

พัฒนาการของการศึกษาทางคานคณิศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุวรรณา มุ่งเกษม

THE LIBRARY
COLLEGE OF EDUCATION
BANGKOK, THAILAND

เสนอต่อวิทยาลัยวิชาการศึกษา
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

๑๓ มีนาคม ๒๕๑๓

The Development of Mathematics Education
in the Secondary Level

ABSTRACT

BY

SUWANNA MUNGKASEM

Presented in Partial fulfilment of the Requirements
for the Master of Education Degree
at the College of Education

March 17, 1970

Purposes of the Study:

1. To study the development of elementary mathematics which are ordinarily taught in the secondary school.
2. To study the impact of modern mathematics in the United States, United Kingdom and Thailand.
3. To recommend guide lines to improve the mathematics education in Thailand.

Method.

According to this documentary research, the writer used descriptive and analytical approach.

Summary:

1. Now, the phrase "modern mathematics" implies curricular change in the schools as well as new branches of mathematics.
2. Most countries are taking steps to improve the mathematics education because they have recognized that understanding of mathematics is essential to everyone.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำวุฒิสภาพิจารณาปัญหานี้แล้ว เห็นสมควรรับ
เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต ของวิทยาลัยวิชาการศึกษาได้.

พินิจ วิจิตร รองอธิการ

สทศ. รัตนกุล กรรมการ

สทศ. / สทศ. ทรัพ กรรมการ

๑๗ มีนาคม ๒๕-๓

ประกาศคุณูปการ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณศาสตราจารย์ ดร.จิตต์ วัชรพลเดช ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ รัตนกุล และอาจารย์ชาติ เมืองนาโพธิ์ คณะกรรมการที่ปรึกษาทั้งสามท่าน ซึ่งได้กรุณาให้ทั้งคำปรึกษา ข้อเสนอแนะ ความคิด และความรู้ จนทำให้ปัญญานิพนธ์สำเร็จลงได้ด้วยดี

นอกจากนี้ผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์แผนกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กานดา ณ ถลาง อาจารย์ ดร.สุภา สุจริตพงศ์ และทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือในการทำปัญญานิพนธ์ครั้งนี้.

สุวรรณา มุ่งเกษม

สารบัญ

หน้า

หน้า

๑. บทนำ

ความสำคัญของคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

ข้อตกลงเบื้องต้น

๒. คณิตศาสตร์แผนใหม่

การคำนวณเกี่ยวกับตัวเลข

พีชคณิต

เรขาคณิต

ตรีโกณมิติ

สถิติและความน่าจะเป็น

แคลคูลัส

Analysis

✓ ตรีโกณมิติสู่ลูกบอล

สรุป

๓. ตอนที่ ๑. ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา

สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกาคริสต์ทศวรรษที่ ๑๙

สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกายุค ค.ศ. ๑๙๔๐

สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริการะหว่างปี ค.ศ. ๑๙๔๐ - ๑๙๕๕

องค์การต่าง ๆ ที่สนใจในการศึกษาทางคณิตศาสตร์

สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกายุค ค.ศ. ๑๙๕๕ เป็นต้นมา

สรุป

ตอนที่ ๒. ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ต่างประเทศ	๕๕
ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ก่อนปี ค.ศ. ๑๙๖๐	๕๕
ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ที่สำคัญตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๖๐	
เป็นต้นมา	๑๐๔
สรุป	๑๐๕
๔. ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทย	๑๑๐
ความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น	๑๑๑
ความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	๑๑๒
ความเคลื่อนไหวที่สำคัญในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทย	๑๑๓
สรุป	๑๓๑
๕. สรุปและข้อเสนอแนะ	๑๓๒
บรรณานุกรม	
ภาคผนวก ก.	๑๔๑
ภาคผนวก ข. ร่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทดลอง	๑๔๕
ภาคผนวก ค. แบบสอบถามผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์โรงเรียนมัธยมศึกษา	๑๕๕
ภาคผนวก ง. แบบสอบถามเกี่ยวกับหลักสูตรชั้น ม.ศ.ต้น พ.ศ. ๒๕๑๓ วิชาคณิตศาสตร์	๑๖๑
ภาคผนวก จ. รายชื่อบุคคลที่อ้างอิงในปริญญานิพนธ์	๑๗๐

บทนำ

วิชาคณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์สำคัญสาขาสหวิทยาการหนึ่งที่มีมนุษย์ได้คิดค้นขึ้น วิชานี้มีประวัติความเป็นมา ย้อนหลังไปถึงประมาณสี่หรือห้าพันปีก่อนคริสตกาล และได้พัฒนาต่อมาเป็นลำดับ โดยเฉพาะ ตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เป็นต้นมา ซึ่งความก้าวหน้าในวิชานี้ได้เป็นไปอย่างกว้างขวาง ลึกซึ้ง และรวดเร็วทั้งในแง่คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์ จนทำให้คณิตศาสตร์มีความ สำคัญต่อโลกมากยิ่งขึ้นกว่าที่เป็นมาในอดีต และทวีความสำคัญยิ่งขึ้นเป็นลำดับ

ความสำคัญของคณิตศาสตร์

กล่าวโดยทั่วไป คณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อมนุษย์ดังนี้คือ



๑. ความสำคัญในแง่ที่ว่าไปใช้ประโยชน์ได้ทั้งในชีวิตประจำวันและในงานอาชีพ

ก. ประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ในชีวิตประจำวันของทุกคนจะต้องใช้ คณิตศาสตร์และเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อยู่เสมอ จนบางครั้งเราไม่ทันนึกว่าเรากำลังใช้คณิตศาสตร์ อยู่ อาทิเช่น ในการดูเวลา การกระยะทาง การซื้อขาย การกำหนดรายรับรายจ่ายในครอบครัว หรือแม้แต่การเดินกีฬา เป็นต้น

ข. ประโยชน์ในงานอาชีพต่าง ๆ ในปัจจุบันนี้เป็นที่ประจักษ์ชัดยิ่งขึ้นว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับผู้ที่ทำงานเกี่ยวข้องกับการอุตสาหกรรม และธุรกิจดังจะเห็นได้จากตัวอย่างการประกาศแจ้งความรับสมัครงานของโรงงานอุตสาหกรรม ทุกแห่งในขณะนี้กระดานหนังสือพิมพ์ในสหรัฐอเมริกาทุกวันนี้ มีข้อความประโยคหนึ่งที่เหมือนกันหมดว่า "ถ้าท่านขาดความรู้ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แล้ว ใบสมัครของท่านจะไม่ได้รับการพิจารณา"^๓

^๑ Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, p. 32.

^๒ Ibid., p. 241.

^๓ โฮวาร์ด เอฟ. ฟรังกลิน แพร์ "คณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยของสหรัฐอเมริกา" วารสาร—คณิตศาสตร์ ม.ร.ว. พรวรรณกฤษณี สนิทวงศ์ แปลและเรียบเรียง ๒๕ : ๓๓๖ — ๓๓๘ มิถุนายน ๒๕๐๕.

เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ซึ่งเป็นทั้งนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งของโลก ได้กล่าวไว้ในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ ว่า "คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์" แต่มาในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นี้ เป็นที่ตระหนักกันโดยทั่วไปว่า ความเจริญก้าวหน้าของแขนงวิชาต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี (Technology) ตลอดจนสังคมวิทยา ต่างก็ขึ้นอยู่กับพัฒนาการของคณิตศาสตร์เป็นส่วนใหญ่ และในบางกรณีคณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนาวิทยาการสาขาต่าง ๆ จนเราไม่อาจจะขาดเครื่องมือนี้เสียได้

๒. ความสำคัญของคณิตศาสตร์ในแง่ที่เป็นเครื่องมือปลูกฝังและอบรมให้ผู้เรียนมีคุณสมบัตินิสัย ทักษะและความสามารถทางสมอง บางประการ เช่น ความเป็นคนช่างสังเกต การรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล และแสดงความคิดออกมาอย่างเป็นระเบียบ ง่ายสั้น และชัดเจน ตลอดจนความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา เป็นต้น

๓. ความสำคัญของคณิตศาสตร์ในแง่วัฒนธรรม คณิตศาสตร์เป็นมรดกทางวัฒนธรรมส่วนหนึ่งที่คนรุ่นก่อนได้คิดค้นสร้างสรรค์ไว้ และถ่ายทอดมาให้คนรุ่นหลัง ทั้งยังมีเรื่องให้ศึกษาค้นคว้าอีกมากโดยไม่ต่องคำนึงถึงผลที่จะเอาไปใช้ต่อไป ดังนั้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ อาจจะเป็นการศึกษาเพื่อชื่นชมในผลของคณิตศาสตร์ที่มีต่อวัฒนธรรม อารยธรรม และความก้าวหน้าของมนุษย์ และยังเป็นการศึกษาคณิตศาสตร์เพื่อคณิตศาสตร์เองได้อีกแห่งหนึ่งด้วย

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญทั้งต่อผู้เรียนเองและต่อสังคมโดยรวม ดังที่กล่าวนี้ และนับวันก็จะมีคามสำคัญมากยิ่งขึ้น สถานศึกษาของทุกประเทศจึงได้สนองความต้องการของสังคม โดยเริ่มสอนคณิตศาสตร์มาตั้งแต่ในระดับอนุบาล และจัดสอนติดต่อกันตลอดมาจนถึงในระดับอุดมศึกษา และนับตั้งแต่สมัยโบราณเป็นต้นมาเราก็ถือกันอยู่แล้วว่า ในบรรดาความรู้เบื้องต้นที่มนุษย์พึงเรียนรู้นั้น หมายรวมถึงวิชาเลขคณิตซึ่งเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ด้วย

ความสำคัญของการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

เมื่อพิจารณาโดยรวมแล้ว อาจกล่าวได้ว่าการจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ใน

ระดับมัธยมศึกษา เป็นเรื่องที่มีความสำคัญอย่างยิ่ง และเป็นปัญหาที่ใหญ่ที่สุดปัญหาหนึ่งของแต่ละประเทศ ทั้งนี้ เนื่องมาจากเหตุผลหลายประการ กล่าวคือ

๑. การศึกษาในระดับมัธยมศึกษา เป็นการลงทุนเพื่อผลิตกำลังคนระดับกลาง ซึ่งเป็นกำลังสำคัญส่วนใหญ่ในการประกอบการอุตสาหกรรมและธุรกิจต่าง ๆ อันจะช่วยแก้ปัญหาทางความเจริญธุรกิจและสังคมของประเทศ

ดังนั้นการจัดการศึกษาในระดับมัธยมศึกษา จึงต้องมุ่งทั้งทางด้านปริมาณและคุณภาพ โดยเฉพาะในด้านการศึกษานั้นจะต้องเน้นในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และภาษาต่างประเทศเป็นสำคัญ เพราะระบบการศึกษาของประเทศที่เจริญแล้ว เน้นการสอนวิชาทั้งสามนี้

๒. การศึกษาในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา เป็นพื้นฐานของการศึกษาในระดับอุดมศึกษา อันเป็นการลงทุนเพื่อผลิตกำลังคนระดับสูง ซึ่งมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อความก้าวหน้าของประเทศ

ดังนั้นการที่สามารถจัดการศึกษาในระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา ได้เหมาะสม นอกจากจะทำให้นักเรียนมีพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการศึกษาในชั้นสูงต่อไปแล้ว ยังจะทำให้สถาบันการศึกษาในระดับอุดมศึกษาสามารถยกมาตรฐานการศึกษาของตนให้สูงขึ้น เพื่อเป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตกำลังคนระดับสูง โดยเฉพาะนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ วิศวกร นายแพทย์ และนักบริหารธุรกิจ ได้พอเพียงกับความต้องการของประเทศได้อีกทางหนึ่งด้วย

ด้วยเหตุผลดังกล่าว ประกอบกับข้อเท็จจริงที่ยอมรับกันโดยทั่วไปในสมัยปัจจุบันว่า ความรู้และทักษะในวิธีการทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาวิชาการแขนงต่าง ๆ โดยเฉพาะวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ จึงอาจกล่าวได้ว่า การศึกษาทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างที่สุดเรื่องหนึ่ง และควรได้รับการเอาใจใส่ให้มากเป็นพิเศษ

๕
 เศรษฐาธิ วงศ์โกมลเชษฐ์ "การพัฒนากำลังคน" ใน ประมวลบทความการวางแผนการศึกษาและการพัฒนากำลังคน หน้า ๑๖๐.

๓. การจัดการศึกษาวิชาต่าง ๆ ในทุกระดับย่อมมีปัญหาหลายอย่าง โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ เพราะตามที่ปรากฏอยู่โดยทั่วไปนั้น นอกจากจะไม่สามารถจัดการศึกษาทางคณิตศาสตร์ให้โดยตรงกับจุดประสงค์ของการสอนวิชาแล้ว หลักสูตรและวิธีสอนที่ใช้ ยังลดทอนความก้าวหน้าในวิชานี้อยู่มาก ดังกล่าวของศาสตราจารย์เฟร์ (Howard F. Fehr) ที่ว่า "นักคณิตศาสตร์ในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ คนใดก็ตาม ถ้าได้เกิดใหม่ในสมัยนี้ ก็จะสามารถเป็นครูสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมได้แทบทุกแห่ง โดยไม่จำเป็นต้องเตรียมการสอนมาก่อน"

ด้วยเหตุนี้ในสมัยปัจจุบัน นานาประเทศทั่วโลกจึงได้ให้ความสนใจกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์กันมาก และต่างก็ได้คิดและทดลองเพื่อหาทางปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทุกระดับเพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการของประเทศ และเหมาะสมกับความเปลี่ยนแปลงและความก้าวหน้าของวิทยาการด้านนี้

สำหรับประเทศไทยเราก็เช่นกัน ดังจะเห็นได้ว่า ในระยะนี้ประเทศไทยกำลังอยู่ในระหว่างการดำเนินการเพื่อหาทางปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ผู้เขียนคิดที่จะส่งเสริมการดำเนินงานเรื่องนี้ จึงได้ทำการศึกษาค้นคว้าเรื่อง "พัฒนาการของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา" โดยมีความมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ผู้เขียนได้ตั้งจุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้าไว้ ๓ ประการ ดังต่อไปนี้

๑. เพื่อศึกษาถึงพัฒนาการและแนวโน้มในวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในส่วนที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แผนใหม่
๒. เพื่อศึกษาถึงพัฒนาการของการจัดการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศสหรัฐอเมริกา อังกฤษ และประเทศไทย
๓. เพื่อเสนอแนะแนวทางดำเนินการในการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาสำหรับประเทศไทย เพื่อให้ทันสมัยและเหมาะสมยิ่งขึ้น

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผู้เขียนเชื่อว่า การศึกษาค้นคว้าเรื่อง "พัฒนาการของการศึกษาทางคานณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา" มีความสำคัญดังต่อไปนี้คือ

๑. ผลจากการศึกษาค้นคว้าเรื่องนี้ จะเป็นพื้นฐานช่วยให้เข้าใจการศึกษาทางคานณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น และในเวลาเดียวกันก็จะเป็นสิ่งกระตุ้นให้ผู้ที่เกี่ยวข้องในวงการศึกษาทางคานณิตศาสตร์ของประเทศไทยตระหนักถึงความจำเป็นที่จะต้องมีการปรับปรุงการศึกษาทางคานณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาให้มีผลดียิ่งขึ้นในทุก ๆ ด้าน

๒. ผลจากการศึกษาค้นคว้าเรื่องนี้ อาจใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงการศึกษาทางคานณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย เพื่อให้บรรลุเป้าหมายดังต่อไปนี้ได้

ก. หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา เป็นหลักสูตรที่สนองความต้องการของประเทศ ทันความเจริญก้าวหน้าในทางคานต่าง ๆ ของโลก และส่งเสริมพัฒนาการของผู้เรียน

ข. วิธีสอนและการวัดผลที่ใช้ เหมาะสมและสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของวิชาคณิตศาสตร์

ค. หนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผลิตขึ้น สอดคล้องกับหลักสูตรและวิธีสอนตามนัยที่กล่าวข้างต้น

๓. ผลจากการศึกษาค้นคว้าเรื่องนี้ อาจใช้เป็นแนวทางในการจัดการฝึกหัดครูคณิตศาสตร์ที่จะออกไปสอนในระดับมัธยมศึกษา

๔. การศึกษาค้นคว้าเรื่องนี้ จะช่วยชี้แนะให้ครูได้พยายามติดตามความเคลื่อนไหวของการศึกษาทางคานณิตศาสตร์อยู่เสมอ กับทั้งจะเป็นแนวทางในการนำความรู้หรือความเปลี่ยนแปลงใหม่ ๆ นั้นมาใช้เป็นประโยชน์ได้ด้วย

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

๑. ผู้เขียนศึกษาเฉพาะพัฒนาการของคณิตศาสตร์เบื้องต้น (Elementary Mathematics) ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับมัธยมศึกษาเป็นส่วนใหญ่ โดยจะกล่าวถึงตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เป็นต้นมา

๒. ผู้เขียนศึกษาความเคลื่อนไหวในการจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์เฉพาะของสหรัฐอเมริกา ประเทศอังกฤษและประเทศไทย

๓. ผู้เขียนศึกษาพัฒนาการของการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์เฉพาะในระดับมัธยมศึกษา ซึ่งเทียบเท่ากับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ของประเทศไทย โดยจะกล่าวเน้นถึงการมัธยมศึกษาสายสามัญ (Academic Stream) เป็นสำคัญ

ขอตกลงเบื้องต้น

๑. ในการทำปฏิญานี้ฉบับนี้ บางกรณีผู้เขียนจำเป็นต้องใช้คำในภาษาอังกฤษแทรกด้วย ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปการทับศัพท์หรือมีฉันทาคำเป็นภาษาอังกฤษโดยตรง ทั้งนี้ เนื่องจากเหตุผล ๒ ประการคือ

- ๑) ยังไม่มีศัพท์บัญญัติวิชาคณิตศาสตร์คำนั้นในภาษาไทยซึ่งเป็นที่นิยมกันโดยทั่วไป
- ๒) ในบางกรณี การถอดความจากข้อความในภาษาต่างประเทศเป็นภาษาไทยทำให้ความหมายกลาดเคลื่อนไปจากเดิม

๒. ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้เขียนจะศึกษาในลักษณะของการวิจัยทางเอกสารแบบพรรณนาและวิเคราะห์ (Descriptive and Analytical Approach) โดยการค้นคว้าหาข้อมูลจากเอกสาร (Documentary Research) เป็นสำคัญ

๓. คำว่า "การศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ (Mathematics Education) ที่ใช้ในปฏิญานี้ฉบับนี้ หมายถึงการให้การศึกษา (ซึ่งรวมถึง หลักสูตร วิธีสอน แบบเรียน และอุปกรณ์การศึกษา) และการฝึกหัดครูในส่วนที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์

* คัดแปลงจาก คำจำกัดความของ การศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ (Science Education) ของ ซี.วี.กู๊ด (C.V.Good)

คณิตศาสตร์แผนใหม่

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความเจริญงอกงามและมีความเปลี่ยนแปลงไต่กันเองเกี่ยวกับสิ่งที่มีชีวิตทั้งหลาย คณิตศาสตร์มีวิชาที่ตายแล้วเหมือนภาษาละติน ซึ่งถือว่าเป็นภาษาที่ตายแล้ว นับตั้งแต่สมัยโบราณมาจนกระทั่งทุกวันนี้ คณิตศาสตร์ได้วิวัฒนาการมาเป็นลำดับ โดยเฉพาะในยุคการฟื้นฟูอักษรศาสตร์และศิลปวิทยา (Renaissance) ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๕ - ๑๖ ซึ่งได้เริ่มมีการวิจัยในทางคณิตศาสตร์ขึ้น และนับตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ เป็นต้นมา คณิตศาสตร์ได้เจริญก้าวหน้าไปในอัตราที่เร็วมากยิ่งขึ้นทุกขณะ แม้แต่ประวัติของคณิตศาสตร์ตั้งแต่ต้นจนถึงคริสต์ศตวรรษที่ ๑๕ เท่านั้น มอริทซ์ แคนทอร์ (Moritz Cantor) ยังเขียนเป็นเล่มใหญ่ได้ ๔ เล่ม โดยมีจำนวนหน้าเฉลี่ยเล่มละประมาณหนึ่งพันหน้า ซึ่งถ้าใช้ข้อมูลนี้เป็นหลัก อาจจะประมาณได้ว่า ถ้าจะเขียนประวัติของคณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๕ ให้ละเอียดทำนองนั้นแล้ว จะได้เป็นหนังสือขนาดเดียวกันอย่างน้อยที่สุด ๑๔ เล่ม และสำหรับประวัติของคณิตศาสตร์ในครั้งแรกของคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ จะมีมากกว่านี้อีกมากจนไม่มีผู้คิดประมาณไว้ เพราะเป็นระยะที่มนุษย์เราก้าวหน้าในเรื่องนี้มากที่สุด

คริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ เป็นศตวรรษที่มีผู้กล่าวถึงมากที่สุด^๑ ในประวัติของคณิตศาสตร์^๒ ทั้งนี้เพราะได้มีผู้คิดค้นและพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางและลึกซึ้งตลอดศตวรรษ กล่าวคือในตอนต้นศตวรรษนาเพียร์ (Napier) ได้คิดเรื่องลอการิทึม (Logarithm) แฮร์ริอท (Harriot) และอูเทรท (Oughtred) ได้คิดสัญลักษณ์ในวิชาพีชคณิต กาลิเลโอ (Galileo) ได้ตั้งวิทยาศาสตร์ที่มคอพลศาสตร์ (Dynamics) และเกปเลอร์ (Kepler) ได้ประกาศตั้งกฎการเคลื่อนที่ของดาวพระเคราะห์ ครั้นในระยะต่อมาปรากฏว่าเดสอาร์ก (Desargues) และพาสคาล (Pascal) ได้เริ่มต้นศึกษาเรขาคณิตอีกแขนงหนึ่งคือวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟ (Projective Geometry) เดการ์ต (Descartes) และเฟอร์แมท (Fermat)

^๑ Eves, H., An Introduction to the History of Mathematics, pp. 352-353.

^๒ Ibid., p. 241.

* ใ้เริ่มทศวรรษวิธีการของเรขาคณิตอีกแบบหนึ่งคือเรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry หรือ Coordinate Geometry) เฟอร์แมทได้เริ่มวางรากฐานของทฤษฎีจำนวน (Theory of Numbers) * และไฮเกนส์ (Huygens) ได้มีส่วนให้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีความน่าจะเป็น (Theory of Probability) และในเรื่องอื่น ๆ อีกมาก ครั้นเกือบถึงปลายศตวรรษนี้ หลัจากที่นักคณิตศาสตร์ทั้งหลายในศตวรรษเดียวกันได้ศึกษาความรู้ที่เป็นพื้นฐานไว้ให้แล้ว นิวตัน (Newton) และไลบ์นิทซ์ (Leibnitz) ก็สามารถนำคณิตศาสตร์เข้าสู่ยุคใหม่ของวิชาแคลคูลัส (Calculus) ได้

เหตุการณ์อย่างหนึ่งในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ ที่มีความสำคัญมากต่อการที่ไลบ์นิทซ์ ซึ่งเป็นทั้งนักปรัชญา นักตรรกศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันที่ยิ่งใหญ่ ได้ริเริ่มพัฒนาตรรกศาสตร์แผนเก่าของอริสโตเติล (Aristotle) เมื่อปี ค.ศ. ๑๖๘๕ จนในที่สุดด้วยความร่วมมือของนักคณิตศาสตร์และนักตรรกศาสตร์กันสำคัญบุคคลต่อมาเช่นบูล (Boole) ไวท์เฮด (Whitehead) และรัสเซลล์ (Russell) ตรรกศาสตร์แผนเก่าของอริสโตเติลได้เปลี่ยนรูปมาเป็นตรรกศาสตร์แผนใหม่ หรือตรรกศาสตร์แผนปัจจุบัน ซึ่งเป็นตรรกศาสตร์สัญลักษณ์หรือตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (Symbolic Logic) หรือ Mathematical Logic) ดังที่ศึกษากันในสถาบันอุดมศึกษาบางแห่งของประเทศไทยขณะนี้

ผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในความเป็นไปของคณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เป็นบุคคลจากแทบทุกสาขาวิชา มีทั้งมีแก่นักคณิตศาสตร์เท่านั้น และสภาพการณ์ทั้งในด้านสังคม เศรษฐกิจ และการเมืองซึ่งกำลังเจริญก้าวหน้าก็นับว่ามีส่วนช่วยด้วย กล่าวคือ ในภาวะที่สังคมมีการต่อสู้เพื่อสิทธิมนุษยชน มีการแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างชนชาติต่าง ๆ มีผู้คิดสร้างวัสดุใหม่ ๆ ที่มีความสำคัญในทางเศรษฐกิจเพิ่มขึ้น และการที่รู้จักใจความคิดอย่างมีเหตุผล ขอบข่ายใหม่ ๆ และกระตือรือร้น ทั้งพร้อมที่จะยอมรับสิ่งใหม่ ๆ หรือแม้กระทั่งการเป็นผู้คิดสร้างสิ่งใหม่ ๆ ขึ้นมาเองด้วย

นับตั้งแต่มีการศึกษาคณิตศาสตร์ในตอนปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ แล้ว คนส่วนมากก็สนใจแก่ประโยชน์ที่จะเอาไปใช้เป็นส่วนใหญ่ ไม่มีผู้เอาใจใส่ถึงรากฐานของวิชา ทั้ง ๆ ที่วิชานี้ยังไม่มีรากฐานที่มั่นคง เพิ่งจะมาในตอนปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ นี้เองที่นักคณิตศาสตร์ได้เริ่มตระหนักถึงความสำคัญ

ของเรื่องนี้ และโคพยายามจะใช้วิธีการของ Analysis ในการช่วยสร้างรากฐานของวิชาแคลคูลัส
 แต่งานนี้เป็นงานที่ละเอียดและต้องใช้เวลานานมากจนมาถึงในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ ด้วย แต่ถึงกระนั้น
 เมื่อทำได้สำเร็จก็ได้เป็นสิ่งที่ทำให้สามารถสร้างรากฐานของคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ ให้มั่นคงตามไปด้วย
 ทั้งยังเป็นการปฐมนิเทศ Concepts ที่สำคัญ ๆ ให้เข้าใจได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้นอีกมาก เช่น Concepts
 เกี่ยวกับฟังก์ชัน (Function) ลิมิต (Limit) ความต่อเนื่อง (Continuity) Differentiability
 และ Integrability เป็นต้น ซึ่งจำเป็นจะต้องให้นิยามอย่างรัดกุม งานประเภทนี้นอกจากจะมีคุณค่า
 ในตัวเองแล้ว ยังเป็นสิ่งจำเป็นให้นักคณิตศาสตร์สนใจในการสร้างขอบสรุป (Generalization) และสนใจ
 ในลักษณะที่เป็นนามธรรม (Abstraction) ของเนื้อหาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้น ซึ่งทั้งสองเรื่อง
 นี้ นับว่าเป็นลักษณะเด่นของคณิตศาสตร์ในสมัยปัจจุบัน แต่อย่างไรก็ตามในขณะทำงานดังกล่าวดำเนินไป
 นักคณิตศาสตร์บางคนได้ค้นพบเรื่องที่เป็นข้อขัดแย้ง (Paradoxes) ด้วย เช่น ข้อขัดแย้งของทฤษฎีทางเซต
 ที่กล่าวว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดคือเซตของเซตทั้งหมด (Set of all sets) เพราะมีข้อแย้งว่า
 ไม่สามารถมีเซตเช่นนี้ได้ นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังจึงตกลงกันว่า ไม่พิจารณาถึงเซตประเภทนี้ เป็นต้น

โดยสรุป อาจกล่าวได้ว่า ความก้าวหน้าของคณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ ส่วนใหญ่เกี่ยวข้อง
 กับการนำเอาวิธีการต่าง ๆ ของวิชาแคลคูลัส ซึ่งเป็นวิธีการที่มีคุณค่าและมีประสิทธิภาพไปใช้ในสาขาวิชา
 ต่าง ๆ ต่อมาในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ จึงได้มีผู้สนใจคิดสร้างรากฐานของวิชาแคลคูลัสให้มั่นคงยิ่งขึ้น
 และหลังจากนั้นคือในครึ่งแรกของคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นักคณิตศาสตร์จึงมุ่งศึกษาความรากฐานของ
 คณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น ตลอดจนพยายามขยายความรู้ต่าง ๆ ที่ได้รู้มาแล้วให้ใช้ได้
 กับกรณีทั่ว ๆ ไป ของเนื้อหานั้น ๆ (Generalize) ประกอบกันไปด้วย /

การศึกษาประวัติของคณิตศาสตร์ในระยะเวลาดังกล่าวนี้ จำเป็นต้องพิจารณาถึงความเป็นไปได้
 ในสาขาวิชาอื่น ๆ และเหตุการณ์อื่น ๆ ที่มีผลเกี่ยวเนื่องมาถึงเรื่องคณิตศาสตร์ด้วย เช่น ความก้าวหน้า
 เรื่องการประกันชีวิต การสร้างกองทัพเรือให้ยิ่งใหญ่ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ การปฏิวัติอุตสาหกรรม
 ในทวีปยุโรปซึ่งทำให้เกิดปัญหาเกี่ยวกับเศรษฐกิจและเทคโนโลยีตามมาด้วย ตลอดจนความขัดแย้งทางลัทธิ
 การเมืองระหว่างประเทศ และความก้าวหน้าในการสำรวจอวกาศ เป็นต้น ซึ่งเป็นผลทำให้เรื่องของ
 คณิตศาสตร์ซับซ้อนและกว้างขวางจนสรุปจะประมาณได้ และยังทำให้ขอบเขตของคณิตศาสตร์ออกเป็น ๒ สาขา
 ใหญ่ ๆ ด้วย คือ คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (Pure Mathematics) และคณิตศาสตร์ประยุกต์ (Applied
 Mathematics)

พัฒนาการของคณิตศาสตร์เบื้องต้น (Elementary Mathematics) โดยสังเขป

ในตอนต่อไป จะกล่าวถึงพัฒนาการของคณิตศาสตร์เบื้องต้น ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับมัธยมศึกษาเป็นส่วนใหญ่โดยสังเขป ตามหัวข้อต่อไปนี้

๑. การคำนวณเกี่ยวกับตัวเลข
๒. พีชคณิต
๓. เรขาคณิต
๔. ทรีโกโนมีตรี
๕. สถิติและความน่าจะเป็น (Statistics and Probability)
๖. แคลคูลัส (Calculus)
๗. Analysis
๘. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic)

๑. การคำนวณเกี่ยวกับตัวเลข

เป็นที่ประจักษ์ชัดว่า ตัวเลขมิได้มีความสำคัญอยู่แต่ในเรื่องของคณิตศาสตร์เท่านั้น ในสาขาวิชาต่าง ๆ ตลอดจนการทำงานบางอย่างจำเป็นต้องอาศัยการคำนวณเกี่ยวกับตัวเลข เช่นทางดาราศาสตร์ การเดินเรือ การค้าขาย วิศวกรรมและการสงคราม เป็นต้น เมื่อเป็นเช่นนี้ ความต้องการที่จะให้การคำนวณเป็นไปโดยรวดเร็วและถูกต้อง จึงนับวันแต่จะมีมากขึ้น นับตั้งแต่สมัยโบราณจนกระทั่งทุกวันนี้ และจะเห็นได้ว่า นักคณิตศาสตร์สามารถสนองความต้องการดังกล่าวได้ดีขึ้นเป็นลำดับ เพราะได้มีการคิดค้นวิธีการหรือสร้างเครื่องมือเพื่อช่วยอำนวยความสะดวกในการคำนวณเกี่ยวกับตัวเลขรวมทั้งหมด

๔ ประเภทตามลำดับที่ติดต่อกันมาคือ

- ๑) ระบบการเขียนเลขแบบถักตำแหน่งเป็นสำคัญ (Positional Numeral Systems)
- ๒) ทศนิยม (decimal Fractions)
- ๓) ลอการิทึม (Logarithm)
- ๔) เครื่องจักรกลที่ช่วยคิดคำนวณ (Computing Machines)

ระบบการเขียนเลขแบบถือตำแหน่งเป็นสำคัญ (Positional Numeral Systems)

ระบบการเขียนเลขแบบถือตำแหน่งเป็นสำคัญ เป็นแบบที่ใช้โดยทั่วไปในปัจจุบัน ซึ่งอธิบายได้ว่า ถ้าเลือกเลข b เป็นฐาน นักคณิตศาสตร์จะต้องคิดสัญลักษณ์ขึ้นมาใช้ให้โดยรวมทั้งหมด b ตัว และโดยปกติ จะเริ่มตั้งแต่เลข 0 จนถึง $b-1$ หลังจากนั้นจะใช้สัญลักษณ์เหล่านี้เขียนเรียงกันเพื่อแทนจำนวนเลข มากน้อยเท่าไรก็ได้ โดยตกลงกันว่า สัญลักษณ์ที่เขียนแต่ละตัวนั้น จะต้องมียกกำลังของฐานตามตำแหน่ง ที่สัญลักษณ์นั้นปรากฏอยู่ด้วยเสมอ เช่นการเขียนเลขในระบบฮินดู - อารบิก (Hindu-Arabic Numeral System) ซึ่งใช้ 10 เป็นฐาน ในระบบนี้จะมีสัญลักษณ์แทนจำนวนเลข 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 และ 0 สมมติว่าต้องการเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนสองพันสี่ร้อยแปดสิบเก้า จะเขียนได้ดังนี้ "2489" โดยที่เลข 2 จะแทน $2(10)^3$ เลข 4 จะแทน $4(10)^2$ และเลข 8 จะแทน $8(10)^1$ ซึ่งอาจเขียนเป็นกฎทั่ว ๆ ไป ของการเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนเลข ได้ดังนี้

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$$

โดยที่ $0 \leq a_i < b$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

ระบบการเขียนเลขแบบถือตำแหน่งเป็นสำคัญ มีข้อได้เปรียบกว่าระบบการเขียนเลขแบบอื่น ๆ ที่ใช้ชื่อยกก่อนหน้านั้น กล่าวคือ นอกจากจะต้องจำสัญลักษณ์ที่ใช้เพียง b ตัวเท่านั้นแล้ว ยังช่วยอำนวยความสะดวกในเวลาดิक्คำนวณด้วย

ทศนิยม (Decimal Fractions) การใช้ทศนิยม เป็นวิธีการที่ช่วยอำนวยความสะดวก ในการคิดคำนวณได้อย่างหนึ่ง และนับตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ ๑๖ ซึ่งได้มีการกล่าวถึงทฤษฎีเรื่องทศนิยม เป็นครั้งแรกแล้ว ทศนิยมได้เข้าไปแทรกอยู่ในเรื่องของคณิตศาสตร์อื่น ๆ โดยทั่วไป

ลอการิทึม (Logarithm) ลอการิทึมคือเลขตัวที่เป็นเลขชี้กำลัง (Exponent หรือ Index) เช่น $y = a^x$ เราเรียกว่า x เป็นลอการิทึมของ y ที่มีฐานเป็น a ซึ่งจากคำจำกัดความเช่นนี้

^๕ Eves, H., op. cit., p. 15.

^๖ Smith, D.E., History of Mathematics, p. 240.

^๗ Allendoerfer, C. B., and Oakley, C.O., Principles of Mathematics, p. 229.

จะทำให้ได้กฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในเรื่องของลอการิทึมมาจากกฎเกณฑ์ของเรื่องเลขตัวที่เป็นเลขชี้กำลัง แต่มีข้อขัดแย้งอยู่อย่างหนึ่งในกรณีนี้คือ นาเพียร์ (Napier) และเมอร์ไบ (Burgi) คิดเรื่องลอการิทึมได้ก่อนที่จะมีผู้คิดเรื่องเลขชี้กำลัง

ประโยชน์ที่สำคัญของลอการิทึม คือ สามารถแปลงการคูณและการหารเป็นการบวกและการลบตามลำดับ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายขึ้นและทำได้รวดเร็วกว่าเดิม ทั้งนี้เพราะว่า $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ และ $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$ ซึ่งจากกฎเกณฑ์เช่นนี้ทำให้ผู้สมารถนำไปสร้างเครื่องมือชนิดหนึ่งคือ ไม่นเลื่อนหรือ Slide Rule (ไม้บรรทัดที่มีบางส่วนเลื่อนไปมาได้) เพื่อใช้ช่วยในการคิดคำนวณ

เครื่องจักรกลที่ช่วยคิดคำนวณ (Computing Machines) จากหลักฐานทางประวัติศาสตร์ทำให้ทราบว่า มนุษย์เราสามารถคิดสร้างเครื่องจักรที่ช่วยคิดคำนวณได้ตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๖๔๒^{๑๐} แต่เครื่องนี้ผู้สร้างประสงค์จะใช้ในงานตรวจสอบบัญชีเท่านั้น จึงเป็นเครื่องที่สามารถบวกเลขได้อย่างเดียว และใช้เลขได้ไม่เกิน ๖ หลักตามความจำเป็นในยุคนั้น หลังจากนั้นอีกประมาณ ๓๐ ปี จึงมีผู้คิดสร้างเครื่องจักรที่สามารถคูณได้ และอีกประมาณสองศตวรรษต่อมาจึงมีผู้ดัดแปลงเครื่องให้สามารถลบและหารได้

ในปี ค.ศ. ๑๘๙๕ ชาวอเมริกันคนหนึ่งชื่อ เอฟ เอส บอลด์วิน (F.S. Baldwin) ได้รับอนุญาตให้จดทะเบียนเครื่องจักรที่ช่วยคิดคำนวณเป็นเครื่องแรก ซึ่งสามารถบวก ลบ คูณและหารได้ โดยไม่ต้องประกอบใหม่และอาจกล่าวได้ว่า เครื่องจักรที่ช่วยคำนวณเครื่องนี้ของบอลด์วิน มีโครงสร้างทำนองเดียวกับเครื่องคิดเลขแบบตั้งโต๊ะที่ทำงาน โดยใช้ไฟฟ้าในปัจจุบันหลายเครื่อง เช่นเครื่อง Friden, Marchant และ Monroe เป็นต้น

นักคณิตศาสตร์คนสำคัญที่ให้แนวคิดในการสร้างเครื่องคำนวณ (Computer) เป็นคนแรก ก็คือ ชาลส์ แบบเบจ (Charles Babbage)^{๑๒} ซึ่งเริ่มงานเมื่อประมาณปี ค.ศ. ๑๘๑๒ และแม้ว่าแบบเบจจะไม่สามารถ

^๘ Eves, H, op. cit., p.246.

^๙ Allendoerfer, C.B., and Oakly, C.O., op. cit., pp.230-231.

^{๑๐} Eves, H, op. cit., p.262.

^{๑๑} Ibid., p.263.

^{๑๒} Ibid.

สร้างเครื่องแบบใดได้สำเร็จ แต่โครงการที่แบบเบจคิดขึ้นเป็นสิ่งที่มีความสำคัญมาก เพราะได้ให้แนวคิดในการสร้างเครื่องคำนวณไว้ บรรดาเครื่องคำนวณที่ได้แบบมาจากแนวความคิดของแบบเบจที่สำคัญ ๆ ได้แก่ เครื่องคำนวณ the ASCC, the ENIAC, SSEC, EDVAC, MANIAC, และ UNIVAC เป็นต้น

เครื่องคำนวณต่าง ๆ ที่กล่าวนี้ ได้รับการดัดแปลงแก้ไขให้สามารถทำงานได้อย่างน่าอัศจรรย์ใจมากยิ่งขึ้นเป็นลำดับ จนอาจกล่าวได้ว่า ประมาณทุก ๖ ปี^{๑๓} จะต้องมีความสามารถคิดสร้างเครื่องคำนวณแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพเหนือแบบเดิมได้ ทั้งในด้านความเร็ว (Speed) ความเชื่อมั่นได้ (Reliability) และความสามารถในการบันทึก (Memory) ซึ่งความก้าวหน้าในเรื่องนี้เป็นสิ่งหนึ่งที่ทำให้คณิตศาสตร์มีประโยชน์ต่องานอาชีพต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง นอกจากนี้ยังเท่ากับเป็นการกระตุ้นให้นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษา ค้นคว้าเรื่องเกี่ยวกับตัวเลข (Numerical Analysis) มากขึ้นด้วย

๒. พีชคณิต

วิชาพีชคณิต เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งได้มีวิวัฒนาการมาเป็นลำดับ นับตั้งแต่เริ่มมีพีชคณิตแบบที่ใช้คำบรรยายแทนสัญลักษณ์ (Rhetorical Algebra) ตั้งแต่ประมาณ ๒,๐๐๐ ปีก่อนคริสตกาล จนกลายมาเป็นพีชคณิตแบบที่ใช้คำย่อ (Syncopated Algebra) เมื่อประมาณคริสต์ศตวรรษที่ ๓ และนับตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ ๑๖ เป็นต้นมาก็ได้รับการดัดแปลงแก้ไขให้เป็นพีชคณิตแบบที่ใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Algebra) ดังที่ปรากฏอยู่ในปัจจุบัน

ความเปลี่ยนแปลงที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งในวิชาพีชคณิต คือ^{๑๔} ในตอนต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๑๔ นักคณิตศาสตร์ถือว่า พีชคณิตเป็นเลขคณิตซึ่งได้สรุปให้เป็นกรณีทั่ว ๆ ไป (Generalized Arithmetic) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งในวิชาเลขคณิต ตัวเลขจะมีค่าเฉพาะลงไปตามที่ปรากฏอยู่ แต่ในวิชาพีชคณิต ตัวอักษรจะเป็นสัญลักษณ์แทนตัวเลขใด ๆ ก็ได้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์บางคนได้เริ่มตระหนักถึงโครงสร้างของวิชาพีชคณิตแบบนี้ว่า จะต้องมีความสัมพันธ์หรือกฎต่าง ๆ ควบคุมโครงสร้างอยู่ด้วย เช่นกฎการสลับที่ (Commutative Law) ของการบวกและการคูณ กฎการรวมหมู่ (Associative

^{๑๓} Ibid., p.264.

^{๑๔} Bell, E.T., The Development of Mathematics, p.123.

^{๑๕} Eves, H., op. cit., p.367.

ของการบวกและการคูณ และกฎการกระจายผลคูณของผลบวก (Distributive Law of Multiplication over Addition) เป็นต้น แต่หลังจากนั้นเล็กน้อย นักคณิตศาสตร์สามารถคิดพีชคณิตแบบใหม่ที่มีโครงสร้างต่างไปจากที่กล่าวนี้ได้ ซึ่งได้ทำให้วิชาพีชคณิตก้าวไปสู่ลักษณะที่เป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น

นักคณิตศาสตร์คนแรกที่ทำสำเร็จคือ คับลิว อาร์ แฮมิลตัน^{๑๖} (W.R. Hamilton) ในปี ค.ศ. ๑๘๔๓ แฮมิลตันได้คิดพีชคณิตขึ้นมาแบบหนึ่งชื่อ "Quaternion Algebra" ซึ่งในเรื่องของการคูณจะไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่ และนอกจากแฮมิลตันแล้ว ยังมีนักคณิตศาสตร์คนอื่น ๆ คิดได้อีกด้วย เมื่อใดมีผู้เริ่มต้นไว้เช่นนี้ นักคณิตศาสตร์ในสมัยหลังจากนั้น จึงเริ่มคิดพีชคณิตแบบใหม่ ๆ เพิ่มขึ้น โดยการตัดทอนบางอย่างของพีชคณิตแบบธรรมดาหรือแบบเก่าออกไป หรือไม่เช่นนั้นก็คิดทศกัณฐ์ใหม่เพื่อใช้แทนทศกัณฐ์เก่าบางทศกัณฐ์ ซึ่งจากวิธีการเหล่านี้ ทำให้นักคณิตศาสตร์สามารถคิดพีชคณิตที่มีโครงสร้างหรือระบบแตกต่างกันได้มากกว่า ๒๐๐ แบบแล้ว ตัวอย่างเช่น Groupoids, Quasigroups, Loops, Semigroups, Monoids, Groups, Rings, Integral Domains, Lattices, Division Rings, Boolean Rings, Boolean Algebras, Fields, Vector Spaces, Jordan Algebras และ Lie Algebras เป็นต้น (สองแบบหลังเป็นตัวอย่างของพีชคณิตแบบที่ไม่เป็นไปตามกฎการรวมหมู่)

พีชคณิตแบบใหม่ทั้งหมดนี้ ส่วนมากมีกำเนิดในคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ ซึ่งนับว่าเป็นการสะท้อนให้เห็นลักษณะเด่นของคณิตศาสตร์ในสมัยปัจจุบันนี้ได้เป็นอย่างดีว่า นักคณิตศาสตร์เน้นเรื่องการสร้างข้อสรุป (Generalization) และลักษณะที่เป็นนามธรรม (Abstraction) ของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ

๓. เรขาคณิต

ก. เรขาคณิตแบบของยูคลิด (Euclidean Geometry)

จากประวัติของคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่า แม่ว่าชนชาวบาบิโลเนียนและชาวอียิปต์จะมีความรู้ในทางคณิตศาสตร์บ้างเรื่องมาเป็นเวลานานแล้ว แต่คณิตศาสตร์ในสมัยนั้นเปรียบเสมือนเป็นวิทยาศาสตร์

^{๑๖} Ibid.

^{๑๗} Ibid.

ภาคปฏิบัติเพื่อช่วยงานทางด้านเกษตรกรรมและวิศวกรรม ดังนั้นเรื่องของคณิตศาสตร์จึงเน้นเฉพาะเรื่องการวัดหรือคำนวณพื้นที่และที่เกี่ยวข้องกับเลขคณิตภาคปฏิบัติเท่านั้น ในระยะต่อมาเมื่ออารยธรรมได้เปลี่ยนแปลงไป และมนุษย์เริ่มเปลี่ยนความคิดเห็นตามแบบเดิมมาเป็นแบบใหม่ที่สนใจศึกษาเหตุผลของเรื่องต่าง ๆ ค่อย ๆ ค่อย ๆ ในที่สุดจึงได้ทำให้เกิดมีวิชาพีชคณิตขึ้นมาจากวิชาเลขคณิต และมีวิชาเรขาคณิตภาคทฤษฎีเกิดขึ้นมาจากการคำนวณหาเนื้อที่

บุคคลแรกที่คิดใช้เหตุผลเพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีนั้นถูกเหินห่างไปจากการทดลองปฏิบัติจริงหรือเพียงแต่มานาโดยนัยคิดเอาเอง ไคแกเทลีส (Thales) ซึ่งมีชีวิตอยู่ในสมัยศตวรรษที่ ๖ ก่อนคริสตกาล และได้รับยกย่องว่าเป็นนักปราชญ์หนึ่งในเจ็ดคนของสมัยโบราณ

หลังจากนั้นเป็นต้นมา ได้มีผู้คิดค้นการพิสูจน์และขยายความรู้ในเรื่องต่าง ๆ จนกระทั่งถึงศตวรรษที่ ๓ ก่อนคริสตกาล ยูคลิด (Euclid) จึงได้รวบรวมเรื่องเหล่านี้รวมทั้งผลงานของตนเองบางส่วน ไว้ในหนังสือชุดหนึ่งชื่อ Elements

หนังสือชุด Elements ของยูคลิดที่กล่าวถึงนี้ นับว่าเป็นหนังสือที่สำคัญที่สุดเล่มหนึ่งในประวัติของมนุษยชาติ และอาจกล่าวได้ว่า ไม่มีตำราเล่มใดที่จะมีผู้นำไปตีพิมพ์และศึกษาอย่างกว้างขวางมากเท่านี้ ยกเว้นหนังสือพระคัมภีร์ (Bible) เพราะนับตั้งแต่ได้รับการตีพิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ. ๑๔๘๒ แล้ว ได้มีผู้นำไปตีพิมพ์ซ้ำอีกมากกว่าหนึ่งพันครั้ง และนำไปใช้สอนในโรงเรียนนับเป็นเวลานานกว่าสองพันปีแล้ว

หนังสือชุด Elements ของยูคลิดมีทั้งหมด ๑๓ เล่ม และนับทฤษฎีและบทสร้างได้รวมกันทั้งหมด ๔๖๕ บท ส่วนใหญ่เป็นเนื้อหาทางเรขาคณิต แต่กล่าวถึงทฤษฎีจำนวน (Number Theory) และพีชคณิตเบื้องต้นบางเรื่องประกอบด้วย เนื้อหาดังกล่าวนี้นับว่าเป็นผลงานของผู้อื่น อาทิเช่นพีทาโกรัส (Pythagoras) และบรรดาลูกศิษย์ ฮิปโปเครติส (Hippocrates) ยูโดกซัส (Eudoxus) และซีโอคอรุส (Theodorus) เป็นต้น

^{๑๘} Ibid., p. 29.

^{๑๙} Heath, T.L., A History of Greek Mathematics Vol. I., p. 128.

^{๒๐} Ibid., p. 358.

^{๒๑} Euclides, The Elements of Euclid, translated by Sir Thomas L. Heath, p. 97.

แต่ถึงกระนั้นคนโดยทั่วไปก็ยกย่องยูคลิดในความสามารถของท่าน ที่ไวกัดเลือกผลงานของผู้อื่นมารวบรวมไว้ และจัดเรียงลำดับเขาคอยกันอย่างเหมาะสมที่สุด

ลักษณะสำคัญของหนังสือ Elements ของยูคลิด

- ๑) หนังสือ Elements ประกอบด้วย พวกที่มีนิยาม (Definitions), Postulates, Axioms (หรือ Common Notions) และ Propositions
- ๒) ยูคลิดได้ให้นิยามคำศัพท์ที่ใช้ในหนังสือทุกคำ เช่น จุด เส้น สามเหลี่ยม เป็นต้น
- ๓) ยูคลิดถือว่า Axioms และ Postulates มีความหมายต่างกัน กล่าวคือ^{๒๒}
Axioms หมายถึง สิ่งที่ยกถือว่าเป็นจริงโดยทั่วไปในวิทยาการทุกแขนง เช่น ถ้าหักสิ่งที่เท่ากันออกจาก สิ่งที่เท่ากัน ส่วนที่เหลือย่อมเท่ากัน เป็นต้น ส่วน Postulates หมายถึง สิ่งที่ยกถือว่าเป็นจริงในทาง เรขาคณิต เช่น จะลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งได้ เป็นต้น แต่ในสมัยปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์ไม่ถือว่าคำทั้งสองนี้มีความหมายต่างกัน
- ๔) ส่วนมากการพิสูจน์ตามที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเป็นวิธีที่ถูกต้องตรงตามหลักเกณฑ์อย่างเคร่งครัด ยิ่งกว่านั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบางบทของยูคลิด อาจจัดได้ว่าเป็นวิธีการให้เหตุผลในทางคณิตศาสตร์ที่สละสลวย มากจนถึงเป็นแบบฉบับที่ดีเลิศได้^{๒๓} เช่น การพิสูจน์เรื่องจำนวนเฉพาะไม่มีจำกัด (The number of prime numbers is infinite) เป็นต้น
- ๕) ขอบเขตหรือจุดอ่อนในหนังสือ Elements ของยูคลิดตามความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์ รมหลังมี ๓ ประการ กล่าวคือ
 - (๑) การสมมติลอย ๆ โดยไม่มีกติกา (Axioms หรือ Postulates) เป็นหลัก^{๒๔} ตัวอย่างเช่น
 - (ก) ยูคลิดถือว่า เส้นตรงยาวไม่จำกัด แต่ข้อความใน Postulates หมายถึง

^{๒๒}

Ibid., p. 119.

^{๒๓}

Eves, H., op.cit., pp. 120-121.

^{๒๔}

Eves and Newsom, An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, p. 37.

เราจะต่อเส้นตรงใดโดยไม่มีสิ้นสุด(Endless) หรือไม่มีขอบเขตจำกัด (Boundless) เท่านั้น และในปี ค.ศ.๑๘๕๕ รีมันน์ (Riemann) สามารถแสดงให้เห็นความแตกต่างระหว่างการไม่มีขอบเขตจำกัด (Unboundness) และความไม่จำกัด (Infinitude) ของเส้นตรงใด

(ข) บุคลิกถือว่า ถ้าเส้นตรงผ่านจุดยกเข้ามาในรูปสามเหลี่ยมแล้ว เมื่อต่อเส้นตรง เส้นนี้ออกไปมากพอ เส้นตรงก็จะทอดตัด ด้านซึ่งอยู่ตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยมนั้น แต่ต่อมาในปี ค.ศ.๑๘๘๒ พาสช์ (Pasch) ได้ตระหนักว่าจำเป็นจะต้องมีกติการับรองด้วย ดังนั้นจึงมีผู้เรียกข้อกติกานี้ในเรื่องนี้ว่า กติกาของพาสช์ (Pasch's Axiom)

(ค) บุคลิกถือว่า จะต้องมียุคตัดของวงกลมหรือของเส้นตรงเสมอ แต่นักคณิตศาสตร์ ตระหนักว่า จำเป็นจะต้องมีกติกาเรื่องการต่อเนื่อง (Continuity Postulate) รับรองด้วย เช่นกติกาสองเซกเคินท์ (Dedekind) เป็นต้น

(ง) บุคลิกถือว่า มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เชื่อมระหว่างจุดที่ต่างกัน สองจุดใด แต่ข้อความใน Postulate ของบุคลิกซึ่งกล่าวว่า "เราสามารถลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง จากจุดใด ๆ ไปยังจุดใด ๆ อีกจุดหนึ่งใด" ไม่ได้หมายความว่า จะสามารถลากเส้นตรงนั้นได้เพียง เส้นเดียว

(๒) การใช้วิธีการยกรูปซ้อนกัน (Principle of Superposition) ในการพิสูจน์ เรื่องการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังเห็นว่า วิธีการเช่นนั้นไม่เหมาะสม เพราะมี ข้อคัดค้านใด เช่น ถ้าถือว่าจุดเป็นตำแหน่งแล้ว ก็จะเคลื่อนที่ไม่ได้ หรือถ้าถือว่าจุดเป็นสิ่งที่เคลื่อนที่ได้ มิติ (Dimension) ของจุดก็ต้องเปลี่ยนแปลงไปตามหลักของวิชาฟิสิกส์แผนใหม่ เป็นต้น

(๓) การให้นิยามคำศัพท์ที่ใช้ทุกคำ เนื่องจากบุคลิกพยายามจะให้นิยามหรืออย่างน้อย ก็ให้คำอธิบายคำศัพท์ทางเรขาคณิตที่ใช้ทุกคำ เช่น จุด เส้น และสามเหลี่ยม เป็นต้น แต่คำนิยาม

๒๕

Wolfe, H.E., Introduction to Non-Euclidean Geometry, pp. 6-7.

๒๖

Eves and Newsom, op. cit., p. 40.

๒๗

Wolfe, H.E., op. cit., pp. 10-11.

๒๘

Euclids, op. cit., p. 154.

๒๙

Wolfe, H.E., op. cit., pp. 5-6.

