

การเปรียบเทียบปัญหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการ
ใช้เวลาน้อยที่สุดกับการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย

ปริญญานิพนธ์
ของ
โกวิทย์ กัลยาทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2550

การเปรียบเทียบปัญหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการ
ใช้เวลาน้อยที่สุดกับการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย

ปริญญาานิพนธ์
ของ
โกวิทย์ กัลยาทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2550

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การเปรียบเทียบปัญหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการ
ใช้เวลาน้อยที่สุดกับการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย

บทคัดย่อ

ของ

โกวิทย์ กัลยาทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2550

การเปรียบเทียบปัญหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการ
ใช้เวลาน้อยที่สุดกับการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย

บทคัดย่อ

ของ

โกวิทย์ กัลยาทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2550

COMPARISON OF NONLINEAR DYNAMIC OPTIMIZATION IN THE PROBLEM OF
MINIMUM TIME AND MAXIMUM ENERGY WITH FREE END TIME.

AN ABSTRACT

BY

KOWIT KALLAYATHONG

Presented in partial fulfillment of the requirements for the Master
of Engineering degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

May 2007

Kowit Kallayathong. (2007). *Comparison of Nonlinear Dynamic Optimization in the Problem of Minimum time and Maximum Energy with free end Time*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col. Asst. Prof. Dr.Tawiwat Veeraklaew : Lt. Col. Asst.Prof. Dr.Anotai Suksangpanomrung.

In this thesis, the minimum time problem of non-linear dynamic optimization has been considered in the different way in order to facilitate a direct and indirect numerical scheme. According to the character of the minimum time problem, it seems to be the same meaning as a maximum energy with free final time problem. This thesis describes the details on the similarity between these two types of the problems for non-linear dynamic systems. However, by considering a maximum energy with free final time problem, a number of advantages are discussed such as switching function, transversality condition. Towards the end, the compared results from these two types of problems are revealed for both direct and indirect numerical schemes.

The results of study, the minimum time optimization method can be used for predict maximum velocity of dynamic systems and has feasible solution, but very complicate since the initial guess for a final time must be obtained close to the solution. There for, the maximum energy optimization has an advantage over because the cost function is in the form of quadratic function.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การเปรียบเทียบปัญหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการใช้เวลาน้อย
ที่สุดกับการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย

ของ

โกวิทย์ กัลยาทอง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)

วันที่..... เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2550

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

..... ประธาน

(พ.ท.ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้ว)

..... กรรมการ

(พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

(ดร.ปัทมรส ฤทธิประวัตติ)

..... กรรมการ

(พ.ท.ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้ว)

..... กรรมการ

(พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

..... กรรมการ

(ผศ.วิชิต บัวแก้ว)

ประกาศการได้รับทุน

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ส่วนหนึ่งที่สำคัญมากก็คือ การได้รับการสนับสนุนทุนการศึกษาจาก โครงการพัฒนาบุคคลากรสาขาที่ขาดแคลน วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่สนับสนุนค่าใช้จ่ายในระหว่างการศึกษาและการทำปริญญานิพนธ์ ขอขอบพระคุณคณะกรรมการทุกท่านที่พิจารณาการอนุมัติทุนการศึกษา ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่กองบริหารและทรัพยากรมนุษย์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือทุกท่านที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ความช่วยเหลือมาโดยตลอด อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

โกวิทย์ กัลยาทอง

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความสามารถของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิจิต บัวแก้ว ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ยศศักดิ์ สายสนิท และ อาจารย์ ญัฐสิทธิ์ พัฒนะอิม ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่ให้ความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ภรรยาและน้องสาว ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่าน ในความสนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 3 และรุ่นพี่ในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร.จปร. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

โกวิทย์ กัลยาทอง

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย.....	2
ขอบเขตของโครงการวิจัย.....	2
วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ.....	3
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
ทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	6
หลักการของพอนทรียาгин (Pontryagin's principle).....	29
หลักการแก้ปัญหาโดยวิธีตรงและวิธีอ้อม(Direct and indirect schme).....	33
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	62
การกำหนดปัญหา (State of the Problem)	62
การแก้ปัญหาโดยวิธีโดยตรง (Direct method).....	64
การแก้ปัญหาโดยวิธีโดยอ้อม (Indirect method).....	70
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	76
ผลการทดสอบ.....	76
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	92
5 สรุปและวิจารณ์.....	94
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	94
ข้อเสนอแนะ.....	94
บรรณานุกรม.....	95

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก.....	97
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	99

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 1 การกำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์.....	76
ตารางที่ 2 การกำหนดลักษณะของเส้นกราฟที่ใช้แสดงเปรียบเทียบผลการทดสอบ.....	76

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 หุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (One armed manipulator).....	65
2 หุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (Polar manipulator).....	67
3 หุ่นยนต์แขนกล 2 ชั้นต่อโยง (The planar two – link manipulator).....	69
4 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยง (θ_1) เทียบกับเวลา.....	77
5 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยง($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา.....	77
6 กราฟแสดงค่าทอร์กของชั้นต่อโยง (u_1) เทียบกับเวลา.....	78
7 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. (θ_1) เทียบกับเวลา.....	78
8 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงเส้นของชั้นต่อโยงที่ 2. (c_2) เทียบกับเวลา.....	79
9 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. ($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา.....	79
10 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงเส้นของชั้นต่อโยงที่ 2. ($\dot{c}_2$) เทียบกับเวลา.....	80
11 กราฟแสดงค่าทอร์ก ของชั้นต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา.....	80
12 กราฟแสดงค่าทอร์กของชั้นต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา.....	81
13 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. (q_1) เทียบกับเวลา.....	81
14 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 2. (q_2) เทียบกับเวลา.....	82
15 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. ($\dot{q}_1$) เทียบกับเวลา.....	82
16 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 2. ($\dot{q}_2$) เทียบกับเวลา.....	83
17 กราฟแสดงค่าทอร์กของชั้นต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา.....	83
18 กราฟแสดงค่าทอร์กของชั้นต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา.....	84
19 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยง(θ_1) เทียบกับเวลา.....	84
20 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยง($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา.....	85
21 กราฟแสดงค่าทอร์ก ของชั้นต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา.....	85
22 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. (θ_1) เทียบกับเวลา.....	86
23 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงเส้นของชั้นต่อโยงที่ 2 (c_2) เทียบกับเวลา.....	86
24 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. ($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา.....	87
25 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงเส้นของชั้นต่อโยงที่ 2. ($\dot{c}_2$) เทียบกับเวลา.....	87
26 กราฟแสดงค่าทอร์ก ของชั้นต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา.....	88

27	กราฟแสดงค่าทอร์คของชั้นต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา.....	88
28	กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. (q_1) เทียบกับเวลา.....	89
29	กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 2. (q_2) เทียบกับเวลา.....	89
30	กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 1. ($\dot{q}_1$) เทียบกับเวลา.....	90
31	กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยงที่ 2. ($\dot{q}_2$) เทียบกับเวลา.....	90
32	กราฟแสดงค่าทอร์คของชั้นต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา.....	91
33	กราฟแสดงค่าทอร์คของชั้นต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา.....	91

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทําวิจัย

การหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic optimal control system) จะพบเห็นได้ทั่วไปในชีวิตประจำวันของคนเรา ดังเช่นการใช้สมองสั่งการการควบคุม การเคลื่อนไหวของร่างกาย โดยที่สมองของคนสามารถคาดคะเนได้โดยอัตโนมัติว่าควรจะต้อง เคลื่อนไหวอย่างไร เช่น มือ หรือเท้า เป็นระยะเท่าไรจนถึงจุดและเวลาตามความต้องการ (Objective) หรือทำนองเดียวกันกับการทำงานในระบบอุตสาหกรรมการผลิต จะมีเป้าหมายที่เปลี่ยนไปตาม ระยะเวลาและในสถานการณ์ต่างๆกัน ทำให้ต้องมีการเปลี่ยนแปลงการควบคุมเพื่อให้ได้คำตอบที่ เหมาะสมที่สุดที่จะบรรลุถึงเป้าหมายและความต้องการในขณะนั้น รูปแบบของเป้าหมายและความ ต้องการมีสามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ เช่น การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum energy) การใช้ เชื้อเพลิงน้อยที่สุด (Minimum fuel) การใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum time) และการให้ได้ผลผลิตมาก ที่สุด (Maximum production) เป็นต้น รูปแบบดังกล่าวนี้สามารถนำมาเขียนในรูปแบบของสมการทาง คณิตศาสตร์ประกอบกับระบบพลศาสตร์ที่โดยทั่วไปสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ที่ได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตันพร้อมทั้งเงื่อนไขบังคับต่างๆที่พิจารณาไว้ในระบบเหล่านี้ ทำให้ใน การหาคำตอบสำหรับปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม (Optimal control system) นั้นจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการคำนวณ

จากรูปแบบต่างๆของเป้าหมายข้างต้น การใช้เวลาน้อยที่สุดของระบบพลศาสตร์ นั้นเป็น ปัญหาที่ยังพบว่าการคำนวณหาคำตอบที่อยู่ในรูปแบบ แบน-แบน นั้นยังพบว่ามีความยากในการที่ จะให้ได้มาซึ่งคำตอบและโดยมากแล้วมักจะได้คำตอบที่อยู่ในรูปของค่าต่ำสุดที่อยู่ใกล้ๆกับค่าเริ่มต้น (Local minimum) โดยค่าเริ่มต้นคือค่าที่กำหนดขึ้นโดยไม่มีหลักเกณฑ์แต่เป็นค่าเริ่มต้นให้กับ ขบวนการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คำตอบที่อยู่ในรูปแบบ แบน-แบน กล่าวคือคำตอบที่เป็นค่าของตัว แปรควบคุม (Control inputs) ที่สลับไปมาระหว่างค่าสูงสุดและต่ำสุดของตัวเอง (Lower and upper bounds) ที่ดูเหมือนจะไม่ยาก แต่ปัญหาที่พบส่วนใหญ่ก็คือ เวลาที่สลับระหว่างค่าสูงสุดและ ต่ำสุด (Switching time) และจำนวนช่วงเวลาของแต่ละค่า (Number of interval)

จากปัญหาดังกล่าวโครงการวิจัยนี้คาดว่า การเปลี่ยน ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดิมของปัญหา การใช้เวลาน้อยที่สุดนี้น่าจะช่วยลดปัญหาลงได้บ้าง กล่าวคือ การใช้ฟังก์ชันเดิมที่ใช้กันอย่าง แพร่หลายนั้นก่อให้เกิด ช่วงเวลาที่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด (Singularity intervals) อยู่เสมอ โดยยึดแนวความคิดว่า ปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุดนี้น่าจะเปรียบได้กับปัญหาการใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 เพื่อนำเอาเทคนิควิธีแก้ปัญหาคำนวณที่ได้ผลสูงสุดของระบบพลศาสตร์ มาประยุกต์ใช้ในการเปรียบเทียบปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุดที่ไม่เป็นเชิงเส้นและหลักการพลังงานสูงสุดที่ไม่เป็นเชิงเส้น
- 1.2.2 เพื่อพิสูจน์ถึงทฤษฎีหลักการปัญหาทางด้านการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic optimization) มาเปรียบเทียบกับระหว่างการแก้ปัญหาคำนวณที่ใช้เวลาน้อยที่สุดกับหลักการพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายของระบบพลศาสตร์ที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น
- 1.2.3 เพื่อนำเสนอถึงการเปรียบเทียบข้อดี และข้อเสียของการหาคำตอบของหลักการใช้น้อยที่สุดกับหลักการพลังงานสูงสุดกับทั้งวิธีโดยตรงและวิธีโดยอ้อม (Direct and indirect methods) ของปัญหาแบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 การศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะนำเอาปัญหาความเหมาะสมสูงสุดในหลักการการใช้พลังงานสูงสุดมาเปรียบเทียบกับหลักการใช้น้อยที่สุดในระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear systems) โดยทำการแก้ปัญหาคำนวณทั้งวิธีโดยตรงและวิธีโดยอ้อม (Direct and indirect methods)
- 1.3.2 ใช้สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์มาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 1.3.3 ใช้โปรแกรม แมทแล็บ (Matlab) ในการโปรแกรมการแก้ปัญหาคำนวณที่ไม่เป็นเชิงเส้น

1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ

- 1.4.1 ศึกษาลักษณะจำเพาะสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางพลศาสตร์ หลักการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่
- 1.4.2 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือสมการการเคลื่อนที่ระบบทางพลศาสตร์ สมการและอสมการเงื่อนไข กำหนดสภาวะเริ่มต้นและสภาวะสุดท้าย เงื่อนไขขอบ และสร้างคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

- 1.4.3 ใช้โปรแกรมแมทแลป (Matlab) เพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์ จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 1.4.4 ทดสอบการใช้โปรแกรม
- 1.4.5 วิเคราะห์ผลในสองรูปแบบคือ แนวทางบนหลักการพลังงานสูงสุด (Maximum energy) เปรียบเทียบกับการใช้เวลาที่น้อยที่สุดโดยวิธีตรง (Direct methods)

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

- 1.5.1 ผลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาเพื่อให้สามารถนำไปแก้ปัญหาที่งานจริงได้ต่อไป หรือเอาไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาที่มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันได้
- 1.5.2 ผลการวิจัยครั้งนี้จะให้ข้อมูลสำหรับการประยุกต์เอาหลักการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปใช้งานกับปัญหาด้านพลศาสตร์และเป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นๆ
- 1.5.3 ผลการวิจัยครั้งนี้จะทำให้การใช้ประโยชน์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้คำนวณหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาและยังสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้
- 1.5.4 สามารถนำเสนอถึงหลักการการใช้เวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time) เปรียบเทียบกับการใช้พลังงานสูงสุด (Maximum energy) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดย ที่ใช้สภาวะข้อมูลตัวแปรอย่างเดียวกันทั้งวิธีโดยตรงและวิธีโดยอ้อม (Direct and indirect methods)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)
3. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model)

2.1 การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทวิวัชร วีระเกล้า ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธี ในการที่ช่วยให้การวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรง ได้สะดวกยิ่งขึ้น ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum time problem) นั้นด้วยแนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดมีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกัน ระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาที่น้อยที่สุด สำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้นแต่การพิจารณา โดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการในตอนท้ายสุด ได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, กล่าวถึงการวิเคราะห์หาคำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงและสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ในระยะเวลาที่กำหนดจากทฤษฎีที่มีอยู่เดิม คำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่ และสมการควบคุมเป็นจริงในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอวิธีการใหม่ โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม (State and control variable) เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้ ผลที่ได้สามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อมมาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณ เมื่อนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับ

กับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมออันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันในบทความฉบับนี้ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจน ในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งการที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัยได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีตรงและวิธีอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่ที่จะอยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

ทวิวัชร วีระเกล้า กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่งในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงที่เรียกว่า ทฤษฎีความค่าต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าวที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย คือทฤษฎีของฮามิลตัน-จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพิจารณาทฤษฎีของพอนทริยาгинและทฤษฎีความต่ำสุดที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง และยังสนับสนุนทฤษฎีต่างๆให้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง และแคลคูลัสของลากรองจ์ ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของพอนทริยาгинและทฤษฎีความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีการนี้สามารถได้ให้คำตอบที่ตรงกัน

M.V. Bain and M. A. Alcorta Garcia, เอกสารฉบับนี้เสนอการแก้ปัญหาค่าสูงสุดของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear systems) โดยการเปลี่ยนสมการของระบบให้เป็นสมการพหุนามของเทเลอร์ที่มีเลขยกกำลังเท่ากับสาม และทำการเปรียบเทียบกับหาคำนวณค่าตัวแปรโดยใช้ระบบที่เป็นเชิงเส้น (Linear system) พบว่าระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถประมาณค่าของตัวแปรได้ดีกว่าระบบที่เป็นเชิงเส้น

Shiler H. Chang and V. Wong, ฉบับนี้ได้กล่าวถึงผลการทดลองสำหรับ การควบคุมเวลาที่เหมาะสมที่สุด (Time optimal control) สำหรับหุ่นยนต์แขนกล (Robotic manipulators) ซึ่งจะแก้ปัญหาระบบที่ไม่ต่อเนื่อง สมการการเคลื่อนที่ที่มีลำดับมาก หรือระบบการเคลื่อนที่ที่ไม่มีรูปแบบที่แน่นอนและมีการล่าช้า (Delay) จากการควบคุมผู้เขียนเสนอให้ใช้ Simplified model และกำหนดการควบคุมการตอบสนองโดยได้ทดลองกับ UCLA direct drive ซึ่งผลการทดลองสามารถลดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ทั้งยังเพิ่มความแม่นยำในการเคลื่อนที่ให้กับเครื่อง มือที่นำมาทดลองด้วย

M.C.Renolds, P.H.Meckl, เอกสารฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาค่าความเหมาะสมค่าต่ำที่สุด (Minimum optimization) สูงสุดโดยเปลี่ยนให้เป็นปัญหาไทม์ ออฟติมอล คอนโทรล (Time optimal control problem) แล้วใช้ทั้งสมการกำลังสอง (Quadratic) และใช้การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming) จะสามารถคาดเดาค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาค่าความเหมาะสมที่สุด (Optimal control) ของระบบที่ประกอบไปด้วยมวล 2 ก้อนและสปริง แสดงให้เห็นถึง

คุณสมบัติที่น่าสนใจในการเปลี่ยนสมการเดิมให้เป็นสมการกำลังสองหรือที่เรียกว่าควอดราติกโปรแกรมมิ่ง(Quadratic programming)

ยศศักดิ์ สายสนิท ในปริญญาานิพนธ์นี้ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาวิธีการวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่แล่นในสนามแข่งขัน โดยใช้วิธีมินิแมกไมม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum time optimization) มาเป็นเครื่องมือสำหรับการวิเคราะห์และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาเป็นเครื่องมือช่วยในการหาคำตอบซึ่งก็คือค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่ง โดยทำการศึกษาวิเคราะห์ท่าในลักษณะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองของรถแข่งซึ่งเป็นรถยนต์แบบห้าระดับขั้นความเร็ว ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของรถแข่งทั้งหมดห้าสมการ (ไม่คิดผลกระทบจากอากาศพลศาสตร์) และใช้แบบจำลองของรถแข่งที่มีมวลขนาดต่างๆ เพื่อใช้เปรียบเทียบกันโดยแบบจำลองของรถแข่งทั้งสองมีเงื่อนไขบังคับก็คือรูปร่างของสนามแข่งขัน แล้วให้รถแข่งวิ่งในสนามดังกล่าว โดยจะป้อนค่าคอนโทรลอินพุต (Control input) ในรูปของแรงขับเคลื่อนและมุมเลี้ยวให้กับแบบจำลองของรถแข่งเพื่อดูผลลัพธ์ก็คือได้ความเร็วสูงสุดเท่าใด ด้วยการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ซึ่งทั้งแบบจำลองของรถแข่งและสนามแข่งขันจะถูกแปลงให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ แล้วใช้ฟังก์ชัน fmincon ของโปรแกรมแมทแล็บ (Matlab) มาเป็นเครื่องมือในการคำนวณหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่าวิธีการหาค่าของความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Minimum time optimization) สามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ได้ และผลของคำตอบอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ แต่มีความยากในการหาคำตอบค่อนข้างมากเนื่องจากจะต้องกำหนด ค่าเริ่มต้นของเวลาให้ใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุด แต่ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้หาเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆ ได้เช่นกัน

จากการที่ได้นำเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดนั้นพบว่าได้มีการศึกษาถึงระบบการเคลื่อนที่ได้ผลมาพอสมควรทำให้เกิดแนวทางการทำการวิจัยใหม่ๆเกิดขึ้นในการศึกษาถึงเรื่อง การศึกษา แนวทางใหม่ของวิธีตรงและวิธีอ้อมของปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุดที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้น มีความจำ เป็นที่จะต้อง มีสมการที่กล่าวถึงปัญหาการเคลื่อนที่ (Problem statement) โดยใช้ทฤษฎีและหลักการมาทำการ กำหนดฟังก์ชัน หรือพฤติกรรมของปัญหาจากนั้นก็สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วทำการแก้ปัญหา ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไป

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเครื่องมือที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุด หรือค่า

สูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน, พลังงาน, การใช้ประโยชน์และมีความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งานเราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือสถติกออปติไมซ์เซชันและไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Static and dynamics optimization) ในการหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธีออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการอธิบายถึงคุณลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสีย ก่อนซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of problem formulation) ในเทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและจำเป็นต้องทำความเข้าใจสามเทอมด้วยกันซึ่งก็คือตัวแปรสถานะ (State variables) ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input) และฟังก์ชันนอลหรือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (functional or objective function) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.2.1 ไดนามิกส์ ออปติไมซ์เซชัน (Dynamics optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ ที่ขึ้นอยู่กับเวลาจะถูกเรียกว่าไดนามิกส์ (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ มาเป็นตัวแสดงแทนระบบไดนามิกส์ (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือ สเตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์ของเวลา (Generalized coordinates or time derivatives) u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คือ non-linear ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables, $x_i(t)$) ได้ด้วยวิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.1) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.1) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control

inputs $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกส์จะเรียก ฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.2)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสถานะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือ non-linear ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สถิติออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของแปร (Calculus of variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิกส์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้น แบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งวิธีไดเรกต์ (Direct methods) จะให้ผลคำตอบที่หยากกว่า แต่ก็มีข้อจำกัดน้อยกว่าวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ในการวิจัยศึกษาในครั้งนี้จะใช้ทั้งวิธีโดยอ้อม และวิธีตรง (Indirect and direct methods) เข้ามาเป็นเครื่องมือสำหรับหาคำตอบ

ดังนั้นจึงต้องทำการศึกษาและทำความเข้าใจวิธีการแบบอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการศึกษาและทำความเข้าใจแคลคูลัสของแปร (Calculus of variations) โดยเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) เพราะต้องใช้เป็นฐานในการใช้งานกับวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) จากนั้นก็จะลงลึกในรายละเอียดของวิธีการอินไดเรกต์ (Indirect methods) โดยจะเน้นหนักลงไปเกี่ยวกับปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุดและปัญหาการใช้พลังงานสูงสุด (Minimum time and maximum energy optimization)

2.2.2 แคลคูลัส ออฟ วาไรเอชัน (Calculus of variation)

ที่มาของของแคลคูลัสออฟวาไรเอชันนั้นนำมาใช้ประโยชน์ในการพัฒนาทฤษฎีความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์ (Optimization of dynamic systems) ในการสร้างสมการเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition equations) ของจุดเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่ประกอบไปด้วยฟังก์ชันนอลฟังก์ชันเดียว (Functional of a single function) และฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functional of N functions) ซึ่งสามารถนำมาวิเคราะห์ในเรื่องแคลคูลัส ออฟ วาไรเอชัน ก็คือ ฟังก์ชันนอล (Functional); $J[x_1, \dots, x_n]$ ที่สามารถแบ่งได้เป็นสามกรณีดังนี้

2.2.2.1 กรณีการที่ทราบเวลาและจุดสุดท้ายที่แน่นอน (Fixed end time and end points)

ฟังก์ชันของฟังก์ชันหลายตัวแปร (Functional of N functions) กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง (Smooth function) อีกทั้งสามารถหาค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสอง ดังนั้น จำนวนทั้งหมดที่ต่อเนื่องและฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ในช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) คือ $x_i(t_0) = x_{i1}, x_i(t_f) = x_{i2}$ ที่ต้องการหาค่าของฟังก์ชัน $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ที่ซึ่งเป็นค่าเอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt. \quad (2.3)$$

ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยมีกระบวนการดังนี้ กำหนดให้ $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมายค่าเอ็กทรีมัม $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้าทำการบวกเพิ่มค่าของฟังก์ชัน $x(t)$ ด้วยค่า $h(t)$ ดังนั้นในลำดับที่ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต $h(t_0) = h(t_f) = 0$ การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล ΔJ คือ

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ และตัดพจน์(เทอร์ม)ที่มีอันดับสูงทิ้งไปจะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.5)$$

เมื่อ δJ คือการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีอันดับสูงทิ้งไป การอินทิเกรตเทอมที่สองในสมการ ($\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt$) โดยวิธีอินทิเกรตทีละส่วน (By parts) เราจะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.6)$$

เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) ที่สอดคล้องสำหรับค่าเอ็กทรีมัมนั้นก็คือ $\delta J = 0$ สำหรับทุกค่า $h(t)$ ที่เป็นไปได้ ดังนั้นตัวแปรของปัญหาคือ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ เมื่อเทอมของขอบเขตทั้งหมด $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}$ จึหายไ้ เราจะสมมติว่าฟังก์ชัน F มีอนุพันธ์ที่มีความต่อเนื่องกันสองอนุพันธ์ หมายถึงเทอม $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นเทอมที่ต่อเนื่อง คุณสมบัติความต่อเนื่องของการอินทิเกรต แสดงให้เห็นว่า $\delta J = 0$ ซึ่งหมายความว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

สมการที่ 2.7 เรียกว่าสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งคำตอบต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขต $x_i(t_0) = x_0, x_i(t_f) = x_f$ ซึ่งจะมีรูปแบบของ F ย่อยๆอยู่สามรูปแบบที่นำไปสู่คำตอบที่เป็นลักษณะเฉพาะคือ

