5524
5 2357
ว 5

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต โดยวิธีสอนแบบ PSI

ปริญญานิพนธ์

ของ

จินตนา ศักดิ์สมบูรณ์

23 เม.ย. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
มีนาคม 2528

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

177697

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา		คณะกรรมการสอบ	
.....	ประธาน	.....	ประธาน
.....	กรรมการ	.....	กรรมการ
		.....	กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือและการแนะนำอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ลาวัลย์ พลกล้า รองศาสตราจารย์ สุเทพ ทองอยู่ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียระพงษ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. สุรพล วัฒนวิกย์กิจ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และช่วยเหลือทางด้านเอกสารเกี่ยวกับระบบการสอนแบบ PSI อาจารย์ ดร. ยติ กฤษณังกูร และผู้ช่วยศาสตราจารย์ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา และให้ความร่วมมือในการดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณของบิดามารดา ที่ได้อบรมเลี้ยงดูให้ความอุปการะทั้งในด้านกำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา พระคุณนี้หาที่เปรียบมิได้

จินตนา ศักดิ์สมบูรณ์

สารบาญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	4
	ความสำคัญของการวิจัย	4
	ขอบเขตของการวิจัย	4
	นิยามศัพท์เฉพาะ	4
	สมมุติฐานการวิจัย	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI	7
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI	8
3	วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	12
	กลุ่มตัวอย่าง	12
	วิธีเลือกกลุ่มตัวอย่าง	12
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	12
	วิธีดำเนินการทดลอง	14
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	16
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	17
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	19
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	19
	สมมุติฐานของการวิจัย	19
	วิธีดำเนินการวิจัย	19

บทที่ หน้า

สรุปผลการวิจัย 20
อภิปรายผล 20
ข้อเสนอแนะ 21

บรรณานุกรม 23

ภาคผนวก 26

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

1 คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 17

2 ค่าสถิติ F สำหรับความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 17

3 ค่าสถิติ t สำหรับคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 18

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

หน้าที่หลักของสถาบันอุดมศึกษาคือ ผลิตบุคคลให้มีความรู้ความสามารถเพื่อนำไปประกอบอาชีพอย่างมีประสิทธิภาพ เป็นผู้รู้จักคิด รู้จักตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนควรจะต้องมีรูปแบบที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีคุณลักษณะดังกล่าวมาแล้ว ปัจจุบันการสอนในระดับอุดมศึกษาส่วนมากเป็นการสอนแบบบรรยาย วิธีสอนแบบนี้ผู้สอนมีบทบาทสำคัญในห้องเรียน ผู้เรียนเป็นผู้รับฟังและจดจำคำบรรยายของผู้สอน ผู้เรียนไม่ใคร่มีโอกาสแสดงความคิดเห็นและตัดสินใจด้วยตนเอง ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนน้อย และไม่สนใจในการศึกษาค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง ทำให้ขาดทักษะในการอ่านตำราเรียน บลูม (Bloom. 1976 : 4) ได้กล่าวว่า วิธีการที่ผู้เรียนเรียนรู้จากการค้นพบด้วยตนเอง เป็นวิธีการเรียนการสอนที่ได้ผลดีกว่าให้ผู้สอนอธิบาย สาธิต กฎ สูตร และวิธีการคิดทั้งหมด

ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษาจึงควรมีรูปแบบที่เร้าใจให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเอง โดยการจัดสื่อ และสิ่งแวดล้อมที่เหมาะสมให้กับผู้เรียน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียน**เรียนรู้**ได้ตามความแตกต่างของแต่ละบุคคล และเป็นไปตามความสามารถของตนเอง

"การสอนแบบแผนของเคลเลอร์" (Keller Plan) หรือ "การสอนที่ยึดส่วนบุคคลเป็นหลัก" ซึ่งเรียกย่อ ๆ ว่า "การสอนแบบ PSI" (Personalized System of Instruction) เป็นวิธีสอนที่นำเอาหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ และทฤษฎีเสริมแรงมาใช้เป็นหลักในการสอน ซึ่ง จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช (จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช 2519 : 47) ได้กล่าวถึงลักษณะที่สำคัญ 5 ประการของการสอนแบบ PSI ไว้ดังนี้

1. ผู้เรียนจะเรียนตามความสามารถของผู้เรียนเอง
2. ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้บทเรียนแต่ละบทเป็นอย่างดี โดยผ่านการทดสอบก่อนที่จะเรียนบทเรียนต่อไป

3. เน้นการซักถามเป็นรายบุคคลระหว่างผู้เรียนและผู้ช่วยสอน

4. โดยทั่วไปผู้เรียนจะเรียนบทเรียนตามลำดับขั้นที่บอกไว้ในชื่อและคำแนะนำการเรียนของแต่ละบท

5. การบรรยายเป็นเพียงส่วนประกอบของการเรียนการสอน เพื่อกระตุ้นผู้เรียนให้สนใจเรียนเท่านั้น

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่กำหนดไว้ในโครงสร้างของหลักสูตรระดับอุดมศึกษา ซึ่งการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันประสบปัญหาหลายประการ ประการหนึ่งที่สำคัญก็คือ ผู้เรียนไม่เกิดมโนมติในเรื่องที่เรียน เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ต้องใช้ความคิดชนิดสมเหตุสมผลเพื่อเรียนรู้และเข้าใจโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ฉะนั้นการสอนคณิตศาสตร์จึงเป็นการสอนที่ต้องอาศัยหลักจิตวิทยา การอธิบายแต่ละขั้นในแต่ละหัวข้อจำเป็นต้องสอดคล้องกับจิตวิทยาแห่งการคิดและการเรียนรู้ (สุชาติ รัตนกุล 2515 : 3)

เมื่อพิจารณาลักษณะทั้ง 5 ประการของการสอนแบบ PSI จะเห็นว่าการสอนแบบนี้ควรจะนำมาใช้กับการสอนคณิตศาสตร์ เพราะคำนึงถึงหลักการเรียนรู้ดังนี้

1. ผู้เรียนแต่ละคนย่อมแตกต่างกันและมีความพร้อม ความสามารถในการเรียนไม่เท่ากัน ฉะนั้นผู้เรียนแต่ละคนจึงไม่ควรต้องเรียนไปพร้อม ๆ กัน ถ้าผู้สอนคณิตศาสตร์ได้มีการวางแผนการสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคน โดยจัดกิจกรรมการเรียนการสอน และมอบหมายงานที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียน จะช่วยให้ผู้เรียนมีพัฒนาการและประสบความสำเร็จในการเรียน ซึ่งเป็นการเรียนการสอนที่คำนึงถึงผู้เรียนเป็นหลัก

2. ใช้หลักจิตวิทยาในเรื่องการให้รางวัลตอบสนอง ผู้เรียนจะได้ทราบผลการเรียนของตนทันที จากผู้ช่วยสอนเมื่อผู้เรียนผ่านข้อทดสอบของแต่ละหน่วยการเรียนก็จะได้รับคำชมเชยและมีสิทธิ์ที่จะเรียนหน่วยต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนไม่สามารถผ่านหน่วยการเรียนหน่วยใดก็จะไม่ได้รับการลงโทษและไม่เรียกว่าเป็นการสอบตก เพียงแต่จะต้องกลับไปศึกษาหน่วยการเรียนนั้นใหม่

3. เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะแตกต่างจากวิชาอื่นคือ เนื้อหาวิชาจะเริ่มต้นจากง่ายไปยากและแต่ละข้อจะมีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกัน ฉะนั้นการแบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วยย่อย ๆ จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้และทำความเข้าใจเรื่องที่เรียนง่ายขึ้น เพราะแต่ละหน่วยจะเป็นไปตามลำดับขั้นของเนื้อหาวิชาซึ่งเป็นเหตุผลซึ่งกันและกัน

4. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมและซับซ้อน ดังนั้นคู่มือแนะนำการเรียนจะมีประโยชน์มากในการเรียนคณิตศาสตร์ เพราะจะช่วยให้ผู้เรียนได้รู้ว่าควรจะเริ่มต้นเรียนอย่างไร ใช้วิธีการเรียนแบบไหน ควรจะศึกษาค้นคว้าอย่างไร ผลการเรียนที่ต้องการคืออะไร การที่ผู้เรียนรู้ตนเองว่าอยู่ตรงไหนมีจุดหมายปลายทางที่ใด และจะไปยังจุดหมายนั้นได้อย่างไร จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

5. การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ผู้เรียนจะต้องสนใจและเอาใจใส่อย่างสม่ำเสมอการเรียนจึงจะประสบผลสำเร็จ ฉะนั้นการทดสอบเมื่อเรียนจบหน่วยการเรียนแต่ละหน่วยจะทำให้ผู้เรียนกระตือรือร้น สนใจเรียนตลอดเวลา ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์

6. ผู้ช่วยสอนมีบทบาทสำคัญยิ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากเนื้อหาของวิชาซับซ้อนและเข้าใจยาก ผู้เรียนมักจะเกิดปัญหาด้านการเรียนการสอน ผู้ช่วยสอนจะช่วยแก้ไขปัญหาและตอบข้อสงสัยของผู้เรียนแต่ละคนได้ทันที ทำให้ผู้เรียนประหยัดเวลาและสามารถทำความเข้าใจกับบทเรียนส่วนอื่น ๆ ต่อไปได้ ซึ่งการซักถามเป็นรายบุคคลจะทำได้ไม่ทั่วถึงในระบบการเรียนการสอนปกติ

เนื้อหาเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration) ประกอบด้วยเนื้อหาที่เน้นวิธีการอินทิเกรตตั้งแต่การอินทิเกรตอย่างง่ายจนกระทั่งถึงอย่างที่ซับซ้อนซึ่งต้องใช้เทคนิคการอินทิเกรตหลายแบบมาช่วยในการอินทิเกรต ดังนั้นผู้เรียนต้องมีความรอบรู้ในเนื้อหาเรื่องการอินทิเกรตทุกขั้นตอนตั้งแต่การอินทิเกรตแบบง่ายไปตามลำดับจนถึงการอินทิเกรตแบบที่ซับซ้อน จึงจะสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้

การสอนแบบ PSI น่าจะเป็นวิธีสอนที่ช่วยให้นิสิตประสบความสำเร็จในการเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะสร้างชุดการเรียนการสอน

สำหรับการสอนแบบ PSI เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตตามรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 ที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนแบบ PSI เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างชุดการเรียนการสอนสำหรับการสอนแบบ PSI
2. เพื่อฝึกให้นิสิตได้เรียนรู้วิธีแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง
3. เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองคือ เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต ตามหลักสูตรคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ. 2527
2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสอนแบบ PSI หมายถึงวิธีสอนที่มีลักษณะดังนี้
   1.1 ผู้เรียนจัดเวลาเรียนและเรียนตามความสามารถของตนเอง
   1.2 ผู้เรียนจะต้องสอบผ่านในแต่ละหน่วยการเรียนตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ก่อนที่จะเรียนหน่วยการเรียนต่อไป

1.3 มีผู้ช่วยสอนทำหน้าที่ประเมินผลการเรียน ให้กำลังใจ ชี้แจงข้อบกพร่อง สิ่งที่ควรแก้ไขแก่ผู้เรียน

1.4 มีคู่มือแนะนำการเรียน

1.5 มีการประชุมเป็นครั้งคราว เพื่อแก้ไขปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้น

2. ผู้สอน หมายถึง ผู้วิจัย ทำหน้าที่จัดการเรียนการสอนแบบ PSI ดังนี้

2.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอน ได้แก่ บทเรียน คำชี้แจงเพิ่มเติม คู่มือแนะนำการเรียน แบบฝึกหัดพร้อมคำเฉลย และเอกสารค้นคว้าเพิ่มเติม

2.2 ประชุมชี้แจงวิธีการเรียนการสอนให้กับผู้เรียน

2.3 เขียนแบบทดสอบ ใช้สำหรับการประเมินผลการเรียน

2.4 ประเมินผลการเรียนร่วมกับผู้ช่วยสอน

2.5 ตอบคำถามและให้คำแนะนำปรึกษา

2.6 แก้ปัญหากรณีขัดแย้งทางวิชาการระหว่างผู้เรียนกับผู้ช่วยสอน

3. ผู้ช่วยสอน หมายถึง นิสิตระดับปริญญาตรีและนิสิตระดับปริญญาโท ที่ผ่านการเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรตมาแล้วอย่างดี เป็นผู้มีวิจารณญาณดี เข้าใจปัญหาที่ผู้เรียนประสบ และมีความเต็มใจที่จะช่วยเหลือผู้อื่น ผู้ช่วยสอนมีหน้าที่ดังนี้

3.1 แจกเอกสารการเรียนการสอนทุกชนิดแก่ผู้เรียน

3.2 ประเมินผลการเรียนของผู้เรียน พร้อมชี้แจงข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น และให้คำแนะนำปรึกษา

3.3 จดบันทึกผลการเรียนของผู้เรียนเป็นรายบุคคล

3.4 ปรึกษากับผู้สอนในกรณีที่มีปัญหา

3.5 ประสานงานในศูนย์การเรียนให้เป็นไปด้วยความเรียบร้อย

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต

สมมุติฐานการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI

ผู้ริเริ่มการสอนแบบ PSI คือ เฟรด เอส เคลเลอร์ (Fred S. Keller) ซึ่งเริ่มคิดวิธีสอนแบบ PSI เมื่อ ค.ศ. 1963 โดยทดลองใช้สอนวิชาจิตวิทยาที่มหาวิทยาลัยโคลัมเบีย และพบว่าวิธีสอนนี้ช่วยให้ผู้เรียนประสบผลสำเร็จมากกว่าวิธีสอนแบบบรรยาย จากนั้นเคลเลอร์เริ่มเผยแพร่วิธีสอนแบบนี้จนกระทั่งเป็นที่รู้จักในวงการศึกษาของอเมริกา เมื่อ ค.ศ. 1968 (สุนันท์ ปัทมาคม 2519 : 12)

เคลเลอร์ (Keller. 1968 : 83) อธิบายว่าการสอนแบบ PSI มีลักษณะเฉพาะที่แตกต่างจากวิธีสอนแบบอื่นอย่างเด่นชัด ดังนี้

1. ผู้เรียนแต่ละคนจะเรียนรู้ไปตามความสามารถของตนเอง

2. ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ในเนื้อหาวิชาของหน่วยการเรียนแต่ละหน่วยเป็นอย่างดีก่อนที่จะได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนต่อไป

3. การสอนแบบนี้จะใช้การบรรยายเป็นเครื่องช่วยกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ไม่ใช่การถ่ายทอดความรู้และเนื้อหาที่สำคัญที่ใช้กันโดยทั่วไป

4. วิธีการนี้จะเน้นการสื่อความหมายโดยลายลักษณ์อักษร

5. ผู้ช่วยสอน จะช่วยแบ่งเบาภาระของผู้สอน ทั้งในด้านการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบ การบันทึกผลการเรียนรู้ และการให้คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา

เจมส อี สไตส (James E. Stice. 1978 : 177 - 179) ได้กล่าวว่า การสอนแบบ PSI นั้น เนื้อหาของรายวิชาจะถูกแบ่งเป็นหน่วยย่อย ๆ ตามลำดับ แต่ละหน่วยมีคู่มือแนะนำการเรียน คำชี้แจงเพิ่มเติม และแบบฝึกหัดพร้อมคำเฉลย ผู้เรียนเริ่มเรียนหน่วยแรกพร้อม ๆ กัน แต่ละคนจะเรียนด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน โดยจะเรียนในเวลาใด สถานที่ใดก็ได้ ปกติแต่ละหน่วยจะใช้เวลาในการเรียนให้สำเร็จประมาณหนึ่งสัปดาห์ เมื่อผู้เรียนมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในเนื้อหาที่กำหนดให้

ผู้เรียนจะมาพบผู้สอนหรือผู้ช่วยสอนเพื่อขอรับการทดสอบที่ศูนย์การเรียน ผู้ช่วยสอนจะตรวจแบบทดสอบและเฉลยต่อหน้าผู้เรียนให้ทราบผลการสอบทันที ในการทดสอบนั้นผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบให้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด (ปกติใช้เกณฑ์ 80 - 90%) ถ้าผู้เรียนไม่สามารถทำแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ ผู้เรียนจะได้รับแจ้งให้ศึกษาหน่วยเดิมนั้นอีกครั้งหนึ่งแล้วกลับมาขอรับการทดสอบใหม่ โดยผู้เรียนจะได้รับแบบทดสอบที่แตกต่างกันในแต่ละครั้งที่ทำการทดสอบ ผู้เรียนจะไม่ได้รับการลงโทษจากการทดสอบซ้ำหน่วยการเรียนเดิม วิธีสอนแบบนี้ต้องการเพียงให้ผู้เรียนได้แสดงถึงความรอบรู้ เมื่อผู้เรียนแสดงให้เห็นความรอบรู้ในหน่วยนั้น ก็จะได้รับหน่วยการเรียนต่อไป

นอกจากนี้ เจมส อี สไตส ได้กล่าวถึงประสิทธิผลของวิธีสอนแบบ PSI ว่าวิธีสอนแบบนี้ได้ถูกนำไปใช้ในระดับอุดมศึกษากับรายวิชาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง ได้แก่ จิตวิทยา วิศวกรรม ประวัติศาสตร์ ภาษาต่างประเทศ การเรียงความ ภาษาอังกฤษ ฤฎษฎี ทางด้านดนตรี วิทยาศาสตร์ ในปี ค.ศ. 1968 หลังจากที่ ดูบิน (Dobin) และทาเวกเกีย (Taveggia) ได้ศึกษางานวิจัยทางการศึกษาที่ผ่านมาแล้วสี่สิบปี ได้สรุปว่าสำหรับการสอนระดับอุดมศึกษา เมื่อประเมินจากการปฏิบัติงานของนักศึกษา ไม่มีความแตกต่างที่สามารถวัดได้ระหว่างวิธีสอนและสื่อที่ต่างกัน เจมส คูลิค (James Kulik) ได้ทำการประเมินผลการสอนแบบ PSI หลังจากที่ระบบนี้เริ่มขึ้นมาแล้ว 12 ปี ได้ชี้ให้เห็นว่าการสอนแบบ PSI แตกต่างจากวิธีสอนแบบอื่น ๆ ซึ่งเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับการศึกษาของ ดูบิน และทาเวกเกีย พบว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างการสอนแบบ PSI กับการสอนแบบเก่า จากการเปรียบเทียบคะแนนการสอบปลายภาคพบว่า ผู้ที่เรียนแบบ PSI ทำแบบทดสอบได้ดีกว่าผู้ที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบอื่นถึง 38 กรณี จากจำนวน 39 กรณี และมีถึง 34 กรณี ที่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีสอนแบบ PSI

ฟิลิปปาส และ ซอมเมอร์เฟลด์ท (Philippas and Sommerfeldt. 1972 : 1300 - 1306) รายงานว่าเมื่อสอนโดยวิธีสอนแบบ PSI แล้วจะมีผู้เรียนได้เกรด

"ร" ตอนสิ้นภาคเรียนมากกว่าการสอนโดยวิธีแบบบรรยาย เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบจำนวนหน่วยของบทเรียน (ที่ผู้เรียนสอบผ่าน) กับเวลาที่ล่วงไปเป็นสัปดาห์แล้วจะได้ความสัมพันธ์ชนิดแปรโดยตรงแต่ไม่เป็นเส้นตรงเอกรูป ถ้าต้องการให้ความสัมพันธ์นี้เป็นชนิดแปรโดยตรงและค่อนข้างจะเป็นเส้นตรงจะต้องสร้างเงื่อนไขบังคับให้ผู้เรียนเข้ามาทดสอบตามกำหนดเวลา

จากงานวิจัยของ ฟิลิปปาส และ ซอมเมอร์เฟลด์ท แสดงให้เห็นว่าผู้เรียนที่เรียนได้เร็วและมีความพยายามสูง สามารถเรียนจบหน่วยการเรียนได้ก่อนกำหนดเวลา ปรากฏการณ์เช่นนี้ยอมเปิดโอกาสให้ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมส่งเสริมผู้เรียนที่เรียนได้เร็วให้พัฒนาไปได้จนเต็มศักยภาพ

เนื่องจากว่าวิธีสอนแบบ PSI มิได้บังคับให้ผู้เรียนเข้าทดสอบความรู้ตามหมายกำหนดการ ดังนั้นผู้เรียนมักจะหน่วงเหนี่ยวหรือถ่วงเวลาผลัดวันประกันพรุ่งในการเข้าทดสอบความรู้

เนลสัน และเบนเนท (Nelson and Bennett. 1973 : 130 - 133) พบว่า ถ้าแบ่งบทเรียนให้เป็นหน่วยการเรียนที่เล็กลง จะทำให้เกิดการกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้ความพยายามในการเรียนมากขึ้น

คูลิค คูลิคและคาไมเคิล (Kulik, Kulik and Carmichael. 1974 : 379 - 383) ได้รวบรวมผลการทดลองเปรียบเทียบวิธีสอนแบบ PSI กับวิธีสอนแบบบรรยาย ผลการเปรียบเทียบปรากฏดังตารางดังนี้

รายวิชา	ครั้งที่ของการเปรียบเทียบ	ผลการเปรียบเทียบ
จิตวิทยาเบื้องต้น	1	98% ของผู้เรียนชอบวิธีการสอนแบบ PSI ผลการสอบได้คะแนนสูงกว่าและความแปรปรวนน้อยกว่ากลุ่มที่เรียนจากการบรรยาย
	2	ผู้เรียน 145 คน (จากจำนวน 152 คน) ตอบอย่างเด่นชัดว่าจะแนะนำให้เพื่อนเข้าเรียนรายวิชาที่สอนแบบ PSI
	3	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่ม PSI สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
	4	ผลสัมฤทธิ์ด้านปฏิบัติงานของกลุ่ม PSI สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
มนุษย์วิทยา	1	กลุ่ม PSI ประสบผลสำเร็จมากกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
บรรณารักษ์ศาสตร์	1	นักเรียนทุกคนในกลุ่ม PSI ชอบวิธีสอนแบบนี้มากกว่าวิธีบรรยาย และ 93% ของกลุ่มนี้บอกว่า PSI เป็นวิธีสอนอย่างหนึ่งที่ดีที่สุด
วิศวกรรมระบบดิจิตาล	1	กลุ่ม PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มบรรยายอย่างมีนัยสำคัญ จากการสำรวจพบว่า 90% ของผู้เรียนเทอมที่ 1 และ 79% ของผู้เรียนเทอมที่ 5 ชอบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบบรรยาย

รายวิชา	ครั้งที่ของการเปรียบเทียบ	ผลการเปรียบเทียบ
วิศวกรรมเบื้องต้น	1	64% ของผู้เรียนชอบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบธรรมดา
วิศวกรรมนิวเคลียร์	1	72% ของผู้เรียนชอบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบธรรมดา
วิศวกรรมไฟฟ้า	1	91% ของผู้เรียนชอบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบธรรมดา
การวิจัย	1	59% ของผู้เรียนชอบ PSI มากกว่าวิธีสอนแบบธรรมดา
ปีวิทยา	1	กลุ่ม PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ
	2	ค่าระดับคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม PSI สูงกว่ากลุ่มควบคุมเมื่อสอบไล่ปลายภาคเรียน

จากผลการรวบรวมรายงานวิจัยของคูลิค คูลิค และดาไมเดิล พอสรุปได้ว่า การสอนแบบ PSI ช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้เนื้อหาวิชาบางอย่างได้มากกว่าวิธีสอนปกติ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 จำนวน 88 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่มดังนี้

1. กลุ่มทดลองมีจำนวน 44 คน สอนโดยวิธีสอนแบบ PSI
2. กลุ่มควบคุมมีจำนวน 44 คน สอนโดยวิธีสอนปกติ

วิธีเลือกกลุ่มตัวอย่าง

การเลือกกลุ่มตัวอย่างกระทำดังนี้

1. นำคะแนนของนิสิตที่ได้จากการทำแบบทดสอบปลายภาคของวิชาคณิต 111 คณิตศาสตร์ 1 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2527 มาจัดเรียงตามลำดับจากคะแนนสูงสุดไปยังคะแนนต่ำสุด

2. กำหนดหมายเลขให้นิสิตตามลำดับคะแนนที่จัดเรียงไว้ แล้วแบ่งนิสิตออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มนิสิตที่มีหมายเลขคี่ และกลุ่มนิสิตที่มีหมายเลขคู่ แล้วสุ่มเป็นกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. บทเรียน ซึ่งเป็นบทเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรตตามเนื้อหาในหลักสูตรวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และมีวิธีดำเนินการสร้างบทเรียนตามลำดับดังนี้

1.1 พิจารณาขอบข่ายเนื้อหา เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต และแบ่งเนื้อหาวิชาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ เรียงตามลำดับความต่อเนื่องของเนื้อหา

1.2 ปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอนวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหา

1.3 ผู้วิจัยดำเนินการสร้างบทเรียนตามหน่วยย่อยที่แบ่งไว้ โดยศึกษาจากตำราต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1.3.1 บทนิยาม และทฤษฎีบทที่สำคัญ

1.3.2 ตัวอย่างเพื่อให้นิสิตได้เข้าใจบทนิยาม และทฤษฎีบท

1.3.3 แบบฝึกหัด เพื่อให้นิสิตได้ฝึกทักษะ

1.4 นำบทเรียนที่สร้างเสร็จแล้วไปปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอน เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง และปรับปรุงแก้ไข

1.5 นำบทเรียนที่แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตปริญญาตรี จำนวน 5 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 มาก่อน เพื่อปรับปรุงการใช้ภาษา ความเหมาะสมของเนื้อหา และระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน

1.6 นำบทเรียนที่ได้ทดลองใช้แล้วให้กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอนตรวจสอบ และปรับปรุงแก้ไข บทเรียนที่ได้จะเป็นบทเรียนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มทดลอง

2. คำชี้แจงเพิ่มเติม ประกอบด้วยบทบรรยายชี้แจงรายละเอียดเพิ่มเติมจากเนื้อหาในหน่วยการเรียน และมีวิธีการสร้างเหมือนบทเรียน

3. คู่มือแนะนำการเรียน นิสิตจะเรียนด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน ซึ่งประกอบด้วย

3.1 คำแนะนำการเรียนการสอนแบบ PSI เพื่อให้นิสิตได้ทำความเข้าใจวิธีการเรียน

3.2 คำแนะนำหน่วยการเรียนซึ่งประกอบด้วย

3.2.1 หัวข้อเรื่อง

3.2.2 วัตถุประสงค์

3.2.3 แนวคิด

3.2.4 สิ่งที่ควรทบทวน

3.2.5 กิจกรรมการเรียน

3.2.6 สื่อการเรียนการสอน

3.2.7 ตำราที่ศึกษาเพิ่มเติม

3.2.8 การประเมินผล

นำคู่มือแนะนำการเรียนที่สร้างขึ้นไปปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอน เพื่อปรับปรุงแก้ไข

4. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมด้วยคำเฉลย เพื่อให้นิสิตได้ฝึกทักษะและทดสอบตนเอง โดยปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอน

5. หนังสือและเอกสาร เพื่อให้นิสิตค้นคว้าเพิ่มเติมจากบทเรียน โดยปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอน

6. แบบทดสอบย่อยประจำหน่วย ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับเนื้อหาในแต่ละหน่วย หน่วยละ 4 ชุด มีลักษณะเป็นแบบทดสอบคู่ขนาน เพื่อทดสอบความรอบรู้ในแต่ละหน่วยของนิสิต โดยปรึกษากรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอน

7. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 13 ข้อ ที่อาจารย์ผู้สอนวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

<u>วิธีดำเนินการทดลอง</u>

วิธีการทดลองมีลำดับขั้นดังนี้

1. ผู้วิจัยและผู้ช่วยสอน เป็นผู้สอนกลุ่มทดลองโดยใช้วิธีสอนแบบ PSI ในคาบแรกของการเรียนการสอน ผู้วิจัยเป็นผู้แจกคู่มือแนะนำการเรียนและอธิบายระบบการเรียนการสอนแบบ PSI แก่นิสิต เพื่อให้นิสิตเข้าใจวิธีการเรียน หน้าที่ของผู้สอน หน้าที่ของผู้ช่วยสอนและหน้าที่ของผู้เรียน นิสิตทุกคนจะเริ่มเรียนหน่วยการเรียนที่หนึ่งพร้อม ๆ กัน ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนแต่ละหน่วยดังนี้

1.1 นิสิตรับบทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมจากผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน จากนั้นนิสิตแต่ละคนจะศึกษาเนื้อหาวิชาในหน่วยด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตสามารถจะศึกษาในเวลาและสถานที่ใดก็ได้

1.2 เมื่อนิสิตมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นแล้ว นิสิตจะมาที่ศูนย์การเรียนเพื่อรับการทดสอบ ผู้ช่วยสอนจะเป็นผู้นำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยให้นิสิตทำการทดสอบ

1.3 เมื่อนิสิตทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้ช่วยสอนจะตรวจแบบทดสอบทันทีต่อหน้านิสิต ถ้านิสิตทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ (80% ขึ้นไป) ก็สามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้ ถ้านิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์เล็กน้อย ผู้ช่วยสอนจะเปิดโอกาสให้นิสิตได้ชี้แจงหรือแก้ไขข้อผิดพลาด แล้วสามารถผ่านไปเรียนหน่วยการเรียนอื่น ๆ ต่อไปได้ เพราะแบบทดสอบมิได้มีจุดประสงค์เพื่อลงโทษนิสิตที่ทำไม่ได้ แต่มีจุดประสงค์เพื่อทดสอบความรอบรู้ของนิสิต

1.4 นิสิตที่ทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ไม่ถึงเกณฑ์จะต้องกลับไปศึกษาหน่วยเดิม โดยผู้ช่วยสอนจะอธิบายข้อบกพร่อง ชี้แจงสิ่งที่ควรแก้ไข และเปิดโอกาสให้นิสิตได้ซักถามปัญหาต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นิสิตได้ปรับปรุงการเรียนของตนเอง เมื่อนิสิตพร้อมที่จะสอบก็จะกลับมารับการทดสอบใหม่อีก แต่เป็นแบบทดสอบต่างชุดกับแบบทดสอบชุดแรก ซึ่งวัดความรู้เนื้อหาเดิมและปฏิบัติแนวข้อ 1.3 จนกว่านิสิตจะทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์จึงสามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้

อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร หนึ่งท่านเป็นผู้สอนกลุ่มควบคุมโดยวิธีสอนปกติทั้งสองกลุ่มเรียนเนื้อหาวิชาเดียวกัน และใช้เวลาเรียนกลุ่มละ 3 สัปดาห์ ๆ ละ 4 ชั่วโมง

2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว ทดสอบกลุ่มตัวอย่างทั้งสองโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต ที่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 90 นาที การให้คะแนนให้ตามลำดับขั้นตอนในการแสดงวิธีทำ โดยผู้สอนกำหนดไว้ล่วงหน้า

3. เปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t - test

<u>สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล</u>

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 ค่าเฉลี่ยของคะแนน

1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนน

2. เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t - test

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต จำนวน 13 ข้อ ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. หาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s^2
กลุ่มทดลอง	44	29	109.9492
กลุ่มควบคุม	44	28.7045	154.3991

2. เปรียบเทียบความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าสถิติ F สำหรับความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	s^2	F
กลุ่มทดลอง	44	109.9492	0.7121
กลุ่มควบคุม	44	154.3991	

$$F^{U}_{.025(43,43)} = 1.8433$$

$$F^{L}_{.025(43,43)} = 0.5425$$

จากตาราง 2 จะเห็นว่า $0.5425 < 0.7121 < 1.8433$ แสดงว่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าสถิติ t สำหรับคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s^2	t
กลุ่มทดลอง	44	29	109.9492	0.1205
กลุ่มควบคุม	44	28.7045	154.3991	

$$t_{.025,86} = 1.96$$

จากตาราง 3 จะเห็นว่า $0.1205 < 1.96$ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนแบบ PSI เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ

สมมุติฐานของการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตรที่เรียนรายวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 จำนวน 88 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งเรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI 44 คน และกลุ่มควบคุมซึ่งเรียนโดยวิธีสอนปกติ 44 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

2.1 บทเรียนสำหรับการสอนแบบ PSI เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้สอนกลุ่มทดลอง

2.2 คำชี้แจงเพิ่มเติม ประกอบด้วยบทบรรยายชี้แจงรายละเอียดเพิ่มเติมจากเนื้อหา ในหน่วยการเรียน

2.3 คู่มือแนะนำการเรียน

2.4 แบบฝึกหัดเพิ่มเติม พร้อมด้วยคำเฉลย

2.5 หนังสือและเอกสาร เพื่อให้นิสิตค้นคว้าเพิ่มเติมจากบทเรียน

2.6 แบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

2.7 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 13 ข้อ ที่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้วิธีสอนแบบ PSI และใช้ช่วงเวลาในการทดลอง 3 สัปดาห์

3.2 อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ เป็นผู้สอนกลุ่มควบคุมโดยวิธีสอนปกติ และใช้เวลาในการสอน 3 สัปดาห์ ๆ ละ 4 ชั่วโมง

สรุปผลการวิจัย

นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI และนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1. นิสิตขาดทักษะในการศึกษาด้วยตนเอง ทำให้ต้องใช้เวลาในการศึกษามาก และต้องวางแผนในการศึกษาเพื่อให้มีความรู้พร้อมที่จะสอบตามเวลาที่ผู้วิจัยกำหนด

2. ในระหว่างการทดลอง นิสิตมีการทดสอบกลางเทอมหลายวิชา ทำให้นิสิตมีเวลาสำหรับศึกษาบทเรียนและฝึกทำแบบฝึกหัดน้อยลง

3. นิสิตส่วนมากมีนิสัยผลัดวันประกันพรุ่ง ซึ่งสังเกตได้จากการมาขอรับการทดสอบประจำหน่วย นิสิตจะมาทดสอบในวันสุดท้ายที่จะหมดเขตการขอรับการทดสอบในหน่วยนั้น ๆ

4. นิสิตส่วนมากไม่กระตือรือร้น ในการศึกษาค้นคว้าและเพิ่มทักษะในการทำแบบฝึกหัด ซึ่งสังเกตได้จากการที่ผู้วิจัยจัดหาตำราที่ศึกษาเพิ่มเติม และจัดทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมพร้อมด้วยคำเฉลยนั้นได้รับความสนใจน้อยมาก

ข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย

1. เมื่อเริ่มการทดลอง นิสิตส่วนมากไม่กล้าซักถามปัญหาจากบทเรียน แต่เมื่อนิสิตมีความคุ้นเคยกับผู้สอน และผู้ช่วยสอน จึงกล้าซักถามมากขึ้น

2. ในการทดลองครั้งนี้ พบว่านิสิตที่ได้คะแนนต่ำในวิชาคณิต 111 คณิตศาสตร์ 1 สนใจศึกษาบทเรียนและซักถามปัญหาเสมอ นอกจากนี้ยังทำคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในเกณฑ์ดี

3. ผลจากการวิจัยปรากฏว่า คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองมีการกระจายของคะแนนน้อยกว่ากลุ่มควบคุม

4. นิสิตใช้เวลาศึกษาบทเรียนนี้น้อยที่สุดเพียง 3 วัน

ถึงแม้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตของนิสิตทั้ง 2 กลุ่ม ไม่แตกต่างกัน แต่วิธีสอนแบบ PSI ทำให้นิสิตได้รู้จักศึกษาค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับการเรียนในระดับนี้ และในการดำเนินชีวิตในอนาคต

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยพบว่า นิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติ ผู้วิจัยมีความเห็นว่า ควรใช้วิธีสอนแบบ PSI สลับกับวิธีสอนปกติ เพื่อฝึกให้นิสิตรู้จักศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

1.2 อาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ ควรจะเลือกเนื้อหาที่เป็นการฝึกทักษะ และนิสิตสามารถที่จะศึกษาได้ด้วยตนเอง สร้างเป็นชุดการเรียนการสอนไว้ใช้สลับกับการสอนปกติ

1.3 การเรียนการสอนแบบ PSI ควรเตรียมสื่อการสอนให้พร้อมและพอเพียง

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบ PSI ในระดับชั้นอื่น ๆ และในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นบทพิสูจน์

177697

2.2 สำรวจเจตคติของนิสิตที่มีต่อการเรียนการสอนแบบ PSI

2.3 ศึกษาความคงทนทางการเรียนรู้ของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

จันทร์เพ็ญ เชื้อพานิช "ประเมินผลระบบการสอนแบบ Keller Plan" วารสารครุศาสตร์ 6(3) : กันยายน - ตุลาคม 2519, หน้า 46 - 51

ชูศรี วงศ์รัตนะ เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 252 หน้า

ทวีชัย สิทธิศร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ จังหวัดมหาสารคาม, 326 หน้า อัดสำเนา

พรพรรณ แย้มกลิ่น "เทคนิคการอินทิเกรตและการประยุกต์เรื่องอินทิกรัล" เอกสารการสอนชุดวิชา คณิตศาสตร์ 2 มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช สาขาวิชา ศึกษาศาสตร์ 2527, หน้า 179 - 259

วิรัชช พานิชวงศ์ อินทิกรัลแคลคูลัส โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา 2524, 313 หน้า อัดสำเนา

สุชาติ รัตนกุล "วิธีสอนคณิตศาสตร์" ตำราชุดครู ป.กศ. โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว 2515, 184 หน้า

สุนันท์ ปัทมาคม "ระบบการสอนตามเอกัตภาพ" วารสารครุศาสตร์ 6(1) : พฤษภาคม - มิถุนายน 2519, หน้า 12 - 16

อรพินท์ เจียระพงษ์ วิธีทางสถิติ : การทดสอบสมมุติฐาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 187 หน้า อัดสำเนา

Bloom, Benjamin S. Human Characteristics and School Learning. New York, McGraw-Hill Book Company, 1976. 284 p.

Fisher, C. Robert. & Ziebur D Allen. Calculus and analytic geometry, New Jersey. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1965. 768 p.

Keller, Fred S. "Good-Bye, Teacher ...," Journal of Applied Behavior Analysis I. Spring, 1968. p. 79 - 89

Kulik, J.A, Kulik, Chen-Lin, and Carmichael, Kevin. "The Keller Plan in Teaching," Since. 183 : February 1, 1974. p. 379 - 383, p. 575 - 576.

Nelson, Terry F. and Bennett, Marcia L. "Unit size and Progess Rates In Self - Paced Instruction," Journal of College Science Teaching. 3(2) : December 1973. p. 130 - 133.

Phillippas, Michael A. and Sommerfeldt R.W. "Keller VS Lecture Method in General Physics," American Journal of Physics. 40/9, September, 1972. p. 1300 - 1306.

Purcell, J. Edwin, Calculus with analytic geometry. New Jersey. Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1978. 945 p.

Stice, James E. "PSI & Bloom's Mastery Model," "A Review & Comparision," The American Society for Engineering Education. 70(2), November, 1979. p. 175 - 180.

Taylar, E. Angus & Halberg, J.A. Calculus with analytic geometry. New Jersey, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969. 934 p.

Youse, K. Beran. Calculus with analytic geometry. Pensylvania, International Textbook Company, 1968. 416 p.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์ข้อมูล

การคำนวณค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลอง

x_1	f	fx_1	x_1^2	fx_1^2
52	1	52	2704	2704
51	1	51	2601	2601
50	1	50	2500	2500
46	1	46	2116	2116
45	1	45	2025	2025
44	1	44	1936	1936
40	1	40	1600	1600
38	1	38	1444	1444
36	3	108	1296	3888
35	2	70	1225	2450
34	2	68	1156	2312
33	1	33	1089	1089
31	1	31	961	961
30	1	30	900	900
28	5	140	784	3920
27	2	54	729	1458
26	2	52	676	1352
25	1	25	625	625
24	3	72	576	1728
22	1	22	484	484
21	1	21	441	441
20	4	80	400	1600
18	2	36	324	648
17	1	17	289	289
14	2	28	196	392
13	1	13	169	169
10	1	20	100	100
		1276		41732

$n_1 = 44$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum fx_1}{n_1} = \frac{1276}{44} = 29$$

$$s_1^2 = \frac{n_1(\sum fx_1^2) - (\sum fx_1)^2}{n_1(n_1 - 1)}$$

$$= \frac{44(41732) - (1276)^2}{(44)(44 - 1)}$$

$$= \frac{208024}{(44)(43)}$$

$$= 109.9492$$

การคำนวณค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบกลุ่มควบคุม

x_2	f	fx_2	x_2^2	fx_2^2
52	1	52	2704	2704
51	1	51	2601	2601
49	2	98	2401	4802
45	1	45	2025	2025
44	1	44	1936	1936
43	1	43	1849	1849
42	1	42	1764	3528
41	2	82	1681	3362
40	1	40	1600	1600
39	1	39	1521	1521
37	1	37	1369	1369
34	3	102	1156	3468
32	1	32	1024	1024
31	1	31	961	961
30	2	60	900	1800
29	2	58	841	1682
28	2	56	784	1568
27	1	27	729	729
26	1	26	676	676
24	2	48	576	1152
23	1	23	529	529
21	2	42	441	882
20	2	40	400	800
19	1	19	361	361
18	2	36	324	648
17	1	17	289	289
13	2	26	169	338
12	1	12	144	144
10	1	10	100	100
9	1	9	81	81
8	2	16	64	128
		1263		42893

$$n_2 = 44$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum fx_2}{n_2} = \frac{1263}{44} = 28.7045$$

$$s_2^2 = \frac{n_2(\sum fx_2^2) - (\sum fx_2)^2}{n_2(n_2 - 1)}$$

$$= \frac{44(42893) - (1263)^2}{(44)(44 - 1)}$$

$$= \frac{292123}{(44)(43)}$$

$$= 154.3991$$

คำนวณ F - test และ t - test

การคำนวณ F - test

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad ; \quad df = n_1 - 1, \; n_2 - 1$$

$$= \frac{109.9492}{154.3991} = 0.7121$$

$$df = 43, 43$$

ค่า F จากการคำนวณเท่ากับ 0.7121

การคำนวณ t - test

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right]}} \quad , df = n_1 + n_2 - 2$$

$$= \frac{29 - 28.7045}{\sqrt{\frac{(44 - 1)(109.9492) + (44 - 1)(154.3991)}{44 + 44 - 2}\left[\frac{1}{44} + \frac{1}{44}\right]}}$$

$$= \frac{0.2955}{2.4523}$$

$$= 0.1205$$

$$df = 86$$

ค่า t จากการคำนวณเท่ากับ 0.1205

ภาคผนวก ช.

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต

แบบทดสอบวิชา คณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 เรื่อง เทคนิคการอินทิเกรต

เวลา 90 นาที คะแนนเต็ม 55 คะแนน

I. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้ (แสดงวิธีทำอย่างสั้น ๆ ข้อละ 3 คะแนน)

1. $\int_0^1 e^x(1 + e^x)dx$
2. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$
3. $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx$
4. $\int \frac{a^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$
5. $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx$
6. $\int \frac{(x + 3)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
7. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$
8. $\int \frac{x - 1}{x + 1} dx$
9. $\int xe^x dx$

II. จงแสดงวิธีทำการหาค่าต่อไปนี้ (ข้อละ 7 คะแนน)

1. $\int_{-1}^2 \ln(x + 2)dx$
2. $\int \tan^4 x \, dx$
3. $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$
4. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$

ภาคผนวก ค.

ชุดการเรียนการสอนที่ใช้ในการวิจัย

คู่มือแนะนำการเรียน

รายวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2

เรื่อง เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

โดยใช้ระบบการสอนแบบ PSI

ผู้สอน : จินตนา ศักดิ์สมบูรณ์ นิสิตปริญญาโท เอกคณิตศาสตร์

ผู้ช่วยสอน : นิสิตปริญญาตรีและปริญญาโท เอกคณิตศาสตร์ จำนวน 14 คน

ศูนย์การเรียน : ห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ (ห้อง 10 - 210)

บทเรียน : บทเรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต ที่ผู้สอนสร้างขึ้น

คำแนะนำการเรียนการสอนแบบ PSI

การสอนแบบ PSI

เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปว่าความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนเป็นปัญหายุ่งยากในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน นิสิตที่เข้ามาเรียนมีความแตกต่างกันในหลาย ๆ ด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง วิธีการเรียน พื้นฐานความรู้ ความสามารถหรือความถนัด อัตราการเรียนรู้ ตลอดจนทัศนคติต่อวิชาและผู้สอน นอกจากปัญหาดังกล่าวแล้ว การจัดการเรียนการสอนยังขาดการฝึกให้นิสิตได้เรียนรู้ โดยการศึกษาด้วยตนเอง เพื่อส่งเสริมให้นิสิตเป็นผู้รู้จักคิด ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ดังนั้น การจัดการเรียนการสอน ควรจะให้สอดคล้องกับลักษณะส่วนบุคคลของนิสิต และฝึกให้นิสิตได้แสวงหาความรู้ด้วยตนเองให้มากที่สุด

ในบรรดาวิธีสอนแบบต่าง ๆ ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนิสิต และวิธีสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง และตามความสามารถของตนเอง ที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน คือ "การสอนแบบแผนของเคลเลอร์" (Keller Plan) หรือ "การสอนแบบที่ยึดส่วนบุคคลเป็นหลัก" (Personalized System of Instruction : PSI) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า "การสอนแบบ PSI" การสอนแบบนี้กำลังแพร่หลายในมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ในสหรัฐอเมริกา จากผลการวิจัยทางการสอนในรอบสิบปีที่ผ่านมา นิสิตที่เรียนแบบ PSI มีความรู้ ความสามารถในวิชาที่เรียน โดยเฉลี่ยดีกว่านิสิตที่เรียนแบบบรรยาย (Lecture) นอกจากนั้นนิสิตที่เรียนแบบ PSI รู้จักช่วยตนเองในการเรียนได้ดีขึ้น และนิสิตส่วนใหญ่ชอบการสอนแบบ PSI มากกว่าวิธีสอนปกติ ในปัจจุบันการสอนแบบ PSI ได้ถูกนำไปใช้ในประเทศอื่น ๆ ในยุโรป ออสเตรเลีย อาฟริกา และอเมริกาใต้

การเรียนการสอนแบบ PSI มีลักษณะดังนี้

เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ตามลำดับ แต่ละหน่วยจะมีคู่มือแนะนำการเรียน (Study Guide) เพื่อให้นิสิตศึกษาด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียนซึ่งประกอบด้วย

1. คำแนะนำการเรียนการสอนแบบ PSI เพื่อให้นิสิตได้ทำความเข้าใจวิธีการเรียน

2. คำแนะนำหน่วยการเรียนซึ่งประกอบด้วย หัวข้อเรื่อง วัตถุประสงค์ แนวคิด สิ่งที่ควรทบทวน กิจกรรมการเรียน สื่อการเรียนการสอน ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม และการประเมินผล

นิสิตทุกคนจะเริ่มเรียนบทเรียนหน่วยที่ 1 พร้อม ๆ กัน ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนแต่ละหน่วยดังนี้

1. นิสิตรับบทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมจากผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน (Proctors) จากนั้นนิสิตแต่ละคนจะศึกษาเนื้อหาวิชาในหน่วยด้วยตนเองตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตจะศึกษาในเวลาและสถานที่ใดก็ได้ เช่น ที่บ้าน ห้องสมุด เป็นต้น

2. เมื่อนิสิตมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นแล้ว นิสิตจะมาที่ศูนย์การเรียน (learning center) เพื่อขอรับการทดสอบ ศูนย์การเรียนจะมีผู้ช่วยสอน ซึ่งเป็นนิสิตที่เคยเรียนและสอบผ่านวิชานี้มาแล้วด้วยคะแนนค่อนข้างสูง เป็นผู้มีวิจารณาญาณดี เข้าใจปัญหาที่ผู้เรียนประสบ และมีความเต็มใจที่จะช่วยเหลือผู้อื่น ผู้ช่วยสอนจะนำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วยมาให้นิสิตทำการทดสอบ

3. เมื่อนิสิตทำแบบทดสอบแล้ว ผู้ช่วยสอนจะตรวจแบบทดสอบทันทีต่อหน้านิสิต ถ้านิสิตทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ที่กำหนด (80% ขึ้นไป) ก็สามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้ ถ้านิสิตได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์เล็กน้อยผู้ช่วยสอนจะเปิดโอกาสให้นิสิตได้ชี้แจงหรือแก้ไขข้อผิดพลาด แล้วสามารถผ่านไปเรียนบทเรียนหน่วยต่อไปได้ เพราะแบบทดสอบมิได้มีจุดประสงค์เพื่อลงโทษนิสิตที่ทำไม่ได้ แต่มีจุดประสงค์เพื่อทดสอบความรอบรู้ของนิสิต

4. นิสิตที่ทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ไม่ถึงเกณฑ์ จะต้องกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยเดิมใหม่ โดยผู้ช่วยสอนจะอธิบายข้อบกพร่อง ชี้แจงสิ่งที่ควรแก้ไขและเปิดโอกาสให้นิสิตซักถามปัญหาต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นิสิตได้ปรับปรุงการเรียนของตนเอง ในขณะเดียวกันผู้ช่วยสอนจะให้กำลังใจแก่นิสิต พยายามสร้างความมั่นใจในตัวนิสิตเกี่ยวกับการเรียน

เพื่อให้นิสิตกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยเดิม เมื่อนิสิตพร้อมที่จะสอบก็จะกลับมารับการทดสอบใหม่อีก แต่เป็นแบบทดสอบที่ต่างกับชุดแรก ซึ่งวัดความรู้เนื้อหาเดิม และมีวิธีปฏิบัติตามแนวข้อ 3 จนกว่านิสิตจะทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ที่กำหนด จึงสามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้

กล่าวโดยสรุป การสอนแบบ PSI มีองค์ประกอบ 5 ประการคือ

1. นิสิตจัดเวลาเรียนและเรียนด้วยตนเองตามความสามารถของนิสิต

2. นิสิตจะต้องสอบผ่านในแต่ละหน่วยตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (80% ขึ้นไป) ก่อนที่จะเรียนหน่วยต่อไป

3. มีพี่เลี้ยงคอยวัดความก้าวหน้า ให้กำลังใจ และช่วยอธิบายข้อบกพร่องที่ควรแก้ไข หรือถ้ามีเวลาอ้าจจะสอนให้บ้าง

4. นิสิตจะเรียนแต่ละหน่วยตามลำดับขั้น และตามคำแนะนำในคู่มือแนะนำการเรียน

5. มีการประชุมร่วมกันเป็นครั้งคราว เพื่อแก้ไขปัญหาที่อาจเกิดขึ้น

สาเหตุสำคัญที่ทำให้การสอนแบบ PSI ประสบผลสำเร็จได้ คือ

1. การแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ทำให้นิสิตได้เรียนรู้และทำความเข้าใจกับเนื้อเรื่องที่เรียนได้ง่ายขึ้นในระยะเวลาอันสั้น

2. การที่นิสิตต้องสอบให้ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดให้แต่ละหน่วยก่อนที่จะเรียนหน่วยต่อไป ทำให้นิสิตมีพื้นฐานความรู้ที่มั่นคง และมีความกระตือรือร้นสนใจเรียนตลอดเวลา

3. จากคู่มือแนะนำการเรียน นิสิตจะรู้ตนเองว่าควรจะเริ่มต้นเรียนอย่างไร ใช้วิธีการเรียนแบบไหน ควรศึกษาค้นคว้าอย่างไร และมีจุดมุ่งหมายอย่างไร ทำให้นิสิตเห็นจุดมุ่งหมายที่ชัดเจน

4. ในการสอบแต่ละหน่วย นิสิตจะทราบผลการสอบหรือการกระทำของตนเองทันที จากการสนทนากับพี่เลี้ยง ทำให้นิสิตไม่กังวลใจกับการรอคอยผลการสอบและรู้ทันทีว่าอะไรคือความเข้าใจที่ผิด ๆ ที่ควรได้รับการแก้ไข ซึ่งจะไม่ทำให้ความเข้าใจผิด ๆ นั้นติดตัวนิสิตไป

5. ความก้าวหน้าในการเรียนเป็นที่ประจักษ์ชัด นิสิตจะรู้ตนเองว่าอยู่ ณ จุดใดของการเรียน จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพมากขึ้น

6. ไม่มีการลงโทษในการที่สอบไม่ผ่านในแต่ละหน่วย ทำให้นิสิตเกิดกำลังใจ

7. เป็นการเรียนที่นิสิตได้เลือกเวลา และสถานที่ตามความพอใจ ที่คิดว่าตนเองจะมีสมาธิในการเรียน ซึ่งเป็นการเรียนที่มีความยืดหยุ่นมากพอสมควร

8. นิสิตได้เรียนรู้จากการกระทำของตนเอง หรือมีโอกาสได้ช่วยตนเองมากที่สุดก่อนที่จะไปขอความช่วยเหลือจากผู้อื่น เป็นการฝึกให้นิสิตได้แสวงหาความรู้ด้วยตนเอง และสร้างความเชื่อมั่นในตนเอง

9. เป็นการสอนแบบ "เอาใจผู้เรียนมาใส่ใจผู้สอน" ซึ่งหมายความว่าผู้สอนพยายามอย่างที่สุดที่จะอำนวยความสะดวกทางการเรียน ให้ความดูแลเอาใจใส่เพื่อให้นิสิตได้บรรลุจุดมุ่งหมายของการเรียน

ปัญหาที่อาจเกิดขึ้น

เนื่องจากการสอนแบบ PSI เปิดโอกาสให้นิสิตได้เรียนตามความสามารถของตนเอง มีอิสระในการเรียนตามใจตนเอง และไม่มีการลงโทษใด ๆ ทั้งสิ้น อาจทำให้นิสิตละเลยไม่เอาใจใส่ต่อการเรียน ขาดความรับผิดชอบและมีนิสัยผลัดวันประกันพรุ่ง ซึ่งนักการศึกษามีความเห็นว่านิสิตที่มีลักษณะนิสัยเช่นนี้ไม่ควรจะเรียนวิชาที่สอนโดยระบบ PSI เพราะผลร้ายจะตกแก่ตัวนิสิตเอง

คำแนะนำหน่วยการเรียน

เรื่อง เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

เนื้อหาเรื่องเทคนิคการอินทิเกรต แบ่งออกเป็น 3 หน่วย และมีหัวเรื่องดังนี้

หน่วยที่ 1

เรื่องที่ 1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

2 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

3 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลัง

หน่วยที่ 2

เรื่องที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$ $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$

6 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration of Rational Function by Partial Fractions)

หน่วยที่ 3

เรื่องที่ 7 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของซายน์ และโคซายน์ (Integration of Rational Functions of sin x and cos x)

8 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน (Rationalizing substitution)

เนื้อหาในแต่ละหน่วยจะประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. หัวข้อที่จะต้องศึกษา
2. วัตถุประสงค์

3. แนวคิด
4. สิ่งที่ควรทบทวน
5. กิจกรรมการเรียน
6. สื่อการเรียนการสอน
7. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
8. การประเมินผล

ขั้นตอนการเรียน

นิสิตมีขั้นตอนการเรียนตามลำดับดังนี้

ขั้นที่ 1 รับคู่มือแนะนำการเรียน

ขั้นที่ 2 รับบทเรียนครั้งละ 1 หน่วย พร้อมคำชี้แจงเพิ่มเติมของหน่วยนั้น

ขั้นที่ 3 ศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียน และคำชี้แจงเพิ่มเติม ตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน

ขั้นที่ 4 มารับการทดสอบประจำหน่วย

นิสิตจะได้รับคู่มือแนะนำการเรียนในคาบแรกของการเรียน จากนั้นขอให้นิสิตศึกษารายละเอียดต่าง ๆ ในคู่มือแนะนำการเรียนให้เข้าใจ

เมื่อนิสิตรับบทเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติมแล้ว ให้นิสิตศึกษาตามหัวข้อที่ปรากฏในหน่วยนั้น ๆ นิสิตจะศึกษาที่ใด และเวลาใดก็ได้ตามอัธยาศัย ไม่จำเป็นต้องมาเข้าชั้นเรียนอีก ในช่วงเวลาที่ศึกษาด้วยตนเองนี้ หากนิสิตมีข้อสงสัย ไม่เข้าใจ หรืออยากจะซักถามเกี่ยวกับเนื้อหาหรือแบบฝึกหัด ให้นิสิตไปซักถามได้จากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอนที่ศูนย์การเรียน ซึ่งพร้อมที่จะให้ความช่วยเหลือ

หลังจากที่นิสิตมีความมั่นใจว่ามีความรอบรู้ในหน่วยที่กำลังศึกษา ให้นิสิตไปที่ศูนย์การเรียนเพื่อรับการทดสอบ ซึ่งจะใช้เวลาประมาณ 30 นาที หลังจากทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้ช่วยสอนจะทำการตรวจต่อหน้านิสิต เพื่อให้นิสิตทราบผลการสอบทันที ถ้านิสิตสอบได้ตามเกณฑ์ที่กำหนด (80% ขึ้นไป) จะถือว่านิสิตมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นเป็นอย่างดี (นิสิตก็จะได้รับบทเรียนหน่วยต่อไป) ถ้าทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ ผู้ช่วยสอนจะชี้แจง

ข้อบกพร่องจุดอ่อนต่าง ๆ ที่ควรแก้ไขและอธิบายเพิ่มเติม นิสิตจะมีโอกาสได้ซักถามในสิ่งที่ตนไม่เข้าใจ และให้นิสิตกลับไปศึกษาหน่วยนั้นใหม่อีกจนมีความมั่นใจ แล้วกลับมารับการทดสอบใหม่ อีกกี่ครั้งก็ได้จนกว่าจะได้ตามเกณฑ์ จึงจะได้รับอนุญาตให้ศึกษาหน่วยต่อไปได้ ข้อสอบแต่ละครั้งจะต่างชุดกัน แต่คล้ายคลึง และนิสิตจะสอบ 2 ครั้ง ในวันเดียวกันไม่ได้

การทดสอบความรู้ประจำหน่วย มีไว้เพื่อเป็นเครื่องวัดหรือเป็นเครื่องชี้ว่านิสิตมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นมากน้อยเพียงใด มิใช่มีไว้เพื่อบอกได้ หรือตก ผลการสอบประจำหน่วยจะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อเกรดในปลายภาคเรียน

<u>กำหนดเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย</u>

เพื่อเป็นการช่วยให้นิสิตได้จัดตารางเรียนประจำหน่วย และจัดการเรียนให้เป็นไปตามช่วงเวลาที่กำหนด จึงใคร่แนะวันที่นิสิตควรเรียนและสอบให้ผ่านดังนี้

หน่วยที่ 1 สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 20 ธันวาคม 2527

หน่วยที่ 2 สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 27 ธันวาคม 2527

หน่วยที่ 3 สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 4 มกราคม 2528

วันที่ 4 มกราคม 2528 เข้าเรียนพร้อมกันเพื่อทบทวนและเตรียมตัวสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในวันที่ 11 มกราคม 2528

<u>การนับเวลาเรียน</u>

เพื่อปฏิบัติให้เป็นไปตามกฎของมหาวิทยาลัยเกี่ยวกับการนับเวลาเข้าเรียน นิสิตต้องมาพบผู้ช่วยสอน หรือผู้สอนที่ศูนย์การเรียนอย่างน้อยสัปดาห์ละ 1 ครั้ง

<u>เวลาที่นิสิตจะพบผู้สอนหรือผู้ช่วยสอน</u>

ผู้เรียนจะพบผู้สอนหรือผู้ช่วยสอนได้ตั้งแต่วันจันทร์ถึงวันศุกร์ เวลา 8.30 - 12.00 น. และ 13.00 - 16.00 น.

