

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
 การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
 และการสอนแบบปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

อุบล กลองกระโทก

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

11 ก.ค. 2526

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

พ.ศ. 2526

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานพนธ์
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.....(นางสาว.....)..... ประธาน

.....ส.ก...... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.....(นางสาว.....)..... ประธาน

.....ส.ก...... กรรมการ

.....ส.ก...... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำอย่างดียิ่ง จากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า และอาจารย์ละอียด ประรณาคี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนสตรีศรี "สวัสดิ์คณกุลวิทยา" คณะครู และขอขอบใจนักเรียนที่ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

นอกจากนี้ ขอขอบคุณ คุณจินตนา จันทร์ศิริ คุณวสันต์ ชันติบุญสถานนท์ คุณสุวรรณา ภูมิประวดี ตลอดจนพี่ ๆ เพื่อน ๆ กองส่งเสริมวิทยฐานะครู ทุกคน ที่ให้ความช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จจุลวงมาทวยศรี

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอน้อมรำลึกถึงพระคุณของบิดา มารดา และพี่ทุกคน ที่ได้เมตตาให้ความอุปการะทั้งในค่าน้ำใจ และกำลังใจ สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา พระคุณนี้มีอาจสืบได้

อุบล กลองกระโทก

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	4
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	5
คำนิยามศัพท์เฉพาะ	5
สมมติฐานของการวิจัย	6
2 เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
เอกสารและการวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอน	7
งานวิจัยเกี่ยวกับการทดลองสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน ...	10
เอกสารและการวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบค้นพบโดย	
การถาม - ตอบ	13
งานวิจัยเกี่ยวกับการทดลองสอนแบบค้นพบและแบบถาม - ตอบ ...	15
3 วิธีดำเนินการ	17
กลุ่มตัวอย่าง	17
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	17
วิธีดำเนินการทดลอง	19
การวิเคราะห์ข้อมูล	20
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	20

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	22
5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	25
ความมุ่งหมายของการวิจัย	25
สมมติฐานของการวิจัย	25
วิธีดำเนินการวิจัย	25
สรุปผลการวิจัย	27
อภิปรายผล	27
ข้อเสนอแนะ	28
บรรณานุกรม	30
ภาคผนวก	35

บัญชีการวาง

การวาง	หน้า
1 สถิติพื้นฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	23
2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	23
3 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ระหว่างกลุ่มทดลองที่ 1, กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม	24

ภูมิหลัง

มนุษย์เรามีความเกี่ยวข้องกับการจัดลำดับและการจัดหมู่อยู่มาก สามารถนำหลักการเกี่ยวกับการจัดลำดับและการจัดหมู่ไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่น การคำนวณ วิธีการทั้งหมดที่จะผสมพันธุ์พืชและพันธุ์สัตว์ในสาขาการเกษตร การจัดลำดับสิ่งของที่จะโฆษณา เพื่อให้ได้วิธีการที่แตกต่างกันออกไปในสาขาธุรกิจ แม้แต่ในวงการกีฬายังต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับการจัดหมู่ไปคำนวณวิธีการจัดหมู่เข้ารวมแข่งขันแบบพบกันหมด ในชีวิตประจำวันเรามักพบปัญหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธีการทั้งหมดที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเป็นไปได้ หรือ จำนวนวิธีการในการจัดชุดสิ่งของต่าง ๆ เช่น การจัดเสื้อผ้า การจัดหนังสือ การจัดโต๊ะอาหาร การจัดโต๊ะประชุม เราอาจคำนวณวิธีการทั้งหมดได้จากการนับแค่ของเสียเวลามาก การคำนวณวิธีดังกล่าวจะง่าย สะดวก และรวดเร็วขึ้นถ้าเรามีความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการนับจำนวนวิธีการของการจัดลำดับและการจัดหมู่ นอกจากนี้แล้ว บุญเสริม วิสสุต กล่าววว่า เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ยังเป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น (Probability) เช่น ข่ายในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการทดลองเชิงสุ่ม บางประเภท ดังนั้นทฤษฎีของการจัดลำดับและการจัดหมู่จึงถูกเสนอให้เป็นส่วนหนึ่งของ หลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย (บุญเสริม วิสสุต 2520 : 45)

การสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนส่วนมากจะใช้การสอนแบบบรรยายและการสาธิต นักเรียนไม่ค่อยมีโอกาสศึกษาเหตุผลด้วยตนเอง ทำให้ไม่เข้าใจเนื้อหาเท่าที่ควร คณะกรรมการปรับปรุงหลักสูตรของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้ทำการวิจัยค้นหาสาเหตุของการสอนคณิตศาสตร์ที่ไม่ได้ดีเท่าไรนักในระดับชั้นมัธยมศึกษา สรุปได้ว่านักเรียนส่วนมากขาดความรู้ความเข้าใจในแนวคิดและวิธีการศึกษาเหตุผล จะถนัดแต่การท่องจำและคิดคำนวณ (Operation) เท่านั้น (พรณทิพย์ ม้ามณี 2520 : 4) จากการสัมมนาการสอนของกระทรวงศึกษาธิการทราบว่า การสอนแบบบรรยายนั้นผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม

น้อยมาก การสอนก็เน้นแต่ในค่านเนื้อหาวิชาความรู้เกี่ยวกับหลักการ กฎ และสูตรต่าง ๆ ได้จากการท่องจำเป็นส่วนใหญ่ นักเรียนไม่สามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ขาดทัศนคติที่ดีต่อการเรียนการสอน (กระทรวงศึกษาธิการ 2517 : 145) ทำให้การเรียนการสอนโดยวิธีดังกล่าวไม่ก่อให้เกิดผลดีเท่าที่ควร

การสอนคณิตศาสตร์ให้ได้ดีนั้น ควรจะสอนให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตรของวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 ซึ่งระบุไว้ว่า

1. เพื่อให้สามารถคิดอย่างมีเหตุผลและสามารถใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระเบียบ ชัดเจนและรัดกุม
2. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในหลักการและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความคิดริเริ่มและสร้างสรรค์ มีความสามารถและมั่นใจในการแก้ปัญหา ตลอดจนคิดคำนวณได้อย่างถูกต้อง

3. เพื่อให้ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์และให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ (กระทรวงศึกษาธิการ 2523 : 129)

การเลือกวิธีสอนที่เหมาะสมจะช่วยทำให้การสอนนั้นมีประสิทธิภาพ ผู้วิจัยคิดว่าวิธีการสอนต่อไปนี้จะทำให้ นักเรียนมีสมรรถภาพและคุณสมบัติดังที่ระบุไว้ในหลักสูตร

1. การสอนแบบค้นพบ การสอนแบบนี้นักเรียนทุกคนจะได้ฝึกการคิดหาเหตุผลและสรุปกฎเกณฑ์หรือทฤษฎีต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง คูณีย์ กล่าวว่า การค้นพบเป็นกระบวนการอันหนึ่งที่จะเข้าสู่ปัญหามากกว่าการที่จะมุ่งไปที่ผลหรือเนื้อหาเฉพาะของความรู้ นั้น กระบวนการของการค้นพบนี้เป็นการแสดงออกของความสามารถผ่านวิธีการแก้ปัญหาและการฝึกที่จะสร้างแบบและทดลองสมมติฐานนั้น การเรียนโดยการค้นพบประกอบด้วยการที่นักเรียนพบปัญหาหรือพบสถานการณ์แล้วให้นักเรียนแต่ละคนแสวงหาวิธีที่จะแก้ปัญหานั้น (Cooney, 1975 : 136-138) การสอนแบบค้นพบสามารถสอนด้วยกระบวนการที่ต่าง ๆ กัน เช่น การถาม - ตอบ การสาธิต การทดลอง การอภิปราย การสอนแบบอุปนัยหรือนิรนัย ผู้วิจัยจึงคิดว่าการสอนแบบถาม - ตอบ น่าจะเป็นกระบวนการที่ให้เด็กได้ค้นพบด้วยตนเองเป็นอย่างดีคือครูจะใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตอบปัญหานั้น ๆ โดยครูจะตั้งคำถามออกมาเป็นชุดตามลำดับจนกระทั่งเด็กคิดตอบคำถามได้โดยอาศัยเหตุผลและประสบการณ์ของตนเอง

คำถามที่จะนำมาใช้เพื่อนำไปสู่การค้นพบจะต้องเป็นคำถามที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. คำถามเพื่อการสังเกต เป็นคำถามที่ถามหารายละเอียดที่เก็บรวบรวมได้จากประสบการณ์ การทดลอง รูปภาพ โจทย์ปัญหาต่าง ๆ
2. คำถามเพื่อการอธิบาย เป็นคำถามที่ผู้ตอบจะต้องอาศัยความรู้จากข้อมูลที่สังเกตได้และความรู้เดิมที่มีอยู่ คำถามชนิดนี้อาจอยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างเหตุผลหรือหลักการต่าง ๆ คำถามชนิดนี้จะต้องอาศัยการเปรียบเทียบด้วย
3. คำถามเพื่อสรุปเป็นกฎเกณฑ์ เป็นคำถามที่ผู้ตอบมีการวิเคราะห์หาเหตุผลหรือความสำคัญของเรื่องราวนั้น ๆ และจะต้องอาศัยความสัมพันธ์ของเรื่องราวและเหตุผลเหล่านั้น เพื่อเป็นแนวทางในการสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้
4. คำถามที่ขยายความคิด เป็นคำถามที่ไม่กำหนดแนวคำตอบเหมาะสำหรับเป็นจุดเริ่มต้นให้ผู้เรียนมีแนวความคิดกว้างขวาง
5. คำถามเพื่อนำไปใช้อย่างสร้างสรรค์ เป็นคำถามที่พยายามให้ผู้เรียนนำความรู้หรือกฎเกณฑ์ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ที่ค้นพบมาใช้เพื่อแก้ปัญหาโจทย์และวางแผนเพื่อทดสอบสมมติฐาน

2. การสอนโดยให้หน่วยการเรียนรู้ การสอนแบบนี้นักเรียนทุกคนจะมีโอกาสตอบและอาจจะเรียนได้เร็วช้าแตกต่างกันก็ได้แล้วแต่ความสามารถของแต่ละบุคคล เนื้อหาของหน่วยการเรียนรู้การสอนจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ซึ่งเหมาะกับเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ การจัดกิจกรรมในแต่ละหน่วยก็สามารถจัดให้สอดคล้องกับเนื้อหาได้ง่าย เช่น ให้นักเรียนได้ศึกษาค้นคว้าตนเองจากบทเรียนโปรแกรม จากบทเรียนกิจกรรม และจากเอกสารประกอบการเรียน กิจกรรมดังกล่าวนี้ นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองและสามารถเรียนได้เร็วหรือช้าแตกต่างกันออกไป แล้วแต่ความสามารถของตนโดยไม่พะวงกับผู้อื่น นอกจากนี้แล้วยังเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักแสดงความคิด ถ้าตัดสินใจและมีความรับผิดชอบ หน่วยการเรียนรู้การสอนหนึ่ง ๆ จะประกอบด้วยองค์ประกอบดังต่อไปนี้คือ (มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520 : 5)

1. ชื่อวิชา (Subject Area)
2. ลำดับของหน่วยการเรียนรู้การสอน (Module Number)
3. เป้าหมาย (Goal)
4. จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม (Objectives)
5. การประเมินผลก่อนการเรียนรู้ (Pre-Assessment)
6. วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนรู้การสอน (Learning Materials and Activities)
7. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post-Assessment)

เนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม การที่นักเรียนจะเรียนคณิตศาสตร์ได้เข้าใจนั้น ครูจะต้องพยายามดัดแปลงเนื้อหาต่าง ๆ ที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดมโนคติในเนื้อหาเหล่านั้น ๆ การจัดลำดับและการจัดหมู่เป็นเนื้อหาที่สามารถทำให้เป็นรูปธรรม โดยอาศัยการจัดสถานการณ์และสิ่งแวดล้อมให้นักเรียนเกิดมโนคติได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงคิดสร้างโครงการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และ หน่วยการเรียนรู้การสอน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ แล้วนำไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับจากการสอน โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และการสอนแบบปกติ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน สอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และสอนแบบปกติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

2. เพื่อเป็นการวางแนวทางให้ครูคณิตศาสตร์ได้ศึกษา ทดลองสร้าง และใช้หน่วยการเรียนการสอน

3. เพื่อเป็นการเสนอแนะให้มีการนำกระบวนการเรียนการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ ไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

4. เพื่อเป็นการสนับสนุนแนวความคิดในการนำเอาเทคโนโลยีทางการศึกษา มาปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับหลักสูตรใหม่

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนสีคิ้ว "สวัสดิ์ผดุงวิทยา" อำเภอสีคิ้ว จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 3 ห้องเรียน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525 แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 จำนวน 1 ห้องเรียน กลุ่มทดลองที่ 2 จำนวน 1 ห้องเรียน และกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน

ตัวแปรที่จะศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ วิธีสอนสามแบบ คือ

1. การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน
2. การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
3. การสอนแบบปกติ

ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การจัดลำดับ และการจัดหมู่

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียน หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของ โรงเรียนสีคิ้ว "สวัสดิ์ผดุงวิทยา" อำเภอสีคิ้ว จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525
2. หน่วยการเรียนการสอน หมายถึง หน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง

การจัดลำดับและการจัดหมู่ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ตามหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายของกระทรวง
ศึกษาธิการ พ.ศ. 2518

3. การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ หมายถึง การสอนโดยครูจะตั้งคำถาม
ให้นักเรียนคิดตอบคำถามเหล่านั้นที่ละคำถามจนกระทั่งนักเรียนสามารถตอบได้ด้วยเหตุผลของ
ตนเอง พร้อมทั้งมีการสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ รวมกัน และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหลังจากเรียน
จบบทเรียนแต่ละบท

4. โครงการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ หมายถึง โครงการสอนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยมีจุดมุ่งหมาย เนื้อหา และแบบฝึกหัด
เหมือนกับหน่วยการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น

5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบหลังสิ้นสุดการเรียนรู้
แล้ว โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ ที่ผู้วิจัย
สร้างขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 5 ที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
และจากการสอนแบบปกติ ไม่แตกต่างกัน

เอกสาร และการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

หน่วยการเรียนรู้การสอน

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้สอนไว้ต่าง ๆ กัน ดังนี้คือ

บุญมี ก้อนทอง ได้ให้ความหมายไว้ว่า หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง บทเรียนที่มีความสำเร็จในตัวของมันเอง สร้างขึ้นเพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาด้วยตนเองโดยกำหนดจุดมุ่งหมายไว้อย่างแน่นอน (บุญมี ก้อนทอง 2518 : 21 - 23)

ชมพันธุ์ ภูษร ณ อุษยา ได้ให้ความหมายไว้ว่า หน่วยการเรียนรู้การสอนเป็น กิจกรรมการเรียนที่จัดขึ้นอย่างมีประสิทธิภาพ และประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนรู้สอน ขึ้นอยู่กับระดับของบทเรียนนั้น ๆ ช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และแสดงสมรรถภาพที่ระบุไว้ใน จุดมุ่งหมายมาจนน้อยเพียงใด (ชมพันธุ์ ภูษร ณ อุษยา 2519 : 1)

ลอเรนซ์ ได้ให้ความหมายไว้ว่า หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง แบบเรียนที่มีระเบียบแบบแผน นำกิจกรรมหลาย ๆ วิธีรวมกันเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนตามความสนใจและเหมาะสำหรับการเรียนของผู้ใหญ่และเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 9 ปีขึ้นไป (Lawrence. 1973 : 1)

จากความหมายของหน่วยการเรียนรู้สอนข้างต้นสรุปได้ว่า หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง บทเรียนที่นำกิจกรรมหรือสื่อการเรียนหลาย ๆ วิธีรวมกันเพื่อให้นักเรียนได้ศึกษาด้วยตนเองโดยการกำหนดจุดมุ่งหมายไว้อย่างแน่นอน

การสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน

การสร้างหน่วยการเรียนรู้สอนให้มีประสิทธิภาพควรคำนึงถึงหลักสำคัญสามประการ (Houston and others. 1972 : 69-70)

1. หลักการเหตุผล (Rationale) และความเชื่อพื้นฐาน (Basic Assumption) เกี่ยวกับหลักสูตรและบทเรียนควรจะระบุให้ชัดเจน
2. ควรจะระบุถึงจุดมุ่งหมายขั้นสุดท้ายของผู้เรียนให้ชัดเจน
3. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมสำหรับผู้เรียนจบหน่วยการเรียนรู้การสนั้นจะต้องระบุไว้

ขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน ฮุสตัน ได้กำหนดไว้ 4 ขั้นตอนดังนี้ คือ (Houston and other. 1972 : 119)

1. การวางแผน (Planning) ควรจะพิจารณาเกี่ยวกับ
 - 1.1 ปรัชญาการเรียนรู้การสอน
 - 1.2 ปัญหาการเรียนรู้การสอน
 - 1.3 จำนวนผู้เรียน
 - 1.4 แหล่งที่ศึกษาหาความรู้
 - 1.5 เป้าหมาย
 - 1.6 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของแต่ละหน่วย
 - 1.7 กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
 - 1.8 ทางเลือกในกิจกรรมต่าง ๆ
 - 1.9 วัสดุอุปกรณ์เกี่ยวกับการสอน
 - 1.10 วิธีประเมินผลและพิจารณาผลที่ได้รับ
 - 1.11 รายละเอียดสำหรับอุปกรณ์ประกอบหน่วยการเรียนรู้การสอนรวมถึง
แนะนำการใช้
 - 1.12 การเขียนรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้การสอน
2. การผลิต (Production)

การผลิตหน่วยการเรียนรู้การสอนอาจจะได้มาจากการซื้อ ขอ ขอยืมจากแหล่งอื่น ๆ คัดแปลงจากที่มีอยู่แล้วหรืออาจจะสร้างขึ้นเองก็ได้ แล้วจะต้องมีการทดสอบกิจกรรมและวัสดุอุปกรณ์บางอย่างเพื่อให้เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของผู้เรียน

3. การทดลองต้นฉบับ (Prototype testing)

ก่อนที่จะนำหน่วยการเรียนการสอนไปใช้จริง ควรจะได้ทำการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างก่อนเพื่อหาข้อบกพร่อง ปรับปรุงและแก้ไขเป็นการสร้างประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนการสอน

4. การประเมินผล (Evaluation)

เป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจุดมุ่งหมาย ยุทธวิธี วัสดุอุปกรณ์ กระบวนการและผลสัมฤทธิ์ว่า สอดคล้องกับผลที่เราคาดว่าจะได้มากน้อยแค่ไหน อีกทั้งเป็นการสังเกตปฏิกิริยาของนักเรียนต่อกิจกรรมการเรียนการสอนและเวลาที่ใช้ในการสอนด้วย

ข้อดีของหน่วยการเรียนการสอน

หน่วยการเรียนการสอนมีประโยชน์มากต่อวงการศึกษาโดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อครูและนักเรียน ได้มีผู้เกี่ยวข้องกับการศึกษาได้กล่าวถึงข้อดีไว้มากมายหลายท่านซึ่งผู้วิจัยได้สรุปไว้ดังนี้ คือ

1. หน่วยการเรียนการสอนเป็นอุปกรณ์การสอนและวิธีสอนที่ช่วยพัฒนาและปรับปรุงทักษะที่เกี่ยวข้องกับการสอน
2. หน่วยการเรียนการสอนมีลักษณะที่รวมเอาการสอนหลาย ๆ แบบเข้าไว้ด้วยกันแทนที่จะใช้การสอนเพียงอย่างเดียว ซึ่งเหมาะสมกับผู้เรียนที่มีความรู้แตกต่างกัน
3. หน่วยการเรียนการสอนสามารถแยกแยะเนื้อหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ ง่ายในการทำความเข้าใจของผู้เรียน
4. ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ช้าหรือเร็วตามความสามารถของตนเองซึ่งจัดว่าเป็นการเรียนแบบรายบุคคล และไม่จำเป็นต้องเป็นเวลาเรียนปกติในชั้นเท่านั้น

การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอน มีผู้ทำการวิจัยไว้หลายท่านทั้งงานวิจัยในต่างประเทศและงานวิจัยในประเทศ

เมอร์แมน ได้ศึกษาความคิดเห็นและความสามารถของวิธีสอน 2 แบบ คือการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนปกติ ศึกษาที่โรงเรียนแฮสติ้ง (Hasting Senior High School) เมืองแฮสติ้ง (Hasting) รัฐเนบราสกา (Nebraska) กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน ครู ผู้ปกครองและศิษย์เก่าของโรงเรียนที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญาตรี พบว่า