- 1.) F ขึ้นอยู่กับ x_i รูปแบบพิเศษนี้ฟังก์ชันนอลจะเป็น $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$
สมการออยเลอร์จะลดรูปเป็น $\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$, และ $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = C_i$ เมื่อ C_i คือค่าคงที่
- 2.) F ขึ้นอยู่กับ t รูปแบบพิเศษนี้ฟังก์ชันนอลจะเป็น $F(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นสามารถทำการพิสูจน์ได้ว่า $\frac{d}{dt} (F - \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}) = 0, i = 1, \dots, n$ นั้นลดรูปเงื่อนไขของสมการออยเลอร์ ดังเช่นผลเฉลยของ $x(t)$ จะต้องสอดคล้องกับการอินทิเกรต $F - \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = C$ เมื่อ C คือค่าคงที่
- 3.) F ขึ้นอยู่กับ $\dot{x}_i$ รูปแบบพิเศษ F นี้จะมีรูปแบบเป็น $F(t, x_i, \dots, x_n)$ สมการเงื่อนไขออยเลอร์จะลดรูปเป็น $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$

2.2.2.2 กรณีในการที่ทราบเวลาสุดท้ายที่แน่นอนและจุดสุดท้ายแปรผันได้

(Fixed end time and end points)

ปัญหาในหัวข้อนี้ จะมีความแตกต่างกับปัญหาจากหัวข้อที่ผ่านมาตรงที่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนี้ $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้กำหนดจุดสุดท้าย กระบวนการหาค่าเอ็กซ์ทรีโมซของฟังก์ชันนอล $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$. ภายใต้เงื่อนไขที่สำคัญเหมือนกับที่ได้สรุปอธิบายให้เห็นในหัวข้อ 2.3.1.1 ที่ผ่านมาดังสมการที่ (2.4-2.5) คือ

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \right] \quad (2.8)$$

ซึ่ง $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่กำหนดไว้ตายตัว, $h(t_0)$ และ $h(t_f)$ เป็นอิสระอะไรก็ได้ ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับค่าเอ็กซ์ทรีโมซคือ $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0$ และ $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0$ ผลเฉลยความเหมาะสมสูงสุดของ $x_i(t)$ ต้องสอดคล้องกับสมการออยเลอร์ตลอดจนเงื่อนไขขอบเขตที่จุดสุดท้ายทั้งสอง $x_i(t_0), x_i(t_f)$

2.2.2.3 กรณีที่เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points)

หัวข้อนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบมาตรฐานทั่วไป ของปัญหาความเหมาะสมสูงสุดทางพลศาสตร์ เมื่อฟังก์ชันแวลู ของเวลาเริ่มต้นและสุดท้ายติดค่าตัวแปร การหาผลเฉลยของปัญหานี้ก็มีวิธีและกระบวนการที่คล้ายคลึงกับหัวข้อ 2.2.2.2 ที่ผ่านมา โดยกำหนดให้ฟังก์ชันเป้าประสงค์ $J[x_1, \dots, x_n]$ และทำการบวกค่า $h_i(t)$ เพิ่มให้กับ $x_i(t)$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล ΔJ คือ

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ และตัดพจน์(เทอม)ที่มีอันดับสูงทิ้งไปจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ & + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ & - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.10)$$

เมื่อ δJ คือการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีอันดับสูงทิ้งไป การอินทิเกรตเทอมที่สองในสมการ (2.10) โดยวิธีอินทิเกรตทีละส่วน (By parts) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.11)$$

จากสมการที่ $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.11) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.12)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับค่าเอ็กซ์ทรีมัมคือ $\delta J = 0$ ที่ที่ทุกค่าของ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขที่จำเป็น หรือ เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t_0} &= 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \bigg|_{t_f} &= 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \bigg|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n\end{aligned}\quad (2.14)$$

จุดปลายสุดของเวลา t_0, t_f และจุดปลายสุดของ $x(t_0), x(t_f)$ ได้จากการคำนวณจากเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองเงื่อนไข

2.2.3 ฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขบังคับ (Function constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ หรือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.15)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, Variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถหาจุดเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.2.4 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point function value constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล, $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ. เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำได้โดยการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.16)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.12) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

เมื่อเนccessary condition (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนccessary condition (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.5 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General constraints)

จากหัวข้อ 2.2.3 และ 2.2.4 เราสามารถหาค่าเอ็กซีทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล

$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j = 1, \dots, m$ โดย $m < n$

เสมอและสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \left[\int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.20)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.20) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right)_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ที่ทำให้ได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับค่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right]_{t_f} &= 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \quad (2.22)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.2.6 การหาผลเฉลยของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันโดยใช้แคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variation with dynamic optimization or basic results.)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variation) นั้นพบว่า มีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.2.6.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed final time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไป แต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่าย ดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.1) มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.2), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบุสถานะเริ่มต้นไว้ที่ $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมือง ที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัว ซึ่งออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดหรือการใช้เวลาน้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึง ลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับและสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.) สถานะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final states are prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัวแล้ว มีผลจะทำให้เทอมของ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการ (2.2) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (2.2.6.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.23)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.24) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$

สำหรับ $j=1, \dots, n$ และ $k=1, \dots, m$ ด้วยการแทนสมการ (2.25) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็น หรือ เนccessary conditions (Necessary conditions) คือ

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (2.27)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.2) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตต (Costate equations) คือสมการ (2.26) จำนวน n สมการ และเออดีชันนอลอีควชัน (Additional optimality

equations) คือสมการ (2.27) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two Point boundary value problems) ส่วน

$$H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ เรียกว่าฮามิลโตเนียนของระบบ (Hamiltonian of system)}$$

2.) สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states Lie on a constraint surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (1.) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.28)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.29)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.30)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j}|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.32)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.33)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, ลากrange multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.2) จำนวน n สมการ, คอสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.31) จำนวน n สมการ และแอดดิชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.32) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วนทอม คอสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.33) ส่วนค่า ν_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ. t_f ในสมการ $s_l|_{t_f} = 0$

2.2.6.2 อ็อกซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ และ $r=1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สถานะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} = 0$ และ $l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.34)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนได้เป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.35)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.36)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการ

เปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้าหากว่าสมการ $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.38)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรังก์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และ v_l สามารถหาค่าได้โดยใช้สมการ (State equations) คือสมการ (2.2) จำนวน n สมการ, โคสเตต (Costate equations) คือสมการ (2.38) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.36) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนต์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.39)

1.) เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable final time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ 2.2.6.1 เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.1), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.2), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวาร์เอเบิลและสเตตวาร์เอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.) สถานะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final states are prescribed)

ปัญหานี้จะมีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.40)$$

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right] \delta t_f \end{aligned} \quad (2.41)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.40) ก็จะทำให้เราสามารถหา เงื่อนไขเชอริคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.43)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.44)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.42) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.43) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.44) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

3.) สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states lie on a constraint surface)

ปัญหานี้ทำให้อยู่ในทอมนทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ 2.2.6.1.2 ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.45)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.46)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและได้เนccessary conditions (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right] \delta t_f \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.49)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.50)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.51)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$ โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$ คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตทอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, โคสเตทอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.48) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.49) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.51) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.50)

2.2.7 อ็อกซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิลจำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r=1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สถานะสุดท้าย จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับที่สามารถเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.52)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.53)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
 & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\
 & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
 & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial u_k} \right]_{t_f} \delta t_f
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการก็จะทำให้เราสามารถหาเงื่อนไขที่จำเป็นหรือ เนccessary conditions (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \tag{2.56}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \tag{2.57}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.58}$$

ผลเฉลยของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$ โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$ คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_r(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.55) จำนวน n สมการ และแอตติคชันนอลอีควชันคือสมการ (2.56) จำนวน m สมการ คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.58) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$

สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขและต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.57)

2.2.8 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาที่น้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L=1$ และ $\Phi=0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ 2.2.1 จะทำให้ได้สมการเนคเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.59)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.60)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.61)$$

$$\left[1 + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.62)$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.54) จำนวน n สมการโคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.92) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.93) จำนวน m สมการ คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.95) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.94)

2.2.9 อินอีควาลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันที่มี อินีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.63)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.64)$$

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.65)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.66)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอินีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x}, \bar{u}, t), i = 1, \dots, p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอินีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Variable inequality constraints) และสแตตวารีเอเบิลอินีควอลิตีคอนสเทรนต์ (State variable inequality constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนต์ไอเควชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) + s_i^2(t) = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.67)$$

ซึ่งสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) ในสมการ (2.67) จะเป็นคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.65) และสมการ (2.67) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.63) ด้วยการใส่ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt \quad (2.68)$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.69)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.70)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.71)$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.72)$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.73)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.74)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.75)$$

ซึ่งสมการ (2.70-2.75) คือลักษณะของปัญหาค่าปลายสองจุด (BVP-DAE: Two Point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.70) และ (2.71) คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.72-2.73) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.74) และ (2.75) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับกรณีที่เป็นกรหาคำน้อยสุดเราสามารถหาค่าเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i \right) dt \quad (2.76)$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ ทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.77)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.78)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.79)$$

$$0 = \mu_i c_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.80)$$

$$0 \leq \mu_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.81)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.82)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.83)$$

2.3 หลักการของพอนทรียาгин (Pontryagin's principle)

ทฤษฎีของพอนทรียาгинจะยังคงใช้สมการข้อกำหนดของปัญหาคือสมการที่ (2.2) และ (2.2) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น กับเงื่อนไขของสถานะที่เพิ่มเข้ามานั้นคือ $u(t) \in U$ สำหรับช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ เมื่อ U คือ เซตของตัวแปรควบคุมที่ยอมรับได้ ขั้นแรกจะหาค่าที่เข้าใกล้ค่าของสมการแฮมมิลตัน-จาโคบี-เบลแมน โดยใช้หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The Principle of Optimality)

หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The principle of optimality) กล่าวว่า ถ้าตัวแปรควบคุม (Control input); $u(t)$ เป็นค่าที่เหมาะสมในสถานะเริ่มต้น $x(t)$ ที่อยู่ในช่วงเวลา $[t_0, t_f]$ ในทำนองเดียวกับการควบคุมในช่วง $[t + \Delta t, t_f]$ และยังคงมีความเหมาะสมกับเหมือนกันกับ $x(t + \Delta t)$ เมื่อ $\Delta t \geq 0$ และ $x(t + \Delta t)$ คือจุดที่อยู่บนเส้นสถานะที่เหมาะสม จากสมการที่ (2.2) พิจารณาสมการ

$$J(x(t), t, u(\tau)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad (2.84)$$

เมื่อ $x(t)$ สถานะที่ยอมรับได้และ $t \leq t_f$ เรากำหนดให้ค่าดัชนีสมรรถนะขึ้นอยู่กับ $x(t)$ และ t อยู่ในช่วง $[t_0, t_f]$ สำหรับค่า $x(t)$ และ $t \leq t_f$ ใช้สมการควบคุมที่ค่าต่ำสุดจะได้คอส ฟังก์ชันอล (Cost function) หรือเรียกว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function) กำหนดเป็น

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_f^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (2.85)$$

บนช่วงย่อย และใช้คุณสมบัติการบวกของการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (2.86)$$

หลักการของความเหมาะสมที่สุดจะกลายเป็น

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \quad (2.87)$$

เมื่อ $J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ คือค่าต่ำสุดจากค่าสถานะเริ่มต้น $x(t+\Delta t)$ ที่อยู่นอกช่วงเวลา $J(t+\Delta t), t_f$ ในการขยายความที่เกี่ยวกับ $(x(t), t)$ ของสมการที่ (2.180) โดยใช้อนุกรมของเทเลอร์ ได้ดังนี้

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), t) x^{(1)} \Delta t + \text{higher order terms} \right\} \quad (2.88)$$

เมื่อตัดเทอม Δt และทำการแยกเทอมที่ขึ้นอยู่กับ $u(t)$ ดังนี้

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} = 0 \quad (2.89)$$

กำหนดให้ H (Hamiltonian) เป็น

$$H(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^{(T)}, t) = L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.90)$$

และ

$$\begin{aligned} H(x(t), u^*(x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^{(T)}, t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T, t) \\ = \min_{u(t)} \left\{ H(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T, t \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.91)$$

สมการ แฮมิลตัน-จาโคบี-เบลแมนหาได้จาก

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + H \left(x(t), u^*(x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T, t \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^T, t \right) = 0 \quad (2.92)$$

เมื่อสภาวะขอบเขตที่เหมาะสม (J)

$$J^*(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) \quad (2.93)$$

จากสมการที่ (2.186) กำหนดให้อยู่ในรูป สเกลาร์ แฮมิลตัน (H)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t)) + \lambda(t)^T f(x(t), u(t), t) \quad (2.94)$$

เมื่อ $\lambda(t) \in R^n$ และเท่ากับ $\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T$ เมื่อ $\lambda(t)$ เรียกว่าผลคูณลากรางจ์หรือตัวแปรสถานะร่วม, โคสเตทวาริเอเบิล (Co-state variables) ถ้าหากว่า $u^*(t)$ เป็นวิถีหรือเส้นทางที่เหมาะสมสำหรับปัญหาแล้ว $x^*(t)$ ก็จะเป็นสถานะที่เหมาะสมด้วย ดังนั้นวิธีการโดยอ้อม (Indirect approaches) ใช้ทฤษฎีของพอนทียากิน (Pontryagin's theory) สมการแสดงสถานะ(State equations) เป็นดังนี้ $\lambda(t)$ ก็จะเป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับศูนย์เช่นดังต่อไปนี้

$$x^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = f(x^*, u^*, t) \quad (2.95)$$

$$\lambda^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = (x^*, u^*, \lambda^*, t) \quad (2.96)$$

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (2.97)$$

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T - \lambda\right]_{t_f} = 0 \quad (2.98)$$

$$\left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \quad (2.99)$$

สำหรับการควบคุมที่ยอมรับได้ และทุกค่าของ $t \in [t_0, t_f]$ สมการที่ (2.99) จะกลายเป็น

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (2.100)$$

ถ้าปัญหาที่ไร้ขอบเขต ตัวแปรควบคุม (Control input, $u(t)$) จากสมการที่ (2.100) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T = 0 \quad (2.101)$$

ซึ่งหลักการและทฤษฎีของพอนทริยาгинนี้เป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาโดยทางอ้อม(Indirect) ได้ผลเช่นเดียวกับวิธี แคลคูลัส ออฟ วาเรียนชัน (Calculus of variation)

ใช้ทฤษฎีของพอนทริยาгин(Pontryagin's theory) สมการสถานะที่จำเป็นคือสมการที่ (2.100) สิ่งที่จะได้คือเช่นสมการสถานะ (State equations)

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T, \quad (2.103)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (2.104)$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t). \quad (2.105)$$

เมื่อ H (Hamiltonian) กำหนดให้เป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda(t)^T f(x, u, t) \quad (2.106)$$

$\lambda(t) \in R^n$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) สภาวะที่จำเป็น (Necessary condition) ที่จำเป็นสำหรับวิธีโดยอ้อม สมการที่ (2.106) เป็นที่รู้จักกันดีในเรื่องของสภาวะการที่เหมาะสม ซึ่งปัญหาของโครงสร้างที่เป็นแบบสวิตชิง (Switching structure) สามารถที่จะหาค่าได้

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T, \quad (2.107)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (2.108)$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (2.109)$$

เมื่อแฮมมิลตันเนียน, H (Hamiltonian) กำหนดเป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -\left(\sum_{i=1}^m u_i^2\right) + \lambda(t)^T f(x, u, t). \quad (2.110)$$

ในทางปฏิบัติ สมการ (2.201) และ (2.202) เป็นเหมือนกันซึ่งอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันแฮมมิลตันเนียนของปัญหา 2 ปัญหา กับการเกี่ยวข้อกันกับ x ทำให้ได้ผลออกมาเหมือนกันในภายหลัง ส่วนที่คงอยู่ของสมการที่จำเป็น (Necessary conditions) ที่ซึ่งก็คือสมการที่ (2.199 - 2.200) และสมการที่ (2.201 - 2.202) ที่มีความหมายเหมือนกันกันโดยการพิสูจน์มาแล้ว

2.4 หลักการแก้ปัญหาโดยวิธีตรงและวิธีอ้อม (Direct and indirect scheme)

เทคนิควิธีสำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของปัญหาการควบคุมผลที่ได้สูงสุดสามารถใช้การแก้ปัญหาโดยวิธีตรงและวิธีอ้อม ในหลักการของวิธีตรงนั้น ตัวแปรสถานะและ ตัวแปรควบคุม (State and control variable) จะถูกแปลงให้อยู่ในรูปแสดงติดกอบติไมซ์เซชันโดยใช้การประมาณค่าพหุนาม ข้อดีของวิธีตรง คือการที่สามารถเดาค่าเริ่มต้นโดยที่ไม่ใกล้เคียงกับคำตอบ แต่ได้ผลเฉลยที่หยากกว่าวิธีอ้อม ส่วนข้อดีของวิธีอ้อมคือได้ผลเฉลยที่ละเอียดกว่าวิธีตรง แต่มีความยากการเดาค่าเริ่มต้น ทั้งนี้วิธีตรงนั้นมีตัวที่ไม่ทราบค่ามากกว่าวิธีอ้อม

2.4.1 หลักการของวิธีโดยตรง (Direct approach)

ในวิธีการโดยตรงนั้น ผลเฉลยหรือคำตอบสำหรับตัวแปรสถานะ (State variable) และตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input variable) คือ วิธีการเลือกเดาค่าของ สัมประสิทธิ์ตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่าที่มีความแน่นอน ให้สอดคล้องกับสถานะบังคับทั้งหมดของปัญหา โดยที่วิธีการโดยตรงจะทำการแปลงปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Dynamic optimization) ให้เป็นปัญหาความเหมาะสมที่เป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์ (Static parameter optimization) วิธีที่ใช้ในการแปลง ปัญหาการโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) นั้นจะทำการแก้ปัญหาโดยการใช้เทคนิคที่หลากหลายของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น เทคนิควิธีการถ่วงน้ำหนักเศษคงค้าง (Weight residual) และการโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

ข้อดีและข้อด้อยของวิธีโดยตรงจะมีความสัมพันธ์กับการเลือกเดาค่าเดาเริ่มต้นและความแม่นยำของผลเฉลย กล่าวคือ ข้อดีของวิธีโดยตรงก็คือการที่สามารถที่ได้คำตอบที่รวดเร็วกว่าทั้งที่อาจจะเดาค่าเริ่มต้นที่ไม่มีความใกล้เคียงกับคำตอบเลย แต่วิธีโดยตรงมีข้อเสียในเรื่องความไม่ละเอียดของคำตอบแต่ถึงอย่างไรก็ตามก็ยังพอที่จะสามารถประมาณค่าให้ใกล้เคียงกับวิธีอ้อมได้ในบางกรณีต่อไป เราจะพิจารณาถึงตัวอย่างของปัญหาของการหาค่าต่ำสุดของตัวแปรควบคุม $\bar{u}(t) \in R^m$ ซึ่งมีคอสฟังก์ชันนอลเป็น

$$J' = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.111)$$

ที่สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{x}(0) &= \bar{x}_0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

เมื่อตัวแปรสถานะคือ $\bar{x}(t) \in R^n$, t_f คือเวลาสุดท้ายที่กำหนดไว้ตายตัว และมีสภาวะเริ่มต้น (Initial condition) ที่แน่นอน จากเงื่อนไขทางพลศาสตร์ เราสามารถรวมคอสฟังก์ชันนอล ผ่านทางตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier) $\bar{\lambda}(t) \in R^n$, จะได้เป็น

$$J = \Phi + \int_0^{t_f} [L + \bar{\lambda}^T (\bar{f} - \dot{\bar{x}})] dt \quad (2.113)$$

เมื่อทำการเดาค่าเริ่มต้นให้กับค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้าคือ $\bar{u}^0(t)$ และปรับปรุงหาค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้า $\bar{u}^1(t)$ เพื่อนำมาลดค่าของคอสฟังก์ชันนอลลงดังเช่น $\bar{u}^1(t) = \bar{u}^0(t) + \bar{h}_u(t)$ เมื่อ $\bar{h}_u(t)$ คือตัวเพิ่มค่าในการเดา และยังมี $\bar{x}^1(t) = \bar{x}^0(t) + \bar{h}_x(t)$ ซึ่งมีความหมายทำนองเดียวกันเช่นเดียวกับตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input), $\bar{u}^1(t)$ เมื่อตัดเทอมที่มีอันดับที่สูงทิ้งไปเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta J = J[\bar{u}^1] - J[\bar{u}^0] &\approx \delta J = (\Phi_x^T - \bar{\lambda}^T) \bar{h}_x \Big|_{t_f} \\ &+ \int_0^{t_f} \left((H_x^T + \dot{\bar{\lambda}}^T) \bar{h}_x + H_u^T \bar{h}_u \right) dt \end{aligned} \quad (2.114)$$

เมื่อ $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$, $H_x = \partial H / \partial \bar{x}$, $H_u = \partial H / \partial \bar{u}$, และ $\Phi_x = \partial \Phi / \partial \bar{x}$ ทำการเลือกตัวคูณลากรางจ์ $\bar{\lambda}(t)$ ดังนั้น

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x; \quad \bar{\lambda}(t_f) = \Phi_x \quad (2.115)$$

การเปลี่ยนแปลงของ คอสฟังก์ชันนอลจะกลายเป็น

$$\Delta J = \delta J = \int_0^{t_f} H_u^T \bar{h}(t) dt \quad (2.116)$$

การประมาณค่าเชิงตัวเลขในการอินทิกรัลในสมการที่ (2.116) สามารถหาคำตอบได้โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) นอกจากนั้นโดยการพิจารณาตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่จุดที่เราสนใจในช่วง $t \in [0, t_f]$ เราสามารถพิจารณาให้เป็นปัญหาความเหมาะสมที่สุดที่ไม่ขึ้นกับเวลาหรือปัญหาแบบ สเตติก พารามิเตอร์ ออฟติไมซ์เซชัน (Static parameter optimization) ในขั้นตอนแรกจะทำการหารเพื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็นตอนๆ $t \in [0, t_f]$ จนถึง $N-1$ ให้เท่าๆกันเป็น $\Delta t = t_f(N-1), t_i = i\Delta t, i = 0, 1, \dots, N-1, t_0 = 0, t_{N-1} = t_f$. ขณะที่แต่ละช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ เราจะได้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจำนวน nm ค่า $\bar{u}(t_i), i = 0, 1, \dots, N-1$ กับจุดที่ทำการประมาณค่าสำหรับตัวแปรควบคุมป้อนเข้า สมการที่ (2.116) จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{2} (H_u^T(t_{i+1}) \bar{h}_u(t_{i+1}) + H_u^T(t_i) \bar{h}_u(t_i)) \Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \bar{u}(t_i)} \right)^T \bar{h}_u(t_i) \end{aligned} \quad (2.117)$$

สมการที่ (2.117) แสดง เกรเดียนท์ของคอสฟังก์ชันนอลที่มีความเกี่ยวข้องกับตัวแปรควบคุมป้อนเข้า $\bar{u}(t_i)$ ที่กำหนดได้โดย

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \bar{u}(t_i)} &= H_u(t_i) \Delta t, \quad i = 1, 2, \dots, N-2 \\ &= \frac{1}{2} H_u(t_i) \Delta t, \quad \text{and } i = N-1 \end{aligned} \quad (2.118)$$

ผลของการประมาณค่า คือการแปลงปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ไปเป็นปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางสถิตศาสตร์ ทำการหาค่า $\bar{u}(t_0), \dots, \bar{u}(t_N - 1)$ ที่ฟังก์ชันนอล ที่เป็นค่าน้อยที่สุด คือ

$$J(\bar{u}(t_0), \bar{u}(t_1), \dots, \bar{u}(t_{N-1})) \quad (2.119)$$

เมื่อใช้วิธีของคอสซีหรือวิธีนิวตัน-คอสซีในการหาคำตอบของปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางสถิตศาสตร์ เมื่อจัดรูปสมการของ นิวตัน-คอสซีใหม่เป็น

$$\bar{u} = [\bar{u}(t_0)^T, \bar{u}(t_1)^T, \dots, \bar{u}(t_{N-1})^T]^T \quad (2.120)$$

$$\nabla J = [(\partial J / \partial \bar{u}(t_0))^T, (\partial J / \partial \bar{u}(t_1))^T, \dots, (\partial J / \partial \bar{u}(t_{N-1}))^T]^T \quad (2.121)$$

$$\bar{h}_u = [\bar{h}_u(t_0), \bar{h}_u(t_1), \dots, \bar{h}_u(t_{N-1})]^T \quad (2.122)$$

วิธีไดนามิกส์คอสไซด์-นิวตัน 2 กำหนดให้ N ; $t_f, \bar{u}^0, K_{mn}^0 = I$ และค่าจำนวนที่ค่าน้อย $\varepsilon > 0$

1.) ทำการคำนวณหาค่าเกรเดียนท์ $\Delta J(\bar{u}^0)$ ตามสมการ (9)

2.) ถ้า $\|\nabla J(\bar{u}^0)\| \leq \varepsilon, \bar{u}$ จะเป็นค่าที่ต้องการ

3.) คำนวณหาค่า $\tilde{h}_u = -K_{mn}^0 \nabla J(\bar{u}^0)$

4.) ถ้า $\|\tilde{h}_u\| \leq \varepsilon$, ให้หยุดการคำนวณจะไม่ต้องทำการปรับค่า

5.) หาค่า $\alpha^* > 0$ ดังเช่น $J(\bar{u}^0 + \alpha^* \tilde{h}_u) - \nabla J(\bar{u}^0)$

