

คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์

FINANCIAL MATHEMATICS

with Applications

PRESENT VALUE

$$PV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

EFFICIENT FRONTIER

Maximize $E(R_p)$

Minimize σ_p^2

RISK & RETURN

$E(R_p)$

YIELD CURVE

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



ได้รับทุนสนับสนุนการเขียนตำราจาก
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2568

คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์

Financial Mathematics with Applications

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

เผยแพร่ครั้งที่ 2 ปี 2569

คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์

Financial Mathematics with Applications

ชื่อเรื่อง

คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์

ผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

เผยแพร่ครั้งที่

2 ปี 2569

การเผยแพร่

เผยแพร่เป็นวิทยาทาน ไม่จัดจำหน่าย

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

ตำราเล่มนี้จัดทำและเผยแพร่โดยไม่คิดค่าใช้จ่ายเพื่อเป็นวิทยาทาน ผู้เขียนอนุญาตให้เผยแพร่หรือส่งต่อเพื่อการ
ศึกษาและประโยชน์ทางวิชาการ โดยไม่แสวงหาผลประโยชน์เชิงพาณิชย์ ทั้งนี้ควรระบุชื่อผู้เขียนและแหล่งที่มาให้
ชัดเจน ห้ามดัดแปลงเนื้อหา นำไปจัดจำหน่าย หรือใช้เพื่อประโยชน์เชิงพาณิชย์ เว้นแต่จะได้รับอนุญาตเป็นลาย
ลักษณ์อักษรจากเจ้าของลิขสิทธิ์

ISBN (e-book)

978-616-637-399-8

จัดทำโดย

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คำอุทิศ

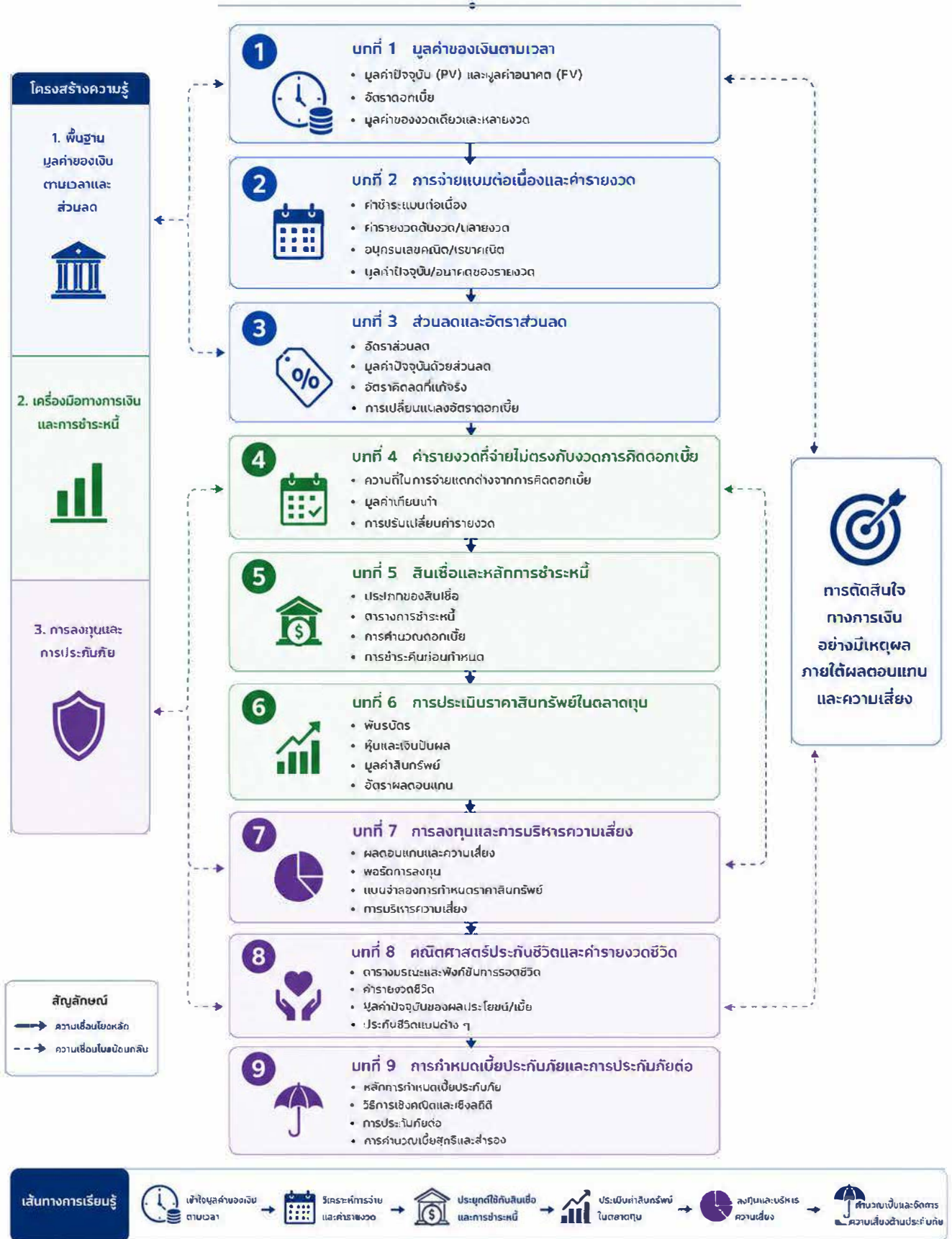
ขอน้อมอุทิศบุญกุศลอันเกิดจากการจัดทำและเผยแพร่ตำราเล่มนี้เป็น
วิทยาทาน

แต่ปิตามารดา ครูบาอาจารย์ ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ตลอดจนสรรพสัตว์ทั้งหลาย

ขอให้ทุกท่านได้มีส่วนในบุญกุศลนี้โดยทั่วกัน

แผนภาพเชื่อมโยงความรู้ของตำรา คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์ (9 บท)



รูปที่ 1.1 แผนภาพเชื่อมโยงความรู้ของตำรา คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์ (9 บท)

คำนำ

ตำรา คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์ (Financial Mathematics with Applications) เล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์และเครื่องมือทางคณิตศาสตร์การเงิน อย่างเป็นระบบ โดยมุ่งเชื่อมโยงหลักการทางคณิตศาสตร์เข้ากับปัญหาทางการเงิน การลงทุน และการประกันภัย เพื่อให้ผู้อ่านสามารถเข้าใจทั้งที่มาของสูตร เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ และแนวทางการนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างเหมาะสม

เนื้อหาของตำราครอบคลุมตั้งแต่แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับมูลค่าของเงินตามเวลา อัตราดอกเบี้ย การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด ส่วนลดและอัตราส่วนลด ค่ารายงวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย สินเชื่อและหลักการชำระหนี้ ไปจนถึงการประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต ตลอดจนการประยุกต์คณิตศาสตร์การเงินกับการกำหนดเบี้ยประกันภัย และการประกันภัยต่อ ทั้งนี้ ผู้เขียนได้พยายามจัดลำดับเนื้อหาจากพื้นฐานไปสู่หัวข้อที่ซับซ้อนขึ้น เพื่อให้แต่ละบทเชื่อมโยงต่อเนื่อง และสามารถนำความรู้จากบทก่อนหน้าไปใช้ในบทถัดไปได้

ในการปรับปรุงตำราฉบับนี้ ผู้เขียนได้ทบทวนเนื้อหา สมการ ตัวอย่าง แบบฝึกหัด และการใช้สัญลักษณ์ให้มีความสอดคล้องกันมากขึ้น พร้อมเพิ่มเติมแผนภาพกระแสเงินสด ตาราง กราฟ ตัวอย่างเชิงตัวเลข กรณีศึกษา และแนวทางการประยุกต์ใช้ เพื่อช่วยให้ผู้อ่านมองเห็นความสัมพันธ์ ระหว่างทฤษฎีกับสถานการณ์จริงได้ชัดเจนยิ่งขึ้น นอกจากนี้ยังได้จัดทำสารบัญรูป สารบัญตาราง รายการสัญลักษณ์และคำย่อ เฉลยแบบฝึกหัดเฉพาะคำตอบ บรรณานุกรม และดัชนี เพื่อให้ตำราเหมาะสำหรับการเรียนการสอน การศึกษาดด้วยตนเอง และการใช้เป็นเอกสารอ้างอิงเบื้องต้น

ตำราเล่มนี้เหมาะสำหรับนักศึกษาและผู้สนใจด้านคณิตศาสตร์ สถิติ วิทยาการประกันภัย การเงิน การลงทุน และสาขาที่เกี่ยวข้อง ผู้เขียนหวังว่าผู้อ่านจะไม่เพียงสามารถใช้สูตรในการคำนวณได้ แต่จะเข้าใจหลักคิดเบื้องหลังเห็นข้อสมมติและข้อจำกัดของแบบจำลอง และสามารถเลือกใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์การเงินให้สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการศึกษา

ผู้เขียนขอขอบคุณมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์สำหรับการสนับสนุนการจัดทำตำรา ตลอดจนคณาจารย์ นักศึกษา เพื่อนร่วมวิชาชีพ และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่าน ที่ได้ให้ข้อคิดเห็นและประสบการณ์อันเป็นประโยชน์ต่อการเรียบเรียงและปรับปรุงเนื้อหา ตำราเล่มนี้จัดทำและเผยแพร่โดยไม่คิดค่าใช้จ่ายเพื่อเป็นวิทยาทาน โดยหวังว่าจะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาและการพัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์การเงินในวงกว้าง

แม้ผู้เขียนจะได้ตรวจสอบและปรับปรุงเนื้อหาอย่างรอบคอบ แต่ความคลาดเคลื่อนหรือข้อบกพร่องอาจยังมีอยู่ หากผู้อ่านพบข้อผิดพลาดหรือมีข้อเสนอแนะประการใด ผู้เขียนยินดีน้อมรับไว้เพื่อใช้ในการปรับปรุงตำราให้มีความ

ถูกต้องและสมบูรณ์ยิ่งขึ้นในโอกาสต่อไป

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

พ.ศ. 2568

สารบัญ

คำนำ	v
สารบัญรูป	xxii
สารบัญตาราง	xxviii
รายการสัญลักษณ์และคำย่อ	xxix
1 มูลค่าของเงินตามเวลา	1
บทนำ	1
1.1 อัตราดอกเบี้ย	1
1.1.1 การหาจำนวนเงินที่มีทั้งอัตราการเพิ่มและอัตราการลดลง	1
1.1.2 อัตราดอกเบี้ย	3
1.1.3 ประเภทของดอกเบี้ย	4
ดอกเบี้ยเชิงเดียว	4
1.1.4 ฟังก์ชันสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว	5
ดอกเบี้ยทบต้น	7
1.1.5 อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวเทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยทบต้น	13
1.2 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต	14
1.3 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามและกำลังดอกเบี้ย	18
1.4 อัตราเงินเฟ้อและเงินฝืด	30
1.4.1 ภาวะเงินเฟ้อ	30
1.4.2 ภาวะเงินฝืด	33

1.4.3	การวัดค่าของเงิน	34
1.4.4	อัตราจริงของดอกเบี้ย	36
	บทสรุปท้ายบทที่ 1	39
	เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 1	40
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	41
2	การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด	51
	บทนำ	51
2.1	แบบจำลองการจ่ายแบบต่อเนื่อง	51
2.2	ค่ารายงวด	56
2.2.1	ค่ารายงวดจ่ายต้นงวด	56
2.2.2	ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด	60
2.2.3	ค่ารายงวดจ่ายต่อเนื่อง	66
2.2.4	ค่ารายงวดจ่ายตลอดไป	69
2.2.5	ค่ารายงวดจ่ายแปรเปลี่ยน	72
2.2.5.1	การจ่ายเพิ่มขึ้นและลดลงด้วยลำดับเลขคณิต	72
2.2.5.2	การจ่ายเพิ่มขึ้นและลดลงด้วยอัตราคงที่	77
2.3	ค่ารายงวดอัตราราบ	80
2.4	การประยุกต์การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด	84
2.4.1	การวางแผนเกษียณอายุ	84
2.4.2	การคำนวณเงินผ่อนชำระ	89
2.4.3	การประเมินมูลค่าโครงการลงทุน	89
2.4.4	การออมเงินเพื่อเป้าหมายเฉพาะ	91
	บทสรุปท้ายบทที่ 2	91
	เอกสารอ้างอิง	92

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	93
3 ส่วนลดและอัตราส่วนลด	101
บทนำ	101
3.1 ส่วนลดและอัตราส่วนลด	102
3.2 ประเภทของอัตราส่วนลด	103
3.2.1 อัตราส่วนลดเชิงเดียว	103
3.2.2 อัตราส่วนลดทบต้น	105
3.3 อัตราส่วนลดเพียงในนาม	108
3.4 วิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน	117
3.5 การประยุกต์ใช้ส่วนลดและอัตราส่วนลดในทางปฏิบัติ	122
3.5.1 พันธบัตรแบบไม่มีคูปอง	123
3.5.2 พันธบัตรที่มีคูปอง	123
3.5.3 ข้อควรระวังเกี่ยวกับคำว่าอัตราคิดลด	124
3.5.4 การประเมินโครงการลงทุนด้วยมูลค่าปัจจุบันสุทธิ	124
3.5.5 สินเชื่อแบบหักส่วนลดล่วงหน้า	125
บทสรุปท้ายบทที่ 3	126
เอกสารอ้างอิง	126
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	128
4 ค่ายางวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย	133
บทนำ	133
4.1 ค่ายางวดที่จ่ายงวดแรกไม่เต็มคาบ	134
4.2 ค่ายางวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย	137
4.2.1 ค่ายางวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง	138
4.2.1.1 จ่ายต้นงวด	138

4.2.1.2	จ่ายปลายงวด	139
4.3	ค่ารายงวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย	142
4.4	ค่ารายงวดงวดสุดท้ายที่จ่ายไม่ปกติ	145
4.4.1	จ่ายต้นงวด	145
4.4.2	จ่ายปลายงวด	146
บทสรุปท้ายบทที่ 4		149
เอกสารอ้างอิง		150
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4		151
5	สินเชื่อและหลักการชำระหนี้	155
บทนำ		155
5.1	สินเชื่อและประเภทของสินเชื่อ	156
5.1.1	เหตุผลสำคัญของการกู้ยืม	156
5.1.2	การจำแนกประเภทของสินเชื่อ	157
5.1.2.1	จำแนกตามวัตถุประสงค์การใช้เงิน	157
5.1.2.2	จำแนกตามระยะเวลา	157
5.1.2.3	จำแนกตามหลักประกัน	158
5.1.2.4	จำแนกตามลักษณะของวงเงิน	158
5.1.2.5	จำแนกตามรูปแบบการชำระคืน	158
5.1.2.6	จำแนกตามคุณภาพหรือสถานะของสินเชื่อ	159
5.1.3	หนี้ที่ก่อให้เกิดรายได้และหนี้ที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้	159
5.2	หลักพื้นฐานของการชำระหนี้และการชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย	159
5.2.1	หลักพื้นฐานของการชำระหนี้	160
5.2.2	กระแสเงินสดการชำระหนี้	161
5.2.2.1	อัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงตามงวด	161

5.2.2.2	การปรับค่างวดเมื่ออัตราดอกเบี้ยลอยตัว	162
5.2.3	ตารางการชำระหนี้	163
5.2.4	การคำนวณหนี้คงเหลือ	164
5.2.4.1	วิธีมองไปข้างหน้า	165
5.2.4.2	วิธีมองย้อนหลัง	165
5.2.4.3	กรณีค่างวดคงที่	165
5.3	การชำระหนี้ด้วยวิธีเงินต้นสะสม	170
5.3.1	เงินสะสมในกองทุนและหนี้สุทธิ	171
5.3.2	ความสัมพันธ์กับวิธีตัดจ่าย	172
5.4	สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้	176
5.4.1	การประเมินมูลค่ากระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ	176
5.4.2	การตัดจำหน่ายหนี้และการตั้งค่าเผื่อ	177
5.4.2.1	การตัดจำหน่ายหนี้	177
5.4.2.2	ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตและ Coverage Ratio	178
5.5	การบริหารหนี้และการจัดการหนี้ให้มีประสิทธิภาพ	179
5.5.1	แนวทางสำคัญในการบริหารหนี้	179
5.5.2	ตัวชี้วัดความสามารถในการชำระหนี้	180
5.5.2.1	สัดส่วนภาระหนี้ต่อรายได้	180
5.5.2.2	อัตราส่วนความสามารถในการชำระดอกเบี้ย	180
5.5.2.3	อัตราส่วนความสามารถในการชำระหนี้ทั้งหมด	181
5.5.2.4	ประวัติเครดิตและพฤติกรรมกรรมการชำระหนี้	181
บทสรุปท้ายบทที่ 5		182
เอกสารอ้างอิง		183
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5		184

6	การประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน	189
	บทนำ	189
6.1	ความรู้พื้นฐาน ผลตอบแทน และการประเมินราคาตราสารทุน	190
6.1.1	ความหมาย บทบาท และกลไกของตราสารทุน	190
6.1.2	ประเภทของตราสารทุนและลำดับสิทธิเรียกร้อง	191
6.1.3	ความหมายของราคาและมูลค่าหุ้น	192
6.1.4	กำไรต่อหุ้น เงินปันผล และอัตราการเติบโตที่ยั่งยืน	193
6.1.5	เหตุการณ์ที่เปลี่ยนจำนวนหุ้นและราคาต่อหุ้น	196
6.1.5.1	เงินปันผลเงินสดและราคาหลังขึ้นเครื่องหมาย	197
6.1.5.2	การแตกหุ้นและหุ้นปันผล	197
6.1.5.3	การเพิ่มทุนแบบให้สิทธิผู้ถือหุ้นเดิม	203
6.1.6	ผลตอบแทนจากการลงทุนในตราสารทุน	204
6.1.7	หลักการประเมินราคาตราสารทุน	205
6.1.8	ตัวแบบคิดลดเงินปันผล	206
6.1.9	กรณีสำคัญของตัวแบบคิดลดเงินปันผล	207
6.1.9.1	เงินปันผลคงที่และถือครองจำกัด	207
6.1.9.2	ไม่มีเงินปันผลระหว่างถือครอง	207
6.1.9.3	ถือครองตลอดไป	208
6.1.9.4	เงินปันผลคงที่ตลอดไป	208
6.1.9.5	เงินปันผลเติบโตคงที่	208
6.1.9.6	ตัวแบบเงินปันผลหลายช่วง	209
6.2	ผลตอบแทนและการประเมินราคาตราสารหนี้	214
6.2.1	ราคาตราสารหนี้ ณ วันจ่ายคูปอง	215
6.2.1.1	สูตรพรีเมียม-ดิสเคานต์	216
6.2.1.2	สูตรมูลค่าพื้นฐาน	217

6.2.1.3	สูตรของเมกแฮม	217
6.2.1.4	ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง	218
6.2.2	ความถี่ของการจ่ายคูปองและฐานอัตราผลตอบแทน	219
6.2.3	มูลค่าตามบัญชีและการตัดจ่ายพรีเมียมหรือส่วนลด	222
6.2.4	ราคาตราสารหนี้ระหว่างวันจ่ายคูปอง	225
6.2.5	ตราสารหนี้ชุด	227
6.3	เวลาเทียบเท่า ดูเรชัน และความไวของราคาตราสารหนี้	228
6.3.1	เวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด	229
6.3.1.1	กรณีตราสารหนี้ไม่มีคูปอง	230
6.3.1.2	กรณีคูปองคงที่	230
6.3.2	เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด	232
6.3.3	ดูเรชันแมคคอกเลย์	233
6.3.3.1	ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง	233
6.3.3.2	ตราสารหนี้มีคูปองคงที่	234
6.3.3.3	เงินงวดคงที่ปลายงวด	234
6.3.4	ดูเรชันดัดแปลงและความไวอันดับหนึ่งของราคา	235
6.3.5	ผลของอัตราผลตอบแทนต่อดูเรชันแมคคอกเลย์	236
6.4	ความนูน การประมาณราคา และการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย	238
6.4.1	ความนูนของราคา	238
6.4.2	ดูเรชันและความนูนของพอร์ต	240
6.4.3	หลักการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย	241
6.4.3.1	ขั้นตอนวิธีสร้างพอร์ตภูมิคุ้มกัน	242
6.4.4	ข้อจำกัดของดูเรชันและความนูน	247
	บทสรุปท้ายบทที่ 6	248
	เอกสารอ้างอิง	249

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	250
7 การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง	257
บทนำ	257
7.1 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของการลงทุน	258
7.1.1 ราคา กระแสเงินสด และอัตราผลตอบแทน	258
7.1.2 การแปลงหน่วยเวลาและข้อจำกัดของกฎรากที่สอง	260
7.1.3 ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	261
7.1.4 ความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และค่าเบต้า	261
7.1.5 ความเสี่ยงขาลงและ Maximum Drawdown	263
7.2 กลยุทธ์การลงทุนและการทดสอบย้อนหลัง	277
7.2.1 ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่	277
7.2.2 Bollinger Bands และตัวชี้วัดความกว้างของแถบ	279
7.2.3 MACD และกฎสัญญาณ	280
7.2.4 ผลตอบแทนของกลยุทธ์และต้นทุนธุรกรรม	284
7.2.5 กรอบการทดสอบย้อนหลังที่เข้มงวด	285
7.3 การสร้างและบริหารพอร์ตการลงทุน	287
7.3.1 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต	287
7.3.2 พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุด	292
7.3.3 พอร์ตผลตอบแทนเป้าหมายและเส้นขอบประสิทธิภาพ	293
7.3.4 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและพอร์ตสัมผัส	294
7.3.5 ข้อจำกัดการขายชอร์ตและ Leverage	297
7.3.6 ความเสี่ยงจากการประมาณค่าและการปรับสมดุลพอร์ต	307
7.4 การวัดความเสี่ยงด้วย VaR และ CVaR	308
7.4.1 ตัวแปรผลขาดทุนและฟังก์ชันควอนไทล์	308

7.4.2	Expected Shortfall หรือ CVaR	309
7.4.3	วิธีพาราเมตริกภายใต้การแจกแจงปกติ	310
7.4.4	EWMA และความผันผวนที่เปลี่ยนตามเวลา	311
7.4.5	Historical Simulation และ Monte Carlo	311
7.4.6	การตรวจสอบ VaR ด้วยจำนวนข้อยกเว้น	312
7.4.7	Basel Traffic-Light Approach และข้อจำกัดในการตีความ	313
7.4.8	ข้อจำกัดของ VaR และ ES	313
7.5	การประเมินผลการลงทุนและการตัดสินใจ	322
7.5.1	เหตุผลของการปรับผลตอบแทนด้วยความเสี่ยง	323
7.5.2	CAPM: ผลตอบแทนที่ต้องการและความเสี่ยงเชิงระบบ	323
7.5.3	Capital Market Line และความเสี่ยงรวม	324
7.5.4	Sharpe Ratio	325
7.5.5	Security Market Line และผลตอบแทนตาม CAPM	325
7.5.6	Treynor Ratio	327
7.5.7	Jensen's Alpha และสมการถดถอย CAPM	327
7.5.8	ความสัมพันธ์ระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen	329
7.5.9	Appraisal Ratio และ Information Ratio	330
7.5.10	Sortino, M^2 และ Calmar Ratio	330
7.5.11	RAROC และเงินทุนทางเศรษฐกิจ	331
7.5.12	การตัดสินใจหลายมิติ	331
7.6	กรณีศึกษาจากงานวิจัยและแนวทางต่อยอด	341
7.6.1	กรณีศึกษาที่ 1: Bollinger Bands กับค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ทางเลือก	341
7.6.2	กรณีศึกษาที่ 2: พอร์ต Long-Short และกลยุทธ์ Cashless	341
7.6.3	กรณีศึกษาที่ 3: การจัดอันดับหุ้นธนาคารด้วย VaR และ CVaR	342
7.6.4	กรณีศึกษาที่ 4: MACD ที่ปรับปรุงและความไม่แน่นอนของสัญญาณ	342

7.6.5	ตัวอย่างบูรณาการ: เปรียบเทียบสามกลยุทธ์	343
7.6.6	กรอบการวิจัยที่ทำซ้ำได้	343
7.6.7	แนวทางต่อยอด	344
บทสรุปท้ายบทที่ 7		345
เอกสารอ้างอิง		345
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7		348
8	คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต	355
บทนำ		357
8.1	พื้นฐานความน่าจะเป็นและมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง	358
8.1.1	ปริภูมิความน่าจะเป็นและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	358
8.1.2	ตัวแปรสุ่มและการแจกแจง	359
8.1.3	ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และตัวแปรบ่งชี้	360
8.1.4	ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข	362
8.1.5	มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง	362
8.2	ความน่าจะเป็นของชีพ ตารางชีพ และฟังก์ชันสับเปลี่ยน	364
8.2.1	อายุขัยในอนาคตและฟังก์ชันการอยู่รอด	364
8.2.2	ตารางชีพและสัญลักษณ์พื้นฐาน	365
8.2.3	การอยู่รอดของบุคคลสองคน	368
8.2.4	ตัวแบบการอยู่รอดแบบต่อเนื่อง	369
8.2.5	อายุคาดหมาย	369
8.2.6	ฟังก์ชันสับเปลี่ยน	370
8.3	การประกันชีวิต ค่ารายงวดชีวิต และเบี้ยประกัน	372
8.3.1	ประเภทของผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตและโครงสร้างผลประโยชน์	373
8.3.2	ตัวแปรมูลค่าปัจจุบันและหลักสมมูล	374

8.3.3	ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง	376
8.3.4	ประกันชั่วระยะเวลา ตลอดชีพ และสะสมทรัพย์	379
8.3.4.1	ประกันชั่วระยะเวลา n ปี	379
8.3.4.2	ประกันตลอดชีพ	380
8.3.4.3	ประกันสะสมทรัพย์ n ปี	381
8.3.5	ค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ	385
8.3.5.1	ค่ารายงวดชีวิตปลายงวด	386
8.3.5.2	ค่ารายงวดชีวิตต้นงวด	387
8.3.5.3	ความสัมพันธ์ระหว่างประกันชีวิตกับค่ารายงวดชีวิต	388
8.3.6	ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย	393
8.3.6.1	ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อนจ่าย	393
8.3.6.2	ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อนจ่าย	394
8.3.7	ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว	397
8.3.7.1	ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว	397
8.3.7.2	ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว	398
8.3.7.3	การแยกค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ	398
8.3.7.4	ความสัมพันธ์กับประกันชีวิตชั่วระยะเวลา	399
8.3.8	ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่ายและชั่วคราว	402
8.3.9	มูลค่าสะสมของค่ารายงวดชีวิตชั่วคราว	402
8.3.10	การจ่ายค่ารายงวดหลายครั้งต่อปี	403
8.3.10.1	ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบจ่ายปีละ m ครั้ง	403
8.3.10.2	ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบจ่ายปีละ m ครั้ง	404
8.3.10.3	เหตุใดจึงต้องมีสมมติฐานการเสียชีวิตภายในปี	405
8.3.10.4	สมมติฐานการกระจายการเสียชีวิตสม่ำเสมอ	405
8.3.10.5	สมมติฐานกำลังมรณะคงที่	406

