

คุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำวยดยั้งแบบคลื่น “ดี”
กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิกฤต

ปริญญาณินท์
ของ
ภรพนา บุญมา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
เมษายน 2546
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

538.72

๗1859

๖.3

คุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่น "ดี"
กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์

บทคัดย่อ

ของ

ภรพนา บุญมา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
เมษายน 2546

๒ ๕๕๖๖

ภรพนา บุญมา. (2546). คุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์. ปรินซ์ตันนิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์).
กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :
ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน, รองศาสตราจารย์ ดร. ณสรณ์ ผลโกล.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ โดยใช้ทฤษฎีบีซีเอส ประกอบกับปรากฏการณ์ซีมานอันเนื่องจากการที่อิเล็กตรอนถูกสนามแม่เหล็กกระทบ

ผลการคำนวณได้สูตรของช่องว่างพลังงานว่ามีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อสนามแม่เหล็กเพิ่มความเข้มสูงขึ้น และมีค่าลดลง เมื่อ ω_D / T_c มีค่าเพิ่มขึ้น แต่สนามแม่เหล็กวิกฤตและผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่อุณหภูมิวิกฤต กลับมีค่าลดลง เมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงขึ้น และเมื่อ ω_D / T_c มีค่าเพิ่มขึ้น

THERMODYNAMIC PROPERTIES OF D-WAVE SUPERCONDUCTORS
IN A MAGNETIC FIELD AT TEMPERATURE
NEAR THE CRITICAL TEMPERATURE

AN ABSTRACT
BY
PORNPANA BOONMA

Presented in partial fulfillment of requirements
for the Master of Science degree in Physics
at Srinakharinwirot University
April 2003

Pornpana Boonma. (2003). *Thermodynamic Properties of d-wave Superconductors in a Magnetic Field at Temperature near the Critical Temperature*. Master thesis, M.S. (Physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University.
Advisor Committee : Professor. Dr. Suthat Yoksan, Associate. Professor.
Dr. Nason Phonphok.

The purpose of this research is to study the thermodynamic properties of d-wave superconductors in a magnetic field at temperature near the critical temperature on the basic BCS gap equation together with the Zeeman-effect phenomenon.

It is found that energy gap increases with increasing magnetic fields and decreases with increasing ω_D / T_c , but the critical field and specific heat differences between the superconducting and normal phases at T_c decrease with increasing magnetic field and ω_D / T_c .

ปริญญานิพนธ์

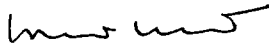
เรื่อง

คุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี”
กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต

ของ

นางสาวภรพนา บุญมา

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

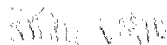


.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาพร หะวานนท์)

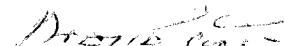
วันที่.....๒๙.....เดือน.....เมษายน.....พ.ศ. ๒๕๔๖.

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์



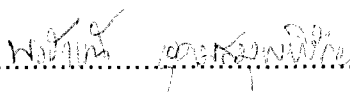
.....ประธาน

(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)



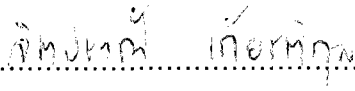
.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ณสรวง ผลโภค)



.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)



.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ จิตปรางค์ เกียรติกุล)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน ที่ได้อบรมให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา และตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ด้วยวิญญูณของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ณสรวงศ์ ผลโภาค อาจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ จิตปราณี เกียรติกุล ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ให้คำปรึกษา และความเป็นกันเอง กับผู้วิจัยตลอดระยะเวลาการศึกษาในสถานศึกษาแห่งนี้

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ ทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำงานวิจัย

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และบุคคลในครอบครัวทุกๆ คน ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนในเรื่องต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

ภรพนา บุญมา

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	2
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	9
ขอบเขตของการวิจัย.....	9
ความสำคัญของการวิจัย.....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
ทฤษฎีบีบีซีเอส.....	10
ทฤษฎีสารตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง.....	16
สารตัวนำวดยิ่งกรณีที่มีสนามแม่เหล็ก.....	21
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	26
4 ผลการวิจัย.....	41
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	50
สรุปผล.....	50
อภิปรายผล.....	51
ข้อเสนอแนะ.....	52
บรรณานุกรม.....	53
ภาคผนวก.....	56
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	97

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิต่ำ.....	1
2 แสดงความต้านทานไฟฟ้าของปรอทกับอุณหภูมิ.....	2
3 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ.....	3
4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิของสารตัวนำยวดยิ่ง.....	4
5 แสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์ของสารตัวนำยวดยิ่ง.....	5
6 แสดงพัฒนาการของการค้นพบสารตัวนำยวดยิ่ง.....	6
7 แสดงโครงสร้างของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงของสารประกอบเซรามิกส์ออกไซด์ YBa ₂ Cu ₃ O ₇	7
8 แสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอน.....	11
9 แสดงช่องว่างพลังงานลดทอนกับอุณหภูมิลดทอนของสารตัวนำยวดยิ่ง ทลทาเลียม เปรียบเทียบกับทฤษฎี BCS.....	13
10 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของความร้อนจำเพาะของดีบุกและวานาเดียมในสภาพนำ ยวดยิ่ง กับผลการคำนวณของทฤษฎี BCS.....	14
11 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta^2(T)/\Delta_{BCS}^2(T)$ กับ ω_0/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$	17
12 แสดงกราฟระหว่าง $H_c(T)/H_{c,BCS}(T)$ กับ ω_0/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$	19
13 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C_S(T)/C_N(T_c)$ กับ ω_0/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$	20
14 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C_d(T)/C_N(T_c)$ กับ ω_0/T_c ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$	20
15 แสดงความร้อนจำเพาะของสารที่อุณหภูมิต่ำที่สนามแม่เหล็กความเข้มต่างๆ.....	21
16 แสดงกราฟระหว่าง C/T กับ T^2 เมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้ม 8 เทสลา.....	22
17 แสดงความร้อนจำเพาะลดทอนของอิเล็กตรอนในสภาพนำยวดยิ่งกับอุณหภูมิ ลดทอนที่สนามแม่เหล็กความเข้มต่างๆ.....	23
18 แสดงผลต่างของความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนกับสนามแม่เหล็ก.....	23

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$	45
20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$	46
21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$	46
22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$	47
23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$	47
24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$	48
25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_c,B)/C_N$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$	48
26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_c,B)/C_N$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$	49

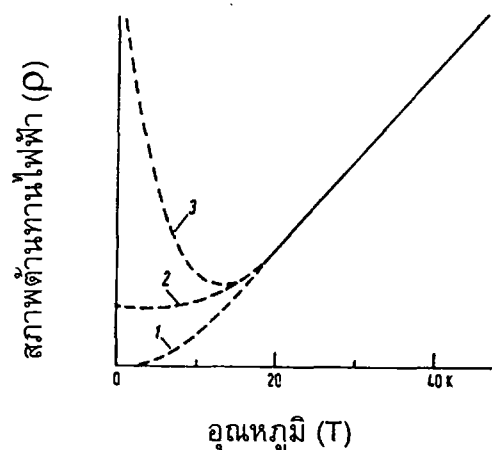
บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

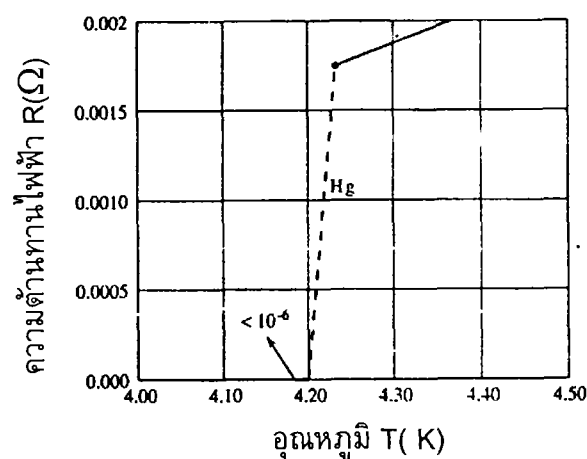
ในปี ค.ศ. 1898 เมื่อ ดิวาร์ (Sacchetti. 2000 : 2618 ; citing Dewar. 1898) ได้ประสบความสำเร็จในการทำแก๊สไฮโดรเจนให้เป็นของเหลว งานขั้นต่อไปที่ ดิวาร์ กับ ออนเนส มุงมันน์ทำคือแข่งขันกันเป็นบุคคลแรกที่สามารถทำแก๊สฮีเลียมให้เป็นของเหลวซึ่งเป็นการทดลองที่ยากที่สุด ผลปรากฏว่าในวันที่ 10 กรกฎาคม ปี ค.ศ. 1908 ออนเนส ก็ได้รับชัยชนะ โดยสามารถผลิตฮีเลียมเหลวปริมาตร 60 ลูกบาศก์เซนติเมตร ได้สำเร็จเป็นครั้งแรก

ออนเนส ใช้ฮีเลียมเหลวที่ได้ ศึกษาสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิต่ำมาก โดยได้วัดความต้านทานไฟฟ้าของปรอทและทองคำบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิต่ำ โดยใช้ฮีเลียมเหลว เป็นสารหล่อเลี้ยง ทั้งนี้เพราะโลหะทั้งสองชนิดนี้สามารถทำให้บริสุทธิ์ได้ง่ายกว่าโลหะชนิดอื่น เหตุผลสำคัญที่ทำให้ ออนเนส สนใจศึกษาสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะ เนื่องจากว่าในเวลานั้นนักฟิสิกส์มีทฤษฎีที่ใช้อธิบายพฤติกรรมสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิต่ำ อยู่หลายทฤษฎี ดังภาพประกอบ 1 เช่น บางคนเชื่อว่า ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สภาพต้านทานไฟฟ้าของทุกโลหะเป็นศูนย์ (เส้นที่ 1) และบางคนคิดว่าที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สภาพต้านทานไฟฟ้ามีค่าน้อยแต่ไม่เป็นศูนย์ และค่าๆ นี้จะคงที่คือไม่เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ (เส้นที่ 2) และที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะมีค่าอนันต์ โดยที่เมื่อโลหะมีอุณหภูมิหนึ่งโลหะจะมีความต้านทานไฟฟ้าน้อยที่สุด (เส้นที่ 3)



ภาพประกอบ 1 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของสภาพต้านทานไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิต่ำ (Bückel. 1991 : 1)

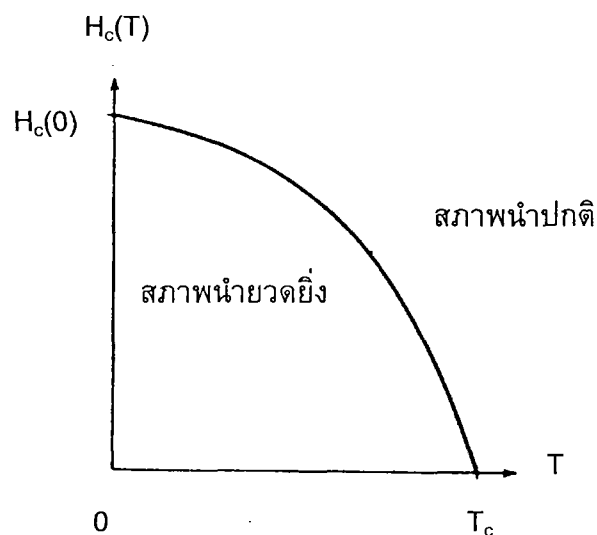
ในปี ค.ศ. 1911 ฮอนเนส (Sacchetti. 2000 : 2618 ; citing Onnes. 1911) ได้พบว่า ความต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ลดลงอย่างสม่ำเสมอเมื่ออุณหภูมิลดต่ำ แต่เมื่ออุณหภูมิลดถึง 4.2 องศาเซลเซียส ความต้านทานไฟฟ้าของปรอทได้ตกอย่างรวดเร็ว ดังภาพประกอบ 2 จนกระทั่งมีค่าน้อยกว่า 10^{-6} เท่าของความต้านทานไฟฟ้าที่อุณหภูมิห้อง อาจกล่าวได้ว่าความต้านทานไฟฟ้าของปรอทเป็นศูนย์ เขาจึงเรียกปรากฏการณ์ที่สารไร้ความต้านทานไฟฟ้าว่า “สภาพนำยวดยิ่ง” (Superconductivity) และเรียกอุณหภูมิที่เกิดปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งว่า “อุณหภูมิวิกฤต” (Critical temperature, T_c)



ภาพประกอบ 2 แสดงความต้านทานไฟฟ้าของปรอทกับอุณหภูมิ (Orlando & Delin. 1991 : 3)

ในปี ค.ศ. 1913 ฮอนเนส ได้ทดลองพบว่าตามปกติเวลาที่มีกระแสไฟฟ้าไหล สารก็ยังคงอยู่ในสภาพตัวนำยวดยิ่ง แต่ถ้าความหนาแน่นกระแสไฟฟ้ามีค่าสูงกว่าค่าๆ หนึ่งสารจะกลายสภาพเป็นตัวนำปกติทันที เขาจึงเรียกความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าค่านี้ว่า “ความหนาแน่นกระแสวิกฤต” (Critical current density, J_c) ซึ่งปริมาณนี้ขึ้นกับอุณหภูมิ (T) กล่าวคือ J_c มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ T ลด

ในปี ค.ศ. 1914 ฮอนเนส ได้พบอีกว่าสนามแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งได้เช่นเดียวกับความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าวิกฤต เขาเรียกสนามแม่เหล็กนี้ว่า “สนามแม่เหล็กวิกฤต” (Critical magnetic field, H_c) นั่นคือถ้าสนามแม่เหล็กมีความเข้มมากกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตแล้วสารตัวนำยวดยิ่งจะกลายสภาพเป็นตัวนำปกติ ผลที่ได้จากการทดลองสามารถเขียนเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิได้ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ (Orlando & Devin. 1991 : 291)

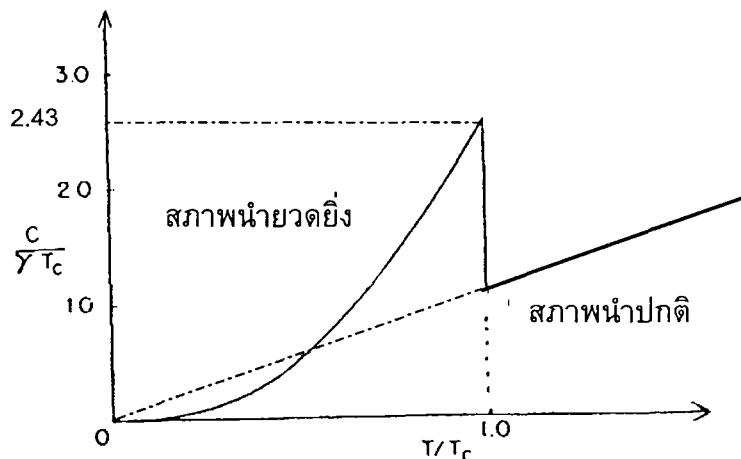
และเขียนสมการของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ขึ้นกับอุณหภูมิได้ดังนี้คือ

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad \dots\dots\dots(1-1)$$

เมื่อ $H_c(0)$ และ $H_c(T)$ คือสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ และที่อุณหภูมิ T ใดๆ ตามลำดับ และ T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของสารนั้น

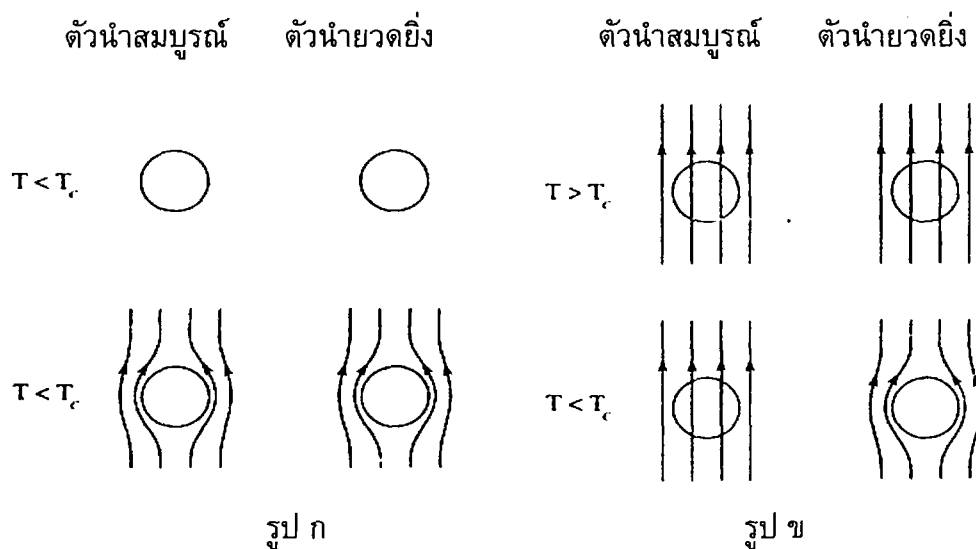
ในปี ค.ศ. 1916 ซิลสบี (Sacchetti. 2000 : 2618 ; citing Silsbee. 1916) ได้ศึกษาสภานายวดยิ่งในลวดกับสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ และได้อธิบายว่า “กระแสวิกฤตเหนี่ยวนำคือปัจจัยที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ผิวของลวด” ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่าปัจจัยที่ทำลายสภานายวดยิ่งคือ อุณหภูมิ ความหนาแน่นกระแส และสนามแม่เหล็ก

ในปี ค.ศ. 1924 คีซัม (Chandrasekhar. 1969 : 7 ; citing Keesom. 1924) ได้ทดลองวัดค่าความร้อนจำเพาะ (C) ของตัวนำวดยิ่งดีบุก และตัวนำวดยิ่งชนิดอื่นๆ พบว่าความร้อนจำเพาะมีค่าไม่ต่อเนื่อง คือ จะกระโดดขึ้นทันทีที่สารกลายสภาพจากตัวนำปกติเป็นตัวนำวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤต ดังภาพประกอบ 4 โดยการเปลี่ยนสถานะนี้ไม่ใช้ความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสภาพ ทำให้เราทราบคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำวดยิ่งว่าที่อุณหภูมิวิกฤต ปรากฏการณ์สภานายวดยิ่งเป็นการเปลี่ยนเฟสลำดับที่สอง



ภาพประกอบ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิของสารตัวนำยวดยิ่ง (Chandrasekhar, 1969 : 7) , γ คือค่าคงที่ของซอมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld's constant)

ในปี ค.ศ. 1933 ไมส์เนอร์ (Orlando & Delin, 1991 : 67) ขณะศึกษาสารตัวนำในสนามแม่เหล็ก ได้พบคุณสมบัติของการเป็นสารแม่เหล็กแบบไดอา (Diamagnetic) ของตัวนำยวดยิ่งซึ่งแตกต่างจากคุณสมบัติของตัวนำสมบูรณ์ (Perfect conductor) ดังภาพประกอบ 5 รูป ก ว่าเวลาลดอุณหภูมิของสารตัวนำจนกระทั่งมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต ($T < T_c$) แล้วให้สนามแม่เหล็กแก่สารตัวนำ ซึ่งเรียกรวธีการนี้ว่า Zero-field cooled ซึ่งเป็นการให้สนามแม่เหล็กกระทบบสารขณะที่สารอยู่ในสภาพตัวนำยวดยิ่ง จะเห็นว่าในกรณีนี้สนามแม่เหล็กไม่สามารถทะลุผ่านเข้าไปในตัวนำสมบูรณ์และตัวนำยวดยิ่งได้ แต่ในรูป ข ไมส์เนอร์ ได้พบว่าหากมีสนามแม่เหล็กกระทบบสารตัวนำขณะ $T > T_c$ แล้วลดอุณหภูมิของสารตัวนำจนกระทั่ง $T < T_c$ ซึ่งเรียกรวธีการนี้ว่า Field cooled อันเป็นการให้สนามแม่เหล็กกระทบบสารตั้งแต่สารยังอยู่ในสภาพตัวนำปกติ ในกรณีนี้สนามแม่เหล็กสามารถทะลุผ่านเข้าไปในตัวนำสมบูรณ์ได้ แต่ไม่สามารถผ่านเข้าไปในตัวนำยวดยิ่งได้ ผลการทดลองนี้สามารถอธิบายได้ว่าเมื่อมีสนามแม่เหล็กกระทบบสารตัวนำยวดยิ่ง มันจะผลักสนามแม่เหล็กออกจากตัวมัน ปรากฏการณ์นี้เกิดจากการมีกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิว และทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำซึ่งจะหักล้างสนามแม่เหล็กภายนอก ทำให้สนามแม่เหล็กภายในตัวนำยวดยิ่งมีค่าเป็นศูนย์ ปรากฏการณ์นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม “ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์” (Meissner effect) หรือบางครั้งเรียกว่า “ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์-ออกเซนเฟลด์” (Meissner -Ochsenfeld effect) สำหรับตัวนำยวดยิ่งเกิดขึ้นได้ทั้งในกรณี Zero-field cooled และกรณี Field cooled แต่สำหรับตัวนำสมบูรณ์จะไม่แสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ ในกรณี Field cooled



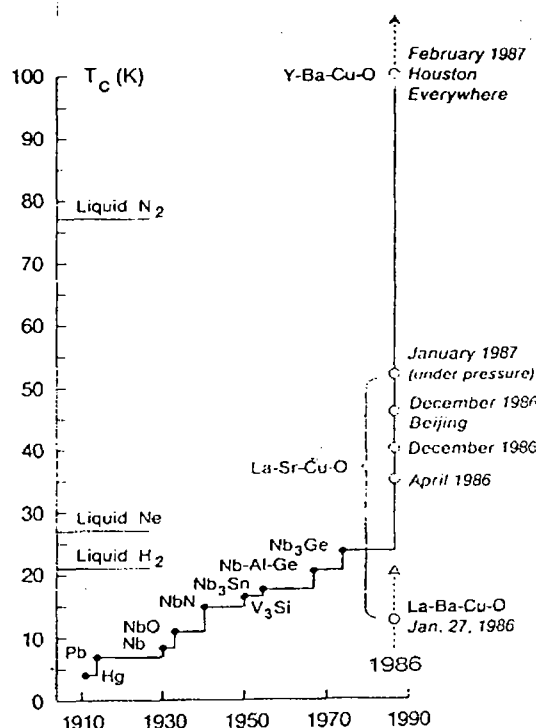
ภาพประกอบ 5 แสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ของสารตัวนำยวดยิ่ง (Orlando & Delin. 1991 : 67) กรณี Zero-field cooled (รูป ก) และในกรณี Field cooled (รูป ข)

ดังนั้นในการตรวจสอบความเป็นตัวนำยวดยิ่งของสาร นอกจากจะตรวจสอบคุณสมบัติการนำไฟฟ้าอย่างสมบูรณ์แล้วจะต้องตรวจสอบคุณสมบัติเชิงแม่เหล็กที่พิสดารนี้ด้วย จึงอาจกล่าวได้ว่า “คุณสมบัติการนำไฟฟ้าอย่างสมบูรณ์กับคุณสมบัติการเป็นสารแม่เหล็กได้อาอย่างสมบูรณ์เป็นคุณสมบัติพื้นฐานคู่ของตัวนำยวดยิ่ง”

ในปี ค.ศ. 1950 ได้มีการค้นพบปรากฏการณ์ไอโซโทปโดยแม็กเวล และเรย์โนล์ (Bückel. 1991 : 43 ; citing Maxwell. 1950, Reynold. 1950) ว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งเป็นปฏิกิริยาผกผันกับรากที่สองของมวลไอโซโทป ($T_c \propto M^{-1/2}$) ซึ่งก่อนหน้านี้ในปี ค.ศ. 1922 ออนเนส และ ไทน์ (Bückel. 1991 : 43 ; citing Tuyn. 1922) ได้เคยศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปโดยใช้ไอโซโทปของตะกั่ว (Pb) แต่การทดลองก็ล้มเหลว อีก 19 ปีต่อมา จัสติ (Bückel. 1991 : 43 ; citing Justi. 1941) ได้พยายามอีกครั้งแต่ก็ล้มเหลวอีก ปรากฏการณ์ไอโซโทปแสดงให้เห็นว่าสาเหตุการเกิดสภาพนำยวดยิ่งนั้นขึ้นกับโครงสร้างผลึก หรือกล่าวได้ว่าสภาพนำยวดยิ่งเกิดจากอันตรกิริยาแบบรุนแรงระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซ ในปีเดียวกันนั้นโฟรห์ลิช (Sacchetti. 2000 : 2621 ; citing Frohlich. 1950) ได้เสนอความคิดว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซคือสาเหตุทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง นอกจากนี้ยังมีการทดลองอื่นๆ ที่สนับสนุนแนวคิดนี้เช่นกัน เช่น การวัดสมบัติการสะท้อนของคลื่นอินฟราเรด, สมบัติการดูดกลืนคลื่นอัลตราไวโอเลต (Rieck, et al. 1995 : 3772) และผลที่ได้จากการวัดความร้อนจำเพาะของสารตัวนำยวดยิ่งพบว่าสารตัวนำยวดยิ่งมีช่องว่างพลังงานที่มีค่าประมาณ 10^{-3} eV. และการค้นพบเหล่านี้ได้ชี้แนวทางให้นักทฤษฎีคิดหาทฤษฎีที่สามารถอธิบายคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่ง

ยิ่งได้อย่างสอดคล้องกับผลการทดลอง ทฤษฎีดังกล่าวนี้คือ ทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ซึ่งถือกำเนิดในปี ค.ศ. 1957 โดย บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชริฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper & Schriffer. 1957)

พัฒนาการของการวิจัยทำให้พบสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นเรื่อยๆ ปรากฏในภาพประกอบ 6



