

512.007
ส 246 ก
1.3

การศึกษาลักษณะการเรียนรู้เรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ณัฐวิทย์ ออ ประพันธ์ กรุงเทพฯ 11 โทร. 3821578, 3815000

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุมานะ อัจหาญ

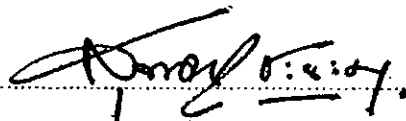
เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

3 มีนาคม 2521

69133

2521 ส.ย. 9 -

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิติโคพิจารณาปัญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

 ประธาน

 กรรมการ

3 มีนาคม 2521

ประกาศคุณประการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลือและ
คำแนะนำอย่างดียิ่งจาก ศาสตราจารย์สุพจน์ ชะนะมา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ กมล
เอกไทยเจริญ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ลาวัลย์ พลกลา ผู้วิจัยขอกราบขอบคุณ
อย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณอาจารย์ใหญ่ ผู้ช่วยอาจารย์ใหญ่ และคณะครู
โรงเรียนวัดคันน้อยใน อำเภอดลิ่งชัน กรุงเทพมหานคร และโรงเรียนบ้านหมอ
"พัฒนานุกุล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี และคุณรัก ชนสัถย์สถิตย์ ที่ได้ให้
ความช่วยเหลือเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่างและอำนวยความสะดวกเป็นอย่างดียิ่งขอชื่นชมการ
ทบทอง

สุมานะ อาจารย์หาญ

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	2
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	2
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	3
	สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า	3
	นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	3
	ข้อตกลงเบื้องต้นในการศึกษาค้นคว้า	3
	ประโยชน์จากการศึกษาค้นคว้า	3
2	เอกสารที่เกี่ยวข้อง	4
3	วิธีดำเนินการและวิเคราะห์ข้อมูล	8
	แหล่งข้อมูลและกลุ่มตัวอย่าง	8
	เครื่องมือในการทดลอง	8
	การดำเนินการทดลอง	9
	การวิเคราะห์ข้อมูล	11
4	ผลการศึกษาค้นคว้า	14
	ข้อตกลงเกี่ยวกับการวิเคราะห์ผลและการแปลผล	14
	ผลของการศึกษาค้นคว้า	14

5	บทย่อ สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	18
	ความมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้	18
	กลุ่มตัวอย่าง	18
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	18
	การดำเนินการทดลอง	19
	การวิเคราะห์ข้อมูล	19
	ผลการทดลอง	20
	สรุปผลการศึกษาค้นคว้า	20
	อภิปรายผล	20
	ข้อเสนอแนะ	21
	บรรณานุกรม	22
	ภาคผนวก	26

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย	15
2	แสดงเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนน ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป โดยจำแนกตามชั้น	16
3	แสดงค่า t จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน 2 ชั้น	17
4	แสดง P_H , P_L , p , r และ Δ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น	ภาคผนวก
5	แสดงคะแนนจากการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องพีชคณิต เชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษา ปีที่ 3	ภาคผนวก

ภูมิหลัง

ประเทศไทยกำลังอยู่ในระยะที่มีความจำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ (รายงานการดำเนินการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2514 : 22) ทั้งนี้ เพราะว่าการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้ เราได้เน้นเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (วิชาการ, 2509 : 4.3 - 1) ทั้งที่การสอนคณิตศาสตร์ต้องการเน้นความสำคัญของโครงสร้างและบทบาทของคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะใช้สูตรคำนวณกลไก (กรมวิชาการ, 2510 : 1) แต่ก็มีปัญหาดังไทรอบแล้วว่าคณิตศาสตร์ของไทยยังมีขอบกพร่องอยู่มาก กล่าวคือ ครูผู้สอนมักจะสอนข้อปลีกย่อยในเรื่องต่าง ๆ มากกว่าที่จะสอน Concept ของเรื่องนั้น ๆ ทำให้ความรู้และเนื้อหาต่าง ๆ ค่อนข้างแคบและไม่ทันกับความก้าวหน้าทางวิชาการของสังคม และนอกจากนี้ยังทำให้หลักสูตรของประเทศไทยล้าหลังกว่าของต่างประเทศ เช่น สหรัฐอเมริกา อังกฤษ และสหภาพโซเวียต จึงเป็นการสมควรอย่างยิ่งที่จะต้องปรับปรุงแก้ไขหลักสูตรเสียใหม่เพื่อให้เหมาะสมกับความก้าวหน้าทางวิชาการของสังคมในปัจจุบัน (สุภาพร, 2514 : 4)

ความเจริญก้าวหน้าของแขนงวิชาต่าง ๆ ต้องการหลักการใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ (ศึกษาธิการ, กระทรวง 2509 : 1) ดังนั้น จึงควรบรรจุวิชาซึ่งประกอบด้วยหลักการใหม่ ๆ และเป็นวิชาซึ่งมีประโยชน์ต่อผู้ศึกษาในสาขาวิชาต่าง ๆ ลงในหลักสูตรคณิตศาสตร์

Linear Algebra เป็นวิชาที่มีประโยชน์มากสำหรับผู้ศึกษาในสายคณิตศาสตร์ สถิติ ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ (Beaumont, 1965 : 7 - 8) เพราะวิชา Linear Algebra ประกอบด้วยเนื้อหาต่าง ๆ เช่น เวกเตอร์ สมการเชิงเส้น เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ และอื่น ๆ

ตามหลักจิตวิทยา ถ้าได้จัดบทเรียนให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนแล้ว ก็จะทำให้นักเรียนเรียนเรื่องเหล่านี้ได้อย่างสะดวกสบายและเห็นประโยชน์ (ฅรงคื บัณเฒ, 2519 : 2) ดังนั้น ครูจึงสามารถสอนวิชาใดก็ได้แก่นักเรียน ในระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของ นักเรียนในระดับนั้นเสียก่อน (Bruner, 1960 : 97)

ควยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะทำการศึกษาและทดลองสอนวิชา Linear Algebra กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กับ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ ผู้วิจัยสร้างขึ้น
2. เพื่อศึกษาว่าควรจะเริ่มสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นในชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2 หรือชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จึงเหมาะสม
3. เพื่อเป็นข้อเสนอในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ ของชั้น มัธยมศึกษาต่อไป

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ จะทำให้ทราบถึงผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้น เบื้องต้น
2. ผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกเนื้อหา เรื่อง พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น เพื่อบรรจุเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับ มัธยมศึกษาตอนต้น

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้กระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนากุล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี
 ชั้นละ 35 คน ซึ่งเลือกมาโดยวิธีสุ่ม

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียน
 พิชชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นได้

2. นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง
 พิชชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นได้ดีกว่านักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ หมายถึงคะแนนของนักเรียนที่ทำได้จากแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ข้อตกลงเบื้องต้นในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนคนใดทำข้อสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป
 ถือว่านักเรียนผู้นั้นสามารถเรียนวิชาพิชชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
 มานั้นได้

2. นักเรียนชั้นใดสามารถทำคะแนนมากกว่า 50% มีจำนวนเกินครึ่งหนึ่งของ
 จำนวนทั้งหมดถือว่านักเรียนชั้นนั้นสามารถเรียนเรื่องพิชชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นได้

3. บทเรียนเรื่องพิชชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถือว่ามีความ
 เหมาะสมที่จะนำไปใช้เป็นบทเรียนได้

ประโยชน์จากการศึกษาค้นคว้า

1. เป็นประโยชน์ในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับ
 มัธยมศึกษา

2. เป็นแนวทางส่งเสริมการวิจัยต่อไป

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

ชัสเตอร์ (Schuster Seymour, 1961 : 313) ให้ข้อเสนอแนะว่า วิชาหนึ่ง ที่ควรสอนในระดับมัธยมศึกษา คือ วิชาพีชคณิตเชิงเส้น เพราะนักเรียนมีความจำเป็นต้องใช้วิชานี้ในระดับวิทยาลัยและระดับสูงขึ้นไป

มูน (Munn, 1962 : 59) กล่าวว่า ความคิดทางนามธรรมหมายถึง ความคิดในการรวบรวม ประสบการณ์ใหม่ เรียกว่า การสรุปเป็นกรณีทั่ว ๆ ไป (Generalization) มูน ยังกล่าวอีกว่า ความคิดทางนามธรรมและการสรุปกรณีทั่วไป นำไปสู่การเกิดมโนภาพที่สมบูรณ์ การสรุปเป็นกรณีทั่ว ๆ ไป และการเกิดมโนภาพ ต้องเริ่มต้นมาจากความคิดทางนามธรรมก่อน

1. * ขวลิต (ขวลิต เอี่ยมเจริญ, 2519 : 2) อ้างถึง คำกล่าวของสโตน (Stone) ว่า สโตน กล่าวถึงความจำเป็นในการที่จะต้องปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ในชั้นมัธยมศึกษาว่ามีสาเหตุสำคัญอยู่ 2 ประการ คือ

1. เนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันได้ขยายออกไปอย่างกว้างขวาง
2. ความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ และศาสตร์สาขาอื่น ๆ จำเป็นต้อง

อาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์มากกว่าก่อน *

เพียร์เจต์ (Piaget, 1969 : 173) กล่าวถึง เด็กอายุ 11 ปี ถึง 15 ปี ว่า เด็กในชั้นนี้จะสามารถนำความคิดที่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เป็นรูปธรรม มีการคิดที่อิสระขึ้น และสามารถคิดในสิ่งที่ เป็นนามธรรมได้ สามารถสรุปและอนุมานจากสมมติฐานได้ สามารถหาความรู้ในลักษณะ ที่เป็นวิทยาศาสตร์ โดยสอดคล้องตามหลักตรรกศาสตร์ได้ จึงสรุปได้ว่าเด็กในชั้นนี้ มีความสามารถในการคิดหาเหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์

9. * โซเบล (Sobel, 1965 : 425) กล่าวว่า ความเข้าใจและการเกิดมโนภาพในหลักคณิตศาสตร์ เป็นกุญแจนำไปสู่ความสำเร็จ ในการเรียนคณิตศาสตร์

ขบวนการเรียนเพื่อให้เกิดความเข้าใจ และมโนภาพ ในหลัก การทางคณิตศาสตร์
ต้องเริ่มจากประสบการณ์ต่อไปนี้เป็น "คิด" เกี่ยวกับปัญหา จินตนาการให้กว้างออกไป
ถึงลักษณะที่เป็นนามธรรม แล้วจะเกิดมโนภาพขึ้น ซึ่งจะนำไปใช้ในเรื่องที่เรียนใหม่
ได้ ๒

ช. ชง (ช. ชง พวงสุวรรณ, 2518 : 33) กล่าวว่า ผลการทดลอง
สอนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เบื้องต้น ในชั้นประถมศึกษาตอนปลาย ปรากฏว่า
นักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนวิชาตรรกศาสตร์
สัญลักษณ์เบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้
ผลการทดลองครั้งนี้ยังสอดคล้องตามทฤษฎีของ เพียร์ เจต เกี่ยวกับพัฒนาการ
เด็กอายุระหว่าง 11 - 15 ปี มีพัฒนาการทางความคิดเชิงตรรกศาสตร์ คือ
สามารถที่จะคิดหาเหตุผลอย่างมีแบบแผนได้

ศุภกิจ (ศุภกิจ เกลิมวิสุตมกุล, 2517 : 27) กล่าวว่า เนื้อหาเรื่อง
เมตริกซ์ เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา แต่จากการทดลอง
พบว่านักเรียนประถมศึกษาตอนปลายสามารถเรียนเรื่องเมตริกซ์เบื้องต้น ตามเนื้อหา
ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับนี้
โดยผลจากการทดลองครั้งนี้สอดคล้องกับข้อเสนอของโครงการทดลองสอนคณิตศาสตร์
ในประเทศไทย โดยให้ความเห็นว่า อาจสอนเมตริกซ์ให้กับเด็กอายุ 11 หรือ
12 ปี ถ้ามีวิธีสอนและสนใจที่ดี

เสาวนิต (เสาวนิต วงศ์อำไพ, 2516 : 23) ได้ศึกษาความสามารถ
ในการเรียนเวกเตอร์ ของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น สรุปผลการทดลอง
ได้ว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น สามารถเรียนเวกเตอร์ได้ และนักเรียน
ในระดับสูงกว่าเรียนได้ดีกว่านักเรียนในระดับที่ต่ำกว่า

เสกสรรค์ (เสกสรรค์ คำกระบี่, 2517 : 21) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์
ในการเรียนเรื่องลิมิต ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์
สรุปผลการทดลองได้ว่า นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่มีความสามารถในการเรียน
เรื่องลิมิตได้ ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเรียนเรื่องลิมิตได้

ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐาน และตรงกับคำกล่าวของ เสนาะ ตันบุญยืน ที่ว่าควรสอน
 ลิมิตในที่สุดท้ายของโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย

ศุภกิจ (ศุภกิจ เณสิมวิสุตม์กุล, 2517 : 9) กล่าวว่า นักคณิตศาสตร์
 และนักการศึกษาโดยทั่วไปเชื่อว่า นักเรียนระดับต่ำกว่ามหาวิทยาลัย เช่น ระดับ
 มัธยมศึกษาตอนปลาย สามารถเรียนเรื่องเมตริกซ์ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้น
 ได้ และเป็นที่น่าสนใจต่อไปว่า เรื่องเมตริกซ์กำลังได้รับความสนใจที่จะนำไป
 สอนในระดับที่ต่ำกว่านี้ลงไปอีก ทั้งนี้ จะเห็นได้จากข้อเสนอแนะของนักคณิตศาสตร์
 และนักการศึกษาหลายคน เช่น