8.3.11	ผลประโยชน์แบบจ่ายต่อเนื่อง	413
8.3.12	เบี้ยประกันสุทธิแบบรายปี	414
8.3.13	ความแปรปรวนและการกระจายความเสี่ยง	415
8.3.13.1	การรวมกลุ่มความเสี่ยง	416
8.3.13.2	ข้อจำกัดของการกระจายความเสี่ยง	420
8.3.14	เบี้ยประกันขั้นต้นและข้อจำกัดของเบี้ยสุทธิ	421
8.3.14.1	สมการมูลค่าของเบี้ยประกันขั้นต้น	422
8.3.14.2	เหตุใดเบี้ยสุทธิจึงไม่เพียงพอสำหรับการกำหนดราคาจริง	425
8.3.15	ความเสี่ยงอายุยืน อัตราดอกเบี้ย และการกำหนดราคา	425
8.3.15.1	ความเสี่ยงอายุยืน	426
8.3.15.2	จากการกำหนดราคาสู่การบริหารสินทรัพย์และหนี้สิน	429
8.3.15.3	การวิเคราะห์ความไวในการกำหนดราคา	430
	บทสรุปท้ายบทที่ 8	431
	เอกสารอ้างอิง	432
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8	433
9	การประยุกต์คณิตศาสตร์การเงินกับการกำหนดเบี้ยประกันภัย	439
	บทนำ	439
9.1	พื้นฐานการกำหนดเบี้ยประกันภัย มูลค่าปัจจุบันสุทธิ และอัตราผลตอบแทนภายใน	440
9.1.1	ความหมายและประเภทของการประกันภัย	440
9.1.2	สมการพื้นฐานของการกำหนดอัตรา	441
9.1.3	มูลค่าปัจจุบันสุทธิ	441
9.1.4	อัตราผลตอบแทนภายใน	444
9.1.5	การคำนวณ IRR ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน	445
9.2	ตัวแบบกระแสเงินสด Myers-Cohn และเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม	447

9.2.1	แนวคิดของเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม	447
9.2.2	สัญลักษณ์และจังหวะเวลาของกระแสเงินสด	447
9.2.3	สมการทั่วไปแบบหลายคาบ	449
9.2.4	แบบย่อสองคาบที่ใช้ในบทนี้	450
9.2.5	ตัวอย่างการคำนวณเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม	451
9.2.6	ตัวอย่างเมื่อไม่ปรับความเสี่ยง	452
9.3	การวิเคราะห์รายได้ ผลตอบแทน และการนำตัวแบบไปใช้	453
9.3.1	การแยกองค์ประกอบของรายได้	453
9.3.2	ฐานเงินทุนและอัตราผลตอบแทน	454
9.3.3	ตัวอย่างการคำนวณรายได้และผลตอบแทน	455
9.3.4	ตารางเศรษฐกิจของยอดเงินลงทุน	456
9.3.5	การเปรียบเทียบกรณีปรับและไม่ปรับความเสี่ยง	457
9.3.6	การวิเคราะห์ความไวและเงื่อนไขสำคัญ	458
9.3.7	การนำไปใช้จริงและการตรวจสอบแบบจำลอง	459
9.4	พื้นฐานและตัวแบบกระแสเงินสดของการประกันภัยต่อ	460
9.4.1	บทบาทของการประกันภัยต่อและคำศัพท์สำคัญ	460
9.4.2	การประกันภัยต่อตามสัดส่วน	461
9.4.2.1	สัญญาแบ่งส่วนคงที่	461
9.4.2.2	สัญญาส่วนเกิน	463
9.4.3	การประกันภัยต่อแบบไม่เป็นสัดส่วน	464
9.4.3.1	Excess-of-Loss ต่อ ความเสียหาย หนึ่ง รายการ หรือ หนึ่ง เหตุการณ์	464
9.4.3.2	Stop-Loss หรือ Aggregate Excess-of-Loss	466
9.4.4	ค่าคาดหวังของชั้นความคุ้มครองและหลักเบี้ยประกันภัยต่อ	466
9.4.5	ความเสี่ยงด้านเครดิตและเงื่อนไขสัญญา	468

9.5	การประยุกต์ตัวแบบ Myers–Cohn กับการประกันภัยต่อการบริหารเงินทุน	468
9.5.1	กระแสเงินสดก่อนและหลังการประกันภัยต่อ	468
9.5.2	ส่วนขยายของสมการ Myers–Cohn	470
9.5.3	แบบย่อสองคาบภายใต้ Quota Share	470
9.5.4	การประเมินประโยชน์ทางเศรษฐกิจและต้นทุนเงินทุน	472
9.5.5	ตัวอย่างเปรียบเทียบไม่มีประกันภัยต่อ Quota Share และ Excess-of-Loss	474
9.5.6	การเลือกวงเงินรับไว้เองที่เหมาะสม	475
9.5.7	ข้อจำกัดและแนวทางตรวจสอบแบบจำลอง	476
	บทสรุปท้ายบทที่ 9	478
	เอกสารอ้างอิง	479
	แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	481
A	เฉลยแบบฝึกหัดเฉพาะคำตอบ	489
	บทที่ 1	489
	บทที่ 2	493
	บทที่ 3	497
	บทที่ 4	499
	บทที่ 5	501
	บทที่ 6	507
	บทที่ 7	511
	บทที่ 8	518
	บทที่ 9	523
	บรรณานุกรม	533
	ประวัติผู้แต่ง	539

สารบัญรูป

1.1	แสดงดอกเบี้ยเชิงเดียวที่ได้รับจากการลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท	4
1.2	ลักษณะกราฟเส้นตรงของ $a(t) = 1 + it$ และ $S_t = P_0(1 + it)$ เมื่อกำหนดให้ i และ P_0 คงที่	6
1.3	แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว	6
1.4	แผนภาพการกู้ยืมแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว	7
1.5	แสดงดอกเบี้ยที่ได้รับจากการลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้น i	7
1.6	ลักษณะกราฟเอกซ์โพเนนเชียลของ $a(t) = (1 + i)^t$ และ $S_t = P_0(1 + i)^t$	8
1.7	แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบดอกเบี้ยทบต้น	8
1.8	แผนภาพกระแสเงินสดการฝากเงิน	9
1.9	แผนภาพกระแสเงินสด	10
1.10	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสะสมด้วยดอกเบี้ยเชิงเดียวและดอกเบี้ยทบต้น	11
1.11	ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต	15
1.12	แผนภาพเปรียบเทียบกระแสเงินสดของสองโครงการลงทุน	17
1.13	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ เป็นฟังก์ชันลดของ m เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงคงที่ (ตัวอย่างเมื่อ $i = 0.50$)	22
1.14	แผนภาพช่วงเวลาการสะสมมูลค่า	24
1.15	แผนภาพแสดงวัฏจักรพื้นฐานของภาวะเงินเฟ้อ	30
2.1	แผนภาพ ความหมาย ของ ตัวประกอบ $e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$, $e^{\int_0^t \delta(s) ds}$, $e^{\int_t^k \delta(s) ds}$ และ $e^{-\int_t^k \delta(s) ds}$	54
2.2	แผนภาพการสะสมมูลค่าเมื่อใช้อัตราผลตอบแทนแปรผันตามเวลา	54
2.3	ค่ารายงวดจ่ายต้นงวด	57

2.4	ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด	60
2.5	การแบ่งกระแสเงินสดเป็นสองช่วง	61
2.6	แผนภาพกระแสเงินสดเพื่อการออม	62
2.7	แผนภาพกระแสเงินสด	64
2.8	เงินได้ประจำเพิ่มแบบเรขาคณิต	65
2.9	ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต	66
2.10	แผนภาพกระแสเงินสดการฝากเงินและการรับเงิน	68
2.11	ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต	68
2.12	ค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบต้นงวด	70
2.13	ค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบปลายงวด	71
2.14	กระแสเงินสดค่ารายงวดจ่ายตลอดไป	72
2.15	ค่ารายงวดต้นงวดที่เพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท	73
2.16	ค่ารายงวดปลายงวดที่เพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท	73
2.17	ค่ารายงวดต้นงวดที่เริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท	74
2.18	ค่ารายงวดปลายงวดที่เริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท	75
2.19	กระแสเงินสดค่ารายงวดจ่ายตลอดไป	76
2.20	ค่ารายงวดปลายงวดที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยอัตราคงที่ g	77
2.21	ค่ารายงวดต้นงวดที่เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราคงที่ g	78
2.22	เปรียบเทียบมูลค่าเงินสะสม ตลอด ช่วงชีวิต ภายใต้เป้าหมาย การรับ เงิน ราย เดือน หลัง เกษียณที่แตกต่างกัน	86
2.23	เปรียบเทียบ มูลค่า เงิน สะสม ตลอด ช่วง ชีวิต ระหว่าง กรณี ไม่ พิจารณา เงิน เพื่อ กับ กรณี พิจารณาเงินเพื่อ	87
2.24	ตัวอย่างเชิงสถิติของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่จำลองตามแนวคิด CIR อัตราเงินเฟ้อที่กำหนดให้มีลักษณะเป็นวัฏจักร และอัตราดอกเบี้ยจริงที่ปรับด้วยอัตราเงินเฟ้อ	89
3.1	กระแสเงินสดจากการลงทุนภายใต้อัตราส่วนลด d ต่อหนึ่งงวด	102

3.2	กระแสเงินสดภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียว d ต่องวด	103
3.3	ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันกับมูลค่าอนาคตภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียว	104
3.4	กระแสเงินสดภายใต้อัตราส่วนลดทบต้น d ต่องวด	105
3.5	ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันกับมูลค่าอนาคตภายใต้อัตราส่วนลดทบต้น	106
3.6	การเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนลดเพียงในนาม $d^{(m)}$ เมื่อกำหนด $d = 10\%$	112
3.7	แผนภาพการหามูลค่าปัจจุบันจากมูลค่าอนาคต	113
3.8	แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบหลายช่วง	114
3.9	หลักเรขาคณิตของวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน	118
3.10	แผนภาพกระแสเงินสดของโครงการลงทุน	120
4.1	กระแสเงินสดของค่ารายงวดที่จ่ายงวดแรกหลังเวลา α คาบ	134
4.2	แผนภาพกระแสเงินสดรายงวด	135
4.3	แผนภาพกระแสเงินสดของเงินกู้	136
4.4	กระแสเงินสดค่ารายงวดต้นงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง	139
4.5	กระแสเงินสดค่ารายงวดปลายงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง	139
4.6	แผนภาพการชำระคืนเงินกู้รายเดือน	140
4.7	แผนภาพการฝากเงินรายไตรมาส	141
4.8	แผนภาพการฝากเงินทุกครึ่งปี	143
4.9	แผนภาพการถอนเงินรายปี	144
4.10	กระแสเงินสดที่จ่ายต้นงวดและมีเงินก้อนในงวดสุดท้าย	146
4.11	กระแสเงินสดที่จ่ายปลายงวดและมีเงินก้อนในงวดสุดท้าย	146
4.12	แผนภาพกระแสเงินสดของการผ่อนชำระค่าบ้าน	147
4.13	แผนภาพการผ่อนชำระพร้อมเงินก้อนงวดสุดท้าย	148
4.14	แผนภาพกระแสเงินสดของโครงการลงทุน	149
5.1	กระแสเงินสดการชำระหนี้เมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงตามงวด	162

5.2	แนวคิดการคำนวณหนี้คงเหลือด้วยวิธีมองไปข้างหน้า	165
5.3	แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 5	167
5.4	แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 10	168
5.5	แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 7	169
5.6	กระแสเงินสดที่ฝากเข้ากองทุนสะสม	171
6.1	ตัวอย่างใบหุ้น ซึ่งเป็นเอกสารแสดงสิทธิความเป็นเจ้าของหุ้นในบริษัท	192
6.2	แผนภาพกระแสเงินสดของแบบจำลอง DDP	207
6.3	ตัวอย่างใบหุ้นกู้ ซึ่งเป็นตราสารหนี้ที่ออกโดยภาคเอกชน	215
6.4	แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ทั่วไป	216
6.5	กระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่จ่ายคูปองคงที่	216
6.6	แผนภาพ กระแสเงินสด ของตราสารหนี้ที่มีความถี่ของการจ่าย คูปอง และฐาน อัตราผลตอบแทน	220
6.7	แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่มีความถี่ของการจ่ายคูปองตามโจทย์กำหนด	223
6.8	แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ราคาตราสารหนี้ระหว่างวันจ่ายคูปอง	225
6.9	แผนภาพแสดงเวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด โดยเงินก้อนเดียว $S = \sum_{k=1}^m C_k$ ณ เวลา t_{eq} มีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับกระแสเงินสดเดิมทั้งหมด	229
6.10	ความสัมพันธ์ระหว่างราคาพันธบัตรกับอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรอายุ 10 ปีที่มีอัตราคูปองร้อยละ 6	239
7.1	ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนของหลักทรัพย์ i และ j ภายใต้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ_{ij} ที่แตกต่างกัน เมื่อ $\rho_{ij} = 1$ ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสองเคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกันอย่างสมบูรณ์ ขณะที่ $\rho_{ij} = -1$ หมายถึงการเคลื่อนไหวสวนทางกันอย่างสมบูรณ์ ส่วน $\rho_{ij} = 0$ หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างผลตอบแทนทั้งสอง	262
7.2	มูลค่าพอร์ต จุดสูงสุดสะสม และการลดลงจากจุดสูงสุด	264

7.3	ตัวอย่างการเปรียบเทียบเส้นค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (EMA) และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสามชั้น (TEMA) สำหรับช่วงย้อนหลัง 20 และ 50 วัตนบนกราฟราคาหุ้น เส้นที่ใช้ช่วงย้อนหลังสั้นและ TEMA มีแนวโน้มตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลง ของราคาได้รวดเร็วกว่าเส้นค่าเฉลี่ยระยะยาว ลูกศรแสดงบริเวณที่ลักษณะของเส้นค่าเฉลี่ยและการตัดกันของเส้น สามารถใช้ประกอบการสังเกตการเปลี่ยนแปลงของแนวโน้มราคา	278
7.4	ภาพเชิงแนวคิดของราคาและ Bollinger Bands	280
7.5	องค์ประกอบของ MACD ประกอบด้วยเส้น MACD เส้นสัญญาณ (Signal Line) และฮิสโตแกรม (Histogram) ซึ่งแสดงผลต่างระหว่างเส้น MACD กับเส้นสัญญาณ ค่าฮิสโตแกรมเหนือเส้นศูนย์หมายถึง $MACD_t > Signal_t$ ส่วนค่าที่อยู่ต่ำกว่าเส้นศูนย์หมายถึง $MACD_t < Signal_t$	282
7.6	วงจรการพัฒนาและตรวจสอบกลยุทธ์การลงทุน	286
7.7	กลุ่มพอร์ตการลงทุนที่เป็นไปได้และเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ ในระนาบผลตอบแทนคาดหวังและความผันผวน	294
7.8	พอร์ตสัมผัส T เป็นพอร์ตสินทรัพย์เสี่ยงที่ทำให้เส้นจาก สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงสัมผัสเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ และให้ Sharpe Ratio สูงที่สุด	296
7.9	VaR เป็นจุดควอนไทล์ ส่วน ES เป็นค่าเฉลี่ยของผลขาดทุนในส่วนหาง	310
7.10	แนวคิดการตรวจสอบ VaR ด้วยข้อยกเว้นรายเวลา	313
7.11	กรอบ Basel Traffic-Light สำหรับ VaR หนึ่งในที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ภายใต้หน้าต่างทดสอบย้อนหลัง 250 วัน โดยจากตัวอย่างพบข้อยกเว้น $X = 7$ ครั้ง จึงอยู่ในโซนสีเหลือง ซึ่งเป็นสัญญาณว่าควรตรวจสอบแบบจำลองเพิ่มเติม	318
7.12	Capital Market Line แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทน กับความเสี่ยงรวม โดยความชันของเส้นเท่ากับ Sharpe Ratio ของพอร์ตตลาด	324
7.13	Security Market Line แสดงความสัมพันธ์ตาม CAPM ระหว่างผลตอบแทนที่ต้องการกับความเสี่ยงเชิงระบบที่วัดด้วยค่าเบต้า	326
7.14	Jensen's Alpha เป็นระยะในแนวดิ่งระหว่าง ผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงกับผลตอบแทนบน Security Market Line ที่ CAPM กำหนด	328
7.15	กรอบการวิจัยเชิงคำนวณสำหรับกลยุทธ์และการบริหารความเสี่ยง	343

8.1	กระแสเงินสดของประกันสะสมทรัพย์แท้จริงหนึ่งหน่วย โดยจะจ่ายเงิน 1 บาท ณ เวลา n เฉพาะเมื่อผู้เอาประกันอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ถึงเวลานั้น	378
8.2	กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดหนึ่งหน่วย โดยแต่ละงวดจะจ่ายเมื่อผู้รับยังมีชีวิตอยู่ ณ เวลาที่กำหนด	387
8.3	กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดหนึ่งหน่วย โดยงวดแรกจ่ายทันที ณ เวลา 0 และงวดถัดไปจ่ายเมื่อผู้รับยังมีชีวิตอยู่	388
8.4	กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อน n ปี โดยงวดแรกจ่าย ณ เวลา $n + 1$ หากผู้รับยังมีชีวิตอยู่	394
8.5	กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อน n ปี โดยงวดแรกจ่าย ณ เวลา n หากผู้รับยังมีชีวิตอยู่	394
8.6	กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว n ปี โดยมีการจ่ายไม่เกิน n งวด และหยุดจ่ายทันทีเมื่อเสียชีวิต	398
8.7	ขั้นตอนการประเมินมูลค่าค่ารายงวดชีวิตที่จ่ายหลายครั้งต่อปี	413
8.8	กระบวนการวิเคราะห์ความไวของสมมติฐานที่มีผลต่อการกำหนดราคาและเงินสำรอง	430
8.9	ลำดับความคิดจากตารางชีพสู่การกำหนดราคาและการบริหารความเสี่ยงในธุรกิจประกันชีวิต	431
9.1	ตัวอย่างแผนภาพเงินสดรับและเงินสดจ่ายในหลายช่วงเวลา	441
9.2	โครงสร้างเวลาของกระแสเงินสดในตัวแบบ Myers–Cohn แบบหลายคาบ	449
9.3	โครงสร้างกระแสเงินสดระหว่างผู้ถือกรมธรรม์ บริษัทผู้โอนความเสี่ยง และผู้รับประกันภัยต่อ	461
9.4	ฟังก์ชันค่าสินไหมของสัญญา Excess-of-Loss ชั้น u เกิน d	465
9.5	ลำดับการแปลงกระแสเงินสดก่อนประกันภัยต่อเป็นกระแสเงินสดสุทธิและมูลค่าทางเศรษฐกิจ	469

สารบัญตาราง

5.1	โครงสร้างทั่วไปของตารางการชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย	163
5.2	ตารางมาตรฐานเมื่อเงินกู้เท่ากับ $a_{\overline{n} i}$ และชำระงวดละ 1	166
5.3	โครงสร้างวิธีเงินทุนสะสม	172
7.1	การเลือกมาตรวจตามคำถามที่ต้องการตอบ	332
8.1	ตัวอย่างตารางชีพที่ใช้ในบทนี้	367
8.2	ฟังก์ชันสับเปลี่ยน D_x และ N_x จากตารางตัวอย่าง เมื่อ $i = 0.03$	371
8.3	การจำแนกผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตพื้นฐาน	373
9.1	สัญลักษณ์หลักในตัวแบบ Myers–Cohn	448
9.2	องค์ประกอบรายได้และอัตราผลตอบแทนเมื่อใช้อัตราคิดลดร้อยละ 5.2	456
9.3	ตารางเศรษฐกิจแบบย่อของฐานลงทุนและรายได้ต่อคาบ	457
9.4	ผลของการปรับความเสี่ยงต่อเบี้ยและอัตราผลตอบแทน	458
A.1	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1: มูลค่าของเงินตามเวลา	489
A.2	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2: การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด	493
A.3	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3: ส่วนลดและอัตราส่วนลด	497
A.4	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4: ค่ารายงวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย	500
A.5	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5: สินเชื่อและหลักการชำระหนี้	502
A.6	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6: การประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน	507
A.7	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7: การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง	511
A.8	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8: คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต	519
A.9	เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9: การประยุกต์คณิตศาสตร์การเงินกับการกำหนดเบี้ยประกันภัย	524

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ

รายการต่อไปนี้รวบรวมสัญลักษณ์และคำย่อที่ใช้บ่อยในตำรา โดยหากสัญลักษณ์เดียวกันมีความหมายเฉพาะในบางบริบท ให้ยึดนิยามที่กำหนดไว้ในบทหรือหัวข้อนั้นเป็นหลัก

สัญลักษณ์/คำย่อ	ความหมาย
มูลค่าเงินตามเวลาและอัตราดอกเบี้ย	
t	เวลา หรือดัชนีเวลา
n	จำนวนงวด หรือจำนวนปีตามบริบท
m	จำนวนครั้งที่คิดดอกเบี้ยหรือส่วนลดต่อปี
P	เงินต้น ราคาปัจจุบัน หรือราคา ตามบริบท
PV	มูลค่าปัจจุบัน (present value)
FV	มูลค่าอนาคต (future value)
$a(t)$	ฟังก์ชันสะสม ณ เวลา t โดยทั่วไปกำหนด $a(0) = 1$
i	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งงวด
$i^{(m)}$	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี
d	อัตราส่วนลดแท้จริงต่อหนึ่งงวด
$d^{(m)}$	อัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปีที่แปลงส่วนลด m ครั้งต่อปี
v	ตัวประกอบคิดลดหนึ่งงวด โดย $v = (1 + i)^{-1}$
δ	กำลังดอกเบี้ย (force of interest)
ค่ารายงวดและกระแสเงินสด	
$a_{\overline{n} }$	มูลค่าปัจจุบันของค่ารายงวดปลายงวดจำนวน n งวด หน่วยละ 1
$s_{\overline{n} }$	มูลค่าสะสมของค่ารายงวดปลายงวดจำนวน n งวด หน่วยละ 1
$\ddot{a}_{\overline{n} }$	มูลค่าปัจจุบันของค่ารายงวดต้นงวดจำนวน n งวด หน่วยละ 1
$\ddot{s}_{\overline{n} }$	มูลค่าสะสมของค่ารายงวดต้นงวดจำนวน n งวด หน่วยละ 1
$\bar{a}_{\overline{n} }$	มูลค่าปัจจุบันของกระแสการจ่ายต่อเนื่องหน่วยละ 1 ตลอด n หน่วยเวลา
$\bar{s}_{\overline{n} }$	มูลค่าสะสมของกระแสการจ่ายต่อเนื่องหน่วยละ 1 ตลอด n หน่วยเวลา
C_t	กระแสเงินสด ณ เวลา t

สัญลักษณ์/คำย่อ	ความหมาย
สินเชื่อ การประเมินโครงการ และตราสารทางการเงิน	
B_t	ยอดคงเหลือ ณ เวลา t ตามบริบท
K_t	คูปองหรือกระแสเงินสดจากตราสารหนี้ในงวดที่ t
C	มูลค่าไถ่ถอนหรือเงินต้นที่ชำระคืนเมื่อครบกำหนด ตามบริบท
y	อัตราผลตอบแทนหรืออัตราที่ใช้คิดลดตามบริบท
D_{Mac}	ดูเรชันแมคคولهย์ (Macaulay duration)
D_{mod}	ดูเรชันดัดแปลง (modified duration)
NPV	มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (net present value)
IRR	อัตราผลตอบแทนภายใน (internal rate of return)
YTM	อัตราผลตอบแทนถึงวันครบกำหนด (yield to maturity)
EPS	กำไรต่อหุ้น (earnings per share)
DPS	เงินปันผลต่อหุ้น (dividends per share)
ROE	อัตราผลตอบแทนต่อส่วนของผู้ถือหุ้น (return on equity)
g	อัตราการเติบโตตามบริบท
k_e	อัตราผลตอบแทนที่ผู้ถือหุ้นต้องการ หรือต้นทุนส่วนของผู้ถือหุ้น
การลงทุน พอร์ตการลงทุน และการวัดความเสี่ยง	
R_t	ผลตอบแทนในงวด t
$\bar{R}$	ผลตอบแทนเฉลี่ยในช่วงเวลาที่กำหนด
μ_i	ผลตอบแทนคาดหวังของสินทรัพย์ i
σ_i	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหรือความผันผวนของผลตอบแทนสินทรัพย์ i
ρ_{ij}	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างสินทรัพย์ i และ j
w	เวกเตอร์น้ำหนักการลงทุนในพอร์ต
μ	เวกเตอร์ผลตอบแทนคาดหวังของสินทรัพย์
Σ	เมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทน
β_p	เบตาของพอร์ต หรือความเสี่ยงเชิงระบบของพอร์ต
α_p	ผลตอบแทนผิดปกติของพอร์ตหลังควบคุมความเสี่ยงตลาด
R_f	ผลตอบแทนของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง
R_m	ผลตอบแทนตลาด

สัญลักษณ์/คำย่อ	ความหมาย
R_b	ผลตอบแทนของเกณฑ์มาตรฐาน (benchmark)
GMV	พอร์ตที่มีความแปรปรวนต่ำสุดโดยรวม (global minimum-variance portfolio)
SMA	ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย (simple moving average)
WMA	ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบถ่วงน้ำหนัก (weighted moving average)
EMA	ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (exponential moving average)
$DEMA$	ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสองชั้น (double exponential moving average)
BB	แถบโบลลิงเจอร์ (Bollinger Bands)
$MACD$	Moving Average Convergence Divergence
VaR_α	มูลค่าความเสี่ยง ณ ระดับความเชื่อมั่น α (Value at Risk)
$CVaR_\alpha$	Conditional Value at Risk ณ ระดับ α
$TVaR_\alpha$	Tail Value at Risk ณ ระดับ α
ES_α	Expected Shortfall ณ ระดับ α
MDD	Maximum Drawdown
$RAROC$	Risk-Adjusted Return on Capital

คณิตศาสตร์ประกันชีวิต

x	อายุของผู้เอาประกัน ณ จุดเริ่มต้นการพิจารณา
ω	อายุสิ้นสุดของตารางชีพ
l_x	จำนวนผู้มีชีวิตอยู่เมื่ออายุครบ x ปีในตารางชีพ
d_x	จำนวนผู้เสียชีวิตระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ ปี
p_x	ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x ปีอยู่รอดต่อไปอีกหนึ่งปี
q_x	ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x ปีเสียชีวิตภายในหนึ่งปี
${}_np_x$	ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x ปีอยู่รอดอย่างน้อย n ปี
${}_nq_x$	ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x ปีเสียชีวิตภายใน n ปี
D_x, N_x	ฟังก์ชันสืบเปลี่ยนสำหรับค่ารายงวดชีวิตและผลประโยชน์ที่เกี่ยวข้อง
C_x, M_x	ฟังก์ชันสืบเปลี่ยนสำหรับผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต
A_x	มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยของประกันชีวิตตลอดชีพ หน่วยผลประโยชน์

สัญลักษณ์/คำย่อ	ความหมาย
a_x	มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยของค่ารายงวดชีวิตปลายงวด
$\ddot{a}_x$	มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยของค่ารายงวดชีวิตต้นงวด
EPV	มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง (expected present value)
ประกันภัยต่อและการจัดการความเสี่ยงประกันภัย	
L_t	ค่าสินไหมหรือความสูญเสียรวมในงวด t
L_t^N	ความสูญเสียสุทธิหลังการประกันภัยต่อ
QS	Quota Share — การประกันภัยต่อแบบแบ่งสัดส่วน
XOL	Excess of Loss — การประกันภัยต่อแบบส่วนเกินความเสียหาย

บทที่ 1 มูลค่าของเงินตามเวลา

เนื้อหาประกอบด้วย

- 1.1 อัตราดอกเบี้ย
- 1.2 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต
- 1.3 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามและกำลังดอกเบี้ย
- 1.4 อัตราเงินเฟ้อและเงินฝืด

