การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยวิธีดิสครีต

ปริญญานิพนธ์

ของ

อุกฤษณ์ อันทพิษ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยวิธีดิสครีต

ปริญญานิพนธ์

ของ

อุกฤษณ์ อันทพิษ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยวิธีดิสครีต

บทคัดย่อ

ของ

อุกฤษณ์ อันทพิษ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

อุกฤษณ์ อันทพิษ (2551). *การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยวิธีดิสครีต*. ปริญญานิพนธ์ วศ.ม. (เครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัษฎมงคล, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว.

ในงานวิจัยนี้นำเสนอปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยเปรียบเทียบระบบที่ใช้ค่าพลังงานน้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีตกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีตในการออกแบบระบบควบคุม ซึ่งการออกแบบระบบทั้งสองอย่างนี้มีข้อดีและข้อเสียต่างกัน ระบบที่ใช้ค่าพลังงานน้อยที่สุดก็จะมีข้อดีในเรื่องใช้พลังงานน้อยกว่าการออกแบบระบบในรูปแบบอื่น ส่วนระบบที่ใช้ความนิ่มนวลที่สุด เช่น ความนิ่มนวลของระบบขับขี่รถยนต์ ความนิ่มนวลของเครื่องบินขณะที่ลงบนรันเวย์ มีความจำเป็นที่ต้องใช้เพื่อให้เกิดความสะดวกสบาย หรือไม่ให้ระบบเกิดการเสียหายเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะให้ผู้ออกแบบระบบควบคุมตัดสินใจในการออกแบบระบบ ผู้วิจัยจึงได้นำผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษานี้ไปเปรียบเทียบกับการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต โดยการเปรียบเทียบการใช้ค่าพลังงานน้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีตกับความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีตในระบบของแขนกลสองชิ้นต่อโยง

จากการวิจัยทำให้พอที่จะสรุปได้ว่าความนิ่มนวลที่สุด มีผลดีในด้านการใช้พลังงานใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด แต่ระบบจะมีเสถียรภาพที่ดีกว่า

คำสำคัญ (Keywords): ระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น / วิธีดิสครีต / ความนิ่มนวลที่สุด / การใช้พลังงานน้อยที่สุด

THE COMPARISON OF MINIMUM ENERGY AND MINIMUM JERK IN NINLINEAR DYNAMIC SYSTEMS BY USING DISCRETE METHOD

AN ABSTRACT

BY

UKRIT UNTAPIS

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering

at Srinakharinwirot University

July 2008

Ukrit Untapis. (2008). *The Comparison of Minimum Energy and Minimum Jerk in Nonlinear Dynamic Systems by Using Discrete Method.* Master thesis, M.Eng. (Mechnical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Asst. Prof. Dr. Pichai Asadamongkon: Lt.Col. Asst. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew.

This thesis presents optimization problem of nonlinear dynamics systems which comparison minimum energy by using discrete method and minimum jerk by using discrete method in control system. Good point of minimum energy which is minimum energy more than other control system. Minimum jerk system example car driving, aircraft when landing to runways which necessary because protect damage in system when have disturbance to system. Designer is difficult judgments which better. So that this paper present comparison minimum energy and minimum jerk by using discrete method in the planar two-link manipulator system.

By considering minimum indirect jerk: use energy neighboring minimum energy and smoothness more than minimum energy.

Keywords: Nonlinear dynamics system / Discrete method / Minimum jerk / Minimum energy

ประกาศคุณูปการ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัษฎมงคล, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว ผู้ควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่ให้โอกาสในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ แนะนำ พร้อมให้ความรู้จนสำเร็จ ที่กรุณาให้คำปรึกษาให้แนวคิดในการวิเคราะห์ และช่วยแก้ไขปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้น ในการทำปริญญานิพนธ์จนสมบูรณ์ จนกระทั่งจบการศึกษา

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์จาก โครงการความร่วมมือ หลักสูตรปริญญาโท สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ระหว่างมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และ โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า ที่ให้ความรู้และคำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณ บริษัท อิโนแอ็ค ออโต้โมทีฟ จำกัด บริษัทเก่าของผู้วิจัย และบริษัทไทยออโต้คอนเวอร์ชั่นจำกัด ที่ได้อนุญาตให้ ผู้วิจัยลางานเพื่อมาทำกิจกรรมของการเรียนในหลักสูตรนี้

ท้ายสุด ขอขอบพระคุณ คุณแม่สุมาลี อันทพิษ มารดาของข้าพเจ้า, พี่น้อง รวมทั้งบรรดาเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในหลักสูตรนี้ที่ช่วยเป็นกำลังใจให้เป็นอย่างดีเสมอมา

อุกฤษณ์ อันทพิษ

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยวิธีดิสครีต

ของ

อุกฤษณ์ อันทพิษ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิศวกรรมศาตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ ..... เดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัษฎมงคล)

..... กรรมการ

(พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

(พันเอก ดร. ธีรนันท์ นันทขว้าง)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว)

..... กรรมการ

(พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัษฎมงคล)

สารบัญ

บทที่ **หน้า**

1 **บทนำ**..... 1

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา..... 1

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย..... 2

ขอบเขตของโครงการวิจัย..... 2

2 **ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**..... 3

การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง..... 4

วิธีทางตรง..... 5

วิธีทางอ้อม..... 5

แคลคูลัสของตัวแปร..... 5

กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้าย..... 6

กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน..... 6

เวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน..... 7

การใช้พลังงานน้อยที่สุด..... 7

ความนิ่มนวลที่สุด..... 7

เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา..... 8

วิธีลีเจนดร์ ซูโดรสเปคตรัล..... 8

ปัญหาของระบบควบคุมที่เหมาะสมโดยวิธีดิสครีต..... 10

3 **วิธีดำเนินการวิจัย**..... 20

การกำหนดปัญหา..... 20

การหาค่าพลังงานที่น้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต..... 27

การหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต..... 27

4 **การทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ**..... 28

การทดสอบของการแก้ปัญหาการหาค่าพลังงานที่น้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต. 29

การทดสอบของการแก้ปัญหาการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต... 33

สารบัญ(ต่อ)

บทที่ **หน้า**

4 **(ต่อ)**

วิเคราะห์ผลการทดสอบ..... 36

5 **สรุปผลและวิจารณ์การวิจัย**..... 40

สรุปผลและวิจารณ์ผลการวิจัย..... 40

ข้อเสนอแนะ..... 40

บรรณานุกรม..... 41

ภาคผนวก..... 43

ภาคผนวก ก..... 44

ภาคผนวก ข..... 61

อภิธานศัพท์..... 78

ประวัติย่อผู้วิจัย..... 81

บัญชีตาราง

ตาราง **หน้า**

1 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการ 17

2 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการต่อเนื่อง 23

3 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการดิสตรีต 24

4 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการโดยแบ่งเป็น 10 ช่วง 25

5 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการต่อเนื่อง 29

6 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการดิสตรีต 30

7 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการโดยแบ่งเป็น 10 ช่วง 31

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

1 ภาพประกอบ 1 หุ่นยนต์แขนกล 2 ชิ้นต่อโยง…..... 21

2 ภาพประกอบ 1 หุ่นยนต์แขนกล 2 ชิ้นต่อโยง…..... 28

3 การเปรียบเทียบระหว่างแรงที่ให้กับชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด ……..... 36

4 การเปรียบเทียบระหว่างแรงที่ให้กับชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด 37

5 การเปรียบเทียบระหว่างมุมของชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด.... 37

6 การเปรียบเทียบระหว่างมุมของชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด.... 38

7 การเปรียบเทียบระหว่างความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด…… 38

8 การเปรียบเทียบระหว่างความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด…….... 39

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำวิจัย

ในการออกแบบระบบควบคุมทั่วๆไป จะมีวิธีการออกแบบที่หลากหลาย ซึ่งปกติแล้วจะขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายของผู้ออกแบบระบบที่ต้องการให้ระบบนั้นๆเป็นอย่างไร แต่ว่ายังไม่รู้ว่าระบบที่ใกล้เคียงกันจะออกแบบอย่างไหนดีกว่ากัน ซึ่งก็ขึ้นกับเงื่อนไขของแต่ละระบบด้วย

ในการหาค่าความเหมาะสมที่สุด (Optimization) ในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamics system) มีการออกแบบที่หลากหลายไม่ว่าจะเป็น การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) หรือการหาค่าความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) ทำให้ผู้วิจัยเห็นว่าการเปรียบเทียบการใช้งานระหว่างการใช้พลังงานที่น้อยที่สุด (Minimum Energy) กับความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) เป็นสิ่งที่จำเป็นที่จะบอกว่าสิ่งไหนจะดีกว่ากัน เพื่อที่สามารถจะเลือกใช้ให้เหมาะสมตามความต้องการ

วิธีดิสครีต (Discrete Method) หรือวิธีความไม่ต่อเนื่องเป็นอีกวิธีหนึ่งซึ่งสามารถใช้หาค่าความเหมาะสมที่สุดได้ ไม่ว่าจะเป็นการหาค่าพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) หรือการหาความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) ซึ่งสามารถใช้ประโยชน์ได้ดี ดังนั้นผู้วิจัยจึงเห็นว่าการเปรียบเทียบค่าพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) และความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) โดยใช้วิธีดิสครีต (Discrete method) ผลจะเป็นอย่างไร

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อที่จะเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการใช้พลังงานน้อยที่สุด กับความนิ่มนวลที่สุด ในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้วิธีดิสครีต

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 การหาค่าพลังงานน้อยที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นใช้วิธีดิสครีต ร่วมกับโปรแกรมแมทแลป (MATLAB)

1.3.2 การหาค่าความนุ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นใช้วิธีดิสครีต ร่วมกับโปรแกรมแมทแลป (MATLAB)

1.3.3 เปรียบเทียบผลลัพธ์ของการใช้พลังงานน้อยที่สุด กับความนิ่มนวลที่สุด ที่ได้จากการใช้วิธีดิสครีตร่วมกับโปรแกรมแมทแลป (MATLAB)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.4.1 ได้วิธีการในการนำดิสครีตมาใช้หาค่าความเหมาะสมที่สุดซึ่งได้ความเร็วในการคำนวณและความถูกต้องเพื่อพัฒนาในการศึกษาต่อไปได้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

2.1. การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทวิวัชร วีระแกล้ว, ปเสฏฐา สารลักษณ์. [1] ศึกษาการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น และใช้วิธีการหาค่าอย่างต่อเนื่องโดยวิธีทางตรง (Direct Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งผลที่ได้จะใกล้เคียงกันแต่ผลลัพธ์ของความนิ่มนวลที่สุดจะไม่สามารหาคำตอบได้ในรูปของสมการเชิงเส้นในขณะที่การใช้พลังงานน้อยที่สุดทำได้ แต่ช่วงเริ่มต้น

I. Michael Ross, Fariba Fahroo [2, 3] ศึกษาการใช้วิธีดิสครีตของ Pseudo Spectral ของอนุพันธ์อันดับสูงร่วมกับการใช้โปรแกรมไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming; NLPs) ในการประมาณค่าความเหมาะสมที่สุด (Optimization) ซึ่งวิธี Pseudo Spectral อนุพันธ์อันดับสูง สามารถลดจำนวนสมการในการช่วยให้โปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming; NLPs) หาคำตอบได้ ซึ่งส่งผลให้ลดเวลาในการคำนวณค่าลงได้ และมีค่าที่ใกล้เคียงกับการใช้วิธีอ้อมในการหาค่าความเหมาะสมที่สุด

I. Michael Ross, Fariba Fahroo [4] ศึกษาการใช้วิธีดิสครีตของ Chebyshev Pseudospectral ในการประมาณค่าระบบควบคุมที่เหมาะสมที่สุดโดยวิธีตรง (Direct method) ของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับโปรแกรมไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming; NLPs) ทำให้สามารถลดเวลาลงได้เมื่อเทียบกับวิธีคอลโลเคชั่น (Collocation Method)

Gamel N. Elnargar, Mohammad A. Kazemi [5] ศึกษาการใช้วิธีดิสครีตของ Pseudo Spectral อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในการหาค่าระบบควบคุมที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Dynamics System) ในขอบเขตของความไม่เท่ากัน (Inequality) ในตัวแปรสถานะ (State Variable) ตัวแปรควบคุม (Control Variable) ได้ผลลัพธ์ออกมาใกล้เคียงกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น สามารถเขียนในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n,u_1,...u_m,t); \quad i = 1,...,n \tag{2.1}$$

โดยที่ $x \in R^n$ เป็น ตัวแปรสถานะ (State Variable), $u \in R^m$ ตัวแปรควบคุม (Control Variable), x_0 เป็นค่าเริ่มต้นของตัวแปรสถานะที่เวลาเริ่มต้น t_0 และ $f(x,u,t)$ เป็นฟังชันที่อยู่ในรูปของ ตัวแปรสถานะ, ตัวแปรควบคุม และเวลา

ปัญหาการหาค่าความเหมาะสมที่สุดเป็นการหาค่าของตัวแปรสถานะ และตัวแปรควบคุม ซึ่งจะหาได้จากสมการของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

$$J = \phi(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt \tag{2.2}$$

เมื่อ t_0 เป็นเวลาเริ่มต้นและ t_f เป็นเวลาสุดท้าย

โดยคอสฟังก์ชันนอลจะสามารถพิจารณาค่าได้ทั้งค่าที่มากที่สุด และค่าน้อยที่สุดซึ่งจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา สมการของคอสฟังก์ชันนอลแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือ

(1) $\phi(x(t_f),t_f)$ เป็นส่วนพื้นฐานที่ขึ้นกับเวลาและสถานะสุดท้ายของระบบ

(2) $\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt$ เป็นส่วนอินทิกรัลที่ขึ้นกับเวลาของตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม

และตัวแปร ϕ และ J เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นของของตัวแปรสถานะ และตัวแปรควบคุม

การแก้ปัญหาความเหมาะสมที่สุดจากคอสฟังก์ชันนอลนั้นแบ่งออกได้เป็นสองแบบคือ แบบที่มีเงื่อนไขเงื่อนไขบังคับ (Constraint) และแบบที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraint)

แบบที่มีเงื่อนไขบังคับก็จะแบ่งออกได้อีกสองประเภทคือ

แบบเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality Constraints)

เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ จะอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$g_l(x_1,...,x_n) = 0; l = 1,...,m; m < n \tag{2.3}$$

แบบเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality Constraints)

เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ จะอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$c_l(x_1,...,x_n) \le 0; l = 1,...,m; m < n \qquad (2.4)$$

ในการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของคอสฟังก์ชันนอลในทุกรูปแบบนั้น สามารถแบ่งออกได้เป็นสองวิธีคือ โดยวิธีทางตรง (Direct Method) และโดยวิธีทางอ้อม (Indirect Method)

2.2.1 **วิธีทางตรง** (Direct method)

วิธีทางตรงเป็นวิธีการหาค่าความเหมาะสมที่สุด ซึ่งจะหาค่าตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุมของระบบ วิธีทางตรงจะแปลงปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดเป็นปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดแบบสถิตศาสตร์ (Static Parameter Optimization) และหนึ่งในวิธีการแปลงปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดคือ ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming Problem) ซึ่งแก้ปัญหาโดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การแก้ไขปัญหาของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยวิธีทางตรงซึ่งเป็นวิธีการคาดคะเนคำตอบที่ได้ทำให้มีปัญหาเรื่องความเที่ยงตรงของคำตอบที่ได้

2.2.2 **วิธีทางอ้อม** (Indirect method)

วิธีทางอ้อมเป็นวิธีที่ใช้พื้นฐานของแคลคูลัสของตัวแปร (Calculus of Variable) หรือหลักการของพอนทริยากิน (Pontryagin Principle) ในรูปของสภาวะที่จำเป็น (Necessary Condition) ซึ่งจะอยู่ในรูปของอนุพันธ์ และสมการพีชคณิต (Algebraic equation)

2.2.2.1 **แคลคูลัสของตัวแปร** (Calculus of variable)

ในการแก้ไขปัญหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ วิธีการที่สามารถใช้ได้วิธีการหนึ่งคือค่าของแคลคูลัสของตัวแปรซึ่งสามารถแบ่งแยกปัญหาต่างๆ ออกเป็นสามแบบดังนี้

2.2.2.1.1 กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้าย (Fixed End Time and End Points)

2.2.2.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน (Fixed End Time, Variable End Point)

2.2.2.1.3 เวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time and End Points)

2.2.2.1.1 **กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้าย** (Fixed End Time and End Points)

ให้ฟังก์ชัน $F(t,x,\dot{x})$ มีความต่อเนื่องตลอดอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสอง ดังนั้นจะมีค่าความเหมาะสมที่สุดอยู่ในช่วงเวลาเริ่มต้นถึงเวลาสุดท้าย $t_0 \le t \le t_f$ และจากค่าขอบเขตที่ $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$ ที่ฟังก์ชัน $J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt$

ถ้า x(t) เพิ่มขึ้นอีกจำนวน h(t) ดังแสดงในรูป และที่สถานะขอบเขต $h(t_0)=h(t_f)=0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x+h]-J[x]\\ &= \int_{t_0}^{t_f}[F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})-F(t,x,\dot{x})]dt\end{aligned} \tag{2.5}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ขยายและไม่คิดในเทอมอนุพันธ์อันดับสูง จะได้