บอร์แมนน์ (Baurmann Erwin, 1970 : 468) เสนอให้มีการ
 สอนเมตริกซ์ในระดับเกรด 9 ซึ่งเทียบเท่ากับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของไทย

บลูม (Bloom, 1971 : 271 - 277) กล่าวว่า โดยทั่วไปในการ
 เรียนการสอนวิชาใด ๆ มีจุดมุ่งหมายสำคัญอยู่ 3 ประการ คือ

1. ด้านความรู้และการคิด (Cognitive Domain) เป็นความ
 สามารถในแง่คิด (Thinking) ซึ่งเป็นกระบวนการทางด้านสมองของมนุษย์
 เช่น การจดจำ ข้อเท็จจริง ความเข้าใจ ถึงแนวคิดต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา
 ความสามารถในการนำไปใช้ ฯลฯ

2. ด้านอาเวค (Affective Domain) เป็นเรื่องเกี่ยวกับความ
 รู้สึก (Feeling) ได้แก่ เรื่องเกี่ยวกับความสนใจ หัสนคติ ความวิตกกังวล ฯลฯ

3. ด้านการปฏิบัติ (Psycho-motor Domain) เป็นเรื่องเกี่ยว
 กับการกระทำ (Doing) อย่างมีทักษะในการดำเนินการเกี่ยวกับเรื่องต่าง ๆ

สมบุรณ์ (สมบุรณ์ ชิตพงษ์, 2519 : 8) กล่าวว่า สำหรับการปฏิบัติ
 ในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ค่อยมีมากนัก ยกเว้นคณิตศาสตร์ทางด้านธุรกิจ เช่น การใช้
 เครื่องคำนวณ ลูกคิด และอื่น ๆ พฤติกรรมด้านการคิด ด้านความรู้สึก จึงเป็นจุด
 มุ่งหมายสำคัญที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ต้องการเน้น

ควงเคื่อน (ควงเคื่อน อ่อนนวม, 2514 : 54) กล่าวว่า นักเรียน
 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง เมื่อเรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ จะมี

ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ดีกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ และเมื่อพิจารณาแยกตามชนิดของปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนที่เรียน คณิตศาสตร์แนวใหม่มีความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา และการคำนวณหาคำตอบ ดีกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่

❖ สุนนมาศ (สุนนมาศ สันโณษ, 2520 : 62) กล่าวว่า ในการสอน โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น จะต้องมุ่งสอนเหตุและผลเพื่อให้เด็กสามารถนำหลักการ ใช้เหตุและผลไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้ จึงจะสอดคล้องกับ จุดมุ่งหมายของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ฉะนั้น งานวิจัยครั้งนี้จึงชี้ให้เห็นว่าการสอน คณิตศาสตร์ยังไม่บรรลุจุดมุ่งหมายที่วางเกณฑ์ไว้ในหลักสูตร เรื่องการใช้เหตุผลจึง ควรพิจารณาสาเหตุและแก้ไขข้อบกพร่อง เหล่านั้น เพื่อการสอนคณิตศาสตร์จะได้บรรลุ วัตถุประสงค์สัมผัสมความปรารถนา ได้

วิธีดำเนินการและวิเคราะห์ข้อมูล

แหล่งข้อมูลและกลุ่มตัวอย่าง

แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดน้อยใน อำเภอคลองชัน กรุงเทพมหานคร ชั้นละ 20 คน รวม 40 คน

2. กลุ่มทดลอง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกูล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี ชั้นละ 35 คน รวม 70 คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างมีวิธีการดังต่อไปนี้

1. ทำการสุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชั้นละ 20 คน จากจำนวนชั้นละ 120 คน ของโรงเรียนวัดน้อยใน อำเภอคลองชัน กรุงเทพมหานคร เป็นกลุ่มทดลองข้อสอบ

2. ทำการสุ่มนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกูล" จำนวนชั้นละ 35 คน จากจำนวนนักเรียนชั้นละ 70 คน เป็นกลุ่มตัวอย่างทดลองสอน

เครื่องมือในการทดลอง

1. บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นตามหัวข้อต่อไปนี้

1) เชื้อ ประกอบด้วย

1.1) โอเพอเรชั่นในเชื้อ

1.2) วิธีการเขียนเชื้อ

- 2) ระบบจำนวน ประกอบด้วย
 - 2.1) จำนวนเต็ม
 - 2.2) จำนวนจริง
- 3) โคออร์ดิเนตใน 2 มิติ ประกอบด้วย
 - 3.1) วิธีเขียนโคออร์ดิเนต
 - 3.2) โอเปอเรชั่นในโคออร์ดิเนต
- 4) สมการเชิงเส้น และการแก้สมการเชิงเส้น โดยใช้
 - 4.1) วิธีการของ Gauss
 - 4.2) วิธีการของ เมตริกซ์
- 5) ลิเนียร์ คอมบิเนชั่น (Linear Combination)
- 6) ลิเนียร์ ดีเพนเดนซ์ และลิเนียร์ อินดีเพนเดนซ์ (Linear Dependence and Linear Independence)
- 7) เซต ของ ลิเนียร์ คอมบิเนชั่น
- 8) ลิเนียร์ สเปน และเบสิส (Linear Span and Basis)

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

จำนวน 60 ข้อ

การดำเนินการทดลอง

1. สร้างบทเรียนตามหัวข้อดังกล่าวจากหนังสือต่อไปนี้
 - 1.1) พีชคณิตเชิงเส้น (กมล, 2519 : 315 หน้า)
 - 1.2) Linear Algebra (Lipschutz, 1968 : 334 pp.)
2. ผู้วิจัยรวบรวมความคิดและตัวอย่างจากประสบการณ์มาเรียบเรียงเป็นข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น จำนวน 80 ข้อ
3. นำบทเรียนไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชั้นละ 3 คน รวม 6 คน ใช้เวลาสอน 10 ชั่วโมง แล้วแก้ไขปรับปรุงบทเรียน

4. นำบทเรียนที่ได้แก้ไขปรับปรุงแล้วมาทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดน้อยใน อำเภอคลองเตย กรุงเทพมหานคร จำนวนชั้นละ 20 คน รวม 40 คน ใช้เวลาสอนชั้นละ 10 ชั่วโมง

5. นำข้อทดสอบในข้อ 2 ทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนวัดน้อยใน อำเภอคลองเตย กรุงเทพมหานคร ชั้นละ 20 คน รวม 40 คน ใช้เวลาสอบ 3 ชั่วโมง

6. วิเคราะห์ข้อทดสอบตามหลักคักกลุ่มสูง 27% กลุ่มต่ำ 27% เปิดตารางสำเร็จของ ฟาน (Fan, 1952 : 3 - 32) หาความยากง่าย (P) อำนาจจำแนก (x) และความยากง่ายมาตรฐาน (Δ) คำนวณหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (r_{tt}) และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (SE_{meas}) คัดเลือกข้อทดสอบที่อยู่ในเกณฑ์ได้ 60 ข้อ ข้อสอบทั้ง 60 ข้อนี้มีความยากง่ายเฉลี่ย 0.4842 อำนาจจำแนกเฉลี่ย 0.9867 ความยากง่ายมาตรฐานเฉลี่ย 13.1583 ความเชื่อมั่น 0.95 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด 3.058

7. นำบทเรียนที่ได้แก้ไขปรับปรุงแล้วมาสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกูล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี ชั้นละ 35 คน รวม 70 คน ใช้เวลาในการสอน 10 ชั่วโมง

8. นำข้อทดสอบที่คัดเลือกในข้อ 6 มาทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกูล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี ชั้นละ 35 คน รวม 70 คน ใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง

9. วิเคราะห์ผลจากการสอบเพื่อตรวจสอบมาตรฐาน

9.1) หาค่าคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 50% ของแต่ละชั้น เพื่อให้ทราบว่าคะแนนเฉลี่ยของชั้นเกิน 50% หรือไม่ และจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนเกินกว่า 50% ในแต่ละชั้น มีจำนวนมากกว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนในชั้นหรือไม่

9.2) วิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทั้ง 2 โดยใช้ t-test

การวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. คะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนน คำนวณจากสูตร (Garrett,

1958 : 27)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนของนักเรียนในกลุ่มทดลอง

เพื่อ 1. หาจำนวนนักเรียนแต่ละกลุ่มที่ได้คะแนนจากการทดสอบ
สูงกว่า 50%

2. หาคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนแต่ละชั้นเพื่อนำไปใช้ในการ
เปรียบเทียบความแตกต่างของกลุ่ม โดยใช้ t-test

2. ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) คำนวณจากสูตร

(Ferguson, 1966 : 67)

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

เพื่อ 1. เอาผลไปใช้ประกอบกับสูตรหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

2. เอาผลไปใช้ประกอบกับสูตรหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
ในการวัด

3. เอาผลไปใช้ประกอบกับสูตรเปรียบเทียบความแตกต่างของ กลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ t-test

3. ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (Reliability) คำนวณจากสูตร
คูเคอร์-ริชาร์ดสัน (Anastasi, 1961 : 122)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right\}$$

เมื่อ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
N แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

p แทน $\frac{\text{จำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$

q แทน $1 - p$

S^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ
(ซึ่งเท่ากับกำลังสองของค่า S ในข้อ 2)

- เพื่อ 1. แสดงความเชื่อมั่นของคะแนนที่ได้จากการทดสอบ
2. ใช้ประกอบกับสูตรหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

4. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of
Measurement) คำนวณจากสูตร (Gulliksen, 1950 : 63)

$$SE_{meas} = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ SE_{meas} แทน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

S_x แทน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (จากข้อ 2)

r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (จากข้อ 3)

เพื่อ เอาผลไปใช้ประกอบกับการพิจารณาคะแนนของนักเรียน
ที่ได้จากการทดสอบ

5. ระบุความยากง่าย อำนาจจำแนก และความยากง่ายมาตรฐานของ
ข้อสอบโดยเปิดตารางสำเร็จของ ฟาน (Fan, 1952)

เพื่อ วิเคราะห์และคัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพมาใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

6. วิเคราะห์หาค่าที (t-test) คำนวณจากสูตร (Sterling,
1968 : 316 - 317)

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2
ตามลำดับ

S_1^2, S_2^2 แทน ความแปรปรวนของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2
ตามลำดับ

N_1, N_2 แทน จำนวนของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2
ตามลำดับ

เพื่อ ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่ 1
และกลุ่มที่ 2

บทที่ 4

ผลการศึกษาค้นคว้า

ข้อตกลงเกี่ยวกับการวิเคราะห์ผลและแปลผล

1. นักเรียนชั้นใดสามารถทำคะแนนเฉลี่ยทั้งชั้น จากแบบทดสอบได้ 50% ขึ้นไป และนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป มีจำนวนมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนทั้งหมดในชั้น จะถือว่านักเรียนในชั้นนั้นมีความสามารถในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. นักเรียนทั้ง 2 ชั้น ที่มีความสามารถในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถ้านักเรียนชั้นใดมีคะแนนเฉลี่ยทั้งชั้นสูงกว่าอีกชั้นหนึ่งอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ถือว่าควรจะสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นกับนักเรียนกลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ยทั้งชั้นสูงกว่า

3. นักเรียนทั้ง 2 ชั้น ที่มีความสามารถในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถ้าไม่พบว่าคะแนนเฉลี่ยทั้งชั้นของนักเรียนทั้ง 2 ชั้น ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติถือว่าควรสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นแก่นักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

อนึ่ง ในการสรุปว่าควรสอนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นในชั้นใดจะถือเกณฑ์ที่กล่าวไว้ในข้อที่ 1 ประกอบด้วย

ผลของการศึกษาค้นคว้า

1. การวิเคราะห์ข้อมูลหาคะแนนเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

ผู้วิจัยได้คำนวณหาคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยปรากฏผลดังแสดงในตาราง 1.

