

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยโปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปริญญาณิพนธ์  
ของ  
บุญพล จันทร์ฝอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
ธันวาคม 2551

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปริญญาณิพนธ์  
ของ  
บุญยพล จันทร์ฝอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
ธันวาคม 2551  
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยโปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทคัดย่อ  
ของ  
บุญยพล จันทร์ฝอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2551

บุญพล จันทร์ฝอย. (2551). *ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.  
คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์ธัญชัย ภูอุดม, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินวรรณ เพ็ญเพียร.

ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นั้น จากการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องและจากการสัมภาษณ์ พบว่านักเรียนมีปัญหาในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การระบุเครื่องหมายในจุดภาคต่างๆ และการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติมากที่สุด เป็นเพราะนักเรียนไม่สามารถมองเห็นรูปธรรมของเนื้อหาได้ และนักเรียนไม่สามารถที่จะสร้าง สำนวน ซ้ำๆ กันได้หลายครั้ง ดังนั้นผู้วิจัยจึงมองหาวิธีที่จะมาช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น ซึ่งโปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรมที่มีความสามารถในทางเรขาคณิตและพีชคณิต ซึ่งเหมาะสมที่จะนำมาสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เพื่อให้นักเรียนสามารถสร้าง สำนวน ตั้งข้อคาดการณ์ และสามารถทำการศึกษาลึกซึ้งๆ ได้ อีกทั้งโปรแกรม C.a.R. ยังมีจุดเด่นในการสร้างงานแบบ HTML การสร้างงานในลักษณะของแบบทดสอบ และการสร้างการเคลื่อนไหวได้ ดังนั้น การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ (1) เพื่อสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (2) เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. (3) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากที่ได้ทำชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียนจำนวน 53 คน จากประชากรทั้งหมด 126 คน 3 ห้องเรียน โดยสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยจัดห้องเรียนแบบคละความสามารถของนักเรียนที่มีระดับเก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน ซึ่งผู้วิจัยทำการทดลองนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยได้ทำการทดลองทั้งหมด 20 คาบ ซึ่งทั้ง 20 คาบ ผู้วิจัยทำการสอนในห้องคอมพิวเตอร์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ในการสอน ซึ่งเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย (1) ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ประกอบด้วย คู่มือการใช้ชุดกิจกรรม ใบกิจกรรมแบบรายบุคคล และแผนการจัดการเรียนรู้ (2) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และ (3) แบบทดสอบวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อชุดกิจกรรม เมื่อสิ้นสุดการสอนให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผล

สัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และตอบแบบวัดความพึงพอใจ  
ของนักเรียนในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ในการผ่านเกณฑ์นั้นนักเรียน  
ต้องได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนจากคะแนนเต็ม 100 คะแนน มาจากใบกิจกรรม 20 และการทดสอบ  
วัดผลสัมฤทธิ์ 80 คะแนน

ผลการวิจัยพบว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียน  
ทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. อยู่ในระดับมาก ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มี  
ความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

INSTRUCTIONAL ACTIVITY PACKAGE ON TRIGONOMETRIC FUNCTION  
BY USING C.a.R. SOFTWARE FOR MATHAYOMSUKSA IV STUDENTS

AN ABSTRACT  
BY  
POONYAPON CHANFOY

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the  
Master of Education Degree in Mathematics  
at Srinakharinwirot University  
December 2008

Poonyapon Chanfoy. (2008). *Instructional Activity Package on Trigonometric Functions by Using C.a.R. Software for Mathayomsuksa IV Students*. Master thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Mr. Thanuchai Poodom, Assist. Prof. Chutiwon Penpean.

From various studies and students' interviews about learning and teaching trigonometric functions, three points of students' difficulties were found. They are 1). determining values of trigonometric functions when a real number is given 2). assigning the positive or negative values of trigonometric functions in each quadrant and 3). draw the graphs, determine their periods and amplitudes of trigonometric functions. The researcher found that computer software C.a.R. could help students to overcome those difficulties. When C.a.R. was used, students could construct, investigate and make conjectures as many times as they wanted. Moreover C.a.R. can be linked with HTML for learning convenience. The purposes of this study were (1) to design instructional activity package on trigonometric functions by using C.a.R. software, (2) to determine the effectiveness of such activity package in terms of students' achievement, and (3) to evaluate students' attitude toward instructional activity package.

The study took place at Bansomdej Chaopraya Rajabhat University Demonstration Secondary School in Bangkok during the first semester of the 2008 academic year with 53 students participated as subjects. The experimental group was selected by the use of the cluster sampling. The researcher taught them a total of 20 periods in a computer laboratory. Each topic gave the students opportunity to use C.a.R. software. At the end of the instruction, an achievement test was given to measure their performance on trigonometric functions. To pass the instructional package, students' must obtain at least 60% of the total scores, the score form lesson activities and achievement test. The researcher hypothesized that more than 70% of the experimental group can pass the instructional package. To find out their preference toward the instructional, a questionnaire was also given to each student in the experimental group.

The results showed that more than 70% of the experimental group pass the instruction at .01 level of significant. This clearly indicated that Matthayomsuksa IV students profit from the instructional package designed by the researcher. The scores on questionnaire showed an average satisfaction of the experimental group toward the instruction.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยโปรแกรม C.a.R.

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ของ

ปริญญพล จันทร์ฝอย

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

..... ประธาน

(อาจารย์ธนุชัย ภูอุดม)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุติวรรณ เพ็ญเพียร)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

(อาจารย์ ดร. สายัณห์ ไชยระไร)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ อุษาวดี จันทร์สนธิ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ธนุชัย ภูอุดม)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุติวรรณ เพ็ญเพียร)

## ประกาศคุณูปการ

ปริญญาานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดี เป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความเมตตากรุณาและความช่วยเหลืออย่างหาที่สุดมิได้จากอาจารย์ธัญชัย ภูอุดม ประธานกรรมการควบคุม และผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินวรรณ เพ็ญเพียร กรรมการควบคุม โดยท่านได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ในการทำงานวิจัยนี้ทุกขั้นตอน ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกดีใจและซาบซึ้งเป็นอย่างมาก จึงกราบขอขอบคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอขอบคุณ อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสด และอาจารย์ธัญชัย ภูอุดม ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา ความถูกต้องของภาษา และแก้ไขชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้แก่ ใบกิจกรรม แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ แบบทดสอบวัดความพึงพอใจ และแผนการจัดการเรียนรู้ อีกทั้งให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอขอบคุณอาจารย์ ดร. สายัณห์ ไสยะโร ที่กรุณาเป็นประธานกรรมการสอบปากเปล่า และอาจารย์ธัญชัย ภูอุดม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินวรรณ เพ็ญเพียรและรองศาสตราจารย์อุษาวดี จันทรสนธิ ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอขอบคุณ ผู้อำนวยการ คณะครูหมวดคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ โรงเรียนวิสุทธิกษัตริ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์สุมลย์ ออมสิน ที่อำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนาร่อง และขอกราบขอขอบคุณผู้อำนวยการ คณะครูหมวดคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ โรงเรียนไตรมิตรวิทยาลัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์พิสุทธิศิลป์ ไพธิอะ ที่ช่วยเป็นธุระในการติดต่อขอทดลองงานวิจัยกลุ่มนาร่องและอำนวยความสะดวกในการเก็บข้อมูลเป็นอย่างยิ่ง และขอกราบขอขอบคุณอาจารย์ธัญญา คนอยู่ และอาจารย์สุวิทย์ เจริญผล ครูหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพฯ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์ทวีศักดิ์ จงประดับเกียรติ ผู้อำนวยการ อาจารย์วรวิมล วรรณิมาพันธ์ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยาและโรงเรียนไตรมิตรวิทยาลัย และขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนวิสุทธิกษัตริ์ ที่ให้ความร่วมมือในการวิจัยครั้งนี้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณนางวรรณิภา จันทรฝอย มารดาของข้าพเจ้าและนางสาวชนกนาถ  
จันทรฝอย น้องสาวของข้าพเจ้า ที่ให้ความช่วยเหลือกำลังทรัพย์และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ ที่ได้กรุณาให้ยืมหนังสือดีๆ เพื่อการ  
ค้นคว้าสำหรับใช้ในงานวิจัยและขอบคุณ พี่ เพื่อน และน้องนิสิตปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ทุกคนที่  
ให้คำแนะนำและเป็นกำลังใจด้วยดี ตลอดระยะเวลาทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผศ. ดร. สุพจน์ ไชยสังข์ ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาในการทำงานในการ  
ตรวจและปรับปรุง แก้ไข บทคัดย่อที่เป็นภาษาอังกฤษ พร้อมทั้งให้คำแนะนำที่ดี ส่งผลให้วิทยานิพนธ์  
ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

บุญยพล จันทรฝอย

## สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ .....	1
ภูมิหลัง .....	1
โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างชุดกิจกรรม .....	5
ความมุ่งหมายของการวิจัย .....	6
ความสำคัญของการวิจัย .....	6
ขอบเขตของการวิจัย .....	7
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย .....	7
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย .....	7
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย .....	7
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย .....	7
ตัวแปรที่ศึกษา .....	7
นิยามศัพท์เฉพาะ .....	8
สมมติฐานในการวิจัย .....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	10
หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 .....	10
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนการสอน .....	13
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนการสอน .....	13
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนการสอน .....	33
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ .....	35
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ .....	35
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ .....	39
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต .....	44
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการใช้คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน .....	44
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต .....	45
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต .....	47

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
<b>3</b> วิธีดำเนินการวิจัย .....	52
การกำหนดประชากรและการสุ่มกลุ่มตัวอย่าง .....	52
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย .....	52
การเก็บรวบรวมข้อมูล .....	63
การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล .....	64
<b>4</b> ผลการวิเคราะห์ข้อมูล .....	66
<b>5</b> สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ .....	74
ความมุ่งหมายของการวิจัย .....	74
สมมติฐานในการวิจัย .....	74
วิธีดำเนินการวิจัย .....	74
สรุปผลการวิจัย .....	77
อภิปรายผล .....	77
ข้อเสนอแนะ .....	79
<b>บรรณานุกรม</b> .....	81
<b>ภาคผนวก</b> .....	91
ภาคผนวก ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ .....	92
ภาคผนวก ข การวิเคราะห์ข้อมูล .....	94

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก (ต่อ) .....	
ภาคผนวก ค คู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน .....	108
ภาคผนวก ง แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.	131
ภาคผนวก จ ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 .....	237
ภาคผนวก ฉ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	359
ภาคผนวก ช เฉลยชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	370
ภาคผนวก ซ แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	425
ประวัติย่อผู้วิจัย .....	429

## บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ผลการสอบวัดคุณภาพการศึกษาระดับชาติ ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (GAT) .....	3
2 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบอัตนัย เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	61
3 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคลของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 .....	67
4 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 .....	68
5 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในกรณีเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	68
6 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม .....	69
7 การทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด .....	70
8 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	71
9 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบปรนัย 4 ตัวเลือก) .....	95
10 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบอัตนัย) .....	98
11 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจการจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มนำร่อง .....	99

## บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
12 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่ม นำร่องที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. และค่าความเชื่อมั่น ของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่อง .....	100
13 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจาก ใบกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	102
14 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง .....	102
15 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการศึกษา เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. คะแนนเต็ม 100 คะแนน .....	102
16 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากใบ กิจกรรมแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 53 คน .....	103
17 คะแนนแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	104
18 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่ม ตัวอย่างที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ....	106

# บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แผนผังขั้นตอนการสร้างและออกแบบชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน .....	25
2 แสดงการเขียนนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ โดยวิธีเซอร์คูลาฟังก์ชัน .....	37
3 แสดงการอธิบายนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยวิธีการ The Wrapping Function ..	38
4 หน้าหลักชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน .....	56
5 บางส่วนของสารบัญหลัก .....	57
6 บางส่วนของสารบัญย่อย .....	57
7 ตัวอย่างกิจกรรมหน่วยการเรียนรู้วัดมูมเรเดียน .....	58

# บทที่ 1

## บทนำ

### ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบระเบียบมีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์วางแผนตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม (กรมวิชาการ. 2545ก) อีกทั้งคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องทั้งในอดีตและปัจจุบัน คณิตศาสตร์จึงเป็นประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต และช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น เช่น การบอกเวลาจากเข็มนาฬิกา สิ่งเหล่านี้เป็นผลมาจากคณิตศาสตร์ทั้งนั้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกันกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กรมวิชาการ. 2545ข: 1) ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ควรจัดให้นักเรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผล เข้าใจหลักการพื้นฐานของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์และก้าวตามทันยุคสมัยใหม่ที่มีการเปลี่ยนแปลงและแข่งขันกันทางด้านความรู้และเทคโนโลยี และเพื่อให้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 มาตรา 22 ระบุว่าจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่านักเรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาด้วยตนเองได้ และถือว่านักเรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้นักเรียนสามารถพัฒนาตนเองได้ตามธรรมชาติและเต็มศักยภาพ และในมาตรา 24 ได้ระบุถึงการจัดการกระบวนการเรียนรู้ไว้ส่วนหนึ่งว่าให้ฝึกทักษะ กระบวนการคิด การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไข

ปัญหา อีกทั้งระบุให้จัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการลงมือปฏิบัติจริงฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง และจากการวิจัยเพื่อการพัฒนาหลักสูตรของกรมวิชาการ (2545จ: 1) ได้พบข้อจำกัดของการใช้หลักสูตรประถมศึกษา พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ประการหนึ่งคือ การนำหลักสูตรไปใช้ยังไม่สามารถสร้างพื้นฐานในการคิด สร้างวิธีการเรียนรู้ให้คนไทยมีทักษะในการจัดการและทักษะในการดำเนินชีวิต สามารถเผชิญปัญหาสังคมและเศรษฐกิจที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วได้อย่างมีประสิทธิภาพซึ่งเป็นสาเหตุประการหนึ่งที่ทำให้ประเทศไทยได้มีการปรับปรุงหลักสูตรการเรียนการสอน โดยกระทรวงศึกษาธิการได้ให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีดำเนินการจัดทำหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขึ้นมา ซึ่งการศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 มีสาระการเรียนรู้ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์และความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สำหรับสาระที่ 4 พีชคณิต และสาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่างๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากการศึกษามาตรฐาน ค 4.1 และมาตรฐาน ค 6.1 ต้องการให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ดังนี้ ตามลำดับ

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้และความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ได้

- ใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

ถึงแม้ว่าในปัจจุบันการเรียนการสอนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้มีการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรอย่างมาก จากการติดตามผลและการดำเนินการวิจัยเพื่อพัฒนาหลักสูตรของกระทรวงศึกษาธิการโดยกรมวิชาการ พบว่า การจัดหลักสูตรและการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ยังไม่สามารถผลักดันให้ประเทศไทยเป็นผู้นำด้านวิทยาศาสตร์

คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในภูมิภาคอาเซียน ซึ่งจำเป็นต้องปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนให้คนไทยมีทักษะกระบวนการและเจตคติที่ดีทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี พร้อมทั้งมีความคิดสร้างสรรค์ (กรมวิชาการ. 2545จ: 1) และจากผลการประเมินคุณภาพการศึกษา ระดับชาติ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย วันที่ 12-13 พฤศจิกายน ปีการศึกษา 2546 ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (GAT) ระดับชาติ จะแสดงตามตารางต่อไปนี้

ตาราง 1 ผลการสอบวัดคุณภาพการศึกษาระดับชาติ ด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (GAT)

วิชา	จำนวนนักเรียน	คะแนนเต็ม	คะแนนเฉลี่ย	คะแนนเฉลี่ยร้อยละ	ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน	ร้อยละของจำนวนนักเรียนแยกตามเกณฑ์		
						ปรับปรุง	พอใช้	ดี
ภาษาไทย	345,463	50	22.25	44.49	6.72	26.12	61.05	12.84
ภาษาอังกฤษ	345,425	50	19.57	39.14	9.25	27.36	62.79	9.85
สังคมศึกษา	345,241	40	16.74	41.85	6.08	37.92	50.77	11.31
วิทยาศาสตร์ฯ	155,350	50	24.41	48.82	7.32	18.07	57.36	24.57
เคมี	189,626	40	15.46	38.65	6.87	49.02	40.22	10.76
ชีววิทยา	188,986	40	14.70	36.76	5.59	48.45	43.27	8.28
ฟิสิกส์	189,568	40	13.03	32.59	6.38	51.27	40.53	8.20
คณิตศาสตร์	244,720	40	13.60	33.99	6.81	57.49	35.32	7.18

ที่มา: สำนักงานทดสอบทางการศึกษา. (2546). *ผลการสอบวัดคุณภาพการศึกษา*. (ออนไลน์)

จากตาราง 1 จะพบว่าวิชาคณิตศาสตร์ มีอัตราส่วนที่ควรปรับปรุงสูงกว่าวิชาอื่นๆ ซึ่งกรมวิชาการ (2545จ: 4) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้ต่างๆ ครูต้องคำนึงถึงพัฒนาการทางด้านร่างกาย สติปัญญา วิธีการเรียนรู้ และความสนใจของนักเรียน ซึ่งปัจจัยเหล่านี้ส่งผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ครูควรมีวิธีการสอนที่หลากหลายเพราะหากนักเรียนได้เรียนรู้แต่เนื้อหาวิชาแต่เมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ ที่เป็นปัญหาในชีวิตประจำวันหรือสถานการณ์ใหม่ๆ กลับไม่สามารถแก้ไขปัญหานั้นได้เนื่องจากขาดทักษะกระบวนการและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา ดังนั้นถ้าครูสามารถจัดชุดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนเรียนรู้จากประสบการณ์จริงจากการฝึกปฏิบัติ ฝึกให้นักเรียนคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหา ซึ่งครูจะต้องเน้นบทบาทของตนเองอย่างเหมาะสมและเพิ่มบทบาทของนักเรียนให้มากขึ้น โดยให้นักเรียนเป็นผู้กระทำ เป็นผู้แก้ปัญหา เป็นผู้ค้นคว้าแลกเปลี่ยนความรู้และประสบการณ์ซึ่งกันและกันช่วยเหลือกันซึ่งทำให้นักเรียนรู้สึกสนุกสนานในการเรียนรู้ก็จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนใฝ่เรียนใฝ่รู้

มากขึ้น และเมื่อได้เผชิญกับสถานการณ์จริงก็จะทำให้นักเรียนรู้จักใช้ทักษะในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้

สำหรับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องและการสอบถามสภาพปัญหาจริง เกี่ยวกับการเรียนการสอน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ พบว่าปัญหาที่เกิดขึ้นกับนักเรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีดังนี้

กิตติยรัตน์ ฐิพัฒน์ (2545: 60-70) ได้พบว่านักเรียนมีปัญหาเกี่ยวกับการเรียนการสอน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

1. นักเรียนไม่เข้าใจค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. บกพร่องเรื่องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ไม่เข้าใจในการกำหนดเครื่องหมายในจุดภาค
4. ไม่เข้าใจการระบุค่าพิกัดของจุด
5. นักเรียนแยกแยะกราฟของแต่ละฟังก์ชันไม่ได้

ศิริลักษณ์ กุโบล่า (2547: 4) การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีปัญหาดังนี้

1. ขาดสื่อการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพ
2. เนื้อหาส่วนมากเป็นนามธรรม

สมศักดิ์ อ้วนสาเล (2540: 92-103) ได้พบว่านักเรียนมีปัญหาดังนี้

1. การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
2. การหาดำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย
3. สับสนเรื่องเครื่องหมายของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในช่วงต่างๆ
4. การใช้สูตรต่างๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ
5. ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับคาบของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ครูพิสมร สุทธิกัลด์ (2551: สัมภาษณ์) ตำแหน่ง ครู คศ.3 โรงเรียนศึกษานารี ผู้มีประสบการณ์

การดำเนินการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มานานกว่า 25 ปี ได้พบปัญหาดังนี้

1. เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นเรื่องที่นักเรียนมีปัญหามากที่สุด ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งได้แก่เนื้อหาดังนี้

- 1.1 การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
- 1.2 สับสนเรื่องเครื่องหมายของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในช่วงต่างๆ
- 1.3 ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

#### 1.4 ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับคาบของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. ขาดสื่อการเรียนการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนทำการสำรวจ สังเกต ตั้งข้อ  
คำถาม และสรุปความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากปัญหาต่างๆ ข้างต้นจะเห็นว่าในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ คือนักเรียนไม่เข้าใจเรื่องค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
มากที่สุด และไม่เข้าใจการระบุเครื่องหมายในจุดภาคต่างๆ และไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยว  
กับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ปัญหาเหล่านี้นักเรียนควรได้รับการแก้ไขจากครู ซึ่งผู้วิจัย  
ได้พยายามหาวิธีทางในการปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องของ  
นักเรียนที่เป็นปัญหาในการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ด้วยความก้าวหน้าของเทคโนโลยีทางคอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทในด้านการเรียน  
การสอนคณิตศาสตร์ มีซอฟต์แวร์ทางคอมพิวเตอร์มากมายที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนวิชา  
คณิตศาสตร์ ทั้งทางด้านเรขาคณิต พีชคณิต จำนวนและการดำเนินการ โดยเฉพาะในส่วนของ  
เรขาคณิต ซึ่งซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่ดีจะช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิต และวัดขนาด  
ความยาวส่วนของเส้นตรง ความยาวส่วนโค้ง และมุมได้อย่างรวดเร็วถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้นักเรียน  
สร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วสามารถพลิก หมุน หรือเลื่อนรูปในมุมมองต่างๆ ทำ  
กิจกรรมการสำรวจด้วยการพลิก เลื่อน หมุน ย่อ ขยาย เพื่อเรียนรู้โมเดลต่างๆ ทางเรขาคณิตได้  
รวดเร็ว และสามารถทดลองสร้างรูปเรขาคณิต หรือกราฟ ในลักษณะต่างๆ ได้หลายๆ ครั้ง ซึ่ง  
นำไปสู่การค้นหาค่าสมบัติต่างๆ ทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถสำรวจตั้งข้อคำถาม และสืบเสาะ  
ตรวจสอบค้นรูปต่างๆ ในหลายลักษณะเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเองส่งเสริมให้นักเรียนเกิดจินตนาการ  
ในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าว จะทำให้นักเรียน  
มองเห็นสิ่งต่างๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น (วรรณวิภา สุทธิเกียรติ. 2542: 3-4)

นอกเหนือจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาในบทที่ 2 ผู้วิจัยยังได้ทำการ  
ศึกษาโปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตแบบพลวัต ได้แก่ GSP, Geogebra และ C.a.R. ซึ่งโปรแกรม  
ทั้งสามนี้มีความสามารถในการใช้งานที่คล้ายคลึงกัน คือเป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างภาพ  
เคลื่อนไหว ย่อ ขยายภาพได้ตามที่ต้องการ ซึ่งเหมาะที่จะนำมาใช้เป็นประโยชน์ในการเรียนการ  
สอน ปรับปรุง และพัฒนารูปแบบการสอนให้ดีขึ้น

### โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

ในการวิจัยครั้งนี้โปรแกรมที่ผู้วิจัยนำมาใช้สำหรับสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน คือ  
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ชื่อ C.a.R. ย่อมาจาก Compass and Ruler, Construct and Rule ซึ่งเป็นโปรแกรมซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อในการเรียนการสอนวิชา

คณิตศาสตร์ โดย Prof Dr. René Grothmann ในเวอร์ชัน 8.0 ซึ่งเป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต รูปกราฟต่างๆ สามารถเลื่อน หมุน ย่อ ขยาย และเคลื่อนไหวได้ ทำให้นักเรียนสามารถสืบเสาะ ค้นหา และคาดเดา และสรุปหาเหตุผลด้วยตนเองได้ แต่ยังคงรักษาสมบัติและความสัมพันธ์ของรูปนั้นไว้เสมอ เช่น เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไม่ว่าจะเคลื่อนย้ายจุด ย่อ ขยาย หรือหมุนรูปในลักษณะใดก็ตาม โปรแกรม C.a.R. ก็ยังคงรักษาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ สาเหตุที่ผู้วิจัยเลือกโปรแกรม C.a.R. มาใช้ในงานวิจัยเพราะเป็นโปรแกรมที่มีความสามารถในการใช้งานทางเรขาคณิตและพีชคณิต และจุดเด่นของโปรแกรม C.a.R. คือ 1. สามารถแปลงเป็นแฟ้มงาน HTML ได้ 2. สามารถสร้างงานในลักษณะของแบบทดสอบได้ 3. สามารถทำการเคลื่อนไหวในลักษณะ Animation ได้ อีกทั้งยังเป็นโปรแกรมที่ได้รับอนุญาตให้ทำการเผยแพร่โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์ ด้วยความสำคัญและเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรม C.a.R. เข้ามาใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนสำรวจ ตั้งข้อคาดการณ์ และสืบเสาะหาเหตุผลด้วยตนเอง เพื่อเป็นอีกแนวทางหนึ่งในการจัดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### **ความมุ่งหมายของการวิจัย**

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากที่ได้ทำชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

### **ความสำคัญของการวิจัย**

1. ได้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ได้แนวทางในการจัดชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งนักเรียนเป็นผู้ลงมือปฏิบัติเอง โดยอาศัยการสำรวจ ตั้งข้อความคาดการณ์ การสร้าง และหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ตั้งไว้
3. ทราบความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

4. ผลที่ได้จากการศึกษาวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางในการสร้างหรือพัฒนาบทเรียนโดยใช้โปรแกรมซอฟต์แวร์ทางคอมพิวเตอร์ ในคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ และสาขาวิชาอื่นๆ ต่อไป

## ขอบเขตของการวิจัย

### 1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

1.1 ประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร

1.2 กลุ่มตัวอย่าง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จำนวน 1 ห้อง 53 คน จากทั้งหมด 3 ห้องจำนวน 126 คน โดยสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยจัดห้องเรียนแบบความสามารถของนักเรียนที่มีระดับเก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

### 2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาการทำวิจัยครั้งนี้เป็นชุดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ อิงตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ประกอบด้วยหน่วยย่อย 7 หน่วย ใช้เวลา 18 คาบ คาบละ 50 นาทีและทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 2 คาบ ดังนี้

2.1 หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ
2.2 หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง	เวลา 2 คาบ
2.3 หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	เวลา 1 คาบ
2.4 หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	เวลา 4 คาบ
2.5 หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	เวลา 2 คาบ
2.6 หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	เวลา 3 คาบ
2.7 หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 4 คาบ
2.8 ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ

### 3. ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ คือ ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง

2. ตัวแปรตาม ได้แก่

2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

2.2 ความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการเรียนหลังเรียนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

### 4. นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยใช้โปรแกรม C.a.R.** หมายถึง ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งจัดลำดับเนื้อหาของบทเรียนเป็นหน่วยย่อย ๆ เรียกว่า กรอบ (frame) ซึ่งแต่ละกรอบมีการอธิบายเนื้อหาและมีกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจากโปรแกรม C.a.R. ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ทำให้นักเรียนได้ทำการสำรวจ วิเคราะห์ สังเกต ตั้งข้อคาดการณ์ ตรวจสอบคำตอบ และสรุปความรู้ได้ด้วยตนเองภายใต้คำสอนของครู ชุดกิจกรรมจะมีสีสันที่สวยงาม สามารถ ยืด ย่อ ขยาย เคลื่อนไหว ทำให้นักเรียนเกิดการกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น เนื้อหาที่ใช้ทำกิจกรรม คือ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ประกอบด้วย

1.1 หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

1.2 หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง

1.3 หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

1.4 หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

1.5 หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์

1.6 หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

1.7 หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. **ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ** หมายถึง คะแนนรวมของนักเรียนที่ได้จากการประเมินผล ดังนี้

2.1 การประเมินผลระหว่างเรียน จากใบกิจกรรม มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนทั้งหมด

2.2 การประเมินผลหลังเรียน จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 80 ของคะแนนทั้งหมด

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ หมายถึง แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจ ของนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังจากที่ได้เรียนผ่านชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

4. เกณฑ์ผ่านการสอบ หมายถึง ค่าร้อยละ 60 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้า นักเรียนได้คะแนนสอบไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนรวม ถือว่านักเรียนสอบผ่านเกณฑ์

5. ความพึงพอใจของนักเรียนในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. หมายถึง การแสดงออกของนักเรียนถึงความพึงพอใจในชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ซึ่งวัดจากแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นชนิดมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) 5 สเกล คือ 5, 4, 3, 2 และ 1 หมายถึง มากที่สุด มาก ปานกลาง น้อย และน้อยที่สุด ตามลำดับ และนำเสนอให้นักความคิด โดยใช้ในการประเมินค่าความคิดเห็นของประคอง กรรณสูต (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.50–5.00 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด หลังจากเรียนชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 3.50–4.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก หลังจากเรียนชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 2.50–3.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง หลังจากเรียนชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 1.50–2.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย หลังจากเรียนชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 1.00–1.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยมาก หลังจากเรียนชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

### สมมุติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัย เรื่องชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอโดยแบ่งออกเป็น 3 ตอน ดังนี้

**ตอนที่ 1** เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

**ตอนที่ 2** เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

**ตอนที่ 3** เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมที่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิต

แบบพลวัต

### ตอนที่ 1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

#### 1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาแนวนโยบายทางการศึกษา ของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เพื่อเป็นกรอบแนวคิดในการสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. โดยผู้วิจัยได้ทำการศึกษาแนวนโยบาย ดังนี้

##### 1.1 ความสำคัญ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และ แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกายจิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

##### 1.2 วิสัยทัศน์

การศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เป็นการศึกษาเพื่อปวงชนที่เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องและตลอดชีวิตตามศักยภาพ ทั้งนี้เพื่อให้ เยาวชนเป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่พอเพียง สามารถนำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้ง

สามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาต่อ ดังนั้นจึงเป็นความรับผิดชอบของสถานศึกษาที่ต้องจัดสาระการเรียนรู้ที่เหมาะสมแก่นักเรียนแต่ละคน ทั้งนี้เพื่อให้บรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้

### 1.3 คุณภาพของนักเรียน

เมื่อนักเรียน เรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว นักเรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น

#### 1.3.1 คุณภาพของนักเรียนเมื่อจบช่วงชั้นที่ 4 (ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6)

เมื่อนักเรียนจบการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 นักเรียนควรจะสามารถดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริงและสามารถนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด
3. มีความเข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
4. มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซตและการดำเนินการของเซต สามารถบอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพแทนเซต มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันสามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้
5. สามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ เข้าใจความหมายของผลบวกของ  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และหาผลบวกของ  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและการนำไปใช้
6. สามารถสำรวจรวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจในบางอย่างได้
7. นำความรู้เรื่องความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ไปใช้ได้
8. มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายและใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม สามารถให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ กับศาสตร์อื่นๆ ได้

## 1.4 มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐานการเรียนรู้ที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน มีดังนี้

สาระที่ 1: จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2: การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

สาระที่ 3: เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (visualization) ให้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4: พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่างๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5: การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

## สาระที่ 6: ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้

มาตรฐาน ค. 6.5 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

สำหรับสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน เป็นสาระการเรียนรู้ที่จัดขึ้นให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่นักเรียนทุกคนต้องบรรลุ

## 2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

### 2.1 ความหมายของชุดกิจกรรม

ชุดการสอนหรือชุดการเรียนมีชื่อเรียกต่างกัน เช่น ชุดการสอน ชุดการเรียนการสอนชุดการเรียนสำเร็จรูป ชุดการสอนรายบุคคล ชุดการเรียนด้วยตนเอง ชุดกิจกรรม ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขอใช้คำว่า “ชุดกิจกรรม” แทนชื่อต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น ซึ่งมีผู้ให้ความหมายไว้ต่างๆ กันดังนี้

บราวน์ และคนอื่นๆ (Brown; et al. 1973: 338) ให้ความหมายไว้ว่าชุดกิจกรรม คือ ชุดของสื่อผสม ที่สร้างขึ้นเพื่อช่วยเหลือครูให้สามารถสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ชุดกิจกรรมมักจะประกอบไปด้วยสิ่งของหลายอย่าง เช่น ภาพโป่งใส फिल्मสคริป ภาพเหมือน และแผนภูมิ บางชุดอาจประกอบด้วยเอกสารเพียงอย่างเดียวบางชุดอาจจะเป็นโปรแกรมที่มีบัตรคำสั่งให้นักเรียน เรียนด้วยตนเอง

วาสนา ชาวหา (2525: 32) ได้ให้ความหมายของชุดกิจกรรมว่าหมายถึง การวางแผนการเรียนการสอนโดยใช้สื่อต่างๆ รวมกัน (Multi Media Approach) หรือหมายถึงการใช้สื่อประสม (Multi Media) เพื่อสร้างประสบการณ์ในการเรียนรู้อย่างกว้างขวางและเป็นไปตามจุดมุ่งหมายที่วางไว้ โดยจัดไว้เป็นชุดหรือกล่อง

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525: 185) กล่าวว่า ชุดกิจกรรมเป็นระบบการผลิตและการนำสื่อ การเรียนหลายๆ อย่างมาสัมพันธ์กัน และมีคุณค่าส่งเสริมซึ่งกันและกัน สื่อการเรียนอย่างหนึ่งอาจใช้เพื่อการสร้างความสนใจ ในขณะที่อีกอย่างหนึ่งใช้เพื่ออธิบายข้อเท็จจริงของเนื้อหาและอีกอย่างหนึ่งอาจใช้เพื่อก่อให้เกิดการเสาะแสวงหาอันนำไปสู่ความเข้าใจอันลึกซึ้งและป้องกันการเข้าใจความหมายผิด สื่อการเรียนเหล่านี้เรียกอีกประการหนึ่ง สื่อประสมที่เรานำมาใช้ให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา เพื่อช่วยให้นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ยุพิน พิพิธกุล (2530: 212) ได้ให้ความหมายของชุดกิจกรรมเป็นรายบุคคลว่า เป็นชุดกิจกรรมที่นักเรียนเรียนด้วยตนเอง ในชุดกิจกรรมจะประกอบด้วย บัตรคำสั่ง บัตรกิจกรรม บัตรเนื้อหา บัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมเฉลยและบัตรทดสอบพร้อมเฉลย ในชุดกิจกรรมนั้นจะมีสื่อการเรียนการสอนไว้พร้อมเพื่อที่นักเรียนจะใช้ประกอบการเรียนเรื่องนั้นๆ

บุญชม ศรีสะอาด (2541: 95) ได้ให้ความหมายของชุดกิจกรรม หมายถึง สื่อการเรียนหลายอย่างประกอบกันจัดเข้าไว้เป็นชุด เรียกว่า สื่อประสม (Multi Media) เพื่อมุ่งให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ

บุญเกื้อ ควรหาเวช (2545: 91) ได้ให้ความหมายชุดกิจกรรม หมายถึง สื่อการสอนชนิดหนึ่งซึ่งเป็นชุดของสื่อประสม (หมายถึง การใช้สื่อการสอนตั้งแต่สองชนิดขึ้นไปรวมกัน เพื่อให้นักเรียนได้รับความรู้ตามที่ต้องการ สื่อที่นำมาใช้ร่วมกันนี้จะช่วยเสริมประสบการณ์ซึ่งกันและกันตามลำดับขั้นที่จัดเอาไว้) ที่จัดขึ้นสำหรับหน่วยการเรียนตามหัวข้อเนื้อหาและประสบการณ์ของแต่ละหน่วยที่ต้องการจะให้นักเรียนได้รับ โดยจัดเอาไว้เป็นชุดๆ บรรจุอยู่ในซอง กล่อง หรือกระเป๋า

กองพัฒนาการศึกษาออกโรงเรียน (2542: 5) กล่าวว่า ชุดกิจกรรม หมายถึง งานหรือภารกิจที่กำหนดให้นักเรียนลงมือปฏิบัติระหว่างศึกษาหรือหลังจากศึกษาเนื้อหาสาระต่าง ๆ ในชุดวิชาแต่ละเรื่องจบแล้ว ชุดกิจกรรมต้องสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติและมีส่วนร่วมในการเรียนด้วยตนเองตามที่กำหนดในชุดวิชา เมื่อทำกิจกรรมเสร็จเรียบร้อยแล้ว จะสามารถตรวจสอบแนวตอบทันทีทั้งที่เป็นการเสริมแรงและประสบการณ์ที่เป็นความภาคภูมิใจให้แก่นักเรียน

กาญจนา เกียรติประวัติ (2524: 175) กล่าวว่า ชุดกิจกรรม หมายถึง ระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนต่างๆ ที่สัมพันธ์กับเนื้อหา มาส่งเสริมให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามจุดประสงค์อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

สุมานัน รุ่งเรืองธรรม (2526: 112) กล่าวว่าชุดกิจกรรม หมายถึง ระบบการผลิตและการนำสื่อการเรียนหลายๆ อย่างมาสัมพันธ์กันและมีคุณค่าส่งเสริมซึ่งกันและกัน หรือการนำระบบสื่อประสม (Multi Media) ที่สอดคล้องกับเนื้อหาและประสบการณ์ของแต่ละหน่วยวิชา มาช่วยให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542: 27) กล่าวว่า ชุดกิจกรรม คือ กิจกรรมการเรียนรู้ที่ได้รับการออกแบบและจัดอย่างเป็นระบบ ประกอบด้วยจุดมุ่งหมาย เนื้อหาและวัสดุอุปกรณ์ โดยกิจกรรมต่างๆ ดังกล่าว ได้รับการรวบรวมไว้เป็นระเบียบในกล่องเพื่อเตรียมไว้ให้นักเรียนได้ศึกษาจากประสบการณ์ทั้งหมด

จากการศึกษาความหมายต่างๆ ของชุดกิจกรรมผู้วิจัยได้รวบรวมและได้สรุปความหมายของชุดกิจกรรมการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

ชุดการสอนหรือชุดกิจกรรมการเรียนการสอน หมายถึง ระบบการผลิตโดยครูผู้สอนและการนำสื่อการเรียนหลายๆ อย่างประสมผสมผสานกันหรือเรียกว่าสื่อประสม (Multi Media) โดยจัดอย่างเป็นระบบ ประกอบด้วยจุดมุ่งหมาย เนื้อหา แบบฝึกหัดและวัสดุอุปกรณ์ประกอบการเรียน สำหรับการเรียนรู้เป็นรายบุคคลหรือการเรียนเป็นกลุ่ม ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนได้สัมผัสผลลัพธ์ทางการเรียนตามเป้าหมาย นักเรียนจะเรียนไปตามอัตราความสามารถและความต้องการของตนเองทำให้นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

## 2.2 ประเภทของชุดกิจกรรม

คณะกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2524: 250–251) ได้แบ่งประเภทของชุดกิจกรรมออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. ชุดกิจกรรมสำหรับครู เป็นชุดสำหรับจัดให้ครูโดยเฉพาะ มีคู่มือและเครื่องมือสำหรับครูซึ่งพร้อมที่จะนำไปใช้สอนให้เด็กเกิดพฤติกรรมที่คาดหวัง ครูเป็นผู้ดำเนินการและควบคุมกิจกรรมทั้งหมด นักเรียนมีส่วนร่วมกิจกรรมภายใต้การดูแลของครู

2. ชุดกิจกรรมสำหรับนักเรียน เป็นชุดกิจกรรมการเรียนสำหรับจัดให้นักเรียน เรียนด้วยตนเอง ครูมีหน้าที่เพียงจัดอุปกรณ์และมอบชุดการเรียนให้ แล้วคอยรับรายงานผลเป็นระยะๆ ให้คำแนะนำเมื่อมีปัญหาและประเมินผล ชุดการเรียนนี้จะฝึกการเรียนด้วยตนเอง เมื่อนักเรียน เรียนจบการศึกษาจากโรงเรียนไปแล้วก็สามารถเรียนรู้หรือศึกษาสิ่งต่างๆ ได้ด้วยตนเอง

3. ชุดกิจกรรมที่ครูและนักเรียนใช้ร่วมกัน ชุดนี้มีลักษณะผสมระหว่างชุดแบบที่ 1 และชุดแบบที่ 2 ครูเป็นผู้คอยดูแล และกิจกรรมบางอย่างครูต้องเป็นผู้แสดงนำให้นักเรียนดู และกิจกรรมบางอย่างนักเรียนต้องทำด้วยตนเอง ชุดการเรียนแบบนี้เหมาะอย่างยิ่งที่จะใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาซึ่งจะเริ่มฝึกให้รู้จักการเรียนด้วยตนเองภายใต้การดูแลของครู

กาญจนา เกียรติประวัติ (2524: 175) ได้จำแนกประเภทของชุดกิจกรรมไว้ 2 ประเภท คือ

1. ชุดกิจกรรมสำหรับกิจกรรมกลุ่ม ส่งเสริมให้นักเรียนศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง โดยใช้กิจกรรมกลุ่ม เช่น ในวิธีการของศูนย์การเรียน (Learning Center) หรือบทเรียนโมดูลเมื่อออกแบบให้ใช้กิจกรรมกลุ่มเป็นวิธีเรียน

2. ชุดกิจกรรมรายบุคคล ส่งเสริมการเรียนด้วยตนเองตามลำพัง เพื่อพัฒนาความรับผิดชอบของนักเรียน และความก้าวหน้าในการเรียนตามความสามารถในเวลาที่แตกต่างกันนักเรียนสามารถทดสอบเพื่อทราบผลความก้าวหน้าของตนเองได้ตลอดเวลา และตรวจคำตอบได้ทันที

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525: 174–175) ได้แบ่งชุดกิจกรรมตามลักษณะของการใช้ ออก เป็น 3 ประเภท คือ

1. ชุดกิจกรรมสำหรับการบรรยาย หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ชุดการเรียนสำหรับครู ใช้ คือเป็นชุดการเรียนการสอนสำหรับกำหนดกิจกรรมและสื่อการเรียนให้ครูใช้ประกอบคำบรรยาย เพื่อเปลี่ยนบทบาทการพูดของครูให้น้อยลง และเปิดโอกาสให้นักเรียนร่วมกิจกรรมการเรียนมากยิ่งขึ้น ชุดการเรียนการสอนนี้จะมีเนื้อหาเพียงหน่วยเดียวและใช้กับนักเรียนทั้งชั้น

2. ชุดกิจกรรมสำหรับกิจกรรมแบบกลุ่ม ชุดการเรียนการสอนนี้มุ่งเน้นที่ตัวนักเรียน ได้ประกอบกิจกรรมร่วมกัน และอาจจัดการเรียนการสอนในรูปแบบศูนย์การเรียน ชุดการเรียนการสอนแบบ กิจกรรมกลุ่มอาจจะต้องขอความช่วยเหลือจากครูเพียงเล็กน้อยในระยะเริ่มต้นเท่านั้น หลังจากเคยชิน ต่อวิธีการใช้แล้วนักเรียนสามารถช่วยเหลือซึ่งกันและกันได้เอง ในขณะที่ทำกิจกรรมการเรียนหากมี ปัญหา นักเรียนสามารถซักถามครูได้เสมอ เมื่อจบการเรียนแต่ละศูนย์แล้ว นักเรียนอาจจะสนใจการเรียนเสริมเพื่อเจาะลึกสิ่งที่เรียนรู้ได้อีกจากศูนย์สำรองที่ครูจัดเตรียมไว้เพื่อเป็นการไม่เสียเวลาที่จะต้อง รอคอยผู้อื่น

3. ชุดกิจกรรมรายบุคคล เป็นชุดกิจกรรมที่จัดระบบขั้นตอนเพื่อให้นักเรียนใช้เรียน ด้วยตนเองตามลำดับขั้นความสามารถของแต่ละคน เมื่อศึกษาครบแล้วจะทำการทดสอบประเมินผล ความก้าวหน้า และศึกษาชุดการเรียนการสอนชุดอื่นต่อไปตามลำดับ เมื่อมีปัญหา นักเรียนจะปรึกษากันได้ในระหว่างเรียน และผู้สอนพร้อมที่จะให้ความช่วยเหลือทันทีในฐานะผู้ประสานงานหรือผู้ชี้แนะ แนวทาง การเรียนด้วยชุดการเรียนการสอนนี้จัดเพื่อส่งเสริมศักยภาพการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลให้ พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองไปจนเต็มสุดขีดความสามารถโดยไม่ต้องเสียเวลารอคอยผู้อื่น ชุดการเรียน การสอนแบบนี้บางครั้งเรียกว่าบทเรียนโมดูล

บุญเกื้อ ควรหาเวช (2545: 94–95) ได้แบ่งประเภทของชุดกิจกรรมเป็น 3 ประเภทใหญ่ๆ คือ

1. ชุดกิจกรรมการสอนประกอบคำบรรยาย เป็นชุดการสอนสำหรับผู้สอนจะใช้สอน นักเรียนเป็นกลุ่มใหญ่ หรือการสอนที่ต้องการปูพื้นฐานให้นักเรียนส่วนใหญ่รู้และเข้าใจในเวลาเดียวกัน มุ่งในการขยายเนื้อหาสาระให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ชุดการสอนแบบนี้จะช่วยให้ผู้สอนลดการพูดให้น้อยลงและ ใช้สื่อการสอนที่มีความพร้อมอยู่ในชุดการสอนในการเสนอเนื้อหามากขึ้น สื่อที่ใช้ อาจได้แก่ รูปภาพ แผนภูมิ สไลด์ फिल्मสคริป ภาพยนตร์ เป็นต้น ข้อสำคัญคือสื่อที่จะนำมาใช้นี้ต้องให้นักเรียนได้เห็น อย่างชัดเจนทุกคน ชุดการสอนชนิดนี้บางคนอาจเรียกว่าชุดการสอนสำหรับครู

2. ชุดกิจกรรมการสอนแบบกลุ่มกิจกรรม เป็นชุดการสอนสำหรับให้นักเรียนเรียน ร่วมกันเป็นกลุ่มเล็กๆ ประมาณ 5–7 คน โดยใช้สื่อการสอนที่บรรจุไว้ในชุดการสอนแต่ละชุด มุ่งที่จะฝึก

ทักษะในเนื้อหาวิชาที่เรียนและให้นักเรียนมีโอกาสทำงานร่วมกัน ชุดการสอนชนิดนี้นักจะใช้ในการสอนแบบกิจกรรมกลุ่ม เช่น การสอนแบบศูนย์การเรียน การสอนแบบกลุ่มสัมพันธ์ เป็นต้น

3. ชุดกิจกรรมการสอนแบบรายบุคคลหรือชุดการสอนตามเอกัตภาพ เป็นชุดการสอนสำหรับเรียนด้วยตนเองเป็นรายบุคคล คือ นักเรียนจะต้องศึกษาหาความรู้ตามความสามารถและความสนใจของตนเองอาจจะเรียนที่โรงเรียนหรือที่บ้านก็ได้ ส่วนมากมักจะมุ่งให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจในเนื้อหาวิชาที่เรียนเพิ่มเติม นักเรียนสามารถจะประเมินผลการเรียนด้วยตนเองได้ด้วย ชุดการสอนชนิดนี้อาจจะจัดในลักษณะของหน่วยการสอนย่อยหรือโมดูลก็ได้

สุมานิน รุ่งเรืองธรรม (2526: 112) ได้แบ่งประเภทของชุดกิจกรรมเป็น 3 ประเภทใหญ่ๆ

1. ชุดกิจกรรมการสอนประกอบการบรรยาย หรือ ชุดการสอนสำหรับครู เป็นชุดการสอนที่กำหนดกิจกรรมและสื่อการเรียนให้ครูหรือผู้สอนใช้ประกอบการบรรยาย เป็นเนื้อหาและประสบการณ์ที่ผู้สอนต้องการพื้นฐานให้นักเรียนได้เรียนพร้อมกัน โดยมีเวลาให้นักเรียนได้เข้าเรียนร่วมกัน บางครั้งตามที่กำหนดไว้ในตารางเรียนของแต่ละคน ชุดการสอนนั้นจะมีเนื้อหาวิชาเพียงหน่วยเดียว

2. ชุดกิจกรรมการสอนแบบกลุ่มกิจกรรม ชุดการสอนแบบนี้ใช้ในการประกอบกิจกรรมของนักเรียนเป็นกลุ่ม หรืออาจจัดในรูปของศูนย์การเรียน (Learning Center) ซึ่งแต่ละศูนย์นี้จะมีสื่อการเรียนหรือบทเรียนครบชุดตามจำนวนนักเรียนในศูนย์กิจกรรมนั้น นักเรียนสามารถศึกษาด้วยตนเอง หรือช่วยเหลือซึ่งกันและกันในศูนย์ต่างๆ จนครบ ในตอนแรกอาจจำเป็นต้องขอความช่วยเหลือจากผู้สอนบ้าง แต่เมื่อเกิดความเข้าใจแล้วการขอคำปรึกษาจากผู้สอนก็จะลดน้อยลง

3. ชุดกิจกรรมการสอนรายบุคคล สำหรับนักเรียนที่จะเรียนตามความสนใจ และระดับความสามารถของตนเอง ชุดการสอนแต่ละชุดมีคำแนะนำให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมต่างๆ ตลอดจนแหล่งวัสดุอุปกรณ์อื่นๆ ที่จะต้องไปศึกษาเพิ่มเติม นักเรียนสามารถทดสอบเพื่อทราบผลความก้าวหน้าของตนเองได้ทุกเวลาและทราบผลการเรียนได้ทันที เพื่อจะศึกษาต่อในชุดอื่นๆ

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ และคนอื่นๆ (2523: 118) ได้แบ่งชุดกิจกรรมออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้ คือ

1. ชุดกิจกรรมประกอบการบรรยาย เป็นชุดกิจกรรมที่กำหนดกิจกรรมและสื่อการสอนให้ครูประกอบการสอนแบบบรรยาย เพื่อเปลี่ยนบทบาทให้ครูพุดน้อยลง และเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมกิจกรรมการเรียนมากยิ่งขึ้น ชุดกิจกรรมประกอบการบรรยายมุ่งช่วยขยายเนื้อหาสาระการสอนแบบบรรยายให้ชัดเจนขึ้น ช่วยให้ผู้สอนพุดน้อยลง และให้สื่อการสอน ทำหน้าที่แทนชุดกิจกรรมแบบบรรยายนี้นิยมใช้กับการฝึกอบรม

2. ชุดกิจกรรมแบบกลุ่มกิจกรรม เป็นชุดกิจกรรมที่มุ่งให้นักเรียนได้ประกอบกิจกรรมกลุ่มร่วมกัน นักเรียนจะสามารถช่วยเหลือกันและกันได้เองระหว่างประกอบกิจกรรมการเรียนรู้ หากมีปัญหานักเรียนสามารถซักถามครูได้เสมอ

3. ชุดกิจกรรมเอกัตภาพหรือชุดกิจกรรมรายบุคคล เป็นชุดกิจกรรมที่จัดระบบขั้นตอนเพื่อมุ่งให้นักเรียนสามารถศึกษาหาความรู้ด้วยตนเองตามลำดับความสามารถของแต่ละคน เพื่อให้นักเรียนก้าวไปข้างหน้าตามความสามารถ ความสนใจ และความพร้อมของนักเรียน

4. ชุดกิจกรรมทางไกล เป็นชุดกิจกรรมที่ผู้สอนกับนักเรียนอยู่ต่างถิ่นต่างเวลากัน มุ่งสอนให้นักเรียนศึกษาได้ด้วยตนเองโดยไม่ต้องมาเข้าเรียน ประกอบด้วยสื่อประเภทสิ่งพิมพ์ รายการวิทยุกระจายเสียง วิทยุโทรทัศน์ ภาพยนตร์ และการสอนซ่อมเสริมตามศูนย์บริการการศึกษา เช่น ชุดกิจกรรมทางไกล มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช นอกจากนี้ยังมีชุดการฝึกอบรม ชุดกิจกรรมของผู้ปกครอง ชุดกิจกรรมทางไปรษณีย์

จิรภัทร แก้วกู่ (2547: 112) ได้แบ่งชุดกิจกรรมออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบทั่วไปหรือแบบอิสระ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบกระบวนการ

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบทั่วไป หรือแบบอิสระ หมายถึง กิจกรรมต่างๆ ที่แสดงถึงความพยายามที่จะให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ในเรื่องราวที่ได้กำหนดไว้แล้ว รวมทั้งการจัดบรรยากาศการเรียนรู้ที่เอื้ออำนวยต่อการพัฒนาพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย เจตพิสัย และทักษะพิสัย

กิจกรรมการเรียนรู้เหล่านี้มีชื่อเรียก และรูปแบบต่างๆ กันไป ดังรายการต่อไปนี้

1. วิธีสอนแบบบรรยาย (Lecture)
2. วิธีสอนแบบสาธิต (Demonstration)
3. วิธีสอนแบบทดลอง (Experiment)
4. วิธีสอนแบบนิรนัย (Deduction)
5. วิธีสอนแบบอุปนัย (Induction)
6. วิธีสอนแบบทัศนศึกษา (Field Trip)
7. วิธีสอนแบบอภิปรายกลุ่มย่อย (Small Group Discussion)
8. วิธีสอนแบบแสดงบทบาทสมมติ (Role Playing)
9. วิธีสอนแบบกรณีตัวอย่าง (Case)

ฯลฯ

จากการศึกษาเรื่องประเภทของชุดการสอนผู้วิจัยได้ทำรวบรวมและได้สรุปประเภทของชุดการสอนไว้ 3 ประเภทดังนี้

ประเภทที่ 1 ชุดกิจกรรมประกอบการบรรยาย หรือ ชุดการสอนสำหรับครู

ประเภทที่ 2 ชุดกิจกรรมแบบกลุ่มกิจกรรมหรือชุดการสอนที่ครูและนักเรียนร่วมกันทำ

ประเภทที่ 3 ชุดกิจกรรมแบบเอกัตภาพ หรือชุดการสอนรายบุคคล

และในปัจจุบันนี้ก็ได้มีการพยายามพัฒนารูปแบบการสอนให้มีการเผยแพร่ไปทั่วประเทศ เพื่อให้ นักเรียนในโรงเรียนที่ขาดแคลนครูผู้สอนได้มีโอกาสได้ศึกษา เราเรียกว่า ชุดการสอนทางไกล

### 2.3 จิตวิทยาที่นำมาใช้ในชุดกิจกรรม

เปเรอว์ กุมท (2519: 42) ได้กล่าวถึงเทคนิคการเรียนรู้ด้วยชุดกิจกรรม ดังนี้

1. สอนด้วยวิธีให้นักเรียนกระทำหรือสนองตอบอยู่ตลอดเวลา

2. ทุกครั้งที่นักเรียนตอบ ก็จะได้รับรู้ผลการสนองตอบของตนทันทีว่าถูกหรือผิดและคำตอบที่ถูกเป็นอย่างไร

3. สอนให้นักเรียนพยายามทำในสิ่งที่ต้องการ เพื่อที่เขาจะได้ไม่เบื่อหน่ายที่จะเรียน และมีกำลังใจเรียน

4. สอนไปตามลำดับขั้นตอน ครั้งละเล็กน้อย ไม่ยืดเยียดครั้งละจำนวนมาก

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ และคนอื่นๆ (2523: 110-120) ได้เสนอจิตวิทยาการเรียนรู้ที่นำมาสู่การผลิตชุดกิจกรรม ดังนี้

1. เพื่อสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล

2. เพื่อยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลางด้วยการให้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

3. มีสื่อการเรียนใหม่ๆ ที่ช่วยในการเรียนของนักเรียน เพื่อช่วยการสอนของครู

4. มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียนที่เปลี่ยนไป เปลี่ยนจากครูเป็นผู้นำเป็นผู้มี

อิทธิพลต่อนักเรียนมาก

5. การจัดสภาพสิ่งแวดล้อมการเรียนรู้ได้ยึดหลักจิตวิทยาการเรียนรู้มาใช้โดยจัดสภาพการณ์ออกมาเป็นการสอนแบบโปรแกรม ซึ่งหมายถึง ระบบการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียน

5.1 ได้เข้าร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยตนเอง

5.2 มีทางทราบว่าการตัดสินใจหรือการทำงานของตนถูกหรือผิดอย่างไร

5.3 มีการเสริมแรงบวกที่ทำให้นักเรียนภาคภูมิใจที่ได้ทำถูก หรือคิดถูกอันจะ

ทำให้กระทำพฤติกรรมนั้นซ้ำอีกในอนาคต

5.4 เรียนรู้ไปทีละขั้นตามความสามารถ และความสนใจของนักเรียนเองโดย

ไม่มีใครบังคับ การจัดสภาพการณ์ที่จะเอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ตามนัยดังกล่าวข้างต้นนี้ จะมีเครื่องมือช่วยให้นักเรียนจดหมายปลายทาง โดยการจัดการสอนแบบโปรแกรมในรูปแบบของ กระบวนการ และใช้ชุดกิจกรรมเป็นเครื่องมือสำคัญ

ไชยยศ เรื่องสุวรรณ (2526: 199) กล่าวถึงการสร้างชุดกิจกรรมว่ามีหลักการและทฤษฎี ดังนี้

1. ทฤษฎีที่เกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างบุคคล ชุดกิจกรรมนี้เป็นสื่อและ กิจกรรมการเรียน จัดทำขึ้นเพื่อสนองความสามารถ ความสนใจ และความต้องการของนักเรียน เป็นสำคัญ ทฤษฎีที่ว่าด้วยความแตกต่างระหว่างบุคคลจึงนำมาใช้เป็นทฤษฎีพื้นฐานในการจัดทำและใช้ชุดกิจกรรม

2. หลักการเกี่ยวกับสื่อประสมชุดกิจกรรม ซึ่งหมายถึง การใช้สื่อหลาย ๆ อย่างที่เสริมซึ่งกันและกันอย่างมีระบบ มาใช้เป็นแนวทางการเรียนรู้และกิจกรรมการเรียน ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้จากสื่อ

3. ทฤษฎีการเรียนรู้ ชุดกิจกรรมเป็นสื่อการเรียนที่มุ่งให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแข็งขัน และได้รับข้อมูลย้อนกลับอย่างฉับพลัน อีกทั้งได้รับประโยชน์แห่งความสำเร็จหรือการเสริมแรง มีการเรียนเป็นขั้นตามความสามารถของนักเรียน

4. หลักการวิเคราะห์ระบบ ชุดกิจกรรมจัดทำโดยอาศัยวิธีวิเคราะห์ระบบมีการทดลองสอน และปรับปรุงแก้ไขจนเป็นที่น่าเชื่อถือได้ จึงนำออกใช้และเผยแพร่กิจกรรม การเรียนการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรม ทั้งนี้เพื่อให้กิจกรรมการเรียนการสอนดำเนินไปอย่างสัมพันธกัน

บรูเนอร์ (สุรวงศ์ ใคว์ตระกูล. 2541: 31; อ้างอิงจาก Bruner. 1960, 1966, 1971: *The Relevance of Education*) บรูเนอร์เชื่อว่าการเรียนรู้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อผู้เรียนได้ประมวลข้อมูลข่าวสารจากการที่มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมและสำรวจสิ่งแวดล้อม และเขาเชื่อว่าการรับรู้ของมนุษย์ เป็นสิ่งที่เลือกหรือสิ่งรับรู้ขึ้นกับความใส่ใจของผู้เรียนที่มีต่อสิ่งนั้นๆ การเรียนรู้จะเกิดจากการค้นพบ เนื่องจากผู้เรียนมีความอยากรู้อยากเห็นซึ่งเป็นแรงผลักดันให้เกิดพฤติกรรมการเรียนรู้ ซึ่งบรูเนอร์ได้แบ่งเครื่องมือในการค้นพบความรู้ออกเป็น 3 วิธี

1. ขั้นเอนแอคทีฟ (Enactive Mode) ซึ่งเป็นวิธีที่มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมโดยการสัมผัสจับต้องด้วยมือ เช่น การผลัก การตึง รวมทั้งการใช้ปากกับวัตถุสิ่งของที่อยู่รอบ ๆ ตัว ข้อสำคัญที่สุดคือการกระทำของเด็กเอง

2. ขั้นไอคอนนิค (Iconic Mode) เมื่อเด็กสามารถที่จะสร้างจินตนาการหรือมโนภาพ (Imagery) ขึ้นในใจได้ ก็จะสามารถที่จะรู้จักโลกโดยวิธีไอคอนนิค เด็กวัยนี้จะใช้รูปภาพแทนของจริง

โดยไม่จำเป็นจะต้องแต่ต้องหรือสัมผัสของจริง นอกจากนี้เด็กจะสามารถรู้จักสิ่งของจากภาพ แม้ว่าจะมีขนาดและสีเปลี่ยนไป

3. ขั้นใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Mode) วิธีการนี้ผู้เรียนจะใช้ในการเรียนรู้ เมื่อผู้เรียนมีความสามารถที่จะเข้าใจในสิ่งที่เป็นนามธรรม หรือความคิดรวบยอดที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรม จึงสามารถที่จะสร้างสมมติฐาน และพิสูจน์ว่าสมมติฐานถูกหรือผิดได้

ออซูเบล (Ausubel. ที่มา <http://ednet.kku.ac.th/~sumcha/2545/nong>. วันที่ 1 ธันวาคม พ.ศ. 2551. ออนไลน์) ออซูเบลให้ความหมายการเรียนรู้ที่มีความหมาย ( Meaningful learning) ว่า เป็นการเรียนที่ผู้เรียนได้รับมาจากการที่ผู้สอน อธิบายสิ่งที่จะต้องเรียนรู้ให้ทราบและผู้เรียนรับฟังด้วยความเข้าใจ โดยผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งที่เรี้นรู้กับโครงสร้างพุทธิปัญญาที่ได้เก็บไว้ในความทรงจำ และจะสามารถนำมาใช้ในอนาคต ออซูเบลได้ชี้ให้เห็นว่าทฤษฎีนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะอธิบายเกี่ยวกับพุทธิปัญญา ออซูเบล ได้แบ่งประเภทของการเรียนรู้โดยรับอย่างมีความหมาย ดังนี้

1. Subordinate Learning เป็นการเรียนรู้โดยการรับอย่างมีความหมาย โดยมีวิธีการ 2 ประเภทได้แก่

1.1 Derivation Subsumption เป็นการเชื่อมโยงสิ่งที่จะต้องเรียนรู้ใหม่กับหลักการหรือกฎเกณฑ์ที่เคยเรียนมาแล้ว โดยการได้รับข้อมูลมาเพิ่ม เช่น มีคนบอก แล้วสามารถดูซึมเข้าไปในโครงสร้างทางสติปัญญาที่มีอยู่แล้วอย่างมีความหมาย โดยไม่ต้องท่องจำ

1.2 Correlative Subsumption เป็นการเรียนรู้ที่มีความหมายเกิดจากการขยายความ หรือปรับโครงสร้างทางสติปัญญาที่มีมาก่อนให้สัมพันธ์กับสิ่งที่จะต้องเรียนรู้ใหม่

2. Superordinate Learning เป็นการเรียนรู้โดยการอนุมาน โดยการจัดกลุ่มสิ่งที่ยเรียนใหม่เข้ากับความคิดรวบยอดที่กว้างและครอบคลุมความคิดยอดของสิ่งที่เรียนใหม่ เช่น สุนัข แมว หมู เป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม

3. Combinatorial Learning เป็นการเรียนรู้หลักการ กฎเกณฑ์ต่างๆเชิงผสม ในวิชาคณิตศาสตร์ หรือ วิทยาศาสตร์ โดยการใช้เหตุผล หรือการสังเกต เช่นการเรียนรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกับระยะทางในการที่ทำให้เกิดความสมดุล

จากการศึกษาเรื่องจิตวิทยาที่จะนำมาใช้ในการจัดทำชุดกิจกรรมผู้วิจัยได้ทำรวบรวมและได้สรุปแนวคิดหลักในการนำจิตวิทยาที่ควรคำนึงมาใช้ ดังนี้

1. ความแตกต่างระหว่างบุคคล ต้องจัดทำขึ้นเพื่อสนองความสามารถ ความสนใจ และความต้องการของนักเรียนเป็นสำคัญ

2. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน และมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีกับครู

3. การเสริมแรงในทางบวกที่ทำให้นักเรียนภาคภูมิใจในสิ่งที่ได้ทำถูก แต่ไม่ควรทำบ่อยๆ เพราะจะทำให้นักเรียนมองเห็นเป็นเรื่องปกติ

## 2.4 ขั้นตอนในการสร้างชุดกิจกรรม

กาญจนา เกียรติประวัติ (2524: 176–178) ได้วางแผนทางในการสร้างชุดกิจกรรมไว้ดังนี้

1. เลือกเรื่อง เรื่องที่จะทำจะต้องรู้สึกว่ามีปัญหาในการสอนด้วยวิธีอื่นๆ จึงจะมีคุณค่าพอสำหรับการสร้าง

2. พัฒนาเรื่องให้เป็นปัญหา เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดความสงสัยในคำตอบการพัฒนาหัวข้อเรื่องให้เป็นปัญหา เช่น วิธีแก้ความสนใจในการเรียนแก่นักเรียนได้ดีข้อสำคัญปัญหานั้นจะต้องสัมพันธ์กับจุดสำคัญที่ครูต้องการสอน

3. เนื้อหาสาระ ครูกำหนดเนื้อหาสาระจากการศึกษาขอบเขตในหลักสูตรการศึกษา หลักสูตรจะทำให้ครูรู้ระยะเวลาของการสอนว่าควรเน้นย้ำรายละเอียดเพียงใด เช่น ไม่สอนทุกสิ่งทุกอย่างที่หลักสูตรกำหนดให้สอนในเวลา 10 ชั่วโมง โดยใช้ชุดการเรียนเพียง 2-3 ชั่วโมง

4. เขียนสังกัป (Concept) หรือหลักการ (Generalization) ของเรื่องเพื่อเป็นหลักในการจัดกิจกรรมและการตั้งคำถามของครู ครูที่สอนโดยคำนึงถึงหลักการและสังกัปของเรื่อง เท่ากับส่งเสริมให้นักเรียนคิดเป็นด้วย

5. เขียนจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม แล้วเรียงลำดับโดยเริ่มจากสิ่งที่จะต้องสอนก่อน

6. ระบุวิชาที่จะนำมาสัมพันธ์หรือบูรณาการกันได้ จะช่วยให้การคิดกิจกรรมการเรียนการสอนของครูส่งเสริมความคิดของนักเรียนให้กว้างขวางออกไปในเชิงบูรณาการ

7. คำนึงถึงจิตวิทยาพัฒนาการของนักเรียน นักเรียนแต่ละระดับมีช่วงเวลาความสนใจต่างกัน ลักษณะกิจกรรมที่จัดจะต้องคำนึงถึงวัยนักเรียนที่จะเป็นผู้ลงมือกระทำกิจกรรมนั้นด้วย

8. วิเคราะห์งาน โดยนำจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแต่ละข้อมาวิเคราะห์กิจกรรมที่ครูและนักเรียนจะต้องทำ ตลอดจนกำหนดสื่อที่จำเป็น แล้วเรียงลำดับกิจกรรมดังกล่าว

การกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน จะต้องระบุชัดเจนว่าใครทำอะไร ที่ไหน อย่างไร เมื่อไร และเขียนเป็นประโยคบอกเล่าไม่ใช่คำอธิบายเชิงคำถาม วัตถุประสงค์ที่ใช้ประกอบ ให้วงเล็บหมายเลขไว้

9. รายการอุปกรณ์ เอกสาร ประกอบการเรียน ควรมีหมายเลขกำกับเพื่อสะดวกต่อการหยิบใช้ สิ่งของที่ได้จากตัววิทยาศาสตร์ หรือลำบากในการบรรจุเข้าแฟ้ม เช่น ชันน้ำ ขวด ควรระบุไว้เป็นอุปกรณ์ส่วนที่ครูต้องหามาเพิ่มเติมก่อนสอนแผนภูมิแผ่นใหญ่ๆ ควรคิดวิธีพับเก็บให้เรียบร้อย

10. การวัดผล ไม่ว่าจะเป็นการวัดก่อนหรือหลังการเรียน จะต้องใช้จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นหลัก วัดพฤติกรรมที่คาดหวังเป็นสำคัญ พยายามออกแบบการวัดผลให้นักเรียนวัดกันเองและตรวจคำตอบเองได้

11. กิจกรรมสำรวจ จัดไว้สำหรับซ่อมพื้นฐานที่จำเป็นของเด็กเรียนอ่อนและเสริมความรู้ของเด็กที่เรียนเร็ว สิ่งเหล่านี้มีผลต่อการรักษาวินัยของห้องเรียนด้วย

12. คู่มือการใช้ชุดการเรียน

13. แพ้สำหรับบรรจุชุดการเรียน ควรมีขนาดมาตรฐานเพื่อสะดวกในการจัดวางและการใช้ โดยถือหลักประโยชน์ ประหยัด คงทน สะดวก และภูมิฐาน

14. การทดลองใช้ ปรับปรุง แก้ไข ทดลอง เมื่อสร้างเสร็จควรได้มีการทดลองใช้กับนักเรียนในระดับที่ต้องการก่อน เพื่อการแก้ไขปรับปรุง ก่อนนำไปใช้จริง ในคู่มือครูควรมีแบบบันทึกผลการใช้ไว้ให้ครูบันทึกข้อดี ข้อบกพร่องในการใช้แต่ละครั้งไว้ด้วย

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ และคนอื่นๆ (2523) แบ่งขั้นตอนในการผลิตชุดกิจกรรมออกเป็น 10 ขั้นตอน ดังนี้

1. กำหนดหมวดหมู่เนื้อหาและประสบการณ์ อาจจะกำหนดเป็นหมวดวิชาหรือบูรณาการเป็นแบบสหวิทยาการ ตามที่เห็นเหมาะสม

2. กำหนดหน่วยการสอน แบ่งเนื้อหาวิชาออกเป็นหน่วยการสอนโดยประมาณ เนื้อหาวิชาที่จะให้ครูสามารถถ่ายทอดความรู้แก่นักเรียนได้ในหนึ่งสัปดาห์หรือหนึ่งครั้ง

3. กำหนดหัวเรื่อง ผู้สอนจะต้องถามตนเองว่าในการสอนแต่ละหน่วยควรให้ประสบการณ์ออกมาเป็น 4-6 หัวเรื่อง

4. กำหนดความคิดรวบยอดและหลักการ จะต้องให้สอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่อง โดยสรุปรวมแนวคิด สาระ และหลักเกณฑ์สำคัญไว้เพื่อเป็นแนวทางในการจัดเนื้อหาที่สอนให้สอดคล้องกัน

5. กำหนดวัตถุประสงค์ ให้สอดคล้องกับหัวเรื่อง เป็นจุดประสงค์ทั่วไปก่อนแล้วเปลี่ยนเป็นวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ต้องมีเงื่อนไขและเกณฑ์พฤติกรรมไว้ทุกครั้ง

6. กำหนดกิจกรรมการเรียน ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งจะเป็นแนวทางในการเลือกและการผลิตสื่อการสอน กิจกรรมการเรียน หมายถึง กิจกรรมทุกอย่างที่นักเรียนปฏิบัติ เช่น การอ่าน บัตรคำสั่ง ตอบคำถาม เขียนภาพทำการทดลองทางวิทยาศาสตร์ ฯลฯ

7. กำหนดแบบประเมินผล ต้องออกแบบการประเมินผลให้ตรงกับวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยใช้การสอบแบบอิงเกณฑ์ เพื่อให้ผู้สอนทราบว่า หลังจากผ่านกิจกรรมมาเรียบร้อยแล้ว นักเรียนได้เปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้หรือไม่

8. เลือกและผลิตสื่อการสอน วัสดุอุปกรณ์และวิธีการที่ครูใช้ถือเป็นสื่อการสอนทั้งสิ้น เมื่อผลิตสื่อการสอนของแต่ละหัวเรื่องแล้วก็จัดสื่อการสอนเหล่านั้นไว้เป็นหมวดหมู่ในกล่องที่เตรียมไว้ ก่อนนำไปทดลองหาประสิทธิภาพ เรียกว่า ชุดกิจกรรม

9. หาประสิทธิภาพชุดการสอน เพื่อเป็นการประกันว่า ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมามีประสิทธิภาพในการสอน ผู้สร้างจำต้องกำหนดเกณฑ์ขึ้นล่วงหน้า โดยคำนึงถึงหลักการที่ว่า การเรียนรู้เป็นการช่วยให้การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของนักเรียนบรรลุผล

10. การใช้ชุดการสอน ชุดการสอนที่ได้ปรับปรุงและมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้แล้ว สามารถนำไปสอนนักเรียนได้ตามประเภทของชุดการสอนและระดับการศึกษา

บุญชม ศรีสะอาด (2541: 99–100) ได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดกิจกรรมดังนี้

1. วิเคราะห์ภารกิจการเรียนรู้สำหรับเนื้อหาวิชาที่จะสร้างชุดกิจกรรม กำหนดจุดประสงค์ทั่วไป จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม และจำแนกเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อยๆ สำหรับสอนแต่ละคาบเวลา

2. สร้างชุดกิจกรรมตามลักษณะของชุดการสอน และทฤษฎีที่เป็นพื้นฐานและหลักการเรียนการสอนที่ได้กล่าวมาแล้ว โดยมีส่วนประกอบดังนี้

2.1 ข้อเสนอแนะในการใช้จุดประสงค์ของบทเรียน

2.2 กิจกรรมของนักเรียนและผู้สอน

2.3 เอกสารสำหรับนักเรียนและผู้สอน

2.4 สื่อการเรียนการสอนต่างๆ

2.5 การประเมินผล

3. ทบทวนและปรับปรุง

4. ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านการพัฒนาหลักสูตร ด้านเนื้อหาสาระ ด้านสื่อการสอน พิจารณาให้ข้อเสนอแนะ ผู้สร้างปรับปรุงตามข้อเสนอแนะนั้นๆ

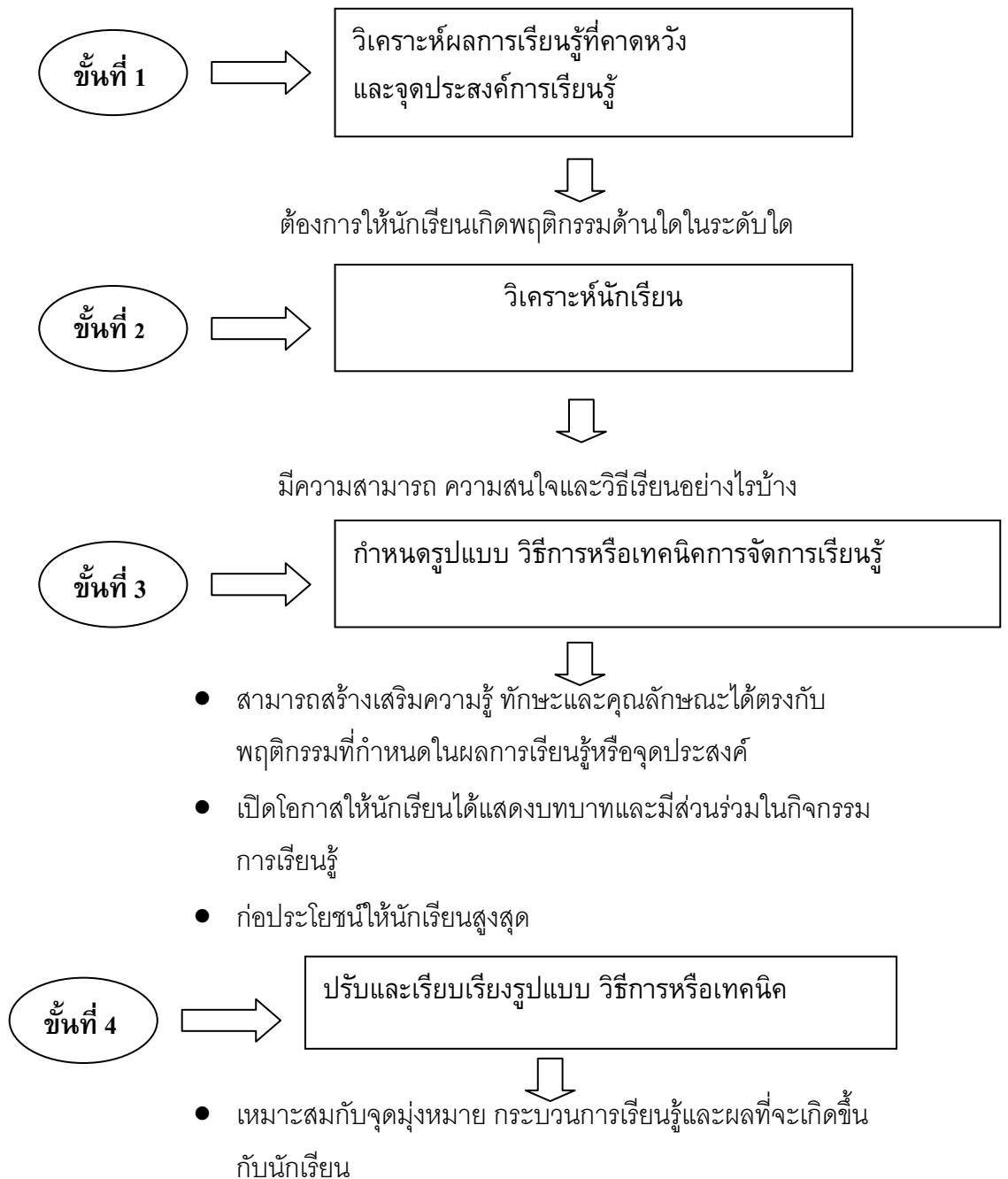
5. ทดลองใช้และปรับปรุง โดยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มเป้าหมายของการสร้างชุดกิจกรรม ดังนี้

5.1 ทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง โดยนำชุดกิจกรรมไปทดลองใช้กับนักเรียนหนึ่งคน ทำการสังเกตและบันทึกพฤติกรรมของนักเรียนระหว่างเรียน จับเวลาที่ใช้ในการเรียน สัมภาษณ์หรือให้นักเรียนเขียนวิจารณ์ชุดการสอนนั้น แล้วนำเอาข้อสังเกตต่างๆ ที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง

5.2 ทดลองกับกลุ่มย่อย โดยนำชุดกิจกรรมที่ได้รับการปรับปรุงแล้วในขั้น 5.1 ไปทดลองใช้กับนักเรียนจำนวน 10 คน โดยจะมีการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แล้วนำคะแนนจากการทดสอบมาวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์มาตรฐาน 90/90 นำเอาผลมาปรับปรุงกิจกรรม เนื้อหาสาระและสื่อต่างๆ ตามข้อสังเกตที่ได้รับ

5.3 ทดลองกับกลุ่มใหญ่ หลังจากทดลองและปรับปรุงแก้ไขชุดกิจกรรมทั้งสอง ครั้งแล้ว นำเอาชุดกิจกรรมนี้ไปทดลองใช้กับนักเรียนหนึ่งห้องเรียน แล้วนำผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาหาประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์มาตรฐาน 90/90

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2545: 29–30) ได้เสนอแนวทางในการสร้างและออกแบบชุดกิจกรรมการสอนไว้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 แผนผังขั้นตอนการสร้างและออกแบบชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช (2542: 782) ได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดกิจกรรมมี  
ขั้นตอนที่ต้องดำเนิน 4 ขั้นตอน ดังนี้

#### ขั้นที่ 1 การวิเคราะห์เนื้อหา

การวิเคราะห์เนื้อหา หมายถึง การจำแนกเนื้อหาวิชาออกเป็นหน่วยแยกย่อยลง  
ไปจนถึงหน่วยระดับบทเรียน ซึ่งเป็นหน่วยที่ใช้สอนได้ 1 ครั้ง ชุดการสอนที่ผลิตขึ้นจึงเป็นชุดการสอน  
ประจำหน่วยระดับบทเรียน คือ 1 ชุดการสอนสำหรับการสอนแต่ละครั้ง

#### ขั้นที่ 2 วางแผนการสอน

การวางแผนการสอนเป็นการคาดการณ์ล่วงหน้าว่า เมื่อครูเริ่มสอนโดยใช้ชุด  
กิจกรรมจะต้องทำอะไรบ้างตามลำดับก่อนหลัง

#### ขั้นที่ 3 ผลิตสื่อการสอน

#### ขั้นที่ 4 ทดสอบประสิทธิภาพชุดกิจกรรม

เป็นการประเมินผลคุณภาพชุดการสอน ด้วยการนำชุดกิจกรรมไปทดลองใช้  
แล้วปรับปรุงให้มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2525: 189–192) ได้เสนอขั้นตอนในการสร้างชุดกิจกรรมไว้ 10 ขั้นตอน คือ

1. ศึกษาเนื้อหาสาระของวิชาทั้งหมดอย่างละเอียดว่าต้องการมุ่งเน้นให้เกิดหลักการ  
ของการเรียนรู้อะไรบ้างให้กับนักเรียน ควรจะเรียงลำดับขั้นตอนของเนื้อหาให้ถูกต้องว่าอะไรเป็น  
สิ่งจำเป็นที่นักเรียนจะต้องเรียนรู้ก่อนตามลักษณะธรรมชาติของวิชานั้น

2. เมื่อศึกษาเนื้อหาสาระและแบ่งหน่วยการเรียนการสอนได้แล้วจะต้องพิจารณา  
ตัดสินใจอีกครั้งว่า จะทำชุดการสอนแบบใดโดยคำนึงถึงข้อกำหนดว่า นักเรียนคือใคร จะให้อะไรกับ  
นักเรียน จะทำกิจกรรมอย่างไรและจะทำได้ดีอย่างไร สิ่งเหล่านี้จะเป็นเกณฑ์ในการกำหนดการเรียน

3. กำหนดการเรียนการสอนโดยประมาณเนื้อหาสาระที่เราจะสามารถถ่ายทอด  
ความรู้แก่นักเรียน หาสื่อการเรียนได้ง่าย พยายามศึกษาวิเคราะห์ให้ละเอียดอีกครั้งหนึ่งดึงเอาแก่น  
ของหลักการเรียนรู้ออกมาให้ได้

4. กำหนดความคิดรวบยอดโดยที่จะต้องสอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่อง โดยสรุป  
แนวความคิดสาระและหลักเกณฑ์ที่สำคัญ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนให้สอดคล้อง

5. จุดประสงค์การเรียน การกำหนดจุดประสงค์การเรียนจะต้องให้สอดคล้องกับ  
ความคิดรวบยอด โดยกำหนดเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งหมายถึงความสามารถของนักเรียนที่  
แสดงออกมาให้เห็นได้ภายหลังการเรียนการสอนบทเรียนแต่ละเรื่องจบไปแล้วโดยผู้สอนควรใช้เวลา  
ตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนแต่ละข้อให้ถูกต้อง และครอบคลุมเนื้อหาสาระของการเรียนรู้

6. การวิเคราะห์งาน คือ การนำจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อมาทำการวิเคราะห์งาน เพื่อหากิจกรรมการเรียนการสอน แล้วจัดลำดับกิจกรรมการเรียนให้เหมาะสมถูกต้องสอดคล้องกับ จุดประสงค์ที่กำหนดไว้แต่ละข้อ

7. เรียงลำดับกิจกรรมการเรียน ภายหลังจากที่เราำจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อ มาทำการวิเคราะห์งาน และเรียงลำดับกิจกรรมของแต่ละข้อ เพื่อไม่ให้เกิดการซ้ำซ้อนในการเรียนโดย คำนึงถึงพฤติกรรมพื้นฐานของนักเรียน (Entering Behavior) วิธีดำเนินการสอน (Instructional Procedures) ตลอดจนการติดตามผลและประเมินผลพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาเมื่อมีการเรียน การสอนแล้ว (Performance Assessment)

8. สื่อการเรียน คือ วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนที่ครูและนักเรียนจะต้อง กระทำเพื่อเป็นแนวทางในการเรียนรู้ ซึ่งครูจะต้องจัดทำขึ้นและจัดหาไว้เรียบร้อย

9. การประเมิน คือ การตรวจสอบดูว่า หลังจากการเรียนการสอนแล้วได้มีการ เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่จุดประสงค์การเรียนรู้กำหนดไว้หรือไม่ การประเมินผลนี้จะใช้วิธีใดก็ตามแต่ จะต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ที่เราตั้งไว้ ถ้าการประเมินผลไม่ตรงตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมาเป็นการเสียเวลาและไม่มีคุณค่า

10. การทดลองใช้ชุดกิจกรรมเพื่อหาประสิทธิภาพ การหาประสิทธิภาพของชุด กิจกรรมเพื่อปรับปรุงให้เหมาะสมควรนำไปทดลองใช้กับกลุ่มเล็กๆ ดูก่อน และเมื่อตรวจสอบหา ข้อบกพร่องพร้อมทั้งแก้ไขปรับปรุงอย่างดีแล้ว จึงนำไปทดลองกับเด็กทั้งชั้นหรือกลุ่มใหญ่โดยกำหนด ขั้นตอนที่ดังนี้

1. ชุดกิจกรรมนี้ต้องการความรู้เดิมของนักเรียนหรือไม่
2. การนำเข้าสู่บทเรียนของชุดกิจกรรมนี้เหมาะสมหรือไม่
3. การประกอบกิจกรรมการเรียนการสอน มีความสับสนวุ่นวายกับนักเรียนและ ดำเนินไปตามขั้นตอนที่กำหนดไว้หรือไม่
4. การสรุปผลการเรียนการสอนเพื่อเป็นแนวทางไปสู่ความคิดรวบยอดหรือหลัก สำคัญของการเรียนรู้ในหน่วยนั้นๆ ดี หรือไม่ หรือจะต้องตรวจปรับเพิ่มเติมอย่างไร
5. การประเมินผลหลังการเรียนเพื่อตรวจสอบดูว่าพฤติกรรมการเรียนรู้ที่ เปลี่ยนแปลงเกิดขึ้น ให้ความเชื่อมั่นได้มากน้อยแค่ไหนกับนักเรียน

นอกจากนี้การใช้ชุดกิจกรรมจะประสบผลสำเร็จก็ต่อเมื่อ ได้มีการจัดสภาพแวดล้อมของ ห้องเรียนที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ดังกล่าวต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแท้จริง
2. ให้นักเรียนมีโอกาสทราบผลการกระทำทันทีจากกิจกรรม

3. มีการเสริมแรงนักเรียนจากประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จอย่างถูกต้อง
4. คอยชี้แนะแนวทางตามขั้นตอนในการเรียนรู้ตามที่ครูได้วิเคราะห์และกำหนดความสามารถพื้นฐานของนักเรียน

## 2.5 องค์ประกอบของชุดกิจกรรม

บุญเกิด ครอบหาเวช (2545: 95–97) ได้กล่าวว่า องค์ประกอบที่สำคัญๆ ภายในชุดกิจกรรม สามารถจำแนกออกเป็น 4 ส่วนด้วยกัน คือ

1. คู่มือครู เป็นคู่มือและแผนการสอนสำหรับผู้สอนหรือนักเรียนตามแต่ชนิดของชุดกิจกรรม ภายในคู่มือและชี้แจงถึงวิธีการใช้ชุดกิจกรรมเอาไว้อย่างละเอียด อาจจะเป็นเล่มหรือแผ่นพับก็ได้ ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดและหลักการเขียนในตอนต่อไป

2. บัตรคำสั่งหรือคำแนะนำ จะเป็นส่วนที่บอกให้นักเรียนดำเนินการเรียนหรือประกอบกิจกรรมแต่ละอย่าง ตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ บัตรคำสั่งจะมีอยู่ในชุดกิจกรรมแบบกลุ่มและรายบุคคล ซึ่งจะประกอบด้วย

- 2.1 คำอธิบายในเรื่องที่จะศึกษา

- 2.2 คำสั่งให้นักเรียนดำเนินการกิจกรรม

- 2.3 การสรุปบทเรียน

บัตรคำสั่งนี้ มักนิยมใช้กระดาษแข็งตัดเป็นบัตร ขนาด 6 คูณ 8 นิ้ว

3. เนื้อหาสาระและสื่อ จะบรรจุไว้ในรูปของสื่อการสอนต่างๆ อาจประกอบด้วยบทเรียนโปรแกรม สไลด์ เทปบันทึกเสียง फिल्मสคริปต์ แผ่นภาพโปร่งใส วัสดุกราฟิกส์ หุ่นจำลอง ของตัวอย่าง รูปภาพ เป็นต้น นักเรียนจะศึกษาจากสื่อการสอนต่างๆ ที่บรรจุอยู่ในชุดกิจกรรม ตามบัตรคำสั่งที่กำหนดไว้ให้

4. แบบประเมินผล นักเรียนจะทำการประเมินผลความรู้ด้วยตนเองก่อนและหลังเรียนแบบประเมินผลที่อยู่ในชุดการสอนอาจจะเป็นแบบฝึกหัดให้เติมคำในช่องว่างเลือกคำตอบที่ถูกต้อง จับคู่ ดูผลจากการทดลอง หรือให้ทำกิจกรรม เป็นต้น

บุญชม ศรีสะอาด (2541: 95) กล่าวว่าชุดกิจกรรมมีองค์ประกอบที่สำคัญ 4 ด้าน ดังนี้

1. คู่มือการใช้ชุดกิจกรรม เป็นคู่มือที่จัดทำขึ้นเพื่อให้ผู้ใช้ชุดกิจกรรมศึกษาและปฏิบัติตามเพื่อให้บรรลุผลอย่างมีประสิทธิภาพ อาจประกอบด้วยแผนการสอน สิ่งที่ต้องเตรียมก่อนสอนบทบาทของนักเรียน และการจัดชั้นเรียน

2. บัตรงาน เป็นบัตรที่มีคำสั่งว่าจะให้นักเรียนปฏิบัติอะไรบ้าง โดยระบุกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนของการเรียน

3. แบบทดสอบวัดผลความก้าวหน้าของนักเรียน เป็นแบบทดสอบที่ใช้สำหรับตรวจสอบว่าหลังจากเรียนชุดกิจกรรมจบแล้วนักเรียนเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้หรือไม่

4. สื่อการเรียนต่างๆ เป็นสื่อสำหรับนักเรียนได้ศึกษามีหลายชนิดประกอบกัน อาจเป็นประเภทสิ่งพิมพ์ เช่น บทความ เนื้อหาเฉพาะเรื่อง จุลสาร บทเรียนโปรแกรม หรือประเภทโสตทัศนอุปกรณ์

สุมานิน รุ่งเรืองธรรม (2526: 114–116) ได้กล่าวว่า ชุดกิจกรรมมีหลายประเภทต่างๆ กัน อย่างไรก็ตามก็ดีชุดกิจกรรมประเภทต่างๆ นี้ มีส่วนที่เป็นองค์ประกอบพื้นฐานที่คล้ายคลึงกัน 7 ประการ คือ

1. หัวเรื่อง เป็นการแบ่งหน่วยงานออกเป็นส่วนย่อยให้นักเรียนได้เข้าใจยิ่งขึ้น ซึ่งหัวเรื่องนี้ต้องตรงกับความต้องการของนักเรียนและผู้สอนอีกทั้งมีคุณค่าแก่การเรียนการสอนตามหลักสูตร

2. คู่มือการใช้ชุดกิจกรรม เป็นสิ่งที่จำเป็นมากซึ่งผู้ใช้ชุดกิจกรรมนั้นจะศึกษาจากคู่มือเป็นอันดับแรกดังนั้นคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมจึงประกอบด้วย

2.1 หัวเรื่อง กำหนดเวลาเรียนและจำนวนนักเรียน

2.2 เนื้อหา สาระสำคัญจากรายละเอียดของเนื้อเรื่องทั้งหมด ควรจะบรรยายเนื้อหาอย่างสั้นๆ

2.3 ความคิดรวบยอด (Concept) กล่าวถึงหลักการเรียนรู้ที่มุ่งเน้น

2.4 วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ที่มุ่งจะให้ นักเรียนได้รับ

2.5 สื่อการเรียนหรือวัสดุประกอบการเรียน ระบุรายการศึกษาค้นคว้า และที่ผู้สอนจะใช้ประกอบการสอน

2.6 กิจกรรมการเรียน เป็นการกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน และการใช้อุปกรณ์

2.7 การประเมินผล

3. วัสดุประกอบการเรียนหรือสื่อ รายการที่ระบุไว้ในคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมจะต้องมีไว้ในชุดกิจกรรมจริงๆ และต้องระบุรายการวัสดุอุปกรณ์ หรือสื่อที่มีอยู่ด้วยหมายเลขให้แน่ชัด

4. การประเมินผล แบบประเมินผลเพื่อดูพฤติกรรมของนักเรียน อาจเป็นลักษณะของแบบทดสอบ หรือการให้แสดงผลงาน ซึ่งจะต้องกำหนดให้ชัดเจนและออกแบบมาให้เข้าใจ

5. สิ่งที่ใช้บรรจุ ขนาดรูปแบบของชุดกิจกรรม ไม่ควรจะให้ใหญ่เกินไป ต้องคำนึงถึงความสะดวกในการขนย้ายและการนำไปใช้

6. กิจกรรมสำรวจ ถ้าเป็นชุดกิจกรรมแบบกลุ่มกิจกรรม ควรจะจัดกิจกรรมสำรวจไว้สำหรับนักเรียนบางคนที่ทำเสร็จก่อนผู้อื่นได้มีกิจกรรมอย่างอื่นทำ

7. ทดลองใช้ เพื่อปรับปรุงแก้ไขก่อนที่จะนำออกใช้ประกอบการสอน

จากการศึกษาเรื่ององค์ประกอบของชุดกิจกรรมผู้วิจัยได้ทำรวบรวมและได้สรุปองค์ประกอบของชุดกิจกรรมไว้ดังนี้

1. คู่มือการใช้ชุดกิจกรรมประกอบไปด้วยหัวข้อเรื่องจุดประสงค์ของการจัดทำชุดกิจกรรม คำอธิบายการใช้เครื่องมือของชุดกิจกรรม เวลาที่ใช้ในการทำกิจกรรมแต่ละหน่วย เกณฑ์ในการประเมินผล เป็นต้น

2. ชุดกิจกรรมที่จะนำมาใช้ในการเรียนการสอน ประกอบไปด้วยสื่อต่างๆ อาจจะเป็นบัตรคำ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ แผ่นใส หรือวัสดุอุปกรณ์ต่างๆ เป็นต้น อีกทั้งควรมีกิจกรรมสำรวจเอาไว้ในกรณีที่กิจกรรมหลักนั้นนักเรียนทำเสร็จไว้

3. แบบทดสอบวัดผลความก้าวหน้าของนักเรียน หรือแบบประเมินผลการเรียน

## 2.6 คุณค่าของชุดกิจกรรม

ชุดกิจกรรมเป็นสื่อการสอนที่มีคุณค่าต่อระบบการสอน เพราะเป็นตัวช่วยให้เกิดการถ่ายทอดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ นักการศึกษากล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรมไว้หลายท่านดังนี้ กาญจนา เกียรติประวัติ (2524: 175–176) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรม ไว้ดังนี้

1. ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการสอนของคุณ ลดบทบาทในการบอกของคุณ

2. ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนของนักเรียน เพราะสื่อประสมที่ได้จัดไว้ในระบบเป็นการแปรเปลี่ยนกิจกรรมและช่วยรักษาระดับความสนใจของนักเรียนอยู่ตลอดเวลา

3. เปิดโอกาสให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง ทำให้มีทักษะในการแสวงหาความรู้ พิจารณาข้อมูล และฝึกความรับผิดชอบ การตัดสินใจ

4. เป็นแหล่งความรู้ที่ทันสมัย และคำนึงถึงหลักจิตวิทยาการเรียนรู้

5. ช่วยขจัดปัญหาการขาดครู เพราะนักเรียนสามารถศึกษาด้วยตนเอง

6. ส่งเสริมการศึกษานอกระบบ เพราะสามารถนำไปใช้ได้ตลอดเวลาและไม่จำเป็นต้องใช้เฉพาะในโรงเรียน

บุญเกื้อ ควรหาเวช (2545: 110–111) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรม ไว้ดังนี้

1. ส่งเสริมการเรียนแบบรายบุคคล นักเรียนเรียนได้ตามความสามารถ ความสนใจตามเวลาและโอกาสที่เหมาะสมของแต่ละคน

2. ช่วยขจัดปัญหาการขาดแคลนครู เพราะชุดกิจกรรมช่วยให้นักเรียน เรียนได้ด้วยตนเองหรือต้องการความช่วยเหลือจากผู้สอนเพียงเล็กน้อย

3. ช่วยในการศึกษานอกระบบโรงเรียน เพราะนักเรียนสามารถนำเอาชุดกิจกรรมไปใช้ได้ทุกสถานที่และทุกเวลา

4. ช่วยลดภาระและช่วยสร้างความพร้อมและความมั่นใจให้แก่ครูเพราะชุดกิจกรรมผลิตไว้เป็นหมวดหมู่ สามารถนำไปใช้ได้ทันที

5. เป็นประโยชน์ในการสอนแบบศูนย์การเรียน

6. ช่วยให้ครูวัดผลนักเรียนได้ตรงตามความมุ่งหมาย

7. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ฝึกการตัดสินใจแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง และมีความรับผิดชอบต่อตนเองและสังคม

8. ช่วยให้นักเรียนจำนวนมากได้รับความรู้แนวเดียวกันอย่างมีประสิทธิภาพ

9. ช่วยฝึกให้นักเรียนรู้จักเคารพ นับถือ ความคิดเห็นของผู้อื่น

สุมานิน รุ่งเรืองธรรม (2526: 113–114) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรมหรือชุดการสอนไว้ดังนี้

1. ให้ผู้สอนรู้จักใช้เทคนิคในการสำรวจนักเรียนจากพฤติกรรมที่เด็กแสดงออกมา

2. ให้ผู้สอนรู้จักนำนักเรียนเข้ามีส่วนร่วมในการเรียน

3. ให้ผู้สอนรู้จักใช้การเสริมแรง

4. ช่วยแบ่งเบาภาระของผู้สอนและขจัดปัญหาการขาดแคลนครู

5. เปิดโอกาสให้นักเรียนเรียนตามความสามารถ ความสนใจ และความถนัดของตนเอง

6. ช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนช้าผิดปกติ ซึ่งอาจนำชุดการสอนนี้ไปเรียนเองที่บ้านโดยที่ผู้ปกครองคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ

7. ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความพยายามเรียนด้วยตนเอง และลดเวลาในการเรียนลงไปได้

สันทัต ภิบาลสุข และพิมพ์ใจ ภิบาลสุข (2525: 199) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดการเรียนการสอนไว้ดังนี้

1. ช่วยเร้าความสนใจของนักเรียนต่อสิ่งที่กำลังศึกษาอยู่ เพราะชุดการเรียนจะเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนของตนมากที่สุด

2. นักเรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมการเรียนด้วยตนเอง และเรียนได้ตามความสามารถ ความสนใจ หรือความต้องการของตนเอง

3. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ฝึกการตัดสินใจแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง และมีความรับผิดชอบต่อตนเองและสังคม

4. ช่วยให้นักเรียนจำนวนมากได้รับความรู้แนวเดียวกัน

5. ทำให้การเรียนรู้เป็นอิสระจากอารมณ์ของครู ชุดการเรียนรู้สามารถทำให้นักเรียนเรียนได้ตลอด ไม่ว่าผู้สอนจะมีสภาพหรือค้ำข้องทางอารมณ์มากน้อยเพียงใด

6. ช่วยให้การเรียนเป็นอิสระจากบุคลิกภาพของครู เนื่องจากชุดการเรียนรู้ช่วยถ่ายทอดเนื้อหาได้ ดังนั้นครูที่พูดไม่เก่งก็สามารถสอนให้มีประสิทธิภาพได้

7. ช่วยให้ครูวัดผลนักเรียนได้ตรงตามจุดมุ่งหมาย

8. ช่วยลดภาระและสร้างความพร้อมและความมั่นใจให้แก่ครูเพราะชุดการเรียนรู้ผลิตไว้เป็นหมวดหมู่ สามารถนำไปใช้ได้ทันที

9. ช่วยขจัดปัญหาขาดแคลนครูผู้ชำนาญการ เพราะชุดการเรียนรู้ช่วยให้นักเรียนได้เรียนด้วยตนเอง หรือต้องการความช่วยเหลือจากครูเพียงเล็กน้อย

10. ช่วยสร้างเสริมการเรียนรู้แบบต่อเนื่องหรือการศึกษาจากระบบ เพราะชุดการเรียนรู้สามารถนำไปสอนนักเรียนได้ทุกสถานที่ทุกเวลา

11. แก้ปัญหาความแตกต่างระหว่างบุคคล เพราะชุดกิจกรรมสามารถทำให้นักเรียนได้เรียนตามความสามารถ ความถนัด และความสนใจ ตามเวลาและโอกาสที่เอื้ออำนวยแก่นักเรียนซึ่งแตกต่างกัน

ซัยยงศ์ พรหมวงศ์ และคนอื่นๆ (2523: 121) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรมว่า “ไม่ว่าจะเป็นชุดกิจกรรมประเภทใด ย่อมมีคุณค่าต่อการเพิ่มคุณภาพในการเรียนการสอน หากได้มีการผลิตที่มีการทดสอบ วิจัยแล้วด้วยกันทั้งนั้น” คุณค่าของชุดกิจกรรมพอจะสรุปได้ดังนี้

1. ช่วยให้ผู้สอนถ่ายทอดเนื้อหา ประสบการณ์ที่สลับซับซ้อน มีลักษณะเป็นนามธรรมสูง เช่น การทำงานของเครื่องจักรกล อวัยวะของร่างกาย การเจริญเติบโตของสัตว์ชั้นต่ำ เป็นต้นซึ่งผู้สอนไม่สามารถถ่ายทอดด้วยการบรรยายได้ดี

2. ช่วยเร้าความสนใจของนักเรียนต่อสิ่งที่กำลังศึกษา เพราะชุดกิจกรรม เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนของตนเองและสังคม

3. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ฝึกการตัดสินใจ แสวงหาความรู้ด้วยตนเองและสังคม

4. ช่วยสร้างความพร้อม ความมั่นใจแก่ผู้สอน เพราะชุดกิจกรรมที่ผลิตไว้เป็นหมวดหมู่ สามารถหยิบใช้ได้ทันที โดยเฉพาะผู้มีเวลาในการเตรียมการสอนล่วงหน้า

5. ทำให้การเรียนการสอนเป็นอิสระจากอารมณ์ของผู้สอน นักเรียนได้ตลอดเวลาไม่ว่าผู้สอนจะมีสภาพขัดข้องทางอารมณ์เพียงใด

6. ช่วยให้การเรียนเป็นอิสระจากบุคลิกภาพของผู้สอน ชุดกิจกรรมทำหน้าที่ถ่ายทอดความรู้แทนครู แม้ครูจะพูดหรือสอนไม่เก่ง นักเรียนสามารถเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพจากชุดกิจกรรมที่ได้ผ่านการทดสอบประสิทธิภาพมาแล้ว

7. ในกรณีที่ครูขาด ครูอื่นสามารถสอนแทนได้โดยใช้ชุดกิจกรรม ครูไม่ต้องเข้าไปนั่งคุมชั้นหรือปล่อยนักเรียนอยู่เฉย ๆ เพราะเนื้อหาอยู่ในชุดกิจกรรมเรียบร้อยแล้ว ครูผู้สอนแทนไม่ต้องเตรียมตัวอะไรมากนัก

คณาภรณ์ รัศมีมารีย์ (วารสารการศึกษาศาสตร์. 2547: ฉบับที่ 130) ได้กล่าวถึงคุณค่าของชุดกิจกรรมตามแนวคิดของแฮริสเบอร์เกอร์ มี 5 ประการ คือ

1. นักเรียนสามารถทดสอบตนเองก่อนว่ามีความสามารถอยู่ในระดับใด หลังจากนั้นก็นำมาเริ่มต้นเรียนในสิ่งที่ตนเองก็ไม่ทราบ ทำให้ไม่ต้องเสียเวลากลับมาเรียนในสิ่งที่นักเรียนรู้อยู่แล้ว

2. นักเรียนสามารถนำบทเรียนไปเรียนที่ไหนก็ได้ตามความพอใจไม่จำกัดในเรื่องของเวลา สถานที่

3. เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถทดสอบตัวเองได้ทันทีเวลาไหนก็ได้ และได้ทราบผลการเรียนของตนเองเลยเช่นกัน

4. นักเรียนมีโอกาสได้พบปะกับผู้สอนมากขึ้น เพราะนักเรียนเรียนด้วยตนเอง ครูก็มีเวลาให้คำปรึกษากับผู้มีปัญหาในขณะที่เรียนชุดการเรียนที่เรียนด้วยตนเอง

5. นักเรียนจะได้รับคะแนนอะไรนั้นขึ้นอยู่กับความสามารถของนักเรียนหรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนเอง ไม่มีคำว่าสอบตกสำหรับนักเรียนไม่สำเร็จ แต่จะให้นักเรียนกลับไปศึกษาเรื่องเดิมนั้นใหม่จนผลการเรียนได้ตามเกณฑ์มาตรฐานที่ตั้งไว้

## 2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับชุดกิจกรรม

ธงชัย ขำเทศเจริญ (2546) ได้ทำการศึกษาคำเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหารของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการใช้ชุดการสอนแบบศูนย์การเรียนกับชุดการสอนแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ที่มีการนำ เสนอในรูปแบบชนิดเคท กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนบ้านหนองยาง (อนุศาสนานุสรณ์) โรงเรียนกุดตาดี (คงฤทธิศุภราชกูร์สามัคคี) และโรงเรียนถนนสุนทรารายณ์ (คุรุรัฐประชาสรรค์) กิ่งอำเภอพระทองคำ จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 รวมทั้งสิ้น 136 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างในการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนแต่ละรูปแบบ ซึ่งมี 3 ขั้นตอน คือ ขั้นทดสอบรายบุคคล ขั้นทดสอบกลุ่มเล็กและขั้นทดสอบภาคสนาม ผลการศึกษา พบว่า 1). ชุดการสอนที่พัฒนาขึ้น 2 รูปแบบ คือ ชุดการสอนแบบศูนย์การเรียนและชุดการสอนแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ที่มีการนำ เสนอเนื้อหาในรูปแบบการชุดสอนแบบชนิดเคท มีประสิทธิภาพ 75.08/74.29 และ 79.34/76.30 ตามลำดับ เป็นไป

ตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ 75/75 2). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดการสอนแบบแบ่งกลุ่ม ผลสัมฤทธิ์ที่มีเกียรนำ เสนอในรูปแบบชนิดเคทสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดการสอนแบบศูนย์การเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ผ่องศรี หวานเสียง (2547) ได้ทำการศึกษาผลการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการเรียนแบบชิปปาเรื่องโจทย์ปัญหาการคูณของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านป่าสักสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาเชียงราย เขต 2 จำนวน 25 คนเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการเรียนแบบชิปปาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแบบวัดเจตคติของนักเรียนต่อการเรียนด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่าชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการเรียนแบบชิปปาเรื่องโจทย์ปัญหาการคูณที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือ 80/80 นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือร้อยละ 65 นักเรียนมีเจตคติในเชิงบวกต่อการเรียนการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์

ณัฐกฤษ จันทรตะ (2548) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาชุดการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/3 จำนวน 32 คนที่กำลังเรียนอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนหนองฉางวิทยา อำเภอหนองฉาง จังหวัดอุทัยธานี ผลการวิจัยพบว่า 1). ชุดการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพ 90.00/78.94 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ 80/80 2). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่ได้รับการสอนโดยการใช้ชุดการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3). ความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่ได้รับการสอนโดยการใช้ชุดการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ถาวร ลักษณะ (2548) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนด้วยชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติกับการสอนตามคู่มือครู เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ 1). ชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80 / 80 2). แผนการสอนตามคู่มือครูอยู่ในระดับที่เหมาะสมดีมาก 3). แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ

4). แบบวัดความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นแบบลิเคอร์ทสเกล 5 ตัวเลือก จำนวน 26 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า 1). ชุดการสอนที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพ 94.12 / 86.56 สูงกว่าเกณฑ์ 80 / 80 2). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนด้วย ชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู อย่างมีนัยสำคัญระดับ .05 3). ความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนด้วยชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องสถิติ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญระดับ .05

จากงานวิจัยที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาข้างบนนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น แต่จากการศึกษาพบว่าชุดการสอนหรือชุดกิจกรรมการเรียนการสอนช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้น

## ตอนที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### 1. ประวัติโดยย่อ

การที่จะบอกถึงแหล่งที่มาของตรีโกณมิติ นั้นยังไม่มีหลักฐานยืนยัน วิธีการของตรีโกณมิติถูกนำมาใช้ให้เป็นประโยชน์ในเรื่องของ การสำรวจ การวัดแผนที่ การคำนวณพื้นที่ และการเดินเรือ ซึ่งแน่นอนว่ามันเป็นสิ่งที่สำคัญจริงๆ ซึ่งวิชาตรีโกณมิติ นั้นได้ถูกนำมาให้นักเรียนได้ศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย เป็นการศึกษาแนวคิดที่เกี่ยวกับการใช้ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ เพื่อวัดมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของวิชาตรีโกณมิติ ซึ่งต่อมาในระดับที่สูงขึ้นจะเป็นการศึกษาที่เปลี่ยนจากเรื่องที่เคยศึกษาเกี่ยวกับการวัดมาเป็นศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันแทนหรือที่คุ้นเคยกันคือฟังก์ชันตรีโกณมิติ

คำว่า “ตรีโกณมิติ” ไม่ทราบว่ามีจุดกำเนิดมาจากที่ใด แต่จากภาษากรีกคำว่า *trigonon* ซึ่งหมายความว่า “รูปสามเหลี่ยม” และจากภาษากรีก คำว่า *metria* ซึ่งหมายความว่า “การวัด” เดิมทีตรีโกณมิติได้ถูกพัฒนามาจากการศึกษาของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยศึกษาจากการใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการวัดความยาวของด้านและการวัดมุมของเรื่องที่เกี่ยวข้องกับเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย อย่างไรก็ตามคำว่า “ตรีโกณมิติ” ก็ยังไม่สามารถบอกที่มาได้อย่างแน่ชัดนัก แต่ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์และนักเรียนดาราศาสตร์ชาวเยอรมันได้แนะนำเกี่ยวกับตรีโกณมิติลงไปในงานของเขาว่า *Trigonometria sive de solutione triangularum tractatus brevis et perspicuus...* ซึ่งมีการประกาศในปี 1595 จากนั้นในปี 1600 ได้มีการปรับปรุงแก้ไข และประกาศอีกครั้งว่า *Trigonometria sive de dimensione triangulae.*

จุดกำเนิดของตรีโกณมิติและพัฒนาการของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นมีประวัติความเป็นมาที่ต่าง ๆ นานา กันมากมาย ตรีโกณมิติไม่ใช่งานของคนใดคนหนึ่งหรือชาติใดชาติหนึ่ง อันที่จริงแล้วในสมัยอียิปต์โบราณและสมัยบาบิโลนได้มีการพัฒนาทฤษฎีบทของอัตราส่วนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย ก่อนที่จะมีตรีโกณมิติซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งทั้งสองกลุ่มนี้ได้มีการนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้แต่ยังไม่ชัดเจนนัก โดยที่อียิปต์นำตรีโกณมิติไปใช้ประโยชน์เกี่ยวกับการสำรวจแผนที่และการสร้างพีระมิด ส่วนบาบิโลนนักดาราศาสตร์ได้มีการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับความยาวส่วนโค้งของวงกลมและระยะทางของคอร์ดีที่อยู่มุมตรงข้ามกับส่วนโค้งบนวงกลม สำหรับชาวกรีกมีการค้นพบว่า ชาวกรีกได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของคอร์ดีกับมุมที่รองรับคอร์ดีนั้นอย่างเป็นระบบ ซึ่งเรื่องเหล่านี้เป็นเรื่องที่คุ้นเคยสำหรับชาวกรีกในสมัยของ ฮิปโปเครติส (Hippocrates, ประมาณ 460 ปีก่อนคริสต์ศักราช) และในเวลาใกล้เคียงกันนี้ ยูโดซัส (Eudoxus, ประมาณ 408–355 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้ใช้อัตราส่วนและการวัดมุมในการหาขนาดของโลกและระยะทางสัมพันธ์ระหว่างดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ ส่วนผลงานของยุคลิดในทางเรขาคณิตนั้นมีทฤษฎีบทอยู่หลายทฤษฎีบทที่สามารถใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางตรีโกณมิติ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับความยาวของคอร์ดีซึ่งคล้ายคลึงกับไซน์และโคไซน์ของผลบวกและผลต่างของมุม บางทฤษฎีบทก็มีความสัมพันธ์โดยตรงกับกฎของไซน์

## 2. แนวการสอนฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับแนวการสอนฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยศึกษาขอบเขตของเนื้อหาว่าควรทำการศึกษาในแนวทางใด และการเรียบเรียงลำดับของเนื้อหา ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาแนวทางการสอนฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

ซูลลิแวน (Sullivan, 1996: 495–567) ได้นำเสนอแบบเรียนเกี่ยวกับพีชคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในบทที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเขาได้วางลำดับเนื้อหาพอจะสรุปได้ดังนี้

1. ตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นการกล่าวถึงทฤษฎีบทพีทาโกรัส และศึกษาเกี่ยวกับอัตราส่วนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อัตราส่วนตรีโกณมิติ ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสนำไปสู่เอกลักษณ์พื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

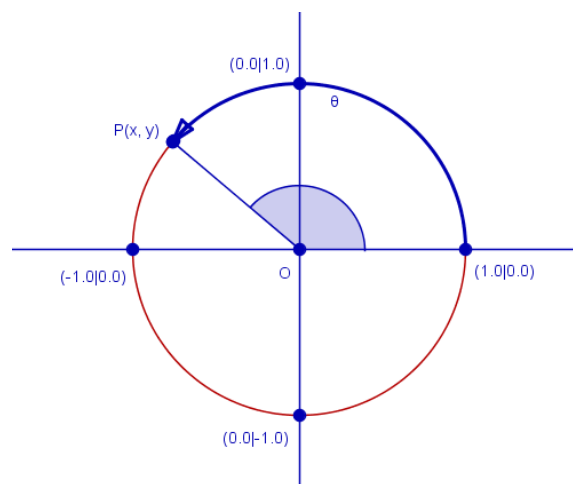
2. สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยผ่านวงกลมหนึ่งหน่วย เริ่มจากให้รู้จักวงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle) และความสัมพันธ์ระหว่างเรเดียนกับความยาวส่วนโค้ง และนำไปสู่การนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน สุดท้ายกล่าวถึงโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3. การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กล่าวถึงการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและมุม ทั้งที่เป็นพื้นฐานและจำนวนจริงใดๆ

4. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะกล่าวถึงกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของจำนวนจริงโดยจำนวนจริงอยู่บนแกน X และค่าของฟังก์ชันอยู่บนแกน Y และกล่าวถึงแอมพลิจูดและคาบของฟังก์ชัน

เบคเคนบาค และดรูยาน (Beckenbach ; & Drooyan. 1968: 155–215) ได้นำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแบ่งการนำเสนอที่ละส่วนคือ เซอร์คูลาฟังก์ชัน (Circular Functions) และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยที่วางลำดับเนื้อหา ดังนี้

1. เซอร์คูลาฟังก์ชัน (Circular Functions) เริ่มจากการนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนี้



ภาพประกอบ 2 แสดงการเขียนนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ โดยวิธีเซอร์คูลาฟังก์ชัน

จากภาพประกอบ 2 จะได้ว่าเมื่อ  $P(x, y)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ยาว  $\theta$  แล้ว  $\cosine = \{(\theta, x) | x = \cos \theta\}$ ,  $sine = \{(\theta, y) | y = \sin \theta\}$  จากนั้นได้อาศัยนิยามนี้หาค่าไซน์และโคไซน์ของจำนวนใดๆ เช่น  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

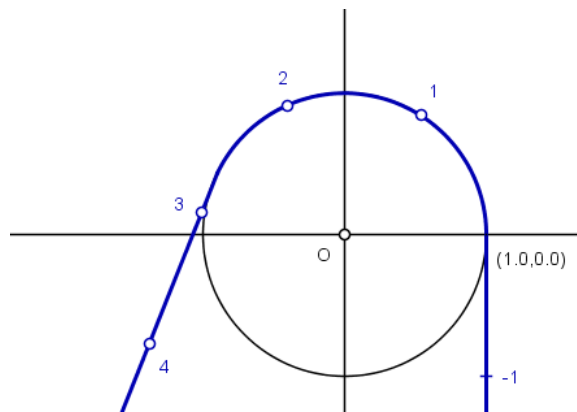
2. เอกลักษณะณ์ จะกล่าวถึงเอกลักษณะณ์พื้นฐานของเซอร์คูลาฟังก์ชันพร้อมทั้งพิสูจน์เอกลักษณะณ์ของฟังก์ชัน

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ บทนี้ได้กล่าวถึงมุมในตำแหน่งมาตรฐาน การวัดมุมในระบบองศาและเรเดียน ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตาราง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. กราฟของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ กล่าวถึงการเขียนกราฟของไซน์และโคไซน์ และกล่าวถึงแอมพลิจูดและคาบของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$ ,  $y = T(k \cdot x)$ ,  $y = T(x) + k$  และ  $y = T(x+k)$

ชวโวลควอฟสกี (Swokowski. 1978: 38–98) ได้นำเสนอเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยเริ่มจากให้เรียนเซตของจำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชันซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของคณิตศาสตร์แผนใหม่ เพื่อเป็นพื้นฐานก่อนที่จะเรียนฟังก์ชันตรีโกณมิติในส่วนที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเขาได้วางลำดับเนื้อหา สรุปได้ดังนี้

1. The Wrapping Function หมายถึง ฟังก์ชันของส่วนของเส้นจำนวนจริงที่ทาบบลงไปในวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีโดเมนเป็นจำนวนจริงและเรนจ์เป็นคู่อันดับ ดังนี้



ภาพประกอบ 3 แสดงการอธิบายนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยวิธีการ The Wrapping Function

ทุกๆ ค่าของจำนวนจริงบนวงกลมหนึ่งหน่วยจะจับคู่กับจุด  $(x, y)$  ในระนาบเสมอ ดังนั้น The Wrapping Function จึงเป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของคู่ลำดับ  $(x, y)$  ดังกล่าว

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติจาก The Wrapping Function ในข้อ 1 โดยที่ เมื่อ  $t$  เป็นจำนวนจริงบนวงกลมหนึ่งหน่วย ที่จับคู่กับคู่ลำดับ  $(x, y)$  แล้ว

$$\begin{aligned} \sin t &= y & ; & & \cos t &= x \\ \tan t &= \frac{y}{x}, x \neq 0 & ; & & \cot t &= \frac{x}{y}, y \neq 0 \\ \csc t &= \frac{1}{y}, y \neq 0 & ; & & \sec t &= \frac{1}{x}, x \neq 0 \end{aligned}$$

3. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กล่าวถึงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงต่างๆ ทั้งที่ใช้และไม่ใช้ตาราง

4. การวัดมุม กล่าวถึงมุมในตำแหน่งมาตรฐาน การวัดมุมในระบบองศาและเรเดียน

5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม กล่าวถึงนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมแบบเรเดียนซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง แล้วจึงเชื่อมโยงไปถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมแบบองศา

และอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตลอดจนการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

6. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กล่าวถึงการเขียนกราฟของไซน์และโคไซน์ และฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ กล่าวถึง แอมพลิจูดและคาบของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548: 64–121) ได้มีการจัดเรียงลำดับเนื้อหา เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติในหนังสือแบบเรียนดังนี้ เริ่มจากวงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง แล้วนำเข้าสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและสูตรต่างๆ ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากนั้นก็นำสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม โดยกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในระบบเรเดียนก่อนแล้วใช้การแปลงมุมจากระบบเรเดียนเป็นระบบองศาและหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ ในระบบองศาจากการเทียบค่าไปยังมุมในระบบเรเดียน จากนั้นจะกล่าวถึงอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ สุดท้ายจะกล่าวถึงกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับแนวการสอนฟังก์ชันตรีโกณมิติ สรุปได้ว่ามีวิธีการนำเสนอวิธีการที่แตกต่างกัน ซึ่งอาจนำเข้าสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ขึ้นอยู่กับว่าผู้สอนจะเลือกใช้วิธีการนำเสนอแบบใด แต่การนำเสนอในแต่ละแบบก็มีส่วนที่เหมือนกันก็คือต้องคำนึงถึงพื้นฐานความรู้ของนักเรียนก่อนที่จะนำเสนอเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### 3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

#### งานวิจัยในประเทศ

สมศักดิ์ อ้วนสาเล (2540) ได้ทำการศึกษาการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยจิตวิทยาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา จังหวัดหนองบัวลำภู แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2539 จำนวน 286 คน โดยการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ (Stratified Random Sampling) จุดมุ่งหมายเพื่อ 1). เพื่อสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยจิตวิทยาคณิตศาสตร์ ให้มีคุณภาพ 2). เพื่อหาจุดบกพร่องที่นักเรียนมีปัญหาในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวินิจฉัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือกจำนวน 5 ฉบับ ผลการวิจัยพบว่าในแบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 1 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ นักเรียนมีจุดบกพร่อง คือ การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงพื้นฐาน การหาตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย และสืบสนเรื่องเครื่องหมายของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในช่วงต่างๆ แบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 2 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ จุดบกพร่องของนักเรียนคือการใช้สูตรต่างๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ บกพร่องเรื่องเครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติในควอดรนต์ต่างๆ และ

การคิดคำนวณ แบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 3 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม จุดบกพร่องที่พบคือเรื่อง เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติในควอดรนต์ต่างๆ การใช้สูตรต่างๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ และการหาตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย แบบทดสอบวินิจฉัยฉบับที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จุดบกพร่องคือ การใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก แปลความหมายโจทย์ไม่ครบ และการใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และแบบทดสอบ วินิจฉัยฉบับที่ 5 เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จุดบกพร่องคือ นักเรียนไม่เข้าใจความคิดรวบยอด เกี่ยวกับคาบของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับแอมพลิจูดของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ และไม่เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เกษม มุ่งลือ (2544) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการสร้งชุดการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับชั้น ประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนขอนแก่นพัฒนาศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น จำนวน 42 คน โดย การสุ่มแบบกลุ่ม ทดลองโดยใช้ชุดการสอนประกอบคำบรรยาย ซึ่งแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ การทดลอง แบบหนึ่งต่อหนึ่ง กับนักเรียน 3 คน แบบกลุ่มเล็กใช้นักเรียน 9 คน และแบบภาคสนามใช้นักเรียน จำนวน 30 คน ชุดการสอนประกอบคำบรรยายที่สร้างขึ้นมี 16 คาบ ซึ่งใช้เวลาเรียนคาบละ 50 นาที ซึ่งผลของการศึกษาพบว่าชุดการสอนประกอบคำบรรยายมีประสิทธิภาพโดยพิจารณาจากผลการ วิเคราะห์หาประสิทธิภาพ  $E_1/E_2 = 85.72 / 80.33$  และค่าดัชนีประสิทธิผล  $E.I. = .72$

บุปผา เขียวสกุล (2544) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน สกลราชวิทยานุกูล อำเภอเมือง จังสกลนคร ที่กำลังเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ภาคเรียนที่ 2 ปี การศึกษา 2542 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม จำนวน 40 คน ซึ่ง ได้มาโดยการเลือกแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการสอนที่ใช้ในชั้นเรียนปกติ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่มีค่าความเที่ยงตรง 0.7663 แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรม ทางการเรียน และบทเรียนคอมพิวเตอร์ ซึ่งประกอบด้วย แบบทดสอบประจำหน่วยก่อนเรียน บทเรียน คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม และแบบทดสอบประจำหน่วยหลังเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม มีผลการเรียนดี ขึ้น โดยนักเรียนส่วนใหญ่มีความก้าวหน้าทางการเรียนและมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 50 เกือบทุกจุดประสงค์ และนักเรียนมีความสนใจในการเรียนและมีวินัยในชั้นเรียนดีมาก มีความ รับผิดชอบในการเรียนและงานที่ได้รับมอบหมายสูง

กิตติยรัตน์ ภูริพัฒน์ (2545) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัย วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานสามัญศึกษาจังหวัดอุบลราชธานี จำนวน 957 คนได้ มาจากการสุ่มตัวอย่างหลายขั้นตอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อพัฒนา แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ 2) หาคุณภาพของ

แบบทดสอบวินิจฉัยทั้งฉบับและรายข้อ และ 3). สร้างคู่มือการใช้แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้แบบทดสอบที่สร้างขึ้นประกอบด้วยแบบทดสอบ ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 6 ฉบับ คือ 1). ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 2). ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 3). ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ 4). ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 5). การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากตาราง 6). กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผลการวิจัยพบว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดจุดบกพร่องเรียง ลำดับจากมากไปน้อยคือ นักเรียนบกพร่องการคิดคำนวณ นักเรียนไม่เข้าใจค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ บกพร่องเรื่องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เข้าใจในการกำหนดเครื่องหมายในควอดรันต์ บกพร่อง เรื่องการหาค่าและไม่เข้าใจการเขียนค่าของเลขคณิตของฟังก์ชันและการหารเศษส่วน ตามลำดับ

วีระศักดิ์ พัทบุรี (2545) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชา คณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและมุมระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสตูล วิทยา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 102 คน โดยการสุ่มอย่างง่าย จุดมุ่งหมาย 1). เพื่อ พัฒนาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน และ 2). เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน 3). เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีปกติ โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 30 คน โดยที่กลุ่มที่ 1 คือกลุ่มทดลอง กลุ่มที่ 2 คือกลุ่ม ควบคุม ผลการวิจัยพบว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของ จำนวนจริงและมุม มีประสิทธิภาพ 84.83/82.67 และผลการเปรียบเทียบระหว่างก่อนเรียนและหลัง เรียน ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนปรากฏว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ ทางเรียนหลังเรียนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอน แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

จิตรภรณ์ ภูแก้ว (2547) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็น สำคัญ โดยใช้กิจกรรมที่หลากหลาย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนวัฒนานคร อำเภอวัฒนานคร จังหวัดสระแก้ว ที่ได้มาโดยการ สุ่มแบบแบ่งกลุ่ม(Cluster Random Sampling)1ห้องเรียนจำนวน 45 คน จุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาชุด กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญโดยใช้กิจกรรมที่หลากหลาย และหาคุณภาพของชุด กิจกรรม โดยพิจารณาจากประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ก่อนและหลังได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ ดำเนินการสอนโดย ใช้เวลา จำนวน 17 ชั่วโมง โดยใช้แบบแผนการทดลองแบบ One Group Pretest – Postest Design และวิเคราะห์ข้อมูล โดยการทำการทดสอบค่าสถิติ t-test Dependent ผลการวิจัยพบว่าชุดกิจกรรม

การเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญ โดยใช้กิจกรรมที่หลากหลาย มีประสิทธิภาพ 89.22/87.26 สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ชุดกิจกรรมสูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ชิษณุชา พระสว่าง (2547) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสุรนารีวิทยา จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 40 คน ได้สุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง รูปแบบการวิจัยเป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการ มีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบร่วมมือกันเรียนรู้ และศึกษาความคงทนในการเรียนรู้ ผลการวิจัยปรากฏว่า กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ ที่พัฒนาขึ้นมามีประสิทธิภาพ 98.02/81.31 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด และมีค่าดัชนีประสิทธิผล 0.75 ซึ่งหมายความว่านักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นหลังการเรียน ร้อยละ 75.00 และนักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้ เท่ากับ 0.36

ปิยาพัชร พวงมาลัย (2547) ได้ทำการศึกษาการสร้างชุดการสอน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนบ้านหันวิทยา อำเภอเกษตรสมบูรณ์ จังหวัดชัยภูมิ จำนวน 24 คน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม เพื่อทำการทดสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาครั้งประกอบด้วย แบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 20 ข้อและชุดการสอนแบบบรรยาย เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ การทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง กับนักเรียน 3 คน แบบกลุ่มเล็กใช้กับนักเรียน 9 คน และแบบภาคสนามใช้กับนักเรียน 12 คน ชุดการสอนแบบบรรยายที่สร้างขึ้นมี 6 คาบ ใช้เวลาเรียนคาบละ 60 นาที ผลการวิจัยพบว่า ชุดการสอนแบบบรรยายมีประสิทธิภาพโดยพิจารณาจากผลการวิเคราะห์หาประสิทธิภาพ  $E_1/E_2 = 92.12 / 82.08$  และค่าดัชนีประสิทธิผล  $E.I. = .72$

มัทนีย์ ศรีนาค (2547) ได้ทำการศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนหัวหิน จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ จำนวน 30 คน โดยเลือกมาทั้งห้องเรียน จุดมุ่งหมายเพื่อ

- 1). พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยเน้นการลงมือปฏิบัติ
- 2). ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน เครื่องมือที่ใช้การวิจัยประกอบด้วย 2.1). แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการลงมือปฏิบัติ 2.2). แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ก่อน-หลังเรียนแบบคู่ขนาน ผลการวิจัยพบว่า กิจกรรมการเรียนรู้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 และความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนหลังการใช้กิจกรรมสูงกว่าก่อนการใช้กิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ศิริลักษณ์ กุโบล่า (2547) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสุนารีวิทยา อำเภอเมือง จังหวัด นครราชสีมา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ได้มาจากการสุ่มนักเรียน 1 ห้องเรียนจาก 7 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 41 คน จุดมุ่งหมาย 1). เพื่อหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ตามเกณฑ์ 75/75 2). หาดัชนีประสิทธิผลของบทเรียนคอมพิวเตอร์ 3). ศึกษาผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ 4). ศึกษา ความพอใจของนักเรียนที่มีต่อบทเรียนคอมพิวเตอร์ ซึ่งเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้ามีดังนี้ 1). บทเรียนคอมพิวเตอร์ ที่ผ่านการประเมินของผู้เชี่ยวชาญด้านสื่อและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ว่าอยู่ใน เกณฑ์ดีมาก 2). แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแบบอิงเกณฑ์ที่เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ 3). แบบสอบถามความพึงพอใจที่เป็นแบบมาตราส่วน ประมาณค่า 5 ระดับ จำนวน 20 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อินเวอร์สของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีประสิทธิภาพ 77.64/83.35 สูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ ดัชนี ประสิทธิภาพเท่ากับ 0.7725 แสดงว่าบทเรียนคอมพิวเตอร์ทำให้นักเรียนมีความก้าวหน้าทางการเรียน เพิ่มขึ้นคิดเป็นร้อยละ 77.25 และผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ทำให้บรรยากาศของการเรียนการ สอนดีขึ้น นักเรียนมีความสุขในการเรียน แต่มีความยุ่งยากในการจัดเวลาการใช้ห้องเรียน นักเรียนมี ความพึงพอใจในระดับมาก

#### งานวิจัยในต่างประเทศ

เคนดอล, มากาเร็ท และ สเตซี, เคย์ (Kendal, Margaret ; & Stacey, Kaye. 1997: Abstract) ได้ทำการศึกษาวิธีการสอน เรื่องตรีโกณมิติ ในโรงเรียนวิศวะที่ ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการศึกษา วิธีการสอน เรื่องตรีโกณมิติออกเป็น 2 วิธี ได้แก่ วิธีที่ 1 คือการสอนตรีโกณมิติโดยการเปรียบเทียบ อัตราส่วน (Ratio method) ความยาวของด้านในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และวิธีที่ 2 คือการสอน ตรีโกณมิติโดยการใช้วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit circle- method) ผลของการวิจัยพบว่านักเรียนที่ได้รับการ สอนด้วยวิธีที่ 1 ส่วนใหญ่มีคะแนนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีที่ 2

ออหลัน, เนวิน (Orhun, Nevin. 2000, July: Abstract) ได้ทำการศึกษาข้อผิดพลาด ของ นักเรียนที่เรียนเรื่องตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างจำนวน 77 คน ที่ศึกษาอยู่ในเกรด 10 ในการวิจัยผู้วิจัยได้ สร้างคำถามที่เกี่ยวกับแนวคิดพื้นฐานของตรีโกณมิติไว้ 15 ข้อ และนำไปใช้ถามนักเรียนแต่ในที่นี้ผู้วิจัย ได้เลือกคำถามมา 4 ข้อจาก 15 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความผิดพลาดอย่างมากเกี่ยวกับ รูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างมุมกับจำนวนจริง และฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เว็บบอร์, เคอิซ (Weber, Keith. 2005: Abstract) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาความ เข้าใจของนักเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้แยกออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกเป็น นักศึกษาในมหาวิทยาลัยในเขตทางใต้ของสหรัฐอเมริกาที่กำลังศึกษาวิชาตรีโกณมิติ จำนวน 31 คน

และกลุ่มสองเป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยเดียวกัน จำนวน 40 คน ซึ่งในกลุ่มแรกจะเป็นการเรียนวิชาตรีโกณมิติจากศาสตราจารย์ที่มีประสบการณ์สอนมามากกว่า 30 ปี ซึ่งสอนโดยใช้วิธีการบรรยายเป็นหลัก ซึ่งครูผู้สอนจะเป็นผู้อธิบายซะส่วนใหญ่ สำหรับกลุ่มสองใช้วิธีการสอนโดยให้นักศึกษาเรียนโดยการให้แบบรูปเพื่อให้นักเรียนได้มองความสัมพันธ์ออกด้วยการสังเกต และการทดลองปฏิบัติ ผลของการวิจัยพบว่า นักศึกษาที่เรียนด้วยวิธีการบรรยายนั้นการพัฒนาการความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันนั้นถูกจำกัดไว้แค่ที่ผู้สอน สำหรับนักศึกษาที่รับการทดลองการสอนมีการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างลึกซึ้งมากกว่า

ฟอลน, แอคเซล เพอเชิน และเมอร์ฟี, เทเร็น เฟลเทอร์ (Faughn, Axelle Person ; & Murphy, Terran Felter. 2007: Abstract) ได้ทำการศึกษาผลของการใช้โปรแกรมซอฟต์แวร์ทางเรขาคณิตในการสอน เรื่องตรีโกณมิติ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือชุดกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อให้นักเรียนได้ทำการสำรวจโดยการลงมือปฏิบัติจริง สังเกต และตั้งข้อคาดการณ์ เพื่อศึกษาแนวคิดของตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างคือนักศึกษาที่กำลังจะเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ในการทดลองนั้นนักศึกษาจะได้ประสบการณ์โดยการใช้ห้องทดลองคอมพิวเตอร์ ซึ่งในคอร์สหนึ่งจะมีเวลา 2 ชั่วโมง ผู้วิจัยให้นักศึกษาใช้เวลา 25 นาที ในการทำการสำรวจศึกษาโดยใช้คอมพิวเตอร์โดยให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แล้วปฏิบัติตามคำสั่งที่มีอยู่ในกิจกรรมที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ผลของการวิจัยพบว่า นักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรมซอฟต์แวร์เรขาคณิตมีความรู้ที่คงทนและอยู่ได้นาน

### ตอนที่ 3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

#### 1. การใช้คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอน

การพัฒนาทางด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว โดยปัจจุบันได้มีการนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ในด้านการเรียนการสอนมากขึ้น โดยการนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ในการเรียนการสอนนี้มีประโยชน์สำคัญๆดังนี้ (ศรีศักดิ์ จามรมาน. 2535: 10)

1. ทำให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนการสอนมากขึ้น ทำให้มีความสนใจและความกระตือรือร้นมากขึ้น
2. ทำให้นักเรียนสามารถเลือกวิธีเรียนได้หลายแบบ ทำให้ไม่เบื่อหน่าย
3. ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น ลดการท่องจำ
4. ทำให้ปรับปรุง เปลี่ยนแปลงการเรียนการสอนได้เหมาะสมกับความต้องการของนักเรียนแต่ละคน
5. ทำให้นักเรียนมีอิสระในการเรียน
6. ทำให้นักเรียนสามารถสรุปหลักการ

การพัฒนาบทเรียนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วย มี 3 ลักษณะ

1. พัฒนาบทเรียนโดยการสร้างด้วยโปรแกรมภาษาทางคอมพิวเตอร์ เช่น พัฒนาโดยใช้ภาษา Basic, Fortran, Visual C, Visual Basic, Maple เป็นต้น ปัญหาที่พบในกรณีนี้คือ ผู้พัฒนาต้องมีความรู้และประสบการณ์ทางคอมพิวเตอร์สูงและใช้เวลาในการพัฒนามาก

2. พัฒนาบทเรียนจากโปรแกรมบทเรียน (Authoring System) เช่น โปรแกรมไทยทัศน์ บนภาพกราฟิก มีรูปแบบตัวอักษรต่างๆ มีภาพสามมิติ ลดความยุ่งยากในการใช้คำสั่งต่างๆ นำเสนอเนื้อหา ตัวอย่างการทำงาน การสร้างภาพและเสียงประกอบคำถาม และการฝึกปฏิบัติ แต่ปัญหาที่พบคือ ผู้พัฒนาส่วนมากจะสร้างบทเรียนสั้นๆ แต่การพัฒนารูปภาพทางเรขาคณิตประกอบการคำนวณต้องใช้เวลามากและต้องเรียนรู้เชื่อมโยงโปรแกรมเข้าด้วยกัน

3. พัฒนาจากโปรแกรมสำเร็จรูป ที่มีจำหน่ายทั่วไป ที่เหมาะสมกับงานแต่ละงาน เช่น Microsoft Excel เหมาะกับการคำนวณในลักษณะของแถวหรือหลัก Microsoft Word เหมาะสมกับการทำเอกสาร Mathematica Mathcad และ Matlab ทั้งสามโปรแกรมนี้เหมาะสมกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ สามารถใช้ในแง่ของสัญลักษณ์ การเขียนกราฟและฟังก์ชัน การคำนวณของแคลคูลัสขั้นสูง (วรรณวิภา สุทธิเกียรติ. 2542: 28)

## 2. ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเป็นซอฟต์แวร์ด้านเรขาคณิตซึ่งเน้นการสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับการใช้สันตรงและวงเวียน แต่มีลักษณะปฏิสัมพันธ์ ผู้ใช้สามารถสร้างรูปและเคลื่อนย้ายรูปได้ โดยการเคลื่อนย้ายจุดหรือย้ายเส้นนั้นสามารถทำได้โดยง่าย และการเคลื่อนย้ายจะยังคงรักษาสสมบัติที่ร่วมกันของรูปนั้นไว้เสมอ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเคลื่อนย้ายจุดมุมในลักษณะใดก็ตามจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเสมอ หรือจุดซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรง การเคลื่อนย้ายจะยังคงรักษาสสมบัติของจุดบนส่วนของเส้นตรงนั้นเสมอ ทำให้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเหมาะสำหรับการเรียนรู้เรขาคณิตโดยทดลองสร้างและสำรวจสมบัติหรือค้นหาความจริงในเชิงเรขาคณิตจากรูปหลายๆ ลักษณะ ซึ่งสอดคล้องกับลำดับขั้นการเรียนรู้สามขั้นแรกของแวน ฮีลี (สุทินันท์ บุญพัฒนาภรณ์. 2549: 18)

ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่มีในปัจจุบันมีสมบัติพื้นฐานของการสร้างและการเคลื่อนย้ายจุด เส้นตรง วงกลม มุม พร้อมทั้งเครื่องมืออำนวยความสะดวกเบื้องต้น เช่น ความยาวขนาดมุม คล้ายคลึงกัน ซึ่งสามารถจำแนกตามลักษณะการเผยแพร่ได้ 2 ลักษณะ ดังนี้

### 1. ซอฟต์แวร์ธุรกิจ อาทิเช่น

1.1 CABRI (<http://www.chartwellyorke.com/cabri.html>. 2 กรกฎาคม 2551)

1.2 GSP (<http://www.dynamicgeometry.com>. 2 กรกฎาคม 2551)

1.3 CINDERELLA (<http://www.cinderella.de/tiki-index.php>. 2 กรกฎาคม 2551)

## 2. ซอฟต์แวร์ที่ใช้เผยแพร่โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์

2.1 C.a.R. (วันที่ 3 มิถุนายน 2551, <http://www.z-u-l.de>)

2.2 KSEG (วันที่ 23 มิถุนายน 2551, <http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>.)

2.3 WinGeom (วันที่ 23 มิถุนายน 2551, <http://math.exeter.edu/paris/winggeom.html>.)

2.4 GeoGebra (วันที่ 3 มิถุนายน 2551, <http://www.geogebra.org>.)

ผู้วิจัยเลือกใช้ซอฟต์แวร์ C.a.R. (Compass and Ruler, Construct and Rule) เป็นเครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้เนื่องจากเป็นโปรแกรมซึ่งอนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์ และมีสมบัติเบื้องต้นของซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตพอเพียง และสามารถเพิ่มเติมเครื่องมือโดยผู้ใช้งานด้วยการสร้างคำสั่งมาโคร (Macro) ซึ่งโปรแกรม C.a.R. เป็นซอฟต์แวร์ที่พัฒนาขึ้นโดยศาสตราจารย์ ดร. เรอเน่ กรอธมันน์ (Prof. Dr. Rene Grothmann) ชาวเยอรมัน โดยมีวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาจนถึงระดับสูง รวมทั้งผู้ใหญ่ เพื่อนำมาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ การใช้โปรแกรมสามารถใช้ได้ด้วยการคลิกเมาส์และลากเมาส์ หรือใช้คำสั่งเป็นข้อความโดยตรง จุดเด่นของโปรแกรม C.a.R. คือ

### 1. การสร้างแฟ้มงานแบบ HTML

โปรแกรม C.a.R. สามารถแปลงแฟ้มงานจากแฟ้มงานของ C.a.R. ให้เป็นแฟ้มงานแบบ HTML โดยที่ยังคงคุณสมบัติต่างๆ ของโปรแกรมเสมือนอยู่ในแฟ้มงานของ C.a.R. และสามารถเลือกเครื่องมือที่เคยใช้งานในโปรแกรม C.a.R. เฉพาะที่จำเป็นมาใช้งานในแฟ้มงานแบบ HTML ได้

### 2. การสร้างงานในลักษณะของแบบทดสอบการสร้าง

โปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการสร้างงานในลักษณะของแบบทดสอบการสร้างได้ หมายความว่าครูผู้สอนสามารถที่จะกำหนดคำตอบหรือวิธีการของกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับสร้างนั้นๆ ได้ ในขณะที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมนั้นนักเรียนสามารถตอบสนองกับโปรแกรม C.a.R. ได้ทันทีที่นักเรียนสร้างได้ถูกต้อง โปรแกรม C.a.R. จะมีการตอบสนองว่า Well Done ซึ่งวิธีการเช่นนี้ทำให้นักเรียนนำความรู้ที่เคยเรียนมา ตอบคำถามกิจกรรมการสร้าง โดยไม่จำกัดวิธีสร้าง

### 3. การสร้างภาพเคลื่อนไหว

โปรแกรม C.a.R. สามารถสร้างภาพหรือข้อความที่เคลื่อนไหวได้ ซึ่งการเห็นความเคลื่อนไหว จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นการเปลี่ยนแปลง นำไปสู่การสำรวจ สังเกต และตั้งข้อคาดการณ์ เป็นแนวทางการเรียนรู้ จะทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาที่เรียนได้ดีขึ้น

### 3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสอนเรขาคณิต งานวิจัยในประเทศ

วรรณวิภา สุทธิเกียรติ (2542) ได้พัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตด้วยการลงมือปฏิบัติเอง โดยการสำรวจ ตั้งข้อความคาดการณ์ และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ตั้งไว้ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองตามขั้นตอนการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตได้แก่ นักเรียนอาสาสมัครจำนวน 42 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2542 ผลการวิจัยพบว่า บทเรียนเรขาคณิตมีคุณภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ดังนั้นบทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นสามารถทำให้นักเรียนเรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้และมีลักษณะตามที่กำหนด

สุจิตรา มุสิกะเจริญ (2542) ได้เปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตและไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตมีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.5
2. นักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเส้นขนานและความคล้าย แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.5

อรุณศาสตร์ นิमितพันธ์ (2542) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตประกอบกิจกรรมการวิชาเรียนคณิตศาสตร์ 4 ชั้น ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ชั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้
2. นักเรียนที่มีผลระดับการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ที่มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้มีร้อยละ 100, 63.64 และ 25 ตามลำดับ

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตประกอบกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตศาสตร์ 4 ชั้น มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ หลังการเรียนสูงการก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.5

4. นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการ หลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียนคิดเป็นร้อยละเฉลี่ย 40.30, 30.00, และ 26.39 ตามลำดับ

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547) ได้ทำการศึกษาผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad โรงเรียนสุนทรวิद्या อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ปีการศึกษา 2547 จำนวน 60 คน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ใช้เวลาทั้งหมด 5 สัปดาห์ จุดมุ่งหมายเพื่อ 1). เพื่อศึกษามโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น 2). เปรียบเทียบมโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้โปรแกรม 3). เปรียบเทียบมโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนหลังเรียนโดยใช้โปรแกรม 4). เปรียบเทียบเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างก่อนและหลังเรียนโดยใช้โปรแกรม 5). เปรียบเทียบเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังเรียนโดยใช้โปรแกรม ผลการวิจัยพบว่า 1). นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนโดยใช้โปรแกรมผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 2). นักเรียนมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 3). นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนโดยใช้โปรแกรมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 โดยนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางและต่ำ และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มีมโนทัศน์สูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ 4). นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงและปานกลางมีเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนเรียน แต่นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำมีเจตคติก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สุทินันท์ บุญพัฒนาภรณ์ (2549) ได้ทำการศึกษากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 โรงเรียนศึกษานารี เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพฯ 1 ห้องเรียน จำนวน 57 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม จากประชากรทั้งหมด 12 ห้องเรียน จำนวน 680 คน จุดมุ่งหมายเพื่อ 1). เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์

เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 2). เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในการเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต 3). เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตได้มากกว่าร้อยละ 60 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอยู่ในระดับปานกลาง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สุภัทรา เกิดมงคล (2550) ได้ทำการศึกษากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้และไม่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องสมบัติของวงกลม ไม่แตกต่างกัน และนักเรียนมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอยู่ในระดับปานกลาง

วรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์ (2551) ได้ทำการศึกษากิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนสามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตอยู่ในระดับมาก

### งานวิจัยต่างประเทศ

พอลเลทตา (Foletta, 1995: 2311-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในการเรียนการสอนเรื่องการสำรวจพื้นที่โดยแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมของนักเรียนเกรด 9 และ 10 ของรัฐโอไฮโอ สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ. 1994 ผลการวิจัยพบว่า

1. การวาด การวัด หรือการสำรวจของนักเรียนจะเกิดจากการผลักดันและแนะนำจากครู
2. ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต เป็นเครื่องมือใหม่ของการเรียนรู้ทางเรขาคณิต นักเรียนใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในส่วนที่เพิ่มเติมจากการใช้กระดาษและดินสอ
3. การสืบเสาะโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำสามารถทำได้ดี แต่จะต้องมีขั้นตอนมากกว่า

4. นักเรียนสามารถตั้งข้อความคาดการณ์ได้ตั้งแต่เมื่อเริ่มใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในการสืบเสาะ

เฟอริง (Frerking. 1995: 3772-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างระดับขั้นของแวน ฮีลี ผลสัมฤทธิ์ทางการพิสูจน์และการตั้งข้อความคาดการณ์ในการเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตช่วยในการตั้งข้อความคาดการณ์สมบัติของรูปเรขาคณิต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการตั้งข้อความคาดการณ์ และตรวจสอบข้อความคาดการณ์นั้น สัมพันธ์กับความสามารถในการพิสูจน์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตสัมพันธ์กับระดับขั้นของแวน ฮีลี

เลสเตอร์ (Lester. 1996) ได้ศึกษาวิจัยผลของการสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐแคลิฟอร์เนีย สหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ. 1996 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนตามปกติโดยใช้ไม้บรรทัด ดินสอ ไม้โปรแทรกเตอร์และวงเวียน ผลการวิจัยพบว่า ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังการเรียนเกี่ยวกับการตั้งข้อความคาดการณ์ทางเรขาคณิตของกลุ่มทดลอง สูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

โยเซฟ (Yousif. 1997: 1631-A) ได้ศึกษาวิจัยผลการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่มีผลต่อเจตคติของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายโรงเรียนเซาท์เวสเทิน รัฐโอไฮโอ สหรัฐอเมริกา ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนด้วยกิจกรรมสำรวจโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนด้วยกิจกรรมสำรวจโดยใช้กระดาษและดินสอ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เมลซาร์เรค (Melczarek. 1998: 2611-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์และการเรียนรู้ด้วยตนเอง (Self-directed learning) โดยมุ่งประเด็นศึกษาเฉพาะผลของกิจกรรมแก้ปัญหาโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตที่มีต่อความพร้อมในการเรียนรู้ด้วยตนเองและทัศนคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า การใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตมีความสัมพันธ์ทางบวกกับการเรียนรู้ด้วยตนเอง

มอสส์ (Moss. 2001: 4317-A) ได้ทำการวิจัยเพื่ออธิบายธรรมชาติของซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ซึ่งใช้เป็นเครื่องมือในการสำรวจในวิชาเรขาคณิตสมัยใหม่ (Modern Geometry) สำหรับนักเรียนในระดับมหาวิทยาลัย โดยข้อมูลเก็บมาจากการสำรวจในห้องเรียน การสัมภาษณ์ผู้สอน หลักสูตรของนักเรียน แบบฝึกหัดเรขาคณิตที่ทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน และการใช้คอมพิวเตอร์ทั่วไป ผลการวิจัยพบว่า ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตไม่เพียงแต่พัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิตเท่านั้น แต่ยังพัฒนาทักษะการใช้คอมพิวเตอร์ทั่วไปด้วย

บาฮาร์วานด์ (Baharvand. 2002: 552-A) ได้เปรียบเทียบผลการสอนเรขาคณิตระหว่างสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเทียบกับการสอนของครูแบบปกติโดยใช้กระดาษ ดินสอ และครูเป็นผู้บรรยาย โดยกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 26 คน ให้ได้รับการสอนของครูแบบปกติ และอีกกลุ่มเป็นกลุ่มทดลองซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 24 คน ให้เรียนด้วยเนื้อหาเดียวกับกลุ่มควบคุมแต่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในการเรียน ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตมีคะแนนการทำแบบทดสอบหลังการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ ที่ระดับนัยสำคัญ .05 นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์/เรขาคณิตในทางบวก ซึ่งแสดงให้เห็นว่าซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตสอนเรขาคณิตพบว่า ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตเป็นสิ่งที่เอื้อประโยชน์ต่อการเรียนการสอนเรขาคณิตทั้งในการสำรวจ การตั้งข้อความคาดการณ์ และการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ตั้งไว้ รวมทั้งยังส่งผลให้เจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นไปในทางบวกด้วย ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงนำซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต คือโปรแกรม C.a.R. มาใช้ในงานวิจัย

## บทที่ 3

### วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการสุ่มกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

#### การกำหนดประชากรและการสุ่มกลุ่มตัวอย่าง

##### ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร

##### การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จำนวน 1 ห้อง 53 คน จากทั้งหมด 3 ห้องจำนวน 126 คน โดยสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยจัดห้องเรียนแบบลดความสามารถของนักเรียนที่มีระดับเก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

#### การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พร้อมทั้งคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียน ซึ่งมีรายละเอียดการดำเนินการ ดังนี้

- ขั้นที่ 1 การเตรียมงานด้านวิชาการ
- ขั้นที่ 2 การสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ขั้นที่ 3 การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- ขั้นที่ 4 การสร้างแบบทดสอบวัดความพึงพอใจ

## ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีขั้นตอนในการสร้างดังต่อไปนี้

### ขั้นที่ 1 การเตรียมงานด้านวิชาการ

1. ศึกษาบทความทางวิชาการ ที่เกี่ยวกับปัญหาการเรียนการสอนในประเทศไทยและแนวทางการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ รวมทั้งรายงานการประเมินผลการศึกษาที่ทางกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ได้จัดทำขึ้น

2. ศึกษาหลักการ มาตรฐานการเรียนรู้ และมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4-6) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติจากหนังสือต่อไปนี้

3.1 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม วิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (กระทรวงศึกษาธิการ. 2548)

3.2 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมและพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 มัธยมศึกษาปีที่ 4-6 (สมัย เหล่าวานิชย์. 2544)

3.3 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานและเพิ่มเติม วิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 มัธยมศึกษาปีที่ 4-6 (ธนวัฒน์ สันทราพรพล. 2550?)

3.4 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ค 012 เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (กมล เอกไทยเจริญ. 2533)

3.5 Elementary Functions and Analytic Geometry (Flanders, Harley; & Price, Justin J. 1973?)

3.6 Fundamentals of Algebra and Trigonometry (Swokowski, Earl W. 1926)

3.7 Modern Trigonometry (Wooton; & Beckenbach. 1966)

3.8 Trigonometry. A Functions Approach (Bittinger, Keedy. 1974)

3.9 Trigonometry (Bale, John; & Holstege, Martin. second edition. 1991)

3.10 Trigonometry (Sullivan, Michael. Third edition. 1993)

3.11 Trigonometry Activities for the TI-82 And TI-85 Graphing Calculators (Dennis, Cynthia R.; & Neal, Linda M. 1995)

4. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

5. กำหนดเนื้อหา ความคิดรวบยอด และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหาขึ้น 7 หน่วยการเรียนรู้ ใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 18 คาบ และทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 2 คาบ ใช้เวลาคาบละ 50 นาที ได้แก่

- |  |            |
|--|------------|
| 5.1 หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ  | เวลา 2 คาบ |
| 5.2 หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง   | เวลา 2 คาบ |
| 5.3 หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์   | เวลา 1 คาบ |
| 5.4 หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์   | เวลา 4 คาบ |
| 5.5 หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ | เวลา 2 คาบ |
| 5.6 หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  | เวลา 3 คาบ |
| 5.7 หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ   | เวลา 4 คาบ |
| 5.8 ทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน   | เวลา 2 คาบ |

**ขั้นที่ 2 การสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน**

1. กำหนดกรอบเนื้อหาและรูปแบบชุดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยแบ่งออกเป็น 7 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งมีรายละเอียดของเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

- |  |             |
|--|-------------|
| 1.1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ                               | จำนวน 2 คาบ |
| คาบที่ 1-2 ทบทวนอัตราส่วนตรีโกณมิติและการวัดมุม                  |             |
| 1.2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง                            | จำนวน 2 คาบ |
| คาบที่ 1 วงกลมหนึ่งหน่วย   |             |
| คาบที่ 2 ความยาวส่วนโค้ง   |             |
| 1.3 ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์                                | จำนวน 1 คาบ |
| คาบที่ 1 นิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์                   |             |
| 1.4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์                          | จำนวน 4 คาบ |
| คาบที่ 1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน |             |
| คาบที่ 2-4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ    |             |

1.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่าง

ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จำนวน 2 คาบ

คาบที่ 1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงบางจำนวน

คาบที่ 2 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงใดๆ

1.6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม จำนวน 3 คาบ

คาบที่ 1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ของจำนวนจริงใดๆ

คาบที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

คาบที่ 3 การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางและไม่อยู่ในตาราง

1.7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จำนวน 4 คาบ

2. จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ประกอบด้วย

2.1 ชื่อเรื่อง

2.2 เวลาที่ใช้

2.3 สาระสำคัญ

2.4 จุดประสงค์การเรียนรู้

2.5 สาระการเรียนรู้

2.6 สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้ ประกอบด้วย

2.6.1 คู่มือการใช้งานชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

2.6.2 ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม

เรขาคณิตแบบพลาวัต

2.6.3 ใบกิจกรรมการเรียนการสอน

2.7 กิจกรรมการเรียนรู้ มีขั้นตอนดังนี้

2.7.1 ครูผู้สอนทำหน้าที่ในการสอนโดยใช้กิจกรรม และดูแลให้คำแนะนำนักเรียน

2.7.2 ให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรม โดยนักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ 1 คน

ต่อ 1 เครื่อง ครูผู้สอนจะเป็นผู้สอนโดยใช้กิจกรรม แล้วนักเรียนช่วยกันหาคำตอบลงในใบกิจกรรม

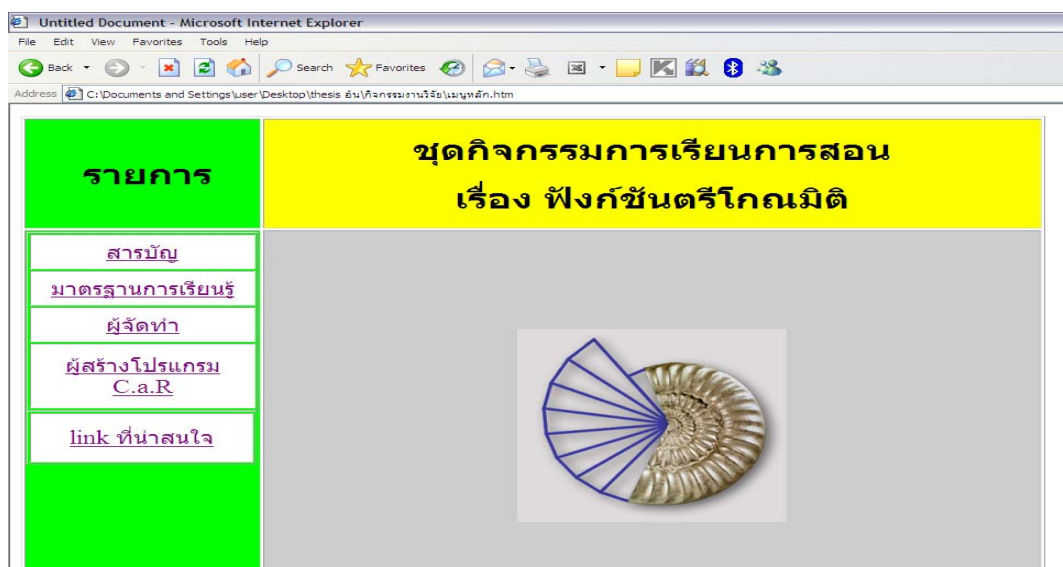
2.7.3 อภิปรายและสรุปผลการเรียนรู้

2.8 การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

หลังจากที่ผู้วิจัยได้ทำการสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน และแผนการจัดการเรียนรู้เสร็จแล้วก็ได้นำชุดกิจกรรมการเรียนการสอนและแผนการจัดการเรียนรู้เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่านเพื่อตรวจสอบ ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของการจัดกิจกรรมและความเหมาะสมของปัญหาที่นำมาใช้ แล้วปรับปรุงและแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

**แนวทางในการจัดการเรียนการสอน** โดยลักษณะกิจกรรมโดยทั่วไปในแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละคาบจะเป็นกิจกรรมที่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในการเรียนรู้ทั้งหมด 20 คาบ โดยใช้เวลาคาบละ 50 นาที ซึ่งผู้วิจัยได้จัดทำกิจกรรมที่ใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตในรูปแบบของ html เพื่อให้เกิดความสะดวกในการเรียกใช้ในแต่ละกิจกรรม โดยกิจกรรมมีองค์ประกอบ ดังนี้

1. หน้าหลัก
2. สารบัญหลัก
3. สารบัญย่อย
4. กิจกรรม (ดังภาพประกอบ 4-7)



ภาพประกอบ 4 บางส่วนของหน้าเมนูหลัก

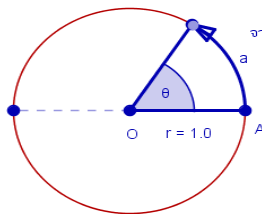
รายการ	สารบัญ
<a href="#">สารบัญ</a>	
<a href="#">หน่วยที่ 1</a>	หน่วยที่ 1 : ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ
<a href="#">หน่วยที่ 2</a>	หน่วยที่ 2 : วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง
<a href="#">หน่วยที่ 3</a>	หน่วยที่ 3 : ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
<a href="#">หน่วยที่ 4</a>	หน่วยที่ 4 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
<a href="#">หน่วยที่ 5</a>	หน่วยที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
<a href="#">หน่วยที่ 6</a>	หน่วยที่ 6 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
<a href="#">หน่วยที่ 7</a>	หน่วยที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
<a href="#">หน้าหลัก</a>	

ภาพประกอบ 5 บางส่วนของหน้าสารบัญหลัก

รายการ	หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
<a href="#">เมนูหลัก</a>	
<a href="#">หน่วยที่ 5</a>	<b>จุดประสงค์การเรียนรู้</b>
<a href="#">กรณีที่ 1</a>	1. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มาจากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้
<a href="#">กรณีที่ 2</a>	2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงพื้นฐานได้
<a href="#">กรณีที่ 3</a>	3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งนักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่เหลือโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันได้
<a href="#">กรณีที่ 4</a>	
<a href="#">กรณีที่ 5</a>	
<a href="#">หน้าหลัก</a>	<a href="#">คลิกดูความสัมพันธ์!</a>

ภาพประกอบ 6 บางส่วนของหน้าสารบัญย่อย

## หน่วยของการวัดมุมเรเดียน



จากรูป ถ้าเราจะวัดมุม  $\theta$  หรือ มุม  $\widehat{AOB}$  ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน เราจะทำได้ ดังนี้

กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม  
 $r$  คือ รัศมีของวงกลม  
 $\theta$  คือ มุมที่จุดศูนย์กลาง

จะได้ว่า ความยาวส่วนโค้ง  $a = 1$  และ รัศมี  $r = 1$

จะเห็นว่ามุม  $\theta = 57.3$  องศา มีค่าความยาวส่วนโค้งเท่ากับ 1 เรเดียน

“เนื่องจาก ความยาวของส่วนโค้งดังกล่าวมีค่าเป็น **จำนวนจริง** และรัศมีของวงกลมก็มีค่าเป็น **จำนวนจริง** ดังนั้นค่าของ  $\theta$  ก็จะเป็น **จำนวนจริง**”

ขนาดของมุม = 57.3

ภาพประกอบ 7 ตัวอย่างกิจกรรมหน่วยการวัดมุมเรเดียน

**บทบาท** ผู้วิจัยมีบทบาทในชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ดังนี้ (1) เป็นผู้สอน (2) เป็นผู้ชี้แนะ (3) เป็นผู้นำการอภิปราย (4) เป็นผู้ตรวจตราภายนอก และ (5) เป็นผู้ช่วยเหลืออำนวยความสะดวก ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้รวมถึง

1. จัดบรรยากาศที่ผ่อนคลายสำหรับการเรียนรู้
2. จัดอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ โดยการเตรียมหนังสือคู่มือการใช้

ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยใช้โปรแกรม C.a.R. เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเครื่องคอมพิวเตอร์ให้นักเรียนคนละ 1 เครื่อง

3. ครูควรใช้คำถามที่เป็นไปได้ และคำถามเปิด พร้อมทั้งฟังสิ่งที่นักเรียนพูด
4. ครูจะต้องให้ความสำคัญกับกระบวนการต่างๆ และการคิด แม้นักเรียนยังแก้ปัญหาไม่เสร็จสมบูรณ์ หรือถูกต้องเป็นบางส่วน

5. ต้องให้ความสำคัญกับการประเมินนักเรียน และประเมินผลการสอนของตน

6. ครูจะต้องยอมรับความรู้สึกรู้สึกของนักเรียน จะต้องไม่ทำให้นักเรียนละอาย เย้ยหยัน

หัวเราะเหน็บแนม ความผิดพลาดและความเข้าใจผิดเป็นผลเนื่องจากยังไม่มีความคิดรวบยอด ควรให้การเสริมแรงทางบวกเมื่อนักเรียนทำถูกหรือตอบคำถามได้ และกระบวนการ ควรนำข้อผิดพลาดมาเป็นพื้นฐานในการสร้างความคิดรวบยอดและกระบวนการต่างๆ ให้ชัดเจนขึ้น

บทบาทของนักเรียน ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนโดยใช้โปรแกรม C.a.R. เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นักเรียนแต่ละคนมีบทบาท ดังนี้

1. นักเรียนจะต้องให้ความร่วมมือกับครูผู้สอนในการทำกิจกรรม กระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์
  2. นักเรียนจะต้องทำงานอย่างอิสระในกลุ่มเล็กๆ และช่วยเหลือกันตามความแตกต่างทางความสามารถของนักเรียน
  3. นักเรียนควรใช้รูปธรรมต่างๆ ภาพ กราฟ สัญลักษณ์ และอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้องอิเล็กทรอนิกส์ เพื่อให้เกิดความคิดรวบยอด และวิธีการต่างๆ อย่างสมบูรณ์
  4. นักเรียนจะต้องทำความคิดให้แจ่มแจ้ง ในชั้นเรียน ความเข้าใจที่ได้พัฒนาเป็นรูปธรรมหรือรูปแบบอื่นจะต้องเชื่อมโยงกับสัญลักษณ์ที่เขียนและที่พูด
  5. นักเรียนใช้ความคิดรวบยอดและกระบวนการต่างๆ ในบริบทที่มีความหมาย ใช้คณิตศาสตร์เป็นแรงกระตุ้นการเรียนรู้ และสถานการณ์เชื่อมโยงไปยังโลกแห่งความเป็นจริง
3. กำหนดการประเมินผลของนักเรียน โดยแบ่งการประเมินผลของนักเรียนออกเป็นดังนี้
    - 3.1 การประเมินผลระหว่างเรียน ครูผู้สอนประเมินจากการสรุป และคำตอบของนักเรียน โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ในการปฏิบัติกิจกรรมจากใบกิจกรรมมีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนทั้งหมด
    - 3.2 การประเมินผลหลังเรียน ครูผู้สอนประเมินจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีน้ำหนักของคะแนนคิดเป็นร้อยละ 80 ของคะแนนทั้งหมด
  4. สร้างคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนสำหรับครูและนักเรียนเพื่อเป็นแนวทางในการใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่ถูกต้องและมีประสิทธิภาพ
  5. หลังจากที่ได้ผู้วิจัยได้ทำการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. แผนการจัดการเรียนรู้ ใบกิจกรรม เสร็จแล้วก็นำเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบ ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของการจัดกิจกรรม และความเหมาะสมกับจุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วปรับปรุงและแก้ไข ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ
  6. นำชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนและคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญในการสอนคณิตศาสตร์แล้วนำไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนไตรมิตรวิทยาลัย จังหวัดกรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มนำร่อง นอกเวลาเรียนปกติ

จำนวน 43 คน โดยนักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ 1 คน ต่อ 1 เครื่อง และนำไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 โรงเรียนวิสุทธิกษัตริ์ จังหวัดสมุทรปราการ ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มนำร่อง จำนวน 42 คน โดยใช้้นอกเวลาเรียนปกติ

7. นำชุดกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนจาก ข้อ 6 มาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง และนำไปเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญในการสอนคณิตศาสตร์ตรวจสอบอีกครั้งหนึ่ง

8. นำชุดกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนไปใช้ ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

### ขั้นที่ 3 การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นแบบทดสอบที่ใช้หลังจากปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนครบแล้ว ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอน ต่อไปนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของชวาล แพร์ตกุล (2520: 1-40) การวัด การวิเคราะห์ และการประเมินผลทางการศึกษาเบื้องต้นของกังวล เทียนกันท์เทศน์ (2540: 92-112) และเทคนิคการวัดผลการเรียนรู้ของล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2543: 196-198)

2. วิเคราะห์เนื้อหา สาระสำคัญ และจุดประสงค์การเรียนรู้ ของเนื้อหาที่ใช้ในการทดลองศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบทดสอบและการวิเคราะห์แบบทดสอบ เพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

3. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ตามจุดประสงค์การเรียนรู้เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 10 ข้อ และเป็นแบบทดสอบปรนัยเลือกคำตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ตามที่กำหนด

4. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญในการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าแบบทดสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้หรือไม่ โดยใช้เกณฑ์การพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรและผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์มาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยเลือกแบบทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 7 ข้อ และแบบทดสอบแบบปรนัย จำนวน 40 ข้อ

6. นำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มนำร่อง โรงเรียนวิสุทธิภักดิ์ตรี ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 42 คน ที่ใช้ในการทดลองชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

7. วิเคราะห์แบบทดสอบ โดยนำแบบทดสอบที่ได้จากการสอบในข้อ 6 มาตรวจให้คะแนน ซึ่งใช้เกณฑ์การให้คะแนนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 121) โดยผู้วิจัยปรับให้เหมาะสมกับแบบทดสอบ ดังนี้

7.1 แบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก มีเกณฑ์ให้คะแนนในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อที่ตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิด ไม่ตอบหรือตอบเกิน 1 ตัวเลือก ให้ 0 คะแนน

7.2 แบบทดสอบอัตนัยข้อละ 4 คะแนน โดยใช้เกณฑ์ในการตรวจให้คะแนน ดังนี้

ตาราง 2 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบอัตนัยเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
4 คะแนน	- การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน
3 คะแนน	- การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน
2 คะแนน	- การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้อง ครบถ้วน
1 คะแนน	- การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง
0 คะแนน	ไม่มีร่องรอยการดำเนินการใดๆ

8. นำคะแนนที่ได้จากข้อสอบแบบปรนัยในข้อ 7 มาวิเคราะห์หาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) คัดเลือกข้อที่มีความยากง่ายตั้งแต่ .20 ถึง .80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป จำนวน 30 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่ผ่านการคัดเลือกในข้อ 8 มาคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่น สำหรับแบบทดสอบปรนัย จำนวน 30 ข้อ ใช้สูตร KR – 20 ของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson 20) และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา ( $\alpha$  - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

10. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

#### ขั้นที่ 4 การสร้างแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียน

แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. จำนวน 20 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความพึงพอใจจากเอกสาร ตำราที่เกี่ยวข้องกับวิธีการและหลักการสร้างแบบวัดความพึงพอใจ แล้วกำหนดแนวทางในการออกแบบวัดความพึงพอใจตามวิธีการของลิเคอร์ต (Likert)

2. สร้างแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. จำนวน 20 ข้อ โดยปรับปรุงจากแบบสอบถามความพึงพอใจของนักเรียน จากสุทินันท์ บุญพัฒนาภรณ์ (2549) และสุภัทรา เกิดมงคล (2550: 180–182) ลักษณะของแบบวัดความพึงพอใจเป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) ซึ่งมี 5 ระดับ และข้อความเป็นข้อความทางบวก ซึ่งมีเกณฑ์การตรวจให้คะแนนในแต่ละความพึงพอใจ ดังนี้

##### เกณฑ์การตรวจให้คะแนน

ในกรณีข้อความมีความหมายทางบวก (Positive) กำหนดคะแนนแต่ละความพึงพอใจ ดังนี้

มากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
มาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
ปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
น้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
น้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

3. นำแบบวัดความพึงพอใจที่สร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อ ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความถูกต้องและความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง (Construct Validity) ตลอดจนความเหมาะสมของภาษาที่ใช้

4. นำแบบวัดความพึงพอใจที่ได้ปรับปรุงแก้ไขจากข้อ 3 ไปทดสอบกับนักเรียนซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นกลุ่มที่ผู้วิจัยใช้ในการทดลองนำร่อง ซึ่งเป็น

นักเรียนกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการทดลองกิจกรรมการเรียนรู้การสอนและคู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

5. นำผลที่ได้จากข้อ 4. มาหาความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจ โดยใช้วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา ( $\alpha$  - Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach)

6. นำแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

### การเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาสอนตามตารางสอนปกติ รวมระยะเวลาที่ใช้ในการทดลอง 20 คาบ ดังนี้

1. ระยะเวลาที่ใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 รวม 20 คาบ ดังนี้

1.1 หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ
1.2 หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง	เวลา 2 คาบ
1.3 หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 1 คาบ
1.4 หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 4 คาบ
1.5 หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์	เวลา 2 คาบ
1.6 หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	เวลา 3 คาบ
1.7 หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 4 คาบ
1.8 ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้	เวลา 2 คาบ

แต่ละกิจกรรมจะมีการเก็บคะแนนเพื่อประเมินผลระหว่างเรียน

2. เมื่อสิ้นสุดการสอนและการทดสอบแล้วให้นักเรียนที่เรียนด้วยชุดกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตอบแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนในการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้เวลา 20 นาที

3. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้ทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

## การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย ที่ว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

### 3. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

#### 3.1 สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองดังนี้

3.1.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้องจากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบ กับจุดประสงค์การเรียนรู้โดยใช้สูตร IOC

3.1.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

3.1.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยคำนวณจากสูตร KR - 20 สำหรับแบบทดสอบแบบปรนัยและสูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา ( $\alpha$  - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) สำหรับแบบทดสอบอัตนัย

#### 3.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

##### 3.2.1 สถิติพื้นฐาน

3.2.1.1 ค่าร้อยละ

3.2.1.2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

3.2.1.3 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

3.2.1.4 วิเคราะห์แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และนำเสนอหน้าหน้าความคิดโดยใช้การประเมินค่าความคิดเห็นของ ประคอง กรรณสูต (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.50–5.00 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด หลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 3.50–4.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 2.50–3.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง หลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 1.50–2.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

คะแนนเฉลี่ย 1.00–1.49 หมายถึง นักเรียนมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยมาก  
หลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

### 3.2.2 สถิติสำหรับการทดสอบสมมติฐาน

- สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ การทดสอบ Z (Z– test for Population Proportion)

## บทที่ 4

### ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมาย (1) เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (2) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ (3) ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและชุดกิจกรรมการเรียนการสอนหลังจากเรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัย โดยแบ่งเป็นตอนตามจุดมุ่งหมายเป็นลำดับดังนี้

#### ตอนที่ 1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคล ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

5. การทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

#### ตอนที่ 2 ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

การประเมินความพึงพอใจที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

## ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 53 คน ด้วยคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งประกอบด้วย คะแนนที่ได้จากใบกิจกรรม และคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. เป็นแบบปรนัย 30 ข้อ และแบบอัตนัย 5 ข้อ และคะแนนความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ตอนที่ 1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคล ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคลของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\bar{x}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	20	13	66%	5.58

จากตาราง 3 พบว่า คะแนนที่ได้จากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคล ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 13 คิดเป็นร้อยละ 66 ของคะแนนเต็มและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5.58

2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4  
ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	80	60.62	75.78%	7.34

จากตาราง 4 พบว่า คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60.62 คิดเป็นร้อยละ 75.78% ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 7.34

3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	100	73.83	73.83%	10.76

จากตาราง 5 พบว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 73.83 คิดเป็นร้อยละ 73.83 ของคะแนนเต็มและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 10.76

หมายเหตุ คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังจากสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ได้มาจากคะแนนดังนี้

1. คะแนนจากการทำใบกิจกรรม ร้อยละ 20 ของคะแนนเต็มทั้งหมด
2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ร้อยละ 80 ของคะแนนเต็มทั้งหมด แบ่งเป็น
  - 2.1 คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ (แบบปรนัย) ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
  - 2.2 คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ (แบบอัตนัย) ร้อยละ 20 ของคะแนนเต็ม

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	48	90.57%

จากตาราง 6 พบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 53 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน 48 คน คิดเป็นร้อยละ 90.57 ของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

5. การทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ปรากฏผลดังตาราง 7

ตาราง 7 การทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	สถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	48	3.338**	2.326

\*\* นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 7 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 53 คน ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตอนที่ 2 ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และชุดกิจกรรมการเรียนการสอน

การประเมินความพึงพอใจที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและชุดกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างสำหรับแบบสอบถามวัดเจตคติที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและชุดกิจกรรมการเรียนรู้

ผู้วิจัยได้ศึกษาและปรับปรุงแนวคิดการสร้างแบบสอบถามมาจากแบบสอบถามวัดความพึงพอใจที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ สุจินันท์ บุญพัฒนาภรณ์ (2549) และสุภัทรา เกิดมงคล (2550: 180–182) ลักษณะของแบบสอบถาม วัดความพึงพอใจเป็นมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) มี 5 ระดับ ข้อความในแบบสอบถามเป็นข้อความที่มีความหมายทางบวก ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน 1 คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน 2 คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน 3 คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน 4 คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน 5 คะแนน

การแปลความหมายของคะแนนเฉลี่ยรวม ซึ่งเป็นผลของการวัดเจตคติที่มีต่อเนื้อหาทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นและกิจกรรมการเรียนรู้ ทั้งฉบับใช้เกณฑ์การประเมินของประคอง กรรณสูต (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 1.00–1.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อยที่สุด

คะแนนเฉลี่ย 1.50–2.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อย

คะแนนเฉลี่ย 2.50–3.49 หมายถึง เห็นด้วยปานกลาง

คะแนนเฉลี่ย 3.50–4.49 หมายถึง เห็นด้วยมาก

คะแนนเฉลี่ย 4.50–5.00 หมายถึง เห็นด้วยมากที่สุด

ซึ่งการประเมินความพึงพอใจที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและกิจกรรมการเรียนรู้ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 8

ตาราง 8 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง หลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
1	30.20% (16 คน)	34.00% (18 คน)	28.30% (15 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.85	0.99	มาก
2	15.10% (8 คน)	34.00% (18 คน)	45.30% (24 คน)	3.80% (2 คน)	-	3.55	0.93	มาก
3	17.00% (9 คน)	39.60% (21 คน)	39.60% (21 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.68	0.85	มาก
4	17.00% (9 คน)	41.50% (22 คน)	34.00% (18 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.62	1.00	มาก
5	15.10% (13 คน)	34.00% (24 คน)	45.30% (13 คน)	3.80% (1 คน)	-	3.81	1.08	มาก

ตาราง 8 (ต่อ) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่ม  
ตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
6	43.40% (23 คน)	37.70% (20 คน)	17.00% (9 คน)	1.90% (1 คน)	-	4.23	0.80	มาก
7	13.20% (7 คน)	47.20% (25 คน)	35.80% (19 คน)	-	1.90% (1 คน)	3.64	0.92	มาก
8	13.20% (7 คน)	30.20% (16 คน)	49.10% (26 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.43	0.97	ปานกลาง
9	20.80% (11 คน)	39.60% (21 คน)	35.80% (19 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.75	0.88	มาก
10	35.80% (19 คน)	35.80% (19 คน)	24.50% (13 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	4.02	0.93	มาก
11	18.90% (10 คน)	37.70% (20 คน)	34.00% (18 คน)	5.70% (3 คน)	-	3,58	1.10	มาก
12	24.50% (13 คน)	39.60% (21 คน)	32.10% (17 คน)	-	-	3.77	1.07	มาก
13	18.90% (10 คน)	35.80% (19 คน)	41.50% (22 คน)	-	1.90% (1 คน)	3.64	0.98	มาก
14	20.80% (11 คน)	26.40% (14 คน)	43.40% (23 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.53	1.07	มาก
15	18.90% (10 คน)	37.70% (20 คน)	37.70% (20 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.64	1.00	มาก
16	20.80% (11 คน)	41.50% (22 คน)	28.30% (15 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.68	1.05	มาก
17	37.70% (20 คน)	28.30% (15 คน)	28.30% (15 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.94	1.06	มาก

ตาราง 8 (ต่อ) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
18	24.50% (13 คน)	35.80% (19 คน)	32.10% (17 คน)	5.70% (3 คน)	-	3.74	1.02	มาก
19	24.50% (13 คน)	32.10% (17 คน)	39.60% (21 คน)	1.90% (1 คน)	-	3.74	0.98	มาก
20	37.70% (20 คน)	34.00% (18 คน)	24.50% (13 คน)	1.90% (1 คน)	-	4.02	1.01	มาก
	ค่าเฉลี่ย					3.74	0.98	มาก

จากตาราง 8 แสดงให้เห็นว่าคะแนนระดับความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างต่อข้อคำถามทั้งหมด นักเรียนมีความคิดเห็นอยู่ในระดับมาก และเมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ทั้งฉบับซึ่งมีค่าเท่ากับ 3.74 แสดงว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. อยู่ในระดับมาก

## บทที่ 5

### สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

#### ความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานในการวิจัย และวิธีดำเนินการวิจัย

##### ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากที่ได้ทำชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

##### สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

##### วิธีดำเนินการวิจัย

##### กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 53 คน โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) จากนักเรียนทั้งหมด 3 ห้องเรียน จำนวน 126 คน โดยที่โรงเรียนจัดห้องเรียนแบบลดความสามารถของนักเรียนที่มีการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

##### เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้ เครื่องมือกับกลุ่มนำร่องประกอบด้วย

1.1 คู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1.2 ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนประกอบด้วย เอกสารหน่วยการเรียนรู้  
จำนวน 7 หน่วย และเอกสารในแต่ละหน่วย ประกอบด้วย ใบกิจกรรม และแบบฝึกหัด

1.3 แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 18 แผน แผนละ 1 คาบ  
แต่ละแผนจะสอดคล้องตามเอกสารหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วย

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้  
เครื่องมือกับกลุ่มนักร้อง ประกอบด้วย

2.1 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ ตอนที่ 1 แบบปรนัย จำนวน 30 ข้อ

2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติ ตอนที่ 2 แบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

3. แบบวัดความพึงพอใจที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งผ่าน  
การตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนักร้อง

#### **การเก็บรวบรวมข้อมูล**

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 1 ห้องเรียน จำนวน 53 คน โดยใช้ชุดกิจกรรมการ  
เรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4  
โดยใช้เวลาสอนตามตารางสอนปกติจำนวน 5 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 คาบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาตามเอกสาร  
หน่วยการเรียนรู้ทั้งหมด 7 หน่วย ใช้เวลา 18 คาบ และทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 2 คาบ ดังนี้

หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 1 คาบ
หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 4 คาบ
หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	เวลา 3 คาบ
หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 4 คาบ
ทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	เวลา 2 คาบ

ในส่วนของ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จะมีใบกิจกรรมให้นักเรียนปฏิบัติเป็นแบบ  
รายบุคคล ผู้วิจัยจะนำใบกิจกรรมไปตรวจให้คะแนนทุกครั้ง เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผลการ  
เรียนรู้ สำหรับใบกิจกรรมแบบรายบุคคล คิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนเต็ม

2. เมื่อนักเรียนกลุ่มตัวอย่างปฏิบัติกิจกรรม ครบทุกเอกสารหน่วยการเรียนรู้ในชุด การเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เสร็จแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

2.1 ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบทดสอบมี 2 ตอน ประกอบด้วย ตอนที่ 1 แบบปรนัย 30 ข้อ คะแนนเต็ม 60 คะแนน และตอนที่ 2 แบบอัตนัย 5 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน รวมทั้ง 2 ตอน คะแนนเต็ม 80 คะแนน ใช้เวลาในการทดสอบ 2 คาบ

2.2 ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ตอบแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียน ที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและกิจกรรมการเรียนรู้ จำนวน 20 ข้อ ใช้เวลา 20 นาที

### การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบ กิจกรรมแบบรายบุคคล ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ โปรแกรม C.a.R.

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของ คะแนนเต็ม

5. การทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียน ทั้งหมด

6. การประเมินความพึงพอใจที่มีต่อเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติและกิจกรรมการเรียนรู้ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

## สรุปผลการวิจัย

1. คะแนนที่ได้จากใบกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 13 คิดเป็นร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.58

2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 60.62 คิดเป็นร้อยละ 75.78 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 7.34

3. คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. จำนวน 53 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 73.83 คิดเป็นร้อยละ 73.83 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 10.76

4. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน 48 คน คิดเป็นร้อยละ 90.57 ของจำนวนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

5. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. ความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ทั้งฉบับที่ประเมินจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบวัดความพึงพอใจ พบว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. อยู่ในระดับมาก

## อภิปรายผล

จากการศึกษาผลการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังจากเรียนโดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีผลการเรียนรู้ผ่านเกณฑ์ผ่านการสอบเป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ขึ้นไป ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 จากผลการวิจัยการที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ผ่านการสอบการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมดอาจเนื่องมาจาก

1. กิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้น ใช้โปรแกรม C.a.R. ประกอบการเรียนการสอน โดยโปรแกรม C.a.R. นี้ทำให้นักเรียนสามารถมองเห็นภาพ ทำการสำรวจ สร้าง และสังเกตความแตกต่างของเนื้อหาในการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติจากนามธรรมเป็นรูปธรรมมากขึ้น เช่น การวัดมุม การวัดความยาวส่วนโค้ง การหาจุดปลายส่วนโค้ง การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใดๆ และการสร้างกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งสอดคล้องกับที่บรูเนอร์ (สุรางค์ ไคว์ตระกูล, 2541: 31; อ้างอิงจาก Bruner, 1960, 1966, 1971: *The Relevance of Education*) การเรียนรู้จะเกิดจากการค้นพบ เนื่องจากผู้เรียนมีความอยากรู้อยากเห็นซึ่งเป็นแรงผลักดันให้เกิดพฤติกรรมการเรียนรู้ ซึ่งบรูเนอร์ได้แบ่งเครื่องมือในการค้นพบความรู้ออกเป็น 3 วิธี 1. ชั้นเอนแอคทีฟ (Enactive Mode) ซึ่งเป็นวิธีที่มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมโดยการสัมผัสจับต้องด้วยมือ เช่น การผลัด การดึง รวมทั้งการที่เด็กใช้ปากกับวัตถุสิ่งของที่อยู่รอบ ๆ ตัว ข้อสำคัญที่สุดคือการกระทำของเด็กเอง 2. ชั้นไอคอนนิค (Iconic Mode) เมื่อเด็กสามารถที่จะสร้างจินตนาการหรือมโนภาพ (Imagery) ขึ้นในใจได้ ก็จะสามารถที่จะรู้จักโลกโดยวิธีไอคอนนิค เด็กวัยนี้จะใช้รูปภาพแทนของจริงโดยไม่จำเป็นจะต้องแตะต้องหรือสัมผัสของจริง นอกจากนี้เด็กจะสามารถรู้จักสิ่งของจากภาพแม้ว่าจะมีขนาดและสีเปลี่ยนไป 3. ชั้นใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Mode) วิธีการนี้ผู้เรียนจะใช้ในการเรียนรู้ เมื่อผู้เรียนมีความสามารถที่จะเข้าใจในสิ่งที่เป็นนามธรรม หรือความคิดรวบยอดที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรมจึงสามารถที่จะสร้างสมมติฐานและพิสูจน์ว่าสมมติฐานถูกหรือผิดได้ โดยที่ชุดกิจกรรมจะเป็นตัวส่งเสริมเนื้อหาที่ครูได้สอนไปทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาและได้ทำสิ่งที่หลากหลายมากยิ่งขึ้น

2. โปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรมที่ง่ายต่อการใช้งาน สามารถสร้างรูปได้อย่างรวดเร็ว รวมทั้งยังสามารถทำภาพเคลื่อนไหว มีสีสันสวยงาม และเน้นให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง โดยมีคู่มือการใช้ชุดกิจกรรม ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้น เกิดความสนใจอยากเรียนรู้ ซึ่งสอดคล้องกับศรีศักดิ์ จามรมาน (2535: 10) ที่กล่าวว่า การนำคอมพิวเตอร์ไปใช้ในการเรียนการสอนนั้น ทำให้นักเรียนสนใจและกระตือรือร้นมากขึ้น เกิดความเข้าใจและมองเห็นสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม ซึ่งในชุดกิจกรรมผู้วิจัยได้ออกแบบให้นักเรียนสามารถทำการสำรวจ สังเกต และเคลื่อนไหวได้อย่างอิสระ อีกทั้งนักเรียนยังมีปฏิสัมพันธ์กับบทเรียนได้ คือโปรแกรม C.a.R. จะมีการตอบสนองทันทีที่นักเรียนปฏิบัติได้ถูกต้อง ทำให้บรรยากาศการเรียนไม่น่าเบื่อและไม่เครียด

3. ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 หน่วยการเรียนรู้และมีใบกิจกรรมแต่ละหน่วย โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายากตามความสอดคล้องของเนื้อหา และมีการกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนได้ทราบทุกกิจกรรม ทำให้นักเรียนทราบแนวทางการวัดผลในแต่ละใบกิจกรรมและทราบมุ่งหมายของการเรียนในแต่ละหัวข้อว่านักเรียน เรียนไปเพื่ออะไร ซึ่งในการเรียนนั้นผู้วิจัยจะเป็นครูสอนเนื้อหาที่เป็น

ทฤษฎีก่อนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจ แล้วจึงให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมโดยนำความรู้ที่ได้จากครูมาใช้ปฏิบัติกิจกรรมซึ่งสอดคล้องกับที่ ออซูเบล (Ausubel. ที่มา<http://ednet.kku.ac.th/~sumcha/2545-/-nong>. วันที่ 1 ธันวาคม พ.ศ. 2551. ออนไลน์) ให้ความหมายการเรียนรู้ที่มีความหมาย (Meaningful learning) ว่าเป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนได้รับมาจากการที่ผู้สอน อธิบายสิ่งที่จะต้องเรียนรู้ให้ทราบและนักเรียนรับฟังด้วยความเข้าใจ โดยผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งที่เรารู้กับโครงสร้างพุทธิปัญญาที่ได้เก็บไว้ในความทรงจำ และสามารถนำมาใช้ในอนาคต เมื่อนักเรียนเรียนจบแต่ละใบกิจกรรม ผู้วิจัยจะเป็นผู้ตรวจคำตอบแล้วส่งคืนกลับไปให้นักเรียน ทำให้นักเรียนทราบคำตอบและวิธีการทำที่ถูกต้อง

4. ผลการศึกษาค้นคว้าความพึงพอใจของนักเรียนหลังจากเรียน โดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบวัดความพึงพอใจ พบว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจหลังจากเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. อยู่ในระดับมาก ทั้งนี้ อาจมีสาเหตุเนื่องมาจากนักเรียนได้มองเห็นมโนภาพในการเรียนโดยการปฏิบัติตามกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมากขึ้น อีกทั้งในขณะที่เรียนนักเรียนสามารถทำการสำรวจ สังเกตซ้ำๆ กันได้หลายครั้ง ทำให้นักเรียนรู้สึกสนุก มีอิสระ ไม่เครียด และไม่หนักใจในการเรียนรู้

5. สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่านเกณฑ์การเรียน นั้นเป็นผลมาจากนักเรียนไม่ให้ความสนใจในการปฏิบัติกิจกรรมตามที่ผู้วิจัยแนะนำ ไม่ว่าจะผู้วิจัยจะปฏิบัติอย่างไรนักเรียนก็ไม่ให้ความร่วมมือแต่อย่างใด อีกทั้งใบกิจกรรมรายบุคคลที่ผู้วิจัยได้มอบหมายให้นักเรียนปฏิบัติในชั้นเรียน นักเรียนกลุ่มนี้ก็ไม่ให้ความร่วมมือใดๆ ทั้งสิ้น จึงเป็นผลทำให้ค่าเฉลี่ยของคะแนนใบกิจกรรมทั้งห้องนั้นค่อนข้างต่ำ ซึ่งสาเหตุที่ผู้วิจัยคิดว่าสิ่งที่ทำให้นักเรียนไม่ให้ความร่วมมือเพราะนักเรียนอาจจะไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ หรือเป็นเพราะชุดกิจกรรมการเรียนการสอนไม่เหมาะกับระดับความสามารถของนักเรียนกลุ่มนี้ จึงเป็นผลให้นักเรียนไม่สนใจและไม่ผ่านเกณฑ์การเรียนในที่สุด

## ข้อเสนอแนะ

### 1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ครูควรมีผู้ช่วยในการสอนเพื่อจะได้ให้คำแนะนำนักเรียนได้อย่างทั่วถึงและรวดเร็ว

1.2 ควรมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีการติดตั้งโปรแกรมซอฟต์แวร์ JAVA ตั้งแต่เวอร์ชัน 1.4 ขึ้นไป และชุดกิจกรรมการเรียนการสอน โดยใช้โปรแกรม C.a.R. ประจำห้องคอมพิวเตอร์ของโรงเรียน

1.3 ควรให้นักเรียนได้รับ CD ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนทุกคน เพื่อให้นักเรียนได้มีการเตรียมความพร้อมในการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน และสามารถทำการศึกษาในเวลาได้

## 2. ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการนำโปรแกรม C.a.R. ไปใช้สอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเนื้อหาเชิงเรขาคณิตหรือพีชคณิต ในเรื่องอื่นๆ เช่น เส้นขนาน, พื้นฐานทางเรขาคณิต, เวกเตอร์ และการสร้างกราฟของฟังก์ชันต่างๆ เป็นต้น

2.2 ควรทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบระหว่างการสอนคณิตศาสตร์ในเนื้อหาต่างๆ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. กับการสอบแบบปกติ

## บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ. (2533). *คณิตศาสตร์ ม. 4 เล่ม 2*. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.
- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2545ก). *หนังสือรายชื่อสื่อการเรียนการสอนที่บ่งชี้เนื้อหา*  
*กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: ศูนย์พัฒนาหนังสือ กรมวิชาการ.
- (2545ข). *หลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ:  
คุรุสภาลาดพร้าว.
- (2545ค). *เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือการจัดการ*  
*เรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- (2545ง). *หลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้*  
*กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- (2545จ). *เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 การวิจัยเพื่อ*  
*พัฒนาการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน*. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและ  
พัสดุภัณฑ์.
- กองพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน กระทรวงศึกษาธิการ. (2542). *เทคนิคการเขียนกิจกรรมการเรียน*  
*การสอนในชุดวิชา*. กรุงเทพฯ: กองพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2548). *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้น*  
*มัธยมศึกษาปีที่ 5*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.
- กาญจนา เกียรติประวัติ. (2524). *วิธีสอนทั่วไป และ ทักษะการสอน*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตร  
และการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- กิติยรัตน์ ภูริพัฒน์. (2545). *การพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัย วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*  
*เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ*. วิทยานิพนธ์ คุรุศาสตรมหาบัณฑิต (วิจัยและประเมินผลการศึกษา).  
อุบลราชธานี: บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี. *ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์*  
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- เกษม มุ่งลือ. (2544). การสร้างชุดการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ วิชาคณิตศาสตร์สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. รายงานการศึกษาระดับ กศ.ม.(เทคโนโลยีการศึกษา). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ฐานข้อมูลปริญญาโท มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- กุลยา ตันติผลาชีวะ. (2547). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับเด็กปฐมวัย. กรุงเทพฯ: สาขาวิชาการศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- กังวล เทียนกัณฑ์เทศน์. (2540). การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2524). ชุดการเรียนการสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ทบวงมหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- คณาภรณ์ รัศมีมารีย์. (2547). ประโยชน์ของชุดการเรียนการสอน. ในวารสารการศึกษาศาสตร์คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ปีที่ 32 ฉบับที่ 130 พฤษภาคม-มิถุนายน. หน้า 24-28.
- จิตราภรณ์ ภูแก้ว. (2547). การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยใช้กิจกรรมที่หลากหลาย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปริญญาโท กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- จิรภัทร แก้วภู. (2547). หลักและวิธีการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้. ขอนแก่น: โรงพิมพ์ศิริภรณ์ออฟเซ็ท ขอนแก่น. อัดสำเนา.
- ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). การสอนคณิตศาสตร์ (ศึกษารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- ชวาล แพร์ตกุล. (2520). เทคนิคการเขียนข้อสอบ. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ. อัดสำเนา.
- ชิษณุชา พระสว่าง. (2547). การพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ฐานข้อมูลปริญญาโท มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์; และคนอื่นๆ. (2523). เอกสารการสอนชุดวิชา เทคโนโลยีและสื่อสารการศึกษา. กรุงเทพฯ: สำนักเทคโนโลยีการศึกษา. มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. อัดสำเนา.

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2542). *การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ในโรงเรียน*. กรุงเทพฯ: โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน. อัดสำเนา.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ. (2526). *เทคโนโลยีทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ: วัฒนาพานิช. อัดสำเนา.

ณัฐฤกษ์ จันทร์ตะ. (2548). *การพัฒนาชุดการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่อง ความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์). นครสวรรค์: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์.

ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ถาวร ลักษณะ. (2548). *การพัฒนาชุดการสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์). นครสวรรค์: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ทฤษฎีการเรียนรู้ของออสเชเบล. (2551). สืบค้นเมื่อ 1 ธันวาคม 2551,

จาก <http://ednet.kku.ac.th/~sumcha/2545/nong>.

ธงชัย ข้าเทศเจริญ. (2546). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการใช้ชุดการสอนแบบศูนย์การเรียนกับชุดการสอนแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ที่มีการนำเสนอในรูปแบบซินดิเคท*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (เทคโนโลยีและสื่อสารทางการศึกษา). นครราชสีมา: มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ธนวัฒน์ สันทราพรพล. (2550?). *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานและเพิ่มเติม วิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 มัธยมศึกษาปีที่ 4-6*. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.

แนวคิดการสร้างกิจกรรม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ซอฟต์แวร์. (2550). สืบค้นเมื่อ 1 ธันวาคม 2550, จาก <http://www.ies.co.jp/math/products/trig/menu.html>.

----- (2551ก). สืบค้นเมื่อ 5 มกราคม 2551, จาก <http://mathforum.org/mathtools/cell/tr>.

----- (2551ข). สืบค้นเมื่อ 5 มกราคม 2551, จาก <http://www.dynamicgeometry.com>.

----- (2551ค). สืบค้นเมื่อ 6 มกราคม 2551, จาก <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/trigono.htm>.

บุญชม ศรีสะอาด. (2541). *การพัฒนาการสอน*. มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ  
มหาสารคาม. อัดสำเนา.

บุญเกื้อ ครอบหาเวช. (2545). *นวัตกรรมการศึกษา*. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัด SR Printing.  
อัดสำเนา.

บุปผา เขียวสกุล. (2544). *การสอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา). เชียงใหม่:  
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ประคอง กรรณสูต. (2538). *สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2 (ฉบับปรับปรุง  
แก้ไข). กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือ ดร.ศรีสง่า.อัดสำเนา.

ปิยาพัชร พวงมาลัย. (2547). *การสร้างชุดการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ วิชาคณิตศาสตร์ (ค 4111)  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. รายงานการศึกษาอิสระ กศ.ม. (เทคโนโลยีการศึกษา).  
ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัย  
ศรีนครินทรวิโรฒ.

เป็รื่อง กุมุท. (2519). *เทคนิคการเขียนบทเรียนโปรแกรม*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา  
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.

ผ่องศรี หวานเสียง. (2547). *ผลการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการ  
เรียนแบบซิปปา เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์  
ค.ม. (หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์). เชียงราย: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย  
เชียงใหม่. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. บัณฑิตวิทยาลัย. (2548). *คู่มือการจัดทำปริญญาานิพนธ์และสาร  
นิพนธ์*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยฯ.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2530). *เอกสารการสอนชุดวิชา คณิตศาสตร์ 4 (Mathematics)  
หน่วยที่ 8*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยฯ. อัดสำเนา.

----- . (2542). *ชุดวิชาสื่อการสอนระดับมัธยมศึกษา หน่วยที่ 13*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยฯ.  
อัดสำเนา.

- มัทนีย์ ศรีนาค. (2547). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องการประยุกต์ฟังก์ชันตรีโกณมิติสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนหัวหิน จังหวัดประจวบคีรีขันธ์*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). ประจวบคีรีขันธ์: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. [ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ](#).
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). *ศัพท์คณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: สหมิตรพรีนติ้ง.
- ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. (2543). *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น. อัดสำเนา.
- วรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์. (2551). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. [ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ](#).
- วรรณวิภา สุทธิเกียรติ. (2542). *การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้*. ปริญญาานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. [ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ](#).
- วาสนา ช่างหา. (2525). *เทคโนโลยีทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ: อักษรสยามการพิมพ์. อัดสำเนา.
- วิชัย วงษ์ใหญ่. (2525). *การพัฒนาหลักสูตรและการสอนมิติใหม่*. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- วีระศักดิ์ พัทบุรี. (2545). *การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและมุม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยีและสื่อสารการศึกษา). สงขลา: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์. [ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ](#).
- วัชรสันต์ อินธิสาร. (2547). *ผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad*. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. [ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ](#).

- วัฒนาพร ระจับทุกข์. (2542). แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง. กรุงเทพมหานคร: แอล ที เพรส.
- . (2545). เทคนิคและกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2544. กรุงเทพมหานคร: พริกหวานกราฟฟิค.
- ศรีศักดิ์ จามรมาน. (2535). การพัฒนาและการใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการเรียนการสอน. วารสารรามคำแหง. 15(3): 10.
- ศิริลักษณ์ กุโบล่า. (2547). การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยีการศึกษา). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). การจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3-4. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: กราฟฟิค โกร.
- . (2550). ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.
- สมศักดิ์ สีนธระเวชญ์. (2544). กิจกรรมพัฒนาผู้เรียนคณิตศาสตร์ (ศึกษาบทบาทของครูและนักเรียนในการปฏิบัติกิจกรรม). กรุงเทพมหานคร: วัฒนาพานิช. อัดสำเนา.
- สมศักดิ์ อภิบาลศรี. (2537). การผลิตชุดการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 1. ภาควิชาเทคโนโลยีและนวัตกรรมทางการศึกษา คณะครุศาสตร์. อัดสำเนา.
- สมศักดิ์ อ้วนสาเล. (2540). การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในจังหวัดหนองบัวลำภู. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลและประเมินผลการศึกษา). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ฐานข้อมูลปริญญาานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (2537). คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6. กรุงเทพมหานคร: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- . (2544). คณิตศาสตร์ พื้นฐาน+เพิ่มเติม เล่ม 3. กรุงเทพมหานคร: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). หลักสูตร และการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ. อัดสำเนา.

สุจิตรา มุสิกะเจริญ. (2542). การเปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่าง กลุ่มที่เรียนโดยใช้และไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.

สุภัทรา เกิดมงคล. (2550). กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องสมบัติของวงกลม โดยใช้ซอฟต์แวร์ เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ฐานข้อมูล ปรินูญานิพนธ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุมานิน รุ่งเรืองธรรม. (2526). กลวิธีสอน. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรี นครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. อัดสำเนา.

สุทินนท์ บุญพัฒนาภรณ์. (2549). กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการแปลงเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์ เรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.

สุรางค์ ไคว้ตระกูล. (2541). จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.

สำนักงานทดสอบทางการศึกษา. (2546). ผลการสอบวัดคุณภาพการศึกษาระดับชาติ ระหว่างวันที่ 12-13 พฤศจิกายน ปีการศึกษา 2546. กรุงเทพฯ. สืบค้นเมื่อ 9 มิถุนายน 2551, จาก [http://bet.bopp.go.th/gat\\_sat/bet/46.pdf](http://bet.bopp.go.th/gat_sat/bet/46.pdf).

สันหัด ภิบาลสุข; และพิมพ์ใจ ภิบาลสุข. (2525). การใช้สื่อการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยขอนแก่น. อัดสำเนา.

องอาจ นัยพัฒน์. (2549). วิธีวิทยาการวิจัยเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ทางพฤติกรรมศาสตร์และ สังคมศาสตร์. กรุงเทพฯ: สามลดา.

อรรถศาสตร์ นิมิตรพันธ์. (2542). ผลของการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ประกอบกิจกรรมการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ 4 ชั้น ที่มีต่อความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุก ประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ออนไลน์.

Adamek, Tara; & others. (2005, May). *The History Of Trigonometry*. Retrieved March 8, 2008, from [http://www.math.rutgers.edu/~mjraman/History\\_Of\\_Trig.pdf](http://www.math.rutgers.edu/~mjraman/History_Of_Trig.pdf).

- Baharvand, Mohsen. (2002, June). A Comparison of the Effectiveness of Computer Assisted Instruction Versus Traditional Approach to Teaching Geometry. *Dissertation Abstracts International*. 40(3): 522-A.
- Baley, John; & Holstege, Martin. (1991). *TRIGONOMETRY*. Second Edition. New York: McGraw-Hill.
- Beckenbach, Edwif F.; & Drooyan, Irving. (1968). *Modern College Algebra and Trigonometry*. California: Wadsworth Publishing Company.
- Bittinger, Marvin L; & Keedy, Marvin L. (1974). *Trigonometry: A Functions Approach*.
- Brown, A.L; & others. (1973). *Learning Remembering and Understandings*. Handbook of Child Psychology: Cognitive Development. New York: Wiley.
- Dennis, Cynthia R.; & Neal, Linda M. (1995). *Trigonometry Activities for the TI-82 And TI-85 Graphing Calculators*. Boston: PWS publishing.
- Faughn, Axelle Person; & Murphy, Terran Felter. (2007). *USING INTERACTIVE GEOMETRY SOFTWARE BASED INSTRUCTION IN A COLLEGE TRIGONOMETRY COURSE*. California: California State University. Retrieved June 10, 2008, from <http://www.rume.org/crume2007/papers/faughn-murphy.pdf>.
- Flanders, Harley; & Price, Justin J. (1973?). *Elementary Functions and Analytic Geometry*. New York: ACADEMIC PRESS.
- Foletta, Gina Marie. (1995, February). Technology and Guided Inquiry Understanding of Student's Thinking While Using A Cognitive Computer Tool, The Geometer's Sketchpad, in a Geometry Class. *Dissertation Abstracts International*. 55(8): 2311-A.
- Frerking, Bonnie Giddens. (1995, June). *Conjecturing and Proof-Writing in Dynamic Geometry*. *Dissertation Abstracts International*. 55(12): 3772-A.
- Grothmann, Rene. (2007). *Download Program Compass and Ruler (C.a.R.)*. Retrieved January 5, 2008, from [www.z-u-l.de](http://www.z-u-l.de).

- Hudnutt, Bethany. (2007). *TEACHING FUNCTIONS WITH DYNAMIC GRAPHING TOOLS: A STUDY OF LESSON PLANS*. Thesis for the degree of Master of Science (MATHEMATICS EDUCATION). United State: North Carolina State University.
- Ken. (1995, January). *Why is Circle 360 Degree*. Retrieved Jan 6, 2008 from <http://mathforum.org/dr.math/>.
- Kendal, Margaret ; & Stacey, Kaye. (1997). *TEACHING TRIGONOMETRY*. Australia: University of Melbourne. Retrieved June 9, 2008, from <http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/publications/1997/kendalstacey-Trig.pdf>.
- Lester, Margaret Lynn. (1996, December). The Effects of The Geometer's Sketchpad Software on Achievement of Geometric Knowledge of High School Geometry Students. *Dissertation Abstracts International*. 57(6): 2343-A.
- List of Interactive Geometry Software*. (2007). Retrieved March 4, 2008, from [http://en.wikipedia.org/wiki/Interactive\\_geometry\\_software](http://en.wikipedia.org/wiki/Interactive_geometry_software).
- Melczarek, Robert Jan. (1998, January). The Effects of Problem-Solving Activities Using Dynamic Geometry Computer Software on Readiness for Self-Directed Learning. *Dissertation Abstracts International*. 58(07): 2611-A.
- Moss, Laura Jean. (2001, May). The Use of Dynamic Geometry Software as a Cognitive Tool. *Dissertation Abstracts International*. 61(11): 4317-A.
- Orhun, Nevin. (2000, July). *Student's Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry*. Turkey: Anadolu University. Retrieved June 10, 2008, from <http://math.unipa.it/~grim/AOrhun.PDF>.
- Prus, Thomas ; & Bonk, Emily. (2003, December). *History of Trigonometry and Mathematicians*. Retrieved March 18, 2008, from [http://angel\\_blue01.tripod.com/home/docs/grade12/history\\_of\\_trigonometry.pdf](http://angel_blue01.tripod.com/home/docs/grade12/history_of_trigonometry.pdf).
- Shaffer, David. *Exploring Trigonometry with The Geometer's Sketchpad*. California: Key Curriculum Press.

Sullivan, M. (1996). *Algebra and Trigonometry Enhanced with Graphing Utilities*. New Jersey: Preitice-Hall, Inc.

Swokoski, Earl W. (1978). *Fundamentals of Algebra and Trigonometry*. Massachusetts: Pridle, Weber & Schmidt, Incorporated.

Weber, Keith. (2005). *Student's Understanding of Trigonometric Functions*. United State: Rutgers University. Retrieved June 10, 2008, from [http://eric.ed.gov/ERICDocs-/data/ericdocs2sql/content\\_storage\\_01/0000019b/80/2a/f6/ba.pdf](http://eric.ed.gov/ERICDocs-/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/2a/f6/ba.pdf).

Yousif, Adil Eltayeb. (1997, November). The Effects of The Geometer's Sketchpad on The Attitude Toward Geometry of High School Students. *Dissertation Abstracts International*. 58(5): 1631-A.