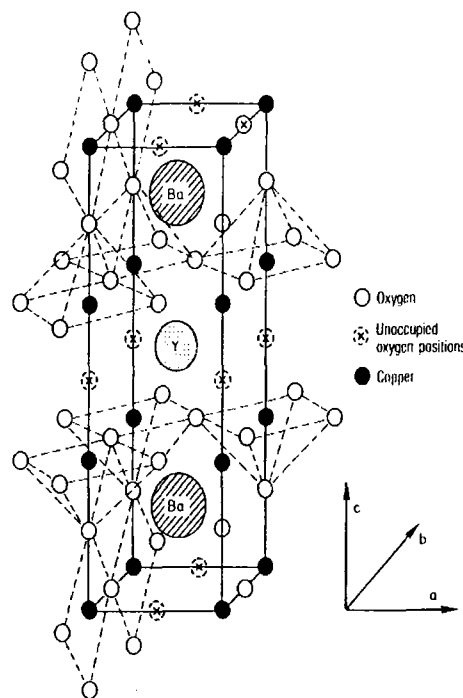
ภาพประกอบ 6 แสดงพัฒนาการของการค้นพบสารตัวนำยวดยิ่ง (Bednorz & Müller. 1987 :

23)

ซึ่งเห็นได้ว่าตั้งแต่มีการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งของปรอท ในปี ค.ศ. 1911 และในปี ค.ศ. 1973 ที่พบสภาพนำยวดยิ่งในโลหะเจือของไนโอเบียม-เจอร์มาเนียม (Nb_3Ge) ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤต 23.3 K แล้วในช่วงเวลาดังกล่าวนี้ อัตราการเพิ่มขึ้นของ T_c โดยเฉลี่ยมีค่าประมาณ 0.3 K ต่อปี ทั้งๆ ที่หลังจากนั้นนักวิทยาศาสตร์ได้พยายามเพิ่มค่า T_c ให้สูงกว่า 23.3 K แต่ก็ไม่ประสบความสำเร็จใดๆ จนกระทั่งได้มีการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตสูงเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1986 โดยเบดเนอร์ซ และมุลเลอร์ (Bednorz & Müller. 1987 : 23) ซึ่งได้พบสภาพนำยวดยิ่งในสารประกอบเซรามิกส์ออกไซด์ La_2CuO_4 ที่ถูกโด๊ปด้วย Ba ว่ามีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 35 K ต่อมาอีกหนึ่งปี ชู และคณะ (Chu, et al. 1987) ก็ได้พบว่าสารประกอบเซรามิกส์ออกไซด์ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ สามารถเป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 90 K ได้ เหตุการณ์นี้สร้างความ

ต้นตอมาสู่การของงานวิจัยสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งมาก และได้ทำให้นักวิทยาศาสตร์พยายามค้นคว้าหาตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงยิ่งขึ้นไปอีก ในปีค.ศ. 1993 นักวิทยาศาสตร์กลุ่ม ETH แห่งเมืองซูริค ก็ได้รายงานผลการค้นพบสภาพนำยิ่งยวด ในสารประกอบของ HgBaCaCuO ที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 130 K (Schilling, et al. 1993 : 204) ในขณะที่ ลาค และคณะ (Myers. 1997 : 452 ; citing Lague, et al. 1993) ได้รายงานว่าสามารถเตรียมฟิล์มบางของสารประกอบ BiSrCaCuO ซึ่งแสดงสมบัติการเป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤต 250 K ได้ ถ้าการค้นพบนี้เป็นจริงสารดังกล่าวจะมีอุณหภูมิสูงกว่าที่พบในสารประกอบของปรอทประมาณ 100 K อย่างไรก็ตามผลการค้นพบนี้ยังไม่ได้รับการยืนยันจากนักวิทยาศาสตร์กลุ่มอื่น

การศึกษาโครงสร้างของสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงของสารประกอบเซรามิกส์ได้ทำให้เรารู้ว่ามีโครงสร้างที่ประกอบด้วยระนาบของ Cu-O_2 เป็นชั้นๆ ดังภาพประกอบ 7 และในระหว่างชั้นมีอะตอมของโลหะชนิดอื่นคั่นอยู่ ซึ่งอะตอมนี้ทำหน้าที่เป็นฉนวน การนำไฟฟ้าจึงเกิดขึ้นในระนาบของ Cu-O_2 โดยมีอิเล็กตรอนของอะตอม Cu เป็นตัวการสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพนำยิ่งยวด และการลดอุณหภูมิได้ทำให้โครงสร้างผลึกเปลี่ยน และการที่โครงสร้างของผลึกเปลี่ยนไป ได้ทำให้สารกลุ่มนี้สามารถแสดงสมบัติการเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ เพราะฉะนั้นสภาพตัวนำยิ่งยวดจึงมีความสัมพันธ์โดยตรงกับจำนวนระนาบ Cu-O_2 ที่มีในโมเลกุล จึงกล่าวได้ว่าการนำไฟฟ้าของอิเล็กตรอนตัวนำยิ่งยวด เป็นการนำไฟฟ้าใน 2 มิติ



ภาพประกอบ 7 แสดงโครงสร้างของสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงของสารประกอบเซรามิกส์ ออกไซด์ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ (Bückel. 1991 : 222)

นอกจากนี้นักวิทยาศาสตร์พบว่า คู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีเลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุม $\ell = 2$ จึงเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีเลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับสองนี้ว่าตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” (d-wave superconductor) (Myers. 1997 : 452) ซึ่งแตกต่างจากทฤษฎี BCS ที่ใช้อธิบายกรณีอิเล็กตรอนสองตัวมีการจับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์ ในลักษณะที่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นศูนย์ $\ell = 0$ ซึ่งเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับศูนย์นี้ว่าตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“เอส” (s-wave superconductor) ทฤษฎี BCS สามารถอธิบายคุณสมบัติต่างๆ ของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำได้สอดคล้องกับผลการทดลอง แต่สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงนั้นอิเล็กตรอนสองตัวยังมีการจับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์อยู่ แต่กลไกที่อิเล็กตรอนทั้งสองใช้ในการจับคู่กันนั้นยังไม่อาจสรุปได้ว่าเกิดจากสาเหตุใด

ในการทดลองวัดความไวในการเปลี่ยนเฟสของคลื่น นักวิทยาศาสตร์ใช้เครื่องมือและเทคนิคต่างๆ เช่น angle-resolved photoemission spectroscopy (ARPES) , nuclear magnetic resonance (NMR) relaxation rates และ SQUID เป็นต้น (Sundb & Strong. 1995 : 1338) โดยในปี ค.ศ. 1994 บราวเนอร์ และออกตต์ (Brawner & Ott. 1994 : 6530) ได้ใช้อุปกรณ์ที่เรียกว่า SQUID ศึกษาสารประกอบของ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$ ที่มีรอยต่อกับโลหะ Nb และได้พบว่าสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีการจับคู่แบบคลื่น“ดี” ในปี ค.ศ. 1995 ฮาร์ลิเจน และวอลแมน (Pines & Monthoux. 1995 : 1651 ; citing Harligen & Wollman. 1995) ได้ทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในทิศทางต่างๆ โดยใช้อุปกรณ์ SQUID พบว่าช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทาง (Anisotropic) จึงพิสูจน์ได้ว่าการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นแบบคลื่น“ดี” และเมื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ก็พบว่าสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีการเปลี่ยนเฟสลำดับที่สอง (Atake, et al. 1988 : 552) ในลักษณะเดียวกับที่ทฤษฎี BCS ได้อธิบายไว้สำหรับสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำแบบคลื่น“เอส” แต่พบว่าในสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” นั้นความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิต่ำขึ้นกับกำลังสองของ T (Garg & Bose. 1998 : 181) ซึ่งแตกต่างจากสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำแบบคลื่น“เอส” ในทฤษฎี BCS ซึ่งขึ้นกับ $e^{-a/T}$ เมื่อ a คือค่าคงที่

ดังนั้นงานวิจัยด้านทฤษฎี ที่จะใช้อธิบายคุณสมบัติของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“ดี” โดยอิงทฤษฎี BCS จะเป็นการปรับปรุงรายละเอียดของทฤษฎีให้ถูกต้องยิ่งขึ้นให้ครอบคลุมกรณีสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงแบบคลื่น“ดี”ด้วย เมื่อเร็วๆ นี้ ครุณวการ, เกศกมลასน์ และยกสำน (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 305) ได้ศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น“เอส”และ“ดี” ขณะไม่มีสนามแม่เหล็กกระทำโดยใช้ทฤษฎี BCS ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ เพื่ออธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่ง

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงต้องการขยายงานวิจัยดังกล่าว โดยจะศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหภูมิศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ขณะอยู่ในสนามแม่เหล็ก ที่มีอุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต เพื่อให้เข้าใจธรรมชาติของสภาพนำยวดยิ่งได้ดีขึ้น

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็กของช่องว่างพลังงาน ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต
2. เพื่อศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็กของผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต
3. เพื่อศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็กของสนามแม่เหล็กวิกฤต ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต
4. เพื่อศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็กของผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต โดยใช้ทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งมีเงื่อนไขคือ พลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพลังงานความร้อน และอันตรกิริยาของการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนเป็นอันตรกิริยาอย่างอ่อน

ความสำคัญของการวิจัย

ได้สมการที่ใช้อธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหภูมิศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งจะทำให้เข้าใจธรรมชาติของสภาพตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงได้ดีขึ้น อีกทั้งสามารถใช้เป็นแนวทางในการประยุกต์สารตัวนำยวดยิ่งให้เกิดประโยชน์สูงสุด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทฤษฎีบีซีเอส
2. ทฤษฎีสารัตว์นำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง
3. สารัตว์นำยวดยิ่งกรณีที่มีสนามแม่เหล็ก

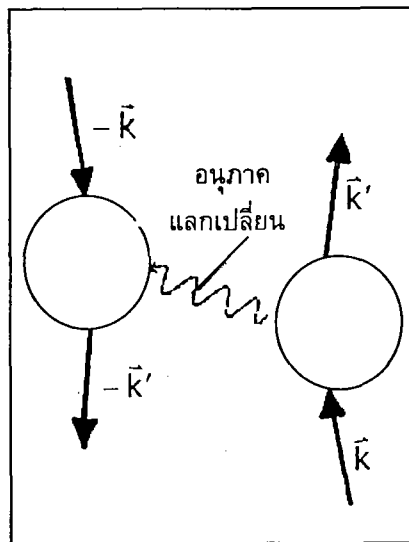
ทฤษฎีบีซีเอส

ในปี ค.ศ. 1957 บาร์ดีน, คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper & Schrieffer. 1957) ได้เสนอทฤษฎีที่เรียกว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ซึ่งสามารถอธิบายคุณสมบัติและสาเหตุของการเกิดสภาพนำยวดยิ่งได้ โดยใจความสำคัญของทฤษฎีนี้ได้กล่าวว่สาเหตุสำคัญที่ทำให้ตัวนำปกติเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งเกิดจากอันตรกิริยาแบบดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนสองตัวภายในตัวนำยวดยิ่งโดยอาศัยโฟนอนเป็นสื่อกลางในการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอน ซึ่งอันตรกิริยานี้มีค่ามากกว่าแรงผลักระหว่างอิเล็กตรอนมาก BCS เรียกคู่อิเล็กตรอนนี้ว่า “คูคูเปอร์” (Cooper pair) และในสารัตว์นำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำนั้นการจับคู่ของอิเล็กตรอนจะเป็นไปในลักษณะที่ว่สปิน และโมเมนตัม ของคู่อิเล็กตรอนจะตรงกันข้ามทำให้สปินลัพธ์และโมเมนตัมลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์ การจับคู่จึงเป็นแบบคลื่น “เอส” (S-wave)

อันตรกิริยาแบบดึงดูดนี้จะเกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่เข้าไประหว่างกลุ่มอออนที่มีประจุบวก และอิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดอออนบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ๆ ทำให้บริเวณรอบอิเล็กตรอนตัวนั้นมีความหนาแน่นของอออนบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งมีผลกระทบท่ออิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งที่อยู่ใกล้บริเวณนั้น อิเล็กตรอนจะถูกกลุ่มอออนบวกดึงดูดเข้าไปจึงทำให้ดูเหมือนว่าอิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดอิเล็กตรอนตัวหลัง อิเล็กตรอนที่จับคู่กันจะมีพลังงานในบริเวณใกล้เคียงเฟอร์มิเป็นคูคูเปอร์ โดยมีระยะห่างระหว่างคู่อิเล็กตรอน เรียก ความยาวอาพันธ์ (Coherence length)

ตามปกติเวลาอออนบวกในแลตทิซของโลหะสั่นจะทำให้เกิดคลื่นแลตทิซ ซึ่งเป็นสภาวะกระตุ้นของแลตทิซ เรียกว่า โฟนอน (Phonon) การแลกเปลี่ยนโฟนอนระหว่างอิเล็กตรอนตัวหนึ่งกับอิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งหรือการรับและคายโฟนอนระหว่างอิเล็กตรอนทั้ง

สองทำให้เกิดแรงดึงดูด ซึ่งสามารถเอาชนะอันตรกิริยาผลึกแบบคูลอมบ์ได้ อันตรกิริยาลัทธิระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองจึงเป็นแรงดึงดูดอย่างอ่อน (Weak attractive interaction) แรงดึงดูดนี้มีค่าสูงสุดเมื่ออิเล็กตรอนทั้งสองมีโมเมนตัมที่มีขนาดเท่ากันและสปินตรงข้ามกัน เราสามารถแสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอนได้ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 แสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอน (Bückel. 1991 : 35)

นอกจากนี้ตัวนำวยดยังมีคุณสมบัติที่แตกต่างจากตัวนำปกติอีกประการหนึ่งคือ เมื่อสารตัวนำปกติกลายสภาพเป็นตัวนำวยดยังจะมีช่องว่างพลังงานซึ่งมีค่าเท่ากับ 2Δ เกิดขึ้นที่ผิวเฟอร์มี (Fermi surface) ช่องว่างนี้เกิดจากการที่อิเล็กตรอนสองตัวจับคู่กันเพื่อทำให้พลังงานของกลุ่มมันลดลง การที่เราเรียกช่องว่างพลังงานเพราะจะไม่มีอิเล็กตรอนตัวใดที่มีพลังงานอยู่ในระหว่างช่องว่างพลังงานนั้น พลังงานภายนอกใดๆ ที่สามารถกระตุ้นอิเล็กตรอนได้ต้องมีค่ามากกว่า 2Δ จึงจะสามารถทำลายสภาพนำวยดยิ่งได้

ทฤษฎี BCS ได้กำหนดสมการของช่องว่างพลังงาน (Gap equation) ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของตัวนำวยดยิ่งบริสุทธิ์แบบคลื่น “เอส” ในกรณีไม่มีสนามแม่เหล็กไว้ดังนี้ (Rickayzen. 1969 : 51)

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2E_{\vec{k}'}} \tanh\left(\frac{\beta E_{\vec{k}'}}{2}\right) \quad \dots\dots\dots(2-1)$$

โดย $E_{\vec{k}'} = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}$, $\beta = 1/T$

$E_{\vec{k}'}$ คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\varepsilon_{\vec{k}'}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\Delta_{\vec{k}}$ คือ ช่องว่างพลังงาน

$V_{\vec{k}\vec{k}'}$ คือ เมตริกซ์ (Matrix) สำหรับอันตรกิริยาการกระเจิงของคูคูเปอร์จากสถานะ $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$ ไปสู่สถานะ $(\vec{k}' \uparrow, -\vec{k}' \downarrow)$ ในการคำนวณสมการ (2-1) ที่ไม่เชิงเส้น จริงๆ แล้วต้องคำนวณเชิงตัวเลข แต่ทฤษฎี BCS ซึ่งเป็นการคำนวณอย่างง่ายได้สมมติว่า $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ ไม่ขึ้นกับทิศทาง (Isotropic) และมีค่าคงที่เท่ากับ $-V$ เมื่อพลังงานของอิเล็กตรอน $|\varepsilon_{\vec{k}}|$ ที่ฟีวเฟอร์มี มีค่าน้อยกว่าพลังงานเดอบาย (ω_D) มาก และกรณีที่พลังงานสูงกว่า ω_D นั้น $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -V & , |\varepsilon_{\vec{k}}|, |\varepsilon_{\vec{k}'}| \leq \omega_D \\ 0 & , |\varepsilon_{\vec{k}}|, |\varepsilon_{\vec{k}'}| > \omega_D \end{cases} \quad \dots\dots(2-2)$$

และนอกจากนี้ก็ยังใช้สมมติฐานว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่มีพลังงาน $|\varepsilon_{\vec{k}}| \leq \omega_D$ นั่นคือ $\varepsilon_{\vec{k}}$ มีค่าอยู่ระหว่าง $-\omega_D \rightarrow \omega_D$ ที่ฟีวเฟอร์มี มีค่าคงที่เท่ากับ $N(0)$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (2-1) ของช่องว่างพลังงานได้เป็น

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{2E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \quad \dots\dots(2-3)$$

จากสมการ (2-3) ถ้าใช้เงื่อนไขคือ $\omega_D \gg T_c$ และ $\Delta(T_c)=0$ สามารถคำนวณสมการของอุณหภูมิวิกฤตได้ดังนี้

$$T_c = 1.13\omega_D e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad \dots\dots(2-4)$$

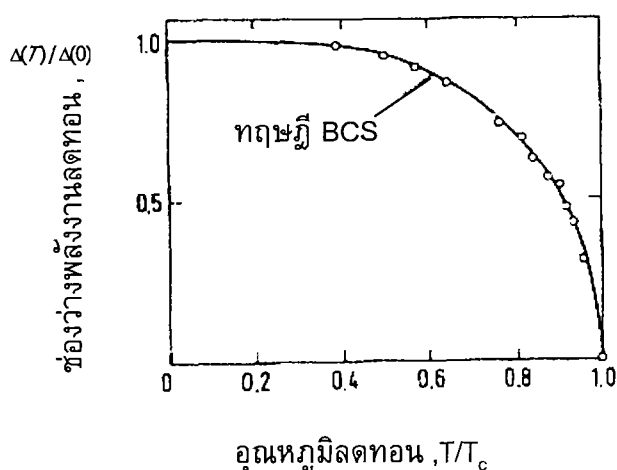
และได้สมการของช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ดังสมการ (2-5) คือ

$$\Delta(0) = 2\omega_D e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad \dots\dots(2-5)$$

เมื่อคำนวณอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิใดๆ กับที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\Delta(T)/\Delta(0)$ ซึ่งเรียกว่าช่องว่างพลังงานลดทอน ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad \dots\dots(2-6)$$

และเมื่อเขียนกราฟระหว่างช่องว่างพลังงานลดทอน ($\Delta(T)/\Delta(0)$) กับอุณหภูมิลดทอน (T/T_c) ได้ดังภาพประกอบ 9 ซึ่งจะเห็นว่าทฤษฎี BCS คำนวณได้สอดคล้องกับผลการทดลองวัดช่องว่างพลังงานของทัลทาเลียม (Tl) (แทนด้วยสัญลักษณ์วงกลม) เป็นอย่างดี



ภาพประกอบ 9 แสดงช่องว่างพลังงานลดทอนกับอุณหภูมิลดทอนของสารตัวนำยิ่งยวดทัลทาเลียม เปรียบเทียบกับทฤษฎี BCS (Bückel. 1991 : 65)

และนอกจากนี้ทฤษฎี BCS ก็ยังพบว่า อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ กับอุณหภูมิวิกฤต ในสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำมีค่า

$$\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.53 \quad \dots\dots(2-7)$$

ทฤษฎี BCS ได้อธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยิ่งยวดว่าการเปลี่ยนสถานะนี้ เป็นการเปลี่ยนเฟสลำดับที่สองหรือการเปลี่ยนเฟสแบบทุติยภูมิ (Second-order phase transition) ซึ่งไม่ใช้ความร้อนแฝงในการเปลี่ยนสถานะเลย และที่อุณหภูมิวิกฤต

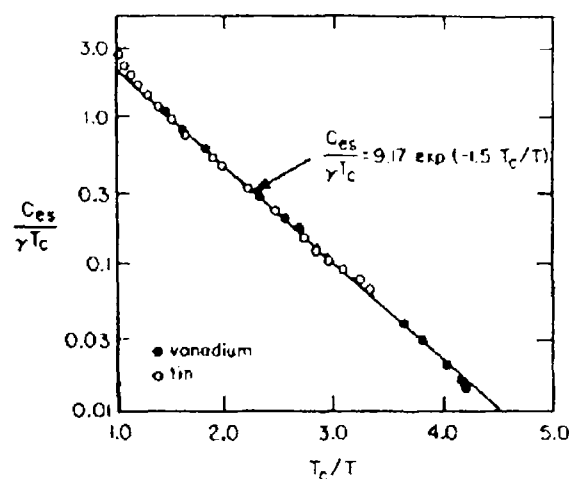
ความร้อนจำเพาะจะมีค่าไม่ต่อเนื่อง ซึ่งผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ (ΔC) ที่อุณหภูมิวิกฤต มีค่าดังนี้คือ

$$\frac{\Delta C}{\gamma T_c} = 1.43 \quad \text{.....(2-8)}$$

เมื่อ γ คือ ค่าคงที่ของซอมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld's constant) จะเห็นว่าสมการ (2-8) สอดคล้องกับผลการทดลองในภาพประกอบ (4) และทฤษฎี BCS คำนวณได้ว่าที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ($T \rightarrow 0$) ความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนในสารตัวนำยวดยิ่ง (C_{es}) ขึ้นกับอุณหภูมิ (T) แบบเอกซ์โพเนนเชียลคือ

$$\frac{C_{es}}{\gamma T_c} \approx 9.17 e^{\left(\frac{-1.5 T_c}{T}\right)} \quad \text{.....(2-9)}$$

นั่นคือความร้อนจำเพาะลดลงเข้าสู่ศูนย์ เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ดังภาพประกอบ 10 แสดงผลการทดลองวัดความร้อนจำเพาะของดีบุกและวานาเดียมในสภานำยวดยิ่ง ซึ่งสอดคล้องกับผลการคำนวณของทฤษฎี BCS ดังสมการ (2-9)



ภาพประกอบ 10 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของความร้อนจำเพาะของดีบุกและวานาเดียมในสภานำยวดยิ่ง กับผลการคำนวณของทฤษฎี BCS (Meservey & Schwartz. 1969 : 159)

สำหรับคุณสมบัติเชิงแม่เหล็กนั้น ทฤษฎี BCS ได้คำนวณความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตและช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ดังนี้

$$\frac{H_c^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0) \quad \text{.....(2-10)}$$

และคำนวณสมการของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ($T \rightarrow 0$) ได้

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - 1.06 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \quad \text{.....(2-11)}$$

แต่ที่อุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต ($T \rightarrow T_c$) จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ (2-12) คือ

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} \approx 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad \text{.....(2-12)}$$

และที่อุณหภูมิ $0 < T < T_c$ ทฤษฎี BCS ได้แสดงว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต สอดคล้องกับผลการทดลองดังสมการ (1-1) รายละเอียดของการคำนวณปริมาณต่างๆ ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

ทฤษฎี BCS ทำนายคุณสมบัติของสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งยวดต่ำ ได้สอดคล้องกับผลการทดลอง หลังจากนั้นงานวิจัยที่ทำส่วนใหญ่จะเป็นการประยุกต์ทฤษฎีนี้ โดยในปี ค.ศ. 1959 กอร์คอบ (Crisan. 1991 : 45; citing Gorkov. 1959) ได้พิสูจน์ว่าทฤษฎีของกินชเบิร์ก และแลนเดา ก็คือทฤษฎี BCS ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ในปี ค.ศ. 1961 เกียเอเวอร์ (Myers. 1997 : 45 ; citing Giaever. 1961) ได้พบปรากฏการณ์ทะลุทะลวง (Tunneling effect) ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์วัดช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดได้ ถัดมาในปี ค.ศ. 1962 โจเซฟสัน (Sacchetti. 2000 : 2621 ; citing Josephson. 1962) ได้ใช้ฮามิลโทเนียนของทฤษฎี BCS และฮามิลโทเนียนของปรากฏการณ์ทะลุทะลวง วิเคราะห์พฤติกรรมของระบบที่มีฉนวนบางมากกั้นระหว่างสารตัวนำยิ่งยวดซึ่งเกิดสภาพนำยิ่งยวด ซึ่งมีการจับคู่ของอิเล็กตรอนอย่างอ่อนพบว่า คู่คูเปอร์สามารถทะลุผ่านฉนวนบางๆ ได้ ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าโจเซฟสัน และในปี ค.ศ. 1964 แฟร์แบงก์ (Rickayzen. 1969 : 51; citing Fairbanks. 1964) ได้ตรวจพบว่าคู่คูเปอร์ในตัวนำยิ่งยวดมีจริง โดยผ่านสนามแม่เหล็กไปในวงแหวนขณะเป็นตัวนำยิ่งยวด และได้พบว่าสนามแม่เหล็กในวงแหวนมีค่าเป็นหน่วยๆ นั่นคือ สนามถูกควอนไทซ์ ซึ่งสอดคล้องกับคำทำนายของทฤษฎี BCS ซึ่งอธิบายว่าอิเล็กตรอนมีการจับคู่ ดังนั้นควอนตัมของฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กจึงมีค่าเป็นจำนวนเต็มของ $hc/2e$ นั่นคือประจุพามีค่าเป็นสองเท่าของอิเล็กตรอน ซึ่งแสดงว่าคู่คูเปอร์มีจริง

ทฤษฎีสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 2000 ครุณวการ, เกศกมลასัน และ ยกส้าน (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 305) ได้ศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ “ดี” กรณีไม่มีสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ ($T \rightarrow T_c$) โดยใช้สมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส เมื่อ ω_D / T_c มีค่าจำกัด และพบว่าเมื่อ ω_D / T_c เข้าสู่ค่าอนันต์ (ตามเงื่อนไขของทฤษฎี BCS) ทฤษฎีของครุณวการ, เกศกมลასัน และ ยกส้าน สามารถอธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งได้ละเอียดกว่าทฤษฎี BCS โดยได้คำนวณปริมาณต่างๆ ดังนี้

