

516

ก188ก

185597

ว.3

การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา

ปริศยานิพนธ์

ของ

กรองทิพย์ พงษ์ฉิมศรี

ว. 9 ก.ธ. 2536

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริศนาการศึกษาฉบับอดีต วิชาเอกคณิตศาสตร์

ตุลาคม 2535

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

185597

ประกาศขอบคุณ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำเป็นอย่างดีจาก
รองศาสตราจารย์ ดร.ลาวัลย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ
อาจารย์ละเอียด บรรณานัติ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน ที่กรุณาให้คำปรึกษาทำให้ปริญญานิพนธ์
ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ไพศาล พงษ์เสรี และอาจารย์สมหมาย รัตนศิริชัย อาจารย์
โรงเรียนพุมเทพพิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย ที่กรุณาให้ความร่วมมือในการดำเนิน
การวิจัย และอาจารย์ดี บางกระ อาจารย์โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย ที่ให้ความร่วมมือ
ในการทดลองแบบทดสอบ

ขอขอบพระคุณ คุณณลินรัตน์ อภิชาติ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์
พิมพ์ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณ ๆ และน้องชายที่ช่วยพิสูจน์อักษรและเป็นกำลังใจให้กับผู้วิจัย

ท้ายสุดผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณของคุณพ่อไกรศักดิ์ คุณแม่พืชนี พงษ์ลิ้มศรี และ
คุณน้าอภิรนต์ ตั้งสกุล ที่ให้ความอุปการะในด้านกำลังใจและกำลังใจทรัพย์ ในการศึกษาของผู้วิจัย
ตลอดมา

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
คำนำ	1
ความมุ่งหมายของการค้นคว้า	4
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	5
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	5
นิยามศัพท์เฉพาะ	6
2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	8
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	8
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต	23
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา	23
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนเรขาคณิต	26
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ..	28
3 วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	32
กลุ่มตัวอย่าง	32
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	32
ระยะเวลาในการทดลอง	32
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	33
การดำเนินการทดลอง	35
การวิเคราะห์ข้อมูล	35

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	38
การวิเคราะห์ข้อมูล	38
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	38
5 บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	41
ความมุ่งหมายของการค้นคว้า	41
สมมติฐานการวิจัย	41
กลุ่มตัวอย่าง	41
วิธีดำเนินการวิจัย	42
การวิเคราะห์ข้อมูล	42
สรุปผลการทดลอง	42
อภิปรายผล	43
ข้อเสนอแนะ	46
บรรณานุกรม	48
ภาคผนวก	55
ภาคผนวก ก	56
ภาคผนวก ข	59
ภาคผนวก ค	67
ภาคผนวก ง	204
ประวัติย่อของผู้วิจัย	299

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

1	ผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน	
	กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	39
2	ผลการทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน	
	กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	40
3	การพัฒนาระดับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับ	
	การสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา	45
4	ความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	
	ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	58

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1 แผนผังของลำดับขั้นของการแก้ปัญหา

15

บทที่ 1

บทนำ

คำนำ

การดำรงชีวิตของมนุษย์ในปัจจุบันจะต้องเผชิญปัญหาต่าง ๆ ทั้งปัญหาสังคม ปัญหาเศรษฐกิจ ปัญหาการเมือง และปัญหาอื่น ๆ เป็นประจำทุกวัน ดังนั้นความสามารถที่มีประโยชน์กับบุคคลมากที่สุดคือ ความสามารถในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากการศึกษาเป็นเครื่องมือที่ช่วยเตรียมคนให้ดำรงชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุข ดังนั้นภาระหน้าที่หลักของสถานศึกษาทุกระดับนอกจากประสิทธิ์ประสาทวิทยาการต่าง ๆ แก่ผู้เรียนแล้ว ยังช่วยพัฒนาทักษะทางปัญญาซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนาความคิด กระบวนการคิด การให้เหตุผล และการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงได้บรรจุวิชาคณิตศาสตร์ไว้ในหลักสูตรของการระดับการศึกษา

หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ฉบับปรับปรุง พุทธศักราช 2533 ได้กำหนดจุดมุ่งหมายข้อหนึ่งดังนี้ เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์และข้อมูลที่ปรากฏในสิ่งแวดล้อม สามารถคิดอย่างมีเหตุผลและใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระเบียบชัดเจนและรัดกุม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2533 : 1) การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงต้องมุ่งให้ผู้เรียนมีความเข้าใจ รู้จักใช้ความคิด และแสดงออกซึ่งความคิดอย่างมีหลักการและเหตุผล

หลักสูตรคณิตศาสตร์ในปัจจุบันได้บรรจุเนื้อหาเรขาคณิตไว้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ทั้ง 3 ชั้น ดังนี้ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีเรื่องการวัดและการประมาณ เส้นตรงและมุม ความยาว พื้นที่และปริมาตร ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีเรื่องความเท่ากันทุกประการ พื้นที่ ปริมาตร และพื้นที่ผิว คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน และความคล้าย ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 รายวิชาเลือก 4 คาบต่อสัปดาห์ต่อภาคเรียน มีเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส วงกลม พื้นที่ผิว และปริมาตร ส่วนรายวิชาเลือก 2 คาบต่อสัปดาห์ต่อภาคเรียน มีเรื่องสัจพจน์ในวิชาเรขาคณิต ทฤษฎีบทเบื้องต้น

ทางเรขาคณิต ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน วงกลม ซึ่งการเรียนการสอนเรขาคณิตในแต่ละชั้นต่างมีจุดเน้นที่แตกต่างกัน ดังที่ สมพล เล็กสกุล ได้กล่าวว่า เนื้อหาเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จะเน้นหนักไปในทางปฏิบัติ มีกิจกรรมในห้องเรียนให้นักเรียนทำเพื่อให้ได้ข้อสรุปซึ่งสามารถนำไปใช้ต่อไป และฝึกทักษะให้นักเรียนใช้เครื่องมือได้อย่างคล่องแคล่วและถูกต้อง ไม่มีการพิสูจน์ มีเพียงการหัดให้นักเรียนเขียนแสดงเหตุผลเพื่ออธิบายวิธีการหรือคุณสมบัติที่ง่าย ๆ ออกมา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กิจกรรมการเรียนการสอนจะคล้ายกับในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่เพิ่มการฝึกให้นักเรียนรู้จักแสดงเหตุผลอธิบายถึงสิ่งต่าง ๆ ที่สรุปได้มากขึ้น ส่วนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 รายวิชาเลือก 4 คาบต่อสัปดาห์ต่อภาคเรียน การให้นักเรียนปฏิบัติและทำกิจกรรมในห้องเรียนลดลง แต่ไปเพิ่มการฝึกให้นักเรียนเขียนแสดงเหตุผลมากขึ้น และในรายวิชาเลือก 2 คาบต่อสัปดาห์ต่อภาคเรียน จะเน้นหนักในการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผน (สมพล เล็กสกุล. 2534 : 10) ความมุ่งหมายในการบรรจุเนื้อหาเรขาคณิตไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ประการหนึ่ง คือ ต้องการฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลภายใต้กฎเกณฑ์และกติกาต่าง ๆ ในรูปนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทประกอบกับสิ่งที่ทราบมาแล้วเพื่อนำไปหาข้อสรุปใหม่อย่างสมเหตุสมผล นอกจากนี้เนื้อหาเรขาคณิตที่เกี่ยวกับการพิสูจน์จะช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสฝึกการคิดอย่างมีเหตุผลในการแก้ปัญหา ดังที่สุเทพ ทองอยู่ ได้กล่าวถึงความมุ่งหมายของการสอนการพิสูจน์เรขาคณิตไว้ว่า เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีความคิดความเข้าใจในการให้เหตุผลและสามารถแสดงความคิดได้อย่างมีระเบียบ มีลำดับ มีความชัดเจน อันจะทำให้ผู้อื่นเข้าใจกระบวนการของการให้เหตุผล (สุเทพ ทองอยู่. 2534 : 1)

ในปัจจุบันพบว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นปัญหามากสำหรับครูคณิตศาสตร์และเป็นเนื้อหาหนึ่งที่นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ดังเห็นได้จากงานวิจัยของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ที่ได้ทำการสำรวจเกี่ยวกับการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั่วประเทศ ในปีการศึกษา 2523 พบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหาสำหรับครูมากเป็นอันดับ 2 คือ การพิสูจน์ในเรขาคณิต (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2527 : 16) ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของอภิญา คุณเลิศดี ที่พบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตการศึกษา 9 ในอันดับ 1 คือ การพิสูจน์ในเรขาคณิต (อภิญา คุณเลิศดี. 2534 : 85) และผลการวิจัยของจุไร ทวีรัตน์ ที่ทำการสำรวจเนื้อหา

คณิตศาสตร์ ค 203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 เขตการศึกษา 12 พบว่า การให้เหตุผลต่าง ๆ ในการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมีแนวโน้มเป็นปัญหามากขึ้น (จุโร ทวีรัตน์. 2527 : 71) เนื่องจากนักเรียนไม่คุ้นเคย หรือขาดประสบการณ์ในการให้เหตุผล และในแบบเรียนมีตัวอย่างที่จะเป็นแนวทางในการฝึกการพิสูจน์น้อยมาก จึงเป็นการยากที่จะทำให้ให้นักเรียนพิสูจน์เรขาคณิตได้ ชูลีพร สุกธีระ ได้กล่าวถึงสิ่งที่เป็นปัญหาสำหรับนักเรียนทำให้เรียนเรขาคณิตไม่ได้ผลดีเท่าที่ควร คือ นักเรียนไม่สามารถหาแนวทางพิสูจน์ได้เอง ใช้วิธีท่องจำการพิสูจน์ นักเรียนเขียนรูปไม่ถูกต้องและมักเขียนรูปตามความคุ้นเคยหรือเข้าข้างตนเองไม่อยู่ในรูปทั่ว ๆ ไป สรุปผลหรืออ้างอิงจากการดูรูปหรือจากการลอง เป็นต้น (ชูลีพร สุกธีระ. 2533 : 9) ซึ่งสอดคล้องกับความคิดเห็นของกรรณิกา คล่องกิจกุล ที่กล่าวไว้ว่า ปัญหาสำหรับนักเรียนคือ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์ได้เอง เพราะไม่ทราบแนวการพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่า จะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถโยงสิ่งที่มีอยู่แล้วหรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ (กรรณิกา คล่องกิจกุล. 2527 : 2) ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีทัศนคติที่ไม่ดีต่อวิชาเรขาคณิต ดังที่อาไพ ยมาภัย ได้กล่าวไว้ว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นว่าการเรียนเรขาคณิต คือ การต้องท่องจำทฤษฎีบท ต้องจำการพิสูจน์ของแต่ละทฤษฎีบทและจำการพิสูจน์ของแบบฝึกหัดแต่ละข้อ การเตรียมตัวสอบ ถ้าข้อสอบออกตรงกับทฤษฎีบทหรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนท่องได้ จะทำข้อสอบได้ มีนักเรียนส่วนน้อยที่สามารถคิดพิสูจน์แบบฝึกหัดที่ยังไม่เคยเห็นได้ (อาไพ ยมาภัย. 2527 : 121)

✱ การพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีปัญหามาก เช่น นักเรียนไม่ทราบว่า จะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถแยกแยะภาคเหตุและภาคผลของโจทย์ได้ นักเรียนเขียนรูปไม่เป็น หรือเขียนแล้วไม่ครอบคลุมตามที่ควรจะเป็นดังที่ระบุในภาคเหตุ (เมื่อกำหนดเหตุมาให้ให้นักเรียนบอกไม่ได้ว่าผลที่ตามมาคืออะไร หรือเมื่อกำหนดผลมาให้ให้นักเรียนบอกไม่ได้ว่ามาจากเหตุใดบ้าง) ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถลำดับเหตุและผลของการพิสูจน์ได้อย่างเป็นระบบ จึงทำให้นักเรียนพิสูจน์เรขาคณิตไม่ได้ จากการศึกษาจากเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องและประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของผู้วิจัย ทำให้ผู้วิจัยคิดว่าการสอนพิสูจน์เรขาคณิตควรเน้นกระบวนการแก้ปัญหา โดยการฝึกนักเรียนทีละขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 หาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์ ในขั้นนี้เป็นการทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหา เพื่อหาภาคเหตุของโจทย์ แล้วเขียนเป็นรูปและกำหนดสัญลักษณ์

ขั้นที่ 2 หาสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และแปลงเป็นสัญลักษณ์ ในขั้นนี้เป็นการทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหา เพื่อหาภาคผลของโจทย์แล้วแปลงเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 3 หาสิ่งที่จะได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาจากสัจพจน์ สิ่งที่เห็นจริง นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 4 ใช้กระบวนการวิเคราะห์ และสังเคราะห์จากสิ่งที่ได้จากขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 ในขั้นนี้เป็นการฝึกฝนการหาเหตุต่าง ๆ ของผล และเป็นการหาผลต่าง ๆ จากเหตุ

ขั้นที่ 5 เรียบเรียงการพิสูจน์ ในขั้นนี้เป็นการเรียบเรียงจากเหตุต่าง ๆ ตามลำดับไปสู่ผล หลังจากฝึกนักเรียนครบทั้ง 5 ขั้นตอนแล้ว จึงให้นักเรียนนำขั้นตอนทั้ง 5 มาฝึกการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อ การฝึกในลักษณะเช่นนี้จะช่วยให้นักเรียนสามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้

จากเหตุผลที่กล่าวมาทั้งหมด การสอนการพิสูจน์เรขาคณิตโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาตามขั้นตอนดังกล่าว มีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งในการเรียนการสอนเรขาคณิต หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 เป็นรายวิชาที่นักเรียนเริ่มเรียนการพิสูจน์เรขาคณิตอย่างเป็นแบบแผน ดังนั้น จึงจำเป็นต้องสอนให้นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง เนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม เป็นเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 และเป็นเนื้อหาที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการสอนการพิสูจน์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจึงทำการทดลองสอนการพิสูจน์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหากับเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

* ความมุ่งหมายของการค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาวิธีสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เพื่อสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ทำให้ได้สื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. เป็นการกระตุ้นให้ครูเห็นความสำคัญของการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งจะพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน
3. เป็นแนวทางสำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการสอนคณิตศาสตร์ ในการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา สำหรับเนื้อหาอื่น ๆ

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ของโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 จำนวน 6 ห้องเรียน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ของโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 จำนวน 2 ห้องเรียน

3. ระยะเวลาในการทดลอง

ใช้เวลาในการทดลอง 6 คาบ ๆ ละ 50 นาที ใช้เวลาในการสอบหลังการทดลอง สอน 1 ชั่วโมง

4. เนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

5. ตัวแปรที่ศึกษา

5.1 ตัวแปรอิสระ คือ

5.1.1 การสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา

5.1.2 การสอนตามปกติ

5.2 ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลอง ซึ่งวัดโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา หมายถึง การสอนพิสูจน์เรขาคณิตโดยการฝึกนักเรียนทีละขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์ ในขั้นนี้เป็นการทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหา เพื่อหาภาคเหตุของโจทย์ แล้วเขียนเป็นรูปและกำหนดสัญลักษณ์

ขั้นที่ 2 หาสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และแปลงเป็นสัญลักษณ์ ในขั้นนี้เป็นการทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหา เพื่อหาภาคผลของโจทย์แล้วแปลงเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 3 หาสิ่งที่จะได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาจากสัจพจน์ สิ่งที่เห็นจริง นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์

ขั้นที่ 4 ใช้กระบวนการวิเคราะห์ และสังเคราะห์จากสิ่งที่ได้จากขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 ในขั้นนี้เป็นการฝึกฝนการหาเหตุผลต่าง ๆ ของผล และเป็นการหาผลต่าง ๆ จากเหตุ

ขั้นที่ 5 เรียบเรียงการพิสูจน์ ในขั้นนี้เป็นการเรียบเรียงจากเหตุผลต่าง ๆ ตามลำดับไปสู่ผล

หลังจากฝึกนักเรียนครบทั้ง 5 ขั้นตอนแล้ว จึงให้นักเรียนนำขั้นตอนทั้ง 5 มาฝึกการแก้ปัญหาโจทย์แต่ละข้อ

2. การสอนตามปกติ หมายถึง การที่ครูประจำวิชาดำเนินการสอนไปตามปกติ
3. สื่อการเรียนการสอน หมายถึง บทเรียน แผนภาพ เอกสารฝึกหัด และแผ่นโปสเตอร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

งานวิจัยเรื่อง การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยที่
เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ความหมายและความสำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1957 : 4 - 5) ได้ให้นิยามของการแก้ปัญหาไว้ว่า การแก้ปัญหา
เป็น ความสามารถพิเศษของสมอง และความสามารถพิเศษของสมองก็เป็นพรสวรรค์ของบุคคล
ทำให้บุคคลนั้นมีความสามารถพิเศษเหนือผู้อื่น

วรรณดี วรรณศิลป์ (2522 : 12) ได้ให้นิยามของการแก้ปัญหาไว้ว่าการแก้ปัญหาเป็น
พฤติกรรม แบบแผน หรือวิธีการดำเนินงานที่ย่างยากซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้ ความคิด ประสบการณ์
วิธีการและขั้นตอนในการศึกษาปัญหาเพื่อให้บรรลุถึงจุดมุ่งหมายที่ต้องการ

อาดัมส์ (Adams. 1977 : 175) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาว่า การแก้ปัญหาเป็น
กระบวนการซับซ้อนทางสมองที่นำไปสู่การจินตนาการ การคิดเป็นนามธรรมและการเชื่อมโยง
ความคิดต่าง ๆ ที่สำคัญคือต้องมีความสามารถในการพัฒนารูปแบบ เพราะรูปแบบของการแก้ปัญหา
ที่เคยแก้สำเร็จในปัญหาหนึ่ง อาจใช้ไม่ได้ในปัญหาอื่น ดังนั้น การพัฒนารูปแบบการคิดไปสู่รูปแบบ
การคิดที่ยากขึ้นจึงจำเป็นมาก

ครูลีค และเรย์ (Kulik and Reys. 1980 : 3 - 4) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหา พอสรุปได้ดังนี้ คือ

1. การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมายอันหนึ่ง (problem solving as a goal) มักมีคำถามว่า ทำไมจึงต้องสอนคณิตศาสตร์ หรืออะไรเป็นเป้าหมายในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ทั้งนักการศึกษา นักคณิตศาสตร์ และบุคคลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำถามเหล่านี้มักเข้าใจว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ เมื่อการแก้ปัญหามองมาพิจารณาว่าเป็นเป้าหมายอันหนึ่ง การแก้ปัญหาจึงเป็นอิสระจากปัญหาเฉพาะ (specific problem) กระบวนการและวิธีการ ตลอดจนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ แต่การพิจารณาที่สำคัญคือ จะต้องคำนึงถึงว่าจะแก้ปัญหาอย่างไร ซึ่งเป็นเหตุผลแรกสำหรับศึกษาคณิตศาสตร์ ข้อพิจารณานี้มีอิทธิพลต่อหลักสูตรทั้งหมดและมีความสำคัญต่อการนำไปใช้ในการฝึกปฏิบัติในห้องเรียน

2. การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการอันหนึ่ง (problem solving as a process) ซึ่งการตีความในลักษณะนี้จะเห็นได้ชัดเจนในการที่นักเรียนตอบปัญหา ตลอดจนกระบวนการหรือขั้นตอนที่กระทำเพื่อจะได้ถึงคำตอบ สิ่งสำคัญที่ควรนำมาพิจารณา คือ วิธีการ กระบวนการ และกลวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในกระบวนการแก้ปัญหา และเป็นจุดสำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์

3. การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐานอันหนึ่ง (problem solving as a basic skill) การตีความลักษณะนี้ จะพิจารณาเฉพาะเนื้อหาที่เป็นโจทย์ปัญหา คำนึงถึงรูปแบบของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหา การพิจารณาถึงการแก้ปัญหว่าเป็นทักษะพื้นฐาน จึงช่วยในการจัดการเรียนการสอนของครู ซึ่งควรจะประกอบด้วย การสอนทักษะ (skill) มโนคติ (concepts) และการแก้ปัญหา (problem solving) ในทุกครั้งของการสอน

จากที่กล่าวมาทั้งหมด สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคือกระบวนการทางสมองในการรวบรวมความรู้ที่เคยเรียนมาทั้งหมดของแต่ละบุคคล มาใช้ให้เหมาะสมกับสถานการณ์ที่กำลังเผชิญอยู่ ณ ขณะนั้น การแก้ปัญหาคือความสามารถเฉพาะตัวของบุคคล ซึ่งอาจแตกต่างกันไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของบุคคล วุฒิภาวะของสมอง สถานการณ์ของปัญหา และความสนใจของบุคคลที่มีต่อปัญหานั้น

ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีผู้แบ่งลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ต่าง ๆ กัน ดังจะกล่าวต่อไปนี้

สุเทพ ทองอยู่ (2533 : 1) ได้กล่าวถึงปัญหาคณิตศาสตร์ และแบ่งลักษณะปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็น 2 ลักษณะคือ

1. ปัญหาให้ค้นหา ซึ่งมีวัตถุประสงค์ให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ อาจเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎีหรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม เช่น ในเลขคณิต สิ่งที่ต้องการหาอาจได้แก่ ผลบวก ผลลบ ผลคูณ ฯลฯ ในพีชคณิต สิ่งที่ต้องการหาอาจเป็น ค่าของตัวแปร ในเรขาคณิตอาจเป็นการสร้างต่าง ๆ ทางเรขาคณิต เช่น การแบ่งมุม การสร้างรูปหลายเหลี่ยม การหาพื้นที่ ฯลฯ ส่วนในตรีโกณมิติ สิ่งที่ต้องการหาอาจได้แก่ ระยะทาง ความสูง ฯลฯ ส่วนสำคัญของปัญหาให้ค้นหาแบ่งเป็น 3 ส่วน คือ

- 1.1 สิ่งที่ต้องการหา
- 1.2 ข้อมูลที่กำหนด
- 1.3 เงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหากับข้อมูลที่กำหนด

2. ปัญหาให้พิสูจน์ ซึ่งมีวัตถุประสงค์ให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่า "ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง" หรือ "ข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ" นั่นคือ ให้พิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ปัญหาในลักษณะนี้ส่วนใหญ่มักจะอยู่ในรูป "ถ้า p แล้ว q " ในกรณีเช่นนี้ ส่วนสำคัญของปัญหาให้พิสูจน์จึงแบ่งได้ 2 ส่วน คือ

- 2.1 สมมติฐาน หรือสิ่งที่กำหนด คือ p
- 2.2 ผลสรุป หรือสิ่งที่จะต้องพิสูจน์ คือ q

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 133) ได้กล่าวถึงปัญหาคณิตศาสตร์ที่จะนำมาให้นักเรียนฝึกการแก้ปัญห แบ่งได้เป็น 4 ลักษณะ ดังนี้คือ

1. ปัญหาที่นักเรียนจะต้องค้นหาความจริงหรือข้อสรุปใหม่ที่ผู้เรียนไม่เคยเรียนมาก่อน
2. ปัญหาเกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท
3. ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีต่าง ๆ มาใช้ในการแก้ปัญห
4. ปัญหาอื่น ๆ ที่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญห

องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหา

ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์พบว่า มีนักเรียนส่วนมากหาคำตอบของปัญหาได้แต่ไม่สามารถแสดงวิธีทำได้ และพบว่าสิ่งที่เป็นปัญหาสำหรับนักเรียนที่แก้ปัญหานำไม่ได้คือ นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นแก้ปัญหายังไร ซึ่งก็มีนักการศึกษา นักจิตวิทยาและนักคณิตศาสตร์ หลายคนได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหา ดังนี้

อาดัมส์ (Adams. 1977 : 174 - 175) ได้กล่าวถึงความสามารถที่จำเป็นในการแก้ปัญหาดังนี้คือ

1. ความสามารถทางด้านสติปัญญา เนื่องจากการแก้ปัญหามักต้องใช้กระบวนการคิดในระดับสูง ดังนั้นสติปัญญาก็มีความสำคัญมาก
2. ความสามารถในการอ่าน ส่วนมากโจทย์ปัญหามักเป็นประเภทโจทย์ภาษา ดังนั้นผู้แก้ปัญหามักควรมีความรู้ในศัพท์ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ก่อนลงมือแก้ปัญหาก็ควรทำความเข้าใจโจทย์โดยการอ่านด้วยความระมัดระวัง วิเคราะห์สิ่งที่อ่าน หาเงื่อนไขของปัญหาจากโจทย์เพื่อช่วยในการตัดสินใจ
3. ความสามารถทางด้านทักษะพื้นฐาน หลังจากทบทวนโจทย์ปัญหาและตัดสินใจว่าจะลงมือแก้ปัญหายังไรแล้ว จะต้องมีความสามารถทางด้านทักษะพื้นฐานด้วย

จอห์นสัน และไรซิง (Johnson and Rising. 1969 : 108) กล่าวถึงการแก้ปัญหว่าเป็นกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ซึ่งประกอบด้วย

1. การมองเห็นภาพ (visualizing)
2. การจินตนาการ (imagining)
3. การจัดกระทำอย่างมีทักษะ (manipulating)
4. การวิเคราะห์ (analyzing)
5. การสรุปในเชิงนามธรรม (abstracting)
6. การเชื่อมโยงความคิด (associating idea)

คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย (2524 : 141) กล่าวว่านักเรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหานั้น นักเรียนควรจะได้รับการฝึกฝนให้มีความรู้ความสามารถพื้นฐาน และมีองค์ประกอบในด้านเจตคติ ที่จะช่วยให้เป็นพลังสำคัญในการแก้ปัญหา ซึ่งความสามารถดังกล่าว ประกอบด้วย

1. มีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจ มีมโนคติ และทักษะในเนื้อหาที่เกี่ยวกับ
ปัญหานั้น ๆ
2. มีความสามารถในการอ่าน การตีความและขยายความ
3. มีความสามารถในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มีอยู่ และความรู้เดิม
4. มีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน การวิเคราะห์หารูปแบบ
และหาข้อสรุป
5. มีความพอใจในความรู้ มีความกระตือรือร้น ความอยากรู้อยากเห็น
6. มีความศรัทธา มีกำลังใจ และมีความอดทนในการแก้ปัญหา

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ (Schmalz. 1989 : 685 - 686 ; citing The National Council of Teachers of Mathematics. NCTM : n.d.) ได้กล่าวถึง องค์ประกอบทางด้านทัศนคติที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา ได้แก่

1. มีความมั่นใจในการใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการสื่อสาร การใช้เหตุผลและการแก้ปัญหา
2. มีความยืดหยุ่นในการสำรวจความคิดทางคณิตศาสตร์ และพยายามสลับขั้นตอนของกระบวนการในการหาผลลัพธ์ของปัญหา
3. มีความตั้งใจจริงและพอใจที่จะทำงานตามขั้นตอนทางคณิตศาสตร์
4. มีความสนใจ อยากรู้อยากเห็นและมีความคิดพิจารณาทางคณิตศาสตร์
5. มีความชอบที่จะตรวจสอบ สามารถคิดและกระทำได้ด้วยตนเอง

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถทางสติปัญญา ซึ่งได้แก่ การอ่าน การวิเคราะห์ การคำนวณ การมองเห็นภาพ ฯลฯ แล้วก็ต้องอาศัยประสบการณ์ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะมีส่วนช่วยทำให้สามารถแก้ปัญหาได้รวดเร็ว ถูกต้อง และมีประสิทธิภาพมากขึ้น

ยุทธศาสตร์การแก้ปัญหา

วิธีการแก้ปัญหามีมากมายหลายวิธีแล้วแต่จะจำแนกลักษณะที่แตกต่างกันออกไป ขึ้นตอนในการแก้ปัญหาหรือที่เรียกว่า ยุทธศาสตร์การแก้ปัญหา ซึ่งมีผู้ศึกษาและรวบรวมไว้ดังนี้

โพลยา (Polya. 1957 : 5 - 22) ผู้เป็นต้นแบบในเรื่องการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงยุทธศาสตร์การแก้ปัญหา ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (understanding the problem) ในขั้นแรกต้องทำความเข้าใจกับ คำ วลี ประโยคย่อย ๆ หรือสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา จะถือว่ามีความเข้าใจปัญหาก็คือเมื่อสามารถแยกและระบุส่วนสำคัญของปัญหาแต่ละส่วน กล่าวคือสิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนด และเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนด
2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา (devising a plan) หลังจากขั้นนักเรียนมีความสามารถในการแยก และระบุสิ่งต่าง ๆ ในปัญหาได้แล้ว นักเรียนจะต้องพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล จากข้อมูลที่กำหนดหรือสมมติฐานจะนำไปสู่ผลใดได้บ้าง และมีข้อมูลใดบ้างที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการหาหรือผลสรุป ทั้งนี้สิ่งสำคัญที่นักเรียนจะต้องทำในขั้นนี้ คือ การนึกทบทวนความรู้เดิม รวมทั้งพิจารณาปัญหาที่เคยแก้มาแล้วที่มีความคล้ายคลึง หรือมีส่วนใกล้เคียงกับปัญหาที่ต้องการแก้ ในการวางแผนควรแบ่งเป็นขั้น ๆ โดยแบ่งออกเป็นขั้นตอนใหญ่ ๆ และในขั้นใหญ่ ๆ จะแบ่งออกเป็นขั้นเล็ก ๆ อีกมากมาย ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาต้องได้รับการฝึกสมองให้คิดและให้เหตุผลมาเป็นอย่างดี ทั้งยังต้องมีความสนใจและตั้งใจจริงในแก้ปัญหา จึงถือว่าขั้นนี้เป็นขั้นที่สำคัญ และยากที่สุดในการแก้ปัญหา
3. ขั้นดำเนินการตามแผน (carrying out the plan) ขั้นนี้เป็นเพียงการรวบรวมและเรียบเรียงแนวคิดจากขั้นที่ 2 ให้เป็นระเบียบ ชัดเจน แล้วลงมือคิดคำนวณหาคำตอบของปัญหา สิ่งทีนักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคำนวณ นักเรียนควรเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสมโดยปกติแล้วขั้นนี้เป็นขั้นตอนที่จะแสดงให้เห็นวิธีแก้ปัญหา
4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา (looking back) เป็นขั้นตอนที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง เพราะการตรวจสอบกระบวนการทำให้เข้าใจปัญหา และวิธีการแก้ปัญหาโดยส่วนรวมทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญห่อื่น ๆ ได้ ซึ่งขั้นตอนนี้จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา หรือแม้กระทั่งคิดแปลงวิธีการแก้ปัญหาย่อย สั้น หรือชัดเจนยิ่งขึ้น

ครูลิค และเรย์ (Krulik and Reys. 1980 : ปกใน) กล่าวถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาวัดดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา พิจารณาว่าอะไรเป็นตัวที่ไม่ทราบค่า มีข้อมูลหรือเงื่อนไขอะไรบ้าง สิ่งที่เราต้องบอกมาเพียงพอในการแก้ปัญหหรือไม่ ในการพิจารณาอาจจะสร้างภาพประกอบความเข้าใจ แยกแยะส่วนต่าง ๆ ของสิ่งที่โจทย์บอกแล้วเขียนลงไปว่ามีอะไรบ้าง

2. วางแผนในการแก้ปัญหาคือหาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่โจทย์ให้มา กับตัวที่ไม่ทราบค่า พิจารณาปัญหาย่อย เทียบเคียงปัญหาเดิมที่คล้ายคลึงกัน ค้นหาทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ที่จะนำมาใช้แล้วลงมือแก้ปัญหาคือ

3. ดำเนินการตามแผน เมื่อวางแผนแล้วก็ดำเนินการตามแผนที่ และควรทำการตรวจสอบที่ละขั้นตอนว่าถูกต้องหรือไม่

4. ขึ้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาคือเมื่อทำเสร็จแล้วต้องตรวจสอบอีกครั้งหนึ่งว่าใช้ข้อมูลหมดหรือยัง ตอบคำถามครบทุกข้อหรือไม่

ทอลตัน (Talton. 1988 : 40) ได้ศึกษาและรวบรวมขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาจากตำราคณิตศาสตร์ที่ผลิตในช่วง ค.ศ. 1960 - 1979 พบว่าผู้เขียนตำราหลายท่านในสมัยนั้นแนะนำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนดังนี้

1. อ่านโจทย์
2. กำหนดว่าโจทย์ถามอะไรบ้าง
3. กำหนดว่าโจทย์ให้หอะไรบ้าง
4. เลือกวิธีการ
5. ลงมือแก้ปัญหาคือ

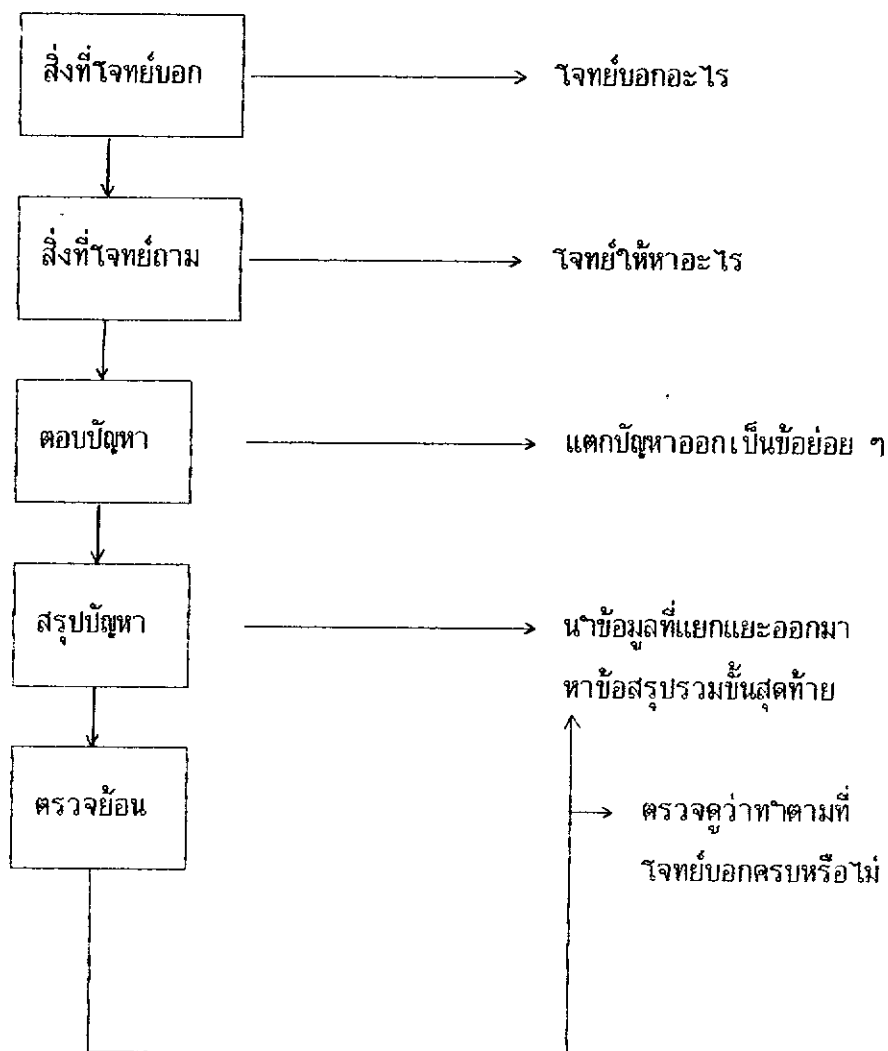
ส่วนในช่วง ค.ศ. 1980 - 1989 ทอลตันได้ศึกษาจากผลการวิจัยของไพลยาและคนอื่น ๆ ได้ข้อสรุปว่า ในการแก้ปัญหามีการส่งเสริมให้นักเรียนเพิ่มทักษะการคิดวางแผนแก้ปัญหาคือใช้ขั้นตอนดังนี้

1. อ่านโจทย์
2. วางแผนการแก้ปัญหาคืออาจสร้างตาราง คิดย้อนกลับ ใช้ตรรกศาสตร์ เขียนแผนภาพ แปลงปัญหาให้ง่ายขึ้น เลือกวิธีการ เค้าและทดสอบ หรืออื่น ๆ

3. คำเน้นการแก้ปัญหา

4. ตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 136) ได้สรุปแผนผังของลำดับขั้นของการแก้ปัญหาไว้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 แผนผังของลำดับขั้นของการแก้ปัญหา

2. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

ทฤษฎีการเรียนรู้

มีนักการศึกษาหลายท่านได้ศึกษาการเรียนรู้ของเด็ก เช่น พือาเจต์ (ส่ววัฒนา อุทัยรัตน์. 2526 : 102 - 103 ; อ้างอิงมาจาก Piaget. : n.d.) ได้ศึกษาพัฒนาการของเด็ก และแบ่งเป็นขั้นต่าง ๆ หลายขั้น ซึ่งขั้นหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับเด็กระดับมัธยมศึกษาตอนต้น คือ ขั้นปฏิบัติการนามธรรมได้ (formal operational stage) เริ่มจากอายุ 11 หรือ 12 ปี จนกระทั่งถึงอายุ 14 หรือ 15 ปี เป็นระยะที่เด็กเริ่มคิดในรูปของการตั้งสมมติฐาน และทดสอบสมมติฐาน สิ่งที่เด็กคิดจึงเกินเลยจากสิ่งที่ได้รับรู้เพราะเด็กสามารถคิดในเชิงตรรกได้ เช่น ถ้า A มากกว่า B และ B มากกว่า C เด็กจะรู้จักคิดต่อไปได้ทันทีว่า A มากกว่า C ด้วยความสามารถในการคิดทบทวนนี้เป็นความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรม ซึ่งความสามารถนี้จะเริ่มพัฒนาในระยะปฏิบัติการนามธรรม ทั้งนี้ในทางคณิตศาสตร์ พือาเจต์ ได้กล่าวว่า เด็กอายุ 11 ถึง 15 ปี สามารถนำความคิดที่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่เป็นรูปธรรม มีการคิดที่เป็นอิสระขึ้น และสามารถคิดสิ่งที่เป็นามธรรมได้ สามารถสรุปและอนุมานจากสมมติฐานได้

บรูเนอร์ (ส่ววัฒนา อุทัยรัตน์. 2526 : 104 ; อ้างอิงมาจาก Bruner. : n.d.) เชื่อว่ามนุษย์จะมีความพร้อมด้วยการฝึกฝน คือ ได้รับการฝึกฝนไม่ใช่ออกยให้เกิดความพร้อมเสียก่อน ซึ่งความพร้อมจะไม่ขึ้นกับวุฒิภาวะทั้งหมด แต่ไม่ใช่ว่าวุฒิภาวะไม่เป็นสิ่งสำคัญ แต่สิ่งสำคัญอยู่ที่ครูจะจัดกิจกรรมเพื่อเสริมประสบการณ์แก่นักเรียน ดังที่บรูเนอร์ ได้เสนอแนวความคิดเกี่ยวกับโครงสร้างของเนื้อหาวิชา (concept of structure) ว่า เราสามารถสอนเนื้อหาวิชาใดก็ตามได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยวิธีการที่ปรับให้เหมาะสมแก่เด็กคนใด เมื่อใดก็ได้

ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีความสามารถในการคิดหาเหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ได้ กล่าวคือ สามารถจะพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ได้ การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ได้มุ่งให้นักเรียนจำได้ แต่จุดมุ่งหมายหลักคือ ให้นักเรียนได้พัฒนากระบวนการคิดทางนามธรรมได้

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. คำนิยาม (undefined term) เป็นคำที่นำมาใช้โดยไม่ต้องอธิบายความหมายหรือให้คำจำกัดความ แต่ผู้เรียนจะเข้าใจคำเหล่านี้ได้โดยอาศัยประสบการณ์หรือตัวอย่าง ตัวอย่างคำนิยามได้แก่ จุด เส้นตรง เป็นต้น
2. สัจพจน์ (axiom) เป็นข้อความที่ยอมรับหรือถือว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์
3. คำนิยาม (defined term) เป็นคำที่นำมาใช้โดยต้องอธิบายความหมายหรือให้คำจำกัดความ ตัวอย่างคำนิยามได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น
4. ทฤษฎีบท (theorem) เป็นข้อความที่พิสูจน์ได้โดยอาศัยคำนิยาม สัจพจน์ คำนิยาม และทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่พิสูจน์มาแล้ว

เรขาคณิต ซึ่งเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ก็มีโครงสร้างดังกล่าวคือ นิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นความรู้พื้นฐาน แล้วใช้ตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์หรืออนุมานความรู้ต่าง ๆ ในการพิสูจน์ หรือแก้ปัญหาต่าง ๆ

เนื้อหาเรขาคณิตที่บรรจุในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นเรขาคณิตในระบบยุคลิด ซึ่งสุเทพ ทองอยู่ (2534 : 1) ได้กล่าวถึงวัตถุประสงค์ในการสอนการพิสูจน์ในเรขาคณิตไว้ว่า เพื่อพัฒนานักเรียนให้มีความคิด ความเข้าใจในการให้เหตุผล และสามารถแสดงความคิดได้อย่างมีระเบียบ มีลำดับ มีความชัดเจน อันจะทำให้บุคคลอื่นที่มาดูการพิสูจน์เข้าใจกระบวนการของการให้เหตุผลนั้น

วิธีการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ธนชัย ภูอุดม (2524 : 1) ได้กล่าวถึง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ว่ามีรูปแบบการพิสูจน์ 2 แบบ คือ

1. การพิสูจน์ทางตรง (direct proof) เป็นการพิสูจน์ที่เริ่มต้นจากเหตุ หรือ สมมติฐาน หรือข้อความที่เรายอมรับมาก่อน นำไปสู่ผลสรุปตามต้องการ

2. การพิสูจน์ทางอ้อม (indirect proof) วิธีนี้ได้เริ่มต้นจากเหตุแต่เริ่มจากผลสรุป กล่าวคือ เราคิดว่าถ้าผลสรุปเป็นเท็จจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง หากว่าการที่ผลสรุปเป็นเท็จนำไปสู่การขัดแย้งกัน กล่าวคือ ได้ข้อความข้อความหนึ่งที่เป็นจริงและเป็นเท็จในขณะเดียวกัน แล้วเราจะสรุปว่าสมมติฐานที่ว่า ผลสรุปเป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ นั่นคือผลสรุปต้องเป็นจริง

สุเทพ ทองอยู่ (2534 : 1 - 3) กล่าวว่า การพิสูจน์เรขาคณิตเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย หรือ อณูมาน (deductive reasoning) ซึ่งการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่อ้างว่าข้ออ้างยืนยันผลสรุป หรือผลสรุปนั้นเป็นผลสรุปที่แน่นอนจากข้ออ้าง การให้เหตุผลจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ ถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแล้วผลสรุปต้องเป็นจริงด้วย ถ้าข้ออ้างทุกข้อเป็นจริงแต่ผลสรุปเป็นเท็จ การให้เหตุผลไม่สมเหตุสมผล รูปแบบของการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลพื้นฐานหรือเรียกว่า กฎของการให้เหตุผล ได้แก่

1. การแจงผลตามเหตุ
 - (1) ถ้า p แล้ว q
 - (2) p
 - ดังนั้น q
2. การแจงผลค้านเหตุ
 - (1) ถ้า p แล้ว q
 - (2) ไม่ใช่ q
 - ดังนั้น ไม่ใช่ p
3. กฎของตรรกบท
 - (1) ถ้า p แล้ว q
 - (2) ถ้า q แล้ว r
 - ดังนั้น ถ้า p แล้ว r
4. การอนุมานร่วม
 - (1) p
 - (2) q
 - ดังนั้น p และ q

5. กฎของการทำให้ง่าย

(1) p และ q

ดังนั้น p

แต่อย่างไรก็ตาม ข้อความที่จะพิสูจน์ในเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมักจะอยู่ในรูป "ถ้า p แล้ว q " โดยที่ p คือข้ออ้างหรือข้อความที่กำหนดให้ ซึ่งอาจประกอบด้วยหลายข้อความ และ q คือผลสรุป หรือข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ในการพิสูจน์จะใช้ข้อความที่กำหนดให้ นิยาม สัจพจน์ รวมทั้งข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้วมาอ้างอิงเพื่อสรุปให้ได้ผลตามที่ต้องการ

ในการพิสูจน์เรขาคณิต แม้ว่านักเรียนจะทราบถึงรูปแบบการพิสูจน์ว่ามีอะไรบ้าง แต่บางทีนักเรียนอาจจะไม่ทราบว่า จะเริ่มต้นพิสูจน์อย่างไร ผู้เรียนจึงควรมีความรู้พื้นฐานที่จำเป็นเพื่อช่วยให้สามารถดำเนินการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งมีนักคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการพิสูจน์เรขาคณิตไว้ดังนี้

กูเซอร์ และคนอื่น ๆ (Guser and others. 1988 : 10) ได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ 3 ประการ คือ

1. ความรู้ทางด้านเรขาคณิต เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กับทฤษฎีบทที่เคยเรียนรู้มาก่อน โดยอาศัยการใช้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์