---

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก  
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

## รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ได้รับความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องด้านเนื้อหาและความเหมาะสมของชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ความเที่ยงตรงของเนื้อหา ความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ ความเหมาะสมของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการใช้ภาษาในแบบทดสอบวัดความพึงพอใจของนักเรียนที่ได้เรียนผ่านชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. มีดังนี้

1. อาจารย์ธนุชัย ภูอุดม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์เมตต์ แย้มวงษ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสด

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ภาคผนวก ข  
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 9 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
(แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
18	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
19	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
22	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
23	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
24	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
25	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
26	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 9 (ต่อ) แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
(แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
27	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
28	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
29	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
30	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
31	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
32	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
33	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
34	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
35	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
36	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
37	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
38	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
39	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
40	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
41	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
42	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
43	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
44	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
45	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
46	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
47	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
48	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
49	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
50	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
51	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
52	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 9 (ต่อ) แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
(แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
53	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
54	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
55	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
56	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
57	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
58	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
59	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
60	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 10 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบอัตนัย)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

หมายเหตุ คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

ตาราง 11 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจการจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ  
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียน  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มนำร่อง

ข้อที่	p	r
1	0.95	0.10
2	0.80	0.55
3	0.98	0.10
4	0.92	0.10
5	0.92	0.10
6	0.71	0.37
7	0.69	0.27
8	0.92	0.20
9	0.80	0.20
10	0.52	0.55
11	0.67	0.10
12	0.71	0.45
13	0.59	0.45
14	0.21	0.36
15	0.59	0.82
16	0.43	0.45
17	0.26	0.20
18	0.36	0.10
19	0.41	0.27
20	0.21	- 0.10

ข้อที่	p	r
21	0.78	0.37
22	0.50	0.64
23	0.21	0.45
24	0.26	0.73
25	0.24	0.73
26	0.45	0.27
27	0.45	0.55
28	0.21	0.20
29	0.64	0.00
30	0.21	0.45
31	0.71	0.27
32	0.52	0.27
33	0.62	0.27
34	0.71	0.27
35	0.55	0.27
36	0.45	0.27
37	0.36	0.27
38	0.45	0.27
39	0.31	0.27
40	0.41	0.27

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 40 ข้อ เท่ากับ 0.77

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ เท่ากับ 0.89

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.87

ตาราง 12 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่องที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่อง

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
1	28.60% (12 คน)	45.20% (19 คน)	26.20% (11 คน)	-	-	4.02	0.75	มาก
2	9.50% (4 คน)	45.20% (19 คน)	45.20% (19 คน)	-	-	3.64	0.66	มาก
3	7.10% (3 คน)	40.50% (17 คน)	42.90% (18 คน)	9.50% (4 คน)	-	3.45	0.77	ปานกลาง
4	4.80% (2 คน)	42.90% (18 คน)	45.20% (19 คน)	7.10% (3 คน)	-	3.45	0.71	ปานกลาง
5	33.30% (14 คน)	31.00% (13 คน)	31.00% (13 คน)	4.80% (2 คน)	-	3.93	0.92	มาก
6	26.20% (11 คน)	59.50% (25 คน)	14.30% (6 คน)	-	-	4.12	0.63	มาก
7	11.90% (5 คน)	45.20% (19 คน)	40.50% (17 คน)	2.40% (1 คน)	-	3.67	0.72	มาก
8	-	31.00% (13 คน)	57.10% (24 คน)	11.90% (5 คน)	-	3.19	0.63	ปานกลาง
9	14.30% (6 คน)	31.00% (13 คน)	50.00% (21 คน)	4.80% (2 คน)	-	3.55	0.80	มาก
10	16.70% (7 คน)	52.40% (22 คน)	31.00% (13 คน)	-	-	3.86	0.68	มาก

ตาราง 12 (ต่อ) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่องที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่อง

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
11	2.40% (1 คน)	26.20% (11 คน)	52.40% (22 คน)	16.70% (7 คน)	2.40% (1 คน)	3.10	0.79	ปานกลาง
12	9.50% (4 คน)	38.10% (16 คน)	47.60% (20 คน)	4.80% (2 คน)	-	3.52	0.74	มาก
13	7.10% (3 คน)	31.00% (13 คน)	54.80% (23 คน)	4.80% (2 คน)	2.40% (1 คน)	3.36	0.79	ปานกลาง
14	2.40% (1 คน)	19.00% (8 คน)	64.30% (27 คน)	14.30% (6 คน)	-	3.10	0.66	ปานกลาง
15	4.80% (2 คน)	35.70% (15 คน)	59.50% (25 คน)	-	-	3.45	0.59	ปานกลาง
16	4.80% (2 คน)	40.50% (17 คน)	50.00% (21 คน)	4.80% (2 คน)	-	3.45	0.67	ปานกลาง
17	14.30% (6 คน)	50.00% (21 คน)	33.30% (14 คน)	2.40% (1 คน)	-	3.76	0.73	มาก
18	7.10% (3 คน)	16.70% (7 คน)	69.00% (29 คน)	7.10% (3 คน)	-	3.24	0.69	ปานกลาง
19	2.40% (1 คน)	31.00% (13 คน)	61.90% (26 คน)	4.80% (2 คน)	-	3.31	.60	ปานกลาง
20	16.70% (7 คน)	42.90% (18 คน)	40.50% (17 คน)	-	-	3.76	0.73	มาก

ค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มนำร่องทั้งฉบับ ( $\alpha$ )

เท่ากับ 0.90

ตาราง 13 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจากใบ  
กิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	20	13.21	66%	5.58

ตาราง 14 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ  
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ของ  
นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	80	60.62	75.78	7.34

ตาราง 15 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ  
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน  
ตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. คะแนนเต็ม 100 คะแนน

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53	100	73.83	73.83	10.76

ตาราง 16 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากใบกิจกรรม แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 53 คน

กลุ่มตัวอย่าง	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ( $\bar{X}$ )	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
ใบกิจกรรม	20	13.21	66	5.58
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	80	60.62	75.78	7.34
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	100	73.83	73.83	10.76

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ซึ่งใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร โดยใช้การทดสอบ Z (Z – test for Population Proportion)

$$\text{สมมติฐาน คือ } H_0 : p \leq 0.7$$

$$H_1 : p > 0.7$$

$$\text{สถิติทดสอบ } Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$\text{จาก } \hat{p} = \frac{48}{53} = 0.91, p_0 = 0.7$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } Z &= \frac{0.91 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.70(0.30)}{53}}} \\ &= \frac{0.21}{\sqrt{0.00396}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } Z = 3.338$$

จะปฏิเสธ  $H_0$  เมื่อ  $Z > Z_{.01}$

$$\text{จากตารางได้ว่า } Z_{.01} = 2.326$$

และ  $3.338 > 2.326$  ซึ่งตกอยู่ในขอบเขตวิกฤต

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ  $H_0$  ยอมรับ  $H_1$  นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่า ร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด



ตาราง 17 (ต่อ) คะแนนแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่ คน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28	3	5	5	3	4	5	4	3	4	5	3	4	4	5	4	4	5	5	5	5
29	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
30	3	3	3	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
31	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
32	4	3	3	3	5	4	3	4	3	5	4	3	4	3	4	5	5	5	4	4
33	5	4	5	3	5	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
34	5	4	5	5	4	4	5	5	4	5	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5
35	3	3	3	4	3	4	3	3	4	4	3	4	4	3	3	3	4	3	3	4
36	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
37	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	4	3	3
38	3	3	3	4	4	4	3	3	3	4	4	4	3	4	4	4	4	4	3	3
39	3	3	3	4	3	4	3	3	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	5	3	4	2	3	4	0	3	4	5	4	5	3	2	4	3	4	5	4	3
41	5	2	4	4	4	5	4	5	5	5	3	4	3	3	3	4	4	5	3	4
42	3	5	4	4	5	5	4	4	5	5	3	5	3	4	3	3	4	5	3	4
43	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
44	5	4	5	4	4	5	4	4	4	3	3	3	4	3	4	4	4	3	4	4
45	1	5	1	5	5	5	1	1	5	1	4	0	1	1	1	1	5	5	5	5
46	4	0	4	4	4	4	3	3	4	4	5	4	4	4	4	4	3	4	4	5
47	5	3	3	1	3	4	4	3	1	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
48	5	4	4	5	0	5	4	4	5	5	5	5	4	4	5	5	5	4	4	5
49	3	3	3	3	3	4	3	3	3	2	0	3	3	3	3	3	3	3	3	4
50	4	4	4	3	4	5	4	4	4	3	4	4	5	4	3	4	5	4	5	5
51	4	4	3	4	4	5	3	4	3	3	5	4	4	3	3	4	3	3	4	5
52	4	3	4	0	4	4	4	3	4	5	4	3	3	2	4	4	3	3	4	5
53	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4	4	4	4	5	4	4	5	4	4	5

ตาราง 18 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่ม  
ตัวอย่างที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
1	30.20% (16 คน)	34.00% (18 คน)	28.30% (15 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.85	0.99	มาก
2	15.10% (8 คน)	34.00% (18 คน)	45.30% (24 คน)	3.80% (2 คน)	-	3.55	0.93	มาก
3	17.00% (9 คน)	39.60% (21 คน)	39.60% (21 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.68	0.85	มาก
4	17.00% (9 คน)	41.50% (22 คน)	34.00% (18 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.62	1.00	มาก
5	15.10% (13 คน)	34.00% (24 คน)	45.30% (13 คน)	3.80% (1 คน)	-	3.81	1.08	มาก
6	43.40% (23 คน)	37.70% (20 คน)	17.00% (9 คน)	1.90% (1 คน)	-	4.23	0.80	มาก
7	13.20% (7 คน)	47.20% (25 คน)	35.80% (19 คน)	-	1.90% (1 คน)	3.64	0.92	มาก
8	13.20% (7 คน)	30.20% (16 คน)	49.10% (26 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.43	0.97	ปานกลาง
9	20.80% (11 คน)	39.60% (21 คน)	35.80% (19 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.75	0.88	มาก
10	35.80% (19 คน)	35.80% (19 คน)	24.50% (13 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	4.02	0.93	มาก

ตาราง 18 (ต่อ) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{X}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
11	18.90% (10 คน)	37.70% (20 คน)	34.00% (18 คน)	5.70% (3 คน)	-	3.58	1.10	มาก
12	24.50% (13 คน)	39.60% (21 คน)	32.10% (17 คน)	-	-	3.77	1.07	มาก
13	18.90% (10 คน)	35.80% (19 คน)	41.50% (22 คน)	-	1.90% (1 คน)	3.64	0.98	มาก
14	20.80% (11 คน)	26.40% (14 คน)	43.40% (23 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.53	1.07	มาก
15	18.90% (10 คน)	37.70% (20 คน)	37.70% (20 คน)	1.90% (1 คน)	1.90% (1 คน)	3.64	1.00	มาก
16	20.80% (11 คน)	41.50% (22 คน)	28.30% (15 คน)	5.70% (3 คน)	1.90% (1 คน)	3.68	1.05	มาก
17	37.70% (20 คน)	28.30% (15 คน)	28.30% (15 คน)	3.80% (2 คน)	1.90% (1 คน)	3.94	1.06	มาก
18	24.50% (13 คน)	35.80% (19 คน)	32.10% (17 คน)	5.70% (3 คน)	-	3.74	1.02	มาก
19	24.50% (13 คน)	32.10% (17 คน)	39.60% (21 คน)	1.90% (1 คน)	-	3.74	0.98	มาก
20	37.70% (20 คน)	34.00% (18 คน)	24.50% (13 คน)	1.90% (1 คน)	-	4.02	1.01	มาก
	ค่าเฉลี่ย					3.74	0.98	มาก

ภาคผนวก ค  
คู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

## คู่มือการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

### คำชี้แจงการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียน  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### หลักการและเหตุผล

ปัจจุบันประเทศไทยใช้หลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 โดยเริ่มใช้ใน  
ปีการศึกษา 2546 ซึ่งหลักสูตรได้กำหนดสาระการเรียนรู้ไว้ 6 สาระดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์และความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สำหรับสาระที่ 4 พีชคณิต และสาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตร  
การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ ดังนี้

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน  
ต่างๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์  
อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์  
และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และ  
เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จากการศึกษามาตรฐาน ค 4.1 และมาตรฐาน ค 6.1 ต้องการให้ผู้เรียนได้เกิดการเรียนรู้ดังนี้ตามลำดับ

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้และความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ได้
- ใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

ดังนั้นในการจัดกิจกรรมต่างๆ จึงต้องเอื้อต่อการค้นพบ เพื่อเสริมสร้างความรู้และเพื่อให้เกิดมโนทัศน์ต่างๆ กิจกรรมต่างๆ ควรท้าทาย น่าสนใจ เปิดโอกาสให้นักเรียนทดลองปฏิบัติ สังเกต สัมผัสสำรวจ คิด แก้ปัญหา ซึ่งฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นเรื่องที่สามารถสร้างกิจกรรมต่างๆ ตามความสนใจของผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และค้นพบได้ทั้งยังเป็นพื้นฐานในการเรียนระดับสูง เนื่องจากปัจจุบันมีความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีมากขึ้น และยังสามารถพัฒนาซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เพื่อเป็นเครื่องอำนวยความสะดวกการเรียนรู้แก่ผู้เรียน โดยเฉพาะในส่วนของพีชคณิต ซึ่งซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่ดีจะช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างกราฟของสมการ และวัดขนาดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง และมุมได้อย่างรวดเร็วถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้นักเรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วพลิก หมุน หรือเลื่อนรูปในมุมมองต่างๆ ทำกิจกรรมการสำรวจด้วยการพลิก เลื่อน หมุน ยืด หด เพื่อให้นักเรียนสามารถมองความสัมพันธ์ของรูปแบบกราฟต่างๆ

ด้วยเหตุผลข้างต้นและความสำคัญดังกล่าว จะเห็นว่าเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นเนื้อหาหนึ่งที่มีความสำคัญและมีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังนั้น เพื่อเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนในการจัดการเรียนการสอน ผู้วิจัยจึงสนใจจะสร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

## วัตถุประสงค์

เพื่อให้ครูใช้เป็นเครื่องมือในการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

## เนื้อหา

ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วย 7 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

หน่วยที่ 1 ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 3 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 1 คาบ
หน่วยที่ 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	เวลา 4 คาบ
หน่วยที่ 5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	เวลา 2 คาบ
หน่วยที่ 6 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	เวลา 3 คาบ
หน่วยที่ 7 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 4 คาบ

## แนวทางการใช้กิจกรรม

ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R. ประกอบด้วย

1. คำชี้แจงการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน
2. คู่มือการใช้โปรแกรม C.a.R.
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. สื่อการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย
  - 4.1 ใบกิจกรรม
  - 4.2 แฟ้มคำสั่ง
5. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. แบบวัดความพึงพอใจ

ในการใช้กิจกรรมต่างๆ ให้ปฏิบัติตามแผนการจัดการเรียนรู้และฝึกทักษะตามใบกิจกรรม โดยแต่ละกิจกรรมจะใช้แฟ้มคำสั่งร่วมกับใบกิจกรรมที่สร้างขึ้น เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนการสอนให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และทำแบบวัดความพึงพอใจ

## แผนการสอน

แผนการ จัดการเรียนรู้	เรื่อง	จำนวนคาบ (คาบ)
1	ทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	1
2	การวัดมุม - หน่วยของมุมเป็นองศา - หน่วยของมุมเป็นเรเดียน	1
3	วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง - ระยะทางและการวัดระยะทาง กรณีที่ 1 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเต็ม $\pi$ กรณีที่ 2 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ $\frac{\pi}{2}$ กรณีที่ 3 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ $\frac{\pi}{4}$ กรณีที่ 4 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$	2
4	ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	1
5	ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ - ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน - ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ	4
6	ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ - ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงบางจำนวน - ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงใดๆ	2
7	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	3
8	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ - กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ $y = T(x)$ - กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ $y = k \cdot T(x)$ เมื่อ $k \neq 0$ - กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ $y = T(k \cdot x)$ เมื่อ $k \neq 0$ - กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ $y = T(x+k)$ เมื่อ $k \neq 0$ - กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ $y = T(x)+k$ เมื่อ $k \neq 0$	4

**จุดประสงค์การเรียนรู้**  
**เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

หน่วย การเรียนรู้	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
1	ทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติและการวัดมุม	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกความแตกต่างระหว่างหน่วยการวัดมุมองศากับเรเดียน</li> <li>2. นักเรียนเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติได้</li> </ol>
2	วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง</li> <li>2. นักเรียนสามารถวัดความยาวส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง</li> <li>3. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง</li> </ol>
3	ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้</li> <li>2. นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้</li> <li>3. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งได้</li> </ol>
4	ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงพื้นฐานได้</li> <li>2. เมื่อกำหนด <math>\sin \theta</math> หรือ <math>\cos \theta</math> นักเรียนสามารถหาจำนวนจริง <math>\theta</math> ได้</li> <li>3. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง <math>\theta</math> ใดๆ โดยอาศัยค่าของจำนวนจริงพื้นฐานได้</li> <li>4. เมื่อกำหนดฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์ให้นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่เหลือโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันทั้งสองได้</li> </ol>

หน่วย การเรียนรู้	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
5	ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้</li> <li>2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของจำนวนจริงพื้นฐานได้</li> <li>3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งนักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่เหลือโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นได้</li> </ol>
6	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของมุมที่มีหน่วยเป็นองศาและเรเดียนได้</li> <li>2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพื้นฐานได้</li> <li>3. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม <math>\theta</math> เมื่อ <math>\theta &gt; 90^\circ</math> โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานได้</li> <li>4. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม <math>-\theta</math> เมื่อ <math>\theta &gt; 0^\circ</math> โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานได้</li> <li>5. เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมบอกมุม 1 มุม และด้าน 1 ด้านนักเรียนสามารถหาความยาวของด้านที่เหลือได้</li> <li>6. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติค่าหนึ่งให้ได้</li> <li>7. นักเรียนสามารถอ่านและหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งที่มีอยู่ในตารางและไม่อยู่ในตารางได้</li> </ol>

หน่วย การเรียนรู้	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
7	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้</li> <li>2. นักเรียนสามารถบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้</li> <li>3. นักเรียนสามารถหาค่าคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้</li> </ol>

คู่มือการใช้โปรแกรม C.a.R.



จัดทำโดย

นายบุญพล จันทรฝอย

## คู่มือการใช้โปรแกรม C.a.R.

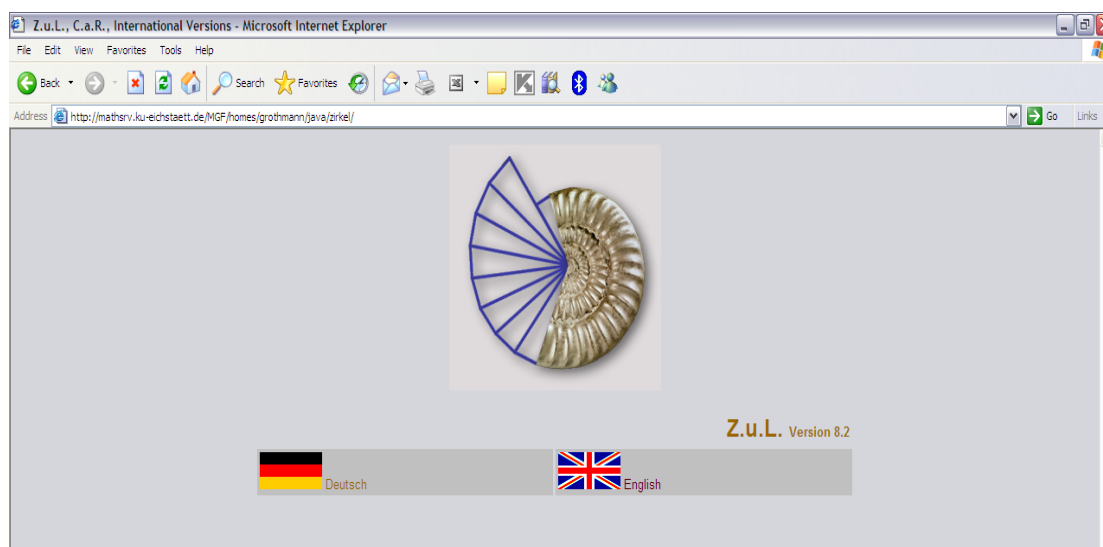
### บทนำ

ซอฟต์แวร์ C.a.R. เป็นโปรแกรมซึ่งอนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย และมีสมบัติเบื้องต้นของซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลศาสตร์เพียงพอ C.a.R. เป็นซอฟต์แวร์ที่พัฒนาขึ้นโดยศาสตราจารย์ ดร.เรอเน่ โกรธมันน์ (Prof.Dr.Rene Grothmann ) ชาวเยอรมัน โดยมีวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาจนถึงระดับสูงรวมทั้งผู้ใหญ่ การใช้โปรแกรมสามารถใช้ได้ด้วยการคลิกเมาส์และลากเมาส์ หรือใช้คำสั่งเป็นข้อความโดยตรง นอกจากนี้ผู้สอนยังสามารถออกแบบการบ้านให้นักเรียนสร้าง โดยโปรแกรมจะแจ้งให้รู้เมื่อทำได้ถูกต้อง จุดเด่นอีกประการหนึ่งคือสามารถนำเสนอในรูปแบบ HTML ได้สะดวกเนื่องจากเป็นโปรแกรมที่พัฒนาด้วยภาษา JAVA

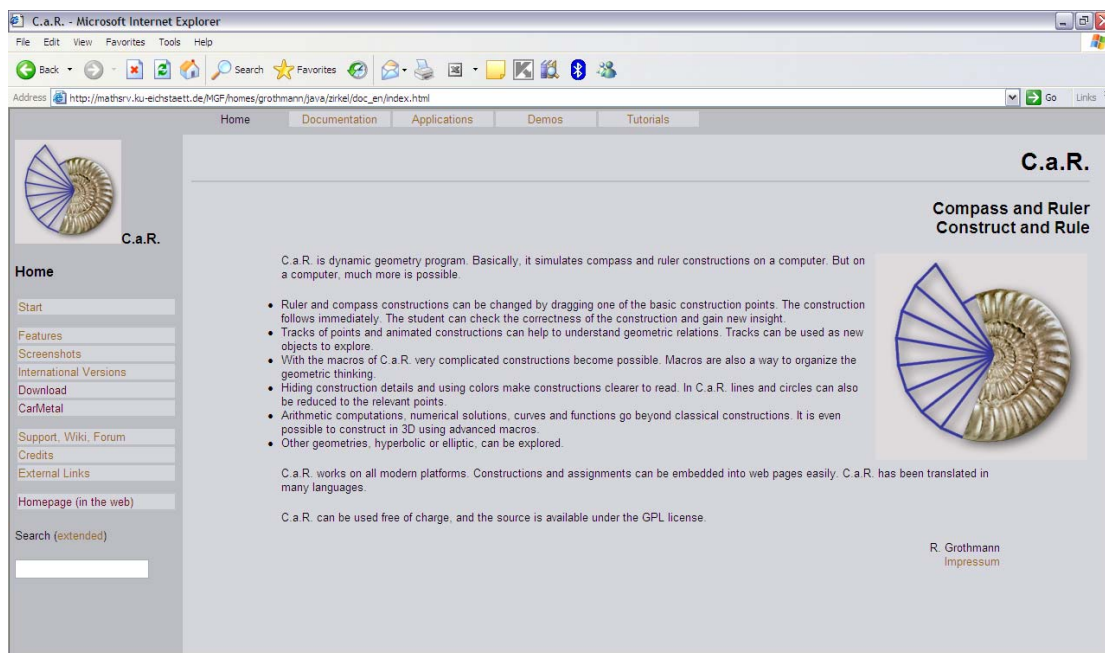
### แหล่งที่มาของโปรแกรม C.a.R.

ในที่นี้ผู้วิจัยจะขอแนะนำแหล่งที่มาของโปรแกรมว่ามาอย่างไรและติดตั้งอย่างไร เพื่อเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนและผู้ที่จะศึกษาโปรแกรมโปรแกรม C.a.R. ได้นำไปใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

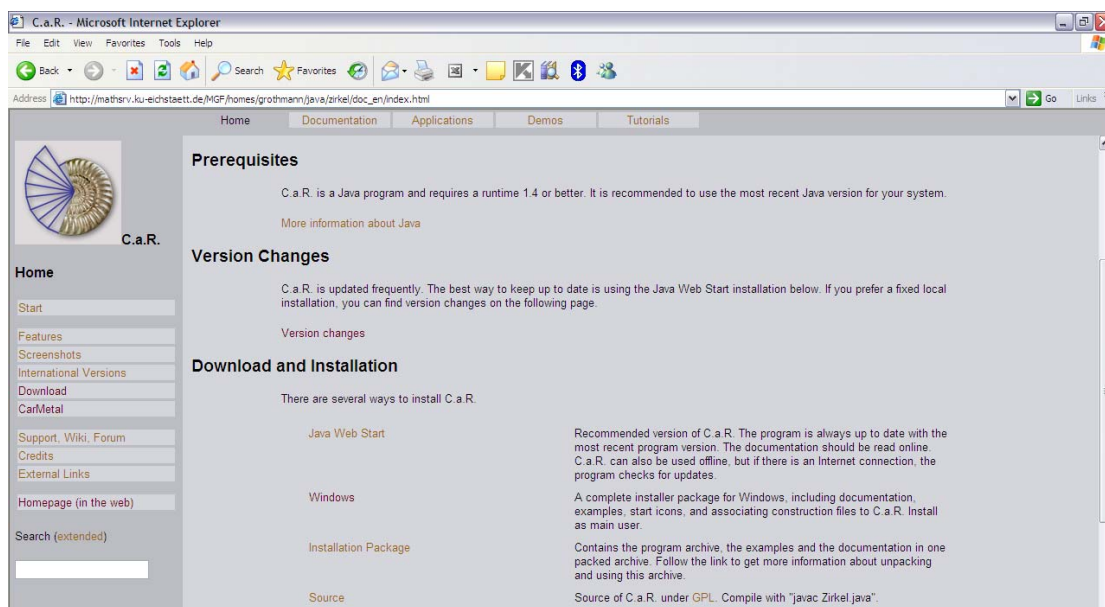
**ขั้นตอนที่ 1** เข้าไปในเว็บไซต์ [www.z-u-l.de](http://www.z-u-l.de) จะปรากฏภาพหน้าจอ ดังรูปข้างล่าง



**ขั้นตอนที่ 2** เมื่อเข้าเว็บไซต์แล้วให้ทำการเลือกภาษาที่เราต้องการ ในที่นี้ผู้วิจัยเลือกเข้าเว็บไซต์ ด้วยภาษาอังกฤษ เมื่อทำการคลิกที่คำว่า English แล้วจะปรากฏหน้าจอที่ 2 ดังรูป

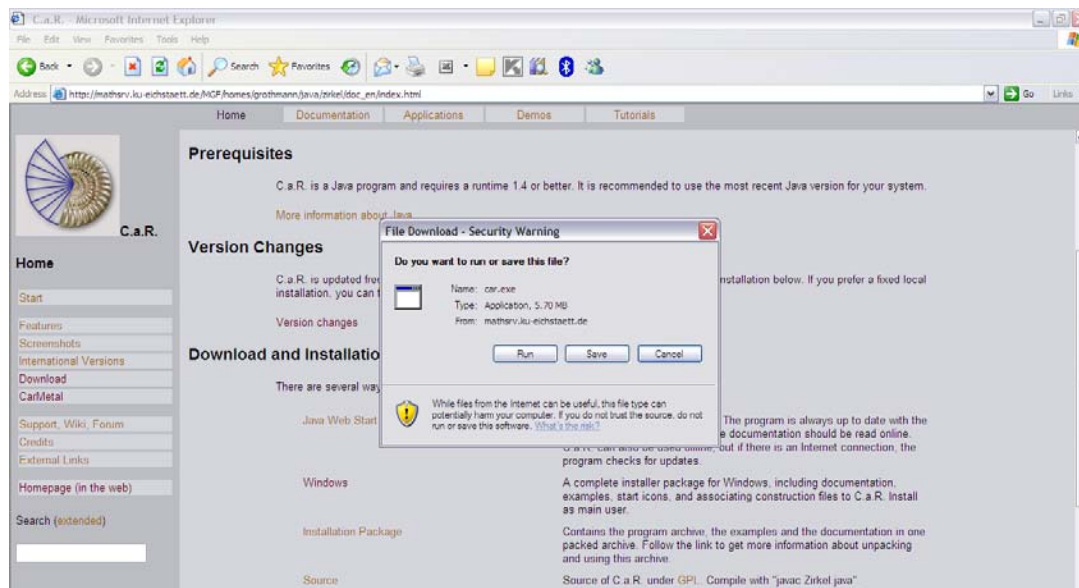


ขั้นตอนที่ 3 หลังจากที่เราได้เข้ามาในหน้าที่ 2 แล้วจากนั้นเราจะทำการ Download โปรแกรม โดยใช้เมนู Download ที่อยู่ทางด้านซ้ายของรูปข้างบน ให้ทำการคลิกเข้าไปแล้วจะปรากฏ หน้าจอ ดังนี้



**ขั้นตอนที่ 4** เมื่อทำตามขั้นตอนที่ 3 เสร็จแล้วจากนั้นก็เป็นการ Download โปรแกรม ซึ่งจากรูปข้างบนจะเห็นหัวข้อ Download and Installation ในที่นี้ให้ทำการคลิกไปที่หัวข้อ Windows เพียงเท่านี้เราก็สามารถ download โปรแกรมนี้ไปใช้ได้ แต่ก่อนอื่นหากเครื่องคอมพิวเตอร์ของท่านมีระบบ JAVA ในเวอร์ชันที่ต่ำกว่า 1.4 เราก็สามารถ download ได้โดยเลือกไปที่หัวข้อ Prerequisites แล้วกดคลิกเข้าไปที่ [More information about JAVA](#)

เมื่อเราทำการคลิกไปที่ Windows แล้วก็จะปรากฏหน้าจอ ดังภาพข้างล่าง



จากนั้นเราก็ทำการ save แล้วก็ลงโปรแกรม เท่านี้ก็สามารถใช้งานโปรแกรมโปรแกรม C.a.R. (C.a.R.)

### ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลศาสตร์ C.a.R.

อุปกรณ์ที่จำเป็นสำหรับการใช้ C.a.R. ประกอบการเรียนตามบทเรียน มีดังนี้

1. เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล พร้อมทั้งคีย์บอร์ด เมาส์ และจอภาพสี
2. เครื่องเล่นแผ่นบันทึก 3.5 นิ้ว ( 3.5 Floppy Disk Drive ) หรือเครื่องเล่นแผ่น CD
3. ฮาร์ดดิสก์ ( Hard Disk ) ขนาดไม่น้อยกว่า 4 GB.
4. แผ่นบันทึก 3.5 นิ้ว หรือ แผ่น CD ที่มีไฟล์ที่ใช้ตามที่ระบุในใบกิจกรรม
5. ระบบปฏิบัติการ Microsoft Window xp หรือรุ่นใหม่กว่า
6. สนับสนุนเวอร์ชันตั้งแต่ JAVA 1.4 ขึ้นไป

## การใช้งานเบื้องต้น

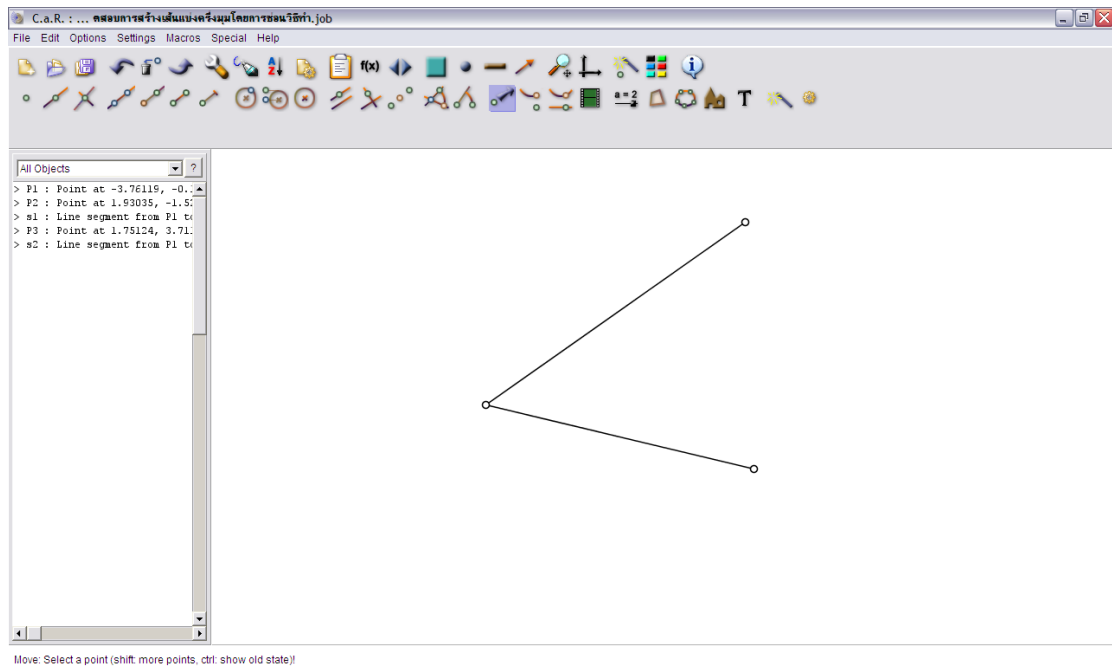
คำอธิบายเกี่ยวกับ Icon bar


เครื่องมือพื้นฐาน	
	เป็นจุดที่สามารถเคลื่อนไหวได้อย่างอิสระ และสามารถกำหนดพิกัดจุดได้ตามที่ต้องการ
	เป็นจุดที่สร้างขึ้นบนวงกลม หรือ บนเส้น หรือ ส่วนของเส้นตรง หรือ รัศมี
	การสร้างเส้นตรงผ่านจุดสองจุด
	การสร้างส่วนของเส้นตรงระหว่างจุดสองจุด
	การสร้างรัศมีจากจุดหนึ่งผ่านอีกจุดหนึ่ง
	การสร้างวงกลมรอบจุด และผ่านจุดๆ หนึ่ง
	การสร้างจุดตัดระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง ไม่ว่าจะเป็นวงกลม, เส้นตรง, รัศมี เป็นต้น
	การสร้างเส้นขนานผ่านจุดๆ หนึ่ง
	การสร้างเส้นตั้งฉากผ่านจุดๆ หนึ่ง
	การสร้างวงกลมรอบจุด โดยมีรัศมีเท่ากับระยะทางระหว่างจุดสองจุด
	การสร้างวงกลมรอบจุด โดยสามารถกำหนดรัศมีของวงกลมได้ตามต้องการ
	เคลื่อนไหวจุด
	ใช้ในการวัดมุมของจุดสามจุด
	ใช้ในการสร้างค่าพารามิเตอร์
	ใช้ในการซ่อนวัตถุที่ต้องการ
	ใช้ในการแสดงวัตถุที่ถูกซ่อนทั้งหมด
	ใช้ในการวาดกราฟของฟังก์ชันต่างๆ ไป
	ใช้ในการลบการสร้างในขั้นตอนสุดท้าย
	ใช้ในการลบวัตถุ (ควรระวังในการใช้)
	ใช้ในการเรียกคืนสิ่งที่ถูกลบก่อนหน้านี้
	สี
	ใช้ในการเปลี่ยนลักษณะของจุด
	ใช้ในการเปลี่ยนลักษณะของเส้น
	ใช้ในการแสดงกริด

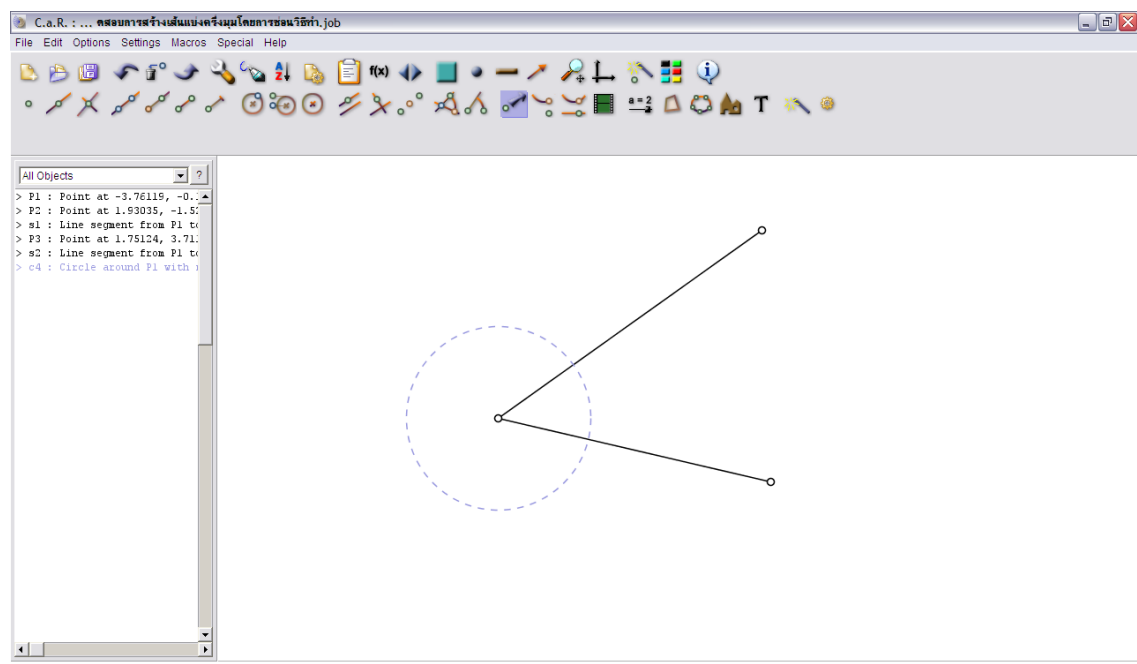
## ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรมโปรแกรม C.a.R.


ตัวอย่าง 1 การแบ่งครึ่งมุม เมื่อกำหนดมุมๆ หนึ่งมาให้

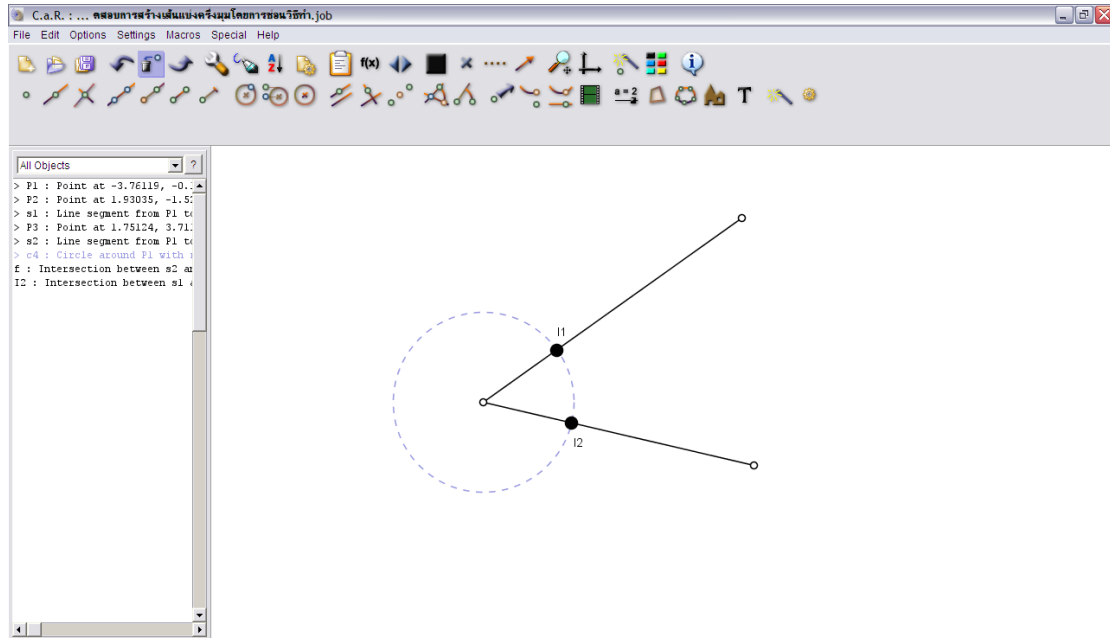
ในตัวอย่างที่ 1 เป็นการแบ่งครึ่งมุม จากมุมที่กำหนดให้ โดยใช้จุดคำสั่งที่อยู่ในการใช้งานเบื้องต้น ซึ่งสามารถทำการสร้างได้ตามขั้นตอนดังนี้




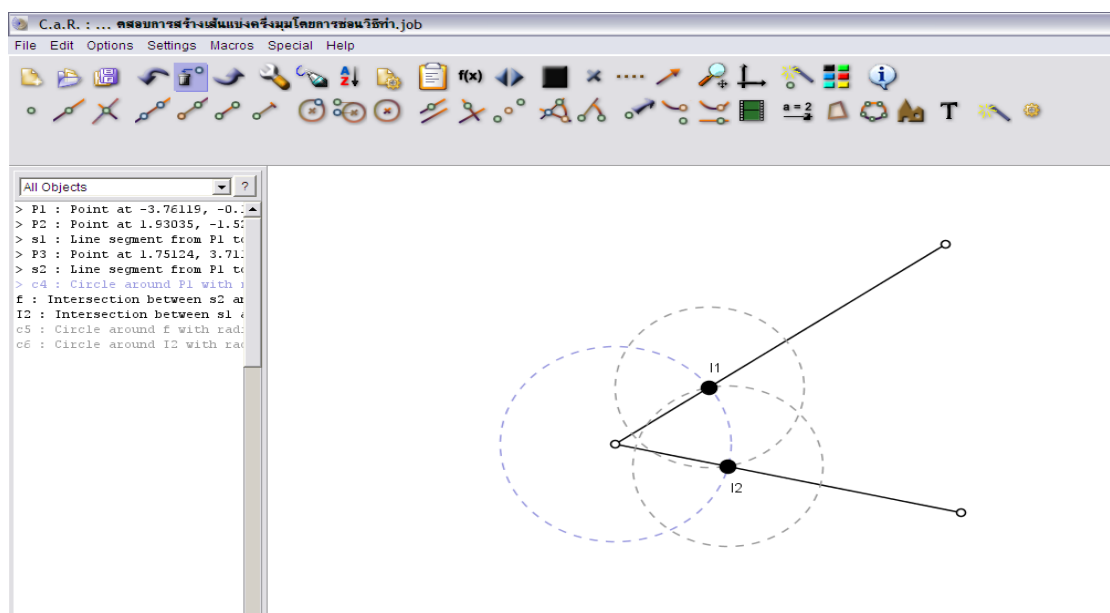
จากรูปข้างบนจะเห็นว่าโจทย์กำหนดมุมมาให้หนึ่งมุม ซึ่งเราสามารถทำการแบ่งครึ่งมุมได้ดังนี้  
**ขั้นที่ 1** ให้ใช้คำสั่ง  ในการสร้างวงกลมรอบจุดกึ่งกลางของมุมที่กำหนดให้ โดยกำหนดรัศมีพอประมาณ จะได้ดังนี้



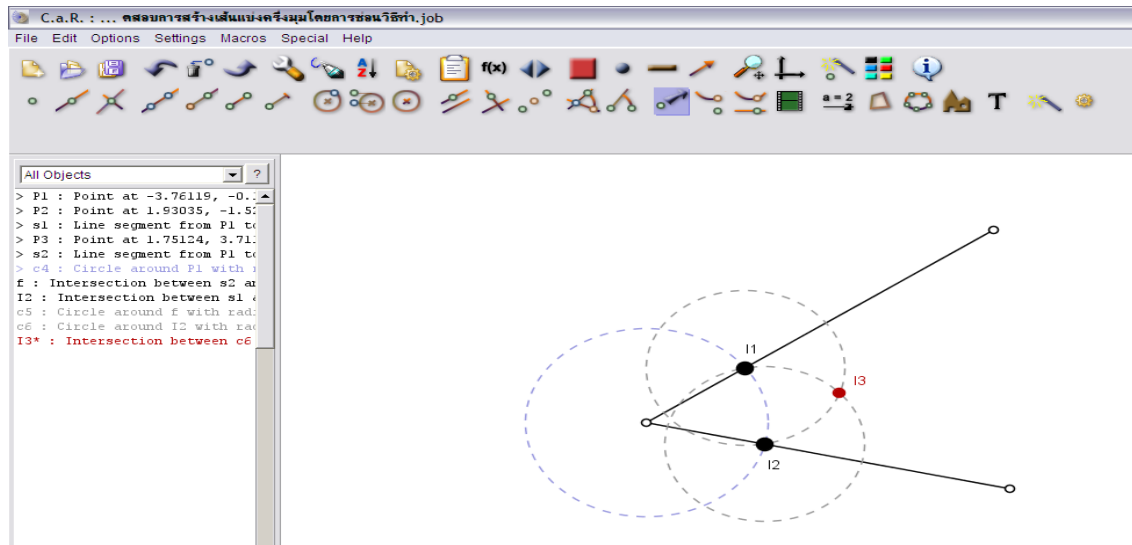
ขั้นที่ 2 จากขั้นตอนที่ 1 จะเห็นว่าเมื่อเราสร้างรูปวงกลมแล้ว รูปวงกลมจะตัดกับส่วนของเส้นตรงอยู่ 2 เส้น ให้เราใช้คำสั่ง  ในการสร้างจุดตัดที่เกิดขึ้นระหว่างรูปวงกลมกับส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น ให้เป็นชื่อ I1, I2 ดังนี้




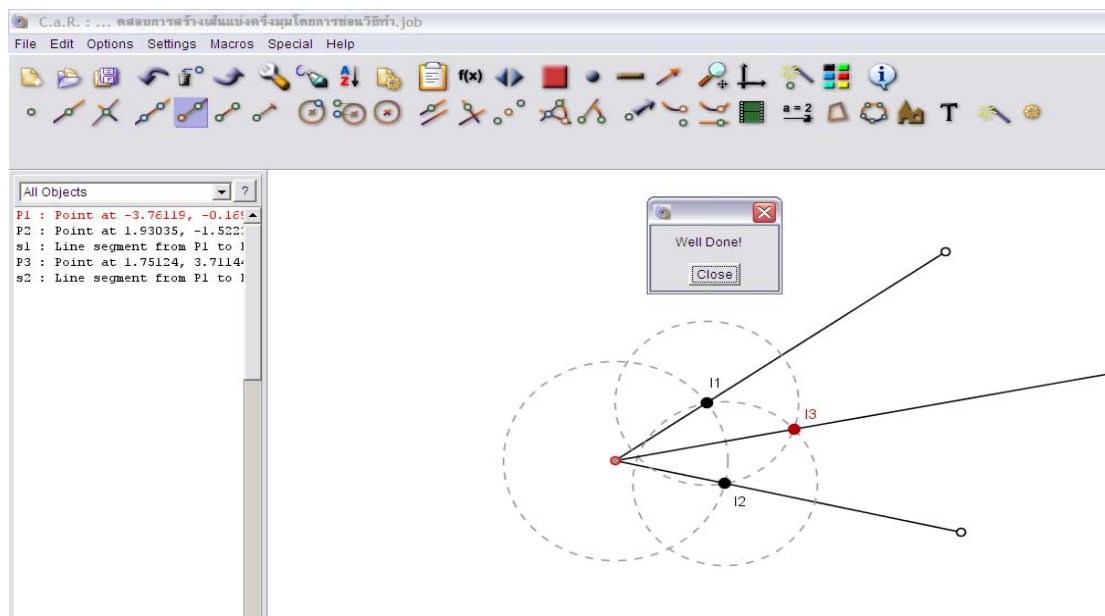
ขั้นที่ 3 ให้ใช้คำสั่ง  เพื่อสร้างวงกลมโดยเริ่มจากให้ I1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยมีรัศมีเท่ากับระยะทางจากจุด I1 ไปยัง I2 จากนั้นก็ให้ I2 เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลมรัศมีเท่าเดิม จะได้ดังรูปต่อไปนี้



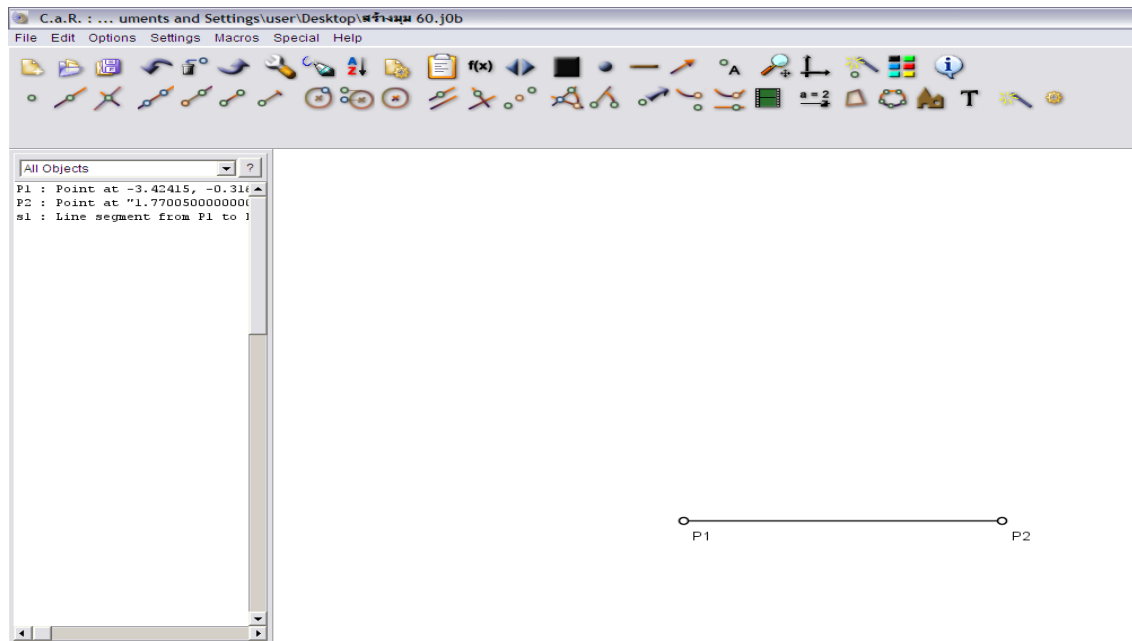
ขั้นที่ 4 สร้างจุดตัดที่เกิดขึ้นจากวงกลมทั้ง 2 วง โดยใช้คำสั่ง  ดังรูป




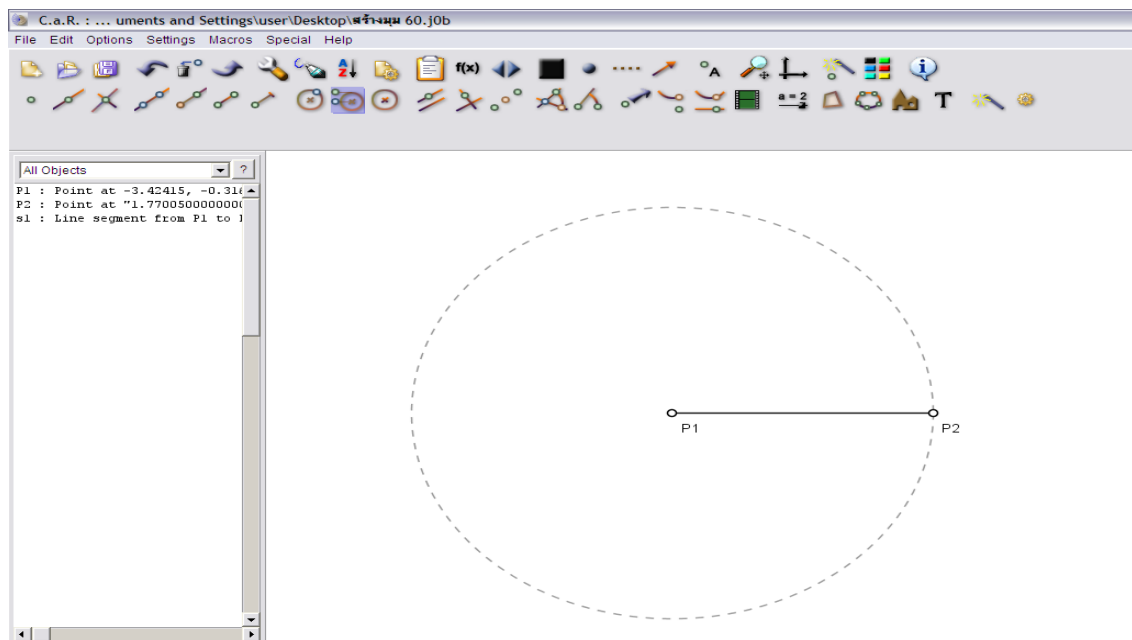
ขั้นที่ 5 ใช้คำสั่ง  ในการสร้างรังสีจากจุดกึ่งกลางมุม ผ่านจุด I3 ถ้าทำถูกโปรแกรมก็จะทำการตอบสนองทันที แต่ถ้าทำไม่ถูกโปรแกรมก็จะไม่ทำการตอบสนองซึ่งแสดงว่าทำผิดหรืออาจจะมีตำแหน่งไหนที่เราวางได้ไม่พอดีกับวัตถุ ดังรูป




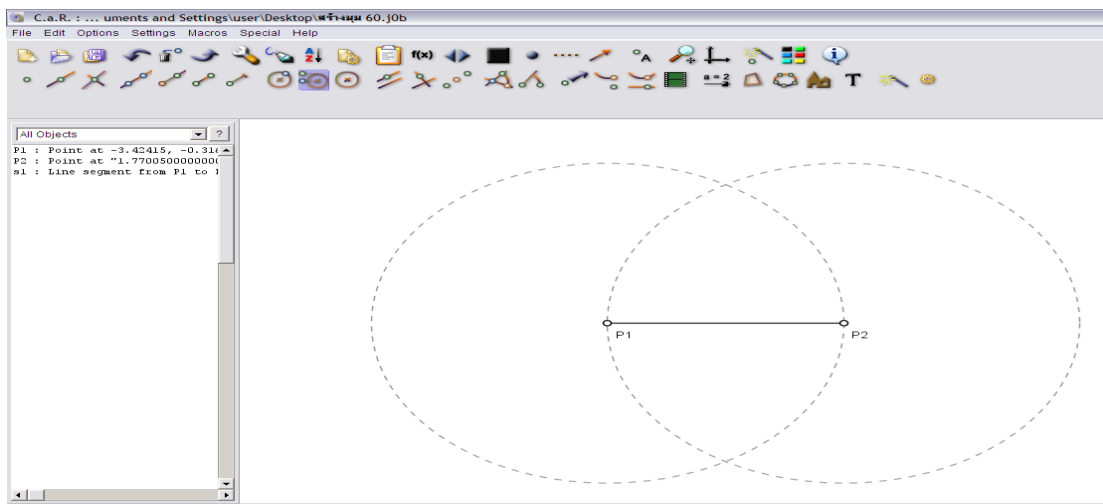
ตัวอย่างที่ 2 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา จากส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ดังรูป




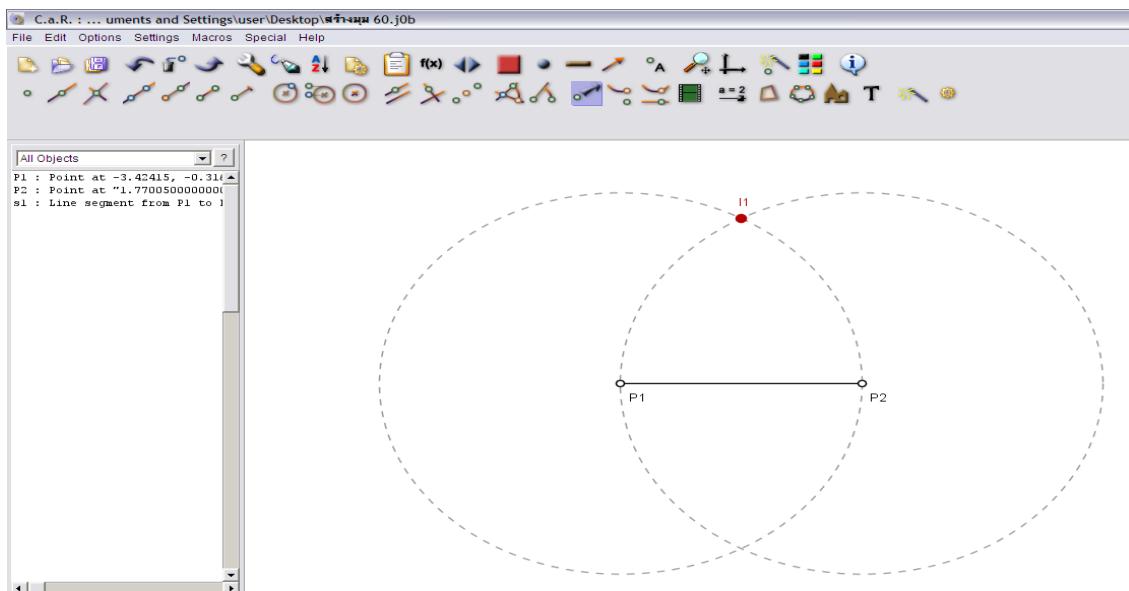
ขั้นที่ 1 ให้จุด P1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยใช้คำสั่ง  กำหนดให้วงกลมมีรัศมีเท่ากับระยะทางจากจุด P1 ไปยังจุด P2 ดังรูป




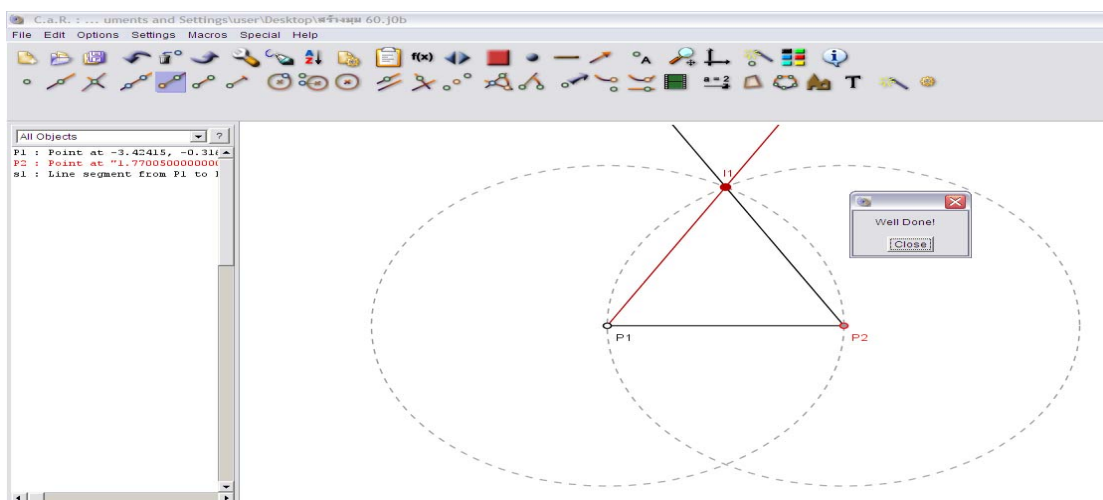
ขั้นที่ 2 ให้จุด P2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยใช้คำสั่ง  กำหนดให้วงกลมมีรัศมีเท่ากับระยะทางจากจุด P1 ไปยังจุด P2 ดังรูป



ขั้นที่ 3 สร้างจุดตัดของวงกลมทั้ง 2 วง โดยใช้คำสั่ง  โดยให้จุดตัดมีชื่อว่า I1 ดังรูป

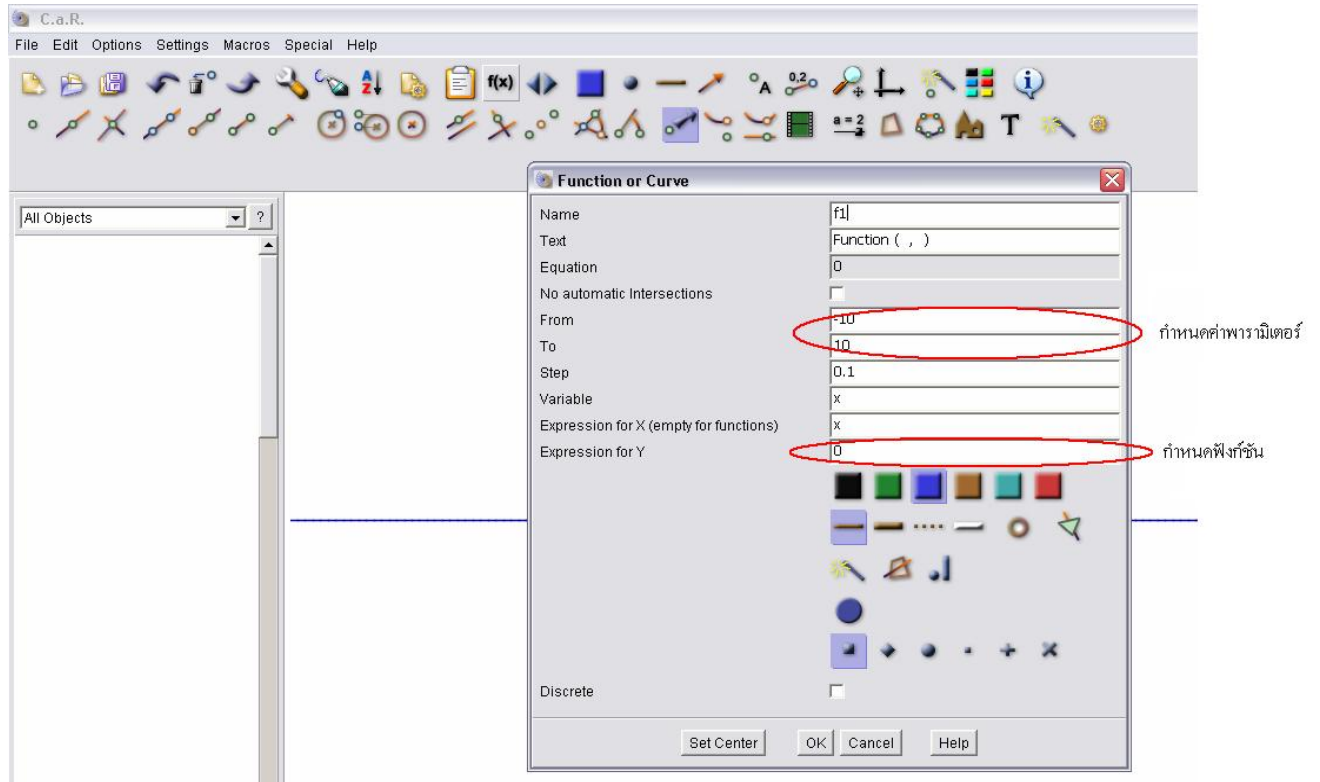


ขั้นที่ 4 ใช้คำสั่ง  ในการสร้างรังสีจากจุด P1 ผ่านจุด I1 และสร้างรังสีจากจุด P2 ผ่านจุด I1 ถ้าทำถูกต้องโปรแกรมก็จะทำการตอบสนองทันที ดังรูป

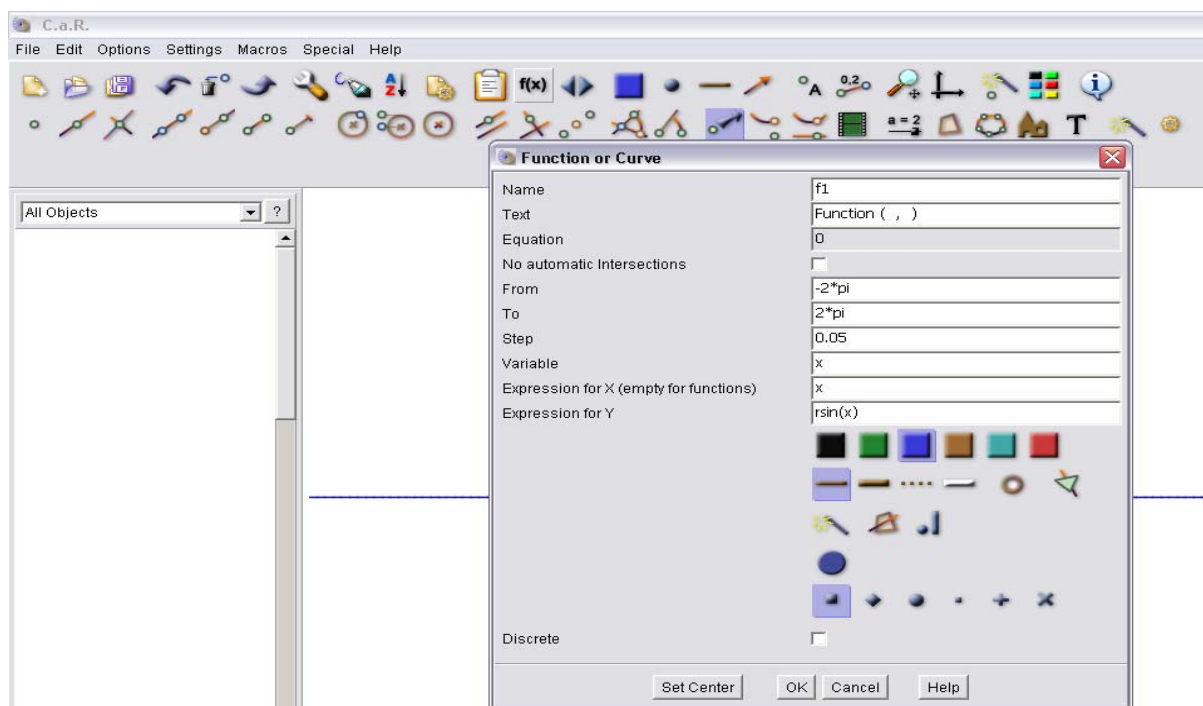


ตัวอย่างที่ 3 การสร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สามารถสร้างได้โดยปฏิบัติตามรูป

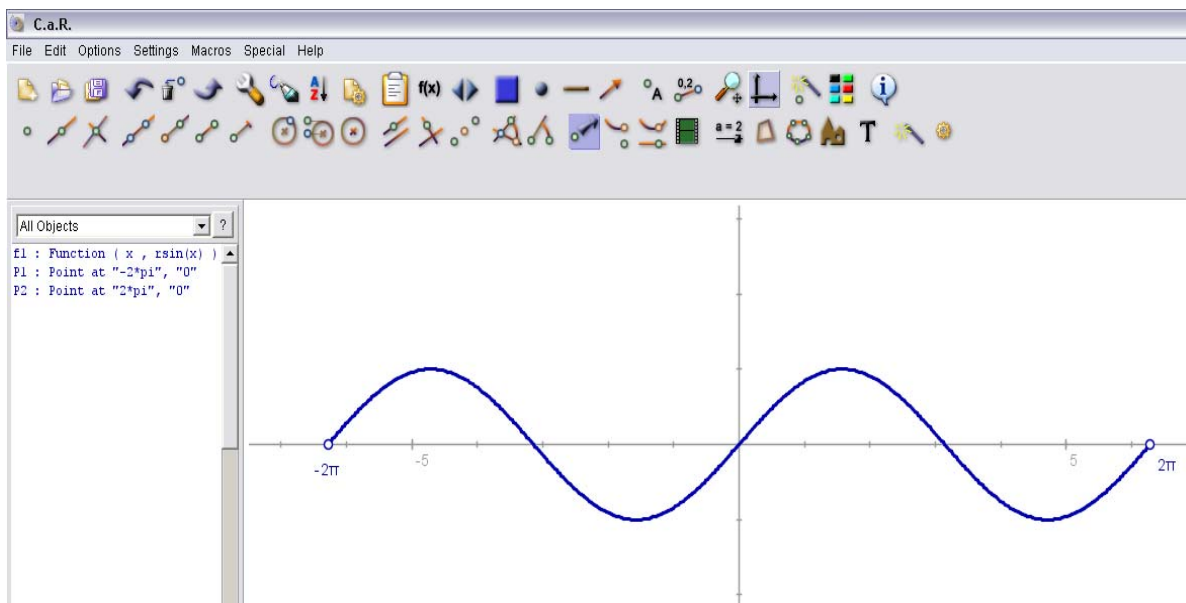
ขั้นที่ 1 ใช้คำสั่ง  $f(x)$  เพื่อกำหนดฟังก์ชันและกำหนดค่าพารามิเตอร์ของค่า  $x$  ดังรูป



ขั้นที่ 2 กำหนดฟังก์ชันที่ต้องการสร้างกราฟ (ในที่นี้ผู้วิจัยจะสาธิตการสร้างกราฟ  $r\sin(x)$ ) จากนั้นก็กำหนดค่าพารามิเตอร์หรือค่า  $x$  (ผู้วิจัยกำหนดค่า  $x$  จาก  $-2\pi$  ถึง  $2\pi$ ) ดังรูป





**ขั้นที่ 3** เมื่อทำการกำหนดฟังก์ชันและค่าพารามิเตอร์เสร็จแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม OK ก็จะได้กราฟของฟังก์ชันปรากฏดังรูปต่อไปนี้



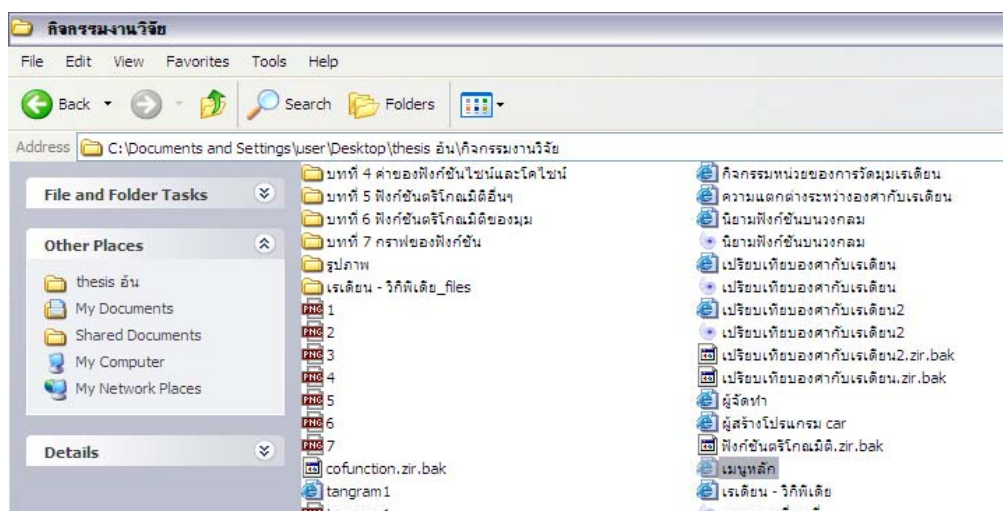
**หมายเหตุ :** ในการสร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเราต้องพิมพ์  $r$  นำหน้าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น  $r\sin(x)$ ,  $r\cos(x)$ ,  $r\tan(x)$  เพราะค่าพารามิเตอร์หรือค่า  $x$  ที่เรากำหนดขอบเขตนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน ดังนั้นจึงต้องใส่  $r$  นำหน้าเสมอ

## การเข้าสู่บทเรียน

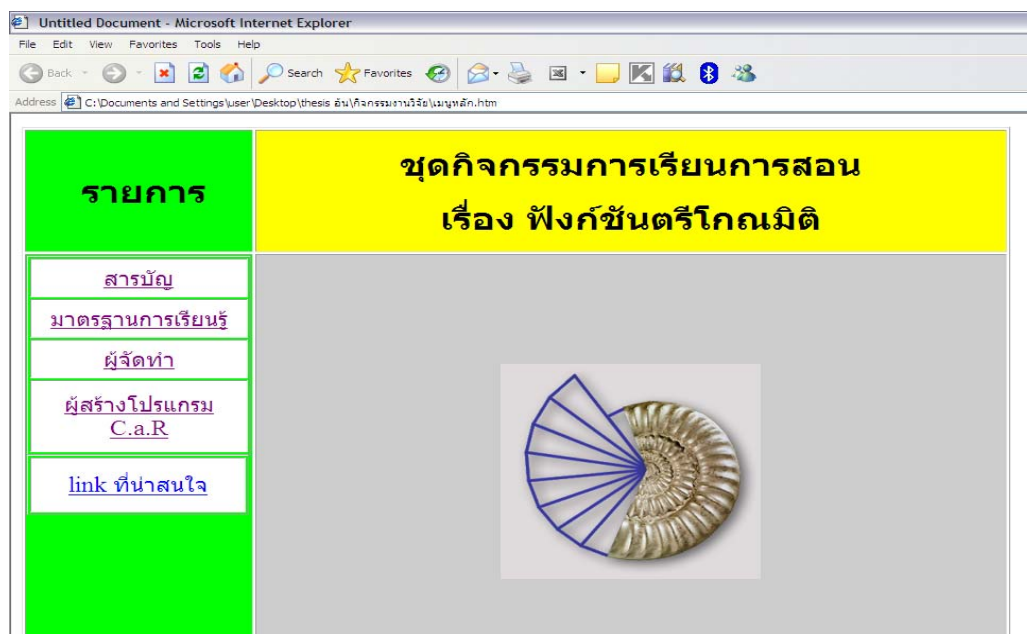
การเข้าสู่บทเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีขั้นตอนดังนี้

1. ใส่แผ่น CD ที่มีแฟ้มคำสั่งเกี่ยวกับชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. ดับเบิลคลิกที่ My Computer
3. ดับเบิลคลิกที่เครื่องเล่นแผ่น CD
4. คัดลอกโฟลเดอร์  กิจกรรมการเรียน ไว้ใน Desktop  
(ในที่นี้ผู้วิจัยจะให้นักเรียนคัดลอกที่ละหน่วยการเรียนรู้)
5. ดับเบิลคลิกที่  กิจกรรมการเรียน แล้วคลิกที่คำว่า เมนูหลัก จะปรากฏหน้าจอ

ดังรูป



6. ดับเบิลคลิกที่ เมนูหลัก จะปรากฏหน้าจอ ดังนี้

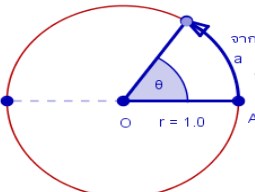


7. คลิกที่ สารบัญ เพื่อเข้าสู่กิจกรรม ซึ่งภายในสารบัญก็จะมีกิจกรรมที่จะให้นักเรียนปฏิบัติทั้งหมด 7 หน่วย ดังรูปที่ปรากฏ

รายการ	สารบัญ
<a href="#">สารบัญ</a>	
<a href="#">หน่วยที่ 1</a>	หน่วยที่ 1 : ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ
<a href="#">หน่วยที่ 2</a>	หน่วยที่ 2 : วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง
<a href="#">หน่วยที่ 3</a>	หน่วยที่ 3 : ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
<a href="#">หน่วยที่ 4</a>	หน่วยที่ 4 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
<a href="#">หน่วยที่ 5</a>	หน่วยที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ
<a href="#">หน่วยที่ 6</a>	หน่วยที่ 6 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
<a href="#">หน่วยที่ 7</a>	หน่วยที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
<a href="#">หน้าหลัก</a>	

8. เลือกเรื่องที่ต้องการทำชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เช่น กิจกรรมการเรียนในหน่วยที่ 2 กิจกรรมที่ 1.2 เรื่องการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

หน่วยของการวัดมุมเรเดียน



จากรูป ถ้าเราจะวัดมุม  $\theta$  หรือ มุม  $\widehat{AOB}$  ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน เรากระทำได้ ดังนี้

- กำหนดให้  $a$  คือ ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม
- $r$  คือ รัศมีของวงกลม
- $\theta$  คือ มุมที่จุดศูนย์กลาง

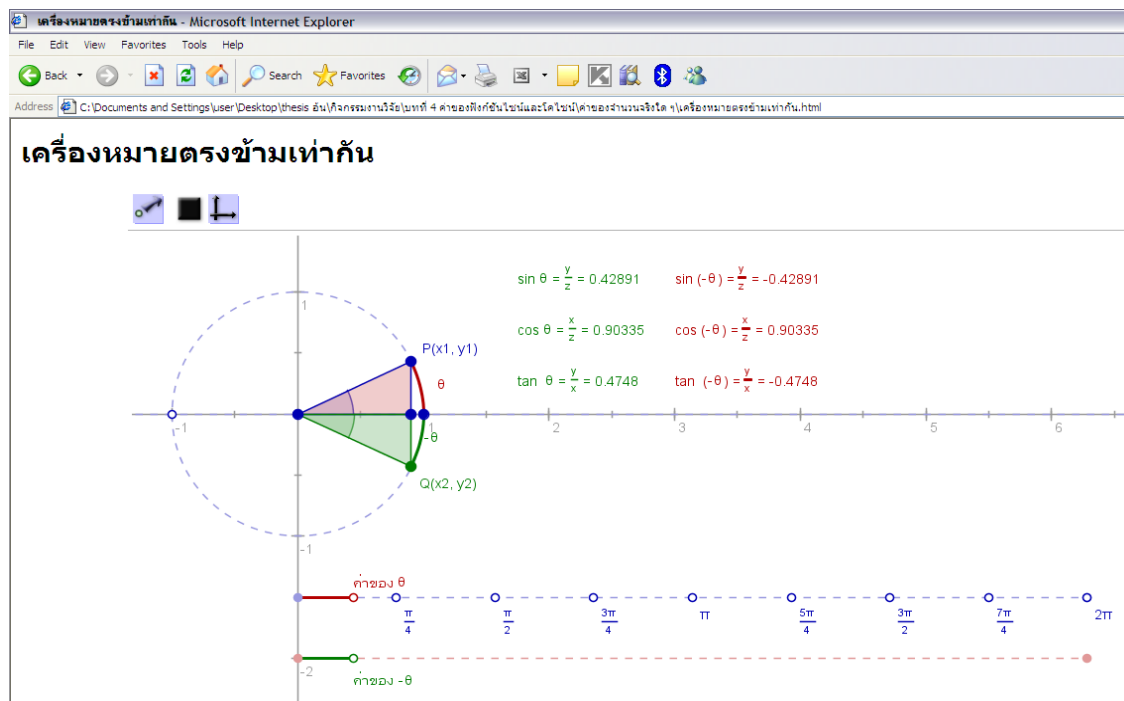
จะได้ว่า ความยาวส่วนโค้ง  $a = 1$  และ รัศมี  $r = 1$

จะเห็นว่ามุม  $\theta = 57.13$  องศา มีค่าความยาวส่วนโค้งเท่ากับ 1 เรเดียน

“เนื่องจาก ความยาวของกัณฑ์ดังกล่าวมีค่าเป็น **จำนวนจริง** และรัศมีของวงกลมก็มีค่าเป็น **จำนวนจริง** ดังนั้นค่าของ  $\theta$  ก็จะเป็น **จำนวนจริง**”

ขนาดของมุม = 57.13

9. เลือกที่หน่วยที่ 4 กิจกรรมที่ 4.2 เลือกรณีที่ 1 จะได้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน ดังรูป



ที่กล่าวมาเป็นตัวอย่างที่มีอยู่ในชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. หากนักเรียนหรือผู้สนใจปฏิบัติตามคู่มือการใช้งาน ก็จะช่วยให้ท่านสามารถใช้กิจกรรมได้อย่างสะดวก

### ภาคผนวก ง

แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.

# หน่วยที่ 1 ทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

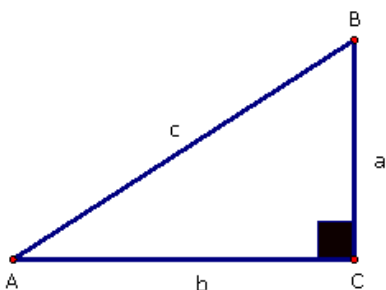
เรื่อง ทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จำนวน 1 คาบ

### 1. สาระสำคัญ

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเท่ากับ 90 องศา

ส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



จากรูป  $\triangle ABC$  ที่กำหนดให้ ที่มีมุม  $A$  เป็นมุมแหลม มีส่วนประกอบดังนี้

ให้  $a$  แทนความยาวส่วนของเส้นตรง  $BC$

ให้  $b$  แทนความยาวส่วนของเส้นตรง  $AC$

ให้  $c$  แทนความยาวส่วนของเส้นตรง  $AB$

จะได้ว่า

ส่วนของเส้นตรง  $AC$  คือ **ด้านประชิด (adjacent side)** ของมุม  $A$

ส่วนของเส้นตรง  $BC$  คือ **ด้านตรงข้าม (opposite side)** ของมุม  $A$

ส่วนของเส้นตรง  $AB$  คือ **ด้านตรงข้ามมุมฉาก (hypotenuse)**

ซึ่งแต่ละด้านมีสมบัติดังนี้

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{หรือ} \quad a^2 = c^2 - b^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \text{หรือ} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

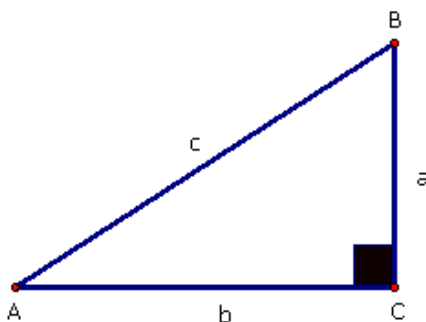
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{หรือ} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

จากสมบัติข้างบนจะเห็นว่าด้านตรงข้ามมุมฉากจะเป็นด้านที่ยาวที่สุด ซึ่งสมบัตินี้เรา

เรียกว่า “ทฤษฎีบทพีทาโกรัส”

**อัตราส่วนตรีโกณมิติ** คือ อัตราส่วนของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีทั้งหมด 6 อัตราส่วน ดังนี้ (ในที่นี้เราจะวัดจากมุม  $A$  เป็นหลัก)

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากข้างต้นเราสามารถเขียนอัตราส่วนของด้านแต่ละด้านได้ดังนี้



1. อัตราส่วน  $\frac{a}{c}$  เราเรียกว่า **ไซน์ (sine) ของมุม  $A$**
2. อัตราส่วน  $\frac{b}{c}$  เราเรียกว่า **โคไซน์ (cosine) ของมุม  $A$**
3. อัตราส่วน  $\frac{a}{b}$  เราเรียกว่า **แทนเจนต์ (tangent) ของมุม  $A$**
4. อัตราส่วน  $\frac{c}{a}$  เราเรียกว่า **โคเซแคนต์ (cosecant) ของมุม  $A$**
5. อัตราส่วน  $\frac{c}{b}$  เราเรียกว่า **เซแคนต์ (secant) ของมุม  $A$**
6. อัตราส่วน  $\frac{b}{a}$  เราเรียกว่า **โคแทนเจนต์ (cotangent) ของมุม  $A$**

ซึ่งอัตราส่วนทั้ง 6 เรานิยมเขียน ดังนี้

$\sin A$ อ่านว่า ไชน์ - เอ	แทน	<b>ไซน์ ของมุม <math>A</math> (sine of <math>A</math>)</b>
$\cos A$ อ่านว่า โคไซน์ - เอ	แทน	<b>โคไซน์ ของมุม <math>A</math> (cosine of <math>A</math>)</b>
$\tan A$ อ่านว่า แทนเจนต์ - เอ	แทน	<b>แทนเจนต์ ของมุม <math>A</math> (tangent of <math>A</math>)</b>
$\csc A$ อ่านว่า โคเซแคนต์ - เอ	แทน	<b>โคเซแคนต์ ของมุม <math>A</math> (cosecant of <math>A</math>)</b>
$\sec A$ อ่านว่า เซแคนต์ - เอ	แทน	<b>เซแคนต์ ของมุม <math>A</math> (secant of <math>A</math>)</b>
$\cot A$ อ่านว่า โคแทนเจนต์ - เอ	แทน	<b>โคแทนเจนต์ ของมุม <math>A</math> (cotangent of <math>A</math>)</b>

อัตราส่วนทั้ง 6 นี้เราเรียกว่า **“อัตราส่วนตรีโกณมิติ”**

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ


1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

### 3. ตารางการเรียนรู้


การสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขั้นตอนดังนี้

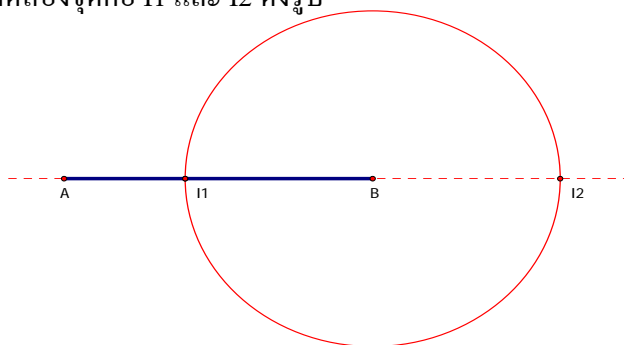
ขั้นที่ 1 กำหนดส่วนของเส้นตรง AB ดังรูป




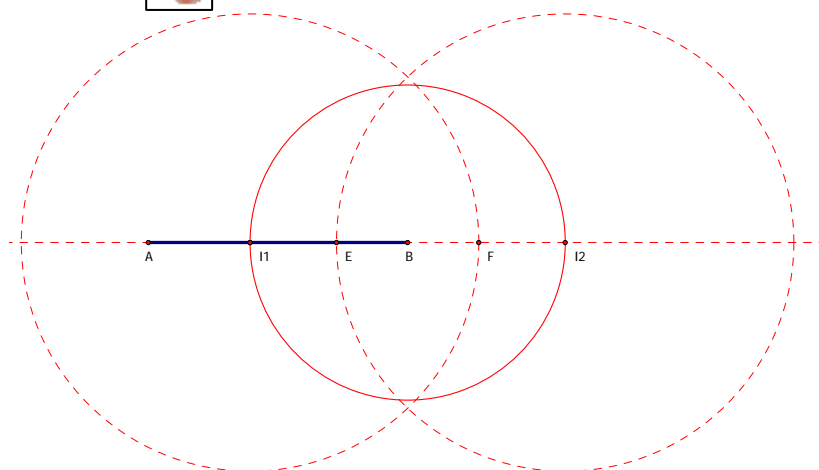
ขั้นที่ 2 สร้างเส้นตรงผ่านจุด A และ B ที่กำหนดให้โดยใช้คำสั่ง  ดังรูป




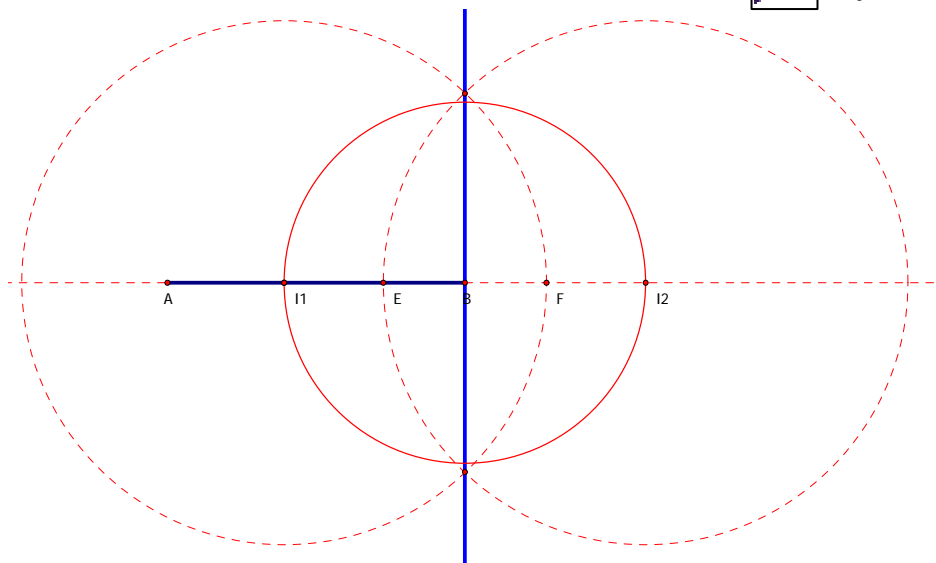
ขั้นที่ 3 สร้างวงกลมตัดเส้นตรงโดยให้ B เป็นจุดศูนย์กลาง โดยใช้คำสั่ง  จะได้จุดตัดสองจุดคือ I1 และ I2 ดังรูป




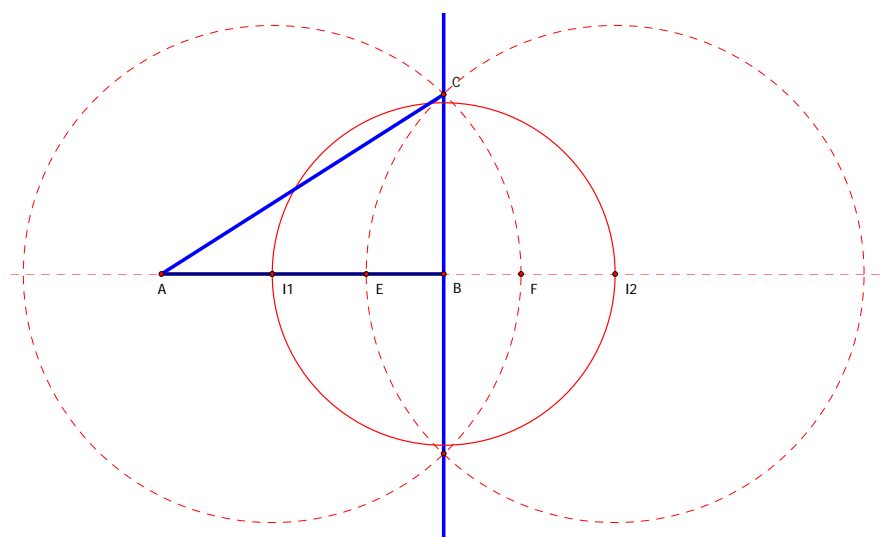
ขั้นที่ 4 ให้จุดตัด I1 และ I2 เป็นจุดศูนย์กลางเพื่อสร้างวงกลม โดยที่รัศมีทั้งสองเท่ากัน โดยใช้คำสั่ง  ดังรูป



ขั้นที่ 5 กำหนดจุดตัด แล้วสร้างเส้นตรงผ่านจุดตัด โดยใช้คำสั่ง  ดังรูป



ขั้นที่ 6 ลากส่วนของเส้นตรง AC โดยใช้คำสั่ง  ดังรูป



จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่มีมุม  $B$  เป็นมุมฉาก

จะได้ว่ารูป  $\triangle ABC$  มีส่วนประกอบดังนี้ (ชื่อมุม  $A$  เป็นหลัก)

ส่วนของเส้นตรง AB คือ **ด้านประชิด (adjacent side)** ของมุม  $A$

ส่วนของเส้นตรง BC คือ **ด้านตรงข้าม (opposite side)** ของมุม  $A$

ส่วนของเส้นตรง CA คือ **ด้านตรงข้ามมุมฉาก (hypotenuse)**

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอรื
2. ใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครุณำนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้เดิมในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติที่นักเรียนได้เรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ดังนี้

- ครูอธิบายว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่นักเรียนได้เรียนผ่านมาแล้วเป็นการศึกษาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยนิยามไซน์และโคไซน์ด้วยอัตราส่วนของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

- ครูถามนักเรียนว่านิยามของไซน์และโคไซน์เป็นอย่างไร

- ครูถามนักเรียนว่าค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีอะไรบ้าง

2. ครูแนะนำนักเรียนเกี่ยวกับการใช้งานของคำสั่งต่างๆ ที่ใช้ในกิจกรรมที่ 1.1 โดยการสาธิตและให้นักเรียนปฏิบัติตาม

3. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนถามสิ่งที่ไม่เข้าใจเกี่ยวกับการใช้งานของคำสั่งต่างๆ

4. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 1 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 1.1 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง

5. ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.1 โดยใช้คอมพิวเตอร์ และครูใช้กิจกรรมเป็นเครื่องมือในการสอน โดยให้นักเรียนได้ปฏิบัติตามกิจกรรมตามไปด้วย สิ่งที่สำคัญคือครูจะต้องชี้แจง และแนะนำนักเรียนให้ปฏิบัติตามกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง แล้วตอบคำถามลงในใบกิจกรรมที่ 1.1

6. เมื่อนักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมที่ 1.1 และทำใบกิจกรรมที่ 1.1 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 1.1 ทางคอมพิวเตอร์

7. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 1.1 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรมที่ 1.1 - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 1.1 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 1.1

# หน่วยที่ 1 ทบทวนความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง การวัดมุม

จำนวน 1 คาบ

### 1. สาระสำคัญ

#### การวัดมุม

ในการวัดมุม หน่วยของมุมที่เกิดจากการวัดจะมี 2 ลักษณะ

1. หน่วยของมุมเป็นองศา
2. หน่วยของมุมเป็นเรเดียน

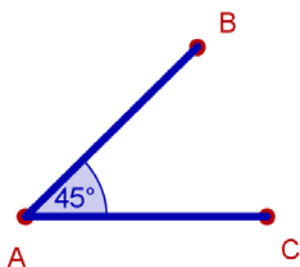
#### 1. หน่วยของมุมเป็นองศา

องศา (degree) คือ หน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติโดยกำหนดให้มุมที่เกิดขึ้นจากการหมุนแขนข้างหนึ่งของมุมครบหนึ่งรอบ มีค่าเท่ากับ 360 องศา ซึ่งหนึ่งองศา แทนการกวาดมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมไปได้ 1 ส่วน ใน 360 ส่วนและเมื่อมุนั้นอ้างอิงกับเส้นเมริเดียน องศาจะแสดงให้เห็นถึงตำแหน่งต่างๆ บนวงกลมใหญ่ของทรงกลม อย่างที่มีการใช้อ้างอิงตำแหน่งบนโลก ดาวอังคาร หรือทรงกลมท้องฟ้า เป็นต้น

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนองศา คือ " $^{\circ}$ " และเป็นหน่วยเดียวที่เวลาเขียนไม่ต้องเว้นวรรคระหว่างตัวเลขกับสัญลักษณ์ เช่น  $15^{\circ}$  แทน มุมขนาด 15 องศา ซึ่งหน่วยการวัดที่เป็นองศา มีรูปแบบการวัด 2 ลักษณะ คือ

#### 1.1 การวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

การวัดมุมในลักษณะนี้เหมือนกับการหมุนส่วนของเส้นตรง AC รอบจุด A ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจนถึงส่วนของเส้นตรง AB ดังรูป



เราเรียก ส่วนของเส้นตรง AC ว่าเป็น **ด้านเริ่มต้น (initial side)** ของมุม

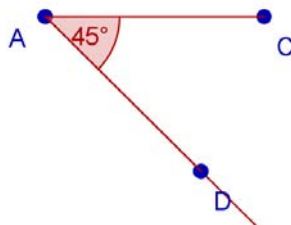
ส่วนของเส้นตรง AB ว่าเป็น **ด้านสิ้นสุด (terminal side)** ของมุม

จุด A ว่าเป็น **จุดยอด (vertex)** ของมุม

เรียกมุมที่เกิดขึ้นว่า CAB หรือมุม A และใช้สัญลักษณ์  $\widehat{CAB}$  หรือ  $\hat{A}$

## 1.2 การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

การวัดมุมในลักษณะนี้เหมือนกับการหมุนส่วนของเส้นตรง AC รอบจุด A ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจนถึงส่วนของเส้นตรง AD ดังรูป



เราเรียก ส่วนของเส้นตรง AC ว่าเป็น **ด้านเริ่มต้น (initial side)** ของมุม

ส่วนของเส้นตรง AD ว่าเป็น **ด้านสิ้นสุด (terminal side)** ของมุม

จุด A ว่าเป็น **จุดยอด (vertex)** ของมุม

เรียกมุมที่เกิดขึ้นว่า CAD หรือมุม A และใช้สัญลักษณ์  $\hat{C}AD$  หรือ  $\hat{A}$

ในการบอกทิศทางของการวัดมุนั้น เราจะใช้เครื่องหมายเป็นตัวบ่งบอกถึงทิศทางของการวัด ซึ่งเป็นข้อตกลงที่มีกันมาช้านาน เช่น

$\hat{A} = -45^\circ$  **ถ้ามีเครื่องหมายลบ** แสดงว่า วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และ  
ขนาดของมุมเท่ากับ  $45^\circ$

$\hat{A} = 45^\circ$  **ถ้าไม่มีเครื่องหมายลบ** แสดงว่า วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และ  
ขนาดของมุมเท่ากับ  $45^\circ$

หน่วยที่เป็นองศานั้นยังสามารถแบ่งเป็นหน่วยย่อยๆ ได้อีกดังนี้

1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา (minute) เขียนได้ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$

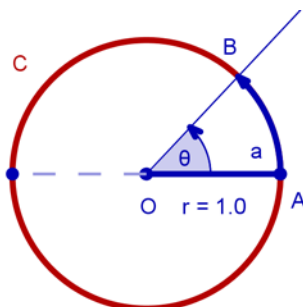
1 ลิปดา เท่ากับ 60 พิลิปดา (second) เขียนได้ดังนี้

$$1' = 60''$$

## 2. หน่วยของมุมเป็นเรเดียน

หน่วยการวัดมุม 1 เรเดียน (radian) คือ มุมที่ศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ใช้สัญลักษณ์ “rad” หรืออักษร c ตัวเล็กที่ยกสูงขึ้น(มาจาก circular measure) ซึ่งมักไม่นิยมใช้มากเท่าที่ควร ตัวอย่างเช่น มุมขนาด 1.2 เรเดียน สามารถเขียนได้เป็น “1.2 rad” หรือ “1.2<sup>c</sup>”

ให้  $C$  เป็นวงกลมที่มี  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมีเท่ากับ  $r$  ดังรูป



จากรูป  $\theta$  เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี  $r$  หน่วย (ในที่นี้  $r = 1$  หน่วย)ซึ่งมีส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว  $a$  หน่วย รองรับมุม ดังกล่าว

ถ้าเราต้องการวัดมุม  $\theta$  หรือมุม  $A\hat{O}B$  ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน เราสามารถกระทำดังนี้

$$\theta = \frac{\text{ความยาวของส่วน โค้งที่รองรับมุม}}{\text{รัศมีของวงกลม}} = \frac{a}{r} \text{ เรเดียน}$$

จากการนิยาม หน่วยของมุมในระบบเรเดียน จะได้ว่า

มุมที่ขนาด 1 เรเดียน คือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น

เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบ เราจะพิจารณาในกรณีที่ความยาวของ  $a$  เท่ากับความยาวเส้นรอบวง

$$\text{นั่นคือ } a = 2\pi r$$

$$\text{ดังนั้น } \theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

แต่เนื่องจากในที่นี้เรากำหนดให้วงกลมมีรัศมี  $r = 1$  ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ทันทีเลยว่า “มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย ซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว  $a$  หน่วย จะมีขนาดเท่ากับ  $a$  เรเดียน หรือ  $\theta = a$  เรเดียน นั่นเอง”

จากข้างต้นนี้ เราสามารถนำมาสรุปได้ ดังนี้ ( $\pi \approx 3.14159$ )

	360 องศา	เทียบเท่ากับ	$2\pi$ เรเดียน
หรือ	180 องศา	เทียบเท่ากับ	$\pi$ เรเดียน
ดังนั้น	1 องศา	เทียบเท่ากับ	$\frac{\pi}{180}$ เรเดียน $\approx 0.01745$ เรเดียน
และ	1 เรเดียน	เทียบเท่ากับ	$\frac{180}{\pi}$ องศา $\approx 57.295^\circ$ หรือ $57^\circ 18'$

ปัจจุบันนี้เรเดียนเป็นหน่วยพื้นฐานของการวัดมุมในวิชาคณิตศาสตร์ และสัญลักษณ์ "rad" มักจะถูกละไว้ในกรณีการเขียน นิพจน์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เมื่อใช้หน่วยขององศาจะใช้สัญลักษณ์วงกลมเล็ก  $^{\circ}$  เพื่อให้เห็นความแตกต่างระหว่างองศากับเรเดียน

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความแตกต่างของหน่วยการวัดได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถเปรียบเทียบหน่วยการวัดที่เป็นองศากับเรเดียนได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สารการเรียนรู้

ในการวัดมุม หน่วยของมุมที่เกิดจากการวัดจะมี 2 ลักษณะ

1. หน่วยของมุมเป็นองศา
2. หน่วยของมุมเป็นเรเดียน

### 1. หน่วยของมุมเป็นองศา

องศา (degree) คือ หน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติโดยกำหนดให้มุมที่เกิดขึ้นจากการหมุนแขนข้างหนึ่งของมุมครบหนึ่งรอบ มีค่าเท่ากับ 360 องศา

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนองศา คือ  $^{\circ}$  และเป็นหน่วยเดียวที่เวลาเขียนไม่ต้องเว้นวรรคระหว่างตัวหลักกับสัญลักษณ์ เช่น  $15^{\circ}$  แทน มุมขนาด 15 องศา ซึ่งหน่วยการวัดที่เป็นองศา มีรูปแบบการวัด

2 ลักษณะ คือ

1. การวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
2. การวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

### 2. หน่วยของมุมเป็นเรเดียน

หน่วยการวัดมุม 1 เรเดียน (radian) คือ มุมที่ศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ใช้สัญลักษณ์ "rad" หรืออักษร c ตัวเล็กที่ยกสูงขึ้น (มาจาก circular measure) ซึ่งมักไม่นิยมใช้มากเท่าที่ควร ตัวอย่างเช่น มุมขนาด 1.2 เรเดียน สามารถเขียนได้เป็น "1.2 rad" หรือ "1.2<sup>c</sup>"

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่องทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับการวัดมุม
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูถามทบทวนนักเรียนว่านักเรียนรู้จักหน่วยของการวัดมุมอะไรบ้าง
2. ครูอธิบายถึงเนื้อหาที่จะสอนอย่างคร่าวๆ ก่อนแล้วจึงให้นักเรียนทำกิจกรรมในคอมพิวเตอร์

โดยครูกล่าวว่

การวัดมุมที่นักเรียนจะเรียนในระดับนี้มีด้วยกัน 2 ประเภท คือ

- การวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศา
- การวัดมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

3. ครูให้นักเรียนเปิดกิจกรรมที่ 1.2 ในเครื่องคอมพิวเตอร์ พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 1.2

4. ครูให้นักเรียนทำการศึกษาการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศาโดยนักเรียนจะต้องใช้กิจกรรมคอมพิวเตอร์หน่วยที่ 1 เรื่องการวัดมุม ซึ่งนักเรียนสามารถทำการหมุนและเคลื่อนไหวภาพได้ด้วยตัวเอง โดยครูให้นักเรียนทำการสังเกตลักษณะของมุมที่มีการหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาว่ามีลักษณะแตกต่างกันอย่างไร แล้วให้นักเรียนเติมคำตอบลงในใบกิจกรรม

5. เมื่อนักเรียนทำการศึกษาการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเสร็จแล้ว ก็ให้นักเรียนทำกิจกรรมการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อ

6. ครูถามนักเรียนว่าการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศากับการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนนั้นแตกต่างกันอย่างไร แล้วครูทำการสรุป

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเรื่องการเปรียบเทียบหน่วยการวัดที่มีอยู่ในใบกิจกรรมที่ 1.2 ถ้านักเรียนทำภายในห้องไม่เสร็จก็ให้กลับไปทำต่อเป็นการบ้าน

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการณ์ให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 1.2 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 1.2

## หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งวงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

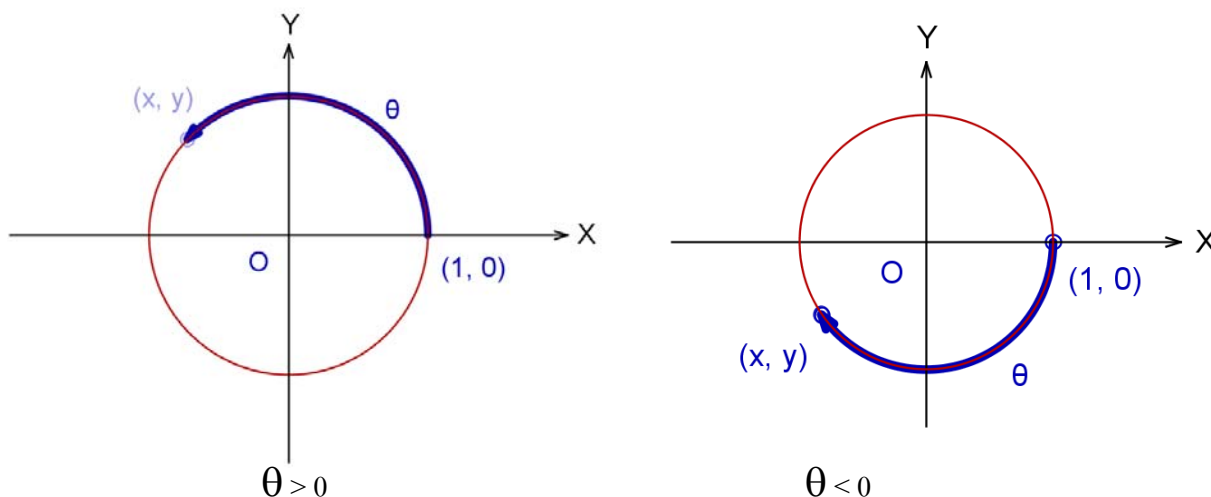
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง  $\theta$  (theta อ่านว่า ที-ตา) ให้ จากจุด  $(1, 0)$  วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว  $|\theta|$  หน่วย จะถึงจุด  $(x, y)$  ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

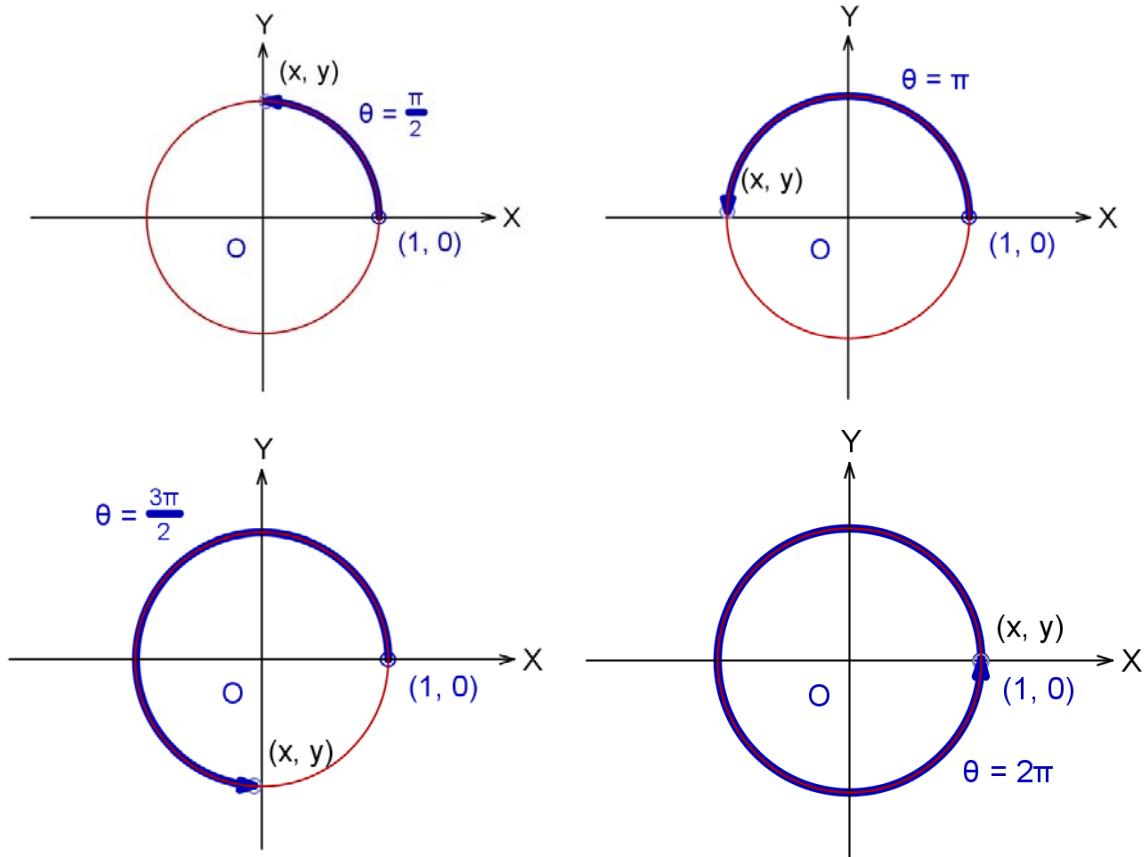
ถ้า  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า  $\theta < 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ถ้า  $\theta = 0$  จุดปลายส่วนโค้งคือจุด  $(1, 0)$

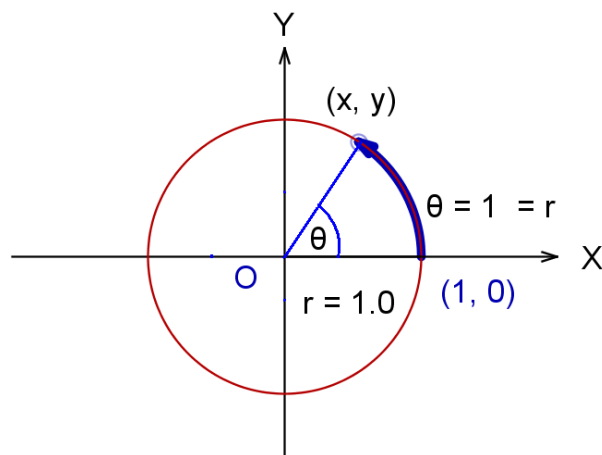


รูปต่อไปนี้จะแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยเมื่อกำหนดให้มีค่าต่างๆ กัน ดังรูป



จะเห็นว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง  $\theta$  ให้ จะสามารถหาจุด  $(x, y)$  ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $|\theta|$  หน่วยได้เสมอ ไม่ว่า  $\theta$  จะเป็นจำนวนเท่าใดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า  $|\theta| > 2\pi$  แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของ **วงกลมหนึ่งหน่วย** ยาว  $2\pi$  เรเดียน

**\*ข้อสังเกต\*** มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วน โค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับ 1 เรเดียน ดังรูปต่อไปนี้

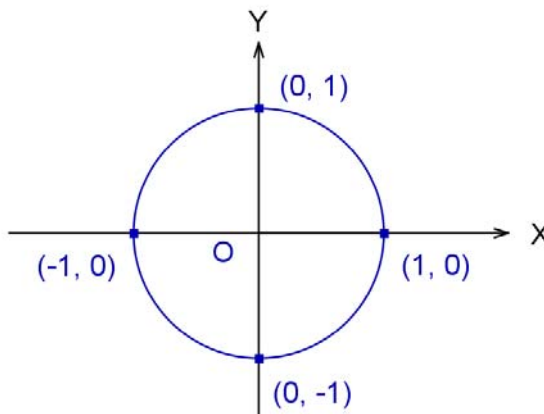


จากรูปวงกลมมีรัศมียาว  $r$  หน่วย ความยาวส่วนโค้งยาว  $r$  หน่วย จะเรียก  $\theta$  ว่ามุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