สมการช่องว่างพลังงาน

ครุณวการ, เกศกมลასัน และยกส้าน คำนวณหาช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” โดยพิจารณาจากสมการ (2-1)

$$\Delta_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2E_{\vec{k}'}} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}'}}{2T}\right) \quad \dots\dots(2-1)$$

โดยที่

$E_{\vec{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}$, $E_{\vec{k}}$ คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\varepsilon_{\vec{k}}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\Delta_{\vec{k}} = \Delta(T)g(\theta)$, $\Delta_{\vec{k}}$ คือ ช่องว่างพลังงาน

$g(\theta) = 1$, กรณีสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส”

และ $g(\theta) = \cos 2\theta$, กรณีสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี”

เมื่อ θ คือ มุมที่โมเมนตัม $\vec{k}$ ของอิเล็กตรอน กระทำกับแกน a ในระนาบ ab ของตัวนำยวดยิ่ง ดังภาพประกอบ (7)

$N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ

และ $V_{\vec{k}\vec{k}'} = Vg(\theta)g(\theta')$, $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ คือ เมตริกซ์สำหรับอันตรกิริยาการกระเจิงของคู่อิเล็กตรอน, V คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอน เมื่อแทนค่าต่างๆ ในสมการ (2-1) จะได้

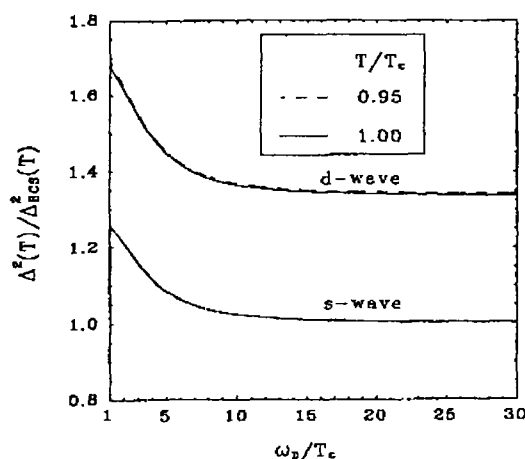
$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} g^2(\theta) \int_{\omega_D}^0 \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}}} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}}}{2T}\right) \quad \dots\dots(2-13)$$

จากสมการ (2-13) จะได้สมการช่องว่างพลังงานของสารตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” ดังสมการ (2-3) ถ้าแทน $g(\theta) = 1$ แต่สมการช่องว่างพลังงานของสารตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” จะเป็นดังนี้คือ

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2(2\theta) \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}}{2\varepsilon_{\vec{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{2T}\right) \quad \text{.....(2-14)}$$

โดยมีเงื่อนไขของการศึกษาเช่นเดียวกันกับการศึกษาในตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” นั่นคือ ถ้าอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนเป็นอย่างอ่อน $N(0)V \ll 1$ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ $N(0)$ มีค่าคงที่ และพลังงานของอิเล็กตรอน $|\varepsilon_{\vec{k}}|$ และ $|\varepsilon_{\vec{k}}|$ ที่ผิวเฟอร์มิ มีค่าน้อยกว่าพลังงานเดอบาย (ω_D)

ใช้สมการ (2-14) คำนวณการขึ้นกับอุณหภูมิของช่องว่างพลังงาน ที่อุณหภูมิใกล้ อุณหภูมิวิกฤต ($T \rightarrow T_c$) โดยการใช้การกระจายอนุกรมแบบเทเลอร์ และเมื่อนำผลที่ได้มาเขียนกราฟระหว่าง $\Delta^2(T)/\Delta_{BCS}^2(T)$ กับ ω_D/T_c ได้ดังภาพประกอบ 11 โดย Δ_{BCS} คือ ช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิ T เมื่อแทนค่า $\omega_D/T_c \rightarrow \infty$



ภาพประกอบ 11 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta^2(T)/\Delta_{BCS}^2(T)$ กับ ω_D/T_c ของสารตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$ (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 309)

ผลต่างของพลังงานอิสระ

ครุณวการ, เกศกมลลาสน์ และยกส้าน ได้คำนวณผลต่างระหว่างพลังงานอิสระ (Free energy difference) ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ $\Delta F = F_S - F_N$ สำหรับระบบที่มีปริมาตรและความดันคงที่ ในกรณีที่ไม่มีความแม่เหล็ก โดยพิจารณาจากสมการซึ่งเขียนในรูปอินทิกรัล ดังนี้

$$F_S - F_N = \Delta F = \int_0^{\Delta(T)} d\Delta'(T) |\Delta'(T)|^2 \frac{d}{d\Delta'} \left(\frac{1}{V} \right) \quad \dots\dots(2-15)$$

เมื่อ F_S และ F_N คือ พลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งและสภานำปกติตามลำดับ

$\Delta(T)$ คือ ช่องว่างพลังงาน

V คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอน

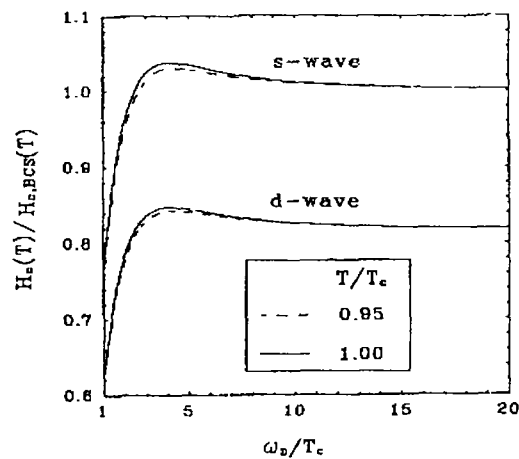
จะเห็นว่าในการคำนวณผลต่างของพลังงานอิสระดังนิยามข้างต้นนั้นต้องหาอนุพันธ์ของสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎี BCS ในสมการ (2-14) เทียบกับ $\Delta(T)$ แล้วนำมาแทนในสมการ (2-15)

สนามแม่เหล็กวิกฤตเชิงอุณหพลศาสตร์

ครุณวการ, เกศกมลลาสน์ และยกส้าน ได้คำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤตเชิงอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamical critical-field, H_c) จากความสัมพันธ์ของผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ ดังสมการต่อไปนี้คือ

$$\Delta F = \frac{-H_c^2(T)}{8\pi} \quad \dots\dots(2-16)$$

จากสมการ (2-16) เราสามารถคำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤต และเขียนกราฟระหว่าง $H_c(T)/H_{c,BCS}(T)$ กับ ω_b / T_c ได้ดังภาพประกอบ 12 โดย $H_{c,BCS}$ คือ สนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิ T เมื่อแทนค่า $\omega_b / T_c \rightarrow \infty$



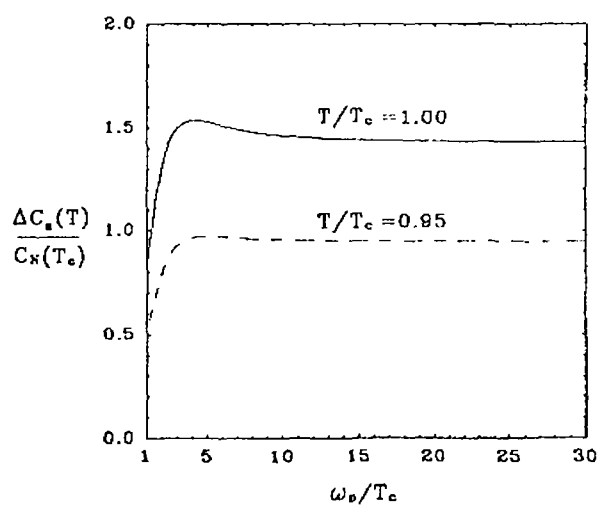
ภาพประกอบ 12 แสดงกราฟระหว่าง $H_s(T)/H_{s,BCS}(T)$ กับ ω_0/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$ (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 312)

ความร้อนจำเพาะ

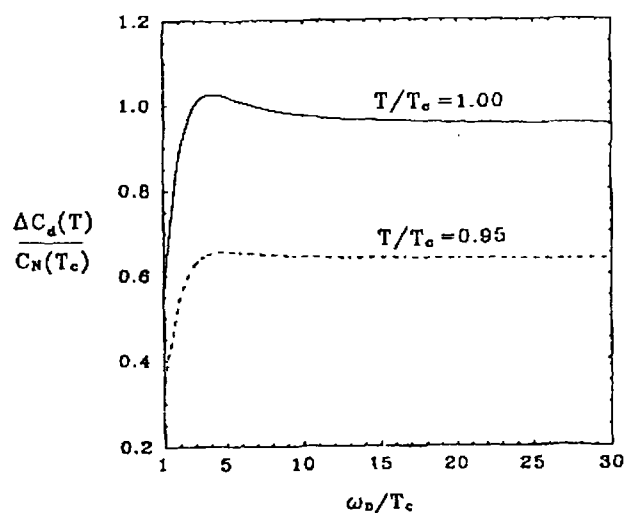
การคำนวณหาผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะ (Specific heat) ของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ (ΔC) สามารถได้จากการทำอนุพันธ์เทียบกับอุณหภูมิอันดับที่สองของผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta C(T) = -T \left. \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial T^2} \right|_{T=T_c} \quad \dots\dots(2-17)$$

จากสมการ (2-17) ครูนวการ, เกศกมลสาสน์ และยกส้าน ได้คำนวณการขึ้นกับอุณหภูมิของ ΔC เมื่อเขียนกราฟระหว่าง $\Delta C(T)/C_N(T_c)$ กับ ω_0/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$ ได้ตั้งภาพประกอบ 13 และ 14 ตามลำดับ ซึ่งเห็นได้ว่า $\Delta C(T)/C_N(T_c)$ มีค่าเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่ง เมื่อ ω_0/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น และที่อุณหภูมิวิกฤต $T = T_c$ พบว่า $\Delta C(T)/C_N(T_c)$ มีค่ามากที่สุดคือเท่ากับ 1.43 และ 0.95 สำหรับสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ตามลำดับ เมื่อ $\omega_0/T_c = 20$



ภาพประกอบ 13 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C_s(T)/C_N(T_c)$ กับ ω_D/T_c ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบ คลื่น “เอส” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$ (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 313)

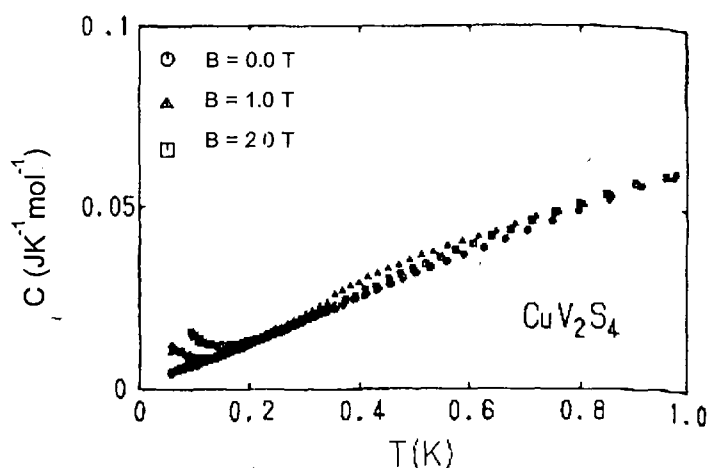


ภาพประกอบ 14 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C_d(T)/C_N(T_c)$ กับ ω_D/T_c ของตัวนำยวดยิ่งแบบ คลื่น “ดี” ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow T_c$ (Krunavakarn, Kaskamalas & Yoksan. 2000 : 314)

สารตัวนำยวดยิ่งกรณีที่มีสนามแม่เหล็ก

การศึกษาสารตัวนำยวดยิ่งกรณีที่อยู่ในสนามแม่เหล็กนั้นได้มีนักวิจัยหลายท่านที่ได้ศึกษา ดังนี้

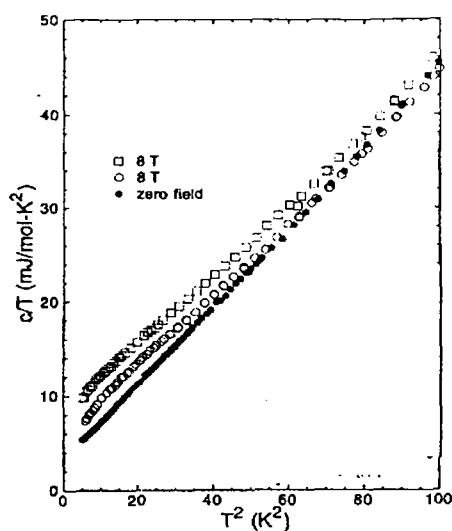
ในปี ค.ศ. 1994 ฮากิโน และ เซกิ (Hagino & Seki. 1994 : 6822) ได้ทดลองวัดค่าความร้อนจำเพาะของผลึกในสารประกอบ CuV_2S_4 ที่อุณหภูมิต่ำ โดยใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวหล่อเลี้ยง ในกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก โดยวัดเทียบกับกรณีที่สารตัวนำอยู่ในสนามแม่เหล็ก (B) ซึ่งมีค่าความเข้มไม่เกิน 5.0 เทสลา ที่อุณหภูมิต่ำ และสารที่ใช้วัดมีมวลประมาณ 1.0 กรัม เมื่อเขียนกราฟระหว่างความร้อนจำเพาะ (C) กับ T ดังภาพประกอบ 15 จะเห็นว่าที่อุณหภูมิต่ำ ความร้อนจำเพาะของสารกรณีที่อยู่ในสนามแม่เหล็กแตกต่างจากกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก และที่อุณหภูมิต่ำกว่า 0.2 K ค่าความร้อนจำเพาะขึ้นกับความเข้มสนามแม่เหล็กนั้นคือความร้อนจำเพาะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความเข้มของสนามแม่เหล็กมีค่าสูงขึ้น



ภาพประกอบ 15 แสดงความร้อนจำเพาะของสารที่อุณหภูมิต่ำที่สนามแม่เหล็กความเข้มต่างๆ (Hagino & Seki. 1994 : 6822)

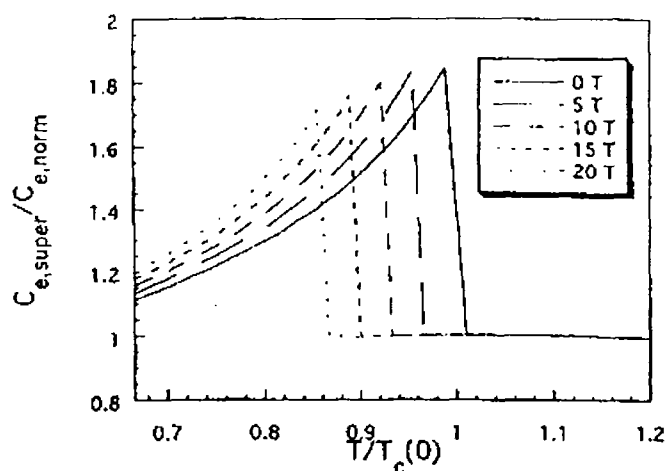
ในปี ค.ศ. 1997 โมลเลอร์ และคณะ (Moler, et al. 1997 : 3954) ได้ทดลองวัดค่าความร้อนจำเพาะของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลิ่น “ดี” ในสารประกอบ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ที่อุณหภูมิต่ำระหว่าง 2-10 K กรณีที่สนามแม่เหล็กมีค่าอยู่ระหว่าง 0 - 10 เทสลา เมื่อสนามแม่เหล็กมีทิศทางและตั้งฉากกับระนาบของ Cu-O_2 เมื่อเขียนกราฟระหว่าง C/T กับ T^2 กรณีที่สนามแม่เหล็กเป็นศูนย์จะได้กราฟเกือบเป็นเส้นตรง นั่นคือ กรณี $B = 0$ สามารถอธิบายความร้อนจำเพาะได้ด้วยสมการ $C(T) = C_e + \beta T^3$ แต่ในกรณีที่สนามแม่เหล็ก $B \neq 0$ จะเห็นว่ากราฟระหว่าง C/T กับ T^2 ไม่เป็นเส้นตรงแต่จะเกิดโหนกนูน (bump) ที่อุณหภูมิต่ำๆ นั่นคือเราไม่

สามารถอธิบายผลการทดลองได้ด้วยสมการ $C(T) = C_e + \beta T^3$ ซึ่งลักษณะของ bump จะเป็นเส้นโค้งเนื่องจากความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนขึ้นกับกำลังสองของ T นั่นคือ $C_{es} \propto T^2$ ดังภาพประกอบ 16

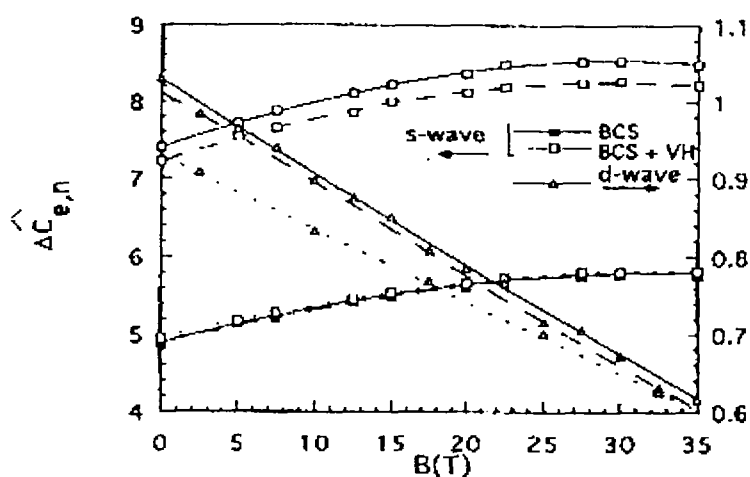


ภาพประกอบ 16 แสดงกราฟระหว่าง C/T กับ T^2 เมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้ม 8 เทสลา (Moler, et al. 1997 : 3954)

ในปี ค.ศ. 1998 โดริโบล และคณะ (Dorbolo, et al. 1998 : 5401) ได้ศึกษาความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนของสารตัวนำยิ่งยวด โดยใช้แบบจำลองที่มีความหนาแน่นสถานะตามแบบของ Van Hove ขณะสารตัวนำอยู่ในสนามแม่เหล็ก (B) และการจับคู่ของอิเล็กตรอนอยู่ในระนาบ Cu-O₂ เพื่อตรวจสอบว่ากรณีที่สารตัวนำอยู่ในสนามแม่เหล็ก ค่า ΔC ที่อุณหภูมิวิกฤต (T_c) ของสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลีน “เอส” และ “ดี” มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงเมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงขึ้น ซึ่งพบว่า ΔC ในสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลีน “ดี” มีค่าลดลงเมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงขึ้น ดังภาพประกอบ 17 แต่ในสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลีน “เอส” ΔC มีค่าเพิ่มขึ้น แต่เมื่อเปรียบเทียบกับสูตรที่คำนวณได้พบว่าสอดคล้องกับสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลีน “ดี” มากกว่าสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลีน “เอส” ดังภาพประกอบ 18 และพบว่าสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่มีค่าความร้อนจำเพาะขึ้นกับสนามแม่เหล็กเห็นได้ชัดเจน เช่น YBaCu₃O_{7-x}, HgBa₂Cu₂O₈ และ Tl₂Ba₂CuO_{6+δ} เมื่อสนามแม่เหล็กที่พิจารณาเป็นสนามแม่เหล็กโดยเฉลี่ย



ภาพประกอบ 17 แสดงความร้อนจำเพาะลดทอนของอิเล็กตรอนในสภานำยวดยิ่งกับอุณหภูมิลดทอนที่สนามแม่เหล็กความเข้มต่างๆ (Dorbolo, et al. 1998 : 5405)



ภาพประกอบ 18 แสดงผลต่างของความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนกับสนามแม่เหล็ก (Dorbolo, et al. 1998 : 5405)

ในปี ค.ศ. 1998 หยาง และ สนธิ (Yang & Sondhi. 1998 : 8566) ได้ศึกษาอิทธิพลของสนามแม่เหล็กที่มีต่อสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น "ดี" ใน 2 มิติ ที่อุณหภูมิต่ำภายใต้ทฤษฎี BCS โดยพิจารณาสปินของอิเล็กตรอนที่มีการจับคู่กันและสารตัวนำอยู่ในสนามแม่เหล็ก

สมำเสมอ B ซึ่งมีความเข้มต่ำ (ดูภาคผนวก ข) จากการพิจารณาสปินและผลของสนามแม่เหล็กนี้เอง หยาง และ สนิธิ ได้ใช้สมการของช่องว่างพลังงานในสนามแม่เหล็กตามทฤษฎี BCS ดังนี้คือ

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} g^2(\theta) \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{E} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \dots\dots(2-18)$$

เมื่อ μ_B คือ โมเมนต์แม่เหล็กของบอร์ (Bohr magneton) , V คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอน , E คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน, $E = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}$, ε_c คือ พลังงานขีดจำกัดของอิเล็กตรอน (Cut-off energy) $\varepsilon_{\vec{k}}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$, θ คือ มุมที่โมเมนตัม $\vec{k}$ ของอิเล็กตรอน กระทำกับแกน a ในระนาบ ab ของตัวนำวยดยี้ง ดังภาพประกอบ (7) , $\Delta_{\vec{k}}$ คือ ช่องว่างพลังงาน และเงื่อนไขที่พิจารณา คือ $\mu_B B, T \ll \Delta_{00}$ เมื่อ $\Delta_{00} = \Delta(T=0, B=0)$ การตั้งเงื่อนไขนี้ทำให้เขาพบว่าช่องว่างพลังงานขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก ดังนี้

$$\Delta(T, B) = \Delta_{00} \left[1 - \left(\frac{T}{\Delta_{00}} \right)^3 F_{\Delta} \left(\frac{\mu_B B}{T} \right) \right] \dots\dots(2-19)$$

เมื่อ $F_{\Delta}(x) = \int_0^{\infty} t^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{t+x}{2} + \tanh \frac{t-x}{2} \right) \right] dt \dots\dots(2-20)$

โดยที่ $x = \frac{\mu_B B}{T}$, $t = \frac{E}{T}$ จะได้ $F_{\Delta}(0) \approx 3.61$ เมื่อ $B=0$ และ $F_{\Delta}(x) \sim \frac{|x|^3}{3}$ เมื่อ $x \gg 1$ นั่นคือ $\frac{\mu_B B}{T} \gg 1$ ดังนั้นที่ $T=0$ จะได้สมการช่องว่างพลังงานเป็น

$$\Delta(T=0, B) = \Delta_{00} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_B B}{\Delta_{00}} \right)^3 \right] \dots\dots(2-21)$$

และคำนวณหาสมการของความร้อนจำเพาะได้ดังนี้คือ

$$C(T, B) = 2N(0) \frac{T^2}{\Delta_{00}} F_C \left(\frac{\mu_B B}{T} \right) \dots\dots(2-22)$$

เมื่อ
$$F_C(x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} t(t + \sigma x)^2 \frac{e^{t+\sigma x}}{(e^{t+\sigma x} + 1)^2} dt \quad \dots\dots(2-23)$$

กรณีพลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่าพลังงานความร้อน นั่นคือ $x \gg 1$ ประมาณได้ว่า $F_C(x) \sim \left(\frac{\pi^2}{3}\right)x$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} C(T, B) &= \frac{2\pi^2}{3} TN(0) \frac{\mu_B B}{\Delta_{00}} \\ &= C_N \frac{\mu_B B}{\Delta_{00}} \quad \dots\dots(2-24) \end{aligned}$$

เมื่อ $C_N = \frac{2\pi^2}{3} N(0)T$ คือ ความร้อนจำเพาะของสภาพตัวนำปกติที่อุณหภูมิต่ำ ดังนั้นถ้าพลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่าพลังงานความร้อน จะได้ว่าความร้อนจำเพาะขึ้นกับอุณหภูมิ T และสนามแม่เหล็ก B แบบเส้นตรง แต่ถ้าพลังงานของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่าพลังงานความร้อน ประมาณได้ว่า $F_C = 9\zeta(3) \approx 10.8$ ดังนั้นจะได้ว่าความร้อนจำเพาะขึ้นกับ T^2 เท่านั้น อย่างไรก็ตามสมการช่องว่างพลังงานของหยาง และ สนิธิ ที่คำนวณได้ตั้งสมการ (2-19) นั้นเขียนอยู่ในรูปอินทิกรัล และครอบคลุมเทอมที่ขึ้นกับอุณหภูมิเฉพาะ T^3 ซึ่งเป็นรูปแบบการคำนวณที่อาศัยการประมาณเชิงตัวเลขดังแสดงในสมการ (2-20)

จะเห็นว่ากระแสดความสนใจของนักทดลองในการวัดค่าความร้อนจำเพาะของสารที่อุณหภูมิต่ำ ได้ทำให้เราทราบว่าความร้อนจำเพาะในโลหะหลายชนิดมีพฤติกรรมสอดคล้องกับทฤษฎี BCS ขณะที่นักทฤษฎีก็สามารถอธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “เอส” และ “ดี” กรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กได้สอดคล้องกับผลการทดลอง และในกรณีที่มีสนามแม่เหล็กนั้นพบว่าความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ขึ้นกับสนามแม่เหล็กอย่างเห็นได้ชัด ดังที่กล่าวมาแล้ว แต่ยังไม่มียทฤษฎีใดที่สามารถอธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง กรณีที่มีสนามแม่เหล็กได้ครอบคลุมทุกประเด็น ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงต้องการขยายงานวิจัยของครูนวการ, เกศกมลลาสน์ และยกसान โดยจะศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” กรณีที่มีสนามแม่เหล็ก ซึ่งจะพิจารณาที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ โดยคำนวณอย่างละเอียดและไม่ค้างสูตรคำนวณในรูปของอินทิกรัลดังที่ หยาง และ สนิธิ ได้คำนวณไว้ข้างต้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำวยดยิ่งแบบคลิ่น “ดี” โดยพิจารณาที่อุณหภูมิใกล้เคียงอุณหภูมิวิกฤต ($T \rightarrow T_c$) ซึ่งมีเงื่อนไขคือสารตัวนำอยู่ในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มต่ำ จนทำให้พลังงานแม่เหล็กมีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับพลังงานความร้อน โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. คำนวณหาสมการกำลังสองของช่องว่างพลังงาน ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta^2(T,B)$
2. คำนวณหาผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภาพนำวยดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta F(T,B)$ โดยใช้วิธีคำนวณแบบแม่นยำตรง
3. คำนวณหาสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $H_c^2(T,B)$
4. คำนวณหาผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำวยดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิวิกฤต $\Delta C(T_c,B)$