บทนำ

มูลค่าของเงินเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาและปัจจัยทางเศรษฐกิจหลายประการ เงินจำนวนหนึ่งสามารถนำไปลงทุนเพื่อให้มีมูลค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไป เงินที่นำมาลงทุนเริ่มต้นเรียกว่า **เงินต้น** (principal) ส่วนเงินที่เพิ่มขึ้นจากเงินต้นเรียกว่า **ดอกเบี้ย** หรือ **ผลตอบแทน** (interest or return) และผลรวมของเงินต้นกับดอกเบี้ยเรียกว่า **มูลค่าสะสม** (accumulated value)

อัตราส่วนระหว่างดอกเบี้ยที่ได้รับกับเงินต้นเรียกว่า **อัตราดอกเบี้ย** หรือ **อัตราผลตอบแทน** (interest rate or rate of return) แนวคิดมูลค่าของเงินตามเวลาจึงเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเปรียบเทียบกระแสเงินสด ที่เกิดขึ้นต่างเวลากัน และเป็นเครื่องมือที่จำเป็นต่อการออม การกู้ยืม การลงทุน การประเมินโครงการ และการวางแผนทางการเงิน

1.1 อัตราดอกเบี้ย

1.1.1 การหาจำนวนเงินที่มีทั้งอัตราการเพิ่มและอัตราการลดลง

ในความเป็นจริง การลงทุนย่อมมีทั้งกำไรซึ่งทำให้เงินลงทุนเพิ่มขึ้น และขาดทุนซึ่งทำให้เงินลงทุนลดลง จำนวนเงินสะสมจากการลงทุนที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงหลายช่วงสามารถคำนวณได้ดังต่อไปนี้

สมมติให้ลงทุนด้วยเงินต้นเริ่มต้น P_0 บาท และมีการเปลี่ยนแปลงของเงินลงทุนต่อเนื่องทั้งหมด $m + n$ ครั้ง โดยมีอัตราเพิ่มเป็น $x_1, x_2, \dots, x_m$ และอัตราลดเป็น $y_1, y_2, \dots, y_n$ จำนวนเงินคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการ

ลงทุนเท่ากับ

$$P_0(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n) \quad (1.1)$$

ดังนั้น อัตราการเพิ่มหรือลดสะสมเมื่อสิ้นสุดการลงทุนเท่ากับ

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n) - 1 \quad (1.2)$$

ถ้าค่าในสมการ (1.2) เป็นบวก แสดงว่าการลงทุนมีกำไร แต่ถ้ามีค่าเป็นลบ แสดงว่าการลงทุนขาดทุน

ตัวอย่าง 1.1. นายเอลงทุนเปิดร้านขายเครื่องประดับด้วยเงิน 100,000 บาท ในเดือนแรกและเดือนที่สอง ร้านขาดทุนร้อยละ 11 และร้อยละ 7 ตามลำดับ จากนั้นมีกำไรร้อยละ 15 ร้อยละ 18 และร้อยละ 22 ในเดือนที่ 3, 4 และ 5 ตามลำดับ จงหาเงินสะสมเมื่อครบ 5 เดือน และพิจารณาว่าโดยรวมแล้วนายเอมีกำไรหรือขาดทุนคิดเป็นร้อยละเท่าใด

วิธีทำ เงินสะสมเมื่อครบ 5 เดือนเท่ากับ

$$\begin{aligned} S_5 &= 100,000(1-0.11)(1-0.07)(1+0.15)(1+0.18)(1+0.22) \\ &= 137,029.05 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราผลตอบแทนสะสมเท่ากับ

$$\frac{137,029.05 - 100,000}{100,000} = 0.3702905 \approx 37.029\%$$

นายเอจึงมีกำไรประมาณร้อยละ 37.029

□

ตัวอย่าง 1.2. ร้านค้าแห่งหนึ่งติดป้ายราคารองเท้าไว้ 1,800 บาท โดยราคาดังกล่าวยังไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่ม ร้อยละ 7 ทางร้านลดราคาสินค้าร้อยละ 10 และลดเพิ่มอีกร้อยละ 5 สำหรับลูกค้าที่ซื้อสินค้า ภายในร้านครบ 2,000 บาทขึ้นไป ถ้านางสาวเอซื้อสินค้าภายในร้านไปแล้ว 2,400 บาท เธอจะซื้อรองเท้าคู่นี้ได้ในราคาที่กี่บาท เมื่อรวมภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว

วิธีทำ ราคาสุทธิของรองเท้าเท่ากับ

$$1,800(1-0.10)(1-0.05)(1+0.07) = 1,646.73 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นางสาวเอซื้อรองเท้าคู่นี้ได้ในราคา 1,646.73 บาท

□

1.1.2 อัตราดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ย คือ อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนเมื่อเทียบกับเงินต้น โดยสะท้อนค่าตอบแทน จากการเสียโอกาส ในการนำเงินหรือสินทรัพย์ไปใช้ประโยชน์ในทางอื่น กล่าวคือ

$$\text{อัตราดอกเบี้ย} = \frac{\text{ผลตอบแทนที่ได้รับ}}{\text{เงินต้น}} \quad (1.3)$$

โดยทั่วไปนิยามกำหนดอัตราดอกเบี้ยต่อหนึ่งคาบเวลา หรือหนึ่งงวด เช่น ร้อยละ 10 ต่อปี หรือร้อยละ 5 ต่อ 3 เดือน ดังนั้น

$$\text{อัตราดอกเบี้ยต่องวด} = \frac{\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับในหนึ่งงวด}}{\text{เงินต้น ณ ต้นงวด}} \quad (1.4)$$

บทนิยาม 1.1

ให้ $a(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $t \geq 0$ จะเรียก $a(t)$ ว่า ฟังก์ชันสะสม (accumulation function) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) $a(0) = 1$,
- 2) $a(t) > 0$ สำหรับทุก $t > 0$, และ
- 3) $a(t)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร t

ฟังก์ชัน $a(t)$ สามารถตีความได้ว่าเป็นมูลค่าสะสม ณ เวลา t ของเงินต้น 1 บาท ที่ลงทุน ณ เวลา 0

ตัวอย่าง 1.3. จงแสดงว่า $a(t) = 2e^{0.5t} - 1$ เป็นฟังก์ชันสะสม

วิธีทำ ตรวจสอบเงื่อนไขของฟังก์ชันสะสมได้ดังนี้

- 1) $a(0) = 2e^{0.5(0)} - 1 = 1$,
- 2) เมื่อ $t > 0$ จะมี $e^{0.5t} > 1$ จึงได้ $a(t) = 2e^{0.5t} - 1 > 0$,
- 3) $a'(t) = e^{0.5t} > 0$ สำหรับทุก $t > 0$ ดังนั้น $a(t)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร t

จึงสรุปได้ว่า $a(t) = 2e^{0.5t} - 1$ เป็นฟังก์ชันสะสม

□

ตัวอย่าง 1.4. กองทุนแห่งหนึ่งเสนอรูปแบบผลตอบแทนที่เพิ่มขึ้นตามระยะเวลาการลงทุน โดยกำหนดฟังก์ชันสะสม ของเงินลงทุน 1 บาท เป็น

$$a(t) = 1 + 0.04t + 0.005t^2, \quad t \geq 0,$$

เมื่อ t แทนระยะเวลาการลงทุนเป็นปี จงพิจารณาว่า $a(t)$ เป็นฟังก์ชันสะสมหรือไม่

วิธีทำ ตรวจสอบเงื่อนไขได้ดังนี้

$$1) a(0) = 1 + 0.04(0) + 0.005(0)^2 = 1,$$

$$2) \text{ เมื่อ } t > 0 \text{ จะมี } a(t) = 1 + 0.04t + 0.005t^2 > 0,$$

$$3) a'(t) = 0.04 + 0.01t > 0 \text{ สำหรับทุก } t > 0$$

ดังนั้น $a(t) = 1 + 0.04t + 0.005t^2$ เป็นฟังก์ชันสะสม □

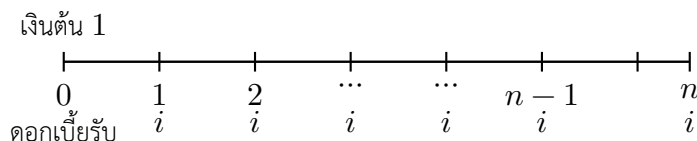
1.1.3 ประเภทของดอกเบี้ย

ดอกเบี้ยแบ่งออกเป็นสองประเภทสำคัญ ได้แก่ ดอกเบี้ยเชิงเดียวและดอกเบี้ยทบต้น

1) ดอกเบี้ยเชิงเดียว

ดอกเบี้ยเชิงเดียว หรือ **ดอกเบี้ยอย่างง่าย** (simple interest) คือการคิดดอกเบี้ยจากเงินต้นเริ่มต้นเท่านั้นในทุกงวด ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในแต่ละงวด จะไม่ถูกนำไปรวมกับเงินต้นเพื่อคิดดอกเบี้ยในงวดถัดไป

สมมติว่าลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท และได้รับอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว i ต่องวด การคิดดอกเบี้ยในแต่ละงวดแสดงได้ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 แสดงดอกเบี้ยเชิงเดียวที่ได้รับจากการลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท

จากรูปที่ 1.1 เงินสะสมจากการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาท เมื่อครบ n งวด เท่ากับ

$$1 + \underbrace{i + i + \cdots + i}_{n \text{ ครั้ง}} = 1 + in$$

โดยทั่วไป จำนวนงวดของการลงทุนอาจเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ กำหนดให้

$$t = \frac{\text{ระยะเวลาลงทุน}}{\text{ระยะเวลาในหนึ่งงวด}}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าคิดดอกเบี้ยทุก 3 เดือน และลงทุนเป็นเวลา 11 เดือน จะมีจำนวนงวด

$$t = \frac{11}{3} \approx 3.67 \text{ งวด}$$

ดังนั้น เงินสะสมของเงินต้น 1 บาทภายใต้อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว i เป็นเวลา t งวด เท่ากับ $1 + it$

1.1.4 ฟังก์ชันสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว

กำหนดให้ $i > 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว จะเรียก

$$a(t) = 1 + it, \quad t \geq 0,$$

ว่า ฟังก์ชันสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว เนื่องจาก

$$\frac{\partial a}{\partial t} = i > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial a}{\partial i} = t > 0 \quad (t > 0),$$

ฟังก์ชัน $a(t)$ จึงเพิ่มขึ้นตามทั้ง t และ i เมื่อกำหนดให้อีกตัวแปรหนึ่งคงที่

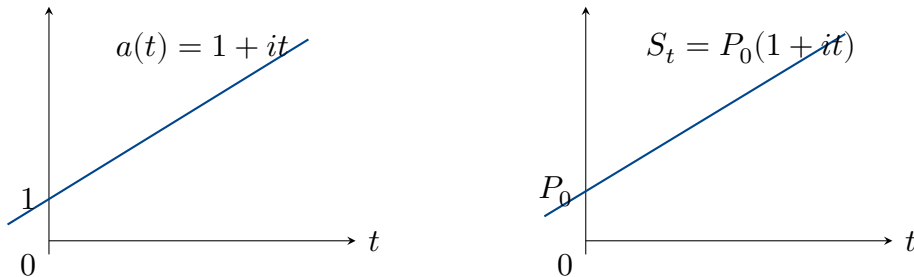
สำหรับการลงทุนด้วยเงินต้น P_0 เป็นเวลา t งวด จะได้มูลค่าสะสม

$$S_t = P_0(1 + it) = a(t)P_0 \tag{1.5}$$

เมื่อกำหนดให้อีกตัวแปรหนึ่งคงที่ S_t เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ P_0 , i และ t ดังนั้น หากต้องการเพิ่มมูลค่าสะสม นักลงทุนอาจเพิ่มเงินต้น เพิ่มระยะเวลาลงทุน หรือเลือกแหล่งลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทนสูงขึ้น

นอกจากนี้ $a(t) = 1 + it$ และ $S_t = P_0(1 + it)$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรงในตัวแปร t เมื่อกำหนดให้ i

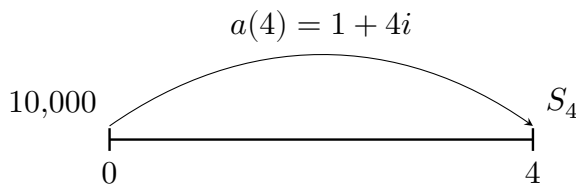
และ P_0 คงที่ ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 ลักษณะกราฟเส้นตรงของ $a(t) = 1 + it$ และ $S_t = P_0(1 + it)$ เมื่อกำหนดให้ i และ P_0 คงที่

ตัวอย่าง 1.5. จงหาเงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพการเงินได้ดังนี้



รูปที่ 1.3 แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว

จึงได้

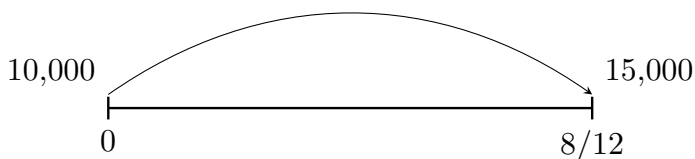
$$S_4 = 10,000(1 + 0.10(4)) = 14,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เงินสะสม ณ ปลายปีที่ 4 เท่ากับ 14,000 บาท

□

ตัวอย่าง 1.6. นายเอกู้เงิน 10,000 บาท เป็นเวลา 8 เดือน และต้องชำระเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยรวม 15,000 บาท ถ้าผู้ให้กู้คิดดอกเบี้ยเชิงเดียว จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพการเงินได้ดังนี้



รูปที่ 1.4 แผนภาพการกู้ยืมแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว

จากสมการมูลค่าสะสม

$$15,000 = 10,000 \left(1 + \frac{8}{12}i \right),$$

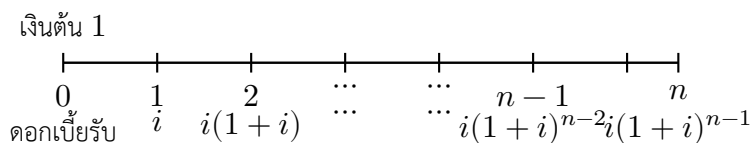
จึงได้ $i = 0.75$ หรือร้อยละ 75 ต่อปี

□

2) ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ยทบต้น (compound interest) คือการคิดดอกเบี้ยจากเงินต้นรวมกับดอกเบี้ย ที่สะสมมาจากงวดก่อนหน้า กล่าวคือ ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในงวดหนึ่งจะถูกนำไปรวมเป็นเงินต้น สำหรับการคิดดอกเบี้ยในงวดถัดไป

สมมติว่าลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่องวด ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในแต่ละงวดแสดงได้ดังรูปที่ 1.5

รูปที่ 1.5 แสดงดอกเบี้ยที่ได้รับจากการลงทุนทันทีด้วยเงินต้น 1 บาท ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้น i

จากรูปที่ 1.5 เงินสะสมเมื่อครบ n งวดเท่ากับ

$$1 + i + i(1 + i) + \cdots + i(1 + i)^{n-2} + i(1 + i)^{n-1} = (1 + i)^n \quad (1.6)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $t \geq 0$ จะได้ฟังก์ชันสะสม

$$a(t) = (1 + i)^t$$

เนื่องจาก

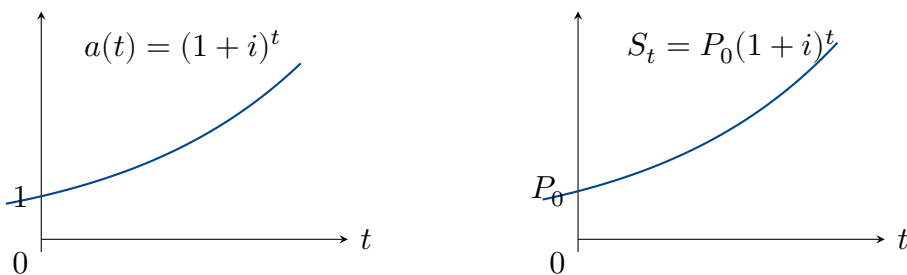
$$\frac{\partial a}{\partial t} = (1+i)^t \ln(1+i) > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial a}{\partial i} = t(1+i)^{t-1} > 0,$$

ฟังก์ชัน $a(t)$ จึงเพิ่มขึ้นตาม t และ i เมื่อกำหนดให้อีกตัวแปรหนึ่งคงที่

ถ้า P_0 เป็นเงินต้น ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่องวด เป็นเวลา t งวด โดย $t \geq 0$ และไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม จะได้มูลค่าสะสม

$$S_t = P_0(1+i)^t \quad (1.7)$$

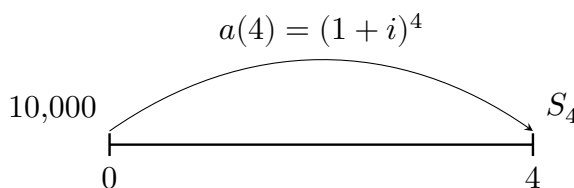
เมื่อกำหนดตัวแปรอื่นคงที่ S_t เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ P_0 , i และ t นอกจากนี้ $a(t) = (1+i)^t$ และ $S_t = P_0(1+i)^t$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ในตัวแปร t ดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 ลักษณะกราฟเอกซ์โพเนนเชียลของ $a(t) = (1+i)^t$ และ $S_t = P_0(1+i)^t$

ตัวอย่าง 1.7. จงหาเงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ย ทบต้นร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพการเงินได้ดังนี้



รูปที่ 1.7 แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบดอกเบี้ยทบต้น

จึงได้

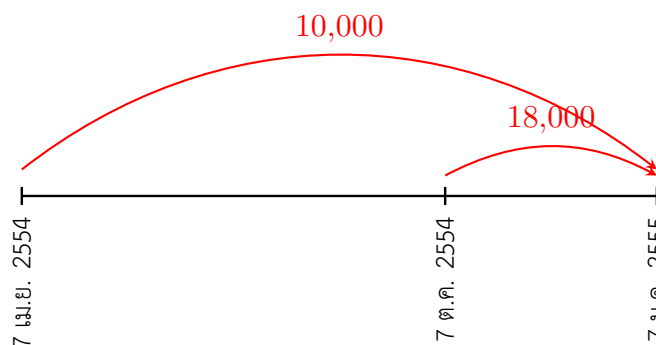
$$S_4 = 10,000(1 + 0.10)^4 = 14,641 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เงินสะสม ณ ปลายปีที่ 4 เท่ากับ 14,641 บาท



ตัวอย่าง 1.8. นายปีฝากเงิน 10,000 บาท เมื่อวันที่ 7 เมษายน พ.ศ. 2554 และฝากเพิ่มอีก 18,000 บาท เมื่อวันที่ 7 ตุลาคม พ.ศ. 2554 ถ้านายปีไม่ถอนเงินต้นหรือดอกเบี้ยเลย จงหาเงินในบัญชี ณ วันที่ 7 มกราคม พ.ศ. 2555 เมื่อธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้



รูปที่ 1.8 แผนภาพกระแสเงินสดการฝากเงิน

เงินสะสมในบัญชี ณ วันที่ 7 มกราคม พ.ศ. 2555 เท่ากับ

$$10,000(1.08)^{9/12} + 18,000(1.08)^{3/12} = 28,943.87 \text{ บาท}$$

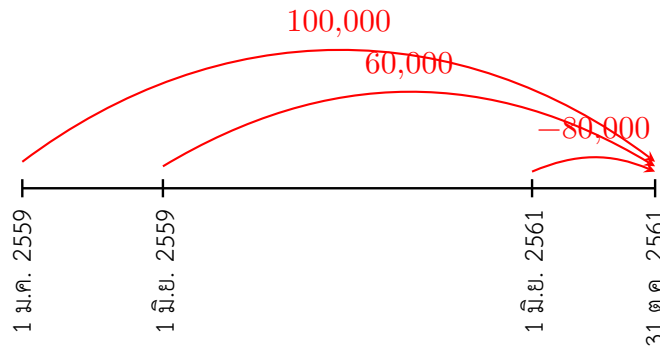


ตัวอย่าง 1.9. นายซีเปิดบัญชีออมทรัพย์กับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 100,000 บาท เมื่อวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2559 ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 12 เดือน หลังจากนั้นมีการฝากถอนดังนี้

วัน เดือน ปี	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
1 มิถุนายน 2559	ฝาก	60,000
1 มิถุนายน 2561	ถอน	80,000

จงหาเงินทั้งหมดในบัญชี ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2561 พร้อมทั้งแยกเป็นเงินต้นสุทธิ และดอกเบี้ย

วิธีทำ เขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้



รูปที่ 1.9 แผนภาพกระแสเงินสด

มูลค่าเงินในบัญชี ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2561 เท่ากับ

$$\begin{aligned} S &= 100,000(1.024)^{2+10/12} + 60,000(1.024)^{2+5/12} \\ &\quad - 80,000(1.024)^{5/12} \\ &= 89,695.48 \text{ บาท} \end{aligned}$$

เงินต้นสุทธิเท่ากับ

$$100,000 + 60,000 - 80,000 = 80,000 \text{ บาท,}$$

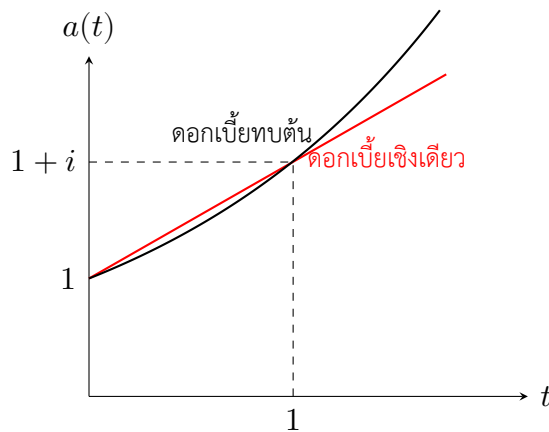
ดังนั้น ดอกเบี้ยสะสมเท่ากับ $89,695.48 - 80,000 = 9,695.48$ บาท

□

จากตัวอย่างก่อนหน้า เมื่อใช้อัตราดอกเบี้ยและเงินต้นเท่ากัน ความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันสะสมแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว $1 + it$ และแบบดอกเบี้ยทบต้น $(1 + i)^t$ สำหรับ $i > 0$ สรุปได้ดังนี้

- 1) ถ้า $0 < t < 1$ ดอกเบี้ยเชิงเดียวให้มูลค่าสะสมสูงกว่าดอกเบี้ยทบต้น
- 2) ถ้า $t > 1$ ดอกเบี้ยทบต้นให้มูลค่าสะสมสูงกว่าดอกเบี้ยเชิงเดียว
- 3) ถ้า $t = 1$ ทั้งสองวิธีให้มูลค่าสะสมเท่ากัน

ดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสะสมด้วยดอกเบี้ยเชิงเดียวและดอกเบี้ยทบต้น

ตัวอย่าง 1.10. นายเอต้องการลงทุนเงิน 100,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี โดยมีโครงการให้เลือกดังนี้

โครงการ	รูปแบบการลงทุน
A	ดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี
B	ดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10 ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี
C	5 ปีแรกใช้ดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10 ต่อปี และ 5 ปีหลังใช้ดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี
D	5 ปีแรกใช้ดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี และ 5 ปีหลังใช้ดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10 ต่อปี

ถ้าใช้ผลตอบแทนสะสมเป็นเกณฑ์ นายเอควรเลือกโครงการใด

วิธีทำ คำนวณมูลค่าสะสมของแต่ละโครงการได้ดังนี้

โครงการ A

$$S_{10} = 100,000(1 + 0.10(10)) = 200,000 \text{ บาท,}$$

ผลตอบแทนสะสมเท่ากับ 100,000 บาท

โครงการ B

$$S_{10} = 100,000(1.10)^{10} = 259,374.25 \text{ บาท,}$$

ผลตอบแทนสะสมเท่ากับ 159,374.25 บาท

โครงการ C

$$S_5 = 100,000(1.10)^5 = 161,051 \text{ บาท},$$

จากนั้นลงทุนต่อด้วยดอกเบี้ยเชิงเดียวอีก 5 ปี

$$S_{10} = 161,051(1 + 0.10(5)) = 241,576.50 \text{ บาท},$$

ผลตอบแทนสะสมเท่ากับ 141,576.50 บาท

โครงการ D

$$S_5 = 100,000(1 + 0.10(5)) = 150,000 \text{ บาท},$$

จากนั้นลงทุนต่อด้วยดอกเบี้ยทบต้นอีก 5 ปี

$$S_{10} = 150,000(1.10)^5 = 241,576.50 \text{ บาท},$$

ผลตอบแทนสะสมเท่ากับ 141,576.50 บาท

ดังนั้น นายเอควรเลือกโครงการ B เพราะให้ผลตอบแทนสะสมสูงสุด



ตัวอย่าง 1.11. จงหาเงินสะสมของเงินต้น 100,000 บาท เมื่อลงทุนเป็นเวลา 4 ปี 8 เดือน โดยช่วงเวลาที่
เป็นจำนวนเต็มปีคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี และเศษของปีที่เหลือคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ ในช่วง 4 ปีแรก เงินสะสมเท่ากับ

$$S_4 = 100,000(1.10)^4 = 146,410 \text{ บาท}$$

จากนั้นนำเงินไปลงทุนต่อด้วยดอกเบี้ยเชิงเดียวเป็นเวลา 8 เดือน หรือ $\frac{2}{3}$ ปี ได้

$$S_{4+2/3} = 146,410 \left(1 + 0.10 \left(\frac{2}{3} \right) \right) = 156,170.67 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เงินสะสมเท่ากับ 156,170.67 บาท



1.1.5 อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวเทียบกับอัตราดอกเบี้ยทบต้น

บทนิยาม 1.2

ให้ i_s และ i_c เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวและอัตราดอกเบี้ยทบต้นตามลำดับ จะกล่าวว่า i_s เทียบเท่ากับ i_c สำหรับระยะเวลา t ที่กำหนด ถ้าทั้งสองอัตราให้มูลค่าสะสมเท่ากัน กล่าวคือ

$$1 + i_s t = (1 + i_c)^t$$

จากนิยาม จะได้สมการมูลค่าสะสม

$$1 + i_s t = (1 + i_c)^t \quad (1.8)$$

และสามารถจัดรูปเพื่อหาอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวที่เทียบเท่าได้เป็น

$$i_s = \frac{(1 + i_c)^t - 1}{t} \quad (1.9)$$

เมื่อ t เข้าใกล้ศูนย์ ใช้การกระจายเทย์เลอร์ของ $(1 + i_c)^t = e^{t \ln(1 + i_c)}$ ได้ว่า

$$(1 + i_c)^t = 1 + t \ln(1 + i_c) + o(t), \quad t \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

เมื่อ $o(t)$ แทนพจน์คลาดเคลื่อนที่มีสมบัติว่า $o(t)/t \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow 0$ ดังนั้น

$$i_s \approx \ln(1 + i_c), \quad t \rightarrow 0$$

ตัวอย่าง 1.12. นายซีต้องการเลือกโครงการที่ให้อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวซึ่งมีผลตอบแทนโดยประมาณเทียบเท่ากับการฝากเงินที่ให้อัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 10 ต่อปี สำหรับระยะเวลาลงทุนสั้นมาก หรือ t เข้าใกล้ศูนย์ จงหาอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวโดยประมาณ

วิธีทำ เมื่อ $t \rightarrow 0$ จะมี

$$i_s \approx \ln(1 + i_c)$$

แทน $i_c = 0.10$ ได้

$$i_s \approx \ln(1.10) = 0.09531$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวโดยประมาณเท่ากับร้อยละ 9.53 ต่อปี □

1.2 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง **มูลค่าปัจจุบัน** (present value: PV) ซึ่งหมายถึง มูลค่าของเงิน ณ เวลาปัจจุบัน หรือมูลค่าของเงินลงทุน ณ วันใดวันหนึ่งที่กำหนดเป็นจุดอ้างอิง และ **มูลค่าอนาคต** (future value: FV) ซึ่งหมายถึงมูลค่าเงินสะสม ณ เวลา t ในอนาคตหลังจากวันอ้างอิงดังกล่าว