6.) คำนวณหาค่า $\tilde{\gamma} = \nabla J(\bar{u}^0 + \alpha^* \tilde{h}_u) - \nabla J(\bar{u}^0)$

$$\tilde{d} = \bar{u}^0 + \alpha^* \tilde{h}_u - \bar{u}^0 = \alpha^* \tilde{h}_u$$

$$K_{mn}^0 = K_{mn}^0 + \left(1 + \frac{\tilde{\gamma}^T K_{mn}^0 \tilde{\gamma}}{\bar{d}^T \tilde{\gamma}}\right) \frac{\bar{d} \bar{d}^T}{\bar{d}^T \tilde{\gamma}} - \left(\frac{\bar{d} \tilde{\gamma}^T K_{mn}^0 + K_{mn}^0 \tilde{\gamma} \bar{d}^T}{\bar{d}^T \tilde{\gamma}}\right)$$

7.) จัดรูป $\bar{u}^1 = \bar{u}^0 + \alpha^* \tilde{h}_u$. $\nabla J(\bar{u}^0) = \nabla J(\bar{u}^0 + \alpha^* \tilde{h}_u)$ แล้วย้อนกลับไปสู่ขั้นตอนที่ 2

สิ่งที่สับสนุนของขั้นตอนวิธีคิดที่มีความสมบูรณ์นี้ ต้องคำนึงถึงประสิทธิภาพของการคำนวณของฟังก์ชันนอล $J(\tilde{u})$ และเกรเดียนท์ของฟังก์ชันนอล $\nabla J(\tilde{u})$ ต่อไปเราจะมาทำการว่าทำอะไรในการที่จะบรรลุผลในการหาคำตอบ

การคำนวณหา ฟังก์ชันนอล (Computation of $J(\tilde{u})$). เมื่อ $\tilde{u}(t)$ คือสิ่งที่ต้องการหาค่า ณ. เวลาที่เราพิจารณาเท่านั้น t_i เราสามารถใช้การประมาณค่าแบบพหุนามในการคำนวณหาของ $\tilde{u}(t)$ สำหรับในเวลาอื่น $t_i, i = 1, \dots, N-1$ ในทางปฏิบัติการประมาณค่าเชิงเส้นในช่วงจะพบว่ามีความรวดเร็วในการหาค่าที่ดี ดังนั้น ในช่วงเวลา $t \in [t_i, t_{i+1}]$ การคำนวณค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้าจะถูกรวบรวมโดย

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t_i) + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} (\tilde{u}(t_{i+1}) - \tilde{u}(t_i)) \quad (2.123)$$

การใช้การประมาณค่าแบบพหุนามเราสามารถคำนวณหาฟังก์ชัน $J(\tilde{u})$ ต่อไป เมื่อกำหนดตัวแปรชุดใหม่เป็น $\dot{y}(t) = L(\bar{x}, \bar{u}), y(0) = 0$. ดังนั้นเมื่อเรากำหนดตัวแปรควบคุมป้อนเข้า $\tilde{u}$ ใดๆ เราสามารถทำการอินทิเกรตสมการระบบได้ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.124)$$

$$\dot{y}(t) = L(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.125)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.126)$$

$$y(0) = 0 \quad (2.127)$$

เมื่อที่เวลาดำเนินไปข้างหน้า จาก $t = 0$ ถึง t_f จะได้ว่า

$$J(\bar{u}) = \Phi(\bar{x}(t_f)) + y(t_f) \quad (2.128)$$

การคำนวณหา เกรเดียนท์ของฟังก์ชันนอล (Computation of ∇J) เกรเดียนท์ของฟังก์ชันนอลมีความ

เกี่ยวข้องกันกับพารามิเตอร์ $\bar{u}$ ที่ยังไม่ทราบค่า สามารถคำนวณโดยใช้การประมาณค่าอนุพันธ์แบบจำกัดเขต อย่างไรก็ตามเป็นการยุ่งยากและเสียเวลาในการคำนวณ การคำนวณเกรเดียนต์ที่มีประสิทธิภาพที่ดีกว่าคือการอินทิกรัลสมการโคสเทท ดังนี้

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.129)$$

$$\bar{\lambda}(t_f) = \phi(\bar{x}(t_f)) \quad (2.130)$$

จากที่ $t = t_f$ ถึง $t = 0$ หลังจากที่ได้คำนวณในขั้นตอนที่ผ่านมา การที่จะทราบค่าวิถีของสถานะและโคสเททเราสามารถคำนวณเกรเดียนต์โดยใช้สมการที่ (2.118) หมายความว่าหาค่าทั้งฟังก์ชันและเกรเดียนต์ การประมาณค่าพหุนามที่ใช้อันดับที่สูงๆขึ้น จะสามารถทำให้เกิดความแม่นยำของผลเฉลยเพิ่มมากขึ้น

2.4.1.1 ตัวอย่างของการขยายต่อเนื่องและวิธีเชิงตัวเลข (Extension and numerical examples)

ในตอนนี้จะแสดงถึงวิธีการว่าทำอย่างไร ที่จะได้มาซึ่งคำตอบที่สามารถใช้ในการแก้ปัญหาที่ประกอบไปด้วย (i) เงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Constraints on the final state) และ (ii) เงื่อนไขบังคับของตัวแปรสภาวะและตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (State and control variable inequality constraints)

2.4.1.2 สภาวะเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (Final states constrained)

ปัญหาที่เมื่อสภาวะสุดท้ายเป็นการพิจารณาให้สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับในรูปแบบ $s_j(\bar{x}(t_f)) = 0, j = 1, \dots, n_f$ สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในวิธีตรง สิ่งนี้ทำให้เกิดเงื่อนไขบังคับที่เพิ่มเงื่อนไขบังคับที่จุดสิ้นสุด Φ โดยมีรูปแบบของเทอมใหม่เป็นเทอมเพนาลตี้ที่จุดสิ้นสุด

$$\Phi' = \Phi + \sum_{j=1}^{n_f} r_f s_j^2 \quad (2.131)$$

เมื่อ Φ' เปลี่ยนไปเป็น Φ ตามวิธีการด้านบน

ถ้าเงื่อนไขบังคับของสภาวะสุดท้ายสอดคล้องกัน ดังนั้น $\Phi' = \Phi$ และถ้าเงื่อนไขบังคับของสภาวะสุดท้ายไม่สอดคล้องกัน ดังนั้นทอมที่เพิ่มเข้าไปทำให้เกิดการเพิ่มในคอสฟังก์ชันที่เรียกว่า เพนนาลตีฟังก์ชัน $r_j, j=1, \dots, n_f$ เป็นการเลือกที่พอเพียงที่ทำให้แน่ใจได้ว่าเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้ายสอดคล้องกับระยะที่เราสนใจ

2.4.1.3 เงื่อนไขบังคับแบบอีนอติวาลิตีของ ตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม (State and control variable inequality constraints)

พิจารณาปัญหาของการหาค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่สเกลลาร์ฟังก์ชันนอลมีค่าต่ำสุด

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.132)$$

ที่สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \\ c_i(t, \bar{x}, \bar{u}) &\leq 0, i = 1, \dots, p \\ \bar{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

ปัญหาแบบนี้สามารถแก้ปัญหาก็ได้โดยการใช้วิธีตรงที่ได้อธิบายไว้แล้วในตอนที่ผ่านมา โดยการแปลงปัญหาเงื่อนไขบังคับแบบอีนอติวาลิตีไปเป็นปัญหาที่ไม่เป็นอีนอติวาลิตี ที่ได้ผลสำเร็จโดยการเพิ่มเงื่อนไขบังคับแบบอีนอติวาลิตีให้กับคอสฟังก์ชันนอลที่ใช้ฟังก์ชันต่อเติมของเพนนาลตีฟังก์ชัน ต่อเนื่องกำลังสองของเพนนาลตีกำหนดโดย

$$C_i = \begin{cases} -1/c_i & \text{if } -c_i \geq \sigma \\ \frac{1}{\sigma} \left(3 + \frac{3c_i}{\sigma} + \left(\frac{c_i}{\sigma} \right)^2 \right) & \text{if } -c_i < \sigma \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.133)$$

เมื่อ σ คือค่าพารามิเตอร์

ฟังก์ชันเพนนาลตีขยายเป็นรูปแบบมาตรฐานของผลต่างเล็กๆ ภายในเพนนาลตีฟังก์ชันที่กำหนดไว้ในบทที่ 2 ประเภทของฟังก์ชันเพนนาลตีฟังก์ชันภายในคือแบบอย่างง่าย $P_i = -1/c_i$ ที่ซึ่งกำหนดภายในขอบเขต $c_i \geq 0$ เท่านั้น ตัวอย่างถึงที่แสดงความชัดเจนของความแตกต่างระหว่าง

ฟังก์ชันเพนนาลตีภายใน P_i และฟังก์ชันเพนนาลตีขยาย C_i เพนนาลตีฟังก์ชัน (สมการที่ (2.133)) ขยายช่วงของ P_i ออกไปสู่ขอบเขต $c_i \geq 0$ C_i ที่แท้จริงแล้วขยายไปสู่ขอบเขตบริเวณที่เป็นไปไม่ได้ของเงื่อนไขบังคับแบบอินอีควาลิตีนั้น มีความสำคัญมากซึ่งจะยอมให้เส้นวิถีนั้นไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่นำไปสู่การปรับที่ขั้นตอนระหว่างกระบวนการออปติไมเซชัน กำหนดให้อนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของฟังก์ชันเพนนาลตี C_i ต่อเนื่องตลอดที่จุดเปลี่ยนแปลง $-c_i = \sigma$. ฟังก์ชันเพนนาลตีขยายนั้นมี อนุพันธ์อันดับสามที่ต่อเนื่องกันที่จุดเปลี่ยนแปลงที่เป็นประโยชน์นำมาใช้ได้ อย่างไรก็ตามความต่อเนื่องที่อนุพันธ์อันดับสองนั้นเพียงพอสำหรับกระบวนการทางตัวเลขที่ใช้ในการพัฒนา

การใช้ฟังก์ชันเพนนาลตีขยาย (สมการที่ (2.132)) เราสามารถเขียนสมการปัญหาเงื่อนไขบังคับแบบอินอีควาลิตี (สมการที่ (2.133)) ได้ใหม่เป็นปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ ในการหาค่าต่ำสุดสเกลาร์ฟังก์ชัน $\bar{u}(t) \in R^m$ ดังนี้

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^p \rho_k C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.134)$$

สอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

เมื่อ $\sigma = \sqrt{\rho_k}, \rho_k > 0, \rho_k > \rho_k + 1$.

ผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขบังคับแบบอินอีควาลิตีสมการที่(2.134) หาได้โดยการแก้ปัญหาตามลำดับวิธีปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับตามสมการที่(2.134) ดังเช่น $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ(สมการที่(2.134))จะมีความเหมือนกับปัญหาในสมการ ρ_k ผลเฉลยที่คำนวณที่เพนนาลตีพารามิเตอร์ ρ_k คือการเดาค่าเริ่มต้นที่ ρ_{k+1} เทคนิควิธีนี้สำหรับแก้ปัญหาความเหมาะสมที่สุดที่มีเงื่อนไขบังคับจะเรียกว่า SUMT (Sequential unconstrained minimization technique) ซึ่งเราสามารถลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ ในการหาคำตอบจากปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับแบบเดิมได้

สมการพลศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับงานทางด้านระบบวิศวกรรมจะพบว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงและนำไปสู่ปัญหาความเหมาะสมที่สุดที่มีความยุ่งยากในการแก้ปัญหา เมื่อได้มีการ

นำเสนอเทคนิควิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น เทคนิควิธีนี้สามารถใช้กับหลักวิธีตรงหรือหลักวิธีอ้อมได้

วิธี SUMT. เป็นกระบวนการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่เรียกกันทั่วไปว่าวิธีต่อเนื่องแนวดัดเบื้องต้นของวิธีต่อเนื่องนี้คือการเติมค่าพารามิเตอร์ลงในปัญหา ρ ดังเช่น $\rho=1$ ผลเฉลยของปัญหาสามารถหาคำตอบได้โดยง่าย อย่างไรก็ตามแต่ปัญหาที่แท้จริงเป็นการแก้ปัญหาค่าที่เหมาะสมที่สุด $\rho=0$ ในระเบียบวิธีแบบต่อเนื่องนั้น เป็นการแก้ปัญหาลำดับของค่าพารามิเตอร์ ρ_k นั้นมีแนวโน้มเป็น 0 เมื่อ $k \rightarrow \infty$

ข้อแตกต่างระหว่างวิธีต่อเนื่องกับวิธีไฮโมโทริกก็คือการแบ่งช่วงโดยที่เป็นเทคนิควิธีที่ใช้ในการเลือกค่าพารามิเตอร์ตัวใหม่ ρ_k และโดยการเพิ่มค่าในที่ซึ่งคำตอบที่ได้มานั้นเป็นการใช้การเริ่มการเดาค่าสำหรับพารามิเตอร์ให้เท่ากับ ρ_k

2.4.1.4 คอนโทรล และ พารามิเตอร์ ออปติไมเซชัน (Control and parameter optimization)

ปัญหาของความเหมาะสมที่ควบคุมกันระหว่างคอนโทรลอินพุต และพารามิเตอร์ของระบบ จะแสดงในหัวข้อนี้ปัญหานี้ เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุด การพิจารณาในการหาค่าควบคุม $\bar{u}(t) \in R^m$ และพารามิเตอร์ $\bar{p}(t) \in R^{n_p}$ ที่คอส ฟังก์ชันนอลมีค่าน้อยที่สุด

$$\begin{aligned} J' &= \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) dt \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \\ \bar{x}(0) &= \bar{x}_0 \end{aligned}$$

ในที่นี้ ตัวแปรสถานะคือ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาสุดท้ายคือ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และสภาวะเริ่มต้น ถูกกำหนดไว้แล้วใช้ตัวคูณลากรางจ์ $\bar{\lambda}(t) \in R^m$ เงื่อนไขบังคับทางพลศาสตร์คือการรวมคอสฟังก์ชันนอลเพื่อหา

$$J = \Phi + \int_0^{t_f} [L + \bar{\lambda}^T (\bar{f} - \dot{\bar{x}})] dt$$

สมมติว่า $\bar{u}^0(t), \bar{p}$ คือค่าเดาเริ่มต้นของการควบคุมความเหมาะสมที่สุดและพารามิเตอร์ออปติไมเซชันตามลำดับ ให้ $\bar{x}^0(t)$ กำหนดเป็นวิถีสถานะที่มีความหมายเหมือนกันกับตัวแปรควบคุมป้อน เข้า $\bar{u}^0(t)$ และพารามิเตอร์ $\bar{p}^0$ ในการปรับปรุงผลเฉลยโดยการพารามิเตอร์

$$\bar{u}^1(t) = \bar{u}^0 + \bar{h}_u(t); \bar{p}^1 = \bar{p}^0 + \bar{h}_p \quad \text{เช่นเดียวกันกับ } \bar{x}^1(t) = \bar{x}^0 + \bar{h}_x(t) \text{ ที่เหมือนกับ } \bar{u}^1, \bar{p}^1$$

2.4.2 หลักวิธีการโดยอ้อม (Indirect approach)

การประยุกต์ใช้หลักการของแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation) แก้ปัญหาการควบคุมความเหมาะสม ที่สุดทางพลศาสตร์นำไปสู่การได้มาของเงื่อนไขที่จำเป็นหรือเนคเซสซารี คอนดิชัน เงื่อนไขเหล่านี้จะอยู่ในรูปของ ปัญหาค่าขอบ (Boundary value condition) ซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ (BVP:DE) หรือสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต (Differential-algebraic equations : BVP-DAE) วิธีอินไดเรกต์หรือวิธีทางอ้อมนี้จะทำการค้นหาค่าของสเตต (State), ตัวแปรสถานะร่วมหรือโคสเตตวารีเอเบิล (Costate variables) และ ตัวแปรควบคุม หรือ คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ด้วยการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problems) เทคนิควิธีที่อาจจะให้ความแม่นยำในการแก้ปัญหาค่าขอบที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ก็คือ หลักวิธีที่เรียกว่ามัลติเปิลชู้ตติงเทคนิค (Multiple shooting techniques) วิธีคิดทั้งหมดนี้ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาในตอนนี้จะขึ้นอยู่กับวิธีดังกล่าว ซึ่งมีรายละเอียดต่อไป

ถึงแม้ว่าเราจะมีวิธีการแก้ปัญหาแบบ BVP-DE ได้หลากหลายวิธีการ แต่มีอยู่เพียงสองถึงสามวิธีเท่านั้นที่มีความชัดเจนสำหรับปัญหาที่มีค่าขอบที่ประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต ในหัวข้อนี้ เทคนิควิธีแบบมัลติเปิลชู้ตติงถูกนำมาใช้กับปัญหาแบบ BVP-DAE. ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในการพิจารณาถึงผลเฉลยของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ของปัญหาค่าขอบในสมการเชิงอนุพันธ์ (BVP-DAE) ที่ได้จากปัญหาการควบคุมความเหมาะสมผลที่ได้สูงสุด ปัญหา BVP-DAE เหล่านี้เป็นการหาโดยการแยกหรือขจัดตัวแปรควบคุมป้อนเข้าออกจากสมการเงื่อนไขที่จำเป็นอันดับหนึ่ง สำหรับค่าเอ็กทรีมัม ตัวแปรควบคุมจะไม่ถูกขจัดออกจากเงื่อนไขที่จำเป็นอันดับที่หนึ่ง ที่นำไปสู่ปัญหาค่าขอบในสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต (BVP-DAE) วิธีมัลติเปิลชู้ตติงถูกใช้ในการแก้ปัญหาระหว่าง BVP-DAE และปัญหา BVP-DE ปัญหาการควบคุมความเหมาะสม กับเงื่อนไขแบบ อินอีควาลิตี้ คอนสเตรน จะใช้ฟังก์ชันต่อเติมของเพนาลตี้ฟังก์ชัน (The extended penalty function) ในทางปฏิบัติ จะพบว่าระเบียบวิธีดังกล่าวจะให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำ สำหรับปัญหาการควบคุมความเหมาะสมที่สุด

2.4.2.1 ปัญหาค่าขอบของการควบคุมที่ได้ผลสูงสุด (Optimal control boundary value problems)

ในหัวข้อนี้จะใช้เทคนิควิธีมัลติเปิลชู้ตติงมาทำการแก้ปัญหการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraint optimal control problem) หรือ อันคอนสเตรนท์ หลังจากที่กำหนดปัญหาแล้ว เราจะแสดงเงื่อนไขที่จำเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับความเหมาะสมที่สุด โดยจะเป็นการหาเนคเซสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขต

สองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่เกี่ยวข้องเฉพาะกับสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) หลักแนวคิดของวิธี มัลติเปิลชู้ตติงจะได้อธิบายในกรณีตัวอย่างต่อไป

2.4.2.2 ปัญหาความเหมาะสมที่สุดที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraint optimal control problems)

เราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.135)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), t \in [0, t_f] \quad (2.136)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.137)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) = 0 \quad (2.138)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State Vector), $\bar{x}_0$ คือกลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น (Set of initial conditions), และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือเงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Final state constraint) ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับหัวข้อ 2.2 คือสภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states lie on a constraint surface) ทำให้เราได้ เงื่อนไขที่จำเป็น หรือเนccessชอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.139)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.140)$$

$$0 = H_u \quad (2.141)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.142)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.143)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \quad (2.144)$$

เมื่อ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ คือ โคสเตตวารีเอเบิล (State variables) ,สเกลาร์ $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$
 $H_x = \partial H / \partial \bar{x}$, $H_u = \partial H / \partial \bar{u}$, $\Phi_x = \partial \Phi / \partial \bar{x}$ ตามลำดับ ส่วน $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์

(Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เพื่อให้ลดความซับซ้อนลงเราจะทำการสมมติให้อยู่ในสภาวะคงที่ (Stationary condition) คือ $H_u = 0$ และทำการจัดรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) $\bar{u}$ ในเทอมของตัวแปรสถานะหรือสเตตวารีเอเบิล (State variable) และตัวแปรสถานะร่วมหรือโคสเตตวารีเอเบิล (Costate variable) นอกจากนี้เราจะทำการสมมติให้สมการ (2.135-2.138) มีจำนวน $2n + n_f$ เพื่อใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขขอบเขตจำนวน $2n$ เงื่อนไขให้อยู่ในเทอมของ $\bar{x}$ และ $\bar{\lambda}$ ด้วยการกำจัด $\bar{v}_f$ ออกส่วนปัญหาที่ไม่มีการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะทำให้ได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.115-2.120) จะกลายเป็น

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}) \quad (2.145)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.146)$$

เมื่อ $\bar{y} = [\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T]^T \in R^{2n}$, $\bar{h}(t, \bar{y}) = [H_\lambda^T, -H_x^T]^T \in R^{2n}$ และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข ได้จากสมการ (2.139–2.140)

2.4.2.3 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดิง (Multiple shooting solution)

มีหลายๆเทคนิควิธีที่สามารถใช้หาผลเฉลยทางตัวเลขของ ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (24-29) ยกตัวอย่างเช่น วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference methods), วิธีจัดตำแหน่ง (Collocation method) และวิธีค่าเริ่มต้นหรือชูดิง (Initial value or shooting method) แต่วิธีที่มีประสิทธิภาพและให้ความแม่นยำสูงในการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ก็คือวิธีมัลติเปิลชูดิง (Multiple shooting method)

2.4.2.4 หลักวิธีมัลติเปิลชูดิง หรือ มัลติเปิลชูดิงอัลกอริทึม (Multiple shooting algorithm)

เพื่อให้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับปัญหาที่มีค่าขอบ (Boundary value) สมการ (2.139-2.140) ได้จะทำการแบ่งช่วงเวลา $[0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem)

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}), t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.147)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.148)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ของสมการ (3.35)-(3.36) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ อย่างไรก็ตามสำหรับ $M = 1$ เราจะได้วิธียิงเป็ลซูดั้ง (Simple shooting method) ซึ่งหลักการเบื้องต้นของวิธีนี้คือการเดาค่าตัวแปรที่ไม่รู้ค่าของ $\bar{s}_0^y$ จากนั้นก็ทำการหาผลรวมของค่าเริ่มต้นของปัญหาสมการ (2.147-2.148) เพื่อให้ได้ $\bar{s}_1^y$ การใช้ค่าผิดพลาดที่คำนวณได้จากสมการ (2.146) จะถูกนำมาใช้เพื่อปรับปรุงค่าที่เดาสำหรับตัวไม่ทราบค่าที่เวลา $t = 0$ ขั้นตอนนี้จะถูกกระทำซ้ำหลายๆ ครั้งจนกระทั่งได้ผลเฉลย $\bar{s}_0^y$ ที่ลู่อเข้าหาค่าตอบ (Converge) และ/หรือสอดคล้องกับสมการ (2.146) มัลติเปิลซูดั้งเทคนิค (Multiple shooting technique) อาศัยหลักการเดียวกันกับวิธียิงเป็ลซูดั้ง (Simple shooting method) ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ให้ไหนดแต่ละไหนดต่อเนื่องกัน ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นดังนี้

- ผลเฉลยที่แต่ละจุดต่อมีความต่อเนื่องกัน นั่นคือ

$$\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

เมื่อ $\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) สมการ (2.147) ที่เวลา $t = t_{i+1}$ โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) $\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y$

- ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) นั่นคือ $\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$

สภาวะเหล่านี้จะทำให้เกิดสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equations) จำนวน $2n(M+1)$ สมการ จะมีตัวไม่ทราบค่า $2n(M+1)$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y) - \bar{s}_M^y \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) \end{bmatrix} = 0; \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

นอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.149) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ (Iterative) ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) ดังนั้นถ้าเดาค่าเริ่มต้น (Initial guess) $\bar{s}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.145-2.146) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{s}^{k+1}$ ดังรูปแบบนี้

$$\bar{s}^{k+1} = \bar{s}^k + \alpha \Delta \bar{s}, \alpha \in (0, 1] \quad (2.150)$$

$$J(\bar{s}^k) \Delta \bar{s} = -F(\bar{s}^k), k = 1, 2, \dots, \text{until convergence} \quad (2.151)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) คือ $J(\bar{s}) = \partial F(\bar{s}) / \partial \bar{s}$ มีขนาดมิติ $2n(M+1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบเป็นดังนี้

$$J(\bar{s}) = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix}$$

$$A_i = \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} \right]; C_i = -I, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.152)$$

$$B_0 = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} \right]; B_M = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} \right]$$

จะทำซ้ำสมการ (2.151-2.152) ไปจนกระทั่งลู่เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta \bar{s}\| \leq \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแอมป์แฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \|F(\bar{s}^k)\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{s}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) สมการ (2.145–2.146) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้เป็น

วิธีมัลติเปิ้ลชู้ตติง (Multiple shooting method) ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \dots, t_{M-1}, \bar{s}^0$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

- 1.) คำนวณค่า $F(\bar{s}^0)$
- 2.) ถ้า $\|F(\bar{s}^0)\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
- 3.) คำนวณค่า $\Delta \bar{s} = -J^{-1}(\bar{s}^0)F(\bar{s}^0)$
- 4.) ถ้า $\|\Delta \bar{s}\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
- 5.) ค้นหา $\alpha^* > 0$ ที่ทำให้ $F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s}) < F(\bar{s}^0)$
- 6.) กำหนด $\bar{s}^0 = \bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s}$
- 7.) กำหนด $F(\bar{s}^0) = F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s})$

