ผลบวกของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม

ปริญญานิพนธ์

ของ

กฤติกา ชิดชู

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
กุมภาพันธ์ 2543

ผลบวกของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม

บทคัดย่อ
ของ
กฤติกา ชิดชู

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
กุมภาพันธ์ 2543

กฤติกา ชิดชู. (2543). *ผลบวกของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่ม, รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ.

นอร์ดฮอสและแกดดัมได้แสดงคุณสมบัติของกราฟที่มี $|V(G)| = n$ ดังอสมการต่อไปนี้

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ และ}$$

$$n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

ผู้วิจัยได้แสดงปัญหาว่าเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n + 1$ มีกราฟไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$ ผู้วิจัยได้พิสูจน์ปัญหาดังกล่าวโดยแบ่ง n เป็น 2 กรณีคือ เมื่อ $n = k^2$ และเมื่อ $k^2 < n < (k+1)^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว ในการพิสูจน์ผู้วิจัยได้ใช้แนวคิดเกี่ยวกับจำนวนคัฟเวอร์ริงของกราฟ กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์และความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนคัฟเวอร์ริงของกราฟและจำนวนโครมาติคของกราฟเติมเต็มช่วยในการพิสูจน์

THE SUM OF CHROMATIC NUMBER OF GRAPH AND ITS COMPLEMENT

AN ABSTRACT

BY

KRITTIGA CHIDCHOO

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Education degree in Mathematics

at Srinakharinwirot University

February 2000

Krittiga Chidchoo. (2000). *The Sum of Chromatic Number of Graph and Its Complement.* Master Thesis, M.A. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc.Prof.Dr. Narong Punnim, Assoc.Prof. Kamon Eakthaichareon.

Nordhaus and Gaddum have shown the following inequalities :

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1 \text{ and}$$
$$n \leq \chi(G).\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

for all graphs G with n vertices.

The researcher has shown the following problem. For given positive integers n and c such that $2\sqrt{n} \leq c \leq n + 1$ there exists a connected graph G such that $|V(G)| = n$ and $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = c$. The researcher proved the argument by dividing n into 2 cases , one of which is when $n = k^2$ for some positive integer k and the other when $k^2 < n < (k + 1)^2$. The main tools that have been used are the concept of covering number of graph , complete ℓ - partite graph and the relationship between covering number of graph and chromatic number of its complement.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

ผลบวกของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม

ของ

นางสาวกฤติกา ชิดชู

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)

วันที่ ๑๕ เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2543

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์สายัณห์ โสธะโร)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาของ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่มและรองศาสตราจารย์กมล เอกไทยเจริญ ที่ได้ให้คำปรึกษาและตรวจสอบแก้ไขจนปริญญานิพนธ์มีความถูกต้องสมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาของท่านอาจารย์ทั้งสองเป็นอย่างยิ่ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบให้ดวงวิญญาณของพี่ชายผู้ล่วงลับเมื่อ 19 กุมภาพันธ์ 2539

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบระลึกถึงในพระคุณของคุณพ่อ คุณแม่ และทุกคนในครอบครัวที่ส่งเสริมให้การศึกษา ตลอดจนเป็นกำลังใจให้ผู้วิจัยตลอดมา

กฤติกา ชิดชู

สารบัญ

บทที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) เป็นสาขาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้รับความสนใจและยอมรับว่าเป็นสาขาที่มีการนำไปประยุกต์ใช้กับสาขาวิชาอื่นได้มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา จิตวิทยา สังคมวิทยา รวมทั้งทางด้านโทรคมนาคม และ คอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นในชีวิตประจำวัน นอกจากนั้นทฤษฎีกราฟยังเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แขนงอื่นอีกคือทฤษฎีกลุ่ม (Group Theory)ทฤษฎีเมตริกซ์ (Matrix Theory) เป็นต้น

ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นมาจากความพยายามในการตอบปริศนา (Puzzle) ต่างๆปัญหาที่เป็นที่รู้จักกันดีคือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (KÖnigsberg Bridge Problem) ในปีค.ศ.1736 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler. 1703-1783) เป็นผู้ตอบปัญหาดังกล่าว นับตั้งแต่นั้นมาทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนามาเรื่อยๆ (Harary. 1969 : 1-5)

ต่อมาได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ขยายทฤษฎีกราฟโดยการศึกษาเพื่อนำไปแก้ปัญหาต่างๆ (นิตติยา ปภาพจน์. 2529 : 1-2) ตัวอย่างปริศนา ที่เกี่ยวข้องกับกราฟเช่น เกมการท่องเที่ยว (Around The World) ซึ่งถูกตั้งขึ้นในปีค.ศ.1859 โดยฮามิลตัน (Sir William Rowan Hamilton. 1805-1865) (นิตยา ชิงชัย. 2530 : 1-8) นอกจากนี้ยังมีปริศนาการเดินทางของม้าหมากรุก (Knight Tour Puzzle) ซึ่งพบคำตอบในปีค.ศ.1759 โดยเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์จีน (The Chinese Postman Problem) สำหรับปัญหานี้ได้ถูกเสนอครั้งแรกในปีค.ศ.1962 โดยเหมย ซู กวน (Meigu Guan) และปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี (The Four Color Problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุด โดยจุดเริ่มต้นของปัญหาเกิดขึ้นในช่วงต้นปีค.ศ.1850 และมีผู้ค้นพบคำตอบในปีค.ศ.1976 โดยแอพเพลและฮาเคน (K.Appel & W.Haken) โดยใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วยในการคำนวณ (นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540 : 1-250) จนกระทั่งปัจจุบันนี้ได้มีการพัฒนาทฤษฎีกราฟออกไปอย่างต่อเนื่องและกว้างขวาง