2. ความรู้ทางด้านพีชคณิต เพื่อค้นพบสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ หรือต้องการหาขนาด โดยการคำนวณโดยตรงที่อาศัยพื้นฐานของความสัมพันธ์ของขนาดของสิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดให้ โดยอาศัยสมการ หรือระบบสมการ

3. การใช้ทั้งความรู้ด้านเรขาคณิต และด้านพีชคณิตร่วมกันในการแก้ปัญหา

สุเทพ ทองอยู่ (2533 : 11) ได้กล่าวถึง กระบวนการที่จำเป็นต่อการใช้ในการพิสูจน์ไว้ 2 กระบวนการ ดังนี้

1. การสังเคราะห์ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่เริ่มจากข้อมูลที่กำหนดหรือสมมติฐานดำเนินการไปเรื่อย ๆ จนถึงสิ่งที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุป ดังนั้นผู้แก้ปัญหาก็ต้องพยายามแยกย่อยสมมติฐาน และพิจารณาว่าสมมติฐานแต่ละส่วนสามารถสรุปผลใดได้บ้าง จากนั้นใช้ความรู้ต่าง ๆ ที่เคยทราบมาก่อนรวมทั้งผลที่ได้จากสมมติฐานหาเหตุผลที่ชัดเจนเพื่อนำไปสู่ผลสรุป

2. การวิเคราะห์ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่กลับกันกับการสังเคราะห์ โดยเริ่มจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ หรือผลสรุปย้อนกลับไปถึงข้อมูลที่กำหนด หรือสมมติฐาน ผู้พิสูจน์จะต้องพิจารณาว่ามีข้อมูลใดนำไปสู่ข้อมูลที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะถึงข้อมูล ซึ่งสามารถสรุปได้จากข้อมูลที่กำหนด หรือข้อมูลที่เคยเรียนรู้มาก่อน

กระบวนการที่กล่าวมาข้างต้นมีความจำเป็นมากในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรขาคณิต ซึ่งเวลาที่พิสูจน์จะต้องใช้กระบวนการต่าง ๆ อยู่ตลอดเวลา ดังที่ ยูพิน พิพิธกุล (2518 : 59) ได้กล่าวถึงการพิสูจน์ปัญหาเรขาคณิตไว้ว่า อาจจะเริ่มต้นจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์วิเคราะห์ย้อนกลับไปหาเหตุที่ละชั้น กล่าวคือจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์พิจารณาว่าน่าจะมีเหตุมาจากสิ่งใดและเหตุนั้น ๆ ใจที่ยกหนดให้หรือยัง ทำเป็นลำดับเช่นนี้จนสามารถแสดงให้เห็นว่าเหตุนั้น ๆ ยังคงความสัมพันธ์กับข้อมูลในตัวปัญหา จากนั้นจึงเริ่มต้นพิสูจน์จากเหตุไปสู่ผล จนได้สิ่งที่ต้องการอีกครั้งหนึ่ง

การเรียนการสอนเรขาคณิตเท่าที่ผ่านมามีอุปสรรคต่าง ๆ เกิดขึ้นกับนักเรียน ทำให้ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง ไม่ว่าจะเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือการพิสูจน์โจทย์ปัญหา ซึ่ง ชูลีพร สุภธีระ (2533 : 9) ได้กล่าวถึงปัญหาที่ทำให้นักเรียนเรียนเรขาคณิตไม่ได้ผลดีเท่าที่ควร ดังนี้

1. อ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจความหมายของโจทย์ หรือทฤษฎีบทนั้น
2. ไม่สามารถแยกแยะโจทย์ได้ว่าข้อความตอนใดเป็นสิ่งที่กำหนดให้ และตอนใด

เป็นผลที่ต้องการพิสูจน์

3. นักเรียนขาดพื้นฐานทางเรขาคณิตบางประการ จึงไม่สามารถแก้ปัญหาได้
4. นักเรียนไม่สามารถหาแนวคิดพิสูจน์ได้
5. นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มค้น เขียนอะไรก่อน
6. การลำดับขั้นตอนการเขียนการพิสูจน์ยังไม่ต่อเนื่อง (กระโดดไปกระโดดมา)
7. เขียนการพิสูจน์วกไปวนมา ไม่ได้จุดที่ต้องการ
8. ใช้วิธีท่องจำการพิสูจน์
9. มีความสนใจต่อการเรียนและการทำแบบฝึกหัดน้อยไป
10. ไม่มีความอดทนต่อการเขียนการพิสูจน์
11. ทำงานไม่เป็นระบบ ไม่มีแบบแผน รับแรงจูงใจขาดความระมัดระวัง

12. เขียนรูปไม่ถูกต้อง มักจะเขียนรูปตามความคุ้นเคย หรือเข้าข้างตนเอง (ไม่เป็นรูปทั่วไป)

13. สรุปผลหรืออ้างอิงจากการสรุป หรือจากการลอง จากปัญหาต่าง ๆ ที่พบ จึงมีนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่าน ได้กล่าวถึงขั้นตอนการพิสูจน์เรขาคณิตไว้ดังนี้

ออร์ลีส์ (Orleans. 1958 : 41) ได้กล่าวถึงการพิสูจน์เรขาคณิต ดังนี้

1. โจทย์ให้อะไรมา (เรียกว่า สมมติฐาน)
2. โจทย์ให้พิสูจน์อะไร (เรียกว่า ข้อสรุป)
3. วางแผนการพิสูจน์
4. เรียบเรียงข้อความไปตามลำดับการให้เหตุผล จนถึงข้อความสุดท้ายซึ่งเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
5. การให้เหตุผลจะต้องเป็นไปตามข้อความที่กำหนดให้ นิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เคยพิสูจน์มาแล้ว

คณะกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย (2524 : 147) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถนำมาใช้กับการพิสูจน์เรขาคณิต ไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา โดยพิจารณาแยกระหว่างสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการหา
2. จากสิ่งที่กำหนดให้ แปลงให้อยู่ในรูปที่เห็นชัดเจนขึ้น โดยใช้แผนภาพหรือรูปภาพประกอบ
3. จากภาพที่สร้างขึ้น พิจารณาเงื่อนไขอื่นเพิ่มเติม โดยอาศัยนิยาม คุณสมบัติ และทฤษฎีต่าง ๆ ที่เคยเรียนรู้มาก่อนแล้ว
4. พิจารณาวานบรรดาสิ่งที่กำหนดให้กับเงื่อนไขที่ได้เพิ่มเติมมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร หรือมีเงื่อนไขอื่นเพิ่มเติมอีกหรือไม่
5. หาวิธีแก้ปัญหาโดยพิจารณาถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกันและทดลองเลียนแบบวิธีแก้ปัญหาหรืออาจวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์ต้องการ พิจารณาว่าต้องมีเงื่อนไขได้อีกบ้างจึงจะได้สิ่งที่ต้องการ และเงื่อนไขนั้นหามาได้อย่างไร

6. เรียบเรียงจัดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา
7. ทดสอบคำตอบว่าสมเหตุสมผลหรือไม่
8. ถ้าการแก้ปัญหามีได้หลายวิธีให้เลือกวิธีที่ง่ายที่สุด และสั้นที่สุด

พรรรถิพย์ ม้ามณี (2520 : 77 - 78) ได้แนะนำเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือ ใจทย์เรขาคณิตไว้ดังนี้

1. อ่านใจทย์ให้ละเอียดแล้วแยกแยะว่าใจทย์กำหนดอะไรและต้องการพิสูจน์อะไร
2. เขียนรูปในแบบทั่ว ๆ ไป โดยปราศจากความลำเอียง
3. รูปที่เขียนพยายามให้ชัดเจนเพื่อง่ายแก่การพิสูจน์
4. พยายามเลี่ยงการใช้คำคลุมเครือ
5. เลือกหาวิธีที่เหมาะสมกับสิ่งที่ต้องการหา
6. ใช้นิยาม อนิยาม สิ่งที่ใจทย์กำหนดให้ สัจพจน์และทฤษฎีที่พิสูจน์มาแล้วเท่านั้น

ในการพิสูจน์

7. อย่าใช้สิ่งที่ต้องพิสูจน์ เป็นเหตุผลในการพิสูจน์
8. แกลงเหตุผลที่จะใช้ให้ง่าย สั้นและชัดเจน

นอกจากนี้ ยุพิน พิชิตกุล (2530 : 75 - 76) ได้เสนอวิธีการสอนพิสูจน์เรขาคณิต โดยแยกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. การสอนทฤษฎี ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้
 - 1.1 ให้ผู้เรียนค้นพบทฤษฎีบทด้วยตนเอง อาจมาจากการสาธิตของครู การสร้าง การทดลอง การใช้เหตุผล การใช้สื่อการเรียนการสอน
 - 1.2 ให้นักเรียนแยกเหตุและผล
 - 1.3 ให้นักเรียนบอกสิ่งที่กำหนดและสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด
 - 2.1 ให้นักเรียนอ่านใจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุผล หรือแยกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
 - 2.2 เขียนรูปประกอบ
 - 2.3 การพิสูจน์ จะเลือกกระบวนการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ หรือใช้การวิเคราะห์รวมกับการสังเคราะห์ ทั้งนี้จะต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา

เว็บ (Webb. 1975 : 2689 - A) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยใช้วิธีให้นักเรียนคิดดัง ๆ (thinking aloud) แล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหากับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหามีความสัมพันธ์อย่างสูงกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

ฟัสเชตติ (Fuschetti. 1985 : 2790 - A) ได้สำรวจกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียนมัธยม และผลของการสอนแก้ปัญหาแก่นักเรียนโดยใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเฉพาะกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง โดยการให้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบ verbal program หลาย ๆ ชนิด ใช้แบบทดสอบให้นักเรียนทำและสัมภาษณ์ไปพร้อม ๆ กัน แล้วทำการสอนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างเป็นรายบุคคล โดยสอนยุทธวิธีการแก้ปัญหแก่นักเรียน เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหานักเรียน สิ่งที่ต้องการศึกษา ได้แก่

1. ศึกษาพฤติกรรมในการแก้ปัญหานักเรียน ในด้านการอ่าน วิเคราะห์ ประเมินค่า การตีความ การคำนวณ และการพิสูจน์

2. พิจารณารูปแบบของกระบวนการแก้ปัญหามี 1 ขั้นตอนและ 2 ขั้นตอน

3. ค้นหาแนวความคิดที่เกิดขึ้นต่อปัญหาหลาย ๆ รูปแบบ

ใช้เวลาในการสอน 10 สัปดาห์ก็นำแบบทดสอบชุดเดิมวัด พร้อมทั้งสัมภาษณ์อีกครั้ง

ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนทั้งหมดมีปัญหามากในการวิเคราะห์ การประเมินค่า และการแปลความ

2. มีบางกระบวนการที่นักเรียนไม่ได้ใช้ในการสัมภาษณ์ครั้งแรก แต่ถูกใช้ในการสัมภาษณ์ครั้งที่ 2

3. การแก้ปัญหามี 1 ขั้นตอน มีความยากในด้านการวิเคราะห์และการประเมินค่า ส่วนการแก้ปัญหามี 2 ขั้นตอน มีความยากในด้านการวิเคราะห์ การประเมินค่า และการตรวจสอบคำตอบ

4. โจทย์ปัญหามี 1 ขั้นตอนที่ยากที่สุดคือ เรื่องเส้นรอบรูป ขณะที่เรื่องที่ยากที่สุดคือ เรื่องเกี่ยวกับการเปรียบเทียบในการเลือกซื้อของ

5. โจทย์ปัญหาที่มี 2 ขั้นตอนที่ง่ายที่สุดคือ เรื่องที่เกี่ยวกับการวัดเชิงเส้น ขณะที่เรื่องที่ยากที่สุดคือ การคิดราคาสินค้าที่มีการลดราคา

กูเนม (Ghunaym. 1986 : 2605 - A) ได้ศึกษาผลของเครื่องมือที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งอาจได้แก่ รูปแบบการค้นพบ การลองผิดลองถูก การทำงานในทิศทางย้อนกลับ การขัดแย้ง การแทนที่ และการใช้แผนภาพช่วย กลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนในโรงเรียนมัธยม 88 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ใช้วิธีสอนแตกต่างกัน รวบรวมข้อมูลโดยการทดสอบก่อนการทดลองและทดสอบหลังการทดลอง วิเคราะห์กระบวนการคิดของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มจากปัญหา 12 ข้อ พร้อมทั้งพิจารณาเครื่องมือและการสัมภาษณ์รายบุคคล ผลการวิจัยพบว่า

1. จากการทดสอบหลังการทดลอง พบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
2. จากปัญหาที่มีรูปแบบและไม่มีรูปแบบ คะแนนของทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
3. การใช้ความรู้เดิมมาช่วยในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ (ที่ไม่คุ้นเคย) ของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
4. จากการสัมภาษณ์รายบุคคล พบว่า ผู้ถูกสัมภาษณ์จากกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาที่ไม่มีแบบแผนสูงกว่ากลุ่มควบคุม

วิท (Writt. 1988 : 72 - A) ได้สำรวจผลของการใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหากับกระบวนการให้เหตุผล โดยเฉพาะยุทธวิธีการแก้ปัญหาทั้ง 4 ขั้นตอนของโพลยา ซึ่งได้แก่ ขั้นตอนทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นตอนดำเนินการตามแผน และขั้นตอนตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา โดยใช้ปัญหาเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเครื่องมือที่ใช้วัดทั้งยุทธวิธีการแก้ปัญหาและกระบวนการให้เหตุผล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายจากโรงเรียนในนิวยอร์ก 75 โรงเรียน ผลการศึกษาพบว่า การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาและกระบวนการให้เหตุผลมีความสัมพันธ์กัน ซึ่งแสดงว่ากระบวนการให้เหตุผลมีความเกี่ยวข้องโดยตรงกับยุทธวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งบางส่วนของกระบวนการให้เหตุผลมีความสัมพันธ์กับตัวปัญหาเป็นอย่างมาก ขณะที่อีกส่วนหนึ่งของกระบวนการให้เหตุผลมีความเกี่ยวข้องกับยุทธวิธีการแก้ปัญหา เมื่อพิจารณาถึงสัดส่วนของยุทธวิธีการแก้ปัญหาทั้ง 4 ขั้นตอนของโพลยา พบว่า ในกลุ่มนักเรียนที่ใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาได้สำเร็จ

มีขั้นตอนการตามแผนแตกต่างกัน ส่วนใหญ่เด็กเรียนที่แก้ปัญหามิสำเร็จไม่พบความแตกต่างกันในขั้นตอนการตามแผน และใช้เวลาส่วนมากในขั้นทำความเข้าใจปัญหาและขึ้นวางแผนการแก้ปัญหานี้เด็กเรียนในกลุ่มที่ใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหามิมีใครใช้ขั้นตอนตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา

สโตนซิเฟอร์ (Stonecipher, 1987 : 3347 - A) ได้ศึกษาความเหมือนและความแตกต่างของกระบวนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนเก่งกับนักเรียนปานกลาง ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างได้มาจากการสุ่มนักเรียนเก่ง 10 คน และนักเรียนปานกลาง 10 คน นำมาสัมภาษณ์ทีละคน โดยการให้เด็กคิดตั้ง ๆ ขณะที่แก้ปัญหาก็บันทึกลงเส้นแถบบันทึกภาพและเส้นแถบบันทึกเสียง แล้วนำข้อมูลที่ได้นำเสนอในรูปตาราง พบว่า การแก้ปัญหาก็แสดงถึงรูปแบบของพฤติกรรมแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์เป็นดังนี้

1. กระบวนการแก้ปัญหของเด็กเก่งจะไม่เหมือนกัน แต่เด็กใช้การไตร่ตรองหาเหตุผล และสามารถหาข้อมูลสรุปในการตรวจคำตอบได้ด้วยตนเอง ยุทธศาสตร์การแก้ปัญหของเด็กเก่งจะคล้าย ๆ กัน เด็กเก่งจะค้นพบข้อสรุปให้อยู่ในรูปทั่วไปทั้งหมด 83 %
2. กระบวนการแก้ปัญหของเด็กปานกลางจะคล้าย ๆ กัน เขาจะอ่านปัญหาซ้ำ ๆ และแยกเงื่อนไขของปัญหาตามความเข้าใจ และอาศัยการเดา และทบทวนขั้นตอนการแก้ปัญห และหาค่าผลลัพธ์ เขาจะใช้กระบวนการแก้ปัญหของเขาเองเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ แต่ยุทธศาสตร์ที่ใช้มากที่สุด คือ การลองผิดลองถูก
3. เด็กเก่งและเด็กปานกลาง ใช้ขั้นตอนในการแก้ปัญหเหมือนกัน แต่ผลของการแก้ปัญหามีคุณภาพแตกต่างกัน

สรุปผลได้ว่า กระบวนการแก้ปัญหของเด็กเก่งเกือบทุกคนจะแตกต่างกัน ส่วนของเด็กปานกลางเกือบทุกคนจะเหมือนกัน และเหมือนกับที่สอน

อานวย เลิศขันธ์ (2523 : 94 - 117) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางสมองกับความสามารถในการคิดแก้ปัญหา โดยใช้แบบสอบถาม 23 ฉบับ แบ่งเป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 13 ฉบับ และแบบทดสอบวัดความถนัดทางการเรียน 10 ฉบับ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 420 คน การทดสอบนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างโดยใช้แบบทดสอบทั้ง 23 ฉบับ ซึ่งแบ่งการทดสอบเป็น 2 ระยะ คือ ระยะที่ 1 ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดความถนัดทางการเรียน และระยะที่ 2 ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ควบคู่ไปกับการเรียนการสอนตามเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตั้งแต่บทที่ 1 ถึงบทที่ 5 ผลการวิจัยปรากฏว่าความสามารถในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และความสามารถทางสมองมีความสัมพันธ์กันอย่างสูง ตัวแปรในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่วัดได้ว่า มีความสัมพันธ์มากที่สุดกับความสามารถในการคิดแก้ปัญหา คือ การวิเคราะห์ความสำคัญ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การวิเคราะห์หลักการ ความรู้ความจำในเนื้อหา ความรู้ความจำในวิธีการคำนวณ ความเข้าใจในการแปลความ ความเข้าใจในการขยายความ ส่วนตัวแปรทางด้านความถนัดทางการเรียนที่มีความสัมพันธ์ดีที่สุดกับความสามารถในการคิดแก้ปัญหา คือ ตัวเลข การอ่าน การจำและการจัดประเภท

วรรณดี วรรณศิลป์ (2522 : 62) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหามีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน และจากการทดสอบค่าที่ (t - test) พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงและต่ำ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01

จรรยา กู่อุดม (2524 : 50 -51) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนตามการประเมินของครู พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และสังคมศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และยังพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูง กับนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่ำ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาต่าง ๆ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนเรขาคณิต

สำหรับงานวิจัยในประเทศไทยที่เกี่ยวกับการสอนพิสูจน์เรขาคณิตยังไม่มีผู้ใดศึกษา แต่มีงานวิจัยในประเทศที่เกี่ยวข้องกับการสอนเรขาคณิต ดังนี้

ศิริกร กุ๋ไพบูลย์ (2516 : 16) ได้ศึกษาการใช้ความถนัดด้านมิติสัมพันธ์และเหตุผลเชิงนามธรรม ทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

จำนวน 600 คน ใช้แบบทดสอบความถนัดที่คัดแปลงมาจาก ดี เอ ที (DAT) พบว่าเหตุผลเชิงนามธรรมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตมีค่าสหสัมพันธ์ 0.44

นคร เทพวรรณ (2521 : 33) ได้ศึกษาสมรรถภาพทางสมองบางประการที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในจังหวัดชลบุรี จำนวน 233 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิต กับแบบทดสอบความถนัดทางการเรียน 4 ฉบับ คือ แบบทดสอบสรุปความ ศัพท์สัมพันธ์ เรียงอันดับ และช้อนรูป ผลปรากฏว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างสมรรถภาพสมองด้านเหตุผล จำนวนและมิติสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตมีค่า 0.37, 0.62, 0.19 ตามลำดับ และมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 นอกจากนี้ยังพบว่าตัวพยากรณ์ที่ดีที่สุดในการทำนายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิต คือ ความถนัดทางด้านตัวเลขและเหตุผล

ส่วนงานวิจัยในต่างประเทศที่เกี่ยวกับการพิสูจน์เรขาคณิตที่รวบรวมได้มีดังนี้

การาเบเดียน (Garabedian. 1981 : 586 - A) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์และความสามารถด้านเหตุผลของนักเรียนที่เรียนวิชาเรขาคณิต ซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในวิชาเรขาคณิตและการพัฒนาความสามารถด้านเหตุผลของผู้เรียน เมื่อได้รับการสอนการพิสูจน์และการเขียนการพิสูจน์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนที่ลงทะเบียนเรียนวิชาเรขาคณิตในโรงเรียนของรัฐแมสซาชูเซต เกรด 10 และ 11 ชั้นละ 9 ห้อง รวมทั้งหมด 18 ห้อง จำนวนนักเรียน 369 คน แล้วสุ่มนักเรียนมา 9 ห้องเรียนเป็นกลุ่มทดลอง อีก 9 ห้องเรียนที่เหลือเป็นกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองต้องพิสูจน์ร้อยละ 50 ของทฤษฎีบททั้งหมดและทำแบบฝึกหัดในเรขาคณิต 2 ยูนิต ซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานในระนาบและพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม แต่กลุ่มควบคุมต้องพิสูจน์ร้อยละ 80 ถึง 90 ของเนื้อหาที่เหมือนกับกลุ่มทดลอง และทำแบบฝึกหัดเช่นเดียวกัน ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนการพิสูจน์และความสามารถด้านเหตุผลของทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

เคนิจิ (Kenichi. 1988 : 2582 - A) ได้ศึกษาประสิทธิภาพของการใช้ยุทธศาสตร์การใช้คำถามในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 ที่ประเทศญี่ปุ่น จำนวน 48 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม และในแต่ละกลุ่มแบ่งเป็นระดับความสามารถ 3 ระดับ คือ ระดับความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ

นักเรียนในกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองที่มีระดับความสามารถปานกลางและสูง มีพัฒนาการในการแก้ปัญหาเรขาคณิต

จอง (Jeon. 1989 : 1410 - A) ได้ศึกษากระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียนในโรงเรียนขนาดกลางของประเทศเกาหลี โดยเน้นการวิเคราะห์การเลือกวิธีพิสูจน์ และการถ่ายทอดความรู้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 จำนวน 216 คน ศึกษาทั้ง 3 ระดับความสามารถ คือ ระดับความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ โดยใช้แบบทดสอบแก้โจทย์ปัญหารูปแบบต่าง ๆ และการสัมภาษณ์ ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. ความยากของโจทย์ปัญหาเรขาคณิตมีผลมาจากการใช้เงื่อนไขที่เข้ามาในโจทย์ปัญหา
2. โจทย์ปัญหาที่เขียนรูปภาพและมีข้อสังเกตให้ จะทำให้นักเรียนระดับความสามารถสูงและปานกลาง ประสบความสำเร็จมากกว่าโจทย์ปัญหารูปแบบอื่น
3. นักเรียนส่วนใหญ่แม้แต่ นักเรียนระดับความสามารถสูงส่วนหนึ่ง ไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้
4. โจทย์ปัญหาเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้มากกว่าโจทย์ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
5. ความสำเร็จในการแก้ปัญหามีขึ้นอยู่กับการที่จำเป็นต้องรู้มาก่อน มากกว่าการเลือกใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะนามธรรม การสอนคณิตศาสตร์จึงควรให้นักเรียนได้เข้าใจโครงสร้างและกระบวนการของโครงสร้าง รวมทั้งความสามารถที่จะโยงความสัมพันธ์ของแต่ละโครงสร้างเพื่อจะได้นำมาใช้ประกอบการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนั้นการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาจึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะเนื้อหาที่เป็นนามธรรม และมีการพิสูจน์ ซึ่งเป็นเนื้อหาที่นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาในการเรียน ดังนั้นการสอนจึงจำเป็นต้องมีการวิเคราะห์ขั้นตอนในการพิสูจน์ โดยมีผู้วิจัยเกี่ยวกับการศึกษาประสิทธิภาพของบทเรียนที่เน้นกระบวนการคิดไว้ดังนี้

เสนอ คุณประเสริฐ (2526 : 10 - 17) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ โดยที่ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบเรียนเอง และได้เสนอบทเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดที่มีลำดับดังนี้

1. เลือกนิยามและทฤษฎี
2. ยกตัวอย่างที่จะทำให้ให้นักเรียนเข้าใจนิยามและทฤษฎี
3. ขยายการพิสูจน์เนื้อหาต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐานให้ชัดเจน
4. วิเคราะห์กระบวนการคิดให้เห็นหลักการและโครงสร้างต่างๆ ของการพิสูจน์และเขียนแผนภาพพร้อมทั้งจัดลำดับของการคิดหาวิธีพิสูจน์
5. ทำคำตอบที่จะใช้สำหรับแต่ละเนื้อหาย่อย
6. เรียบเรียงการพิสูจน์

กลุ่มทดลอง ได้แก่ นิสิตปริญญาตรีปีที่ 2 ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตประสานมิตร จำนวน 44 คน โดยให้กลุ่มทดลองใช้บทเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ซึ่งผู้วิจัยสอนเองใช้เวลา 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที ผลการวิจัยปรากฏว่า ไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะสรุปว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

กรณีศึกษา คล่องกิจกุล (2527 : 2 - 25) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างแบบเรียนเอง และได้เสนอลำดับขั้นตอนของการวิเคราะห์กระบวนการคิดไว้ดังนี้

1. วิเคราะห์โจทย์ปัญหา เพื่อหาข้อมูลที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. พิจารณาว่าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นมาจากสาเหตุใด
3. หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้กับนิยามหรือทฤษฎีที่เคยพิสูจน์มาแล้ว

อันเป็นแนวทางที่จะนำไปสู่เหตุนี้ ๆ

4. เลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด โดยยึดหลักที่ว่า ต้องเป็นวิธีที่ง่าย สั้น ชัดเจน

และรัดกุม

กลุ่มทดลอง ได้แก่ นิสิตปริญญาตรีปีที่ 4 ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก จำนวน 20 คน โดยกลุ่มทดลองใช้บทเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ซึ่งผู้วิจัยสอนเองใช้เวลา 11 คาบ ๆ ละ 50 นาที ผลการวิจัยปรากฏว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ มีประสิทธิภาพที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

กาญจนา สนธิโพธิ์ (2527 : 2 - 27) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างเอง และได้เสนอลำดับขั้นของการวิเคราะห์กระบวนการคิดไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา แยกข้อมูลที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. พิจารณาว่า มีข้อมูลใดบ้างที่สามารถสรุปสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
3. พิจารณาว่า จากข้อมูลที่กำหนดสามารถสรุปผลใดได้บ้าง
4. หาความสัมพันธ์ระหว่างผลที่ได้ในข้อ 3 และข้อมูลที่ได้ในข้อ 2
5. เลือกแนวทางการพิสูจน์ที่เหมาะสมที่สุด โดยยึดหลักว่าต้องเป็นวิธีที่ง่าย สั้น

ชัดเจน และรัดกุม

กลุ่มทดลอง ได้แก่ นิสิตปริญญาตรีปีที่ 4 ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก จำนวน 22 คน โดยกลุ่มทดลองใช้บทเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งผู้วิจัยสร้างเอง ใช้เวลา 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที ผลการวิจัยปรากฏว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ตลอดจนงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต และงานวิจัยเกี่ยวกับแบบเรียนที่เน้นกระบวนการคิด ทำให้ผู้วิจัยเกิดแนวคิดในการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม เพื่อใช้ประกอบการสอนการพิสูจน์เรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ผู้วิจัยมีความเชื่อว่าจะเป็นการสอนที่สามารถทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในการพิสูจน์ และสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้

สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา
นักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างกัน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 ของโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย จำนวน 6 ห้องเรียน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 ของโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย จำนวน 2 ห้องเรียน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างอย่างง่าย แล้วจับสลากเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน กลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน โดยกลุ่มทดลองได้รับการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาและกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ เป็นวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ระยะเวลาในการทดลอง

กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มใช้เวลาในการทดลอง 6 คาบ ๆ ละ 50 นาที

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย

1. สื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. สื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามลำดับดังนี้
 - 1.1 ศึกษาขอบเขตของเนื้อหาเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จากหนังสือเรียน และคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 321
 - 1.2 ศึกษาเอกสารหรือตำราที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตในระนาบเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 1.3 รวบรวมโจทย์ปัญหาเรขาคณิตในระนาบเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 1.4 ปรึกษาคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 คัดเลือกโจทย์ปัญหาที่นำมาสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 1.5 ดำเนินการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม โดยแบ่งเป็นประเภทต่าง ๆ ดังนี้
 - 1.5.1 บทเรียน แผนภาพ และแผ่นโปสเตอร์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 1.5.2 แผนภาพ แผ่นโปสเตอร์ และเอกสารฝึกหัดสำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 1 และ 2

1.5.3 แผนภาพ แผ่นโปร่งใส และเอกสารฝึกหัดสำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 3, 4 และ 5

1.5.4 เอกสารฝึกหัดสำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหา

1.6 ปรึกษาคณะกรรมการควบคุมปริญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและปรับปรุงแก้ไข

1.7 นำสื่อการเรียนการสอนที่แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 5 คน โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร เพื่อปรับปรุงการใช้ภาษาความเหมาะสมของเนื้อหา และระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน

1.8 นำสื่อการเรียนการสอนที่ได้ทดลองใช้แล้วไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตรวจสอบและแก้ไขสื่อการเรียนการสอนที่ได้จะเป็นสื่อการเรียนการสอนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มทดลอง

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบทดสอบตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.1 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม แบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ

2.2 นำแบบทดสอบเสนอคณะกรรมการควบคุมปริญานิพนธ์ และอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 3 คน เพื่อทดสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา และความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และปรับปรุงแก้ไข

2.3 นำแบบทดสอบที่แก้ไขปรับปรุงตามข้อ 2.2 ไปทดสอบกับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2534 จำนวน 10 คน เพื่อนำผลการทดสอบมาวิเคราะห์รายข้อ หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)

2.4 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้ 5 ข้อ มาใช้เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การดำเนินการทดลอง

1. กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมได้รับการสอนเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากัน
ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ผู้วิจัยเป็นผู้สอนกลุ่มทดลองโดยใช้การสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา
และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติจากครูประจำวิชา ใช้เวลาสอน 6 คาบ ๆ ละ 50 นาที
เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองทั้งสองกลุ่มเหมือนกัน
2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากัน
ทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่ม โดยใช้เวลา 1 ชั่วโมง
3. การตรวจให้คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากัน
ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ข้อที่นักเรียนตอบได้ถูกต้องทั้งหมดให้ 10 คะแนน ข้อที่นักเรียนไม่ตอบ
ให้ 0 คะแนน และข้อที่นักเรียนตอบได้ไม่สมบูรณ์จะให้คะแนนตั้งแต่ 0 - 9.5 คะแนน ตามเกณฑ์ที่
ผู้วิจัยกำหนดไว้สำหรับแต่ละข้อ

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุมและกลุ่ม
ทดลอง โดยการทดสอบค่าเอฟ (F - test)
2. ทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
โดยใช้การทดสอบค่าที (t - test)

สถิติที่ใช้ในการทดสอบ

1. สถิติพื้นฐาน
 - 1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
 - 1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. การทดสอบค่าเอฟ (F - test)

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2}$$

$$df = (n_1 - 1, n_2 - 1)$$

เมื่อ	F	แทน	ค่าสถิติทดสอบ
	s_1^2	แทน	ความแปรปรวนของกลุ่มทดลอง
	s_2^2	แทน	ความแปรปรวนของกลุ่มควบคุม

3. การทดสอบค่าที (t - test)

3.1 เมื่อประชากรทั้งสองกลุ่มมีค่าความแปรปรวนเท่ากัน ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

3.2 เมื่อประชากรทั้งสองกลุ่มมีค่าความแปรปรวนไม่เท่ากัน ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าสถิติทดสอบ
	$\bar{x}_1$	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
	$\bar{x}_2$	แทน	คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
	n_1	แทน	จำนวนนักเรียนของกลุ่มทดลอง
	n_2	แทน	จำนวนนักเรียนของกลุ่มควบคุม
	s_1^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนของกลุ่มทดลอง
	s_2^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนของกลุ่มควบคุม
	s_p^2	แทน	ความแปรปรวนร่วมของคะแนนของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

(Ronald E. Walpole. 1980 : 170)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่องการสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

1. ทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ
2. ทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ โดยใช้การทดสอบค่าเอฟ (F - test) ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ผลการทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน
กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่ม	n	s ²	F
กลุ่มทดลอง	48	144.7	1.547
กลุ่มควบคุม	52	93.54	

$$F_{0.025}(47,51) = 0.5602, F_{1-0.025}(47,51) = 1.777$$

จากตารางจะเห็นว่า $0.5602 < 1.547 < 1.777$ แสดงว่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา และนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.05

2. ผลการทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ โดยใช้การทดสอบค่าที่ (t - test) ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ผลการทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s^2	t
กลุ่มทดลอง	48	31.46	144.7	4.64**
กลุ่มควบคุม	52	21.28	93.54	

$$t(0.005; 98) = \pm 2.58$$

จากตาราง 2 จะเห็นว่า $4.64 > 2.58$ แสดงว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 นอกจากนี้ยังพบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ($\bar{x}_1 = 31.46$) สูงกว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ ($\bar{x}_2 = 21.28$) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาวิธีสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. เพื่อสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหากับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างกัน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ของโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 จำนวน 2 ห้องเรียน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างอย่างง่ายจากจำนวน 6 ห้องเรียน แล้วจับสลากเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียนจำนวน 48 คน กลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียนจำนวน 52 คน กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1.1 สื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

2. การดำเนินการทดลอง

2.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้การสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา ครูประจำวิชาสอนกลุ่มควบคุมโดยใช้วิธีสอนตามปกติ ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 6 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้วทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมใช้เวลา 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ทดสอบความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยการทดสอบค่าเอฟ (F - test).

2. ทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยการทดสอบค่าที (t -test)

สรุปผลการทดลอง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา และนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

อภิปรายผล

จากการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ พบว่านักเรียนทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหามีค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ ทั้งนี้ น่าจะมีสาเหตุมาจาก

1. การสอนการพิสูจน์เรขาคณิตโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหานี้ นักเรียนได้รับการสอนและฝึกฝนทีละขั้นตอนตามลำดับขั้นของกระบวนการแก้ปัญหา โดยการทำเอกสารฝึกหัดชุดต่าง ๆ (ดังที่ปรากฏในภาคผนวก ง.) ทั้งในเวลาเรียนและนอกเวลาเรียน ทำให้นักเรียนมีความสามารถดังนี้

1. หาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์ได้
2. หาสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ และแปลงเป็นสัญลักษณ์ได้
3. เลือกรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้
4. ใช้กระบวนการวิเคราะห์และสังเคราะห์ จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ได้

5. เรียบเรียงการพิสูจน์ได้

2. การสอนการพิสูจน์เรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม โดยใช้แผ่นโปร่งใสชนิดซ้อนภาพ (overlays) ประกอบการสอนขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา ในการแปลงภาคเหตุหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เป็นรูป เมื่อใช้แผ่นภาพโปร่งใสชนิดซ้อนภาพจะทำให้การเสนอภาพเป็นไปตามขั้นตอน โดยในตอนแรกจะเริ่มเสนอภาพโครงสร้างก่อนแล้วค่อย ๆ เพิ่มส่วนที่โจทย์กำหนดให้ทีละส่วนจนได้รูปที่สมบูรณ์ ซึ่งช่วยให้นักเรียนเข้าใจรูป และสามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์ได้ ในขั้นตอนการวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ผู้วิจัยนำเสนอข้อมูลในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ โดยใช้แผ่นโปร่งใสชนิดซ้อนภาพประกอบการถาม - ตอบ ซึ่งช่วยสร้างความสนใจของนักเรียน และช่วยให้นักเรียนเข้าใจลำดับการคิดอย่างต่อเนื่องและสัมพันธ์กัน ทำให้นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้

3. เมื่อนักเรียนส่งการบ้านผู้วิจัยตรวจและส่งคืนในวันรุ่งขึ้น หลังจากนั้นผู้วิจัยได้นำข้อที่นักเรียนส่วนมากทำผิดมาอภิปรายในชั้นเรียน ถ้านักเรียนส่วนน้อยทำผิด ผู้วิจัยจะเรียกมาพบเพื่ออภิปรายเป็นกลุ่มย่อยหรือรายบุคคล ซึ่งเป็นการแก้ไขความบกพร่องของนักเรียนและทำให้นักเรียนเข้าใจขั้นตอนในการพิสูจน์ได้ดีขึ้น

ข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย

1. การสอนโดยใช้แผ่นโปสเตอร์ชนิดซ้อนภาพเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับเนื้อหาเรขาคณิตที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีการเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปซ้อนทับอีกรูปหนึ่ง และมีการสร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ เนื่องจากสามารถแสดงการเคลื่อนที่ในระนาบของรูปสามเหลี่ยมได้ สามารถแสดงลำดับในการสร้างรูปเพื่อใช้ในการพิสูจน์ มีการใช้สีต่าง ๆ ทำให้รูปชัดเจนยิ่งขึ้น สามารถขยายรายละเอียดเล็ก ๆ ใหญ่ได้ และช่วยสร้างความสนใจของนักเรียน นอกจากนี้ยังช่วยให้ครูแสดงภาพได้อย่างรวดเร็ว และมีเวลาสังเกตพฤติกรรมในการเรียนของนักเรียน

2. การให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่มแล้วนำเสนอผลงานในชั้นเรียน และร่วมกันอภิปรายทำให้นักเรียนได้ฝึกการทำงานร่วมกัน ฝึกคิดแก้ปัญหาาร่วมกัน และกล้าแสดงออก

3. การทำเอกสารฝึกหัดส่งอย่างสม่ำเสมอ จะช่วยพัฒนาความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทุกระดับความสามารถในกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ดังจะเห็นได้จากตาราง 3 ซึ่งผู้วิจัยจะใช้เกณฑ์ต่อไปนี้ในการแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามลำดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ คือ กลุ่มสูง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มต่ำ

1. ก่อนการทดลอง ใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

2. หลังการทดลอง ใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ตาราง 3 การพัฒนาระดับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา

ระดับ ความสามารถ ก่อนการทดลอง	ระดับความสามารถ หลังการทดลอง	กลุ่มสูง	กลุ่มปานกลาง	กลุ่มต่ำ	รวม
กลุ่มสูง		12	8	-	20
กลุ่มปานกลาง		6	7	3	16
กลุ่มต่ำ		1	6	5	12

จากตารางจะเห็นว่า นักเรียนที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์กลุ่มต่ำที่ส่งเอกสารฝึกหัดทุกครั้ง สามารถพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์จากกลุ่มต่ำมากลุ่มสูง 1 คน และกลุ่มปานกลาง 6 คน ซึ่งคิดเป็นจำนวน 54% ของนักเรียนในกลุ่มต่ำ สำหรับนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์กลุ่มปานกลางที่ส่งเอกสารฝึกหัดทุกครั้ง สามารถพัฒนาความสามารถจากกลุ่มปานกลางมาอยู่กลุ่มสูง สำหรับนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์กลุ่มสูงที่ไม่ส่งเอกสารฝึกหัด ทำให้ความสามารถลดลงไปอยู่กลุ่มปานกลาง ส่วนนักเรียนในกลุ่มนี้ที่ส่งเอกสารฝึกหัดทุกครั้งจะได้คะแนนในระดับสูง

4. ข้อสังเกตจากการตรวจกระดาษคำตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม พบว่า

4.1 นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาส่วนใหญ่สามารถแยก
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ได้ ส่วนนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติไม่สามารถ
แยกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

4.2 นักเรียนทั้งสองกลุ่มสามารถเขียนรูปและสัญลักษณ์ได้

4.3 นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาสามารถเลือกรูป
สามเหลี่ยมที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้ถูกต้อง ส่วนนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติไม่สามารถเลือก
รูปสามเหลี่ยมที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้

4.4 นักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ มักจะนำสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์มาเป็น
เหตุผลในการพิสูจน์

5. ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้สอนในห้องโสตทัศนศึกษา เพื่อความสะดวกในการใช้
เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ ซึ่งเป็นห้องค่อนข้างคับแคบ ทำให้นักเรียนต้องนั่งเบียดกันจึงเกิดความ
ไม่สะดวกในการทำกิจกรรมต่าง ๆ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการสอนการพิสูจน์เรขาคณิตในเนื้อหาต่าง ๆ ในระยะแรก ครูควรฝึกให้
นักเรียนแยกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ และควรจัดทำเอกสารฝึกหัดให้นักเรียน
ฝึกจนชำนาญเสียก่อน จึงเริ่มสอนพิสูจน์ต่อไป

1.2 การสอนกระบวนการวิเคราะห์และสังเคราะห์ และการเรียบเรียงการพิสูจน์
ทฤษฎีบท ควรใช้เวลามากขึ้น โดยครูควรจะใช้การถาม - ตอบ ให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการ
วิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทอย่างละเอียด และให้นักเรียนเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ภายใน
ชั่วโมงเรียน หากนักเรียนสงสัยหรือติดขัดในลำดับใดครูจะช่วยเหลือได้ทันที

1.3 ควรมีการใช้แผ่นโปสเตอร์ชนิดซ้อนภาพประกอบการสอนเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับการ
พิสูจน์ เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจลำดับขั้นตอนในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น

1.4 ในการสอนพิสูจน์เรขาคณิตควรมีการแสวงหาวิธีการสอนใหม่ ๆ ที่สร้างความสนใจในการเรียนของนักเรียน ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถหาแนวทางในการพิสูจน์ และสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้

1.5 ควรมีการจัดทำเอกสารฝึกหัดเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกฝนที่ละขั้นตอนตามลำดับขั้นของกระบวนการแก้ปัญหาการพิสูจน์เรขาคณิตในเนื้อหาอื่น ๆ

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรทำการสอนการพิสูจน์โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาในเนื้อหาเรขาคณิตอื่น ๆ ที่เน้นการพิสูจน์ เช่น ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน วงกลม เป็นต้น

2.2 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิต

2.3 หลังจากให้นักเรียนเรียนโดยเน้นกระบวนการการแก้ปัญหา ควรทำการวิจัยติดตามผล เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนที่เรียนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่เรียนตามปกติ ในช่วงระยะเวลา 1 ภาคเรียน

2.4 ควรทำการวิจัยเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหากับนักเรียนที่เรียนตามปกติ ที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำ

บรรณาการ

บรรณานุกรม

- กรรณิกา คล่องกิจกุล. การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- กาญจนา สนธิโพธิ์. การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- จรรยา กุศลคม. ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนตามการประเมินของครู. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2524. อัดสำเนา.
- ✓ จุไร ทวีรัตน์. เนื้อหาคณิตศาสตร์ ค.203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตการศึกษา 12. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2527. อัดสำเนา.
- ✓ ชลัพร สุกธีระ. "การสอนเรขาคณิตในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้แบบเรียนของ สสวท.," ใน เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 6 วันที่ 9 - 10 พฤษภาคม 2533. หน้า 1 - 9. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2533.
- ✓ ธนชัย ภูอุดม. การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.
- ✓ นคร เทพวรรณ. สมรรถภาพสมองบางประการที่สัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในจังหวัดชลบุรี. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521. อัดสำเนา.
- บุญเรียง ขจรศิลป์. วิธีวิจัยทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : ฟลิทส์เซ็นเตอร์การพิมพ์, 2530.
- ✓ พรณทิพย์ ม้ามณี. การสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : สารศึกษาการพิมพ์, 2520.

- มหาวิทยาลัย, ทบวง. ชุดเสริมประสบการณ์สำหรับครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย, 2524.
- ยุพิน พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : บริษัทการพิมพ์, 2523.
- . การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2530.
- . พฤติกรรมกรเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : แผนกวิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2519.
- วรรณดี วรรณศิลป์. ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ม.2. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522. อุดສຳເນາ.
- ศิริกร ภูไพบูลย์. การใช้ความถนัดด้านมิติสัมพันธ์และเหตุผลเชิงนามธรรมทำนายผลสัมฤทธิ์ในวิชาเรขาคณิต. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2516. อุดສຳເນາ.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. คำชี้แจงการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุงพุทธศักราช 2533). กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2533.
- . รายงานการสำรวจเกี่ยวกับการใช้หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.3) ทั่วประเทศ ปีการศึกษา 2523. กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2527.
- . รายงานผลการวิจัยและประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2529.
- สมพล เล็กสกุล. "การสอนเรขาคณิต," ใน เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์ครั้งที่ 7 วันที่ 8 - 9 พฤษภาคม 2534. หน้า 1 - 23. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2534.