ย้อนกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีซิมเปิลชู้ตติง (Simple shooting method) จะพบว่ามัลติเปิ้ลชู้ตติงเทคนิค (Multiple shooting technique) มีคุณสมบัติที่มีความเสถียรทางตัวเลขมากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาที่มีความไม่เชิงเส้นสูง (Nonlinear) และปัญหาที่ตัวแปรเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

2.4.2.5 ข้อประเด็นการสนับสนุน (Implementation issue)

ส่วนที่สนับสนุนของวิธีมัลติเปิ้ลชู้ตติ่งสามารถอธิบายดังนี้วิธีมัลติเปิ้ลชู้ตติ่งเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

- 1.) หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.147-2.148)
- 2.) คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.152)
- 3.) หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.151)

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) สมการ (2.147-2.148) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีก็คือวิธีรุง-กัตตาอันดับ 4 (Runge-Kutta method of order 4) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.147-2.148) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem)

การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) มีหลากหลายเทคนิควิธีที่ใช้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นสมการที่ (2.147-2.148) ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับปัญหาทางด้านวิศวกรรม เช่น Frequently stiff, Suitable integration schemes include, Gear' method, The semi-implicit extrapolation method, และ Implicit Runge-Kutta method

จากตัวอย่างต่อไป วิธีของ โรเซนบรอก ได้พัฒนาในการอินทิเกรตปัญหาค่าเริ่มต้นในแนวคอดหลักวิธีของ มัลติเปิ้ล ชู้ตติ่ง วิธีนี้ เป็น

จาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ใช้สมการที่ (2.123 – 2.124) เราจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y}, t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.154)$$

จำไว้ว่า สมการที่ (2.153 – 2.154) นั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้นของค่าเริ่มต้น

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Solution of linear system of equations) การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Solution of linear system of equations) นั้นก็สามารถใช้จาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) มาคำนวณหาค่าแอดมิตด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) โดยการแก้ปัญหสมการ (2.152) แต่จะทำการจัดเรียงใหม่ดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} C_0 & & & & A_0 \\ A_1 & C_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & A_{M-1} & C_{M-1} & \\ & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

ต่อไปก็ทำการหาค่าเมตริกซ์ทแยง (Orthogonal factorization matrix) $Q_0 \in R^{4n \times 4n}$ นั่นคือ

$$Q_0^T \begin{bmatrix} C_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $R_0 \in R^{2n \times 2n}$ จะเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) ทำการคูณทั้งสองข้างของสมการ (2.155) ด้วย (Q_0^T, I) จึงทำให้ได้สมการเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & G_0 \\ & \tilde{C}_1 & & & \tilde{G}_1 \\ & A_2 & C_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ & & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F'_0 \\ F''_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันโดยใช้ $\begin{bmatrix} \tilde{C}_i \\ A_{i+1} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$ ทำให้เราได้สมการใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & \\ & R_1 & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{C}_{M-1} & \tilde{G}_{M-1} \\ & & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F'_0 \\ F'_1 \\ \vdots \\ F'_{M-1} \\ F''_M \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \tilde{C}_{M-1} & \tilde{G}_{M-1} \\ B_M & B_0 \end{matrix}$$

ดังนั้นเมื่อทำการลดสมการ (2.155) ไปเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน ด้วยการทำเช่นนี้ จะทำให้สามารถหาค่า $\Delta \bar{s}$ ด้วยการแทนค่ากลับ (Back substitution) นั่นเอง

2.4.2.6 อักซิลเลอรีคอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) ที่มีอิลควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Equality constraints) เข้ามาเกี่ยวข้องกับสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) โดยเนccessอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และ

สมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential and algebraic equations: BVP-DAE)

2.4.2.7 ปัญหาการควบคุมความเหมาะสม (An optimal control problem)

โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.156)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.157)$$

$$0 = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.158)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.159)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.160)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสแตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) ของสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control variables) จำนวน $(0 \leq p \leq n + m)$, และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือช่วงสุดท้ายที่หลากหลายของสภาวะ $0 \leq n_f \leq n$ ในสมการคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) สมการที่ (2.151) ประกอบไปด้วย สเกลาร์เทอร์มินอลเวตติงฟังก์ชัน (Scalar terminal weighting function) Φ , และสเกลาร์เพอร์ฟอแมนซ์ฟังก์ชัน (Scalar performance function) L ส่วนเวลาสุดท้าย t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว

โดยทั่วไปแล้วปัญหาการหาค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) สามารถทำให้อยู่ในรูปสมการที่ (2.156-2.160) ส่วนกรณีที่มีอีนอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) จะมีการเพิ่มสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) เข้าไปเพื่อเปลี่ยนให้เป็นเงื่อนไขเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จากนั้นก็ใช้แคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มีเทอมฮามิลตันเนียนคือ

$$H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\mu}^T \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \text{ เมื่อ } \bar{\lambda} \in R^n \text{ และ } \bar{\mu} \in R^p$$

คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ด้วยการใช้ฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.161)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.162)$$

$$0 = H_u \quad (2.163)$$

$$0 = H_\mu = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.164)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.165)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.166)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - (\Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f) \quad (2.167)$$

เมื่อ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในสมการ (2.161-2.167) เพื่อบอกลักษณะของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์คือสมการ (2.161 และ 2.162) ส่วนสมการพีชคณิตคือสมการ (2.163-2.164) และสมการเงื่อนไขขอบเขตคือสมการ (2.165-2.166) สมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสเตตวารีเอเบิล (State variables) ($\bar{x}$) , คอสเตตวารีเอเบิล (Costate variables) ($\bar{\lambda}$) , คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ($\bar{u}$) และลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ($\bar{\mu}$) ซึ่งเขียนดังนี้

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_u \\ H_\mu \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.168)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.169)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.170)$$

สมการปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต(BVP-DAE) สมการ (2.165),(2.166) และ (2.167) จะลดรูปลงเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้นด้วยการใช้สมการพีชคณิตสมการ (2.169) มาหาค่า $\bar{z} = G(\bar{y})$ ดังนั้นสมการ (2.168) สามารถเขียนเป็น $\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, G(\bar{y}))$ รวมกับสมการ (2.170) จะมีลักษณะเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential equations: BVP-DE)

2.4.2.8 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดิงของบีวีพี-ดีเออี (Multiple shooting solution to the BVP-DAE)

เพื่อให้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับระบบดีเออี (DAE system) สมการ (2.168–2.170) ได้จะทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$ เป็นผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) คือ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.171)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) - \bar{k}_i, \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad (2.172)$$

$$\bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = \text{const} \quad (2.173)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.174)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.171-2.172) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ และเพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.168 – 2.170) จะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

$$\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$\bar{g}(t_i; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$$

สภาวะแรกก็คือผลเฉลยที่จุดต่อ t_i ซึ่ง $\bar{s}_i^y$ ต้องมีความต่อเนื่อง, สภาวะที่สองคือสมการพีชคณิต (2.163) จะต้องสอดคล้องกับทุกจุดต่อ และสภาวะที่สามคือ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ถ้าสอดคล้องกับสภาวะที่สองจะทำให้ $\bar{k}_i = 0$ ($\bar{k}_i$ คือแฟกเตอร์คลาย (Relaxation factor)) ในสมการ (2.169) สภาวะเหล่านี้จะทำให้เกิดสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ จำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equation) สมการที่(2.175) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) ดังนั้นถ้าการเดาค่าเริ่มต้น (initial gauss) $\bar{r}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.168-2.170) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{r}^{k+1}$ ดังต่อไปนี้

$$\bar{r}^{k+1} = \bar{r}^k + \alpha \Delta \bar{r}, \alpha \in (0,1] \quad (2.176)$$

$$J(\bar{r}^k) \Delta \bar{r} = -F(\bar{r}^k), k = 1, 2, \dots, \text{until convergence} \quad (2.177)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobainmatrix) $J(\bar{r}) = \partial F(\bar{r}) / \partial \bar{r}$ มีขนาดมิติ $(2n + m + p)(M + 1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้

$$J(\bar{r}) = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix}; A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^z} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} \end{bmatrix}; C_i = -I \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.178)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^z} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix}$$

จะทำซ้ำสมการ (2.176 – 2.178) ไปจนกระทั่งผู้เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta \bar{r}\| \leq \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{r}^{k+1})\| \leq \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{r}^{k+1})\| \leq \|F(\bar{r}^k)\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณผู้เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{r}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.168-2.170) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้ดังนี้

ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \dots, t_{M-1}, \bar{r}^0$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

- 1.) คำนวณค่า $F(\bar{r}^0)$
- 2.) ถ้า $\|F(\bar{r}^0)\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{r}^0$ ก็คือผลเฉลย
- 3.) คำนวณค่า $\Delta \bar{r} = -J^{-1}(\bar{r}^0)F(\bar{r}^0)$ ถ้า $\|\Delta \bar{r}\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{r}^0$ ก็คือผลเฉลย
- 4.) ค้นหา $\alpha^* > 0$ ที่ทำให้ $F(\bar{r}^0 + \alpha^* \Delta \bar{r}) < F(\bar{r}^0)$

- 5.) กำหนด $\bar{s}^0 = \bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s}$ และกำหนด $F(\bar{s}^0) = F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s})$
ย้อนกลับไปทำซ้ำในขั้นตอนที่ 2

สรุปได้ว่าวิธีมัลติเปิลชู้ตติงเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

- 1.) หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.165) ในแต่ละช่วงของเวลา M เพื่อนำมาใช้คำนวณหาฝั่งขวามือของสมการ (2.171)
- 2.) คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.178)
- 3.) หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.177) เพื่อให้ได้ $\Delta \bar{s}$

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีก็คือวิธีรังกัตตาอันดับ 4(3) (Runge-Kutta method of order 4(3)) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.171) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ค่าปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y}, t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.179)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{y}}, \quad (2.180)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z}, \quad (2.181)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{z}} \quad (2.182)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = 0 \quad (2.183)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = 0, \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = I \quad (2.184)$$

สมการ (2.180-2.184) คือกลุ่มของสมการอนุพันธ์พีชคณิตแบบเชิงเส้น (Linear differential-algebraic equations)

2.4.2.9 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints)

จะใช้เทคนิคฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function technique) เปลี่ยนให้ไม่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.185)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$$

$$\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

เมื่อ $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของสเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) และกระจายด้วยการใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty Function) คือ

$$C_i = \begin{cases} -1/c_i & \text{if } -c_i \geq \sigma \\ (3 + 3c_i/\sigma + (c_i/\sigma)^2)/\sigma & \text{if } -c_i < \sigma \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.186)$$

เมื่อ σ คือพารามิเตอร์ ด้วยการใช้สมการ (2.178) ทำให้เปลี่ยนอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ให้เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstraint) ได้ โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^p \rho_k C_i(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.187)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

เมื่อ

$$\sigma = \sqrt{\rho_k}, \quad \rho_k > 0, \quad \rho_k > \rho_{k+1}$$

2.4.2.10 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ่งต่อเนื่อง (A Multiple shooting continuation solution)

การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) ของปัญหาสมการ (2.177) สามารถที่จะหาคำตอบได้โดยการทำให้อยู่รูปของสมการ (2.179) ด้วยการเพิ่มค่าเพียงเล็กน้อยของ ρ_k และเนคเซสเซอร์คอนดิชันของปัญหานี้สามารถทำให้อยู่ในเทอมของฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}; \rho_k) &= L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \rho_k \sum_{i=1}^l C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \\ \dot{\bar{x}} &= H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; 0 = H_u \\ 0 &= \bar{x}(0) - \bar{x}_0; 0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)); 0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \end{aligned} \quad (2.188)$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) บีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.181) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{z} = \bar{u} \in R^m \\ \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) &= \begin{bmatrix} H_{\lambda} \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) = H_u \in R^m \end{aligned}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) \quad (2.189)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) \quad (2.190)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.191)$$

สมการ (2.181) จำนวน $2n + n_f$ จะลดลงเป็น $2n$ ในสมการ (2.180) ด้วยการตัด n_f ออก เพราะเกี่ยวข้องกับลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) v_f วิธีมัลติเปิลชูตติงต่อเนื่อง (Multiple shooting-continuation method) จะถูกนำมาใช้แก้ปัญหโดยการกำหนดค่า $\rho_k \rightarrow 0$ และทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial Value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.192)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) - \bar{k}_i, \quad (2.193)$$

$$\bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = \text{cons tan } t \quad (2.194)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.195)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.181-2.183) ณ.ที่ โหนด $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ เพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) จะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

- มีความสืบเนื่องของผลเฉลยที่โหนด คือ $\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, i = 0, 1, 2, \dots, M-1$
- เป็นไปตามสมการพีชคณิตที่โหนด คือ $\bar{g}(t_i; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, M$
- เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ $\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์ไอควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ และ ρ_k จำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z; \rho_k) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z; \rho_k) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z; \rho_k) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z; \rho_k) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z; \rho_k) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y; \rho_k) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

เมื่อกำหนดค่า ρ_k ก็จะได้ผลเฉลยของนอนลิเนียร์ไอควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.187) เป็นผลเฉลยโดยประมาณของสมการ (2.179) ที่โหนด $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$

2.4.2.11 วิธีต่อเนื่อง (Continuation method)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.179) ที่มีระบบสมการ (2.187) จะต้องทำการแก้ปัญหาด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยการ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้ ขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation or homotopy procedure) โดยเริ่มจากการแก้สมการ (2.187) ด้วยการกำหนดค่า ρ_k ซึ่งผลที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นค่าเดาเริ่มต้นให้กับพารามิเตอร์ ถ่วงน้ำหนัก (Penalty parameter) $\rho_{k+1} < \rho_k$ และขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะทำไปจนกระทั่ง ρ_k เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ประมาณค่าโพลีโนเมียลนอกช่วง (Prediction via polynomial extrapolation)

ในการหาค่าของ $(\bar{s}^{k-1}; \rho_{k-1})$ และ $(\bar{s}^{k-2}; \rho_{k-2})$ จะต้องทำการประมาณค่า ρ_k โดยการใช้วิธีการใดวิธีการหนึ่งดังนี้คือ

- 1.) ตัวทำนายกำลังศูนย์ (Zeroth-order predictor)

$$\bar{s}^k = \bar{s}^{k-1}$$

$$\rho_k = h_{k-1} \rho_{k-1}$$

2.) ตัวทำนายกำลังหนึ่ง (First-order predictor (Secant))

$$\bar{s}^k = \bar{s}^{k-2} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-2} - \rho_{k-1}} + \bar{s}^{k-1} \frac{\rho_k - \rho_{k-2}}{\rho_{k-1} - \rho_{k-2}}$$

$$\rho_k = h_{k-1} \rho_{k-1}$$

เมื่อ $\bar{s}^k$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณที่ ρ_k และ $h_{k-1} \in (0,1)$ เป็นแฟกเตอร์ปรับ

ขั้นตอนที่ 2 แก้ค่าเดมพ์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via damped Newton's iteration)

วิธีการเหมือนกับในหัวข้อ 2.4.2.10 ณ. ช่วงสุดท้ายของขั้นตอนนี้ กำหนดให้ N_{cor} เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

ขั้นตอนที่ 3 ปรับขนาดช่วง (Stepsize adjustment)

ขนาดช่วง h_k ที่เหมาะสมจะมีขนาดใกล้เคียงกับหนึ่ง ณ. ที่ทุกๆ k แต่ก็สามารถทำการปรับขนาดช่วงได้เช่นกัน คือ

$$h_{k-1}^{new} = h_{k-1}^{old} \frac{N_{cor}}{N_{opt}}$$

$$0 < h_{\min} \leq h_{k-1}^{new} \leq h_{\max} < 1$$

ขั้นตอนการทำต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะสิ้นสุดเมื่อ $|I(\rho_k) - I(\rho_{k-1})| < \varepsilon$ หรือ $|\rho_k| < \varepsilon_\rho$

2.4.2.12 ปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดที่มีพารามิเตอร์ (Optimal control problems with parameters)

โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโตนัล $\bar{u}(t) \in R^m$ และมีพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) dt \quad (2.197)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$$

$$0 \geq \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p})$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) จะทำให้เขียนสมการได้เป็น

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} \left(L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^p C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \right) dt \quad (2.198)$$

โดยที่สอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.199)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.200)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \quad (2.201)$$

เมื่อ $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$ และ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ทำให้ได้เนccessเซอวี่คอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= H_\lambda = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; \dot{\bar{\gamma}} = H_p \\ 0 &= H_u = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 = \bar{\gamma}(0) = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ 0 &= \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f = \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{aligned} \quad (2.202)$$

โดยฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda}; \rho_k) &= L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^p C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \rho_k) \\ &\quad + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \end{aligned}$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ส่วน $\bar{\gamma} \in R^{n_p}$ คือผลเฉลยอย่างง่ายของปัญหา (Facilitate) สมการ (2.193) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{z} = \bar{u} \in R^m, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{n_p+n_f} \\ \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) &= \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \\ H_p \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) = H_u \in R^m \end{aligned}$$

$$\bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{\omega}; \rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \\ \gamma(0) \\ \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \\ \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{2n+2n_p+n_f}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega}; \rho_k) \quad (2.203)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega}; \rho_k) \quad (2.204)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{\omega}) \quad (2.205)$$

2.4.2.13 ผลเฉลยมัลติเปิลชู้ตติ่งต่อเนื่อง (Multiple shooting-continuation solution)

มีหลากหลายเทคนิควิธีที่ช่วยอำนวยความสะดวกให้กับ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของการแก้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตระหว่างจุดสองจุด (Two point boundary problem) ตามสมการ (2.196-2.197) ตัวอย่างเช่น (i) วิธีผลต่างสืบเนื่อง (ii) วิธีคอลโลเคชัน (iii) วิธีค่าเริ่มต้นหรือวิธีชู้ตติ่งที่สามารถที่จะหาคำตอบได้ แต่ต้องเพิ่มเติมในส่วนของตัวไม่ทราบค่า $\bar{\omega}$ และทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{\omega}; \rho_k)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{\omega}; \rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega}; \rho_k), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.206)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\omega}; \rho_k) - \bar{k}_i, \quad \bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{\omega}; \rho_k) = \text{const} \quad (2.207)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.208)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$, $\bar{s}_i^z$ และ $\bar{\omega}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.195-2.197) ณ. ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ และจะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

- มีความสืบเนื่องของผลเฉลย $\bar{s}_i^y$ ที่ไหน
- เป็นไปตามสมการพีชคณิต สมการ (2.196) ที่แต่ละไหน
- เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สมการ (2.197)

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์ไอควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1) + n_p + n_f$ และมีตัวไม่รู้ค่า $(\bar{s}, \bar{\omega})$ และ ρ_k และเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}, \bar{\omega}; \rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \bar{\omega}; \rho_k) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \bar{\omega}; \rho_k) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \bar{\omega}; \rho_k) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \bar{\omega}; \rho_k) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z, \bar{\omega}; \rho_k) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y, \bar{\omega}; \rho_k) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.209) จะต้องทำการแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยการ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ และมีขั้นตอนเหมือนกับหัวข้อที่ผ่านมา แต่ขั้นตอนแก้ค่าแดมป์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via damped Newton's iteration) หาจากสมการนี้คือ

$$J(\bar{s}, \bar{\omega}; \rho_k) = [F_s \quad F_\omega] = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & E_0 \\ 0 & A_1 & C_1 & E_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{M-1} & C_{M-1} & E_{M-1} \\ B_0 & & 0 & B_M & E_M \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

เมื่อ

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^z} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^z} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}; E_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} \end{bmatrix}; E_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, M-1$$

จากสมการ (2.199-2.200) สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ในช่วงเวลา $t \in (t_i, t_{i+1})$ ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} \quad (2.212)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{y}} \quad (2.213)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} \quad (2.214)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{z}} \quad (2.215)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\omega}} \quad (2.216)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \quad (2.217)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = 0 \quad (2.218)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = I \quad (2.219)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{\omega}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{\omega}} = 0 \quad (2.220)$$

สมการที่(2.212-2.213) แสดงถึงสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตเชิงเส้นส่วนสนับสนุนที่แท้จริงของระเบียบวิธีมัลติเซิงเปิลชู้ตติงสมการที่(2.209-2.210) และสมการที่ (2.212-2.215) เป็นการผสมผสานและการอินทิเกรตในเวลาเดียวกันเช่นอาจจะยึดถือการเดาค่าให้กับสมการที่(2.206-2.207)และสมการที่(2.212-2.215) คือการรวมส่วนต่างๆของระเบียบวิธีมัลติเซิงเปิลชู้ตติง

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Problem statement)
2. การแก้ปัญหโดยวิธีตรง (Direct method)
3. การแก้ปัญหโดยวิธีอ้อม (Indirect method)

3.1 การกำหนดปัญหา (Problem statement)

ในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาแนวทางบนหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับหลักการการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (A new approach on minimum time equivalent to maximum energy with free final time) ปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดสามารถพิจารณาในแนวทางที่ต่างไปจากเดิม ดังเช่นการพิจารณาเป็นการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย ตัวอย่างเช่น นักวิ่งระยะ 100 เมตรจะพยายามที่จะวิ่งให้ถึงเส้นชัยในเวลาที่น้อยที่สุด ในทางกลับกันนักวิ่งคนนี้ก็จะมีการใช้พลังงานที่มากที่สุดเพื่อวัตถุประสงค์เดียวกันคือให้ถึงเส้นชัยในที่นี้การใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายจะถูกนำมาพิจารณาประเภทของปัญหาระบบพลศาสตร์ส่วนใหญ่ ที่สามารถอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังนี้

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

เมื่อ $x \in R^n$, $u \in R^m$ คือ เวกเตอร์สถานะและเวกเตอร์ควบคุม (The state vectors and control vectors), x_0 คือเวกเตอร์สถานะที่สภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial state condition vector), t_0 คือเวลาเริ่มต้น (Initial time), $F(t)$ คือ $(n \times n)$ แมตริกซ์ และ $g(t)$ คือ $(n \times m)$, แมตริกซ์ ข้อกำหนดของปัญหา (Problem statement) คือการหาค่า $u(t)$ คือตัวควบคุมป้อนเข้า (Control input) และ $x(t)$ คือตัวแปรสถานะ (State variable) ดังนั้น ดัชนีสมรรถนะต่ำสุด หรือสูงสุด (Minimize or maximize the performance index) คือ

$$J = \pm \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right) dt; \quad (3.2)$$

และ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (3.3)$$

สำหรับปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด t_f นั่นคือ เวลาสุดท้ายที่ทำให้เกิดค่าที่น้อยที่สุด ที่ทำให้เกิดขอบเขตของตัวแปรควบคุม (Control variable) ที่การเกี่ยวข้องคือ

$$U_L \leq u(t) \leq U_U, \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$x(t_f) = x_f \quad (3.5)$$

เพื่อทำให้เกิดความมั่นใจที่มากขึ้นเกี่ยวกับความเหมือนกันหรือเป็นสิ่งเดียวกัน ระหว่างค่าเวลาน้อยที่สุด และพลังงานมากที่สุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย ทฤษฎีอย่างง่ายนั้นต้องเป็นทฤษฎีที่พิสูจน์ได้ทั้งวิธีโดยตรงและวิธีโดยทางอ้อม

สมการ (3.1-3.4) เป็นสมการสำหรับการแก้ปัญหาหาค่าเวลาน้อยที่สุดโดยตรงของข้อกำหนดของปัญหา (Problem statement) เรียกว่า หลักวิธีตรง (Direct scheme) คำตอบที่พอจะยอมรับได้สำหรับตัวแปรแสดงสถานะ (State variable) และตัวควบคุม (Control input) ก็คือวิธีการเลือกจำนวนที่แน่นอนของสัมประสิทธิ์ตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่านั้นจะนำไปสู่สถานะบังคับทั้งหมดในปัญหาจนได้ผลเฉลยเป็นที่ยอมรับได้วิธีการโดยตรง จะแปลงปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดไปเป็นปัญหาของสแตติกพารามิเตอร์ ออปติไมเซชัน วิธีการหนึ่งที่ทำก็คือ ในการทำการแปลงพารามิเตอร์ของปัญหาความเหมาะสมสูงสุดก็คือ การแก้ปัญหาที่ใช้ประโยชน์ที่หลากหลายวิธีของเทคนิคทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นประกอบไปด้วยวิธี การถ่วงน้ำหนักคงค้าง (weighted residual methods) และ การโปรแกรมแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ข้อดีและข้อด้อยของวิธีการโดยตรงสัมพันธ์กับการเลือกการเดาค่าเริ่มต้น และความเที่ยงตรงของผลเฉลย ข้อดีประการหนึ่งที่สำคัญมากที่สุดของวิธีโดยตรงก็คือคำตอบหรือผลเฉลยที่ได้นั้นสามารถหามาได้จากการเดาค่าเริ่มต้น ที่ไม่ต้องใกล้เคียงหรือห่างไกลกับคำตอบมากๆ ได้อย่างไรก็ตาม ความแม่นยำของผลเฉลยของการประมาณค่าจะไม่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีอ้อมในด้านอื่นๆ วิธีอ้อมจะประกอบด้วยเงื่อนไขที่จำเป็นอันดับหนึ่งในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาความเหมาะสมสูงสุด ทำให้เกิดวิธีการที่โดยทั่วๆ ไปจะมีความซับซ้อนมากขึ้น เงื่อนไขที่จำเป็นเกิดจากเทคนิคเช่น หลักการแคลคูลัส ออฟ วาริเอชัน (Calculus of

