

การศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้

ปริญญานิพนธ์
ของ
ปิยะบุตร ยิ้มแพน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2553

การศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและפקพา

ปริญญานิพนธ์
ของ
ปิยะบุตร ยิ้มแพน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2553
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้

บทคัดย่อ
ของ
ปิยะบุตร ยิ้มแพน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2553

ปิยะบุตร ยัมแพน. (2553). การศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบ
เชิงกลและพกพาได้ ปรินูญานิพนธ์ วศ.ม. (วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม:
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คุรุเจริญ, พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์
ดร.ทวิวัชรวีระแก้ว.

ปรินูญานิพนธ์นี้เป็นการนำเสนอการศึกษาการเคลื่อนที่ของชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบ
ง่ายได้เปรียบเชิงกล มีโครงสร้างการเคลื่อนที่แบบเฟืองพระอาทิตย์ เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่โดย
ใช้ทฤษฎีของออฟติไมเซชัน (Optimization) เพื่อหาคำตอบของวิธีการเคลื่อนที่ที่ใช้หลักการการใช้
พลังงานน้อยที่สุด ซึ่งในการหาวิธีการเคลื่อนที่จะไม่นำ Singularity มาเกี่ยวข้องงานวิจัยนี้เป็น
การศึกษาเชิงออกแบบ

ผู้วิจัยได้ออกแบบและสร้างชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่าย 1 ชุดเพื่อนำมาใช้ในการ
วิเคราะห์ทางพลศาสตร์ และการออกแบบระบบควบคุม ทดสอบ เก็บข้อมูล และวิเคราะห์ผลการ
ทดสอบ เพื่อหาแรงบิด โมเมนต์ เปรียบเทียบค่าพลังงานที่ใช้ในการถอดล้อแปรผันไปตามแรงที่ใช้
ระหว่างค่าที่ได้จากการทดสอบ และค่าที่ได้ทางทฤษฎีจากการประยุกต์ใช้หลักการใช้พลังงานน้อย
ที่สุด

การหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ จากการประยุกต์ใช้หลักการ
การใช้พลังงานน้อยที่สุด ได้ทำการแปลงปัญหาทางออฟติไมเซชัน (Optimization) โดยใช้โปรแกรม
ที่พัฒนาขึ้นซึ่งสามารถนำมาใช้ในการหาคำตอบที่มีความเหมาะสมที่สุดของการใช้พลังงานน้อยที่สุด
เพื่อคำนวณหาแรงบิด โมเมนต์ แรงในการถอดล้อเหมาะสมที่สุดของชุดถอดล้อ จากการวิจัยพบว่า
การค้นหาคำตอบจะมีความง่าย

คำสำคัญ : ค่าความเหมาะสม, พลังงานน้อยที่สุด, ถอดล้อ

A STUDY AND DEVELOPMENT OF A BASIC PORTABLE CHANGING WHEEL
EQUIPMENT SET

AN ABSTRACT
BY
PIYABUD YIMFAN

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

May 2010

Piyabud Yimfan. (2010). *A Study and Development of a Basic Portable Changing Wheel Equipment Set*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering).
Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee:
Asst.Prof.Dr. Jutarat Kurujareon, Lt. Col. Asst Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew.

The focus of this thesis were to study the mobility behaviors of a basic portable changing wheel equipment set with mechanical advantage, having sun gear mobility structure; to obtain mobility equation using the optimization theory; and obtaining solutions of the mobility direction using minimum energy. In finding the mobility direction solution, singularity was excluded.

The researcher designed and built one a basic portable changing wheel equipment set for the dynamic analysis and control system design, test, data collection, and data analysis to obtain torque moment and to compare the various energy used in changing wheel between the values obtained from the tests and the theoretical values obtained from the application of minimum energy principle.

In solving the optimal value of the dynamic control systems by the application of minimum energy principle, optimization problem was transformed by a program developed by the researcher. It could be applied in obtaining optimal solution of minimum energy in calculating the torque moment and the optimal energy used in changing wheel using the wheel equipment set. The research revealed that obtaining the solutions would be easy

Keywords: Optimal Value, Minimum Energy, Changing Wheel

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ประสบความสำเร็จเป็นอย่างดีซึ่งได้รับการสนับสนุนและความอนุเคราะห์จากบุคคลหลาย ๆ ท่าน ที่ช่วยให้คำปรึกษาและแนะนำแนวทางต่าง ๆ ในการทำวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ พันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้ว ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์คุรุเจริญ เป็นอย่างสูงซึ่งท่านทั้งสองได้สละเวลาอันมีค่าเพื่อแนะนำให้ความรู้ คำปรึกษา แนวคิดในการวิเคราะห์และข้อมูลที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าถึงแนวทางการดำเนินการวิจัยตลอดจนถึงการตรวจทานแก้ไขซึ่งทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์ และผู้วิจัยขอขอบคุณ พันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.อโณทัยสุขแสงพนมรุ้งประธานกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ในครั้งนี้ที่กรุณาแนะนำเพิ่มเติมทำให้ปริญญานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณพ่อวรเกียรติ-แม่ลำดวน ยิ้มแพน ที่ให้การอบรมสั่งสอนและเป็นกำลังใจมาโดยตลอดรวม และเพื่อนนิสิตของโครงการความร่วมมือระหว่าง มศว-จปร.และบุคคลอื่นอีกหลายท่านที่ได้มีส่วนช่วยเหลือเป็นอย่างสูง

โดยสุดท้ายนี้หากปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ทำการศึกษาค้นคว้าและวิจัยในด้านนี้หรือด้านอื่น ๆ ผู้วิจัยขอยกคุณงามความดีให้ท่านบุคคลทั้งหลายที่ได้กล่าวมาและให้คำแนะนำปรึกษามาข้างต้น

ปิยะบุตร ยิ้มแพน

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้

ของ

ปิยะบุตร ยิ้มแพน

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ เดือน พ.ศ. 2553

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คुरुเจริญ)

..... ประธาน

(พันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

..... กรรมการ

(พันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คुरुเจริญ)

..... กรรมการ

(พันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล นามล)

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	1
ขอบเขตของการวิจัย	2
วิธีดำเนินการวิจัย	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย	2
2 ผลงานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	3
ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
3 การออกแบบชุดทดลอง	41
ขั้นตอนการออกแบบและสร้างชุดเปลี่ยนล้อ.....	41
การหาสมการการเคลื่อนที่.....	43
การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	44
วิธีทำงานชุดเปลี่ยนล้อ	45
4 ขั้นตอนดำเนินการวิจัยและทดสอบ	47
การทดสอบโดยใช้โปรแกรม	47
ผลการทดสอบโดยใช้ชุดเปลี่ยนล้อแบบง่าย.....	49

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปและอภิปรายผลการวิจัย	50
สรุปผลการทดสอบ	50
ข้อเสนอแนะในการทำวิจัย	50
บรรณานุกรม	51
ประวัติย่อผู้วิจัย	53

ตาราง	หน้า
1 ขนาดเฟืองมาตรฐาน.....	36
2 แสดง DH-Parameter ของชุดทดล้อ.....	44

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงรายละเอียดของตำแหน่งตัวแปรต่างๆ ของ DH Parameters.....	28
2 แบบจำลองแขน.....	30
3 การเรียกชื่อส่วนของพื่นเฟือง.....	32
4 ผลของค่าไดอะมิเตอร์พิตช์ต่อขนาดของพื่นเฟือง.....	35
5 เฟืองเฉียง.....	36
6 เฟืองดอกจอก.....	38
7 เฟืองหนอน.....	39
8 เกลิยวตัวหนอนแบบตรง (ก) หนึ่งปาก (ข) สองปาก (ค) การคลี่เกลิยวออก.....	40
9 ลักษณะของน็อตล้อ.....	41
10 ลักษณะของชุดถอดล้อ.....	42
11 ชุดถอดล้อ.....	42
12 ชุดทดเฟื้อให้ไ้เปรียบเชิงกล.....	43
13 แสดงแบบจำลองการเคลื่อนที่ของชุดถอดล้อ.....	43
14 ชุดเปลี่ยนล้อแบบง่ายไ้เปรียบเชิงกลและพกพาไ้.....	45
15 การทำงานของชุดเปลี่ยนล้อแบบง่ายไ้เปรียบเชิงกลและพกพาไ้.....	46
16 แสดงการเคลื่อนที่ของ $x_1(t)$ เทียบกับเวลา.....	47
17 แสดงการเคลื่อนที่ของ $^0X_1(t)$ เทียบกับเวลา.....	48
18 แสดงการเคลื่อนที่ของ $X_2(t)$ เทียบกับเวลา.....	48
19 แสดงการเคลื่อนที่ของ $X_2(t)$ เทียบกับเวลา.....	49

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เป็นการนำเสนอการแก้ปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในรูปแบบของการกำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว(Fixed End Time and End Points) ซึ่งจะเปรียบเทียบกับกรถอดล้อยนต์ เพราะหากเกิดเหตุยงรถยนต์รวันนั้นจะทำให้เกินปัญหาตามมาคือการเปลี่ยนยงซึ่งเป็นงานที่ลำบาก ทำให้เสียเวลาและสิ้นเปลืองแรงมาก ซึ่งผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะสร้างถดล้อยนต์โดยใช้โดยอาศัยหลักการของการได้เปรียบเชิงกล