ตาราง 1 แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)
ของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

ค่าสถิติ ระดับชั้น	คะแนนเฉลี่ย		ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
	$\bar{X}$	$\bar{X}$ คิดเป็น %	S
มัธยมศึกษาปีที่ 2	30.69	51.15	7.095
มัธยมศึกษาปีที่ 3	32.26	53.77	7.208
เฉลี่ยทั้งหมด	31.47	52.46	7.15

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า

1. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่า 50%

2. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. การวิเคราะห์หาเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างแต่ละชั้นที่ได้ คะแนนจากการทดสอบตั้งแต่ 50% ขึ้นไป ปรากฏผลดังแสดงในตาราง 2

ตาราง 2 แสดงเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป โดยแยกตามชั้น

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียนทั้งหมด	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป	เปอร์เซ็นต์จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป
มัธยมศึกษาปีที่ 2	35	19	54.28
มัธยมศึกษาปีที่ 3	35	22	62.86
เฉลี่ยทั้งหมด	35	20.5	58.57

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ทำคะแนนเฉลี่ยได้สูงกว่า 50% มีจำนวนมากกว่า 50%
2. จำนวนนักเรียนที่ทำคะแนนได้สูงกว่า 50% ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีจำนวนมากกว่าจำนวนนักเรียนที่ทำคะแนนได้สูงกว่า 50% ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
3. การวิเคราะห์หาค่าที (t-test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน 2 ชั้น ปรากฏผลดังแสดงไว้ในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงค่า t จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน 2 ชั้น

ระดับชั้น	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	-	0.9183
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	-	-

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับความเชื่อมั่น

.05

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ความสามารถในการเรียนเรื่องพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 น่าจะไม่แตกต่างกัน

บทขอ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้

1. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
2. เพื่อศึกษาว่าควรจะเริ่มสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หรือชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จึงเหมาะสม
3. เพื่อเป็นข้อเสนอแนะในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ของชั้นมัธยมศึกษาต่อไป

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกุล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี จำนวนชั้นละ 35 คน รวมนักเรียนที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมด 70 คน การเลือกกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยใช้วิธีสุ่ม (Random)

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. เนื้อหาเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
2. แบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น จำนวน 60 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง มีความยากง่ายตั้งแต่ 0.23 ถึง 0.77 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.93 มีความยากง่ายมาตรฐาน ตั้งแต่ 10.1 ถึง 15.9 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.95 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 3.058

การดำเนินการทดลอง

1. ทดลองสอนเนื้อหาพีชคณิตเชิงเส้น เพื่อปรับปรุงบทเรียนและปรับปรุงข้อทดสอบ กับ

1.1 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชั้นละ 3 คน รวม 6 คน เพื่อปรับปรุงบทเรียน

1.2 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดน้อยใน อำเภอดุสิต กรุงเทพมหานคร ชั้นละ 20 คน รวม 40 คน เพื่อวิเคราะห์และปรับปรุงข้อทดสอบ

1.3 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนากุล" อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี ชั้นละ 35 คน รวม 70 คน เพื่อเป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

โดยใช้เวลาสอนชั้นละ 10 ชั่วโมง

2. ทดสอบนักเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เมื่อทดลองสอนเนื้อหาครบแล้ว โดยใช้แบบทดสอบที่ได้วิเคราะห์แล้วจากข้อ 1.2 จำนวน 60 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลใช้วิธีการทางสถิติดังต่อไปนี้

1. หาคะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนนของแต่ละชั้นของกลุ่มตัวอย่าง

2. หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของคะแนนของแต่ละชั้นของกลุ่มตัวอย่าง

3. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้ง 2 ชั้น โดยใช้ t-test

ผลการทดลอง

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการทำการวิจัยได้คะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบเท่ากับ 30.69 และ 32.26 ตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 60 คะแนน ซึ่งคิดเปรียบเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้เท่ากับ 51.15% และ 53.77% ตามลำดับ จากผลดังกล่าวสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สอบได้คะแนนเฉลี่ยทั้งชั้นสูงกว่า 50%

2. จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป เท่ากับ 19 และ 22 คน ตามลำดับ จากจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นละ 35 คน ซึ่งคิดเปรียบเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้เท่ากับ 54.28% และ 62.86% ตามลำดับ จากผลดังกล่าวสรุปได้ว่า จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทดสอบสูงกว่า 50% มีมากกว่าครึ่งของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้นนั้น ๆ

3. การวิเคราะห์ ทาคา t (t-test) ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่พบว่าต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับความเชื่อมั่น 0.05

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถที่จะเรียนวิชาพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นได้
2. ควรเริ่มสอนวิชาพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
3. ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่แตกต่างกัน

อภิปรายผล

ผลที่ได้จากการทดลองสอนวิชาพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 น่าจะมีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

แต่ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนทั้งสองชั้นไม่ต่างกัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1. ระดับอายุของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความแตกต่างกันเล็กน้อย ซึ่งไม่ส่งผลต่อการพัฒนาการทางด้านความคิดและมีโนภาพทางคณิตศาสตร์แผนใหม่ที่ดีให้นักเรียนคิดในแง่นามธรรม
2. ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่มีผลต่อการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น
3. ความสนใจของผู้เรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มากกว่านักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื่องจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นชั้นสูงสุดของโรงเรียน จึงทำให้อาจมีความกังวลใจในการสอบเพื่อเรียนต่อ

ขอเสนอแนะ

ก. สำหรับการปรับปรุงหลักสูตรและส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

1. ควรบรรจุเนื้อหาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นไว้ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
2. ควรเริ่มให้นักเรียน เรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หรือชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่ให้มีเนื้อหาของความยากง่ายแตกต่างกัน เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนต่อไป

ข. สำหรับการศึกษาคนควาต่อไป

1. ควรมีการทดลองเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยให้มีขอบเขตกว้างขวางขึ้น เพื่อหาผลสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น
2. ควรทำการทดลอง เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และในระดับชั้นที่ต่ำกว่า
3. ควรจะได้ศึกษาวิจัยบทเรียน เนื้อหา เพื่อความเหมาะสมและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ ลิเนีย แอลจีบรา พีชคณิตเชิงเส้น, กราฟิการ์ต 2519, 315 หน้า.
- ✓ ขวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล, โรงพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช 2508, 452 หน้า.
- ขวลิต แอี่ยมเจริญ การศึกษาวลัสมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตโปรเจกตีฟของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 26 หน้า.
- ณรงค์ ปันนัม การศึกษาวลัสมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องอสมการและค่าสมบูรณ์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 23 หน้า.
- ทองเคื่อน อ่อนนวม การศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่กับนักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่, ปรินซ์นิพนธ์ ครุศาสตร์มหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2514, 60 หน้า.
- ธ.ธง พวงสุวรรณ การศึกษาวลัสมฤทธิ์ในการเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้นของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 39 หน้า.
- ศุภกิจ เถลิมวิสุตกุล ความเหมาะสมของการสอนเรื่องเมตริกซ์ในชั้นประถมศึกษาตอนปลาย, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2517, 33 หน้า.
- สมบูรณ์ จิตพงษ์ การประเมินผลหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 119 หน้า.
- สุนนมาศ สันโษ ความเข้าใจโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2, ปรินซ์นิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 69 หน้า.

เสกสรรค์ คำกระบี่ การศึกษาลักษณะนิสัยในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนมัธยม
ศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์, ปรินซิเพิล การศึกษา
 มหบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2517, 36 หน้า.

เสาวนิต วงศ์อำไพ ความสามารถในการเรียนเวกเตอร์ของนักเรียนในระดับ
มัธยมศึกษาตอนต้น, ปรินซิเพิล การศึกษามหบัณฑิต วิทยาลัยวิชา
 การศึกษา ประสานมิตร 2516, 57 หน้า.

Anatasi, Anne, Psychological Testing, 2nd Edition, The
 Macmillan Company, New York, 1961, 657 pp.

Baurmann, Erwin, "Specialization or Polyvalance," New
Trends in Mathematics Teaching, Volume II, Unesco,
 France 1970, 476 pp.

Bloom, Benjamin S., and others, Handbook on Formative and
Summative Evaluation of Student Learning, 1971,
 p. 646-695.

Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Educational Testing
 Service Princeton, New Jersey, 1952, 32 pp.

Ferguson, George A., Statistical Analysis in Psychology and
Education, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966,
 446 pp.

Garrett, Henry E., Statistics in Psychology and Education,
Longman Green and Co., New York, 1958, 478 pp.

Gulliksen, Harold, Theory of Mental Test, John Wiley & sons,
 Inc., New York, 1950, 486 pp.

Munn, Norman Leslie, Student's Manual to accompany introduc-
tion to Psychology, Houghton Mifflin, Boston, 1962,
 90 pp.

Piaget, Jean The Psychology of the Child, Trans by Helen Neaver,
 Basic Book, New York, 1969, 173 pp.

Sobel, Max A., "Concept Learning in Algebra," The Mathematics
Teacher, 49 : 425 - 428, October, 1959.

Sterling, Theodor D., and Pollack, Seymour V., Introduction to Statistical Data Processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968, 633 pp.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องพืชชนิดเชิงเส้นเบื้องต้น

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

และข้อมูลจากการวิเคราะห์ข้อสอบ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นปีที่ 3

คำสั่ง จงวงกลมล้อมรอบคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้ $x + y = 0$

ก. $(t, -t), t \in \mathbb{R}$

ข. $(3, -3)$

ค. $(t, 8-t), t \in \mathbb{R}$

ง. ไม่มี Solution

2. จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้ $x + y = 8$
 $0 + 0 = 8$

ก. $(0, 0)$

ข. $(8, -8)$

ค. $(t, 8-t), t \in \mathbb{R}$

ง. ไม่มี Solution

3. จงพิจารณาว่าระบบสมการทั้ง 2 Equivalent กันหรือไม่ เพราะเหตุใด

$x + y + z = 4$

$x + y + z = 4$

$2x + y + 3z = 66$

กับ

$x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}z = 3$

ก. Equivalent กัน เพราะ $L_1 \rightarrow L_1$ และ $L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2$

ข. ไม่ Equivalent กัน เพราะ Solution ไม่เท่ากัน

ค. Equivalent กัน เพราะ $L_1 \rightarrow L_2$, $L_2 \rightarrow L_1$

ง. ไม่ Equivalent กัน เพราะ $L_1 \not\rightarrow L_2$, $L_2 \not\rightarrow \frac{1}{2}L_2$

4. จงหา Solution ของระบบสมการ จาก

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 8 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

ก. $(8, 4, 2)$

ข. $(8, 2, 4)$

ค. $(2, 8, 4)$

ง. ไม่มี Solution

5. จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้ $x + y = 4$

$$2x + 2y = 8$$

ก. $(t, 4-t), t \in \mathbb{R}$

ข. $(2, 2)$

ค. $(3, 1)$

ง. ไม่มี Solution

6. จงหา Solution ของระบบจาก

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & : & 8 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 1 & 0 & 1 & : & 10 \end{bmatrix}$$

ก. $(8, 2, 10)$

ข. $(10, 2, 8)$

ค. $(2, 2, 8)$

ง. ไม่มี Solution

7. จงหา Solution ของระบบเมื่อกำหนด

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 7 \\ 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ก. $(5, 0, 0)$

ข. $(7, 2, 0)$

ค. $(0, 7, 2)$

ง. ไม่มี Solution

8. จงหา Solution ของระบบสมการ $x + y + 2z = 0$

$$z - x = 2$$

$$y + 3z = 2$$

ก. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ข. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

ค. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

ง. ไม่มี Solution

9. จงหา Solution เมื่อกำหนด

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & : & 2 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ -1 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

ก. $(t, 2-t, 3-2t), t \in \mathbb{R}$

ข. $(1, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$

ค. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ง. ไม่มี Solution

10. จงพิจารณาการแปลงสมการต่อไปนี้ คือ $x - 2y = 0$

$$3x + 2y = 4$$

กับ $2x - y = \frac{3}{2}$

$$x - 3y = -\frac{1}{2}$$

ก. Equivalence กัน เพราะมี Solution เหมือนกัน

ข. ไม่ Equivalence กัน เพราะมี Solution ต่างกัน

ค. Equivalence กัน เพราะ $L_1 \rightarrow 3L_2 + L_1$

ง. ไม่ Equivalence กัน เพราะ $L_2 \not\rightarrow 3L_1 + 2L_2$

11. จงหา Solution ของระบบเมื่อกำหนด $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 10 \\ 0 & 1 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 \end{bmatrix}$

ก. (10, 5, 1)

ข. (1, 5, 10)

ค. (6, 4, 1)

ง. ไม่มี Solution

12. จงหา Solution ของระบบเมื่อกำหนด $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \\ 1 & 0 & 2 & : & 7 \end{bmatrix}$

ก. (6, 3, 7)

ข. $(t, 0, t-3), t \in \mathbb{R}$

ค. (6, 7, 3)

ง. ไม่มี Solution

13. ระบบสมการในรูปปกติที่ Equivalent กับระบบสมการเพิ่มค่าใน operation
ดังนี้

ก. $L_1 \rightarrow L_3$

$L_2 \rightarrow L_4$

$L_3 \rightarrow L_1$

$L_4 \rightarrow L_4$

ข. $L_1 \rightarrow L_2 + 2L_3$

$L_2 \rightarrow L_2$

$L_3 \rightarrow 3L_4 + 2L_3$

$L_4 \rightarrow 2L_3 + 3L_4$

ค. $L_1 \rightarrow 2L_1 + 3L_2$

$L_2 \rightarrow 2L_2 + 3L_3$

$L_3 \rightarrow 2L_3 + 3L_4$

$L_4 \rightarrow 2L_4 + 3L_1$

ง. $L_1 \rightarrow 2L_1 + L_3$

$L_2 \rightarrow 3L_1 + L_3$

$L_3 \rightarrow L_3$

$L_4 \rightarrow 3L_4 + L_1$

14. ระบบสมการในรูปปกติที่ equivalent กับระบบสมการเพิ่มค่าใน operation
ดังนี้

ก. $L_1 \rightarrow L_2$

$L_2 \rightarrow L_4$

$L_3 \rightarrow L_3$

$L_4 \rightarrow L_2$

ข. $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$

$L_2 \rightarrow L_3 + L_4$

$L_3 \rightarrow L_4 + L_3$

$L_4 \rightarrow L_4$

ค. $L_1 \rightarrow L_1$

$L_2 \rightarrow L_3 + L_4$

$L_3 \rightarrow L_2 + L_4$

$L_4 \rightarrow L_1$

ง. $L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2$

$L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1$

$L_3 \rightarrow L_3 + L_4$

$L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1$

คำสั่ง จงใช้วิธีการของ Equivalent ตรวจสอบว่า ระบบสมการในตารางจากระบบ-
สมการอื่น (ตอบคำถามข้อ 15 - 16)

15. ก. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & : & 2 \\ 1 & 0 & 0 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 5 \\ 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 9 \\ 1 & 0 & 2 & : & 10 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$