3.2 การแก้ปัญหาโดยวิธีตรง (Direct method)

ประกอบไปด้วยการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด และการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (The minimum time and maximum energy with free final time problems)

3.2.1 สมการสถานะ (State equations)

จะประกอบไปด้วยปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้นดังเช่นที่จะนำเสนอปัญหาระบบทางพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The one-armed manipulator) ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem) และปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชั้นต่อโยง (The two-link manipulator problem) ซึ่งที่จะใช้เป็นตัวอย่างในงานวิจัยนี้

3.2.1.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The one-armed manipulator problem)

พิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว มีก้อนมวล m ความยาวของแขนกล l ดังรูปที่ 1. กำหนดให้ u เป็นส่วนที่เป็นส่วนป้อนเข้า (Actuator input) ที่ฐานและมีตัวป้องกันความผิดพลาดส่วนหนึ่งของแรงคู่ควบในแนวรัศมี R_x อยู่ด้วยกัน ต่อจากนั้นเราจะสมมติให้ค่ากระแสต้านแรงเสียดทานเป็น C_f และมีขนาดเป็น $C_f = \mu\epsilon|R_x|$ เมื่อ R_x คือ ส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยา ในแนวรัศมีที่จุดรองรับ O , μ คือ สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างปลอกและแกนดุมหมุน c คือรัศมีของดุมหมุน ระบบมี 1 องศาอิสระ และมีสมการการเคลื่อนที่เป็น

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_1 + \mu\epsilon m\frac{L}{2}\dot{\theta}_1^2 \\ & + \left(mg\frac{L}{2}\sin(\theta_1) + \mu\epsilon mg\cos(\theta_1) \right) \\ & = u_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

เมื่อ L คือความยาวของชั้นต่อโยง, m คือมวลของชั้นต่อโยงกับจุดศูนย์กลางมวลที่เป็นระยะทาง $L/2$ จากฐานของลูกตุ้ม, g คือ ค่าคงที่ความโน้มถ่วงของโลก และ M^a คือตัวขับเคลื่อนที่ป้อนเข้าระบบ ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมของระบบ จากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นบน θ_1

$$\begin{aligned}
 & \dot{\theta}_1 \quad t_0 \quad t_f \quad J = - \int_{t_0}^{t_f} (u_1)^2 dt \\
 & J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \\
 & -50 \leq u_1 \leq 50 \\
 & L = 1.0, m = 1.0, g = 9.8, \mu = 0.3 \quad \varepsilon = 0.01
 \end{aligned}$$

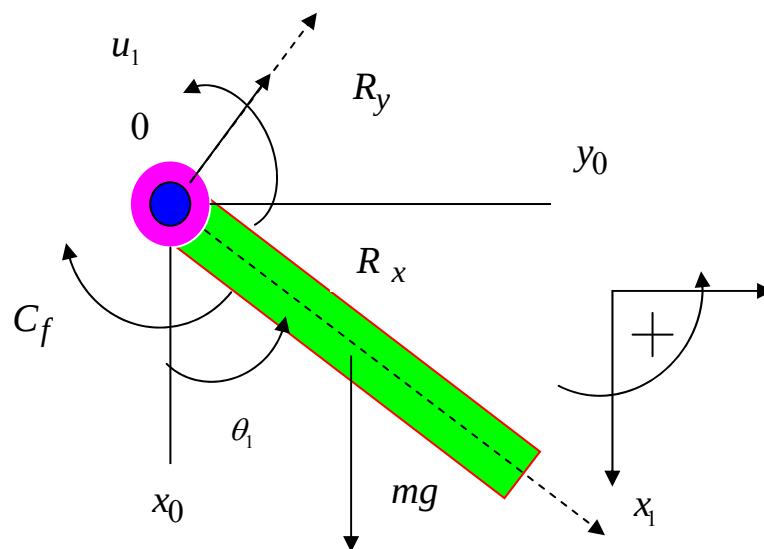
$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \quad (3.7)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\mu\varepsilon \frac{3}{2L} \dot{\theta}_1^2 - \left(mg \frac{3}{2L} \sin \theta_1 + \mu\varepsilon \frac{3}{L^2} g \cos(\theta_1) \right) + u_1 \quad (3.8)$$

แทนค่าพารามิเตอร์ $L = 1.0, m = 1.0, g = 9.8, \mu = 0.3$, และ

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon = 0.01 \\
 & \dot{\theta}_2 = -(0.0045) \dot{\theta}_1^2 \\
 & \quad - ((14.7) \sin \theta_1 + (0.088) \cos(\theta_1)) + u_1
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) คือ $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(t_f) = \pi/2$



ภาพประกอบ 1. หุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (One armed manipulator)

3.2.1.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem)

พิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ ระบบมี 2 องศาอิสระ และมีสมการการเคลื่อนที่คือ

$$m_1 g c_1 \cos(\theta_1) + m_2 g c_2 \cos(\theta_1) + (c_1^2 m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2 c_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 c_2 \dot{c}_2 \dot{\theta}_1 = u_1 \quad (3.10)$$

$$-m_2 g \sin(\theta_1) - m_2 \ddot{c}_2 + m_2 c_2 \dot{\theta}_1^2 = u_2, \quad (3.11)$$

เมื่อ $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ คือ ตัวป้อนเข้า (Actuator input) ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับตัวแปร $\theta_1(t)$ และ $c_2(t)$ ตามลำดับ สมการที่ (3.10) สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสเทต (State-space) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{-m_1 g c_1 \cos(\theta_1) - m_2 g c_2 \cos(\theta_1) - 2m_2 c_2 c_3 \theta_2 + u_1}{c_1^2 m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2 c_2^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

เมื่อ

$$\dot{c}_2 = c_3 \quad (3.13)$$

$$\dot{c}_3 = -g \sin(\theta_1) + c_2 \theta_2^2 - \frac{u_2}{m_2} \quad (3.14)$$

ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นของ $\theta_1, \dot{\theta}_1, c_2$ และ $\dot{c}_2$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f หน้ค่าคอสฟังก์ชันนอลสูงสุด (Maximum a cost) คือ

$$J = -\int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (3.15)$$

ในกรณีของการใช้พลังงานสูงสุดและ $J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$ (สมการที่ 3.3) ในกรณีการใช้เวลาน้อยที่สุด

วิธีการเคลื่อนที่ที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-50 \leq u_1 \leq 50$ และ $-50 \leq u_2 \leq 50$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS.ดังนี้

$$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3, g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

$$\theta_1(0) = 0$$

$$\theta_2(0) = 0$$

$$\theta_1(t_f) = \pi / 2$$

$$\theta_2(t_f) = 0$$

$$c_1(0) = L / 2$$

$$c_1(t_f) = L / 2$$

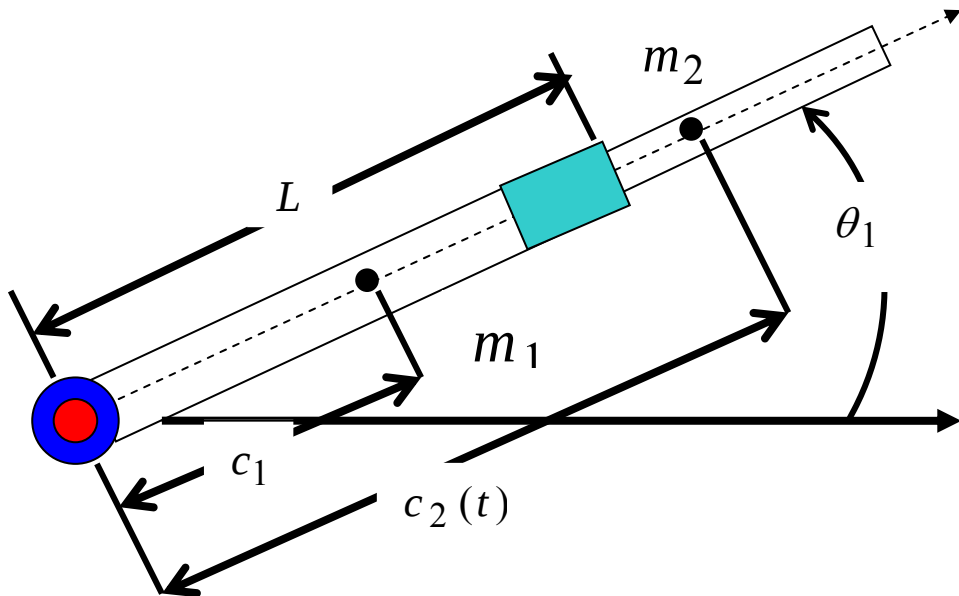
$$\dot{c}_1(0) = 0$$

$$c_2(0) = L / 2$$

$$c_2(t_f) = L$$

$$\dot{c}_2(0) = 0$$

$$\dot{c}_2(t_f) = 0$$



ภาพประกอบ 2. หุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (Polar manipulator)

แทนค่าพารามิเตอร์ลงในสมการที่ (3.12). และสมการ (3.14) จะได้ว่า

$$\dot{\theta}_2 = \frac{-29.4 \cos(\theta_1) - 9.8 c_2 \cos(\theta_1) - 2 c_2 c_3 \theta_2 + u_1}{11 + c_2^2} \quad (3.16)$$

$$\dot{c}_3 = -9.8 \sin(\theta_1) + 1 \theta_2^2 - u_2 \quad (3.17)$$

3.2.1.3 ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ซีนต์อโยง (The planar two-link manipulator problem)

จากภาพประกอบ 3 พิจารณาแขนกล 2 มิติที่เรียกว่า หุ่นยนต์แขนกล 2 ซีนต์อโยง ในการนี้จะทำการพิจารณาว่าแขนกลไม่มีโมเมนต์ความเฉื่อย ระบบมี 2 องศาอิสระและมีสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\begin{aligned}
 & (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2)) \ddot{q}_2 + (m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 \\
 & + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + m_2 g l_1 \cos(q_1) \\
 & + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\
 & - m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_1 g l_1 \cos(q_1) = u_1, \\
 & (m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} l_1 \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 \\
 & + m_2 l_{c2} l_1 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\
 & + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

สมการที่ (3.17) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิสเทท และทำการกำหนดแอดดิชันนอล วาเรียเบิล 2 ตัวแปร คือเมื่อ $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ คือ ตัวป้อนเข้า (Actuator input) ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับตัวแปร $\theta_1(t)$ และ $c_2(t)$ ตามลำดับ สมการที่ (3.10) สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสเทท (State-space) ได้ดังนี้

$$\dot{q}_1 = q_3 \tag{3.19}$$

$$\dot{q}_2 = q_4 \tag{3.20}$$

ให้วัตถุประสงค์ของปัญหาการควบคุมความเหมาะสมสูงสุด กำหนดบังคับระบบจากเซตของเงื่อนไขเริ่มต้น บน $q_1, \dot{q}_1, q_2$ และ $\dot{q}_2$ ที่ เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสมังก์ชันนอลสูงสุดคือ

$$J = - \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \tag{3.21}$$

ในกรณีของการใช้พลังงานสูงสุดและใช้ $J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$ สมการที่ 3.3 ในกรณีการใช้เวลาน้อยที่สุด

วิธีการเคลื่อนที่ที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-100 \leq u_1 \leq 100$ และ $-100 \leq u_2 \leq 100$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็น ระบบ MKS. เมื่อกำหนดให้ค่า

$$m_1 = 1, m_2 = 1, l_1 = l_2 = 1.0, I_{c1} = I_{c2} = 1.0, g = 9.8$$

$$(1 + \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (3 + \cos(q_2))\ddot{q}_1 + \cos(q_1) + 9.8\cos(q_1 + q_2) - 2\sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 9.8\cos(q_1) = u_1, \quad (3.22)$$

$$(1 + \cos(q_2))\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + 9.8\cos(q_1 + q_2) = u_2 \quad (3.23)$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

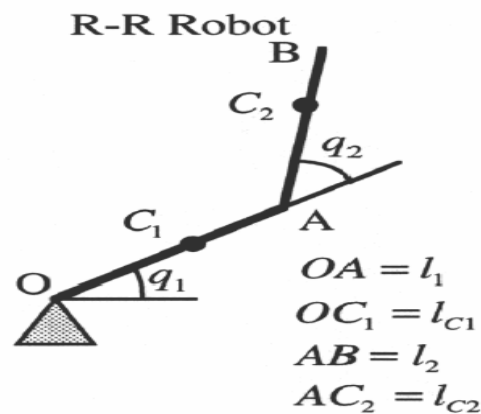
$$q_1(0) = \frac{\pi}{6}, \dot{q}_1 = 0, \quad (3.24)$$

$$q_2(0) = \frac{\pi}{7}, \dot{q}_2(0) = 0, \quad (3.25)$$

$$q_1(t_f) = \frac{\pi}{5}, \dot{q}_1(t_f) = 0, \quad (3.26)$$

$$q_2(t_f) = \frac{\pi}{6} \quad (3.27)$$

$$\dot{q}_2(t_f) = 0 \quad (3.28)$$



ภาพประกอบ 3. แสดงแขนกล 2 ชั้นต่อโยง (The planar two – link manipulator)

แทนค่าพารามิเตอร์ลงในสมการที่ (3.19). และสมการ (3.20) จะได้ว่า

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_3$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{(3 + \cos(q_2))} \left((1 + \cos(q_2))\dot{q}_4 + \cos(q_1) + 9.8\cos(q_1 + q_2) - \right.$$

$$\left. 2\sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 9.8\cos(q_1) - u_1 \right)$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= q_4 \\ \dot{q}_4 &= -((1 + \cos(q_2))\dot{q}_3 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2 + 9.8\cos(q_1 + q_2) - u_2)\end{aligned}$$

3.3 การแก้ปัญหาโดยอ้อม (Indirect method)

ประกอบไปด้วยปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด และการใช้พลังงานสูงสุดโดย ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (The minimum time and maximum energy with free final time problems) โดยที่ปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดนั้นจะทำการประยุกต์ใช้ทฤษฎีของ พรอนทริยาเกิน (Pontryagin's theory) จากสมการที่จำเป็นคือ สมการสถานะ (state equations)

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^T, \\ H_{t_f} &= 0,\end{aligned}\tag{3.29}$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t).\tag{3.30}$$

เมื่อแฮมมิลตันเนียน H (Hamiltonian) กำหนดเป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -\left(\sum_{i=1}^m u_i^2\right) + \lambda(t)^T f(x, u, t)\tag{3.31}$$

ในทางปฏิบัติ สมการที่ (3.29) เป็นเหมือนกันซึ่งอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันแฮมมิลตันเนียนของปัญหา 2 ปัญหาที่เกี่ยวข้องกันกับ x ทำให้ได้ผลออกมาเหมือนกันในภายหลัง ส่วนที่คงอยู่ของเงื่อนไขสมการที่จำเป็น (Necessary conditions) ที่ซึ่งก็คือสมการที่ (3.29) และสมการที่ (3.31) ที่มีความหมายเหมือนกัน โดยการพิสูจน์มาแล้ว

ในตอนนี้ คือการนำตัวอย่างในตอน 3.2 มาพิจารณาใหม่ โดยวิธีตรงและวิธีอ้อม การเปรียบเทียบกันระหว่าง ปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย และการใช้เวลาน้อยที่สุดดังนี้

3.3.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The one-armed manipulator problem)

เงื่อนไขจำเป็นจากวิธีการแบบดั้งเดิมหรือการใช้เวลาที่น้อยที่สุด (Necessary conditions from classical method) ปัญหาจากตอนที่ 3.2.1 นำมาพิจารณาอีกครั้งกับการแก้ปัญหาโดยวิธีอ้อม ใช้แฮมมิลตันเนียนกำหนดเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} H &= 1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_2) \\ &= 1 + \lambda_1(\theta_2) \\ &\quad + \lambda_2(-0.0045\dot{\theta}_1^2 - (14.7\sin\theta_1 + 0.88\cos\theta_1) + u) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหานี้คือ

$$\dot{\lambda}_1 = (14.7\cos\theta_1 - 0.88\sin\theta_1)\lambda_2 \quad (3.33)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (3.34)$$

$$[1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\dot{\theta}_2]_{t=t_f} = 0 \quad (3.35)$$

และ ค่าแฮมมิลตันเนียนต่ำสุด (Minimize the Hamiltonian) เกี่ยวข้องกับ $\dot{\theta}_2$ จะได้ว่า

$$u(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_2 < 0, \\ -50, & \lambda_2 > 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

เมื่อ λ_2 เรียกว่า สวิตชิงฟังก์ชัน (Switch function) สมการ $[1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\dot{\theta}_2]_{t=t_f} = 0$ มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ทรานเวอร์สาลิตี คอนดิชัน (Transversality condition) เงื่อนไขที่จำเป็นของการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงเวลาสุดท้าย (Necessary conditions from a maximum energy with free final time) ใช้สูตรสมการแฮมมิลตันเนียนกำหนดในสมการที่ (3.31) เราจะได้ว่า

$$H = -u_1^2 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_2). \quad (3.37)$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) ของปัญหาข้อนี้คือ

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \quad (3.38)$$

$$\dot{\theta}_2 = -0.0045\dot{\theta}_1^2 - (14.7\sin\theta_1 + 0.088\cos\theta_1) + u, \quad (3.39)$$

$$\dot{\lambda}_1 = (14.7\cos\theta_1 + 0.088\sin\theta_1)\lambda_2 \quad (3.40)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (3.41)$$

$$[-u^2 + \lambda_1 \theta_2 + \lambda_2 u_1]_{t=t_f} = 0 \quad (3.42)$$

และ ค่าแฮมมิลตันเนียนต่ำสุด (Minimize the Hamiltonian) เกี่ยวข้องกับ u จะได้ว่า

$$u(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_1 < 0, \\ -50, & \lambda_2 > 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

3.3.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem)

ก็เหมือนกับระบบแขนกลที่พิจารณาแล้วในตอนๆ 3.2.2 ปัญหานี้จะมีการนำมาพิจารณาอีกโดยวิธีอ้อม เงื่อนไขจำเป็นจากวิธีแบบเดิมหรือการใช้เวลาที่น้อยที่สุด (Necessary conditions from classical or minimum time method) ปัญหาจากตอนที่ 3.3.1 คือการนำมาพิจารณาอีกครั้งกับเทคนิควิธีทางโดยอ้อม ใช้หลักการแฮมมิลตันเนียนที่กำหนด เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} H &= 1 + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(\dot{c}_3) + \lambda_4(\dot{\theta}_2) \\ &= 1 + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(-9.8 \sin \theta_1 + c_2 \theta_2^2 - u_2) \\ &\quad + \lambda_4 \left(\frac{-29.4 \cos \theta_1 - 9.8 c_2 \cos \theta_1 + 2c_2 c_3 \theta_2 + u_1}{(11 + c_2^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) ของปัญหานี้ คือสมการที่ (3.29) และ

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_3(9.8 \cos \theta_1) - \lambda_4 \left(\frac{29.4 \sin \theta_1 + 9.8 c_2 \sin \theta_1}{(11 + c_2^2)} \right) \quad (3.45)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 - 2c_2 \lambda_3 - \lambda_4 \left(\frac{2c_2 c_3}{(11 + c_2^2)} \right) \quad (3.46)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 - \lambda_4 \left(\frac{19.6 c_2^2 \cos \theta_1 + 2c_3 \theta_2}{(11 + c_2^2)^2} \right) \quad (3.47)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 - \lambda_4 \left(\frac{2c_2 \theta_2}{(11 + c_2^2)} \right) \quad (3.48)$$

เมื่อ

$$[H]_{t=t_f} = 0 \quad (3.49)$$

และแฮมมิลตันเนียนค่าน้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ u_1 เราจะได้ว่า

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_{1,2} < 0, \\ -50, & \lambda_{3,4} > 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

ปริมาณ λ_3 เพื่อเป็นเหตุผลที่ชัดเจน เรียกว่า สวิตชิง ฟังก์ชัน (Switching function) สมการ $[1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_1)]_{t=t_f} = 0$ ยังมีชื่อเรียกว่าเงื่อนไขทรานเวอร์ซาลิตีหรือ ทรานเวอร์ซาลิตี คอนดิชัน (Transversality condition) ได้อีกด้วยเงื่อนไขที่จำเป็นจากการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Necessary conditions from a maximum energy with free final time) ใช้การแฮมมิลตันเนียนกำหนดลงในสมการข้างบน เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} H &= -(u_1^2 + u_2^2) + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(\dot{c}_3) + \lambda_4(\dot{\theta}_2) \\ &= -(u_1^2 + u_2^2) + \lambda_1(c_3) + \lambda_2(\theta_2) + \lambda_3(-9.8\sin\theta_1 + c_2\theta_2^2 - u_2) \\ &\quad + \lambda_4\left(\frac{-29.4\cos\theta_1 - 9.8c_2\cos\theta_1 + 2c_2c_3\theta_2 + u_1}{(11+c_2^2)}\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) ตามสมการที่ (3.29) สำหรับปัญหานี้ก็คือ

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_3(9.8\cos\theta_1) - \lambda_4\left(\frac{29.4\sin\theta_1 + 9.8c_2\sin\theta_1}{(11+c_2^2)}\right) \quad (3.52)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 - 2c_2\lambda_3 - \lambda_4\left(\frac{2c_2c_3}{(11+c_2^2)}\right) \quad (3.53)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 - \lambda_4\left(\frac{19.6c_2^2\cos\theta_1 + 2c_3\theta_2}{(11+c_2^2)^2}\right) \quad (3.54)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 - \lambda_4\left(\frac{2c_2\theta_2}{(11+c_2^2)}\right) \quad (3.55)$$

$$[H]_{t=t_f} = 0 \quad (3.56)$$

และค่าแฮมมิลตันเนียนน้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ $u_{1,2}$

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 50, & \lambda_{1,2} < 0, \\ -50, & \lambda_{3,4} > 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

ปริมาณ λ_3 เพื่อเป็นเหตุผลที่ชัดเจน เรียกว่า สวิตซ์ ฟังก์ชัน (Switching function) สมการ $[1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_1)]_{t=t_f} = 0$ ยังมีชื่อเรียกว่า เงื่อนไขทรานเวอร์ซาลิตี้ หรือ ทรานเวอร์ซาลิตี้ คอนดิชัน (Transversality condition) ได้อีกด้วย

3.3.3 ปัญหาหุ่นยนต์แบบ 2 ชั้นต่อโยง (The planar two-link manipulator problem)

ก็เหมือนกับระบบแขนที่พิจารณาแล้วในตอนๆ 3.2.3 ปัญหานี้จะมีการนำมาพิจารณาอีกครั้งในหลักการแบบโดยอ้อมเงื่อนไขจำเป็นจากวิธีแบบดั้งเดิม หรือการใช้เวลาที่น้อยที่สุด (Necessary conditions from classical or minimum time method) ปัญหาจากตอนที่ 3.2.3 คือการนำมาพิจารณาอีกครั้งกับเทคนิควิธีทางโดยอ้อม ใช้หลักการแฮมมิลตันเนี่ยนกำหนดในสมการ เราจะได้ว่า

$$H = 1 + \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_4) + \lambda_3(\dot{q}_3) + \lambda_4(\dot{q}_4) \quad (3.58)$$

แทนค่า $\dot{q}_3, \dot{q}_4$ ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned} H = & 1 + \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_4) \\ & \frac{\lambda_3}{(3 + \cos(q_2))} (1 + \cos(q_2)) \dot{q}_4 + \cos(q_1) + 9.8 \cos(q_1 + q_2) \\ & - \lambda_4 (1 + \cos(q_2)) \dot{q}_3 + \sin(q_2) q_3^2 + 9.8 \cos(q_1 + q_2) - u_2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) ตามสมการที่ (3.29) สำหรับปัญหานี้ก็คือ แฮมมิลตันเนี่ยนค่าน้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ u_1 , กำหนดเป็น

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 100, & \lambda_{1,2} < 0 \\ -100 & \lambda_{3,4} > 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

ปริมาณ λ_3 เพื่อเป็นเหตุผลที่ชัดเจน เรียกว่า สวิตซ์ ฟังก์ชัน (Switching function) สมการ $[1 + \lambda_1(\theta_2) + \lambda_2(\dot{\theta}_1)]_{t=t_f} = 0$ ยังมีชื่อเรียกว่าเงื่อนไขทรานเวอร์ซาลิตี้หรือ ทรานเวอร์ซาลิตี้ คอนดิชัน (Transversality condition) ได้อีกด้วยเงื่อนไขที่จำเป็นจากการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Necessary conditions from a maximum energy with free final time) ใช้การแฮมมิลตันเนี่ยนกำหนดลงในสมการข้างบน เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
H = & (u_1^2 + u_2^2) + \lambda_1(q_3) + \lambda_2(q_4) \\
& \frac{\lambda_3}{(3 + \cos(q_2))} (1 + \cos(q_2)) \dot{q}_4 + \cos(q_1) + 9.8 \cos(q_1 + q_2) \\
& - \lambda_4 (1 + \cos(q_2)) \dot{q}_3 + \sin(q_2) q_3^2 + 9.8 \cos(q_1 + q_2) - u_2
\end{aligned} \tag{3.61}$$

และค่าแฮมมิลตันที่น้อยที่สุดที่เกี่ยวข้องกับ $u_{1,2}$

$$u_{1,2}(t) = \begin{cases} 100, & \lambda_{1,2} < 0 \\ -100 & \lambda_{3,4} > 0 \end{cases} \tag{3.62}$$