ขั้นตอนที่ 1 การคำนวณสมการกำลังสองของช่องว่างพลังงาน

ในการคำนวณสมการกำลังสองของช่องว่างพลังงาน $\Delta^2(T,B)$ ของสารตัวนำวยดยิ่งแบบคลิ่น “ดี” ที่อุณหภูมิใกล้เคียงอุณหภูมิวิกฤต ($T \rightarrow T_c$) สามารถใช้การกระจายของอนุกรมเทเลอร์ได้ดังนี้

$$\Delta^2(T,B) = \Delta^2(T_c,B) + (T - T_c) \left. \frac{d\Delta^2(T,B)}{dT} \right|_{T=T_c} + \frac{1}{2} (T - T_c)^2 \left. \frac{d^2\Delta^2(T,B)}{dT^2} \right|_{T=T_c} \dots\dots\dots(3-1)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขคือ $\Delta^2(T_c,B) = 0$ ดังนั้นจะได้

$$\Delta^2(T,B) = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) A(T_c,B) + \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 C(T_c,B) \dots\dots\dots(3-2)$$

เมื่อ $A(T_c,B) = -T_c \left. \frac{d\Delta^2(T,B)}{dT} \right|_{T=T_c}$ และ $C(T_c,B) = \frac{T_c^2}{2} \left. \frac{d^2\Delta^2(T,B)}{dT^2} \right|_{T=T_c}$

ดังนั้นจะต้องคำนวณค่า $A(T,B)$ และ $C(T,B)$ ซึ่งสามารถทำได้จากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎี BCS กรณีที่สารตัวนำยวดยิ่งอยู่ในสนามแม่เหล็ก เช่นเดียวกับงานวิจัยของ หยาง และ สอนธิ (Yang & Sondhi. 1998 : 8566) ดังสมการ (2-18)

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} g^2(\theta) \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{E} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \quad \text{.....(2-18)}$$

เมื่อ $E = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T,B)g^2(\theta)}$ (3-3)

และ $g(\theta) = \cos 2\theta$, สำหรับสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี”

$\Delta(T,B)$ คือ ช่องว่างพลังงาน

ε คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

E คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน

$N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน

V คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอน

μ_B คือ โมเมนต์แม่เหล็กของบอร์ (Bohr magneton)

B คือ สนามแม่เหล็ก

T คือ อุณหภูมิ

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (2-18) เทียบกับ T จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{N(0)V} \right) &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{E} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \right) \\ 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{E} \right) \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2E} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \quad \text{.....(3-4)} \end{aligned}$$

คำนวณค่าอนุพันธ์ต่างๆ ได้ว่า

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{2E} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{E} \right) = -\frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{2E^3} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) \left(-\frac{(E + \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{2T} \frac{\partial E}{\partial T} \right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) \left(-\frac{(E + \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \left(-\frac{(E - \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{2T} \frac{\partial E}{\partial T} \right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \left(-\frac{(E - \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้นแทนค่าอนุพันธ์เหล่านี้ในสมการ (3-4) จะได้

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4E^3} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2E} \left\{ \operatorname{sech}^2\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) \left[-\frac{(E + \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT} \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sech}^2\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \left[-\frac{(E - \mu_B B)}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \cos^2 2\theta \frac{d\Delta^2}{dT} \right] \right\} \end{aligned}$$

โดยการจับแยกเทอมจะได้

$$\frac{d\Delta^2}{dT} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4T^2 E} \left[(E + \mu_B B) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E + \mu_B B}{2T} \right) + (E - \mu_B B) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E - \mu_B B}{2T} \right) \right]}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^4 \theta \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{8TE^2} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{E + \mu_B B}{2T} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E - \mu_B B}{2T} \right) \right] \right.} \dots (3-5)$$

$$\left. - \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4E^3} \left[\tanh \left(\frac{E + \mu_B B}{2T} \right) + \tanh \left(\frac{E - \mu_B B}{2T} \right) \right] \right\}$$

กรณีที่ $T = T_c$ จะได้ว่า $E = \varepsilon$ ดังนั้นสมการ (3-5) จะเป็นดังนี้

$$\left. \frac{d\Delta^2}{dT} \right|_{T=T_c} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4T_c^2 \varepsilon} \left[(\varepsilon + \mu_B B) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + (\varepsilon - \mu_B B) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right]}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^4 \theta \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{8T_c \varepsilon^2} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right] \right.}$$

$$\left. - \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{4\varepsilon^3} \left[\tanh \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right] \right\}$$

$$\left. \frac{d\Delta^2}{dT} \right|_{T=T_c} = \frac{\int_0^{\infty} d\varepsilon \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right] + \mu_B B \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right]}{\frac{3T_c}{8} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right] - \frac{3T_c^2}{4} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3} \left[\tanh \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right]} \dots (3-6)$$

พิจารณาข้างขวาของสมการ (3-6) ส่วนที่เป็นเทอมแรกในเศษ โดยอาศัยสมการ (ค-13) จะได้

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) = 2T_c \left[\tanh \left(\frac{\omega_D + \mu_B B}{2T_c} \right) - \tanh \left(\frac{\mu_B B}{2T_c} \right) \right] \dots (3-7)$$

และ $\int_0^{\infty} d\varepsilon \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) = 2T_c \left[\tanh \left(\frac{\omega_D - \mu_B B}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\mu_B B}{2T_c} \right) \right]$

จากความสัมพันธ์ $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}$, สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x + i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{x - i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \right\}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ $\tanh x$ เทียบกับ x จะได้

$$\operatorname{sech}^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\left[x + i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} - \frac{1}{\left[x - i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} \right\}$$

$$\therefore \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) = -4T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[\varepsilon + i(\omega_n - i\mu_B B)]^2} + \frac{1}{[\varepsilon - i(\omega_n + i\mu_B B)]^2} \right\}$$

$$\text{และ } \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) = -4T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[\varepsilon + i(\omega_n + i\mu_B B)]^2} + \frac{1}{[\varepsilon - i(\omega_n - i\mu_B B)]^2} \right\}$$

โดย $\omega_n = (2n+1)\pi T_c$ และถ้า $\hbar = \mu_B B$ จะได้

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) - \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) = 16\varepsilon T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{\omega_n + i\hbar}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + i\hbar)^2]^2} + \frac{\omega_n - i\hbar}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - i\hbar)^2]^2} \right\}$$

จากสูตรการอินทิเกรตในสมการ (ค-16) จะได้เทอมที่เป็นเศษเทอมที่สองคือ

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) - \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] \\ &= 16T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\omega_n - i\hbar) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - i\hbar)^2]^2} - (\omega_n + i\hbar) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + i\hbar)^2]^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\omega_n - ih) \left[\frac{1}{2(\omega_n - ih)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n - ih} \right) \right] + \frac{\omega_D}{2(\omega_n - ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n - ih)^2]} \right. \\
&\quad \left. - (\omega_n + ih) \left[\frac{1}{2(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih} \right) \right] + \frac{\omega_D}{2(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right\} \\
&= -32T_c^2 \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(\omega_n - ih)^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n - ih} \right) + \frac{\omega_D}{2(\omega_n - ih) [\omega_D^2 + (\omega_n - ih)^2]} \right\} \quad \dots\dots(3-8)
\end{aligned}$$

เมื่อ Im มาจากคำว่า Imaginary คือ ส่วนที่เป็นค่าจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน
ต่อไปพิจารณาสมการ (3-6) เฉพาะเทอมที่เป็นส่วนเทอมแรกจะได้

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) &= -8T_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon^2 - (\omega_n - ih)^2}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2]^2} + \frac{\varepsilon^2 - (\omega_n + ih)^2}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} \right\} \\
&= -16T_c^2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon^2 - (\omega_n + ih)^2}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} \right\}
\end{aligned}$$

เมื่อ Re มาจากคำว่า Real คือ ส่วนที่เป็นค่าจริงของจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}
\therefore \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c} \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c} \right) \right] \\
= -16T_c^2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} - (\omega_n + ih)^2 \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} \right\} \\
= -16T_c^2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih} \right) + \frac{\omega_D}{2(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right. \\
\quad \left. - (\omega_n + ih)^2 \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} \right\} \quad \dots\dots(3-9)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เป็นส่วนเทอมต่อไปคือ

$$\begin{aligned}\tanh\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) &= 4T_c \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2} \right\} \\ &= 8T_c \varepsilon \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^3} \left[\tanh\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] = 8T_c \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]} \quad \dots\dots\dots(3-10)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาเฉพาะเทอมที่เป็นส่วน จากสมการ (3-9) และสมการ (3-10) จะได้

$$\begin{aligned}&\frac{3T_c}{8} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] - \frac{3T_c^2}{4} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\tanh\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] \\ &= \frac{3T_c}{8} (-16) T_c^2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih}\right) + \frac{\omega_D}{2(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right. \\ &\quad \left. - (\omega_n + ih)^2 \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^2} \right\} \\ &\quad - \frac{3T_c^2}{4} (8T_c) \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]} \quad \dots\dots\dots(3-11)\end{aligned}$$

จากสูตรการอินทิเกรตในสมการ (ค-18) และสมการ (ค-19) จะได้สมการ (3-11) คือ

$$\begin{aligned}&\frac{3T_c}{8} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] - \frac{3T_c^2}{4} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\tanh\left(\frac{\varepsilon + \mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\varepsilon - \mu_B B}{2T_c}\right) \right] \\ &= -6T_c^3 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih}\right) + \frac{\omega_D}{2(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right. \\ &\quad \left. - (\omega_n + ih)^2 \left[-\frac{1}{\omega_D (\omega_n + ih)^4} - \frac{3}{2(\omega_n + ih)^5} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_D}{2(\omega_n + ih)^4 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} + \frac{1}{(\omega_n + ih)^4 \delta} \right\} \\ &\quad - 6T_c^3 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\omega_D (\omega_n + ih)^2} - \frac{1}{(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih}\right) + \frac{1}{(\omega_n + ih)^2 \delta} \right\}\end{aligned}$$

$$= -6T_c^3 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih} \right) + \frac{\omega_D}{(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right\} \dots\dots\dots(3-12)$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3-7), (3-8) และสมการ (3-12) ในสมการ (3-6) จะได้

$$\frac{d\Delta^2}{dT} \Big|_{T=T_c} = \frac{2T_c \left[\tanh \left(\frac{\omega_D + h}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\omega_D - h}{2T_c} \right) \right] - 32hT_c^2 \times \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2(\omega_n - ih)^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n - ih} \right) + \frac{\omega_D}{2(\omega_n - ih)[\omega_D^2 + (\omega_n - ih)^2]} \right\}}{-6T_c^3 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\omega_n + ih)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n + ih} \right) + \frac{\omega_D}{(\omega_n + ih)^2 [\omega_D^2 + (\omega_n + ih)^2]} \right\}} \dots\dots\dots(3-13)$$

กรณีที่ $\mu_B B = h \rightarrow 0$ สมการ (3-13) จะได้เป็น

$$\frac{d\Delta^2}{dT} \Big|_{T=T_c} = \frac{4T_c \tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right)}{-6T_c^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega_n^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n} \right) + \frac{\omega_D}{\omega_n^2 (\omega_D^2 + \omega_n^2)} \right]} \dots\dots\dots(3-14)$$

ถ้า $\omega_D / 2T_c \rightarrow \infty$ สามารถใช้สมการ (ค-10) ทำให้สมการ (3-14) เป็นดังนี้

$$\frac{d\Delta^2}{dT} \Big|_{T=T_c} = \frac{4T_c}{-6T_c^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\pi/2}{(2n+1)^3 \pi^3 T_c^3} \right]} = -\frac{32\pi^2 T_c}{21\zeta(3)} \dots\dots\dots(3-15)$$

ซึ่งตรงกับการคำนวณของ ครุณาการ เกศกมลასัน และยกสำน (2000.) สำหรับสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ในกรณีไม่มีสนามแม่เหล็ก

ในงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้พิจารณาสมการ (3-2) เฉพาะเทอมของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนั้นจะได้สมการของช่องว่างพลังงาน ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ ดังนี้

$$\Delta^2(T, B) = - \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) T_c \frac{d\Delta^2}{dT} \Big|_{T=T_c}$$

โดยแทนสมการ (3-13) ในสมการข้างต้น จะได้

$$\Delta^2(T,B) = \frac{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left\{ \tanh\left(\frac{\omega_b}{2T_c} + \frac{\mu_b B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_b}{2T_c} - \frac{\mu_b B}{2T_c}\right) - 4\left(\frac{\mu_b B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b/2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_b B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_b/2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_b}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right] \right\}}{\frac{3}{8T_c^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b/2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_b B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_b/2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_b}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_b B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right\}} \dots\dots\dots(3-16)$$

ขั้นตอนที่ 2 การคำนวณผลต่างพลังงานอิสระ

ในการคำนวณผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ $\Delta F = F_S - F_N$ ผู้วิจัยได้คำนวณเช่นเดียวกับงานวิจัยของครุฑการ เกศกมลასน์ และ ยก้าน จากสมการ (2-15)

$$F_S - F_N = \Delta F = \int_0^{\Delta(T)} d\Delta'(T) |\Delta'(T)|^2 \frac{d}{d\Delta'} \left(\frac{1}{V} \right) \dots\dots\dots(2-15)$$

จะเห็นว่าในการคำนวณผลต่างพลังงานอิสระข้างต้นนั้นต้องหาอนุพันธ์ของสมการ BCS กรณีที่ตัวนำยวดยิ่งวางอยู่ในสนามแม่เหล็ก B เทียบกับ Δ' โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x + i \left[(n + \frac{1}{2})\pi \right]} + \frac{1}{x - i \left[(n + \frac{1}{2})\pi \right]} \right\}$$

$$\therefore \tanh\left(\frac{E+h}{2T_c}\right) = 2T_c \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{E+h+i\omega_n} + \frac{1}{E+h-i\omega_n} \right\}$$

$$\tanh\left(\frac{E-h}{2T_c}\right) = 2T_c \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{E-h+i\omega_n} + \frac{1}{E-h-i\omega_n} \right\}$$

โดย $h = \mu_B B$ และ $\omega_n = (2n+1)\pi T_c$ ดังนั้น

$$\tanh\left(\frac{E+h}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{E-h}{2T_c}\right) = 4ET_c \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{E^2 + (\omega_n - ih)^2} + \frac{1}{E^2 + (\omega_n + ih)^2} \right\}$$

ทำให้เขียนสมการ (2-18) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= 2T_c \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{E^2 + (\omega_n - ih)^2} + \frac{1}{E^2 + (\omega_n + ih)^2} \right\} \\ &= 2T_c \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + \Delta^2(T,B) \cos^2 2\theta + (\omega_n - ih)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2 + \Delta^2(T,B) \cos^2 2\theta + (\omega_n + ih)^2} \right\} \\ &= 2T_c \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 2\theta \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2} \left[1 + \frac{\Delta^2(T,B) \cos^2 2\theta}{\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2} \right]^{-1} + \frac{1}{\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2} \left[1 + \frac{\Delta^2(T,B) \cos^2 2\theta}{\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2} \right]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

โดยอาศัยสมการ (ค-4) จะได้

$$\frac{1}{N(0)V} = 2T_c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Delta^{2m}(T,B) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^{2m+2} 2\theta \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \left\{ \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2]^{m+1}} + \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^{m+1}} \right\} \dots (3-17)$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3-17) ในสมการ (2-15) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta F &= \int_0^{\Delta(T,B)} d\Delta'(T,B) \left| \Delta'(T,B)^2 \right| \frac{d}{d\Delta'(T,B)} \left\{ \frac{2T_c N(0) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Delta^{2m}(T,B) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^{2m+2} 2\theta}{\int_0^{\omega_b} d\varepsilon \left\{ \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2]^{m+1}} + \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^{m+1}} \right\}} \right\} \\ &= 2T_c N(0) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m}{m+1} \right) \Delta^{2(m+1)}(T,B) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^{2m+2} 2\theta \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \left\{ \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2]^{m+1}} + \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^{m+1}} \right\} \\ &= 2T_c N(0) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m}{m+1} \right) \Delta^{2(m+1)}(T,B) \langle g^{2m+2}(\theta) \rangle \int_0^{\omega_b} d\varepsilon \left\{ \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n - ih)^2]^{m+1}} + \frac{1}{[\varepsilon^2 + (\omega_n + ih)^2]^{m+1}} \right\} \end{aligned}$$

เมื่อ $\langle g^n(\theta) \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^n \theta$ ถ้าให้ $\varepsilon = 2T_c x$ และ $a_{\pm} = \frac{\omega_n \pm i\hbar}{2T_c} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm \frac{i\hbar}{2T_c}$ จะได้

$$\frac{\Delta F}{N(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m}{m+1}\right) \langle g^{2m+2}(\theta) \rangle \frac{\Delta^{2(m+1)}(T, B)}{(2T_c)^{2m}} \int_0^{e_0/2T} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^{m+1}} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^{m+1}} \right\} \dots (3-18)$$

เมื่อกระจาย $m = 0, 1, 2$ เขียนสมการ (3-18) ได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{N(0)} = & - \sum_{n=0}^{\infty} \langle g^4(\theta) \rangle \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Delta^4(T, B)}{(2T_c)^2} \int_0^{e_0/2T} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^2} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^2} \right\} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \langle g^6(\theta) \rangle \left(\frac{2}{3}\right) \frac{\Delta^6(T, B)}{(2T_c)^4} \int_0^{e_0/2T} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^3} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^3} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta F = -X(T_c, B)\Delta^4(T, B) + Y(T_c, B)\Delta^6(T, B) \dots (3-19)$$

$$\text{เมื่อ } X(T_c, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g^4(\theta) \rangle \left(\frac{1}{2}\right) \frac{N(0)}{(2T_c)^2} \int_0^{e_0/2T} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^2} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^2} \right\} \dots (3-20)$$

$$Y(T_c, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g^6(\theta) \rangle \left(\frac{2}{3}\right) \frac{N(0)}{(2T_c)^4} \int_0^{e_0/2T} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^3} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^3} \right\} \dots (3-21)$$

และจากสมการ (3-2) เมื่อพิจารณากำลังของ T ถึงอันดับ 3 จะได้

$$\Delta^4(T, B) = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 A^2(T_c, B) + 2C(T_c, B) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^3 A(T_c, B)$$

$$\Delta^6(T, B) = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^3 A^3(T_c, B)$$

จากสมการ (3-20) และสมการ (3-21) สามารถเขียนสมการ (3-19) ได้เป็น

$$\therefore \Delta F = -X(T_c, B)A^2(T_c, B) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \left\{ 1 + \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left[-\frac{Y(T_c, B)A(T_c, B)}{X(T_c, B)} + \frac{2C(T_c, B)}{A(T_c, B)} \right] \right\} \dots (3-22)$$

หากพิจารณาสมการ (3-22) เฉพาะเทอมที่หนึ่ง จะได้

$$\Delta F = -X(T_c, B)A^2(T_c, B)\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \quad \text{.....(3-23)}$$

จากสูตรการอินทิเกรตในสมการ (ค-16) และสมการ (ค-17) ทำให้สามารถคำนวณค่า $X(T_c, B)$, และ $A(T_c, B)$ กรณี $T = T_c$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(T_c, B) &= \sum_{n=0}^{\infty} N(0) \langle g^4(\theta) \rangle \left(\frac{1}{8T_c^2} \right) \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left\{ \frac{1}{[x^2 + a_+^2]^2} + \frac{1}{[x^2 + a_-^2]^2} \right\} \\ &= \frac{3N(0)}{32T_c^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\omega_D/2T_c)}{2a_+^2[(\omega_D/2T_c)^2 + a_+^2]} + \frac{1}{2a_+^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{a_+} \right) \right\} \quad \text{.....(3-24)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(T_c, B) &= \left\{ \begin{aligned} &\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \\ &- 4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_B B}{2T_c}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(3-25)} \\ &\quad \frac{3}{8T_c^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_B B}{2T_c}} \right) \\ &+ \frac{\omega_D/2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi + i\frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

เมื่อแทนสมการ (3-24) และสมการ (3-25) ในสมการ (3-23) จะได้

$$\frac{\Delta F(T,B)}{N(0)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 T_c^2} = -\frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \\ & - 4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]\left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right] \right\}^2 \dots\dots\dots(3-26) \\ & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]\left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right\} \end{aligned} \right.$$

ขั้นตอนที่ 3 การคำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤต

สนามแม่เหล็กวิกฤตเชิงอุณหพลศาสตร์ $H_c(T,B)$ สามารถคำนวณได้ถ้าทราบผลต่างของพลังงานอิสระดังสมการ (2-16)

$$\Delta F = \frac{-H_c^2(T,B)}{8\pi} \dots\dots\dots(2-16)$$

จากขั้นตอนที่ 2 คำนวณผลต่างพลังงานอิสระได้ดังสมการ (3-26) ดังนั้นจะได้สมการของสนามแม่เหล็กวิกฤต ดังนี้

$$\frac{H_c^2(T,B)}{8\pi} = X(T_c,B)A^2(T_c,B)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 \left\{ 1 + \left(1-\frac{T}{T_c}\right) \left(\frac{2C(T_c,B)}{A(T_c,B)} - \frac{Y(T_c,B)A(T_c,B)}{X(T_c,B)} \right) \right\} \dots\dots\dots(3-27)$$

หากพิจารณาสมการ (3-27) เฉพาะเทอมที่หนึ่ง จะได้

$$\frac{H_c^2(T,B)}{8\pi} = X(T_c,B)A^2(T_c,B)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 \quad \text{.....(3-28)}$$

เมื่อแทนสมการ (3-24) และสมการ (3-25) ในสมการ (3-28) จะได้

$$\frac{H_c^2(T,B)}{8\pi N(0)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 T_c^2} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & \left[\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \right. \\ & \left. - 4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]\left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right] \right\}^2 \quad \text{.....(3-29)} \\ & \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

ขั้นตอนที่ 4 การคำนวณผลต่างความร้อนจำเพาะ

ผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ ที่อุณหภูมิวิกฤต $\Delta C(T_c, B)$ คำนวณได้จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของผลต่างพลังงานอิสระ เทียบกับ T ดังสมการ (2-17)

$$\Delta C(T_c, B) = -T_c \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial T^2} \Big|_{T=T_c} \quad \text{.....(2-17)}$$

$$\text{เมื่อ } \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \frac{X(T_c, B)A^2(T_c, B)}{T_c} \left\{ 2\left(1-\frac{T}{T_c}\right) + 3\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2 \left(\frac{2C(T_c, B)}{A(T_c, B)} - \frac{Y(T_c, B)A(T_c, B)}{X(T_c, B)} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial T^2} = -\frac{2X(T_c, B)A^2(T_c, B)}{T_c^2} \left\{ 1 + 3 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \left(\frac{2C(T_c, B)}{A(T_c, B)} - \frac{Y(T_c, B)A(T_c, B)}{X(T_c, B)} \right) \right\}$$

ดังนั้นจะได้

$$\Delta C(T_c, B) = \frac{2X(T_c, B)A^2(T_c, B)}{T_c} \quad \text{.....(3-30)}$$

เมื่อความร้อนจำเพาะของสภาพปกติ ที่อุณหภูมิวิกฤตคือ $C_N = \frac{2}{3} \pi^2 N(0) T_c$ ดังนั้น

$$\frac{\Delta C(T_c, B)}{C_N} = \frac{3X(T_c, B)A^2(T_c, B)}{\pi^2 N(0) T_c^2} \quad \text{.....(3-31)}$$

เพราะฉะนั้นจะได้สมการของ $\Delta C(T, B) / C_N$ ที่อุณหภูมิวิกฤต T_c โดยแทนสมการ (3-24) และสมการ (3-25) ในสมการ (3-31) ดังนี้

$$\frac{\Delta C(T_c, B)}{C_N} = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \right] - 4 \left(\frac{\mu_B B}{2T_c} \right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / 2T_c}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D / 2T_c}{\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right)^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right]^2 \right]} \right] \right\}^2 \quad \text{.....(3-32)}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / 2T_c}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D / 2T_c}{\left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right)^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c} \right]^2 \right]} \right\}$$

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินมาในบทที่ 3 เป็นการคำนวณปริมาณต่างๆ เพื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” อันได้แก่ ช่องว่างพลังงาน ผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภาพนำยิ่งยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ สนามแม่เหล็กวิกฤต และผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยิ่งยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ โดยพิจารณาที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์เคลวิน ($T \rightarrow T_c$) ซึ่งมีเงื่อนไขคือ พลังงานที่เกิดจากสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพลังงานความร้อน ได้ผลการคำนวณดังนี้

1. สมการกำลังสองของช่องว่างพลังงาน ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta^2(T,B)$ คำนวณได้ดังสมการ (3-16) คือ

$$\Delta^2(T,B) = \frac{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left\{ \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) - 4 \left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / 2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi - i \frac{\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D / 2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi - i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi - i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right] \right\}}{\frac{3}{8T_c^2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi + i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / 2T_c}{(n + \frac{1}{2})\pi + i \frac{\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D / 2T_c}{\left[(n + \frac{1}{2})\pi + i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[(n + \frac{1}{2})\pi + i \frac{\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right\}} \dots\dots\dots(3-16)$$

