตัวนำยิ่งยวด $\Delta \neq 0$

ปัญหาที่ยังไม่ได้มีผู้ใคร่จจัยคือหากมีตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมชนิดหนึ่งฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะเป็นอย่างไรและความหนาแน่นสถานะจะขึ้นกับพารามิเตอร์อะไรบ้าง ผู้วิจัยต้องการขยายขอบเขตงานวิจัยของชุยและสเตราค์ออกไปให้กว้างขวางยิ่งขึ้น โดยจะศึกษา ระบบที่มีตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งที่มีขนาดใหญ่ดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม (S_1) รัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง (S_2) ที่มีขนาดใหญ่

และกำหนดค่าศักย์ของการจับคู่มีค่าคงที่ดังนี้



ภาพประกอบ 12 แสดงศักย์ของการจับคู่

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} \Delta_1 & \text{เมื่อ } 0 < r < a & \text{ใน } S_1 \\ \Delta_2 & \text{เมื่อ } r > a & \text{ใน } S_2 \end{cases}$$

ในกรณีนี้ในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (S_1) $\Delta_1 \neq 0$ และในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 (S_2) $\Delta_2 \neq 0$

งานวิจัยนี้จะหา

- (1) พลังงานกระตุ้น และ
- (2) ความหนาแน่นสถานะ

ว่าสัมพันธ์อย่างไรกับรัศมีทรงกลม ค่าศักย์ของการจับคู่และโมเมนตัมเชิงมุม ตลอดจนเปรียบเทียบผลที่ได้ว่ามีการเปลี่ยนแปลงไปจากผลลัพธ์ของสุมและสเตราค์อย่างไรบ้าง

ขอบเขตของการวิจัย

1. การวิจัยครั้งนี้จะพิจารณาในการณิตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (S_1) เป็นรูปทรงกลมที่มีรัศมี a น้อยกว่าความยาวอาพันต์มาก ($a \ll \xi$) และตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง (S_2) มีขนาดใหญ่เมื่อคิดเทียบกับขนาดของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งที่จะเป็นแนวทางการพัฒนาทฤษฎีให้สามารถอธิบายได้ทั้งกรณี S_1 และ S_2 มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ
2. พลังงานเฟอร์มิของทั้ง S_1 และ S_2 มีค่าเท่ากัน
3. ศักย์ของการจับคู่ Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าจริงและคงที่ ดังภาพประกอบ 12

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ตัวนำยิ่งยวด (superconductor) คือโลหะบริสุทธิ์หรือโลหะผสมที่มีสิ่งเจือปน เมื่ออุณหภูมิของโลหะเหล่านี้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต โลหะเหล่านี้จะไม่มีสภาพต้านทานไฟฟ้ากระแสตรง และเป็นสารแม่เหล็กไดอะ คือไม่ยอมให้สนามแม่เหล็กจากภายนอกผ่านเข้าไปในตัวมันได้หรือเข้าไปได้บ้างแต่ก็น้อย
2. พลังงานเฟอร์มิ (Fermi energy) คือระดับพลังงานขึ้นนอกสุดของอนุภาคในอวกาศของโมเมนตัมเมื่อระบบของอนุภาคอยู่ในสถานะพื้นฐาน เหนือระดับพลังงานเฟอร์มินี้จะไม่มีอนุภาคใด ๆ ผิวของระดับพลังงานนี้เรียกว่าผิวเฟอร์มิ (Fermi surface) เมื่อระบบถูกรบกวนด้วยสนามภายนอก อนุภาคที่มีระดับพลังงานใกล้ผิวเฟอร์มิเท่านั้นที่มีการเปลี่ยนแปลง อิเล็กตรอนที่มีระดับพลังงานใกล้ผิวเฟอร์มิจึงมีความสำคัญในการพิจารณาสมบัติของโลหะ
3. ความยาวอาพันต์ (coherence length ξ) คือระยะห่างระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์ของตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิใด ๆ ที่ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

4. พรอกซีมีตีเอฟเฟค (proximity effect) คือปรากฏการณ์ที่สารตัวนำยิ่งยวด (S) สามารถเหนี่ยวนำให้สารตัวนำปกติมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้เมื่อผิวโลหะทั้งสองสัมผัสกัน

5. พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) คือค่าที่กำหนดขึ้นเพื่อบอกให้ทราบถึงลำดับของความเป็นระเบียบของสารตัวนำยิ่งยวด

6. พลังงานกระตุ้น (excitation energy) คือพลังงานของอิเล็กตรอนที่วัดจากช่องว่างพลังงาน

7. ความหนาแน่นสถานะ (density of states DOS) คือจำนวนอิเล็กตรอนต่อช่วงพลังงานซึ่งเขียนได้เป็น

$$DOS = \frac{dN}{d\epsilon}$$

โดยที่ DOS = ความหนาแน่นสถานะ

และ dN = จำนวนอิเล็กตรอนในช่วงพลังงาน $d\epsilon$

บทที่ 3

วิธีการวิจัย

แบบจำลอง (model) ที่ใช้ในการคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับ
ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งคือ การแก้สมการโบโกลิบอฟ
ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta v = \epsilon u \quad (3.1 \text{ ก})$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta u = \epsilon v \quad (3.1 \text{ ข})$$

ในการแก้สมการโบโกลิบอฟนี้เรากำหนดให้ u และ v เป็นสัดส่วนกัน ทั้งนี้เนื่องจากอิเล็กตรอนและ
โฮลค์มีสมบัติต่าง ๆ เหมือนกันทุกประการยกเว้นแค่ประจุต่างชนิดกัน ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะมีฟังก์ชัน
คลื่นเป็นรูปแบบเดียวกัน ในที่นี้เราจะให้ $v = \alpha u$ โดยที่ α เป็นค่าคงที่ที่แสดงว่าฟังก์ชันคลื่นทั้งสอง
มีเฟสและอัมพลิจูดแตกต่างกัน และศักรย์ของการจับคู่เป็นค่าจริงและคงที่ดังนี้

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} \Delta_1 & \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ในตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมชนิดที่ 1 (S}_1\text{)} \\ \Delta_2 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ชนิดที่ 2 (S}_2\text{)} \end{cases} \quad (3.2)$$

กรณี $r > a$ ใน S_2

เรากำหนดให้ $v_2 = \alpha_2 u_2$ แล้วแทนเงื่อนไขสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.1 ก) และ
(3.1 ข) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F2} \right) u_2 - \Delta_2 \alpha_2 u_2 = -\epsilon u_2 \quad (3.3 \text{ ก})$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F2} \right) \alpha_2 u_2 + \Delta_2 u_2 = \epsilon \alpha_2 u_2 \quad (3.3 \text{ ข})$$

สมการ (3.3 ข) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F2} \right) u_2 + \frac{\Delta_2}{\alpha_2} u_2 = \epsilon u_2 \quad (3.4)$$

สมการ (3.3 ก) หักออกจากสมการ (3.4) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\frac{\Delta_2}{\alpha_2} u_2 + \Delta_2 \alpha_2 u_2 = 2\epsilon u_2$$

$$\Delta_2 + \Delta_2 \alpha_2^2 = 2\epsilon \alpha_2$$

$$\Delta_2 \alpha_2^2 - 2\epsilon \alpha_2 + \Delta_2 = 0$$

α_2 หาได้จากการแก้สมการควอดราติกคือ

$$\begin{aligned} \alpha_{2\pm} &= \frac{2\epsilon \pm [4\epsilon^2 - 4\Delta_2^2]^{\frac{1}{2}}}{2\Delta_2} \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

สมการ (3.3 ก) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_{F2} \right) u_2 - \Delta_2 \alpha_{2\pm} u_2 &= -\epsilon u_2 \\ \nabla^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \epsilon - \Delta_2 \alpha_{2\pm} \right) u_2 &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \epsilon - \Delta_2 \left[\frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right) u_2 &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \cancel{\epsilon} - \cancel{\epsilon} \mp i \Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) u_2 &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} \mp i \Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) u_2 &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + k_{2\mp}^2 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

โดยที่

$$k_{2\mp}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} \mp i \Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

สมการ (3.5) มีคำตอบเป็น

$$u_2(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(k_{2-} r) + B_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(k_{2+} r) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.6)$$

โดยที่ $h_{\ell}^{(1)}(k_{2\mp} r)$ เป็นแรงแสงเกลฟังก์ชั้นชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (Davis, 1965 : 437) $A_{\ell m}$ และ $B_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องการหาค่า $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม θ และ ϕ ในฮาร์โมนิกทรงกลม

ในการหา $v_2(r, \theta, \phi)$ นั้นเราพิจารณาสมการ (3.1 ก)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_{F2} \right) u_2 + \Delta_2 v_2 &= \epsilon u_2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u_2 - E_{F2} u_2 - \epsilon u_2 &= -\Delta_2 v_2 \\ \nabla^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \epsilon \right) u_2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \Delta_2 v_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

จากสมการ (3.5) เราพบว่า

$$\nabla^2 u_2 = -k_{2\mp}^2 u_2$$

ดังนั้นสมการ (3.7) กลายรูปเป็น

$$\begin{aligned} -k_{2\mp}^2 u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \epsilon \right) u_2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \Delta_2 v_2 \\ -\frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \mp i \Delta_2 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{1/2} \right] u_2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{F2} + \epsilon \right) u_2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \Delta_2 v_2 \\ \left[\pm i \Delta_2 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{1/2} + \epsilon \right] u_2 &= \Delta_2 v_2 \\ \left[\frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{1/2} \right] u_2 &= v_2 \\ \alpha_{2\pm} u_2 &= v_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $v_2(r, \theta, \phi)$ จึงมีรูปแบบเป็น

$$v_2(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell m} \alpha_{2+} h_{\ell}^{(1)}(k_{2-} r) + B_{\ell m} \alpha_{2-} h_{\ell}^{(1)}(k_{2+} r) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.8)$$

กรณี $0 < r < a$ ใน S_1

เรากำหนดให้ $v_1 = \alpha_1 u_1$ แล้วแทนเงื่อนไขสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.1 ก) และ (3.1 ข) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F1} \right) u_1 - \Delta_1 \alpha_1 u_1 = -\epsilon u_1 \quad (3.9 ก)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F1} \right) \alpha_1 u_1 + \Delta_1 u_1 = \epsilon \alpha_1 u_1 \quad (3.9 ข)$$

สมการ (3.9 ข) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F1} \right) u_1 + \frac{\Delta_1}{\alpha_1} u_1 = \epsilon u_1 \quad (3.10)$$

สมการ (3.9 ก) หักออกจากสมการ (3.10) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\frac{\Delta_1}{\alpha_1} u_1 + \Delta_1 \alpha_1 u_1 = 2\epsilon u_1$$

$$\Delta_1 + \Delta_1 \alpha_1^2 = 2\epsilon \alpha_1$$

$$\Delta_1 \alpha_1^2 - 2\epsilon \alpha_1 + \Delta_1 = 0$$

α_1 หาได้จากการแก้สมการควอดราติกคือ

$$\begin{aligned} \alpha_{1\pm} &= \frac{2\epsilon \pm \left[4\epsilon^2 - 4\Delta_1^2 \right]^{1/2}}{2\Delta_1} \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

สมการ (3.9 ก) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_{F_1} \right) u_1 - \Delta_1 \alpha_{1\pm} u_1 &= -\epsilon u_1 \\
 \nabla^2 u_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F_1} + \epsilon - \Delta_1 \alpha_{1\pm} \right] u_1 &= 0 \\
 \nabla^2 u_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F_1} + \epsilon - \Delta_1 \left[\frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right] u_1 &= 0 \\
 \nabla^2 u_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F_1} + \cancel{\epsilon} - \cancel{\epsilon} \mp i \Delta_1 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] u_1 &= 0 \\
 \nabla^2 u_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F_1} \mp i \Delta_1 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] u_1 &= 0 \\
 \nabla^2 u_1 + k_{1\mp}^2 u_1 &= 0 \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

โดยที่

$$k_{1\mp}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F_1} \mp i \Delta_1 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right]$$

สมการ (3.11) มีคำตอบเป็น

$$u_1(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left[C_{\ell m} j_{\ell}(k_{1-} r) + D_{\ell m} j_{\ell}(k_{1+} r) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.12)$$

โดยที่ $j_{\ell}(k_{1\mp} r)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (Davis. 1965 : 437) $C_{\ell m}$

และ $D_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า

ก่อนหน้านี้เราแสดงให้เห็นแล้วว่า $\alpha_{2\pm} u_2 = v_2$ และเช่นเดียวกันนี้เราจะได้ว่า $\alpha_{1\pm} u_1 = v_1$

ดังนั้น $v_1(r, \theta, \phi)$ จึงมีรูปแบบเป็น

$$v_1(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left[C_{\ell m} \alpha_{1+} j_{\ell}(k_{1-} r) + D_{\ell m} \alpha_{1-} j_{\ell}(k_{1+} r) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.13)$$

คำนวณพลังงานกระตุ้นในกรณี $\ell \neq 0$ หรือ $\ell \geq 1$

$$\begin{bmatrix} u_1(r) \\ v_1(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\ell m} j_\ell(k_{1-}r) + D_{\ell m} j_\ell(k_{1+}r) \\ C_{\ell m} \alpha_{1+} j_\ell(k_{1-}r) + D_{\ell m} \alpha_{1-} j_\ell(k_{1+}r) \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ใน } S_1$$

$$\begin{bmatrix} u_2(r) \\ v_2(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_{2-}r) + B_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_{2+}r) \\ A_{\ell m} \alpha_{2+} h_\ell^{(1)}(k_{2-}r) + B_{\ell m} \alpha_{2-} h_\ell^{(1)}(k_{2+}r) \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } r > a \text{ ใน } S_2$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่ $r = a$ คือ

$$(1) \quad u_2(a) = u_1(a)$$

$$(2) \quad v_2(a) = v_1(a)$$

$$(3) \quad \left. \frac{d}{dr} u_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} u_1(r) \right|_{r=a}$$

$$(4) \quad \left. \frac{d}{dr} v_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} v_1(r) \right|_{r=a}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$A_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_{2-}a) + B_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_{2+}a) = C_{\ell m} j_\ell(k_{1-}a) + D_{\ell m} j_\ell(k_{1+}a)$$

$$A_{\ell m} \alpha_{2+} h_\ell^{(1)}(k_{2-}a) + B_{\ell m} \alpha_{2-} h_\ell^{(1)}(k_{2+}a) = C_{\ell m} \alpha_{1+} j_\ell(k_{1-}a) + D_{\ell m} \alpha_{1-} j_\ell(k_{1+}a)$$

$$A_{\ell m} k_{2-} h_\ell'^{(1)}(k_{2-}a) + B_{\ell m} k_{2+} h_\ell'^{(1)}(k_{2+}a) = C_{\ell m} k_{1-} j_\ell'(k_{1-}a) + D_{\ell m} k_{1+} j_\ell'(k_{1+}a)$$

$$A_{\ell m} \alpha_{2+} k_{2-} h_\ell'^{(1)}(k_{2-}a) + B_{\ell m} \alpha_{2-} k_{2+} h_\ell'^{(1)}(k_{2+}a) = C_{\ell m} \alpha_{1+} k_{1-} j_\ell'(k_{1-}a) + D_{\ell m} \alpha_{1-} k_{1+} j_\ell'(k_{1+}a)$$

สมบัติสัญลักษณะ

$$H(i) = h_{\ell}^{(1)}(k_i a)$$

$$H'(i) = h_{\ell}^{'(1)}(k_i a)$$

$$J(i) = j_{\ell}(k_i a)$$

$$J'(i) = j_{\ell}'(k_i a)$$

แทนสัญลักษณะเหล่านี้ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$A_{\ell m} H(2-) + B_{\ell m} H(2+) - C_{\ell m} J(1-) - D_{\ell m} J(1+) = 0$$

$$A_{\ell m} \alpha_{2+} H(2-) + B_{\ell m} \alpha_{2-} H(2+) - C_{\ell m} \alpha_{1+} J(1-) - D_{\ell m} \alpha_{1-} J(1+) = 0$$

$$A_{\ell m} k_{2-} H'(2-) + B_{\ell m} k_{2+} H'(2+) - C_{\ell m} k_{1-} J'(1-) - D_{\ell m} k_{1+} J'(1+) = 0$$

$$A_{\ell m} \alpha_{2+} k_{2-} H'(2-) + B_{\ell m} \alpha_{2-} k_{2+} H'(2+) - C_{\ell m} \alpha_{1+} k_{1-} J'(1-) - D_{\ell m} \alpha_{1-} k_{1+} J'(1+) = 0$$