1. กลุ่มนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้มีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติ
2. นักเรียนและครูส่วนใหญ่ให้ความรู้ว่าการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้จะสามารถสนองความต้องการของแต่ละฝ่ายได้มากกว่าการสอนแบบปกติ
3. ผู้ปกครองประมาณ 2 ใน 3 ส่วน นิยมที่จะให้มีการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้
4. นักเรียนศิษย์เก่าที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญาตรี ชี้ว่าบทเรียนแบบหน่วยการเรียนรู้สอนช่วยให้ผู้เรียนได้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้ดีกว่าการสอนแบบปกติ
5. นักศึกษาระดับปริญญาตรีที่มีประสบการณ์จากการเรียนทั้ง 2 แบบมีความเห็นว่า การใช้หน่วยการเรียนรู้ให้ผลดีกว่าการสอนแบบปกติสำหรับระดับชั้นมัธยมศึกษา
6. กลุ่มตัวอย่างที่มีประสบการณ์ในการเรียนจากหน่วยการเรียนรู้ คิดว่าการเรียนจากหน่วยการเรียนรู้ดีกว่าการเรียนจากการสอนปกติ คือ การเรียนจากหน่วยการเรียนรู้ช่วยให้ผู้เรียนได้มีโอกาสพบปะและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ทำให้ผู้เรียนเกิดความคิดรวบยอดที่แน่นอน สามารถพัฒนาการพึ่งตนเองและมีความรับผิดชอบ ผู้เรียนมีโอกาสที่จะเรียนตามความสามารถทำให้เกิดทัศนคติต่าง ๆ อย่างกว้างขวางขึ้น และมีความรู้ดีกว่าตนเองเป็นส่วนหนึ่งของห้องเรียน (Murman. 1972 : 1593-A)

เทรไซซ์ ได้ศึกษาทัศนคติต่อการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนผลปรากฏว่า นักศึกษาจำนวนมากเห็นด้วยกับการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน นอกจากนี้แล้ว หน่วยการเรียนการสอนยังเหมาะที่จะนำไปใช้ในระดัมหาวิทยาลัย (Trezise. 1972 : 2091-A)

โรเบิร์ตสัน ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนโดยใช้ตำราคณิตศาสตร์ (Textbook for Mathematics) โดยตั้งสมมติฐานว่า การสอนทั้งสองแบบไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติ การทดลองนี้กระทำกับนักเรียนระดับ 3, 4 และ 5 ของโรงเรียนแกรี่ (The Gary Public School) ใช้ระยะเวลาในการทดลอง 4 เดือน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลองสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนและกลุ่มควบคุมสอนโดยใช้ตำราเรียน จากนั้นจึงทำการทดสอบทั้ง 2 กลุ่ม ผลปรากฏว่าคะแนนของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับความเชื่อมั่น .05 (Robertson. 1976 : 5112-A)

เบญญา โสทรโยม ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จำนวน 70 คน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 35 คน ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนและกลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน และได้พบว่าพฤติกรรมของนักเรียนที่น่าสนใจ คือ

1. การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน นักเรียนมีความสนใจตั้งใจเรียน และร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นอย่างดี แต่มีนักเรียนบางคนไม่กระทำตามคำแนะนำ โดยเคร่งครัด ทำให้นักเรียนเหล่านั้นไม่ผ่านเมื่อมีการประเมินผลหลังการเรียน

2. นักเรียนแต่ละคนจะใช้เวลาเรียนเร็ว ช้า ต่างกัน ซึ่งนับว่าเป็นการส่งเสริมการเรียนตามความสามารถของนักเรียนแต่ละบุคคล

3. ในการเรียนเป็นกลุ่ม นักเรียนภายในกลุ่มให้ความช่วยเหลือซึ่งกันและกันดี (เบญญา โสทรโยม 2520 : 29 - 30)

เสถียร ศิริสถิตย์กุล ได้ทำการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 35 คน

กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมดังนี้

1. เรียนด้วยตนเองโดยอ่านจากเอกสารประกอบการเรียน
2. เรียนจากบทเรียนโปรแกรม
3. คุุภาพจากแผ่นโปร่งใสพร้อมกับฟังคำบรรยายจากเทป

กลุ่มควบคุม เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่างและแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับหน่วยการเรียนรู้การสอน

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่สอนตามปกติ (เสถียร ศิริสถิตย์กุล 2521 : 38 - 40)

สุทธิพงษ์ พะดัง ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming) โดยทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายพาณิชยการ เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความแตกต่างของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายพาณิชยการมีความสามารถที่จะเรียน เรื่อง โปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้น
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง โปรแกรมเส้นตรงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ
3. ควรเริ่มสอน เรื่อง โปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สายพาณิชยการ (สุทธิพงษ์ พะดัง 2521 : 30 - 31)

ระวีวรรณ เทนอิสสระ ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง เวกเตอร์โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนโรงเรียนวิสุทธิรักษ์ อำเภอพระประแดง จังหวัด

สมุทรปราการ จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำนวนกลุ่มละ 30 คน

ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนกับกลุ่มควบคุมที่เรียนตามปกติไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ (ระวีวรรณ เพนอิสสระ 2522 : 40)

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เมตริกซ์โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำนวนกลุ่มละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนการสอนสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่เรียนจากการสอนตามปกติ (สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม 2523 : 34 - 35)

การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ

นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์หลายคนได้กล่าวถึงการสอนแบบค้นพบไว้ต่าง ๆ กัน ดังต่อไปนี้ คือ

เฟเคอริค เอช เบล กล่าวว่า การเรียนโดยการค้นพบเป็นการเรียนซึ่งเกิดขึ้นอันเป็นผลจากการกระทำของนักเรียน การสร้างและถ่ายทอดข้อความจริงใหม่ในการเรียน โดยการค้นพบ ผู้เรียนอาจจะใช้การเดา สร้างสมมติฐาน และหาความจริงทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีอุปนัยหรือนิรนัย การสอนโดยการค้นพบครูเป็นผู้จัดกิจกรรมการเรียน จัดสถานการณ์ และควบคุมให้นักเรียนทำกิจกรรมต่าง ๆ นอกจากนี้อาจจะให้ค้นพบอย่างอิสระโดยให้นักเรียนอธิบายไปสู่การค้นพบข้อความจริงนั้น การค้นพบอาจจะเกิดขึ้นในสถานการณ์ระหว่างครู - นักเรียน หรืออาจจะเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมซึ่งมีลำดับขั้นตอนบทเรียน การถาม - คำตอบ ซึ่งจะนำไปสู่การค้นพบ (Bell. 1978 : 241-242)

ยุพิน พิพิธกุล ได้กล่าวว่า การสอนแบบค้นพบเป็นวิธีการที่เน้นไปที่ตัวนักเรียน วิธีการนี้ไม่ใช่วิธีการใหม่ ผู้ใช้ครั้งแรกคือ โซเครตีส ครูที่ดีจะใช้วิธีการดังกล่าวอยู่แล้ว วิธีนี้ต้องพิจารณาถึงการตอบสนองของนักเรียน การใช้คำถามของครู จะเห็นว่าความรู้สึกของแต่ละบุคคลจะขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่ผ่านมา บทบาทของครูเป็นเพียงผู้แนะแนวทางแก่นักเรียนในเรื่องความคิดใหม่ ๆ ท่อสิ่งที่ได้สะสมไว้ในประสบการณ์ ดังนั้นการค้นพบจึงเป็นกระบวนการค้นพบ ครูจะมอบปัญหาหรือตั้งคำถามให้นักเรียนแล้วให้นักเรียนแสวงหาวิธีที่จะแก้ปัญหาเหล่านั้นโดยครูจะให้ปัญหาที่ง่ายก่อนแล้วก็ให้นักเรียนทำปัญหาที่คล้ายกัน ซึ่งเชื่อว่านักเรียนจะค้นพบสูตร นิยาม นักเรียนจะเกิดมโนคติ การค้นพบนี้จะเป็นการค้นพบโดยวิธีใดก็ได้ เช่น การถามตอบ การสาธิต การทดลอง การอภิปราย

วิธีการค้นพบ นักเรียนอาจจะค้นพบได้ดังนี้

1. ค้นพบด้วยตนเองหลังจากที่ครูมอบปัญหาให้แล้วนักเรียนจะศึกษาหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเอง
2. ค้นพบโดยการแนะแนวทางของครู การให้เด็กค้นพบด้วยตนเองนั้นอาจจะทำให้เสียเวลา ฉะนั้นครูจำเป็นจะต้องแนะแนวทางบ้างบางโอกาส
3. ค้นพบเป็นรายบุคคลหรือให้เรียนเป็นคณะ (Team Learning) โดยที่กลุ่มนักเรียนจะช่วยกันคิดหาคำตอบ (ยุพิน พิพิธกุล 2519 : 50 - 51)

การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบจะเน้นการตั้งคำถามเป็นสำคัญ ชัยและคาร์ริน ได้กล่าวถึงความสำคัญของการใช้คำถามว่าคำถามที่แจ่มชัดและเหมาะสมกับเด็กจะเป็นสิ่งเร้าให้เด็กแต่ละคนสามารถพัฒนาสมองได้ เด็กจะเรียนรู้ได้ก็ต่อเมื่อได้คิด เด็กจะเป็นคนมีความคิดสร้างสรรค์ได้ก็ต่อเมื่อมีโอกาสได้ริเริ่มสร้างสรรค์ ถ้าครูตั้งคำถามสั้น ๆ จะเป็นการกระตุ้นให้เกิดกระบวนการคิดและสร้างสรรค์ของนักเรียนได้ (Sund and Carlin. 1971 : 105)

ยุพิน พิพิธกุล ได้จัดประเภทคำถาม OEPC ไว้ดังนี้ คือ (ยุพิน พิพิธกุล 2519 : 69)

1. คำถามชั้นการสังเกต (Observation Question) เป็นคำถามที่ถามหารายละเอียดทั้งด้านคุณภาพและปริมาณ เพื่อเก็บรวบรวมผลจากการทดลอง รูปภาพ

โจทย์ปัญหาต่าง ๆ

2. คำถามชั้นการอธิบาย (Explanation Question) คำถามแบบนี้ผู้ตอบจะต้องอาศัยความรู้จากข้อมูลที่สังเกตได้และความรู้เดิมที่มีอยู่ คำถามชั้นการอธิบายนี้อาจอยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างเหตุผลหรือหลักการต่าง ๆ คำถามชั้นนี้ต้องอาศัยการเปรียบเทียบ

3. คำถามชั้นการทำนาย (Prediction Question) เป็นคำถามที่ถามในรูปของการอธิบายหรือคาดคะเนที่เกิดขึ้นในอนาคต คำถามแบบนี้อาศัยความสัมพันธ์ที่มีอยู่ในอดีตและปัจจุบันเป็นแนวทางในการทำนาย

4. คำถามชั้นการควบคุมและนำไปใช้อย่างสร้างสรรค์ (Control and Creativity Question) หมายถึง คำถามที่ตั้งขึ้นอยู่ในรูปของความพยายามที่จะนำความรู้หรือกฎเกณฑ์ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่าง ๆ ที่ค้นพบจากชั้นการอธิบายและชั้นการทำนายมาใช้เพื่อแก้ปัญหาโจทย์ อธิบายสถานการณ์ใหม่ ๆ และวางแผนเพื่อทดสอบสมมติฐาน

การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบค้นพบและการสอนแบบถาม - ตอบ มีผู้ทำการวิจัยไว้ดังต่อไปนี้ คือ

แลนซ์ ยูจีน เบคเวลด์ ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติของนักเรียนเกรด 4 สอนโดยครูที่ได้รับการฝึกทักษะในการตั้งคำถามระดับสูงและระดับต่ำ กลุ่มที่ 1 ครูนำการอภิปรายโดยใช้คำถามระดับสูงเป็นส่วนใหญ่ กลุ่มที่ 2 ครูนำการอภิปรายโดยใช้คำถามระดับต่ำเป็นส่วนใหญ่ เมื่อทำการสอนจบแล้วจึงวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติของนักเรียน

ผลจากการวิเคราะห์พบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนซึ่งครูสอนโดยใช้คำถามระดับสูงและนักเรียนซึ่งครูสอนโดยใช้คำถามระดับต่ำ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2. ทัศนคติของนักเรียนซึ่งครูสอนโดยใช้คำถามระดับสูงและนักเรียนซึ่งครูสอนโดยใช้คำถามระดับต่ำ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ (Lance Eugene Bedwell.

1975 : 5980-5981A)

พิลอสซี ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบค้นพบ
กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จำนวน 151 คน ที่เลือกเรียนแคลคูลัส แบ่ง
นักเรียนเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองสอนแบบค้นพบและกลุ่มควบคุมสอนแบบปกติ

ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่สอนแบบค้นพบและกลุ่มควบคุมที่
สอนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงที่ได้รับการสอน
แบบค้นพบไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ (Pelosi. 1979 : 142-A)

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2525 ของโรงเรียนสีแก้ว "สวัสดิ์คุณวิทยา" อำเภอสีแก้ว จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 3 ห้องเรียน จากนักเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน ได้มาโดยวิธีสุ่ม ดังนี้

1. สุ่มห้องเรียนมาสามห้องจากทั้งหมดสี่ห้อง
2. สุ่มอีกครั้งหนึ่ง เพื่อจัดเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และ กลุ่มควบคุม กลุ่มละหนึ่งห้องเรียน

เครื่องมือในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. แผนการเรียนการสอน เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหกหน่วยย่อย ดังนี้

หน่วยย่อยที่ 1 หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ใช้บทเรียนโปรแกรม เป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 2 การจัดลำดับ ใช้บทเรียนปฏิบัติการเป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 3 การจัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่างเหมือนกัน ใช้บทเรียนกิจกรรม เป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 4 การจัดลำดับเป็นวงกลม ใช้บทเรียนปฏิบัติการเป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 5 การจัดหมู่ ใช้บทเรียนกิจกรรมเป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 6 ทฤษฎีบททวินาม ใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นสื่อการสอน

นำแผนการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่เคยเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่มาก่อน ซึ่งการทดลอง

แบ่งออกเป็นสามขั้นตอน

ครั้งที่ 1 การทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one, try - out)

โดยทำการทดลองกับนักเรียนหนึ่งคนเพื่อปรับปรุงและแก้ไขในการใช้ภาษา ลำดับขั้นตอนของกิจกรรม

ครั้งที่ 2 การทดลองกลุ่มเล็ก (small group try - out) นำหน่วย

การเรียนการสอนที่ได้จากการปรับปรุงและแก้ไขแล้วจากครั้งที่ 1 ไปทดลองกับนักเรียนห้าคน เพื่อปรับปรุงและแก้ไขหน่วยการเรียนการสอนเช่นเดียวกับครั้งที่ 1

ครั้งที่ 3 การทดลองภาคสนาม (field try - out) นำหน่วยการเรียน

การสอนที่ได้จากการปรับปรุงครั้งที่ 2 ไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนราชสีมาวิทยาดัย อำเภอมือง จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 30 คน เพื่อปรับปรุงและแก้ไขหน่วยการเรียนการสอน

หน่วยการเรียนการสอนที่ได้จากการทดลองทั้งสามครั้งจะเป็นหน่วยการเรียนการสอนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มทดลองกลุ่มที่ 1

2. โครงการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยมีจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เนื้อหา และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับหน่วยการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยได้ทดลองใช้โครงการสอนนี้สอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนราชสีมาวิทยาดัย อำเภอมือง จังหวัดนครราชสีมา ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและไม่เคยเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่มาก่อน เพื่อปรับปรุงคำถาม

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 60 ข้อ ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยศึกษาการสร้างแบบทดสอบจากหนังสือการวัดผลการศึกษาและสถิติเบื้องต้น (วิเชียร เกตุสิงห์ 2520 : 18 - 163) แล้วนำไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่มาแล้ว นำผลที่ได้วิเคราะห์หาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27 เปอร์เซนต์ในการแบ่งกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ ไคขอสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่

.27 - .73 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .24 - .66 จำนวน 30 ข้อ และนำไปหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตร คูเคอร์ - ริชาร์ดสัน 20 (Kuder-Richardson 20) ได้เท่ากับ .72

วิธีดำเนินการทดลอง

วิธีการทดลองมีลำดับขั้นดังนี้

1. ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองที่ 1 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและสอนกลุ่มทดลองที่ 2 แบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ ตามโครงการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 12 คาบ การสอนในแต่ละคาบมีลำดับดังแผนภูมิข้างล่างนี้

เวลาที่ใช้	กลุ่มทดลองที่ 1	กลุ่มทดลองที่ 2
10 นาที	ครูทบทวนความรู้พื้นฐาน	ครูทบทวนความรู้พื้นฐาน
70 นาที	นักเรียนศึกษาบทเรียนตามคำฟัง	นักเรียนเรียนจากครูซึ่งสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
20 นาที	ครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกันและทำแบบฝึกหัด	ครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกันและทำแบบฝึกหัด

2. อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนสีคิ้ว "สวสดีคุณวิทยา"

1 ท่าน เป็นผู้สอนกลุ่มควบคุมโดยใช้เนื้อหาเหมือนกับที่ใช้สำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 ใช้เวลาสอน 12 คาบ

3. ทดสอบกลุ่มตัวอย่างทั้งสามหลังจากสอนจบบทเรียนแล้ว โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับเดียวกันซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สร้างขึ้น

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม โดยใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance)

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระหว่างกลุ่มตัวอย่างทั้งสามโดยใช้ T-method ของเทอร์คีย์ (Turkey)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การหาค่าเฉลี่ยของคะแนน ใช้สูตร (Ferguson. 1971 : 45)

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

ΣX แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. การหาค่าความแปรปรวนของคะแนน ใช้สูตร (Ferguson. 1971 : 62)

$$s^2 = \frac{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน

ΣX แทน ผลรวมของคะแนน

ΣX^2 แทน ผลรวมกำลังสองของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

3. การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้สูตร
K-R 20 (Ferguson. 1971 : 367)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_1^2 - \Sigma pq}{s_1^2} \right]$$

เมื่อ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 n แทน จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบ
 p แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ
 q แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ
 s_1^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ

4. วิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน กลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม โดยวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) ใช้สูตร (Minium. 1978 : 389 - 403)

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

เมื่อ F แทน ค่าวิกฤตที่ใช้ใน F - distribution
 s_1^2 แทน คะแนนเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนระหว่างกลุ่ม
 s_2^2 แทน คะแนนเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนภายในกลุ่ม

5. การทดสอบเป็นรายคู่เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม โดยใช้ T-method ของเทอร์คีย์ (Turkey) (วิเชียร เกตุสิงห์ 2523 : 107)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่จำนวน 30 ข้อ หลังจากไคศาสตร์ที่พื้นฐานคือ คะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนในแต่ละกลุ่ม แล้ววิเคราะห์ความแปรปรวนทั้งสามกลุ่ม

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

N	แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
$\bar{X}$	แทนค่าเฉลี่ยของคะแนนในกลุ่มตัวอย่าง
ΣX	แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่มตัวอย่าง
ΣX^2	แทนผลรวมกำลังสองของคะแนนในกลุ่มตัวอย่าง
F	แทนค่าวิกฤตที่ใช้พิจารณาใน F - distribution
SS_w	แทนผลบวกกำลังสองภายในกลุ่ม
SS_b	แทนผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่ม
MS_w	แทนค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองภายในกลุ่ม
MS_b	แทนค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองระหว่างกลุ่ม
กลุ่มทดลองที่ 1	หมายถึง กลุ่มที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน
กลุ่มทดลองที่ 2	หมายถึง กลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
กลุ่มควบคุม	หมายถึง กลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบปกติ
df	แทนจำนวนชั้นแห่งความเป็นอิสระ

การเปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างกลุ่มตัวอย่าง

ตาราง 1 สถิติพื้นฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2
กลุ่มทดลองที่ 1	30	18.97	38.65
กลุ่มทดลองที่ 2	30	17.70	36.11
กลุ่มควบคุม	30	12.40	29.50

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ของกลุ่มทดลองที่ 1 สูงกว่าค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 2 ขณะที่ค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 2 ก็ยังสูงกว่าค่าเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมและเพื่อต้องการทราบให้แน่นอนว่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแต่ละกลุ่มมีนัยสำคัญหรือไม่จึงนำไปวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งปรากฏดังกล่าว

ตาราง 2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	2	712.422	356.211	10.249 ^{**}
ภายในกลุ่ม	87	3023.734	34.756	
รวม	89	3736.156		

$$F_{.01} (2, 87) = 4.89$$

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้ง 3 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นั่นคือ การเรียนรู้จากหน่วยการเรียนรู้ การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และการสอนแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยของคะแนนแตกต่างกัน

เพื่อทดสอบคะแนนเฉลี่ยเป็นรายคู่ จึงใช้วิธีของ เทอร์คีย์ (Turkey) หรือที่เรียกว่า T - method ดังแสดงไว้ในตาราง

ตาราง 3 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ ระหว่างกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม

กลุ่ม	$\bar{x}$	กลุ่มทดลองที่ 1	กลุ่มทดลองที่ 2	กลุ่มควบคุม
		18.97	17.70	12.47
กลุ่มทดลองที่ 1	18.97	-	1.27	6.50**
กลุ่มทดลองที่ 2	17.70	-	-	5.23**
กลุ่มควบคุม	12.47	-	-	-

$$F_{.01} (2,87) = 4.92$$

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แต่ไม่พบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน สอนแบบค้นพบ โดยการถาม - ตอบ และการสอนแบบปกติ

สมมุติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และจากการสอนแบบปกติ ไม่แตกต่างกัน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนสีแก้ว "สวัสดิ์อุบลวิทยา" อำเภอสีแก้ว จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 3 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่ 1, กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม

2. เครื่องมือในการทดลอง

2.1 สื่อการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองกลุ่มที่ 1 เป็นหน่วยการเรียนรู้การสอน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งผ่านการปรับปรุงประสิทธิภาพมีจำนวนทั้งหมด 6 หน่วยย่อย

หน่วยย่อยที่ 1 หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ใช้บทเรียนโปรแกรม เป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 2 การจัดลำดับ โดยใช้บทเรียนปฏิบัติการเป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 3 การจัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่างเหมือนกัน ใช้บทเรียนกิจกรรม เป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 4 การจัดลำดับเป็นวงกลม ใ้บทเรียนปฏิบัติการเป็นสื่อ
การสอน

หน่วยย่อยที่ 5 การจัดหมู่ ใ้บทเรียนกิจกรรมเป็นสื่อการสอน

หน่วยย่อยที่ 6 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ใ้บทเรียนโปรแกรมเป็นสื่อการสอน

2.2 โครงการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ เรื่องการจัดลำดับ
และการจัดหมู่

คาบที่ 1 - 2 เรื่อง หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

คาบที่ 3 - 4 เรื่อง การจัดลำดับ

คาบที่ 5 - 6 เรื่อง การจัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่างเหมือนกัน

คาบที่ 7 - 8 เรื่อง การจัดลำดับเป็นวงกลม

คาบที่ 9 -10 เรื่อง การจัดหมู่

คาบที่ 11-12 เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการ
จัดหมู่เป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ซึ่งมีความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ .72

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองที่ 1 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน

3.2 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองที่ 2 แบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ

3.3 อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนสีแก้ว "สวัสดิ์คุณดง-
วิทยา" ทำหน้าที่สอนกลุ่มควบคุม แบบปกติ

ทั้ง 3 กลุ่มใช้ชุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เนื้อหา และแบบฝึกหัดเหมือนกัน

3.4 เมื่อสอนจบบทเรียนแล้ว ทดสอบนักเรียนทั้ง 3 กลุ่ม ด้วยแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลา 50 นาที

สรุปผลการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน และนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนและนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

อภิปรายผล

จากการทดลองปรากฏผลดังนี้ คือ

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนและนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติแตกต่างกัน อาจจะเป็นผลเนื่องมาจากสาเหตุดังนี้

1.1 การสอนโดยให้หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ เป็นการสอนที่นักเรียนศึกษาได้ด้วยตนเอง นักเรียนได้ฝึกคิดหาเหตุผลด้วยตนเองตามความสามารถของแต่ละบุคคล ซึ่งอาจจะศึกษาได้เร็วหรือช้าต่างกันแต่ในที่สุดนักเรียนก็เรียนจบบทเรียน เมื่อนักเรียนเรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอนจบแต่ละหน่วยย่อมมีการอภิปรายร่วมกันระหว่างครูและนักเรียน ทำให้นักเรียนเกิดความสนใจในเรื่องนี้และสามารถแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้ ส่วนการสอนแบบปกตินั้นครูเป็นผู้บอกนิยาม สูตร และกฎเกณฑ์ต่าง ๆ นักเรียนไม่ค่อยมีโอกาสคิดหาเหตุผลด้วยตนเอง

1.2 นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอนเพราะหน่วยการเรียนรู้การสอนซึ่งประกอบด้วยบทเรียนที่มีรูปแบบต่าง ๆ กัน เช่น บทเรียนปฏิบัติการ บทเรียนกิจกรรม

บทเรียนโปรแกรมเป็นบทเรียนที่แปลกและใหม่สำหรับนักเรียน จึงทำให้นักเรียนสนใจและมีความกระตือรือร้นที่จะศึกษามากยิ่งขึ้น

1.3 การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกระทำในช่วงเช้า 8 คาบและช่วงบ่าย 4 คาบ ส่วนการสอนแบบปกตินั้นสอนช่วงเช้า 4 คาบและช่วงบ่าย 8 คาบ การสอนช่วงเช้านักเรียนให้ความสนใจมากกว่าช่วงบ่าย เพราะช่วงบ่ายเด็กนักเรียนบางคนจะรู้สึกเบื่อและง่วงนอน

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบและนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ แตกต่างกันอาจจะเป็นผลมาจากการสอนที่นักเรียนต้องใช้เหตุผลของตนเองในการตอบคำถามของครูไปตามลำดับจนกว่าจะสรุป นิยาม สูตรและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจและเกิดมโนคติ

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้การสอน และนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบไม่แตกต่างกัน อาจเป็นเพราะว่าการสอนทั้งสองแบบนี้สอนโดยผู้สอนคนเดียวกันและเป็นการสอนที่มุ่งให้นักเรียนทุกคนได้คิดหาคำตอบด้วยเหตุผลของตนเองโดยใช้สื่อการสอนที่แตกต่างกัน

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. การสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนควรจะใช้กับนักเรียนที่มีความสามารถในการอ่านและการใช้ภาษาที่พอสมควร เพื่อให้นักเรียนจะได้อรรถาธิบายสิ่งที่ได้จากการอ่านและเรียบเรียงคำตอบ การสอนแต่ละหน่วยจะต้องชี้แจงให้นักเรียนรู้และเข้าใจวิธีเรียนรวมทั้งข้อปฏิบัติต่าง ๆ นักเรียนมีความสนใจสื่อการสอนที่เป็นบทเรียนแบบกิจกรรมและบทเรียนปฏิบัติการมากกว่าบทเรียนแบบโปรแกรม ดังนั้นถ้าจะสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนควรจัดเป็นบทเรียนกิจกรรมและบทเรียนปฏิบัติการ ส่วนบทเรียนโปรแกรมก็อาจจะจัดได้บ้างแต่ควรให้เป็นบทเรียนที่ใช้เวลาไม่เกิน 20 นาที การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนควรใช้สลับกับการสอนแบบอื่น ๆ ด้วย

2. การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ ควรให้นักเรียนตอบในกระดาษ เพื่อให้เด็กที่เรียนปานกลางและเด็กที่เรียนอ่อนมีโอกาสดูคำตอบ

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

1. ควรทดลองสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน และการสอนแบบค้นพบ โดยการถาม - ตอบ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่กับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ อีก
2. ควรศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสำหรับ เนื้อหาอื่น ๆ โดยใช้การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และการสอนแบบปกติ
3. ควรศึกษาความพร้อม แรงจูงใจ ความทรงจำ และเจตคติ ของนักเรียน ที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ และการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ชมพันธุ์ ฤๅชฌ ฌ อุตยา หน่วยการเรียนรู้การสอน เอกสารประกอบการเรียนวิชา
ทฤษฎีและการปฏิบัติหลักสูตร 2519, 11 หน้า
- บุญมี กอนทอง "บทเรียนโมดูล" วิทยาสาร 26 : 21 - 23 1 มกราคม 2518
- บุญเสริม วิสกุล ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น โรงพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช กรุงเทพ-
มหานคร 2520, 116 หน้า
- ประเทิน มหาชัน โฉมหน้าของคณิตศาสตร์แนวใหม่ วิทยาลัยวิชาการศึกษา บางแสน
2511, 89 หน้า
- พรรณทิพย์ ม้ามณี การสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ระดับมัธยมศึกษา สารศึกษาการพิมพ์
2520, 105 หน้า
- ยุพิน พิพิธกุล การสอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษา โรงพิมพ์การพิมพ์ 2519,
208 หน้า
- ระวีวรรณ เทนอิสสระ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอน
ตามปกติ ปรินฎานันท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2522,
43 หน้า อักษรนำ
- วิเชียร เกตุสิงห์ การวัดผลการศึกษาและสถิติเบื้องต้น โรงพิมพ์ไชนา 2520,
274 หน้า
- ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524
อัมรินทร์การพิมพ์ 2523, 372 หน้า

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ค.513 มัธยมศึกษาตอนปลาย 2520, 172 หน้า

สุทธิพงษ์ พะลัง การศึกษาลักษณะสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming) โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยกรรม ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 171 หน้า อักษรสำเนา

สุเทพ จันทรมงคล สวรร กาญจนมยุร และ บรรจง สุนทรสัจ แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค.513 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ไทยวัฒนาพานิช 2521, 190 หน้า

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนแบบปกติ ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523, 193 หน้า อักษรสำเนา

เสถียร ศิริสถิตย์กุล การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนตามปกติ ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523, 198 หน้า อักษรสำเนา

โสภณ บำรุงสงฆ์ และ สมหวัง ตันไทรวงศ์ เทคนิคและวิธีสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ วัฒนาพานิช 2520, 229 หน้า

โสภี วงศ์ทองเหลือง "ถ้าครูจะฝึกด้วยตนเอง" ข่าวสารสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ปีที่ 6 ตุลาคม 2520, 27 หน้า

อนันต์ ศรีโสภะ หลักการวิจัยเบื้องต้น วัฒนาพานิช 2521, 430 หน้า

อุทัย บุญประเสริฐ "เทคโนโลยีทางการศึกษา" วารสารบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 6(1) : 89 - 90 มกราคม - มิถุนายน 2517

- Bell, Frederick H. Teaching and Learning Mathematics. Wme, Brown Company Publishers, 1978. 268 p.
- Collins, Kenneth. "The Importance of a Strong Comfrontionirum an Inquiry Model of Teaching," School Science and Mathematics. vol. 69, No. 17, p. 614 - 619, October, 1969.
- Cooney, Thomas J. Davis, Edward J. and Henderson, K.B. Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics. Boston, Houghton Mifflin Company, 1975. 205 p.
- Fan, Chung-Teh. Item Analysis Table. New Jersey, Princeton, Educational Testing Service, 1952. 32 p.
- Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963. 244 p.
- Houston, Robert W. Performance Education Strategies and Resources for Developing a Competency Based Teacher Education Program. New York, University of Houston, 1972. 137 p.
- Houston, Robert W. and others. Developing Instructional Modules. Houston, Texas College of Education, University of Texas, 1972. 188 p.
- Felosi, Chilip Anthony. "The Effects of Verbalization on Using Discovered Mathematics Generalizations." Dissertation Abstract. 40(1) : 142-A, July, 1979
- Lawrence, Gordon. Florida Modules on Generic Teacher Competencies Module of Modules. Gainesville, Florida, University of Florida, 1973. 26 p.
- Minium, Edward W. Statistical Reasoning in Psychology and Education. New York, John Wiley and sons, Inc., 1978. 564 p.
- Murman, Flmer Gerhart. "Modular or Traditional? A Survey of Preference Opinions and Performances," Dissertation Abstracts. 33(4) : 1593-A, October, 1972.

- Olarinoye, Raphel Dale. "A Comparative Study of the Effectiveness of the Methods of Teaching a Secondary School Physic Course in Nigerian Secondary School," Dissertation Abstracts International. 39 : 4848-A, February, 1974.
- Sund, Robert B. and Corin, Arthur. Creative Questioning and Sensitive Listening Techniques. Ohio, A Bell and Howell Company, 1978. 252 p.
- Robert, Joseph Revert. "An Experimental Evaluation of the Comparison of Mathematics Modules with an Individualized Guide and Textbook for Mathematics," Dissertation Abstract. 36(8) : 5112-A, February, 1976.
- Suchman, Richard J. "Self-Directed Inquiry," The Science Teacher. February, 1970. p. 13 - 15.
- Trezise, Marilyn Joan. "A Study of Feasibility of Using Instructional Modules in a Children's Literature Class," Dissertation Abstract. 33(5) : 2091-A, November, 1972.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

.....

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบมีทั้งหมด 30 ข้อ ให้นักเรียนพยายามทำให้เสร็จทุกข้อภายในเวลา 50 นาที
2. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น จาก ก, ข, ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบ ดังตัวอย่างการตอบข้อ ข. คือ

ก ~~ข~~ ค ง
3. ถ้านักเรียนเลือกคำตอบไปแล้วต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ ให้ขีดคำตอบที่ตอบไปแล้วเสียก่อน แล้วจึงเลือกคำตอบใหม่ดังตัวอย่าง

ก ~~ข~~ ~~ค~~ ง
4. ถ้าข้อใดนักเรียนเลือกคำตอบเกินหนึ่งคำตอบ จะถือว่าข้อนั้นได้คะแนนเป็นศูนย์

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 เหรียญ จะมีแบบต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นได้กี่แบบ ก. 8 แบบ ข. 12 แบบ ค. 36 แบบ ง. 64 แบบ | <ol style="list-style-type: none"> 2. ข้อสอบแบบปรนัยให้เลือกตอบข้อที่ถูกต้องที่สุด 1 ข้อใน 4 ข้อ ที่โจทย์กำหนดข้อสอบชุดนี้มี 10 ข้อ นักเรียนที่ทำข้อสอบชุดนี้จะตอบข้อสอบชุดนี้ต่าง ๆ กันกี่วิธี สมมติว่าตอบคำถามทุกข้อโดยไม่มีการเว้น ก. 4^{10} วิธี ข. 10^4 วิธี ค. 4×10 วิธี ง. $2 \times 4 \times 10$ วิธี |
|--|---|

3. $(n-2)!$ มีค่าเท่ากับ

ก. $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

ข. $(n-2)(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

ค. $(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

ง. $(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

4. ค่าของ $\frac{4! \times 3!}{4}$ เท่ากับเท่าไร

ก. 3^4 ค. 16

ข. 6 ง. 36

5. จงเขียน $99 \times 98 \times 97$ ในรูปของแฟกทอเรียล

ก. $99!$

ข. $97!$

ค. $\frac{99!}{96!}$

ง. $\frac{99!}{97!}$

6. $(n+5)(n+4)(n+3)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก. $(n+5)(n+4)(n+3)!$

ข. $(n+5)!$

ค. $\frac{(n+5)(n+4)!}{(n+3)!}$

ง. $\frac{(n+5)(n+4)!}{(n+2)!}$

7. จะเขียนจำนวนที่มีสามหลัก จากตัวเลข 2, 4, 6, 8 โดยตัวเลขในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกัน ได้กี่จำนวน

ก. 24 จำนวน

ข. 12 จำนวน

ค. 8 จำนวน

ง. 4 จำนวน

8. ในการจัดให้นักเรียน 4 คน เลือกที่นั่งจากเก้าอี้แถวหนึ่ง ซึ่งมี 5 ที่นั่ง จะมีวิธีนั่งต่าง ๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี

ก. 120 วิธี ค. 20 วิธี

ข. 80 วิธี ง. 5 วิธี

9. $P(5, 2)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

ก. 120 ค. 24

ข. 60 ง. 20

10. จากอักษรทั้งหมดในคำว่า "CLEAN" จะสร้างคำที่แตกต่างกันได้กี่คำ

ก. 1 คำ ค. 60 คำ

ข. 24 คำ ง. 120 คำ

11. จากตัวเลข $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ จะเขียนจำนวนที่มีสามหลักโดยที่ตัวเลขในหลักซ้ำกันได้ ได้กี่จำนวน
- ก. 90 จำนวน
ข. 900 จำนวน
ค. 990 จำนวน
ง. 1,900 จำนวน
12. หวานจะวัดหัวอักษร A, B และ C เป็นวงกลม ได้กี่วิธี
- ก. 1 วิธี ค. 3 วิธี
ข. 2 วิธี ง. 4 วิธี
13. จะร้อยกำไลมือโดยใช้ลูกมัดสีแดง สีเขียว และสีม่วง สีละหนึ่งเม็ดไว้ร้อยกำไลมือได้กี่วิธี
- ก. 3 วิธี
ข. $3!$ วิธี
ค. $(3+1)!$ วิธี
ง. $(3-1)!$ วิธี
14. เด็กผู้ชาย 5 คน โดยจัดให้อภิปรายเป็นแบบโตะวงกลม จะสามารถจัดให้นักพูด ทั้ง 5 คน นั่งได้กี่แบบ
- ก. 2^4 แบบ ค. 60 แบบ
ข. 4^5 แบบ ง. 120 แบบ
15. กำหนดอักษร x, x, y จะมีจำนวนวิธีของการจัดลำดับอักษรทั้งหมดได้กี่แบบ
- ก. $2!$ แบบ
ข. $3!$ แบบ
ค. $\frac{2!}{3!}$ แบบ
ง. $\frac{3!}{2!}$ แบบ
16. จะจัดลำดับโดยใช้ ตัวอักษร ทั้งหมด จากคำว่า "วรรณ" ได้กี่วิธี
- ก. 45 วิธี ค. 78 วิธี
ข. 60 วิธี ง. 96 วิธี
17. มีลูกบิงปอง 3 ลูก และลูกเทนนิส 1 ลูก จะมีวิธีจัดลำดับตามแนวเส้นตรงได้กี่วิธี
- ก. 3 วิธี ค. 5 วิธี
ข. 4 วิธี ง. 6 วิธี
18. นำลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีขาว 2 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก มาเรียงตามแนวเส้นตรง จะมีวิธีเรียงลำดับที่แตกต่างกันได้กี่วิธี
- ก. 1,860 วิธี
ข. 2,070 วิธี
ค. 2,520 วิธี
ง. 3,460 วิธี

19. จะจัดทีมบาสเกตบอลจากนักเรียน 8 คน
ได้กี่ทีม

- ก. 39 ทีม ค. 56 ทีม
ข. 47 ทีม ง. 336 ทีม

20. ข้อสอบวิชาวิทยาศาสตร์ทั้งหมด 6 ข้อ
จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำข้อสอบเพียง
4 ข้อ คือข้อใด

- ก. 5 วิธี ค. 15 วิธี
ข. 10 วิธี ง. 20 วิธี

21. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่หยิบไพ่ 13 ใบ
จากไพ่อำหรับหนึ่ง ซึ่งมี 52 ใบ

- ก. $\frac{52!}{13! \times 39!}$ วิธี
ข. $\frac{39!}{52! \times 13!}$ วิธี
ค. $\frac{52!}{39! \times (39-13)!}$ วิธี
ง. $\frac{39!}{52! \times (39-13)!}$ วิธี

22. จงหาจำนวนวิธีที่ครูจะให้หนังสือ 10 เล่ม
แก่เด็กชายธนาและเด็กหญิงรัศมี โดยให้
เด็กชายธนา 3 เล่ม และเด็กหญิงรัศมี 2
เล่ม

- ก. 10 วิธี ค. 45 วิธี
ข. 16 วิธี ง. 80 วิธี

23. $c(8,3)$ ไม่ เท่ากับอะไร

- ก. $c(8,5)$
ข. $c(8,8-5)$
ค. $c(8,8-3)$
ง. $c(8,5-2)$

24. จะเลือกกรรมการ 3 คน จากสมาชิก
ซึ่งเป็นผู้ชาย 4 คน ผู้หญิง 4 คน ได้
กี่วิธี ถ้ากรรมการเป็นผู้ชาย 2 คนและ
ผู้หญิง 1 คน

- ก. 56 วิธี ค. 16 วิธี
ข. 24 วิธี ง. 12 วิธี

25. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่หยิบไพ่ 5 ใบ
จากไพ่อำหรับหนึ่ง 52 ใบ โดยให้ได้
โพแดง 2 ใบ โพดำ 2 ใบ และ
คอกจิก 1 ใบ

- ก. 78 วิธี
ข. 1,287 วิธี
ค. 6,084 วิธี
ง. 79,092 วิธี

26. จงหาค่าของ n จากสมการ $\frac{(n+2)!}{n!}$
 $= 42$

- ก. 4 ค. 6
ข. 5 ง. 7

27. จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้ $(1.03)^3$

ก. 1.27

ข. 1.092727

ค. 1.002727

ง. 1.000027

28. จงหาพจน์ที่มี x^4 ของการกระจาย $(2x-2)^{10}$

ก. $120x^4(2)^6$

ข. $-120x^4(2)^6$

ค. $210(2x)^4(2)^6$

ง. $-210(2x)^4(2)^6$

29. จงหาพจน์ที่ 7 ของการกระจาย

$$\left(p^2 - \frac{1}{q}\right)^8$$

ก. $\frac{28p^2}{q^6}$

ข. $\frac{28p^4}{q^6}$

ค. $\frac{-28p^2}{q^6}$

ง. $\frac{-28p^4}{q^6}$

30. ในการกระจาย $\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)^6$ พจน์ที่ไม่มี a รวมอยู่เท่ากับเท่าไร

ก. 4

ค. 30

ข. 15

ง. 60

ภาคผนวก ข.