สมมติว่าลงทุนทันที ณ เวลา 0 ด้วยเงินจำนวน PV บาท และเงินจำนวนนี้สะสมด้วย ฟังก์ชันสะสม $a(t)$ จนถึงเวลา $t > 0$ จะได้มูลค่าอนาคตเท่ากับ

$$FV = PV a(t) \quad (1.11)$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\text{มูลค่าอนาคต} = \text{มูลค่าปัจจุบัน} \times \text{ฟังก์ชันสะสม} \quad (1.12)$$

จากสมการ (1.11) หากต้องการหามูลค่าปัจจุบัน สามารถจัดรูปได้เป็น

$$PV = FV [a(t)]^{-1} \quad (1.13)$$

เรียก $[a(t)]^{-1}$ ว่า **ฟังก์ชันส่วนลด** (discount function) เนื่องจากเมื่อนำฟังก์ชันส่วนลดคูณกับมูลค่าอนาคตแล้ว จะได้มูลค่าปัจจุบัน รูปของฟังก์ชันส่วนลดขึ้นอยู่กับวิธีการคิดดอกเบี้ย ดังนี้

สำหรับดอกเบี้ยเชิงเดียว ซึ่งมี $a(t) = 1 + it$ จะได้

$$[a(t)]^{-1} = (1 + it)^{-1} \quad (1.14)$$

สำหรับดอกเบี้ยทบต้น ซึ่งมี $a(t) = (1 + i)^t$ จะได้

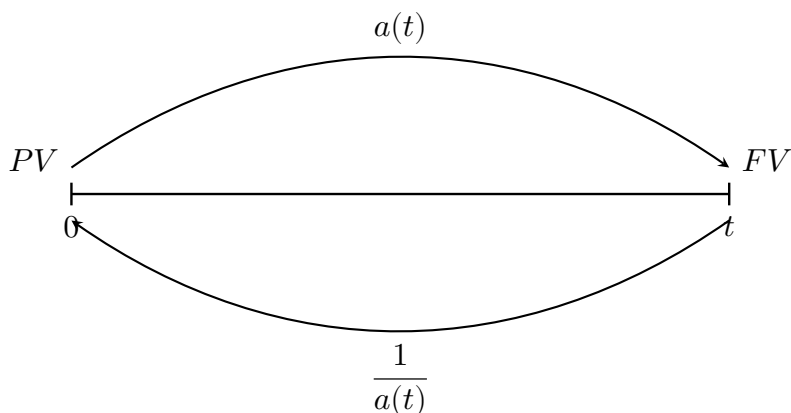
$$[a(t)]^{-1} = (1 + i)^{-t} = v^t, \quad (1.15)$$

เมื่อ

$$v = (1 + i)^{-1} = \frac{1}{1 + i}$$

และเรียก v ว่า **ตัวประกอบส่วนลด** (discount factor)

ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตแสดงได้ดังรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11 ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

ตัวอย่าง 1.13. นายเอกู้เงินจากนายบีจำนวน 100,000 บาท โดยนายบีคิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว ร้อยละ 10 ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่นายเอต้องชำระคืนเมื่อสิ้นปีที่ 2

วิธีทำ จำนวนเงินที่นายเอต้องชำระคืนเท่ากับมูลค่าอนาคตของเงินกู้

$$\begin{aligned} FV &= 100,000(1 + 0.10(2)) \\ &= 120,000 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น นายเอต้องชำระคืนทั้งหมด 120,000 บาท

□

ตัวอย่าง 1.14. จงหาดอกเบี้ยและจำนวนเงินรวมของเงินกู้ 1,650 บาท ภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้น ร้อยละ 13 ต่อปี เป็นเวลา 460 วัน กำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 365 วัน

วิธีทำ จำนวนเงินรวมเท่ากับมูลค่าอนาคตของเงินกู้

$$\begin{aligned} FV &= 1,650(1 + 0.13)^{460/365} \\ &\approx 1,924.76 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น ดอกเบี้ยเท่ากับ

$$1,924.76 - 1,650 = 274.76 \text{ บาท}$$

จึงมีจำนวนเงินรวม 1,924.76 บาท และดอกเบี้ย 274.76 บาท



ตัวอย่าง 1.15. บริษัทแห่งหนึ่งออกตราสารหนี้ชนิดหนึ่งซึ่งให้ผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 8 ต่อปี มีระยะเวลา 2 ปี โดยเมื่อครบกำหนด บริษัทจะจ่ายมูลค่าอนาคตให้แก่ผู้ถือตราสารหนี้ ถ้าบริษัทดำเนินการแล้วได้รับผลตอบแทนสูงกว่ามูลค่าอนาคต แต่หากผลตอบแทนต่ำกว่า มูลค่าอนาคต ผู้ลงทุนจะได้รับคืนเฉพาะเงินต้น สมมติว่านักลงทุนซื้อตราสารหนี้รวม 100 ล้านบาท จงตอบคำถามต่อไปนี้

- ก) บริษัทต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าใด หากบริษัทดำเนินการแล้วได้รับผลตอบแทนสูงกว่า มูลค่าอนาคต
- ข) ถ้าบริษัทนำเงิน 100 ล้านบาทไปลงทุนต่อและได้รับผลตอบแทนร้อยละ 4 ต่อปี บริษัทต้องเตรียมเงินเพิ่มอีกเท่าใด เพื่อชำระเงินต้นและดอกเบี้ยแก่ผู้ถือตราสารหนี้
- ค) เพื่อเพิ่มความมั่นใจแก่ผู้ถือตราสารหนี้ บริษัทต้องสำรองเงินไว้ในกองทุน ที่ให้ผลตอบแทนร้อยละ 5 ต่อปี เป็นจำนวนเท่าใด จึงจะเพียงพอชดเชยเงินส่วนขาดในข้อ ข)

วิธีทำ

ก) บริษัทต้องจ่ายเงินเท่ากับมูลค่าอนาคตของตราสารหนี้

$$S_2 = 100(1 + 0.08)^2 = 116.64 \text{ ล้านบาท}$$

ข) หากบริษัทนำเงินที่ได้รับไปลงทุนต่อเป็นเวลา 2 ปี จะได้เงินสะสม

$$100(1 + 0.04)^2 = 108.16 \text{ ล้านบาท}$$

ดังนั้น บริษัทต้องเตรียมเงินเพิ่มอีก

$$116.64 - 108.16 = 8.48 \text{ ล้านบาท}$$

ค) ให้ x ล้านบาทเป็นเงินที่ฝากในกองทุน ณ เวลาเริ่มต้น เพื่อให้มีเงินสะสม 8.48 ล้านบาท ณ ปลายปีที่ 2 จะได้

$$8.48 = x(1 + 0.05)^2$$

ดังนั้น

$$x = \frac{8.48}{(1.05)^2} = 7.691609977 \text{ ล้านบาท}$$

บริษัทจึงควรสำรองเงินประมาณ 7,691,609.98 บาทไว้ในกองทุน

□

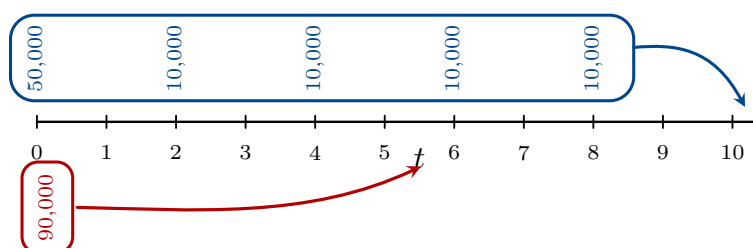
ตัวอย่าง 1.16. โครงการลงทุนหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 10 ปี โดยลงทุนทันที ณ ต้นปีที่ 1 จำนวน 50,000 บาท และลงทุนเพิ่มทุกต้นปีที่ 3, 5, 7 และ 9 ปีละ 10,000 บาท โครงการให้อัตราผลตอบแทนทบต้นร้อยละ 20 ต่อปี

หากนักลงทุนต้องการลงทุนครั้งเดียวในอีกโครงการหนึ่ง ด้วยเงินจำนวนเท่ากับเงินลงทุนรวม ในโครงการแรก และได้รับอัตราผลตอบแทนเท่ากัน เขาต้องลงทุนเป็นระยะเวลาเท่าใด จึงจะได้รับมูลค่าสะสมเท่ากับมูลค่าสะสมของโครงการแรก ณ ปลายปีที่ 10 และมูลค่าสะสมนั้นเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เงินลงทุนรวมในโครงการแรกเท่ากับ

$$50,000 + 4(10,000) = 90,000 \text{ บาท}$$

ให้ลงทุนเงิน 90,000 บาทในโครงการที่สองเป็นเวลา t ปี เขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ดังนี้



รูปที่ 1.12 แผนภาพเปรียบเทียบกระแสเงินสดของสองโครงการลงทุน

เปรียบเทียบเงินสะสมของโครงการทั้งสองได้ว่า

$$\begin{aligned} 90,000(1.2)^t &= 50,000(1.2)^{10} + 10,000(1.2)^8 \\ &\quad + 10,000(1.2)^6 + 10,000(1.2)^4 + 10,000(1.2)^2 \end{aligned}$$

จึงได้

$$(1.2)^t = 4.639787$$

และ

$$t = \frac{\ln(4.639787)}{\ln(1.2)} \approx 8.417373 \text{ ปี},$$

หรือประมาณ 8 ปี 5 เดือน

มูลค่าสะสมเท่ากับ

$$90,000(1.2)^t = 90,000(4.639787) \approx 417,580.83 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นักลงทุนต้องลงทุนเป็นเวลาประมาณ 8 ปี 5 เดือน และจะได้รับมูลค่าสะสม ประมาณ 417,580.83 บาท □

การลงทุนทั้งสองโครงการมีจังหวะเวลาของกระแสเงินสดแตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม ทั้งสองให้มูลค่าสะสมเป้าหมายเท่ากัน คือประมาณ 417,581 บาท โดยโครงการที่สองซึ่งลงทุนครั้งเดียว 90,000 บาท ต้องมีระยะเวลาสะสมประมาณ 8 ปี 5 เดือน

1.3 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามและกำลังดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ยที่คิดทบต้นหนึ่งครั้งในหนึ่งช่วงเวลา เรียกว่า อัตราดอกเบี้ยแท้จริง หรือ อัตราดอกเบี้ยที่เป็นผล (effective interest rate: EIR) อย่างไรก็ตาม ในหนึ่งช่วงเวลาหรือหนึ่งคาบเวลา อาจมีการคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าหนึ่งครั้ง เช่น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน หมายความว่าในหนึ่งปีมีการคิดดอกเบี้ยทบต้น 2 ครั้ง และมีอัตราดอกเบี้ยต้องวัดเท่ากับ

$$\frac{10\%}{2} = 5\%$$

เรียกอัตราดอกเบี้ยที่ระบุในลักษณะนี้ว่า อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม (nominal interest rate: NIR)

ถ้ากำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน เงินต้น 1 บาทจะสะสม ณ ปลายปีที่ 1 เป็น

$$(1 + 0.05)^2 = 1.1025 = 1 + 0.1025$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 10.25 ต่อปี

บทนิยาม 1.3

ให้ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี จะเรียก $i^{(m)}$ ว่า อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี และเรียก

$$\frac{i^{(m)}}{m}$$

ว่า อัตราดอกเบี้ยต่องวด

โดยทั่วไปในทางการเงิน m มักเป็นจำนวนเต็มบวก แต่ในทางทฤษฎีสามารถขยายให้ m เป็นจำนวนจริงบวกได้ ตัวอย่างเช่น $m = \frac{1}{2}$ หมายถึงคิดดอกเบี้ยหนึ่งครั้งในทุก 2 ปี และ $m = \frac{2}{3}$ หมายถึงคิดดอกเบี้ย 2 ครั้งในทุก 3 ปี

บทนิยาม 1.4

ให้ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม และให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี จะกล่าวว่า i เทียบเท่ากับ $i^{(m)}$ ถ้าทั้งสองอัตราให้เงินสะสมเท่ากัน เมื่อครบหนึ่งปี กล่าวคือ

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \quad (1.16)$$

จากบทนิยามข้างต้น i เทียบเท่ากับ $i^{(m)}$ ก็ต่อเมื่อ

$$(1 + i)^t = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}, \quad t \geq 0 \quad (1.17)$$

กล่าวคือ อัตราดอกเบี้ยแท้จริงและอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามเทียบเท่ากัน เมื่อฟังก์ชันสะสมของทั้งสองอัตราเท่ากัน

ตัวอย่าง 1.17. จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีที่เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

วิธีทำ ในที่นี้ $m = 4$ และ $i^{(4)} = 0.08$ จากสมการ (1.16) จะได้

$$1 + i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} i &= \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 \\ &= 0.08243216 \approx 0.0824 \end{aligned}$$

อัตราดอกเบี้ยแท้จริงจึงเท่ากับประมาณร้อยละ 8.24 ต่อปี

□

จากสมการ (1.16) สามารถเขียนอัตราดอกเบี้ยแท้จริง i ในเทอมของ $i^{(m)}$ และ m ได้เป็น

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \quad (1.18)$$

ทฤษฎีบท 1.1. กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)} = j > 0$ คงที่ แล้วอัตราดอกเบี้ยแท้จริง

$$i(m) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ $m > 0$

พิสูจน์. ให้

$$g(m) = \ln(1 + i(m)) = m \ln \left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

หาอนุพันธ์ได้

$$g'(m) = \ln \left(1 + \frac{j}{m}\right) - \frac{j}{m + j}$$

กำหนด $u = j/m > 0$ จะได้

$$g'(m) = \ln(1 + u) - \frac{u}{1 + u} > 0,$$

เพราะฟังก์ชัน $h(u) = \ln(1 + u) - u/(1 + u)$ มี $h(0) = 0$ และ $h'(u) = u/(1 + u)^2 > 0$ เมื่อ $u > 0$ ดังนั้น $g(m)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงสรุปได้ว่า $i(m) = e^{g(m)} - 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ $m > 0$ □

ความหมายของทฤษฎีบท 1.1 คือ เมื่อกำหนดตัวเลขอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามเท่ากัน การคิดดอกเบี้ยทบต้นบ่อยครั้งขึ้นจะให้อัตราดอกเบี้ยแท้จริงสูงขึ้น ตัวอย่างเช่น อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก

3 เดือน ให้

$$\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = 0.06136355 \approx 6.14\%,$$

ขณะที่การคิดทบต้นทุก 6 เดือน ให้

$$\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = 0.0609 = 6.09\%$$

ดังนั้น แม้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามจะเท่ากัน แต่การคิดทบต้นรายไตรมาส ให้อัตราดอกเบี้ยแท้จริงสูงกว่าการคิดทบต้นทุกหกเดือน

จากสมการ (1.18) สามารถจัดรูปเพื่อหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยแท้จริง i ได้เป็น

$$i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{1/m} - 1 \right] \quad (1.19)$$

ทฤษฎีบท 1.2. เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริง $i > 0$ คงที่ อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม

$$i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{1/m} - 1 \right]$$

เป็นฟังก์ชันลดของ $m > 0$

พิสูจน์. กำหนด

$$f(x) = x \left[(1 + i)^{1/x} - 1 \right], \quad x > 0,$$

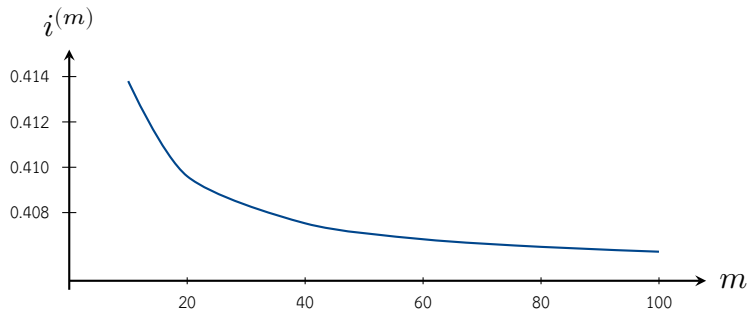
และให้ $c = \ln(1 + i) > 0$ จะเขียนได้ว่า $f(x) = x(e^{c/x} - 1)$ ดังนั้น

$$f'(x) = e^{c/x} \left(1 - \frac{c}{x} \right) - 1$$

ให้ $u = c/x > 0$ จากสมการ $e^{-u} > 1 - u$ เมื่อ $u > 0$ จะได้

$$e^u(1 - u) < 1,$$

จึงมี $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x > 0$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด และทำให้ $i^{(m)}$ เป็นฟังก์ชันลดของ $m > 0$ □



รูปที่ 1.13 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ เป็นฟังก์ชันลดของ m เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงคงที่ (ตัวอย่างเมื่อ $i = 0.50$)

ทฤษฎีบท 1.2 แสดงว่า เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงคงที่ การคิดดอกเบี้ยทบต้น บ่อยครั้งขึ้นทำให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีลดลง ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนด อัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 10 ต่อปี อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่คิดทบต้นทุก 3 เดือนเป็น

$$i^{(4)} = 4 \left[(1 + 0.10)^{1/4} - 1 \right] = 0.0964548 \approx 9.65\%,$$

ขณะที่อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่คิดทบต้นทุก 6 เดือนเป็น

$$i^{(2)} = 2 \left[(1 + 0.10)^{1/2} - 1 \right] = 0.0976177 \approx 9.76\%$$

ดังนั้น การใช้เพียงตัวเลขอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามเป็นเกณฑ์ตัดสินใจยังไม่เพียงพอ จำเป็นต้องพิจารณาจำนวนครั้งของการคิดดอกเบี้ยทบต้นประกอบด้วย

ตัวอย่าง 1.18. จงหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(3)}$ ที่เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(12)} = 12\%$

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยทั้งสองเทียบเท่ากันเมื่อให้ฟังก์ชันสะสมหนึ่งปีเท่ากัน

$$\left(1 + \frac{i^{(3)}}{3} \right)^3 = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12} \right)^{12}$$

แทน $i^{(12)} = 0.12$ และถอดรากที่สาม จะได้

$$1 + \frac{i^{(3)}}{3} = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^4$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} i^{(3)} &= 3 \left[\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^4 - 1 \right] \\ &= 0.12181203 \approx 0.1218 \end{aligned}$$

จึงได้ $i^{(3)} \approx 12.18\%$

□

ตัวอย่าง 1.19. นายดีจึงต้องการกู้เงินระยะยาวจำนวน 1,000,000 บาท และชำระคืน ณ ปลายปีที่ 5 จากสถาบันการเงิน 3 แห่ง เขาควรกู้จากสถาบันการเงินใดจึงมีต้นทุนดอกเบี้ยต่ำที่สุด โดยแต่ละแห่งเสนออัตราดอกเบี้ยดังนี้

ธนาคาร	ข้อเสนอ
AAA	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี
BBB	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
CCC	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน

วิธีทำ พิจารณาดอกเบี้ยสะสมของแต่ละธนาคารดังนี้

ธนาคาร AAA

$$\begin{aligned} S_5 &= 1,000,000(1 + 0.10)^5 = 1,610,510.00, \\ \text{ดอกเบี้ยสะสม} &= 1,610,510.00 - 1,000,000 \\ &= 610,510.00 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ธนาคาร BBB

$$S_5 = 1,000,000 \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^{4(5)} = 1,638,616.44,$$

$$\begin{aligned}\text{ดอกเบี้ยสะสม} &= 1,638,616.44 - 1,000,000 \\ &= 638,616.44 \text{ บาท}\end{aligned}$$

ธนาคาร CCC

$$S_5 = 1,000,000 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12(5)} = 1,645,308.95,$$

$$\begin{aligned}\text{ดอกเบี้ยสะสม} &= 1,645,308.95 - 1,000,000 \\ &= 645,308.95 \text{ บาท}\end{aligned}$$

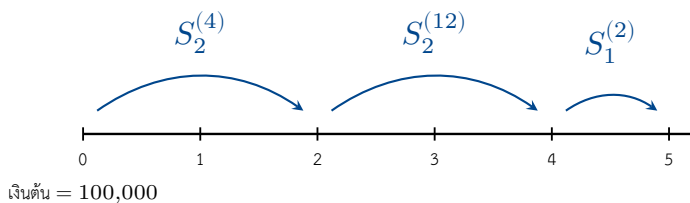
ดังนั้น นายดีจึงควรเลือกกู้เงินจากธนาคาร AAA ซึ่งมีต้นทุนดอกเบี้ยต่ำที่สุด



ตัวอย่าง 1.20. จงหามูลค่าอนาคต ณ ปลายปีที่ 5 ของเงินต้น 100,000 บาท ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

- 2 ปีแรก: อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
- 2 ปีถัดมา: อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน
- ปีสุดท้าย: อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน

วิธีทำ แสดงช่วงเวลาการสะสมได้ดังนี้



รูปที่ 1.14 แผนภาพช่วงเวลาการสะสมมูลค่า

เงินสะสม ณ ปลายปีที่ 2 เท่ากับ

$$S_2^{(4)} = 100,000 \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{4(2)} = 108,285.67 \text{ บาท}$$

เงินสะสม ณ ปลายปีที่ 4 เท่ากับ

$$S_2^{(12)} = 108,285.67 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(2)} = 122,055.25 \text{ บาท}$$

และเงินสะสม ณ ปลายปีที่ 5 เท่ากับ

$$S_1^{(2)} = 122,055.25 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2(1)} = 132,014.96 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าอนาคต ณ ปลายปีที่ 5 เท่ากับ 132,014.96 บาท

□

ทฤษฎีบท 1.3. ให้ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยแท้จริง i แล้ว

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1 + i)$$

พิสูจน์. จากสมการ (1.19)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} m [(1 + i)^{1/m} - 1]$$

ให้ $x = 1/m$ จะมี $x \rightarrow 0^+$ เมื่อ $m \rightarrow \infty$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + i)^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + i)^x \ln(1 + i)}{1} \\ &= \ln(1 + i), \end{aligned}$$

โดยบรรทัดที่สองใช้กฎของโลปีตาล

□

บทนิยาม 1.5

ให้ $a(t)$ เป็นฟังก์ชันสะสมที่หาอนุพันธ์ได้ กำลังดอกเบี้ย ณ เวลา t เขียนแทนด้วย $\delta(t)$ และนิยามโดย

$$\delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt} \ln a(t) \quad (1.20)$$

จากสมการ (1.20) จะได้

$$d \ln a(s) = \delta(s) ds \quad (1.21)$$

อินทิเกรตสมการ (1.21) ตั้งแต่ 0 ถึง t และใช้เงื่อนไข $a(0) = 1$ จะได้

$$\int_0^t d \ln a(s) = \int_0^t \delta(s) ds \implies a(t) = \exp \left(\int_0^t \delta(s) ds \right) \quad (1.22)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันส่วนลดเป็น

$$[a(t)]^{-1} = \exp \left(- \int_0^t \delta(s) ds \right) \quad (1.23)$$

นอกจากนี้ จากนิยามของอนุพันธ์

$$\delta(t) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{h}}{a(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{h a(t)} \quad (1.24)$$

สมการนี้แสดงว่า กำลังดอกเบี้ยเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์แบบฉับพลัน ของฟังก์ชันสะสม หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นอัตราดอกเบี้ยอย่างต่อเนื่อง ณ แต่ละจุดของเวลา

สำหรับดอกเบี้ยเชิงเดียวที่มี $a(t) = 1 + it$ จะได้

$$\delta(t) = \frac{i}{1 + it} \quad (1.25)$$

สำหรับดอกเบี้ยทบต้นที่มี $a(t) = (1 + i)^t$ จะได้

$$\delta(t) = \ln(1 + i) \quad (1.26)$$

ข้อสังเกต

สมการ (1.25) แสดงว่า กำลังดอกเบี้ยของดอกเบี้ยเชิงเดียว ลดลงเมื่อระยะเวลาลงทุนเพิ่มขึ้น ขณะที่สมการ (1.26) แสดงว่า กำลังดอกเบี้ยของดอกเบี้ยทบต้นคงที่ตลอดเวลา

บทแทรก 1.9. ให้ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม และให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่ากัน กำลัง

ดอกเบี้ยของดอกเบี้ยทบต้นเท่ากับ

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1 + i)$$

พิสูจน์. ได้โดยตรงจากนิยามของกำลังดอกเบี้ยและทฤษฎีบท 1.3 □

จากบทแทรก 1.9 สามารถพิจารณากำลังดอกเบี้ยเป็นขีดจำกัดของการคิดดอกเบี้ยทบต้น เมื่อจำนวนครั้งของการคิดทบต้นต่อปีเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด จึงเรียก δ ว่า อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง (continuous compounding rate) โดย

$$\delta = \ln(1 + i) \quad \text{หรือ} \quad e^\delta = 1 + i \quad (1.27)$$

ดังนั้น เงินสะสมของเงินต้น P_0 หลังลงทุนเป็นเวลา t ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ เท่ากับ

$$S_t = P_0(1 + i)^t = P_0 e^{\delta t}, \quad (1.28)$$

เมื่อ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่ากับ δ

กำลังดอกเบี้ยมีประโยชน์ในการวัดอัตราการเพิ่มขึ้นแบบฉับพลันของเงินสะสม และใช้ประมาณอัตราดอกเบี้ยที่คิดทบต้นบ่อยครั้งมาก เช่น รายวันหรือรายสัปดาห์ นอกจากนี้ แนวคิดดังกล่าวยังใช้ในการคำนวณมูลค่าตราสารอนุพันธ์และแบบจำลองทางการเงิน ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป

ตัวอย่าง 1.21. จงหามูลค่าสะสม ณ ปลายปีที่ 10 ของเงินลงทุน 100,000 บาท ที่ให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 3 ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน

วิธีทำ

วิธีที่ 1: คำนวณโดยตรง สมมติว่า 1 ปีมี 365 วัน จะได้

$$\begin{aligned} S_{10} &= 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{365}\right)^{365(10)} \\ &\approx 134,984.22 \text{ บาท} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2: ประมาณด้วยการคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง เนื่องจากการคิดทบต้นรายวันมีความถี่สูง จึงประมาณโดยใช้ $\delta = 0.03$ ได้ว่า

$$S_{10} = 100,000 e^{0.03(10)} \approx 134,985.88 \text{ บาท}$$

ทั้งสองวิธีให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกัน



ตัวอย่าง 1.22. กำหนดกำลังดอกเบี้ย

$$\delta(t) = \frac{2}{(t+1)(t+2)}$$

จงหาเงินสะสมของเงินลงทุน 1 บาท ณ ปลายปีที่ n

วิธีทำ ต้องการหาฟังก์ชันสะสม $a(t)$ จากนิยามกำลังดอกเบี้ย

$$\frac{d}{dt} \ln a(t) = \frac{2}{(t+1)(t+2)} = 2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right)$$

อินทิเกรตตั้งแต่ 0 ถึง n จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^n d \ln a(t) &= \int_0^n 2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt, \\ \ln a(n) - \ln a(0) &= \left[2 \ln \left(\frac{t+1}{t+2} \right) \right]_0^n \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a(0) = 1$ จึงได้

$$\begin{aligned} \ln a(n) &= 2 \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \ln \left(\frac{2(n+1)}{n+2} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$a(n) = \left(\frac{2(n+1)}{n+2} \right)^2 = 4 \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2$$

เงินสะสมของเงินลงทุน 1 บาท ณ ปลายปีที่ n จึงเท่ากับ

$$4 \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \text{ บาท}$$



ตัวอย่าง 1.23. กำหนดอัตราผลตอบแทนของกองทุน 2 กองทุน ดังนี้

กองทุน	ผลตอบแทน
AAA	อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี
BBB	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