สุเทพ ทองอยู่. "ปัญหาทางคณิตศาสตร์," ใน เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์
ครั้งที่ 6 วันที่ 9 - 10 พฤษภาคม 2533. หน้า 1 - 23. กรุงเทพฯ :

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2533.

_____. "การสอนการพิสูจน์ในเรขาคณิต," ใน เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์
ครั้งที่ 7 วันที่ 8 - 9 พฤษภาคม 2534. หน้า 1 - 5. กรุงเทพฯ :

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2534.

สวีย์ เหมะประสิทธิ์. การพัฒนาชุดการเรียนรู้การสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ค. กรุงเทพฯ :
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523. อัดสำเนา.

สุวัฒนา อุทัยรัตน์. "สมรรถภาพของครูคณิตศาสตร์," ใน เอกสารการสอนชุดวิชาการสอน
คณิตศาสตร์ หน่วยที่ 1 - 7. หน้า 92 - 128. กรุงเทพฯ : สาขาวิชาศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, 2526.

เสนอ คุณประเสริฐ. การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง
ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526. อัดสำเนา.

อภิญญา คุณเลิศดี. ปัญหาการสอนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในเขต
การศึกษา 9. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2534. อัดสำเนา.

อานวย เลิศชัยนดี. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางสมองกับความสามารถทาง
ด้านการคิดแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษา. ปรินทิพนิพนธ์
กศ.ค. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523. อัดสำเนา.

✓ อาไพ ยมาภัย. "การศึกษาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาในประเทศไทยในช่วง 20 ปี (พ.ศ.
2503 - 2523)," ใน รายงานผลการวิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์. หน้า 107 -
122. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย, 2527.

- /Adams, Sam., Leslie C. Ellis and B.F. Beeson. Teaching Mathematics : with Emphasis on the Diagnostic Approach. New York : Harpar & Row Publishers, 1977.
- /Fuschetti, Deborah M. "A Clinical Investigation of Problem Solving Processes of High School EMH Students and the Effect of Problem Solving Instruction on the Student's Ability to Use a Specific Problem Solving Strategy," Dissertation Abstracts International. 45(9) : 2790 - A ; March, 1985.
- /Garabedian, Charles. "The Effect of Proof on Achievement and Reasoning Ability of Students in Geometry," Dissertation Abstracts International. 42(10) : 586 - A ; August, 1981.
- /Ghunaym, Ghunaym Mahaoud. "An Investigation of the Effect of Instruction in the Structure of Problem - Solving Strategies on Students' Performance," Dissertation Abstracts International. 46(9) : 2605 - A ; March, 1986.
- /Guser, V. and others. Solving Problems in Geometry. Moscow : Mir Publishers, 1988.
- /Jeon, Pyung Kook, "Geometry Problem Solving of Korean Middle School Students : An Analysis of Representation and Transfer," Dissertation Abstracts International. 49(6) : 1410 - A ; December, 1989.
- /Johnson, Donovan A. and Gerald R. Rising. Guidelines for Teaching Mathematics. California : Wadsworth Publishing Company, Inc., 1969.
- /Kenichi, Machida. "The Effects of Verbal Mediation Strategy on Mathematics Problem Solving," Dissertation Abstracts International. 48(10) : 2582 - A ; April, 1988.

/Krulik, Stephen. and Robert E. Reys. Problem Solving in School Mathematics. Washington D.C. : The National Council of Teacher of Mathematics, 1980.

Lathrop, Thomas G. and Lee A. Stevens. Geometry : A Contemporary Approach. California : Wadsworth Publishing Company, Inc., 1967.

/Orleans, Joseph B. and Theodore Herberg. A New Geometry for Secondary School. Boston : Heath, 1958.

/Polya, George. How to Solve It. New York : Double Day & Company, Inc., 1957.

/Schmalz, Rosemary S.P. "Problem Solving - an Attitude as well as a Strategy," Mathematics Teacher. 82(9) : 685-686 ; December, 1989.

Seymour, Eugene F. and Paul James Smith. Plane Geometry. New York : Macmillan Company, 1949.

Smith, Polland R. and James F. Ulrich. Plane Geometry. New York : Harcourt, Brace & World, Inc., 1956.

/Stonecipher, Larry Dale. "A Comparison of Mathematical Problem - Solving Processes between Gifted and Average Junior High Students : A Clinical Investigation," Dissertation Abstracts International. 47(9) : 3347 - A ; March, 1987.

/Talton, Carolyn F. "Let's Solve the Problem Before We Find the Answer," The Arithmetic Teacher. 36(1) : 40 - 45 ; September, 1988.

Walpole, Ronald E. Mathematical Statistics. London : Prentice - Hall International, 1980.

Webb, Nol. "An Exploration of Mathematical Problem Solving Processes,"
Dissertation Abstracts International. 36(5) : 2689 - A ;
November, 1975.

Writt, Patrich James. "Mathematical Problem - Solving : an Exploration
of the Relationship between Strategies and Heuristics,"
Dissertation Abstracts International. 48(1) : 72 - A ; July,
1988.

הפאקט

ח חשבונות

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

เวลา 1 ช.ม. คะแนนเต็ม 50 คะแนน

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำลงในกระดาษคำตอบ

1. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ถ้า E และ F เป็นจุดบน $\overline{BC}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ และ $CE = CF$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle AEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{OC}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{OC}$ จงพิสูจน์ว่า $PA = PB$
3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า D เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ แต่อยู่ห่างจากจุด B และ C เท่ากัน ลาก $\overline{AD}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
4. ให้ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ E เป็นจุด ๆ หนึ่งบน $\overline{AD}$ มี $\overline{EP}$ และ $\overline{EQ}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $EP = EQ$
5. ให้ ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีเส้นทแยงมุม AC ยาวเท่ากับ เส้นทแยงมุม AD จงพิสูจน์ว่า $\hat{B} = \hat{E}$

ตาราง 4 ความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ข้อที่	P _H	P _L	p	r
1	0.82	0.42	0.62	0.40
2	0.85	0.33	0.59	0.52
3	0.95	0.56	0.76	0.39
4	0.92	0.34	0.63	0.58
5	0.93	0.26	0.60	0.67

เมื่อ P_H แทน สัดส่วนของคะแนนที่ผู้สอบในกลุ่มสูงตอบได้ถูก
P_L แทน สัดส่วนของคะแนนที่ผู้สอบในกลุ่มต่ำตอบได้ถูก
p แทน ค่าความยากง่าย
r แทน ค่าอำนาจจำแนก

$$p = \frac{P_H + P_L}{2}$$

$$r = P_H - P_L$$

ภาคผนวก ข

โครงการสอน

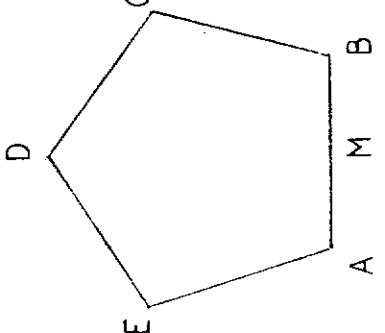
คาบที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้
0	ผู้ พินความรู้ได้ประกอบด้วย 1. รูปสามเหลี่ยมและชนิดของรูปสามเหลี่ยม 2. ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง 3. ความเท่ากันทุกประการของมุม	1. ครูทำควมรู้จักกับนักเรียนและชี้แจงวัตถุประสงค์การเรียนรู้ 2. ครูแจกเอกสารทบทวนพินความรู้เดิมพร้อมเฉลย ให้นักเรียนก่อนการทดลองประมาณ 1 สัปดาห์ ให้นักเรียนศึกษาเอกสาร 3 วัน หลังจากนั้น ให้นักเรียนมีข้อสงสัยให้มาพบครู
1	<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (ด้าน – มุม – ด้าน) <u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการ (มุม – ด้าน – มุม)	1. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง และความเท่ากันทุกประการของมุม 2. ครูสอนทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 โดยแสดงการเชื่อมโยงไปเรื่อย ๆ 3. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 สำหรับฝึกการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 และเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.2 สำหรับฝึกการใช้ทฤษฎีบทที่ 2

ฉบับที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
2	<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม – มุม – ด้าน) <u>ทฤษฎีบทที่ 4</u> ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน <u>ทฤษฎีบทที่ 5</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มีด้านยาวเท่ากันสามด้านแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน – ด้าน – ด้าน) <u>ทฤษฎีบทที่ 6</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ฉาก – ด้าน – ด้าน)	1. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 1 ซึ่งเป็นกรหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือภาคเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 และเขียนรูปพร้อมทั้งสัญลักษณ์ 2. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 2 ซึ่งเป็นกรหาสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์หรือภาคผล จากทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 และเขียนเป็นสัญลักษณ์ 3. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 1 และ 2 ของทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 4. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2 สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 1 และ 2 ของโจทย์อื่น ๆ 5. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3 สำหรับฝึกการใช้ทฤษฎีบทที่ 3, 5 และ 6

คาบที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
3	ทฤษฎีบทที่ 3 และ 4	1. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาคำถามที่ 3 และ 4 จากทฤษฎีบทที่ 3, และ 4 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์และสิ่งเคราะหที่ได้อิงที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่ย่อยก่าหนดให้ และสิ่งที่จะนำไปสู่สิ่งที่จําต้องการพิสูจน์ 2. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาคำถามที่ 5 จากทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ซึ่งเป็นการเรียบเรียงการพิสูจน์ 3. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.3 สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาคำถามที่ 3 และ 4

คำบท	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
4	ทฤษฎีบทที่ 5 และ 6	1. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 3 และ 4 จากทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์และสิ่งเคราะห์ที่สิ่งได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่ยกมาพบและสิ่งที่จะนำไปสู่สิ่งที่ยกมาต้องการพิสูจน์ 2. ครูสอนกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 5 จากทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 ซึ่งเป็นการเรียบเรียงการพิสูจน์ 3. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2 สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 5

คาบที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
5	1. เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมคือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมกับจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้าม จงพิสูจน์ว่าเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมตัดกันที่ปลายเท่ากัน 2. ให้ $\overline{MK}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{RMS}$ โดยที่ $RM = SM$ และ P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{MK}$ ลาก $\overline{RP}$ และ $\overline{SP}$ จงพิสูจน์ว่า $\widehat{MRP} = \widehat{PSW}$ 3. กำหนดให้ $\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$ และ $PQ = ST$ ถ้า PT ตัดกับ QS ที่จุด R ให้ X เป็นจุดบน $\overline{PQ}$ และ Y เป็นจุดบน $\overline{ST}$ โดยที่ $\overline{XY}$ ผ่านจุด R จงพิสูจน์ว่า $XR = RY$	1. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ 6 คน ส่งตัวแทนมาจับสลากโจทย์ปัญหากลุ่มละ 1 ข้อ ให้เวลาทำ 10 นาที 2. ให้นักเรียนรายงานกระบวนการแก้ปัญหาเป็นรายกลุ่ม 3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผลงานของนักเรียน 4. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1 สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหา

คาบที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
	4.  ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าซึ่ง $AB = BC = CD = DE =$ $\angle CEA$ และ $\angle ABC = \angle BCD =$ $\angle CDE = \angle DEA = \angle EAB$ จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ลาก DM จงพิสูจน์ว่า $\angle EDM = \angle CDM$	

คาบที่	เนื้อหา	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
6	1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ถ้า $\overline{BN}$ และ $\overline{CM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ที่จุด N และ M ตามลำดับจงพิสูจน์ว่า $BN = CM$ 2. ให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AD}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ ตัดกันที่จุด O และ $AO = OD$ จงพิสูจน์ว่า $OB = OC$ 3. ให้ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ จุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$ มี $\overline{EP}$ และ $\overline{EQ}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับจงพิสูจน์ว่า $EP = EQ$ 4. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ และ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ลาก $\overline{AE}$ ไปพบกับ $\overline{CD}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$ 5. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ลาก $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $\angle BCD$	1. ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1 และอธิบายข้อผิดพลาด 2. ให้นักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1 สำหรับการให้กระบวนการแก้ปัญหา 3. ครูเฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1

ภาคผนวก ค

แผนการสอนคาบที่ 1

จุดประสงค์

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. แสดงการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม 2 รูป โดยการเคลื่อนที่ไปซ้อนกันได้ถูกต้อง
2. นำทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 ไปใช้ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

บทนิยามที่ 1 การเคลื่อนที่ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบที่ระยะระหว่างจุดสองใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

สัจพจน์ รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้

บทนิยามที่ 2 รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งสนิท

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (ด้าน - มุม - ด้าน)

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม - ด้าน - มุม)

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 1.1 - 1.3
2. แผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 1.1 - 1.6
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 และ 1.2
4. กระดาษคำตอบสำหรับเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 และ 1.2

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 1.1 ประกอบการบรรยาย และการถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนได้แนวคิดเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยที่รูปร่าง และขนาดของรูปเรขาคณิตไม่เปลี่ยนแปลง และแสดงการเท่ากันทุกประการ ของส่วนของเส้นตรงมุม และรูปสามเหลี่ยม โดยการเคลื่อนรูปไปซ้อน
2. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 1.1 เพื่อแสดงบทนิยามที่ 1 สัจพจน์ และบทนิยามที่ 2
3. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 1.2 เพื่อให้เห็นว่าบทนิยามที่ 1 สัจพจน์ และบทนิยามที่ 2 สามารถนำไปใช้ได้กับรูปเรขาคณิตอื่น ๆ เช่น รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม เป็นต้น

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 1.2 บนกระดานเพื่อแสดงทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน - มุม - ด้าน) ให้นักเรียนหาภาคเหตุ และภาคผลของทฤษฎีบทที่ 1 และครูขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคเหตุ ด้วยปากกาสีแดง และขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคผลด้วยปากกาสีเขียว
2. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 1.3 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อแปลงภาคเหตุ และภาคผลเป็นรูปและสัญลักษณ์
3. ครูแสดงการซ้อน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

4. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน-มุม-ด้าน) โดยแจกแผ่นโปรงใสแผ่นที่ 1.4 ให้นักเรียนพิจารณาารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน - มุม - ด้าน) หรือไม่ โดยใช้เวลาทำ 2 นาที หลังจากนั้นให้นักเรียนเฉลยพร้อมทั้งให้เหตุผล

5. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 1.3 บนกระดาน เพื่อแสดงทฤษฎีบทที่ 2 (มุม - ด้าน - มุม) ให้นักเรียนหาภาคเหตุและภาคผลของทฤษฎีบทที่ 2 และครูขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคเหตุ ด้วยปากกาสีแดงและขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคผลด้วยปากกาสีเขียว

6. ครูแจกแผ่นโปรงใสแผ่นที่ 1.5 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อแปลงภาคเหตุ และภาคผลเป็นรูปและสัญลักษณ์

7. ครูแสดงการซ้อน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ โดยให้นักเรียนเป็นผู้บอก

8. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 2 (มุม-ด้าน-มุม) โดยแจกแผ่นโปรงใสแผ่นที่ 1.6 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 2 (มุม-ด้าน-มุม) หรือไม่ โดยใช้เวลาทำ 2 นาที หลังจากนั้นให้นักเรียนเฉลยพร้อมทั้งให้เหตุผล

ขั้นฝึกหัด

1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 และ 1.2 พร้อมกระดาษคำตอบ ให้นักเรียนทำท้ายชั่วโมง ถ้าไม่เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน นำมาส่งครูในวันรุ่งขึ้น

ขั้นประเมินผล

- สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
- ครูตรวจเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 และ 1.2 นักเรียนที่ทำเอกสารฝึกหัดแต่ละชุดถูกต้อง 80 % ขึ้นไปถือว่าผ่าน สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่าน ต้องมาพบครูเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องก่อนที่จะเรียนคาบต่อไป

แผนภูมิแผ่นที่ 1.1

บทนิยามที่ 1 การเคลื่อนที่ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

สัจพจน์ รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้

บทนิยามที่ 2 รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งสนิท

แผนภูมิแผ่นที่ 1.2

ทฤษฎีบทที่ 1

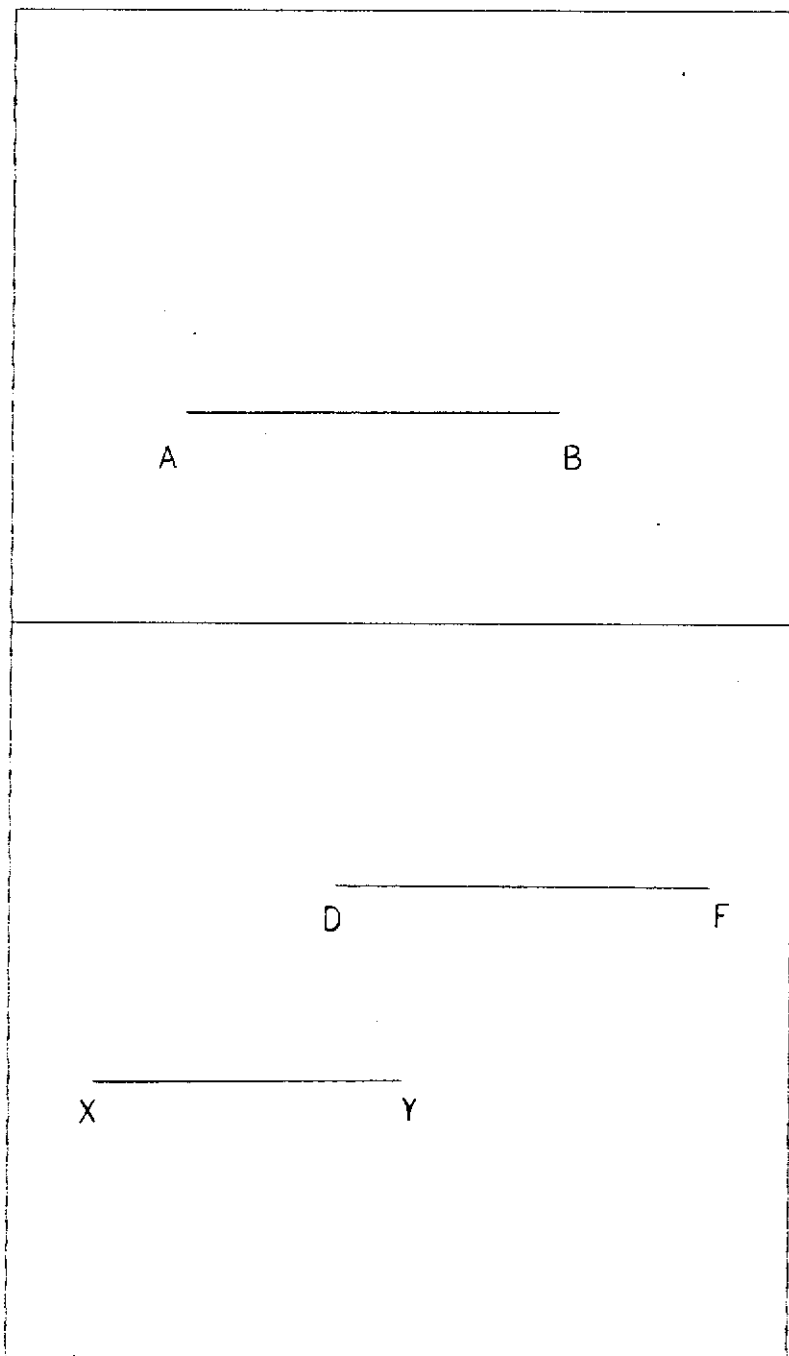
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่าง
ด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากัน
ทุกประการ (ด้าน - มุม - ด้าน)

แผนภูมิแผ่นที่ 1.3

ทฤษฎีบทที่ 2

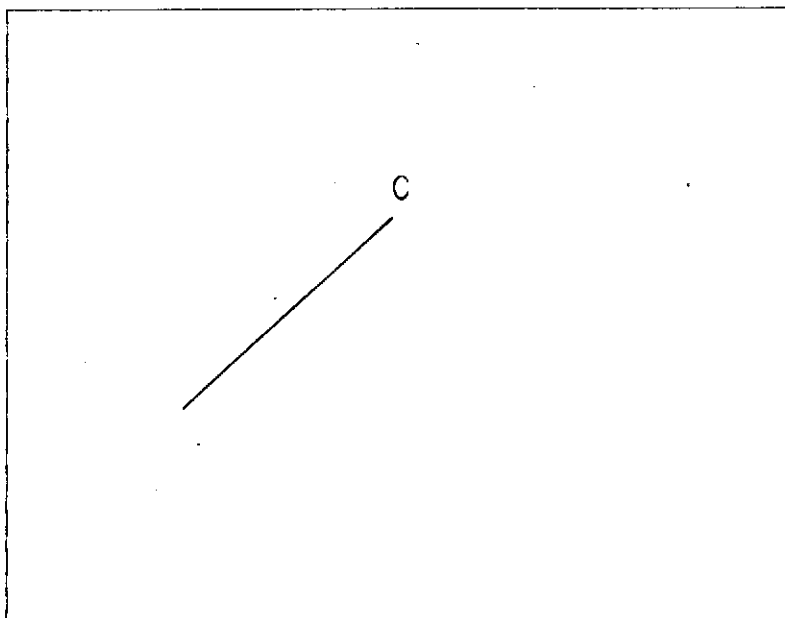
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็น
แขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น
จะเท่ากันทุกประการ (มุม – ด้าน – มุม)

แผ่นปรงใสแผ่นที่ 1.1



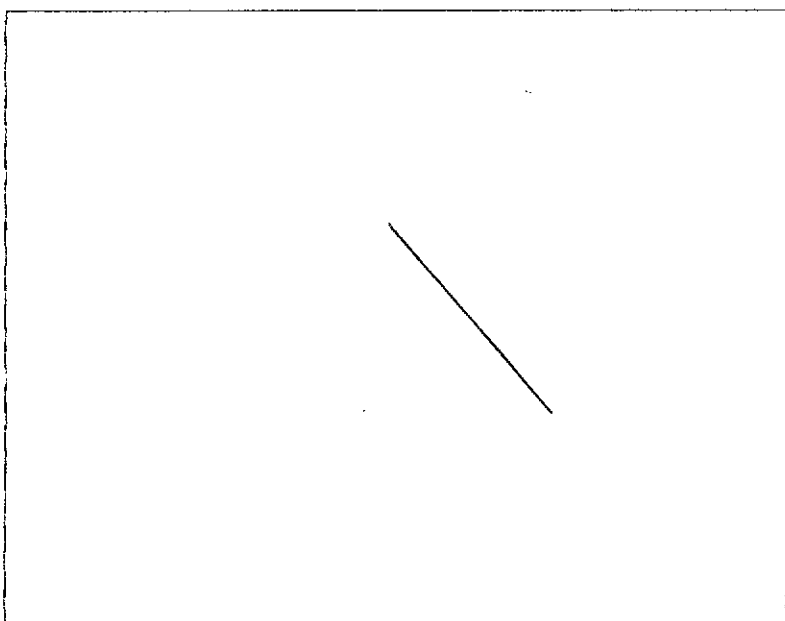
ตอนที่ 1

ตอนที่ 2



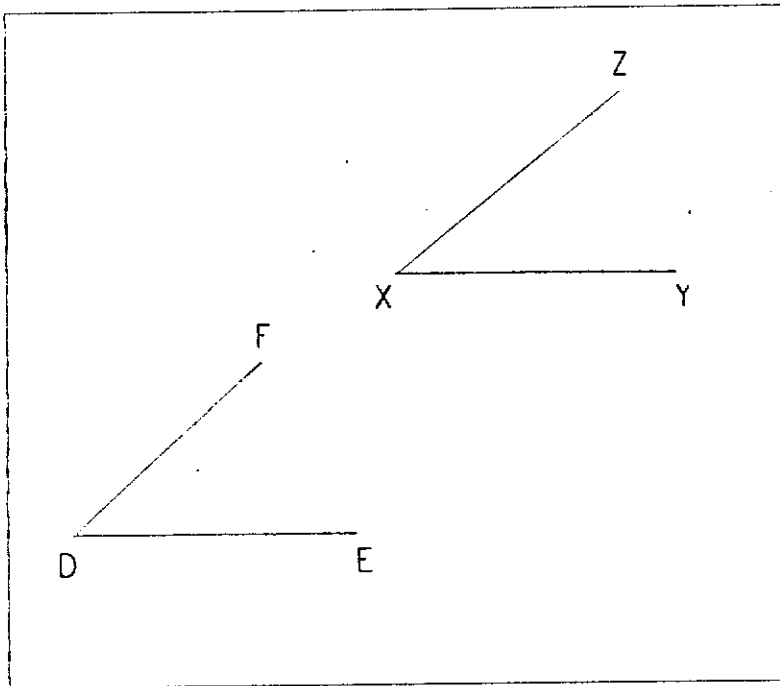
แผ่นซ้อนตอนที่ 1

แผ่นที่ 1

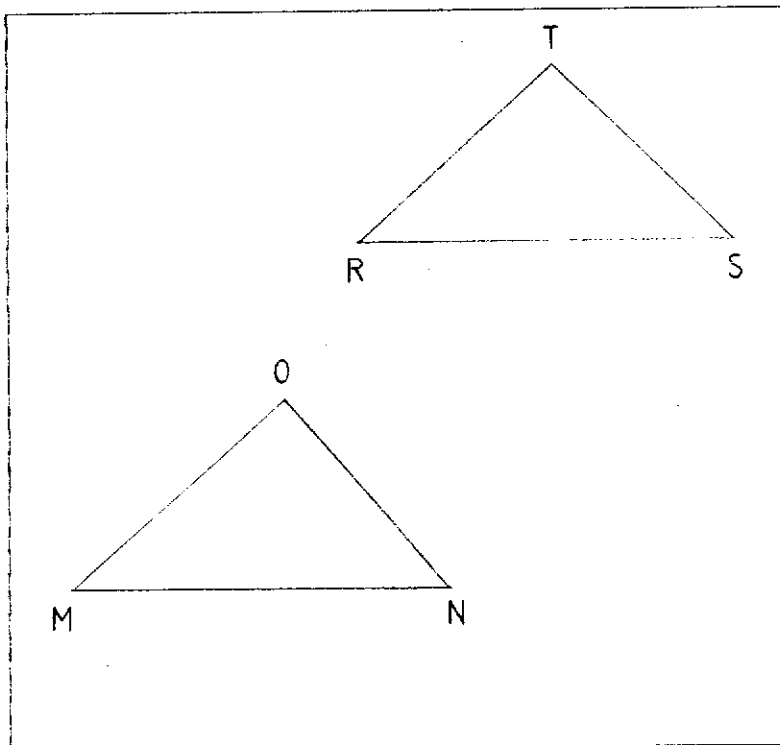


แผ่นซ้อนตอนที่ 1

แผ่นที่ 2

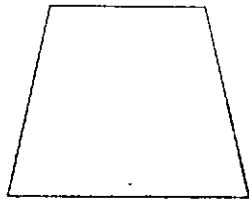


แผ่นขั้นตอนที่ 2
แผ่นที่ 1

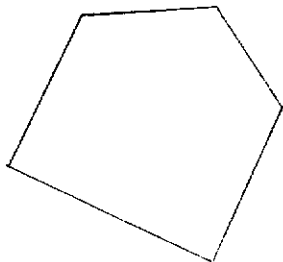


แผ่นขั้นตอนที่ 2
แผ่นที่ 2

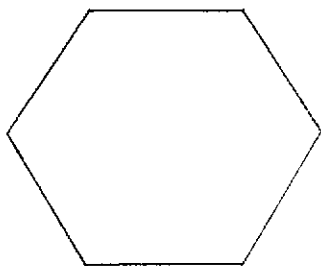
ผ่านโปร่งใสแผ่นที่ 1.2



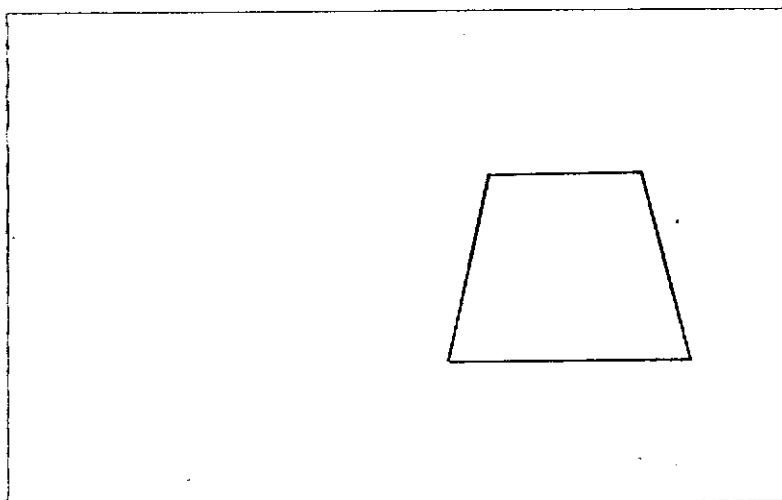
ตอนที่ 1



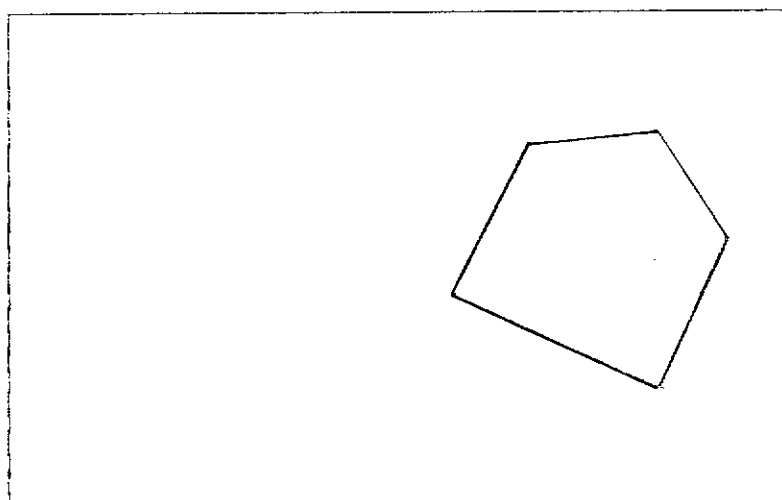
ตอนที่ 2



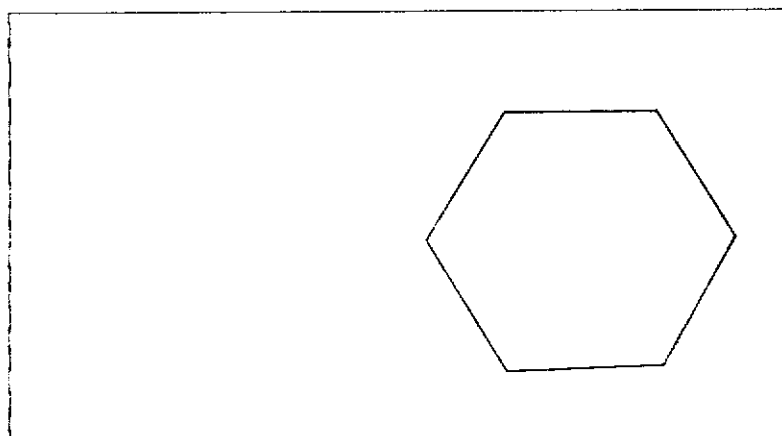
ตอนที่ 3



แผ่นขั้นตอนที่ 1



• แผ่นขั้นตอนที่ 2



แผ่นขั้นตอนที่ 3

แผนปรั้งไสแผ่นที่ 1.3

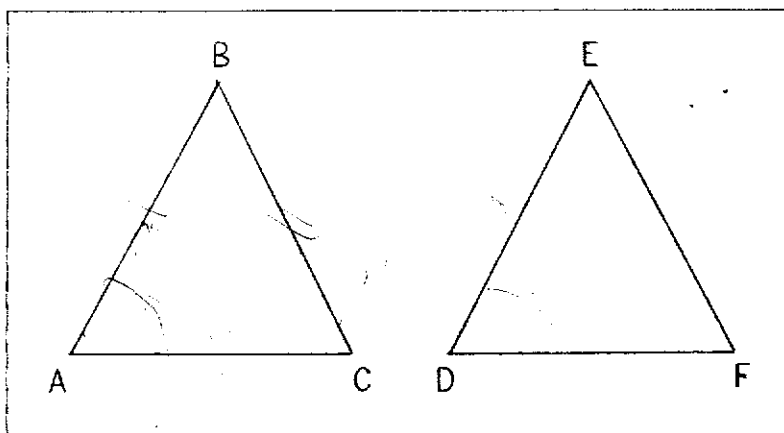
ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
ภาคผล คือ	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
กำหนดให้	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปใดที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่
และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน

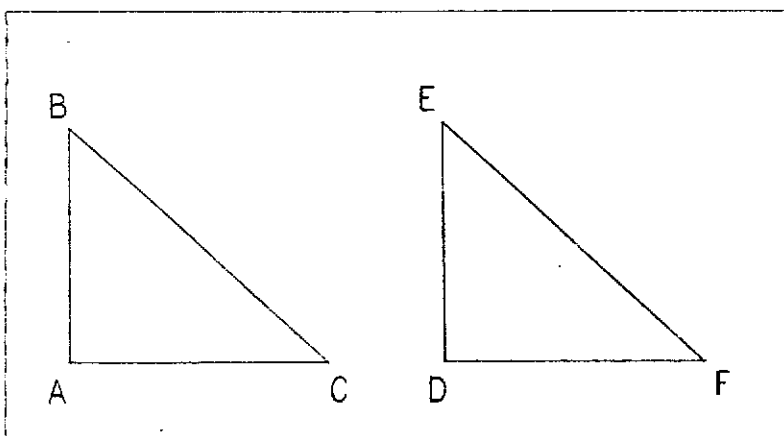
แผ่นขั้นตอนที่ 1

รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

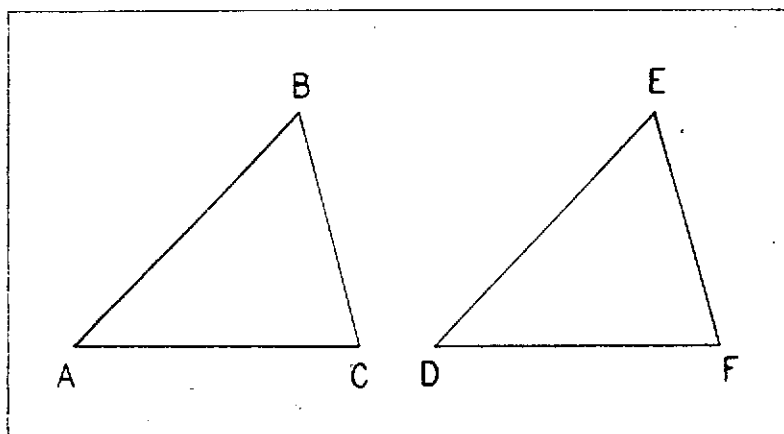
แผ่นขั้นตอนที่ 2



แผ่นขั้นตอนที่ 3
แผ่นที่ 1



แผ่นขั้นตอนที่ 3
แผ่นที่ 2



แผ่นข้อตอนที่ 3

แผ่นที่ 3

ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่มี
 $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\angle BAC = \angle EDF$

แผ่นข้อตอนที่ 4

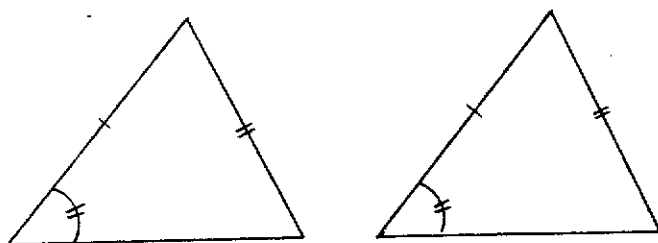
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

แผ่นข้อตอนที่ 5

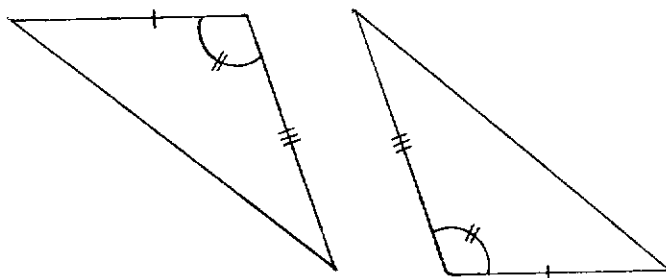
แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 1.4

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูปต่อไปนี้ แล้ว
เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน-มุม-ด้าน)

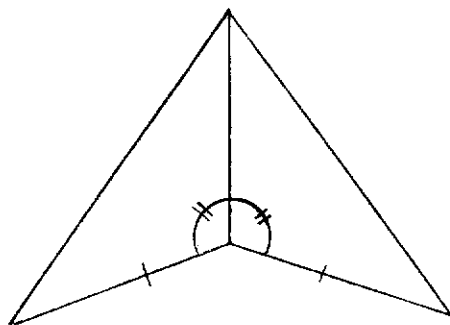
1.



2.



3.



แผ่นใบร่างสไลด์แผ่นที่ 1.5

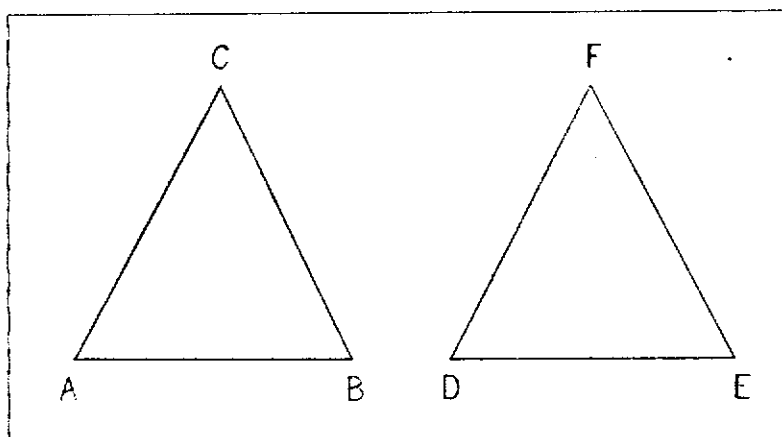
ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
ภาคผล คือ	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
กำหนดให้	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปใดที่มีมุมที่มีขนาดเท่ากัน
สองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่นั้น
ขนาดเท่ากันยาวเท่ากัน

แผ่นขั้นตอนที่ 1

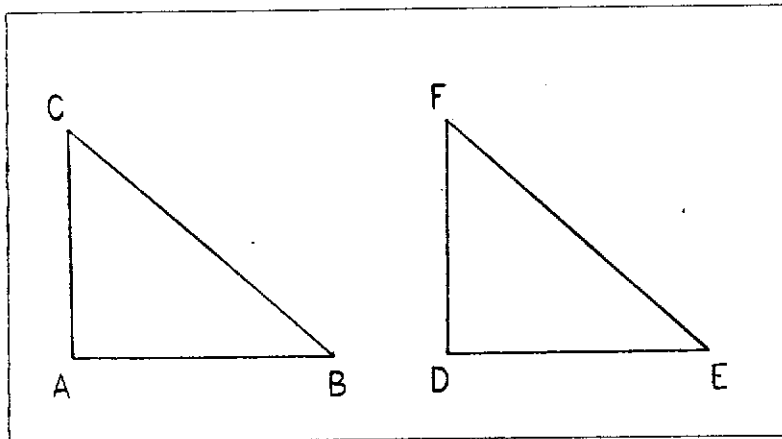
รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

แผ่นขั้นตอนที่ 2

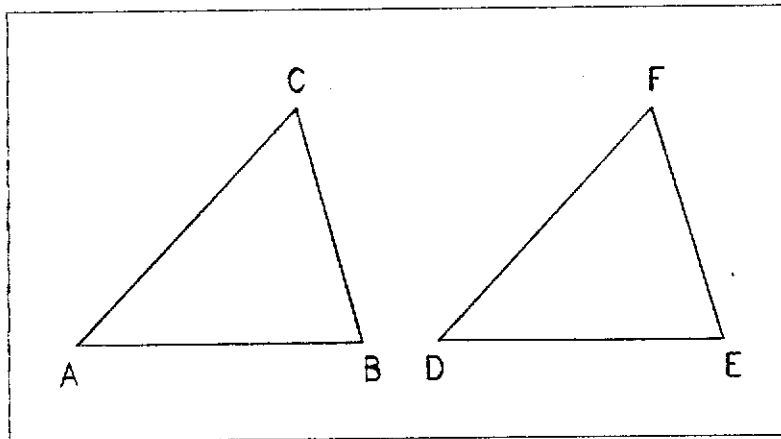


แผ่นขั้นตอนที่ 3

แผ่นที่ 1



แผ่นซ้อนตอนที่ 3
แผ่นที่ 2



แผ่นซ้อนตอนที่ 3
แผ่นที่ 3

ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่มี
 $\angle ABC = \angle DEF$, $BC = EF$ และ $\angle BCA = \angle EFD$

แผ่นซ้อนตอนที่ 4

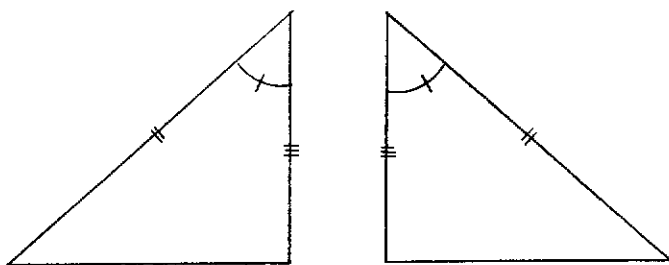
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

แผ่นซ้อนตอนที่ 5

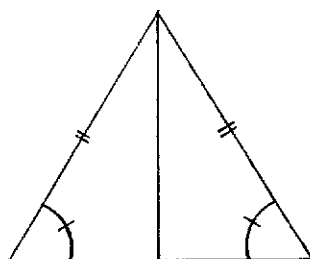
แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 1.6

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูปต่อไปนี้คู่ใด
เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 2 (มุม-ด้าน-มุม)

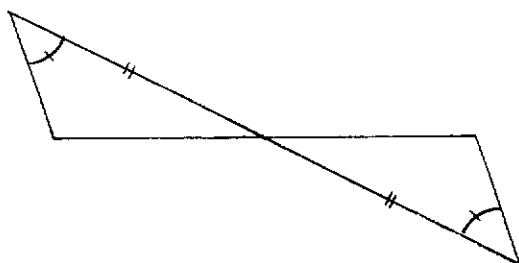
1.



2.



3.