ในงานวิจัยนี้จะหาวิธีการที่ใช้พลังงานคนให้น้อยที่สุด และให้เกิดประโยชน์สูงสุด จึงต้องมีการศึกษาการทำงานของเครื่องถดล้อยนต์ให้มีประสิทธิภาพที่สุด หาวิธีแก้ปัญหาเพื่อปรับค่าตัวแปรต่างๆเหล่านี้ให้ได้ผลถึงความเหมาะสมสูงสุดของการใช้พลังงานน้อยที่สุดในขณะทำงาน ในการพิจารณาระบบจำเป็นต้องสร้างชุดถดล้อยนต์ขึ้นมาซึ่งจะต้องมีราคาถูก ทนทาน ซ่อมแซมได้ง่าย และมีประสิทธิภาพเพียงพอที่จะใช้ในการถดล้อยนต์ ซึ่งเครื่องดังกล่าวอาศัยหลักการการได้เปรียบเชิงกล

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของชุดถดล้อยนต์
2. เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ (Close-form) โดยใช้ทฤษฎีDynamics
3. เพื่อศึกษาและออกแบบชุดถดล้อยนต์
4. เพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ในการหาคำตอบของ Trajectory planning ที่ใช้พลังงานน้อย

ที่สุด

ขอบเขตของการวิจัย

1. ศึกษาเฉพาะชุดถดล้อยนต์แบบกระเบจำนวนน้อย 5 ตัวเท่านั้น
2. ออกแบบและสร้างชุดถดล้อยนต์1 ชุดเพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการทดลอง
3. ในการหา Trajectory planning จะไม่นำ Singularity มาเกี่ยวข้อง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. สืบค้นข้อมูลและทบทวนเอกสารบทปริทรรศน์ของทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและสรุปแนวทางที่น่าสนใจในการดำเนินการวิจัย
2. ศึกษาลักษณะจำเพาะสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางพลศาสตร์หลักการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของชุดถอดล้อพร้อมเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
3. ออกแบบและสร้างชุดถอดล้อรถยนต์เพื่อนำมาใช้ในการวิเคราะห์ทางพลศาสตร์
4. ทดลองการควบคุมและเก็บข้อมูลวิเคราะห์ผล
5. ทำการประเมินผลการวิจัยจากการทดลอง
6. สรุปผลการวิจัย และทำรายงานการวิจัย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ผลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาการผลิตชุดถอดล้อยนต์
2. สามารถควบคุมการการถอดล้อที่ใช้พลังงานและเวลาน้อยที่สุด
3. สามารถปรับปรุงและพัฒนาวิธีการสำหรับการแก้ปัญหาการควบคุมการทำงานของถอดล้อได้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. บทปริทัศน์วรรณกรรม
2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature Review)

มีงานวิจัยของผู้อื่นที่ได้ทำมาก่อนและมีลักษณะใกล้เคียงและเกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยในครั้งนี้ดังต่อไปนี้

ปเสฐฐา สารลักษณ์ (2550) ศึกษาการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความโน้มถ่วงที่สุดในระบบพลศาสตร์ (The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems) เป็นการนำเสนอปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในรูปแบบของความต้องการความโน้มถ่วงของระบบตลอดการทำงาน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้นนิยมใช้พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในงานวิจัยนี้ได้เน้นที่ความโน้มถ่วงของระบบเนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าในการทำงานของระบบพลศาสตร์นั้นความโน้มถ่วงเป็นความต้องการในหลายระดับด้วยกัน เช่นความโน้มถ่วงในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ จากการวิจัยสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความโน้มถ่วงและประหยัดพลังงาน

ทวิวัชร วีระเกล้า (2547) ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุด ของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีในที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกขึ้นซึ่งขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด

(Minimum Time Problem) นั้นด้วยแนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาน้อยที่สุด มีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาน้อยที่สุด สำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้นแต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ท้ายสุดได้มีการเปรียบเทียบ ผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

สุวิมล เสนิงส์ ณ อยุธยา (2548) ศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติที่ใช้การออกแบบจากทฤษฎีของระบบหุ่นยนต์โดยอาศัยกลไกการทำงานของแขนกลสองตำแหน่งซึ่งเคลื่อนที่ทั้งแบบหมุนและแบบเชิงเส้นเพื่อได้สมการการเคลื่อนที่ของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติซึ่งอธิบายโดยสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ เพื่อนำค่าแรงบิดและแรงภายนอกของโมเมนต์มาวิเคราะห์การทำงานของแขนกลทำให้ทราบค่าที่เหมาะสมที่สุดที่มอเตอร์ สามารถทำงานได้โดยการพัฒนาโปรแกรมทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดทางระบบพลศาสตร์โดยทั่วไปจำเป็นต้องกำหนดเป้าหมายที่ต้องการให้ระบบเสียก่อนและรวบรวมเงื่อนไขต่างๆของระบบในสภาวะ หรือ ณ เวลาที่สนใจ เช่น เวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย เพื่อนำมาพิจารณาร่วมกันในการหาคำตอบ ซึ่งวิธีการหาคำตอบสามารถทำได้หลายวิธีขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาว่าจะเหมาะสมวิธีใด แต่โดยทั่วไปจะนำหลักทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดมาใช้ร่วมกับปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่เนื่องจากปัญหาเป็นแบบพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับเวลาจึงต้องทำการแปลงปัญหาทางออปติไมเซชันผ่านวิธีทางแคลคูลัสของความแปรปรวน ซึ่งเป็นวิธีอ้อมทำให้ปัญหาถูกแปลงจากปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดทางระบบพลศาสตร์เป็นปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบสถิตศาสตร์โดยการทดสอบโปรแกรมที่ได้มีความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาคำตอบ ซึ่งสามารถจำลองโครงสร้างการทำงานเพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบของจริงต่อไป

สันนิล कुमार อังรา, ทวีวัชร วีระแก้ว (2541) ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมาก ในเรื่องของการคำนวณ เมื่อนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเฉพาะ สมการการเคลื่อนที่ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอ อันเนื่องมาจากการใช้

กฎข้อที่สองของนิวตันในบทความฉบับนี้ ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจน ในการคำนวณระหว่าง สมการการเคลื่อนที่ ที่อยู่ในรูปสมการชั้นสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งการที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัย ได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีตรงและวิธีอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ ว่าสมการการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูปแบบใดก็ตาม สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบได้

จากการที่ได้นำเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดนั้นพบว่าได้มีการศึกษาถึงระบบการเคลื่อนที่ได้ผลมาพอสมควรทำให้เกิดแนวทางการทำการวิจัยใหม่ๆเกิดขึ้นในการศึกษาถึงเรื่อง “แนวทางใหม่ในการหาคำตอบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดประยุกต์ใช้กับชุดถดถอย” นั้นมีความเป็นที่จะต้องมีส่วนที่กล่าวถึงปัญหาการเคลื่อนที่ (Problem Statement) โดยใช้ทฤษฎีและหลักการมาทำการกำหนดฟังก์ชันหรือพฤติกรรมของปัญหาจากนั้นก็สร้างชุดถดถอยมาเป็นเครื่องมือในการทดลอง แล้ววิเคราะห์ผลการทดลองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไป

2. แคลคูลัสของฟาริเอชันส์ (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสของฟาริเอชันส์ (Calculus of Variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (1)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือ ถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสของแปรเอชันส์ (Calculus of Variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสของแปรเอชันส์ (Calculus of Variations) มาใช้กับไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) จะเกี่ยวข้อง กับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points) ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals)

$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชัน

เป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x+h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (3)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (4)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตแบบพาร์ต (Integrating By Parts) สมการ (4) ก็จะได้พบว่

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (5)$$

เมื่อเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (6)$$

ซึ่งสมการ (6) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะช่วยให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (3-5) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (9)$$

ซึ่งสมการ (7-9) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x}) \right] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt
\end{aligned} \tag{10}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{11}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตแบบพาร์ต (Integrating By Parts) สมการ (11) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{12}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (12) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (13)$$

เมื่อเนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x|_{t_f}$, $\delta x|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (15)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.2 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับชั้นความเสรี (Multistage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชัน

เป้าประสงค์ (Desire Function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็น ฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (16)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (17)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (18)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตแบบพาร์ต (Integrating By Parts) สมการ (18) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (19)$$

เมื่อเนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

ซึ่งสมการ (20) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (17-19) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

ซึ่งสมการ (21-23) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.1.2.1) ถ้า $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\
& \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\
& + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\
& - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt
\end{aligned} \tag{24}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\
& + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{25}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (25) ก็จะได้พบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{26}$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i \Big|_{t_0} - \dot{x}_i \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i \Big|_{t_f} - \dot{x}_i \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (26) จะเป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (27)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i \Big|_{t_f}$, $\delta x_i \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (28)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (29)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

3. ไดนามิกส์ออปติไมเซชัน (Dynamic Optimization)

ระบบควบคุมทางวิศวกรรมทั้งหมดเป็นระบบที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้มาจากกฎของฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนของยานยนต์สามารถหาได้โดยกฎของกลศาสตร์หรือกฎของเทอร์โมไดนามิกส์ระบบที่กล่าวถึงเรียกโดยรวมว่าระบบพลศาสตร์ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (30)$$

เมื่อ t คือเวลา, x_i คือตัวแปรสถานะ(State Variable)ของระบบดังเช่น พิกัดเจเนอเรโลธโคออดิเนต, u_i ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า(Control Input) f_i คือ ฟังก์ชันทั่วไปที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรสถานะ x_i และตัวแปรควบคุมป้อนเข้า u_i หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของตัวแปรสถานะหรือสเตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-Order Differential Equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-Order Differential Equation) ดังสมการ (30) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (30) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสถานะเริ่มต้นเสมอ (Initial State) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกส์จะเรียกฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือหาค่าฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (31)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสมฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และสภาวะสุดท้าย (Final State) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุม (Control Variables) โดยที่ Φ และ L คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุมหรือคอนโทรลวารีเอเบิล (Control Variables) และเป็นความสัมพันธ์กันทางฟิสิกส์ไปสู่ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไป

การแก้ปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์หรือไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สถิติการออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของแปรเอชันส์ (Calculus of Variations) . จากหัวข้อ 2.2 เป็นอย่างมากอีกด้วย ปัญหาของการหาเวลาที่ผ่านไปของตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของสมการที่(30)สามารถหาคำตอบได้จากวิธีแคลคูลัสของแปรเอชันส์ที่ได้พัฒนามาจากหัวข้อ 2.2 โดยกล่าวถึงปัญหาที่เป็นการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed Final Time.) และปัญหาที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายหรือเวลาสุดท้ายแปรผันได้ (Variable Final Time.)