ค่าความเชื่อมั่น และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r
1	.73	.44
2	.29	.34
3	.41	.51
4	.58	.56
5	.59	.66
6	.44	.49
7	.48	.24
8	.39	.27
9	.56	.49
10	.60	.56
11	.44	.56
12	.40	.63
13	.48	.59
14	.38	.41
15	.27	.34

ข้อที่	p	r
16	.64	.54
17	.37	.41
18	.58	.41
19	.56	.27
20	.59	.56
21	.69	.56
22	.58	.51
23	.56	.31
24	.33	.22
25	.35	.29
26	.46	.46
27	.54	.34
28	.57	.27
29	.22	.34
30	.31	.32

ค่า p , ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	q	pq
1	.73	.27	.20
2	.23	.77	.18
3	.40	.60	.24
4	.58	.42	.24
5	.59	.41	.24
6	.44	.56	.25
7	.48	.52	.25
8	.39	.61	.24
9	.65	.35	.23
10	.61	.39	.24
11	.44	.56	.25
12	.40	.60	.24
13	.44	.56	.25
14	.38	.62	.24
15	.27	.73	.20

ข้อที่	p	q	pq
16	.64	.36	.23
17	.37	.63	.23
18	.58	.42	.24
19	.56	.44	.25
20	.59	.41	.24
21	.69	.31	.21
22	.58	.42	.24
23	.56	.44	.25
24	.33	.67	.22
25	.35	.65	.28
26	.46	.54	.25
27	.56	.46	.25
28	.59	.41	.24
29	.35	.65	.23
30	.31	.69	.21

$$\sum pq = 7.06$$

การคำนวณค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการสอบนักเรียน 153 คน

X	f	fX	X ²	fX ²
26	3	78	676	2028
25	3	75	625	1875
24	5	120	576	2880
23	5	115	529	2645
22	4	88	484	1936
21	5	105	441	2205
20	3	60	400	1200
19	3	57	361	1083
18	10	180	324	3240
17	20	340	289	5780
16	10	160	256	2560
15	10	150	225	2250
14	11	154	196	2156
13	8	104	169	1352
12	7	84	144	1008
11	5	55	121	605
10	9	90	100	900

X	f	fX	X ²	fX ²
9	11	99	81	891
8	5	40	64	320
7	6	42	49	294
6	5	50	36	180
5	5	25	25	75
	153	2271		37463

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{N \sum(fX^2) - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{153 \times 37463 - (2271)^2}{153 (153-1)} \\
 &= \frac{5731839 - 5157441}{153 (152)} \\
 &= \frac{574398}{23256} \\
 &= 24.699 \\
 s &= 4.970
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_1^2 - \Sigma pq}{s_1^2} \right] \\
 &= \frac{153}{153-1} \left[\frac{24.699 - 7.06}{24.699} \right] \\
 &= .72
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่
= .72

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 s_e &= s_1 \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= 4.970 \times .53 \\
 &= 2.63
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด = 2.63

ภาคผนวก ค.

หน่วยการเรียนรู้ เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ สำหรับกลุ่มทดลองที่ 1

โครงงาน เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ สำหรับกลุ่มทดลองที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ สำหรับกลุ่มทดลองที่ 1

หน่วยการเรียนรู้การสอน
วิชา คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ห้า
เรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่

หลักการและเหตุผล

ในชีวิตประจำวันนักเรียนมักจะพบปัญหาเกี่ยวกับ การนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดสิ่งต่าง ๆ เช่น การจัดแข่งขันกีฬา, การจัดชุดอาหาร, การจัดเสื้อผ้า เป็นต้น นอกจากนี้แล้ว การจัดลำดับสิ่งของต่าง ๆ ก็ยังเป็นปัญหาในการคำนวณจำนวนวิธีทั้งหมดที่สามารถเรียงลำดับได้ หรือว่าการจัดสิ่งของต่าง ๆ เข้าเป็นกลุ่ม เป็นหมู่ ก็เช่นเดียวกัน การคำนวณเพื่อหาคำตอบของปัญหาต่าง ๆ ดังกล่าวอาจจะง่ายและรวดเร็วสะดวกยิ่งขึ้น ถ้าเราเข้าใจกฎเกณฑ์เกี่ยวกับหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (Fundamental Principle of Counting) และหลักการต่าง ๆ ในการคำนวณวิธีการทั้งหมดของการจัดลำดับและการจัดหมู่ ปัญหาต่าง ๆ ก็จะคล่อง หรืออาจจะไม่เกิดขึ้นเลย

จุดมุ่งหมายทั่วไป

จุดมุ่งหมายทั่วไปของการเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอน เรื่องการจัดลำดับ และการจัดหมู่ มีดังนี้

1. เพื่อให้นักเรียนรู้จักสิ่งแวดลอมหรือเหตุการณ์รอบ ๆ ตัวนักเรียนและสามารถพิจารณาได้ว่าอะไรบางอย่างเป็นการจัดลำดับ และอะไรบางอย่างเป็นการจัดหมู่
2. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจกฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
3. เพื่อให้นักเรียนรู้ความหมายของ $n!$ หรือ $|n|$
4. ให้นักเรียนรู้ความหมายของการจัดลำดับและรู้สัญลักษณ์ที่เขียนแทนจำนวนวิธีของการจัดลำดับ

5. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีจัดลำดับในแนวนตรงของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน โดยนำมาจัดครั้งละ r สิ่ง เมื่อ $r \leq n$

6. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีจัดลำดับเป็นวงกลม

7. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีการจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้ง

พวก

8. ให้นักเรียนรู้ความหมายของการจัดหมู่และรู้จักสัญลักษณ์เขียนแทนจำนวนวิธีการจัดหมู่

9. ให้นักเรียนเข้าใจวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน โดยจัดครั้งละ n สิ่ง เมื่อ $r \leq n$

10. ให้นักเรียนรู้ทฤษฎีบททวินาม โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการจัดหมู่

11. เพื่อให้นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการจัดลำดับและการจัดหมู่ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้

12. เพื่อให้นักเรียนมีความรับผิดชอบตนเอง

13. เพื่อให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผล

14. เพื่อให้นักเรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ และทดลองด้วยตนเอง

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนจะต้องมีพื้นฐานความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต, สับเซต และ คู่อันดับ

การประเมินผลก่อนการเรียน

ประเมินผลก่อนการเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

กิจกรรมการเรียนรู้

สำหรับกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละคาบดำเนินการขึ้นในตารางข้างล่างนี้

คาบที่	เนื้อหา	เวลา	กิจกรรม
1 - 2	- หลักการเบื้องต้น เกี่ยวกับการนับ	10 นาที 70 นาที 20 นาที	- ครูชี้แจงหลักการและเหตุผลของ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ - นักเรียนศึกษามทเรียนโปรแกรม เรื่องหลักการเบื้องต้น เกี่ยวกับการ การนับ ตามลำพัง - ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด
3 - 4	- การจัดลำดับของสิ่ง ของที่แตกต่างกัน n สิ่ง	10 นาที 70 นาที 20 นาที	- ครูทบทวนเนื้อหา เรื่องหลักการ เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ - นักเรียนศึกษามทเรียนจาก มท เรียนปฏิบัติการ เรื่อง การจัด ลำดับของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง - ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด
5 - 6	- การจัดลำดับสิ่งของที่ มีบางอย่างเหมือนกัน	10 นาที	- ครูทบทวนเนื้อหาเรื่อง การจัด ลำดับสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง

คาบที่	เนื้อหา	เวลา	กิจกรรม
		70 นาที 20 นาที	- นักเรียนศึกษามทเรียน จาก มทเรียนกิจกรรม เรื่องการ จัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่าง เหมือนกัน - ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด
7 - 8	- การจัดลำดับเป็น วงกลม	10 นาที 70 นาที 20 นาที	- ครูทบทวนเนื้อหา เรื่องการ จัดลำดับ - นักเรียนศึกษามทเรียน จาก มทเรียนปฏิบัติการ เรื่อง การจัดลำดับเป็นวงกลม - ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด
9 - 10	- การจัดหมู่	10 นาที 70 นาที 20 นาที	- ครูทบทวนเนื้อหา เรื่องการ จัดลำดับ - นักเรียนศึกษามทเรียน จาก มทเรียนกิจกรรม เรื่องการหมู่ - ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

ตามที	เนื้อหา	เวลา	กิจกรรม
11-12	- ทฤษฎีบททวินาม	10 นาที	- กรูทบทวนเนื้อหา เรื่อง การกระจาย $(a + b)^n$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \dots$ และเรื่องการจัดหมู่
		70 นาที	- นักเรียนศึกษาบทเรียน โปรแกรม เรื่องทฤษฎีบททวินาม
		20 นาที	- ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย แล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

การประเมินผลหลังการเรียน

ประเมินผลหลังการเรียน โดยใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกันกับการประเมินผลก่อนการเรียน

การเรียนซ่อมเสริม

นักเรียนที่ไม่ผ่านการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ เรื่องการวัดค่าสัมและการจัดหมู่ ภายหลังจากการเรียนจากหน่วยการเรียนการสอนดังกล่าว แล้วให้กลับไปศึกษาหน่วยการเรียนการสอน หน่วยย่อย ๆ อีกครั้ง พร้อมทั้งปรึกษาอาจารย์

คาบที่ 1-2

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบ นักเรียนสามารถ

1. กำหนดวิธีการเลือกสิ่งของตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไปได้
2. บอกนิยามของแฟกทอเรียล n ($n!$ หรือ $\lfloor n \rfloor$ ได้)
3. คำนวณค่าของแฟกทอเรียล n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ได้
4. เขียนแผนภูมิจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 3 - 4 จำนวนในรูปแบบของแฟกทอเรียลได้

ข้อเสนอแนะในการใช้บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนบทนี้เรียกว่า บทเรียนโปรแกรม (Programmed Textbook) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง ไม่ใช่ข้อสอบ ไม่มีการให้คะแนน

นักเรียนทุกคนควรจะอ่านข้อความต่อไปนี้ ให้เข้าใจก่อนที่จะเริ่มเรียน จากบทเรียนโปรแกรม มีข้อเสนอแนะนักเรียน ดังนี้

1. อ่านบทเรียนโปรแกรมนี้ที่โต๊ะหน้า อย่าเปิดข้ามหน้า
2. ใช้สมุดหรือกระดาษแข็งปิดคำตอบทางซ้ายมือ ก่อนที่จะเริ่มเรียน
3. อ่านบทเรียนที่จะครอบคลุมลำดับ อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด ขณะที่อ่านจงสังเกตและทำความเข้าใจในแต่ละกรอบ ตอนใดที่มีช่องว่างเว้นไว้ หมายถึงนักเรียนจะต้องเติมคำตอบหรือข้อความในช่องว่าง และบางตอนจะมีคำถามนำให้คิด ก็ขอให้นักเรียนตอบในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ (การตอบควรใช้ดินสอ)

4. เมื่อทำบทเรียนเสร็จกรอบหนึ่ง ให้เลื่อนกระดาษปิดคำตอบลงมาช่วงหนึ่ง เพื่อตรวจคำตอบที่ทำไปแล้ว

5. เมื่อท่านเปิดดูคำตอบแล้วให้เปรียบเทียบกับคำตอบของท่าน ถ้าตรงกันหรือเป็นไปในทำนองเดียวกันก็ทำกรอบต่อไป แต่ถ้าทำผิดหรือไม่เป็นไปตามทำนองเดียวกันให้ย้อนกลับไปอ่าน และทำความเข้าใจกับกรอบที่ท่านมาแล้วอีกครั้ง แล้วลองตอบดูใหม่

6. ผู้เรียนจะต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองคือ เรียนจากการอ่าน และทำความเข้าใจในแต่ละขั้นให้ดี ถ้าหากว่านักเรียนตอบคำถามยังไม่เสร็จตามเปิดดูเฉลยทางซ้ายมือ เพราะถ้านักเรียนเปิดดูเฉลยทางซ้ายมือก่อนแล้ว ก็ยากที่จะว่านักเรียนลอกคำตอบ ซึ่งจะทำให้ นักเรียนไม่ใคร่สนใจเลย

เมื่อนักเรียนเข้าใจคำชี้แจงเกี่ยวกับการเรียนดีแล้ว เริ่มตนบทเรียนไปทีละหน้าต่อไป ขอให้ นักเรียนทุกคนโชคดี

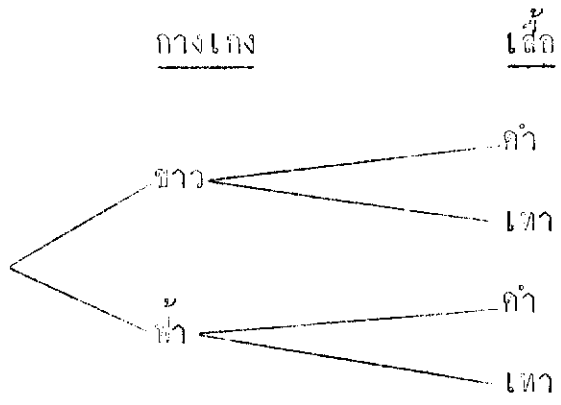
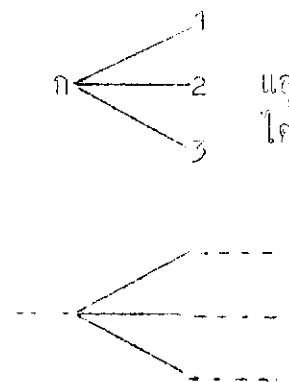
บทเรียนโปรแกรม

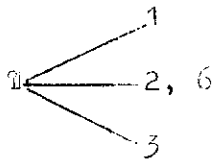
เรื่อง หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและ สัญลักษณ์ของ factorial

	1. เก็บรายแรงแท่งตัวด้วยกางเกงสีดำ เสื้อสีแดง ดังนั้นกางเกงสีดำ เสื้อสีแดง เป็นการแท่งตัวชนิดหนึ่ง เราเขียนแทนด้วยคู่ลำดับ (ดำ, แดง) ถ้าเก็บรายแรงแท่งตัวด้วยกางเกงสีฟ้า เสื้อสีเขียว วิธี การแท่งตัวของเก็บรายแรง เขียนด้วยคู่ลำดับ
(ฟ้า, เหลือง)	2. กางเกงสีขาว เสื้อสีฟ้า เป็นการแท่งตัวอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเราเขียนแทนด้วยคู่ลำดับ
(ขาว, ฟ้า)	3. (กาลี, ขาว) เป็นเครื่องหมายของนักเรียนชายโรงเรียนหนึ่ง ซึ่งสวมกางเกงสี, และสวมเสื้อสี
กาลี, ขาว	4. กระโปรงสีดำ เสื้อสีขาว และกระโปรงสีเทา เสื้อสีแดง เป็นชุดแต่งกายของเด็กหญิงคนหนึ่ง ซึ่งเราเขียนแทนด้วย, และ
(ดำ, ขาว) (เทา, แดง)	5. กางเกงสีดำ เสื้อสีเทา และกางเกงสีน้ำเงิน เสื้อสีฟ้าเป็นชุดแต่งกายของเด็กชายคนหนึ่ง ซึ่งเราเขียนแทนด้วย และ

(ตำ,เทา), (น้ำเงิน,ฟ้า)	6. ในชีวิตประจำวัน เรามักพบปัญหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดคู่สิ่งของต่าง ๆ เช่น เด็กหญิงโสภามีกระโปรง 2 ตัว ก๊อ สีแดงและสีเหลือง มีเสื้อ 2 ตัว ก๊อ สีขาวและสีเทา เด็กหญิงโสภาก็จะสามารถเลือกแต่งกายด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ดังนี้ (แดง,ขาว),(แดง,เทา),(เหลือง,ขาว),(เหลือง,เทา) เมื่อเทียบกับเด็กชายโสภณมีกางเกง 2 ตัว ก๊อสีขาวและสีฟ้า มีเสื้อ 2 ตัว ก๊อ สีดำและสีเทา ดังนั้นเด็กชายโสภณจะสามารถแต่งกายด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ดังนี้ (ขาว,ดำ) และ (ฟ้า,เทา)
(ขาว,เทา), (ฟ้า,ดำ)	7. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งจัดอาหารกลางวันให้นักเรียนเลือกอาหารกลางวันอย่างหนึ่ง และขนมหวานใดอีกอย่างหนึ่ง ถ้าโรงเรียนแห่งนี้จัดอาหารกลางวัน 3 อย่าง ได้แก่ a_1, a_2, a_3 และขนมหวาน 1 อย่าง ได้แก่ b_1 นักเรียนจะเลือกอาหารกลางวันไปเป็นชุดมีชุด (a_1, b_1) ชุด $(\dots, \dots)$ และชุด $(\dots, \dots)$

$(n_2, x_1), (n_3, x_1)$	8. มีอักษร 2 ตัว คือ ก, ข และมีตัวเลข 3 ตัว คือ 1, 2, 3 นำอักษรและตัวเลขอย่างละ 1 ตัว มาจัดเป็นคู่ ๆ จะได้ การจัดคู่ ที่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้ $(ก, 1), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)$ และ $(ข, 3)$
$(ก, 2), (ก, 3),$ $(ข, 1), (ข, 2)$	9. บางครั้งก็ใช้แผนภาพต้นไม้ อาจช่วยหาจำนวนวิธีการทั้งหมดในการจัดสิ่งของต่าง ๆ ได้ง่าย และมองเห็นได้ชัดเจน จากตัวอย่างเดิม เด็กหญิงโสภามีกระโปรง 2 ตัว คือ สีแดงและสีเหลือง มีเสื้อ 2 ตัว คือ สีขาวและสีเทา วิธีแต่งตัวที่แตกต่างกัน แสดงโดยแผนภาพต้นไม้ ดังนี้ <pre> graph LR A[กระโปรง] --- B[แดง] A --- C[เหลือง] B --- D[ขาว] B --- E[เทา] C --- F[ขาว] C --- G[เทา] </pre> จะพบวิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกัน 4 วิธี ได้แก่ $(แดง, ขาว), (\dots, \dots), (\dots, \dots)$ และ $(เหลือง, ขาว)$

(แดง,เทา), (เหลือง,ขาว)	10. เด็กชายโสมมีกางเกง 2 ตัว คือ สีขาวและสีฟ้า มีเสื้อ 2 ตัว คือ สีดำและสีเทา วิธีแต่งตัวที่แตกต่างกัน แสดงด้วยแผนภาพ ดังนี้ <u>กางเกง</u> <u>เสื้อ</u>  จะได้ว่า เด็กชายโสมมีวิธีแต่งตัวที่แตกต่างกัน ... วิธี โสมมี
4, (ขาว,ดำ), (ขาว,เทา) (ฟ้า,ดำ), (ฟ้า,เทา)	11. มีสีฉกรรจ์ 2 ตัว คือ ก,ข และมีเลขอยู่ 3 ตัว คือ 1,2,3 นักเรียนจงเติมอักษรหรือตัวเลขในแผนภาพต้นไม้ให้สมบูรณ์  และจำนวนวิธีที่แตกต่างกันนับ ได้ ... วิธี



12. จากการที่ประตูของโรงภาพยนตร์แห่งหนึ่ง มีประตูเข้า 2 ประตู และประตูออก 3 ประตู นักเรียนทราบแล้วว่า จำนวนวิธีการเลือกประตูเข้าออกทั้งหมด 6 วิธี ด้วยกัน ถ้านักเรียนพิจารณาให้ดีจะพบว่า การกระทำนี้สามารถแยกออกเป็น 2 เหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกัน ได้แก่
- เหตุการณ์ที่ 1 คือ การเข้าประตู จะเลือกเข้าประตูได้ 2 วิธี
- เหตุการณ์ที่ 2 คือ การออกเช่นเดียวกัน จะมีวิธีการเลือกออกได้ 3 วิธี

เพื่อความสะดวกเราจะแทนแต่ละเหตุการณ์ด้วยการวางสี่เหลี่ยมผืนผ้า และเขียนจำนวนวิธีการเลือกในแต่ละเหตุการณ์ ลงในช่องสี่เหลี่ยม



เหตุการณ์ เข้า ออก

จำนวนวิธีการเลือกประตูเข้าออกทั้งหมด 6 วิธี นี้มาได้จาก
 $\dots \times \dots = 6$ นี้เอง

2, 3

13. ในการทำงาน 2 อย่าง งานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี และในและวิธีของอย่างแรก จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี
 จำนวนที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างมีทั้งหมด วิธี