แผนการสอนคาบที่ 2

จุดประสงค์

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ ของทฤษฎีบทที่ 3, 4, 5 และ 6 พร้อมทั้งแปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์
2. เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ของโจทย์ปัญหาอื่น ๆ พร้อมทั้งแปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์
3. นำทฤษฎีบทที่ 3, 4, 5 และ 6 ไปใช้ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม - มุม - ด้าน)

ทฤษฎีบทที่ 4 ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ฉาก - ด้าน - ด้าน)

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 2.1 - 2.3
2. แผ่นโป่งใสแผ่นที่ 1.1 - 1.13
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 - 2.3
4. กระดาษคำตอบและเฉลยคำตอบสำหรับเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3
5. เฉลยคำตอบสำหรับเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน-มุม-ด้าน) และทฤษฎีบทที่ 2 (มุม-ด้าน-มุม) โดยฉายแผ่นโป่งใสแผ่นที่ 2.1 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 1 หรือทฤษฎีบทที่ 2 หรือไม่ โดยใช้เวลาทำ 3 นาที หลังจากนั้นให้นักเรียนเฉลยพร้อมทั้งให้เหตุผล

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 2.1 ทฤษฎีบทที่ 3 (มุม-มุม-ด้าน) บนกระดาน ให้นักเรียนหาภาคเหตุ และภาคผลของทฤษฎีบทที่ 3 และครูขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคเหตุด้วยปากกาสีแดง และขีดเส้นใต้ข้อความที่เป็นภาคผลด้วยปากกาสีเขียว
2. ครูฉายแผ่นโป่งใสแผ่นที่ 2.2 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อแปลงภาคเหตุ และภาคผลของทฤษฎีบทที่ 3 เป็นรูปและสัญลักษณ์
3. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 3 (มุม-มุม-ด้าน) โดยฉายแผ่นโป่งใสแผ่นที่ 2.3 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 3 (มุม-มุม-ด้าน) หรือไม่ โดยใช้เวลาทำ 2 นาที หลังจากนั้นให้นักเรียนเฉลยพร้อมทั้งให้เหตุผล

4. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.4 ประกอบการอธิบาย และการถาม - ตอบ เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจคำว่า "ก็ต่อเมื่อ" และแยกทฤษฎีบทที่ 4 ออกเป็นทฤษฎีบทย่อย 2 ทฤษฎีบท คือ ทฤษฎีบทที่ 4.1 และทฤษฎีบทที่ 4.2

5. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 2.2 (ทฤษฎีบทที่ 4.1) บนกระดาน ให้นักเรียนหาภาคเหตุ และภาคผล

6. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.5 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อแปลงภาคเหตุ และภาคผลของทฤษฎีบทที่ 4.1 เป็นรูปและสัญลักษณ์

7. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 2.3 (ทฤษฎีบทที่ 4.2) บนกระดาน ให้นักเรียนหาภาคเหตุ และภาคผล

8. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.6 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อแปลงภาคเหตุ และภาคผลของทฤษฎีบทที่ 4.2 เป็นรูปและสัญลักษณ์

9. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ 2 คน ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 ให้นักเรียน กลุ่มละ 1 ชุด ให้นักเรียนแยกภาคเหตุและภาคผลของทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 พร้อมทั้งแปลงเป็น รูปและสัญลักษณ์ ใช้เวลาทำ 5 นาที แล้วครูเก็บไปตรวจจนนอกเวลา ครูเฉลยคำตอบของ เอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 โดยใช้แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.7 และ 2.8 ประกอบการถาม - ตอบ

10. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.9 ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนบอก หลักการวิเคราะห์โจทย์ เพื่อหาภาคเหตุและภาคผล การแปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

11. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียน เกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 5 (ด้าน-ด้าน-ด้าน) โดยฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.10 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 5 หรือไม่ ให้เวลาทำ 2 นาที หลังจากนั้นครูเฉลย และให้นักเรียนบอกเหตุผล

12. ครูทบทวนความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ทฤษฎีบทที่ 6 (จาก-ด้าน-ด้าน) โดยฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.11 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดให้ เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 6 หรือไม่ ให้เวลาทำ 2 นาที หลังจากนั้นให้นักเรียนเฉลย พร้อมทั้งให้เหตุผล

13. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.12 และ 2.13 ตามลำดับ ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อให้นักเรียนหาภาคเหตุ และภาคผลของโจทย์ปัญหาอื่น ๆ แปลงภาคเหตุและภาคผล ให้เป็นรูป และสัญลักษณ์ เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

ขั้นฝึกหัด

1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2 ให้นักเรียนทำหยาบชั่วโมงแล้วส่งครูถ้าทำไม่เสร็จ ให้นำส่งครูในวันรุ่งขึ้น
2. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3 พร้อมกระดาษคำตอบและเฉลย ให้นักเรียนทำเป็น การบ้าน และตรวจคำตอบด้วยตัวเอง

ขั้นการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 และ 2.2 ของนักเรียน
3. ครูตรวจเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2 นักเรียนที่ทำถูกต้องตั้งแต่ 80% ขึ้นไป ถือว่าผ่าน สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่าน ต้องมาพบครู เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องและรับเฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2

แผนภูมิแผ่นที่ 2.1

ทฤษฎีบทที่ 3

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และมีด้านซึ่งอยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม - มุม - ด้าน)

แผนภูมิแผ่นที่ 2.2

ทฤษฎีบทที่ 4.1

ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับ
ด้านคู่นั้นยาวเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากัน

แผนภูมิแผ่นที่ 2.3

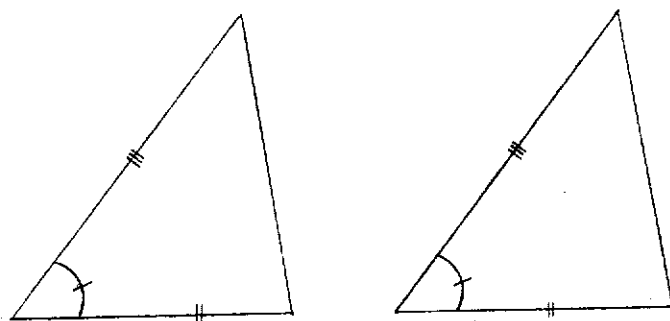
ทฤษฎีบทที่ 4.2

ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุมแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้าม
กับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

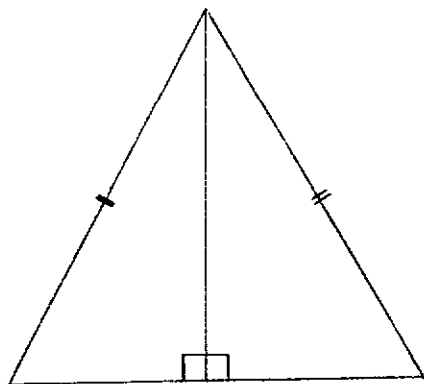
แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.1

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่กำหนดให้
ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เท่ากันทุกประการหรือไม่ ตาม
ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน หรือ มุม-ด้าน-มุม

1.

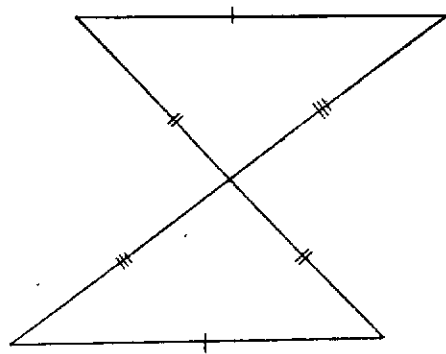


2.

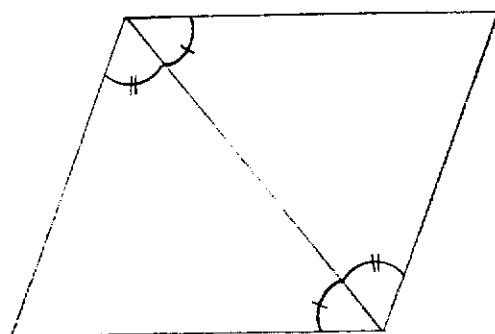


(ต่อ)

3.



4.

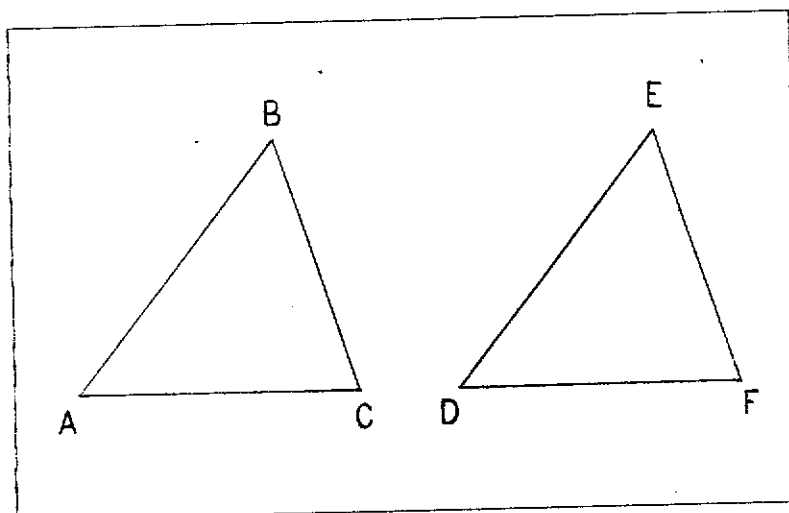


แผนโปร่งใสแผนที่ 2.2

ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์	ตอนที่ 2
กำหนดให้	ตอนที่ 3
ภาคผล คือ	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ที่มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่
และด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาว
เท่ากันคู่หนึ่ง

แผ่นข้อตอนที 1



แผ่นข้อตอนที 2

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป
ที่มี $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{A} = \hat{D}$ และ $AC = DF$

แผ่นข้อตอนที 3

รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

แผ่นข้อตอนที 4

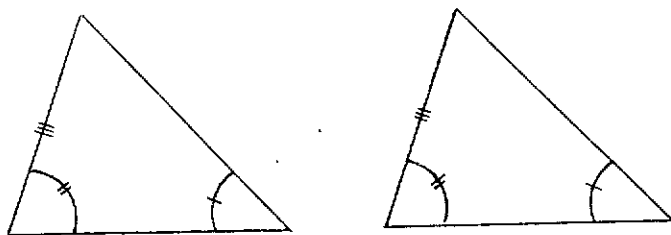
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

แผ่นข้อตอนที 5

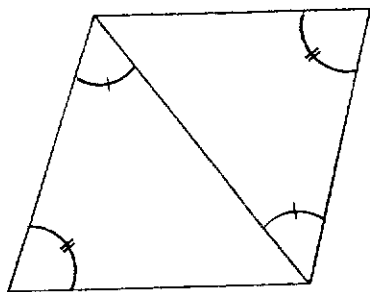
แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.3

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูปต่อไปนี้ดูว่า
เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 3 (มุม-มุม-ด้าน)

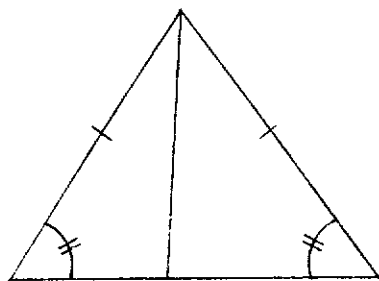
1.



2.



3.



แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.4

ทฤษฎีบทที่ 4 ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

แยกเป็น 2 ทฤษฎีบทย่อยได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.1

ตอนที่ 1

ทฤษฎีบทที่ 4.2

ตอนที่ 2

ถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
ยาวเท่ากัน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามด้าน
ทั้งสองนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที 1

แผ่นที่ 1

ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากัน
สองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่
ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที 1

แผ่นที่ 2

ถ้ามุมที่อยู่ตรงข้ามด้านสองด้านของ
รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากัน แล้ว
ด้านทั้งสองนี้จะยาวเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที 2

แผ่นที่ 1

ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากัน
สองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาด
เท่ากัน จะยาวเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที 2

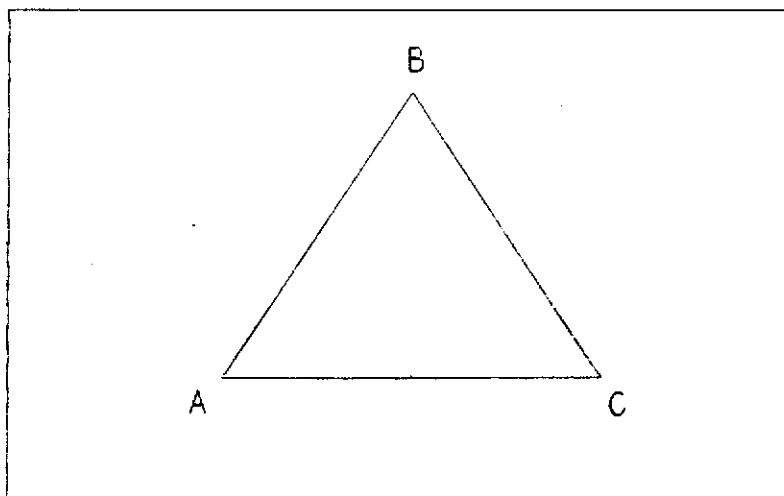
แผ่นที่ 2

แผนปรับปรุงใบหน้าที่ 2.5

ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์	ตอนที่ 2
กำหนดค่าให้	ตอนที่ 3
ภาคผล คือ	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

แผ่นข้อตอนที่ 1



แผ่นข้อตอนที่ 2

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $AB = BC$

แผ่นข้อตอนที่ 3

มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน
จะมีขนาดเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที่ 4

$$\hat{BAC} = \hat{ACB}$$

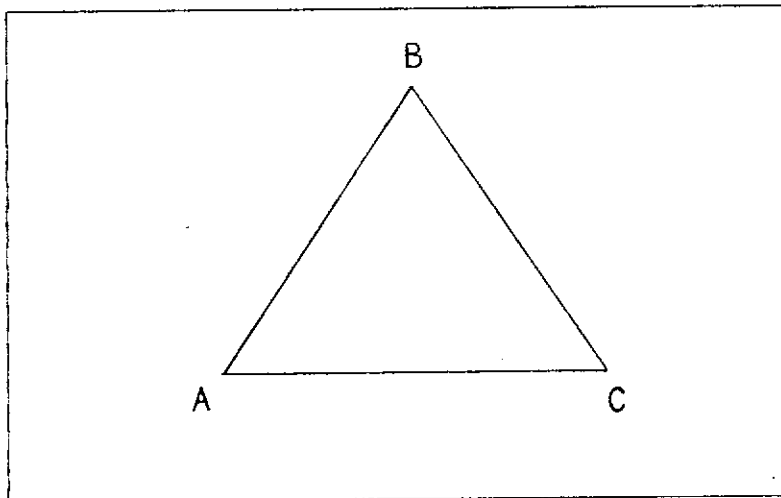
แผ่นข้อตอนที่ 5

แผ่นโปรงใสแผ่นที่ 2.6

ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์	ตอนที่ 2
กำหนดให้	ตอนที่ 3
ภาคผล คือ	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม

แผ่นข้อตอนที่ 1



แผ่นข้อตอนที่ 2

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $\angle BAC = \angle BCA$

แผ่นข้อตอนที่ 3

ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน
จะยาวเท่ากัน

แผ่นข้อตอนที่ 4

$$AB = BC$$

แผ่นข้อตอนที่ 5

แผ่นใบโปร่งใสแผ่นที่ 2.7

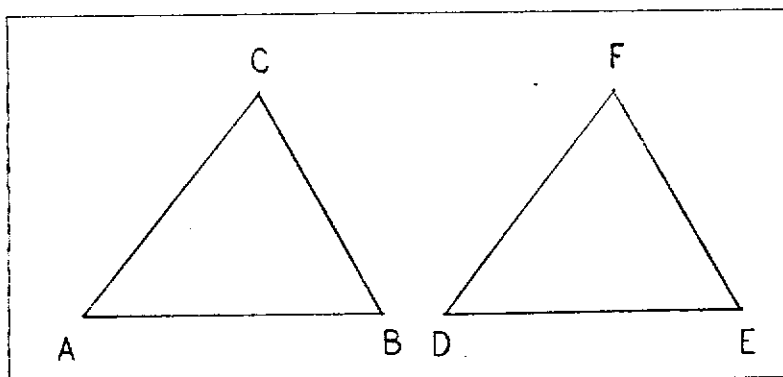
ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)	
ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
ภาคผล คือ	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
กำหนดให้	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่

แผ่นข้อตอนที่ 1

รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ

แผ่นข้อตอนที่ 2



แผ่นข้อตอนที่ 3

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี
 $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

แผ่นข้อตอนที่ 4

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

แผ่นข้อตอนที่ 5

แผนประกอบที่ 2.8

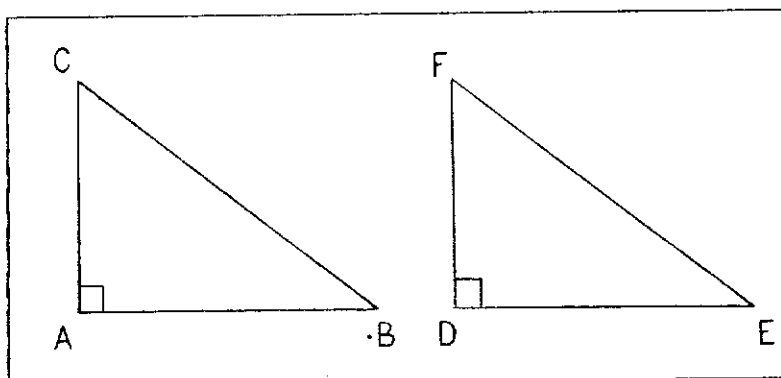
ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (จาก - ด้าน - ด้าน)	
ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
ภาคผล คือ	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
กำหนดให้	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉาก
ยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน

ผ่านขั้นตอนที่ 1

รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

ผ่านขั้นตอนที่ 2



ผ่านขั้นตอนที่ 3

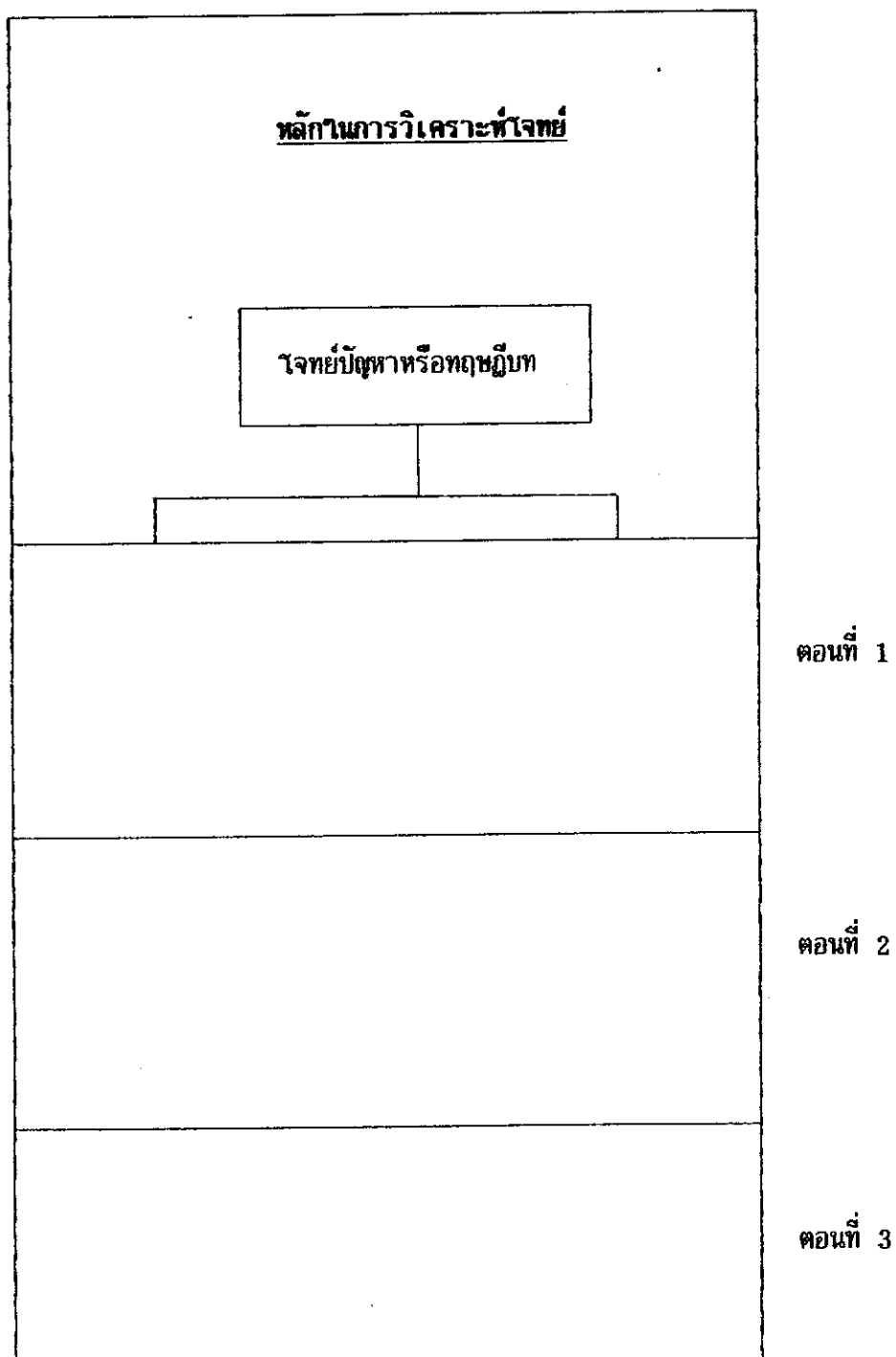
$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ที่มี $AB = DE$, $BC = EF$ และ
 $\angle CAB = \angle FDE = 90^\circ$

ผ่านขั้นตอนที่ 4

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ผ่านขั้นตอนที่ 5

แผนผังโครงสร้างแม่บท 2.9



สิ่งที่เจตย์กำหนดให้

แผ่นข้อตอนที่ 1

แผ่นที่ 1

สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แผ่นข้อตอนที่ 1

แผ่นที่ 2

เขียนรูป
--

แผ่นข้อตอนที 2

แผ่นที่ 1

เขียนสัญลักษณ์

แผ่นข้อตอนที่ 2

หน้า 2

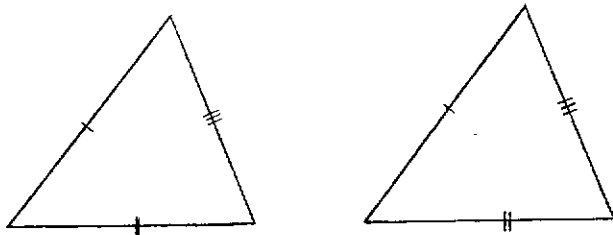
เขียนสัญลักษณ์

แผ่นข้อตอนที่ 3

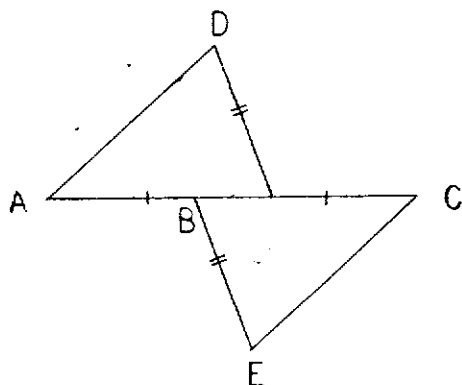
แผนประกอบแนบที่ 2.10

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูปในแต่ละข้อ
 ต่อเป็นคู่ใดเท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 5
 (ด้าน - ด้าน - ด้าน)

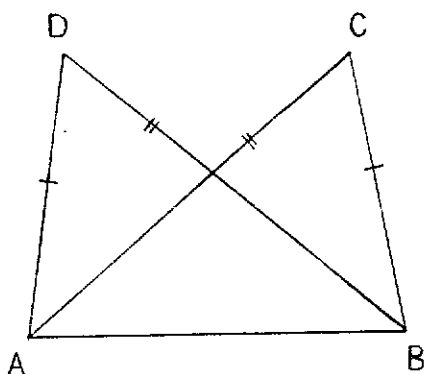
1.



2.



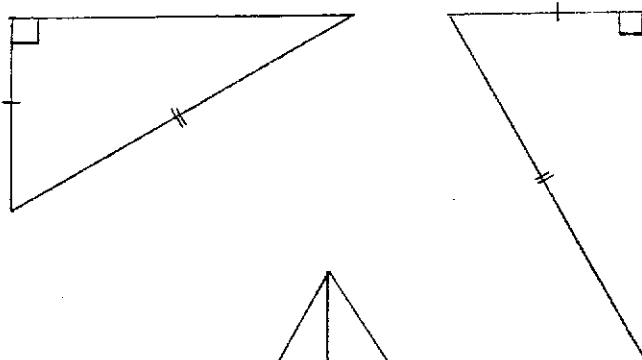
3.



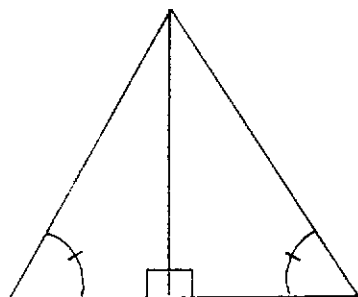
แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.11

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม 2 รูปในแต่ละข้อ
ต่อไปนี้แล้วตอบคำถามทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 6
(จาก - ด้าน - ด้าน)

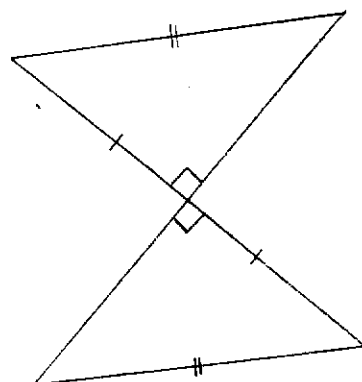
1.



2.



3.



แผนปฏิบัติงานแผนที่ 2.12

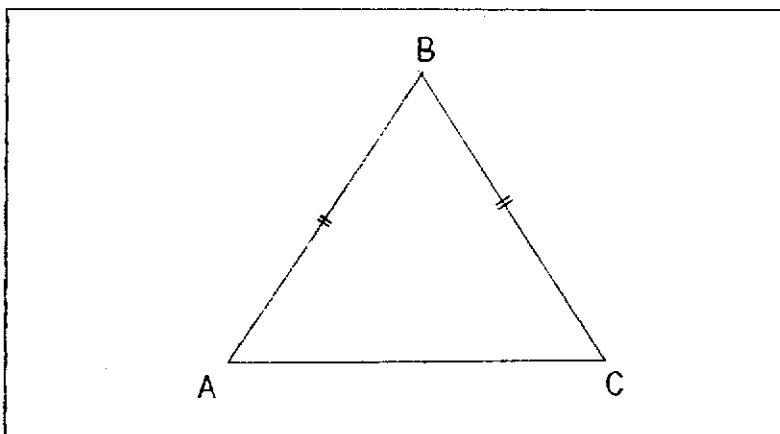
โจทย์ จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมแบ่งครึ่งฐานและตั้งฉากกับฐาน	
ภาคเหตุ คือ	ตอนที่ 1
ภาคผล คือ	ตอนที่ 2
แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์	ตอนที่ 3
กำหนดให้	ตอนที่ 4
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 5

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

แผ่นขั้นตอนที่ 1

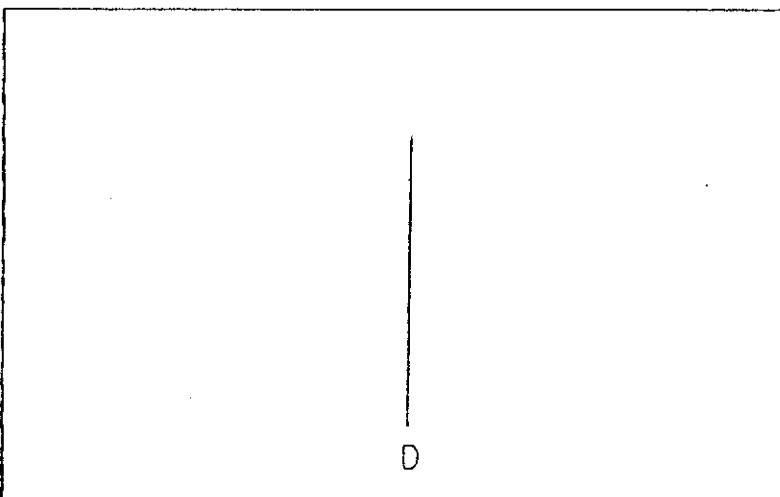
แบ่งครึ่งฐานและตั้งฉากกับฐาน

แผ่นขั้นตอนที่ 2



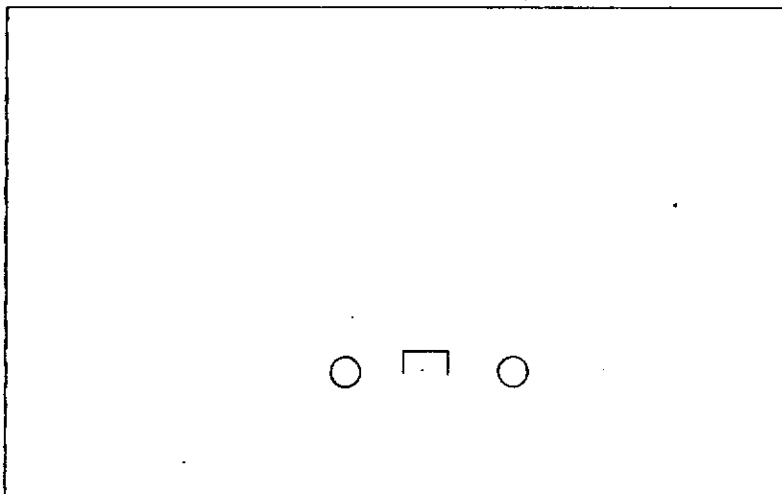
แผ่นขั้นตอนที่ 3

แผ่นที่ 1



แผ่นขั้นตอนที่ 3

แผ่นที่ 2



แผ่นข้อตอนที่ 3

แผ่นที่ 3

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี
 $AB = BC$ และ $\angle ABD = \angle DBC$

แผ่นข้อตอนที่ 4

$AC = DC$ และ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

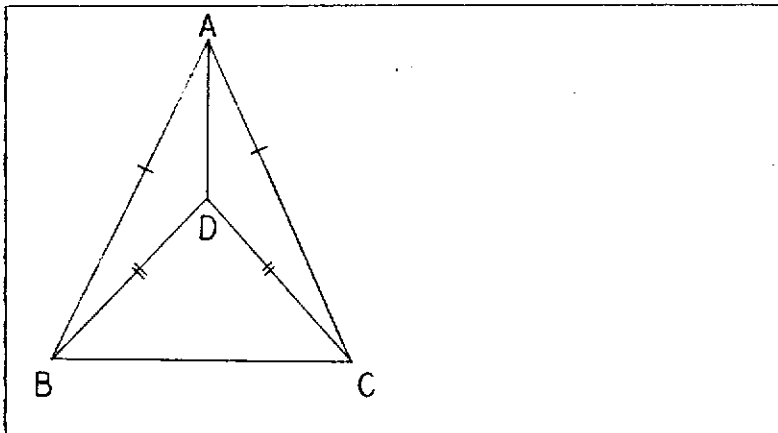
แผ่นข้อตอนที่ 5

แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 2.13

โจทย์ข้อ 1 กำหนดให้ ABC และ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่วสองรูปที่มีฐานร่วมกัน โดยมี $AB = AC$ และ $BD = CD$ ลาก $\overline{AD}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD$ มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$	
กำหนดให้	ตอนที่ 1
แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์	ตอนที่ 2
จะต้องพิสูจน์ว่า	ตอนที่ 3

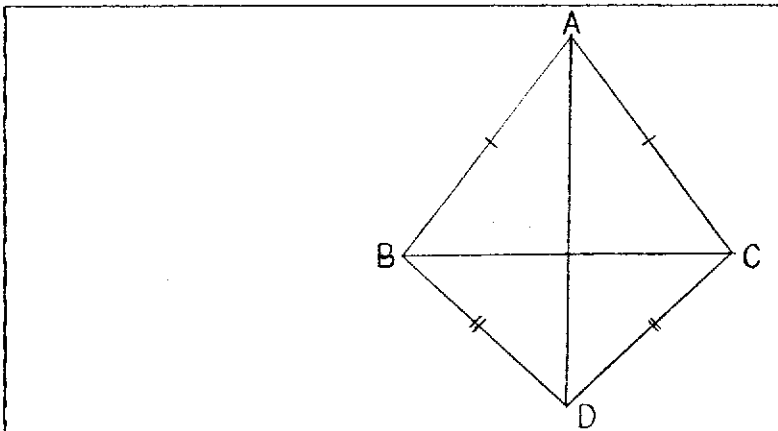
ABC และ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป
 ที่ใช้ฐาน $\overline{BC}$ ร่วมกัน
 $AB = AC$ และ $BD = CD$

ผ่านขั้นตอนที่ 1



ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 1



ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 2

พื้นที่ของ $\triangle ABD =$ พื้นที่ของ $\triangle ACD$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

แผนการสอนคาบที่ 3

จุดประสงค์

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. วิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ได้
2. เรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ได้
3. หาสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ของโจทย์ปัญหาอื่น ๆ โดยพิจารณาจากนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้
4. เลือกรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่ต้องนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 3 และ 4

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 3.1 - 3.6
2. แผ่นใบร่างสี่เหลี่ยมที่ 3.1 - 3.6
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.1 - 3.3

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.1 ซึ่งเป็นการทบทวนทฤษฎีบทที่ 1-6 ให้นักเรียน
- 2 คนต่อ 1 ชุด ใช้เวลา 5 นาที หลังจากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยและอภิปรายผล

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. ครูคิดแผนภูมิแผนที่ 3.1 ซึ่งมีทฤษฎีบทที่ 3 (มุม-มุม-ด้าน) สิ่งที่กำหนดให้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน
2. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผนที่ 3.1 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 3) ประกอบการถาม-ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่จะนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
3. ครูคิดแผนภูมิแผนที่ 3.2 การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3 บนกระดาน
4. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.2 ให้นักเรียนคนละ 1 ชุด เพื่อฝึกการเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3, 4.1 และ 4.2
5. ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3 ใช้เวลา 3 นาที แล้วครูเฉลยโดยใช้แผ่นโปสเตอร์แผนที่ 3.2
6. ครูคิดแผนภูมิแผนที่ 3.3 ซึ่งมีทฤษฎีบทที่ 4.1 สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน
7. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผนที่ 3.3 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 4.1) ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่จะนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
8. ครูคิดแผนภูมิแผนที่ 3.4 การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.1 บนกระดาน
9. ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.1 (ในเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.2) ใช้เวลา 3 นาที แล้วครูเฉลยโดยใช้แผ่นโปสเตอร์แผนที่ 3.4

10. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 3.5 ซึ่งมีทฤษฎีบทที่ 4.2 สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน

11. ครูฉายแผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 3.5 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 4.2) ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่จะนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

12. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 3.6 การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.2 บนกระดาน

13. ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.2 (ในเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.2)

ใช้เวลา 3 นาที แล้วครูเฉลยโดยใช้แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 3.6

ขั้นฝึกหัด

1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.3 ให้นักเรียนทำท้ายชั่วโมงเรียนแล้วส่งครู ถ้าไม่เสร็จให้นำส่งครูในวันรุ่งขึ้น

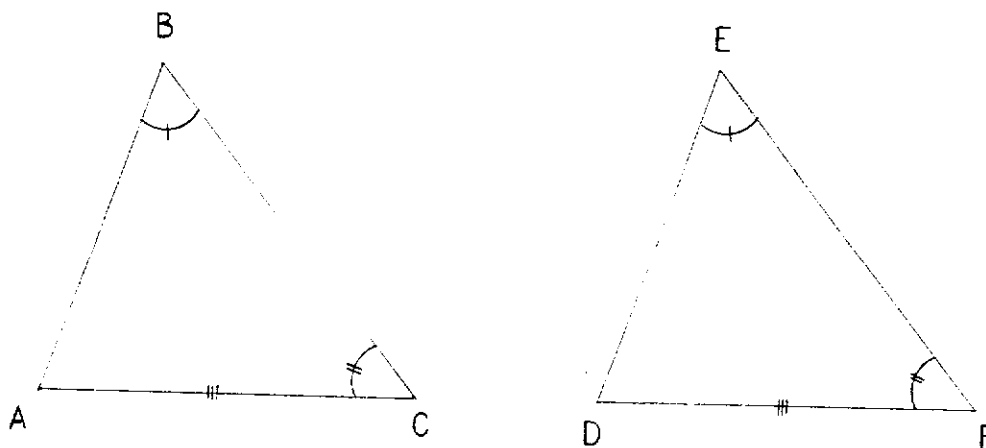
ขั้นประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.1, 3.2 และ 3.3
3. ครูตรวจเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.2 และ 3.3 นักเรียนที่ทำถูกต้องตั้งแต่ 70% ขึ้นไป ถือว่าผ่าน สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่าน ต้องมาพบครูเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องก่อนที่จะเรียนคาบต่อไป

แผนภูมิแผนที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม - มุม - ด้าน)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่มี $\angle ABC = \angle DEF$
 $\angle BCA = \angle EFD$ และ $AC = DF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

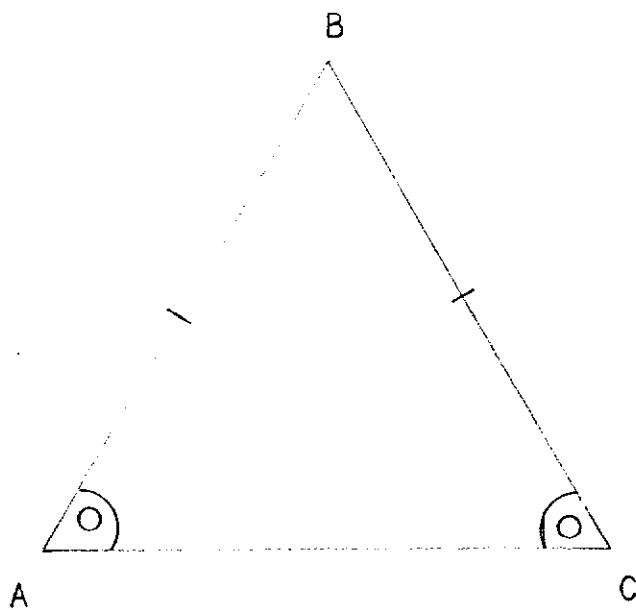
แผนภูมิแนกที่ 3.2

การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3

1. แสดงว่ามุมคู่ที่ 3 เท่ากัน
2. แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ
3. สรุปผลที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แผนภูมิแนบที่ 3.3

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $AB = BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{BAC} = \hat{BCA}$

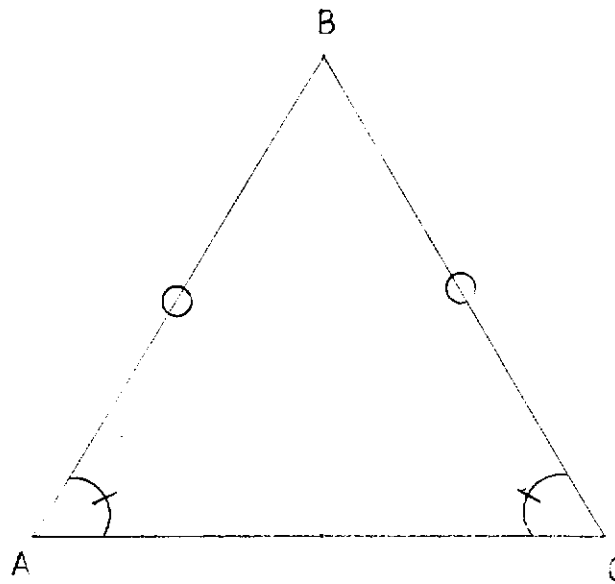
แผนภูมิแผนที่ 3.4

การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.1

1. แสดงการสร้างเพื่อการพิสูจน์
2. แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ
3. สรุปผลที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แผนภูมิหน้า 3.5

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $\angle BAC = \angle BCA$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB = BC$

แผนภูมิแผ่นที่ 3.6

การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4.2

1. แสดงการสร้างเพื่อการพิสูจน์
2. แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ
3. สรุปผลที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แผนโปร่งใสแผนที่ 3.1

	ตอนที่ 1
	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
	ตอนที่ 4
	ตอนที่ 5
	ตอนที่ 6
	ตอนที่ 7

ใน $\triangle ABC$, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
(ผลรวมของขนาดของมุมภายในของ $\triangle$ เท่ากับ 180°)

ผ่านขั้นตอนที่ 1

ใน $\triangle DEF$, $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$

ผ่านขั้นตอนที่ 2

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{D} + \hat{E} + \hat{F}$ (คุณสมบัติการเท่ากัน)

ผ่านขั้นตอนที่ 3

$\hat{A} = \hat{D}$
($\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และคุณสมบัติการหักออกของสิ่งที่เท่ากัน)

ผ่านขั้นตอนที่ 4

ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

1. $\hat{C} = \hat{F}$ (กำหนดให้)

2. $AC = DF$ (กำหนดให้)

3. $\hat{A} = \hat{D}$ (ต้องหา)

ผ่านขั้นตอนที่ 5

ด้าน - มุม - ด้าน

มุม - ด้าน - มุม

ผ่านขั้นตอนที่ 6

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ผ่านขั้นตอนที่ 7

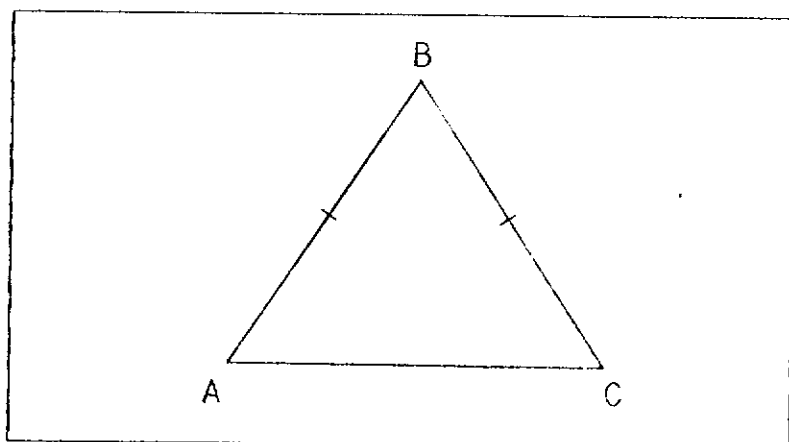
แผนประกอบฉากที่ 3.2

พิสูจน์

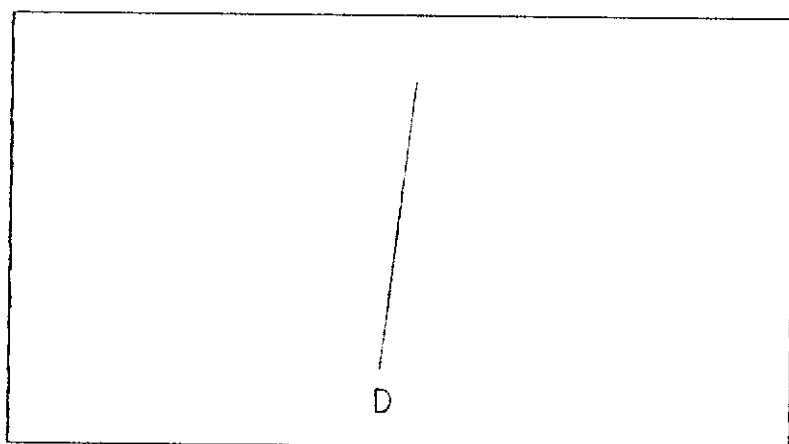
ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}BC = \hat{A}DE$	1. กำหนดให้
2. $\hat{A}CB = \hat{A}ED$	2. กำหนดให้
3. $\hat{A}BC + \hat{A}CB + \hat{B}AC = 180^\circ$	3. ผลรวมของมุมภายในของ $\triangle ABC$
4. $\hat{A}DE + \hat{A}ED + \hat{B}DE = 180^\circ$	4. ผลรวมของมุมภายในของ $\triangle DEF$
5. $\hat{A}BC + \hat{A}CB + \hat{B}AC = \hat{A}DE + \hat{A}ED + \hat{B}DE$	5. จากข้อ 3, 4 และคุณสมบัติการเท่ากัน
6. $\hat{B}AC = \hat{B}DE$	6. จากข้อ 5 และคุณสมบัติการหักออกของสิ่งที่เท่ากัน
7. $BC = DE$	7. กำหนดให้
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8. จากข้อ 2, 4 และ 5 (มุม - ด้าน - มุม)

แผนโปร่งใสแผนที่ 3.3

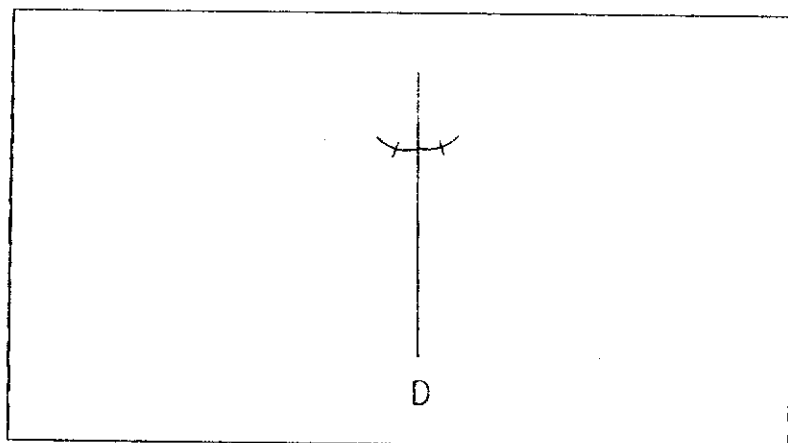
	ตอนที่ 1
	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
	ตอนที่ 4
	ตอนที่ 5
	ตอนที่ 6
	ตอนที่ 7



แผ่นซ้อนตอนที่ 1
แผ่นที่ 1



แผ่นซ้อนตอนที่ 1
แผ่นที่ 2



แผ่นซ้อนตอนที่ 1
แผ่นที่ 3

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{B}$

ผ่านขั้นตอนที่ 2

จะได้ $\hat{ABD} = \hat{DBC}$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle DBC$

1. $AB = BC$ (กำหนดให้)
2. $\hat{ABD} = \hat{DBC}$ (การสร้าง)
3. $BD = BD$ (ด้านร่วม)

ผ่านขั้นตอนที่ 4

ด้าน -มุม -ด้าน มุม -ด้าน -มุม มุม -มุม -ด้าน

ผ่านขั้นตอนที่ 5

$$\triangle ABD \cong \triangle DBC$$

ผ่านขั้นตอนที่ 6

$$\hat{BAC} = \hat{BCA}$$

ผ่านขั้นตอนที่ 7

แผนโปร่งใสแผนที่ 3.4

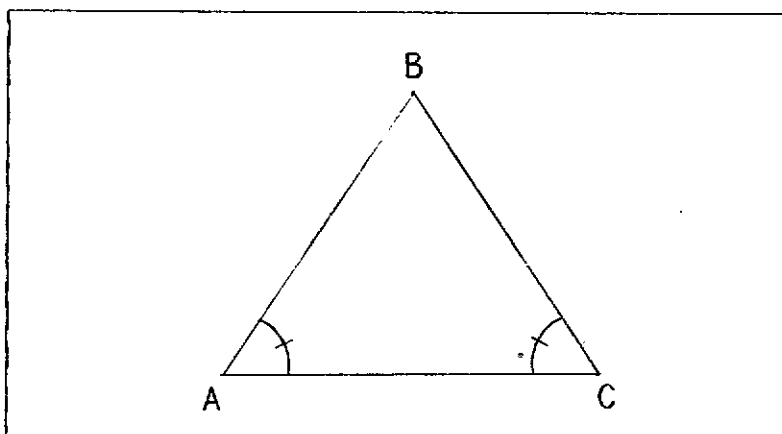
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\angle ABC$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle DBC$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = BC$	1. กำหนดให้
2. $\angle ABD = \angle DBC$	2. จากการสร้าง
3. $BD = BD$	3. เป็นด้านร่วม
4. $\triangle ABD \cong \triangle DBC$	4. จากข้อ 1, 2 และ 3 (ด้าน - มุม - ด้าน)
5. $\angle BAC = \angle BCA$	5. ผลจากข้อ 4

