

การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

ปริญญานิพนธ์

ของ

ชญชัย ภูอุคม

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921 575, 391 5058

24 ก.ย. 2525

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประธานมิต

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

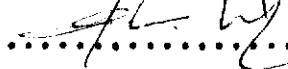
ปริญญการศึกษามหาบัณฑิต

เมษายน 2524

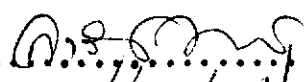
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณา
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้วเห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคามหลักสูตรปริญญา
การศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

...... ประธาน
...... กรรมการ
...... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

...... ประธาน
...... กรรมการ
...... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือจากท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์
ดร.ลาวัณย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ ท่านผู้ช่วยศาสตราจารย์สุเทพ
ทองอยู่ กรรมการที่ปรึกษา ซึ่งได้กรุณาให้ความช่วยเหลือแนะนำตลอดจนการติดต่อ
เก็บรวบรวมข้อมูลอย่างดียิ่ง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ และ นิติศึกษาเอกคณิตศาสตร์ ของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกวิทยาเขต ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือในการทำแบบทดสอบ
เป็นอย่างดี

นอกจากนี้ยังขอขอบพระคุณอาจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา
เกี่ยวกับสถิติที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

ธนุชัย ภูฤกษ์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
คำนำ	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
สมมติฐานของการวิจัย	4
2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	5
3 วิธีดำเนินการวิจัย	10
การเลือกกลุ่มตัวอย่าง	10
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	10
การดำเนินการวิจัย	12
การจัดกระทำข้อมูล	12
4 ผลการวิจัย	14
5 บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และ ข้อเสนอแนะ	21
ความมุ่งหมายในการวิจัย	21
กลุ่มตัวอย่าง	21
วิธีดำเนินการวิจัย	21
สรุปผลการวิจัย	21
อภิปรายผล	22
ข้อเสนอแนะ	23

หน้า

บรรณานุกรม	25
ภาคผนวก	28

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต ประสานมิตร	14
2	คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต พิษณุโลก	15
3	คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต สงขลา	16
4	คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต ปทุมวัน	17
5	คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต บางแสน	18
6	คะแนนแบบทดสอบรวมทุกวิทยาเขต	19
7	เปรียบเทียบจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนสูงและได้คะแนนต่ำ	20
8	ค่าระดับความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (D) เป็นรายชื่อ ของแบบทดสอบ	37

บทที่ 1

บทนำ

คำนำ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีบทบาทต่อการศึกษาค้นคว้าวิทยาการใหม่ ๆ เกือบทุกสาขา ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ ซึ่งต่างใช้หลักการของคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ความเจริญก้าวหน้าของแขนงวิชาต่าง ๆ ก่อให้เกิดความต้องการหลักการใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ (กระทรวงศึกษาธิการ 2509 : 1) และแฟร์ไคกล่าวไว้ว่า เหตุการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นทั่วโลก ทั้งในทางเศรษฐกิจและสังคมแสดงให้เห็นว่ามีความจำเป็นที่จะต้องปฏิรูปหลักคณิตศาสตร์และวิธีการสอน (แฟร์ 2515 : 1)

ปัญหาที่สำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ คือการพิจารณาว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเป็นเท็จโดยการแสดงเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล การแสดงว่าข้อความเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างสมเหตุสมผลในคณิตศาสตร์เรียกว่า " การพิสูจน์ " การพิสูจน์มี 2 ลักษณะใหญ่ ๆ คือ การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงและการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ การที่จะพิสูจน์แบบใดขึ้นอยู่กับข้อความที่จะพิสูจน์

การพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงมีวิธีพิสูจน์ 2 วิธี คือ

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof) เราตั้งต้นจากเหตุหรือสมมติฐาน หรือข้อความที่เรายอมรับมาก่อน ซึ่งเรานำมาจัดเรียงตามลำดับเหตุผลเชื่อมโยงไปสู่ ผลสรุปตามต้องการโดยตรง

2. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof หรือ Reductio of Absurdum) วิธีนี้ได้เริ่มจากเหตุแต่เริ่มจากผลสรุป กล่าวคือ เราถือว่าถ้าผลสรุปเป็นเท็จจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง หากว่าการที่ผลสรุปเป็นเท็จนำไปสู่การขัดแย้งกัน กล่าวคือ ได้ข้อความข้อความหนึ่งที่เป็นจริงและเป็นเท็จในขณะเดียวกันแล้วเราจะสรุปว่าสมมติฐานที่ว่า ผลสรุปเป็นเท็จ นั้นเป็นไปไม่ได้ นั่นคือผลสรุปต้องเป็นจริง

การพิสูจน์ที่มีวลีบอกปริมาณ " สำหรับสมาชิกทุกตัว " ว่าเป็นเท็จใช้การยกตัวอย่างค้าน ในคณิตศาสตร์ข้อความที่มีวลีบอกปริมาณ " สำหรับสมาชิกทุกตัว " จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

ถ้าแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ จะต้องได้ข้อความเป็นจริงทุกกรณี และจะเป็นเท็จก็ต่อเมื่อถ้าแทนตัวแปรด้วยสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วทำให้ข้อความเป็นเท็จ

การยกตัวอย่างค้าน (Counter Example) คือการที่จะแสดงว่าข้อความที่มีวลีบอกปริมาณ " สำหรับสมาชิกทุกตัว " เป็นเท็จ ดังนั้นการยกตัวอย่างค้านเป็นการหาตัวอย่างแทนตัวแปรเพียง 1 ตัวอย่างที่ทำให้ข้อความนั้นเป็นเท็จ เช่น

ตัวอย่าง:

ข้อความ	การยกตัวอย่างค้าน
สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x^2 > 0$	ถ้าให้ $x = 0$ จะได้ $x^2 = 0$ ซึ่ง $0 > 0$ เป็นเท็จ
สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ ถ้า $A \neq B$ และ $B \neq C$ แล้ว $A \neq C$	ถ้าให้ $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1\}$ จะได้ $A \neq B$ และ $B \neq C$ แต่ $A = C$