ถ้าค่าคงที่ $A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$, $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด เราจะได้ดีเทอร์มิแนนต์ของ
ตัวแปรต่าง ๆ เท่ากับศูนย์ดังนี้

$$\begin{vmatrix} H(2-) & H(2+) & -J(1-) & -J(1+) \\ \alpha_{2+} H(2-) & \alpha_{2-} H(2+) & -\alpha_{1+} J(1-) & -\alpha_{1-} J(1+) \\ k_{2-} H'(2-) & k_{2+} H'(2+) & -k_{1-} J'(1-) & -k_{1+} J'(1+) \\ \alpha_{2+} k_{2-} H'(2-) & \alpha_{2-} k_{2+} H'(2+) & -\alpha_{1+} k_{1-} J'(1-) & -\alpha_{1-} k_{1+} J'(1+) \end{vmatrix} = 0$$

กระจายดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} & \alpha_{2-} H(2+) \left[k_{1+} k_{1-} \alpha_{1-} J'(1+) J'(1-) - k_{1+} k_{1-} \alpha_{1+} J'(1+) J'(1-) \right] \\ & H(2-) + \alpha_{1+} J(1-) \left[-k_{1+} k_{2+} \alpha_{1-} H'(2+) J'(1+) + k_{1+} k_{2+} \alpha_{2-} H'(2+) J'(1+) \right] \\ & -\alpha_{1-} J(1+) \left[-k_{1-} k_{2+} \alpha_{1+} H'(2+) J'(1-) + k_{1-} k_{2+} \alpha_{2-} H'(2+) J'(1-) \right] \end{aligned} \right] \\
 & -H(2+) \left[\begin{aligned} & \alpha_{2+} H(2-) \left[k_{1+} k_{1-} \alpha_{1-} J'(1+) J'(1-) - k_{1+} k_{1-} \alpha_{1+} J'(1+) J'(1-) \right] \\ & + \alpha_{1+} J(1-) \left[-k_{1+} k_{2-} \alpha_{1-} H'(2-) J'(1+) + k_{1+} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2-) J'(1+) \right] \\ & -\alpha_{1-} J(1+) \left[-k_{1-} k_{2-} \alpha_{1+} H'(2-) J'(1-) + k_{1-} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2-) J'(1-) \right] \end{aligned} \right] \\
 & -J(1-) \left[\begin{aligned} & \alpha_{2+} H(2-) \left[-k_{1+} k_{2+} \alpha_{1-} H'(2+) J'(1+) + k_{1+} k_{2+} \alpha_{2-} H'(2+) J'(1+) \right] \\ & -\alpha_{2-} H(2+) \left[-k_{1+} k_{2-} \alpha_{1-} H'(2-) J'(1+) + k_{1+} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2-) J'(1+) \right] \\ & -\alpha_{1-} J(1+) \left[k_{2+} k_{2-} \alpha_{2-} H'(2+) H'(2-) - k_{2+} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2+) H'(2-) \right] \end{aligned} \right] \\
 & +J(1+) \left[\begin{aligned} & \alpha_{2+} H(2-) \left[-k_{1-} k_{2+} \alpha_{1+} H'(2+) J'(1-) + k_{1-} k_{2+} \alpha_{2-} H'(2+) J'(1-) \right] \\ & -\alpha_{2-} H(2+) \left[-k_{1-} k_{2-} \alpha_{1+} H'(2-) J'(1-) + k_{1-} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2-) J'(1-) \right] \\ & -\alpha_{1+} J(1-) \left[k_{2+} k_{2-} \alpha_{2-} H'(2+) H'(2-) - k_{2+} k_{2-} \alpha_{2+} H'(2+) H'(2-) \right] \end{aligned} \right] \quad = \quad 0
 \end{aligned}$$

กระจายแต่ละวงเล็บได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& \alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1+}k_{1-}H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) - \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{1-}H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) \\
& -\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1+}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) + \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) \\
& +\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1-}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) - \alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) \\
& -\alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1+}k_{1-}H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) + \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1+}k_{1-}H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) \\
& +\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1+}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) - \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1+}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) \\
& -\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1-}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) + \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1-}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) \\
& +\alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1+}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) - \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) \\
& -\alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) + \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) \\
& +\alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{2+}k_{2-}H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) - \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{2+}k_{2-}H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) \\
& -\alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1-}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) + \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) \\
& +\alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) - \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) \\
& -\alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{2+}k_{2-}H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) + \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{2+}k_{2-}H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) = 0
\end{aligned}$$

จัดกลุ่มใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) \left[\alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1+}k_{1-} - \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{1-} - \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1+}k_{1-} + \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1+}k_{1-} \right] \\
& + H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) \left[-\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1+}k_{2+} + \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1+}k_{2+} - \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2+} \right] \\
& + H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) \left[\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1-}k_{2+} - \alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2+} - \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1-}k_{2+} + \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2+} \right] \\
& + H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) \left[\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1+}k_{2-} - \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{1+}k_{2-} - \alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1+}k_{2-} \right] \\
& + H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) \left[-\alpha_{1+}\alpha_{1-}k_{1-}k_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{1-}k_{2-} + \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2-} - \alpha_{2+}\alpha_{2-}k_{1-}k_{2-} \right] \\
& + H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) \left[\alpha_{1-}\alpha_{2-}k_{2+}k_{2-} - \alpha_{1-}\alpha_{2+}k_{2+}k_{2-} - \alpha_{1+}\alpha_{2-}k_{2+}k_{2-} + \alpha_{1+}\alpha_{2+}k_{2+}k_{2-} \right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

นำตัวคูณร่วมออกนอกวงเล็บได้เป็น

$$\begin{aligned}
& H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-)k_{1+}k_{1-} \left[\alpha_{1-}\alpha_{2-} - \alpha_{1+}\alpha_{2-} - \alpha_{1-}\alpha_{2+} + \alpha_{1+}\alpha_{2+} \right] \\
& + H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+)k_{1+}k_{2+} \left[-\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+} - \alpha_{2+}\alpha_{2-} \right] \\
& + H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-)k_{1-}k_{2+} \left[\alpha_{1+}\alpha_{1-} - \alpha_{1-}\alpha_{2-} - \alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{2+}\alpha_{2-} \right] \\
& + H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+)k_{1+}k_{2-} \left[\alpha_{1+}\alpha_{1-} - \alpha_{1+}\alpha_{2+} - \alpha_{1-}\alpha_{2-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-} \right] \\
& + H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-)k_{1-}k_{2-} \left[-\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+} + \alpha_{1+}\alpha_{2-} - \alpha_{2+}\alpha_{2-} \right] \\
& + H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-)k_{2+}k_{2-} \left[\alpha_{1-}\alpha_{2-} - \alpha_{1-}\alpha_{2+} - \alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1+}\alpha_{2+} \right] = 0
\end{aligned}$$

จัดให้อยู่ในรูปผลคูณได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-)k_{1+}k_{1-}\left[\alpha_{1-} - \alpha_{1+}\right]\left[\alpha_{2-} - \alpha_{2+}\right] \\
 & +H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+)k_{1+}k_{2+}\left[\alpha_{1+} - \alpha_{2+}\right]\left[\alpha_{2-} - \alpha_{1-}\right] \\
 & +H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-)k_{1-}k_{2+}\left[\alpha_{1+} - \alpha_{2-}\right]\left[\alpha_{1-} - \alpha_{2+}\right] \\
 & +H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+)k_{1+}k_{2-}\left[\alpha_{1-} - \alpha_{2+}\right]\left[\alpha_{1+} - \alpha_{2-}\right] \\
 & +H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-)k_{1-}k_{2-}\left[\alpha_{1+} - \alpha_{2+}\right]\left[\alpha_{2-} - \alpha_{1-}\right] \\
 & +H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-)k_{2+}k_{2-}\left[\alpha_{1+} - \alpha_{1-}\right]\left[\alpha_{2+} - \alpha_{2-}\right] = 0
 \end{aligned}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{1-}H(2+)H(2-)J'(1+)J'(1-) \\
 & -(\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1-)J'(1+) \\
 & +(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})k_{1-}k_{2+}H(2-)H'(2+)J(1+)J'(1-) \\
 & +(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1-)J'(1+) \\
 & -(\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1-}k_{2-}H(2+)H'(2-)J(1+)J'(1-) \\
 & +(\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{2+}k_{2-}H'(2+)H'(2-)J(1+)J(1-) = 0
 \end{aligned}$$

แทนสัญลักษณ์ $H(i)$, $H'(i)$, $J(i)$ และ $J'(i)$

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{1-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}'(k_{1+}a)j_{\ell}'(k_{1-}a) \\
 & - (\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)h_{\ell}'^{(1)}(k_{2+}a)j_{\ell}(k_{1-}a)j_{\ell}'(k_{1+}a) \\
 & + (\alpha_{1+} - \alpha_{2-})(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})k_{1-}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)h_{\ell}'^{(1)}(k_{2+}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell}'(k_{1-}a) \\
 & + (\alpha_{1-} - \alpha_{2+})(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell}'^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1-}a)j_{\ell}'(k_{1+}a) \\
 & - (\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1-}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell}'^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell}'(k_{1-}a) \\
 & + (\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{2+}k_{2-}h_{\ell}'^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell}'^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell}(k_{1-}a) = 0
 \end{aligned}$$

แทนค่า $h_{\ell}^{(1)}(k_{2\pm}a)$ และ $j_{\ell}^{(1)}(k_{1\pm}a)$

$$\begin{aligned}
 & \left[(\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{1-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \times \right. \\
 & \left. h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \left[j_{\ell-1}(k_{1+}a) - \frac{\ell+1}{k_{1+}a} j_{\ell}(k_{1+}a) \right] \left[j_{\ell-1}(k_{1-}a) - \frac{\ell+1}{k_{1-}a} j_{\ell}(k_{1-}a) \right] \right] \\
 & - \left[(\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \times \right. \\
 & \left. \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a) - \frac{\ell+1}{k_{2+}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \right] j_{\ell}(k_{1-}a) \left[j_{\ell-1}(k_{1+}a) - \frac{\ell+1}{k_{1+}a} j_{\ell}(k_{1+}a) \right] \right] \\
 & + \left[(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})k_{1-}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \times \right. \\
 & \left. \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a) - \frac{\ell+1}{k_{2+}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \right] j_{\ell}(k_{1+}a) \left[j_{\ell-1}(k_{1-}a) - \frac{\ell+1}{k_{1-}a} j_{\ell}(k_{1-}a) \right] \right] \\
 & + \left[(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \times \right. \\
 & \left. \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a) - \frac{\ell+1}{k_{2-}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \right] j_{\ell}(k_{1-}a) \left[j_{\ell-1}(k_{1+}a) - \frac{\ell+1}{k_{1+}a} j_{\ell}(k_{1+}a) \right] \right] \\
 & - \left[(\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1-}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \times \right. \\
 & \left. \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a) - \frac{\ell+1}{k_{2-}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \right] j_{\ell}(k_{1+}a) \left[j_{\ell-1}(k_{1-}a) - \frac{\ell+1}{k_{1-}a} j_{\ell}(k_{1-}a) \right] \right] \\
 & + \left[(\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{2+}k_{2-} \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a) - \frac{\ell+1}{k_{2+}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a) \right] \times \right. \\
 & \left. \left[h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a) - \frac{\ell+1}{k_{2-}a} h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a) \right] j_{\ell}(k_{1+}a) j_{\ell}(k_{1-}a) \right]
 \end{aligned}$$

$$= 0$$

โดยใช้การประมาณค่า $ka \gg 1$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{1-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell-1}(k_{1+}a)j_{\ell-1}(k_{1-}a) \\
 & - (\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a)j_{\ell}(k_{1-}a)j_{\ell-1}(k_{1+}a) \\
 & + (\alpha_{1+} - \alpha_{2-})(\alpha_{1-} - \alpha_{2+})k_{1-}k_{2+}h_{\ell}^{(1)}(k_{2-}a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell-1}(k_{1-}a) \\
 & + (\alpha_{1-} - \alpha_{2+})(\alpha_{1+} - \alpha_{2-})k_{1+}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1-}a)j_{\ell-1}(k_{1+}a) \\
 & - (\alpha_{1+} - \alpha_{2+})(\alpha_{1-} - \alpha_{2-})k_{1-}k_{2-}h_{\ell}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell-1}(k_{1-}a) \\
 & + (\alpha_{1+} - \alpha_{1-})(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})k_{2+}k_{2-}h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2+}a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_{2-}a)j_{\ell}(k_{1+}a)j_{\ell}(k_{1-}a) \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 k_{1\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \\
 k_{2\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm i\Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \\
 \alpha_{1\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 \alpha_{2\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

สมการ (3.14) ใช้คำนวณหาค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม-รัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งในกรณี $\ell \neq 0$ หรือ $\ell \geq 1$

เพื่อตรวจสอบผลที่คำนวณได้ตามสมการ (3.14) กับผลลัพธ์ของฮุยและสเตราด์สำหรับโลหะปกติรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำที่ยาวขนาดใหญ่มากในกรณี $\ell \neq 0$ หรือ $\ell \geq 1$ โดยการแทน $\Delta_1 = 0$ และ $\Delta_2 = \Delta_0$ พบว่า

$$\begin{aligned}
 k_{1\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_1 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm \epsilon \right] \\
 k_{2\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm i\Delta_0 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 \alpha_{1\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\epsilon \pm i(\Delta_1^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_1} \\
 &= \frac{\epsilon \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_1} \\
 &= \frac{2\epsilon}{\Delta_1}, \quad 0 \\
 \alpha_{2\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} \pm i \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

เทียบกับงานวิจัยของฮุยและสเตราด์เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 k_{1+} &= k, & k_{1-} &= k' \\
 k_{2+} &= k_2, & k_{2-} &= k_1 \\
 \alpha_{1+} &= \frac{2\epsilon}{\Delta_1}, & \alpha_{1-} &= 0 \\
 \alpha_{2+} &= \alpha_1, & \alpha_{2-} &= \alpha_2
 \end{aligned}$$

ดังนั้นแล้วสมการ (3.14) กลายรูปเป็น

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} \right] (\alpha_1 - \alpha_2) k k' h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_\ell^{(1)}(k_1 a) j_{\ell-1}(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & - \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} - \alpha_1 \right] (-\alpha_2) k k_2 h_\ell^{(1)}(k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) j_\ell(k'a) j_{\ell-1}(ka) \\
 & + \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} - \alpha_2 \right] (-\alpha_1) k' k_2 h_\ell^{(1)}(k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) j_\ell(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & + (-\alpha_1) \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} - \alpha_2 \right] k k_1 h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(k'a) j_{\ell-1}(ka) \\
 & - \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} - \alpha_1 \right] (-\alpha_2) k' k_1 h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & + \left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_1} \right] (\alpha_1 - \alpha_2) k_1 k_2 h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(ka) j_\ell(k'a) = 0
 \end{aligned}$$

ให้ $\frac{\Delta_1}{2\varepsilon}$ ถูกทั้งสมการแล้วแทน $\Delta_1 = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \alpha_2) k k' h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_\ell^{(1)}(k_1 a) j_{\ell-1}(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & + \alpha_2 k k_2 h_\ell^{(1)}(k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) j_\ell(k'a) j_{\ell-1}(ka) \\
 & - \alpha_1 k' k_2 h_\ell^{(1)}(k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) j_\ell(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & - \alpha_1 k k_1 h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(k'a) j_{\ell-1}(ka) \\
 & + \alpha_2 k' k_1 h_\ell^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(ka) j_{\ell-1}(k'a) \\
 & + (\alpha_1 - \alpha_2) k_1 k_2 h_{\ell-1}^{(1)}(k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)}(k_1 a) j_\ell(ka) j_\ell(k'a) = 0
 \end{aligned}$$

นำตัวคูณร่วมออกนอกวงเล็บสมการจะมีรูปแบบใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \begin{bmatrix} k k' h_{\ell}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell-1}(ka) j_{\ell-1}(k' a) \\ -k' k_2 h_{\ell}^{(1)} (k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_2 a) j_{\ell}(ka) j_{\ell-1}(k' a) \\ -k k_1 h_{\ell}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell}(k' a) j_{\ell-1}(ka) \\ +k_1 k_2 h_{\ell-1}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell}(ka) j_{\ell}(k' a) \end{bmatrix} \\
 & = \alpha_2 \begin{bmatrix} k k' h_{\ell}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell-1}(ka) j_{\ell-1}(k' a) \\ -k k_2 h_{\ell}^{(1)} (k_1 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_2 a) j_{\ell}(k' a) j_{\ell-1}(ka) \\ -k' k_1 h_{\ell}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell}(ka) j_{\ell-1}(k' a) \\ +k_1 k_2 h_{\ell-1}^{(1)} (k_2 a) h_{\ell-1}^{(1)} (k_1 a) j_{\ell}(ka) j_{\ell}(k' a) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นแล้ว