จากหัวข้อ 3.1 ถึง 3.3 นั้นเราจะได้สมการของคอสมอสฟังก์ชันอล J และสมการหรืออสมการเงื่อนไขของทั้งสองหลักการคือการใช้พลังงานสูงสุดโดยมีค่านิ่งถึงเวลาสุดท้าย และการใช้เวลาน้อยที่สุดเพื่อเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหาโดยการโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นต่อไป

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบจะประกอบไปด้วยกรณีของ ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ และ ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบสองชั้นต่อโยง ตามลำดับ ซึ่งจะพิจารณาในหลักการ การใช้เวลาให้น้อยที่สุดเปรียบเทียบกับหลักการการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย โดยทำการแก้ปัญหาโดยวิธีตรงและวิธีอ้อม

ในการนำเสนอผลการทดสอบโปรแกรมที่จำเป็นที่จะต้อง กำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์ที่ใช้ให้เหมือนกันในการทดสอบทุกกรณีดังแสดงในตารางที่1 และทำการกำหนดเส้นกราฟให้ต่างกันเพื่อการเปรียบเทียบผลการทดสอบดังนี้

ตารางที่ 1 การกำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์

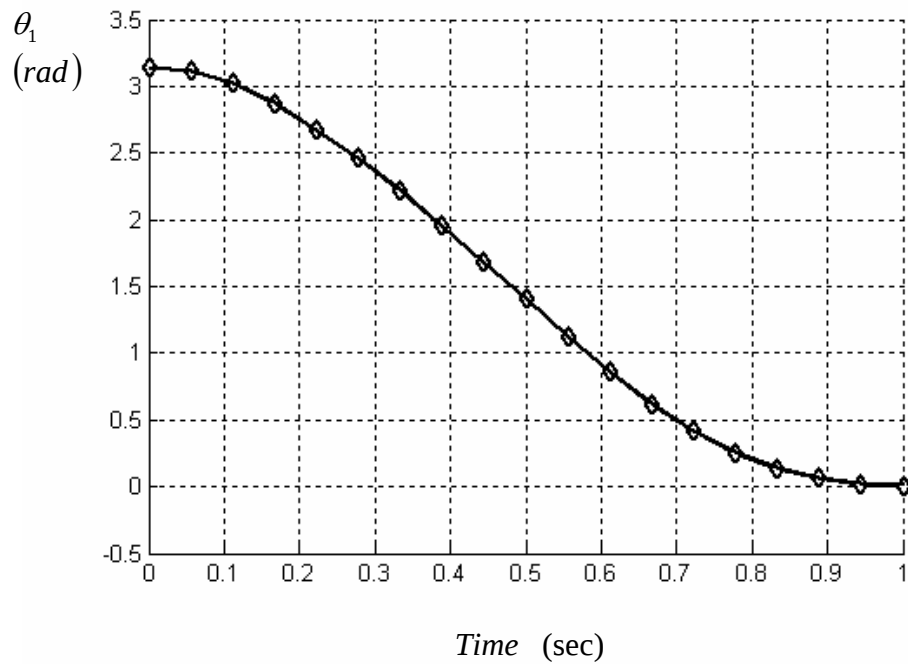
ตัวแปร	ความหมาย	หน่วยที่ใช้
$\theta_i, q_i, i = 1, \dots, n$	การขจัดเชิงมุมของชั้นต่อโยง	เรเดียน (rad)
$\dot{\theta}_i, \dot{q}_i, i = 1, \dots, n$	ความเร็วเชิงมุมของชั้นต่อโยง	เรเดียน/วินาที (rad / sec)
$c_i, i = 1, \dots, n$	การขจัดเชิงเส้นของชั้นต่อโยง	เมตร (m)
$\dot{c}_i, i = 1, \dots, n$	ความเร็วเชิงเส้นของชั้นต่อโยง	เมตร/วินาที (m / sec)
$u_i, i = 1, \dots, n$	ทอร์ก หรือ แรงที่กระทำกับชั้นต่อโยง	นิวตัน-เมตร ($N - m$) หรือ นิวตัน (N)

ตารางที่ 2 การกำหนดลักษณะของเส้นกราฟที่ใช้แสดงเปรียบเทียบผลการทดสอบ

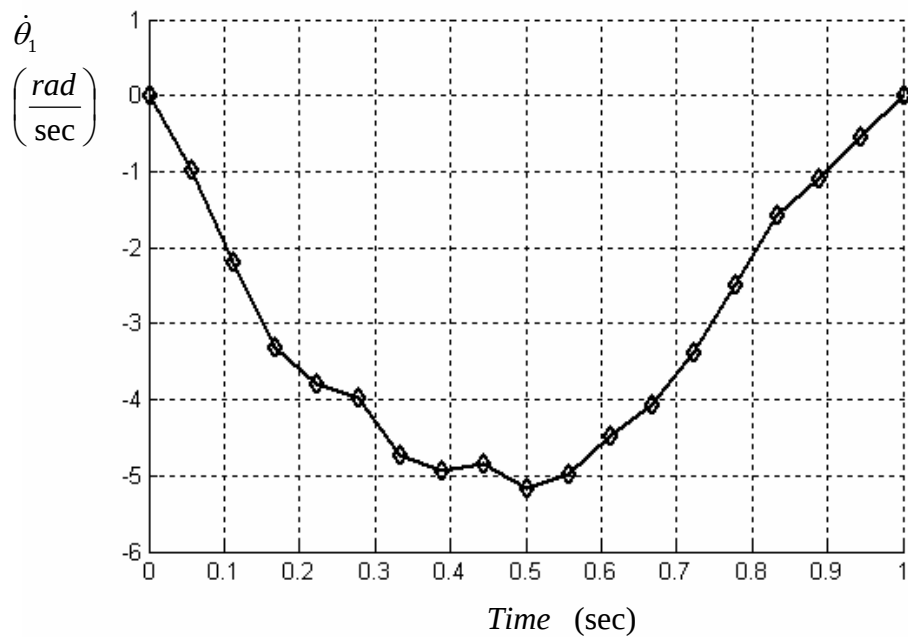
วิธีการแก้ปัญหา	แบบของเส้นกราฟที่แสดง
หลักการการใช้พลังงานสูงสุด	เส้นทึบ 
หลักการใช้เวลาให้น้อยที่สุด	เส้นที่มีจุดสี่เหลี่ยม 

4.1.1 ผลการทดสอบระหว่างการให้หลักการของการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดโดยวิธีตรง (Maximum energy principle direct approach equivalent to minimum time problem)

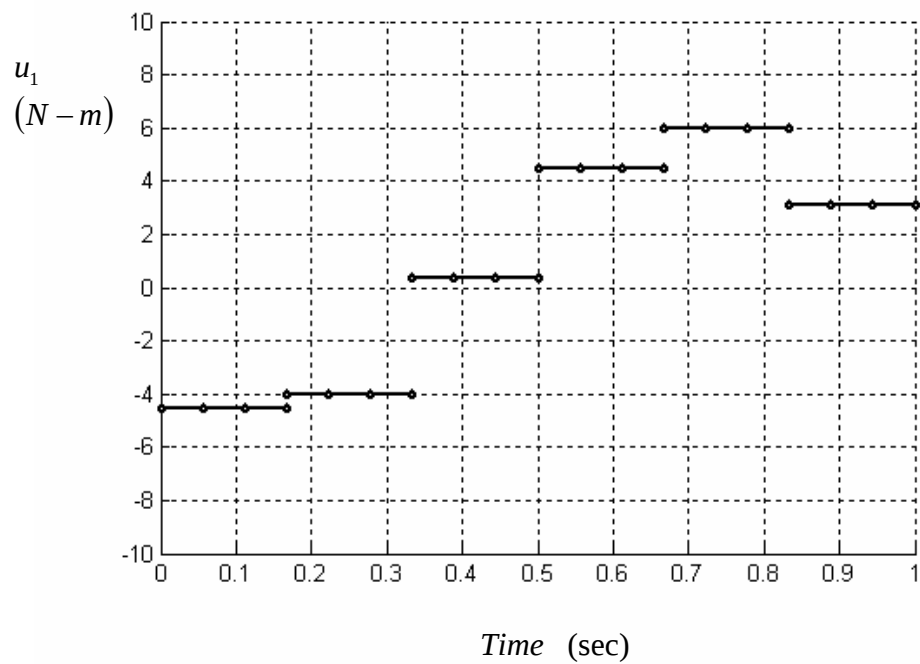
4.1.1.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (The One-armed manipulator problem)



ภาพประกอบที่ 4. กราฟแสดงค่าการจัดเชิงมุมของข้อต่อโยง (θ_1) เทียบกับเวลา

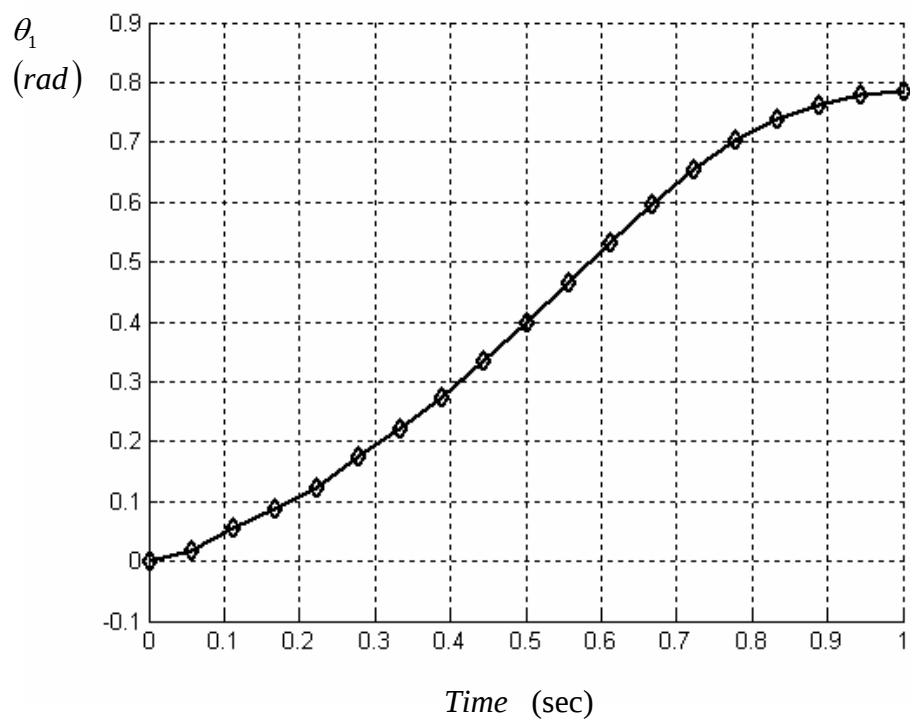


ภาพประกอบที่ 5. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยง($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา

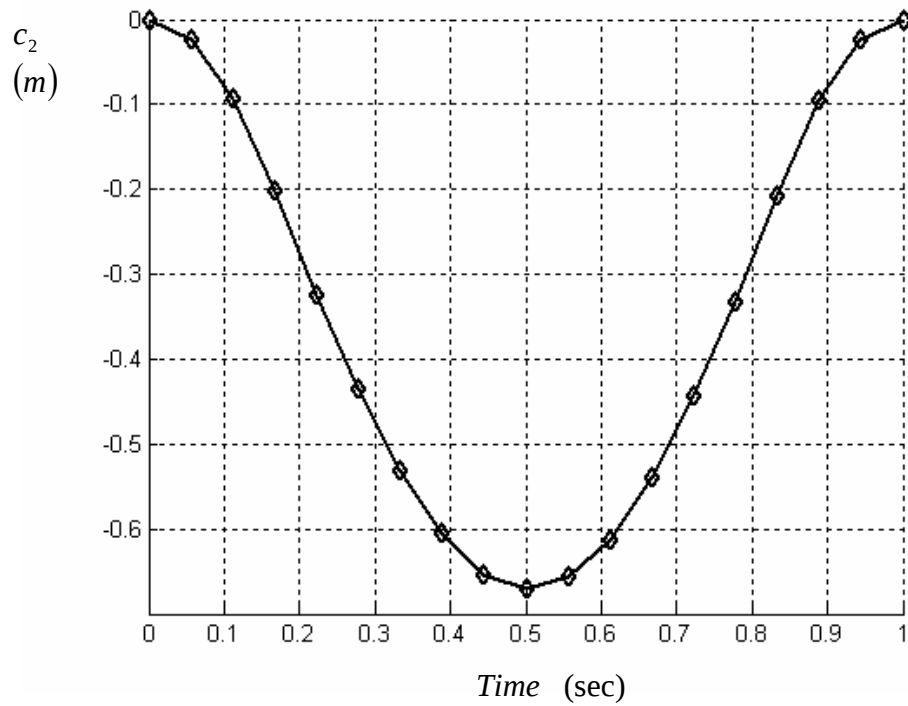


ภาพประกอบที่ 6. กราฟแสดงค่าทอร์คของขึ้นต่อโยง (u_1) เทียบกับเวลา

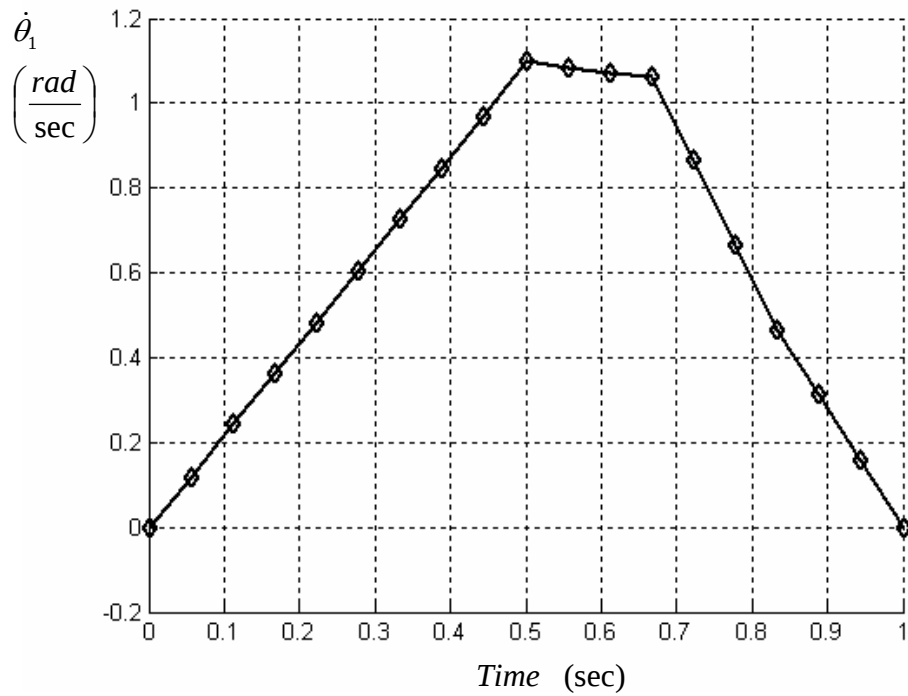
4.1.1.2 ปัญหามันยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator problem)



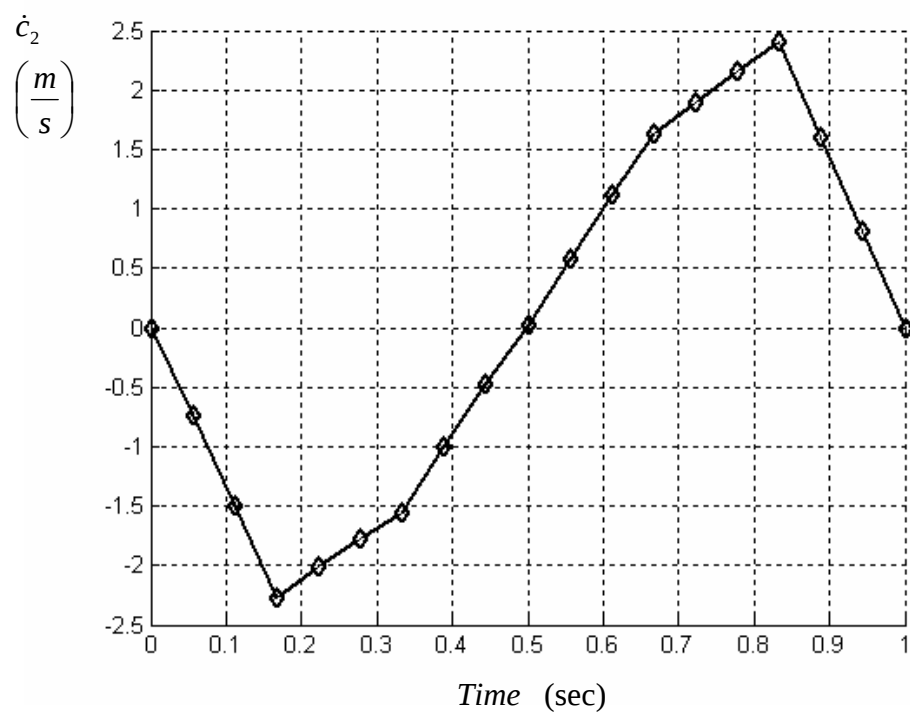
ภาพประกอบที่ 7. กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของขึ้นต่อโยงที่ 1. (θ_1) เทียบกับเวลา



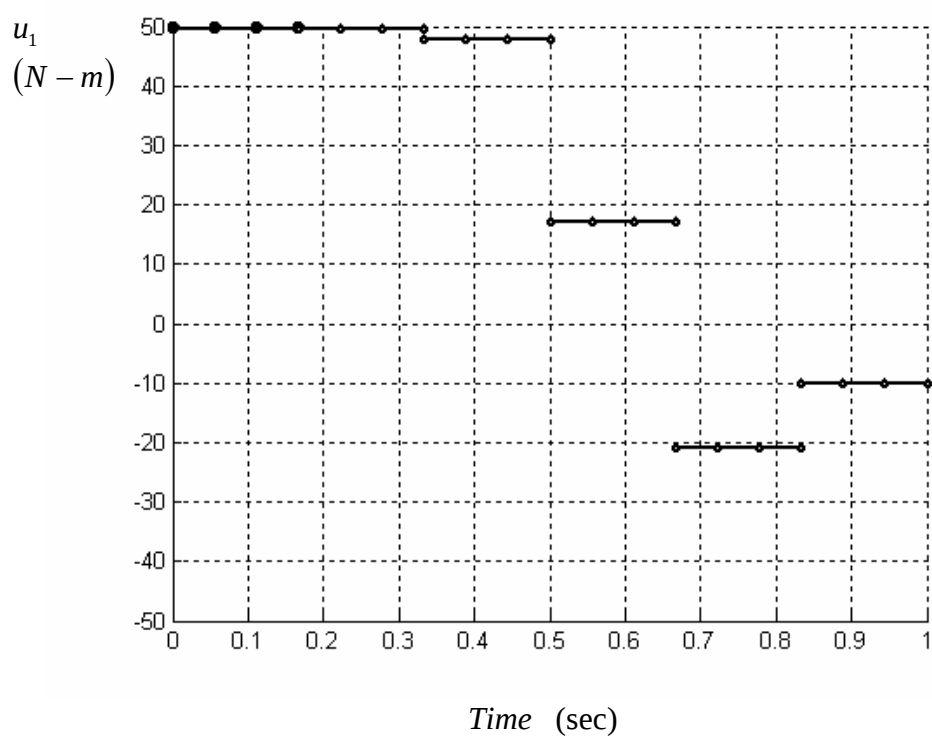
ภาพประกอบที่ 8. กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงเส้นของข้อต่อโยงที่ 2. (c_2) เทียบกับเวลา



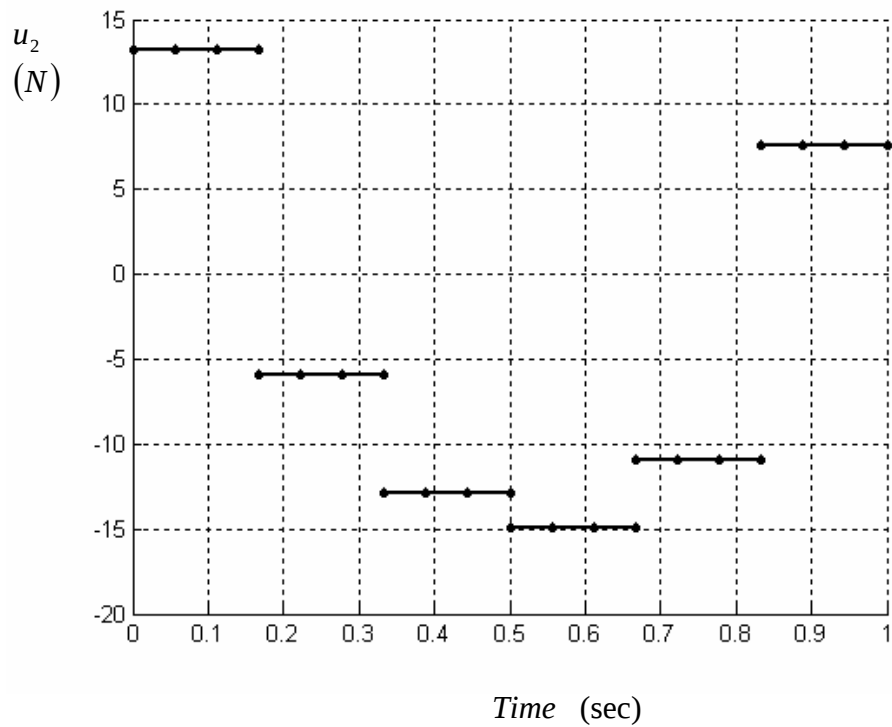
ภาพประกอบที่ 9. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. ($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 10. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงเส้นของข้อต่อโยงที่ 2. ($\dot{c}_2$) เทียบกับเวลา

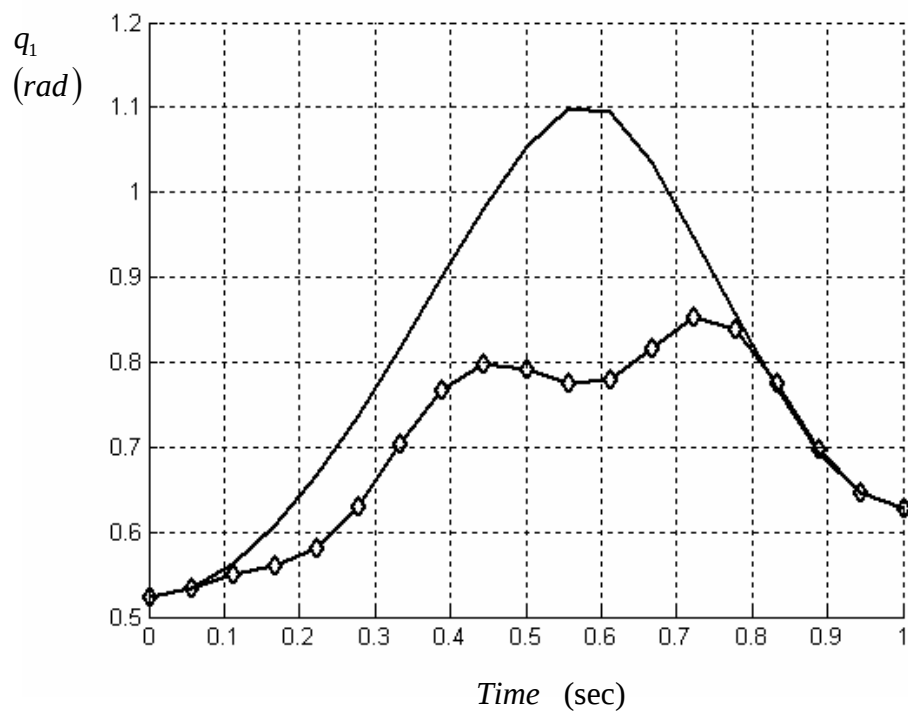


ภาพประกอบที่ 11. กราฟแสดงค่าทอร์ค ของข้อต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา

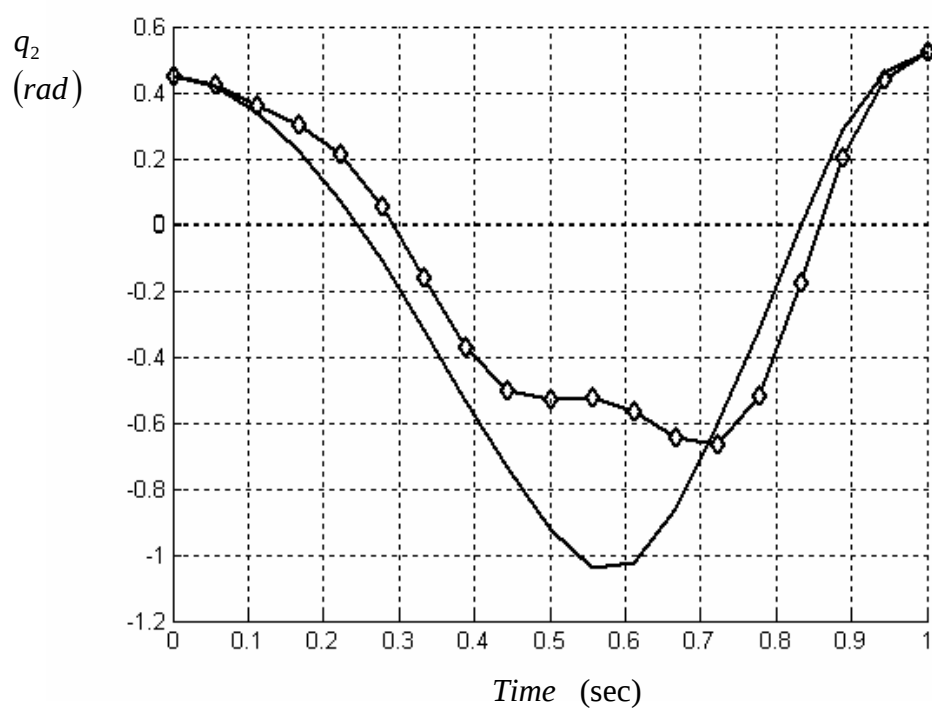


ภาพประกอบที่ 12. กราฟแสดงค่าทอร์กของข้อต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา

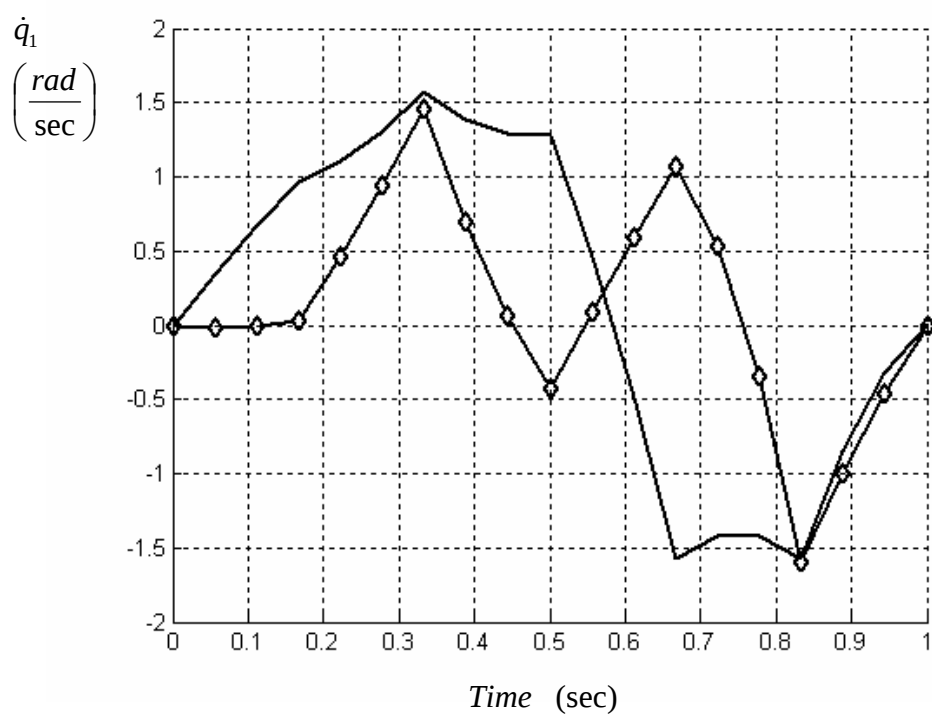
4.1.1.3 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบสองข้อต่อโยง (Two link manipulator problem)



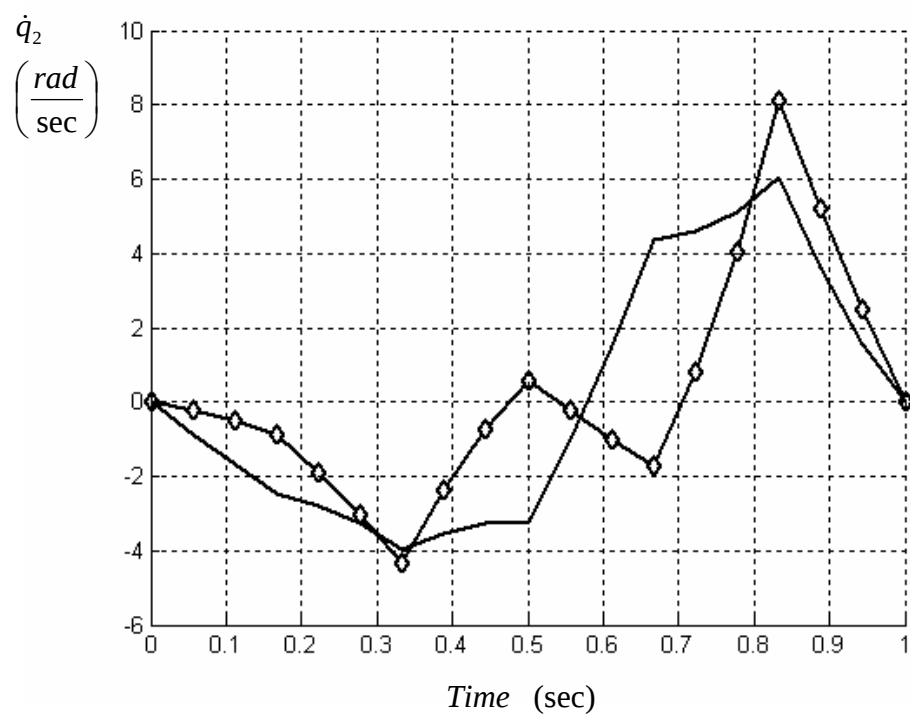
ภาพประกอบที่ 13. กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. (q_1) เทียบกับเวลา



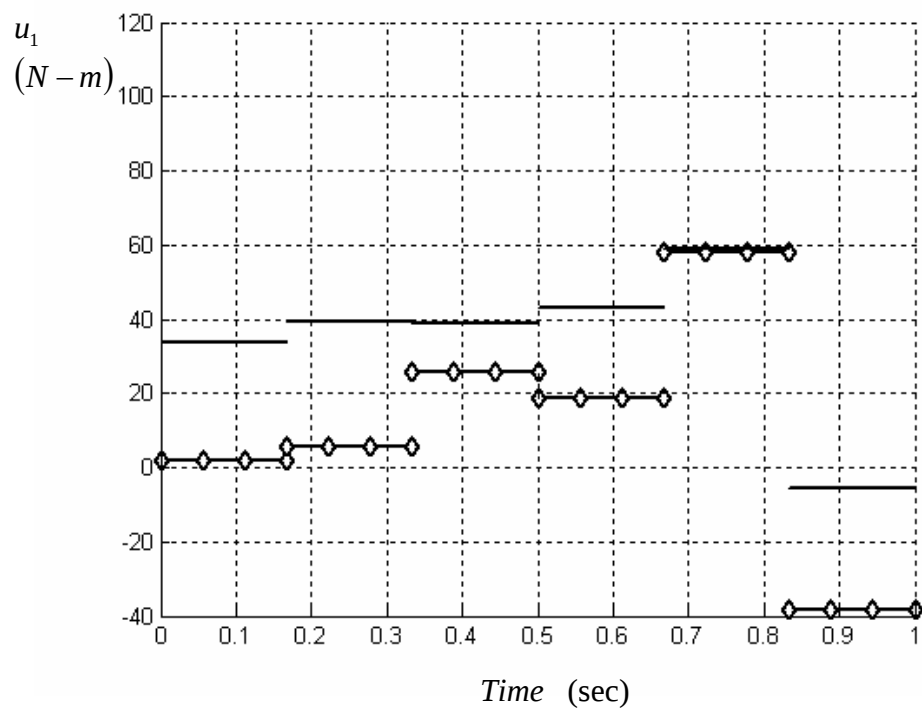
ภาพประกอบที่ 14. กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 2. (q_2) เทียบกับเวลา



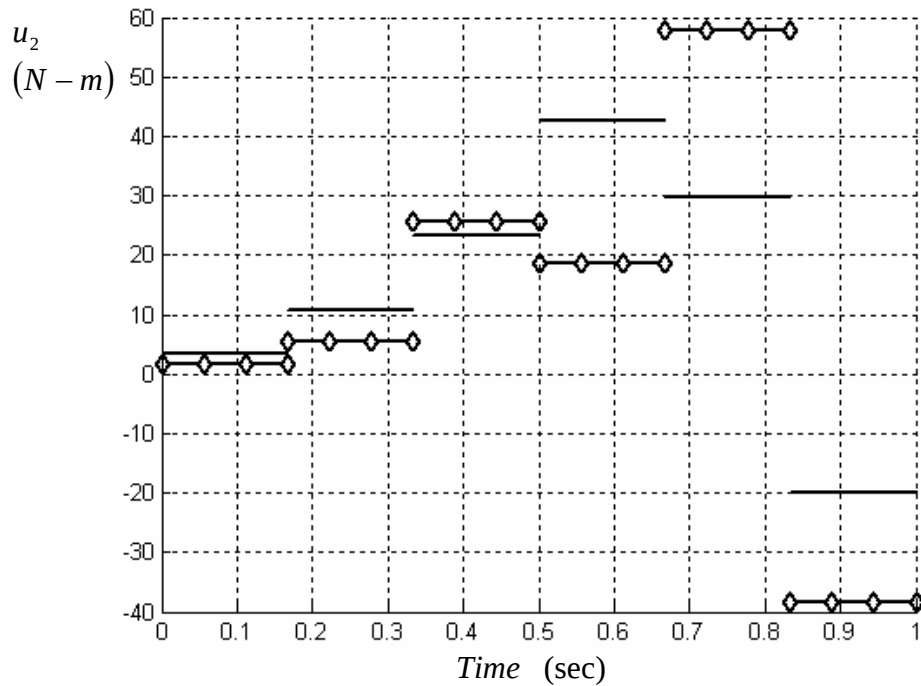
ภาพประกอบที่ 15. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. ($\dot{q}_1$) เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 16. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 2. ($\dot{q}_2$) เทียบกับเวลา



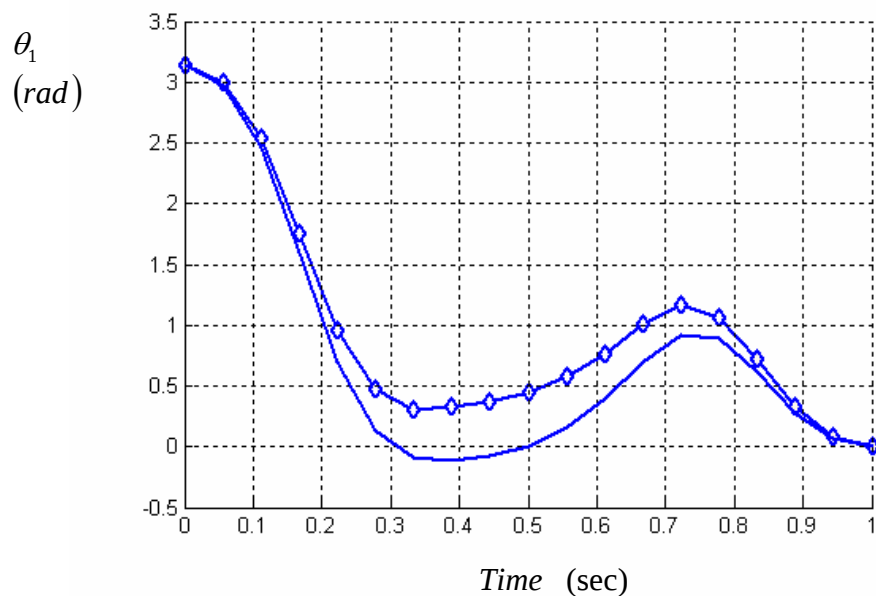
ภาพประกอบที่ 17. กราฟแสดงค่าทอร์กของข้อต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา



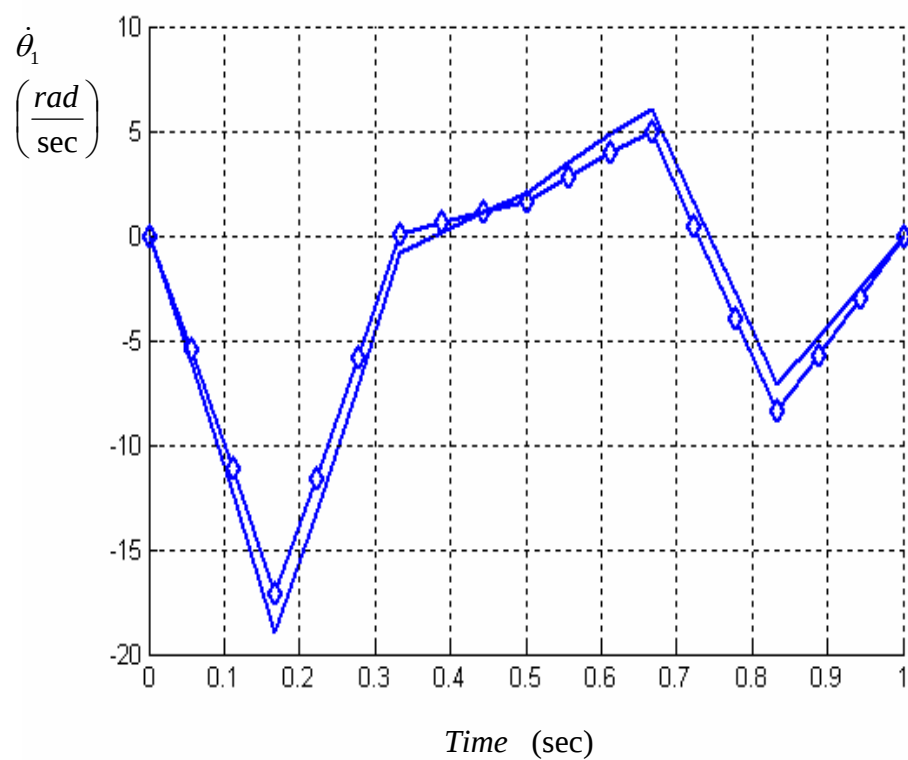
ภาพประกอบที่ 18. กราฟแสดงค่าทอร์คของข้อต่อโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา

4.1.2 ผลการทดสอบระหว่างการให้หลักการของการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดโดยวิธีอ้อม (Maximum energy principle direct approach equivalent to minimum time problem)

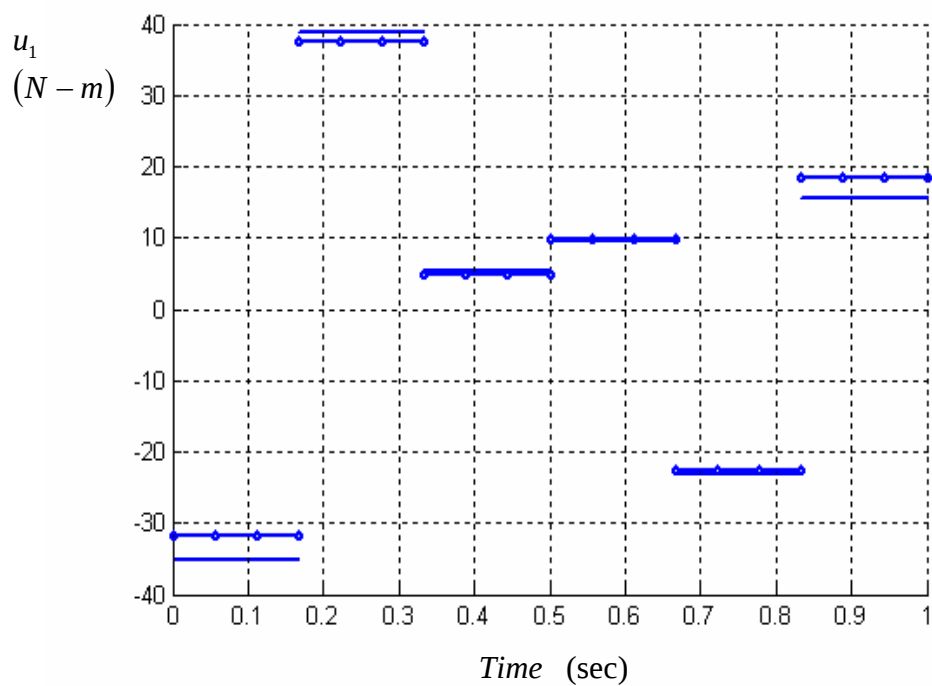
4.1.2.1 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลเดียว (The One-armed manipulator problem)



ภาพประกอบที่ 19. กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยง(θ_1) เทียบกับเวลา

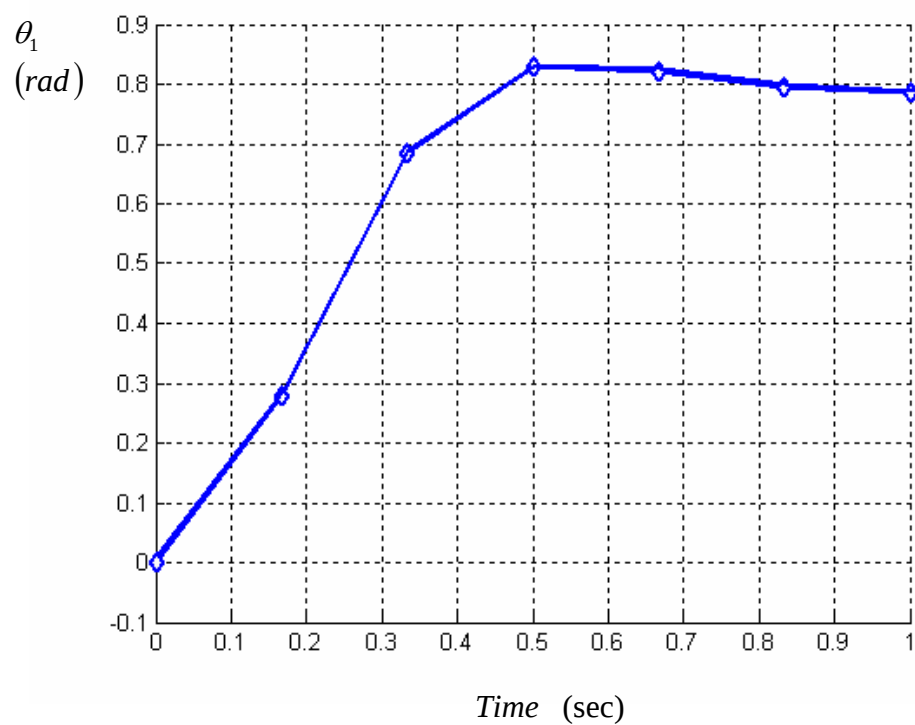


ภาพประกอบที่ 20. กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยง ($\dot{\theta}_1$) เทียบกับเวลา

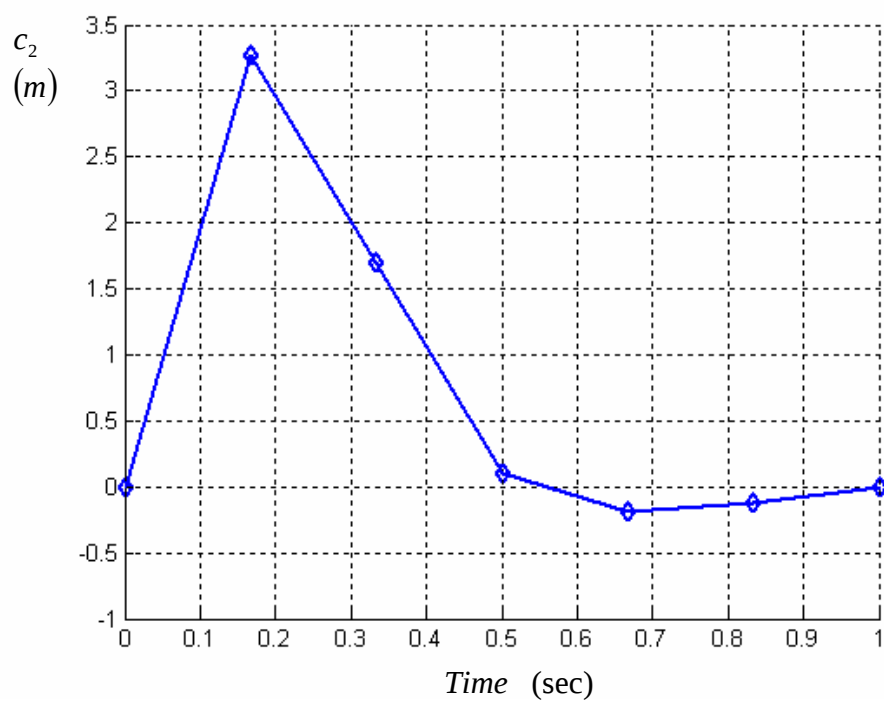


ภาพประกอบที่ 21 กราฟแสดงค่าทอร์ก ของข้อต่อโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา

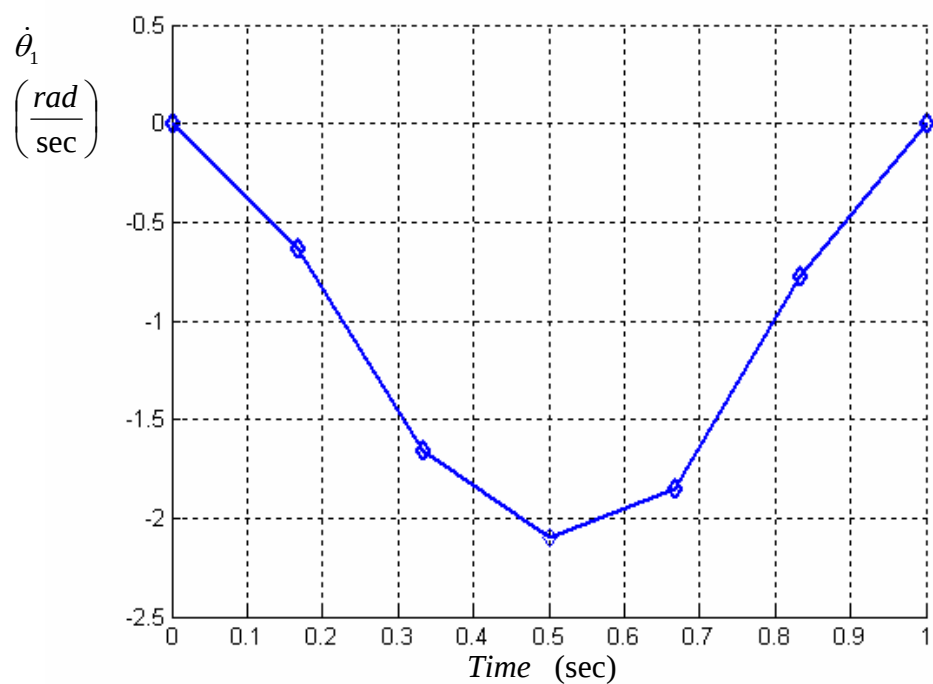
4.1.2.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator)



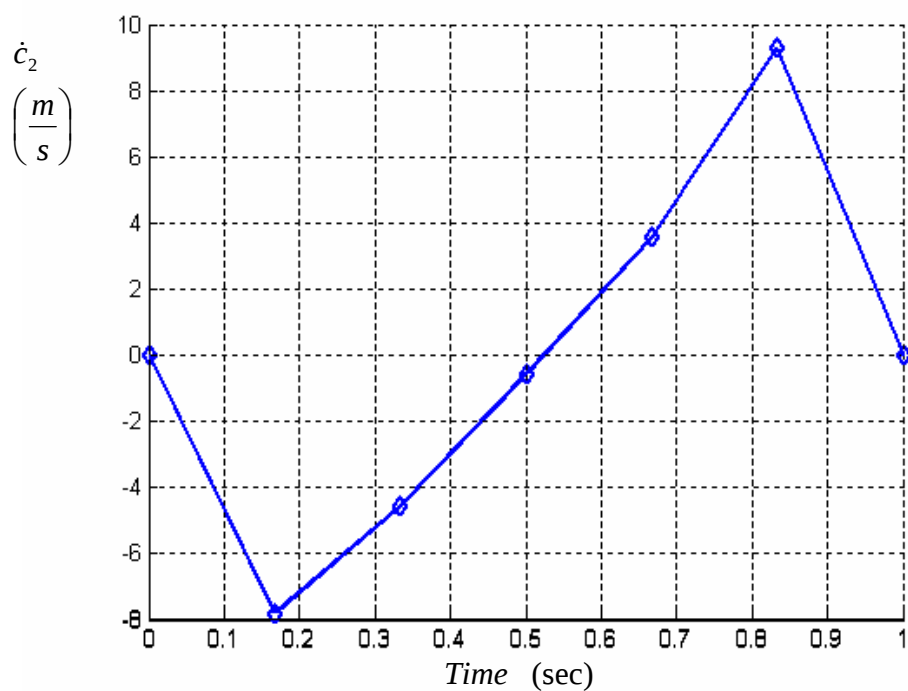
ภาพประกอบที่ 22 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. (θ_1) เทียบกับเวลา



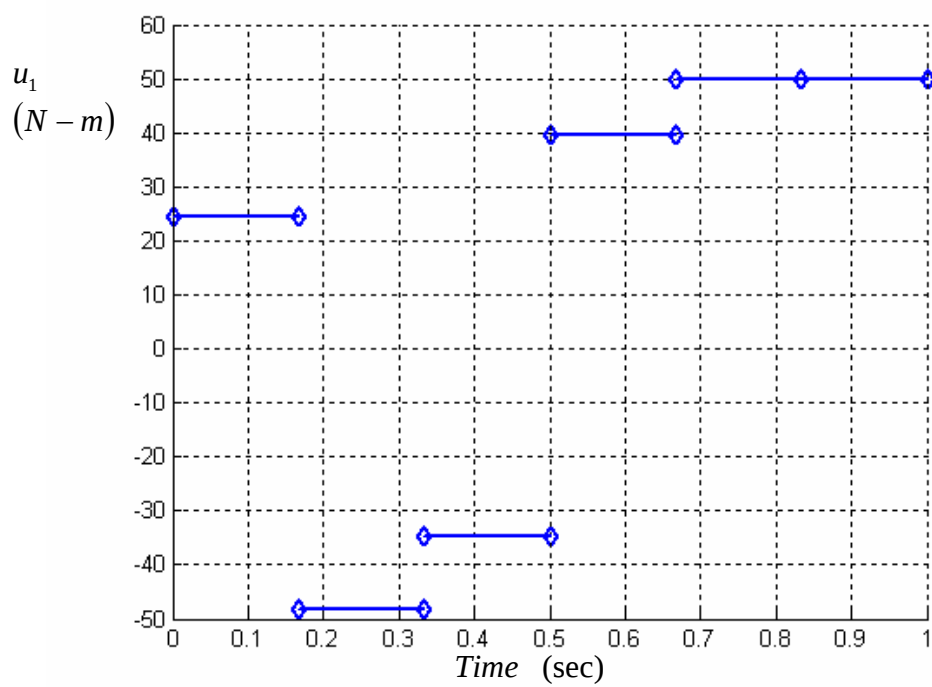
ภาพประกอบที่ 23 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงเส้นของข้อต่อโยงที่ 2 (c_2) เทียบกับเวลา