ระบบทางพลศาสตร์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดียว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีตรงหรือวิธีไดเรกต์ (Direct Methods) และวิธีอ้อมหรือวิธีอินไดเรกต์ (Indirect Methods)

3.1 ปัญหาการกำหนดเวลาสุดท้ายคงที่(Fixed Final Time)

ข้อปัญหาที่กล่าวถึงในตอนนี้เป็นไปตามสาระสำคัญดังนี้ (1) ระบบพลศาสตร์ที่อธิบายดังสมการที่ (30), (2) คอสมฟังก์ชันนอลสำหรับค่าที่น้อยที่สุดกำหนดโดยสมการที่ (31), (3) เวลา

เริ่มต้นและเวลาสุดท้ายกำหนดไว้ตายตัว และ (4) ต้องระบุสถานะเริ่มต้น(Initial States) $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่เคลื่อนขบวนไปมาระหว่างสองเมือง และกำหนดเวลาเข้าและเวลาออกจากแต่ละสถานี ซึ่งอาจจะวางแผนการเดินทางโดยกำหนดเป้าประสงค์ในเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด หรือ ในทางกลับกันอาจจะกำหนดการใช้กำลังงานให้คุ้มค่าที่สุด ต่อเราจะมาพิจารณาปัญหาสามประเภทในตอนนี้คือ (a) ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$, (b) ปัญหาที่สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกบังคับให้อยู่ในแนวของพื้นผิวที่กำหนด (c) ตัวแปรควบคุม(Control Variables) และตัวแปรสถานะ(State Variables) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่มีความสัมพันธ์กับทุกช่วงเวลา

3.2 ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย (Final State are Prescribed)

เป็นปัญหาที่มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัว เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการ จะคงที่และไม่มีผลเกี่ยวข้องใดๆกับการหาความเหมาะสมที่สุดหรือออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ จะถูกตัดทิ้งไปในสมการที่ (2.31) ซึ่งเราได้ฟังก์ชันนอลใหม่ (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (32)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (33)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (34) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ

$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ สำหรับ $j=1, \dots, n$ และ $k=1, \dots, m$ ด้วยการแทนสมการ (35) กลับเข้าไปใน

สมการดังกล่าวทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็นหรือเนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (37)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และตัวแปรควบคุมป้อนเข้าหรือคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สมการสถานะหรือสเตทอีควเอชัน (State Equations) คือ สมการ (30) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตตหรือสมการสถานะร่วม (Costate Equations) คือ สมการ (36) จำนวน n สมการ และ สมการแอดดิชันนอลอีควเอชัน (Additional Optimality Equations) คือสมการ (37) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two Point Boundary Value Problems) ส่วน $H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of System)

3.3 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (38)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (39)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (40)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้

$\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (42)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (43)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สแตตอีควชัน (State Equations) จำนวน n สมการ, โคสแตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (41) จำนวน n สมการ และแอตติชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (42) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสแตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (43) ส่วนค่า v_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l \Big|_{t_f} = 0$

3.4 อ็อกซิลเลียร์คอนสเทรนท์ (Ailiary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$\begin{aligned}
J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] &= \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt
\end{aligned} \tag{44}$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned}
L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\
&+ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \\
&+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned} \tag{45}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right) \Big|_{t_f} \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f}
\end{aligned} \tag{46}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการ

เปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\lambda_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (48)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (49)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, โคสเทต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และ ν_l สามารถหาค่าได้โดย การใช้สเตตอีควชัน (State Equations) จำนวน n สมการ, โคสเทตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.48) จำนวน n สมการ และแอตติชัสนอลอีควชันคือสมการ (2.46) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End-Point Constraint Equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่ t_0 และ โคสเทต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (49)

การกำหนดปัญหา (Problem Statement) ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นสมการเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Derivative Function) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i = 1, \dots, n \quad (50)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States, Control Input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้ก็คือการหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุด หรือความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตาม ทั้ง States และ Control Input จะต้องมีความต่อเนื่องที่จำเป็น ในการแก้ปัญหา โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาคือการใช้พลังงานน้อยที่สุด เขียนอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad (51)$$

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุดกับปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดได้ มีข้อแตกต่างกัน เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ อนุพันธ์อันดับที่สามที่เทียบกับเวลา หรือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control Input (u) ดังนั้น Jerk สามารถเขียนในรูปสมการของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

$$Jerk = \ddot{x} \propto \dot{u} \quad (52)$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \quad (53)$$

จากสมการที่ 53 สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n+m}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, t); i = 1, \dots, n+m \quad (54)$$

ในที่นี้ $\tilde{u}$ คือค่าตัวแปร Control Input ของระบบพลศาสตร์ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุด โดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i^2 dt \quad (55)$$

ในลักษณะคล้ายกัน เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i^2 dt \quad (56)$$

J เป็น Cost Function ของความกระด้าง (Jerks)

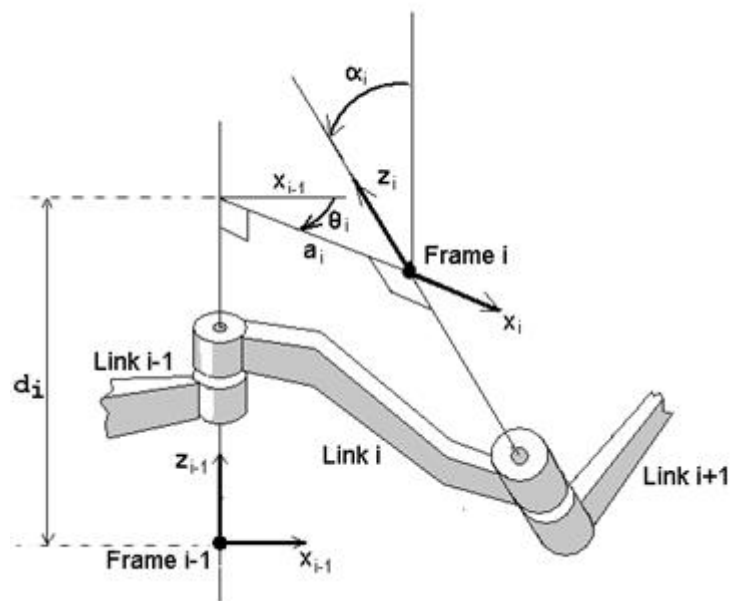
2.4 DH Parameters

DH Parameters ย่อมาจากคำว่า Denavit - Hartenberg Parameters เป็นการสร้างตัวแปรเพื่อนำมาใช้ในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ซึ่งมีตัวแปรทั้งหมด 4 ตัวได้แก่

1. Link Length (a_i) คือ ระยะทางของ x_i ที่ตั้งฉากระหว่างแกน z_i ถึงแกน z_{i+1}
2. Link Twist (α_i) คือ มุมระหว่าง z_{i-1} และ z_i ที่มองจากหัวลูกศร x_{i-1} เข้าไป
3. Link Offset (d_i) คือ ระยะทางระหว่างแกน a_{i-1} ที่ตัดบนแกน z_i กับแกน a_i ที่ตัดบน

แกน z_i

4. Joint Angle (θ_i) คือ มุมระหว่างแกน x_{i-1} กับแกน x_i โดยพิจารณาบนแกน z_i
- จากคำอธิบายตัวแปรทั้ง 4 ตัวนั้น สามารถแสดงได้ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 1 แสดงรายละเอียดของตำแหน่งตัวแปรต่างๆ ของ DH Parameters

การหาเวกเตอร์การเคลื่อนที่

หลังจากที่ได้ค่า DH Parameters แล้ว ต่อไป ก็จะทำหาค่าทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Transformation Matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 4 X 4 ซึ่งภายในเมตริกซ์นี้ประกอบไปด้วยเมตริกซ์การหมุน และเวกเตอร์การเคลื่อนที่ โดยระบุค่าต่างๆ ของ DH Parameters ลงในสมการที่ 57

$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

โดย T คือ ทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Transformation Matrix)

i คือ จำนวนแขน (Link)

a_i คือ Link Length

θ_i คือ Joint Angle

d_i คือ Link Offset

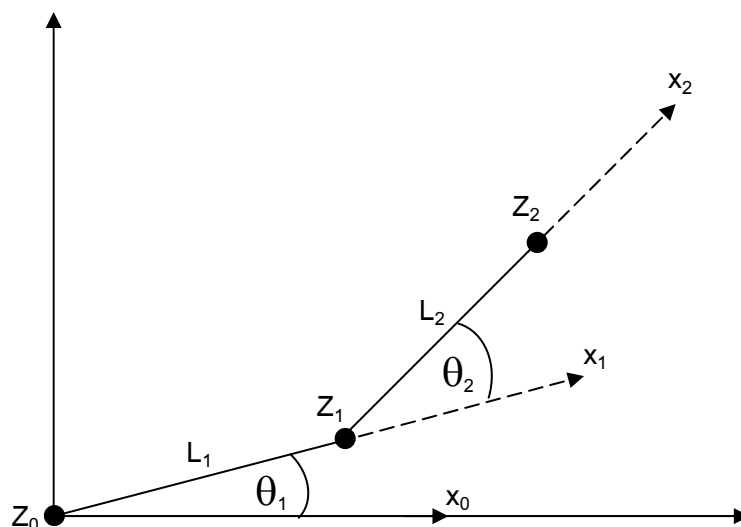
α_i คือ Link Twist

จากสมการที่ 57 จะได้เมตริกซ์การหมุน และเวกเตอร์การเคลื่อนที่ดังสมการที่ 58 และ 59 ตามลำดับ

$$\text{เมตริกซ์การหมุน} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\text{เวกเตอร์การเคลื่อนที่} = \begin{bmatrix} a_i\cos\theta_i \\ a_i\sin\theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (59)$$