### ระยะทางและการวัดระยะทาง

ในที่นี้จะให้นักเรียนได้ฝึกวัดความยาวส่วนโค้ง หรือ ศึกษาเส้นรอบวงแล้วพิจารณาว่าจุดปลายส่วนโค้งนั้นอยู่ตรงไหน

ก่อนอื่นให้พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยว่าแบ่งได้กี่ส่วนเพื่อพิจารณาความยาวของเส้นรอบวง



เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีรัศมี 1 หน่วย ( $r = 1$ ) ดังนั้น

$$\text{ความยาวของเส้นรอบวง} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

จากรูปถ้าแบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

$$\text{หนึ่งส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{สองส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{2}{4} \times 2\pi = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{สามส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

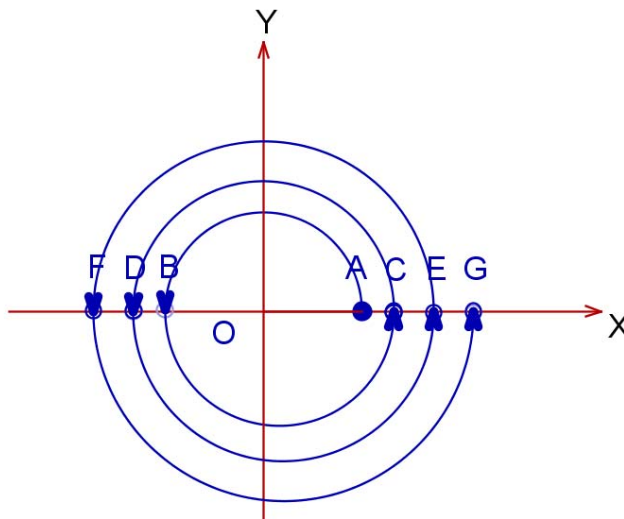
$$\text{สี่ส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{4}{4} \times 2\pi = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

หลังจากพิจารณาในรูปวงกลมหนึ่งหน่วยข้างต้นแล้ว เราจะเห็นว่าแต่ละส่วนของความยาวของเส้นรอบวงเท่ากับเท่าไร ต่อไปนี้เราจะทำการศึกษาระยะทางและจุดปลายของส่วนโค้ง

**กรณีที่ 1** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\pi$  (จุดปลายของส่วนโค้งจะตกลงบนแกน x)

กรณีนี้ แบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้แกน x เป็นตัวแบ่งวงกลม ซึ่งความยาวส่วนโค้งของครึ่งวงกลมก็คือ  $\pi$  เรเดียน แล้วพิจารณาจุดปลายของส่วนโค้งที่ตกลงบนแกน x ดังนี้

พิจารณา  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกจุด  $(x, y)$  ว่าเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่มีความยาวส่วนโค้ง  $\pi$  เรเดียน เขียนแทนด้วย  $p(\theta) = (x, y)$  ดังรูป



วัดความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากจุด  $A$  ไปยังจุด  $B$  ได้ระยะทาง  $\pi$  เรเดียน  
 จากจุด  $B$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $C$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $C$  เท่ากับ  $2\pi$  เรเดียน  
 และ จากจุด  $C$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $D$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $D$  เท่ากับ  $3\pi$  เรเดียน  
 และ จากจุด  $D$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $E$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $E$  เท่ากับ  $4\pi$  เรเดียน

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถวัดความยาวส่วนโค้งเมื่อ  $\theta < 0$  แต่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้  
 วัดความยาวส่วนโค้งในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากจุด  $A$  ไปยังจุด  $B$  ได้ระยะทาง  $-\pi$  เรเดียน  
 จากจุด  $B$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $C$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $C$  เท่ากับ  $-2\pi$  เรเดียน  
 และ จากจุด  $C$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $D$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $D$  เท่ากับ  $-3\pi$  เรเดียน  
 และ จากจุด  $D$  วัดความยาวส่วนโค้งต่อไปยังจุด  $E$  ได้ระยะทางจาก  $A$  ถึง  $E$  เท่ากับ  $-4\pi$  เรเดียน

**ข้อสังเกต** ไม่ว่าจะวัดความยาวส่วนโค้งในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา จุดปลายส่วนโค้งที่ตกลงบนแกนบวก  $X$  จะเป็นจำนวนเต็มคู่ของ  $\pi$  และจุดปลายส่วนโค้งที่ตกลงบนแกนลบ  $X$  จะเป็นจำนวนเต็มคี่ของ  $\pi$  เสมอ

เราสามารถสรุป จุดปลายของส่วนโค้งที่ตกลงบนแกน  $X$  ให้อยู่ในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

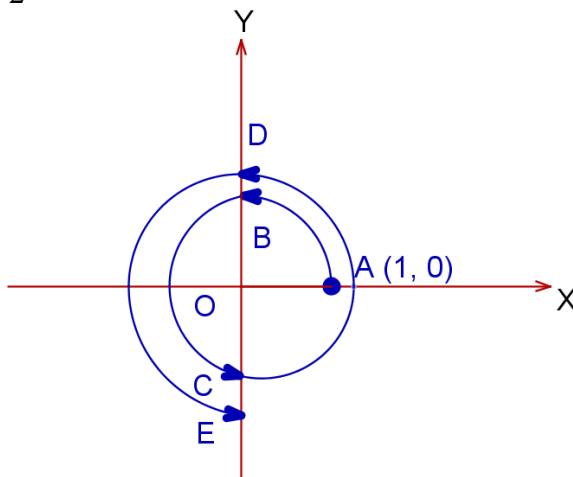
จุดปลายของส่วนโค้งที่ตกลงบนแกนบวก  $X$  คือ  $2n\pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

จุดปลายของส่วนโค้งที่ตกลงบนแกนลบ  $X$  คือ  $(2n-1)\pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

**กรณีที่ 2** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{2}$  (จุดปลายส่วนโค้งตกลงบนแกน y)

กรณีนี้ แบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วนเท่ากัน โดยใช้แกน x กับแกน y เป็นตัวแบ่งวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งความยาวส่วนโค้งของแต่ละส่วนใน 4 ส่วน ก็คือ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน

พิจารณา  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด A(1, 0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกจุด (x, y) ว่าเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{2}$  หน่วย เขียนแทนด้วย  $P(\theta) = (x, y)$  ดังรูป



วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด A ไปยังจุด B ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด B ต่อยังจุด C ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง C เท่ากับ  $\frac{3\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด C ต่อยังจุด D ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง D เท่ากับ  $\frac{5\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด D ต่อยังจุด E ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง E เท่ากับ  $\frac{7\pi}{2}$  เรเดียน

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถวัดความยาวส่วนโค้งเมื่อ  $\theta < 0$  แต่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้

วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด A ไปยังจุด C ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $-\frac{\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด C ต่อยังจุด B ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง B เท่ากับ  $-\frac{3\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด B ต่อยังจุด E ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง E เท่ากับ  $-\frac{5\pi}{2}$  เรเดียน

และ วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด E ต่อยังจุด D ความยาวส่วนโค้งจาก A ถึง D เท่ากับ  $-\frac{7\pi}{2}$  เรเดียน

**ข้อสังเกต** ให้นักเรียนจัดจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{2}$  อยู่ในรูปจำนวนคละ คือ จำนวนเต็ม  $\pi$  บวกหรือลบ

ด้วย  $\frac{\pi}{2}$  ดังนี้

$$\frac{\alpha \pi}{2} = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เมื่อพิจารณาเทอม  $n\pi$  จะสามารถตอบได้ทันทีว่าจุดปลายส่วนโค้งนั้นตกที่แกน X ไດ จากนั้นก็บวกหรือลบด้วย  $\frac{\pi}{2}$  นักเรียนก็จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ตกที่แกนบวก Y หรือแกนลบ Y ได้ อย่างแน่นอน

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของวงกลมหนึ่งหน่วยได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถวัดความยาวส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### วงกลมหนึ่งหน่วย

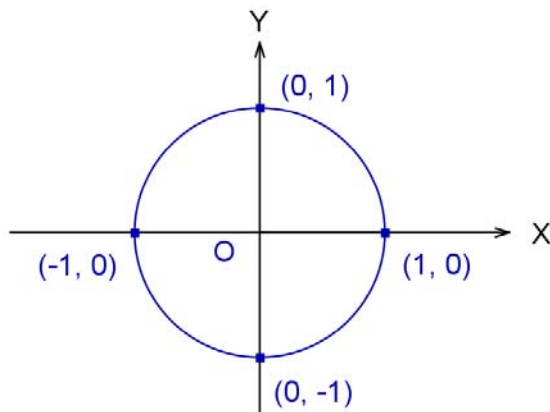
วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งวงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

### ระยะทางและการวัดระยะทาง

ในที่นี้จะให้นักเรียนได้ฝึกวัดความยาวส่วนโค้ง หรือ ศึกษาเส้นรอบวงแล้วพิจารณาว่า จุดปลายส่วนโค้งนั้นอยู่ตรงไหน

ก่อนอื่นให้พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยว่าแบ่งได้กี่ส่วนเพื่อพิจารณาความยาวของเส้นรอบวง



เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีรัศมี 1 หน่วย ( $r = 1$ ) ดังนั้น

$$\text{ความยาวของเส้นรอบวง} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

จากรูปถ้าแบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

$$\text{หนึ่งส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{สองส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{2}{4} \times 2\pi = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{สามส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{สี่ส่วนสี่ของความยาวของเส้นรอบวง} = \frac{4}{4} \times 2\pi = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

**กรณีที่ 1** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่า  $\pi$  (จุดปลายของส่วนโค้งจะตกลงบนแกน X)

กรณีนี้ แบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้แกน x เป็นตัวแบ่งวงกลม ซึ่งความยาวส่วนโค้งของครึ่งวงกลมก็คือ  $\pi$  เรเดียน

**กรณีที่ 2** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{2}$  (จุดปลายส่วนโค้งตกลงบนแกน y)

กรณีนี้ แบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้แกน x กับแกน y เป็นตัวแบ่งวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งความยาวส่วนโค้งของแต่ละส่วนใน 4 ส่วน ก็คือ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย และ 2.2 เรื่องความยาวส่วนโค้งกรณีที่ 1-2
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูถามทบทวนนักเรียนเรื่องวงกลม ที่นักเรียนเคยได้เรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยครูถามว่า
  - วงกลมคืออะไร มีสมการในรูปแบบใด (ให้นักเรียนตอบ)
  - วงกลมมีพื้นที่เท่าไร และความยาวรอบรูปวงกลมยาวเท่าไร (ให้นักเรียนตอบ)
2. ครูให้นักเรียนเปิดกิจกรรมหน่วยที่ 2 แล้วเลือกที่กิจกรรม เรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 2.1 เรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย ให้นักเรียน
3. ครูให้นักเรียนทำการสร้างวงกลมโดยมียาวเท่าใดก็ได้ตามความต้องการของนักเรียน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ และให้นักเรียนทำการสังเกตสมการของวงกลมที่นักเรียนสร้าง
4. ครูถามว่าจากการที่นักเรียนได้ทำการสร้างวงกลม นักเรียนคิดว่าวงกลมหนึ่งหน่วยคืออะไร มีสมการอย่างไร แล้วให้นักเรียนตอบคำถามลงในใบกิจกรรมที่ 2.1
5. ครูให้นักเรียนทำการศึกษากิจกรรมหน่วยที่ 2 จากคอมพิวเตอร์เรื่องความยาวส่วนโค้ง โดยให้นักเรียนทำการศึกษากรณีที่ 1 พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 2.2 ซึ่งการศึกษากฎที่ 1 นั้นครูถามนักเรียนว่าเนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi$  ถ้าเราทำการแบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กันจะได้ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนยาวเท่าไร และจุดตัดที่เกิดบนแกน X นั้นมีกี่จุด(ให้นักเรียนตอบ) จากนั้นก็ให้นักเรียนทำการวัดความยาวส่วนโค้งแล้วให้นักเรียนสังเกตตำแหน่งที่จุดปลายส่วนโค้งว่าตกอยู่ในแกน X ด้านใด แล้วสรุป
6. ครูให้นักเรียนทำการศึกษากิจกรรมหน่วยที่ 2 จากคอมพิวเตอร์เรื่องความยาวส่วนโค้ง โดยให้นักเรียนทำการศึกษากฎที่ 2 พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 2.2 ซึ่งการศึกษากฎที่ 2 นั้นครูถามนักเรียนเนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi$  ถ้าเราทำการแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กันจะได้ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนยาวเท่าไร และจุดตัดที่เกิดบนแกน X และแกน Y นั้นมีกี่จุด(ให้นักเรียนตอบ) จากนั้นก็ให้นักเรียนทำการวัดความยาวส่วนโค้งแล้วให้นักเรียนสังเกตตำแหน่งที่จุดปลายส่วนโค้งว่าตกอยู่ในแกน X หรือแกน Y ด้านใด แล้วสรุป

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม	- ทำใบกิจกรรมที่ 2.1 ได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 2.1
- สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 2.2 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 2.2

## หน่วยที่ 2 วงกลมหนึ่งหน่วยและความยาวส่วนโค้ง

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

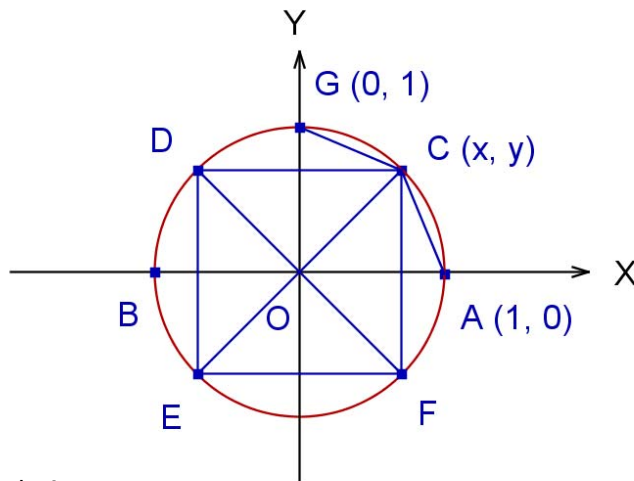
เรื่อง ความยาวส่วนโค้งกรณี 3 และ 4 (ต่อ)

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 3 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{4}$

กรณีนี้แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วยออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน ซึ่งความยาวส่วนโค้งในแต่ละส่วนเท่ากับ  $\frac{\pi}{4}$  เราเขียน เนื่องจากจุดปลายของส่วนโค้งจะไม่ตกอยู่บนแกน X และแกน Y ดังนั้นเรา



จำเป็นต้องหาพิกัดของจุดเสียก่อน

สมมติพิกัด  $C = (x, y)$  ซึ่งเป็นจุดแบ่งครึ่งของส่วนโค้ง  $AG$  จะได้

$$\begin{aligned} \text{ความยาวคอร์ด } AC &= \text{ความยาวคอร์ด } CG \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \end{aligned}$$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง พร้อมทั้งกระจายกำลัง 2 ออกมา

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \\ x &= y \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

และจุด  $C(x, y)$  อยู่บนวงกลมที่มีสมการ เป็น

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

แทน  $y = x$  ลงในสมการที่ (2)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

แต่เนื่องจาก  $C(x, y)$  อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น  $x$  เป็นค่าบวก

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$$

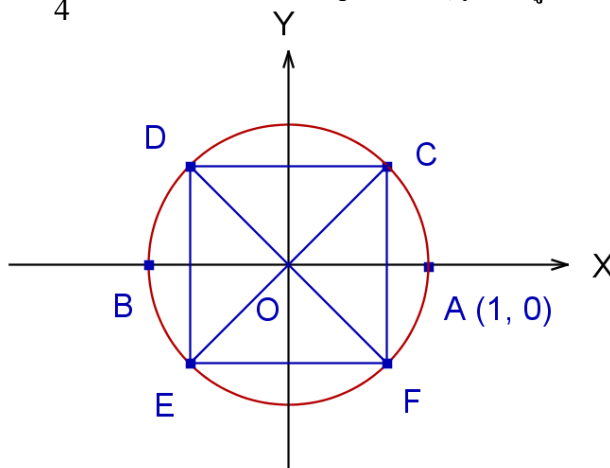
$$\text{พิกัด } C = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาพิกัดของจุดที่สมมาตรกับจุด  $C$  ได้อีก 3 จุด คือ  $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,

$$E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ และ } F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

จากข้างต้นจะเห็นว่าเราสามารถหาพิกัดของจุดได้เป็นที่เรียบร้อยแล้ว ต่อมาเราจะมาหาจุดปลายของส่วนโค้งที่เป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{4}$

พิจารณา  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกจุด  $(x, y)$  ว่าเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน เขียนแทนด้วย  $p(\theta) = (x, y)$  ดังรูป



จากจุด  $A$  วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่  $C$  ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด  $C$  วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่  $D$  ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด  $D$  วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่  $E$  ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด  $E$  วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่  $F$  ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$  เรเดียน

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถวัดความยาวส่วนโค้งเมื่อ  $\theta < 0$  แต่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้

จากจุด A วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ F ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด F วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ E ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด E วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ D ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$  เรเดียน

และต่อ จากจุด D วัดความยาวส่วนโค้งไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ C ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - 2\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$  เรเดียน

**ข้อสังเกต** ให้นักเรียนจัดจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{4}$  อยู่ในรูปจำนวนคละ คือ จำนวนเท่าของ  $\pi$  บวกหรือลบ

ด้วย  $\frac{\pi}{4}$  ดังนี้

$$\frac{\alpha \pi}{4} = n\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เมื่อพิจารณาเทอม  $n\pi$  จะสามารถตอบได้ทันทีว่าจุดปลายส่วนโค้งนั้นตกที่แกน X ไດ จากนั้นก็บวกหรือลบด้วย  $\frac{\pi}{4}$  นักเรียนก็จะได้จุดปลายส่วนโค้งตกที่กึ่งกลางระหว่างแกนพิทัก

**กรณีที่ 4** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{6}$  และ  $\frac{\pi}{3}$

กรณีนี้แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วย ออกเป็น 6 ส่วนและ 12 ส่วนเท่าๆ กัน ซึ่งจะได้ความยาวส่วนโค้งในแต่ละส่วนเท่ากับ  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{6}$  ตามลำดับ เนื่องจากจุดปลายของส่วนโค้งจะไม่ตกอยู่บนแกน X และแกน Y ดังนั้นเราจำเป็นต้องหาพิคคของจุดเสียก่อน

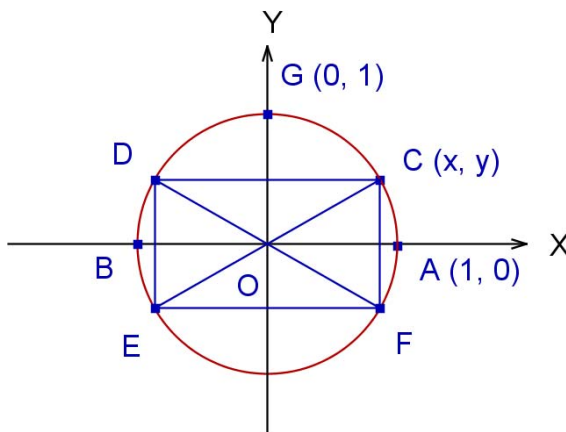
การหาพิคคของจุดนั้นเราสามารถทำได้ เช่นเดียวกันกับการหาพิคคของจุดในกรณีที่ 3 ซึ่งเราสามารถหาพิคคของจุดได้ ดังนี้

**กรณีที่ 1** ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{6}$  จะได้พิคคของจุด คือ  $C = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), D = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}),$   
 $E = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$  และ  $F = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

**กรณีที่ 2** ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{3}$  จะได้พิคคของจุด คือ  $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$   
 $E = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  และ  $F = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

เมื่อเราได้พิคคของจุดในแต่ละกรณีแล้ว ต่อไปนี้เราจะมาพิจารณาหาจุดปลายของส่วนโค้ง จะมีความยาวส่วนโค้งเท่าใด ดังนี้

พิจารณากรณีที่ 1 เมื่อ  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกจุด  $(x, y)$  ว่าเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{6}$  เรเดียน เขียนแทนด้วย  $p(\theta) = (x, y)$  ดังรูป



จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ C ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ D ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ E ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ F ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$  เรเดียน

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถวัดความยาวส่วนโค้งเมื่อ  $\theta < 0$  แต่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ F ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ E ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ D ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ C ได้รับความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - 2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$  เรเดียน

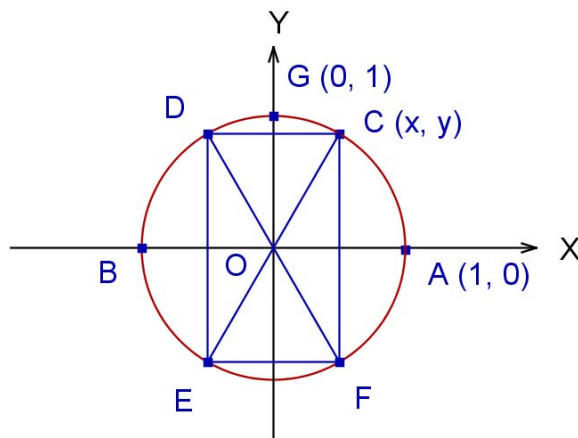
**ข้อสังเกต** ให้นักเรียนจัดจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{6}$  อยู่ในรูปจำนวนคละ คือ จำนวนเท่าของ  $\pi$  บวกหรือลบ

ด้วย  $\frac{\pi}{6}$  ดังนี้

$$\frac{\alpha \pi}{6} = n\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เมื่อพิจารณาเทอม  $n\pi$  จะสามารถตอบได้ทันทีว่าจุดปลายส่วนโค้งนั้นตกที่แกน X ไດจากนั้นก็บวกหรือลบด้วย  $\frac{\pi}{6}$  นักเรียนก็จะได้จุดปลายส่วนโค้งตกบนบริเวณระหว่างแกนพิักัด

พิจารณากรณีที่ 2 เมื่อ  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกจุด  $(x, y)$  ว่าเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{3}$  เรเดียน เขียนแทนด้วย  $p(\theta) = (x, y)$  ดังรูป



จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ C ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ D ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ E ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ F ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$  เรเดียน

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถวัดความยาวส่วนโค้งเมื่อ  $\theta < 0$  แต่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ได้ดังนี้

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ F ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ E ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ D ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - \pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$  เรเดียน

จากจุด A ไปยังจุดปลายส่วนโค้งที่ C ได้ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $0 - 2\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$  เรเดียน

**ข้อสังเกต** ให้นักเรียนจัดจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{3}$  อยู่ในรูปจำนวนคละ คือ จำนวนเท่าของ  $\pi$  บวกหรือลบ

ด้วย  $\frac{\pi}{3}$  ดังนี้

$$\frac{\alpha \pi}{3} = n\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

เมื่อพิจารณาเทอม  $n\pi$  จะสามารถตอบได้ทันทีว่าจุดปลายส่วนโค้งนั้นตกที่แกน X ไດจากนั้นก็บวกหรือลบด้วย  $\frac{\pi}{3}$  นักเรียนก็จะได้จุดปลายส่วนโค้งตกบนบริเวณระหว่างแกนพิกัด

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถวัดความยาวส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

**กรณีที่ 3** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{4}$

กรณีนี้แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วยออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน ซึ่งความยาวส่วนโค้งในแต่ละส่วนเท่ากับ  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน

**กรณีที่ 4** ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{6}$

กรณีนี้แบ่งวงกลมหนึ่งหน่วย ออกเป็น 6 ส่วนและ 12 ส่วนเท่าๆ กันตามลำดับ ซึ่งจะให้ความยาวส่วนโค้งในแต่ละส่วนเท่ากับ  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{6}$  ตามลำดับ

## 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมที่ 2.3 เรื่องความยาวส่วนโค้งในกรณีที่ 3–4
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูถามทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเรื่องความยาวส่วนโค้งกรณีที่ 1-2 ในคาบที่แล้ว
2. ครูให้นักเรียนทำการศึกษากิจกรรมหน่วยที่ 2 จากคอมพิวเตอร์เรื่องความยาวส่วนโค้งโดยให้นักเรียนทำการศึกษากรณีที่ 3 พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 2.3 ซึ่งการศึกษารณีที่ 3 นั้นครูถามนักเรียนเนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi$  ถ้าเราทำการแบ่งออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน จะได้ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนยาวเท่าไร และจุดตัดที่เกิดบนแกน X นั้นมีกี่จุด(ให้นักเรียนตอบ) จากนั้นก็ให้นักเรียนทำการวัดความยาวส่วนโค้งแล้วให้นักเรียนสังเกตตำแหน่งที่จุดปลายส่วนโค้งว่าตกอยู่ในแกน X ด้านใด แล้วสรุป
3. ครูให้นักเรียนทำการศึกษากิจกรรมหน่วยที่ 2 จากคอมพิวเตอร์เรื่องความยาวส่วนโค้งโดยให้นักเรียนทำการศึกษากรณีที่ 4 พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 2.3 ซึ่งการศึกษารณีที่ 4 นั้นครูถามนักเรียนเนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $2\pi$  ถ้าเราทำการแบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กันจะได้ความยาวส่วนโค้งแต่ละส่วนยาวเท่าไร ซึ่งในกรณีที่ 4 ครูถามนักเรียนว่าถ้าเราจะแบ่งวงกลมให้เป็น 12 ส่วนเราต้องแบ่งวงกลมออกเป็นกี่ส่วนก่อน(ให้นักเรียนตอบ)
4. ครูให้นักเรียนสังเกตจุดที่เกิดขึ้นบนวงกลมที่ไม่ได้อยู่บนแกน X หรือแกน Y ซึ่งครูอธิบายว่าเนื่องจากจุดที่เกิดขึ้นไม่ได้ตกอยู่บนแกนพิคัด ดังนั้นนักเรียนต้องทำการหาพิคัดของจุดนั้นเสียก่อนโดยเริ่มจากจุดที่เกิดขึ้นเมื่อแบ่งวงกลมออกเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กัน จากนั้นก็หาพิคัดของจุดที่เกิดขึ้นเมื่อทำการแบ่งวงกลมออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน
5. ครูให้นักเรียนทำการวัดความยาวส่วนโค้ง เพื่อให้นักเรียนทำการสังเกตตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งที่ตก และทำการสังเกตเครื่องหมายของค่า x และ ค่า y ว่ามีความแตกต่างกันอย่างไรเมื่อความยาวส่วนโค้งแตกต่างกัน
6. ครูและนักเรียนร่วมกันกล่าวสรุปความรู้ และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมลงในใบกิจกรรมที่ 2.3 ถ้าไม่เสร็จให้นักเรียนกลับไปทำต่อเป็นการบ้าน

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรม 2.3 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 2.3

## หน่วยที่ 3 เรื่องฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

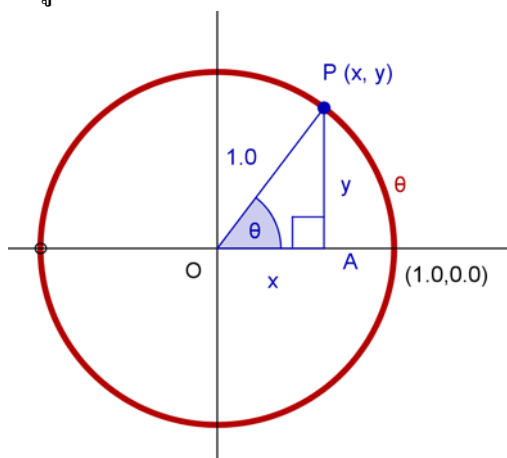
เรื่อง ฟังก์ชัน ไซน์และฟังก์ชัน โคไซน์

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ให้นักเรียนพิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย โดยที่ให้  $P(x, y)$  เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



ลากเส้น PA ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด A

จากรูปจะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP ซึ่งเมื่อนำมาเขียนเป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{PA}{OP} = \frac{y}{1} = y \\ \cos \theta &= \frac{OA}{OP} = \frac{x}{1} = x\end{aligned}$$

นั่นคือ

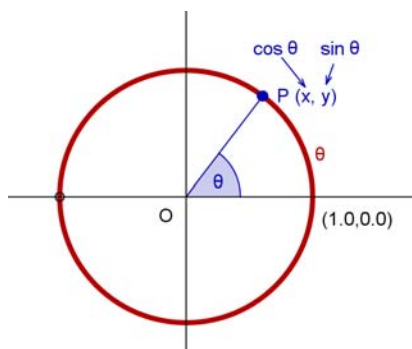
$$x = \cos \theta \text{ และ } y = \sin \theta$$

เนื่องจาก  $(x, y)$  เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย จากความรู้ดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่า

ตัวหน้าของกลุ่มอันดับ (x) คือ ค่า  $\cos \theta$

ตัวหลังของกลุ่มอันดับ (y) คือ ค่า  $\sin \theta$

แสดงว่า ถ้าเรารู้จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยทำให้เรารู้ค่า  $\cos \theta$  กับ  $\sin \theta$  ดังรูป



ต่อไปจะพิจารณาความรู้ดังกล่าวในแง่ของฟังก์ชัน

จากลักษณะการกำหนดจุดบนเส้นรอบวงดังกล่าว นักเรียนจะพบว่าทุกครั้งที่มีการกำหนดค่าของ  $\theta$  มาให้ เราสามารถหาจุด  $(x, y)$  ซึ่งเป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่วัดตามแนวเส้นรอบวงโดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด  $(1, 0)$  ให้ยาว  $\theta$  หน่วย **ได้เพียงจุดเดียวเสมอ** หรือจะกล่าวอย่างง่าย ๆ ก็คือว่า แต่ละค่าของ  $\theta$  จะทำให้เกิดค่า  $x$  เพียง 1 ค่า และ ค่า  $y$  เพียง 1 ค่า จากความเข้าใจดังกล่าวเราสามารถนำมาใช้สร้างฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ ได้ดังนี้

### 1. ฟังก์ชันไซน์

เนื่องจากค่าแต่ละค่าของ  $\theta$  จะมีค่า  $y$  เกิดขึ้นเพียง 1 ค่า (ไม่มี  $\theta$  ใดเลยที่ทำให้มีค่า  $y$  เกิน 1 ค่า) ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันไซน์ ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชันไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(\theta) = y\}$$

**สัญลักษณ์** ถ้า  $(\theta, y) \in \text{sine}$  แล้ว จะเขียนว่า  $y = \text{sine}(\theta)$  หรือ

$$y = \sin \theta$$

จากบทนิยาม อาจกล่าวได้ว่า ถ้า  $g(\theta) = (x, y)$  แล้ว  $\sin \theta = y$  เนื่องจาก  $g(\theta) = (x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $-1 \leq y \leq 1$  นั่นคือ ถ้า  $\theta \in \mathbb{R}$  แล้ว  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  ดังนั้น

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

### 2. ฟังก์ชันโคไซน์

เนื่องจากค่าแต่ละค่าของ  $\theta$  จะมีค่า  $x$  เกิดขึ้นเพียง 1 ค่า (ไม่มี  $\theta$  ใดเลยที่ทำให้มีค่า  $x$  เกิน 1 ค่า) ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชันโคไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{cosine} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\theta) = x\}$$

**สัญลักษณ์** ถ้า  $(\theta, x) \in \text{cosine}$  แล้ว จะเขียนว่า  $x = \text{cosine}(\theta)$  หรือ

$$x = \cos \theta$$

จากบทนิยาม อาจกล่าวได้ว่า ถ้า  $f(\theta) = (x, y)$  แล้ว  $\cos \theta = x$  เนื่องจาก  $f(\theta) = (x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $-1 \leq x \leq 1$  นั่นคือ ถ้า  $\theta \in \mathbb{R}$  แล้ว  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  ดังนั้น

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

จากทฤษฎีบทที่กล่าวว่า  $p(\theta) = p(\theta + 2n\pi)$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่ามีจำนวนจริงมากมายที่ไม่เท่ากัน แต่ให้จุดปลายส่วนโค้งเป็นจุดเดียวกัน ดังนั้นฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จึง **ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** เช่น

$$\text{ให้ } \theta_1 = 0 \text{ และ } \theta_2 = 2\pi$$

$$\text{จะได้ว่า } p(\theta_1) = p(\theta_2) = (1, 0) \text{ ดังนั้น}$$

$$\sin \theta_1 = 0 \text{ และ } \sin \theta_2 = 0$$

$$\cos \theta_1 = 1 \text{ และ } \cos \theta_2 = 1$$

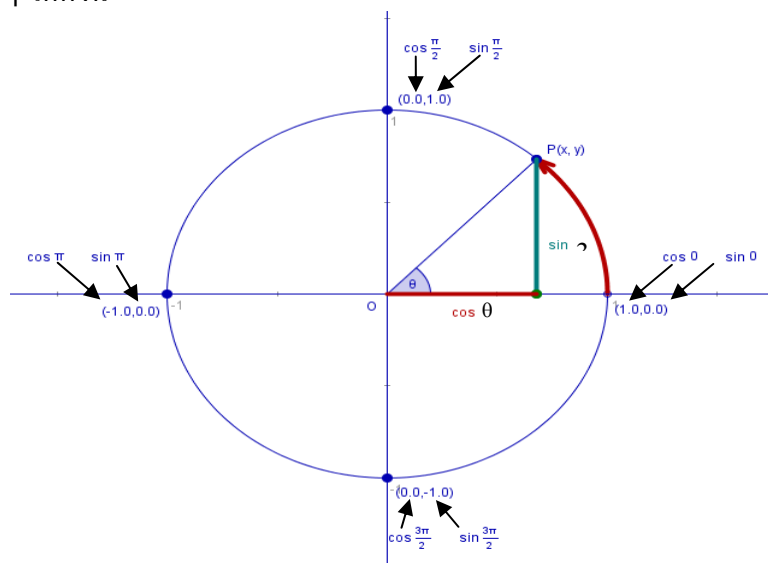
ต่อไปนี้เป็นกรนำความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย มาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ณ จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่เราทราบพิกัด

$$\text{นั่นคือ เราจะหา } f(\theta) \text{ เมื่อ } f(\theta) = \cos \theta$$

$$\text{และหา } g(\theta) \text{ เมื่อ } g(\theta) = \sin \theta$$

จากความรู้ที่กล่าวว่า จุดทุกจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ตัวหน้าของคู่อันดับคือค่าของ  $\cos \theta$  และตัวหลังของคู่อันดับคือ ค่าของ  $\sin \theta$

ดังนั้น จากจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เราทราบ เราสามารถหาค่า  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  ณ ตำแหน่งต่างๆ ได้ดังนี้



เนื่องจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย คือ  $x^2 + y^2 = 1$  และจากรูปข้างบนจะเห็นว่า  $y = \sin \theta$ ,  $x = \cos \theta$  ดังนั้นส่งผลให้  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

หมายเหตุ  $\cos^2\theta$  หมายถึง  $(\cos \theta)(\cos \theta)$   
 $\cos\theta^2$  หมายถึง  $\cos$  ของจำนวนจริง  $\theta^2$  เช่น

$\cos^2\frac{\pi}{2}$  หมายถึง  $(\cos\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{2})$

แต่  $\cos(\frac{\pi}{2})^2$  หมายถึง  $\cos$  ของจำนวนจริง  $(\frac{\pi}{2})^2$

จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยข้างต้น เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปตารางได้ดังนี้

เรเดียน	องศา	ตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้ง	
		x	y
0	0°	1	0
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1
$\pi$	180°	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	0	-1

ถ้าเรานำค่า  $x = \cos \theta$  และ  $y = \sin \theta$  มาคำนวณต่อไปจะได้ค่าดังตารางต่อไปนี้

มุม $\theta$ ฟังก์ชัน	0° (0 เรเดียน)	90° ( $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน)	180° ( $\pi$ เรเดียน)	270° ( $\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน)
$\sin \theta$	0	1	0	-1
$\cos \theta$	1	0	-1	0
$\tan \theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	0	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin\theta}$	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	-1
$\sec \theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
$\cot \theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม	0

หมายเหตุ ข้อควรระวัง ถ้า  $a \in \mathbb{R}$  แล้ว  $\frac{a}{0}$  ไม่นิยาม

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้
3. นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### 1. ฟังก์ชันไซน์

เนื่องจากค่าแต่ละค่าของ  $\theta$  จะมีค่า  $y$  เกิดขึ้นเพียง 1 ค่า (ไม่มี  $\theta$  ใดเลยที่ทำให้มีค่า  $y$  เกิน 1 ค่า) ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันไซน์ ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชันไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(\theta) = y\}$$

**สัญลักษณ์** ถ้า  $(\theta, y) \in \text{sine}$  แล้ว จะเขียนว่า  $y = \text{sine}(\theta)$  หรือ  $y = \sin \theta$

จากบทนิยาม อาจกล่าวได้ว่า ถ้า  $g(\theta) = (x, y)$  แล้ว  $\sin \theta = y$  เนื่องจาก  $g(\theta) = (x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $-1 \leq y \leq 1$  นั่นคือ ถ้า  $\theta \in \mathbb{R}$  แล้ว  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  ดังนั้น

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

### 2. ฟังก์ชันโคไซน์

เนื่องจากค่าแต่ละค่าของ  $\theta$  จะมีค่า  $x$  เกิดขึ้นเพียง 1 ค่า (ไม่มี  $\theta$  ใดเลยที่ทำให้มีค่า  $x$  เกิน 1 ค่า) ดังนั้นเราจะนิยามฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

**บทนิยาม** ฟังก์ชันโคไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{cosine} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\theta) = x\}$$

**สัญลักษณ์** ถ้า  $(\theta, x) \in \text{cosine}$  แล้ว จะเขียนว่า  $x = \text{cosine}(\theta)$  หรือ  
 $x = \cos \theta$

จากบทนิยาม อาจกล่าวได้ว่า ถ้า  $f(\theta) = (x, y)$  แล้ว  $\cos \theta = x$  เนื่องจาก  $f(\theta) = (x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $-1 \leq x \leq 1$  นั่นคือ ถ้า  $\theta \in \mathbb{R}$  แล้ว  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  ดังนั้น

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

จากทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ว่า  $p(\theta) = p(\theta + 2n\pi)$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่ามีจำนวนจริงมากมายที่ไม่เท่ากัน แต่ให้จุดปลายส่วนโค้งเป็นจุดเดียวกัน ดังนั้นฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จึง **ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** เช่น

$$\begin{aligned} \text{ให้} \quad & \theta_1 = 0 \quad \text{และ} \quad \theta_2 = 2\pi \\ \text{จะได้ว่า} \quad & p(\theta_1) = p(\theta_2) = (1, 0) \quad \text{ดังนั้น} \\ & \sin \theta_1 = 0 \quad \text{และ} \quad \sin \theta_2 = 0 \\ & \cos \theta_1 = 1 \quad \text{และ} \quad \cos \theta_2 = 1 \end{aligned}$$

ต่อไปนี้เป็น การนำความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย มาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ณ จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่เราทราบพิกัด

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ เราจะหา} \quad & f(\theta) \quad \text{เมื่อ} \quad f(\theta) = \cos \theta \\ \text{และหา} \quad & g(\theta) \quad \text{เมื่อ} \quad g(\theta) = \sin \theta \end{aligned}$$

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่องฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับการนิยามไซน์และโคไซน์โดยใช้อัตราส่วนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนได้เรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ว่ามีบทนิยามอย่างไร (ให้นักเรียนตอบ)

2. ครูอธิบายข้อจำกัดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและอธิบายว่าทำไมต้องใช้วงกลมหนึ่งหน่วยในการนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ให้นักเรียนทราบ

3. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 3 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 3 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง

4. ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ในคอมพิวเตอร์โดยในการสอนนั้นครูจะให้นักเรียนสังเกตว่า ณ ที่ความยาวส่วนโค้งที่เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจุดปลายส่วนโค้งเพียงหนึ่งจุดเสมอ แล้วถามนักเรียนว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะอะไร และให้นักเรียนสังเกตตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งว่ามีขอบเขตแค่ไหน เพื่อเป็นการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

5. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมที่ 3 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 3

6. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมที่ 3 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 3 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 3

## หน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

จำนวน 1 คาบ

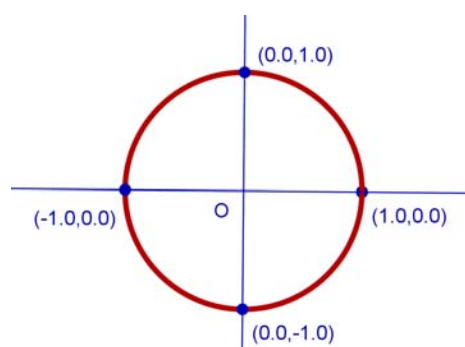
#### 1. สาระสำคัญ

ในเรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เราจะแบ่งออกเป็น 2 หัวข้อ หลักๆ ดังนี้

1. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

#### 1. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  สำหรับ  $\theta$  บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ที่ยาว  $|\theta|$  หน่วยได้ด้วยวิธีง่ายๆ



ถ้า  $\theta = 0$  จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย

คือ  $(1, 0)$  ดังรูป

จะได้  $\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว  $2\pi$  (ในที่นี้  $r = 1$ ) ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  หน่วย จะมีพิกัดเป็นจุดใดจุดหนึ่งต่อไปนี้ คือ  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  และ  $(0, -1)$  จะได้

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\sin (\pi) = 0, \quad \sin (-\pi) = 0$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos \pi = -1, \quad \cos (-\pi) = -1$$

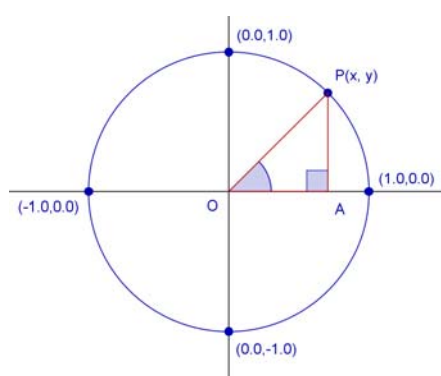
$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

จะเห็นว่า ค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta = \frac{n\pi}{2}$  โดยที่  $n$  เป็นจำนวนเต็มค้นหาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\left| \frac{n\pi}{2} \right|$  หน่วย โดยการวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ  $\theta$  ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  และ  $(0, -1)$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็น  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  และ  $\frac{\pi}{3}$

**กรณีที่ 1** ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{4}$  และ  $\cos \frac{\pi}{4}$

ให้  $P(x, y)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี  $O$  เป็นจุดกำเนิด



สร้างรูป  $\Delta$  มุมฉาก PAO

โดยมี  $\hat{A}$  เป็นมุมฉาก

และ  $m(\hat{AOP}) = \frac{\pi}{4}$  (อย่าลืม  $45^\circ$  นะ)

แสดงว่า  $\Delta$  PAO เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $OA = PA$

นั่นคือ  $x = y$

$$\text{จาก } OA^2 + PA^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

แต่  $(x, y)$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{ดังนั้น } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

จะได้ว่า จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$$

จากความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริง

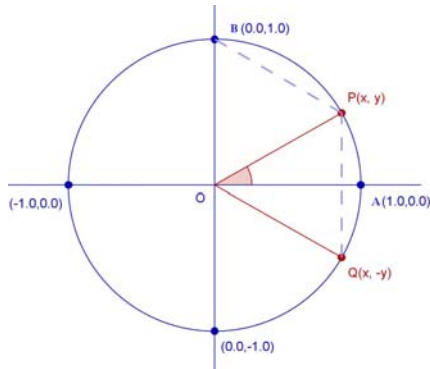
$$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

กรณีที่ 2 ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$

ให้  $P(x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี  $O$  เป็นจุดกำเนิด และ  $A(1, 0)$  เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน  $x$

กำหนดให้  $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{6}$

จากรูป ให้  $B(0, 1)$  เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน  $Y$



ดังนั้น  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$

จะได้  $\widehat{POB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

ให้  $Q$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 4 โดยที่จุด  $Q$  สมมาตรกับจุด  $P$  เมื่อมีแกน  $X$  เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น จุด  $Q$  คือ  $(x, -y)$  และ  $\widehat{AOQ} = \widehat{AOP} = \frac{\pi}{6}$

ลากเส้น  $PB$  และ  $PQ$  จะพบว่า

$$\triangle POB \cong \triangle POQ$$

ดังนั้น

$$PB = PQ$$

นั่นคือ

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (2y)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4y^2 \dots\dots\dots (1)$$

เนื่องจาก  $P(x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น  $x^2 + y^2 = 1$  นำไปแทนค่าใน (1) จะได้

$$1 - 2y + 1 = 4y^2$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y-1)(y+1) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}, -1$$

แต่  $(x, y)$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น  $y = \frac{1}{2}$

จากสมการ  $x^2 + y^2 = 1$

จะได้  $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

แต่  $(x, y)$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{6}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

นั่นคือ  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

โดยอาศัยความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 เราสามารถหาค่าฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงในรูป

$2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ,  $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ ,  $2n\pi \pm \frac{7\pi}{6}$  และ  $2n\pi \pm \frac{11\pi}{6}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$

ในการหาค่าของ  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$  เราสามารถหาได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้ความรู้เดิมจากกรณีที่ 2

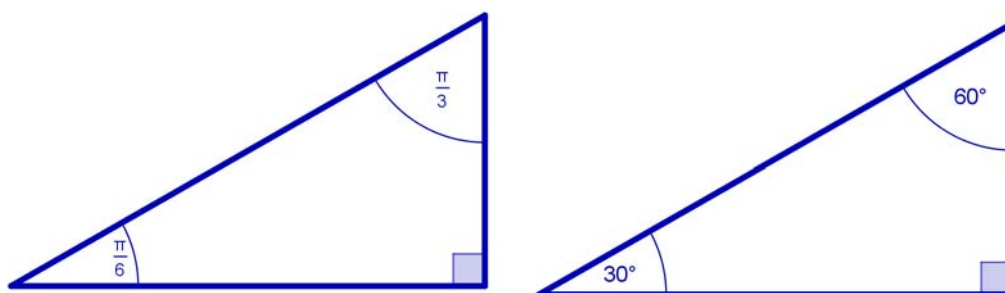
วิธีที่ 2 ใช้วิธีการหาแบบตรงๆ ตามปกติ

วิธีที่ 1 จากการหาค่า  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$  ในกรณีที่ 2 เราสามารถนำมาสู่การหาค่า  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ

$\cos \frac{\pi}{3}$  ได้โดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

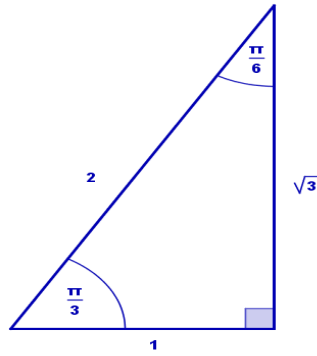
ขอให้นักเรียนสังเกตลักษณะของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะพบว่ามุม  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{6}$  จะเป็นส่วน

หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปเดียวกัน



เนื่องจาก  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  และ  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น อัตราส่วนดังกล่าวจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แบบหนึ่ง ดังนี้

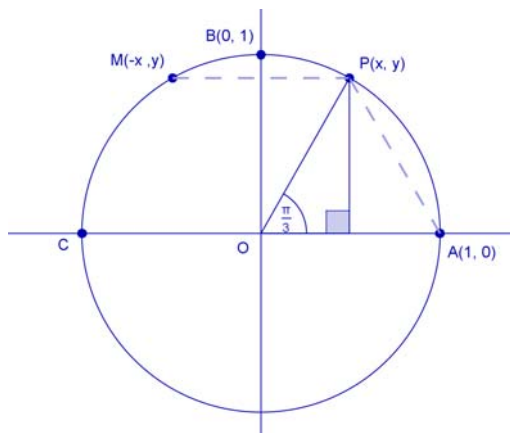


จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังกล่าวใช้ความรู้เกี่ยวกับ  
อัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

**วิธีที่ 2** ให้จุด  $P(x, y)$  เป็นจุดบนส่วนโค้ง  $AB$  ที่ทำให้ส่วนโค้ง  $AP$  ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย ให้จุด  $M$  เป็นภาพสะท้อนของจุด  $P(x, y)$  โดยมีแกน  $Y$  เป็นเส้นสะท้อน ดังรูป



จากรูปจะเห็นว่า พิกัดของจุด  $M$  คือ  $(-x, y)$  และ  
ส่วนโค้ง  $CM$  ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย  
เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว  $\pi$  หน่วย  
ดังนั้นส่วนโค้ง  $PM$  ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย ด้วย

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด  $PM$  ยาวเท่ากับระยะทางระหว่างจุด  $PA$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad PM &= PA \\ \sqrt{(x - (-x))^2 + (y - y)^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} \\ \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2(2x - 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $P(x, y)$  เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1

ดังนั้น  $x$  และ  $y$  จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{จะได้} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

โดยอาศัยความรู้เดิมจากหน่วยที่ 2 เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงในรูป  $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$  และ  $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถบอกค่าฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### 1. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  สำหรับ  $\theta$  บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ที่ยาว  $|\theta|$  หน่วยได้ด้วยวิธีง่ายๆ

กรณีที่ 1 ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{4}$  และ  $\cos \frac{\pi}{4}$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

นั่นคือ  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$

จากความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริง

$\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ , ...,  $\frac{(2n+1)\pi}{4}$  เมื่อ  $n$  เป็น จำนวนเต็มบวก

กรณีที่ 2 ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{6}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

โดยอาศัยความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 เราสามารถหาค่าฟังก์ชัน โคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงในรูป

$$2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{7\pi}{6} \text{ และ } 2n\pi \pm \frac{11\pi}{6} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

กรณีที่ 3 ค่าของ  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$

จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

โดยอาศัยความรู้เดิมจากหน่วยที่ 2 เราสามารถหาค่าของฟังก์ชัน โคไซน์และไซน์ของจำนวน

$$\text{จริงในรูป } 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{4\pi}{3} \text{ และ } 2n\pi \pm \frac{5\pi}{3} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ ประกอบด้วย
  - ใบกิจกรรมที่ 4.1 : ค่าของฟังก์ชัน ไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนนักเรียนเรื่องความยาวส่วนโค้งที่เรียนในหน่วยที่ 2 ทั้ง 4 กรณี ได้แก่ กรณีที่ 1 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\pi$  กรณีที่ 2 ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{2}$  และกรณีที่ 3 และ 4 ตามลำดับ โดยครูให้นักเรียนสังเกตที่ค่าของ  $x$  และ  $y$
2. ครูให้นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ระหว่างบทนิยามของฟังก์ชัน ไซน์และฟังก์ชัน โคไซน์กับความยาวส่วนโค้ง ซึ่งนักเรียนรู้อยู่แล้วว่านิยามของฟังก์ชัน ไซน์คือ  $y = \sin(\theta)$  และนิยามของฟังก์ชัน โคไซน์คือ  $x = \cos(\theta)$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

3. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 4.1 ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 4.1 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน ให้นักเรียนทำการสำรวจและสังเกตตำแหน่งพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

4. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป และทำแบบฝึกหัดเสริมในใบกิจกรรมที่ 4.1

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 4.1 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 4.1

## หน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

พิจารณาจำนวนจริง  $\theta > 0$  และ  $(x, y)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ยาว  $\theta$  หน่วย (เนื่องจาก  $\theta > 0$  จึงได้  $|\theta| = \theta$ ) จากการที่จุด  $(x, -y)$  เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด  $(x, y)$  โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จึงได้จุด  $(x, -y)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าวที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ยาว  $\theta$  หน่วย หรือกล่าวได้ว่า  $(x, -y)$  เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง  $-\theta$  ตามข้อตกลงเรื่องการวัดความยาวส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้ว

##### กรณีที่ 1 การหาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ เมื่อ $\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก

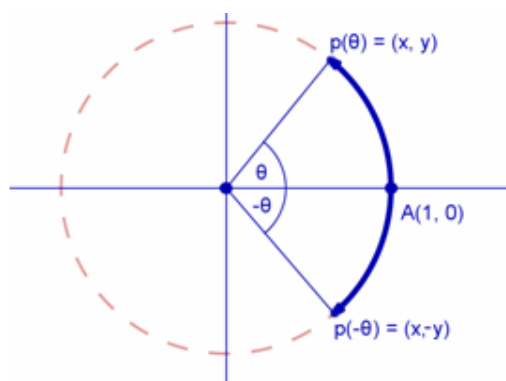
ถ้ากำหนดให้  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว  $-\theta$  จะเป็นจำนวนจริงลบ การหาค่าของ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos(-\theta)$  สามารถหาได้จาก  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  ซึ่งมีความสัมพันธ์กันด้วยสูตรที่จะกล่าวต่อไปนี้

$$\text{สมมติให้ } p(\theta) = (x, y)$$

เนื่องจาก  $p(\theta)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งวัดจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นความยาว  $|\theta|$  หน่วย

และ  $p(-\theta)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งวัดจากจุด  $A(1, 0)$  ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นความยาว  $|\theta|$  หน่วย เช่นกัน

ดังนั้น จุด  $p(\theta)$  และ  $p(-\theta)$  จะสมมาตรกัน โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร แสดงว่า  $p(-\theta) = (x, -y)$  ดังรูป



จากนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta) = -y$$

$$\cos \theta = x \quad \text{และ} \quad \cos(-\theta) = x$$

ดังนั้น จึงสรุปสูตรความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sin \theta$  กับ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos \theta$  กับ  $\cos(-\theta)$  ได้ดังต่อไปนี้

$\sin(-\theta)$	$=$	$-\sin \theta$
$\cos(-\theta)$	$=$	$\cos \theta$

ประโยชน์ที่นำไปใช้ คือ ในกรณีที่ต้องการหาค่าของไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงลบ เราสามารถหาได้จากไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกแทนได้ทันที

**กรณีที่ 2 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta > 2\pi$**

ต่อไปนี้จะพิจารณาเฉพาะวิธีหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบวกเท่านั้น เพราะเราสามารถนำไปหาค่าของฟังก์ชันดังกล่าวของจำนวนจริงลบได้

ถ้า  $\theta > 2\pi$  และหาร  $\theta$  ด้วย  $2\pi$  แล้วได้  $n$  เหลือเศษ  $\alpha$  (แอลฟา) นั่นคือ  $\theta = 2n\pi + \alpha$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก และ  $0 \leq \alpha < 2\pi$

จากทฤษฎีบท เราทราบแล้วว่า

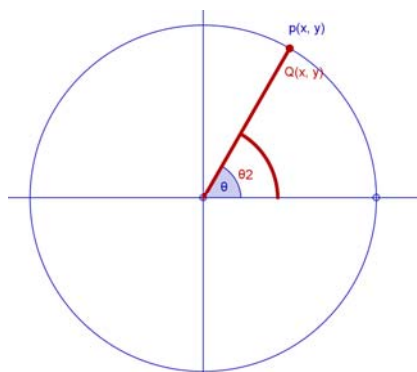
$$p(2n\pi + \alpha) = p(\alpha)$$

ดังนั้น  $p(\theta) = p(\alpha)$

จึงสรุปเป็นสูตรการคำนวณหา  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  ได้ดังนี้

$\sin \theta$	$=$	$\sin(2n\pi + \alpha)$	$=$	$\sin \alpha$
$\cos \theta$	$=$	$\cos(2n\pi + \alpha)$	$=$	$\cos \alpha$

หรือ ถ้าเรามองอีกแบบหนึ่งคือให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมหนึ่งหน่วยข้างล่างนี้



เพราะว่า  $P(x, y)$  และ  $Q(x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้

$$\cos \theta = x$$

$$\text{และ} \quad \sin \theta = y$$

จาก  $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ = 2\pi + \theta$  จะได้ว่า

$$\cos(2\pi + \theta) = x \quad \text{และ} \quad \sin(2\pi + \theta) = y$$

จากข้างต้นที่กล่าวมาทั้งหมด สรุปได้ว่า

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$$

**ข้อสังเกต** ถ้านักเรียนใช้วิธีดังกล่าวทำไปเรื่อยๆ ผลที่ตามมาก็คือ ตำแหน่งเริ่มจะซ้ำกับตำแหน่งเดิม นั่นคือ ถ้ามุมมีขนาดเกิน 1 รอบ จุดปลายของส่วนโค้งจะไปอยู่ ณ ตำแหน่งเดียวกับกรณีที่มีมุมมีขนาดไม่เกิน 1 รอบ แสดงว่า ค่าของไซน์และโคไซน์ที่มีมุมขนาด  $2\pi + \theta$ ,  $4\pi + \theta$ ,  $6\pi + \theta$ , ... จะมีค่าเท่ากับค่าของไซน์และโคไซน์ที่มีมุมขนาด  $\theta$  นั่นเอง

ถ้าสรุปหรือเขียนอย่างง่าย ก็จะกล่าวได้ว่า

$$\sin \theta = \sin(2n\pi + \theta) \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\cos \theta = \cos(2n\pi + \theta) \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถเขียนอธิบายลักษณะของมุมต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง  $\theta$  ใดๆ โดยอาศัยค่าของจำนวนจริงพื้นฐานได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

### 3. ตารางการเรียนรู้

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ

1. การหาค่าของ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos(-\theta)$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

2. การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta > 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad \cos(2\pi + \theta) &= \cos \theta \\ \sin(2\pi + \theta) &= \sin \theta \end{aligned}$$

### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ประกอบด้วย
  - ใบกิจกรรมที่ 4.2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ กรณีที่ 1-2
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการกล่าวว่าในบทที่ผ่านมาที่นักเรียนได้เรียนไปนั้นเป็นเพียงบางส่วนเท่านั้น ยังมีค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ อีก แต่ในการหาค่าของจำนวนจริงใดๆ นั้นยังคงอาศัยความรู้ในการหาค่าของจำนวนจริงบางจำนวนอยู่

2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 1 เรื่องการหาค่าของ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos(-\theta)$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 4.2

3. ครูให้นักเรียนทำการหมุน เคลื่อนไหวจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนทำการสังเกตค่า  $x$  และ  $y$  ของความยาวส่วนโค้งที่เป็น  $\theta$  และ  $-\theta$  แล้วตอบคำถามลงไปใบกิจกรรมที่ 4.2

4. เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนออกมาสรุปหนึ่งคน ซึ่งจากการสรุปในกิจกรรมที่ทำในกรณีที่ 1 จะได้ว่า  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  และ  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

5. หลังจากที่นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่ 1 เสร็จแล้วครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่ 2 เรื่องการหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta > 2\pi$

6. ครูให้นักเรียนทำการหมุน เคลื่อนไหวจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนทำการสังเกตค่า  $x$  และ  $y$  ของความยาวส่วนโค้งที่เป็น  $\theta$  และ  $2\pi + \theta$  แล้วตอบคำถามลงไปใบกิจกรรมที่ 4.2

7. เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนออกมาสรุปหนึ่งคน ซึ่งจากการสรุปในกิจกรรมที่ทำในกรณีที่ 1 จะได้ว่า  $\sin(2\pi + \theta) = \sin(\theta)$  และ  $\cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta)$

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
<ul style="list-style-type: none"> <li>- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม</li> <li>- สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำใบกิจกรรมที่ 4.2 ได้ถูกต้อง</li> <li>- ตอบคำถามได้ถูกต้อง</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ใบกิจกรรมที่ 4.2</li> </ul>

## หน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

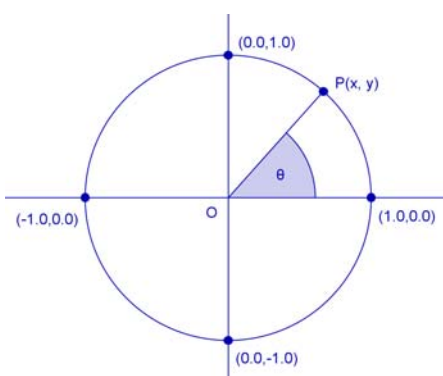
เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ กรณีที่ 3 และ 4

จำนวน 1 คาบ

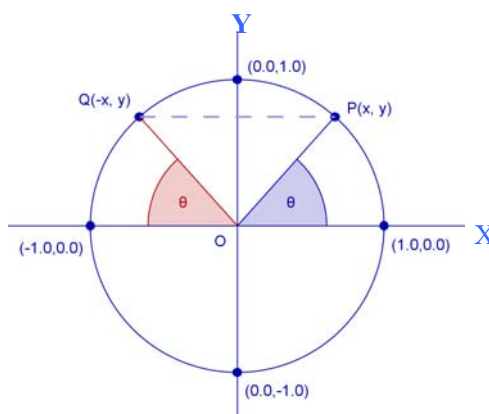
#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 3 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจุดภาคที่ 2)

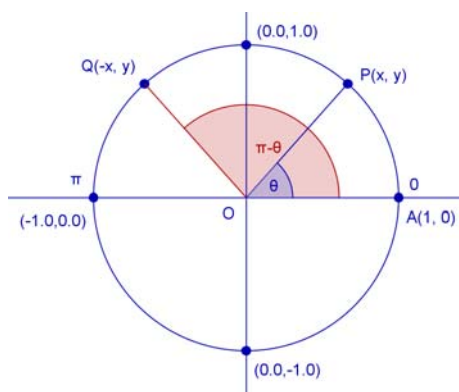
ให้นักเรียนทำการพิจารณารูปมุม  $\theta$  ต่อไปนี้



จากรูปถ้าเราให้แกน Y เป็นแกนสมมาตร ดังนั้นจุด  $Q(-x, y)$  จะเป็นจุดที่สมมาตรกับจุด  $P(x, y)$  ดังรูป



แต่เนื่องจากเราต้องการหามุมที่มี OA เป็นด้านเริ่มต้น และ OQ เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ  $\pi - \theta$  เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า  $Q(-x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย พิกัดตัวหน้าคือค่าโคไซน์ และพิกัดตัวหลังคือค่าไซน์ ของมุม ดังกล่าว

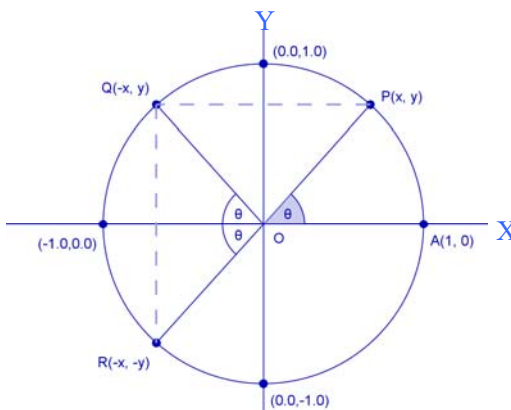
$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \cos(\pi - \theta) &= -x \\ \sin(\pi - \theta) &= y \end{aligned}$$

แต่  $x = \cos \theta$  และ  $y = \sin \theta$   
ดังนั้น

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \end{aligned}$$

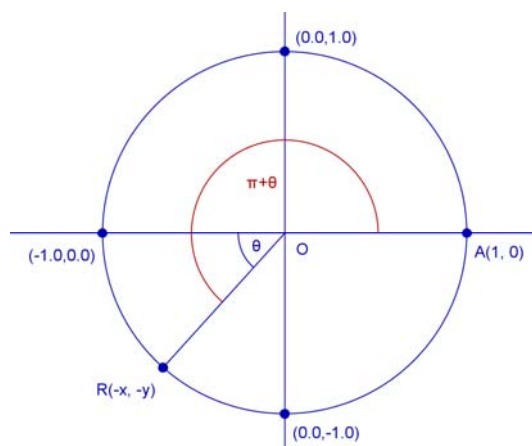
**กรณีที่ 4** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจุดภาคที่ 3)

ให้  $P(x, y)$  และ  $Q(-x, y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี  $O$  เป็นจุดกำเนิด และ  $A(1, 0)$  เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน  $X$  โดยที่จุด  $Q(-x, y)$  เป็นจุดที่สมมาตรกับ  $P(x, y)$  จากรูปข้างล่างถ้า นักเรียนใช้แกน  $X$  เป็นแกนสมมาตร หากจุดที่สมมาตรกับจุด  $Q$  จะได้  $R(-x, -y)$  เป็นจุดที่สมมาตรกับจุด  $Q$  ดังรูป



จากรูปนักเรียนจะพบว่า จุด  $P$  และ  $R$  จะอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

แต่เนื่องจากเราต้องการหามุมที่มี  $OA$  เป็นด้านเริ่มต้น และ  $OR$  เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ  $\pi + \theta$  เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า  $R(-x, -y)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้

$$\cos(\pi + \theta) = -x$$

$$\sin(\pi + \theta) = -y$$

แต่  $x = \cos \theta$  และ  $y = \sin \theta$

ดังนั้น

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถเขียนอธิบายลักษณะของมุมต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง  $\theta$  ใดๆ โดยอาศัยค่าของจำนวนจริงพื้นฐานได้

อาศัยค่าของจำนวนจริงพื้นฐานได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่อการงานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจตุภาคที่ 2)

นั่นคือ  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจตุภาคที่ 3)

นั่นคือ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ประกอบด้วย
  - ใบกิจกรรมที่ 4.2.1 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ กรณีที่ 3-4
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้ คาบที่ 3

1. ครูทบทวนความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนในคาบที่แล้ว โดยทบทวนในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2
2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 3 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 4.2.1
3. ครูให้นักเรียนทำการหมุน เคลื่อนไหวจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนทำการสังเกตค่า  $x$  และ  $y$  ของความยาวส่วนโค้งที่เป็น  $\theta$  และ  $\pi - \theta$  ตกอยู่ในจุดภาคที่เท่าไรแล้วตอบคำถามลงไป ใบกิจกรรมที่ 4.2.1
4. เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนออกมาสรุปหนึ่งคน ซึ่งจากการสรุปใบกิจกรรมที่ทำในกรณีที่ 3 จะได้ว่า  $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$  และ  $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
5. หลังจากให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่ 3 เสร็จแล้วครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์ในกรณีที่ 4 เรื่องการหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
6. ครูให้นักเรียนทำการหมุน เคลื่อนไหวจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนทำการสังเกตค่า  $x$  และ  $y$  ของความยาวส่วนโค้งที่เป็น  $\theta$  และ  $\pi + \theta$  ตกอยู่ในจุดภาคที่เท่าไรแล้วตอบคำถามลงไป ใบกิจกรรมที่ 4.2.1
7. เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนออกมาสรุปหนึ่งคน ซึ่งจากการสรุปใบกิจกรรมที่ทำในกรณีที่ 4 จะได้ว่า  $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 4.2.1 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 4.2.1

## หน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

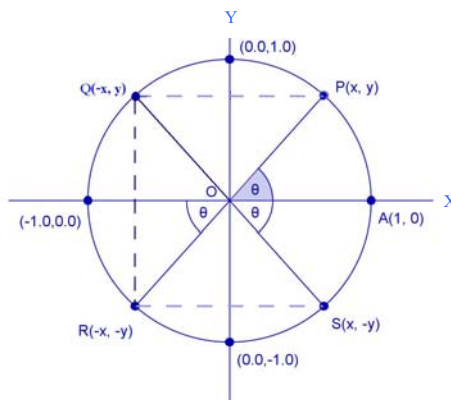
เรื่อง ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์กรณีที่ 5

จำนวน 1 คาบ

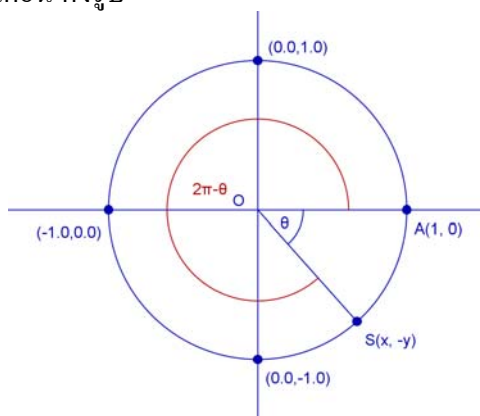
#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 5 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจตุภาคที่ 4)

ในทำนองเดียวกัน ถ้านักเรียนทำต่อเนื่องจาก กรณี 4 ไปอีกโดยใช้แกน Y เป็นแกนสมมาตร หาจุดที่สมมาตรกับจุด R จะได้ S(x, -y) เป็นจุดที่สมมาตรกับจุด R ดังรูป



เนื่องจากเราต้องการหามุมที่มี OA เป็นด้านเริ่มต้น และ OS เป็นด้านสิ้นสุด ดังนั้นขนาดของมุมดังกล่าวเท่ากับ  $2\pi - \theta$  เรเดียน ดังรูป



เพราะว่า S(x, -y) เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากความรู้เกี่ยวกับวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

$$\cos(2\pi - \theta) = x$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -y$$

$$\text{แต่ } x = \cos \theta \text{ และ } y = \sin \theta$$

ดังนั้น

$\cos(2\pi - \theta)$	$=$	$\cos \theta$
$\sin(2\pi - \theta)$	$=$	$-\sin \theta$

เพื่อให้นักเรียนได้มองเห็นถึงสิ่งที่เราหามาได้เป็นหมวดหมู่ยิ่งขึ้น จึงขอรวบรวมสิ่งที่หามาได้ในรูปของตาราง และมีข้อที่น่าสังเกตเพิ่มเติมดังนี้

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	จุดปลายของส่วนโค้ง
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	<b>จุดภาคที่ 2</b> พิกัดตัวแรกเป็นจำนวนลบ พิกัดตัวหลังเป็นจำนวนบวก
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	<b>จุดภาคที่ 3</b> พิกัดตัวแรกเป็นจำนวนลบ พิกัดตัวหลังเป็นจำนวนลบ
$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$	<b>จุดภาคที่ 4</b> พิกัดตัวแรกเป็นจำนวนบวก พิกัดตัวหลังเป็นจำนวนลบ
$\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$ $\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$	<b>จุดภาคที่ 1</b> พิกัดตัวแรกเป็นจำนวนบวก พิกัดตัวหลังเป็นจำนวนบวก

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
2. นักเรียนสามารถเขียนอธิบายลักษณะของมุมต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง  $\theta$

ใดๆ โดยอาศัยค่าของจำนวนจริงบางจำนวนได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

### 3. ตารางการเรียนรู้

การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$  (จุดปลายส่วนโค้งอยู่ในจุดภาคที่ 4)

$$\text{นั่นคือ} \quad \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$$

### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ประกอบด้วย
  - ใบกิจกรรมที่ 4.2.2 : ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 5 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$  พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 4.2.2
2. ครูให้นักเรียนทำการหมุน เคลื่อนไหวจุดปลายส่วนโค้ง และให้นักเรียนทำการสังเกตค่า  $x$  และ  $y$  ของความยาวส่วนโค้งที่เป็น  $\theta$  และ  $2\pi - \theta$  ตกอยู่ในจุดภาคที่เท่าไรแล้วตอบคำถามลงในใบกิจกรรมที่ 4.2.2
3. เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนออกมาสรุปหนึ่งคน ซึ่งจากการสรุปในกิจกรรมที่ทำในกรณีที่ 5 จะได้ว่า  $\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$  และ  $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$
4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดระคนในห้องเรียน ถ้านักเรียนทำไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน

### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 4.2.2 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 4.2.2

## หน่วยที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของจำนวนจริงบางจำนวน

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กล่าวมาแล้วในหน่วยที่ 3 และ 4 ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม** กำหนดให้  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

- 1) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

- 2) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

- 3) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

- 4) ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

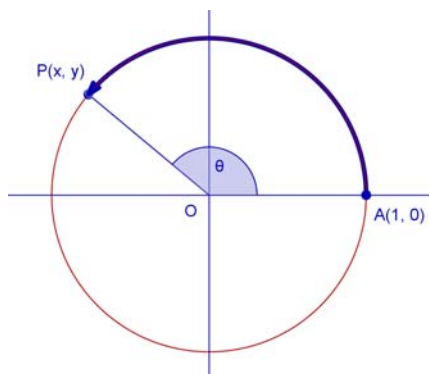
จากบทนิยามจะพบว่า ฟังก์ชันทั้งสี่ฟังก์ชัน นิยามในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนั้นถ้าเราทราบค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เราจะทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ที่เหลือของจำนวนจริง  $\theta$  ได้ **สัญลักษณ์** เพื่อความสะดวกเราใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

- 1)  $\text{tangent } \theta$  จะเขียนแทนด้วย  $\tan \theta$  อ่านว่า “แทนทีตา”
- 2)  $\text{cotangent } \theta$  จะเขียนแทนด้วย  $\cot \theta$  อ่านว่า “คอตทีตา”
- 3)  $\text{secant } \theta$  จะเขียนแทนด้วย  $\sec \theta$  อ่านว่า “เซกทีตา”
- 4)  $\text{cosecant } \theta$  จะเขียนแทนด้วย  $\text{cosec } \theta$  หรือ  $\text{csc } \theta$  อ่านว่า “โคเซกทีตา”

การหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  กับจุดปลายส่วนโค้ง  $p(\theta)$

เราทราบมาแล้วว่า การ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  สามารถหาได้จากจุดปลายส่วนโค้ง  $p(\theta)$  กล่าวคือ ถ้า  $p(\theta) = (x, y)$  แล้วจะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \cos \theta = x$$



ดังนั้น จากนิยาม เราสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้จากจุด  $p(\theta) = (x, y)$  ได้ดังนี้

$$1) \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$2) \cot \theta = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0$$

$$3) \sec \theta = \frac{1}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$4) \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0$$

ค่าของ  $\tan \theta$  จะเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ ขึ้นอยู่กับ  $p(\theta) = (x, y)$  ว่าเป็นจุดที่อยู่ตุภาคที่เท่าใดกล่าวคือ

$$1) \text{ ถ้า } p(\theta) = (x, y) \text{ อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ } x > 0 \text{ และ } y > 0 \text{ ดังนั้น } \tan \theta > 0$$

$$2) \text{ ถ้า } p(\theta) = (x, y) \text{ อยู่ในจุดภาคที่ 2 จะได้ } x < 0 \text{ และ } y > 0 \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0$$

$$3) \text{ ถ้า } p(\theta) = (x, y) \text{ อยู่ในจุดภาคที่ 3 จะได้ } x < 0 \text{ และ } y < 0 \text{ ดังนั้น } \tan \theta > 0$$

$$4) \text{ ถ้า } p(\theta) = (x, y) \text{ อยู่ในจุดภาคที่ 4 จะได้ } x > 0 \text{ และ } y < 0 \text{ ดังนั้น } \tan \theta < 0$$

หมายเหตุ ค่าของ  $\operatorname{cosec} \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\cot \theta$  จะเป็นจำนวนจริงบวกหรือลบ ทำนองเดียวกับค่าของ  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  และ  $\tan \theta$  ตามลำดับ

การหาค่าของ  $\tan(-\theta)$ ,  $\cot(-\theta)$ ,  $\sec(-\theta)$  และ  $\operatorname{cosec}(-\theta)$

ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริงที่ทำให้หาค่า  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้แล้ว เราสามารถหาค่าของ  $\tan(-\theta)$ ,  $\cot(-\theta)$ ,  $\sec(-\theta)$  และ  $\operatorname{cosec}(-\theta)$  ได้ สิ่งที่จะกล่าวต่อไปนี้ได้มาจากความจริงที่

$$\text{กล่าวไปแล้วว่า} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\tan(-\theta) &= \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \\ \cot(-\theta) &= \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta \\ \sec(-\theta) &= \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \\ \operatorname{cosec}(-\theta) &= \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\operatorname{cosec}\theta\end{aligned}$$

ซึ่งสรุปเป็นสูตรได้ดังต่อไปนี้

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆได้
2. นักเรียนสามารถเขียนอธิบายลักษณะของมุมต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งนักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่เหลือโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่อการงานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

### 3. ตารางการเรียนรู้

#### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่กล่าวมาแล้วในหน่วยที่ 3 และ 4 ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

**บทนิยาม** กำหนดให้  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

- 1) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

- 2) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

- 3) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

- 4) ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

#### 1. การหาค่าของ $\tan \theta$ , $\cot \theta$ , $\sec \theta$ และ $\text{cosec } \theta$ กับจุดปลายส่วนโค้ง $p(\theta)$

$$1) \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$2) \cot \theta = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0$$

$$3) \sec \theta = \frac{1}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$4) \text{cosec } \theta = \frac{1}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0$$

ค่าของ  $\tan \theta$  จะเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ ขึ้นอยู่กับ  $p(\theta) = (x, y)$  ว่าเป็นจุดที่อยู่จุดภาคที่เท่าใดกล่าวคือ

- 1) ถ้า  $p(\theta) = (x, y)$  อยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้  $x > 0$  และ  $y > 0$  ดังนั้น  $\tan \theta > 0$
- 2) ถ้า  $p(\theta) = (x, y)$  อยู่ในจุดภาคที่ 2 จะได้  $x < 0$  และ  $y > 0$  ดังนั้น  $\tan \theta < 0$
- 3) ถ้า  $p(\theta) = (x, y)$  อยู่ในจุดภาคที่ 3 จะได้  $x < 0$  และ  $y < 0$  ดังนั้น  $\tan \theta > 0$
- 4) ถ้า  $p(\theta) = (x, y)$  อยู่ในจุดภาคที่ 4 จะได้  $x > 0$  และ  $y < 0$  ดังนั้น  $\tan \theta < 0$

## 2. การหาค่าของ $\tan(-\theta)$ , $\cot(-\theta)$ , $\sec(-\theta)$ และ $\operatorname{cosec}(-\theta)$

ซึ่งสรุปเป็นสูตรได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta \\ \operatorname{cosec}(-\theta) &= -\operatorname{cosec} \theta\end{aligned}$$

## 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 5 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ประกอบด้วย
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## 5. กิจกรรมการเรียนรู้ คาบที่ 1

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการถามนักเรียนว่านอกเหนือจากฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันแทนเจนต์ นักเรียนรู้จักฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ อะไรบ้างที่นอกเหนือจากที่กล่าวมา
2. ครูอธิบายความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน โดยอาศัยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ครูอธิบายโดยขึ้นกระดานว่า

- 1) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

- 2) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

- 3) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{secant } \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

- 4) ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cosecant } \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. หลังจากที่ได้ครูอธิบายความสัมพันธ์ในข้อที่ 2 เสร็จครูก็ให้นักเรียนสังเกต และถามนักเรียนว่าทุกฟังก์ชันต่างมีความสัมพันธ์กับอะไร (ให้นักเรียนตอบ)

4. ครูอธิบายว่าเนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ มาจากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงบางจำนวน นักเรียนสามารถหาได้โดยใช้ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน ได้

5. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์หน่วยที่ 4 กิจกรรมที่ 4.1 เรื่องค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน เพื่อให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์กับฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 5

6. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 5 ภายในห้องเรียน ถ้าทำไม่เสร็จให้กลับไปทำต่อเป็นการบ้าน

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 5 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 5

## หน่วยที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของจำนวนจริงใดๆ

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

การหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

ในการทำงานเกี่ยวกับการหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริงที่สามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้ วิธีการหาค่าของฟังก์ชันดังกล่าวทำได้ดังนี้

1) ถ้า  $\theta < 0$  แล้ว ให้หาค่าของ  $\tan(-\theta)$ ,  $\cot(-\theta)$ ,  $\sec(-\theta)$  หรือ  $\operatorname{cosec}(-\theta)$  แทน โดยที่  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก โดยใช้สูตรข้างต้นที่กล่าวมา

2) ถ้า  $\theta \geq 0$  ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้และ

$$\theta = 2n\pi + \alpha$$

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ  $0 \leq \alpha < 2\pi$  แล้ว

$$\tan \theta = \tan \alpha$$

$$\cot \theta = \cot \alpha$$

$$\sec \theta = \sec \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \alpha$$

3) ถ้า  $0 \leq \theta < 2\pi$  ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว สามารถหาได้จาก  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ,  $\sec \alpha$  และ  $\operatorname{cosec} \alpha$  ตามลำดับ โดยที่

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\alpha$  คือ ความยาวของเส้นโค้งที่  $p(\theta)$  อยู่ห่างจากแกน  $x$  ซึ่งจะได้ว่า

$$\tan \theta = \pm \tan \alpha$$

$$\cot \theta = \pm \cot \alpha$$

$$\sec \theta = \pm \sec \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \pm \operatorname{cosec} \alpha$$

โดยเลือกตอบเครื่องหมาย + หรือ - ขึ้นอยู่กับว่า  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคใด

วิธีการเช่นนี้ ก็เช่นเดียวกับวิธีการหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  นั่นเอง

จากข้อ 1), 2) และ 3) สรุปได้ว่า ถ้าเราสามารถหาค่าของ  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ,  $\sec \alpha$  และ  $\operatorname{cosec} \alpha$

เมื่อ  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  ได้ เราก็จะสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

ซึ่งสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าวได้

#### 4) ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีความสัมพันธ์กัน ที่เรียกว่า “เอกลักษณ์” ซึ่งมีเอกลักษณ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

- 1) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\sin \theta \neq 0$  แล้ว  $\sin \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$
- 2) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$
- 3) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\sin \theta \neq 0$  และ  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$
- 4) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- 5) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
- 6) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\sin \theta \neq 0$  แล้ว  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

#### 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

##### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆได้
2. นักเรียนสามารถเขียนอธิบายลักษณะของมุมต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งนักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่เหลือโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นได้

##### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

##### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

#### 3. สารการเรียนรู้

การหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริง

1) ถ้า  $\theta < 0$  แล้ว ให้หาค่าของ  $\tan(-\theta)$ ,  $\cot(-\theta)$ ,  $\sec(-\theta)$  หรือ  $\operatorname{cosec}(-\theta)$  แทน โดยที่  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก โดยใช้สูตรข้างต้นที่กล่าวมา

2) ถ้า  $\theta \geq 0$  ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้และ

$$\theta = 2n\pi + \alpha$$

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ  $0 \leq \alpha < 2\pi$  แล้ว

$$\tan \theta = \tan \alpha$$

$$\cot \theta = \cot \alpha$$

$$\sec \theta = \sec \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \alpha$$

3) ถ้า  $0 \leq \theta < 2\pi$  ซึ่งสามารถหาค่าของ  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ได้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว สามารถหาได้จาก  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ ,  $\sec \alpha$  และ  $\operatorname{cosec} \alpha$  ตามลำดับโดยที่

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\alpha$  คือ ความยาวของเส้นโค้งที่  $p(\theta)$  อยู่ห่างจากแกน  $x$  ซึ่งจะได้ว่า

$$\tan \theta = \pm \tan \alpha$$

$$\cot \theta = \pm \cot \alpha$$

$$\sec \theta = \pm \sec \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \pm \operatorname{cosec} \alpha$$

โดยเลือกเครื่องหมาย + หรือ - ขึ้นอยู่กับว่า  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ใด  
ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- 1) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\sin \theta \neq 0$  แล้ว  $\sin \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$
- 2) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$
- 3) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และ  $\sin \theta \neq 0$  และ  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$
- 4) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- 5) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\cos \theta \neq 0$  แล้ว  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
- 6) ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\sin \theta \neq 0$  แล้ว  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 5 เรื่องค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ประกอบด้วย
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 5 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงใดๆ
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูอธิบายความสัมพันธ์ของฟังก์ชันโดยอาศัยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ดังต่อไปนี้

- 1) ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{tangent } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

- 2) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\text{cotangent } \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

4) ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant) คือฟังก์ชันที่นิยามว่า

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

3. หลังจากที่ครูอธิบายความสัมพันธ์ในข้อที่ 2 เสร็จครูก็ให้นักเรียนสังเกต และถามนักเรียนว่าทุกฟังก์ชันต่างมีความสัมพันธ์กับอะไร (ให้นักเรียนตอบ)

4. ครูอธิบายว่าเนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ มาจากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงใดๆ นักเรียนสามารถหาได้โดยใช้ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ ได้

5. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์หน่วยที่ 5 เรื่องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของจำนวนจริงใดๆ พร้อมทั้งแจกใบกิจกรรมที่ 5

6. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 5 ภายในห้องเรียน ถ้าทำไม่เสร็จให้กลับไปทำต่อเป็นการบ้าน

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 5 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 5

## หน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จำนวน 1 คาบ

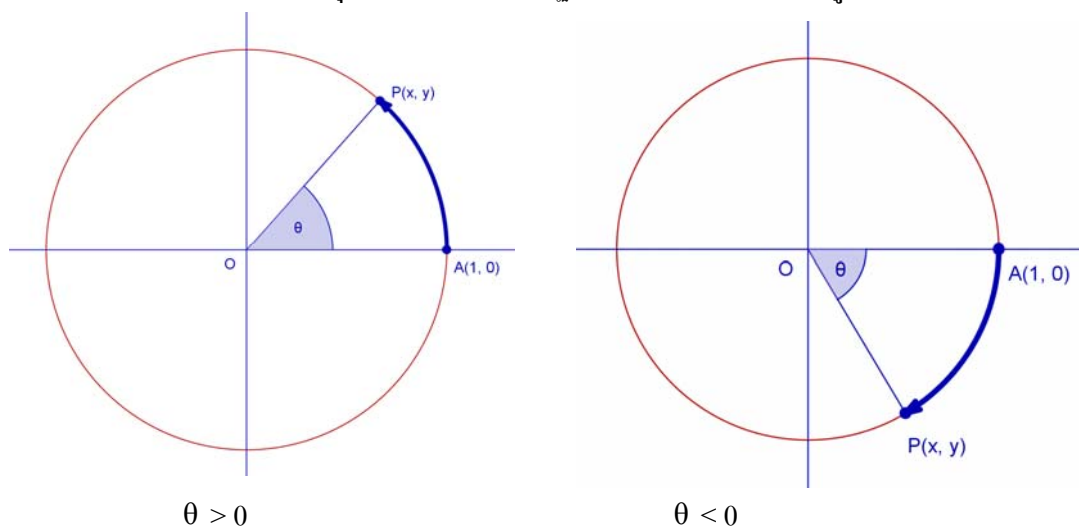
#### 1. สาระสำคัญ

##### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้กล่าวไปในหน่วยที่ผ่านมาแล้ว เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ซึ่งกำหนดได้ด้วยความยาวของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงกลมหนึ่งหน่วย แล้วใช้จุดปลายของส่วนโค้งนั้นมาหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เนื่องจากมุมในตำแหน่งมาตรฐาน (คือมุมๆ หนึ่งที่จุด  $(0, 0)$  และด้านเริ่มต้นของมุนั้นทับไปตามแกน X ทางบวก) สามารถกำหนดได้ด้วยความยาวของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยเช่นกัน ดังนั้น เราจึงสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ได้เช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่กล่าวไปแล้ว

กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ในระบบเรเดียน ดังรูป



โดยที่ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้นจะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด  $\theta$  เรเดียน จึงยาว  $\theta$  หน่วย จะเห็นได้ว่า จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนขนาด  $\theta$  เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีเพียงจุดเดียวและเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ยาว  $|\theta|$  หน่วยในทิศทางที่สอดคล้องกับ  $\theta$  เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม  $-\frac{\pi}{4}$  เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด  $(1, 0)$  ในทิศทางตามเข็มนาฬิกายาว  $\frac{\pi}{4}$  หน่วย

ดังนั้น เราจึงอาศัยจุด  $p(\theta)$  ดังกล่าวนี้นิยามค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  ได้ โดยนิยาม เช่นเดียวกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง  $\theta$  นั้นเอง

**บทนิยาม** กำหนดมุม  $\theta$  เรเดียน ซึ่งเป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และให้ด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด  $p(\theta) = (x, y)$  นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  ดังนี้

$$\begin{aligned} 1) \sin \theta &= y \\ 2) \cos \theta &= x \\ 3) \tan \theta &= \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 4) \cot \theta &= \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0 \\ 5) \sec \theta &= \frac{1}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 6) \operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{y} \quad \text{เมื่อ } y \neq 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากหน่วยในการวัดมุมที่นิยมใช้กันนั้นมีอยู่สองหน่วย คือ เรเดียนและองศา จากที่กล่าวแล้วข้างต้นจะเห็นว่า เมื่อหน่วยของมุมซึ่งอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานมีหน่วยเป็นเรเดียน จำนวนที่แสดงค่าของมุมนั้นจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แสดงความยาวและทิศทางของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนจึงหาได้ตามที่กล่าวมาแล้ว ส่วนการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดย **เปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน** แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่วไป

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุม หรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากันเสมอ ต่อไปนี้เป็นตารางเปรียบเทียบเพื่อให้นักเรียนได้เห็นชัดเจนถึงระบบเรเดียนกับระบบองศา ว่ามีความคล้ายกันอย่างไร

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$ $\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$ $\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$ $\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta$ $\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$ $\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$ $\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$ $\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$ $\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta$ $\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$ $\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$ $\operatorname{cosec}(2\pi - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$ $\sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$ $\operatorname{cosec}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
<p>ถ้า <math>n</math> เป็นจำนวนนับ แล้ว</p> $\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$ $\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$ $\tan(2n\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(2n\pi + \theta) = \cot \theta$ $\sec(2n\pi + \theta) = \sec \theta$ $\operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$	<p>ถ้า <math>n</math> เป็นจำนวนนับ แล้ว</p> $\sin(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sin \theta$ $\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta$ $\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta$ $\cot(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cot \theta$ $\sec(n \cdot 360^\circ + \theta) = \sec \theta$ $\operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายความแตกต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมและจำนวนจริงได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สารการเรียนรู้

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**บทนิยาม** กำหนดมุม  $\theta$  เรเดียน ซึ่งเป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และให้ด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด  $p(\theta) = (x, y)$  นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  ดังนี้

- 1)  $\sin \theta = y$
- 2)  $\cos \theta = x$
- 3)  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  เมื่อ  $x \neq 0$
- 4)  $\cot \theta = \frac{x}{y}$  เมื่อ  $y \neq 0$
- 5)  $\sec \theta = \frac{1}{x}$  เมื่อ  $x \neq 0$
- 6)  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{y}$  เมื่อ  $y \neq 0$

เนื่องจากหน่วยในการวัดมุมที่นิยมใช้กันนั้นมีอยู่สองหน่วย คือ เรเดียนและองศา จากที่กล่าวแล้วข้างต้นจะเห็นว่า เมื่อหน่วยของมุมซึ่งอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานมีหน่วยเป็นเรเดียน จำนวนที่แสดงค่าของมุมนั้นจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แสดงความยาวและทิศทางของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนจึงหาได้ตามที่กล่าวมาแล้ว ส่วนการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดย **เปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน** แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่วไป

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ประกอบด้วย
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 6.1 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้ คาบที่ 1

1. ครุณำนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้เดิมในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงที่นักเรียนได้เรียนไปแล้วพร้อมทั้งให้นักเรียนทบทวนเรื่องการวัดมุมในหน่วยที่ 1
2. ครูแนะนำนักเรียนเกี่ยวกับการใช้งานของคำสั่งต่างๆ ที่ใช้ในกิจกรรมหน่วยที่ 6
3. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนถามสิ่งที่ไม่เข้าใจเกี่ยวกับการใช้งานของคำสั่งต่างๆ
4. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 6 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 6.1 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง
5. ให้นักเรียนทำกิจกรรมในคอมพิวเตอร์หน่วยที่ 6 โดยครูนั้นเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง โดยที่ครูมีหน้าที่สอน ชี้แจง และแนะนำนักเรียนให้ปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง
6. เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 6.1 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 6.1
7. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากใบกิจกรรมที่ 6.1 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 6.1 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 6.1

## หน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

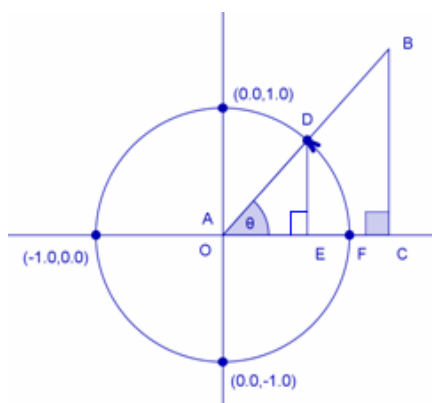
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ การนำไปใช้ในการหาส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยม ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูปให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี  $\hat{ACB}$  เป็นมุมฉาก ดังนั้น  $\hat{BAC} < 90^\circ$  ให้  $a, b, c$  เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม  $A, B$  และ  $C$  ตามลำดับของรูปสามเหลี่ยม ให้  $\hat{BAC}$  อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานดังรูป ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม  $A$  คือส่วนโค้ง  $FD$

ให้  $\overline{DE}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$  ที่จุด  $E$

$$\text{ดังนั้น } \sin A = \sin(\text{ความยาวส่วนโค้ง } FD) = DE$$

$$\cos A = \cos(\text{ความยาวส่วนโค้ง } FD) = AE$$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม  $ADE$  และรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

$$\text{ดังนั้น } \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} \quad \text{และ} \quad \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{แต่ } AD = 1$$

$$\text{ดังนั้น } DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \quad \text{และ} \quad AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{และ} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

จากที่กล่าวมานี้ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของมุม  $A$  จะเป็นส่วนกลับของค่าของฟังก์ชันทั้งสามนี้ สมการข้างต้นนี้มีประโยชน์ในการหาส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมบอกมุม 1 มุม และด้าน 1 ด้านนักเรียนสามารถหาความยาวของด้านที่เหลือได้

2. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติค่าหนึ่งให้ได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของมุม A จะเป็นส่วนกลับของค่าของฟังก์ชันทั้งสามนี้ สมการข้างต้นนี้มีประโยชน์ในการหาส่วนต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ประกอบด้วย
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1: ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครุณำนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้เดิมในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในคาบที่ผ่านมา โดยให้นักเรียนตอบคำถามที่ครูถาม
2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 6 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง
3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1 โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง โดยที่ครูมีหน้าที่สอน ชี้แจง และแนะนำนักเรียนให้ปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง
4. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1
5. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากการกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 1

## หน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง (ให้นักเรียนเปิดค่าตารางที่อยู่ในหนังสือหน้า 101)

เราทราบมาแล้วว่า ถ้า  $\theta$  เป็นจำนวนจริง และอยู่ใน โดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติใด จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นได้เสมอ ซึ่งเราก็ได้มีการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนไปแล้ว เช่น  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  หรือ  $\frac{\pi}{3}$  เป็นต้น

ในกรณีที่  $\theta$  เป็นจำนวนจริงอื่นๆ เราจะทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\theta$  ได้อย่างไร ปัญหาข้อนี้ เราได้เคยมีการอภิปรายมาก่อนหน้านี้แล้วว่า ถ้าเราสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง  $\theta$  โดยที่  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ได้แล้ว เราจะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงอื่นๆ ได้ ดังนั้น นักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน ในช่วง  $[0, \frac{\pi}{2}]$  หรือของมุมบางมุมตั้งแต่  $0^\circ$  ถึง  $90^\circ$  ตารางนี้ เรียกว่า ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ส่วนประกอบของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ตารางจะประกอบด้วยช่องย่อยๆ ทั้งหมด 10 ช่อง
2. ช่องที่ 1 และช่องที่ 10 แสดงมุม  $\theta$  ซึ่งเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน โดยที่
  - ในช่องที่ 1 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก .0000 เรเดียน ถึง .7854 เรเดียน จากบนลงล่าง
  - ในช่องที่ 10 จะเริ่มจาก .7854 เรเดียน ถึง 1.5708 เรเดียน จากล่างขึ้นบน
3. ช่องที่ 2 และช่องที่ 9 แสดงมุม  $\theta$  ซึ่งเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา โดยที่
  - ในช่องที่ 2 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก  $0^\circ 00'$  และเพิ่มทีละ 10 ลิปดา จนถึง  $45^\circ 00'$  จากบนลงล่าง
  - ในช่องที่ 9 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก  $45^\circ 00'$  และเพิ่มทีละ 10 ลิปดา จนถึง  $90^\circ 00'$  จากล่างขึ้นบน
4. ช่องที่ 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 จะเป็นตัวเลขที่แสดงค่าของ
  - $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\sec \theta$  และ  $\operatorname{cosec} \theta$  ตามลำดับ จากบนลงล่าง
  - หรือ  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $\cot \theta$ ,  $\tan \theta$ ,  $\operatorname{cosec} \theta$  และ  $\sec \theta$  ตามลำดับ จากล่างขึ้นบน

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนหรือมุมบางมุมที่ไม่ปรากฏในตาราง

สมมติให้  $\theta$  เป็นมุมที่ต้องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ซึ่งไม่ปรากฏในตาราง)

1) มุม  $\alpha$  ที่มากที่สุด และมุม  $\beta$  ที่น้อยที่สุด ซึ่ง  $\alpha < \theta < \beta$

2) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\alpha$  และของ  $\beta$

3) ใช้สัดส่วนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างของมุม และผลต่างของค่าฟังก์ชันของมุม

หมายเหตุ สิ่งที่เราควรระวังก็คือ จะต้องพิจารณาให้ถ่องแท้ว่า ในขณะที่มุมเพิ่มขึ้นนั้น ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมนั้นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1)  $\sin 40^\circ 17'$                       2)  $\cos 40^\circ 17'$

วิธีทำ เนื่องจาก  $40^\circ 10' < 40^\circ 17' < 40^\circ 20'$

1) จากตารางจะได้ว่า

$$\begin{array}{l} \text{มุมเพิ่มขึ้น } 10' \\ \text{ดังนั้น} \end{array} \left[ \begin{array}{l} \sin 40^\circ 10' \\ \sin 40^\circ 17' \\ \sin 40^\circ 20' \end{array} \right] \begin{array}{l} = 0.6450 \\ = ? \\ = 0.6472 \end{array} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow d \\ \leftarrow d \\ \leftarrow d \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ 0.0022 \text{ ค่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้น} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ดังนั้น} \\ d \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{10} \\ = \\ \frac{d}{0.0022} \\ = \\ \frac{7 \times 0.0022}{10} = 0.00154 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{เพราะฉะนั้น} \\ \sin 40^\circ 17' \end{array} = 0.6450 + 0.00154 = 0.64654$$

2) จากตารางจะได้ว่า

$$\begin{array}{l} \text{มุมเพิ่มขึ้น } 10' \\ \text{ดังนั้น} \end{array} \left[ \begin{array}{l} \cos 40^\circ 10' \\ \cos 40^\circ 17' \\ \cos 40^\circ 20' \end{array} \right] \begin{array}{l} = 0.7642 \\ = ? \\ = 0.7623 \end{array} \left[ \begin{array}{l} \leftarrow d \\ \leftarrow d \\ \leftarrow d \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -0.0019 \text{ ค่าฟังก์ชันลดลง} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ดังนั้น} \\ d \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{10} \\ = \\ \frac{d}{-0.0019} \\ = \\ \frac{7 \times (-0.0019)}{10} = -0.00133 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{เพราะฉะนั้น} \\ \cos 40^\circ 17' \end{array} = 0.7642 + (-0.00133) = 0.76287$$

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถอ่านและหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งที่มีอยู่ในตารางและไม่อยู่ในตารางได้

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

#### ส่วนประกอบของตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ตารางจะประกอบด้วยช่องย่อยๆ ทั้งหมด 10 ช่อง
2. ช่องที่ 1 และช่องที่ 10 แสดงมุม  $\theta$  ซึ่งเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน โดยที่
  - ในช่องที่ 1 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก .0000 เรเดียน ถึง .7854 เรเดียน จากบนลงล่าง
  - ในช่องที่ 10 จะเริ่มจาก .7854 เรเดียน ถึง 1.5708 เรเดียน จากล่างขึ้นบน
3. ช่องที่ 2 และช่องที่ 9 แสดงมุม  $\theta$  ซึ่งเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา โดยที่
  - ในช่องที่ 2 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก  $0^{\circ}00'$  และเพิ่มทีละ 10 ลิปดา จนถึง  $45^{\circ}00'$  จากบนลงล่าง
  - ในช่องที่ 9 ค่าของ  $\theta$  จะมีค่าเริ่มจาก  $45^{\circ}00'$  และเพิ่มทีละ 10 ลิปดา จนถึง  $90^{\circ}00'$  จากล่างขึ้นบน
4. ช่องที่ 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 จะเป็นตัวเลขที่แสดงค่าของ
 

$\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$ ,  $\cot\theta$ ,  $\sec\theta$  และ  $\operatorname{cosec}\theta$  ตามลำดับ จากบนลงล่าง

หรือ  $\cos\theta$ ,  $\sin\theta$ ,  $\cot\theta$ ,  $\tan\theta$ ,  $\operatorname{cosec}\theta$  และ  $\sec\theta$  ตามลำดับ จากล่างขึ้นบน

### การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนหรือมุมบางมุมที่ไม่ปรากฏในตาราง

สมมติให้  $\theta$  เป็นมุมที่ต้องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ซึ่งไม่ปรากฏในตาราง)

- 1) หามุม  $\alpha$  ที่มากที่สุด และมุม  $\beta$  ที่น้อยที่สุด ซึ่ง  $\alpha < \theta < \beta$
- 2) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\alpha$  และของ  $\beta$
- 3) ใช้สัดส่วนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างของมุม และผลต่างของค่าฟังก์ชันของมุม

หมายเหตุ สิ่งที่เราควรระวังก็คือ จะต้องพิจารณาให้ถ่องแท้ว่า ในขณะที่มุมเพิ่มขึ้นนั้น ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมนั้นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลง

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. เพิ่มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ประกอบด้วย
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2: การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครุณำนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้เดิมในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในคาบที่ผ่านมา โดยให้นักเรียนตอบคำถามที่ครูถาม
2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 6 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2 เรื่องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง
3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2 โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง โดยที่ครูมีหน้าที่สอน ชี้แจง และแนะนำนักเรียนให้ปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง
4. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2
5. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 6.2 ตอนที่ 2

## หน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กรณีที่ 1  $y = T(x)$  และกรณีที่ 2  $y = k \cdot T(x)$  จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

##### กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในการแก้ปัญหาไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรือปัญหาเกี่ยวกับเรื่องแสงและเสียงในวิชาฟิสิกส์ บางครั้งจำเป็นต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การศึกษากราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติก็เหมือนกับฟังก์ชันทั่วไป กล่าวคือ ศึกษาเกี่ยวกับลักษณะของกราฟพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

กรณีที่ 1 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อ  $y = T(x)$

##### 1. กราฟของฟังก์ชันไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{sine}$  (ฟังก์ชันไซน์)

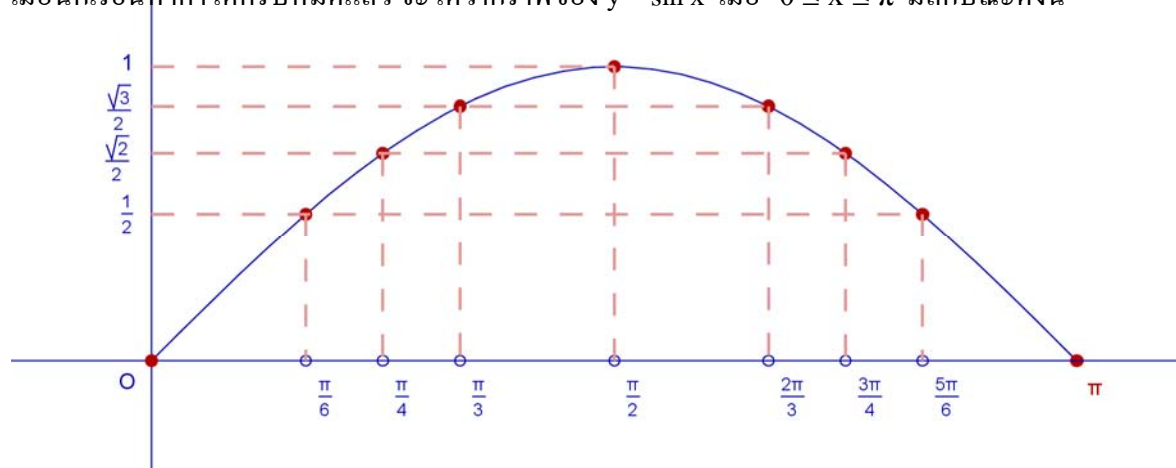
จะได้  $y = \text{sine } x$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \sin x$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

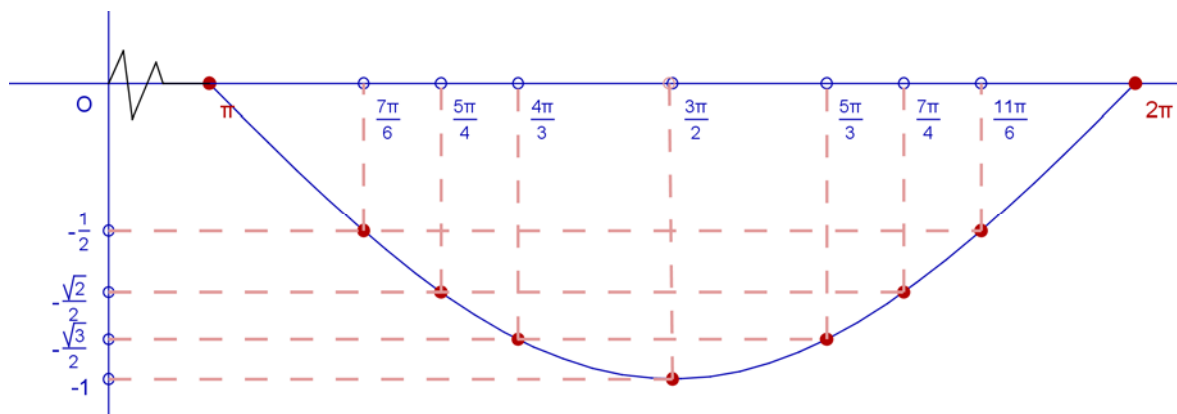
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว จะได้ว่ากราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  มีลักษณะดังนี้



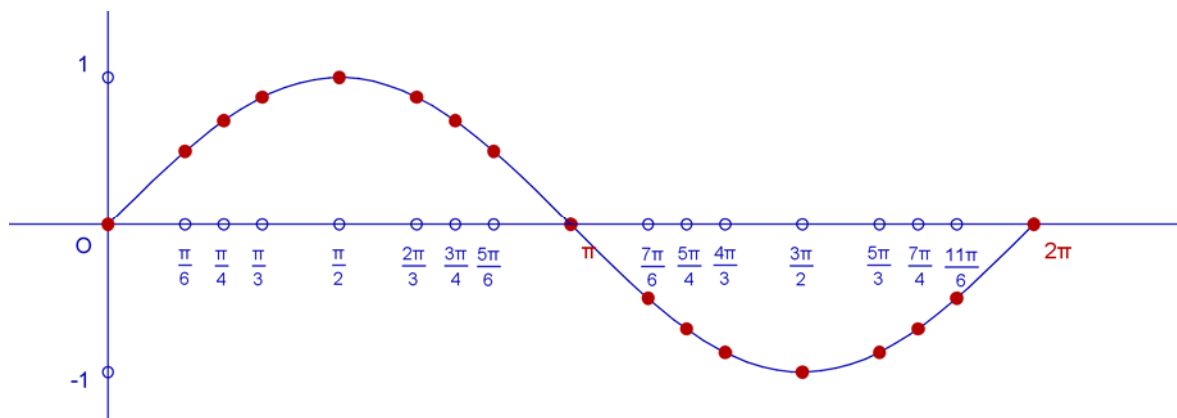
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