16. ก. $x = 3$

$y = 4$

$z = 5$

ข. $x + y = 8$

$2y + z = 13$

$2x + z = 11$

ค. $x + y + z = 12$

$2y + z = 13$

$x + 3z = 18$

ง. $x + 2z = 13$

$y + z = 9$

$z = 5$

17. จงหาค่า Coordinates ของเวกเตอร์ $a(2,3) + b(-3,2)$

ก. $(2a - 3b, 3a + 2b)$

ข. $(3a - 2b, 3a + 2b)$

ค. $(3a + 2b, 2a - 3b)$

ง. $b(2,3) + a(-3,2)$

18. จงหาว่า $(2, 3)$ เป็น Linear combination ของ Set ใด

ก. $\{(2,0), (3,0)\}$

ข. $\{(0,0), (3,0)\}$

ค. $\{(1,1), (2,2)\}$

ง. $\{(1,1), (2,3)\}$

19. จงหาว่า Coordinates ตัวใดเป็น linear combination ของ

Set $\{(0,0), (0,1), (0,2)\}$

ก. $(2,3)$

ข. $(8,0)$

ค. $(0, -1)$

ง. $(-1, 0)$

20. จงพิจารณาว่า Set ใด ที่ Linear Combination ของสมาชิก แทน Coordinates ได้ทุกตัว

ก. $\{(0,0), (1,1)\}$

ข. $\{(0,2), (0,1), (0,8)\}$

ค. $\{(0,1), (0,4), (0,2)\}$

ง. $\{(0,8), (-8,0)\}$

21. จงพิจารณาว่า $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ เป็น Linear Combination ของ Set ใด

ก. $\{(0,0), (1,1)\}$

ข. $\{(0,2), (0,3), (0,0)\}$

ค. $\{(0,1), (1,0)\}$

ง. $\{(0,0), (0,1), (0,2)\}$

22. จงหาค่า α_1, α_2 ซึ่งทำให้ Linear Combination ของ $(1,4), (2,3)$ เท่ากับ $(13, 27)$

ก. $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 3$

ข. $\alpha_1 = t, \alpha_2 = t + 2$

ค. $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 5$

ง. ไม่มี Solution

23. จงพิจารณาว่า Coordinates ตัวใดเป็น Linear Combination ของ $\{(1,3), (2,6)\}$

ก. $(-2, -6)$

ข. $(-3, 1)$

ค. $(0,6)$

ง. $(7,6)$

24. จงพิจารณาว่า Coordinates ตัวใดเป็น Linear Combination ของ $\{(\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

ก. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

ข. $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

ค. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

ง. $(1, 1)$

25. จงพิจารณาว่า Coordinates ตัวใดเป็น Linear Combination ของ $\{(0,2), (0,4)\}$

ก. $(6,0)$

ข. $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

ค. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

ง. $(0, 0)$

26. Coordinates ตัวใด เป็น Linear Combination ของ

$$\{(\sqrt{3}, \sqrt{5}), (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$$

ก. $(1, 2)$

ข. $(2, \sqrt{2})$

ค. ถูกทั้ง ก. และ ข.

ง. ผิดทั้ง ก. และ ข.

27. $(0, 0)$ ไม่ เป็น Linear Combination ของ Set ใด

ก. $\{(\sqrt{3}, 2), (-2, 4)\}$

ข. $\{(0, 1), (\sqrt{2}, 3)\}$

ค. ถูกทั้ง ก. และ ข.

ง. ผิดทั้ง ก. และ ข.

28. จงหาว่า $\rho. [(0, 1), (0, 2)]$ เท่ากับ Set ใด

ก. $\{(0, x) / x \in I\}$

ข. $\{(0, x) / x \in R\}$

ค. $\{(x, 0) / x \in R\}$

ง. R^2

29. จงหาว่า $\langle (0, 1), (2, 0) \rangle$ เท่ากับ Set ใด

ก. $\{(2, x) / x \in R\}$

ข. $\{(x, 3) / x \in R\}$

ค. $\{(x, 2x) / x \in R\}$

ง. R^2

30. จงหา Set ของ Linear Combination ทั้งหมดของ $(0, 0)$

ก. $\{(0, 0)\}$

ข. $\{(0, a) / a \in R\}$

ค. $\{(a, 0) / a \in R\}$

ง. $\{(x, y) / x, y \in R\}$

31. จงหาว่า $(\sqrt{2}, 4)$ อยู่ใน Set ใด

ก. $\langle (0, 0), (\sqrt{2}, 2) \rangle$

ข. $\langle (4, 0), (0, 0) \rangle$

ค. $\langle (4, 2) \rangle$

ง. $\langle (0, 2), (4, 0) \rangle$

32. จงหาว่า $(2, 4)$ อยู่ใน Set ใด

ก. $\langle (0, 0), (\sqrt{2}, 2) \rangle$

ข. $\langle (1, 1), (2, 3) \rangle$

ค. $\langle (4, 2) \rangle$

ง. $\langle (1, 1), (2, 2) \rangle$

33. จงหาว่า $(0,0)$ อยู่ใน Set ใด

ก. $\langle (1,2) \rangle$

ข. ถูกทั้ง ก. และ ข.

ค. $\langle (-4, -3) \rangle$

ง. ถูกทั้ง ก. และ ข.

34. $\{(2,4)\}$ Span Set ใด

ก. $\{(x,y) / x,y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{(x,y)/x=2y, x,y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{(x,y) / y = 2x, x,y \in \mathbb{R}\}$

ง. $\{(x,y)/x=2, y=4\}$

35. $\{(1,1)\}$ Span Set ใด

ก. $\{(x,y)/x=1, y=1\}$

ข. $\{(x,y)/x=y, x,y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{(x,y)/x=y-1, x,y \in \mathbb{R}\}$

ง. $\{(x,y)/x=2y, x,y \in \mathbb{R}\}$

36. $\{(4,0)\}$ Span Set ใด

ก. $\{(4,0), (0,0)\}$

ข. $\{(x,y)/x=4y, x,y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{(x,y)/y=4x, x,y \in \mathbb{R}\}$

ง. $\{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$

37. $\{(0,2)\}$ Span Set ใด

ก. $\{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{(x,y)/2x=y, x,y \in \mathbb{R}\}$

ค. $\{(x,y)/x=2y, x,y \in \mathbb{R}\}$

ง. $\{(0,x) / x \in \mathbb{R}\}$

38. จงพิจารณาว่า $\{(0,x) / x \in \mathbb{R}\}$ ถูก Span โดย Set ใด

ก. $\{(1,1)\}$

ข. $\{(0,1), (0,2), (4,3)\}$

ค. $\{(1,0), (1,0)\}$

ง. $\{(0,2)\}$

39. จงพิจารณาว่า $\{(a,b) / a = 3b, a,b \in \mathbb{R}\}$ ถูก Span โดย Set ใด

ก. $\{(3,1)\}$

ข. $\{(2,3), (3,1)\}$

ค. $\{(1,3)\}$

ง. $\{(0,1), (1,2), (1,3)\}$

จงใช้คำสั่งต่อไปนี้ ตอบคำถามข้อ 40 - 41

คำสั่ง จงใช้วิธีการของการ Span พิจารณา Set ต่อไปนี้ว่า Set ใด ต่างจากพวก

40. ก. $\{(1,2)\}$ ข. $\{(2,4)\}$
 ค. $\{(0,2)\}$ ง. $\{(1,2), (2,4), (4,8)\}$
41. ก. $\{(0,1)\}$ ข. $\{(0, \sqrt{2})\}$
 ค. $\{(0,2)\}$ ง. $\{(1,2)\}$
42. จงพิจารณาว่า Set ใดเป็น Dependent Set
 ก. $\{(2,1), (1,2)\}$ ข. $\{(0,0), (0,4)\}$
 ค. $\{(1,1), (2,3)\}$ ง. $\{(1,0), (0,1)\}$
43. Set $\{(a,b)\}$ จะเป็น Dependent Set เมื่อใด
 ก. $a = 1, b = 0$ ข. $a = 0, b = 1$
 ค. $a = 0, b = 0$ ง. $a \neq 0, b \neq 0$
44. กำหนด $\{(1,0), (2,0)\}$ เป็น Dependent Set ดังนั้น Set ใด
 เป็น Dependence
 ก. $\{(1,0)\}$ ข. $\{(1,0), (2,0), (3,0)\}$
 ค. $\{(3,0)\}$ ง. $\{(1,2), (1,3)\}$
45. Set $A = \{(1,1), (2,1)\}$ เป็น Independence ดังนั้น
 ก. $\{(1,1)\}$ เป็น Independence เพราะเป็น Subset ของ A
 ข. $\{(1,1), (2,1), (0,0)\}$ เป็น Independence เพราะ A เป็น Subset
 ของ Set นี้
 ค. $\{(0,0), (1,1)\}$ เป็น Independence เพราะ $(1,1) \in A$
 ง. $\{(1,3), (2,4), (2,1)\}$ เป็น Independence เพราะ $(2,1) \in A$

46. กำหนด $A = \{1, 3\}$

ก. A เป็น Independence เพราะ $0 \notin A$

ข. A เป็น Independence เพราะมี α_1, α_2 ซึ่ง

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(3) = 0$$

ค. A เป็น Dependence เพราะ A เป็นสมาชิกเป็น Coordinate 1 พิกัด และ A มีสมาชิก 2 ตัว

ง. A เป็น Dependence เพราะไม่มี α_1, α_2 ซึ่ง

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(3) = 0$$

47. $\{a\}$ เป็น Dependence เมื่อ

ก. $a = 0$

ข. $a \neq 0$

ค. $a = 1$

ง. $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 2$

48. จาก $\langle (0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 4) \rangle = \langle (0, 1), (1, 0), (2, 3) \rangle$

และ $A = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 4)\}$ $B = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3)\}$
 พิจารณา

ก. B เป็น Independence เพราะ $B \subset A$

ข. B เป็น Independence เพราะ $A \subset B$

ค. A เป็น Dependence เพราะ $B \subset A$

ง. A เป็น Dependence เพราะ $A \subset B$

49. $A = \{(5, 5), (4, 1), (1, 4)\}$ จะได้ว่า

ก. A เป็น Independence เพราะว่ามีจำนวนสมาชิกมากกว่าจำนวนพิกัด

ข. A เป็น Independence เพราะว่ามี $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ซึ่งทำให้

$$\alpha_1(5, 5) + \alpha_2(4, 1) + \alpha_3(1, 4) = (0, 0)$$

ค. A เป็น Dependence เพราะว่ามีจำนวนสมาชิกมากกว่าจำนวนพิกัด

ง. A เป็น Dependence เพราะว่ามี $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ซึ่งทำให้

$$\alpha_1(5, 5) + \alpha_2(4, 1) + \alpha_3(1, 4) = (0, 0)$$

50. Set ใดเป็น Independent Set

ก. $\{0\}$

ค. $\{0, 1\}$

ข. $\{1\}$

ง. $\{1, 2\}$

51. Set ใดเป็น Dependent Set

ก. $\{(0, 0)\}$

ค. $\{(2, 3)\}$

ข. $\{(1, 1), (2, 1)\}$

ง. $\{(0, 1), (1, 2)\}$

52. Set ใดเป็น Independent Set

ก. $\{(0, 0), (1, 1)\}$

ค. $\{(1, 2), (2, 4)\}$

ข. $\{(1, 1), (2, 2)\}$

ง. $\{(1, 3), (3, 1)\}$

53. Set ใดเป็น Dependent Set

ก. $\{1\}$

ค. $\{2\}$

ข. $\{-1\}$

ง. $\{0\}$

54. Set ใดเป็น Set ใดเป็น Dependence

ก. $\{1, 2\}$

ค. ถูกทั้ง ก. และ ข.

ข. $\{(2, 4), (1, 2)\}$

ง. ถูกทั้ง ก. และ ข.

55. $A = \{(0, 2), (2, 4), (3, 3)\}$ เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

ก. A เป็น Basis เพราะ $\langle (0, 2), (2, 4), (3, 3) \rangle = \mathbb{R}^2$

ข. A เป็น Basis เพราะ $\{(0, 2), (2, 4), (3, 3)\}$ เป็น Dependence

ค. A ไม่เป็น Basis เพราะ $\langle (0, 2), (2, 4), (3, 3) \rangle = \mathbb{R}^2$

ง. A ไม่เป็น Basis เพราะ $\{(0, 2), (2, 4), (3, 3)\}$ เป็น Dependence

56. $C = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\}$ Set ของ Basis ของ C คือ

ก. $\{(0, 8), (0, 1)\}$

ค. $\{(0, 0), (0, 8)\}$

ข. $\{(0, 8)\}$

ง. $\{(8, 0)\}$

57. $D = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\}$ จงพิจารณาว่า $E = \{(1, 0), (0, 1)\}$ เป็น Basis ของ D หรือไม่

ก. E เป็น Basis ของ D เพราะ E เป็น Independence

ข. E เป็น Basis ของ D เพราะ E Span D ได้

ค. E ไม่เป็น Basis ของ D เพราะ $\langle E \rangle \neq D$

ง. ถูกทั้ง ก. และ ข.

58. จงหา Basis ของ $\mathbb{R}$

ก. $\{(0, 1)\}$

ข. $\{(0, 0)\}$

ค. $\{3\}$

ง. ถูกทั้ง ก. และ ข.