กราฟ G เป็นกราฟ k - สี (k - Coloring) เราจะเรียก k - คัลเลอร์เอเบิล (k - Colorable) เมื่อเราสามารถกำหนดสีให้กับจุด (Vertex) ทั้งหมดในกราฟ G โดยใช้สีไม่เกิน k สี และมีข้อแม้ว่าจุดสองจุดใดๆในกราฟ G ที่ประชิด (Adjacent) กันจะต้องได้รับการกำหนดสีที่ต่างกัน ค่า k ที่ต่ำที่สุดที่ทำให้กราฟ G เป็นกราฟ k - สีเรียกว่าจำนวนโครมาติค (Chromatic number) ของกราฟ G และใช้สัญลักษณ์คือ $\chi(G)$ ถ้า $\chi(G) = k$ เราจะเรียกกราฟ G ว่า k - โครมาติค (k - Chromatic) การหาจำนวนโครมาติคของกราฟมีบทประยุกต์มากมายได้แก่ การจัดตารางสอน การจัดตารางการประชุม การแก้ปัญหาในการแบ่งเป็นต้น จากบทบาทดังกล่าว

ทำให้การหาจำนวนโครมาติคของกราฟได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ซึ่งจะเห็นได้จากผลการวิจัยของนักคณิตศาสตร์ที่ได้รวบรวมโดยคาเชตตา (Caccetta. 1996 : 98-128) นอกจากนี้เจ็นเซ็นและทอฟท์ (Jensen & Toft. 1995 : 1-23) ได้รวบรวมปัญหาที่เกี่ยวกับปัญหาการกำหนดสีบนกราฟ (Graph coloring problems) ไว้มากมาย

ในปีค.ศ.1956 นอร์ดฮอสและแกดดัม (Nordhaus & Gaddum) ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกและผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็มได้ดังอสมการต่อไปนี้

$$1.\quad 2\sqrt{n} \le \chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n+1$$

$$2.\quad n \le \chi(G).\chi(\overline{G}) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

เมื่อ G เป็นกราฟอย่างง่ายและ $\left|V(G)\right| = n$

จากผลการค้นพบของนอร์ดฮอสและแกดดัมต่อมาในปีค.ศ.1968 ฟินค์ (H.J.Fink) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่

$$1. \chi(G) + \chi(\overline{G}) = n+1$$

$$2. \chi(G).\chi(\overline{G}) = \left\lfloor \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$$

และในปีค.ศ.1990 อชูฐานและคณะ (Achuthan, et al.) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่

$$1. \chi(G) + \chi(\overline{G}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$$

$$2. \chi(G).\chi(\overline{G}) = n$$

จากผลการวิจัยของนอร์ดฮอสและแกดดัมที่กล่าวว่า ถ้า G เป็นกราฟอย่างง่ายและ $|V(G)| = n$ แล้ว

$$1.\quad 2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$$

$$2.\quad n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

ประกอบกับงานวิจัยของนักคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาแล้วเกี่ยวกับการค้นหากราฟ G ทั้งหมดซึ่ง $|V(G)| = n$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1.\ \chi(G) + \chi(\overline{G}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$$

$$2.\ \chi(G) + \chi(\overline{G}) = n+1$$

$$3.\ \chi(G).\chi(\overline{G}) = n$$

$$4.\ \chi(G).\chi(\overline{G}) = \left\lfloor \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$$

สิ่งต่างๆเหล่านี้นับว่าเป็นจุดเริ่มต้นที่ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจในการค้นหากราฟ G เมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ ที่ทำให้ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาว่าเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ สามารถสร้างกราฟ G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ศึกษาเฉพาะกรณีที่กราฟเป็นกราฟอย่างง่าย,จำกัดและไม่ขาดตอน (Simple,connected graph)

นิยามศัพท์เฉพาะ

กราฟ (Graph) , จุดยอด (Vertex) , เส้น (Edge)

กราฟ G = G(V,E) คือเซตของคู่ลำดับของเซตจำกัด V และ E เรียกสมาชิกใน V ว่าจุดยอด (Vertex) และ E คือสับเซตของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน V เรียกสมาชิกใน E ว่าเส้น (Edge) ของกราฟ G เซตของจุดยอดของกราฟ G เขียนแทนด้วย V(G) และ $|V(G)|$ แทนจำนวนจุดยอดของกราฟ G เรียก $|V(G)|$ ว่าอันดับ (Order) ของกราฟ G เขียน E(G) แทนเซตของเส้นในกราฟ G และ $|E(G)|$ แทนจำนวนเส้นของกราฟ G เรียก $|E(G)|$ ว่าขนาด (Size) ของ G

ประชิด (Adjacent) ,ตกกระทบ (Incident)

ให้ G = G(V,E) แทนกราฟ $u,v \in V(G)$ เรากล่าวว่า u และ v ประชิดกันในกราฟ G ถ้ามี $e = \{u,v\} \in E(G)$ ในกรณีเช่นนี้เราเรียกเส้น e และจุดยอด u ตกกระทบกันในกราฟ G