ของจุดและเส้นตั้งที่ยุคลิติกำหนดไว้ว่า จุดคือสิ่งที่ไม่มีความยาว (A point is that which has no part.) และเส้นคือสิ่งที่มีความยาวแต่ไม่มีความกว้าง (A line is breadthless length.) มีไคหมายกความว่าบุคคลอื่นจะเข้าใจความหมายใดอย่างถูกต้อง เพราะถ้อยคำที่ใช้ในการอธิบายความหมายกลับยังมีความหมายยุ่งยากกว่าความหมายของจุดและเส้นเอง และเมื่ออธิบายความหมายของคำเหล่านี้แล้ว ก็อาจจะต้องปฏิบัติทำนองเดียวกันนี้กับคำอื่น ๆ ที่อ้างถึงในเวลาต่อไป จนกว่าจะเป็นที่เข้าใจได้ตรงกัน ซึ่งการอธิบายความหมายของถ้อยคำที่กระทำต่อเนื่องกันเป็นทอด ๆ นั้น อาจจะย้อนกลับมาลงที่คำเดิม หรืออาจจะเลียบออกนอกทางไปจนหาที่สิ้นสุดไม่ได้ ฉะนั้น เพื่อการจัดปัญหาข้อนี้ให้หมดไป นักคณิตศาสตร์แผนใหม่จึงตกลงหรือกำหนดให้ใช้คำบางคำ เช่น จุด เส้น ระนาบ โดยไม่ให้นิยาม คือถือว่าเป็นพวก Undefined Terms หรือ Primitive Terms.

เนื่องจากหนังสือชุด Elements ของยุคลิดมีข้อบกพร่องดังกล่าว นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังหลายท่านจึงได้พยายามกำหนดคำบางคำที่ไม่ให้นิยามและกติกากำหนดเพิ่มเติม เพื่อให้เรขาคณิตของยุคลิดมีรากฐานที่มั่นคงและถูกต้องยิ่งขึ้น ที่สำคัญคือ^{๓๖}

- ๑) วีเบลน (Veblen) กำหนดให้คำว่า "จุด" (Point) และ "ลำดับ" (Order) เป็นคำที่ไม่ให้นิยาม และให้ใช้กติการวมทั้งหมด ๑๖ ข้อ
- ๒) ฮิลเบิร์ต (Hilbert) กำหนดให้คำว่า "จุด" (Point) "เส้นตรง" (Straight Line) "ระนาบ" (Plane) "บน" (On) "เท่ากัน" (Congruent) และ "ระหว่าง" (Between) เป็นคำที่ไม่ให้นิยาม และให้ใช้กติการวมทั้งหมด ๒๑ ข้อ
- ๓) เพียร์รี (Pierri) กำหนดให้คำว่า "จุด" (Point) และ "การเคลื่อนที่" (Motion) เป็นคำที่ไม่ให้นิยาม และให้ใช้กติการวมทั้งหมด ๒๐ ข้อ
- ๔) ฮันติงตัน (Huntington) กำหนดให้คำว่า "ทรงกลม" (Sphere) และ "การรวมเข้าด้วยกัน" (Inclusion) เป็นคำที่ไม่ให้นิยาม และให้ใช้กติการวมทั้งหมด ๒๓ ข้อ

^{๓๐} Euclides, op. cit., p. 153.

^{๓๑} สุชาติ รัตนกุล อ.ก. หน้า ๓ - ๔.

^{๓๒} Eves, H., op. cit., p. 124.

ข. เรขาคณิตโปรเจกทิฟ (Projective Geometry)

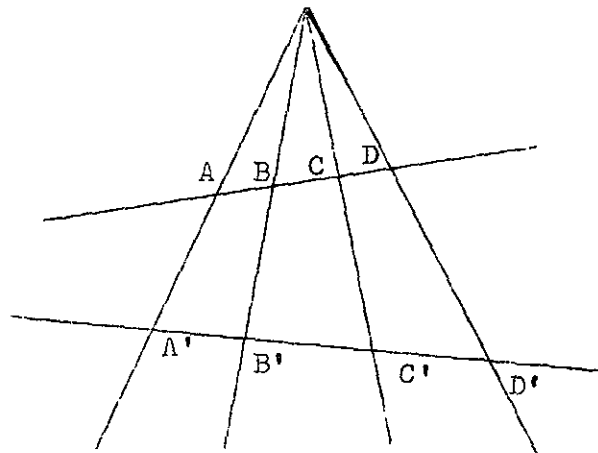
หลังจากสมัยของนักเรขาคณิตผู้ยิ่งใหญ่ทั้ง ๓ คน ในทศวรรษที่ ๓ ก่อน
คริสตกักราช ก็คือยูคลิด (Euclid) อารคิมิดีส (Archimedes) และแอปอลโลเนียส
(Apollonius) แล้ว บุคคลรุ่นถัดมาก็ยังสนใจศึกษารื่องเกี่ยวกับเรขาคณิตต่อไป แรกต่อมา
ไม่นานนักคนทั้งหลายกลับให้ความสนใจความเรขาคณิตของตรีโกณมิติและพีชคณิตมากกว่า ซึ่งมีผลทำให้
วิทยาการสาขานั้น ๆ ก้าวหน้าไปมาก จนกระทั่งปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๓ จึงได้นักเรขาคณิต
ผู้มีความสามารถอีกคนหนึ่ง คือแพพพัส (Pappus)

แพพพัส ได้เขียนคำวิจารณ์ผลงานของบุคคลอื่น ๆ ไว้เป็นจำนวนมาก แต่ที่
สำคัญคือการวิจารณ์เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ได้อธิบายไว้ในหนังสือชื่อ "Mathematical Collection"
ซึ่งอาจถือว่าเป็นคัมภีร์ของวิชาเรขาคณิตในสมัยนั้นก็ได้ ทั้งนี้เพราะว่า นอกจากแพพพัสจะได้อธิบาย
ถึงทฤษฎีและบทสร้างตามแบบเดิมแล้ว ยังได้ปรับปรุงให้ดีขึ้น เพิ่มเติมให้กว้างขวางขึ้น และ
วิจารณ์ในแง่ประวัติกความเป็นมาไว้อีกด้วย แต่เป็นที่น่าเสียดายอย่างยิ่งที่หนังสือชุดนี้ของแพพพัส
เหลือตกทอดมาเพียง ๖ เล่ม เกี่ยวกับบางส่วนของเล่มที่ ๒ ในจำนวนทั้งหมด ๘ เล่ม

จากหนังสือ Mathematical Collection ของแพพพัส เล่มที่ ๗ ซึ่ง
เป็นเล่มที่มีความสำคัญในทางประวัติของคณิตศาสตร์มากที่สุดเล่มหนึ่ง แพพพัสได้กล่าวถึง
เกี่ยวกับเรื่อง Cross Ratio* ไว้บทหนึ่ง ซึ่งมีความสำคัญมาก เพราะอาจกล่าวได้ว่า
ทฤษฎีบทนี้เป็นทฤษฎีมูลฐานของวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟ

* Cross Ratio ของจุด ๔ จุด A, B, C, D ซึ่งอยู่บนเส้นตรงเกี่ยวกับ
หมายถึงอัตราส่วนของอัตราส่วนที่ได้ออก C และ D มาแบ่งส่วนของเส้นตรง AB หรือ
เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $(AB, CD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$

ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า "ถ้ารังสี ๔ เส้นซึ่งพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง (ดูภาพประกอบ ๑) มีเส้นขวาง ๒ เส้นมาตัด และถ้าให้จุดตัดเป็น A, B, C, D และ A', B', C', D' แล้ว จะได้ว่า Cross Ratio ทั้งสองคือ (AB, CD) และ $(A'B', C'D')$ เท่ากัน"



ภาพประกอบ ๑

อย่างไรก็ตาม ในสมัยของแพพัสและสมัยหลังวากันนั้น ยังไม่ได้มีการศึกษา
 คนว่าเกี่ยวกับวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟอย่างแท้จริง เพียงแต่ทราบว่าคนในสมัยก่อนก็มี
 Concept ในเรื่องนี้อยู่บ้าง ครั้นเกือบถึงกลางคริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ เคซาค^{๓๔}
 (Desargues) ซึ่งเป็นทั้งนักคณิตศาสตร์ วิศวกรและสถาปนิกจึงได้เริ่มต้นศึกษาและวาง
 พื้นฐานของวิชานี้ไว้ในหนังสือเล่มหนึ่ง ตลอดจนได้พิสูจน์ทฤษฎีบทหนึ่งในวิชานี้ ซึ่งต่อมาเรียกชื่อว่า
 "ทฤษฎีของเคซาค" ควบ แต่เนื่องจากเหตุผลบางประการจึงปรากฏว่า ในสมัยนั้นไม่มีใครสนใจ

^{๓๓} Eves, H., op. cit., p. 163.

^{๓๔} Bell, E.T., op. cit., p. 158.

งานเรื่องนี้ของเดซากท์เท่าใดนัก ยกเว้นพาสคาล (Pascal) ซึ่งอยู่ในสมัยเดียวกับเดซากท์ และโคชีว่าเป็นผู้มีส่วนให้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องนี้และเรื่องอื่น ๆ อีกหลายเรื่อง หลังจากนั้นอีกสองศตวรรษคือในตอนต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ นักคณิตศาสตร์จึงได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟอย่างมาก และได้มีผู้คิดค้นและขยายความรู้เกี่ยวกับวิชานี้ให้กว้างขวางต่อไปอีกหลายท่าน อาทิเช่นเกอร์กอน (Gergonne) พองซีเลต์ (Poncelet) ไบรแองซอง (Brianchon) ดูแปง (Dupin) ชาสเลส์ (Chasles) สไตเนอร์ (Steiner) และสเทาดท์ (Staudt) เป็นต้น

คำว่า "Pole" ซึ่งมีความหมายดังนัยที่ใช้อยู่ในวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟนั้น เซอร์วอยส์ (Servois) ได้คิดขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๘๑๐ และต่อจากนั้นอีก ๓ ปี เกอร์กอนจึงได้คิดใช้คำที่คุ้นคือ "Polar" นอกจากนี้เกอร์กอนและพองซีเลต์ยังได้เพิ่มเติมแนวคิดเรื่อง Pole และ Polar ของเดซากท์ให้ละเอียดยิ่งขึ้น จนทำให้คนพบหลักการหนึ่งคือ "Principle of Duality" และต่อจากนั้นอีกไม่นานนักก็มีความสามารถทำให้วิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟเป็นวิชาเรขาคณิตที่ไม่เกี่ยวข้องกับเรื่องของระยะทางใด ๆ ได้^{๓๕} ซึ่งแตกต่างไปจากเรขาคณิตแบบของยูคลิดอย่างสิ้นเชิง

นอกจากที่กล่าวแล้ว ประมาณปี ค.ศ. ๑๘๗๒ เฟลิคซ์ คลายน์ (Felix Klein) ได้ตั้งหลักเกณฑ์อย่างหนึ่งคือ "Erlanger Programm" มีใจความโดยสรุปว่า

^{๓๕}

Eves, H., op. cit., p.256.

^{๓๖}

Ibid.

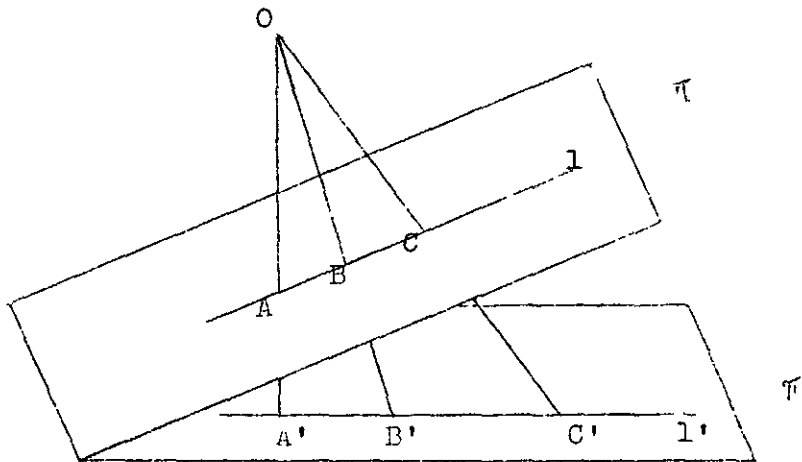
^{๓๗}

O'hara, C.W., and Ward, D.R., An Introduction to Projective Geometry, p.5.

^{๓๘}

Bell, E. T., op. cit., p. 433.

"วิชาเรขาคณิตไม่ว่าแขนงใด คือการตรวจสอบคุณสมบัติของรูปต่าง ๆ ซึ่งเมื่อได้ Transformation ไปแล้ว รูปนั้น ๆ ก็ยังคงมีลักษณะเช่นเดิม" ซึ่งถ้าพิจารณาแล้วจะเห็นได้ว่าหลักเกณฑ์ของคลายนังกล่าว ช่วยทำให้เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ และเนื้อหาของวิชาเรขาคณิตแต่ละชนิดดีขึ้น เช่น สำหรับวิชาเรขาคณิตบนระนาบแบบของยูคลิดนั้น ใช้ Transformation แบบ "Rigid Motion" คือการหมุนแกนและย้ายแกน และเนื่องจากไม่ว่าจะหมุนหรือย้ายแกนไปจากตำแหน่งเดิม พื้นที่ของรูปและความยาวของเส้นคงมีค่าเท่าเดิม วงกลมก็ยังคงเป็นวงกลมเช่นเดิม และจุดกึ่งกลางของเส้นใดก็ยังคงเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นนั้นตามเดิม ดังนั้นเรื่องเกี่ยวกับพื้นที่ของรูป ความยาวของเส้น วงกลม และจุดกึ่งกลางของเส้น จึงเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชาเรขาคณิตบนระนาบแบบของยูคลิดตรงตามหลักเกณฑ์ของคลายน แต่ในสำหรับวิชาเรขาคณิตโปรเจกทิฟ ใช้ Transformation แบบ "Central Projection" คือการ Project รูปบนระนาบหนึ่งไปสู่อีกระนาบหนึ่ง โดยให้จุดกำเนิดของ Project นั้นอยู่นอกระนาบทั้งสอง (ดูภาพประกอบ ๒) และเนื่องจาก



ภาพประกอบ ๒

* Transformation หมายถึง วิธีการแปลงจากรูปหรือนิพจน์ (Expression) แบบหนึ่งไปสู่รูปหรือนิพจน์อีกแบบหนึ่ง ซึ่งอาจกระทำไต่หลายวิธี

เมื่อใช้ Transformation แบบนี้ วงกลมอาจจะถูก Project ไปเป็น Ellipse ทั้งพื้นที่กับความยาวของเส้นก็จะไม่คงเดิมอีกต่อไป ดังนั้นในวิชาเรขาคณิตโปรเจกทีฟจึงไม่ต้องกล่าวถึงเรื่องเกี่ยวกับวงกลม พื้นที่ และความยาวของเส้น แต่เนื่องจากอาจแสดงได้ว่า จุดทั้งหลายซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (Collinear Points) จะถูก Project ไปเป็น จุดบนเส้นตรงเดียวกันตามเดิม และเส้นทั้งหลายซึ่งพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง (Concurrent Lines) ก็จะถูก Project ไปเป็นเส้นที่มาพบกันที่จุด ๆ หนึ่งเช่นเดิม ดังนั้นทั้งสองเรื่องนี้คือการที่ จุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และการที่เส้นมาพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง จึงเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชา เรขาคณิตโปรเจกทีฟ นอกจากนั้นการที่แพพัสสามารถพิสูจน์ได้ก่อนหน้านี้อย่าง Cross Ratio จะไม่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อใช้ Transformation แบบนี้ ดังนั้น Cross Ratio ก็ เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่ต้องกล่าวถึงในวิชาเรขาคณิตโปรเจกทีฟ เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม ตั้งแต่ไอน์สไตน์ (Einstein) คิดทฤษฎีสัมพันธภาพ (Theory Of Relativity) ได้ในปี ค.ศ. ๑๙๑๖ แล้ว นักคณิตศาสตร์ก็จำเป็นต้องยกเลิกหลักเกณฑ์ ของกลายันดังกล่าวข้างต้น เพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีสัมพันธภาพ แต่ในที่นี้จะยังไม่กล่าวถึง

ค. เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry หรือ Coordinate Geometry)

ในขณะที่เคซาคและฟาสกาลกำลังเริ่มต้นเผยแพร่ผลงานของตนเกี่ยวกับวิชาเรขาคณิต โปรเจกทีฟ *เดการ์ต (Descartes) และเฟอร์มาต์ (Fermat) ก็กำลังเริ่มมีแนวคิดเกี่ยวกับ เรขาคณิตวิเคราะห์ ทั้งสองเรื่องนี้มีข้อแตกต่างที่สำคัญ อย่างหนึ่ง กล่าวคือ เรขาคณิต โปรเจกทีฟเป็นสาขาหนึ่งของวิชาเรขาคณิต แต่เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิธีการแบบหนึ่งของวิชา เรขาคณิต

^{๓๘} Ibid., p.443.

^{๔๐} Eves, H., op. cit., p.281.

อาจกล่าวได้ว่า การค้นพบวิธีการแบบเรขาคณิตวิเคราะห์นั้นว่าเป็นสิ่งที่มีคุณค่ามาก เพราะเมื่อมีวิธีการแบบนี้ ก็ทำให้สามารถแก้ปัญหาในวิชาเรขาคณิตได้ในแบบใหม่และบังเกิดผลดี แนวคิดของวิธีการแบบเรขาคณิตวิเคราะห์คือ ^{๔๑} การสร้างการสมนัย (Correspondence) ระหว่าง Curve* บนระนาบกับสมการทางพีชคณิต ที่มีตัวแปร (Variable) ๒ ตัว โดยมีหลักว่า สำหรับแต่ละ Curve จะต้องมีการสมการพีชคณิตในรูป $f(x,y) = 0$ ที่แน่นอนสมการหนึ่ง และสำหรับแต่ละสมการนั้นก็จะต้องมี Curve ๑ หนึ่งบนระนาบที่แน่นอน ยิ่งกว่านั้นเมื่อพิจารณาต่อไปจะเห็นได้ว่า คุณสมบัติทางพีชคณิตและทาง Analysis ของสมการ $f(x,y) = 0$ ก็จะต้องสมนัยกับคุณสมบัติในทางเรขาคณิตของ Curve บนระนาบนั้น ๆ ด้วยเช่นเดียวกัน เมื่อเป็นเช่นนี้จึงเห็นได้ว่า นักคณิตศาสตร์สามารถดลวิชาเรขาคณิตซึ่งค่อนข้างยุ่งยากมาเป็นวิชาพีชคณิตและวิชา Analysis ซึ่งง่ายกว่าได้ และลดใคอย่างฉลาดควย

สำหรับประวัติความเป็นมาของเรขาคณิตวิเคราะห์นี้ แม้ว่าจะยังเป็นปัญหาอยู่ เพราะไม่มีหลักฐานบ่งชี้ว่าใครเป็นผู้สร้างวิธีการนี้ขึ้นเป็นคนแรกและสร้างขึ้นเมื่อใด ทราบแต่เพียงว่า ชาวกรีกในสมัยโบราณนิยมใช้วิธีการทางเรขาคณิตในการศึกษาวิชาพีชคณิต และชนบางพวกในสมัยโบราณต่างก็มีแนวคิดเรื่องเลขบอกตำแหน่ง (Coordinates) แล้ว ก็ชาวอียิปต์และโรมันใช้ในการสำรวจและชาวกรีกใช้ในการทำแผนที่ กรันในระยะต่อมาได้นักคณิตศาสตร์บางคนกล่าวถึงเรื่องนี้ไว้อย่างเช่น อพอลโลเนียส (Apollonius) เมเนซมัส

๔๑

Ibid.

* Curve หมายถึงโลโก้ของจุด ตัวอย่างเช่นบนระนาบ (Plane) โค้ดก็ตามเนื่องจากเส้นตรงเป็นโลโก้ของจุดซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงเส้น (Linear Equation) ดังนั้น จึงถือว่าเส้นตรงเป็น Curve ๑ หนึ่งบนระนาบ เป็นต้น

(Menaechmus) และนิโคล โอเรสมิ (Nicole Oresme) แต่อย่างไรก็ตามอาวกล่าว
 ๔๒ * ไดว่า เดการ์ตและเฟอร์แมทเป็นผู้เริ่มทโน้ใช้วิธีการแบบเรขาคณิตวิเคราะห์หรืออย่างน้อย
 ที่สุดก็เป็นการเริ่มต้นที่ตรงกับนัยที่แท้จริงของเรื่องนี้เป็นครั้งแรก *

* เดการ์ต ได้เริ่มทโน้ศึกษาหลักการบางอย่างทางเรขาคณิต โดยใช้วิธีการทาง
 พีชคณิต แล้วจึงนำเอาวิธีการนี้ไปใช้แก้ปัญหาซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของจุด โดยได้
 พิจารณาปัญหาข้อหนึ่งคือ ๔๓

"ถ้า $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ เป็นความยาวของส่วนของเส้น
 ตรง $m + n$ เส้น ซึ่งลากจากจุด P ไปยังเส้นที่กำหนดให้ $m + n$ เส้นโดยให้ทำ
 มุมกับเส้นเหล่านั้นเท่าที่กำหนดให้ด้วย และถ้า $p_1 p_2 \dots p_m = k p_{m+1} p_{m+2} \dots p_{m+n}$
 โดยที่ k เป็นค่าคงที่แล้ว จงหาโล่สของจุด P " *

ซึ่งอันที่จริงปัญหานี้ ได้มาจากหนังสือชุด Mathematical Collection
 เล่มที่ ๗ ของแพพัสตวอย ๔๔ และยังปรากฏว่าชาวกรีกในสมัยโบราณเคยแก้ปัญหานี้ได้ แต่
 เป็นกรณีที่ m และ n มีค่าไม่เกิน ๒ เดการ์ต สามารถแสดงได้อย่างง่าย ๆ ว่า
 เมื่อ m และ n มีค่ามากขึ้น ๆ โล่สเหล่านั้นก็จะมีสมการที่มีดีกรีเกิน ๒ และถ้ากำหนดลง
 ไปว่าจะพิจารณากรณีใด ก็จะสามารถหาตำแหน่งของจุดของโล่สนั้นได้โดยใช่แต่เกรื่องมือของ
 ยุคลิก * เท่านั้นซึ่งเรื่องนี้ เทากับเป็นตัวอย่างแสดงให้เห็นคุณค่าของวิธีการแบบเรขาคณิต
 วิเคราะห์ได้อย่างหนึ่ง ทั้งยังกล่าวกันว่าจากการที่เดการ์ตพยายามจะแก้ปัญหานี้เองที่เป็นสิ่ง

๔๒ Eves, H., op. cit., p. 282.

๔๓ Ibid., p. 284.

๔๔ Ibid., pp. 162-163.

* เกรื่องมือของยุคลิกหมายถึง ไมบรรทัด (Straightedge) และวงเวียน
 (Compasses) แบบที่มีไว้ในสมัยโบราณ

บันดาลใจให้สามารถคิดสร้างวิธีการเรขาคณิตวิเคราะห์

อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาจากหนังสือที่เคอาร์ทเขียนไว้ จะยังไม่ได้พบรูปใดในหนังสือที่แสดงให้เห็นแกนเทียบทั้งสองแกนนั้นอย่างชัดเจน^{๔๕} และไม่ได้อธิบายถึงวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหอย่างเป็นระบบ เช่นในปัจจุบัน อีกประมาณสองร้อยปีต่อมา คือในก่อนปลายศตวรรษที่ ๑๘ เล็กน้อย จึงได้มีผู้ปรับปรุงแก้ไขหนังสือดังกล่าว จนคล้ายกับที่ปรากฏในปัจจุบัน

* เนื่องจากวิธีการแบบเรขาคณิตวิเคราะห์นี้มีคุณค่าและน่าสนใจมาก คนรุ่นหลังจึงสงสัยว่า เคอาร์ทได้เอาความคิดในเรื่องนี้มาอย่างไร ซึ่งมีคำอธิบายอยู่หลายอย่าง บางเรื่องกล่าวว่าได้มาจากความฝัน แต่บางเรื่องกล่าวว่า^{๔๖} เคอาร์ทเริ่มมีแนวคิดเรื่องนี้เป็นครั้งแรกเมื่อเห็นแมลงวันคลานอยู่รอบ ๆ เพดานมูหอง และได้สังเกตเห็นว่า อาจจะกำหนดทางเดินของแมลงวันได้ ถ้าทราบวาระยะที่ห่างจากขอบบนของผนังแต่ละด้านสัมพันธ์กันอย่างไร เรื่องเล่าดังกล่าวแม้จะไม่มีมูลความจริง แต่มีคุณค่าเพราะสอนให้เราเป็นคนช่างสังเกตและใช้ความคิดพิจารณาถึงสิ่งที่สังเกตเห็นนั้นด้วย ทำนองเดียวกับที่ไอแซก นิวตัน (Isaac Newton) เห็นลูกแอปเปิลตกลงมาแล้วคิดว่าโลกเรามีแรงดึงดูด เป็นตน

✧ ในสมัยของเคอาร์ทนั้น นักคณิตศาสตร์อีกคนหนึ่งที่น่าสนใจในวิธีการแบบเรขาคณิตวิเคราะห์เช่นกัน คือเฟอร์แมท (Fermat) และเฟอร์แมทยังได้อธิบายว่าคนพบเรื่องนี้ได้ก่อนเคอาร์ท แต่เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบผลงานของบุคคลทั้งสองแล้ว จะสังเกตเห็นได้ว่าวิธีการของเคอาร์ทเริ่มตนด้วยโลกัสแล้วจึงหาสมการวงโลกัสนั้น ส่วนเฟอร์แมทเริ่มตนด้วยสมการแล้วจึงศึกษาโลกัส อย่างไรก็ตาม ทั้งสองเรื่องนี้ก็เป็นเรื่องที่มีลักษณะกัน และเราถือว่าเป็นหลักการพื้นฐานของเรขาคณิตวิเคราะห์ นอกจากขอแทรกทางในแนวการศึกษาเช่นนี้แล้ว งานของเฟอร์แมทในเรื่องนี้ อาจจะด้อยกว่างานของเคอาร์ท เล็กน้อย ในเรื่องเกี่ยวกับ -

^{๔๕}

Eves, H., op. cit., p. 286.

^{๔๖}

Ibid., p. 287.

การใช้สัญลัษณ์ เพราะเฟอร์แมทใช้ตามแบบของเวียต (Vieto) แต่เคอาร์ทได้ปรับปรุงใหม่จนทันสมัยแล้วเช่นการใช้อักษรโรมันตัวแรก ๆ เช่น a, b, c แทนปริมาณที่ทราบค่าและตัวหลัง ๆ เช่น x, y แทนปริมาณที่ยังไม่ทราบค่า การเขียนเลขในรูปของการยกกำลังแทนการใช้คำอธิบายประกอบและการตระหนักว่าตัวอักษรที่ใช้แทนปริมาณนั้นจะแทนค่าทั้งปริมาณที่เป็นค่าลบและค่าบวกเป็นต้น แต่อย่างไรก็ตาม เฟอร์แมทอาจก้าวไปไกลกว่าเคอาร์ทในอีกแง่หนึ่ง คือ การพิจารณาเรื่องปริมาณที่มีค่าน้อยมากจนประมาณไม่ได้ (Infinitesimal quantity) ในวิชาเรขาคณิตโดยเฉพาะเมื่อเกี่ยวข้องกับโจทย์เรื่องค่าสูงสุด (Maxima) และค่าต่ำสุด (Minima)

ข้อสังเกตเกี่ยวกับพัฒนาการของเรขาคณิตวิเคราะห์ตั้งแต่ปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ เป็นต้นมา

เมื่อพิจารณาเกี่ยวกับระบบของ "Coordinative System" จะเห็นได้ว่า นอกจากระบบแกนพิกัดฉาก (Rectangular Cartesian System) และระบบแกนพิกัดเฉ (Oblique Cartesian System) แล้วยังอาจสร้างระบบอื่น ๆ บนระนาบได้อีกหลายระบบ และวิธีสร้างก็ไม่ยากนักเพียงแต่ต้องมีโครง (Frame) และหลักเกณฑ์ในการกำหนดจุดเทียบกับโครงหรือแกนเทียบนั้นเท่านั้น เช่นตามระบบแกนพิกัดฉาก โครงที่ใช้ประกอบด้วยแกน ๒ แกน ซึ่งตั้งฉากกันและมีหลักเกณฑ์ในการกำหนดจุดเทียบกับแกนทั้งสองนี้โดยสัญลัษณ์ (Ordered Pair) ที่ประกอบขึ้นด้วยจำนวนจริง (Real Numbers) ๒ จำนวนแทนระยะทางของจุดจากแกนทั้งสองนั้นและคิดเครื่องหมายด้วย ดังนั้นเป็นต้นถึงนิยมใช้ระบบนี้มากที่สุด คำศัพท์บางคำเช่น "Linear", "Quadratic", "Cubic" ... ได้มาจากเมื่อใช้ระบบนี้ทั้งสิ้น แต่ยังมี Curve บางประเภท เช่นพวก Spirals ที่ไม่เหมาะสมกับการใช้ระบบนี้ แต่ถาเปลี่ยนไปใช้ระบบอื่น ๆ เช่นระบบ Polar Coordinate System จะสะดวกและทำไถ่สบายมาก ตามระบบแบบ Polar Coordinate System ดังกล่าว โครงที่ใช้เทียบเป็นรังสีซึ่งยาวไปจำกัด (Infinite Ray) และมีหลักเกณฑ์ในการกำหนดจุดเทียบรังสีนี้ว่า ต้องใช้เลขจำนวนจริงคู่หนึ่งเช่นกัน แต่จำนวนหนึ่งจะแทนความยาวและอีกจำนวนหนึ่งจะแทนค่ามุม เป็นต้น

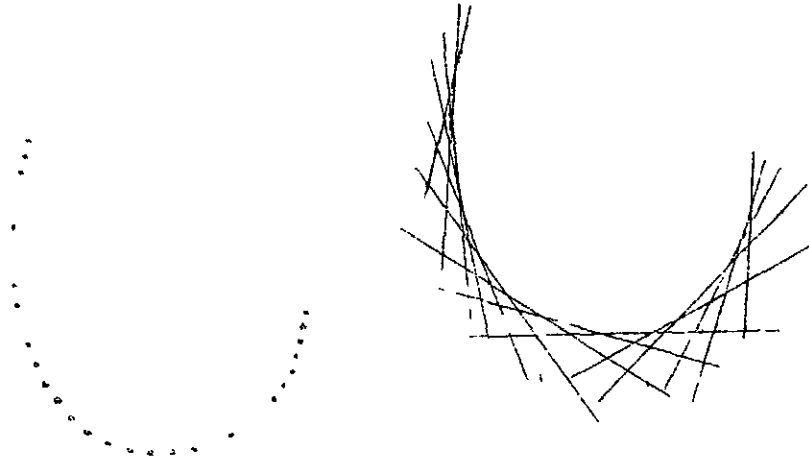
นักคณิตศาสตร์มีแนวคิดในเรื่องนี้เมื่อประมาณปี ค.ศ. ๑๖๔๑^{๔๓} ส่วนระบบอื่น ๆ นอกจากนี้
แต่เดิมยังไม่มีใครสนใจ อีกประมาณหนึ่งร้อยปีต่อมา ก็ในตอนปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘
นักเรขาคณิตเริ่มสังเกตเห็นว่าถ้าใช้ระบบอื่นนอกจากที่กล่าวแล้ว ในบางกรณีจะบังเกิดผลดีกว่า
ใช้ตามระบบเดิม กล่าวโดยสรุปคือ นักคณิตศาสตร์ก็สร้างระบบ Coordinate System
เพื่อให้เหมาะสมกับเนื้อหาทางเรขาคณิตมิใช่สร้างเรขาคณิตให้เหมาะสมกับระบบ Coordinate
System

ความเป็นไปที่น่าสนใจเกี่ยวกับเรื่องของระบบ "Coordinate System" ดังกล่าว
เริ่มมีขึ้นตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๘๒๕ เป็นต้นมา กล่าวคือในปีนั้นพลักเกอร์^{๔๔} (Plucker) ได้
สังเกตเห็นว่าอาจไม่จำเป็นต้องใช้ "จุด" เป็น Element พื้นฐานของเรขาคณิตได้ แต่อาจ
จะใช้รูปทรงหรือสิ่งต่าง ๆ ที่มีรูปให้เห็นได้ในทางเรขาคณิต เช่นถ้าเลือกใช้ "เส้น" เป็น
Element พื้นฐานแทนจุด ก็อาจบอกหรือกำหนดเส้นนั้นเทียบแทนพิกัดจากใกล้โดยบอกค่าบางค่า
เช่นค่าความยาวที่เส้นตรงนั้นตัดแกนทั้งสองเป็นต้น แต่ตามแบบของพลักเกอร์ ได้เลือกใช้จำนวน
กลับที่มีเครื่องหมายตรงข้ามกับค่าความยาวที่เส้นตรงตัดแกนเป็นเลขบอกตำแหน่งของเส้นนั้น (Line
Coordinates) ซึ่งปรากฏว่า ในกรณีที่ใช้เส้นเป็น Element พื้นฐาน จะได้สมการ
เชิงเส้น (Linear Equation) ของจุดที่มีคุณสมบัติว่าเลขบอกตำแหน่งของเส้นตรงทุกเส้นที่
ผ่านจุดนั้นจะต้องสอดคล้องกับสมการเชิงเส้นของจุดนั้นด้วย ซึ่งตรงข้ามกับผลที่ได้เมื่อใช้จุดเป็น
Element พื้นฐาน การที่สามารถตีความหมายเรื่องเลขบอกตำแหน่งได้เป็น ๒ กรณีคือ
อาจจะเป็นเลขบอกตำแหน่งของจุด (Point Coordinates) หรือเลขบอกตำแหน่งของเส้น
(Line Coordinates) และยังใช้สมการเชิงเส้นได้ทั้งในแง่ที่เป็นของเส้นตรงหรือของจุด
เช่นนี้ นับว่ามีประโยชน์มาก จึงจะเห็นได้ว่าพลักเกอร์ได้ใช้ความรู้เรื่องนี้เป็นพื้นฐานในการพิสูจน์

^{๔๓}
Eves, H., op.cit., p.228.

^{๔๔}
Ibid.

"หลักคู่เบี่ยง" (Principle of Duality) ในวิชาเรขาคณิตโปรเจกทีฟได้และเมื่อกล่าวถึง Curve ใด ๆ หนึ่ง อาจจะถือว่า Curve เป็นโลโก้ของจุด หรือเป็น Envelope* ของเส้นสัมผัสของ Curve ก็ได้ ดังภาพประกอบ ๓^{๔๕}



ภาพประกอบ ๓

นอกจากจะสามารถเลือกให้ "จุด" หรือ "เส้น" เป็น Element พื้นฐานได้ดังกล่าวดังกล่าวแล้ว อาจจะใช่วงกลมแทนซึ่งจำเป็นของใช้เลขบอกตำแหน่งสามจำนวนเรียงตามลำดับ (Ordered Triple) เช่นถ้าใช้ระบบแกนพิกัดฉาก อาจจะกำหนดให้เลขบอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางและค่าความยาวของรัศมีของวงกลมนั้นเป็นเลขบอกตำแหน่งของวงกลมได้ ซึ่งแนวคิดเกี่ยวกับเรื่องนี้ทำให้มีความเข้าใจและสามารถคิดค้นเรื่องเกี่ยวกับทฤษฎีมิติ (Dimension Theory) ได้เป็นจำนวนมาก

^{๔๕}

Ibid., p. 289.

*

Envelope of a one-parameter family of straight lines หมายถึง Curve ที่สัมผัสกับเส้นตรงทุกเส้นในชุดของเส้นตรงนั้น หรือกล่าวว่า Curve ใดก็ตามจะเป็น Envelope ของเส้นสัมผัสของ Curve นั้น

ทฤษฎีนี้มีใจความว่า ^{๕๐} "มิติในวิชาเรขาคณิต หมายถึงจำนวนเลขบอกตำแหน่งที่จำเป็นต้องใช้ เมื่อจะกำหนด Element พื้นฐานของเรขาคณิตนั้น" ซึ่งตามทฤษฎีนี้จะเห็นได้ว่า ถ้า Element พื้นฐานเป็นจุดหรือเส้นและระนาบของเรขาคณิตนั้นจะมี ๒ มิติ แต่ถ้า Element พื้นฐานเป็นวงกลม ระนาบของเรขาคณิตนั้นจะมี ๓ มิติ ยิ่งกว่านั้นถ้า Element พื้นฐานเป็น Conic Sections ในบางกรณีอาจจะได้ระนาบมี ๕ มิติ ซึ่งเรื่องเกี่ยวกับทฤษฎีของทฤษฎีนี้มีให้ศึกษาอย่างกว้างขวางและลึกซึ้งนอกเหนือจากที่กล่าวถึงอย่างง่าย ๆ ดังข้างต้นนี้มาก

สำหรับเรื่องเกี่ยวกับวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ของทรงตัน (Solid Analytic Geometry) เถกการที่กล่าวถึงข้างบน แต่ไม่ละเอียดนัก เช่นเดียวกับพาเรนท (Parent) แคลรอต (Clairaut) และออยเลอร์ (Euler) แต่นักคณิตศาสตร์เหล่านี้ยังใช้จุดเป็น Element พื้นฐาน ซึ่งแสดงว่าพิจารณา Space ในกรณีที่มี ๓ มิติเท่านั้น เพราะว่าการใช้จุดหรือระนาบเป็น Element พื้นฐานในวิชานี้ Space จะมี ๓ มิติ แต่การเลือกใช้เส้นหรือวงกลม Space จะมี ๔ มิติ เป็นต้น

นับตั้งแต่กลางคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เป็นต้นมา นักคณิตศาสตร์ต่างก็สนใจศึกษาเรื่องเกี่ยวกับมิติมากขึ้น โดยเฉพาะในกรณีที่ใช้จุดเป็น Element พื้นฐาน แต่ได้ space ที่มี n มิติ (n มีค่ามากกว่า ๓) จนกระทั่งในที่สุดนักคณิตศาสตร์จึงสามารถให้นิยามของคำว่า "A Real Space of n Dimensions" ได้ว่าหมายถึง ^{๕๑} เซตของ "Ordered n -uples ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$)" ทั้งหมดของจำนวนจริง $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ โดยที่แต่ละจำนวนจะมีขอบเขตเช่นจำนวนจริงควย ส่วนกฎต่าง ๆ เช่นความสัมพันธ์ระหว่างจุดใน Space จะให้นิยามคล้ายกับเมื่อเป็นแบบ ๒ มิติทั้งสิ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

^{๕๐} Eves, H., loc. cit.

^{๕๑} Bell, E.T., op. cit., p. 203.

ตัวอย่าง การหาระยะทางระหว่างจุด ๒ จุดใด ๆ

ก. ในกรณีที่ใช้ระบบแกนพิกัดฉาก ซึ่งถือว่ามี ๒ มิติ

สมมติว่าจุดทั้ง ๒ นั้นคือ (x_1, x_2) และ (y_1, y_2)

ดังนั้นระยะระหว่างจุดทั้งสองนี้ คือ

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

ข. ในกรณีที่ใช้ระบบแกนพิกัดฉาก ซึ่งถือว่ามี ๓ มิติ

สมมติว่าจุดทั้ง ๒ นั้นคือ (x_1, x_2, x_3) และ (y_1, y_2, y_3)

ดังนั้นระยะระหว่างจุดทั้งสองนี้ คือ

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

ค. ในกรณีที่ใช้ระบบแกนพิกัดฉาก ซึ่งถือว่ามี n มิติ

สมมติว่าจุดทั้ง ๒ นั้นคือ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$

ดังนั้นระยะระหว่างจุดทั้งสองนี้คือ

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่า การพิจารณาเรื่องเกี่ยวกับ n มิติดังกล่าวก็คือ การศึกษาในเชิงวิเคราะห์ล้วน ๆ แก่ข้อพิพาททางเรขาคณิต ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่า เรื่องที่สำคัญ ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่บางเรื่องนั้นได้มาจากการเริ่มต้นศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์นั่นเอง

๖. Non-Euclidean Geometries

ในจำนวนกติกาทั้ง ๑๐ ข้อของยูคลิดนั้น ข้อที่ ๕ นั้นมีความสำคัญและทำให้เกิดเป็นปัญหามากจนในที่สุดได้นำให้นักคณิตศาสตร์ค้นพบเรขาคณิตอีกแบบหนึ่งที่ต่างจากไปจากแบบของยูคลิด (Non-Euclidean Geometry)

กติกาข้อที่ ๕ เป็นกติกาเรื่องเส้นขนาน ซึ่งยูคลิดได้กล่าวไว้ว่า

ถ้าเส้นตรง เส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นไปพบกันภายในมุมข้างเดียวกันของเส้นที่ถูกรวมกัน เขานอยกว่าสองมุมฉากแล้ว ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปโดยไม่มีที่สิ้นสุด เส้นตรงทั้งสองนั้นจะไปตัดกันบนข้างที่มุมรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก^{๕๒}

นักคณิตศาสตร์มีความเห็นว่า กติกาข้อนี้จะเป็นทฤษฎีมากกว่า เพราะขาดความรัดกุม และไม่มีลักษณะบังเอิญในตัว (Self-Evident) ยิ่งกว่านั้นการที่ยูคลิดเพิ่งเริ่มใช้กติกาข้อนี้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ ๒๔ ของหนังสือชุด Elements เล่มที่ ๑ จึงทำให้ผู้สงสัยและให้ความเอาใจใส่กติกาข้อนี้เป็นจำนวนมาก จนกระทั่งในที่สุดก็มีความจำเป็นที่จะต้องหาทางพิสูจน์กติกาข้อนี้ให้กระจ่าง หรือมีฉันทาคัดทิ้งไปแล้วเรีกกติกาข้อใหม่ที่ดีกว่า

ในจำนวนกติกาที่มีผู้ถกเถียงกันเพื่อใช้แทนกติกาข้อที่ ๕ ของยูคลิดนั้น กติกาที่มีผู้นิยมใช้มากที่สุดคือ กติกาของเพลย์แฟร์ (Playfair's Axiom) ซึ่งกล่าวว่า "เราสามารถลากเส้นตรงให้ขนานจุด ๆ หนึ่งที่กำหนดให้และให้ขนานกับอีกเส้นหนึ่งที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น" ดังที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรขาคณิตฉบับมัธยมโดยทั่วไป

นอกจากนี้ยังอาจใช้กติกาของนักคณิตศาสตร์คนอื่นอีกหลายท่านแทนกติกาเรื่องเส้นขนานของยูคลิดได้เช่นกัน ที่สำคัญคือ

๑. จะต้องมีส่วนเหลี่ยมอย่างน้อยที่สุดหนึ่งแบบที่มีมุมภายในทั้งสามรวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก
๒. จะต้องมีส่วนเหลี่ยมหนึ่งทีคล้ายกันแต่ไม่เท่ากันทุกประการ

๕๒

Euclides, The Elements of Euclid, V.I., p.155.

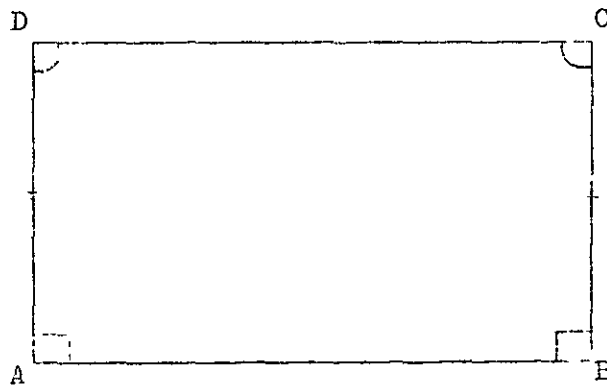
๕๓

Wolf, H.E., Non-Euclidean Geometry, p. 20.

๓. จะต้องมียุทธวิธีหนึ่งที่อยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่ากันโดยตลอด
 ๔. เราสามารถเขียนวงกลมวงหนึ่งให้ผ่านจุดใด ๆ ๓ จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันได้
 ๕. เราสามารถลากเส้นตรงผ่านจุดใด ๆ ที่อยู่ภายในมุมที่น้อยกว่า ๖๐ องศาให้ตัดแขนของมุมทั้งสองแขนได้

ส่วนการพิสูจน์นั้น แม้ในภายหลังจะปรากฏว่า ไม่สามารถรู้ความจริงจากกติกาคอนพิสูจน์กติกาคอนที่ ๕ เรื่องเส้นขนานนี้ได้ แต่การที่พยายามจะพิสูจน์ให้ได้ ทำให้ค้นพบเรื่องใหม่ซึ่งทำให้วิชาเรขาคณิตก้าวหน้าไปมาก

บุคคลแรกที่ได้ตรวจสอบกติกาคอนเรื่องเส้นขนานของยูคลิดอย่างมีหลักเกณฑ์คือแซคเคอรี (Saccheri)^{๕๔} แซคเคอรีใช้รูปสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีมุมที่ฐาน ๒ มุมเป็นมุมฉาก และมีด้าน ๒ ด้านที่ประกอบเป็นแขนของมุมฉากทั้งสองยาวเท่ากัน (ดูภาพประกอบ ๔) ต่อจากนั้นจึงได้ตั้งสมมติฐานอธิบายมุมที่เท่ากันอีก ๒ มุมที่เหลื้ือว่าอาจจะเป็นไปได้ ๓ กรณีคือ เป็นมุมแหลมหรือเป็นมุมฉากหรือเป็นมุมป้าน โดยหวังว่าเมื่อใดสมมติฐานว่าเป็นมุมแหลมหรือมุมป้านแล้วจะก่อให้เกิดข้อขัดแย้งจากนั้นจึงสามารถสรุปได้ตามวิธีการของการพิสูจน์ทางอ้อม (reductio ad absurdum) ว่า สมมติฐานว่าเป็นมุมฉากถูกทอดทิ้งและแซคเคอรี ยังสามารถแสดงต่อไปได้ว่าการที่สามารถพิสูจน์สมมติฐานว่าเป็นมุมฉากนี้ได้ เสมือนกับเป็นการพิสูจน์กติกาคอนเรื่องเส้นขนานนั่นเอง



ภาพประกอบ ๔

อย่างไรก็ตาม เมื่อไ้พิสูจน์ตามแผนการดังกล่าวแซกเคอริพบว่า ในกรณีที่ใช้สมมติฐานว่าเป็นมุมป้าน ถ้าถือว่าเส้นตรงมีความยาวไม่จำกัดแล้วจะพบข้อขัดแย้งใดจริง แต่ในกรณีที่สมมติฐานว่าเป็นมุมแหลม ถึงแม้จะไม่พบข้อขัดแย้งแซกเคอริกก็สรุปเองว่าใช้สมมติฐานดังกล่าวไม่ได้ ซึ่งถ้าหากว่าจะไม่สรุปผลการพิสูจน์ทำนองนี้ แต่ยอมรับว่าไม่สามารถหาข้อแย้งใด ๆ ได้แล้ว แซกเคอริจะเป็นผู้ค้นพบวิชาเรขาคณิตแบบใหม่เป็นคนแรก ก่อนที่จะมีผู้ค้นพบอย่างแท้จริง เป็นเวลาเกือบหนึ่งศตวรรษ

นอกจากแซกเคอริแล้ว แลมเบิร์ต (Lambert) และ เลอเจนเดอร์ (Legendre)

ไ้พิจารณาสมมติฐานทั้งสามแบบทำนองนั้นด้วย และไม่สามารถค้นพบข้อแย้งในกรณีที่ใช้สมมติฐานว่าเป็นมุมแหลมเช่นกัน ซึ่งไม่ใช่เรื่องที่น่าประหลาด เพราะในปัจจุบันนี้นักคณิตศาสตร์ทราบแล้วว่า เรขาคณิตซึ่งเกิดจากการศึกษาซึ่งถือข้อเท็จจริงเบื้องต้นร่วมกับ "สมมติฐานว่าเป็นมุมแหลม" จะเป็นวิชาที่มีเหตุผลคงเส้นคงวา (Consistent) เช่นเกี่ยวกับเรขาคณิตแบบยูคลิดซึ่งถือข้อเท็จจริงเบื้องต้นร่วมกับ "สมมติฐานว่าเป็นมุมฉาก" เป็นหลัก นั่นคือการศึกษาเรื่องเส้นขนานไม่ขึ้นกับกติกาข้ออื่น ๆ ดังนั้นเมื่อไ้ความรู้จากกติกาข้ออื่น ๆ อีก ๕ ข้อมาพิสูจน์ จึงไม่สามารถพิสูจน์ได้ บุคคลรุ่นแรกที่มีความสงสัยทำนองนี้ ก็ือนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ชาวฮังการี และ ชาวรัสเซีย ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ รวม ๓ คน คือ เกาส์ (Gauss)

โบลโย (Bolyai) และ โลแบกเชฟสกี (Lobachevsky) ตามลำดับ โดยเริ่มพิจารณาจากกติกาของเพลย์แอร์แล้วจำแนกสิ่งที่จะเกิดขึ้นไ้ออกเป็น ๓ กรณีคือ จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด ๆ หนึ่งให้ขนานกับเส้นที่กำหนดให้ได้ "มากกว่า ๑ เส้น" หรือ "เพียง ๑ เส้นเท่านั้น" หรือ "ลากไม่ไ้เลย" ซึ่งก็เท่ากับเป็นการตั้งสมมติฐานว่าเป็นมุมแหลม มุมฉาก และมุมป้าน ตามลำดับนั่นเอง ต่อจากนั้นถ้าถือว่าเส้นตรงยาวไม่จำกัด ก็จะทำให้กรณีที่ ๓ ออกไปไ้โดยง่าย ส่วนกรณีที่ ๑ ซึ่งไม่สามารถกำหนดไ้ได้นั้น นักคณิตศาสตร์ทั้ง ๓ ก็สงสัยต่อไปว่าถ้าจะไม่กำหนดออกไปแล้วเข้ามาใช้ใ้ในวิชาไ้แล้ว จะทำให้เกิดข้อแย้งหรือความไม่คงเส้นคงวาใด ๆ บ้างหรือไม่ ดังนั้น เกาส์ โบลโย และ โลแบกเชฟสกี จึงไ้ทบทองไ้ว่าสมมติฐานว่าเป็นมุมแหลมกับเรื่องราวทางเรขาคณิตและตรีโกณมิติอย่างกว้างขวาง

จากหลักฐานเท่าที่ค้นพบและตามข้อสันนิษฐานของบุคคลรุ่นหลัง อาจกล่าวไ้ว่า เกาส์ คงจะเป็นบุคคลแรกที่ไ้เข้าใจข้อสรุปเกี่ยวกับสมมติฐานว่าเป็นมุมแหลมนี้ แต่เนื่องจากในระหว่างที่มีชีวิตอยู่ เกาส์ไม่ไ้พิมพ์ผลงานของตนออกเผยแพร่ ต่างกับโบลโย และ โลแบกเชฟสกี จึงต้องไ้เกียรติโบลโย

และโดแบกเซสกี ในฐานะ เป็นผู้ค้นพบวิชาเรขาคณิตแบบที่ไม่ใช่ของยูคลิด (Non-Euclidean Geometry) รวมกับเกาส์ด้วย

อย่างไรก็ตาม ในสมัยของบุคคลทั้งสามนี้ ยังไม่มีใครคิดพิสูจน์ความคงเส้นคงวา (Consistency) ของสมมติฐานว่าเป็นมุมแหลม แต่ในภายหลังปรากฏว่าเบลทรามี (Beltrami) เคย์เลย์ (Cayley) คลายน์ (Klein) พอยน์คาเร่ (Poincaré) และคนอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ได้ การพิสูจน์เรื่องนี้มีค่าสำคัญมาก เพราะทำให้สามารถยอมรับได้อย่างสมเหตุสมผลว่า ทฤษฎีเรื่องเส้นขนาน ไม่ขึ้นกับทฤษฎีอื่นอย่างแท้จริง

เรื่องที่ที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งก็ประมาณ ๒๕ ปี หลังจากที่โดแบกเซสกีได้พัฒนาการค้นพบของตนแล้ว ก็ในปี ค.ศ. ๑๘๕๕^{๕๖} รีมันน์ สามารถแสดงได้ว่า ถ้าเพียงแต่ถือตามทฤษฎีของยูคลิดที่ว่า เราสามารถต่อเส้นตรงออกไปได้โดยไม่สิ้นสุดหรือไม่มีขอบเขตสักอัน และถ้าเปลี่ยนแปลงทฤษฎีอื่น ๆ อีกบ้างเล็กน้อยโดยไม่ต้องสมมติว่าเส้นตรงมีความยาวไม่จำกัดด้วยแล้ว จะทำให้ได้เรขาคณิตที่ต่างไปจากของยูคลิดที่มีความคงเส้นคงวาได้อีกแบบหนึ่งโดยวิธีสมมติฐานที่ว่า เป็นมุมป้านนั้น

ต่อมาในปี ค.ศ. ๑๘๗๑^{๕๗} คลายน์ได้ตั้งชื่อให้เรขาคณิตทั้ง ๓ แบบเพื่อมีที่สับสนกันว่าดังนี้

๑. เรขาคณิตแบบของเกาส์ โบโย และ โดแบกเซสกี ให้เรียกชื่อว่า "Hyperbolic Geometry"

๒. เรขาคณิตแบบของยูคลิดให้เรียกชื่อว่า "Parabolic Geometry"

๓. เรขาคณิตแบบของรีมันน์ ให้เรียกชื่อว่า "Elliptic Geometry"

อาจกล่าวได้ว่า ผลที่เกิดขึ้นจากการค้นพบเรขาคณิตแบบที่ไม่ใช่ของยูคลิดครั้งนี้ นอกจากจะเป็นการยุติปัญหาเรื่อง "ทฤษฎีเส้นขนาน" ของยูคลิดซึ่งมีมานานก่อนหน้านั้น โดยสามารถแสดงได้ว่าทฤษฎีข้อนี้ ไม่ขึ้นกับทฤษฎีอื่น ๆ ของยูคลิดแล้ว ผลที่สำคัญยิ่งกว่านั้นคือ ทำให้บุคคลรุ่นหลังได้ตระหนักว่าไม่ควรจะยึดมั่นอยู่กับเรขาคณิตแบบของยูคลิดแต่เพียงอย่างเดียว และยังเท่ากับเป็นการชี้ช่องทางให้นักคณิตศาสตร์ กิจสร้างเรขาคณิตระบบอื่น ๆ ได้อีกหลายระบบ ซึ่งเมื่อปรากฏว่าเป็นไปได้จริงก็ยิ่งทำให้นักคณิตศาสตร์มี

^{๕๖}

Wolfe, H.E., op. cit., p.61.

^{๕๗}

Eves, H., op. cit., p. 129.