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt\\ &= \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Big|_{t_f}-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Big|_{t_0}\end{aligned} \tag{2.6}$$

จากสภาวะที่จำเป็น (Necessary Condition) ค่าความเหมาะสม จะได้ $\delta J=0$ และจากสถานะขอบเขต (Boundary Condition) $h(t_0)=h(t_f)=0$ จะได้สมการ

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0 \tag{2.7}$$

สมการนี้จะเรียกว่า สมการออยเลอร์ (Euler's Equation)

2.2.2.1.2 **กำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน** (Fixed End Time, Variable End Point)

ในหัวข้อนี้จะแตกต่างจากสมการในหัวข้อกำหนดเวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้าย คือ $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่เท่ากับศูนย์ทำให้สมการฟังก์ชันนอลเป็นดังนี้

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Big|_{t_f}-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Big|_{t_0} \tag{2.8}$$

2.2.2.1.3 **เวลาสุดท้ายและตำแหน่งสุดท้ายแปรผัน** (Variable End Time and End Points)

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x+h]-J[x] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})-F(t,x,\dot{x})]dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ขยายและไม่คิดในเทอมอนุพันธ์อันดับสูง จะได้

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt + F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_f}\delta t_f \\ &\quad - F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_0}\delta t_0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2.3 **การใช้พลังงานน้อยที่สุด** (Minimum Energy)

การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมที่สุดจะอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{m} u_i^2\,dt \qquad i=1,...,n \tag{2.11}$$

2.2.4 **ความนิ่มนวลที่สุด** (Minimum Jerk)

ความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) หลักการคือ ความนิ่มนวลจะเป็นค่าความเปลี่ยนแปลงของแรงเทียบกับเวลา คือ ความนิ่มนวลเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรควบคุม (Control Variable); *u*

ดังนั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

$$Jerk = \dddot{x} = \dot{u} \tag{2.12}$$

โดยที่ $$\dot{u} = \tilde{u} \tag{2.13}$$

และ $$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_{n+m},\tilde{u}_1,...\tilde{u}_m,t); \quad i=1,...,m \tag{2.14}$$

ดังนั้นความนิ่มนวลที่สุดจะอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i^2 dt \qquad i=1,...,m \tag{2.15}$$

2.2.5 **เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา** (Necessary Condition)

ในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของบอลซาคอสฟังก์ชันนอล (Bolza Cost Functional) หาเงื่อนไขของค่าที่ต่ำที่สุด ซึ่งมีรูปดังนี้

$$J[x(\cdot),u(\cdot),\tau_0,\tau_f] = E(x_0,x_f,\tau_0,\tau_f) + \int_{\tau_0}^{\tau_f} F(x(\tau),u(\tau))d\tau \tag{2.16}$$

เมื่อ $$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau),u(\tau)) \tag{2.17}$$

$$e(x(\tau_0),x(\tau_f),\tau_0,\tau_f) = 0 \tag{2.18}$$

สำหรับ $$E: R^{N_x} \times R^{N_u} \times R \times R \to R\ ,$$

$$F: R^{N_x} \times R^{N_u} \to R,$$

$$f: R^{N_x} \times R^{N_u} \to R^{N_x}$$

$$e: R^{N_x} \times R^{N_u} \times R \times R \to R^{N_e},$$

$$h: R^{N_x} \times R^{N_u} \to R^{N_h}$$

2.2.6 **วิธีลีเจนด์ซูโครสเปคตรัล** (Legendre Pseudospectral)

เป็นวิธีที่มีพื้นฐานมาจากการเทียบค่า (Interpolation) ของ วิธีลีเจนด์-เกาส์-โลแบตโต (Legendre-Gauss-Lobatto ;LGL) ซึ่งกำหนดเวลาภายในที่ [-1, 1] ซึ่งหมายความว่า เวลาเริ่มต้น t_0= -1, และเวลาสุดท้าย t_N = 1 และสำหรับ $1 \le l \le N-1$, เวลาภายใน t_l เป็นศูนย์ที่ $\dot{L}_N$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Legendre Polynomial ดีกรี N และสามารถเปลี่ยนรูปได้เป็น

$$\tau(t) = \frac{(\tau_f - \tau_0)t + (\tau_f + \tau_0)}{2} \tag{2.19}$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปจาก $t \in [-1,1]$ เป็นรูปทั่วไปที่ $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$ ดังนั้น ตัวแปรสถานะ (State Variable) และ ตัวแปรควบคุม (Control Variable) จะสามารถประมาณค่าที่ดีกรี N ได้เป็น

$$x(t) \approx x^N(t) = \sum_{l=0}^{N} x_l \phi_l(t) \tag{2.20}$$

$$u(t) \approx u^N(t) = \sum_{l=0}^{N} u_l \phi_l(t) \tag{2.21}$$

เมื่อ l = 0, 1, ..., N

Lagrange Interpolating Polynomial กำลัง N คือ

$$\phi_l(t) = \frac{1}{N(N+1)L_N(t_l)} \frac{(t^2-1)\dot{L}_N(t)}{t-t_l} \tag{2.22}$$

และ

$$\phi_l(t_k) = \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad l = k \\ 0 & \quad\quad\;\; l \neq k \end{cases}$$

เมื่อ $$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{2.23}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (12) จะได้ $x_l = x^N(\tau_l)$, $u_l = u^N(\tau_l)$ เมื่อ $\tau_l = \tau(t_l)$ หรือ $\tau_N \equiv \tau_f$

$$\dot{x}^N(\tau_k) = \left.\frac{dx^N}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_k} = \left.\frac{dx^N}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right|_{t_k} = \frac{2}{\tau_f - \tau_0}\sum_{l=0}^{N} D_{kl} x_l \equiv \frac{2}{\tau_f - \tau_0} d_k \tag{2.24}$$

หรือโพลิโนเมียลฟังก์ชัน (Polynomial Function)

$$F^N(t) = \sum_{l=0}^{N} F(t_l)\phi_l(t) \tag{2.25}$$

และอนุพันธ์ของโพลิโนเมียลฟังก์ชัน (Derivative of Polynomial Function)

$$\dot{F}^N(t_m) = \sum_{l=0}^{N} D_{1,kl} F(t_l) \tag{2.26}$$

เมื่อ $D_{1,kl} = \dot{\phi}_l(t_k)$ ของดิฟเฟอเรนทิเอชั่นแมททริก (Differentiation Matrix); (N+1) x (N+1)

$$D^1 = [D_{1,kl}] = \begin{cases} \dfrac{L_N(t_k)}{L_N(t_l)} \dfrac{1}{t_k - t_l}; k \neq l \\ -\dfrac{N(N+1)}{4}; k = l = 0 \\ \dfrac{N(N+1)}{4}; k = l = N \\ 0; \quad Otherwise \end{cases} \tag{2.27}$$

และอนุพันธ์อันดับสองของโพลิโนเมียลฟังก์ชัน (2nd Derivative of Polynomial Function)

$$\ddot{F}^N(t_m) = \sum_{l=0}^{N} D_{2,kl} F(t_l) \tag{2.28}$$

เมื่อ $D_{2,kl} = \ddot{\phi}_l(t_k)$ ของดิฟเฟอเรนทิเอชั่นแมททริก (หรือสามารถคำนวณอย่างง่ายได้เป็น $D^2 = D^1 * D^1$

2.2.7 ปัญหาของระบบควบคุมที่เหมาะสมโดยวิธีดิสครีต (Discretization of The Optimal Control Problem)

ค่าความเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันนอล (Optimization Functional)

$$J^N = h(x^N(1), \tau_f) + \int_{-1}^{1} g(x^N(t), u^N(t), \tau_0, \tau_f) dt \tag{2.29}$$

เมื่อ

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau) \tag{2.30}$$

$$\ddot{x}(\tau) = f(\dot{x}^N(\tau), x(\tau), u(\tau), \tau) \tag{2.31}$$

$$e_l \leq e(x(\tau_0), \tau_0, x(\tau_f), \tau_f) \leq e_u \tag{2.32}$$

$$g_l \leq g(x(\tau), u(\tau), \tau) \leq g_u \tag{2.33}$$

จากสมการที่ (2.10), (2.19) จะได้

$$\left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \tau(t)) \tag{2.34}$$

$$\left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \ddot{x}(t) = f\left(\left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)\dot{x}(t), x(t), u(t), \tau(t)\right) \tag{2.35}$$

$$e_l \le e(x(-1), \tau_0, x(1), \tau_f) \le e_u \tag{2.36}$$

$$g_l \le g(x(t), u(t), \tau(t)) \le g_u \tag{2.37}$$

ตัวอย่าง พิจารณาจรวดเคลื่อนที่โดยการใช้พลังงานน้อยที่สุด มีคอสฟังก์ชันนอล

$$J = -m(\tau_f)$$

และจากกฎของนิวตันและแรงโน้มถ่วงของโลกโดยมีรูปแบบ D^2 คือ

$$\ddot{x} = \frac{T_x}{m}$$

$$\ddot{y} = \frac{T_y}{m} - \frac{g_0}{(1 + \frac{y}{R})^2}$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}$$

เมื่อ *x, y* และ *m* คือระยะในแนวแกนนอน, แนวแกนตั้งและมวลตามลำดับ

$$0 \le T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \le T_{\max}$$

เมื่อ T_x และ T_y คือเวคเตอร์แรงในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

และมีสถานะขอบเขตคือ

$$x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

ระยะสุดท้ายในแนวแกน y = 10,000 เมตร

ระยะสุดท้ายในแนวแกน x = 10,000 เมตร

ความเร็วสุดท้ายในแนวแกน x = 1000 เมตรต่อวินาที

ความเร็วสุดท้ายในแนวแกน y = 150 เมตรต่อวินาที

มวลเริ่มต้น = 5000 กิโลกรัม

ค่าอิมพัลส์จำเพาะ (Specific Impulse) = 300 วินาที

ค่าแรงโน้มถ่วงของโลก (g_0) = 9.8203 m/s^2

หรือแสดงในรูปแบบของ D คือ

$$\dot{x} = V_x$$

$$\dot{y} = V_y$$

$$\dot{V}_x = \frac{T_x}{m}$$

$$\dot{V}_y = \frac{T_y}{m} - \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}$$

ถ้าพิจารณาในรูปของ D จะทำให้จำนวนตัวแปรมีดังนี้คือ

$$\vec{x}_{opt} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \\ \vec{m} \\ \vec{T}_x \\ \vec{T}_y \\ \tau_f \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะมีขนาดของเวคเตอร์คือ 7_n+1 เมื่อ n คือจำนวนจุดที่แบ่งในช่วงเวลาของดิสครีต

หรือ ถ้าพิจารณาในรูปของ D^2 จะทำให้จำนวนตัวแปรมีดังนี้คือ

$$\vec{x}_{opt} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{m} \\ \vec{T}_x \\ \vec{T}_y \\ \tau_f \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะมีขนาดของเวคเตอร์คือ 5_n+1 เมื่อ n คือจำนวนจุดที่แบ่งในช่วงเวลาของดิสครีต

วิธีการแก้ไขปัญหาทำได้โดยแปลงสมการต่างๆของปัญหาให้อยู่ในรูปของสมการดิสครีตซึ่งในหัวข้อนี้จะแปลงรูปของสมการรูปแบบ D^1 เท่านั้นแสดงได้ดังนี้

$$Dx = V_x$$

$$Dy = V_y$$

$$DV_x = \frac{T_x}{m}$$

$$DV_y = \frac{T_y}{m} - \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$Dm = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}$$

โดยที่

$$D^1 = [D_{1,kl}] = \begin{cases} \frac{L_N(t_k)}{L_N(t_l)} \frac{1}{t_k - t_l}; k \neq l \\ -\frac{N(N+1)}{4}; k = l = 0 \\ \frac{N(N+1)}{4}; k = l = N \\ 0; \quad Otherwise \end{cases}$$

ในที่นี้จะแบ่งช่วงเวลาออกเป็นสี่ช่วง คือ ช่วงเวลาที่ 1,2,3,4 ตามลำดับ และให้แต่ละช่วงเวลามีค่าเท่ากัน ดังนั้นจะมีจำนวนจุดอยู่ ห้าจุด คือจุดที่ 0,1,2,3,4 จะได้

$$\tau_0 = -1$$

$$\tau_1 = -0.5$$

$$\tau_2 = 0$$

$$\tau_3 = 0.5$$

$$\tau_4 = 1$$

$$L_N(\tau) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\tau^N} (\tau^2 - 1)^N$$

$$L_4(\tau) = \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4}{d\tau^4} (\tau^2 - 1)^4$$

$$L_4(\tau) = \frac{1}{8}(35\tau^4 - 30\tau^2 + 3)$$

$$D=\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix}$$

สมการคอสฟังก์ชันนอล

$$J=-m_4$$

สมการขอบเขต (Boundary Condition)

$$Dx=V_x$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{x_1} \\ V_{x_2} \\ V_{x_3} \\ V_{x_4} \end{bmatrix}$$

$$Dy=V_y$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{y_0} \\ V_{y_1} \\ V_{y_2} \\ V_{y_3} \\ V_{y_4} \end{bmatrix}$$

$$DV_x=\frac{T_x}{m}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{x_1} \\ V_{x_2} \\ V_{x_3} \\ V_{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{x_0} / m_0 \\ T_{x_1} / m_1 \\ T_{x_2} / m_2 \\ T_{x_3} / m_3 \\ T_{x_4} / m_4 \end{bmatrix}$$

$$DV_y = \frac{T_y}{m} - \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{y_0} \\ V_{y_1} \\ V_{y_2} \\ V_{y_3} \\ V_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{y_0} / m_0 \\ T_{y_1} / m_1 \\ T_{y_2} / m_2 \\ T_{y_3} / m_3 \\ T_{y_4} / m_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_0 / \left(1+\frac{y_0}{R}\right)^2 \\ g_0 / \left(1+\frac{y_1}{R}\right)^2 \\ g_0 / \left(1+\frac{y_2}{R}\right)^2 \\ g_0 / \left(1+\frac{y_3}{R}\right)^2 \\ g_0 / \left(1+\frac{y_4}{R}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$Dm = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 / g_0 I_{sp} \\ T_1 / g_0 I_{sp} \\ T_2 / g_0 I_{sp} \\ T_3 / g_0 I_{sp} \\ T_4 / g_0 I_{sp} \end{bmatrix}$$

$$0 \le T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \le T_{\max}$$

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{T_{x_0}^2 + T_{y_0}^2} \\ \sqrt{T_{x_1}^2 + T_{y_1}^2} \\ \sqrt{T_{x_2}^2 + T_{y_2}^2} \\ \sqrt{T_{x_3}^2 + T_{y_3}^2} \\ \sqrt{T_{x_4}^2 + T_{y_4}^2} \end{bmatrix}$$

$$0 \le \begin{bmatrix} \sqrt{T_{x_0}^2 + T_{y_0}^2} \\ \sqrt{T_{x_1}^2 + T_{y_1}^2} \\ \sqrt{T_{x_2}^2 + T_{y_2}^2} \\ \sqrt{T_{x_3}^2 + T_{y_3}^2} \\ \sqrt{T_{x_4}^2 + T_{y_4}^2} \end{bmatrix} \le 2$$

$$x_0 = 0$$

$$V_{x_0} = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$V_{y_0} = 0$$

$$y_4 = 10000$$

$$V_{x_4} = 1000$$

$$V_{y_4} = 150$$

$$m_0 = 5000$$

ในขั้นตอนต่อไปใช้ฟังก์ชัน fmincon ของโปรแกรมแมทแลป (MATLAB) มาช่วยในการแก้สมการโดยการกำหนดค่าของตัวแปรต่างๆดังนี้

ตาราง 1 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการ

โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร
X(1)	x_0	X(11)	y_0	X(21)	T_{x0}	X(31)	m_0
X(2)	x_1	X(12)	y_1	X(22)	T_{x1}	X(32)	m_1
X(3)	x_2	X(13)	y_2	X(23)	T_{x2}	X(33)	m_2
X(4)	x_3	X(14)	y_3	X(24)	T_{x3}	X(34)	m_3
X(5)	x_4	X(15)	y_4	X(25)	T_{x4}	X(35)	m_4
X(6)	V_{x0}	X(16)	V_{y0}	X(26)	T_{y0}	X(36)	T_0
X(7)	V_{x1}	X(17)	V_{y1}	X(27)	T_{y1}	X(37)	T_1
X(8)	V_{x2}	X(18)	V_{y2}	X(28)	T_{y2}	X(38)	T_2
X(9)	V_{x3}	X(19)	V_{y3}	X(29)	T_{y3}	X(39)	T_3
X(10)	V_{x4}	X(20)	V_{y4}	X(30)	T_{y4}	X(40)	T_4