สมการ (3-16) เมื่อนำมาใช้เขียนกราฟระหว่าง $\Delta^2(T,B)/(1 - T/T_c)T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ดังภาพประกอบ (19) และเมื่อเขียนกราฟระหว่าง $\Delta^2(T,B)/(1 - T/T_c)T_c^2$ กับ ω_D/T_c โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\mu_B B/T_c = 0$ และ

$\mu_B B / T_c = 0.1$ จะได้ดังภาพประกอบ (20) สำหรับกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($B=0$) สามารถเขียนสมการ (3-16) ได้เป็น

$$\Delta^2(T, B=0) = \frac{2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}{\frac{3}{8T_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+1/2)^3 \pi^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n+1/2)\pi}\right) + \frac{\omega_D/2T_c}{(n+1/2)^2 \pi^2 [(\omega_D/T_c)^2 + (n+1/2)^2 \pi^2]} \right\}} \quad \dots\dots(4-1)$$

จากสมการ (4-1) พบว่าเมื่อ ω_D / T_c มีค่านันต์ จะได้ $\Delta^2(T, B=0) / (1 - T/T_c) T_c^2 = \frac{32\pi^2}{21\zeta(3)} = 12.5072$

2. ผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติ $\Delta F(T, B)$ โดยใช้วิธีคำนวณแบบแม่นยำตรง ได้ดังสมการ (3-26) คือ

$$\frac{\Delta F(T, B)}{N(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 T_c^2} = -\frac{1}{3} \left\{ \left[\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) - 4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right\} \right]^2 \right. \quad \dots\dots(3-26)$$

$$\left. + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{i\mu_B B}{2T_c}}\right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right\} \right\}$$

เมื่อนำสมการ (3-26) มาเขียนกราฟระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้กราฟประกอบ (21) และเมื่อเขียนกราฟระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D/T_c โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$ จะได้กราฟประกอบ (22) สำหรับกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($B=0$) สามารถเขียนสมการ (3-26) ได้เป็น

$$\Delta F(T,B) = - \frac{N(0)(4/3)T_c^2(1-T/T_c)^2 \tanh^2(\omega_D/2T_c)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3 \pi^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})\pi} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 [(\frac{\omega_D}{2T_c})^2 + (n+\frac{1}{2})^2 \pi^2]} \right\}} \dots\dots(4-2)$$

จากสมการ (4-2) พบว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่าอนันต์ จะได้ $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2 = -\frac{8\pi^2}{21\zeta(3)} = -3.12799$

3. สนามแม่เหล็กวิกฤตที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $H_c^2(T,B)$ คำนวณได้ดังสมการ (3-29) คือ

$$\frac{H_c^2(T,B)}{8\pi N(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 T_c^2} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right)}{-4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right]} \right\}^2 \dots\dots(3-29)$$

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2 \right]} \right\}$$

เมื่อนำสมการ (3-29) มาเขียนกราฟระหว่าง $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ดังภาพประกอบ (23) และเมื่อเขียนกราฟระหว่าง $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D/T_c โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$ จะได้ดังภาพประกอบ (24) สำหรับกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($B=0$) สามารถเขียนสมการ (3-29) ได้เป็น

$$\frac{H_c^2(T,B=0)}{8\pi} = \frac{(4/3)N(0)T_c^2(1-T/T_c)^2 \tanh^2(\omega_D/2T_c)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3 \pi^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})\pi} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 [(\frac{\omega_D}{2T_c})^2 + (n+\frac{1}{2})^2 \pi^2]} \right\}} \dots\dots(4-3)$$

จากสมการ (4-3) พบว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่านันต์ จะได้ $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2 = \frac{8\pi^2}{21\zeta(3)} = 3.12799$

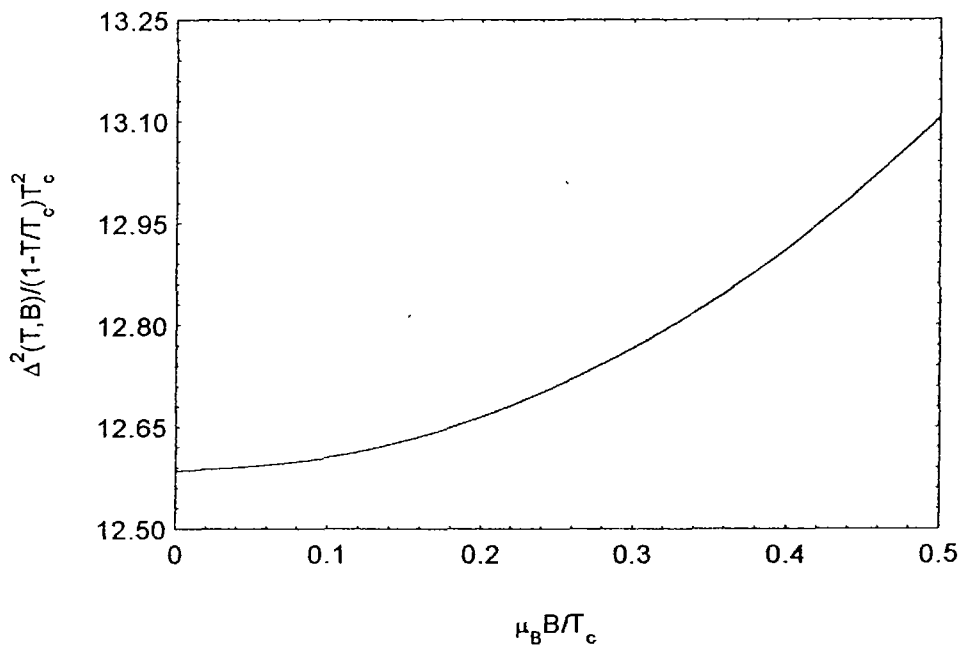
4. คำนวณผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก ที่อุณหภูมิวิกฤต $\Delta C(T_c, B)$ ได้ดังสมการ (3-32) คือ

$$\frac{\Delta C(T_c, B)}{C_N} = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} + \frac{\mu_B B}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\mu_B B}{2T_c}\right)}{2} - 4\left(\frac{\mu_B B}{2T_c}\right) \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right\} \right]^2 \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{i\mu_B B}{2T_c}} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right] \left[\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)^2 + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i\mu_B B}{2T_c}\right]^2\right]} \right\} \right\} \dots\dots(3-32)$$

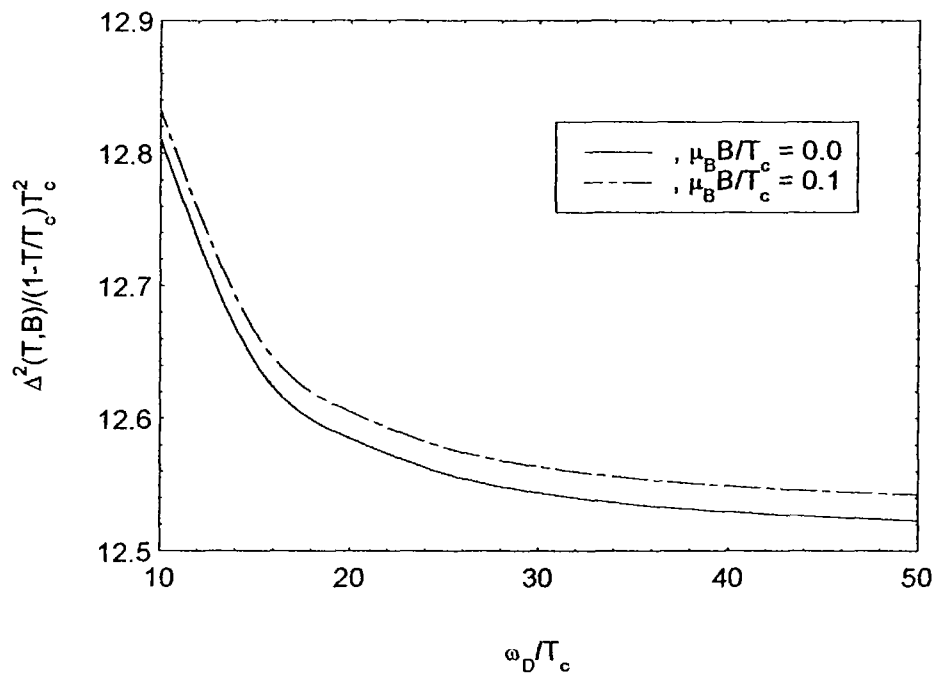
เมื่อนำสมการ (3-32) มาเขียนกราฟระหว่าง $\Delta C(T_c, B)/C_N$ กับ $\mu_B B/T_c$ โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ดังภาพประกอบ (25) และเมื่อเขียนกราฟระหว่าง $\Delta C(T_c, B)/C_N$ กับ ω_D/T_c โดยใช้โปรแกรม Mathematica ประมวลผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากการแทนค่า $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$ จะได้ดังภาพประกอบ (26) สำหรับกรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($B=0$) สามารถเขียนสมการ (3-32) ได้เป็น

$$\frac{\Delta C(T_c, B)}{C_N} = \frac{(1/\pi^2) \tanh^2(\omega_D/2T_c)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3 \pi^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})\pi} \right) + \frac{\omega_D/2T_c}{(n+\frac{1}{2})^2 \pi^2 [(\frac{\omega_D}{2T_c})^2 + (n+\frac{1}{2})^2 \pi^2]} \right\}} \quad \dots\dots(4-4)$$

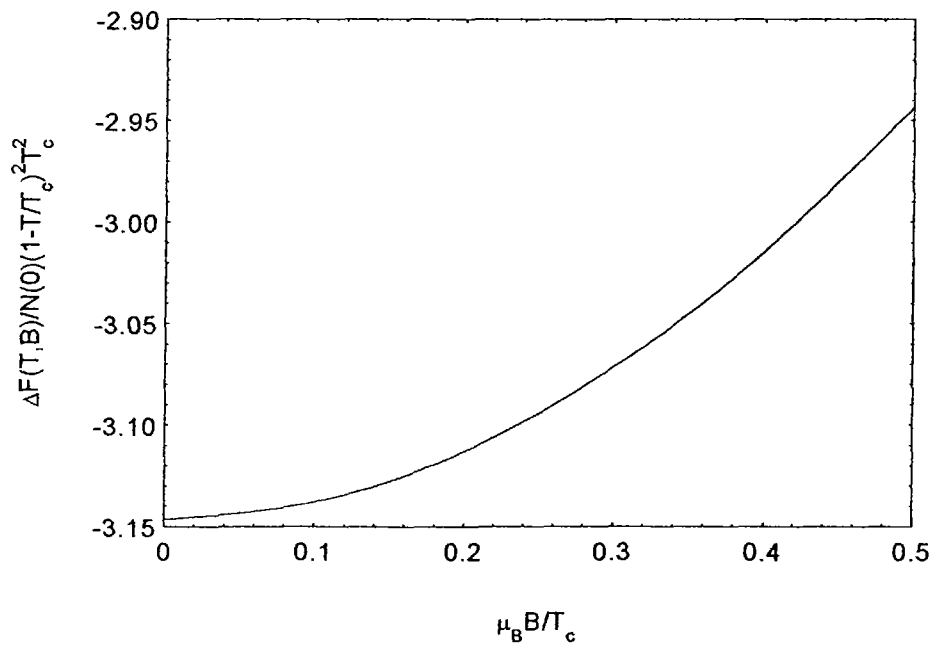
จากสมการ (4-4) พบว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่านันต์ จะได้ $\Delta C(T_c, B)/C_N = \frac{8}{7\zeta(3)} = 0.950796$



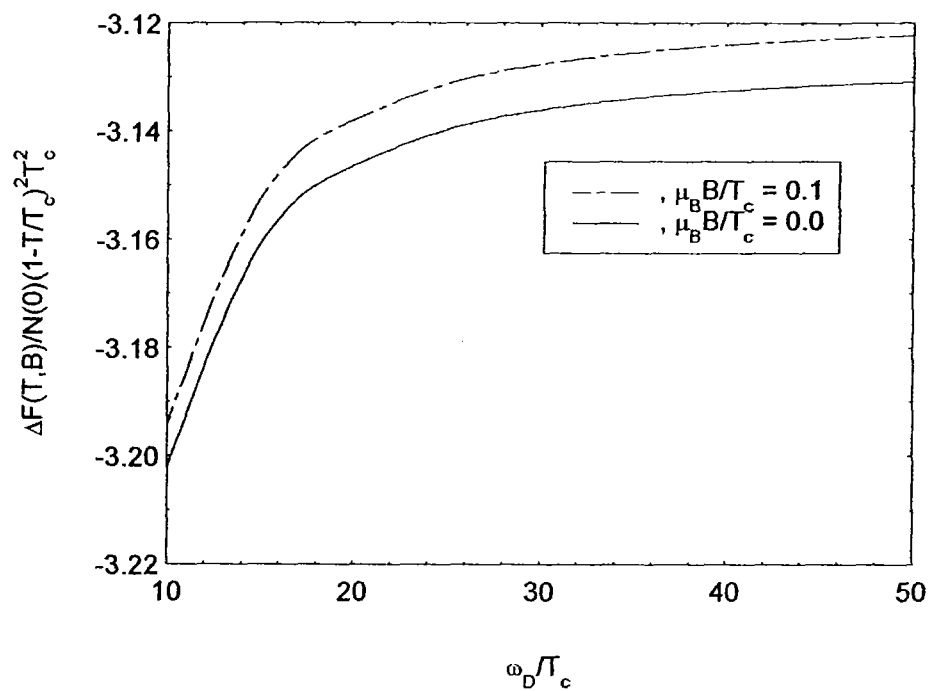
ภาพประกอบ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta^2(T, B)/(1-T/T_c)T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$



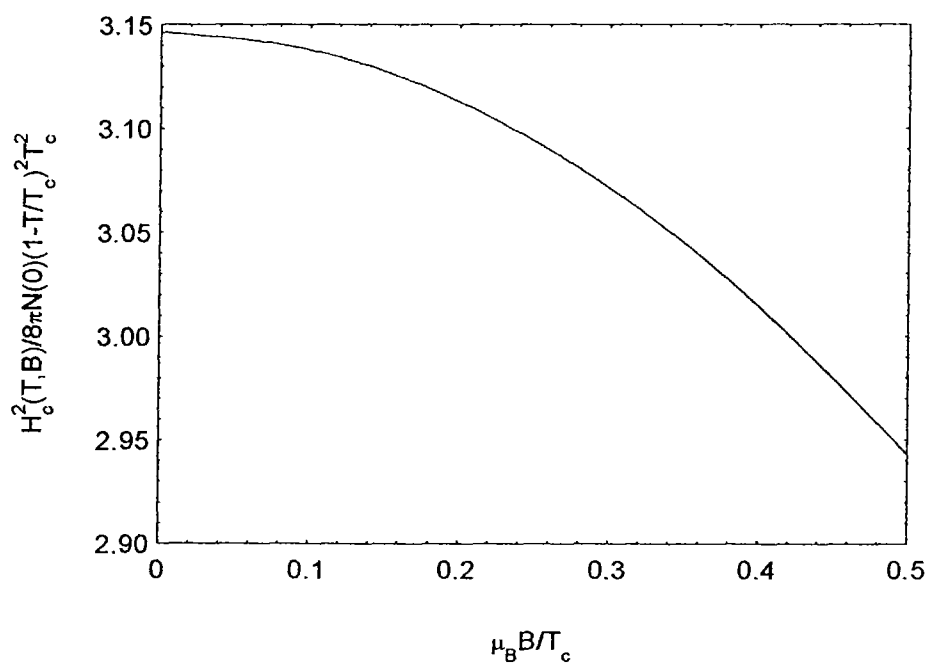
ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$



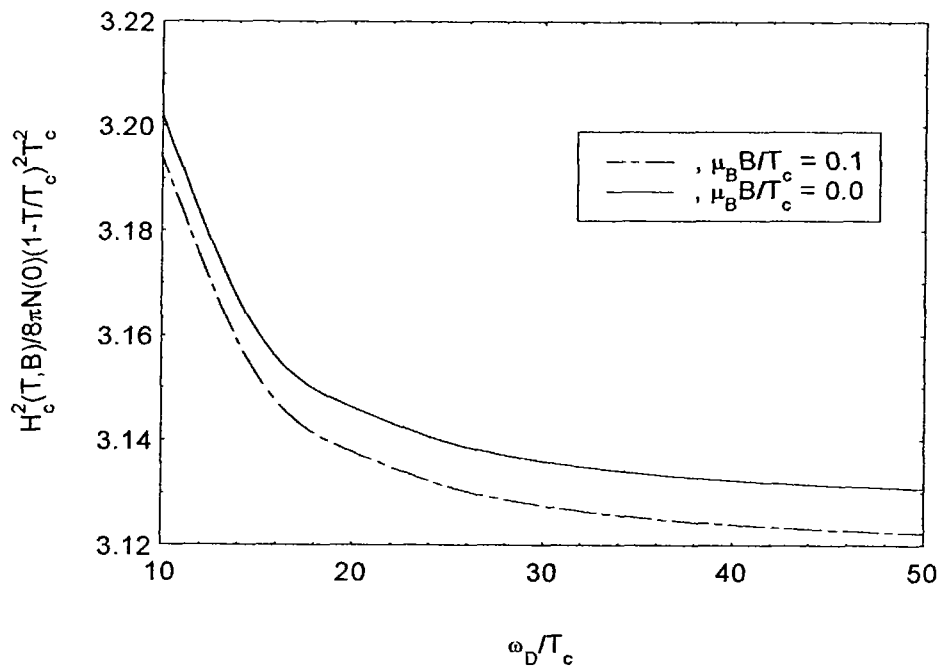
ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$



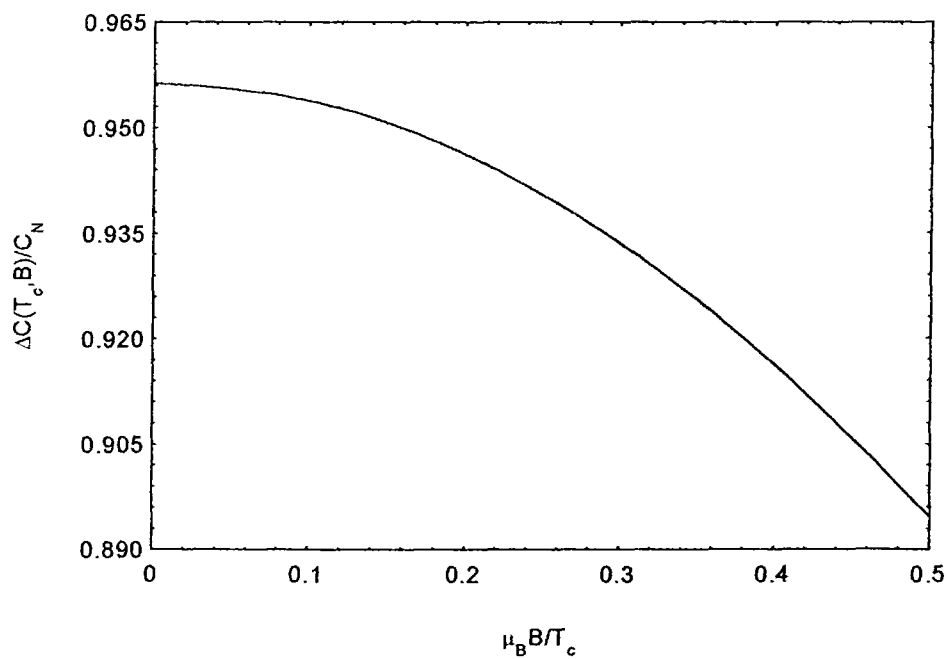
ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$



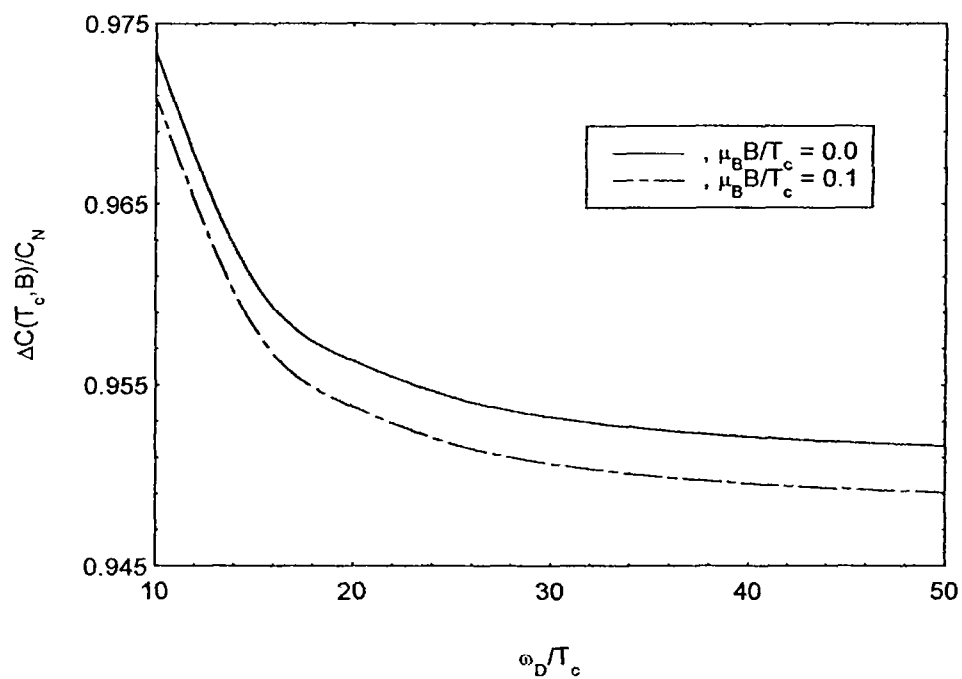
ภาพประกอบ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ กับ $\mu_B B/T_c$ เมื่อ $\omega_D/T_c = 20$



ภาพประกอบ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $H_c^2(T, B) / 8\pi N(0)(1 - T/T_c)^2 T_c^2$ กับ ω_D / T_c เมื่อ $\mu_B B / T_c = 0$ และ $\mu_B B / T_c = 0.1$



ภาพประกอบ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_c, B) / C_N$ กับ $\mu_B B / T_c$ เมื่อ $\omega_D / T_c = 20$



ภาพประกอบ 26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_c, B)/C_N$ กับ ω_D/T_c เมื่อ $\mu_B B/T_c = 0$ และ $\mu_B B/T_c = 0.1$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบ คลื่น "ดี" โดยพิจารณาที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ ($T \rightarrow T_c$) ซึ่งมีเงื่อนไขคือ พลังงานที่เกิดจากสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพลังงานความร้อน โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. คำนวณหาสมการกำลังสองของช่องว่างพลังงาน ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta^2(T,B)$
2. คำนวณหาผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta F(T,B)$ โดยใช้วิธีคำนวณแบบแม่นยำ
3. คำนวณหาสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $H_c^2(T,B)$
4. คำนวณหาผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก $\Delta C(T_c,B)$

สรุปผล

ผลการคำนวณพบว่าคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่ง ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ ขึ้นกับอุณหภูมิและสนามแม่เหล็ก ดังนี้

1. จากภาพประกอบ (19) จะเห็นว่า $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ มีค่าเพิ่มขึ้นแบบพาราโบลาหงาย เมื่อ $\mu_B B/T_c$ มีค่าเพิ่มขึ้น
2. จากภาพประกอบ (20) จะเห็นว่า $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ มีค่าลดลง เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น และ $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2$ มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $\mu_B B/T_c$ มีค่าเพิ่มขึ้น
3. จากภาพประกอบ (21) จะเห็นว่า $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าเพิ่มขึ้นแบบพาราโบลาหงาย เมื่อ $\mu_B B/T_c$ มีค่าเพิ่มขึ้น
4. จากภาพประกอบ (22) จะเห็นว่า $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น และ $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $\mu_B B/T_c$ มีค่าเพิ่มขึ้น
5. จากภาพประกอบ (23) จะเห็นว่า $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าลดลงแบบพาราโบลาคว่ำ เมื่อ $\mu_B B/T_c$ มีค่าเพิ่มขึ้น

6. จากภาพประกอบ (24) จะเห็นว่า $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าลดลง เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น และ $H_c^2(T,B)/8\pi N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2$ มีค่าลดลง เมื่อ μ_B/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น

7. จากภาพประกอบ (25) จะเห็นว่า $\Delta C(T_c,B)/C_N$ มีค่าลดลง เมื่อ μ_B/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น

8. จากภาพประกอบ (26) จะเห็นว่า $\Delta C(T_c,B)/C_N$ มีค่าลดลง เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น และ $\Delta C(T_c,B)/C_N$ มีค่าลดลง เมื่อ μ_B/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น

อภิปรายผล

ผลการคำนวณช่องว่างพลังงานดังภาพประกอบ (19) นั้นแสดงว่าช่องว่างพลังงานมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูง ซึ่งเราคาดหวังว่าควรจะมีค่าลดลง เพราะเราทราบว่าปัจจัยพื้นฐานที่สามารถทำลายสภานำยวดยิ่งได้คือ อุณหภูมิ กระแสไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก เพราะฉะนั้นเมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงขึ้น ช่องว่างพลังงานจะลดลงจนกระทั่งเป็นศูนย์ เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากับสนามแม่เหล็กวิกฤต สารตัวนำยวดยิ่งก็จะกลายสภาพเป็นตัวนำปกติทำให้ไม่มีช่องว่างพลังงานที่ผิวเฟอร์มิ แต่เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (3-16) กับการคำนวณของครูนวการ , เกศกมลลาสน์ และยกสำน (2000 : 307) ในสมการ (14) กรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กครบถ้วน จะเห็นว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2 = \frac{32\pi^2}{21\zeta(3)} = 12.5072$ และเมื่อแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ $\Delta^2(T,B)/(1-T/T_c)T_c^2 = 12.5852$ ซึ่งให้ผลสอดคล้องกันกับภาพประกอบ (20) และพบว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น ช่องว่างพลังงานนั้นมีค่าลดลง

ผลการคำนวณผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติแสดงในภาพประกอบ (21) จะเห็นว่าผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติของสารตัวนำยวดยิ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อสารตัวนำยวดยิ่งอยู่ในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูง และภาพประกอบ (22) ได้แสดงว่าผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสภานำยวดยิ่งกับสภานำปกติมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับสูตรการคำนวณของครูนวการ, เกศกมลลาสน์ และยกสำน (2000 : 310) ในสมการ (25) กรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กครบถ้วน จะเห็นว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2 = \frac{8\pi^2}{21\zeta(3)} = -3.12799$ และเมื่อแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ $\Delta F(T,B)/N(0)(1-T/T_c)^2 T_c^2 = -3.1463$ ซึ่งให้ผลสอดคล้องกันกับภาพประกอบ (22)

ผลการคำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤตดังแสดงในภาพประกอบ (23) จะเห็นว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งมีค่าลดลง เมื่อสารตัวนำยวดยิ่งอยู่ในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูง ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดพื้นฐานดังกล่าวมาแล้ว และภาพประกอบ (24) ได้แสดงว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าลดลง เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับสูตรการคำนวณของครุณาการ , เกศกมลลาสน์ และยกสำน (2000 : 310) ในสมการ (26) กรณีที่ไม่มีสนามแม่เหล็กรบกวน จะเห็นว่าเมื่อ ω_D/T_c มีค่าอนันต์ $H_c^2(T,B)/8\pi\chi(0)(1-T/T_c)^2T_c^2 = \frac{8\pi^2}{21\zeta(3)} = 3.12799$ และเมื่อแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ $H_c^2(T,B)/8\pi\chi(0)(1-T/T_c)^2T_c^2 = 3.1463$

สำหรับผลการคำนวณผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติ ที่อุณหภูมิวิกฤตดังแสดงในภาพประกอบ (25) จะเห็นว่ากรณีสนามแม่เหล็กเป็นศูนย์ให้ผลสอดคล้องกับงานวิจัยของครุณาการ , เกศกมลลาสน์ และยกสำน (2000 : 314) ในสมการ (35) ดังภาพประกอบ (14) นั่นคือ $\Delta C(T_c,B)/C_N = 0.950796$ เมื่อ ω_D/T_c มีค่าอนันต์ และเมื่อแทนค่า $\omega_D/T_c = 20$ จะได้ $\Delta C(T_c,B)/C_N = 0.95636$ แต่เมื่อมีสนามแม่เหล็กที่มีค่าสูงขึ้นจะเห็นว่า $\Delta C(T_c,B)$ มีค่าลดลง ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของโดร์โบโลและคณะ (1998) แต่ลักษณะของกราฟที่ได้แตกต่างกันตรงที่งานวิจัยของโดร์โบโลและคณะนั้นพบว่า $\Delta C(T_c,B)$ ขึ้นกับสนามแม่เหล็ก B แบบเส้นตรง ดังภาพประกอบ (18) แต่งานวิจัยฉบับนี้กลับพบว่า $\Delta C(T_c,B)$ ลดลงแบบเส้นโค้ง และภาพประกอบ (26) ได้แสดงว่าผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติมีค่าลดลง เมื่อ ω_D/T_c มีค่าเพิ่มขึ้น

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการสำหรับอธิบายคุณสมบัติเชิงอุณหพลศาสตร์ของสารตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น “ดี” ขณะอยู่ในสนามแม่เหล็กซึ่งมีความเข้มต่ำมากคือ พลังงานแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่าพลังงานความร้อน โดยมีเงื่อนไขของการศึกษาคือความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มีมีค่าคงที่ และอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างคูคูเปอร์เป็นอันตรกิริยาอย่างอ่อน ซึ่งที่จริงแล้วมีทฤษฎีบางทฤษฎี เช่น ทฤษฎีของ Van Hove ซึ่งมีแนวคิดที่ว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มีมีค่าไม่คงที่แต่ขึ้นกับพลังงานของอิเล็กตรอน และนักทดลองบางท่านพบว่าสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงแบบคลื่น “ดี” นั้นคูคูเปอร์มีอันตรกิริยาดึงดูดแบบรุนแรง อีกทั้งสูตรการคำนวณที่ได้นี้เป็นกรณีศึกษาของสารตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์เท่านั้น ซึ่งในความเป็นจริงสารที่สามารถเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงนั้นไม่เพียงมีแต่สารบริสุทธิ์ แต่ยังมีกรณีที่มีสารเจือปนอื่นๆ อันได้แก่ สารตัวนำที่มีสารเจือแบบแม่เหล็ก แบบไม่เป็นแม่เหล็ก เป็นต้น ดังนั้นในการวิจัยครั้งต่อไปผู้วิจัยมีความเห็นว่าควรทำการวิจัยภายใต้เงื่อนไขดังที่กล่าวนี้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Atake, T. (1988, January 1). "Heat Capacity of High-Temperature Superconductor $\text{Ba}_2\text{DyCu}_3\text{O}_7$," *Physical Review B*. 37(1) : 552-554.
- Bückel, Werner. (1991). *Superconductivity : Fundamentals and Applications*. Weinheim : VCH.
- Bednorz, J. G & Müller, K. A. (1987). "A Road Towards High-Temperature Superconductivity," *Physics Scripta T*. 19 : 23-26.
- Brawner, D. A & Ott, H. R. (1994, September 1). "Evidence for Unconventional Superconducting Order Parameter in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$," *Physical Review B*. 50(9) : 552-554.
- Chandrasekhar, B. S. (1969). "Early Experiments and Phenomenological Theories," in *Superconductivity v.1*. Edited by Park, R. D. p. 1-49. New York : Marcel Dekker.
- Crisan, M. (1991). *Theory of Superconductivity*. Singapore : World Scientific.
- Dorbolo, S., Houssa, M & Ausloos, M. (1998, March 1). "Electrical-Resistivity and Low-Temperature Specific Heat Measurements of Single Crystals of Thiospinel CuV_2S_4 ," *Physical Review B*. 49(10) : 6822-6828.
- Garg, K. B & Bose, S.M. (1998). *High Temperature Superconductivity : Ten Years after its Discovery*. New Delhi : Narosa.
- Hagino, T & Seki, Y. (1994, March 1). "Electronic Specific Heat of Superconductors with Van Hove Singularities : Effects of a Magnetic Field and Thermal Fluctuation," *Physical Review B*. 57(9) : 5407-5411.
- Krunavakarn, B., Kaskamalas, S & Yoksan, S. (2000). "Thermodynamic Properties of BCS Superconductivity," *Physica C*. 338 : 305-315.
- Meservey, R & Schwartz, B. B. (1969). "Equilibrium Properties : Comparison of Experimental Results with Predictions of BCS Theory," in *Superconductivity v.1*. Edited by Park, R. D. p. 117-192. New York : Marcel Dekker.
- Moler, K A, et al. (1997, February 1). "Specific Heat of $\text{YBa}_2\text{Cu}_2\text{O}_{7-\delta}$," *Physical Review B*. 55(6) : 3954-3965.
- Myers, H. P. (1997). *Introductory Solid State Physics*. 2nd ed. London : Taylor & Francis.

- Orlando, Terry P & Delin, Kevin A. (1991). *Foundations of Applied Superconductivity*. Reading, Mass. : Addison-Wesley.
- Pines, D & Monthox, P. (1995). " $d_{x^2-y^2}$ Pairing and Spin Fluctuations in the Cuprate Superconductors : A Progress Report," *J. Phys.Chem.Solids*. 56(12) : 1651-1658.
- Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. (1992). *Integrals and Series : V. 1. Elementary Functions*. 3rd ed. New York : Gordon and Breach Science.
- Rickayzen, G. (1969). "*The Theory of Bardeen, Cooper and Schrieffer*," in Superconductivity v.1. Edited by Park, R. D. p. 51-116. New York : Marcel Dekker.
- Rieck, C. T, et al. (1995, February 1). "Infrared and Microwave Spectra of an Energy Gap in High-Temperature Superconductors," *Physical Review B*. 51(6) : 3772-3782.
- Sacchetti, N. (2000). "Superconductivity : From Physics to Alchemy," *International Journal of Modern Physics B*. 14(25-27) : 2617-2627.
- Schilling, A. et al. (1993). *Nature*. 363 : 204
- Spiegel, Murray R & Liu, John. (1999). *Schaum's Outline Series Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. 2nd ed. New York : McGraw-Hill.
- Sundb, A & Strong, S. P. (1995, January 1). "Symmetries of the Superconducting Order Parameter arising from an Interlayer Tunneling Mechanism," *Physical Review B*. 51(2) : 1338-1341.
- Yang, K & Sondhi, S. L. (1998, April 1). "Response of a $d_{x^2-y^2}$ Superconductor to a Zeeman Magnetic Field," *Physical Review B*. 57(14) : 8556-8570.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การคำนวณในทฤษฎี BCS

การคำนวณช่องว่างพลังงาน

ทฤษฎี BCS ได้คำนวณปริมาณต่างๆ ทางกายภาพ โดยอาศัยวิชากลศาสตร์ควอนตัม ที่มีสมการของชโรดิงเงอร์ (Schrodinger's equation) ซึ่งได้กำหนดแฮมิลโทเนียนของระบบอิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดสภาพนำวดยิ่ง และได้กำหนดตัวดำเนินการ (Operator) 2 ชนิดตั้งแสดงในภาคผนวก ข ทำให้ได้สมการที่สำคัญคือ สมการของช่องว่างพลังงาน (Gap equation) สำหรับใช้อธิบายพฤติกรรมของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์แบบคลีน "เอส" ในกรณีไม่มีสนามแม่เหล็กดังนี้

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{2E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \quad \dots\dots(ก-1)$$

โดย $E_{\vec{k}'} = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}$

$E_{\vec{k}'}$ คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\varepsilon_{\vec{k}'}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}'$

$\Delta_{\vec{k}}$ คือ ช่องว่างพลังงาน

ω_D คือ พลังงานเดอบาย

กรณี $T = T_c$ ถ้าใช้เงื่อนไขคือ $\omega_D \gg T_c$ และ $\Delta(T_c) = 0$ จะได้ $E = \varepsilon$ การแทนปริมาณเหล่านี้ในสมการ (ก-1) ทำให้สามารถคำนวณอุณหภูมิวิกฤตได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) \\ &= \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{dx}{x} \tanh x, \quad x = \varepsilon/2T_c \end{aligned}$$

จากสูตรการอินทิเกรตแบบแยกส่วนในสมการ (ค-12) และสมการ (ค-14) จะได้

$$\begin{aligned} &= \tanh x \ln x \Big|_0^{\omega_D/2T_c} - \int_0^{\omega_D/2T_c} \ln x \operatorname{sech}^2 x dx \\ &= \ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4e^\gamma}\right) \end{aligned}$$

เมื่อ γ คือ ค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant)

ถ้า $\omega_D/T_c \rightarrow \infty$ จะได้ $\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) = 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{N(0)V} = \ln\left(\frac{\omega_D}{2T_c} \cdot \frac{4e^\gamma}{\pi}\right), \quad \gamma = 0.5772$$

$$\therefore T_c = 1.13\omega_D e^{\frac{1}{N(0)V}} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-2})$$

สมการ (ก-2) ก็คือสมการ (2-4)

กรณี $T = 0$ จะได้ $\tanh\left(\frac{E}{2T}\right) = 1$ ดังนั้นจากสมการ (ก-1) สามารถคำนวณช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\Delta(0)$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)}\right) \quad \dots\dots\dots(\text{ก-3}) \end{aligned}$$

เพราะว่า $\omega_D \gg \Delta(0)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) \\ \therefore \Delta(0) &= 2\omega_D e^{\frac{-1}{N(0)V}} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-4}) \end{aligned}$$

จากสมการ (ก-2) และสมการ (ก-4) เมื่อนำมาหารกันจะได้อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์กับอุณหภูมิวิกฤตในสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำเป็นดังนี้

$$\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.53 \quad \dots\dots\dots(\text{ก-5})$$

สมการ (ก-2) ก็คือสมการ (2-4) ซึ่งได้ทำนายว่า ไม่ว่าตัวนำยวดยิ่งจะเป็นชนิดใดก็ตามอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์กับอุณหภูมิวิกฤตในสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำจะมีค่าเท่ากันเสมอ คือ 3.53

กรณีอุณหภูมิต่ำ $T \rightarrow 0$; $\frac{\Delta(T)}{T} \gg 1$, $\tanh\left(\frac{E}{2T}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nE/T}$ ดังนั้น
สมการ (ก-1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E} e^{-nE/T} \\ &= \sinh^{-1}\left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right] + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} e^{-n\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{T}} \dots\dots(n-6) \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{\Delta(T)}$$

$$t^2 \Delta^2(T) = \varepsilon^2 + \Delta^2(T)$$

$$\varepsilon = \Delta(T) \sqrt{t^2 - 1}$$

$$d\varepsilon = \frac{\Delta(T) t dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

เมื่อแทนปริมาณเหล่านี้ในสมการ (ก-6) จะได้

$$\therefore \frac{1}{N(0)V} = \sinh^{-1}\left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right] + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} e^{-\frac{n\Delta(T)}{T} t} \dots\dots(n-7)$$

จากสมการ (ก-7) กำหนดตัวแปรใหม่โดยให้ $t = 1 + y$, $dt = dy$ ดังนั้นเทอมสุดท้ายของสมการ (ก-7) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} e^{-\frac{n\Delta(T)}{T} t} &= \int_0^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1} \frac{dy}{\sqrt{1 + 2y + y^2 - 1}} e^{-\frac{n\Delta(T)}{T} (1+y)} \\ &= \int_0^{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1 - 1} \frac{dy}{\sqrt{2y + y^2}} e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}} e^{-\frac{n\Delta(T)y}{T}} \end{aligned}$$

โดยใช้สมการ (ก-5) จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{2}}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \left(\frac{y}{2}\right)^m$ ทำให้เขียนสมการ (ก-7) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \sinh^{-1}\left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2+1-1} \frac{dy}{\sqrt{2y}\sqrt{1+\frac{y}{2}}} e^{-\frac{n\Delta(T)y}{T}} \right) e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}} \\ &= \sinh^{-1}\left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2+1-1} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-\frac{n\Delta(T)y}{T}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \left(\frac{y}{2}\right)^m \\ &= \sinh^{-1}\left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2+1-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\Delta(T)y}{T}}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} y^{m-\frac{1}{2}} dy \quad \dots\dots\dots(\text{ก-8}) \end{aligned}$$

พิจารณาด้านซ้ายของสมการ (ก-3) และสมการ (ก-8) จะได้

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)}\right) &= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \\ &\quad \times \int_0^{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2+1-1} dy e^{-\frac{n\Delta(T)y}{T}} y^{m-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-9}) \end{aligned}$$

จากสมการ (ก-9) กำหนดตัวแปรใหม่โดยให้ $t = \frac{n\Delta(T)y}{T}$, $dt = \frac{n\Delta(T)dy}{T}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)}\right) &= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \\ &\quad \times \int_0^{\frac{n\Delta(T)}{T} \left(\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2+1-1 \right)} \left(\frac{Tdt}{n\Delta(T)} \right) e^{-t} \left(\frac{Tt}{n\Delta(T)} \right)^{m-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \\
&\quad \times \frac{T^{m+\frac{1}{2}}}{(n\Delta(T))^{m+\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{n\Delta(T)}{T} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right)} dt e^{-t} t^{m-\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(n-10)
\end{aligned}$$

โดยอาศัยนิยามของ Gamma function และ Incomplete Gamma function จากสมการ (ค-8) และสมการ (ค-9) จะได้เทอมสุดท้ายด้านขวาของสมการ (ก-10) คือ

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{n\Delta(T)}{T} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right)} dt e^{-t} t^{m-\frac{1}{2}} &= \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{m-\frac{1}{2}} - \int_{\frac{n\Delta(T)}{T} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right)}^{\infty} dt e^{-t} t^{m-\frac{1}{2}} \\
&= \Gamma(m+\frac{1}{2}) - \Gamma(m+\frac{1}{2}, \frac{n\Delta(T)}{T} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right))
\end{aligned}$$

เมื่อ $\omega_D \gg \Delta(0), \Delta(T)$ จากสมการ (ค-6) และสมการ (ค-7) สามารถให้ $\sinh^{-1} x = \ln 2x$ และ $\ln(1+x) = x$ ดังนั้นเขียนสมการ (ก-10) ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
\ln\left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\right] &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \left[\frac{T}{n\Delta(T)}\right]^{m+\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Gamma(m+\frac{1}{2}) - \Gamma(m+\frac{1}{2}, \frac{n\Delta(T)}{T} \left(\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right)) \\
\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{n\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \left[\frac{T}{n\Delta(T)}\right]^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(m+\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

พิจารณาเมื่อ $n=1$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(m+\frac{1}{2}) \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\Delta(T)}{T}}}{2^m} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^m \\
&= 1 - e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^m
\end{aligned}$$

และเมื่อกระจาย $m = 0, 1, 2$ จะได้สมการของช่องว่างพลังงานดังนี้

$$\begin{aligned}
&= 1 - e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(-\frac{1}{2})} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right] + \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(-\frac{3}{2})} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^2 + \frac{1}{8} \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)\Gamma(-\frac{5}{2})} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^3 \right\} \\
&= 1 - e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(-2\sqrt{\pi})} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right] + \frac{1}{4} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{4(2)(4\sqrt{\pi}/3)} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^2 + \frac{1}{8} \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{8(3)(2)(-8\sqrt{\pi}/15)} \left[\frac{T}{\Delta(T)} \right]^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - e^{-\frac{\Delta(0)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right] + \frac{9}{128} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{75}{1024} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^3 \right\} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-11})$$

จากสมการ (ก-11) เมื่อ T มีค่าน้อยเข้าใกล้ศูนย์ จะได้

$$\therefore \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - e^{-\frac{\Delta(0)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)}} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-12})$$

กรณี $T \rightarrow T_c$ สามารถคำนวณช่องว่างพลังงานได้โดยใช้การกระจายของอนุกรมเทเลอร์จากสมการ (ค-1) ได้ดังนี้

$$\Delta^2(T) = \Delta^2(T_c) + (T - T_c) \frac{d\Delta^2(T)}{dT} \Big|_{T=T_c} + \frac{1}{2} (T - T_c)^2 \frac{d^2\Delta^2(T)}{dT^2} \Big|_{T=T_c} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-13})$$

ซึ่งเมื่อใช้เงื่อนไขคือ $\Delta^2(T_c) = 0$ จะได้

$$\Delta^2(T) = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) A(T_c) + \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 B(T_c) \quad \dots\dots(n-14)$$

$$\text{เมื่อ } A(T_c) = -T_c \frac{d\Delta^2(T)}{dT} \Big|_{T=T_c}, \quad B(T_c) = \frac{T_c^2}{2} \frac{d^2\Delta^2(T)}{dT^2} \Big|_{T=T_c}$$

ดังนั้นจะต้องคำนวณ $A(T_c)$ และ $B(T_c)$ ซึ่งสามารถทำได้จากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของสมการ (ก-1) ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (ก-1) เทียบกับ T จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{N(0)V} \right) &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \right) \\ 0 &= 2 \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{E} \right) + \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial T} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \right\} \quad \dots\dots(n-15) \end{aligned}$$

คำนวณค่าอนุพันธ์ต่างๆ ได้ว่า

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{2E} \frac{d\Delta^2}{dT}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{E} \right) = -\frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{2E^3} \frac{d\Delta^2}{dT}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) &= \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E}{2T} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E}{2T} \right) \\ &= \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E}{2T} \right) \left(-\frac{E}{2T^2} + \frac{1}{2T} \frac{\partial E}{\partial T} \right) \\ &= \operatorname{sech}^2 \left(\frac{E}{2T} \right) \left(-\frac{E}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \frac{d\Delta^2}{dT} \right) \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าอนุพันธ์เหล่านี้ในสมการ (ก-14) จะได้

$$0 = - \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E^3} \frac{d\Delta^2}{dT} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) + 2 \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E} \operatorname{sech}^2\left(\frac{E}{2T}\right) \left[-\frac{E}{2T^2} + \frac{1}{4TE} \frac{d\Delta^2}{dT} \right]$$

$$0 = \frac{d\Delta^2}{dT} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left[-\frac{1}{E^3} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) + \frac{1}{2E^2T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{E}{2T}\right) \right] - \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{T^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{E}{2T}\right)$$

โดยการจับแยกเทอมจะได้

$$\frac{d\Delta^2}{dT} = \frac{\frac{1}{T^2} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \operatorname{sech}^2\left(\frac{E}{2T}\right)}{\int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left[-\frac{1}{E^3} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) + \frac{1}{2E^2T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{E}{2T}\right) \right]} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-16})$$

กรณีที่ $T = T_c$ จะได้ว่า $E = \varepsilon$ ดังนั้นสมการ (ก-16) จะเป็นดังนี้

$$\left. \frac{d\Delta^2}{dT} \right|_{T=T_c} = \frac{\frac{1}{T_c^2} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left[\frac{1}{2\varepsilon^2T_c} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) - \frac{1}{\varepsilon^3} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) \right]}$$

$$\left. \frac{d\Delta^2}{dT} \right|_{T=T_c} = \frac{8T_c \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \operatorname{sech}^2 x}{\int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left[\frac{\operatorname{sech}^2 x}{x^2} - \frac{\tanh x}{x^3} \right]}, \quad x = \varepsilon / 2T_c \quad \dots\dots\dots(\text{ก-17})$$

จากความสัมพันธ์ $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^2}$, จะได้ว่า

$$\frac{\tanh x}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{x^2(x^2 + a^2)}, \quad a = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x^2 + a^2)} \right]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left[\frac{\sec^2 x}{x^2} - \frac{\tanh x}{x^3} \right] \\
 &= \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{d \tanh x}{x^2} - \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \frac{\tanh x}{x^3} \\
 &= \frac{\tanh x}{x^2} \Big|_0^{\omega_D/2T_c} + \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \cdot \frac{\tanh x}{x^3} \\
 &= \frac{\tanh x}{x^2} \Big|_0^{\omega_D/2T_c} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2} \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x^2 + a^2)} \right]
 \end{aligned}$$

จากสูตรการอินทิเกรตในสมการ (ก-15) จะได้

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left[\frac{\sec^2 x}{x^2} - \frac{\tanh x}{x^3} \right] \\
 &= \frac{\tanh x}{x^2} \Big|_0^{\omega_D/2T_c} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right] \Big|_0^{\omega_D/2T_c} \\
 &= \frac{\tanh(\omega_D/2T_c)}{(\omega_D/2T_c)^2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2 \pi^2} \left[\frac{1}{(\omega_D/2T_c)} + \frac{1}{(n+1/2)\pi} \tan^{-1} \left(\frac{(\omega_D/2T_c)}{(n+1/2)\pi} \right) \right]
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนในสมการ (ก-16) จะได้เป็น

$$\frac{d\Delta^2}{dT} \Big|_{T=T_c} = \frac{8T_c \tanh(\omega_D/2T_c)}{\left\{ \frac{1}{(\omega_D/2T_c)^2} \tanh(\omega_D/2T_c) - \frac{2}{(\omega_D/2T_c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2 \pi^2} \right.} \dots\dots(n-18)$$

$$\left. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^3 \pi^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D/2T_c}{(n+1/2)\pi} \right) \right\}$$

โดยอาศัยนิยามของฟังก์ชันซีตาของรีมานน์ (Riemann-Zeta function) ในสมการ (ก-10) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{โดย } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

ดังนั้น

$$A(T_c) = \frac{-8T_c^2 \tanh y}{\frac{1}{y^2} \tanh y - \frac{1}{y} - I_3} \quad \text{.....(ก-19)}$$

โดยที่ $y = \omega_D / 2T_c$, $I_3 = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / \pi T_c}{2n+1} \right)$ เมื่อ $\omega_D / 2T_c \rightarrow \infty$

จะได้ $I_3 = \frac{7}{\pi^2} \zeta(3)$ และจากสมการ (ก-14) ถ้าพิจารณาเฉพาะเทอมของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้สมการของช่องว่างพลังงาน กรณีที่ $T \rightarrow T_c$ ดังนี้

$$\Delta^2(T) = \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad \text{.....(ก-20)}$$

$$\Delta(T) = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad \text{.....(ก-21)}$$

จากสมการ (ก-4) และสมการ (ก-21) เมื่อนำมาหารกันจะได้

$$\therefore \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad \text{.....(ก-22)}$$

สมการ (ก-22) ก็คือสมการ (2-6) นั่นเอง

การคำนวณพลังงานอิสระ

สำหรับระบบที่มีปริมาตรและความดันคงที่ และไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ทฤษฎี BCS ได้กำหนดผลต่างของความหนาแน่นของพลังงานอิสระไว้ดังนี้คือ

$$\Delta F = \int_0^{\Delta(T)} d\Delta'(T) |\Delta'(T)|^2 \frac{d}{d\Delta'} \left(\frac{1}{V} \right) \quad \text{.....(ก-23)}$$

เมื่อ $\Delta(T)$ คือช่องว่างพลังงานของสภาพตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิ T และ V คือค่าคงที่ของอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอน จากสมการ (ก-1) ทำให้คำนวณสมการพลังงานอิสระได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 F_S - F_N &= N(0) \int_0^\Delta d\Delta' \Delta'^2 \frac{d}{d\Delta'} \left\{ \int_0^\infty \frac{dx}{E'} \tanh\left(\frac{E'}{2T}\right) \right\} \\
 &= N(0) \left\{ \Delta^2(T) \int_0^\infty \frac{dx}{E} \tanh\left(\beta \frac{E}{2}\right) - 2 \int_0^\Delta d\Delta' \Delta' \int_0^\infty \frac{dx}{E'} \tanh\left(\beta \frac{E'}{2}\right) \right\}, \quad \beta = \frac{1}{T} \\
 \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \frac{\Delta^2(T)}{N(0)V} - 2 \int_0^{\Delta(T)} d\Delta' \Delta' \int_0^\infty \frac{dx}{E'} \tanh\left(\beta \frac{E'}{2}\right) \quad \dots\dots\dots(\text{ก-24})
 \end{aligned}$$