ความคิดก้าวไปไกลถึงจุดที่ว่า วิชาเรขาคณิตไม่ว่า จะต้องเกี่ยวข้องกับ Space ที่จะต้องมองเห็นได้จริง ทั้งกติกาดัง ๆ ในทางเรขาคณิตก็เป็นเพียงแค่สมมติฐานซึ่งไม่ว่า จะต้องคำนึงถึงความสอดคล้องกับข้อเท็จจริง ที่มองเห็นได้ เพียงแค่สร้างกติกาให้ตรงตามจุดประสงค์และไม่ขัดกับกติกาอื่น ๆ ในชุดเดียวกันเท่านั้น

๑. Axiomatics

หลังจากที่นักคณิตศาสตร์ค้นพบวิชาเรขาคณิตแบบที่ไม่ใช่ของยูคลิดและได้พยายามบ่งชี้สร้าง เซตของ กติกา เพื่อให้ได้กับเรขาคณิตแบบของยูคลิดได้อย่างสมเหตุสมผลแล้ว ทำให้ นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษา และขยาย ความรู้ใหม่เรื่องหนึ่งคือ Axiomatics ซึ่งจะเป็นการศึกษา "กติกา" และ "คุณสมบัติของกติกา" เป็นสำคัญ

ในการศึกษาเกี่ยวกับกติกาและคุณสมบัติของกติกาทั้งกล่าว นักคณิตศาสตร์จะใช้สัญลักษณ์แทนคำ พวกที่ไม่ให้นิยาม (Undefined Terms) ทั้ง มก ทั้งนี้ เพื่อจะว่านักคณิตศาสตร์เห็นว่า ข้อผิดพลาดอย่างหนึ่ง ที่ อาจเกิดขึ้นได้ยากก็ความเคยชินกับเนื้อหาของระบบการให้เหตุผลแบบ Deductive System* ยูคลิดเอง ก็ผิดพลาดเพราะสาเหตุดังกล่าว แต่ถ้าใครสับสนกับข้อเท็จจริงที่ไม่ว่า ให้นิยามก็ไม่สามารถสรุปว่าทฤษฎีใดถูก หรือผิดตามสามัญสำนึกได้ จึงสามารถเลี่ยงข้อผิดพลาดได้ และทำให้ได้ข้อสรุปที่สมเหตุสมผลอย่างแท้จริง

เมื่อนักคณิตศาสตร์กำหนดคำที่ไม่ให้นิยามและสร้างประโยคขึ้นจากคำที่ไม่ให้นิยามเหล่านั้นแล้ว ต้องตรวจสอบต่อไปว่า เซตของประโยคดังกล่าวนี้ยังเป็นเซตของกติกาได้หรือไม่ เราจะมีวิธีว่าทุก ประโยคจะเป็นกติกาได้ แต่จำเป็นจะต้องมีคุณสมบัติบางอย่างด้วย เช่น "ต้องมี" คุณสมบัติเกี่ยวกับ "Consistency" (การที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าไม่มีข้อขัดแย้งใด ๆ เกิดจากเซตนั้น) และ "ควรมี" คุณสมบัติเกี่ยวกับ "Fertility" (การที่สามารถสร้างทฤษฎีจากเซตนี้ได้อย่างรอบคอบ ๑ ทฤษฎี) เป็นต้น ซึ่งการตรวจสอบเกี่ยวกับคุณสมบัติทั้งสองประการนี้ เป็นว่า เป็นเรื่องที่สำคัญในวิชา Axiomatics

ระบบการให้เหตุผลแบบ Deductive System ประกอบด้วย

๑. พวกที่ไม่ให้นิยาม (Undefined Terms หรือ Primitive Terms)
๒. พวกที่ให้นิยาม (Defined Terms หรือ Definition)
๓. กติกา (Postulates หรือ Axioms)

การให้เหตุผลแบบนี้ เป็นทฤษฎีของการให้เหตุผลที่สำคัญที่สุดในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาการแขนงต่าง

แต่ในสมัยปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์ได้ทราบวิธีที่จะใช้ตรวจสอบอย่างละเอียดวิธีเดียวกันนั้น กล่าวคือ^{๕๕} ในการตรวจสอบคุณสมบัติเกี่ยวกับ Consistency นักคณิตศาสตร์จะต้องตีความหมายของ เซตนั้นให้อยู่ในรูปธรรมชาตพิจารณาว่ามีข้อขัดแย้งใด ๆ บางหรือไม่ ถ้าไม่มีจึงสรุปได้ว่าเซตของกติกาดังกล่าวมีคุณสมบัติเกี่ยวกับ Consistency ส่วนวิธีการตรวจสอบคุณสมบัติเกี่ยวกับ Fertility ก็คือการพยายามสร้างทฤษฎีจากเซตของกติกานั้นให้ได้อย่างน้อย ๑ ทฤษฎี

อย่างไรก็ตาม นักคณิตศาสตร์ยังมีความสงสัยต่อไปว่า อาจจะมีเซตของกติกาบางเซตที่ไม่สามารถตีความหมายให้อยู่ในรูปธรรมชาตได้ หรือไม่สามารถสร้างทฤษฎีจากเซตนั้นได้ ซึ่งเป็นปัญหาที่น่าสนใจและน่าคิดมาก

นอกจากการตรวจสอบคุณสมบัติดังกล่าวแล้ว ยังมีบางกรณีที่น่าประหลาดใจว่า อาจจะสามารถสร้างเรื่องราวที่เหมือนกันจากเซตของกติกาที่ต่างกันก็ได้ ตัวอย่างเช่น เราจะใช้กติกาเรื่องเส้นขนานตามระบบของเพลย์แฟร์ และของคนอื่น ๆ แทนกติกาเรื่องเส้นขนานของยูคลิด ก็ยังทำให้ได้เนื้อหาในวิชาเรขาคณิตแบบของยูคลิดเช่นเดิม เป็นต้น เมื่อเป็นเช่นนั้นนักคณิตศาสตร์จึงจำต้องหาวิธีการมาแสดงให้ได้ว่าเซตของกติกาทั้งสองเซตนั้น ๆ สามารถนำไปสู่เนื้อหาอย่างเดียวกันได้

เรื่องของ Axiomatico มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับเรื่องตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) และปรัชญาของคณิตศาสตร์อย่างใกล้ชิด บุคคลสำคัญที่ได้นำเรื่องนี้มาช่วยให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องนี้มีหลายคน เช่น ฮิลเบิร์ต (Hilbert) เปียโน (Peano) เพียร์รี (Pieri) วีเบเลน (Veblen) ฮันติงตัน (Huntington) รัสเซลล์ (Russell) ไวท์เฮด (Whitehead) และ โกเดล (Godel) เป็นต้น

๔. ตรีโกณมิติ (Trigonometry)

ในสมัยปัจจุบันยังไม่ทราบว่า ใครเป็นผู้ให้กำเนิดแกว่งตัวตรีโกณมิติ แต่อาจกล่าวได้ว่าชนในสมัยโบราณได้เคยพิจารณาถึงเรื่องต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับตรีโกณมิติ และนำความรู้เรื่องนี้ไปใช้

^{๕๕} Eves, H., op. cit., p.129.

^{๖๐} Bell, E.T. op. cit., p.216.

บ้างแล้ว ยิ่งกว่านั้นยังได้พบว่านักดาราศาสตร์ชาวบาบิโลเนียนในศตวรรษที่ ๔ และ ๕ ก่อนคริสตกักราช
ได้สะสมข้อมูลที่ได้จากการสังเกตไว้เป็นจำนวนมาก ซึ่งข้อมูลเหล่านี้เองที่เป็นต้นกำเนิดของ

"Spherical Trigonometry"

นอกจากชาวบาบิโลเนียนแล้ว นักดาราศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกและฮินดูก็ได้เกยตื้นศึกษา
เกี่ยวกับตรีโกณมิติ อาทิเช่น ฮิปพาร์คัส (Hipparchus) และ เมเนเลอัส (Menelaus)
เป็นต้น แต่บุคคลเหล่านี้มิได้มุ่งศึกษาตรีโกณมิติโดยตรง เพียงต้องการใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา
ดาราศาสตร์เท่านั้น แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าตรีโกณมิติของชาวฮินดูมีลักษณะ เป็นแบบเลขคณิต และของชาวกรีก
มีลักษณะ เป็นแบบเรขาคณิต

ต่อมาในสมัยคริสตกตวรรษที่ ๘ ถึง ๑๐ ซึ่งเป็นระยะที่ชนชาวอาหรับกำลังเจริญรุ่งเรือง นักปราชญ์
ชาวอาหรับก็มีความสนใจในทางดาราศาสตร์และคณิตศาสตร์เช่นเดียวกัน และได้คิดค้นเรื่องราวทาง
ตรีโกณมิติหลายอย่าง ที่สำคัญคือ^{๖๑} เริ่มใช้ฟังก์ชันทางตรีโกณมิติครบทั้ง ๖ ฟังก์ชัน เป็นครั้งแรก และ
ยังสามารถคิดสูตรบางสูตรเกี่ยวกับ Spherical Trigonometry ได้ด้วย

ในระหว่างที่ชนชาวอาหรับกำลังเจริญรุ่งเรืองอยู่นี้ ยุโรปตะวันตกกำลังอยู่ในยุคมืด เพราะถูก
พวกอนารยชนซึ่งไม่มีวัฒนธรรมของตนเองเขมารุกรานและครอบครองอยู่ ต่อมาในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๒
จึงได้เริ่มมีการถ่ายทอดความรู้โดยแปลจากตำราภาษาอาหรับออกเป็นภาษาละติน และได้มีมหาวิทยาลัย
เกิดขึ้นเป็นครั้งแรกในยุโรปตอนต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๑๓ ซึ่งมหาวิทยาลัยเหล่านี้ในระยะต่อมาได้มีส่วนในการ
พัฒนาความรู้แขนงต่าง ๆ อย่างสำคัญยิ่ง

คริสต์ศตวรรษที่ ๑๔ เป็นศตวรรษแห่งโรกระบาดและสงคราม ต่อมาอีกหนึ่งศตวรรษคือ
ศตวรรษที่ ๑๕ มีเหตุการณ์ที่สำคัญ ๆ เกิดขึ้นหลายอย่าง และนับเป็นการเริ่มต้นยุคฟื้นฟูศิลปวิทยาการ
(Renaissance) ของยุโรปด้วย ครั้นถึงกลางศตวรรษเมื่อมีการพิมพ์เกิดขึ้น ความรู้ต่าง ๆ เริ่ม
แพร่หลายไปได้อย่างรวดเร็วยิ่งกว่าในสมัยก่อน และในตอนปลายศตวรรษได้มีการค้นพบทวีปใหม่คือ
อเมริกา สิ่งเหล่านี้เท่ากับเป็นแรงผลักดันให้คนหันตัวกันมากขึ้นในเกือบทุกด้าน

^{๖๑}

Eves, H., *op. cit.*, p. 196.

คณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๕ เจริญขึ้นในแง่ที่มีการค้าขาย การเดินเรือ การสำรวจ และการศึกษาวิชาการศาสตร์ ดังนั้นเรื่องของคณิตศาสตร์ในสมัยนี้จึงเน้นอยู่แต่เลขคณิต พีชคณิต และตรีโกณมิติ เป็นส่วนใหญ่

สำหรับตรีโกณมิตินั้น ปรากฏว่า มุลเลอร์^{๖๒} (Muller) ได้เขียนตำราขึ้นเล่มหนึ่งซึ่งนับว่าเป็นครั้งแรกที่ได้มีการกล่าวถึงตรีโกณมิติ ทั้งแบบ Plane Trigonometry และ Spherical Trigonometry แยกเป็นวิชาหนึ่งต่างหากโดยไม่ขึ้นกับวิชาดาราศาสตร์

แต่เดิมมา เรื่องการแก้รูปสามเหลี่ยม (Solution of Triangles) ในวิชาตรีโกณมิติ นำไปใช้ประโยชน์ในการเดินเรือ และการสำรวจได้เป็นอย่างดี เพราะนักเดินเรือจะนำสำรวจ ยังไม่มีเครื่องมือต่าง ๆ อย่างพร้อมมูลเช่นสมัยปัจจุบันนี้ ดังนั้นหลักสูตรคณิตศาสตร์จึงเน้นความสำคัญของเรื่องการแก้สามเหลี่ยมมากกว่าเรื่องอื่น แต่ในปัจจุบันนี้สภาพการณ์ก็เปลี่ยนแปลงไปแล้ว นักคณิตศาสตร์จึงเห็นว่าควรเน้นเรื่องคุณสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions) เพราะเรื่องนั้นนอกจากจะเป็นเรื่องหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ ยังนำไปประยุกต์ใช้สาขาวิชาอื่น เช่น วิศวกรรมไฟฟ้า ใก้กักขวย

ตั้งแต่กลางคริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ เป็นต้นมา วิชาตรีโกณมิติได้พัฒนาต่อไปในแนวเกี่ยวกับคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ กล่าวคือมีลักษณะเป็นนามธรรมมากขึ้น พิจารณาถึงกรณีทั่ว ๆ ไปมากขึ้น และขึ้นอยู่กับจำนวนจริงมากขึ้น ตัวอย่างเช่น แม้ว่าในศตวรรษที่ ๑๖ ตรีโกณมิติจะขึ้นอยู่กับความยาวของกอร์ดหรือครึ่งคอร์ด แต่ในสมัยปัจจุบันนี้ นักคณิตศาสตร์มักใช้นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติในเทอมของจำนวนจริง กันนี้เห็นควน.

๕. สถิติและความน่าจะเป็น (Statistics และ Probability)

จากหลักฐานเท่าที่ค้นพบปรากฏว่า ในตอนต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๑๖ การ์ดาโน (Cardano) ซึ่งเป็นทั้งนักวิทยาศาสตร์ นักคณิตศาสตร์ และนักการพนันชาวอิตาลีได้เขียนคู่มือการเล่นการพนันไว้เล่มหนึ่ง และในหนังสือเล่มนี้ได้กล่าวถึงปัญหาบางเรื่องที่เกี่ยวข้องกับเรื่องความน่าจะเป็น (Probability) ด้วย

^{๖๒} Bell, E.T., Development of Mathematics, p. 122.

สาเหตุที่นักคณิตศาสตร์ในสมัยนั้นสนใจเรื่องความน่าจะเป็น ก็เพราะต้องการจะคำนวณหาโอกาสที่จะเป็นไปได้ในการพนันบางอย่าง เช่น เกี่ยวกับลูกเต๋า เป็นต้น และปัญหาข้อหนึ่งที่น่าจะถือได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นนี้ คือ ปัญหาเรื่องแต้ม (Problem of the Points) ซึ่งมีใจความโดยสรุปว่า^{๖๓} "นักการพนันสองคนซึ่งมีความชำนาญเท่ากัน แต่จำเป็นต้องเลิกการแข่งขันเดิกลงกลางคัน ควรจะแบ่งเงินเดิมพันอย่างไร ถ้าหากทราบว่าในขณะที่ยังเลิกการแข่งขันแต่ละคนทำได้อีกกี่แต้ม และจะต้องทำอีกกี่แต้มจึงจะชนะ" ปัญหานี้เป็นที่รู้จักกันแพร่หลายมาก และมีนักคณิตศาสตร์หลายท่านรวมทั้งการคำนวณที่พยายามหาคำตอบ แต่ก็ยังไม่ใคร่ได้ค้นคว้า จนกระทั่งต่อมาในตอนกลางคริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ จึงมีผู้คิดได้สองคน คนละแบบคือ พาสกาล (Pascal) และเฟอร์แมท (Fermat) แนวคิดของพาสกาลใช้แก้ปัญหาแบบนี้โดยกว้างขวางกว่า และได้สร้าง "สามเหลี่ยมของตัวเลข" (Pascal's Triangle) ประกอบด้วย

จากผลงานการคิดค้นของพาสกาลและเฟอร์แมท นี้เอง ที่ทำให้ไฮเกนส์ (Huygens) นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ชาวฮอลแลนด์สามารถเขียนตำราได้เล่มหนึ่งเมื่อปี ค.ศ. ๑๖๕๙ ซึ่งนับว่าเป็นตำราที่ให้คำอธิบายเกี่ยวกับเรื่องความน่าจะเป็น ได้ดีที่สุด และใช้กันเป็นหลักต่อมา จนกระทั่งถึงปี ค.ศ. ๑๗๑๓ จึงได้มีตำราของเจมส์ เบร์นอลลี (James Bernoulli) ซึ่งก็เข้ามาแทนที่เจมส์ เบร์นอลลี เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสที่สำคัญคนหนึ่งในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ มีเรื่องราวทางคณิตศาสตร์หลายอย่างที่เกี่ยวข้องตามชื่อของท่าน ทั้งเช่นในวิชาสถิติและความน่าจะเป็น มีคำว่า "Bernoulli Distribution" และ "Bernoulli Theorem" เป็นต้น

นักคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกคนหนึ่งที่มีส่วนให้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องสถิติและความน่าจะเป็น คือ เดมูว์ร์ (De Moivre) ซึ่งนอกจากจะได้เขียนหนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีของความน่าจะเป็น และมีบางเล่มที่มีความสำคัญในการพัฒนาเรื่องต่าง ๆ ทางสถิติ เองใช้ประโยชน์ในการประกันภัย แลว เดมูว์ร์ ยังได้ค้นพบสูตรและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในเรื่องนี้ด้วยหลายอย่าง เช่น Integral ของความน่าจะเป็น $(\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2)$ สมการแทนโค้งของความถี่ปกติ $(y = ce^{-hx^2})$ โดยที่ e

^{๖๓} Eves, H., op. cit., p. 261.

^{๖๔} Bell, E.T., The Development of Mathematics, p. 156.

^{๖๕} Idid., p. 583.

^{๖๖} Eves, H., op. cit., p. 358 - 359.

และ h เป็นค่าคงที่) และสูตร $n! \approx (2\pi n)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^n$ ซึ่งมีประโยชน์ในการหา Factorial ของเลขจำนวนมากรวม ๆ โดยถือค่าประมาณเท่านั้น

เมื่อเปรียบเทียบกับคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ อาจกล่าวได้ว่า วิชาสถิติเป็นวิชาที่เกิดขึ้นมาช้าที่สุด แต่ก็ถึงกระนั้นก็อาจกล่าวได้ว่า สถิติเป็นวิชาที่มีคุณค่าและสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นหรือใช้ในการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ได้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในสาขาวิชาสังคมศาสตร์และการวิจัย เป็นต้น ดังนั้นหากการศึกษาด้านคณิตศาสตร์จึงมีความเห็นว่า ควรให้นักเรียนมัธยมมีโอกาสได้เรียนเกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้ด้วย

๒. แคลคูลัส (Calculus)

ในสมัยปัจจุบัน เมื่อนักเรียนเรียนวิชาแคลคูลัสจะต้องเรียนเรื่อง Differentiation ก่อนเรื่อง Integration แคลคูลัสประวัติของคณิตศาสตร์แล้ว ว่าจะทราบว่ นักคณิตศาสตร์เริ่มมีแนวคิดในเรื่องหลังก่อนเรื่องแรก ^{๖๗} นักคณิตศาสตร์ได้แนวคิดเรื่อง Integration มาจากขบวนการรวมเข้าด้วยกัน (Summation Process) ซึ่งใช้ในการหาพื้นที่ ปริมาตรและความยาวของส่วนโค้ง ต่อมาจึงได้แนวคิดเกี่ยวกับ Differentiation จากการพิจารณาปัญหาเรื่องเส้นสัมผัสกับโค้งและเรื่อง การสูงสุดกับค่าต่ำสุด (Maxima and Minima) ของฟังก์ชัน และต่อจากนั้นไม่นานนักจึงทราบว่ ^{๖๘} เรื่อง Integration และ Differentiation มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันโดยทวิวิธีการหนึ่ง มีลักษณะผกผัน (Inverse Operation) กับอีกริวิธีการหนึ่ง

นับตั้งแต่สมัยโบราณเป็นต้นมา นักคณิตศาสตร์ได้คิดใช้วิธีการต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการคำนวณหาพื้นที่ ปริมาตรและความยาวของส่วนโค้ง ได้ดีขึ้นเป็นลำดับ ตลอดจนได้พิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการลากเส้นให้สัมผัสโค้ง และการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ยิ่งกว่านั้นในคอนตอนคริสต์ศตวรรษที่ ๑๓ นักคณิตศาสตร์บางคนเริ่มมีแนวคิดในเรื่องแคลคูลัสแล้ว ทั้งในส่วนที่เกี่ยวกับ Integration และ Differentiation และยังสามารถใช้วิธีการดังกล่าวแก้ปัญหาได้ด้วย แต่วิธีการเหล่านั้นยังไม่ีระบบ ไปได้ใช้สัญลักษณ์ และยังขาด Concept พื้นฐานบางอย่าง ในคอนปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๗ นิวตัน (Newton) และไลบ์นิทซ์ (Leibnitz) จึงสามารถค้นพบวิธีการ Integration ที่สมบูรณ์ และต่อมาในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ จึงมีผู้ค้นพบวิธีการ Differentiation

✱ การที่ทั้งนิวตันและไลบ์นิทซ์สามารถคิดเรื่องแคลคูลัสได้ทั้งสองคนก็กล่าวขานกัน กว่ เกิดปัญหาว่า ใครคิดได้ก่อนเป็นคนแรก ปัญหาข่งนั้นนอกจากจะเกาะกัใจนักคณิตศาสตร์ทั้งสองคนนั้นแล้ว ยังมีผลมาถึงบุคคลในรุ่นหลังด้วย

ถึงไ้กล่าวในตอนต้นบทนี้แล้วว่า เมื่อมีผู้คิดเรื่องแคลคูลัสได้ นักคณิตศาสตร์ก็สนใจแต่การใช้วิธีการ Integration และ Differentiation ของวิชานี้แก้ปัญหาต่าง ๆ ึ่งทางคณิตศาสตร์และทางฟิสิกส์ ทั้ง ๆ ที่ในระยะนั้นรากฐานของวิชาแคลคูลัสยังไม่มั่นคง นับตั้งแต่

^{๖๗} Eves, H., op. cit., p. 318.

^{๖๘} Boyer, C.B., op. cit., p. 189.

ปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ เป็นต้นมา นักคณิตศาสตร์จึงเริ่มตระหนักว่าเรื่องนี้เป็นเรื่องที่สำคัญยิ่ง และพยายามจะใช้วิธีการ Analysis มาช่วยสร้างรากฐานของวิชาแคลคูลัสให้มั่นคงและถูกต้องตามหลักเกณฑ์อย่างแท้จริง

๖) Analysis

เมื่อพิจารณาคูณงานของนักคณิตศาสตร์บางคนในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๘ และก่อนหน้านั้น อาจจะได้พบข้อผิดพลาดบางอย่างซึ่งแสดงว่านักคณิตศาสตร์ในสมัยนั้นมุ่งแต่จะทำตามกฎหรือสูตรโดยมิได้คำนึงถึงข้อจำกัดบางประการ ตัวอย่างเช่น เมื่อใช้ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ในการกระจาย $(1-2)^{-1}$ จะได้ผลดังนี้

$$-1 = 1+2+4+8+16+ \dots$$

หรือถ้าจะหาผลรวมของ Series พัง ๒ Series ก็

$$x+x^2 + \dots = \frac{x}{1-x} \quad \text{และ} \quad 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\dots = \frac{x}{x-1}$$

จะได้ผลดังนี้

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = 0$$

เป็นต้น ซึ่งผลที่ปรากฏออกมาเช่นนี้คงเป็นสาเหตุอันหนึ่งที่ทำให้บรรดานักคณิตศาสตร์รุ่นหลัง โดยเฉพาะตั้งแต่ต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เป็นต้นมา เริ่มสนใจศึกษาถึงรากฐานของคณิตศาสตร์ และพยายามระมัดระวังในการใช้กฎเกณฑ์และสูตรมากยิ่งขึ้น

ส่วนวิชาแคลคูลัสนั้น แม้จะรู้สึกันว่าจะใช้วิชา Analysis มาช่วยสร้างรากฐานของแคลคูลัสได้ แต่นักคณิตศาสตร์ก็ตระหนักกันว่า รากฐานของวิชา Analysis ยังไม่มั่นคง ถึงเมื่อ อเลมเบิร์ต (d' Alembert) ได้แนะนำไว้เมื่อปี ค.ศ. ๑๗๔๔ ว่า จำเป็นจะต้องใช้ทฤษฎีของลิมิตช่วยสร้างรากฐานของวิชา Analysis ซึ่งนักคณิตศาสตร์คนอื่น ๆ พยายามจะหาตาม จนในที่สุดปรากฏว่า กอซี (Cauchy) สามารถทำได้สำเร็จ โดยครั้งแรกก่อตั้งทฤษฎีของลิมิตเพื่อให้ยอมรับเป็นเบื้องต้น แล้วจึงนิยามคำว่า Convergence , ความต่อเนื่อง (Continuity) , การสามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ (Differentiability) และ Definite Integral ในเทอมของลิมิต

๒๘

Eves, H., op. cit., p.360.

๓๐

Boyer, C.B., op. cit., p.237.

ซึ่งมีลักษณะ เช่นเดียวกับคำนิยามที่พบเห็นอยู่ในตำราวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นในสมัยนั้นเอง ตัวอย่างเช่น

(๑) Infinite Sequence ใดจะเป็น Convergent ก็ต่อเมื่อเราสามารถหาลิมิตของ Infinite Sequence นั้นได้

(๒) ฟังก์ชัน f จะต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

ก. เราหาค่า $f(x_0)$ ได้

ข. เราหาค่า $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ได้

ค. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

ดังนี้ เป็นต้น

ในสมัยนั้นนักคณิตศาสตร์คิดว่า ความสำเร็จในการแก้ปัญหาเรื่องราวของวิชา Analysis ได้ แก่หลังจากนั้นกลับปรากฏว่า ใ้มีปัญหามากขึ้นอีก ดังเช่นเมื่อปี ค.ศ. ๑๘๗๒ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันคนหนึ่งได้ประกาศว่า มีเส้นโค้งบางชนิดซึ่งแม้ว่าจะเป็นเส้นโค้งที่ต่อเนื่องกันโดยตลอดแต่ก็ไม่สามารถสร้างเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนั้น ณ จุดใด ๆ ได้ (นั่นคือแม้ว่าฟังก์ชันของโค้งนั้นจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ก็ไม่มีค่าอนุพันธ์หรือ derivative) นอกจากนี้เขายังสามารถสร้างฟังก์ชันแบบหนึ่งที่มีคุณสมบัติว่า ถ้าค่าของตัวแปรเป็นจำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers) ฟังก์ชันจึงจะต่อเนื่อง แต่ถ้าเป็นจำนวนตรรกยะ (Rational Numbers) ฟังก์ชันกลับไม่ต่อเนื่อง ดังนี้ เป็นต้น ตัวอย่างการค้นพบดังกล่าว นอกจากจะขัดกับสามัญสำนึกของมนุษย์แล้ว ยังทำให้เห็นประจักษ์ชัดยิ่งขึ้นว่า ความสำเร็จในการแก้ปัญหาได้ไม่ตรงจุดแม้ว่าจะตั้งทฤษฎีของลิมิตจากระบบจำนวนจริง (Real Numbers) แล้วก็ตาม เมื่อเป็นเช่นนี้นักคณิตศาสตร์จึงตระหนักว่า จำเป็นต้องกำหนดคุณสมบัติของระบบจำนวนจริงให้ลึกซึ้งและมั่นคงยิ่งกว่าที่เป็นอยู่ จากนั้นจึงจะสามารถตั้งทฤษฎีของลิมิต (Limit) ความต่อเนื่อง (Continuity) และการสามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ (Differentiability) ให้มั่นคงต่อไปได้ ซึ่งปรากฏว่ามีนักคณิตศาสตร์หลายคนสนับสนุนแผนการศึกษาดังกล่าวซึ่งเรียกชื่อว่า "Arithmetization of analysis"

๗๑

Sherwood, G.E.F. and Taylor, A.E., Calculus, p.32.

๗๒

Ibid., p.25.

๗๓

Boyer, C.B., op. cit., p.238,

แผนการศึกษาคนคว้างกล่าวแม่ว่า เป็นเรื่องที่ยุ่งยากและละเอียดมาก แต่ถึงกระนั้นก็ปรากฏว่า ^{๗๔}เวียสตรัส (Weierstrass) และนักคณิตศาสตร์รุ่นหลัง สามารถทำให้บรรลุลดลงเป้าหมายได้ กล่าวคือ สามารถสร้างระบบจำนวนจริงให้เป็นรากฐานของวิชา Analysis ได้

เมื่อปรากฏว่านักคณิตศาสตร์สามารถสร้างระบบจำนวนจริงให้เป็นรากฐานของวิชา Analysis ได้ ก็หมายความว่าเราจะสร้างระบบจำนวนจริงนี้ให้เป็นรากฐานของวิชาอื่น ๆ ในหมวดคณิตศาสตร์ต่อไป ซึ่งก็ปรากฏว่าสำหรับวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตนั้นมีทางทำได้จริง เมื่อเป็นเช่นนี้จึงอาจกล่าวได้ว่า เรื่องของคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะคงขึ้นกับเรื่องของระบบจำนวนจริง ถ้ารากฐานคือระบบจำนวนจริงไม่มีข้อขัดแย้งกันแล้ว เรื่องของคณิตศาสตร์ก็จะไม่มีข้อขัดแย้งกันด้วย ฉะนั้นการสร้างหรือกำหนดคุณลักษณะของจำนวนจริง จึงเป็นเรื่องที่มีความสำคัญยิ่ง

อย่างไรก็ตาม เมื่อนักคณิตศาสตร์โคกาวมาถึงขั้นนี้แล้ว ก็มีผู้สงสัยต่อไปอีกว่า จะทำให้รากฐานของคณิตศาสตร์ลึกซึ้งกว่านี้อีกได้หรือไม่ในที่สุดจึงปรากฏว่า ในตอนปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ เดเดคินด์ (Dedekind) และแคนทอร์ (Cantor) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน และ เปียโน (Peano) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีสามารถแสดงได้ว่า อาจจะมีจำนวนธรรมชาติ (Natural Numbers) ซึ่งเป็นระบบจำนวนที่เป็นพื้นฐานยิ่งกว่าระบบจำนวนจริงและง่ายยิ่งกว่าด้วยนั้น เป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์ได้

ต่อมาในตอนต้นคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียแสดงได้ว่า อาจจะมีนิยามคำว่า จำนวนธรรมชาติในเทอมของเรื่องเซต (Set Theory) ได้ ผลที่เกิดขึ้นมาก็คือ การที่ยอมรับว่าทฤษฎีเรื่องเซตเป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์และยิ่งกว่านั้นยังมีนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษที่สำคัญอีกสองท่านคือ รัสเซลล์ (Russell) และ ไวท์เฮด (Whitehead) พยายามจะทำให้รากฐานของคณิตศาสตร์ลึกซึ้งไปกว่านี้อีก โดยแสดงว่า ทฤษฎีของเซตเกิดจากเรื่อง Calculus of Proposition ในทางตรรกศาสตร์ (Logic) แต่สำหรับประเด็นนี้ยังไม่เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป

ในปัจจุบันนี้เป็นที่ยอมรับกันว่า ทฤษฎีของเซตเป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์ แต่เมื่อปรากฏว่ามีผู้คนพบข้อขัดแย้ง (Paradoxes) เกี่ยวกับเรื่องเซต ซึ่งหมายความว่ารากฐานที่ลึกที่สุดของคณิตศาสตร์ยังไม่มั่นคงนัก เมื่อเป็นเช่นนี้จึงเป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ ที่จะคง

^{๗๔} Eves, H., op.cit., p.368.

^{๗๕} Wilder, R.L., Introduction to the Foundations of Mathematics, pp.209-229

แก้ปัญหานี้ให้ได้ และปรากฏว่า ในระยะนี้เองที่ได้เกิดกลุ่มปรัชญาในทางคณิตศาสตร์ ๓ กลุ่ม ที่สำคัญ คือ

๑. **Logicism** เป็นปรัชญาคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดปรัชญาหนึ่งในสมัยปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์กลุ่มที่ยึดถือปรัชญานี้ได้เน้นความสำคัญของตรรกศาสตร์ว่า เป็นวิชาที่ก่อให้เกิดแกววิชาคณิตศาสตร์ยิ่งกว่าเป็นเพียงเครื่องมือของคณิตศาสตร์ ทั้งยังกล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นแขนงหนึ่งของตรรกศาสตร์เท่านั้น เพราะสามารถเปลี่ยน Concept และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดให้เป็น Concept และทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ได้ ผลงานของนักคณิตศาสตร์กลุ่มนี้ ซึ่งมี ไวท์เฮดและรัสเซลล์เป็นผู้นำปรากฏอย่างเด่นชัดในหนังสือ Principia mathematica

๒. **Formalism** นักคณิตศาสตร์กลุ่มที่ยึดถือปรัชญานี้ ซึ่งมี ฮิลเบิร์ต (Hilbert) เป็นผู้นำ เน้นว่า คณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับระบบของสัญลักษณ์ และถือว่าการพิสูจน์ความคงเส้นคงวา (Consistency) ของคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่มีความสำคัญมากที่สุด

๓. **Intuitionism** นักคณิตศาสตร์กลุ่มที่ยึดถือปรัชญานี้ ซึ่งมี บราวเวอร์ (Brouwer) เป็นผู้นำ เน้นว่า มนุษย์สามารถใช้สามัญสำนึกสร้างคณิตศาสตร์ขึ้นมาได้ ทำนองเดียวกับสร้างระบบจำนวนธรรมชาติ (Natural Numbers) และเมื่อมีระบบจำนวนธรรมชาติแล้ว ก็สามารถสร้างคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ต่อไปได้

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากหนังสือ Principia mathematica ของนักปรัชญากลุ่ม Logicism มีชื่อเสียงมาก ประกอบกับการที่ยอมรับว่า คณิตศาสตร์แต่ละสาขาเกิดจากเซตของกติกากำหนด และการใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ (Logic) ดังนั้น ในสมัยปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์จึงสนใจศึกษาเรื่องตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) มาก

๔. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

ตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่วาดยวหลักของการให้เหตุผล มีกำเนิดนานกว่าสองพันปีมาแล้ว ผู้ที่ให้กำเนิดแกววิชานี้ คือ อริสโตเติล (Aristotle) นักปราชญ์ชาวกรีก ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่างปี ๓๘๔ - ๓๒๒ ก่อนคริสตกาล อริสโตเติลเป็นแนวทางหลักเกณฑ์ของวิชานี้ และได้รวบรวมหลักของการให้เหตุผลไว้เป็นจำนวนมาก ที่สำคัญได้แก่หลักของ Deduction ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีทาง ๆ ของคณิตศาสตร์ แต่ในสมัยก่อนคริสตกาลที่ ๓๒๓ นั้น วิชาตรรกศาสตร์ จะเกี่ยวข้องกับปรัชญาและกฎหมายเป็นส่วนใหญ่ ภาษาที่ใช้ก็เป็นภาษาธรรมดา ซึ่งมีความหมายไม่ชัดเจนหรือรัดกุมดีเท่าภาษาสัญลักษณ์ ต่อมาในระหว่างปี —

ค.ศ. ๑๖๗๕ - ๑๖๘๐ ไบเนทซ์ จึงได้เริ่มพัฒนตรรกศาสตร์ของอริสโตเติล ให้เป็นตรรกศาสตร์
 สัญลักษณ์หรือตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (Symbolic Logic หรือ Mathematical Logic
 อันเป็นตรรกศาสตร์แผนปัจจุบันที่ใช้ภาษาสัญลักษณ์ นอกจาก ไบเนทซ์แล้ว นักคณิตศาสตร์คนสำคัญอื่น ๆ
 ซึ่งมีส่วนพัฒนาวิชานี้ด้วย ได้แก่ บูล (Boole) เดอมอร์แกน (De Morgan) เพียร์ซ (Pierce)
 เฟรเก (Frege) เปียโน (Peano) ฮิลเบิร์ต (Hilbert) และ เบอร์เนยส์ (Bernays)
 นักคณิตศาสตร์เหล่านี้ได้พัฒนาผลงานเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ขึ้นเผยแพร่ โดยมีจุดมุ่งหมาย ๒ ประการคือ ๗๖
 (๑) เพื่อพัฒนาระบบตรรกศาสตร์ และรวบรวมหลักของการให้เหตุผลที่ถูกต้อง หรือสมเหตุสมผล
 (Valid)

(๒) เพื่อนำความรู้ทางตรรกศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับรากฐานของคณิตศาสตร์ ซึ่งจะทำให้
 รากฐานของวิชานี้มั่นคงยิ่งขึ้น

คณิตศาสตร์เป็นระบบนามธรรม ประกอบด้วยคำที่ไม่ให้นิยาม (Undefined Terms)
 คำที่ให้นิยาม (Defined Terms) และประพจน์ (Proposition) ๒ ชนิด คือ กติกา
 (Postulates หรือ Axioms) ซึ่งเป็นประพจน์ที่ยอมรับหรือสมมติว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์
 และทฤษฎี (Theorems) ซึ่งเป็นประพจน์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่า เป็นจริงโดยอาศัยกติกาและหลักของการ
 ให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ การขยายตัวของคณิตศาสตร์แผนใหม่ซึ่งก่อให้เกิดแขนงวิชาใหม่ทางคณิตศาสตร์
 เพิ่มขึ้นหลายแขนงนั้น เนื่องมาจากการขยายขอบเขตของกติกาและการสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ โดยการหาผลสรุป
 ทางตรรกศาสตร์ (Logical Consequences) ซึ่งสรุปได้จากเซตของกติกาและทฤษฎีนั้น ๆ ที่มีอยู่
 เดิม ด้วยเหตุนี้ตรรกศาสตร์จึงมีความสำคัญต่อคณิตศาสตร์เป็นอันมาก

สรุป

๑. คณิตศาสตร์เป็นระบบนามธรรม ประกอบด้วยคำที่ไม่ให้นิยาม (Undefined Terms)
 คำที่ให้นิยาม (Defined Terms) และประพจน์ ๒ ชนิด คือ กติกา (Postulates หรือ
 Axioms) ซึ่งเป็นประพจน์ที่เรายอมรับหรือสมมติว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ และทฤษฎี (Theorems)

๗๖ บุทธชาด พูลสวัสดิ์ "ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ของนิสิตชั้นปีที่ ๑
 วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร ปทุมวัน และบางแสน ปีการศึกษา ๒๕๐๔" ปริทัศน์นิพนธ์
 หน้า ๒.

ซึ่งเป็นประพจน์ที่เราพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงโดยอาศัยกติกาและหลักของการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์

๒. การขยายตัวของคณิตศาสตร์แผนใหม่ซึ่งก่อให้เกิดแขนงวิชาใหม่ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นในจำนวนมากนั้น เนื่องมาจากการขยายหรือเปลี่ยนแปลง เขตของกติกามี้อยู่เดิมและการสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ โดยการหาผลสรุปทางตรรกศาสตร์ (Logical Consequences) ซึ่งสรุปได้ว่าทุกเขตของกติกาสถาปนาใหม่และทฤษฎีอื่น ๆ ที่มีอยู่เดิม ด้วยเหตุนี้ตรรกศาสตร์จึงมีความสำคัญต่อคณิตศาสตร์เป็นอันมาก และนักคณิตศาสตร์ยุคปัจจุบันบางคน เช่น ศาสตราจารย์เฟร์ (Howard F. Fehr) หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ของวิทยาลัยวิชาการศึกษาแห่ง มหาวิทยาลัยโคลัมเบียในสหรัฐอเมริกาถือว่า คณิตศาสตร์แผนใหม่คือคณิตศาสตร์ที่มีกำเนิดตั้งแต่สมัยที่ไลบ์นิทซ์ เริ่มพัฒนาวิชาตรรกศาสตร์แผนเก่าของอริสโตเติลเกิดขึ้นเอง ก็เริ่มตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๖๗๕

๓. คณิตศาสตร์แผนใหม่มีลักษณะเด่น ๓ ประการคือ

ก. Generalization หมายถึงการสรุปความรู้เกี่ยวกับเรื่องต่าง ๆ ให้สามารถครอบคลุมขอบเขตของเรื่องนั้น ๆ ได้กว้างขวางขึ้น กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ความพยายามที่จะตั้งทฤษฎีทฤษฎี หรือสูตร เพื่อให้นำไปใช้กับกรณีทั่ว ๆ ไปได้ มิใช่ได้ใช้กับกรณีเฉพาะเท่านั้น

ข. Abstraction หมายถึงการพิจารณาหรือศึกษาคณิตศาสตร์ในลักษณะที่เป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น กล่าวคือมีการใช้สัญลักษณ์และแบบในโครงสร้างของวิชามากขึ้น ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ ตามนัยของนักปรัชญาคณิตศาสตร์กลุ่มนี้ก็คือปรัชญา Logicism ซึ่งถือว่าคณิตศาสตร์เป็นเพียงแขนงหนึ่งของตรรกศาสตร์เท่านั้น

ค. Arithmetization หมายถึงการนำระบบจำนวนจริง (Real Number) เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์

๔. คณิตศาสตร์แผนใหม่ มีความหมายอย่างสรุปคือ ความใหม่ในเนื้อหาวิชา (New Content หรือ New Subject Matter) และความใหม่ในวิธีการ (New Approach หรือ New Viewpoint) ซึ่งหมายรวมทั้งความใหม่ในวิธีการแก้ปัญหาและวิธีการสอน

เนื่องจากความรู้ หลักการ และวิธีการในวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ มีคุณค่าทั้งต่อการศึกษาวางด้านคณิตศาสตร์เอง ต่อการศึกษาทางวิชาการแขนงต่าง ๆ โดยเฉพาะวิทยาศาสตร์ธรรมชาติและสังคมศาสตร์ และต่อการดำเนินชีวิตของมนุษย์ในสังคมปัจจุบันอย่างยิ่ง นักการศึกษาและนักคณิตศาสตร์ของประเทศต่าง ๆ จึงพากันคิดและทดลอง เพื่อปรับปรุงการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ของตนให้เป็นไปตามแนวใหม่นี้.

บทที่ ๓

ตอนที่ ๑

ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา

คนอเมริกันส่วนมากเข้าใจว่า คณิตศาสตร์แผนใหม่ (และการใช้หลักสูตรใหม่ในวิชาฟิสิกส์) เป็นคำตอบของสหรัฐอเมริกาต่ออุปสรรค* ของสหภาพรัสเซีย แต่ตามความเป็นจริงนั้น นักคณิตศาสตร์และนักการศึกษาคณิตศาสตร์ของสหรัฐ กระหมัดถึงความจำเป็นที่จะต้องปรับปรุงทั้งทางด้านหลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์มานานแล้ว^๑ คือนับตั้งแต่ประมาณปี ค.ศ. ๑๙๕๐ เป็นต้นมา และข้อเสนอของคณะกรรมการชุดต่าง ๆ ก็มีผลทำให้เกิดความเปลี่ยนแปลงในการศึกษาทางคณิตศาสตร์มาบ้างแล้ว แต่ยังขาดความสนับสนุนจากประชาชนโดยทั่ว ๆ ไป และจากรัฐบาลเท่าที่ควรเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม หลังจากที่สหภาพรัสเซียได้ส่งอุปสรรคขึ้นไปแล้ว บุคคลสำคัญของรัฐบาลสหรัฐตลอดจนประชาชนจึงได้เริ่มตระหนักถึงความจำเป็นอย่างรีบด่วนที่จะต้องปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ และนับจากนั้นเป็นต้นมา ทั้งสองฝ่ายที่กล่าวนี้ได้ให้ความร่วมมือและสนับสนุนในการดำเนินงานเรื่องนี้อย่างคึกคัก ผิดกับที่เคยเป็นมาในสมัยก่อน ด้วยเหตุนี้จึงได้มีผู้กล่าวว่า อุปสรรค นอกจากจะเป็นสัญลักษณ์แห่งการเป็นผู้นำในเทคโนโลยีด้านจรวด

* อุปสรรค ๑ เป็นดาวเทียมดวงแรกของโลกที่รัสเซียส่งขึ้นสู่วงโคจรได้สำเร็จ เมื่อวันที่ ๔ ตุลาคม ค.ศ. ๑๙๕๗ ต่อจากนั้นอีกประมาณสามเดือน สหรัฐจึงสามารถทำได้สำเร็จเช่นกัน

^๑ Willoughby, S.S., Contemporary Teaching of Secondary School Mathematics, p. 5.

ของรัสเซียแล้ว ยังเป็นสิ่งที่กระตุ้นเตือนให้สหรัษฎิกทบทวนในเร็ว การศึกษาฝ่ายวิทยาศาสตร์ (ซึ่งรวมถึงคณิตศาสตร์) ของประเทศด้วย ^๒

ประวัติการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐมีลักษณะเด่นประการหนึ่งคือ มีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอทั้งในค่านหลักสูตรและวิธีการสอน ซึ่งจะกล่าวถึงความสำคัญ ดังต่อไปนี้

๑. สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐก่อนคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙

ในสมัยนั้นการศึกษาทางคณิตศาสตร์ยังไม่แพร่หลาย วิชาคณิตศาสตร์ที่สอนเป็นส่วนใหญ่ คือเลขคณิต โดยมีจุดประสงค์ที่สำคัญคือ เพื่อฝึกฝนสมอง และเพื่อประโยชน์ภาคปฏิบัติโดยเฉพาะในทางค้าขาย ส่วนวิธีสอนที่ใช้ มักจะเป็นแบบที่ส่งเสริมทางด้านความจำ ยิ่งกว่าความเข้าใจ เนื่องจากครูไม่ได้รับการศึกษาสูงกว่าผู้เรียนมากนัก และในระบายนั้นยังไม่มีสถาบันฝึกหัดครู ฉะนั้นในการสอน ครูจึงต้องพึ่งตำราเป็นสำคัญ

๒. สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐก่อนปี ค.ศ. ๑๘๕๐

ในศตวรรษนี้มีความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ๕ ประการคือ

- ๑) การเริ่มใช้หนังสือเลขคณิตและพีชคณิต) ของโกลเบิร์น (Colburn) ซึ่งตีพิมพ์ในปี ค.ศ. ๑๘๒๑ หนังสือนี้โกลเบิร์นเขียนขึ้นตามหลักการศึกษาของเพสตาลอซซี “

^๒ พัททภัย รักบพลเกษตร "นโยบายการศึกษาฝ่ายวิทยาศาสตร์" วิทยานิพนธ์ หน้า ๔.

* Johann Heinrich Pestalozzi (ค.ศ. ๑๗๘๑ - ค.ศ. ๑๘๒๗) เป็นนักการศึกษาชาวสวิสที่ยิ่งใหญ่ ผู้ซึ่งถือว่าโดยธรรมชาตินั้นคนก็อยู่แล้ว ฉะนั้นจึงไม่ควรบังคับกับเด็กให้ทำผิดธรรมชาติ.

ฉะนั้นการที่ยอมรับเอาหนังสือนี้มาใช้ จึงเท่ากับเป็นการเริ่มปฏิวัติวิธีการสอนคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางเป็นครั้งแรก โดยเปลี่ยนมาเน้นความเข้าใจและการใช้เหตุผลของผู้เรียนยิ่งกว่าความจำ และยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนการสอนมากขึ้นเท่าที่จะเป็นไปได้ ซึ่งผิดกับวิธีการสอนในระยะก่อนหน้านี้มาก

๒) การจัดตั้งสถาบันฝึกหัดครู สหรัฐเริ่มมีสถาบันฝึกหัดครู (ในสมัยนั้น เรียกว่า Normal School) เป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. ๑๘๓๙^๓ ซึ่งเท่ากับเป็นการยอมรับว่าวิธีการสอนของครูมีความสำคัญเท่า ๆ กับความรู้ของครู

๓) การจัดตั้งโรงเรียนมัธยมแบบที่เรียกว่าไฮสกูล (High School) ประมาณปี ค.ศ. ๑๘๖๐^๔ ซึ่งทำให้การศึกษาในระดับมัธยมเริ่มแพร่หลายยิ่งขึ้นเป็นลำดับ

๔) การเริ่มสอนพีชคณิต เรขาคณิต และคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ ในโรงเรียนมัธยม เนื่องจากในสมัยนั้น นักเรียนส่วนมากที่จบจากโรงเรียนมัธยมจะมุ่งเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัย ด้วยเหตุนี้มหาวิทยาลัยจึงมีอิทธิพลต่อการกำหนดหลักสูตรในโรงเรียนมัธยมโดยทางอ้อม โดยแนะนำมหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ด ซึ่งมักจะกำหนดคุณสมบัติของผู้ที่จะสมัครสอบเข้าเรียนเพิ่มเติมเป็นแห่งแรกเสมอ ดังปรากฏว่า^๕ ก่อนปี ค.ศ. ๑๙๒๖ มหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดยังไม่มีศาสตราจารย์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นคุณสมบัติของผู้ที่จะสมัครเข้ามหาวิทยาลัยตามที่กำหนดไว้จึงไม่รวมถึงวิชาคณิตศาสตร์ด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. ๑๘๖๐ มหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดได้เริ่มกำหนดความรู้ที่จะสมัครเข้ามหาวิทยาลัย นอกจากจะต้องมีความรู้ในวิชาเลขคณิตแล้ว จะต้องมีความรู้ในวิชาพีชคณิตด้วย และหลังจากนั้นเล็กน้อยมหาวิทยาลัยอื่น ๆ จึงได้กำหนด

^๓ Willoughby, S.S., op. cit., p. 3.

^๔ Butler and Wren, The Teaching of Secondary Mathematics, p. 8, (citing), History of Secondary Education, p. 461, by I.L. Kandel.

^๕ Willoughby, S.S., op. cit., p. 4.

คุณสมบัติเช่นนั้นตามอย่างบ้าง ซึ่งมีผลทำให้โรงเรียนมัธยมต้องเฝ้าหาเอาวิชาพีชคณิตเข้ามาสอนในโรงเรียน ส่วนวิชาเรขาคณิตก็เช่นกัน มหาวิทยาลัยฮาร์วาร์ดได้เริ่มกำหนดว่าจะต้องรู้วิชาเรขาคณิตด้วยเป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. ๑๘๔๔ หลังจากนั้นมหาวิทยาลัยอื่น ๆ จึงทำตามอย่างจนปรากฏว่าประมาณปี ค.ศ. ๑๘๕๕ เป็นต้นมา โรงเรียนมัธยมแทบทุกแห่งได้จัดสอนวิชาเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตให้แก่นักเรียนแล้ว

๔) การจัดตั้ง CEEB เนื่องจากมหาวิทยาลัยแต่ละแห่งต่างก็เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นในการกำหนดคุณสมบัติของผู้ที่จะสมัครเข้ามหาวิทยาลัย ถึงแม้จะมีบางส่วนที่คล้ายคลึงกัน แต่ก็ยังมีส่วนที่แตกต่างกันอยู่ เมื่อเป็นเช่นนี้จึงทำให้เกิดปัญหาแก่โรงเรียนมัธยมในอันที่จะจัดหลักสูตรเพื่อเตรียมนักเรียนให้สามารถสมัครเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยได้ทุกแห่ง ดังนั้นในทศวรรษปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ มหาวิทยาลัยกลุ่มหนึ่งจึงได้ร่วมมือกับโรงเรียนมัธยมเพื่อแก้ไขปัญหานี้ และได้จัดตั้งเป็นสมาคมขึ้นในแต่ละแห่ง เพื่อรวบรวมรายชื่อโรงเรียนมัธยมที่ทางมหาวิทยาลัยเหล่านั้นรับรอง ใบประกาศนียบัตรและพร้อมจะรับนักเรียนจากโรงเรียนเหล่านั้นเข้าเรียนในมหาวิทยาลัยไคท์นีย์โดยมิต้องสอบเข้าเรียนแต่เดิม แต่ต่อมาสมาคมดังที่กล่าวนี้สมาคมหนึ่งคือ Association of Colleges and Preparatory Schools of the Middle States and Maryland ได้ตั้ง CEEB (College Entrance Examination Board) ขึ้นในปี ค.ศ. ๑๙๐๐ และต่อมาไม่นานนัก CEEB ก็กลายเป็นหน่วยงานที่อิสระและมีอิทธิพลต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนมัธยมในคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นี้อย่างมาก

๓. สภาพการศึกษาคณิตศาสตร์ในระหว่างปี ค.ศ. ๑๘๔๐ - ๑๘๕๕

ในครึ่งหลังของคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ บรรดาประเทศต่าง ๆ ในซีกโลกตะวันตกต่างก็มีการเคลื่อนไหวเพื่อหาทางปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์อยู่โดยทั่วไป ดังปรากฏว่าในประเทศอังกฤษ ซิลเวสเตอร์ (Sylvester) ได้แนะนำให้เลิกสอนเรขาคณิตตามตำราของยูคลิด และเฟอร์รี (Ferry) ได้แนะนำให้เน้นคณิตศาสตร์ประยุกต์ และความสัมพันธ์ระหว่าง

คณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์กายภาพให้มากขึ้น นอกจากนั้นเพอร์ริงก็ได้ให้ข้อคิดเกี่ยวกับวิธีสอนอีกหลายประการเช่น ควรใช้ตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมให้มากขึ้น ในการเรียนวิชาเรขาคณิตควรให้นักเรียนมีโอกาสดทดลองเพื่อช่วยให้สามารถค้นพบข้อเท็จจริงต่าง ๆ เองบ้าง และควรใช้กราฟช่วยในการสอนคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นกว่าที่เป็นอยู่ เป็นต้น สำหรับในฝรั่งเศสและเยอรมันแทนเนอร์ (Tannery) และ คลาเบิน (Klein) ก็ได้ให้ข้อคิดซึ่งคล้ายกับที่กล่าวข้างต้น แทลคลาเบิน ได้ให้ข้อเสนอที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ การเน้นให้ใช้ concept เรื่องฟังก์ชันเป็นสิ่งเชื่อมโยงวิชาพีชคณิตและวิชาเรขาคณิต ส่วนในสหรัฐอเมริกา มัวร์ (Moore) ก็ได้สนับสนุนให้ใช้วิธีสอนตามนับเคียงกับนักคณิตศาสตร์ชาวยุโรปเช่นกัน

นอกจากความเคลื่อนไหวที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากแต่ละบุคคลที่สำคัญแล้ว ยังได้มีการจัดตั้งคณะกรรมการและคณะกรรมการขึ้นหลายชุด เพื่อดำเนินงานเกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ ที่สำคัญคือ

๑) Committee of Ten on Secondary School Subjects

คณะกรรมการชุดนี้ได้จัดตั้งคณะกรรมการของแต่ละวิชาขึ้นในปี ค.ศ. ๑๘๙๒ และปรากฏว่าสำหรับคณะกรรมการของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งมีนิวคอมบ์ (Newcomb) เป็นประธานนั้นได้ให้ข้อเสนอแนะที่สำคัญ ๕ ประการคือ ^๖

(๑) ควรตัดเนื้อหาของวิชาเลขคณิตที่ยุ่งยากเกินไปและไม่ค่อยมีประโยชน์

ออกจากหลักสูตร

(๒) ควรจัดสอนวิชาเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นรูปธรรม แก่นักเรียน

เกรด ๗ และเกรด ๘

(๓) ควรเริ่มสอนวิชาพีชคณิตจริง ๆ ในเกรด ๙ และ สอนฝึกหัดกัน

^๖ Butler and Wren, op. cit., p. 9, (citing, Report of the Committee of Ten on Secondary School Subjects, pp. 105 - 116.