แทนค่าตัวแปรในโปรแกรมแมทแลปลงในสมการคอสฟังก์ชันนอล

$$J = -x(35)$$

$$Dx = V_x$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(6) \\ x(7) \\ x(8) \\ x(9) \\ x(10) \end{bmatrix}$$

$$Dy = V_y$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(11) \\ x(12) \\ x(13) \\ x(14) \\ x(15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(16) \\ x(17) \\ x(18) \\ x(19) \\ x(20) \end{bmatrix}$$

$$DV_x = \frac{T_x}{m}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(6) \\ x(7) \\ x(8) \\ x(9) \\ x(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(21)/x(31) \\ x(22)/x(32) \\ x(23)/x(33) \\ x(24)/x(34) \\ x(25)/x(35) \end{bmatrix}$$

$$DV_y = \frac{T_y}{m} - \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(16) \\ x(17) \\ x(18) \\ x(19) \\ x(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(26)/x(31) \\ x(27)/x(32) \\ x(28)/x(33) \\ x(29)/x(34) \\ x(30)/x(35) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_0/\left(1+\frac{x(11)}{R}\right)^2 \\ g_0/\left(1+\frac{x(12)}{R}\right)^2 \\ g_0/\left(1+\frac{x(13)}{R}\right)^2 \\ g_0/\left(1+\frac{x(14)}{R}\right)^2 \\ g_0/\left(1+\frac{x(15)}{R}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$Dm = -\frac{T}{g_0 I_{sp}}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 6.9189 & -2.6667 & 2.3063 & -0.5 \\ -0.5781 & 0 & 1.5417 & -1 & 0.1927 \\ 0.3750 & -2.5946 & 0 & 2.5946 & -0.375 \\ -0.1927 & 1 & -1.5417 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -2.3063 & 2.6667 & -6.9189 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(31) \\ x(32) \\ x(33) \\ x(34) \\ x(35) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(36)/g_0 I_{sp} \\ x(37)/g_0 I_{sp} \\ x(38)/g_0 I_{sp} \\ x(39)/g_0 I_{sp} \\ x(40)/g_0 I_{sp} \end{bmatrix}$$

$$0 \le T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \le T_{\max}$$

$$\begin{bmatrix} x(36) \\ x(37) \\ x(38) \\ x(39) \\ x(40) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x(21)^2 + x(26)^2} \\ \sqrt{x(22)^2 + x(27)^2} \\ \sqrt{x(23)^2 + x(28)^2} \\ \sqrt{x(24)^2 + x(29)^2} \\ \sqrt{x(25)^2 + x(30)^2} \end{bmatrix}$$

$$0 \le \begin{bmatrix} \sqrt{x(21)^2 + x(26)^2} \\ \sqrt{x(22)^2 + x(27)^2} \\ \sqrt{x(23)^2 + x(28)^2} \\ \sqrt{x(24)^2 + x(29)^2} \\ \sqrt{x(25)^2 + x(30)^2} \end{bmatrix} \le 2$$

$$x(1) = 0$$

$$x(6) = 0$$

$$x(11) = 0$$

$$x(16) = 0$$

$$x(15) = 10000$$

$$x(5) = 10000$$

$$x(10) = 1000$$

$$x(20) = 150$$

$$x(30) = 5000$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

3.1 การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

3.2 การแก้ปัญหาการหาค่าพลังงานที่น้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต

3.3 การแก้ปัญหาการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต

3.1 การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

งานวิจัยชิ้นนี้ศึกษาการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยวิธีดิสครีต (The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Nonlinear Dynamic Systems by Discrete Method) ซึ่งจะแปลงสมการการเคลื่อนที่ สมการขอบเขตและคอสฟังก์ชันนอลจากสมการที่เป็นแบบต่อเนื่องเป็นแบบดิสครีต โดยใช้หลักการของเลเจนเดร ซูโดสเปคทรัล (Legendre Pseudospectral) และในการแปลงสมการจากแบบต่อเนื่องเป็นแบบดิสครีต จะมีการแปลงค่าเวลาจากแบบต่อเนื่องมาเป็นแบบดิสครีต โดยใช้สมการ

$$\tau(t) = \frac{(\tau_f - \tau_0)t + (\tau_f + \tau_0)}{2} \tag{3.1}$$

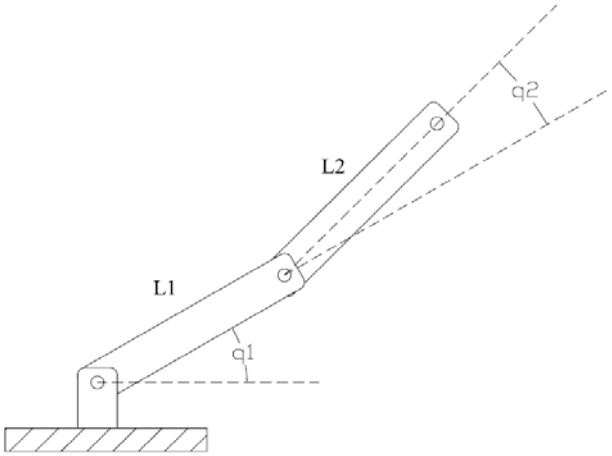
ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปจาก $t \in [-1,1]$ เป็นรูปทั่วไปที่ $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$

และเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์เป็นรูปแบบของแมตทริกซ์ (N+1) x (N+1) โดยใช้สมการ

$$D^1 = [D_{1,kl}] = \begin{cases} \dfrac{L_N(t_k)}{L_N(t_l)} \dfrac{1}{t_k - t_l}; k \neq l \\ -\dfrac{N(N+1)}{4}; k = l = 0 \\ \dfrac{N(N+1)}{4}; k = l = N \\ 0; \quad Otherwise \end{cases} \tag{3.2}$$

ตัวอย่าง ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชิ้นต่อโยง (The Planar Two-link Manipulator Problem)

พิจารณาแขนกล 2 มิติที่เรียกว่า หุ่นยนต์แขนกล 2 ชิ้นต่อโยง ในการนี้จะทำการพิจารณาว่าแขนกลไม่มีโมเมนต์ความเฉื่อย ระบบมี 2 องศาอิสระ ดังภาพประกอบที่



ภาพประกอบ 1 หุ่นยนต์แขนกล 2 ชิ้นต่อโยง

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$(m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2 g l_1 \cos(q_1)$$
$$+ m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + m_1 g l_1 \cos(q_1) = u_1 \quad (3.3)$$

$$(m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (3.4)$$

กำหนดค่าของตัวอย่างนี้ดังนี้คือ $-100 \le u_1 \le 100$, $-100 \le u_2 \le 100$, $m_1 = 1, m_2 = 1, l_1 = l_2 = 1.0,\ I_{c1} = I_{c2} = 1.0, g = 9.8$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบนี้คือ

$$(1 + \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (3 + \cos(q_2))\ddot{q}_1 + \cos(q_1)$$
$$+ 9.8\cos(q_1 + q_2) - 2\sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 9.8\cos(q_1) = u_1 \quad (3.5)$$

$$(1 + \cos(q_2))\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + 9.8\cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (3.6)$$

กำหนดขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ของตัวอย่างนี้คือ

$$q_1(0) = \frac{\pi}{4},$$
$$\dot{q}_1(0) = 0$$
$$q_2(0) = \frac{\pi}{6},$$
$$\dot{q}_2(0) = 0$$
$$q_1(t_f) = \frac{\pi}{3},$$
$$\dot{q}_1(t_f) = 0$$
$$q_2(t_f) = \frac{\pi}{4},$$
$$\dot{q}_2(t_f) = 0$$

หาค่าการใช้พลังงานน้อยที่สุดโดยที่เวลาเริ่มต้นคือ t_0 และเวลาสุดท้าย t_f ดังนั้นคอสฟังก์ชันนอลคือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2)dt \tag{3.7}$$

สามารถแปลงค่าคอสฟังก์ชันนอลให้อยู่ในรูปของสมการดิสครีต ได้ดังนี้

$$J = (u_f)_1^2 + (u_f)_2^2 \tag{3.8}$$

และสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} u_{1n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{2n} \\
&+ \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (3+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \cos(q_{1n}) \\
&+ \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n} + q_{2n}) - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} 2\sin(q_{2n})Dq_{2n}Dq_{1n} \\
&- \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n})Dq_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}) = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_{2n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} D^2 q_{2n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n}) D q_{1n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n} + q_{2n}) = 0 \quad (3.10)$$

ขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

ตาราง 2 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการต่อเนื่อง

Time	q_1	$\dot{q}_1$	q_2	$\dot{q}_2$
0	0	0	0	0
f	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0

หาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยที่เวลาเริ่มต้นคือ t_0 และเวลาสุดท้าย t_f ดังนั้นคอสฟังก์ชันนอลคือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2) dt \quad (3.11)$$

โดยที่ $\dot{u}_1 = \tilde{u}_1$ และ $\dot{u}_2 = \tilde{u}_2$

สามารถแปลงค่าคอสฟังก์ชันนอลให้อยู่ในรูปของสมการดิสครีต ได้ดังนี้

$$J = (\tilde{u}_f)_1^2 + (\tilde{u}_f)_2^2 \quad (3.12)$$

โดยที่

$$\tilde{u}_1 = \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right) \sum_{n=0}^{N} D_1 u_{1n} \quad (3.13)$$

$$\tilde{u}_2 = \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right) \sum_{n=0}^{N} D_1 u_{2n} \quad (3.14)$$

และสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

$$\sum_{n=0}^{N} u_{1n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{2n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (3+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \cos(q_{1n}) + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} 2\sin(q_{2n})Dq_{2n}Dq_{1n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n})Dq_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_{2n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} D^2 q_{2n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n})Dq_{1n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) = 0 \quad (3.16)$$

ขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

ตาราง 3 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการดิสตรีต

Time	q_1	Dq_1	q_2	Dq_2
0	0	0	0	0
f	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0

ตาราง 4 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการโดยแบ่งเป็น 10 ช่วง

โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร
X(1)	$u_{1,0}$	X(11)	$u_{2,0}$	X(21)	$q_{1,0}$	X(31)	$q_{2,0}$
X(2)	$u_{1,1}$	X(12)	$u_{2,1}$	X(22)	$q_{1,2}$	X(32)	$q_{2,1}$
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
X(10)	$u_{1,10}$	X(20)	$u_{2,10}$	X(30)	$q_{1,10}$	X(40)	$q_{2,0}$
X(41)	$\dot{q}_{1,0}$	X(51)	$\dot{q}_{2,0}$	X(61)	$\tilde{u}_{1,0}$	X(71)	$\tilde{u}_{2,0}$
X(42)	$\dot{q}_{1,1}$	X(52)	$\dot{q}_{2,1}$	X(62)	$\tilde{u}_{1,1}$	X(73)	$\tilde{u}_{2,1}$
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
X(50)	$\dot{q}_{1,10}$	X(60)	$\dot{q}_{2,10}$	X(70)	$\tilde{u}_{1,10}$	X(80)	$\tilde{u}_{2,10}$

แทนค่าตัวแปรที่สมการที่ 3.15, 3.16 จะได้

$$\left(D\begin{bmatrix}x(51)\\x(52)\\.\\.\\x(60)\end{bmatrix}\right)\bullet\left(1+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+\left(D\begin{bmatrix}x(41)\\x(42)\\.\\.\\x(50)\end{bmatrix}\right)\left(3+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}Cosx(21)\\Cosx(22)\\.\\.\\Cosx(30)\end{bmatrix}$$

$$+9.8\begin{bmatrix}Cos(x(21)+x(31))\\Cos(x(22)+x(32))\\.\\.\\Cos(x(30)+x(40))\end{bmatrix}-2\left(D\begin{bmatrix}x(31)\\x(32)\\.\\.\\x(40)\end{bmatrix}\right)*\left(D\begin{bmatrix}x(21)\\x(22)\\.\\.\\x(30)\end{bmatrix}\right)\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}$$

$$-\left(D\begin{bmatrix}x(31)\\x(32)\\.\\.\\x(40)\end{bmatrix}\right)^{2}\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}+9.8\begin{bmatrix}Cosx(21)\\Cosx(22)\\.\\.\\Cosx(30)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\.\\.\\x(10)\end{bmatrix}\qquad(3.17)$$

$$D\begin{bmatrix}x(41)\\x(42)\\.\\.\\x(50)\end{bmatrix}\bullet\left(1+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+D\begin{bmatrix}x(51)\\x(52)\\.\\.\\x(60)\end{bmatrix}+\left\{D\begin{bmatrix}x(21)\\x(22)\\.\\.\\x(30)\end{bmatrix}\right\}^{2}\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}$$

$$9.8\begin{bmatrix}Cos[x(21)+x(31)]\\Cos[x(22)+x(32)]\\.\\.\\Cos[x(30)+x(40)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(11)\\x12)\\.\\.\\x(20)\end{bmatrix}\qquad(3.18)$$

3.2 การหาค่าพลังงานที่น้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต

คอสฟังก์ชันนอลจากสมการ 3.8 จะได้

$$J = x(10)^2 + x(20)^2 \tag{3.19}$$

3.3 การหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต

คอสฟังก์ชันนอลจากสมการ 3.12 จะได้

$$J = x(70)^2 + x(80)^2 \tag{3.20}$$

โดยที่

$$D\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ . \\ . \\ x(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(61) \\ x(62) \\ . \\ . \\ x(70) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$D\begin{bmatrix} x(11) \\ x(12) \\ . \\ . \\ x(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(71) \\ x(72) \\ . \\ . \\ x(80) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

บทที่ 4
ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

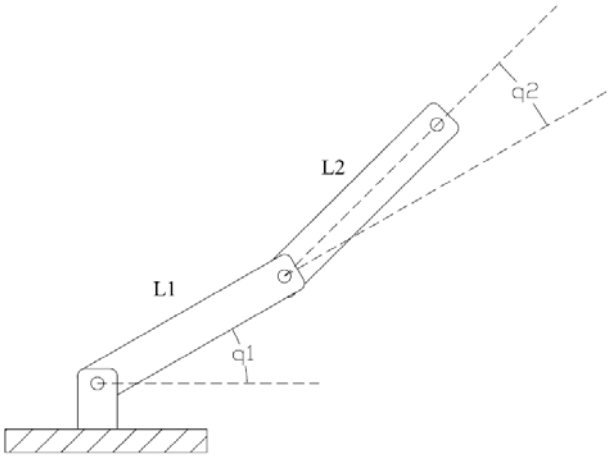
4.1 ผลการทดสอบ

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบในงานวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบผลของการหาค่าพลังงานน้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต กับการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต โดยกำหนดให้ระบบเป็นหุ่นยนต์แบบ 2 ชิ้นต่อโยง (The Planar Two-link Manipulator Problem) โดยการใช้วิธีดิสครีต และแก้ปัญหาโดยการใช้คำสั่ง fmincon ในโปรแกรมแมทแลป ในการแก้ปัญหาหาคำตอบ ซึ่งจะนำมาสู่ผลการทดลองดังนี้

ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชิ้นต่อโยง (The Planar Two-link Manipulator Problem)



ภาพประกอบ 2 หุ่นยนต์แขนกล 2 ชิ้นต่อโยง

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$(m_2 I_{c2}^2 + m_2 I_{c2} L_1 \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (m_2 L_1^2 + m_1 I_{c1}^2 + m_2 I_{c2}^2 + 2m_2 I_{c2} L_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2 g L_1 \cos(q_1)$$
$$+ m_2 g L_2 \cos(q_1 + q_2) - 2m_2 I_{c2} L_1 \sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - m_2 I_{c2} L_1 \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + m_1 g L_1 \cos(q_1) = u_1 \qquad (4.1)$$

$$(m_2 I_{c2}^2 + m_2 I_{c2} L_1 \cos(q_2))\ddot{q}_1 + m_2 I_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 I_{c2} L_1 \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + m_2 g L_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (4.2)$$

กำหนดค่าของตัวอย่างนี้ดังนี้คือ $-100 \le u_1 \le 100$, $-100 \le u_2 \le 100$, $m_1 = 1, m_2 = 1, L_1 = L_2 = 1.0,\ I_{c1} = I_{c2} = 1.0, g = 9.8$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบนี้คือ

$$\begin{aligned}&(1+\cos(q_2))\ddot{q}_2 + (3+\cos(q_2))\ddot{q}_1 + \cos(q_1) \\ &+ 9.8\cos(q_1+q_2) - 2\sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 9.8\cos(q_1) = u_1\end{aligned} \quad (4.3)$$

$$(1+\cos(q_2))\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + 9.8\cos(q_1+q_2) = u_2 \quad (4.4)$$

กำหนดขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ของตัวอย่างนี้คือ

ตาราง 5 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการต่อเนื่อง

Time	q_1	$\dot{q}_1$	q_2	$\dot{q}_2$
0	0	0	0	0
f	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0

4.1.1 การทดสอบของการแก้ปัญหาการหาค่าพลังงานน้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีต

หาค่าการใช้พลังงานน้อยที่สุดโดยที่เวลาเริ่มต้นคือ t_0 และเวลาสุดท้าย t_f ดังนั้นคอสฟังก์ชันนอลคือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2)dt \quad (4.5)$$

สามารถแปลงค่าคอสฟังก์ชันนอลให้อยู่ในรูปของสมการดิสครีต ได้ดังนี้

$$J = (u_f)_1^2 + (u_f)_2^2 \quad (4.6)$$

และสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} u_{1n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{2n} \\
&+ \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (3+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \cos(q_{1n}) \\
&+ \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} 2\sin(q_{2n}) Dq_{2n} Dq_{1n} \\
&- \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n}) Dq_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} u_{2n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} D^2 q_{2n} \\
&+ \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n}) Dq_{1n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ขอบเขตของปัญหา (Boundary Condition) ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