หากหุ่นยนต์นั้นมีจำนวนแขน i แขน (Link) จะต้องนำค่าทราจแฟอริซึมเมชันเมตริกซ์ (T) มาคูณกันทางเมตริกซ์ ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 2 แบบจำลองแขน

จากภาพประกอบ 2 สามารถหาค่า DH Parameters โดยพิจารณาทีละแขน ได้ดังนี้

แขน L_1 มี DH Parameters 4 ตัว ดังนี้

a_i มีค่า L_1

θ_i มีค่า $\theta_1(t)$

d_i มีค่า 0

α_i มีค่า 0

แขน L_2 มี DH Parameters 4 ตัว ดังนี้

a_i มีค่า L_2

θ_i มีค่า $\theta_2(t)$

d_i มีค่า 0

α_i มีค่า 0

หลังจากหาค่า DH Parameters เสร็จแล้ว ต่อไปเป็นการหาค่าทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Transformation Matrix) ได้ดังนี้

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & L_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & L_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & L_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$T_0^2 = T_0^1 \cdot T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

จากสมการที่ (62) จะได้เวกเตอร์การเคลื่อนที่ (Translation vector) ของหุ่นยนต์ตามแนวพิกัด xyz ได้ดังนี้

1. แกน x มีเวกเตอร์การเคลื่อนที่ คือ $L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$
2. แกน y มีเวกเตอร์การเคลื่อนที่ คือ $L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$
3. แกน z มีเวกเตอร์การเคลื่อนที่ คือ 0 (ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน z)

เท่านี้ก็จะได้เวกเตอร์การเคลื่อนที่ของแกนต่างๆ ของหุ่นยนต์ ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีเกี่ยวกับแรงเสียดทาน เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ถึงการสั่นไถลของวัตถุ และการทำให้วัตถุไม่เกิดการสั่นไถล

เซอร์คิวลาพิทช์ (circular pitch) p เป็นระยะที่วัดบนวงกลมพิทช์ จากจุดหนึ่งบนฟันเฟืองไปยังอีกจุดหนึ่ง ณ ตำแหน่งเดียวกันบนฟันถัดไป จากภาพประกอบ 3 จะเห็นได้ว่าระยะนี้มีค่าเท่ากับผลรวมของความกว้างฟันและความกว้างช่องว่างระหว่างฟัน

โมดูล (module) m เป็นอัตราส่วนระหว่างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง พิตช์กับจำนวนฟันบนเฟือง หน่วยที่ใช้วัดโมดูลคือ มิลลิเมตร โมดูลนี้เป็นดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเพียงในระบบหน่วยเอสไอ

ไดอะมิทริคพิทช์ (diametral pitch) p เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนฟันบนเฟืองกับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิทช์ ฉะนั้นจึงเป็นส่วนกลับของโมดูล ไดอะมิทริคพิทช์นี้เป็นดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเฟืองในระบบหน่วยอังกฤษ ซึ่งกำลังได้รับการเปลี่ยนแปลงให้เป็นระบบหน่วยเอสไออยู่ ดังนั้นความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางพิทช์จึงใช้บอกเป็นนิ้ว

แอดเดนดัม (addendum) a หรือช่วงสูงบน เป็นระยะที่วัดในแนวรัศมีระหว่างยอดฟัน (Top land) ถึงวงกลมพิทช์

ดิเดนดัม (dedendum) d หรือช่วงสูงล่าง เป็นระยะที่วัดในแนวรัศมีระหว่างโคนฟัน (bottom land) ถึงวงกลมพิทช์ ฉะนั้นความสูงของฟันเฟืองคือ ผลรวมระหว่าง a กับ d

เคลียร์นซ์ (clearance) c ในการที่เฟืองสองอันขบกัน ดิเดนดัมของเฟืองหนึ่งต้องมีค่ามากกว่า แอดเดนดัมของอีกเฟืองหนึ่ง เพื่อที่จะไม่ให้เกิดการขัดกันขึ้น ผลต่างระหว่างค่าดิเดนดัมและแอดเดนดัมนี้เรียกว่า เคลียร์นซ์ c (ดูภาพประกอบ 3 ประกอบ)

แบ็คแลช (backlash) คือ ผลต่างระหว่างความกว้างช่องว่างระหว่างฟันเฟืองหนึ่งกับความกว้างของฟันเฟืองอีกอันหนึ่งที่ขบกัน โดยวัดตามแนวเส้นวงกลมพิทช์ ฉะนั้นในการขับด้วยเฟืองที่มีแบ็คแลช เฟืองขับจะสามารถหมุนไปได้เป็นมุมเล็กน้อยก่อนที่เฟืองตามจะหมุนไปแบ็คแลชนี้จำเป็นต้องมีอยู่เสมอ ทั้งนี้เพื่อให้มีช่องว่างสำหรับน้ำมันหล่อลื่น และเพื่อให้เฟืองสามารถขยายตัวได้เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ตลอดจนมีเผื่อเอาไว้สำหรับความผิดพลาดในการตัดรูปร่างของฟันเฟือง

ความหนาของฟัน (face width) b คือความหนาของฟันเฟืองวัดในทิศทางเดียวกับแนวแกนของเฟือง ซึ่งในที่นี้จะเรียกว่าความหนาเฟือง

แฟล็ง (flank) คือผิวทางด้านข้างของฟันเฟือง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลมพิทช์กับวงกลมดิเดนดัม

อัตราทด (velocity ratio) m คืออัตราส่วนระหว่างความเร็วเชิงมุมของเฟืองขับต่อความเร็วเชิงมุมของเฟืองตาม ถ้าให้ “1” และ “2” แทนเฟืองขับและเฟืองตาม ตามลำดับ จากความรู้ทางด้านกลศาสตร์จะได้ว่า

$$m_\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (63)$$

อัตราส่วนเฟือง (gear ratio) m_g คืออัตราส่วนระหว่างจำนวนฟันของเฟืองต่อจำนวนฟันของพิเนียน ถ้าพิเนียนเป็นนัตว์ขับแล้ว

$$m_g = m_\omega = \frac{N_2}{N_1} \quad (64)$$

2.5.1.1 มาตรฐานการบอกขนาดของฟัน

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ดัชนีสำหรับบอกขนาดของฟันเฟือง อาจจะเป็นพิตช์ในระบบหน่วยอังกฤษ หรือบอกเป็นโมดูลในระบบหน่วยเอสไอ จากคำจำกัดความที่ผ่านมาจะได้ว่า

ไดอะมิทรีลพิตช์ $P = \frac{N}{d} \quad (65)$

โดยที่ d มีหน่วยเป็น in

โมดูล $m = \frac{d}{N} \quad (66)$

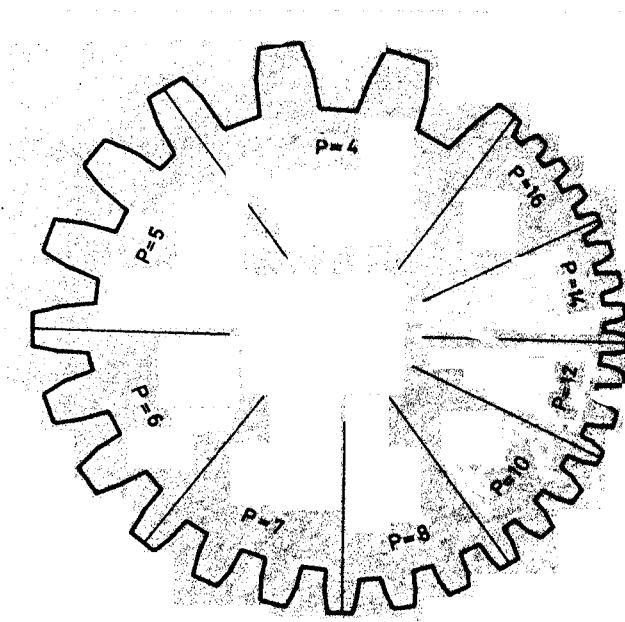
โดยที่ d มีหน่วยเป็น mm และเซอคิวลาพิตช์

$$p = \frac{\pi d}{N} = \pi m \quad (67)$$

ดังนั้น

$$Pp = \pi \quad (68)$$

สำหรับเฟืองที่ผลิตโดยวิธีการหล่อ ควรจะใช้ค่าเชอคิวลาพิตซ์ ทั้งนี้เพราะจะทำให้สามารถทำแบบหล่อได้สะดวก ส่วนเฟืองที่ผลิตโดยวิธีการตัดกลึง (machined) มักจะเรียกเป็นไดอะมิทรีลพิตซ์หรือโมดูล เพราะมีอุปกรณ์ในการตัดฟันเฟืองเป็นมาตรฐานอยู่แล้ว ในการเลือกใช้เฟือง ควรจะให้เลือกให้ตรงกับอุปกรณ์ตัดฟันมาตรฐานที่มีอยู่แล้ว ดังในตาราง 1 โปรดสังเกตด้วยว่า เมื่อขนาดโมดูลโตขึ้น ความหนาฟันก็จะเพิ่มขึ้นด้วย ส่วนขนาดของไดอะมิทรีลพิตซ์โตขึ้น ความหนาฟันเฟืองจะลดลงดังภาพประกอบ 4