ซูเปส กล่าวว่าการหาตัวอย่างค้านที่เหมาะสมสำหรับข้อความที่ไม่เป็นจริง เป็นความสามารถที่มีความสำคัญพอ ๆ กันกับความสามารถที่จะพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง (Suppes. 1957 : 67) การที่จะมองเห็นตัวอย่างค้านนั้นจะต้องมองเห็นรายละเอียดปลีกย่อยต่าง ๆ ของปัญหา และเห็นวิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ มาก่อน เพราะการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ส่วนมากไม่ใช่เป็นไปโดยอัตโนมัติ (สุเทพ จันทรมงคล 2518 : 68)

เกลบอม และ โอล์มสเตด กล่าวว่าถ้าครูมีสมรรถภาพในการยกตัวอย่างค้านสูงจะเป็นประโยชน์ในการสอนเป็นอย่างมาก (Gelbaum and Olmsted. 1964 : unpages) นอกจากนี้การยกตัวอย่างค้านนั้นอาจมีตัวอย่างที่ต่างกันหลายตัวอย่าง การฝึกผู้เรียนให้ยกตัวอย่างค้านจะช่วยพัฒนาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และทำให้เกิดมโนคติในเรื่องนั้น ๆ

กิลเบิร์ต ไกล์กล่าวถึงครูคณิตศาสตร์ที่มีสมรรถภาพที่ดีว่าจะต้องประกอบด้วยคุณลักษณะสำคัญอย่างยิ่งประการหนึ่งคือ เป็นผู้ที่รู้และเข้าใจเนื้อหาตลอดจนวิธีการต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ดังนั้นในการผลิตครูคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องทำให้นิสิตที่ผลิต

ออกไปเป็นครูที่มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ก็ สามารถตอบปัญหา พิสูจน์ หรืออธิบายได้อย่างสมเหตุสมผล (Gilbert. 1951 : 8-56) ถ้าครูคณิตศาสตร์มีความสามารถในการยกตัวอย่างค้านจะช่วยให้ครูมีความสามารถในการพิสูจน์ และตอบปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒเป็นสถาบันหนึ่งที่ผลิตครูคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตร กำหนดให้นิสิตเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานทั่วไป 8 หน่วยกิต และวิชาเอกคณิตศาสตร์ อย่างน้อย 33 หน่วยกิต ซึ่งเป็นวิชาเอกบังคับ 24 หน่วยกิต วิชาเอกเลือก 9 หน่วยกิต

เมื่อพิจารณาตามเนื้อหาของรายวิชาเอกบังคับจะเห็นว่านิสิตน่าจะมีความรู้ในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และนำไปใช้สอนในระดับมัธยมศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่การสอนนั้นอาจจะมีข้อบกพร่องต่าง ๆ จากนักเรียนและครูจะต้องแก้ปัญหาระหว่างการสอนหรือข้อสงสัยนั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าครูมีความสามารถในการยกตัวอย่างค้านก็จะช่วยให้ครูสามารถตัดสินปัญหาได้ดียิ่งขึ้น เนื่องจากการสอนคณิตศาสตร์ในระดับปริญญาตรี เน้นการพิสูจน์แบบ พิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริง ส่วนการพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้านยังไม่ได้เน้นเท่าที่ควร ถึงแม้ว่านิสิตจะได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ในหมวดวิชาเอกบังคับแล้วถึง 24 หน่วยกิต นิสิต จะมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์พอเพียงในการยกตัวอย่างค้านหรือไม่ ก็ยังไม่ทราบแน่ชัด

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะศึกษาสมรรถภาพในการ พิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ที่เรียนวิชาเอกบังคับครบถ้วนแล้ว

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
2. เพื่อวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแนะแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอน ต่ออาจารย์ผู้สอน คณิตศาสตร์
2. เพื่อเสริมสร้างและปรับปรุงความรู้ ความสามารถของนิสิตเอกคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้างนี้ไ้แกั นิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์
หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปีการศึกษา 2523

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
2. นิสิต หมายถึง นิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

สมมติฐานของการวิจัย

นิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านต่ำ

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เกลบอม และ โอล์มสเตก กล่าวว่าปัญหาในคณิตศาสตร์มีอยู่แบบเดียวคือ " ข้อความ S เป็นจริงหรือไม่ " เช่น " ทุกสมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B ($A \subseteq B$) " วิธีที่จะแสดงว่าข้อความนี้เป็นจริง ต้องหาวิธีพิสูจน์ให้ได้ว่า $A \subseteq B$ และ การที่จะบอกว่าข้อความนี้เป็นเท็จต้องหาสมาชิกของ A ที่ไม่อยู่ใน B หรือพูดอีกอย่างหนึ่ง ก็คือการยกตัวอย่างค้าน ดังนั้นเขาจึงกล่าวว่า การศึกษาในคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 2 ลักษณะใหญ่ ๆ คือ การศึกษาเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงกับการศึกษาเกี่ยวกับการยกตัวอย่างค้าน อีกประการหนึ่งเขากล่าวว่า ถ้าครูมีสมรรถภาพในการยกตัวอย่างค้านสูง จะเป็นประโยชน์ในการสอนเป็นอย่างมาก ประการสุดท้ายที่เขากล่าวคือ จากประสบการณ์ที่มีเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ วิธียกตัวอย่างค้านเป็นวิธีที่สำคัญและจำเป็นวิธีหนึ่ง เพราะในบางครั้งปัญหาคณิตศาสตร์ไม่สามารถแก้ได้ด้วยการพิสูจน์ แต่ต้องใช้วิธีการยกตัวอย่างค้าน (Gelbaum and Olmsted. 1964 : unpages)

ไวท์สิตต์ กล่าวว่า การพิสูจน์กฎการสลับที่ กฎการจับหมู่ หรือ กฎการกระจาย เป็นจริงสำหรับการดำเนินการบนเซต จำเป็นจะต้องพิสูจน์ว่าเป็นจริงสำหรับสมาชิกทุกตัวในเซต การพิสูจน์แบบนี้เป็นแบบทั่ว ๆ ไป อย่างไรก็ตาม การพิสูจน์ว่ากฎใดกฎหนึ่งไม่เป็นจริง ต้องยกตัวอย่างให้เห็นว่ากฎนั้นไม่จริงอย่างน้อยหนึ่งกรณี วิธีพิสูจน์แบบนี้ เรียกว่า การยกตัวอย่างค้าน (Whitesitt. 1964 : 22)