จงหาเวลาที่ทำให้กำลังดอกเบี้ยของทั้งสองกองทุนเท่ากัน

วิธีทำ สำหรับกองทุน AAA มี $a(t) = 1 + 0.10t$ ดังนั้น

$$\delta_{AAA}(t) = \frac{0.10}{1 + 0.10t}$$

สำหรับกองทุน BBB มี $i^{(4)} = 0.09$ จึงมีอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่าเป็น

$$1 + i = \left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^4$$

และมีกำลังดอกเบี้ยคงที่

$$\begin{aligned}\delta_{BBB} &= \ln(1 + i) \\ &= 4 \ln \left(1 + \frac{0.09}{4}\right) \\ &\approx 0.08900244\end{aligned}$$

ให้ x เป็นเวลาที่กำลังดอกเบี้ยของทั้งสองกองทุนเท่ากัน จะได้

$$\frac{0.10}{1 + 0.10x} = 0.08900244$$

แก้สมการได้

$$x \approx 1.23565 \text{ ปี}$$

ดังนั้น กองทุนทั้งสองมีกำลังดอกเบี้ยเท่ากันเมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 1.2360 ปี หรือประมาณ 1 ปี 86 วัน

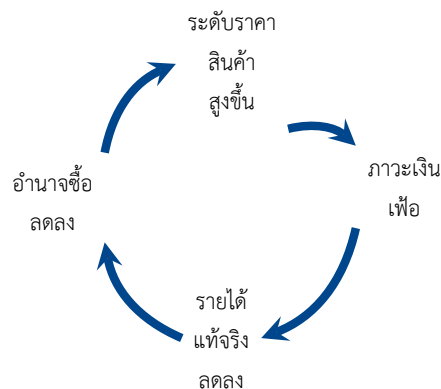
□

1.4 อัตราเงินเฟ้อและเงินฝืด

อัตราเงินเฟ้อ และ เงินฝืด (inflation and deflation) เป็นเครื่องมือชี้วัดภาวะทางเศรษฐกิจ ที่สะท้อนการเปลี่ยนแปลงของระดับราคาและ อำนาจซื้อ (purchasing power) ของเงิน กล่าวคือ เงินจำนวนหนึ่งที่เคยซื้อสินค้าและบริการได้ในอดีต อาจซื้อสินค้าและบริการชนิดเดียวกันได้มากขึ้นหรือน้อยลงในปัจจุบัน ภาวะเงินเฟ้อและเงินฝืดจึงส่งผลโดยตรงต่อมูลค่าที่แท้จริงของเงิน

1.4.1 ภาวะเงินเฟ้อ

ภาวะเงินเฟ้อ (inflation) คือ ภาวะที่ระดับราคาสินค้าและบริการโดยรวม เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ส่งผลให้อำนาจซื้อของเงินและรายได้ที่แท้จริงลดลง วัฏจักรพื้นฐานของภาวะเงินเฟ้อแสดงได้ดังรูปที่ 1.15



รูปที่ 1.15 แผนภาพแสดงวัฏจักรพื้นฐานของภาวะเงินเฟ้อ

สาเหตุที่ทำให้เกิดภาวะเงินเฟ้อ

ภาวะเงินเฟ้อมักเกิดจากสาเหตุสำคัญสองประการ ได้แก่

- 1) **ต้นทุนการผลิตสูงขึ้น (cost-push inflation)** เช่น ราคาวัตถุดิบ ค่าจ้างแรงงาน ต้นทุนพลังงาน ค่าใช้จ่ายในการผลิต และค่าขนส่งเพิ่มขึ้น ผู้ผลิตจึงปรับราคาสินค้าและบริการสูงขึ้นเพื่อชดเชยต้นทุน
- 2) **ความต้องการสินค้าและบริการเพิ่มสูงขึ้น (demand-pull inflation)** เมื่ออุปสงค์เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว แต่ปริมาณสินค้าและบริการในตลาดมีไม่เพียงพอ ระดับราคาจึงปรับตัวสูงขึ้น

เครื่องมือที่ใช้วัดภาวะเงินเฟ้อ

เครื่องมือที่นิยมใช้วัดภาวะเงินเฟ้อ ได้แก่ ดัชนีราคาผู้บริโภค (consumer price index: CPI) และดัชนีราคาผู้

ผลิต (producer price index: PPI) โดยทั่วไปประเทศไทยใช้ดัชนีราคาผู้บริโภค เป็นตัวชี้วัดภาวะเงินเฟ้อที่สำคัญ

ดัชนีราคาผู้บริโภค

ดัชนีราคาผู้บริโภค คือ ตัวเลขที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของระดับราคาสินค้าและบริการ ที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิตในช่วงเวลาหนึ่งเมื่อเทียบกับปีฐาน โดยปีฐานคือปีที่กำหนดให้เป็นปีอ้างอิงในการเปรียบเทียบ และมักเลือกปีที่ระบบเศรษฐกิจอยู่ในภาวะค่อนข้างปกติ

กำหนดให้ P_{0i} และ P_{ni} เป็นราคาของสินค้าชนิดที่ i ในปีฐานและปีที่ต้องการคำนวณตามลำดับ และให้ Q_{0i} เป็นปริมาณบริโภค ของสินค้าชนิดที่ i ในปีฐาน ดัชนีราคาผู้บริโภคแบบตะกร้าสินค้าคงที่คำนวณได้จาก

$$CPI_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^k P_{ni} Q_{0i}}{\sum_{i=1}^k P_{0i} Q_{0i}} \right) \times 100 \quad (1.29)$$

เมื่อ k คือจำนวนชนิดของสินค้าและบริการที่ใช้ในการคำนวณ

ตัวอย่าง 1.24. สมมติว่าต้องการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของระดับราคาสินค้าอุปโภคบริโภค โดยใช้ พ.ศ. 2560 เป็นปีฐาน และเปรียบเทียบกับ พ.ศ. 2565 และ พ.ศ. 2568 ข้อมูลสินค้า 3 รายการเป็นดังนี้

สินค้า	ปริมาณปีฐาน	ราคาต่อหน่วย (บาท)		
	พ.ศ. 2560	พ.ศ. 2560	พ.ศ. 2565	พ.ศ. 2568
ข้าว	10	30	32	33
น้ำมัน	5	25	27	28
ไข่	12	5	6	6

- 1) จงคำนวณ CPI ของ พ.ศ. 2565 และ พ.ศ. 2568 โดยใช้ พ.ศ. 2560 เป็นปีฐาน
- 2) จงเปรียบเทียบ CPI ทั้งสองปี และอธิบายการเปลี่ยนแปลงของระดับราคา

วิธีทำ

มูลค่าตะกร้าสินค้าในปีฐานเท่ากับ

$$\sum P_{0i}Q_{0i} = (30)(10) + (25)(5) + (5)(12) = 485$$

สำหรับ พ.ศ. 2565

$$\sum P_{65,i}Q_{0i} = (32)(10) + (27)(5) + (6)(12) = 527,$$

จึงได้

$$CPI_{2565} = \frac{527}{485}(100) \approx 108.66$$

สำหรับ พ.ศ. 2568

$$\sum P_{68,i}Q_{0i} = (33)(10) + (28)(5) + (6)(12) = 542,$$

จึงได้

$$CPI_{2568} = \frac{542}{485}(100) \approx 111.75$$

ดังนั้น ดัชนีราคาผู้บริโภคเพิ่มขึ้นจาก 108.66 เป็น 111.75 หรือเพิ่มขึ้นประมาณ

$$\frac{111.75 - 108.66}{108.66}(100) \approx 2.84\%$$

แสดงว่า ระดับราคาเฉลี่ยของตะกร้าสินค้าเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 2.84 ในช่วง พ.ศ. 2565–2568 □

การคำนวณอัตราเงินเฟ้อ

อัตราเงินเฟ้อของปีที่ n คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาผู้บริโภค เมื่อเปรียบเทียบกับปีก่อนหน้า เขียนแทนด้วย $i_{\text{inf}}(n)$ และคำนวณได้จาก

$$i_{\text{inf}}(n) = \frac{CPI_n - CPI_{n-1}}{CPI_{n-1}} \quad (1.30)$$

ตัวอย่าง 1.25. ถ้า พ.ศ. 2553 มี CPI เท่ากับ 127 และ พ.ศ. 2554 มี CPI เท่ากับ 130 จงหาอัตราเงินเฟ้อของ พ.ศ. 2554

วิธีทำ

$$\begin{aligned} i_{\text{inf}}(2554) &= \frac{\text{CPI}_{2554} - \text{CPI}_{2553}}{\text{CPI}_{2553}} \\ &= \frac{130 - 127}{127} \approx 0.023622 = 2.3622\% \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราเงินเฟ้อของ พ.ศ. 2554 เท่ากับประมาณร้อยละ 2.3622

□

1.4.2 ภาวะเงินฝืด

ภาวะเงินฝืด (deflation) เป็นภาวะที่ระดับราคาสินค้าและบริการโดยรวม ลดลงอย่างต่อเนื่อง มีได้หมายความว่าสินค้าทุกชนิดต้องมีราคาลดลง ภาวะดังกล่าวมักเกิดเมื่ออุปสงค์รวมน้อยกว่าอุปทานรวม ผู้ผลิตจึงลดราคา ลดกำลังการผลิต และลดการจ้างงาน ส่งผลให้รายได้ การบริโภค และการลงทุนลดลง และอาจกระทบต่อความสามารถในการชำระหนี้และเสถียรภาพของระบบการเงิน

สาเหตุที่ทำให้เกิดภาวะเงินฝืด

- 1) **การขาดแคลนเงินทุนหรือเงินออม** เมื่อเงินออมในระบบมีน้อย อัตราดอกเบี้ยอาจปรับสูงขึ้น ทำให้ต้นทุนการกู้ยืมเพิ่มขึ้น การลงทุน การผลิต การจ้างงาน และรายได้จึงลดลง
- 2) **เงินทุนไหลออกไปต่างประเทศมากเกินไป** ทำให้สภาพคล่องและเงินทุนภายในประเทศลดลง และอาจผลักดันให้อัตราดอกเบี้ยสูงขึ้น
- 3) **ความผิดพลาดในการดำเนินนโยบายการเงินและการคลัง** เช่น การใช้นโยบายตั้งตัวมากเกินไป การขึ้นอัตราดอกเบี้ยสูงเกินควร หรือการจัดเก็บภาษีจนทำให้กำลังซื้อของประชาชนลดลงมาก
- 4) **ต้นทุนการผลิตลดลงหรือผลิตภาพเพิ่มขึ้นอย่างมาก** เมื่อปริมาณสินค้าและบริการเพิ่มขึ้นเร็วกว่าความต้องการ ระดับราคาอาจลดลง และผู้ผลิตอาจลดกำลังการผลิตในเวลาต่อมา

การคำนวณอัตราเงินฝืด

อัตราเงินฝืดคำนวณได้จากสมการ (1.30) เช่นเดียวกับอัตราเงินเฟ้อ แต่ค่าที่ได้จะเป็นลบ กล่าวคือ หาก $\text{CPI}_n > \text{CPI}_{n-1}$ จะเกิดภาวะเงินเฟ้อ และหาก $\text{CPI}_n < \text{CPI}_{n-1}$ จะเกิดภาวะเงินฝืด

ตัวอย่าง 1.26. ถ้า พ.ศ. 2549 มี CPI เท่ากับ 130 และ พ.ศ. 2550 มี CPI เท่ากับ 125 จงหาอัตราเงินฝืดของ พ.ศ. 2550

วิธีทำ

$$\frac{125 - 130}{130} \approx -0.0385 = -3.85\%$$

ดังนั้น พ.ศ. 2550 เกิดภาวะเงินฝืดในอัตราประมาณร้อยละ 3.85 กล่าวคือ ระดับราคาโดยรวมลดลงประมาณร้อยละ 3.85 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2549 □

1.4.3 การวัดค่าของเงิน

การวัดค่าของเงินวิธีหนึ่งทำได้โดยเปรียบเทียบดัชนีราคาผู้บริโภคในเวลาต่างกัน กำหนดให้ปีหนึ่งเป็นปีฐาน และให้ u_t แทนค่าของเงิน 1 บาทในปีที่ t เมื่อเทียบกับเงินในปีฐาน จะได้

$$u_t = \frac{CPI_0}{CPI_t}, \quad (1.31)$$

เมื่อ CPI_0 คือดัชนีราคาผู้บริโภคของปีฐาน และ CPI_t คือดัชนีราคาผู้บริโภคของปีที่ t

ตัวอย่าง 1.27. สมมติว่า พ.ศ. 2529 เป็นปีฐานที่มี CPI เท่ากับ 100 และ พ.ศ. 2530 มี CPI เท่ากับ 125 จงหาค่าของเงินใน พ.ศ. 2530

วิธีทำ

$$u_{2530} = \frac{CPI_{2529}}{CPI_{2530}} = \frac{100}{125} = 0.80$$

ดังนั้น เงิน 1 บาทใน พ.ศ. 2530 มีอำนาจซื้อเทียบเท่าเงิน 0.80 บาท ใน พ.ศ. 2529 □

ตัวอย่าง 1.28. สมมติว่า พ.ศ. 2542 เป็นปีฐานที่มี CPI เท่ากับ 125 และ พ.ศ. 2545 มี CPI เท่ากับ 140 จงหาค่าของเงินใน พ.ศ. 2545

วิธีทำ

$$u_{2545} = \frac{CPI_{2542}}{CPI_{2545}} = \frac{125}{140} \approx 0.89$$

ดังนั้น เงิน 1 บาทใน พ.ศ. 2545 มีอำนาจซื้อเทียบเท่าเงินประมาณ 0.89 บาท ใน พ.ศ. 2542 □

การคำนวณราคาสินค้าและบริการ

ถ้าราคาสินค้าและบริการในปีที่ t เป็นไปตามดัชนีราคาผู้บริโภค ให้ A_0 และ A_t แทนราคาสินค้าในปีฐาน

และปีที่ t ตามลำดับ จะได้

$$A_t = A_0 \frac{CPI_t}{CPI_0} \quad (1.32)$$

เมื่อใช้สมการ (1.31) จะเขียนได้อีกแบบหนึ่งว่า

$$A_t = \frac{A_0}{u_t} \quad (1.33)$$

ตัวอย่าง 1.29. กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคในปีต่าง ๆ ดังนี้

พ.ศ.	2545	2546	2547	2548	2549	2550
CPI	100	101.6	104.1	107.8	114.3	116.4

- ใน พ.ศ. 2545 อาหารมื้อหนึ่งมีราคา 25 บาท จงหาราคาอาหารชนิดเดียวกันใน พ.ศ. 2550
- รถยนต์รุ่นหนึ่งใน พ.ศ. 2546 มีราคา 500,000 บาท จงหาราคาใน พ.ศ. 2549 โดยสมมติว่าราคาเปลี่ยนแปลงตาม CPI
- ค่าแรงขั้นต่ำใน พ.ศ. 2547 เท่ากับ 150 บาทต่อวัน หากต้องการรักษาอำนาจซื้อเดิม ค่าแรงขั้นต่ำใน พ.ศ. 2550 ควรเป็นเท่าใด

วิธีทำ

ก)

$$A_{2550} = 25 \left(\frac{116.4}{100} \right) = 29.10 \text{ บาท}$$

ข)

$$A_{2549} = 500,000 \left(\frac{114.3}{101.6} \right) = 562,500 \text{ บาท}$$

ค)

$$A_{2550} = 150 \left(\frac{116.4}{104.1} \right) \approx 167.72 \text{ บาทต่อวัน}$$

□

ตัวอย่าง 1.30. จากข้อมูล CPI ในตัวอย่าง 1.30 จงหา

- ค่าของเงินใน พ.ศ. 2549 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2546

b) ค่าของเงินใน พ.ศ. 2550 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2545

วิธีทำ

ก)

$$u_{2549} = \frac{101.6}{114.3} \approx 0.89$$

ข)

$$u_{2550} = \frac{100}{116.4} \approx 0.86$$

□

การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของเงิน

เนื่องจากค่าของเงินในปีฐานเท่ากับ $u_0 = 1$ เปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงค่าของเงินจึงคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} \text{เปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงค่าของเงิน} &= \frac{u_t - u_0}{u_0} \times 100 \\ &= (u_t - 1) \times 100 \\ &= \left(\frac{\text{CPI}_0}{\text{CPI}_t} - 1 \right) \times 100 \end{aligned} \quad (1.34)$$

ตัวอย่าง 1.31. ถ้า CPI เปลี่ยนจาก 125 เป็น 150 จงหาเปอร์เซ็นต์การเปลี่ยนแปลงค่าของเงิน

วิธีทำ

$$\left(\frac{125}{150} - 1 \right) (100) = -16.67\%$$

ดังนั้น ค่าของเงินหรืออำนาจซื้อลดลงประมาณร้อยละ 16.67

□

1.4.4 อัตราจริงของดอกเบี้ย

ในการลงทุนภายใต้ภาวะเงินเฟ้อ ต้องพิจารณาว่าผลตอบแทนที่ได้รับ สามารถชดเชยการเพิ่มขึ้นของระดับราคาได้หรือไม่ หากอัตราดอกเบี้ยต่ำกว่าอัตราเงินเฟ้อ เงินสะสมอาจเพิ่มขึ้นในเชิงตัวเงิน แต่มีอำนาจซื้อลดลง

ตัวอย่างเช่น หากลงทุน 100 บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี จะมีเงินปลายปี 103 บาท แต่ถ้าอัตราเงินเฟ้อเท่ากับร้อยละ 5 สินค้าและบริการที่มีราคา 100 บาทต้นปีจะมีราคาโดยประมาณ 105 บาทปลายปี ดังนั้น แม้ยอดเงินเพิ่มขึ้น แต่อำนาจซื้อจริงกลับลดลง

ในการกำหนดอัตราผลตอบแทนของโครงการลงทุน ผู้ลงทุนจึงควรพิจารณา ความเสี่ยงของโครงการ ต้นทุนค่า

เสียโอกาส และ ส่วนชดเชยเงินเฟ้อ (inflation premium) ประกอบกัน

กำหนดให้

$$\begin{aligned} i &= \text{อัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงิน หรืออัตราดอกเบี้ยปกติ,} \\ i_{\text{inf}} &= \text{อัตราเงินเฟ้อ,} \\ i_r &= \text{อัตราดอกเบี้ยจริง (real interest rate)} \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ของตัวประกอบสะสม

$$1 + i = (1 + i_r)(1 + i_{\text{inf}}),$$

จะได้

$$i_r = \frac{i - i_{\text{inf}}}{1 + i_{\text{inf}}} \quad (1.35)$$

ดังนั้น มูลค่าสะสมที่แท้จริงของเงิน 1 บาท ณ ปลายหนึ่งงวดเท่ากับ

$$a_r(1) = 1 + i_r = \frac{1 + i}{1 + i_{\text{inf}}}, \quad (1.36)$$

และฟังก์ชันสะสมที่ปรับด้วยอัตราเงินเฟ้อแล้วเป็น

$$a_r(t) = (1 + i_r)^t = \left(\frac{1 + i}{1 + i_{\text{inf}}} \right)^t \quad (1.37)$$

ตัวอย่าง 1.32. นายเอลงทุนได้ผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี หากปีนั้นมีอัตราเงินเฟ้อร้อยละ 4 จงหาอัตราดอกเบี้ยจริง

วิธีทำ

$$i_r = \frac{0.10 - 0.04}{1 + 0.04} \approx 0.057692 = 5.7692\%$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยจริงเท่ากับประมาณร้อยละ 5.7692

□

ความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงินกับอัตราดอกเบี้ยจริง

ประเด็น	อัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงิน	อัตราดอกเบี้ยจริง
คำจำกัดความ	อัตราที่แสดงในสัญญาหรือบัญชีเงินฝาก โดยยังไม่ปรับผลกระทบของเงินเฟ้อ	อัตราที่ปรับผลกระทบของเงินเฟ้อแล้ว
ใช้คำนวณกับ	มูลค่าในหน่วยตัวเงินของปีอนาคต	มูลค่าที่แท้จริงหรืออำนาจซื้อในหน่วยเงินปีฐาน
การสะท้อนผลตอบแทน	อาจดูเหมือนมีกำไร ทั้งที่อำนาจซื้ออาจลดลง	สะท้อนการเพิ่มหรือลดของอำนาจซื้อ
เหมาะใช้เมื่อ	ต้องการทราบจำนวนเงินที่ได้รับตามสัญญา	ประเมินความเสี่ยงพหุของเงินออมและการลงทุนในเชิงมูลค่าที่แท้จริง
ตัวอย่างการใช้งาน	คำนวณยอดเงินปลายงวดที่บัญชีแจ้ง	วางแผนการเงินหรือการเกษียณโดยคำนึงถึงเงินเฟ้อ
ผลลัพธ์	อาจสูงเกินจริงในเชิงอำนาจซื้อเมื่อเงินเฟ้อสูง	สะท้อน กำไร หรือ ขาดทุน ที่แท้จริง ตามอำนาจซื้อ

ตัวอย่าง 1.33. สมมติว่านายเอต้องการมีเงินในอีก 20 ปี ซึ่งมีอำนาจซื้อเทียบเท่าเงิน 1,000,000 บาทในปัจจุบัน โดยได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนร้อยละ 6 ต่อปี และคาดว่าอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยเท่ากับร้อยละ 3 ต่อปี จงเปรียบเทียบเงินออมเริ่มต้นระหว่างกรณีที่ไม่พิจารณาเงินเฟ้อกับกรณีที่พิจารณาเงินเฟ้อ

วิธีทำ

1) กรณีไม่พิจารณาเงินเฟ้อ

$$PV = 1,000,000(1.06)^{-20} \approx 311,804.73 \text{ บาท}$$

จำนวนนี้เพียงพอสำหรับเป้าหมายที่เป็นตัวเงิน 1,000,000 บาทในอีก 20 ปี แต่ไม่ได้รักษอำนาจซื้อเทียบเท่า 1,000,000 บาทในปัจจุบัน

2) กรณีพิจารณาเงินเฟ้อ

อัตราดอกเบี้ยจริงเท่ากับ

$$i_r = \frac{0.06 - 0.03}{1 + 0.03} = 0.0291262 \approx 2.9126\%$$

ดังนั้น เงินออมเริ่มต้นที่ทำให้เงินปลายทางมีอำนาจซื้อเทียบเท่า 1,000,000 บาทในปัจจุบันคือ

$$PV = 1,000,000(1 + i_r)^{-20} \approx 563,154.02 \text{ บาท}$$

ให้ผลลัพธ์เดียวกับการปรับเป้าหมายในอนาคตด้วยเงินเฟ้อก่อน กล่าวคือ

$$PV = \frac{1,000,000(1.03)^{20}}{(1.06)^{20}} \approx 563,154.02 \text{ บาท}$$

ความแตกต่างระหว่างทั้งสองกรณีสะท้อนว่า การพิจารณาเฉพาะยอดเงินในอนาคต อาจทำให้เข้าใจผิดว่าเงินออมเพียงพอ ทั้งที่อำนาจซื้อจริงลดลง ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การลวงตาจากเงินเฟ้อ □

ข้อสังเกต

- 1) อัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงินใช้วัดจำนวนเงิน แต่ไม่บอกมูลค่าที่แท้จริงของเงิน
- 2) อัตราดอกเบี้ยจริงแสดงการเปลี่ยนแปลงของอำนาจซื้อ
- 3) การวางแผนการเงินระยะยาวควรใช้อัตราดอกเบี้ยจริงหรือปรับเป้าหมายด้วยเงินเฟ้อ เพื่อหลีกเลี่ยงการประเมินเงินออมต่ำกว่าที่จำเป็น

บทสรุปท้ายบทที่ 1

บทนี้นำเสนอหลักพื้นฐานของมูลค่าของเงินตามเวลา ซึ่งเป็นรากฐานของการวิเคราะห์ทางการเงิน เริ่มจากแนวคิดอัตราดอกเบี้ย ฟังก์ชันสะสม ดอกเบี้ยเชิงเดียว และดอกเบี้ยทบต้น จากนั้นจึงเชื่อมโยงไปสู่การคำนวณมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตของกระแสเงินสด

หัวข้ออัตราดอกเบี้ยเพียงในนามและกำลังดอกเบี้ยแสดงให้เห็นว่า อัตราดอกเบี้ยที่มีตัวเลขเท่ากันอาจให้ผลตอบแทนแตกต่างกัน หากจำนวนครั้งของการคิดดอกเบี้ยทบต้นแตกต่างกัน กำลังดอกเบี้ยยังช่วยอธิบายอัตราการเพิ่มขึ้นของเงินสะสมแบบฉับพลัน และเชื่อมโยงกับการคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง

ในส่วนท้ายได้ศึกษาภาวะเงินเฟ้อและเงินฝืด ดัชนีราคาผู้บริโภค การเปลี่ยนแปลงค่าของเงิน และอัตราดอกเบี้ยจริง แนวคิดเหล่านี้ช่วยให้แยกความแตกต่างระหว่างการเพิ่มขึ้นของยอดเงิน กับการเพิ่มขึ้นของอำนาจซื้อได้อย่างชัดเจน และสามารถประยุกต์ใช้กับการออม การวางแผนเกษียณ การประเมินโครงการลงทุน การจัดทำงบประมาณ และการบริหารความเสี่ยงทางการเงิน

เอกสารอ้างอิงท้ายบทที่ 1

- [1] มานพ วราภักดิ์. *ทฤษฎีดอกเบี้ย (Theory of Interest)*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2549.
- [2] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้ปริ้นท์, กรุงเทพฯ, 2558.
- [3] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *CISA ระดับ 1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณ กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน*. พิมพ์ครั้งที่ 3, ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2552.
- [4] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *การวิเคราะห์ตราสารอนุพันธ์ (DR2)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2556.
- [5] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตลาดการเงิน และการลงทุนในหลักทรัพย์สำหรับผู้ขายหลักทรัพย์ (Single License)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2548.
- [6] Avellaneda, M. and Laurence, P. *Quantitative Modeling of Derivative Securities*. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [7] Härdle, W., Kleinow, T., and Stahl, G. *Applied Quantitative Finance*. Springer, Berlin, 2002.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