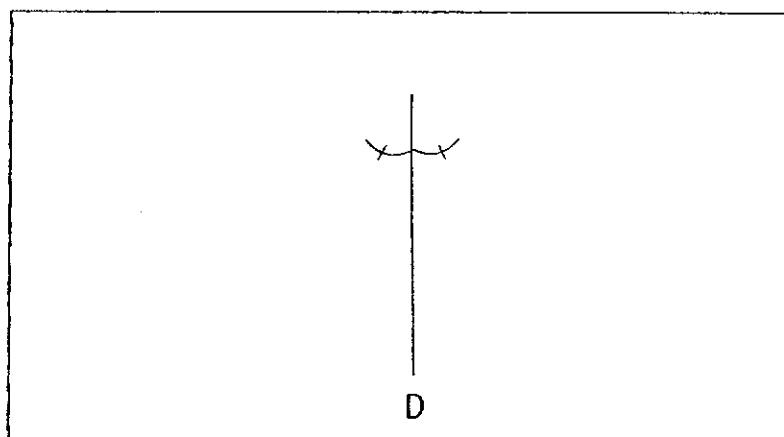
แผนปฏิบัติงานแม่ที่ 3.5

	ตอนที่ 1
	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
	ตอนที่ 4
	ตอนที่ 5
	ตอนที่ 6
	ตอนที่ 7



แผ่นขั้นตอนที่ 1

แผ่นที่ 1



แผ่นขั้นตอนที่ 1

แผ่นที่ 2

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{B}$

แผ่นขั้นตอนที่ 2

จะได้ $\hat{A}BD = \hat{D}BC$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

- ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle DBC$
1. $\hat{B}AD = \hat{B}CD$ (กำหนดให้)
 2. $\hat{A}BD = \hat{D}BC$ (การสร้าง)
 3. $BD = BD$ (ด้านร่วม)

ผ่านขั้นตอนที่ 4

ด้าน -มุม -ด้าน มุม -ด้าน -มุม มุม -มุม -ด้าน

ผ่านขั้นตอนที่ 5

$$\triangle ABD \cong \triangle DBC$$

ผ่านขั้นตอนที่ 6

$$AB = BC$$

ผ่านขั้นตอนที่ 7

ผ่านโปร่งใสแผ่นที่ 3.6

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\angle ABC$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle DBC$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle BAD = \angle BCD$	1. กำหนดให้
2. $\angle ABD = \angle DBC$	2. จากการสร้าง
3. $BD = BD$	3. เป็นด้านร่วม
4. $\triangle ABD \cong \triangle DBC$	4. จากข้อ 1, 2 และ 3 (มุม - มุม - ด้าน)
5. $AB = BC$	5. ผลจากข้อ 4

แผนการสอนคาบที่ 4

จุดประสงค์

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. วิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 ได้
2. เรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 ได้
3. วิเคราะห์และสังเคราะห์ พร้อมทั้งเรียบเรียงการพิสูจน์โจทย์ปัญหาอื่น ๆ ได้

เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 5 - 6

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 4.1 - 4.5
2. แผ่นปริงาสแผ่นที่ 4.1 - 4.5
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.1 และ 4.2
4. เฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูอธิบายข้อผิดพลาดในการทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.3 ของนักเรียน

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 4.1 ซึ่งมีทฤษฎีบทที่ 5 (ด้าน-ด้าน-ด้าน) สิ่งที่กำหนดให้
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน
2. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 4.1 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 5)
ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่ได้เพิ่มเติมจาก
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่นำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
3. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 4.2 การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 บนกระดาน
4. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.1 เพื่อฝึกเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 และ 6
5. ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5 ใช้เวลา 5 นาที แล้วครูเฉลย
โดยใช้แผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 4.2
6. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 4.3 ซึ่งมีทฤษฎีบทที่ 6 (ฉาก-ด้าน-ด้าน) สิ่งที่กำหนดให้
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน
7. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 4.3 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ทฤษฎีบทที่ 6)
ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่เพิ่มเติม จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
และสิ่งที่นำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
8. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 4.4 การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 6 บนกระดาน
9. ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 6 (ในเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.1)
ใช้เวลา 5 นาที แล้วครูเฉลยโดยใช้แผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 4.4
10. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 4.5 ซึ่งมีโจทย์ตัวอย่าง 1 สิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์
พร้อมทั้งรูปและสัญลักษณ์ บนกระดาน
11. ครูฉายแผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 4.5 (การวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวอย่างที่ 1)
ประกอบการถาม - ตอบ เพื่อวิเคราะห์และสังเคราะห์ให้ได้สิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์
กำหนดให้ และสิ่งที่นำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

ชั้นฝึกหัด

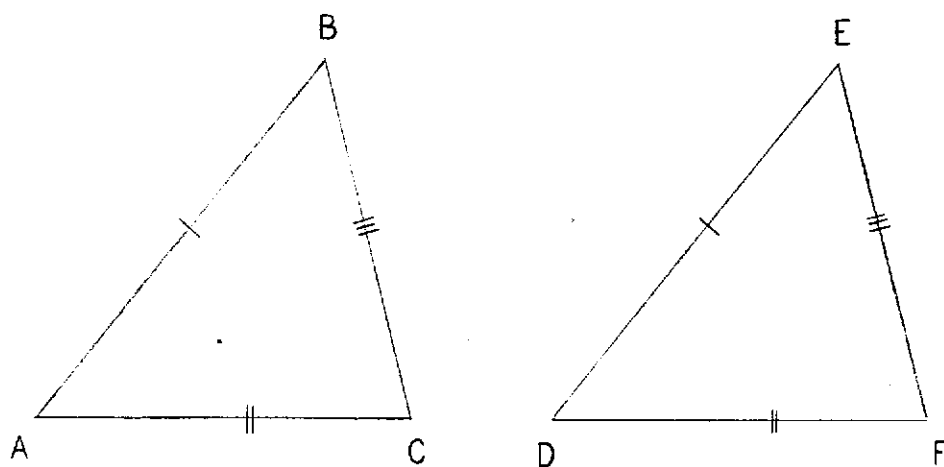
1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2 ให้นักเรียน 2 คนต่อ 1 ชุด ทำท้ายชั่วโมงแล้ว
นำส่งครู ถ้าทำไม่เสร็จให้นำส่งครูในวันรุ่งขึ้น

ชั้นประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.1
3. ตรวจเอกสารชุดฝึกหัดชุดที่ 4.2 นักเรียนที่ทำถูกต้องตั้งแต่ 70% ขึ้นไปถือว่าผ่าน
สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่าน ให้มาพบครูเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องและรับเฉลยของเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2
ก่อนเรียนคาบต่อไป

แผนภูมิแผนที่ 4.1

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยม
สองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)



สิ่งที่กำหนดให้ คือ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

ที่มี $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

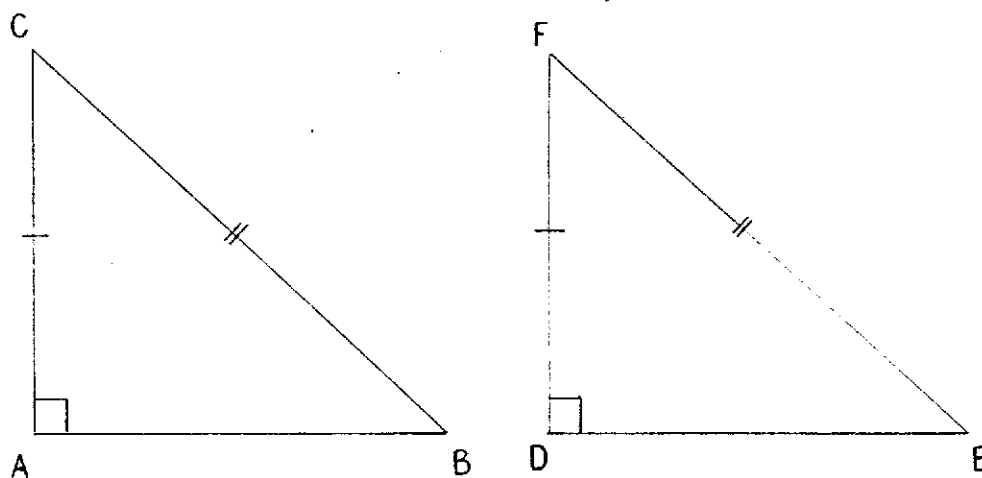
แผนภูมิหน้าที่ 4.2

การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5

1. แสดงการซ้อนรูปสามเหลี่ยม 2 รูป
2. แสดงการสร้างเพื่อการพิสูจน์
3. แสดงว่ามุมเท่ากัน
4. แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ
5. สรุปผลที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แบบฝึกหัดที่ 4.3

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น เท่ากันทุกประการ (ฉาก - ด้าน - ด้าน)



สิ่งที่กำหนดให้ คือ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ที่มี $BC = EF$, $AC = DF$ และ

$$\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

แผนภูมิแผ่นที่ 4.4

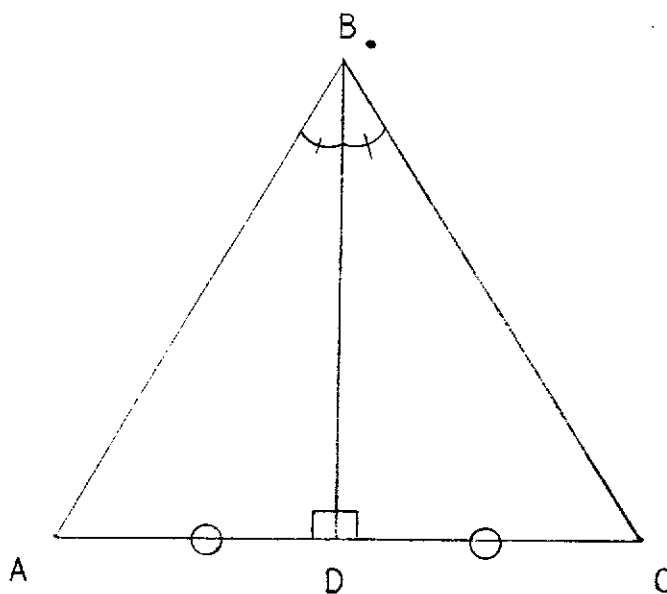
การเรียบเรียงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 6

1. แสดงการซ้อนรูปสามเหลี่ยม 2 รูป
2. แสดงว่ามุมเท่ากัน
3. แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ
4. สรุปผลที่โจทย์ต้องการพิสูจน์

แผนภูมิแผนที่ 4.5

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงที่ลากแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ไปยังฐานจะแบ่งครึ่งฐานและตั้งฉากกับฐาน

สิ่งที่กำหนดให้ คือ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\angle ABD = \angle DBC$



สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ

1. $AD = DC$
2. $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

แผนโปร่งใสแผนที่ 4.1

	ตอนที่ 1
	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
	ตอนที่ 4
	ตอนที่ 5
	ตอนที่ 6
	ตอนที่ 7

(ต่อ)

ตอนที่ 8

ตอนที่ 9

ตอนที่ 10

ตอนที่ 11

เคลื่อน $\triangle ABC$ ซ้อน $\triangle DEF$ โดยให้ $\overline{AC}$ ซ้อน $\overline{DF}$
ให้จุด B อยู่ตรงข้ามกับจุด E

แผ่นซ้อนตอนที่ 1

$\triangle ABC \cong \triangle DBF$ ผลที่ได้ 1) $AB = DB$
2) $BC = BF$
3) $AC = DF$

แผ่นซ้อนตอนที่ 2

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{BE}$

แผ่นซ้อนตอนที่ 3

$\triangle BDE$

$\triangle BEF$

แผ่นซ้อนตอนที่ 4

มี $DB = DE$
เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$

มี $BF = EF$
เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะได้ $\hat{3} = \hat{4}$

แผ่นซ้อนตอนที่ 5

$$\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4}$$

แผ่นข้อตอนที่ 6

$$\hat{DEF} = \hat{DBF}$$

แผ่นข้อตอนที่ 7

ต้องการมุม 1 มุมที่เท่ากัน
ใน $\triangle DBF$ และ $\triangle DEF$

1. $DB = DE$
2. $BF = EF$
3. $\hat{DBF} = \hat{DEF}$
(ต้องการ)

แผ่นข้อตอนที่ 8

ด้าน-มุม-ด้าน

มุม-ด้าน-มุม

มุม-ด้าน-มุม

แผ่นข้อตอนที่ 9

$$\triangle DBF \cong \triangle DEF$$

แผ่นข้อตอนที่ 10

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

แผ่นข้อตอนที่ 11

แผนโปร่งใสแผนที่ 4.2

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$	1. กำหนดให้
2. เคลื่อน $\triangle ABC$ ซ้อน $\triangle DEF$ โดยให้ $\overline{AC}$ ซ้อน $\overline{DF}$ ให้ จุด B อยู่ตรงข้ามกับจุด E	2. รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้ และ $AC = DF$
3. $\triangle ABC \cong \triangle DBF$ จะได้ $AB = DB$, $BC = BF$ และ $AC = DF$	3. จากข้อ 2
4. ลาก $\overline{BE}$	4. สร้างเพื่อการพิสูจน์
5. $\triangle BDE$ เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว	5. จากข้อ 1 , 3 และ $DB = DE$
6. $\hat{DEB} = \hat{DBE}$	6. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว
7. $\triangle BFE$ เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว	7. จากข้อ 1 , 3 และ $BF = EF$

(ต่อ)

ข้อความ	เหตุผล
8. $\hat{B}EF = \hat{E}BF$	8. มุมฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
9. $\hat{D}EB + \hat{B}EF = \hat{D}BE + \hat{E}BF$	9. จากข้อ 6 , 8 และคุณสมบัติการเท่ากัน
10. $\hat{D}EF = \hat{D}BF$	10. จากข้อ 9
11. $DB = DE$ และ $BF = EF$	11. จากข้อ 1 และ 3
12. $\triangle DBF \cong \triangle DEF$	12. จากข้อ 10 และ 11 (ด้าน - มุม - ด้าน)
13. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	13. จากข้อ 3 , 12 และ คุณสมบัติถ่ายทอด

แผนโปร่งใสแผนที่ 4.3

	ตอนที่ 1
	ตอนที่ 2
	ตอนที่ 3
	ตอนที่ 4
	ตอนที่ 5

(ต่อ)

ตอนที่ 6

ตอนที่ 7

ตอนที่ 8

ตอนที่ 9

เคลื่อน $\triangle ABC$ ซ้อน $\triangle DEF$ โดยให้ $\overline{AC}$ ทับ $\overline{DE}$
จุด B อยู่ตรงข้ามกับจุด E

แผ่นซ้อนตอนที่ 1

$$\triangle ABC \cong \triangle DBF$$

ผลที่ได้

1. $AC = DF$

2. $BC = BF$

3. $AB = BD$

4. $\angle A = \angle D$

5. $\angle B = \angle B$

6. $\angle C = \angle F$

แผ่นซ้อนตอนที่ 2

$\angle BDE$ เป็นมุมตรง

แผ่นซ้อนตอนที่ 3

$\triangle BEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ที่มี $BF = EF$

จะได้ $\angle FBE = \angle FEB$

แผ่นซ้อนตอนที่ 4

$\hat{FBE} = \hat{FBD}$	$\hat{FEB} = \hat{FED}$
-------------------------	-------------------------

ผ่านขั้นตอนที่ 5

ต้องการมุม 1 มุมที่เท่ากัน ใน $\triangle DBF$ และ $\triangle DEF$	1. $BF = EF$ 2. $\hat{BDF} = \hat{EDF}$ 3. $\hat{FBD} = \hat{FED}$
--	--

ผ่านขั้นตอนที่ 6

ด้าน-มุม-ด้าน มุม-ด้าน-มุม มุม-มุม-ด้าน ด้าน-ด้าน-ด้าน
--

ผ่านขั้นตอนที่ 7

$\triangle DBF$	$\cong$	$\triangle DEF$
-----------------	---------	-----------------

ผ่านขั้นตอนที่ 8

$\triangle ABC$	$\cong$	$\triangle DEF$
-----------------	---------	-----------------

ผ่านขั้นตอนที่ 9

แผนประกอบฉากหน้าที่ 4.4

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $BC = EF$, $AC = DF$ และ $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$	1. กำหนดให้
2. เคลื่อนที่ $\triangle ABC$ ข้อน $\triangle DEF$ โดยให้ $\overline{AC}$ ทับ $\overline{DE}$ จุด B อยู่ตรงข้ามกับจุด E	2. รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้ และ $AC = DE$
3. $\triangle ABC \cong \triangle DBF$ จะได้ $AC = DF$, $BC = BF$, $AB = BD$, $\angle ABC = \angle DBF$, $\angle BCA = \angle BFD$ และ $\angle BAC = \angle BDF = 90^\circ$	3. จากข้อ 2
4. $\angle BDE$ เป็นมุมตรง	4. จากข้อ 1 , 3 และ $\angle BDF + \angle FDE = 180^\circ$
5. $\triangle BEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว	5. จากข้อ 1 , 2 และ $BF = EF$

(ต่อ)

ข้อความ	เหตุผล
6. $\hat{FBE} = \hat{FEB}$	6. มุมที่ฐานของ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
7. $\hat{FBD} = \hat{FED}$	7. จากข้อ 6 และ $\hat{FBE} = \hat{FBD}$, $\hat{FEB} = \hat{FED}$
8. $BF = EF$ และ $\hat{BDF} = \hat{EDF} = 90^\circ$	8. จากข้อ 1 , 3
9. $\triangle DBF \cong \triangle DEF$	9. จากข้อ 7 , 8 (มุม-มุม-ด้าน)
10. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	10. จากข้อ 3 , 9 และ คุณสมบัติถ่ายทอด

แผนโปร่งใสแผนที่ 4.5

<u>การวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวอย่าง 1</u>	

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

ตอนที่ 4

(ต่อ)

ตอนที่ 5

ตอนที่ 6

ตอนที่ 7

ตอนที่ 8

พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle BDC$

1. $AD = BC$ (กำหนดให้)
2. $\angle ABD = \angle DBC$ (กำหนดให้)
3. $BD = BD$ (ด้านร่วม)

แผ่นข้อตอนที่ 1

ด้าน-มุม-ด้าน มุม-ด้าน-มุม มุม-มุม-ด้าน ด้าน-ด้าน-ด้าน
ฉาก-ด้าน-ด้าน

แผ่นข้อตอนที่ 2

$$\triangle ABD \cong \triangle BDC$$

แผ่นข้อตอนที่ 3

จะได้

1. $AD = DC$
2. $\angle ADB = \angle BDC$
3. $\angle BAD = \angle BCD$

แผ่นข้อตอนที่ 4

$$\hat{ADB} + \hat{BDC} = 180^\circ$$

ผ่านขั้นตอนที่ 5

$$\hat{ADB} = \hat{BDC} = 90^\circ$$

ผ่านขั้นตอนที่ 6

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

ผ่านขั้นตอนที่ 7

จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\overline{AD} = \overline{DC}$
2. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

ผ่านขั้นตอนที่ 8

แผนการสอนคาบที่ 5

จุดประสงค์

นักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนจะมีความสามารถพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้

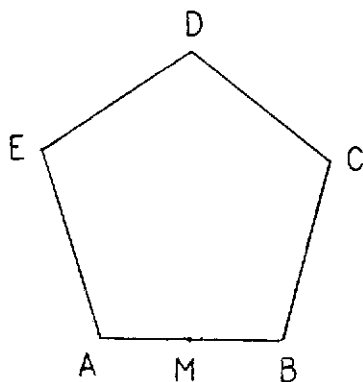
เนื้อหา

1. เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมกับจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้าม จงพิสูจน์ว่าเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน

2. กำหนดให้ $\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$ และ $PQ = ST$ ถ้า $\overline{PT}$ ตัดกับ $\overline{QS}$ ที่จุด R ให้ X เป็นจุดบน $\overline{PQ}$ และ Y เป็นจุดบน $\overline{ST}$ โดยที่ $\overline{XY}$ ผ่านจุด R จงพิสูจน์ว่า $XR = RY$

3. ให้ $\overline{MK}$ แบ่งครึ่ง $\angle RMS$ โดยที่ $RM = SM$ และ P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{MK}$ ลาก $\overline{RP}$ และ $\overline{SP}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle RPW = \angle SPW$

4.



ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า มุมเท่า

ซึ่ง $AB = BC = CD = DE = EA$ และ

$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB$

จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

ลาก $\overline{DM}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle EDM = \angle CDM$

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 5.1, 5.2
2. แผ่นโปรงใส
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 5.1 เพื่อทบทวนหลักการพิสูจน์โจทย์ปัญหา

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 6 คน
2. ส่งตัวแทนกลุ่มมาจับสลากโจทย์ปัญหากลุ่มละ 1 ข้อ และแจกแผ่นโปรงใสพร้อมปากกาเขียนแผ่นโปรงใสกลุ่มละ 1 ชุด
3. ให้นักเรียนทำโจทย์ปัญหา 10 นาที
4. ครูคิดแผนภูมิแผ่นที่ 5.2 แสดงโจทย์ปัญหาทั้ง 5 ข้อ บนกระดาน
5. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม มาเสนอผลงานโดยให้เวลากลุ่มละ 5 นาที
6. ครูและนักเรียนที่เหลือร่วมกันอภิปรายผลงานของนักเรียน แต่ละกลุ่ม

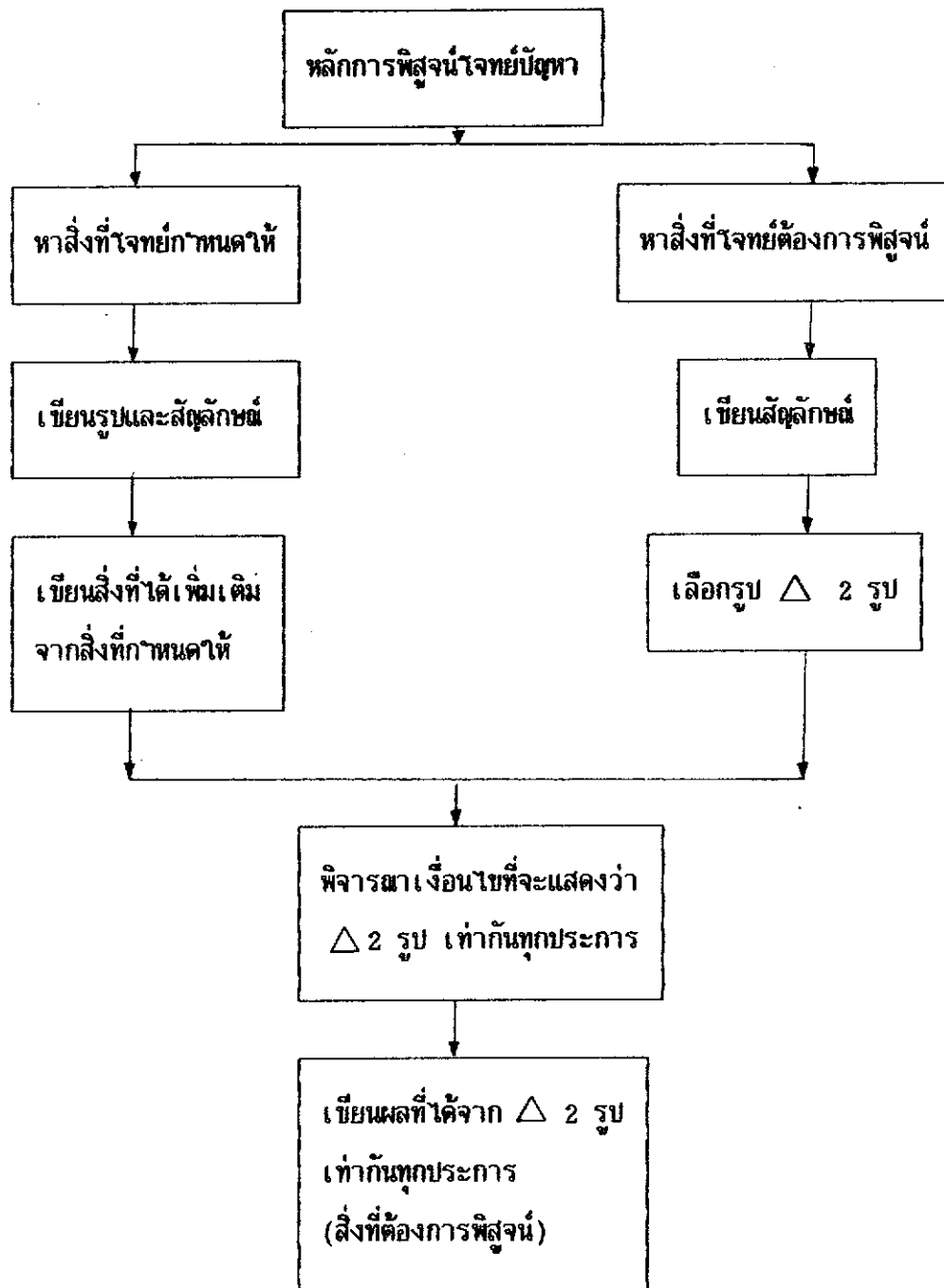
ขั้นฝึกหัด

ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1 ให้นักเรียนทำท้ายชั่วโมง แล้วนำส่งครูถ้าทำไม่เสร็จให้นำส่งครูในวันรุ่งขึ้น

ขั้นประเมินผล

1. สังเกตการให้ความร่วมมือกันภายในกลุ่ม
2. สังเกตการแสดงผลงานของตัวแทนกลุ่ม
3. สังเกตการให้ความร่วมมือในการอภิปราย ขณะที่ตัวแทนกลุ่มอื่นแสดงผลงาน
4. ตรวจเอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1

แผนภูมิแผนที่ 5.1



แบบฝึกหัดที่ 5.2

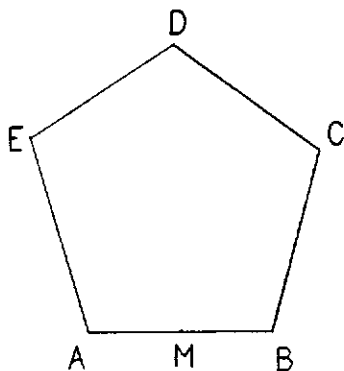
โจทย์ปัญหา

1. เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมกับจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้าม จงพิสูจน์ว่าเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน

2. กำหนดให้ $\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$ และ $PQ = ST$ ถ้า $\overline{PT}$ ตัดกับ $\overline{QS}$ ที่จุด R ให้ X เป็นจุดบน $\overline{PQ}$ และ Y เป็นจุดบน $\overline{ST}$ โดยที่ $\overline{XY}$ ผ่านจุด R จงพิสูจน์ว่า $XR = RY$

3. ให้ $\overline{MK}$ แบ่งครึ่ง $\angle RMS$ โดยที่ $RM = SM$ และ P เป็นจุดใด ๆ บน $\overline{MK}$ ลาก $\overline{PM}$ และ $\overline{PS}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle MPK = \angle MSP$

4.



ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
ซึ่ง $AB = BC = CD = DE = EA$ และ
 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB$
จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ ลาก $\overline{DM}$
จงพิสูจน์ว่า $\angle EDM = \angle CDM$

แผนการสอนคาบที่ 6

จุดประสงค์

เมื่อนักเรียนเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนจะมีความสามารถพิสูจน์โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้

เนื้อหา

1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ถ้า $\overline{BN}$ และ $\overline{CM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ที่จุด N และ M ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BN = CM$
2. ให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AD}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ ตัดกันที่จุด O และ $AO = OD$ จงพิสูจน์ว่า $OB = OC$
3. ให้ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ E เป็นจุด ๆ หนึ่งบน $\overline{AD}$ มี $\overline{EP}$ และ $\overline{EQ}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $EP = EQ$
4. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ และ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ลาก $\overline{AE}$ ไปพบกับ $\overline{CD}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$
5. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ลาก $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $\angle BCD$

สื่อการสอน

1. แผนภูมิแผ่นที่ 5.1
2. แผ่นโปสเตอร์แผ่นที่ 6.1 - 6.7
3. เอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูคิดแผนภูมิแผนที่ 5.1 เพื่อทบทวนหลักการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
2. ครูอธิบายข้อผิดพลาดและเฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1 โดยใช้แผ่นโปรงใสแผ่นที่ 6.1 - 6.5 ประกอบการถาม - ตอบ

ขั้นการเรียนรู้การสอน

1. ครูแจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1 เพื่อฝึกกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ให้นักเรียนคนละ 1 ชุด ใช้เวลา 15 นาทีแล้วนำส่งครู หลังจากนั้นครูเฉลยโดยใช้แผ่นโปรงใสแผ่นที่ 6.6 และ 6.7 ประกอบการถาม - ตอบ
2. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ยังไม่เข้าใจกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมซักถาม

ขั้นประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1
3. ครูตรวจเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1 นักเรียนที่ทำถูกต้องตั้งแต่ 70% ขึ้นไปถือว่าผ่าน สำหรับนักเรียนที่ไม่ผ่าน ต้องมาพบครู เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องภายใน 3 วัน หลังจากที่ได้แจกเอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1 ที่ตรวจแล้วคืนให้นักเรียน

แผ่นใบงานแผ่นที่ 6.1

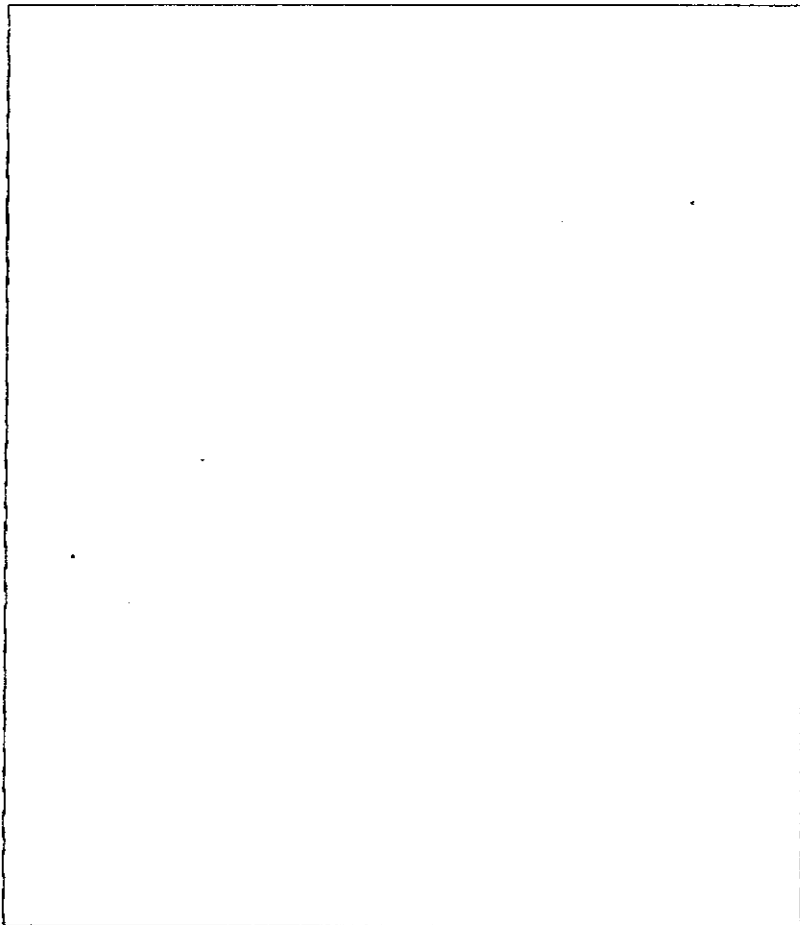
โจทย์ข้อ 1 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน
ถ้า $\overline{BN}$ และ $\overline{CM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ที่จุด
N และ M ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $BN = CM$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

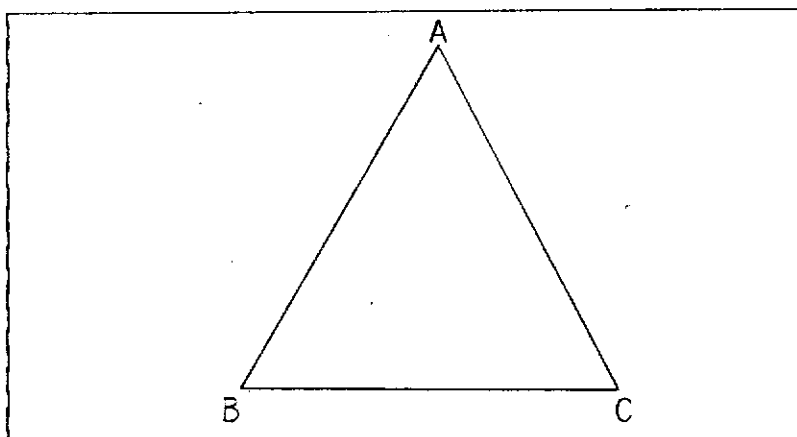
(ต่อ)



ตอนที่ 4

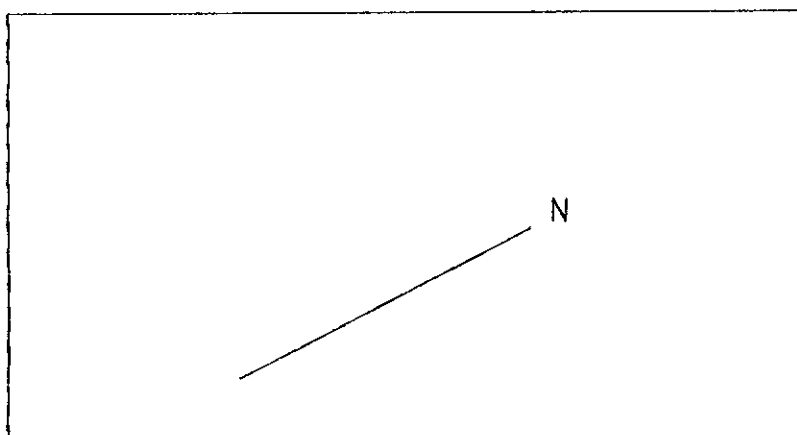
กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน
 $\overline{BN} \perp \overline{AC}$ ที่จุด N
 $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ ที่จุด M

แผ่นซ้อนตอนที่ 1



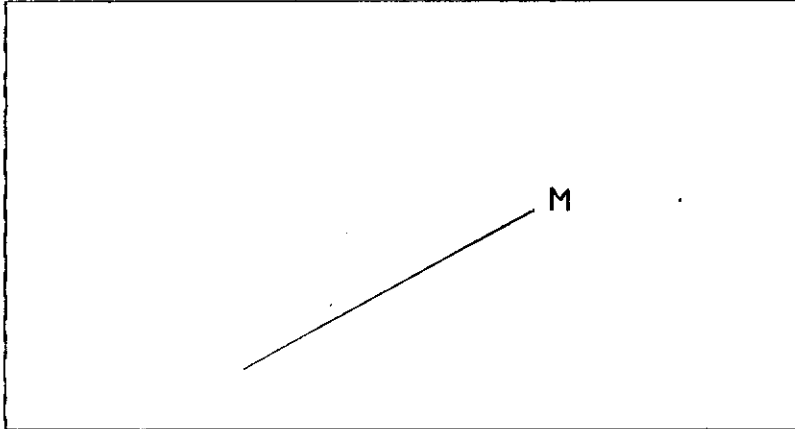
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 1



แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 2



ผ่านขั้นตอนที่ 2
แผนที่ 3

จะต้องพิสูจน์ว่า $BN = CM$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ACM$ และ $\triangle ABN$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AC = AB$	1. ด้านที่เท่ากันของ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. $\angle CAM = \angle BAN$	2. มุมร่วม
3. $\angle AMC = 90^\circ$	3. กำหนดให้ $\overline{CM} \perp \overline{AB}$
4. $\angle ANB = 90^\circ$	4. กำหนดให้ $\overline{BN} \perp \overline{AC}$
5. $\angle AMC = \angle ANB$	5. จากข้อ 3 , 4 และ คุณสมบัติการเท่ากัน
6. $\triangle ACM \cong \triangle ABN$	6. จากข้อ 1 , 2 และ 5 (มุม-มุม-ด้าน)
7. $CM = BN$	7. ผลจากข้อ 6

แผ่นข้อตอนที่ 4

แผนประกอบสไลด์ที่ 6.2

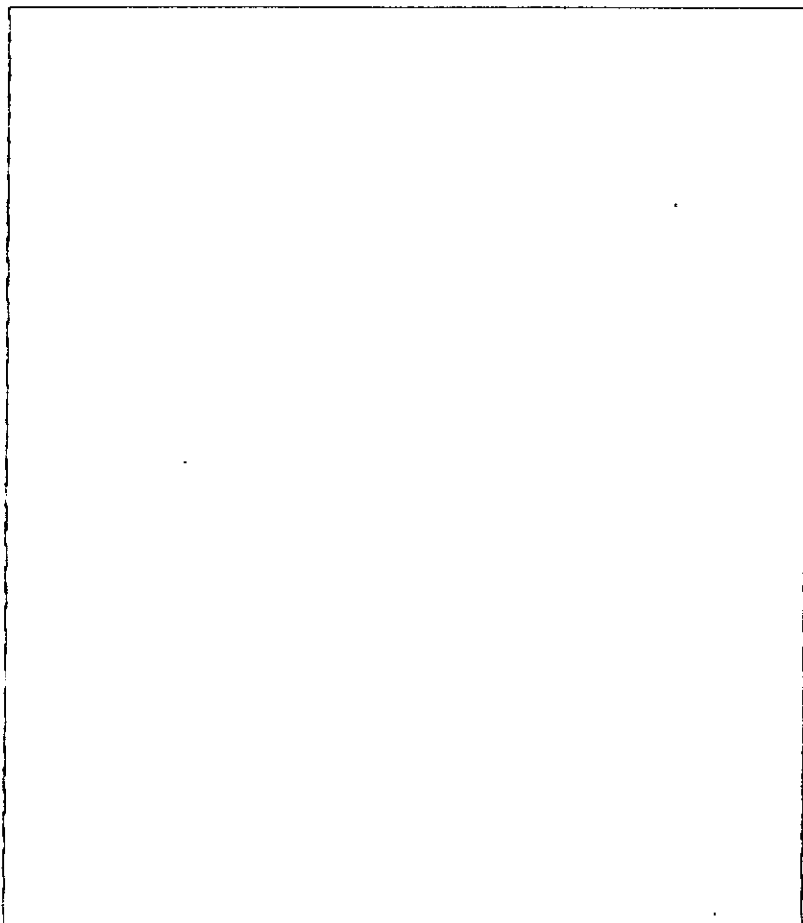
โจทย์ข้อ 2 ให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AD}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ ตัดกันที่จุด O
และ $AO = OD$ จงพิสูจน์ว่า $OB = OC$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

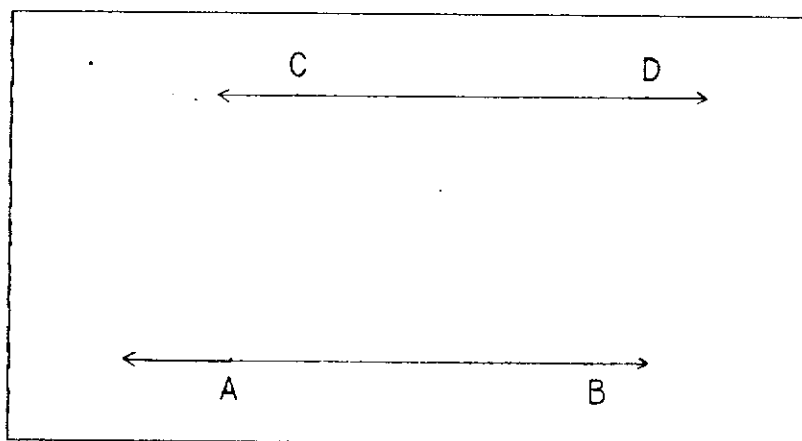
(ต่อ)



ตอนที่ 4

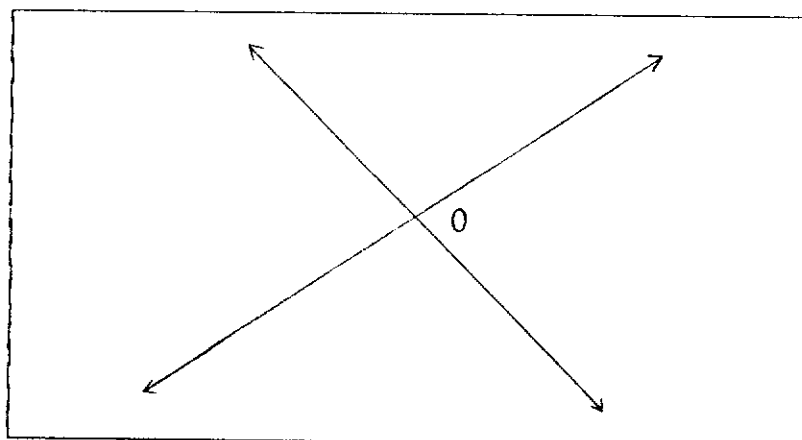
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
 $\overleftrightarrow{AD}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{BC}$ ที่จุด O
 $AO = OD$

ผ่านขั้นตอนที่ 1



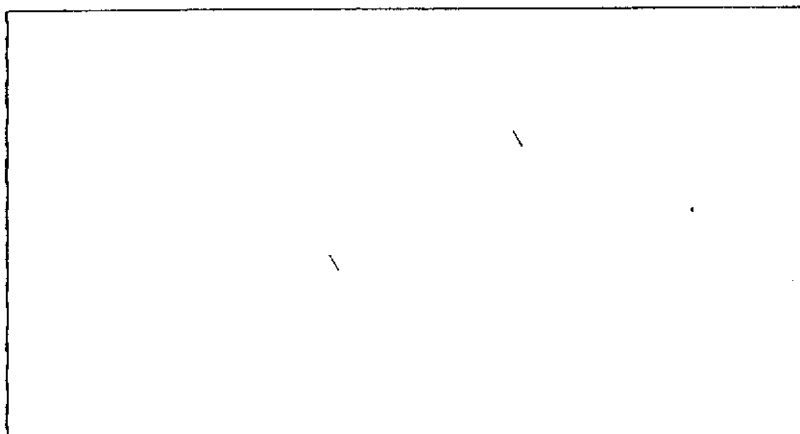
ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 1



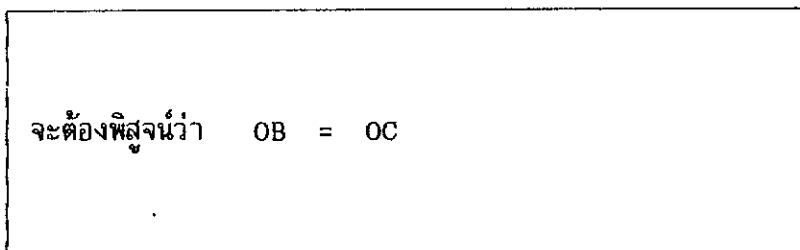
ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 2



ผ่านขั้นตอนที่ 2

แผ่นที่ 3



จะต้องพิสูจน์ว่า $OB = OC$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABO$ และ $\triangle CDO$