เรื่อยไปจนถึงเกรด ๑๑

(๔) สำหรับการสอนวิชาพีชคณิตในเกรด ๑๐ และเกรด ๑๑ นั้น ควรสอนคู่กับวิชาเรขาคณิตแบบที่มีการพิสูจน์ เพื่อสนับสนุนให้ครูมีโอกาสรวมสองวิชานี้เข้าด้วยกัน และสามารถแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสองวิชานี้ได้

(๕) ควรสอนวิชาบัญชีและเทคนิคต่าง ๆ ในวิชาเลขคณิต แก่นักเรียน เกรด ๑๐ ถึงเกรด ๑๒ ที่ไม่คิดจะเรียนต่อในมหาวิทยาลัย ส่วนอีกพวกหนึ่งให้สอนวิชาตรีโกณมิติ และพีชคณิตขั้นสูง

ในจำนวนข้อเสนอทั้งหมดนี้ ปรากฏว่าในทางปฏิบัติจริงครูยังไม่สามารถทำตาม ข้อเสนอที่ ๔ ได้ เนื่องจากครูมักจะสอนวิชาหนึ่งมากกว่าอีกวิชาหนึ่งตามที่คนนัดเสมอ หรือ ไม่นั่นก็สอนเสมือนกับว่าสองวิชานี้ไม่มีความสัมพันธ์กัน

๒) Committee on College Entrance Requirements
สมาคมการศึกษาแห่งชาติของสหรัฐหรือ NEA ได้ก่อตั้งคณะกรรมการชุดนี้ขึ้นเพื่อหาทาง ชักจูงวางระหว่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมและระดับมหาวิทยาลัย คณะกรรมการชุดนี้ ได้พิมพ์รายงานเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๔๕ โดยได้ให้ข้อเสนอแนะซึ่งคล้ายกับของคณะกรรมการชุดแรก ที่กล่าวไปแล้ว แต่มีหลายวิชาที่ถูกกลดลงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่าเดิม ๑ ปี กล่าวคือ^๓

(๑) เกรด ๙ สอนวิชาเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นรูปธรรมและวิชา พีชคณิตเบื้องต้น

(๒) เกรด ๘ สอนวิชาเรขาคณิตแบบที่มีการพิสูจน์และวิชาพีชคณิต ขั้นสูงขึ้น

^๓ Butler and Wren, op. cit., pp. 9 - 10, (citing), "Report of the Committee on College Entrance Requirements" in Proceedings and Addresses of National Education Association, pp. 648 - 651, by A.F. Nightingale.

(๓) เกรก ๘ – ๑๐ สอนวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตคู่กัน

(๔) เกรก ๑๑ สอนเรขาคณิตสามมิติ (Solid Geometry)

และตรีโกณมิติ

(๕) เกรก ๑๒ สอนวิชาพีชคณิตขั้นสูงและทบทวนสิ่งที่เรียนมาแล้ว

ทั้งหมด

๓) International Commission on the Teaching of Mathematics คณะกรรมการชุดนี้ซึ่งก่อตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๐๔^๘ เป็นคณะกรรมการชุดแรกที่ดำเนินงานเกี่ยวกับการศึกษาคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางที่สุด และจากการที่ได้ศึกษาและอภิปรายร่วมกัน ทำให้ได้ข้อเท็จจริงต่าง ๆ หลายอย่างกล่าวคือ

(๑) คณะกรรมการได้พบว่า^๙ ประเทศทั้งหลายต่างก็รับเอาแนวคิดของเพอร์รี ไปใช้ปฏิบัติ โดยเฉพาะเรื่องการใช้กราฟและการประยุกต์เอาคณิตศาสตร์ไปใช้ในแบบที่มีประโยชน์ยิ่งขึ้น

(๒) คณะกรรมการได้พบแนวทางการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญหลายอย่าง กล่าวคือ^{๑๐} การยกเลิกบทพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้งที่ยากเกินไปและยากเกินไป การบกเหนื่อหาในวิชาพีชคณิตส่วนที่ยากมาสอนในชั้นที่สูงกว่าเดิม ๑ ปี การยกเลิกการฝึกคำนวณในวิชาพีชคณิตที่ซับซ้อนและไม่จำเป็น การเน้นสมการในวิชาพีชคณิตให้มากขึ้น การเน้นให้นำเอาคณิตศาสตร์

^๘ Reeve, W.D., Mathematics for the Secondary School, p. 9.

^๙ Willoughby, S.S., op. cit., p. 7.

^{๑๐} Ibid.

ไปใช้ได้จริงทั้งในชีวิตประจำวันและในเรื่องของวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ และการเปลี่ยนแปลงเป้าหมายของการสอนให้สอดคล้องกับผลการค้นคว้าทางจิตวิทยาแนวใหม่ที่เน้นคุณค่าของ Formal Discipline ตลอดจนความต้องการที่จะผลิตครูคณิตศาสตร์ให้มีคุณภาพดีกว่าที่เป็นอยู่

นอกจากที่กล่าวแล้ว สหรัฐยังได้ตระหนักถึงความจริงข้อหนึ่งว่า^{๑๑} ในระยะนั้นมาตรฐานการศึกษาของประเทศเหล่านั้นต่าง ๆ ในยุโรป เช่นปรากฏว่า เมื่อจบเกรด ๘ แล้วลาหลังไป ๑ ปี และเมื่อจบเกรด ๑๒ จะลาหลังไป ๒ ปี เป็นต้น

๘) National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus

ในตอนแรก NEA และ American Federation of Teachers of the Mathematical and Natural Sciences ต่างก็ได้จัดตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งเพื่อให้พิจารณาหลักสูตรวิชาเรขาคณิต เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๐๘ ต่อมาคณะกรรมการสองชุดนี้ได้รวมมือกันจัดตั้งเป็น National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus^{๑๒} ขึ้นคณะกรรมการดังกล่าวได้พิมพ์รายงานของตน เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๑๑ ซึ่งในรายงานนั้นได้ให้ข้อเสนอแนะไว้อย่างกว้างเพื่อปรับปรุงวิชาเรขาคณิตให้เป็นวิชาที่มีประโยชน์จริง ๆ มากขึ้น และเป็นวิชาที่น่าเรียนยิ่งขึ้น ข้อเสนอที่สำคัญคือ^{๑๓} แบบฝึกหัดเรขาคณิตควรให้เป็นเรื่องเกี่ยวกับการนำเอาเรขาคณิตไปใช้ในงานสถาปัตยกรรม คำว่าเรขาคณิตควรจะกล่าวถึงคำนิยามในตอนที่จะต้องได้ มิใช่รวมกล่าวไว้ที่เกี่ยวกับลวงหน้าซึ่งมักจะทำให้ผู้เรียนรู้สึกเบื่อหน่าย ก่อนจะเริ่มเรียนจริง ๆ และสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตก็ควรให้ผู้เรียนได้พิสูจน์ในแบบ (Scientific) Induction^{๑๔} ให้มากกว่านี้ด้วย

^{๑๑} Reeve, W.D., op. cit., p. 10.

^{๑๒} Willoughby, S.S., loc. cit.

๕) National Committee on Mathematical Requirements

ในปี ค.ศ. ๑๙๑๖^{๑๓} สมาคมคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐ หรือ MAA ได้จัดตั้งคณะกรรมการ

ชุดหนึ่งให้ชื่อว่า National Committee on Mathematical Requirements

ซึ่งในระยะเวลาก่อนหน้านี้เล็กน้อย ในสหรัฐกำลังเริ่มนิยมระบบโรงเรียนแบบ ๖ - ๓ - ๓*

ดังนั้นงานที่สำคัญอย่างหนึ่งของคณะกรรมการคือการเสนอแนะหลักสูตรที่เห็นว่าเหมาะสมกับ

นักเรียนในระบบโรงเรียนใหม่นี้

คณะกรรมการดังกล่าวได้พิมพ์รายงานฉบับหนึ่งเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๒๓ ซึ่งนับว่าเป็น
รายงานที่สำคัญที่สุดฉบับหนึ่งในครั้งแรกของคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นี้ และนิยมเรียกชื่อสั้น ๆ ว่า

"๑๙๒๓ Report"

รายงานฉบับนั้น ได้กำหนดถึงจุดประสงค์ในการสอนคณิตศาสตร์ไว้ ๓ ประการ
กล่าวคือ^{๑๔}

(๑) เพื่อผลทางด้านการนำไปใช้ ซึ่งอธิบายได้ว่าสอนคณิตศาสตร์
เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจและควบคุมสิ่งแวดล้อมได้

(๒) เพื่อผลทางด้านวัฒนธรรม ซึ่งอธิบายได้ว่าสอนคณิตศาสตร์เพื่อช่วย

^{๑๓} Henderson, K. B., "Research on Teaching Secondary School Mathematics" in Handbook of Research on Teaching, p. 1109.

*

ระบบโรงเรียนแบบ ๖ - ๓ - ๓ หมายความว่า เป็นระดับประถม ๖ ปี
(เกรด ๑ - เกรด ๖) ระดับมัธยมต้น (junior high school) ๓ ปี (เกรด ๗ -
เกรด ๙) และระดับมัธยมปลาย (senior high school) ๓ ปี (เกรด ๙ - เกรด
๑๒)

^{๑๔}

Henderson, K.B., loc. cit.

ให้นักเรียนมีความชื่นชมในความก้าวหน้าของอารยธรรม

(๓) เพื่อผลทางด้านการความคิดและการกระทำ ซึ่งอธิบายได้ว่า สอนคณิตศาสตร์เพื่อสร้างนิสัยทั้งในด้านการคิดและการกระทำของนักเรียน ให้เป็นผู้ที่สามารถเข้าใจและวิเคราะห์สิ่งต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งจุดประสงค์ข้อที่ ๓ นี้ต่างจากปรัชญาของนักการศึกษาในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ ที่รู้สึกกันว่า เหตุผลที่สำคัญที่สุดในการศึกษาคณิตศาสตร์คือเพื่อให้ความยากของวิชานี้มาพัฒนาสมอง แต่ความเห็นของคณะกรรมการชุดนี้ยิ่งถ่วงถ่วงที่จะให้ผลของการดำเนินชีวิตของนักเรียนเป็นสำคัญ และแม้ว่าข้อนี้ใด ๆ จะยืนยันว่าการถ่ายโยงการเรียนรู้จะเกิดขึ้นไม่ได้ ยกเว้นในกรณี ที่เหตุการณ์นั้น ๆ มีองค์ประกอบเช่นเดียวกัน (Identical Elements) ซึ่งแนวคิดนี้มีอิทธิพลต่อการที่มหาวิทยาลัยต่าง ๆ โดยทั่วไปโดยเฉพาะต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ แต่ก็ยังมีผู้คิดว่า^{๑๕} ถ้าหากครูสอนในแนวทางที่จะส่งเสริมให้เกิดการถ่ายโยง การถ่ายโยงก็อาจเกิดขึ้นได้

นอกจากจะกำหนดถึงจุดประสงค์ในการสอนคณิตศาสตร์แล้ว ในรายงานของคณะกรรมการชุดนี้ ยังได้เสนอหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (เกรด ๗ - เกรด ๙) และชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย (เกรด ๙ - เกรด ๑๒) ไว้หลายแบบ เพื่อให้ครูแต่ละคนคัดเลือกไปจัดเปลี่ยนแปลงให้ตามความเหมาะสม นอกจากนั้น คณะกรรมการยังได้เสนอว่าควรให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นทุกคนเรียนคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรใดหลักสูตรหนึ่ง และถ้าเรียนได้ก็ควรให้มีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายต่อไป แต่ปรากฏว่านักเรียนไม่ประสงค์จะเลือกเรียนวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์มาก ก็ควรให้ได้เรียนคณิตศาสตร์ภาคปฏิบัติต่าง ๆ แทน เช่น สถิติ, คณิตศาสตร์ในทางการค้า (Shop Mathematics), การสำรวจและการเดินเรือ

^{๑๕} Butler and Wren, The Teaching of Secondary Mathematics, pp. 179 - 180.

(Surveying and Navigation) และเรขาคณิตแบบที่ยังไม่คงมีการพิสูจน์
(Descriptive Geometry) ตามแต่ความเหมาะสมต่อไป

b) Progressive Education Association Committee on
the Function of Mathematics in General Education.

คณะกรรมการชุดนี้หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า "PEA Committee " ซึ่งทางสมาคมการศึกษา
แบบโปรเกรสซีฟ หรือ PEA เป็นผู้แต่งตั้งขึ้นนั้น ได้พิมพ์รายงานฉบับหนึ่งเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๔๐
เพื่อเสนอแนะหลักการบางอย่างที่ควรคำนึงถึงในการทดลองเกี่ยวกับหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์
รายงานของคณะกรรมการชุดนี้มีทั้งหมดสี่ส่วน ส่วนแรกกล่าวถึงปรัชญาในการสอนคณิตศาสตร์
ตามความเห็นของคณะกรรมการ เพื่อชี้ให้เห็นว่าเด็กหนุ่มสาวควรจะได้เรียนคณิตศาสตร์ เพราะ
คณิตศาสตร์จะช่วยให้ผลสนองความต้องการของนักเรียนได้ในหลาย ๆ กรณี และโดยวิธีต่าง ๆ
ส่วนที่สองซึ่งเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดกล่าวถึงเรื่องการแก้ปัญหาและได้อธิบายไว้ว่า การที่มีความ
สามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะมีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญห่อื่น ๆ ได้
อย่างไร ส่วนที่สามอธิบายถึงลักษณะหรือธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ และส่วนที่สี่กล่าวเน้น
ถึงความเข้าใจของนักเรียนและการประเมินผลความก้าวหน้าของนักเรียน

๓) Joint Commission to Study the Place of Mathematics
in General Education ในตอนแรกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐหรือ MAA ได้
แต่งตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งเพื่อให้ศึกษาการสอนคณิตศาสตร์ แต่ต่อมาได้รับความร่วมมือจาก
สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติหรือ NCTM จึงกลายเป็นคณะกรรมการความร่วมมือของสองสมาคม
นั้น

๑๖ Willoughby, S.S., op. cit., p. ๑.

คณะกรรมการดังกล่าวได้เสนอรายงานในปี ค.ศ. ๑๙๕๐ พร้อมกับรายงานของ
คณะกรรมการ "PEA Committee" ดังกล่าวในข้อ ๖ แตรายงานของคณะกรรมการ
ร่วมมุ่งเสนอเค้าโครงหลักสูตรที่สามารถนำไปทดลองใช้ได้ทันที มิใช่เสนอแนะหลักการหรือแนว
ทางในการทดลองเกี่ยวกับหลักสูตร ทัศนศาสตร์ ดังเช่นของคณะกรรมการ "PEA Committee"

ตามเค้าโครงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๗ - ๑๔ ซึ่งมีให้เลือก ๒ แบบ
ของคณะกรรมการ รวมกัน มีสิ่งที่ควรสนใจอยู่ ๒ ประการ^{๑๗} ประการแรกคณะกรรมการ
ร่วมได้ให้ข้อเสนอแนะในการเปลี่ยนแปลงแก้ไขหลักสูตร และได้รื้อปรายถึงการสอนแบบ
"เร่งสอน" (Acceleration) และการสอนแบบ "ช้า ๆ" (Retardation) ซึ่ง
เหมาะสมกับเด็กบางประเภทไวด้วย ส่วนอีกประการหนึ่ง คณะกรรมการร่วมได้ให้ข้อคิดว่า
หลักสูตรที่เสนอสำหรับนักเรียนเกรด ๑๓ - ๑๔ นั้น ควรจะนำไปใช้กับนิสิตปี ๑ - ๒ ที่ไม่คิดจะ
เรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

๔) คณะกรรมการที่ได้รับการแต่งตั้งในระหว่างสงครามโลก - เมื่อสหรัฐ
เข้าสู่สงครามโลกครั้งที่สองในปี ค.ศ. ๑๙๔๑ นั้น บรรดาผู้นำทางทหารของชาติก็ได้กระหมัก
ถึงข้อเท็จจริงที่สำคัญประการหนึ่งคือ ทหารทั้งหลายยังขาดความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้
ในกิจการทหารอีกมาก เมื่อเป็นเช่นนี้จึงได้มีการจัดตั้งคณะกรรมการขึ้นหลายชุด เพื่อให้ศึกษา
ว่าหลักสูตร ทัศนศาสตร์แบบใดจึงจะสนองความต้องการของทางทหารได้ คณะกรรมการชุดแรก
ที่ได้รับการจัดตั้งขึ้นในปี ค.ศ. ๑๙๔๐ คือ War Preparedness Committee ซึ่งเป็น
คณะกรรมการรวมของสมาคมทางคณิตศาสตร์สองสมาคม คือ MAA และ AMS (American

^{๑๗} Ibid.

^{๑๘} Ibid., p. 10.

Mathematical Society) และต่อมาอีกสามปี สองสมาคมที่กล่าวนี้ก็ได้ร่วมกันจัดตั้งคณะกรรมการขึ้นอีกหนึ่งชุดโดยเรียกชื่อว่า War Policy Committee.

แม้ว่าเป้าหมายการดำเนินงานของคณะกรรมการทั้งสองชุดที่กล่าวนี้ จะมุ่งพิจารณาเพื่อหาทางใช้ความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้เกิดประโยชน์ต่อการทหารมากที่สุด แต่รายงานทั้งสองฉบับนั้นก็มีผลต่อหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

นอกจากคณะกรรมการสองชุดดังกล่าวแล้ว ยังได้มีการจัดตั้งคณะกรรมการใหม่อีกสองชุดเพื่อพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมโดยตรงคือ Committee on Pre - Induction Courses in Mathematics และ Committee on Essential Mathematics for Minimum - Army Needs

รายงานของคณะกรรมการทั้งสองชุดที่กล่าวถึงไปตอนหลังนั้น มีปรากฏอยู่ในวารสารคณิตศาสตร์ (The Mathematics Teacher) ปี ค.ศ. ๑๙๔๓^{๑๙} ซึ่งแม้ว่าจะเป็นรายงานที่น่าสนใจ แต่ก็มิใช่ผลต่อหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมมากนัก คือเพียงแค่เป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นว่าสหรัฐได้ตระหนักถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่มีต่อความมั่นคงของชาติเท่านั้น หลังจากที่มีรัสเซียได้ส่งสปุตนิกขึ้นไปแล้ว คือประมาณสิบห้าปีหลังจากนั้น จึงมีผู้ให้ความสนใจในรายงานดังกล่าวเพิ่มขึ้นเป็นลำดับ

ในตอนต้นปี ค.ศ. ๑๙๔๔ ซึ่งสงครามใกล้จะยุติ และประชาชนสหรัฐต่างก็ประจักษ์ถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่มีต่อความมั่นคงของชาตินั้น สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติหรือ NCTM ได้ตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งคือ^{๒๐} Commission on Post - War Plans เพื่อให้พิจารณาร่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมที่จะใช้สอนในระยะหลังสงคราม คณะกรรมาธิการนี้ได้เสนอรายงาน ๒ ฉบับผ่านทางวารสารคณิตศาสตร์เดือนพฤษภาคม

^{๑๙} Ibid.

^{๒๐} Butler and Wren, op. cit., p. 30.

ปี ค.ศ. ๑๙๔๔ และ ค.ศ. ๑๙๔๕ และยังได้จัดทำเอกสารอีก ๑ เล่มชื่อ "Guidance Pamphlet" เพื่อขยายความในรายงานฉบับที่ ๒ ด้วย

ในรายงานฉบับแรก คณะกรรมการฯ ได้เรียกร้องให้ประชาชนทุกคนร่วมมือกัน ในอันที่จะให้การศึกษาทางคณิตศาสตร์แก่เด็กทุกคนอย่างดีที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยได้ให้ ข้อเสนอไว้รวม ๕ ข้อคือ ๒๑

(๑) โรงเรียนควรจะดำเนินการทุกวิถีทางเพื่อให้ให้นักเรียนทุกคน (ถ้าเป็นไปได้) มีความสามารถอ่าน ฟัง พูด อภิปราย เรื่องของคณิตศาสตร์ได้ด้วยความ สนใจและพอใจ หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า ฝึกให้นักเรียนเป็นผู้มี "Mathematical literacy" นั้นเอง

(๒) โรงเรียนควรจะจัดหลักสูตรที่เหมาะสมเพื่อให้สนองความต้องการ จำเป็น (Needs) ของนักเรียนทุกคน

(๓) กฎควรเอาใจใส่การเรียนคณิตศาสตร์ของเด็กเรียนช้าให้มากขึ้น

(๔) ควรปรับปรุงการสอนเลขคณิตให้ดีกว่าที่เป็นอยู่

(๕) ควรปรับปรุงการเรียงลำดับรายวิชาคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมยิ่งขึ้น

ในรายงานฉบับที่สอง คณะกรรมการฯ ได้ให้ข้อเสนอในการจัดทำหลักสูตร คณิตศาสตร์ตั้งแต่เกรด ๑ ถึงเกรด ๑๔ ไว้ ๒ ข้อกล่าวคือ ๒๒

(๑) โรงเรียนควรจัดสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนทุกคน (ถ้าเป็นไปได้) มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในเรื่องต่าง ๆ พอที่จะนำไปใช้ประโยชน์ได้ ซึ่งคณะกรรมการฯ ได้กล่าวถึงสิ่งที่เด็กควรรู้และเข้าใจ และสามารถนำไปใช้ได้ ๔ อย่างเช่น การใช้เปอร์เซ็นต์ การชั่งตวงวัด เวกเตอร์ ทศนิยม ตรีโกณมิติ และการกระจายมาตราเงินของสหรัฐ เป็นต้น

๒๑ Butler and Wren, op. cit., pp. 30 - 31, (citing), "Commission on Post - War Plans : First Report," The Mathematics Teacher, 37 : 226 - 232, May, 1944.

๒๒ Willoughby, S.S., op. cit., p. 11.

(๒) ควรถือว่าเลขคณิตเป็นทั้งวิชากร วิชาหนึ่ง (Content Subject) เท่า ๆ กับที่เป็นวิชาที่เป็นเครื่องมือวิชาหนึ่ง (Tool Subject)

(๓) ควรให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดในวิชาเลขคณิตที่เหมาะสมและมีคุณค่า และควรแยกสอนวิชาเลขคณิตให้แก่ักเรียนเกรด ๕ ออกเป็นสองพวก คือพวกที่เรียนไคซา และพวกที่เรียนไคเร็ว โดยให้พวกหลังไคมีโอกาสเรียนวิชาพีชคณิตเป็นบางส่วนควบ

(๔) ควรจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับนิสิตมหาวิทยาลัยปีที่ ๑ และ ๒ (เกรด ๑๓ - ๑๔) ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพื่อผลทางก้าวหน้าด้วย มิใช่จัดให้สำหรับพวกที่ต้องการหรือจำเป็นต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ต่อไปเพียงอย่างเดียว

(๕) ควรเตรียมครูคณิตศาสตร์ให้ยิ่งขึ้นในทุกระดับ

(๖) ควรใช้อุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ให้ได้ผลดียิ่งขึ้น

รายงานของคณะกรรมการฉบับนี้ นับเป็นรายงานที่สำคัญนับสุดท้ายก่อนปี ก.ศ. ๑๙๔๐ และก่อนหน้าที่จะมีหลักสูตร "คณิตศาสตร์แบบใหม่" ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในตอนหลัง

องกการต่าง ๆ ที่สนใจในการศึกษาคณิตศาสตร์

๑) สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ หรือ NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) NCTM ได้เปิดประชุมเป็นครั้งแรกเมื่อวันที่ ๒๔ กุมภาพันธ์ ก.ศ. ๑๙๒๐ ที่เมืองคลีฟแลนด์ (Cleveland) รัฐโอไฮโอ ๒๓ โดยมีจุดประสงค์ในการดำเนินงานที่สำคัญ คือ ๒๔ เพื่อส่งเสริมความสนใจในเรื่องการศึกษาคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมและมัธยม

๒๓

Butler and Wren, op. cit., p. 21.

๒๔

Ibid.

องก์การนี้ นับว่าเป็นองค์การทางคณิตศาสตร์ที่มีจำนวนสมาชิกมากที่สุด ^{๒๕} (นับถึงเดือนตุลาคม ปี ก.ก. ๑๙๖๖ ปรากฏว่ามี ๙๖,๖๕๕ คน รวมทั้งสมาชิกที่เป็นสถาบันด้วย) และมากกว่าจำนวนสมาชิกของสมาคมทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ รวมกันถึง ๓ สมาคม คือสมาคม MAA (Mathematical Association of America), สมาคม AMS. (American Mathematical Society) และสมาคม Society for Industrial and Applied Mathematics.

ผลงานที่สำคัญของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งชาติ

(๑) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งชาติ จัดการประชุมเป็นประจำ (ประมาณเดือนเมษายนของแต่ละปี) เพื่อเสนอและอภิปรายแนวทฤษฎีเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นยังสนับสนุนให้มีการประชุมระดับภาคในแต่ละปี และเข้าร่วมประชุมกับสมาคมการศึกษาแห่งชาติหรือ NEA ในทุกภาคฤดูร้อนด้วย ^{๒๖}

(๒) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐได้จัดทำวารสารหนังสือรายปี หนังสือและรายงานเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์เป็นประจำ กล่าวคือ ^{๒๗}

ก. วารสารคณิตศาสตร์ (The Mathematics Teacher)

วารสารฉบับนี้มีกำหนดออกปีละ ๔ เล่ม โดยออกเดือนละหนึ่งเล่มนับตั้งแต่เดือนตุลาคมถึงเดือนพฤษภาคม ในวารสารแต่ละเล่มจะมีบทความเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ระดับมัธยม

^{๒๕} Willoughby, S.S., op. cit., p. 12.

^{๒๖} Ibid.

^{๒๗} Ibid.

เรื่องสั้น ๆ เกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่กำลังทดลองอยู่ ประวัติของคณิตศาสตร์ การศึกษาทางคณิตศาสตร์ของต่างชาติ และการประเมินคุณค่าของเนื้อหาในตำราเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ

ข. วารสารเลขคณิต (The Arithmetic Teacher) วารสารฉบับนี้กำหนดออกและมีเนื้อหาคล้าย ๆ กับวารสารคณิตศาสตร์ที่กล่าวแล้ว แต่เป็นในระดัประถม

ค. วารสารคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน (The Mathematics Student Journal) วารสารฉบับนี้กำหนดออกปีการศึกษาละ ๔ เล่ม ในแต่ละเล่มจะมีบทความทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจสำหรับนักเรียนมัธยม รวมทั้งบทความที่นักเรียนเป็นผู้เขียน และปัญหาตลอดจนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

✓ - นอกจากวารสารแล้ว สภากรูคณิตศาสตร์แห่งชาติยังได้จัดพิมพ์หนังสือรายปี (เริ่มตั้งแต่ปี ก.ศ. ๑๙๒๒) และพิมพ์หนังสืออื่น ๆ เป็นบางโอกาสด้วย เช่น Computer - Oriented Mathematics และ The Revolution in School Mathematics ซึ่งสมาชิกอาจได้รับแจกฟรี หรือมิฉะนั้นก็เสียเงินเพียงเล็กน้อย ซึ่งการกระทำเช่นนี้นับว่ามีผลดี เพราะทำให้ครูคณิตศาสตร์ที่สนใจสามารถติดตามแนวคิดและการวิจัยใหม่ ๆ ในเรื่องของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ได้ทันอยู่เสมอ

(๓) การติดต่อและประสานงานกับสาขาของสภากรูคณิตศาสตร์ และสมาคมทางวิชาการอื่น ๆ ^{๒๕}

(๔) การจัดตั้งและให้ความสนับสนุนงานของคณะกรรมการชุดต่าง ๆ ที่มุ่งปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมและระดับมัธยม เช่น Commission on Post - War Plans เป็นต้น ^{๒๕}

๒) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐ ^{๓๐} หรือ MAA (Mathematics Association of America) สมาคมนี้ก่อตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๑๕ ที่เมืองโคลัมบัส (Columbus) รัฐโอไฮโอ ซึ่งแม้ว่าจะมีจุดประสงค์เพื่อมุ่งส่งเสริมทั้งนักคณิตศาสตร์และอาจารย์ที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัย โดยออกวารสารชื่อ The American Mathematical Monthly ปีละ ๑๐ เล่มก็ตาม แต่ก็ยังได้ให้ความสนใจต่อการศึกษาก่อนคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมและมัธยมศึกษา กล่าวคือ ได้เป็นผู้อุดหนุนให้มีการจัดตั้งคณะกรรมการเพื่อศึกษาทางค้านี้เป็นเวลาหลายปีแล้ว และยังได้จัดพิมพ์วารสารชื่อ "The Mathematics Magazine" ออกเผยแพร่ปีละ ๔ ฉบับ ซึ่งมีประโยชน์ต่อครูคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมเป็นอย่างมาก

๓) Central Association of Science and Mathematics Teachers หรือสมาคม CASMT สมาคมนี้ก่อตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๐๓ ซึ่งแม้ว่าจะเป็นเพียงสมาคมในระดับภาค แต่ก็มีส่วนต่อการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ตลอดทั่วประเทศ ^{๓๑} โดยเน้นที่ระดับมัธยมเป็นสำคัญ สมาคม CASMT ได้จัดประชุมเป็นประจำทุกปีในเดือนพฤศจิกายน และได้ออกวารสารฉบับหนึ่งคือ School Science and Mathematics ซึ่งมีคุณภาพมากทั้งต่อครูวิทยาศาสตร์และครูคณิตศาสตร์ ^{๓๒}

^{๒๕} Ibid., p. 22.

^{๓๐} Willoughby, S.S., op. cit., pp. 12 - 13.

^{๓๑} Butler and Wren, op. cit., p. 22.

^{๓๒} Ibid.

๔) สมาคมอื่น ๆ อันที่จริงมีสมาคมอื่น ๆ อีกมากที่สนใจในการศึกษาคณิตศาสตร์ของสหรัฐ แต่ส่วนมากมักจะเป็นสมาคมในระดับท้องถิ่นและต่อมาก็มักจะกลายเป็นสาขาของ NCTM.

๔. สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสหรัฐตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๕ เป็นต้นมา

นับตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๕ เป็นต้นมา ในสหรัฐได้มีการเคลื่อนไหวเพื่อหาทางปรับปรุงแก้ไขทั้งทางด้านหลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์ อย่างกว้างขวางและอย่างจริงจัง ผิดกับที่เคยเป็นมาในระยะเวลาก่อนหน้านี้มาก และในระยะนี้เองที่วงการศึกษามathematics ได้ใช้คำว่าคณิตศาสตร์แผนใหม่ (Modern Mathematics) กันโดยทั่วไป

คณิตศาสตร์แผนใหม่คืออะไร ?

เป็นการยากที่จะให้ความหมายของคำว่า "คณิตศาสตร์แผนใหม่" อย่างชัดเจนและแน่นอน แต่ถ้าวัดพิจารณาถึงความเปลี่ยนแปลงทั้งหลายที่เกิดขึ้นตั้งแต่วงการศึกษามathematics รับเอาคำนี้มาใช้แล้ว อาจจะตีความหมายของคำว่าคณิตศาสตร์แผนใหม่ ให้เป็นที่เข้าใจได้ตรงกันและตรงกับความหมายที่แท้จริงของคำนี้ได้

ในคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ นี้ ความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์และการนำเอาความรู้นี้ไปใช้ได้เจริญก้าวหน้าไปมากทั้งในค่านปริมาณและคุณภาพ และได้ก่อให้เกิดผลกระทบกระเทือนต่อการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสถาบันทุกระดับ ทั้งนี้เพราะการที่มีความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมาก ทำให้เกิด ปัญหาสำหรับการศึกษาของผู้ที่จะเป็นนักคณิตศาสตร์ต่อไป กล่าวคือในประการแรกจะต้องยอมรับข้อเท็จจริงประการหนึ่งที่ว่า การที่จะให้นักคณิตศาสตร์คนใดคนหนึ่ง ในสมัยนี้มีความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หมดทุกสาขาหรือรู้เป็นส่วนมากนั้นย่อมเป็นไปได้ ดังนั้นนักเรียนที่สนใจหรือมีความสามารถในทางคณิตศาสตร์จึงควรจะมีโอกาสได้เรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

ที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญมากพอก่อนแล้วจึงจะไปเรียนเฉพาะสาขาใดสาขาหนึ่งคืออีกหลาย ๆ ปี จนกระทั่งสามารถค้นคว้าคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ได้เองต่อไป แต่ขอเท็จจริงอีกประการหนึ่งที่คงคำนึงถึงประกอบด้วยคือ นักคณิตศาสตร์ส่วนมากมักจะผลิตผลงานที่ตีพิมพ์ก่อน ๓๐ ปี หรือหลังจากนั้นไม่มากนัก เมื่อเป็นเช่นนี้ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องประหยัดเวลาในการฝึกฝนอบรมความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อเปิดโอกาสให้ได้ใช้เวลาที่เหลือผลิตผลงานที่สำคัญ ๆ ให้ได้มากที่สุดที่จะเป็นไปได้ ดังนั้นลักษณะอย่างหนึ่งของการให้การศึกษาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมปัจจุบันนี้ คือ "การเร่งการสอน" โดยวิธีทางต่าง ๆ ซึ่งได้แก่

๑) การยกเลิกหัวข้อที่มีความสำคัญทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบันน้อยออกไปจากหลักสูตร เช่น เลขคณิตในระดับมัธยมตอนต้นที่เป็นแบบ Social Arithmetic, การคำนวณยาว ๆ ซึ่งใช้ลอการิทึมช่วย เพราะปัจจุบันนี้เครื่องคำนวณสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพดีกว่า และรายละเอียดต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตสามมิติ เป็นต้น

๒) การลดบางหัวข้อมาสอนนักเรียนที่มีอายุน้อยกว่าเดิม เช่น เริ่มสอนพีชคณิตและเรขาคณิตในโรงเรียนประถม เป็นต้น

๓) การปรับปรุงและจัดรวบรวมเนื้อหาใหม่ เพื่อให้สอนได้เร็วขึ้น และนักเรียนเข้าใจได้มากขึ้น เช่น การใช้วงกลมที่มีรัศมียาวหนึ่งหน่วยในการสอนเรื่องฟังก์ชันทางตรีโกณมิติแทนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเดิม เป็นต้น

การเปลี่ยนแปลงทั้งเนื้อหาและวิธีการสอนดังกล่าวนี้แม้จะมุ่งกระทำเพื่อส่งเสริมนักเรียนที่สนใจหรือมีความสามารถในทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ แต่ถ้ามองในแง่ที่ว่า สังคมต้องพึ่งคณิตศาสตร์มากขึ้นทุกที การจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์เช่นนี้ก็ไม่น่าจะมีปัญหา คงจะเห็นได้จากตัวอย่างง่าย ๆ เช่น ในสมัยก่อนนักเรียนที่สนใจวิทยาศาสตร์ แต่ไม่ชอบหรือไม่มีความสามารถในทางคณิตศาสตร์มากพอ จะเลือกเรียนวิชาชีววิทยา แต่ในสมัยนี้วิชาชีววิทยารับรองจะต้องใช้วิชาฟิสิกส์และเคมีซึ่งทั้งสองวิชานี้ต้องการคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้นทุกที นอกจากนั้นวิชาชีววิทยาแขนงใหม่เองก็ต้องใช้คณิตศาสตร์เป็นเรื่องสำคัญด้วย ส่วนวิชาสังคมศาสตร์ก็เช่นกันคือ

ในสมัยก่อนอาจไม่ต้องการความรู้ทางคณิตศาสตร์มากนัก แต่ในสมัยนี้วิชาสังคมศาสตร์มีใ้คต้องการแค่เรื่องสถิติเท่านั้น ยังต้องการความรู้เบื้องต้นในทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่งไ้แก่ แคลคูลัส Topology และ Linear Programming กว้เพื่อให้เข้าใจทฤษฎีของเกมส์ (Theory of Games) และพัฒนาการอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องในวิชาสังคมศาสตร์

การที่สังคมต้องพึ่งคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น และมีเหตุผลพอจะกล่าวไ้ว่า ต่อไปในอนาคตคณิตศาสตร์จะยิ่งมีความสำคัญมากขึ้น เช่นนี้ ทำให้เชื่อแน้ไ้ว่า คนที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์เพียงเลขคณิตเบื้องต้น และพีชคณิตง่าย ๆ นั้น จะประสบปัญหาในการดำเนินชีวิตอย่างมาก ดังนั้น การเร่งสอนคณิตศาสตร์จึงจะไ้ประโยชน์ทั้งแก่นักเรียนส่วนใหญ่ในโรงเรียน และแก่สังคมโดยส่วนรวมด้วย

นอกจากการเร่งการสอนดังกล่าวแล้ว อีกสิ่งหนึ่งที่มีความสำคัญเท่า ๆ กัน ก็คือการเปลี่ยนแปลงเนื้อหาและการจัดลำดับหัวข้อที่จะสอนให้เห็น โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ไ้เด่นชัดขึ้น ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ในระยะหลังนี้ที่เน้นโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ความสำคัญของทฤษฎีและคำนิยาม ตลอดจนใช้หลักตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เป็นพื้นฐานในการพิสูจน์ความเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ที่กล่าวนี้นี้เริ่มปรากฏขึ้นให้เป็นที่ยอมรับไ้ไ้บ้างชัดเจนตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๕ เป็นต้นมา จึงจะเห็นไ้ไ้ว่าในสมัยปัจจุบัน แม้แก่นักเรียนในชั้นประถมของสหรัฐก็อาจจะสังเกตเห็นว่าในการบวกเลขสองจำนวน อาจจะสลับที่กันได้โดยไม่ผิดผลแตกต่างกัน ซึ่งเป็นไปตามกฎการสลับที่ของการบวก (Commutative Law of Addition) และนักเรียนก็จะเริ่มคิดในแนวใหม่ว่าเลขคณิตและพีชคณิตที่ตนเรียนอยู่นั้นเป็นวิชาที่เป็นพื้นฐานอย่างหนึ่งซึ่งเน้นไ้ให้เห็น โครงสร้างของคณิตศาสตร์ ส่วนในการแก้ปัญหานั้นนักเรียนก็จะต้องค้นหาหลักการทั่ว ๆ ไปให้พบ แล้วจึงเอาหลักการนั้นไปใช้ให้ไ้ไ้ มิใช่คิดว่าวิชาเลขคณิตและพีชคณิต เป็นเรื่องของกาแก้ปัญหาก็จะต้องจกจำวิธีการเฉพาะอย่าง อีกต่อไป

การเปลี่ยนแปลงหลักสูตรที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง ก็คือการเริ่มสอนหัวข้อใหม่ ๆ และวิชาใหม่ ๆ ในระดับมัธยม เช่น ความน่าจะเป็น และสถิติเบื้องต้น อสมการทางพีชคณิต เวกเตอร์

Linear Algebra และเซต โดยเฉพาะเรื่องเซตซึ่งจะกล่าวถึงเป็นพิเศษในที่นี้

ในบทที่ ๒ ได้กล่าวแล้วว่า ทฤษฎีเซตเป็นรากฐานของคณิตศาสตร์ และเป็นสิ่งที่จะรวมคณิตศาสตร์ทุกสาขาให้เข้าเป็นหน่วยเดียวกันได้ ฉะนั้นนักเรียนจึงควรมีความรู้เกี่ยวกับเรื่องนี้ให้เร็วที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ แต่ตามความเป็นจริงนั้น การศึกษาเรื่องเซตอย่างเคร่งครัดตรงตามวิธีการทางคณิตศาสตร์จริง ๆ เป็นเรื่องที่ยากมากแม้แต่ในระดับปริญญาโทก็ตาม ดังนั้นการที่กล่าวว่าสามารถสอนทฤษฎีเซตแก่นักเรียนระดับมัธยมได้ จึงมีความหมายเพียงว่าการกล่าวถึงภาษาเซตง่าย ๆ และ Operations ทางเซตที่นำมาใช้กับคณิตศาสตร์เบื้องต้นเท่านั้น และด้วยเหตุนี้เองจึงอาจมีหลักสูตรคณิตศาสตร์บางแห่งไม่กล่าวถึงเรื่องเซตเลย แต่ก็ยังถือเป็นหลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่ได้

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการใช้ภาษาเซตจะเป็นสิ่งที่เชื่อมวิชาคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ให้เข้าเป็นหน่วยเดียวกัน และทำให้ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ได้สะดวกขึ้น นักคณิตศาสตร์จึงหวังว่าในอนาคตอันใกล้ การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ คงใช้ภาษาเซตมากขึ้นกว่าที่เป็นอยู่ในเวลานี้

สำหรับการสอนคณิตศาสตร์ก็มีความเปลี่ยนแปลงเช่นกัน ดังจะเห็นได้ว่านอกจากจะมีผู้ถนัดวิธีการสอนแบบใหม่มาใช้ทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ เช่นการสอนเป็นทีม (Team Teaching), การใช้เครื่องสอน (Teaching Machine) และการใช้สื่อทัศนอุปกรณ์แบบใหม่มาช่วยแล้ว ยังมีผู้ใช้วิธีการสอนแบบหนึ่งที่มีสัมพันธ์กับคณิตศาสตร์แผนใหม่มาก คือวิธีที่ให้นักเรียนเป็นผู้คิดค้นจนพบคำตอบตนเอง (Discovery Method)

วิธีสอนแบบนี้ให้นักเรียนเป็นผู้คิดค้นจนพบหลักการหรือทางแก้ปัญหาด้วยตนเองนี้ มิใช่วิธีสอนแบบใหม่ เพราะในสมัยก่อนโซเครตีส (Socrates) ได้เคยใช้วิธีการเช่นนี้แล้วแต่มาในตอนหลัง จึงได้ประจักษ์กันว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่เหมาะสมกับการสอนคณิตศาสตร์อย่างที่สุด เพราะเป็นวิธีที่สอดคล้องกับพัฒนาการของคณิตศาสตร์แผนใหม่ในแง่ที่เน้นถึงโครงสร้างและหลักของการใช้เหตุผลที่ถูกต้อง ถ้าไม่มีองค์ประกอบสองอย่างนี้แล้ว แม้ว่าจะมีผู้คอยแนะแนวทางที่ชำนาญ

มากเพียงใด นักเรียนก็ไม่สามารถจะค้นพบหลักการหรือทางแก้ปัญหาใด ๆ ด้วยตนเองได้
 ด้วยเหตุนี้ครูคณิตศาสตร์ในสมัยปัจจุบันจึงนิยมวิธีสอนแบบนี้มากที่สุด

เหตุผลที่สำคัญอีกประการหนึ่งที่ส่งเสริมวิธีสอนแบบนี้ให้นักเรียนได้ค้นพบด้วยตนเอง คือ
 วิธีสอนแบบนี้สอดคล้องกับธรรมชาติของมนุษย์ เพราะโดยปกติแล้ว มนุษย์ต้องการจะทำสิ่งต่าง ๆ
 ด้วยตนเองเสมอ และการที่ใครทำอะไรก็จะมีผลดีกว่าเพียงได้รับคำบอกกล่าวจากผู้อื่นด้วย คือทำให้
 เข้าใจได้ดีกว่า จดจำได้นานกว่า และจะใช้ประสบการณ์นั้นในการแก้ปัญหาครั้งต่อไปได้อย่างมี
 ประสิทธิภาพมากกว่า ดังนั้นในวงการศึกษาคณิตศาสตร์สมัยปัจจุบันนี้ จึงส่งเสริมวิธีสอนแบบนี้ให้
 กว้างขวาง ๆ ที่เหมาะสมเพื่อนำให้นักเรียนสามารถฝึกค้นพบหลักการหรือทางแก้ปัญหาคด้วย
 ตนเองดังกล่าวนี้มาก

จากที่ได้อธิบายมาในตอนต้น อาจจะสรุปความเปลี่ยนแปลงในวงการศึกษาคณิตศาสตร์
 ของสหรัฐ ตั้งแต่เริ่มใช้คำว่า "คณิตศาสตร์แบบใหม่" อย่างแพร่หลาย ได้สามประการคือ

๑) การเปลี่ยนแปลงเนื้อหาวิชาทั้งในแง่ที่เน้นโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์
 และการนำเอาหัวข้อใหม่ ๆ เข้ามาไว้ในหลักสูตร

๒) การลดวิชาบางวิชาลงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่าเพื่อให้ นักเรียนได้เรียนรู้
 คณิตศาสตร์บางเรื่องได้เร็วขึ้นกว่าเดิม

๓) การเปลี่ยนแปลงวิธีสอนซึ่งเน้นถึงการใช้ความคิดและการค้นพบสิ่งต่าง ๆ
 ด้วยตนเองของนักเรียนมากขึ้นกว่าเดิม และการให้ความสำคัญแก่การสอนของครู และการใช้
 ความจำของนักเรียนน้อยลง

ในความเปลี่ยนแปลงทั้งสามประการที่กล่าวนี้ ถือว่า ^{๓๓} การเปลี่ยนแปลงข้อที่ ๑
 เป็นเรื่องของคณิตศาสตร์แบบใหม่โดยตรง ส่วนการเปลี่ยนแปลงข้อที่ ๒ และข้อที่ ๓ เป็น

แต่เพียงส่วนประกอบที่ส่งเสริมให้สำเร็จผลทั้งเจตนารมณ์ใดสิ่งหนึ่งและมักจะเป็นสิ่งที่ต้องกระทำควบคู่กับการเปลี่ยนแปลงดังข้อที่ ๑ เสนอ

รายงานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์แผนใหม่ของคณะกรรมการแต่ละกลุ่ม

ในระยะ ๑๕ ปีหลังนี้ คณะกรรมการและคณะกรรมการกลุ่มต่าง ๆ ได้เสนอรายงานที่สำคัญหลายฉบับ ซึ่งรายงานดังกล่าวนี้ได้มีอิทธิพลต่อการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ทั้งในสหรัฐอเมริกาและในต่างประเทศ และแม้ว่าบุคคลที่เสนอรายงานเหล่านั้นจะมีได้เป็นผู้เขียนตำราคณิตศาสตร์ตามข้อเสนอก็ให้ไว้ แต่ก็ได้ให้หลักการเบื้องต้น และมักจะชี้ให้เห็นว่าจะนำเอาหลักการนั้น ๆ ไปใช้ปฏิบัติได้อย่างไรบ้าง คงจะกล่าวถึงรายงานที่สำคัญไปตามลำดับ ต่อไปนี้

๑) รายงานของ The Commission on Mathematics of the CEEB
ในตอนแรก CEEB พยายามจะไม่เข้าไปมีอิทธิพลต่อการกำหนดหลักสูตรในโรงเรียนมัธยม แต่ถึงกระนั้นก็ยังนับว่ามีอิทธิพลทางอ้อม กล่าวคือ โรงเรียนมัธยมหลายแห่งได้เปลี่ยนแปลงหลักสูตรและวิธีสอนเพื่อเตรียมนักเรียนให้สามารถสอบข้อสอบของ CEEB ได้ CEEB จึงเริ่มมีอิทธิพลมากขึ้นตามลำดับ

ต่อมาเมื่อคณะกรรมการของ CEEB ซึ่งเป็นผู้ออกและตรวจข้อสอบได้สังเกตเห็นว่าโรงเรียนมัธยมและมหาวิทยาลัยบางแห่งได้เริ่มเกิดเปลี่ยนแปลงหลักสูตร เพื่อให้การศึกษาที่เหมาะสมกับสภาพแวดล้อมในครึ่งหลังของคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ มากยิ่งขึ้น คณะกรรมการดังกล่าวนี้จึงได้เสนอความคิดเห็นของตนไปยัง CEEB เพื่อขอให้ CEEB จัดตั้งคณะกรรมการศึกษาหลักสูตรของโรงเรียนมัธยมเท่าที่เป็นอยู่และให้จัดทำข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงให้ดียิ่งขึ้นด้วย CEEB จึงได้จัดตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งคือ The Commission on Mathematics of

the CEEB เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๔๘ ^{๓๔}

เนื่องจาก CEEB เป็นผู้จัดตั้งคณะกรรมการวิชาการชุดนี้ คณะกรรมการฯ จึงมีหน้าที่เสนอแนะหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับเตรียมนักเรียนเกรด ๙ ถึง เกรด ๑๒ ให้เข้าศึกษาต่อมหาวิทยาลัยเป็นอย่างดี แต่ถึงกระนั้นก็ตาม ปรากฏว่ารายงานของคณะกรรมการวิชาการชุดนี้มิได้มีอิทธิพลต่อการจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนในเกรด ๙ ถึงเกรด ๑๒ เท่านั้น แต่มีผลถึงการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ทั้งในระดับที่สูงกว่า และต่ำกว่า และยังมีผลต่อการจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีไถ่มุ่งเข้าศึกษาต่อมหาวิทยาลัยด้วย

ในรายงานของคณะกรรมการวิชาการซึ่งเสนอต่อ CEEB ในปี ค.ศ. ๑๙๔๙ นั้น คณะกรรมการฯ ได้สรุปสาระสำคัญไว้รวม ๙ ประการ กล่าวคือ ^{๓๕}

(๑) ควรให้นักเรียนมัธยมเรียนแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์อย่างจริงจัง เพื่อให้มีทั้ง Concepts และทักษะในวิธีการต่าง ๆ ของทั้งสองวิชานี้ เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป

(๒) ควรให้นักเรียนมัธยมมีความเข้าใจในลักษณะและความสำคัญของการให้เหตุผลแบบ Deduction ซึ่งเป็นการให้เหตุผลตามวิธีการคณิตศาสตร์ จากวิชาพีชคณิตเท่า ๆ กับจากวิชาเรขาคณิต

(๓) ควรให้นักเรียนมัธยมมีความชื่นชมในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เช่น คุณสมบัติของระบบจำนวนประเภทต่าง ๆ นับตั้งแต่ระบบจำนวนธรรมชาติ (Natural Number) จนถึงระบบจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

^{๓๔} CEEB , Report of the Commission on Mathematics : Program for College Preparatory Mathematics, (Foreword).

^{๓๕} Ibid.

(๔) ควรให้นักเรียนมัธยมมีแนวคิดเกี่ยวกับ เซต ตัวแปร ฟังก์ชัน และความสัมพันธ์อย่างเหมาะสมและถูกต้อง เพราะเรื่องเหล่านี้เป็นสิ่งที่เชื่อมวิชาคณิตศาสตร์ทุกแขนงให้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน

(๕) ควรให้นักเรียนได้พิจารณาเรื่องอสมการควบคู่ไปกับการศึกษาเรื่องสมการ

(๖) ควรให้นักเรียนได้เรียนรู้เรขาคณิตแขนงต่าง ๆ บางเรื่องที่สำคัญพร้อมกับเรขาคณิตบนพื้นระนาบควบคู่กันคือ เรขาคณิตวิเคราะห์ เรขาคณิตในสามมิติ และเรขาคณิตในหลาย ๆ มิติ (Space Perception)

(๗) ควรเริ่มสอนตรีโกณมิติในเกรก ๑๑ โดยเน้นเรื่องเลข บอกตำแหน่งของจุด (Coordinates) เวกเตอร์ และระบบจำนวนเชิงซ้อน

(๘) ควรสอนเรื่องฟังก์ชันเบื้องต้นแต่ละแบบในเกรก ๑๒ อันได้แก่ Polynomial Function, Exponential Function และ Circular Function

(๙) ในเกรก ๑๒ ควรให้นักเรียนมีโอกาสเรียนเรื่องต่อไปนี้เรื่องใดเรื่องหนึ่งเพิ่มเติมด้วย กล่าวคือ เรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น รวมทั้งการนำเอาไปใช้ในทางสถิติ และพีชคณิตแผนใหม่เบื้องต้น

นอกจากรายงานแล้ว คณะกรรมการยังได้จัดพิมพ์งานที่สำคัญอีก ๒ อย่าง คือ

(๑) ภาควิชาของรายงาน คณะกรรมการได้จัดพิมพ์ภาคผนวกขึ้น เพื่อให้ครูได้ทำความเข้าใจกับวิธีการและหัวข้อใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญตามข้อเสนอแนะข้างต้น มิได้มุ่งให้เป็นหน่วยการสอนของครูโดยตรง แต่ครูที่มีความสามารถมากพอก็อาจจะคัดเลือกและดัดแปลงไปใช้สอนนักเรียนได้ นอกจากนั้น ภาควิชาคณิตศาสตร์อาจจะใช้ภาคผนวกดังกล่าวเป็นหลักในการคัดเลือกตำราเรียนคณิตศาสตร์แผนใหม่ที่ดี ทั้งผู้แต่งตำราเรียน ก็อาจใช้เป็นเป้าหมายในการดำเนินงานของตนได้.

(๒) หนังสือ Introductory Probability and Statistical Inference คณะกรรมการได้จัดตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งให้เขียนตำราเล่มนี้ เพราะคณะกรรมการได้กล่าวไว้ในข้อเสนอว่า อาจจะสอนวิชานี้ให้แก่นักเรียนมัธยมได้ แต่ในสมัยนั้นยังไม่มีตำราเรียนดี ๆ ที่กล่าวถึงเรื่องเหล่านี้^{๓๖} ครั้นในระยะต่อมา เมื่อปรากฏว่ามีตำราของผู้อื่นที่คิดหาหรือดีกว่า CEEB จึงได้เลิกจัดพิมพ์ เพราะไม่มีความประสงค์จะผลิตตำราแข่งขันกับผู้อื่น

อย่างไรก็ตาม ในจำนวนผลงานที่สำคัญ ๓ อย่างของคณะกรรมการชุดนี้ ผลงานที่สำคัญที่สุดและมีอิทธิพลมากที่สุด ก็อรรถาธิบาย เพราะข้อเสนอแต่ละข้อในรายงาน ในสมัยนั้นมีความรู้สึกกันว่าเป็นเรื่องที่รุนแรงมาก จึงทำให้เกิดการค้นคว้าในวงการศึกษาคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางอยู่โดยทั่วไป และนับว่างานของคณะกรรมการกลุ่มนี้เป็นงานระดับชาติครั้งแรกที่ได้เสนอและทำให้มีการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมไปตามแนวของคณิตศาสตร์แบบใหม่ได้อย่างมีผล^{๓๗}

๒) รายงานของ Secondary School Curriculum Committee of the NCTM

NCTM ได้จัดตั้งคณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่งในปี ค.ศ. ๑๙๕๕ เพื่อให้ศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในสหรัฐและในประเทศอื่น ๆ และให้จัดทำข้อเสนอแนะเกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนทุกคนในเกรด ๗ ถึงเกรด ๑๒ ซึ่งคณะกรรมการชุดนี้ได้จัดทำรายงานของตนออกเผยแพร่ในเดือนพฤษภาคม ปี ค.ศ. ๑๙๕๕^{๓๘} ปีเดียวกันที่คณะกรรมการ

^{๓๖} NCTM, "The Secondary Mathematics Curriculum," Report of the Secondary School Curriculum Committee, The Mathematics Teacher, 52 : 389 - 417, May, 1959.

^{๓๗} Willoughby, S.S., op. cit., p. 37.

^{๓๘} Ibid., p. 38.