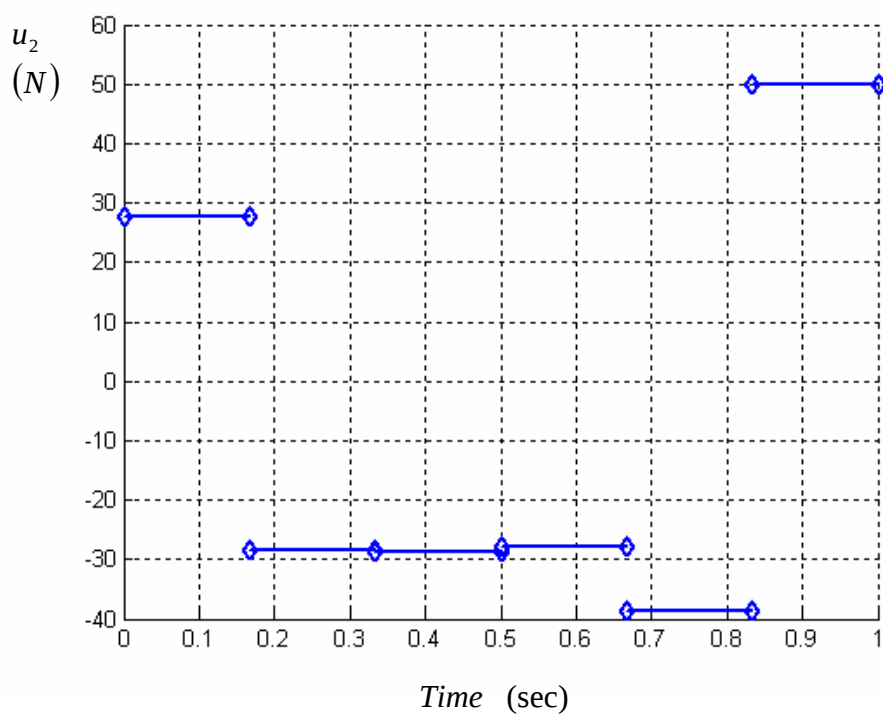
ภาพประกอบที่ 24 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. ($\dot{\theta}_1$)เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 25 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงเส้นของข้อต่อโยงที่ 2. ($\dot{c}_2$)เทียบกับเวลา

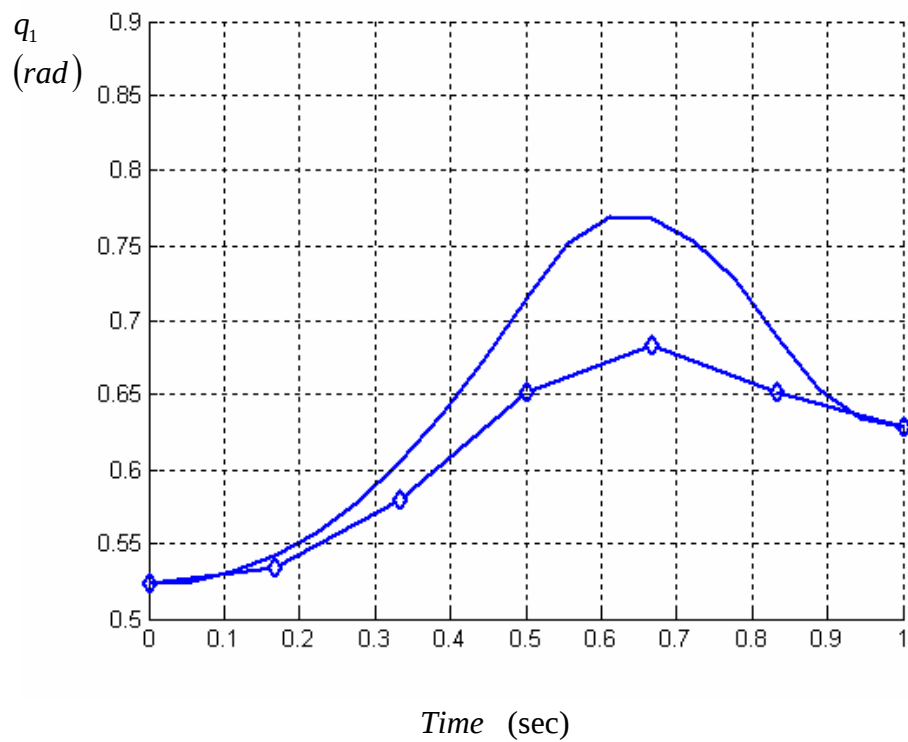


ภาพประกอบที่ 26 กราฟแสดงค่าทอร์ค ของขั้นตอนโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา

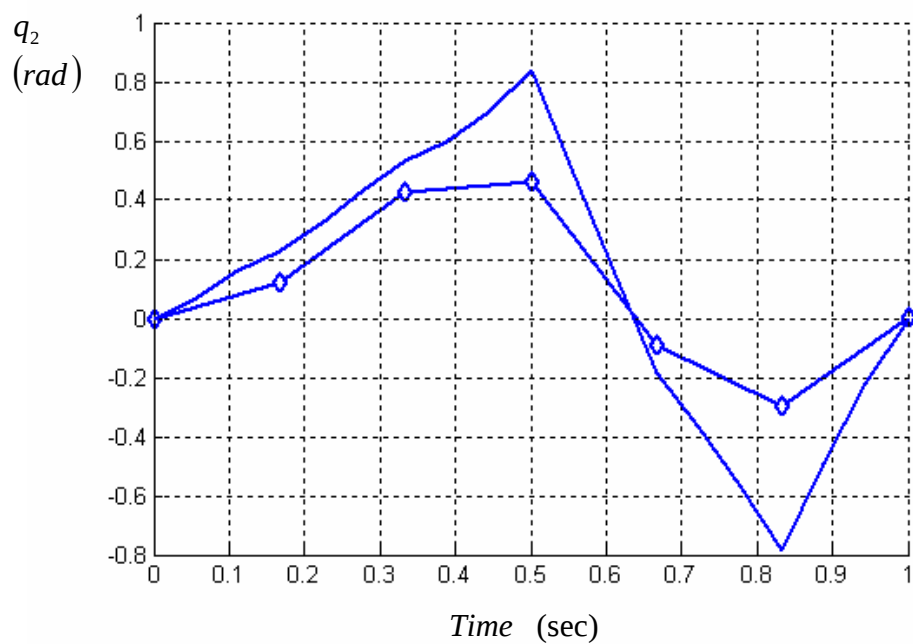


ภาพประกอบที่ 27 กราฟแสดงค่าทอร์คของขั้นตอนโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา

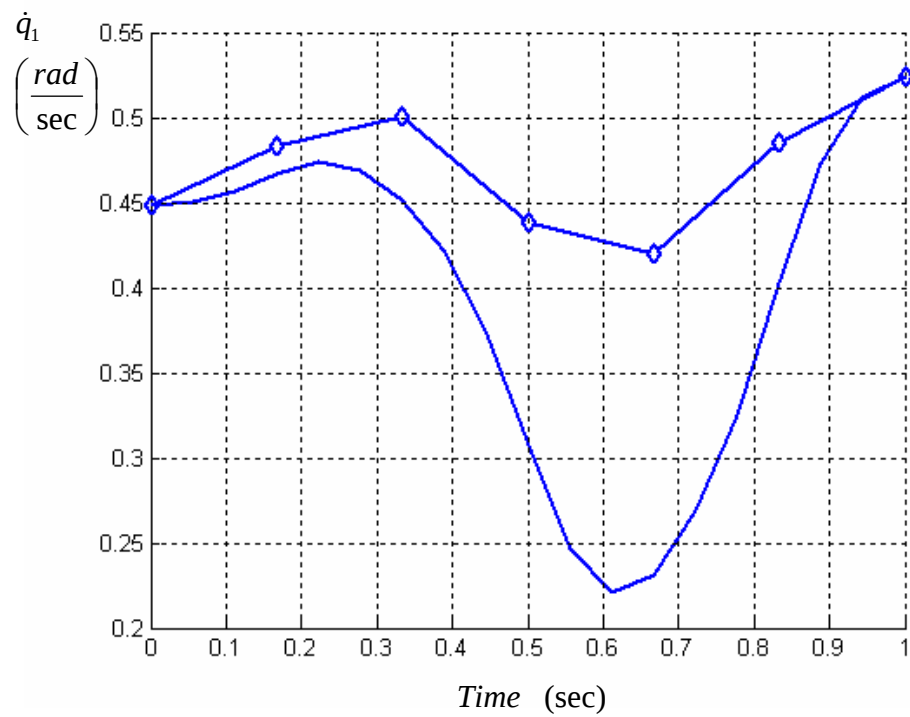
4.1.2.3 ปัญหามันยนต์แขนกลแบบสองข้อต่อโยง (The two link manipulator problem)



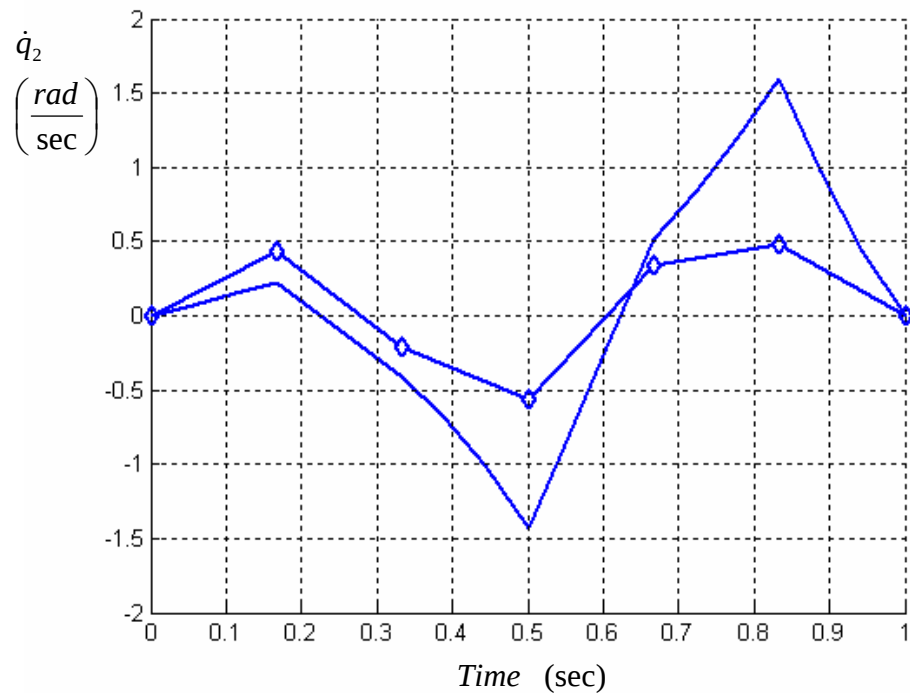
ภาพประกอบที่ 28 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. (q_1) เทียบกับเวลา



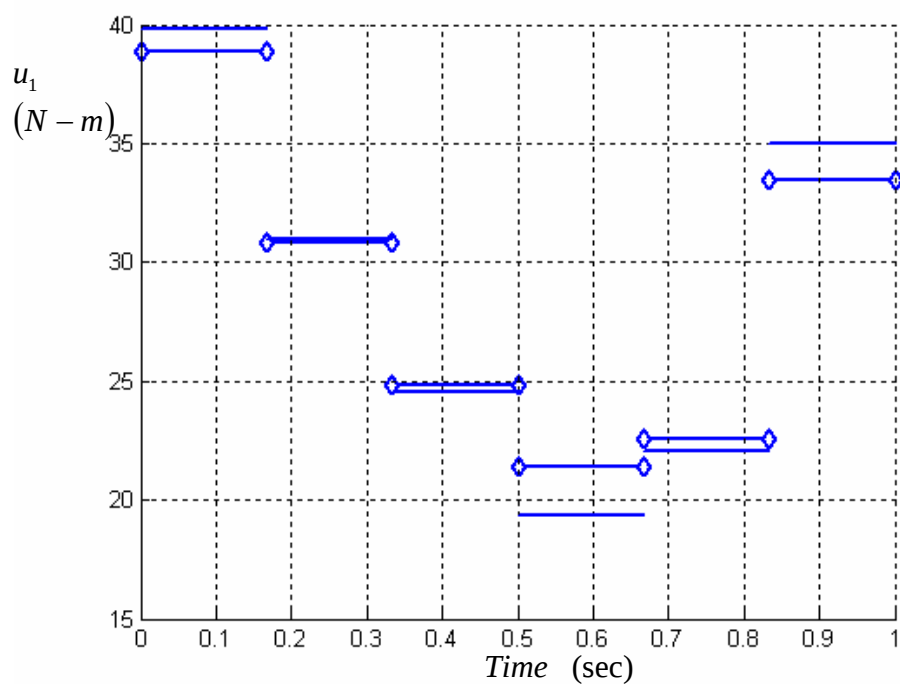
ภาพประกอบที่ 29 กราฟแสดงค่าการขจัดเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 2. (q_2) เทียบกับเวลา



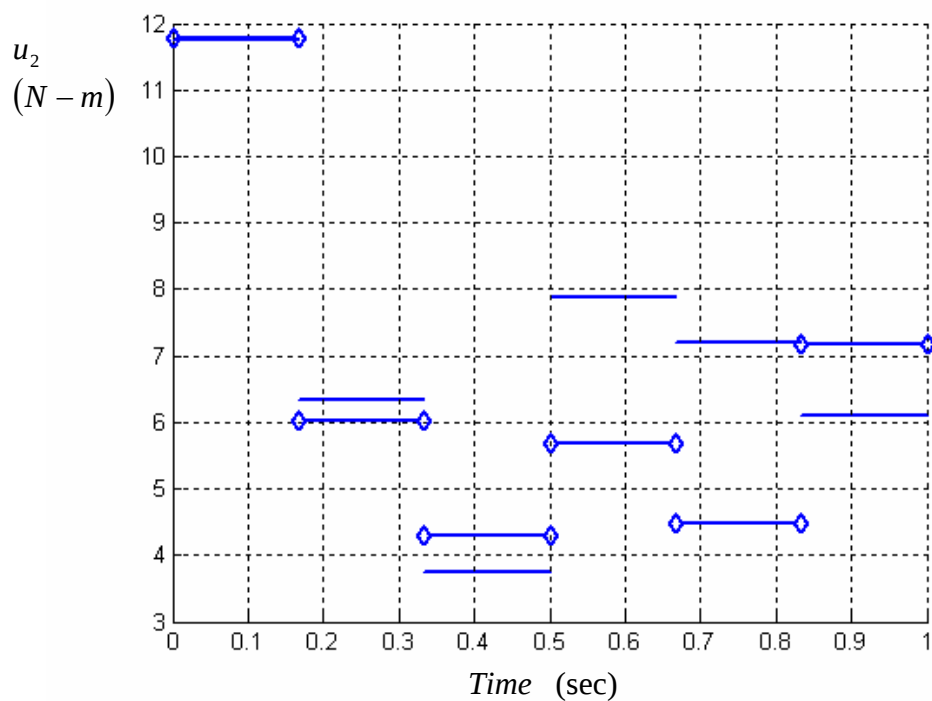
ภาพประกอบที่ 30 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 1. ($\dot{q}_1$) เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 31 กราฟแสดงค่าความเร็วเชิงมุมของข้อต่อโยงที่ 2. ($\dot{q}_2$) เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 32 กราฟแสดงค่าทอร์คของขั้นตอนโยงที่ 1. (u_1) เทียบกับเวลา



ภาพประกอบที่ 33 กราฟแสดงค่าทอร์คของขั้นตอนโยงที่ 2. (u_2) เทียบกับเวลา

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.2.1 กรณีของแขนกลเดี่ยว (The One-armed manipulator)

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า

- 1.) การแก้ปัญหาโดยวิธีตรงเส้นกราฟมีความเหมือนกัน เพราะว่าเส้นกราฟทั้งสองทับกันพอดีในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบ คือการวิเคราะห์โดยหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุด และหลักการพลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายที่สังเกตได้จากภาพประกอบที่ 4-6
- 2.) การแก้ปัญหาโดยวิธีอ้อมนั้น มีความแตกต่างกันเล็กน้อย ระหว่างหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุด และหลักการพลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย แต่ก็พบว่าลักษณะวิถีของเส้นกราฟมีความคล้ายคลึงกัน ดังภาพประกอบที่ 19-21

4.2.2 กรณีของแขนกลแบบโพลาร์ (The polar manipulator)

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบคือ การวิเคราะห์โดยหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดและหลักการพลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายที่สังเกตได้จากภาพประกอบ 7-12 ในการแก้ปัญหาแบบวิธีตรง และภาพประกอบที่ 22-27 ในการแก้ปัญหาโดยวิธีอ้อม จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นของกราฟทั้งสองเหมือนกันเพราะเส้นวิถีทั้งสองทับกันพอดี

4.2.3 กรณีของแขนกลแบบสองชิ้นต่อโยง (The two link manipulator)

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่ามีความแตกต่างกันในทั้งสองกรณีดังนี้

- 1.) ในวิธีแก้ปัญหาโดยวิธีตรงนั้น วิถีของเส้นกราฟที่ได้จากหลักการใช้พลังงานสูงสุดนั้น มีความราบเรียบกว่าหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดและกราฟของการใช้หลักการพลังงานสูงสุด ดังแสดงในภาพประกอบที่ 13-21
- 2.) ในการแก้ปัญหาโดยวิธีอ้อมนั้น วิถีของเส้นกราฟมีความแตกต่างกันของเส้นกราฟในแต่ละช่วงเวลาแต่วิถีของเส้นกราฟก็ยังคงมีความคล้ายคลึงกันเช่นเดียวกับสองกรณีที่ผ่านมา ดังแสดงในภาพประกอบที่ 28-33

เนื่องจากแขนกลแบบสองชิ้นต่อโยงนั้นในการหาความสัมพันธ์ทางจลนศาสตร์แบบย้อนกลับนั้นการเคลื่อนที่สู่ตำแหน่งต่าง ๆ นั้นมีค่าพิกัดที่บอกตำแหน่งของแต่ละชิ้นต่อโยงได้หลากหลายลักษณะดังเช่นปัญหาที่เรียกว่า Elbow up และ Elbow down จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ของกราฟที่ต่างกันไป

จากภาพรวมทั้งหมดในการวิเคราะห์ผลการทดสอบจากผลลัพธ์ที่แสดงเป็นกราฟที่แสดงจากตอนที่ 4.1.1-4.1.2 นั้น ในแต่ละกรณีโดยวิธีตรงและวิธีอ้อมจะได้ผลลัพธ์ ของหลักการพลังงานสูงสุด

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การพิจารณาเปรียบเทียบกันระหว่างระหว่างปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด และปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย ผลการทดสอบมีผลเฉลยที่สอดคล้องกันในแต่ละวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อมและทั้งสามตัวอย่างปัญหานั้นนำมาศึกษา และถึงแม้ว่าจะมีข้อแตกต่างกันบ้างในบางกรณี แต่ลักษณะของเส้นกราฟของหลักการการใช้พลังงานสูงสุดนั้นมีความราบเรียบมากกว่าหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุดแต่ถ้ามองโดยรวมแล้วถือว่าผลการทดสอบแต่ละหลักการมีความสอดคล้องกันแสดงว่า ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์โดยใช้หลักการพลังงานสูงสุดโดยไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายนั้น สามารถที่จะนำมาใช้หาค่าความเหมาะสมสูงสุดของแบบจำลองระบบทางพลศาสตร์ได้เช่นเดียวกันกับหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุด ทำให้พอที่สรุปได้ว่าวิธีหลักการพลังงานสูงสุดสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาของแบบจำลองระบบทางพลศาสตร์ จากการศึกษาวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปปรับปรุง และพัฒนาใช้กับปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกับการศึกษาวิจัยนี้ได้ จากผลการทดสอบทั้งหมดการใช้หลักการพลังงานสูงสุดสามารถบรรลุถึงข้อสมมติฐานในเรื่องความเหมือนกัน และสอดคล้องกันกับหลักการการใช้เวลาน้อยที่สุด เหตุผลอันหนึ่งก็คือการเพิ่มสมการของ คอสท์ฟังก์ชัน ซึ่งก็คือ $-\sum_{i=1}^2 u_i^2$ นั้นเป็นฟังก์ชันสมการกำลังสองที่ซึ่งรับประกันได้ว่าผลเฉลยนำไปสู่ปัญหาที่เป็นค่าที่เหมาะสมสูงสุดนั้นอย่างแน่นอน

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการพัฒนาในขั้นต่อไปอาจเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาให้มากขึ้น โดยคิดถึงผลกระทบของโมเมนต์ความเฉื่อยซึ่งจะต้องคำนึงถึงรูปทรงของแขนกลด้วย รวมถึงการเพิ่มความซับซ้อนของแขนกลให้มีจำนวนองศาอิสระมากกว่า 2 องศาอิสระขึ้นไป และมีความหลากหลายในชนิดของการเคลื่อนที่ของข้อต่อโยงในแขนกลแบบเดียวกัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- มนัส สังวรศิลป์, วิศว.ดร.; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- Tawirat Veeraklaew, *A New Approach on Direct/Indirect Linear Optimization Problem ;“Bang-Bang” Control : An Equivalent to the Maximum Energy with Free Final Time Problem.*
- Sunil K. Agrawal ,Veeraklaew, T., Fabien, B.C., 1998, “*Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations,*” *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 19, pp.393-410.
- Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, *New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems*, *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic* Vol.24 No.2 pp.228 - 236, 2544
- T. Veerakleaw, *Optimization of Higher – Order System and Extensions of Minimum Principle*, เอกสารประชุมทางวิชาการ – เครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 15 เล่มที่ 2 หน้า MC131-MC140, พฤศจิกายน 2544.
- Sunil K. Agrawal, T.Veerakleaw, *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constrian Using Higher – Order Method with Penalty Function*, *WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics)* Vol.1,2541
- M .V. Bain and M. A. Alcorta Garcia, *Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems*, *Applied Mathematics E - Notes*, 2(2002), 36-44.
- Shiler H. Chang and V. Wong, *The Practical Implementation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators*, *Robotic & Computer - Integrate Manufacturing.*
- M.C. Renolds, P.H.Meckl, *Composite Optimization Scheme for time Optimal Control.*
- Yotsak Saisanit. (2005). *Maximum Velocity of a Five Degree of Freedom Racing Car* . Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew : Major. Dr. Settapong Malisuwan.

อภิธานศัพท์

A_{ij}	คือเมตริกซ์ความเฉื่อย
B_{il}	คือส่วนกลับของเมตริกซ์ความเฉื่อย
C_f	คือค่ากระแสต้านแรงเสียดทาน
F	คือสเกลลาร์ฟังก์ชัน
g	คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
g_j	คือฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)
H	คือ เฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix)
I_w	คือความเฉื่อย (Moment of inertia)
M	คือมวลของชิ้นต่อโยง(Link mass)
μ	คือค่าสัมประสิทธิ์ความฝืด (Column friction)
θ	คือมุมการหมุนของชิ้นต่อโยง (Link rotation)
$\dot{\theta}$	คืออัตราเร็วของชิ้นต่อโยง (Rotation velocity)
μ	คือ เสียดทานระหว่างปลอกและแกนคูดุมหมุน
R_x	คือ ส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยา ในแนวรัศมีที่จุดรองรับ
λ_l	คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier)
$\psi_i(t)$	คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักอิสระ
J	คือฟังก์ชันวัตถุประสงค์
s_l	คือตัวแปรสแลก (Slack variables)
t_0	คือเวลาเริ่มต้น
t_f	คือเวลาที่จุดสุดท้าย
$\bar{u}(t)$	คือตัวแปรควบคุมป้อนเข้า
$x(t)$	คือตัวแปรสถานะ

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายโกวิทย์ กัลยาทอง
วันเดือนปีเกิด	9 สิงหาคม 2514
สถานที่เกิด	กำแพงเพชร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	802/716 หมู่บ้านวังทองวิเวอร်ปาร์ค ต.คูคต อ.ลำลูกกา จ.ปทุมธานี 12130
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2531	มัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนนครสวรรค์ อ. เมือง จ.นครสวรรค์
พ.ศ. 2534	มัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนนครสวรรค์ อ. เมือง จ.นครสวรรค์
พ.ศ. 2541	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.ช่างยนต์) โรงเรียนเทคโนโลยีปทุมธานี จ.ปทุมธานี
พ.ศ. 2546	อุดมศึกษา วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. เครื่องกล) สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
พ.ศ. 2550	บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประวัติย่อผู้วิจัย