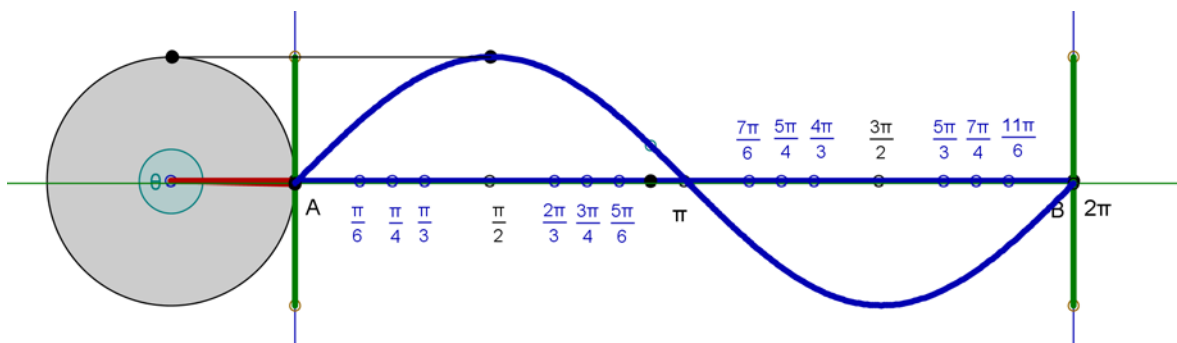
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว จะได้ว่ากราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  มีลักษณะดังนี้



เมื่อเรานำกราฟทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน จะได้ลักษณะของกราฟ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  ดังนี้



หรือนักเรียนสามารถดูได้จากวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



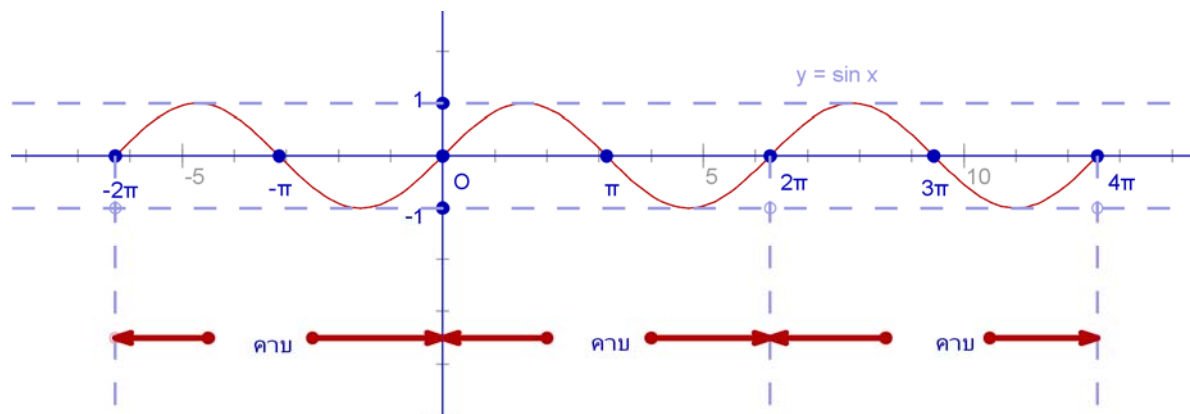
เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 ดังนั้นค่าของฟังก์ชันไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ  $\sin x$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง  $2\pi$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

$x$	:	0	→	$\frac{\pi}{2}$	→	$\pi$	→	$\frac{3\pi}{2}$	→	$2\pi$
$\sin x$	:	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

สรุป

- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง  $\frac{\pi}{2}$   
กราฟของ  $y = \sin \theta$  จะเริ่มจาก 0 และสูงขึ้นเรื่อยๆ จนถึง 1
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\frac{\pi}{2}$  ถึง  $\pi$   
กราฟของ  $y = \sin \theta$  จะเริ่มจาก 1 และลดต่ำลงเรื่อยๆ จนถึง 0
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\pi$  ถึง  $\frac{3\pi}{2}$   
กราฟของ  $y = \sin \theta$  จะเริ่มจาก 0 และลดต่ำลงเรื่อยๆ จนถึง -1
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\frac{3\pi}{2}$  ถึง  $2\pi$   
กราฟของ  $y = \sin \theta$  จะเริ่มจาก -1 และสูงขึ้นเรื่อยๆ จนถึง 0
- ลักษณะกราฟของ  $y = \sin \theta$  จะเป็นไปตามข้อ 1 ถึงข้อ 4  
เรียงตามลำดับ ถ้า  $\theta$  เพิ่มขึ้นอีกช่วงละ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน ตามลำดับ

นักเรียนลองพิจารณารูปของฟังก์ชันไซน์ ต่อไปนี้



จากกราฟดังกล่าวเนื่องจาก  $\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ นักเรียนจะพบว่า ในช่วง  $[2\pi, 4\pi]$  หรือในช่วง  $[-2\pi, 0]$  ลักษณะของกราฟจะเหมือนกับกราฟในช่วง  $[0, 2\pi]$  และจะมีลักษณะเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ฟังก์ชันที่มีลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)** และคาบของฟังก์ชันดังกล่าวเท่ากับ  $2\pi$  ซึ่งก็คือความยาวของช่วงจาก 0 ถึง  $2\pi$  นั่นเอง

ในกรณีที่ฟังก์ชันที่เป็นคาบมีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด เราจะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างของค่าสูงสุดกับค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด (amplitude)**

นั่นคือ ถ้า  $M$  และ  $m$  เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบตามลำดับ จะได้ว่าแอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ  $\frac{1}{2}(M - m)$

เช่น ฟังก์ชัน  $y = \sin x$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เท่ากับ 1

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เท่ากับ -1

ดังนั้น แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ  $\frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \sin x \leq 1$

- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

- 4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

- 5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น

ในช่วง  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในช่วง  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันลด เป็นต้น

### 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{cosine}$  (ฟังก์ชันโคไซน์)

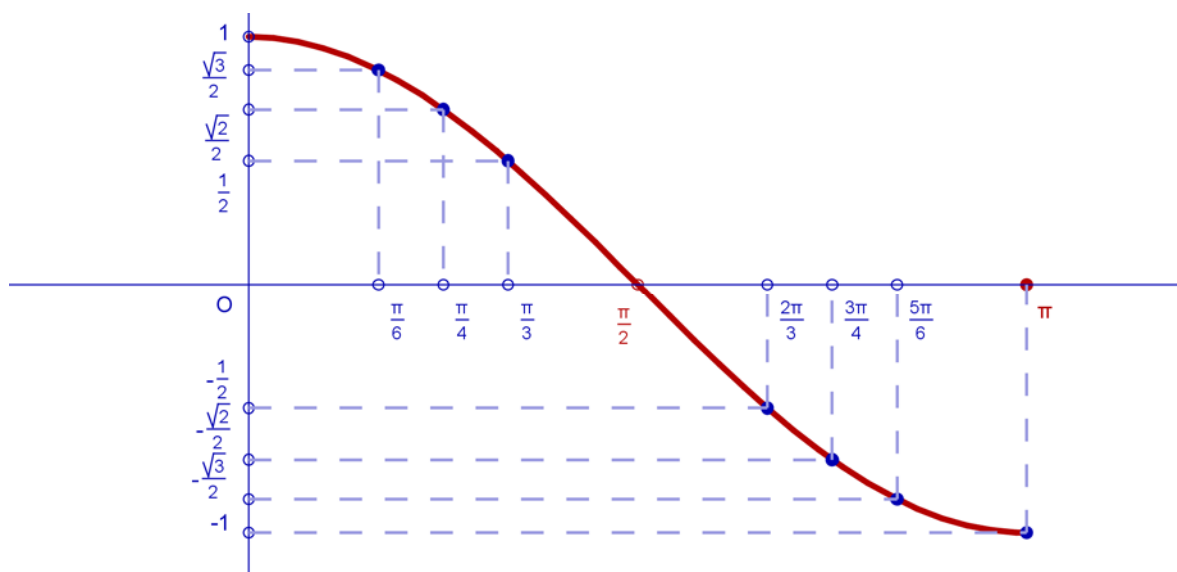
จะได้  $y = \text{cosine } x$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \cos x$

เพื่อความสะดวก เราหากกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

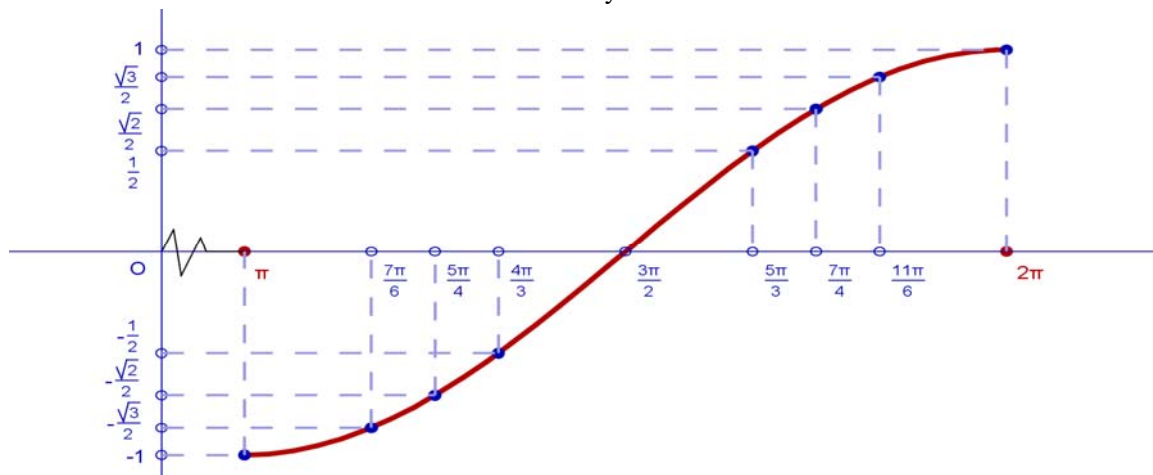
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว จะได้ว่ากราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  มีลักษณะดังนี้



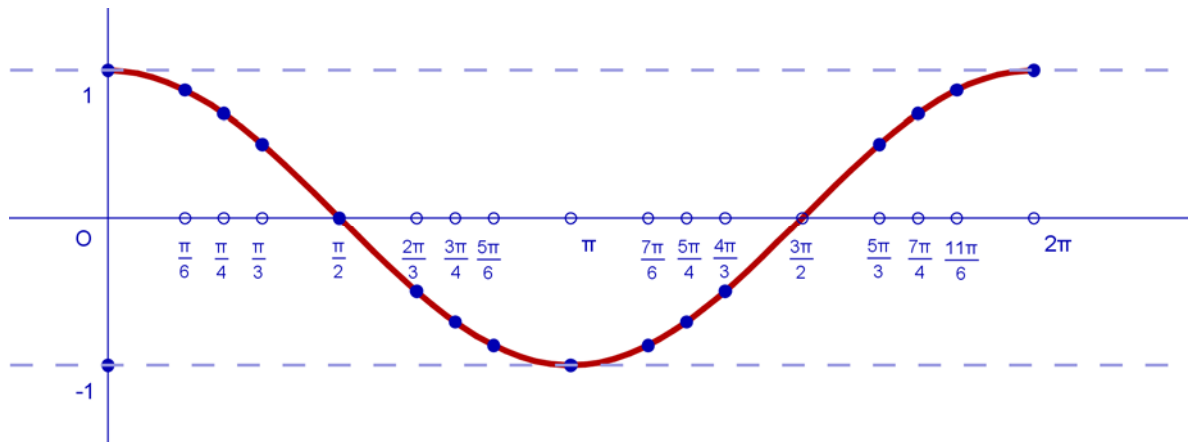
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว จะได้ว่ากราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  มีลักษณะดังนี้



เมื่อเรานำกราฟทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน จะได้ลักษณะของกราฟ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  ดังนี้



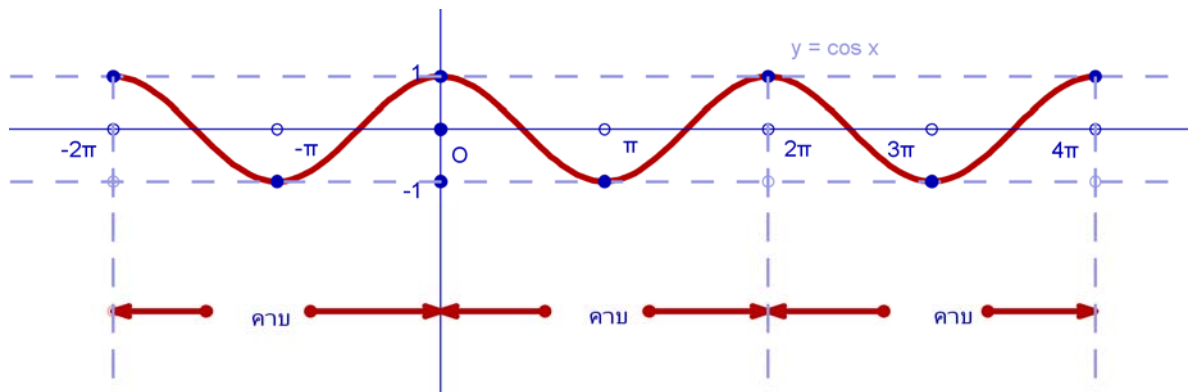
เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 ดังนั้นค่าของฟังก์ชันโคไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ  $\cos x$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง  $2\pi$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังแสดงในตารางต่อไปนี้

$x$	:	0	→	$\frac{\pi}{2}$	→	$\pi$	→	$\frac{3\pi}{2}$	→	$2\pi$
$\cos x$	:	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

สรุป

- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง  $\frac{\pi}{2}$   
กราฟของ  $y = \cos \theta$  จะเริ่มจาก 1 และลดลงไปเรื่อยๆ จนถึง 0
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\frac{\pi}{2}$  ถึง  $\pi$   
กราฟของ  $y = \cos \theta$  จะเริ่มจาก 0 และลดต่ำลงไปเรื่อยๆ จนถึง -1
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\pi$  ถึง  $\frac{3\pi}{2}$   
กราฟของ  $y = \cos \theta$  จะเริ่มจาก -1 และสูงขึ้นเรื่อยๆ จนถึง 0
- ขณะที่  $\theta$  เพิ่มขึ้นจาก  $\frac{3\pi}{2}$  ถึง  $2\pi$   
กราฟของ  $y = \cos \theta$  จะเริ่มจาก 0 และสูงขึ้นเรื่อยๆ จนถึง 1
- ลักษณะกราฟของ  $y = \cos \theta$  จะเป็นไปตามข้อ 1 ถึงข้อ 4  
เรียงตามลำดับ ถ้า  $\theta$  เพิ่มขึ้นอีกช่วงละ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน ตามลำดับ

นักเรียนลองพิจารณารูปของฟังก์ชันโคไซน์ ต่อไปนี้



จากกราฟดังกล่าวเนื่องจาก  $\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ นักเรียนจะพบว่า ในช่วง  $[2\pi, 4\pi]$  หรือในช่วง  $[-2\pi, 0]$  ลักษณะของกราฟจะเหมือนกับกราฟในช่วง  $[0, 2\pi]$  และจะมีลักษณะเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ฟังก์ชันที่มีลักษณะเช่นนี้เราเรียกว่า **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)** และคาบของฟังก์ชันดังกล่าวเท่ากับ  $2\pi$  ซึ่งก็คือความยาวของช่วงจาก 0 ถึง  $2\pi$  นั่นเอง

**สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์**

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

นั่นคือ  $R_f = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \cos x \leq 1$

- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

- 4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

- 5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น

ในช่วง  $(\pi, 2\pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในช่วง  $(0, \pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลด เป็นต้น

### 3. กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์

$$\text{tangent} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ เมื่อ } \cos x \neq 0\}$$

ดังนั้น ค่า  $x$  ที่ทำให้เราไม่สามารถหาค่า  $y$  ได้ ก็คือค่า  $x$  ที่ทำให้  $\cos x = 0$  จะได้ว่า

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | \cos x \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | \cos x = 0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$$

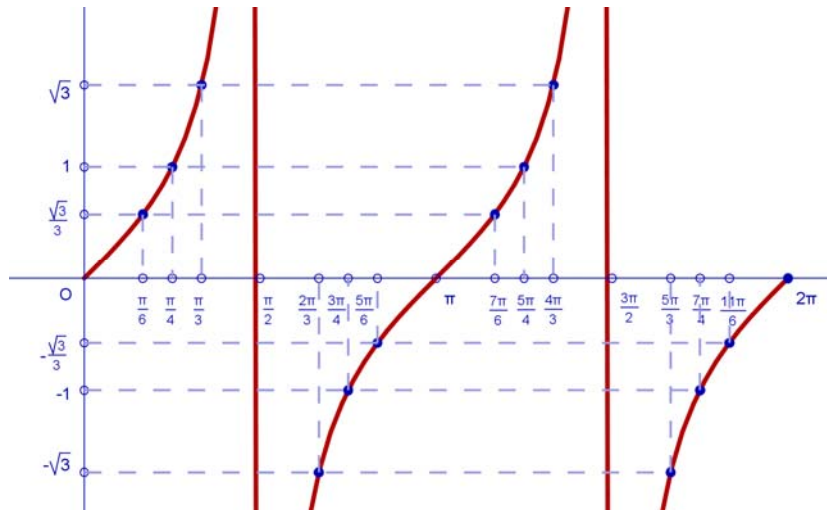
$$R_r = R$$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$x$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว จะได้ว่ากราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  มีลักษณะดังนี้



จากรูปข้างบนจะพบว่า

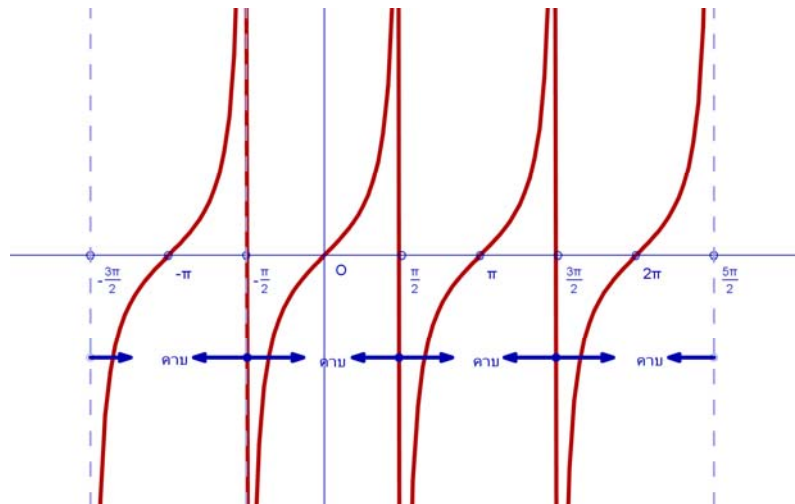
- 1)  $\tan \frac{\pi}{2}$  หาค่าไม่ได้ เพราะ  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- 2)  $\tan \left(-\frac{\pi}{2}\right)$  หาค่าไม่ได้ เพราะ  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- 3) ถ้า  $x < \frac{\pi}{2}$  และมีค่าเข้าใกล้  $\frac{\pi}{2}$  แล้ว ค่าของ  $\tan x$  จะเป็นจำนวนจริงบวกและมีค่ามากขึ้น

อย่างไม่มีการสิ้นสุด ดังนั้นกราฟในส่วนนี้ จึงสูงขึ้นๆ แต่จะไม่ตัดกับเส้นตรง  $x = \frac{\pi}{2}$

- 4) ถ้า  $x > \frac{\pi}{2}$  และมีค่าเข้าใกล้  $\frac{\pi}{2}$  แล้ว ค่าของ  $\tan x$  จะเป็นจำนวนจริงบวกและมีค่าลดลง

อย่างไม่มีการสิ้นสุด ดังนั้นกราฟในส่วนนี้ จึงลดลงๆ แต่จะไม่ตัดกับเส้นตรง  $x = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้นกราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงที่หาค่า  $\tan x$  ได้ จะมีลักษณะดังรูป



สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน  $y = \tan x$

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง นั่นคือ  $-\infty < \tan x < \infty$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

#### 4. กราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์

$$\text{cosecant} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \text{cosec } x = \frac{1}{\sin x} \text{ เมื่อ } \sin x \neq 0\}$$

ดังนั้น ค่า  $x$  ที่ทำให้เราไม่สามารถหาค่า  $y$  ได้ ก็คือค่า  $x$  ที่ทำให้  $\sin x = 0$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_r &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\} \end{aligned}$$

ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริงในโดเมนของ cosecant แล้ว จะได้

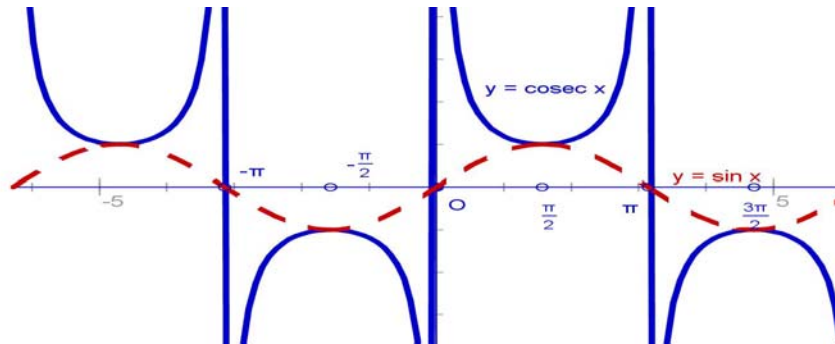
$$-1 \leq \sin x < 0 \quad \text{หรือ} \quad 0 < \sin x \leq 1$$

ดังนั้น  $\frac{1}{\sin x} \leq -1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\sin x} \geq 1$

นั่นคือ  $\text{cosec } x \leq -1 \quad \text{หรือ} \quad \text{cosec } x \geq 1$

เพราะฉะนั้น  $R_r = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ในช่วง  $[-2\pi, 4\pi]$  เสียก่อนโดยหาค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ (ทำในทำนองเดียวกันกับที่ผ่านมา)



สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
นั่นคือ  $\text{cosec } x \leq -1$  หรือ  $\text{cosec } x \geq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \text{cosec } x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไจฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

### 5. กราฟของฟังก์ชันเซแคนต์

$$\text{secant} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ เมื่อ } \cos x \neq 0\}$$

ดังนั้น ค่า  $x$  ที่ทำให้เราไม่สามารถหาค่า  $y$  ได้ ก็คือค่า  $x$  ที่ทำให้  $\cos x = 0$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_r &= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\} \end{aligned}$$

ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริงในโดเมนของ secant แล้ว จะได้

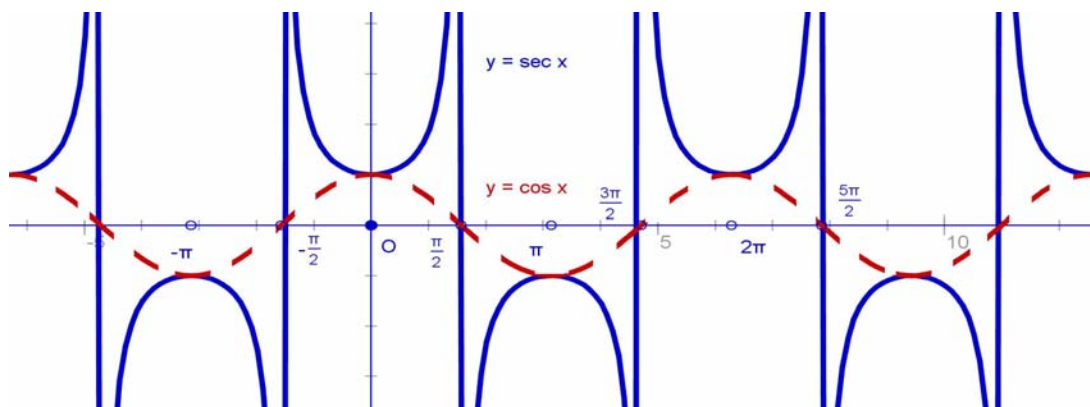
$$-1 \leq \cos x < 0 \quad \text{หรือ} \quad 0 < \cos x \leq 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{1}{\cos x} \leq -1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{\cos x} \geq 1$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sec x \leq -1 \quad \text{หรือ} \quad \sec x \geq 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad R_r = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันเซแคนต์ในช่วง  $[-2\pi, 4\pi]$  เสียก่อนโดยหาค่าของฟังก์ชันเซแคนต์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ (ทำในทำนองเดียวกันกับที่ผ่านมา)



สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
นั่นคือ  $\sec x \leq -1$  หรือ  $\sec x \geq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sec x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

## 6. กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

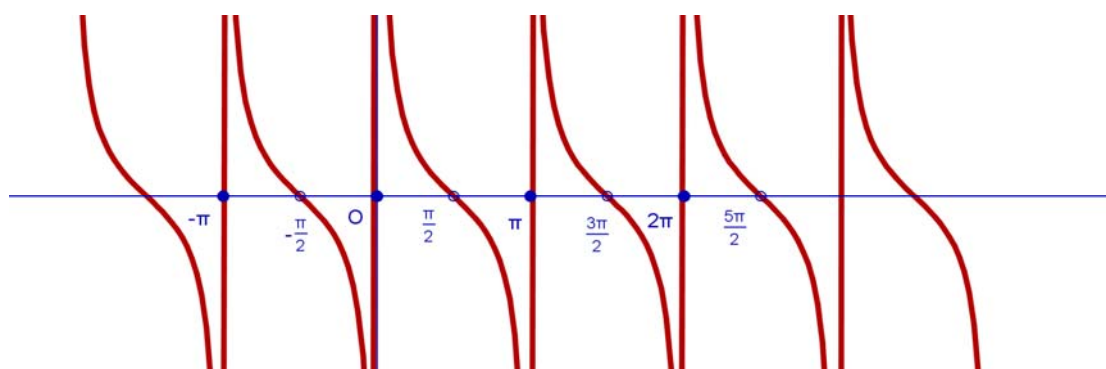
$$\text{cotangent} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \cot x = \frac{1}{\tan x} \text{ เมื่อ } \tan x \neq 0\}$$

ดังนั้น ค่า  $x$  ที่ทำให้เราไม่สามารถหาค่า  $y$  ได้ ก็คือค่า  $x$  ที่ทำให้  $\tan x = 0$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid \tan x \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid \tan x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\} \end{aligned}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชัน โคแทนเจนต์ในช่วง  $[-2\pi, 4\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชัน โคแทนเจนต์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ (ทำในทำนองเดียวกันกับที่ผ่านมา)



## สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง หรือ  $-\infty < \cot x < \infty$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) ถ้า  $x \in (0, \pi)$  ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 5) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$
- 6) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

กรณีที่ 2 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$  เมื่อ  $k \neq 0$

## 1. กราฟของฟังก์ชันไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{sine}$  (ฟังก์ชันไซน์)

จะได้  $y = k \cdot \text{sine}(x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = k \cdot \sin(x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = k \cdot \sin(x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k \cdot \sin(x)$	$k \cdot 0$	$k \cdot \frac{1}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$k \cdot 1$	$k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$k \cdot \frac{1}{2}$	$k \cdot 0$

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว นำค่าของฟังก์ชันไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = k \cdot \sin(x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k \cdot \sin(x)$	$k \cdot 0$	$k \cdot (-\frac{1}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$k \cdot (-1)$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$k \cdot (-\frac{1}{2})$	$k \cdot 0$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี $y = k \cdot \sin(x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = k \cdot \sin(x)$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1 \cdot k, 1 \cdot k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \cdot k \leq y \leq 1 \cdot k\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \cdot k \leq k \cdot \sin(x) \leq 1 \cdot k$

3) ฟังก์ชัน  $y = k \cdot \sin(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ  $|k|$

### 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{cosine}$  (ฟังก์ชันโคไซน์)

จะได้  $y = k \cdot \text{cosine}(x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = k \cdot \cos(x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันโคไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = k \cdot \cos(x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k \cdot \cos(x)$	$k \cdot 1$	$k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$k \cdot \frac{1}{2}$	$k \cdot 0$	$k \cdot (-\frac{1}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$k \cdot (-1)$

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว นำค่าของฟังก์ชันไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = k \cdot \cos(x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k \cdot \cos(x)$	$k \cdot (-1)$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$k \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$k \cdot (-\frac{1}{2})$	$k \cdot 0$	$k \cdot \frac{1}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$k \cdot 1$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = k \cdot \cos(x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = k \cdot \cos(x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1 \cdot k, 1 \cdot k]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = \{x | -1 \cdot k \leq x \leq 1 \cdot k\} \text{ หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า } -1 \cdot k \leq k \cdot \cos(x) \leq 1 \cdot k$$

- 3) ฟังก์ชัน  $y = k \cdot \cos(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

- 4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ  $|k|$

สำหรับกราฟของฟังก์ชันที่เหลือเราสามารถหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ในการวาดกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

### 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

#### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
3. นักเรียนสามารถหาค่าคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

#### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

### 3. สาระการเรียนรู้

#### 1. กราฟของฟังก์ชันไซน์

##### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin x$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\} \text{ หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า } -1 \leq \sin x \leq 1$$

- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$   
 ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว
- 4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1
- 5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น  
 ในช่วง  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม  
 ในช่วง  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันลด เป็นต้น

## 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง  
 นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$   
 นั่นคือ  $R_f = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \cos x \leq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$   
 ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว
- 4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1
- 5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น  
 ในช่วง  $(\pi, 2\pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม  
 ในช่วง  $(0, \pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลด เป็นต้น

## 3. กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์

### สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน  $y = \tan x$

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง นั่นคือ  $-\infty < \tan x < \infty$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

#### 4. กราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์

##### สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
นั่นคือ  $\operatorname{cosec} x \leq -1$  หรือ  $\operatorname{cosec} x \geq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \operatorname{cosec} x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

#### 5. กราฟของฟังก์ชันเซแคนต์

##### สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
นั่นคือ  $\sec x \leq -1$  หรือ  $\sec x \geq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sec x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$
- 5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

#### 6. กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

##### สรุป

สิ่งที่นักเรียนควรรู้มีดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง หรือ  $-\infty < \cot x < \infty$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 4) ถ้า  $x \in (0, \pi)$  ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชัน  $1 - 1$
- 5) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$
- 6) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

กรณีที่ 2 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$  เมื่อ  $k \neq 0$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์

จากลักษณะกราฟของ  $y = k \cdot \sin(x)$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1 \cdot k, 1 \cdot k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \cdot k \leq y \leq 1 \cdot k\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \cdot k \leq k \cdot \sin(x) \leq 1 \cdot k$

3) ฟังก์ชัน  $y = k \cdot \sin(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ  $|k|$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์

จากลักษณะกราฟของ  $y = k \cdot \cos(x)$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1 \cdot k, 1 \cdot k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \cdot k \leq y \leq 1 \cdot k\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \cdot k \leq k \cdot \cos(x) \leq 1 \cdot k$

3) ฟังก์ชัน  $y = k \cdot \cos(x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ  $|k|$

สำหรับกราฟของฟังก์ชันที่เหลือเราสามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ในการวาดกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

## 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์

2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.1) ใบกิจกรรมที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกรณีที่ 1

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกรณีที่ 2

3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

## 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครุณำนักเรียนทบทวนเกี่ยวกับความรู้เดิมในเรื่องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อนำมาใช้ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในกรณีที่ 1

2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 7 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 7 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง

3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์กรณีที่ 1  $y = T(x)$  โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง ครูให้นักเรียนทำการสร้างกราฟโดยใช้กิจกรรมแล้วทำการสังเกตลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ  $k$  และดูว่าคาบของกราฟในกรณีที่ 1 มีค่าเท่ากับเท่าไร และมีแอมพลิจูดเท่าไร

4. เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์กรณีที่ 1  $y = T(x)$  เสร็จแล้วครูให้นักเรียนทำกิจกรรมในกรณีที่ 2  $y = k \cdot T(x)$  ต่อเลยโดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง ครูให้นักเรียนทำการสร้างกราฟโดยใช้กิจกรรมแล้วทำการสังเกตลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ  $k$  และดูว่าคาบของกราฟในกรณีที่ 2 มีค่าเท่ากับเท่าไร และมีแอมพลิจูดเท่าไร

5. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกรณีที่ 1 และ 2 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมกรณีที่ 1 และ 2

6. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมกรณีที่ 1 และ 2 เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม	- ทำใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 1 ได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 1
- สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 2 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 2

## หน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k \neq 0$  และ 1

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 3 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k \neq 0$  และ 1

##### 1. กราฟของฟังก์ชันไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{sine}$  (ฟังก์ชันไซน์)

จะได้  $y = \text{sine}(k \cdot x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \sin(k \cdot x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin(k \cdot x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k \cdot x$	$k \cdot 0$	$k \cdot \frac{\pi}{6}$	$k \cdot \frac{\pi}{4}$	$k \cdot \frac{\pi}{3}$	$k \cdot \frac{\pi}{2}$	$k \cdot \frac{2\pi}{3}$	$k \cdot \frac{3\pi}{4}$	$k \cdot \frac{5\pi}{6}$	$k \cdot \pi$

เมื่อเราหาค่าของ  $y = \sin(k \cdot x)$  ได้แล้ว ก็นำไปวาดกราฟโดยใช้วิธีเดียวกันกับกรณีที่ 1

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin(k \cdot x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k \cdot x$	$k \cdot \pi$	$k \cdot \frac{7\pi}{6}$	$k \cdot \frac{5\pi}{4}$	$k \cdot \frac{4\pi}{3}$	$k \cdot \frac{3\pi}{2}$	$k \cdot \frac{5\pi}{3}$	$k \cdot \frac{7\pi}{4}$	$k \cdot \frac{11\pi}{6}$	$k \cdot 2\pi$

#### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี $y = \sin(k \cdot x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(k \cdot x)$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \sin(k \cdot x) \leq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(k \cdot x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซค์ฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|k|}$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

## 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{cosine}$  (ฟังก์ชัน โคไซน์)

จะได้  $y = \text{cosine}(k \cdot x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \cos(k \cdot x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันโคไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อนโดยหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

**ช่วงที่ 1** กราฟของ  $y = \cos(k \cdot x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k \cdot x$	$k \cdot 0$	$k \cdot \frac{\pi}{6}$	$k \cdot \frac{\pi}{4}$	$k \cdot \frac{\pi}{3}$	$k \cdot \frac{\pi}{2}$	$k \cdot \frac{2\pi}{3}$	$k \cdot \frac{3\pi}{4}$	$k \cdot \frac{5\pi}{6}$	$k \cdot \pi$

เมื่อเราหาค่าของ  $y = \cos(k \cdot x)$  ได้แล้ว ก็นำไปวาดกราฟโดยใช้วิธีเดียวกันกับกรณีที่ 1

**ช่วงที่ 2** กราฟของ  $y = \cos(k \cdot x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k \cdot x$	$k \cdot \pi$	$k \cdot \frac{7\pi}{6}$	$k \cdot \frac{5\pi}{4}$	$k \cdot \frac{4\pi}{3}$	$k \cdot \frac{3\pi}{2}$	$k \cdot \frac{5\pi}{3}$	$k \cdot \frac{7\pi}{4}$	$k \cdot \frac{11\pi}{6}$	$k \cdot 2\pi$

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(k \cdot x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(k \cdot x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = -1 \leq \cos(k \cdot x) \leq 1$$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(k \cdot x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีชีพฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|k|}$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

สำหรับกราฟของฟังก์ชันที่เหลือเราใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในการสร้างกราฟ โดยสร้างกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำการวิเคราะห์และอธิบายลักษณะของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สารการเรียนรู้

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี $y = \sin(k \cdot x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(k \cdot x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง  
นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$   
นั่นคือ  $R_f = \{y| -1 \leq y \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \sin(k \cdot x) \leq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(k \cdot x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซ้ฟังก์ชัน  $1 - 1$   
ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว
- 4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|k|}$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(k \cdot x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(k \cdot x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง  
นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$   
นั่นคือ  $R_f = -1 \leq \cos(k \cdot x) \leq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(k \cdot x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซ้ฟังก์ชัน  $1 - 1$   
ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

- 4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|k|}$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกรณี 3
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในกรณี 2 คือ  $y = k \cdot T(x)$  โดยเน้นไปที่การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รองลงมาคือ การหาคาบและแอมพลิจูดของกราฟ
2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 7 พร้อมทั้งแจกเอกสารใบกิจกรรมที่ 7 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้ นักเรียน เข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง
3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์กรณี 3  $y = T(k \cdot x)$  โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง ครูให้นักเรียนทำการสร้างกราฟโดยใช้กิจกรรมแล้วทำการสังเกตลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ k และดูว่าคาบของกราฟในกรณี 3 มีค่าเท่ากับเท่าไร และมีแอมพลิจูดเท่าไร
4. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกรณี 3 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมกรณี 3
5. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมกรณี 3 เพื่อให้ นักเรียน ได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 3 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 3

## หน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot k+x)$  เมื่อ  $b$  และ  $k \neq 0$  และ 1

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot k+x)$  เมื่อ  $b$  และ  $k \neq 0$  และ 1

##### 1. กราฟของฟังก์ชันไซน์

ให้  $(x, y) \in \text{sine}$  (ฟังก์ชันไซน์)

จะได้  $y = \text{sine}(k+x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \sin(k+x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin(k+x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k+x$	$k+0$	$k+\frac{\pi}{6}$	$k+\frac{\pi}{4}$	$k+\frac{\pi}{3}$	$k+\frac{\pi}{2}$	$k+\frac{2\pi}{3}$	$k+\frac{3\pi}{4}$	$k+\frac{5\pi}{6}$	$k+\pi$

เมื่อเราหาค่าของ  $y = \sin(k+x)$  ได้แล้ว ก็นำไปวาดกราฟโดยใช้วิธีเดียวกันกับกรณีที่ 1

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin(k+x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k+x$	$k+\pi$	$k+\frac{7\pi}{6}$	$k+\frac{5\pi}{4}$	$k+\frac{4\pi}{3}$	$k+\frac{3\pi}{2}$	$k+\frac{5\pi}{3}$	$k+\frac{7\pi}{4}$	$k+\frac{11\pi}{6}$	$k+2\pi$

สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี  $y = \sin(k+x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(k+x)$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

นั่นคือ  $R_f = \{y|-1 \leq y \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \sin(k+x) \leq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(k+x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

## 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(k+x)$

ให้  $(x, y) \in \text{cosine}$  (ฟังก์ชันโคไซน์)

จะได้  $y = \text{cosine}(k+x)$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \cos(k+x)$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันโคไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อนโดยหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

**ช่วงที่ 1** กราฟของ  $y = \cos(k+x)$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$k+x$	$k+0$	$k+\frac{\pi}{6}$	$k+\frac{\pi}{4}$	$k+\frac{\pi}{3}$	$k+\frac{\pi}{2}$	$k+\frac{2\pi}{3}$	$k+\frac{3\pi}{4}$	$k+\frac{5\pi}{6}$	$k+\pi$

เมื่อเราหาค่าของ  $y = \cos(k+x)$  ได้แล้ว ก็นำไปวาดกราฟโดยใช้วิธีเดียวกันกับกรณีที่ 1

**ช่วงที่ 2** กราฟของ  $y = \cos(k+x)$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$k+x$	$k+\pi$	$k+\frac{7\pi}{6}$	$k+\frac{5\pi}{4}$	$k+\frac{4\pi}{3}$	$k+\frac{3\pi}{2}$	$k+\frac{5\pi}{3}$	$k+\frac{7\pi}{4}$	$k+\frac{11\pi}{6}$	$k+2\pi$

## สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(k+x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(k+x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

นั่นคือ  $R_f = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้  $-1 \leq \cos(k+x) \leq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(k+x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

สำหรับกราฟของฟังก์ชันที่เหลือเราใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในการสร้างกราฟ โดยสร้างกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำการวิเคราะห์และอธิบายลักษณะของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี $y = \sin(k+x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(k+x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง  
นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$   
นั่นคือ  $R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1 \leq \sin(k+x) \leq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(k+x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$   
ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว
- 4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

### สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(k+x)$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(k+x)$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง  
นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$   
นั่นคือ  $R_f = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้  $-1 \leq \cos(k+x) \leq 1$
- 3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(k+x)$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$   
ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์
2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
  - 2.1) ใบกิจกรรมที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกรณี 4
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในกรณี 3 คือ  $y = T(k \cdot x)$  โดยเน้นไปที่การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รองลงมาคือการหาคาบและแอมพลิจูดของกราฟ

2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 7 พร้อมทั้งแจกเอกสาร ใบกิจกรรมที่ 7 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้ นักเรียน เข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง

3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์กรณี 4  $y = T(b \cdot k + x)$  โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง ครูให้นักเรียนทำการสร้างกราฟโดยใช้กิจกรรมแล้วทำการสังเกตลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ  $k$  และดูว่าคาบของกราฟในกรณี 4 มีค่าเท่ากับเท่าไร และมีแอมพลิจูดเท่าไร

4. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกรณี 4 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมกรณี 4

5. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมกรณี 4 เพื่อให้ นักเรียน ได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

#### 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม - สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย	- ทำใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 4 ได้ถูกต้อง - ตอบคำถามได้ถูกต้อง	- ใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 4

## หน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 18

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k \neq 0$

จำนวน 1 คาบ

#### 1. สาระสำคัญ

กรณีที่ 5 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k \neq 0$

1. กราฟของฟังก์ชันไซน์กรณี  $y = \sin(x) + k$

ให้  $(x, y) \in \text{sine}$  (ฟังก์ชันไซน์)

จะได้  $y = \text{sine}(x) + k$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \sin(x) + k$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชันไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชันไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin(x) + k$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin(x)+k$	$0+k$	$\frac{1}{2}+k$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+k$	$1+k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+k$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+k$	$\frac{1}{2}+k$	$0+k$

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว นำค่าของฟังก์ชันไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin(x) + k$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(x)+k$	$0+k$	$(-\frac{1}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})+k$	$(-1)+k$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})+k$	$(-\frac{1}{2})+k$	$0+k$

สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี  $y = \sin(x) + k$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(x) + k$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1+k, 1+k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y \mid -1+k \leq y \leq 1+k\}$  หรือกล่าวอย่างง่ายได้ว่า  $-1+k \leq \sin(x) + k \leq 1+k$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(x) + k$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ  $1$

## 2. กราฟของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(x) + k$

ให้  $(x, y) \in \text{cosine}$  (ฟังก์ชัน โคไซน์)

จะได้  $y = \text{cosine}(x) + k$  หรือเขียนสั้นๆ ว่า  $y = \cos(x) + k$

เพื่อความสะดวก เราหากราฟของฟังก์ชัน โคไซน์ในช่วง  $[0, 2\pi]$  เสียก่อน โดยหาค่าของฟังก์ชัน โคไซน์จากแต่ละค่าของ  $x$  ที่กำหนดให้ โดยที่นี้จะขอแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cos(x) + k$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos(x)+k$	$1+k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+k$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+k$	$\frac{1}{2}+k$	$0+k$	$(-\frac{1}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})+k$	$(-1)+k$

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว นำค่าของฟังก์ชันไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cos(x) + k$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos(x)+k$	$(-1)+k$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})+k$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2})+k$	$(-\frac{1}{2})+k$	$0+k$	$\frac{1}{2}+k$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+k$	$1+k$

## สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี $y = \cos(x) + k$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(x) + k$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1+k, 1+k]$

นั่นคือ  $R_f = \{x \mid -1+k \leq x \leq 1+k\}$  หรือกล่าวง่าย ๆ ได้ว่า  $-1+k \leq \cos(x) + k \leq 1+k$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(x) + k$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

สำหรับกราฟของฟังก์ชันที่เหลือเราสามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ในการวาดกราฟได้ในทำนองเดียวกัน

## 2. จุดประสงค์การเรียนรู้

### ด้านความรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำการวิเคราะห์และอธิบายลักษณะของกราฟ ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง

### ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. มีความสามารถในการให้เหตุผล
2. มีความสามารถในการสื่อสาร และนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียนและการทำงาน
2. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง และกล้าแสดงความคิดเห็น

## 3. สาระการเรียนรู้

สรุปลักษณะของฟังก์ชันไซน์กรณี  $y = \sin(x) + k$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin(x) + k$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$

- 2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1+k, 1+k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y| -1+k \leq y \leq 1+k\}$  หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า  $-1+k \leq \sin(x) + k \leq 1+k$

- 3) ฟังก์ชัน  $y = \sin(x) + k$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซ้ฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

- 4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

สรุปลักษณะของฟังก์ชันโคไซน์กรณี  $y = \cos(x) + k$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos(x) + k$  มีสิ่งที่น่าสนใจดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

นั่นคือ  $D_f = \{x|x \in \mathbb{R}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1+k, 1+k]$

นั่นคือ  $R_f = \{y | -1+k \leq y \leq 1+k\}$  หรือกล่าวง่ายๆ ได้ว่า  $-1+k \leq \cos(x) + k \leq 1+k$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos(x) + k$  เป็นฟังก์ชันที่มีเซตฟังก์ชัน  $1-1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

#### 4. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. แฟ้มคำสั่ง/คอมพิวเตอร์

2. ใบกิจกรรมหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.1) ใบกิจกรรมที่ 7 : กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กรณีที่ 5

3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

#### 5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในกรณีที่ 4 คือ  $y = T(x+k)$  โดยเน้นไปที่การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รองลงมาคือการหาคาบและแอมพลิจูดของกราฟ

2. ครูให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในหน่วยที่ 7 พร้อมทั้งแจกเอกสาร ใบกิจกรรมที่ 7 แล้วให้นักเรียนอ่านจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน เพื่อให้ให้นักเรียนเข้าใจจุดมุ่งหมายที่แท้จริง

3. ให้นักเรียนทำกิจกรรมคอมพิวเตอร์กรณีที่ 5  $y = T(x) + k$  โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตนเอง ครูให้นักเรียนทำการสร้างกราฟโดยใช้กิจกรรมแล้วทำการสังเกตลักษณะของกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปตามค่าของ  $k$  และดูว่าคาบของกราฟในกรณีที่ 5 มีค่าเท่ากับเท่าไร และมีแอมพลิจูดเท่าไร

4. เมื่อนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกรณีที่ 5 เสร็จแล้วครูสุ่มถามนักเรียนในห้องเรียน 1 คน ออกมาอธิบายสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมกรณีที่ 5

5. ครูสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากกิจกรรมกรณีที่ 5 เพื่อให้ให้นักเรียนได้แนวคิดที่เป็นไปในทิศทางเดียวกันทั้งหมด

## 6. การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัด	การประเมินผล	เครื่องมือวัด
<ul style="list-style-type: none"> <li>- สังเกตจากการปฏิบัติตามใบกิจกรรม</li> <li>- สังเกตการให้เหตุผล และการอภิปราย</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 5 ได้ถูกต้อง</li> <li>- ตอบคำถามได้ถูกต้อง</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ใบกิจกรรมที่ 7 กรณีที่ 5</li> </ul>

### ภาคผนวก จ

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

## ใบกิจกรรมที่ 1.1











ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**ตอนที่ 1** ทบทวนส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้


- 1.1 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างจุดบนเส้นตรง
- 1.2 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างเส้นตรงผ่านจุดสองจุด
- 1.3 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างส่วนของเส้นตรง
- 1.4 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างรูปวงกลม
- 1.5 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ)
- 1.6 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด
- 1.7 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น
- 1.8 คำสั่ง  ใช้ในการวัดมุมระหว่างจุด 3 จุด
- 1.9 คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด
- 1.10 คำสั่ง  ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ

2. จากการสร้างให้นักเรียนบอกนิยามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

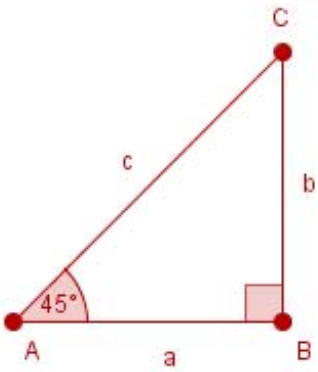
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ .....

3. กำหนดให้ มุม A เป็นมุมหลัก
  - 3.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า .....
  - 3.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า .....
  - 3.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า .....
4. กำหนดให้มุม C เป็นมุมหลัก
  - 5.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า .....
  - 5.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า .....
  - 5.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า .....
5. จากรูปข้างบนนอกจากสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว ส่วนประกอบในข้อ 3-4 สามารถใช้กับสามเหลี่ยมอื่นๆ (ได้/ไม่ได้)..... เพราะ .....

**ตอนที่ 2 ทบทวนอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก**



คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนใช้มุมของ a, b ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  
 2. หากนักเรียนต้องการกำหนดระยะทางให้คลิกขวาที่มุมของ a และ b




ความยาว a = -6

ความยาว b = 6

ความยาว c = 8.48528

มุม CBA = 90

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนใช้คำสั่ง  ในการทำการศึกษ
2. ให้นักเรียนใช้ปุ่ม a และ b ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของเส้นตรง เพื่อทำการศึกษากิจกรรม

3. จากชุดกิจกรรมข้างบนและจากความรู้เดิมของนักเรียน จะได้ว่า (วัดจากมุม A เป็นหลักก่อน)

3.1 อัตราส่วนไซน์ A  $(\sin A) = \dots\dots\dots$

3.2 อัตราส่วนโคไซน์ A  $(\cos A) = \dots\dots\dots$

3.3 อัตราส่วนแทนเจนต์ A  $(\tan A) = \dots\dots\dots$

4. ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนของไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยกำหนดให้ความเป็น a, b, c ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ C ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า

4.1  $\sin A = \dots\dots\dots$

4.4  $\sin C = \dots\dots\dots$

4.2  $\cos A = \dots\dots\dots$

4.5  $\cos C = \dots\dots\dots$

4.3  $\tan A = \dots\dots\dots$

4.6  $\tan C = \dots\dots\dots$

5. ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (ตามที่นักเรียนต้องการ) แล้วหาอัตราส่วนของ ไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ C ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า (ในที่นี้ a = ..... , b = ..... , c = ..... , มุม A = ..... , มุม C = .....)

5.1  $\sin A = \dots\dots\dots$

5.4  $\sin C = \dots\dots\dots$

5.2  $\cos A = \dots\dots\dots$

4.5  $\cos C = \dots\dots\dots$

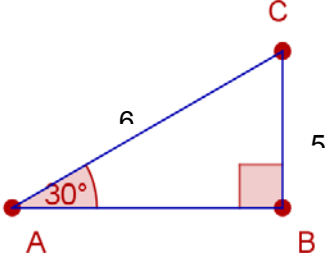
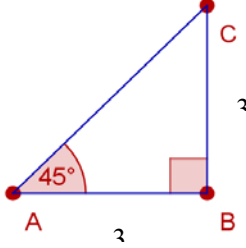
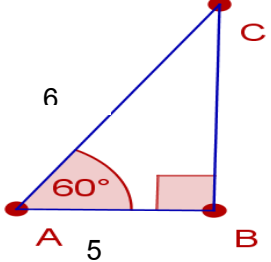
5.3  $\tan A = \dots\dots\dots$

5.6  $\tan C = \dots\dots\dots$

6. จากการสำรวจในข้อที่ 4-6 นักเรียนสามารถตั้งข้อคาดการณ์ได้ว่า .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....

7. กำหนด  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่  $B$  มีขนาดตามที่กำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้ให้นักเรียนหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปที่กำหนดให้แล้วเขียนค่าของอัตราส่วนเติมในตาราง

$\triangle ABC$	ขนาดของ $\hat{A}$	ค่าของอัตราส่วน		
		sin A	cos A	tan A
				
				
				

8. จากการสำรวจในข้อ 7 นักเรียนสรุปได้ว่า

ฟังก์ชัน	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sin			
cos			
tan			

## ใบกิจกรรมที่ 1.2

ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับการวัดมุม

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 ทบทวนการวัดมุมหน่วยที่เป็นองศา

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนเข้ากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเข้าไปที่หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แล้วคลิกเลือกกิจกรรมที่ 1.2
2. ให้นักเรียนศึกษาคำนิยามของการวัดมุมหน่วยที่เป็นองศา แล้วสรุปจากสิ่งที่ได้เป็นข้อ ดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

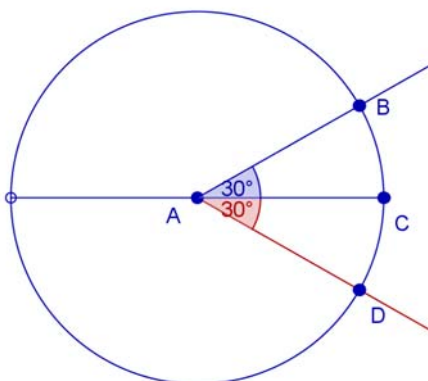
.....

.....

3. ให้นักเรียนคลิกทำกิจกรรมการวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป

มุม 1 แทนสีน้ำเงิน

มุม 2 แทนสีแดง



ให้นักเรียนใช้คำสั่ง  ในการควบคุมจุดในที่นี้เราใช้จุด B ในการทำกิจกรรม แล้วตอบคำถาม ดังนี้

3.1 ส่วนของเส้นตรง AC เรียกว่า .....

3.2 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า .....

3.3 จุด A เรียกว่า.....

เรียกมุมที่เกิดขึ้นว่า .....หรือมุม.....และใช้สัญลักษณ์.....หรือ.....

3.4 จากการสำรวจลักษณะของมุมพบว่า .....

.....  
 .....

3.5 ให้นักเรียนสรุปสิ่งที่ได้จากการทำกิจกรรม .....

.....  
 .....

3.6 ให้นักเรียนใช้กิจกรรมที่ 1.2 เพื่อตอบคำถามต่อไปนี้ (คลิกขวาเพื่อสำรวจมุม)

3.6.1 มุม  $30^\circ$  มุม 1 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

มุม 2 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

3.6.2 มุม  $45^\circ$  มุม 1 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

มุม 2 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

3.6.3 มุม  $60^\circ$  มุม 1 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

มุม 2 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

3.6.4 มุม  $90^\circ$  มุม 1 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

มุม 2 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

3.6.5 มุม  $180^\circ$  มุม 1 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

มุม 2 เท่ากับ ..... หมุนในทิศทาง.....

4. จากการศึกษาในชุดกิจกรรมให้นักเรียนเปลี่ยนหน่วยองศาให้เป็นลิปดา และฟิลิปดาดังต่อไปนี้

4.1) ถ้า  $\theta = 60^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

4.2) ถ้า  $\theta = -150^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

4.3) ถ้า  $\theta = 270^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

4.4) ถ้า  $\theta = 225^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

4.5) ถ้า  $\theta = -60^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

4.6) ถ้าให้  $60'$  แล้วเท่ากับ ..... องศา

แล้วเท่ากับ..... ฟิลิปดา

- 4.7) ถ้า  $\theta = 315^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา  
 แล้วเท่ากับ..... ฟลิปดา
- 4.8) ถ้าให้  $360''$  แล้วเท่ากับ ..... องศา  
 แล้วเท่ากับ..... ลิปดา
- 4.9) ถ้า  $\theta = 180^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา  
 แล้วเท่ากับ..... ฟลิปดา
- 4.10) ถ้า  $\theta = 30^\circ$  แล้วเท่ากับ ..... ลิปดา  
 แล้วเท่ากับ..... ฟลิปดา

## ตอนที่ 2 ทบทวนการวัดมุมหน่วยที่เป็นเรเดียน

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนเข้ากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเข้าไปที่หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แล้วคลิกเลือกกิจกรรมที่ 1.2

2. ให้นักเรียนศึกษาคำนิยามของการวัดมุมหน่วยที่เป็นเรเดียน แล้วสรุปจากสิ่งที่ได้เป็นข้อ ดังนี้

.....

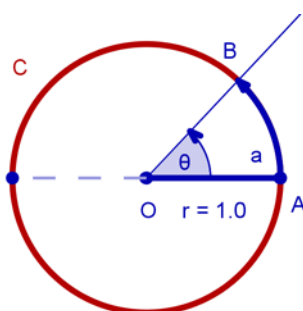
.....

.....

.....

.....

3. ให้นักเรียนทำการศึกษาและสำรวจการวัดมุมเรเดียน โดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนการสอน ดังรูป



ให้นักเรียนบอกส่วนประกอบแต่ละอย่างของรูปที่กำหนดให้ข้างต้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จากการศึกษากิจกรรม ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 มุม  $\theta =$  ..... เรเดียน

หรือเขียนในรูปทั่วไปจะได้ว่า มุม  $\theta =$  ..... เรเดียน

4.2 นิยามของมุม 1 เรเดียน คือ .....

.....

4.3 จากความรู้เดิมของนักเรียน ความยาวของเส้นรอบรูปวงกลมเท่ากับ .....

นั่นคือ  $a =$  .....

ดังนั้น  $\theta =$  ..... เรเดียน

และเนื่องจากวงกลมที่เรากำหนดให้นั้นมีรัศมี  $r =$  ..... เพราะฉะนั้นนักเรียนสามารถสรุปได้ว่า .....

..... เรเดียน

5. จากการทำกิจกรรมที่ 4 นักเรียนสามารถอธิบายความแตกต่างระหว่างหน่วยการวัดมุมที่เป็นองศากับเรเดียน

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดเสริมสร้างความแกร่ง

ให้นักเรียนฝึกหัดการเปรียบเทียบการวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศากับเรเดียน

1. จงเปลี่ยนมุมเรเดียนต่อไปนี้ ให้เป็นหน่วยองศา

1)  $\pi$

วิธีทำ .....

.....

2)  $2\pi$

วิธีทำ .....

.....

3)  $\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ .....

.....

4)  $\frac{\pi}{12}$

วิธีทำ .....

.....

5)  $\frac{\pi}{5}$

วิธีทำ .....

.....

6)  $\frac{5\pi}{12}$

วิธีทำ .....

.....

7)  $\frac{2\pi}{5}$

วิธีทำ .....

.....

8)  $\frac{7\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

9)  $\frac{3\pi}{2}$

วิธีทำ .....

.....

10)  $\frac{4\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

11)  $\frac{5\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

12)  $-\frac{5\pi}{2}$

วิธีทำ .....

.....

13)  $-\frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

14)  $-\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

15)  $-\frac{7\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

16)  $-\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ .....

.....

17)  $-\frac{11\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

18)  $-\frac{3\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

2. จงเปลี่ยนมุมองศาต่อไปนี้ ให้เป็นหน่วยเรเดียน

1)  $1^\circ$

วิธีทำ .....

.....

2)  $30^\circ$

วิธีทำ .....

.....

3)  $45^\circ$

วิธีทำ .....

.....

4)  $60^\circ$

วิธีทำ .....

.....

5)  $90^\circ$

วิธีทำ .....

.....

6)  $180^\circ$

วิธีทำ .....

.....

7)  $150^\circ$

วิธีทำ .....

.....

8)  $210^\circ$

วิธีทำ .....

.....

9)  $330^\circ$

วิธีทำ .....

.....

10)  $540^\circ$

วิธีทำ .....

.....

11)  $-360^\circ$

วิธีทำ .....

.....

12)  $-120^\circ$

วิธีทำ .....

.....

13)  $-300^\circ$

วิธีทำ .....

.....

14)  $-225^\circ$

วิธีทำ .....

.....

15)  $-75^\circ$

วิธีทำ .....

.....

16)  $-54^\circ$

วิธีทำ .....

.....









## ใบกิจกรรมที่ 2.1

### วงกลมหนึ่งหน่วย

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

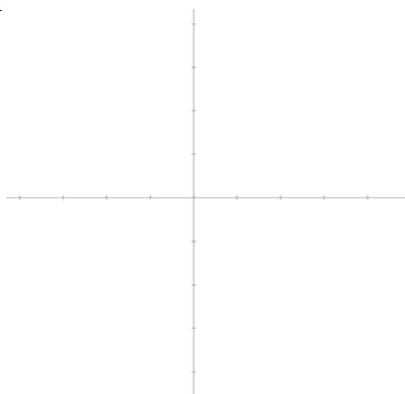
ตอนที่ 1 วงกลมหนึ่งหน่วย

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนเข้ากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเข้าไปที่หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วคลิกเลือกกิจกรรมที่ 2.1
2. ให้นักเรียนสร้างรูปวงกลมจากจุดที่กำหนดให้โดยมีรัศมีเท่าใดก็ได้จำนวน 3 รูป โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้
  - 2.1 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ)
  - 2.2 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด
  - 2.3 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น
  - 2.4 คำสั่ง  ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ
  - 2.5 คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด
  - 2.6 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างรูปวงกลม
  - 2.7 คำสั่ง  ใช้ในการแสดงชื่อของวัตถุ
  - 2.8 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างจุดตัด

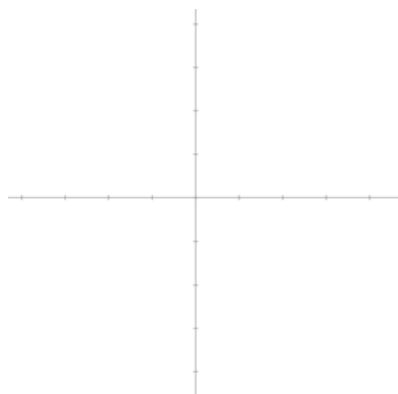
3. ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่นักเรียนสร้างลงในช่องว่างพร้อมทั้งเขียนสมการวงกลม ด้วย

3.1



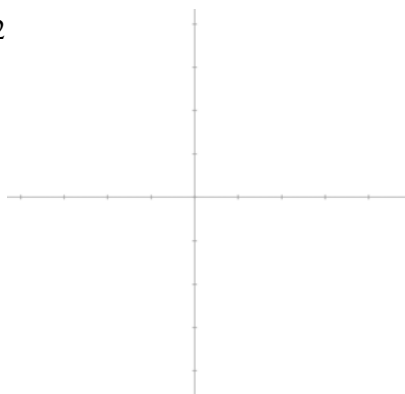
รัศมียาว..... หน่วย  
สมการ .....

3.2



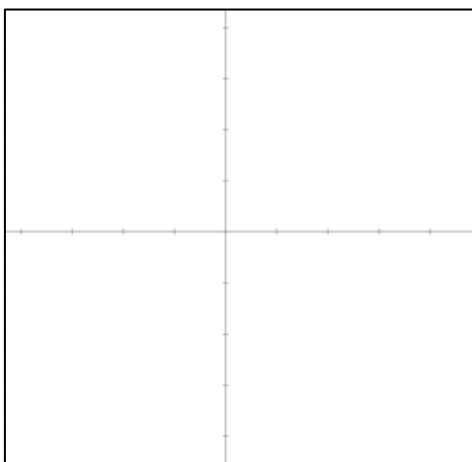
รัศมียาว.....หน่วย  
สมการ.....

3.2




รัศมียาว..... หน่วย  
สมการ .....

4. จากการสร้างรูปวงกลมในข้อ 3 นักเรียนลองตั้งข้อคาดการณ์ซึ่งว่านิยามของวงกลมหนึ่งหน่วยคืออะไร มีสมการเป็นอย่างไร และสร้างรูปวงกลมหนึ่งหน่วยพร้อมทั้งบอกตำแหน่งของจุดตัด

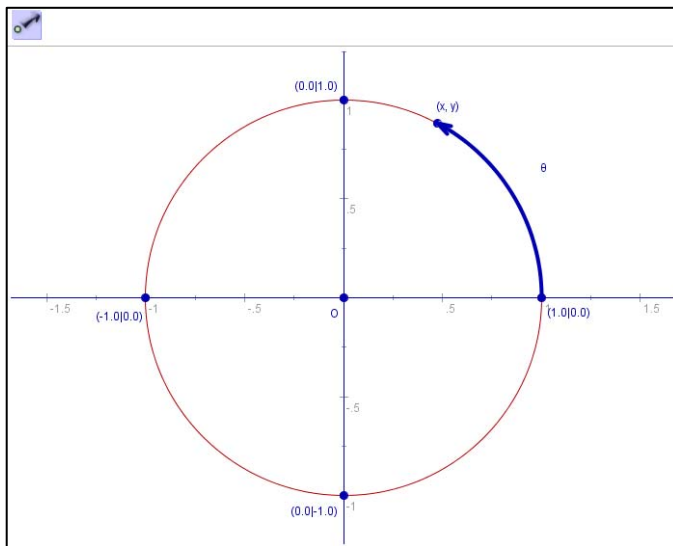


.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**ตอนที่ 2**

เมื่อนักเรียนตอบคำถามในข้อที่ 4 เสร็จแล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมวงกลมหนึ่งหน่วย โดยเลือกที่หน้าถัดไปของกิจกรรม โดยใช้คำสั่ง  ในการทำการสำรวจกิจกรรม

5.1 จากการศึกษากิจกรรมดังภาพข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



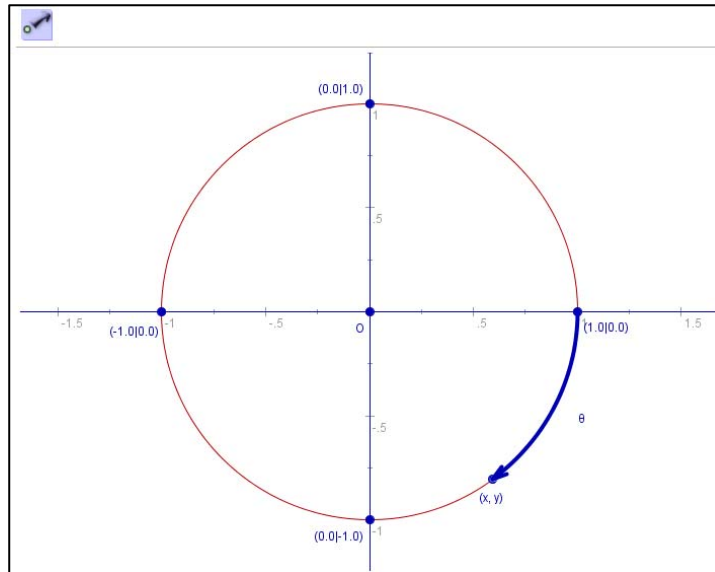
เราเรียก  $\theta$  ว่า ..... วัดในทิศทาง.....

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า .....

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ.....

- 5.1.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม  
จะให้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....
- 5.1.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม  
จะให้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....
- 5.1.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม  
จะให้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....
- 5.1.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม  
จะให้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....
- 5.1.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี.....จุด

5.2 จากการศึกษากิจกรรมดังกล่าวข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



เราเรียก  $\theta$  ว่า .....วัดในทิศทาง.....

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า .....

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ.....

5.2.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....

5.2.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....

5.2.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....

5.2.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น..... ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ .....

5.2.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี.....จุด

6. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 5 นักเรียนสรุปอะไรได้บ้าง (ตอบเป็นข้อๆ )

.....

.....

.....

.....

.....

## ใบกิจกรรมที่ 2.2

จุดปลายและความยาวส่วนโค้ง

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 2.2 จะแบ่งออกเป็นกิจกรรมย่อยๆ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1: ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\pi$

กรณีที่ 2: ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{2}$


### กรณีที่ 1

**คำสั่ง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

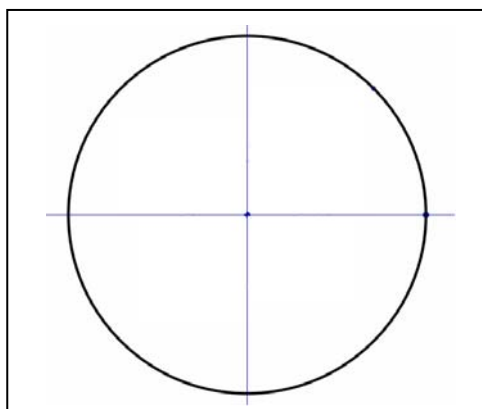
1. คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด

2. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงค่าของวัตถุ

3. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงแกน x และแกน y

1. ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน แล้วให้นักเรียนตอบคำถามจากสิ่งที่นักเรียนได้ทำการสำรวจ ดังนี้

1.1 ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่ทำการแบ่งวงกลมเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน เสร็จแล้วลงในกรอบด้านล่างนี้



จากวงกลมหนึ่งหน่วยที่นักเรียนสร้างเสร็จแล้วนักเรียนลองคิดซิว่าแต่ละส่วนโค้งมีความยาวส่วนโค้งเท่าไรและมีแกนอะไรเป็นตัวแบ่ง เพราะอะไรให้นักเรียนเขียนอธิบาย

.....

.....

.....

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดให้  $\theta > 0$

1.1.1 จาก A (1, 0) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B(-1, 0) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.2 จาก B (-1, 0) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา C (1, 0) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดให้  $\theta < 0$

1.1.3 จาก C (1, 0) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B(-1, 0) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.4 จาก B (-1, 0) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา A (1, 0) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.5 ให้นักเรียนทำการสังเกตจุดปลายส่วนโค้ง ของแต่ละความยาวส่วนโค้ง และเขียนสิ่งที่  
นักเรียนได้จากการสังเกต


.....  
.....  
.....


## กรณีที่ 2

**คำสั่ง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

1. คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด

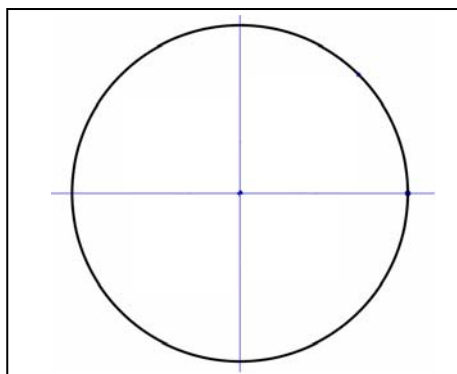
2. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงค่าของวัตถุ

3. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงแกน x และแกน y

ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2.2.2 แล้วตอบคำถาม ต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดรูปประกอบ

1. ให้นักเรียนทำการแบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อสร้างเสร็จแล้วให้นักเรียนตอบคำถามจากสิ่งที่นักเรียนได้ทำการสำรวจ และค้นพบด้วยตนเอง ดังนี้

1.1 ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่ทำการแบ่งวงกลมเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน เสร็จแล้ววาดรูปลงในกรอบด้านล่างนี้



จากวงกลมหนึ่งหน่วยที่นักเรียนสร้างเสร็จแล้วนักเรียนลองคิดซิว่าแต่ละส่วน โค้งมีความยาวส่วนโค้งเท่าไรและมีแกนอะไรเป็นตัวแบ่ง เพราะอะไรให้นักเรียนเขียนอธิบาย

.....  
 .....  
 .....

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดให้  $\theta > 0$

1.1.1 จาก A(1, 0) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B(0, 1) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.2 จาก B(0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา C(-1, 0) ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.3 จาก  $C(-1, 0)$  วัดความยาวส่วนโค้งไปหา  $D(0, -1)$  ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดให้  $\theta < 0$

1.1.5 จาก  $A(1, 0)$  วัดความยาวส่วนโค้งไปหา  $D(0, -1)$  ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.6 จาก  $D(0, -1)$  วัดความยาวส่วนโค้งไปหา  $C(-1, 0)$  ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.7 จาก  $C(-1, 0)$  วัดความยาวส่วนโค้งไปหา  $B(0, 1)$  ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

1.1.8 จาก  $B(0, 1)$  วัดความยาวส่วนโค้งไปหา  $A(1, 0)$  ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
 โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

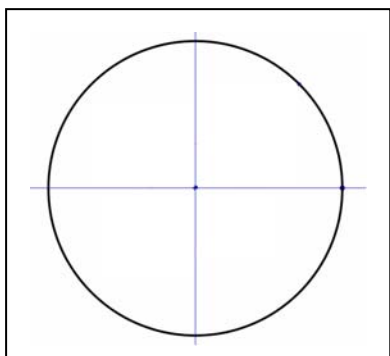
1.1.9 ให้นักเรียนทำการสังเกตจุดปลายส่วนโค้ง ของแต่ละความยาวส่วนโค้ง และเขียนสิ่งที่  
 นักเรียนได้จากการสังเกต

.....  
 .....  
 .....

## แบบฝึกหัดระคน

1. ให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่อยู่ในชุดกิจกรรม หาความยาวส่วนโค้งเมื่อกำหนด  $p(\theta)$  ก็คือพิกัด  $(x, y)$  ที่จุดสิ้นสุดของการวัดความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  พร้อมทั้งวาดรูปต่อไปนี้

1.1 จงหา  $p(\pi)$  เท่ากับ..... องศา



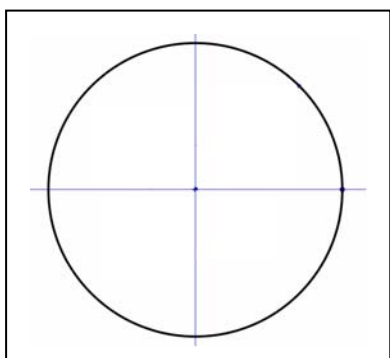
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

1.3 จงหา  $p(5\pi)$  เท่ากับ..... องศา



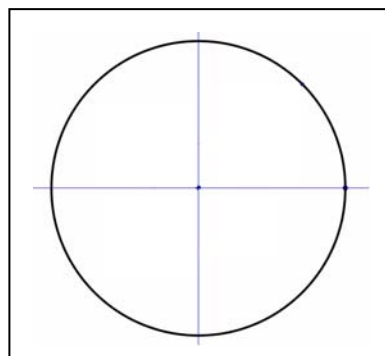
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

1.2 จงหา  $p(2\pi)$  เท่ากับ..... องศา



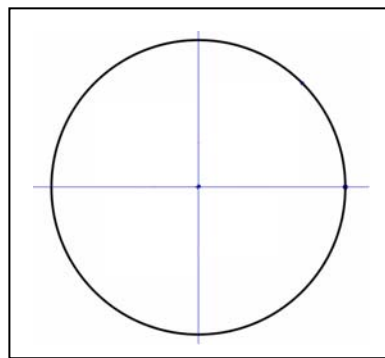
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

1.4 จงหา  $p(20\pi)$  เท่ากับ..... องศา



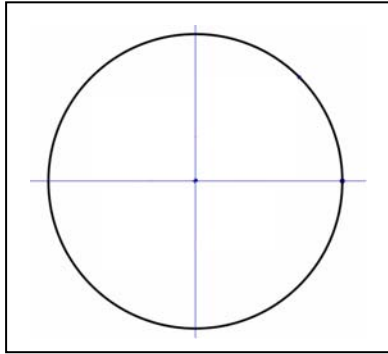
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

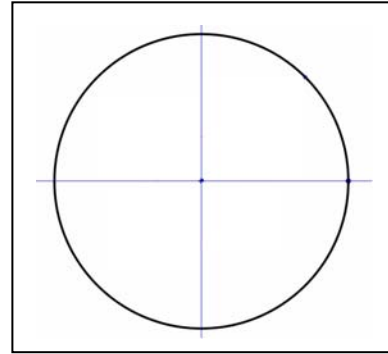
นั่นคือ.....

1.5 จงหา  $p(1002\pi)$  เท่ากับ..... องศา



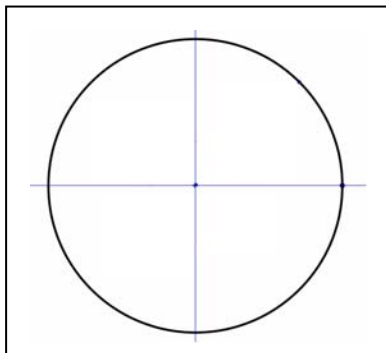
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

1.6 จงหา  $p(-\pi)$  เท่ากับ..... องศา



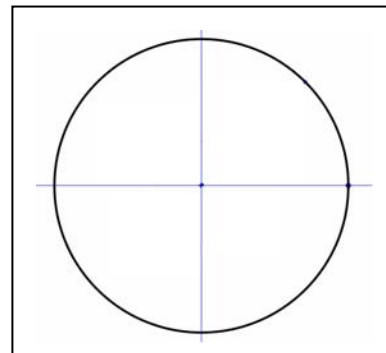
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

1.7 จงหา  $p(-2\pi)$  เท่ากับ..... องศา



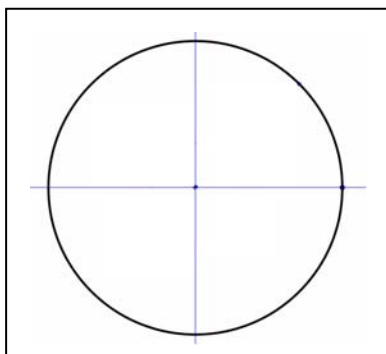
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

1.8 จงหา  $p(-35\pi)$  เท่ากับ..... องศา

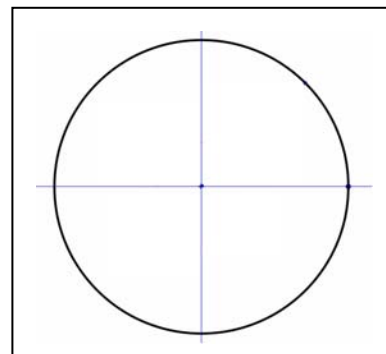


จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

1.9 จงหา  $p(-446\pi)$  เท่ากับ..... องศา



1.10 จงหา  $p(-5337\pi)$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

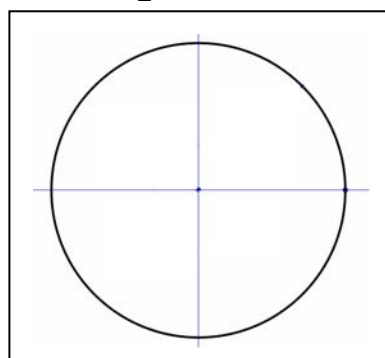
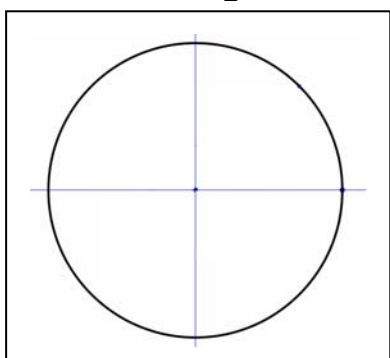
2. จากที่นักเรียนได้ตอบคำถามในข้อ 2 ให้นักเรียนตอบสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรม

.....  
 .....  
 .....

2. ให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่อยู่ในชุดกิจกรรม หาความยาวส่วนโค้งเมื่อกำหนด  $p(\theta)$  ก็คือพิกัด  $(x, y)$  ที่จุดสิ้นสุดของการวัดความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  พร้อมทั้งวาดรูปต่อไปนี้

2.1 จงหา  $p(\frac{3\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา

2.2 จงหา  $p(\frac{9\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา

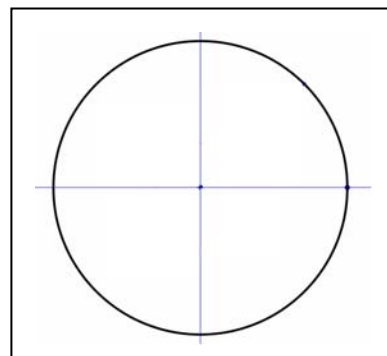
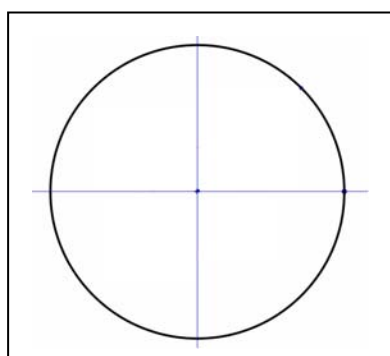


จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

2.3 จงหา  $p(\frac{35\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา

2.4 จงหา  $p(\frac{23\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



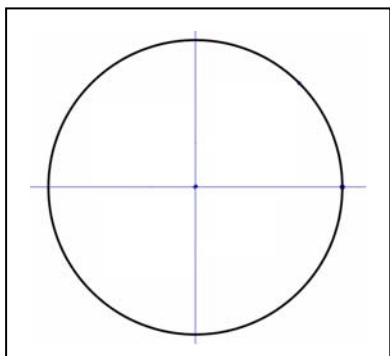
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

2.5 จงหา  $p(\frac{17\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



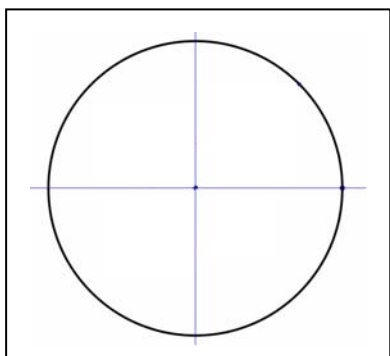
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

2.7 จงหา  $p(\frac{-201\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

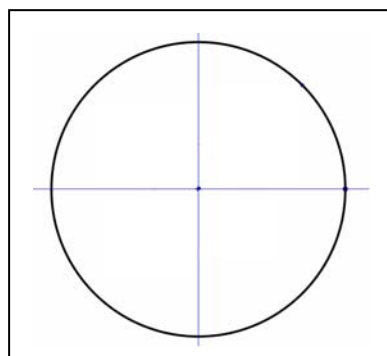
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

2.6 จงหา  $p(\frac{-7\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



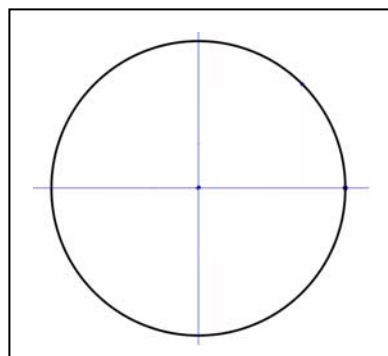
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

2.8 จงหา  $p(\frac{-31\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



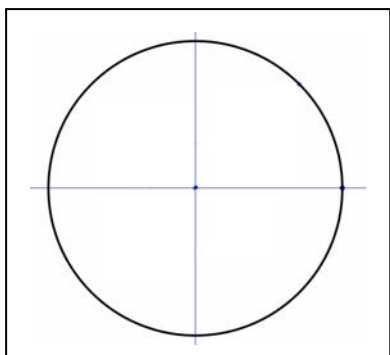
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

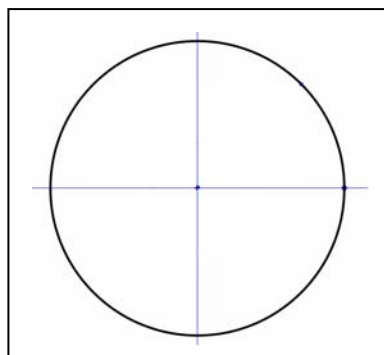
นั่นคือ.....

2.9 จงหา  $p(\frac{-49\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

2.10 จงหา  $p(\frac{-5337\pi}{2})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

3. จากที่นักเรียน ได้ตอบคำถามในข้อ 2 ให้นักเรียนตอบสิ่งที่นักเรียน ได้จากการทำกิจกรรม

.....

.....

.....

.....

.....

## ใบกิจกรรมที่ 2.3

จุดปลายและความยาวส่วนโค้ง

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 2.3 จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 3: ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{4}$

กรณีที่ 4: ความยาวส่วนโค้งเป็นจำนวนเท่าของ  $\frac{\pi}{3}$  และ  $\frac{\pi}{6}$


### กรณีที่ 3

**คำสั่ง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งวงกลมเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

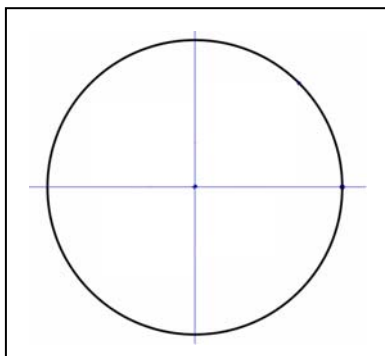
1. คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด

2. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงค่าของวัตถุ

3. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงแกน x และแกน y

2. ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งวงกลมเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อสร้างเสร็จแล้วให้นักเรียนตอบคำถามจากสิ่งที่นักเรียนได้ทำการสำรวจ และค้นพบด้วยตนเอง ดังนี้

2.1 ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่ทำการแบ่งวงกลมเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กัน เสร็จแล้ววาดรูปลงในกรอบด้านล่างนี้



จากวงกลมหนึ่งหน่วยที่นักเรียนสร้างเสร็จแล้วนักเรียนลองคิดซิว่าแต่ละส่วนโค้งมีความยาวส่วนโค้งเท่าไรและมีแกนอะไรเป็นตัวแบ่ง เพราะอะไรให้นักเรียนเขียนอธิบาย

.....

.....

.....



2.1.8 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

2.1.9 ให้นักเรียนทำการสังเกตจุดปลายส่วนโค้ง ของแต่ละความยาวส่วนโค้ง และเขียนสิ่งที่  
นักเรียนได้จากการสังเกต

.....  
.....  
.....

**กรณีที่ 4**

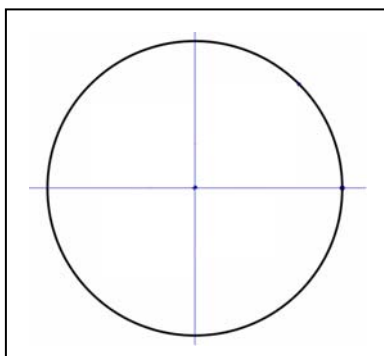
**คำสั่ง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งวงกลมเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

1. คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด
2. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงค่าของวัตถุ
3. คำสั่ง  ใช้ในการแสดงแกน x และแกน y

2. ให้นักเรียนทำการศึกษาวงกลมเมื่อแบ่งวงกลมเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อสร้างเสร็จแล้วให้  
นักเรียนตอบคำถามจากสิ่งที่นักเรียนได้ทำการสำรวจ และค้นพบด้วยตนเอง ดังนี้

2.1 ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่ทำการแบ่งวงกลมเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน เสร็จแล้ววาดรูปลงใน  
กรอบด้านล่างนี้



จากวงกลมหนึ่งหน่วยที่นักเรียนสร้างเสร็จแล้วนักเรียนลองคิดซิว่าแต่ละส่วน โค้งมีความยาว  
ส่วนโค้งเท่าไรและมีแกนอะไรเป็นตัวแบ่ง เพราะอะไรให้นักเรียนเขียนอธิบาย

.....  
.....  
.....



**กรณีที่ 1 ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{3}$**

**กรณีที่ 1.1 เมื่อกำหนดให้  $\theta > 0$**

- 2.1.1 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา C ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.2 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา D ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.3 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา G ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.4 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา H ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....

**กรณีที่ 1.2 เมื่อกำหนดให้  $\theta < 0$**

- 2.1.5 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา H ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทางทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.6 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา G ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.7 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา D ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.8 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา C ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.9 ให้นักเรียนทำการสังเกตจุดปลายส่วนโค้ง ของแต่ละความยาวส่วนโค้ง และเขียนสิ่งที่

นักเรียนได้จากการสังเกต

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

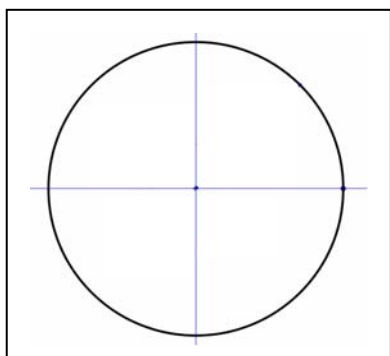
กรณีที่ 2 ความยาวส่วนโค้งเท่ากับ  $\frac{\pi}{6}$

- 2.1.1 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.2 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา E ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.3 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา F ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.4 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา I ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.5 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา I ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทางทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.6 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา F ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.7 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา E ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.8 จาก A (0, 1) วัดความยาวส่วนโค้งไปหา B ได้ความยาวส่วนโค้ง.....  
โดยวัดในทิศทาง..... จุดปลายของส่วนโค้ง คือ .....
- 2.1.9 ให้นักเรียนทำการสังเกตจุดปลายส่วนโค้ง ของแต่ละความยาวส่วนโค้ง และเขียนสิ่งที่  
นักเรียนได้จากการสังเกต
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

จากการศึกษาความยาวส่วนโค้งในกรณีที่ 3 และ 4 ให้นักเรียนใช้ความรู้ ความเข้าใจ ตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. เป็นตัวช่วยในการทำกิจกรรม

1. ให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่อยู่ในชุดกิจกรรม หาความยาวส่วนโค้งเมื่อกำหนด  $p(\theta)$  ก็คือพิกัด  $(x, y)$  ที่จุดสิ้นสุดของการวัดความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  พร้อมทั้งวาดรูปต่อไปนี้

1.1 จงหา  $p(\frac{\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



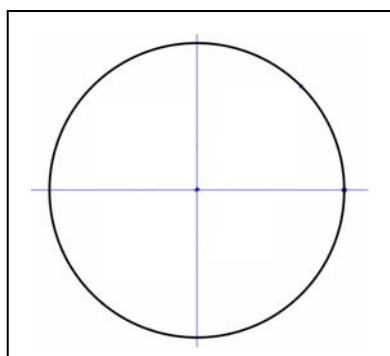
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

1.3 จงหา  $p(\frac{5\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



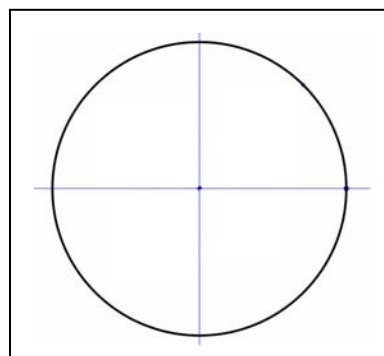
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

1.2 จงหา  $p(\frac{3\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



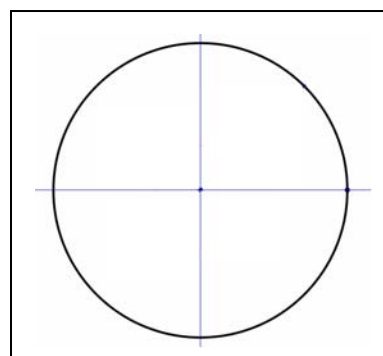
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

1.4 จงหา  $p(\frac{7\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



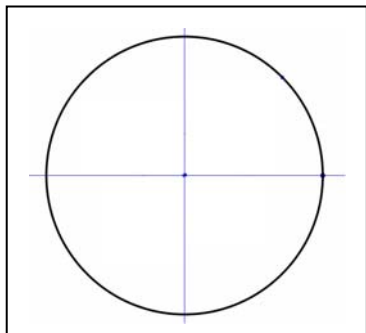
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

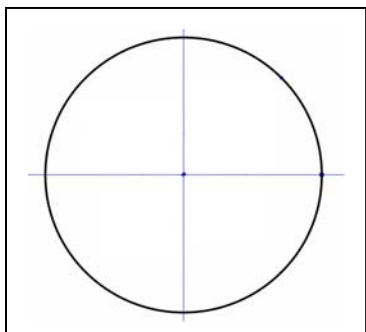
นั่นคือ.....

1.5 จงหา  $p(\frac{13\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



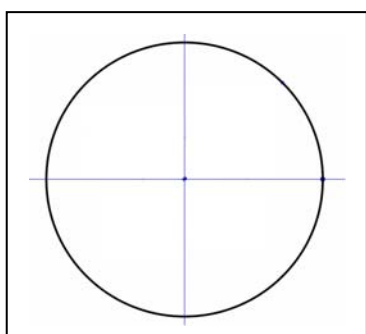
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

1.7 จงหา  $p(\frac{-5\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา

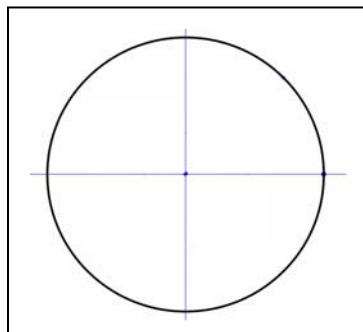


จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

1.9 จงหา  $p(\frac{-11\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา

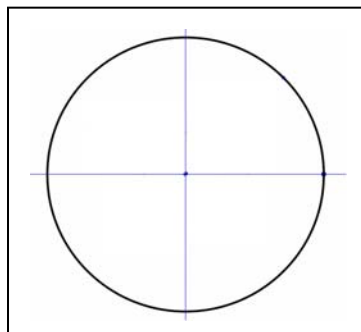


1.6 จงหา  $p(\frac{27\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



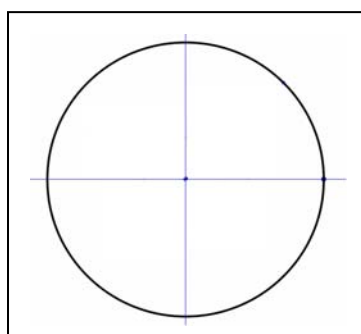
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

1.8 จงหา  $p(\frac{-7\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

1.10 จงหา  $p(\frac{-17\pi}{4})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

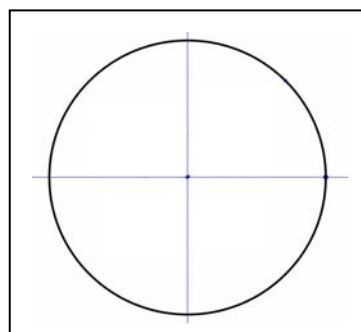
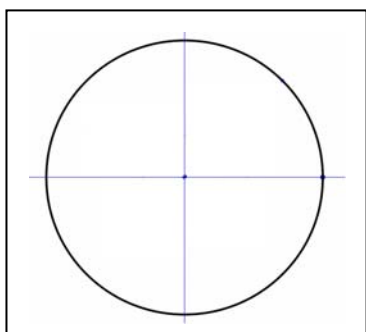
2. จากที่นักเรียนได้ตอบคำถามในข้อ 3 ให้นักเรียนตอบสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรม

.....  
 .....  
 .....

2. ให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่อยู่ในชุดกิจกรรม หาความยาวส่วนโค้งเมื่อกำหนด  $p(\theta)$  ก็คือพิกัด  $(x, y)$  ที่จุดสิ้นสุดของการวัดความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  พร้อมทั้งวาดรูปต่อไปนี้

2.1 จงหา  $p(\frac{\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา

2.2 จงหา  $p(\frac{2\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา

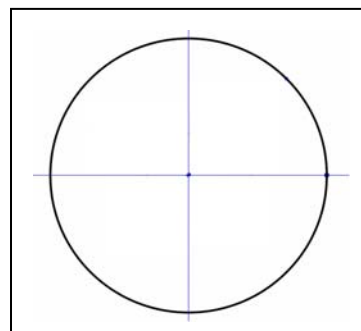
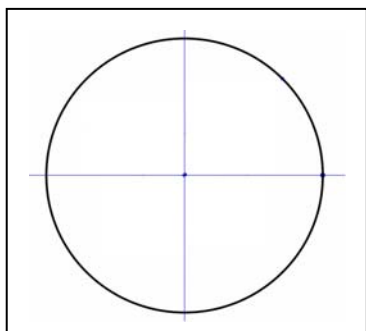


จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

2.3 จงหา  $p(\frac{4\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา

2.4 จงหา  $p(\frac{5\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



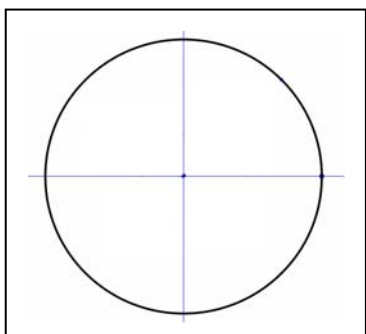
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

2.5 จงหา  $p(\frac{7\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



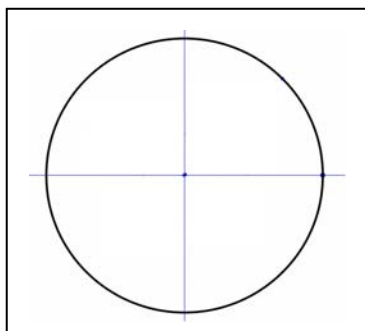
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

2.7 จงหา  $p(-\frac{\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

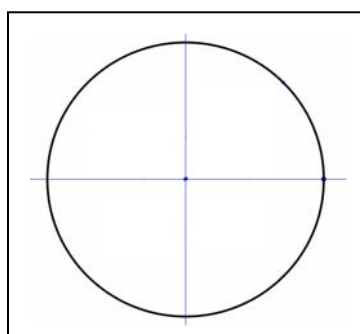
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

2.6 จงหา  $p(\frac{14\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



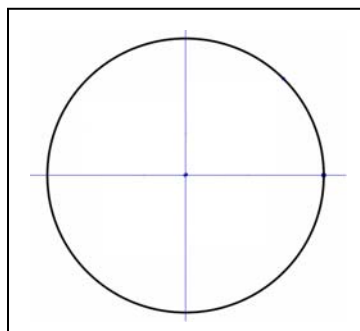
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

2.8 จงหา  $p(-\frac{2\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....

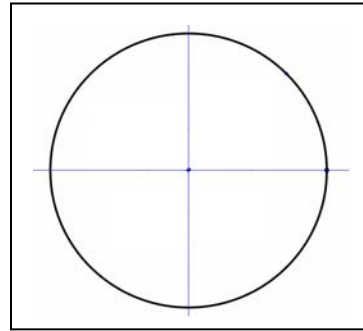
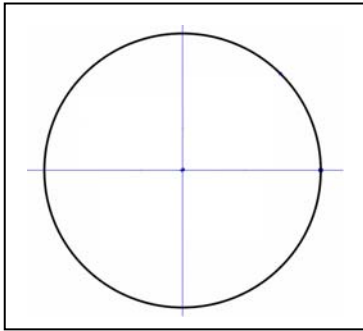
จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

2.9 จงหา  $p(-\frac{28\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา

2.10 จงหา  $p(-\frac{11\pi}{3})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

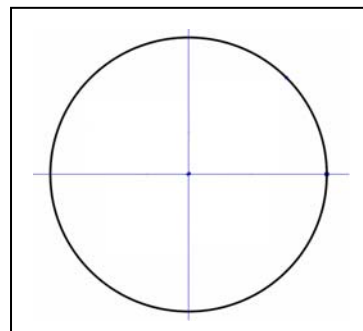
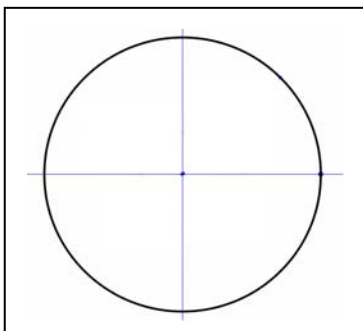
4. จากที่นักเรียนได้ตอบคำถามในข้อ 3 ให้นักเรียนตอบสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรม

.....  
 .....

3. ให้นักเรียนใช้เครื่องมือที่อยู่ในชุดกิจกรรม หาความยาวส่วนโค้งเมื่อกำหนด  $p(\theta)$  ก็คือพิกัด  $(x, y)$  ที่จุดสิ้นสุดของการวัดความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  พร้อมทั้งวาดรูปต่อไปนี้

3.1 จงหา  $p(\frac{\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา

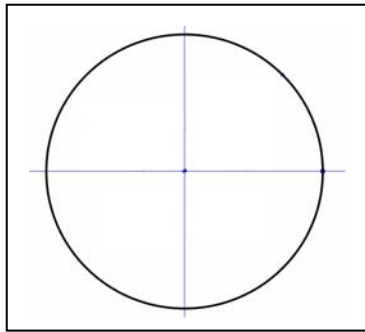
3.2 จงหา  $p(\frac{5\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

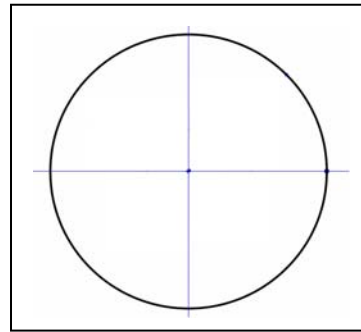
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

3.3 จงหา  $p(\frac{7\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



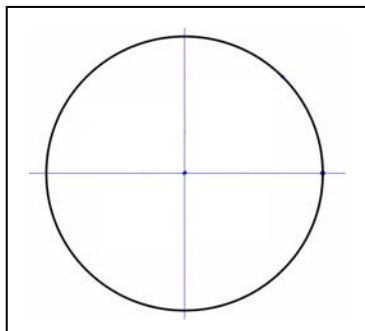
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

3.4 จงหา  $p(\frac{11\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



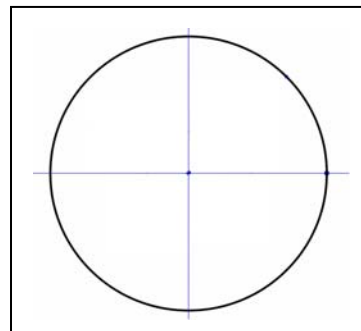
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

3.5 จงหา  $p(\frac{17\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



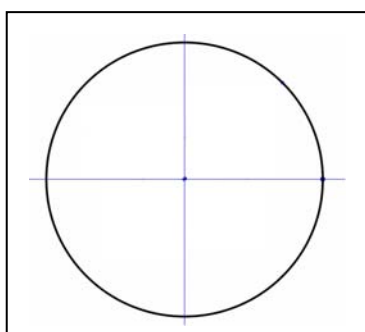
จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ .....

3.6 จงหา  $p(\frac{35\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา

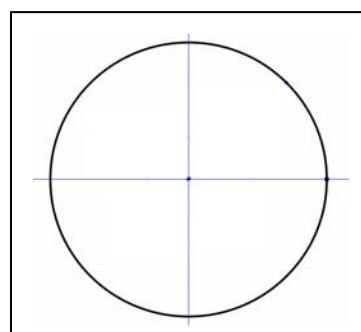


จุดสิ้นสุด คือ.....  
 จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....  
 N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....  
 นั่นคือ.....

3.7 จงหา  $p(-\frac{\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



3.8 จงหา  $p(-\frac{5\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



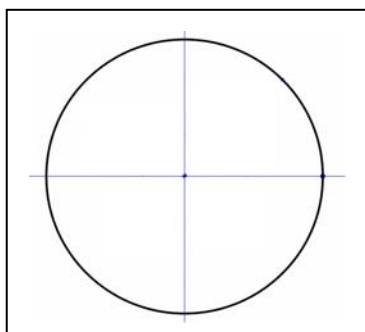
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

3.9 จงหา  $p(-\frac{19\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ .....

4. จากที่นักเรียนได้ตอบคำถามในข้อ 3 ให้นักเรียนตอบสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรม

.....

.....

.....

.....

.....

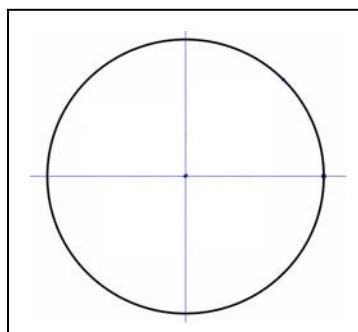
จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

3.10 จงหา  $p(-\frac{23\pi}{6})$  เท่ากับ..... องศา



จุดสิ้นสุด คือ.....

จุดสิ้นสุดตกบนแกน .....

N เป็นจำนวนเต็ม (คู่/คี่) เท่ากับ.....

นั่นคือ.....

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

ให้นักเรียน หาค่าแห่งจุดปลายส่วนโค้ง ต่อไปนี้

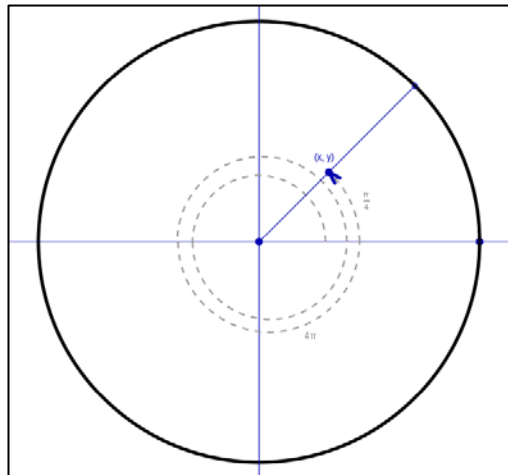
1.  $p(\frac{17\pi}{4})$

วิธีทำ เนื่องจาก  $\frac{17\pi}{4} = 4\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4} + 2(2\pi)$

จะได้ว่า 
$$p(\frac{17\pi}{4}) = p(\frac{\pi}{4} + 2(2\pi))$$

$$= p(\frac{\pi}{4})$$

ดังนั้น 
$$p(\frac{17\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$



หมายเหตุ : ถ้านักเรียนไม่สามารถแยกให้เป็น  $2(n\pi)$  โดยที่  $n$  คือจำนวนเต็ม ก็ไม่เป็นไร แต่ถ้าทำได้ ให้ทำนะครับ

2.  $p(\frac{19\pi}{3})$

วิธีทำ .....

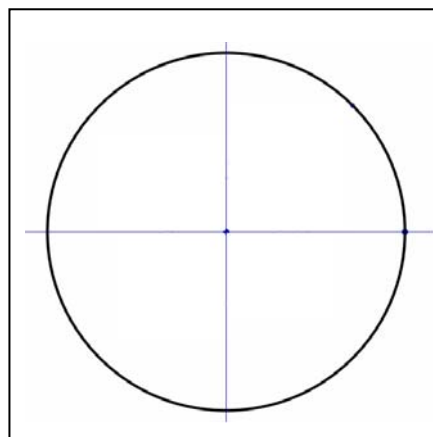
.....

.....

.....

.....

.....



3.  $p(\frac{49\pi}{6})$

วิธีทำ .....

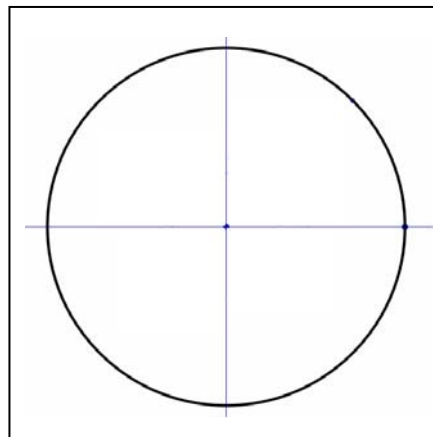
.....

.....

.....

.....

.....



4.  $p(-\frac{9\pi}{2})$

วิธีทำ .....