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\begin{bmatrix} kk'h_\ell^{(1)}(k_2a)h_\ell^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -kk_2'h_\ell^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_\ell(k'a)j_{\ell-1}(ka) \\ -k'k_1'h_\ell^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_\ell(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ +k_1k_2'h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_\ell(ka)j_\ell(k'a) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} kk'h_\ell^{(1)}(k_2a)h_\ell^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -k'k_2'h_\ell^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_\ell(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -kk_1'h_\ell^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_\ell(k'a)j_{\ell-1}(ka) \\ +k_1k_2'h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_\ell(ka)j_\ell(k'a) \end{bmatrix}} \quad (3.15)$$

สมการ (3.15) เป็นผลลัพท์ของสมการและสูตรสำหรับสถานะที่ $\ell \neq 0$ หรือ $\ell \geq 1$

คำนวณพลังงานกระตุ้นในกรณี $l = 0$

$$\begin{bmatrix} u_1(r) \\ v_1(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cj_0(k_{1-}r) + Dj_0(k_{1+}r) \\ C\alpha_{1+}j_0(k_{1-}r) + D\alpha_{1-}j_0(k_{1+}r) \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ใน } S_1$$

$$\begin{bmatrix} u_2(r) \\ v_2(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ah_0^{(1)}(k_{2-}r) + Bh_0^{(1)}(k_{2+}r) \\ A\alpha_{2+}h_0^{(1)}(k_{2-}r) + B\alpha_{2-}h_0^{(1)}(k_{2+}r) \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } r > a \text{ ใน } S_2$$

โดยที่ $h_0^{(1)}(k_{2\pm}r) = -\frac{ie}{k_{2\pm}r}$ และ $j_0(k_{1\pm}r) = \frac{\sin(k_{1\pm}r)}{k_{1\pm}r}$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} u_1(r) \\ v_1(r) \\ u_2(r) \\ v_2(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \frac{\sin(k_{1-}r)}{k_{1-}r} + D \frac{\sin(k_{1+}r)}{k_{1+}r} \\ C\alpha_{1+} \frac{\sin(k_{1-}r)}{k_{1-}r} + D\alpha_{1-} \frac{\sin(k_{1+}r)}{k_{1+}r} \\ -A \frac{ie}{k_{2-}r} - B \frac{ie}{k_{2+}r} \\ -A\alpha_{2+} \frac{ie}{k_{2-}r} - B\alpha_{2-} \frac{ie}{k_{2+}r} \end{bmatrix}$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่ $r = a$ คือ

$$(1) \quad u_2(a) = u_1(a)$$

$$(2) \quad v_2(a) = v_1(a)$$

$$(3) \quad \left. \frac{d}{dr} u_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} u_1(r) \right|_{r=a}$$

$$(4) \quad \left. \frac{d}{dr} v_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} v_1(r) \right|_{r=a}$$

และใช้สูตร

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ik - \frac{1}{r} \right]$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\sin(kr)}{kr} \right] = \frac{\sin(kr)}{kr^2} (kr \cot(kr) - 1)$$

เราจะได้ว่า

$$-A \frac{ie^{ik_{2-}a}}{k_{2-}a} - B \frac{ie^{ik_{2+}a}}{k_{2+}a} = C \frac{\sin(k_{1-}a)}{k_{1-}a} + D \frac{\sin(k_{1+}a)}{k_{1+}a}$$

$$-A\alpha_{2+} \frac{ie^{ik_{2-}a}}{k_{2-}a} - B\alpha_{2-} \frac{ie^{ik_{2+}a}}{k_{2+}a} = C\alpha_{1+} \frac{\sin(k_{1-}a)}{k_{1-}a} + D\alpha_{1-} \frac{\sin(k_{1+}a)}{k_{1+}a}$$

$$\begin{bmatrix} -A \frac{ie^{ik_{2-}a}}{k_{2-}a} \left(ik_{2-} - \frac{1}{a} \right) \\ -B \frac{ie^{ik_{2+}a}}{k_{2+}a} \left(ik_{2+} - \frac{1}{a} \right) \\ -A\alpha_{2+} \frac{ie^{ik_{2-}a}}{k_{2-}a} \left(ik_{2-} - \frac{1}{a} \right) \\ -B\alpha_{2-} \frac{ie^{ik_{2+}a}}{k_{2+}a} \left(ik_{2+} - \frac{1}{a} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \frac{\sin(k_{1-}a)}{k_{1-}a^2} (k_{1-}a \cot(k_{1-}a) - 1) \\ +D \frac{\sin(k_{1+}a)}{k_{1+}a^2} (k_{1+}a \cot(k_{1+}a) - 1) \\ C\alpha_{1+} \frac{\sin(k_{1-}a)}{k_{1-}a^2} (k_{1-}a \cot(k_{1-}a) - 1) \\ +D\alpha_{1-} \frac{\sin(k_{1+}a)}{k_{1+}a^2} (k_{1+}a \cot(k_{1+}a) - 1) \end{bmatrix}$$

สมมุติสัญลักษณ์

$$E(i) = \frac{e^{ik_i a}}{k_i a}$$

$$S(i) = \frac{\sin(k_i a)}{k_i a}$$

$$K(i) = k_i a \cot(k_i a) - 1$$

$$P(i) = ik_i a - 1$$

แทนสัญลักษณ์เหล่านี้ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$-AiE(2-) - BiE(2+) - CS(1-) - DS(1+) = 0$$

$$-A\alpha_{2+}iE(2-) - B\alpha_{2-}iE(2+) - C\alpha_{1+}S(1-) - D\alpha_{1-}S(1+) = 0$$

$$-AiE(2-)\frac{P(2-)}{a} - BiE(2+)\frac{P(2+)}{a} - C\frac{S(1-)}{a}K(1-) - D\frac{S(1+)}{a}K(1+) = 0$$

$$-A\alpha_{2+}iE(2-)\frac{P(2-)}{a} - B\alpha_{2-}iE(2+)\frac{P(2+)}{a} - C\alpha_{1+}\frac{S(1-)}{a}K(1-) - D\alpha_{1-}\frac{S(1+)}{a}K(1+) = 0$$

ถ้าค่าคงที่ A, B, C และ D ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด เราจะได้ดีเทอร์มิแนนต์ของตัวแปรต่าง ๆ

เท่ากับศูนย์ดังนี้

$$\begin{vmatrix} -iE(2-) & -iE(2+) & -S(1-) & -S(1+) \\ -i\alpha_{2+}E(2-) & -i\alpha_{2-}E(2+) & -\alpha_{1+}S(1-) & -\alpha_{1-}S(1+) \\ -iE(2-)\frac{P(2-)}{a} & -iE(2+)\frac{P(2+)}{a} & -\frac{S(1-)}{a}K(1-) & -\frac{S(1+)}{a}K(1+) \\ -i\alpha_{2+}E(2-)\frac{P(2-)}{a} & -i\alpha_{2-}E(2+)\frac{P(2+)}{a} & -\alpha_{1+}\frac{S(1-)}{a}K(1-) & -\alpha_{1-}\frac{S(1+)}{a}K(1+) \end{vmatrix} = 0$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{(-i)^2}{a^2} E(2+)E(2-)S(1+)S(1-) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{2+} & \alpha_{2-} & \alpha_{1+} & \alpha_{1-} \\ P(2-) & P(2+) & K(1-) & K(1+) \\ \alpha_{2+}P(2-) & \alpha_{2-}P(2+) & \alpha_{1+}K(1-) & \alpha_{1-}K(1+) \end{vmatrix} = 0$$

กระจายดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{2-} \left[\alpha_{1-} K(1+) K(1-) - \alpha_{1+} K(1+) K(1-) \right] \\
 & - \alpha_{1+} \left[\alpha_{1-} P(2+) K(1+) - \alpha_{2-} P(2+) K(1+) \right] \\
 & + \alpha_{1-} \left[\alpha_{1+} P(2+) K(1-) - \alpha_{2-} P(2+) K(1-) \right] \\
 & - \alpha_{2+} \left[\alpha_{1-} K(1+) K(1-) - \alpha_{1+} K(1+) K(1-) \right] \\
 & + \alpha_{1+} \left[\alpha_{1-} K(1+) P(2-) - \alpha_{2+} K(1+) P(2-) \right] \\
 & - \alpha_{1-} \left[\alpha_{1+} K(1-) P(2-) - \alpha_{2+} K(1-) P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{2+} \left[\alpha_{1-} K(1+) P(2+) - \alpha_{2-} K(1+) P(2+) \right] \\
 & - \alpha_{2-} \left[\alpha_{1-} K(1+) P(2-) - \alpha_{2+} K(1+) P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1-} \left[\alpha_{2-} P(2+) P(2-) - \alpha_{2+} P(2+) P(2-) \right] \\
 & - \alpha_{2+} \left[\alpha_{1+} K(1-) P(2+) - \alpha_{2-} K(1-) P(2+) \right] \\
 & + \alpha_{2-} \left[\alpha_{1+} K(1-) P(2-) - \alpha_{2+} K(1-) P(2-) \right] \\
 & - \alpha_{1+} \left[\alpha_{2-} P(2+) P(2-) - \alpha_{2+} P(2+) P(2-) \right]
 \end{aligned}
 = 0$$

กระจายแต่ละวงเล็บได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{2-}\alpha_{1-}K(1+)K(1-) - \alpha_{2-}\alpha_{1+}K(1+)K(1-) \\
 & -\alpha_{1+}\alpha_{1-}P(2+)K(1+) + \alpha_{1+}\alpha_{2-}P(2+)K(1+) \\
 & +\alpha_{1-}\alpha_{1+}P(2+)K(1-) - \alpha_{1-}\alpha_{2-}P(2+)K(1-) \\
 & -\alpha_{2+}\alpha_{1-}K(1+)K(1-) + \alpha_{2+}\alpha_{1+}K(1+)K(1-) \\
 & +\alpha_{1+}\alpha_{1-}K(1+)P(2-) - \alpha_{1+}\alpha_{2+}K(1+)P(2-) \\
 & -\alpha_{1-}\alpha_{1+}K(1-)P(2-) + \alpha_{1-}\alpha_{2+}K(1-)P(2-) \\
 & +\alpha_{2+}\alpha_{1-}K(1+)P(2+) - \alpha_{2+}\alpha_{2-}K(1+)P(2+) \\
 & -\alpha_{2-}\alpha_{1-}K(1+)P(2-) + \alpha_{2-}\alpha_{2+}K(1+)P(2-) \\
 & +\alpha_{1-}\alpha_{2-}P(2+)P(2-) - \alpha_{1-}\alpha_{2+}P(2+)P(2-) \\
 & -\alpha_{2+}\alpha_{1+}K(1-)P(2+) + \alpha_{2+}\alpha_{2-}K(1-)P(2+) \\
 & +\alpha_{2-}\alpha_{1+}K(1-)P(2-) - \alpha_{2-}\alpha_{2+}K(1-)P(2-) \\
 & -\alpha_{1+}\alpha_{2-}P(2+)P(2-) + \alpha_{1+}\alpha_{2+}P(2+)P(2-) = 0
 \end{aligned}$$

จัดกลุ่มใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{1-}\alpha_{2-} \left[K(1+)K(1-) - P(2+)K(1-) - K(1+)P(2-) + P(2+)P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1-}\alpha_{2+} \left[-K(1+)K(1-) + K(1-)P(2-) + K(1+)P(2+) - P(2+)P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1-}\alpha_{1+} \left[-P(2+)K(1+) + P(2+)K(1-) + K(1+)P(2-) - K(1-)P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1+}\alpha_{2+} \left[K(1+)K(1-) - K(1+)P(2-) - K(1-)P(2+) + P(2+)P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1+}\alpha_{2-} \left[-K(1+)K(1-) + P(2+)K(1+) + K(1-)P(2-) - P(2+)P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{2+}\alpha_{2-} \left[-K(1+)P(2+) + K(1+)P(2-) + K(1-)P(2+) - K(1-)P(2-) \right] = 0
 \end{aligned}$$

จัดให้อยู่ในรูปผลคูณได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{1-}\alpha_{2-} \left[K(1+) - P(2+) \right] \left[K(1-) - P(2-) \right] \\
 & - \alpha_{1-}\alpha_{2+} \left[K(1+) - P(2-) \right] \left[K(1-) - P(2+) \right] \\
 & - \alpha_{1-}\alpha_{1+} \left[K(1+) - K(1-) \right] \left[P(2+) - P(2-) \right] \\
 & + \alpha_{1+}\alpha_{2+} \left[K(1-) - P(2-) \right] \left[K(1+) - P(2+) \right] \\
 & - \alpha_{1+}\alpha_{2-} \left[K(1+) - P(2-) \right] \left[K(1-) - P(2+) \right] \\
 & - \alpha_{2+}\alpha_{2-} \left[K(1+) - K(1-) \right] \left[P(2+) - P(2-) \right] = 0
 \end{aligned}$$

นำตัวคูณร่วมออกนอกวงเล็บได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-}) \left[P(2+) - P(2-) \right] \left[K(1+) - K(1-) \right] \\
 & +(\alpha_{1-}\alpha_{2-} + \alpha_{1+}\alpha_{2+}) \left[K(1-) - P(2-) \right] \left[K(1+) - P(2+) \right] \\
 & -(\alpha_{1-}\alpha_{2+} + \alpha_{1+}\alpha_{2-}) \left[K(1+) - P(2-) \right] \left[K(1-) - P(2+) \right] = 0
 \end{aligned}$$

แทนสัญลักษณ์ $K(i)$ และ $P(i)$

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-}) \left[ik_{2+}a - \cancel{X} - ik_{2-}a + \cancel{X} \right] \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - \cancel{X} - k_{1-}\cot(k_{1-}a) + \cancel{X} \right] \\
 & +(\alpha_{1-}\alpha_{2-} + \alpha_{1+}\alpha_{2+}) \left[k_{1-}\cot(k_{1-}a) - \cancel{X} - ik_{2-}a + \cancel{X} \right] \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - \cancel{X} - ik_{2+}a + \cancel{X} \right] \\
 & -(\alpha_{1-}\alpha_{2+} + \alpha_{1+}\alpha_{2-}) \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - \cancel{X} - ik_{2-}a + \cancel{X} \right] \left[k_{1-}\cot(k_{1-}a) - \cancel{X} - ik_{2+}a + \cancel{X} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

ใช้ a^2 ทหารทั้งสมการเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-}) i(k_{2+} - k_{2-}) \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - k_{1-}\cot(k_{1-}a) \right] \\
 & +(\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-}) \left[k_{1-}\cot(k_{1-}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - ik_{2+} \right] \\
 & -(\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+}) \left[k_{1+}\cot(k_{1+}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1-}\cot(k_{1-}a) - ik_{2+} \right] = 0 \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 k_{1\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_1 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \\
 k_{2\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm i\Delta_2 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{1/2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\alpha_{1\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_{2\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

สมการ (3.16) ใช้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม

รัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งในกรณี $l = 0$

เพื่อตรวจสอบผลที่คำนวณได้ตามสมการ (3.16) กับผลลัพธ์ของฮูยและสเตราต์ สำหรับโลหะปกติ

รูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งในกรณี $l = 0$ โดยการแทน $\Delta_1 = 0$ และ

$\Delta_2 = \Delta_0$ พบว่า

$$k_{1\pm}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} [E_{F1} \pm \epsilon]$$

$$k_{2\pm}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\alpha_{1\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\epsilon \pm i(\Delta_1^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_1}$$

$$= \frac{\epsilon \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_1}$$

$$= \frac{2\epsilon}{\Delta_1}, \quad 0$$

$$\alpha_{2\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

เทียบกับงานวิจัยของฮุยและสเตราค์เราจะได้

$$\begin{aligned} k_{1+} &= k & , & & k_{1-} &= k' \\ k_{2+} &= k_2 & , & & k_{2-} &= k_1 \\ \alpha_{1+} &= \frac{2\varepsilon}{\Delta_1} & , & & \alpha_{1-} &= 0 \\ \alpha_{2+} &= \alpha_1 & , & & \alpha_{2-} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

ดังนั้นแล้วสมการ (3.16) กลายรูปเป็น

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 \alpha_2 i(k_2 - k_1) \left[k \cot(ka) - k' \cot(k'a) \right] \\ & + \frac{2\varepsilon}{\Delta_1} \alpha_1 \left[k' \cot(k'a) - ik_1 \right] \left[k \cot(ka) - ik_2 \right] \\ & - \frac{2\varepsilon}{\Delta_1} \alpha_2 \left[k \cot(ka) - ik_1 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

ใช้ $\frac{\Delta_1}{2\varepsilon}$ คูณทั้งสมการแล้วแทน $\Delta_1 = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left[k' \cot(k'a) - ik_1 \right] \left[k \cot(ka) - ik_2 \right] &= \alpha_2 \left[k \cot(ka) - ik_1 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_2 \right] \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\left[k \cot(ka) - ik_1 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_2 \right]}{\left[k' \cot(k'a) - ik_1 \right] \left[k \cot(ka) - ik_2 \right]} \end{aligned}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\left[k \cot(ka) - ik_1 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_2 \right]}{\left[k \cot(ka) - ik_2 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_1 \right]} \quad (3.17)$$