คำแนะนำหน่วยที่ 1

เนื้อหา

เรื่องที่ 1. ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

2. การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

3. การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

4. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลัง

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 1 จบแล้วนิสิตสามารถ

1. บอกความหมายของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. แสดงได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นปฏิยานุพันธ์ของอีกฟังก์ชันหนึ่ง
3. อินทิเกรตฟังก์ชันซึ่งใช้การแปลงฟังก์ชันอย่างง่าย ๆ แล้วเข้ารูปสูตรของการอินทิเกรตได้
4. ใช้สูตรอินทิเกรตทีละส่วนช่วยในการอินทิเกรตได้
5. อินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลังได้

แนวคิด

1. การอินทิเกรตจะทำได้โดยง่ายถ้ามองเห็นว่าโจทย์ข้อนั้นมีรูปแบบของสูตรอินทิเกรตสูตรใด ดังนั้นจึงจำเป็นต้องจดจำสูตรอินทิเกรตต่าง ๆ ให้ได้
2. การอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชันอาจทำได้โดยใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน โดยแบ่งผลคูณเป็นสองแฟคเตอร์ให้เหมาะสม เราอาจพิจารณาฟังก์ชันใด ๆ เป็นผลคูณของแฟคเตอร์ได้อย่างน้อยวิธีหนึ่งคือเป็นผลคูณของฟังก์ชันนั้นเองกับ 1 เราจึงอาจลองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนกับโจทย์อินทิเกรตใด ๆ ก็ได้ ในการอินทิเกรตทีละส่วนนี้ไม่มีหลักเกณฑ์แน่นอนที่ใช้การได้เสมอไป ประสบการณ์เท่านั้นที่จะช่วยได้ จึงจำเป็นต้องฝึกฝนใช้สูตรกับกรณีต่าง ๆ ให้เกิดความชำนาญ

3. ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลัง เอกลักษณ์ตรีโกณจะช่วยให้สามารถดัดแปลงผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณให้เข้ารูปแบบสูตรอินทิเกรตได้ จึงต้องจดจำเอกลักษณ์ตรีโกณให้ได้ด้วย

สิ่งที่ควรทบทวน

1. สูตรสำหรับการอินทิเกรต
2. เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

กิจกรรมการเรียน

1. ศึกษาหน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)
5. ซักถามปัญหาในบทเรียนได้จากผู้ช่วยสอนหรือผู้สอน

สื่อการเรียนการสอน

1. หน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. คู่มือแนะนำการเรียน
3. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
4. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. ทวีชัย สิทธิศร แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ จังหวัดมหาสารคาม 326 หน้า

2. Fisher, C.Robert. & Ziebur D Allen. Calculus and analytic geometry, New Jersey. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1965, 768 p.

3. Purcell, J.Edwin. Calculus with analytic geometry. New Jersey : Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1978. 945 p.

การประเมินผล

ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

คำแนะนำหน่วยที่ 2

เนื้อหา

เรื่องที่ 5. การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$ $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$

6. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration of Rational Functions by Partial Fractions)

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 2 จบแล้ว นิสิตสามารถ

1. อินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$
2. ใช้ความรู้เรื่องการแยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อย ช่วยในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะได้

แนวคิด 1. ในการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$ อาจทำได้โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

2. ฟังก์ชันตรรกยะเขียนได้ในรูปเศษส่วนย่อย การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะจึงทำได้โดยเขียนฟังก์ชันเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยแล้วอินทิเกรตเศษส่วนย่อยแต่ละพจน์

สิ่งที่ควรทบทวน

1. เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณ
2. วิธีกำลังสองสมบูรณ์

กิจกรรมการเรียน

1. ศึกษาหน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)
5. ซักถามปัญหาในบทเรียนได้จากผู้ช่วยสอน หรือผู้สอน

สื่อการเรียนการสอน

1. หน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. คู่มือแนะนำการเรียน
3. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
4. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. Purcell, J.Edwin. Calculus with analytic geometry. New Jersey; Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs: 1978. 945 p.

2. Taylar, E. Angus & Halberg, J.A. Calculus with analytic geometry. New Jersey; Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1969. 934 p.

3. Youse, K. Beran. Calculus with analytic geometry. Pemsylvania; International Textbook Company, 1968. 416 p.

การประเมินผล

ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

คำแนะนำหน่วยที่ 3

เนื้อหา

เรื่องที่ 7. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของซายน์และโคซายน์ (Integration of Rational Functions of sin x and cos x)

8. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน (Rationalizing substitutions)

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 3 จบแล้วนิสิตสามารถ

1. อินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของซายน์ และโคซายน์ได้
2. อินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วนได้

แนวคิด

1. โดยอาศัยการแปลงแบบเฉพาะจะสามารถแปลงฟังก์ชันตรรกยะของซายน์และโคซายน์เป็นฟังก์ชันตรรกยะได้เสมอไปการแปลงดังกล่าวจึงช่วยให้อินทิเกรตฟังก์ชันในรูปดังกล่าวได้
2. ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน อาจทำโดยเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

สิ่งที่ควรทบทวน

1. เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณ
2. เทคนิคการอินทิเกรตแบบต่าง ๆ ที่เรียนผ่านมาแล้ว

กิจกรรมการเรียน

1. ศึกษาหน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. ศึกษาตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
3. ทำแบบฝึกหัด
4. ศึกษาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)
5. ซักถามปัญหาในบทเรียนได้จากผู้ช่วยสอนหรือผู้สอน

สื่อการเรียนการสอน

1. หน่วยการเรียนและคำชี้แจงเพิ่มเติม
2. คู่มือแนะนำการเรียน
3. ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม
4. แบบฝึกหัดเพิ่มเติม (ซึ่งจัดคำเฉลยไว้ให้)

ตำราที่ควรอ่านเพิ่มเติม

1. วิรัชช พานิชวงศ์ อินทิกรัลแคลคูลัส โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา 2524, 313 หน้า

2. Purcell, J. Edwin. Calculus with analytic geometry. New Jersey; Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1978. 945 p.

3. Taylar, E.Angus & Halberg, J.A. Calculus with analytic geometry. New Jersey; Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1969. 934 p.

การประเมินผล

ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย

เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

หน่วยที่ 1

เรื่องที่ 1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

2 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

3 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลัง

เรื่องที่ 1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

บทนิยาม 1.1 ฟังก์ชัน F เรียกว่าปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับ x ทุกตัวในช่วง I

ตัวอย่าง 1.1

$F(x) = x^3$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^2 - 3$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$

$F(x) = 5x^2 + 10x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 10x + 10$

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ จะได้ว่า $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

พิจารณา $F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F(x) + C) &= \frac{d}{dx} F(x) + \frac{dc}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} F(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $F(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เช่นกัน

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ มีมากกว่า 1 ฟังก์ชัน

ทฤษฎีต่อไปนี้จะชี้ให้เห็นว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ สัมพันธ์กันอย่างไร

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f จะมีค่าคงตัว C ซึ่งทำให้ $G(x) = F(x) + C$

จากทฤษฎีบท 1.1 จะเห็นว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ สองฟังก์ชันใด ๆ จะแตกต่างกันเพียงค่าคงตัวเท่านั้น

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

จะเขียน $\int f(x)dx = F(x) + C$

เรียก $\int f(x)dx$ ว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ f

เรียก f ว่าฟังก์ชันอินทิแกรนด์ (integrand function)

เรียกการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันว่าการอินทิเกรต (integration)

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่าสัญลักษณ์อินทิกรัล (Integral sign)

เรียก C ว่าค่าคงตัวสำหรับการอินทิเกรต (Constant of integration)

จาก $\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

ทฤษฎีบท 1.2 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

ถ้าฟังก์ชัน F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ และ k เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

และ $(kF)'(x) = kF'(x) = kf(x)$

ดังนั้น $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

และ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

ในกรณีทั่วไปจะได้ว่า

$$\int [k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \ldots + k_nf_n(x)]dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \ldots + k_n\int f_n(x)dx$$

ทฤษฎีบท 1.3

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int [k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \ldots + k_nf_n(x)]dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + \ldots + k_n\int f_n(x)dx$

สูตรการอินทิเกรตพื้นฐาน

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ , \ n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

3. $\int e^u du = e^u + C$

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u \, du = \sin u + C$

7. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

10. $\int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

11. $\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$ หรือ $-\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$ หรือ $-\ln|\operatorname{cosec} u| + C$

13. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

14. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\arccos u + C$

17. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C$

18. $\int \frac{du}{1 + u^2} = -\operatorname{arccot} u + C$

19. $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{arcsec} u + C \quad , |u| > 1$

20. $\int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} = -\operatorname{arccosec} u + C \quad , |u| > 1$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad ; a > 0$

22. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad ; a > 0$

23. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C \quad ; a > 0$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C \quad ; a > 0$

<u>ตัวอย่าง 1.2</u> จงหาค่า $\int (x^2 + 3x - 1)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 3x - 1)dx &= \int x^2 dx + \int 3x\, dx - \int 1dx \quad \text{(ทฤษฎีบท 1.3 ข้อ 2)} \\
&= \int x^2 dx + 3\int x\, dx - 1\int dx \quad \text{(ทฤษฎีบท 1.3} \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + \left(\frac{3x^2}{2} + C_2\right) - (x + C_3) \quad \text{ข้อ 3)} \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right) + (C_1 + C_2 - C_3) \quad \text{(สูตร 1)} \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C \quad (\text{เมื่อ } C = C_1 + C_2 - C_3)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3 จงหาค่า $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$

วิธีทำ

$$\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx = \int \left(x^{-4} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx$$

$$= \int \left(x^{-4} + x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$$

$$= \int x^{-4}dx + \int x^{-\frac{1}{4}}dx$$

$$= \left(\frac{x^{-3}}{-3} + C_1\right) + \left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C_2\right)$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + (C_1 + C_2)$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C \qquad (C = C_1 + C_2)$$

โดย Fundamental Theorem of Calculus เราทราบว่า

ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ และ $f = g'$ สำหรับฟังก์ชัน g บางตัวแล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

จะเขียน $g(x)\Big|_a^b$ แทน $g(b) - g(a)$

สมมุติว่า $\int f(x)dx = F(x) + C$

เนื่องจาก $F(x) + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\therefore f(x)$

ดังนั้น $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$

เพราะฉะนั้น $\int_a^b f(x)dx = (F(x) + C)\Big|_a^b$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C)$$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาค่า $\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int 2\sqrt{x}\,dx = \int 2x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

ดังนั้น $\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^4$

$= \frac{4}{3}[4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}]$

$= \frac{32}{3}$

ตัวอย่าง 1.5 จงหาค่า $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$

ดังนั้น $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx = (\frac{x^3}{3} - x^2)\Big|_1^3$

$= (\frac{3^3}{3} - 3^2) - (\frac{1^3}{3} - 1^2)$

$= \frac{2}{3}$

แบบฝึกหัด

1. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = x^7$ $\quad F(x) = \frac{x^8}{8} + C$

1.2 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$

1.3 $f(t) = 5t^4 + 3t^2 + 1$ $\quad F(t) = t^5 + t^3 + t + C$

1.4 $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad F(x) = -\frac{1}{(x^2+1)}$

2. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

2.1 $\int(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$ $\quad x^4 + x^3 + x^2 + x + C$

2.2 $\int(5t-1)dt$ $\quad \frac{5t^2}{2} - t + C$

2.3 $\int 3x^2 dx$ $\quad x^3 + C$

2.4 $\int(x^2 + \frac{1}{x^2})dx$ $\quad \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

2.5 $\int y^{\frac{1}{5}}\, dy$ $\quad \frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} + C$

2.6 $\int_{-1}^{1} (y^2 - y + 1)dy$

2.7 $\int_{3}^{5} (6t^2 - 4t + 2)dt$

2.8 $\int_{a}^{b} dx$

2.9 $\int_{1}^{2} (\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 2)dx$

2.10 $\int_{x}^{3x} (4t - 1)dt$

เรื่องที่ 2 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

สมมุติ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และเรนจ์ของ g คือ I ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ให้นิยามบนช่วง I และฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง I

ถ้า $u = g(x)$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C \quad \text{(1)}$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่า $\int \sqrt{3x + 4}\ dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ และ $u = g(x) = 3x + 4$

จะได้ $f(g(x)) = f(3x + 4) = (3x + 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x + 4}$ และ $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$

$du = g'(x)dx = 3dx$

ดังนั้นจากสมการ (1)

จะได้ $\int \sqrt{3x + 4}\ dx = \frac{1}{3} \int (3x + 4)^{\frac{1}{2}}\, 3dx$

$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{9} \cdot (3x + 4)^{\frac{3}{2}} + C$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่า $\int \frac{x}{2x^2 + 3}\,dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $u = g(x) = 2x^2 + 3$

จะได้ $f(g(x)) = \frac{1}{2x^2 + 3}$ และ $f(u) = \frac{1}{u}$

$du = g'(x)dx = 4x\,dx$

ดังนั้นจากสมการ (1)

จะได้ $\int \frac{x}{2x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2 + 3}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{4}\ln|u| + C$

$= \frac{1}{4}\ln|2x^2 + 3| + C$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่า $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^4$ และ $u = g(x) = \sin x$

จะได้ $f(g(x)) = \sin^4 x$ และ $f(u) = u^4$

$du = g'(x)dx = \cos x\,dx$

ดังนั้นจากสมการ (1)

จะได้ $\int \sin^4 x \cos x\,dx = \int u^4 du$

$= \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{\sin^5 x}{5} + C$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาค่า $\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^x$ และ $u = g(x) = \tan x$

จะได้ $f(g(x)) = e^{\tan x}$ และ $f(u) = e^u$

$du = g'(x)dx = \sec^2 x \, dx$

ดังนั้นจากสมการ (1)

จะได้ $\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx = \int e^u du$

$= e^u + C$

$= e^{\tan x} + C$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้าฟังก์ชัน $u = g(x)$ โดยที่ g' มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ f ต่อเนื่องบนเรนจ์ของ g แล้ว

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

ตัวอย่าง 2.5 จงหาค่า $\int_0^1 (x^3 + x)^9 (3x^2 + 1)dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^9$ และ $u = g(x) = x^3 + x$

จะได้ $f(g(x)) = (x^3 + x)^9$ และ $f(u) = u^9$

$du = g'(x)dx = (3x^2 + 1)dx$

และ $g(0) = 0$; $g(1) = 2$

โดยทฤษฎีบท 2.1

ดังนั้น $\int_0^1 (x^3 + x)^9 (3x^2 + 1)dx = \int_0^2 u^9 du$

$= \frac{u^{10}}{10} \Big|_0^2$

$= \frac{2^{10}}{10}$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาค่า $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sin x$ และ $u = g(x) = x^2$

จะได้ $f(g(x)) = \sin x^2$ และ $f(u) = \sin u$

$du = g'(x)dx = 2x\,dx$

และ $g(0) = 0$; $g(\pi) = (\sqrt{\pi})^2 = \pi$

โดยทฤษฎีบท 2.1

ดังนั้น $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin x^2)(2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos \pi + \cos 0)$$

$$= 1$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{\sec^2 x}{1-\tan x}\,dx$ — $-\ln|1 - \tan x| + C$

2. $\int \cos^2 \pi x \sin \pi x\,dx$ — $-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos^3 \pi x}{3} + C$

3. $\int x^2 \sin(a^3x^3 + b^3)\,dx$ — $-\frac{1}{3a^3}\cdot\cos(a^3x^3 + b^3) + C$

4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ — $-2\,(1-\sin x)^{\frac{1}{2}} + C$

5. $\int x \tan x^2\,dx$ — $\frac{1}{2}\ln|\sec x^2| + C$

6. $\int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$ — $\frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C$

7. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ — $-e^{\frac{1}{x}} + C$

8. $\int \frac{e^{2x}}{2e^{2x} + 3}\,dx$ — $\frac{1}{4}\ln|2e^{2x} + 3| + C$

9. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$ — $\ln|e^x + 1| + C$

10. $\int \frac{\ln|x + a|}{x + a}\,dx$ — $\frac{(\ln|x + a|)^2}{2} + C$

11. $\int \frac{x^2}{2x^3 + 1}\,dx$ — $\frac{1}{6}\ln|2x^3 + 1| + C$

12. $\int \frac{x}{(4x^2 + 9)^2}\,dx$ — $-\frac{1}{8(4x^2 + 9)} + C$

13. $\int (x^2 - x)^4(2x - 1)\,dx$ — $\frac{(x^2 - x)^5}{5} + C$

14. $\int \frac{3x^2 + 2x}{(x^3 + x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ — $2(x^3 + x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} + C$

15. $\int (x^2+4x-2)^3(x+2)dx$ $\qquad \frac{1}{8}(x^2+4x-2)^4 + C$

16. $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{6-5x^2}}\,dx$ $\qquad -\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C$

17. $\int \frac{2+\ln x}{x}\,dx$ $\qquad \frac{(2+\ln x)^2}{2} + C$

18. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C$

19. $\int \frac{(e^{\sqrt{x}}-3)}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad 2e^{\sqrt{x}} - 6x^{\frac{1}{2}} + C$

20. $\int (6-x)^{-3}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2(6-x)^2} + C$

21. $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

22. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3x}{x^4+1}\,dx$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x^2)dx$

24. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{cosec} x\,dx$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x \tan x}{\sqrt{2+\sec^2 x}}\,dx$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+7}\,dx$ $\quad \ln|x^2+2x+7| + C$

2. $\int (3-t)^5 dt$ $\quad -\frac{(3-t)^6}{6} + C$

3. $\int (x+3)^{20} dx$ $\quad \frac{(x+3)^{21}}{21} + C$

4. $\int \frac{x}{3-x^2}\,dx$ $\quad -\frac{1}{2}\ln|3-x^2| + C$

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$ $\quad \frac{2}{3}\ln|1+x^{\frac{3}{2}}| + C$

6. $\int 2(2x+7)^{12} dx$ $\quad \frac{(2x+7)^{13}}{13} + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ $\quad \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

8. $\int z(a+bz^3)^2 dz$ $\quad a^2\frac{z^2}{2} + 2ab\frac{z^5}{5} + b^2\frac{z^8}{8} + C$

9. $\int \frac{1}{(a+by)^3}\,dy$ $\quad -\frac{1}{2b(a+by)^2} + C$

10. $\int \frac{t^2}{(a+bt^3)^2}\,dt$ $\quad -\frac{(a+bt^3)}{3b} + C$

11. $\int \frac{3x-1}{(2x-3x^2-2)^2}\,dx$ $\quad \frac{1}{2(2x-3x^2-2)} + C$

12. $\int (5x^3-3x+1)^3(5x^2-1)dx$ $\quad \frac{1}{12}(5x^3-3x+1)^4 + C$

13. $\int \frac{6x^2+4x}{(x^3+x^2+7)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ $\quad 3(x^3+x^2+7)^{\frac{2}{3}} + C$

14. $\int 2\sqrt{1 + 2x}\ dx$ $\qquad \frac{2}{3}(1 + 2x)^{\frac{3}{2}} + C$

15 $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$ $\qquad e^{2\sqrt{x}} + C$

16 $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1} dx$ $\qquad \frac{1}{3}\ln |e^{3x} + 1| + C$

17. $\int \frac{2e^{x}}{\sqrt[3]{e^{x} + 1}} dx$ $\qquad 3(e^{x} + 1)^{\frac{2}{3}} + C$

18. $\int \frac{xe^{ax^2}}{e^{ax^2} + 1}\ dx$ $\qquad \frac{1}{2a}\ln |e^{ax^2} + 1| + C$

19 $\int \frac{(e^{x} + 4)}{e^{x}}\ dx$ $\qquad x - 4e^{-x} + C$

20 $\int \tan 3x\ dx$ $\qquad \frac{1}{3}\ln |\sec 3x| + C$

21. $\int \tan^4 x \sec^2 x\ dx$ $\qquad \frac{\tan^5 x}{5} + C$

22. $\int \sec 2x \tan 2x\ dx$ $\qquad \frac{1}{2} \sec 2x + C$

23 $\int \sin^4 2x \cos 2x\ dx$ $\qquad \frac{\sin^5 2x}{10} + C$

24. $\int \cos 5x\ dx$ $\qquad \frac{\sin 5x}{5} + C$

25. $\int \sin \frac{x}{3}\ dx$ $\qquad -3 \cos \frac{x}{3} + C$

26. $\int \sec^2 3x\ dx$ $\qquad \frac{1}{3} \tan 3x + C$

27. $\int \operatorname{cosec}^2 4x\ dx$ $\qquad -\frac{1}{4}.\cot 4x + C$

28. $\int \tan^3 x \sec^2 x\ dx$ $\qquad \frac{\tan^4 x}{4} + C$

29. $\int \sec \frac{x}{2}\ dx$ $\qquad 2 \ln \left|\sec \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}\right| + C$

30. $\int \sec 5x\, dx$ $\qquad \frac{1}{5}\ln|\sec 5x + \tan 5x| + C$

31. $\int \sqrt{1 + \cos x}\, \sin x\, dx$ $\qquad -\frac{2}{3}(1 + \cos x)^{\frac{3}{2}} + C$

32. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx$ $\qquad -\ln|1 + \cos x| + C$

33. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$ $\qquad \frac{\sin^3 x}{3} + C$

34. $\int \frac{(\ln x)^5}{x}\, dx$ $\qquad \frac{(\ln|x|)^6}{6} + C$

35. $\int \frac{(\text{arc cot } x)^3}{1 + x^2}\, dx$ $\qquad -\frac{(\text{arc cot } x)^4}{4} + C$

36. $\int \frac{(\text{arc tan } x)^{\frac{1}{2}}}{1 + x^2}\, dx$ $\qquad \frac{2}{3}(\text{arc tan } x)^{\frac{3}{2}} + C$

37. $\int \frac{(\text{arc sin } x)^4}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ $\qquad \frac{(\text{arc sin } x)^5}{5} + C$

38. $\int xe^{-x^2}\, dx$ $\qquad -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

39. $\int e^{\sin 2x} \cos 2x\, dx$ $\qquad \frac{e^{\sin 2x}}{2} + C$

40. $\int e^{\cos 3x} \sin 3x\, dx$ $\qquad -\frac{e^{\cos 3x}}{3} + C$

41. $\int e^{-\sin x} \cos x\, dx$ $\qquad -e^{-\sin x} + C$

42. $\int e^x \cos e^x dx$ $\qquad \sin e^x + C$

43. $\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x\, dx$ $\qquad \frac{e^{\tan 2x}}{2} + C$

เรื่องที่ 3 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

การอินทิเกรตทีละส่วน เป็นวิธีการอินทิเกรตที่สำคัญวิธีหนึ่ง ซึ่งหลักการอินทิเกรตทีละส่วนได้จาก ดิฟเฟอเรนเชียลของผลคูณของสองฟังก์ชันดังนี้

ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้

ดังนั้น $d(f(x)g(x)) = f(x)g'(x)dx + g(x)f'(x)dx$

อินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

หรือ $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad \text{_____(1)}$$

เพราะว่า $du = f'(x)dx$ $\qquad dv = g'(x)dx$

ดังนั้นสมการ (1) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad \text{_____(2)}$$

สูตร (2) นี้เรียกว่า "สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน"

เราจะใช้สูตร (2) เมื่ออินทิเกรตผลคูณของสองฟังก์ชันฟังก์ชันหนึ่งคือ u และอีกฟังก์ชันหนึ่งคือ dv

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> จงหาค่า $\int xe^x dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x$ และ $dv = e^x dx$

จะได้ $du = dx$ และ $v = \int e^x dx = e^x$

ดังนั้น $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$ [จากสูตร (2)]

$= xe^x - e^x + C$

ตัวอย่าง 3.2 จงหาค่า $\int x^2 \ln x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ และ $dv = x^2 dx$

จะได้ $du = \frac{1}{x} dx$ และ $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

ดังนั้น $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$ [จากสูตร (2)]

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่า $\int x \sin 3x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x$ และ $dv = \sin 3x \, dx$

จะได้ $du = dx$ และ $v = \int \sin 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x \, d\,3x$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x$$

ดังนั้น $\int x \sin 3x \, dx = -\frac{x}{3} \cos 3x - \int (-\frac{1}{3} \cos 3x) dx$

$$= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \int \cos 3x \, d\,3x$$

$$= -\frac{x}{3} \cdot \cos 3x + \frac{\sin 3x}{9} + C$$

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่า $\int \arctan x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arctan x$ และ $dv = dx$

จะได้ $du = \frac{dx}{1+x^2}$ และ $v = \int dx = x$

ดังนั้น $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2}$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{(1 + x^2)}$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + C$$

สำหรับโจทย์บางข้อเราต้องใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำหลายครั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่า $\int x^2e^x dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ และ $dv = e^x dx$

จะได้ $du = 2x\,dx$ และ $v = \int e^x dx = e^x$

ดังนั้น $\int x^2e^2 dx = x^2e^2 - \int e^x \cdot 2x\,dx$

$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$ _____(1)

พิจารณา $\int xe^x dx$ โดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน ดังนี้

ให้ $u = x$ และ $dv = e^x dx$

จะได้ $du = dx$ และ $v = \int e^x dx = e^x$

ดังนั้น $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x + C_1$ _____(2)

จากผลลัพธ์ใน (2) นำไปแทนใน (1) จะได้

$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2[xe^x - e^x + C_1]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$ เมื่อ $C = -2C_1$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่า $\int e^x \sin x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^x$ และ $dv = \sin x\,dx$

จะได้ $du = e^x dx$ และ $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

ดังนั้น $\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x - \int -\cos x(e^x dx)$

$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$ _____(1)

พิจารณา $\int e^x \cos x\,dx$ โดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน ดังนี้

ให้ $u = e^x$ และ $dv = \cos x\,dx$

จะได้ $du = e^x dx$ และ $v = \int \cos x\,dx = \sin x$

ดังนั้น $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x . e^x dx + C_1$ ___(2)

จากผลลัพธ์ใน (2) นำไปแทนใน (1) จะได้

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + [e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx + C_1]$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C_1$$

ดังนั้น $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} \cdot [-e^x \cos x + e^x \sin x] + C$ เมื่อ $C = \frac{C_1}{2}$

ทฤษฎี 3.1 ถ้า f' และ g' อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว fg' และ $f'g$ จะอินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ และ

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)dx \quad **$$

หมายเหตุ

1. $f(x)\, g(x)\Big|_a^b = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)$
2. ** อาจเขียนใหม่ดังนี้

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่า $\int_0^2 xe^{2x}dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int xe^{2x}dx$

ให้ $u = x$ และ $dv = e^{2x}dx$

จะได้ $du = dx$ และ $v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$

ดังนั้น $\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} \cdot e^{2x}dx$

เพราะฉะนั้น $\int_0^2 xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx$

$$= \frac{x}{2} e^{2x}\Big|_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 e^{2x}d\,2x$$

$$= \frac{1}{2}(xe^{2x})\Big|_0^2 - \frac{1}{4}(e^{2x})\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(2.e^4 - 0) - \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

$$= e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3e^4}{4} + \frac{1}{4}$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ — $\frac{2e^{2x}}{13}\sin 3x - \frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C$

2. $\int e^{x}\cos x\,dx$ — $\frac{1}{2}e^{x}(\sin x + \cos x) + C$

3. $\int e^{-ax}\sin bx\,dx$ — $-e^{-ax}\left[\frac{(a\sin bx + b\cos bx)}{a^2+b^2}\right] + C$

4. $\int \sec^3 x\,dx$ — $\sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|(\sec x + \tan x|\ + C$

5. $\int \sin(\ln x)dx$ — $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

6. $\int x^2 \ln x\,dx$ — $\frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}) + C$

7. $\int (x^2+1)\ln x\,dx$ — $(\frac{x^3}{3} + x)\ln x - (\frac{x^3}{9} + x) + C$

8. $\int \arcsin x\,dx$ — $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$

9. $\int x\sec^2 x\,dx$ — $x\tan x + \ln|(\cos x)| + C$

10. $\int x\sin x\cos x\,dx$ — $-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$

11. $\int x^2\sin x\,dx$ — $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$

12. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$ — $2e^{\frac{x}{2}}(x-2) + C$

13. $\int x^2e^{2x}dx$ — $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C$

14. $\int x\tan^2 x\,dx$ — $x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$

15. $\int_0^2 xe^{2x}dx$

16. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$

17. $\int_{0}^{3} \sin 3x \cos x \, dx$

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \cot x \operatorname{cosec} x \, dx$

19. $\int_{1}^{4} \operatorname{arcsec} \sqrt{x} \, dx$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int x \sin x \, dx$ — $-x \cos x + \sin x + C$

2. $\int x \sec^2 x \, dx$ — $x \tan x - \ln|\sec x| + C$

3. $\int x^2 \cos x \, dx$ — $(x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C$

4. $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$ — $\frac{1}{2}[-\operatorname{cosec} x \cot x + \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x|] + C$

5. $\int x \arctan x \, dx$ — $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctan x - \frac{x}{2} + C$

6. $\int x e^x dx$ — $e^x(x - 1) + C$

7. $\int x e^{2x} \, dx$ — $\frac{1}{4} e^{2x}[2x - 1] + C$

8. $\int x e^{ax} \, dx$ — $\frac{e^{ax}}{a}(x - \frac{1}{a}) + C$

9. $\int x^2 e^{ax} dx$ — $\frac{e^{ax}}{a}(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}) + C$

10. $\int e^x \sin^2 x \, dx$ — $\frac{e^x}{10}(5 - \cos 2x - 2 \sin 2x) + C$

11. $\int e^{-x} \sin x \, dx$ — $-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C$

12. $\int e^x \cos 2x \, dx$ — $\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$

13. $\int e^{-t} \cos \pi t \, dt$ — $\frac{e^{-t}}{\pi^2 + 1}(\pi \sin \pi t + \cos \pi t) + C$

14. $\int \ln x \, dx$ — $x(\ln|x| - 1) + C$

15. $\int x \ln x \, dx$ — $\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C$

16. $\int x^2(\ln x)^2 dx$ $\qquad \frac{x^3}{27}[9(\ln |x|)^2 - 6 \ln |x| + 2] + C$

17. $\int x^a \ln x \, dx$ $\qquad \frac{x^{a+1}}{a+1}(\ln |x| - \frac{1}{a+1}) + C$

18. $\int \cos(\ln x) \, dx$ $\qquad \frac{x}{2}[\cos(\ln |x|) + \sin(\ln |x|)] + C$