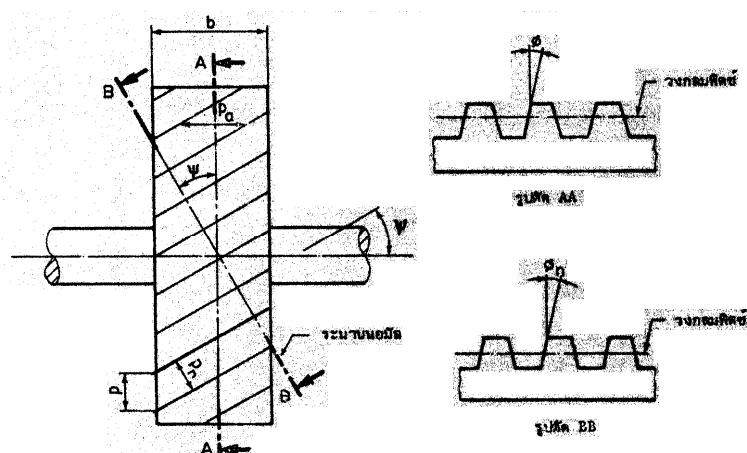


ภาพประกอบ 4 ผลของค่าไดอะมิทรีลพิตซ์ต่อขนาดของฟันเฟือง

โมดูล m,mm	โมดูล m,mm	โมดูล m,mm	ไดอะมิ ทรัลพิตช์ P, in^{-1}	ไดอะมิ ทรัลพิตช์ P, in^{-1}	ไดอะมิ ทรัลพิตช์ P, in^{-1}
1	4	16	20	5	1.25
1.25	5	20	16	4	1
1.5	6	25	12	3	0.75
2	8	32	10	2.5	0.625
2.5	10	40	8	2	0.50
3	12	50	6	1.5	

ตาราง 1 ขนาดเฟืองมาตรฐาน

2.5.2 เฟืองเฉียง (helical gears) ฟันเฟืองไม่ขนานกับแกนหมุนของเฟือง แต่เอียงทำมุมกับเฟือง ดังนั้นแรงที่กระทำต่อฟันเฟืองจึงเป็นแบบสามมิติ การวิเคราะห์เฟืองชนิดนี้มีวิธีคล้ายคลึงของเฟืองตรง สมการ ตารางและหลักการต่าง ๆ ก็ยังต้องใช้ของเฟืองตรงอยู่ ฉะนั้นจึงจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดมากดังเช่นเฟืองตรง แต่จะเน้นสิ่งที่แตกต่างไปจากเฟืองตรง



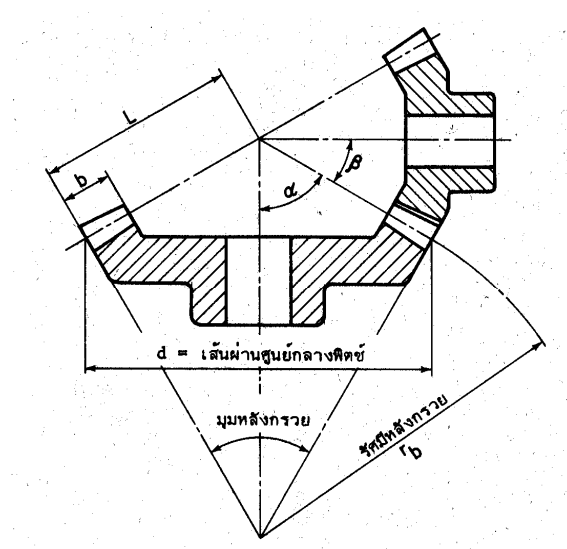
ภาพประกอบ 5 เฟืองเฉียง

เฟืองเฉียง เป็นเฟืองที่มีฟันเอียงทำมุมกับแกนหมุนของเฟือง มุมนี้มีชื่อเรียกว่า มุมฮีลิคซ์ (helix angle) สามารถใช้ส่งกำลังระหว่างเพลลาที่ขนานกันหรือเพลลาที่ทำมุมกันก็ได้ ถ้าพูดถึงระบบเฟืองเฉียงเฉย ๆ ในที่นี้ จะหมายถึงการส่งกำลังระหว่างเพลลาที่ขนานกันเท่านั้น ในการขับด้วยเฟืองตรง แนวการสัมผัสเป็นเส้น (line contact) ส่วนเฟืองเฉียงการสัมผัสเป็นเส้น เนื่องจากลักษณะของการสัมผัสของฟันเฟืองนุ่มนวลกว่าของเฟืองตรง จึงทำให้มีเสียงในการทำงานน้อยลง และแรงกระแทกก็ลดลงด้วย ดังนั้น เฟืองเฉียงจึงเหมาะสำหรับการใช้งานที่ความเร็วสูง และกำลังส่งมากกว่าเฟืองตรง ความเร็วพิตช์ที่เหมาะสมกับการใช้งานก็คือ ตั้งแต่ 25m/s ขึ้นไป หรือเมื่อพิเนียนมีความเร็วรอบมากกว่า 3600 rpm

เนื่องจากฟันเฟืองทำมุมกับแกนหมุนเป็นผลให้แรงผลักดันที่กระทำต่อฟันเฟืองส่วนหนึ่งจะมีทิศทางอยู่ในแนวแกนหมุน ดังนั้น แบริ่ง (bearing) ที่ใช้รองรับเพลลาของเฟืองเฉียงจึงต้องสามารถรับแรงในแนวแกนนี้ด้วย (thrust load) ซึ่งเป็นข้อเสียของเฟืองชนิดนี้ ถ้าแรงนี้มีเฟืองก้างปลา (herringbone gear) เพื่อทำให้เกิดแรงในแนวแกนเส้นตั้งฉากกับฟันเฟืองวัดบนวงกลมพิตช์ เรียกว่า นิ้มัลเซอร์คิวลาร์พิตช์ P_n (normal circular pitch)

2.5.3 เฟืองดอกจอก (bevel gears) ใช้สำหรับส่งกำลังผ่านเพลลาที่ทำมุมใด ๆ ต่อกัน เฟืองดอกจอกอาจจะเรียกได้ว่าเป็นเฟืองกรวยตัด (conical bank) การรับแรงของเฟืองดอกจอกก็มีส่วนคล้ายคลึงกับเฟืองกับเฟืองตรงและเฟืองเฉียง ดังนั้นหลักการในการคำนวณจึงมีส่วนคล้ายกับเฟืองชนิดที่ได้กล่าวมาแล้ว เฟืองดอกจอกจะจ้องผลิตขึ้นมาเป็นคู่เพื่อใช้เฉพาะงาน และไม่สามารถจะสลับการใช้งานกับเฟืองอันอื่นได้ ๆ ได้เหมือนกับเฟืองตรง การคำนวณออกแบบเฟืองดอกจอกอาจจะใช้วิธี การคำนวณได้หลายวิธี เช่นเดียวกับการคำนวณชิ้นส่วนเครื่องจักรอื่น ๆ ในที่นี้จะแสดงถึงวิธีการคำนวณเช่นเดียวกันกับเฟืองตรง และวิธีการของสมาคมผู้ผลิตเฟือง (AGMA) แต่อย่างไรก็ตามไม่ว่าจะเลือกใช้วิธีคำนวณวิธีใด ผลของการคำนวณที่ได้ก็จะเป็นเพียงผลเบื้องต้นเท่านั้นจนกว่าจะได้ทำการทดลองแล้วว่าสามารถใช้งานได้ตามความประสงค์ สำหรับการคำนวณบทนี้จะแสดงเฉพาะในกรณีที่เพลลาทำมุมฉากกันเท่านั้น

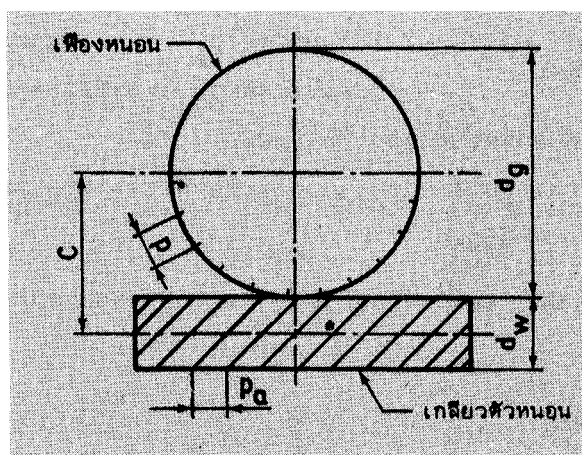
ลักษณะของเฟืองดอกจอก



ภาพประกอบ 6 เฟืองดอกจอก

เฟืองดอกจอกชนิดธรรมดาที่สุดจะมีฟันเป็นฟันตรง ซึ่งจะเรียกว่า เฟืองดอกจอกฟันตรง หรือเฟืองดอกจอก เหมาะสำหรับการใช้งานที่ความเร็วพิตช์ไม่เกิน 5 m/s แต่อย่างไรก็ตามถ้าผิวหน้าของฟันเฟืองผ่านการปรับแต่งอย่างดี เช่นทำการเจียรระไน (girnding) ก็อาจใช้งานได้ถึงความเร็วพิตช์ 50m/s โดยที่ไม่เกินไปนัก

2.5.4 ชุดเฟืองหนอน (worm gear set) ใช้สำหรับกำลังระหว่างเพลลาที่ไม่ขนานกันและไม่ตัดกัน ซึ่งต้องการให้มีอัตราทดสูง ชุดเฟืองหนอนส่งกำลังระหว่างเพลลาที่ทำมุมกัน 90 องศา ดังภาพประกอบ 7