ของ CEEB พิมพ์รายงานที่กล่าวแล้วออกมา

ในรายงานของคณะกรรมการของ NCTM ก่อนที่กล่าวถึงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมของยุโรป ได้ชี้ให้เห็นว่า โดยทั่วไปโรงเรียนในยุโรปจะมุ่งส่งเสริมการเรียนรู้ของเด็กที่มีสติปัญญาสูงเท่านั้น ซึ่งสภาพการณ์เช่นนี้เองที่ก่อให้เกิดปัญหาใหญ่ตามมา เพราะทำให้โรงเรียนไม่สามารถจะผลิตบุคคลที่มีความสามารถจะประกอบการเพื่อให้กับพัฒนาการทางด้านเทคโนโลยีของอารยธรรมในสมัยใหม่ได้ค่อนข้างพอเพียง นอกจากนั้น คณะกรรมการยังได้วิจารณ์เกี่ยวกับการที่จัดให้นักเรียนได้เรียนเน้นเฉพาะวิชาเร็วเกินไป การสอนรวมวิชาเลขคณิต พีชคณิตและเรขาคณิต เป็นวิชาใหญ่วิชาเดียวและสอนต่อกันประมาณ ๓ - ๔ ปี และการฝึกอบรมครูตลอดจนการคัดเลือกครูซึ่งเป็นวิธีการที่เข้มงวดเกินไป

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ในสหรัฐ คณะกรรมการมีความเห็นว่าในเกรด ๗ และเกรด ๘ ครูควรจะต้องลดความสำคัญของ Social Arithmetic และแบบฝึกหัดที่ต้องอาศัยความจำใ้ห้บ่อยลง และให้นำหัวข้อต่าง ๆ ในวิชาพีชคณิต เรขาคณิต ผลคูณเลขคณิต (เช่น เรื่องจำนวนเฉพาะ ตัวประกอบ ระบบการเขียนเลข และคุณสมบัติของระบบจำนวน) มาสอนแทน

ส่วนในชั้นอื่น ๆ คณะกรรมการได้เสนอว่า นักเรียนควรจะได้เรียนรู้เรื่องต่าง ๆ เกี่ยวกับสถิติ ความน่าจะเป็น และ Linear Algebra และนอกจากเรื่องเหล่านี้แล้วก็อาจสอนเรื่องเซต อสมการ ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เวกเตอร์ และเรขาคณิตบนทรงกลม ให้สัมพันธ์ไปกับวิชาเคมีที่สอนอยู่แล้วด้วย

นอกจากนี้ คณะกรรมการได้ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับวิธีสอนโดยทั่ว ๆ ไปไว้ ๒ ประการคือ

(๑) ให้นั้น Concepts และหลักการที่เป็นแบบทั่ว ๆ ไปให้มากขึ้น และลดความสำคัญของการใช้ความจำ และทักษะของนักเรียนให้บ่อยลง

(๒) ให้ส่งเสริมความเข้าใจ และความสนใจของนักเรียนโดยให้วิธีสอนแบบใช้คำถามเพื่อนำให้นักเรียนได้ค้นพบสิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเอง

นอกจากรายงานดังกล่าวนี้แล้ว คณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมของ NCTM ยังได้พิมพ์วัสดุสารออกเผยแพร่รวม ๓ เล่ม คือ ^{๓๘}

(๑) A Guide to the Use and Procurement of Teaching Aids for Mathematics (ผู้เขียนคือ E.J. Berger และ D.A. Johnson)

(๒) Mathematics Tests Available in the United States (ผู้เขียนคือ S.S. Myers)

(๓) The Supervisor of Mathematics; His Role in the Improvement of Mathematics Instruction (ผู้เขียนคือ V. Schult)

๓) รายงานการประชุมในปี ค.ศ. ๑๙๖๐ ซึ่งจัดพิมพ์โดย NCTM

แม้ว่าการเคลื่อนไหวเพื่อปรับปรุงการศึกษาคณิตศาสตร์ในสหรัฐจะเป็นไปอย่างกว้างขวางจนอาจกล่าวได้ว่า ในปี ค.ศ. ๑๙๖๐ นั้น ประชาชนชาวสหรัฐทุกคนต่างก็ได้ตระหนักถึงความเคลื่อนไหวนี้แล้ว แต่ก็ยังมีบุคคลสำคัญในโรงเรียนมัธยมเป็นจำนวนมากที่ยังไม่แน่ใจในสิ่งที่กำลังเกิดขึ้น และยังไม่ประจักษ์ชัดถึงความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนแปลงทั้งทางด้านการหลักสูตรและวิธีการสอนหรือการอธิบายเนื้อหาต่าง ๆ ด้วยเหตุนี้ในตอนปลายปี ค.ศ. ๑๙๖๐ NCTM

^{๓๘} Ibid, p. 39.

* มูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ เป็นองค์การอิสระของรัฐบาลสหรัฐ ซึ่งตั้งขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์ที่สำคัญยิ่ง ๒ ประการคือ

๑. เพื่อพัฒนาและส่งเสริมนโยบายของรัฐบาลในอันที่จะสนับสนุนงานวิจัยขั้นก้าวหน้าและการศึกษาวิชาต่าง ๆ

๒. เพื่อให้ทุนการศึกษาในแขนงวิชาคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ และวิชาอื่น ๆ

จึงได้ทำให้มีการประชุมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขึ้นในส่วนต่าง ๆ ของสหรัฐรวม ๘ ครั้ง โดยได้รับเงินช่วยเหลือจากรัฐบาลผ่านทางมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Foundation)*

จุดมุ่งหมายสำคัญของการประชุมครั้งกล่าวนี้นี้ ก็เพื่อให้ความรู้แก่เจ้าหน้าที่ฝ่ายบริหารของโรงเรียนและผู้นำเทศกการสอนคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการประชุมจึงได้กล่าวถึงเหตุผลที่ต้องเปลี่ยนแปลงหลักสูตร กล่าวถึงจุดมุ่งหมายของหลักสูตรใหม่ กล่าวถึงหลักสูตรคณิตศาสตร์แบบใหม่ บางแบบ ตลอดจนวิธีการที่ควรปฏิบัติเพื่อส่งเสริมให้สามารถไว้วางใจหลักสูตรใหม่ในวิชาคณิตศาสตร์ โดยบรรลุผล ซึ่งปรากฏว่าผู้เข้าร่วมประชุมต่างก็ได้มีส่วนร่วมในการซักถามและอภิปรายกันอย่างกว้างขวางและโดยอิสระ และหลังจากการประชุมได้เสร็จสิ้นลงไปแล้ว NCTM ได้จัดพิมพ์รายงานการประชุมเพื่อรวบรวมบทความและการอภิปรายต่าง ๆ เป็นหนังสือเล่มหนึ่งโดยให้

ชื่อว่า The Revolution in School Mathematics : A Challenge for Administrators and Teachers. หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับบุคคลที่ต้องการรู้ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในสมัยปัจจุบันนี้ หอเป็นสังเขป ส่วนผู้ที่ต้องเกี่ยวข้องกับและมีหน้าที่ตัดสินใจในเรื่องของการศึกษาทางคณิตศาสตร์โดยตรง จำเป็นต้องศึกษาจากแหล่งความรู้อื่น ๆ เพิ่มเติมให้กว้างขวางและละเอียดกว่าที่ได้จากหนังสือเล่มนี้อีกมาก.

๔) รายงานและประมวลการสอน (Synopsis) ขององค์การ O.E.E.C.

องค์การ O.E.E.C. (The Organization for European Economic Cooperation) ได้จัดตั้งคณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่งเพื่อปรับปรุงคุณภาพและวางโครงการฝึกฝนอบรมนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรของประเทศต่าง ๆ ซึ่งเป็นสมาชิกขององค์การนี้ คณะกรรมการชุดนี้ซึ่งมีชื่อเรียกย่อ ๆ ว่า O.S.T.P. (Office for Scientific and Technical Personnel) ได้เริ่มทำงานตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๔ เป็นต้นมา และในปี ค.ศ. ๑๙๕๙ ได้จัดส่งแบบสอบถามไปยังประเทศสมาชิกเพื่อสำรวจหาข้อมูลต่าง ๆ มาใช้ในการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์

ให้เหมาะสมและบรรลุผลได้ยิ่งขึ้น พร้อมกันนั้นก็จัดให้มีการสัมมนาขึ้นด้วย ณ เมือง
โรยัวมองต์ (Royaumont) ประเทศฝรั่งเศส ตั้งแต่วันที่ ๒๓ พฤศจิกายน ถึงวันที่ ๔
ธันวาคม ปีเดียวกัน โดยได้เชิญผู้แทนของสมาชิก* แต่ละประเทศมาร่วมสัมมนาด้วยประเทศละ
๓ คน ให้เป็นนักคณิตศาสตร์คนหนึ่ง เป็นนักการศึกษาคณิตศาสตร์หรือบุคคลที่มีหน้าที่รับผิดชอบ
ทางคณิตศาสตร์ในกระทรวงศึกษาธิการคนหนึ่ง และเป็นครูสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยม
อีกคนหนึ่ง

เมื่อการสัมมนาได้เสร็จสิ้นลงไปแล้ว ศาสตราจารย์เฟร์ (Howard F. Fehr)
หัวหน้าแผนกการศึกษาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยโคลัมเบีย ซึ่งได้รับมอบหมายให้เป็นผู้จัดทำ
รายงานสรุปการสัมมนาร่วมกับศาสตราจารย์บันท์ (Bunt) ได้จัดพิมพ์รายงานนั้นเป็นหนังสือ
เล่มหนึ่งโดยให้ชื่อว่า New Thinking in School Mathematics ๔๐

จากรายงานสรุปการสัมมนา จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า สมาชิกส่วนมากไม่พอใจใน
สภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นอยู่ในเวลานั้นมาก และทัศนะที่รุนแรงที่สุดก็ถ้อยแถลง
ของศาสตราจารย์ดีอุคองน์ (Jean Dieudonne) ที่ให้ข้อเสนอว่าควรเลิกสอนเรขาคณิต
แบบของยูคลิดโดยสิ้นเชิง (Euclid must go !) ๔๑ เพราะศาสตราจารย์ดีอุคองน์เห็นว่า

* ประเทศสมาชิกที่ไคลลงนามร่วมกันในวันก่อตั้งเมื่อ ๑๖ เมษายน ๑๙๕๕ มี ๔
ประเทศคือ กรีซ เดนมาร์ก เดอร์เกี นอร์เวย์ เนเธอร์แลนด์ เบลเยียม โปรตุเกส ฝรั่งเศส
เยอรมัน ลักเซมเบอร์ก สหราชอาณาจักร สวิต สวีเดน สเปน ออสเตรีย อิตาลี ไอร์แลนด์
และไอร์แลนด์ ส่วนสหรัฐอเมริกาและแคนาดาเป็นสมาชิกสมทบ นอกจากนั้นยูโกสลาเวียยังได้
ส่งผู้แทนมาร่วมสังเกตการณ์ด้วย.

๔๐ O.E.E.C., New Thinking in School Mathematics, (Forward).

๔๑ Ibid., p. 35.

สามารถสอนสาระสำคัญของวิชาให้แก่นักเรียนที่โตแล้วเข้าใจได้ภายใน ๒ - ๓ ชั่วโมงเท่านั้น ฉะนั้นการเปิดโอกาสให้นักเรียนมัธยมได้เรียนรู้เรื่องต่าง ๆ ที่มีประโยชน์กว่าแทน เช่น ^{๔๒} ให้ศึกษาเรื่อง Matrices, Determinants, แกลฏลัสต์ เบื้องต้น, จำนวนเชิงซ้อน, Polar Coordinates และการเขียนกราฟของฟังก์ชันในรูป Parametric Form เป็นต้น ซึ่งแม้ว่าผู้เข้าร่วมสัมมนาหลายคน จะมีทั้งฝ่ายค้านและฝ่ายสนับสนุนแนวคิดของศาสตราจารย์ คีอุคองนั อย่างรุนแรงพอ ๆ กัน และในที่สุดจะมีความเห็นร่วมกันว่า ^{๔๓} ไม่สามารถจะตัดเรขาคณิตของยูคลิดออกไปจากหลักสูตรได้ทั้งหมดก็ตาม แต่ก็เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าจะต้องเปลี่ยนแปลงหลักสูตร วิทยาศาสตร์ในระดับมัธยมอีกหลายอย่างตลอดทั่วยุโรป

ข้อเสนอที่สำคัญของการสัมมนานี้ก็คือ การแนะนำให้จัดทำประมวลการสอน (Synopsis) เพื่ออธิบายถึงวิธีการในการปรับปรุงหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมให้เหมาะสมและทันสมัยยิ่งขึ้น เผยแพร่แก่บรรดาประเทศสมาชิกเพื่อใช้เป็นคู่มือหรือแนวทางในการเขียนตำราเรียนและคู่มือครูต่อไป

O.E.E.C. จึงได้เชิญบรรดานักคณิตศาสตร์ นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์ และครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์มาร่วมกันทำงานครั้งนี้เป็นเวลาประมาณ ๔ สัปดาห์ ผลปรากฏว่า คณะกรรมการกลุ่มนี้ได้จัดทำประมวลการสอน ^{๔๔} ขึ้นเล่มหนึ่ง โอบไ้ม่กล่าวถึงหลักสูตรสำหรับเด็กที่มีสติปัญญาดีเป็นพิเศษ และจำกัดเนื้อหาพีชคณิต เรขาคณิต และสถิติเท่านั้น แนวคิดที่สำคัญ

^{๔๒} Ibid., p. 38.

^{๔๓} Ibid., p. 47.

^{๔๔} O.E.E.C., Synopses for Modern Secondary School Mathematics, 600 pp.

ก็คือ การแบ่งหลักสูตรวิชาพีชคณิต และเรขาคณิตออกเป็นสองประเภท ประเภทที่จะใช้สอนเด็กโดยทั่ว ๆ ไปเกือบทุกคนนั้น รวมเนื้อหาของวิชาเลขคณิตไว้ด้วย แต่ประเภทที่จะใช้สอนเฉพาะเด็กที่เรียนเก่ง จะต้องรวมเรื่องความน่าจะเป็นและสถิติด้วย

เนื่องจากประเทศในยุโรปมักจะสอนวิชาเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตรวมกันโดยใช้เวลาทั้งหมด ๓ - ๔ ปี ดังนั้นในข้อเสนอของคณะกรรมการชุดนี้จึงอาจจะห้รวบรวมเนื้อหาที่จะสอน แตกต่างจากของสหรัฐไปบ้าง และนอกจากนี้ยังมีข้อเสนอที่สำคัญที่แตกต่างจากข้อเสนอของคณะกรรมการชุดอื่น ๆ ในยุโรปอีกประการหนึ่งคือ การที่คณะกรรมการชุดนี้ได้เน้นให้ใช้เวกเตอร์ ทั้งในวิชาพีชคณิตและเรขาคณิตมากกว่าข้อเสนอของกลุ่มอื่น.

๕) รายงานการประชุมของนักคณิตศาสตร์ที่เมืองเคมบริดจ์ (Cambridge)

มูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติได้สนับสนุนให้นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ที่มีชื่อเสียงจำนวน ๒๕ ท่าน จัดประชุมปรึกษาและอภิปรายกันเกี่ยวกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ร่วมกันที่เมืองเคมบริดจ์ ในมลรัฐแมสซาชูเซตส์ ระหว่างวันที่ ๑๘ มิถุนายน ถึงวันที่ ๑๒ กรกฎาคม ปี ค.ศ. ๑๙๖๓ หลังจากการประชุมดังกล่าว นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์เหล่านั้นจึงได้เสนอรายงานที่สำคัญฉบับหนึ่ง คือ Goals for School Mathematics ซึ่งก่อให้เกิดการตื่นตัวในการอภิปรายและชี้ให้เห็นแนวทางการเปลี่ยนแปลงที่จะเกิดขึ้นในอนาคต

ข้อสรุปที่สำคัญซึ่งได้จากการประชุมตามที่ปรากฏอยู่ในรายงานคือ^{๔๕} ตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๐ เป็นต้นไป นักเรียนซึ่งได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ติดต่อกันนับตั้งแต่ชั้นอนุบาลจนจบการศึกษาในชั้นมัธยม รวมเวลาทั้งหมด ๑๓ ปี จะต้องมีความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์เทียบเท่ากับผู้ที่จบปีที่ ๓ จากมหาวิทยาลัยขณะนี้ กล่าวคือ ได้เรียนวิชาแคลคูลัส พีชคณิต-แผนใหม่ และทฤษฎีความน่าจะเป็นในชั้นมัธยมศึกษา

เพื่อให้สามารถบรรลุผลดังกล่าว นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์เหล่านี้ จึงได้

เสนอว่า หลักสูตรขั้นประถมก็อาจจะถ่วงเน้นเรื่องเส้นแสดงจำนวนจริง (Real Number Line) อสมการ ฟังก์ชัน Concept ง่าย ๆ เกี่ยวกับเซต และทฤษฎีบทมูลฐานพีชคณิตง่าย ๆ ทวนทวนเลขคณิต การทำโจทย์ที่สำคัญ ๆ เกี่ยวกับเลขคณิตและพีชคณิต ความน่าจะเป็นและสถิติเบื้องต้น และควรพิจารณาถึงความเกี่ยวข้องระหว่างคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์กายภาพด้วย ส่วนในระดับมัธยม นักเรียนควรจะมีความรู้และความเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับแคลคูลัส Linear Algebra และความน่าจะเป็น

ข้อเสนอที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ ควรใช้วิธีการอธิบายเนื้อหาแบบ Spiral Approach กล่าวคือจะถ่วงถ่วงถึงหัวข้อต่าง ๆ ซ้ำกันอยู่เสมอ แต่จะเพิ่มความลึกซึ้งยิ่งขึ้น และเน้นให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างหัวข้อย่อยกับหัวข้อใหญ่มากขึ้น วิธีการอธิบายเนื้อหาแบบนี้ นอกจากจะทำให้นักเรียนเห็นทั้งความง่ายที่จะเข้าใจเองได้ (Intuition) และความยาก (Rigor) ของคณิตศาสตร์ได้ในเวลาเดียวกันแล้ว ยังจะทำให้มีแนวคิดที่สำคัญประการหนึ่งด้วยคือ การที่รู้สึกว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เราสามารถสร้างขึ้นมาได้ มีสิ่งที่เราต้องยอมรับและจดจำไปไว้โดยไม่รู้ที่มาหรือเหตุผลในการกระทำเช่นนั้น

แม้ว่าข้อเสนอของนักคณิตศาสตร์กลุ่มนี้จะเป็นโครงการที่กว้างขวางและมีเป้าหมายสูงกว่าปรกติ แต่ก็มิใช่สิ่งที่เป็นไปได้^{๔๕} เพียงแต่ต้องการ เวลาและบุคลากรที่พร้อมจะร่วมดำเนินการโดยมีอุดมคติที่จะทำอย่างแน่วแน่เท่านั้น

โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ในระหว่างสิบห้าปีหลังนี้ สหรัฐอเมริกามีโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอน

๔๖

Adler, I., "The Cambridge Report," The Mathematics Teacher, 59:210-217 March, 1966.

๔๗

Stone, M.H., loc.cit.

คณิตศาสตร์เกินกว่า ๗๐ โครงการ^{๔๔} และอาจแบ่งประเภทของโครงการทดลองเหล่านั้น
ได้ ๕ ประเภท คือ^{๔๕}

๑) โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ชั้น

อนุบาลถึงเกรด ๖

๒) โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่เกรด ๗

ถึงเกรด ๑๒

๓) โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับวิทยาลัย

และมหาวิทยาลัย

๔) โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ชั้น

อนุบาลถึงมหาวิทยาลัย

๕) โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ในสถาบัน

การฝึกหัดครู

ในที่นี้ จะกล่าวถึงเฉพาะโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนวิชาคณิตศาสตร์
ในระดับมัธยมศึกษา^{๔๖} ซึ่งมีผลต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ทั้งของสหรัฐเองและของประเทศอื่น
อย่างกว้างขวาง

^{๔๔} สุชาติ รัตนกุล "โครงการทดลองเพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนคณิตศาสตร์"

ในรายงานการสัมมนาการคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ๑๔ เมษายน - ๖ พฤษภาคม ๒๕๐๔

หน้า ๓.๕ - ๑ (อ้างอิงมาจาก) *Aids for Mathematics Education*, p. 1 by
U.S. Department of Health, Education and Welfare.

^{๔๕}

น.ค.

✓
๕๕

๑) โครงการทดลองของมหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ (หรือโครงการอิลลินอยส์) *

โครงการนี้ชื่อย่อว่า UICSM (University of Illinois Committee on School Mathematics) ตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๕๑ ด้วยความร่วมมือของศาสตราจารย์จากวิทยาลัยวิชาการศึกษา วิทยาลัยวิชาวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาลัยศิลปศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะปรับปรุงแก้ไขหลักสูตรและวิธีสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา เพื่อให้นักเรียนที่จะเข้าศึกษาต่อในชั้นมหาวิทยาลัยมีความรู้ทางวิชาคณิตศาสตร์ที่เพียงพอ โครงการนี้ได้เริ่มผลิตเอกสารทางคณิตศาสตร์ออกทดลองใช้ตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๕๒ โดยในขั้นต้นได้ทดลองใช้กับโรงเรียนมัธยมของมหาวิทยาลัยอิลลินอยส์ และโรงเรียนมัธยมบางแห่งภายในมลรัฐอิลลินอยส์เอง ครั้นต่อมาในปี ค.ศ. ๑๙๕๖

โครงการนี้ได้รับความช่วยเหลือจาก Carnegie Corporation of New York เป็นจำนวนเงิน ๒๗๗,๐๐๐ ดอลลาร์ จึงได้ขยายการทดลองหลักสูตรและตำราเรียนคณิตศาสตร์ซึ่งโครงการผลิตขึ้นออกใช้ในโรงเรียนมัธยมอย่างกว้างขวาง และโรงเรียนมัธยมในมลรัฐต่าง ๆ ได้เข้าร่วมมือในการทดลองด้วยเป็นจำนวนมาก ดังปรากฏวาระหว่างปี ค.ศ. ๑๙๕๗ - ๑๙๕๘

โครงการนี้ได้ผลิตตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๙ - ๑๒ พร้อมด้วยคู่มือครูออกทดลองใช้ในโรงเรียนมัธยม ๑๒ แห่ง ซึ่งมีนักเรียนประมาณ ๑๗๐๐ คน สอนโดยครูคณิตศาสตร์

๔๐ คน และระหว่างปี ค.ศ. ๑๙๕๘ - ๑๙๕๙ โครงการทดลองได้ขยายงานการทดลองออกไปถึง ๒๐ มลรัฐ กล่าวคือมีโรงเรียนมัธยมต่าง ๆ ร่วมมือในการทดลองเพิ่มขึ้นอีก

๓๓ โรงเรียน รวมหมดยกเว้นทั้งสิ้นแล้ว หลักสูตรและตำราเรียนคณิตศาสตร์ของโครงการ UICSM ได้ทดลองใช้กับนักเรียนมากกว่า ๓๕๐๐ คน และครูคณิตศาสตร์ประมาณ ๑๐๙ คน

โครงการทดลองนี้ขยายงานการทดลองให้กว้างขวางยิ่งขึ้นเป็นลำดับ ทั้งนี้เพราะในปี ค.ศ. ๑๙๕๘

โครงการนี้ได้รับเงินอุดหนุนอีกเป็นจำนวน ๒๕๒,๖๐๐ ดอลลาร์

* แม้ว่าในอิลลินอยส์จะยังมีโครงการทดลองอื่น ๆ อีก แต่ถ้ามองว่า "โครงการอิลลินอยส์" ก็เป็นที่เข้าใจกันทั่วไปว่า หมายถึงโครงการของมหาวิทยาลัยอิลลินอยส์เรื่องนี้.

๕๐

สุชาติ รัตนกุล ล.ค. หน้า ๓.๕ - ๖ ถึง ๓.๕ - ๗.

เมื่อพิจารณาถึงการดำเนินงานในการทดลองของโครงการ UICSM อาจกล่าวได้ว่า โครงการนี้เป็นโครงการที่ดีเยี่ยมมาก เพราะนอกจากจะได้ผลิตตำราเรียนที่มีคุณภาพแล้ว ยังควบคุมไปตลอดถึงการสอนของครูด้วย กล่าวคือ คณะกรรมการจะเป็นผู้เลือกโรงเรียน และตัวครูที่จะนำเอกสารเหล่านั้นไปทดลองสอน และก่อนที่จะให้ครูสอนตามหลักสูตรใหม่ ก็จะต้องจัดอบรมครูเป็นพิเศษ เพื่อให้เข้าใจในเนื้อหาและวิธีการสอนตลอดจนข้อให้ครูเหล่านั้น ช่วยประเมินผลตำราเรียนร่วมกับคณะกรรมการด้วย แต่ในภายหลังก็ยับยั้งแต่ปี ก.ศ.๑๕๕๔ เป็นต้นมา คณะกรรมการจึงผ่อนผันให้โรงเรียนและครูคนอื่น ๆ ที่ต้องการจะมีส่วนร่วมในการทดลองใช้ตำราเหล่านั้นได้ด้วย แต่คณะกรรมการก็จะไม่ส่งเสริมให้ครูใดทดลองสอนจนกว่าจะได้รับคำแนะนำหรือความช่วยเหลือจากครูที่เคยทดลองใช้มาแล้ว

อนึ่ง นอกจากคณะกรรมการตามโครงการ UICSM จะได้ผลิตตำราเรียน กลิตศาสตร์สำหรับเกรด ๙ - ๑๒ แล้ว ยังได้ผลิตคู่มือครูซึ่งมีคำอธิบายต่าง ๆ อย่างละเอียด ประยกอกันด้วย และถ้าปรากฏว่าคณะกรรมการใดเรียนรู้อะไรบางอย่างเพิ่มเติม จากผลการทดลองที่ผ่านไปแล้ว ทางคณะกรรมการก็จะแจ้งให้ครูเหล่านั้นได้ทราบซึ่งอาจจะเป็นในรูปแบบ เอกสารเล่มเล็ก ๆ หรือบทความในวารสารต่าง ๆ

สำหรับเนื้อหาในตำราเรียนกลิตศาสตร์ของโครงการ UICSM นี้ แบ่งไว้เป็น ๑๒ หน่วยเพื่อความสะดวกในการสอนของครู และโดยปรกตินักเรียนที่มีความสามารถพอจะ เข้าศึกษาต่อชั้นมหาวิทยาลัยก็สามารถเรียนได้จบในเวลาประมาณ ๔ ปี แต่อาจจะช้า หรือเร็วกว่านี้ได้กณดย

ส่วนการสอนนั้น คณะกรรมการเน้นให้ครูคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้เป็นสิ่งสำคัญ คือ โครงสร้าง ของกลิตศาสตร์ ความง่เสนคงวของเนื้อหาในแต่ละเรื่อง การใช้ภาษาอย่างถูกต้องและ วัคคุมทั้งในการพูดและการเขียน และความเข้าใจในหลักการที่เป็นแบบทั่ว ๆ ไป โดยใช่วิธีการสอนแบบให้นักเรียนเป็นผู้ค้นพบด้วยตนเอง

การทดลองของโครงการ UICSM ปรากฏผลสรุปที่สำคัญ ๒ ประการ คือ ^{๕๒}

(๑) วิชาคณิตศาสตร์แบบใหม่ส่วนมากเป็นที่สนใจและมีประโยชน์ต่อนักเรียน
ในชั้นมัธยมศึกษา

(๒) ครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา สามารถสอนวิชาคณิตศาสตร์
แบบใหม่ได้ เมื่อได้รับความช่วยเหลือพอสมควร

ปัจจุบันคณะกรรมการคามโครงการ UICSM มุ่งทางด้านการอบรมครูเป็น
สำคัญ ^{๕๓} โดยจัดอบรมทั้งในวันเสาร์และในระหว่างปิดภาคเรียน และให้ครูมีโอกาสสังเกต
การสอนของครูที่ชำนาญจากภาพยนตร์ด้วย

๒) โครงการทดลองของมหาวิทยาลัยแมรีแลนด์

โครงการนี้ชื่อย่อว่า UMaP (University of Maryland Mathematics
Project) ^{๕๔} ตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๕๗ โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะปรับปรุงแก้ไขและเขียน
ตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๗ - ๙ และคณะกรรมการของ UMaP เริ่มทดลอง
ใช้ตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๗ ที่เขียนขึ้นใหม่ในระหว่างปีการศึกษา ๑๙๕๗ - ๑๙๕๘
หลังจากนั้นก็ได้ร่วมมือกับนักคณิตศาสตร์จากสถาบันมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National
Science Foundation Institute) เพื่อปรับปรุงเนื้อมันให้ดีขึ้นอีก โดยนักคณิต-
ศาสตร์เหล่านั้นได้มีโอกาสสังเกตการทดลองสอนของครูด้วย

^{๕๒} สุชาติ รัตนกุล ล.ก. หน้า ๓.๕ - ๗.

^{๕๓} Hale, William T., "UICSM's Decade of Experimentation,"
The Mathematics Teacher, 54:613-619, December, 1961.

^{๕๔} Willoughby, D.D., op.cit., p. 45.

ระหว่างปีการศึกษาต่อมา ก็ปี ๑๙๕๔ - ๑๙๕๕ โครงการ UMMAF ได้ทดลองใช้ตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๗ ที่ปรับปรุงแล้วในโรงเรียน ๓๓ แห่ง ซึ่งสอนโดยครู ๔๓ คน และในขณะนี้ก็จัดให้มีการสัมมนาเพื่อปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งหนึ่ง พร้อมกับเริ่มเขียนตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับเกรด ๘ เพื่อใช้ทดลองในปีต่อไปด้วย

ตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่คณะกรรมการของ UMMAF แต่งขึ้นทดลองใช้ได้นั้นมีความสำคัญไว้ที่โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ และการใช้ภาษาคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องและรัดกุม ส่วนเนื้อหาที่นำมาสอนได้แก่ * จำนวนและระบบการเขียนตัวเลขแทนจำนวน ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ ฟังก์ชันบางเรื่อง ทริโกณมิติที่ง่าย ๆ จำนวนดัตยะ ความน่าจะเป็น และสถิติ ซึ่งจากการทดลองในเกรด ๗ ปรากฏผลสรุปเมื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ กับนักเรียนในกลุ่มที่ใช้ตำราเดิมดังนี้ ^{๕๕}

(๑) สำหรับข้อสอบที่วัดความรู้ในเนื้อหาเก่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำคะแนนได้ก็เท่ากัน

(๒) สำหรับข้อสอบที่วัดความรู้ในเนื้อหาตามตำราเรียนของ UMMAF นักเรียนในกลุ่มทดลองทำคะแนนได้ดีกว่า

นอกจากนี้ยังปรากฏว่า ทั้งครูและนักเรียนในกลุ่มทดลองต่างก็มีความกระตือรือร้นในการสอนการเรียนตามเนื้อหาใหม่มาก

อย่างไรก็ตาม ผลงานที่ดีถือว่าสำคัญที่สุดของโครงการ UMMAF นี้ คือ ^{๕๖} การร่วมมือกันอย่างใกล้ชิดระหว่างนักคณิตศาสตร์ (ประมาณ ๕ คน) และครูคณิตศาสตร์ (ประมาณ ๔๐ คน) ทั้งในด้านการอภิปรายและการเขียนตำราเรียนคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นในการดำเนินงานยังได้รับความช่วยเหลือจากผู้เชี่ยวชาญในสาขาจิตวิทยาและการวัดผล ตลอดจนจนครูที่นำเอาตำรานั้นไปทดลองใช้ด้วย บุคคลเหล่านี้ได้ร่วมกันอภิปรายความกิดเห็น

* สำหรับโจทย์ที่เกี่ยวกับการนำเอาคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในทางสังคม ซึ่งเป็นเรื่องที่น่าสนใจในตำราเรียนแบบเก่านั้น ก็ยังคงมีอยู่บ้าง แต่ไม่มากนัก.

^{๕๕}

Ibid.

^{๕๖}

Ibid.

เขียนตำราเรียน ประเมินผลตำรานั้น ปรับปรุงตำรานั้น และประเมินผลกันใหม่อีก จนในที่สุดก็ทำให้สามารถผลิตตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีสำหรับเกรด ๗ - ๘ ได้

ขบวนการทำงานเช่นนี้ถือว่าเป็นปรากฏการณ์ครั้งแรกในวงการศึกษาคณิตศาสตร์ของสหรัฐ ซึ่งในระยะต่อมาคณะกรรมการของโครงการ SMSG ได้ถือปฏิบัติอย่างกว้างขวางยิ่งขึ้น และเมื่อก่อนหน้านั้นคณะกรรมการของโครงการ UICSM จะได้เคยปฏิบัติคล้ายกันที่กล่าวนี้ แต่ถาพิจาณาให้ละเอียดแล้วจะเห็นว่า ตามโครงการ UICSM นั้นมีนักคณิตศาสตร์ที่ทำงานมากอย่างแท้จริงเพียงคนเดียวเท่านั้น แต่ตามโครงการ UMMAp นี้ มีนักคณิตศาสตร์หลายคนและครูคณิตศาสตร์หลายคนร่วมงานกันอย่างแท้จริง ทั้งในด้านการเสนอความคิดเห็นและการเขียนตำราดังกล่าวดูแล้ว

๓) โครงการ SMSG

โครงการนี้มีชื่อว่า SMSG (School Mathematics Study Group) หรืออย่างที่เรียกว่า "โครงการเบล" (Yale Project) เพราะมีศูนย์กลางอยู่ที่มหาวิทยาลัยเบล ในมลรัฐคอนเนทิคัท แต่ปัจจุบันนี้ได้ย้ายไปอยู่ที่มหาวิทยาลัยสแตนฟอร์ด

โครงการ SMSG เป็นโครงการที่ใหญ่ที่สุดในบรรดาโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงและแก้ไขการศึกษาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนระดับต่าง ๆ เท่าที่เคยเป็นมาในประวัติศาสตร์การศึกษาของสหรัฐ โครงการนี้เกิดขึ้นเมื่อเดือนกุมภาพันธ์ ค.ศ. ๑๙๕๘ โดยมีวัตถุประสงค์^{๕๗} ที่จะปรับปรุงวิธีการสอนและหลักสูตร วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของสหรัฐ และได้รับเงินทุนอุดหนุนจากมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติเป็นส่วนใหญ่ คณะกรรมการที่ปรึกษาประกอบขึ้นด้วยนักคณิตศาสตร์จากวิทยาลัยและมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์จากโรงเรียนมัธยมศึกษา ผู้เชี่ยวชาญทางการศึกษา และผู้แทนทางกานวิชาวิทยาศาสตร์และวิชาเทคนิคต่าง ๆ รวมทั้งหมก ๑๕ ท่านด้วยกัน และนอกจากนี้ยังได้เชิญครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์จากโรงเรียนมัธยมศึกษาและนักคณิตศาสตร์ก่นสำคัญ ๆ อีกกว่า ๑๐๐ ท่าน เข้ารวม

^{๕๗}

Begle, E.G., "The School Mathematics Study Group" in New Developments in Secondary School Mathematics, p. 27.

ในการเขียนตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด ๗ - ๑๒ ด้วย

วิธีการเขียนตำรานั้น โดยปรกติจะแบ่งเป็นทีม แต่ละทีมจะประกอบด้วย นักคณิตศาสตร์ และครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ฝ่ายละประมาณ ๗ - ๘ คน เมื่อเขียนเสร็จแล้ว จะนำไปทดลองใช้พร้อมกับขอรับข้อคิดเห็นจากครูที่สอนตามตำราใหม่นั้นร่วมประเมินผลในเนื้อหาด้วย หลังจากนั้นก็จะให้แต่ละทีมปรับปรุงแก้ไขเนื้อหาส่วนของตน แล้วนำกลับไปทดลองใช้ใหม่อีก สำหรับเนื้อหาที่เขียนขึ้นนี้ แต่เดิมก็เป็นเพียงในระดับมัธยม แต่ต่อมาได้ขยายงานให้ครอบคลุมถึงระดับประถมศึกษา และปรากฏว่าในปัจจุบันนี้ ตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่ผลิตขึ้นแล้ว ที่สำคัญได้แก่ ตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด ๗ - ๑๐ ซึ่งมีให้เลือกอย่างน้อยสองแบบ ตำราเรียนคณิตศาสตร์แบบโปรแกรมสำหรับนักเรียนเกรด ๘ ตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการนำเอาคณิตศาสตร์ไปใช้ในทางวิทยาศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด ๗ - ๘ ตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด ๑๑ ตำราเรียนคณิตศาสตร์โดยย่อสำหรับนักเรียนเกรด ๑๒ และตำราเรียนคณิตศาสตร์ชุดประถมศึกษาตั้งแต่อนุบาลถึงเกรด ๖

ตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่คณะกรรมการของโครงการ SMSG แต่งขึ้นทดลองใช้ได้นั้นมีความสำคัญไว้ที่โครงสร้างของคณิตศาสตร์ การใช้งานอย่างถูกต้องและรัดกุม การพิสูจน์แบบ Deduction และ Induction การค้นพบของนักเรียนและเรื่องระบบจำนวนจริง ระหว่างปี ค.ศ. ๑๙๕๕ - ๑๙๖๐ โครงการ SMSG ได้ทดลองใช้ตำราเรียนคณิตศาสตร์ที่ผลิตขึ้นในศูนย์ทดลอง ๕๐ ศูนย์ และหลังจากที่ได้มีการปรับปรุงแก้ไขแล้ว ได้ทดลองใช้แพร่หลายยิ่งขึ้นตามโรงเรียนต่าง ๆ โดยอาศัยครูคณิตศาสตร์ที่ได้รับการอบรมวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่แล้วเป็นผู้ร่วมดำเนินงาน

นอกจากผลิตตำราเรียนคณิตศาสตร์แล้ว โครงการ SMSG ยังได้ผลิตคู่มือครูและเอกสารต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เพื่อช่วยให้นักศึกษาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมีคุณภาพดียิ่งขึ้น และเพื่อช่วยให้นักเรียนที่สอนวิชาคณิตศาสตร์มีโอกาสปรับปรุงตนเอง ดังจะเห็นได้ว่า นอกจากจะผลิตคู่มือครูประกอบตำราเรียนแต่ละเล่มเพื่ออธิบายถึงเนื้อหาของคณิตศาสตร์นั้น ๆ และแนะนำวิธีสอนเนื้อหาแล้ว โครงการ SMSG ยังได้ผลิตเอกสารต่าง ๆ เพื่อช่วยครูใช้ประกอบด้วย เช่น เอกสารที่กล่าวถึงเนื้อหาที่ควรสอนเพิ่มเติมให้แก่เด็กที่เรียนเก่ง

และหนังสือชุด *Studies in Mathematics* — ซึ่งนักคณิตศาสตร์ผู้เชี่ยวชาญในการสอนวิชานี้ในระดับมัธยมจะเป็นผู้เขียนขึ้นเพื่อให้คำอธิบายเกี่ยวกับเนื้อหาของคณิตศาสตร์ที่จะเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับครู เป็นคน

อย่างไรก็ตาม เป็นที่เข้าใจกันว่า แม้โครงการ SMSG จะยังคงดำเนินงานต่อไป แต่ก็ไม่มีจุดประสงค์จะผลิตตำราแข่งกับสำนักพิมพ์ของเอกชน ในอนาคตอันใกล้นี้จึงจะไม่มีกรณีที่พิมพ์ตำราของโครงการ SMSG ออกมาอีก โดยเหตุผลนี้เกี่ยวกับที่ไม่ได้พิมพ์หนังสือ *Probability and Statistical Inference* ของคณะกรรมการวิชาการคณิตศาสตร์แห่ง CEEB ที่กล่าวแล้ว และดังคำอธิบายของคณะกรรมการของโครงการ SMSG ท่านหนึ่งที่ว่า^{๕๔}

"หนังสือเหล่านี้ไม่ได้รวมเนื้อหาตามหลักสูตรไว้ได้อย่างครบถ้วน และมีใช้ว่าการใช้หนังสือเหล่านี้จะเป็นวิธีทางเดียวเท่านั้นที่จะทำให้นักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาให้แก่นักเรียนได้แก่คณะกรรมการมุ่งหมายจะให้หนังสือเหล่านี้เป็นเพียงตัวอย่างหรือข้อเสนอแนะสำหรับผู้เขียนตำราเรียนคณิตศาสตร์กันอื่น ๆ และหวังจะให้ใช้หนังสือเหล่านี้ชั่วคราวในระยะเวลาที่ยังไม่มีตำราเรียนคณิตศาสตร์เหล่านั้นแพร่หลายเท่านั้น"

๕) | โครงการทดลองของมหาวิทยาลัยมินเนโซตา (Minnesota)

โครงการนี้ชื่อว่าโครงการ Minnemath (Minnesota School Mathematics Center) มีศาสตราจารย์โรเซนบลูม (Rosenbloom) เป็นผู้ดำเนินงาน ซึ่งแม้ว่าในตอนหลังศาสตราจารย์นี้จะย้ายไปอยู่ที่วิทยาลัยครูของมหาวิทยาลัยโคโลัมเบีย แต่ก็เป็นที่เชื่อกันว่าท่านยังคงดำเนินงานต่อไป

ลักษณะเด่นของโครงการ Minnemath ก็คือการทดลองผลิตตำราเรียนคณิตศาสตร์สำหรับชั้นประถมและบางเรื่องสำหรับชั้นมัธยม โดยได้รวมเนื้อหาคณิตศาสตร์

๕๔

Willoughby, S.S., *op. cit.*, p. 47, (citing) *SMSG Information Memorandum*, September, 1963.

๕๕

Ibid.

เข้ากับวิทยาศาสตร์กายภาพ ดังข้อเสนอของกลุ่มนักคณิตศาสตร์ซึ่งประชุมกันที่เมืองเคมบริดจ์ ที่กล่าวแล้ว และยังได้สอนเนื้อหาคณิตศาสตร์บางเรื่องเพื่อมุ่งดึงดูดความสนใจของนักเรียน ด้วย จึงนับว่าเป็นโครงการทดลองที่น่าสนใจโครงการหนึ่ง

๕) โครงการทดลองของมหาวิทยาลัยไซราคิวส์และเวสเตอร์ (เดิมชื่อโครงการ เมคิสัน)

โครงการทดลองของมหาวิทยาลัยไซราคิวส์ และเวสเตอร์ (Syracuse—Webster Project) ซึ่งทดลองในระดับเกรด ๔ — ๕ เป็นโครงการที่มีลักษณะเด่นอีก โครงการหนึ่งที่ควรกล่าวถึงเป็นพิเศษ ลักษณะเด่นที่กล่าวนี้ก็คือขบวนการสอนที่ใช้ในการทดลอง เพราะปรากฏว่าในการสอนเนื้อหาคณิตศาสตร์ให้นักเรียนตามโครงการนี้ ครูจะต้องมุ่งพัฒนาความเจริญของงาน และความสามารถของนักเรียนรวมทั้งหมด ๓ ระดับต่อเนื่องกันคือ ๒๐

(๑) การสังเกตหรือสำรวจอย่างง่าย ๆ

(๒) การโค่นพบกระส่วนหรือข้อสรุปบางอย่าง

(๓) การให้เหตุผลหรือพิสูจน์สิ่งที่ค้นพบแล้ว แต่การพิสูจน์ของนักเรียน ในระดับนี้ยังไม่ใช่การพิสูจน์อย่างแท้จริง ส่วนมากมักจะเป็นแต่เพียงการทดลองหรือการค้นหา คำตอบเอาเองจากคำถามของครู ซึ่งแตกต่างจากวิธีการสอนแบบเก่าอย่างเห็นได้ชัด เพราะเท่าที่เกยปฏิบัติกันมานั้น ขบวนการสอนการเรียนรู้คณิตศาสตร์จะไม่มีอะไรมากไปกว่า การให้นักเรียนใคร่ครวญหรือทบทวน และต้องฝึกฝนใช้กฎหรือทฤษฎีนั้นไปทดลอง

๖) โครงการทดลองอื่น ๆ

นอกจากโครงการทดลองที่กล่าวแล้ว ยังมีโครงการทดลองอื่น ๆ อีก ซึ่งผู้สนใจอาจหาอ่านได้จากหนังสือที่สำคัญ ๓ เล่ม คือ

(๑) The Revolution in School Mathematics

(NCTM จัดพิมพ์ขึ้นดังที่กล่าวแล้ว)

(๒) An Analysis of New mathematics Programs

(NCTM จัดพิมพ์ขึ้นในปี ค.ศ. ๑๙๖๓)

(๓) Studies in Mathematics Education

(Scott, Foresman และคณะจัดพิมพ์ขึ้นในปี ค.ศ. ๑๙๖๐ โดยได้ศึกษาและอธิบาย

โครงการทดลองที่สำคัญ ๆ ในระยะนั้นไว้ทั้งหมด ๓๐ โครงการ)

ซึ่งเมื่อก่อนแต่ละโครงการต่างก็มีรายละเอียดและวิธีการบางอย่างต่างกัน แต่ก็มีจุดประสงค์ที่สำคัญตรงกันประการหนึ่ง ก็คือ เพื่อหาทางปรับปรุงวิธีการสอนการเรียนตลอดจนหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้ให้นักเรียนได้เรียนคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม และเรียนด้วยความเข้าใจมากขึ้น

✓ การจัดสอนคณิตศาสตร์ระดับมหาวิทยาลัยแก่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษา

ในปี ค.ศ. ๑๙๕๒ ได้มีข้อเสนอรายงานที่สำคัญ ๒ ฉบับ คือ ^{๒๑}

๑. General Education in School and College

๒. School and College Study of Admission with Advanced Standing.

จากรายงานทั้งสองฉบับนี้ ทำให้ทราบและเห็นว่าการศึกษาได้กระหน่ำกว่าหลักสูตรทั้งในระดับมัธยมศึกษาและอุดมศึกษาในสหรัฐ ตามที่เป็นอยู่ในระยะนั้น ไม่เหมาะสม กล่าวคือ นักเรียนจะได้เรียนเนื้อหาวิชาในชั้นปีที่ ๑ ในมหาวิทยาลัย ซ้ำกับที่ได้เคยเรียนมาแล้วในโรงเรียนมัธยม และนักเรียนมัธยมในที่สุดท้ายก็มักจะต้องเรียนเนื้อหาวิชาซ้ำกับที่เคยเรียนรู้อยู่แล้ว ซึ่งทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายและไม่มีโอกาสได้ใช้ความรู้ความสามารถได้เต็มที่

เมื่อเป็นเช่นนี้ นักการศึกษา จึงได้เริ่มดำเนินการเพื่อให้โอกาสแก่นักเรียนมัธยมมากขึ้น โดยพยายามจัดให้นักเรียนซึ่งเรียนวิชาต่าง ๆ ตามหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาจนจบในสามปีแรกแล้ว เรียนวิชาตามหลักสูตรชั้นปีที่ ๑ ระดับมหาวิทยาลัยต่อไป และเมื่อนักเรียน

^{๒๑} Pieters, R.S., and Vanco, E.P., "The Advanced Placement Program in Mathematics," The Mathematics Teacher, 54:201-211, April, 1961.

สามารถผ่านข้อสอบของคณะกรรมการออกข้อสอบ ก็จะได้รับหน่วยกิตของมหาวิทยาลัยในวิชานั้น และยังอาจเข้าเรียนต่อในมหาวิทยาลัยปีที่ ๒ ได้ด้วย

สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ที่จัดสอนให้ตามโครงการดังกล่าวนี้คือเรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัส

สรุปความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา

๑. สหรัฐอเมริกาเริ่มเคลื่อนไหวเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์มาตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๖๐ แต่เป็นไปในวงแคบและไม่เกิดผลอย่างเด่นชัด หลังจากนั้นคือตั้งแต่ประมาณปี ค.ศ. ๑๙๕๕ เป็นต้นมา การดำเนินงานในเรื่องนี้จึงได้แพร่หลายยิ่งขึ้น และได้รับความสนับสนุนทั้งจากรัฐบาลและประชาชนโดยทั่วไป

๒. จากรายงานของคณะกรรมการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์และการทดลองตามโครงการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะรายงานของ

Commission on Mathematics of the CEEB และการทดลองตามโครงการ SMSQ ทำให้การศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกาก้าวหน้าไปมากทั้งในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา และสถาบันฝึกหัดครู

ตัวอย่างเช่น นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาซึ่งเรียนวิชาต่าง ๆ ตามหัวข้อที่กำหนดไว้สำหรับระดับมัธยมศึกษาครบหมดแล้ว จะมีโอกาสได้เรียน Analysis (เกี่ยวกับ Differential & Integral Calculus) และเรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) ระดับมหาวิทยาลัยปีที่ ๑ - ๒ ในเกรด ๑๒ ด้วย ตามโครงการ Advanced Placement Program,

๓. คณะกรรมการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา วางโครงการปรับปรุงไว้ทั้งในระยะสั้นและระยะยาว ดังจะเห็นได้จากข้อเสนอในรายงานการประชุมของนักคณิตศาสตร์ที่เมืองเกนเนริกซ์ ข้อเสนอของ PEA Committee และ Joint Commission เป็นต้น

๔. เมื่อพิจารณาถึงความเคลื่อนไหวเพื่อกำเริบการปรับปรุงการศึกษาทางด้าน
คณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกาโดยทั่วไปแล้ว จะเห็นว่านำหน้าประเทศอื่น

ตอนที่ ๒

ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของประเทศไทย

การศึกษาคณิตศาสตร์ในประเทศไทยเริ่มแพร่หลายในรัชสมัยของสมเด็จพระนาง -
วิกตอเรีย (ก.ศ. ๑๘๑๙ - ๑๙๐๑) คือในตอนกลางคริสต์วรรษที่ ๑๙ แต่วิชาคณิตศาสตร์
ที่สอนในยุคนั้นมีเฉพาะ^๑ วิชาเลขคณิต (เน้นเรื่องการกำขาย) พีชคณิต และเรขาคณิต
ซึ่งเรียนจากหนังสือชุด Elements ของยูคลิด เท่านั้น

ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ก่อนปี ก.ศ. ๑๙๖๐

การปรับปรุงการสอนวิชาเรขาคณิต

วิชาคณิตศาสตร์ที่ได้รับการวิพากษ์วิจารณ์และได้รับการปรับปรุงแก้ไขเป็นวิชาแรก คือ
เรขาคณิต กล่าวคือในปี ก.ศ. ๑๘๖๗ วิลสัน^๒ (Wilson) ได้แต่งหนังสือเรขาคณิตขึ้น
ใหม่เพื่อใช้แทนหนังสือชุด Elements ของยูคลิด และอีก ๔ ปีต่อมา^๓ ได้มีการจัดตั้ง
สมาคม เพื่อปรับปรุงการสอนเรขาคณิต (Association for the Improvement of Geomet-
-rical Teaching) ขึ้นซึ่งปรากฏว่าดำเนินงานได้ดียิ่งมาก ในระยะต่อมาจึงได้ขยายงานให้
กว้างขวางขึ้นพร้อมกับออกวารสารเล่มหนึ่ง คือ "The Mathematical Gazette"
นอกจากนั้น ยังได้พิมพ์รายงานและจุลสารอีกหลายฉบับ และในที่สุดก็ได้เปลี่ยนชื่อใหม่เป็นสมาคม
คณิตศาสตร์ (The Mathematical Association, an Association of Teachers
and Students of Elementary Mathematics) 

^๑ England, Ministry of Education, Teaching Mathematics in Secondary Schools, p. 4.

^๒ Ibid., p. 5.

^๓ Ibid., p. 6.

ข้อคิดเห็นของศาสตราจารย์ เพอร์รี่

ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งในระยะนี้ ก็คือ ในปี ค.ศ. ๑๙๐๑ สมาคม British Association ได้จัดประชุมขึ้นที่เมืองกลาสโกว์ (Glasgow) และในการประชุมครั้งนี้เองที่ศาสตราจารย์เพอร์รี่ (Perry) ซึ่งเป็นศาสตราจารย์ทางวิชาวิศวกรรมศาสตร์ ได้เสนอรายงานวิจารณ์การสอนคณิตศาสตร์ตามที่เป็นอย่างรุนแรง จนทำให้บรรดานักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ที่มีชื่อเสียงทั้งในอังกฤษเองและในต่างประเทศ โดยเฉพาะสหรัฐอเมริกา เริ่มให้ความสนใจในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง และได้มีส่วนร่วมในการอภิปรายตลอดจนเสนอรายงานวิจารณ์ข้อคิดเห็นของศาสตราจารย์เพอร์รี่เป็นจำนวนมาก

สาระสำคัญของรายงานที่ศาสตราจารย์เพอร์รี่เสนอในครั้งนี้ ได้แก่การเน้นให้เห็นว่าในการสอนคณิตศาสตร์ มีการเพ่งเล็งประโยชน์เพียงข้อเดียว ก็เพื่อให้นักเรียนสอบได้ดังที่เป็นอยู่ในขณะนี้ แต่การเพ่งเล็งถึงประโยชน์อื่น ๆ ด้วย เช่นการฝึกหัดให้นักเรียนรู้จักใช้ความคิดอย่างมีเหตุผล การให้นักเรียนมีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความสนุกสนานและความพอใจ และการให้นักเรียนสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือเพื่อศึกษาวิชาอื่น ๆ โดยเฉพาะวิทยาศาสตร์ได้อย่างสะดวกสบายเหมือนกับใช้แขนหรือขา เป็นต้น นอกจากนั้นในตอนท้ายศาสตราจารย์เพอร์รี่ ยังได้เสนอหลักสูตรคณิตศาสตร์ใหม่ ที่ท่านคิดว่าเหมาะสมไว้โดยละเอียดด้วย^๕

สำหรับข้อคิดเห็นของผู้ที่ได้อภิปรายหรือเขียนวิจารณ์ข้อคิดเห็นของศาสตราจารย์เพอร์รี่นั้น ส่วนใหญ่เป็นการสนับสนุนและเพิ่มเติมสาระสำคัญบางอย่าง เช่น เฮฟไซด์ (Heaviside) ได้กล่าวไว้อย่างชัดเจนเมื่อได้เห็นเห็นว่า เด็กมีใจกับวิชาหรือนักตรรกศาสตร์

^๕ Ibid., p.7.

^๘ Reeve, W.D., Mathematics for the Secondary School, p.8.

^๖ Suchart Ratanakul, "A Study of Mathematics Education in Thailand", Dissertation, p. 46, (citing), Discussion on the Teaching of Mathematics, pp. 1 - 32, by British Association Committee.

^๗ England, Ministry of Education, op. cit., pp. 8-9.