เรื่องที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลัง

เราได้กล่าวถึงการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมาแล้ว แต่ในเรื่องนี้จะกล่าวถึงการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณยกกำลัง เช่น $\int \sin^3 x \cos x \, dx$, $\int \tan^4 x \sec^3 x \, dx$, $\int \sin^3 x \, dx$ หรือ $\int \operatorname{cosec}^3 2x \cot^4 2x \, dx$ ซึ่งจำแนกวิธีการอินทิเกรตออกเป็นกรณีต่าง ๆ ดังนี้

กรณี 1 การอินทิเกรต $\int \sin^n x \, dx$ หรือ $\int \cos^n x \, dx$ มีหลักเกณฑ์ดังนี้

1.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

เราใช้ลดกำลังโดยเอกลักษณ์

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่า $\int \sin^4 x \, dx$

วิธีทำ
$$\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int 1 dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cos 2x \, d\, 2x + \frac{1}{8} \int 1 dx$$

$$+ \frac{1}{8} \int \frac{1}{4} \cos 4x \, d\, 4x$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x \, d\,2x + \frac{1}{8}\int 1dx$$

$$+\frac{1}{32}\int \cos 4x \, d\,4x$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

1.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n \geq 3$

เราจะอาศัยสูตร $\sin x\,dx = -d\cos x$

$\cos x\,dx = d\sin x$

และเอกลักษณ์ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาค่า $\int \cos^5 x\,dx$

วิธีทำ $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx$

$$= \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\,d\sin x$$

(จาก $\cos x\,dx = d\sin x$)

$$= \int 1\,d\sin x - \int 2\sin^2 x\,d\sin x + \int \sin^4 x\,d\sin x$$

$$= \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

กรณี 2 การอินทิเกรต $\int \tan^n x\,dx$ หรือ $\int \cot^n x\,dx$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 2$

เราจะอาศัยสูตร $\sec^2 x\,dx = d\tan x$

$\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -d\cot x$

และเอกลักษณ์ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\int \tan^4 x\,dx$

วิธีทำ
$$\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\,dx$$
$$= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx$$
$$= \int \tan^2 x\,d\tan x - \int (\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \int \tan^2 x\,d\tan x - \int \sec^2 x\,dx + \int 1\,dx$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\int \cot^5 x\,dx$

วิธีทำ
$$\int \cot^5 x\,dx = \int \cot^3 x \cdot \cot^2 x\,dx$$
$$= \int \cot^3 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$$
$$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \cot^3 x\,dx$$
$$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \cot x \cot^2 x\,dx$$
$$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \cot x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$$
$$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \cot x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \cot x\,dx$$

$$= \int \cot^3 x(-d\cot x) - \int \cot x(-d\cot x) + \int \cot x\, dx$$

$$= -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$$

กรณี 3 การอินทิเกรต $\int \sec^n x\, dx$ หรือ $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx$

3.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ $n \geq 4$

เราอาศัยสูตร $\sec^2 x\, dx = d\tan x$

$\operatorname{cosec}^2 x\, dx = -d\cot x$

และเอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่า $\int \sec^4 x\, dx$

วิธีทำ $\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx$

$$= \int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x\, d\tan x$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx$

วิธีทำ $\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^4 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$$= \int (1 + \cot^2 x)^2(-d\cot x)$$

$$= \int (1 + 2\cot^2 x + \cot^4 x)(-d\cot x)$$

$$= \int 1(-d\cot x) + \int 2\cot^2 x(-d\cot x)$$

$$+ \int \cot^4 x(-d\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{2\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + C$$

3.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n \geq 3$

จะใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในเรื่องที่ 3

กรณี 4 การอินทิเกรต $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ มีหลักเกณฑ์ดังนี้

4.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $m \neq 0$

หรือ n เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq 0$

- เราอาศัยสูตร $\cos x\, dx = d\sin x$

$$\sin x\, dx = -d\cos x$$

และเอกลักษณ์ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า $\int \cos^3 x \sin^{\frac{2}{3}} x\, dx$

วิธีทำ $\int \cos^3 x \sin^{\frac{2}{3}} x\, dx = \int \cos^2 x \sin^{\frac{2}{3}} x .(\cos x\, dx)$

$$= \int (1 - \sin^2 x)\sin^{\frac{2}{3}} x\, d\sin x$$

$$= \int (\sin^{\frac{2}{3}} x - \sin^{\frac{8}{3}} x)d\sin x$$

$$= \int \sin^{\frac{2}{3}} x\, d\sin x - \int \sin^{\frac{8}{3}} x\, d\sin x$$

$$= \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x - \frac{3}{11}\sin^{\frac{11}{3}} x + C$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่า $\int \sin^5 x \cos^{-\frac{1}{2}} x \, dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^5 x \cos^{-\frac{1}{2}} x \, dx = \int \sin^4 x \cos^{-\frac{1}{2}} x (\sin x \, dx)$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^{-\frac{1}{2}} x (-d \cos x)$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^{-\frac{1}{2}} x (-d \cos x)$$

$$= -\int (\cos^{-\frac{1}{2}} x - 2\cos^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{7}{2}} x) d \cos x$$

$$= -\left[2\cos^{\frac{1}{2}} x - \frac{4}{5}.\cos^{\frac{5}{2}} x + \frac{2}{9}\cos^{\frac{9}{2}} x\right] + C$$

4.2 เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคู่บวกทั้งคู่

เราใช้ลดกำลังลงโดยอาศัยเอกลักษณ์

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

ตัวอย่าง 4.9 จงหาค่า $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}. \int (1-\cos 2x)(1-\cos 2x)^{\frac{1}{2}} . (1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{4}\right)dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\sin^2 2x \cos 2x\, d\, 2x$$

$$= \frac{1}{16}\int 1dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(\cos 2x\, d\, 2x)$$

$$= \frac{1}{16}\int 1dx - \frac{1}{16}\int \frac{1}{4} \cdot \cos 4x\, d\, 4x - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d\sin 2x$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C$$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่า $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$

วิธีทำ

$$\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^4 dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)dx$$

$$= \frac{1}{64}\int 1dx - \frac{2}{64}\int \cos 4x\, dx$$

$$+\frac{1}{64}\int \cos^2 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{64}\int 1dx - \frac{1}{32}\int \frac{1}{4}\cos 4x\, d\, 4x$$

$$+ \frac{1}{64}\int \left(\frac{1 + \cos 8x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{64}\int 1dx - \frac{1}{128}\int \cos 4x\, d\, 4x$$

$$+\frac{1}{128}\int 1dx + \frac{1}{128}\int \cos 8x\, dx$$

$$= \frac{1}{64}\int 1dx - \frac{1}{128}\int \cos 4x\ d\,4x + \frac{1}{128}\int 1dx$$

$$+\frac{1}{128}\int \frac{1}{8}\cos 8x\ d\,8x$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$$

$$= \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C$$

กรณี 5 การอินทิเกรต $\int \tan^m x \sec^n x\ dx$ มีหลักเกณฑ์ดังนี้

5.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $m \neq 0$

เราจะอาศัยสูตร $\sec^2 x\ dx = d \tan x$

และเอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่า $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x\ dx$

วิธีทำ
$$\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x\ dx = \int \tan^{-\frac{3}{2}} x \cdot \sec^2 x \sec^2 x\ dx$$

$$= \int \tan^{-\frac{3}{2}} x(1 + \tan^2 x)(\sec^2 x\ dx)$$

$$= \int (\tan^{-\frac{3}{2}} x + \tan^{\frac{1}{2}} x)d \tan x$$

$$= -2\tan^{-\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$$

5.2 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq 0$

เราจะอาศัยสูตร $\sec x \tan x\ dx = d \sec x$

และเอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่า $\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx$

วิธีทำ

$$\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x \sec^{-\frac{1}{2}} x \cdot \left(\frac{\sec x}{\sec x}\right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{-\frac{3}{2}} x \, (\sec x \tan x \, dx)$$

$$= \int (\sec^{\frac{1}{2}} x - \sec^{-\frac{3}{2}} x) d \sec x$$

$$= \int \sec^{\frac{1}{2}} x \, d \sec x - \int \sec^{-\frac{3}{2}} x \, d \sec x$$

$$= \frac{2}{3} \sec^{\frac{3}{2}} x + 2\sec^{-\frac{1}{2}} x + C$$

กรณี 6 การอินทิเกรต $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$ มีหลักเกณฑ์ดังนี้

6.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $m \neq 0$

เราจะอาศัยสูตร $\operatorname{cosec}^2 x \, dx = -d \cot x$

และเอกลักษณ์ $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\int \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{\cot^3 x} dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{\cot^3 x} \, dx = \int \operatorname{cosec}^4 x \cdot \cot^{-3} x \, dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \cot^{-3} x (\operatorname{cosec}^2 x \, dx)$$

$$= \int (1 + \cot^2 x)\cot^{-3} x (-d \cot x)$$

$$= -\int [\cot^{-3} x + \cot^{-1} x] d \cot x$$

$$= -\int \cot^{-3} x \, d \cot x - \int \frac{1}{\cot x} d \cot x$$

$$= -\frac{\cot^{-2} x}{-2} - \ln|\cot x| + C$$

$$= \frac{\cot^{-2} x}{2} - \ln|\cot x| + C$$

6.2 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq 0$

เราจะอาศัยสูตร $\operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -d \operatorname{cosec} x$

และเอกลักษณ์ $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

<u>ตัวอย่าง 4.14</u> จงหาค่า $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^{\frac{3}{2}} x\, dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^{\frac{3}{2}} x\, dx = \int \cot^4 x \operatorname{cosec}^{\frac{3}{2}} x \left(\frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x}\right)\cot x\, dx$

$= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^2 \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x (\operatorname{cosec} x \cot x\, dx)$

$= \int (\operatorname{cosec}^4 x - 2\operatorname{cosec}^2 x + 1) \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x (-d\operatorname{cosec} x)$

$= -\int (\operatorname{cosec}^{\frac{9}{2}} x - 2\operatorname{cosec}^{\frac{5}{2}} x + \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x)\, d \operatorname{cosec} x$

$= -\int \operatorname{cosec}^{\frac{9}{2}} x\, d \operatorname{cosec} x + 2 \int \operatorname{cosec}^{\frac{5}{2}} x\, d \operatorname{cosec} x$

$- \int \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x\, d \operatorname{cosec} x$

$= -\frac{2}{11} \operatorname{cosec}^{\frac{11}{2}} x + \frac{4}{7} \operatorname{cosec}^{\frac{7}{2}} x - \frac{2}{3} \operatorname{cosec}^{\frac{3}{2}} x + C$

<u>กรณี 7</u> การอินทิเกรต $\int \sin(nx) \cos(mx)dx$ หรือ $\int \sin(nx) \sin(mx)dx$ หรือ $\int \cos(nx)\cos(mx)dx$ เราใช้วิธีการหาผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นผลบวกหรือผลต่างโดยอาศัยเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาค่า $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

วิธีทำ

$$\int \sin 2x \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2}[\sin(2x+3x) + \sin(2x-3x)]dx$$

$$= \int \frac{1}{2}[\sin 5x + \sin(-x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{5} \sin 5x \, d\, 5x - \frac{1}{2}\int \sin(-x)d(-x)$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2} \cdot \cos(-x) + C$$

สำหรับฟังก์ชันตรีโกณแบบอื่น ๆ นอกจากที่กล่าวบางครั้งเราอาจใช้เปลี่ยนเป็นฟังก์ชันซายน์และฟังก์ชันโคซายน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.16 จงหาค่า $\int \frac{\tan^4 x}{\sec^5 x} \, dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{\tan^4 x}{\sec^5 x} \, dx = \int \frac{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}}{\frac{1}{\cos^5 x}} dx$$

$$= \int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^4 x \, d \sin x$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาค่า $\int \frac{dx}{1 + \sec \frac{x}{2}}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{1 + \sec \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$$

จาก $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

จะได้ $\boxed{\cos \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{4} - 1}$

จาก $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

จะได้ $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

ดังนั้น $\boxed{2\cos^2 \frac{x}{4} = 1 + \cos \frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{(2\cos^2 \frac{x}{4} - 1)}{2\cos^2 \frac{x}{4}} dx$$

$$= \int [1 - \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{4}}] dx$$

$$= \int [1 - \frac{\sec^2 \frac{x}{4}}{2}] dx$$

$$= \int 1 dx - \frac{4}{2} \int \sec^2 \frac{x}{4} \, d\frac{x}{4}$$

$$= x - 2\tan \frac{x}{4} + C$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ — $\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C$

2. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ — $-\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C$

3. $\int \sin^3 x \cos^{-1} x \, dx$ — $\frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + C$

4. $\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$ — $2 \tan x - x + C$

5. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$ — $\frac{1}{16} x - \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C$

6. $\int \frac{\cos^5 x \sin^3 x}{1 + \cos 2x} \, dx$ — $-\frac{1}{32}(\cos 2x - \frac{1}{3}\cos^3 2x) + C$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} \, dx$ — $2 \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x - \cot x + C$

8. $\int \tan^5 x \, dx$ — $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$

9. $\int \cot^3 x \, dx$ — $-\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$

10. $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x \, dx$ — $-2\tan^{-\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$

11. $\int \tan^3 x \sec^{-\frac{1}{2}} x \, dx$ — $\frac{2}{3}\sec^{\frac{3}{2}} x + 2\sec^{-\frac{1}{2}} x + C$

12. $\int \tan^2 2x \sec^4 2x \, dx$ — $\frac{1}{10}\tan^5 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + C$

13. $\int \frac{\sec^2\theta \, d\theta}{\sqrt{1+2\tan\theta}}$ — $\sqrt{1 + 2\tan\theta} + C$

14. $\int (\sec \Phi - \tan \Phi)^2 d\Phi$ — $2(\tan \Phi - \sec \Phi) - \Phi + C$

15. $\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$ — $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

16. $\int (\tan 3x + \cot 3x)^2 dx$ $\quad \frac{1}{3}(\tan 3x - \cot 3x) + C$

17. $\int \frac{\operatorname{cosec}^4 x}{\cot^{\frac{5}{3}}} dx$ $\quad \frac{3}{2}\tan^{\frac{2}{3}} x - \frac{3}{4}\cot^{\frac{4}{3}} x + C$

18. $\int \cot^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x \, dx$ $\quad -\frac{1}{9}\cot^3 3x - \frac{1}{15}\cot^5 3x + C$

19. $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$ $\quad -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

20. $\int (\sin 3x - \sin 2x)^2 dx$ $\quad x - \frac{1}{12}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$

21. $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$ $\quad \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$

22. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$ $\quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + C$

23. $\int \sin 4x \cos \frac{3x}{2} \, dx$ $\quad -\frac{1}{11}\cos\left(\frac{11x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + C$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$ — $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.\sin x + C$

2. $\int \sin^3 x\, dx$ — $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

3. $\int \sin^2 2x\, dx$ — $\frac{x}{2} - \frac{1}{8}.\sin 4x + C$

4. $\int \cos^3 x\, dx$ — $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

5. $\int \cos^2 3x\, dx$ — $\frac{x}{2} + \frac{1}{12}.\sin 6x + C$

6. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$ — $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.\sin x + C$

7. $\int \cos^4 x\, dx$ — $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}.\sin 2x + \frac{1}{32}.\sin 4x + C$

8. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ — $-\cot x + \operatorname{cosec} x + C$

9. $\int \sqrt{\cos x}\, \sin^3 x\, dx$ — $-\frac{2}{3}.\cos^{\frac{3}{2}} x + \frac{2}{7}.\cos^{\frac{7}{2}} x + C$

10. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ — $\sec x + \cos x + C$

11. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$ — $\frac{1}{5}.\tan^5 x + \frac{1}{3}.\tan^3 x + C$

12. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{\frac{11}{2}} x}\, dx$ — $\frac{2}{9}.\tan^{\frac{9}{2}} x + \frac{2}{5}.\tan^{\frac{5}{2}} x + C$

13. $\int (\cos x + \sqrt{\sin x})^2 dx$ — $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}.\sin 2x + \frac{4}{3}.\sin^{\frac{3}{2}} x - \cos x + C$

14. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ — $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$

15. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ — $\tan x - \sec x + C$

16. $\int \tan u \, du$ — $\ln |\sec u| + C$

17. $\int \tan^2 x \, dx$ — $\tan x - x + C$

18. $\int \tan^3 x \, dx$ — $\frac{1}{2}.\tan^2 x - \ln |\sec x| + C$

19. $\int \tan^6 x \, dx$ — $\frac{1}{5}.\tan^5 x - \frac{1}{3}.\tan^3 x + \tan x - x + C$

20. $\int \tan^2 \frac{x}{2} \, dx$ — $2 \tan \frac{x}{2} - x + C$

21. $\int \tan^2 x \cos x \, dx$ — $\ln |\sec x + \tan x| - \sin x + C$

22. $\int \cot^2 2x \, dx$ — $-\frac{1}{2}\cot 2x - x + C$

23. $\int \cot^4 3y \, dy$ — $-\frac{\cot^3 3y}{9} + \frac{\cot 3y}{3} + y + C$

24. $\int \sec^4 x \, dx$ — $\frac{1}{3}.\tan^3 x + \tan x + C$

25. $\int \sqrt{\sec x} \tan^3 x \, dx$ — $\frac{2}{5}\sec^{\frac{5}{2}} x - 2 \sec^{\frac{1}{2}} x + C$

26. $\int (\frac{\sec x}{\tan x})^4 \, dx$ — $-\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{3(\tan x)^3} + C$

27. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$ — $-\frac{1}{10}.\cos 5x - \frac{1}{2}.\cos x + C$

28. $\int \sin 3x \cos 4x \, dx$ — $-\frac{1}{14}.\cos 7x + \frac{1}{2}.\cos(-x) + C$

29. $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$ — $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

30. $\int \sin ax \cos bx \, dx$ — $-\frac{1}{2}\{\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\} + C$

31. $\int \sin 2x \sin 3x \, dx$ — $\frac{1}{2}.\sin x - \frac{1}{10}.\sin 5x + C$

32. $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$ — $\frac{1}{14}.\sin 7x + \frac{1}{2}.\sin x + C$

33. $\int \cos 2x \cos 3x \, dx$ — $\frac{1}{10}.\sin 5x - \frac{1}{2}.\sin(-x) + C$

คำชี้แจงเพิ่มเติมหน่วยที่ 1

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 1

จากบทนิยาม 1.1 ในการที่จะแสดงว่าฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f นั้นทำได้โดยแสดงว่า $F'(x) = f(x)$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $F(x) = x^2-1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

วิธีทำ การจะแสดงว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ นั้น เราต้องหาอนุพันธ์ของ $F(x)$

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= f(x)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $F_1(x) = x^3-2x$ และ $F_2(x) = x^3-2x+5$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2-2$

วิธีทำ $F_1(x) = x^3-2x$

$F_1'(x) = 3x^2-2 = f(x)$

ดังนั้นฟังก์ชัน F_1 เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

$F_2(x) = x^3-2x+5$

$F_2'(x) = 3x^2-2 = f(x)$

ดังนั้นฟังก์ชัน F_2 เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่า $F_1(t) = \frac{t+1}{t-1}$ และ $F_2(t) = \frac{2}{t-1}$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(t) = \frac{-2}{(t-)^2}$

วิธีทำ $F_1(t) = \frac{t+1}{t-1}$

$$F_1'(t) = \frac{1(t-1) - 1(t+1)}{(t-1)^2} = \frac{-2}{(t-1)^2} = f(t)$$

และ $F_2(t) = \frac{2}{t-1}$

$$F_2'(t) = \frac{-2}{(t-1)^2} = f(t)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน F_1 และ F_2 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

---

จากตัวอย่าง 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้จะมีปฏิยานุพันธ์มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน และฟังก์ชันที่เป็นปฏิยานุพันธ์เหล่านั้นจะต่างกันเฉพาะค่าคงตัวเท่านั้น

เช่น $F_1(x) = x^3 - 2x$

$F_2(x) = x^3 - 2x - 5$

$F_3(x) = x^3 - 2x - 10$

$F_4(x) = x^3 - 2x + 3$

จะเห็นว่า $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 2$

ดังนั้นในกรณีทั่วไปจะได้ว่า $F(x) = x^3 + 2x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 2$

เราทราบมาแล้วว่ากระบวนการหาปฏิยานุพันธ์ก็คือ การอินทิเกรต ดังนั้นจากตัวอย่างข้างบนเราจะเขียนใหม่โดยใช้สัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x + C) = (3x^2 - 2)\,dx \Rightarrow \int (3x^2 - 2)\,dx = x^3 - 2x + C$$

จะเห็นว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x) = 3x^2 - 2$ มีได้หลายฟังก์ชันแต่ต่างกันที่ค่าคงตัวเท่านั้น

ดังนั้นจึงเขียนกรณีทั่ว ๆ ไปเป็น $\int (3x^2 - 2)dx = x^3 - 2x + C$

การหาปฏิยานุพันธ์หรือการอินทิเกรตเป็นขบวนการกลับกันกับการหาอนุพันธ์ กล่าวคือ ในการหาอนุพันธ์นั้นสิ่งที่กำหนดให้คือฟังก์ชัน

$$y = F(x)$$

และสิ่งที่ต้องการหาคือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $F'(x)$

แต่ในการหาปฏิยานุพันธ์นั้นสิ่งที่กำหนดให้คือ

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ส่วนที่ต้องการหาคือฟังก์ชัน $y = F(x)$

ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$

ตัวอย่าง 4 จงหาฟังก์ชัน $y = F(x)$ ซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้เท่ากับ 3

วิธีทำ ต้องการหาฟังก์ชัน $y = F(x)$ ซึ่ง $\frac{dy}{dx} = 3$

พิจารณา ถ้า $y = 3x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3$

ถ้า $y = 3x + 5$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3$

ถ้า $y = 3x - 5$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3$

โดยทั่วไป ถ้า $y = 3x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3$

ดังนั้นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ 3 มีจำนวนอนันต์และอยู่ในรูป

$F(x) = 3x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 5 จงหาฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์เท่ากับ $3x^2 - 4x + 5$

วิธีทำ ต้องการหาฟังก์ชัน $y = F(x)$ ซึ่ง $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 5$

พิจารณา ถ้า $y = x^3 - 2x^2 + 5x$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 5$

ดังนั้นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์เท่ากับ $3x^2 - 4x + 5$ อยู่ในรูป

$y = x^3 - 2x^2 + 5x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

พิจารณา ถ้า $y = F(x) + C$ มีอนุพันธ์เป็น $f(x)$

นั่นคือ $\frac{dx}{dy} = f(x)$

จะเขียนในรูป $\int f(x)dx = F(x) + C$

ดังนั้นถ้า $\frac{dy}{dx} = f(x)$

จะได้ว่า $y = \int f(x)dx$

จากตัวอย่าง 4 จะได้ $\int 3dx = 3x + C$

จากตัวอย่าง 5 จะได้ $\int (3x^2 - 4x + 5)dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$

เรียกสมการซึ่งมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันปรากฏอยู่ว่า <u>สมการเชิงอนุพันธ์</u> (differential equation) เช่น $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 5$ ในตัวอย่าง 5

และเรียกการหาฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ว่า <u>การแก้สมการเชิงอนุพันธ์</u>

<u>ตัวอย่าง 6</u> จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์

(1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1$

(2) $\frac{ds}{dt} = 32t - 16t^2$

<u>วิธีทำ</u> (1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1$

$y = \int (3x^2 - 2x + 1)dx$

$$= 3\int x^2dx - 2\int x\,dx + \int dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C$$

ดังนั้น $y = x^3 - x^2 + x + C$

(2) $\frac{ds}{dt} = 32t - 16t^2$

$$s = \int (32t - 16t^2)dt$$

$$= 32\int t\,dt - 16\int t^2dt$$

$$= \frac{32t^2}{2} - \frac{16t^3}{3} + C$$

ดังนั้น $s = 16t^2 - \frac{16t^3}{3} + C$

ข้อสังเกต

1. อินทิกรัลของผลบวกหรือผลต่าง เท่ากับ ผลบวกหรือผลต่างของอินทิกรัล

$$\int (u \pm v)dx = \int (u\,dx \pm v\,dx) = \int u\,dx \pm \int v\,dx$$

แต่ ผลคูณหรือผลหารของอินทิกรัล ไม่เท่ากับ อินทิกรัลของผลหารหรือผลคูณ

$$\int \frac{u}{v}\,dx \neq \frac{\int u\,dx}{\int v\,dx}$$

$$\int u\,v\,dx \neq \int u\,dx \cdot \int v\,dx$$

2. การอินทิเกรตทุกครั้งต้องมีค่าคงตัวเกิดขึ้น

ตัวอย่าง 7 จงหาค่า $\int (5x^3 - 2x^2 + x)dx$

วิธีทำ $\int (5x^3 - 2x^2 + x)dx = \int 5x^3dx - \int 2x^2dx + \int x\,dx$

$$= (\frac{5x^4}{4} + C_1) - (\frac{2x^3}{3} + C_2) + (\frac{x^2}{2} + C_3)$$

$$= \left(\frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + (C_1 - C_2 + C_3)$$

$$= \frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \quad (\text{เมื่อ } C = C_1 - C_2 + C_3)$$

หมายเหตุ นิยมเขียนตัวคงตัวสำหรับการอินทิเกรตรวมกันเป็นจำนวนเดียวในที่นี้ $C = C_1 - C_2 + C_3$ ดังนั้นตัวอย่างที่ 7 อาจเขียนใหม่ได้ดังนี้

วิธีทำ $\int (5x^3 - 2x^2 + x)dx = \int 5x^3dx - \int 2x^2dx + \int x\,dx$

$$= 5\int x^3dx - 2\int x^2dx + \int x\,dx$$

$$= \frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

3. สูตรการอินทิเกรตที่สำคัญและต้องจำให้แม่นยำคือ

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$ เพราะเป็นสูตรพื้นฐานที่นำไปใช้มากที่สุด

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 2

โดยทั่วไป ๆ ไปการหาค่าอินทิกรัลนั้น ฟังก์ชันที่เป็นอินทิแกรนด์ มักจะเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปคอมโพสิทฟังก์ชัน เช่น $f(g(x))$ ดังนั้นแทนที่จะอินทิเกรตฟังก์ชันที่มี x เป็นตัวแปรเราก็ต้องอินทิเกรตฟังก์ชันที่มี $g(x)$ เป็นตัวแปรฉะนั้นเราจึงนิยมใช้ตัวแปร u แทน $g(x)$ การอินทิเกรตโดยวิธีการเปลี่ยนเทอมของ x ทั้งหมดให้เป็นเทอมของ u เราจะเรียกว่าวิธีการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

จากตัวอย่างที่ 2.1 – 2.4 ถ้านิสิตมีความเข้าใจวิธีการทำแล้วนิสิตไม่จำเป็นต้องทำตามขั้นตอนในสมการที่ (1) นั่นคือไม่จำเป็นต้องพิจารณาฟังก์ชัน f และ g เพียงแต่นิสิตพยายามจัดให้อยู่ในรูป $\int \underbrace{u^n}\underbrace{du}$ โดยที่ $u = g(x)$

นิสิตลองสังเกตสูตร $\int u^n\, du$ นิสิตจะเห็นว่าส่วนที่โยงด้วยลูกศรจะต้องเป็นฟังก์ชันเดียวกัน

ดังนั้นอีกวิธีหนึ่งที่จะหาค่า $\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx$ ก็คือทำส่วนที่โยงด้วยลูกศรให้เป็นฟังก์ชันเดียวกัน

ซึ่งนิสิตจะพบว่า $\quad dx = \frac{1}{3}\, d(3x + 4)$

ดังนั้น
$$\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx = \int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}\, d(3x + 4)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \int (3x + 4)^{\frac{1}{2}}\, d(3x + 4)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x + 4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \qquad \left(\text{ใช้สูตร} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n + 1} + C;\ n \neq -1 \text{ โดยที่ } u = 3x + 4\right)$$
$$= \frac{2}{9} (3x + 4)^{\frac{3}{2}} + C$$

นิสิตจะเห็นว่าวิธีนี้ง่ายและสะดวกกว่าวิธีแรก แต่ต้องอาศัยความรอบคอบและการสังเกตที่มีหลักเกณฑ์ เช่นตัวอย่าง 2.4 นิสิตควรจะนึกถึงสูตร $\int e^{\overbrace{u}} \overbrace{du}$ (ส่วนที่โยงด้วยลูกศรต้องเป็นฟังก์ชันเดียวกัน) ดังนั้นนิสิตต้องเปลี่ยน $\sec^2 x\, dx = d \tan x$

ดังนั้น $\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx = \int e^{\tan x} \, d \tan x$

$= e^{\tan x} + C$

เพื่อเพิ่มความเข้าใจในคำอธิบายข้างบน ขอให้นิสิตศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่า $\int \frac{x^2}{1 + 3x^3} \, dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int \frac{x^2}{1 + 3x^3} \, dx = \int \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(1 + 3x^3)} \, d(1 + 3x^3)$

$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{(1 + 3x^3)} \, d(1 + 3x^3)$

$= \frac{1}{9} (\ln|1 + 3x^3| + C_1)$ (ใช้สูตร $\int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C$

โดยที่ $u = (1 + 3x^3)$

$= \frac{1}{9} \ln|1 + 3x^3| + C$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่า $\int \frac{\ln x}{x} dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x \, d \ln x$ (เพราะว่า $d \ln x = \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$ (ใช้สูตร $\int u^n dn = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$

โดยที่ $u = \ln x$)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่า $\int e^x \sqrt{2 + 3e^x} dx$

<u>วิธีทำ</u> $\int e^x \sqrt{2 + 3e^x} dx = \int \frac{1}{3} (2 + 3e^x)^{\frac{1}{2}} \, d(2 + 3e^x)$

$= \frac{1}{3} \int (2 + 3e^x)^{\frac{1}{2}} \, d(2 + 3e^x)$

$= \frac{2}{9} (2 + 3e^x)^{\frac{3}{2}} + C$ (ใช้สูตร $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$;

$n \neq -1$ โดยที่ $u = 2+3e^x$)

หมายเหตุ สูตรที่นำมาใช้มากที่สุดในการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