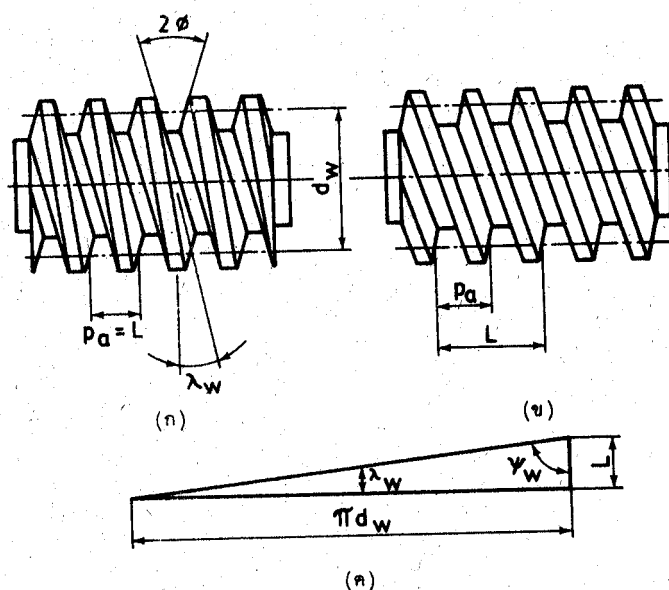


ภาพประกอบ 7 เฟืองหนอน

แม้ว่าจะสามารถใช้เฟืองเฉียงส่งกำลังในลักษณะเดียวกันนี้ได้ แต่ก็ไม่สามารถจะส่งกำลังได้มากเท่ากับชุดเฟืองหนอน นอกจากนี้ชุดเฟืองหนอนยังสามารถทำงานด้วยอัตราทดสูงถึง 300 โดยที่ใช้การทดเพียงครั้งเดียว แต่ถ้าใช้เฟืองเฉียงจะเกิดปัญหขึ้นในทางปฏิบัติเช่นจะต้องใช้การทดเฟืองที่มีจำนวนฟัน 10 ฟันขับเฟืองที่มีฟัน 3000 ฟันเป็นต้น การทำงานของชุดเฟืองหนอนก็คือประสิทธิภาพของการส่งกำลังจะต่ำและมีความร้อนเกิดขึ้นเนื่องจากการเสียดสี (sliding) ระหว่างฟันมากกว่า ทำให้ต้องคำนึงถึงเรื่องการระบายความร้อนที่เหมาะสมด้วย ในบทนี้จะกล่าวถึงการส่งกำลังระหว่างเพลลาที่ทำมุมอื่น ๆ ได้

ลักษณะทั่วไปของชุดเฟืองหนอน

เกลียวตัวหนอนมีลักษณะคล้ายคลึงกับสกรูส่งกำลัง ประกอบด้วยเกลียวหรือฟัน ซึ่งมีจำนวนปากตั้งแต่หนึ่งถึงหกปาก หรืออาจจะมากกว่านี้ก็ได้ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ สกรูหลายปาก (multiple –threaded screw) นั่นเอง ลักษณะทั่วไปของเกลียวตัวหนอนแบบหนึ่งปากหรือสองปาก ดูได้จากภาพประกอบ 8 (ก) และ (ข)



ภาพประกอบ 8 เกลียวตัวหนอนแบบตรง (ก) หนึ่งปาก
(ข) สองปาก (ค) การคลี่เกลียวออก

การเรียกชื่อต่าง ๆ ก็ยังคงเหมือนกับสกรูส่งกำลัง คือ พิตช์หรือแอ็คเซียลพิตช์ (axial pitch) P_a เป็นระยะระหว่างเกลียว ในกรณีที่เพลาทำมุมกัน 90 องศา ดังภาพประกอบ 8 จะมีค่าเท่ากับเซอคิวลาพิตช์ p ของเฟืองหนอน

ลีด (Lead) คือ ระยะที่แกนเกลียวตัวหนอนสามารถเคลื่อนที่ไปได้ต่อการหมุนหนึ่งรอบ ถ้าเกลียวตัวหนอนมี N_w ปาก $L = N_w P_a$

มุมลีด (Lead angle) มีค่าเช่นเดียวกับสกรูส่งกำลัง โดยพิจารณาจากภาพประกอบ 8

บทที่ 3

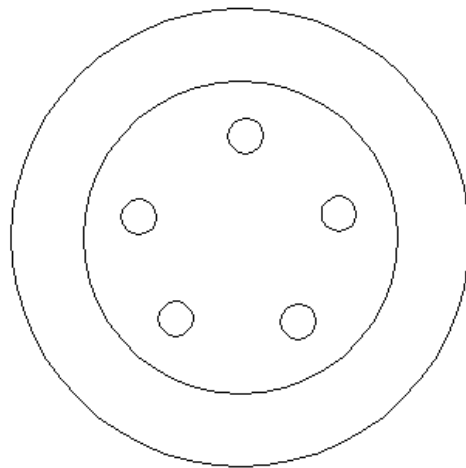
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ออกแบบและสร้างชุดเปลี่ยนล้อ
2. การหาสมการการเคลื่อนที่
3. การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์
4. วิธีทำงานของชุดถอดล้อ

3.1 ออกแบบและสร้างชุดถอดล้อ

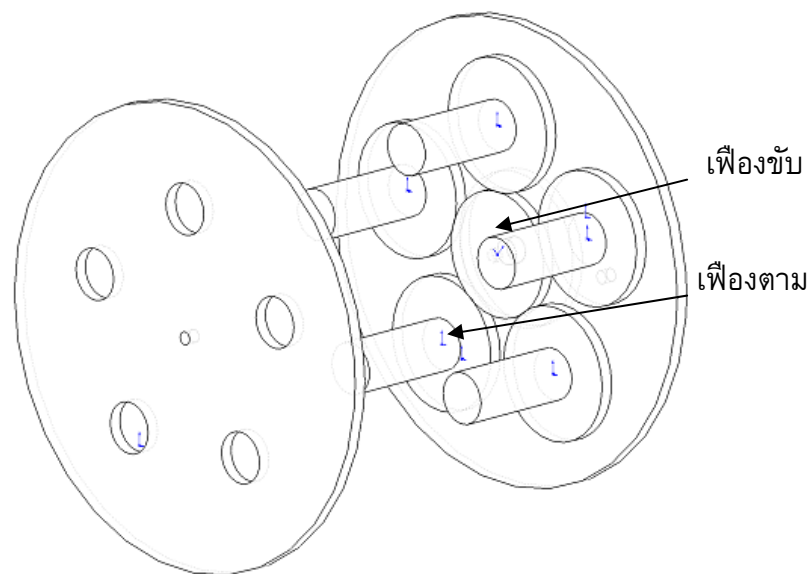
3.1.1 ลักษณะของล้อรถกระบะ



ภาพประกอบ 9 ลักษณะของล้อรถ

3.1.2 การออกแบบชุดถอดล้อโดยใช้แบบเฟืองพระอาทิตย์

เป็นการทำงานโดยที่จะมีชุดเฟืองตามต่อไปหมุนยังล้อทั้ง 5 ตัวทำหน้าที่ขับเคลื่อนทั้งหมดพร้อมกัน โดยจะมีเฟืองขับหมุนอีกที แต่จะทำการขับเคลื่อนทั้งหมดได้นั้นต้องมีชุดทดเฟืองที่จะทำให้ได้เปรียบเชิงกลอีกต่อหนึ่ง



ภาพประกอบ 10 ลักษณะของชุดถอดล้อ



ภาพประกอบ 11 ชุดถอดล้อ

จากภาพประกอบ 11 แสดงชิ้นส่วนต่างๆ ของชุดถอดล้อ จะมีชื่อ และหน้าที่การทำงานของส่วนประกอบดังต่อไปนี้

หมายเลข 1 เฟืองตามทำหน้าที่ต่อไปยังน็อตล้อ

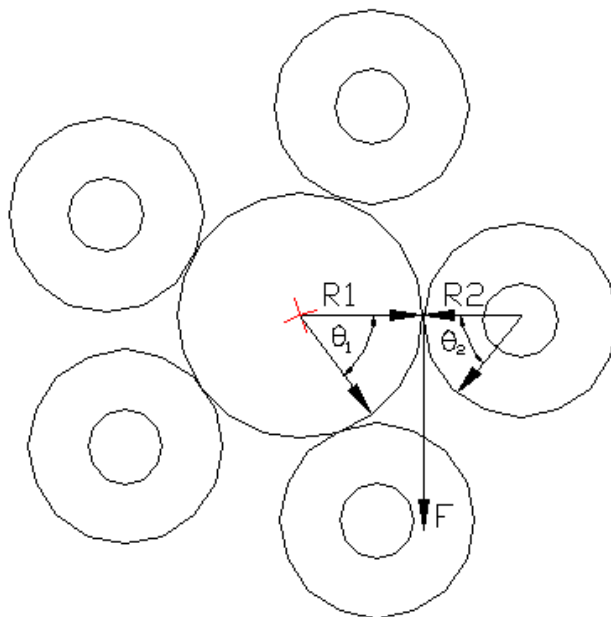
หมายเลข 2 เฟืองขับทำหน้าที่ขับเฟืองตามและต่อไปยังชุดทด



ภาพประกอบ 12 ชุดทดเพื่อให้ได้เปรียบเชิงกล

3.2 การหาสมการ การเคลื่อนที่

การหาสมการการเคลื่อนที่ของชุดทดล้อนั้นสามารถพิจารณาจากแบบจำลองการเคลื่อนที่เพื่อ
กำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ซึ่งสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ของชุดแขนทดล้อได้