จงใช้วิธีการของ Basis เพื่อตรวจสอบ Set ต่อไปนี้ว่า Set ใด ต่างจากพวก (ตอบคำถามข้อ 59 - 60)

59. ก. $\{1\}$

ข. $\{2\}$

ค. $\{1, 2\}$

ง. $\{(0, 1), (1, 0)\}$

60 ก. $\{(0, 0), (1, 2), (2, 3)\}$

ข. $\{(0, 1), (1, 0)\}$

ค. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 3)\}$

ง. $\{(1, 2), (2, 3), (4, -1)\}$

ตาราง 4 แสดง P_H , P_L , p , r และ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

ข้อ	P_H	P_L	p	r	Δ
1	.40	.20	.30	.24	15.1
2	.50	.10	.28	.48	15.3
3	.80	.40	.61	.42	11.9
4	.70	.20	.44	.50	13.6
5	.80	.30	.56	.50	12.4
6	.60	.30	.45	.31	13.5
7	.80	.20	.50	.59	13.0
8	.90	.60	.76	.39	10.1
9	.70	.40	.55	.31	12.5
10	.90	.10	.50	.77	13.0
11	.70	.20	.44	.50	13.6
12	.60	.30	.45	.31	13.5
13	1.00	0	.50	.93	13.0
14	.70	0	.28	.80	15.4
15	1.00	.40	.77	.76	10.1
16	.90	.30	.62	.62	11.7
17	.50	.30	.40	.21	14.0
18	.60	.20	.39	.42	14.1
19	.70	.10	.38	.62	14.3
20	.70	.20	.44	.50	13.6

ν 70	P_H	P_L	p	r	Δ
21	.60	.20	.39	.42	14.1
22	.50	.20	.34	.33	14.6
23	.60	.40	.50	.20	13.0
24	.70	.30	.50	.40	13.0
25	.60	.10	.43	.69	13.7
26	.80	.10	.43	.69	13.7
27	.50	.30	.40	.21	14.0
28	1.00	.10	.61	.88	11.9
29	.90	0	.39	.88	14.1
30	1.00	0	.50	.93	13.0
31	.80	.60	.70	.24	10.9
32	.70	.50	.60	.21	12.0
33	.60	.10	.33	.55	14.8
34	.60	.40	.50	.20	13.0
35	.50	.20	.34	.33	14.6
36	.60	.10	.33	.55	14.8
37	.70	.20	.44	.50	13.6
38	.40	.20	.30	.24	15.1
39	.40	.10	.24	.39	15.9
40	.90	.20	.57	.69	12.3

ข้อ	P_H	P_L	p	r	Δ
41	.90	0	.39	.88	14.1
42	.70	.40	.55	.31	12.5
43	.80	0	.33	.84	14.8
44	1.00	.30	.72	.80	10.6
45	.90	.10	.50	.77	13.0
46	.80	.50	.66	.33	11.4
47	.70	.10	.38	.62	14.3
48	.80	.30	.56	.50	12.4
49	.70	.50	.60	.21	12.0
50	.80	.60	.70	.24	10.9
51	.70	.40	.55	.31	12.5
52	.80	.60	.70	.24	10.9
53	.90	.60	.76	.39	10.1
54	.90	.20	.57	.69	12.3
55	.60	0	.23	.76	15.9
56	.70	.20	.44	.50	13.6
57	.50	.30	.40	.21	14.0
58	.60	.30	.45	.31	13.5
59	.80	.10	.43	.69	13.7
60	1.00	.20	.67	.84	11.2
		Σ	29.05	59.20	789.5

ค่าความยากง่ายเฉลี่ย

0.4842

ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย

0.9867

ค่าความยากง่ายมาตรฐาน (Δ) เฉลี่ย 13.1583

ภาคผนวก ข.

ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

ตาราง 5 แสดงคะแนนจากการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องพืชชนิด
 เจริญเติบโตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3
 โรงเรียนบ้านหมอ "พัฒนานุกูล"

เลขที่	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
1	25	39
2	36	29
3	32	38
4	18	42
5	37	20
6	24	31
7	20	41
8	28	35
9	33	43
10	32	26
11	28	31
12	27	21
13	20	34
14	32	28
15	37	32
16	42	36
17	34	27
18	21	31

เลขที่	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
19	40	21
20	34	47
21	41	35
22	38	32
23	21	36
24	40	28
25	22	25
26	42	45
27	27	31
28	37	23
29	22	30
30	32	42
31	25	39
32	30	26
33	31	21
34	38	31
35	28	33
	1,074	1,129

ตัวอย่างการคำนวณหาค่าสถิติ

ก. การหาค่าคะแนนเฉลี่ย

จากสูตร

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N_1}$$

$$X_1 = 1074$$

$$N = 35$$

$$\bar{X}_1 = \frac{1074}{35} = 30.69$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N_2}$$

$$X_2 = 1129$$

$$N_2 = 35$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1129}{35} = 32.26$$

ข. การหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

จากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{N_1 \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2}{N_1(N_1-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{35(34668) - (1074)^2}{35(35-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{59904}{1190}} = 7.095$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{N_2 \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2}{N_2(N_2-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{35(38185) - (1129)^2}{35(35-1)}} = 7.208$$

ค. การทดสอบหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จากสูตร

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{32.26 - 30.69}{\sqrt{\frac{50.339}{35} + \frac{51.955}{35}}} \\
 &= \frac{1.57}{\sqrt{\frac{102.294}{35}}} \\
 &= \frac{1.57}{1.7095} \\
 &= 0.9183
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ก

บทเรียนพืชกัญชง เชียงแสน

เซต

1. ความหมายและสัญลักษณ์

เซต คือ กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ (สมาชิก) เช่น คน, สัตว์, สิ่งของหรือจำนวน
สัญลักษณ์ของเซต ใช้เครื่องหมายวงเล็บปีกกา $\{ \}$ แทนสัญลักษณ์ของ
เซต และเขียนสมาชิกลงในวงเล็บปีกกา

ตัวอย่างที่ 1 ให้เซต A แทนเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 5 คือเซตของ
จำนวน 0, 1, 2, 3, 4, 5 เขียนแทนด้วย

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ตัวอย่าง 2 ให้เซต B แทนเซตของอักษรในชื่อ "สมศักดิ์" คือเซตของอักษร ส, ม,
ศ, ก, ค, เขียนแทนด้วย $B = \{ส, ม, ศ, ก, ค\}$

ตัวอย่าง 3 ให้เซต C แทนเซตของแม่น้ำที่สำคัญที่สุดของประเทศไทย
เขียนแทนด้วย $C = \{\text{แม่น้ำเจ้าพระยา}\}$

ตัวอย่าง 4 ให้เซต D แทนเซตของวันในสัปดาห์
เขียนแทนด้วย

$$D = \{\text{จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์, อาทิตย์}\}$$

สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตเรียกว่า "สมาชิก" โดยใช้เครื่องหมาย " $\in$ " แสดง
การเป็นสมาชิกของเซต เช่น

4 เป็นสมาชิกของเซต A ดังนั้นเขียนแทนด้วย $4 \in A$

ม เป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้นเขียนแทนด้วย $ม \in B$

เครื่องหมาย " $\notin$ " แสดงการไม่เป็นสมาชิกของเซต เช่น 7 ไม่เป็น
สมาชิกของเซต A ดังนั้น เขียนแทนด้วย $7 \notin A$ แม่น้ำโขงไม่เป็นสมาชิกของ
เซต C ดังนั้น เขียนแทนด้วยการด้วย แม่น้ำโขง $\notin C$

2. วิธีการเขียนสมาชิกของเซต

การเขียนเซต เขียนได้ 2 วิธี คือ

1. แบบแจกแจงสมาชิก

2. แบบกำหนดเงื่อนไขของสมาชิก

1. เซตแบบแจกแจงสมาชิก คือ การเขียนเซตโดยให้สมาชิกอยู่ในวงเล็บปีกกา และเขียนเครื่องหมาย "จุลภาค" , " " คั่นระหว่างแต่ละสมาชิก เช่น $\{1, 2\}$ เป็นต้น

2. เซตแบบกำหนดเงื่อนไขของสมาชิก คือ การเขียนเซตโดย กำหนดคุณลักษณะของสมาชิกในเซตแทน เช่น

ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จะเขียนแทนด้วย

$A = \{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า } 0 \text{ แต่ไม่เกิน } 5\}$ อ่านว่า A เป็นเซตของ x โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 0 แต่ไม่เกิน 5

เซต อาจจะสามารถแสดงด้วยแผนภาพให้เห็นได้ชัด เช่น $\{a, b, c\}$

อาจแสดงได้โดยเขียนสมาชิกอยู่ในรูปปิด เขียนแทนด้วย $\boxed{a, b, c}$

การเขียนเซตในแบบแจกแจงสมาชิกนั้น บางครั้งสมาชิกของเซตมากมายจนไม่สามารถแจกแจงสมาชิก หรือบางเซตไม่สามารถเขียนสมาชิกได้จนครบจึงจะใช้เครื่องหมาย "... " เพื่อละสมาชิกที่เป็นที่เข้าใจไว้

การใช้เครื่องหมายใช้ได้ 2 วิธี คือ

1. ในเซตที่มีสมาชิกจำนวนจำกัด

2. ในเซตที่มีสมาชิกจำนวนไม่จำกัด

1. ในเซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด ใช้โดยเขียนอยู่ระหว่างสมาชิกตัวต้น ๆ และท้าย ๆ เช่น เซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100

เขียนแทนด้วย $\{1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100\}$

2. ในเซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัดนั้นใช้โดยการเขียนสมาชิกตัวต้น ๆ และต่อด้วยเครื่องหมาย "... " เช่น เซตของจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2

เขียนแทนด้วย $\{3, 4, 5, \dots\}$

3. สับเซต (Subset)

เซต A จะเรียกว่าเป็น Subset ของ เซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวใน A เป็นสมาชิก ของ B ด้วย เรียกว่า A เป็น Subset ของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ดังนั้น $A \subset B$

4 ซุปเปอร์เซต (Superset)

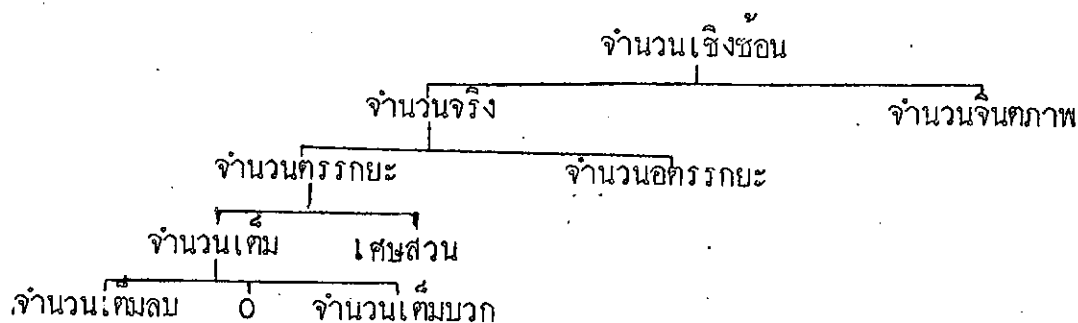
ถ้า $A \subset B$ แล้ว B จะเป็น Superset ของ A เขียนแทนด้วย

$$B \supset A$$

5. การเท่ากันของเซต คือ การที่เซต 2 เซตมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว ตัวต่อตัว เช่นถ้า A เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A = B$

บทที่ 2

ระบบจำนวน



จำนวนเต็มบวก คือ จำนวนซึ่งเกิดจากการนับ คือ 1, 2, 3, ...

0 (ศูนย์) คือ จำนวนซึ่งเกิดจากการกล่าวถึงสิ่งที่ไม่มีความหมาย

จำนวนเต็มลบ คือ จำนวนซึ่งเกิดจากการลบของจำนวนเต็ม 2 จำนวน โดยที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ คือ -1, -2, -3, ...