คือ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$

สำหรับฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ เราสามารถหาค่าได้โดยใช้ทฤษฎีบท 2.1 ดังแสดงในตัวอย่าง 2.5, 2.6 หรือเราอาจจะใช้อีกวิธีหนึ่งที่ไม่ต้องพิจารณาฟังก์ชัน f และ g เพียงแต่พยายามจัดให้อยู่ในรูป $\int u^n du$ โดยที่ $u = g(x)$ (ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น)

จากตัวอย่าง 2.5 จงหาค่า $\int_0^1 (x^3+x)^9(3x^2+1)dx$

สำหรับตัวอย่างนี้นิสิตอาจจะมองยากว่าจะทำอย่างไร ขอให้นิสิตสังเกต $f(x) = x^3+x$; $h(x) = 3x^2+1$ นิสิตจะพบว่า $d(x^3+x) = (3x^2+1)dx$

ดังนั้น
$$\int_0^1 (x^3+x)^9(3x^2+1)dx = \int_0^1 (x^3+x)^9 d(x^3+x)$$
$$= \frac{(x^3+x)^{10}}{10}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2^{10}}{10}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\int_0^{\pi} \sin^5 x \cos x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^5 x \, d \sin x$ (เพราะว่า $d \sin x = \cos x \, dx$)

$$= \frac{\sin^6 x}{6}\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{6}(\sin^6 \pi - \sin^6 o)$$
$$= 0$$

นิสิตจะเห็นว่าวิธีนี้ง่าย ดังนั้นเมื่อนิสิตพบโจทย์ถ้านิสิตมีความเข้าใจทฤษฎีบท 2.1 ดีแล้ว นิสิตก็สามารถทำวิธีที่กล่าวมาแล้วได้

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 3

การอินทิเกรตทีละส่วนนี้มักใช้กับการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีลักษณะต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของผลคูณ เช่น $\int x \cos x \, dx$, $\int xe^x dx$ $\int \sin (\ln x) dx$ เป็นต้น

2. ฟังก์ชันลอการิทึม เช่น $\int x^2 \ln x \, dx$, $\int \ln x \, dx$ ฯลฯ

3. ฟังก์ชันตรีโกณผกผัน เช่น $\int \arcsin x \, dx$, $\int \arctan x \, dx$ ฯลฯ

4. ผลคูณของ $\tan x$ กับ $\sec x$ หรือ $\cot x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ ที่กำลังของ $\sec x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ เป็นจำนวนคี่ แต่กำลังของ $\tan x$ กับ $\cot x$ เป็นจำนวนคู่ เช่น $\int \sec^3 x \tan^2 x \, dx$, $\int \sec^3 x \, dx$ ฯลฯ

หลักการสำหรับการอินทิเกรตโดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วนมีดังต่อไปนี้

1. นำฟังก์ชันที่จะอินทิเกรตมาแยกเป็นผลคูณแบบต่าง ๆ ในรูป

$$\int f(x)dx = \int f_1(x) \, f_2(x)dx$$

2. กำหนด $u = f_1(x)$ และ $dv = f_2(x)dx$

แล้วหา $du = f_1'(x)$ และ $v = \int f_2(x)dx$

ข้อสังเกต

2.1 การเลือก u ควรเลือกเป็นฟังก์ชันที่ไม่ซับซ้อน และเมื่อดิฟเฟอเรนชิเอตแล้วจะได้พจน์ที่ดูง่ายขึ้น ซึ่งมักจะเลือก u เป็นฟังก์ชันประเภทฟังก์ชันโพลีโนเมียล ฟังก์ชันลอการิทึม หรือฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

2.2 การเลือก dv ต้องอย่าลืมว่า dx นั้นเป็นส่วนหนึ่งของ dv ดังนั้น dv จะต้องเป็นส่วนที่เราสามารถอินทิเกรตได้ ซึ่งมักจะเป็นฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลหรือฟังก์ชันตรีโกณ

3. นำ $u = f_1(x)$, du และ v ที่ได้แทนใน $\int udv = uv - \int vdu$

4. อินทิเกรตส่วนที่ยังค้างอยู่ต่อไปให้ถึงที่สุดก็จะได้คำตอบ

5. ถ้า $\int vdu$ ไม่สามารถอินทิเกรตด้วยวิธีธรรมดาหรือเทคนิคการอินทิเกรตแบบต่าง ๆ แล้วอาจต้องใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำอีกครั้งหรือหลาย ๆ ครั้ง จึงจะได้คำตอบ

6. ระหว่างการอินทิเกรตทีละส่วน ถ้ามีเทอม $\int udv$ เกิดขึ้นอีกให้นำมารวมกับ $\int udv$ ที่มีอยู่เดิมทุกครั้งไป

อธิบายตัวอย่าง 3.1

การให้ $dv = e^x dx$ แล้วได้ว่า $v = \int e^x dx = e^x$ นั้นที่จริงแล้วเราควรได้ $v = \int e^x dx = e^x + C_1$ ซึ่งทำต่อจะได้

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= x(e^x + C_1) + \int (e^x + C_1)dx \\ &= xe^x + C_1 x - \int e^x dx - \int C_1 dx \\ &= xe^x + C_1 x - e^x - C_1 x + C \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

ซึ่งก็จะได้ผลลัพธ์เช่นเดิม แต่วิธีเขียน $v = e^x + C_1$ ยุ่งยากกว่า ดังนั้นในขั้นนี้เราจะไม่ใส่ค่าคงตัวเพื่อความสะดวกและง่าย

อธิบายตัวอย่างที่ 3.6 ใน (2) จะสังเกตได้ว่า ส่วนของอินทิเกรตที่ยังค้างอยู่คือ $\int e^x \sin x\, dx$ ซึ่งเหมือนกับที่โจทย์กำหนดให้อินทิเกรต ดังนั้นเราจึงไม่ต้องนำส่วนที่ค้างมาอินทิเกรตต่อเมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงบวกค่าคงตัวของการอินทิเกรตคือ C_1 ลงไปด้วย

สำหรับโจทย์ในตัวอย่าง 3.6 นี้เราอาจเลือกให้ $u = \sin x$ และ $dv = e^x dx$ ก็ได้ผลลัพธ์เหมือนกัน ขอให้นิสิตได้ทดลองทำเป็นกิจกรรม

สำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน ปัญหาที่เราพบเสมอก็คือ จะกำหนดให้ u และ dv เป็นอะไร

สำหรับตัวอย่าง 3.2 และ 3.4 การเลือก u และ dv มีทางเลือกที่เหมาะสมเพียงทางเดียวเพราะว่า ฟังก์ชันตรีโกณผกผันและฟังก์ชันลอการิทึมนั้นเราไม่มีสูตรสำหรับอินทิเกรต จึงต้องเลือกส่วนนี้เป็น u และส่วนที่เหลือจะเป็น dv

สำหรับปัญหาที่เกิดขึ้นในโจทย์ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่า $\int x \sin 3x\, dx$ เราอาจพิจารณาได้ถึงสามแบบคือ

<u>แบบที่ 1</u> $\int x \sin 3x\, dx$

คือให้ $u = x$ และ $dv \sin 3x\, dx$

ซึ่งเราใช้ในวิธีทำของตัวอย่าง 3.3 และช่วยให้หาคำตอบได้

<u>แบบที่ 2</u> $\int x \sin 3x\, dx$

คือให้ $u = x \sin 3x \qquad dv = dx$

ดังนั้น $\int x \sin 3x\, dx = (x \sin 3x)x - \int x d(x \sin 3x)$

$$= x^2 \sin 3x - \int x(x \cos 3x + \sin 3x)dx$$

$$= x^2 \sin 3x - \int 3x^2 \cos 3x\, dx - \int x \sin 3x\, dx$$

ซึ่งได้ผลที่ยุ่งยากขึ้น (สังเกตได้ว่าส่วนการอินทิเกรตที่เหลือคือ $\int 3x^2 \cos 3x\, dx$ นั้นกำลัง x เพิ่มขึ้น)

<u>แบบที่ 3</u> $\int x \sin 3x\, dx$

คือให้ $u = \sin 3x$ และ $dv = x\, dx$

ถ้านิสิตลองทำแบบที่ 3 ก็จะพบว่าได้ผลลัพธ์ที่ยุ่งยากคล้าย ๆ กับแบบที่ 2

ปัญหาที่เกิดขึ้นก็เช่นเดียวกันกับโจทย์ตัวอย่าง 3.4 หรือ 3.5 ถ้านิสิตได้สังเกตตัวอย่างเหล่านี้จะเห็นว่า ฟังก์ชันที่เราอินทิเกรตนั้นอยู่ในลักษณะของผลคูณของสองฟังก์ชัน กล่าวคือ เป็นผลคูณของฟังก์ชันโพลีโนเมียลกับฟังก์ชันตรีโกณ และอีกตัวอย่างหนึ่งเป็นผลคูณของฟังก์ชันโพลีโนเมียลกับฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และส่วนที่เราเลือกเป็น u นั้นเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล เนื่องจากเมื่อเราหา du จะทำให้กำลังของ x ลดลง จึงทำให้เราหาคำตอบได้ สำหรับตัวอย่าง 3.6 คือ $\int e^x \sin x\, dx$ เป็นการอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

กับฟังก์ชันซายน์ ซึ่งทั้งคู่ต่างก็เป็นฟังก์ชันที่สามารถอินทิเกรตได้และเมื่อนำไปดิฟเฟอเรนชิเอต ก็กระทำได้ซ้ำ ๆ ไม่มีทางที่จะทำให้เหลือเพียง dx ได้ ดังนั้นจะเลือกส่วนใดเป็น u หรือส่วนใดเป็น dv ก็ย่อมกระทำได้ทั้งคู่และจะต้องใช้สูตรการอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำอีกครั้งหนึ่ง โดยการเลือก u กับ dv นั้นจะขึ้นอยู่กับการเลือกครั้งแรก มิฉะนั้นเราจะพบโจทย์ข้อเดิม กล่าวคือถ้าในครั้งแรกเลือก $u = e^x$ ในการกระทำครั้งที่สองก็ต้องเลือก $u = e^x$ เหมือนครั้งแรก

ตัวอย่างการพิจารณาต่อไปนี้จะช่วยให้นิสิตเข้าใจวิธีการใช้สูตรอินทิเกรตทีละส่วนได้ดีขึ้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าเราอาจใช้สูตรอินทิเกรตทีละส่วนกับ $\int \sec^3 x\, dx$ ได้ในรูปแบบใดบ้างแล้วจงนำแต่ละแบบไปดำเนินการอินทิเกรตต่อไปให้ถึงที่สุด (ถ้าทำได้)

<u>วิธีทำ</u> การพิจารณาเราเขียนโจทย์ที่กำหนดให้ในแบบต่อไปนี้

<u>แบบที่ 1</u> ให้ $u = \sec^3 x$ และ $dv = dx$

<u>แบบที่ 2</u> ให้ $u = \sec^2 x$ และ $dv = \sec x\, dx$

<u>แบบที่ 3</u> ให้ $u = \sec x$ และ $dv = \sec^2 x\, dx$

<u>สำหรับแบบที่ 1</u>

ให้ $u = \sec^3 x$ และ $dv = dx$

เราได้ $du = 3\sec^3 x \tan x\, dx$ และ $v = \int dx = x$

ดังนั้น $\int \sec^3 x\, dx = x \sec^3 x - \int x.3\sec^3 x \tan x\, dx$

จะเห็นว่าส่วนที่ยังค้างอยู่เป็นโจทย์ที่ยุ่งยากมากขึ้น (ควรพักไว้และทดลองทำในแบบอื่นดูก่อน)

<u>สำหรับแบบที่ 2</u>

ให้ $u = \sec^2 x$ และ $dv = \sec x dx$

จะได้ $du = 2\sec^2 x \tan x\, dx$

และ $v = \int \sec x\, dx$

$= \ln|\sec x + \tan x|$

ดังนั้น $\int \sec^3 x dx = \sec^2 x \ln|\sec x + \tan x|$

$- \int 2\sec^2 x \tan x \ln|\sec x + \tan x|\, dx$

สำหรับส่วนที่ยังค้างอยู่เป็นโจทย์ที่ยุ่งยากมากขึ้นกว่าเดิมเราจึงควรพักไว้เช่นกัน

สำหรับแบบที่ 3

ให้ $u = \sec x$ และ $dv = \sec^2 x\, dx$

จะได้ $du = \sec x \tan x\, dx$

และ และ $v = \int \sec^2 x\, dx$

$= \tan x$

ดังนั้น $\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx$

ส่วนที่ยังค้างอยู่มีพจน์ $\tan^2 x$ ซึ่งสามารถเขียนเป็น $(\sec^2 x - 1)$

ดังนั้นส่วนที่ค้างอยู่คือ

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

ซึ่งจะเห็นว่ามีพจน์ที่เป็น $\sec^3 x$ ซึ่งอาจนำไปรวมกับทางซ้ายมือได้ เราจึงสมควรอินทิเกรตส่วนที่ค้างอยู่ต่อไปจะได้

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

เพราะฉะนั้น $2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$

ดังนั้น $$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|] + C$$

(เมื่อ $C = \frac{C_1}{2}$)

การพิจารณาข้างบนนี้เป็นเพียงตัวอย่างการพิจารณาเลือก u และ dv ซึ่งชี้ให้เห็นแง่มุมต่าง ๆ ของการอินทิเกรตทีละส่วนเท่านั้น นิสิตไม่ต้องแสดงการพิจารณาในทำนองนี้ทุกครั้งไป

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 4

กรณี 1 การอินทิเกรต $\int \sin^n x\,dx$ หรือ $\int \cos^n x\,dx$

1.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก

นิสิตจะพบว่าไม่สามารถหาเอกลักษณ์ใดมาเปลี่ยน $\sin^n x$ หรือ $\cos^n x$ ให้กำลังลดลงได้ ดังนั้นเราจึงต้องแยก $\sin^n x$ หรือ $\cos^n x$ ให้อยู่ในรูปผลคูณของ $\sin^{n-1}x.\sin x$ หรือ $\cos^{n-1}x.\cos x$ ซึ่งจะเห็นว่า $\sin^{n-1} x$ หรือ $\cos^{n-1}x$ นั้นยกกำลังเป็นจำนวนคู่บวก ซึ่งสามารถเปลี่ยนฟังก์ชันต่อไปได้โดยอาศัยเอกลักษณ์ $\sin^2x + \cos^2x = 1$ แล้วแต่กรณี สำหรับ $\sin x$ หรือ $\cos x$ ที่เหลือเราก็อาศัยสูตร $\sin x\,dx = -d\cos x$ หรือ $\cos x\,dx = d\sin x$ นิสิตต้องสังเกตให้ดีว่าการเปลี่ยน $\sin^{n-1} x$ เป็น $\cos x$ นั้นคล้องจองกับ $-d\cos x$ และการเปลี่ยน $\cos^{n-1}x$ เป็น $\sin x$ นั้นคล้องจองกับ $d\sin x$ และในการหาค่าอินทิเกรตกรณีนี้ต้องใช้สูตร $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ เพื่อความเข้าใจขอให้นิสิตศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int \sin^5 x\,dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x\,dx &= \int \sin^4 x.\sin x\,dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2(-d\cos x) \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-d\cos x) \\
&= -\int 1\,d\cos x + 2\int \cos^2 x\,d\cos x - \int \cos^4 x\,d\cos x \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

หมายเหตุ 1. กรณี 1 ข้อ 1.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n < 3$ นั่นคือ $n = 1$ เราจะหาค่า $\int \sin x\,dx$ หรือ $\int \cos x\,dx$ ได้จากสูตร $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ หรือ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

2. จากการศึกษาตัวอย่าง 4.2 และตัวอย่างเพิ่มเติม นิสิตคงสังเกตพบแล้วว่าที่เราแยก $\sin^n x = \sin^{n-1}x.\sin x$ หรือ $\cos^n x = \cos^{n-1}x.\cos x$ ก็เพื่อเปลี่ยน $\sin x\,dx$ เป็น $(-d\cos x)$ หรือเปลี่ยน $\cos x\,dx$ เป็น $d\sin x$

กรณี 2 การอินทิเกรต $\int \tan^n x\,dx$ หรือ $\int \cot^n x\,dx$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n > 2$

ในกรณีนี้เราจะต้องแยกแฟคเตอร์ของ $\tan^n x$ เป็น $\tan^{n-2}x.\tan^2 x$ หรือ $\cot^n x$ เป็น $\cot^{n-2}x.\cot^2 x$ ที่แยกดังนี้ก็เพื่อเปลี่ยน $\tan^2 x$ เป็น $\sec^2 x - 1$ หรือเปลี่ยน $\cot^2 x$ เป็น $\operatorname{cosec}^2 x - 1$ เพราะเราต้องการ $\sec^2 x\,dx = d\tan x$ หรือ $\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -d\cot x$ เพื่อนำไปอินทิเกรตโดยใช้สูตร $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1$

หมายเหตุ 1. สำหรับกรณีนี้เราไม่จำเป็นที่จะแยกว่า n เป็นจำนวนคู่บวก หรือ n เป็นจำนวนคี่บวก เนื่องจากเราต้องการเพียงแยกแล้วให้มี $\tan^2 x$ หรือ $\cot^2 x$ อยู่ด้วยก็พอ เพราะจะเป็นหนทางนำไปสู่การเปลี่ยน $\sec^2 x\,dx$ เป็น $d\tan x$ หรือ $\operatorname{cosec}^2 x\,dx$ เป็น $(-d\cot x)$

2. ในกรณี 2 นี้ถ้า $n = 1$ จะหาค่า $\int \tan x\,dx$ หรือ $\int \cot x\,dx$ ได้จากสูตร

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec| + C \quad \text{หรือ} \quad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

กรณี 3 การอินทิเกรต $\int \sec^n x\,dx$ หรือ $\int \operatorname{cosec}^n x\,dx$

3.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ $n \geq 4$

สำหรับกรณีนี้ก็คล้ายกับกรณีที่ 2 คือแยก $\sec^n x$ เป็น $\sec^{n-2}x\,\sec^2 x$ หรือแยก $\operatorname{cosec}^n x$ เป็น $\operatorname{cosec}^{n-2}x.\operatorname{cosec}^2 x$ ดังนั้น $\sec^{n-2}x$ หรือ $\operatorname{cosec}^{n-2}x$ จะยกกำลังเป็นจำนวนคู่บวกซึ่งเราสามารถเปลี่ยนเป็น $1 + \tan^2 x$ หรือ $1 + \cot^2 x$ สำหรับ $\operatorname{cosec}^2 x$ หรือ $\sec^2 x$ ที่เหลือเราก็นำมาเปลี่ยนจาก $\sec^2 x\,dx$ เป็น $d\tan x$

หรือ $\text{cosec}^2 x$ เป็น $(-d \cot x)$

นิสิตจะสังเกตเห็นว่า (1) เราเปลี่ยน $\sec^n x = \sec^{n-2}\sec^2 x$ และเปลี่ยน $\sec^{n-2} x$ อยู่ในรูป $1 + \tan^2 x$ และเปลี่ยน $\sec^2 x\, dx = d \tan x$ ก็เพื่อจะอินทิเกรตฟังก์ชัน $\tan x$ โดยใช้สูตร $\int u^n du$ นั่นเอง หรือ (2) เราเปลี่ยน $\text{cosec}^n x = \text{cosec}^{n-2} x.\text{cosec}^2 x$ เปลี่ยน $\text{cosec}^{n-2} x$ ให้อยู่ในรูป $1 + \cot^2 x$ และเปลี่ยน $\text{cosec}^2 x\, dx = (-d \cot x)$ ก็เพื่อที่จะอินทิเกรตฟังก์ชัน $\cot x$ โดยใช้สูตร $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

<u>หมายเหตุ</u> 1. กรณี 3 ข้อ 3.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ $n < 4$ นั่นคือ $n = 2$ เราจะหาค่า $\int \sec^2 x\, dx$ หรือ $\int \text{cosec}^2 x\, dx$ ได้จากสูตร

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ หรือ $\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

2. กรณี 3 ข้อ 3.2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ $n < 3$ นั่นคือ $n = 1$ เราจะหาค่า $\int \sec x\, dx$ หรือ $\int \text{cosec}\, x\, dx$ ได้จากสูตร

$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ หรือ $\int \text{cosec}\, x\, dx = \ln|\text{cosec}\, x - \cot x| + C$

<u>กรณี 4</u> การอินทิเกรต $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

4.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $m \neq 0$

<u>ขั้นตอนในการอินทิเกรตมีดังนี้</u>

1. เราจะแยกแฟคเตอร์ $\sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^{n-1} x.\cos x$

2. จะเห็นว่า $n - 1$ เป็นจำนวนคู่บวก ดังนั้นเราเปลี่ยน $\cos^{n-1} x$ ให้อยู่ในรูป $1 - \sin^2 x$

3. เปลี่ยน $\cos x\, dx = d \sin x$

4. เมื่อเราทำตามขั้น 1 ถึงขั้น 3 จะเห็นว่าเราอินทิเกรตฟังก์ชัน $\sin x$ นั่นเอง เราจึงอินทิเกรตโดยใช้สูตร $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq 0$ ขั้นตอนในการอินทิเกรตคล้ายกับที่กล่าวมาแล้ว แต่เราจะเปลี่ยนเป็นอินทิเกรตฟังก์ชัน $\cos x$ นั่นคือเราแยกแฟคเตอร์ $\sin^m x \cos^n x = \sin^{m-1} x \cos^n x.\sin x$ แล้วเปลี่ยน $\sin^{m-1} x$ ให้อยู่ในรูป $1 - \cos^2 x$ และเปลี่ยน $\sin x\, dx = (-d \cos x)$

ขอให้นิสิตได้ศึกษาจากตัวอย่าง 4.7 และ 4.8 ให้ถ่องแท้

4.2 เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคู่บวกทั้งคู่

ในกรณีนี้นิสิตควรเปลี่ยน $\sin^m x \cos^n x$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันคือเป็นฟังก์ชัน sin x หรือ cos x ก็ได้แล้วแต่กรณี โดยใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ หรือ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ หรือ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

<u>คำอธิบาย</u> 4.9

บรรทัดที่ 1 เราเปลี่ยนเป็นฟังก์ชัน cos x โดยอาศัยเอกลักษณ์ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ และ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

บรรทัดที่ 5 จะมีเทอมอินทิเกรต 2 เทอม คือ $\int \sin^2 2x\, dx$ และ $\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$ ซึ่งจะแยกกันอินทิเกรตแล้วแต่รูปแบบ

สำหรับ $\int \sin^2 2x\, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx$

$$= \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{1}{2} \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + C_1$$

และ $\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 2x\, d \sin 2x$ (เพราะว่า $\cos 2x = d \sin 2x$)

$= \frac{1}{6} \sin^3 2x + C_2$ (โดยใช้สูตร $\int \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$)

ดังนั้น $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{8}[\frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + C_1 + \frac{1}{6} \sin^3 2x + C_2]$

$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C$ เมื่อ $C = \frac{C_1}{8} + \frac{C_2}{8}$

<u>ข้อสังเกต</u> จะพบว่าเราใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ หรือ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ก็เพื่อจะลดกำลังของฟังก์ชันที่จะอินทิเกรต ซึ่งนิสิตสังเกตได้จากตัวอย่าง 4.9 และ 4.10

<u>กรณี 5</u> การอินทิเกรต $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

5.1 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $m \neq 0$

ขั้นตอนในการอินทิเกรตมีดังนี้

1. เราแยกแฟคเตอร์ $\tan^m x \sec^n x = \tan^m x \sec^{n-2} x . \sec^2 x$

2. จะเห็นว่า $n - 2$ เป็นจำนวนคู่บวก ดังนั้นเปลี่ยน $\sec^{n-2} x$ ให้อยู่ในรูป $1 + \tan^2 x$

3. เปลี่ยน $\sec^2 x \, dx = d \tan x$

4. จากขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 เมื่อเปลี่ยนแล้วจะเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชัน $\tan x$ นั่นเอง

5.2 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq 0$

ขั้นตอนในการอินทิเกรตมีดังนี้

1. เราแยกแฟคเตอร์ $\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x . \sec x \tan x$

2. จะเห็นว่า $m - 1$ เป็นจำนวนคู่บวก เราจึงเปลี่ยน $\tan^{m-1} x$ ให้อยู่ในรูป $\sec^2 x - 1$

3. เปลี่ยน $\sec x \tan x \, dx = d \sec x$

4. จากขั้นตอน 1 ถึง 3 เมื่อปลี่ยนแล้วจะเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชัน $\sec x$ นั่นเอง

หมายเหตุ ในการหาค่า $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ m เป็นจำนวนคู่บวกเราจะอาศัยเอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ และการอินทิเกรตในกรณี 3 ข้อ 3.2 ช่วย

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx$

วิธีทำ
$$\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x \, dx$$
$$= \int (\sec^5 x - \sec^3 x) dx$$
$$= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \quad \text{———— (1)}$$

พิจารณาเทอม $\int \sec^5 x \, dx$ เราจะหาค่าโดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sec^3 x$ และ $dv = \sec^2 x\,dx$

$du = 3\sec^2 x.\sec x.\tan x\,dx$ และ $v = \int \sec^2 x\,dx = \tan x$

$= 3\sec^3 x \tan x\,dx$

ดังนั้น $\int \sec^5 x\,dx = \sec^3 x \tan x - \int \tan x.(3\sec^3 x \tan x\,dx)$

$= \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx$ ——— (2)

พิจารณาเทอม $\int \sec^3 x\,dx$ เราจะหาค่าโดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \sec x$ และ $dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x \tan x\,dx$ และ $v = \int \sec^2 x\,dx = \tan x$

ดังนั้น $\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x\,dx$

$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_2$ ——— (3)

นำ (2) และ (3) แทนใน (1)

จะได้ $\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx = (\sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx) - (\frac{1}{2}\sec x + \tan x)$

$+ \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_2)$

$4\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx = \sec^3 x \tan x - \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$

$- C_2$

$\int \tan^2 x \sec^3 x\,dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{8}\sec \tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x|$

$+ C$

<u>กรณี 6</u> การอินทิเกรต $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$

ในกรณีนี้ขั้นตอนการอินทิเกรตเหมือนกับกรณีที่ 5 แต่เราจะอาศัยเอกลักษณ์

$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ และสูตร $\operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -d \operatorname{cosec} x$

<u>หมายเหตุ</u> ในการหาค่า $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก และ m เป็นจำนวนคู่บวกเราจะอาศัยเอกลักษณ์ $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ และการอินทิเกรตในกรณี 3 ข้อ 3.2 ช่วย

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงหาค่า $\int \cot^2 x \operatorname{cosec} x \, dx$

<u>วิธีทำ</u>
$$\int \cot^2 x \operatorname{cosec} x \, dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\operatorname{cosec} x \, dx$$
$$= \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx - \int \operatorname{cosec} x \, dx \quad \text{——— (1)}$$

พิจารณาเทอม $\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx$ เราจะหาค่าโดยใช้สูตรสำหรับการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \operatorname{cosec} x$ และ $dv = \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$du = -\operatorname{cosec} x$ และ $v = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x$

ดังนั้น
$$\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{cosec} x \cot x - \int (-\cot x)(-\operatorname{cosec} x \cot x)dx$$
$$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec} x \cot^2 x \, dx$$
$$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$$
$$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx + \int \operatorname{cosec} x \, dx$$
$$2\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = -\operatorname{cosec} x \cot x + \int \operatorname{cosec} x \, dx$$
$$\int \operatorname{cosec}^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x \, dx \quad \text{——— (2)}$$

นำ (2) ไปแทนใน (1)
$$\int \cot^2 x \operatorname{cosec} x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x \, dx - \int \operatorname{cosec} x dx$$
$$= -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x - \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x \, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \cot x - \frac{1}{2} \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

<u>ข้อสังเกต</u> ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณที่ยกกำลังเราจะสังเกตได้ว่า

1. เมื่อโจทย์อยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน เราจะพยายามเปลี่ยนให้เป็นฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น
2. เนื่องมาจากข้อ 1 เมื่อฟังก์ชันใดยกกำลังคี่บวกมักจะเปลี่ยนให้เป็นกำลังคู่บวกเสมอ
3. สูตรที่ใช้อินทิเกรตมากที่สุดคือ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$

แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ชุดที่ 1

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนข้อสอบนี้

และส่งข้อสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 7 คะแนน)

---

1. จงแสดงว่า $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

   จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

3. $\int \frac{1}{2x+1}\, dx$

4. $\int x^2 \sin x\, dx$

5. $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ชุดที่ 2

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนข้อสอบนี้

และส่งข้อสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 7 คะแนน)

---

1. จงแสดงว่า $F(x) = x\sqrt{x+2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$

   จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

2. $\int x\, e^{x^2}\, dx$

3. $\int \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}\, dx$

4. $\int (\ln x)^2 dx$

5. $\int \cot^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ชุดที่ 3

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนข้อสอบนี้

และส่งข้อสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 7 คะแนน)

---

1. จงแสดงว่า $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

2. $\int x^2(5x^3 + 9)^4 dx$

3. $\int (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})\, dx$

4. $\int e^x \cos x\, dx$

5. $\int \sin^5 x\, dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 1 ชุดที่ 4

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนข้อสอบนี้

และส่งข้อสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 7 คะแนน)

---

1. จงแสดงว่า $F(x) = x^3 + 2x^2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + 4x$

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

2. $\int \sqrt{1 + \tan x}\, \sec^2 x\, dx$

3. $\int x\, e^{-x^2} dx$

4. $\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

5. $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx$

เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

หน่วยที่ 2

เรื่องที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$ $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$

6 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย (Integration of Rational Functions by Partial Fractions)

เรื่องที่ 5 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$ $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$ $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$ นั้นอาจกระทำได้โดยใช้สูตรการอินทิเกรตที่มีอยู่ แต่บางครั้งการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ดังกล่าวก็ไม่สามารถกระทำโดยการใช้สูตรได้ ซึ่งจะแยกเขียนเป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

(1) การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$ $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$ โดยการใช้สูตร แบ่งเป็นกรณีต่าง ๆ ดังนี้

<u>กรณี 1.1</u> การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$

จะใช้สูตร 1) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C \quad ; a > 0$

2) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad ; a > 0$

3) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C \quad ; a > 0$

<u>ตัวอย่าง 5.1</u> จงหาค่า $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

<u>วิธีทำ</u> $\int \frac{dx}{4 - x^2} = \int \frac{dx}{2^2 - x^2}$

จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$ ซึ่งในที่นี้ $a = 2$, $u = x$

ฉะนั้นจะอินทิเกรตโดยใช้สูตร (1)

ดังนั้น $\int \frac{dx}{4 - x^2} = \frac{1}{2.(2)} \ln \left|\frac{2 + x}{2 - x}\right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left|\frac{2 + x}{2 - x}\right| + C$

ตัวอย่าง 5.2 จงหาค่า $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x+1)^2}}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - (x+1)^2}}$

$= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{3^2 - (x+1)^2}}$

จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2 - u^2}$ ซึ่งในที่นี้ $a = 3, u = x + 1$

ฉะนั้นจะอินทิเกรตโดยใช้สูตร (2)

ดังนั้น $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{3^2 - (x+1)^2}}$

$= \arcsin \frac{x+1}{3} + C$

กรณี 1.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 + u^2$ หรือ $\sqrt{a^2 + u^2}$

จะใช้สูตร 4) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad ; a > 0$

5) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C \quad ; a > 0$

6) $\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C \quad ; a > 0$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาค่า $\int \sqrt{2 + x^2}\, dx$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2 + u^2}$ ซึ่งในที่นี้ $a = \sqrt{2}, u = x$

ฉะนั้นจะอินทิเกรตโดยใช้สูตร (6)

ดังนั้น $\int \sqrt{2 + x^2}\, dx = \int \sqrt{(\sqrt{2})^2 + x^2}\, dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2 + x^2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \ln\left|x + \sqrt{(\sqrt{2})^2 + x^2}\right| + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2 + x^2} + \ln\left|x + \sqrt{2 + x^2}\right| + C$$

กรณี 1.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

จะใช้สูตร 7) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C \quad ; \quad a > 0$

8) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C \quad ; \quad a > 0$

9) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad ; \quad a > 0$

10) $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C \quad ; a > 0$

ตัวอย่าง 5.4 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}}$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{u^2 - a^2}$ ซึ่งในที่นี้ $u = x$, $a = 5$ ฉะนั้นจะอินทิเกรตโดยใช้สูตร (9)

ดังนั้น $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5^2}}$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{arc\,sec}\left|\frac{x}{5}\right| + C$$

---

(2) การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$ โดยใช้วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ ซึ่งจำแนกออกเป็นกรณีต่าง ๆ ดังนี้

กรณี 2.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$

โดยการแทนค่า $u = a \sin\theta$ หรือ $u = a \cos\theta$ โดยที่ $a > 0$

ตัวอย่าง 5.5 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\, dx$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2 - u^2}$ ในที่นี้ $a = 4, u = x$

ให้ $x = 4\sin\theta$

จะได้ $dx = 4\cos\theta\, d\theta$

และ $16 - x^2 = 16 - 16\sin^2\theta = 16(1 - \sin^2\theta) = 16\cos^2\theta$

ฉะนั้น $\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16\cos^2\theta} = 4\cos\theta$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\, dx = \int \frac{4\cos\theta}{4\sin\theta} \cdot (4\cos\theta\, d\theta)$

$= 4\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta$

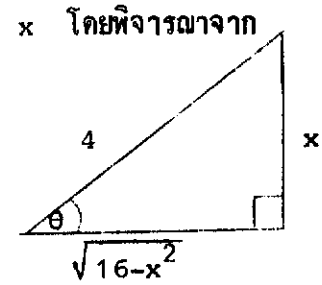
$= 4\int \frac{(1 - \sin^2\theta)}{\sin\theta}\, d\theta$

$= 4\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta - 4\int \sin\theta\, d\theta$

$= 4\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta - 4\int \sin\theta\, d\theta$

$= 4\ln|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + 4\cos\theta + C$

เราหาค่าของ $\cos\theta$, $\cot\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจากเราให้ $x = 4\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{x}{4}$

จากรูป $\cos\theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$ และ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{x}$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx = 4\ln\left|\frac{4}{x} - \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\right| + 4\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C$

$= 4\ln\left|\frac{4 - \sqrt{16 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{16 - x^2} + C$

กรณี 2.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ a^2+u^2 หรือ $\sqrt{a^2+u^2}$

โดยการแทนค่า $u = a\tan\theta$ หรือ $u = a\cot\theta$ โดยที่ $a>0$

ตัวอย่าง 5.6 จงหาค่า $\int \frac{dx}{5+x^2}$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ a^2+u^2 ในที่นี้ $a=\sqrt{5}$, $u=x$

ให้ $x = \sqrt{5}\tan\theta$

จะได้ $dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta$

และ $5+x^2 = 5+(\sqrt{5}\tan\theta)^2 = 5+5\tan^2\theta = 5\sec^2\theta$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{5+x^2} = \int \frac{\sqrt{5}\sec^2\theta}{5\sec^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int d\theta$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\theta + C$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (เพราะว่า $x=\sqrt{5}\tan\theta$ ดังนั้น $\theta = \arctan\frac{x}{\sqrt{5}}$)

ตัวอย่าง 5.7 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2+u^2}$ ในที่นี้ $a=\sqrt{3}$, $u=x$

ให้ $x = \sqrt{3}\tan\theta$

จะได้ $dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta$

และ $3+x^2 = 3+(\sqrt{3}\tan\theta)^2 = 3(1+\tan^2\theta) = 3\sec^2\theta$

ฉะนั้น $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3\sec^2\theta} = \sqrt{3}\sec\theta$

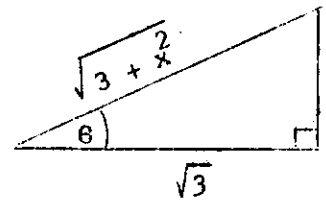
ดังนั้น $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}} = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{3}\tan\theta\sqrt{3}\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta \right| + C$$

เราหาค่าของ $\cot\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $x = \sqrt{3}\tan\theta$



จะได้ $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}$

จากรูป $\cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{x}$ และ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x} - \frac{\sqrt{3}}{x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{3}}{x} \right| + C$$

กรณี 2.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

โดยการแทนค่า $u = a\sec\theta$ หรือ $u = a\operatorname{cosec}\theta$ โดยที่ $a > 0$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาค่า $\int \frac{dx}{(x - 1)^2 - 9}$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $u^2 - a^2$ ในที่นี้ $u = (x-1)$, $a = 3$

ให้ $x - 1 = 3\sec\theta$

จะได้ $dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

และ $(x - 1)^2 - 9 = (3\sec\theta)^2 - 9 = 9(\sec^2\theta - 1) = 9\tan^2\theta$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{(x-1)^2-9} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{9\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\,d\theta$$

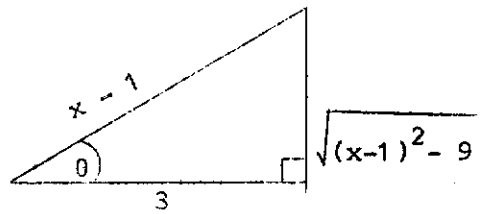
$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right| + C$$

เราหาค่าของ $\operatorname{cosec}\theta$, $\cot\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจากเราให้ $x - 1 = 3\sec\theta$

จะได้ $\sec\theta = \frac{x-1}{3}$

จากรูป $\operatorname{cosec}\theta = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$ และ $\cot\theta = \frac{3}{\sqrt{(x-1)^2-9}}$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{(x-1)^2-9} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2-9}} - \frac{3}{\sqrt{(x-1)^2-9}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{\sqrt{(x-1)^2-9}}\right| + C$$

ตัวอย่าง 5.9 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{u^2-a^2}$ ในที่นี้ $u = x$, $a = 2$

ให้ $x = 2\sec\theta$

$$dx = 2\sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

และ $$x^2 - 4 = 4\sec^2\theta - 4 = 4(\sec^2\theta - 1) = 4\tan^2\theta$$

ฉะนั้น $$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

ดังนั้น
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx = \int \frac{2\tan\theta}{4\sec^2\theta} (2\sec\theta \tan\theta \, d\theta)$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta$$

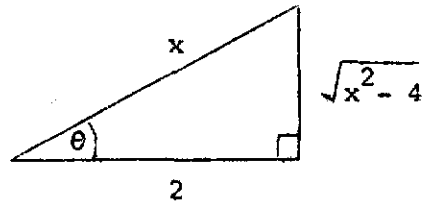
$$= \int \frac{(\sec^2\theta - 1)}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta - \int \frac{1}{\sec\theta} d\theta$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta - \int \cos\theta \, d\theta$$

$$= \ln \left| \sec\theta + \tan\theta \right| - \sin\theta + C$$

เราจะหาค่า $\sin\theta$ และ $\tan\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจากเราให้ $x = 2\sec\theta$

จะได้ $\sec\theta = \frac{x}{2}$

จากรูป $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$

ดังนั้น
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx = \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + C$$

นอกจากนี้ในกรณีที่เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $Ax^2 + Bx + C$ หรือ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ โดยทั่วไปแล้วเราอาจจัด $Ax^2 + Bx + C$ หรือ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ให้อยู่ในรูปใดรูปหนึ่ง

ต่อไปนี้คือ $a^2 - u^2$ หรือ $a^2 + u^2$ หรือ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$ หรือ $\sqrt{a^2 + u^2}$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$ โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์

เช่น $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 3^2$

$\sqrt{x^2 - 6x - 7} = \sqrt{(x - 3)^2 - 4^2}$

$24 + 2x - x^2 = 5^2 - (x - 1)^2$

ดังนั้นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $Ax^2 + Bx + C$ หรือ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ จะกระทำโดยการใช้สูตรตามที่กล่าวไว้แล้วในข้อ (1) หรือโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณในข้อ (2)

<u>ตัวอย่าง 5.10</u> จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $Ax^2 + Bx + C$ ซึ่งต้องจัดให้อยู่ในรูป $a^2 - u^2$ หรือ $a^2 + u^2$ หรือ $u^2 - a^2$

จะพบว่า $x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 4x + 4) + 9$

$= (x+2)^2 + 3^2$ ซึ่งอยู่ในรูป $u^2 + a^2$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2}$

เราสามารถหาค่า $\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2}$ ได้สองวิธีต่อไปนี้

<u>วิธีที่ 1</u> โดยการใช้สูตร (4)

ดังนั้น $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2}$

$= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 3^2}$

$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x + 2}{3} + C$

วิธีที่ 2 โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จาก $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3^2}$ ซึ่งในที่นี้ $u = (x+2)$, $a = 3$

ให้ $x + 2 = 3\tan\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

และ $(x+2)^2 + 3^2 = 9\tan^2\theta + 9 = 9(\tan^2\theta + 1) = 9\sec^2\theta$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}\, d\theta$

$= \frac{1}{3}\int d\theta$

$= \frac{1}{3}\theta + C$

$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C$ (เพราะว่า $x+2 = 3\tan\theta$ ดังนั้น $\arctan\frac{x+2}{3} = \theta$)

ตัวอย่าง 5.11 จงหาค่า $\int \sqrt{(3 + 2x - x^2)^3}\, dx$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$

ซึ่งต้องจัดให้อยู่ในรูป $\sqrt{a^2 - u^2}$ หรือ $\sqrt{a^2 + u^2}$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

จะพบว่า $\sqrt{(3 + 2x - x^2)^3} = \sqrt{[4 - (x-1)^2]^3}$

ดังนั้น $\int \sqrt{(3 + 2x - x^2)^3}\, dx = \int \sqrt{[4 - (x-1)^2]^3}\, dx$

การหาค่า $\int \sqrt{(3+2x-x^2)^3}dx$ ไม่สามารถกระทำได้โดยการใช้สูตร (1)-(10)

จึงใช้วิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $x - 1 = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

เพราะว่า $4 - (x-1)^2 = 4 - 4\sin^2\theta = 4(1 - \sin^2\theta) = 4\cos^2\theta$

ฉะนั้น $\sqrt{[4-(x-1)^2]^3} = \sqrt{(4\cos^2\theta)^3} = 8\cos^3\theta$

ดังนั้น $\int \sqrt{(3+2x-x^2)^3}\,dx = \int \sqrt{[4-(x-1)^2]^3}\,dx$

$= \int 8\cos^3\theta(2\cos\theta\,d\theta)$

$= 16\int \cos^4\theta\,d\theta$

$= 16\int \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)^2 d\theta$

$= \frac{16}{4}\int (\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1)d\theta$

$= 4\int \cos^2 2\theta\,d\theta + 8\int \cos 2\theta\,d\theta + 4\int d\theta$

$= 4\int \frac{(\cos 4\theta+1)}{2}\,d\theta + 8\int \frac{1}{2}\cos 2\theta\,d2\theta + 4\int d\theta$

$= 2\int \cos 4\theta\,d\theta + 2\int d\theta + 4\int \cos 2\theta d2\theta + 4\int d\theta$

$= 2\int \frac{1}{4}\cos 4\theta d4\theta + 2\int d\theta + 4\int \cos 2\theta d2\theta + 4\int d\theta$

$= \frac{1}{2}\sin 4\theta + 2\theta + 4\sin 2\theta + 4\theta + C$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\theta\cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 6\theta + C$

$= 2\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) + 4\sin 2\theta + 6\theta + C$

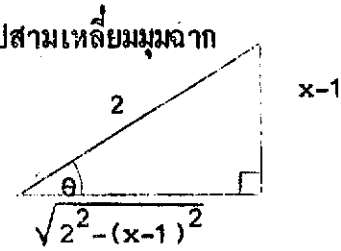
$= 4\sin\theta\cos^3\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 8\sin\theta\cos\theta + 6\theta + C$

$= 4\sin\theta\cos^3\theta + 6\sin\theta\cos\theta + 6\theta + C$

เราหาค่าของ $\cos\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $x - 1 = 2\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{x-1}{2}$



จากรูป $\cos\theta = \frac{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}{2}$

ดังนั้น $\int \sqrt{(3+2x-x^2)^3}dx = 4(\frac{x-1}{2})(\frac{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}{2})^3 + 6(\frac{x-1}{2})(\frac{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}{2})$

$+ 6 \arcsin(\frac{x-1}{2}) + C$

$= (x-1)(\frac{\sqrt{(3+2x-x^2)^3}}{4}) + \frac{3}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}$

$+ 6 \arcsin(\frac{x-1}{2}) + C$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}}$ $\arcsin\frac{x+2}{2} + C$

2. $\int \frac{dx}{9+x^2}$ $\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

3. $\int \frac{dx}{25-16x^2}$ $\frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4x}{5-4x}\right| + C$

4. $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$ $\frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{(x+5)\sqrt{5}}{5} + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$ $\arcsin\frac{x+6}{8} + C$

6. $\int \frac{x^2+3}{x^4}dx$ $-\frac{1}{15}\frac{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}{x^5} + C$

7. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + C$

8. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\qquad \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{x} + C$

9. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16+x^2}}$ $\qquad \frac{1}{256}\left[-\frac{1}{3}\frac{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + \frac{(16+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right] + C$

10. $\int \frac{dx}{(4+x^2)}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ $\qquad -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$

12. $\int \sqrt{4-9x^2}\,dx$ $\qquad \frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-9x^2} + C$

13 $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ $\qquad 32\arcsin\frac{x}{4} - 4x(16-x^2)^{\frac{3}{2}} + 2x(16-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$ $\qquad \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$

17. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$ $\qquad \sqrt{x^2-9} - 3\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + C$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$ $\qquad \frac{1}{6}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} - 3\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right) + C$

19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$ $\qquad \frac{1}{54}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{3} + 3\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right) + C$

20. $\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad -\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{4x^2-9}} + C$

21. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$ $\qquad \sqrt{x^2+2x+5} - \ln\left|\sqrt{x^2+2x+5} + x+1\right| + C$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x-x^2}}$ $\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-4)}{\sqrt{4x-x^2}} + C$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}\,dx$ $\qquad \frac{1}{4}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{2\sqrt{x^2+2x+3}}{(x+1)^2}\right] + C$

24. $\int x^2\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$ $\qquad \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{3}(1-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$+ \frac{1}{2}(x+1)(1-2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(1-2x-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

25. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\qquad \ln\left|1+x+\sqrt{x^2+2x+2}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right)$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\right) + \frac{1}{x+1} + C$$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{t^2}{\sqrt{4 - t^2}} dt$ $\quad 2 \arcsin \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2} + C$

2. $\int \frac{u^2}{(9 - u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ $\quad \frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} - \arcsin \frac{u}{3} + C$

3. $\int x^3\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\quad -(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{(2a^2 + 3x^2)}{15} + C$

4. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{5 - y^2}}$ $\quad -\frac{\sqrt{5 - y^2}}{5y} + C$

5. $\int \frac{\sqrt{16 - \theta^2}}{\theta^2} d\theta$ $\quad -\frac{\sqrt{16 - \theta^2}}{\theta} - \arcsin \frac{\theta}{4} + C$

6. $\int \frac{dx}{(16 + x^2)^2}$ $\quad \frac{1}{128} \cdot \arctan \frac{x}{4} + \frac{x}{32(16 + x^2)} + C$

7. $\int \frac{dz}{(5 - z^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \frac{z}{5\sqrt{5 - z^2}} + C$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{4x^2 + 9 - 3}{2x} \right| + C$

9. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C$

10. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 8)^{\frac{3}{2}}} dx$ $\quad \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 8} + x}{\sqrt{8}} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} + C$

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$ $\quad \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 5} - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{5}} \right| + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ $\quad -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}$ $\quad \frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + C$

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}}\,dx$ $\quad \frac{x}{2}\sqrt{x^2-6} + 3.\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-6}}{\sqrt{6}}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$ $\quad \frac{1}{54}.\text{arc sec}\,\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$

16. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+3}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arc tan}\,[\sqrt{2}\,(x+1)] + C$

17. $\int \sqrt{3+2x+x^2}\,dx$ $\quad \frac{(x+1)}{2}.\sqrt{(x+1)^2+2}$

$+ \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}}{\sqrt{2}}\right| + C$

เรื่องที่ 6 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

(Integration of Rational Functions by Partial Fractions)

ฟังก์ชันตรรกยะ คือ ฟังก์ชันซึ่งเขียนอยู่ในรูปของผลหารของฟังก์ชันโพลิโนเมียล นั่นคือ P เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ถ้า $P(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$ โดยที่ Q_1 และ Q_2 เป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล เช่น $P_1(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 4}$

$$P_2(x) = \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$P_3(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$P_4(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}$$

สังเกตได้ว่าสำหรับ P_1 และ P_2 นั้น กำลังสูงสุดของ x ในเศษน้อยกว่ากำลังสูงสุดของ x ในส่วน เราอาจเขียน $P_1(x)$ และ $P_2(x)$ ได้เป็นดังนี้

$$P_1(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 2}$$

$$P_2(x) = \frac{2x + 10}{(x^2 + 1)} + \frac{-x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

เราเรียกพจน์ต่าง ๆ ทางขวามือของข้างบนนี้ว่าเศษส่วนย่อย นั่นคือ $P_1(x)$ และ $P_2(x)$ สามารถเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ สำหรับ $P_3(x)$ นั้นกำลังสูงสุดของ x ในเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของ x ในส่วน สำหรับ $P_4(x)$ นั้นกำลังสูงสุดของ x ในเศษมากกว่ากำลังสูงสุดของ x ในส่วน ดังก่อนที่จะเขียน $P_3(x)$ และ $P_4(x)$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย ต้องใช้วิธีการหารก่อนเพื่อให้กำลังสูงสุดของ x ในเศษน้อยกว่ากำลังสูงสุดของ x ในส่วน

เราได้ $P_3(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

$P_4(x) = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$

สังเกตได้ว่า เศษที่เหลือหลังจากการหารก็เป็นฟังก์ชันตรรกยะซึ่งกำลังสูงสุดของ x ในเศษจะน้อยกว่ากำลังสูงสุดของ x ในส่วน เราจึงนำส่วนที่เหลือนี้มาทำเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย จะได้

$$P_4(x) = x^2 - 6 + \frac{\frac{29}{4}}{x+2} + \frac{\frac{-17}{4}}{x-2}$$

ในเรื่องนี้เราต้องหาค่า $\int \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}dx$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อทำฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยแล้ว เราจะสามารถอินทิเกรตได้ง่ายขึ้น

<u>หลักการทั่ว ๆ ไปในการเขียน $P(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย</u>

(1) ถ้ากำลังสูงสุดของ x ใน $Q_1(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับกำลังสูงสุดของ x ใน $Q_2(x)$ ต้องนำ $Q_2(x)$ ไปหาร $Q_1(x)$ ก่อน แล้วนำเศษที่เหลือมาทำเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย

เช่น $P(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

(2) ถ้า $Q_2(x)$ แยกแฟคเตอร์ได้ก็ต้องแยกแฟคเตอร์ก่อนจนแยกต่อไปไม่ได้อีกแล้ว

เช่น $$\frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x^4-1)^2} = \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x^2-1)^2(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2}{(x-1)^4(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

(3) ค่าคงตัวของเศษส่วนย่อยหาได้โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์หรือโดยกำหนดค่า x ที่เหมาะสม

หลักเกณฑ์ในการเขียน $P(x) = \dfrac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$ **เป็นเศษส่วนย่อยแบ่งได้เป็น 4 แบบดังนี้**

แบบที่ 1 ถ้า $Q_2(x)$ มีแฟคเตอร์อยู่ในรูป $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\ldots(a_nx+b_n)$

โดยที่ $\dfrac{b_1}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{a_2} \neq \dfrac{b_3}{a_3} \neq \ldots \neq \dfrac{b_n}{a_n}$ และ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \neq 0$

เราเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \equiv \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)} + \frac{A_3}{(a_3x+b_3)} + \ldots + \frac{A_n}{(a_nx+b_n)}$$

โดยที่ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ เป็นค่าคงตัว

เช่น $P(x) = \dfrac{x+1}{x(2x+5)(x-3)}$ เราเขียนได้เป็น

$$\frac{x+1}{x(2x+5)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x+5} + \frac{A_3}{x-3}$$

ข้อสังเกต 1) จำนวนเศษส่วนย่อยที่สมมุติขึ้นต้องเท่ากับจำนวนวงเล็บของ $(ax+b)$

2) ใช้เครื่องหมาย " $\equiv$ " เพื่อหมายความว่าเราจะต้องเลือกค่า $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ให้ทั้งสองข้างเท่ากันทุกค่า x

แบบที่ 2 ถ้า $Q_2(x)$ มีแฟคเตอร์อยู่ในรูป $(ax+b)^n$ เราเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \equiv \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

โดยที่ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ เป็นค่าคงตัว

เช่น $P(x) = \dfrac{2x}{(2x+1)^3}$ เราเขียนได้เป็น

$$\frac{2x}{(2x+1)^3} \equiv \frac{A_1}{(2x+1)} + \frac{A_2}{(2x+1)^2} + \frac{A_3}{(2x+1)^3}$$

ข้อสังเกต จำนวนเศษส่วนย่อยที่สมมุติขึ้นต้องเท่ากับค่าตัวเลขยกกำลังของแฟคเตอร์ของ $Q_2(x)$

แบบที่ 3 ถ้า $Q_2(x)$ มีแฟคเตอร์อยู่ในรูป ax^2+bx+c โดยที่ $a \neq 0$ และ ax^2+bx+c แยกแฟคเตอร์ไม่ได้ เราเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \equiv \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$ โดยที่ A, B เป็นค่าคงตัว

เช่น $P(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+1}$ เราเขียนได้เป็น

$$\frac{x-1}{x^2+3x+1} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+3x+1}$$

แบบที่ 4 ถ้าส่วนมีแฟคเตอร์อยู่ในรูป $(ax^2+bx+c)^n$ เราเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \equiv \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

โดยที่ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ และ $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ เป็นค่าคงตัว

เช่น $P(x) = \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^3}$ เราเขียนได้เป็น

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^3} \equiv \frac{A_1x+B_1}{(x^2+1)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

ข้อสังเกต จำนวนเศษส่วนย่อยที่สมมุติขึ้นต้องเท่ากับค่าตัวเลขชี้กำลังของแฟคเตอร์ของส่วน

ตัวอย่าง 6.1 จงแยก $\frac{x+5}{(2x-1)(x+3)}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

วิธีทำ เราเขียนฟังก์ชันตรรกยะเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{x+5}{(2x-1)(x+3)} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} \qquad \text{———— (1)}$$

$$\equiv \frac{A(x+3)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}$$

จะได้ $x + 5 \equiv A(x+3) + B(2x-1)$ ——————(2)

หรือ $x + 5 \equiv (A+2B)x + (3A-B)$

เรามีวิธีหาค่า A, B ได้สองวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$A + 2B = 1$$

$$\therefore \quad 3A - B = 5$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = \frac{11}{7}$ และ $B = -\frac{2}{7}$

วิธีที่ 2 โดยการกำหนดค่า x ที่เหมาะสม

จาก (2) เป็นสมการซึ่งเทียบเท่ากันทุกค่าของ x

แทนค่า $x = -3$ ใน (2) จะได้

$$2 = 0 + B(-7)$$

เพราะฉะนั้น $$B = -\frac{2}{7}$$

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ ใน (2) จะได้

$$\frac{11}{2} = \frac{7}{2}A + 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{11}{7}$$

นั่นคือจะได้ $A = \frac{11}{7}$ และ $B = \frac{-2}{7}$

แทนค่า A, B ใน (1) จะได้

$$\frac{x+5}{(2x-1)(x+3)} = \frac{\frac{11}{7}}{(2x-1)} + \frac{\frac{-2}{7}}{(x+3)}$$

$$= \frac{11}{7(2x-1)} - \frac{2}{7(x+3)}$$

ตัวอย่าง 6.2 จงแยก $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

วิธีทำ เราเขียนฟังก์ชันตรรกยะเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3} \qquad \text{(1)}$$

จะได้ $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} \equiv \frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3}$

$$x^3+1 \equiv (A+B)x^3+(C-3A-2B)x^2+(3A+B-C+D)x-A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ C-3A-2B &= 0 \\ 3A+B-C+D &= 0 \\ -A &= 1 \end{aligned}$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$ และ $D = 2$

เมื่อแทนค่า A, B, C, D ใน (1) จะได้

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

ตัวอย่าง 6.3 จงแยก $\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

วิธีทำ สังเกตได้ว่ากำลังสูงสุดของ x ในเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของ x ในส่วน เราต้องหารก่อนแล้วนำเศษที่เหลือมาทำเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย

เนื่องจาก $\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8} = 1+\frac{8x+14}{x^2+2x-8}$

$$= 1+\frac{8x+14}{(x+4)(x-2)}$$

พิจารณา $\frac{8x+14}{(x+4)(x-2)} \equiv \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}$ ——— (1)

$$\equiv \frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

จะได้ $8x + 14 \equiv A(x-2) + B(x+4)$

หรือ $8x + 14 \equiv (A+B)x + (4B-2A)$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$A + B = 8$$

$$4B - 2A = 14$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 3$ และ $B = 5$

เมื่อแทนค่า A, B ใน (1) จะได้

$$\frac{8x+14}{(x+4)(x-2)} = \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2}$$

ดังนั้น $$\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8} = 1 + \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2}$$

<u>ตัวอย่าง 6.4</u> จงหาค่า $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 6.2 เราสามารถเขียน $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

ดังนั้น $$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right) dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2}{(x-1)^3}dx$$

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int (x-1)^{-2}\,d(x-1) +$$

$$+ 2\int (x-1)^{-3}\,d(x-1)$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่า $\int \frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}\,dx$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 6.3 เราสามารถเขียน $\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8} = 1 + \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2}$$

ดังนั้น
$$\int \frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-2}\right) dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{3}{x+4}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + 3\int \frac{d(x+4)}{x+4} + 5\int \frac{d(x-2)}{x-2}$$

$$= x + 3\ln|x+4| + 5\ln|x-2| + C$$

ตัวอย่าง 6.6 จงหาค่า $\int \frac{5x^2-x+3}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx$

วิธีทำ เราสามารถเขียน $\frac{5x^2-x+3}{(2x-1)(x^2+1)}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{5x^2-x+3}{(2x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\equiv \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+1)}$$

จะได้ $$5x^2-x+3 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(2x-1)$$

หรือ $$5x^2-x+3 \equiv (A+2B)x^2 + (-B+2C)x + (A-C)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$A + 2B = 5$$

$$-B + 2C = -1$$

$$A - C = 3$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 3,\ B = 1$ และ $C = 0$

นั่นคือ $$\frac{5x^2-x+3}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2x-1} + \frac{x}{x^2+1}$$

ดังนั้น $$\int \frac{5x^2-x+3}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|2x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

ตัวอย่าง 6.7 จงหาค่า $\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$

วิธีทำ เราสามารถเขียน $\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\equiv \frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

จะได้ $$3x^3 \equiv A(x-2)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D(x-1)^2$$

หรือ $$3x^3 \equiv (A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C-2D)+(-A+B+D)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$A + C = 3$$

$$B - 2C + D = 0$$

$$B + C - 2D = 0$$

$$-A + B + D = 0$$

โดยการแก้สมการจะได้ A = 2, B = 1, C = 1 และ D = 1

นั่นคือ $$\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

ดังนั้น $$\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{d(x-1)}{(x-1)} + \int (x-1)^{-2}\,d(x-1) + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx \quad \text{——— (1)}$$

เราจะหาค่า $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ ได้ดังต่อไปนี้

เพราะว่า $$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}$$

ดังนั้น $$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + C_1 + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \quad \text{——— (2)}$$

พิจารณา $$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$ (ซึ่งเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $u^2 + a^2$)

ให้ $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

และ $(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\tan^2\theta + 1)$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \sec^2\theta$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\sec^2\theta}$

$= \int \frac{2}{\sqrt{3}}\, d\theta$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\theta + C_2$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C_2$ แทนค่าใน (2)

ดังนั้น $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C_3$ ——(3)

แทน (3) ใน (1) จะได้

$$\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ $\quad -\frac{x}{(x-1)^2} - \ln\left|\frac{x}{(x-1)^2}\right| + C$