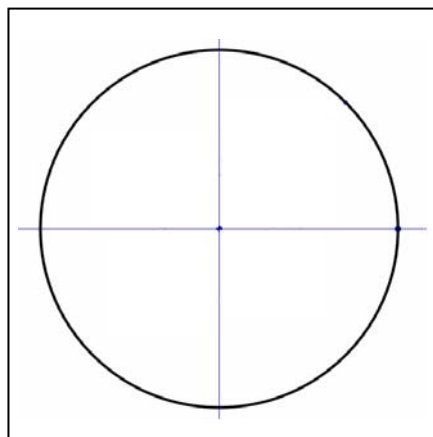
.....

.....

.....

.....

.....



5.  $p(-\frac{37\pi}{6})$

วิธีทำ .....

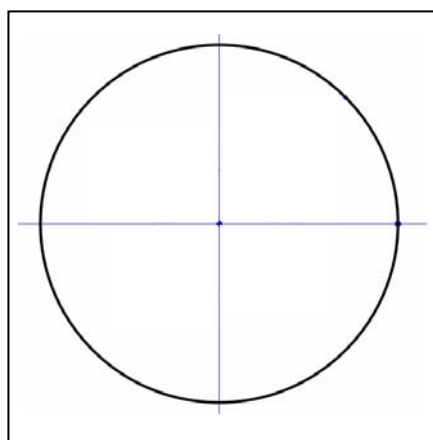
.....

.....

.....

.....

.....



6.  $p(-\frac{11\pi}{4})$

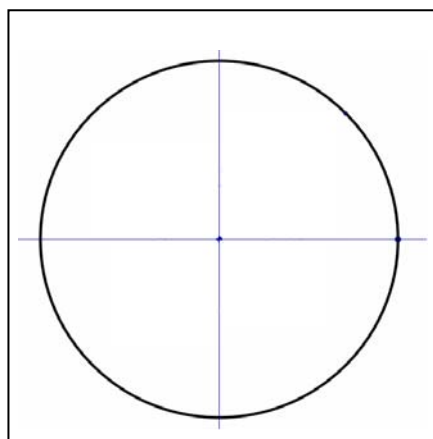
วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....



7.  $p(\frac{45\pi}{4})$

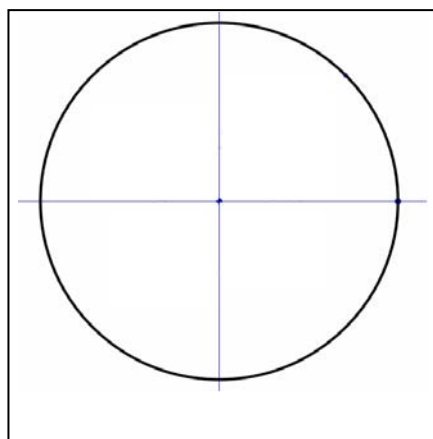
วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....



8.  $p(-\frac{5\pi}{6})$

วิธีทำ .....

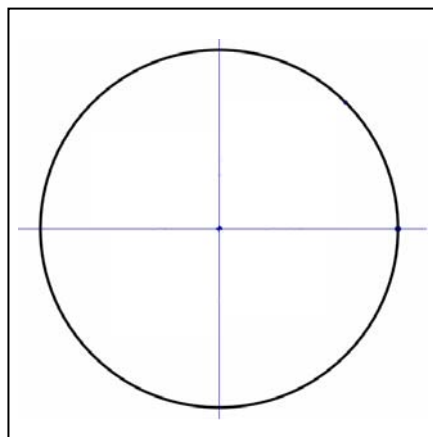
.....

.....

.....

.....

.....



9.  $p(-\frac{7\pi}{4})$

วิธีทำ .....

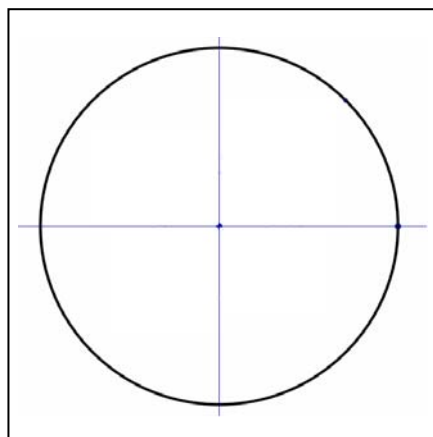
.....

.....

.....

.....

.....



10.  $p(-\frac{41\pi}{6})$

วิธีทำ .....

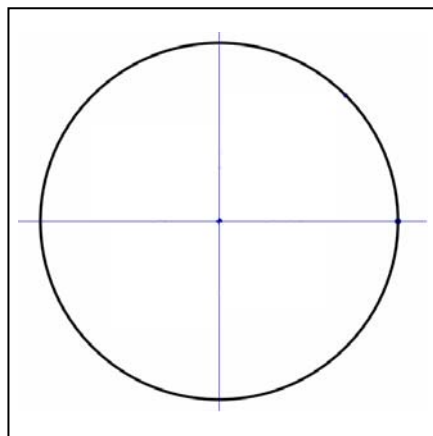
.....

.....

.....

.....

.....



จากข้อ 1 – 10 ให้นักเรียนเขียนสรุปสิ่งที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกหัด

.....

.....

.....

.....

.....

### ใบกิจกรรมที่ 3

#### ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 3 เรื่องฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. ให้นักเรียนทำการศึกษาการนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย
2. จากข้อ 1 ให้นักเรียนสำรวจกิจกรรมแล้วเติมคำตอบลงในตารางต่อไปนี้

หน่วยการวัดมุม		พิกัดจุด	
เรเดียน	องศา	x	y
0	0°		
$\frac{\pi}{6}$	30°		
$\frac{\pi}{4}$	45°		
$\frac{\pi}{3}$	60°		
$\frac{\pi}{2}$	90°		
$\frac{2\pi}{3}$	120°		
$\frac{3\pi}{4}$	135°		
$\frac{5\pi}{6}$	150°		
$\pi$	180°		
$\frac{4\pi}{3}$	210°		
$\frac{5\pi}{4}$	225°		
$\frac{7\pi}{6}$	240°		
$\frac{3\pi}{2}$	270°		
$\frac{5\pi}{3}$	300°		
$\frac{7\pi}{4}$	315°		
$\frac{11\pi}{6}$	330°		
$2\pi$	360°		

หมายเหตุ : ค่าของ  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$  ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$

3. จากความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 จะเห็นว่าค่าของความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จะสามารถกำหนดจุดปลายของส่วนโค้งได้เพียง ..... จุด เท่านั้น นักเรียนคิดว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

4. จากข้อมูลในข้อ 1- 3 ที่นักเรียนได้ตอบให้นักเรียนเขียนนิยามของฟังก์ชัน โคไซน์ และฟังก์ชัน โคไซน์ ตามความเข้าใจของนักเรียน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. เมื่อนักเรียน ได้บทนิยามในข้อที่ 4 แล้ว ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

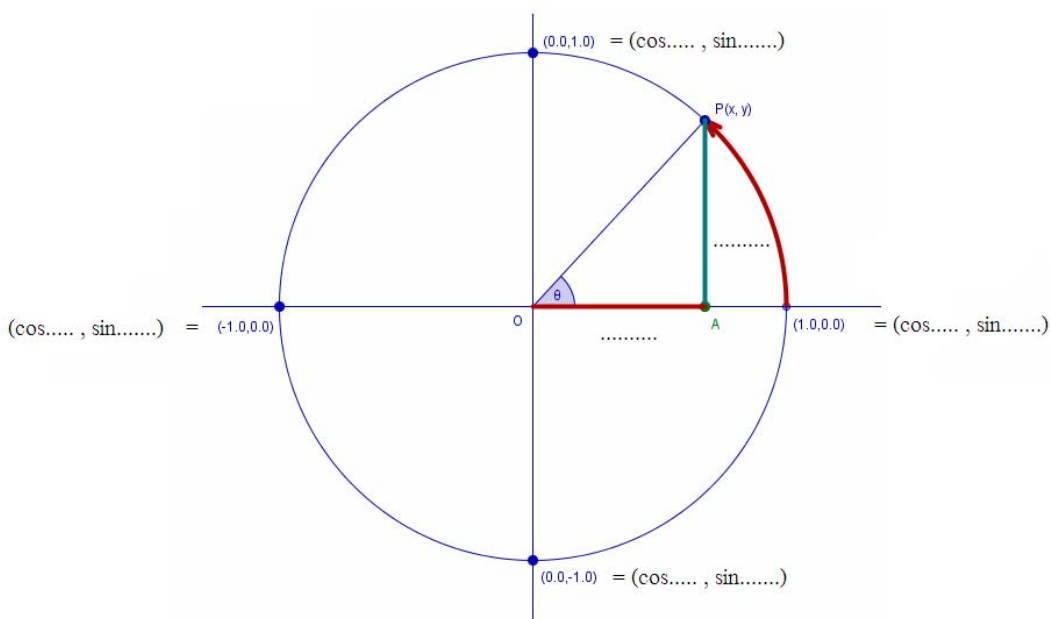
5.1 โดเมนของฟังก์ชัน โคไซน์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน โคไซน์ คือ .....

5.2 โดเมนของฟังก์ชัน ไซน์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน ไซน์ คือ .....

6. ให้นักเรียนตอบคำถามลงในวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



เนื่องจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย คือ..... และจากรูปข้างบนจะเห็นว่า  $y = \dots\dots\dots$ ,  $x = \dots\dots\dots$  ดังนั้นส่งผลให้ .....

7. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางข้างล่างนี้

มุม $\theta$ ฟังก์ชัน	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$\sin \theta$							
$\cos \theta$							
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$							
$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$							
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$							
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$							

## ใบกิจกรรมที่ 4.1

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ ในกิจกรรมนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

**กรณีที่ 1** ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรม 4.1 ในหน่วยที่ 4 แล้วตอบคำถามลงในใบงาน
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้งของจุดปลายส่วนโค้งต่อไปนี้ (ภายใน 1 รอบ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)

2.1 พิกัดจุดปลาย  $p(1, 0)$

$$\theta = \dots\dots\dots$$

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.3 พิกัดจุดปลาย  $p(-1, 0)$

$$\theta = \dots\dots\dots$$

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.5 ให้  $\theta = -\frac{\pi}{2}$

พิกัดจุดปลายส่วนโค้ง.....

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.7 ให้  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

พิกัดจุดปลายส่วนโค้ง.....

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.2 พิกัดจุดปลาย  $p(0, 1)$

$$\theta = \dots\dots\dots$$

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.4 พิกัดจุดปลาย  $p(0, -1)$

$$\theta = \dots\dots\dots$$

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

2.6 ให้  $\theta = -\pi$

พิกัดจุดปลาย .....

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

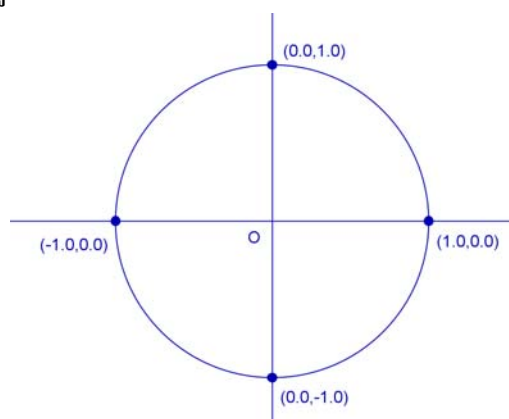
2.8 ให้  $\theta = -2\pi$

พิกัดจุดปลาย .....

$$\sin (\dots) = \dots\dots\dots$$

$$\cos (\dots) = \dots\dots\dots$$

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 แบ่งวงกลมออกเป็น 8 ส่วน จะได้ดังรูป



เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วให้กำหนดจุด  $P(x, y)$  เป็นจุดตัดที่อยู่บนวงกลม และให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

- 3.1 ให้นักเรียนสร้างรูป  $\Delta$  มุมฉาก PAO โดยมี  $\hat{A}$  เป็นมุมฉาก  
 จะได้ว่า  $m(\hat{AOP}) = \dots\dots\dots$  เรเดียน หรือ  $\dots\dots\dots$  องศา  
 จะเห็นว่า  $\Delta$  PAO เป็นสามเหลี่ยม.....  
 ดังนั้น  $\dots\dots\dots$   
 นั่นคือ  $\dots\dots\dots$

- 3.2 จากข้อ 3.1 นักเรียนทราบแล้วว่า .....  
 หน้าทีของนักเรียนคือต้องหาพิกัดจุดปลายส่วนโค้ง ให้ได้ซึ่งสามารถหาได้ 2 วิธี ดังนี้  
 วิธีที่ 1 ใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส  
 วิธีที่ 2 ใช้ความรู้เรื่องหาระยะทางระหว่างจุด (คล้ายๆ กับหน่วยที่ 2)

3.3 ให้นักเรียนหาจุดปลายส่วนโค้ง โดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่ง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{4}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง  $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$  เมื่อ  $n$  คือ จำนวนเต็มบวก

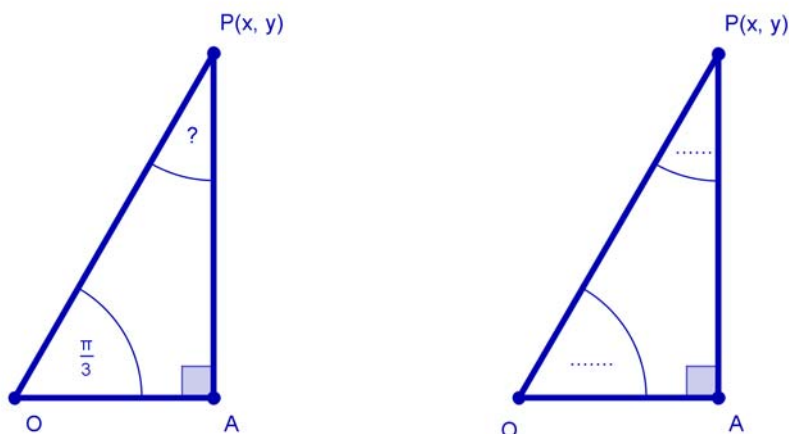


นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{3}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

ในรูป  $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$  และ  $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

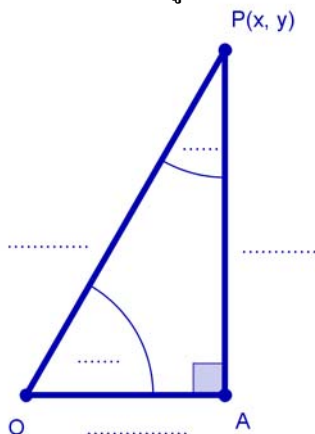
5. จากข้อ 4 จะได้ว่าจากการหา  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$  ในกรณีที่ 2 เราสามารถนำมาสู่การหาค่า  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$  ได้โดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขอให้นักเรียนสังเกต รูป  $\Delta PAO$  ในข้อ 4 จะพบว่ามุมแต่ละมุมเท่ากับ..... มีความยาวส่วนโค้ง..... เรเดียน ตามลำดับ และมุม..... เป็นส่วนหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเดียวกัน ดังรูป



จากข้อ 4 จะได้ว่า  $\sin \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$  และ  $\cos \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น อัตราส่วนดังกล่าวจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แบบหนึ่ง ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังกล่าวใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้

$$\sin \frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$$

## แบบฝึกหัดเสริม

1. จงหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1)  $3\pi$

$p(3\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(3\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(3\pi) = \dots\dots\dots$

2)  $8\pi$

$p(8\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(8\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(8\pi) = \dots\dots\dots$

3)  $-5\pi$

$p(-5\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(-5\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(-5\pi) = \dots\dots\dots$

4)  $-2\pi$

$p(-2\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(-2\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(-2\pi) = \dots\dots\dots$

5)  $-\frac{\pi}{2}$

$p(-\frac{\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

6)  $-\frac{3\pi}{2}$

$p(-\frac{3\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

7)  $\frac{7\pi}{2}$

$p(\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

8)  $-\frac{7\pi}{2}$

$p(-\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(-\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(-\frac{7\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

9)  $\frac{9\pi}{2}$

$p(\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

10)  $-\frac{9\pi}{2}$

$p(-\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

$\cos(-\frac{9\pi}{2}) = \dots\dots\dots$

11)  $57\pi$

$p(57\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(57\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(57\pi) = \dots\dots\dots$

13)  $53\pi$

$p(53\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(53\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(53\pi) = \dots\dots\dots$

15)  $\frac{27\pi}{2}$

$p\left(\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

$\sin\left(\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

$\cos\left(\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

12)  $-57\pi$

$p(-57\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(-57\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(-57\pi) = \dots\dots\dots$

14)  $-53\pi$

$p(-53\pi) = \dots\dots\dots$

$\sin(-53\pi) = \dots\dots\dots$

$\cos(-53\pi) = \dots\dots\dots$

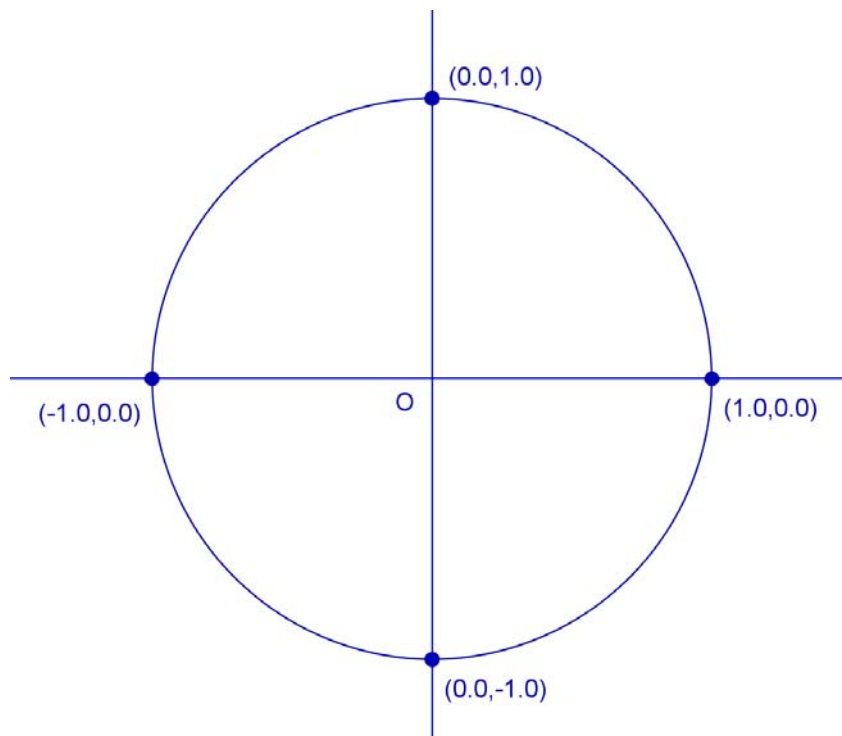
16)  $-\frac{27\pi}{2}$

$p\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

$\sin\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

$\cos\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

2. จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยให้นักเรียนบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  ลงไปในรูป และบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ พร้อมทั้งหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้อย่างน้อย  $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$  และ  $\frac{11\pi}{6}$



## 3. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1)  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3)  $\sin \frac{3\pi}{2} \sec \pi + \sec^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5)  $\sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2)  $3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4)  $\sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6)  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7)  $\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}\right)\tan \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

9)  $\tan 60^\circ \cos 30^\circ \sec 60^\circ - \cos 60^\circ \cot 45^\circ$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

11)  $\frac{1}{3}\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} \tan^2 \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

8)  $\sin 90^\circ \tan 30^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 45^\circ - \sec 60^\circ \cot 60^\circ$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

10)  $\cot^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\cot^2 \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

12)  $3 \tan^2 45^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

## ใบกิจกรรมที่ 4.2

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใดๆ

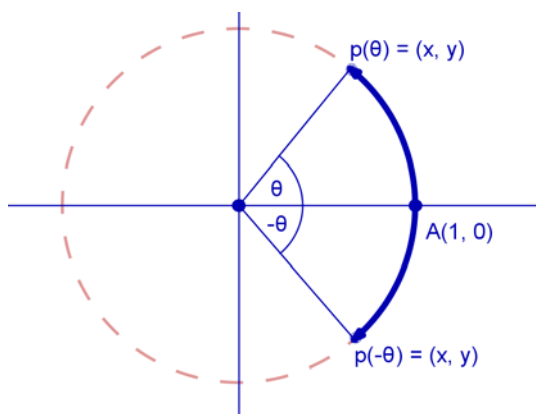
**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ และเลือกทำกิจกรรมที่ 4.2

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 4.2 จะแบ่งการหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงออกเป็น 2 กรณี

**กรณี 1** การหาค่าของ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos(-\theta)$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก

**กรณี 2** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta > 2\pi$

**กรณี 1** การหาค่าของ  $\sin(-\theta)$  และ  $\cos(-\theta)$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงบวก



1. ให้นักเรียนทำการสำรวจกิจกรรมในกรณีที่ 1 แล้วเขียนสิ่งที่นักเรียนได้จากการสำรวจ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนใช้วงกลมหนึ่งหน่วยในกรณีที่ 1 ตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) ให้  $\theta = \frac{\pi}{6}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 2.1 และ 2.2 จะได้ว่า

.....  
 .....

2.3) ให้  $\theta = \frac{\pi}{4}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 2.3 และ 2.4 จะได้ว่า

.....  
 .....

2.5) ให้  $\theta = \frac{\pi}{3}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

2.2) ให้  $\theta = -\frac{\pi}{6}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

2.4) ให้  $\theta = -\frac{\pi}{4}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

2.6) ให้  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

ทิศทาง.....

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 2.5 และ 2.6 จะได้ว่า

.....  
 .....

$$2.7) \text{ ให้ } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$2.8) \text{ ให้ } \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

ทิศทาง.....

ทิศทาง.....

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 2.7 และ 2.8 จะได้ว่า

.....  
 .....

$$2.9) \text{ ให้ } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$2.10) \text{ ให้ } \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

ทิศทาง.....

ทิศทาง.....

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 2.9 และ 2.10 จะได้ว่า

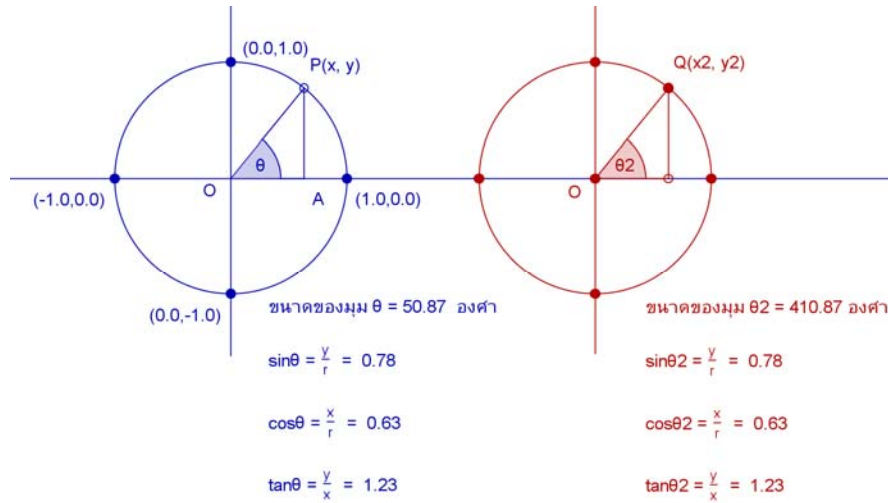
.....  
 .....

3. จากที่นักเรียนทำทั้งหมดในข้อ 2 เราสามารถสรุปเป็นสูตรได้คือ

.....  
 .....

กรณี 2 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta > 2\pi$

ให้นักเรียนทำการสำรวจกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 2 ตามรูป



1. จากการสำรวจกิจกรรมในกรณีที่ 2 นักเรียนได้อะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

.....

2. จากคุณสมบัติที่ได้จากการสำรวจในข้อที่ 1 ให้นักเรียนนำความรู้มาตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) กำหนดให้  $\theta = \frac{\pi}{6}$  จงหาจำนวนจริง  $\theta$  มา 4 จำนวนที่มีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่ากัน

จะได้  $\sin(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\cos(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\tan(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\sec(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\operatorname{cosec}(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\cot(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

2.2) กำหนดให้  $\theta = \frac{\pi}{4}$  จงหาจำนวนจริง  $\theta$  มา 4 จำนวนที่มีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้  $\sin(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\cos(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$\tan(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$$\sec(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\operatorname{cosec}(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

2.3) กำหนดให้  $\theta = \frac{\pi}{3}$  จงหาจำนวนจริง  $\theta$  มา 4 จำนวนที่มีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้  $\sin(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$$\cos(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\tan(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\sec(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\operatorname{cosec}(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

2.4) กำหนดให้  $\theta = \frac{\pi}{2}$  จงหาจำนวนจริง  $\theta$  มา 4 จำนวนที่มีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้  $\sin(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$$\cos(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\tan(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\sec(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\operatorname{cosec}(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

2.5) กำหนดให้  $\theta = \pi$  จงหาจำนวนจริง  $\theta$  มา 4 จำนวนที่มีค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้  $\sin(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$

$$\cos(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\tan(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\sec(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\operatorname{cosec}(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot(\dots) = \dots = \dots = \dots = \dots$$

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปสูตรที่นักเรียนได้จากการปฏิบัติ

.....  
 .....

## ใบกิจกรรมที่ 4.2.1

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใดๆ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ และเลือกทำกิจกรรมที่ 4.2

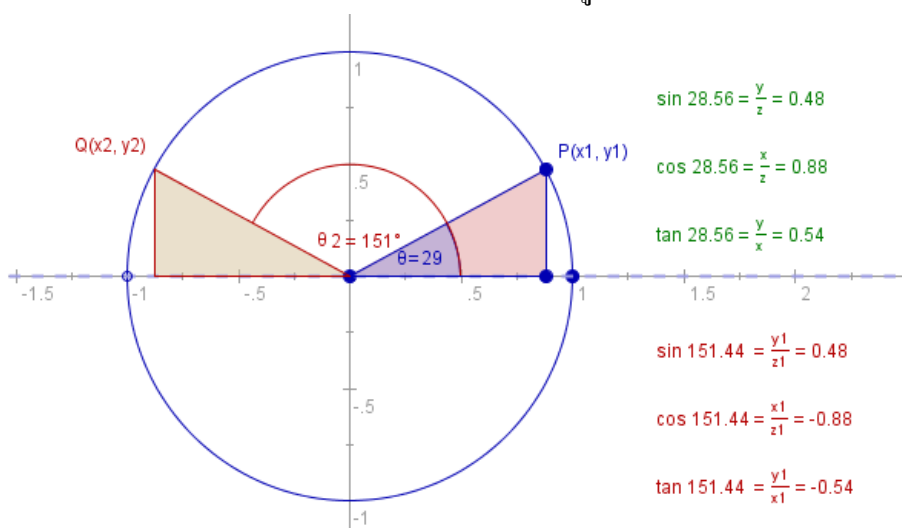
**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 4.2.1 จะแบ่งการหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงออกเป็น 2 กรณี

**กรณี 3** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

**กรณี 4** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

**กรณี 3** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

1. ให้นักเรียนทำการศึกษาสำรวจกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 3 ดังรูป



2. ให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ได้จากการสำรวจ

.....

.....

.....

.....

.....

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการสำรวจตอบคำถามต่อไปนี้

3.1) ให้  $\theta = \frac{\pi}{3}$

$p(\theta) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\tan(\theta) = \sqrt{3}$

$\sec(\theta) = 2$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cot(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3.2) ให้  $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$p(\theta) = \frac{2\pi}{3} = (\pi - \frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

$\tan(\theta) = -\sqrt{3}$

$\sec(\theta) = -2$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cot(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

จากข้อ 3.1 และ 3.2 จะได้ว่า

$\sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}), \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3})$

$\tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan(\frac{\pi}{3}), \sec(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sec(\frac{\pi}{3})$

$\operatorname{cosec}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{3}), \cot(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{3})$

3.3) ให้  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.4) ให้  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.3 และ 3.4 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

3.5) ให้  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.6) ให้  $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.5 และ 3.6 จะได้ว่า .....

.....

.....

4. จากข้อ 1-3 นักเรียนสามารถสรุปให้อยู่ในรูปสูตรทั่วไปได้แก่

.....

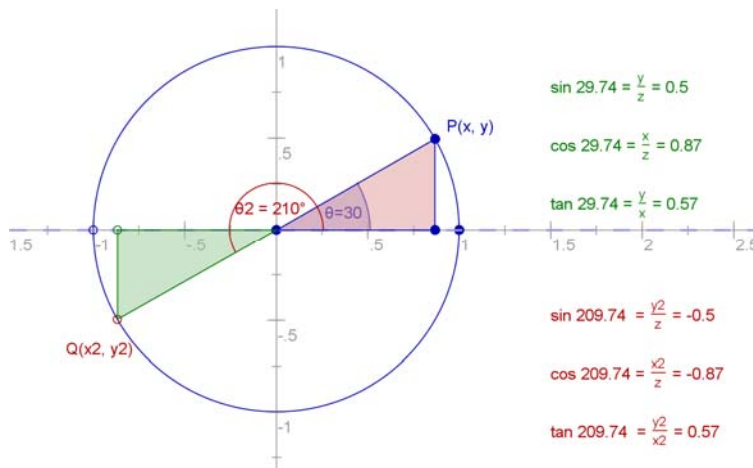
.....

.....

.....

กรณี 4 การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

1. ให้นักเรียนทำการศึกษารายละเอียดที่ 4.2 ในกรณีที่ 4 ดังรูป



2. ให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ได้จากการสำรวจ

.....

.....

.....

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการสำรวจตอบคำถามต่อไปนี้

3.1) ให้  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$P(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = 2$$

$$\cot(\theta) = \sqrt{3}$$

3.2) ให้  $\theta = \frac{7\pi}{6}$

$$P(\theta) = \frac{7\pi}{6} = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = -2$$

$$\cot(\theta) = \sqrt{3}$$

จากข้อ 3.1 และ 3.2 จะได้ว่า

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right), \sec\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{cosec}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right), \cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3.3) ให้  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.3 และ 3.4 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

3.4) ให้  $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.5) ให้  $\theta = \frac{\pi}{3}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.6) ให้  $\theta = \frac{4\pi}{3}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.5 และ 3.6 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

3.7) ให้  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.8) ให้  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.7 และ 3.8 จะได้ว่า .....

.....

.....

4. จากข้อ 1-3 นักเรียนสามารถสรุปให้อยู่ในรูปสูตรทั่วไปได้แก่

.....

.....

.....

.....

## ใบกิจกรรมที่ 4.2.2

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใดๆ

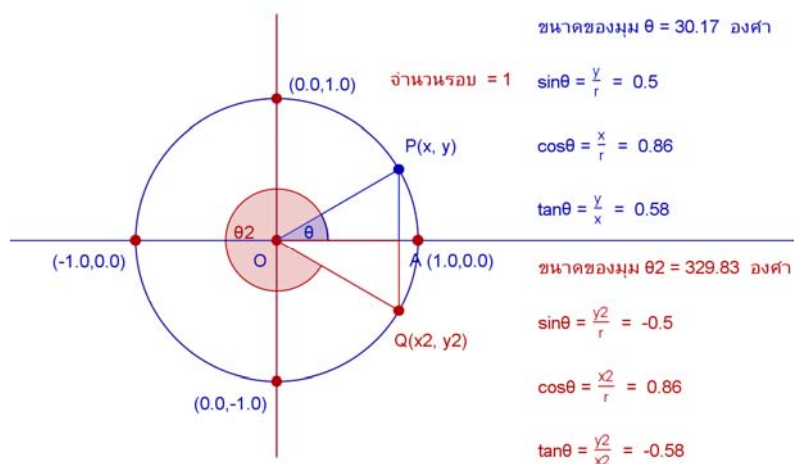
**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ และเลือกทำกิจกรรมที่ 4.2

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 4.2.2 จะแบ่งการหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ของจำนวนจริงออกเป็น 1 กรณี

**กรณี 5** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$

**กรณี 5** การหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

1. ให้นักเรียนทำการศึกษาสำรวจกิจกรรมที่ 4.2 ในกรณีที่ 5 ดังรูป



2. ให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ได้จากการสำรวจ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการสำรวจตอบคำถามต่อไปนี้

3.1) ให้  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.2) ให้  $\theta = \frac{11\pi}{6}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.1 และ 3.2 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

3.3) ให้  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

3.4) ให้  $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 3.3 และ 3.4 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

3.5) ให้  $\theta = \frac{\pi}{3}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

3.6) ให้  $\theta = \frac{5\pi}{3}$

$p(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$

$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$

$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 3.5 และ 3.6 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

$$3.7) \text{ ให้ } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$3.8) \text{ ให้ } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$p(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sin(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(\theta) = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 3.7 และ 3.8 จะได้ว่า

.....  
 .....  
 .....

4. จากข้อ 1-3 นักเรียนสามารถสรุปให้อยู่ในรูปสูตรทั่วไปได้แก่

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

แบบฝึกหัดระคน

1. จงเขียนค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  ในรูปของ  $\sin \alpha$  และ  $\cos \alpha$  โดยที่  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  เมื่อกำหนด  $\theta$  ดังต่อไปนี้ (ในที่นี้  $\pi = 3.14159$ )

1.1)  $\theta = 3$

1.2)  $\theta = -3$

วิธีทำ เนื่องจาก  $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$

วิธีทำ .....

ดังนั้น  $p(3)$  อยู่ในกวางอครันต์ที่ 2

.....

ให้  $\alpha = \pi - 3$  จะได้  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  และ

.....

$\sin 3 = \sin(\pi - 3)$

.....

$\cos 3 = -\cos(\pi - 3)$

.....

1.3)  $\theta = 4$

1.4)  $\theta = -4$

วิธีทำ .....

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.5)  $\theta = 5$

1.6)  $\theta = -5$

วิธีทำ .....

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\sin \theta = 0.5075$  จงหาค่าของ

2.1)  $\sin(-\theta)$

2.2)  $\sin(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

วิธีทำ .....

.....

.....

2.3)  $\sin(\pi + \theta)$

2.4)  $\sin(\theta - \pi)$

วิธีทำ .....

วิธีทำ .....

.....

.....

2.5)  $\sin(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

2.6)  $\sin(\theta - 2\pi)$

วิธีทำ .....

.....

3. กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\cos \theta = 0.8090$  จงหาค่าของ

2.1)  $\cos(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

2.2)  $\cos(\theta - \pi)$

วิธีทำ .....

.....

2.3)  $\cos(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

2.4)  $\cos(\theta - 2\pi)$

วิธีทำ .....

.....

2.5)  $\cos(3\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

2.6)  $\cos(\theta - 3\pi)$

วิธีทำ .....

.....

4. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปถูกหรือผิด พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

1. ถ้า  $\sin \theta = 0.5$  แล้ว  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เท่านั้น

ตอบ .....

.....

.....

.....

2. ถ้า  $\sin \theta = -0.309$  และ  $\cos \theta = -0.951$  แล้ว  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 เท่านั้น

ตอบ .....

.....

.....

3. ถ้า  $\sin \theta = \cos \theta$  แล้ว  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 เท่านั้น

ตอบ .....

.....

.....

4. ถ้า  $\sin \theta = -\cos \theta$  แล้ว  $p(\theta)$  เป็นจุดที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 หรือ 4

ตอบ .....

.....

5. กำหนดให้  $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$  โดยที่  $\sin \theta = 0.1045$  และ  $\cos \theta = 0.8090$  จงหาค่าของข้อต่อไปนี้อย่างน้อย

5.1)  $\sin(\theta_1 - \pi)$

วิธีทำ .....

.....

5.3)  $\sin(3\pi + \theta_1)$

วิธีทำ .....

.....

5.5)  $\sin(3\pi - \theta_1)$

วิธีทำ .....

.....

5.7)  $\sin(5\pi + \theta_1)$

วิธีทำ .....

.....

5.9)  $\sin(5\pi - \theta_1)$

วิธีทำ .....

.....

5.11)  $\sin(\theta_1 - 2\pi)$

วิธีทำ .....

.....

5.2)  $\cos(\theta_2 - \pi)$

วิธีทำ .....

.....

5.4)  $\cos(3\pi + \theta_2)$

วิธีทำ .....

.....

5.6)  $\cos(3\pi - \theta_2)$

วิธีทำ .....

.....

5.8)  $\cos(5\pi + \theta_2)$

วิธีทำ .....

.....

5.10)  $\cos(5\pi - \theta_2)$

วิธีทำ .....

.....

5.12)  $\cos(\theta_2 - 2\pi)$

วิธีทำ .....

.....

6. ให้  $0 < \theta < 90^\circ$  จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

6.1)  $\sin(\theta - 180^\circ) < 0$  เป็น.....

6.2)  $\cos(2\theta - 360^\circ) < 0$  เป็น.....

6.3)  $\cos(270^\circ - \theta) > 0$  เป็น.....

6.4)  $\tan(90^\circ + \theta) > 0$  เป็น.....

## ใบกิจกรรมที่ 5

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ โดยใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 4 นำมาใช้กับใบกิจกรรมในหน่วยที่ 5

1. จงทำให้อยู่ในรูป  $\tan \theta$

1.1)  $\tan(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.2)  $\tan(\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.3)  $\tan(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

1.4)  $\tan(2\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

2. จงทำให้อยู่ในรูป  $\operatorname{cosec} \theta$

2.1)  $\operatorname{cosec}(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

2.2)  $\operatorname{cosec}(\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

2.3)  $\operatorname{cosec}(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

2.4)  $\operatorname{cosec}(2\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

3. จงทำให้อยู่ในรูป  $\sec \theta$ 

3.1)  $\sec(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

3.2)  $\sec(\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

3.3)  $\sec(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

3.4)  $\sec(2\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

4. จงทำให้อยู่ในรูป  $\cot \theta$ 

4.1)  $\cot(\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

4.2)  $\cot(\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

4.3)  $\cot(2\pi - \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

4.4)  $\cot(2\pi + \theta)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

## 5. จงหาค่าของ

5.1)  $\tan \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

5.2)  $\tan \frac{7\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

5.3)  $\sec \frac{5\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

5.4)  $\frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

5.5)  $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

5.6)  $\frac{4 \sin 300^\circ \sec(-765^\circ) + \tan 240^\circ \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan 630^\circ}$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

6. จงหาจำนวนจริง  $\theta$  โดยที่  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  และสอดคล้องกับสมการในข้อต่อไปนี้

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 6.1) $ \sin \theta  = \sin \theta$                                  | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.2) $ \cos \theta  = -\cos \theta$                                 | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.3) $ \tan \theta  = \tan \theta$                                  | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.4) $ \cot \theta  = -\cot \theta$                                 | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.5) $ \sec \theta  = \sec \theta$                                  | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.6) $ \operatorname{cosec} \theta  = -\operatorname{cosec} \theta$ | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.7) $\sin \theta = \cos \theta$                                    | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.8) $\tan \theta = \cot \theta$                                    | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.9) $\sin \theta = \tan \theta$                                    | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |
| 6.10) $\cos \theta = \cot \theta$                                   | จะได้จำนวนจริง $\theta$ เท่ากับ..... |

## ใบกิจกรรมที่ 6.1

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 6.1 จะแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

ตอนที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**ตอนที่ 1** ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

1. ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการวัดมุมในหน่วยที่ 1 เปลี่ยนมุม  $\theta$  ที่กำหนดให้ ให้มีหน่วยเป็นองศา และเรเดียน

1.1)  $\theta = 1^\circ$

วิธีทำ .....

.....

1.3)  $\theta = -150^\circ$

วิธีทำ .....

.....

1.5)  $\theta = \frac{11\pi}{6}$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

1.7)  $\theta = \frac{\pi}{5}$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

1.9)  $\theta = -\frac{7\pi}{6}$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

1.2)  $\theta = 60^\circ$

วิธีทำ .....

.....

1.4)  $\theta = 270^\circ$

วิธีทำ .....

.....

1.6)  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

1.8)  $\theta = -\frac{5\pi}{4}$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

1.10)  $\theta = 3$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....

**ตอนที่ 2** ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ในกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมจะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 กรณีเช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ดังนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยการวัดมุมที่เป็นองศากับหน่วยการวัดมุมเรเดียนเติมคำตอบลงในตารางทั้ง 5 กรณีต่อไปนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(-\theta) = \dots\dots\dots$	
$\cos(-\theta) = \dots\dots\dots$	
$\tan(-\theta) = \dots\dots\dots$	
$\cot(-\theta) = \dots\dots\dots$	
$\sec(-\theta) = \dots\dots\dots$	
$\operatorname{cosec}(-\theta) = \dots\dots\dots$	

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
ถ้า $n$ เป็นจำนวนนับ แล้ว	
$\sin(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cos(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\tan(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cot(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\sec(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cos(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\tan(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cot(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\sec(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cos(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\tan(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cot(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\sec(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	
$\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = \dots\dots\dots$	

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cos(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\tan(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\cot(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\sec(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	
$\operatorname{cosec}(2\pi - \theta) = \dots\dots\dots$	

## แบบฝึกหัดเสริมทักษะ

1. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1)  $150^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(150^\circ) = \dots\dots\dots$$

3)  $315^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(315^\circ) = \dots\dots\dots$$

5)  $930^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(930^\circ) = \dots\dots\dots$$

2)  $120^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(120^\circ) = \dots\dots\dots$$

4)  $-315^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(-315^\circ) = \dots\dots\dots$$

6)  $225^\circ$ 

วิธีทำ

$$\sin(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cos(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\tan(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\sec(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\csc(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

$$\cot(225^\circ) = \dots\dots\dots$$

2. จงหาค่าของ

$$1) \frac{3 \tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2 \sin 330^\circ}$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$3) \cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$5) \sec^2(-240^\circ) + \operatorname{cosec}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cot^2(315^\circ)$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2) \frac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4) \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากจุดปลายส่วนโค้งของมุม

1. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(15, -8)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  และมีด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  อยู่  
 บนเส้นตรง  $4y = 3x$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-1, -4)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(1, -\sqrt{2})$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-\sqrt{3}, 1)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**ใบกิจกรรมที่ 6.2**  
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  
**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 6.2 จะแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

**ตอนที่ 1** ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

**ตอนที่ 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

**ตอนที่ 1** ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

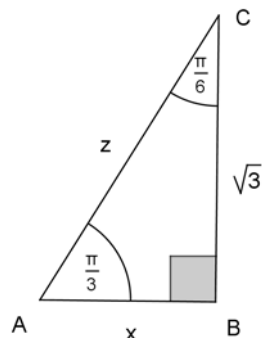
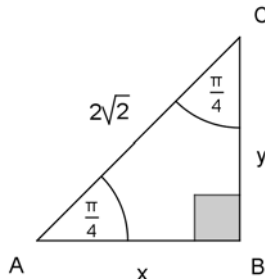
1. จากที่นักเรียนได้ทำการศึกษาทั้งหมดจะเห็นว่าจะมีรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเข้ามาเกี่ยวข้องเสมอ นักเรียนคิดว่าเราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติมาใช้ประโยชน์ในด้านใดได้บ้าง

.....

.....

2. นักเรียนคิดว่านักเรียนสามารถหาความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแต่ละรูปต่อไปนี้ได้อย่างไร

2.1) 2.2)



เราสามารถหา  $x$  ได้จาก.....

เราสามารถหา  $x$  ได้จาก.....

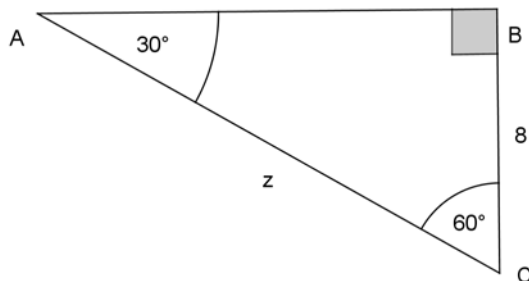
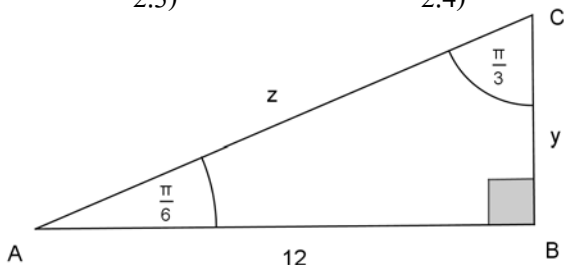
หา  $y$  ได้จาก.....

หา  $y$  ได้จาก.....

จะได้  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

จะได้  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

2.3) 2.4)



เราสามารถหา  $x$  ได้จาก.....

เราสามารถหา  $x$  ได้จาก.....

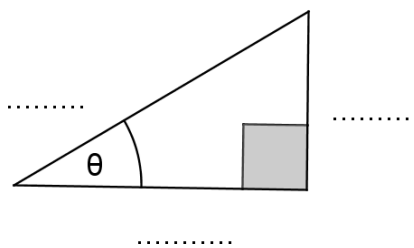
หา  $y$  ได้จาก.....

หา  $y$  ได้จาก.....

จะได้  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

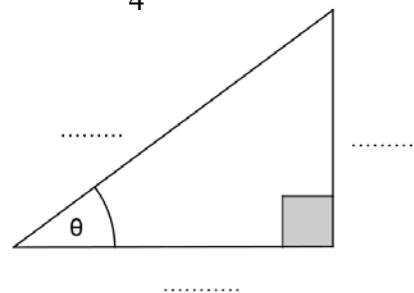
จะได้  $x = \dots\dots\dots$ ,  $y = \dots\dots\dots$

2.5) จงหา cosec  $\theta$  ถ้า  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$



จะได้.....  
 .....  
 .....  
 .....

2.6) จาก  $\sec \theta = \frac{5}{4}$  จงหา  $\tan \theta \cos \theta + \sin \theta - \cot \theta$



จะได้.....  
 .....  
 .....  
 .....

**ตอนที่ 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

คำสั่ง ให้นักเรียนใช้ตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ครูแจกให้นักเรียนหาค่าของมุมต่อไปนี้

1.  $\theta = 35^{\circ}50'$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

2.  $\theta = 0.7999$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

3.  $\theta = 102^{\circ}40'$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

4.  $\theta = 3.2201$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

5.  $\theta = 210^\circ 10'$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....

6.  $\theta = 16.7639$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....

7.  $\theta = -930^\circ 20'$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....

8.  $\theta = 6.746$  เรเดียน

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....

9.  $\theta = 159^\circ 20'$

วิธีทำ .....

.....  
 .....  
 .....

10.  $\theta = 178^\circ 40'$

วิธีทำ .....

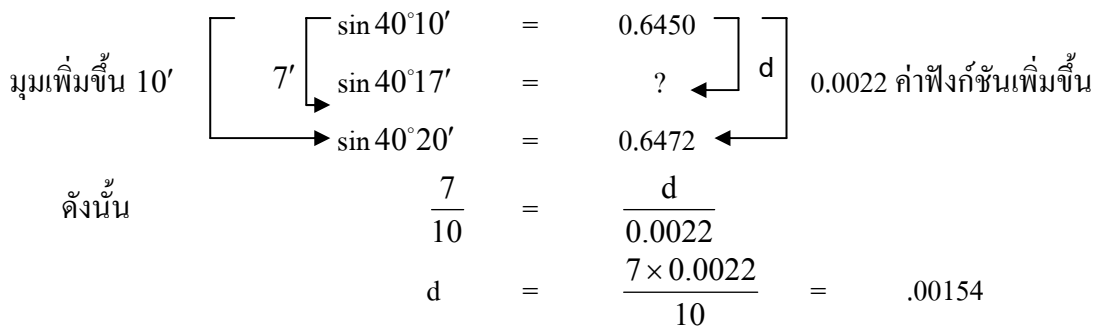
.....  
 .....  
 .....

จากข้อ 1-10 นักเรียนจะเห็นว่าทุกๆ จำนวนจริง  $\theta$  ไม่ว่าจะป็นองศาหรือเรเดียน เราสามารถหาค่าได้จากในตารางได้ทั้งหมด ต่อไปนี้เป็นการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เราไม่สามารถหาได้จากในตาราง ซึ่งเราสามารถหาค่าได้ดังปัญหาต่อไปนี้

1)  $\sin 40^\circ 17'$

วิธีทำ เนื่องจาก  $40^\circ 10' < 40^\circ 17' < 40^\circ 20'$

1) จากตารางจะได้ว่า



เพราะฉะนั้น  $\sin 40^\circ 17' = 0.6450 + 0.00154$   
 $= 0.64654$

2)  $\cos 40^\circ 17'$

วิธีทำ

มุมเพิ่มขึ้น  $10'$

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \cos 40^\circ 10' \\ \cos 40^\circ 17' \\ \cos 40^\circ 20' \end{array} \right] \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} \left[ \begin{array}{l} 0.7642 \\ ? \\ 0.7623 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow d \\ \leftarrow \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ -0.0019 \text{ ค่าฟังก์ชันลดลง} \\ \end{array}$$

ดังนั้น

$$\frac{7}{10} = \frac{d}{-0.0019}$$

$$d = \frac{7 \times (-0.0019)}{10} = -0.00133$$

เพราะฉะนั้น  $\cos 40^\circ 17' = 0.7642 + (-0.00133)$   
 $= 0.76287$

3) กำหนดให้  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  จงหาค่าของ  $\theta$  เมื่อกำหนดให้  $\sin \theta = 0.4862$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) กำหนดให้  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  จงหาค่าของ  $\theta$  เมื่อกำหนดให้  $\sin \theta = 0.4759$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  จงหาค่าของ  $\theta$  เมื่อกำหนดให้  $\cos \theta = -0.7302$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $\tan 27$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

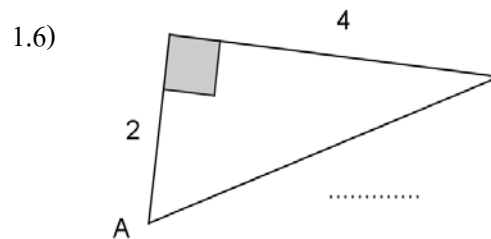
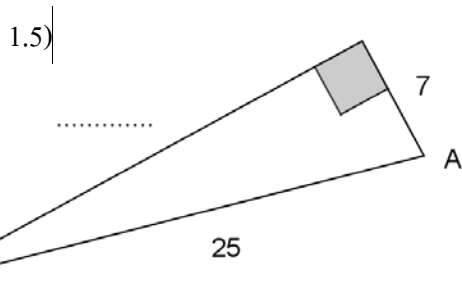
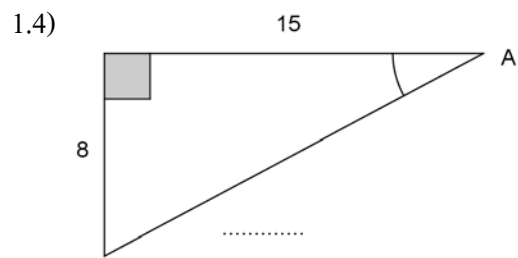
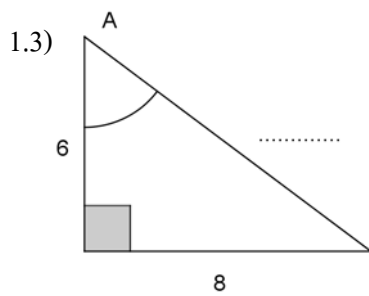
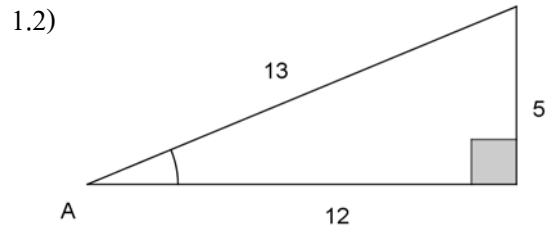
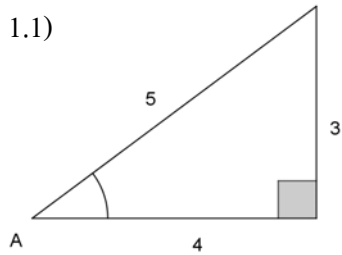
.....

.....

.....

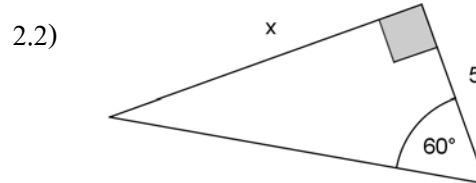
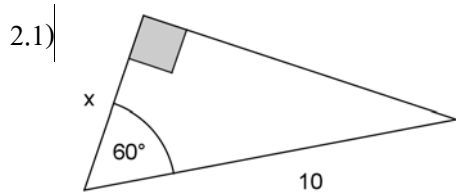
แบบฝึกหัดเสริมสร้างความแข็งแรง

1. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในข้อต่อไปนี้ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม A



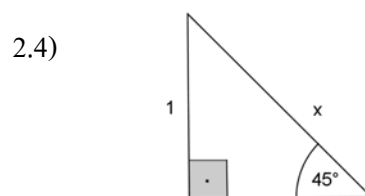
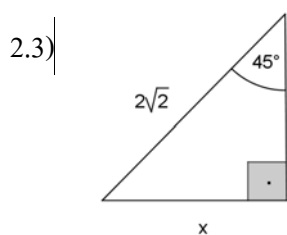
ข้อ	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\cot A$
(1)						
(2)						
(3)						
(4)						
(5)						
(6)						

2. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในข้อต่อไปนี จงหาค่าของ  $x$



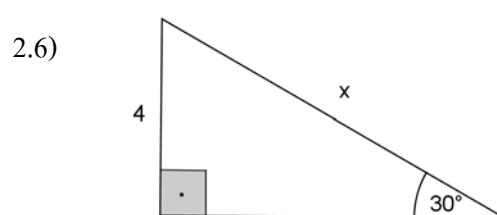
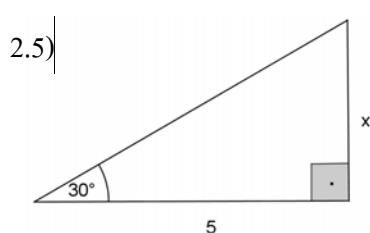
วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

วิธีทำ.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

3. จงหาคำตอบของข้อต่อไปนี

3.1) กำหนดให้  $\cot A = -\frac{12}{5}$  เมื่อ  $0 \leq A \leq 2\pi$  จงหาค่าของ  $\cos A$

รูปภาพ

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.2) ถ้า  $0 \leq \theta \leq \pi$  และ  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  ที่เหลือ

รูปภาพ

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

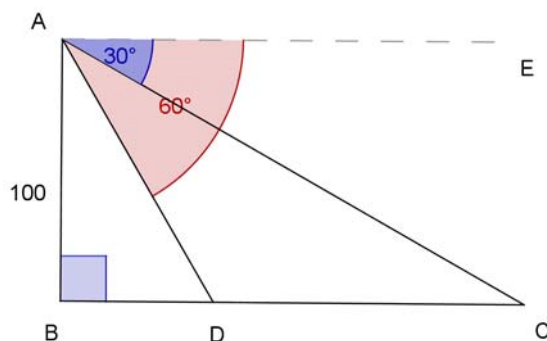
.....

.....

.....



3.5) จากรูป กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $\overline{AE}$  ขนานกับ  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB} = 100$  เมตร จงหาความยาวของ  $\overline{CD}$



วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน ของ  $\theta$  ที่กำหนดให้

4.1)  $\theta = 72^\circ 40'$

4.2)  $\theta = 0.2356$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

4.3)  $\theta = 65^\circ 30'$

4.4)  $\theta = 1.0588$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....



$$5.4) \sin \theta = 0.4226 \text{ จงหา } \theta \text{ เมื่อ } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

$$5.5) \cos \theta = -0.3173 \text{ จงหา } \theta \text{ เมื่อ } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

$$5.6) \tan \theta = -6.197 \text{ จงหา } \theta \text{ เมื่อ } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$$

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....



## ใบกิจกรรมที่ 7

### กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 7 จะแบ่งออกเป็น 5 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

ตอนที่ 2 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 3 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 4 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot x + k)$  เมื่อ  $b, k$  เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับ 0

ตอนที่ 5 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0$

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

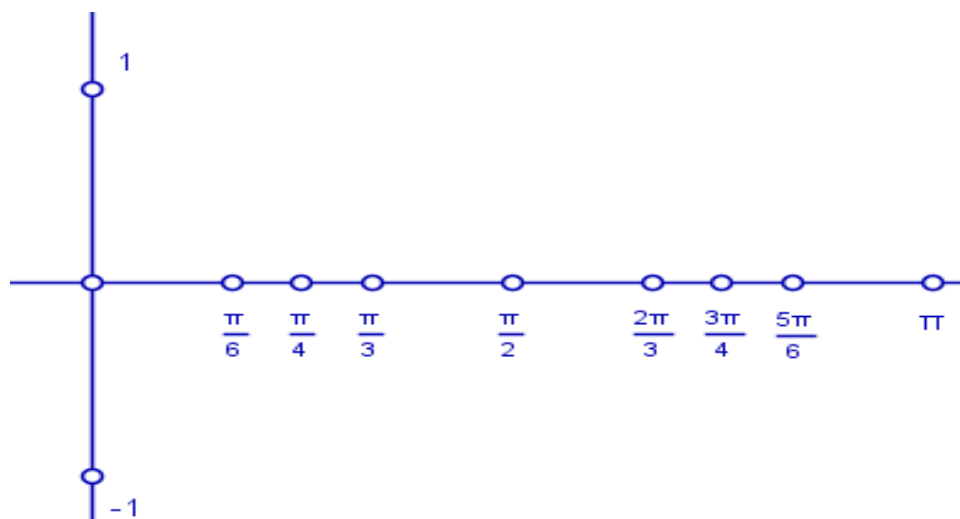
กราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม

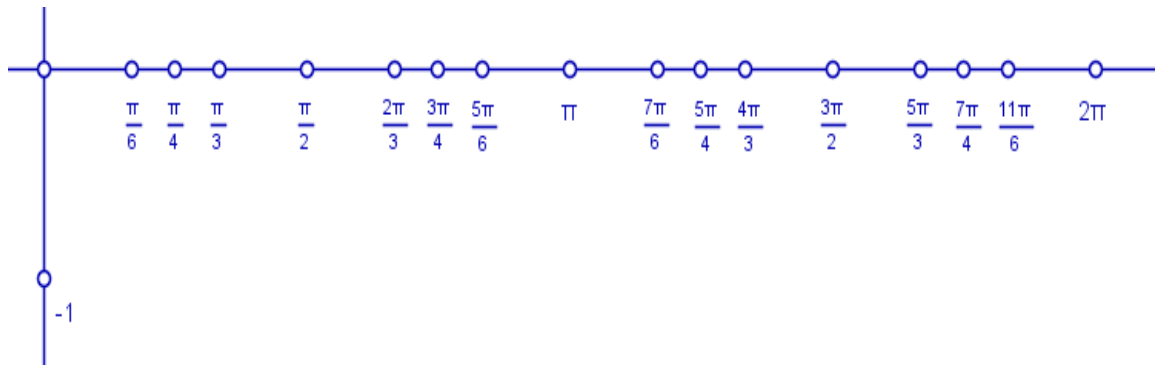


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$									

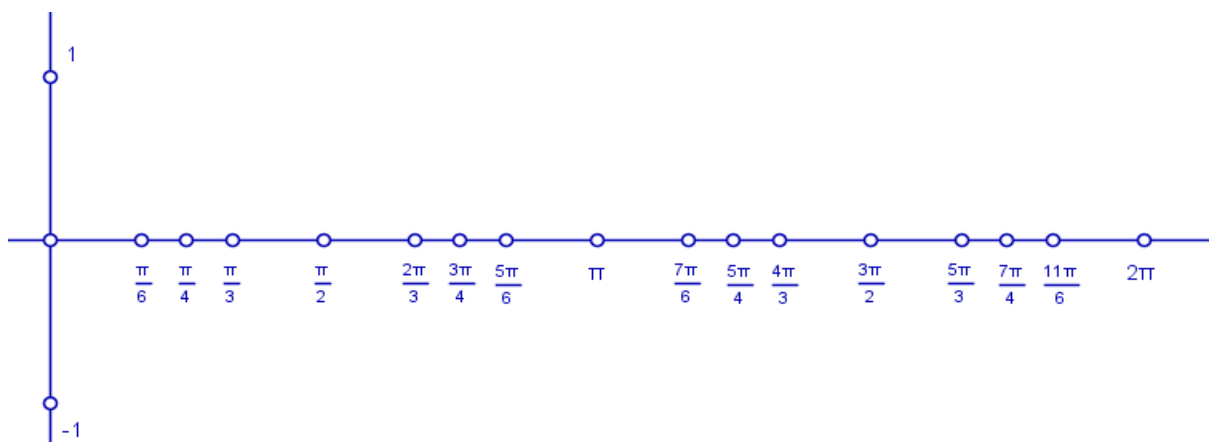
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบ

กิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้.....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ .....

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1 .....

ช่วงที่ 2 .....

แต่ละช่วงห่างกัน .....

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชัน ไซน์เมื่อ  $y = \sin x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

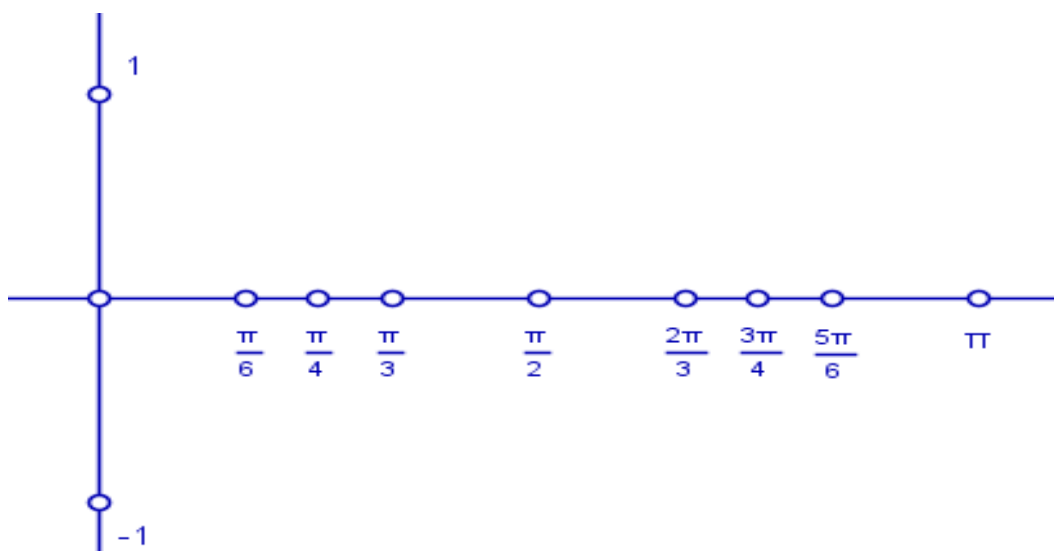
กราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cosx									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม

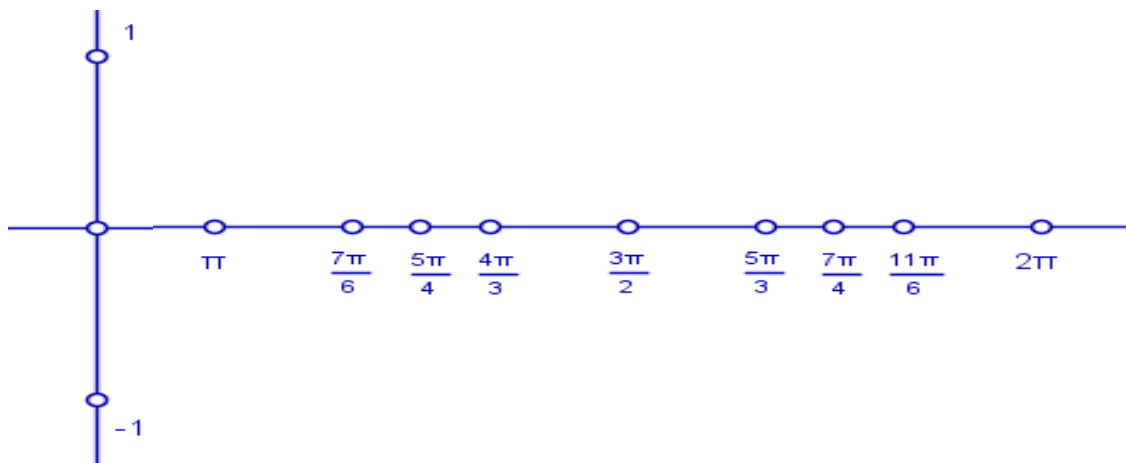


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

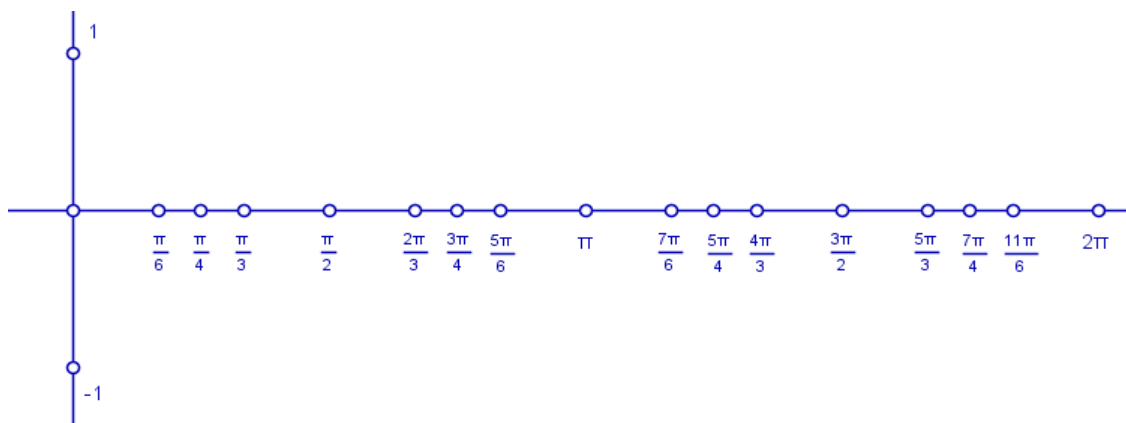
$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ .....

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1 .....

ช่วงที่ 2 .....

แต่ละช่วงห่างกัน .....

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชัน โคไซน์เมื่อ  $y = \cos x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

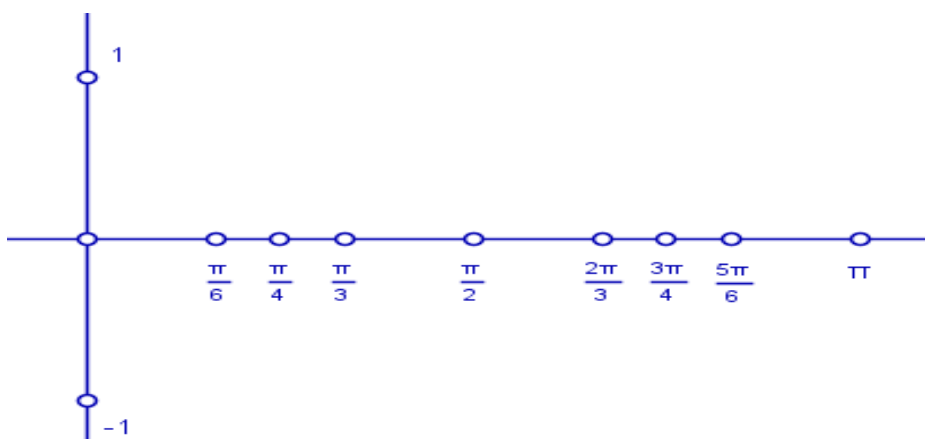
กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
<b>tanx</b>									

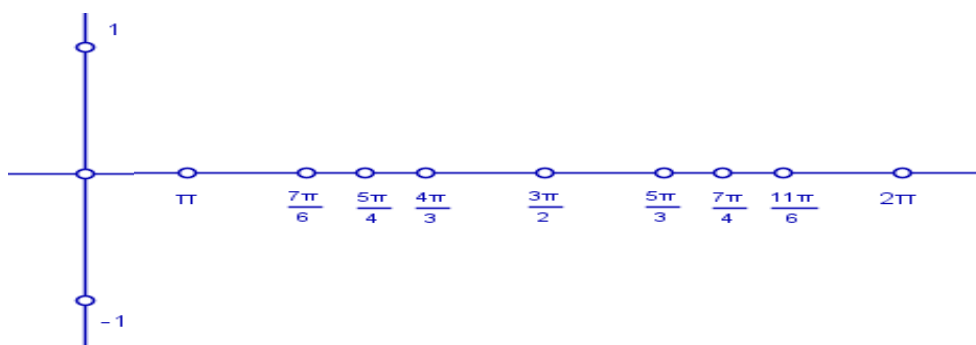
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



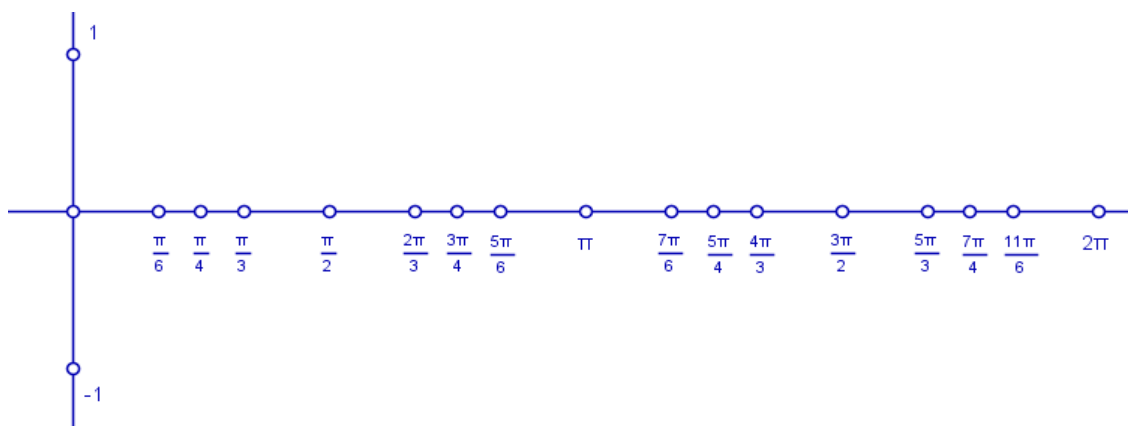
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan x$									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ .....

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1 .....

ช่วงที่ 2 .....

ช่วงที่ 3 .....

ช่วงที่ 4 .....

แต่ละช่วงห่างกัน .....

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันแทนเจนต์เมื่อ  $y = \tan x$

.....

.....

.....

.....

.....

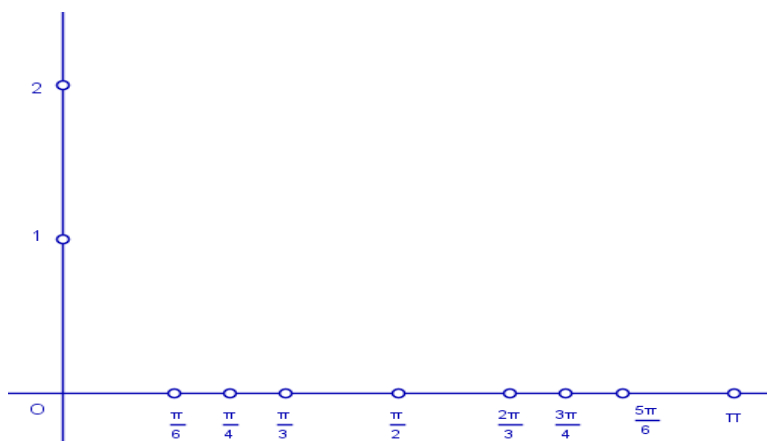
กราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชัน โคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
<b>cosec x</b>									

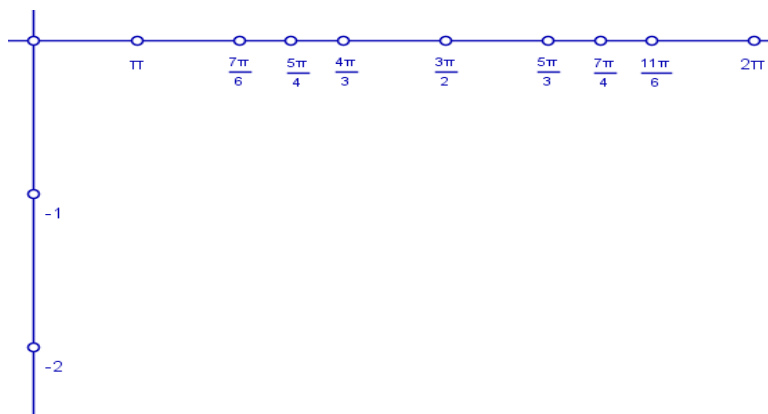
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



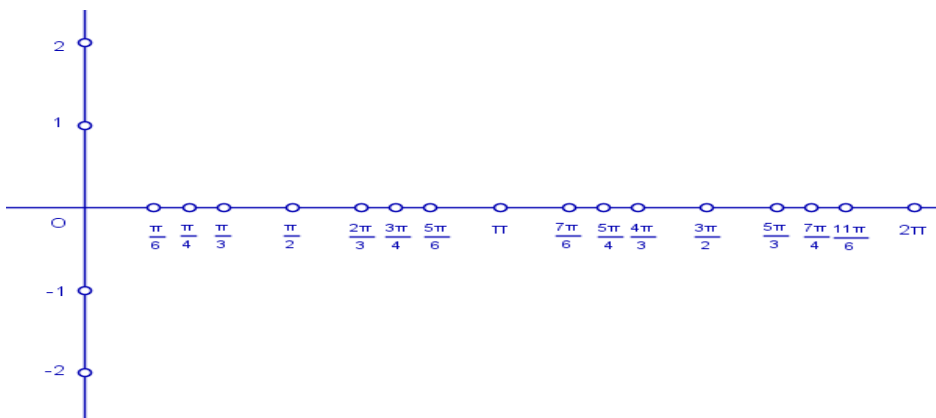
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\operatorname{cosec} x$									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ .....

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1 .....

ช่วงที่ 2 .....

แต่ละช่วงห่างกัน .....

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชัน โคเซแคนต์เมื่อ  $y = \operatorname{cosec} x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

กราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดย

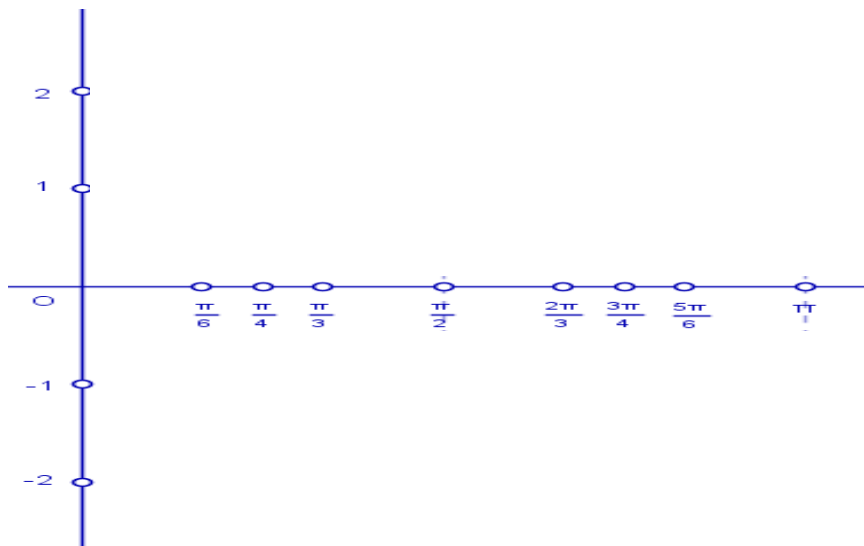
ใช้คำสั่ง **fx** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
sec x									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม

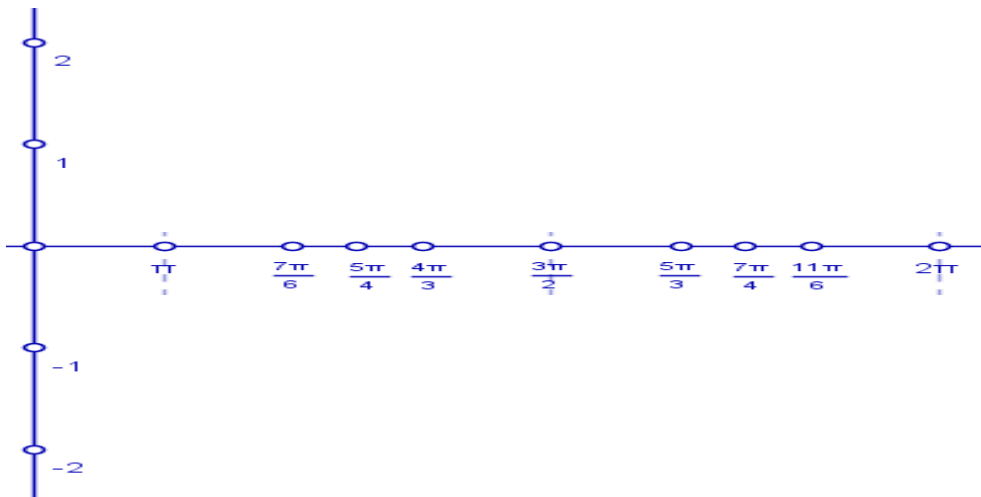


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

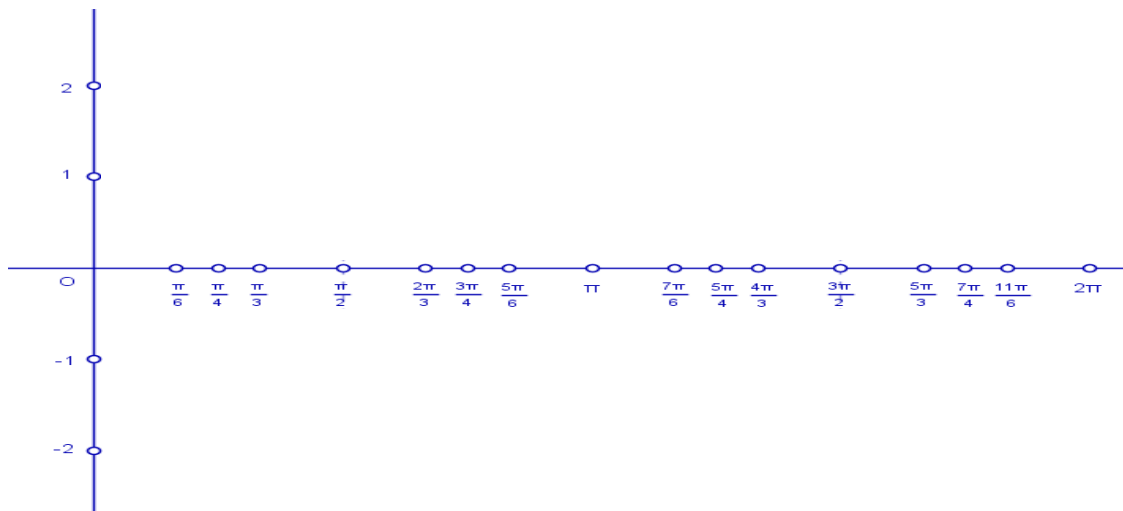
x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ .....

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วตั้งเกวว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1 .....

ช่วงที่ 2 .....

แต่ละช่วงห่างกัน .....

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันเซแคนต์ เมื่อ  $y = \sec x$

.....

.....

.....

.....

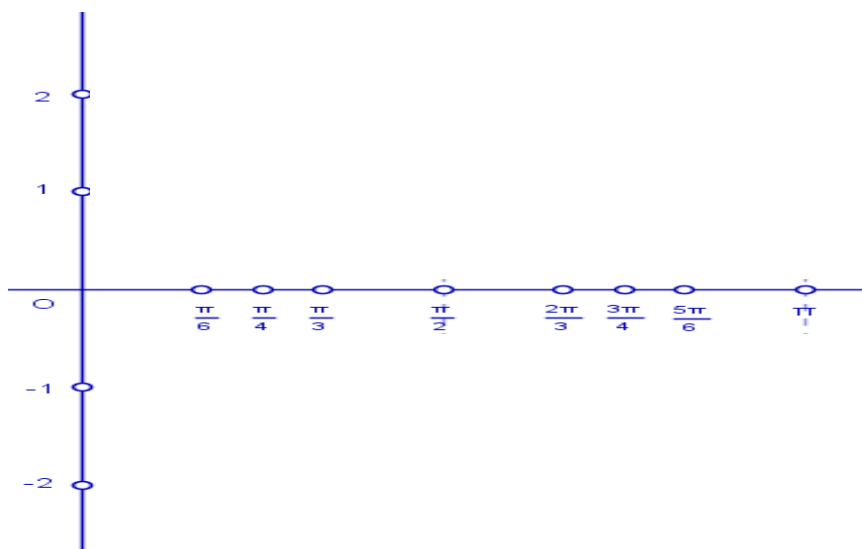
กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **(ข)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cotx									

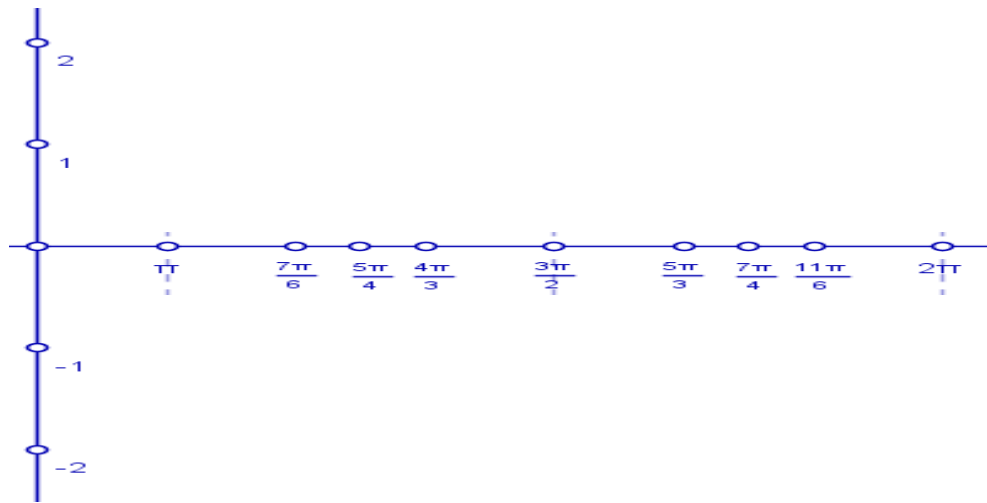
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



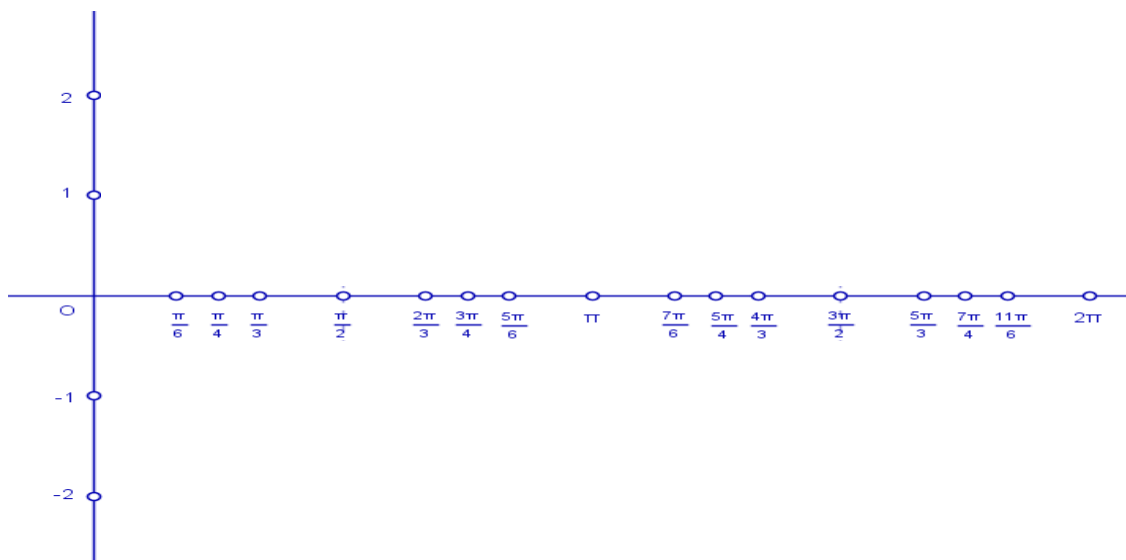
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cot x$									

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม

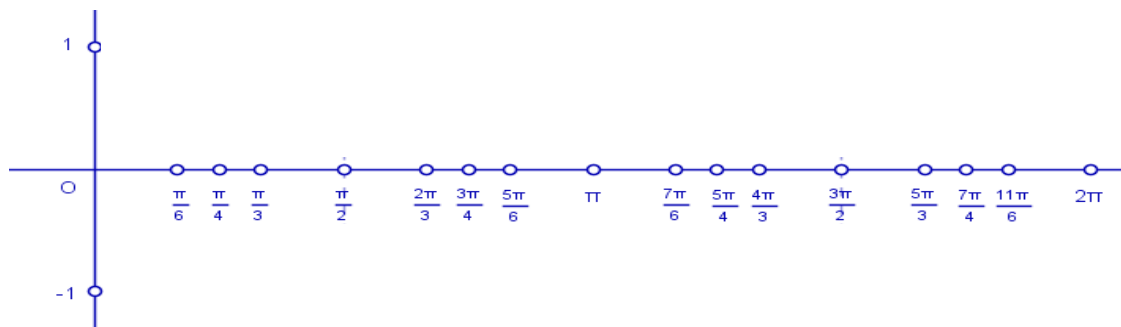


ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม





ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

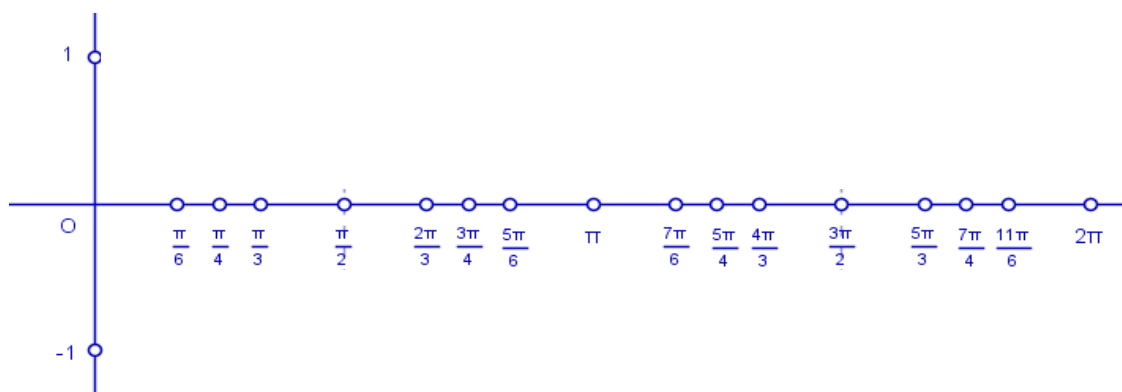
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.2) จงวาดกราฟของ  $y = -2\sin x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$-2 \cdot \sin(x)$									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$-2 \cdot \sin(x)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

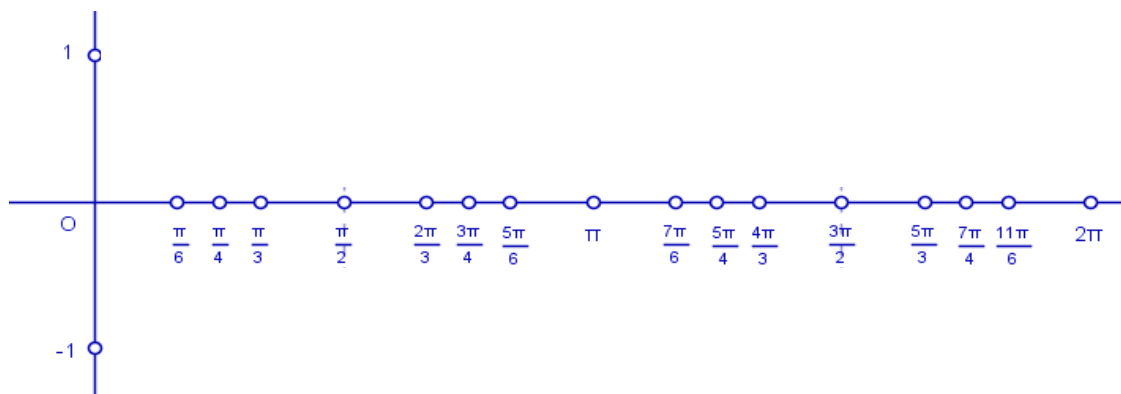
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.3) จงวาดกราฟของ  $y = 3\cos x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$3 \cdot \cos(x)$									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$3 \cdot \cos(x)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

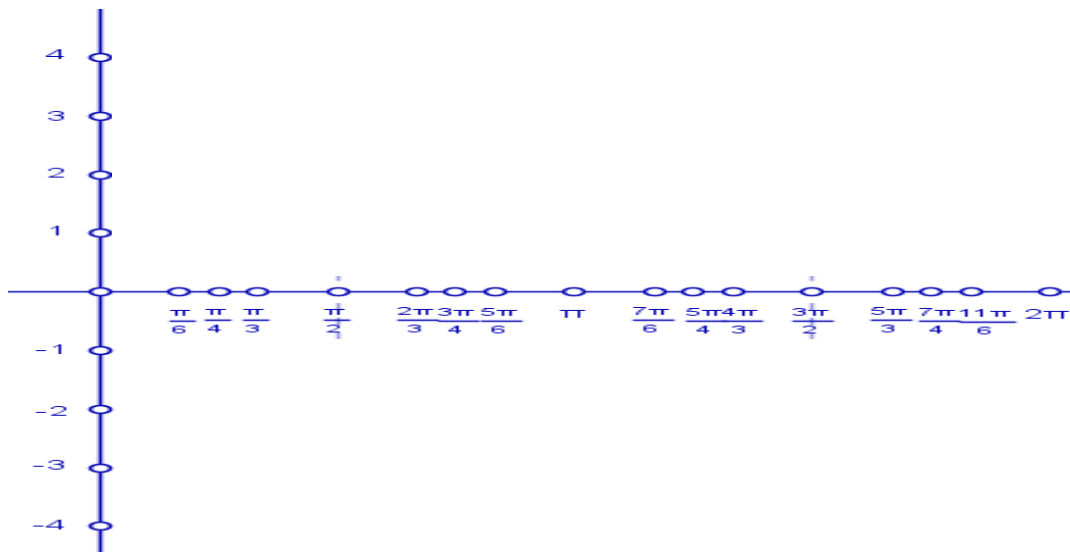
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.4) จงวาดกราฟของ  $y = 2\sec x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$2 \cdot \sec(x)$									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$2 \cdot \sec(x)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



- มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....
- ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)
- ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)
- โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....
- เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....
- คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....
- แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2. ให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์สร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ พร้อมทั้งตอบคำถาม

2.1)  $y = 3\sin x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.3)  $y = -\cot x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.5)  $y = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.7)  $y = 3\sec x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.2)  $y = 2\tan x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.4)  $y = 2\sec x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.6)  $y = -4\sin x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.8)  $y = 2\cot x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. ให้นักเรียนสรุปข้อ 2 ให้อยู่ในรูปทั่วไป

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตอนที่ 3 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

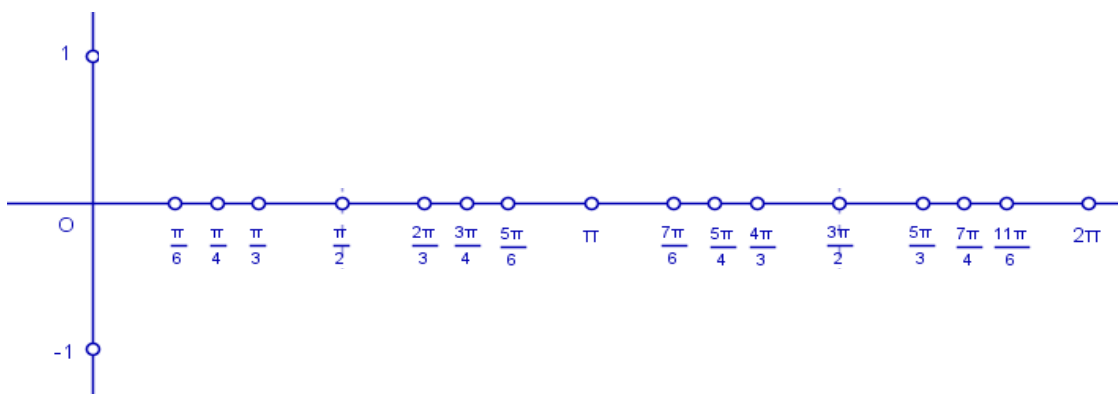
1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตอนที 3 โดยให้นักเรียนทำการสำรวจกราฟและวาดกราฟพร้อมทั้งตอบคำถามต่อไปนี้

1.1) จงวาดกราฟของ  $y = \sin 2x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
2x									
sin(2x)									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
2x									
sin(2x)									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

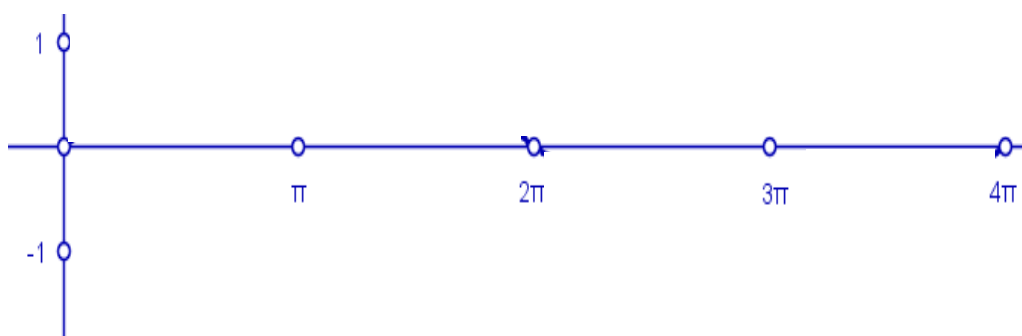
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.2) จงวาดกราฟของ  $y = \sin \frac{x}{2}$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\frac{x}{2}$									
$\sin(\frac{x}{2})$									

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\frac{x}{2}$									
$\sin(\frac{x}{2})$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

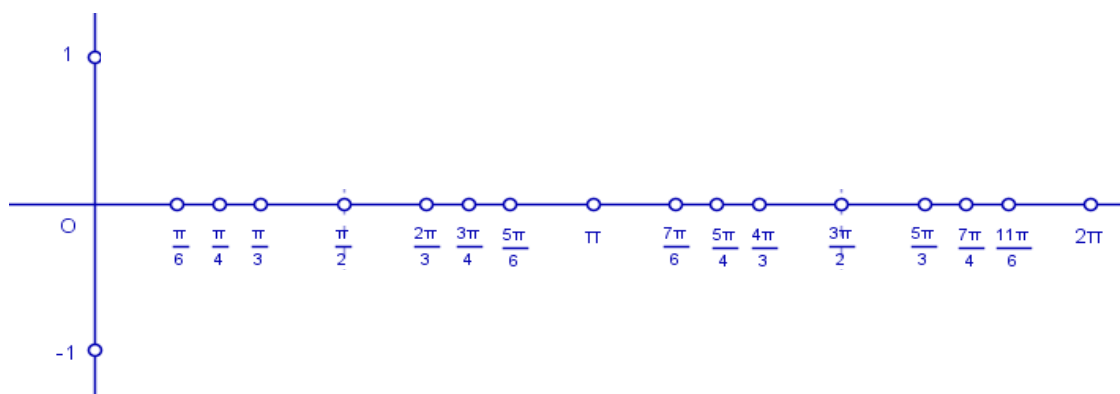
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.3) จงวาดกราฟของ  $y = 3\cos 2x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
2x									
3cos 2x									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
2x									
3cos 2x									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

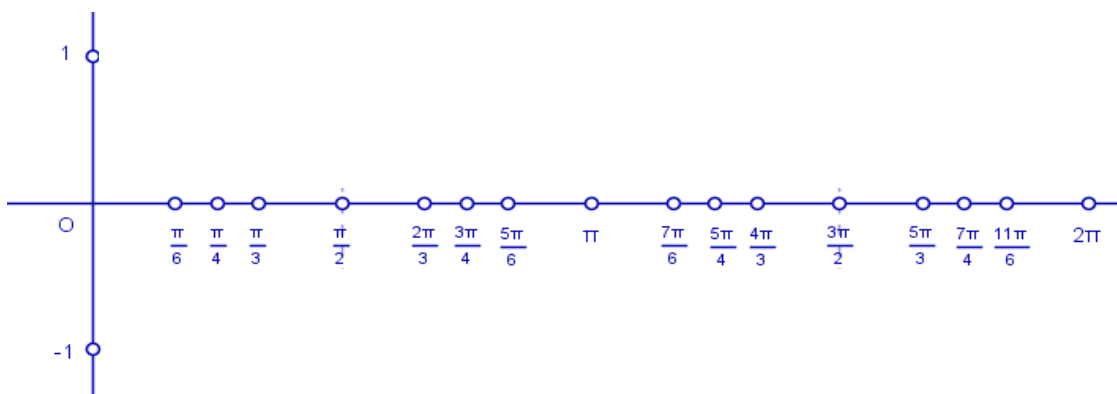
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.4) จงวาดกราฟของ  $y = -2\sin 3x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
3x									
$-2\sin 3x$									

X	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
3x									
$-2\sin 3x$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2. ให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์สร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ พร้อมทั้งตอบคำถาม

$$2.1) y = \cos \frac{x}{2} \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

$$2.3) y = \tan \frac{x}{2} \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

$$2.5) y = \sin (-4x) \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

$$2.2) y = 6\cos \pi x \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

$$2.4) y = \cot (-x) \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

$$2.6) y = \frac{1}{3} \cos(2x) \text{ โดยที่ } 0 \leq x \leq 2\pi$$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. ให้นักเรียนสรุปข้อ 2 ให้อยู่ในรูปทั่วไป

.....

.....

.....

.....

.....

ตอนที่ 4 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot x + k)$  เมื่อ  $b, k$  เป็นจำนวนจริง และไม่เท่ากับ 0

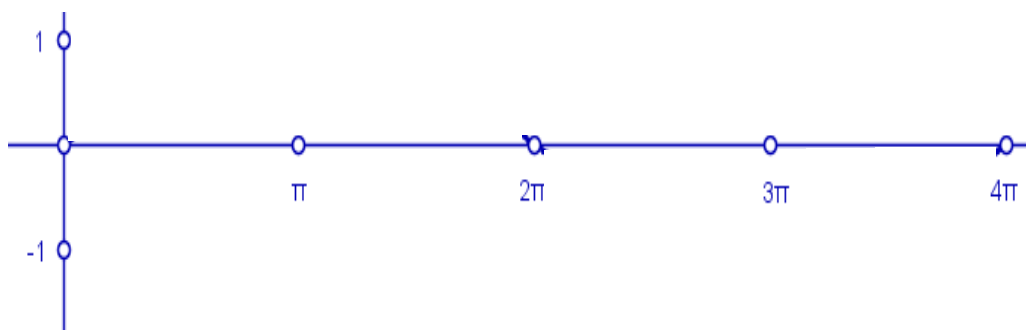
1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตอนที่ 4 โดยให้นักเรียนทำการสำรวจกราฟและวาดกราฟพร้อมทั้งตอบคำถามต่อไปนี้

1.1) จงวาดกราฟของ  $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$x + \frac{\pi}{2}$									
$\sin(x + \frac{\pi}{2})$									

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$x + \frac{\pi}{2}$									
$\sin(x + \frac{\pi}{2})$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

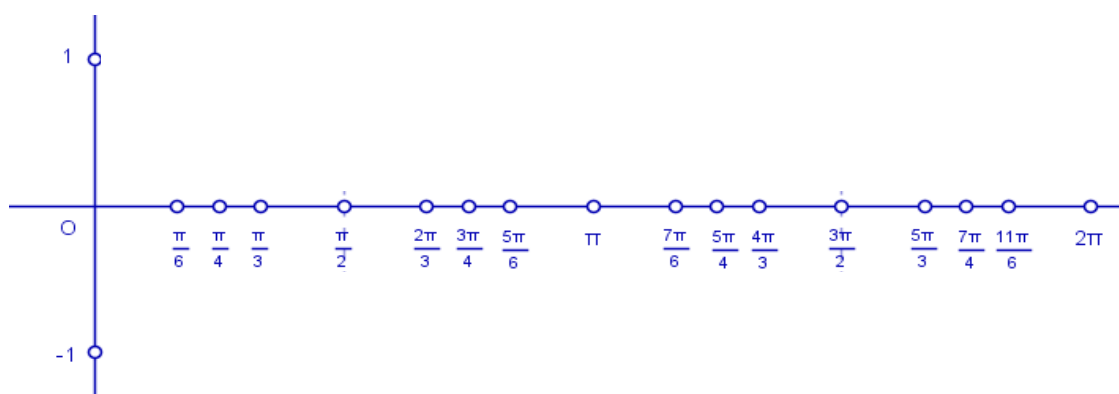
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.2) จงวาดกราฟของ  $y = \tan(x - \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$x - \frac{\pi}{2}$									
$\tan(x - \frac{\pi}{2})$									

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$x - \frac{\pi}{2}$									
$\tan(x - \frac{\pi}{2})$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

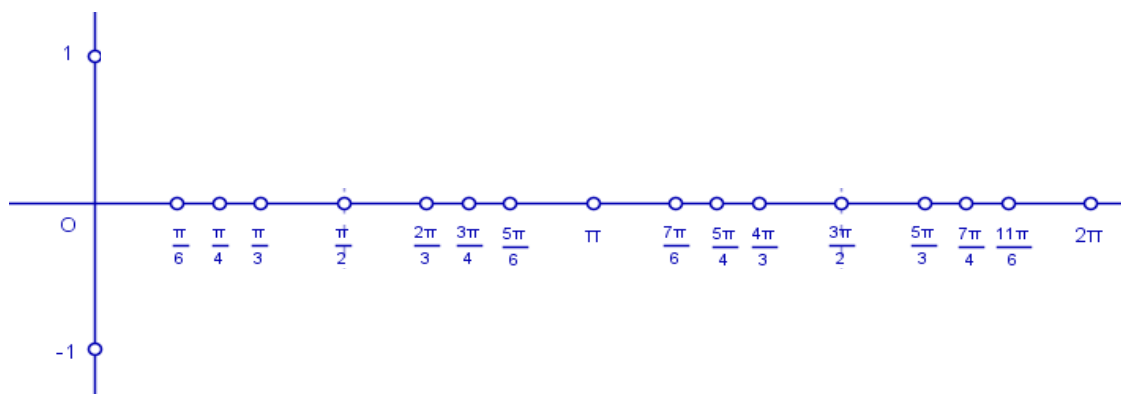
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.3) จงวาดกราฟของ  $y = 3\sin(2x + \pi)$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$2x + \pi$									
$3\sin(2x + \pi)$									

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$2x + \pi$									
$3\sin(2x + \pi)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

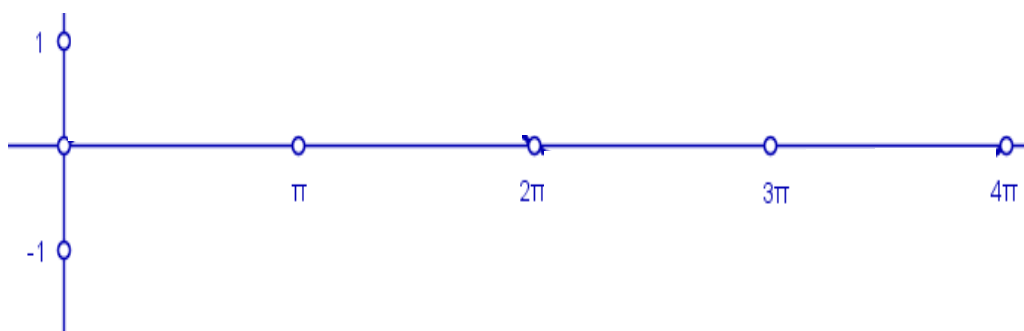
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.4) จงวาดกราฟของ  $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$x + \frac{\pi}{2}$									
$\cos(x + \frac{\pi}{2})$									

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$x + \frac{\pi}{2}$									
$\cos(x + \frac{\pi}{2})$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2. ให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์สร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ พร้อมทั้งตอบคำถาม

2.1)  $y = 4\sin(x - \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$     2.2)  $y = 4\cos(3x + \pi)$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....
ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....
โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....	โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....
เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....	เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....
คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....	คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....	แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.3)  $y = \tan(x + \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$     2.4)  $y = \operatorname{cosec}(x + \frac{\pi}{2})$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....
ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....
โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....	โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....
เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....	เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....
คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....	คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....	แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

2.5)  $y = \sec(2x + 3\pi)$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$     2.6)  $y = 2\cos(\frac{1}{3}x + 2\pi)$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ .....
ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....	ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ .....
โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....	โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....
เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....	เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....
คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....	คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....	แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

3. ให้นักเรียนสรุปข้อ 2 ให้อยู่ในรูปทั่วไป

.....

.....

.....

.....