ภาพประกอบ 13 แสดงแบบจำลองการเคลื่อนที่ของชุดทดล้อ

จากภาพประกอบ 13 แสดงแบบจำลองการเคลื่อนที่ของชุดกลดล้อสามารถนำมากำหนดตัวแปรต่างๆ ลงในตารางของ DH-Parameter เพื่อไปใช้คำนวณสมการการเคลื่อนที่

Link(i)	$a_i(m)$	α_i	$d_i(m)$	$\theta_i(rad)$
1	0	0°	0	$\theta_1(x_1(t))$
2	R_2	-90°	0	$\theta_2(x_2(t))$

ตาราง 2 แสดง DH-Parameter ของชุดกลดล้อ

3.3 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer programming)

ใช้หลักการเชื่อมโยงกับกล่องเครื่องมือ(Toolbox)ของโปรแกรมแมทแล็บ (Matlab) ซึ่งได้พัฒนานำเอาอนุพันธ์อันดับสาม $\frac{d^3y}{dt^3} = \ddot{x}$ เท้ากับ ความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk) มาใช้ร่วมกับฟังก์ชันของออปติไมซ์เซชันโซลเวอร์ (Optimization solver) และฟังก์ชันแอฟมินคอน (Fmincon) ซึ่งเป็นกล่องเครื่องมือออปติไมซ์เซชัน (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วในแมทแล็บเป็นฟังก์ชันหลักในการแก้ปัญหา (T.Veeraklaew 2005) ซึ่งฟังก์ชันต่างๆในแอฟมินคอน (Fmincon) จะทำหน้าที่ดังนี้ เมื่อรับอินพุต (Input) จาก user.m จะคืนค่าเงื่อนไขบังคับที่เป็นอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ซึ่งแทนค่าออปติไมซ์เซชันพารามิเตอร์ (Optimization parameter)

3.3.1 การหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Matlab

สมการการเคลื่อนที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองที่คำนวณได้จากโปรแกรม MATLAB โดยแทนค่าจากตาราง 1 $d_2 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -90, \theta_1 = x_1(t), \theta_2 = x_2(t)$
 $x(t_0) = (0,0)^T$ $x(t_f) = (1.570, 3.141)^T$ เมื่อกำหนดให้ $t_0 = 0$ และ $t_f = 1.0$ จะผลคำนวณดังนี้

ค่า u_1 สมการอนุพันธ์อันดับสองของแกนที่ 1

$$u_1 = 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 m_2 L_2^2 + \ddot{\theta}_2 m_2 L_2^2 + \left(\frac{981}{100}\right) L_2 m_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \left(\frac{980}{100}\right) L_2 m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (69)$$

ค่า u_2 สมการอนุพันธ์อันดับสองของแกนที่ 2

$$u_2 = (m_2 L_2^2 + 1)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left(\frac{981}{100}\right) L_2 m_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (70)$$

โดยมีการกำหนดขอบเขตของปัญหา (The boundary Conditions) กำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points)

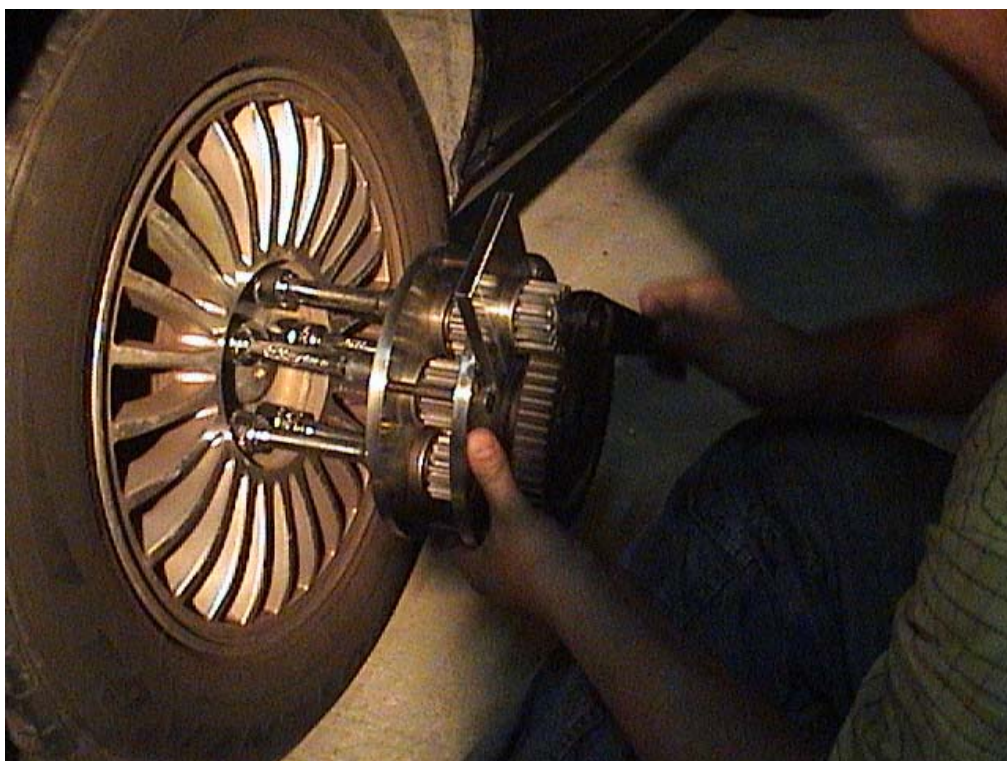
จากการสืบค้นงานวิจัยพบว่า การแก้ปัญหาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีทางออกนั้นง่ายกว่าในการแก้ปัญหาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยการแก้ปัญหาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีทางตรง ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกแก้ปัญหาคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) Cost Function การหาค่าความถี่ธรรมชาติโดยวิธีทางอ้อมกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 u_1^2 + u_2^2 dt \quad (71)$$

3.4 วิธีทำงานของชุดทดล้อ



ภาพประกอบ 14 ชุดเปลี่ยนล้อย่อยแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้



ภาพประกอบ 15 การทำงานของชุดเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

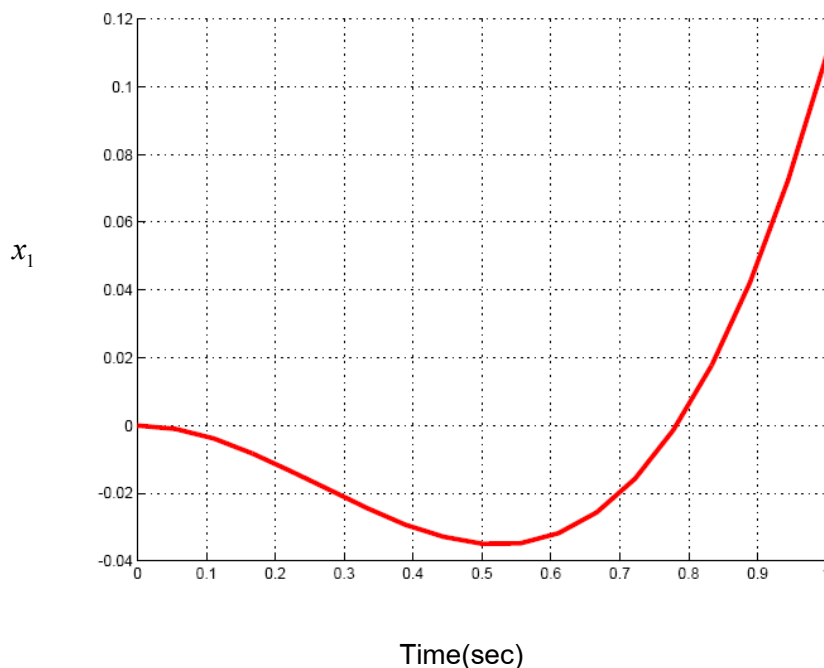
ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยไว้เป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ผลการแก้ปัญหาของความโน้มถ่วงสูงสุดโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์
2. ผลการทำงานของชุดเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกล

4.1 ผลการแก้ปัญหาของความโน้มถ่วงสูงสุดโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

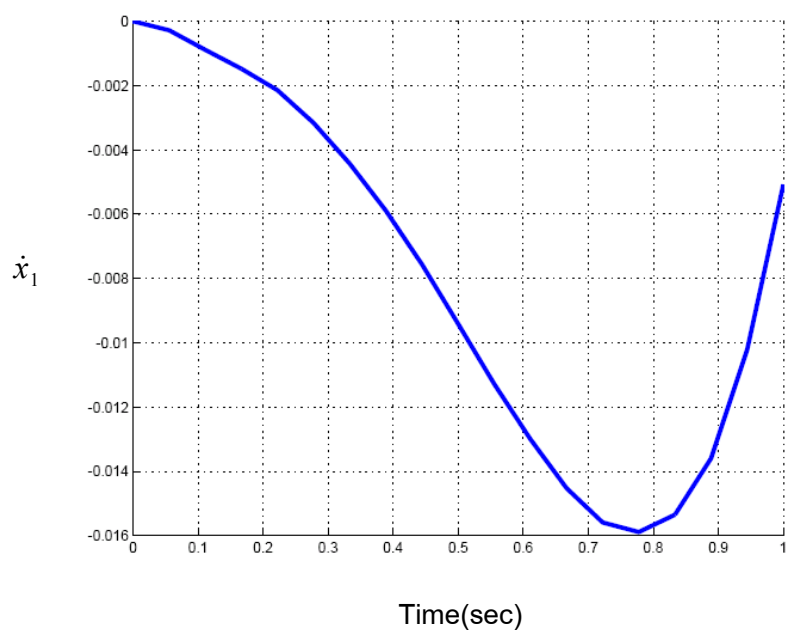
จากการใช้ซอฟต์แวร์ที่พัฒนาโดยพ.อ.ผศ.ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า มาแก้ปัญหาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ในงานวิจัยนี้ได้แนะนำระเบียบวิธีการทางตัวเลข Linear Programming ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่ใช้ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการ

4.1.1 ผลการทดสอบหาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk)



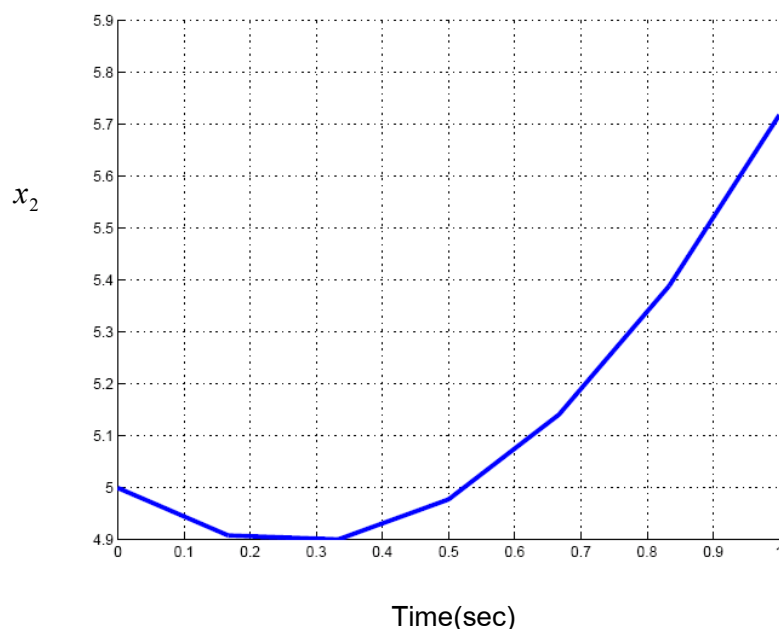
ภาพประกอบ 16 แสดงการเคลื่อนที่ของ $x_1(t)$ เทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 16 กราฟ x_1 สัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ และเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความโน้มถ่วงสูงสุด



ภาพประกอบ 17 แสดงการเคลื่อนที่ของ $\dot{x}_1(t)$ เทียบกับเวลา

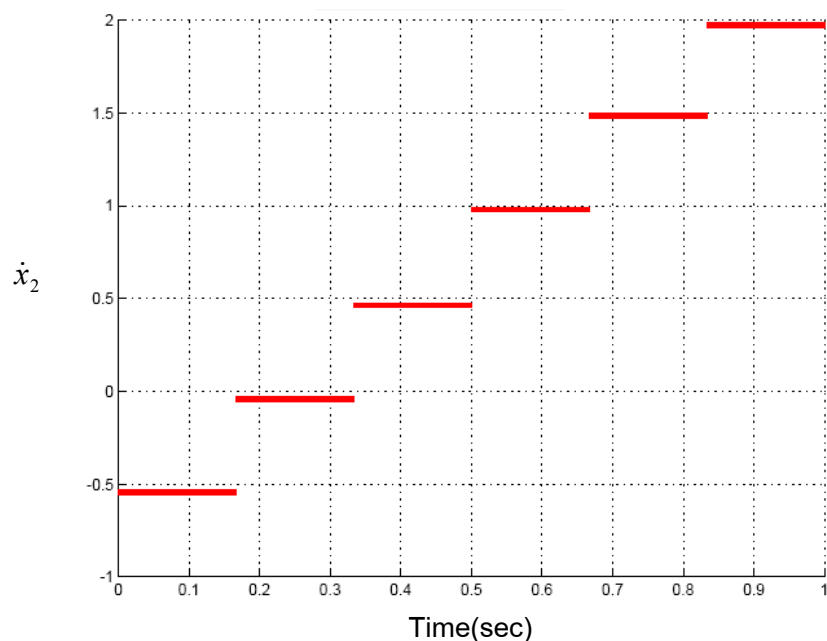
จากภาพประกอบ 17 กราฟ $\dot{x}_1$ สัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ และเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความโน้มถ่วงสูงสุด



ภาพประกอบ 18 แสดงการเคลื่อนที่ของ $x_2(t)$ เทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 18 กราฟ x_2 สัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ และเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0

ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความโน้มถ่วงสูงสุด



ภาพประกอบ 19 แสดงการเคลื่อนที่ของ $X_2(t)$ เทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 19 กราฟ สัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ $\dot{x}_2$ และเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความโน้มถ่วงสูงสุด

4.2 ผลการทดสอบชุดเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพหุพาได้

จากทำการทดสอบการเปลี่ยนล้อจะมีปัญหาในช่วงที่จะสวมลูกบอลเข้ากับหัวน็อตอาจไม่ตรงสามารถแก้ไขได้โดยการเปลี่ยนลูกบอลเป็นหัวแปดเหลี่ยม และในการชันกรณีที่ชันน็อตไว้นั้นมากเกินไปทำให้ต้องมีการใช้ด้ามขันต่อเพื่อเพิ่มแรงขัน แต่ผลโดยรวมแล้วใกล้เคียงกับที่ออกแบบไว้กับตอนแรก

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สรุปผล และนำเสนอไว้เป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. สรุปผล
2. ข้อเสนอแนะทั่วไป
3. ข้อเสนอแนะงานวิจัยครั้งต่อไป

5.1 สรุปผล

จากการวิจัยเรื่องการศึกษาและพัฒนาชุดเครื่องมือเปลี่ยนล้อแบบง่ายได้เปรียบเชิงกลและพกพาได้ในการถอดล้อสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

ผลที่ได้จากการใช้ซอฟต์แวร์ที่พัฒนาโดย พ.อ.ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้ว หาค่าของความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ พบว่าชุดจะเคลื่อนที่ได้อย่างนิ่มนวล จะเริ่มเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นอย่างช้า และเพิ่มความเร็วตามลำดับพอใกล้ถึงจุดสุดท้ายชุดถอดล้อจะค่อยๆลดความเร็วลง และหยุดนิ่งเมื่อถึงจุดสุดท้าย

ผลที่ได้จากการใช้ชุดถอดล้อจะมีการประหยัดเวลาและแรงมากกว่าการถอดล้อแบบใช้ประแจทั่วไปเพราะมีการใช้ชุดฟันเฟืองช่วยในการทดแรงมากขึ้นกว่าเดิม

5.2 ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในการออกแบบสร้างชุดถอดล้อ เราสามารถที่จะออกแบบให้ชุดถอดล้อมีความประหยัดแรงมากกว่าเดิมได้โดยการเพิ่มชุดทดกำลังให้มีอัตราทดมากกว่าเดิมแต่ในการออกแบบควรคำนึงถึงน้ำหนักของชุดถอดล้อที่จะเพิ่มขึ้นตามมาด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะงานวิจัยครั้งต่อไป

ในการวิจัยครั้งต่อไปควรที่ผู้มอเตอรืกระแสดงมาใช้ร่วมกับชุดทดกำลังด้วยโดยใช้ไฟจากแบตเตอรี่รถยนต์เองเพราะมอเตอร์กระแสดงนั้นให้ค่าแรงบิดที่สูงอยู่มาก

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- มนัส สังวรศิลป์, รศ.ดร.; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- Tawirat Veeraklaew, *A New Approach on Direct/Indirect Linear Optimization Problem ;“Bang-Bang” Control : An Equivalent to the Maximum Energy with Free Final Time Problem.*
- Sunil K. Agrawal ,Veeraklaew, T., Fabien, B.C., 1998, “*Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations,*” *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 19, pp.393-410.
- Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, *New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems*, *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic* Vol.24 No.2 pp.228 - 236, 2544
- T. Veerakleaw, *Optimization of Higher – Order System and Extensions of Minimum Principle*, เอกสารประชุมทางวิชาการ – เครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 15 เล่มที่ 2 หน้า MC131-MC140, พฤศจิกายน 2544.
- Sunil K. Agrawal, T.Veerakleaw, *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constrian Using Higher – Order Method with Penalty Function*, *WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics)* Vol.1,2541
- M .V. Bain and M. A. Alcorta Garcia, *Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems*, *Applied Mathematics E - Notes*, 2(2002), 36-44.
- Shiler H. Chang and V. Wong, *The Practical Inplementation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators*, *Robotic & Computer - Integrate Manufacturing.*
- M.C. Renolds, P.H.Meckl, *Composite Optimization Scheme for time Optimal Control.*
- Yotsak Saisanit. (2005). *Maximum Velocity of a Five Degree of Freedom Racing Car* . Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew : Major. Dr. Settapong Malisuwan.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายปิยะบุตร ยิ้มแพน
วันเดือนปีเกิด	30 ธันวาคม 2521
สถานที่เกิด	จังหวัดเพชรบูรณ์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	56/130 นิรันดร์เรซิดენซ์ แขวงดอกไม้ เขตประเวศ จังหวัดกรุงเทพมหานคร 10210 โทรศัพท์ 086-3301931
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2533	ประถมศึกษา (ป.6) จาก โรงเรียนบ้านเทศบาลบ้านศรีมงคล จ.เพชรบูรณ์
พ.ศ.2536	มัธยมศึกษาตอนต้น (ม.3) จาก โรงเรียนสุโขทัยวิทยาคม จ.สุโขทัย
พ.ศ.2539	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.ช่างยนต์) จาก วิทยาลัยเทคนิคสุโขทัย จ.สุโขทัย
พ.ศ.2542	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.ช่างยนต์) จาก มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรสุพรรณบุรี จ.สุพรรณบุรี
พ.ศ.2546	ครุศาสตรบัณฑิต (ค.บ.เครื่องกล) จาก มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรสุพรรณบุรี จ.สุพรรณบุรี
พ.ศ.2553	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