สมการ (3.17) เป็นผลลัพธ์ของฮุยและสเตราค์สำหรับสถานะที่ $\ell = 0$

สมการ (3.16) ใช้คำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม

รัศมี a ที่ฝังอยู่ในโลหะปกติขนาดใหญ่ได้อีกด้วย ในกรณีนี้เราจะแทน $\Delta_1 = \Delta_0$ และ $\Delta_2 = 0$

พบว่า

$$\begin{aligned}
 k_{1\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F1} \pm i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
 k_{2\pm}^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm i\Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_{F2} \pm \epsilon \right] \\
 \alpha_{1\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 \alpha_{2\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\epsilon \pm i(\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_2} \\
 &= \frac{\epsilon \pm (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta_2} \\
 &= \frac{2\epsilon}{\Delta_2}, \quad 0
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (3.16) กลายรูปเป็น

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_{1+}\alpha_{1-}i(k_{2+} - k_{2-}) \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - k_{1-} \cot(k_{1-}a) \right] \\
 & + \alpha_{1+\Delta_2} \frac{2\epsilon}{\Delta_2} \left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2+} \right] \\
 & - \alpha_{1-\Delta_2} \frac{2\epsilon}{\Delta_2} \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2+} \right] = 0
 \end{aligned}$$

ใช้ $\frac{\Delta_2}{2\epsilon}$ คูณทั้งสมการแล้วแทน $\Delta_2 = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} & \alpha_{1+} \left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2+} \right] = \\ & = \alpha_{1-} \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2+} \right] \\ & \frac{\alpha_{1+}}{\alpha_{1-}} = \frac{\left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2+} \right]}{\left[k_{1-} \cot(k_{1-}a) - ik_{2-} \right] \left[k_{1+} \cot(k_{1+}a) - ik_{2+} \right]} \quad (3.18) \end{aligned}$$

สมการ (3.18) ใช้คำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับระบบที่มีตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในโลหะปกติขนาดใหญ่ในกรณี $\ell = 0$

เพื่อตรวจสอบผลที่คำนวณได้ตามสมการ (3.16) กับผลลัพธ์ตามทฤษฎีบีซีเอสในกรณีตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ S_1 ทำได้โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ($a \rightarrow \infty$) และในกรณีนี้ $\cot(ka) \simeq -i$ เราจะได้สมการ (3.16) มีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-})i(k_{2+} - k_{2-})(-ik_{1+} + ik_{1-}) \\ & +(\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-})(-ik_{1-} - ik_{2-})(-ik_{1+} - ik_{2+}) \\ & -(\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+})(-ik_{1+} - ik_{2-})(-ik_{1-} - ik_{2+}) = 0 \end{aligned}$$

นำตัวคูณร่วมออกนอกวงเล็บได้เป็น

$$\begin{aligned} & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-})(k_{2+} - k_{2-})(k_{1-} - k_{1+})(i)^2 \\ & +(\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-})(k_{1-} + k_{2-})(k_{1+} + k_{2+})(-i)^2 \\ & -(\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+})(k_{1+} + k_{2-})(k_{1-} + k_{2+})(-i)^2 = 0 \end{aligned}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-})(k_{2+} - k_{2-})(k_{1-} - k_{1+}) \\
 & - (\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-})(k_{1-} + k_{2-})(k_{1+} + k_{2+}) \\
 & + (\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+})(k_{1+} + k_{2-})(k_{1-} + k_{2+}) = 0
 \end{aligned}$$

ในกรณีตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ S_1 เรากำหนดให้ $\Delta_1 \neq 0$ และ $\Delta_2 = 0$ ดังนั้น $k_{2\pm} = \pm k_F$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-})(2k_F)(k_{1-} - k_{1+}) \\
 & - (\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-})(k_{1-} - k_F)(k_{1+} + k_F) \\
 & + (\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+})(k_{1+} - k_F)(k_{1-} + k_F) = 0
 \end{aligned}$$

และ $\alpha_{2\pm} = \frac{2\varepsilon}{\Delta_2}$, 0 แทนลงในสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{1+}\alpha_{1-}(2k_F)(k_{1-} - k_{1+}) \\
 & - \alpha_{1+} \frac{2\varepsilon}{\Delta_2}(k_{1-} - k_F)(k_{1+} + k_F) \\
 & + \alpha_{1-} \frac{2\varepsilon}{\Delta_2}(k_{1+} - k_F)(k_{1-} + k_F) = 0
 \end{aligned}$$

ใช้ $\frac{\Delta_2}{2\varepsilon}$ คูณทั้งสมการแล้วแทน $\Delta_2 = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1+}(k_{1-} - k_F)(k_{1+} + k_F) & = \alpha_{1-}(k_{1+} - k_F)(k_{1-} + k_F) \\
 \varepsilon & = \Delta_1
 \end{aligned}$$

ผลที่ได้จากการคำนวณนี้คือพลังงานกระตุ้นสำหรับตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ S_1 เช่นเดียวกับกับผลลัพธ์ตามทฤษฎีบีซีเอส

เพื่อตรวจสอบผลที่คำนวณได้ตามสมการ (3.16) กับผลลัพธ์ตามทฤษฎีมีชีเอสในกรณีตัวนำยิ่งยวด
บริสุทธิ์ S_2 ทำได้โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ($a \rightarrow 0$) และในกรณีนี้ $\cot(ka) \approx \frac{1}{ka}$

เราจะได้สมการ (3.16) มีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} & -(\alpha_{1+}\alpha_{1-} + \alpha_{2+}\alpha_{2-})i(k_{2+} - k_{2-}) \left[\frac{\cancel{k}_{1+}}{\cancel{k}_{1+}a} - \frac{\cancel{k}_{1-}}{\cancel{k}_{1-}a} \right] \\ & + (\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-}) \left[\frac{\cancel{k}_{1-}}{\cancel{k}_{1-}a} - ik_{2-} \right] \left[\frac{\cancel{k}_{1+}}{\cancel{k}_{1+}a} - ik_{2+} \right] \\ & - (\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+}) \left[\frac{\cancel{k}_{1+}}{\cancel{k}_{1+}a} - ik_{2-} \right] \left[\frac{\cancel{k}_{1-}}{\cancel{k}_{1-}a} - ik_{2+} \right] = 0 \end{aligned}$$

เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-})(1 - ik_{2-}a)(1 - ik_{2+}a) \\ & - (\alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+})(1 - ik_{2-}a)(1 - ik_{2+}a) = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\alpha_{1+}\alpha_{2+} + \alpha_{1-}\alpha_{2-} = \alpha_{1+}\alpha_{2-} + \alpha_{1-}\alpha_{2+}$$

$$\alpha_{1+}(\alpha_{2+} - \alpha_{2-}) = \alpha_{1-}(\alpha_{2+} - \alpha_{2-})$$

แต่ $\alpha_{1+} \neq \alpha_{1-}$ ดังนั้นสมการนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $(\alpha_{2+} - \alpha_{2-}) = 0$

หรือ

$$\alpha_{2+} = \alpha_{2-}$$

นั่นก็คือ

$$\frac{\epsilon}{\Delta_2} + i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon}{\Delta_2} - i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$2i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\epsilon = \Delta_2$$

ผลที่ได้จากการคำนวณนี้คือพลังงานกระตุ้นสำหรับตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ S_2 เช่นเดียวกับกับผลลัพธ์ตามทฤษฎีบีซีเอสอีก

ความหนาแน่นสถานะ (density of states DOS)

เราจะคำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานกระตุ้นน้อยกว่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 คือ $\epsilon < \Delta_2$ โดยคำนวณพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่สถานะ l สำหรับ ϵ กรณี $l = 0$ นั้นคำนวณได้จากสมการ (3.16) และสำหรับ ϵ ที่ $l \geq 1$ คำนวณได้จากสมการ (3.14) ในการคำนวณสเปกตรัมพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่สถานะ l ตามสมการ (3.14) และ (3.16) นี้ต้องอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์คำนวณ ถ้ากำหนดให้ $k_F a = x$, $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = y$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = A$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = B$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}\alpha_{1\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \pm \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \\ &= \frac{y}{A} \pm \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{1/2} \\ \alpha_{2\pm} &= \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= y \pm \left[y^2 - 1 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

และจากเงื่อนไขที่ว่า $E_{F1} = E_{F2} = E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ จะได้

$$\begin{aligned}k_{1\pm} &= \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[E_{F1} \pm i \Delta_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{2m E_F}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[1 \pm \frac{\Delta_1}{E_F} \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= k_F \left[1 \pm \left(\frac{\Delta_2}{E_F} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_2 \Delta_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_F \left[1 \pm BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
k_{1\pm} a &= k_F a \left[1 \pm BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= x \left[1 \pm BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
k_{2\pm} &= \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[E_{F_2} \pm i\Delta_2 \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 \pm \frac{\Delta_2}{E_F} \left(\left(\frac{\epsilon}{\Delta_2} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= k_F \left[1 \pm B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
k_{2\pm} a &= k_F a \left[1 \pm B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= x \left[1 \pm B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (3.14) จึงเขียนในเทอมของ x , y , A และ B ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \sqrt{\frac{1}{F}} \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad h_{\ell}^{(1)} \left(x \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) h_{\ell}^{(1)} \left(x \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & \quad j_{\ell-1} \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) j_{\ell-1} \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg] \\
 & - \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \sqrt{\frac{1}{F}} \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad h_{\ell}^{(1)} \left(x \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) h_{\ell-1}^{(1)} \left(x \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & \quad j_{\ell} \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) j_{\ell-1} \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg] \\
 & + \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \sqrt{\frac{1}{F}} \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad h_{\ell}^{(1)} \left(x \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) h_{\ell-1}^{(1)} \left(x \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & \quad j_{\ell} \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) j_{\ell-1} \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\left[\left(\frac{y}{A} - \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y + \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(\frac{y}{A} + \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \right. \\
& + \left[\begin{aligned} & \cancel{K_F} \left[1 + BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & h_{\ell}^{(1)} \left[x \left[1 + B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] h_{\ell-1}^{(1)} \left[x \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ & j_{\ell} \left[x \left[1 - BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] j_{\ell-1} \left[x \left[1 + BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \right] \\
& - \left[\left(\left[\left(\frac{y}{A} + \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y + \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(\frac{y}{A} - \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \right. \\
& - \left[\begin{aligned} & \cancel{K_F} \left[1 - BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & h_{\ell}^{(1)} \left[x \left[1 + B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] h_{\ell-1}^{(1)} \left[x \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ & j_{\ell} \left[x \left[1 + BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] j_{\ell-1} \left[x \left[1 - BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \right] \\
& + \left[\left(\left[\left(\frac{y}{A} + \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{y}{A} - \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \left(\left(y + \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left(y - \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \right. \\
& + \left[\begin{aligned} & \cancel{K_F} \left[1 + B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & h_{\ell-1}^{(1)} \left[x \left[1 + B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] h_{\ell-1}^{(1)} \left[x \left[1 - B \left[y^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \\ & j_{\ell} \left[x \left[1 + BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] j_{\ell} \left[x \left[1 - BA \left[\frac{y^2}{A^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

และสมการ (3.16) เขียนในเทอมของ x , y , A และ B ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + i \left[\frac{k}{F} \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{F} \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{k}{F} \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{k}{F} \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \right] \\
 & + \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left[\frac{k}{F} \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - i \frac{k}{F} \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[\frac{k}{F} \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - i \frac{k}{F} \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \\
 & - \left[\left(\left(\frac{y}{A} + \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(y - \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{y}{A} - \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left(y + \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{k}{F} \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 + BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - i \frac{k}{F} \left(1 - B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[\frac{k}{F} \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cot \left(x \left(1 - BA \left(\frac{y^2}{A^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - i \frac{k}{F} \left(1 + B \left(y^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \right]
 \end{aligned}$$

ในการคำนวณพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้ เราหาค่าของ y ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x เมื่อกำหนดค่าคงที่ A และ B ให้ ในการคำนวณความหนาแน่นสถานะต่อไปนี้ เรากำหนดให้

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0 \text{ และ } 0.4$$

$$B = \frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$$

และ $x = k_F a = 300$ และ 450 เพื่อคำนวณหาค่าของ y

แล้วนับจำนวนสถานะอิเล็กตรอนที่มีพลังงานกระตุ้น ϵ_ℓ โดยที่ $\ell = 0, 1, 2, \dots, k_F a$ ซึ่ง ϵ_ℓ มีสภาพซ้อนสถานะ (degeneracy) เป็น $2\ell + 1$ ทำให้เราคำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนได้ โดยการนับจำนวนสถานะอิเล็กตรอนในแต่ละช่วงพลังงานแล้วหารด้วยช่วงพลังงานนั้น ๆ

$$\text{DOS} = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{\Delta N}{\Delta \epsilon}$$

โดยที่ $\text{DOS} =$ ความหนาแน่นสถานะ

$dN =$ จำนวนสถานะอิเล็กตรอนในช่วงพลังงาน $d\epsilon$ ในกรณีพลังงานมีค่าต่อเนื่อง

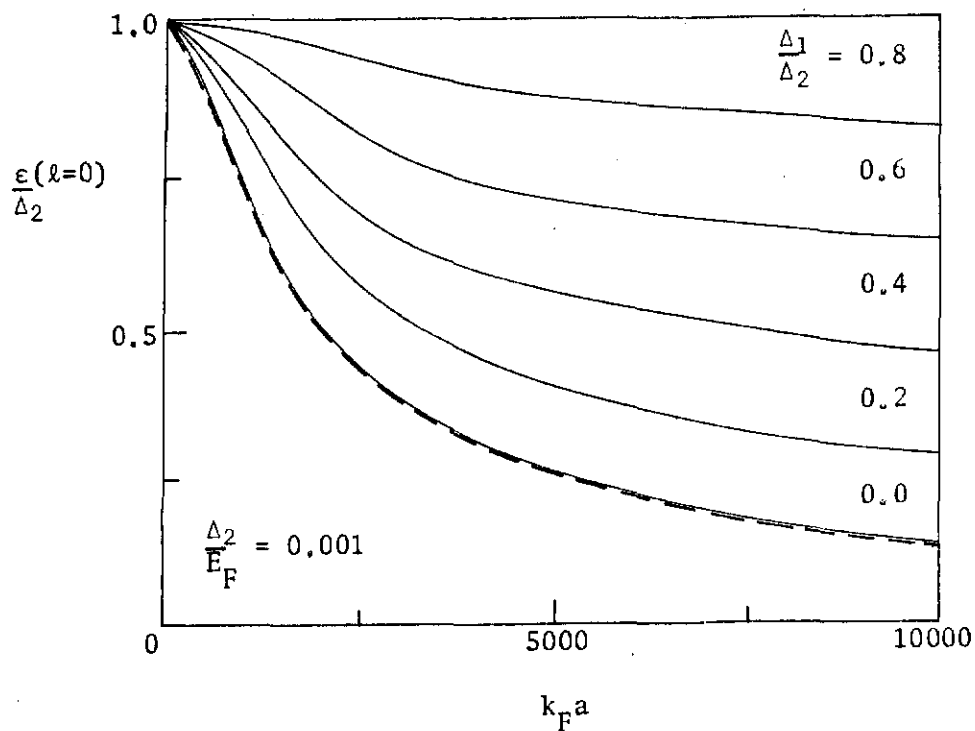
และ $\Delta N =$ จำนวนสถานะอิเล็กตรอนในช่วงพลังงาน $\Delta\epsilon$ ในกรณีพลังงานมีค่าไม่ต่อเนื่อง