กราฟอย่างง่าย,จำกัดและไม่ขาดตอน (Simple,connected graph)

ให้ G = G(V,E) เรียก G ว่ากราฟอย่างง่าย (Simple graph) ก็ต่อเมื่อถ้า $e =\{u,v\} \in E(G)$ แล้ว $u \neq v$ และไม่มีเส้นหลายชั้น (Multiple edges) เรียกกราฟ G ว่าเป็นกราฟไม่ขาดตอน (Connected graph) ก็ต่อเมื่อทุกๆ $u,v \in V(G)$ จะมีลำดับของจุดยอด $u = u_0, u_1, ..., u_k = v$ ซึ่ง $e_1 = \{u_0, u_1\}, e_2 = \{u_1, u_2\}, ..., e_k = \{u_{k-1}, u_k\}$ เป็นสมาชิกของ E(G)

สับกราฟ (Subgraph)

ให้ G = G(V,E) เป็นกราฟ เราจะเรียกกราฟ H = H(V′,E′) ว่าสับกราฟของ G ก็ต่อเมื่อ $V' \subseteq V$ และ $E' \subseteq E$

จำนวนโครมาติคของกราฟ (Chromatic number of graph)

ให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟอย่างง่าย เรียก $G = (V,E)$ ว่ากราฟ k - สี (k - coloring) ก็ต่อเมื่อสามารถแบ่งกั้นเซต V โดยที่ $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ และไม่มี 2 จุดยอดใดๆใน V_i ประชิดกัน เรียก V_i ว่าชั้นของสี (Color classes) และเรียกฟังก์ชัน $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ ซึ่ง $f(v) = i$ สำหรับแต่ละ $v \in V_i$ โดยที่ $1 \leq i \leq k$ ว่าฟังก์ชันสี (Color function) ถ้า G เป็นกราฟ k - สีเราจะเรียกกราฟ G ว่า k - คัลเลอร์เอเบิล (k - Colorable) และค่า k ที่ต่ำที่สุดที่ทำให้กราฟ G เป็นกราฟ k- สี จะเรียกว่าจำนวนโครมาติค (Chromatic number) ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\chi(G)$ ถ้า $\chi(G) = k$ เราจะเรียกกราฟ G ว่า k - โครมาติค (k - Chromatic) นอกจากนี้จะเรียกกราฟ G ว่า k - คริติคอล (k - Critical) ถ้า $\chi(G) = k$ และ $\chi(H) < k$ สำหรับทุกๆสับกราฟ H ของ G ซึ่ง $H \neq G$

กราฟเติมเต็ม (Complementary graph)

ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายกำหนดกราฟเติมเต็มของ G และเขียนแทนด้วย $\overline{G}$. $V(\overline{G}) = V(G)$และจุดยอดสองจุดยอดใดๆจะเป็นจุดยอดประชิดกันในกราฟ $\overline{G}$ ก็ต่อเมื่อจุดยอดสองจุดยอดนั้นไม่ประชิดกันในกราฟ G

กราฟบริบูรณ์ (Complete graph)

กราฟบริบูรณ์คือกราฟอย่างง่ายที่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุดยอดใดๆ กราฟบริบูรณ์ที่มี $|V(G)| = n$ จะเขียนแทนด้วย K_n

กราฟต่างสมาชิกกัน (Disjoint graph)

กราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่างสมาชิกกัน ถ้ากราฟทั้งสองไม่มีจุดยอดร่วมกัน

กราฟไม่ขาดตอน (connected graph)

กำหนดให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟอย่างง่าย u และ v เชื่อมโยงกันได้ (connect) เมื่อมีวิถี u - v และกล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (connected graph) เมื่อจุดสองจุดใดๆใน G เชื่อมโยงกันได้ มิฉะนั้นแล้ว G เป็นกราฟขาดตอน (disconnected graph)

ยูเนียน (Union)

กำหนดให้กราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่างสมาชิกกัน กำหนดยูเนียนของกราฟ G_1 และ G_2 จะเขียนแทนด้วย $G_1 \cup G_2$ โดยที่ $V(G_1 \cup G_2)$ และ $E(G_1 \cup G_2)$ ของกราฟ $G_1 \cup G_2$ คือ $V(G_1) \cup V(G_2)$ และ $E(G_1) \cup E(G_2)$ ตามลำดับ ในกรณีที่ $G_1, G_2, \ldots, G_t$ แทนกราฟที่แต่ละคู่ต่างสมาชิกกัน กำหนด $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$ แทนกราฟ $\left(G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{t-1}\right) \cup G_t$ นอกจากนั้น ถ้า $G_1 \cong G_2 \cong \ldots \cong G_t \cong G$ เราจะเขียน tG แทนกราฟ $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$

สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ และ $\lfloor x \rfloor$

ให้ x เป็นจำนวนจริงกำหนดสัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ หมายถึงจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ x และกำหนดสัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

งานวิจัย

งานวิจัยในต่างประเทศ

ในปีค.ศ.1936 เคอนิกส์ (D.König) พิสูจน์ได้ว่ากราฟจะสามารถระบายสีได้ 2 สีก็ต่อเมื่อกราฟไม่มีวัฏจักร (cycle) ที่มีความยาวเป็นจำนวนคี่ (Harary. 1972 : 126-127)