- 1) (ระดับ ง่าย) ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งติดป้ายราคาขายตู้เย็นไว้ราคา 30,000 บาท ซึ่งเป็นราคาที่ยังไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% และติดป้ายลดราคา 5% จากราคาป้าย และลดเป็นพิเศษอีก 3% สำหรับผู้มีบัตรสมาชิก จงหาว่าลูกค้าที่มีบัตรสมาชิกซื้อตู้เย็น 1 เครื่องในราคาเท่าไร
- 2) (ระดับ ปานกลาง) ถ้าสมชายลงทุนในธุรกิจอย่างหนึ่งด้วยเงิน 20,000 บาท โดยธุรกิจนั้นได้กำไรร้อยละ 7, 11, 17, 15 และ 14 ต่อปี ตามลำดับใน 5 ปีแรก และขาดทุนร้อยละ 6 และ 5 ต่อปี ตามลำดับใน 2 ปีหลัง จงหาว่า ณ ปลายปีที่ 7 นายสมชายมีเงินในธุรกิจนั้นเท่าไร
- 3) (ระดับ ง่าย) นาย A ลงทุนซื้อกองทุนกองหนึ่งเป็นเงิน 100,000 บาท มีอายุการลงทุน 5 ปี โดยในแต่ละปีได้รับผลตอบแทนร้อยละ 2, 3, 4, 4 และ 5 ตามลำดับ เมื่อครบกำหนด นาย A จะได้รับเงินรวมทั้งหมดเท่าไร และคิดเป็นผลตอบแทนรวมร้อยละเท่าไร
- 4) (ระดับ ปานกลาง) นาย A ลงทุนซื้อกองทุนกองหนึ่งเป็นเงิน 100,000 บาท มีอายุการลงทุน 5 ปี โดยในแต่ละปีได้รับผลตอบแทนร้อยละ 6, -3, -4, -4 และ 5 ตามลำดับ เมื่อครบกำหนด นาย A จะได้รับเงินรวมทั้งหมดเท่าไร และได้กำไรรวมหรือขาดทุนรวมคิดเป็นร้อยละเท่าไร (เครื่องหมายลบหมายถึงขาดทุน)
- 5) (ระดับ ง่าย) ร้านค้าแห่งหนึ่งติดป้ายขายรองเท้าไว้ราคา 1,800 บาท ซึ่งยังไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% ทางร้านลดราคาจากป้าย 10% และลดให้อีก 5% หากซื้อสินค้าภายในร้านครบ 2,000 บาทขึ้นไป ถ้านางสาว A ซื้อสินค้าภายในร้านไปแล้ว 2,400 บาท เธอจะซื้อรองเท้าคู่นี้ได้ในราคากี่บาท เมื่อรวมภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว
- 6) (ระดับ ปานกลาง) ร้านค้าแห่งหนึ่งติดป้ายขายเสื้อไว้ราคา 2,400 บาท ซึ่งรวมภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% แล้ว ทางร้านลดราคาจากป้าย 20% และลดให้อีก 10% สำหรับผู้มีบัตรสมาชิก นอกจากนี้ หากลูกค้าชำระด้วยบัตรเครดิต จะได้รับเงินคืนอีก 5% ของยอดเงินที่ชำระ ถ้านางสาว A ซื้อเสื้อตัวนี้โดยใช้บัตรเครดิต และชำระด้วยบัตรเครดิต ต้นทุนสุทธิของเสื้อตัวนี้เท่ากับกี่บาท
- 7) (ระดับ ปานกลาง) สมมติราคาสินค้าเปลี่ยนแปลงตามดัชนีราคาผู้บริโภค (CPI) ของประเทศไทยดังตาราง

ปี พ.ศ.	2550	2551	2552	2553	2554	2555
ค่า CPI	100	102.5	104.8	111.4	118	120

- 7.1) จงหาค่าของเงินในปี พ.ศ. 2553 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2550
- 7.2) จงหาเปอร์เซ็นต์การลดค่าของเงินในปี พ.ศ. 2555 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2552
- 7.3) ในปี พ.ศ. 2551 ทางเกงตัวหนึ่งราคา 200 บาท ในปี พ.ศ. 2554 ทางเกงชนิดเดียวกันควรมีราคาเท่าไร
- 7.4) ในปี พ.ศ. 2552 สมชัยมีรายได้เดือนละ 18,300 บาท ในปี พ.ศ. 2555 เขาควรมีรายได้เดือนละเท่าไร จึงจะถือว่ามียาได้ที่แท้จริงเท่าเดิม
- 8) **(ระดับ ปานกลาง)** จากตารางดัชนีราคาผู้บริโภคในข้อ 7 จงตอบคำถามต่อไปนี้
- 8.1) นาง A ขายเตียงนอนราคา 2,500 บาทในปี พ.ศ. 2552 ถ้าต้นทุนเปลี่ยนแปลงตามดัชนีราคาผู้บริโภค ในปี พ.ศ. 2555 นาง A ควรปรับราคาเตียงขึ้นอย่างน้อยกี่บาท จึงจะสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของระดับราคา
- 8.2) นาย B เป็นพนักงานประจำของบริษัทแห่งหนึ่ง ในปี พ.ศ. 2554 เขาได้รับเงินเดือนเดือนละ 25,000 บาท ในปี พ.ศ. 2555 นายจ้างควรขึ้นค่าจ้างให้อย่างน้อยกี่เปอร์เซ็นต์ เขาจึงจะมีสภาพความเป็นอยู่ไม่แย่ลง และเงินเดือนใหม่ควรเป็นอย่างน้อยเท่าไร
- 8.3) จงหาอัตราเงินเฟ้อของปี พ.ศ. 2555 โดยคำนวณจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ CPI ระหว่างปี พ.ศ. 2554 และ พ.ศ. 2555
- 8.4) จงหาค่าของเงินในปี พ.ศ. 2554 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2552
- 8.5) เงิน 1,000,000 บาทในปี พ.ศ. 2553 มีมูลค่าเทียบเท่ากับเงินเท่าไรในปี พ.ศ. 2555
- 9) **(ระดับ ปานกลาง)** บ้านหลังหนึ่งราคา 2,000,000 บาทในปี พ.ศ. 2550 จงหาราคาบ้านที่ควรเป็นในปี พ.ศ. 2556 ซึ่งสอดคล้องกับดัชนีราคาผู้บริโภค เมื่อสมมติว่าทุกปีมีอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยร้อยละ 2 ต่อปี
- 10) **(ระดับ ง่าย)** นายธนรัตน์กู้เงินจากนายไตรมาสจำนวน 10,000 บาท โดยนายไตรมาสคิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี หากนายธนรัตน์นำเงินไปคืนเมื่อสิ้นปีที่ 2 นายไตรมาสจะได้รับเงินคืนทั้งสิ้นกี่บาท
- 11) **(ระดับ ง่าย)** นายมงคลนำเงินไปฝากธนาคารจำนวน 5,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ

- 5 ต่อปี เมื่อปิดบัญชีเขาได้รับเงินทั้งสิ้น 6,000 บาท จงหาระยะเวลาที่นายมงคลฝากเงินไว้
- 12) **(ระดับ ง่าย)** ฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคาร จะใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีเงินรวมเป็น 2 เท่าของเงินต้น เมื่อธนาคารคิดดอกเบี้ยเชิงเดียวในอัตราร้อยละ 12 ต่อปี
- 13) **(ระดับ ง่าย)** จงหาจำนวนดอกเบี้ยและเงินรวมจากเงินกู้ 1,650 บาท อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 13 ต่อปี ระยะเวลา 60 วัน กำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 365 วัน
- 14) **(ระดับ ง่าย)** นายสมควรกู้เงินจำนวน 35,000 บาทเป็นเวลา 6 เดือน และต้องชำระเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยรวม 40,000 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวต่อปีที่ผู้ให้กู้คิด กำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 12 เดือน
- 15) **(ระดับ ปานกลาง)** ซื้อรถจักรยานยนต์คันหนึ่งโดยจ่ายค่างวดแรก ในวันซื้อจำนวน 20,000 บาท และจ่ายอีกงวดหนึ่งในเดือนถัดไปจำนวน 20,000 บาท ถ้าใช้อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 10 ต่อปี จงหาราคาเงินสดของรถจักรยานยนต์คันนี้
- 16) **(ระดับ ง่าย)** จงหาดอกเบี้ยที่แท้จริงจากเงินกู้ 9,000 บาท เป็นเวลา 90 วัน อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 15 ต่อปี กำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 365 วัน
- 17) **(ระดับ ปานกลาง)** เงินจำนวน 75,000 บาท นำไปลงทุนตั้งแต่วันที่ 13 มีนาคมถึงวันที่ 20 ธันวาคม ในปีเดียวกัน โดยได้รับดอกเบี้ยเชิงเดียวในอัตราร้อยละ 10 ต่อปี จงหาจำนวนดอกเบี้ยเมื่อคิดแบบ
- 17.1) ดอกเบี้ยเชิงเดียวที่แท้จริง โดยกำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 365 วัน
- 17.2) ดอกเบี้ยเชิงเดียวปกติ โดยกำหนดให้ 1 ปีเท่ากับ 360 วัน
- 18) **(ระดับ ปานกลาง)** เงินต้น 10,000 บาท ระยะเวลากู้ 2 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี จงหาเงินรวมและดอกเบี้ยทั้งหมด เมื่อ
- 18.1) คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี
- 18.2) คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 3 เดือน
- 18.3) คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน
- 18.4) คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 18 เดือน
- 19) **(ระดับ ปานกลาง)** นาย ก. ฝากเงินประจำ 3 เดือนกับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อวันที่ 7 เมษายน พ.ศ. 2554 จำนวน 10,000 บาท และวันที่ 7 ตุลาคม พ.ศ. 2554 ฝากเพิ่มอีก 8,000 บาท ถ้านาย ก. ไม่เคยถอนเงินต้นและดอกเบี้ย จงหาว่า ณ วันที่ 7 มกราคม พ.ศ. 2555 เขาจะมีเงินในบัญชีเท่าไร เมื่อธนาคารจ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

- 20) **(ระดับ ปานกลาง)** ในวันที่ลูกชายเกิด นายปรีชานำเงิน 20,000 บาท ฝากกับบริษัทเงินทุนหลักทรัพย์แห่งหนึ่งให้แก่ลูกชาย ได้รับดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี จงหาว่าเมื่อลูกชายอายุครบ 18 ปี จะมีเงินในบัญชีเท่าไร
- 21) **(ระดับ ปานกลาง)** ฝากเงิน 20,000 บาท โดยได้รับดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกครึ่งปี จงหาเงินสะสมเมื่อเวลาผ่านไป 3 ปี 5 เดือน โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยเชิงเดียวในอัตราร้อยละ 3 ต่อครึ่งปี สำหรับช่วงเวลาที่ไม่มีครบครึ่งปี
- 22) **(ระดับ ปานกลาง)** นางสาวธิดานำเงินไปฝากประจำ 4 เดือน กับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อวันที่ 10 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2554 จำนวน 500,000 บาท และฝากเพิ่มอีก 1,000,000 บาทในวันที่ 10 สิงหาคม พ.ศ. 2554 ถ้าไม่เคยถอนเงินต้นและดอกเบี้ย จงหาว่าในวันที่ 10 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2555 นางสาวธิดาจะมีเงินในบัญชีทั้งหมดเท่าไร เมื่ออัตราดอกเบี้ยเท่ากับร้อยละ 3 ต่อปี คิดทบต้นทุก 4 เดือน
- 23) **(ระดับ ปานกลาง)** นายธงชัยฝากเงินประจำ 3 เดือนกับธนาคารสีม่วง จำนวน 100,000 บาทเป็นเวลา 3 ปี ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.72 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน ถ้าฝากครบกำหนดโดยไม่มีการฝากเพิ่มหรือถอน เขาจะได้รับเงินเท่าไร และได้ผลตอบแทนคิดเป็นร้อยละเท่าไร
- 24) **(ระดับ ปานกลาง)** นายวิระฝากเงินประจำ 3 เดือนกับธนาคารสีเหลือง จำนวน 100,000 บาท ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3.2 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน ถ้าต้องการเงินรวม 150,000 บาท เขาจะต้องฝากเงินเป็นเวลาอย่างน้อยกี่เดือน
- 25) **(ระดับ ยาก)** นายไผ่ฝากเงินประจำ 3 เดือนกับธนาคารสีฟ้า ซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ร้อยละ 3.2 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน โดยฝากครั้งแรก 100,000 บาทในวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2553 ฝากครั้งที่สอง 50,000 บาทในวันที่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2553 และฝากครั้งที่สาม 50,000 บาทในวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2554 ถ้าเขาปิดบัญชีในวันที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2555 จะถอนเงินได้ทั้งหมดกี่บาท และได้รับดอกเบี้ยรวมกี่บาท
- 26) **(ระดับ ยาก)** นายธรรมะมีเงินเดือนเดือนละ 30,000 บาท และหักเงินร้อยละ 10 ของเงินเดือนฝากเข้าบัญชีออมทรัพย์ทุกเดือน ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2549 โดยไม่เคยถอนเงิน ไม่เคยฝากเงินจากรายการอื่น และไม่เคยได้รับการขึ้นเงินเดือน จงหาว่า ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2555 เขาจะมีเงินในบัญชีทั้งหมดกี่บาท แบ่งเป็นเงินต้นและดอกเบี้ยเท่าไร เมื่อธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ร้อยละ 2.5 ต่อปี คิดทบต้นทุก 12 เดือน
- 27) **(ระดับ ปานกลาง)** นายบานาคเปิดบัญชีออมทรัพย์กับธนาคารสีเหลือง จำนวน 100,000 บาทในวัน

ที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2553 ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 12 เดือน หลังจากนั้นมีการฝากถอนดังนี้

วัน เดือน ปี	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
1 มิถุนายน 2553	ฝาก	60,000
1 มิถุนายน 2554	ถอน	80,000

ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2555 เขามีเงินในบัญชีทั้งหมดกี่บาท คิดเป็นเงินต้นเท่าไร และดอกเบี้ยเท่าไร

- 28) **(ระดับ ง่าย)** จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 200,000 บาท ที่จะได้รับ ณ ปลายปีที่ 10 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 8 ต่อปี
- 29) **(ระดับ ปานกลาง)** จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 100,000 บาท ที่จะได้รับ ณ ปลายปีที่ 5 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
- 30) **(ระดับ ยาก)** นายเต๋าต้องการลงทุนเงิน 500,000 บาท ในโครงการใดโครงการหนึ่ง โดยแต่ละโครงการให้ผลตอบแทนดังนี้

โครงการ	เงื่อนไขผลตอบแทน
A	จ่ายเงินปันผลปีละ 4% เป็นเวลา 5 ปี
B	จ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน เป็นเวลา 5 ปี
C	จ่ายเงินปันผล 20,000 บาทในปีแรก หลังจากนั้นจ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี เป็นเวลาอีก 4 ปี
D	ใน 3 ปีแรกจ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี หลังจากนั้นจ่ายเงินปันผลปีละ 20,000 บาท เป็นเวลา 2 ปี

นายเต๋าควรเลือกลงทุนในโครงการใด เมื่อใช้ดอกเบี้ยรวมเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ

- 31) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเซมควรเลือกลงทุนในโครงการที่ให้ผลตอบแทน ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือนในอัตราประมาณร้อยละเท่าไรต่อปี จึงจะทำให้มูลค่าสะสมเทียบเท่ากับการลงทุนที่ให้อัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 8 ต่อปี
- 32) **(ระดับ ปานกลาง)** จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินสะสม 400,000 บาท ที่จะได้รับหลังจากลงทุนเป็นเวลา 10 ปี 8 เดือน โดยช่วงเวลาที่เป็จำนวนเต็มปีคิดผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยทบต้นทุกปี และเศษของปีที่เหลือคิดผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี

33) (ระดับ ยาก) บริษัทประกันภัยต่อแห่งหนึ่งออกพันธบัตรภัยพิบัติ (CAT bond) ซึ่งให้ผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 8 ต่อปี เป็นเวลา 5 ปี พันธบัตรจะจ่ายเงินเท่ากับมูลค่าอนาคตแก่ผู้ถือพันธบัตร หากมูลค่าความเสียหายตลอดช่วง 5 ปีต่ำกว่ามูลค่าอนาคต แต่ถ้ามูลค่าความเสียหายสูงกว่ามูลค่าอนาคต ผู้ลงทุนจะได้รับคืนเฉพาะเงินต้น สมมติว่านักลงทุนซื้อพันธบัตรจำนวน 10 ล้านบาท จงตอบคำถามต่อไปนี้

33.1) บริษัทประกันภัยต่อจะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าไร ในกรณีไม่เกิดมหันตภัยหรือมูลค่าความสูญเสียน้อยกว่ามูลค่าอนาคต

33.2) ถ้าบริษัทเก็บเงินสำรองร้อยละ 20 ของเงินที่ได้รับจากการขายพันธบัตร โดยฝากไว้กับธนาคารซึ่งให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี บริษัทจะต้องนำเงินส่วนที่เหลือไปลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเท่าไร จึงจะมีเงินเพียงพอสำหรับชำระเงินต้นและดอกเบี้ยแก่ผู้ถือพันธบัตร หลังจากหักมูลค่าอนาคตของเงินสำรองแล้ว

34) (ระดับ ปานกลาง) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่คิดทบต้นทุกเดือน ซึ่งเทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน

35) (ระดับ ยาก) นายหมี่ต้องการมีเงิน 1,000,000 บาท ในอีก 10 ปีข้างหน้า โดยการลงทุนให้ผลตอบแทน $i^{(12)} = 6\%$ ถ้าเขาฝากเงินเท่ากันทุกเดือน เขาจะต้องฝากเดือนละเท่าไรจึงจะบรรลุเป้าหมาย

36) (ระดับ ปานกลาง) จงหามูลค่าอนาคต ณ ปลายปีที่ 5 ของเงินต้น 100,000 บาท เมื่อได้รับผลตอบแทนดังนี้ สองปีแรกคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องร้อยละ 4 ต่อปี สองปีถัดมาคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องร้อยละ 6 ต่อปี และปีสุดท้ายคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องร้อยละ 8 ต่อปี

37) (ระดับ ปานกลาง) นายเก่งต้องการมีเงิน 1,000,000 บาท ณ ปลายปีที่ 5 และกำลังพิจารณาลงทุนกับสถาบันการเงิน 3 แห่ง เขาควรเลือกสถาบันการเงินใดจึงจะใช้เงินลงทุนเริ่มต้นต่ำที่สุด โดยแต่ละแห่งเสนออัตราดอกเบี้ยดังนี้

ธนาคาร	ข้อเสนอ
AAA	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี
BBB	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
CCC	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน

38) (ระดับ ปานกลาง) จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 200,000 บาท ที่จะได้รับ ณ ปลายปีที่ 10 เมื่ออัตรา

ดอกเบี้ยเท่ากับร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน

- 39) (ระดับ ยาก) กำหนดกำลังดอกเบี้ย

$$\delta(t) = \frac{1}{t+2}$$

จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ ปลายปีที่ n

- 40) (ระดับ ยาก) กำหนดอัตราผลตอบแทนของกองทุนสองกองทุนดังนี้

กองทุน	ผลตอบแทน
AAA	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี
BBB	อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

จงแบ่งเงินทุน 1,000,000 บาทเพื่อลงทุนในทั้งสองกองทุน เพื่อให้ผลตอบแทนที่ได้รับจากแต่ละกองทุนเท่ากัน

- 41) (ระดับ ยาก) นายเอลงทุนในกองทุน AAA ด้วยเงินต้น 100,000 บาท หลังจากนั้นให้หักเงินจากบัญชีเงินฝากเข้าบัญชีลงทุนอย่างต่อเนื่องในอัตราวันละ 100 บาท กองทุนให้ผลตอบแทนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องร้อยละ 10 ต่อปี จงหาระยะเวลาที่ต้องลงทุนเพื่อให้มีเงินสะสมรวม 10 ล้านบาท

- 42) (ระดับ ยาก) กำหนดกำลังดอกเบี้ยแปรผันตามเวลาเป็น

$$\delta(t) = 0.01t + 0.2 \quad \text{ต่อปี}$$

จงหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่คิดทบต้นทุก 3 เดือน ซึ่งให้ผลตอบแทนเทียบเท่ากับกำลังดอกเบี้ยดังกล่าวตลอดช่วงเวลา 0-10 ปี

- 43) (ระดับ ยาก) นายเอกต้องการลงทุนให้ได้รับดอกเบี้ยรวม 1,000,000 บาทตลอดระยะเวลา 10 ปี จงวิเคราะห์และเลือกโครงการที่ใช้ต้นทุนต่ำที่สุดจากทางเลือกต่อไปนี้

โครงการ	นโยบายการลงทุน
AAA	ลงทุนปีละ 1 ครั้ง ทุกต้นปี ครึ่งละเท่ากัน โดยได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี
BBB	ลงทุนทุกต้นเดือน ครึ่งละเท่ากัน โดยได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1 ต่อเดือน

- 44) (ระดับ ปานกลาง) นายพรเพชรลงทุน 100,000 บาทตอนต้นปี โดยได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 20 ต่อปี ดอกเบี้ยที่ได้รับถูกหักภาษี ณ ที่จ่ายร้อยละ 15 จงหาอัตราดอกเบี้ยจริงของการลงทุน เมื่อปีนั้นมีอัตราเงินเฟ้อร้อยละ 5
- 45) (ระดับ ยาก) ในปี พ.ศ. 2554 ข้าวราดกะเพราไก่ไข่ดาวร้านป่าพร มีราคาจานละ 30 บาท และมีต้นทุนจานละ 20 บาท ในปี พ.ศ. 2555 ป่าพรควรขายข้าวราดกะเพราไก่ไข่ดาวจานละกี่บาท จึงจะได้กำไรจริงเท่าเดิม เมื่ออัตราเงินเฟ้อในปี พ.ศ. 2555 เท่ากับร้อยละ 4
- 46) (ระดับ ปานกลาง) สมมติว่าการลงทุนให้กำไรร้อยละ 30 ต่อปี แต่กำไรถูกหักภาษี ณ ที่จ่ายร้อยละ 15 ถ้าอัตราเงินเฟ้อเท่ากับร้อยละ 5 จงหาอัตรากำไรจริงหลังหักภาษี
- 47) (ระดับ ปานกลาง) จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 50,000 บาท ที่จะได้รับ ณ ปลายปีที่ 2 เมื่อปรับผลตอบแทนด้วยอัตราเงินเฟ้อ กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุกปี และอัตราเงินเฟ้อในปีที่ 1 และปีที่ 2 เท่ากับร้อยละ 4 และ 5 ตามลำดับ
- 48) (ระดับ ยาก) นายพรพรกู้เงินซื้อห้องชุดกับธนาคาร AAA เป็นเวลา 10 ปี โดยในสัญญาระบุให้จ่ายเงินงวดแรก 10,000 บาท ณ ต้นปีแรก และจ่ายเงินจำนวนเดียวกันทุกเดือนตลอดปีแรก หลังจากนั้นจำนวนเงินที่จ่ายในแต่ละเดือน ของแต่ละปีเพิ่มขึ้นตามอัตราเงินเฟ้อร้อยละ 2 ต่อปี ถ้ากำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาว่านายพรพรจ่ายเงินทั้งหมดกี่บาท และจ่ายดอกเบี้ยรวมกี่บาท
- 49) (ระดับ ปานกลาง) พันธบัตรฉบับหนึ่งมีมูลค่าที่ตราไว้ 1,000 บาท นักลงทุนซื้อพันธบัตรได้ในราคา 900 บาทก่อนครบกำหนด 4 เดือน จงหาอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี หลังปรับด้วยอัตราเงินเฟ้อร้อยละ 5 ในปีนั้น
- 50) (ระดับ ยาก) บริษัทประกันแห่งหนึ่งต้องจ่ายเงินให้ผู้รับผลประโยชน์ ปีละครั้ง ณ ปลายปี เป็นเวลา 5 ปี โดยจ่ายครั้งแรก 100,000 บาท และการจ่ายอีก 4 ครั้งเพิ่มขึ้นทุกปีตามอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยร้อยละ 3 ต่อปี เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินจ่ายทั้งหมด
- 51) (ระดับ ยาก) สมมติอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยเท่ากับ a ต่อปี และมีการจ่ายเงินต้นปีแรก R บาท ต้นปีที่ 2 จ่าย $R(1 + a)$ บาท ต้นปีที่ 3 จ่าย $R(1 + a)^2$ บาท และดำเนินต่อไปจนถึงต้นปีที่ n ซึ่งจ่าย $R(1 + a)^{n-1}$ บาท จงแสดงว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินจ่ายทั้งหมดเท่ากับ

$$R \left(\frac{1 - v^n}{1 - v} \right),$$

เมื่อ

$$v = (1 + i_r)^{-1} \quad \text{และ} \quad i_r = \frac{i - a}{1 + a}$$

- 52) **(ระดับ ปานกลาง)** คุณแม่ต้องการออมเงินก้อนเดียวในวันนี้ เพื่อให้มีเงิน 500,000 บาทสำหรับเป็นค่าเล่าเรียนบุตรในอีก 10 ปีข้างหน้า โดยเลือกฝากเงินในบัญชีฝากประจำ 12 เดือน ซึ่งให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 2.5 ต่อปี และกำหนดอัตราเงินเฟ้อร้อยละ 3 ต่อปี จงพิจารณากรณีต่อไปนี้

- 52.1) หากไม่คำนึงถึงเงินเฟ้อ คุณแม่ควรออมเงินก้อนในวันนี้เป็นจำนวนเท่าไร
- 52.2) หากคำนึงถึงเงินเฟ้อเพื่อรักษาอำนาจซื้อ คุณแม่ควรออมเงินก้อนในวันนี้เป็นจำนวนเท่าไร
- 52.3) หากไม่คำนึงถึงเงินเฟ้อ และเปลี่ยนเป็นบัญชีฝากประจำ 3 เดือน ซึ่งให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.5 ต่อปี คุณแม่ควรออมเงินก้อนในวันนี้เป็นจำนวนเท่าไร
- 52.4) หากคำนึงถึงเงินเฟ้อเพื่อรักษาอำนาจซื้อ สำหรับบัญชีฝากประจำ 3 เดือนที่ให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.5 ต่อปี คุณแม่ควรออมเงินก้อนในวันนี้เป็นจำนวนเท่าไร

บทที่ 2 การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด

เนื้อหาประกอบด้วย

1. แบบจำลองการจ่ายแบบต่อเนื่อง
2. ค่ารายงวด
3. ค่ารายงวดอัตราราบ
4. การประยุกต์การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด

บทนำ

มนุษย์มีความต้องการอย่างไม่สิ้นสุด แต่ความต้องการดังกล่าวอยู่ภายใต้ข้อจำกัดทางการเงิน การซื้อสินค้าหรือสินทรัพย์ที่มีราคาสูงด้วยการชำระเงินสดเพียงงวดเดียวอาจทำได้ยาก หรือแม้จะทำให้ก็ต้องใช้เงินต้นจำนวนมาก จนทำให้เสียโอกาสนำเงินไปลงทุนในโครงการ ที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าดอกเบี้ยที่ต้องจ่าย ดังนั้น การซื้อสินทรัพย์ด้วยการผ่อนชำระเป็นรายงวด จึงเป็นทางเลือกที่น่าสนใจ เพราะช่วยให้ผู้ซื้อสามารถครอบครองสินทรัพย์ได้ในปัจจุบัน โดยขอสินเชื่อจากสถาบันการเงินซึ่งชำระราคาสินค้าให้แก่ผู้ขายก่อน จากนั้นผู้ขอสินเชื่อจึงทยอยชำระคืนเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยตามเงื่อนไขและระยะเวลาที่ตกลงกัน เงินที่ชำระคืนเป็นรายงวดในลักษณะนี้เรียกว่า **ค่ารายงวด (Annuity)**

นอกจากการประยุกต์ใช้ค่ารายงวดกับการชำระหนี้ระหว่างผู้กู้และผู้ให้กู้แล้ว แนวคิดดังกล่าวยังใช้กับธุรกรรมทางการเงินอีกหลายประเภท เช่น การจ่ายเงินบำนาญ การจ่ายผลประโยชน์ตามสัญญาประกันภัย และการวางแผนเงินออมระยะยาว จึงถือเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์การเงินและคณิตศาสตร์ประกันภัย

บทนี้เริ่มจากแบบจำลองการจ่ายและการลงทุนอย่างต่อเนื่อง ซึ่งมีประโยชน์ต่อการศึกษาเชิงทฤษฎี จากนั้นจึงพัฒนาไปสู่ค่ารายงวดแบบต่าง ๆ ค่ารายงวดอัตราราบ และตัวอย่างการประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ทางการเงินจริง

2.1 แบบจำลองการจ่ายแบบต่อเนื่อง

การจ่ายเงินแบบต่อเนื่อง หรือการลงทุนอย่างต่อเนื่อง มักไม่ค่อยพบในทางปฏิบัติ แต่มีประโยชน์ในทางทฤษฎี การวิเคราะห์ และการประมาณค่าเกี่ยวกับการลงทุน โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีการกำหนดราคา ซึ่งจะกล่าวถึงในบท