แต่จะสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ภาคปฏิบัติและนำไปใช้ได้อีกจนจะสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ภาคทฤษฎีอย่างแท้จริง โดยเฉพาะในวิชาเรขาคณิต กว่าจะเปิดโอกาสให้เด็กได้สังเกตและทดลองบางสิ่งบางอย่าง ก่อนจะได้เรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทฤษฎี ยิ่งกว่านั้น ถ้าหากสอนเรขาคณิตให้เชื่อมโยงกับวิชาฟิสิกส์เบื้องต้นแล้ว ก็จะเป็นการส่งเสริมการเรียนรู้ให้ได้ลึกซึ้งมากขึ้นด้วย

รายงานของศาสตราจารย์เพอร์รี มีผลทำให้สมาคม British Association แห่งอังกฤษ คณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่ง เพื่อได้ศึกษาแนวทางในการปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์เบื้องต้น ปรากฏว่าเมื่อคณะกรรมการดังกล่าวจะเริ่มงาน ก็ได้รับการสนับสนุนและข้อคิดเห็นจากครูในสถาบันต่าง ๆ รวมทั้งหมึก ๒๓ คน โดยครูเหล่านี้ได้ร่วมมือกัน เขียนจดหมายเสนอความวิตกกังวลว่า ซึ่งปรากฏต่อมาว่า หลังจากที่ยกมาฉบับนี้ได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร Nature ฉบับวันที่ ๑๖ มกราคม ค.ศ. ๑๙๐๒ แล้ว มีผลทำให้สมาคมคณิตศาสตร์แห่งอังกฤษ คณะกรรมการอีกชุดหนึ่ง คือ "Teaching Committee"

การแสวงหาอิทธิพลของยูคลิด

คณะกรรมการ Teaching Committee ของสมาคมคณิตศาสตร์มีหน้าที่ที่สำคัญประการหนึ่ง ก็คือการหาทางแสวงหาวิธีการวัดผลของสมาคมต่าง ๆ ที่กำหนดให้ยึดหนังสือเรขาคณิตของยูคลิดเป็นแบบฉบับตายตัว โดยไม่ยอมรับการพิสูจน์อื่นใดที่แตกต่างไปจากของยูคลิด ซึ่งในระยะแรก คณะกรรมการชุดนี้ไม่สามารถทำได้สำเร็จ เช่นเดียวกับที่สมาคมเพื่อปรับปรุงการสอนเรขาคณิตเคยทำไม่สำเร็จมาแล้ว แต่ในปีการศึกษามากลับปรากฏว่าสมาคมวัดผลต่าง ๆ เริ่มเห็นด้วยกับแนวคิดนี้และตกลงยอมรับการพิสูจน์ที่ถูกต้องแบบอื่น ๆ นอกเหนือไปจากแบบของยูคลิดที่ยังคงถือเป็นแบบมาตรฐานอยู่ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงครั้งนี้ก่อให้เกิด

^๔ Ibid., p. 9.

^๕ Ibid., p. 10.

ผลคืออย่างหนึ่งความมาด้วย คือ การเขียนตำราเรขาคณิตตามแนวใหม่ ๆ เพิ่มขึ้นอีกหลายแบบ

✓ รายงานฉบับพิเศษเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์

นอกจากที่กล่าวแล้ว ในระยะนี้ยังมีเหตุการณ์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งคือ การตีพิมพ์เรื่อง การสอนเรขาคณิตและการสอนพีชคณิตที่เกี่ยวกับกราฟ (Teaching of Geometry and Graphic Algebra) เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๐๕^{๙๐} ซึ่งเป็นหนังสือที่มีอิทธิพลมาก ดังปรากฏว่าอีกสามปีต่อมา มีรายงานพิเศษเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ในสหราชอาณาจักรรวมทั้งหมด ๓๕ ฉบับ โดยได้กล่าวถึงเรื่องราวต่าง ๆ ทาง การสอนคณิตศาสตร์อย่างละเอียดทุกด้านและครอบคลุมการสอนคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงระดับอุดมศึกษา ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า ข้อคิดเห็นต่าง ๆ ส่วนมากในรายงานเหล่านั้นมีคุณค่าและยังใช้ได้อยู่เสมอแม้กระทั่งในปัจจุบันนี้

การจัดตั้งสมาคมครูวิทยาศาสตร์

เหตุการณ์ที่สำคัญมีส่วนช่วยส่งเสริมการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์โดยทางอ้อมอย่างหนึ่ง คือ การจัดตั้งสมาคมครูวิทยาศาสตร์^{๙๑} (เดิมเรียกว่า Association of Public School Science Masters ต่อมาได้เปลี่ยนชื่อเป็น Science Masters' Association) ซึ่งได้ทวีขอบข่ายงานและความสำคัญเพิ่มขึ้นเป็นลำดับ สมาคมได้ออกวารสารเล่มหนึ่ง คือ The School Science Review และนอกจากนั้นยังได้ตีพิมพ์จุลสารและหนังสืออีกหลายเล่ม ซึ่งมีอิทธิพลต่อการสอนวิทยาศาสตร์มาก และมีแนวทางอ้อมต่อคณิตศาสตร์ด้วย เพราะได้เน้นถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่มีต่อการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ไว้อย่างเด่นชัด

^{๙๐} Ibid., pp. 10-11.

^{๙๑} Ibid., p. 11.

รายงานที่สำคัญของสมาคมคณิตศาสตร์

ในระยะเวลาดังกล่าวสมาคมคณิตศาสตร์ก็ทวีความสำคัญเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะในปี
 ก.ศ. ๑๙๑๙ ซึ่งทางสมาคมได้จัดพิมพ์รายงานฉบับหนึ่ง เรื่องการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน
 มัธยมและประถมศึกษา (Teaching of Mathematics in Public and Secondary Schools)
 รายงานฉบับนี้มีความสำคัญเป็นพิเศษ เพราะนับเป็นครั้งแรกที่ครูได้เริ่มพิจารณาเกี่ยวกับการสอน
 คณิตศาสตร์ เพื่อให้เป็นสามัญศึกษาสำหรับคนทั่วไป ซึ่งนับว่าเป็นเรื่องที่มีความสำคัญมากเรื่องหนึ่ง
 รายงานฉบับนั้นได้เสนอข้อคิดเห็นเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ไว้หลายประการ ข้อเสนอ
 ที่สำคัญ คือ

๑. วิชาต่าง ๆ ที่จัดสอนนักเรียน ควรมุ่งส่งเสริมให้นักเรียนเป็นพลเมืองที่ดี
 และมีความสามารถในการโลกสมัยปัจจุบันนี้ สำหรับวิชาคณิตศาสตร์นั้น นอกจากจะช่วยให้นักเรียน
 สามารถนำความรู้และความสามารถในวิชาอื่นไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวันแล้ว ยังจะ
 ช่วยให้เข้าใจในปัญหาสำคัญ ๆ ของโลก และวิธีการแก้ปัญหานั้น ซึ่งต้องอาศัยทั้งคณิตศาสตร์
 และวิทยาศาสตร์ประกอบกันด้วย

๒. ในการสอนคณิตศาสตร์ควรพิจารณาถึงทั้งประโยชน์และการนำวิชาไปใช้ให้
 มากพอสมควร

๓. วิชาคณิตศาสตร์ที่จะนำมาสอนนักเรียนในชั้นต้น ๆ ไม่ควรจำกัดแต่วิชา
 เลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต วิชาอื่น ๆ ที่ควรนำมาสอนได้ คือ กริโกณมิติ กลศาสตร์
 และแคลคูลัส เพื่อให้ นักเรียนสามารถศึกษาวิชาเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต ขั้นสูงได้
 รวดเร็วขึ้น

^{๑๒} Ibid., pp. 14-16.

๔. นักเรียนทุกคนควรมีโอกาสได้เรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์บ้างตามความ

เหมาะสม

๕. โรงเรียนควรส่งเสริมและส่งเสริมการสอนเด็กทั้งเด็กที่มีระดับสติปัญญา ปานกลาง และเด็กฉลาด โดยเฉพาะเด็กฉลาดซึ่งสมควรได้รับการเอาใจใส่เป็นพิเศษ

๖. เมื่อนักเรียนตัดสินใจเลือกเรียนคณิตศาสตร์เป็นวิชาเอกแล้ว ควรส่งเสริมให้เลือกศึกษาวิทยาศาสตร์และอักษรศาสตร์บางวิชาประกอบด้วย

๗. แผนกคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ตลอดจนการสอนของครูในทั้งสองแผนกนี้ ควรให้ประสานกันอย่างใกล้ชิดที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

๘. ควรให้ครูคณิตศาสตร์ได้รับการอบรม ในวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ เช่น วิศวกรรม ฟิสิกส์ เคมี การเกษตรและภูมิศาสตร์ เป็นต้น

๙. ในการแต่งตั้งหัวหน้าแผนกคณิตศาสตร์ของโรงเรียน ควรพิจารณาคำนวณ ความรู้ และความถนัดเห็นเป็นประเด็นสำคัญ มิใช่เพียงแต่ทางด้านการปฏิบัติงานหรือ ความมีอรรถประโยชน์ในการปฏิบัติงานเท่านั้น ทั้งนี้เพราะหัวหน้าแผนกคณิตศาสตร์จะต้องสามารถสอนวิชา คณิตศาสตร์ขั้นสูงได้ และจะต้องเป็นผู้ที่มีส่วนในการร่างหลักสูตรของโรงเรียนอย่างสำคัญด้วย

๑๐. โรงเรียนควรลดงานประจำวันของหัวหน้าแผนกคณิตศาสตร์และครูพิเศษที่ สอนคณิตศาสตร์ขั้นสูงของโรงเรียนให้มากที่สุด เพื่อให้บุคคลเหล่านั้นได้มีเวลาอ่านและศึกษา ความเคลื่อนไหวใหม่ ๆ ในวงการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ วิธีนี้เป็นวิธีเดียวเท่านั้นที่จะทำให้ ครูสามารถสอนคณิตศาสตร์ที่ทันสมัยให้แก่ นักเรียนได้

๑๑. ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ให้ยึดหลักว่าการสอนสำคัญกว่าการสอบ ซึ่งหมายความว่าครูไม่ควรทดสอบนักเรียนบ่อยครั้งเกินไป เพราะนอกจากจะเป็นการเสียเวลา และแรงงานของครูแล้ว ยังทำให้นักเรียนมีสภาพจิตใจไม่เป็นปรกติบ่อยครั้งด้วย

๑๒. โรงเรียนมัธยมทุกแห่งควรมีห้องสมุดคณิตศาสตร์ มีหนังสือเกี่ยวกับ คณิตศาสตร์อื่น ๆ นอกจากตำราเรียนตามปกติ ที่มีคุณค่าและมีจำนวนมากพอสมควร เพื่อให้ โอกาสแก่นักเรียนและครู ได้ศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมอยู่เสมอ

๑๓. ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ควรแขวนรูปภาพของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง และควรอ้างอิงชีวิตและผลงานที่สำคัญของแต่ละท่านตามโอกาสอันควรด้วย

นอกจากรายงานที่สำคัญฉบับนี้แล้ว สมาคมคณิตศาสตร์ยังได้เสนอรายงานเกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต กลศาสตร์ เลขคณิต และพีชคณิตอีกเป็นระยะ ๆ ตลอดจนได้จัดพิมพ์หนังสือเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ออกเผยแพร่เป็นประจำด้วย รายงานดังกล่าวของสมาคมคณิตศาสตร์ มีความสำคัญตลอดมาตราบจนทุกวันนี้ เพราะได้กล่าวถึงจุดมุ่งหมายในการสอน หลักการสอน และวิธีการสอนคณิตศาสตร์แบบต่าง ๆ ไว้อย่างละเอียด ซึ่งควรแก่การศึกษาและใช้เป็นแนวทางในการสอนได้เป็นอย่างดี

รายงานเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีก ๒ ฉบับ ที่ควรกล่าวถึงในที่นี้ด้วย คือ

๑. The Spens Report of the Consultative Committee on Secondary Education (พิมพ์ปี ค.ศ. ๑๙๓๘)

๒. The Norwood Report on Curriculum and Examinations in Secondary Schools (พิมพ์ปี ค.ศ. ๑๙๔๑)

The Spens Report

รายงานดังกล่าวมีสาระสำคัญพอสรุปได้ว่า^{๑๓} วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีปัญหามาก วิชาหนึ่งในโรงเรียนมัธยม เพราะเป็นวิชาที่มีจะสอนเน้นไม่ตรงตามจุดประสงค์ที่สำคัญและมักจะละเลยคุณค่าที่แท้จริงของวิชานี้ นอกจากนั้นเนื้อหาที่ไว้อสอนก็ไม่เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน วิธีที่จะแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ได้คือ ครูทุกคนต้องคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาการ วิชาหนึ่ง เช่นเดียวกับวิชาศิลปะ ดนตรี และวิทยาศาสตร์ และแม้ว่าคณิตศาสตร์จะมีลักษณะเป็นนามธรรม

^{๑๓} Ibid., pp. 17 - 18.

แต่ก็มีได้หมายความว่าสอนเกินเกี่ยวกับสอนวิทยาศาสตร์ไม่ได้ เพราะมนุษย์สร้างสรรค์วิชา
คณิตศาสตร์ขึ้น เพื่อให้สนองความต้องการในการกระทำกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การนับสิ่งของ
การกำหนดเวลา การวัดระยะทาง การกำหนดทิศทาง การก่อสร้าง และการเดินเรือ
เป็นต้น ดังนั้นในการสอนจึงควรมุ่งให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความจริงดังกล่าว และควรให้
เข้าใจเรื่องของคณิตศาสตร์มากพอเพื่อตอบปัญหาข้างต้น รวมทั้งปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน
ด้วย ทั้งนี้ได้หมายความว่าต้องแยกสอนคณิตศาสตร์เป็นรายวิชา เช่น เลขคณิต พีชคณิต
และเรขาคณิต แต่ต้องจัดเนื้อหาใหม่เป็นเรื่อง ๆ โดยเลือกเฉพาะเรื่องที่จะสนองความต้อ
งการและแก้ปัญหาที่นักเรียนจะต้องเผชิญต่อไปในชีวิตประจำวันเป็นสำคัญ ซึ่งถ้าเป็นเช่นนั้นแล้วการ
เรียนคณิตศาสตร์ ก็จะเป็นการเรียนที่มีความหมายต่อนักเรียน มิใช่การเรียนสิ่งที่ล้าสมัยแล้ว
เช่นที่ได้เคยรู้สึกแค้นรำกวน

The Norwood Report

สำหรับ The Norwood Report นั้น ได้เสนอข้อคิดเห็นที่มีประโยชน์และควร
 แก่ความสนใจมาก เช่นกล่าวว่า ในสามปีแรกควรกำหนดให้นักเรียนทุกคนเรียนวิชา
 กณิตศาสตร์ แต่อาจเรียนเนื้อหาต่างกันได้ ทั้งนี้เพื่อให้คุณเคยกับคณิตศาสตร์เบื้องต้นและให้มี
 ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่จะนำไปใช้ในวิถีชีวิตประจำวัน เป็นต้น นอกจากนั้นคณะกรรมการ
 ยังได้ให้ข้อเสนอเกี่ยวกับหลักสูตรเสริมในวิชาคณิตศาสตร์ (Additional Mathematics)
 ว่าควรจะมีวิชาต่อไปนี้ด้วยคือ Differential และ Integral Calculusเบื้องต้น
 เรขาคณิตวิเคราะห์ พีชคณิตและตรีโกณมิติขั้นสูงบางส่วน กลศาสตร์ เรขาคณิตบนผิวของ
 ทรงกลม (Spherical Geometry) การดาราศาสตร์และการเดินเรือ (Navigation)

১৫ Ibid. pp. 18 - 19.

ข้อเสนอของรายงานทั้งสองฉบับดังกล่าวข้างต้นนี้ โดยเฉพาะที่เกี่ยวกับการให้รวม
วิชาคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ เข้าด้วยกันก่อให้เกิดการวิพากษ์วิจารณ์มากทั้งในทางที่เห็นด้วย
และไม่เห็นด้วย ในที่สุดจึงได้มีการประชุมระหว่างสมาคมคณิตศาสตร์ สมาคมวัดผล และสมาคม
ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องอีกครั้งหนึ่งเมื่อวันที่ ๒๔ กันยายน ค.ศ. ๑๙๔๓^{๑๕} และในการประชุม
ครั้งนี้ ที่ประชุมได้แต่งตั้งคณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่งให้ร่างหลักสูตรใหม่ โดยมีศาสตราจารย์ -
เจฟเฟอรี (Jeffery) เป็นประธานกรรมการ

The Jeffery Syllabus

หลักสูตรที่คณะกรรมการได้ร่างขึ้น ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่า " The Jeffery
Syllabus " นั้น มีจุดมุ่งหมายที่สำคัญสองประการคือ

๑. ให้นักเรียนที่ไม่ต้องการเลือกเรียนคณิตศาสตร์ต่อไป หลังจากอายุ ๑๖ ปี
แล้ว มีโอกาสเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยความสนใจและพอใจ
๒. ให้นักเรียนที่จะเรียนคณิตศาสตร์ต่อไปหลังจากอายุ ๑๖ ปีแล้ว ได้มี
พื้นฐานที่ดีในวิชานี้

ดังนั้น ตามหลักสูตรที่ร่างขึ้นใหม่ คณะกรรมการจึงได้ตัดเรื่องที่ยากเกินไปใน
วิชาเลขคณิตและพีชคณิตออก ลดการพิสูจน์บางอย่างในวิชาเรขาคณิตให้น้อยลง และรวมวิชา
ตรีโกณมิติและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน ตลอดจนได้เพิ่มเติมแนวคิดเห็นเกี่ยวกับวิชาแคลคูลัสด้วย
ซึ่งการกระทำเช่นนี้ ก่อให้เกิดข้อถกเถียงขึ้นประการหนึ่ง คือ หลักสูตรใหม่นี้เหมาะสมกับเด็ก
เก่งหรือเด็กอ่อน แต่อย่างไรก็ตามผลที่สำคัญอย่างหนึ่งที่เกิดขึ้นตามมาก็คือ ทั้งครูและนักเรียน
ได้ให้ความสนใจต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มากขึ้น และปรากฏต่อมาว่า หลักสูตรนี้ได้
เป็นที่นิยมใช้กันอยู่โดยทั่วไปในประเทศอังกฤษ

๖.๑ ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๖๐ เป็นต้นมา

นับตั้งแต่ปี ค.ศ. ๑๙๖๐ เป็นต้นมา ประเทศอังกฤษได้มีโครงการทดลองที่สำคัญทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา แม้กระทั่งในสถาบันฝึกหัดครู ก็ได้มีการเคลื่อนไหวเกี่ยวกับเรื่องนี้ด้วย เช่น เปิดสอนรายวิชาสั้น ๆ เกี่ยวกับคณิตศาสตร์แผนใหม่ ตามความต้องการของครูเป็นจำนวนมาก และกระทรวงศึกษาธิการเองก็ได้เปิดสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่เพิ่มเติมในโครงการคณิตศาสตร์เคมีเป็นประจำทุกปี ซึ่งปรากฏว่าจะมีผู้ลงทะเบียนเข้าเรียนวิชานี้เกินกว่าปริมาณที่สามารถรับได้เสมอ

ความเคลื่อนไหวที่สำคัญอีกสองเรื่องที่ควรกล่าวถึงคือ ๑๖ การที่สมาคมต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ได้จัดตั้ง The Joint Mathematics Council of The United Kingdom ขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๒ เพื่อร่วมมือกันดำเนินการพัฒนาการศึกษาทางคณิตศาสตร์ให้ได้ผลดียิ่งขึ้น และการที่มูลนิธิแนฟฟิลด์ (Nuffield Foundation) ได้ขยายโครงการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาให้คลุมถึงเด็กตั้งแต่อายุ ๕ ถึง ๑๓ ปี ซึ่งความเคลื่อนไหวทั้งสองประการดังกล่าวนี้เป็นที่เรื่อแนได้ว่า จะเป็นผลดีต่อการศึกษาคณิตศาสตร์ในสหราชอาณาจักรอย่างมาก

สำหรับโครงการทดลอง เพื่อปรับปรุงแก้ไขการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมของสหราชอาณาจักรที่สำคัญควรกล่าวถึงในที่นี้ มี ๔ โครงการ คือ

๑. โครงการ S.M.P.
๒. แผนการของวิทยาลัย St. Dunstan
๓. โครงการทดลอง M.M.E.
๔. โครงการทดลองเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และจิตวิทยา

๑. โครงการ S.M.P.

โครงการ S.M.P. (School Mathematics Project) ตั้งขึ้นเมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๑ ด้วยความร่วมมือของคณะครูจากโรงเรียนมัธยม ๔ แห่ง โดยมีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ ๒ ประการ คือ^{๑๗}

- ๑) ร่างหลักสูตรใหม่สำหรับนักเรียนมัธยมในโรงเรียนประเภท Grammar School ตั้งแต่อายุ ๑๑ ถึง ๑๔ ปี
 - ๒) จัดทำตำราและคู่มือครูให้ครบทุกเล่ม เพื่อใช้ประกอบหลักสูตรใหม่
- คณะกรรมการได้ทดลองใช้ร่างหลักสูตรใหม่ในโรงเรียนมัธยมทั้ง ๔ แห่ง เป็นครั้งแรก ในปีการศึกษา ๑๙๖๒ - ๑๙๖๓ หลังจากนั้นแล้ว ศาสตราจารย์ทเวตส์ (Thwaites) แห่งมหาวิทยาลัยเอดินบะระ ซึ่งเป็นผู้อำนวยการโครงการนี้จึงได้จัดประชุมขึ้นเมื่อเดือนกันยายน ค.ศ. ๑๙๖๓ เพื่อพิจารณาผลการทดลองดังกล่าว

ผลจากการประชุมครั้งนี้ คือที่ประชุมต่างก็เห็นพ้องกันว่า^{๑๘} การทดลองในปีแรก ได้บรรลุผลสำเร็จอย่างถึง และถ้าโครงการนี้ขยายงานต่อไปอีกก็อาจถือเป็นโครงการทดลองที่ใหญ่ที่สุดของประเทศได้ ทั้งนี้เนื่องจากปรากฏว่าโรงเรียนมัธยมอื่น ๆ หลายแห่งได้สนใจใน

^{๑๗} UNESCO., The Teaching of Mathematics at Secondary Level, p. 65, (citing), Director's Report 1961-1962, by The School Mathematics Project.

- * โรงเรียนมัธยมในสหราชอาณาจักรมีอยู่ ๓ ประเภท คือ
๑. grammar school เป็นโรงเรียนสำหรับเด็กที่มีความสามารถในทางสติปัญญาสูง
 ๒. technical school เป็นโรงเรียนสำหรับเด็กที่มีความสามารถในทางสติปัญญาระดับรองลงมา แต่มีความสามารถและความสนใจในทางช่าง
 ๓. modern school เป็นโรงเรียนสำหรับเด็กที่มีความสามารถในทางสติปัญญาต่ำกว่าเด็กในโรงเรียนสองประเภทแรกดังกล่าวมาแล้ว

^{๑๘}

Unesco, loc. cit.

โครงการทดลองนี้และข้อใช้หลักสูตรร่วมด้วยเป็นจำนวนมาก

หลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นสามัญ (Ordinary Level) ซึ่งนักเรียนมัธยมจะต้องสอบในปีที่ ๕ เมื่อมีอายุประมาณ ๑๖ ปี ตามที่คณะกรรมการได้ร่างไว้แล้วนั้นไม่ได้ยกเลิกหัวข้อเก่า ๆ ที่เคยสอนแต่เดิมทั้งหมด เพียงแต่เพิ่มหัวข้อใหม่ ๆ เข้ามาอีกหลายเรื่อง และเน้นการใช้ความคิดอย่างมีเหตุผลกับความแจ่มแจ้งในการใช้ความคิดของนักเรียนเป็นสำคัญ

หัวข้อใหม่ ๆ ที่คณะกรรมการได้เพิ่มเติมเข้ามาที่สำคัญคือ^{๑๙} ความรู้ความเข้าใจและแนวคิดเกี่ยวกับเซต Operation ทางเซตและการเขียน Venn Diagram วิชาเรขาคณิตที่เกี่ยวกับ Euclidean Space ซึ่งอาจกับเรื่อง Reflection, Rotation, Translation และ Enlargement นอกจากนั้นยังได้ศึกษาเกี่ยวกับ Cartesian Coordinates อสมการ ความน่าจะเป็นและสถิติด้วย

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นสูง (Advanced Level) ซึ่งนักเรียนมัธยมที่เรียนต่อจะต้องสอบในปีที่ ๓ เมื่อมีอายุประมาณ ๑๘ ปี ตามที่คณะกรรมการได้ร่างไว้แล้วนั้นได้รวมเอาหัวข้อใหม่ ๆ (ต่อไปนี้ เข้ามาด้วยคือ^{๒๐} การศึกษาโครงสร้างของพีชคณิตแบบใหม่ รวมทั้ง จำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีเซต และเรื่อง Groups อย่างละเอียด นอกจากนั้นยังได้ศึกษาเกี่ยวกับ แวกเตอร์ Analysis และแคลคูลัสเบื้องต้นรวมทั้งการใช้ความรู้จากวิชาแคลคูลัสเพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ วิชาสถิติที่มาจากที่เรียนมาแล้ว ตลอดจนกลศาสตร์และทฤษฎีกระแสไฟฟ้าตรงและไฟฟ้าสลับเบื้องต้นด้วย

๒. แผนการของวิทยาลัยเซนต์ กันสแตน (The St. Dunstan's Scheme)

วิทยาลัยเซนต์ กันสแตน ในเมืองแคทฟอร์ด (Catford) ได้ใช้เวลาปฏิรูป

^{๑๙} O.E.C.D., op cit., p. 363.

^{๒๐} Ibid.

หลักสูตรคณิตศาสตร์ของคนที่ใช้สอนนักเรียนชั้นสามัญเป็นเวลาประมาณ ๘ - ๘ ปี และในที่สุดก็ทำได้สำเร็จ จนเป็นที่รับรองกันทั่วไป เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๔^{๒๑} และมีผลทำให้โรงเรียนอื่น ๆ ปรารถนาจะทำเช่นนั้นบ้าง

การทดลองตามโครงการ S.M.P. และการแผนการของวิทยาลัยเบนต์ คันทันแทน มีข้อแตกต่างที่สำคัญ ๒ ประการ คือ^{๒๒}

๑) โครงการทดลอง S.M.P. ใช้ตำราใหม่หมดทุกเล่ม แก้ววิทยาลัยเบนต์ คันทันแทน ยังคงใช้ตำราเดิมอยู่เพียงแต่มีวิธีการใหม่ที่เหมาะสมขึ้น และมีตำราใหม่เล็ก ๆ ชุบน้ำมันเพิ่มเติม

๒) ในด้านเนื้อหาที่ทดลอง โครงการทดลอง S.M.P. เน้นเรื่อง Reflection Geometry แก้ววิทยาลัยเบนต์ คันทันแทน เน้นเรื่องคุณสมบัติและประโยชน์ของเครื่องคำนวณ (Computers)

๓. โครงการทดลอง M.M.E. (The Midlands Mathematical Experiment)

โครงการทดลองนี้ตั้งขึ้น เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๑ ภายหลังโครงการ S.M.P. ประมาณ ๔ เดือน และได้เริ่มทดลองกับนักเรียนอายุ ๑๑ ปี จากโรงเรียนมัธยม ๘ โรงเรียน (มีทั้งโรงเรียนประเภท Grammar School, Technical School และ Modern School) เป็นครั้งแรกในปีการศึกษา ๑๙๖๒ - ๑๙๖๓^{๒๓}

โครงการทดลอง M.M.E. เน้นวิธีการสอนเป็นสำคัญ^{๒๔} คือมุ่งให้ครูพยายามอธิบายเนื้อหาเดิมตามแนวใหม่ และได้เปลี่ยนแปลงเนื้อหาให้เป็นไปตามแนวของคณิตศาสตร์

^{๒๑} UNESCO., op cit., p. 66.

^{๒๒} Ibid.

^{๒๓} Ibid.

^{๒๔} Ibid., p. 67.

แผนใหม่ด้วย

๔. โครงการทดลองเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และจิตวิทยา (The Psychology and Mathematics Project)

คร.สเคมป์ (Skemp) แห่งมหาวิทยาลัยแมนเชสเตอร์ (Manchester) เป็นผู้ก่อตั้งโครงการนี้ขึ้น โดยมีความเชื่อว่า^{๒๕} "คณิตศาสตร์ที่สอนในโรงเรียนทุกวันนี้จะมีสภาพลึกลับที่เป็นอยู่ได้ก็ต่อเมื่อนำเอาแนวคิดใหม่ ๆ ทางจิตวิทยาเข้ามาใช้เท่า ๆ กับที่นำเอา Concepts ทางคณิตศาสตร์แผนใหม่เข้ามาใช้"

โครงการนี้ได้เริ่มทดลองเป็นครั้งแรกในปีการศึกษา ๑๙๖๒ - ๑๙๖๓ ในโรงเรียน ๓ แห่ง โดยให้หลักสูตรเดิมไปพลางก่อน แต่ใช้วิธีสอนแบบใหม่ตามที่คร.สเคมป์ แก่งตั้ง ในปีต่อมาจึงได้เริ่มร่างหลักสูตรใหม่ขึ้นใช้และมีโรงเรียนอื่น ๆ มาขอร่วมทดลองด้วยอีกเป็นจำนวนมาก^{๒๖}

สรุปความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของประเทศไทย

๑. ประเทศไทย เป็นอีกประเทศหนึ่งที่มีโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ให้เป็นไปตามแนวของคณิตศาสตร์แผนใหม่ ทั้งในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา และในสถาบันฝึกหัดครู

สำหรับการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา นั้น แต่เดิมมุ่งกระทำในโรงเรียนมัธยมประเภท Grammar School เป็นสำคัญ แต่ในภายหลังก็ได้พยายามขยายโครงการให้ครอบคลุมถึงการศึกษามัธยมศึกษาในโรงเรียนมัธยมประเภทอื่นด้วย

^{๒๕} O.E.C.D., op.cit., p. 364, (citing), "The Need for a Schematic Learning Theory" in British Journal of Educational Psychology, Vol. 32, pp. 133 - 142, by R.R. Skemp.

^{๒๖} UNESCO, loc cit.

๒. สิ่งที่น่าสังเกตในการดำเนินงาน เพื่อปรับปรุงการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ ของประเทศอังกฤษก็คือ ความสนใจและความกระตือรือร้นของครูคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องการได้ ได้รับความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์แผนใหม่ และเข้ามามีส่วนร่วมในงานครั้งนี้

๓. ประเทศอังกฤษเริ่มเคลื่อนไหว เพื่อปรับปรุงการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ปลายคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ และได้เริ่มจัดตั้งโครงการทดลองในเรื่องนี้เมื่อประมาณปี ค.ศ. ๑๙๖๐ การดำเนินงานดังกล่าวแม้ว่าจะไม่กว้างขวางมากนัก และมีอุปสรรคบาง ประการ เช่น ระบบการสอบ เป็นต้น แต่ก็อาจกล่าวได้ว่า การรื้อทบทวนด้านคณิตศาสตร์ ในประเทศอังกฤษก้าวหน้าไปจากเดิมและ เป็นไปตามแนวโน้มของคณิตศาสตร์แผนใหม่มาก พอควร

ความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางานกณิศาสตร์ของประเทศไทย

ในสมัยปัจจุบัน ประเทศไทยมี "แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. ๒๕๐๓" ซึ่งพระบาทสมเด็จพระปรมินทรมหาภูมิพลอดุลยเดช พระมหากษัตริย์ไทยองค์ปัจจุบันได้มีพระบรมราชโองการโปรดเกล้าฯ ให้ประกาศใช้ตั้งแต่วันที่ ๒๐ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๐๓ เป็นหลักในการจัดการศึกษา แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. ๒๕๐๓ ดังกล่าว วิวัฒนาการมาจากแผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. ๒๔๗๕ พ.ศ. ๒๔๗๙ และ พ.ศ. ๒๔๙๔ ตามลำดับ

ตามแผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. ๒๕๐๓ ได้กล่าวถึงความมุ่งหมายในการให้การศึกษาวาดังต่อไปนี้^๒

๑. รัฐมีความมุ่งหมายให้พลเมืองทุกคนได้รับการศึกษาตามควรแก่ศักยภาพ เพื่อเป็นพลเมืองดี มีศีลธรรมและวัฒนธรรม มีระเบียบวินัย มีความรับผิดชอบ มีสุขภาพสมบูรณ์ มีจิตใจเป็นประชาธิปไตย มีความรู้ความสามารถที่จะประกอบอาชีพและทำคุณประโยชน์แก่ประเทศชาติ

๒. กลุ่มบุตรกุลธิดาพึงได้รับการศึกษาอยู่ในโรงเรียนจนอายุ ๑๔ ปีบริบูรณ์ เป็นอย่างน้อย

๓. กลุ่มบุตรกุลธิดาพึงชวนชวหาความรู้และประสบการณ์อันจะเป็นประโยชน์แก่งานของตนสืบไปในภายหลัง

๔. ในการจัดการศึกษานั้น ให้จัดการศึกษาเพื่อสนองความต้องการของสังคมและบุคคล โดยให้สอดคล้องกับแผนเศรษฐกิจและแผนการปกครองประเทศ เช่น

^๑ ราชกิจจานุเบกษาฉบับพิเศษ เล่มที่ ๗๗ ตอนที่ ๕๖ วันที่ ๒๐ ตุลาคม พุทธศักราช ๒๕๐๓, หน้า ๑.

^๒ ก. หน้า ๓ - ๔.

ก. จริยศึกษา ให้มีศีลธรรมและวัจนธรรม มีหิริโอตตัปปะ เห็นแก่ประโยชน์ส่วนรวมยิ่งกว่าประโยชน์ส่วนตัว

ข. พลศึกษา ให้มีสุขภาพสมบูรณ์ทั้งทางกายและทางจิต กับทั้งมีน้ำใจเป็นนักกีฬา

ค. พุทธิศึกษา ให้มีความรู้ วิชาการ ปัญญา เพื่อการดำรงชีวิต

ง. ศักดิ์ศึกษา ให้มีวินัยและความขยันหมั่นเพียรในการใช้มีอุปนิสัยทำงานเพื่อเป็นรากฐานของการประกอบสัมมาอาชีพ

เมื่อมีแผนการศึกษาแห่งชาติฉบับใหม่แล้ว กระทรวงศึกษาธิการจึงได้ประกาศใช้หลักสูตรประโยคประถมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย และหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย พุทธศักราช ๒๕๐๓ รวม ๔ ฉบับ เพื่ออนุวัติให้เป็นไปตามแผนการศึกษาแห่งชาตินั้น

ตามหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลาย ได้กล่าวถึงความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

ความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ๓

๑. เพื่อให้รู้จักคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์แก่ชีวิตประจำวันได้

๒. เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการของคณิตศาสตร์กว้างขวางขึ้นกว่าพื้นฐานความรู้เดิม

๓. เพื่อฝึกฝนให้มีทักษะ สมาธิ การสังเกต ความติดตามลำดับเหตุผล ความมั่นใจ ตลอดจนแสดงความรู้สึคนึกคิดนั้นออกเป็นระเบียบ ง่าย สั้น และชัดเจน มีความประณีต ความละเอียดถี่ถ้วน ความแม่นยำ และรวดเร็ว

๓. ศึกษาธิการ, กระทรวง หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ป.๑ - ๒ - ๓) พุทธศักราช ๒๕๐๓, หน้า ๒๔.

๔. เพื่อให้เกยวติดต่อการแก้ปัญหา และเป็นแนวทางอันจะก่อให้เกิดความกิริริเริ่ม และสร้างสรรค์

๕. เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง และวิชาที่ต่องใช้คณิตศาสตร์

๖. เพื่อปลูกฝังทัศนคติและนิสัยในการคิดคำนวณ

ความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

๑. เพื่อให้รู้จักคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปไว้ให้เป็นประโยชน์แก่ ชีวิตประจำวันได้

๒. เพื่อให้เกิดความรุ้ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการของคณิตศาสตร์กว้างขวางขึ้นกว่า พื้นความรู้เดิม เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง และวิชาที่ต่องใช้คณิตศาสตร์

๓. เพื่อฝึกฝนให้ทักษะ สมาธิ การสังเกต และความคิดตามลำดับเหตุผล ความมั่นใจ ตลอดจนแสดงความรู้สึกนึกคิดนั้นออกมาเป็นระเบียบ ง่าย สั้น และชัดเจน มีความประณีต ความละเอียดถี่ถ้วน ความแม่นยำ และรวดเร็ว

๔. เพื่อให้เกยวติดต่อการแก้ปัญหา และเป็นแนวทางอันจะก่อให้เกิดความกิริริเริ่ม และสร้างสรรค์

๕. เพื่อปลูกฝังและส่งเสริมทัศนคติในระเบียบวิธีวิทยาศาสตร์ และการคิดคำนวณ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหา

๖. เพื่อให้เข้าใจและเห็นว่าคณิตศาสตร์สัมพันธ์โดยใกล้ชิดกับวิทยาการอื่น ๆ หลายแขนง จะเห็นได้ว่า โยบายทั่วไปความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ตอนปลาย กลายกับในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แต่ได้เพิ่มเติมความมุ่งหมายสองประการหลัง เข้าไว้ด้วย

หลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายที่กล่าวนี้เริ่มมีผลใช้บังคับตั้งแต่ปีการศึกษา ๒๕๐๔ นับรวมถึงปัจจุบันนี้เป็นเวลานานถึง ๕ ปีแล้ว โดยมีได้มีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม แต่เนื่องจากการจัดหลักสูตร มีหลักที่สำคัญอย่างหนึ่งว่าต้องจัดให้สอดคล้องกับพัฒนาการของผูเรียน และสอดคล้องกับสภาพของสังคมในปัจจุบัน ซึ่งสำหรับสภาพของสังคมในปัจจุบันนี้ เป็นที่ประจักษ์ชัดว่าได้เจริญก้าวหน้าและเปลี่ยนแปลงไปจากสภาพของสังคมในระยะ ๑๐ - ๒๐ ปีก่อนอย่างมาก โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งให้ความสำคัญต่อโลกในสมัยใหม่นี้จนไม่อาจประมาณได้ ทุก ๆ ประเทศจึงจำเป็นต้องหันตัวเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทุกระดับ

สำหรับในประเทศไทย อาจกล่าวได้ว่ามีความเคลื่อนไหวเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทั้งทางคานหลักสูตร การเขียนตำราใหม่ และวิธีการสอน เรนกัน แต่เป็นเพียงส่วนน้อย และยังไม่ส่งผลให้มีการศึกษาทางคณิตศาสตร์ตามแนวใหม่ในโรงเรียนมัธยมโดยทั่วไป

ความเคลื่อนไหวที่สำคัญในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของประเทศไทย

๑. การปรับปรุงหลักสูตรของวิทยาลัยวิชาการศึกษ

วิทยาลัยวิชาการศึกษา อันมีกำเนิดมาจากโรงเรียนฝึกหัดครูชั้นสูง เมื่อวันที่ ๑๔ พฤษภาคม ๒๕๔๖ เป็นสถาบันการศึกษา ซึ่งมีความมุ่งหมายที่จะส่งเสริมวิชาชีพ และวิทยฐานะของครูอาจารย์ ตลอดจนเจ้าหน้าที่บริหารการศึกษา เพื่อพัฒนาการศึกษาของชาติให้ได้ผลทั้งทางคุณภาพและปริมาณ

๕ ขำรง บัวกรี้ ทฤษฎีหลักสูตรภาค ๑, หน้า ๖๗.

๖ "ประวัติวิทยาลัยวิชาการศึกษา" ประสาณมิตรบัณฑิต ๒๕๐๕.

วิทยาลัยวิชาการศึกษาได้ปรับปรุงหลักสูตรในระดับปริญญาตรีทุกสาขาวิชา และทาง
สภาวิทยาลัยวิชาการศึกษาได้อนุมัติหลักสูตรปริญญาตรีที่ปรับปรุงแล้วนั้น เมื่อวันที่ ๒๔ มีนาคม
๒๕๐๕

ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรีของแผนกวิชาคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงและประกาศใช้แล้วนั้น
ได้สะท้อนให้เห็นการจัดการศึกษาทางคณิตศาสตร์ตามแนวของคณิตศาสตร์แผนใหม่ กล่าวคือ
กำหนดให้วิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) ระบบจำนวน (Number
System) และความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต ฟังก์ชัน และ relation เป็นวิชาบังคับสำหรับ
นิสิตทุกคนไม่ว่าในสาขาใด ส่วนผู้ที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์เป็นวิชาเอกหรือโท ซึ่งหมายถึงผู้ที่
จะออกไปเป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาชั้นสูงนั้น นอกจากจะได้เรียนวิธีสอนคณิต-
ศาสตร์แผนใหม่แล้ว ยังจะได้ศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งส่วนมากเป็นคณิตศาสตร์แผนใหม่
ด้วย เช่นความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส, เรขาคณิตวิเคราะห์, เรขาคณิตโปรเจกทิฟ, พีชคณิต
แผนใหม่เบื้องต้น, สถิติ, สมการดิฟเฟอเรนเชียล และทฤษฎีเซต เป็นต้น

๒. การปรับปรุงหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง

ในปีการศึกษา ๒๕๐๓ กรมการฝึกหัดครูได้แต่งตั้งกรรมการขึ้นคณะหนึ่งเพื่อพิจารณา
ปรับปรุงหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงในแขนงวิชาต่าง ๆ และเมื่อกรรมการ
ดังกล่าวได้พิจารณาร่างแก้ไขโครงสร้างหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงเสร็จเรียบร้อยแล้ว
ได้จัดให้มีการประชุมสัมมนาเพื่อพิจารณาร่างแก้ไขฉบับนั้นระหว่างวันที่ ๒๔ พฤศจิกายน
ถึง ๕ ธันวาคม ๒๕๐๓ ณ กรุงเทพมหานคร ซึ่งผลจากการสัมมนาในครั้งนี้ปรากฏว่า หลักสูตร

วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประมวลการสอนรายวิชาต่าง ๆ ของคณะวิทยาศาสตร์และ
คณิตศาสตร์ พ.ศ. ๒๕๐๗ หน้าก้านำ.

๔ คุรยละเอียดของหลักสูตรในภาคผนวก ก.

๕ สุขชาติ รัตนกุล "ความไหวตัวของ การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย"
วารสารคณิตศาสตร์ ๕๔.๓๕๕ - ๔๐๔ กรกฎาคม ๒๕๐๔, (หน้า ๓๕๕).

ประการนี้แม้ว่าวิชาการศึกษาระดับสูงในแขนงวิชาคณิตศาสตร์ได้รับการเปลี่ยนแปลงแก้ไขไปในลักษณะที่สอดคล้องกับคณิตศาสตร์แนวใหม่ เช่นมีการบรรจุหลักเบื้องต้นของวิชาตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์ การกำหนดความหมายของฟังก์ชันโดยอาศัยเซตและความสัมพันธ์ (Relation) และพัฒนาการของระบบการเขียนจำนวนเลขเข้าไว้ในหลักสูตร เป็นต้น

กรมการฝึกหัดครูได้ทดลองใช้หลักสูตรใหม่ในปีการศึกษา ๒๕๐๔ แต่ก่อนจะเริ่มทดลอง กรมการฝึกหัดครูได้แต่งตั้งคณะกรรมการขึ้นคณะหนึ่งให้ทำการอบรมวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ แก่อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์จากวิทยาลัยครูต่าง ๆ เพื่อเพิ่มพูนความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาของวิชาตามหลักสูตรใหม่นั้น ผลของการอบรมปรากฏว่า ผู้เข้ารับการอบรมซึ่งส่วนใหญ่เป็นผู้มีวุฒิทางคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี มีความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์โดยทั่วไปดีขึ้น ทั้งยังเชื่อว่าจะสามารถนำความรู้ที่ได้รับจากการอบรมไปสอนในวิทยาลัยของตนเพื่อช่วยให้นักศึกษาเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์โดยทั่วไปขึ้นด้วย

การปรับปรุงหลักสูตรประการนี้แม้ว่าวิชาการศึกษาระดับสูงของกรมการฝึกหัดครูดังกล่าวนี้ มีผลต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาโดยตรง เพราะนักศึกษาที่เรียนตามหลักสูตรดังกล่าวเพื่อสำเร็จแล้ว จะต้องออกไปสอนในโรงเรียนมัธยม ถ้ากระทรวงศึกษาธิการจะประกาศให้ใช้หลักสูตรในระดับมัธยมศึกษาใหม่ โดยที่ครูผู้สอนยังไม่มีความรู้ความสามารถที่จะสอนตามหลักสูตรใหม่ได้ หลักสูตรใหม่นั้นก็ไร้ผล ฉะนั้นการปรับปรุงหลักสูตรประการนี้แม้ว่า วิชาการศึกษาระดับสูงและการอบรมอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์จากวิทยาลัยครูต่าง ๆ ของ กรมการฝึกหัดครูในครั้งนี้ จึงนับเป็นความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ที่สำคัญมาก อย่างหนึ่งของประเทศไทย

๓. การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา

ในปี พ.ศ. ๒๕๐๘ กระทรวงศึกษาธิการได้แต่งตั้งคณะกรรมการขึ้นคณะหนึ่ง เรียกว่า "คณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์" โดยมีศาสตราจารย์เสนาะ กันภัยเป็นประธานกรรมการ และมีกรรมการอื่นอีกรวม ๑๘ ท่าน เพื่อให้คณะกรรมการดังกล่าว วางแนวการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ร่วมกับกรมวิชาการ ตามข้อเสนอของกรมนี้

คณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้พิจารณาหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอน โดยมีเหตุผลดังต่อไปนี้ คือ ๑๒

๑) เป็นจุดเริ่มต้นที่ดีพอสมควร เพราะนักเรียนเริ่มเรียนพีชคณิตและการพิสูจน์คุณสมบัติในเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑

๒) ปัญหาเรื่องภาระงานในชั้นมัธยมศึกษา จะไม่มากเท่าการอบรมครูในระดับประถมศึกษา เพราะครูสอนในชั้นมัธยมศึกษา ส่วนมากมีวุฒิสสูงกว่าครูในระดับประถมศึกษา และมีจำนวนน้อยกว่า

คณะกรรมการดังกล่าวได้เริ่มประชุมครั้งแรกเมื่อวันที่ ๒๕ มกราคมปีเดียวกัน และมีการประชุมต่อมาเป็นระยะ ๆ โดยคณะกรรมการได้วางแผนงานไว้เป็น ๔ ชั้น คือ

แผนงานชั้นที่ ๑ พิจารณาร่างหลักสูตรใหม่ที่เหมาะสมกับยุคปัจจุบัน

แผนงานชั้นที่ ๒ จัดทำตำราและคู่มือครูประกอบร่างหลักสูตรใหม่

แผนงานชั้นที่ ๓ ทดลองสอนนักเรียนตามร่างหลักสูตรใหม่ เพื่อพิจารณาความเหมาะสมของร่างหลักสูตรนั้น

๑๑ วิชาการ, กรม กระทรวงศึกษาธิการ รายงานการสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษา ๑๘ เมษายน - ๖ พฤษภาคม ๒๕๐๘, หน้า ๓.๑๑ - ๑.

๑๒ ก. หน้า ๑.๑ - ๒.

๑๓ ก. หน้า ๑.๒ - ๒.

แผนงานขั้นที่ ๔ หลังจากการทดลอง หากเห็นว่าร่างหลักสูตรใหม่เหมาะสม
ก็จัดการอบรมครู เพื่อแนะนำวิธีสอนเนื้อหาวิชาในร่างหลักสูตรนั้น แล้วจึงประกาศใช้เป็น
หลักสูตรต่อไป

การดำเนินงานตามแผนงานขั้นที่ ๑ (การร่างหลักสูตรใหม่)

ในการยกร่างหลักสูตรใหม่นี้ คณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์
ได้พิจารณาเฉพาะหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งจะเป็นหลักสูตรสำหรับนักเรียน
มัธยมทั่วไป และหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับนักเรียนมัธยมที่จะเรียน
ต่อชั้นมหาวิทยาลัยในแผนกที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ ส่วนการแยกสายนอกเหนือจากนี้ คณะกรรมการ
จะยังไม่พิจารณาจนกว่าจะได้ความเห็นชอบจากกระทรวงศึกษาธิการ หรือมิฉะนั้นก็ให้เป็น
งานของคณะกรรมการชุดอื่นต่อไป

ก่อนจะลงมือร่างหลักสูตร คณะกรรมการได้ศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์และโครง-
การทดลอง รวมทั้งตำราเกี่ยวกับคณิตศาสตร์แผนใหม่ ในระดับมัธยมศึกษาที่จัดทำในประเทศต่าง ๆ
เช่น โครงการและตำราของโครงการทดลอง S.M.P. และโครงการ M.H.E. ใน
ประเทศอังกฤษ โครงการ MSG และโครงการ UICSM ในสหรัฐอเมริกา เป็นต้น
เมื่อได้ศึกษาอย่างละเอียดแล้ว คณะกรรมการจึงได้จัดตั้งคณะกรรมการขึ้น ๒ ชุด เพื่อยก
ร่างหลักสูตรพีชคณิต (ซึ่งรวมทั้งเลขคณิต และตรีโกณมิติ) และหลักสูตรเรขาคณิต ที่คิดว่า
เหมาะสมกับเด็กไทยในสมัยปัจจุบัน ตามแนวโน้มของคณิตศาสตร์แผนใหม่^{๑๔}

๑๕ ข้อเปรียบเทียบระหว่างร่างหลักสูตรใหม่และหลักสูตร แผนปี ๒๔๘๖ ตามความเห็น
ของคณะกรรมการ

ก. วิชาพีชคณิต (รวมทั้งเลขคณิต และตรีโกณมิติ)

๑) เนื้อหาของหลักสูตรพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเปลี่ยนแปลงไป
ไม่มากนัก กล่าวคือ

^{๑๔} คุุรายละเอียดของหลักสูตรในภาคผนวก ข.

^{๑๕} วิชาการ, กรม กระทรวงศึกษาธิการ ด.ด. หน้า ๑.๒ - ๓ ถึง ๑.๒ - ๔.

(ก) ทักหัวข้อที่ยากและไม่จำเป็นออก เว้นการแก้สมการอย่างยากที่คงจำวิธีต่าง ๆ เป็นต้น

(ข) เพิ่มเคิบบางหัวข้อที่สำคัญ คือ

(๑) วิธีเขียนตัวเลขในฐานต่าง ๆ การเรียนเรื่องนี้จะมีประโยชน์ช่วยให้นักเรียนเข้าใจตัวเลขฐานสิบ และการกำหนดเมื่อใช้ตัวเลขฐานสิบใดก็ขึ้น

(๒) เซต การเรียนเรื่องนี้จะมีประโยชน์ในการเรียนเรื่องสมการในการอธิบายเรื่องฟังก์ชัน และจะเป็นพื้นฐานเพื่อให้เรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงได้ง่ายขึ้น

(๓) อสมการอย่างง่าย การเรียนเรื่องนี้จะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหบางชนิด เช่น ปัญหาใน Linear Programming นอกจากนั้นการที่ให้นักเรียนศึกษาเรื่องสมการและอสมการไปพร้อมกัน จะทำให้นักเรียนสามารถเปรียบเทียบปัญหาและวิธีแก้ปัญหทั้งสองประเภทนั้นด้วย

(ก) เน้นความสำคัญเรื่องกราฟมากกว่าเดิม

(ง) เพิ่มบางหัวข้อซึ่งเคยอยู่ในหลักสูตร ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่ได้พิจารณาแล้วเห็นว่าสมควรอยู่ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

๒) หัวข้อต่าง ๆ ในเลขคณิตโดยรวมไว้อยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทั้งหมด และพยายามจัดเรื่องพวกเดียวกันไว้ด้วยกัน โดยคณะกรรมการให้ความเห็นว่า การที่นำเรื่องเหล่านี้มาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะเห็นว่ามีความจำเป็นในชีวิตประจำวัน นักเรียนซึ่งไม่มีโอกาสเรียนต่อจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ควรมีโอกาสเรียนรู้เรื่องเหล่านี้

๓) เนื้อหาของตรีโกณมิติส่วนมากคงเดิม ส่วนที่แตกต่างจากเดิม ก็ลดระยะเวลาสำหรับเรียนเรื่องเอกลักษณ์ (Identities) ให้น้อยลงกว่าเดิมมาก เพราะคณะกรรมการถือว่า การพิสูจน์เอกลักษณ์เหล่านี้ไม่มีความสำคัญมากนัก หากนักเรียนรู้หลักการแล้วจะสามารถพิสูจน์ได้ ส่วนเรื่องใหม่ที่เพิ่มเติมก็การให้นิยามของฟังก์ชันทางตรีโกณมิติ โดยใช่วงกลมและใช้ความรู้ทางกราฟช่วย แทนที่จะใช้รูปสามเหลี่ยมอย่างเดิมนั้นเดิม ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการหาค่าของมุมใน Quadrants ต่าง ๆ

๔) เนื้อหาที่เพิ่มใหม่ในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย คือเรื่องจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ซึ่งจะทำให้ระบบจำนวนที่เรียนมาสมบูรณ์ และเรื่องแคลคูลัส ซึ่งจะมีประโยชน์มากสำหรับผู้ที่จะศึกษาต่อชั้นมหาวิทยาลัยในแผนกที่องไขคณิตศาสตร์

ข. วิชาเรขาคณิต

เนื้อหาของหลักสูตรเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ส่วนมากคงเดิม แต่ได้ตัดบางเรื่องที่ทำให้ยากและไม่จำเป็นออก และรวบรวมสอนเรขาคณิตแบบของยูคลิด (Euclidean Geometry แบบ Synthetic Method) ไว้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ทั้งหมด เนื่องจากมีเรื่องสำคัญบางเรื่องที่นักเรียนที่จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ควรจะรู้ เช่น เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย เป็นต้น ส่วนในการพิสูจน์บางอย่างอาจใช้วิธีเชิงคณิตวิเคราะห์ ถ้าเห็นว่าทำได้ง่ายขึ้น

สำหรับในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจะเริ่มสอนเรขาคณิตวิเคราะห์ (Coordinate Geometry) ซึ่งจะเป็นสิ่งที่เชื่อมโยงระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิต และวิธีการของวิชานี้ จะช่วยแก้ปัญหาบางเรื่องได้ง่ายขึ้น เช่น ปัญหาเกี่ยวกับโดกัส เป็นต้น

การสัมมนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา

เมื่อคณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้ร่างหลักสูตรใหม่แล้ว กรมวิชาการจึงเห็นสมควรที่จะจัดสัมมนาหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาขึ้น โดยมีวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้ ๑๖

๑. เพื่อทำความเข้าใจในเนื้อหาของร่างหลักสูตรฉบับใหม่ ซึ่งต่อไปนี้ จะเรียกชื่อว่าร่างหลักสูตรฉบับทดลอง

๒. เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับการจัดทำหลักสูตรคณิตศาสตร์ แผนใหม่ เพื่อปรับปรุงรายการเสนอแนะเรื่องให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

๓. เพื่อพิจารณาแนวโน้มของคณิตศาสตร์แผนใหม่

๔. เพื่อแลกเปลี่ยนความกึกก้องในอันที่จะแก้ไขร่างหลักสูตรฉบับทดลอง

๕. เพื่อนำร่างหลักสูตรฉบับทดลองที่แก้ไขแล้วจากการสัมมนา

ไปทำการทดลองใช้ในโรงเรียนบางโรงเรียน

เมื่อได้รับอนุมัติจากกระทรวงศึกษาธิการแล้ว กรมวิชาการโดยความร่วมมือของคณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์ จึงได้จัดการสัมมนาหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาชั้น ๗ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา พญาไท ในระหว่างวันที่ ๑๔ เมษายน ถึงวันที่ ๖ พฤษภาคม พ.ศ. ๒๕๐๘ มีครูสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของโรงเรียนในส่วนกลางและส่วนภูมิภาคเข้าร่วมสัมมนาเป็นจำนวนทั้งสิ้น ๑๓๕ คน^{๑๓}

ผลจากการสัมมนาในครั้งนี้ ที่ประชุมได้ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะไว้หลายประการ ที่สำคัญคือ^{๑๔}

๑) ที่ประชุมมีความเห็นว่า ร่างหลักสูตรฉบับทดลองเป็นร่างหลักสูตรที่กว้างขวาง ทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างหัวข้อต่าง ๆ ดีขึ้น และให้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ลึกแก่เด็ก นอกจากนั้นยังเป็นรากฐานที่ดีสำหรับนักเรียนที่จะต้องใช้คณิตศาสตร์ในการศึกษาต่อไปด้วย จึงเห็นควรให้ประกาศใช้เป็นหลักสูตรต่อไป แต่ในระยะก่อนการประกาศใช้เป็นหลักสูตรนี้ ควรให้โรงเรียนบางโรงเรียนได้ทดลองนำไปสอนก่อน เพื่อจะได้ชุมนุมนำมาปรับปรุงข้อบกพร่องต่าง ๆ ซึ่งเวลานี้อาจมองไม่เห็น และจะได้ใช้เป็นแนวทางในการจัดทำคู่มือครูประกอบการสอนตามร่างหลักสูตรนี้ด้วย

สำหรับการประกาศใช้เป็นหลักสูตรนั้น ที่ประชุมมีความเห็นว่า ควรประกาศใช้เป็นหลักสูตรขนานกับหลักสูตร พ.ศ. ๒๕๐๓ ไปพลางก่อน หากโรงเรียนใดยังไม่พร้อมจะได้อบรมตามหลักสูตร พ.ศ. ๒๕๐๓ ต่อไป แต่กระทำการเช่นนี้จะก่อให้เกิดปัญหาเรื่องการวัดผลในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ความมาอีกปัญหาหนึ่ง ที่ประชุมจึงเสนอแนะว่า หากประกาศใช้

^{๑๓} ก. หน้า ๑.๓ - ๑.