ต่อมาในปีค.ศ.1941 บรูคส์ (R.L.Brooks) พิสูจน์ได้ว่า $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ สำหรับทุกๆกราฟ G นอกจากนั้น $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ ก็ต่อเมื่อ $\Delta(G) \neq 2$ และ G มี $K_{\Delta(G)+1}$ ที่เป็นคอมโพแนนท์ไม่ขาดตอน (Connected component) หรือ $\Delta(G) = 2$ และ G มีวัฏจักรคี่เป็นคอมโพแนนท์ไม่ขาดตอน (Brooks. 1941 : 194-197)

ในปีค.ศ.1956 นอร์ดฮอสและแกดดัมได้พบความสัมพันธ์ของผลบวกและผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็มที่มีอันดับ n ดังนี้

$$1.\ 2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

$$2.\ n \leq \chi(G).\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

(Caccetta. 1996 : 114-123)

ปีค.ศ.1964 เออร์ดอสและกาลไล(P.ErdÖs & T.Gallai) แสดงให้เห็นว่ากราฟปรกติ (Regular graph)บน n จุดมีจำนวนโครมาติค $k \leq 3n / 5$ ยกเว้นกราฟบริบูรณ์ (Caccetta & Pullman. 1990 : 65-71)

ปีค.ศ.1964 ฮาลิน,เซคเคอร์ริสและวิลฟ์(R.Halin,G.Szekeres & H.S.Wilf) ได้แสดงว่าสำหรับกราฟ G ใดๆ $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G'):G'$ เป็นอินดิวซ์สับกราฟของ $G\}$(Caccetta. 1996 : 116-117)

ต่อมาฮีเด็ทไนมิ (S.T.Hedetniemi) ได้แสดงว่า

1.ถ้ามีเส้นบางเส้นของกราฟ G ไม่อยู่บนวัฏจักรแฮมิลโทเนียล (Hamiltonian cycle) แล้ว $\chi(G) \leq 1 + \frac{p}{2}$

2. $\chi(G_1 \wedge G_2) \leq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ (Harary. 1972 : 127)

ในปีค.ศ.1966 ฟินค์ (H.J.Fink) ได้แสดงว่ากราฟปรกติจากเงื่อนไขที่ ฮีเด็ทไนมิได้แสดงไว้มีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = p + 1$ เป็นจริงเฉพาะ G คือ K_p ,$\overline{K}_p$ และ C_5 เท่านั้น

2. $\chi(G).\chi(\overline{G}) = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ เป็นจริงเฉพาะ G คือ K_p ,$\overline{K}_p$ เท่านั้น

3. p = p(G) เป็นจำนวนเฉพาะดังนั้น $\chi(G).\chi(\overline{G}) = p$

4.$(\chi(G))^2 + (\chi(\overline{G}))^2 = p^2 + 1$ ก็ต่อเมื่อ G = K_p หรือ $\overline{K}_p$ หรืออาจจะกล่าวได้ว่า$(\chi(G))^2 + (\chi(\overline{G}))^2 \leq (p-1)^2 + 4$ (Fink. 1966 : 243-251)

ปีค.ศ.1967 เวลช์และเพาเวล (Welsh & Powell) ได้แสดงให้เห็นว่ากำหนดให้ G เป็นกราฟ และ V(G) = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ จะได้ว่า $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, d(v_i) + 1\}\}$ หลังจากนั้นในปีค.ศ.1968 ฟินช์และสจวร์ต (Finch & Stewart) ได้แสดงว่าสำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก p และ q โดยที่ $p \leq n+1$,$q \leq n+1$และ $pq \geq n$ มีกราฟ G อันดับ n ซึ่งทำให้ $\chi(G) = p$ และ $\chi(\overline{G}) = q$ และในปีเดียวกันนี้ฟินค์ (H.J.Fink) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่

$$1.\ \chi(G) + \chi(\overline{G}) = n + 1$$

$$2.\ \chi(G).\chi(\overline{G}) = \left\lfloor \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$$

และในปีค.ศ.1990 อชูฐานและคณะ (Achuthan, et al.) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่

$$1.\chi(G) + \chi(\overline{G}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$$

$$2.\chi(G).\chi(\overline{G}) = n$$

(Caccetta. 1996 : 125-130)

ในช่วงปีค.ศ.1990 คาเชตตาและพูลแมน (L.Caccetta & N.J.Pullman) สนใจปัญหาต่อไปนี้ให้ $G(n,k,d)$ คือเซตของกราฟ k - โครมาติค,ดีกรีปรกติ d (d - Regular,k - chromatic graph) บน n จุด เมื่อกำหนด n , k มาให้เขาต้องการหาจำนวนเต็มบวก d ทั้งหมดซึ่งทำให้ $G(n,k,d) \neq \varnothing$ เขาได้ตอบปัญหาข้างต้นได้ในกรณีที่ $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$ และ $n > k^2$ เมื่อ $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$ (Caccetta & Pullman. 1990 : 65-71)

ต่อมาณรงค์ได้หาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ทุกกรณี นั่นคือเขาสามารถหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ทุกๆ n , k เมื่อ $3 \leq k \leq d \leq n-2$ (ณรงค์ ปั้นนิ่ม. 2541 : 161-173)