$n_1 n_2$	14. <u>กฎข้อที่ 1</u> ในการทำงานสองอย่าง งานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของอย่างแรก จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างมีทั้งหมด $n_1 n_2$ วิธี จำนวนวิธีการจัดการแข่งขันบาสเกตบอลระหว่าง สาย เอ ซึ่งมี 4 ทีม กับ สาย บี ซึ่งมี 6 ทีม ได้ทั้งหมด ... คู
24	15. สมชายมีเสื้อใจ 5 ตัว มีกางเกง 4 ตัว และมีรองเท้า 2 คู เขาจะมีวิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี งานที่กำหนดให้ทำมีอยู่ 3 อย่าง คือ 1. สวมเสื้อ มีเสื้อ 5 ตัว จึงเลือกสวมได้ 5 วิธี 2. สวมกางเกง มีกางเกง 4 ตัว จึงเลือกสวมได้ 4 วิธี 3. สวมรองเท้า มีรองเท้า 2 คู จึงเลือกสวมได้ 2 วิธี หาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมด มี $\dots \times \dots \times \dots = 40$ วิธี
5, 4, 2	16. เด็กหญิงดวงดาวมี เสื้อ 8 ตัว กระโปรง 4 ตัว และหมวก 2 ใบ เด็กหญิงดวงดาวจะแต่งตัวได้แตกต่างกันนับได้ $\dots \times \dots \times \dots = \dots$ วิธี

8,4,2,64	17. <u>กฎข้อ 2</u> ในการเลือกทำงาน k อย่าง เมื่อ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้ ในงานอย่าง ที่ 1, งานอย่าง ที่ 2, งานอย่าง ที่ 3, $\dots$ งานอย่าง ที่ k ตามลำดับ ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ทำงานได้ k อย่าง คือ วิธี
$n_1 n_2 n_3 \dots n_k$	18. บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปบริษัทหนึ่งผลิตเสื้อ 4 แบบ แต่ละแบบมี 6 สี และมีขนาดต่าง ๆ กัน 3 ขนาด ถ้าเขาจะจัดตู้โชว์หน้าร้านให้ครบทุกแบบ, สี และขนาดจะต้องใช้เสื้อ ทั้งหมดกี่ตัว
72	19. มีเรือข้ามฟากแม่น้ำ 3 ลำ ผู้โดยสารคนหนึ่งลงเรือไปกลับ โดยไม่ให้ซ้ำลำเดียวกันได้กี่วิธี นักเรียนจะเห็นว่า จำนวนวิธีที่จะลงเรือข้ามฟากแม่น้ำไป - กลับ โดยไม่ให้ซ้ำลำกัน แสดงด้วยตารางสี่เหลี่ยม 3 2 ลงเรือ ไป กลับ ดังนั้นจำนวนวิธีการลงเรือไปกลับ มี วิธี

6	20. ถ้าลงเรือข้ามกันได้จะมีวิธี จากการคิดทำนองเดียวกันกับ กรอบที่ 19 นักเรียนจงเติมวิธีการลงเรือไป-กลับ ลงใน ตารางสี่เหลี่ยมข้างล่างนี้  <u>ลงเรือ</u> ไป กลับ ดังนั้นจำนวนวิธีการลงเรือไปกลับ มี ... วิธี
3, 3 9	21. มีตัวเลข 1,3,5,7,9 จะเขียนจำนวนที่มี 3 หลัก โดยที่ ตัวเลขในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกันได้กี่จำนวน 1. นับตัวเลขที่กำหนดให้ว่ามีกี่ตัว (5 ตัว) 2. คู่ว่าให้เขียนจำนวนหลักกี่หลัก (3 หลัก) 3. สร้างตารางสี่เหลี่ยมให้เท่ากับจำนวนหลักที่ให้เขียน (3 ตาราง) 4. หาจำนวนวิธีการของการจัดลำดับตัวเลขในแต่ละ หลักตามลำดับ ดังนี้ หลักที่ 1 มีตัวเลข 5 ตัว จึงมีวิธีการจัดลำดับ 5 วิธี หลักที่ 2 เหลือตัวเลข 4 ตัว จึงมีวิธีการจัดลำดับ 4 วิธี หลักที่ 3 เหลือตัวเลขเพียง 3 ตัว จึงมีวิธีการจัด ลำดับ 3 วิธี

	21. 5. เขียนจำนวนที่หาได้ ใส่ลงในตารางสี่เหลี่ยม ดังนี้ (คอ) <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">3</td></tr><tr><td style="text-align: center;"><u>หลัก</u></td><td style="text-align: center;">หนึ่ง</td><td style="text-align: center;">สอง</td><td style="text-align: center;">สาม</td></tr></table> ∴ จะเขียนได้ทั้งหมด ... x ... x ... = ... จำนวน	5	4	3	<u>หลัก</u>	หนึ่ง	สอง	สาม
5	4	3						
<u>หลัก</u>	หนึ่ง	สอง	สาม					
$5 \times 4 \times 3, 60$	22. กำหนดตัวเลข 1,2,3,4,5,6 จะเขียนตัวเลขแทนจำนวนที่มี 3 หลัก โดยตัวเลขในแต่ละหลักทั้งหมดไม่ซ้ำกัน ได้กี่จำนวน ดังนั้น จะเขียนได้ทั้งหมด ... x ... x ... = ...จำนวน							
$6 \times 5 \times 4, 120$	23. กำหนดตัวเลข 1,3,5,7,9 จะเขียนตัวเลข 3 หลัก ได้กี่จำนวน ถ้าตัวเลขในแต่ละหลักทั้งสามซ้ำกันได้ นักเรียนสามารถใช้วิธีคิดแบบเดียวกับข้างต้น เพียงแต่ว่าในหลักนั้นเราสามารถเขียนตัวเลขได้ทั้ง 5 ตัวเท่ากันดังนี้ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"><tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td></tr><tr><td style="text-align: center;"><u>หลัก</u></td><td style="text-align: center;">หนึ่ง</td><td style="text-align: center;">สอง</td><td style="text-align: center;">สาม</td></tr></table> ∴ จะเขียนได้ ... x ... x ... = วิธี	5	5	5	<u>หลัก</u>	หนึ่ง	สอง	สาม
5	5	5						
<u>หลัก</u>	หนึ่ง	สอง	สาม					

5 x 5 x 5, 125	24. กำหนดตัวเลข 1,2,3,4 จงเขียนเลข 2 หลัก ถ้ากำหนดว่า ก. ตัวเลขในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกัน จะเขียนได้ ... จำนวน ข. ตัวเลขในหลักทั้งสามซ้ำกันได้ จะเขียนได้ ... จำนวน
24, 64	25. ในการโยนเหรียญแต่ละเหรียญ อาจขึ้นหน้าต่าง ๆ กันได้ 2 แบบ คือ ขึ้นหัว (Head) หรือขึ้นก้อย (Tail) ดังนั้นการโยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน (สมมุติว่า เป็น H_1, T_2 และ H_2, T_2) จะขึ้นหน้าต่าง ๆ ได้ดังนี้ เหรียญที่ 1 เหรียญที่ 2 <pre> graph LR A[เหรียญที่ 1] --> B[H1] A --> C[T1] B --> D[H2] B --> E[T2] C --> F[H2] C --> G[T2] </pre> ดังนั้น จะมีวิธีขึ้นหน้าที่เป็นแบบต่าง ๆ กันนับได้ ... วิธี
4	26. นักเรียนพบว่า การโยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน จะขึ้นหน้าแบบต่าง ๆ กันได้ 4 แบบ ซึ่งสามารถคิดสั้น ๆ ได้ ดังนี้ เหรียญที่ หนึ่ง สอง 2 2 จะมีวิธีการคิดแบบต่าง ๆ กันนับได้ ... x ... = 4 แบบ

2,2	27. ดังนั้น การโยนเหรียญ 3 เหรียญพร้อมกัน จะขึ้นหน้าแบบ ต่าง ๆ ได้ $2 \times \dots \times \dots = \dots$ แบบ
2,2,8	28. ถ้าโยน 4 เหรียญ พร้อมกัน จะขึ้นหน้าแบบต่าง ๆ ได้ $\dots$ แบบ
16	29. ในการทำข้อสอบถูกผิด 5 ข้อ จะมีคำตอบที่แตกต่างกัน $\dots$ แบบ
32	30. ในการทอดลูกเต๋าแต่ละลูก อาจขึ้นหน้าต่าง ๆ กันได้ 6 หน้า ดังนี้ 1,2,3,4,5 หรือ 6 ถ้าทอดลูกเต๋า 3 ลูก พร้อมกัน จะปรากฏผลที่แตกต่างกันทั้งหมด $\dots$ วิธี
216	31. รูปของการคูณจำนวนนับตั้งแต่ 6 ไปถึง 1 เขียนได้ดังนี้ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ดังนั้นรูปของการคูณจำนวนนับตั้งแต่ 5 ถึง 1 เขียนได้ดังนี้ $\dots$
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$	32. ให้ n แทนจำนวนนับใด ๆ $n(n-1)(n-2)\dots$ 3.2.1 เป็นรูปของการคูณจำนวนนับตั้งแต่ $\dots$ ถึง 1
n	33. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เราเขียนแทนด้วย $6!$ หรือ $\underline{6}$ ดังนั้น $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เขียนแทนด้วย $\dots$ หรือ $\dots$

7!, <u>7</u>	34. $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ เขียนแทนด้วย
$n!$ หรือ <u>n</u>	35. 6! หรือ <u>6</u> อ่านว่า หก แฟกทอเรียล หรือ แฟกทอเรียล หก ดังนั้น 7! อ่านว่า และ 4! อ่านว่า
เจ็ดแฟกทอเรียลหรือ แฟกทอเรียลเจ็ด, สี่แฟกทอเรียล, หรือ แฟกทอเรียลสี่	36. ดังนั้น $n!$ อ่านว่า
n แฟกทอเรียล หรือแฟกทอเรียล n	37. นิยาม $n!$ หมายถึง ผลคูณของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n หรือเขียนแทน ด้วย $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ดังนั้น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ $4! = \dots = \dots$
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$	38. $6! = \dots$ (ผลสำเร็จ) $7! = \dots$ (ผลสำเร็จ)

720,5040	39. $2! \times 5! = \dots\dots\dots$
240	40. $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 496$ ดังนั้น $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = \dots\dots\dots$
42	41. จงหาผลสำเร็จของ $\frac{10!}{8!} = \dots\dots\dots$
90	42. $\frac{n!}{(n-2)!} = \dots\dots\dots$
$n(n-1)$	43. จงหาค่าของ $\frac{8!}{3! 5!} = \dots\dots\dots$
56	44. $5 \times 4 \times 3$ เขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้ดังนี้ $5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ $= \frac{5!}{2!}$ ดังนั้น $8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ $= \frac{8!}{\dots\dots}$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1, 5!$	45. $90 \times 89 \times 88$ เขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้ เท่ากับ ... และ $9 \times 10 \times 11 \times 12$ เขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้ เท่ากับ ...
$\frac{90!}{87!}, \frac{12!}{8!}$	46. $n(n-1)(n-2)$ เขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้ เท่ากับ
$\frac{n!}{(n-3)!}$	กฎที่เรารวบรวมได้จากบทนี้ มีดังนี้ <u>กฎข้อที่ 1</u> ในการทำงานสองอย่างงานอย่างแรก ทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของการเลือกทำงาน อย่างแรกจะทำอย่างที่สองได้ n_2 วิธี $\therefore$ จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างมี ทั้งหมด $n_1 n_2$ วิธี <u>กฎข้อที่ 2</u> ในการทำงาน k อย่าง เมื่อ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนวิธีทำงานที่เกี่ยวข้อง กันของงานอย่างทีหนึ่ง, งานอย่างที่สอง, งานอย่างที สาม, ..., งานอย่างที k ตามลำดับ จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงาน k อย่างใดทั้งหมด $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ วิธี สัญลักษณ์ $n!$ หรือ n อ่านว่า n แฟกทอเรียล หรือแฟกทอเรียล n หมายถึง $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

๑ คาบที่ 3-4

บทเรียนปฏิบัติการ

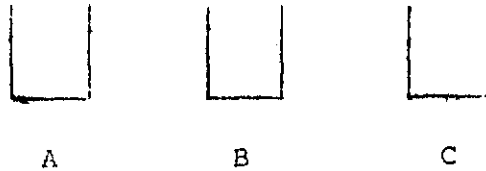
เรื่อง การจัดลำดับ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบ นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของการจัดลำดับได้
2. คำนวณวิธีการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันครั้งละ r สิ่ง ($r < n$) ได้

กิจกรรม ให้นักเรียนปฏิบัติหรือทดลองตามคำสั่ง แล้วเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. ถ้านักเรียน 3 คนได้รับเชิญไปอภิปรายหน้าชั้น อยากทราบว่ามีการจัดที่นั่ง
ของนักเรียนทั้ง 3 คนได้กี่วิธี เพื่อแก้ปัญหานี้ ให้นั่งของนักเรียนทั้ง 3 คน เป็นดังในภาพ



1.1 ในตำแหน่ง A นักเรียนจัดให้คนนั่งได้ ... คน

1.2 หลังจากจัดให้นักเรียน 1 คนนั่งในตำแหน่ง A แล้ว เหลือที่นักเรียนที่
จะนั่งในตำแหน่ง B ได้ ... คน

1.3 ในตำแหน่ง C จะมีวิธีจัดนักเรียนนั่งได้ ... คน

1.4 จงใช้หลักเกี่ยวกับการนับ จะได้วิธีการจัดที่นั่ง ... วิธี

2. ถ้านักเรียนมีหนังสือคณิตศาสตร์, ฟิสิกส์, เคมี, ชีววิทยา และภาษาอังกฤษ ทั้ง
หมด 5 เล่ม นักเรียนจะมีวิธีการจัดหนังสือบนชั้นหนังสือได้กี่วิธี

3. ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด และต้องนำมาจัดลำดับทั้งหมด ลำดับ
ที่จะจัดวางตำแหน่งเหล่านี้ทั้งหมดกี่วิธี

3.1 ตำแหน่งที่ 1 วางสิ่งของใดทั้งหมด ... สิ่ง

3.2 ตำแหน่งที่ 2 วางสิ่งของใดทั้งหมด ... สิ่ง

3.3 ตำแหน่งที่ 3 วางสิ่งของใดทั้งหมด ... สิ่ง

3.n ตำแหน่งที่ n วางสิ่งของใดทั้งหมด ... สิ่ง

ดังนั้น จำนวนวิธีของการจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันครั้งละ n สิ่ง
เท่ากับ $\dots \times \dots \times \dots \times \dots$ วิธี ซึ่งเราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(n,n)$

4. ให้นักเรียนนำตัวเลข 2,3,4,5,6,7 และ 8 มาสร้างเลข 4 หลัก



A



B



C



D

4.1 ในตำแหน่ง A ใส่ตัวเลขได้ ... ตัว

4.2 ในตำแหน่ง B ใส่ตัวเลขได้ ... ตัว

4.3 ในตำแหน่ง C ใส่ตัวเลขได้ ... ตัว

4.4 ในตำแหน่ง D ใส่ตัวเลขได้ ... ตัว

4.5 จะได้ตัวเลขที่สร้างขึ้นทั้งหมด = ... x ... x ... x ... จำนวน

4.6 เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้ เท่ากับ

5. จากตัวเลขในข้อ 4. ถ้านำมาสร้างเลข 3 หลัก จะสร้างได้ = ... x ... x ... จำนวน เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้เท่ากับ

6. จากตัวเลขในข้อ 4. ถ้านำมาสร้างเลข 2 หลัก จะสร้างได้ = ... x ... จำนวน เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้เท่ากับ

7. จำนวนวิธีการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$)

ตำแหน่งที่ 1 วางสิ่งของได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 วางสิ่งของได้ $n-1$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 วางสิ่งของได้ $n-2$ วิธี

" r " $n-(r-1)$ วิธี หรือ $n-r+1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดทั้งหมด = ... x ... x ... x ... x ... ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้เท่ากับ

8. ให้ $P(n,r)$ แทนจำนวนวิธีจัดลำดับสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัด

คราวละ r สิ่ง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้เท่ากับ

9. ดังนั้น $P(n,r) = \dots\dots\dots$

10. หาแบบฝึกหัด

جدولเรียนปฏิบัติการที่ 1

1. 1.1 3 คน

1.2 2 คน

1.3 1 คน

1.4 $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

2. $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

3. 3.1 n สิ่ง

3.2 n-1 สิ่ง

3.3 n-2 สิ่ง

3.n 1 สิ่ง, $= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3.2.1$ วิธี

4. 4.1 7 วิธี

4.2 6 วิธี

4.3 5 วิธี

4.4 4 วิธี

4.5 $7 \times 6 \times 5 \times 4$ วิธี

4.6 $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$

5. $7 \times 6 \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$

6. $7 \times 6 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{5!} = \frac{7!}{(7-2)!}$

7. $n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1))$ วิธี

$n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

8. $= \frac{n!}{(n-r)!}$

9. $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

คาบที่ ๕-6

บทเรียนกิจกรรม

เรื่อง การจัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่างเหมือนกัน

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ คำนวณหาจำนวนวิธีการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดโดยที่ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนสิ่งของที่เหมือนกันในกลุ่มที่หนึ่ง, กลุ่มที่สอง, กลุ่มที่สาม, $\dots$, กลุ่มที่ k ตามลำดับ และ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ ได้

กิจกรรม จงทำตามคำสั่ง หรือเติมข้อความลงในช่องว่าง หรือตอบคำถามต่อไปนี้

1. กระจกสามสีเหลี่ยม สีแดง 2 แผ่น และสีขาวยาว 1 แผ่น จัดเป็นแถวตรง ได้ทั้งหมดกี่วิธี จงพิจารณาจากเหตุการณ์ต่อไปนี้

1.1 ถ้ากระจกทั้งสามชนิดแตกต่างกันหมด เป็นสีแดง สีเหลือง และ สีขาว อย่างละหนึ่งแผ่น จะมีวิธีจัดลำดับได้ทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่

ก	ข	ค	ก	ข	ค	ค	ก	ข
ค	ข	ก	ข	ค	ก	ข	ค	ก

1.2 ให้นักเรียนแทนกระจกสีเหลืองด้วยกระจกสีแดง จะมีวิธีจัดลำดับ ที่ซ้ำกัน ... ก ดังนั้นจึงมีวิธีจัดลำดับได้เพียง ... วิธี ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียล ได้เท่ากับ $\frac{3!}{2!}$

2. ให้นักเรียนนำกระจกสีแดง 3 แผ่น และสีขาวยาว 1 แผ่น จัดลำดับเป็นแถวตรง จะได้กี่วิธี

2.1 ถ้ากระจกนั้นแตกต่างกันทั้งหมด จำนวนวิธีการจัดลำดับ ... วิธี

2.2 ถ้าเราสมมติให้กระจกสีแดงทั้งสามแตกต่างกัน เป็น k_1, k_2, k_3 และให้กระจกสีขาวเป็น ข.

เมื่อกระจกสีขาวอยู่ในตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งใน 4 ตำแหน่ง ที่มีอยู่ เช่น อยู่ในตำแหน่งที่หนึ่ง ส่วนสีแดงอยู่ในตำแหน่งที่เหลืออีก 3 ตำแหน่ง ได้ทั้งหมด $3! = 6$ วิธี ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1

ก	ก ₁	ก ₂	ก ₃
ข	ข ₁	ข ₃	ก ₂
ก	...	...	...
ข	...	...	...
...	...	...	...
ข	...	...	...

เนื่องจาก ก₁, ก₂, ก₃ ที่สมมติว่าต่างกันนั้นไม่ได้แตกต่างกันจริง ดังนั้น 6 วิธี
เหล่านั้น คือ วิธีเดียวกัน

2.3 ถ้าสีขาวอยู่ในตำแหน่งที่ 2 สีแดง 3 แถว ก็สลับที่กันได้ ...! = ...วิธี ดังนี้

ก ₁	ข	ก ₂	ก ₃
ก ₁	ข	ก ₃	ก ₂
...	ข	...	...
...	ข	...	...
...	ข	...	...
...	ข	...	...

ทำนองเดียวกันกับที่สีขาวอยู่ในตำแหน่งที่ 1 ทั้ง 6 วิธีดังกล่าวจึงนับเป็นวิธีเดียวกัน

2.4 ในกรณีที่สีขาวยุในตำแหน่งที่ 3 และที่ 4 เราจึงได้วิธีการจัดอีก 2 วิธี รวมเป็น 4 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด ในการจัดลำดับกระดาดสีแดง 3 แผ่น และสีขาว 1 แผ่น เป็นแถวตรงได้ = 4 วิธี ซึ่งเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้ดังนี้ คือ = $\frac{4!}{1!}$ วิธี

3.