ตอนที่ 5 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0$

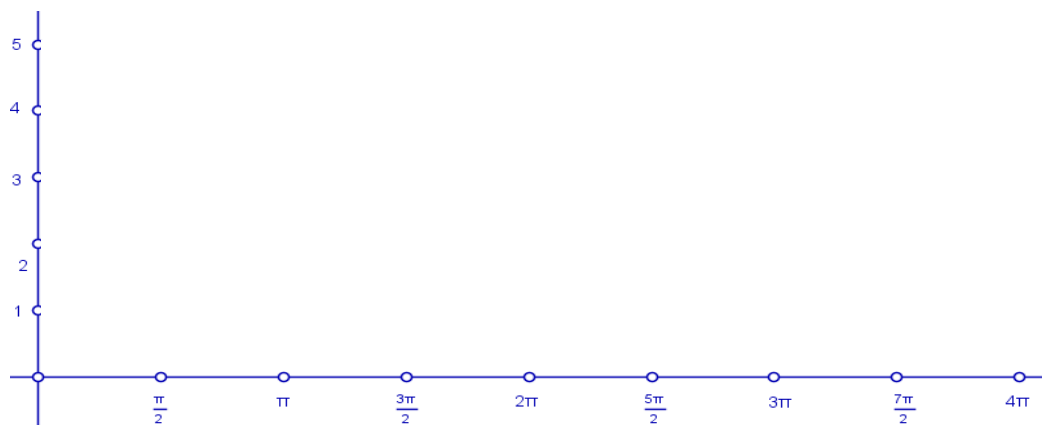
1. ให้นักเรียนทำกิจกรรมกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตอนที 5 โดยให้นักเรียนทำการสำรวจกราฟและวาดกราฟพร้อมทั้งตอบคำถามต่อไปนี้

1.1) จงวาดกราฟของ  $y = \sin(x) + 4$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

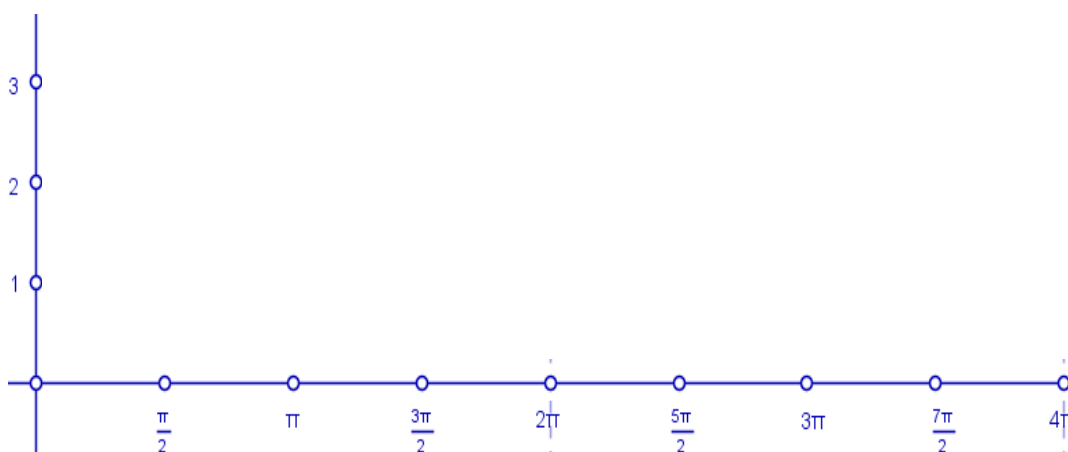
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.2) จงวาดกราฟของ  $y = \cos(x) + 2$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cos(x)									
cos(x) + 2									

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
cos(x)									
cos(x) + 2									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

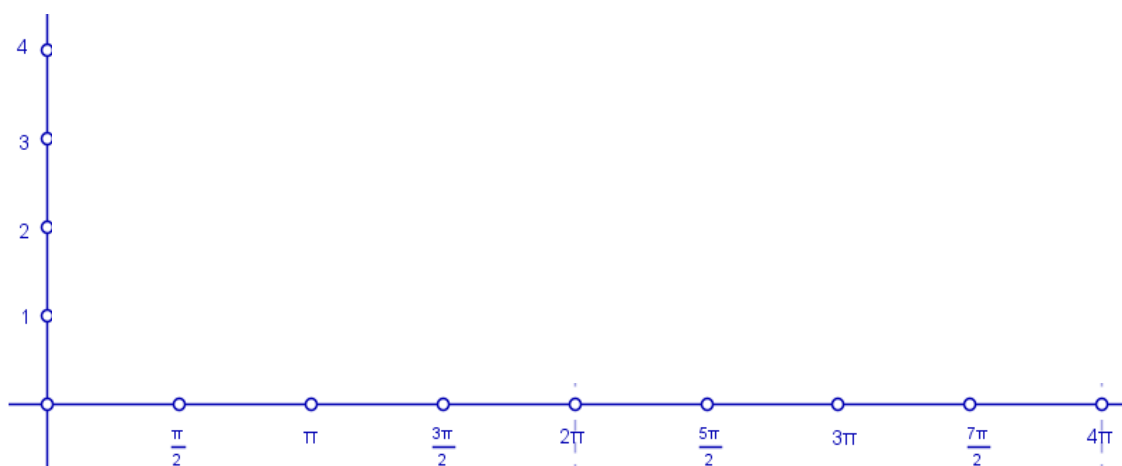
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.3) จงวาดกราฟของ  $y = 3 - \cos x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$-\cos(x)$									
$3 - \cos(x)$									

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$-\cos(x)$									
$3 - \cos(x)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

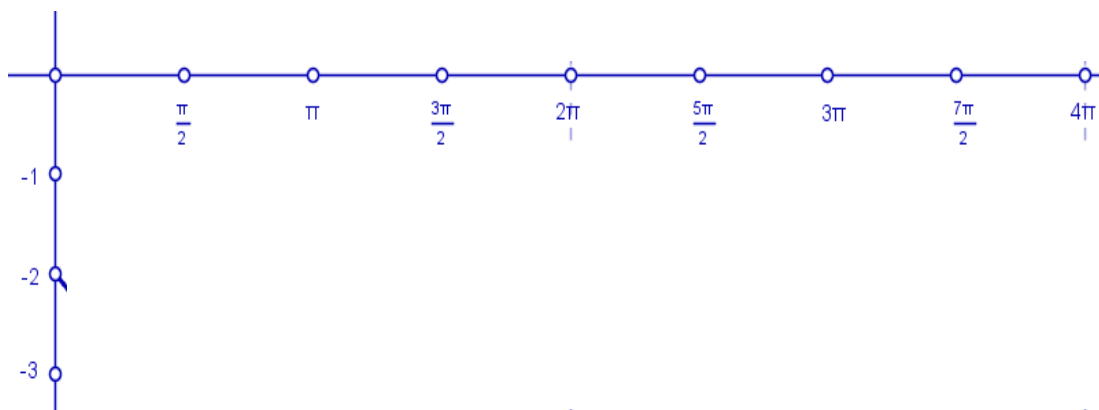
แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

1.4) จงวาดกราฟของ  $y = -2 - \sin x$  โดยที่  $0 \leq x \leq 2\pi$  (ค่าของ  $\pi \approx 3.1416$ )

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$-\sin(x)$									
$-2 - \sin(x)$									

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$-\sin(x)$									
$-2 - \sin(x)$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ .....

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

**ภาคผนวก จ**

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**

## แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบในแต่ละข้อ โดยเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวและแสดงวิธีทำลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. ในแต่ละข้อคำถามจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียง 1 คำตอบเท่านั้น
5. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 100 นาที

ชื่อ..... ชั้น ..... เลขที่ .....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้  
โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

**ตอนที่ 1** จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

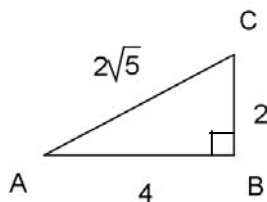
ก.  $\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ข.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ค.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}$

ง.  $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

2.



จากรูป  $\sin A$  มีค่าตรงกับข้อใด

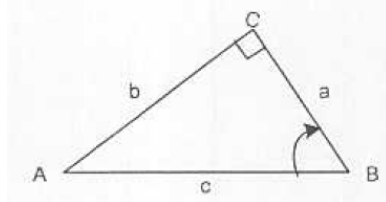
ก.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ข.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ค.  $\frac{1}{2}$

ง.  $\sqrt{5}$

3. จากรูป  $\sin B$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{a}{c}$

ข.  $\frac{b}{c}$

ค.  $\frac{a}{b}$

ง.  $\frac{c}{a}$

4. กำหนดให้  $\cot A = \frac{4}{3}$  ค่าของ

$\tan A$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค.  $\frac{3}{4}$

ง.  $\frac{4}{3}$

5. กำหนดให้  $\tan A = \sqrt{3}$  ค่าของ

$\cot A$  มีค่าตรงกับข้อใด

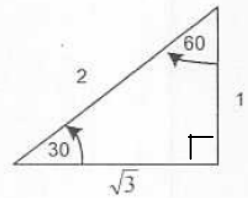
ก. 3

ข.  $\sqrt{3}$

ค.  $\frac{1}{3}$

ง.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. จากรูป  $\sin 60^\circ$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{1}{2}$

ข. 2

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ง.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด

ก.  $1^\circ = 60'$

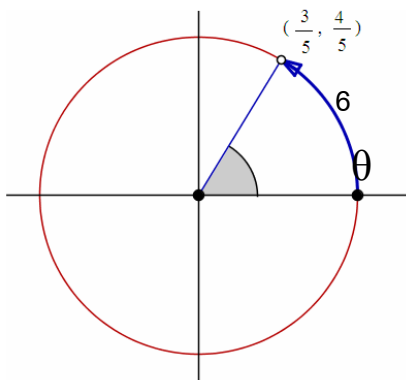
ข.  $1^\circ = 60''$

ค.  $360^\circ = 2\pi$  เรเดียน

ง.  $180^\circ = \pi$  เรเดียน



15. กำหนดให้  $p(\theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  ดังรูป



พิกัดของจุด  $p(-\theta + 3\pi)$  ตรงกับข้อใด

- ก.  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$       ข.  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$   
 ค.  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$       ง.  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

16. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ตรงกับข้อใด

- ก. โดเมน คือ  $\mathbb{R}$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$   
 ข. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^+$  และ เรนจ์ คือ  $[0, 1]$   
 ค. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^-$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, \infty)$   
 ง. โดเมนคือ จำนวนเต็ม และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$

17. ข้อใดต่อไปนี้ไม่มีค่าเท่ากับ 1

- ก.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ข.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ค.  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ง.  $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$

18. ค่าของ

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$$

ตรงกับข้อใด

- ก. -1      ข. 1  
 ค.  $-\frac{1}{2}$       ง.  $\frac{1}{2}$

19. ถ้า  $\cos \theta = -1$  และ  $-4\pi < \theta < 0$

แล้ว  $\theta$  คือจำนวนในข้อใด

- ก.  $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$       ข.  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$   
 ค.  $-\pi, -3\pi$       ง.  $-2\pi, -4\pi$

20. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  
 $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  
 $\cos(-\theta) = -\cos \theta$   
 ค.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  
 $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ง.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ

21. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  
 $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  
 $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ค.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  
 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$   
 ง.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  
 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

22.  $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  มีค่าเท่าไร

- ก.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ข.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ค.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ง.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. ถ้า  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\sin \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{5}{13}$                       ข.  $\frac{12}{13}$

ค.  $-\frac{5}{13}$                     ง.  $-\frac{12}{13}$

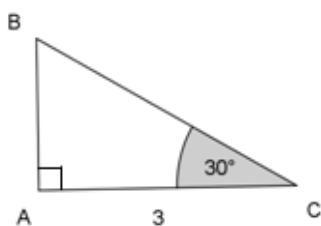
24. ถ้า  $\cos \theta = \frac{5}{6}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\operatorname{cosec} \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{6}{5}$                           ข.  $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

ค.  $-\frac{6}{5}$                          ง.  $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$

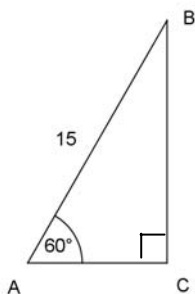
25. จากรูป AB ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                              ง.  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

26. จากรูป BC ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{15\sqrt{3}}{3}$                          ง.  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

27. รูปสามเหลี่ยม ABC ถ้ามี  $\hat{A}BC$

เป็นมุมฉาก  $\overline{AB}$  ยาว 16 หน่วย และ

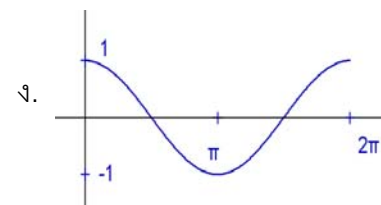
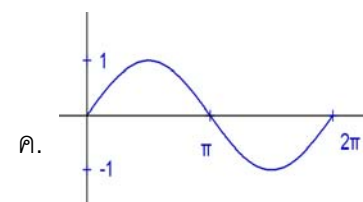
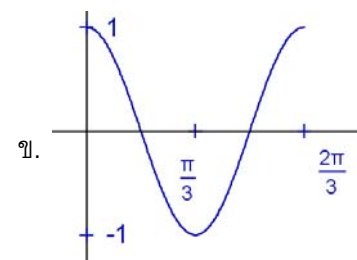
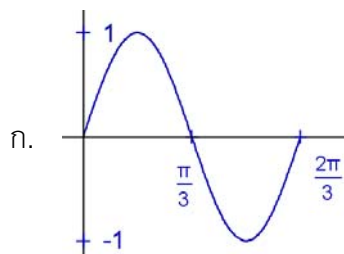
$\hat{B}CA = 30^\circ$  แล้ว  $\overline{BC}$  ยาวเท่าใด

ก.  $16\sqrt{2}$  หน่วย              ข.  $16\sqrt{3}$  หน่วย

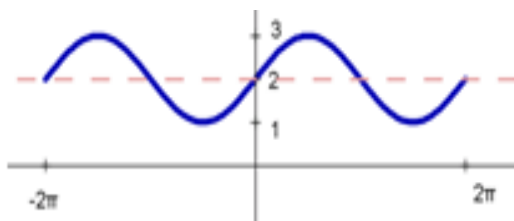
ค.  $\frac{16\sqrt{2}}{2}$  หน่วย                ง.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$  หน่วย

28. กราฟของ  $y = \sin 3x$  เมื่อ

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  หรือ  $0 \leq X \leq 2\pi$  คือข้อใด



29. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



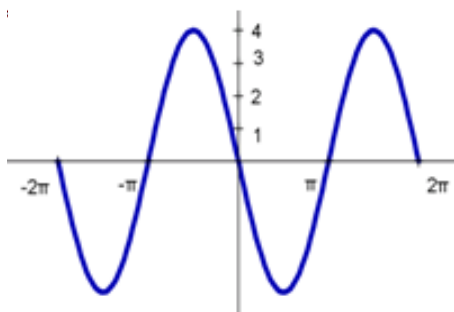
ก.  $y = \sin 2X$

ข.  $y = \cos 2X$

ค.  $y = 2 + \sin X$

ง.  $y = 2 + \cos X$

30. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



ก.  $y = 4\cos X$

ข.  $y = 4\sin X$

ค.  $y = -4\cos X$

ง.  $y = -4\sin X$

---

สำหรับทด



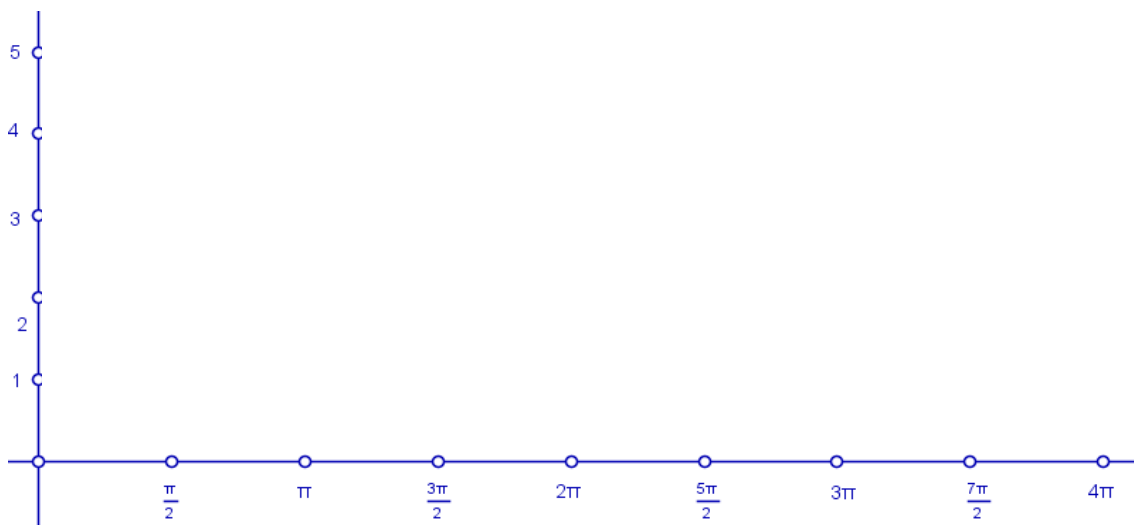


4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมน เรนจ์ คาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน  
 $y = \sin x + 4$  เมื่อ  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใดจงอธิบาย

5.1) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ..... เพราะ.....  
 .....  
 .....

5.2) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ..... เพราะ.....  
 .....  
 .....

5.3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ..... เพราะ.....  
 .....  
 .....

5.4) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ..... เพราะ.....  
 .....  
 .....

5.5) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ ..... เพราะ.....  
 .....  
 .....

---

ไม่มีสิ่งไหนจะหนักเกิน ไม่มีคำว่าทำไม่ได้

ขอให้โชคดีนะคะ

### ภาคผนวก ช

เฉลยบางส่วนของชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.1











ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 ทบทวนส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

- |             |   |  |
|-------------|---|--|
| 1.1 คำสั่ง  |    | ใช้ในการสร้างจุดบนเส้นตรง                              |
| 1.2 คำสั่ง  |    | ใช้ในการสร้างเส้นตรงผ่านจุดสองจุด                      |
| 1.3 คำสั่ง  |   | ใช้ในการสร้างส่วนของเส้นตรง                            |
| 1.4 คำสั่ง  |  | ใช้ในการสร้างรูปวงกลม                                  |
| 1.5 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ) |
| 1.6 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด                              |
| 1.7 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น                     |
| 1.8 คำสั่ง  |  | ใช้ในการวัดมุมระหว่างจุด 3 จุด                         |
| 1.9 คำสั่ง  |  | ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด                             |
| 1.10 คำสั่ง |  | ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ                         |

2. จากการสร้างให้นักเรียนบอกนิยามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเท่ากับ 90 องศา

## 3. กำหนดให้ มุม A เป็นมุมหลัก


3.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า ด้านประชิดของมุม A3.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม A3.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

## 4. กำหนดให้มุม C เป็นมุมหลัก

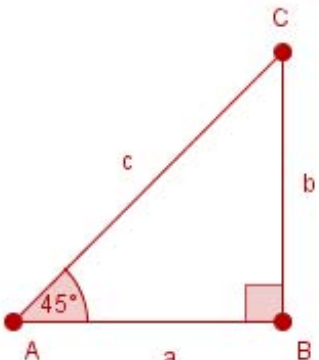
5.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม C5.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า ด้านประชิดของมุม C5.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

5. จากรูปข้างบนนอกจากสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว ส่วนประกอบในข้อ 3-5 สามารถใช้กับสามเหลี่ยมอื่นๆ (ได้/ไม่ได้) ไม่ได้ เพราะ ไม่สามารถนำไปเขียนให้อยู่ในรูปอัตราส่วนตรีโกณมิติได้

## ตอนที่ 2 ทบทวนอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนใช้มุมของ  $a$ ,  $b$  ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  
2. หากนักเรียนต้องการกำหนดระยะทางให้คลิกขวาที่มุมของ  $a$  และ  $b$




ความยาว  $a = -6$

ความยาว  $b = 6$

ความยาว  $c = 8.48528$

มุม  $\hat{C}BA = 90$

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนใช้คำสั่ง  ในการทำการศึกษา2. ให้นักเรียนใช้มุม  $a$  และ  $b$  ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของเส้นตรง เพื่อทำการศึกษากิจกรรม

3. จากชุดกิจกรรมข้างบนและจากความรู้เดิมของนักเรียน จะได้ว่า (วัดจากมุม A เป็นหลักก่อน)

$$3.1 \text{ อัตราส่วนไซน์ } A \quad (\sin A) = \frac{b}{c}$$

$$3.2 \text{ อัตราส่วนโคไซน์ } A \quad (\cos A) = \frac{a}{c}$$

$$3.3 \text{ อัตราส่วนแทนเจนต์ } A \quad (\tan A) = \frac{b}{a}$$

4. ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนของไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยกำหนดให้ความเป็น a, b, c ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ C ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า

$$4.1 \sin A = \frac{b}{c}$$

$$4.4 \sin C = \frac{a}{c}$$

$$4.2 \cos A = \frac{a}{c}$$

$$4.5 \cos C = \frac{b}{c}$$

$$4.3 \tan A = \frac{b}{a}$$

$$4.6 \tan C = \frac{a}{b}$$

5. ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (ตามที่นักเรียนต้องการ) แล้วหาอัตราส่วนของ ไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ B ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า (ในที่นี้ a = 3, b = 4, c = 5)

$$5.1 \sin A = \frac{4}{5}$$

$$5.4 \sin C = \frac{3}{5}$$

$$5.2 \cos A = \frac{3}{5}$$

$$4.5 \cos C = \frac{4}{5}$$

$$5.3 \tan A = \frac{4}{3}$$

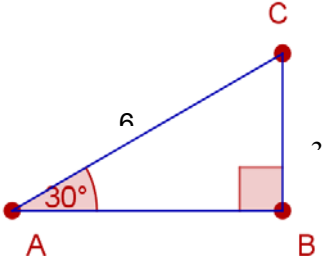
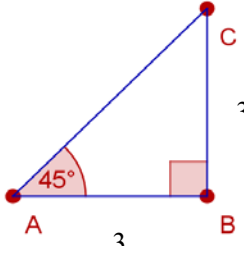
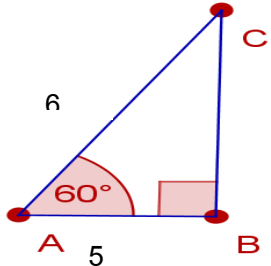
$$5.6 \tan C = \frac{3}{4}$$

6. จากการสำรวจในข้อที่ 4-6 นักเรียนสามารถตั้งข้อคาดการณ์ได้ว่า

.....  $\sin A = \cos C$  .....

.....  $\cos A = \sin C$  .....

7. กำหนด  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่  $B$  มีขนาดตามที่กำหนดให้ในตารางต่อไปนี้ให้นักเรียนหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปที่กำหนดให้แล้วเขียนค่าของอัตราส่วนเติมในตาราง

$\triangle ABC$	ขนาดของ $\hat{A}$	ค่าของอัตราส่วน		
		$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
	$30^\circ$	$\frac{5}{6}$	$\frac{x}{6}$	$\frac{5}{x}$
	$45^\circ$	$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{3}$
	$60^\circ$	$\frac{x}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{x}{5}$

8. จากการสำรวจในข้อ 7 นักเรียนสรุปได้ว่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	ขนาดของมุม		
	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 2.1

### วงกลมหนึ่งหน่วย

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 วงกลมหนึ่งหน่วย

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนเข้ากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเข้าไปที่หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วคลิกเลือกกิจกรรมที่ 2.1
2. ให้นักเรียนสร้างรูปวงกลมจากจุดที่กำหนดให้โดยมีรัศมีเท่าใดก็ได้จำนวน 3 รูป โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้


2.1 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ)

2.2 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด


2.3 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น

2.4 คำสั่ง  ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ

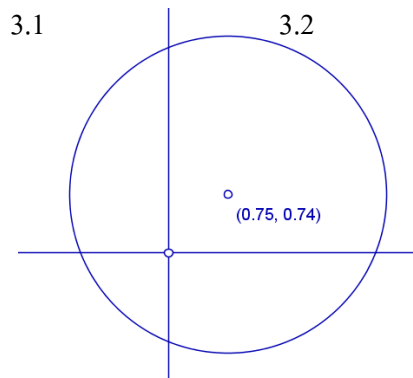
2.5 คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด

2.6 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างรูปวงกลม

2.7 คำสั่ง  ใช้ในการแสดงชื่อของวัตถุ

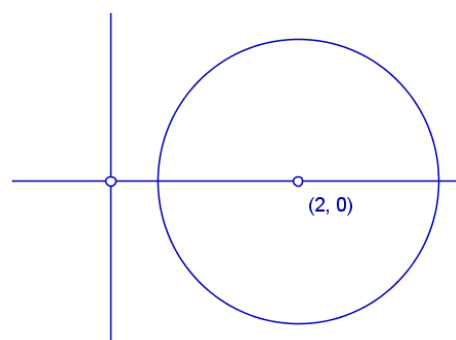
2.8 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างจุดตัด

3. ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่นักเรียนสร้างลงในช่องว่างพร้อมทั้งเขียนสมการวงกลม ด้วย



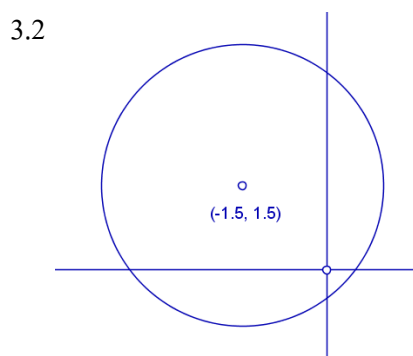
รัศมียาว 2 หน่วย

$$\text{สมการ } (x-0.75)^2 + (y-0.74)^2 = 4$$



รัศมียาว 1.5 หน่วย

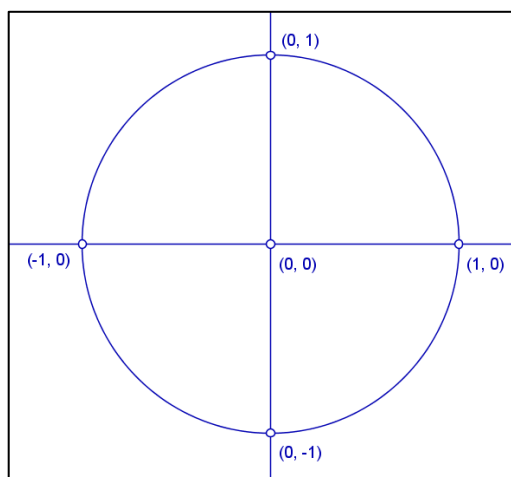
$$\text{สมการ } (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2.25$$



รัศมียาว 2.5 หน่วย


$$\text{สมการ } (x+1.5)^2 + (y-1.5)^2 = 6.25$$

4. จากการสร้างรูปวงกลมในข้อ 3 นักเรียนลองตั้งข้อคาดการณ์ซึ่งว่านิยามของวงกลมหนึ่งหน่วยคืออะไร มีสมการเป็นอย่างไร และสร้างรูปวงกลมหนึ่งหน่วยพร้อมทั้งบอกตำแหน่งของจุดตัด

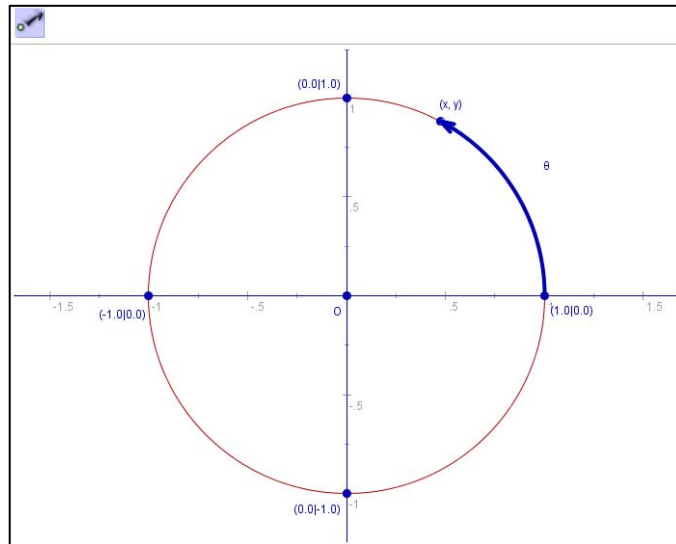


วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งวงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$  และมีความยาวส่วนโค้งวงกลมเท่ากับ  $2\pi r$  มีจุดตัดบนแกน X และแกน Y ทั้งหมด 4 จุด คือ  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  และ  $(0, -1)$

## ตอนที่ 2

เมื่อนักเรียนตอบคำถามในข้อที่ 4 เสร็จแล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมวงกลมหนึ่งหน่วย โดยเลือกที่หน้าถัดไปของกิจกรรม โดยใช้คำสั่ง  ในการทำการสำรวจกิจกรรม

5.1 จากการศึกษากิจกรรมดังภาพข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



เราเรียก  $\theta$  ว่า ความยาวส่วนโค้งของวงกลม วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา  $\theta > 0$

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า จุดปลายส่วนโค้งหรือจุดสิ้นสุด

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ  $2\pi r$

5.1.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น  $\frac{1}{4}$  ส่วนของวงกลม

$$\text{จะได้ความยาวของส่วนโค้ง } \theta \text{ เท่ากับ } \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

5.1.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{2}{4}$  ส่วนของวงกลม

$$\text{จะได้ความยาวของส่วนโค้ง } \theta \text{ เท่ากับ } \frac{2}{4} \times 2\pi = \pi$$

5.1.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น  $\frac{3}{4}$  ส่วนของวงกลม

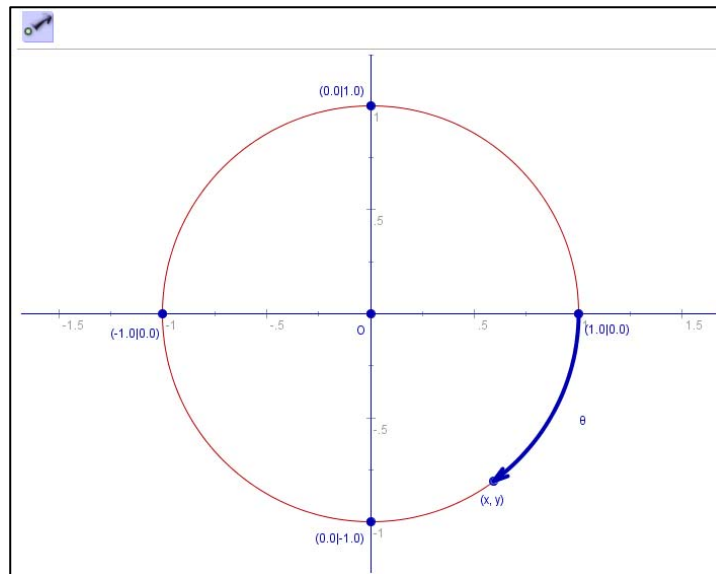
$$\text{จะได้ความยาวของส่วนโค้ง } \theta \text{ เท่ากับ } \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

5.1.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{4}{4}$  ส่วนของวงกลม

$$\text{จะได้ความยาวของส่วนโค้ง } \theta \text{ เท่ากับ } \frac{4}{4} \times 2\pi = 2\pi$$

5.1.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี 4 จุด

5.2 จากการศึกษากิจกรรมดังภาพข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



เราเรียก  $\theta$  ว่า ความยาวส่วนโค้งวงกลม วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา  $\theta < 0$

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า จุดปลายส่วนโค้งหรือจุดสิ้นสุด

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ  $-2\pi r$

5.2.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น  $\frac{1}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{1}{4} \times (-2\pi) = -\frac{\pi}{2}$

5.2.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{2}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{2}{4} \times (-2\pi) = -\pi$

5.2.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น  $\frac{3}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{3}{4} \times (-2\pi) = -\frac{3\pi}{2}$

5.2.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{4}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{4}{4} \times (-2\pi) = -2\pi$

5.2.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี 4 จุด

6. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 5 นักเรียนสรุปอะไรได้บ้าง (ตอบเป็นข้อๆ)

1. วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย มีสมการคือ  $x^2 + y^2 = 1$
2. ถ้า  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา  
 ถ้า  $\theta < 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา  
 ถ้า  $\theta = 0$  จุดปลายส่วนโค้งคือจุด  $(1, 0)$
3. หาจุด  $(x, y)$  ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $|\theta|$  หน่วยได้เสมอ ไม่ว่า  $\theta$  จะเป็นจำนวนเท่าใดก็ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

### เฉลยใบกิจกรรมที่ 3

#### ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 3 เรื่องฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. ให้นักเรียนทำการศึกษากาณนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย
2. จากข้อ 1 ให้นักเรียนสำรวจกิจกรรมแล้วเติมคำตอบลงในตารางต่อไปนี้

หน่วยการวัดมุม		พิกัดจุด	
เรเดียน	องศา	x	y
0	0°	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	180°	-1	0
$\frac{4\pi}{3}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	0	-1
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$2\pi$	360°	1	0

หมายเหตุ : ค่าของ  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$  ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$

3. จากความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 จะเห็นว่าค่าของความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จะสามารถกำหนดจุดปลายของส่วนโค้งได้เพียง 1 จุดเท่านั้น นักเรียนคิดว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด จากการทำกิจกรรมในข้อ 2 คิดว่าเป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อกำหนด  $\theta$  เป็นความยาวส่วนโค้งของจำนวนจริงใดๆ จะมีพิกัดของจุด  $x$  และ  $y$  เพียงค่าเดียวเสมอ

4. จากข้อมูลในข้อ 1- 3 ที่นักเรียนได้ตอบให้นักเรียนเขียนนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ตามความเข้าใจของนักเรียน

**บทนิยาม** ฟังก์ชันไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $\text{sine} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(\theta) = (x, y)\}$$

**บทนิยาม** ฟังก์ชันโคไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $\text{cosine} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{cosine} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\theta) = (x, y)\}$$

5. เมื่อนักเรียนได้บทนิยามในข้อที่ 4 แล้ว ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

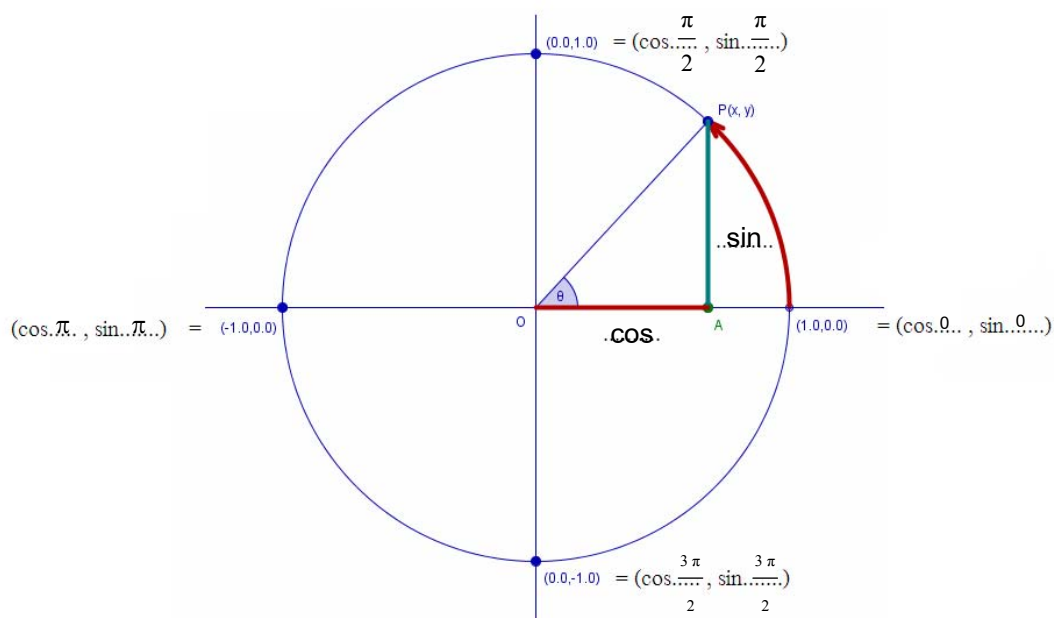
5.1 โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

5.2 โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

6. ให้นักเรียนตอบคำถามลงในวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



เนื่องจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย คือ  $x^2 + y^2 = 1$  และจากรูปข้างบนจะเห็นว่า  $y = \sin(\theta)$ ,  $x = \cos(\theta)$  ดังนั้นส่งผลให้  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

7. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางข้างล่างนี้

มุม $\theta$ ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	ไม่นิยาม	-1
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ไม่นิยาม	0

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 4.1

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ ในกิจกรรมนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

**กรณีที่ 1** ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรม 4.1 ในหน่วยที่ 4 แล้วตอบคำถามลงในใบงาน
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้งของจุดปลายส่วนโค้งต่อไปนี้ (ภายใน 1 รอบ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)

2.1 พิกัดจุดปลาย  $p(1, 0)$

$$\theta = 0$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

2.2 พิกัดจุดปลาย  $p(0, 1)$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2.3 พิกัดจุดปลาย  $p(-1, 0)$

$$\theta = \pi$$

$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos(\pi) = -1$$

2.4 พิกัดจุดปลาย  $(0, -1)$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

2.5 ให้  $\theta = -\frac{\pi}{2}$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(0, -1)$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2.6 ให้  $\theta = -\pi$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(-1, 0)$

$$\sin(-\pi) = 0$$

$$\cos(-\pi) = -1$$

2.7 ให้  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(0, 1)$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

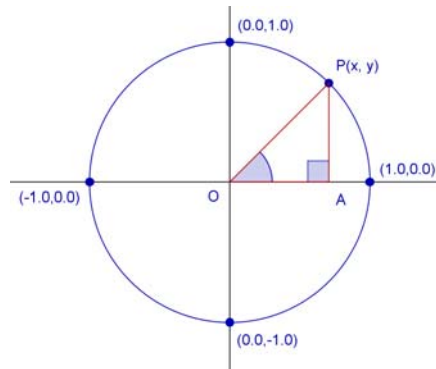
2.8 ให้  $\theta = -2\pi$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(1, 0)$

$$\sin(-2\pi) = 0$$

$$\cos(-2\pi) = 1$$

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 แบ่งวงกลมออกเป็น 8 ส่วน จะได้ดังรูป



เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วให้กำหนดจุด  $P(x, y)$  เป็นจุดตัดที่อยู่บนวงกลม และให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

3.1 ให้นักเรียนสร้างรูป  $\triangle$  มุมฉาก PAO โดยมี  $\hat{A}$  เป็นมุมฉาก

จะได้ว่า  $m(\hat{AOP}) = \frac{\pi}{4}$  เรเดียน หรือ  $45^\circ$  องศา

จะเห็นว่า  $\triangle$  PAO เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $OA = PA$

นั่นคือ  $x = y$

3.2 ให้นักเรียนหาจุดปลายส่วนโค้ง

$$\text{จาก } OA^2 + PA^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

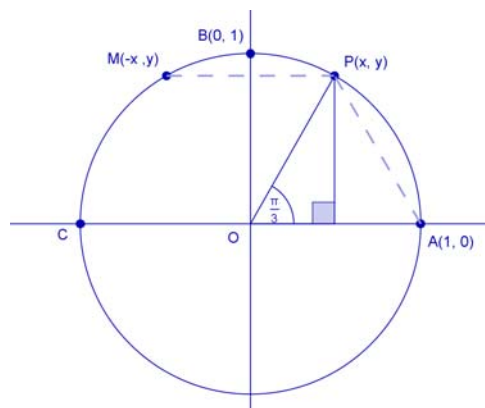
แต่  $(x, y)$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{ดังนั้น } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{4}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4} \text{ เมื่อ } n \text{ คือ จำนวนเต็มบวก}$$

4. ให้นักเรียนใช้ความรู้เดิมในชั้น ม. 1 สร้างมุม 60 องศา โดยที่ให้  $O$  ากเท่ากับ  $60^\circ$



เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วให้กำหนดจุด  $P(x, y)$  เป็นจุดตัดที่เกิดจากการสร้างมุม  $60^\circ$  เป็นจุดตัดที่อยู่บนวงกลม และให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

4.1 ให้นักเรียนหาจุดปลายส่วนโค้ง (ใช้แนวคิดเดียวกันกับในหน่วยที่ 2)

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด  $PM$  ยาวเท่ากับระยะทางระหว่างจุด  $PA$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad PM &= PA \\ \sqrt{(x - (-x))^2 + (y - y)^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} \\ \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2(2x - 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $P(x, y)$  เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1

ดังนั้น  $x$  และ  $y$  จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{จะได้} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

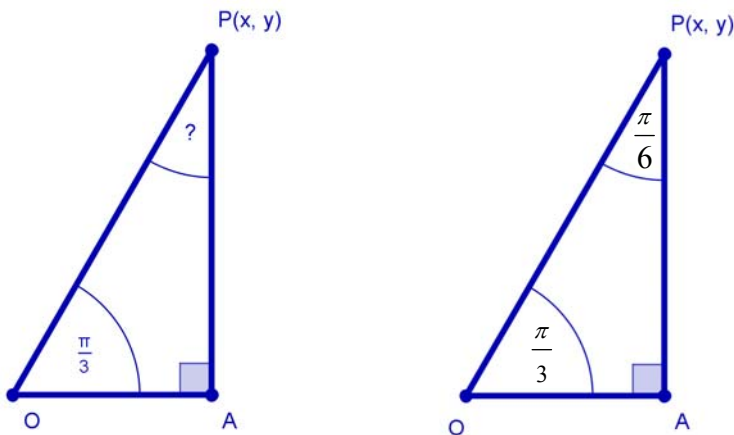
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{3}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

ในรูป  $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$  และ  $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

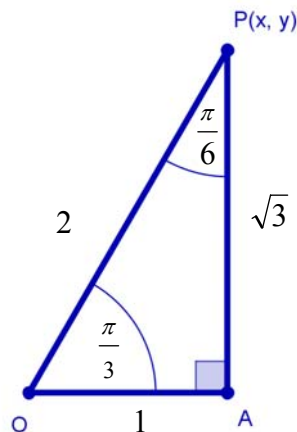
5. จากข้อ 4 จะได้ว่าจากการหา  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$  ในกรณีที่ 2 เราสามารถนำมาสู่การหาค่า  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$  ได้โดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขอให้นักเรียนสังเกต รูป  $\triangle PAO$  ในข้อ 4 จะพบว่ามุมแต่ละมุมเท่ากับ  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  และ  $90^\circ$  มีความยาวส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  และ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน ตามลำดับ และมุม  $OPA$  เป็นส่วนหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเดียวกัน ดังรูป



จากข้อ 4 จะได้ว่า  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น อัตราส่วนดังกล่าวจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แบบหนึ่ง ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังกล่าวใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## แบบฝึกหัดเสริม

1. จงหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1)  $3\pi$

$$p(3\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(3\pi) = 0$$

$$\cos(3\pi) = -1$$

2)  $8\pi$

$$p(8\pi) = (1, 0)$$

$$\sin(8\pi) = 0$$

$$\cos(8\pi) = 1$$

3)  $-5\pi$

$$p(-5\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-5\pi) = 0$$

$$\cos(-5\pi) = -1$$

4)  $-2\pi$

$$p(-2\pi) = (1, 0)$$

$$\sin(-2\pi) = 0$$

$$\cos(-2\pi) = 1$$

5)  $-\frac{\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6)  $-\frac{3\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

7)  $\frac{7\pi}{2}$

$$p\left(\frac{7\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

8)  $-\frac{7\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

9)  $\frac{9\pi}{2}$

$$p\left(\frac{9\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$$

10)  $-\frac{9\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = 0$$

11)  $57\pi$

$$p(57\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(57\pi) = 0$$

$$\cos(57\pi) = -1$$

12)  $-57\pi$

$$p(-57\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-57\pi) = 0$$

$$\cos(-57\pi) = -1$$

13)  $53\pi$

$$p(53\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(53\pi) = 0$$

$$\cos(53\pi) = -1$$

14)  $-53\pi$

$$p(-53\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-53\pi) = 0$$

$$\cos(-53\pi) = -1$$

15)  $\frac{27\pi}{2}$

$$p\left(\frac{27\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(\frac{27\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{27\pi}{2}\right) = 0$$

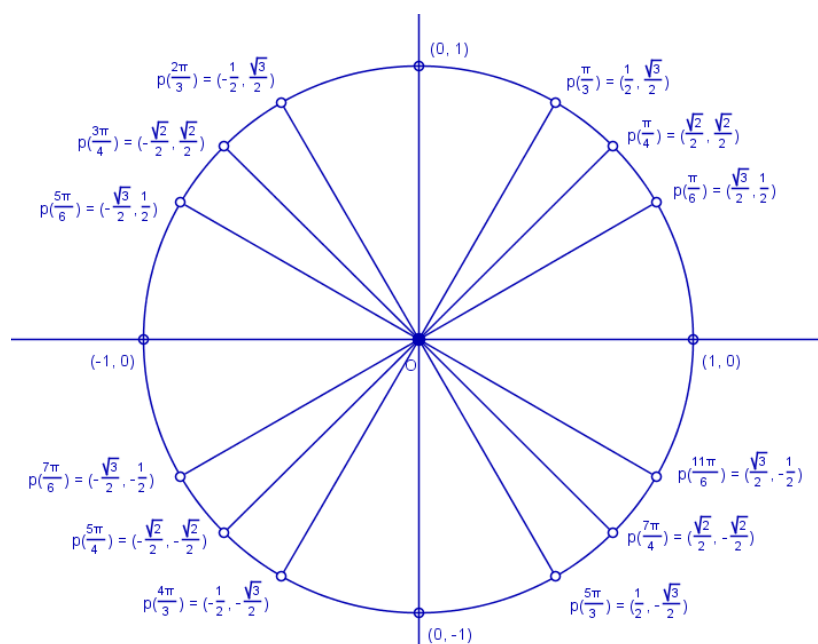
16)  $-\frac{27\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = 0$$

2. จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยให้นักเรียนบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  ลงไปในรูป และบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ พร้อมทั้งหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้  $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$  และ  $\frac{11\pi}{6}$



## 3. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1) \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ และ } \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

นั่นคือ  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \sin \frac{3\pi}{2} \sec \pi + \sec^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ,  $\sec \pi = 1$

$$\sec^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ และ } \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

นั่นคือ  $\sin \frac{3\pi}{2} \sec \pi + \sec^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$

$$= (-1) \cdot (1) + \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)(1)$$

$$= -1 + \frac{5}{6}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$5) \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  และ  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

นั่นคือ  $\sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot (1)$$

$$= \frac{4 + \sqrt{3}}{2}$$

$$2) 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$$

วิธีทำ จาก  $\tan^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ ,  $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ และ } \cos^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

นั่นคือ  $3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - 1 + 1$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$4) \sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ$$

วิธีทำ  $\sin 720^\circ = 0$ ,  $\cot 45^\circ = 1$ ,  $\sec 60^\circ = 2$

$$\cos 360^\circ = 1 \text{ และ } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ  $\sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ$

$$= (0) \cdot (1) + (2)(1) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0 + 2 - 1$$

$$= 1$$

$$6) \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

นั่นคือ  $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$$

$$= 0$$

$$7) \left( \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \text{ และ } \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{นั่นคือ } \left( \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (-1 - 0) \cdot \sqrt{3}$$

$$= \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot (-1) \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$9) \tan 60^\circ \cos 30^\circ \sec 60^\circ - \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

$$\text{วิธีทำ } \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sec 60^\circ = 2 \text{ และ } \cot 45^\circ = 1$$

$$\text{นั่นคือ } \tan 60^\circ \cos 30^\circ \sec 60^\circ - \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

$$= (\sqrt{3}) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2) - \left( \frac{1}{2} \right) (1)$$

$$= 3 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$11) \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} \tan^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2, \sec \frac{\pi}{3} = 2, \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \text{ และ } \tan^2 \frac{\pi}{3} = 3$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} \tan^2 \frac{\pi}{3}$$

$$= \left( \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{3}{4} \right) - (2) \cdot \left( \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \cdot (3)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{13}{12}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$8) \sin 90^\circ \tan 30^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 45^\circ - \sec 60^\circ \cot 60^\circ$$

$$\text{วิธีทำ } \sin 90^\circ = 1, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 45^\circ = 1, \sec 60^\circ = 2 \text{ และ } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 90^\circ \tan 30^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 45^\circ - \sec 60^\circ \cot 60^\circ$$

$$= (1) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) (1) - (2) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$10) \cot^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \cot^2 \frac{\pi}{4} = 1, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\text{และ } \cot^2 \frac{\pi}{3} = 3$$

$$\text{นั่นคือ } \cot^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \left( \frac{3}{4} \right) (3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{12}{4}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$12) 3 \tan^2 45^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan^2 45^\circ = 1, \cot^2 30^\circ = \frac{1}{3}, \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\text{และ } \sec^2 45^\circ = 2$$

$$\text{นั่นคือ } 3 \tan^2 45^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$$

$$= 3 \cdot (1) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot (2)$$

$$= 3 - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 3 - 2 - \frac{1}{6}$$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 5

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ โดยใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 4 นำมาใช้กับใบกิจกรรมในหน่วยที่ 5

1. จงทำให้อยู่ในรูป  $\tan \theta$

1.1)  $\tan(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(\pi - \theta) &= \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} \\ &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

1.2)  $\tan(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(\pi + \theta) &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

1.3)  $\tan(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(2\pi - \theta) &= \frac{\sin(2\pi - \theta)}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

1.4)  $\tan(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(2\pi + \theta) &= \frac{\sin(2\pi + \theta)}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

2. จงทำให้อยู่ในรูป  $\operatorname{cosec} \theta$

2.1)  $\operatorname{cosec}(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ &= \operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.2)  $\operatorname{cosec}(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin(\theta)} \\ &= -\operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.3)  $\operatorname{cosec}(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin(\theta)} \\ &= -\operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.4)  $\operatorname{cosec}(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ &= \operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

3. จงทำให้้อยู่ในรูป  $\sec \theta$ 

3.1)  $\sec(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta)} \\ &= -\sec(\theta) \end{aligned}$$

3.3)  $\sec(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ &= \sec(\theta) \end{aligned}$$

3.2)  $\sec(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta)} \\ &= -\sec(\theta) \end{aligned}$$

3.4)  $\sec(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ &= \sec(\theta) \end{aligned}$$

4. จงทำให้้อยู่ในรูป  $\cot \theta$ 

4.1)  $\cot(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan(\theta)} \\ &= -\cot(\theta) \end{aligned}$$

4.3)  $\cot(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan(\theta)} \\ &= -\cot(\theta) \end{aligned}$$

4.2)  $\cot(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan(\theta)} \\ &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

4.4)  $\cot(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan(\theta)} \\ &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

## 5. จงหาค่าของ

5.1)  $\tan \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}, \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{และ } \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \tan \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} \\ = -\sqrt{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5.2)  $\tan \frac{7\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan \frac{7\pi}{4} = -1, \cot \frac{3\pi}{4} = -1, \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \tan \frac{7\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} \\ = -1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$5.3) \sec \frac{5\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$$

วิธีทำ จาก  $\sec \frac{5\pi}{3} = 2$ ,  $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$

$$\text{นั่นคือ } \sec \frac{5\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$= (2) \cdot (-1)$$

$$= -2$$

$$5.4) \frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sec \frac{7\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1, \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1, \tan \frac{7\pi}{4} = -1$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}$$

$$= \frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (-1) \cdot (-1)}{-1 - 1}$$

$$= \frac{4 \cdot (-1) + 1}{-2}$$

$$= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$5.5) \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$

$$\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-540^\circ) = -1$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$5.6) \frac{4 \sin 300^\circ \sec(-765^\circ) + \tan 240^\circ \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan 630^\circ}$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan 240^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1, \tan 630^\circ = \text{ไม่นิยาม}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{4 \sin 300^\circ \sec(-765^\circ) + \tan 240^\circ \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan 630^\circ}$$

ไม่สามารถหาคำตอบได้

6. จงหาจำนวนจริง  $\theta$  โดยที่  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  และสอดคล้องกับสมการในข้อต่อไปนี

$$6.1) |\sin \theta| = \sin \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$6.2) |\cos \theta| = -\cos \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

$$6.3) |\tan \theta| = \tan \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  หรือ  $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

$$6.4) |\cot \theta| = -\cot \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  หรือ  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

- 6.5)  $|\sec \theta| = \sec \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  หรือ  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$
- 6.6)  $|\operatorname{cosec} \theta| = -\operatorname{cosec} \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
- 6.7)  $\sin \theta = \cos \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{4}$  หรือ  $\frac{5\pi}{4}$
- 6.8)  $\tan \theta = \cot \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  หรือ  $\frac{7\pi}{4}$
- 6.9)  $\sin \theta = \tan \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0, \pi, 2\pi$
- 6.10)  $\cos \theta = \cot \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 6.1

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 6.1 จะแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

ตอนที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**ตอนที่ 1** ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

1. ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการวัดมุมในหน่วยที่ 1 เปลี่ยนมุม  $\theta$  ที่กำหนดให้ ให้มีหน่วยเป็นองศา และเรเดียน

$$1.1) \theta = 1^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เรเดียน เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$1.3) \theta = -150^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } -150^\circ = -\frac{5\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$1.5) \theta = \frac{11\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{11\pi}{6} = 330^\circ \text{ องศา}$$

$$1.7) \theta = \frac{\pi}{5} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\pi}{5} = 36^\circ \text{ องศา}$$

$$1.9) \theta = -\frac{7\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } -\frac{7\pi}{6} = -210^\circ \text{ องศา}$$

$$1.2) \theta = 60^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เรเดียน เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$1.4) \theta = 270^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$1.6) \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \text{ องศา}$$

$$1.8) \theta = -\frac{5\pi}{4} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } -\frac{5\pi}{4} = -225^\circ \text{ องศา}$$

$$1.10) \theta = 3 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } 3 = 3 \times 57^\circ 18' \approx 171.88^\circ \text{ องศา}$$

**ตอนที่ 2** ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ในกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมจะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 กรณีเช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ดังนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยการวัดมุมที่เป็นองศากับหน่วยการวัดมุมเรเดียนเติมคำตอบลงในตารางทั้ง 5 กรณีต่อไปนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
ถ้า $n$ เป็นจำนวนนับ แล้ว	ถ้า $n$ เป็นจำนวนนับ แล้ว
$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$	$\sin(360^\circ \cdot n + \theta) = \sin \theta$
$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$	$\cos(360^\circ \cdot n + \theta) = \cos \theta$
$\tan(2n\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(360^\circ \cdot n + \theta) = \tan \theta$
$\cot(2n\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(360^\circ \cdot n + \theta) = \cot \theta$
$\sec(2n\pi + \theta) = \sec \theta$	$\sec(360^\circ \cdot n + \theta) = \sec \theta$
$\operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(360^\circ \cdot n + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$	$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta$
$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$
$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$
$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$	$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta$
$\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$
$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$	$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$
$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$	$\sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$
$\operatorname{cosec}(2\pi - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

### แบบฝึกหัดเสริมทักษะ

1. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1)  $150^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(150^\circ) &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) \\ \cos(150^\circ) &= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos(30^\circ) \\ \tan(150^\circ) &= \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan(30^\circ) \\ \sec(150^\circ) &= \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec(30^\circ) \\ \csc(150^\circ) &= \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc(30^\circ) \\ \cot(150^\circ) &= \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot(30^\circ)\end{aligned}$$

2)  $120^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(120^\circ) &= \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) \\ \cos(120^\circ) &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) \\ \tan(120^\circ) &= \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) \\ \sec(120^\circ) &= \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec(60^\circ) \\ \csc(120^\circ) &= \csc(180^\circ - 60^\circ) = \csc(60^\circ) \\ \cot(120^\circ) &= \cot(180^\circ - 60^\circ) = -\cot(60^\circ)\end{aligned}$$

3)  $315^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(315^\circ) &= \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin(45^\circ) \\ \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) \\ \tan(315^\circ) &= \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan(45^\circ) \\ \sec(315^\circ) &= \sec(360^\circ - 45^\circ) = \sec(45^\circ) \\ \csc(315^\circ) &= \csc(360^\circ - 45^\circ) = -\csc(45^\circ) \\ \cot(315^\circ) &= \cot(360^\circ - 45^\circ) = -\cot(45^\circ)\end{aligned}$$

4)  $-315^\circ$

วิธีทำ

จาก  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$$\begin{aligned}-\sin(315^\circ) &= -\sin(360^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) \\ \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) \\ -\tan(315^\circ) &= -\tan(360^\circ - 45^\circ) = \tan(45^\circ) \\ \sec(315^\circ) &= \sec(360^\circ - 45^\circ) = \sec(45^\circ) \\ -\csc(315^\circ) &= -\csc(360^\circ - 45^\circ) = \csc(45^\circ) \\ -\cot(315^\circ) &= -\cot(360^\circ - 45^\circ) = \cot(45^\circ)\end{aligned}$$

5)  $930^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(930^\circ) &= \sin(900^\circ + 30^\circ) = -\sin(30^\circ) \\ \cos(930^\circ) &= \cos(900^\circ + 30^\circ) = -\cos(30^\circ) \\ \tan(930^\circ) &= \tan(900^\circ + 30^\circ) = \tan(30^\circ) \\ \sec(930^\circ) &= \sec(900^\circ + 30^\circ) = -\sec(30^\circ) \\ \csc(930^\circ) &= \csc(900^\circ + 30^\circ) = -\csc(30^\circ) \\ \cot(930^\circ) &= \cot(900^\circ + 30^\circ) = \cot(30^\circ)\end{aligned}$$

6)  $225^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(225^\circ) &= \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) \\ \cos(225^\circ) &= \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos(45^\circ) \\ \tan(225^\circ) &= \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan(45^\circ) \\ \sec(225^\circ) &= \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec(45^\circ) \\ \csc(225^\circ) &= \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc(45^\circ) \\ \cot(225^\circ) &= \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot(45^\circ)\end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ

$$1) \frac{3 \tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2 \sin 330^\circ}$$

วิธีทำ จาก  $\tan^2 135^\circ = 1$ ,  $\sec^2 300^\circ = 4$

$$\text{และ } \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{3 \tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2 \sin 330^\circ}$$

$$= \frac{3(1) - 4}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-1}{-1}$$

$$= 1$$

$$3) \cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$$

วิธีทำ จาก  $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

นั่นคือ  $\cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$

$$= (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= 1$$

$$5) \sec^2(-240^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) + \cot^2(315^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sec^2(-240^\circ) = 4$ ,  $\operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

และ  $\cot^2(315^\circ) = 1$

นั่นคือ  $\sec^2(-240^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) + \cot^2(315^\circ)$

$$= (4) + (\frac{1}{4}) + (1)$$

$$= \frac{21}{4}$$

$$2) \frac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$$

วิธีทำ จาก  $\tan(-480^\circ) = \sqrt{3}$ ,  $\sin(-840^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{และ } \cos(-390^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - (-\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= 3$$

$$4) \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$

$$\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-540^\circ) = -1$$

นั่นคือ  $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$

$$= (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (\sqrt{3}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

3. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากจุดปลายส่วนโค้งของมุม

1. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(15, -8)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ ในที่นี้  $x = 15$  และ  $y = -8$

$$\begin{aligned} \text{จาก } r &= \sqrt{(15-0)^2 + (-8-0)^2} \\ &= \sqrt{225 + 64} \\ &= \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{8}{17}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{17}{8} \\ \cos \theta &= \frac{15}{17}, & \sec \theta &= \frac{15}{17} \\ \tan \theta &= -\frac{8}{15}, & \cot \theta &= -\frac{15}{8} \end{aligned}$$

2. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  และมีด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  อยู่  
 บนเส้นตรง  $4y = 3x$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ เลือกจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุม ให้  $x = -4$  จะได้  $y = -3$

$$\begin{aligned} \text{จาก } r &= \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{3}{5}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{5}{3} \\ \cos \theta &= -\frac{4}{5}, & \sec \theta &= -\frac{5}{4} \\ \tan \theta &= \frac{3}{4}, & \cot \theta &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-1, -4)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-0)^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{4}{\sqrt{17}}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{\sqrt{17}}{4} \\ \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{17}}, & \sec \theta &= -\sqrt{17} \\ \tan \theta &= -4, & \cot \theta &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(1, -\sqrt{2})$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(1-0)^2 + (-\sqrt{2}-0)^2} \\ &= \sqrt{1+2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & , & \quad \operatorname{cosec} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{3}} & , & \quad \sec \theta = \sqrt{3} \\ \tan \theta &= -\sqrt{2} & , & \quad \cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-\sqrt{3}, 1)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{3+1} \\ &= \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \sin \theta &= \frac{1}{2} & , & \quad \operatorname{cosec} \theta = 2 \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & , & \quad \sec \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan \theta &= -\sqrt{3} & , & \quad \cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 7

### กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 7 จะแบ่งออกเป็น 5 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

ตอนที่ 2 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 3 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 4 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot x + k)$  เมื่อ  $b, k$  เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับ 0

ตอนที่ 5 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0$

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

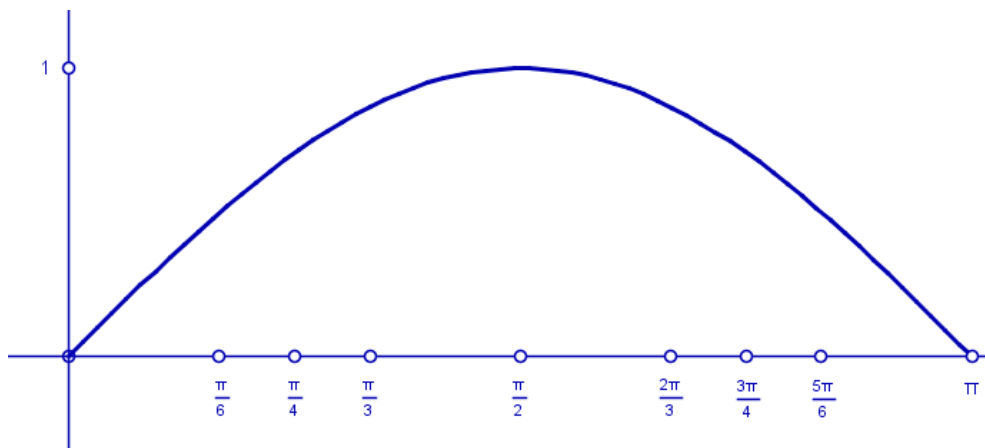
กราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$

2. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

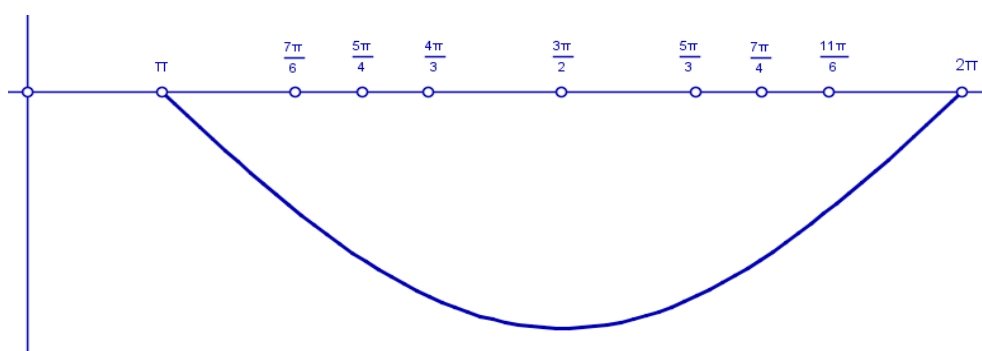
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



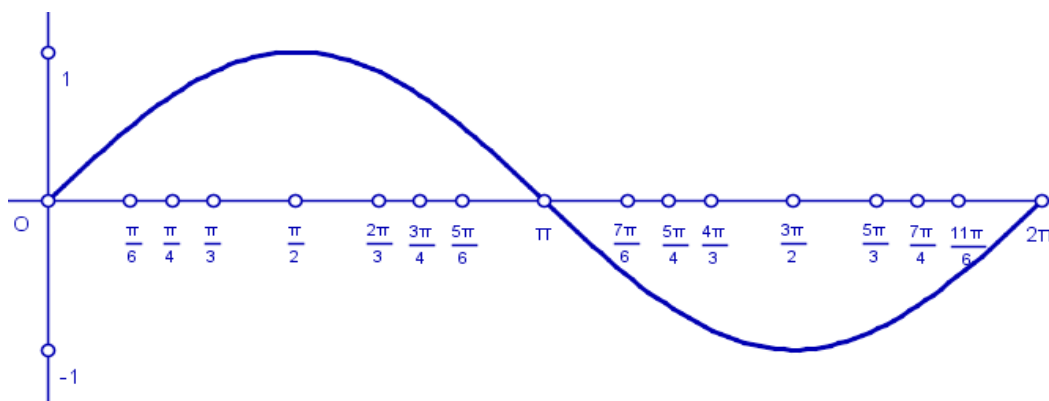
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 1 ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ -1 ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $R$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

$$\text{ช่วงที่ 1 } -2\pi \leq x \leq 0$$

$$\text{ช่วงที่ 2 } 0 \leq x \leq 2\pi$$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ  $\frac{M-m}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันไซน์เมื่อ  $y = \sin x$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\} \text{ หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า } -1 \leq \sin x \leq 1$$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้

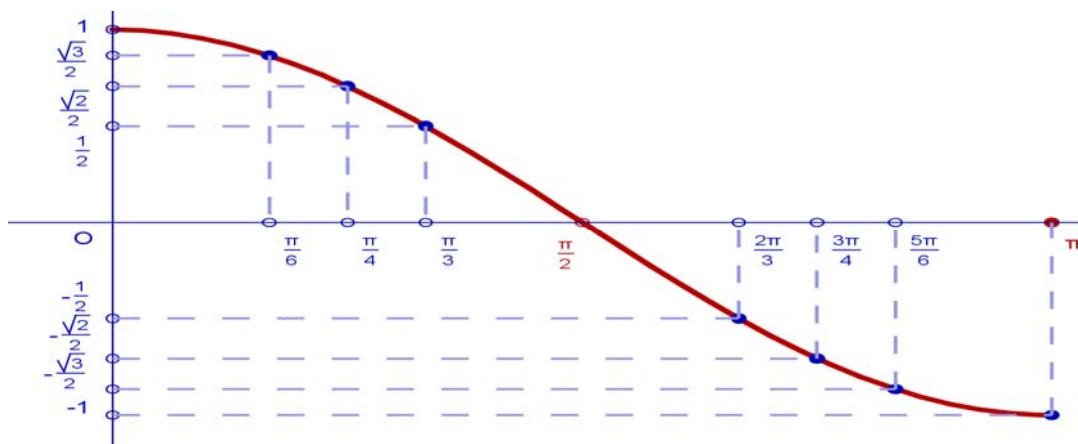
คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม

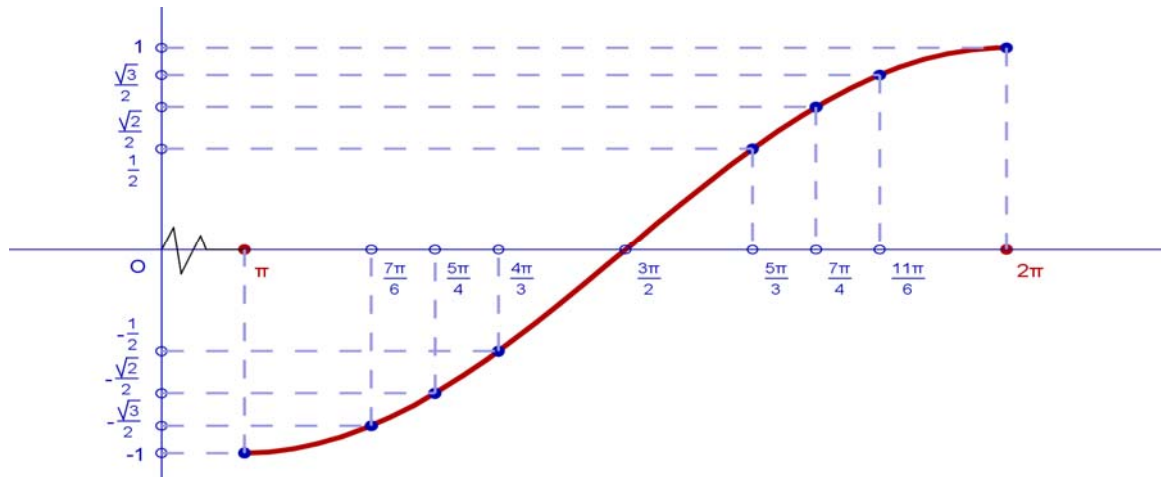


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

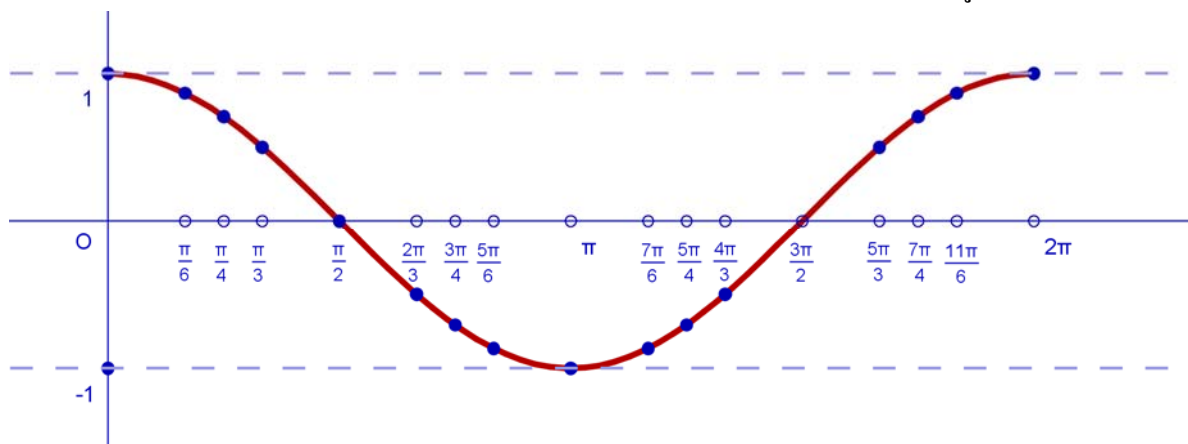
$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 1 ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ -1 ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $R$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

$$\text{ช่วงที่ 1 } -2\pi \leq x \leq 0$$

$$\text{ช่วงที่ 2 } 0 \leq x \leq 2\pi$$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

$$2.4) \text{ แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ } \frac{M-m}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันโคไซน์เมื่อ  $y = \cos x$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = -1 \leq \cos x \leq 1$$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น

ในช่วง  $(\pi, 2\pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในช่วง  $(0, \pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลด

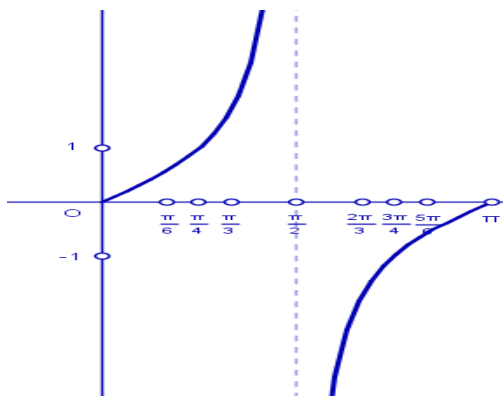
กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **fx** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
<b>tanx</b>	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

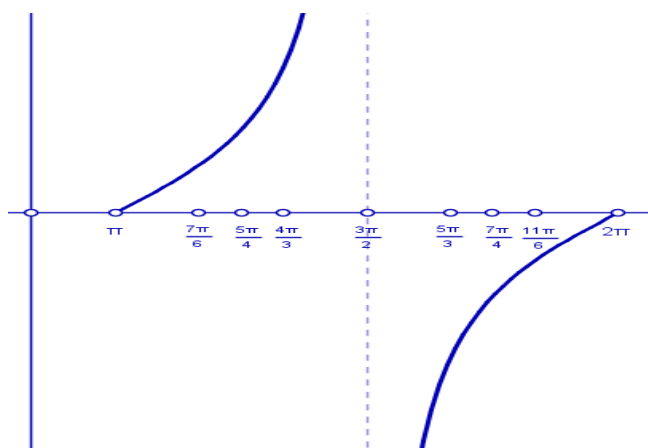
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



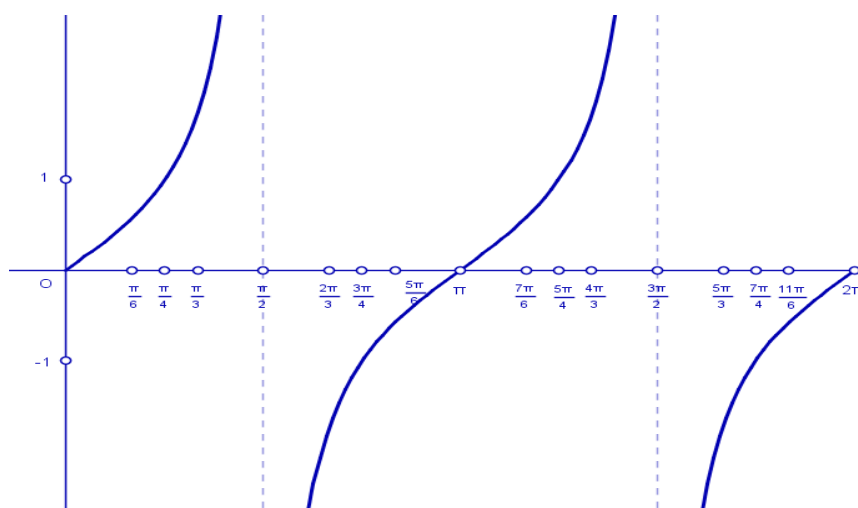
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \frac{\pi}{2}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มคือ

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ  $(-\infty, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq -\pi$

ช่วงที่ 2  $-\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 3  $0 \leq x \leq \pi$

ช่วงที่ 4  $\pi \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันแทนเจนต์เมื่อ  $y = \tan x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง นั่นคือ  $-\infty < \tan x < \infty$

3) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

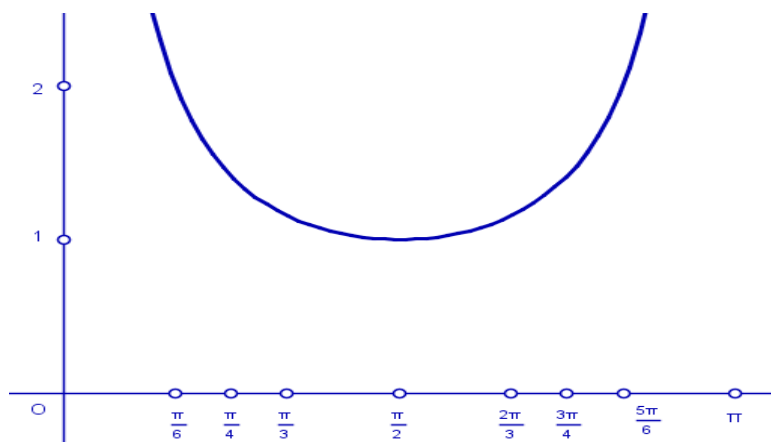
กราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cosec x	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม

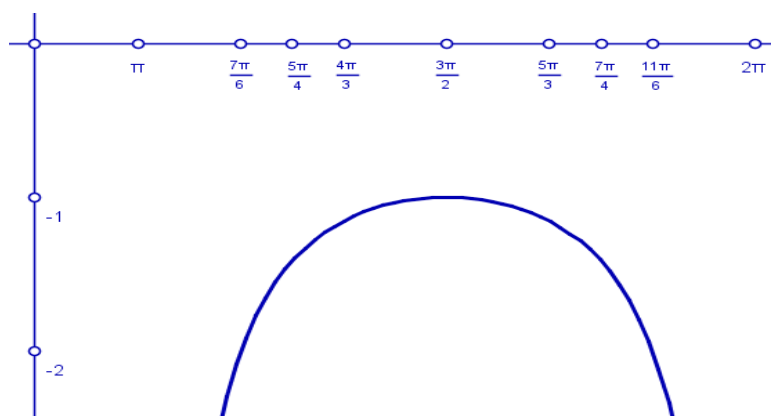
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



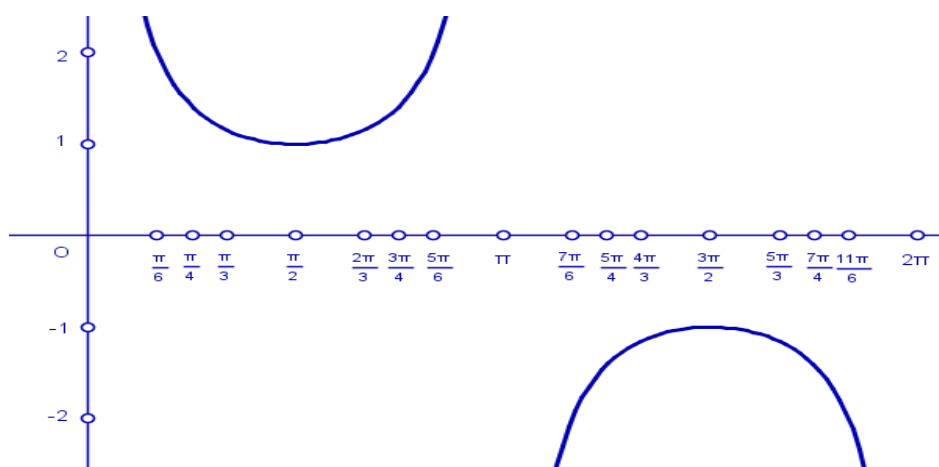
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\operatorname{cosec} x$	ไม่นิยาม	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 2  $0 \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชัน โคเซแคนต์เมื่อ  $y = \text{cosec } x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

นั่นคือ  $\text{cosec } x \leq -1$  หรือ  $\text{cosec } x \geq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \text{cosec } x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

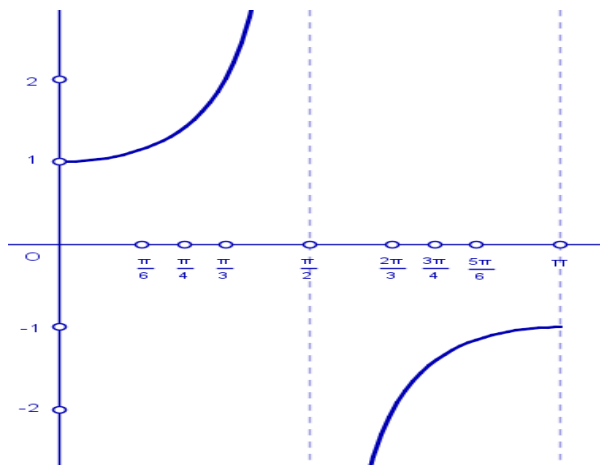
กราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
y	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม

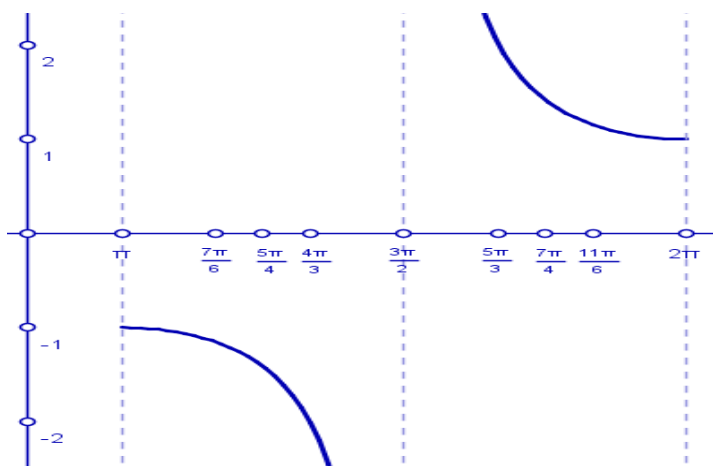


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

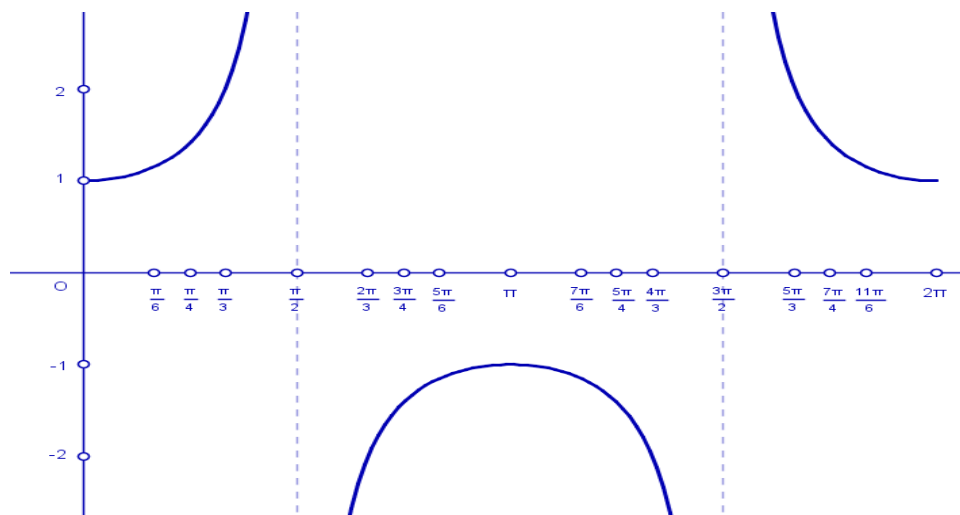
x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \frac{\pi}{2}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มก็

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 2  $0 \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันเซแคนต์ เมื่อ  $y = \sec x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

นั่นคือ  $\sec x \leq -1$  หรือ  $\sec x \geq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sec x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$

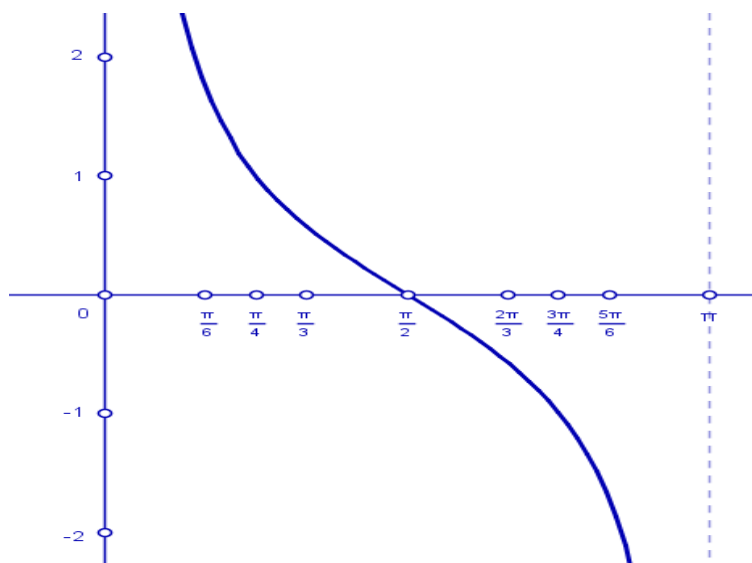
1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cotx	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

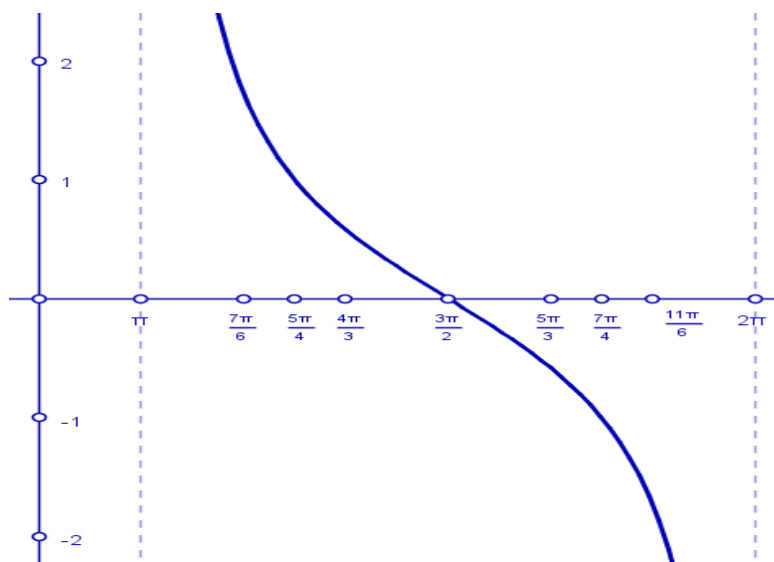
นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



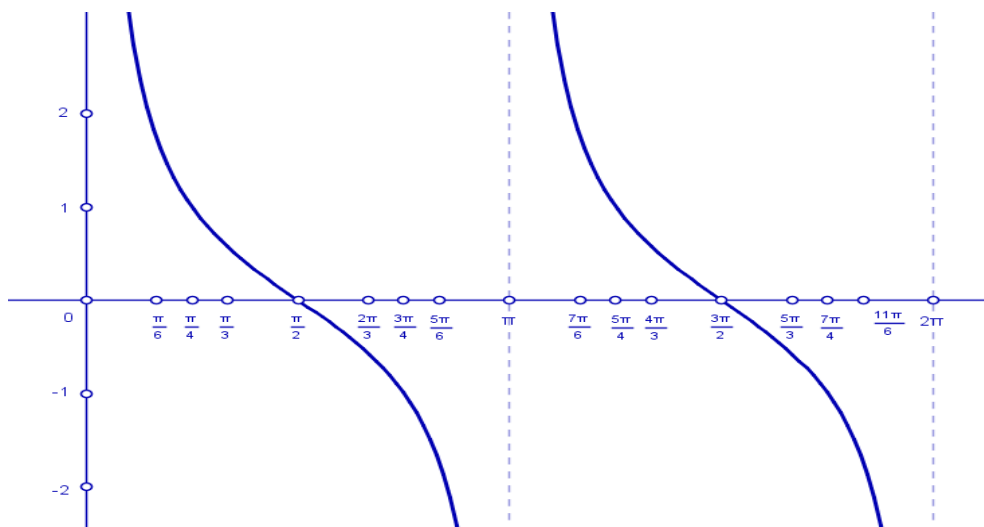
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
<b>cot x</b>	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ  $(-\infty, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq -\pi$

ช่วงที่ 2  $-\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 3  $0 \leq x \leq \pi$

ช่วงที่ 4  $\pi \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันโคแทนเจนต์เมื่อ  $y = \cot x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง คือ  $-\infty < \cot x < \infty$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) ถ้า  $x \in (0, \pi)$  ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชัน  $1 - 1$

5) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$

6) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

## เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบในแต่ละข้อ โดยเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวและแสดงวิธีทำลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. ในแต่ละข้อคำถามจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียง 1 คำตอบเท่านั้น
5. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 100 นาที

ชื่อ..... ชั้น ..... เลขที่ .....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้  
โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

**ตอนที่ 1** จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

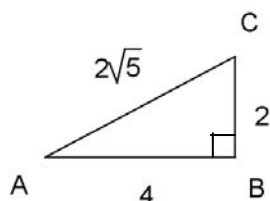
ก.  $\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ข.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ค.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}$

ง.  $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

2.



จากรูป  $\sin A$  มีค่าตรงกับข้อใด

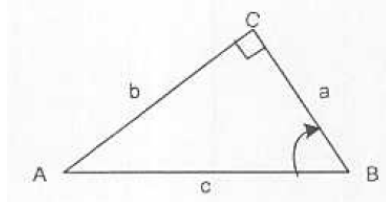
ก.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ข.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ค.  $\frac{1}{2}$

ง.  $\sqrt{5}$

3. จากรูป  $\sin B$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{a}{c}$

ข.  $\frac{b}{c}$

ค.  $\frac{a}{b}$

ง.  $\frac{c}{a}$

4. กำหนดให้  $\cot A = \frac{4}{3}$  ค่าของ

$\tan A$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค.  $\frac{3}{4}$

ง.  $\frac{4}{3}$

5. กำหนดให้  $\tan A = \sqrt{3}$  ค่าของ

$\cot A$  มีค่าตรงกับข้อใด

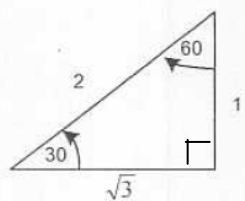
ก. 3

ข.  $\sqrt{3}$

ค.  $\frac{1}{3}$

ง.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. จากรูป  $\sin 60^\circ$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{1}{2}$

ข. 2

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ง.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด

ก.  $1^\circ = 60'$

ข.  $1^\circ = 60''$

ค.  $360^\circ = 2\pi$  เรเดียน

ง.  $180^\circ = \pi$  เรเดียน

8.  $\frac{3\pi}{2}$  เรเดียน เท่ากับกี่องศา

ก.  $135^\circ$  ข.  $270^\circ$

ค.  $405^\circ$  ง.  $540^\circ$

9. 2 เรเดียน เท่ากับกี่องศา

ก.  $57^\circ 16'$  ข.  $57^\circ 27'$

ค.  $114^\circ 36'$  ง.  $114^\circ 55'$

10.  $210^\circ$  เท่ากับกี่เรเดียน

ก.  $\frac{7\pi}{6}$  ข.  $\frac{7\pi}{3}$

ค.  $\frac{6\pi}{7}$  ง.  $\frac{7\pi}{12}$

11.  $75^\circ$  เท่ากับกี่เรเดียน

ก.  $\frac{5\pi}{12}$  ข.  $\frac{5\pi}{6}$

ค.  $\frac{\pi}{12}$  ง.  $\frac{3}{6}$

12. สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยข้อใด

ต่อไปนี้เป็น **ถูกต้อง**

ก. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน

จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{4}$

ข. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 8 ส่วนเท่าๆ

กัน จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{4}$

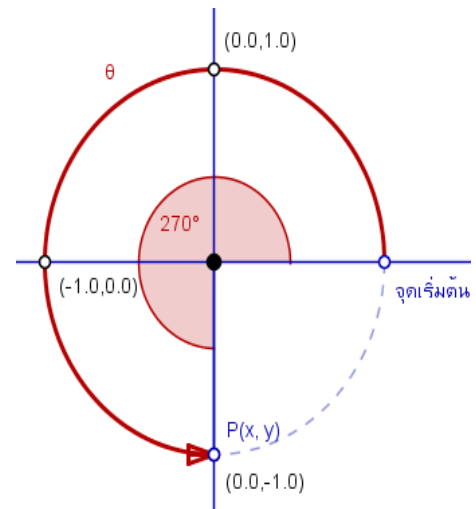
ค. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 12 ส่วนเท่าๆ

กัน จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{8}$

ง. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กัน

จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{6}$

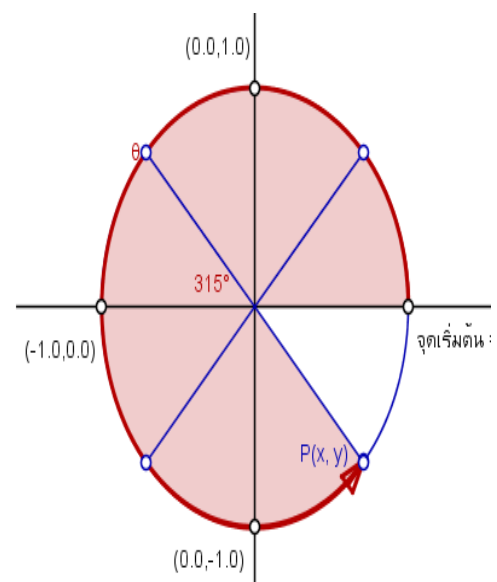
13. จากรูปค่าของ  $\theta$  ตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{\pi}{2}$  ข.  $\frac{3\pi}{2}$

ค.  $-\frac{\pi}{2}$  ง.  $-\frac{3\pi}{2}$

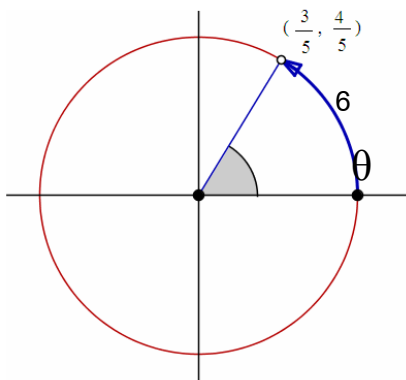
14. จากรูปค่าของ  $\theta$  ตรงกับข้อใด เมื่อ  
กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



ก.  $\frac{7\pi}{4}$  ข.  $\frac{5\pi}{6}$

ค.  $\frac{11\pi}{3}$  ง.  $\frac{3\pi}{4}$

15. กำหนดให้  $p(\theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  ดังรูป



พิกัดของจุด  $p(-\theta + 3\pi)$  ตรงกับข้อใด

- ก.  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$       ข.  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$   
 ค.  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$       ง.  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

16. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ตรงกับข้อใด

- ก. โดเมน คือ  $\mathbb{R}$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$   
 ข. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^+$  และ เรนจ์ คือ  $[0, 1]$   
 ค. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^-$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, \infty)$   
 ง. โดเมนคือ จำนวนเต็ม และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$

17. ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 1

- ก.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ข.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ค.  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ง.  $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$

18. ค่าของ

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$$

ตรงกับข้อใด

- ก. -1      ข. 1  
 ค.  $-\frac{1}{2}$       ง.  $\frac{1}{2}$

19. ถ้า  $\cos \theta = -1$  และ  $-4\pi < \theta < 0$

แล้ว  $\theta$  คือจำนวนในข้อใด

- ก.  $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$       ข.  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$   
 ค.  $-\pi, -3\pi$       ง.  $-2\pi, -4\pi$

20. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$   
 ค.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ง.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

21. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ค.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$   
 ง.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

22.  $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  มีค่าเท่าไร

- ก.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ข.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ค.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ง.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. ถ้า  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\sin \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{5}{13}$                       ข.  $\frac{12}{13}$

ค.  $-\frac{5}{13}$                       ง.  $-\frac{12}{13}$

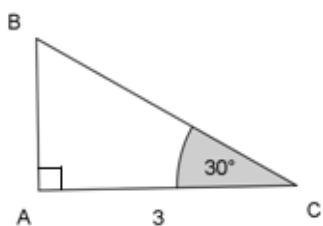
24. ถ้า  $\cos \theta = \frac{5}{6}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\operatorname{cosec} \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{6}{5}$                           ข.  $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

ค.  $-\frac{6}{5}$                           ง.  $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$

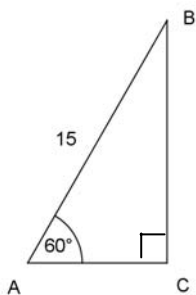
25. จากรูป AB ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                           ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                           ง.  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

26. จากรูป BC ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                           ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{15\sqrt{3}}{3}$                           ง.  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

27. รูปสามเหลี่ยม ABC ถ้ามี  $\hat{A}BC$

เป็นมุมฉาก  $\overline{AB}$  ยาว 16 หน่วย และ

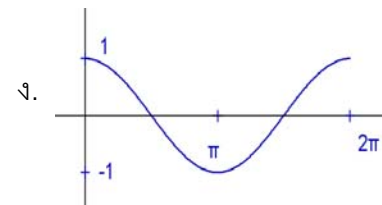
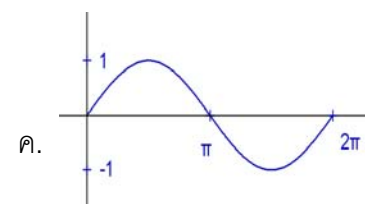
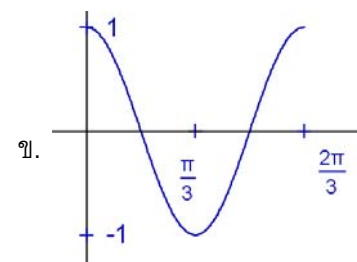
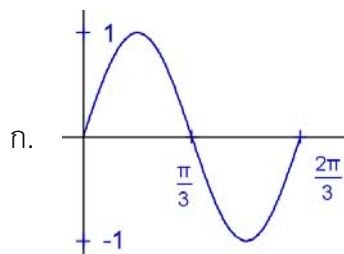
$\hat{B}CA = 30^\circ$  แล้ว  $\overline{BC}$  ยาวเท่าใด

ก.  $16\sqrt{2}$  หน่วย                      ข.  $16\sqrt{3}$  หน่วย

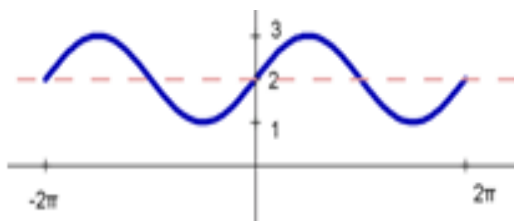
ค.  $\frac{16\sqrt{2}}{2}$  หน่วย                      ง.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$  หน่วย

28. กราฟของ  $y = \sin 3x$  เมื่อ

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  หรือ  $0 \leq X \leq 2\pi$  คือข้อใด

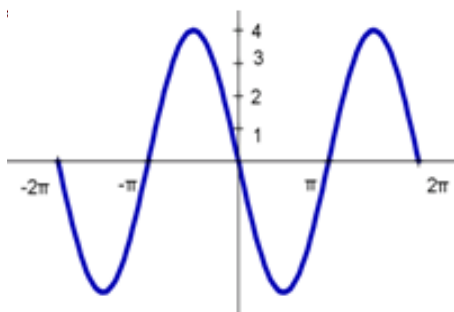


29. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



- ก.  $y = \sin 2X$       ข.  $y = \cos 2X$   
 ค.  $y = 2 + \sin X$       ง.  $y = 2 + \cos X$

30. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



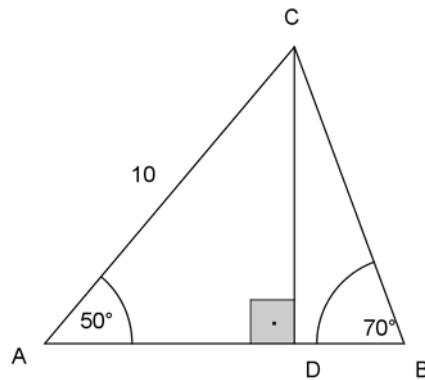
- ก.  $y = 4\cos X$       ข.  $y = 4\sin X$   
 ค.  $y = -4\cos X$       ง.  $y = -4\sin X$

เฉลยแบบทดสอบแบบปรนัย 30 ข้อ

- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| 1. ค.  | 11. ก. | 21. ค. |
| 2. ก.  | 12. ข. | 22. ค. |
| 3. ข.  | 13. ข. | 23. ข. |
| 4. ค.  | 14. ก. | 24. ง. |
| 5. ง.  | 15. ง. | 25. ก. |
| 6. ข.  | 16. ก. | 26. ง. |
| 7. ข.  | 17. ข. | 27. ข. |
| 8. ข.  | 18. ข. | 28. ก. |
| 9. ค.  | 19. ค. | 29. ค. |
| 10. ก. | 20. ค. | 30. ง. |



3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มุม A มีขนาด  $50^\circ$  มุม B มีขนาด  $70^\circ$  และ AC ยาว 10 เซนติเมตร จากจุด C ลากเส้นไปตั้งฉากกับ AB ที่จุด D จงหา CD, AD, BC และ BD



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้ว่า

$$\sin 50^\circ = \frac{CD}{AC}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} CD &= AC \times \sin 50^\circ \\ &= 10 \times 0.7660 \quad (\text{เพราะว่า } \sin 50^\circ = 0.7660) \\ &\approx 7.66 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

และ

$$\cos 50^\circ = \frac{AD}{AC}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} AD &= AC \times \cos 50^\circ \\ &= 10 \times 0.6428 \quad (\text{เพราะว่า } \cos 50^\circ = 0.6428) \\ &\approx 6.43 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD จะได้ว่า

$$\operatorname{cosec} 70^\circ = \frac{BC}{CD}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} BC &= CD \times \operatorname{cosec} 70^\circ \\ &\approx 7.66 \times 1.064 \quad (\text{เพราะว่า } \operatorname{cosec} 70^\circ = 1.064) \\ &\approx 8.15 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

และ

$$\cot 70^\circ = \frac{BD}{CD}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} BD &= CD \times \cot 70^\circ \\ &\approx 7.66 \times 0.3640 \quad (\text{เพราะว่า } \cot 70^\circ = 0.3640) \\ &\approx 2.79 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นความยาวด้าน CD, AD, BC และ BD ยาวประมาณ 7.66, 6.43, 8.15 และ 2.79 ซม.

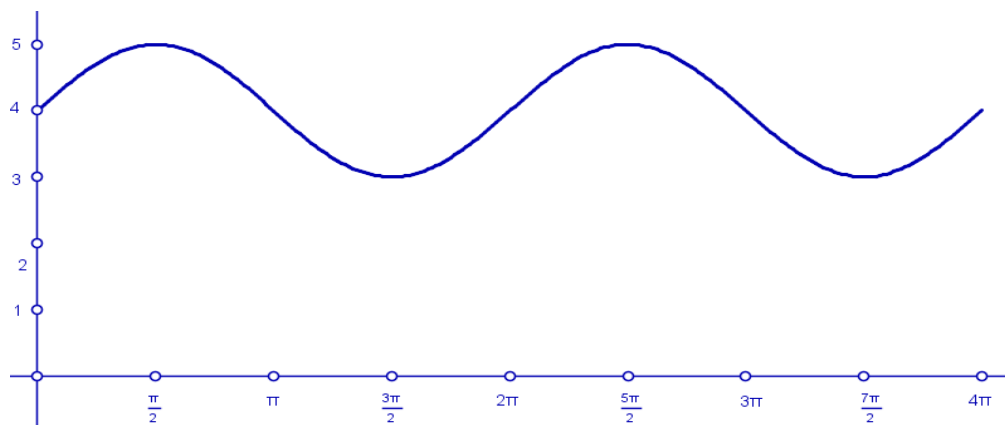
ตามลำดับ

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมน เรนจ์ คาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน  
 $y = \sin x + 4$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  (แสดงวิธีทำ)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(x) + 4	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{8+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{8+\sqrt{3}}{2}$	5	$\frac{8+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{8+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{9}{2}$	4

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
sin(x)	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sin(x) + 4	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{8-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{8-\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{8-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{8-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{2}$	4

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 5 (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ 3 (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ R

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ [3, 5]

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ  $\frac{5 - (-3)}{2} = 4$

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใดจงอธิบาย

5.1) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ผิด เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\sin x$  บนช่วง  $[0, \pi]$  มีทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

5.2) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\sin x$  บนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  มีลักษณะลดลงจึงเป็นฟังก์ชันลด

5.3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\cos x$  บนช่วง  $[0, \pi]$  มีลักษณะลดลงจึงเป็นฟังก์ชันลด

5.4) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ผิด เพราะ เมื่อแทนจำนวน  $x$  เข้าไป 2 ค่า คือ  $\frac{3\pi}{4}$  และ  $\frac{5\pi}{4}$  ผลลัพธ์ทั้ง 2 มีค่าเท่ากัน

5.5) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\tan x$  บนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  มีลักษณะเพิ่มจึงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ไม่มีสิ่งไหนจะหนักเกิน ไม่มีคำว่าทำไม่ได้  
ขอให้โชคคินะครับ

### ภาคผนวก ซ

แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์  
เรขาคณิตแบบพลวัต

**คำชี้แจง**

1. แบบวัดความพึงพอใจฉบับนี้เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีจำนวน 20 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

**ตอนที่ 1** เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

**ตอนที่ 2** เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องทางขวามือหลังข้อความที่ตรงกับความรู้สึกที่แท้จริงของนักเรียนเพียงช่องเดียว คำตอบที่นักเรียนตอบนั้นไม่มีผลต่อการให้คะแนน

3. ในแต่ละช่องที่แสดงความพึงพอใจ มีความหมายดังนี้

พึงพอใจมากที่สุด หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมากที่สุด

พึงพอใจมาก หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมาก

พึงพอใจปานกลาง หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นปานกลาง

พึงพอใจน้อย หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อย

พึงพอใจน้อยที่สุด หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อยที่สุด

**ตอนที่ 1** แบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่สนใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต					
2	การเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น					
3	เนื้อหาจากกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต เหมาะกับระดับความสามารถของข้าพเจ้า					
4	จากการทำใบกิจกรรมในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติมากขึ้น					
5	ทำให้ข้าพเจ้ามองเห็นมโนภาพการเท่ากันได้ดีขึ้น					
6	การออกแบบจอภาพ และการใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้กิจกรรมน่าสนใจและมีความสุข					
7	การมีปฏิสัมพันธ์กับซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้า เข้าใจเนื้อหามากขึ้น					
8	การเรียนด้วยซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้าสามารถตั้งข้อความคาดการณ์ได้					
9	การจัดลำดับเนื้อหาในใบกิจกรรม มีความต่อเนื่องและชัดเจน ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจได้ง่าย					
10	เครื่องมือในการสร้างและสำรวจกิจกรรมการเรียนการสอนใช้ได้สะดวกตามความต้องการของข้าพเจ้า					

**ตอนที่ 2** แบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
11	ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบกิจกรรมอย่างชัดเจน					
12	จากการปฏิบัติกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น					
13	จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น					
14	กิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้าเกิดการค้นพบด้วยตนเอง					
15	จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น					
16	แบบฝึกหัดทำกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตช่วยฝึกทักษะการคิดคำนวณของข้าพเจ้า					
17	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนของข้าพเจ้ามากขึ้น					
18	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต กระตุ้นให้ข้าพเจ้าเกิดการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง					
19	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ทำให้ข้าพเจ้ามีความมั่นใจในตัวเองเกี่ยวกับการเรียนมากขึ้น					
20	ทำให้ข้าพเจ้ามีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์					

**ภาคผนวก จ**

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**

## แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบในแต่ละข้อ โดยเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวและแสดงวิธีทำลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. ในแต่ละข้อคำถามจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียง 1 คำตอบเท่านั้น
5. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 100 นาที

ชื่อ..... ชั้น..... เลขที่.....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้  
โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

**ตอนที่ 1** จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

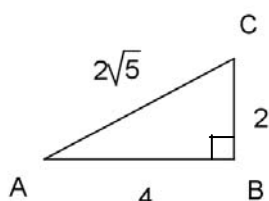
ก.  $\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ข.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ค.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}$

ง.  $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

2.