บทที่ 3
ผลการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงปัญหาซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 และแสดงการพิสูจน์โดยการสร้างกราฟเพื่อตอบปัญหาดังกล่าว ในการตอบปัญหาผู้วิจัยจำเป็นที่จะต้องพัฒนาข้อเท็จจริงบางประการเกี่ยวกับจำนวนคัฟเวอร์ริง (Covering number) จำนวนโครมาติค (Chromatic number) และความสัมพันธ์ของจำนวนคัฟเวอร์ริงของกราฟเติมเต็มกับจำนวนโครมาติคของกราฟนั้น นอกจากนั้นการกล่าวถึงจำนวนโครมาติคของกราฟที่เกิดจากการยูเนียนของกราฟบริบูรณ์จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำความเข้าใจการพิสูจน์

การพัฒนาข้อเท็จจริงดังกล่าวส่วนใหญ่จะต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับคัฟเวอร์ริงของกราฟ (Covering of graph) กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์ (Complete ℓ - partite graph) และจำนวนโครมาติคของกราฟบริบูรณ์โดยเริ่มต้นจาก

นิยาม1 คัฟเวอร์ริงของกราฟ

กำหนดให้ P เป็นตัวแบ่งกั้นของ V(G) เราจะเรียก P ว่าคัฟเวอร์ริงของกราฟ G ถ้าสำหรับแต่ละ $V_i \in P$ อินดิวซ์สับกราฟ $G[V_i]$ ใน G เป็นกราฟบริบูรณ์ จำนวนคัฟเวอร์ริงของ G เขียนแทนด้วย c(G) คือ $c(G) = \min\left\{ |P| \;\middle|\; P \text{ คือคัฟเวอร์ ริง } G \right\}$

นิยาม2 กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์

เรียกกราฟ G = (V,E) ว่ากราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์เมื่อเซต V สามารถแบ่งกั้นเป็น ℓ ส่วนคือ $V_1, V_2, \ldots, V_\ell$ โดยที่ $|V_i| = n_i \geq 1$ กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์มีคุณสมบัติดังนี้ ถ้า $u \in V_i$ และ $v \in V_j$ โดยที่ $i \neq j$ แล้ว $uv \in E(G)$ และถ้า $u,v \in V_i$ แล้ว $uv \notin E(G)$ เราจะเขียนแทน กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์ด้วย $K_{n_1,n_2,\ldots,n_\ell}$ เมื่อ $|V_i| = n_i$

จากนิยามกราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์ทำให้เห็นได้ชัดว่าจำนวนโครมาติคของ กราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์มีค่าเท่ากับ ℓ

ทฤษฎีบทนำที่1 ถ้า $\overline{G} = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_\ell}$ แล้ว $c(\overline{G}) = \ell = \chi(G)$

พิสูจน์

จาก $\overline{G} = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_\ell}$ เลือก $P = \{V_1, V_2, \ldots, V_\ell\}$

โดยที่ $V_i = V(K_{n_i})$ $\quad i = 1,2,3,\ldots,\ell$

จะเห็นได้ชัดว่า $\overline{G}[V_i] = K_{n_i}$ $(i = 1,2,3,\ldots,\ell)$ ดังนั้น $c(\overline{G}) \leq \ell$

จาก $\overline{G}$ เป็นกราฟขาดตอนมี ℓ - คอมโพแนนท์ไม่ขาดตอน

ดังนั้น $c(\overline{G}) \geq \ell$

เพราะฉะนั้น $c(\overline{G}) = \ell$

เพราะ $\overline{G} = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_\ell}$

ดังนั้น G เป็นกราฟ ℓ - พาร์ไทบริบูรณ์

เพราะฉะนั้น $\chi(G) = \ell$

จากนิยามศัพท์เฉพาะของกราฟบริบูรณ์และจำนวนโครมาติคของกราฟซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่2 จะเห็นได้ชัดว่าจำนวนโครมาติคของกราฟบริบูรณ์ที่มีจำนวนจุด n จุดมีค่าเท่ากับ n ดังนั้นทฤษฎีบทนำต่อไปนี้จะแสดงถึงการหาจำนวนโครมาติคของกราฟที่เกิดจากการยูเนียนของกราฟบริบูรณ์

ทฤษฎีบทนำที่2 ถ้า$G = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_\ell}$ แล้ว
$\chi(G) = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_\ell\}$

พิสูจน์

จาก $G = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_\ell}$

จะเห็นว่า G เป็นกราฟขาดตอนที่มี ℓ - คอมโพแนนท์ไม่ขาดตอน

แต่ละคอมโพแนนท์ K_{n_i} จะได้ $\chi(K_{n_i}) = n_i$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\chi(G) = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_\ell\}$

ต่อจากนี้ไปผู้วิจัยจะใช้ทฤษฎีบทนำที่1 และทฤษฎีบทนำที่2 ช่วยในการพิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ผู้วิจัยได้แบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่1 $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $n = k^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว

จากปัญหาข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่าเป็นจริงเมื่อ $n = 1$ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะตอบปัญหาในกรณีที่ $k \geq 2$ โดยแบ่งเป็น 2 กรณีย่อย

กรณีย่อยที่1 $n = k^2 \geq 4$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่1.1 $\frac{k^2}{2} + 2 \leq c \leq k^2 + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{k^2 - i}$ สำหรับ i = 1,2,3,..., $\frac{k^2}{2}$

จะได้ $\chi(G) = 2$ และ $\chi(\overline{G}) = k^2 - i$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = (k^2 - i) + 2$

กรณีที่1.2 $2k < c < \frac{k^2}{2} + 2$

โดยที่ c = 2k + j(k-1) + i สำหรับ i =1,2,...,(k-1) และ j = 0,1,2,...