จำนวนเต็ม คือ จำนวนที่ประกอบด้วย จำนวนเต็มบวกจำนวนเต็มลบ และศูนย์ คือ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วนโดยทั้งเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม และส่วนไม่เท่ากับศูนย์ เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, .98, .97, .51 เป็นต้น

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ และจำนวนทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำแบบ

จำนวนจริง คือ จำนวนที่เป็นจำนวนเต็ม(บวก,ลบหรือ0)หรือจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

จำนวนจินตภาพ คือ จำนวนที่อยู่ในรูป $b\sqrt{-1}$ โดยที่ b เป็นจำนวนจริงและ $b \neq 0$ เช่น $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{3}\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-5}$, $-\sqrt{5}\sqrt{-1}$ เป็นต้น

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนให้อยู่ในรูป $a + b\sqrt{-1}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

วิธีเขียนเซต ของจำนวนในระบบจำนวน

1. เซตของจำนวนเต็ม (แทนด้วยเซต I)

$$I = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$
$$= \{ x/x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \}$$

2. เซตของจำนวนตรรกยะ (แทนด้วยเซต Q)

Q มีสมาชิกที่สามารถเขียนได้ในรูป เศษส่วนซึ่งทั้งเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็ม และส่วนไม่เท่ากับศูนย์

$$Q = \{ x/x = \frac{a}{b}, a, b \in I, b \neq 0 \}$$

3. เซตของจำนวนตรรกยะ (แทนด้วยเซต Q)

$$Q = \{ x/x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } x \text{ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ} \}$$
$$= \{ x/x \in R, x \notin Q \}$$

4. เซตของจำนวนจริง (แทนด้วยเซต R)

$$R = \{ x/x \text{ เป็นจำนวนเต็ม หรือจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ} \}$$

Co-ordinates

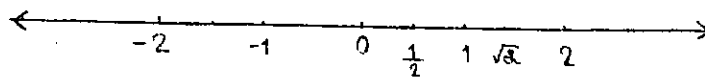
ความหมายของ Co-ordinates ในพิกัดต่าง ๆ

Co-ordinates ใน 1 พิกัด ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ Co-ordinates ของ x เขียนแทนด้วย (x) หรือ x ตำแหน่งของ Co-ordinates ใน 1 พิกัด ถ้า x เป็นจำนวนจริงแล้วตำแหน่งของ Co-ordinates ของ x จะแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวน

เช่น 2 คือจุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางขวา 2

- 3 คือจุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางซ้าย 3

ดังนั้นในการกำหนดตำแหน่งของ 1 พิกัด กำหนดบนเส้นตรงตามรูป และแทนจำนวนต่าง ๆ ทุกจำนวนในระบบจำนวนจริง



Co-ordinates ใน 2 พิกัด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (x,y) โดยที่ x,y เป็นจำนวนจริง x เรียกว่าพิกัดที่หนึ่ง จำนวนจริง y เรียกว่าพิกัดที่สอง ตำแหน่งของ coordinates ใน 2 พิกัด จะแทนด้วยจุดบนระนาบ เช่น

$(2, 3)$ คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางขวา (หรือค่าบนแกน x) = 2

และห่างจาก 0 ทางบน (หรือค่าบนแกน y) = 3

$(-2, 3)$ คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางซ้าย (หรือค่าบนแกน x) = 2

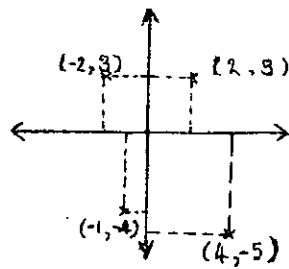
และห่างจาก 0 ทางบน (หรือค่าบนแกน y) = 3

$(-1, -4)$ คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางซ้าย (หรือค่าบนแกน x) = 1

และห่างจาก 0 ทางล่าง (หรือค่าบนแกน y) = 4

$(4, -5)$ คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ทางขวา (หรือค่าบนแกน x) = 4

และห่างจาก 0 ทางล่าง (หรือค่าบนแกน y) = 5



หมายเหตุ พิกัดต่าง ๆ ของ Coordinates เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง ของ Coordinates ใน 1 พิกัด คือ 1, 2, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}$ เป็นต้น

ตัวอย่าง ของ Coordinates ใน 2 พิกัด คือ $(2, 4)$, $(\frac{1}{2}, 2)$, $(0, 1)$
 $(2, 3)$ เป็นต้น

เซต ของ Coordinates ทั้งหมด ใน 1 พิกัด คือจำนวนจริงทั้งหมด เขียนแทนด้วย $\mathbb{R}$

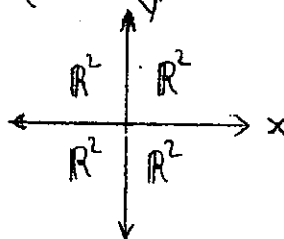
ดังนั้น $\mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

ตามรูป

เซต ของ Coordinates ทั้งหมด ใน 2 พิกัด คือ เซตของตำแหน่งของจุดทั้งหมดบนระนาบ คือ เซตของ (x, y) เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ
 เขียนแทนด้วย $\mathbb{R}^2$

ดังนั้น $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

ตามรูป



โอเปอเรชั่นใน Co-ordinates

1. การบวก Co-ordinates

1.1 ใน 1 พิกัด การบวก Coordinates คือการบวกจำนวนจริง นั่นเอง

เช่น $2 + 3 = 5$

1.2 ใน 2 พิกัด การบวก Coordinates คือ การที่นำพิกัดที่ตรงกันมาบวก

กัน เช่น $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(2, 3) + (4, 5) = (2 + 4, 3 + 5)$

$= (6, 8)$

2. การคูณ Coordinates ด้วยตัวคงที่

ใน 1 พิกัด การคูณ Coordinates ด้วยตัวคงที่ คือ การนำเอาตัวคงที่คูณจำนวนจริงนั่นเอง เช่น $2(3) = 6$

2.1 ใน 2 พิกัด การคูณ Coordinates ด้วยตัวคงที่ คือ การนำเอาตัวคงที่คูณพิกัดทุกพิกัดใน Coordinates เช่น $c(a, b) = (ca, cb)$

$$\begin{aligned} 2(3, 5) &= (2 \times 3, 2 \times 5) \\ &= (6, 10) \end{aligned}$$

$$-5(-3, 7) = (15, -35)$$

การเท่ากันของ Coordinates

ใน 1 พิกัด การเท่ากันของ Coordinates คือ การเท่ากันของจำนวนจริงนั่นเอง เช่น ถ้า a, b เป็น Coordinates ใน 1 พิกัด และ Coordinates ทั้ง 2 นี้ เท่ากัน ดังนั้นจะได้ว่า $a = b$

ใน 2 พิกัด การเท่ากันของ Coordinates ใน 2 พิกัด คือ การที่ Coordinates มีพิกัดเดียวกันเท่านั้น ทุกพิกัด พิกัดต่อพิกัด เช่น

$$(a, b) = (c, d)$$

$$a = c \quad \& \quad b = d$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า x และ y ที่ทำให้

$$(x, y) = (6, x+1)$$

วิธีทำ จะได้ว่า $x = 6$

$$y = x+1$$

$$= 6 + 1$$

$$= 7$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า x ซึ่งทำให้
 $(x, 2) = (2x, 2)$

วิธีทำ จะได้ว่า $2x = x$
 $2 = 2$
 $2x - x = 0$
 $x = 0$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า x, y ที่ทำให้

$x(1, 0) + y(2, 3) = (10, 12)$
 วิธีทำ $(x + 2y, 0 + 3y) = (10, 12)$
 $x + 2y = 10$
 $3y = 12$
 $y = 4$
 $x + 8 = 10$
 $x = 2$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

จงหาค่าของ Coordinates ต่อไปนี้

- 1) $2(a, 3) + 3(b, 2)$
- 2) $-3(2, 5) + 2(4, 3)$
- 3) $-3(-2, 4) + 4(2, 3)$

จงหาค่าของ a, b ที่ทำให้

- 4) $a(2, 1) + b(1, 2) = (3, 4)$
- 5) $a(1, 0) + b(3, 2) = (5, 5)$
- 6) $3(a, 0) + 2(1, b) = (0, 0)$

ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการ คือ ชุดของสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการมากกว่า หรือเท่ากับ 1 สมการ

Solution ของระบบสมการ คือ ค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับทุก ๆ สมการในระบบนั้น หรือ คือค่าของตัวแปรที่นำไปแทนในสมการใด ๆ ในระบบนั้นแล้วทำให้ สมการเป็นจริง

ระบบสมการเชิงเส้นมีอยู่ 2 ระบบ คือ

1. ระบบสมการที่ไม่มี Solution คือไม่มีจำนวนจริงชุดใดที่ สอดคล้องกับระบบสมการ
2. ระบบสมการที่มี Solution ในระนาบนี้อาจจะแยกออกเป็น 2 แบบ คือ

2.1 ระบบสมการที่มี Solution เดียว

2.2 ระบบสมการที่มี Solution จำนวนไม่จำกัด

ตัวอย่าง ระบบสมการที่ไม่มี Solution เช่น

$$x - y = 8 \quad \dots (1)$$

$$2x - 2y = 6 \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก } \frac{(2)}{2} \quad x - y = 3 \quad \dots (3)$$

จะเห็นว่าไม่มีค่า x, y ซึ่งทำให้ $x - y = 8$ และ 3 ในเวลาเดียวกัน นั่นคือไม่มีค่าจริง ดังนั้นระบบสมการไม่มี Solution

ตัวอย่าง ระบบสมการที่มี Solution เดียว เช่น

$$x - y = 2 \quad \dots (1)$$

$$x + y = 4 \quad \dots (2)$$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \quad x = 3$$

$$\frac{(2)-(1)}{2} \quad x = 3$$

$$y = 1$$

จะเห็นว่าค่า x, y เพียงชุดเดียวที่สอดคล้องกับระบบสมการ ดังนั้นระบบสมการแบบนี้ Solution เดียว

ตัวอย่าง ระบบสมการที่มี Solution ไม่จำกัด เช่น

$$x - z = 8$$

$$y - z = 4$$

จะได้ว่า

$$x = 8 + z$$

$$y = 4 + z$$

จะเห็นว่าค่าของ x, y ขึ้นอยู่กับค่าของ z ซึ่งถ้า z เปลี่ยนไป จะเปลี่ยนตาม เช่น

$$z = 0, \quad x = 8 \quad y = 4$$

$$z = 1, \quad x = 9 \quad y = 5$$

$$z = 2, \quad x = 10 \quad y = 6 \quad \text{เป็นต้น}$$

จะเห็นว่า จะได้ว่าค่าของ x, y, z ซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการอย่างไม่จำกัด ดังนั้น จึงมี Solution หลายชุดที่สอดคล้องกับระบบสมการ

ระบบสมการแบบนี้เรียกว่า ระบบสมการ ที่มี Solution ไม่จำกัด

การเขียน Solution ของระบบสมการ

$$\text{ทำได้โดยเขียน ในรูป } x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 7$$

$$\text{หรือ } (4, 3, 7)$$

เช่น Solution ของระบบสมการเป็น $x = 5, \quad z = 7, \quad y = -2$
ดังนั้น Solution เขียนโดย เรียงลำดับ ของตัวแปร อย่างมีความหมายเป็น
(5, -2, 7)

การ Equivalent กันของระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการ 2 ระบบสมการ จะ Equivalent กัน ก็ต่อเมื่อ ระบบสมการทั้ง 2 นั้นมี Solution เดียวกัน

$$\begin{array}{rcl} \text{เช่น} & x - y & = 4 \\ & x + y & = 5 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{เช่น} & x - y & = 4 \\ & x + y & = 5 \end{array}} \right\} \text{ I}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{กับ} & 2x - 2y & = 8 \\ & 3x + 3y & = 15 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{กับ} & 2x - 2y & = 8 \\ & 3x + 3y & = 15 \end{array}} \right\} \text{ II}$$

Solution ของระบบสมการ I คือ $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$

Solution ของระบบสมการ II คือ $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$

ดังนั้น ระบบสมการ I Equivalent กับระบบสมการ II

หมายเหตุ ระบบสมการที่ Equivalent กัน สามารถนำเอา Solution มา
ตอบแทนซึ่งกันและกันได้

โอเปอเรชัน (Operation) ในระบบสมการ

1. การสลับลำดับของสมการยังทำให้ Solution คงเดิม เช่น

$$\begin{array}{rcl} \text{ในระบบสมการ I} & x + 2y & = 3 \\ & x - y & = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{กับในระบบสมการ II} & x - y & = 4 \\ & x + 2y & = 3 \end{array}$$

ระบบสมการทั้งสอง Equivalent กัน คือมี Solution เหมือนกัน

2. การนำตัวคงที่ที่ไม่เท่ากับ 0 ไปคูณกับสมการในระบบสมการยังทำให้

Solution คงเดิม เช่น

$$\begin{array}{rcl} \text{ในระบบสมการ I} & x + 2y & = 3 \\ & x - y & = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{กับ ในระบบสมการ II} & x + 2y & = 3 \\ & 2x - 2y & = 8 \end{array}$$

ระบบทั้ง 2 Equivalent กัน เพราะในสมการที่ 2 ของระบบสมการ
เกิดจากการคูณสมการที่ 1 ในระบบสมการ I ด้วย 2

3. การแทนที่สมการใด ๆ ด้วยผลบวกของสมการนั้นกับสมการอื่น ๆ ในระบบเดียวกัน ยังทำให้ Solution ในระบบคงเดิม เช่น

$$\text{ในระบบสมการที่ 1. } x - y = 4 \quad \dots (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad \dots (2)$$

$$\text{ในระบบสมการที่ 2. } x - y = 4 \quad \dots (1)'$$

$$(1) + (2) ; 2x + y = 7 \quad \dots (2)'$$

ระบบสมการทั้ง 2 Equivalent กัน

หมายเหตุ ต่อไปจะเรียกสมการที่ i ว่า L_i

ดังนั้น จากข้อ 2 และข้อ 3 สรุปได้ว่า ถ้า a, b เป็นตัวคงที่ใด ๆ ถ้าแทน L_i ด้วย $aL_i + bL_j$ คือ แทน L_i ด้วยผลบวกของตัวคงที่คูณกับ L_i กับตัวคงที่คูณสมการอื่น เขียนแทนด้วย $L_i \longrightarrow aL_i + bL_j$ ยังทำให้ระบบสมการทั้ง 2 Equivalent กัน

เช่น ในระบบสมการที่ 1.

$$3x + 2y - z = 4 \quad \dots L_1$$

$$2x - y + z = 5 \quad \dots L_2$$

$$x - 2y - 2z = 0 \quad \dots L_3$$

ในระบบสมการที่ 2.

$$L_1 \longrightarrow L_1 ; 3x + 2y - z = 4 \quad \dots L_1'$$

$$L_2 \longrightarrow 3L_2 - 2L_1 ; -7y - 4z = 7 \quad \dots L_2'$$

$$L_3 \longrightarrow 3L_3 - L_1 ; -14y - 5z = -4 \quad \dots L_3'$$

จะได้ว่าระบบสมการที่ 2. เกิดจากการแทนที่ L_1 ด้วย L_1 , L_2 ด้วย

$3L_2 - 2L_1$ และ L_3 ด้วย $3L_3 - L_1$

ดังนั้น ระบบสมการที่ 1. ซึ่งประกอบด้วย L_1, L_2, L_3 จะ Equivalent กับระบบสมการที่ 2. ซึ่งประกอบด้วย L_1', L_2', L_3'