ตาราง 6 ขอบเขตของปัญหาในรูปแบบของสมการดิสตรีต

Time	q_1	Dq_1	q_2	Dq_2
0	0	0	0	0
f	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0

ตาราง 7 ตัวแปรในการแปลงค่าในสมการโดยแบ่งเป็น 10 ช่วง

โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร	โปรแกรม	ตัวแปร
X(1)	$u_{1,0}$	X(11)	$u_{2,0}$	X(21)	$q_{1,0}$	X(31)	$q_{2,0}$
X(2)	$u_{1,1}$	X(12)	$u_{2,1}$	X(22)	$q_{1,2}$	X(32)	$q_{2,1}$
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
X(10)	$u_{1,10}$	X(20)	$u_{2,10}$	X(30)	$q_{1,10}$	X(40)	$q_{2,0}$
X(41)	$\dot{q}_{1,0}$	X(51)	$\dot{q}_{2,0}$	X(61)	$\tilde{u}_{1,0}$	X(71)	$\tilde{u}_{2,0}$
X(42)	$\dot{q}_{1,1}$	X(52)	$\dot{q}_{2,1}$	X(62)	$\tilde{u}_{1,1}$	X(73)	$\tilde{u}_{2,1}$
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•
X(50)	$\dot{q}_{1,10}$	X(60)	$\dot{q}_{2,10}$	X(70)	$\tilde{u}_{1,10}$	X(80)	$\tilde{u}_{2,10}$

แทนค่าตัวแปรที่สมการที่ 3.15, 3.16 จะได้

$$\left(D\begin{bmatrix} x(51) \\ x(52) \\ . \\ . \\ x(60) \end{bmatrix} \right) \bullet \left(1+\begin{bmatrix} Cosx(31) \\ Cosx(32) \\ . \\ . \\ Cosx(40) \end{bmatrix} \right) + \left(D\begin{bmatrix} x(41) \\ x(42) \\ . \\ . \\ x(50) \end{bmatrix} \right) \left(3+\begin{bmatrix} Cosx(31) \\ Cosx(32) \\ . \\ . \\ Cosx(40) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} Cosx(21) \\ Cosx(22) \\ . \\ . \\ Cosx(30) \end{bmatrix}$$

$$+9.8\begin{bmatrix} Cos(x(21)+x(31)) \\ Cos(x(22)+x(32)) \\ . \\ . \\ Cos(x(30)+x(40)) \end{bmatrix} - 2\left(D\begin{bmatrix} x(31) \\ x(32) \\ . \\ . \\ x(40) \end{bmatrix} \right) * \left(D\begin{bmatrix} x(21) \\ x(22) \\ . \\ . \\ x(30) \end{bmatrix} \right) \bullet \begin{bmatrix} Sinx(31) \\ Sinx(32) \\ . \\ . \\ Sinx(40) \end{bmatrix}$$

$$-\left(D\begin{bmatrix} x(31) \\ x(32) \\ . \\ . \\ x(40) \end{bmatrix} \right)^2 \bullet \begin{bmatrix} Sinx(31) \\ Sinx(32) \\ . \\ . \\ Sinx(40) \end{bmatrix} + 9.8\begin{bmatrix} Cosx(21) \\ Cosx(22) \\ . \\ . \\ Cosx(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ . \\ . \\ x(10) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$D\begin{bmatrix} x(41) \\ x(42) \\ . \\ . \\ x(50) \end{bmatrix} \bullet \left(1+\begin{bmatrix} Cosx(31) \\ Cosx(32) \\ . \\ . \\ Cosx(40) \end{bmatrix} \right) + D\begin{bmatrix} x(51) \\ x(52) \\ . \\ . \\ x(60) \end{bmatrix} + \left\{ D\begin{bmatrix} x(21) \\ x(22) \\ . \\ . \\ x(30) \end{bmatrix} \right\}^2 \bullet \begin{bmatrix} Sinx(31) \\ Sinx(32) \\ . \\ . \\ Sinx(40) \end{bmatrix}$$

$$9.8\begin{bmatrix} Cos[x(21)+x(31)] \\ Cos[x(22)+x(32)] \\ . \\ . \\ Cos[x(30)+x(40)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(11) \\ x12) \\ . \\ . \\ x(20) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

คอสฟังก์ชันนอลจากสมการ 4.5 จะได้

$$J = x(10)^2 + x(20)^2 \tag{4.11}$$

ดังนั้นใช้คำสั่ง fmincon ในโปรแกรมแมทแลป โดยการแบ่งเป็นสามโปรแกรมคือ

1. โปรแกรม main เป็นโปรแกรมหลักที่ใช้ในการหาคำตอบค่าพลังงานน้อยที่สุด
2. โปรแกรม fun เป็นโปรแกรมที่ประกอบด้วยคอสฟังก์ชันนอลของระบบ
3. โปรแกรม nonlcon เป็นโปรแกรมที่รวมสมการการเคลื่อนที่, สมการขอบเขตของระบบ

ซึ่งโปรแกรมต่างๆเหล่านี้แสดงในภาคผนวก ก

4.1.1 การทดสอบของการแก้ปัญหาการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต

หาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยที่เวลาเริ่มต้นคือ t_0 และเวลาสุดท้าย t_f ดังนั้นคอสฟังก์ชันนอลคือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2) dt \tag{4.12}$$

โดยที่ $\dot{u}_1 = \tilde{u}_1$ และ $\dot{u}_2 = \tilde{u}_2$

สามารถแปลงค่าคอสฟังก์ชันนอลให้อยู่ในรูปของสมการดิสครีต ได้ดังนี้

$$J = (\tilde{u}_f)_1^2 + (\tilde{u}_f)_2^2 \tag{4.13}$$

โดยที่

$$\tilde{u}_1 = \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0} \right) \sum_{n=0}^{N} D_1 u_{1n} \tag{4.14}$$

$$\tilde{u}_2 = \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0} \right) \sum_{n=0}^{N} D_1 u_{2n} \tag{4.15}$$

คอสฟังก์ชันนอลจากสมการ 4.9 จะได้

$$J = x(70)^2 + x(80)^2 \tag{4.16}$$

โดยที่

$$D \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ . \\ . \\ x(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(61) \\ x(62) \\ . \\ . \\ x(70) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$D\begin{bmatrix} x(11) \\ x(12) \\ . \\ . \\ x(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(71) \\ x(72) \\ . \\ . \\ x(80) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

และสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบของสมการดิสครีตคือ

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N} u_{1n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{2n} \\ &+ \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (3+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \cos(q_{1n}) \\ &+ \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} 2\sin(q_{2n})Dq_{2n}Dq_{1n} \\ &- \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n})Dq_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}) = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N} u_{2n} - \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} (1+\cos(q_{2n}))D^2 q_{1n} + \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} D^2 q_{2n} \\ &+ \left(\frac{2}{\tau_f - \tau_0}\right)^2 \sum_{n=0}^{N} \sin(q_{2n})Dq_{1n}^2 + \sum_{n=0}^{N} 9.8\cos(q_{1n}+q_{2n}) = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

แทนค่าตัวแปรที่สมการที่ 3.15, 3.16 จะได้

$$\left(D\begin{bmatrix}x(51)\\x(52)\\.\\.\\x(60)\end{bmatrix}\right)\bullet\left(1+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+\left(D\begin{bmatrix}x(41)\\x(42)\\.\\.\\x(50)\end{bmatrix}\right)\left(3+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}Cosx(21)\\Cosx(22)\\.\\.\\Cosx(30)\end{bmatrix}$$

$$+9.8\begin{bmatrix}Cos(x(21)+x(31))\\Cos(x(22)+x(32))\\.\\.\\Cos(x(30)+x(40))\end{bmatrix}-2\left(D\begin{bmatrix}x(31)\\x(32)\\.\\.\\x(40)\end{bmatrix}\right)*\left(D\begin{bmatrix}x(21)\\x(22)\\.\\.\\x(30)\end{bmatrix}\right)\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}$$

$$-\left(D\begin{bmatrix}x(31)\\x(32)\\.\\.\\x(40)\end{bmatrix}\right)^{2}\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}+9.8\begin{bmatrix}Cosx(21)\\Cosx(22)\\.\\.\\Cosx(30)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\\.\\.\\x(10)\end{bmatrix}\qquad(4.21)$$

$$D\begin{bmatrix}x(41)\\x(42)\\.\\.\\x(50)\end{bmatrix}\bullet\left(1+\begin{bmatrix}Cosx(31)\\Cosx(32)\\.\\.\\Cosx(40)\end{bmatrix}\right)+D\begin{bmatrix}x(51)\\x(52)\\.\\.\\x(60)\end{bmatrix}+\left\{D\begin{bmatrix}x(21)\\x(22)\\.\\.\\x(30)\end{bmatrix}\right\}^{2}\bullet\begin{bmatrix}Sinx(31)\\Sinx(32)\\.\\.\\Sinx(40)\end{bmatrix}$$

$$9.8\begin{bmatrix}Cos[x(21)+x(31)]\\Cos[x(22)+x(32)]\\.\\.\\Cos[x(30)+x(40)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(11)\\x12)\\.\\.\\x(20)\end{bmatrix}\qquad(4.22)$$

ดังนั้นใช้คำสั่ง fmincon ในโปรแกรมแมทแลป โดยการแบ่งเป็นสามโปรแกรมคือ

1 โปรแกรม main เป็นโปรแกรมหลักที่ใช้ในการหาคำตอบค่าพลังงานน้อยที่สุด

2 โปรแกรม fun เป็นโปรแกรมที่ประกอบด้วยคอสฟังก์ชันนอลของระบบ

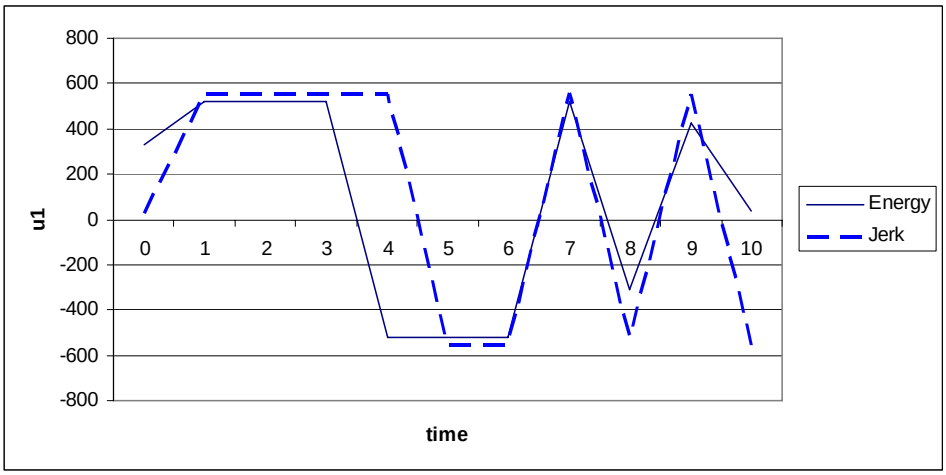
3 โปรแกรม nonlcon เป็นโปรแกรมที่รวมสมการการเคลื่อนที่, สมการขอบเขตของระบบ

ซึ่งโปรแกรมต่างๆเหล่านี้แสดงในภาคผนวกที่ ข

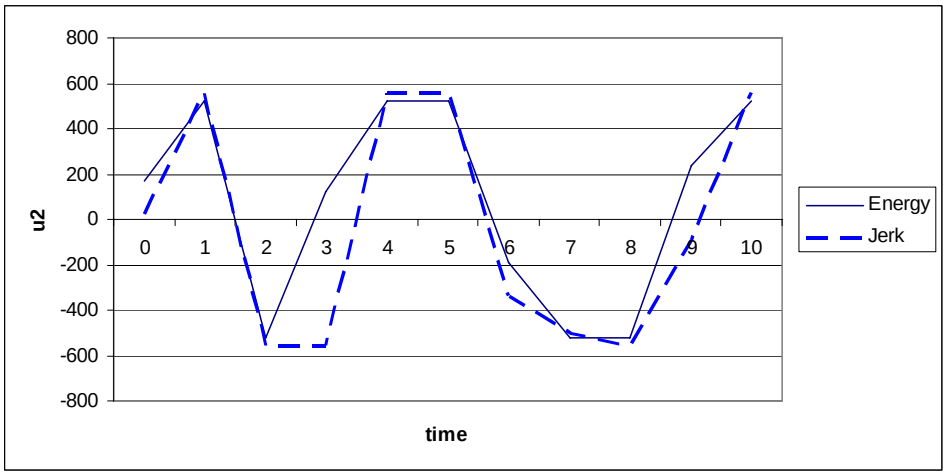
4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากการทดสอบทำให้ได้ผลการเปรียบเทียบออกมาสามค่าดังนี้

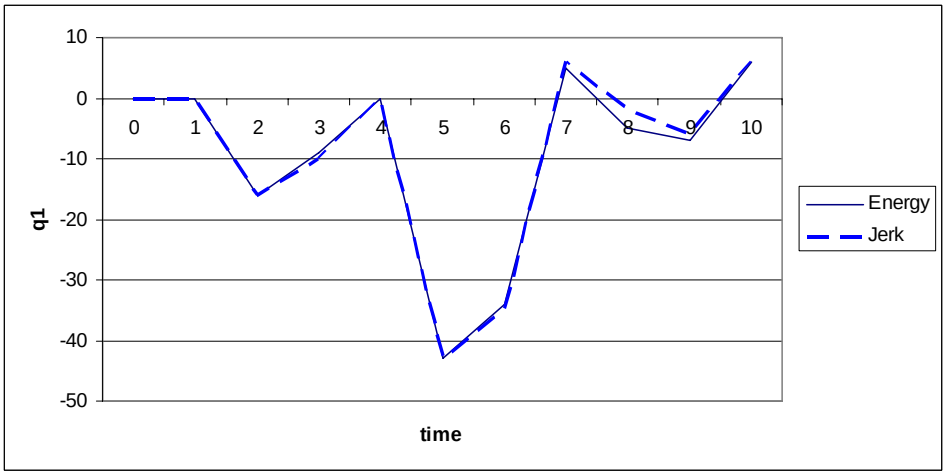
- ค่าของแรง u ที่ให้กับระบบ
- ค่าของตำแหน่งหรือมุม q ที่ให้กับระบบ
- ค่าของความเร็วเชิงมุม $\dot{q}$ ที่ให้กับระบบ



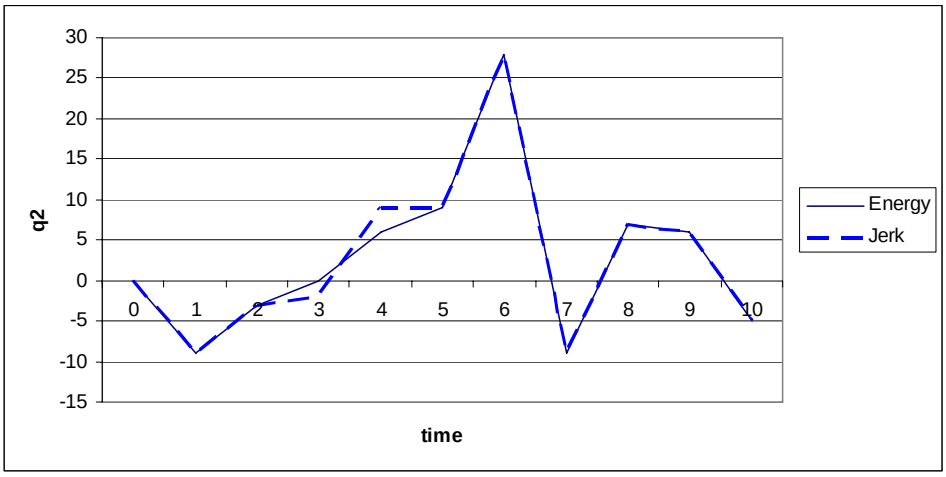
ภาพประกอบ 3 การเปรียบเทียบระหว่างแรงที่ให้กับชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด



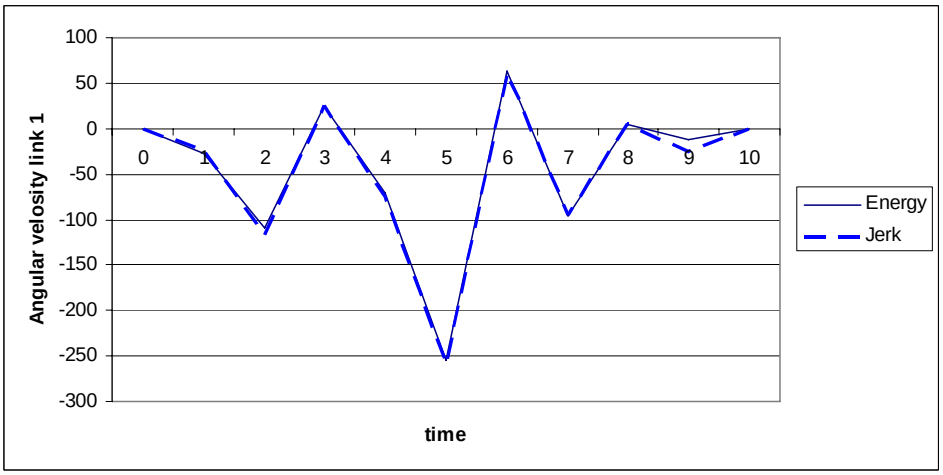
ภาพประกอบ 4 การเปรียบเทียบระหว่างแรงที่ให้กับชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด



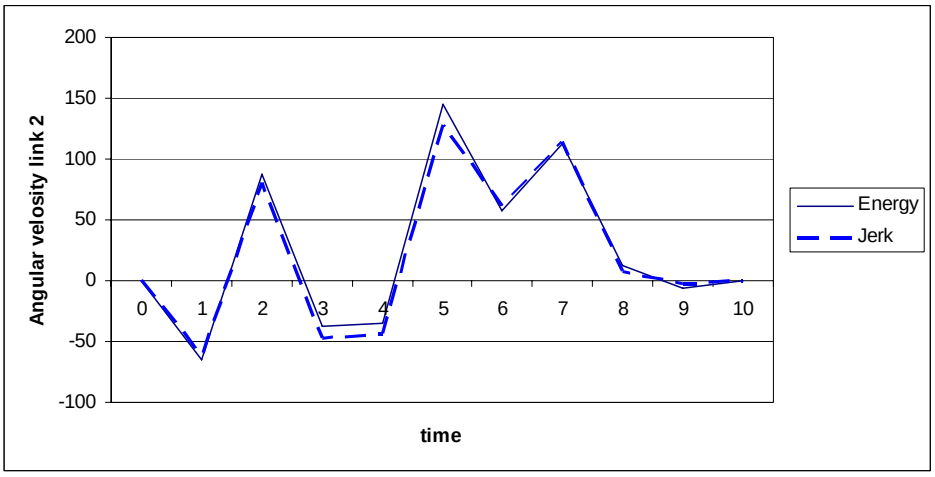
ภาพประกอบ 5 การเปรียบเทียบระหว่างมุมของชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด



ภาพประกอบ 6 เปรียบเทียบระหว่างมุมของชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด



ภาพประกอบ 7 การเปรียบเทียบระหว่างความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนที่ 1 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด



ภาพประกอบ 8 การเปรียบเทียบระหว่างความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วนที่ 2 ของพลังงานน้อยที่สุดกับความนิ่มนวลที่สุด

บทที่ 5
สรุปผลและวิจารณ์การวิจัย

5.1 สรุปผลและวิจารณ์ผลการวิจัย

จากผลการวิจัยทำให้สรุปผลได้ดังนี้ การเปรียบเทียบระหว่างการหาค่าพลังงานที่น้อยที่สุดโดยวิธีดิสครีตและการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีดิสครีต จะเห็นได้ว่า

1. แรงที่ให้กับระบบการหาค่าพลังงานน้อยที่สุดจะใช้แรงน้อยกว่าระบบที่ใช้การหาค่าความนิ่มนวลที่สุด และระบบที่ใช้ค่าพลังงานน้อยที่สุดไม่สามารถทำให้ระบบเป็นจริงได้เนื่องจากแรงที่ให้กับระบบไม่ได้เริ่มต้นจากศูนย์

2. มุมหรือตำแหน่งของระบบ ระบบที่ใช้การหาค่าพลังงานน้อยที่สุดจะมีการแกว่งของระบบมากกว่าซึ่งหมายถึงการใช้พื้นที่ทำงาน (Work Space) มากกว่าระบบที่ใช้ค่าความนิ่มนวลที่สุด

3. ความเร็วที่เกิดขึ้นของระบบ ระบบที่ใช้การหาค่าพลังงานน้อยที่สุดจะมีการใช้ความเร็วมากกว่า ระบบที่ใช้ความนิ่มนวลที่สุด ซึ่งหมายถึงความราบเรียบของระบบการใช้พลังงานน้อยที่สุดจะมีน้อยกว่า

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการพัฒนาในขั้นต่อไปสามารถอาจเพิ่มความละเอียดของช่วงที่มากขึ้น ออกแบบโปรแกรมให้วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น หรือใช้อนุพันธ์อันดับสูงในการคำนวณ หรือการใช้วิธีต่างๆในการแบ่งช่วงเนื่องจากช่วงเริ่มต้นและช่วงสุดท้ายของระบบต้องการความละเอียดที่มากกว่าช่วงกลางของระบบ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

[1] ทวิวัชร วีระแกล้ว, ปเสฏฐา สารลักษณ์. การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนุ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์. ใน:การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 19, 19-21 ตุลาคม 2548.

[2] I. Michael Ross, Jeremy Rea, Fariba Fahroo. Exploiting Higher-Order Derivatives In: computational Optimal Control. In: Proceedings of the 10th Mediterranean conference on control and Automation. July 9-12, 2002. Lisbon, Portugal.

[3] Hui Yan, Fariba Faroo, I Michael Ross. Optimal Feedback Control Laws by Legendre Pseudospectral Approximations, In:Proceedings of the American Control Conference. June 25-27, 2001.

[4] Fariba Fahroo, I. Michael Ross. Direct Trajectory Optimization by Chebyshev Pseudospectral Method. In: Proceedings of American Control Conference. June 2000. Chicago, Illinois, USA.

[5] Gamal Elnager, Mohammad A. Kazemi, Mohsen Razzaghi. The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 40, No. 10, October 1995.

[6] Andrew O. Hall, Fariba Fahroo, I. Michael Ross. A MATLAB GUI for a Legendre Pseudospectral Algorithm for Optimal Control Problems [Dissertation M.Sc in Applied Mathematics]. Monterey, California, USA: Naval Postgraduate School.; 1999.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
โปรแกรมการคำนวณการหาค่าพลังงานน้อยที่สุด

โปรแกรมการคำนวณการหาค่าพลังงานน้อยที่สุด

โปรแกรม Main

```
clear all
close all
Aeq=[];
A=[];
B=[];
Beq=[];
lb=[];
ub=[];
x0=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
options = optimset('MaxFunEvals',1e16)
options = optimset('MaxIter',1e16)
x = fmincon('funJerk',x0,A,B,Aeq,Beq,lb,ub,'nonlcon',options)
```

โปรแกรม Fun

```
function f=fun(x)
f = (x(77)^2+x(88)^2);
return
```

โปรแกรม Nonlcon

```
function [c,ceq]=nonlcon(x);
ceq=[%function (3.17)%
    %(3.17-0)%
(-27.5000*x(56)-16.6373*x(57)+10.2601*x(58)-17.2107*x(59)-9.6845*x(60)+4.0635*x(61)-
6.4563*x(62)-7.3760*x(63)+2.5650*x(64)-1.8486*x(65)-0.5000*x(66))*(1+cos(x(34)))+(-
27.5000*x(45)-16.6373*x(46)+10.2601*x(47)-17.2107*x(48)-9.6845*x(49)+4.0635*x(50)-
6.4563*x(51)-7.3760*x(52)+2.5650*x(53)-1.8486*x(54)-
0.5000*x(55))*(3+cos(x(34)))+cos(x(23))+9.8*(cos(x(23))+cos(x(34)))-2*(-27.5000*x(34)-
16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-6.4563*x(40)-
7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))*(-27.5000*x(23)-
16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-6.4563*x(29)-
7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-0.5000*x(33))*sin(x(34))-((-27.5000*x(34)-
16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-6.4563*x(40)-
7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))^2)*sin(x(34))+9.8*cos(x(23))-x(1);
%(3.17-1)%
(1.5026*x(56)+0.0000*x(57)+6.1669*x(58)-7.7585*x(59)-3.8806*x(60)+1.5265*x(61)-
2.3284*x(62)-2.5862*x(63)+0.8810*x(64)-0.6250*x(65)-
0.1670*x(66))*(1+cos(x(35)))+(1.5026*x(45)+0.0000*x(46)+6.1669*x(47)-7.7585*x(48)-
3.8806*x(49)+1.5265*x(50)-2.3284*x(51)-2.5862*x(52)+0.8810*x(53)-0.6250*x(54)-
0.1670*x(55))*(3+cos(x(35)))+cos(x(24))+9.8*(cos(x(24))+cos(x(35)))-
2*(1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-
2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-
0.1670*x(44))*(1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-
```

3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-
0.1670*x(33))*sin(x(35))-((1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-
3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-
0.1670*x(44))^2)*sin(x(35))+9.8*cos(x(24))-x(2);
%(3.17-2)%
(-0.6092*x(56)-4.0539*x(57)+0.0000*x(58)+12.5808*x(59)+4.7195*x(60)-
1.6502*x(61)+2.3598*x(62)+2.5162*x(63)-
0.8333*x(64)+0.5791*x(65)+0.1523*x(66))*(1+cos(x(36)))+(-0.6092*x(45)-
4.0539*x(46)+0.0000*x(47)+12.5808*x(48)+4.7195*x(49)-
1.6502*x(50)+2.3598*x(51)+2.5162*x(52)-
0.8333*x(53)+0.5791*x(54)+0.1523*x(55))*(3+cos(x(36)))+cos(x(25))+9.8*(cos(x(25))+cos(
x(36)))-2*(-0.6092*x(34)-4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))*(-
0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-
0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))*sin(x(36))-((-0.6092*x(34)-
4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-
0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))^2)*sin(x(36))+9.8*cos(x(25))-x(3);
%(3.17-3)%
(0.1614*x(56)+0.8056*x(57)-1.9872*x(58)+0.0000*x(59)-3.7514*x(60)+0.9838*x(61)-
1.2505*x(62)-1.2500*x(63)+0.3974*x(64)-0.2685*x(65)-
0.0692*x(66))*(1+cos(x(37)))+(0.1614*x(45)+0.8056*x(46)-1.9872*x(47)+0.0000*x(48)-
3.7514*x(49)+0.9838*x(50)-1.2505*x(51)-1.2500*x(52)+0.3974*x(53)-0.2685*x(54)-
0.0692*x(55))*(3+cos(x(37)))+cos(x(26))+9.8*(cos(x(26))+cos(x(37)))-
2*(0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-
1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-
0.0692*x(44))*(0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-
3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-

```
0.0692*x(33))*sin(x(37))-((0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-
3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-
0.0692*x(44))^2)*sin(x(37))+9.8*cos(x(26))-x(4);
%(3.17-4)%
(0.2151*x(56)+0.7158*x(57)-1.3243*x(58)+6.6643*x(59)+0.0000*x(60)+2.6224*x(61)-
2.5000*x(62)-2.2214*x(63)+0.6621*x(64)-1.8486*x(65)-
0.1076*x(66))*(1+cos(x(38)))+(0.2151*x(45)+0.7158*x(46)-
1.3243*x(47)+6.6643*x(48)+0.0000*x(49)+2.6224*x(50)-2.5000*x(51)-
2.2214*x(52)*0.6621*x(53)-1.8486*x(54)-
0.1076*x(55))*(3+cos(x(38)))+cos(x(27))+9.8*(cos(x(27))+cos(x(38)))-
2*(0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)*0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-
0.1076*x(44))*(0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-
1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-2.5000*x(29)-
2.2214*x(30)*0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-0.1076*x(33))*sin(x(38))-
((0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)*0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-
0.1076*x(44))^2)*sin(x(38))+9.8*cos(x(27))-x(5);
%(3.17-5)%
(-0.2461*x(56)-1.0236*x(57)+1.6833*x(58)-6.3532*x(59)-
9.5332*x(60)+0*x(61)+9.5332*x(62)+6.3532*x(63)-
1.6833*x(64)+1.0236*x(65)+0.2461*x(66))*(1+cos(x(39)))+(-0.2461*x(45)-
1.0236*x(46)+1.6833*x(47)-6.3532*x(48)-
9.5332*x(49)+0*x(50)+9.5332*x(51)+6.3532*x(52)-
1.6833*x(53)+1.0236*x(54)+0.2461*x(55))*(3+cos(x(39)))+cos(x(28))+9.8*(cos(x(28))+cos(
x(39)))-2*(-0.2461*x(34)-1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))*(-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-
6.3532*x(26)-9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
```

```
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))*sin(x(39))-((-0.2461*x(34)-
1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))^2)*sin(x(39))+9.8*cos(x(28))-x(6);
%(3.17-6)%
(0.1076*x(56)+0.4295*x(57)-0.6621*x(58)+2.2214*x(59)+2.5000*x(60)-
2.6224*x(61)+0*x(62)-6.6643*x(63)+1.3243*x(64)-0.7158*x(65)-
0.1613*x(66))*(1+cos(x(40)))+(0.1076*x(45)+0.4295*x(46)-
0.6621*x(47)+2.2214*x(48)+2.5000*x(49)-2.6224*x(50)+0*x(51)-
6.6643*x(52)+1.3243*x(53)-0.7158*x(54)-
0.1613*x(55))*(3+cos(x(40)))+cos(x(29))+9.8*(cos(x(29))+cos(x(40)))-
2*(0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-
0.1613*x(44))*(0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-
2.6224*x(28)+0*x(29)-6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-0.1613*x(33))*sin(x(40))-
((0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-
0.1613*x(44))^2)*sin(x(40))+9.8*cos(x(29))-x(7);
%(3.17-7)%
(0.0692*x(56)+0.2685*x(57)-0.3974*x(58)+1.2500*x(59)+1.2505*x(60)-
0.9838*x(61)+3.7514*x(62)+0*x(63)+1.9872*x(64)-0.8056*x(65)-
0.1614*x(66))*(1+cos(x(41)))+(0.0692*x(45)+0.2685*x(46)-
0.3974*x(47)+1.2500*x(48)+1.2505*x(49)-
0.9838*x(50)+3.7514*x(51)+0*x(52)+1.9872*x(53)-0.8056*x(54)-
0.1614*x(55))*(3+cos(x(41)))+cos(x(30))+9.8*(cos(x(30))+cos(x(41)))-
2*(0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-
0.1614*x(44))*(0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-0.1614*x(33))*sin(x(41))-
```

```
((0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-
0.1614*x(44))^2)*sin(x(41))+9.8*cos(x(30))-x(8);
%(3.17-8)%
(-0.1523*x(56)-0.5791*x(57)+0.8333*x(58)-2.5162*x(59)-2.3598*x(60)+1.6502*x(61)-
4.7195*x(62)-12.5808*x(63)+0*x(64)+4.0539*x(65)+0.6092*x(66))*(1+cos(x(42)))+(-
0.1523*x(45)-0.5791*x(46)+0.8333*x(47)-2.5162*x(48)-2.3598*x(49)+1.6502*x(50)-
4.7195*x(51)-
12.5808*x(52)+0*x(53)+4.0539*x(54)+0.6092*x(55))*(3+cos(x(42)))+cos(x(31))+9.8*(cos(x(
31))+cos(x(42)))-2*(-0.1523*x(34)-0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-
2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-4.7195*x(40)-
12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))*(-0.1523*x(23)-
0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-4.7195*x(29)-
12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))*sin(x(42))-((-0.1523*x(34)-
0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-4.7195*x(40)-
12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))^2)*sin(x(42))+9.8*cos(x(31))-x(9);
%(3.17-9)%
(0.1670*x(56)+0.6250*x(57)-0.8810*x(58)+2.5862*x(59)+2.3284*x(60)-
1.5265*x(61)+3.8806*x(62)+7.7585*x(63)-6.1669*x(64)+0*x(65)-
1.5026*x(66))*(1+cos(x(43)))+(0.1670*x(45)+0.6250*x(46)-
0.8810*x(47)+2.5862*x(48)+2.3284*x(49)-1.5265*x(50)+3.8806*x(51)+7.7585*x(52)-
6.1669*x(53)+0*x(54)-
1.5026*x(55))*(3+cos(x(43)))+cos(x(32))+9.8*(cos(x(32))+cos(x(43)))-
2*(0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-
1.5026*x(44))*(0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-
1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))*sin(x(43))-
((0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
```

```
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-
1.5026*x(44))^2)*sin(x(43))+9.8*cos(x(32))-x(10);
%(3.17-10)%
(0.5000*x(56)+1.8486*x(57)-2.5650*x(58)+7.3760*x(59)+6.4563*x(60)-
4.0635*x(61)+9.6845*x(62)+17.2107*x(63)-
10.2601*x(64)+16.6373*x(65)+27.5000*x(66))*(1+cos(x(44)))+(0.5000*x(45)+1.8486*x(46)-
2.5650*x(47)+7.3760*x(48)+6.4563*x(49)-4.0635*x(50)+9.6845*x(51)+17.2107*x(52)-
10.2601*x(53)+16.6373*x(54)+27.5000*x(55))*(3+cos(x(44)))+cos(x(33))+9.8*(cos(x(32))+c
os(x(44)))-2*(0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-
4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-
10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))*(0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-
2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-
10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))*sin(x(44))-((0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-
2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-
10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))^2)*sin(x(44))+9.8*cos(x(33))-x(11);
```

```
%function 3.18%
%(3.18-0)%
(-27.5000*x(45)-16.6373*x(46)+10.2601*x(47)-17.2107*x(48)-9.6845*x(49)+4.0635*x(50)-
6.4563*x(51)-7.3760*x(52)+2.5650*x(53)-1.8486*x(54)-0.5000*x(55))*(1+cos(x(34)))+(-
27.5000*x(56)-16.6373*x(57)+10.2601*x(58)-17.2107*x(59)-9.6845*x(60)+4.0635*x(61)-
6.4563*x(62)-7.3760*x(63)+2.5650*x(64)-1.8486*x(65)-0.5000*x(66))+((-27.5000*x(23)-
16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-6.4563*x(29)-
7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-
0.5000*x(33))^2)*sin(x(34))+9.8*(cos(x(23))+cos(x(34)))-x(12);
%(3.18-1)%
```

```
(1.5026*x(45)+0.0000*x(46)+6.1669*x(47)-7.7585*x(48)-3.8806*x(49)+1.5265*x(50)-
2.3284*x(51)-2.5862*x(52)+0.8810*x(53)-0.6250*x(54)-
0.1670*x(55))*(1+cos(x(35)))+(1.5026*x(56)+0.0000*x(57)+6.1669*x(58)-7.7585*x(59)-
3.8806*x(60)+1.5265*x(61)-2.3284*x(62)-2.5862*x(63)+0.8810*x(64)-0.6250*x(65)-
0.1670*x(66))+((1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-
3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-
0.1670*x(33))^2)*sin(x(35))+9.8*(cos(x(24))+cos(x(35)))-x(13);
%(3.18-2)%
(-0.6092*x(45)-4.0539*x(46)+0.0000*x(47)+12.5808*x(48)+4.7195*x(49)-
1.6502*x(50)+2.3598*x(51)+2.5162*x(52)-
0.8333*x(53)+0.5791*x(54)+0.1523*x(55))*(1+cos(x(36)))+(-0.6092*x(56)-
4.0539*x(57)+0.0000*x(58)+12.5808*x(59)+4.7195*x(60)-
1.6502*x(61)+2.3598*x(62)+2.5162*x(63)-0.8333*x(64)+0.5791*x(65)+0.1523*x(66))+((-
0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-
0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))^2)*sin(x(36))+9.8*(cos(x(25))+cos(x(36)))-x(14);
%(3.18-3)%
(0.1614*x(45)+0.8056*x(46)-1.9872*x(47)+0.0000*x(48)-3.7514*x(49)+0.9838*x(50)-
1.2505*x(51)-1.2500*x(52)+0.3974*x(53)-0.2685*x(54)-
0.0692*x(55))*(1+cos(x(37)))+(0.1614*x(56)+0.8056*x(57)-1.9872*x(58)+0.0000*x(59)-
3.7514*x(60)+0.9838*x(61)-1.2505*x(62)-1.2500*x(63)+0.3974*x(64)-0.2685*x(65)-
0.0692*x(66))+((0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-
3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-
0.0692*x(33))^2)*sin(x(37))+9.8*(cos(x(26))+cos(x(37)))-x(15);
%(3.18-4)%
(0.2151*x(45)+0.7158*x(46)-1.3243*x(47)+6.6643*x(48)+0.0000*x(49)+2.6224*x(50)-
2.5000*x(51)-2.2214*x(52)*0.6621*x(53)-1.8486*x(54)-
0.1076*x(55))*(1+cos(x(38)))+(0.2151*x(56)+0.7158*x(57)-
1.3243*x(58)+6.6643*x(59)+0.0000*x(60)+2.6224*x(61)-2.5000*x(62)-
```

```
2.2214*x(63)+0.6621*x(64)-1.8486*x(65)-0.1076*x(66))+((0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-
1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-2.5000*x(29)-
2.2214*x(30)+0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-
0.1076*x(33))^2)*sin(x(38))+9.8*(cos(x(27))+cos(x(38)))-x(16);
%(3.18-5)%
(-0.2461*x(45)-1.0236*x(46)+1.6833*x(47)-6.3532*x(48)-
9.5332*x(49)+0*x(50)+9.5332*x(51)+6.3532*x(52)-
1.6833*x(53)+1.0236*x(54)+0.2461*x(55))*(1+cos(x(39)))+(-0.2461*x(56)-
1.0236*x(57)+1.6833*x(58)-6.3532*x(59)-
9.5332*x(60)+0*x(61)+9.5332*x(62)+6.3532*x(63)-
1.6833*x(64)+1.0236*x(65)+0.2461*x(66))+((-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-
6.3532*x(26)-9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))^2)*sin(x(39))+9.8*(cos(x(28))+cos(x(39)))-x(17);
%(3.18-6)%
(0.1076*x(45)+0.4295*x(46)-0.6621*x(47)+2.2214*x(48)+2.5000*x(49)-
2.6224*x(50)+0*x(51)-6.6643*x(52)+1.3243*x(53)-0.7158*x(54)-
0.1613*x(55))*(1+cos(x(40)))+(0.1076*x(56)+0.4295*x(57)-
0.6621*x(58)+2.2214*x(59)+2.5000*x(60)-2.6224*x(61)+0*x(62)-
6.6643*x(63)+1.3243*x(64)-0.7158*x(65)-0.1613*x(66))+((0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-
0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-2.6224*x(28)+0*x(29)-
6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-
0.1613*x(33))^2)*sin(x(40))+9.8*(cos(x(29))+cos(x(40)))-x(18);
%(3.18-7)%
(0.0692*x(45)+0.2685*x(46)-0.3974*x(47)+1.2500*x(48)+1.2505*x(49)-
0.9838*x(50)+3.7514*x(51)+0*x(52)+1.9872*x(53)-0.8056*x(54)-
0.1614*x(55))*(1+cos(x(41)))+(0.0692*x(56)+0.2685*x(57)-
0.3974*x(58)+1.2500*x(59)+1.2505*x(60)-
0.9838*x(61)+3.7514*x(62)+0*x(63)+1.9872*x(64)-0.8056*x(65)-
0.1614*x(66))+((0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
```

```
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-
0.1614*x(33))^2)*sin(x(41))+9.8*(cos(x(30))+cos(x(41)))-x(19);
%(3.18-8)%
(-0.1523*x(45)-0.5791*x(46)+0.8333*x(47)-2.5162*x(48)-2.3598*x(49)+1.6502*x(50)-
4.7195*x(51)-12.5808*x(52)+0*x(53)+4.0539*x(54)+0.6092*x(55))*(1+cos(x(42)))+(-
0.1523*x(56)-0.5791*x(57)+0.8333*x(58)-2.5162*x(59)-2.3598*x(60)+1.6502*x(61)-
4.7195*x(62)-12.5808*x(63)+0*x(64)+4.0539*x(65)+0.6092*x(66))+((-0.1523*x(23)-
0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-4.7195*x(29)-
12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))^2)*sin(x(42))+9.8*(cos(x(31))+cos(x(4
2)))-x(20);
%(3.18-9)%
(0.1670*x(45)+0.6250*x(46)-0.8810*x(47)+2.5862*x(48)+2.3284*x(49)-
1.5265*x(50)+3.8806*x(51)+7.7585*x(52)-6.1669*x(53)+0*x(54)-
1.5026*x(55))*(1+cos(x(43)))+(0.1670*x(56)+0.6250*x(57)-
0.8810*x(58)+2.5862*x(59)+2.3284*x(60)-1.5265*x(61)+3.8806*x(62)+7.7585*x(63)-
6.1669*x(64)+0*x(65)-1.5026*x(66))+((0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-
0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-
6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))^2)*sin(x(43))+9.8*(cos(x(32))+cos(x(43)))-x(21);
%(3.18-9)%
(0.5000*x(45)+1.8486*x(46)-2.5650*x(47)+7.3760*x(48)+6.4563*x(49)-
4.0635*x(50)+9.6845*x(51)+17.2107*x(52)-
10.2601*x(53)+16.6373*x(54)+27.5000*x(55))*(1+cos(x(44)))+(0.5000*x(56)+1.8486*x(57)-
2.5650*x(58)+7.3760*x(59)+6.4563*x(60)-4.0635*x(61)+9.6845*x(62)+17.2107*x(63)-
10.2601*x(64)+16.6373*x(65)+27.5000*x(66))+((0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-
2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-
10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))^2)*sin(x(44))+9.8*(cos(x(33))+cos(x(44)))-
x(22);
```

```
%state space; D1*q1=q1dot%
(-27.5000*x(23)-16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-
6.4563*x(29)-7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-0.5000*x(33))-x(45);
(1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-
2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-0.1670*x(33))-x(46);
(-0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))-x(47);
(0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-
1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-0.0692*x(33))-x(48);
(0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-
2.5000*x(29)-2.2214*x(30)+0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-0.1076*x(33))-x(49);
(-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-6.3532*x(26)-
9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))-x(50);
(0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-
2.6224*x(28)+0*x(29)-6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-0.1613*x(33))-x(51);
(0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-0.1614*x(33))-x(52);
(-0.1523*x(23)-0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-
4.7195*x(29)-12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))-x(53);
(0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-
1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))-x(54);
(0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-
4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))-
x(55);


%state space; D1*q2=q2dot%
```

```
(-27.5000*x(34)-16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-
6.4563*x(40)-7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))-x(56);
(1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-
2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-0.1670*x(44))-x(57);
(-0.6092*x(34)-4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))-x(58);
(0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-
1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-0.0692*x(44))-x(59);
(0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)+0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-0.1076*x(44))-x(60);
(-0.2461*x(34)-1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))-x(61);
(0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-0.1613*x(44))-x(62);
(0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-0.1614*x(44))-x(63);
(-0.1523*x(34)-0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-
4.7195*x(40)-12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))-x(64);
(0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-1.5026*x(44))-x(65);
(0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-
4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))-
x(66);

%state space; D1*u1=u1dot%
(-27.5000*x(1)-16.6373*x(2)+10.2601*x(3)-17.2107*x(4)-9.6845*x(5)+4.0635*x(6)-
6.4563*x(7)-7.3760*x(8)+2.5650*x(9)-1.8486*x(10)-0.5000*x(11))-x(67);
```