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_{k-i} \cup K_{k+j(k-1)+i+j} \cup (k-(j+2))K_k$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - (j + 2)) และ $\chi(\overline{G}) =$ k + j(k - 1) + i + j

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + j(k - 1) + i

กรณีที่1.3 $c = 2k$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = kK_k$

จะได้ $\chi(G) = k$ และ $\chi(\overline{G}) = k$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = 2k$

กรณีย่อยที่2 $n = k^2 \geq 4$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มคี่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่2.1 $\left(\dfrac{k^2+1}{2}\right) + 2 \leq c \leq k^2 + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{k^2-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\left(\dfrac{k^2-1}{2}\right)$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 และ $\chi(\overline{G}) = k^2 - i$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = (k^2 - i) + 2$

กรณีที่2.2 $2k < c < \left(\dfrac{k^2+1}{2}\right) + 2$

โดยที่ c = 2k + j(k - 1) + i สำหรับ i = 1,2,...,(k-1) และ j = 0,1,2,...

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_{k-i} \cup K_{k+j(k-1)+i+j} \cup (k-(j+2))K_k$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - (j + 2)) และ $\chi(\overline{G}) =$ k + j(k - 1) + i + j

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + j(k - 1) + i

กรณีที่2.3 c = 2k

เลือก G ซึ่ง$\overline{G} = kK_k$

จะได้ $\chi(G) =$ k และ $\chi(\overline{G}) = k$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k

กรณีที่2 $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $k^2 < n < (k+1)^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัวแบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่2.1 $n = k^2 + i$ สำหรับ i = 1,2,...,k ซึ่ง $k \geq 1$ ในกรณีนี้ $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ จะเท่ากับ 2k+1 ดังนั้นค่า c ที่จะต้องพิจารณาก็คือ $2k + 1 \leq c \leq n + 1$ แบ่งเป็น 3 กรณีย่อย

กรณีย่อยที่1 $n = k^2 + 1$ แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่1.1 $n = k^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่1.1.1 $\frac{n}{2}+2 \leq c \leq n+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n}{2}$

จะได้ $\chi(G)=2$ และ $\chi(\overline{G})=$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ (n - i) + 2

กรณีที่1.1.2 $2k+1<c<\frac{n}{2}+2$

โดยที่ c = (2k + 1)+j(k - 1) + i สำหรับ i = 1,2,...,(k-1) และ j = 0,1,2,..

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_{k-i} \cup K_{(k+1)+j(k-1)+i+j} \cup (k-(j+2))K_k$

จะได้ $\chi(G)=$ 2 + (k - (j + 2)) และ $\chi(\overline{G})=$ k + 1 + j(k - 1) + i + j

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ (2k + 1)+j(k - 1) + i

กรณีที่1.1.3 $c=2k+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=(k-1)K_k \cup K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G)=$ k และ $\chi(\overline{G})=$ k + 1

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ 2k + 1

กรณีที่1.2 $n=k^2+1$ เป็นจำนวนเต็มคี่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่1.2.1 $\left(\frac{n+1}{2}\right)+2 \leq c \leq n+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n-1}{2}$

จะได้ $\chi(G)=2$ และ $\chi(\overline{G})=$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ (n - i) + 2

กรณีที่1.2.2 $2k+1<c<\left(\frac{n+1}{2}\right)+2$

โดยที่ c = (2k + 1) + j(k - 1) + i

สำหรับ i = 1,2,...,(k-1) และ j = 0,1,2,...

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_{k-i} \cup K_{(k+1)+j(k-1)+i+j} \cup (k-(j+2))K_k$

จะได้ $\chi(G)=$ 2 + (k - (j + 2)) และ $\chi(\overline{G})=$ k + 1 + j(k-1) + i + j

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ (2k + 1)+j(k - 1) + i

กรณีที่1.2.3 $c=2k+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=(k-1)K_k \cup K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G)=$ k และ $\chi(\overline{G})=$ k + 1

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ 2k + 1

กรณีย่อยที่2 $n = k^2 + k$

กรณีที่2.1 $n = k^2 + k$ โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่2.1.1 $\frac{n}{2} + 2 \leq c \leq n + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n}{2}$

จะได้ $\chi(G) = 2$ และ $\chi(\overline{G}) =$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ (n - i) + 2

กรณีที่2.1.2 $2k + 1 < c < \frac{n}{2} + 2$

โดยที่ c= (2k + 1) + jk + i สำหรับ i = 1,2,...,k และ j = 0,1,2,..

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_{(k+1)-i} \cup K_{(k+1)+jk+i+j} \cup (k - (j + 2))K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - (j + 2)) และ $\chi(\overline{G}) =$ (k + 1) + jk + i + j

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ (2k + 1) + jk + i

กรณีที่2.1.3 $c = 2k + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = kK_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) = k$ และ $\chi(\overline{G}) =$ k + 1

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + 1

กรณีย่อยที่3 $n = k^2 + \ell$ สำหรับ ℓ = 2,3,...,(k-1)แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่3.1 $n = k^2 + \ell$ เป็นจำนวนเต็มคู่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่3.1.1 $\frac{n}{2} + 2 \leq c \leq n + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n}{2}$

จะได้ $\chi(G) = 2$ และ $\chi(\overline{G}) =$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ (n - i) + 2

กรณีที่3.1.2 $2k + 1 \leq c < \frac{n}{2} + 2$

โดยที่ c = 2k + jk + i สำหรับ i = 1,2,...,k และ j = 0,1,2,...