ต่อ ๆ ไป

สมมติว่าจ่ายเงินหรือลงทุนแบบต่อเนื่องด้วยอัตรา $r(t)$ ต่องวด ณ เวลา t สำหรับช่วงเวลาสั้น ๆ $0 < h \ll 1$ จะได้ว่า จำนวนเงินลงทุนในช่วงเวลา $[t, t+h]$ เท่ากับ

$$\int_t^{t+h} r(s) ds = r(t)h + o(h), \quad (2.1)$$

เมื่อ $o(h)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในเทอมของ h ที่มีอันดับสูงกว่ากำลังหนึ่ง กล่าวคือ $o(h)/h \rightarrow 0$ เมื่อ $h \rightarrow 0$

ให้ $S(t)$ เป็นเงินสะสม ณ เวลา t และสมมติว่าคิดดอกเบี้ยอย่างต่อเนื่อง ด้วยกำลังดอกเบี้ย $\delta(t)$ ดังนั้น ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา $[t, t+h]$ เท่ากับ

$$\int_t^{t+h} S(s)\delta(s) ds = S(t)\delta(t)h + o(h) \quad (2.2)$$

เงินสะสม ณ เวลา $t+h$ จึงเท่ากับ

$$S(t+h) = S(t) + r(t)h + S(t)\delta(t)h + o(h) \quad (2.3)$$

จัดรูปสมการ (2.3) ได้เป็น

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} - S(t)\delta(t) = r(t) + \frac{o(h)}{h} \quad (2.4)$$

เมื่อพิจารณาให้ $h \rightarrow 0$ จะได้

$$\frac{dS(t)}{dt} - S(t)\delta(t) = r(t) \quad (2.5)$$

สมการ (2.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ซึ่งมีตัวประกอบการอินทิเกรตเป็น

$$\exp\left(-\int_0^t \delta(s) ds\right)$$

เมื่อคูณตัวประกอบอินทิเกรตเข้าทั้งสองข้างของสมการ (2.5) จะได้

$$\frac{dS(t)}{dt} e^{-\int_0^t \delta(s) ds} - S(t) \delta(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} = r(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} \quad (2.6)$$

สมการ (2.6) ลดรูปได้เป็น

$$d\left[S(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds}\right] = r(t) e^{-\int_0^t \delta(s) ds} dt \quad (2.7)$$

อินทิเกรตตั้งแต่ 0 ถึง n จะได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$S(n) = e^{\int_0^n \delta(s) ds} S_0 + \int_0^n e^{\int_t^n \delta(s) ds} r(t) dt, \quad (2.8)$$

เมื่อ $S_0 = S(0)$ ดังนั้น เมื่อกำหนดอัตราการลงทุนหรืออัตราการจ่าย $r(t)$ และกำลังดอกเบี้ย $\delta(t)$ แล้วสามารถคำนวณเงินสะสม $S(n)$ ได้จาก สมการ (2.8)

กรณีเฉพาะ ถ้า $r(t) = 0$ และ $\delta(t) = \delta$ เป็นค่าคงที่ จะได้

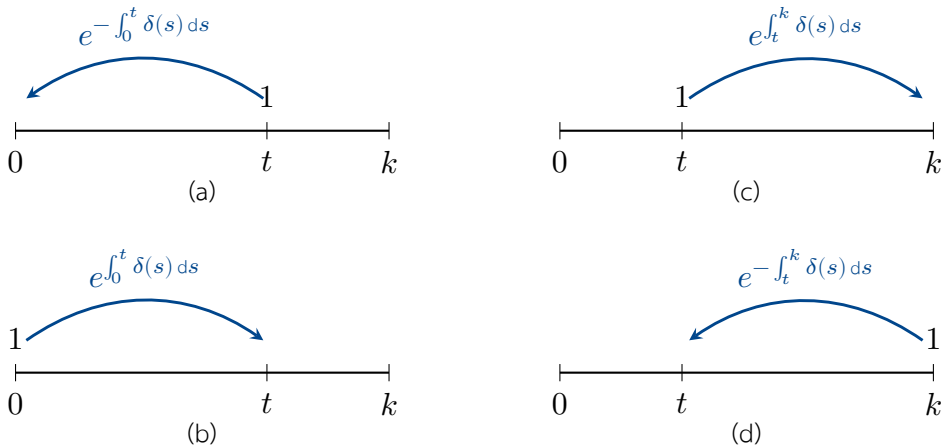
$$S(n) = S_0 e^{\delta n} = S_0 (1 + i)^n, \quad (2.9)$$

เมื่อ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่ากับกำลังดอกเบี้ย δ

ตัวประกอบต่าง ๆ ที่ปรากฏในสมการ (2.6) และ (2.8) มีความหมายดังตารางต่อไปนี้

ตัวประกอบ	ความหมาย
$e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$	เป็นฟังก์ชันส่วนลด หรือมูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ เวลา t ใด ๆ ดังรูปที่ 2.1(a)
$e^{\int_0^t \delta(s) ds}$	เป็นฟังก์ชันสะสม หรือมูลค่าอนาคต ณ เวลา t ของเงินต้น 1 บาท ดังรูปที่ 2.1(b)
$e^{\int_t^k \delta(s) ds}$	เป็นเงินสะสม ณ เวลา k ของเงินลงทุน 1 บาท ณ เวลา t ดังรูปที่ 2.1(c)
$e^{-\int_t^k \delta(s) ds}$	เป็นมูลค่า ณ เวลา t ของเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ เวลา k ดังรูปที่ 2.1(d)

ความหมายของตัวประกอบแต่ละตัวสามารถแสดงด้วยแผนภาพได้ดังรูปที่ 2.1



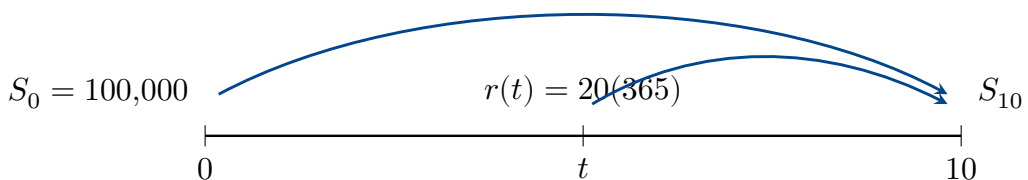
รูปที่ 2.1 แผนภาพความหมายของตัวประกอบ $e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$, $e^{\int_0^t \delta(s) ds}$, $e^{\int_t^k \delta(s) ds}$ และ $e^{-\int_t^k \delta(s) ds}$

ตัวอย่าง 2.1. นายเอลงทุนซื้อกองทุน AAA ด้วยเงินทุนเริ่มต้น 100,000 บาท หลังจากนั้นหักเงินอัตโนมัติจากบัญชีเงินฝากเข้าบัญชีลงทุนอย่างต่อเนื่องวันละ 20 บาท เป็นเวลา 10 ปี โดยกองทุน AAA ให้ผลตอบแทนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง ร้อยละ 10 ต่อปี จงหาเงินสะสมของการลงทุนนี้ ณ ปลายปีที่ 10 สมมติว่า 1 ปีเท่ากับ 365 วัน

วิธีทำ ในที่นี้

$$S_0 = 100,000, \quad r(t) = 20(365) = 7,300, \quad \delta = 0.1$$

การลงทุนสามารถแสดงด้วยแผนภาพดังนี้



รูปที่ 2.2 แผนภาพการสะสมมูลค่าเมื่อใช้อัตราผลตอบแทนแปรผันตามเวลา

จากแผนภาพ เงินสะสม ณ ปลายปีที่ 10 เกิดจากผลรวมของเงินสะสมสองส่วน

ส่วนแรก เงินสะสมจากเงินทุนเริ่มต้น 100,000 บาท เท่ากับ

$$100,000e^{0.1(10)} = 271,828.18 \text{ บาท}$$

ส่วนที่สอง เงินสะสมจากการลงทุนอย่างต่อเนื่องปีละ 7,300 บาท เท่ากับ

$$\begin{aligned} \int_0^{10} e^{\int_t^{10} \delta(s) ds} r(t) dt &= \int_0^{10} 7,300 e^{\int_t^{10} 0.1 ds} dt \\ &= 7,300 \int_0^{10} e^{0.1(10-t)} dt \\ &= [-73,000 e^{0.1(10-t)}]_0^{10} \\ &= 125,434.57 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น เงินสะสมทั้งหมดเท่ากับ

$$271,828.18 + 125,434.57 = 397,262.75 \text{ บาท}$$

□

หมายเหตุ เพื่อให้เข้าใจเนื้อหาได้มากขึ้น ต่อไปจะรายละเอียดในการคำนวณบางขั้นตอน เช่น ขั้นตอนการอินทิเกรต ผู้อ่านสามารถศึกษาที่มาจากหนังสือแคลคูลัสทั่วไป หรือใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรม Excel หรือโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ เช่น MATLAB, Maple และ Mathematica ช่วยในการคำนวณได้

ตัวอย่าง 2.2. กำหนดกำลังดอกเบีย้เท่ากับ $\delta(t) = 0.02t + 0.1$ ต่อปี จงหาอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีที่เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องนี้ สำหรับช่วงเวลา $0 \leq t \leq 10$ ปี

วิธีทำ หาอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่าจากการเทียบเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 10 ดังนี้

เงินสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยแท้จริง = เงินสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง

ดังนั้น

$$(1 + i)^{10} = e^{\int_0^{10} (0.02t + 0.1) dt}$$

เนื่องจาก

$$\int_0^{10} (0.02t + 0.1) dt = 2,$$

จึงได้

$$(1 + i)^{10} = e^2$$

แก้สมการได้

$$i = e^{1/5} - 1 \approx 0.2214 = 22.14\%$$

□

2.2 ค่ารายงวด

เราเรียกเงินที่จ่ายหรือรับเป็นรายงวดว่า **ค่ารายงวด** หรือ **เงินรายงวด** (Annuity) ในความหมายดั้งเดิม ค่ารายงวดเป็นเงินจำนวนเท่า ๆ กัน ที่จ่ายตามช่วงเวลาสม่ำเสมอ อย่างไรก็ตาม ในปัจจุบันรูปแบบการจ่ายมีความหลากหลายมากขึ้น เช่น จ่ายเพิ่มขึ้น จ่ายลดลง จ่ายแปรผัน หรือจ่ายคงที่ในช่วงหนึ่งแล้วเปลี่ยนแปลงในอีกช่วงหนึ่ง การจ่ายเหล่านี้ยังคงเรียกรวมว่าค่ารายงวด

ถ้าระยะเวลาการจ่ายสิ้นสุด ณ เวลาที่กำหนดแน่นอน เช่น ผ่อนชำระค่าบ้านเดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี เรียกว่า **ค่ารายงวดแบบระยะเวลาแน่นอน** (Annuity-Certain) แต่ถ้าระยะเวลาการจ่ายขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ที่ไม่แน่นอน เช่น การจ่ายเงินบำนาญจนกว่าผู้รับผลประโยชน์จะเสียชีวิต เรียกว่า **ค่ารายงวดแบบระยะเวลาไม่แน่นอน** (Contingent Annuity)

หัวข้อนี้ศึกษาการจ่ายรายงวดภายใต้สมมติฐานว่าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อหนึ่งงวดคงที่ ซึ่งเป็นรูปแบบที่พบได้บ่อยในธุรกรรมทางการเงิน

2.2.1 ค่ารายงวดจ่ายต้นงวด

ค่ารายงวดจ่ายต้นงวด (Annuity Due) คือการจ่ายค่ารายงวดทุกต้นงวด ในทางปฏิบัติหมายถึงเริ่มจ่ายทันที ณ วันเริ่มทำสัญญา

พิจารณาการจ่ายต้นงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่องวด ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ค่ายางวดจ่ายต้นงวด

ให้ $v = (1 + i)^{-1}$ จะได้มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายต้นงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันมูลค่าปัจจุบันของค่ายางวดจ่ายต้นงวด เขียนแทนด้วย $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ ดังนี้

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} \quad (2.10)$$

จากผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต และ $i = (1 - v)/v$ จะได้

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{iv} \quad (2.11)$$

มูลค่าอนาคตของการจ่ายต้นงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด เรียกว่า ฟังก์ชันมูลค่าอนาคตของค่ายางวดจ่ายต้นงวด เขียนแทนด้วย $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ ดังนี้

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^n \quad (2.12)$$

จากผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{iv} \quad (2.13)$$

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตสัมพันธ์กันดังนี้

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1 + i)^n, \quad (2.14)$$

และ

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}v^n \quad (2.15)$$

ดังนั้น ถ้ากู้เงิน ณ ปัจจุบันจำนวน P_0 บาท และชำระต้นงวด งวดละ r บาท จำนวน n งวด จะได้

$$P_0 = r\ddot{a}_{\overline{n}|i} = r \left(\frac{1 - v^n}{iv} \right) \quad (2.16)$$

ถ้าให้ S_n เป็นเงินสะสม ณ ปลายงวดที่ n จะได้

$$S_n = r\ddot{s}_{\overline{n}|i} = r \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{iv} \right) \quad (2.17)$$

และ

$$S_n = P_0(1 + i)^n \quad (2.18)$$

เมื่อจ่ายงวดละ r บาท จำนวน n งวด เงินที่จ่ายทั้งหมดเท่ากับ nr บาท ดังนั้น ดอกเบี้ยจ่ายสะสมเท่ากับ

$$\text{ดอกเบี้ยจ่ายสะสม} = nr - P_0 \quad (2.19)$$

ในมุมมองของนักลงทุน ถ้าลงทุนต้นงวด งวดละ r บาท จำนวน n งวด ดอกเบี้ยรับสะสมเท่ากับ

$$\text{ดอกเบี้ยรับสะสม} = S_n - nr \quad (2.20)$$

ตัวอย่าง 2.3. จงหามูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตของค่ารายงวด 10 ปี โดยจ่ายทุกต้นเดือน เดือนละ 1,000 บาท กำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 12 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน

วิธีทำ เป็นการจ่ายต้นงวดจำนวน 120 งวด และมีอัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ $i = 0.12/12 = 0.01$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} PV &= 1,000\ddot{a}_{\overline{120}|0.01} \\ &= 1,000 \left(\frac{1 - (1.01)^{-120}}{0.01(1.01)^{-1}} \right) \\ &\approx 70,397.53 \text{ บาท} \end{aligned}$$

มูลค่าอนาคตเท่ากับ

$$FV = 70,397.53(1.01)^{120} \approx 232,339.09 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 2.4. นายเอต้องการลงทุนให้ได้เงินสะสม 10,000,000 บาท ณ ปลายปีที่ 10 จึงใช้ดอกเบี้ยรับเป็นเกณฑ์เพื่อตัดสินใจเลือกระหว่างโครงการต่อไปนี้

โครงการ	นโยบายการลงทุน
AAA	ลงทุนปีละ 1 ครั้ง ทุกต้นปี ครั้งละเท่า ๆ กัน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี
BBB	ลงทุนทุกต้นเดือน ครั้งละเท่า ๆ กัน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1 ต่อเดือน

วิธีทำ สำหรับโครงการ AAA สมมติลงทุนต้นปี ปีละ x บาท จำนวน 10 งวด จะได้

$$10,000,000 = x\ddot{s}_{\overline{10}|0.12},$$

จึงได้

$$x \approx 508,787.18 \text{ บาท}$$

เงินลงทุนทั้งหมดเท่ากับ

$$508,787.18(10) = 5,087,871.80 \text{ บาท,}$$

และดอกเบี้ยรับเท่ากับ

$$10,000,000 - 5,087,871.80 = 4,912,128.20 \text{ บาท}$$

สำหรับโครงการ BBB สมมติลงทุนต้นเดือน เดือนละ y บาท จำนวน 120 งวด จะได้

$$10,000,000 = y\ddot{s}_{\overline{120}|0.01},$$

จึงได้

$$y \approx 43,040.5430 \text{ บาท}$$

เงินลงทุนทั้งหมดเท่ากับ

$$43,040.5430(120) = 5,164,865.16 \text{ บาท,}$$

และดอกเบี้ยรับเท่ากับ

$$10,000,000 - 5,164,865.16 = 4,835,134.84 \text{ บาท}$$

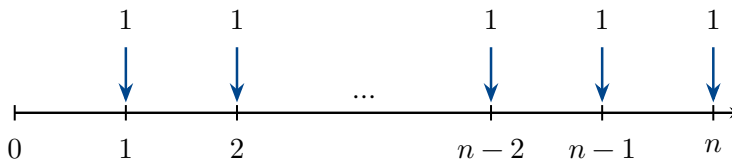
ดังนั้น เมื่อใช้ดอกเบี้ยรับเป็นเกณฑ์ นายเฮอร์เลือกโครงการ AAA

□

2.2.2 ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด

ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด (Annuity Immediate หรือ Ordinary Annuity) คือการจ่ายค่ารายงวดทุกปลายงวด กล่าวคือ เมื่อเริ่มทำสัญญาแล้วจะรอให้ครบหนึ่งงวดก่อน จึงเริ่มจ่าย

พิจารณาการจ่ายปลายงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่องวด ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปลายงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด เขียนแทนด้วย $a_{\overline{n}|i}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|i} &= v + v^2 + \cdots + v^n \\ &= v(1 + v + \cdots + v^{n-1}) \\ &= v\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{i} \end{aligned} \quad (2.21)$$

มูลค่าอนาคตของการจ่ายปลายงวด งวดละ 1 บาท จำนวน n งวด เขียนแทนด้วย $s_{\overline{n}|i}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|i} &= 1 + (1 + i) + \cdots + (1 + i)^{n-1} \\ &= v\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตสัมพันธ์กันดังนี้

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n, \quad (2.23)$$

และ

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}v^n \quad (2.24)$$

ถ้ากู้เงินจำนวน P_0 บาท ณ ปัจจุบัน และชำระปลายงวด งวดละ r บาท จำนวน n งวด จะได้

$$P_0 = ra_{\overline{n}|i} = r \left(\frac{1-v^n}{i} \right) \quad (2.25)$$

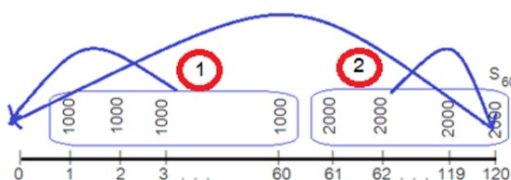
และมูลค่าอนาคต ณ ปลายงวดที่ n เท่ากับ

$$S_n = rs_{\overline{n}|i} = r \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \quad (2.26)$$

หมายเหตุ ต่อไป ถ้าโจทย์การกู้เงินระบุอัตราดอกเบี้ยต่อปีแต่ไม่ระบุชนิดของอัตรา ให้หมายถึงอัตราดอกเบี้ยเพียงปีนาม และคิดทบต้นตามความถี่ของการชำระ ส่วนกรณีการฝากเงินหรือการลงทุน ถ้าไม่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้หมายถึงอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี

ตัวอย่าง 2.5. จงหามูลค่าปัจจุบันของค่ายรายงวด 10 ปี ซึ่งจ่ายทุกปลายเดือน โดยจ่ายเดือนละ 1,000 บาท ในช่วง 5 ปีแรก และเดือนละ 2,000 บาท ในช่วง 5 ปีหลัง กำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงปีนามร้อยละ 12 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน

วิธีทำ กระแสเงินสดแบ่งเป็นสองชุดดังรูป



รูปที่ 2.5 การแบ่งกระแสเงินสดเป็นสองช่วง

อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ $0.12/12 = 0.01$ มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายชุดที่หนึ่งเท่ากับ

$$1,000a_{\overline{60}|0.01} = 1,000 \left(\frac{1 - (1.01)^{-60}}{0.01} \right) \approx 44,955.04 \text{ บาท}$$

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายชุดที่สองเท่ากับ

$$\begin{aligned} 2,000s_{\overline{60}|0.01}v^{120} &= 2,000 \left(\frac{(1.01)^{60} - 1}{0.01} \right) (1.01)^{-120} \\ &\approx 49,490.97 \text{ บาท} \end{aligned}$$

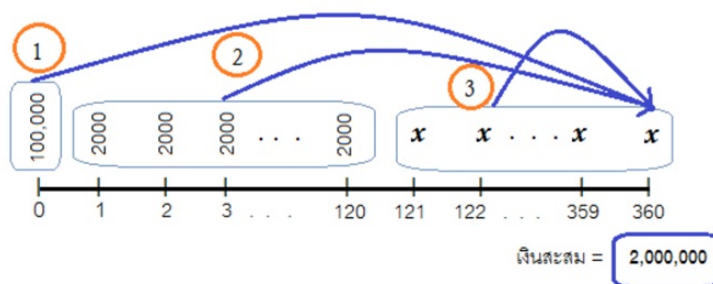
ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายทั้งหมดเท่ากับ

$$44,955.04 + 49,490.97 = 94,446.01 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 2.6. นายเอวางแผนออมเงินไว้หลังเกษียณ โดยออมทันที 100,000 บาท จากนั้นออมทุกสิ้นเดือน เดือนละ 2,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี หลังจากนั้นต้องออมทุกสิ้นเดือน เดือนละเท่าใด จึงจะมีเงิน 2,000,000 บาท เมื่ออายุ 60 ปี ถ้าปัจจุบันอายุ 30 ปี และเงินออมให้ผลตอบแทนร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นทุกปี

วิธีทำ สมมติว่า หลังจาก 10 ปีแรก นายเอออมทุกสิ้นเดือน เดือนละ x บาท แผนการออมเป็นดังรูป



รูปที่ 2.6 แผนภาพกระแสเงินสดเพื่อการออม

อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนที่เทียบเท่ากับร้อยละ 4 ต่อปี เท่ากับ

$$j = (1.04)^{1/12} - 1 \approx 0.003274$$

พิจารณาเงินสะสมเมื่อครบ 30 ปีเป็นสามส่วน

ส่วนที่ 1 เงิน 100,000 บาทที่ออมทันที สะสมเป็น

$$100,000(1.04)^{30} = 324,339.75 \text{ บาท}$$

ส่วนที่ 2 เงินออมเดือนละ 2,000 บาท ใน 10 ปีแรก สะสมต่อไปอีก 20 ปี เป็น

$$2,000s_{\overline{120}|j}(1.04)^{20} \approx 642,868.24 \text{ บาท}$$

ส่วนที่ 3 เงินออมเดือนละ x บาท ในช่วง 20 ปีหลัง เป็น

$$xs_{\overline{240}|j} \approx 363.8545x$$

ดังนั้น

$$324,339.75 + 642,868.24 + 363.8545x = 2,000,000,$$

จึงได้

$$x \approx 2,838.48 \text{ บาท}$$

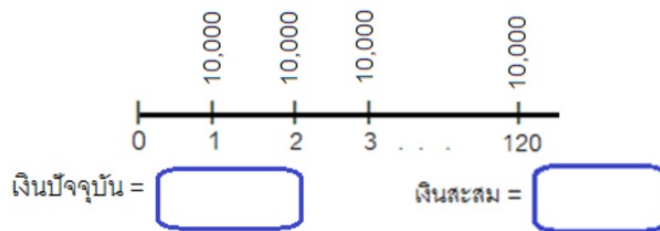
ดังนั้น หลังจาก 10 ปีแรก นายจะต้องออมทุกสิ้นเดือน เดือนละประมาณ 2,838.48 บาท

□

ตัวอย่าง 2.7. นายเอกู้เงินจากสถาบันการเงิน โดยผ่อนชำระคืนเดือนละ 10,000 บาท ทุกปลายเดือน เป็นเวลา 10 ปี สถาบันการเงินคิดดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหา

- ก) เงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนชำระ
- ข) มูลค่าอนาคตของเงินผ่อนชำระ ณ ปลายปีที่ 10
- ค) ดอกเบี้ยสะสมของเงินกู้
- ง) ยอดปิดหนี้ ณ ปลายปีที่ 5 หลังชำระงวดที่ 60 แล้ว

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ $i = 0.06/12 = 0.005$ กระแสเงินสดเป็นดังรูป



รูปที่ 2.7 แผนภาพกระแสเงินสด

ก)

$$P_0 = 10,000a_{\overline{120}|0.005} \approx 900,734.53 \text{ บาท}$$

ข)

$$FV = P_0(1.005)^{120} \approx 1,638,793.46 \text{ บาท}$$

ค)

$$\text{ดอกเบี้ยยสะสม} = 120(10,000) - 900,734.53 = 299,265.47 \text{ บาท}$$

ง) เมื่อชำระงวดที่ 60 แล้ว ยังเหลืออีก 60 งวด ยอดปิดหนี้จึงเท่ากับ

$$10,000a_{\overline{60}|0.005} \approx 517,255.61 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 2.8. นายเอกวิทย์จะได้รับเงินบำนาญทุกสิ้นปีเป็นเวลา 10 ปี โดยเงินบำนาญในแต่ละปีต้องมีอำนาจซื้อจริงเทียบเท่าเงิน 200,000 บาท ณ ปัจจุบัน กำหนดให้อัตราเงินเฟ้อร้อยละ 2 ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี สมมติว่าอัตราทั้งสองคงที่ และไม่พิจารณาภาษีหรือค่าธรรมเนียม จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินบำนาญทั้งหมด

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยจริงที่สอดคล้องกับอัตราดอกเบี้ยและเงินเฟ้อคือ

$$i_r = \frac{0.06 - 0.02}{1 + 0.02} \approx 0.039216$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 200,000 (v_r + v_r^2 + \cdots + v_r^{10}) \\ &= 200,000 \left(\frac{v_r - v_r^{11}}{1 - v_r} \right), \quad v_r = (1 + i_r)^{-1}, \end{aligned}$$

จึงได้

$$P \approx 1,628,531.40 \text{ บาท}$$

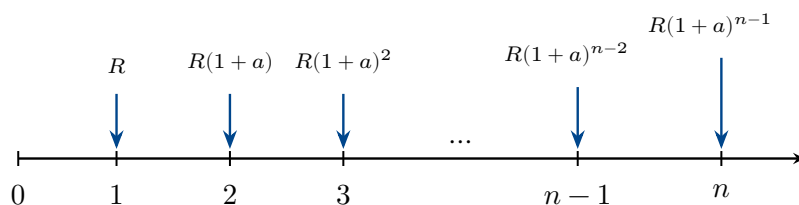
□

ตัวอย่าง 2.9. สมมติอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยเท่ากับ a ต่อปี และจ่ายเงินปลายปีแรก R บาท ปลายปีที่สอง $R(1+a)$ บาท ปลายปีที่สาม $R(1+a)^2$ บาท เป็นเช่นนี้จนถึงปลายปีที่ n ซึ่งจ่าย $R(1+a)^{n-1}$ บาท จงแสดงว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินจ่ายทั้งหมดเท่ากับ

$$R \left(\frac{1 - v_r^n}{i_r(1+a)} \right), \quad v_r = (1 + i_r)^{-1},$$

เมื่อ $1 + i_r = (1 + i)/(1 + a)$

วิธีทำ แผนภาพกระแสเงินสดเป็นดังนี้



รูปที่ 2.8 เงินได้ประจำเพิ่มแบบเรขาคณิต

มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$\begin{aligned} P &= Rv + R(1+a)v^2 + \cdots + R(1+a)^{n-1}v^n \\ &= Rv [1 + (1+a)v + \cdots + \{(1+a)v\}^{n-1}] \\ &= Rv \left(\frac{1 - \{(1+a)v\}^n}{1 - (1+a)v} \right) \end{aligned}$$

จาก

$$v_r = (1 + i_r)^{-1} = (1 + a)(1 + i)^{-1} = (1 + a)v$$

และ $1 - v_r = i_r v_r = i_r(1 + a)v$ จึงได้

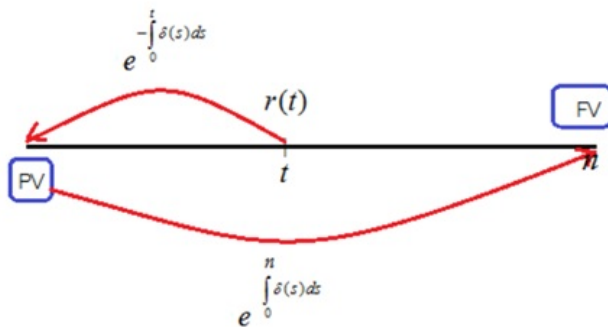
$$P = R \left(\frac{1 - v_r^n}{i_r(1 + a)} \right)$$