(1.5026*x(1)+0.0000*x(2)+6.1669*x(3)-7.7585*x(4)-3.8806*x(5)+1.5265*x(6)-2.3284*x(7)-
2.5862*x(8)+0.8810*x(9)-0.6250*x(10)-0.1670*x(11))-x(68);
(-0.6092*x(1)-4.0539*x(2)+0.0000*x(3)+12.5808*x(4)+4.7195*x(5)-
1.6502*x(6)+2.3598*x(7)+2.5162*x(8)-0.8333*x(9)+0.5791*x(10)+0.1523*x(11))-x(69);
(0.1614*x(1)+0.8056*x(2)-1.9872*x(3)+0.0000*x(4)-3.7514*x(5)+0.9838*x(6)-1.2505*x(7)-
1.2500*x(8)+0.3974*x(9)-0.2685*x(10)-0.0692*x(11))-x(70);
(0.2151*x(1)+0.7158*x(2)-1.3243*x(3)+6.6643*x(4)+0.0000*x(5)+2.6224*x(6)-2.5000*x(7)-
2.2214*x(8)+0.6621*x(9)-1.8486*x(10)-0.1076*x(11))-x(71);
(-0.2461*x(1)-1.0236*x(2)+1.6833*x(3)-6.3532*x(4)-
9.5332*x(5)+0*x(6)+9.5332*x(7)+6.3532*x(8)-1.6833*x(9)+1.0236*x(10)+0.2461*x(11))-
x(72);
(0.1076*x(1)+0.4295*x(2)-0.6621*x(3)+2.2214*x(4)+2.5000*x(5)-2.6224*x(6)+0*x(7)-
6.6643*x(8)+1.3243*x(9)-0.7158*x(10)-0.1613*x(11))-x(73);
(0.0692*x(1)+0.2685*x(2)-0.3974*x(3)+1.2500*x(4)+1.2505*x(5)-
0.9838*x(6)+3.7514*x(7)+0*x(8)+1.9872*x(9)-0.8056*x(10)-0.1614*x(11))-x(74);
(-0.1523*x(1)-0.5791*x(2)+0.8333*x(3)-2.5162*x(4)-2.3598*x(5)+1.6502*x(6)-4.7195*x(7)-
12.5808*x(8)+0*x(9)+4.0539*x(10)+0.6092*x(11))-x(75);
(0.1670*x(1)+0.6250*x(2)-0.8810*x(3)+2.5862*x(4)+2.3284*x(5)-
1.5265*x(6)+3.8806*x(7)+7.7585*x(8)-6.1669*x(9)+0*x(10)-1.5026*x(11))-x(76);
(0.5000*x(1)+1.8486*x(2)-2.5650*x(3)+7.3760*x(4)+6.4563*x(5)-
4.0635*x(6)+9.6845*x(7)+17.2107*x(8)-10.2601*x(9)+16.6373*x(10)+27.5000*x(11))-x(77);

%state space; D1*u2=u2dot%
(-27.5000*x(12)-16.6373*x(13)+10.2601*x(14)-17.2107*x(15)-9.6845*x(16)+4.0635*x(17)-
6.4563*x(18)-7.3760*x(19)+2.5650*x(20)-1.8486*x(21)-0.5000*x(21))-x(78);
(1.5026*x(12)+0.0000*x(13)+6.1669*x(14)-7.7585*x(15)-3.8806*x(16)+1.5265*x(17)-
2.3284*x(18)-2.5862*x(19)+0.8810*x(20)-0.6250*x(21)-0.1670*x(21))-x(79);
(-0.6092*x(12)-4.0539*x(13)+0.0000*x(14)+12.5808*x(15)+4.7195*x(16)-
1.6502*x(17)+2.3598*x(18)+2.5162*x(19)-0.8333*x(20)+0.5791*x(21)+0.1523*x(21))-x(80);

```
(0.1614*x(12)+0.8056*x(13)-1.9872*x(14)+0.0000*x(15)-3.7514*x(16)+0.9838*x(17)-
1.2505*x(18)-1.2500*x(19)+0.3974*x(20)-0.2685*x(21)-0.0692*x(21))-x(81);
(0.2151*x(12)+0.7158*x(13)-1.3243*x(14)+6.6643*x(15)+0.0000*x(16)+2.6224*x(17)-
2.5000*x(18)-2.2214*x(19)+0.6621*x(20)-1.8486*x(21)-0.1076*x(21))-x(82);
(-0.2461*x(12)-1.0236*x(13)+1.6833*x(14)-6.3532*x(15)-
9.5332*x(16)+0*x(17)+9.5332*x(18)+6.3532*x(19)-
1.6833*x(20)+1.0236*x(21)+0.2461*x(21))-x(83);
(0.1076*x(12)+0.4295*x(13)-0.6621*x(14)+2.2214*x(15)+2.5000*x(16)-
2.6224*x(17)+0*x(18)-6.6643*x(19)+1.3243*x(20)-0.7158*x(21)-0.1613*x(21))-x(84);
(0.0692*x(12)+0.2685*x(13)-0.3974*x(14)+1.2500*x(15)+1.2505*x(16)-
0.9838*x(17)+3.7514*x(18)+0*x(19)+1.9872*x(20)-0.8056*x(21)-0.1614*x(21))-x(85);
(-0.1523*x(12)-0.5791*x(13)+0.8333*x(14)-2.5162*x(15)-2.3598*x(16)+1.6502*x(17)-
4.7195*x(18)-12.5808*x(19)+0*x(20)+4.0539*x(21)+0.6092*x(21))-x(86);
(0.1670*x(12)+0.6250*x(13)-0.8810*x(14)+2.5862*x(15)+2.3284*x(16)-
1.5265*x(17)+3.8806*x(18)+7.7585*x(19)-6.1669*x(20)+0*x(21)-1.5026*x(21))-x(87);
(0.5000*x(12)+1.8486*x(13)-2.5650*x(14)+7.3760*x(15)+6.4563*x(16)-
4.0635*x(17)+9.6845*x(18)+17.2107*x(19)-10.2601*x(20)+16.6373*x(21)+27.5000*x(21))-
x(88);


x(23);
x(34);
%x(33)-pi/4;
x(33)+x(44)-pi/3;
x(45);
x(55);
x(56);
x(66);
]
  c=[-500-x(1);
```

```
x(1)-500;
-500-x(2);
x(2)-500;
-500-x(3);
x(3)-500;
-500-x(4);
x(4)-500;
-500-x(5);
x(5)-500;
-500-x(6);
x(6)-500;
-500-x(7);
x(7)-500;
-500-x(8);
x(8)-500;
-500-x(9);
x(9)-500;
-500-x(10);
x(10)-500;
-500-x(11);
x(11)-500;
-500-x(12);
x(12)-500;
-500-x(13);
x(13)-500;
-500-x(14);
x(14)-500;
-500-x(15);
x(15)-500;
```

```
-500-x(16);
x(16)-500;
-500-x(17);
x(17)-500;
-500-x(18);
x(18)-500;
-500-x(19);
x(19)-500;
-500-x(20);
x(20)-500;
-500-x(21);
x(21)-500;
-500-x(22);
x(22)-500;
]

return
```

ภาคผนวก ข
โปรแกรมการคำนวณการหาค่าความนิ่มนวลที่สุด

โปรแกรมการคำนวณการหาค่าความนิ่มนวลที่สุด

โปรแกรม Main

```
clear all
close all
Aeq=[];
A=[];
B=[];
Beq=[];
lb=[];
ub=[];
x0=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;
    1;1;1;1;1;1;1;1;1;1]
options = optimset('MaxFunEvals',1e16)
options = optimset('MaxIter',1e16)
x = fmincon('funJerk',x0,A,B,Aeq,Beq,lb,ub,'nonlcon',options)
```