ตัวอย่าง

ข้อความ
 $A \times B = B \times A$ สำหรับทุกเซต A
และทุกเซต B

การยกตัวอย่างค้าน
ให้ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$
จะได้ $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3),$
 $(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

✓
ข้อความ

การยกตัวอย่างค้าน

$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

$$\therefore A \times B \neq B \times A$$

$$(A - B) - C = A - (B - C)$$

สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ

$$\text{ให้ } A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$C = \{1, 3\}$$

$$\text{จะได้ } (A - B) - C = \emptyset$$

$$A - (B - C) = \{1\}$$

$$\therefore (A - B) - C \neq A - (B - C)$$

ซูเปส กล่าวไว้ว่า การหาวิธีที่จะแสดงให้เห็นว่าการให้เหตุผลชุดใดชุดหนึ่ง ไม่สมเหตุสมผล ก็คือการหาตัวอย่างค้านสำหรับการให้เหตุผลชุดนั้นนั่นเอง ดังนั้นความสามารถที่จะหาตัวอย่างค้านที่เหมาะสมนับว่าเป็นความสามารถที่สำคัญพอ ๆ กับความสามารถที่จะพิสูจน์ว่า การให้เหตุผลนั้นสมเหตุสมผล และได้ให้ความหมายของคำว่า " การให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล " ดังนี้ " การให้เหตุผลจะไม่สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อมีวิธีแสดงได้ว่า สมมติฐานเป็นจริงแต่ข้อสรุปเป็นเท็จ (Suppes. 1957 : 69)

ตัวอย่าง

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซต

สมมติฐาน 1. $A \in B$

2. $B \in C$

ข้อสรุป $A \in C$

การให้เหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล เพราะ ถ้าให้ $A = \{1\}$

$$B = \{\{1\}, 2\}, C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$$

จะเห็นว่าสมมติฐานข้อ 1. และข้อ 2. เป็นจริง แต่ผลสรุปเป็นเท็จ

นั่นคือ $A \notin C$

ฮอลล์ ได้กล่าวถึงความสำคัญของการยกตัวอย่างค้าน โดยยกตัวอย่างทฤษฎีของแฟร์มาต์ ซึ่งมีข้อความว่า " $2^{2^n} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว" แฟร์มาต์เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงมากคนหนึ่ง เขาเชื่อว่าทฤษฎีที่เขาตั้งขึ้นนี้เป็นจริง ซึ่งนักคณิตศาสตร์จำนวนมากก็มีความเห็นคล้อยตาม แต่แฟร์มาต์ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าทฤษฎีนี้เป็นจริง จนกระทั่งปี ค.ศ. 1732 ออยเลอร์ได้ยกตัวอย่างค้าน เขาได้แสดงว่ากรณีที่ $n = 5$, $2^{2^n} + 1$ เป็นจำนวนคอมโพสิตไม่ใช่จำนวนเฉพาะ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่า ทฤษฎีของแฟร์มาต์เป็นเท็จ และฮอลล์ได้ยกตัวอย่างทฤษฎีในเรื่องอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งมีข้อความว่า " ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ จู่เข้าแล้ว a_n จะจู่เข้าสู่ 0 " ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าทฤษฎีนี้เป็นจริง ปัญหาอีกคือ บทกลับทฤษฎีนี้เป็นจริงหรือไม่ เนื่องจากมีตัวอย่างค้าน บทกลับคือ กรณี $a_n = \frac{1}{n}$ จะได้ว่า a_n จู่เข้าสู่ 0 แต่อนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ไม่จู่เข้า ดังนั้นบทกลับทฤษฎีนี้เป็นเท็จ ฮอลล์กล่าวว่าตัวอย่างค้านสามารถแก้ปัญหาคำคัญ ๆ ในคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก (Hall. 1972 : 6)

เอนนิส ได้กล่าวถึงความสำคัญของการยกตัวอย่างค้านในการสอนเรขาคณิตว่า ในการพิสูจน์ข้อความในเรขาคณิตว่าเป็นจริง ผู้เรียนส่วนใหญ่มักจะพิจารณาข้อเท็จจริงจากรูปที่สร้างในการพิสูจน์ ซึ่งรูปที่สร้างตามสมมติฐานของโจทย์นั้น อาจมีหลายกรณีที่มีรูปร่างกัน เขากล่าวว่า ครูควรเน้นผู้เรียนให้ระวังการสรุปเหตุผลจากรูปว่าอาจไม่สมเหตุผล ซึ่งอาจทำได้โดยการยกตัวอย่างค้าน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และเขายังได้กล่าวว่า แม้บางครั้งการยกตัวอย่างค้านเป็นเรื่องที่ซับซ้อนกระทำไยยาก แต่การยกตัวอย่างค้านก็มีความสำคัญอย่างยิ่งในคณิตศาสตร์ สมควรให้ผู้ศึกษาคณิตศาสตร์ฝึกฝน (Ennis. 1969 : 284-285, 353-354)

สตีน และ ชีนวาช ได้กล่าวว่า การค้นพบตัวอย่างค้านถือเป็นสิ่งสำคัญและเป็นการกระทำที่มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างค้านเป็นตัวอย่างที่สามารถแก้ปัญหา คอมเจกเชอร์ (Conjecture) ที่สำคัญ ๆ ได้ ประโยชน์ของตัวอย่างค้านจะช่วยให้เพิ่มความระมัดระวังในการที่จะสรุปข้อความว่าเป็นจริง โดยเพียงแต่การเห็นตัวอย่างสนับสนุนมาก ๆ เพราะในบางครั้งข้อความบางข้อความถึงแม้จะมีตัวอย่างสนับสนุนมาก ๆ