3.1 ถ้าเรามีกล่องสีแดง 4 ใบ และกล่องสีน้ำเงิน 1 ใบ จะจัดลำดับเป็นแถวเส้นตรงได้ = ... วิธี = $\frac{5!}{1!}$ วิธี

3.2 ถ้าเรามีกล่องสีแดง 5 ใบ และกล่องสีน้ำเงิน 1 ใบ จะจัดลำดับเป็นแถวเส้นตรงได้ = ... วิธี = $\frac{6!}{1!}$ วิธี

3.3 ถ้าเรามีกล่องสีแดง 6 ใบ และกล่องสีน้ำเงิน 1 ใบ จะจัดลำดับเป็นแถวเส้นตรงได้ = ... วิธี = $\frac{7!}{1!}$ วิธี

3.4 ถ้าเรามีกล่องสีแดง n ใบ และกล่องสีน้ำเงิน 1 ใบ จะจัดลำดับเป็นแถวเส้นตรงได้ = ... วิธี = $\frac{(n+1)!}{1!}$ วิธี

4. ให้นักเรียนนำกระดาดสีแดง 2 แผ่น และสีขาว 2 แผ่น จัดลำดับเป็นแถวตรงจะได้กี่วิธี

4.1 ถ้าเราสมมุติให้กระดาดทั้ง 4 แผ่น แตกต่างกัน จำนวนวิธีของการจัดลำดับ ... วิธี

4.2 ในกรณีที่สีของเหมือนกันเป็นกลุ่ม ๆ จำนวนวิธีการจัดจะต้องน้อยลงไปคือ ในจำนวน 4! วิธี ดังกล่าวจะรวมวิธีจัดลำดับที่เหมือนกัน 2! สำหรับกระดาดสีแดง ที่เหมือนกันในกลุ่มแรก และ ... สำหรับกระดาดสีขาวที่เหมือนกันในกลุ่มที่ 2

4.3 ดังนั้น จึงมีวิธีการจัดลำดับที่แตกต่างกันได้เพียง $\frac{4!}{2! \times 2!} = \dots$ วิธี

5. ถ้าเรามีกล่องสีเหลี่ยม ดังนี้ สีแดง 5 ใบ สีน้ำเงิน 3 ใบ และสีขาว 2 ใบ รวมทั้งหมด 10 กล่อง

5.1 สมมุติให้กล่องทั้ง 10 ใบ แตกต่างกัน จำนวนวิธีของการจัดลำดับ! วิธี

5.2 ในกรณีที่มีของเหมือนกันเป็นกลุ่ม ๆ จำนวนวิธีของการจัดก็จะลดลง
คือในจำนวน 10! วิธี ถึงกล่าวรวมวิธีจัดจำพวกที่เหมือนกัน ...! วิธี สำหรับกล่องสีแดง
ที่เหมือนกันในกลุ่มแรก, ...! วิธี สำหรับกล่องสีน้ำเงินที่เหมือนกันในกลุ่มที่ 2, ...! วิธี
สำหรับกล่องสีขาวที่เหมือนกันในกลุ่มที่สาม

5.3 ดังนั้น เราจึงมีวิธีการจัดจำพวกที่แตกต่างกันได้เพียง
$$= \frac{10!}{\dots! \times \dots! \times \dots!}$$

= วิธี

6. โดยทั่วไปถ้ามีของอยู่ n สิ่ง มี n_1 สิ่ง เหมือนกันในกลุ่มที่ 1
 n_2 สิ่ง เหมือนกันในกลุ่มที่ 2
 n_3 สิ่ง เหมือนกันในกลุ่มที่ 3
 $\vdots$
 n_k สิ่ง เหมือนกันในกลุ่มที่ k

โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$

ดังนั้น จึงมีวิธีจัดจำพวกที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด = วิธี

เฉลยบทเรียนกิจกรรม

1.

1.1

ด

บ

ก

ข

ก

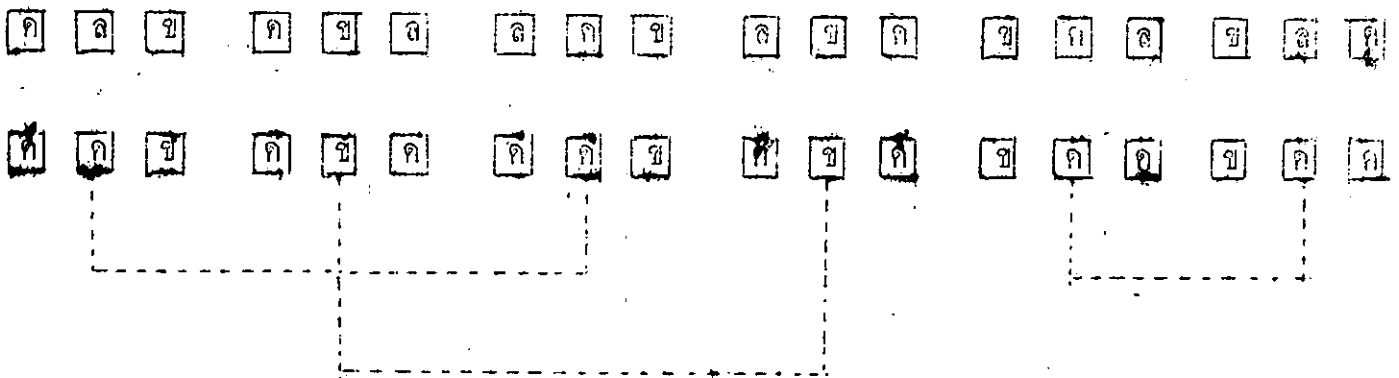
ด

ข

ด

ก

1.2 3 กุ คังนี้, 3 วิธี



2.

2.1 $4! = 24$ วิธี

2.2

ข

ค ₂

ค ₁

ค ₃

 2.3

ค ₂

ข

ค ₁

ค ₃

ข

ค ₂

ค ₃

ค ₁

ข

ค ₃

ค ₂

ค ₁

ข

ค ₃

ค ₁

ค ₂

2.4 $\frac{4!}{3!} = 4$ วิธี

3.

$$3.1 \quad 5 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11} = \frac{5!}{4!} \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

$$3.2 \quad 6 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11} = \frac{6!}{5!} \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

$$3.3 \quad 7 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11} = \frac{7!}{6!} \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

$$3.4 \quad n+1 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11} = \frac{(n+1)!}{n!} \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

4.

$$4.1 \quad 4! = 24 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

$$4.2 \quad 2!$$

$$4.3 \quad \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

5.

$$5.1 \quad 10!$$

$$5.2 \quad 5!, 3!, 2!$$

$$5.3 \quad \frac{10!}{5! \times 3! \times 2!} = 2520 \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

6.

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!} \text{ } ^{3d} \text{ } _{11}$$

คาบที่ 7-8

บทเรียนปฏิบัติการ

เรื่อง การจัดลำดับเป็นวงกลม

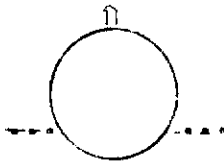
จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ กำหนดหาจำนวนวิธี
การจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง ให้เป็นวงกลมได้

กิจกรรม ให้นักเรียนปฏิบัติหรือทดลองตามคำสั่ง แล้วเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนนำอักษร 3 ตัว คือ ก, ข, ค มาเรียงลำดับเป็นแถวตรงจะได้วิธีทั้งหมด = ...! = ... วิธี

2. นำอักษรชุดเดิมในข้อ 1 มาจัดลำดับเป็นวงกลม โดย



2.1 ให้อักษร ก. เป็นหลัก แล้วเรียงลำดับอักษร ข และ ค ในตำแหน่งที่เหลือ ในลักษณะการเวียนวนกัน จะได้วิธีการจัดลำดับทั้งหมด วิธี คือ

2.2 ถ้าให้อักษร ข เป็นหลัก จะได้วิธีจัดลำดับทั้งหมด ... วิธี ดังนี้คือ

2.3 ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้อักษร ค เป็นหลักบ้าง จะได้วิธีจัดลำดับทั้งหมด ... วิธี ดังนี้คือ

2.4 จากการจัดลำดับเป็นวงกลม จากข้อ 2.1, 2.2 และ 2.3 จะมีวิธีที่เหมือนกันสรุปแล้วจะมีวิธีการจัดจริง ๆ อยู่เพียง ... วิธี คือ

2.5 ถ้าเราให้อักษรตัวใดตัวหนึ่งก็ได้เป็นหลัก แล้วจัดลำดับอักษร 2 ตัวที่เหลือคล้ายกับการจัดลำดับในแนวเส้นตรง จะมีวิธีการจัดลำดับได้! = ... วิธี

3. ถ้ากำหนดอักษร 4 ตัว คือ ก, ข, ค, ง ให้นักเรียนนำอักษรดังกล่าว มาจัดลำดับเป็นวงกลม โดยให้อักษรตัวใดตัวหนึ่งก็ได้เป็นหลัก แล้วจึงนำอักษร 3 ตัวที่เหลือมาจัดลำดับคล้ายกับการจัดลำดับในแนวเส้นตรง ดังนั้นจะมีวิธีการจัดลำดับได้ ...! = ... วิธี

4. ให้นักเรียนปฏิบัติคล้ายข้อ 3 โดยเพิ่มอักษร ครึ่งละ 1 ตัว เป็น 5, 6, 7 ตัวตามลำดับ

4.1 การจัดลำดับอักษร 5 ตัว เป็นวงกลม จะได้วิธีการจัดทั้งหมด = ... วิธี

4.2 การจัดลำดับอักษร 6 ตัว เป็นวงกลม จะได้วิธีการจัดทั้งหมด = ... วิธี

4.3 การจัดลำดับอักษร 7 ตัว เป็นวงกลม จะได้วิธีการจัดทั้งหมด = ... วิธี

5. ดังนั้น ถ้ากำหนดตัวอักษรหรือสิ่งของทั้งหมดให้ n สิ่ง (n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ) จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นวงกลมได้ทั้งหมด ... วิธี

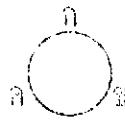
6. ทำแบบฝึกหัด

เลขยกตัวเรียงปฏิบัติการ

1. $3! = 6$ วิธี

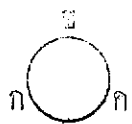
2.

2.1



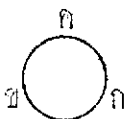
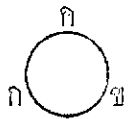
2 วิธี

2.2



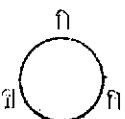
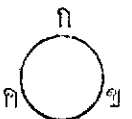
2 วิธี

2.3



2 วิธี

2.4 2 วิธี คือ



2.5 $2! = 2$ วิธี

3. $3! = 2$ วิธี

4.

4.1 $4! = 24$ วิธี

4.2 $5! = 120$ วิธี

4.3 $6! = 720$ วิธี

5. $(n-1)!$ วิธี

คาบที่ 9-10

บทเรียนกิจกรรม

เรื่อง การจัดหมู่

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของการจัดหมู่ได้
2. คำนวณหาจำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) ได้
3. แก่สมการที่มีค่าของ $P_{n,r}$ และ $C_{n,r}$ ได้ เช่น จงแก้สมการ $P_{n,2} = 3C_{n,4}$

กิจกรรม จงทำตามคำสั่งหรือเติมข้อความลงในช่องว่าง หรือตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเลือกอักษรมาคราวละ 2 ตัว จากอักษร ก, ข, และ ค ว่าได้กี่วิธี อะไรบ้าง โดยไม่คำนึงถึงตำแหน่ง เช่น อักษร กข หรือ ขก ถือว่าเป็น วิธีการจัดอย่างเดียวกัน

2. กำหนดให้ $A = \{ก, ข, ค\}$

จงหาับเซตทั้งหมดของเซต A ซึ่งมีสมาชิก 2 ตัว

3. กำหนดให้อักษร ก, ข, ค, ง และ จ ให้นักเรียนเลือกมาคราวละ 3 ตัว ว่าได้กี่วิธี มีอะไรบ้าง โดยไม่คำนึงถึงตำแหน่ง

4. กำหนดให้ $B = \{ก, ข, ค, ง, จ\}$

จงหาับเซตทั้งหมดของเซต B ซึ่งมีสมาชิก 3 ตัว

5. จงช่วยกันสรุปความหมายของการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง ($r \leq n$) ว่ามีความสัมพันธ์อย่างไรกับการหาับเซตที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิกทั้งหมด n ตัว

6. ถ้าเราเขียนจำนวนวิธีการจัดหมู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $C_{(n,r)}$ หรือ $\binom{n}{r}$ หรือ nCr หรือ nC_r ซึ่งแทนการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง

ดังนั้น จำนวนวิธีการจัดหมู่อักษร ก, ข, ค, ง และ จ ดังกล่าวคราวละ 3 ตัว จึงแทนได้ด้วยสัญลักษณ์

7. การจัดลำดับอักษร ก, ข, ค, ง และ จ ดังกล่าวคราวละ 3 ตัว จะมีวิธีการจัดลำดับทั้งหมด $= \frac{5!}{3!} = \dots$ วิธี

ถ้าเป็นการจัดหมู่โดยไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลัง จำนวนวิธีการจัดดังกล่าวจะลดลง นั่นคือ การจัดลำดับอักษร ก, ข, ค สามารถจัดได้ ดังนี้คือ กขค กคข ขกค ขคก

ลกข คขก ซึ่งในการจัดหมู่เราถือว่าเป็นการจัดหมู่วิธีเดียวกัน การจัดหมู่วิธีอื่น ๆ แต่ละวิธีก็จะมีการจัดค่าได้ $3! = 6$ วิธีเหมือนกัน

ดังนั้น ถ้าเขียนวิธีการจัดหมู่ในตัวอย่างดังกล่าว จะได้

$$3! \times C(5,3) = P(5,3)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } C(5,3) &= \frac{P(5,3)}{3!} \\ &= \dots\dots\dots \text{วิธี} \end{aligned}$$

8. โดยทั่วไปถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง จำนวนวิธีการจัดคราวละ r สิ่ง $= P(n,r)$
 $= \dots\dots\dots$ วิธี แต่ในการจัดหมู่คราวละ r สิ่ง เราไม่สนใจลำดับของสิ่งของ r สิ่งนั้น
 ว่าจะเรียงกันอย่างไร ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดหมู่จึงเท่ากับ $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{\dots!} = \dots$

9. จงอธิบายความหมายของ $C(n,n)$ ว่าหมายถึงอะไร
 เพราะฉะนั้น ค่าของ $C(n,n) = \dots\dots\dots$

10. จงเติมค่าลงในช่องว่างต่อไปนี้

$C(3,2) = \dots\dots\dots$	$C(3,1) = \dots\dots\dots$
$C(5,3) = \dots\dots\dots$	$C(5,2) = \dots\dots\dots$
$C(6,2) = \dots\dots\dots$	$C(6,4) = \dots\dots\dots$
$C(7,6) = \dots\dots\dots$	$C(7,1) = \dots\dots\dots$
$C(7,5) = \dots\dots\dots$	$C(7,2) = \dots\dots\dots$
$C(n,r) = \dots\dots\dots$	$C(n,n-r) = \dots\dots\dots$

จงสรุปความสัมพันธ์ระหว่าง $C(n,r)$ และ $C(n,n-r)$

ดังนั้น $C(5,1) = C(5,4)$

$C(6,5) = \dots\dots\dots$

$C(10,6) = \dots\dots\dots$

$C(8,3) = \dots\dots\dots$

เฉลยบทเรียนกิจกรรม

1. ได้ 3 วิธี คือ กข, ขค และ กค
2. {ก,ข} , {ข,ค} , {ก,ค}
3. ได้ 10 วิธี คือ กขค กขง กขจ กคข กคจ
กขง ขคข ขคจ ขงจ คขจ
4. {ก,ข,ค} , {ก,ข,ง} , {ก,ข,จ} , {ก,ค,ง} , {ก,ค,จ} ,
{ก,ง,จ} , {ข,ค,ง} , {ข,ค,จ} , {ข,ง,จ} , {ค,ง,จ}
5. การจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง ($r \leq n$) คือ การหา
ดับเซตที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัว ที่กำหนดให้
6. $C(5,3)$
7. $= \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ วิธี, 10 วิธี
8. $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$
9. $C(n,n)$ หมายถึง การจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยนำมาจัดคราวละ n สิ่ง
- $C(n,n) = \frac{n!}{(n-n)! n!} = \frac{n!}{0! n!} = 1$
10. $C(3,2) = 3, C(3,1) = 3$
 $C(5,3) = 10, C(5,2) = 10$

10.

$$C(6,2) = 15, \quad C(6,4) = 15$$

$$C(7,6) = 7, \quad C(7,1) = 7$$

$$C(7,5) = 21, \quad C(7,2) = 21$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}, \quad C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-(n-r))! (n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

$$C(n,r) = C(n,n-r),$$

$$C(5,1) = C(5,4), \quad C(10,6) = C(10,4)$$

$$C(6,5) = C(6,1), \quad C(8,3) = C(8,5)$$

คาบที่ 11-12

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. กระจาย $(a+b)^n$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้
2. กำหนดหาค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ใด ๆ ในการกระจาย $(a+b)^n$ ได้
3. กำหนดหาพจน์ทั่วไปในการกระจาย $(a+b)^n$ ได้
4. กำหนดค่าโดยประมาณของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขทศนิยม เช่น $(1.98)^6$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้

บทเรียนโปรแกรม เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

1. เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

จากการกระจายดังกล่าว

$(a+b)^2$ เรากระจายได้ทั้งหมด 3 เทอม

$(a+b)^3$ เรากระจายได้ทั้งหมด 4 เทอม

$(a+b)^4$ เรากระจายไ้ทั้งหมด ... เติม

$(a+b)^5$ เรากระจายได้นะหมดค ... เพอ

5.6

2. ลักษณะสำคัญของผลคูณในกรอบที่ 1 มีแบบแผนซึ่งแสดงได้โดย

$$(a+b)^0 \quad 1$$

$$(a+b)^1 \quad 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1$$

$$(a+b)^4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$(a+b)^6$$

จงตั้งแถว 1. แต่ละแถวจะเริ่มตนควย 1 และจบลงควย

	2. (ทอ) 2. สมาชิกในแถวใด ๆ จะเท่ากับผลบวกของจำนวนทางซ้ายและทางขวาของแถวที่อยู่ถัดไปข้างบน 3. สันประสิทธิ์ทวินาม จะมีลักษณะคล้ายรูปสามเหลี่ยมที่เราเรียกว่า "สามเหลี่ยมของปาสกาล" (Pascal's Triangle)
1,6,15,20,15,6,1	3. จากการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่มากนัก เราสามารถคูณกันโดยตรงได้ แต่ถ้า n เป็นจำนวนมาก ๆ บอมนำโดยยาก อีกทั้งทำให้เสียเวลา และผิดพลาดได้ง่าย ดังนั้นเราจะหาสูตรในการกระจาย $(a+b)^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ
	4. จาก $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \dots (a+b)$ ทั้งหมด n วงเล็บ ถ้านำ a จากทุกวงเล็บมาคูณกันจะได้พจน์ a^n พจน์นี้จะเกิดขึ้นได้เพียงพจน์เดียว ดังนั้นจะได้ a^n เพียง ... พจน์
1	5. ถ้านำ b จาก 1 วงเล็บมาคูณกับ a อีก $n-1$ วงเล็บที่เหลือจะได้พจน์ของ $a^{n-1}b$ เนื่องจากเราสามารถเลือก b จากวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะมี $C(n,1)$ วิธีจึงได้พจน์ $a^{n-1}b$ ทั้งหมด พจน์

$C_{(n,1)} = n$	6. ถ้านำ b จาก 2 วงเล็บ มาคูณกับ a อีก $(n-2)$ วงเล็บที่เหลือจะได้พจน์ของ $a^{n-2}b^2$ เนื่องจากเราสามารถเลือก b จาก 2 วงเล็บใดก็ได้ ดังนั้นจะมี $C_{(n,2)}$ วิธี จึงได้พจน์ของ $a^{n-2}b^2$ ทั้งหมด พจน์
$C_{(n,2)}$	7. ดังนั้นในกรณีทั่วไป ถ้านำ b จาก r วงเล็บมาคูณด้วย a อีก $n-r$ วงเล็บที่เหลือก็จะได้พจน์ของ $a^{n-r}b^r$ เนื่องจากเราสามารถเลือก b จากวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะมี $C_{(n,r)}$ วิธี จึงได้พจน์ $a^{n-r}b^r$ ทั้งหมด พจน์
$C_{(n,r)}$	8. ถ้านำ b จากทุกวงเล็บมาคูณกันจะได้พจน์ b^n พจน์เช่นนี้จะเกิดได้เพียงวิธีเดียว ดังนั้นจะได้ b^n มีเพียง....พจน์เท่านั้น
1	9. เมื่อเราหาพจน์ที่จะเป็นไปได้นับทุกพจน์แล้ว นำพจน์ต่าง ๆ มาบวกกันผลที่ได้จะเป็นการกระจายของ $(a+b)^n$ คือ $(a+b)^n = a^n + C_{(n,1)}a^{n-1}b + C_{(n,2)}a^{n-2}b^2 + \dots + C_{(n,r)}a^{n-r}b^r + \dots + C_{(n,n-1)}ab^{n-1} + b^n$ สรุป ทฤษฎีบททวินาม เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ $(a+b)^n = a^n + \dots + b^n$