โปรแกรม Fun

```
function f=funJerk(x)
f = (x(77)^2+x(88)^2);
return
```

โปรแกรม NonIcon

```
function [c,ceq]=nonIcon(x);
ceq=[%function (3.17)%
    %(3.17-0)%
(-27.5000*x(56)-16.6373*x(57)+10.2601*x(58)-17.2107*x(59)-9.6845*x(60)+4.0635*x(61)-
6.4563*x(62)-7.3760*x(63)+2.5650*x(64)-1.8486*x(65)-0.5000*x(66))*(1+cos(x(34)))+(-
27.5000*x(45)-16.6373*x(46)+10.2601*x(47)-17.2107*x(48)-9.6845*x(49)+4.0635*x(50)-
6.4563*x(51)-7.3760*x(52)+2.5650*x(53)-1.8486*x(54)-
0.5000*x(55))*(3+cos(x(34)))+cos(x(23))+9.8*(cos(x(23))+cos(x(34)))-2*(-27.5000*x(34)-
16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-6.4563*x(40)-
7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))*(-27.5000*x(23)-
16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-6.4563*x(29)-
7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-0.5000*x(33))*sin(x(34))-((-27.5000*x(34)-
16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-6.4563*x(40)-
7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))^2)*sin(x(34))+9.8*cos(x(23))-x(1);
%(3.17-1)%
(1.5026*x(56)+0.0000*x(57)+6.1669*x(58)-7.7585*x(59)-3.8806*x(60)+1.5265*x(61)-
2.3284*x(62)-2.5862*x(63)+0.8810*x(64)-0.6250*x(65)-
0.1670*x(66))*(1+cos(x(35)))+(1.5026*x(45)+0.0000*x(46)+6.1669*x(47)-7.7585*x(48)-
3.8806*x(49)+1.5265*x(50)-2.3284*x(51)-2.5862*x(52)+0.8810*x(53)-0.6250*x(54)-
0.1670*x(55))*(3+cos(x(35)))+cos(x(24))+9.8*(cos(x(24))+cos(x(35)))-
2*(1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-
2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-
0.1670*x(44))*(1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-
```

3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-
0.1670*x(33))*sin(x(35))-((1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-
3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-
0.1670*x(44))^2)*sin(x(35))+9.8*cos(x(24))-x(2);
%(3.17-2)%
(-0.6092*x(56)-4.0539*x(57)+0.0000*x(58)+12.5808*x(59)+4.7195*x(60)-
1.6502*x(61)+2.3598*x(62)+2.5162*x(63)-
0.8333*x(64)+0.5791*x(65)+0.1523*x(66))*(1+cos(x(36)))+(-0.6092*x(45)-
4.0539*x(46)+0.0000*x(47)+12.5808*x(48)+4.7195*x(49)-
1.6502*x(50)+2.3598*x(51)+2.5162*x(52)-
0.8333*x(53)+0.5791*x(54)+0.1523*x(55))*(3+cos(x(36)))+cos(x(25))+9.8*(cos(x(25))+cos(
x(36)))-2*(-0.6092*x(34)-4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))*(-
0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-
0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))*sin(x(36))-((-0.6092*x(34)-
4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-
0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))^2)*sin(x(36))+9.8*cos(x(25))-x(3);
%(3.17-3)%
(0.1614*x(56)+0.8056*x(57)-1.9872*x(58)+0.0000*x(59)-3.7514*x(60)+0.9838*x(61)-
1.2505*x(62)-1.2500*x(63)+0.3974*x(64)-0.2685*x(65)-
0.0692*x(66))*(1+cos(x(37)))+(0.1614*x(45)+0.8056*x(46)-1.9872*x(47)+0.0000*x(48)-
3.7514*x(49)+0.9838*x(50)-1.2505*x(51)-1.2500*x(52)+0.3974*x(53)-0.2685*x(54)-
0.0692*x(55))*(3+cos(x(37)))+cos(x(26))+9.8*(cos(x(26))+cos(x(37)))-
2*(0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-
1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-
0.0692*x(44))*(0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-
3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-

```
0.0692*x(33))*sin(x(37))-((0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-
3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-
0.0692*x(44))^2)*sin(x(37))+9.8*cos(x(26))-x(4);
%(3.17-4)%
(0.2151*x(56)+0.7158*x(57)-1.3243*x(58)+6.6643*x(59)+0.0000*x(60)+2.6224*x(61)-
2.5000*x(62)-2.2214*x(63)+0.6621*x(64)-1.8486*x(65)-
0.1076*x(66))*(1+cos(x(38)))+(0.2151*x(45)+0.7158*x(46)-
1.3243*x(47)+6.6643*x(48)+0.0000*x(49)+2.6224*x(50)-2.5000*x(51)-
2.2214*x(52)*0.6621*x(53)-1.8486*x(54)-
0.1076*x(55))*(3+cos(x(38)))+cos(x(27))+9.8*(cos(x(27))+cos(x(38)))-
2*(0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)*0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-
0.1076*x(44))*(0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-
1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-2.5000*x(29)-
2.2214*x(30)*0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-0.1076*x(33))*sin(x(38))-
((0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)*0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-
0.1076*x(44))^2)*sin(x(38))+9.8*cos(x(27))-x(5);
%(3.17-5)%
(-0.2461*x(56)-1.0236*x(57)+1.6833*x(58)-6.3532*x(59)-
9.5332*x(60)+0*x(61)+9.5332*x(62)+6.3532*x(63)-
1.6833*x(64)+1.0236*x(65)+0.2461*x(66))*(1+cos(x(39)))+(-0.2461*x(45)-
1.0236*x(46)+1.6833*x(47)-6.3532*x(48)-
9.5332*x(49)+0*x(50)+9.5332*x(51)+6.3532*x(52)-
1.6833*x(53)+1.0236*x(54)+0.2461*x(55))*(3+cos(x(39)))+cos(x(28))+9.8*(cos(x(28))+cos(
x(39)))-2*(-0.2461*x(34)-1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))*(-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-
6.3532*x(26)-9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
```

```
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))*sin(x(39))-((-0.2461*x(34)-
1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))^2)*sin(x(39))+9.8*cos(x(28))-x(6);
%(3.17-6)%
(0.1076*x(56)+0.4295*x(57)-0.6621*x(58)+2.2214*x(59)+2.5000*x(60)-
2.6224*x(61)+0*x(62)-6.6643*x(63)+1.3243*x(64)-0.7158*x(65)-
0.1613*x(66))*(1+cos(x(40)))+(0.1076*x(45)+0.4295*x(46)-
0.6621*x(47)+2.2214*x(48)+2.5000*x(49)-2.6224*x(50)+0*x(51)-
6.6643*x(52)+1.3243*x(53)-0.7158*x(54)-
0.1613*x(55))*(3+cos(x(40)))+cos(x(29))+9.8*(cos(x(29))+cos(x(40)))-
2*(0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-
0.1613*x(44))*(0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-
2.6224*x(28)+0*x(29)-6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-0.1613*x(33))*sin(x(40))-
((0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-
0.1613*x(44))^2)*sin(x(40))+9.8*cos(x(29))-x(7);
%(3.17-7)%
(0.0692*x(56)+0.2685*x(57)-0.3974*x(58)+1.2500*x(59)+1.2505*x(60)-
0.9838*x(61)+3.7514*x(62)+0*x(63)+1.9872*x(64)-0.8056*x(65)-
0.1614*x(66))*(1+cos(x(41)))+(0.0692*x(45)+0.2685*x(46)-
0.3974*x(47)+1.2500*x(48)+1.2505*x(49)-
0.9838*x(50)+3.7514*x(51)+0*x(52)+1.9872*x(53)-0.8056*x(54)-
0.1614*x(55))*(3+cos(x(41)))+cos(x(30))+9.8*(cos(x(30))+cos(x(41)))-
2*(0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-
0.1614*x(44))*(0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-0.1614*x(33))*sin(x(41))-
```

```
((0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-
0.1614*x(44))^2)*sin(x(41))+9.8*cos(x(30))-x(8);
%(3.17-8)%
(-0.1523*x(56)-0.5791*x(57)+0.8333*x(58)-2.5162*x(59)-2.3598*x(60)+1.6502*x(61)-
4.7195*x(62)-12.5808*x(63)+0*x(64)+4.0539*x(65)+0.6092*x(66))*(1+cos(x(42)))+(-
0.1523*x(45)-0.5791*x(46)+0.8333*x(47)-2.5162*x(48)-2.3598*x(49)+1.6502*x(50)-
4.7195*x(51)-
12.5808*x(52)+0*x(53)+4.0539*x(54)+0.6092*x(55))*(3+cos(x(42)))+cos(x(31))+9.8*(cos(x(
31))+cos(x(42)))-2*(-0.1523*x(34)-0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-
2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-4.7195*x(40)-
12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))*(-0.1523*x(23)-
0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-4.7195*x(29)-
12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))*sin(x(42))-((-0.1523*x(34)-
0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-4.7195*x(40)-
12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))^2)*sin(x(42))+9.8*cos(x(31))-x(9);
%(3.17-9)%
(0.1670*x(56)+0.6250*x(57)-0.8810*x(58)+2.5862*x(59)+2.3284*x(60)-
1.5265*x(61)+3.8806*x(62)+7.7585*x(63)-6.1669*x(64)+0*x(65)-
1.5026*x(66))*(1+cos(x(43)))+(0.1670*x(45)+0.6250*x(46)-
0.8810*x(47)+2.5862*x(48)+2.3284*x(49)-1.5265*x(50)+3.8806*x(51)+7.7585*x(52)-
6.1669*x(53)+0*x(54)-
1.5026*x(55))*(3+cos(x(43)))+cos(x(32))+9.8*(cos(x(32))+cos(x(43)))-
2*(0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-
1.5026*x(44))*(0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-
1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))*sin(x(43))-
((0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
```

```
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-
1.5026*x(44))^2)*sin(x(43))+9.8*cos(x(32))-x(10);
%(3.17-10)%
(0.5000*x(56)+1.8486*x(57)-2.5650*x(58)+7.3760*x(59)+6.4563*x(60)-
4.0635*x(61)+9.6845*x(62)+17.2107*x(63)-
10.2601*x(64)+16.6373*x(65)+27.5000*x(66))*(1+cos(x(44)))+(0.5000*x(45)+1.8486*x(46)-
2.5650*x(47)+7.3760*x(48)+6.4563*x(49)-4.0635*x(50)+9.6845*x(51)+17.2107*x(52)-
10.2601*x(53)+16.6373*x(54)+27.5000*x(55))*(3+cos(x(44)))+cos(x(33))+9.8*(cos(x(32))+c
os(x(44)))-2*(0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-
4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-
10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))*(0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-
2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-
10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))*sin(x(44))-((0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-
2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-
10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))^2)*sin(x(44))+9.8*cos(x(33))-x(11);
```

```
%function 3.18%
%(3.18-0)%
(-27.5000*x(45)-16.6373*x(46)+10.2601*x(47)-17.2107*x(48)-9.6845*x(49)+4.0635*x(50)-
6.4563*x(51)-7.3760*x(52)+2.5650*x(53)-1.8486*x(54)-0.5000*x(55))*(1+cos(x(34)))+(-
27.5000*x(56)-16.6373*x(57)+10.2601*x(58)-17.2107*x(59)-9.6845*x(60)+4.0635*x(61)-
6.4563*x(62)-7.3760*x(63)+2.5650*x(64)-1.8486*x(65)-0.5000*x(66))+((-27.5000*x(23)-
16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-6.4563*x(29)-
7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-
0.5000*x(33))^2)*sin(x(34))+9.8*(cos(x(23))+cos(x(34)))-x(12);
%(3.18-1)%
```

(1.5026*x(45)+0.0000*x(46)+6.1669*x(47)-7.7585*x(48)-3.8806*x(49)+1.5265*x(50)-
2.3284*x(51)-2.5862*x(52)+0.8810*x(53)-0.6250*x(54)-
0.1670*x(55))*(1+cos(x(35)))+(1.5026*x(56)+0.0000*x(57)+6.1669*x(58)-7.7585*x(59)-
3.8806*x(60)+1.5265*x(61)-2.3284*x(62)-2.5862*x(63)+0.8810*x(64)-0.6250*x(65)-
0.1670*x(66))+((1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-
3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-
0.1670*x(33))^2)*sin(x(35))+9.8*(cos(x(24))+cos(x(35)))-x(13);
%(3.18-2)%
(-0.6092*x(45)-4.0539*x(46)+0.0000*x(47)+12.5808*x(48)+4.7195*x(49)-
1.6502*x(50)+2.3598*x(51)+2.5162*x(52)-
0.8333*x(53)+0.5791*x(54)+0.1523*x(55))*(1+cos(x(36)))+(-0.6092*x(56)-
4.0539*x(57)+0.0000*x(58)+12.5808*x(59)+4.7195*x(60)-
1.6502*x(61)+2.3598*x(62)+2.5162*x(63)-0.8333*x(64)+0.5791*x(65)+0.1523*x(66))+((-
0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-
0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))^2)*sin(x(36))+9.8*(cos(x(25))+cos(x(36)))-x(14);
%(3.18-3)%
(0.1614*x(45)+0.8056*x(46)-1.9872*x(47)+0.0000*x(48)-3.7514*x(49)+0.9838*x(50)-
1.2505*x(51)-1.2500*x(52)+0.3974*x(53)-0.2685*x(54)-
0.0692*x(55))*(1+cos(x(37)))+(0.1614*x(56)+0.8056*x(57)-1.9872*x(58)+0.0000*x(59)-
3.7514*x(60)+0.9838*x(61)-1.2505*x(62)-1.2500*x(63)+0.3974*x(64)-0.2685*x(65)-
0.0692*x(66))+((0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-
3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-
0.0692*x(33))^2)*sin(x(37))+9.8*(cos(x(26))+cos(x(37)))-x(15);
%(3.18-4)%
(0.2151*x(45)+0.7158*x(46)-1.3243*x(47)+6.6643*x(48)+0.0000*x(49)+2.6224*x(50)-
2.5000*x(51)-2.2214*x(52)*0.6621*x(53)-1.8486*x(54)-
0.1076*x(55))*(1+cos(x(38)))+(0.2151*x(56)+0.7158*x(57)-
1.3243*x(58)+6.6643*x(59)+0.0000*x(60)+2.6224*x(61)-2.5000*x(62)-

```
2.2214*x(63)+0.6621*x(64)-1.8486*x(65)-0.1076*x(66))+((0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-
1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-2.5000*x(29)-
2.2214*x(30)+0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-
0.1076*x(33))^2)*sin(x(38))+9.8*(cos(x(27))+cos(x(38)))-x(16);
%(3.18-5)%
(-0.2461*x(45)-1.0236*x(46)+1.6833*x(47)-6.3532*x(48)-
9.5332*x(49)+0*x(50)+9.5332*x(51)+6.3532*x(52)-
1.6833*x(53)+1.0236*x(54)+0.2461*x(55))*(1+cos(x(39)))+(-0.2461*x(56)-
1.0236*x(57)+1.6833*x(58)-6.3532*x(59)-
9.5332*x(60)+0*x(61)+9.5332*x(62)+6.3532*x(63)-
1.6833*x(64)+1.0236*x(65)+0.2461*x(66))+((-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-
6.3532*x(26)-9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))^2)*sin(x(39))+9.8*(cos(x(28))+cos(x(39)))-x(17);
%(3.18-6)%
(0.1076*x(45)+0.4295*x(46)-0.6621*x(47)+2.2214*x(48)+2.5000*x(49)-
2.6224*x(50)+0*x(51)-6.6643*x(52)+1.3243*x(53)-0.7158*x(54)-
0.1613*x(55))*(1+cos(x(40)))+(0.1076*x(56)+0.4295*x(57)-
0.6621*x(58)+2.2214*x(59)+2.5000*x(60)-2.6224*x(61)+0*x(62)-
6.6643*x(63)+1.3243*x(64)-0.7158*x(65)-0.1613*x(66))+((0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-
0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-2.6224*x(28)+0*x(29)-
6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-
0.1613*x(33))^2)*sin(x(40))+9.8*(cos(x(29))+cos(x(40)))-x(18);
%(3.18-7)%
(0.0692*x(45)+0.2685*x(46)-0.3974*x(47)+1.2500*x(48)+1.2505*x(49)-
0.9838*x(50)+3.7514*x(51)+0*x(52)+1.9872*x(53)-0.8056*x(54)-
0.1614*x(55))*(1+cos(x(41)))+(0.0692*x(56)+0.2685*x(57)-
0.3974*x(58)+1.2500*x(59)+1.2505*x(60)-
0.9838*x(61)+3.7514*x(62)+0*x(63)+1.9872*x(64)-0.8056*x(65)-
0.1614*x(66))+((0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
```

```
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-
0.1614*x(33))^2)*sin(x(41))+9.8*(cos(x(30))+cos(x(41)))-x(19);
%(3.18-8)%
(-0.1523*x(45)-0.5791*x(46)+0.8333*x(47)-2.5162*x(48)-2.3598*x(49)+1.6502*x(50)-
4.7195*x(51)-12.5808*x(52)+0*x(53)+4.0539*x(54)+0.6092*x(55))*(1+cos(x(42)))+(-
0.1523*x(56)-0.5791*x(57)+0.8333*x(58)-2.5162*x(59)-2.3598*x(60)+1.6502*x(61)-
4.7195*x(62)-12.5808*x(63)+0*x(64)+4.0539*x(65)+0.6092*x(66))+((-0.1523*x(23)-
0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-4.7195*x(29)-
12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))^2)*sin(x(42))+9.8*(cos(x(31))+cos(x(4
2)))-x(20);
%(3.18-9)%
(0.1670*x(45)+0.6250*x(46)-0.8810*x(47)+2.5862*x(48)+2.3284*x(49)-
1.5265*x(50)+3.8806*x(51)+7.7585*x(52)-6.1669*x(53)+0*x(54)-
1.5026*x(55))*(1+cos(x(43)))+(0.1670*x(56)+0.6250*x(57)-
0.8810*x(58)+2.5862*x(59)+2.3284*x(60)-1.5265*x(61)+3.8806*x(62)+7.7585*x(63)-
6.1669*x(64)+0*x(65)-1.5026*x(66))+((0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-
0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-
6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))^2)*sin(x(43))+9.8*(cos(x(32))+cos(x(43)))-x(21);
%(3.18-9)%
(0.5000*x(45)+1.8486*x(46)-2.5650*x(47)+7.3760*x(48)+6.4563*x(49)-
4.0635*x(50)+9.6845*x(51)+17.2107*x(52)-
10.2601*x(53)+16.6373*x(54)+27.5000*x(55))*(1+cos(x(44)))+(0.5000*x(56)+1.8486*x(57)-
2.5650*x(58)+7.3760*x(59)+6.4563*x(60)-4.0635*x(61)+9.6845*x(62)+17.2107*x(63)-
10.2601*x(64)+16.6373*x(65)+27.5000*x(66))+((0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-
2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-
10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))^2)*sin(x(44))+9.8*(cos(x(33))+cos(x(44)))-
x(22);
```

```
%state space; D1*q1=q1dot%
(-27.5000*x(23)-16.6373*x(24)+10.2601*x(25)-17.2107*x(26)-9.6845*x(27)+4.0635*x(28)-
6.4563*x(29)-7.3760*x(30)+2.5650*x(31)-1.8486*x(32)-0.5000*x(33))-x(45);
(1.5026*x(23)+0.0000*x(24)+6.1669*x(25)-7.7585*x(26)-3.8806*x(27)+1.5265*x(28)-
2.3284*x(29)-2.5862*x(30)+0.8810*x(31)-0.6250*x(32)-0.1670*x(33))-x(46);
(-0.6092*x(23)-4.0539*x(24)+0.0000*x(25)+12.5808*x(26)+4.7195*x(27)-
1.6502*x(28)+2.3598*x(29)+2.5162*x(30)-0.8333*x(31)+0.5791*x(32)+0.1523*x(33))-x(47);
(0.1614*x(23)+0.8056*x(24)-1.9872*x(25)+0.0000*x(26)-3.7514*x(27)+0.9838*x(28)-
1.2505*x(29)-1.2500*x(30)+0.3974*x(31)-0.2685*x(32)-0.0692*x(33))-x(48);
(0.2151*x(23)+0.7158*x(24)-1.3243*x(25)+6.6643*x(26)+0.0000*x(27)+2.6224*x(28)-
2.5000*x(29)-2.2214*x(30)+0.6621*x(31)-1.8486*x(32)-0.1076*x(33))-x(49);
(-0.2461*x(23)-1.0236*x(24)+1.6833*x(25)-6.3532*x(26)-
9.5332*x(27)+0*x(28)+9.5332*x(29)+6.3532*x(30)-
1.6833*x(31)+1.0236*x(32)+0.2461*x(33))-x(50);
(0.1076*x(23)+0.4295*x(24)-0.6621*x(25)+2.2214*x(26)+2.5000*x(27)-
2.6224*x(28)+0*x(29)-6.6643*x(30)+1.3243*x(31)-0.7158*x(32)-0.1613*x(33))-x(51);
(0.0692*x(23)+0.2685*x(24)-0.3974*x(25)+1.2500*x(26)+1.2505*x(27)-
0.9838*x(28)+3.7514*x(29)+0*x(30)+1.9872*x(31)-0.8056*x(32)-0.1614*x(33))-x(52);
(-0.1523*x(23)-0.5791*x(24)+0.8333*x(25)-2.5162*x(26)-2.3598*x(27)+1.6502*x(28)-
4.7195*x(29)-12.5808*x(30)+0*x(31)+4.0539*x(32)+0.6092*x(33))-x(53);
(0.1670*x(23)+0.6250*x(24)-0.8810*x(25)+2.5862*x(26)+2.3284*x(27)-
1.5265*x(28)+3.8806*x(29)+7.7585*x(30)-6.1669*x(31)+0*x(32)-1.5026*x(33))-x(54);
(0.5000*x(23)+1.8486*x(24)-2.5650*x(25)+7.3760*x(26)+6.4563*x(27)-
4.0635*x(28)+9.6845*x(29)+17.2107*x(30)-10.2601*x(31)+16.6373*x(32)+27.5000*x(33))-
x(55);


%state space; D1*q2=q2dot%
```