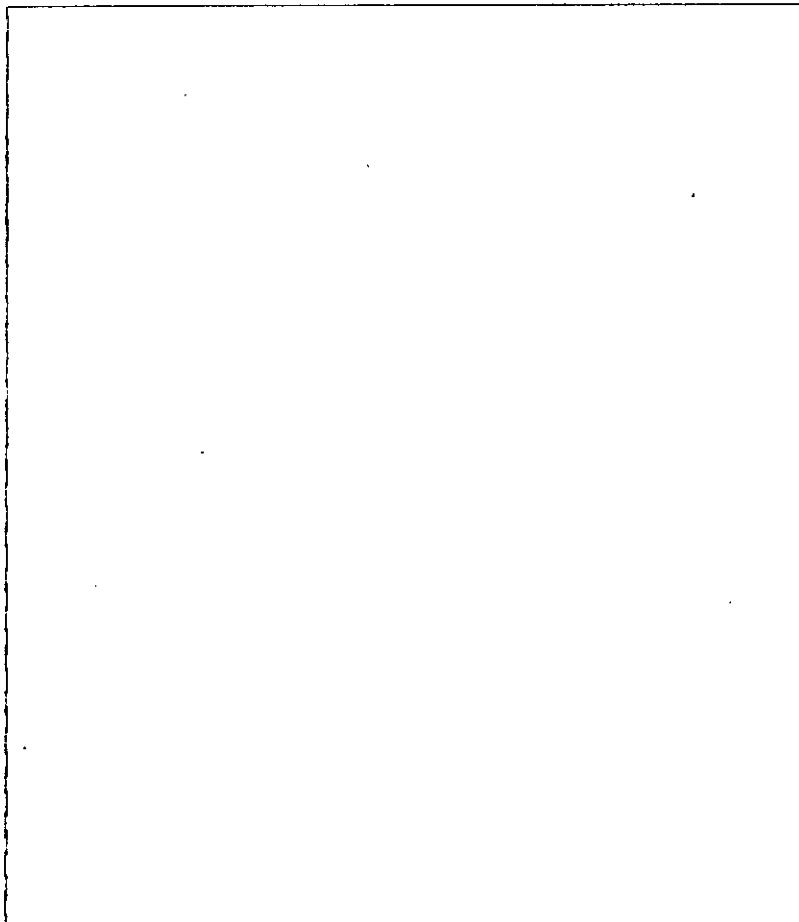
ข้อความ	เหตุผล
1. $AO = OD$	1. กำหนดให้
2. $\hat{AOC} = \hat{COD}$	2. มุมตรงข้าม
3. $\hat{BAO} = \hat{CDO}$	3. มุมแย้ง
4. $\triangle ABO \cong \triangle CDO$	4. จากข้อ 1 , 2 และ 3 (มุม-ด้าน-มุม)
5. $AO = OD$	5. ผลจากข้อ 4

ผ่านขั้นตอนที่ 4

แผนประกอบฉากที่ 6.3

โจทย์ข้อ 3 ให้ $\vec{AD}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$ E เป็นจุดกึ่งกลางบน $\overline{AD}$ มี $\overline{EP}$ และ $\overline{EQ}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $EP = EQ$	ตอนที่ 1	
		ตอนที่ 2

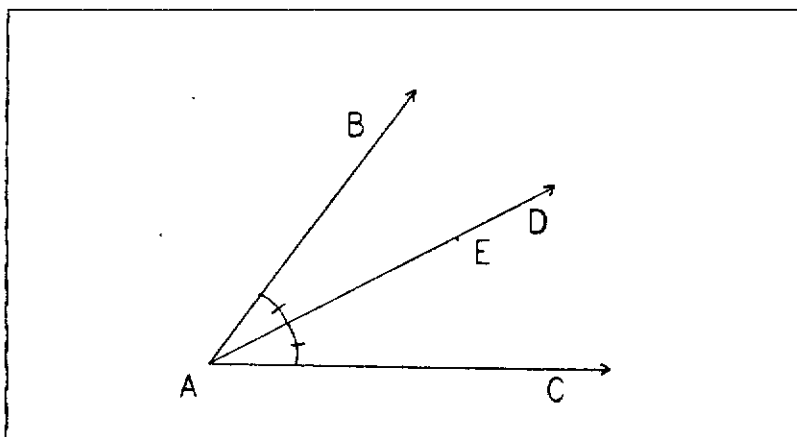
(ต่อ)



ตอนที่ 4

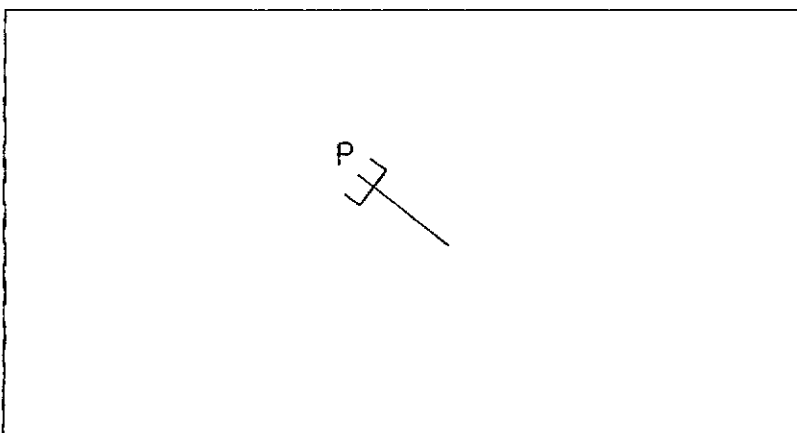
กำหนดให้ $\overrightarrow{AD}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ E เป็นจุดบน $\overline{AD}$
 $\overline{EP} \perp \overline{AB}$ ที่จุด P
 $\overline{EQ} \perp \overline{AC}$ ที่จุด Q

แผ่นซ้อนตอนที่ 1



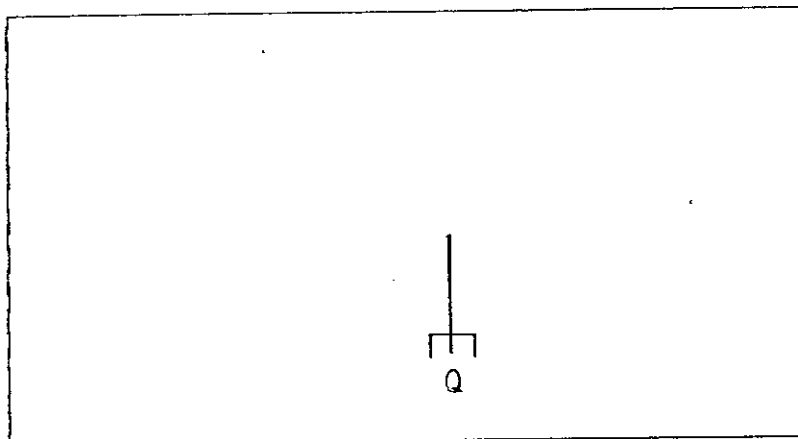
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 1



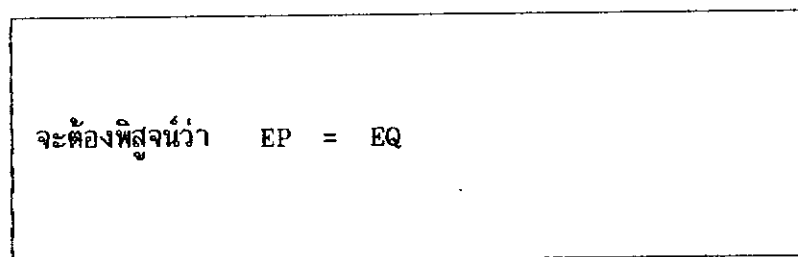
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 2



แผ่นชั้นตอนที่ 2

แผ่นที่ 3



แผ่นชั้นตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle AEQ$ และ $\triangle AEP$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{EAP} = \hat{FAQ}$	1. กำหนดให้ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{BAC}$
2. $\hat{APE} = 90^\circ$	2. กำหนดให้ $\overline{PE} \perp \overline{AB}$ ที่จุด P
3. $\hat{AQE} = 90^\circ$	3. กำหนดให้ $\overline{QE} \perp \overline{AC}$ ที่จุด Q
4. $\hat{APE} = \hat{AQE}$	4. จากข้อ 2 , 3 และ คุณสมบัติการเท่ากัน
5. $AE = AE$	5. ด้านร่วม
6. $\triangle AEP \cong \triangle AEQ$	6. จากข้อ 1 , 4 และ 5 (มุม-มุม-ด้าน)
7. $EP = EQ$	7. ผลจากข้อ 6

แผ่นข้อตอนนี 4

ผ่านใบรงใส่แผ่นที่ 6.4

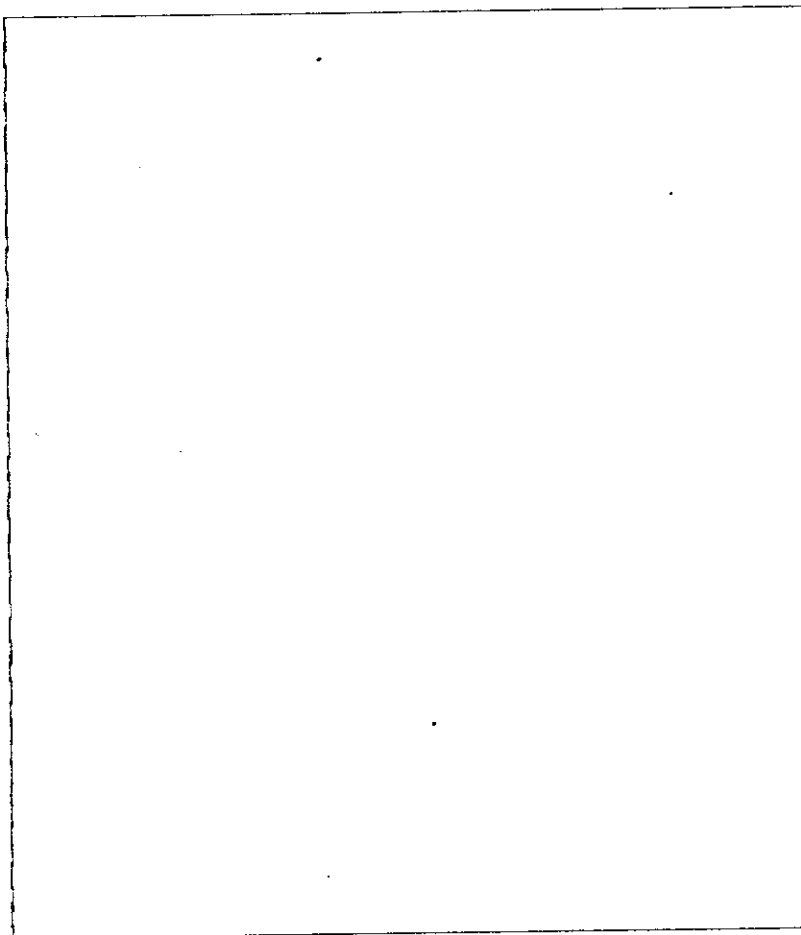
โจทย์ข้อ 4 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ E เป็นจุด
กึ่งกลางของ $\overline{BC}$ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ลาก $\overline{AE}$ ไปพบ
 $\overline{CD}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับ
พื้นที่ของ $\triangle ACD$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

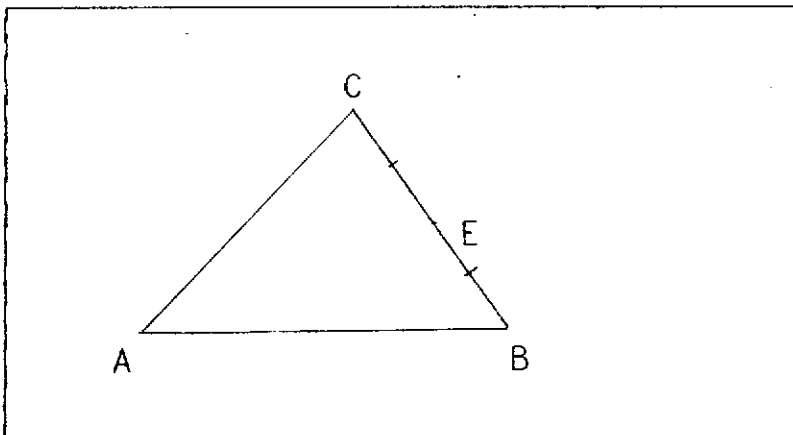
(ต่อ)



ตอนที่ 4

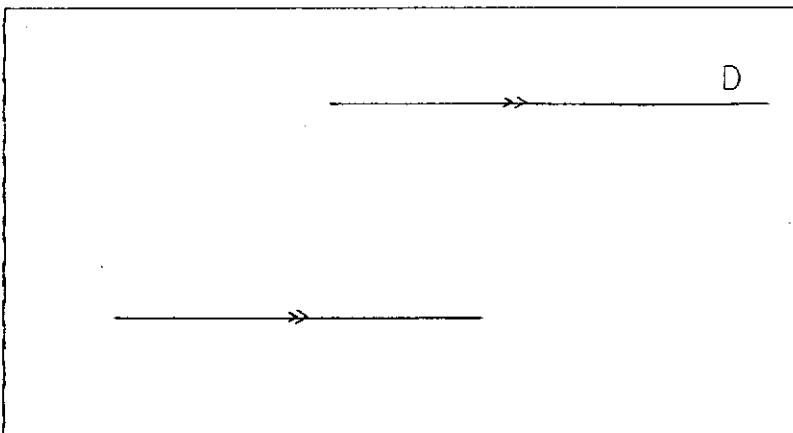
กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
 E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$
 $\overline{CD} \parallel \overline{AD}$
 ลาก $\overline{AE}$ ไปพบ $\overline{CD}$ ที่จุด D

ผ่านขั้นตอนที่ 1



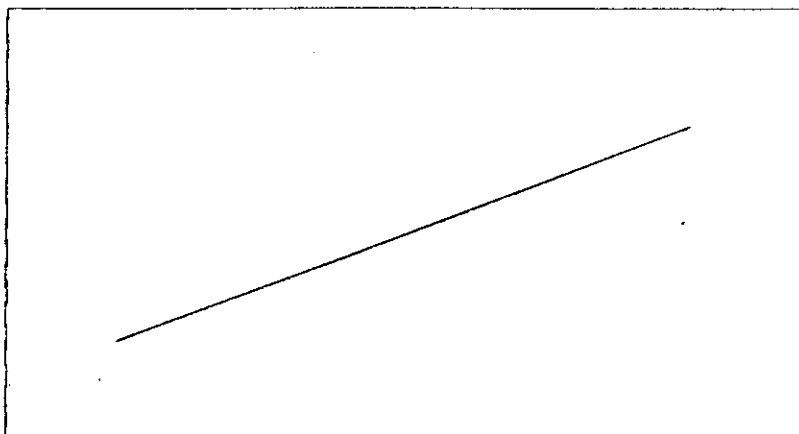
ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 1



ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 2



แผ่นขั้นตอนที่ 2

แผ่นที่ 3

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ของ $\triangle ABC$ = พื้นที่ของ $\triangle ACD$

แผ่นขั้นตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABE$ และ $\triangle CDE$

ข้อความ	เหตุผล
1. $BE = CE$	1. กำหนดให้
2. $\hat{BEA} = \hat{CED}$	2. มุมตรงข้าม
3. $\hat{ABE} = \hat{DCE}$	3. มุมแย้ง
4. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$	4. จากข้อ 1 , 2 และ 3 (มุม-ด้าน-มุม)
5. พ.ท.ของ $\triangle ABE =$ พ.ท.ของ $\triangle CDE$	5. ผลจากข้อ 4
6. พ.ท. $\triangle ABE + \text{พ.ท.} \triangle ACE$ $= \text{พ.ท.} \triangle CDE + \text{พ.ท.} \triangle ACE$	6. คุณสมบัติการบวกของสิ่งที่ เท่ากัน
7. พ.ท. $\triangle ABC =$ พ.ท. $\triangle ACD$	7. จากข้อ 6

แผ่นข้อตอนที 4

แผ่นใบปรงาสแผ่นที่ 6.5

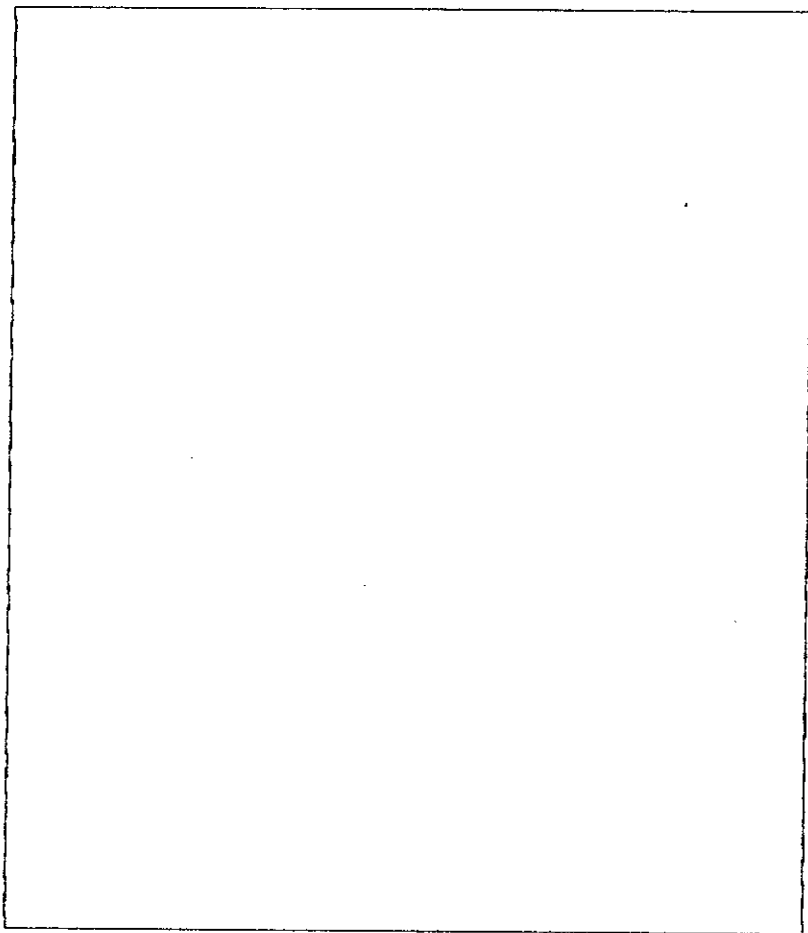
โจทย์ข้อ 5 ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ลาก $\overline{AC}$
เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}$
และ $\widehat{BCD}$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

(ต่อ)



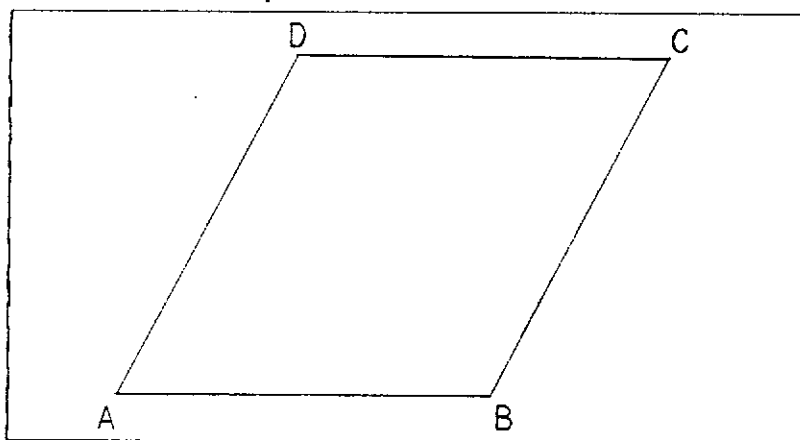
ตอนที่ 4

กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

$$AB = BC = CD = DA$$

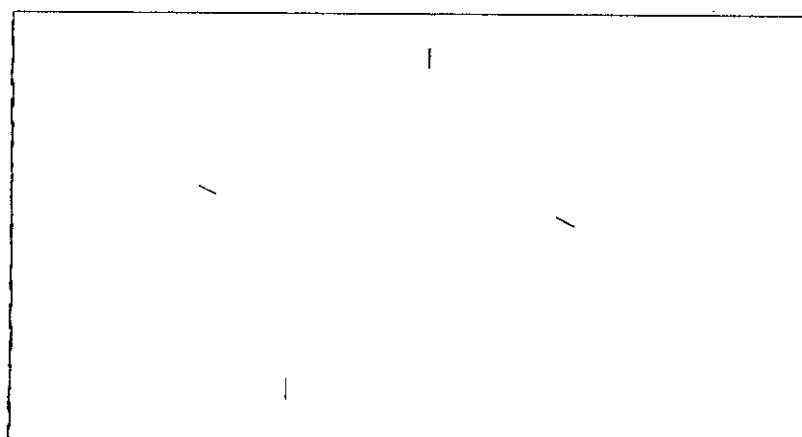
$\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม

แผ่นขั้นตอนที่ 1



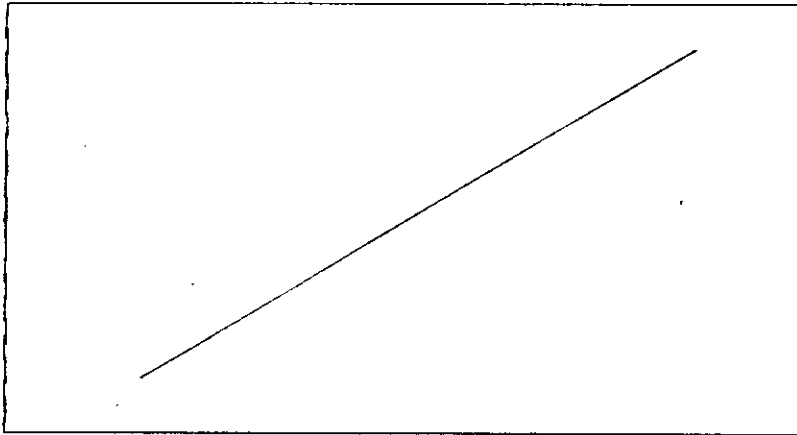
แผ่นขั้นตอนที่ 2

แผ่นที่ 1



แผ่นขั้นตอนที่ 2

แผ่นที่ 2



แผ่นซ้อนตอนที่ 2
แผ่นที่ 3

จะต้องพิสูจน์ว่า $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $\angle BCD$

แผ่นซ้อนตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle ACD$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = CD$	1. กำหนดให้
2. $BC = AD$	2. กำหนดให้
3. $AC = AC$	3. ด้านร่วม
4. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$	4. จากข้อ 1 , 2 และ 3 (ด้าน-ด้าน-ด้าน)
5. $\hat{CAB} = \hat{CAD}$	5. ผลจากข้อ 4
6. $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\hat{BAD}$	6. จากข้อ 5 และ $\hat{CAB} + \hat{CAD} = \hat{BAD}$
7. $\hat{ACB} = \hat{ACD}$	7. ผลจากข้อ 4
8. $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\hat{BCD}$	8. จากข้อ 7 และ $\hat{ACB} + \hat{ACD} = \hat{BCD}$

ผ่านขั้นตอนที่ 4

แบบปรงใสแนกที่ 6.6

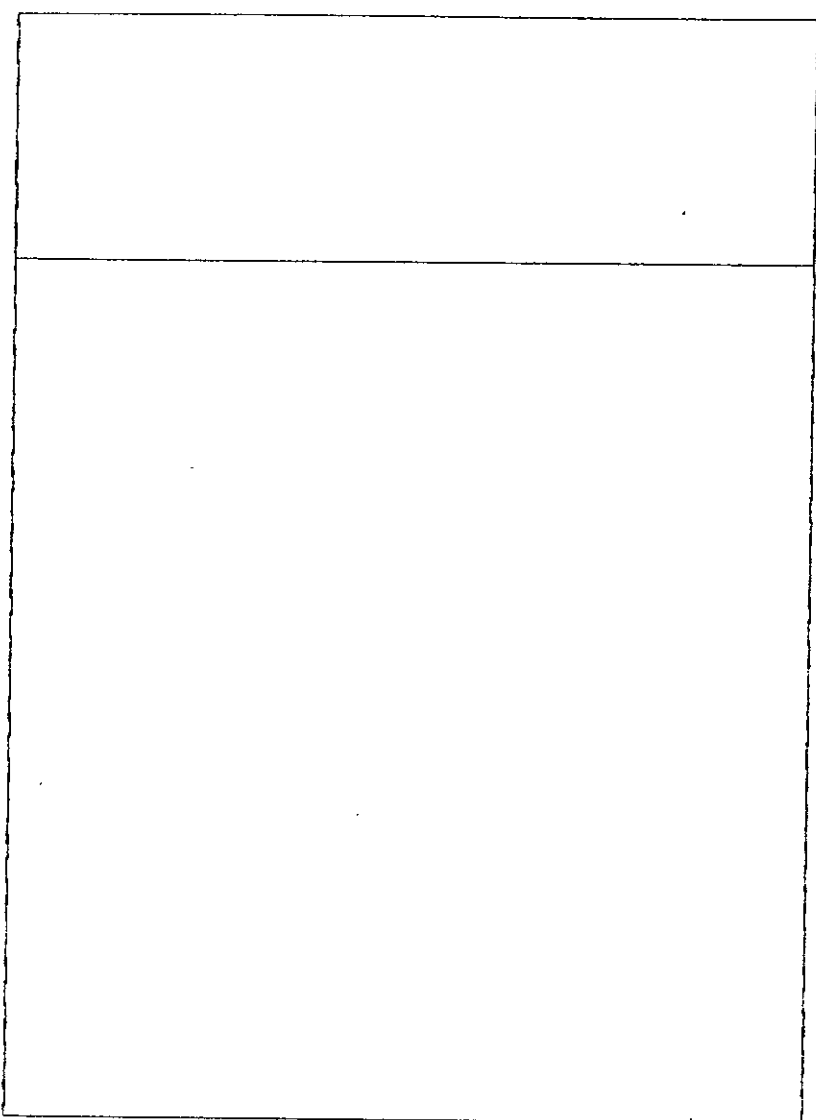
1. ใหั ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ถ้า M , N และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $OM = ON$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

(ต่อ)

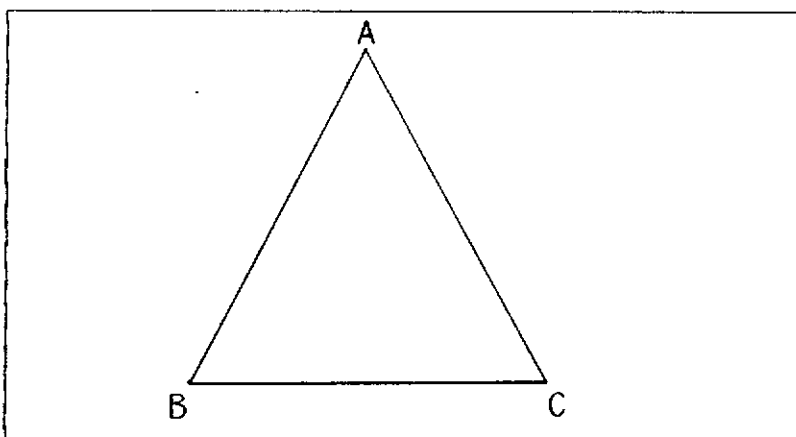


ตอนที่ 4

ตอนที่ 5

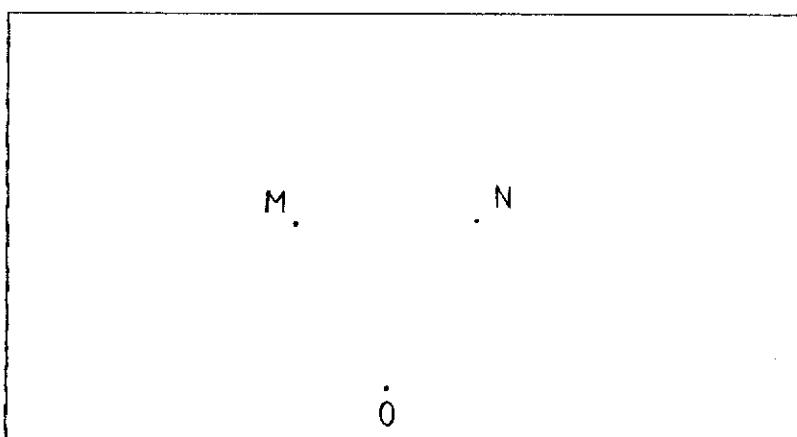
กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน
 M , N และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ
 $\overline{BC}$ ตามลำดับ

แผ่นซ้อนตอนที่ 1



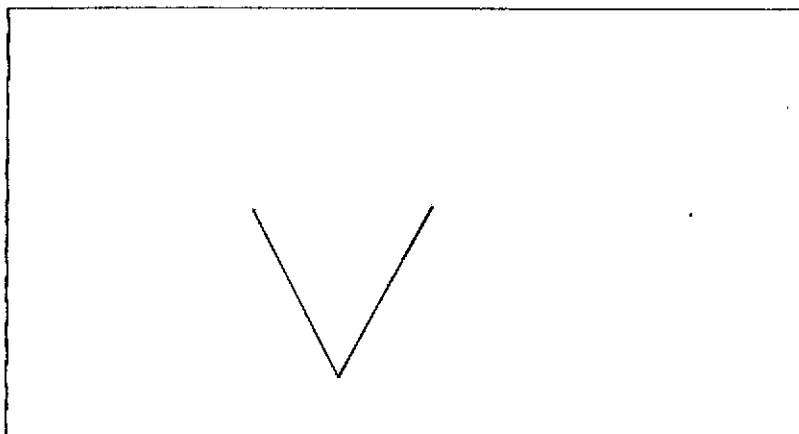
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 1



แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 2



ผ่านขั้นตอนที่ 2

ผ่านที่ 3

จะต้องพิสูจน์ว่า $OM = ON$

ผ่านขั้นตอนที่ 3

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{OM}$ และ $\overline{ON}$

ผ่านขั้นตอนที่ 4

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle BMO$ และ $\triangle CNO$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{MBO} = \hat{NCO}$	1. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. $BO = OC$	2. จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$
3. $BM = CN$	3. M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $AB = AC$
4. $\triangle BMO \cong \triangle CNO$	4. จากข้อ 1 , 2 และ 3 (ด้าน-มุม-ด้าน)
5. $OM = ON$	5. ผลจากข้อ 4

ผ่านขั้นตอนที่ 5

แผ่นโปร่งใสแผ่นที่ 6.7

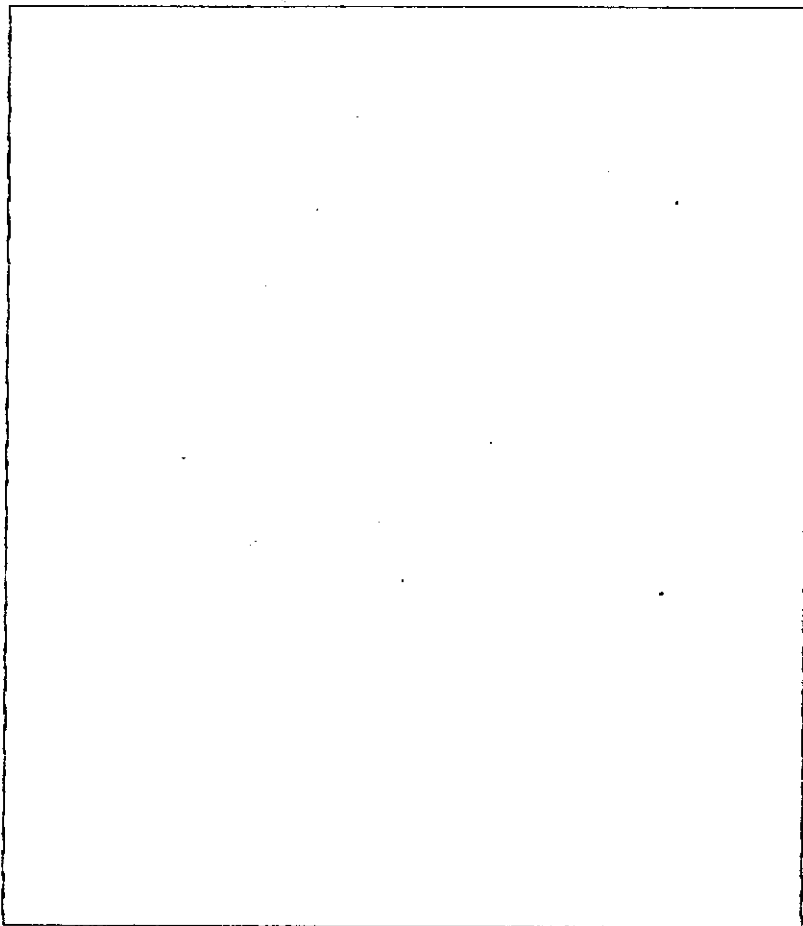
2. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้ E และ F เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม BD โดยที่ $\overline{AE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BD}$ ที่จุด E และ $\overline{CF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BD}$ ที่จุด F จงพิสูจน์ว่า $AE = CF$

ตอนที่ 1

ตอนที่ 2

ตอนที่ 3

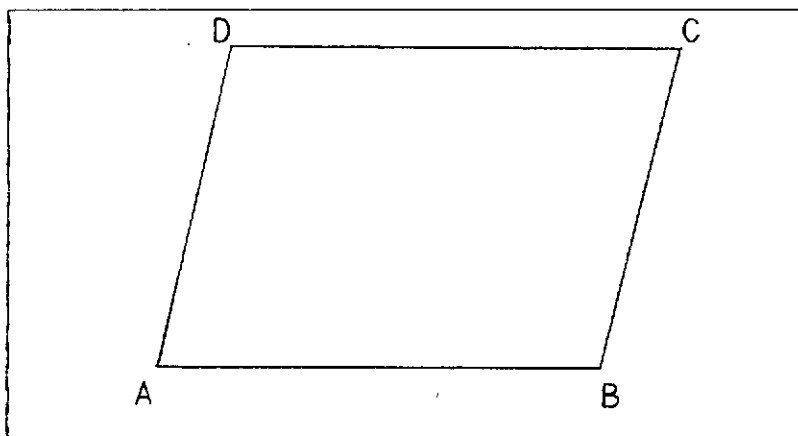
(ต่อ)



ตอนที่ 4

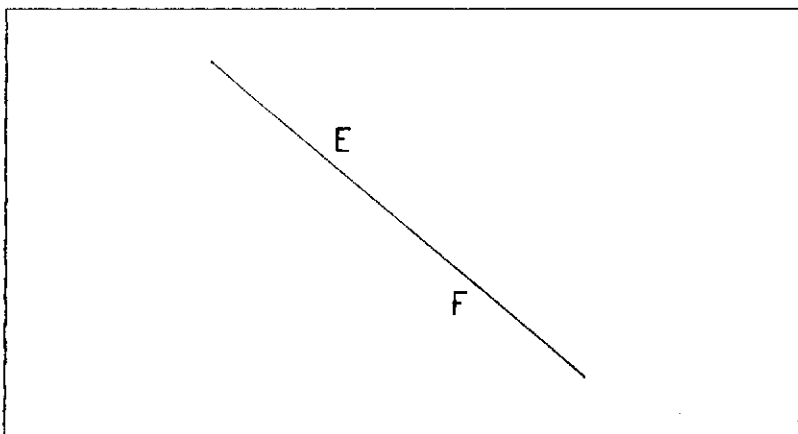
กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 E และ F เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม $\overline{BD}$
 $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ ที่จุด E
 $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ ที่จุด F

แผ่นซ้อนตอนที่ 1



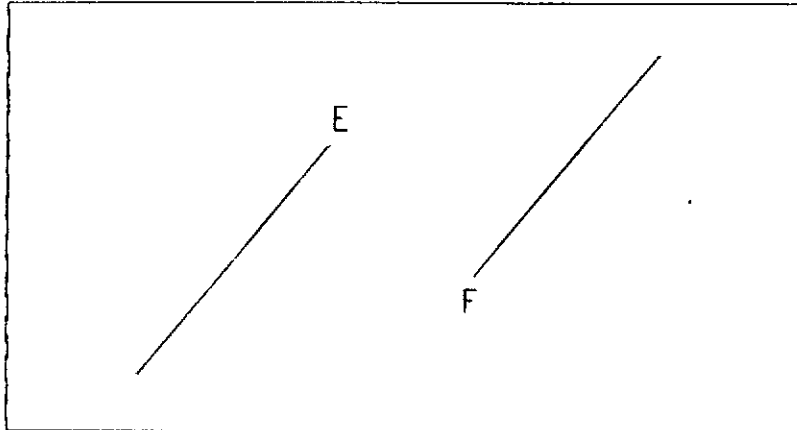
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 1



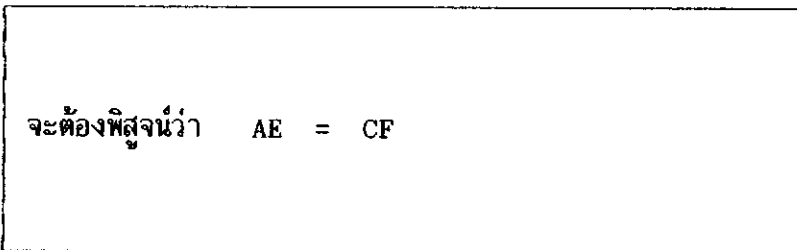
แผ่นซ้อนตอนที่ 2

แผ่นที่ 2



แผ่นข้อตอนที่ 2

แผ่นที่ 3



จะต้องพิสูจน์ว่า $AE = CF$

แผ่นข้อตอนที่ 3

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABE$ และ $\triangle CDF$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = CD$	1. คุณสมบัติของรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน
2. $\hat{AEB} = \hat{DFC}$	2. กำหนดให้ $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ และ $\overline{CF} \perp \overline{BD}$
3. $\hat{ABE} = \hat{CDF}$	3. มุมแย้ง
4. $\triangle ABE \cong \triangle CDF$	4. จากข้อ 1 , 2 และ 3 (มุม-ด้าน-มุม)
5. $AE = CF$	5. ผลจากข้อ 4

แผ่นข้อตอนที่ 4

ภาคผนวก ง

เอกสารทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม

ประกอบด้วยเนื้อหา

1. รูปสามเหลี่ยมและชนิดของรูปสามเหลี่ยม
2. ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง
3. ความเท่ากันทุกประการของมุม

คำแนะนำ

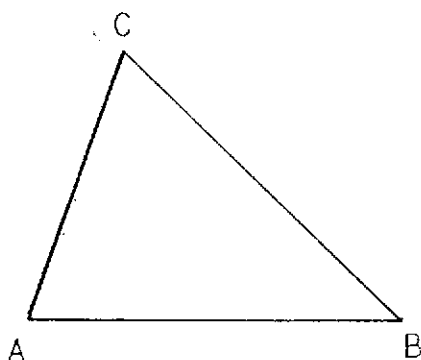
ในการใช้เอกสารทบทวนพื้นความรู้เดิม

1. เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ให้นักเรียนศึกษด้วยตนเอง ไม่ใช่แบบทดสอบ
2. นักเรียนจะต้องศึกษาบทเรียนตามลำดับ เพราะเนื้อหาต่อเนื่องกัน
3. ในส่วนที่เป็นคำถาม นักเรียนจะต้องตอบทุกข้อ และเขียนคำตอบลงไปได้เลย
4. นักเรียนสามารถตรวจคำตอบได้ด้วยตนเองจากเฉลยที่ให้ไว้ท้ายเอกสารชุดนี้
5. นักเรียนต้องขอสัตย์ต่อตนเอง ไม่ดู หรือลอกคำตอบก่อน การตอบผิดไม่ใช่เรื่องเสียหาย แต่จะเป็นการบอกให้ทราบว่านักเรียนอาจจะยังไม่เข้าใจ ให้นักเรียนศึกษาหัวข้อนี้อีกครั้ง

1. รูปสามเหลี่ยม

นิยาม รูปสามเหลี่ยม ABC คือ รูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ เชื่อมต่อจุด A, B และ C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A, B และ C ว่า จุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ดังรูป



ข้อตกลง

ใช้สัญลักษณ์ $\triangle ABC$	แทน	รูปสามเหลี่ยม ABC
ใช้สัญลักษณ์ $\overline{AB}$	แทน	ส่วนของเส้นตรง AB หรือด้าน AB
ใช้สัญลักษณ์ AB	แทน	ความยาวของส่วน ของเส้นตรง AB หรือความยาวของ ด้าน AB
ใช้สัญลักษณ์ $\angle ABC$ หรือ $\angle B$	แทน	มุม ABC และขนาด ของมุม ABC

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. $\triangle ABC$ ประกอบด้วยด้านใดบ้าง

_____ (1.1)

2. $\triangle ABC$ ประกอบด้วยมุมใดบ้าง

_____ (1.2)

ด้านประกอบมุม คือ ด้านที่เป็นแขนของมุมนั้น

3. 3.1 ด้านประกอบของ $\angle ABC$ คือ และ
- 3.2 ด้านประกอบของ $\angle BCA$ คือ และ
- 3.3 ด้านประกอบของ $\angle CAB$ คือ และ
4. 4.1 มุมปลายด้าน AB คือ และ
- 4.2 มุมปลายด้าน BC คือ และ
- 4.3 มุมปลายด้าน AC คือ และ
5. 5.1 $\overline{AB}$ ตรงข้ามกับมุม
 5.2 $\overline{BC}$ ตรงข้ามกับมุม
 5.3 $\overline{AC}$ ตรงข้ามกับมุม

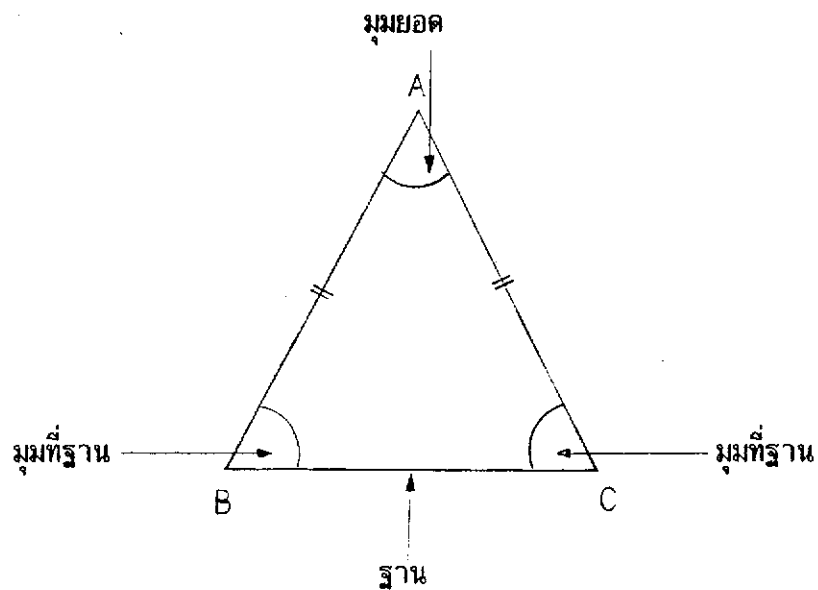
มุมยอด คือ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐาน

- 6.1 $\overline{AB}$ เป็นฐาน มุมยอด คือ
- 6.2 $\overline{BC}$ เป็นฐาน มุมยอด คือ
- 6.3 $\overline{AC}$ เป็นฐาน มุมยอด คือ

2. ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

2.1 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



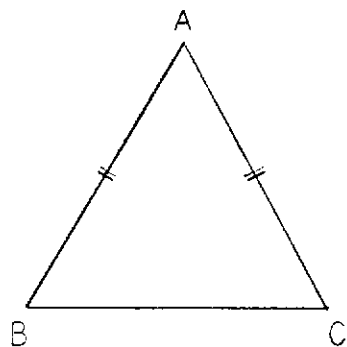
ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AB = AC$

เรียก $\overline{BC}$ ว่า ฐาน

และเรียก $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ว่า มุมที่ฐาน

ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้แล้วตอบคำถาม

1.

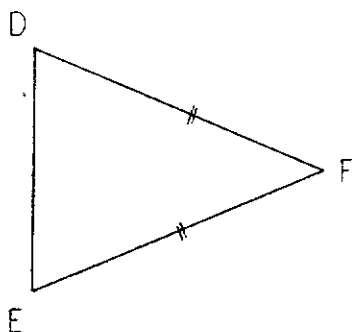


1.1 มุมยอด คือ

1.2 ฐาน คือ

1.3 มุมที่ฐาน คือ และ

2.

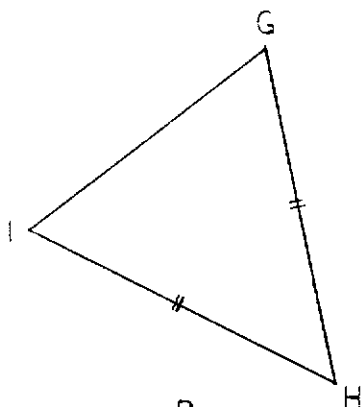


2.1 มุมยอด คือ

2.2 ฐาน คือ

2.3 มุมที่ฐาน คือ และ

3.

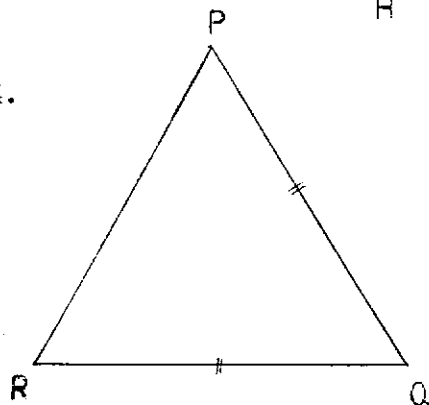


3.1 มุมยอด คือ

3.2 ฐาน คือ

3.3 มุมที่ฐาน คือ และ

4.