$C_{(n,1)}a^{n-1}b +$ $C_{(n,2)}a^{n-2}b^2 +$ $+C_{(n,r)}a^{n-r}b^r +$ $+C_{(n,n-1)}ab^{n-1}$	10. สำหรับพจน์แรกอาจเขียนสัมประสิทธิ์ในรูป $C_{(n,0)}$ และ พจน์สุดท้ายอาจเขียนในรูป $C_{(n,n)}$ และเนื่องจาก $C_{(n,0)}$ $= C_{(n,n)} = \dots\dots\dots$ จึงไม่ต้องเขียนก็ได้
1	11. กำลังของ a เริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง ส่วนกำลังของ b เริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 1 จนถึง...
0, n	12. ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ กำลังของ a และ b บวกกันได้ เสมอ
n	13. พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่ 2 คือ $C_{(n,1)}a^{n-1}b$ พจน์ที่ 3 คือ $C_{(n,2)}a^{n-2}b^2$ พจน์ที่ 4 คือ $C_{(n,3)}a^{n-3}b^3$ พจน์ที่ r คือ $C_{(n,r-1)}a^{n-(r-1)}b^{r-1}$ พจน์ที่ r+1 คือ

$C_{(n,r)} a^{n-r} b^r$	14. รูป พจน์ทั่วไปของการกระจาย $(a+b)^n$ คือ $C_{(n,r)} a^{n-r} b^r$ พจน์นี้เป็นพจน์ที่ $r+1$ ดังนั้น ถ้าเราต้องการหาเพียงพจน์ใด พจน์หนึ่งของการกระจายจะได้ พจน์ที่ $r+1 = C_{(n,r)} a^{n-r} b^r$ โดยแทนค่า n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกตามต้องการ
	15. ถ้าเรากระจาย $(a+b)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม $(a+b)^4 = a^4 + C_{(4,1)} a^3 b + \dots + a^2 b^2 + \dots + ab^3 + b^4$ $= a^4 + \frac{4!}{1! 3!} a^3 b + \dots + a^2 b^2 + \dots + ab^3 + b^4$ ดังนั้น $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$
$C_{(4,2)}, C_{(4,3)}$ $\frac{4!}{2!2!}, \frac{4!}{3!1!}$	16. จงกระจาย $(2x+1)^5$ $(2x+1)^5 = (2x)^5 + C_{(5,1)} (2x)^4 (1)$ $+ C_{(5,2)} (2x)^3 (1)^2 + C_{(5,3)} (2x)^2 (1)^3$ $+ C_{(5,4)} (2x) (1)^4 + C_{(5,5)} (2x)^0 (1)^5$ $= \dots\dots\dots$

$32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$	17. จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจาย $(2 + \frac{x}{4})^6$ $\begin{aligned} \text{พจน์ที่ 4} &= C_{(6,3)} (2)^{6-3} (\frac{x}{4})^3 \\ &= \dots\dots\dots 2^3 (\frac{x}{4})^3 \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$
$\frac{5}{2} x^3$	18. จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(y^2 - \frac{1}{2})^8$ $\begin{aligned} \text{พจน์กลาง คือ พจน์ที่ 5} &= C_{(\dots, \dots)} (y^2)^{\dots} (-\frac{1}{2})^{\dots} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$
$\begin{aligned} &C_{(8,4)} (y^2)^{8-4} \\ &(-\frac{1}{2})^4, \\ &\frac{35}{8} y^8 \end{aligned}$	

โครงการสอนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่สำหรับกลุ่มทดลองที่ 2

คาบที่ 1 - 2

เรื่อง หลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถ

1. คำนวณวิธีการเลือกสิ่งของตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไปได้
2. บอกนิยามของแฟคทอเรียล n ($n!$ หรือ n ได้)
3. คำนวณค่าของแฟคทอเรียล n เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ได้
4. เขียนผลคูณของจำนวนเต็มบวกที่เรียงกัน 3 - 4 จำนวนในรูปของแฟคทอเรียลได้

เนื้อหา

กฎข้อที่ 1 ในการทำงานสองอย่าง งานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของการทำงานอย่างแรก จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างมีทั้งหมด $n_1 n_2$ วิธี

กฎข้อที่ 2 ในการทำงาน k อย่างเมื่อ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้ในงานอย่างที่ 1, งานอย่างที่ 2, งานอย่างที่ 3, ..., งานอย่างที่ k ตามลำดับ ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ทำงานได้ k อย่างคือ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

นิยาม แฟคทอเรียล n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ หรือ n หมายถึงผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n

นั่นคือ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ หรือ $n! = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

กิจกรรมการสอน

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียน โดยการทบทวนเรื่อง คำคล้าย โดยยกตัวอย่าง

"เด็กชายแดงแต่งตัวด้วยกางเกงสีคำ สีสีแดง เราจะเขียนแทนด้วยคำคล้าย (คำ,แดง)" แล้วตั้งคำถามให้นักเรียนตอบปากเปล่าดังต่อไปนี้

 - 1.1 กางเกงสีขาว และเสื้อฟ้า เป็นการแต่งกายอีกวิธีหนึ่งเราสามารถเขียนแทนด้วยคำคล้ายได้อย่างไร
 - 1.2 คำคล้าย (กา,ขาว) จะแทนการแต่งกายอย่างไร
 - 1.3 ถ้าเด็กหญิงโสภามีกระโปรง 2 ตัว คือ สีแดงและสีเหลือง มีเสื้อ 2 ตัว คือ สีขาวและสีเทา เด็กหญิงโสภาก็จะเลือกแต่งกายด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ได้อย่างไรบ้าง ตอบในรูปของคำคล้าย
 - 1.4 ถ้าเรามีอักษร 2 ตัว คือ ก และ ข มีตัวเลข 3 ตัว คือ 1, 2 และ 3 นำอักษรและตัวเลขอย่างละ 1 ตัว มาจับเป็นคู่ ๆ จะได้การจัดที่แตกต่างกัน ทั้งหมดกี่วิธีบ้าง
 - 1.5 จากคำถามข้างต้นนักเรียนมีวิธีการหาคำคล้ายได้อย่างไร
2. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้แล้วให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง
 - 2.1 เด็กหญิงโสภามีกระโปรง 2 ตัว คือ สีแดงและสีเหลือง มีเสื้อ 2 ตัว คือ สีขาวและสีเทา เด็กหญิงโสภาก็จะเลือกแต่งกายด้วยวิธีที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี
 - 2.2 มีอักษร 2 ตัวคือ ก และ ข มีตัวเลข 3 ตัว คือ 1, 2 และ 3 นำอักษรและตัวเลขอย่างละ 1 ตัว มาจับเป็นคู่ ๆ จะได้วิธีการจับคู่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี
 - 2.3 โรงภาพยนตร์แห่งหนึ่งมีประตูเข้า 2 ประตู และประตูออก 3 ประตู ดังนั้น จำนวนวิธีการเลือกประตูเข้าออกทั้งหมดมีกี่วิธี
 - 2.4 นักเรียนสามารถคำนวณหาจำนวนวิธีการเลือกทำเหตุการณ์ทั้ง 2 อย่างได้อย่างไร
 - 2.5 ในการทำงาน 2 อย่าง อย่างแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของอย่างแรกจะเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างจะเท่ากับวิธี

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

ในการทำงาน 2 อย่าง อย่างแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของอย่างแรกจะเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างเท่ากับ $n_1 n_2$ วิธี

4. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้แล้วให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตน

4.1 บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปบริษัทหนึ่งผลิตเสื้อ 4 แบบ แต่ละแบบมี 6 สี และมีขนาดต่าง ๆ กัน 3 ขนาด ถ้าบริษัทจะจัดตู้โชว์หน้าร้านโดยใช้เสื้อครบทุกแบบ สี และขนาดจะต้องใช้เสื้อทั้งหมดกี่ตัว

4.2 มีตัวเลข 1, 3, 5, 7 และ 9 จงเขียนจำนวนที่มี 2 หลัก โดยตัวเลขในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน

4.3 จากตัวเลขในข้อ 4.2 จะเขียนจำนวนที่มี 3, 4 และ 5 หลัก โดยตัวเลขในหลักแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน

4.4 ในการเลือกทำงาน k อย่าง เมื่อ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้ในงานอย่างที่ 1, งานอย่างที่ 2, งานอย่างที่ 3, $\dots$, งานอย่างที่ k ตามลำดับ ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่ทำงานได้ k อย่าง จะเท่ากับเท่าไร

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

ในการเลือกทำงาน k อย่าง เมื่อ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนวิธีที่สามารถเลือกทำได้ ในงานอย่างที่ 1, งานอย่างที่ 2, งานอย่างที่ 3, $\dots$, งานอย่างที่ k ตามลำดับ ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่ทำงานได้ k อย่าง คือ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

6. ครูแจกโจทย์ต่อไปนี้ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในชั่วโมงเรียน ใช้เวลาประมาณ 15 นาที

- 1) มีเรือข้ามฟากแม่น้ำ 3 ลำ ผู้โดยสารคนหนึ่งต้องการลงเรือไป-กลับ โดยไม่ให้ซ้ำลำเดียวกัน จะมีวิธีการลงเรือไป-กลับ ทั้งหมดกี่วิธี
- 2) จากโจทย์ข้อ 1) ถ้าให้ลงเรือไป-กลับ ซ้ำลำเดียวกันได้ จะมีวิธีการลงเรือไป-กลับ ทั้งหมดกี่วิธี
- 3) โยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง จะขึ้นหน้าต่าง ๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี
- 4) ถ้าโยนเหรียญ 3 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง จะขึ้นหน้าต่าง ๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี
- 5) ในการทำข้อสอบถูก-ผิด 5 ข้อ โดยการเดาจะมีคำตอบที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่แบบ (โดยต้องทำทุกข้อไม่มีการเว้น)
- 6) ในการทอดลูกเต๋า 3 ลูก พร้อม ๆ กัน จะปรากฏผลที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

8. ครูอธิบายรูปแบบของการคูณต่อไปนี้

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $6!$ หรือ $\boxed{6}$ ซึ่งอ่านว่า

หกแฟกทอเรียล หรือ แฟกทอเรียลหก

แล้วตั้งคำถามดังต่อไปนี้ให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง

8.1 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

8.2 $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้

อย่างไร

8.3 $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้
อย่างไร

8.4 $3!$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณได้อย่างไร

8.5 $4!$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณได้อย่างไร

8.6 $5!$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณได้อย่างไร

8.7 ดังนั้น $n!$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณได้อย่างไร

9. ครูและนักเรียนรวมกันอภิปราย และสรุปนิยามของแฟกทอเรียลให้ได้ว่า

แฟกทอเรียล n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ หรือ n หมายถึง
ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n

$$\text{นั่นคือ } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(n) \quad \text{หรือ}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

10. ให้นักเรียนทำโจทย์ต่อไปนี้ ในชั่วโมงเรียนใช้เวลาประมาณ 10 นาที

จงหาค่าของ

10.1 $5!$

10.2 $6!$

10.3 $\frac{8!}{5!}$

10.4 $\frac{n!}{(n-2)!}$

11. ครูเฉลยคำตอบบนกระดานคำ แล้วให้นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

12. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้ แล้วให้นักเรียนตอบในกระดานคำตอบของตนเอง

12.1 ถ้า $5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ แล้ว $5 \times 4 \times 3$ สามารถเขียนให้อยู่

ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

12.2 $8 \times 7 \times 6$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

12.3 $90 \times 89 \times 88$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

12.4 $9 \times 10 \times 11 \times 12$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

12.5 $n(n-1)(n-2)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

13. ครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกัน แล้วนักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

14. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

ตอนที่ 3 - 4

เรื่อง การจัดลำดับ

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของการจัดลำดับได้
2. คำนวณวิธีการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$)

ได้

เนื้อหา

นิยาม การจัดลำดับ คือ การจัดหรือเรียงลำดับของสิ่งของ n สิ่ง จัดเรียง
คราวละ r สิ่ง

กฎข้อที่ 3 จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด
เท่ากับ $n!$

ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_{n,n} = n!$

กฎข้อที่ 4 จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันโดยจัด
คราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) เท่ากับ $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

กิจกรรมการสอน

1. ครูทบทวนความรู้นักเรียน เรื่อง การคำนวณหาค่าของ $n!$ หรือ $|n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3 \dots$ โดยการทดสอบนักเรียน โดยให้นักเรียนหาค่าของแฟกทอเรียลต่อไปนี้

1.1 $5!$

1.2 $8!$

1.3 $\frac{9!}{7!}$

1.4 $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$

เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้ว ครูเฉลยคำตอบ นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

2. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้ แล้วให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง

2.1 ถ้านักเรียน 2 คน ได้รับเชิญให้ออกไปอภิปรายหน้าชั้น จะมีวิธีการจัดที่นั่งของนักเรียนทั้ง 2 คน เป็นแนวเส้นตรงให้แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

2.2 ถ้านักเรียน 3 คน ได้รับเชิญให้ออกไปอภิปรายหน้าชั้น จะมีวิธีการจัดที่นั่งของนักเรียนทั้ง 3 คน เป็นแนวเส้นตรงให้แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

2.3 ถ้านักเรียน 4 คน ได้รับเชิญให้ออกไปอภิปรายหน้าชั้น จะมีวิธีการจัดที่นั่งของนักเรียนทั้ง 4 คน เป็นแนวเส้นตรงให้แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

2.4 มีหนังสือคณิตศาสตร์, ฟิสิกส์, เคมี, ชีววิทยา และภาษาอังกฤษอย่างละ 1 เล่ม จะมีวิธีการวางหนังสือเป็นแนวเส้นตรงให้แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

2.5 ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง และต้องการนำสิ่งของทั้งหมดมาจัดลำดับเป็นแนวเส้นตรง จะได้จำนวนวิธีการจัดที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

จำนวนวิธีการจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง และต้องการนำสิ่งของทั้งหมดมาจัดลำดับ จะได้วิธีการจัดลำดับที่แตกต่างกันเท่ากับ $n!$ หรือ $|n$ ซึ่งเราแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_{n,n}$ หรืออาจใช้แบบอื่น ๆ ก็ได้ เช่น nPn , nP_n , $P(n,n)$

4. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 3 - 4 คน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตอบในกระดานคำตอบ

4.1 กำหนดตัวเลข 2,3,4,5,6,7 และ 8 จะจัดเรียงลำดับเป็นแถวตรงเพียงครั้งละ 2 ตัว จำนวนวิธีการจัดลำดับดังกล่าวจะมีกี่วิธี และเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

4.2 จากตัวเลขในข้อ 4.1 ถ้าจะจัดเรียงลำดับเป็นแถวตรงเพียงครั้งละ 3 ตัว จำนวนวิธีการจัดลำดับดังกล่าวจะมีกี่วิธี และเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

4.3 จากตัวเลขในข้อ 4.1 ถ้าจะจัดเรียงลำดับเป็นแถวตรงเพียงครั้งละ 4 ตัว, 5 ตัว และ 6 ตัวตามลำดับ จำนวนวิธีการจัดลำดับดังกล่าวจะมีกี่วิธี และเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

4.4 ถ้าเรามีสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ที่แตกต่างกัน และต้องการนำมาจัดลำดับเป็นแถวตรงเพียงครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$) จำนวนวิธีการจัดลำดับทั้งหมดจะมีกี่วิธี

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

จำนวนวิธีการจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง และต้องการนำมาจัดลำดับเพียงครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$) จะได้วิธีการจัดลำดับที่แตกต่างกันเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ ซึ่งเราแทนด้วยสัญลักษณ์ $P_{n,r}$ หรืออาจใช้แบบอื่น ๆ ก็ได้ เช่น nPr , nP_r , $P(n,r)$

6. ครูแจกโจทย์ต่อไปนี้ ให้นักเรียนทำในชั่วโมงเรียนใช้เวลาประมาณ 10 นาที

นักเรียนชาย 6 คนและนักเรียนหญิง 6 คน ยืนเรียงแถวทั้งหมดได้กี่วิธี
ถ้า ก. ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม
ข. นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับที่กัน
ค. นักเรียนชายและนักเรียนหญิงยืนสลับที่กัน โดยจัดนักเรียนชายเพียงครั้งละ 2 คน และนักเรียนหญิงเพียงครั้งละ 2 คน

แล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยวิธีทำ นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

ตอนที่ 5 - 6

เรื่อง การจัดลำดับสิ่งของที่มีบางอย่างเหมือนกัน

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ คำนวณหาจำนวนวิธีของการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด โดยที่ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนสิ่งของที่เหมือนกันในกลุ่มที่หนึ่ง, กลุ่มที่สอง, กลุ่มที่สาม, ..., กลุ่มที่ k ตามลำดับ และ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ ได้

เนื้อหา

กฎข้อที่ 5 จำนวนวิธีของการจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดโดยที่ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ เป็นจำนวนสิ่งของที่เหมือนกันในกลุ่มที่หนึ่ง, กลุ่มที่สอง, กลุ่มที่สาม, ..., กลุ่มที่ k ตามลำดับ และ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

กิจกรรมการสอน

1. ครูทบทวนความรู้ที่นักเรียนเรื่อง แฟคทอเรียล และการจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยการแจกกระดาษคำถามดังต่อไปนี้ ให้นักเรียนตอบ ใช้เวลา 15 นาที ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

1. $5!$ มีค่าเท่ากับ
2. $3! \times 4!$ มีค่าเท่ากับ
3. $\frac{10!}{8!}$ มีค่าเท่ากับ
4. 5×4 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้เท่ากับ ...
5. $8 \times 9 \times 10$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้เท่ากับ
6. $P_{3,3} = \dots\dots\dots$
7. $P_{5,1} = \dots\dots\dots$
8. $P_{n,2} = \dots\dots\dots$

2. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้ ให้นักเรียนตอบในกระดาษของตนเอง

- 2.1 ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 2 แผ่น และสีขาว 1 แผ่น จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงได้กี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้อย่างไร
- 2.2 ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 3 แผ่น และสีขาว 1 แผ่น จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงได้กี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้อย่างไร
- 2.3 ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 4 แผ่น และสีขาว 1 แผ่น จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงได้กี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้อย่างไร
- 2.4 ถ้ามีกระดาษรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 5 แผ่น และสีขาว 1 แผ่น จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงได้กี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้อย่างไร

2.5 ดังนั้น ถ้ากำหนดกระดาดรูปสี่เหลี่ยมสีแดง n แผ่น และสีขาว 1 แผ่น จะมีวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้อย่างไร

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

จำนวนวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงของสิ่งของที่เหมือนกัน n สิ่ง และ 1 สิ่ง ที่แตกต่างจาก n สิ่งนั้น จะมีค่าเท่ากับ $n+1$ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลได้เท่ากับ $\frac{(n+1)!}{n!}$ วิธี

4. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 3 - 4 คน ครูตั้งคำถามต่อไปนี้ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบในกระดาดคำตอบ

4.1 ถ้ามีกระดาดรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 2 แผ่น และสีขาว 2 แผ่น นำมาจัดลำดับเป็นแถวตรงจะได้ทั้งหมดกี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระดาดทั้งหมด 4 แผ่น, จำนวนของกระดาดสีแดง 2 แผ่น และจำนวนของกระดาดสีขาว 2 แผ่น

4.2 ถ้ามีกระดาดรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 3 แผ่น และสีขาว 2 แผ่น จะจัดลำดับเป็นแถวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี และเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระดาดทั้งหมด 5 แผ่น, จำนวนกระดาดสีแดง 3 แผ่น และจำนวนของกระดาดสีขาว 2 แผ่น ได้อย่างไร

4.3 ถ้ามีกระดาดรูปสี่เหลี่ยมสีแดง 2 แผ่น และสีขาว 3 แผ่น จะจัดลำดับเป็นแถวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี และเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระดาดทั้งหมด 5 แผ่น, จำนวนกระดาดสีแดง 2 แผ่น และจำนวนของกระดาดสีขาว 3 แผ่น ได้อย่างไร

4.4 ในทำนองเดียวกันถ้ามีกระดาดสีแดง 2 แผ่น, สีขาว 2 แผ่น และสีน้ำเงิน 2 แผ่น จะจัดลำดับเป็นแถวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียล

ที่เป็นความสัมพันธ์ของจำนวนกระดามทั้งหมด และจำนวนกระดามที่เหมือนกันในแต่ละกลุ่ม
ได้อย่างไร

4.5 ดังนั้น ถ้าเรามีสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง โดยมีจำนวนสิ่งของที่เหมือนกัน
ในแต่ละกลุ่มดังนี้ ในกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของที่เหมือนกัน n_1 สิ่ง, ในกลุ่มที่ 2 มีสิ่งของที่เหมือน
กัน n_2 สิ่ง, ในกลุ่มที่ 3 มีสิ่งของที่เหมือนกัน n_3 สิ่ง, ... , และในกลุ่มที่ k มีสิ่งของ
ที่เหมือนกัน n_k สิ่ง จะจัดลำดับเป็นแถวตรงที่แตกต่างกันทั้งหมดได้กี่วิธี