แต่ข้อความนั้นอาจไม่เป็นจริงก็ได้ (Steen and Seebach. 1970 : unpages)

ชาตรี เมืองนาโพธิ์ และ ชัยวัฒน์ ปานพลอย ได้กล่าวว่าข้อความ $\forall x [Px]$ บางข้อความเป็นเท็จ การพิสูจน์ว่าข้อความนี้เป็นเท็จนั้นกระทำได้ง่าย เพราะเรารู้แล้วว่า $\forall x [Px]$ เป็นเท็จ ถ้าหาก Pa เป็นเท็จสำหรับ a บางตัว (แม้แต่เพียงตัวเดียวก็ตาม) เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ว่าข้อความนี้เป็นเท็จจึงทำได้โดยการยกตัวอย่าง a ที่ทำให้ Pa เป็นเท็จ การกระทำเช่นนี้ เรียกว่า "Disproof by Counterexample" เช่น มีข้อความว่า "ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า a^3 หาร b^5 ลงตัวแล้ว a ย่อมหาร b ลงตัว" ข้อความนี้มีความหมายว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a, b ทุกคู่ที่ a^3 หาร b^5 ลงตัว แล้ว a ย่อมหาร b ลงตัว"

การพิสูจน์ว่าข้อความดังกล่าวเป็นเท็จ ทำได้โดยยกตัวอย่าง a, b บางคู่ (คู่เดียวก็พอ) ที่ a^3 หาร b^5 ลงตัว แต่ a หาร b ไม่ลงตัว เช่น $a = 16$, $b = 40$ จะเห็นว่า $\frac{b^5}{a^3} = \frac{(40)^5}{(16)^3} = \frac{5^5 \times 8^5}{2^3 \times 8^3} = \frac{5^5 \times 8^5}{8^4} = 5^5 \times 8$ ดังนั้น a^3 หาร b^5 ลงตัว แต่ $\frac{b}{a} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ นั่นคือ a หาร b ไม่ลงตัว (ชาตรี เมืองนาโพธิ์ และ ชัยวัฒน์ ปานพลอย 2512 : 114-115)

สุเทพ จันทรมศักดิ์ ได้กล่าวถึงตัวอย่างค้านว่า เนื่องจาก $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ เป็น tautology เราสามารถพิสูจน์ประโยค $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ โดยพิสูจน์ประโยค $\exists x \neg P(x)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ประโยค $\forall x [x + 2 = x]$ เป็นเท็จ

วิธีทำ นิเสธของประโยคข้างต้นคือ $\exists x [x + 2 \neq x]$ ประโยคหลังนี้

เป็นจริงเพราะ $1 + 2 \neq 1$ (สุเทพ จันทรมศักดิ์ 2518 : 63-64)

อมร มั่นทรัพย์ ได้อธิบายความหมายของการยกตัวอย่างค้านของการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล ถ้าสามารถหาประพจน์มาแสดงให้เห็นว่า เหตุมีค่าความจริงเป็นจริง และผลมีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วสรุปได้ว่าการให้เหตุผลนั้นไม่สมเหตุสมผล (อมร มั่นทรัพย์ 2521 : 130)

ตัวอย่าง

สิ่งที่กำหนดให้

1. ชาวจีนทურიเป็นคนไทย
2. คนภาคตะวันออกเฉียงเหนือเป็นคนไทย

สรุป

ชาวจีนทურიเป็นคนภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

วิธีทำ

ถ้าเราให้ A แทน เซตของชาวจีนทური

B แทน เซตของคนไทย

C แทน เซตของคนภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

จะได้

สิ่งที่กำหนดให้

1. $A \subset B$
2. $C \subset B$

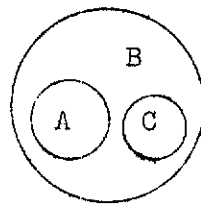
สรุป

$A \subset C$

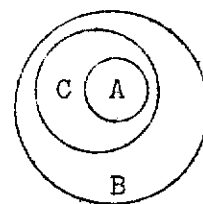
ข้อสรุปนี้ไม่สมเหตุสมผล เพราะจากสิ่งที่กำหนดให้เราอาจจะได้

กรณีต่าง ๆ ดังนี้

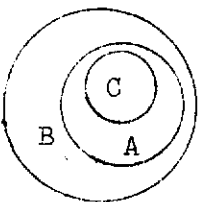
กรณีที่ 1



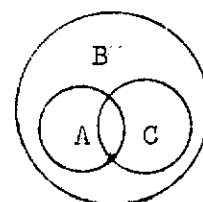
กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4



กรณีที่ 1, 3 และ 4 ผลสรุปเป็นเท็จ

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยจึงได้ดำเนินการวิจัยตามลำดับขั้นดังนี้

1. การเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การดำเนินการวิจัย
4. การจัดกระทำข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและการตีความ

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตที่กำลังศึกษาอยู่ชั้นปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษาตอนต้น ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยสุ่มมา 5 วิทยาเขต คือ

1. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
2. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน
3. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน
4. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก
5. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยดำเนินการดังนี้

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบขึ้นมาจำนวน 40 ข้อ โดยมีขอบเขตเนื้อหาตามวิชาเอก บัณฑิต ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ปี พ.ศ.2520 แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้วไปทดสอบกับนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน จำนวน 43 คน และมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม จำนวน 31 คน รวมเป็น 74 คน แล้วนำผลมาวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงแบบทดสอบ โดยดำเนินการดังนี้

1. ตรวจคำตอบโดยให้คะแนนข้อที่ตอบถูกข้อละ 1 คะแนน ส่วนข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบให้ 0 คะแนน แล้วหาคะแนนรวมของแต่ละคนพร้อมกับเรียงคะแนนจากน้อยไปหามาก

2. วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อ (Item Analysis) แบ่งคะแนนในข้อ 1. ออกเป็น 3 กลุ่มเท่า ๆ กัน คือ กลุ่มที่ได้คะแนนสูง กลุ่มที่ได้คะแนนปานกลาง และกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ แล้วนำกลุ่มที่ได้คะแนนสูงและกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำมาคำนวณหาค่าความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (D) โดยใช้สูตรของกรอนลันด์ (Gronlund. 1968 : 86-87) จากนั้นก็คัดเลือกข้อทดสอบได้จำนวน 27 ข้อ ซึ่งมีค่า P ตั้งแต่ 20% ถึง 78% และค่า D ตั้งแต่ 0.24 ถึง 0.80 พร้อมทั้งปรับปรุงแก้ไขข้อทดสอบบางข้อให้เหมาะสม

3. นำข้อทดสอบซึ่งมีจำนวน 27 ข้อ ที่คัดเลือกไว้ในข้อ 3. มาหาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) โดยใช้สูตรของคูเคอร์-ริชาร์ดสัน (K-R 20) (Ferguson. 1971 : 367) ได้ค่าความเชื่อมั่นของชุดทดสอบเป็น 0.9248

4. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement) โดยใช้สูตร (Ferguson. 1977 : 371)

$$S_e = S_x \sqrt{1-r_{tt}}$$

ได้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเป็น 1.9776

การดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตต่าง ๆ ดังนี้

วันที่ 13 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524 ทดสอบกลุ่มตัวอย่าง ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน จำนวน 9 คน

วันที่ 16 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524 ทดสอบกลุ่มตัวอย่าง ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พินดูโลก จำนวน 25 คน

วันที่ 17 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524 ทดสอบกลุ่มตัวอย่าง ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 28 คน

วันที่ 19 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524 ทดสอบกลุ่มตัวอย่าง ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา จำนวน 27 คน

วันที่ 24 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2524 ทดสอบกลุ่มตัวอย่าง ณ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน จำนวน 6 คน

ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการและควบคุมการทดสอบด้วยตนเองทุกกลุ่ม ใช้เวลาในการทดสอบกลุ่มละ 1½ ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำกระดาษคำตอบของกลุ่มตัวอย่างมาตรวจให้คะแนน โดยให้คะแนนข้อที่ตอบถูกข้อละ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบให้ 0 คะแนน แล้วรวมคะแนนของแต่ละคน นำคะแนนของแต่ละคนมาเรียงจากน้อยไปหามาก แล้วหาค่าเฉลี่ยและทดสอบสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน โดยใช้สูตรต่อไปนี้

1. คะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนน จำนวนจากสูตร (Ferguson. 1971 : 45)

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนิสิต

2. ทดสอบสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
ใช้การทดสอบแบบ Chi-square (Pfaffenberger and Patterson. 1977 : 447)
ที่มีสูตรดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

เมื่อ χ^2 แทน ค่า Chi-square

O_i แทน Observed frequency ของตัวอย่างที่ i

E_i แทน Expected frequency ของตัวอย่างที่ i

k แทน จำนวนของตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการทดสอบสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา โดยพิจารณาจากคะแนนที่ได้
จากการทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านปรากฏ
ผลดังนี้

ตาราง 1 คะแนนแบบทดสอบจากวิชาเซต ประสานมิตร

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	-
2	-	16	2
3	-	17	-
4	1	18	3
5	1	19	-
6	1	20	-
7	6	21	1
8	3	22	-
9	3	23	1
10	1	24	-
11	1	25	-
12	1	26	-
13	3	27	-
14	-		

จากตาราง 1 ได้ค่ามัธยิมเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบ
เท่ากับ 11.0714 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

ตาราง 2 คะแนนแบบทดสอบจากวิชาเขต พินิจโลก

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	-
2	-	16	-
3	-	17	-
4	-	18	-
5	3	19	1
6	4	20	1
7	1	21	-
8	5	22	-
9	2	23	-
10	-	24	-
11	2	25	-
12	3	26	-
13	1	27	-
14	2		

จากตาราง 2 ได้ค่ามัธยิมเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบ
เท่ากับ 9.68 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

ตาราง 3 คะแนนแบบทดสอบจากวิชาเขต สงขลา

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	1
2	-	16	-
3	-	17	1
4	1	18	-
5	-	19	-
6	3	20	-
7	1	21	1
8	3	22	-
9	5	23	-
10	2	24	-
11	1	25	-
12	2	26	-
13	4	27	-
14	2		

จากตาราง 3 ได้ค่ามัธยฐานเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบเท่ากับ 10.5926 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

ตาราง 4 คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต ปทุมวัน

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	-
2	-	16	2
3	-	17	2
4	-	18	-
5	-	19	-
6	-	20	1
7	-	21	-
8	-	22	-
9	-	23	1
10	-	24	-
11	-	25	-
12	2	26	-
13	-	27	1
14	-		

จากตาราง 4 ได้ค่ามัธยฐานเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบ
เท่ากับ 17.7778 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

ตาราง 5 คะแนนแบบทดสอบจากวิทยาเขต บางแสน

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	-
2	-	16	-
3	1	17	-
4	-	18	-
5	-	19	-
6	-	20	-
7	1	21	-
8	-	22	-
9	1	23	-
10	1	24	-
11	1	25	-
12	1	26	-
13	-	27	-
14	-		

จากตาราง 5 ได้ค่ามัธยฐานเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบ เท่ากับ 8.6667 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

ตาราง 6 คะแนนแบบทดสอบรวม 5 วิทยาเขต

คะแนน	ความถี่	คะแนน	ความถี่
1	-	15	1
2	-	16	4
3	1	17	3
4	2	18	3
5	4	19	1
6	8	20	2
7	9	21	2
8	11	22	-
9	11	23	2
10	4	24	-
11	5	25	-
12	9	26	-
13	8	27	1
14	4		

จากตาราง 6 ได้ค่ามัธยฐานเลขคณิต (Mean) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบทั้งหมด เท่ากับ 11.0526 จากคะแนนเต็ม 27 คะแนน

จากการทดสอบสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่าง
ค้าน ได้ผลการวิเคราะห์ดังนี้

ตาราง 7 เปรียบเทียบจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนสูงและได้คะแนนต่ำ