บทที่ 4

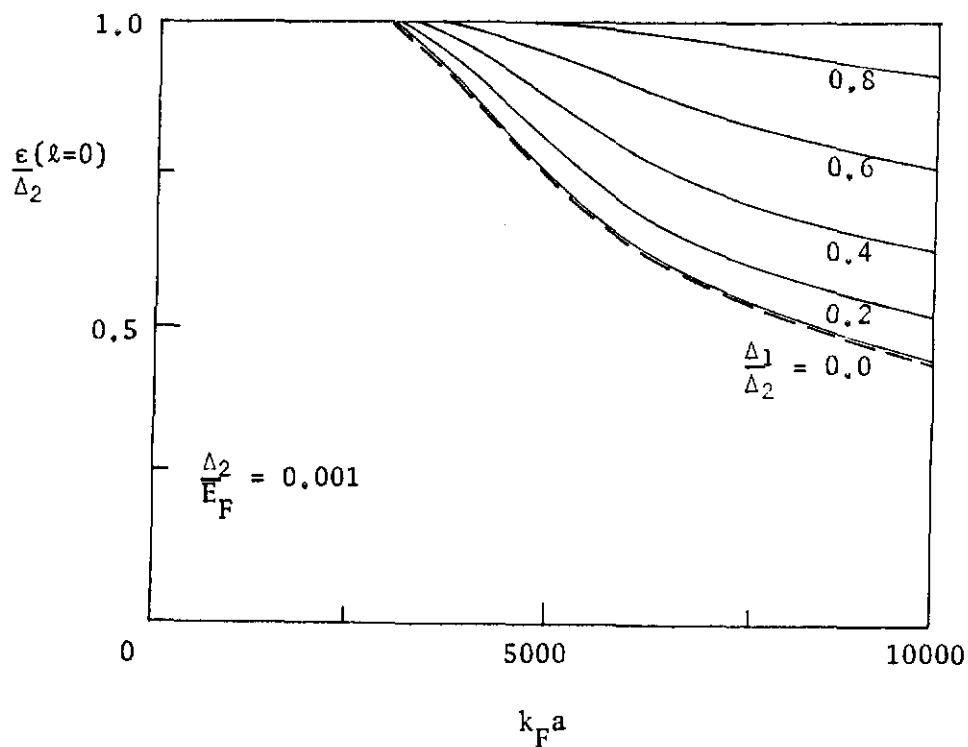
ผลการวิจัย

พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในดัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในดัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งสำหรับสถานะ s (s - state) ที่ $l = 0$ คำนวณได้จากการแก้สมการ (3.16) หาค่า ϵ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของรัศมี a ณ ที่นี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ของพลังงานกระตุ้น $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ เป็นฟังก์ชันของรัศมีทรงกลม $k_F a$

ในกรณีที่เราจำกัดค่าของ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และแปรเปลี่ยนค่าของ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ ถึง 0.8 นั้น ดังแสดงในภาพประกอบ 13



(ก)



(ข)

ภาพประกอบ 13 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในสถานะ s ซึ่ง $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ และ 0.8 เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของฮุยและสเตราด์

(ก) สำหรับแถบพลังงานแถบแรก

(ข) สำหรับแถบพลังงานแถบที่สอง

จากกราฟในภาพประกอบ 13 เราพบว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะลดน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้น และถ้าพิจารณาขนาดของทรงกลม $k_F a$ เฉพาะค่าใดค่าหนึ่งเท่านั้น เราพบว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะเพิ่มมากขึ้นเมื่อ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น สำหรับแถบพลังงานแถบแรกนั้นเริ่มต้นที่ $a = 0$ ส่วนแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่รัศมีวิกฤต (critical radius a_c) โดยที่ขนาดของ a_c หาได้จากการแทนค่า $\frac{E}{\Delta_2} = 1$ ในสมการ (3.16) เราจะได้ว่า

$$k_{1+} \cot(k_{1+} a_c) = k_{1-} \cot(k_{1-} a_c) \quad (4.1)$$

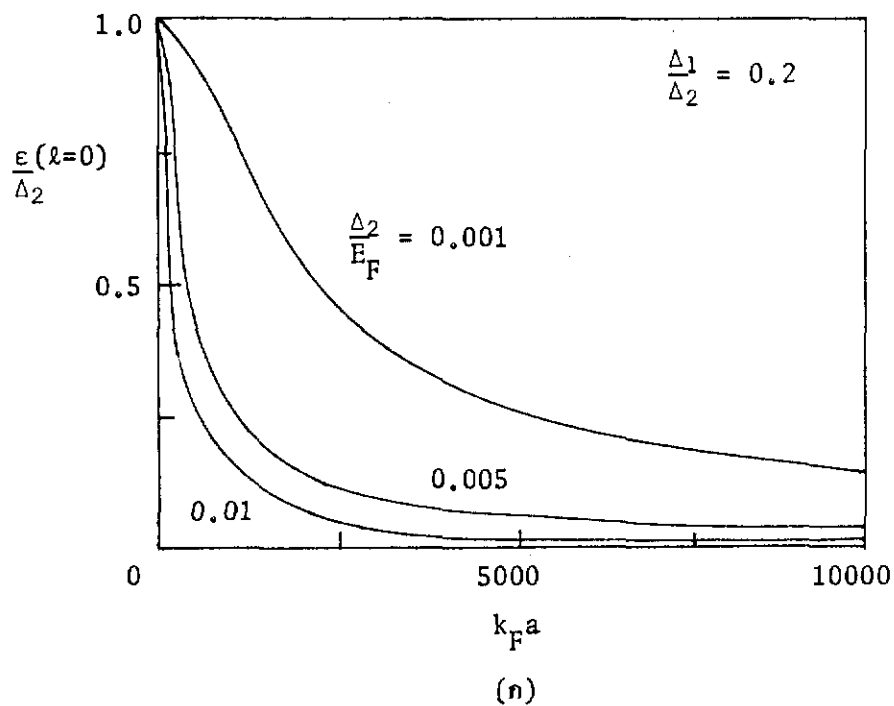
จากสมการ (4.1) เมื่อ $\frac{\Delta_2}{E_F} \ll 1$ เราจะหาขนาดของ a_c ได้ดังนี้

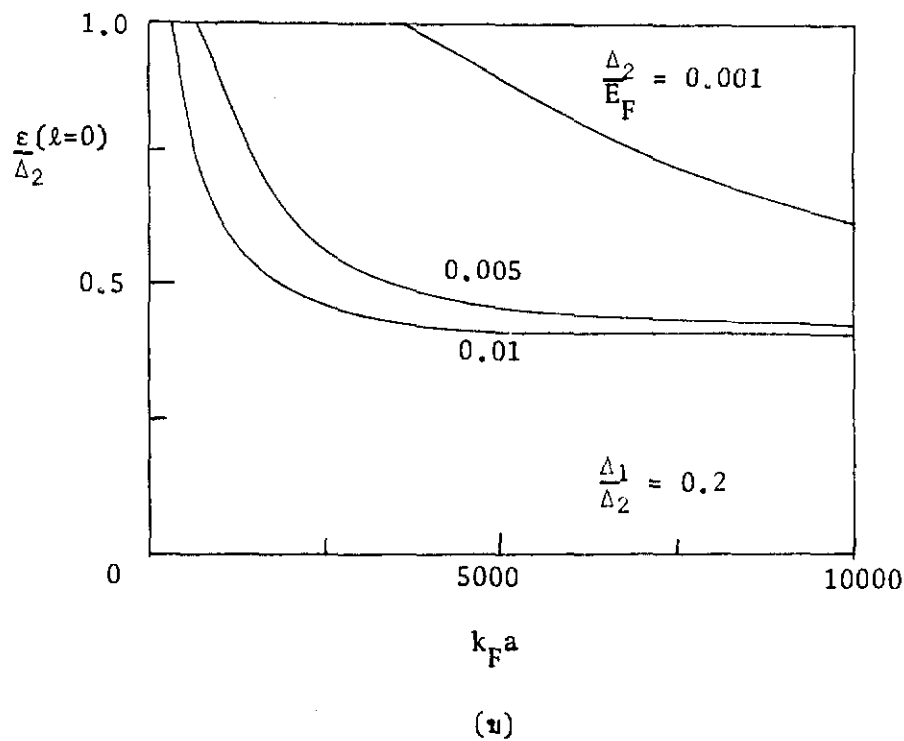
$$k_F a_c \approx \frac{(n-1)E_F}{\Delta_2 \left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.2)$$

โดยที่ $n = 1$ สำหรับแถบพลังงานแถบแรกและ $n = 2$ สำหรับแถบพลังงานแถบที่สอง ฯลฯ

สำหรับกรณีที่ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ นั้นผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะสอดคล้องกับผลลัพธ์ของฮุชและสเตราด์ดังแสดงในภาพประกอบ 13

ในกรณีที่เรากำหนดค่าของ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$ และแปรเปลี่ยนค่าของ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01 นั้น ดังแสดงในภาพประกอบ 14





ภาพประกอบ 14 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในสถานะ s ที่ $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01

(ก) สำหรับแถบพลังงานแถบแรก

(ข) สำหรับแถบพลังงานแถบที่สอง

จากกราฟในภาพประกอบ 14 เราพบว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะลดน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้น และพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนนี้จะลดน้อยลงอย่างรวดเร็วเมื่อ $\frac{\Delta_2}{E_F}$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น แถบพลังงานกระตุ้นแถบแรกเริ่มต้นที่ $a = 0$ เสมอและแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่ $a \neq 0$ หรือ a_c ซึ่งหาได้จากสมการ (4.2) งานวิจัยส่วนนี้เป็นงานวิจัยที่ได้มีปรากฏในงานวิจัยของผุยและสเตราต์

ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในหัวน้ำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในหัวน้ำยิ่งยวด
อีกชนิดหนึ่งคำนวณได้จากสมการ

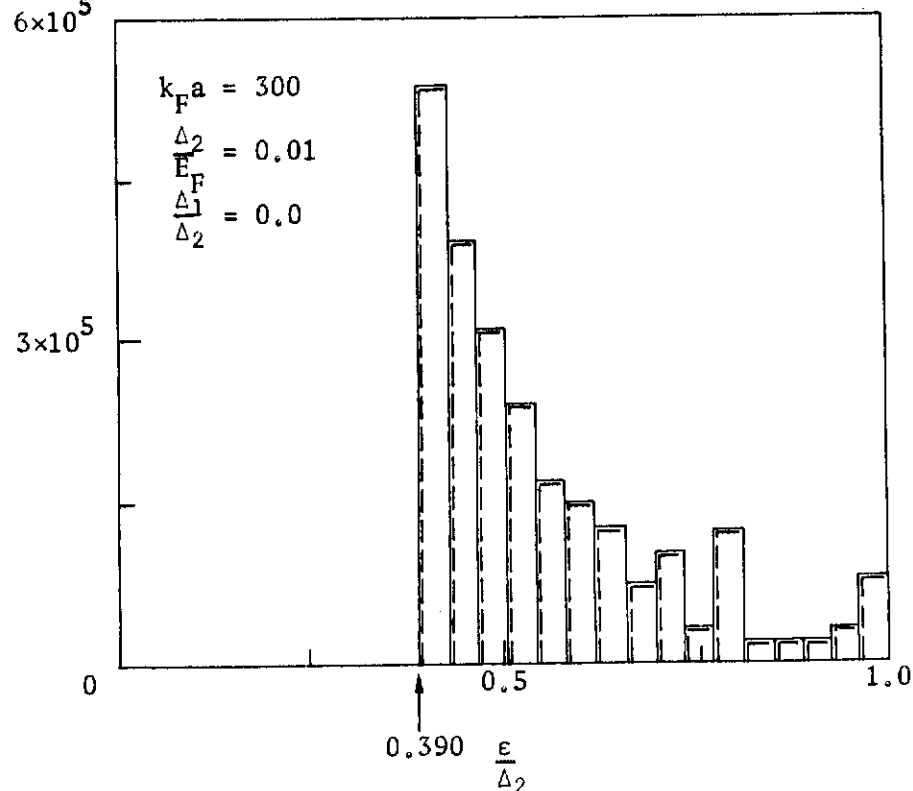
$$\text{DOS} = \frac{\Delta N}{\Delta \epsilon} \quad (4.3)$$

ในกรณี $k_F a = 300$ โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ นั้น เราพบว่าความหนาแน่น-
สถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ ที่คำนวณได้สอดคล้องกับที่สุยและสเตรดคำนวณไว้
คือแถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.390$ สำหรับกรณี $k_F a = 300$ โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$
และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ นั้นแถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.647$ ในกรณีที่ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ และ 0.4
โดยมี $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ นั้นได้มีแสดงไว้ในภาพประกอบ 15

ความหนาแน่นสถานะ

ต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน

6×10^5

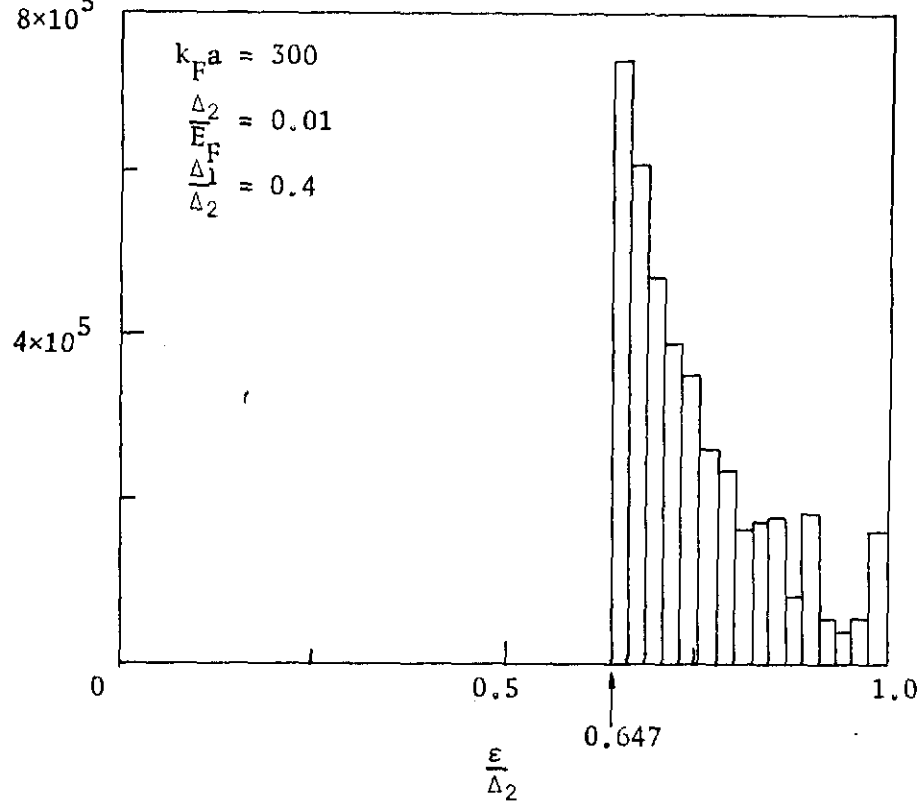


(n)

ความหนาแน่นสถานะ

ต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน

8×10^5



(ข)

ภาพประกอบ 15 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ โดยมี $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของ ฮุยและสเตราค์

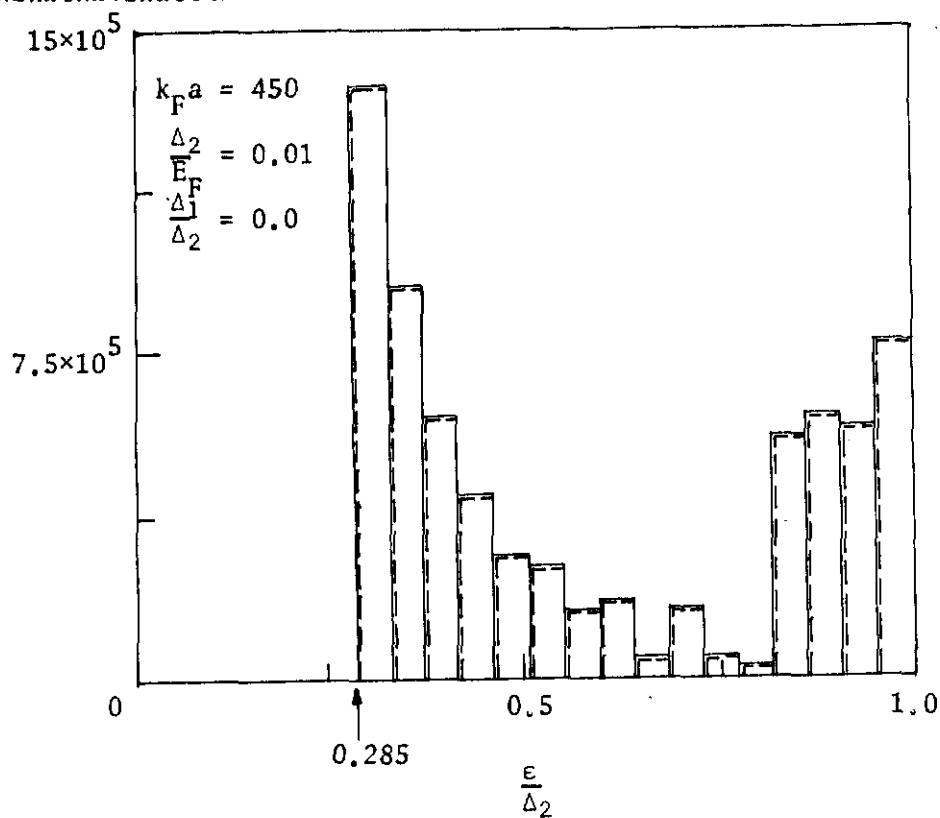
(ก) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.390$

(ข) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.647$

จากภาพประกอบ 15 ทั้ง (ก) และ (ข) เราจะสังเกตเห็นแถบพลังงาน 2 แถบในช่องว่างพลังงาน กรณีแรกแถบที่สองปรากฏไม่ชัดเจนแต่ปรากฏชัดขึ้นในกรณีที่สอง