2. $\int \frac{23-2x}{2x^2+9x-5}\,dx$ $\quad 2\ln|2x-1| - \ln|x+5| + C$

3. $\int \frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}\,dx$ $\quad x + 5\ln|x-2| + 3\ln|x+4| + C$

4. $\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ $\quad -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

5. $\int \frac{8x+1}{2x^2-9x-35}\,dx$ $\quad \ln|2x+5| + 3\ln|x-7| + C$

6. $\int \frac{7x-6}{4x^2+3x-1}\,dx$ $\quad 3\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln|4x-1| + C$

7. $\int \frac{2x+1}{(2x+3)^2}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\ln|2x+3| + \frac{1}{2x+3} + C$

8. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-x-2}\,dx$ $\quad x + \frac{1}{3}\cdot\{5\ln|x-2|\} - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C$

9. $\int \frac{2x^3-2x^2-11x-8}{x^2-x-6}\,dx$ $\quad x^2 + 2\ln|x+2| - \ln|x-3| + C$

10. $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)}\,dx$ $\quad -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{1}{3}\{5|\ln|x-1|\} - \frac{1}{6}\ln|x+2| + C$

11. $\int \frac{(x+1)^2}{x^3+x}\,dx$ $\quad \ln|x| + 2\arctan x + C$

12. $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$ $\quad -\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\{\ln|x+2| + \ln|x-3|\} - \frac{7}{5}(x-3) + C$

13. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ $\qquad -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

14. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+4)}$ $\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\{\ln|x^2+4| - 2\ln|x+1|\} - \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{2}+C$

15. $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$ $\qquad \frac{1}{4}\{\ln|x-1| - \ln|x+1|\}+\frac{1}{2}\arctan x + C$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ $\quad -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

2. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ $\quad \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

3. $\int \frac{y^4-8}{y^3+2y^2}\,dy$ $\quad \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{4}{y} + 2\ln|y^2+2y| + C$

4. $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + C$

5. $\int \frac{1+x^2}{1+x}\,dx$ $\quad \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|1+x| + C$

6. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+4)}\,dx$ $\quad \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{8}\ln|x^2+4| + C$

7. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$ $\quad \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{5}{2}\ln|x-1| + C$

8. $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$ $\quad \frac{x^2}{2} - x - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

9. $\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{(x^2+1)} + C$

10. $\int \frac{x-18}{4x^3+9x}\,dx$ $\quad 2\ln|x| + \ln|4x^2+9| + \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + C$

11. $\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$ $\quad 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

12. $\int \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$ $\qquad \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$

13. $\int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}\,dx$ $\qquad \frac{1}{x + 1} + \arctan x + C$

14. $\int \frac{x^2 + 1}{x(2x - 5)}\,dx$ $\qquad \frac{x}{2} - \frac{1}{5} \ln |x| + \frac{29}{20} \ln |2x - 5| + C$

15. $\int \frac{z^2}{(z - 1)^3}\,dz$ $\qquad \ln |z - 1| - \frac{2}{(z - 1)} - \frac{1}{2(z - 1)^2} + C$

16. $\int \frac{4x^2 + 6}{x^3 + 3x}\,dx$ $\qquad \ln |x^2(x^2 + 3)| + C$

17. $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{x^3 + x^2 - 5x + 3}\,dx$ $\qquad 4 \ln |x + 3| - \ln |x - 1| - \frac{2}{x - 1} + C$

18. $\int \frac{x^2 - x - 8}{(2x - 3)(x^2 + 2x + 2)}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 3}\right| + \arctan (x + 1) + C$

19. $\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx$ $\qquad - \ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x - 3| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$

20. $\int \frac{3x^2 + 5x}{(x - 1)(x + 1)^2}\,dx$ $\qquad 2 \ln |x - 1| + \ln |x + 1| - \frac{1}{x + 1} + C$

คำชี้แจงเพิ่มเติมหน่วยที่ 2

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 5

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$, $u^2 - a^2$, $\sqrt{a^2 - u^2}$ $\sqrt{a^2 + u^2}$ และ $\sqrt{u^2 - a^2}$ โดยการใช้สูตรนั้นจะทำให้นิสิตมีปัญหาในเรื่องการจำสูตร เพราะเป็นสูตรที่ค่อนข้างจะจำยาก ซึ่งที่จริงแล้วสูตรที่กล่าวมาทั้งหมดสามารถพิสูจน์ได้โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2 - u^2}$

ให้ $u = a \sin\theta$

ฉะนั้น $du = a\cos\theta\, d\theta$

และ $a^2 - u^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$

ดังนั้น $\int\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \int\sqrt{a^2\cos^2\theta}\, .a\cos\theta\, d\theta$

$= \int a^2\cos^2\theta\, d\theta$

$= a^2 \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$

$= a^2 \int \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{a^2}{4} \int \cos 2\theta\, d2\theta$

$= a^2 . \frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{4} . \sin 2\theta + C$

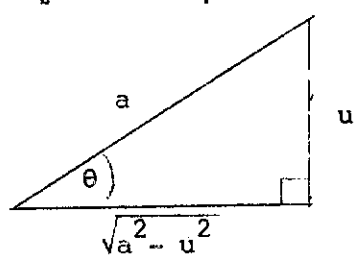
$= a^2 . \frac{\theta}{2} + \frac{a^2}{2} . \sin\theta\cos\theta + C$

เราหาค่าของ $\cos\theta$ ในพจน์ของ u โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $u = a \sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{u}{a}$

และ $\theta = \arcsin\frac{u}{a}$



จากรูป $\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$

ดังนั้น $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{u}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} + C$

$= \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$

ตัวอย่าง 1 เป็นเพียงตัวอย่างเดียวที่แสดงให้เห็นว่าเราไม่จำเป็นต้องจำสูตร สูตรทุกสูตรสามารถพิสูจน์ได้โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณที่เหมาะสม สำหรับสูตรที่เหลือนิสิตควรพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

เมื่อนิสิตพิสูจน์สูตรได้แล้ว นิสิตสามารถที่จะเลือกแก้ปัญหาโจทย์ได้ นั่นคือ นิสิตอาจจะอินทิเกรตโดยการใช้สูตร (กรณีที่จำสูตรได้) หรืออินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 7}}\, dx$

วิธีทำ จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{u^2 - a^2}$ ในที่นี้ $u = x+1$, $a = \sqrt{7}$ เราสามารถอินทิเกรตได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 โดยใช้สูตร (8)

ดังนั้น $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - (\sqrt{7})^2}}\, d(x+1)$

$= \ln\left|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - (\sqrt{7})^2}\right| + C$

$= \ln\left|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 7}\right| + C$

วิธีที่ 2 โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ให้ $(x+1) = \sqrt{7}\sec\theta$

จะได้ $dx = \sqrt{7}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

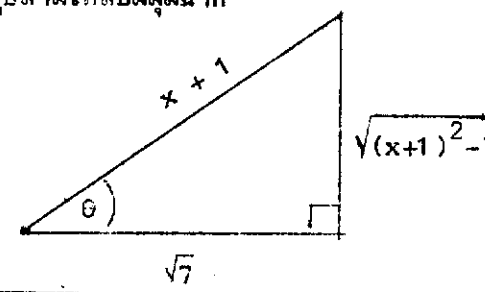
และ $(x+1)^2 - 7 = 7\sec^2\theta - 7 = 7\tan^2\theta$

ดังนั้น $$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-7}}\,dx = \int \frac{\sqrt{7}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{7\tan^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

เราหาค่าของ $\tan\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจากเราให้ $x + 1 = \sqrt{7}\sec\theta$

จะได้ $\sec\theta = \frac{x+1}{\sqrt{7}}$

จากรูป $\tan\theta = \frac{\sqrt{(x+1)^2-7}}{\sqrt{7}}$

ดังนั้น $$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-7}}\,dx = \ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{(x+1)^2+7}}{\sqrt{7}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+7}}{\sqrt{7}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+7}\right| - \ln\sqrt{7} + C_1$$

$$= \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+7}\right| + C$$

(เมื่อ $C = -\ln\sqrt{7} + C_1$)

<u>ข้อสังเกต</u> จากตัวอย่าง 2 ชี้ให้เห็นว่าเราสามารถกระทำการอินทิเกรตได้ 2 วิธีคือ วิธีใช้สูตรและวิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ แต่บางครั้งการแก้ปัญหาโจทย์ก็ใช้ได้เพียงวิธีเดียวคือ การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงหาค่า $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt{a^2-u^2}$ ในที่นี้ $a = 1$, $u = x$ แต่เราไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยการใช้สูตร (1) - (10) ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ให้ $x = \sin\theta$

จะได้ $dx = \cos\theta\, d\theta$

และ $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$

ดังนั้น $\int x^3\sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sin^3\theta \cos\theta(\cos\theta\, d\theta)$

$= \int \sin^3\theta \cos^2\theta\, d\theta$

$= \int \sin^2\theta \cos^2\theta(\sin\theta\, d\theta)$

$= -\int(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\, d\cos\theta$

$= -\int \cos^2\theta\, d\cos\theta + \int \cos^4\theta\, d\cos\theta$

$= -\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^5\theta}{5} + C$

เนื่องจาก $\sin\theta = x$

ฉะนั้น $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-x^2}$

ดังนั้น $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

สรุป เมื่อนิสิตต้องการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ a^2-u^2, a^2+u^2, u^2-a^2, $\sqrt{a^2-u^2}$ $\sqrt{a^2+u^2}$ และ $\sqrt{u^2-a^2}$ ถึงแม้ว่านิสิตจะจำสูตรได้ แต่เพื่อไม่ให้เกิดความผิดพลาด (ในกรณีจำสูตรไม่แจ่มชัด) และเพื่อความชำนาญของนิสิต ควรอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ในกรณีการอินทิเกรตฟังก์ชันที่พจน์ $Ax^2 + Bx + C$ หรือ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ต้องจัดฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในรูป $a^2 - u^2$ หรือ $a^2 + u^2$ หรือ $u^2 - a^2$ หรือ $\sqrt{a^2 - u^2}$ หรือ $\sqrt{a^2 + u^2}$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$ ก่อนแล้วจึงอินทิเกรตโดยใช้สูตร (ในกรณีที่จำสูตรได้) หรืออินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการเปลี่ยน $Ax^2 + Bx + C$ หรือ $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ โดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ ให้อยู่ในรูปใดรูปหนึ่งที่กล่าวมาแล้ว

<u>ตัวอย่าง 4</u> จงเปลี่ยน $x^2 - 6x - 7$ ให้อยู่ในรูป $a^2 + u^2$ หรือ $a^2 - u^2$ หรือ $u^2 - a^2$

<u>วิธีทำ</u>
$$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x - 7 + (\tfrac{6}{2})^2 - (\tfrac{6}{2})^2$$
$$= x - 6x + (3)^2 - 7 - 3^2$$
$$= (x^2 - 6x + (3)^2) - (16)$$
$$= (x - 3)^2 - (4)^2$$ ซึ่งอยู่ในรูป $u^2 - a^2$

<u>ตัวอย่าง 5</u> จงเปลี่ยน $2x^2 - 3x + 1$ ให้อยู่ในรูป $a^2 + u^2$ หรือ $a^2 - u^2$ หรือ $u^2 - a^2$

<u>วิธีทำ</u>
$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$$
$$= 2[x^2 - \frac{3}{2}x + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 + \frac{1}{2}]$$
$$= 2[x^2 - \frac{3}{2}x + (\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{16}]$$
$$= 2[(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{16}]$$

$$= 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$$

$$= [\sqrt{2}(x - \frac{3}{4})]^2 - [\frac{1}{\sqrt{8}}]^2 \quad \text{ซึ่งอยู่ในรูป} \quad u^2 - a^2$$

<u>ตัวอย่าง 6</u> จงเปลี่ยน $\sqrt{3 - 2x + 4x^2}$ ให้อยู่ในรูป $\sqrt{a^2 - u^2}$ หรือ $\sqrt{a^2 + u^2}$ หรือ $\sqrt{u^2 - a^2}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $3 - 2x + 4x^2 = 4(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} + x^2)$

$$= 4[\frac{3}{4} - (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 - \frac{x}{2} + x^2]$$

$$= 4[\frac{11}{16} + (\frac{1}{4} - x)^2]$$

$$= \frac{11}{4} + 4(\frac{1}{4} - x)^2$$

$$= (\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2$$

ดังนั้น $\sqrt{3 - 2x + 4x^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\sqrt{a^2 + u^2}$

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $Ax^2 + Bx + C$ **หรือ** $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ ก็กระทำเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้วในข้อสังเกต

<u>ตัวอย่าง 7</u> จงหาค่า $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}}$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 6 จะได้ว่า $\sqrt{3 - 2x + 4x^2} = (\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}}$

จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีพจน์ $a^2 + u^2$ ในที่นี้ $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$u = 2(\frac{1}{4} - x)$

เราสามารถอินทิเกรตได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 โดยใช้สูตร(5)

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d2(\frac{1}{4} - x)}{\sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d2(\frac{1}{4} - x)}{\sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|2(\frac{1}{4} - x) + \sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|(\frac{1}{2} - 2x) + \sqrt{3 - 2x + 4x^2}\right| + C$$

วิธีที่ 2 โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $2(\frac{1}{4} - x) = \frac{\sqrt{11}}{2} \tan\theta$

จะได้ $\frac{1}{2} - 2x = \frac{\sqrt{11}}{2} \tan\theta$

$dx = -\frac{\sqrt{11}}{4} \sec^2\theta \, d\theta$

และ $(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2 = \frac{11}{4} + \frac{11}{4}\tan^2\theta = \frac{11}{4}\sec^2\theta$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}} = \int \frac{dx}{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}$$

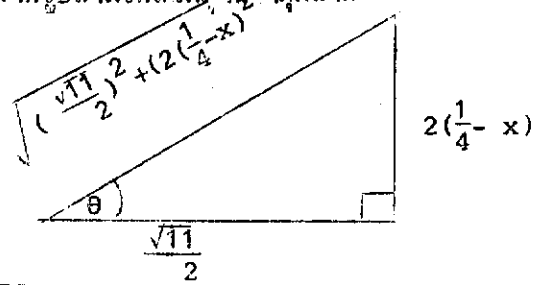
$$= \int \frac{(-\frac{\sqrt{11}}{4} \sec^2\theta)}{\sqrt{\frac{11}{4}\sec^2\theta}} \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sec\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1$$

เราหาค่าของ $\sec\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $2(\frac{1}{4} - x) = \frac{\sqrt{11}}{2}\tan\theta$



จะได้ $\tan\theta = \dfrac{2(\frac{1}{4} - x)}{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

จากรูป $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2 + [2(\frac{1}{4} - x)]^2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

ดังนั้น $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3 - 2x + 4x^2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + \dfrac{2(\frac{1}{4} - x)}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right| + C_1$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3 - 2x + 4x^2} + (\frac{1}{2} - 2x)}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right| + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3 - 2x + 4x^2} + (\frac{1}{2} - 2x)\right| - (-\frac{1}{2})\ln\frac{\sqrt{11}}{2} + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|(\frac{1}{2} - 2x) + \sqrt{3 - 2x + 4x^2}\right| + C$$

(เมื่อ $C = -(-\frac{1}{2})\ln\frac{\sqrt{11}}{2} + C_1$)

ตัวอย่าง 8 จงหาค่า $\int \dfrac{dx}{(x^2 - 4x + 13)^2}$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 - 4x + 13 = (x^2 - 4x + 4)9$

$$= (x - 2)^2 + 3^2$$

ดังนั้น $\int \dfrac{dx}{(x^2-4x+13)^2} = \int \dfrac{dx}{[(x - 2)^2 + 3^2]^2}$

จากโจทย์เราไม่สามารถอินทิเกรตได้โดยการใช้สูตร (1) - (10) ดังนั้นจึงต้องใช้วิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

ให้ $(x - 2) = 3\tan\theta$

$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{[9\tan^2\theta + 9]^2}$

$= \frac{3}{81}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta}$

$= \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{27}\int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$

$= \frac{1}{27}\left[\int \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta\right]$

$= \frac{1}{27}\left[\int \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{1}{4}\int \cos 2\theta\, d2\theta\right]$

$= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{108}\sin 2\theta + C$

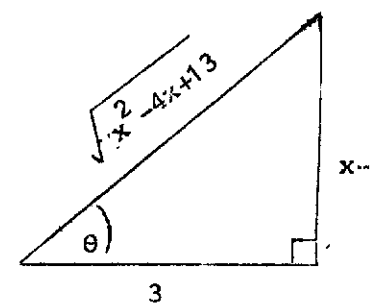
$= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{54}\sin\theta\cos\theta + C$

เราหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $x - 2 = 3\tan\theta$

จะได้ $\tan\theta = \frac{(x - 2)}{3}$

ดังนั้น $\theta = \arctan\left(\frac{x - 2}{3}\right)$



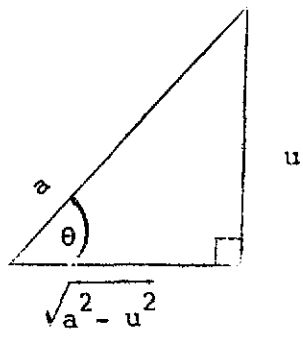
จากรูป $\sin\theta = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$

และ $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$

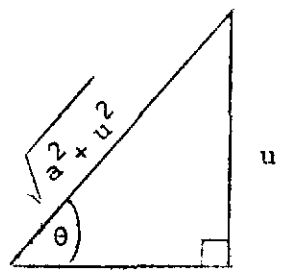
ดังนั้น $$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 13)^2} = \frac{1}{54}\left[\arctan \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} \right)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-4x+13}} \right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{54}\left[\arctan \frac{x - 2}{3} + \frac{3(x - 2)}{x^2 - 4x + 13} \right] + C$$

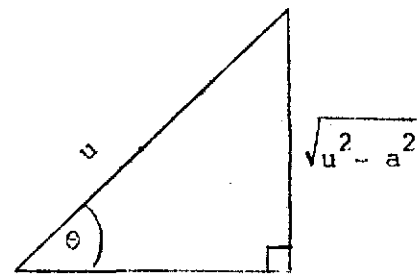
การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น หลังจากการอินทิเกรตได้สิ้นสุดลงแล้ว ต้องแทนค่ากลับจากฟังก์ชันตรีโกณมาเป็นฟังก์ชันพีชคณิตตามเดิม โดยทั่วไปแล้วจะอาศัยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาช่วยเพื่อให้การหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณและพีชคณิตสะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น



$u = a \sin \theta$



$u = a \tan \theta$



$u = a \sec \theta$

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 6

การหาค่าคงตัวโดยวิธีกำหนดค่าต่าง ๆ ให้กับ x นั้นเราสามารถคำนวณได้รวดเร็ว เมื่อเลือกค่า x ที่เหมาะสม ดังเช่นตัวอย่าง 6.1 เราต้องการหาค่า A เราก็พยายามทำให้แฟคเตอร์ที่คูณกับ B เป็นศูนย์ นั่นคือเราจะให้ $x = \frac{1}{2}$ ในทำนองเดียวกัน เมื่อต้องการหาค่า B เราก็ทำแฟคเตอร์ที่คูณกับ A ให้เป็นศูนย์โดยให้ $x = -3$ เพื่อความเข้าใจ ขอให้นิสิตศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงแยก $\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วน

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$

$= x(x - 1)(x + 2)$

ดังนั้นเราจะเขียน $\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{2x + 3}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x + 2}$$

จะได้ จะได้ $2x + 3 \equiv A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$ ————(1)

ก. เราต้องการค่า A เราต้องพยายามทำให้แฟคเตอร์ที่คูณกับ B และ C เป็นศูนย์ นั่นคือดูแฟคเตอร์ที่ร่วมกันในที่นี้คือ x เราจึงเลือก $x = 0$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

จะได้ $2(0)+3 = A(0-1)(0+2)+B(0)(0+2)+C(0)(0-1)$

$3 = -2A$

$A = -\frac{3}{2}$

ข. เราต้องการค่า B เราต้องพยายามทำให้แฟคเตอร์ที่คูณกับ A และ C เป็นศูนย์ นั่นคือดูแฟคเตอร์ที่ร่วมกัน ในที่นี้คือ $x-1$ เราจึงเลือก $x = 1$

แทนค่า $x = 1$ ใน (1)

$$2(1) + 3 = A(1-1)(x+2)+B(1)(1+2)+C(1)(1-1)$$

$$5 = 3B$$

$$B = \frac{5}{3}$$

ค. เราต้องการค่า C เราต้องทำให้แฟคเตอร์ที่คูณกับ A และ B เป็นศูนย์ จะเห็นว่า $x+2$ เป็นแฟคเตอร์ร่วม ดังนั้นเราจึงเลือก $x = -2$

แทนค่า $x = -2$ ใน (1)

$$2(2) + 3 = A(2-1)(-2+2)+B(-2)(-2+2)+C(-2)(-2-1)$$

$$-1 = 6C$$

$$C = -\frac{1}{6}$$

ดังนั้น $$\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2}$$

$$= -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงแยก $\frac{3x + 1}{(x + 1)^3}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

<u>วิธีทำ</u> เราจะเขียน $\frac{3x + 1}{(x + 1)^3}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{3x + 1}{(x + 1)^3} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

จะได้ $3x+1 \equiv A(x+1)^2+B(x+1)+C$ ———————— (1)

เราจะหาค่า C ต้องทำให้แฟคเตอร์ที่คูณกับ A, B เป็นศูนย์ ดังนั้นเราจึง

เลือก $x = -1$ แทนใน (1)

จะได้ $3(-1)+1 = A(-1+1)+B(-1+1)+C$

$C = -2$

เราจะหาค่า A, B โดยการกำหนดให้ $x = 1, -2$

นำ $x = 1, -2$ และ $C = -2$ แทนใน (1)

จะได้ $4 = 4A + 2B - 2$ เมื่อ $x = 1$

และ $-5 = A - B - 2$ เมื่อ $x = -2$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 0, B = 3$

ดังนั้น $$\frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{-2}{(x+1)^3}$$

จากตัวอย่าง 2 ชี้ให้เห็นว่าเมื่อเราทราบค่าคงตัวบางตัวแล้ว เราสามารถหาค่าคงตัวอื่น ๆ โดยการกำหนดค่า x ที่เหมาะสม หลังจากนั้นก็ใช้วิธีแก้สมการ

ดังนั้นในการหาค่าคงตัว เราสามารถทำได้หลายวิธีดังนี้

1. โดยการเทียบสัมประสิทธิ์
2. โดยการกำหนดค่า x ที่เหมาะสม
3. ใช้ทั้งวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2

ทั้ง 3 วิธีนี้เราสามารถเลือกใช้ได้ตามความสะดวกและความเหมาะสมของโจทย์

ตัวอย่าง 3 จงแยก $\frac{x^2+1}{(x-1)^4}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

วิธีทำ เราจะเขียน $\frac{x^2+1}{(x-1)^4}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^4} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

$$\equiv \frac{A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D}{(x-1)^4}$$

จะได้ $x^2 + 1 \equiv A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$ ———— (1)

$$\equiv Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^2 - 2Bx + B + Cx - C + D$$

$$\equiv Ax^3 + (-3A+B)x^2 + (3A-2B+C)x + (-A+B-C+D)$$ ———— (2)

<u>วิธีที่ 1</u> เราจะหาค่า A, B, C, D โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

$$A = 0$$

$$-3A+B = 1$$

$$3A-2B+C = 0$$

$$-A+B--C+D = 1$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ และ $D = 2$

ดังนั้น $$\frac{x^2+1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^4}$$

<u>วิธีที่ 2</u> เราจะหาค่า A, B, C, D โดยการกำหนดค่า x ที่เหมาะสม

จาก (1) จะเห็นว่าค่าคงตัวที่หาง่ายที่สุดคือ D

นั่นคือเราให้ $x = 1$ แทนใน (1)

จะได้ $1 + 1 = A(1-1)^2 + B91-1)^2 + c(1-1) + D$

$D = 2$

ต่อไปเราจะหาค่า A, B, C โดยการแทนค่า $X = -1, 2, 3$ ตามลำดับ

นำ $x = -1, 2, 3$ และ $D = 2$ แทนใน (1)

จะได้สมการดังนี้

$-8A+4B-2C+2 = 2$ เมื่อ $x = -1$

$A+B+C+2 = 5$ เมื่อ $x = 2$

$8A+4B+2C+2 = 10$ เมื่อ $x = 3$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$

ดังนั้น $$\frac{x^2+1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^4}$$

<u>วิธีที่ 3</u> เราจะหาค่า A, B, C, D โดยใช้ทั้งวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2

กำหนด $X = 1$ แทนใน (1)

จะได้ $D = 2$

แทน $D = 2$ ใน (2)

จะได้ $x^2+1 \equiv Ax^2+(-3A+B)x^2+ (3A-2B+C)x + (-A+B-C+2)$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ -3A+B &= 1 \\ 3A-2B+C &= 0 \\ -A+B-C+2 &= 1 \end{aligned}$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$ และ $D = 2$

ดังนั้น $$\frac{x^2+1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^4}$$

สำหรับในกรณีที่ $P(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$ และ $Q_2(x)$ มีแฟคเตอร์อยู่ในรูป

$(ax + b)^m(ax^2+ bx + c)^n$

เราจะเขียน $P(x)$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \equiv \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{\text{ค่าคงตัว ตัวที่ } m}{(ax+b)^m} + \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+C)}$$

$$\cdots + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+C)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+C)^n}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}\,dx$

วิธีทำ เราจะเขียน $\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2-4x+5)^2}$$

จะได้ $$x-2 \equiv A(x^2-4x+5)^2+(Bx+C)x(x^2-4x+5)+(Dx+E)x$$

$$= Ax^4-8Ax^3+26Ax^2-40Ax+25A+Bx^4+(-4B+C)x^3$$

$$+(5B-4C)x^2+5Cx+Dx^2+Ex$$

$$= (A+B)x^4+(-8A-4B+C)x^3+(26A+5B-4C+D)x^2$$

$$+(-40A+5C+E)x+25A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -8A-4B+C &= 0 \\ 26A+5B+4C+D &= 0 \\ -40A+5C+E &= 1 \\ 25A &= -2 \end{aligned}$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A = -\frac{2}{25}$, $B = \frac{2}{25}$, $C = -\frac{8}{25}$, $D = \frac{10}{25}$ $E = -\frac{15}{25}$

นั่นคือ $$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{-\frac{2}{25}}{x} + \frac{-\frac{2}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2-4x+5} + \frac{\frac{10}{25}x-\frac{15}{25}}{(x^2-4x+5)}$$

$$= -\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{25}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{x^2-4x+5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(x^2-4x+5)^2}$$

ดังนั้น $$\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2}\,dx = -\frac{2}{25}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{25}\int\frac{(2x-4)}{x^2-4x+5}\,dx - \frac{4}{25}\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$$

$$+\frac{1}{5}\int\frac{(2x-4)}{(x^2-4x+5^2)}\,dx + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$-\frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\arctan(x-2)$$

$$-\frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} \qquad \text{——— (1)}$$

พิจารณาเทอม $\int\frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$ เราจะหาค่าเทอมนี้โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $x - 2 = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\,d\theta$

และ $(x-2)^2+1 = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

ดังนั้น $$\int\frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\sec^2\theta)^2}$$

$$= \int\frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int\frac{(\cos 2\theta + 1)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos 2\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int d\theta$$

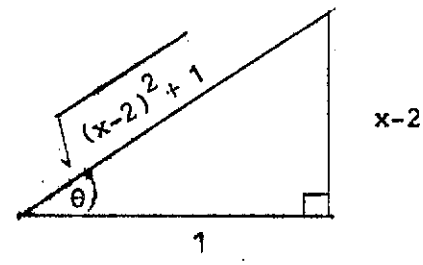
$$= \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cdot\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\cdot\theta + C$$

เราหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ในพจน์ของ x โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเราให้ $x - 2 = \tan\theta$

จากรูป $\sin\theta = \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$



และ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$

ฉะนั้น $\displaystyle\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\right] + \frac{1}{2}\arctan(x-2) + C$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x-2}{(x^2-4x+5)}\right] + \frac{1}{2}\arctan(x-2) + C \qquad \text{———(2)}$$

นำ (2) แทนใน (1)

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2}dx = -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\arctan(x-2)$

$$- \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\arctan(x-2) + C$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{3}{50}\arctan(x-2)$$

$$+ \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C$$

$$= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\arctan(x-2)$$

$$+ \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C$$

———————————

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ชุดที่ 1

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนข้อสอบนี้

และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

2. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

3. $\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ชุดที่ 2

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้

และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

2. $\int \frac{x+8}{x^2+6x+8}\,dx$

3. $\int \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ชุดที่ 3

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้
และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}$

2. $\int \frac{3}{x^2 - 8x + 25}\, dx$

3. $\int \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\, dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 2 ชุดที่ 4

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้
และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx$

2. $\int \frac{x + 35}{x^2 - 25}\, dx$

3. $\int \frac{x^2 + 1}{x(2x - 5)}\, dx$

เทคนิคการอินทิเกรต (Techniques of Integration)

หน่วยที่ 3

เรื่องที่ 7 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของซายน์และโคซายน์
(Integration of Rational Functions of $\sin x$ and $\cos x$)

8 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์ หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน
(Rationalizing Substitution)

เรื่องที่ 7 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของซายน์และโคซายน์

(Integration of Rational Functions of sin x and cos x)

ตัวอย่างของฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ได้แก่

$$P_1(\sin\theta, \cos\theta) = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$$

$$P_2(\sin\theta, \cos\theta) = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta}{2 + \sin\theta}$$

สำหรับฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ ก็สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ได้

ขั้นตอนในการหาค่า $\int P(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ มีดังนี้

ขั้นที่ 1 เปลี่ยน $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรใหม่

โดยการแทนค่า $\boxed{z = \tan\frac{\theta}{2}}$

เนื่องจาก $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2z}{1 + z^2}$$

ดังนั้น $$\boxed{\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}}$$

เนื่องจาก $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

$$= \frac{2}{\sec^2\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$\cos\theta = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+z^2} - 1$$