จากรูป  $\sin A$  มีค่าตรงกับข้อใด

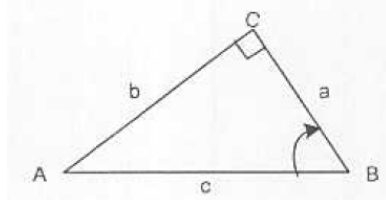
ก.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ข.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ค.  $\frac{1}{2}$

ง.  $\sqrt{5}$

3. จากรูป  $\sin B$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{a}{c}$

ข.  $\frac{b}{c}$

ค.  $\frac{a}{b}$

ง.  $\frac{c}{a}$

4. กำหนดให้  $\cot A = \frac{4}{3}$  ค่าของ

$\tan A$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค.  $\frac{3}{4}$

ง.  $\frac{4}{3}$

5. กำหนดให้  $\tan A = \sqrt{3}$  ค่าของ

$\cot A$  มีค่าตรงกับข้อใด

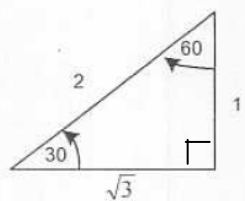
ก. 3

ข.  $\sqrt{3}$

ค.  $\frac{1}{3}$

ง.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. จากรูป  $\sin 60^\circ$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{1}{2}$

ข. 2

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ง.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด

ก.  $1^\circ = 60'$

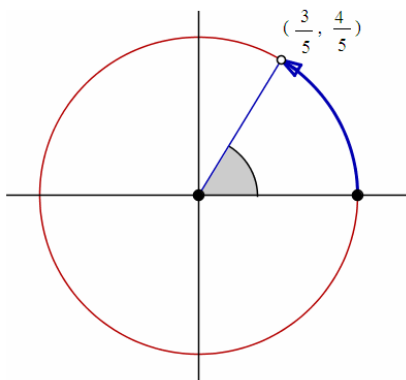
ข.  $1^\circ = 60''$

ค.  $360^\circ = 2\pi$  เรเดียน

ง.  $180^\circ = \pi$  เรเดียน



15. กำหนดให้  $p(\theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  ดังรูป



พิกัดของจุด  $p(-\theta + 3\pi)$  ตรงกับข้อใด

- ก.  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$       ข.  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$   
 ค.  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$       ง.  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

16. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ตรงกับข้อใด

- ก. โดเมน คือ  $\mathbb{R}$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$   
 ข. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^+$  และ เรนจ์ คือ  $[0, 1]$   
 ค. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^-$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, \infty)$   
 ง. โดเมนคือ จำนวนเต็ม และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$

17. ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าเท่ากับ 1

- ก.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ข.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ค.  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ง.  $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$

18. ค่าของ

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$$

ตรงกับข้อใด

- ก. -1      ข. 1  
 ค.  $-\frac{1}{2}$       ง.  $\frac{1}{2}$

19. ถ้า  $\cos \theta = -1$  และ  $-4\pi < \theta < 0$

แล้ว  $\theta$  คือจำนวนในข้อใด

- ก.  $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$       ข.  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$   
 ค.  $-\pi, -3\pi$       ง.  $-2\pi, -4\pi$

20. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$   
 ค.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ง.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

21. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ค.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$   
 ง.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

22.  $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  มีค่าเท่าไร

- ก.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ข.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ค.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ง.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. ถ้า  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\sin \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{5}{13}$                       ข.  $\frac{12}{13}$

ค.  $-\frac{5}{13}$                     ง.  $-\frac{12}{13}$

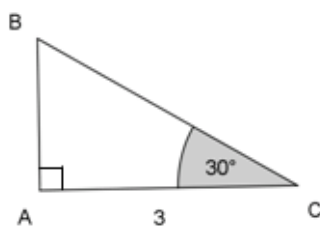
24. ถ้า  $\cos \theta = \frac{5}{6}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\operatorname{cosec} \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{6}{5}$                           ข.  $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

ค.  $-\frac{6}{5}$                          ง.  $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$

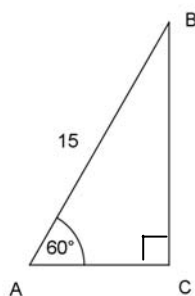
25. จากรูป AB ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                              ง.  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

26. จากรูป BC ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{15\sqrt{3}}{3}$                          ง.  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

27. รูปสามเหลี่ยม ABC ถ้ามี  $\hat{A}BC$

เป็นมุมฉาก  $\overline{AB}$  ยาว 16 หน่วย และ

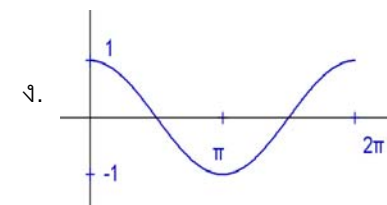
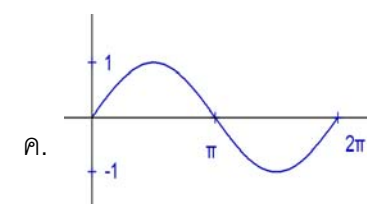
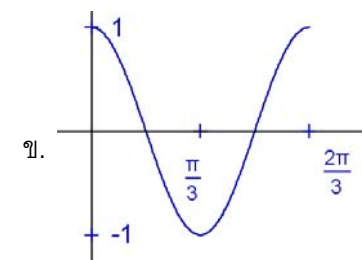
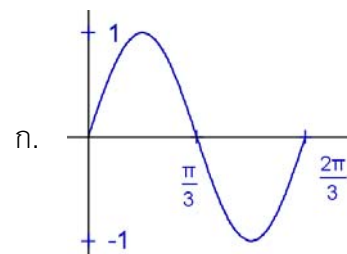
$\hat{B}CA = 30^\circ$  แล้ว  $\overline{BC}$  ยาวเท่าใด

ก.  $16\sqrt{2}$  หน่วย              ข.  $16\sqrt{3}$  หน่วย

ค.  $\frac{16\sqrt{2}}{2}$  หน่วย              ง.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$  หน่วย

28. กราฟของ  $y = \sin 3x$  เมื่อ

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  หรือ  $0 \leq X \leq 2\pi$  คือข้อใด

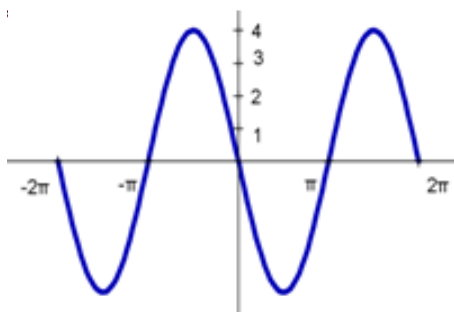


29. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



- ก.  $y = \sin 2X$       ข.  $y = \cos 2X$   
 ค.  $y = 2 + \sin X$       ง.  $y = 2 + \cos X$

30. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



- ก.  $y = 4\cos X$       ข.  $y = 4\sin X$   
 ค.  $y = -4\cos X$       ง.  $y = -4\sin X$

---

สำหรับทด



3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มุม A มีขนาด  $50^\circ$  มุม B มีขนาด  $70^\circ$  และ AC ยาว 10 เซนติเมตร จากจุด C ลากเส้นไปตั้งฉากกับ AB ที่จุด D จงหา CD, AD, BC และ BD

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

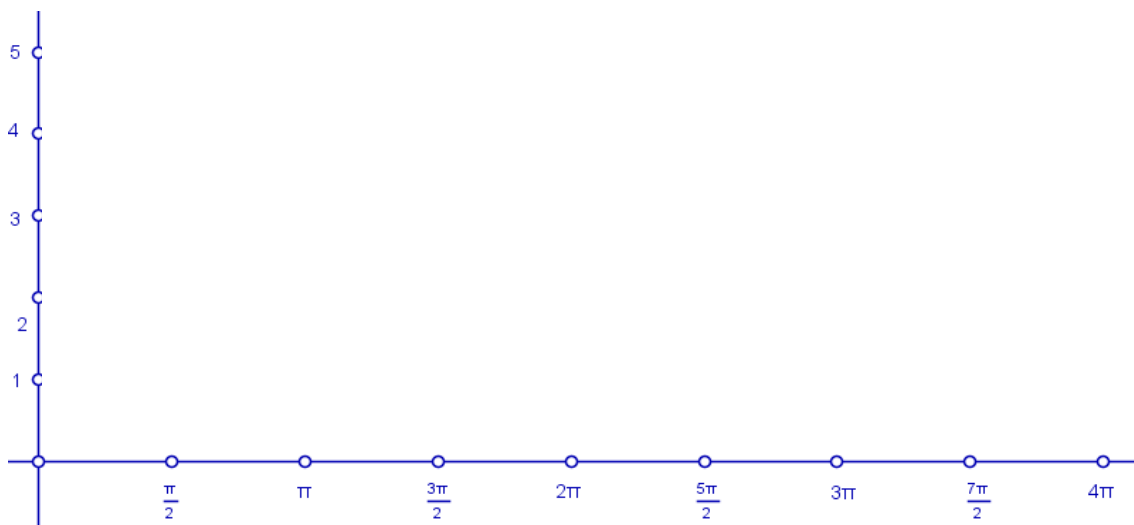
.....

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมน เรนจ์ คาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน  
 $y = \sin x + 4$  เมื่อ  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(x)$									
$\sin(x) + 4$									

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ ..... (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ .....

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ .....

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ .....

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ .....

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใดจงอธิบาย

5.1) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ..... เพราะ.....

.....

.....

5.2) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ..... เพราะ.....

.....

.....

5.3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ..... เพราะ.....

.....

.....

5.4) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ..... เพราะ.....

.....

.....

5.5) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ ..... เพราะ.....

.....

.....

ไม่มีสิ่งไหนจะหนักเกิน ไม่มีคำว่าทำไม่ได้

ขอให้โชคดีนะคะ

### ภาคผนวก ช

เฉลยบางส่วนของชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้โปรแกรม C.a.R.

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 1.1











ทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ตอนที่ 1 ทบทวนส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

- |             |   |  |
|-------------|---|--|
| 1.1 คำสั่ง  |    | ใช้ในการสร้างจุดบนเส้นตรง                              |
| 1.2 คำสั่ง  |    | ใช้ในการสร้างเส้นตรงผ่านจุดสองจุด                      |
| 1.3 คำสั่ง  |   | ใช้ในการสร้างส่วนของเส้นตรง                            |
| 1.4 คำสั่ง  |  | ใช้ในการสร้างรูปวงกลม                                  |
| 1.5 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ) |
| 1.6 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด                              |
| 1.7 คำสั่ง  |  | ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น                     |
| 1.8 คำสั่ง  |  | ใช้ในการวัดมุมระหว่างจุด 3 จุด                         |
| 1.9 คำสั่ง  |  | ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด                             |
| 1.10 คำสั่ง |  | ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ                         |

2. จากการสร้างให้นักเรียนบอกนิยามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเท่ากับ 90 องศา

## 3. กำหนดให้ มุม A เป็นมุมหลัก


3.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า ด้านประชิดของมุม A3.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม A3.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

## 4. กำหนดให้มุม C เป็นมุมหลัก

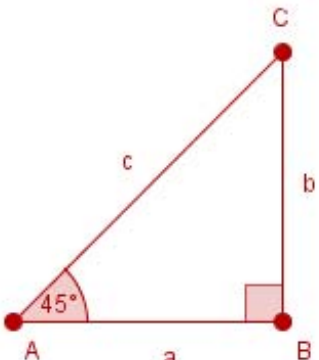
5.1 ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม C5.2 ส่วนของเส้นตรง BC เรียกว่า ด้านประชิดของมุม C5.3 ส่วนของเส้นตรง CA เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

5. จากรูปข้างบนนอกจากสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว ส่วนประกอบในข้อ 3-5 สามารถใช้กับสามเหลี่ยมอื่นๆ (ได้/ไม่ได้) ไม่ได้ เพราะ ไม่สามารถนำไปเขียนให้อยู่ในรูปอัตราส่วนตรีโกณมิติได้

## ตอนที่ 2 ทบทวนอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนใช้มุมของ  $a$ ,  $b$  ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  
2. หากนักเรียนต้องการกำหนดระยะทางให้คลิกขวาที่มุมของ  $a$  และ  $b$




ความยาว  $a = -6$

ความยาว  $b = 6$

ความยาว  $c = 8.48528$

มุม  $\hat{C}BA = 90$

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนใช้คำสั่ง  ในการทำการศึกษา2. ให้นักเรียนใช้มุม  $a$  และ  $b$  ในการเปลี่ยนแปลงความยาวของเส้นตรง เพื่อทำการศึกษากิจกรรม

3. จากชุดกิจกรรมข้างบนและจากความรู้เดิมของนักเรียน จะได้ว่า (วัดจากมุม A เป็นหลักก่อน)

$$3.1 \text{ อัตราส่วนไซน์ } A \quad (\sin A) = \frac{b}{c}$$

$$3.2 \text{ อัตราส่วนโคไซน์ } A \quad (\cos A) = \frac{a}{c}$$

$$3.3 \text{ อัตราส่วนแทนเจนต์ } A \quad (\tan A) = \frac{b}{a}$$

4. ให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนของไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยกำหนดให้ความเป็น a, b, c ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ C ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า

$$4.1 \sin A = \frac{b}{c}$$

$$4.4 \sin C = \frac{a}{c}$$

$$4.2 \cos A = \frac{a}{c}$$

$$4.5 \cos C = \frac{b}{c}$$

$$4.3 \tan A = \frac{b}{a}$$

$$4.6 \tan C = \frac{a}{b}$$

5. ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (ตามที่นักเรียนต้องการ) แล้วหาอัตราส่วนของ ไซน์, โคไซน์ และแทนเจนต์ ตามลำดับ โดยยึดมุม A และ B ตามลำดับ จากการสำรวจจะได้ว่า (ในที่นี้ a = 3, b = 4, c = 5)

$$5.1 \sin A = \frac{4}{5}$$

$$5.4 \sin C = \frac{3}{5}$$

$$5.2 \cos A = \frac{3}{5}$$

$$4.5 \cos C = \frac{4}{5}$$

$$5.3 \tan A = \frac{4}{3}$$

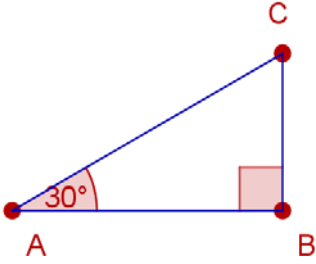
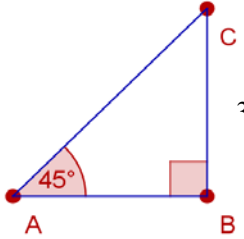
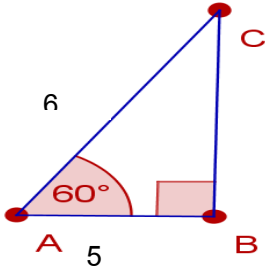
$$5.6 \tan C = \frac{3}{4}$$

6. จากการสำรวจในข้อที่ 4-6 นักเรียนสามารถตั้งข้อคาดการณ์ได้ว่า

.....  $\sin A = \cos C$  .....

.....  $\cos A = \sin C$  .....

7. กำหนด  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่  $B$  มีขนาดตามที่กำหนดให้ในตารางต่อไปนี้ให้นักเรียนหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปที่กำหนดให้แล้วเขียนค่าของอัตราส่วนเติมในตาราง

$\triangle ABC$	ขนาดของ $\hat{A}$	ค่าของอัตราส่วน		
		$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
	$30^\circ$	$\frac{5}{6}$	$\frac{x}{6}$	$\frac{5}{x}$
	$45^\circ$	$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{3}$
	$60^\circ$	$\frac{x}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{x}{5}$

8. จากการสำรวจในข้อ 7 นักเรียนสรุปได้ว่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	ขนาดของมุม		
	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 2.1


### วงกลมหนึ่งหน่วย

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

**ตอนที่ 1** วงกลมหนึ่งหน่วย

ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนเข้ากิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเข้าไปที่หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วคลิกเลือกกิจกรรมที่ 2.1
2. ให้นักเรียนสร้างรูปวงกลมจากจุดที่กำหนดให้โดยมีรัศมีเท่าใดก็ได้จำนวน 3 รูป โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้


2.1 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของเส้น (เส้นบาง, เส้นหนา, เส้นประ)

2.2 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดลักษณะของจุด


2.3 คำสั่ง  ใช้ในการกำหนดสีของเส้น จุด เป็นต้น

2.4 คำสั่ง  ใช้ในการลบสิ่งที่เราไม่ต้องการ

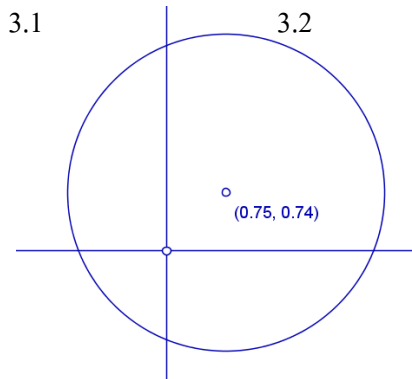
2.5 คำสั่ง  ใช้เป็นลูกศรในการควบคุมจุด

2.6 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างรูปวงกลม

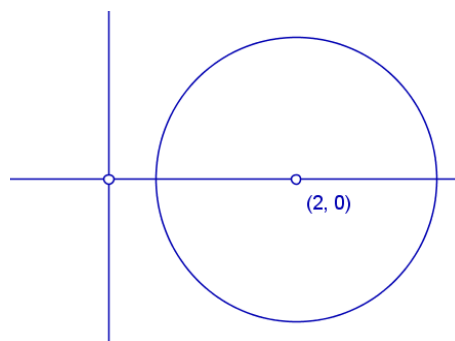
2.7 คำสั่ง  ใช้ในการแสดงชื่อของวัตถุ

2.8 คำสั่ง  ใช้ในการสร้างจุดตัด

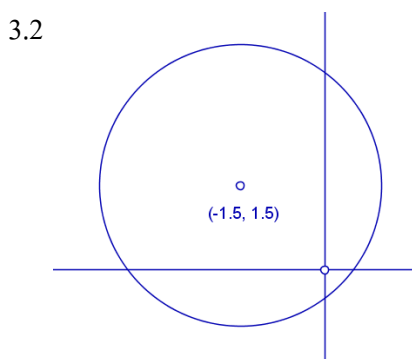
3. ให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่นักเรียนสร้างลงในช่องว่างพร้อมทั้งเขียนสมการวงกลม ด้วย



รัศมียาว 2 หน่วย  
สมการ  $(x-0.75)^2 + (y-0.74)^2 = 4$

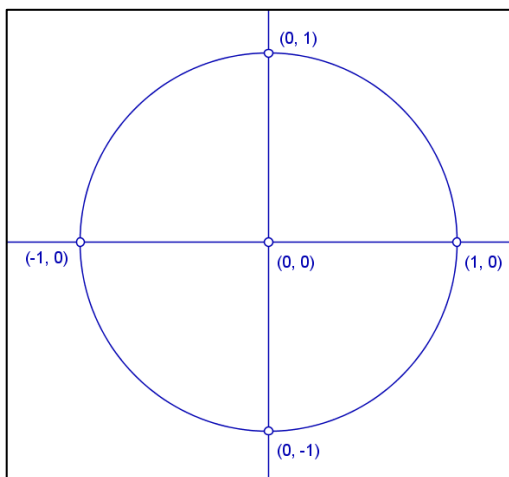


รัศมียาว 1.5 หน่วย  
สมการ  $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2.25$




รัศมียาว 2.5 หน่วย  
สมการ  $(x+1.5)^2 + (y-1.5)^2 = 6.25$

4. จากการสร้างรูปวงกลมในข้อ 3 นักเรียนลองตั้งข้อคาดการณ์ซึ่งว่านิยามของวงกลมหนึ่งหน่วยคืออะไร มีสมการเป็นอย่างไร และสร้างรูปวงกลมหนึ่งหน่วยพร้อมทั้งบอกตำแหน่งของจุดตัด

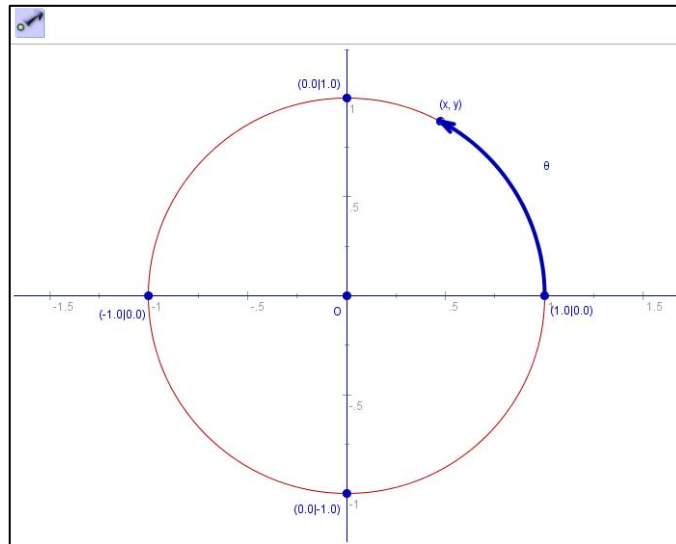


วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งวงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์  $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$  และมีความยาวส่วนโค้งวงกลมเท่ากับ  $2\pi r$  มีจุดตัดบนแกน X และแกน Y ทั้งหมด 4 จุด คือ  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  และ  $(0, -1)$

## ตอนที่ 2

เมื่อนักเรียนตอบคำถามในข้อที่ 4 เสร็จแล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมวงกลมหนึ่งหน่วย โดยเลือกที่หน้าถัดไปของกิจกรรม โดยใช้คำสั่ง  ในการทำการสำรวจกิจกรรม

5.1 จากการศึกษากิจกรรมดังภาพข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



เราเรียก  $\theta$  ว่า ความยาวส่วนโค้งของวงกลม วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา  $\theta > 0$

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า จุดปลายส่วนโค้งหรือจุดสิ้นสุด

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ  $2\pi r$

5.1.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น  $\frac{1}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

5.1.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{2}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{2}{4} \times 2\pi = \pi$

5.1.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น  $\frac{3}{4}$  ส่วนของวงกลม

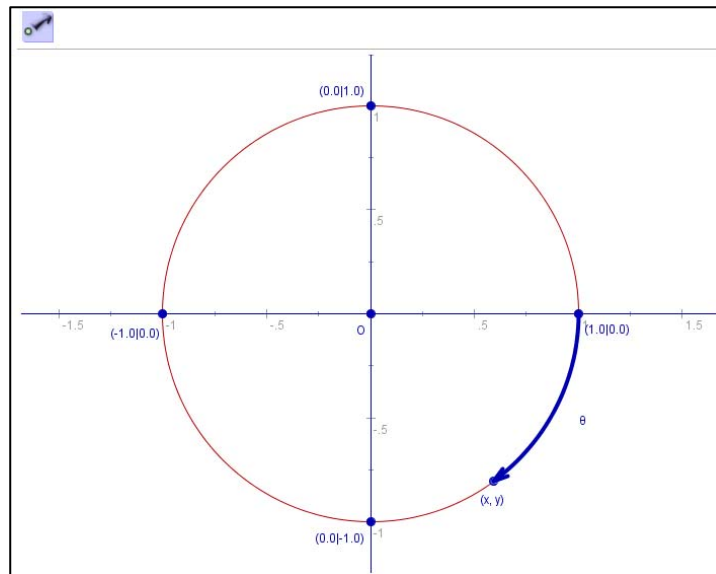
จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

5.1.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{4}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{4}{4} \times 2\pi = 2\pi$

5.1.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี 4 จุด

5.2 จากการศึกษากิจกรรมดังกล่าวข้างล่างนี้ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



เราเรียก  $\theta$  ว่า ความยาวส่วนโค้งวงกลม วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา  $\theta < 0$

เราเรียกพิกัดจุด  $(x, y)$  ว่า จุดปลายส่วนโค้งหรือจุดสิ้นสุด

ความยาวรอบรูปวงกลมเท่ากับ  $-2\pi r$

5.2.1 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, 1)$  คิดเป็น  $\frac{1}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{1}{4} \times (-2\pi) = -\frac{\pi}{2}$

5.2.2 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(-1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{2}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{2}{4} \times (-2\pi) = -\pi$

5.2.3 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(0, -1)$  คิดเป็น  $\frac{3}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{3}{4} \times (-2\pi) = -\frac{3\pi}{2}$

5.2.4 ถ้าตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งอยู่ที่พิกัดจุด  $(1, 0)$  คิดเป็น  $\frac{4}{4}$  ส่วนของวงกลม

จะได้ความยาวของส่วนโค้ง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{4}{4} \times (-2\pi) = -2\pi$

5.2.5 จากการทำกิจกรรมนักเรียนจะเห็นว่าตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งมี 4 จุด

6. จากการทำกิจกรรมในข้อที่ 5 นักเรียนสรุปอะไรได้บ้าง (ตอบเป็นข้อๆ)

1. วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) หมายถึง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาว 1 หน่วย มีสมการคือ  $x^2 + y^2 = 1$
2. ถ้า  $\theta > 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา  
 ถ้า  $\theta < 0$  จะวัดส่วนโค้งจากจุด  $(1, 0)$  ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา  
 ถ้า  $\theta = 0$  จุดปลายส่วนโค้งคือจุด  $(1, 0)$
3. หาจุด  $(x, y)$  ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $|\theta|$  หน่วยได้เสมอ ไม่ว่า  $\theta$  จะเป็นจำนวนเท่าใดก็ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

### เฉลยใบกิจกรรมที่ 3

#### ฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 3 เรื่องฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. ให้นักเรียนทำการศึกษากฎนิยามฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย
2. จากข้อ 1 ให้นักเรียนสำรวจกิจกรรมแล้วเติมคำตอบลงในตารางต่อไปนี้

หน่วยการวัดมุม		พิกัดจุด	
เรเดียน	องศา	x	y
0	0°	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\pi$	180°	-1	0
$\frac{4\pi}{3}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	0	-1
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$2\pi$	360°	1	0

หมายเหตุ : ค่าของ  $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$  ,  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$

3. จากความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 จะเห็นว่าค่าของความยาวส่วนโค้ง  $\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ จะสามารถกำหนดจุดปลายของส่วนโค้งได้เพียง 1 จุด เท่านั้น นักเรียนคิดว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด จากการทำกิจกรรมในข้อ 2 คิดว่าเป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อกำหนด  $\theta$  เป็นความยาวส่วนโค้งของจำนวนจริงใดๆ จะมีพิกัดของจุด  $x$  และ  $y$  เพียงค่าเดียวเสมอ

4. จากข้อมูลในข้อ 1- 3 ที่นักเรียนได้ตอบให้นักเรียนเขียนนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ ตามความเข้าใจของนักเรียน

**บทนิยาม** ฟังก์ชันไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $\text{sine} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{sine} = \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(\theta) = (x, y)\}$$

**บทนิยาม** ฟังก์ชันโคไซน์ หมายถึง ฟังก์ชัน  $\text{cosine} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ซึ่งนิยามว่า

$$\text{cosine} = \{(\theta, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\theta) = (x, y)\}$$

5. เมื่อนักเรียนได้บทนิยามในข้อที่ 4 แล้ว ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

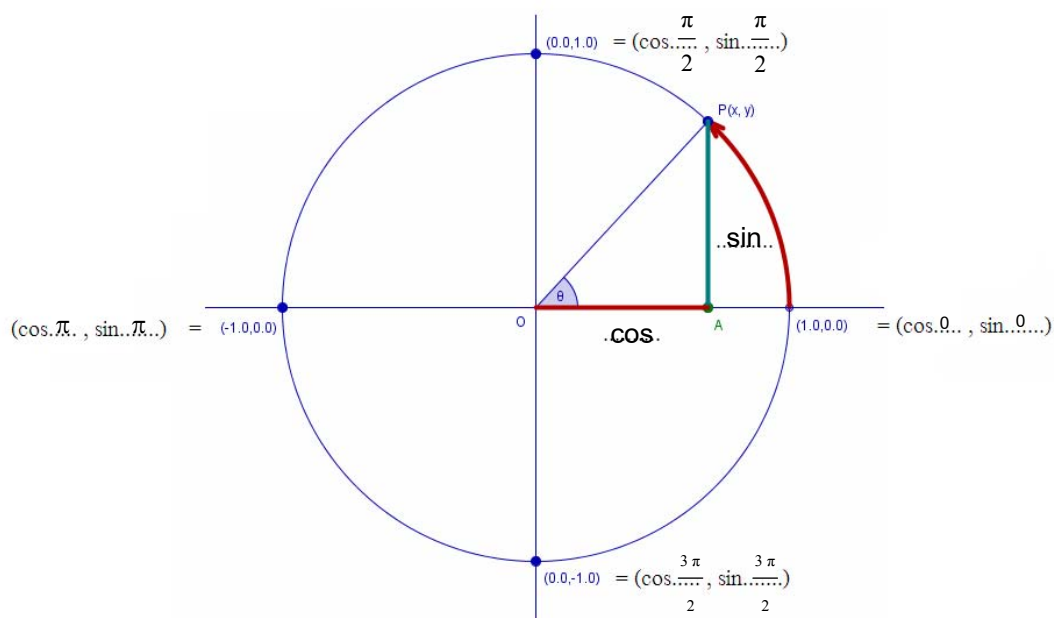
5.1 โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

5.2 โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $\mathbb{R}$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

6. ให้นักเรียนตอบคำถามลงในวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้



เนื่องจากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย คือ  $x^2 + y^2 = 1$  และจากรูปข้างบนจะเห็นว่า  $y = \sin(\theta)$ ,  $x = \cos(\theta)$  ดังนั้นส่งผลให้  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

7. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในตารางข้างล่างนี้

มุม $\theta$ ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	0	ไม่นิยาม
$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	ไม่นิยาม	-1
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ไม่นิยาม	0

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 4.1

ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 4 เรื่องค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ ในกิจกรรมนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

**กรณีที่ 1** ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

1. ให้นักเรียนทำกิจกรรม 4.1 ในหน่วยที่ 4 แล้วตอบคำถามลงในใบงาน
2. ให้นักเรียนหาความยาวส่วนโค้งของจุดปลายส่วนโค้งต่อไปนี้ (ภายใน 1 รอบ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)

2.1 พิกัดจุดปลาย  $p(1, 0)$

$$\theta = 0$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

2.2 พิกัดจุดปลาย  $p(0, 1)$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2.3 พิกัดจุดปลาย  $p(-1, 0)$

$$\theta = \pi$$

$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos(\pi) = -1$$

2.4 พิกัดจุดปลาย  $(0, -1)$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

2.5 ให้  $\theta = -\frac{\pi}{2}$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(0, -1)$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2.6 ให้  $\theta = -\pi$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(-1, 0)$

$$\sin(-\pi) = 0$$

$$\cos(-\pi) = -1$$

2.7 ให้  $\theta = -\frac{3\pi}{2}$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(0, 1)$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

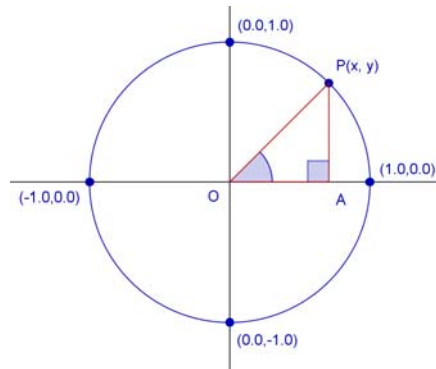
2.8 ให้  $\theta = -2\pi$

พิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง  $(1, 0)$

$$\sin(-2\pi) = 0$$

$$\cos(-2\pi) = 1$$

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 2 แบ่งวงกลมออกเป็น 8 ส่วน จะได้ดังรูป



เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วให้กำหนดจุด  $P(x, y)$  เป็นจุดตัดที่อยู่บนวงกลม และให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

3.1 ให้นักเรียนสร้างรูป  $\triangle$  มุมฉาก PAO โดยมี  $\hat{A}$  เป็นมุมฉาก

จะได้ว่า  $m(\hat{AOP}) = \frac{\pi}{4}$  เรเดียน หรือ  $45^\circ$  องศา

จะเห็นว่า  $\triangle PAO$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $OA = PA$

นั่นคือ  $x = y$

3.2 ให้นักเรียนหาจุดปลายส่วนโค้ง

$$\text{จาก } OA^2 + PA^2 = OP^2$$

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

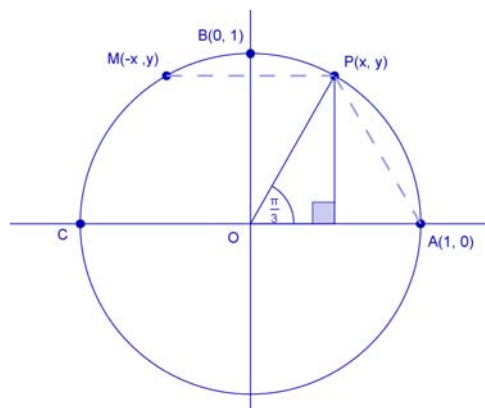
แต่  $(x, y)$  เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{ดังนั้น } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{4}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4} \text{ เมื่อ } n \text{ คือ จำนวนเต็มบวก}$$

4. ให้นักเรียนใช้ความรู้เดิมในชั้น ม. 1 สร้างมุม 60 องศา โดยที่ให้  $O$  ากเท่ากับ  $60^\circ$



เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วให้กำหนดจุด  $P(x, y)$  เป็นจุดตัดที่เกิดจากการสร้างมุม  $60^\circ$  เป็นจุดตัดที่อยู่บนวงกลม และให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

4.1 ให้นักเรียนหาจุดปลายส่วนโค้ง (ใช้แนวคิดเดียวกันกับในหน่วยที่ 2)

จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด  $PM$  ยาวเท่ากับระยะทางระหว่างจุด  $PA$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad PM &= PA \\ \sqrt{(x - (-x))^2 + (y - y)^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} \\ \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\ 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\ 2(2x - 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $P(x, y)$  เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1

ดังนั้น  $x$  และ  $y$  จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{จะได้} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{3}$  หน่วย คือ จุด  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\text{นั่นคือ} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

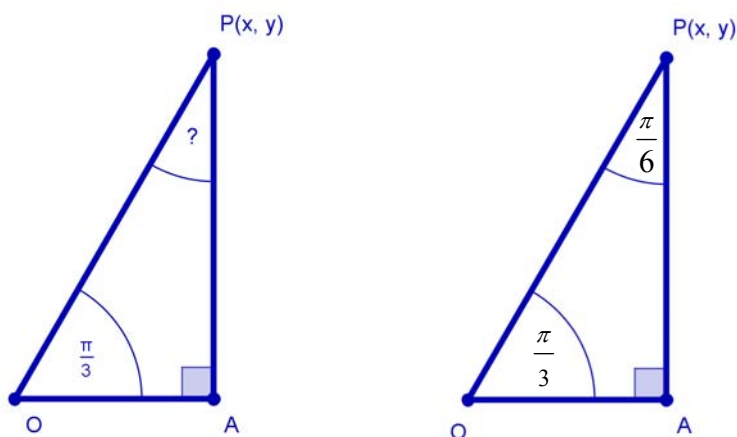
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

นอกจากค่าของ  $\frac{\pi}{3}$  แล้ว เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

ในรูป  $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ,  $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$  และ  $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

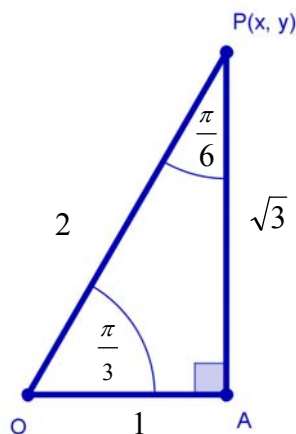
5. จากข้อ 4 จะได้ว่าจากการหา  $\sin \frac{\pi}{3}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3}$  ในกรณีที่ 2 เราสามารถนำมาสู่การหาค่า  $\sin \frac{\pi}{6}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6}$  ได้โดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขอให้นักเรียนสังเกต รูป  $\triangle PAO$  ในข้อ 4 จะพบว่ามุมแต่ละมุมเท่ากับ  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  และ  $90^\circ$  มีความยาวส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  และ  $\frac{\pi}{2}$  เรเดียน ตามลำดับ และมุม  $OPA$  เป็นส่วนหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเดียวกัน ดังรูป



จากข้อ 4 จะได้ว่า  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น อัตราส่วนดังกล่าวจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้แบบหนึ่ง ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังกล่าวใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## แบบฝึกหัดเสริม

1. จงหาค่าของ  $\sin \theta$  และ  $\cos \theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1)  $3\pi$

$$p(3\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(3\pi) = 0$$

$$\cos(3\pi) = -1$$

2)  $8\pi$

$$p(8\pi) = (1, 0)$$

$$\sin(8\pi) = 0$$

$$\cos(8\pi) = 1$$

3)  $-5\pi$

$$p(-5\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-5\pi) = 0$$

$$\cos(-5\pi) = -1$$

4)  $-2\pi$

$$p(-2\pi) = (1, 0)$$

$$\sin(-2\pi) = 0$$

$$\cos(-2\pi) = 1$$

5)  $-\frac{\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6)  $-\frac{3\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

7)  $\frac{7\pi}{2}$

$$p\left(\frac{7\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

8)  $-\frac{7\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0$$

9)  $\frac{9\pi}{2}$

$$p\left(\frac{9\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$$

10)  $-\frac{9\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = 0$$

11)  $57\pi$

$$p(57\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(57\pi) = 0$$

$$\cos(57\pi) = -1$$

12)  $-57\pi$

$$p(-57\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-57\pi) = 0$$

$$\cos(-57\pi) = -1$$

13)  $53\pi$

$$p(53\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(53\pi) = 0$$

$$\cos(53\pi) = -1$$

14)  $-53\pi$

$$p(-53\pi) = (-1, 0)$$

$$\sin(-53\pi) = 0$$

$$\cos(-53\pi) = -1$$

15)  $\frac{27\pi}{2}$

$$p\left(\frac{27\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

$$\sin\left(\frac{27\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\left(\frac{27\pi}{2}\right) = 0$$

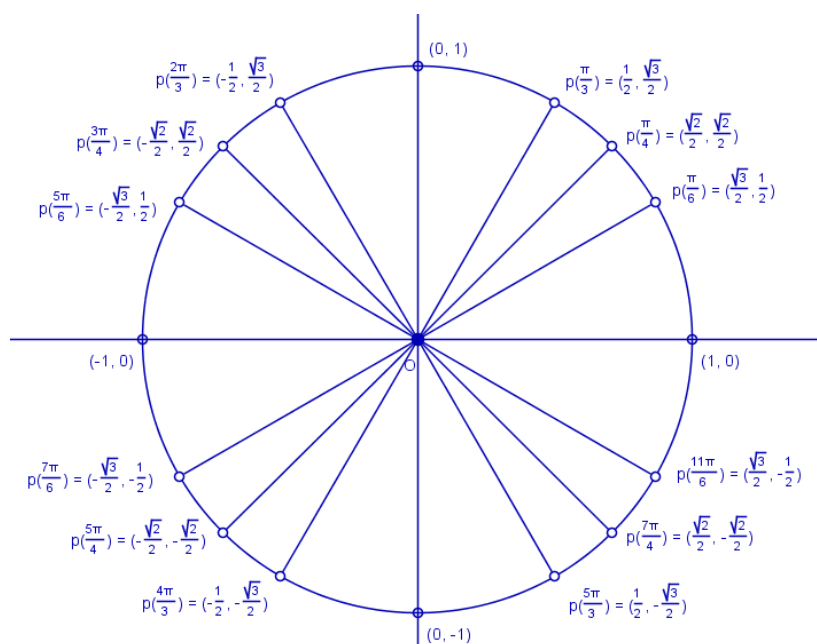
16)  $-\frac{27\pi}{2}$

$$p\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$$\sin\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{27\pi}{2}\right) = 0$$

2. จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยให้นักเรียนบอกตำแหน่งจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  ลงไปในรูป และบอกค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ พร้อมทั้งหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$  และ  $\frac{11\pi}{6}$



## 3. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$1) \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ และ } \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \sin \frac{3\pi}{2} \sec \pi + \sec^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sec \pi = 1$$

$$\sec^2 \frac{\pi}{6} = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ และ } \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{3\pi}{2} \sec \pi + \sec^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$$

$$= (-1) \cdot (1) + \frac{4}{3} - \left( \frac{1}{2} \right) (1)$$

$$= -1 + \frac{5}{6}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$5) \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot (1)$$

$$= \frac{4 + \sqrt{3}}{2}$$

$$2) 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan^2 \frac{\pi}{6} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2, \quad \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} = \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \text{ และ } \cos^2 \frac{\pi}{6} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\text{นั่นคือ } 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{6}$$

$$= 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} \right) \cdot 2 + \left( \frac{4}{3} \right) \cdot \frac{3}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - 1 + 1$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$4) \sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ$$

$$\text{วิธีทำ } \sin 720^\circ = 0, \quad \cot 45^\circ = 1, \quad \sec 60^\circ = 2$$

$$\cos 360^\circ = 1 \text{ และ } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ$$

$$= (0) \cdot (1) + (2) \cdot (1) - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$= 0 + 2 - 1$$

$$= 1$$

$$6) \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$$

$$= 0$$

$$7) \left( \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \text{ และ } \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{นั่นคือ } \left( \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \right) \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (-1 - 0) \cdot \sqrt{3}$$

$$= \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot (-1) \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$9) \tan 60^\circ \cos 30^\circ \sec 60^\circ - \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

$$\text{วิธีทำ } \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sec 60^\circ = 2 \text{ และ } \cot 45^\circ = 1$$

$$\text{นั่นคือ } \tan 60^\circ \cos 30^\circ \sec 60^\circ - \cos 60^\circ \cot 45^\circ$$

$$= (\sqrt{3}) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (2) - \left( \frac{1}{2} \right) (1)$$

$$= 3 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$11) \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} \tan^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2, \sec \frac{\pi}{3} = 2, \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \text{ และ } \tan^2 \frac{\pi}{3} = 3$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sec \frac{\pi}{3} \tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} \tan^2 \frac{\pi}{3}$$

$$= \left( \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{3}{4} \right) - (2) \cdot \left( \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \cdot (3)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{13}{12}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$8) \sin 90^\circ \tan 30^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 45^\circ - \sec 60^\circ \cot 60^\circ$$

$$\text{วิธีทำ } \sin 90^\circ = 1, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 45^\circ = 1, \sec 60^\circ = 2 \text{ และ } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 90^\circ \tan 30^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 45^\circ - \sec 60^\circ \cot 60^\circ$$

$$= (1) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) (1) - (2) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$10) \cot^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \cot^2 \frac{\pi}{4} = 1, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\text{และ } \cot^2 \frac{\pi}{3} = 3$$

$$\text{นั่นคือ } \cot^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \cot^2 \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \left( \frac{3}{4} \right) (3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{12}{4}$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$12) 3 \tan^2 45^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan^2 45^\circ = 1, \cot^2 30^\circ = \frac{1}{3}, \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\text{และ } \sec^2 45^\circ = 2$$

$$\text{นั่นคือ } 3 \tan^2 45^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$$

$$= 3 \cdot (1) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot (2)$$

$$= 3 - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 3 - 2 - \frac{1}{6}$$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 5

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 5 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ โดยใช้ความรู้เดิมในหน่วยที่ 4 นำมาใช้กับใบกิจกรรมในหน่วยที่ 5

1. จงทำให้อยู่ในรูป  $\tan \theta$

1.1)  $\tan(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(\pi - \theta) &= \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} \\ &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

1.2)  $\tan(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(\pi + \theta) &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

1.3)  $\tan(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(2\pi - \theta) &= \frac{\sin(2\pi - \theta)}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= -\tan(\theta) \end{aligned}$$

1.4)  $\tan(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \tan(2\pi + \theta) &= \frac{\sin(2\pi + \theta)}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

2. จงทำให้อยู่ในรูป  $\operatorname{cosec} \theta$

2.1)  $\operatorname{cosec}(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ &= \operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.2)  $\operatorname{cosec}(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin(\theta)} \\ &= -\operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.3)  $\operatorname{cosec}(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin(\theta)} \\ &= -\operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

2.4)  $\operatorname{cosec}(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \operatorname{cosec}(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ &= \operatorname{cosec}(\theta) \end{aligned}$$

3. จงทำให้้อยู่ในรูป  $\sec \theta$ 

3.1)  $\sec(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta)} \\ &= -\sec(\theta) \end{aligned}$$

3.3)  $\sec(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ &= \sec(\theta) \end{aligned}$$

3.2)  $\sec(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos(\theta)} \\ &= -\sec(\theta) \end{aligned}$$

3.4)  $\sec(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \sec(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ &= \sec(\theta) \end{aligned}$$

4. จงทำให้้อยู่ในรูป  $\cot \theta$ 

4.1)  $\cot(\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan(\theta)} \\ &= -\cot(\theta) \end{aligned}$$

4.3)  $\cot(2\pi - \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan(\theta)} \\ &= -\cot(\theta) \end{aligned}$$

4.2)  $\cot(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan(\theta)} \\ &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

4.4)  $\cot(2\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } \cot(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan(\theta)} \\ &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

## 5. จงหาค่าของ

5.1)  $\tan \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}, \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{และ } \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \tan \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} \\ = -\sqrt{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5.2)  $\tan \frac{7\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3}$

$$\text{วิธีทำ จาก } \tan \frac{7\pi}{4} = -1, \cot \frac{3\pi}{4} = -1, \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \tan \frac{7\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} - \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} \\ = -1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$5.3) \sec \frac{5\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$$

วิธีทำ จาก  $\sec \frac{5\pi}{3} = 2$ ,  $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$

$$\text{นั่นคือ } \sec \frac{5\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$= (2) \cdot (-1)$$

$$= -2$$

$$5.4) \frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}$$

วิธีทำ จาก  $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sec \frac{7\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1, \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1, \tan \frac{7\pi}{4} = -1$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}$$

$$= \frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (-1) \cdot (-1)}{-1 - 1}$$

$$= \frac{4 \cdot (-1) + 1}{-2}$$

$$= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$5.5) \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$

$$\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-540^\circ) = -1$$

$$\text{นั่นคือ } \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$5.6) \frac{4 \sin 300^\circ \sec(-765^\circ) + \tan 240^\circ \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan 630^\circ}$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan 240^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1, \tan 630^\circ = \text{ไม่นิยาม}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{4 \sin 300^\circ \sec(-765^\circ) + \tan 240^\circ \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan 630^\circ}$$

ไม่สามารถหาคำตอบได้

6. จงหาจำนวนจริง  $\theta$  โดยที่  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  และสอดคล้องกับสมการในข้อต่อไปนี

$$6.1) |\sin \theta| = \sin \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$6.2) |\cos \theta| = -\cos \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

$$6.3) |\tan \theta| = \tan \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  หรือ  $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

$$6.4) |\cot \theta| = -\cot \theta$$

จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  หรือ  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

- 6.5)  $|\sec \theta| = \sec \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  หรือ  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$
- 6.6)  $|\operatorname{cosec} \theta| = -\operatorname{cosec} \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
- 6.7)  $\sin \theta = \cos \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{4}$  หรือ  $\frac{5\pi}{4}$
- 6.8)  $\tan \theta = \cot \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  หรือ  $\frac{7\pi}{4}$
- 6.9)  $\sin \theta = \tan \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $0, \pi, 2\pi$
- 6.10)  $\cos \theta = \cot \theta$  จะได้จำนวนจริง  $\theta$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 6.1

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 6 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 6.1 จะแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

ตอนที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

**ตอนที่ 1** ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการวัดมุม

1. ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการวัดมุมในหน่วยที่ 1 เปลี่ยนมุม  $\theta$  ที่กำหนดให้ ให้มีหน่วยเป็นองศา และเรเดียน

$$1.1) \theta = 1^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เรเดียน เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$1.3) \theta = -150^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } -150^\circ = -\frac{5\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$1.5) \theta = \frac{11\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{11\pi}{6} = 330^\circ \text{ องศา}$$

$$1.7) \theta = \frac{\pi}{5} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\pi}{5} = 36^\circ \text{ องศา}$$

$$1.9) \theta = -\frac{7\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } -\frac{7\pi}{6} = -210^\circ \text{ องศา}$$

$$1.2) \theta = 60^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เรเดียน เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$1.4) \theta = 270^\circ$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$1.6) \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \text{ องศา}$$

$$1.8) \theta = -\frac{5\pi}{4} \text{ เรเดียน}$$

วิธีทำ จาก  $2\pi$  เทียบเท่ากับ  $360^\circ$

$$\text{ดังนั้น } -\frac{5\pi}{4} = -225^\circ \text{ องศา}$$

$$1.10) \theta = 3 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } 3 = 3 \times 57^\circ 18' \approx 171.88^\circ \text{ องศา}$$

## ตอนที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ในกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมจะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 กรณีเช่นเดียวกันกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง ดังนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ให้นักเรียนใช้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยการวัดมุมที่เป็นองศากับหน่วยการวัดมุมเรเดียนเติมคำตอบลงในตารางทั้ง 5 กรณีต่อไปนี้

**กรณี 1** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $-\theta$  เมื่อ  $\theta$  เป็นมุมบวก

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

**กรณี 2** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $\theta > 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
ถ้า $n$ เป็นจำนวนนับ แล้ว	ถ้า $n$ เป็นจำนวนนับ แล้ว
$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$	$\sin(360^\circ \cdot n + \theta) = \sin\theta$
$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$	$\cos(360^\circ \cdot n + \theta) = \cos\theta$
$\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$	$\tan(360^\circ \cdot n + \theta) = \tan\theta$
$\cot(2n\pi + \theta) = \cot\theta$	$\cot(360^\circ \cdot n + \theta) = \cot\theta$
$\sec(2n\pi + \theta) = \sec\theta$	$\sec(360^\circ \cdot n + \theta) = \sec\theta$
$\operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$	$\operatorname{cosec}(360^\circ \cdot n + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

**กรณี 3** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $90^\circ < \theta < 180^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$	$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta$
$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 4** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$
$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$
$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$
$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$	$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta$
$\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

**กรณี 5** การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม  $\theta$  เมื่อ  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ระบบเรเดียน	ระบบองศา
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$
$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$	$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$
$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$	$\sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$
$\operatorname{cosec}(2\pi - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\operatorname{cosec}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$

### แบบฝึกหัดเสริมทักษะ

1. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1)  $150^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(150^\circ) &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) \\ \cos(150^\circ) &= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos(30^\circ) \\ \tan(150^\circ) &= \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan(30^\circ) \\ \sec(150^\circ) &= \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec(30^\circ) \\ \csc(150^\circ) &= \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc(30^\circ) \\ \cot(150^\circ) &= \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot(30^\circ)\end{aligned}$$

2)  $120^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(120^\circ) &= \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) \\ \cos(120^\circ) &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) \\ \tan(120^\circ) &= \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) \\ \sec(120^\circ) &= \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec(60^\circ) \\ \csc(120^\circ) &= \csc(180^\circ - 60^\circ) = \csc(60^\circ) \\ \cot(120^\circ) &= \cot(180^\circ - 60^\circ) = -\cot(60^\circ)\end{aligned}$$

3)  $315^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(315^\circ) &= \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin(45^\circ) \\ \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) \\ \tan(315^\circ) &= \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan(45^\circ) \\ \sec(315^\circ) &= \sec(360^\circ - 45^\circ) = \sec(45^\circ) \\ \csc(315^\circ) &= \csc(360^\circ - 45^\circ) = -\csc(45^\circ) \\ \cot(315^\circ) &= \cot(360^\circ - 45^\circ) = -\cot(45^\circ)\end{aligned}$$

4)  $-315^\circ$

วิธีทำ

จาก  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$$\begin{aligned}-\sin(315^\circ) &= -\sin(360^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) \\ \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) \\ -\tan(315^\circ) &= -\tan(360^\circ - 45^\circ) = \tan(45^\circ) \\ \sec(315^\circ) &= \sec(360^\circ - 45^\circ) = \sec(45^\circ) \\ -\csc(315^\circ) &= -\csc(360^\circ - 45^\circ) = \csc(45^\circ) \\ -\cot(315^\circ) &= -\cot(360^\circ - 45^\circ) = \cot(45^\circ)\end{aligned}$$

5)  $930^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(930^\circ) &= \sin(900^\circ + 30^\circ) = -\sin(30^\circ) \\ \cos(930^\circ) &= \cos(900^\circ + 30^\circ) = -\cos(30^\circ) \\ \tan(930^\circ) &= \tan(900^\circ + 30^\circ) = \tan(30^\circ) \\ \sec(930^\circ) &= \sec(900^\circ + 30^\circ) = -\sec(30^\circ) \\ \csc(930^\circ) &= \csc(900^\circ + 30^\circ) = -\csc(30^\circ) \\ \cot(930^\circ) &= \cot(900^\circ + 30^\circ) = \cot(30^\circ)\end{aligned}$$

6)  $225^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin(225^\circ) &= \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) \\ \cos(225^\circ) &= \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos(45^\circ) \\ \tan(225^\circ) &= \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan(45^\circ) \\ \sec(225^\circ) &= \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec(45^\circ) \\ \csc(225^\circ) &= \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc(45^\circ) \\ \cot(225^\circ) &= \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot(45^\circ)\end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ

$$1) \frac{3 \tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2 \sin 330^\circ}$$

วิธีทำ จาก  $\tan^2 135^\circ = 1$ ,  $\sec^2 300^\circ = 4$

$$\text{และ } \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{3 \tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2 \sin 330^\circ}$$

$$= \frac{3(1) - 4}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-1}{-1}$$

$$= 1$$

$$3) \cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$$

วิธีทำ จาก  $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

นั่นคือ  $\cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$

$$= (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) - (\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= 1$$

$$5) \sec^2(-240^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) + \cot^2(315^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sec^2(-240^\circ) = 4$ ,  $\operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

และ  $\cot^2(315^\circ) = 1$

นั่นคือ  $\sec^2(-240^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-\frac{5\pi}{6}) + \cot^2(315^\circ)$

$$= (4) + (\frac{1}{4}) + (1)$$

$$= \frac{21}{4}$$

$$2) \frac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$$

วิธีทำ จาก  $\tan(-480^\circ) = \sqrt{3}$ ,  $\sin(-840^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{และ } \cos(-390^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{\tan(-480^\circ) - \sin(-840^\circ)}{\cos(-390^\circ)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - (-\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= 3$$

$$4) \sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$$

วิธีทำ จาก  $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$

$$\sec(-765^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-540^\circ) = -1$$

นั่นคือ  $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec(-765^\circ) \cos(-540^\circ)$

$$= (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (\sqrt{3}) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

3. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากจุดปลายส่วนโค้งของมุม

1. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(15, -8)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ ในที่นี้  $x = 15$  และ  $y = -8$

$$\begin{aligned} \text{จาก } r &= \sqrt{(15-0)^2 + (-8-0)^2} \\ &= \sqrt{225 + 64} \\ &= \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{8}{17}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{17}{8} \\ \cos \theta &= \frac{15}{17}, & \sec \theta &= \frac{15}{17} \\ \tan \theta &= -\frac{8}{15}, & \cot \theta &= -\frac{15}{8} \end{aligned}$$

2. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  และมีด้านสิ้นสุดของมุม  $\theta$  อยู่  
 บนเส้นตรง  $4y = 3x$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

วิธีทำ เลือกจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุม ให้  $x = -4$  จะได้  $y = -3$

$$\begin{aligned} \text{จาก } r &= \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{3}{5}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{5}{3} \\ \cos \theta &= -\frac{4}{5}, & \sec \theta &= -\frac{5}{4} \\ \tan \theta &= \frac{3}{4}, & \cot \theta &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-1, -4)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$   
 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-0)^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{4}{\sqrt{17}}, & \operatorname{cosec} \theta &= -\frac{\sqrt{17}}{4} \\ \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{17}}, & \sec \theta &= -\sqrt{17} \\ \tan \theta &= -4, & \cot \theta &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(1, -\sqrt{2})$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(1-0)^2 + (-\sqrt{2}-0)^2} \\ &= \sqrt{1+2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \sin \theta &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & , & \quad \operatorname{cosec} \theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{3}} & , & \quad \sec \theta = \sqrt{3} \\ \tan \theta &= -\sqrt{2} & , & \quad \cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5. กำหนดให้  $\theta$  เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน และ  $P(-\sqrt{3}, 1)$  เป็นจุดปลายส่วนโค้งของมุม  $\theta$  จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชันของมุม  $\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } r &= \sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{3+1} \\ &= \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \sin \theta &= \frac{1}{2} & , & \quad \operatorname{cosec} \theta = 2 \\ \cos \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & , & \quad \sec \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \tan \theta &= -\sqrt{3} & , & \quad \cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

## เฉลยใบกิจกรรมที่ 7

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

**คำสั่ง** ให้นักเรียนเปิดชุดกิจกรรมแล้วเลือกทำกิจกรรมในหน่วยที่ 7 เรื่องกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
**คำชี้แจง** ในกิจกรรมที่ 7 จะแบ่งออกเป็น 5 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

ตอนที่ 2 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = k \cdot T(x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 3 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(k \cdot x)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0, k \neq 1$

ตอนที่ 4 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(b \cdot x + k)$  เมื่อ  $b, k$  เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับ 0

ตอนที่ 5 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x) + k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $k \neq 0$

ตอนที่ 1 กำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติ  $y = T(x)$

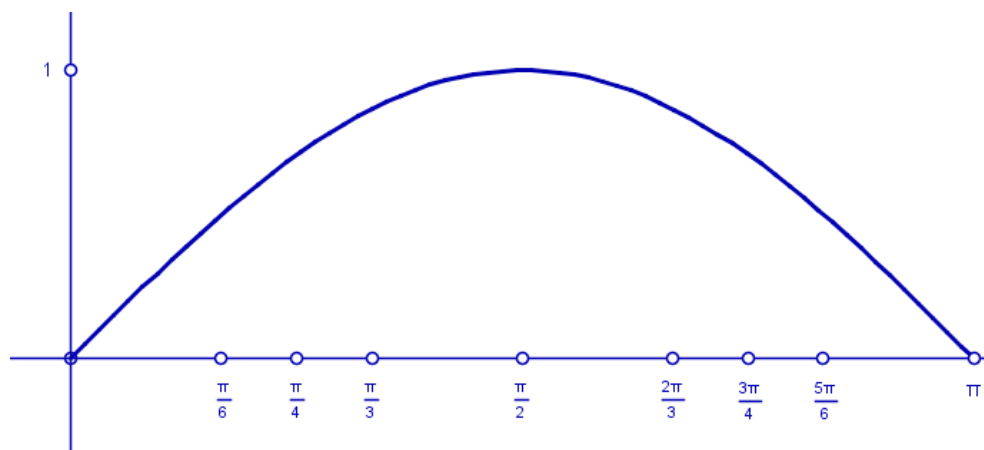
กราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$

3. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันไซน์  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

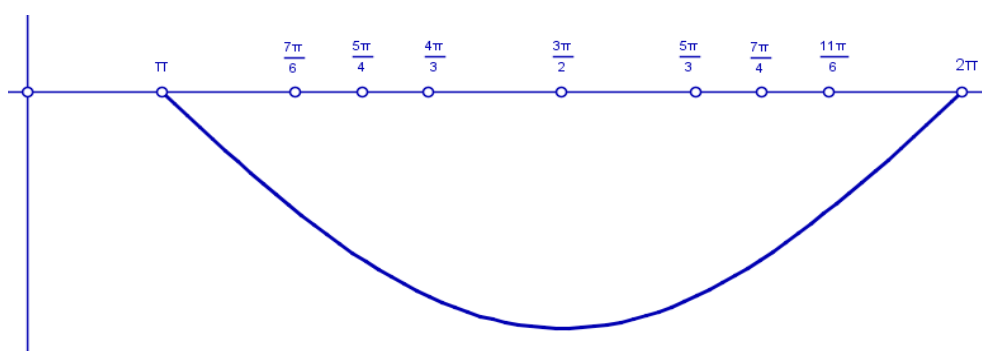
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



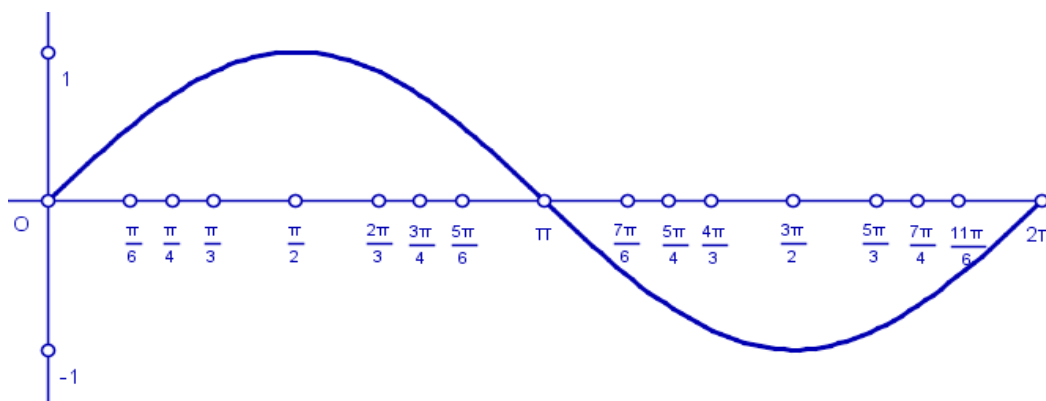
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sin x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 1 ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ -1 ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ  $R$

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ  $[-1, 1]$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

$$\text{ช่วงที่ 1 } -2\pi \leq x \leq 0$$

$$\text{ช่วงที่ 2 } 0 \leq x \leq 2\pi$$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ  $\frac{M-m}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันไซน์เมื่อ  $y = \sin x$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \sin x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = \{y | -1 \leq y \leq 1\} \text{ หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่า } -1 \leq \sin x \leq 1$$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคไซน์  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้

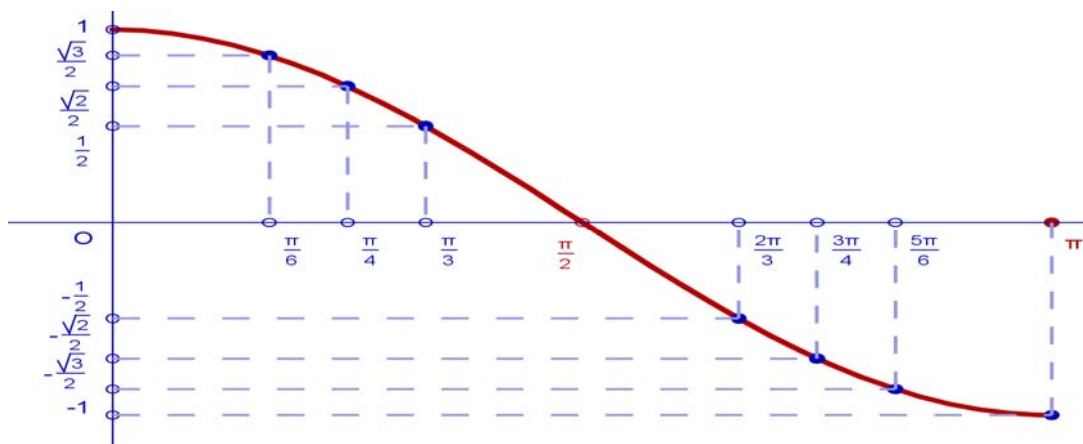
คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม

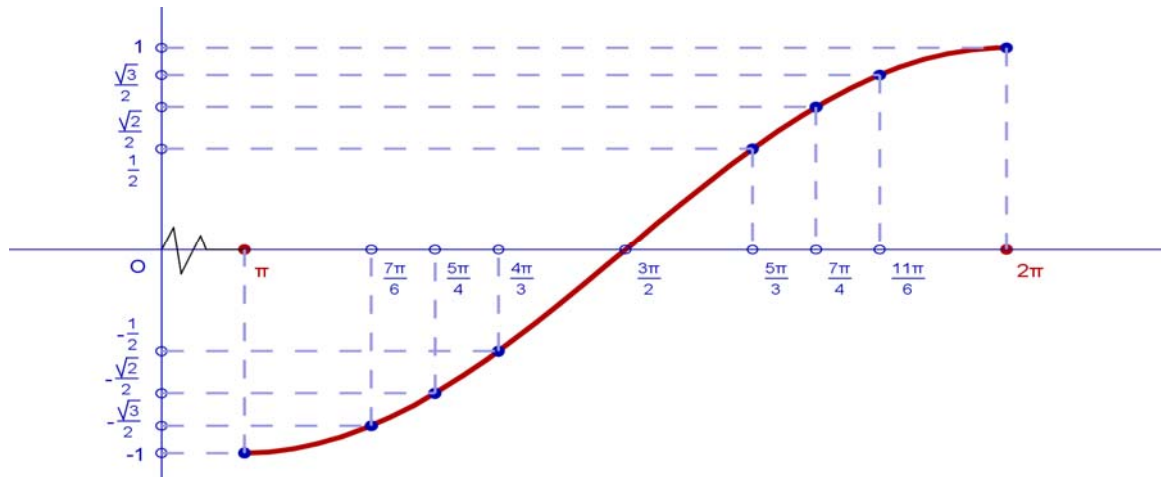


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cos x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

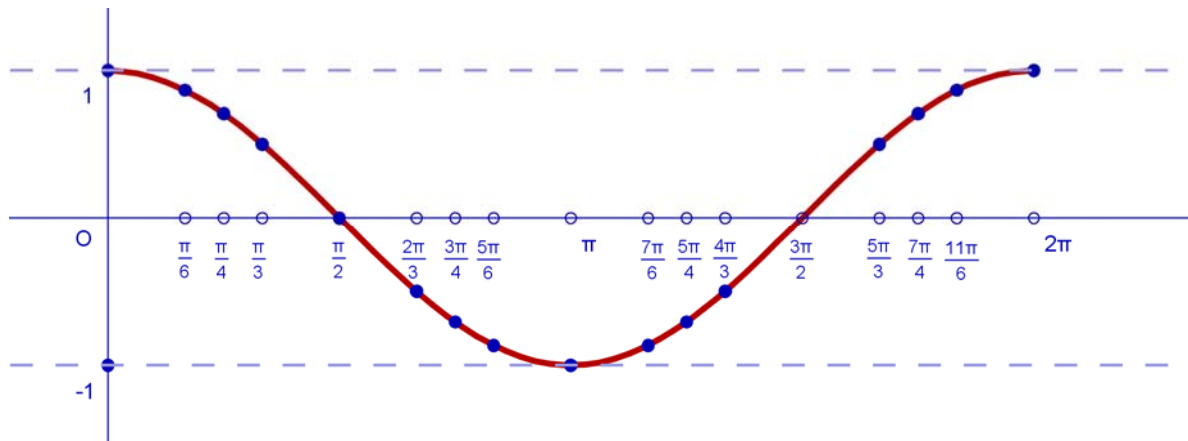
$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 1 ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ -1 ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $R$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ  $[-1, 1]$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

$$\text{ช่วงที่ 1 } -2\pi \leq x \leq 0$$

$$\text{ช่วงที่ 2 } 0 \leq x \leq 2\pi$$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

$$2.4) \text{ แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ } \frac{M-m}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันโคไซน์เมื่อ  $y = \cos x$

จากลักษณะกราฟของ  $y = \cos x$  มีสิ่งที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

$$\text{นั่นคือ } D_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $[-1, 1]$

$$\text{นั่นคือ } R_f = -1 \leq \cos x \leq 1$$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

ดังนั้น อาจจะมีค่า  $x$  หลายๆ ค่า ที่ทำให้ได้ค่า  $y$  เพียงค่าเดียว

4) ฟังก์ชันโคไซน์ มีคาบเท่ากับ  $2\pi$  และมีแอมพลิจูด เท่ากับ 1

5) เราสามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลดได้โดยดูจากกราฟ เช่น

ในช่วง  $(\pi, 2\pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในช่วง  $(0, \pi)$  ฟังก์ชันโคไซน์เป็นฟังก์ชันลด

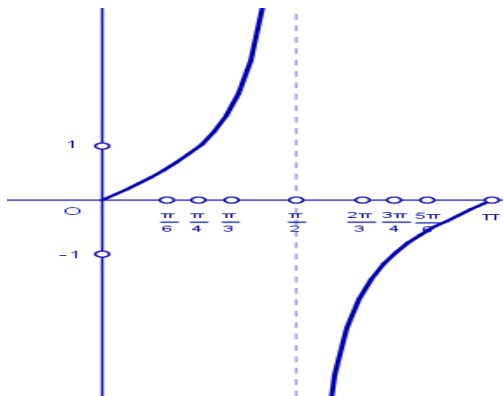
กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **fx** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
<b>tanx</b>	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

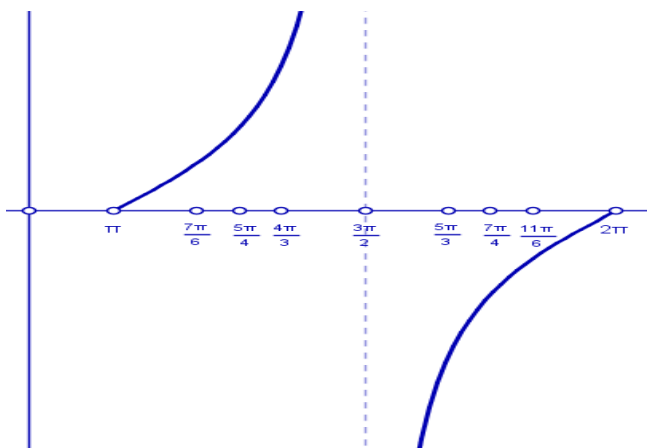
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



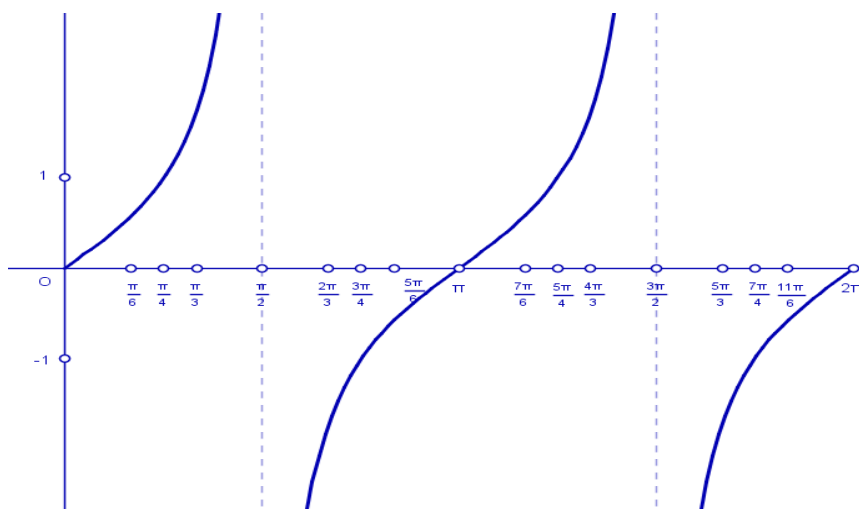
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \tan x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ไม่นิยาม	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \frac{\pi}{2}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มคือ

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ  $(-\infty, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq -\pi$

ช่วงที่ 2  $-\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 3  $0 \leq x \leq \pi$

ช่วงที่ 4  $\pi \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันแทนเจนต์เมื่อ  $y = \tan x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง นั่นคือ  $-\infty < \tan x < \infty$

3) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชันไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

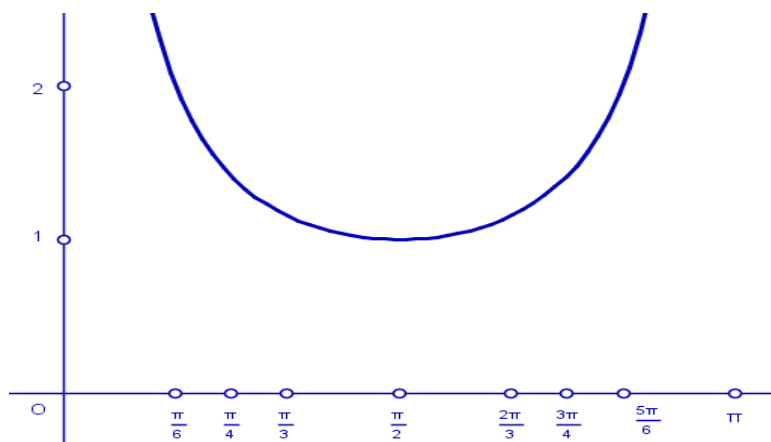
กราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cosec x	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม

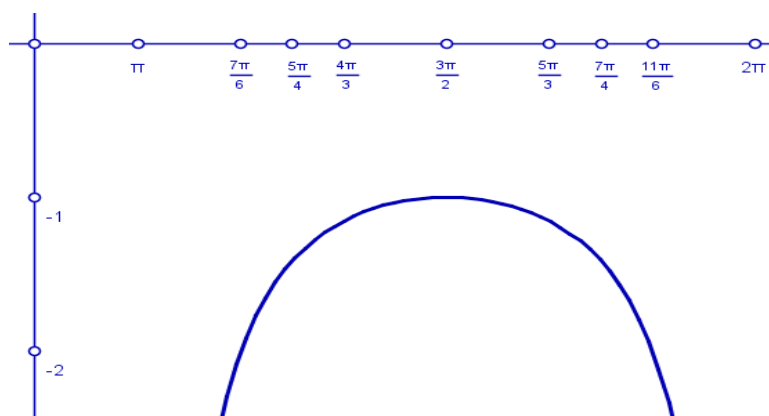
เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



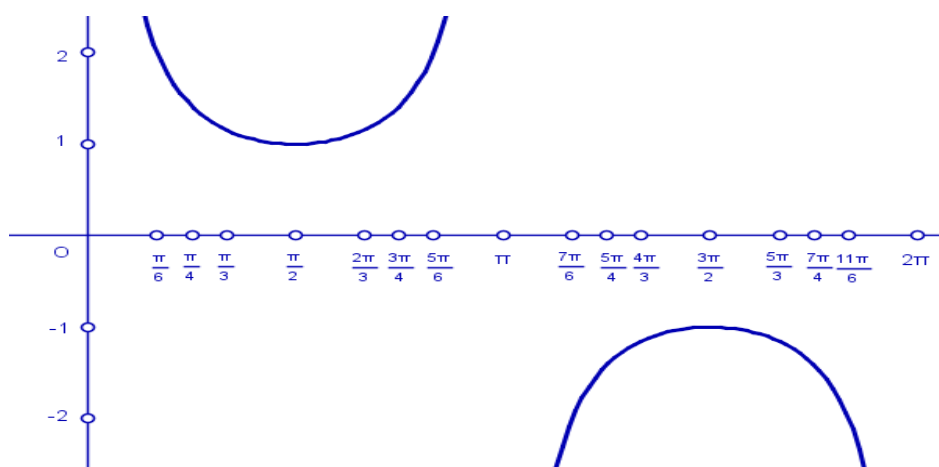
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \operatorname{cosec} x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

$x$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\operatorname{cosec} x$	ไม่นิยาม	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 2  $0 \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชัน โคเซแคนต์เมื่อ  $y = \text{cosec } x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

นั่นคือ  $\text{cosec } x \leq -1$  หรือ  $\text{cosec } x \geq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \text{cosec } x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

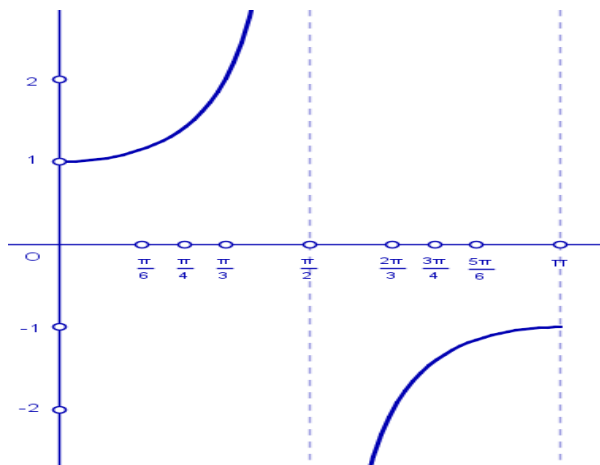
กราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$

1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันเซแคนต์  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
y	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	ไม่นิยาม	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม

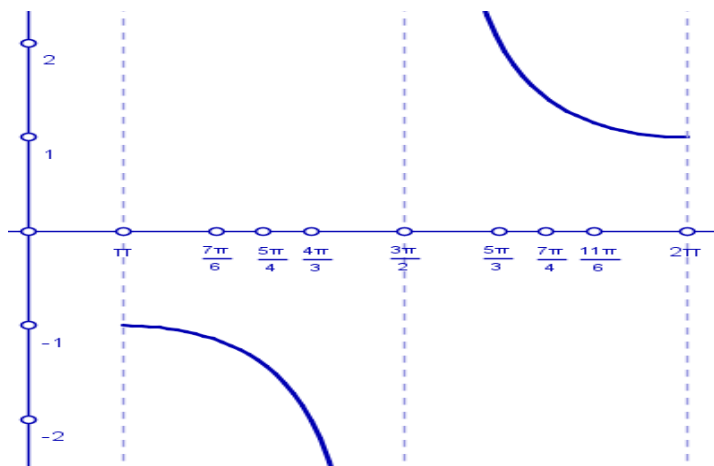


ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \sec x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

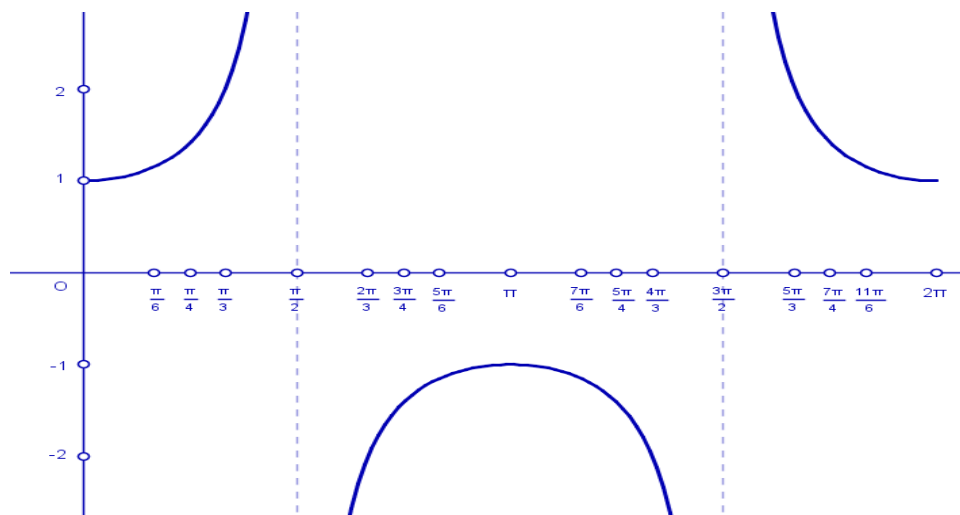
x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y	-1	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	-2	ไม่นิยาม	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \frac{\pi}{2}$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มก็

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  (m = minimum)

2.2) โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟไซน์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 2  $0 \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $2\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันเซแคนต์ เมื่อ  $y = \sec x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $R - \{x \in R \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

นั่นคือ  $\sec x \leq -1$  หรือ  $\sec x \geq 1$

3) ฟังก์ชัน  $y = \sec x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไขฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

5) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

กราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$

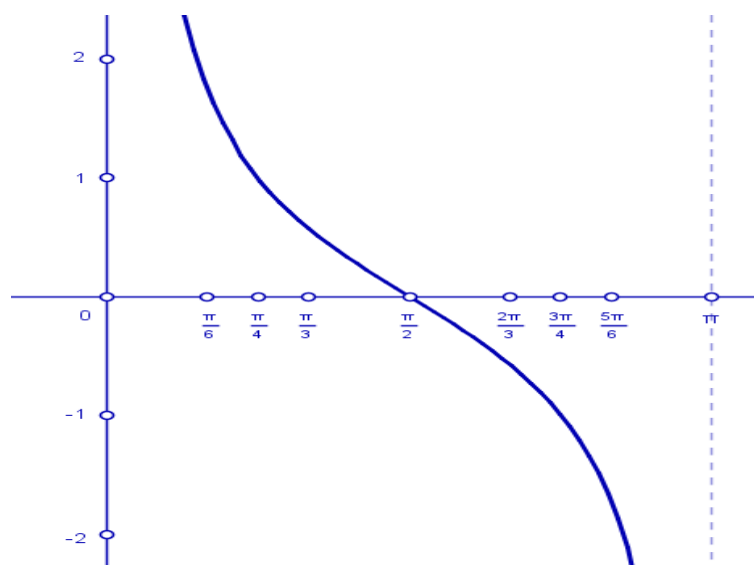
1. ให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมแรกคือกราฟของฟังก์ชันโคแทนเจนต์  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  โดยใช้คำสั่ง **f(x)** ให้นักเรียนตอบคำถามลงในตาราง แล้วนำไปวาดกราฟ

ช่วงที่ 1 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $0 \leq x \leq \pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cotx	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้ว

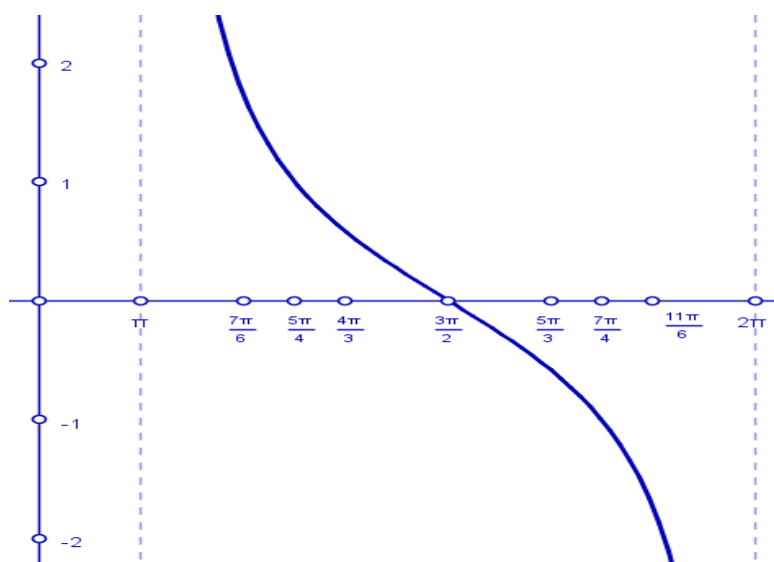
นำมาวาดลงในใบกิจกรรม



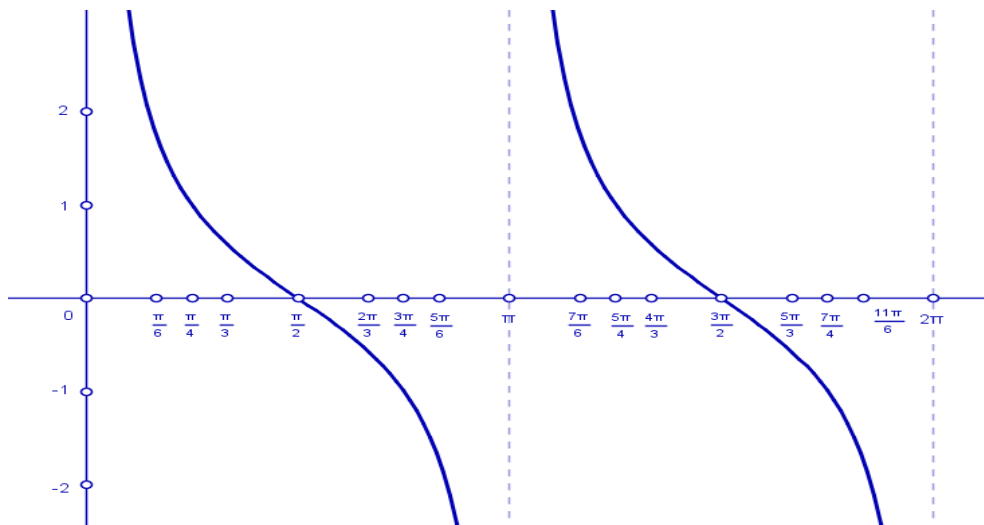
ช่วงที่ 2 กราฟของ  $y = \cot x$  เมื่อ  $\pi \leq x \leq 2\pi$  โดยที่  $x$  แทนความยาวส่วนโค้งเป็นเรเดียน

<b>x</b>	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
<b>cot x</b>	ไม่นิยาม	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	ไม่นิยาม

เมื่อนักเรียนหาค่าได้ครบหมดแล้ว ให้นักเรียนสร้างกราฟลงในกิจกรรมในคอมพิวเตอร์ แล้วนำมาวาดลงในใบกิจกรรม



ให้นักเรียนนำทั้ง 2 ช่วงมารวมกัน โดยให้นักเรียนสร้างกราฟและนำมาวาดรูปลงในใบกิจกรรม



2. หากนักเรียนยังมองภาพไม่ชัดเจน ให้นักเรียนเปิดที่หน้าถัดไปในกิจกรรมคอมพิวเตอร์ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1) มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ จำนวนจริง  $n \cdot \pi$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ  $\infty$  ( $M = \text{Maximum}$ )

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ  $-\infty$  ( $m = \text{minimum}$ )

2.2) โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ  $(-\infty, \infty)$

เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง เพราะมีจำนวนจริง 2 จำนวนที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเหมือนกัน

2.3) ให้นักเรียนสร้างกราฟโคแทนเจนต์บนช่วง  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  แล้วสังเกตว่าช่วงใดบ้างที่ซ้ำกัน

ช่วงที่ 1  $-2\pi \leq x \leq -\pi$

ช่วงที่ 2  $-\pi \leq x \leq 0$

ช่วงที่ 3  $0 \leq x \leq \pi$

ช่วงที่ 4  $\pi \leq x \leq 2\pi$

แต่ละช่วงห่างกัน  $\pi$

2.4) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ ไม่มีแอมพลิจูดเพราะไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

3. จากข้อ 1-2 ให้นักเรียนสรุปลักษณะของกราฟฟังก์ชันโคแทนเจนต์เมื่อ  $y = \cot x$

1) โดเมนของฟังก์ชัน คือ  $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

2) เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง คือ  $-\infty < \cot x < \infty$

3) ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชันที่มีไซฟังก์ชัน  $1 - 1$

4) ถ้า  $x \in (0, \pi)$  ฟังก์ชัน  $y = \cot x$  เป็นฟังก์ชัน  $1 - 1$

5) คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $\pi$

6) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน ไม่มี เพราะไม่สามารถหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดได้

## เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบในแต่ละข้อ โดยเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียวและแสดงวิธีทำลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. ในแต่ละข้อคำถามจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียง 1 คำตอบเท่านั้น
5. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 100 นาที

ชื่อ..... ชั้น..... เลขที่.....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้  
โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

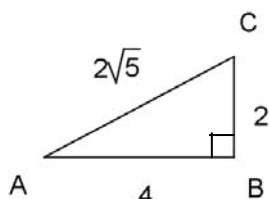
ก.  $\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ข.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

ค.  $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}$

ง.  $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

2.



จากรูป  $\sin A$  มีค่าตรงกับข้อใด

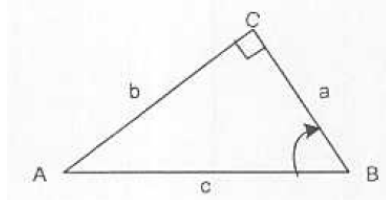
ก.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ข.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ค.  $\frac{1}{2}$

ง.  $\sqrt{5}$

3. จากรูป  $\sin B$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{a}{c}$

ข.  $\frac{b}{c}$

ค.  $\frac{a}{b}$

ง.  $\frac{c}{a}$

4. กำหนดให้  $\cot A = \frac{4}{3}$  ค่าของ

$\tan A$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3

ข. 4

ค.  $\frac{3}{4}$

ง.  $\frac{4}{3}$

5. กำหนดให้  $\tan A = \sqrt{3}$  ค่าของ

$\cot A$  มีค่าตรงกับข้อใด

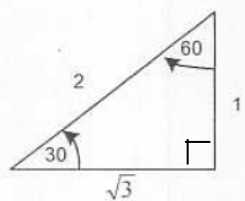
ก. 3

ข.  $\sqrt{3}$

ค.  $\frac{1}{3}$

ง.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. จากรูป  $\sin 60^\circ$  มีค่าตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{1}{2}$

ข. 2

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ง.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด

ก.  $1^\circ = 60'$

ข.  $1^\circ = 60''$

ค.  $360^\circ = 2\pi$  เรเดียน

ง.  $180^\circ = \pi$  เรเดียน

8.  $\frac{3\pi}{2}$  เรเดียน เท่ากับกี่องศา

ก.  $135^\circ$  ข.  $270^\circ$

ค.  $405^\circ$  ง.  $540^\circ$

9. 2 เรเดียน เท่ากับกี่องศา

ก.  $57^\circ 16'$  ข.  $57^\circ 27'$

ค.  $114^\circ 36'$  ง.  $114^\circ 55'$

10.  $210^\circ$  เท่ากับกี่เรเดียน

ก.  $\frac{7\pi}{6}$  ข.  $\frac{7\pi}{3}$

ค.  $\frac{6\pi}{7}$  ง.  $\frac{7\pi}{12}$

11.  $75^\circ$  เท่ากับกี่เรเดียน

ก.  $\frac{5\pi}{12}$  ข.  $\frac{5\pi}{6}$

ค.  $\frac{\pi}{12}$  ง.  $\frac{3}{6}$

12. สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยข้อใด

ต่อไปนี้ **ถูกต้อง**

ก. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน

จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{4}$

ข. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 8 ส่วนเท่าๆ

กัน จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{4}$

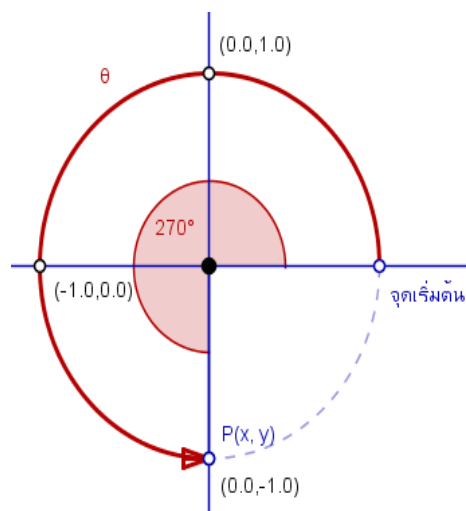
ค. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 12 ส่วนเท่าๆ

กัน จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{8}$

ง. แบ่งความยาวส่วนโค้งเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กัน

จะได้ความยาวส่วนโค้งส่วนละ  $\frac{\pi}{6}$

13. จากรูปค่าของ  $\theta$  ตรงกับข้อใด



ก.  $\frac{\pi}{2}$

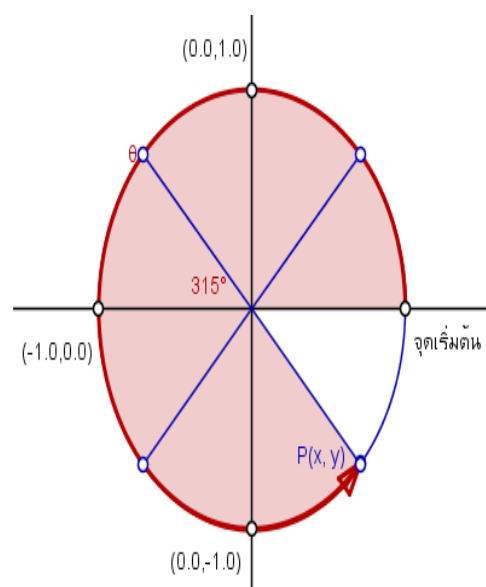
ข.  $\frac{3\pi}{2}$

ค.  $-\frac{\pi}{2}$

ง.  $-\frac{3\pi}{2}$

14. จากรูปค่าของ  $\theta$  ตรงกับข้อใด เมื่อ

กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



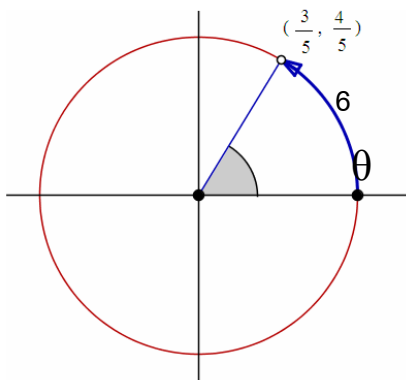
ก.  $\frac{7\pi}{4}$

ข.  $\frac{5\pi}{6}$

ค.  $\frac{11\pi}{3}$

ง.  $\frac{3\pi}{4}$

15. กำหนดให้  $p(\theta) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  ดังรูป



พิกัดของจุด  $p(-\theta + 3\pi)$  ตรงกับข้อใด

- ก.  $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$       ข.  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$   
 ค.  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$       ง.  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

16. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ตรงกับข้อใด

- ก. โดเมน คือ  $\mathbb{R}$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, 1]$   
 ข. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^+$  และ เรนจ์ คือ  $[0, 1]$   
 ค. โดเมน คือ  $\mathbb{I}^-$  และ เรนจ์ คือ  $[-1, \infty)$   
 ง. โดเมนคือ จำนวนเต็ม และเรนจ์ คือ  $[-1, 1]$

17. ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 1

- ก.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ข.  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ค.  $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$   
 ง.  $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$

18. ค่าของ

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$$

ตรงกับข้อใด

- ก. -1      ข. 1  
 ค.  $-\frac{1}{2}$       ง.  $\frac{1}{2}$

19. ถ้า  $\cos \theta = -1$  และ  $-4\pi < \theta < 0$

แล้ว  $\theta$  คือจำนวนในข้อใด

- ก.  $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$       ข.  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$   
 ค.  $-\pi, -3\pi$       ง.  $-2\pi, -4\pi$

20. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(-\theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$   
 ค.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = \cos \theta$   
 ง.  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$

21. ข้อใดถูกต้อง

- ก.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ข.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = \cos \theta$   
 ค.  $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$   
 ง.  $\sin(\pi + \theta) = \sin \theta$  และ  $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$

22.  $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  มีค่าเท่าไร

- ก.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ข.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ค.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       ง.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. ถ้า  $\sec \theta = \frac{13}{5}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\sin \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{5}{13}$                       ข.  $\frac{12}{13}$

ค.  $-\frac{5}{13}$                     ง.  $-\frac{12}{13}$

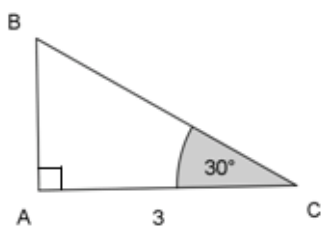
24. ถ้า  $\cos \theta = \frac{5}{6}$  เมื่อ  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

แล้ว  $\operatorname{cosec} \theta$  มีค่าเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{6}{5}$                           ข.  $\frac{6\sqrt{11}}{11}$

ค.  $-\frac{6}{5}$                          ง.  $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$

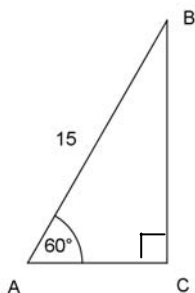
25. จากรูป AB ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                               ง.  $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

26. จากรูป BC ยาวเท่าไร



ก.  $\sqrt{3}$                               ข.  $3\sqrt{3}$

ค.  $\frac{15\sqrt{3}}{3}$                             ง.  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

27. รูปสามเหลี่ยม ABC ถ้ามี  $\hat{A}BC$

เป็นมุมฉาก  $\overline{AB}$  ยาว 16 หน่วย และ

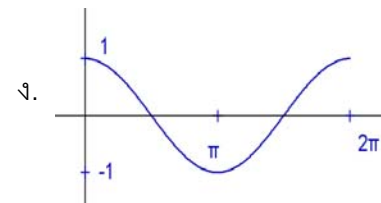
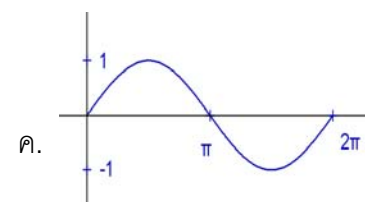
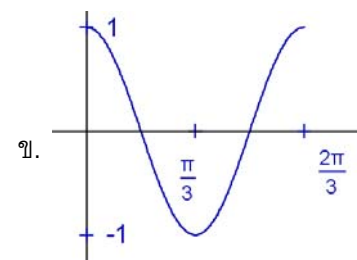
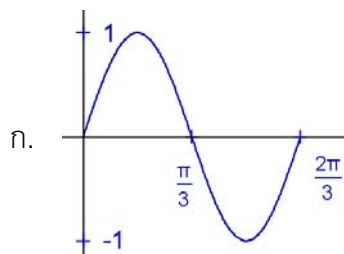
$\hat{B}CA = 30^\circ$  แล้ว  $\overline{BC}$  ยาวเท่าใด

ก.  $16\sqrt{2}$  หน่วย              ข.  $16\sqrt{3}$  หน่วย

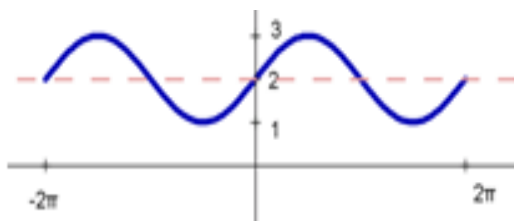
ค.  $\frac{16\sqrt{2}}{2}$  หน่วย              ง.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$  หน่วย

28. กราฟของ  $y = \sin 3x$  เมื่อ

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  หรือ  $0 \leq X \leq 2\pi$  คือข้อใด

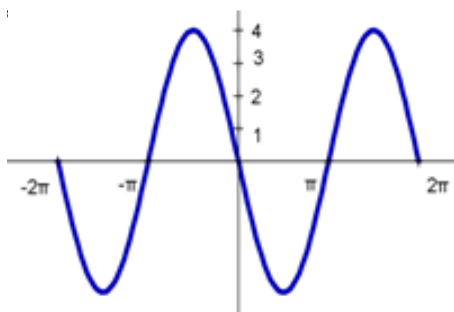


29. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



- ก.  $y = \sin 2X$       ข.  $y = \cos 2X$   
 ค.  $y = 2 + \sin X$       ง.  $y = 2 + \cos X$

30. กราฟที่กำหนดให้ตรงกับข้อใด



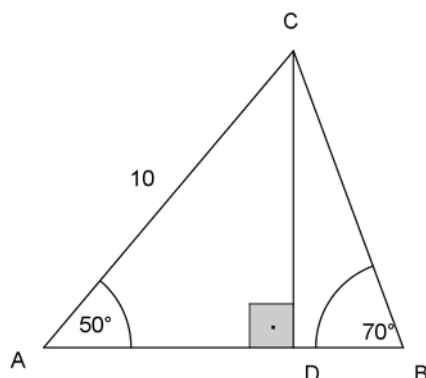
- ก.  $y = 4\cos X$       ข.  $y = 4\sin X$   
 ค.  $y = -4\cos X$       ง.  $y = -4\sin X$

เฉลยแบบทดสอบแบบปรนัย 30 ข้อ

- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| 1. ค.  | 11. ก. | 21. ค. |
| 2. ก.  | 12. ข. | 22. ค. |
| 3. ข.  | 13. ข. | 23. ข. |
| 4. ค.  | 14. ก. | 24. ง. |
| 5. ง.  | 15. ง. | 25. ก. |
| 6. ข.  | 16. ก. | 26. ง. |
| 7. ข.  | 17. ข. | 27. ข. |
| 8. ข.  | 18. ข. | 28. ก. |
| 9. ค.  | 19. ค. | 29. ค. |
| 10. ก. | 20. ค. | 30. ง. |



3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มุม A มีขนาด  $50^\circ$  มุม B มีขนาด  $70^\circ$  และ AC ยาว 10 เซนติเมตร จากจุด C ลากเส้นไปตั้งฉากกับ AB ที่จุด D จงหา CD, AD, BC และ BD



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้ว่า

$$\sin 50^\circ = \frac{CD}{AC}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} CD &= AC \times \sin 50^\circ \\ &= 10 \times 0.7660 \quad (\text{เพราะว่า } \sin 50^\circ = 0.7660) \\ &\approx 7.66 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

และ

$$\cos 50^\circ = \frac{AD}{AC}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} AD &= AC \times \cos 50^\circ \\ &= 10 \times 0.6428 \quad (\text{เพราะว่า } \cos 50^\circ = 0.6428) \\ &\approx 6.43 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD จะได้ว่า

$$\operatorname{cosec} 70^\circ = \frac{BC}{CD}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} BC &= CD \times \operatorname{cosec} 70^\circ \\ &\approx 7.66 \times 1.064 \quad (\text{เพราะว่า } \operatorname{cosec} 70^\circ = 1.064) \\ &\approx 8.15 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

และ

$$\cot 70^\circ = \frac{BD}{CD}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} BD &= CD \times \cot 70^\circ \\ &\approx 7.66 \times 0.3640 \quad (\text{เพราะว่า } \cot 70^\circ = 0.3640) \\ &\approx 2.79 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นความยาวด้าน CD, AD, BC และ BD ยาวประมาณ 7.66, 6.43, 8.15 และ 2.79 ซม.

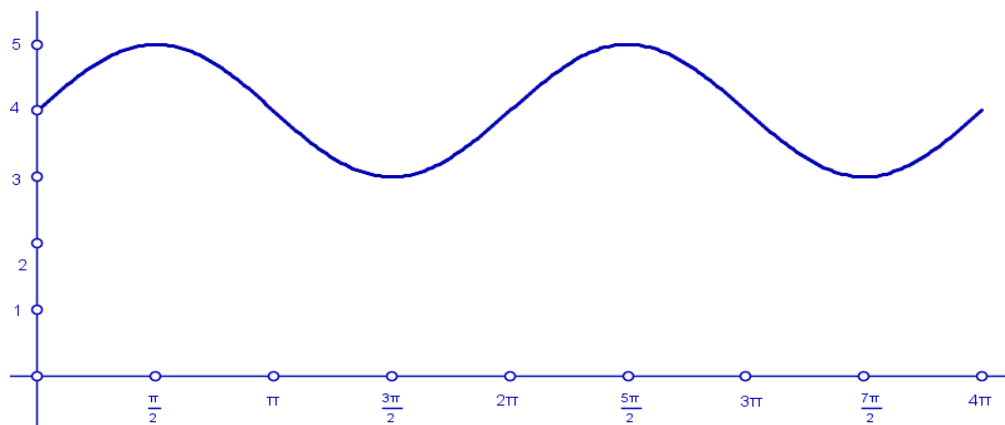
ตามลำดับ

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมน เรนจ์ คาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชัน  
 $y = \sin x + 4$  เมื่อ  $0 \leq x \leq 2\pi$  (แสดงวิธีทำ)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(x) + 4	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{8+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{8+\sqrt{3}}{2}$	5	$\frac{8+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{8+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{9}{2}$	4

x	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
sin(x)	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sin(x) + 4	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{8-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{8-\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{8-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{8-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{2}$	4

ให้นักเรียนวาดกราฟที่ได้จากการสร้างในแฟ้มคอมพิวเตอร์



มีจำนวนจริงใดบ้างที่หาค่าไม่ได้ ไม่มี

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 5 (M = Maximum)

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ 3 (m = minimum)

โดเมนของฟังก์ชัน คือ R

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ [3, 5]

คาบของฟังก์ชันเท่ากับ  $2\pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ  $\frac{5 - (-3)}{2} = 4$

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะเหตุใดจงอธิบาย

5.1) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ผิด เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\sin x$  บนช่วง  $[0, \pi]$  มีทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

5.2) ฟังก์ชัน  $y = \sin x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\sin x$  บนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  มีลักษณะลดลงจึงเป็นฟังก์ชันลด

5.3) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $[0, \pi]$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\cos x$  บนช่วง  $[0, \pi]$  มีลักษณะลดลงจึงเป็นฟังก์ชันลด

5.4) ฟังก์ชัน  $y = \cos x$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

ตอบ ผิด เพราะ เมื่อแทนจำนวน  $x$  เข้าไป 2 ค่า คือ  $\frac{3\pi}{4}$  และ  $\frac{5\pi}{4}$  ผลลัพธ์ทั้ง 2 มีค่าเท่ากัน

5.5) ฟังก์ชัน  $y = \tan x$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ ถูก เพราะ ลักษณะของกราฟ  $\tan x$  บนช่วง  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  มีลักษณะเพิ่มจึงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ไม่มีสิ่งไหนจะหนักเกิน ไม่มีคำว่าทำไม่ได้  
ขอให้โชคคินะครับ

### ภาคผนวก ซ

แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ  
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

แบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์  
เรขาคณิตแบบพลวัต

**คำชี้แจง**

1. แบบวัดความพึงพอใจฉบับนี้เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีจำนวน 20 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

**ตอนที่ 1** เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

**ตอนที่ 2** เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน

2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องทางขวามือหลังข้อความที่ตรงกับความรู้สึกที่แท้จริงของนักเรียนเพียงช่องเดียว คำตอบที่นักเรียนตอบนั้นไม่มีผลต่อการให้คะแนน

3. ในแต่ละช่องที่แสดงความพึงพอใจ มีความหมายดังนี้

พึงพอใจมากที่สุด หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมากที่สุด

พึงพอใจมาก หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมาก

พึงพอใจปานกลาง หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นปานกลาง

พึงพอใจน้อย หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อย

พึงพอใจน้อยที่สุด หมายความว่า นักเรียนเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อยที่สุด

**ตอนที่ 1** แบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	ข้าพเจ้ารู้สึกไม่เครียด และไม่สนใจต่อการเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต					
2	การเรียนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น					
3	เนื้อหาจากกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต เหมาะกับระดับความสามารถของข้าพเจ้า					
4	จากการทำใบกิจกรรมในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติมากขึ้น					
5	ทำให้ข้าพเจ้ามองเห็นมโนภาพการเท่ากันได้ดีขึ้น					
6	การออกแบบจอภาพ และการใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้กิจกรรมน่าสนใจและมีความสุข					
7	การมีปฏิสัมพันธ์กับซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้า เข้าใจเนื้อหามากขึ้น					
8	การเรียนด้วยซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้าสามารถตั้งข้อความคาดการณ์ได้					
9	การจัดลำดับเนื้อหาในใบกิจกรรม มีความต่อเนื่องและชัดเจน ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจได้ง่าย					
10	เครื่องมือในการสร้างและสำรวจกิจกรรมการเรียนการสอนใช้ได้สะดวกตามความต้องการของข้าพเจ้า					

**ตอนที่ 2** แบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
11	ข้าพเจ้าเข้าใจคำถามในใบกิจกรรมอย่างชัดเจน					
12	จากการปฏิบัติกิจกรรมเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น					
13	จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจ อยากเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น					
14	กิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้าเกิดการค้นพบด้วยตนเอง					
15	จากการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตทำให้ข้าพเจ้ามีความเข้าใจเนื้อหามากยิ่งขึ้น					
16	แบบฝึกหัดทำกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตช่วยฝึกทักษะการคิดคำนวณของข้าพเจ้า					
17	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนของข้าพเจ้ามากขึ้น					
18	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต กระตุ้นให้ข้าพเจ้าเกิดการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง					
19	กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต ทำให้ข้าพเจ้ามีความมั่นใจในตัวเองเกี่ยวกับการเรียนมากขึ้น					
20	ทำให้ข้าพเจ้ามีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์					

ประวัติผู้วิจัย

## ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล

นายปริญญพล จันทร์ฝอย

วันเดือนปีเกิด

12 ธันวาคม 2527

สถานที่เกิด

จังหวัดกรุงเทพมหานคร

สถานที่อยู่ปัจจุบัน

32 ถ.เจริญนคร ซ.เจริญนคร 14 ตรอกเย็นจิตร์

แขวงคลองตันใหม่ เขตคลองสาน กรุงเทพฯ 10600

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2541

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จากโรงเรียนวัดราชบพิธ จังหวัดกรุงเทพมหานคร

พ.ศ. 2544

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

จากโรงเรียนวัดราชบพิธ จังหวัดกรุงเทพมหานคร

พ.ศ. 2548

คป. (คณิตศาสตร์)

จากมหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา

พ.ศ. 2551

กศ.ม. (คณิตศาสตร์)

จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