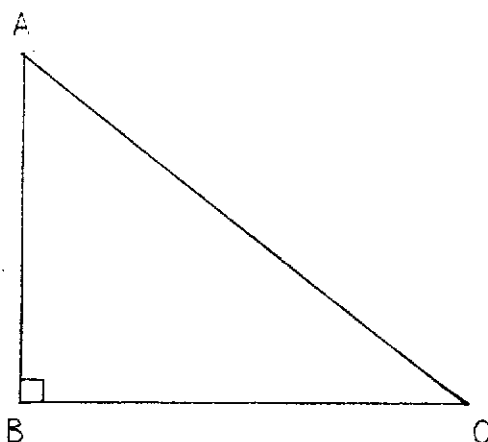
4.1 มุมยอด คือ

4.2 ฐาน คือ

4.3 มุมที่ฐาน คือ และ

2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

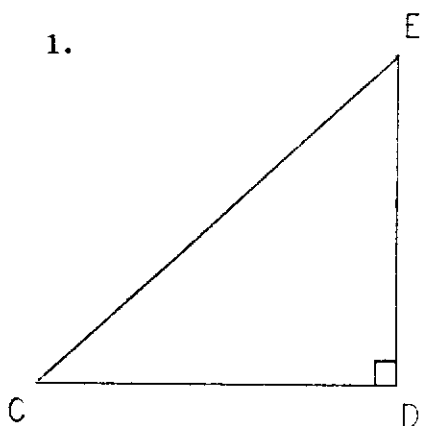
นิยาม รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก



ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{B}$ เป็นมุมฉาก
เรียก $\overline{AC}$ ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก
และเรียก $\overline{BC}$ ว่า ด้านประกอบมุมฉาก

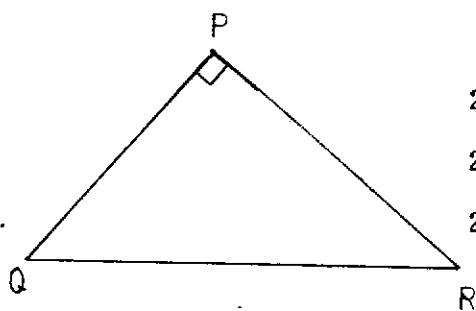
ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้แล้วตอบคำถาม

1.



- 1.1 มุมฉาก คือ
- 1.2 ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ
- 1.3 ด้านประกอบมุมฉาก คือ และ

2.

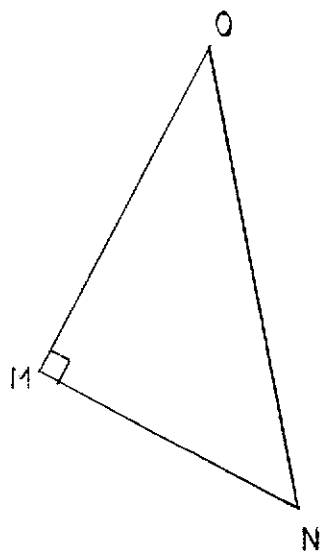


2.1 มุมฉาก คือ

2.2 ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ

2.3 ด้านประกอบมุมฉาก คือ และ

3.

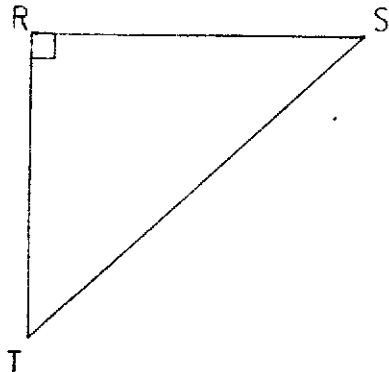


3.1 มุมฉาก คือ

3.2 ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ

3.3 ด้านประกอบมุมฉาก คือ และ

4.



4.1 มุมฉาก คือ

4.2 ด้านตรงข้ามมุมฉาก คือ

4.3 ด้านประกอบมุมฉาก คือ และ

2.3 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

นิยาม รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน

ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยใช้วงเวียน

ให้นักเรียนวัดขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยใช้ไม้โปรแทรกเตอร์

1. มีขนาด องศา
2. มีขนาด องศา
3. มีขนาด องศา

ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มุมทุกมุมจะมีขนาด คือ เท่ากับ องศา

3. ความเท่ากันทุกประการ

การเท่ากันทุกประการ ของรูปเรขาคณิต รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการหรือไม่ โดยการเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่ง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องให้นิยามการเคลื่อนที่เสียก่อน

บทนิยามที่ 1 การเคลื่อนที่ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

สัจพจน์ รูปเรขาคณิตเคลื่อนที่ได้

บทนิยามที่ 2 รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

ใช้สัญลักษณ์ $\cong$ แทนคำว่า เท่ากันทุกประการ

ดังนั้นเมื่อ รูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B

จะเขียนแทนด้วย $A \cong B$

4. ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

บทนิยามที่ 3 ส่วนของเส้นตรงสองเส้นจะเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรง
สองเส้นยาวเท่ากัน

ให้นักเรียนแปลงข้อความจากบทนิยามที่ 2 ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

..... (1)

เมื่อกำหนด $AB = CD$ จะได้ (2)

เมื่อกำหนด $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ จะได้ (3)

กำหนด $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นส่วนของเส้นตรง 2 เส้น ดังรูป

A ————— B

C ————— D

ให้นักเรียนนำ $\overline{CD}$ ข้อน $\overline{AB}$ โดยใช้ลำดับขั้นตอนการซ้อน ดังนี้

1. ให้อยู่จุด C ข้อนจุด A

2. $\overline{CD}$ ข้อน $\overline{AB}$

3. ถ้าจุด D ข้อนจุด B จะได้ว่า $\overline{CA} = \overline{AB}$

5. ความเท่ากันทุกประการของมุม

บทนิยามที่ 3 มุมสองมุมจะเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน

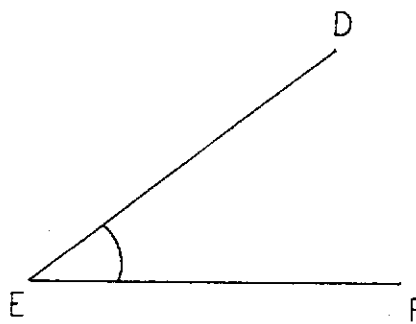
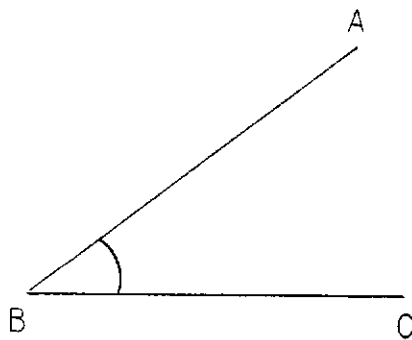
ให้นักเรียนแปลงข้อความจากบทนิยามที่ 3 ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

..... (1)

เมื่อกำหนด $\hat{A} = \hat{B}$ จะได้ (2)

เมื่อกำหนด $\hat{A} \cong \hat{B}$ จะได้ (3)

กำหนด $\hat{ABC}$ และ $\hat{DEF}$ ดังรูป



ให้นักเรียนพับกระดาษให้มีขนาดเท่ากับมุม DEF พร้อมทั้งใส่ตัวอักษรกำกับ มุม DEF มาซ้อนมุม ABC โดยใช้ลำดับขั้นตอนการซ้อน ดังนี้

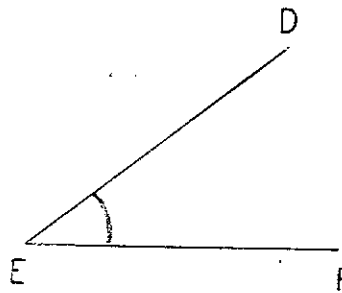
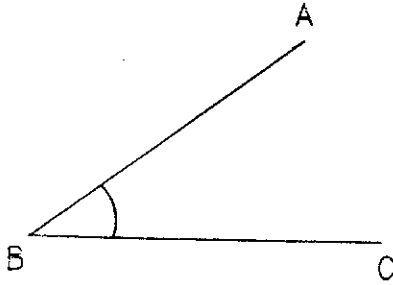
1. ให้อยู่จุด E ซ้อนจุด B

2. $\overline{BC}$ ซ้อน $\overline{EF}$

3. ถ้า $\hat{ABC}$ ซ้อน $\hat{DEF}$ สนิท จะได้ $\overline{ED}$ ซ้อน $\overline{BA}$

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

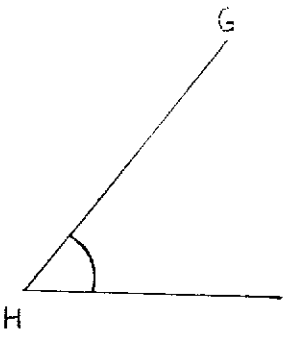
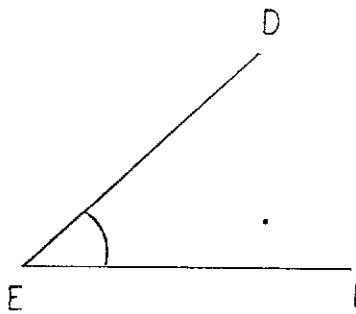
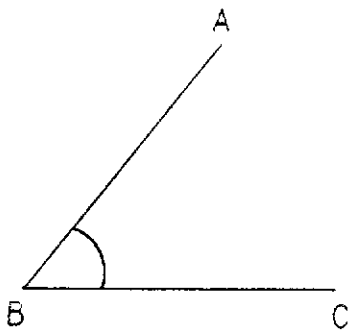
1. กำหนด $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ดังรูป



ถ้า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ส่วนใดจะซ้อนกันบ้าง

- 1.1 จุด B ซ้อนจุด
 1.2 $\overline{BC}$ ซ้อน
 1.3 $\angle ABC$ ซ้อน
 1.4 $\overline{AB}$ ซ้อน

2. กำหนด $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ และ $\triangle GHI$ ดังรูป จงใช้ลำดับขั้นตอนการซ้อนมุม พิจารณาว่ามุมคู่ใดเท่ากันทุกประการ และเขียนลำดับขั้นตอนการซ้อน



.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยเอกสารทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม

หน้า 1	1.1	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$		
	1.2	$\hat{A}$, $\hat{B}$ และ $\hat{C}$		
หน้า 2	3.1	$\overline{AB}$, $\overline{BC}$	3.2	$\overline{BC}$, $\overline{AC}$
	4.1	$\hat{A}$, $\hat{B}$	4.2	$\hat{B}$, $\hat{C}$
	5.1	$\hat{C}$	5.2	$\hat{A}$
	6.1	$\hat{C}$	6.2	$\hat{A}$
			3.3	$\overline{AC}$, $\overline{AB}$
			4.3	$\hat{C}$, $\hat{A}$
			5.3	$\hat{B}$
			6.3	$\hat{B}$
หน้า 4	1.1	$\hat{A}$	1.2	$\overline{BC}$
	2.1	$\hat{F}$	2.2	$\overline{DE}$
	3.1	$\hat{H}$	3.2	$\overline{GI}$
	4.1	$\hat{Q}$	4.2	$\overline{PR}$
			1.3	$\hat{B}$, $\hat{C}$
			2.3	$\hat{D}$, $\hat{E}$
			3.3	$\hat{G}$, $\hat{I}$
			4.3	$\hat{P}$, $\hat{R}$
หน้า 5	1.1	$\hat{D}$	1.2	$\overline{CE}$
			1.3	$\overline{CD}$, $\overline{DE}$
หน้า 6	2.1	$\hat{P}$	2.2	$\overline{QR}$
	3.1	$\hat{M}$	3.2	$\overline{ON}$
	4.1	$\hat{R}$	4.2	$\overline{ST}$
			2.3	$\overline{PQ}$, $\overline{PR}$
			3.3	$\overline{OM}$, $\overline{MN}$
			4.3	$\overline{RS}$, $\overline{RT}$
หน้า 9	1.	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ เมื่อ $\overline{AB} = \overline{CD}$		
	2.	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	3.	$\overline{AB} = \overline{CD}$
หน้า 10	1.	$\hat{A} \cong \hat{B}$ เมื่อ $\hat{A} = \hat{B}$		
	2.	$\hat{A} = \hat{B}$	3.	$\hat{A} \cong \hat{B}$
หน้า 11	1.1	E	1.2	$\overline{EF}$
			1.3	$\hat{DEF}$
			1.4	$\overline{DE}$
	2.	$\hat{ABC} \cong \hat{GHI}$ ลำดับของการซ้อน		
	2.1	จุด H ซ้อนจุด B		
	2.2	$\overline{HI}$ ซ้อน $\overline{BC}$		
	2.3	$\hat{GHI}$ ซ้อน $\hat{ABC}$		
	2.4	$\overline{AB}$ ซ้อน $\overline{GH}$		

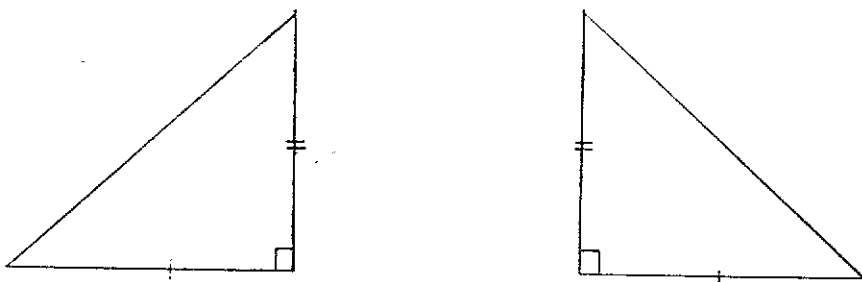
เอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

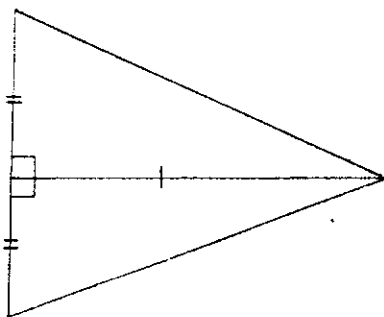
เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.1 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถนำ
ทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน - มุม - ด้าน) ไปใช้ได้ถูกต้อง

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้
 คู่ใดที่เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 1 (ด้าน - มุม - ด้าน)
ข้อตกลง ด้านหรือมุมที่โจทย์กำหนดให้เท่ากันแสดงด้วยเครื่องหมายบนด้านหรือมุมที่
 เหมือนกัน

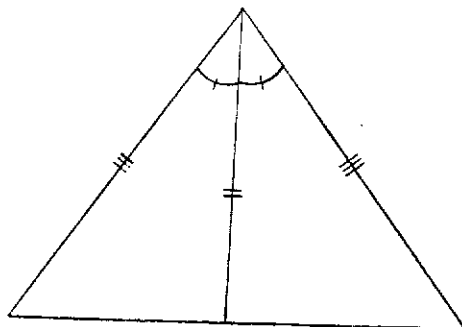
1.



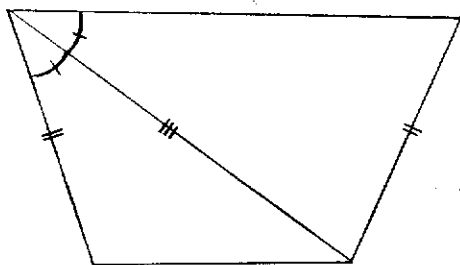
2.



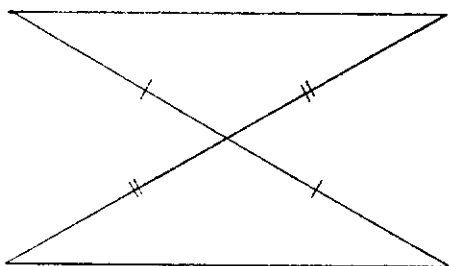
3.



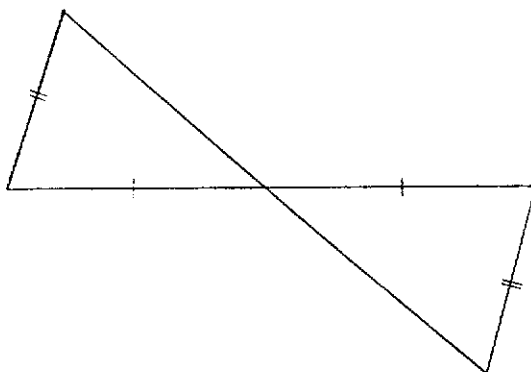
4.



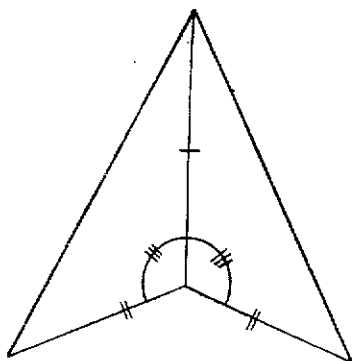
5.



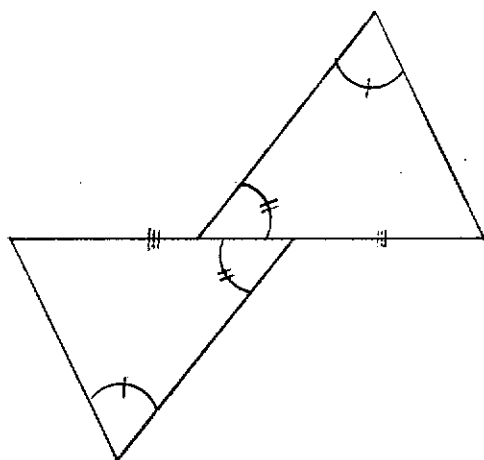
6.



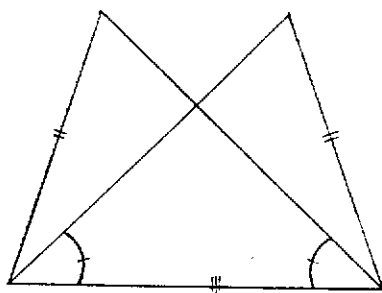
7.



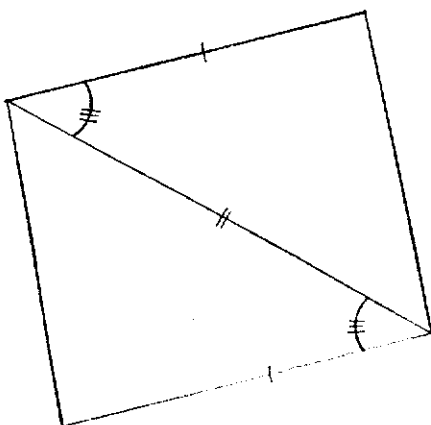
8.



9.



10.



เอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.2

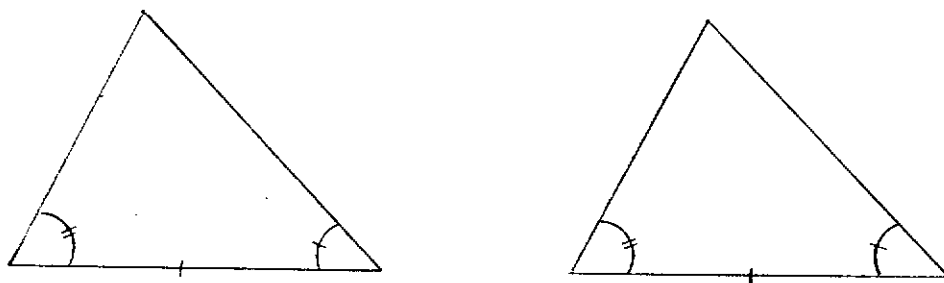
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 1.2 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถนำ
ทฤษฎีบทที่ 2 (มุม - ด้าน - มุม) ไปใช้ได้ถูกต้อง

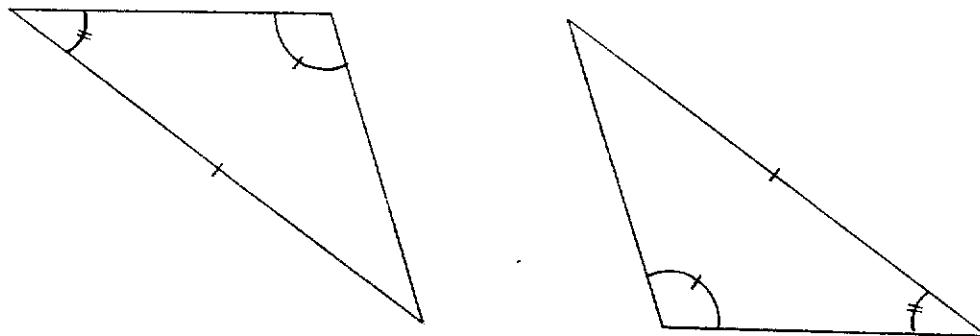
คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้
คู่ใดที่เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 2 (มุม - ด้าน - มุม)

ข้อตกลง ด้านหรือมุมที่โจทย์กำหนดให้เท่ากันแสดงด้วยเครื่องหมายบนด้านหรือมุมที่
เหมือนกัน

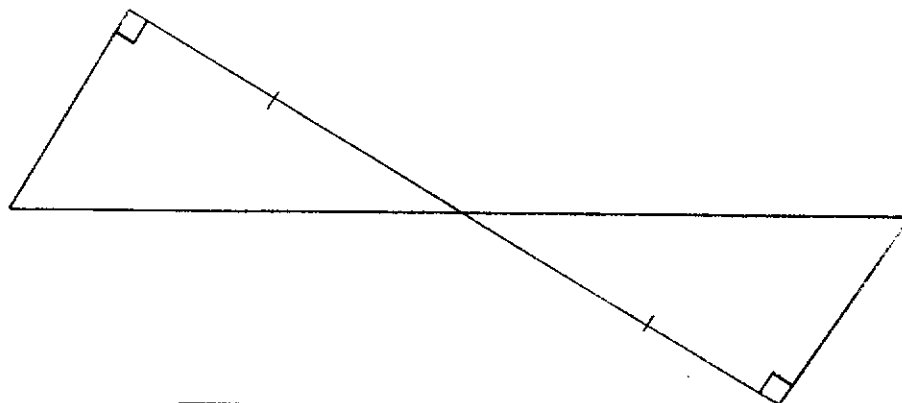
1.



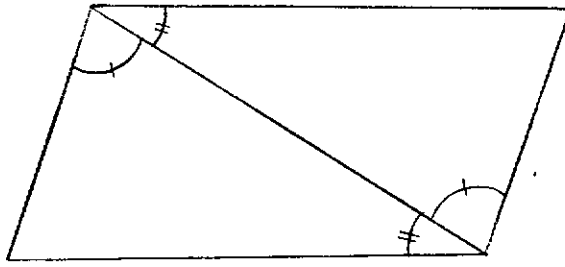
2.



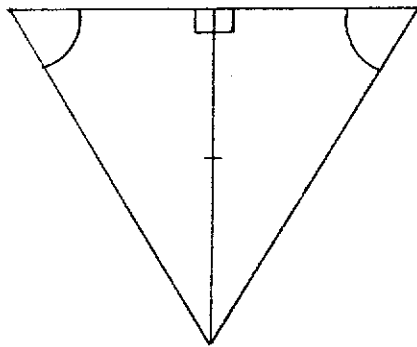
3.



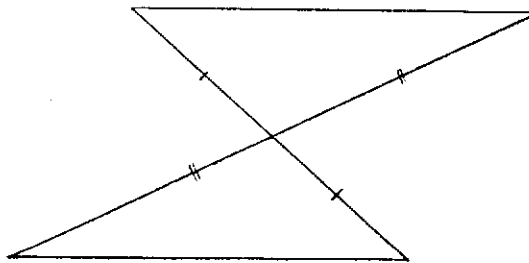
4.



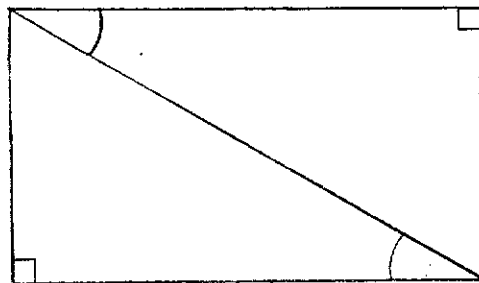
5.



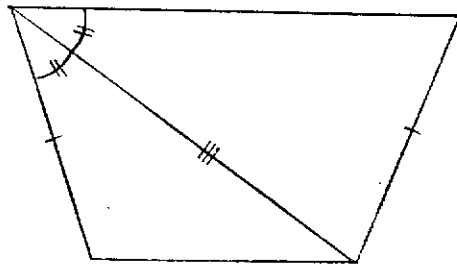
6.



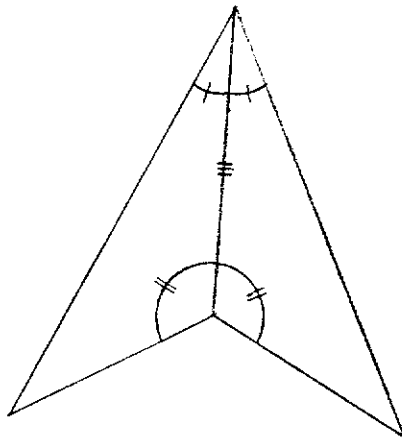
7.



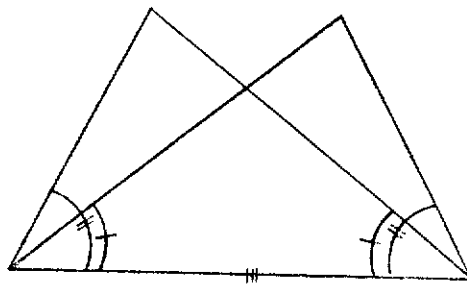
8.



9.



10.



ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.1 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. แยกภาคเหตุและภาคผลของทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 ได้
2. ภาคเหตุและภาคผลของทฤษฎีบทที่ 5 และ 6 นำไปเขียนรูปและสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้ว
รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
(ด้าน - ด้าน - ด้าน)

ภาคเหตุ คือ

.....

ภาคผล คือ

.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

กำหนดให้

.....

จะต้องพิสูจน์ว่า

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน
และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น
เท่ากันทุกประการ (จาก - ด้าน - ด้าน)

ภาคเหตุ คือ

.....

ภาคผล คือ

.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

กำหนดให้

.....

จะต้องพิสูจน์ว่า

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2
สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 1 และ 2

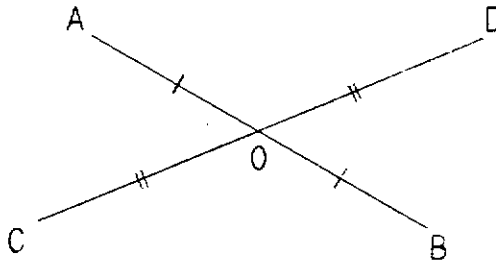
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. วาดรูปและกำหนดตัวอักษรได้ถูกต้อง
2. แยกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ได้ถูกต้อง
3. เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ วาดรูป และเขียนสัญลักษณ์ได้ถูกต้อง
4. เขียนสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ พร้อมทั้งแสดงเครื่องหมายลงในรูปได้ถูกต้อง

ตอนที่ 1

คำสั่ง จงแปลงข้อความต่อไปนี้ให้เป็นรูปและสัญลักษณ์

ข้อความ	รูปและสัญลักษณ์
ตัวอย่าง $\overline{AB}$ ตัดและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน กับ $\overline{CD}$ ที่จุด O	
1. $\overline{AB}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ ที่จุด X	
2. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	
3. $\triangle ABC$ และ $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป ที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐานร่วมกัน	

ข้อความ	รูปและสัญลักษณ์
4. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AB = AC$ และ $\overline{AD}$ เป็นด้านแบ่งครึ่งมุมยอด	
5. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ	
6. $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ลากเส้นตรงแบ่งครึ่ง $\angle D$ ตัดกับ $\overline{EF}$ ที่จุด X	
7. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน $\overline{BK}$ และ $\overline{CM}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ	

ข้อความ	รูปและสัญลักษณ์
8. ☐ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ	
9. ☐ PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\overline{PR}$ และ $\overline{QS}$ เป็นเส้นทแยงมุม 2 เส้นตัดกันที่จุด O	
10. ☐ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี E และ F เป็นจุดบน $\overline{BC}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ และ $EC = FC$	

ตอนที่ 2

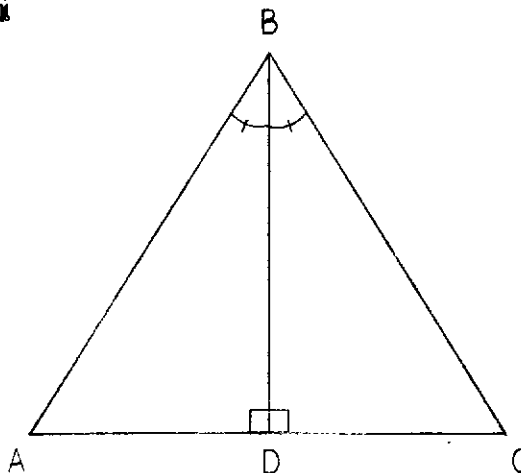
คำสั่ง โจทย์ปัญหาแต่ละข้อ ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. ใช้ปากกาสีน้ำเงินขีดข้อความที่โจทย์กำหนดให้ และใช้ปากกาสีแดงขีดข้อความที่โจทย์ต้องการพิสูจน์
2. เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ พร้อมทั้งแปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์
3. เขียนสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ และทำเครื่องหมายลงในรูป

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\angle B$

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า $AD = DC$ และ $BD \perp AC$

โจทย์ข้อ 1 กำหนดให้ ABC และ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่ใช้ฐาน BC ร่วมกัน โดยมี $AB = AC$ และ $BD = CD$ ลาก AD จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD$ มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$

กำหนดให้.....

.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

โจทย์ข้อ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ ลาก CD และ BE ตั้งฉากกับ AB และ AC ที่จุด D และ E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $CD = BE$ หลังจากนั้นให้ใช้ผลที่ได้พิสูจน์ $AD = AE$

กำหนดให้.....

.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

โจทย์ข้อ 3 ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้า E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า
 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กำหนดให้.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

โจทย์ข้อ 4 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูป
 สามเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

โจทย์ข้อ 5 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม A ตัดกับ BC ที่จุด X
ถ้า $\overline{XD}$ และ $\overline{XE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $XD = XE$

กำหนดให้.....
.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

โจทย์ข้อ 6 กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดและแบ่งครึ่งกับ $\overline{BD}$ ที่จุด M จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{DC}$

กำหนดให้.....
.....

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์

จะต้องพิสูจน์ว่า.....

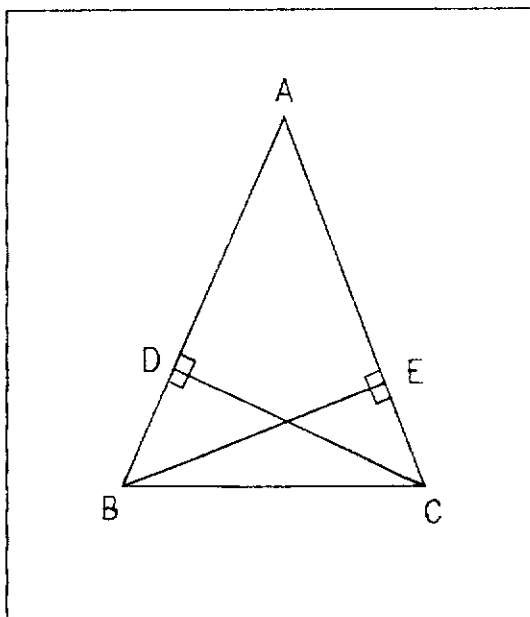
เฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.2

โจทย์ข้อ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$
ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ E
ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $CD = BE$ หลังจากนั้นให้ใช้ผลที่ได้
พิสูจน์ $AD = AE$

กำหนดให้

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AB = AC$
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ที่จุด D
 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ที่จุด E

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า

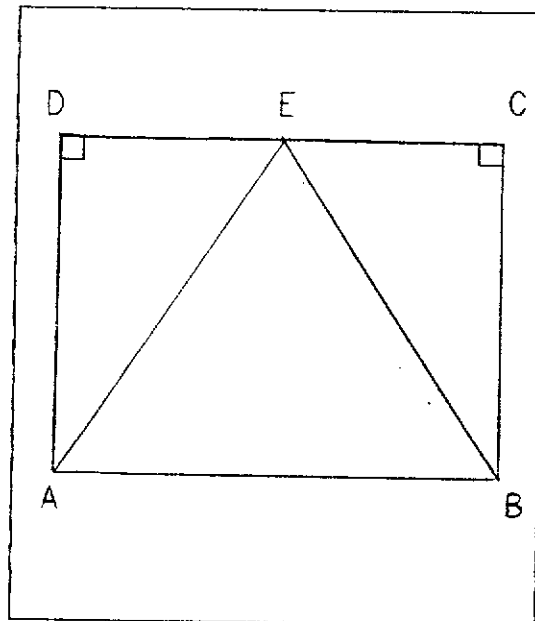
1. $CD = BE$
2. $AD = AE$

โจทย์ข้อ 3 ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้า E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$
จะพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กำหนดให้

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า

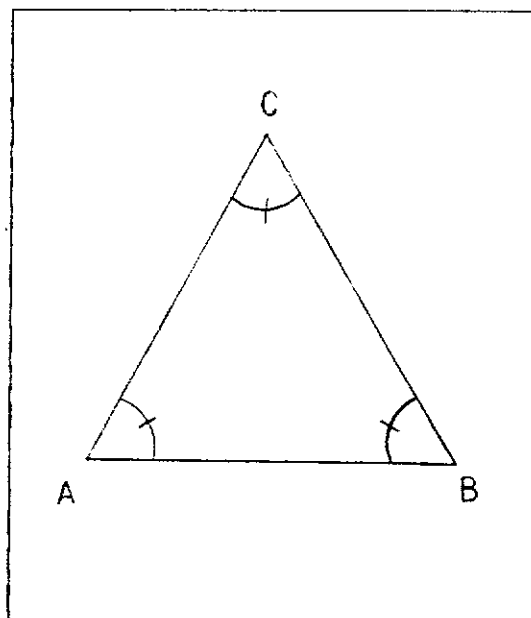
$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

โจทย์ข้อ 4 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ จงพิสูจน์ว่า
 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า

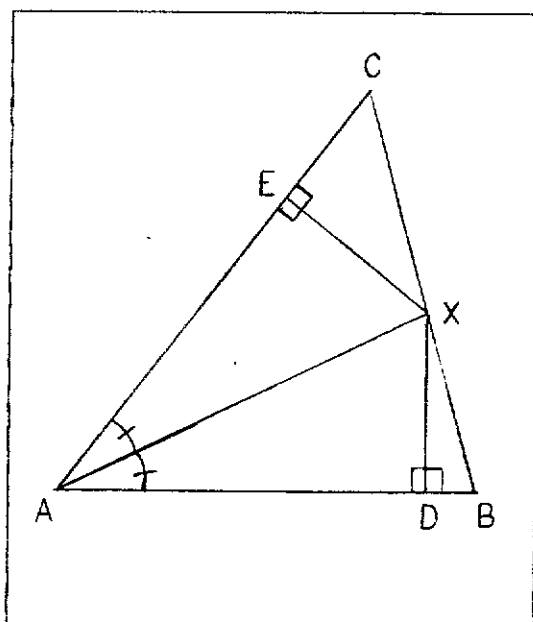
$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

โจทย์ข้อ 5 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม A ตัดกับ BC ที่จุด X ถ้า $\overline{XD}$ และ $\overline{XE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ
จงพิสูจน์ว่า $XD = XE$

กำหนดให้

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ ตัด BC ที่จุด X
 $\overline{XD} \perp \overline{AB}$
 $\overline{XE} \perp \overline{AC}$

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า

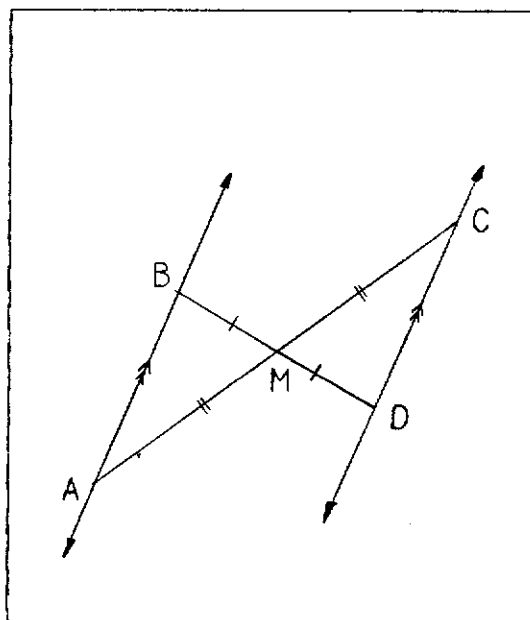
$$XD = XE$$

โจทย์ข้อ 6 กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดและแบ่งครึ่งกับ $\overline{BD}$ ที่จุด M จงพิสูจน์ว่า
 $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{DC}$

กำหนดให้

$\overline{AC}$ ตัดและแบ่งครึ่งกับ $\overline{BD}$ ที่จุด M

แปลงเป็นรูปและสัญลักษณ์



จะต้องพิสูจน์ว่า

$\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{DC}$

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถดังนี้

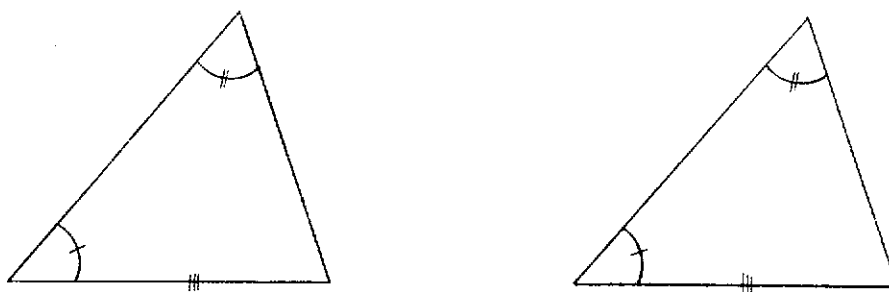
1. นำทฤษฎีบทที่ 3 ไปใช้ได้ถูกต้อง
2. นำทฤษฎีบทที่ 5 ไปใช้ได้ถูกต้อง
3. นำทฤษฎีบทที่ 6 ไปใช้ได้ถูกต้อง

ตอนที่ 1

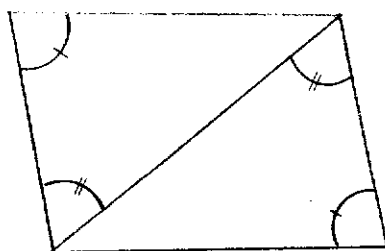
คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้
 คู่ใดที่เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 3 (มุม - มุม - ด้าน)

ข้อตกลง ด้านหรือมุมที่กำหนดให้เท่ากันแสดงด้วยเครื่องหมายบนด้านหรือมุมที่
 เหมือนกัน

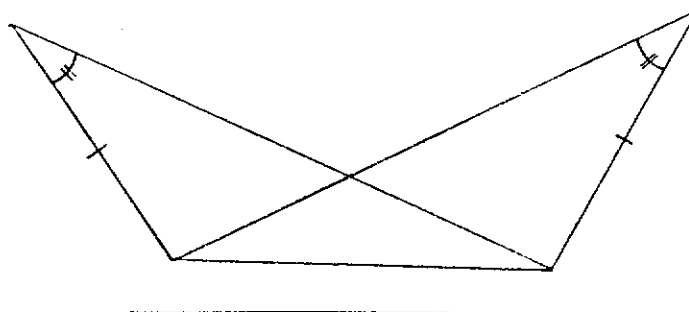
1.



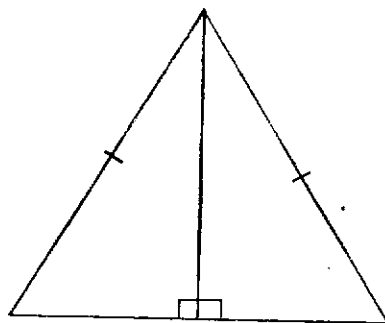
2.



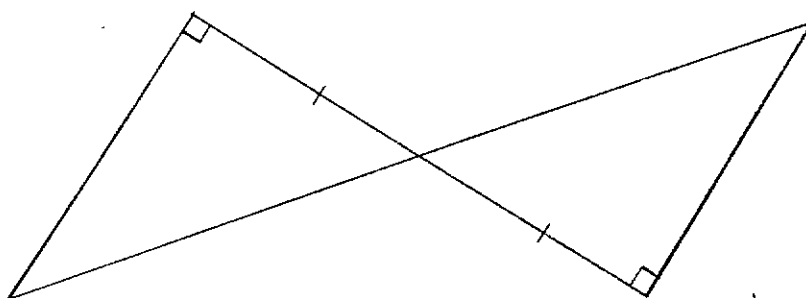
3.



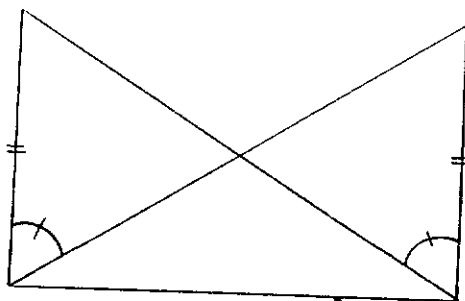
4.



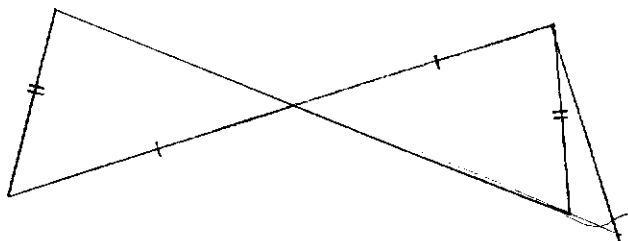
5.



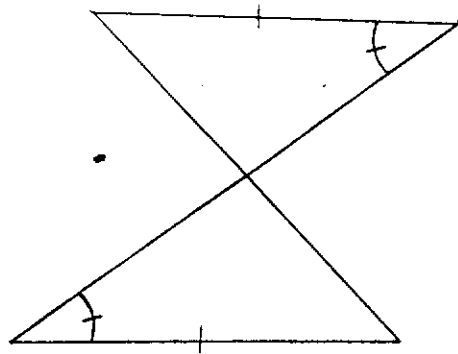
6.



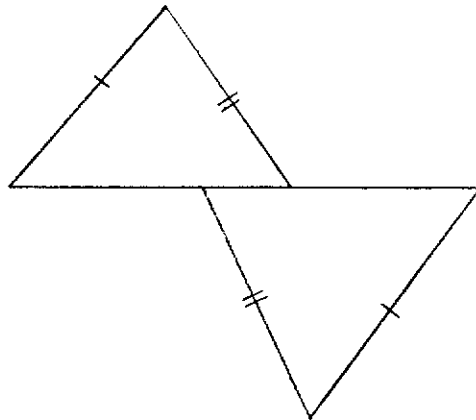
7.



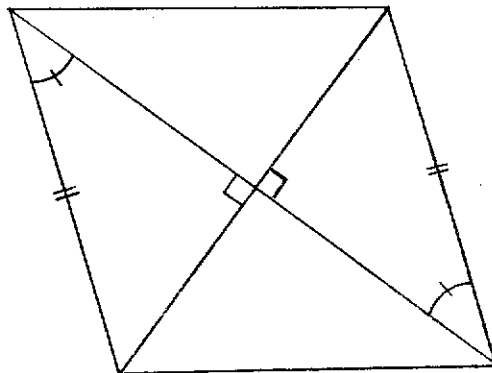
8.



9.



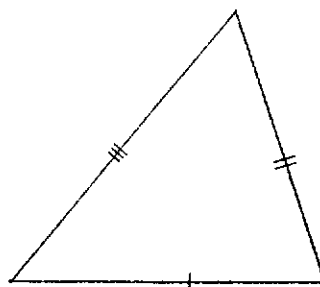
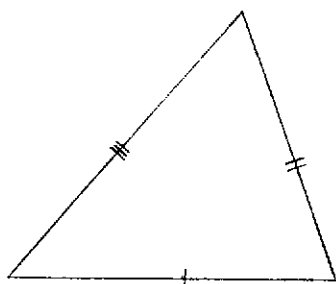
10.



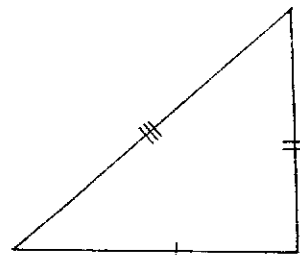
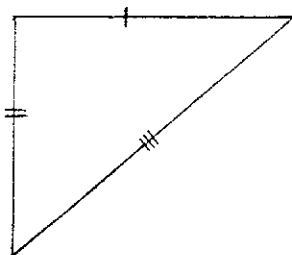
ตอนที่ 2

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้
 คู่ใดที่เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 5 (ด้าน - ด้าน - ด้าน)
ข้อตกลง ด้านที่กำหนดให้เท่ากันแสดงด้วยเครื่องหมายบนด้านที่เหมือนกัน

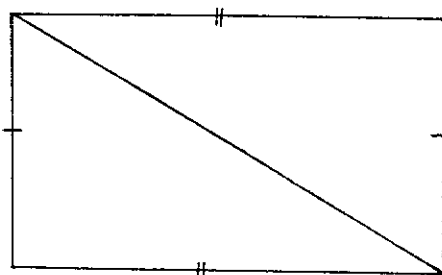
1.