^{๑๔} ก. หน้า ๒.๑ - ๑ ถึง ๒.๕ - ๑.

เป็นหลักสูตรขนานไปกับหลักสูตร พ.ศ. ๒๕๐๓ และ จะคงมีวิชาสองประเภทด้วย

๒) ที่ประชุมได้ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับเนื้อหาของร่างหลักสูตรฉบับทดลอง ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น บางประการ เช่น

(๑) ไม่ควรบังคับให้ทุกคนต้องเรียนเรื่อง Simple Linear Programming Problems.

(๒) ได้เพิ่มการถดถอยที่สองของนิพจน์พีชคณิตด้วยวิธีแยกแฟกเตอร์ และวิธีหารยาว

— ให้เพิ่มเรื่องดอกเบี้ยทบต้นอย่างง่าย

— ควรเพิ่มเรื่องการถดถอยที่สองและกรณีที่สาม

ของ Polynomials โดยใช้วิธีการของ Undetermined Coefficients

(๓) ตัวอย่างและโจทย์ต่าง ๆ ควรให้สอดคล้องกับสถานการณ์

ปัจจุบัน

(๔) โจทย์และตัวอย่างเรื่องผสมผสาน ขอให้เกี่ยวกับเรื่องผสมเหล้าอย่างเคียว ควรผสมอย่างสม่าง และอย่าให้ซับซ้อนเกินความเป็นจริง

(๕) ไปควรพิจารณากราฟของ Polynomial ที่มีดีกรีเกิน ๓

(๖) ในการศึกษาเรื่อง Word Problem in 3-dimensional space ควรใช้โจทย์ง่าย ๆ

๓) นอกจากข้อเสนอแนะในการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวในข้อ ๒ แล้ว ที่ประชุมได้ลงมติรับรองร่างหลักสูตรพีชคณิตและเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นอื่น ๆ ทั้งหมด และที่ประชุมยังได้ลงมติรับรองร่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เฉพาะสายวิทยาศาสตร์โดยปริยายด้วย แต่จะมีการพิจารณาร่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อีกครั้งหนึ่ง หลังจากที่ได้เห็นผลของการทดลองในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นแล้ว

อย่างไรก็ตาม ข้อเสนอต่าง ๆ นี้เมื่อถึงเวลาปฏิบัติก็อาจเปลี่ยนแปลงไปบ้าง แต่ทางกระทรวงศึกษาธิการจะได้รับพิจารณาข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะของที่ประชุม สัมมนาอย่างสนใจ และคงจะปฏิบัติทุกสิ่งที่เป็นไปได้เพื่อให้สอดคล้องกับเจตนารมณ์ที่ได้จัดสัมมนาขึ้น

ผลที่สำคัญจากการจัดสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในครั้งนี้อีกเรื่องหนึ่งก็คือ การที่คณะกรรมการดำเนินการสัมมนาได้มีโอกาสเลือกโรงเรียนที่ประสงค์จะนำหลักสูตรไปทดลองใช้ทั้งหมด ๒๔ โรงเรียนไว้ครั้งหนึ่ง เพราะเห็นว่าหากจะรับไว้ทั้งหมดจะทำให้ไม่สามารถติดตามการทดลองได้ทั่วถึง

โรงเรียนทั้ง ๑๔ โรงเรียนที่คณะกรรมการได้คัดเลือกไว้ มีรายชื่อดังต่อไปนี้ ๑๕

โรงเรียน	จำนวนห้องทดลอง	จำนวนนักเรียนในชั้นทดลอง
โรงเรียนในสังกัดกรมการฝึกหัดครู		
๑. มัธยมสาธิต วศ.ปทุมวัน	๑	๔๐
๒. มัธยมสาธิต วศ.ประสานมิตร	๓	๒๕๐
๓. มัธยมสาธิตวิทยาลัยครูสวนสุนันทา	๒	๙๐
โรงเรียนรัฐบาลส่วนกลาง		
๔. บางกะปิ	๑	๓๕
๕. เบญจมาชลาสัย	๓	๑๐๕
๖. สตรีวัฒนาพาณิชยาราม	๓	๑๐๕
๗. สตรีศรีสุวิทย์	๓	๑๐๕
๘. สายป้อน	๑	๓๕
โรงเรียนราษฎร์ส่วนกลาง		
๙. สตรีประเพณีวิทย	๑	๔๐
๑๐. อัมพรไพศาลอนุสรณ์	๑	๔๐
โรงเรียนรัฐบาลสวนกุหลาบ		
๑๑. นครสวรรค์	๑	๓๕
๑๒. ตรีมิตรยานนท์	๑	๓๕

โรงเรียน	จำนวนห้องทดลอง	จำนวนนักเรียนในชั้นทดลอง
โรงเรียนราษฎรส่วนภูมิภาค		
๑๓. สิริมังคลานุสรณ์	๑	๓๕
๑๔. อนุศาสน์สันวิทยา	๑	๓๐

คณะกรรมการดำเนินการสัมมนาได้จัดให้ครูผู้สอนในโรงเรียนที่จะทำการทดลองดังกล่าว
ข้างตน มีโอกาสพบปะเพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับปัญหาการทดลองและวิธีดำเนินการ
ทดลอง ในวันที่ ๖ พฤษภาคม ๒๕๐๘ ซึ่งเป็นวันสุดท้ายของการสัมมนาในครั้งนี้ด้วย

การดำเนินงานตามแผนงานขั้นที่ ๒ (การจัดทำตำราและคู่มือครูขึ้นใหม่)

หลังจากยกร่างหลักสูตรแล้ว คณะอนุกรรมการทั้งสองชุด ได้เริ่มจัดทำตำรา
ประกอบร่างหลักสูตรฉบับทดลอง โดยคณะอนุกรรมการร่างหลักสูตรพีชคณิตได้เชิญผู้เชี่ยวชาญ
ในวิชานี้อีก ๒ ท่านมาร่วมเขียนตำราพีชคณิตด้วย

การดำเนินงานตามแผนขั้นที่ ๓ (การทดลองสอนนักเรียน)

เนื่องจาก ทางกระทรวงศึกษาธิการไม่อนุมัติในหลักการให้มีการทดลองใช้
หลักสูตรใหม่ตามโครงการที่วางไว้ กรมวิชาการจึงจำเป็นต้องระงับการดำเนินงานดังกล่าว

สำหรับหลักสูตรที่ร่างไว้แล้ว กระทรวงศึกษาธิการแนะนำให้คณะกรรมการพิจารณา
หลักสูตรคณิตศาสตร์ เสนอต่อคณะอนุกรรมการวิชาคณิตศาสตร์ของโครงการโรงเรียนมัธยมแบบ
ประสมรับไปพิจารณาเพื่อดัดแปลงเป็นหลักสูตรของโรงเรียนมัธยมแบบประสมต่อไป

๔. การทดลองสอนคณิตศาสตร์ที่โรงเรียนสาธิต วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร ๒๐

เนื่องจากอาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร มีความเชื่อมั่น
ว่า การศึกษาคณิตศาสตร์แบบใหม่จะให้ผลดีกว่าแบบเดิมมาก และมีความปรารถนาอันแรงกล้า

ที่จะให้มีการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ ตามแนวใหม่ในทุกระดับการศึกษา เพื่อให้เยาวชนของชาติมีความรู้ความึกึ เทียบทันกับความเจริญก้าวหน้าอันไม่มีที่สิ้นสุดของแขนงวิชาต่าง ๆ ในยุคปัจจุบัน แผนคณิตศาสตร์ของวิทยาลัยจึงได้รวมมื่อกับโรงเรียนสาธิตวิทยาลัย-วิชาการศึกษา ประสานมิตร และสถาบันระหว่างวาติสำหรับการถกน้าวเรื่องแก้ก ทำการทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ทั้งในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษา ระดับละหนึ่งชั้น เพื่อจะเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรูของนักเรียนตามแนวใหม่และตามแบบเกิ และเพื่อเป็นการยืนยันผลการทดลองในเรื่องนี้ของประเทศไทยต่าง ๆ ที่ได้เคยทดลองไปแล้วว่า การเรียนการสอนตามแนวใหม่ได้ผลเป็นที่น่าพอใจอย่างยิ่ง

ในปีการศึกษา ๒๕๐๘ คณะกรรมการที่ได้รับการแต่งตั้งให้ดำเนินงานซึ่งมีรวมทั้งหมค ๑๔ ท่าน โดยมี ดร.สุชาติ รัตนกุล เป็นประธานกรรมการ และ นางเต็มศิริ บุณยสิงห์ เป็นประธานกรรมการรวม ได้เริ่มทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ในระดับมัธยมศึกษา เฉพาะชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ เป็นเวลา ๑ ปี โดยได้จัดแบ่งนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างซึ่งมีจำนวนประมาณ ๗๐๐ คน ออกเป็น ๒ กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม แลวเิชขอทดสอบ ๓ ฉบับ วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรูของนักเรียนทั้งสองกลุ่มนั้น

ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองซึ่งเรียนตามแนวใหม่มีผลสัมฤทธิ์ในการทำขอทดสอบตามเนื้อหาแบบเกิมากกว่านักเรียนที่เรียนตามแบบเกิ ซึ่งทั้งนี้าจจะเนื่องมาจากประสิทธิภาพของครูสอน และระยะเวลาของการทดลองที่สั้นเกินไป แต่ถึงกระนั้นก็ไม่ปรากฏว่านักเรียนซึ่งเรียนคณิตศาสตร์แผนใหม่มีความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาฯ ทรโดยทั่วไปด้อยกว่านักเรียนที่เรียนตามแบบเกิ

๕. การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในโรงเรียนมัธยมแบบประสม

ในปี พ.ศ. ๒๕๑๐ กระทรวงศึกษาธิการได้เริ่มโครงการพัฒนาโรงเรียนมัธยมแบบประสม ๓ ปี ซึ่งเมื่อมีโรงเรียนมัธยมแบบใหม่เช่นนี้ ก็จำเป็นต้องร่างหลักสูตรใหม่ขึ้นใช้ควบ

สำหรับหลักสูตรใหม่ที่กำลังใช้ในโรงเรียนมัธยมแบบประสมดังกล่าวนี้ ปรากฏว่า
เป็นร่างหลักสูตรที่ได้ดัดแปลงไปจากร่างหลักสูตรฉบับทดลองที่กล่าวถึงในข้อ ๒ แล้วนั่นเอง ^{๒๑}

ในการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ดังกล่าว คณะกรรมการผู้ดำเนินการได้ผลิตตำราเรียน
ของแต่ละชั้น และได้จัดการอบรมครูเพื่อให้สอนตามหลักสูตรใหม่ได้โดยสะดวก โดยวางแผนการไว้ว่า
เมื่อได้ใช้หลักสูตรครบทั้ง ๓ ชั้นแล้ว จะพยายามผลิตคู่มือครูให้ใช้ประโยชน์ได้จริง ๆ เพื่อเป็น
การช่วยเหลือครูต่อไป

๖. การร่วมมือกับประเทศเพื่อนบ้านในองค์การ SEAMES

องค์การซีเมส (SEAMES - Southeast Asian Ministers of Education
Secretariat) หรือสำนักงานเลขาธิการรัฐมนตรีศึกษาธิการแห่งเอเชียตะวันออกเฉียงใต้
ถือกำเนิดขึ้นมาจากการประชุมรัฐมนตรีศึกษาธิการของเอเชียที่กรุงเทพฯ เมื่อเดือนพฤศจิกายน
พ.ศ. ๒๕๐๘ ^{๒๒} โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะร่วมมือกันในทางการศึกษาระหว่างประเทศสมาชิก *
เป็นสำคัญ องค์การนี้ได้เริ่มดำเนินงานมาตั้งแต่ปี พ.ศ. ๒๕๐๘ และในที่สุดก็ได้ตกลงวาง
โครงการต่าง ๆ เพื่อพัฒนาการศึกษาในภูมิภาคนี้ รวมทั้งหมด ๑๐ โครงการ ก็คือ ^{๒๓}

^{๒๑} Thailand, Ministry of Education, Final Report of a Seames
Sponsored National Seminar on Science and Mathematics Teaching in
Thailand, p. 55.

^{๒๒} ปิ่น มาลากุล, ม.ล., "ปรากฏการณ์ซีเมส" ศูนย์ศึกษา ๔:๒๕๑ - ๒๕๕
ตุลาคม - ธันวาคม ๒๕๑๐ (หน้า ๒๕๒).

* รายชื่อประเทศสมาชิกผู้เริ่มก่อตั้ง มีทั้งหมด ๖ ประเทศ คือ ประเทศไทย ฟิลิปปินส์
มาเลเซีย ลาว เวียดนาม และสิงคโปร์ แต่ในระยะต่อมา อินโดนีเซียได้ขอเข้าร่วมเป็นสมาชิก
ด้วย.

^{๒๓} ก. หน้า ๒๕๕.

- ๑) โครงการพัฒนาการศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์ระดับสูง
- ๒) โครงการศึกษาวิจัยเรื่องเวชศาสตร์เขตร้อน
- ๓) โครงการศึกษาและวิจัยเรื่องเกษตรศาสตร์ระดับสูง
- ๔) โครงการจัดตั้งศูนย์กลางเพื่อรวบรวมเรื่องเกี่ยวกับอุดมศึกษาทั้งหมด
- ๕) โครงการพัฒนาการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์
- ๖) โครงการพัฒนาการสอนวิชาภาษาอังกฤษ
- ๗) โครงการผลิตและจำหน่ายหนังสือ
- ๘) โครงการวิทยุและโทรทัศน์เพื่อการศึกษา
- ๙) โครงการผลิตอุปกรณ์การสอน
- ๑๐) โครงการพัฒนาการวางแผนกำลังคนและวางแผนการศึกษา

สำหรับโครงการพัฒนาการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์นั้น ประเทศสมาชิกได้ตกลงให้จัดตั้งศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาค (The Regional Centre for Education in Science and Mathematics) ขึ้นที่เมืองป็นังในมาเลเซีย โดยมีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ ๒ ประการ คือ

๑) ปรับปรุงการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษาในภูมิภาคนี้ โดยวิธีทางต่าง ๆ ซึ่งได้แก่

- (๑) การจัดอบรมครูประจำการ
- (๒) การเริ่มปรับปรุงแก้ไขหลักสูตร
- (๓) การผลิตวัสดุประกอบการสอน
- (๔) การให้บริการแนะแนวในเรื่องนี้แก่ประเทศสมาชิก

๒) การวิจัยเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

คณะกรรมการของศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาคดังกล่าวได้เริ่มประชุมเป็นครั้งแรกเพื่อวางแผนดำเนินงานในเดือนกรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๑๐ โดยคณะกรรมการ

ได้เสนอว่า ประเทศสมาชิกควรจะต้องให้มีการสัมมนาระดับชาติเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในประเทศของตนขึ้นก่อนวันที่ ๑๐ สิงหาคม ปีเดียวกัน หลังจากนั้นคณะกรรมการของศูนย์จึงจะจัดสัมมนาระหว่างประเทศสมาชิกเพื่อพิจารณาข้อเสนอแนะของแต่ละประเทศที่ได้จากการประชุมสัมมนาระดับชาติดังกล่าว ในวันที่ ๑๓ ถึง ๑๕ กันยายน พ.ศ. ๒๕๑๐

กระทรวงศึกษาธิการของประเทศไทยได้จัดสัมมนาระดับชาติขึ้นตามข้อเสนอของศูนย์การศึกษาวិทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ เมื่อวันที่ ๗ ถึง ๘ สิงหาคม พ.ศ. ๒๕๑๐ เพื่อรวบรวมข้อมูล ข้อเท็จจริง เรื่องราวและข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของประเทศตามแนวทางกว้าง ๆ ที่ศูนย์ได้วางไว้ให้แล้ว

ในการประชุมสัมมนากังกล่าว ที่ประชุมได้ให้ข้อเสนอแนะทั้งต่อกระทรวงศึกษาธิการของประเทศไทยเอง และต่อศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาค

ข้อเสนอที่สำคัญประการหนึ่งซึ่งที่ประชุมได้เสนอให้กระทรวงศึกษาธิการจัดทำก็คือ การจัดตั้งศูนย์การศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย (Thai National Science and Mathematics Education Centre) เพื่อพัฒนาการสอนวิทยาศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในประเทศ และเพื่อให้ทำงานประสานกับศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาค

จุดประสงค์และขอบข่ายงานของศูนย์นี้ให้เป็นเช่นเดียวกับของศูนย์การศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แห่งภูมิภาค แต่จำกัดวงให้แคบกว่า เพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการของประเทศ

หน้าที่ที่สำคัญ ๔ ประการของศูนย์ที่จะจัดตั้งขึ้นดังที่กล่าวนี้คือ

- ๑) การฝึกอบรม
- ๒) การประเมินผลการศึกษา
- ๓) การรวบรวมและเผยแพร่ข่าวสารในเรื่องนี้
- ๔) การวิจัยและการพัฒนาการสอนวิทยาศาสตร์

ปัจจุบันนี้ ประเทศไทยกำลังจะเริ่มดำเนินการตามข้อเสนอดังกล่าว

๗. การจัดตั้งสถาบันแห่งชาติเพื่อพัฒนาและวิจัยการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ^{๒๕}

(Thai National Institute for Research and Development in Science and Mathematics Teaching)

เนื่องจากรัฐบาลไทยได้ตระหนักถึงความสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ และผลที่จะมีต่อกำลังคนทางเทคนิคในการพัฒนาประเทศ จึงได้แต่งตั้งคณะกรรมการขึ้นชุดหนึ่ง ให้พิจารณาจัดตั้งสถาบันแห่งชาติเพื่อพัฒนาและวิจัยการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ขึ้น ทั้งนี้โดยได้รับความร่วมมือจากองค์การ UNESCO

วัตถุประสงค์ของการจัดตั้งสถาบันชาตินี้ คือ

- ๑) เพื่อติดตามแนวโน้มในการพัฒนาและการวิจัยใหม่ ๆ ที่เกี่ยวกับเคมี ฟิสิกส์ ชีววิทยา และคณิตศาสตร์ ให้ทันกับความเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเสมอ
- ๒) เพื่อส่งเสริมให้ครูคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้ตระหนักในความเปลี่ยนแปลงใหม่ ๆ ที่เกิดขึ้นเหล่านี้
- ๓) เพื่อส่งเสริมการวิจัยและการค้นคว้าทดลองแบบใหม่ ๆ และส่งเสริมให้ครูในโรงเรียนมัธยมมีโอกาสรวมในงานเหล่านั้นด้วย
- ๔) รวบรวมและเผยแพร่ความรู้เกี่ยวกับการวิจัยและการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ให้แก่ครูและผู้อยู่วิจัย

สถาบันแห่งชาติจะเริ่มดำเนินงานเป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. ๒๕๑๓ ตามโครงการ ๒ ปี โดยจะร่วมมือกับทางมหาวิทยาลัยอย่างใกล้ชิด

โครงการจัดตั้งสถาบันเพื่อพัฒนาและวิจัยการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ดังกล่าว คาดว่าจะเป็น การปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของประเทศไทยที่สำคัญยิ่ง และจะบรรลุเป้าหมายที่สำคัญได้ ก็การนำเอาคณิตศาสตร์แนวใหม่ทั้งทางทฤษฎีและวิธีการ เข้ามาใช้ ในโรงเรียนมัธยมอย่างจริงจัง

๘. การอบรมครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของกรมวิสามัญศึกษา

กรมวิสามัญศึกษาซึ่งมีหน้าที่รับผิดชอบในการศึกษาระดับมัธยมศึกษาโดยตรง ได้ตระหนักถึงสภาพการศึกษาทางคณิตศาสตร์ของประเทศซึ่งยังล้าหลังอยู่มาก และควรแก่การปรับปรุงให้ทันสมัย หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมวิสามัญศึกษา จึงได้เริ่มจัดการอบรมครูสอนคณิตศาสตร์ที่ส่วนกลางมาตั้งแต่ปี พ.ศ. ๒๕๑๑ และจัดติดต่อกันเป็นประจำทุกปี โดยได้รับความร่วมมือจากศูนย์แลกเปลี่ยนวัฒนธรรมและวิชาการระหว่างตะวันออก - ตะวันตก มหาวิทยาลัยฮาวาย จัดส่งผู้เชี่ยวชาญมาช่วยเป็นวิทยากรในการอบรมทุกครั้ง

โดยปกติระยะเวลาการอบรมจะเริ่มตั้งแต่ปลายเดือนมีนาคม ถึงต้นเดือนเมษายน รวม ๓ สัปดาห์ สำหรับในปีการศึกษา ๒๕๑๓ นี้ก็เช่นกัน แต่เนื่องจากในการอบรมแต่ละครั้งไม่อาจจะจัดได้อย่างกว้างขวางประการหนึ่ง กับอีกประการหนึ่งผู้ที่จะมีสิทธิ์เข้ารับการอบรมจะต้องมีความรู้ภาษาอังกฤษและมีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์พอสมควร ด้วยเหตุนี้หลังจากเสร็จสิ้นการอบรมแล้ว ทางกรมวิสามัญศึกษาจึงได้จัดพิมพ์เนื้อหาที่บันทึกไว้จากการอบรมเผยแพร่ผ่านทางวารสารวิสามัญศึกษาอย่างละเอียด เพื่อให้เกิดประโยชน์แก่บรรดาครูคณิตศาสตร์ที่ไม่มีโอกาสได้เข้ารับการอบรมโดยทั่วถึงกัน ^{๒๖}

นอกจากการเปิดอบรมครูเป็นประจำทุกปีดังกล่าวแล้ว หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมวิสามัญศึกษา ยังได้พยายามจะเปิดการอบรมครูในส่วนกลางเป็นพิเศษตามโอกาสอันควรด้วย ดังปรากฏว่าในปีการศึกษา ๒๕๑๒ เมื่อมีอาสาสมัครอเมริกันมาช่วยงานศึกษานิเทศก์วิชาคณิตศาสตร์ในด้านวิธีสอนและเนื้อหาวิชา จำนวน ๒ คน และทางหน่วยศึกษานิเทศก์เห็นว่าบุคคลทั้งสองนี้มีความรู้และวิธีการที่น่าสนใจ จึงได้ส่งแบบสอบถามไปยังบรรดาครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในส่วนกลาง เพื่อให้

^{๒๖} สดวย โรจนส์โรซ "บันทึกจากการอบรมครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของกรมวิสามัญศึกษา" วารสารวิสามัญศึกษา ๑:๓๕ - ๔๐ พฤษภาคม ๒๕๑๑ (หน้า ๓๕) .

^{๒๗} ดูเพิ่มเติมในภาคผนวก ก.

ครูเหล่านี้ไม่มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็น หรือเพิ่มพูนเนื้อหาวิชาในบางเรื่องใดก็ตามความประสงค์ โดยทางหน่วยศึกษานิเทศก์จะจัดให้พบปะกัน ณ ศูนย์ฝึกอบรมครู หน่วยศึกษานิเทศก์ ภายในบริเวณโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ. ๒๕๑๓ ถึงเดือนมีนาคม ปีเดียวกัน เป็นต้น

๔. การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของกรมวิสามัญศึกษา

กรมวิสามัญศึกษาคำริจะปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ซึ่งประกาศใช้ตามแผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. ๒๕๐๓ ทั้งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อให้สอดคล้องกับแผนการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมของประเทศ แต่งานดังกล่าวนี้เป็นงานที่ใหญ่และมีปัญหามาก ดังนั้นในขั้นแรก กรมวิสามัญศึกษาจึงเริ่มปรับปรุงเฉพาะหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเท่านั้น

ในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นดังกล่าว กรมวิสามัญศึกษาได้เริ่มงานตั้งแต่ปีการศึกษา ๒๕๑๒ เป็นต้นไป โดยทางหน่วยศึกษานิเทศก์ กรมวิสามัญศึกษาได้จัดทำแบบสอบถาม^{๒๔} เกี่ยวกับหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. ๒๕๐๓ วิชาคณิตศาสตร์ แล้วจัดส่งไปยังครูสอนวิชานี้ในโรงเรียนมัธยมวิสามัญศึกษา เฉพาะในเขตจังหวัดพระนคร-ธนบุรี แบบสอบถามดังกล่าวมีคำถามอยู่ ๒ ประเภท คือ

๑) คำถามเกี่ยวกับความมุ่งหมายของหลักสูตรโดยกำหนดให้ ผู้ตอบแบบสอบถามพิจารณาความมุ่งหมายของหลักสูตรที่ละหัวข้อว่า ที่กล่าวไว้นั้นดีแล้ว หรือควรแก้ไข และจะแก้ไขอย่างไร

๒) คำถามเกี่ยวกับรายการสอน โดยกำหนดให้ผู้ตอบแบบสอบถามพิจารณาว่า รายการสอนในแต่ละวิชานั้น ควรจะตัดเรื่องใดออกและควรที่จะเพิ่มเรื่องใด

เมื่อรวบรวมแบบสอบถามกลับคืนมาได้แล้ว กรมวิสามัญศึกษาจะได้นำมาวิเคราะห์ และสรุปผลเพื่อใช้เป็นแนวทางในการดำเนินงานต่อไป

สรุปความเคลื่อนไหวในการศึกษาทางค่านกณิศาตร์ของประเทศไทย

กล่าวได้ว่า ประเทศไทยยังอยู่ในระยะกึก ปรัชษาหรือและเริ่มทดลอง ซึ่งนับเป็น การเริ่มต้นของการดำเนินงานเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางค่านกณิศาตร์ในระดับมัธยมศึกษา แม้ในระดับประถมศึกษาและในสถานฝึกหัดครูโดยทั่วไปก็เช่นกัน แต่ถึงกระนั้นก็อาจกล่าวได้ว่า ในอนาคตอันใกล้ คงมีการเปลี่ยนแปลงบางอย่างที่สำคัญ ถ้าหากทุกฝ่ายที่เกี่ยวข้องต่าง ตระหนักถึงความจำเป็นและพร้อมที่จะมีส่วนร่วมในการ เปลี่ยนแปลงดังกล่าวอย่างจริงจัง

สรุปและขอเสนอแนะเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคานกณิศาสตร์สำหรับประเทศไทย

คณิศาสตร์เป็นวิชาที่มีความเจริญงอกงามและเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ทั้งในคานกณิศาสตร์บริสุทธิ์และคณิศาสตร์ประยุกต์ ซึ่งมีผลทำให้แขนงวิชาต่าง ๆ ทั้งทางคานกณิศาสตร์ธรรมชาติและสังคมศาสตร์ ตลอดจนสภาพการณ์ในสังคมเปลี่ยนแปลงไปด้วย นักการศึกษานักคณิศาสตร์ในนานาประเทศทั่วโลกตระหนักถึงผลกระทบที่จะมีตามมาในคานการเรียนการสอนคณิศาสตร์ จึงต่างคิดและทดลองเพื่อกำหนดทางปรับปรุงการศึกษาทางคณิศาสตร์ของตนในสถาบันการศึกษาทุกระดับ เพื่อให้ได้เหมาะสมกับภาวะความเจริญและเปลี่ยนแปลงดังกล่าว และเพื่อช่วยส่งเสริมให้วิทยาการคานนี้เจริญก้าวหน้าต่อไป

สำหรับประเทศไทย แม้ว่าจะมีคานงนสนใจในเรื่องนี้ ดังจะเห็นได้จากการคานเนินงานเพื่อปรับปรุงการศึกษาทางคานกณิศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา ตลอดจนสถาบันฝึกหัดครู แต่ก็ยังไม่ได้กำหนดแนวนโยบายที่เหมาะสม ซึ่งผู้เขียนเห็นว่าเราจำเป็นต้องรีบกำหนดขึ้น ผู้เขียนจึงขอสรุปความคิดและหลักการคานเนินงานเกี่ยวกับคณิศาสตร์แผนใหม่ ตลอดจนเสนอแนะแนวนโยบายดังกล่าวดังต่อไปนี้

สรุปความคิดและหลักการคานเนินงานเกี่ยวกับคณิศาสตร์แผนใหม่

๑. เนื่องด้วยวิชาคณิศาสตร์เป็นวิชาการแขนงหนึ่งที่มีนัยสำคัญคานขึ้น คณิศาสตร์มีทั้งเนื้อหาและวิธีการศึกษาหาความรู้ คณิศาสตร์มีใจแห่งรวบรวมกฎหรือสูตรเกี่ยวกับปริมาณหรือรูปร่างของวัตถุ

ดังนั้น การจัดการศึกษาทางคานกณิศาสตร์ ทั้งหลักสูตรและวิธีสอน จึงต้องมุ่งสร้างความรู้จักใจความกิกอย่างมีเหตุผล ตลอดจนการสังเกตคานถึงความกิกและการกระทำอย่างมีหลักการและเหตุผลของผู้เรียนเป็นสำคัญ

นอกจากนั้น ในการเรียนคณิตศาสตร์ ควรให้เด็กเรียนรู้ปัญหาที่จะคงศึกษาเช่นเดียวกับนักคณิตศาสตร์ ทั้งนี้ก็หมายความว่าคงจัดให้เด็กเรียนรู้เผชิญกับปัญหาและคิดหาทางแก้ปัญหา นั้น ๆ ในสถานการณ์เดียวกันที่นักคณิตศาสตร์ประสบมา แต่หมายความว่า คงจัดให้เด็กได้มีโอกาสใช้ความคิด ความรู้ และประสบการณ์เดิมทำความเข้าใจกับสิ่งใหม่ ๆ และพยายามหาทางแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นนั้นด้วยตนเอง โดยอาจได้รับการแนะแนวทางอย่างฉลาดจากครูหรือตำราเป็นส่วนประกอบด้วย

๒. เนื่องจากคณิตศาสตร์แผนใหม่มีลักษณะที่สำคัญ ๒ ประการ คือ ความใหม่ ในเนื้อหาวิชาและความใหม่ในวิธีการ ซึ่งหมายรวมทั้งวิธีการแก้ปัญหาและวิธีการอธิบายเนื้อหา

ดังนั้นในการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ทุกระดับ จึงจำเป็นต้องปรับปรุงทั้งทางด้านหลักสูตร แบบเรียน และวิธีสอนตลอดจนการวัดผลการเรียน ซึ่งเป็นกระบวนการที่ต่อเนื่องกับการสอนและมีส่วนประสานสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด ประกอบกันไปด้วย

๓. เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เจริญงอกงามไปโดยไม่มีที่สิ้นสุด

ดังนั้นการศึกษาทางคณิตศาสตร์จึงต้องมุ่งสร้างความสนใจและความต้องการที่จะเรียนรู้ ตลอดจนความรักในการทนกว่าเรื่องราวทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ด้วยตนเองให้เกิดแก่ผู้เรียนเป็นสำคัญ

๔. เนื่องจากในสมัยปัจจุบัน คณิตศาสตร์เจริญก้าวหน้าไปมากทั้งในทางกว้างและทางลึก ทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์

ดังนั้นจึงไม่อาจจะให้ครูเป็นผู้สอนทุก ๆ เรื่องอย่างละเอียดแก่นักเรียนได้ แต่ควรให้ครูสอนเฉพาะเนื้อหา Concept และวิธีการบางอย่างที่เป็นพื้นฐานทั่วไป และที่สำคัญต่อการดำเนินชีวิตในสังคมแก่นักเรียนเท่านั้น ส่วนรายละเอียดปลีกย่อยหรือบางเรื่องที่เกี่ยวข้องกัน ควรส่งเสริมให้เด็กศึกษากันหาเพิ่มเติมเองตามความสนใจและความสามารถ ซึ่งอาจจะทำได้โดยการเข้าร่วมในกิจกรรมของชุมนุมคณิตศาสตร์ หรืออ่านจากหนังสือและวารสารต่าง ๆ เป็นต้น

๕. เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสัมพันธ์กับวิชาการแขนงอื่น ๆ อย่างใกล้ชิด โดยเฉพาะวิชาวิทยาศาสตร์

ดังนั้นในการจัดหลักสูตร แต่งแบบเรียน และในการสอน จึงไม่ควรจะละเลยความจริงข้อนี้ แต่ควรส่งเสริมโดยวิธีการต่าง ๆ เช่น

๑) การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ ควรเป็นผลงานที่เกิดจากความร่วมมือกันบ้างในชั้นระหว่างนักการศึกษา นักคณิตศาสตร์ กรณิศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ วิศวกร นักจิตวิทยา นักวัดผล และนักธุรกิจ เป็นต้น โดยแต่ละฝ่ายจะต้องยึดเป้าหมายในการทำงานร่วมกันเพื่อให้สามารถทำงานประสานกันได้อย่างแท้จริงและมีผลดี

๒) ในการ แต่งแบบเรียนและในการสอนคณิตศาสตร์ ควรใส่ใจตัวอย่างจากวิชาวิทยาศาสตร์ สังคมศึกษา และวิชาอื่น ๆ ประกอบด้วยความเหมาะสม เพื่อแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างวิชาการแขนงต่าง ๆ และเพื่อช่วยให้สามารถตีความหมายของคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นนามธรรม ออกมาเป็นรูปธรรมที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจได้มากขึ้น

๖. ครูเป็นผู้ที่มีความสำคัญที่สุดในกระบวนการเรียนคณิตศาสตร์ ถ้าครูไม่พร้อมหรือไม่มีความสามารถที่จะสอนบทหลักสูตรใหม่ได้ หลักสูตรนั้นก็ไร้ผล แม้ในเวลาเดียวกันก็ไม่ได้หมายความว่าครูถูกบังคับให้ต้องดำเนินตามหลักสูตรอย่างเคร่งครัด หลักสูตรเป็นแค่เพียงแนวทางกว้าง ๆ ที่จะช่วยนำครูให้สามารถปฏิบัติงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ และด้วยความระมัดระวังมากขึ้น โดยหลักแล้ว ครูยังมีเสรีภาพที่จะเสริม ถัดถอน หรือเปลี่ยนแปลงเนื้อหา สัมผัสและเหมาะสมยิ่งขึ้นได้ตามควรแก่กรณีด้วย

๗. จากการทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ * ปรากฏผลสรุปที่สำคัญประการหนึ่งคือ เด็กนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาที่มีความสามารถที่จะเรียนรู้เนื้อหาและ Concept บางอย่างซึ่งแต่เดิมเป็นหลักสูตรในระดับประถมศึกษาได้

ดังนั้น บุคคลทุกฝ่ายที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์จึงควรปรับปรุงหลักสูตร เป็นการถาวร เพื่อพัฒนาความสามารถของผู้เรียน อันเท่าเทียมกันเป็นการช่วยพัฒนาประเทศให้ก้าวหน้า

* สรุปผลการทดลองของกองการศึกษา

ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีคณะกรรมการปรับปรุงการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา เพื่อให้รับผิดชอบงานนี้โดยตรง คณะกรรมการดังกล่าวจะต้องประกอบด้วยนักคณิตศาสตร์ อาจารย์คณิตศาสตร์ ครูคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ อาจารย์วิทยาศาสตร์

ครูวิทยาศาสตร์ ผู้บริหารการศึกษา นักการศึกษา นักจิตวิทยา นักวัดผล นักธุรกิจ ผู้แทนจากสมาคมทางวิชาการ เช่น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ผู้แทนจากกระทรวงศึกษาธิการ และผู้แทนจากกระทรวงอื่น ๆ เช่น กระทรวงพัฒนาการแห่งชาติ กระทรวงอุตสาหกรรม กระทรวงเศรษฐกิจ และกระทรวงเกษตร เป็นต้น โดยให้หน้าที่ที่สำคัญ ๑๐ ประการ คือ

๑) ประสานงานกับคณะกรรมการปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับอื่น ๆ เพื่อวางแผนการดำเนินงานปรับปรุงการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ทั้งในระยะสั้นและระยะยาวให้เหมาะสม

๒) ดำเนินงานภาพ (status) ของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาและปัญหาที่เกี่ยวของ ตลอดทั่วประเทศ

๓) พิจารณาร่างหลักสูตรใหม่ที่ดีกว่าเหมาะสมกับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตามแนวโน้มของคณิตศาสตร์แผนใหม่

๔) จัดทำตำราและคู่มือประกอบร่างหลักสูตรใหม่

๕) ทดลองใช้ร่างหลักสูตร ตำรา และคู่มือครู เพื่อประเมินผลและปรับปรุงโดยในระยะเวลาดทดลองให้นานมากพอที่จะประเมินได้ใกล้เคียงกับสภาพที่เป็นจริง

๖) ปรับปรุงร่างหลักสูตร ตำรา และคู่มือครูโดยอาศัยข้อมูลจากการทดลอง และถ้าจำเป็นก็ควรทดลองใช้ร่างหลักสูตร ตำรา และคู่มือครูเหล่านั้นซ้ำอีก

๗) ร่วมมือกับสถาบันฝึกหัดครูและสมาคมทางวิชาการ จัดอบรมครูประจำการเพื่อให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม และแนะนำวิธีสอนเนื้อหาวิชาตามร่างหลักสูตร นอกจากนั้นยังควรมีส่วนร่วมในการปรับปรุงการฝึกหัดครูคณิตศาสตร์ที่จะออกไปสอนในชั้นมัธยมศึกษาด้วย

๘) เมื่อครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่พร้อมที่จะสอนตามหลักสูตรใหม่แล้ว ก็ให้เสนอกระทรวงศึกษาธิการประกาศใช้ร่างหลักสูตรฉบับที่ปรับปรุงแล้วเป็นหลักสูตรต่อไป

๙) ให้ความร่วมมือกับคณะกรรมการซึ่งได้รับการแต่งตั้งจากกระทรวงศึกษาธิการให้ประเมินผลการใช้หลักสูตรใหม่ หลังจากที่ใช้หลักสูตรนั้นแล้วเป็นระยะเวลาประมาณ ๕ - ๑๐ ปี

๑๐) แผนแพร่ความรู้และหลักการ เกี่ยวกับการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์

ขย.เสมอ

ข. เนื่องจากโรงเรียนเป็นสถาบันหน่วยหนึ่งของสังคม และสภาพของสังคม ย่อมเปลี่ยนแปลงไปเสมอ ดังนั้นงานการปรับปรุงหลักสูตรจึงเป็นงานที่ไม่จบสิ้น กล่าวคือ เมื่อใช้หลักสูตรใหม่ไปเป็นระยะเวลาหนึ่งแล้ว ก็จำเป็นต้องตั้งคณะกรรมการเพื่อปรับปรุง ใหม่อีก โดยอาศัยข้อมูลจากผลของการใช้หลักสูตรใหม่ จากการเปลี่ยนแปลงและความก้าวหน้า ของวิชาคณิตศาสตร์เองและวิทยาการด้านอื่น ๆ และจากการเปลี่ยนแปลงในนโยบายการจัดการ ศึกษาของชาติโดยส่วนรวม

ก. การระดมการึกษาในปัจจุบันที่แบ่งออกเป็นประโยชน์มัธยมศึกษาตอนต้น และประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย และแต่ละประโยชน์มีทั้งสายสามัญและสายอาชีพนั้น ควรมี นโยบายในการจัดหลักสูตรดังนี้

๑) ระดับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งต้องเกี่ยวข้องกับผู้อยู่เรียน เป็นจำนวนมากนั้น ควรจัดหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อมุ่งให้ทุกคนสามารถที่จะเรียนรู้ได้ และ ควรให้เรียนแต่ส่วนที่จะเป็นพื้นฐานในการทำงานและการดำเนินชีวิตในสังคมปัจจุบันเป็นส่วนใหญ่

๒) ระดับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญแผนกอักษรศาสตร์ ควรจัดหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อมุ่งให้ผู้อยู่เรียนมีความรู้และทักษะในวิธีการต่าง ๆ ทาง คณิตศาสตร์ ตลอดจนที่ได้เรียนมาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

๓) ระดับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญแผนกวิทยาศาสตร์ ควรจัดหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อมุ่งให้ผู้อยู่เรียนมีความรู้และทักษะในวิธีการต่าง ๆ ที่จำเป็น ในวิชาคณิตศาสตร์สำหรับศึกษาต่อในชั้นอุดมศึกษาได้

๔) ระดับประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลายสายอาชีพ ควรจัดหลักสูตร วิชาคณิตศาสตร์ เพื่อมุ่งให้ผู้อยู่เรียนสามารถนำความรู้และทักษะในวิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ไปใช้ในอาชีพนั้น ๆ ได้

ง. สำหรับหลักสูตรของโรงเรียนมัธยมแบบประสม ควรจัดให้มีวิชาเลือก ทางคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวางแก่ตนเอง ทั้งความต้องการส่วนบุคคลและความต้องการของประเภท

โดยแต่ละวิชาจะต้องกำหนดความมุ่งหมายและเนื้อหาสาระเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และอาจารย์ที่ปรึกษาของนักเรียนจะต้องมีความรู้และความเข้าใจในเรื่องของการศึกษาทางคณิตศาสตร์มากพอที่จะให้คำแนะนำอย่างฉลาดแก่นักเรียนได้

๕. ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับกรรณิการศาสตร์

ก. กรรณิการศาสตร์ที่จะสอนในระดับมัธยมศึกษา ควรเป็นกรรณิการเฉพาะวิชาที่ได้รับการยอมรับเพื่อเป็นกรรณิการศาสตร์ โดยที่กรรณิการศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นควรจะต้องได้รับการยอมรับในวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไป และกรรณิการศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายควรได้รับการยอมรับเน้นหนักในเนื้อหาวิชา

ข. กรรณิการศาสตร์จะต้องสามารถอ่าน ฟัง พูด เขียน และอธิบายเรื่องคณิตศาสตร์ได้ด้วยความสนใจและพอใจ (คือเป็นคนที่ Mathematical Literacy นั้นเอง)

ค. กรรณิการศาสตร์จะต้องรู้อะไรบ้าง พัฒนาการ และปรัชญา ของคณิตศาสตร์บ้างตามสมควร เพื่อจะได้ใช้เป็นพื้นฐานหรือหลักในการปฏิบัติงานของตน

เพื่อให้บรรลุผลดังกล่าว กระทรวงศึกษาธิการ สถาบันฝึกหัดครู และผู้บริหารการศึกษา จึงควรส่งเสริมโดยวิธีการต่าง ๆ และกรรณิการศาสตร์ก็จะต้องปรับปรุงตัวเองประกอบด้วย กล่าวคือ

ก. สถาบันฝึกหัดครูจะต้องปรับปรุงหลักสูตร เพื่อเตรียมกรรณิการศาสตร์ให้มีความรู้ความสามารถที่จะสอนตามหลักสูตรใหม่ได้อย่างแท้จริง เช่น ควรให้ผู้ที่จะเป็นกรรณิการศาสตร์ในอนาคต ศึกษาเกี่ยวกับประวัติและพัฒนาการของคณิตศาสตร์แผนใหม่ เป็นต้น

ข. อาจารย์ในสถาบันฝึกหัดครูควรใช้วิธีสอนที่ช่วยส่งเสริมพัฒนาการและความสามารถของนักเรียนเพื่อให้เป็นตัวอย่างที่ดี เพราะตามที่ปรากฏอยู่โดยทั่วไปนั้น นิสิตและนักศึกษาเมื่อเรียนสำเร็จและออกไปทำงานแล้ว มักจะสอนนักเรียนเหมือนกับที่ตนเองเคยถูกสอนมา ไม่ได้สอนตามวิธีการสอนที่เรียนมา

ค. กรรณิการศาสตร์ที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ควรได้รับการช่วยเหลือและส่งเสริมจากบุคคลและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องในเรื่องต่าง ๆ เช่น

๑) การได้รับมอบหมายให้สอนตามสาขาวิชาที่ได้เรียนมา

๒) ประมวลการสอนและคู่มือครู ควรสามารถช่วยครูได้อย่างแท้จริง ซึ่งหมายความว่า ในประมวลการสอนหรือคู่มือครู จะต้องกล่าวถึงวิธีสอนที่ควรใช้ในแต่ละตอน เรื่องที่ควรเน้น เรื่องที่ยังไม่ควรเน้น รายชื่อหนังสือที่ครูควรศึกษาเพิ่มเติม การใช้อุปกรณ์ และเฉลยคำตอบโจทย์ทั้งหมดที่มีอยู่ในแบบเรียน เป็นต้น

๓) การได้รับความช่วยเหลือจากหัวหน้าแผนกวิชาคณิตศาสตร์และศึกษานิเทศน์เกี่ยวกับการสอน การศึกษาคนควา ตลอดจนการทำการวิจัยในเรื่องนี้

๔) การได้รับความร่วมมือจากบรรณารักษ์ในการจัดซื้อหนังสือที่จำเป็น ต้องใช้ในการให้การศึกษแก่นักเรียน และในเรื่องอื่น ๆ

๕) การมีโอกาสดำเนินการเป็นสมาชิกของสมาคมทางวิชาการ เช่น สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย

๖) การมีโอกาสดำเนินการอบรมหรือศึกษาต่อ เพื่อให้เรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม และมีความสามารถในการสอนมากขึ้น

ง. คุรุคณิตศาสตร์จะต้องมีใจรักในวิชาคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงความสำคัญของวิชา - และมีความกระตือรือร้นที่จะหาความรู้เพิ่มเติมอยู่เสมอทั้งในกาน เนื้อหาและวิธีสอน เพื่อให้สามารถสอนคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้นอยู่เสมอ โดยยึดหลักที่สำคัญประการหนึ่งคือ "การพัฒนาการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับเป็นการช่วยพัฒนาประเทศไทยทางหนึ่ง"

๖. ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับแบบเรียนและหนังสืออ่านประกอบวิชาคณิตศาสตร์

ก. โดยที่ถือว่าแบบเรียนและหนังสืออ่านประกอบวิชาคณิตศาสตร์ เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญที่สุดในการสอน ดังนั้น ประเทศไทยจำเป็นต้องปรับปรุงแบบเรียนและหนังสืออ่านประกอบวิชาคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับหลักสูตรและแนวการสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่

ข. ควรมีคณะกรรมการควบคุมคุณภาพของแบบเรียนและหนังสืออ่านประกอบวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งนี้ เพื่อให้แบบเรียนและหนังสือดังกล่าวถูกต้องตามหลักวิชาคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง

ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

๑. ควรสำรวจจุดและปัญหาที่เกิดขึ้นจากการใช้หลักสูตรของสถาบันฝึกหัดครูทุกแห่ง เช่น โรงเรียนฝึกหัดครู วิทยาลัยครู วิทยาลัยวิชาการศึกษา และมหาวิทยาลัยที่ทำการผลิตครู เพื่อให้ทราบว่าการที่รับจากสถาบันฝึกหัดครูแต่ละประเภทมีความรู้ความสามารถในการสอน—

คณิตศาสตร์แผนใหม่มาจนอย่เพียงใด

๒. ควรสำรวจจุดอ่อนของการยอมรับคณิตศาสตร์ของกรวมวิสามัญศึกษาเพื่อให้ทราบว่าครูเหล่านั้นมีความรู้ความสามารถในการสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่มาจนอย่เพียงใด

๓. การทำการศึกษากันว่าเกี่ยวกับพัฒนาการของการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาโดยรีบด่วน เพื่อที่จะได้ดำเนินงานให้ประสานกัน.

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- เกษชาติ วงศ์โกมดเชษฐ์ "การพัฒนากำลังคน" ใน ประมวลบทความการวางแผนการศึกษา และการพัฒนากำลังคน สำนักงานวางแผนการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, ๒๕๐๗, ๑๗๐ หน้า.
- ชำระ บัณฑิต หนังสือหลักสูตรภาค ๑ หน้า ๙๕.
- ✓ ประเทิน มหาจันทร์ โฉมหน้าของคณิตศาสตร์แผนใหม่ ๘๘ หน้า.
- ประวดีวิทยาดัชวิทยการศึกษ ประสานมิตรบัณฑิต ๒๕๐๕.
- ปิ่น มาลากุล, ม.ล. "ปาฐกถาเรื่อง ซีเมส" ศูนย์ศึกษา ๔:๒๕๑ - ๒๕๕
- ตุลากรม - ชันวากม ๒๕๑๐.
- พนัส หันนาคินทร์ วิธีสอนคณิตศาสตร์ โรงพิมพ์จุฬารสภา ๒๕๐๔, ๑๕๗ หน้า.
- พิทักษ์ รักพลเดช วิทยานิพนธ์เรื่องนโยบายการศึกษาฝ่ายวิทยาศาสตร์ ๒๕๐๗, ๗๑ หน้า.
- พุทธชาด พุฒสวัสดิ์ "ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนตรรกศาสตร์สัญญา อักษรของนิสิตประสานมิตร ปทุมวัน และบางแสน ปริญญาโท วิทยาดัชวิทยการศึกษ ประสานมิตร ๒๕๐๕, ๑๒๓ หน้า.
- ราชกิจจานุเบกษาฉบับพิเศษ เล่มที่ ๗๗ ตอนที่ ๕๖ วันที่ ๒๐ ตุลาคม พุทธศักราช ๒๕๐๓.
- ✓ รายงานผลการทดลองการสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่ ในชั้น ม.ศ. ๑ ของวิทยาดัชวิทยการศึกษ วิชาการ, กรม กระทรวงศึกษาธิการ รายงานการสัมมนาการคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ๑๔ เมษายน ถึง ๖ พฤษภาคม ๒๕๐๕ แผนกการพิมพ์วิทยาคัยกรสวนสุนันทา ๒๕๐๕ (๓,๑๓ - ๗ หน้า).
- ✓ วิทยาดัชวิทยการศึกษ ประมวลการสอนรายวิชาต่าง ๆ ของคณะวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ พ.ศ. ๒๕๐๗, หนาคำนว.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง หลักสูตรระเบียบมัธยมศึกษาตอนต้น (ม.ศ. ๑-๒-๓) พุทธศักราช ๒๕๐๓ โรงพิมพ์จุฬารสภา ๒๕๑๑, ๓๕ หน้า.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง หลักสูตรระเบียบมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.ศ. ๔-๕-๖) พุทธศักราช ๒๕๐๓ โรงพิมพ์จุฬารสภา ๒๕๑๑, ๕๒ หน้า.
- สลาย โรจนสโรช "บันทึกจากการอบรมการคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของกรมวิสามัญศึกษา" วารสารวิสามัญศึกษา ๑: ๓๕ - ๔๐ พฤษภาคม ๒๕๑๑.

สุชาติ รัตนกุล คณิตศาสตร์แผนปัจจุบัน โรงพิมพ์การศาสนา ๒๕๐๗, ๑๐๒ หน้า.

_____ "ความไหวตัวของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย" วารสารคณิตศาสตร์
๕๘ ๓๕๕ - ๔๐๔ กรกฎาคม ๒๕๐๔.

สุภา สุจิตพงษ์ "ทำไมจึงสอน Modern Mathematics" วิทยากร ๒๔.๑๔ - ๓๕ กันยายน ๒๕๑๒.

Adler, Irving, The New Mathematics, J. Day Co., New York, 1958, 187 pp.

Allendoerfer, Carl Barnett, and Oakley, C.O., Principles of Mathematics,
McGraw-Hill Book Company, New York, 1955, 448 pp.

Beberman, Max, An Emerging Program of Secondary School Mathematics, Harvard
University Press, Cambridge, 1962, 44 pp.

Bell, Eric Temple, The Development of Mathematics, McGraw-Hill Book Company,
Inc., New York, 1945, 637 pp.

_____, _____,
Mathematics : Queen and Servant of Science, McGraw-Hill Book Company, Inc.,
New York, 1951, 437 pp.

Bonola, Roberto, Non-Euclidean Geometry, Pover Publications, Inc. New York,
1955, 268 pp.

Boyer, Carl B., The History of the Calculus and Its Conceptual Development,
Dover Publications, Inc., New York, 1959, 346 pp.

Brown, Kenneth E, and Abell, Theodore L., Analysis of Research in The Teaching
of Mathematics, 1961 - 1962, Bulletin no. 28, United States Department
of Health, Education and Welfare, Office of Education, Washington,
D.C., 1965, 99 pp.

Brueckner, Leo John; Grossnickle, Foster E., and Reckzeh, John, Developing
Mathematical Understandings in the Upper Grades, The John C. Winston
Company, Philadelphia, 1957, 567 pp.

✓ Butler, Charles H., and Wren, F. Lynwood, The Teaching of Secondary
Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960, 624 pp.

- Cajori, Florian, A History of Mathematics, The Macmillan Company, New York, 1958, 516 pp.
- Carnap, Rudolf, Foundations of Logic and Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1963, 71 pp.
- Cogan, Edward J., Foundations of Analysis, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 221 pp.
- The College of Education, School Catalog, Dhana Publishing Co., Ltd., 1962, 136 pp.
- Commission on Mathematics, Report of, Appendices, College Entrance Examination Board, New York, 1959, 231 pp.
- Program for College Preparatory Mathematics, College Entrance Examination Board, New York, 1959, 63 pp.
- Crescimbeni, Joseph, Teaching the New Mathematics, Parker, West Nyack, 1966, 205 pp.
- Devault, Marion Vere, Improving Mathematics Programs: Trends and Issues, Merrill Columbus, 1961, 552 pp.
- Emerging Practices in Mathematics Education, Twenty-second Yearbook, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 434 pp.
- England, Ministry of Education, Teaching Mathematics in Secondary Schools, Her Majesty's Stationery Office, London, 1961, 154 pp.
- Euclides, The Elements of Euclid, Translated by Sir Thomas L. Heath, Dover Publications, Inc., New York, 1956, V.1.
- Eves, Howard, An Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964, 439 pp.