จากสมการ (ก-24) ถ้ากำหนดให้ $x = \beta \frac{E'}{2}$, $E' = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(T)}$

$$dx = \frac{\beta}{2} dE' = \frac{\beta}{2} d\left[\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}\right] = \frac{\beta}{2} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} 2\Delta' d\Delta'$$

$$dx = \frac{\beta}{2} \frac{\Delta'}{E'} d\Delta' \Rightarrow \frac{\Delta'}{E'} d\Delta' = \frac{2}{\beta} dx$$

พิจารณา $\int_0^\Delta d\Delta' \Delta' \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{E'} \tanh\left(\beta \frac{E'}{2}\right) = \int_0^\infty d\epsilon \int_0^\Delta \frac{d\Delta'}{E'} \Delta' \tanh\left(\beta \frac{E'}{2}\right)$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\epsilon \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\beta E}{2}} \frac{d\Delta'}{E'} \Delta' \tanh\left(\frac{\beta E'}{2}\right) &= \int_0^\infty d\epsilon \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\beta E}{2}} \frac{2}{\beta} dx \tanh x \\
 &= \frac{2}{\beta} \int_0^\infty d\epsilon \left[\ln \cosh x \right]_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\beta E}{2}} \\
 &= \frac{2}{\beta} \int_0^\infty d\epsilon \left[\frac{\ln \cosh\left(\frac{\beta E}{2}\right)}{\ln \cosh\left(\frac{\beta \epsilon}{2}\right)} \right] \quad \dots\dots\dots(\text{ก-25})
 \end{aligned}$$

และ $\ln \cosh x = \ln \left[\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right] = \ln \left[\frac{e^x}{2} (1 + e^{-2x}) \right] = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$

เมื่อแทนปริมาณเหล่านี้ในสมการ (ก-25) จะได้

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \int_{\frac{\beta\varepsilon}{2}}^{\frac{\beta E}{2}} \frac{d\Delta'}{E'} \tanh\left(\frac{\beta E'}{2}\right) &= \frac{2}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \ln \cosh\left(\frac{\beta E}{2}\right) - \ln \cosh\left(\frac{\beta \varepsilon}{2}\right) \right\} \\
 &= \frac{2}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \frac{\beta E}{2} - \ln 2 + \ln(1 + e^{-\beta E}) - \frac{\beta \varepsilon}{2} + \ln 2 - \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon}) \right\} \\
 &= \frac{2}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \frac{\beta}{2} (E - \varepsilon) + \ln(1 + e^{-\beta E}) - \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon}) \right\} \\
 &= \int_0^{\omega_D} d\varepsilon (E - \varepsilon) + \frac{2}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta E}) - \frac{2}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon}) \quad \dots\dots\dots(\text{ก-26})
 \end{aligned}$$

จากสมการ (ก-26) ทำให้เขียนสมการ (ก-24) ใหม่คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{F_S - F_N}{N(0)V} &= \frac{\Delta^2(T)}{N(0)V} - 2 \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)} - \varepsilon \right\} - \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta E}) \\
 &\quad + \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon}) \quad \dots\dots\dots(\text{ก-27})
 \end{aligned}$$

จากสมการ (ก-24) ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon = \Delta(T) \sinh \phi$, $d\varepsilon = \Delta(T) \cosh \phi d\phi$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
 \int d\varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)} \right) &= \int \Delta(T) \cosh \phi d\phi \Delta(T) \cosh \phi \\
 &= \Delta^2(T) \int d\phi \cosh^2 \phi \\
 &= \frac{\Delta^2(T)}{2} \int d\phi (1 + \cosh 2\phi) \\
 &= \frac{\Delta^2(T)}{2} \left\{ \phi + \frac{\sinh 2\phi}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta^2(T)}{2} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta(T)} \right) + \sinh \phi \cosh \phi \right\}_0^{\omega_D} \\
&= \frac{\Delta^2(T)}{2} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta(T)} \right) + \frac{\varepsilon}{\Delta(T)} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta(T)} \right)^2} \right\}_0^{\omega_D} \\
&= \frac{\Delta^2(T)}{2} \sinh^{-1} \left[\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right] + \frac{\omega_D}{2} \sqrt{\Delta^2 + \omega_D^2} \quad \dots\dots\dots(n-28)
\end{aligned}$$

และ $\int_0^{\omega_D} \varepsilon d\varepsilon = \frac{\omega_D^2}{2} \quad \dots\dots\dots(n-29)$

แทนสมการ (ก-27) , (ก-28) และสมการ (ก-29) ในสมการ (ก-26) จะได้

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \frac{\Delta^2(T)}{N(0)V} \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - 2 \left\{ \frac{\Delta^2(T)}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) + \frac{\omega_D}{2} \sqrt{\Delta^2(T) + \omega_D^2} - \frac{\omega_D^2}{2} \right\} \\
&+ \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) - \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta E}) \\
&= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\
&+ \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) - \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta E}) \quad \dots\dots\dots(n-30)
\end{aligned}$$

จากสมการ (ก-30) พิจารณาปริมาณต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) &= \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{-\beta\varepsilon})^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon e^{-\beta\varepsilon n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{e^{-\beta\varepsilon n}}{-\beta n} \right]_0^{\omega_D}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\beta n \omega_D} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

จากสมการ (ก-11) จะได้ $Li_2(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

$$\therefore \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) = \frac{1}{\beta} \left\{ Li_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{12} \right\} \quad \dots\dots(ก-31)$$

เมื่อแทนสมการ (ก-31) ในสมการ (ก-30) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\ &+ \frac{4}{\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} \left[Li_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{12} \right] \right\} - \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) \\ &= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\ &+ \frac{4}{\beta^2} Li_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{3\beta^2} - \frac{4}{\beta} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) \quad \dots\dots(ก-32) \end{aligned}$$

และเมื่อ $\omega_D \gg \Delta(T)$ สมการ (ก-32) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta F}{N(0)} = -\frac{1}{2} \Delta^2(T) - \Delta^2(T) \ln \left[\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} \right] + \frac{1}{3} \pi^2 T^2 - 4T \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon}) \quad \dots\dots(ก-33)$$

จากสมการ (ก-33) ถ้ากำหนดให้ $\Delta(T)x = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}$

$$\Delta(T)dx = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} 2\varepsilon d\varepsilon, \quad \Delta(T)dx = \frac{1}{x\Delta(T)} d\varepsilon$$

$$\frac{x dx \Delta^2(T)}{\varepsilon} = d\varepsilon$$

$$\frac{xdx\Delta^2(T)}{\sqrt{x^2\Delta^2(T)-\Delta^2(T)}} = d\varepsilon$$

$$\frac{xdx\Delta(T)}{\sqrt{x^2-1}} = d\varepsilon$$

เมื่อแทนปริมาณเหล่านี้ในเทอมสุดท้ายของสมการ (ก-33) จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \ln \left[1 + e^{-\beta\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \right] &= \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\beta n \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \\ &= \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\beta n x \Delta(T)} \frac{xdx\Delta(T)}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta(T) \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} e^{-\beta n x \Delta(T)} \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (ก-33) เขียนใหม่ได้คือ

$$\begin{aligned} \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\ &\quad + \frac{4}{\beta^2} \text{Li}_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{3\beta^2} - \frac{4}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta(T) \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} e^{-\beta n x \Delta(T)} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-34}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ต่อไปกำหนดให้ } I &= \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} e^{-\beta n x \Delta(T)} \\ &= \left[\sqrt{x^2-1} e^{-\beta n x \Delta(T)} \right]_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} - \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2-1} e^{-\beta n x \Delta(T)} (-\beta n \Delta(T)) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2} e^{-\beta n \Delta(T) \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} + \beta n \Delta(T) \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2-1} e^{-\beta n x \Delta(T)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\
&+ \frac{4}{\beta^2} \text{Li}_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{3\beta^2} - \frac{4}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta(T) \\
&\times \left\{ \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) e^{-n\beta\Delta(T) \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right)^2 + 1}} + n\beta\Delta(T) \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-n\beta x \Delta(T)} \right\} \\
&= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\
&+ \frac{4}{\beta^2} \text{Li}_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{3\beta^2} - \frac{4\omega_D}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\beta\Delta(T) \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right)^2 + 1}} \\
&- 4\Delta^2(T) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-n\beta x \Delta(T)} \quad \dots\dots\dots(n-35)
\end{aligned}$$

จากสมการ(ค-6) เมื่อกระจายอนุกรมของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\beta\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)}}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\beta\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)}} &= \ell n \left[1 + e^{-\beta\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)}} \right] \\
\therefore \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right) \right\} - \left\{ \omega_D \sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)} - \omega_D^2 \right\} \\
&+ \frac{4}{\beta^2} \text{Li}_2(-e^{-\beta\omega_D}) + \frac{\pi^2}{3\beta^2} - \frac{4\omega_D}{\beta} \ell n \left[1 + e^{-\beta\sqrt{\omega_D^2 + \Delta^2(T)}} \right] \\
&- 4\Delta^2(T) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)} \right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-n\beta x \Delta(T)} \quad \dots\dots\dots(n-36)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมสุดท้ายของสมการ (ก-36) ที่อยู่ในรูปอินทิกรัล โดยกำหนดให้

$$z = \beta\Delta(T) \quad \text{และ} \quad x = 1 + \frac{t}{nz} \Rightarrow dx = \frac{dt}{nz}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{\left(\frac{t}{nz}\right)^2 + \frac{2t}{nz}} = \sqrt{\frac{2t}{nz} \left(1 + \frac{t}{2nz}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2t}{nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{1/2}{m} \left(\frac{t}{2nz}\right)^m \\ &= \sqrt{\frac{2t}{nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}!}{m! \left(\frac{1}{2} - m\right)!} \left(\frac{t}{2nz}\right)^m \\ &= \sqrt{\frac{2t}{nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2} - m)!} \left(\frac{t}{2nz}\right)^m \end{aligned}$$

เมื่อ $x = 1$, $t = 0$

และ $x = \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta^2(T)}\right)^2 + 1}$, $t = nz \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta^2(T)}\right)^2 + 1} - 1 \right] = nza$

โดย $a = \sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta^2(T)}\right)^2 + 1} - 1$

$$\therefore \int_1^{\sqrt{\left(\frac{\omega_D}{\Delta(T)}\right)^2 + 1}} dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-nx\beta\Delta(T)}$$

$$= \int_0^{nza} \frac{dt}{nz} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{2t}{nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2} - m)} \left(\frac{t}{2nz}\right)^m e^{-nz \left[1 + \frac{t}{nz}\right]}$$

$$= \int_0^{nza} \frac{dt}{nz} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{2t}{nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2} - m)} \left(\frac{t}{nz}\right)^m e^{-nz} e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nz}}{nz} \sqrt{\frac{\pi}{2nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \left(\frac{1}{2nz}\right)^m \int_0^{nza} dt e^{-t} t^{m+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{e^{-nz}}{nz} \sqrt{\frac{\pi}{2nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)(2nz)^m} \left(\int_0^{\infty} - \int_{nza}^{\infty} \right) dt e^{-t} t^{m+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{e^{-nz}}{nz} \sqrt{\frac{\pi}{2nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)(2nz)^m} \left[\Gamma(m+\frac{3}{2}) - \Gamma(m+\frac{3}{2}, nza) \right] \\
&= \frac{e^{-nz}}{nz} \sqrt{\frac{\pi}{2nz}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{3}{2}) - \Gamma(m+\frac{3}{2}, nza) \right]}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)(2nz)^m} \\
&= \frac{e^{-n\beta\Delta(T)}}{n\beta\Delta(T)} \sqrt{\frac{\pi}{2n\beta\Delta(T)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2n\beta\Delta(T))^m} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{3}{2}) - \Gamma(m+\frac{3}{2}, n\beta(\sqrt{\omega_b^2 + \Delta^2(T)} - \Delta(T))) \right]}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)}
\end{aligned}$$

เมื่อ $n = 1$ จะได้

$$= \frac{e^{-\beta\Delta(T)}}{\beta\Delta(T)} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta\Delta(T)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\beta\Delta(T))^m} \frac{\left[\Gamma(m+\frac{3}{2}) - \Gamma(m+\frac{3}{2}, \beta(\sqrt{\omega_b^2 + \Delta^2(T)} - \Delta(T))) \right]}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \dots\dots(n-37)$$

ดังนั้นจากสมการ (ก-37) ทำให้เขียนสมการ (ก-36) กรณี T น้อยๆ ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \left\{ \ln\left(\frac{2\omega_b}{\Delta(0)}\right) - \ln\left(\frac{2\omega_b}{\Delta(T)}\right) \right\} - \left\{ \omega_b^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2(T)}{\omega_b^2} \right) - \omega_b^2 \right\} \\
&+ \frac{\pi^2}{3\beta^2} - 4e^{-\Delta(0)/T} \frac{\Delta(T)}{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta\Delta(T)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\beta\Delta(T))^m} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{F_S - F_N}{N(0)} &= \Delta^2(T) \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] - \frac{1}{2} \Delta^2(T) + \frac{1}{3} \pi^2 T^2 \\ &\quad - 4e^{-\Delta(0)/T} T \Delta(T) \sqrt{\frac{\pi T}{2\Delta(T)}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2\Delta(T)} \right)^m \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \end{aligned} \quad \text{.....(ก-38)}$$

กรณี $T \rightarrow T_c$ สามารถคำนวณผลต่างพลังงานอิสระ $\Delta F = F_S - F_N$ ระหว่างสภานำยวดยิ่งและสภานำปกติได้ จากสมการ (ก-22) โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{(x^2 + a^2)} \quad , a = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$\therefore \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) = 4ET \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E^2 + \omega_n^2} \quad , \omega_n = (2n+1)\pi T$$

เมื่อแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวในสมการ (ก-1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &= 4TN(0) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2} \\ &= 4TN(0) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega_n^2} \left(1 + \frac{\Delta^2(T)}{\varepsilon^2 + \omega_n^2} \right)^{-1} \\ &= 4TN(0) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega_n^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\Delta^2(T)}{\varepsilon^2 + \omega_n^2} \right)^m \\ &= 4T_c N(0) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Delta^{2m}(T) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{(\varepsilon^2 + \omega_n^2)^{m+1}} \end{aligned} \quad \text{.....(ก-39)}$$

เมื่อแทนสมการ (ก-39) ในสมการ (ก-22) จะได้

$$\Delta F = 4T_c N(0) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{(\varepsilon^2 + \omega_n^2)^{m+1}} \int_0^{\Delta(T)} d\Delta'(T) \Delta^2(T) \frac{d\Delta^{2m}(T)}{d\Delta'(T)}$$

$$\begin{aligned}
&= 4T_c N(0) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m}{m+1} \right) \Delta^{2(m+1)}(T) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{(\varepsilon^2 + \omega_n^2)^{m+1}}, \quad x = \varepsilon / 2T_c \\
&= 4T_c N(0) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{m}{m+1} \right) \frac{\Delta^{2(m+1)}}{(2T_c)^{2m+1}} (T) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D / 2T_c} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^{m+1}}
\end{aligned}$$

เมื่อกระจาย $m = 0, 1, 2$ และพิจารณาสมการของช่องว่างพลังงานจากสมการ (ก-13) เฉพาะเทอมของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะได้

$$\Delta F = -X(T_c)\Delta^4(T) + Y(T_c)\Delta^6(T) \quad \text{.....(ก-40)}$$

โดยที่
$$X(T_c) = \frac{N(0)}{4T_c^2} \int_0^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \quad \text{.....(ก-41)}$$

$$Y(T_c) = \frac{N(0)}{12T_c^4} \int_0^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} \quad \text{.....(ก-42)}$$

การคำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤต

จากนิยามความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระ และสนามวิกฤตได้ดังนี้คือ

$$\frac{\Delta F}{N(0)} = \frac{-H_c^2(T)}{8\pi N(0)} \quad \text{.....(ก-43)}$$

เมื่อแทนสมการ (ก-38) ในสมการ (ก-43) จะได้

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi N(0)} = -\Delta^2(T) \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] - \frac{1}{2} \Delta^2(T) + \frac{1}{3} \pi^2 T^2 - 4e^{-\Delta(0)/T} T \Delta(T) \sqrt{\frac{\pi T}{2\Delta(T)}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2\Delta(T)} \right)^m \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \quad \text{.....(ก-44)}$$

กรณี $T = 0 \text{ K}$ สมการ (ก-44) จะได้เป็น

$$\frac{H_c^2(0)}{8\pi N(0)} = \frac{1}{2} \Delta^2(0) \quad \text{.....(ก-45)}$$

สมการ (ก-45) ก็คือสมการของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ซึ่งก็ตรงกับสมการ (2-10) ต่อไปคำนวณอัตราส่วนของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิใดๆ กับสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ โดยนำสมการ (ก-44) หาดด้วยสมการ (ก-45) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{H_c^2(T)}{H_c^2(0)} &= \frac{\Delta^2(T)}{\Delta^2(0)} - 2 \frac{\Delta^2(T)}{\Delta^2(0)} \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\pi^2 T^2}{\Delta^2(0)} + 8e^{-\Delta(T)/T} \frac{T\Delta(T)}{\Delta^2(0)} \sqrt{\frac{\pi T}{2\Delta(T)}} \sum_m \left(\frac{T}{2\Delta(T)} \right)^m \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \\ &= \frac{\Delta^2(T)}{\Delta^2(0)} \left\{ 1 - 2 \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] - \frac{2}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(T)} \right]^2 + 16\sqrt{\pi} e^{-\Delta(T)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(T)} \right]^{m+\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\}\end{aligned}$$

จากสมการช่องว่างพลังงานของตัวนำวดยิ่งในสมการ (ก-10)

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - \chi(T)$$

$$\text{เมื่อ } \chi(T) = e^{-\Delta(0)/T} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{T}{\Delta(0)} \right) + \frac{9}{128} \left(\frac{T}{\Delta(0)} \right)^2 - \frac{75}{1024} \left(\frac{T}{\Delta(0)} \right)^3 \right\}$$

$$\therefore \left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right)^2 = (1 - \chi(T))^2 \quad \text{และ} \quad \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] = \ln[1 - \chi(T)] = -\chi(T), \text{ กรณี } T \text{ น้อยๆ}$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{H_c^2(T)}{H_c^2(0)} = (1 - \chi(T))^2 \left\{ 1 - 2(-\chi(T)) - \frac{2}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(T)} \right]^2 + 16\sqrt{\pi} e^{-\Delta(T)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(T)} \right]^{m+\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\} \dots\dots\dots (ก-46)$$

พิจารณาปริมาณต่างๆ ต่อไปนี้

$$\left(\frac{\pi T}{\Delta(T)} \right)^2 = \left(\frac{\pi T}{\Delta(0)(1 - \chi(T))} \right)^2 = \left(\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right) (1 - \chi(T))^{-2} = \left(\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right)^2 (1 + 2\chi(T))$$

$$\left(\frac{T}{2\Delta(T)} \right)^{m+\frac{3}{2}} = \left(\frac{T}{2\Delta(0)(1 - \chi(T))} \right)^{m+\frac{3}{2}} = \left(\frac{T}{2\Delta(0)} \right)^{m+\frac{3}{2}} (1 - \chi(T))^{m+\frac{3}{2}} = \left(\frac{T}{2\Delta(0)} \right)^{m+\frac{3}{2}} (1 + (m+\frac{3}{2})\chi(T))$$

$$e^{-\Delta(T)/T} = e^{-\Delta(0)(1 - \chi(T))/T} = e^{-\Delta(0)/T} \cdot e^{-\Delta(0)\chi(T)/T} \approx e^{-\Delta(0)/T}$$

เมื่อแทนปริมาณเหล่านี้ในสมการ (ก-46) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{H_c(T)}{H_c(0)} &= (1-\chi(T))^2 \left\{ 1 + 2\chi(T) - \frac{2}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 (1 + 2\chi(T)) + 16\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{m+\frac{3}{2}} (1 + (m+\frac{3}{2})\chi(T)) \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\} \\ \therefore \frac{H_c(T)}{H_c(0)} &= \left[(1-\chi(T))^2 \left\{ 1 + 2\chi(T) - \frac{2}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 (1 + 2\chi(T)) + 16\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{m+\frac{3}{2}} (1 + (m+\frac{3}{2})\chi(T)) \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\} \right]^{1/2} \\ &= (1-\chi(T)) \left\{ 1 + \chi(T) - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 (1 + 2\chi(T)) + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{m+\frac{3}{2}} (1 + (m+\frac{3}{2})\chi(T)) \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\} \\ &= (1-\chi(T)) \left\{ 1 + \chi(T) - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right] \chi(T) + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{m+\frac{3}{2}} (1 + m\chi(T) + \frac{3}{2}\chi(T)) \frac{\Gamma(m+\frac{2}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \right\}\end{aligned}$$

กรณี T น้อยๆ พิจารณาเทอมผลคูณของ $e^{-\Delta(0)/T} \cdot \chi(T)$ และ $\chi^2(T)$ จะได้

$$e^{-\Delta(0)/T} \cdot e^{-\Delta(0)/T} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right] + \frac{9}{128} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{75}{1024} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^3 + \frac{11025}{98304} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^4 \right\} \rightarrow 0$$

$$\text{และ} \quad \left[e^{-\Delta(0)/T} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0)}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right] + \frac{9}{128} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{75}{1024} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^3 + \frac{11025}{98304} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^4 \right\} \right]^2 \rightarrow 0$$

$$\therefore \frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 \chi(T) + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \sum_m \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{m+\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \dots\dots\dots(\text{ก-47})$$

โดยอาศัยสมการ (ค-8) และกระจาย $m = 0, 1, 2$ จะได้

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 \chi(T) + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{3}{2})} + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})} + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{7}{2}} \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 \chi(T) + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{5}{2}} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&\quad + 8\sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{2\Delta(0)} \right]^{\frac{7}{2}} \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(2)(-\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}))} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right]^2 \chi(T) + \sqrt{8\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^{\frac{5}{2}} + \sqrt{\pi} e^{-\Delta(0)/T} \left[\frac{T}{\Delta(0)} \right]^{\frac{7}{2}} \dots \dots \dots (n-48)
\end{aligned}$$

สมการข้างต้นก็คือสมการแสดงอัตราส่วนของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิใดๆ กับสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ กรณีที่อุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ($T \rightarrow 0$) แต่ถ้าอุณหภูมิมีค่าน้อยจนใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ สามารถพิจารณาเฉพาะเทอมของอุณหภูมิกำลังสอง ได้ดังนี้

$$\therefore \frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\pi T}{\Delta(0)} \right)^2 \dots \dots \dots (n-49)$$

เมื่อแทนสมการ (n-4) ในสมการ (n-49) จะได้

$$\therefore \frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - 1.06 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \dots \dots \dots (n-50)$$

กรณีที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ($T \rightarrow T_c$) สามารถคำนวณสนามแม่เหล็กวิกฤตเชิงอุณหพลศาสตร์ ได้โดยนำสมการ (n-40) แทนในสมการ (n-43) ดังต่อไปนี้คือ

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = X(T_c) A^2(T_c) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{Y(T_c)}{A(T_c) X^2(T_c)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) + \dots \right\} \dots \dots \dots (n-51)$$

จากความสัมพันธ์ของ $\frac{\tanh x}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}$, $a = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$ เมื่อหาอนุพันธ์ $\tanh x$ เทียบกับ x จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\sec^2 x}{x^2} - \frac{\tanh x}{x^3} \right]$$

ดังนั้นสามารถคำนวณค่า $X(T_c)$ ในสมการ (ก-41) ได้ทำนองเดียวกับการคำนวณค่า $A(T_c)$ ในสมการ (ก-18) นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 X(T_c) &= -\frac{N(0)}{16T_c^2} \int_0^{\omega_D/2T_c} dx \left[\frac{\sec^2 x}{x^2} - \frac{\tanh x}{x^3} \right] \\
 &= -\frac{N(0)}{16T_c^2} \left[\frac{1}{y^2} \tanh y - \frac{1}{y} - I_3 \right] \\
 X(T_c)A^2(T_c) &= -\frac{N(0)}{16T_c^2} \left[\frac{1}{y^2} \tanh y - \frac{1}{y} - I_3 \right] \cdot \left[\frac{-8T_c^2 \tanh y}{\frac{1}{y^2} \tanh y - \frac{1}{y} - I_3} \right]^2 \\
 &= \frac{-4N(0)T_c^2 \tanh^2 y}{\frac{1}{y^2} \tanh y - \frac{1}{y} - I_3} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-52})
 \end{aligned}$$

โดยที่ $y = \omega_D / 2T_c$, $I_3 = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D / \pi T_c}{2n+1} \right)$ เมื่อ $\omega_D / 2T_c \rightarrow \infty$
 จะได้ $I_3 = \frac{7}{\pi^2} \zeta(3)$ สมการ (ก-52) เขียนได้เป็น

$$X(T_c)A^2(T_c) = \frac{4N(0)\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-53})$$

เมื่อแทนสมการ (ก-53) ในสมการ (ก-51) ดังนั้นจะได้สมการของสนามแม่เหล็กวิกฤต กรณีที่ $T \rightarrow T_c$ ดังนี้

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = \frac{4N(0)\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(\text{ก-54})$$

จากสมการ (ก-45) และสมการ (ก-54) เมื่อนำมาหารกันจะได้

$$\therefore \frac{H_c(T)}{H_c(0)} \approx 1.74 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad \dots\dots\dots(\text{ก-55})$$

สมการ (ก-55) ก็คือสมการ (2-12) นั่นเอง

การคำนวณความร้อนจำเพาะ

เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ($T \rightarrow 0$) ความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนในสภาพนำยวดยิ่ง (C_{es}) สามารถคำนวณได้จากสมการ (ก-56) คือ

$$C_{es}(T) = -T \left(\frac{\partial^2 F_s}{\partial T^2} \right) \quad \text{.....(ก-56)}$$