ในกรณี $k_F a = 450$ โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ นั้น เราพบว่าความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\frac{E}{\Delta_2}$ ที่คำนวณได้สอดคล้องกับที่ชุยและสเตราค์คำนวณไว้ คือแถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = \frac{E}{\Delta_0} = 0.285$ สำหรับกรณี $k_F a = 450$ โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ นั้นแถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{E}{\Delta_2} = 0.566$ ในกรณีที่ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ และ 0.4 โดยมี $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ นั้นได้มีแสดงไว้ในภาพประกอบ 16

ความหนาแน่นสถานะ
ต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน

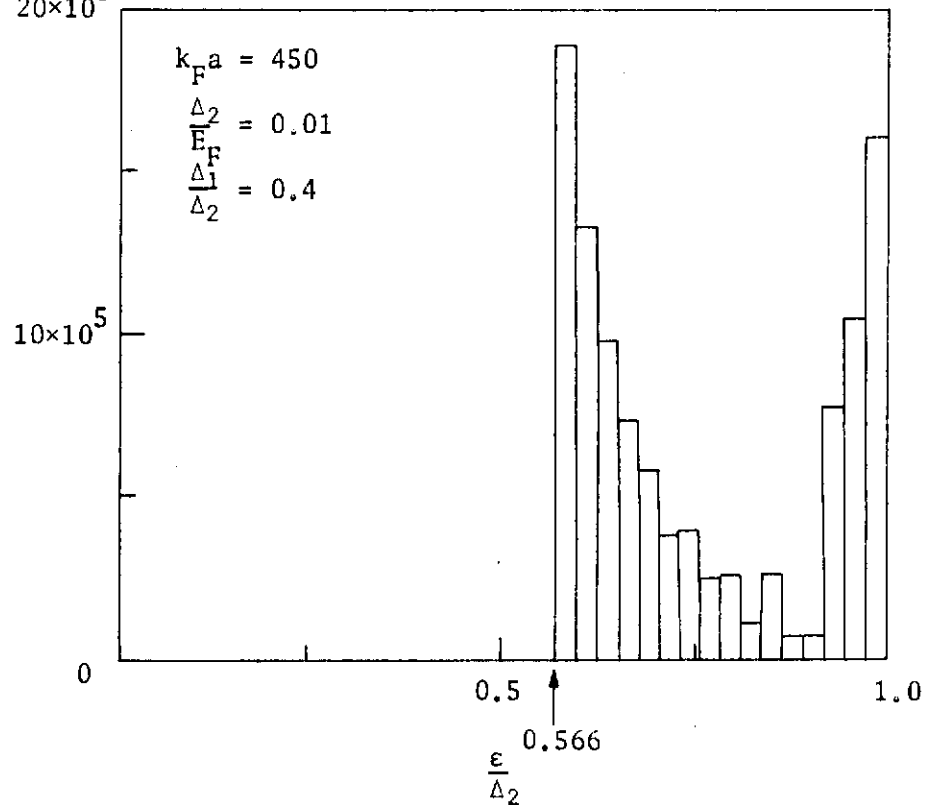


(ก)

ความหนาแน่นสถานะ

ต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน

20×10^5



(ข)

ภาพประกอบ 16 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ โดยมี $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ เส้นทึบแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้และเส้นประแสดงผลลัพธ์ของฮุยและสเตราด์

(ก) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.285$

(ข) ในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.566$

โดยการเปรียบเทียบภาพประกอบ 15 , 16 เมื่อขนาดของทรงกลม $k_F a$ เพิ่มมากขึ้นช่องว่างพลังงานจะลดต่ำลง ในกรณีแรกช่องว่างพลังงานลดต่ำลงจาก 0.390 จนถึง 0.285 และในกรณีที่สองช่องว่างพลังงานลดต่ำลงจาก 0.647 จนถึง 0.566 จนในที่สุดเมื่อ $k_F a$ ยิ่งเพิ่มขึ้นอีกช่องว่างพลังงานจะหมดไป และยิ่งช่องว่างพลังงานลดต่ำลงยอดของความหนาแน่นสถานะ (peak of DOS) จะสูงขึ้นและจำนวนยอด (peaks) ก็จะมีมากขึ้นดังภาพประกอบ 15 และ 16

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งว่าสัมพันธ์อย่างไรกับรัศมีทรงกลม ค่าศักย์ของการจับคู่และโมเมนต์เชิงมุม ตลอดจนเปรียบเทียบผลที่ได้ว่าแตกต่างจากการในตัวนำปกติในตัวนำยิ่งยวดอย่างไร

วิธีดำเนินการวิจัย

คำนวณพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งโดยการแก้สมการโบโกลิบอฟค่า ϵ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของรัศมีทรงกลม ในการแก้สมการโบโกลิบอฟนี้มีข้อสมมุติว่า

- (1) พลังงานเฟอร์มิของทั้ง S_1 และ S_2 มีค่าเท่ากัน
- (2) ศักย์ของการจับคู่ Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าจริงและคงที่

แล้วคำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนโดยการนับจำนวนสถานะอิเล็กตรอนในแต่ละช่วงพลังงานแล้วหารด้วยช่วงพลังงานนั้น ๆ

การวิเคราะห์ผล

แก้สมการที่ได้จากการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ แล้วนำผลที่ประมวลได้มาเขียนกราฟแสดงพลังงานกระตุ้น เป็นฟังก์ชันของขนาดทรงกลม และความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมขนาดต่าง ๆ เป็นฟังก์ชันของพลังงาน อภิปรายผลการวิจัยจากกราฟและ เปรียบเทียบผลการวิจัยนี้กับงานวิจัยของฮุยและสเตราด์

การวิจัยครั้งนี้ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง โดยที่ศักย์ของการจับคู่ในตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a และตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งเป็น Δ_1 และ Δ_2 ตามลำดับ สมมติว่า Δ_1 และ Δ_2 มีค่าคงที่ และ $\Delta_1 < \Delta_2$ โดยการแก้สมการโบโกลิบอฟค่า ϵ สำหรับสถานะ l ใด ๆ นั้น ในสถานะ s ซึ่ง $l = 0$ ถ้าเราจำกัดค่า $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และแปรเปลี่ยนค่า $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ ถึง 0.8

เราพบว่าพลังงานกระตุ้น $\frac{E}{\Delta_2}$ จะมีค่าน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลม $k_F a$ เพิ่มมากขึ้น และถ้าขนาดของทรงกลมคงที่ เราพบว่าพลังงานกระตุ้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ เพิ่มมากขึ้น ถ้าเราจำกัดค่า $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$ และแปรเปลี่ยนค่า $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01 เราพบว่าพลังงานกระตุ้นจะมีค่าน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้น และถ้าขนาดของทรงกลมคงที่พลังงานกระตุ้นจะลดน้อยลงอย่างรวดเร็วเมื่อ $\frac{\Delta_2}{E_F}$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น เรายังพบว่าความหนาแน่นสถานะจะลดน้อยลงเมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนเพิ่มมากขึ้น และช่องว่างพลังงานจะลดลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้นหรือเมื่อ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ มีค่าน้อยลง ดังในกรณีนี้ $k_F a = 300$ และ 450 โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ ช่องว่างพลังงานมีค่าน้อยลงจาก 0.390 จนถึง 0.285 และถ้าเปลี่ยนค่า $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ ช่องว่างพลังงานมีค่าลดน้อยลงจาก 0.647 จนถึง 0.566 ถ้าพิจารณากรณี $k_F a = 300$ โดยมี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ และ 0.4 เราพบว่าช่องว่างพลังงานจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก 0.390 จนถึง 0.647 และถ้าเปลี่ยนค่า $k_F a = 450$ ช่องว่างพลังงานมีค่าเพิ่มมากขึ้นจาก 0.285 จนถึง 0.566 จนในที่สุดเมื่อ $k_F a$ ยิ่งเพิ่มขึ้นอีกช่องว่างพลังงานจะหมดไป และช่องว่างพลังงานลดต่ำลงยอดของความหนาแน่นสถานะ (peak of DOS) จะสูงขึ้นและจำนวนยอดก็จะมากขึ้นด้วย

อภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนสำหรับระบบผลึกควา์นตัมที่ประกอบด้วยควา์นตัมทรงกลมรัศมี a มีศักย์ของการจับคู่ $\Delta_1 \neq 0$ พึงอยู่ในควา์นตัมขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งมีศักย์ของการจับคู่ $\Delta_2 \neq 0$ โดยการแก้สมการโบโกลิบอฟหาค่า ϵ เช่นเดียวกันกับการคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในงานวิจัยของซุสและสเตราค์ แตกต่างกันก็ตรงที่งานวิจัยของซุสและสเตราค์ได้คำนวณไว้สำหรับระบบที่ประกอบด้วย โลหะปกติรูปทรงกลมรัศมี a มีศักย์ของการจับคู่ $\Delta_1 = 0$ พึงอยู่ในควา์นตัมขนาดใหญ่มีศักย์ของการจับคู่ $\Delta_2 \neq 0$ ดังนั้นในกรณี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.0$ ทั้งพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้จึงได้สอดคล้องกับผลลัพธ์ของซุสและสเตราค์ทุกประการ ส่วนในกรณี $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \neq 0$ นั้นเป็นงานวิจัยที่มีได้ปรากฏในงานวิจัยของซุสและสเตราค์ งานวิจัยนี้จึงนับได้ว่าครอบคลุมงานวิจัยของซุสและสเตราค์ และถ้าเราสมมุติให้รัศมีทรงกลม a มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์หรือมีค่า

เข้าใกล้ศูนย์ เราก็สามารถคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนสำหรับตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ ทั้งภายในและภายนอกรูปทรงกลม ได้ผลเช่นเดียวกันกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้ตามทฤษฎีบีซีเอส อีก งานวิจัยนี้จึงนับว่าเป็นงานวิจัยที่ครอบคลุมทฤษฎีเก่า ๆ อันเป็นการพัฒนาทฤษฎีทางฟิสิกส์ของระบบผสมตัวนำยิ่งยวดให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยนี้ทำให้ได้สมการที่จะใช้คำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับระบบผสมตัวนำยิ่งยวด ซึ่งครอบคลุมทั้งกรณีที่มี

1. ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง
2. โลหะปกติรูปทรงกลมฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ โดยแทน $\Delta_1 = 0$ และ

$$\Delta_2 \neq 0$$

3. ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมฝังอยู่ในโลหะปกติขนาดใหญ่ โดยแทน $\Delta_1 \neq 0$ และ

$$\Delta_2 = 0$$

4. ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ (S_1) ภายในรูปทรงกลม โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์
5. ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ (S_2) ภายนอกรูปทรงกลม โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้พิจารณาเฉพาะกรณีตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 เป็นรูปทรงกลมและตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งมีขนาดใหญ่เท่านั้น ผลการวิจัยนี้จึงไม่สามารถสรุปรวมไปถึงกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดทั้งสองชนิดมีรูปทรงเรขาคณิตแบบอื่น ๆ ได้ ผู้วิจัยมีความคิดว่าควรจะทำการวิจัยต่อไปอีกในเรื่องต่อไปนี้คือ

1. คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับระบบผสมตัวนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ
2. คำนวณหาความร้อนจำเพาะของระบบผสมตัวนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ
3. คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตและสมบัตินี้อื่น ๆ ของระบบผสมตัวนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ

4. คำนวณสมบัติต่าง ๆ ของระบบผสมตัวนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ในกรณี
ที่ Δ_1 และ Δ_2 มีค่าไม่คงที่

5. คำนวณสมบัติต่าง ๆ ของระบบผสมตัวนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ในกรณี
ที่ตัวนำยิ่งยวขนาดใหญ่มิชนาถจำกัด

עזר וחסד

บรรณานุกรม

- Adkins, C.J. and B.W. Kington. Physical Review. 177 : 777, 1969.
- Bardeen, J., L.N. Cooper and J.R. Schrieffer. Physical Review. 108 : 1175, 1957.
- Blakemore, J.S. Solid State Physics. Philadelphia, W.B. Saunders, 1969. 391 p.
- Davis, P.J. Handbook of Mathematical Functions. New York, M. Abramowitz and I.A. Stegun, 1965. 1045 p.
- De Gennes, P.G. Review of Modern Physics. 36 : 225, 1964.
- _____. Superconductivity of Metals and Alloys. New York, W.A. Benjamin, 1966. 274 p.
- Freake, S.M. and C.J. Adkins. Physical Review Letters A. 29 : 382, 1969.
- Fröhlich, J. Physical Review. 79 : 845, 1950.
- Hui, P.M. and D. Stroud. Physical Review Letters B. 31 : 584, 1985.
- Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics. New York, John Wiley & Sons, 1983. 988 p.
- Mc Millan, W.L. Physical Review. 175 : 537, 1968.
- Meissner, H. Physical Review. 109 : 686, 1958.
- Onnes, Kamerlingh H. Comm. Phys. Lab. Leiden. 119 : 1206 - 1226, 1911.
- Smith and others. Physical Review. 686, 1961.
- Tinkham, M. Introduction to Superconductivity. New York, Mc Graw - Hill, 1975. 84 p.

הרמאחרת

การหาคำตอบของสมการในรูป

$$\nabla^2 u + k_{\mp}^2 u = 0 \quad (1)$$

ในโคออร์ดิเนตทรงกลมสมการ (1) จะมีรูปแบบเป็น

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k_{\mp}^2 u = 0 \quad (2)$$

กำหนดให้ $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)P(\theta)\Phi(\phi)$

แทนค่า $u(r, \theta, \phi)$ ลงในสมการ (2) แล้วแยกสมการ (2) ได้เป็น 3 สมการดังนี้

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k_{\mp}^2 = b^2 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP}{d\theta} + \left(b^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

สมการ (5) มีคำตอบเป็น

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi} ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

สมการ (4) เป็น associated Legendre equation โดยที่ b^2 เป็นค่าจริงและมีรูปแบบเป็น $b^2 = \ell(\ell + 1)$

สมการ (4) อาจเขียนในรูปใหม่ได้เป็น

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P = 0 \quad (7)$$

โดยที่

$$x = \cos \theta, \quad 1 - x^2 = \sin^2 \theta, \quad \frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

ในกรณี $m = 0$ สมการ (7) กลายรูปเป็น

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \ell(\ell + 1)P = 0 \quad (8)$$

สมการ (8) คือ ordinary Legendre equation ซึ่งมีคำตอบเป็น Legendre polynomials

$$P_\ell(\cos\theta)$$

ในกรณี $m \neq 0$ สมการ (4) มีคำตอบเป็น

$$P_\ell^m(\cos\theta) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m [P_\ell(\cos\theta)]}{d(\cos\theta)^m} \quad (9)$$

สมการ (๑) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2 k_\mp^2 - b^2 &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_\mp^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) R &= 0 \\ \frac{d^2 R}{d(k_\mp r)^2} + \frac{2}{(k_\mp r)} \frac{dR}{d(k_\mp r)} + \left(1 - \frac{b^2}{(k_\mp r)^2} \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

สมการ (10) เป็นสมการเบสเซล (Bessel equation) ในเทอมของ $(k_\mp r)$ คำตอบของ

สมการ (10) เรียกว่าเบสเซลฟังก์ชัน (Bessel function) มีรูปแบบเป็น

$$R_{\ell m}(r) = A_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_- r) + B_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_+ r) \quad (11)$$

โดยที่ $A_{\ell m}$ และ $B_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า, $h_\ell^{(1)}(k_\mp r)$ เป็นแชนเกลฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ

จากสมการ (๘), (๙) เราจะได้ว่า

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = P(\theta) \phi(\phi) = P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (12)$$

โดยที่ $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$ และ $\ell = 0, 1, 2, \dots$

$Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม θ และ ϕ ในฮาร์โมนิกทรงกลม (spherical harmonics)

ดังนั้นคำตอบของสมการ (1) คือ

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(k_- r) + B_{\ell m} h_{\ell}^{(1)}(k_+ r) \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (13)$$

เบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลม (spherical Bessel functions)

จากสมการเบสเซล (Bessel equation) ในรูป

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' + [\rho^2 - \ell(\ell + 1)]R = 0 \quad ; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

จะมีคำตอบเฉพาะ (particular solutions) เป็น

(1) เบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมพวกที่ 1 (spherical Bessel functions of the first kind)

$$j_\ell(\rho) = \frac{\rho^\ell}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell+1)} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}\rho^2}{1!(2\ell+3)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)^2}{2!(2\ell+3)(2\ell+5)} - \cdots \right]$$

(2) เบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมพวกที่ 2 (spherical Bessel functions of the second kind)

$$n_\ell(\rho) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell-1)}{\rho^{\ell+1}} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}\rho^2}{1!(1-2\ell)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)^2}{2!(1-2\ell)(3-2\ell)} - \cdots \right]$$

หรืออาจเรียก $n_\ell(\rho)$ นี้ว่านิวมานน์ฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (spherical Neumann - functions of order ℓ)