การหา Solution ของระบบสมการเชิงเส้น

การหา Solution ของระบบสมการเชิงเส้น ทำได้หลายวิธี วิธีการ
อันหนึ่ง คือ การกำจัดตัวแปรออกไปทีละตัว จนสมการที่ได้มีตัวแปร 1 ตัวเท่านั้น
แล้วจึงนำไปแทนในสมการอื่น เพื่อหา Solution

วิธีการดังกล่าวทำได้ง่าย เมื่อมีตัวแปรและจำนวนสมการน้อย ๆ แต่ถ้ามี
จำนวนมาก ๆ จะเป็นการยากในการนำมาแทนในสมการ เพราะสมการมีมาก
จะทำให้สับสน ดังนั้น จึงควรใช้วิธีที่ไม่สับสน คือ วิธีการของ Gauss

วิธีการของ Gauss

1. จัดเรียงตัวแปรให้ตรงกันในแต่ละหลัก เช่น

$$3x - 3y + z = 0 \quad \dots (1)$$

$$2z - x - y = 4 \quad \dots (2)$$

$$z - 2x - y = 2 \quad \dots (3)$$

จัดเรียงใหม่ได้ดังนี้

$$3x - 3y + z = 0 \quad \dots (1)$$

$$-x - y + 2z = 4 \quad \dots (2)$$

$$-2x - y + z = 2 \quad \dots (3)$$

2. ให้ L_1 เป็นสมการบรรทัดฐาน

2.1 ทำให้สัมประสิทธิ์ของพจน์แรกของสมการบรรทัดฐานเป็น 1

$$L_1 \longrightarrow \frac{1}{3}L_1 ; \quad x - y + \frac{1}{3}z = 0 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 ; \quad -x - y + 2z = 4 \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 ; \quad -2x - y + z = 2 \quad \dots (3)$$

2.2 กำจัดเทอมที่ตรงกับเทอมแรกของสมการบรรทัดฐาน

$$L_1 \longrightarrow L_1 ; \quad x - y - \frac{1}{3}z = 0 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 + L_1 ; \quad -2y - \frac{7}{3}z = 4 \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow 2L_1 + L_3 ; \quad -3y - \frac{5}{3}z = 2 \quad \dots (3)$$

ดำเนินการเพิ่ม โดยให้ L_2 เป็นสมการบรรทัดฐาน

$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad ; \quad x - y + \frac{1}{3}z = 0 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_2 \quad ; \quad y - \frac{7}{6}z = -2 \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 \quad ; \quad 3y - \frac{5}{3}z = 2 \quad \dots (3)$$

$$L_1 \longrightarrow L_2 + L_1 \quad ; \quad x - \frac{5}{6}z = -2 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 \quad ; \quad y - \frac{7}{6}z = -2 \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2 \quad ; \quad -\frac{11}{6}z = -4 \quad \dots (3)$$

ดำเนินการเดียวกัน โดยใช้สมการที่ 3 เป็นบรรทัดฐาน

$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad ; \quad x - \frac{5}{6}z = -2 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 \quad ; \quad y - \frac{7}{6}z = -2 \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow -\frac{6}{11}L_3 \quad ; \quad z = \frac{24}{11} \quad \dots (3)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{5}{6}L_3 \quad ; \quad x = -\frac{2}{11} \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 + \frac{7}{6}L_3 \quad ; \quad y = \frac{6}{11} \quad \dots (2)$$

$$L_3 \longrightarrow L_3 \quad ; \quad z = \frac{24}{11} \quad \dots (3)$$

ดังนั้น Solution ของระบบสมการ คือ $(-\frac{2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{24}{11})$

วิธีการดังกล่าวจะทำให้ไม่สับสนในการแทนค่าในสมการต่าง ๆ ทั้งยังสามารถตรวจสอบ Solution ของสมการได้

วิธีสังเกต Solution ของระบบสมการ

หลังจากใช้วิธีการของ Gauss แล้ว

1. ถ้ามีตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการ เช่น

$$x - z = 8$$

$$y - 2z = 5$$

ระบบสมการจะมี Solution ไม่จำกัด

2. ถ้ามีตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ

ระบบสมการจะมี Solution เดียว

3. ถ้ามีสมการใดในระบบนั้นที่เกิดความขัดแย้งหรือเป็นไปได้
จะได้ว่าระบบสมการจะไม่มี Solution

ถ้าเกิดกรณีที่ 1 คือ มีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการ ให้สมมติตัวแปร
ตัวหนึ่งเท่ากับ t โดย t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ และแทนค่า t หาค่าของ
ตัวแปรอื่น

ตัวอย่าง 1

$$\text{กำหนด } x - z = 8 \quad \dots (1)$$

$$y - 2z = 5 \quad \dots (2)$$

ให้ $z = t$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{จะได้ว่า } x = 8 + t$$

$$y = 5 + 2t$$

ดังนั้น Solution ของระบบสมการ คือ $(8 + t, 5 + 2t, t)$

เมื่อ t เป็นจำนวนจริง นั่นคือ มี Solution ไม่จำกัด

ตัวอย่าง 2

จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้

$$x - y = 4 \quad \dots (1)$$

$$2x - 2y = 6 \quad \dots (2)$$

โดยวิธีของ Gauss

$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad ; \quad x - y = 4 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow -2L_1 + L_2 \quad ; \quad 0 - 0 = -2 \quad \dots (2)$$

ดังนั้น ระบบสมการที่ได้ คือ

$$x - y = 4$$

$$0 = -2$$

จะเห็นได้ชัดว่า เป็นไปไม่ได้เพราะเกิดการขัดแย้งขึ้นในระบบสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มี Solution

ตัวอย่าง 3

จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้

$$x - 2y = 4 \quad \dots (1)$$

$$2x + y = 0 \quad \dots (2)$$

โดยวิธีของ Gauss

$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad ; \quad x - 2y = 4 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow -2L_1 + L_2 \quad ; \quad 5y = -8 \quad \dots (2)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad ; \quad x - 2y = 4 \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow \frac{1}{5}L_2 \quad ; \quad y = -\frac{8}{5} \quad \dots (2)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_2 \quad ; \quad x = \frac{4}{5} \quad \dots (1)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 \quad ; \quad y = -\frac{8}{5} \quad \dots (2)$$

ดังนั้น Solution มี Solution เดียว คือ $(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$

การแก้สมการโดยวิธีของเมทริกซ์ (Matrix)

การเขียนรูปสมการนั้นไม่สะดวก เนื่องจากต้องเขียนติครูปตัวแปรเสมอ
ดังนั้น เราจึงจะตัดตัวแปรออก และพิจารณาเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปร และตัวคงค่า
ทางด้านขวามือของระบบสมการเท่านั้น โดยเขียนสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเดียวกัน
อยู่ในหลักเดียวกัน

เช่น

$$x - y = 4$$

$$x + y = 5$$

เขียนเป็น

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 5 \end{array}$$

โดยการสับสน เราจะเขียนวงเล็บกำกับไว้ และใช้เส้นประในตำแหน่งของเครื่องหมายเท่ากับ

จะได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

เราเรียนสัญลักษณ์ดังกล่าวว่าเป็นเมทริกซ์ ต่อจากนั้นก็ใช้วิธีของ Gauss ที่กล่าวมาแล้ว กระทำในแต่ละแถว (ซึ่งก็คือ แต่ละสมการนั่นเอง) ในเมทริกซ์นั้น ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \longrightarrow L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

จากการที่เรากำหนดหลักที่ 1 แทนตัวแปร x ดังนั้น $x = \frac{9}{2}$
และ หลักที่ 2 แทนตัวแปร y ดังนั้น $y = \frac{1}{2}$

นั่นคือ Solution คือ $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$

จากตัวอย่าง 1 จงหา Solution ของระบบสมการ

$$x - z = 8$$

$$y - 2z = 5$$

จะเขียนได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

จะเห็นว่า มีตัวแปรมากกว่าสมการ ดังนั้น จะมี Solution ไม่จำกัด

ให้ $z = t$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า

$$x = 8 + t$$

$$y = 5 + 2t$$

ดังนั้น Solution คือ $(8 + t, 5 + 2t, t)$

จากตัวอย่าง 2 จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้

$$x - y = 4$$

$$2x - 2y = 6$$

จะเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & : & 4 \\ 2 & -2 & : & 6 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \longrightarrow L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & : & -2 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \longrightarrow -2L_1 + L_2$$

จะเห็นว่า แถวที่ 2 เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มี Solution

จากตัวอย่างที่ 3 จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้

$$x - 2y = 4$$

$$2x + y = 0$$

เขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & : & 4 \\ 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \longrightarrow L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 5 & : & -8 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \longrightarrow -2L_1 + L_2$$

$$\begin{array}{ll}
 L_1 \longrightarrow L_1 & \begin{bmatrix} 1 & -2 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \\
 L_2 \longrightarrow \frac{1}{5}L_2 & \\
 \\
 L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & : & -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \\
 L_2 \longrightarrow L_2 &
 \end{array}$$

จากการที่เรากำหนดหลักที่ 1 แทนตัวแปร x ดังนั้น $x = \frac{4}{5}$
 และ หลักที่ 2 แทนตัวแปร y ดังนั้น $y = -\frac{8}{5}$

นั่นคือ Solution ของระบบสมการ คือ $(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$

พิจารณาในเซต $\{(0,1), (1,0)\}$

จะเห็นว่า $\{(0,1), (1,0)\}$ เป็น Independent Set

และ $\langle (0,1), (1,0) \rangle = \mathbb{R}^2$

ดังนั้น $\{(0,1), (1,0)\}$ เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

จงพิจารณา Set ของ Linear Combination ของ Coordinates
ในเซตต่าง ๆ ต่อไปนี้ และจงพิจารณาว่าเป็น Basis ของเซตของ Linear
Combination ของ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

- (1) $\{7, 8, 0\}$
- (2) $\{(0,1), (1,2)\}$
- (3) $\{(0,2), (0,0)\}$
- (4) $\{(2,2), (1,1)\}$
- (5) $\{(2,1), (1,2), (3,3)\}$
- (6) $\{(1,2), (2,3), (3,1), (1,1)\}$
- (7) $\{1, 2\}$
- (8) $\{0\}$

Linear Combination

ขอให้ศึกษา ความหมายของ Linear Combination จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

ถ้าให้ $c_1 = 5$, $c_2 = 6$ และ $c = 28$ เป็น Coordinates ใน 1 พิกัด จะพบว่า

$$28 = 2(5) + 3(6)$$

$$\text{หรือ } c = 2c_1 + 3c_2$$

ลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1

และ c_2

ตัวอย่างที่ 2

ถ้าให้ $c_1 = 10$, $c_2 = 15$, $c_3 = 30$ และ $c = 100$ จะพบว่า

$$100 = 1(10) + 2(15) + 2(30)$$

$$\text{หรือ } c = 1c_1 + 2c_2 + 2c_3$$

ลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1, c_2

และ c_3

ตัวอย่างที่ 3

ถ้าให้ $c_1 = (2,1)$, $c_2 = (1,3)$ และ $c = (6,8)$ เป็น Coordinates ใน 2 พิกัด

จะพบว่า

$$(6,8) = 2(2,1) + 2(1,3)$$

$$\text{หรือ } c = 2c_1 + 2c_2$$

ลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1, c_2

ตัวอย่าง 4

ถ้าให้ $c_1 = (1,2)$, $c_2 = (3,2)$, $c_3 = (5,2)$ และ $c = (20,12)$ เป็น Coordinates ใน 2 พิกัด จะพบว่า

$$(20,12) = 2(1,2) + 1(3,2) + 3(5,2)$$

$$c = 2c_1 + 1c_2 + 3c_3$$

ลักษณะดังกล่าวเช่นนี้เราเรียกว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1, c_2, c_3

จากตัวอย่างดังกล่าวสรุปได้ว่า

ถ้า c เป็น Coordinates ใด ๆ เรียกว่า c เป็น Linear Combination ของ Coordinates $c_1, c_2, \dots, c_n$ ก็ต่อเมื่อ c เขียนได้ในรูป $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n$ เมื่อ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ เป็นจำนวนคงที่ เช่น

$$28 \text{ เขียนได้ในรูป } 2(5) + 3(6)$$

ดังนั้น 28 เป็น Linear Combination ของ 5, 6

$$(6,8) \text{ เขียนได้ในรูป } 2(2,1) + 2(1,3)$$

ดังนั้น $(6,8)$ เป็น Linear Combination ของ $(2,1), (1,3)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $c_1 = (3,5)$, $c_2 = (1,4)$ และ $c = (12,19)$ จงแสดงว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1, c_2

วิธีทำ ให้ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{และ } a(3,5) + b(1,4) = (10,19)$$

$$(3a + b, 5a + 4b) = (10,19)$$

$$\text{จะได้ว่า } 3a + b = 10$$

$$5a + 4b = 19$$

จากระบบสมการจะได้ $a = 3$

$b = 1$

ดังนั้น จะได้ว่า c เป็น Linear Combination ของ c_1, c_2

หมายเหตุ 1. เมื่อกำหนด Coordinates $c_1, c_2, \dots, c_n$ Coordinates c อาจจะไม่เป็น Linear Combination ของ $c_1, c_2, \dots, c_n$ ก็ได้