(-27.5000*x(34)-16.6373*x(35)+10.2601*x(36)-17.2107*x(37)-9.6845*x(38)+4.0635*x(39)-
6.4563*x(40)-7.3760*x(41)+2.5650*x(42)-1.8486*x(43)-0.5000*x(44))-x(56);
(1.5026*x(34)+0.0000*x(35)+6.1669*x(36)-7.7585*x(37)-3.8806*x(38)+1.5265*x(39)-
2.3284*x(40)-2.5862*x(41)+0.8810*x(42)-0.6250*x(43)-0.1670*x(44))-x(57);
(-0.6092*x(34)-4.0539*x(35)+0.0000*x(36)+12.5808*x(37)+4.7195*x(38)-
1.6502*x(39)+2.3598*x(40)+2.5162*x(41)-0.8333*x(42)+0.5791*x(43)+0.1523*x(44))-x(58);
(0.1614*x(34)+0.8056*x(35)-1.9872*x(36)+0.0000*x(37)-3.7514*x(38)+0.9838*x(39)-
1.2505*x(40)-1.2500*x(41)+0.3974*x(42)-0.2685*x(43)-0.0692*x(44))-x(59);
(0.2151*x(34)+0.7158*x(35)-1.3243*x(36)+6.6643*x(37)+0.0000*x(38)+2.6224*x(39)-
2.5000*x(40)-2.2214*x(41)+0.6621*x(42)-1.8486*x(43)-0.1076*x(44))-x(60);
(-0.2461*x(34)-1.0236*x(35)+1.6833*x(36)-6.3532*x(37)-
9.5332*x(38)+0*x(39)+9.5332*x(40)+6.3532*x(41)-
1.6833*x(42)+1.0236*x(43)+0.2461*x(44))-x(61);
(0.1076*x(34)+0.4295*x(35)-0.6621*x(36)+2.2214*x(37)+2.5000*x(38)-
2.6224*x(39)+0*x(40)-6.6643*x(41)+1.3243*x(42)-0.7158*x(43)-0.1613*x(44))-x(62);
(0.0692*x(34)+0.2685*x(35)-0.3974*x(36)+1.2500*x(37)+1.2505*x(38)-
0.9838*x(39)+3.7514*x(40)+0*x(41)+1.9872*x(42)-0.8056*x(43)-0.1614*x(44))-x(63);
(-0.1523*x(34)-0.5791*x(35)+0.8333*x(36)-2.5162*x(37)-2.3598*x(38)+1.6502*x(39)-
4.7195*x(40)-12.5808*x(41)+0*x(42)+4.0539*x(43)+0.6092*x(44))-x(64);
(0.1670*x(34)+0.6250*x(35)-0.8810*x(36)+2.5862*x(37)+2.3284*x(38)-
1.5265*x(39)+3.8806*x(40)+7.7585*x(41)-6.1669*x(42)+0*x(43)-1.5026*x(44))-x(65);
(0.5000*x(34)+1.8486*x(35)-2.5650*x(36)+7.3760*x(37)+6.4563*x(38)-
4.0635*x(39)+9.6845*x(40)+17.2107*x(41)-10.2601*x(42)+16.6373*x(43)+27.5000*x(44))-
x(66);

%state space; D1*u1=u1dot%
(-27.5000*x(1)-16.6373*x(2)+10.2601*x(3)-17.2107*x(4)-9.6845*x(5)+4.0635*x(6)-
6.4563*x(7)-7.3760*x(8)+2.5650*x(9)-1.8486*x(10)-0.5000*x(11))-x(67);

```
(1.5026*x(1)+0.0000*x(2)+6.1669*x(3)-7.7585*x(4)-3.8806*x(5)+1.5265*x(6)-2.3284*x(7)-
2.5862*x(8)+0.8810*x(9)-0.6250*x(10)-0.1670*x(11))-x(68);
(-0.6092*x(1)-4.0539*x(2)+0.0000*x(3)+12.5808*x(4)+4.7195*x(5)-
1.6502*x(6)+2.3598*x(7)+2.5162*x(8)-0.8333*x(9)+0.5791*x(10)+0.1523*x(11))-x(69);
(0.1614*x(1)+0.8056*x(2)-1.9872*x(3)+0.0000*x(4)-3.7514*x(5)+0.9838*x(6)-1.2505*x(7)-
1.2500*x(8)+0.3974*x(9)-0.2685*x(10)-0.0692*x(11))-x(70);
(0.2151*x(1)+0.7158*x(2)-1.3243*x(3)+6.6643*x(4)+0.0000*x(5)+2.6224*x(6)-2.5000*x(7)-
2.2214*x(8)+0.6621*x(9)-1.8486*x(10)-0.1076*x(11))-x(71);
(-0.2461*x(1)-1.0236*x(2)+1.6833*x(3)-6.3532*x(4)-
9.5332*x(5)+0*x(6)+9.5332*x(7)+6.3532*x(8)-1.6833*x(9)+1.0236*x(10)+0.2461*x(11))-
x(72);
(0.1076*x(1)+0.4295*x(2)-0.6621*x(3)+2.2214*x(4)+2.5000*x(5)-2.6224*x(6)+0*x(7)-
6.6643*x(8)+1.3243*x(9)-0.7158*x(10)-0.1613*x(11))-x(73);
(0.0692*x(1)+0.2685*x(2)-0.3974*x(3)+1.2500*x(4)+1.2505*x(5)-
0.9838*x(6)+3.7514*x(7)+0*x(8)+1.9872*x(9)-0.8056*x(10)-0.1614*x(11))-x(74);
(-0.1523*x(1)-0.5791*x(2)+0.8333*x(3)-2.5162*x(4)-2.3598*x(5)+1.6502*x(6)-4.7195*x(7)-
12.5808*x(8)+0*x(9)+4.0539*x(10)+0.6092*x(11))-x(75);
(0.1670*x(1)+0.6250*x(2)-0.8810*x(3)+2.5862*x(4)+2.3284*x(5)-
1.5265*x(6)+3.8806*x(7)+7.7585*x(8)-6.1669*x(9)+0*x(10)-1.5026*x(11))-x(76);
(0.5000*x(1)+1.8486*x(2)-2.5650*x(3)+7.3760*x(4)+6.4563*x(5)-
4.0635*x(6)+9.6845*x(7)+17.2107*x(8)-10.2601*x(9)+16.6373*x(10)+27.5000*x(11))-x(77);

%state space; D1*u2=u2dot%
(-27.5000*x(12)-16.6373*x(13)+10.2601*x(14)-17.2107*x(15)-9.6845*x(16)+4.0635*x(17)-
6.4563*x(18)-7.3760*x(19)+2.5650*x(20)-1.8486*x(21)-0.5000*x(21))-x(78);
(1.5026*x(12)+0.0000*x(13)+6.1669*x(14)-7.7585*x(15)-3.8806*x(16)+1.5265*x(17)-
2.3284*x(18)-2.5862*x(19)+0.8810*x(20)-0.6250*x(21)-0.1670*x(21))-x(79);
(-0.6092*x(12)-4.0539*x(13)+0.0000*x(14)+12.5808*x(15)+4.7195*x(16)-
1.6502*x(17)+2.3598*x(18)+2.5162*x(19)-0.8333*x(20)+0.5791*x(21)+0.1523*x(21))-x(80);
```

```
(0.1614*x(12)+0.8056*x(13)-1.9872*x(14)+0.0000*x(15)-3.7514*x(16)+0.9838*x(17)-
1.2505*x(18)-1.2500*x(19)+0.3974*x(20)-0.2685*x(21)-0.0692*x(21))-x(81);
(0.2151*x(12)+0.7158*x(13)-1.3243*x(14)+6.6643*x(15)+0.0000*x(16)+2.6224*x(17)-
2.5000*x(18)-2.2214*x(19)+0.6621*x(20)-1.8486*x(21)-0.1076*x(21))-x(82);
(-0.2461*x(12)-1.0236*x(13)+1.6833*x(14)-6.3532*x(15)-
9.5332*x(16)+0*x(17)+9.5332*x(18)+6.3532*x(19)-
1.6833*x(20)+1.0236*x(21)+0.2461*x(21))-x(83);
(0.1076*x(12)+0.4295*x(13)-0.6621*x(14)+2.2214*x(15)+2.5000*x(16)-
2.6224*x(17)+0*x(18)-6.6643*x(19)+1.3243*x(20)-0.7158*x(21)-0.1613*x(21))-x(84);
(0.0692*x(12)+0.2685*x(13)-0.3974*x(14)+1.2500*x(15)+1.2505*x(16)-
0.9838*x(17)+3.7514*x(18)+0*x(19)+1.9872*x(20)-0.8056*x(21)-0.1614*x(21))-x(85);
(-0.1523*x(12)-0.5791*x(13)+0.8333*x(14)-2.5162*x(15)-2.3598*x(16)+1.6502*x(17)-
4.7195*x(18)-12.5808*x(19)+0*x(20)+4.0539*x(21)+0.6092*x(21))-x(86);
(0.1670*x(12)+0.6250*x(13)-0.8810*x(14)+2.5862*x(15)+2.3284*x(16)-
1.5265*x(17)+3.8806*x(18)+7.7585*x(19)-6.1669*x(20)+0*x(21)-1.5026*x(21))-x(87);
(0.5000*x(12)+1.8486*x(13)-2.5650*x(14)+7.3760*x(15)+6.4563*x(16)-
4.0635*x(17)+9.6845*x(18)+17.2107*x(19)-10.2601*x(20)+16.6373*x(21)+27.5000*x(21))-
x(88);


x(23);
x(34);
%x(33)-pi/4;
x(33)+x(44)-pi/3;
x(45);
x(55);
x(56);
x(66);
]
  c=[-500-x(1);
```

```
x(1)-500;
-500-x(2);
x(2)-500;
-500-x(3);
x(3)-500;
-500-x(4);
x(4)-500;
-500-x(5);
x(5)-500;
-500-x(6);
x(6)-500;
-500-x(7);
x(7)-500;
-500-x(8);
x(8)-500;
-500-x(9);
x(9)-500;
-500-x(10);
x(10)-500;
-500-x(11);
x(11)-500;
-500-x(12);
x(12)-500;
-500-x(13);
x(13)-500;
-500-x(14);
x(14)-500;
-500-x(15);
x(15)-500;
```

```
  -500-x(16);
  x(16)-500;
  -500-x(17);
  x(17)-500;
  -500-x(18);
  x(18)-500;
  -500-x(19);
  x(19)-500;
  -500-x(20);
  x(20)-500;
  -500-x(21);
  x(21)-500;
  -500-x(22);
  x(22)-500;
  ]

return
```

อภิธานศัพท์

อภิธานศัพท์

Boundary condition

เงื่อนไขขอบเขต

Calculus of variation

แคลคูลัสความแปรปรวน

Collocation method

วิธีคอลโลเคชั่น

Control variable

ตัวแปรควบคุม

Differentiation Matrix

ดิฟเฟอเรนทิเอชั่นแมททริก

Direct method

วิธีทางตรง

Discrete method

วิธีดิสครีต

Indirect method

วิธีทางอ้อม

Jerk

ความนิ่มนวล

MATLAB

โปรแกรมแมทแลป

Nonlinear Programming

โปรแกรมไม่เป็นเชิงเส้น

Nonlinear dynamics system

ระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Legendre-Gauss-Lobatto ;LGL

วิธีลีเจนด์-เกาส์-โลแบตโต

Legendre Pseudospectral

วิธีลีเจนด์ซูโครสเปคตรัล

Optimization

ค่าความนิ่มนวลที่สุด

Pontryagin principle

หลักการของพอนทริยากิน

state variable

ตัวแปรสถานะ

D

คือดิฟเฟอเรนทิเอชั่นแมททริก

F

คือสเกลลาร์ฟังก์ชัน

J

คือคอสฟังก์ชันนอล

x

คือตัวแปรสถานะ

u

คือตัวแปรควบคุม

ϕ

คือส่วนพื้นฐานในคอสฟังก์ชันนอล

δ

คือส่วนต่างของสมการ

τ

คือเวลา

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายอุกฤษณ์ อันทพิษ
วันเดือนปีเกิด	22 พฤษภาคม 2521
สถานที่เกิด	จ. ปราจีนบุรี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	127 ม. 1 ต. โคกปีบ อ. ศรีมโหสถ จ.ปราจีนบุรี 25190
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	หัวหน้าวิศวกรฝ่ายวิศวกรรมการผลิต
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	บริษัท ไทยออโต้คอนเวอร์ชั่น จำกัด (โตโยต้ากรุ๊ป)
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2533	ประถมศึกษา จากโรงเรียนเทวรักษ์ จ.ปราจีนบุรี
พ.ศ. 2539	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนปราจิณราษฎรอำรุง จ.ปราจีนบุรี
พ.ศ. 2544	ปริญญาตรี วิศวกรรมศาตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2551	บัณฑิตศึกษา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