ถ้า $(\ell - j) > 0$

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G} = K_{k+jk+j+i} \cup K_{k-(i-1)} \cup (k - (\ell + 1))K_k \cup ((\ell - 1) - j)\, K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - (ℓ+1)) + ((ℓ - 1) -j) และ $\chi(\overline{G}) =$ k + jk + j + i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + jk + i

ถ้า $(\ell - j) \leq 0$

ให้ c = 2k + jk + m(k - 1) + i

สำหรับ i = 1,2,...,(k-1) , m = 0,1,2,...และ j เป็นค่าคงที่ซึ่ง $j = \ell$

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G} = K_{k+jk+j+m(k-1)+m+i} \cup K_{k-i} \cup ((k-(\ell+1)) - (m+1))K_k$

จะได้ $\chi(G) = 2 + ((k - (\ell + 1)) - (m + 1))$

และ $\chi(\overline{G}) =$ k + jk + j + m(k - 1) + m + i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + jk + m(k - 1) + i

กรณีที่3.2 $n = k^2 + \ell$ เป็นจำนวนเต็มคี่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่3.2.1 $\left(\frac{n+1}{2}\right) + 2 \leq c \leq n + 1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n-1}{2}$

จะได้ $\chi(G) = 2$ และ $\chi(\overline{G}) =$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ (n - i) + 2

กรณีที่3.2.2 $2k + 1 \leq c < \left(\frac{n+1}{2}\right) + 2$

โดยที่ c = 2k + jk + i สำหรับ i = 1,2,...,k และ j = 0,1,2,...

ถ้า $(\ell - j) > 0$

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G} = K_{k+jk+j+i} \cup K_{k-(i-1)} \cup (k-(\ell+1))K_k \cup ((\ell-1)-j)K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) = 2 + (k - (\ell + 1)) + ((\ell - 1) - j)$

และ $\chi(\overline{G}) =$ k + jk + j + i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + jk + i

ถ้า $(\ell - j) \leq 0$

ให้ c = 2k + jk + m(k - 1) + i

สำหรับ i = 1,2,...,(k-1) , m = 0,1,2,...และ j เป็นค่าคงที่ซึ่ง $j = \ell$

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G} = K_{k+jk+j+m(k-1)+m+i} \cup K_{k-i} \cup ((k-(\ell+1)) - (m+1))K_k$

จะได้ $\chi(G) = 2 + ((k - (\ell + 1)) - (m + 1))$

และ $\chi(\overline{G}) =$ k + jk + j + m(k - 1) + m + i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2k + jk + m(k - 1) + i

กรณีที่2.2 $n=(k+1)^2-i$ สำหรับ i = 1,2,...,k ซึ่ง $k \geq 1$ และในกรณีนี้ $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ จะเท่ากับ $2(k+1)$ ดังนั้นค่า c ที่จะต้องพิจารณาก็คือ $2(k+1) \leq c \leq n+1$ แบ่งเป็น 2 กรณีย่อย

กรณีย่อยที่1 $n=(k+1)^2-i$ เป็นจำนวนเต็มคู่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี

กรณีที่1.1 $\frac{n}{2}+2 \leq c \leq n+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n}{2}$

จะได้ $\chi(G)=2$ และ $\chi(\overline{G})=$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ (n - i) + 2

กรณีที่1.2 $2(k+1)+(k-i)<c<\frac{n}{2}+2$

โดยที่ c = 2(k + 1) + (k - i) + jk + ℓ

สำหรับ ℓ = 1,2,...,k และ j = 0,1,2,...

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G}=K_{(k+1)+(k-i)+jk+\ell+j+1} \cup K_{(k+1)-\ell} \cup (k-j-2)K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G)=$ 2 + (k - j - 2) และ $\chi(\overline{G})=$ 2k + j(k + 1) + ℓ - i + 2

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ 2(k + 1) + (k - i) + jk + ℓ

กรณีที่1.3 $2(k+1)<c \leq 2(k+1)+(k-i)$

โดยที่ c = 2(k + 1) + ℓ สำหรับ ℓ = 1,2,...,(k-i)

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_{(k+1)+\ell} \cup K_{((k+1)-i-\ell)} \cup (k-1)K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G)=$ 2 + (k - 1) และ $\chi(\overline{G})=$ (k + 1) + ℓ

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ 2(k + 1) + ℓ

กรณีที่1.4 c = 2(k + 1)

เลือก G ซึ่ง $\overline{G}=K_{(k+1)-i} \cup kK_{k+1}$

จะได้ $\chi(G)=$ k + 1 และ $\chi(\overline{G})=$ k + 1

เพราะฉะนั้น $\chi(G)+\chi(\overline{G})=$ 2(k + 1)

กรณีย่อยที่2 $n=(k+1)^2-i$ เป็นจำนวนเต็มคี่โดยแยกการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี

กรณีที่2.1 $\left(\frac{n+1}{2}\right)+2 \leq c \leq n+1$

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_i \cup K_{n-i}$ สำหรับ i = 1,2,..., $\frac{n-1}{2}$

จะได้ $\chi(G) = 2$ และ $\chi(\overline{G}) =$ n - i

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ (n - i) + 2

กรณีที่2.2 $2(k+1) + (k-i) < c < \left(\frac{n+1}{2}\right) + 2$

โดยที่ c = 2(k + 1) + (k - i) + jk + ℓ

สำหรับ ℓ = 1,2,...,k และ j = 0,1,2,...