(3) เบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมพวกที่ 3 (spherical Bessel functions of the third kind)

$$h_\ell^{(1)}(\rho) = j_\ell(\rho) + in_\ell(\rho)$$

$$h_\ell^{(2)}(\rho) = j_\ell(\rho) - in_\ell(\rho)$$

หรืออาจเรียก $h_\ell^{(1)}(\rho)$ และ $h_\ell^{(2)}(\rho)$ นี้ว่าแฮงเกิลฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (spherical Hankel functions of order ℓ)

ในกรณี $l = 0$ จะได้ว่า

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}$$

$$n_0(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho}$$

ดังนั้น

$$h_0^{(1)}(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho} - i \frac{\cos \rho}{\rho} = -\frac{ie^{i\rho}}{\rho}$$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเบสเชลฟังก์ชันชนิดทรงกลม

$$j_l'(\rho) = j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho)$$

ในกรณี $\rho \gg 1$ เราจะได้ว่า $j_l'(\rho) = j_{l-1}(\rho)$

$$n_l'(\rho) = \frac{1}{j_l(\rho)} \left[\frac{1}{\rho^2} + n_l(\rho) j_l'(\rho) \right]$$

ในกรณี $\rho \gg 1$ เราจะได้ว่า $n_l'(\rho) = \frac{n_l(\rho) j_{l-1}(\rho)}{j_l(\rho)}$

$$h_l^{(1)}(\rho) = j_l'(\rho) + i n_l'(\rho)$$

$$\begin{aligned} &= j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho) + \frac{i}{j_l(\rho)} \left[\frac{1}{\rho^2} + n_l(\rho) j_l'(\rho) \right] \\ &= j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho) + \frac{i}{\rho^2 j_l(\rho)} + \frac{i n_l(\rho)}{j_l(\rho)} \left[j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho) \right] \\ &= j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} j_l(\rho) + \frac{i}{\rho^2 j_l(\rho)} + \frac{i n_l(\rho) j_{l-1}(\rho)}{j_l(\rho)} - i n_l(\rho) \frac{l+1}{\rho} \\ &= j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} \left[j_l(\rho) + i n_l(\rho) \right] + i \left[n_{l-1}(\rho) - \frac{1}{\rho^2 j_l(\rho)} \right] + \frac{1}{\rho^2 j_l(\rho)} \\ &= j_{l-1}(\rho) - \frac{l+1}{\rho} h_l^{(1)}(\rho) + i n_{l-1}(\rho) \end{aligned}$$

$$= j_{\ell-1}(\rho) + i\eta_{\ell-1}(\rho) - \frac{\ell+1}{\rho} h_{\ell}^{(1)}(\rho)$$

$$= h_{\ell-1}^{(1)}(\rho) - \frac{\ell+1}{\rho} h_{\ell}^{(1)}(\rho)$$

ในกรณี $\rho \gg 1$ เราจะได้ว่า $h_{\ell}^{(1)}(\rho) = h_{\ell-1}^{(1)}(\rho)$

เค้าโครงวิทยานิพนธ์

ผู้วิจัย ว่าที่ ร.ต. สุทธิพงษ์ เขวงเกียรติกุล คณะกรรมการ
 ปรึกษา การศึกษามหาบัณฑิต ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน ประธาน
 สาขา ฟิสิกส์ รองศาสตราจารย์ ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ กรรมการ
 ปีการศึกษา 2529

ชื่อเรื่อง พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมในตัวนำยิ่งยวด
 อีกชนิดหนึ่ง

The Excitation Energy and the Density of States for a
 Superconducting Sphere in another Superconductor

อุณหภูมิต่ำ

ในปี ค.ศ.1911 ฮอนเนส (Onnes. 1911 : 1206,1226) ได้พบว่าสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะบริสุทธิ์หรือโลหะผสมหลายชนิดจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่ออุณหภูมิลดต่ำลงถึงอุณหภูมิ หนึ่งอุณหภูมิที่สภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะมีค่าเป็นศูนย์เรียกว่าอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature, T_c) และเรียกโลหะที่สภาพต้านทานไฟฟ้าเป็นศูนย์เหล่านี้ว่าตัวนำยิ่งยวด (superconductors)

ในปัจจุบันเราเชื่อว่าสาเหตุสำคัญที่ทำให้โลหะธรรมดากลายเป็นตัวนำยิ่งยวดคือ การเกิดอันตรกิริยาแบบดึงดูด (attractive interaction) ระหว่างอิเล็กตรอน 2 ตัวโดยอาศัยโฟนอนเป็นตัวสื่อ อิเล็กตรอนทั้งสองมีสปินและโมเมนตัมสวนทิศกัน คู่อิเล็กตรอนนี้เรียกว่าคูคูเปอร์ (Cooper pairs) (Tinkham. 1975 : 28) ทฤษฎีแรกที่นับว่าประสบความสำเร็จในการอธิบายสมบัติโดยทั่วไปของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์คือทฤษฎีของบาร์ดีน คูเปอร์และชรีฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 : 1175) ทฤษฎีนี้เรียกโดยย่อว่าทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ซึ่งวิเคราะห์หาเหตุผลโดยวิธีการคำนวณพบว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (electron - phonon interaction) เป็นกลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด ทั้งนี้นับว่าสอดคล้องกับข้อเสนอของฟร็อห์ลิช (Fröhlich. 1950 : 845)

จากการคำนวณโดยทฤษฎีบีซีเอสนั้นพบว่าพลังงานกระตุ้น (excitation energy, E_k) ของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์

$$E_k = (\Delta^2 + \epsilon_k^2)^{1/2} \quad (1)$$

โดยที่ E_k เป็นพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม k , ϵ_k เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม k และ Δ เป็นช่องว่างในแถบสเปกตรัมของพลังงานซึ่งมีค่า

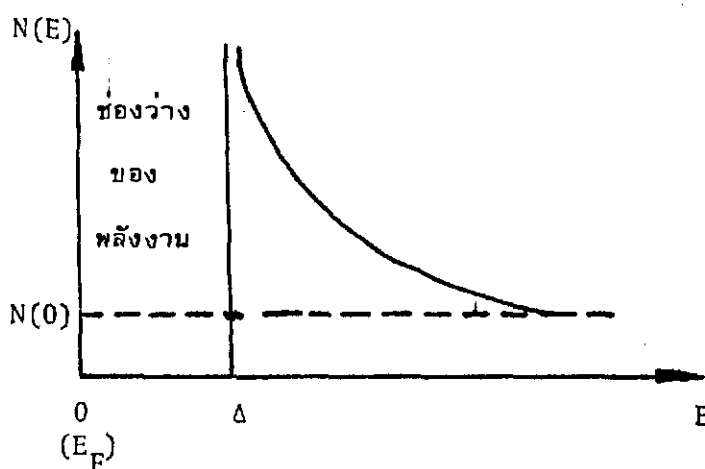
$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (2)$$

โดยที่ $\hbar\omega_D$ เป็นพลังงานเดบาย (Debye energy) , $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ (Fermi energy density of states) และ V เป็นศักย์ของอันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน จากสมการ (1) เราจะเห็นว่าพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ Δ

ดังนั้นการทำให้คู่อิเล็กตรอนแยกจากกันจะต้องใช้พลังงานอย่างน้อยที่สุด 2Δ และตามทฤษฎีบีซีเอสนั้นพบว่าความหนาแน่นสถานะในสเปกตรัมของพลังงานคือ

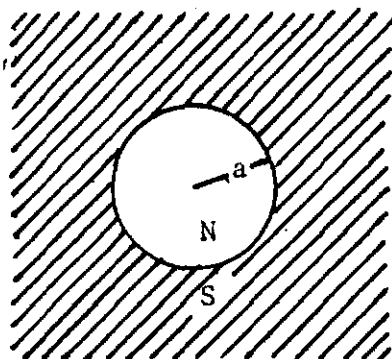
$$N(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dE} = N(0) \frac{d\epsilon}{dE} = \frac{N(0)}{dE/d\epsilon}$$

$$= \begin{cases} N(0) \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & \text{เมื่อ } E > \Delta \\ 0 & \text{เมื่อ } E < \Delta \end{cases} \quad (3)$$



ภาพประกอบ 1 แสดงความหนาแน่นสถานะในสเปกตรัมของพลังงาน E และพลังงานของสถานะวัดจากพลังงานเฟอร์มี (Fermi energy, E_F)

เมื่อเร็ว ๆ นี้ฮุยและสตรูด (Hui and Stroud, 1985 : 584) ได้คำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะในโลหะปกติรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงโลหะปกติ (N) รูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ (S)

ชวยและสเตราค์ได้กำหนดว่า

(1) พลังงานเฟอร์มิของทั้งโลหะปกติและตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่ากัน

และ(2) ศักย์ของการจับคู่ (pair potential, Δ) มีค่าคงที่เป็น

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } r < a \text{ ในโลหะปกติ (N)} \\ \Delta_0 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ในตัวนำยิ่งยวด (S)} \end{cases}$$

เขาได้หาสเปกตรัมของพลังงานกระตุ้นโดยการแก้สมการโบโกลิอูบอฟ (Bogoliubov equations)

(De Gennes. 1966 : 137)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta v &= \epsilon u \\ \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta u &= \epsilon v \end{aligned} \quad (4)$$

โดยที่ u และ v เป็นอัมปลิจูดฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนและโฮลด์ตามลำดับ, ϵ เป็นพลังงานไอแกน,

Δ เป็นศักย์ของการจับคู่, m เป็นมวลของอิเล็กตรอน และ $\hbar$ เป็นค่าคงที่ของพลังค์ เขากำหนดให้

u และ v เป็นสัดส่วนกัน คือ $v = \alpha u$

โดยการแก้สมการ (4) ชวยและสเตราค์สามารถหาค่าคงที่ α ได้ 2 ค่าคือ

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} + \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} + i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 \alpha_2 &= \frac{\epsilon}{\Delta_0} - \left[\left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \frac{\epsilon}{\Delta_0} - i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

และฟังก์ชันคลื่น

$$\begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell m} \begin{pmatrix} h_{\ell}^{(1)}(k_1 r) \\ \alpha_1 h_{\ell}^{(1)}(k_1 r) \end{pmatrix} + B_{\ell m} \begin{pmatrix} h_{\ell}^{(1)}(k_2 r) \\ \alpha_2 h_{\ell}^{(1)}(k_2 r) \end{pmatrix} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{6}$$

โดยที่ $h_{\ell}^{(1)}(x)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นทรงกลมลำดับที่ ℓ (spherical Hankel function of order ℓ) (Davis, 1965 : 437), $A_{\ell m}$ และ $B_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า, $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม θ และ ϕ ในฮาร์โมนิกทรงกลม (spherical harmonics), k_1 และ k_2 เป็นเวกเตอร์คลื่นซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \left[E_F - i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \\
 k_2 &= \left[E_F + i\Delta_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

เมื่อ $r < a$ คือในโลหะปกติ (N) $\Delta = 0$ สมการ (4) กลายเป็น

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u &= \epsilon u \\
 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v &= \epsilon v
 \end{aligned} \tag{8}$$

สมการ (8) มีคำตอบเป็น

$$\begin{bmatrix} u(\vec{r}) \\ v(\vec{r}) \end{bmatrix} = \sum_{\ell, m} \begin{bmatrix} C_{\ell m} j_{\ell}(kr) \\ D_{\ell m} j_{\ell}(k'r) \end{bmatrix} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (9)$$

โดยที่ $j_{\ell}(x)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชันชนิดทรงกลมลำดับที่ ℓ (spherical Bessel function of order ℓ) (Davis, 1965 : 437). $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ เป็นค่าคงที่ที่ต้องหาค่า, k และ k' เป็นเวกเตอร์คลื่นซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} k &= (E_F + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ k' &= (E_F - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

ที่ $r = a$ นั้นมีข้อกำหนดว่าฟังก์ชันคลื่นมีค่าต่อเนื่องและอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันคลื่นก็มีค่าต่อเนื่อง ด้วย ถ้าค่าคงที่ $A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$, $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด เงื่อนไขที่จะได้สมการสำหรับใช้หาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่สถานะ $\ell \geq 1$ คือ

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\begin{bmatrix} kk'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -k_1k'h_{\ell}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(k'a)j_{\ell}(ka) \\ -kk_2h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell}(k'a) \\ +k_1k_2h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell}(ka)j_{\ell}(k'a) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} kk'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell-1}(k'a) \\ -k_2k'h_{\ell}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell-1}(k'a)j_{\ell}(ka) \\ -kk_1h_{\ell}^{(1)}(k_2a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)j_{\ell-1}(ka)j_{\ell}(k'a) \\ +k_1k_2h_{\ell-1}^{(1)}(k_1a)h_{\ell-1}^{(1)}(k_2a)j_{\ell}(ka)j_{\ell}(k'a) \end{bmatrix}} \quad (11)$$

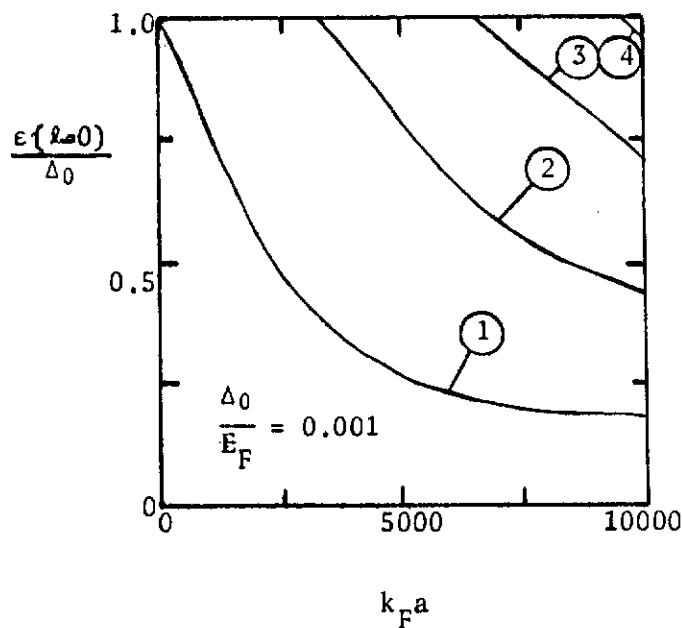
สำหรับสถานะที่ $\ell = 0$ สมการ (11) จะลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\left[k \cot(ka) - ik_1 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_2 \right]}{\left[k \cot(ka) - ik_2 \right] \left[k' \cot(k'a) - ik_1 \right]} \quad (12)$$

สมการ (11) และ (12) คือผลลัพธ์ของชุยและสเตราค์สำหรับสถานะที่ $\ell \geq 1$ และ $\ell = 0$ ตามลำดับ

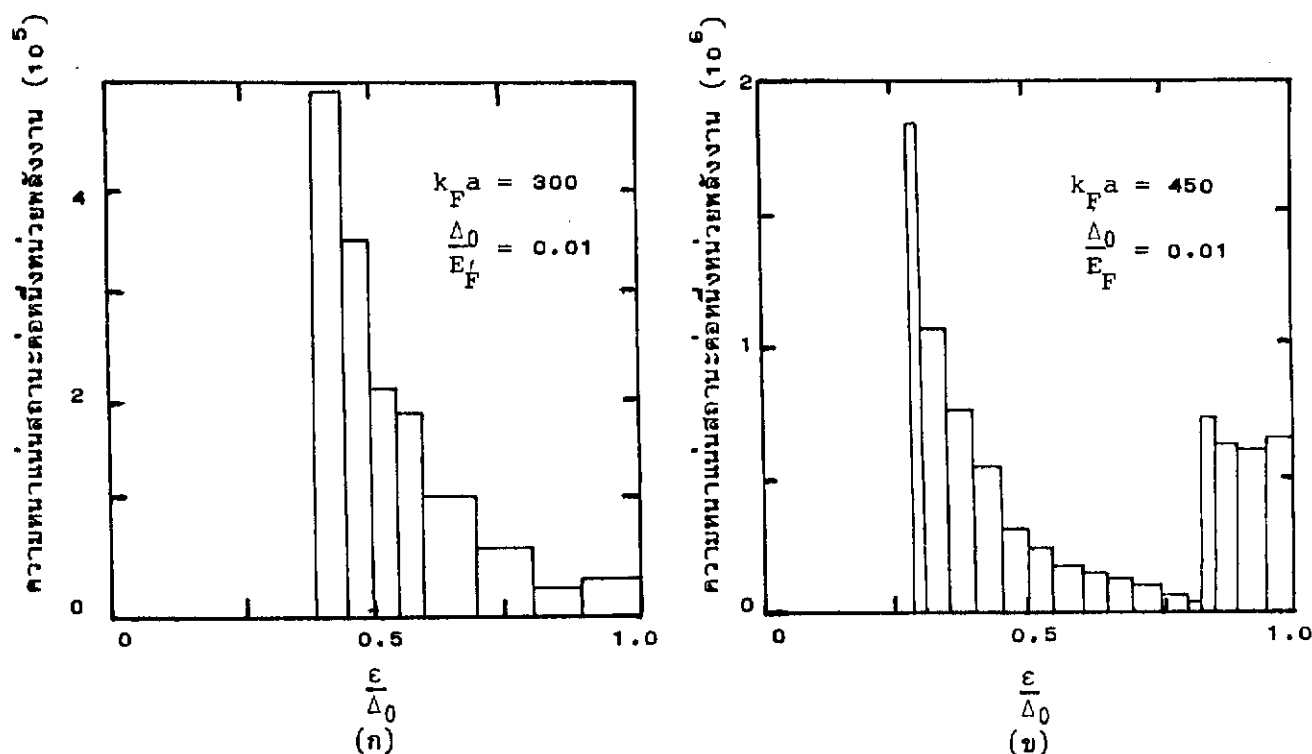
ซึ่งสามารถใช้คำนวณหาค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะได้โดยการแทนค่าของพารามิเตอร์