ดังนั้น $$\boxed{\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

<u>ขั้นที่ 2</u> หา $d\theta$ ในรูปของ dz

จาก $z = \tan\frac{\theta}{2}$

จะได้ $\theta = 2\arctan z$

ดังนั้น $$\boxed{d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> แทนค่าฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ โดยให้

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2},\ \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2} \text{ และ } d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}}$$

ดังนั้น $\int P(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int P\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ z นั่นเอง

ตัวอย่าง 7.1 จงหาค่า $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

วิธีทำ ให้ $z = \tan\frac{x}{2}$

จะได้ $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ และ $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3(\frac{2z}{1+z^2}) + 4(\frac{1-z^2}{1+z^2})}$

$$= \int \frac{2dz}{6z + 4 - 4z^2}$$

$$= -\int \frac{dz}{2z^2 - 3z - 2}$$

พิจารณา $\frac{1}{2z^2 - 3z - 2} = \frac{1}{(2z + 1)(z - 2)}$

ให้ $\frac{1}{2z^2 - 3z - 2} \equiv \frac{A}{2z + 1} + \frac{B}{z - 2}$

จะได้ $1 \equiv A(z - 2) + B(2z + 1)$

แทนค่า $z = -\frac{1}{2}$ จะได้ $A = -\frac{2}{5}$

แทนค่า $z = 2$ จะได้ $B = \frac{1}{5}$

นั่นคือ $\frac{1}{2z^2 - 3z - 2} = \frac{-\frac{2}{5}}{2z + 1} + \frac{\frac{1}{5}}{z - 2}$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = -\int \frac{-\frac{2}{5}}{2z + 1}dz - \int \frac{\frac{1}{5}}{z - 2}dz$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(2z+1)}{2z+1} - \frac{1}{5}\int \frac{d(z-2)}{z-2}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|2z+1| - \frac{1}{5}\ln|z-2| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|2\tan\frac{x}{2} + 1\right| - \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 2\right| + C$$

ตัวอย่าง 7.2 จงหาค่า $\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x}$

วิธีทำ
$$\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{2 + (\frac{1 - \cos 2x}{2})}$$

$$= 2 \int \frac{dx}{5 - \cos 2x}$$

$$= \int \frac{d(2x)}{5 - \cos 2x}$$

$$= \int \frac{du}{5 - \cos u} \qquad \text{เมื่อ} \quad u = 2x$$

ให้ $z = \tan \frac{u}{2}$

จะได้ $\cos u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$ และ $du = \frac{2dz}{1 + z^2}$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{5 - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}}$

$$= 2 \int \frac{dz}{4 + 6z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \int \frac{d\sqrt{6}z}{2^2 + (\sqrt{6}z)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \arctan (\frac{\sqrt{6}z}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan (\frac{\sqrt{6}}{2} \tan \frac{u}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan (\frac{\sqrt{6}}{2} \tan x) + C$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1 $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$ $\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C$

2. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 3}{3\tan\frac{x}{2} - 1}\right| + C$

3. $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1}$ $-\ln\left|1 - \tan\frac{x}{2}\right| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$ $\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^{2}\frac{x}{2} + C$

5. $\int \frac{8dx}{3\cos 2x + 1}$ $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\tan x + \sqrt{2}}{\tan x - \sqrt{2}}\right| + C$

6. $\int \frac{5dx}{6 + 4\sec x}$ $\frac{\sqrt{5}}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{5}}{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{5}}\right| + \frac{5}{3}\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$

7. $\int \frac{dx}{2\sin x + 2\cos x + 3}$ $2\arctan\left(\tan\frac{x}{2} + 2\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{\cot 2x(1 + \cot 2x)}$ $\ln\left|\frac{\tan x}{\sqrt{1 - \tan^{2}x}}\right| + C$

9. $\int \frac{\tan x}{2 + \sin x}dx$ $\ln\left|\frac{\left(\tan^{2}\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + 1\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right)\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^{2}x + 5\sin^{2}x}$ $\frac{1}{3}\arctan(3\tan x) + C$

11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 3}$

12. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{3} \frac{3dx}{3\cos x + 1}$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 3}{3\tan\frac{x}{2} - 1}\right| + C$

2. $\int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 2}$ $\qquad \sqrt{2}\ \arctan\frac{(\tan\frac{x}{2} - 1)}{\sqrt{2}} + C$

3. $\int \frac{dx}{2\sin x + 2\cos x + 3}$ $\qquad 2\ \arctan(\tan\frac{x}{2} + 2) + C$

4. $\int \frac{\cos x}{3\cos x - 5}\,dx$ $\qquad 2\ \arctan(\tan\frac{x}{2}) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}) + C$

5. $\int \frac{(1 - \cos x)}{1 - \sin x}\,dx$ $\qquad -\frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} - 2\ \arctan(\tan\frac{x}{2}) + C$

6. $\int \frac{\sin 2x}{2 + \cos x}\,dx$ $\qquad -8\ln\left|3 + \tan^2\frac{x}{2}\right| + 4\ln\left|1 + \tan^2\frac{x}{2}\right| + C$

7. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\,dx$ $\qquad \tan\frac{x}{2} + \ln\left|\tan^2\frac{x}{2} + 1\right| + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin x - \tan x}$ $\qquad \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

10. $\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}\,dx$ $\qquad -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} - 2\ \arctan(\tan\frac{x}{2}) + C$

11. $\int \frac{dx}{\tan x - 1}$ $\qquad -\frac{1}{4}\ln\left|\tan^2\frac{x}{2} + 1\right| + \frac{1}{2}\arctan(\tan\frac{x}{2})$

$\qquad + \frac{1}{4}\ln\left|\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} - 1\right| + C$

เรื่องที่ 8 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณฑ์ หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน (Rationalizing Substitutions)

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะได้กล่าวไว้แล้วในเรื่องที่ 6 แต่ในเรื่องนี้เราก็จะอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะเช่นกัน แต่เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปกรณฑ์หรือกำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วน

เช่น $P_1(x) = \dfrac{1 + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}}$

$P_2(x) = \dfrac{x}{(2 + x)^{\frac{1}{2}} + (2 + x)^{\frac{3}{2}}}$

$P_3(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{x + 2}$

การอินทิเกรตฟังก์ชันดังกล่าวนั้นเราจะใช้วิธีแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่ โดยจำแนกออกเป็นกรณีต่าง ๆ ดังนี้

<u>กรณี 1</u> การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของตัวแปร x ที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน โดยการแทนค่า $x = t^n$ โดยที่ n เป็น ค.ร.น.ของส่วนของเลขชี้กำลังของ x ทุกตัว

<u>ตัวอย่าง 8.1</u> จงหาค่า $\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เลขชี้กำลังของ x คือ $\frac{1}{2}$ และ $\frac{3}{4}$ ดังนั้น ค.ร.น. คือ 4

ให้ $x = t^4$

$dx = 4t^3dt$

ดังนั้น $\int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \dfrac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{1 + (t^4)^{\frac{3}{4}}}\,(4t^3)dt$

$$= 4 \int \frac{t^5}{1 + t^3} \, dt$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ t

เพราะว่า $\frac{t^5}{1 + t^3} = t^2 - \frac{t^2}{1 + t^3}$

ดังนั้น $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{4}}} \, dx = 4 \int [t^2 - \frac{t^2}{1 + t^3}] \, dt$

$$= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{1 + t^3} \, dt$$

$$= 4 . \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \int \frac{d(1 + t^3)}{1 + t^3}$$

$$= \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln |1 + t^3| + C$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3} \ln |1 + x^{\frac{3}{4}}| + C \quad \text{(เพราะว่า } x = t^4\text{)}$$

<u>กรณี 2</u> การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่มีพจน์ $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$ เมื่อ r, s เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ โดยการแทนค่า $a + bx = t^n$ โดยที่ n เป็น ค.ร.น.ของส่วนของเลขชี้กำลังของ $(a + bx)$

<u>ตัวอย่าง 8.2</u> จงหาค่า $\int \frac{dx}{(3 - x)^{\frac{5}{2}} + (3 - x)^{\frac{3}{2}}}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่มีพจน์ $(a + bx)^{\frac{r}{s}}$ ในที่นี้เลขชี้กำลังของ $(3-x)$ คือ $\frac{5}{2}$ และ $\frac{3}{2}$ ดังนั้น ค.ร.น. คือ 2

ให้ $3 - x = t^2$

จะได้ $x = 3 - t^2$

$dx = -2t \, dt$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{(3-x)^{\frac{5}{2}} + (3-x)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-2t\,dt}{(t^2)^{\frac{5}{2}} + (t^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= \int \frac{-2t\,dt}{t^5 + t^3}$

$= -2 \int \frac{dt}{t^4 + t^2}$

$= -2 \int \frac{dt}{t^2(t^2+1)}$

$= -2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt$

$= -2 \int \frac{1}{t^2}\,dt + 2 \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \frac{-2t^{-1}}{-1} + 2\arctan t + C$

$= \frac{2}{t} + 2\arctan t + C$

$= \frac{2}{\sqrt{3-x}} + 2\arctan(\sqrt{3-x}) + C$

(เพราะว่า $3 - x = t^2$)

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับกรณี 2 นี้ ถ้ามี $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$ เพียงพจน์เดียวไม่ต้องหา ค.ร.น.ของส่วนของเลขชี้กำลัง ให้แทนค่า $a+bx = t^s$ ได้ทันที

<u>ตัวอย่าง 8.3</u> จงหาค่า $\int \frac{x^2 - 3}{(2x+5)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์เลขชี้กำลังของ $(2x+5)$ คือ $\frac{1}{3}$ และมีพจน์ $(2x+5)^{\frac{1}{3}}$ เพียงพจน์เดียว

ดังนั้นให้ $2x + 5 = t^3$

$$dx = \frac{3}{2}t^2dt$$

ดังนั้น $$\int \frac{x^2 - 3}{(2x+5)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{(\frac{t^3}{2} - \frac{5}{2})^2 - 3}{(t^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot (\frac{3}{2}t^2dt)$$

$$= \frac{3}{8}\int t[(t^3 - 5)^2 - 12]\,dt$$

$$= \frac{3}{8}\int (t^7 - 10t^4 + 13t)\,dt$$

$$= \frac{3}{8}(\frac{t^8}{8} - \frac{10t^5}{5} + \frac{13t^2}{2}) + C$$

$$= \frac{3}{64}t^8 - \frac{3}{4}t^5 + \frac{39}{16}t^2 + C$$

$$= \frac{3}{64}(2x+5)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{4}(2x+5)^{\frac{5}{3}} + \frac{39}{16}(2x+5)^{\frac{2}{3}} + C$$

(เพราะว่า $2x+5 = t^3$)

ตัวอย่าง 8.4 จงหาค่า $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

วิธีทำ จากโจทย์เลขชี้กำลังของ $(1+x)$ คือ $\frac{1}{2}$ และมีพจน์ $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ เพียงพจน์เดียว

ดังนั้นให้ $1 + x = t^2$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t\,dt$$

ดังนั้น $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{(t^2 - 1)}{t}(2t\,dt)$$

$$= 2\int (t^2 - 1)\,dt$$

$$= 2(\frac{t^3}{3} - t) + C$$

$$= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C \quad (\text{เพราะว่า } 1+x = t^2)$$

<u>กรณี 3</u> อินทิกรัลในรูปของ $\int R(x^2, \sqrt[n]{a+bx^2}).x\,dx$ เมื่อ R เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งประกอบด้วย x^2, $\sqrt[n]{a+bx^2}$ โดยการแทนค่า $a + bx^2 = t^n$

<u>ตัวอย่าง 8.5</u> จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จัดโจทย์ให้อยู่ในรูป $\int R(x^2, \sqrt[n]{a + bx^2})\,x\,dx$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}.x\,dx$

ในที่นี้ $n = 2$

ให้ $16 - x^2 = t^2$

$x^2 = 16 - t^2$

$2x\,dx = -2t\,dt$

$x\,dx = -t\,dt$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}\,x\,dx = \int \frac{(t^2)^{\frac{1}{2}}}{16 - t^2}\,(-t\,dt)$

$= -\int \frac{t^2}{16 - t^2}\,dt$

เนื่องจาก $\frac{-t^2}{16 - t^2} = 1 - \frac{16}{16 - t^2}$

ฉะนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}.x\,dx = \int \left[1 - \frac{16}{16 - t^2}\right] dt$

$= \int 1dt - \int \frac{16}{16 - t^2}\,dt$

$= \int 1dt - 16 \int \frac{dt}{16 - t^2}$

$= t - \frac{16}{8} \ln \left| \frac{4 + t}{4 - t} \right| + C$

ดังนั้น $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}dx = \sqrt{16-x^2} - 2 \ln \left| \frac{4 + \sqrt{16-x^2}}{4 - \sqrt{16-x^2}} \right| + C$ (เพราะว่า $16-x^2 = t^2$)

ตัวอย่าง 8.6 จงหาค่า $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

วิธีทำ จัดโจทย์ให้อยู่ในรูป $\int R(x^2, \sqrt[n]{a+bx^2})\,x\,dx$

ดังนั้น $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,xdx$

ในที่นี้ $n = 2$

ให้ $x^2+a^2 = t^2$

$x^2 = t^2-a^2$

$2x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = t\,dt$

ดังนั้น $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{t^2-a^2}{\sqrt{(t^2)^3}}\,(t\,dt)$

$= \int \frac{t^2-a^2}{t^3}\,(t\,dt)$

$= \int \frac{t^2-a^2}{t^2}\,dt$

เนื่องจาก $\frac{t^2-a^2}{t^2} = 1-\frac{a^2}{t^2}$

ดังนั้น $\int \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \left[1-\frac{a^2}{t^2}\right]dt$

$= t-\frac{a^2 t^{-1}}{-1}+C$

$= t+\frac{a^2}{t}+C$

$= \sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$ ((เพราะว่า $x^2+a^2=t^2$)

แบบฝึกหัด

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,dx$ $\qquad \frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + 10(x-5)^{\frac{1}{2}} + C$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+9}}$ $\qquad \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}}\right| + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $\qquad 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right| + C$

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\qquad 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

5. $\int \sqrt{x^3 - x^2}\,dx$ $\qquad \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$ $\qquad \arctan\frac{(x-4)^{\frac{1}{2}}}{2} + C$

7. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ $\qquad 2\sqrt{x} - 4\ln\left|2+\sqrt{x}\right| + C$

8. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}\,dx$ $\qquad 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right| - 2\sqrt{1+x} + C$

9. $\int \frac{dx}{b+\sqrt{x+a}}$ $\qquad 2\sqrt{x+a} + 2b\ln\left|b-\sqrt{x+a}\right| + C$

10. $\int (3x - 4x^3)\sqrt{9-x^2}\,dx$ $\qquad 22(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5}(9-x^2)^{\frac{5}{2}} + C$

11. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}\,dx$ $\qquad \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left|1+x^{\frac{3}{4}}\right| + C$

12. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad -x + 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}}$ $\qquad \frac{8}{3}x^{\frac{3}{8}} + 2\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{8}} - 1}{x^{\frac{1}{8}} + 1}\right| + 4\arctan x^{\frac{1}{8}} + C$

14. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1}\,dx$ $\qquad (x+1) + 4\sqrt{x+1} + 4\ln\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$ $\qquad \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 3\ln\left|1 + x^{\frac{1}{3}}\right| + C$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{x(1 - x^{\frac{1}{4}})}$ $\quad 4 \ln |x^{\frac{1}{4}} - 1| - 4 \ln |x^{\frac{1}{4}}| + C$

2. $\int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{6x^{\frac{1}{4}}} dx$ $\quad \frac{2x^{\frac{27}{12}}}{27} - \frac{2x^{\frac{13}{12}}}{13} + C$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x + 2}} dx$ $\quad \frac{2}{5}(x + 2)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x + 2)^{\frac{3}{2}} + 8(x + 2)^{\frac{1}{2}} + C$

4. $\int \frac{x}{(2x - 1)^{\frac{2}{3}}} dx$ $\quad \frac{3}{16}(2x - 1)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}(2x - 1)^{\frac{1}{3}} + C$

5. $\int x\sqrt{2 + 3x}\ dx$ $\quad \frac{2}{45}(2 + 3x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{27}(2 + 3x)^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\int \frac{x}{(1 + x)^{\frac{3}{4}}} dx$ $\quad \frac{4}{5}(1 + x)^{\frac{5}{4}} - 4(1 + x)^{\frac{1}{4}} + C$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$ $\quad \ln \left| \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{\sqrt{1 + 4x} + 1} \right| + C$

8. $\int \frac{\sqrt{1 - x}}{x} dx$ $\quad 2\sqrt{1 - x} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{1 - \sqrt{1 - x}} \right| + C$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$ $\quad \ln \left| \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{\sqrt{1 + 4x} + 1} \right| + C$

10. $\int x\sqrt{2 - 5x}\ dx$ $\quad \frac{2}{125}(2 - 5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2 - 5x)^{\frac{3}{2}} + C$

11. $\int x^3 \sqrt{16 + 5x^2}\, dx$ $\qquad \frac{1}{25}\left[\frac{(16 + 5x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{16}{3}(16 + 5x^2)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + x^2} + \sqrt{3}} \right| + C$

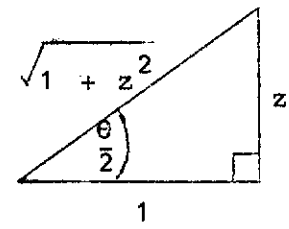
13. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx$ $\qquad \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arctan \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} + C$

14. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x}\, dx$ $\qquad \sqrt{x^2 + 5} + \frac{\sqrt{5}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{5}} \right| + C$

คำชี้แจงเพิ่มเติมหน่วยที่ 3

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 7

(1) ในขั้นที่ 1 เรามีวิธีที่ง่ายอีกวิธีหนึ่งที่จะเปลี่ยน $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรใหม่คือ ใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากช่วย



เนื่องจาก $z = \tan\frac{\theta}{2}$ จะได้รูป

ดังนั้น $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

และ $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

จากเอกลักษณ์ $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

ดังนั้น $\sin\theta = 2\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \frac{2z}{1+z^2}$

และเอกลักษณ์ $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

(2) ในขั้นที่ 3 เมื่อแทนค่า $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ ตามลำดับ

จะได้ $\int P(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int P\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า

เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะ ดังนั้นในการอินทิเกรตเราจึงอาศัยการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อยเข้าช่วย

หมายเหตุ การหา $\sin\theta$, $\cos\theta$ ในรูปของ z นั้น เราไม่ต้องแสดงให้ดูในวิธีทำก็ได้ อาจรวบรัดโดยการแทน $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ และ $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ ในโจทย์ และเมื่อได้ผลลัพธ์แล้วแทน z ด้วย $\tan\frac{\theta}{2}$

คำอธิบายตัวอย่าง 7.2

(1) เราอาจแทนค่าให้ $z = \tan\frac{x}{2}$ ก็ได้ ซึ่งจะได้ $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$

และ $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{2+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^2}$

$$= \int \frac{2(1+z^2)}{2(1+z^2)^2 + 4z^2}\,dz$$

$$= \int \frac{(1+z^2)}{(1+z^2)^2 + 2z^2}\,dz$$ ซึ่งเป็นโจทย์ยุ่งยากมากขึ้น

ดังนั้นเราควรเปลี่ยน $\sin^2 x$ เป็น $\frac{1-\cos 2x}{2}$ ก็เพื่อต้องการลดกำลังของ $\sin^2 x$ ลง จะทำให้อินทิเกรตได้ง่ายขึ้น

(2) เมื่อทำถึงบรรทัดที่ 2 แล้ว เราควรแทนค่าให้ $z = \tan x$ โดยไม่เปลี่ยน $2x$ เป็น u ก็ได้ แต่มีข้อควรระวัง คือจะได้

$$dx = \frac{1}{1+z^2}\,dz$$ เพราะว่า $x = \arctan z$

(3) สำหรับ 3 บรรทัดสุดท้ายนั้นเป็นการเปลี่ยนจากตัวแปร z เป็นตัวแปร u และเปลี่ยนจากตัวแปร u เป็นตัวแปรเดิมคือ x

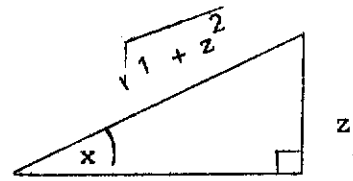
หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ ก็สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ได้ ซึ่งแสดงให้ดูดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า $\int \frac{dx}{\cot 2x(1 - \cos 2x)}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{\cot 2x(1 - \cos 2x)} = \int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos 2x(1 - \cos 2x)}$

ให้ $z = \tan x$

จะได้รูป



จากรูป $\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ และ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

จากเอกลักษณ์ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

เพราะฉะนั้น $\sin 2x = \frac{2z}{1+z^2}$

และ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

ดังนั้น $\cos 2x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

จาก $z = \tan x$

จะได้ $x = \arctan z$

$$dx = \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{\cot 2x(1 - \cos 2x)} = \int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos 2x(1 - \cos 2x)}$

$$= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}\left(1 - \frac{1-z^2}{1+z}\right)} \cdot \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

$$= \int \frac{2z}{2z^2(1-z^2)}\, dz$$

$$= \frac{dz}{z(1-z^2)}$$

พิจารณา $\frac{1}{z(1-z^2)} \equiv \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{1 - z^2}$

$$\frac{1}{z(1-z^2)} \equiv \frac{A(1-z^2) + z(Bz+C)}{z(1-z^2)}$$

$$1 \equiv (B - A)z^2 + Cz + A$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$B - A = 0$$

$$C = 0$$

$$A = 1$$

จากการแก้สมการจะได้ $A = 1$, $B = 1$ และ $C = 0$

ดังนั้น $\frac{1}{z(1-z^2)} = \frac{1}{z} + \frac{z}{1-z^2}$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{dx}{\cot 2x\ (1 - \cos 2x)} = \int [\frac{1}{z} + \frac{z}{1-z^2}]\ dz$

$$= \int \frac{1}{z}dz - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2}$$

$$= \ln|z| - \frac{1}{2}\ln|1 - z^2| + C$$

$$= \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\ln|1-\tan^2 x| + C$$

<u>คำอธิบาย</u> (1) ในบรรทัดที่ 12 เราอาจเปลี่ยน $2x$ เป็น u ก็ได้ ดังนั้นเราอาจแทนค่า $z = \tan \frac{u}{2}$ แต่มีข้อควรระวังคือจะได้ $du = \frac{2dz}{1+z^2}$ เพราะว่า $u = 2\arctan z$

(2) นิสิตจะสังเกตพบว่าไม่ว่าเราจะแทน $z = \tan \frac{x}{2}$ หรือ $z = \tan x$ เราจะได้ค่า $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ และ $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ จากข้อสังเกตนี้จึงทำให้เราทราบว่าเมื่อพบโจทย์การอินทิเกรตที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ เราจึงควรเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin x$ และ $\cos x$

คำชี้แจงเพิ่มเติมเรื่องที่ 8

เนื่องจากเราเรียนการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะในเรื่องที่ 6 มาแล้ว ดังนั้นเราจึงนำมาใช้ประโยชน์ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่กำลังของตัวแปรเป็นเศษส่วนหรืออยู่ในรูปกรณฑ์ (ซึ่งเปลี่ยนเป็นยกกำลังเศษส่วนได้)

1. การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ตัวแปรยกกำลังเศษส่วนนั้นทำได้ยาก เราจึงพยายามเปลี่ยนกำลังให้เป็นจำนวนเต็ม โดยกำหนดตัวแปรขึ้นมาอีกตัวหนึ่งให้มีความสัมพันธ์กับตัวแปรเดิม เช่นในกรณีที่ 1 เราให้ $x = t^n$ โดยที่ n เป็น ค.ร.น. ของส่วนของเลขชี้กำลังของ x ทั้งหมด ดังนั้นเราจะได้ฟังก์ชันใหม่เป็นฟังก์ชันตรรกยะของตัวแปร t ซึ่งนิสิตก็จะสามารถอินทิเกรตได้ ซึ่งก็เช่นเดียวกับกรณีที่2 คือพยายามเปลี่ยนพจน์ $(a + bx)^{\frac{r}{s}}$ เมื่อ r, s เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ ให้อยู่ในรูปตัวแปรใหม่ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มนั่นคือให้ $a+bx = t^n$ โดยที่ n เป็น ค.ร.น. ของส่วนของเลขชี้กำลังของ (a+bx)

ดังนั้นนิสิตจะสังเกตได้ว่าจุดประสงค์ใหญ่ในการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะเหล่านี้ก็คือพยายามทำให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะอย่างที่เราเคยเรียนกันมาแล้วในเรื่องที่ 6 ดังเช่น

ตัวอย่าง 8.1 บรรทัดที่ 2 เราเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้ $x = t^4$

บรรทัดที่ 5 จะได้ $4\int \frac{t^5}{1+t^3}\,dt$ ซึ่งเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ t

ตั้งแต่บรรทัดที่ 6 เป็นต้นไป ก็คือขั้นตอนการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่นิสิตเรียนมาแล้วในเรื่องที่ 6

บรรทัดสุดท้ายเราเปลี่ยนตัวแปรใหม่กลับไปเป็นตัวแปรเดิม โดยใช้ความสัมพันธ์ $x = t^4$

2. การอินทิเกรต $\int R(x^2, \sqrt[n]{a+bx^2})x\,dx$ ก็ไม่ต่างจากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 นั่นคือมีจุดมุ่งหมายที่จะเปลี่ยนฟังก์ชันเดิมซึ่งมีพจน์ $\sqrt[n]{a+bx^2}$ ให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่ตัวแปรยกกำลังเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งง่ายต่อการอินทิเกรต

<u>คำอธิบายตัวอย่าง 8.5</u>

บรรทัดที่ 2 พยายามจัดโจทย์ให้อยู่ในรูป $\int R(x^2, \sqrt[n]{a+bx^2})x\,dx$

$$\text{จะได้ } \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\cdot x\,dx$$

บรรทัดที่ 4 เปลี่ยนตัวแปรใหม่เพื่อให้มีกำลังเป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือให้ $16-x^2 = t^2$

บรรทัดที่ 9 จะได้ $-\int \frac{t^2}{16-t^2}\,dt$ ซึ่งเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ t

ตั้งแต่บรรทัดที่ 11 เป็นการหาค่า $\int \frac{-t^2}{16-t^2}\,dt$ ตามขั้นตอนการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะที่เราเรียนมาแล้วในเรื่องที่ 6

บรรทัดสุดท้าย เราเปลี่ยนตัวแปรใหม่กลับไปเป็นตัวแปรเดิมโดยใช้ความสัมพันธ์ $16-x^2 = t^2$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้าพบฟังก์ชันตรรกยะที่ตัวแปรยกกำลังเศษส่วนหรือมีพจน์อยู่ในรูปกรณฑ์ ให้นิสิตพยายามทำให้กำลังเป็นจำนวนเต็มให้ได้ เพื่อนิสิตจะได้นำการอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะในเรื่องที่ 6 มาใช้ประโยชน์ได้
2. เมื่อนิสิตอินทิเกรตโดยการแทนด้วยตัวแปรใหม่ และได้ผลลัพธ์ ตอนตอบนิสิตต้องเปลี่ยนตัวแปรใหม่กลับไปเป็นตัวแปรเดิม

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ชุดที่ 1

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้
และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$

2. $\int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{bx^{\frac{1}{4}}} dx$

3. $\int x\sqrt{2 + 3x}\ dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ชุดที่ 2

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้
และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$

2. $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}}$

3 $\int x^3\sqrt{16 + 5x^2}dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ชุดที่ 3

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้

และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$

3. $\int \frac{x^3}{(x^2-16)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

แบบทดสอบหน่วยที่ 3 ชุดที่ 4

เวลา 30 นาที

โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายใด ๆ ลงบนแบบทดสอบนี้

และส่งแบบทดสอบคืนพร้อมกระดาษคำตอบ (ข้อละ 10 คะแนน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

2. $\int \frac{x}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเทคนิคการอินทิเกรต โดยวิธีสอนแบบ PSI

บทคัดย่อ

ของ

จินตนา ศักดิ์สมบูรณ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2528

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนแบบ PSI เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตและเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตของนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนแบบ PSI เปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติ

กลุ่มตัวอย่างได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนรายวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2527 จำนวน 88 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 44 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 44 คน นิสิตในกลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบ PSI โดยศึกษาด้วยตนเองจากชุดการเรียนการสอน เรื่องเทคนิคการอินทิเกรตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และใช้ช่วงเวลาในการทดลอง 3 สัปดาห์ อาจารย์ของภาควิชาคณิตศาสตร์สอนนิสิตกลุ่มควบคุมโดยใช้เนื้อหาเดียวกัน และใช้เวลาในการเรียน 3 สัปดาห์ ๆ ละ 4 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการทดลองแล้วทดสอบนิสิตทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เทคนิคการอินทิเกรตที่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต 112 คณิตศาสตร์ 2 สร้างขึ้น

ผลของการทดลองปรากฏว่า นิสิตที่เรียนเรื่องเทคนิคการอินทิเกรตโดยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างจากนิสิตที่เรียนโดยวิธีสอนปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

A STUDY OF LEARNING ACHIEVEMENT ON TECHNIQUES OF INTEGRATION BY USING PSI

AN ABSTRACT

BY

JINTANA SAKSOMBOON

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Education degree

at Srinakharinwirot University

March 1985

The purposes of this study were to produce the PSI instructional package on Techniques of Integration, and to study students' learning achievement on Techniques of Integration taught by using the method of the PSI and the conventional teaching.

The subjects were 88 freshmen of Science program of Srinakharinwirot University, Prasarnmitr, registered for Math. 112 Mathematics II in the second semester of the acadamic year 1984. The subjects were equally devided into two groups as the experimental group and the controlled group. The experimental group was taught by the method of the PSI for three weeks. They studied from the instructional package on Techniques of Integration, constructed by the researcher. The lecturer of Math. 112 conventionally taught the controlled group the same content for three weeks, four hours per week. The achievement test on Techniques of Integration constructed by the lecturer of Math. 112 was administered to both groups at the end of the experiment.

It was found that the students' learning achievement on Techniques of Integration taught by using the method of the PSI and the conventional teaching was not different at the significant level of .05.