	จำนวนนิสิต	χ^2
สูง	23	25.2737**
ต่ำ	72	

$$df = 1$$

$$\chi^2(.01; 1) = 6.6349$$

จากตาราง 7 $25.2737 > 6.6349$ แสดงว่าการทดสอบมีนัยสำคัญทางสถิติ
ที่ระดับ 0.01 นั่นคือ นิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่าง
ค้านต่ำ

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการวิจัย

การวิจัยนี้มีความมุ่งหมายที่จะศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตปี 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา และสร้างแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนิสิตปี 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2523 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขต ประสานมิตร ปทุมวัน บางแสน หนองโลก และสงขลา จำนวน 95 คน

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยทดสอบกลุ่มตัวอย่างโดยใช้แบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเองจำนวน 27 ข้อ ซึ่งมีค่าความยากง่ายระหว่าง 20%-78% ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.24-0.80 ค่าความเชื่อมั่น 0.9248 ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด 1.9776 ใช้เวลาในการทดสอบ 1½ ชั่วโมง

สรุปผลการวิจัย

นิสิตปี 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา มีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านต่ำ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

อภิปรายผล

การที่สมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิต ปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา อาจเนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ เช่น

1. นิสิตเกิดความสับสนในการตอบ ตัวอย่างเช่นจากโจทย์ ถ้า A และ B เป็นเซตซึ่ง $A \subset B$ แล้ว $A \not\subset B$ นิสิตมักจะตอบในรูปของ

$$\text{ให้ } A = \{1\}, B = \{1, 2\}$$

$$\text{จะได้ } A \subset B \text{ และ } A \not\subset B$$

ซึ่งเป็นการสนับสนุนข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง

2. นิสิตขาดความกตริเริ่มในการยกตัวอย่างค้าน บางครั้งไม่จำเป็นต้องยกตัวอย่างที่ยากหรือยาว ซึ่งจะช่วยได้ทำแบบทดสอบได้มากและเร็วขึ้น

3. นิสิตขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ เช่น

จากโจทย์ ถ้า x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นจำนวนจริงจะได้

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} > \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

คำตอบของนิสิตบางคนเป็นดังนี้

$$\text{ให้ } x_1 = 0, x_2 = -2$$

$$y_1 = 5, y_2 = 1$$

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} > \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{25} & + & \sqrt{5} & > & \sqrt{4 + (5 + 1)^2} \\ & & \sqrt{30} & > & \sqrt{40} \text{ เป็นเท็จ} \end{array}$$

จากคำตอบข้างบนนี้ นิสิตคำนวณค่าทางซ้ายมือผิด

4. นิสิตขาดมโนคติในเนื้อหาบางเรื่อง เช่น

จากโจทย์ ถ้า a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว ab เป็นอตรรกยะ

คำตอบของนิสิตบางคนเป็นดังนี้

$$\text{ให้ } a = \sqrt{-2} , b = \sqrt{-2}$$

จะได้ $ab = -2$ เป็นจำนวนตรรกยะ

จากคำตอบนี้แสดงให้เห็นว่านิสิตเข้าใจผิดว่าจำนวน $\sqrt{-2}$ เป็นจำนวน

อตรรกยะ

5. การสอนยังไม่ได้เน้นเรื่องการยกตัวอย่างค้าน ทำให้นิสิตไม่คุ้นเคยและขาดความสนใจเท่าที่ควร

6. การออกแบบทดสอบนิสิตยังเขียนตอบไม่ถูกต้องตามภาษาคณิตศาสตร์

ข้อเสนอแนะ

ทางด้านการเรียนการสอน

1. ควรจะฝึกให้นิสิตมีความสามารถในการพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน เสริมสร้างแรงจูงใจให้นิสิตมีความคิดริเริ่มและคิดอย่างสมเหตุสมผล

2. ควรจะฝึกให้นิสิตมีความสามารถคิดคำนวณได้อย่างถูกต้อง แม่นยำ และรวดเร็ว

3. การเรียนการสอนควรเน้นในเรื่องเงื่อนไขของนิยาม กฎ ทฤษฎี และการที่จะสรุปข้อความใดต้องพิจารณาว่าข้อความมีเงื่อนไขตรงตามกฎเกณฑ์หรือไม่ ควรทดสอบย่อยเกี่ยวกับนิยาม ทฤษฎีย่อย ๆ ฝึกนิสิตในการอภิปรายผลว่า ถ้าขาดเงื่อนไขของทฤษฎีไปบางข้อ จะทำให้ผลของทฤษฎีนั้นเป็นอย่างไร ซึ่งเป็นการฝึกการหาตัวอย่างค้านได้อีกแบบหนึ่ง

4. ควรฝึกให้นิสิตได้ตอบคำถาม พิสูจน์ ทำโจทย์ปัญหาโดยใช้ภาษาคณิตศาสตร์ ที่ถูกต้องชัดเจน

5. ควรแบ่งเนื้อหาบางตอนเป็นหัวข้อย่อย ๆ ให้นิสิตแต่ละคนไปศึกษาค้นคว้าเอง จากเอกสารตำรา ที่ผู้สอนจัดให้นอกเวลาเรียน แล้วนำหัวข้อนั้น ๆ มาสอนหรืออธิบายในชั้นเรียน เป็นการฝึกทักษะในการศึกษาค้นคว้าตนเอง ฝึกการแก้ปัญหา และได้ฝึกทักษะในการสอนด้วย

ทางด้านกรวิจัย

1. ควรจะมีการสร้างแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้านในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ แล้วทดลองใช้เพื่อปรับปรุงให้มีคุณภาพก็สามารถศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิตได้

2. ควรจะทำการวิจัยในลักษณะคล้ายกับการวิจัยนี้ สำหรับรายวิชาอื่น ๆ ที่ไม่ใช่วิชาบังคับ

3. ควรจะทำการวิเคราะห์องค์ประกอบของสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านว่ามีองค์ประกอบอะไรบ้าง

4. ควรทำการวิจัยสมรรถภาพในการพิสูจน์ข้อความเป็นจริงในแบบอื่น ๆ

เช่น

- การพิสูจน์แบบการมีอยู่ (Proof of Existence)
- การพิสูจน์โดยการแจงนับ (Proof by Enumeration)
- การพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)
- การพิสูจน์โดยข้อความแย้งสลับที่ (Proof by Contrapositive)
- การพิสูจน์โดยแบ่งเป็นกรณี (Proof by Case)
- การพิสูจน์โดยการกำจัดออก (Proof by Elimination)
- การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by Mathematical Induction)