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

จำนวนวิธีของการจัดลำดับสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง โดยมีจำนวน
สิ่งของที่เหมือนกันในแต่ละกลุ่มดังนี้ ในกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของเหมือนกัน n_1
สิ่ง, ในกลุ่มที่ 2 มีสิ่งของที่เหมือนกัน n_2 สิ่ง, ในกลุ่มที่ 3 มีสิ่งของที่
เหมือนกัน n_3 สิ่ง, ... , และในกลุ่มที่ k มีสิ่งของที่เหมือนกัน
 n_k สิ่ง จะมีค่าเท่ากับ
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}$$
 วิธี

6. ครูแจกโจทย์ต่อไปนี้ให้นักเรียนทำในชั่วโมงเรียน 10 นาที แล้วครูและ
นักเรียนร่วมกันเฉลยวิธีทำ นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

จงหาจำนวนวิธีการจัดลำดับเป็นแถวตรงของกล่องสีแดง 5 ใบ, สีน้ำเงิน
3 ใบ และสีขาว 2 ใบ

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

ตอนที่ 7 - 8

เรื่อง การจัดลำดับเป็นวงกลม

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถคำนวณหาจำนวนวิธีการจัดลำดับ
สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็นวงกลมได้

เนื้อหา

กฎข้อที่ 6 จำนวนวิธีการจัดลำดับของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็น
วงกลมจะเท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

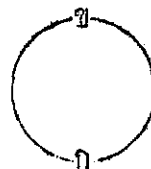
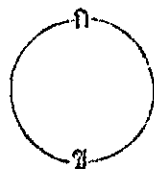
กิจกรรมการสอน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่อง แฟกทอเรียลและการจัดลำดับ โดยให้นักเรียนทำข้อทดสอบต่อไปนี้

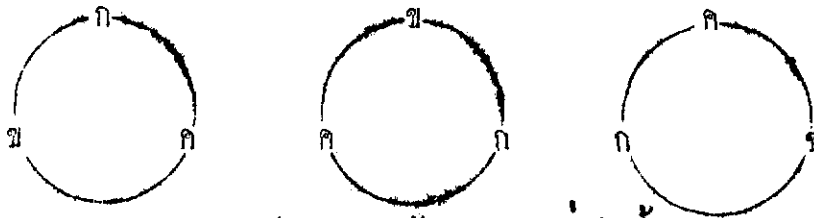
1. จงหาค่าของ $3!$
2. จงหาค่าของ $5!$
3. จงหาค่าของ $8!$
4. จงหาค่าของ $5! \times 8!$
5. จงหาค่าของ $\frac{3! \times 7!}{6!}$
6. $2 \times 3 \times 4$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร
7. $n(n-1)(n-2)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร
8. จงหาค่าของ $P_{2,2}$
9. จงหาค่าของ $P_{5,5}$
10. จงหาค่าของ $P_{n,n}$

2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 3 - 4 คน แล้วให้นักเรียนภายในกลุ่มช่วยกันตอบในกระดาษคำตอบของตน

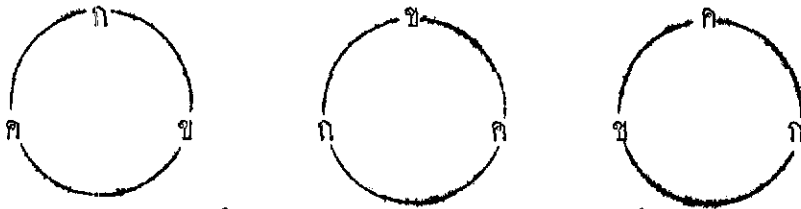
2.1 การจัดลำดับเป็นวงกลม ทั้ง 2 แบบ ต่อไปนี้ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



2.2 การจัดลำดับเป็นวงกลม ทั้ง 3 แบบ ต่อไปนี้ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



2.3 การจัดลำดับเป็นวงกลม ทั้ง 3 แบบ ต่อไปนี้ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

การจัดลำดับเป็นวงกลม จะต้องจัดให้สิ่งของสิ่งหนึ่งเป็นหลักจะวางไว้ตำแหน่งไหนก็ได้ แล้วนำอักษรที่เหลือนั้นมาจัดลำดับเป็นแนวเส้นตรงในลักษณะที่ทวนเข็มนาฬิกา หรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้อย่างใดอย่างหนึ่ง

4. ครูตั้งคำถามต่อไปนี้ ให้นักเรียนตอบในกระดานคำตอบของตน

4.1 ถ้ากำหนดอักษร ก และ ข จะจัดลำดับเป็นวงกลมได้กี่วิธี อย่างไรบ้าง และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจำนวนอักษรทั้ง 2 ตัว ได้อย่างไร

4.2 ถ้ากำหนดอักษร ก, ข และ ค จะจัดลำดับเป็นวงกลมได้กี่วิธี อย่างไรบ้าง และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจำนวนอักษรทั้ง 3 ตัว ได้อย่างไร

4.3 ถ้ากำหนดอักษร ก, ข, ค และ ง จะจัดลำดับเป็นวงกลมได้กี่วิธี อย่างไรบ้าง และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจำนวนอักษรทั้ง 4 ตัว ได้อย่างไร

4.4 ถ้ากำหนดอักษร ก, ข, ค, ง และ จ จะจัดลำดับเป็นวงกลมได้กี่วิธี และ

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียล ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจำนวนอักษรถึง 5 ตัว ใด
อย่างไร

4.5 กำหนดอักษร n ตัว น่าจะจัดลำดับเป็นวงกลมใดก็วิธี

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

จำนวนวิธีการจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เป็นวงกลมจะ
เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

6. ครูแจกโจทย์ดังต่อไปนี้ แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีทำในชั่วโมงเรียนใช้เวลา
ประมาณ 15 นาที

1. มีวิธีจัดลำดับให้แขกรับเชิญ 5 คน นั่งรับประทานอาหาร
รอบโต๊ะกลมซึ่งมี 5 ที่นั่ง ใดทั้งหมดก็วิธี
2. จัดให้เด็ก 6 คน ยืนเป็นวงกลม ใดก็วิธี โดยที่กำหนดให้
เด็ก 2 คน ในกลุ่มนั้น ยืนติดกันเสมอ
3. จัดให้ชาย 4 คน และหญิง 4 คน ยืนสลับกันเป็นวงกลม
ใดก็วิธี

แล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยวิธีทำ

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

คาบที่ 9 - 10

เรื่อง การจัดหมู่

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของการจัดหมู่ได้
2. คำนวณหาจำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) ได้
3. แก่สมการที่มีค่าของ $P_{n,r}$ และ $C_{n,r}$ ได้ เช่น จงแก้สมการ
 $P_{n,2} = 3C_{n,4}$

เนื้อหา

นิยาม การจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง ($r \leq n$) คือ การหาับเซตที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัว ตามที่กำหนดให้

กฎข้อที่ 7 จำนวนวิธีที่จะจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง ให้มีหมู่ละ r สิ่ง ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$

จำนวนวิธีที่จะจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง จะเท่ากับจำนวนวิธีที่จะจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ $n-r$ สิ่ง นั่นคือ $C_{n,r} = C_{n,n-r}$

กิจกรรมการสอน

1. ครูแจกคำถามต่อไปนี้ให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง

1.1 กำหนดให้ $A = \{ก, ข, ค\}$ จงหาสับเซตทั้งหมดของ A ซึ่งมีสมาชิกเพียง 2 ตัว

1.2 จากอักษร ก, ข และ ค เราสามารถจัดหมู่อักษรมาคราวละ 2 ตัว ได้อย่างไรบ้าง โดยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่ง เช่น กข และ ขก ถือว่าเป็นการเลือกวิธีเดียวกัน

1.3 กำหนดให้ $B = \{ก, ข, ค, ง\}$ จงหาสับเซตทั้งหมดของ B ซึ่งมีสมาชิกเพียง 3 ตัว

1.4 จากอักษร ก, ข, ค และ ง เราสามารถจัดหมู่มาคราวละ 3 ตัว ได้อย่างไรบ้าง โดยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่ง

1.5 กำหนดให้ $C = \{ก, ข, ค, ง, จ\}$ จงหาสับเซตทั้งหมดของ C ซึ่งมีสมาชิกเพียง 3 ตัว

1.6 จากอักษร ก, ข, ค, ง และ จ เราสามารถจัดหมู่มาคราวละ 3 ตัว ได้อย่างไรบ้าง โดยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่ง

1.7 การจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง ($r \leq n$) หมายความว่าอย่างไร

2. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ และสรุปให้ได้ว่า

การจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ r สิ่ง ($r \leq n$) คือการหาสับเซตที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัว ตามที่กำหนดให้

3. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 3 - 4 คน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตอบในกระดาษคำตอบ

3.1 กำหนดอักษร ก, ข และ ค เราสามารถจัดลำดับคราวละ 2 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีของการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีการจัดลำดับ

3.2 กำหนดอักษร ก, ข, ค และ ง เราสามารถจัดลำดับคราวละ 2 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีของการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีการจัดลำดับ

3.3 กำหนดอักษร ก, ข, ค และ ง เราสามารถจัดลำดับคราวละ 3 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีของการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีการจัดลำดับ

3.4 กำหนดอักษร ก, ข, ค และ ง เราสามารถจัดลำดับคราวละ 4 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีของการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีการจัดลำดับ

3.5 กำหนดอักษร ก, ข, ค และ ง เราสามารถจัดลำดับคราวละ 2 ตัว ได้กี่วิธี, และจงเขียนจำนวนวิธีการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีของการจัดลำดับ

3.6 กำหนดอักษร ก, ข, ค, ง และ จ เราสามารถจัดลำดับคราวละ 3 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีของการจัดลำดับ

3.7 กำหนดอักษร ก, ข, ค, ง และ จ เราสามารถจัดลำดับคราวละ 4 ตัว ได้กี่วิธี, จัดหมู่ได้กี่วิธี และจงเขียนจำนวนวิธีการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีของการจัดลำดับ

3.8 กำหนดอักษร ก, ข, ค, ง และ จ เราสามารถจัดลำดับคราวละ 5 ตัว ได้กี่วิธี, และจงเขียนจำนวนวิธีการจัดหมู่ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีของการจัดลำดับ

3.9 กำหนดอักษรทั้งหมด n ตัว เราสามารถจัดลำดับคราวละ r ตัว ($r \leq n$) ได้กี่วิธี และนำจะจัดหมู่ได้ทั้งหมดกี่วิธี

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และสรุปให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} & \text{จำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน } n \text{ สิ่ง โดยให้มีหมู่ละ } r \\ & \text{สิ่ง } (r \leq n) \text{ เท่ากับ } \frac{P_{n,r}}{r!} \text{ หรือ } \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \text{ ซึ่งเราแทนจำนวนวิธีการจัดหมู่ดังกล่าวด้วย } C_{n,r} \text{ หรือ } \binom{n}{r} \text{ ดังนั้น } C_{n,r} \\ & = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \end{aligned}$$

5. ครูแจกโจทย์ต่อไปนี้ให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของนักเรียน

จงหาค่าดังต่อไปนี้

5.1 $C_{3,2}$ และ $C_{3,1}$

5.2 $C_{5,3}$ และ $C_{5,2}$

5.3 $C_{6,2}$ และ $C_{6,4}$

5.4 $C_{7,6}$ และ $C_{7,1}$

5.5 $C_{7,5}$ และ $C_{7,2}$

5.6 $C_{n,r}$ และ $C_{n,n-r}$

6. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยคำตอบ และสรุปให้ได้ว่า

$$C_{n,r} = C_{n,n-r}$$

7. ให้นักเรียนทำโจทย์ต่อไปนี้ ในชั่วโมงเรียนใช้เวลาประมาณ 10 นาที

1 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกหยิบสลาก 5 ชิ้น จากสลากที่มีอยู่ทั้งหมด 12 ชิ้น

2 ในชั้นเรียนชั้นหนึ่งมีนักเรียนชาย 15 คน นักเรียนหญิง 10 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ครูจะเลือกกรรมการชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย นักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 2 คน

แล้วครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยวิธีทำ นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. กระจาย $(a+b)^n$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้
2. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ใด ๆ ในการกระจาย $(a+b)^n$ ได้
3. คำนวณหาพจน์ทั่วไปในการกระจาย $(a+b)^n$ ได้
4. คำนวณค่าโดยประมาณของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นเลขทศนิยม เช่น $(1.98)^6$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้

เนื้อหา

ทฤษฎีบททวินาม เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$(a+b)^n = a^n + C_{n,1}a^{n-1}b + C_{n,2}a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n,r}a^{n-r}b^r + \dots + C_{n,n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$C_{n,r}$ ที่อยู่ในทฤษฎีบททวินาม เราเรียกว่า "สัมประสิทธิ์ทวินาม" (binomial coefficient)

พจน์ทั่วไปในการกระจาย $(a+b)^n$ คือ พจน์ที่ $r+1$ ซึ่งเท่ากับ $C_{n,r}a^{n-r}b^r$

กิจกรรมการสอน

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยการให้นักเรียนทำโจทย์ดังต่อไปนี้ ในกระดาษของนักเรียน

ถ้ากำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงกระจายค่าต่อไปนี้

1 $(a+b)^2$

2 $(a+b)^3$

3 $(a+b)^4$

4 $(a+b)^5$

2. ครูเฉลยคำตอบบนกระดานคำ แล้วให้นักเรียนตรวจคำตอบของตนเอง
3. ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบปากเปล่า ดังต่อไปนี้
 - 3.1 จากคำตอบข้างต้น สามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างเลขชี้กำลังของ $(a+b)$ กับจำนวนเทอมทั้งหมดได้อย่างไร
 - 3.2 กำลังสูงสุดของ a และ b มีความสัมพันธ์อย่างไรกับเลขชี้กำลังของ $(a+b)$
 - 3.3 เลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์มีลักษณะอย่างไร
 - 3.4 ผลบวกเลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับเลขชี้กำลังของ $(a+b)$
4. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้แล้วให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง
 - 4.1 สัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(a+b)^3$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^2$
 - 4.2 สัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(a+b)^4$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^3$

4.3 สัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(a+b)^5$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับ
สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^6$

4.4 ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจาย $(a+b)^6$ และ $(a+b)^7$
จะมีค่าเท่ากับเท่าไร

4.5 สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจาย $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4$
และ $(a+b)^5$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบ และช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ มีลักษณะดังนี้คือ

สัมประสิทธิ์ของ	$(a+b)^1$	คือ	1	1				
สัมประสิทธิ์ของ	$(a+b)^2$	คือ	1	2	1			
สัมประสิทธิ์ของ	$(a+b)^3$	คือ	1	3	3	1		
สัมประสิทธิ์ของ	$(a+b)^4$	คือ	1	4	6	4	1	
สัมประสิทธิ์ของ	$(a+b)^5$	คือ	1	5	10	10	5	1

แล้วครูบอกนักเรียนว่า สัมประสิทธิ์ทั้งหมดนำมาเขียนแล้วจะอยู่ในรูปคล้ายกับ
สามเหลี่ยมและถ้าเพิ่ม 1 ตรงยอด ก็จะเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ 1 หมายถึง $(a+b)^0$
นั่นเอง และจำนวนทั้งหมดเหล่านี้เราเรียกว่า "สามเหลี่ยมของปาสกาล" (Pascal's
Triangle)

6. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 3 - 4 คน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มย่อย
ช่วยกันตอบในกระดานคำตอบของตน

6.1 จากสัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^2$ สามารถเขียน
ให้อยู่ในรูปของจำนวนวิธีการจัดหมู่ $C_{n,r}$ โดยที่ n หมายถึง เลขชี้กำลังของ $(a+b)$
และ r เป็นเลขชี้กำลังของ b ในแต่ละพจน์ได้อย่างไร

6.2 จงเขียนสัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^3$ ในรูปของ $C_{n,r}$

6.3 จงเขียนสัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^4$ ในรูปของ $C_{n,r}$

6.4 จงเขียนสัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^5$ ในรูปของ $C_{n,r}$

6.5 จงเขียนสัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ ในรูปของ $C_{n,r}$

7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผล และช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

สัมประสิทธิ์ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ คือ $C_{n,0}, C_{n,1}, C_{n,2}, C_{n,3}, \dots, C_{n,n-1}, C_{n,n}$

8. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้ ให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง

8.1 การกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ มีพจน์ทั้งหมดกี่เทอม

8.2 ผลบวกของเลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์มีค่าเท่ากับเท่าไร

8.3 พจน์ที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^n$ จะมีพจน์ของอะไรบ้าง

8.4 สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์มีค่าเท่ากับเท่าไร

8.5 ดังนั้น $(a+b)^n$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

9. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย และช่วยกันสรุปให้ได้ว่า

ทฤษฎีบททวินาม เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ $(a+b)^n = a^n + C_{n,1}a^{n-1}b + C_{n,2}a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n,r}a^{n-r}b^r + \dots + C_{n,n-1}ab^{n-1} + b^n$

10. ครูตั้งคำถามดังต่อไปนี้ให้นักเรียนตอบในกระดาษคำตอบของตนเอง.

10.1 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่หนึ่ง มีค่าเท่ากับเท่าไร

10.2 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่สอง มีค่าเท่ากับเท่าไร

10.3 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่สาม มีค่าเท่ากับเท่าไร

10.4 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่สี่ มีค่าเท่ากับเท่าไร

10.5 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่ r มีค่าเท่ากับเท่าไร

10.6 จากการกระจาย $(a+b)^n$ พจน์ที่ $r+1$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

11. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยบนกระดานดำ และสรุปให้ได้ว่า

พจน์ที่ $r+1$ ของการกระจาย เท่ากับ $C_{n,r} a^{n-r} b^r$

12. ให้นักเรียนทำโจทย์ต่อไปนี้ในชั่วโมงเรียนใช้เวลาประมาณ 10 นาที

1 จงกระจาย $(2x+1)^5$

2 จงหาเทอมที่ 4 ของการกระจาย $(2+\frac{x}{4})^6$

3 จงหาเทอมกลางของการกระจาย $(y^2 - \frac{1}{2})^8$

13. ครูเฉลยคำตอบบนกระดานดำ ให้นักเรียนประเมินผลด้วยตนเอง

14. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน
การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ
และการสอนแบบปกติ

บทคัดย่อ

ของ

อุบล กุดองกระโทก

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ธันวาคม 2526

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้จากการสอนโดยใช้ หน่วยการเรียนรู้ การสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และการสอนแบบปกติ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสีคิ้ว "สวัสดิ์ถาวรวิทยา" อำเภอสีคิ้ว จังหวัดนครราชสีมา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525 จำนวน 3 กลุ่ม กลุ่มละ 30 คน นักเรียนในกลุ่มทดลองที่ 1 ได้รับการสอนโดยใช้ หน่วยการเรียนรู้ การสอน กลุ่มทดลองที่ 2 ได้รับการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบปกติ ทั้งสามกลุ่มนี้เรียนเนื้อหาอย่างเดียวกันเรื่อง การจัดลำดับและการจัดหมู่เป็นเวลา 12 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการทดลอง แล้วทดสอบนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ปรากฏดังนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้กับการสอนแบบปกติแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนจากการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ กับ การสอนแบบปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้กับการสอนแบบค้นพบโดยการถาม - ตอบ ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

COMPARISON OF MATHAYOM SUKSA 5 STUDENTS' LEARNING ACHIEVEMENT ON
PERMUTATION AND COMBINATION BY USING INSTRUCTIONAL MODULE
QUESTION-ANSWERED DISCOVERY AND CONVENTIONAL TEACHING

AN ABSTRACT

BY

UBOL KLONGKRATOKE

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
February 1983

The purpose of this study was to compare mathayom suksa 5 students' learning achievement in permutation and combination by using instructional module, question - answered discovery and conventional teaching.

The subjects consisted of 90 mathayom suksa 5 students of Sikua "Sawatpadungvittaya" School, Amphor Sikua, Changwat Nakorn-rajsima in the first semester of the acadamic year 1982. The subjects were randomly divided into three groups as the first experimental group, the second experimental group and the controlled group. Each group consisted of 30 students. The first experimental group was taught by using the instructional module produced by the researcher. The second experimental group was taught by question - answered discovery and the controlled group was taught by conventional teaching. Three groups were taught the same content in permutation and combination for 12 periods, 50 minutes per period. An achievement test on permutation and combination constructed by the researcher was taken at the end of the experiment.

The results of this study were as follows:

1. The students' learning achievement on permutation and combination taught by using the instructional module and conventional teaching was different at the significant level of .01.

2. The students' learning achievement on permutation and combination taught by question - answered discovery and conventional teaching was different at the significant level of .01.

3. The students' learning achievement on permutation and combination of two groups taught by using the instructional module and question - answered discovery was not different at the significant level of .05.