2. c อาจจะเป็น Linear Combination ของ $c_1, c_2, \dots, c_n$ ได้มากกว่า 1 ชุด เช่น $(0, 2)$ เป็น Linear Combination ของ $(0,1), (1,0)$ หรือ $(0,2), (2,0)$ ฯลฯ เป็นต้น
เป็น Linear Combination ของ $0, 2$ หรือ $0,1$ หรือ 1 ฯลฯ เป็นต้น

เซตของ Linear Combination

เซตที่เกิดจาก Linear Combination ทั้งหมดของ Coordinates หรือจำนวน $c_1, c_2, \dots, c_n$ เรียกว่า เซตของ Linear Combination ของ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เขียนแทนด้วย $\mathcal{L}[c_1, \dots, c_n]$ หรือ $\langle c_1, \dots, c_n \rangle$ เช่น

$$\langle (0,0) \rangle = \{ (0,0) \}$$

$$\langle (0,3) \rangle = \{ (0,x)/x \in \mathbb{R} \}$$

$$\langle (1,2) \rangle = \{ (a,b)/b = 2a, a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{aligned} \langle (0,1), (1,0) \rangle &= \{ (a,b)/a, b \in \mathbb{R} \} \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

เป็นต้น

วิธีตรวจสอบของ Linear Combination

การหาขอบเขตของเซต $c_1, \dots, c_n$ ทำได้โดยพิจารณาว่า
Coordinates ใดที่สามารถหรือไม่สามารถเขียนได้ในรูป Linear Combination
ของ $c_1, c_2, \dots, c_n$ หรือไม่ เช่น

$$\langle (2,0), (8,0) \rangle = \mathbb{R}^2 \text{ หรือไม่}$$

ให้ (a,b) แทน Coordinates ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$

α_1, α_2 เป็นจำนวนคงที่

$$\text{ให้ } \alpha_1(2,0) + \alpha_2(8,0) = (a,b)$$

$$\text{ดังนั้น } (2\alpha_1 + 8\alpha_2, 0) = (a,b)$$

$$\text{นั่นคือ } a = 2\alpha_1 + 8\alpha_2$$

$$b = 0$$

แสดงว่า สามารถแทนได้เฉพาะ Coordinates ที่มี $b = 0$ เท่านั้น
ไม่ว่าจะเปลี่ยน α_1, α_2 อย่างไร

$$\text{ดังนั้น } \langle (2,0), (8,0) \rangle \neq \mathbb{R}^2$$

$$\text{แต่ } \langle (2,0), (8,0) \rangle = \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$$

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ จะเรียกว่า Span Set A ก็ต่อเมื่อ

$$\langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle = A$$

เช่น $\langle 1, 2 \rangle = \mathbb{R}$ ดังนั้น $\{1, 2\}$ Span $\mathbb{R}$ ได้

$$\langle (0,1), (1,0) \rangle = \mathbb{R}^2$$

ดังนั้น $(0,1), (1,0)$ Span $\mathbb{R}^2$ ได้

$$\langle (2,3), (3,4), (1,0) \rangle = \mathbb{R}^2$$

ดังนั้น $(2,3), (3,4), (1,0)$ Span $\mathbb{R}^2$ ได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

จงหาว่า Coordinates ต่อไปนี้เป็น Linear Combination ของ Set ที่อยู่ข้างท้ายของแต่ละข้อหรือไม่ ถ้าเป็น จงหาจำนวนคงที่ที่เหมาะสม และ จงหาเซตของ Linear Combination ของเซตข้างท้ายและพิจารณาว่า เท่ากับ $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

- (1) $(3, 8)$; $\{(1, 2), (3, 2)\}$
- (2) $(0, 2)$; $\{(1, 4), (2, 5)\}$
- (3) $(3, 2)$; $\{(2, 1), (3, 8), (2, 4)\}$
- (4) $(0, \frac{1}{2})$; $\{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$
- (5) $(3, 4)$; $\{(2, 2), (3, 3)\}$
- (6) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $\{(2, 0), (0, 5)\}$
- (7) $(2, 4)$; $\{(2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
- (8) $(1, 4)$; $\{(1, 0), (2, 0)\}$

Linearly Dependent และ Linearly Independent

ขอให้พิจารณาความหมายของ Linearly Dependent และ Linearly Independent จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1

กำหนด $(0,1), (0,2)$ เป็น Coordinates ใน 2 พิกัด จะเห็นว่า มีค่า α_1, α_2 หลายตัวที่ทำให้

$$\alpha_1(0,1) + \alpha_2(0,2) = (0,0).$$

เช่น

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1$$

เป็นต้น

จากกรณีดังกล่าวจะเห็นว่า มีตัวคงที่บางชุดที่ไม่เท่ากับ 0 ทั้งชุด จากลักษณะนี้สรุปได้ว่า $(0,1), (0,2)$ เป็น Linearly Dependent

ตัวอย่าง 2

กำหนด 1, 3, 6 เป็น Coordinates ใน 1 พิกัด จะเห็นว่า มีค่า $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ หลายตัวที่ทำให้

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(3) + \alpha_3(6) = 0$$

เช่น

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1$$

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1$$

เป็นต้น

จากกรณีดังกล่าวจะเห็นว่า มีตัวคงที่บางชุดที่ไม่เท่ากับ 0 ทั้งชุด จาก
ลักษณะนี้สรุปได้ว่า 1, 3, 6 เป็น Linearly Dependent

ตัวอย่าง 3

กำหนด $(1, 2), (2, 1)$ เป็น Coordinates ใน 2 พิกัด จะเห็นว่า
มี α_1, α_2 เพียงชุดเดียวที่ทำให้

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 1) = (0, 0)$$

$$\text{คือ } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

จากลักษณะนี้จะสรุปได้ว่า $(1, 2), (2, 1)$ เป็น Linearly Independent

จากตัวอย่างข้างต้นจะสรุปได้ว่า

Coordinates ชุดใดจะเรียกว่า Linearly Dependent ก็ต่อเมื่อ
มีตัวคงที่ชุดหนึ่ง ซึ่งไม่เท่ากับ 0 ทั้งหมด ทำให้ Linear Combination ของ
Coordinates ชุดนั้นเท่ากับ 0

หรือ ถ้าให้ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็น Coordinates ชุดหนึ่ง
จะเรียกว่าเป็น Linearly Dependent เมื่อมีจำนวนคงที่ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
ชุดหนึ่ง ซึ่งมีบางตัวไม่เท่ากับ 0 ซึ่งทำให้ Linear Combination

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 + \dots + \alpha_n c_n = (0, 0) \text{ หรือ } 0$$

Coordinates ชุดใดไม่เป็น Linearly Dependent จะเรียกว่าเป็น
Linearly Independent กล่าวคือ ถ้า Linear Combination ของ
Coordinates เท่ากับ $(0, 0)$ หรือ 0 แล้วตัวคงที่ทุกตัวจะต้องเท่ากับ 0

เช่น $(1, 1), (8, 7)$ ไม่มี α_1, α_2 ใด ๆ ที่ทำให้
 $\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(8, 7) = (0, 0)$ โดยที่ α_1, α_2 ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $(1, 1), (8, 7)$ เป็น Linearly Independent

พิจารณา $(4, -2), (0, 1), (-1, 0)$ จะเห็นว่า มี $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
ที่ทำให้ $\alpha_1(4, -2) + \alpha_2(0, 1) + \alpha_3(-1, 0) = (0, 0)$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ บางตัวไม่เท่ากับ 0 เช่น

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$$

ดังนั้น $(4, -2), (0, 1), (-1, 0)$ เป็น Linearly Dependent

พิจารณา 2, 3, 4 เป็น Linearly Dependent

$$\text{เพราะว่ามี } \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$$

$$\text{ซึ่งทำให้ } -2(2) + 0(3) + 1(4) = 0$$

โดยที่ตัวคงที่ดังกล่าวไม่เท่ากับ 0 ทุกตัว

สรุปและข้อสังเกต

1. เซตที่มีสมาชิกเป็น Linearly Dependent เรียกว่า Dependent Set
2. เซตที่มีสมาชิกเป็น Linearly Independent เรียกว่า Independent Set
3. เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวเดียวเป็น Dependent Set ต่อเมื่อสมาชิกตัวนั้นคือ 0 หรือ $(0, 0)$
4. เซตที่ประกอบด้วย 0 หรือ $(0, 0)$ เป็น Dependent Set
5. เซตใดที่มี Subset เป็น Dependent Set แล้ว Set นั้น เป็น Dependent Set
6. เซตใดที่เป็น Independent Set แล้ว Subset ของเซตนั้น จะเป็น Independent Set
7. ถ้า $A \neq B$ และ $A \subset B$ และ $\langle A \rangle = \langle B \rangle$ แล้ว B จะเป็น Dependent Set คือ ถ้าเซต A ไม่เท่ากับ Set B และเซต A เป็น Subset B และเซตของ Linear Combination ทั้งหมดของทั้ง 2 เซต เท่ากัน จะได้ว่าเซต B เป็น Dependent Set
8. เซตของ Coordinates ถ้ามีจำนวนสมาชิกเกินกว่าจำนวนของ พิกัด จะเรียกว่าเป็น Dependent Set

แบบฝึกหัด

จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้

$$1. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2. \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$3. \quad 2x_1 - 3x_2 = 1$$

$$2x_2 + x_1 = 3$$

$$5x_1 - 7x_2 = 0$$

$$4. \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$2x_2 + x_1 + x_3 = 2$$

$$5. \quad x(0,3) + y(2,4) + z(-1,4) = (7,1)$$

$$6. \quad a(0,2) + b(2,0) + c(7,1) = (0,0)$$

$$7. \quad x_1(2,2) + x_2(2,3) = (7,4)$$

$$8. \quad x_1(1,2) + x_2(2,1) = (4,3)$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ เป็น Dependent Set หรือ Independent Set พร้อมทั้งอธิบายการพิจารณาแต่ละข้ออย่างสั้น ๆ

(1) $\{(1,1), (0,0), (2,4), (3,8)\}$

(2) $\{(0,4), (1,2), (2,3)\}$

(3) $\{(1,1)\}$

(4) $\{(0,1), (1,0)\}$

(5) $\{(a,2a), (a,0), (a,a)\}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

และ $a \neq 0$

(6) $\{(7,8), (8,7)\}$

(7) $\{(5,5), (4,1), (1,4)\}$

(8) $\{(3,3), (6,6)\}$

(9) $\{1\}$

(10) $\{1,2\}$

(11) $\{0,2,3\}$

Basis

ขอให้ศึกษาความหมายของ Basis จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1

พิจารณา $\{(2,0), (0,-2)\}$ กับ $\mathbb{R}^2$

จะเห็นว่า $\{(2,0), (0,-2)\}$ เป็น Independent Set

และ $\langle (2,0), (0,-2) \rangle = \mathbb{R}^2$

ลักษณะเช่นนี้จะเรียกว่า $\{(2,0), (0,-2)\}$ ว่าเป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง 2

พิจารณา $\{(1,1)\}$ กับ $\mathbb{R}^2$ และ $\{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}, x = y\}$

จะเห็นว่า $\{(1,1)\}$ เป็น Independent Set

และ $\langle (1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^2$ แต่ $\langle (1,1) \rangle \neq \mathbb{R}^2$

และ $\langle (1,1) \rangle = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}, x = y\}$

ลักษณะเช่นนี้จะเรียกว่า $\{(1,1)\}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$

และ $\{(1,1)\}$ เป็น Basis ของ

$\{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}, x = y\}$

ตัวอย่าง 3

พิจารณา $\{(0,1), (1,0)\}$, $\{(0,1), (2,0), (3,1)\}$ กับ $\mathbb{R}^2$

จะเห็นว่า $\{(0,1), (1,2)\}$ เป็น Independent Set

$\{(0,1), (2,0), (3,1)\}$ เป็น Dependent Set

และ $\langle (0,1), (1,2) \rangle = \mathbb{R}^2$

$\langle (0,1), (2,0), (3,1) \rangle = \mathbb{R}^2$

ลักษณะแบบนี้จะเรียกว่า $\{(0,1), (1,2)\}$ เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$
 $\{(0,1), (2,0), (3,1)\}$ ไม่เป็น Basis
ของ $\mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง 4

พิจารณา $\{1\}$, $\{0,2\}$ กับ $\mathbb{R}$

จะเห็นว่า $\{1\}$ เป็น Independent Set

$\{0,2\}$ เป็น Dependent Set

และ $\langle 1 \rangle = \langle 0,2 \rangle = \mathbb{R}$

ลักษณะดังกล่าวจะได้ว่า $\{1\}$ เป็น Basis ของ $\mathbb{R}$

$\{0,2\}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathbb{R}$

จากลักษณะของ Basis ในตัวอย่างข้างต้น สรุปได้ว่า

เซต A จะเรียกว่าเป็น Basis ของเซต B ก็ต่อเมื่อ A เป็น
Independent Set และ Set ของ Linear Combination ทั้งหมดของ
เท่ากับเซต B

หรือ A จะเป็น Basis ของ B ก็ต่อเมื่อ A เป็น Independent
Set และ $\langle A \rangle = B$

พิจารณาในเซต $\{(2,0), (1,0), (3,3)\}$

จะเห็นว่า $\langle (2,0), (1,0), (0,3) \rangle = \mathbb{R}^2$

แต่ $\{(2,0), (1,0), (0,3)\}$ เป็น Dependent Set

ดังนั้น $\{(2,0), (1,0), (0,3)\}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$

พิจารณาในเซต $\{(1,2)\}$

จะเห็นว่า $\{(1,2)\}$ เป็น Independent Set

แต่ $\langle (1,2) \rangle \neq \mathbb{R}^2$

ดังนั้น $\{(1,2)\}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathbb{R}^2$