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ พีชคณิตเชิงเส้น สำนักพิมพ์กราฟิกอาร์ต 2521, 315 หน้า
- พิชากร แปลงประสพโชค ทฤษฎีกรุปเบื้องต้น ม.ป.ท 2522, 127 หน้า
- ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครุศึกษาศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
แผนกการพิมพ์วิทยาลัยครูสวนสุนันทา 2509, 110 หน้า
- สมพร เรื่องโชติวิทย์ ทฤษฎีจำนวน โรงพิมพ์สถานสงเคราะห์หญิงปากเกร็ด 2521,
262 หน้า
- สุเทพ จันทรสมศักดิ์ แคลคูลัส ตอน 1 อักษรเจริญทัศน์ 2515, 145 หน้า
- _____ แคลคูลัส ตอน 2 อักษรเจริญทัศน์ 2515, 92 หน้า
- _____ ตรรกวิทยาเบื้องต้น ไทยวัฒนาพานิช 2518, 75 หน้า
- _____ ฟังก์ชัน โรงพิมพ์อักษรพิทยา 2521, 92 หน้า
- _____ เมตริกซ์ อักษรเจริญทัศน์ 2519, 164 หน้า
- อมร มั่นทรัพย์ ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เอกสารการนิเทศการศึกษา ฉบับที่ 206
หน่วยศึกษานิเทศ กรมการฝึกหัดครู 2521, 158 หน้า
- อำพล ธรรมเจริญ ทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ โรงพิมพ์รุ่งเรืองธรรม 2520,
405 หน้า
- อุทุมพร ทองอุไทย การทดสอบไคสแควร์ ม.ป.ท 2523, 60 หน้า
- โฮเวอร์ค แฟร์ "ความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์และสังคม" ใน
การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ หน้า 1 ม.ป.ท 2515
- Apostol, Tom M. Mathematical Analysis. 2nd.ed., Manila, Addison-
Wesley Publishing Company, Inc., 1977. 492 p.
- Ennis, Robert H. Logic in Teaching. Englewood Cliff, New Jersey,
Printice-Hall, 1969. 520 p.
- Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and
Education. New York, McGraw-Hall, 1971. 492 p.

- Gelbaum, Bernard R. and John M.M. Olmsted. Counterexample in Analysis. San Francisco, Holden-Day, Inc., 1964. 194 p.
- Gilbert, Higet. The Art of Teaching. London, Methuen & Co., Ltd., 1951. 225 p.
- Gronlund, Norman E. Construction Achievement Test. Englewood Cliffs, New Jersey, Printice-Hall, 1968. 118 p.
- Hall, F.M. An Introduction to Abstract Algebra. Cambridge, The University Press, 1972. 300 p.
- Pfaffenberger, Roger C. and James H. Patterson. Statistical Methods for Business and Economics. Homewood, Richard D. Irwin, Inc., 1977. 750 p.
- Steen, Lynn A. and J. Arthur Seebach, Jr. Counterexample in Topology. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970. 210 p.
- Suppes, Patrick. Introduction to Logic. New Delhi, Affiliated East-West Press Private Limited, 1978. 312 p.
- Whitesitt, Eldon J. Principle of Modern Algebra. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964. 262 p.

ពាក្យដេញ

ภาคผนวก ก

แบบทดสอบ

แบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน

คำชี้แจง

แบบทดสอบนี้เป็นแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน (Counter example) ใช้ทดสอบนิสิตปี 4 หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษาเอกคณิตศาสตร์ เพื่อสำรวจว่านิสิตมีความสามารถในการค้นคว้าเพียงไร ผลการทดสอบนี้จะใช้เป็นข้อมูลในการปรับปรุงหลักสูตรและการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (การทดสอบนี้เป็นประโยชน์ต่อตัวนิสิตเองในการทดสอบความสามารถของตน การทดสอบนี้จะไม่มีผลอื่นใดต่อผู้ทำแบบทดสอบ)

ดังนั้นขอให้นิสิตทุกคนได้โปรดทำข้อสอบให้เต็มความสามารถ เพื่อจะได้ข้อมูลที่สมบูรณ์และตรงตามความเป็นจริง ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการปรับปรุงหลักสูตร เพื่อ นิสิตรุ่นต่อไป

คำอธิบายวิธีตอบแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบนี้มี 27 ข้อ 3 หน้า เวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง
2. แบบทดสอบนี้เป็นแบบอัตนัย ข้อความที่กำหนดให้ในทุก ๆ ข้อ ล้วนเป็นข้อความที่เป็นเท็จ ขอให้ท่านยกตัวอย่างค้าน นั่นคือ ตัวอย่างที่แสดงว่าข้อความนั้นเป็นเท็จ ลงในกระดาษคำตอบ
3. ตัวอย่างข้อสอบ
ข้อ 0. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว x มากกว่า 0
คำตอบ ให้ $x = -1$ จะได้ $-1 > 0$ เป็นเท็จ
หมายเหตุ ตัวอย่างที่แสดงว่าข้อความเป็นเท็จ อาจมีมากกว่า 1 ตัวอย่าง ขอให้ท่านใส่คำตอบเพียงตัวอย่างเดียว
4. เขียนคำตอบลงในกระดาษที่ให้ไว้
5. หากท่านต้องการเปลี่ยนแปลงคำตอบ ให้ขีดเส้นทับคำตอบเดิมแล้วเขียนคำตอบใหม่ต่อไป
6. นิสิตไม่จำเป็นต้องใส่ชื่อในกระดาษคำตอบ

แบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน

1. ถ้า A และ B เป็นเซต ซึ่ง $A \subset B$ แล้ว $A \not\subset B$
2. ถ้า A และ B เป็นเซต จะได้ว่า $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$
3. ถ้า $A \cup B = A \cup C$ จะได้ว่า $B = C$
4. ถ้า A, B และ C เป็นเซตแล้ว $A - (B - C) = (A - B) - C$
5. $Z \subset \bigcup_{x \in C} X$ จะได้ว่า $Z \subset X$ สำหรับ X บางตัวใน C
6. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
7. $[(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)] \leftrightarrow [P \rightarrow (Q \wedge R)]$ เป็นทอทโลยี (tautology)
8. ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$ จะได้ว่า $A \in C$
9. เนื่องจาก $0 \leq P(A) \leq 1$ เมื่อ $P(A)$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A
 $\therefore P(A) = \frac{m}{n}$ สำหรับทุก ๆ $m, n \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $m \leq n$ และ $n \neq 0$
10. กำหนดสัญลักษณ์ $n(X)$ คือ จำนวนสมาชิกของเซต X จะได้ว่า

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$
11. $(B - A) \cup A = B$

12. ถ้า $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$ และ $B \subset X$ แล้ว $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
13. ถ้า a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว ab เป็นจำนวนอตรรกยะ
14. ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ว่า xy เป็นจำนวนอตรรกยะ
15. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$
16. สำหรับ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$
($\mathbb{Z}^+$ หมายถึง เซตของจำนวนเต็มบวก)
17. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน x ทุกตัว จะได้ว่า $x^2 \geq 0$
18. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง b หาร a ลงตัว จะได้ว่า $|b| \leq |a|$
19. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง b หาร a ลงตัว จะได้ว่า $b \leq a$
20. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง a หาร b ลงตัว และ b หาร a ลงตัว จะได้ว่า $a = b$
21. ถ้า p หารผลคูณ $a_1 a_2 \dots a_n$ ลงตัว แล้ว p จะต้องหาร a_i ลงตัวอย่างน้อย 1 ตัว
22. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน a ทุกตัว $\frac{1}{a} \neq -a$

23. ถ้า x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นจำนวนจริงจะได้

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} + \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

24. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ จะได้ว่า $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

25. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

26. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน ซึ่ง $|A| = 0$ และ $|B| = 0$
แล้ว $|A + B| = 0$ ($|A|$ หมายถึง ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A)

27. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
($\underline{0}$ หมายถึง เมทริกซ์ศูนย์)

ภาคผนวก ข

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบทดสอบและตารางผลการวิเคราะห์

1. ค่าความยากง่าย คำนวณจากสูตรของกรอนลันด์ (Gronlund. 1968 : 86)

$$P = \frac{U+L}{2n} \times 100$$

เมื่อ P แทน ค่าความยากง่าย

U แทน จำนวนนิสิตที่ตอบถูกในกลุ่มสูง

L แทน จำนวนนิสิตที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

n แทน จำนวนนิสิตในกลุ่มสูงหรือกลุ่มต่ำ

2. ค่าอำนาจจำแนก คำนวณจากสูตรของกรอนลันด์ (Gronlund. 1968 : 87)

$$D = \frac{U-L}{n}$$

เมื่อ D แทน ค่าอำนาจจำแนก

U แทน จำนวนนิสิตที่ตอบถูกในกลุ่มสูง

L แทน จำนวนนิสิตที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

n แทน จำนวนนิสิตในกลุ่มสูงหรือกลุ่มต่ำ

3. ค่าความแปรปรวนของคะแนนคำนวณจากสูตร (Ferguson. 1971 : 62)

$$s^2 = \frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนน

$\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum x^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนิสิต

4. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่า
ข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน คำนวณจากสูตร K-R 20 ของคูเกอร์-ริชาร์ดสัน
(Ferguson. 1971 : 367)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \frac{s_x^2 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{n}}{s_x^2}$$

- เมื่อ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 s_x^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนนการสอบ
 p_i แทน สัดส่วนของคนทำถูกในข้อที่ i
 $q_i = 1 - p_i$
 n แทน จำนวนข้อสอบทั้งหมดในแบบทดสอบ

5. ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement)
คำนวณจากสูตร (Ferguson. 1971 : 371)

$$S_e = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

- เมื่อ S_e แทน ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
 S_x แทน ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
 r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

ตาราง 8 การระดับความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (D) เป็นรายข้อ
ของแบบทดสอบ

ข้อที่	U	L	P	D
1	12	1	26	.44
2	18	3	42	.60
3	24	14	76	.40
4	21	5	52	.64
5	10	-	20	.40
6	22	15	74	.28
7	14	7	42	.28
8	20	1	42	.76
9	11	3	28	.32
10	24	11	70	.52
11	21	11	64	.40
12	9	1	20	.32
13	24	15	78	.36
14	16	2	36	.56
15	23	10	66	.52
16	11	3	28	.32
17	23	8	62	.60
18	23	3	52	.80
19	24	15	78	.36
20	24	11	70	.52

107	U	L	P	D
21	21	7	56	.56
22	8	2	20	.24
23	11	-	22	.44
24	11	3	28	.32
25	12	5	34	.28
26	19	8	54	.44
27	14	5	38	.36

การศึกษามรรดภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน
ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

บทคัดย่อ

ของ

ธนชัย ภูภูมิ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามัธยมศึกษา

เมษายน 2524

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ
โดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการ
ยกตัวอย่างค้าน และทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนิสิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ชั้นปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา

ผลของการศึกษาพบว่า นิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดย
การยกตัวอย่างค้านต่ำ

A STUDY OF THE ABILITY IN DISPROOF BY COUNTER EXAMPLE
OF THE FOURTH YEAR STUDENTS MAJORING IN MATHEMATICS
IN THE BACHELOR OF EDUCATION DEGREE PROGRAM

ABSTRACT

BY

THANUCHAI POOUDOM

Presented in partial fulfilment of the requirements
for the Master of Education Degree
at Srinakharinwirot University

April 1981

The purpose of this investigation was to study the ability in disproof by counter example of the fourth year students majoring in mathematics of the bachelor of education degree program.

The investigator constructed a test to measure ability in disproof by counter example. The sample of this investigation consisted of the fourth year students of Srinakharinwirot University majoring in mathematics of the bachelor of education degree program.

It was found that the ability in disproof by counter example of the students was low.