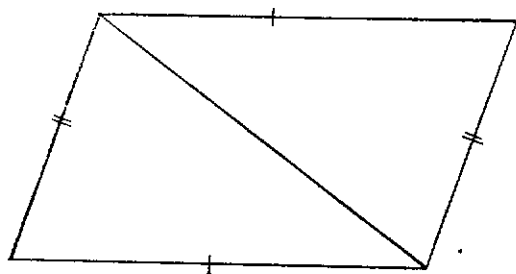
2.



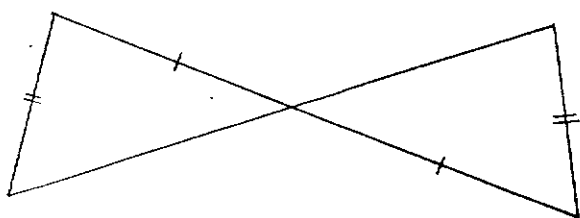
3.



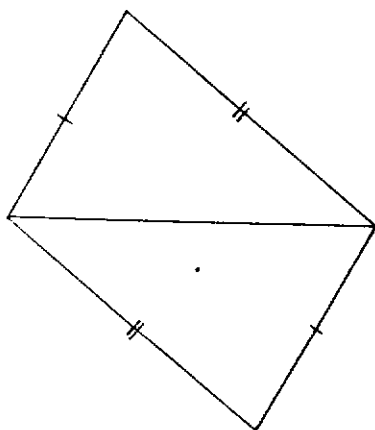
4.



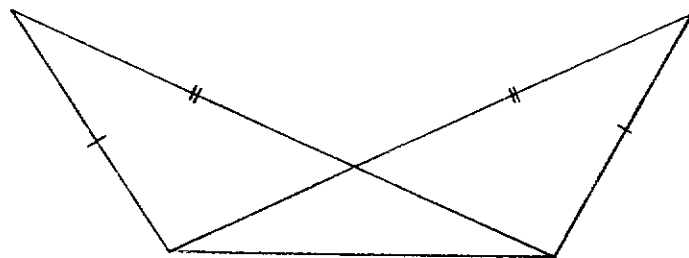
5.



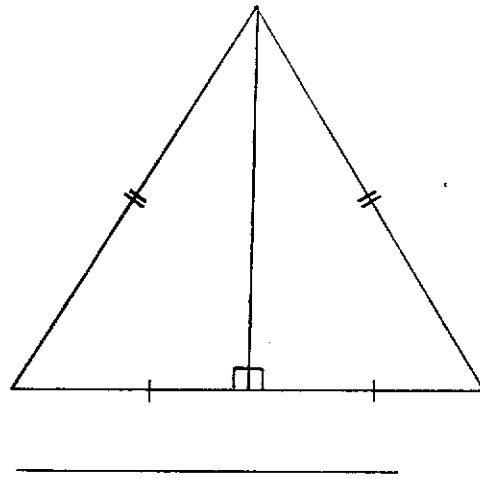
6.



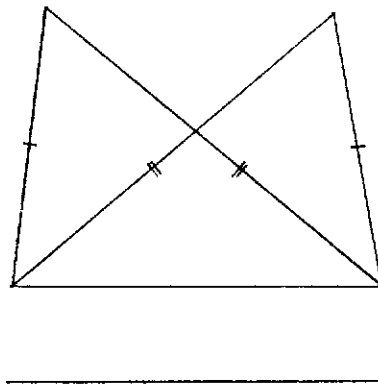
7.



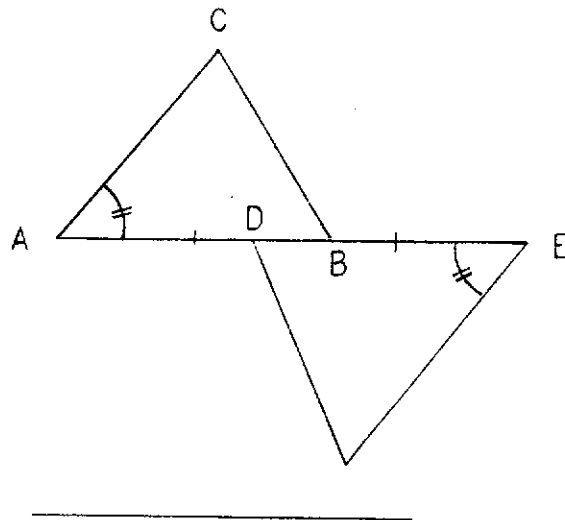
8.



9.



10.



ตอนที่ 3

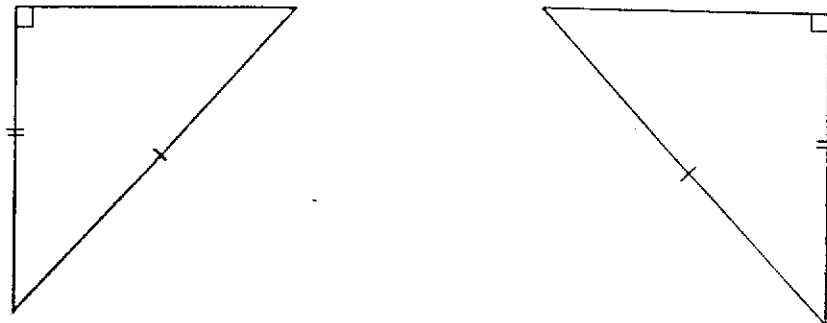
คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้
 คู่ใดที่เท่ากันทุกประการตามทฤษฎีบทที่ 6 (ฉาก - ด้าน - ด้าน)

ข้อตกลง ด้านหรือมุมที่โจทย์กำหนดให้เท่ากันแสดงด้วยเครื่องหมายบนด้าน
 หรือมุมที่เหมือนกัน

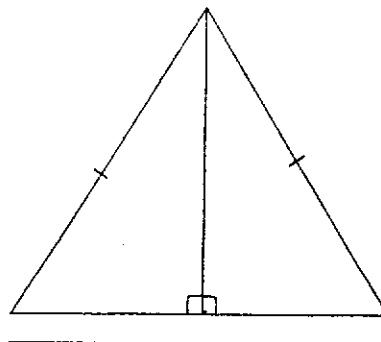
1.



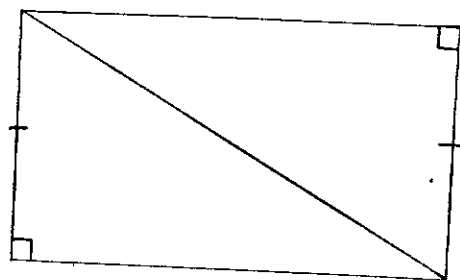
2.



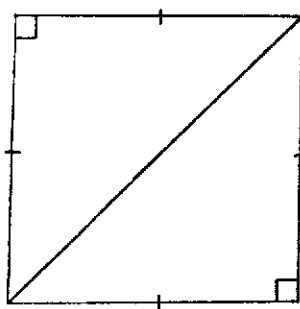
3.



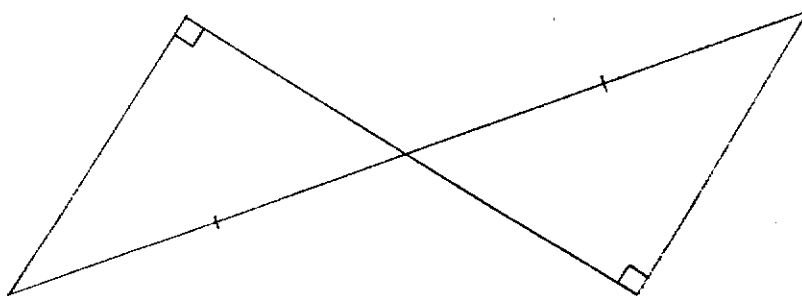
4.



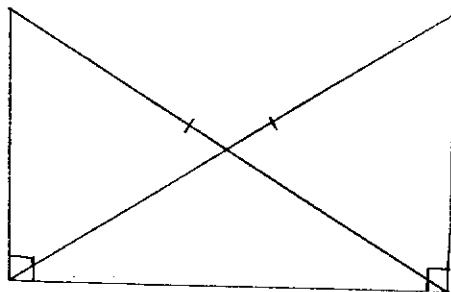
5.



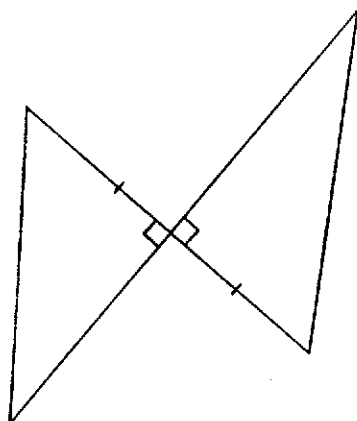
6.



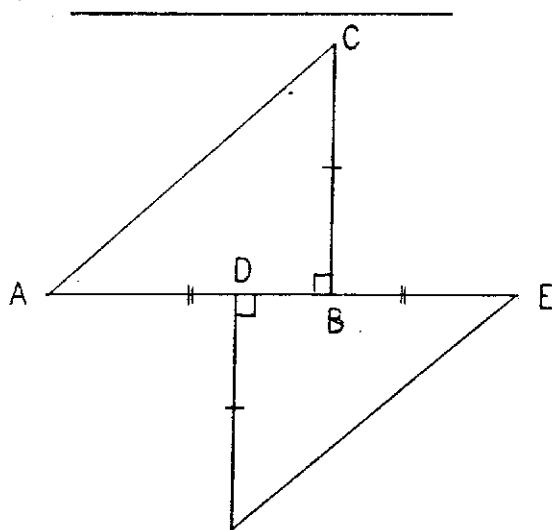
7.



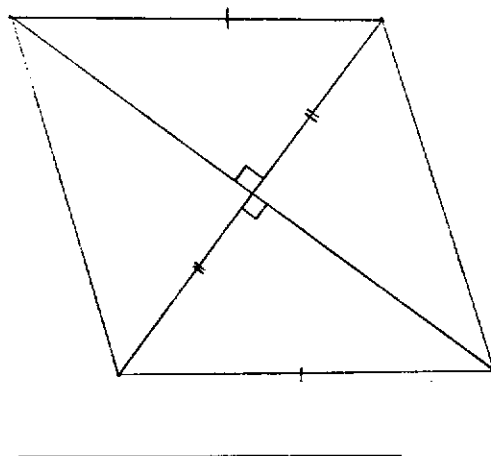
8.



9.



10.



เฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 2.3

ข้อที่	ตอนที่	1	2	3
1		เท่า	เท่า	ไม่เท่า
2		เท่า	เท่า	เท่า
3		ไม่เท่า	เท่า	เท่า
4		ไม่เท่า	เท่า	เท่า
5		ไม่เท่า	ไม่เท่า	ไม่เท่า
6		เท่า	เท่า	เท่า
7		ไม่เท่า	เท่า	เท่า
8		เท่า	เท่า	ไม่เท่า
9		ไม่เท่า	เท่า	ไม่เท่า
10		เท่า	ไม่เท่า	เท่า

ชื่อ.....

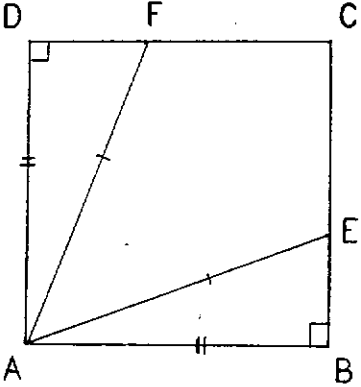
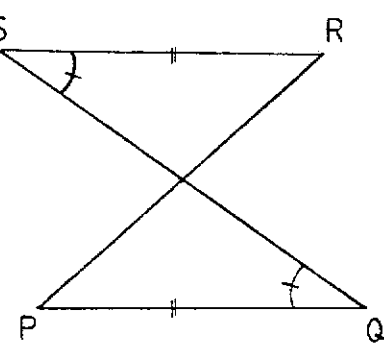
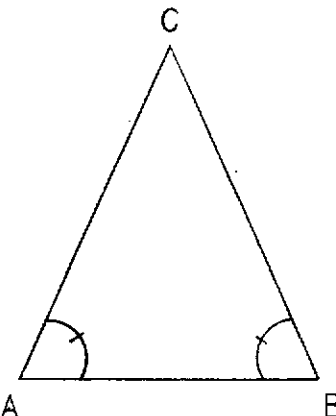
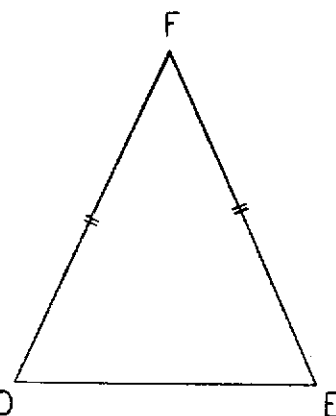
เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.1

สำหรับฝึกการนำทฤษฎีบทที่ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ไปใช้

คำสั่ง ให้นักเรียนพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ เท่ากันทุกประการ หรือไม่ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในข้อใด เท่ากันทุกประการ ให้บอกเหตุผล และบอกผลที่ได้จากความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

รูป	เท่า	ไม่เท่า	เหตุผล	ผลจากความ เท่ากันประการ
1.				
2.				
3.				

รูป	เท่า	ไม่เท่า	เหตุผล	ผลจากความเท่ากันประการ
4. 				
5. 				
6.  จะได้	7.  จะได้			

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.2
สำหรับฝึกเรียบเรียงการพิสูจน์
ทฤษฎีบทที่ 3, 4.1 และ 4.2

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.3
สำหรับฝึกกระบวนการแก้ปัญหาขั้นที่ 3 และ 4

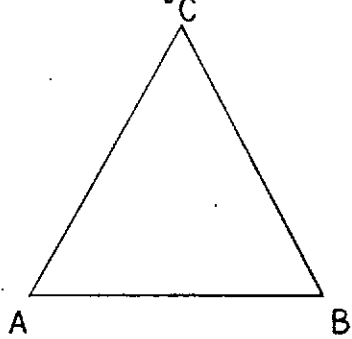
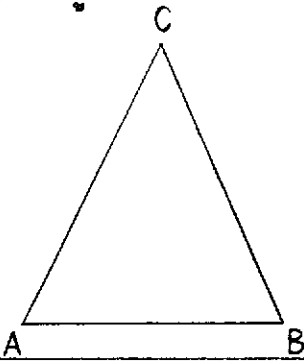
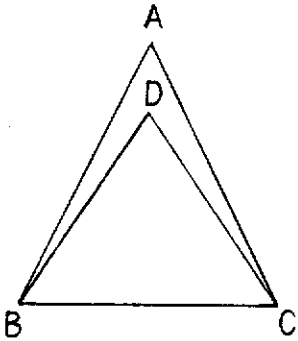
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

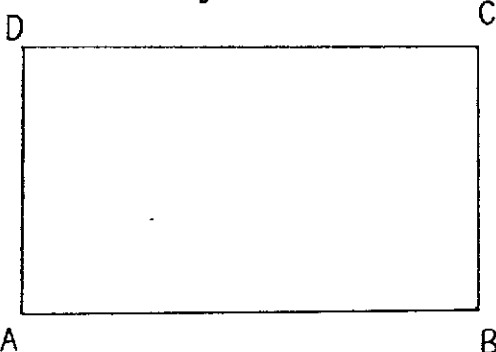
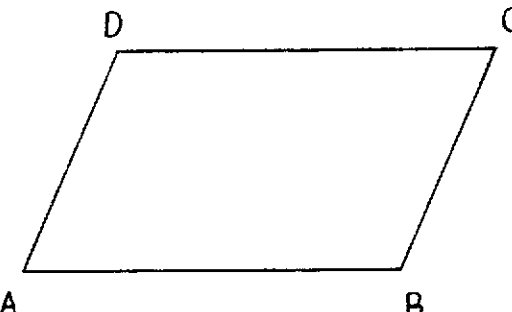
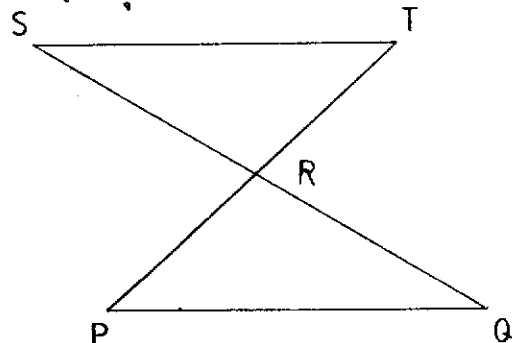
เมื่อนักเรียนทำเอกสารฝึกหัดชุดที่ 3.1 แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถต่อไปนี้

1. หาสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาจากนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้
2. เลือกรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่ต้องนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้ถูกต้อง

ตอนที่ 1

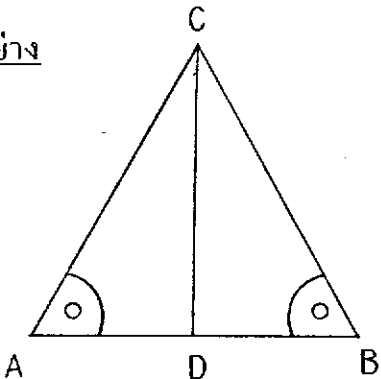
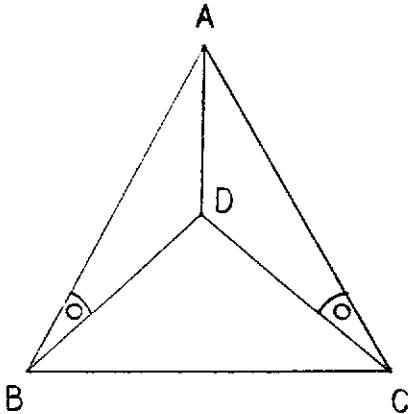
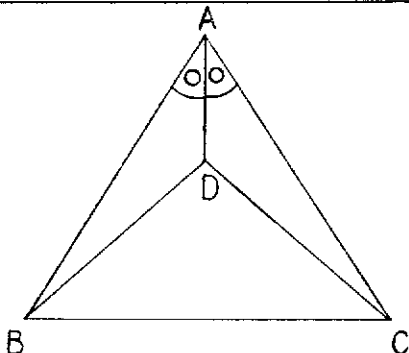
คำสั่ง จงหาสิ่งที่ได้จากนิยามหรือทฤษฎีบทต่าง ๆ เมื่อกำหนดข้อความและรูปให้ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนเป็นสัญลักษณ์

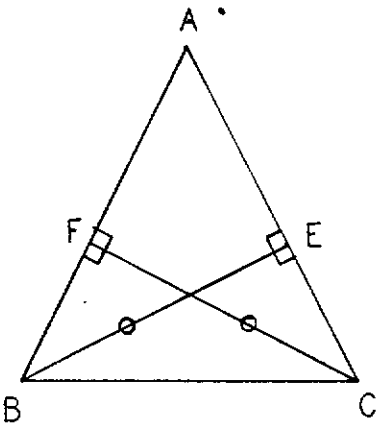
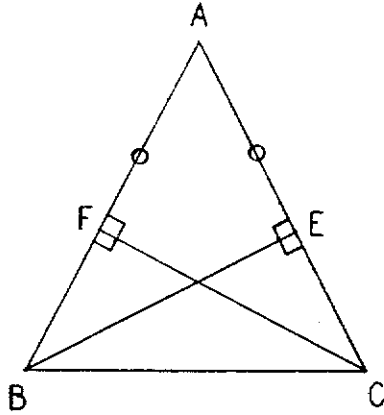
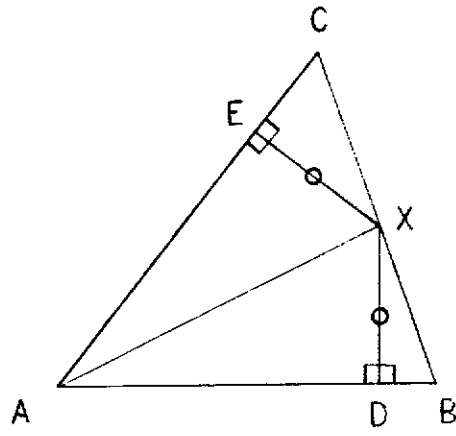
ข้อความและรูป	สิ่งที่ได้จากนิยามหรือทฤษฎีบท
ตัวอย่าง ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 	1. $AB = BC = AC$ 2. $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ$
1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 	1. 2.
2. ABC และ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป 	1. 2.

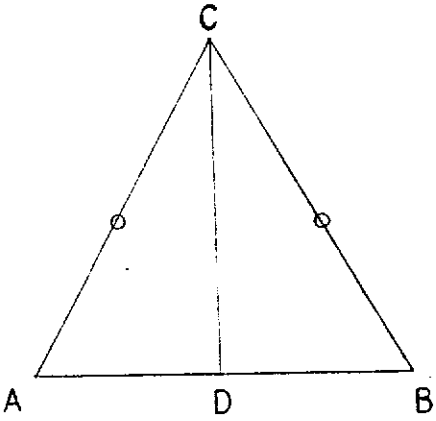
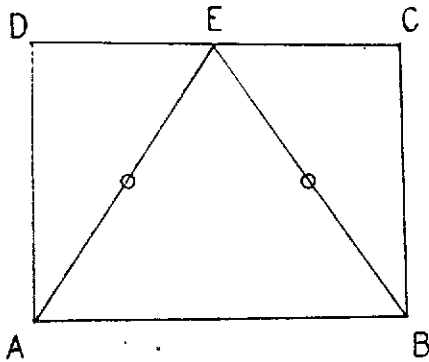
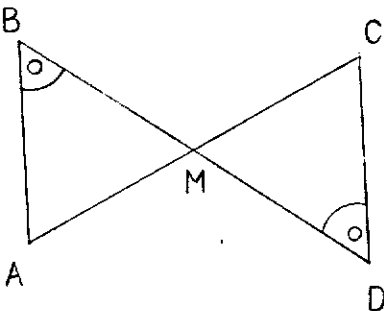
ข้อความและรูป	สิ่งที่ได้จากนิยามหรือทฤษฎีบท
3. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 	1. 2.
4. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 	1. 2.
5. $PQ \parallel ST$ และ $PQ = ST$ $\overline{PT}$ ตัดกับ $\overline{QS}$ ที่จุด R 	1. 2. 3.

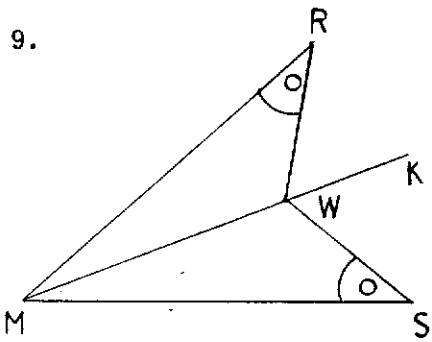
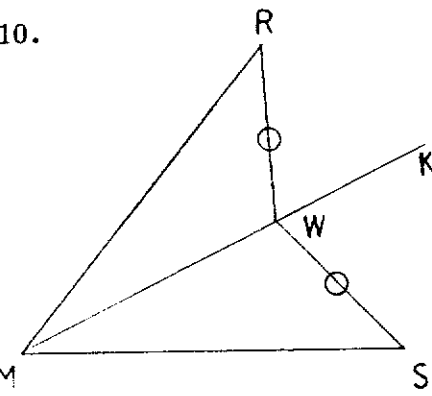
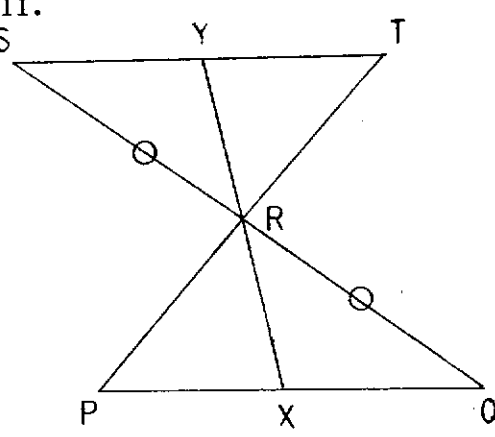
ตอนที่ 2

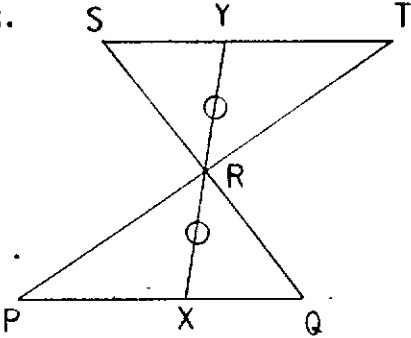
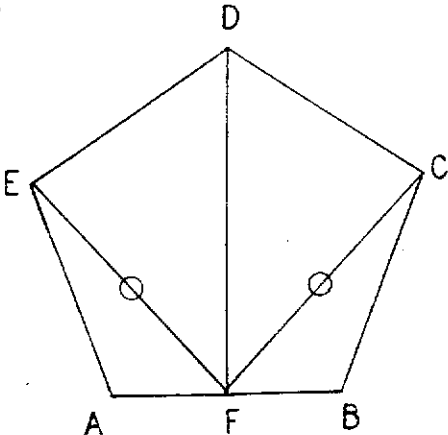
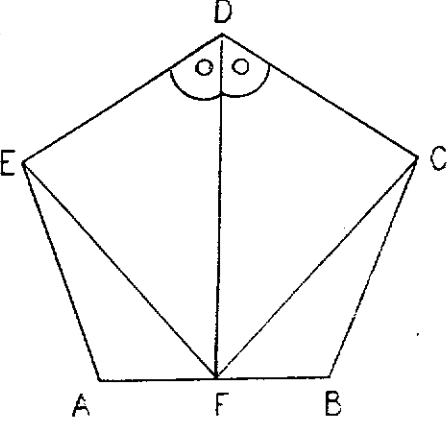
คำสั่ง เครื่องหมายที่กำหนดลงในรูปต่อไปนี้ เป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์ให้เท่ากัน จงเลือกรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่ต้องนำมาใช้ในการพิสูจน์

รูป	รูปสามเหลี่ยมที่ต้องนำมาพิจารณา
<u>ตัวอย่าง</u> 	$\triangle ACD$ และ $\triangle BCD$
1. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$
2. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$

รูป	รูปสามเหลี่ยมที่ต้องนำมาพิจารณา
3. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$ หรือ $\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$
4. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$
5. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$ หรือ $\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$

รูป	รูปสามเหลี่ยมที่ต้องนำมาพิจารณา
6. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$
7. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$
8. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$

รูป	รูปสามเหลี่ยมที่ต้องนำมาพิจารณา
9. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$
10. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$
11. 	$\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$ หรือ $\triangle \dots$ และ $\triangle \dots$

รูป	รูปสามเหลี่ยมที่ต้องนำมาพิจารณา
12. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$ หรือ $\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$
13. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$ หรือ $\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$
14. 	$\triangle \dots\dots$ และ $\triangle \dots\dots$

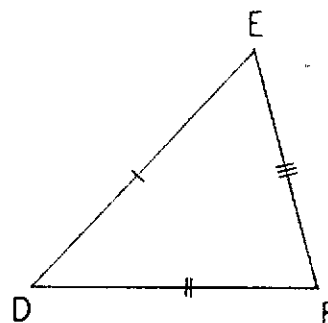
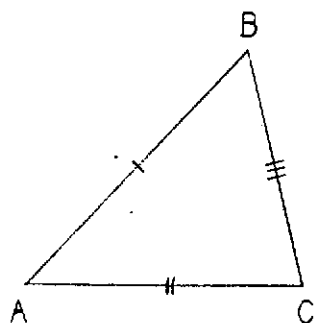
ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.1

สำหรับฝึกเรียบเรียงการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่ 5 และ 6

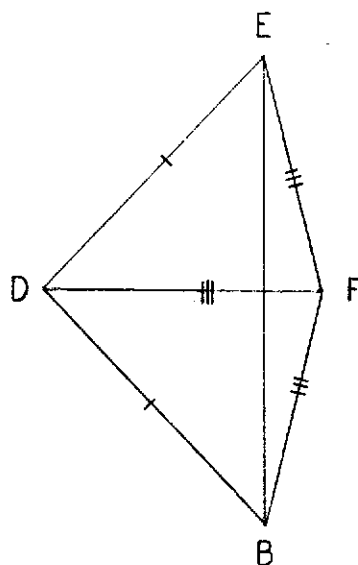
ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มี $AC = DE$, $BC = EF$

และ $AB = DF$

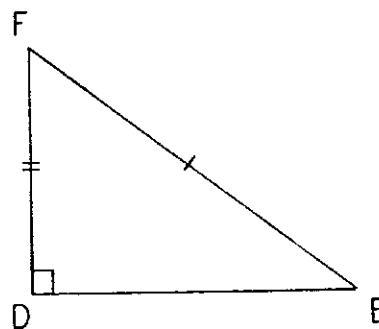
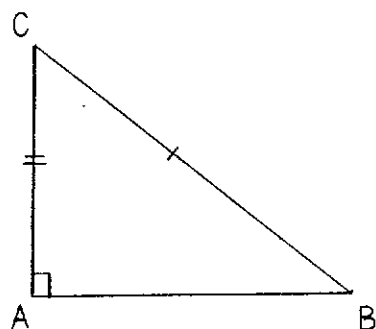
จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle BAC \cong \triangle DEF$



สร้างเพื่อการพิสูจน์.....

[illegible]

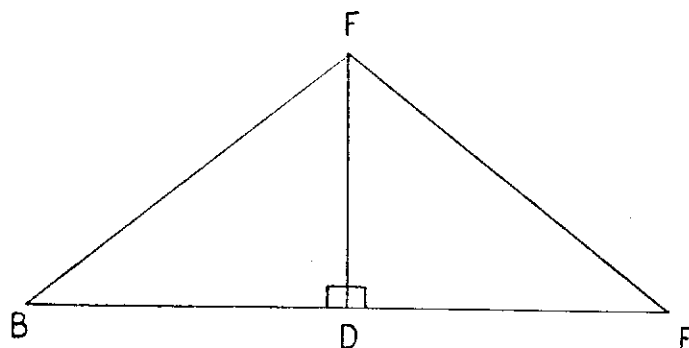
ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น เท่ากันทุกประการ (จาก - ด้าน - ด้าน)



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$,

$BC = EF$ และ $AC = DF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



สร้างเพื่อการพิสูจน์.....

ชื่อ.....

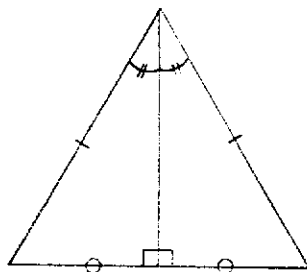
เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2
สำหรับฝึกเรียบเรียงการพิสูจน์

คำสั่ง จงเรียบเรียงการพิสูจน์

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ลากแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ไปยังฐานจะแบ่งครึ่งฐานและตั้งฉากกับฐาน

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AB = BC$ และ $\overline{BD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{B}$



จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $AD = DC$
2. $BD \perp AC$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

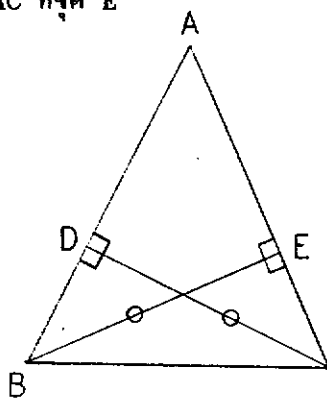
ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = BC$	1. กำหนดให้
2. $\hat{ABD} = \hat{DBC}$	2. กำหนดให้
3. $BD = BD$	3. ด้านร่วม
4. $\triangle ABD \cong \triangle BCD$	4. จากข้อ 1, 2 และ 3 (ด้าน-มุม-ด้าน)
5. $AD = CD$	5. ผลจากข้อ 4
6. $\hat{ADB} = \hat{BDC}$	6. ผลจากข้อ 4
7. $\hat{ADB} + \hat{BDC} = 180$	7. จาก $\hat{ADB} + \hat{BDC} = \hat{ADC}$ ซึ่งเป็นมุมตรง
8. $\hat{ADE} = \hat{BDC} = 90^\circ$	8. จากข้อ 6 และ 7
9. $BD \perp AC$	9. จากข้อ 8

โจทย์ข้อ 2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $CD = BE$ หลังจากนั้นใช้ผลที่ได้พิสูจน์ $AD = AE$

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AB = AC$

$CD \perp AE$ ଶୀର୍ଷକ D

BE ⊥ AC ที่จุด E



จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $CD = BE$ 2. $AD = AE$

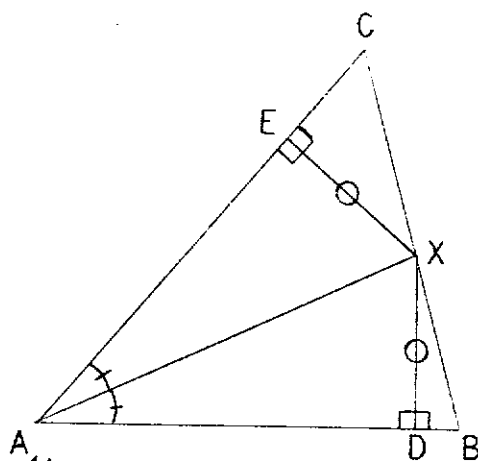
พิสัย พิจารณา Δและ Δ

[illegible]

โจทย์ข้อ 5 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม A ตัดกับ BC ที่จุด X ถ้า $\overline{XD}$ และ $\overline{XE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $XD = XE$

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

แบ่งครึ่ง A ตัด BC ที่จุด X

$$\overline{XD} \perp \overline{AB} \text{ and } \overline{XE} \perp \overline{AC}$$


จะต้องพิสูจน์ว่า $XD = XE$

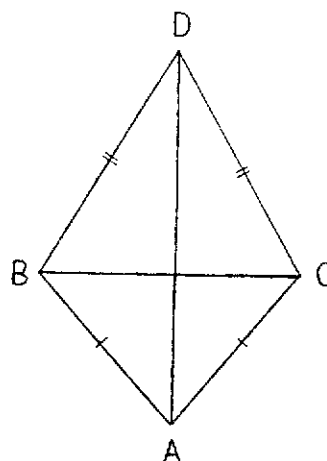
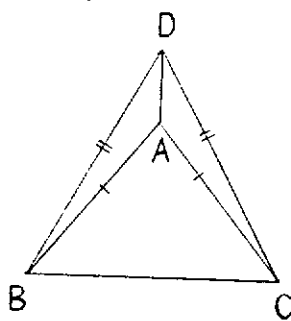
พิสูจน์ พิจารณา $\triangle$ และ $\triangle$

[illegible]

เฉลยเอกสารฝึกหัดชุดที่ 4.2

โจทย์ข้อ 1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป ที่ใช้ฐาน $\overline{BC}$ ร่วมกัน โดยมี $AB = AC$ และ $BD = CD$ ลาก $\overline{AD}$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD$ มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป ที่ใช้ฐาน $\overline{BC}$ ร่วมกัน โดยมี $AB = AC$ และ $BD = CD$



จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ของ $\triangle ABD$ เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ACD$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$

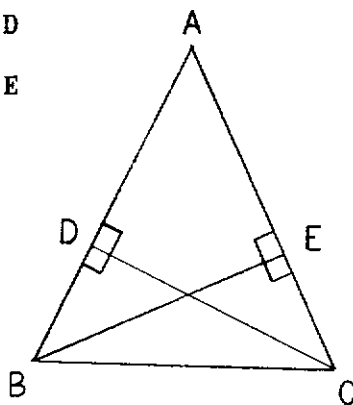
ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = AC$	1. กำหนดให้
2. $BD = CD$	2. กำหนดให้
3. $AD = AD$	3. ด้านร่วม
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	4. จากข้อ 1, 2 และ 3 (ด้าน-ด้าน-ด้าน)
5. พื้นที่ของ $\triangle ABD =$ พื้นที่ของ $\triangle ACD$	5. ผลจากข้อ 4

โจทย์ข้อ 2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $CD = BE$ หลังจากนั้นใช้ผลที่ได้พิสูจน์ $AD = AE$

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $AB = AC$

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ที่จุด D

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ที่จุด E



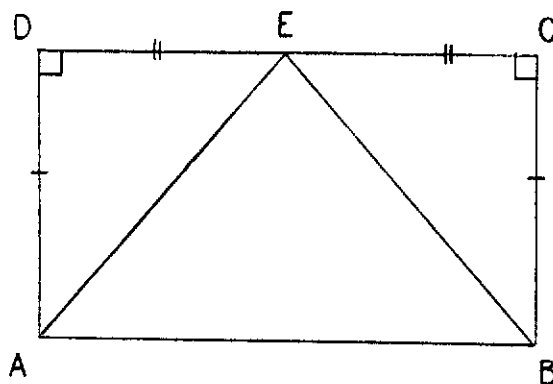
จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $CD = BE$ 2. $AD = AE$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ACD$ และ $\triangle ABE$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AC = AB$	1. กำหนดให้
2. $\angle ADC = 90^\circ$	2. กำหนดให้ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ที่จุด D
3. $\angle AEB = 90^\circ$	3. กำหนดให้ $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ที่จุด E
4. $\angle ADC = \angle AEB$	4. จากข้อ 2, 3 และคุณสมบัติการเท่ากัน
5. $\angle DAC = \angle BAE$	5. มุมร่วม
6. $\triangle ACD \cong \triangle ABE$	6. จากข้อ 1, 4 และ 5 (มุม-มุม-ด้าน)
7. $CD = BE$	7. ผลจากข้อ 6
8. $AD = AE$	8. ผลจากข้อ 6

โจทย์ข้อ 3 ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ถ้า E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จะพิสูจน์
ว่า $\triangle ABE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$



จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นั่นคือจะต้องพิสูจน์ว่า $AE = BE$

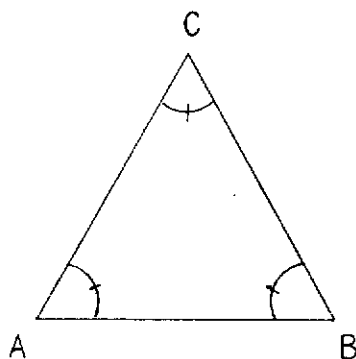
สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก $\overline{AE}$ และ $\overline{BE}$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ADE$ และ $\triangle BCE$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AD = BC$	1. ด้านที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
2. $\hat{ADE} = \hat{BCE}$	2. มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
3. $DE = EC$	3. กำหนดให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$
4. $\triangle ADE \cong \triangle BCE$	4. ข้อ 1, 2 และ 3 (ด้าน - มุม - ด้าน)
5. $AE = BE$	5. ผลจากข้อ 4
6. $\triangle ABE$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	6. จากข้อ 5

โจทย์ข้อ 4 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ จงพิสูจน์ว่า
 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AC = BC$
 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$



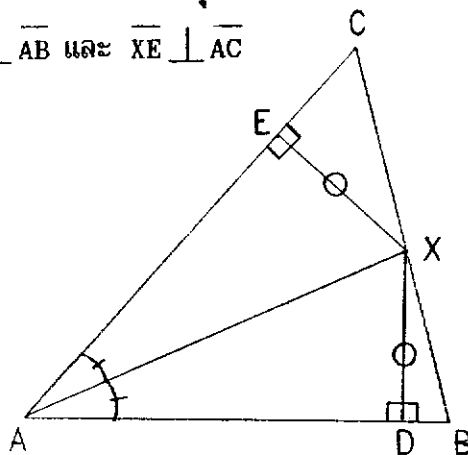
จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
 นั่นคือจะต้องพิสูจน์ว่า $AB = BC = CA$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AC = BC$	1. กำหนดให้
2. $\hat{A} = \hat{C}$	2. กำหนดให้
3. $BC = AB$	3. เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่เท่ากัน
4. $AC = BC = AB$	4. จาก 1, 3 และคุณสมบัติถ่ายทอด
5. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	5. จากข้อ 4

โจทย์ข้อ 5 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม A ตัดกับ BC ที่จุด X ถ้า $\overline{XD}$ และ $\overline{XE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $XD = XE$

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ
แบ่งครึ่ง A ตัด BC ที่จุด X
 $\overline{XD} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{XE} \perp \overline{AC}$



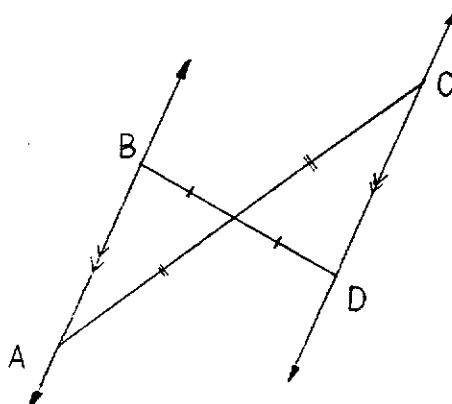
จะต้องพิสูจน์ว่า $XD = XE$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle AEX$ และ $\triangle ADX$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\widehat{EAX} = \widehat{DAX}$	1. กำหนดให้
2. $\widehat{AEX} = 90^\circ$	2. กำหนดให้ $\overline{XE} \perp \overline{AC}$
3. $\widehat{ADX} = 90^\circ$	3. กำหนดให้ $\overline{XD} \perp \overline{AB}$
4. $\widehat{AEX} = \widehat{ADX}$	4. จากข้อ 2, 3 และคุณสมบัติการเท่ากัน
5. $AX = AX$	5. ด้านร่วม
6. $\triangle AEX \cong \triangle ADX$	6. จากข้อ 1, 4 และ 5 (มุม - มุม - ด้าน)
7. $XE = XD$	7. ผลจากข้อ 6

โจทย์ข้อ 6 กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดและแบ่งครึ่งกับ $\overline{BD}$ ที่จุด M จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{DC}$

กำหนดให้ $\overline{AC}$ ตัดและแบ่งครึ่งกับ $\overline{BD}$ ที่จุด M



จะต้องพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{DC}$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABM$ และ $\triangle CDM$

ข้อความ	เหตุผล
1. $BM = DM$	1. กำหนดให้
2. $AM = CM$	2. กำหนดให้
3. $\hat{BMA} = \hat{CMD}$	3. มุมตรงข้าม
4. $\triangle ABM \cong \triangle CDM$	4. จากข้อ 1, 2, 3 (ด้าน - มุม - ด้าน)
5. $\hat{B} = \hat{D}$	5. ผลจากข้อ 4
6. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$	6. ผลจากข้อ 5

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 5.1
สำหรับฝึกการพิสูจน์โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ชื่อ.....

เลขที่.....

เอกสารฝึกหัดชุดที่ 6.1
สำหรับฝึกการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับ
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

คำสั่ง จงพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ถ้า M, N และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $OM = ON$

[illegible]

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นางสาวกรรณทิพย์ ชื้อสกุล พงษ์ลิมศรี

เกิดวันที่ 12 เดือนมีนาคม พุทธศักราช 2510

สถานที่เกิด อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย

สถานที่อยู่ปัจจุบัน บ้านเลขที่ 312/35 ซอยชวกุล ถนนศรีอยุธยา

ตำบลทุ่งพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพฯ 10400

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2528 มัธยมศึกษาปีที่ 6 (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร

พ.ศ. 2532 กศ.บ. (วิชาเอกคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร

พ.ศ. 2535 กศ.ม. (วิชาเอกคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร

การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา

บทคัดย่อ
 ของ
 กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
 ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

ตุลาคม 2535

การศึกษาในครั้งนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาวิธีสอนการพิสูจน์ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และสร้างสื่อการเรียนการสอนที่ เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 ของ โรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 จำนวน 100 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน ผู้วิจัยสอน กลุ่มทดลองโดยใช้การสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา นักเรียนได้รับการสอนและฝึกฝนที่ละขั้นตอน ตามลำดับของกระบวนการแก้ปัญหา ส่วนครูประจำวิชาสอนกลุ่มควบคุมโดยใช้การสอนตามปกติ ใช้ เวลาสอน 6 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มโดยใช้แบบ ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดย เน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ 0.01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

A TEACHING OF PROOF ON CONGRUENT TRIANGLES IN MATTAYOM SUKSA III
EMPHASIZING PROCESS OF PROBLEM SOLVING

AN ABSTRACT

BY

KRONGTHIP PONGLIMSRI

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

October 1992

The purposes of this study were to study a teaching of proof on congruent triangles in Mattayom Suksa III emphasizing the process of problem solving and to produce the instructional materials which emphasize the process of problem solving on congruent triangles in Mattayom Suksa III.

The subjects were 100 Mattayom Suksa III students at Phatumthepvittayakarn School at Amphoe Muang, Nongkhai Province, registered for Mathematics 321 in the first semester of the 1992 academic year.

The subjects were divided into two groups : the experimental group and the controlled group. The researcher taught the experimental group by using the teaching which emphasizes the process of problem solving. They had been taught and trained the process of problem solving step by step. The controlled group was taught by using the conventional teaching. Both groups took 6 periods, 50 minutes per period. The achievement test on congruent triangles invented by the researcher was administered at the end of the experiment.

The results indicated that the achievement of the students being taught by the teaching which emphasizes the process of problem solving and the students being taught by the conventional teaching were significantly different at the 0.01 level, the achievement of the students being taught by the teaching which emphasizes the process of problem solving were higher than the achievement of the students being taught by the conventional teaching.