_____, _____, and Newsom, Carroll V., An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961, 363 pp.

Exner, Robert M., and Rosshopf, Myron F., Logic in Elementary Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959, 274 pp.

Fehr, Howard F., editor, The Learning of Mathematics: Its Theory and Practice, Twenty-first Yearbook, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1953, 355 pp.

_____, _____, Mathematics to-day: A Guide for Teachers, Organization for Economic Cooperation and Development Publications, Paris, 1964, 420 pp.

_____, _____, Secondary Mathematics: A Functional Approach for Teachers, D.C. Heath and Company, Boston, 1951, 131 pp.

_____, _____, Teaching High-School Mathematics, Department of Classroom Teachers, American Educational Research Association of the National Education Association, Washington, D.C., 1955, 33 pp.

✓ Fletcher, T.J., Some Lessons in Mathematics, A Handbook on the Teaching of Modern Mathematics, University of Cambridge Press, 1964, 367 pp.

✓ Freund, John E., A Modern Introduction to Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1956, 543 pp.

Givv, E. Glenadine, and others, "Mathematics" in Encyclopedia of Educational Research, pp. 796-807, edited by Chester Harris, 3rd edition, the Macmillan Company, New York, 1960, 1564 pp.

- The Growth of Mathematical Ideas: Grade K-12, Twenty-Fourth Yearbook, NCTM, Washington, D.C., 1958, 507 pp.
- Hart, Alice G., and Sanders, Walter J., Modern Mathematics in the Secondary Schools, University of Illinois, Urbana, 1964, 3V.
- Heath, Sir Thomas Little, A History of Greek Mathematics, The Clarendon Press, Oxford, 1921, V.1. and V.2.
- Henderson, K.B., "Research on Teaching Secondary School Mathematics" in Handbook of Research on Teaching, pp. 1007-1030, edited by N.L. Gage, Rand McNally and Company, Chicago, 1967, 1218 pp.
- Insights into Modern Mathematics, Twenty-Third Yearbook, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1958, 440 pp.
- Johnson, Ronovan A., and Rahtz, Robert, The New Mathematics in Our Schools, The Macmillan Company, New York, 1966, 192 pp.
- Kemeny, John G., Random Essays on Mathematics, Education and Computers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 163 pp.
- Klein, Felix, Elementary Mathematics from An Advanced Standpoint, Translated by E.R. Hedrick and C.A. Noble, Dover Publications, New York, 1939, 214 pp.
- Kovach, Ladis D., Introduction to Modern Elementary Mathematics, Holden-Day, San Francisco, 1966, 256 pp.
- Kramer, Edra E., The Main Stream of Mathematics, Oxford University Press, New York, 1963, 321 pp.
- Land, Frank, The Language of Mathematics, John Murray, London, 1960, 264 pp.
- Lankford, Francis Greenfield, Jr., and Clark, John R., Basic Ideas of Mathematics, Yonkers-Hudson, World Book Co., New York, 1953, 504 pp.

- May, Kenneth Ownsworth, Elements of Modern Mathematics, Addison Wesley, Cambridge, 1959, 607 pp.
- Meserve, Bruce E., and Sobel, Mass A., Mathematics for Secondary School Teachers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 367 pp.
- 7 Mitchell, Benjamin Evans, and Cohen, Haskell, A New Look at Elementary Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, 354 pp.
- National Association of Secondary School Principals, New Developments in Secondary School Mathematics, Bulletin of the National Association of Secondary School Principals, no.247, 1959, 282 pp.
- ✓ Newman, James Roy, The World of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1956, V.1., V.4.
- O'Hara, C.W., S.J. and D.R. Ward, S.J., An Introduction to Projective Geometry, Oxford University Press, London, 1949, 298 pp.
- Organization for Economic Co-operation and Development, New Thinking in School Mathematics, Organization for Economic Co-operation and Development Publications, Paris, 1961, 246 pp.
- Synopses for Modern Secondary School Mathematics, Organization for Economic Co-operation and Development Publications, Paris, 1961, 310 pp.
- Rappaport, David, Understanding and Teaching Elementary School Mathematics, John Wiley, New York, 1966, 227 pp.

- Reeve, William David, Mathematics for the Secondary School: Its Content and Methods of Teaching and Learning, Holt, New York, 1954, 547 pp.
- Richardson, M, Fundamentals of Mathematics, the Macmillan Company, New York, 1953, 525 pp.
- Rosskopf, Myron F., and others, Modern Mathematics Through Discovery, Silver Burdett, Part Ridge, 1966, V.1 and V.2.
- Sanford, Vera, A Short History of Mathematics, Houghton Mifflin Company, Boston, c.1930, 420 pp.
- The School Mathematics Project, Cambridge University Press, 1965, 2 V.
- School Mathematics Study Group, Introduction to Secondary School Mathematics, Yale University Press , 1963, 2 V.
- Schult, Veryl, Inservice Mathematics Education: Promising Practices for Elementary and Secondary School Teachers, United States Department of Health, Education and Welfare, Washington, D.C., 1964, 129 pp.
- Smith, David Engene, History of Mathematics, Genn and Company, Boston, C 1923-1925, 2 V.
- Sommerville, D.M.Y., The Elements of Non-Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc., New York, 1958, 274 pp.
- Stabler, L.R., An Introduction to Mathematical Thought, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge. Mass., 1953, 268 pp.
- Stanton, Ralph G., and Fryer. Kenneth D., editors. Topics in Modern Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 187 pp.

Suchart Ratankul, "A Study of Mathematics Education in Thailand,"
Dissertation, Teachers College, Columbia University,
1958, 241 pp. (microfilm).

Thailand, Ministry of Education, Final Report of a Seames Sponsored
National Seminar on Science and Mathematics Teaching in
Thailand, Ministry of Education, 1967, 83 pp.

UNESCO - International Commission of Mathematical Instruction,
New Trends in Mathematics Teaching, Paris, 1967, 438 pp.

✓ UNESCO, Teaching of Mathematics in Secondary School, XIXth
International Conference on Public Education, International
Bureau of Education, Geneva, 1965, 249 pp.

Waismann, Friedrich, Introduction to Mathematical Thinking: The
Formation of Concept in Modern Mathematics, Translated by
Theodore J. Benac., F Ungar Publication, Co., New York,
1951, 260 pp.

Willoughby, Stephen S., Contemporary Teaching of Secondary School
Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., New York,
1967, 430 pp.

Adler, Irving, "The Cambridge Conference Report: Blueprint or Fantasy", The Mathematics Teacher, 59: 210 - 217, March, 1966.

----- "Mental Growth and the Art of Teaching", The Mathematics Teacher, 59: 706 - 715, December, 1966.

Ahlfors, Lars V., and others, "On the Mathematics Curriculum of the High School," The Mathematics Teacher, 55: 191 - 195, March, 1962.

Alsbaugh, Joh W., and Delon, Floyd G., "How Modern is Today's Secondary Mathematics Curriculum ?," The Mathematics Teacher, 60: 50 - 55, January, 1961.

Andree, Richard V., "Modern Trigonometry," The Mathematics Teacher, 48: 82 - 83, 1955.

Breslich, E.R., "Importance of Mathematics in General Education" The Mathematics Teacher, 59: 464 - 469, May, 1966.

Brown, Benneth E, and Abell, Theodore, L., "Research in the Teaching of High School Mathematics," The Mathematics Teacher, 59: 53 - 57 January , 1966.

Cairns, S.S., "Mathematical Education and Scientific Revolution", The Mathematics Teacher, 53: 66 - 74, February 1960.

Fehr, Howard. F. "International Mathematical Education: Reform of Mathematics Education Around the World" The Mathematics Teacher, 58: 37 - 44, January , 1965.

-----, "A Unified Mathematics Program for Grades Seven Through Twelve," The Mathematics Teacher. 59: 463., May, 1966.

Ferguson, W. Eugene, "Current Reforms in the Mathematics Curricula - A Passing Phase or Progress ?," The Mathematics Teacher, 57: 143 - 148, March, 1964.

- Hale, William T., "UICSM's Decade of Experimentation", The Mathematics Teacher, 54: 613 - 619, December, 1961.
- Hendrix, Gertrude, "Learning by Discovery," The Mathematics Teacher, 54: 290 - 299, March, 1967.
- Henkelman, James, "Implementing a New Mathematics Curriculum.," The Mathematics Teacher, 56: 211 - 217, April, 1963.
- Jones, Phillip S., "Progress: What Is It and How Can We Accelerate It ?," The Mathematics Teacher, 55: 196 - 198, March, 1962.
- Kemeny, John G., "Report to the International Congress of Mathematicians," The Mathematics Teacher, 56: 66 - 78, February, 1963.
- Kennedy, Joe, "Modern Mathematics in the Twelfth Grade," The Mathematics Teacher, 52: 97 - 100, February, 1959.
- Kline, Morris, "A Proposal for the High School Mathematics Curriculum," The Mathematics Teacher, 59: 322 - 330, April, 1966.
- Meder, Albert E., Jr., "Modern Mathematics and Its Place in the Secondary School," The Mathematics Teacher, 50: 418 - 424, October, 1957.
- Meserve, Bruce E., "New Trends in Algebra and Geometry," The Mathematics Teacher, 55: 452 - 461, October, 1962.
- Moise, Edwin E., "The MSG Geometry Program," The Mathematics Teacher, 53: 437 - 442, October, 1960.
- National Council of the Teachers of Mathematics, Secondary School Curriculum Committee, "The Secondary Mathematics Curriculum," The Mathematics Teacher, 52: 389 - 417, May, 1959.
- Northrop, E.P., "Modern Mathematics of the Secondary School Curriculum," The Mathematics Teacher, 48: 386 - 393, 1955.

- Northrop, E.P., "Modern Mathematics of the Secondary School Curriculum",
The Mathematics Teacher, 48 : 386 - 393, 1955.
- Olander, Clarence E., "Let's Teach Statistics", The Mathematics Teacher,
51 : 253 - 260, April, 1958.
- Payne, Holland, "What About Modern Programs in Mathematics ?", The Mathematics Teachers 58 : 422 - 424, May, 1965.
- Pieters, Richard S., and Vance, E.P., "The Advanced Placement Program in Mathematics", The Mathematics Teacher, 54 : 201 - 211, April, 1961.
- Rising, Gerald R., "Research and Development in Mathematics and Science Education at the Minnesota School, Mathematics and Science Center and the Minnesota National Laboratory", School Science and Mathematics", 65 : 811 - 820, 1965.
- Rosenberg, Herman, "Great Challenges of Mathematics Education," The Mathematics Teacher, 55 : 360 - 368, May, 1962.
- Rourke, Robert E.K., "Some Implications of Twentieth Century Mathematics for High Schools", The Mathematics Teacher, 51 : 74 - 86, February, 1958.
- Schuster, Seymour, "If Not Solid Geometry, Then What ?", The Mathematics Teacher, 54 , 313 - 315, May, 1961.
- Smith, Norman H., " Developments in the Teaching of Secondary School Mathematics", Journal of Educational Research, 55 : 358 - 362, May, 1962.
- Stone, Marshall H., " The Book-Review Section:Goals for School Mathematics, The Report of The Cambridge Conference on School Mathematics",
The Mathematics Teacher, 58 : 353 - 360, April, 1965.

Thwaites, Byran, "International Mathematics Education : Mathematics Reforms in English Secondary Schools", The Mathematics Teacher, 59 : 42 - 52, January, 1966.

Tierney, John A., "Trigonometric Functions of Real Number", The Mathematics Teacher, 50 : 194 - 198, 1957.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

Courses in the College of Education. Undergraduate Courses

Department of Science and Mathematics.

MATHEMATICS

Math 101 Mathematics I^{*} (class 3 hrs., 3 cr.)

An introduction to the study of fundamental concepts of symbolic logic; the nature of mathematical proof; the character of mathematical abstractions, the relationship of abstract mathematics to its concrete application.

Math 102 Mathematics II^{*} (class 3 hrs., 3 cr.)

A study of the number system from the viewpoint of contemporary mathematics. Emphasis is placed on the structure of mathematics and on the significance of the real number system for the foundations of mathematics.

Math 103 Mathematics III^{*} (class 3 hrs., 3 cr.)

A study of functions from a modern point of view. The notion of sets is used as a unifying concept in dealing with equations, inequalities, graphs, loci, relations and functions.

Math 211 College Algebra (class 3 hrs., 3 cr.)

This course provides a background for further study in mathematics. Topics treated include. Permutations and combinations,

*

วิชาบังคับสำหรับทุกคน

binomial theorem, elementary probability, matrices and determinants, partial fractions, sequences and series, and mathematical induction.

Math 221 Analytic Geometry I (class 3 hrs., 3 cr.)

A study of coordinate system in a plane, points, straight lines and circles.

Math 222 Analytic Geometry II (class 3 hrs., 3 cr.)

Continuation of Analytic Geometry I.

Math 223 Analytic Geometry (minor course) (Class 3 hrs., 3 cr.)

A study of analytic geometry as a foundation for the study of calculus. Topics treated include coordinate system in a plane and conic sections.

Math 231 Calculus I (class 3 hrs., 3 cr.)

A beginning course in the study of calculus. Topics treated include continuous and discontinuous functions, limits, differentiation of algebraic and transcendental functions, and applications.

Math 232 Calculus II (class 3 hrs, 3 cr.)

A continuation of Calculus I. Topics treated include: integration of algebraic and transcendental functions and applications of integration.

Math 310 Theory of Numbers

(Class 3 hrs., 3 cr.)

Euclidean algorithm and its consequence, congruences, primitive roots and indices, quadratic residues, number theoretic functions and the distribution of prime, and sum of squares.

Math 312 Set Theory and Its Applications

(Class 3 hrs., 3 cr.)

An introduction to the theory of sets. The fundamental concepts will be developed through the use of well-known finite sets. The theory of finite sets is used to provide the terminology and symbolism of set theory as the basis for subsequent treatment of finite sets. Study of the general theory of sets ends with a discussion of ordered sets and a few important theorems on point sets.

Math 313 Fundamental Concepts of Algebra

(class 3 hrs., 3 cr.)

Characteristics of abstract mathematical science; the number system of algebra; the concepts of groups, rings and fields.

Math 323 Solid Analytic Geometry

(class 3 hrs., 3 cr.)

A study of vectors of dimensions, points, straight lines, planes, spheres and surfaces.

Math 333 Calculus III

(class 3 hrs., 3 cr.)

A continuation of Calculus II. Topics treated include sequences and series, limit of sequences and series, convergence and divergence, partial derivatives; multiple integrals and applications.

Math 351 Statistical Inference I (class 3 hrs., 3 cr.)

Measures of central tendency, dispersion, regression, equations, correlation, reliability, normal probability, curve, sampling.

Math 431 Foundations of Geometry I (class 3 hrs., 3 cr.)

Systematic analysis of geometry through a study of axiomatic synthetic and analytic projective geometry; Affine, Euclidean, and Non-Euclidean geometrics are obtained by successive restrictions of projective transformations; an introduction to modern geometry as background for teaching high school mathematics.

Math 432 Foundations of Geometry II (class 3 hrs., 3 cr.)

Continuation of Foundations of Geometry I.

Math 441 Differential Equations I (class 3 hrs., 3 cr.)

Introduction to differential equations; special methods for equations of the first order.

Math 442 Differential Equations II (class 3 hrs., 3 cr.)

Linear equations of the second order; general linear equations; laplace transforms; the method of successive approximations.

Math 452 Statistical Inference II (class 3 hrs., 3 cr.)

A continuation of Statistical Inference I.

Educ 425 Teaching of Mathematics (class 2 hrs., 2 cr.)

Prerequisite: Education 303. A study of the problems of teaching mathematics in the secondary school including purposes, procedures, methods and instructional materials, Consideration will be given to recent research in the teaching of mathematics. Open to third year students who have completed the prerequisites.

ภาคผนวก ข.

ร่างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
ของคณะกรรมการพิจารณาหลักสูตรคณิตศาสตร์

ร่างหลักสูตรพีชคณิต (รวมทั้ง "เลขคณิต" และ "ตรีโกณมิติ")

มัธยมศึกษาปีที่ ๑

1. Numeration (7 hours)
 - 1.1 History of Numerals
 - 1.2 Numerals vs. Numbers
 - 1.3 Numerals in Different Bases: The Decimal System.
Numerals in Base Two, Base Twelve and other bases.
Changing from one base to another.
2. Number (30 hours)
 - 2.1 Whole Numbers Addition, Multiplication.
 - 2.2 Letters as Symbols for Numbers
 - 2.3 The Equality Sign " $=$ ". Symmetric, Transitive Laws.
 - 2.4 Closure Property
 - 2.5 Laws: Associative, Commutative, Distributive Laws.
 - 2.6 The Number One and the Number Zero
 - 2.7 The Number Line (for Whole Numbers)
 - 2.8 Directed Numbers: The Number Line (for integers).
Absolute Values. Addition, Subtraction, Multiplication
and Division of Directed Numbers.

- 2.9 Rational Numbers. Decimal Representation, Rounding off.
- 2.10 The Number Line (for Rationals)
- 2.11 Ordering, $<$, $>$
- 2.12 Integral Powers
- 2.13 Algebraic Expressions. Addition, Subtraction,
Multiplication, Division Parentheses.
- 3. Linear Equations and Inequalities (28 hours)
 - 3.1 Solution Set: Set, The Empty Set, Subset.
 - 3.2 Open Sentences
 - 3.3 Symbolizing Statements
 - 3.4 Identities
 - 3.5 Word Problems
 - 3.6 Simple Linear Inequalities: Properties, Solution Set,
Graph of Solution Set on the Number Line.
 - 3.7 Graph: Co-ordinate Plane. Graph of Straight Line,
 $y = ax$, $y = ax + b$. Slope. Solution of Linear Equations
and Linear Inequalities by Graph.
- 4. Applications (20 hours)
 - 4.1 Units of Measurement: Mass, Length, Time.
 - 4.2 Ratio and Proportion: ปัญญาภิไตรยางค์หลายชั้น
 - 4.3 Percent : กำไร ขาดทุน
 - 4.4 แบ่งส่วน หักส่วน

มัธยมศึกษาปีที่ ๒

1. Functions and Relations (27 hours)
 - 1.1 Definition: Domain, Range, Mapping.
 - 1.2 Description: Machine, Verbal Description, Diagram, Table, Graph, Set of Ordered Pairs, Algebraic Expression.
 - 1.3 Examples of Relations that are not Functions.
 - 1.4 Linear Functions
 - 1.5 System of Linear Equations (2 and 3 Unknowns): Solution by Graph. Solution Set. Union and Intersection of Sets. Venn's Diagram. Word Problems.
 - 1.6 System of Linear Inequalities (Graphical Method only) : Solution. Simple Linear Programming Problems.
2. Quadratic Functions and Equations (28 hours)
 - 2.1 Graph of Parabola: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x - k)^2$, $y = a(x - k)^2 + c$. Idea of Symmetry
 - 2.2 Factorization of Quadratic Functions
 - 2.3 Quadratic Equation : Solution by Graph, by Factorization, by Completing the Square. Formulae for Roots. Sum and Product of Roots. Word Problems. Solution of Quadratic Inequalities by Graph.
 - 2.4 Irrational Numbers: Square Roots, Cube Roots. Determining Square Root of a Number by Factorization and Long Division. Determining Cube Root of a Number by Factorization. Decimal Representation (Non-repeating Decimal).

2.5 Real Numbers: $\mathbb{R}$, The Real Line.

3. Applications (30 hours)

3.1 ดอกเบี้ยเชิงเดียว

3.2 การเช่าซื้อ

3.3 ภาษีเงินได้

3.4 นายหนา ประกันภัย

3.5 Ratio and Proportion: Variation.

3.6 ผสมผสาน

มัธยมศึกษาปีที่ ๓

1. Polynomials (in x only) (37 hours)

1.1 Degree, Factorization. The Remainder Theorem. Method of Undetermined Coefficients.

1.2 Graph : Locating Zeros.

1.3 Polynomial Equations: Solution by Graph, by Factorization.

1.4 G.C.D., L.C.M., Euclidean Algorithm.

1.5 Rational Form of Polynomials, Partial Fractions.

1.6 Third Degree Equations: Graph. Roots. Higher Order Equations (an Introduction).

2. Trigonometric Functions (19 hours)

2.1 Definitions: $\sin$, $\cos$, $\tan$, cosec , $\sec$, $\cot$.

2.2 Simple Identities. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ and their variations.

- 2.3 Properties: Values as θ range from 0° - 360° Graphs.
Functions of $90^\circ - \theta$, $180^\circ - \theta$ etc.
- 2.4 Table of Trigonometric Functions.
- 2.5 Solution of Right-Angled Triangles: Word Problems.
Problems in 3-dim. Space.
- 2.6 Radian Measure (an Introduction)
3. Measurement and Approximation (4 hours)
 - 3.1 Error Relative Error, Greatest Possible Error.
 - 3.2 Significant Figures.
4. Applications (25 hours)
 - 4.1 ความเร็วสัมพัทธ์ : รถไฟ นาฬิกา วิ่งแข่ง กระแสน้ำ
 - 4.2 โจทย์คนทำงาน โจทย์คนน้ำ
 - 4.3 กำไรเงิน
 - 4.4 พัฒนวิทย์

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ (เฉพาะสายวิทยาศาสตร์)

1. Harder Equations (15 hours)
 - 1.1 Graph of Circle: $x^2 + y^2 = a^2$
 - 1.2 Graph of Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 - 1.3 Graph of Hyperbola: $xy = a$
 - 1.4 Simultaneous Linear and Non-Linear Equations. Solution by Substitution and by Graph.
2. Logarithmic and Exponential Functions (25 hours)
 - 2.1 Indices
 - 2.2 Surds

- 2.3 Logarithm: Tables. Changing from one base to another
- 2.4 Exponential Function: Graph. Exponential Equation.
Word Problems.
- 2.5 Logarithmic Function: Graph. Logarithmic Equation.
Word Problems (e.g. Compound Interest).
- 2.6 Irrational Equations
- 3. Trigonometry (40 hours)
 - 3.1 Compound Angles
 - 3.2 Important Identities (including Changing Products
into Sums and vice versa)
 - 3.3 Solution of any Triangle. Word Problems (including
problems in 3 - dim, space)
- 4. Series (15 hours)
 - 4.1 A.P., G.P., H.P. Compound Interest and Rate of Growth
as examples of G.P.
 - 4.2 S_n, S_{∞}
 - 4.3 Allied Series
- 5. Approximations (5 hours)
 - 5.1 Manipulation of Significant Figures

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ (เฉพาะสายวิทยาศาสตร์)

- 1. Complex Numbers (10 hours)
 - 1.1 Definition and Related Concepts
 - 1.2 Representation : $z = a + ib$
 $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

- 1.3 De Moivre's theorem Square Roots, Cube Roots etc.
2. Trigonometry (20 hours)
 - 2.1 Trigonometric Equation: General Solution.
 - 2.2 Inverse Functions
 - 2.3 Solution of Triangles using Logarithm. Word Problems
3. Binomial Theorem (10 hours)
4. Calculus (40 hours)
 - 4.1 Tangent to curve : Slope
 - 4.2 Limits
 - 4.3 Derivative; Maxima, Minima
 - 4.4 Applications. Velocity. Acceleration. Falling Object. Projectile.
 - 4.5 Integration: Area under Curve.
5. Descriptive Statistics (20 hours)
 - 5.1 Presentation of Data: Tabular Presentation, Graphic Presentation. Bar Diagram, Pie Chart etc.
 - 5.2 Frequency Distribution. Ogive.
 - 5.3 Measures of Central Tendency. Arithmetic Mean. "Short" Method of Computation. Median. Other Measures. Percentiles.
 - 5.4 Measures of Dispersion. Standard Deviation. "Short" Method of Computation. Other Measures.

ร่างหลักสูตร เรขาคณิต มัธยมศึกษาตอนต้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๑

๑. ประวัติเรขาคณิต
๒. หลักเบื้องต้น (เช่น นิยาม ลักษณะต่าง ๆ กว่าจะมีและจัดอธิบายให้ถูกต้อง กว่าจะกระจายไปไว้ในตอนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง)
๓. Axioms
๔. Postulates (กว่าจะแยกการจัดกระจายไปตามบทที่เกี่ยวข้อง)
๕. เกร็ดขบคายต่าง ๆ (กวดอธิบายไว้เป็นเรขาคณิต ๆ เมื่อจะตอบ โดยแสดงไว้ในวงเล็บและกวดรวบรวมไว้ทั้งหมดท้ายเล่ม)
๖. หลักการพิสูจน์
๗. การฝึกให้พิสูจน์เป็นการนำครูและนักเรียน
๘. การจับคู่ปฏิบัติและปัญหาการจัดถามนี้
 - ๘.๑ ว่าด้วยการเกิดของเส้น เกิดจากการตัดของระนาบจุดและการตัดกันระนาบระนาบ
 - ๘.๒ การตัดกันระหว่างเส้นในระนาบเดียวกันทำให้เกิดมุมต่าง ๆ
 - ๘.๒.๑ ชนิดของมุม เช่น มุมแหลม มุมป้าน มุมกลับ มุมฉาก
 - ๘.๒.๒ ลักษณะของมุม มุมประชิด มุมตรงข้าม มุมประกอบสองมุมฉาก มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก
 - ๘.๒.๓ เส้นแบ่งครึ่งมุม
 - ๘.๓ ทฤษฎีบทว่าด้วยเส้นกับระนาบเดียวและการนำไปใช้ประโยชน์
 - ๘.๔ ทฤษฎีบทว่าด้วยการเกิดของรูปสามเหลี่ยม เกิดจากการตัดของระนาบ
 - ๘.๔.๑ ชนิดของรูปสามเหลี่ยม
 - ๘.๔.๒ ลักษณะของมุมภายในและภายนอก

๘.๔.๓ ลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เกี่ยวข้องกัน

๘.๔.๔ ทฤษฎีบทว่าควยสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ

๘.๕ การสร้าง

๘.๕.๑ การแบ่งเส้น

๘.๕.๒ การสร้างมุมและการแบ่งมุม

๘.๕.๓ การลากเส้นตั้งฉากทาง ๆ

๘.๕.๔ การสร้างสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดส่วนทาง ๆ

๘.๖ ว่าควยเส้นขนาน

๘.๖.๑ ขนานบนระนาบเดียวและสองระนาบ

๘.๖.๒ เส้นกัศเส้นขนาน

๘.๖.๓ ทฤษฎีบทว่าควยเส้นขนาน

๘.๖.๔ การสร้างเส้นขนาน

๘.๗ ว่าควยความสัมพันธ์ระหว่างมุม สามเหลี่ยมและเส้นขนาน

๘.๘ ว่าควยลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ

๘.๘.๑ ในระนาบเดียว

๘.๘.๒ ในหลายระนาบ

๘.๙ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานหลายเส้นในระนาบเดียว

๘.๑๐ การสร้างรูปสี่เหลี่ยมต่าง ๆ ในระนาบเดียว

๘.๑๑ ทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมที่ตรงด้ายสี่เหลี่ยมคานขนานในระนาบ

เดียวกัน

๘.๑๒ การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมต่าง ๆ

๘.๑๒.๑ ว่าควยลักษณะของตัวสูงและเส้นกึ่ง

๘.๑๒.๒ การหาสูตร

๘.๑๒.๓ การคำนวณโดยใช้สูตรที่หาได้

- ๘.๑๓ ทฤษฎีบทว่าควมพันธ์ของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม
- ๘.๑๔ วาดรูปการสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
- ๘.๑๕ ทฤษฎีบทของ Pythagoras และการนำไปใช้
- ๘.๑๖ การคำนวณปริมาตรและพื้นที่ผิวรูปเหลี่ยมทรงตัน
- ๘.๑๗ สมุทสนาม พีทาโกรัส Scale Drawing และการคำนวณ

มัธยมศึกษาปีที่ ๒

๑. วาดวงกลม

- ๑.๑ ลักษณะของทรงกลม
- ๑.๒ การตัดทรงกลมด้วยระนาบ ในรู้จักลักษณะของการตัดและผลที่ได้จาก

การตัด

๑.๓ ลักษณะของวงกลม ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม มีจุดศูนย์กลาง รัศมี เส้นผ่านศูนย์กลาง เส้นรอบวง กรงวงกลม กอร์ด ส่วนโค้ง ส่วนของวงกลม สามเหลี่ยมฐานโค้ง

- ๑.๔ ลักษณะของวงกลมสองวงที่สัมพันธ์กัน

๑.๔.๑ วงกลมสองวงเท่ากัน

๑.๔.๒ วงกลมสองวงมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

๑.๔.๓ วงกลมตัดกัน

๒. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมวงเดียวและการนำไปใช้

๒.๑ เกี่ยวกับกอร์ดและจุดศูนย์กลาง

๒.๒ เกี่ยวกับกอร์ดหลายกอร์ด

๒.๓ เกี่ยวกับมุมในวงกลมเดียวกัน

๒.๔ การสร้างเกี่ยวกับวงกลมวงเดียวกัน

๓. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมหลายวงและการนำไปใช้

๓.๑ วาดวงเส้นสัมผัสกับรัศมี

๓.๒ วาดวงเส้นสัมผัสจากจุดภายนอกไปยังวงกลม

- ๓.๓ ว่าควยเส้นสัมผัสทำมุมกับคอร์ด
- ๓.๔ การลากเส้นสัมผัสของวงกลม
- ๓.๕ ลักษณะของวงกลมบรรจุ แนบใน แบนนอก และประกอบรูปสามเหลี่ยม
- ๓.๖ การนำทฤษฎีบทไปใช้ในการสร้าง
 - ๓.๖.๑ เกี่ยวกับการสร้างส่วนต่าง ๆ ของวงกลม
 - ๓.๖.๒ เกี่ยวกับการสร้างวงกลม แนบใน แบนนอกและประกอบรูป

สามเหลี่ยม

- ๓.๖.๓ เกี่ยวกับการสร้างรูปหลายเหลี่ยมคานเท่าที่แนบในและประกอบ

วงกลม

- ๓.๖.๔ การคำนวณหามุมภายในและภายนอกของรูปเหลี่ยม
- ๔. ทฤษฎีว่าควยเส้นสัมผัสรวมและการนำไปใช้
 - ๔.๑ ทฤษฎีบทว่าควยจุดสัมผัสและจุดศูนย์กลาง
 - ๔.๒ การนำไปใช้ในการลากเส้นสัมผัสรวม

มัธยมศึกษาปีที่ ๓

- ๑. การคำนวณเกี่ยวกับวงกลมและทรงกลมโดยใช้สูตร
 - ๑.๑ การหาพื้นที่ของวงกลม
 - ๑.๒ การหาส่วนต่าง ๆ ของวงกลม
 - ๑.๓ การหาปริมาตรของทรงกลม
 - ๑.๔ การหาพื้นที่ผิวของทรงกลม
 - ๑.๕ การหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกระบอก
 - ๑.๖ การหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกรวย
- ๒. การคำนวณเกี่ยวกับรูปเหลี่ยม
 - ๒.๑ การหาปริมาตรของกรวยเหลี่ยม
 - ๒.๒ การหาพื้นที่ผิวของกรวยเหลี่ยม

- ๒.๓ การหาปริมาตรของปริซึม
- ๒.๔ การหาพื้นที่ผิวของปริซึม
- ๓. บทสรุปรวทวยจตุรัสและสี่เหลี่ยมผืนผ้า การนำไปใช้
- ๔. สัดสวน
 - ๔.๑ ความหมายของสัดสวน
 - ๔.๒ สัดสวนของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปเกี่ยว
 - ๔.๓ สัดสวนของด้านของรูปสามเหลี่ยมและเส้นแบ่งครึ่งมุมมาที่ฐาน
 - ๔.๔ การนำไปใช้เกี่ยวกับการหาสัดสวน
- ๕. ทฤษฎีบททวยสามเหลี่ยมกลาย และการนำไปใช้
- ๖. ทฤษฎีบททวयरูปหลายเหลี่ยมกลายและจุดศูนย์กลาง
- ๗. การเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปเหลี่ยมและการนำไปใช้
- ๘. ทฤษฎีบททวยความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและวงกลม
 - ๘.๑ ทวยการวัดพื้นที่
 - ๘.๒ ทวยสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม
 - ๘.๓ ทวยการสร้างวงกลมอย่างยาก เช่น ให้สัมผัสส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดให้

ร่างหลักสูตร เรขาคณิตวิเคราะห์ของชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

(เฉพาะสายวิทยาศาสตร์)

1. Cartesian Coordinates

1.1 Representation of Points by Coordinates

1.2 Plotting of Points

1.3 Directed Lines

1.4 Projections of Directed Segment on the Coordinate Axes

1.5 Distance Formula

- 1.6 Point of Division Formula.
- 1.7 Geometric Proofs Using Coordinates.
- 1.8 Inclination, Slope and Directed Cosines.
- 1.9 Formulae for Slope and Directed Cosines. Applications.
- 1.10 Angle between Two Lines.
- 1.11 Parallelism and Perpendicularity.
2. Curves and Equations.
 - Plotting of Graphs. Derivation of Equations.
3. The Straight Line
 - 3.1 Equation of the Straight Line.
 - 3.2 The Point-Slope and Two-Point Forms.
 - 3.3 The Slope-Intercept Form.
 - 3.4 The Intercept Form
 - 3.5 Lines Parallel to the Axes.
 - 3.6 The Linear Equation.
 - 3.7 Relations between Linear Equations.
 - 3.8 The Normal Form.
 - 3.9 Distance from a Line to a Point
4. The Circle
 - 4.1 The Standard Equation of the Circle
 - 4.2 The General Equation of the Circle
 - 4.3 Identification of Center and Radius
 - 4.4 Tangent
5. Parabola, Ellipse, Hyperbola
 - 5.1 Definitions

5.2 Derivation of Equations

5.3 General Equation of Second Degree

6. ทฤษฎีว่าด้วยจุดรวม

6.1 ธิบายกล่าวว้จุดรวม

6.2 Ceva's Theorem

6.3 Menelaus Theorem

6.4 Centroid

6.5 Circumcenters

6.6 In-centers

6.7 Ex-centers

6.8 Orthocenters

6.9 การสร้างรูปว่าด้วยจุดรวม

7. โลกัศ

ภาคผนวก ค.

แบบสอบถามผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนมัธยมวิสามนตฤณี

— — —

เนื่องจากมีอาสาสมัครอเมริกันมาช่วยงานที่งานที่ปรึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ในด้านวิธีสอน และเนื้อหาวิชา จำนวน ๒ คน เาที่ไ้ทำงานร่วมกันปรากฏว่า ทั้งสองคนมีความรู้และวิธีการที่น่าสนใจ เพื่อเป็นโอกาสอันดี หากอาจารย์ที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ต้องการจะแลกเปลี่ยนความคิดเห็น หรือเพิ่มพูนเนื้อหาวิชาบางเรื่องก็อาจทำได้ ทางที่ปรึกษาจะจัดเวลาสำหรับพบปะกันทุกวันเสาร์เช้า หรือวันธรรมดาที่อาจารย์ผู้สอนจะสะดวกมา จึงเื่อรขอความคิดเห็นจากท่านได้โปรดกรอกข้อความที่ว่างไว้ และเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงหน้าข้อความที่ท่านต้องการ ทั้งนี้จะได้จัดไ้ตรงตามความประสงค์ของท่านมากที่สุด

ชื่อ

โรงเรียน

วุฒิ

วิชาที่สอน

จำนวนชั่วโมงที่สอน

๑. เนื้อเรื่องที่ต้องการทราบหรือต้องการอภิปราย

๑.๑ เลขฐานต่าง ๆ (Numeration system)

๑.๒ เซต (Set)

๑.๓ ฟังก์ชัน (Function)

- ๑.๔ โลกัศ (Locus)
- ๑.๕ ความน่าจะเป็น (Probability)
- ๑.๖ Analytic Geometry
- ๑.๗ Mathematical Induction
- ๑.๘ เรื่องอื่น ๆ ที่ท่านสนใจ

ก.

ข.

ค.

ง.

๒. วิธีสอนที่จะทำให้ นักเรียน เข้าใจในเรื่องต่อไปนี้

- ๒.๑ การบวกลบคูณหารเกี่ยวกับจำนวนบวก จำนวนลบ
- ๒.๒ การเขียนกราฟเส้นตรง
- ๒.๓ การเขียนกราฟพาราโบลา และกราฟรูปอื่น ๆ
- ๒.๔ การสอน logarithm และ slide rule
- ๒.๕ การสอนสมการ
- ๒.๖ เรื่องอื่น ๆ ที่ท่านต้องการ

ก.

ข.

ค.

ง.

๓. เวลาที่ท่านสะดวกจะพบปะ เริ่มตั้งแต่เดือนมกราคม - มีนาคม ๒๕๖๓

๓.๑ ทุกวันเสาร์ เช้า ตั้งแต่ ๘.๓๐ - ๑๑.๓๐ น. หรือ

๓.๒ ทุกวันศุกร์ เวลา ๑๔.๓๐ น. - ๑๗.๓๐ น.

๔. สถานที่พบปะ

ศูนย์ฝึกอบรมครู หน่วยงานนิเทศก์ ภายในบริเวณโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

รายการพิเศษ

หน่วยงานนิเทศก์ได้เคยจัดการอบรมครูสอนคณิตศาสตร์ที่ส่วนกลาง โดยได้รับความร่วมมือจากศูนย์แลกเปลี่ยนเรียนรู้วัฒนธรรมและวิชาการระหว่างตะวันออก - ตะวันตก

มหาวิทยาลัยอ่าวไทย ตั้งแต่ปี ๒๕๑๑ และ ๒๕๑๒ การมุ่งหมายเพื่อให้ทราบแนวโน้มของคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน การอบรมจัดคอนปลายมีนาคมกับต้นเมษายน ๓ สัปดาห์ ผู้ที่จะเข้ารับการอบรมจะต้องมีความรู้ภาษาอังกฤษที่พอสมควร และพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่พอสมควร

ในปีการศึกษา ๒๕๑๓ นี้ ทางหน่วยงานนิเทศก์ใคร่ทราบว่า อาจารย์ผู้ใดสนใจจะเข้ารับการอบรม ถ้าหากมีจำนวนมากพอที่จะได้จัดขึ้นอีก สำหรับผู้ที่สนใจขอไปทดลองชื่อเป็นภาษาอังกฤษ และชื่อโรงเรียนเป็นภาษาอังกฤษด้วย

ชื่อ

โรงเรียน

ไปทดลองแบบสอบถามแล้วส่งไปยัง

อาจารย์ประยงค์ บุญมงคล

หน่วยงานนิเทศก์ กรมวิสามัญศึกษา

ภายในบริเวณโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

ถนนพระราม ๒ กรุงเทพฯ ๔ (ไปทดลองภายในวันที่ ๑ ธ.ค. ๒๕๑๒)

ภาคผนวก ง.

แบบสอบถามเกี่ยวกับหลักสูตร ชั้น ม.ศ.ต้น

พ.ศ. ๒๕๑๓

วิชาคณิตศาสตร์

พิจารณาความมุ่งหมายของการสอนคณิตศาสตร์ตามหัวข้อต่อไปนี้

๑. โปรดเขียนเครื่องหมาย ✓ ข้างหน้าข้อ ก หรือ ข ที่ต้องการ

๑. เพื่อให้รู้จักคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์แก่ชีวิตประจำวันได้

ก. ข้อความนี้คือแล้ว

ข. ข้อความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร

๒. เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการของคณิตศาสตร์กว้างขวางขึ้น
กว่าพื้นฐานความรู้เดิม

ก. ข้อความนี้คือแล้ว

ข. ข้อความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร

๓. เพื่อฝึกฝนเพื่อให้มีทักษะ สมาธิ การสังเกต ความถี่ตามลำดับเหตุผล ความมั่นใจตลอดจนแสดงความรู้สึกนึกคิดนั้นออกมาเป็นระเบียบ ง่าย สั้น และชัดเจน มีความประณีต ความละเอียดถี่ถ้วน ความแม่นยำ และรวดเร็ว

ก. ข้อความนี้คือแล้ว

ข. ข้อความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร

๔. เพื่อให้เกยชินต่อการแก้ปัญหา และเป็นแนวทางอันจะก่อให้เกิดความคิดริเริ่ม
และสร้างสรรค์

- ก. ขอความนี้ดีแล้ว
 ข. ขอความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร
๕. เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง และวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์

 ก. ขอความนี้ดีแล้ว
 ข. ขอความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร
๖. เพื่อปลูกฝังทัศนคติและนิสัยในการศึกษาคำนวณ

 ก. ขอความนี้ดีแล้ว
 ข. ขอความนี้ควรแก้ไข และแก้ไขอย่างไร
๒. โปรดพิจารณาการรายงานในวิชาเลขคณิต – พหุคูณ

 ชั้น ม.ก.๑ โปรดเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อ ก หรือ ข ที่ต้องการ

 รายงานที่ควรคัดลอก

 ๑. รูปที่เป็นเอกลักษณ์ และคล้ายคลึงกัน

 [เนื่องจาก มีสอนในวิชาเรขาคณิตแล้ว]

 ก. เห็นควย
 ข. ไม่เห็นควย

 ๒. สมุสนาม

 [เนื่องจากเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียนน้อยมาก ถ้าต้องการรู้ก็อาจไป

 เลือกรับในแขนงนี้โดยเฉพาะ]

 ก. เห็นควย
 ข. ไม่เห็นควย

๓. กราฟสถิติ

[เนื่องจากมีสอนในชั้นประถมปีที่ ๗ แล้ว]

- ก. เห็นควย
- ข. ไม่เห็นควย

รายการสอนอื่น ที่ท่านเห็นว่าควรคัด

๑.

๒.

๓.

รายการที่ควรเพิ่ม

- ๑. ในเรื่องสมการชั้นเดียว ควรกล่าวถึง

ฟังก์ชันเบื้องต้นโคไซน์ และ เรนจ์ ของตัวแปร

เนื่องจาก การเริ่มศง่าย ๆ ในชั้นนี้จะช่วยให้นักเรียนรู้จักใช้สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน

ในทุกแขนงวิชาที่เรียน concept ของ "ฟังก์ชัน" มีมาแล้ว (เช่นใน $A = \pi r^2$)

นักเรียนแจ่มแจ้งขึ้นจะรู้จักใช้สัญลักษณ์และเรียกชื่อได้ถูกต้อง

- ก. เห็นควย
- ข. ไม่เห็นควย

- ๒. จำนวนลบ ควรยกขึ้นมาให้เห็นเป็นเรื่องหนึ่งต่างหาก [เพื่อจะได้เพิ่มความเข้าใจให้นักเรียน]

ก. เห็นควย

ข. ไม่เห็นควย

รายการสอนอื่น ที่ท่านเห็นว่าควรเพิ่ม

๑.

๒.

๓.

ชั้น ม.ก.๒

รายการที่ควรคัดออก

๑. การหารากกำลังที่สองของนิพจน์พีชคณิตโดยวิธีหาร

[เนื่องจากเป็นเรื่องที่แทบจะไม่ใช่เป็นประโยชน์เลย ครูหลายคนที่สอนมีความรู้สึกว่าจะอธิบายให้นักเรียนเข้าใจได้ยาก]

ก. เห็นควย

ข. ไม่เห็นควย

๒. การหารากกำลังที่สาม โดยวิธีแยกตัวประกอบวิธีเลขคณิต และวิธีพีชคณิต

[เนื่องจากมีที่ไร่น้อย และวิธีการหา เข้าใจยาก]

ก. เห็นควย

ข. ไม่เห็นควย

รายการสอนอื่น ที่ท่านเห็นว่าควรคัดออก

๑.

๒.

๓.

รายการที่ควรเพิ่ม

๑. ตารางการหารากกำลังที่สองและที่สาม

[เพราะว่า มีประโยชน์กว่า และถูกต้องกว่า และยังนำไปสู่การรู้จักใช้ตาราง]

ก. เห็นควย

ข. ไม่เห็นควย

๒. เรื่องฟังก์ชัน

ก. เห็นควย

ข. ไม่เห็นควย

รายการสอนอื่น ที่ท่านเห็นว่าควรเพิ่ม

๑.

๒.

๓.

ชั้น ม.ศ.๓

รายการที่ควรตัดออก

๑. วิธีคูณหารทศนิยมอย่างประมาณ
[ไม่การบังคับวิธีว่าต้องทำตามหนังสือแบบเรียนกรมวิชาการ]
 ก. เห็นควย
 ข. ไม่เห็นควย
๒. การหา ห.ร.ม. และ ก.ร.น. ของนิพจน์พีชคณิตด้วยวิธีหาร
[เนื่องควยไม่ค่อยมีที่ใช้]
 ก. เห็นควย
 ข. ไม่เห็นควย

รายการสอนอื่น ที่ท่านเห็นว่าควรตัด

๑.

๒.

๓.

รายการที่ควรเพิ่ม

๑. เลขนัยสำคัญ การประมาณค่า
[มีที่ใช้มาก การประมาณค่าจะช่วยให้เด็กเรียนคิดคำนวณได้ถูกต้อง]
 ก. เห็นควย
 ข. ไม่เห็นควย

๒. กราฟวงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา
[ในการแก้สมการ อาจใช้กราฟเหล่านี้ช่วยได้]

- ก. เห็นควบ
- ข. ไม่เห็นควบ

รายการข้อ ที่ท่านเห็นว่าควรเพิ่ม

๑.

๒.

๓.

เรขาคณิต โปรดเขียนข้อความตามความนึกเห็นของท่าน

รายการที่ควรตัดออก

๑.

๒.

๓.

รายการที่ควรเพิ่ม

๑.

๒.

๓.

โปรดกรอกแบบสอบถามแล้วส่งไปยัง

อาจารย์ประยงค์ บุญมงคล

หน่วยศึกษานิเทศก์ กรมวิสามัญศึกษา

ในบริเวณโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

ถนนพระราม ๒ กรุงเทพฯ ๔

โปรดส่งภายในวันที่ ๑ ธันวาคม ๒๕๑๒

ภาคผนวก จ.
รายชื่อบุคคลที่อ้างอิงในปริญญานิพนธ์

ชื่อภาษาอังกฤษ		ชื่อภาษาไทย
Abel, N.H. (1802-1829)	(นอร์เวย์)	อเบล
Apollonius (260?-200? B.C.)	(กรีก)	อพอลโลเนียส
Archimedes (287-212 B.C.)	(กรีก)	อาร์คิมิดีส
Aristotle (384-322 B.C.)	(กรีก)	อริสโตเติล
Babbage, C. (1792-1871)	(อังกฤษ)	แบเบจ
Baldwin, F.S. (ca.1875)	(อเมริกัน)	บอลด์วิน
Barrow, I. (1630-1677)	(อังกฤษ)	แบร์โรว์
Beltrami, E. (1835-1900)	(อิตาลี)	เบลทรามี
Bernoulli, James (1654-1705)	(สวิส)	เบอร์นอลลี
Bolyai, J. (1802-1860)	(ฮังการี)	โบลไย
Boole, G. (1815-1864)	(อังกฤษ)	บูล
Brahe, T. (1546-1601)	(เดนมาร์ก-สวีเดน)	บราก
Brianchon, C.J. (1785-1864)	(ฝรั่งเศส)	ไบแรงซอง
Briggs, H. (1561-1630)	(อังกฤษ)	บริกซ์
Brouwer, L.E.J. (1881-	(ดัตช์)	บราวเฮอร์
Burgi, J. (1552-1632)	(สวิส)	เบอร์โย
Cantor, G. (1845-1918)	(เยอรมัน)	แคนทอร์
Cardano, G. (1501-1576)	(อิตาลี)	คาร์ดาโน
Cauchy, A.L. (1789-1857)	(ฝรั่งเศส)	กอชี
Cavalieri, B. (1598-1647)	(อิตาลี)	คาวาลิเอรี
Cayley, A. (1821-1895)	(อังกฤษ)	เคย์เลย์
Chasles, M. (1793-1880)	(ฝรั่งเศส)	ชาสเลส์

ชื่อภาษาอังกฤษ	ชื่อภาษาไทย
Clairaut, A.C. (1731-1765) (ฝรั่งเศส)	แคลรอต
Colburn (อเมริกัน)	โคลเบอรน์
Copernicus, N. (1473-1543) (เยอรมัน)	โคเปอร์นิคัส
D'Alembert, Jean-le-Rond (1717-1783) (ฝรั่งเศส)	เดอ อเลมเบิร์ต
Dedekind, R. (1831-1916) (เยอรมัน)	เดดคินท์
De Moivre, A. (1667-1754) (ฝรั่งเศส)	เดอนูฟร์
De Morgan, A. (1806-1871) (อังกฤษ)	เดอมอร์แกน
Desargues, G. (1591-1661) (ฝรั่งเศส)	เดซาก
Descartes, R. (1596-1650) (ฝรั่งเศส)	เดการ์ต
Dupin, C. (1784-1873) (ฝรั่งเศส)	ดูแปง
Einstein (1879-1955) (อเมริกัน)	ไอน์สไตน์
Euclid (360-275? B.C.) (กรีก)	ยูคลิด
Eudoxus (408-355 B.C.) (กรีก)	ยูดอกซัส
Euler, L. (1707-1783) (สวิส)	ออยเลอร์
Fehr, H. (อเมริกัน)	เฟร์
Fermat, P. (1601-1665) (ฝรั่งเศส)	เฟอร์แมท
Fourier, J. (1768-1830) (ฝรั่งเศส)	ฟอเรียร์
Fréchet, M. (1878-) (ฝรั่งเศส)	เฟรเชท
Galileo Galilei (1564-1642) (อิตาลี)	กาลิเลโอ
Gauss, C.F., (1777-1855) (เยอรมัน)	เกาส์
Gergonne, J.D. (1771-1859) (ฝรั่งเศส)	เกอร์กอน
Gödel, K. (1906-) (เยอรมัน)	โกเดล
Grassmann, H. (1809-1877) (เยอรมัน)	แกรสมันน์
Gregory, D.F. (1813-1844) (สกอต)	เกรกอรี

ชื่อภาษาอังกฤษ		ชื่อภาษาไทย
Hamilton, W.R. (1805-1865)	(ไอร์แลนด์)	แฮมิลตัน
Harriot, T. (1560-1621)	(อังกฤษ)	แฮร์ริอท
Heaviside, O. (1850-1925)	(อังกฤษ)	เฮฟไซด์
Hilbert, D. (1862-1943)	(เยอรมัน)	ฮิลเบิร์ต
Hippocrates of Chios (ca 440 B.C.)	(กรีก)	ฮิปโปเครติส
Huntington, E.V. (1874-1952)	(อเมริกัน)	ฮันติงตัน
Huygens, C. (1629-1695)	(ดัตช์)	ไฮเกนส์
Jefferson	(อังกฤษ)	เจฟเฟอร์สัน
Kepler, J. (1571-1630)	(เยอรมัน)	เคปเลอร์
Klein, F. (1849-1929)	(เยอรมัน)	คลาเยน
Lagrange, J.L. (1736-1813)	(ฝรั่งเศส)	ลากร็องฌ์
Lambert, J.H. (1728-1777)	(เยอรมัน)	แลมเบิร์ต
Laplace, P.S. (1749-1827)	(ฝรั่งเศส)	ลาปลาซ
Legendre, A.M. (1752-1833)	(ฝรั่งเศส)	เลอฌ็องเดร
Leibnitz, G.W. (1646-1716)	(เยอรมัน)	ไลบ์นิทซ์
Lobachevsky, N.I. (1793-1856)	(รัสเซีย)	โลบาชเฝสกี
Maclaurin, C. (1698-1746)	(สกอต)	แมคเคลอริน
Menaechmus (ca. 350 B.C.)	(กรีก)	เมเนซมัส
Menelaus of Alexandria (ca. 100)	(กรีก)	เมนেলাส
Mersenne, M. (1588-1648)	(ฝรั่งเศส)	เมอร์เซิน
Möbius, A.F. (1790-1868)	(เยอรมัน)	ม็อบิอุส
Napier, J. (1550-1617)	(สกอต)	นาเพียร์
Newton, I. (1642-1727)	(อังกฤษ)	นิวตัน
Oresme, N. (ca. 1323-1382)	(ฝรั่งเศส)	โอเรสมี
Oughtred, W. (1574-1660)	(อังกฤษ)	อูเทรด

ชื่อภาษาอังกฤษ		ชื่อภาษาไทย
Pappus (ca. 300)	(กรีก)	แพพพัส
Parent, A. (1666-1716)		พาเรนท
Pascal, B. (1623-1662)	(ฝรั่งเศส)	พาสกาล
Pasch, M. (1843-1930)	(เยอรมัน)	พาช
Peano, G. (1858-1932)	(อิตาลี)	เปียนโน
Perry, J. (1850-1920)	(อังกฤษ)	เพอร์รี่
Pieri, M. (1860-1904)		เพียริ
Playfair, J. (1748-1819)	(สกอต)	เพลย์แฟร์
Plücker, J. (1801-1868)	(เยอรมัน)	พลักเกอร์
Poincaré, H. (1854-1912)	(ฝรั่งเศส)	พอยนคาเร่
Poncelet, J.V. (1788-1867)	(ฝรั่งเศส)	พองซีเลต์
Ptolemy, C. (100-168?)	(กรีก)	ปโตเลมี
Pythagoras (569-500 B.C.)	(กรีก)	ปิthagoras
Riemann, G.F.B. (1826-1866)	(เยอรมัน)	รีมันน์
Russell, B. (1872-)	(อังกฤษ)	รัสเซลล์
Saccheri, G. (1667-1733)	(อิตาลี)	แซคเคอรี
Servois, F. (ca. 1810)	(ฝรั่งเศส)	เซอร์วัวยส์
Staudt, K.G. C. Von (1798-1867)	(เยอรมัน)	สตาเดทท์
Steiner, J. (1796-1867)	(สวิส)	สไตเนอร์
Sylvester, J.J. (1814-1897)	(อังกฤษ)	ซิลเวสเตอร์
Taylor, B. (1685-1731)	(อังกฤษ)	เทย์เลอร์
Thales (ca. 600 B.C.)	(กรีก)	เทลีส
Theodorus of Cyrene (ca. 425 B.C.)	(กรีก)	ทีโอดอรัส
Veblen, O. (1880-1960)		วีเบลน
Viète, F. (1540-1603)	(ฝรั่งเศส)	เวียต
Weierstrass, K.W.T. (1815-1897)	(เยอรมัน)	เวียสทราส
Whitehead, A.N. (1861-1947)	(อังกฤษ)	ไวท์เฮด
Wilson, C.J.M. (1836-1931)	(อังกฤษ)	วิลสัน

ประวัติของมูลนิธิ

สุวรรณา มุ่งเกษม เกิดที่อำเภอบ้านสร้าง จังหวัดปราจีนบุรี เมื่อวันที่ ๕ มกราคม พ.ศ. ๒๔๔๕
จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่โรงเรียนสตรีปราจีนบุรี "ปราจิณกัญญา" หลังจากนั้นได้เข้าศึกษาต่อ
ที่วิทยาลัยครูสวนสุนันทา จนสำเร็จชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา ในปี พ.ศ. ๒๕๐๖

พ.ศ. ๒๕๑๑ สำเร็จปริญญาการศึกษามัธยมศึกษา เกียรตินิยม จากวิทยาลัยการศึกษาศรี ประสาธิน
และสำเร็จปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตในปี พ.ศ. ๒๕๑๓.