จากสมการ (ก-38) จะได้สมการของพลังงานอิสระในสภาพนำยวดยิ่ง ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{F_s}{N(0)} = & \Delta^2(T) \ln \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \right] - \frac{1}{2} \Delta^2(T) \\ & - 4e^{-\Delta(0)/T} T \Delta(T) \sqrt{\frac{\pi T}{2\Delta(T)}} \sum_m \left(\frac{T}{2\Delta(T)} \right)^m \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \end{aligned} \quad \text{.....(ก-57)}$$

โดยที่ $F_N = \frac{1}{3} N(0) \pi^2 T^2$

จากสมการ (ก-57) กรณีที่ $T \rightarrow 0$ จะได้ $\Delta(T) \approx \Delta(0)$ ดังนั้น

$$\frac{F_s}{N(0)} = -\frac{1}{2} \Delta^2(0) - 4e^{-\Delta(0)/T} T^{3/2} \sqrt{\frac{\pi \Delta(0)}{2}} \sum_m \left(\frac{T}{2\Delta(0)} \right)^m \frac{\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{3}{2}-m)} \quad \text{.....(ก-58)}$$

เมื่อกระจาย $m = 0, 1, 2$ จะได้

$$\frac{F_s}{N(0)} = -\frac{1}{2} \Delta^2(0) - 4e^{-\Delta(0)/T} T^{3/2} \sqrt{\frac{\pi \Delta(0)}{2}} \left\{ 1 + \frac{3}{8} \frac{T}{\Delta(0)} - \frac{5}{128} \frac{T^2}{\Delta^2(0)} \right\} \quad \text{.....(ก-59)}$$

คำนวณอนุพันธ์ของสมการ (ก-59) เทียบกับ T จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}(F_s) = & \frac{d}{dT} \left[-\frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0) - 4N(0) e^{-\Delta(0)/T} T^{3/2} \sqrt{\frac{\pi \Delta(0)}{2}} \left\{ 1 + \frac{3}{8} \frac{T}{\Delta(0)} - \frac{5}{128} \frac{T^2}{\Delta^2(0)} \right\} \right] \quad \text{.....(ก-60)} \\ = & -2\sqrt{2\pi} N(0) e^{-\Delta(0)/T} \frac{\Delta^{3/2}(0)}{T^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{3}{8} \frac{T}{\Delta(0)} - \frac{5}{128} \frac{T^2}{\Delta^2(0)} \right\} \end{aligned}$$

$$-2\sqrt{2\pi}N(0)e^{-\Delta(0)/T}\Delta^{1/2}(0)\left\{\frac{3T^{1/2}}{2}+\frac{15T^{3/2}}{16\Delta(0)}-\frac{105T^{5/2}}{256\Delta^2(0)}\right\} \quad \text{.....(ก-61)}$$

$$\frac{d^2}{dT^2}(F_S) = -2\sqrt{2\pi}N(0)e^{-\Delta(0)/T}\frac{\Delta^{3/2}(0)}{T^{5/2}}\left\{1+\frac{11}{8}\frac{T}{\Delta(0)}+\frac{225}{128}\frac{T^2}{\Delta^2(0)}\right\} \quad \text{.....(ก-62)}$$

เมื่อแทนสมการ (ก-62) ในสมการ (ก-56) จะได้

$$C_{es} = 2\sqrt{2\pi}N(0)e^{-\Delta(0)/T}\Delta(0)\left(\frac{\Delta(0)}{T}\right)^{3/2}\left\{1+\frac{11}{8}\left(\frac{T}{\Delta(0)}\right)+\frac{225}{128}\left(\frac{T}{\Delta(0)}\right)^2\right\} \quad \text{.....(ก-63)}$$

จากสมการ (ก-63) เมื่อนำมาหารด้วย γT_c , $\gamma = (2/3)\pi^2 N(0)$ จะได้

$$\frac{C_{es}}{\gamma T_c} \approx \frac{3\sqrt{2}\Delta(0)}{\pi T_c} \left(\frac{\Delta(0)}{T}\right)^{3/2} e^{\left(\frac{-\Delta(0)}{T}\right)} \quad \text{.....(ก-64)}$$

กรณีที่ $T = T_c$ สามารถคำนวณผลต่างของความร้อนจำเพาะ (ΔC) ที่อุณหภูมิวิกฤตได้จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันพลังงานอิสระ ดังนี้

$$\Delta C(T_c) = -T_c \left(\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial T^2} \right) \Big|_{T=T_c} \quad \text{.....(ก-65)}$$

$$\text{เมื่อ } \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \frac{2X(T_c)A^2(T_c)}{T_c} \left\{ \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) - \frac{3Y(T_c)A(T_c)}{2X(T_c)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial T^2} = -\frac{2X(T_c)A^2(T_c)}{T_c^2} \left\{ 1 - \frac{3Y(T_c)A(T_c)}{X(T_c)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \right\} \quad \text{.....(ก-66)}$$

ดังนั้น

$$\Delta C(T_c) = \frac{2X(T_c)A^2(T_c)}{T_c} \quad \text{.....(ก-67)}$$

แทนสมการ (ก-53) ในสมการ (ก-67) จะได้

$$\Delta C(T_c) = \frac{2}{T_c} \left(\frac{4N(0)\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \right) \quad \text{.....(ก-68)}$$

เมื่อความร้อนจำเพาะของสภาพปกติ ที่อุณหภูมิวิกฤต $C_N = \frac{2}{3}\pi^2 N(0)T_c = \gamma T_c$ โดย γ คือ ค่าคงที่ของซอมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld's constant) สามารถคำนวณอัตราส่วนของผลต่างของความร้อนจำเพาะกับความร้อนจำเพาะของสภาพปกติ ที่ $T = T_c$ ได้คือ

$$\frac{\Delta C(T_c)}{\gamma T_c} = 1.43 \quad \text{.....(ก-69)}$$

สมการ (ก-69) ก็คือสมการ (2-8)

ภาคผนวก ข

สมการช่องว่างพลังงาน ของสารตัวนำเวดิงแบบคลื่น “ดี”
เมื่อพิจารณาผลของซีมาน

การศึกษาสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงของสารที่ประกอบด้วยอะตอมของ Cu และ O ซึ่งเรียกว่าสารประกอบคิวเพรท กรณีที่มีสนามแม่เหล็กซึ่งมีทิศทางขนานกับระนาบ Cu-O₂ ในการคำนวณหาค่าปริมาณต่างๆ ทางฟิสิกส์ เพื่ออธิบายคุณสมบัติของสารตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่น “ดี” จำเป็นต้องพิจารณาผลของซีมาน (Zeeman-effect) ซึ่งก็คือ การที่อิเล็กตรอนได้รับอิทธิพลจากสนามแม่เหล็ก ทำให้พลังงานของอิเล็กตรอนเปลี่ยนแปลง ซึ่งพลังงานนี้ขึ้นกับปริมาณที่เราเรียกว่า สปิน (Spin) เพราะสปินของอิเล็กตรอนทำให้เกิดโมเมนต์แม่เหล็ก (Magnetic moment) ที่ทำอันตรกิริยากับสนามแม่เหล็ก ดังนั้นสามารถเขียนแฮมิลโทเนียนของระบบอิเล็กตรอนได้ดังนี้

$$H = H_{\text{BCS}} + H_{\text{Zeeman}} \quad \text{.....(ข-1)}$$

โดยที่

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} C_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad \text{.....(ข-2)}$$

$$H_{\text{Zeeman}} = -\mu_B B \sum_{\mathbf{k}} (C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{\mathbf{k}\uparrow} - C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}) \quad \text{.....(ข-3)}$$

เมื่อ H_{BCS} , H_{Zeeman} คือ แฮมิลโทเนียนในทฤษฎี BCS และแฮมิลโทเนียนของเทอมที่เกิดจากผลของซีมาน ตามลำดับ , $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนซึ่งวัดจากระดับพลังงานเฟอร์มิ , $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ คือ อันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน ซึ่งพลังงานของอิเล็กตรอนนี้มีค่าต่างจากพลังงานเดอบาย (ω_D) เพียงเล็กน้อย นั่นคือ $|\varepsilon_{\mathbf{k}}|, |\varepsilon_{\mathbf{k}'}| \leq \omega_D$, μ_B คือ โมเมนต์แม่เหล็กของอิเล็กตรอนหนึ่งตัว ซึ่งเรียกว่าโมเมนต์แม่เหล็กของบอร์ (Bohr magneton) และ B คือ สนามแม่เหล็กภายนอก

การคำนวณในทฤษฎี BCS ได้กำหนดให้ $C_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}, C_{\mathbf{k}\sigma}$ คือตัวดำเนินการสร้างและทำลายอนุภาคอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\mathbf{k}$ และ สปิน σ ซึ่งเขียนเป็น $\uparrow, \downarrow$ ถ้าเป็นสปินขึ้น และลง ตามลำดับ เพราะ

$$C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} = \langle C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle + (C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} - \langle C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \rangle) \quad \text{.....(ข-4)}$$

และ

$$C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow} = \langle C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle + (C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow} - \langle C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle) \quad \text{.....(ข-5)}$$

หากพิจารณาแฮมิลโทเนียนของเทอมที่เกิดจากอันตรกิริยาดึงดูด เทอมที่สองด้านขวาของสมการ (ข-2) คือ

$$\begin{aligned}
C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} &= [\langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle + (C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ - \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle)] \\
&\quad \times [\langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle + (C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} - \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle)] \\
&= \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} + \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \\
&\quad - \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle \\
&\quad + (C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ - \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle) (C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} - \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle) \dots\dots\dots(\text{ข-6})
\end{aligned}$$

สมการ (ข-6) เมื่อพิจารณาเฉพาะค่าเฉลี่ย สามารถตัดเทอมที่เป็นความแปรปรวน (Fluctuation) ได้เป็น

$$\begin{aligned}
C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} &= \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} + \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \\
&\quad - \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle \dots\dots\dots(\text{ข-7})
\end{aligned}$$

จากนิยามของช่องว่างพลังงาน ดังสมการ (ข-8) ซึ่งเรียกว่าสมการเซลล์คอนซิสเทนท์ (Self consistence)

$$\begin{aligned}
\Delta_{\vec{k}} &= -\sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} \rangle \\
\Delta_{\vec{k}}^+ &= -\sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}'\downarrow}^+ \rangle \dots\dots\dots(\text{ข-8})
\end{aligned}$$

สมการ (ข-6) และสมการ (ข-8) ช่วยให้สามารถเขียนเทอมที่สองด้านขวาของสมการ (ข-2) ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} &= \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \left\{ \begin{aligned} &\langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} + \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \\ &- \langle C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+ \rangle \langle C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \end{aligned} \right\} \\
&= -\sum_{\vec{k}} [\Delta_{\vec{k}}^+ C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} + \Delta_{\vec{k}} C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}^+] + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}}^+ \langle C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} \rangle \dots\dots\dots(\text{ข-9})
\end{aligned}$$

ดังนั้นทำให้เขียนสมการ (ข-2) ใหม่ได้ดังนี้คือ

$$\therefore H_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}\sigma} \varepsilon_{\vec{k}} C_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} C_{\vec{k}\sigma} - \sum_{\vec{k}} [\Delta_{\vec{k}}^{\dagger} C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} + \Delta_{\vec{k}} C_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger}] + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}}^{\dagger} \langle C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} \rangle \dots\dots\dots(\text{ข-10})$$

ถ้าใช้การแปลงของโบโกลิบอบ (Bogo'iubov transformation) ซึ่งกำหนดให้

$$C_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \quad , \quad C_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} + v_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}} \dots\dots\dots(\text{ข-11})$$

$$C_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} = -v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \quad , \quad C_{-\vec{k}\downarrow} = -v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} + u_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}$$

โดยมีเงื่อนไขคาโนนิคอล (Canonical conditions) ดังนี้คือ

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$$

$$\{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}, \alpha_{\vec{k}}\} = \{\beta_{\vec{k}}^{\dagger}, \beta_{\vec{k}}\} = 1 \dots\dots\dots(\text{ข-12})$$

$$\{\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}, \beta_{\vec{k}}^{\dagger}\} = \{\alpha_{\vec{k}}, \beta_{\vec{k}}\} = 0$$

ทำให้เขียนความสัมพันธ์ของตัวดำเนินการต่างๆ ได้เป็น

$$C_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} C_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}}^2 \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}^{\dagger} + \beta_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}) + v_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2 \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}$$

$$C_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} C_{-\vec{k}\downarrow} = v_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2 \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}^{\dagger} + \beta_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}) + u_{\vec{k}}^2 \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}$$

.....(ข-13)

$$C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} = u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}) + u_{\vec{k}}^2 \beta_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}^2 \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}^{\dagger}$$

$$C_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger} = u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}) + u_{\vec{k}}^2 \alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \beta_{\vec{k}}^{\dagger} - v_{\vec{k}}^2 \beta_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}$$

ดังนั้นจะได้เทอมแรกด้านขวาของสมการ (ข-10) คือ

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{k}\sigma} \varepsilon_{\bar{k}} C_{\bar{k}\sigma}^+ C_{\bar{k}\sigma} &= \sum_{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}} [C_{\bar{k}\uparrow}^+ C_{\bar{k}\uparrow} + C_{\bar{k}\downarrow}^+ C_{\bar{k}\downarrow}] \\ &= \sum_{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}} [2v_{\bar{k}}^2 + (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)(\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} + \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}) + 2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} (\alpha_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}^+ + \beta_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}})] \quad \dots\dots\dots(\text{ข-14})\end{aligned}$$

และเทอมที่สองด้านขวาของสมการ (ข-10) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{k}} [\Delta_{\bar{k}}^+ C_{-\bar{k}\downarrow} C_{\bar{k}\uparrow} + \Delta_{\bar{k}} C_{\bar{k}\uparrow}^+ C_{-\bar{k}\downarrow}^+] &= \sum_{\bar{k}} \Delta_{\bar{k}} [C_{-\bar{k}\downarrow} C_{\bar{k}\uparrow} + C_{\bar{k}\uparrow}^+ C_{-\bar{k}\downarrow}^+] \\ &= \sum_{\bar{k}} \Delta_{\bar{k}} \left[\begin{aligned} &2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - 2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} (\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} + \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}) \\ &+ (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2)(\alpha_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}^+ + \beta_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots(\text{ข-15})\end{aligned}$$

จากสมการ (ข-14) และสมการ (ข-15) ช่วยให้เขียนแฮมิลโทเนียนของทฤษฎีบีซีเอส ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}H_{\text{BCS}} &= \sum_{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}} 2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} (\alpha_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}^+ + \beta_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}) - \Delta_{\bar{k}} (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) (\alpha_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}^+ + \beta_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}) \\ &= + \sum_{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}} [2v_{\bar{k}}^2 + (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) (\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} + \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}})] \\ &= - \sum_{\bar{k}} \Delta_{\bar{k}} [2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - 2u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} (\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} + \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}})] + \sum_{\bar{k}} \Delta_{\bar{k}}^+ \langle C_{-\bar{k}\downarrow} C_{\bar{k}\uparrow} \rangle \quad \dots\dots\dots(\text{ข-16})\end{aligned}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขดังกล่าวในสมการ (ข-12) จะได้ว่า

$$2\varepsilon_{\bar{k}} u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} - \Delta_{\bar{k}} (u_{\bar{k}}^2 - v_{\bar{k}}^2) = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{ข-17})$$

และถ้ากำหนดให้ $u_{\bar{k}} = \sin \theta$, $v_{\bar{k}} = \cos \theta$ ดังนั้นเขียนสมการ (ข-17) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{\Delta_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} = - \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right) , \quad u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} = \frac{\Delta_{\bar{k}}}{2E_{\bar{k}}} \quad \dots\dots\dots(\text{ข-18})$$

เมื่อ $E_{\vec{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}$ คือ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน จะได้แฮมิลโทเนียนของทฤษฎี BCS คือ

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^+ \beta_{\vec{k}}) + \sum_{\vec{k}} [\varepsilon_{\vec{k}} - E_{\vec{k}} + \Delta_{\vec{k}}^+ < C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} >] \quad \text{.....(ข-19)}$$

ต่อไปพิจารณาแฮมิลโทเนียนของเทอมที่เกิดจากผลของซีมาน ในสมการ (ข-3) คือ

$$\begin{aligned} H_{\text{Zeeman}} &= -\mu_B B \sum_{\vec{k}} (C_{\vec{k}\uparrow}^+ C_{\vec{k}\uparrow} - C_{-\vec{k}\downarrow}^+ C_{-\vec{k}\downarrow}) \\ &= -\mu_B B \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} - \beta_{\vec{k}}^+ \beta_{\vec{k}}) \quad \text{.....(ข-20)} \end{aligned}$$

เมื่อแทนสมการ (ข-19) และสมการ (ข-20) ในสมการ (ข-1) ดังนั้นจะได้แฮมิลโทเนียนทั้งหมดของระบบ คือ

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^+ \beta_{\vec{k}}) + \sum_{\vec{k}} [\varepsilon_{\vec{k}} - E_{\vec{k}} + \Delta_{\vec{k}}^+ < C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} >] \\ &\quad - \mu_B B \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} - \beta_{\vec{k}}^+ \beta_{\vec{k}}) \quad \text{.....(ข-21)} \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการ (ข-21) โดยใช้สมการ (ข-11) จะได้

$$< C_{-\vec{k}\downarrow} C_{\vec{k}\uparrow} > = u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} [1 - < \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} > - < \beta_{\vec{k}}^+ \beta_{\vec{k}} >]$$

โดยที่

$$\begin{aligned} < \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} > &= \frac{\text{Tr} \left[\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} e^{-(E_{\vec{k}} - \mu_B B) \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} / T} \right]}{\text{Tr} \left[e^{-(E_{\vec{k}} - \mu_B B) \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} / T} \right]} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\text{Tr} \left[e^{-x(\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}})} \right] \right), \quad x = (E_{\vec{k}} - \mu_B B) / T \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(E_{\bar{k}} - \mu_B B)} + 1}, \quad \beta = 1/T$$

$$= f(E_{\bar{k}} - \mu_B B) \quad \text{.....(ข-22)}$$

เมื่อ $f(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงของเฟอร์มิ ดังนั้นทำนองเดียวกันจะได้

$$\langle \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}} \rangle = f(E_{\bar{k}} + \mu_B B) \quad \text{.....(ข-23)}$$

$$\therefore \langle C_{-\bar{k}\downarrow} C_{\bar{k}\uparrow} \rangle = u_{\bar{k}} v_{\bar{k}} [1 - f(E_{\bar{k}} - \mu_B B) - f(E_{\bar{k}} + \mu_B B)]$$

$$= \frac{\Delta_{\bar{k}}}{2E_{\bar{k}}} [1 - f(E_{\bar{k}} - \mu_B B) - f(E_{\bar{k}} + \mu_B B)] \quad \text{.....(ข-24)}$$

จากสมการเซลล์คอนซิสเทนท์ จะได้

$$\Delta_{\bar{k}} = - \sum_{\bar{k}'} V_{\bar{k}\bar{k}'} \langle C_{-\bar{k}\downarrow} C_{\bar{k}\uparrow} \rangle$$

$$= - \sum_{\bar{k}'} V_{\bar{k}\bar{k}'} \frac{\Delta_{\bar{k}'}}{2E_{\bar{k}'}} [1 - f(E_{\bar{k}'} - \mu_B B) - f(E_{\bar{k}'} + \mu_B B)]$$

$$\Delta_{\bar{k}} = - \sum_{\bar{k}'} \frac{V_{\bar{k}\bar{k}'} \Delta_{\bar{k}'}}{4E_{\bar{k}'}} \left[\tanh\left(\frac{E_{\bar{k}'} - \mu_B B}{2T}\right) - \tanh\left(\frac{E_{\bar{k}'} + \mu_B B}{2T}\right) \right] \quad \text{.....(ข-25)}$$

เมื่อแทนสมการ (ข-24) ในสมการ (ข-21) จะได้แฮมิลโทเนียนทั้งหมดของระบบเป็น

$$\therefore H = \sum_{\bar{k}} (E_{\bar{k}} - \mu_B B) \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} + (E_{\bar{k}} + \mu_B B) \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}$$

$$+ \sum_{\bar{k}} \left[\epsilon_{\bar{k}} - E_{\bar{k}} + \frac{\Delta_{\bar{k}}^2}{2E_{\bar{k}}} (1 - f(E_{\bar{k}} - \mu_B B) - f(E_{\bar{k}} + \mu_B B)) \right] \quad \text{.....(ข-26)}$$

การปรับปรุงทฤษฎี BCS เพื่อใช้อธิบายสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงชนิดคลื่น “ดี” นั้นมีนักฟิสิกส์เชิงทฤษฎีหลายท่านที่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากมีผลการทดลองที่แสดงว่าช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงแบบคลื่น “ดี” มีค่าขึ้นกับทิศทาง (Anisotropic) ดังนั้น หยาง และ สอนิ (Yang & Sonini. 1998) จึงกำหนดให้

$$\Delta_{\vec{k}} = \Delta(T, B)g(\theta) \quad \text{.....(ข-27)}$$

โดย $g(\theta) = \cos 2\theta$ เมื่อสารตัวนำยวดยิ่งเป็นแบบคลื่น “ดี” แต่ยังคงคิดว่าอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซมีลักษณะเดียวกับสารตัวนำยวดยิ่งเป็นแบบคลื่น “เอส” ของทฤษฎี BCS นั่นคือ

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} -V & , |\varepsilon_{\vec{k}}|, |\varepsilon_{\vec{k}'}| \leq \omega_D \\ 0 & , |\varepsilon_{\vec{k}}|, |\varepsilon_{\vec{k}'}| > \omega_D \end{cases} \quad \text{.....(ข-28)}$$

จากสมการ (ข-25) , สมการ (ข-27) และ สมการ (ข-28) ทำให้เขียนสมการของช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงชนิดคลื่น “ดี” ขณะอยู่ในสนามแม่เหล็ก ได้เป็น

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} g^2(\theta) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E} \left\{ \tanh\left(\frac{E + \mu_B B}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu_B B}{2T}\right) \right\} \quad \text{.....(ข-29)}$$

สมการ (ข-29) ก็คือสมการ (2-18) นั่นเอง

ภาคผนวก ค

สูตรการคำนวณทางคณิตศาสตร์

อนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series)

ในกรณี x มีค่าใกล้ x_0 สามารถกระจายฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ รอบจุด $x = x_0$ ได้ดังนี้ (Spiegel, Murray. R & Liu, John. 1999 : 135)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad \text{.....(ค-1)}$$

อนุกรมทวินาม (Binomial's series)

เมื่อ $x < a$ สามารถกระจายฟังก์ชันของ $(a+x)^n$ โดย n คือจำนวนใดๆ และ a คือค่าคงที่ ได้ดังนี้ (Spiegel, Murray. R & Liu, John. 1999 : 135)

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \dots \quad \text{.....(ค-2)}$$

สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ (Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992 : 612)

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} x^m, \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{.....(ค-3)}$$

$$\therefore \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^m \quad \text{.....(ค-4)}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} z^m \quad \text{.....(ค-5)}$$

อนุกรมของลอการิทึม

(Spiegel, Murray. R & Liu, John. 1999 : 136)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{.....(ค-6)}$$

ฟังก์ชันอินเวอร์สไฮเพอร์โบลิก (Inverse hyperbolic function)

(Spiegel, Murray. R & Liu, John. 1999 : 56)

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \text{.....(ค-7)}$$

ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) , $\Gamma(z)$

(Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992 : 773)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-8})$$

เมื่อ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z!$ โดยที่ $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

ฟังก์ชันแกมมาแบบไม่สมบูรณ์ (Incomplete Gamma function) , $\Gamma(z, x)$

(Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992 : 792)

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-9})$$

ฟังก์ชันซีตาของรีมานน์ (Riemann-Zeta function), $\zeta(z)$

(Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992 : 651 , 653)

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \quad , \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{และ} \quad \zeta(3) = 1.202 \quad \dots\dots\dots(\text{ก-10})$$

เมื่อ
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^z} = (1-2^{-z})\zeta(z)$$

ฟังก์ชันโพลีลอการิทึม (Polylogarithm function), $\text{Li}_n(z)$:

(Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992 : 652 , 697)

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad \dots\dots\dots(\text{ก-11})$$

เมื่อ
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^z} = (2^{1-z} - 1)\zeta(z)$$

การอินทิเกรต

การคำนวณปริมาณต่างๆ ในงานวิจัยฉบับนี้ ทำได้โดยอาศัยสูตรการอินทิเกรต ดังต่อไปนี้ (Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A & Marichev, O. I. 1992)

$$\int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx \quad \text{p. 24} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-12})$$

$$\int \sec h^2 x dx = \tanh x \quad \text{p. 24} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-13})$$

$$\int \ln x \sec h^2 x dx = \ln(\pi/4) - \gamma, \quad \gamma = 0.5772 \quad \text{p. 533} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-14})$$

เมื่อ γ คือ ค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant)

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{p. 24} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-15})$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{p. 41} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-16})$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^3} = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{p. 41} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-17})$$

$$\int \frac{dx}{x^2[x^2 + a^2]} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{p. 43} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-18})$$

$$\int \frac{dx}{x^2[x^2 + a^2]^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{3}{2a^5} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2a^4(x^2 + a^2)} \quad \text{p. 43} \quad \dots\dots\dots(\text{ค-19})$$

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ - ชื่อสกุล	นางสาวภรพนา บุญมา
วันเดือนปีเกิด	12 กันยายน 2519
สถานที่เกิด	อ.ทุ่งใหญ่ จ.นครศรีธรรมราช
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	128 ม.2 ต.ท่ายาง อ.ทุ่งใหญ่ จ.นครศรีธรรมราช 80240
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2538	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนทุ่งใหญ่วิทยาคม
พ.ศ. 2542	กศ.บ. (วิทยาศาสตร์-ฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยทักษิณ
พ.ศ. 2546	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