เลือก G ซึ่ง

$\overline{G} = K_{(k+1)+(k-i)+jk+\ell+j+1} \cup K_{(k+1)-\ell} \cup (k-j-2)K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - j - 2) และ $\chi(\overline{G}) =$ 2k + j(k + 1) + ℓ - i + 2

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2(k + 1) + (k - i) + jk + ℓ

กรณีที่2.3 $2(k+1) < c \leq 2(k+1) + (k-i)$

โดยที่ c = 2(k + 1) + ℓ สำหรับ ℓ = 1,2,...,(k - i)

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_{(k+1)+\ell} \cup K_{((k+1)-i-\ell)} \cup (k-1)K_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) =$ 2 + (k - 1) และ $\chi(\overline{G}) =$ (k + 1) + ℓ

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2(k + 1) + ℓ

กรณีที่2.4 c = 2(k + 1)

เลือก G ซึ่ง $\overline{G} = K_{(k+1)-i} \cup kK_{k+1}$

จะได้ $\chi(G) =$ k + 1 และ $\chi(\overline{G}) =$ k + 1

เพราะฉะนั้น $\chi(G) + \chi(\overline{G}) =$ 2(k + 1)

บทที่ 4
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย

เพื่อศึกษาว่าเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ สามารถสร้างกราฟ G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$

วิธีดำเนินการพิสูจน์

ได้แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่1 $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $n = k^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัวเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2k \leq c \leq k^2 + 1$

กรณีที่2 $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $k^2 < n < (k+1)^2$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว แบ่งออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่2.1 $n = k^2 + i$ สำหรับ i=1,2,3,...,k ซึ่ง $k \geq 1$ และในกรณีนี้ $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ จะเท่ากับ 2k + 1 ดังนั้นค่า c ที่จะต้องพิจารณาก็คือ $2k+1 \leq c \leq n+1$

กรณีที่2.2 $n = (k+1)^2 - i$ สำหรับ i=1,2,3,...,k ซึ่ง $k \geq 1$ และในกรณีนี้ $\lceil 2\sqrt{n} \rceil$ จะเท่ากับ 2(k + 1) ดังนั้นค่า c ที่จะต้องพิจารณาก็คือ $2(k+1) \leq c \leq n+1$

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยสรุปได้ว่าเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง$2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ สามารถสร้างกราฟ G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ$\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$ ได้ทุกกรณี

ข้อเสนอแนะ

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทที่2 สำหรับผู้สนใจผู้วิจัยคิดว่าควรมีการศึกษาต่อไปว่าเมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c จะสามารถสร้างกราฟ G ที่ $|V(G)| = n$ ซึ่ง $n \leq c \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ และ$\chi(G).\chi(\overline{G}) = c$ ได้ทุกกรณีหรือไม่

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. (2542). "Vertex Coloring," in *Workshop on Discrete Mathematics*. หน้า 1-37. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

นิตติยา ปภาพจน์. (2529). *การศึกษาเรื่องเกรซฟูลกราฟของยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นิตยา ชิงชัย. (2530). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*. เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

นวรัตน์ อนันต์ชื่น. (2540). *ทฤษฎีกราฟ* I. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

Brooks, R.L. (1941). "On Coloring the Nodes of a Network," *Proc.Camb.Philos.Soc.* 37 : 194-197.

Caccetta, L. (1996). "Vertex Coloring," in *Workshop Silpakorn University*. p. 98-130. P
ert : School of Mathematics and Statistics Cartin University of Technology.

Caccetta, L. & Pullman, N.J. (1990). "Regular Graphs with Prescribed Chromatic Number," *Journal of Graph Theory*. 1(14) : 65-71.

Fink, H.J. (1966). "Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und Seines Komplements I,II," *Wiss.A.T.H.Ilmenau*. 12 : 243-251.

Harary, F. (1972). *Graph Theory*. 3rd. ed.: Addison Westey.

Jensen, T.R. & Toft, B. (1995). *Graph Coloring Problems.* :A Wiley Interscience Pub.

Punnim, N. (1998). "Coloring Regular Graphs," in *Proceeding of the Conference on General Algebra and Discrete Mathematics*. p. 161-173. Potsdam.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวกฤติกา ชิดชู
วันเดือนปีเกิด	21 พฤศจิกายน 2516
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	645 ม.1 เทศบาลตำบลท่ามะเดื่อ อำเภอบางแก้ว จังหวัดพัทลุง 93140
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 3
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนป่าบอนพิทยาคม อำเภอป่าบอน จังหวัดพัทลุง
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2528	ประถมศึกษาจากโรงเรียนวัดรัดนวราราม
พ.ศ. 2534	มัธยมศึกษาจากโรงเรียนพัทลุง
พ.ศ. 2538	ครุศาสตร์บัณฑิต (ค.บ.เกียรตินิยมอันดับ 1) จากสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง จังหวัดราชบุรี
พ.ศ. 2543	การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