$k_F a$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F}$ ตามชนิดของโลหะลงในสมการ ดังตัวอย่างภาพประกอบ 3 และ 4



ภาพประกอบ 3 แสดงพลังงานกระตุ้นสำหรับสถานะที่ $\ell = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ในกรณี $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$

ภาพนี้แสดงให้เห็นถึงแถบพลังงานทั้ง 4 แถบซึ่งได้จากการแก้สมการ (12) หาค่า ϵ โดยมี $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$

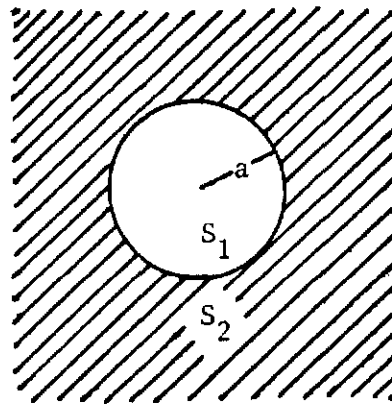


ภาพประกอบ 4 แสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_0}$ (ก) ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ คือ $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.390$ และ (ข) ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ คือ $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.285$ และแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.830$

ปัญหาและจุดมุ่งหมายของการวิจัย

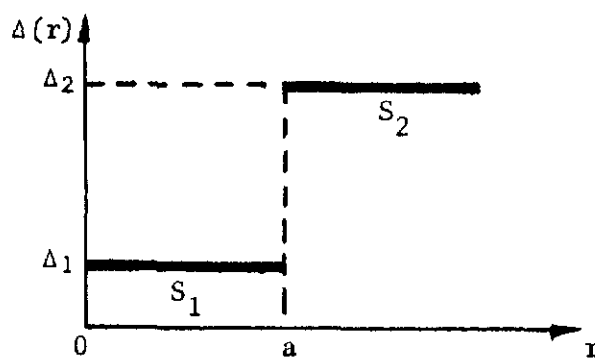
ดังได้กล่าวมาแล้วว่าตัวนำยิ่งยวดต่างกับตัวนำปกติตรงที่ในตัวนำยิ่งยวดมีคู่อิเล็กตรอนโคเดเคียว สมบัติการจับคู่ของอิเล็กตรอนนี้ในทางคำนวณเราแทนด้วยศักย์ของการจับคู่ Δ ดังนั้นในตัวนำปกติ $\Delta = 0$ และในตัวนำยิ่งยวด $\Delta \neq 0$

ปัญหาที่ยังไม่ได้มีผู้ใดวิจัยคือหากมีตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมชนิดหนึ่งฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะเป็นอย่างไรและความหนาแน่นสถานะจะขึ้นกับพารามิเตอร์อะไรบ้าง ผู้วิจัยต้องการขยายขอบเขตงานวิจัยของฮุยและสเตราค์ออกไปให้กว้างขวางยิ่งขึ้น โดยจะศึกษาระบบที่มีตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งที่มีขนาดใหญ่ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 แสดงตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลม (S_1) รัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ (S_2)

และกำหนดค่าศักย์ของการจับคู่อิเล็กตรอนที่ดังนี้



ภาพประกอบ 6 แสดงศักย์ของการจับคู่ $\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} \Delta_1 & \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ใน } S_1 \\ \Delta_2 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ใน } S_2 \end{cases}$

ในกรณีนี้ในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (S_1) $\Delta_1 \neq 0$ และในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 (S_2) $\Delta_2 \neq 0$

งานวิจัยนี้จะหา

(1) พลังงานกระตุ้น

และ (2) ความหนาแน่นสถานะ ว่าสัมพันธ์อย่างไรกับรัศมีทรงกลม , ค่าศักย์ของการจับคู่ และโมเมนต์เชิงมุม ตลอดจนเปรียบเทียบผลที่ได้ว่ามีการเปลี่ยนแปลงไปจากผลลัพธ์ของซูและสเตราด์ อย่างไรบ้าง

ขอบเขตของการวิจัย

1. การวิจัยครั้งนี้จะพิจารณาในการใช้ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (S_1) เป็นรูปทรงกลมที่มีรัศมี a น้อยกว่าความยาวอาพันธ์มาก ($a \ll \xi$) และตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง (S_2) มีขนาดใหญ่เมื่อคิดเทียบกับขนาดของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 ซึ่งเป็นการศึกษาที่จะเป็นแนวทางการพัฒนาทฤษฎีให้สามารถอธิบายได้ทั้งกรณี S_1 และ S_2 มีรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ
2. พลังงานเฟอรัมิกของทั้ง S_1 และ S_2 มีค่าเท่ากัน
3. ศักย์ของการจับคู่ Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าจริงและคงที่ ดังภาพประกอบ ๘

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยนี้ทำให้ได้ผลการที่จะใช้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับระบบผสมตัวนำยิ่งยวด ซึ่งครอบคลุมทั้งกรณีที่มี

1. ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง
2. โลหะปกติรูปทรงกลมฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ โดยแทน $\Delta_1 = 0$ และ $\Delta_2 = \Delta_0$ เพื่อเปรียบเทียบกับผลที่คำนวณได้กับผลลัพธ์ของฮุยและสเตรค
3. ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมฝังอยู่ในโลหะปกติขนาดใหญ่ ในกรณีที่ $\Delta_1 = \Delta_0$ และ $\Delta_2 = 0$
4. ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ (S_1) โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ศูนย์
5. ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ (S_2) โดยให้รัศมี a มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

ผลลัพธ์จากข้อ 4 และข้อ 5 สามารถนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ตามทฤษฎีบีซีเอสในการใช้ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ได้

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ตัวนำยิ่งยวด (superconductor) คือโลหะบริสุทธิ์หรือโลหะผสมที่มีสิ่งเจือปน เมื่ออุณหภูมิของโลหะ เหล่านี้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต โลหะเหล่านี้จะไม่มีสภาพต้านทานไฟฟ้ากระแสตรง และเป็นสารแม่เหล็กไดอา คือไม่ยอมให้สนามแม่เหล็กจากภายนอกผ่าน เข้าไปในตัวมันได้หรือ เข้าไปได้บ้างแต่น้อย

2. พลังงานเฟอร์มิ (Fermi energy) คือระดับพลังงานชั้นนอกสุดของอนุภาคในอวกาศของโมเมนตัม เมื่อระบบของอนุภาคอยู่ในสถานะพื้นฐาน เหนือระดับพลังงาน เฟอร์มินี้จะไม่มีอนุภาคใด ๆ ผิวของระดับพลังงานนี้เรียกว่าผิวเฟอร์มิ (Fermi surface) เมื่อระบบถูกรบกวนด้วยสนามภายนอกอนุภาคที่มีระดับพลังงานใกล้ผิว เฟอร์มิ เท่านั้นที่มีการเปลี่ยนแปลง อิเล็กตรอนที่มีระดับพลังงานใกล้ผิว เฟอร์มิจึงมีความสำคัญในการพิจารณาสมบัติของโลหะ

3. ความยาวอาพันธ์ (coherence length , ξ) คือระยะทางระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์ของตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิใด ๆ ที่ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี a ที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. ใช้สมการโบโกลิวอฟคือ

$$\begin{aligned} \epsilon u(r) &= \left[H_e + u_0(r) \right] u(r) + \Delta(r) v(r) \\ \epsilon v(r) &= - \left[H_e^* + u_0(r) \right] v(r) + \Delta^*(r) u(r) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } H_e &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{eA}{c} \right)^2 + u_0(r) - E_F \\ H_e^* &= \frac{1}{2m} \left(i\hbar \nabla - \frac{eA}{c} \right)^2 + u_0(r) - E_F \neq H_e \end{aligned}$$

เมื่อ m เป็นมวลอิเล็กตรอน, e เป็นประจุบนอิเล็กตรอน, c เป็นความเร็วของแสง, A เป็นเวกเตอร์ศักย์, $u_0(r)$ เป็นศักย์ภายนอกใด ๆ ที่กระทำต่ออิเล็กตรอน และ E_F เป็นพลังงานเฟอร์มิ

ในกรณีตัวนำยิ่งยวดไม่มีสิ่งเจือหรือตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์นั้นเราไม่ต้องพิจารณาศักย์ภายนอก $u_0(r)$

และถ้าไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($A = 0$) สมการ (13) กลายเป็น

$$\begin{aligned} \epsilon u &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta(r) v \\ \epsilon v &= \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta^*(r) u \end{aligned} \quad (14)$$

ในกรณีที่ศักย์ของการจับคู่เป็นค่าจริงและคงที่ $\Delta^*(r) = \Delta(r) = \Delta$ เราจะได้สมการโบโกลิวอฟในรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} \epsilon u &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta v \\ \epsilon v &= \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta u \end{aligned} \quad (15)$$

ในการแก้สมการ (15) นี้เรากำหนดให้ u และ v เป็นสัดส่วนกัน คือ $v = \alpha u$ และศักย์ของการจับคู่มีค่าคงที่ดังนี้

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(r) = \begin{cases} \Delta_1 & \text{เมื่อ } 0 < r < a \text{ ใน } S_1 \\ \Delta_2 & \text{เมื่อ } r > a \text{ ใน } S_2 \end{cases} \quad (16)$$

2. ในกรณี $r > a$ ใน S_2 เรากำหนดให้ $v_2 = \alpha_2 u_2$ แล้วแทนเงื่อนไขสมการ

(16) ลงในสมการ (15) เพื่อคำนวณหาค่า α_2 , u_2 และ v_2

3. ในกรณี $0 < r < a$ ใน S_1 เรากำหนดให้ $v_1 = \alpha_1 u_1$ แล้วแทนเงื่อนไข

สมการ (16) ลงในสมการ (15) เพื่อคำนวณหาค่า α_1 , u_1 และ v_1

4. โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่ $r = a$ คือ

$$(1) \quad u_2(a) = u_1(a)$$

$$(2) \quad v_2(a) = v_1(a)$$

$$(3) \quad \left. \frac{d}{dr} u_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} u_1(r) \right|_{r=a}$$

$$(4) \quad \left. \frac{d}{dr} v_2(r) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} v_1(r) \right|_{r=a}$$

เราจะได้สมการ 4 สมการสำหรับคำนวณหาค่า ϵ

5. เมื่อค่าคงที่ต่าง ๆ ในคำคอบมีค่าไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด เราจะได้
 ศีลออร์มีแนนท์ของตัวแปรต่าง ๆ เท่ากับศูนย์ และจากสมการนี้เราสามารถคำนวณพลังงานกระตุ้นและ
 ความหนาแน่นสถานะได้

6. ตรวจสอบผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์ของสุยและสเตราค์ โดยแทน $\Delta_1 = 0$ และ
 $\Delta_2 = \Delta_0$ ว่าสอดคล้องกันหรือไม่

7. ตรวจสอบผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์ตามทฤษฎีซีเอส โดยแทน $a \rightarrow \infty$ และ
 $a \rightarrow 0$ ว่าสอดคล้องกันหรือไม่

8. เขียนกราฟแสดงพลังงานกระตุ้นสำหรับสถานะที่ $\ell = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ ใน
 กรณี $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001$ และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$ สำหรับแถบพลังงานต่าง ๆ โดยเริ่มจาก $k_F a = 0$ จนกระทั่ง
 $k_F a = 10000$ เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ เทียบกับภาพประกอบ 3 ในงานวิจัยของสุยและ
 สเตราค์

9. เขียนกราฟแสดงความหนาแน่นสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงานเป็นฟังก์ชันของ $\frac{E}{\Delta_2}$
 สำหรับพลังงานแถบต่าง ๆ ในสถานะที่ $\ell = 0, 1, 2, \dots, k_F a$ โดยที่ $k_F a = 300, 450$ และ
 $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงเทียบกับภาพประกอบ 4 ในงานวิจัยของสุยและสเตราค์อีก
 เช่นกัน

מבוא למכניקה

- Bardeen, J., L.N. Cooper and J.R. Schrieffer. Physical Review. 108 : 1175, 1957.
- Blakemore, J.S. Solid State Physics. Philadelphia, W.B. Saunders, 1969. 391 p.
- Davis, P.J. Handbook of Mathematical Functions. New York, M. Abramowitz and I.A. Stegun, 1965. 1045 p.
- De Gennes, P.G. Superconductivity of Metals and Alloys. New York, W.A. Benjamin, 1966. 274 p.
- Fröhlich, J. Physical Review. 79 : 845, 1950.
- Hui, P.M. and D. Stroud. Physical Review Letters B. 31 : 584, 1985.
- Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics. New York, John Wiley & Sons, 1983. 988 p.
- Onnes, Kamerlingh H. Comm. Phys. Lab. Leiden. 119 : 1206 - 1226, 1911.
- Tinkham, M. Introduction to Superconductivity. New York, McGraw - Hill, 1975. 84 p.

ผลงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับส่วนนำยิ่งยวดรูปทรงกลมในส่วนนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่ง

บทคัดย่อ

ของ

สุทธิพงษ์ เชวงเกียรติกุล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาดมหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กันยายน 2528

การวิจัยครั้งนี้ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน สำหรับ
ตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมที่ฝังอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง ศักย์ของการจับคู่ของตัวนำยิ่งยวด
ทั้งสองสมมติว่าแตกต่างกันและมีค่าคงที่ โดยการแก้สมการโบโกลิวออฟหาค่าพลังงานกระตุ้น ใน
สถานะ s เราพบว่าพลังงานกระตุ้นจะมีค่าน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้น และถ้าขนาด
ของทรงกลมคงที่ เราพบว่าพลังงานกระตุ้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่ออัตราส่วนศักย์ของการจับคู่เพิ่มมากขึ้น ถ้า
เราจำกัดค่าอัตราส่วนศักย์ของการจับคู่ เราพบว่าพลังงานกระตุ้นจะมีค่าน้อยลงเมื่อขนาดของทรงกลม
เพิ่มมากขึ้น และถ้าขนาดของทรงกลมคงที่พลังงานกระตุ้นจะลดน้อยลงอย่างรวดเร็ว เมื่อศักย์ของการจับ
คู่ในตัวนำยิ่งยวดเจ้าบ้านมีค่าเพิ่มมากขึ้น เรายังพบว่าความหนาแน่นสถานะจะลดน้อยลงเมื่อพลังงาน
ของอิเล็กตรอนเพิ่มมากขึ้น และช่องว่างพลังงานจะลดลงเมื่อขนาดของทรงกลมเพิ่มมากขึ้นหรือเมื่อ
อัตราส่วนศักย์ของการจับคู่ลดน้อยลง ในงานวิจัยนี้เราได้คำนวณการที่ $k_F a = 300$ และ 450 โดย
ที่ a เป็นรัศมีทรงกลม และ k_F เป็นเวกเตอร์คลื่นที่ฟีวเฟอริ

THE EXCITATION ENERGY AND THE DENSITY OF STATES FOR A SUPERCONDUCTING
SPHERE IN ANOTHER SUPERCONDUCTOR

AN ABSTRACT

BY

SUTTIPONG CHAWENGKIRTTIKUL

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University

September 1986

The electronic excitation energy and the density of states for a superconducting sphere in another superconductor are calculated. Assuming that the pair potentials of both superconductors are different and constant, the Bogoliubov equations are solved for the excitation energy. In the s-state we find that the excitation energy decreases as the particle size increases, if particle size is fixed the excitation energy increases as the ratio of pair potentials increases. For a fixed ratio of pair potentials, the excitation energy decreases as the particle size increases. For a fixed particle size, the excitation energy decreases rapidly as the pair potential of the host superconductor increases. The density of states decreases as the excitation energy increases and the energy gap decreases as the particle size increases or the ratio of the pair potentials decreases. The calculations for the cases $k_F a = 300$ and 450 , where a is the radius of the superconducting sphere and k_F is the Fermi surface wave vector are considered.