□

2.2.3 ค่ารายงวดจ่ายต่อเนื่อง

การจ่ายหรือการลงทุนอย่างต่อเนื่องอาจพบไม่มากในทางปฏิบัติ แต่มีประโยชน์ในการวิเคราะห์และประมาณค่าการจ่ายที่เกิดขึ้น เช่น รายวันหรือรายสัปดาห์ตลอดช่วงเวลาหลายปี

สมมติว่าจ่ายอย่างต่อเนื่องด้วยอัตรา $r(t)$ บาทต่อปี ณ เวลา t เป็นเวลา n ปี และมีกำลังดอกเบี้ย $\delta(t)$ ต่อปี ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตแสดงได้ดังรูป 2.9



รูปที่ 2.9 ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายอย่างต่อเนื่องบนช่วง $[0, n]$ เท่ากับ

$$PV = \int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s) ds} r(t) dt \quad (2.27)$$

มูลค่าอนาคตเท่ากับ

$$\begin{aligned} FV &= \int_0^n e^{\int_t^n \delta(s) ds} r(t) dt \\ &= e^{\int_0^n \delta(s) ds} \int_0^n e^{-\int_0^t \delta(s) ds} r(t) dt \\ &= PV e^{\int_0^n \delta(s) ds} \end{aligned} \quad (2.28)$$

กรณีเฉพาะ ถ้า $r(t) = 1$ และ $\delta(t) = \delta$ เป็นค่าคงที่ มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายต่อเนื่อง อัตรา 1 บาทต่อปี เป็นเวลา n ปี เขียนแทนด้วย $\bar{a}_{\overline{n}|}$ และมีค่า

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta}, \quad v = e^{-\delta} \quad (2.29)$$

มูลค่าอนาคตเขียนแทนด้วย $\bar{s}_{\overline{n}|}$ และมีค่า

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta} = e^{\delta n} \bar{a}_{\overline{n}|} \quad (2.30)$$

ถ้าจ่ายเงินจำนวน P_0 บาท และชำระอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราคงที่ r บาทต่อปี เป็นเวลา n ปี จะได้

$$P_0 = r \bar{a}_{\overline{n}|} = r \left(\frac{1 - v^n}{\delta} \right) \quad (2.31)$$

เงินสะสม ณ เวลา n เท่ากับ

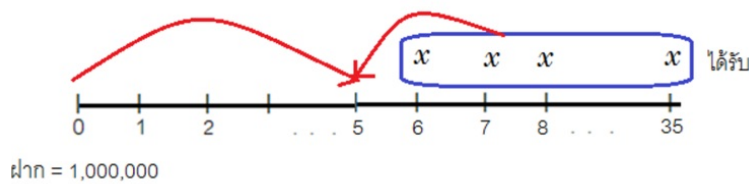
$$S_n = r \bar{s}_{\overline{n}|} = r e^{\delta n} \bar{a}_{\overline{n}|} \quad (2.32)$$

เมื่อชำระด้วยอัตราคงที่ r บาทต่อปี เงินที่ชำระทั้งหมดเท่ากับ nr บาท ดังนั้น

$$\text{ดอกเบี้ยจ่าย} = nr - P_0 \quad (2.33)$$

ตัวอย่าง 2.10. ฝากเงิน 1,000,000 บาทเข้ากองทุน ซึ่งสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง ร้อยละ 4 ต่อปี กองทุนเริ่มจ่ายเงินคืนอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราคงที่ ตั้งแต่ต้นปีที่ 6 หรือเวลา $t = 5$ เป็นเวลา 30 ปี จงหาอัตราการจ่ายต่อปีของกองทุน

วิธีทำ สมมติอัตราการจ่ายเท่ากับ x บาทต่อปี กระแสเงินสดเป็นดังรูป



รูปที่ 2.10 แผนภาพกระแสเงินสดการฝากเงินและการรับเงิน

ณ เวลา $t = 5$ เงินสะสมของเงินฝากเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของเงินที่กองทุนจ่ายคืน

$$1,000,000e^{0.04(5)} = x \left(\frac{1 - e^{-0.04(30)}}{0.04} \right)$$

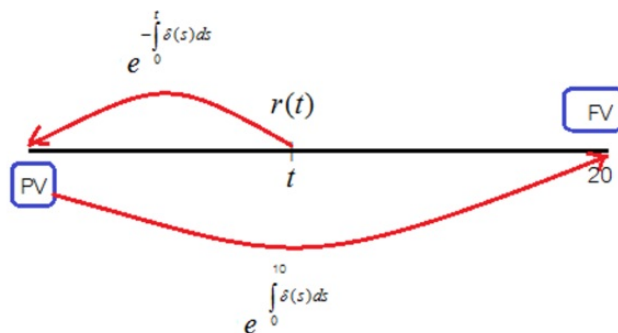
แก้สมการได้

$$x \approx 69,913.72 \text{ บาทต่อปี}$$

□

ตัวอย่าง 2.11. จงหามูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตของการจ่ายอย่างต่อเนื่องเป็นเวลา 20 ปี โดยมีอัตราการจ่าย $r(t) = 2t^2 + 1$ บาทต่อปี และมีกำลังดอกเบี้ย $\delta(t) = 1/(t+2)$ ต่อปี

วิธีทำ กระแสเงินสดเป็นดังรูป



รูปที่ 2.11 ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด ณ เวลา t เท่ากับ

$$(2t^2 + 1)e^{-\int_0^t \frac{1}{s+2} ds} = (2t^2 + 1) \frac{2}{t+2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} PV &= \int_0^{20} \frac{2(2t^2 + 1)}{t + 2} dt \\ &= [2\{-12 - 4t + t^2 + 9 \ln(t + 2)\}]_0^{20} \\ &= 640 + \ln 121 + 4 \ln 14,641 \\ &\approx 683.16 \text{ บาท} \end{aligned}$$

และ

$$FV = PV e^{\int_0^{20} \frac{1}{t+2} dt} \approx 7,514.76 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 2.12. สำหรับการจ่ายอย่างต่อเนื่องด้วยอัตรา $r(t) = e^{0.02t}$ บาทต่อปี และมีกำลังดอกเบี้ย $\delta = 0.05$ ต่อปี จงหามูลค่าปัจจุบัน ณ เวลา $t = 0$ สำหรับ

ก) การจ่ายเป็นเวลา 20 ปี

ข) การจ่ายตลอดไป

วิธีทำ

ก)

$$PV = \int_0^{20} e^{0.02t} e^{-0.05t} dt = \int_0^{20} e^{-0.03t} dt \approx 15.0396 \text{ บาท}$$

ข)

$$PV = \int_0^{\infty} e^{-0.03t} dt = \frac{1}{0.03} \approx 33.3333 \text{ บาท}$$

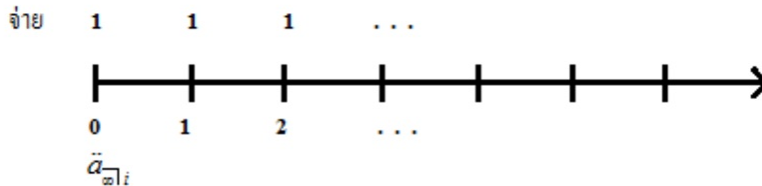
□

2.2.4 ค่ายางงวดจ่ายตลอดไป

ค่ายางงวดจ่ายตลอดไป (Perpetuity) เป็นการจ่ายค่ายางงวดโดยไม่มีเวลาสิ้นสุด ตัวอย่างเช่น พันธบัตรคอนโซล (Consol Bond) หรือหุ้นบริมสิทธิ์ชนิดไม่มีเงื่อนไขไถ่ถอน

ค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบต้นงวด

สมมติจ่ายต้นงวด งวดละ 1 บาทตลอดไป ด้วยอัตราดอกเบี้ย i ต่องวด ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 ค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบต้นงวด

มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$\ddot{a}_{\infty|i} = 1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1-v} = \frac{1+i}{i} \quad (2.34)$$

ซึ่งเท่ากับลิมิตของ $\ddot{a}_{n|i}$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ถ้าจ่ายต้นงวด งวดละ r บาทตลอดไป จะได้

$$PV = r\ddot{a}_{\infty|i} = r \left(\frac{1+i}{i} \right) \quad (2.35)$$

ตัวอย่าง 2.13. นายเอควรลงทุนซื้อพันธบัตรราคาเท่าใด ถ้าพันธบัตรจ่ายเงินปันผลปีละ 500,000 บาท ให้แก่ครอบครัวของนายเอตลอดไป โดยเริ่มจ่ายทันทีที่ซื้อ กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี

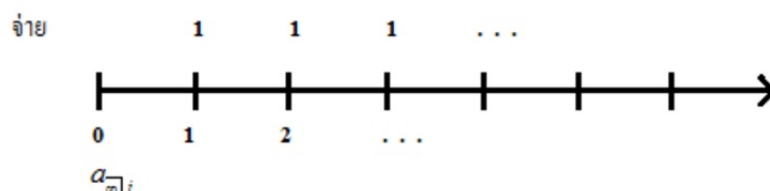
วิธีทำ เป็นค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบต้นงวด ดังนั้น

$$PV = 500,000 \left(\frac{1.04}{0.04} \right) = 13,000,000 \text{ บาท}$$

□

ค่ารายงวดจ่ายตลอดไปแบบปลายงวด

สมมติจ่ายปลายงวด งวดละ 1 บาทตลอดไป ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 ค่ายางงวดจ่ายตลอดไปแบบปลายงวด

มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$a_{\infty|i} = v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i} \quad (2.36)$$

ซึ่งเท่ากับลิมิตของ $a_{n|i}$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ถ้าจ่ายปลายงวด งวดละ r บาทตลอดไป จะได้

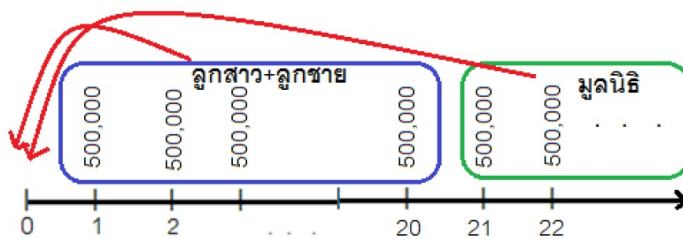
$$PV = ra_{\infty|i} = \frac{r}{i} \quad (2.37)$$

ตัวอย่าง 2.14. นายชัยเขียนพินัยกรรมให้ดอกเบี้ยจากเงินต้น 10,000,000 บาท แก่ลูกชายและลูกสาว คนละครึ่งเป็นเวลา 20 ปี หลังจากนั้นให้มูลนิธิคนตาบอดตลอดไป ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี และเริ่มจ่ายปลายปีที่ 1 จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินที่บุตรทั้งสองได้รับ และมูลค่าปัจจุบันของเงินที่มอบแก่มูลนิธิ

วิธีทำ ดอกเบี้ยประจำปีเท่ากับ

$$0.05(10,000,000) = 500,000 \text{ บาท}$$

กระแสเงินสดเป็นดังรูป



รูปที่ 2.14 กระแสเงินสดค่ารายงวดจ่ายตลอดไป

มูลค่าปัจจุบันของเงินที่บุตรทั้งสองได้รับรวมกันเท่ากับ

$$500,000a_{\overline{20}|0.05} \approx 6,231,105.17 \text{ บาท}$$

ดังนั้น แต่ละคนได้รับมูลค่าปัจจุบันประมาณ

$$\frac{6,231,105.17}{2} \approx 3,115,552.59 \text{ บาท}$$

มูลค่าปัจจุบันของเงินที่มอบแก่มูลนิธิเท่ากับ

$$500,000a_{\infty|0.05} = 500,000 \left(\frac{1}{0.05} \right) (1.05)^{-20} \approx 3,768,894.82 \text{ บาท}$$

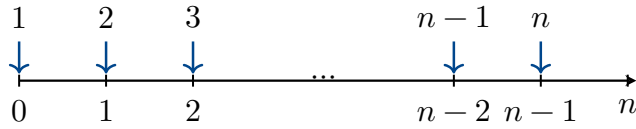
□

2.2.5 ค่ารายงวดจ่ายแปรเปลี่ยน

ค่ารายงวดจ่ายแปรเปลี่ยน (Varying Annuity) คือค่ารายงวดที่จำนวนเงินเปลี่ยนแปลง ตามงวดหรือเงื่อนไขที่กำหนด เช่น การเพิ่มค่างวดเมื่อรายได้เพิ่มขึ้น หรือการลดค่างวดในช่วงที่ต้องการรักษาสุขภาพคล่อง มูลค่าปัจจุบันของค่ารายงวดชนิดนี้หาได้จากผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินแต่ละงวด

2.2.5.1 การจ่ายเพิ่มขึ้นและลดลงด้วยลำดับเลขคณิต

การจ่ายเพิ่มขึ้นแบบต้นงวด พิจารณาการจ่ายต้นงวดจำนวน n งวด โดยเริ่ม 1 บาทและเพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 ค่ายางวดต้นงวดที่เพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท

กำหนดให้ $\uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i}$ และ $\uparrow \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ จากแผนภาพ

$$\uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + 2v + 3v^2 + \cdots + nv^{n-1} \quad (2.38)$$

คูณด้วย v จะได้

$$v\uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i} = v + 2v^2 + \cdots + (n-1)v^{n-1} + nv^n \quad (2.39)$$

นำสมการ (2.39) ออกจากสมการ (2.38) จะได้

$$(1-v)\uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} - nv^n \quad (2.40)$$

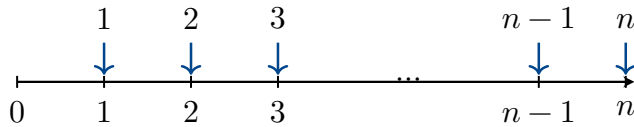
ดังนั้น

$$\uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{iv} \quad (2.41)$$

และ

$$\uparrow \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \uparrow \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{iv} \quad (2.42)$$

การจ่ายเพิ่มขึ้นแบบปลายงวด พิจารณาการจ่ายปลายงวดจำนวน n งวด โดยเริ่ม 1 บาทและเพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 ค่ายางวดปลายงวดที่เพิ่มขึ้นงวดละ 1 บาท

กำหนดให้ $\uparrow a_{\overline{n}|i}$ และ $\uparrow s_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ จากแผนภาพ

$$\uparrow a_{\overline{n}|i} = v + 2v^2 + \cdots + nv^n \quad (2.43)$$

และ

$${}^{\uparrow}a_{\overline{n}|i} = v {}^{\uparrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} \quad (2.44)$$

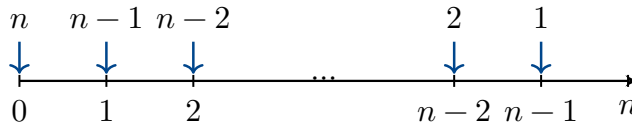
ดังนั้น

$${}^{\uparrow}a_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} \quad (2.45)$$

และ

$${}^{\uparrow}s_{\overline{n}|i} = {}^{\uparrow}a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i} \quad (2.46)$$

การจ่ายลดลงแบบต้นงวด พิจารณาการจ่ายต้นงวดจำนวน n งวด โดยเริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท ดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 ค่ารายงวดต้นงวดที่เริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท

กำหนดให้ ${}^{\downarrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ และ ${}^{\downarrow}\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ จากแผนภาพ

$${}^{\downarrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = n + (n-1)v + (n-2)v^2 + \cdots + 2v^{n-2} + v^{n-1} \quad (2.47)$$

คูณด้วย v จะได้

$$v {}^{\downarrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = nv + (n-1)v^2 + (n-2)v^3 + \cdots + 2v^{n-1} + v^n \quad (2.48)$$

นำสมการหลังออกจากสมการแรก จะได้

$$(1-v){}^{\downarrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = n - (v + v^2 + \cdots + v^n) = n - a_{\overline{n}|i} \quad (2.49)$$

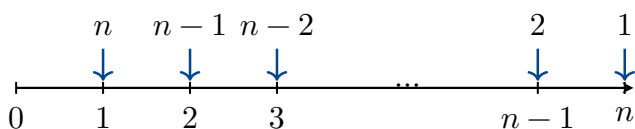
ดังนั้น

$${}^{\downarrow}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{iv} \quad (2.50)$$

และ

$${}_t\ddot{s}_{\overline{n}|i} = {}_t\ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}}{iv} \quad (2.51)$$

การจ่ายลดลงแบบปลายงวด พิจารณาการจ่ายปลายงวดจำนวน n งวด โดยเริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท ดังรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 ค่ายางงวดปลายงวดที่เริ่ม n บาทและลดลงงวดละ 1 บาท

กำหนดให้ ${}_t a_{\overline{n}|i}$ และ ${}_t s_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ จากแผนภาพ

$${}_t a_{\overline{n}|i} = nv + (n-1)v^2 + \cdots + 2v^{n-1} + v^n \quad (2.52)$$

และ

$${}_t a_{\overline{n}|i} = v {}_t \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i} \quad (2.53)$$

ดังนั้น

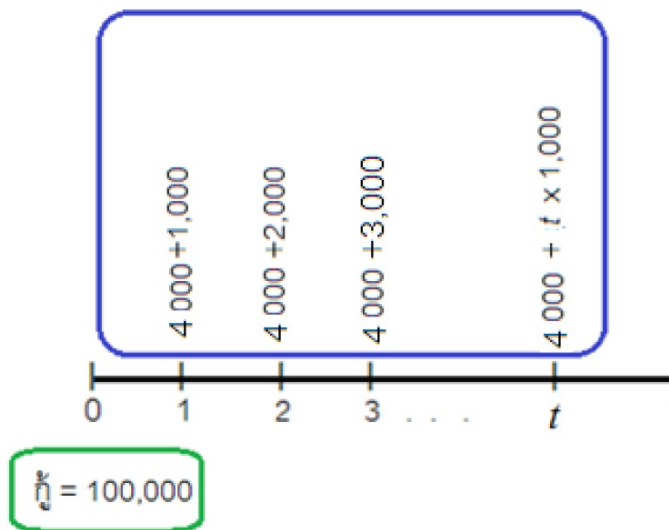
$${}_t a_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i} \quad (2.54)$$

และ

$${}_t s_{\overline{n}|i} = {}_t a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}}{i} \quad (2.55)$$

ตัวอย่าง 2.15. นายเอชำระหนี้เงินกู้ 100,000 บาท โดยเริ่มชำระปลายเดือนแรก 5,000 บาท และเพิ่มค่างวดเดือนละ 1,000 บาท ถ้าอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหาว่าต้องผ่อนชำระประมาณกี่เดือน

วิธีทำ สมมติว่าต้องผ่อน t เดือน อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ 0.01 กระแสเงินสดเป็นดังรูป



รูปที่ 2.19 กระแสเงินสดค่ารายงวดจ่ายตลอดไป

เขียนค่างวดเดือนที่ k เป็น $4,000 + 1,000k$ จึงได้

$$100,000 = 4,000a_{\bar{t}|0.01} + 1,000\uparrow a_{\bar{t}|0.01}$$

หารด้วย 1,000 และใช้สูตรค่ารายงวดเพิ่มขึ้น จะได้

$$100 = 4a_{\bar{t}|0.01} + \frac{\ddot{a}_{\bar{t}|0.01} - tv^t}{0.01}$$

จัดรูปเป็น

$$t(1.01^{-t}) + 105(1.01^{-t}) - 104 = 0$$

แก้สมการเชิงตัวเลขได้

$$t \approx 10.8077 \text{ เดือน}$$

จึงตีความในทางปฏิบัติว่า ชำระเต็มจำนวน 10 งวดและปิดยอดในงวดที่ 11 โดยคำนวณยอดงวดสุดท้ายแยกต่างหาก

□

ตัวอย่าง 2.16. จงแสดงว่า

$$\frac{d}{di}a_{\overline{n}|i} = -v^{n+1}\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \cdots + v^n, \quad v = (1+i)^{-1}, \quad \frac{dv}{di} = -v^2,$$

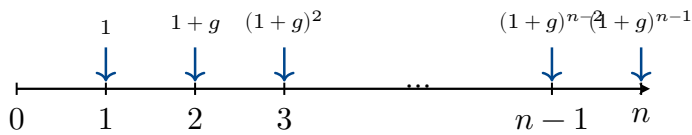
จึงได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{di}a_{\overline{n}|i} &= (1 + 2v + 3v^2 + \cdots + nv^{n-1})(-v^2) \\ &= -v^{n+1} \{(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \cdots + n\} \\ &= -v^{n+1}\ddot{s}_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

□

2.2.5.2 การจ่ายเพิ่มขึ้นและลดลงด้วยอัตราคงที่

พิจารณาการจ่ายปลายงวดจำนวน n งวด โดยเริ่ม 1 บาท และเพิ่มขึ้นหรือลดลงทุกงวดด้วยอัตราคงที่ g ถ้าเพิ่มขึ้นให้ $g > 0$ และถ้าลดลงให้ $g < 0$ ดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 ค่ำรายงวดปลายงวดที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยอัตราคงที่ g

กำหนดให้ $Ga_{\overline{n}|i}$ และ $Gs_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ จากแผนภาพ

$$Ga_{\overline{n}|i} = v + (1+g)v^2 + (1+g)^2v^3 + \cdots + (1+g)^{n-1}v^n \quad (2.56)$$

คูณด้วย $1+g$ จะได้

$$(1+g)Ga_{\overline{n}|i} = (1+g)v + (1+g)^2v^2 + \cdots + (1+g)^nv^n \quad (2.57)$$

ใช้ผลบวกอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$(1+g)Ga_{\overline{n}|i} = \frac{(1+g)v - (1+g)^{n+1}v^{n+1}}{1 - (1+g)v} \quad (2.58)$$

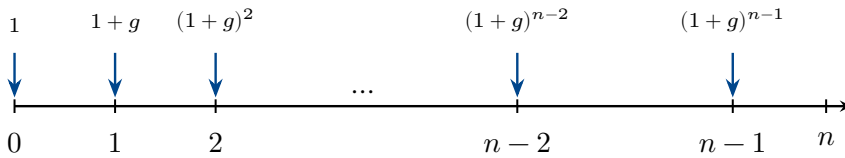
เมื่อ $i \neq g$ จัดรูปได้

$$Ga_{\overline{n}|i} = \frac{1 - \{(1+g)v\}^n}{i - g} \quad (2.59)$$

และ

$$Gs_{\overline{n}|i} = Ga_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - (1+g)^n}{i - g} \quad (2.60)$$

สำหรับการจ่ายต้นงวด กำหนดให้ $G\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ และ $G\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ แทนมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.21



รูปที่ 2.21 ค่ารายงวดต้นงวดที่เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราคงที่ g

มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$G\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+g)v + \{(1+g)v\}^2 + \cdots + \{(1+g)v\}^{n-1} = \frac{1 - \{(1+g)v\}^n}{(i-g)v} \quad (2.61)$$

และมูลค่าอนาคตเท่ากับ

$$G\ddot{s}_{\overline{n}|i} = G\ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - (1+g)^n}{(i-g)v} \quad (2.62)$$

ตัวอย่าง 2.17. นายเอชำระหนี้เงินกู้ 100,000 บาท โดยชำระปลายเดือนแรก 5,000 บาท และเพิ่มค่า
งวดทุกเดือนร้อยละ 10 จากเดือนก่อนหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน
จงหาว่าต้องผ่อนประมาณกี่เดือน

วิธีทำ สมมติว่าต้องผ่อน t เดือน อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ 0.01 และ $g = 0.10$ จึงได้

$$100,000 = 5,000Ga_{\overline{t}|0.01} = 5,000 \left(\frac{1 - \{1.1(1.01)^{-1}\}^t}{0.01 - 0.10} \right)$$

จัดรูปเป็น

$$\left(\frac{1.1}{1.01} \right)^t = 2.8$$

ดังนั้น

$$t = \frac{\ln 2.8}{\ln 1.1 - \ln 1.01} \approx 12.06 \text{ เดือน}$$

ในทางปฏิบัติ หลังชำระงวดที่ 12 จะยังมียอดคงเหลือเล็กน้อย และปิดยอดในงวดที่ 13

□

ตัวอย่าง 2.18. นายเออายุ 30 ปี วางแผนทำประกันสะสมทรัพย์เพื่อบำนาญ โดยชำระเบี้ยต้นปีครั้งแรก 50,000 บาท และเพิ่มขึ้นร้อยละ 10 ต่อปี จนถึงอายุ 60 ปี รวม 31 งวด หลังจากนั้นได้รับเงินบำนาญเท่ากันทุกปี ตั้งแต่อายุ 61 ถึง 80 ปี รวม 20 งวด และเมื่ออายุ 80 ปี ได้รับเงินก้อนเพิ่มอีก 5,000,000 บาท กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี จงหาเงินบำนาญประจำปี จำนวนเบี้ยที่จ่ายทั้งหมด และผลตอบแทนรวมคิดเป็นร้อยละของเบี้ยทั้งหมด

วิธีทำ เบี้ยประกันแต่ละปีเป็น

$$50,000, \quad 50,000(1.1), \quad 50,000(1.1)^2, \quad \dots, \quad 50,000(1.1)^{30}$$

เบี้ยรวมทั้งหมดเท่ากับ

$$50,000 (1 + 1.1 + \dots + 1.1^{30}) = 50,000 \left(\frac{1.1^{31} - 1}{0.1} \right) \approx 9,097,171.25 \text{ บาท}$$

สมมติเงินบำนาญประจำปีเท่ากับ x บาท เปรียบเทียบมูลค่าปัจจุบันของเงินที่จ่ายและเงินที่รับ ณ อายุ 30 ปี จะได้

$$50,000G\ddot{a}_{\overline{31}|0.04} = xa_{\overline{20}|0.04}v^{30} + 5,000,000v^{50}, \quad v = (1.04)^{-1}, \quad g = 0.10$$

หรือ

$$50,000 \left(\frac{1 - (1.1)^{31}(1.04)^{-31}}{(0.04 - 0.10)(1.04)^{-1}} \right) \\ = x \left(\frac{1 - (1.04)^{-20}}{0.04} \right) (1.04)^{-30} + 5,000,000(1.04)^{-50}$$

แก้สมการได้

$$x \approx 802,218.13 \text{ บาทต่อปี}$$

เงินที่ได้รับรวมตามจำนวนเงินที่ระบุในสัญญาเท่ากับ

$$802,218.13(20) + 5,000,000 = 21,044,362.60 \text{ บาท}$$

ผลต่างระหว่างเงินที่ได้รับรวมกับเบี้ยรวมเท่ากับ

$$21,044,362.60 - 9,097,171.25 = 11,947,191.35 \text{ บาท}$$

คิดเป็นร้อยละของเบี้ยรวมเท่ากับ

$$\frac{11,947,191.35}{9,097,171.25}(100) \approx 131.33\%$$



2.3 ค่ารายงวดอัตราราบ

ค่ารายงวดอัตราราบ (Flat Rate) คือการจ่ายเงินหลายครั้งภายในระยะเวลาที่กำหนด โดยคิดดอกเบี้ยแบบเชิงเดียวจากเงินต้นตลอดอายุสัญญา แล้วนำดอกเบี้ยทั้งหมดไปรวมกับเงินต้น (Add-on Method) ก่อนหารเฉลี่ยตามจำนวนงวดที่ต้องชำระ วิธีนี้มักใช้กับการผ่อนชำระสินค้า หรือบริการบางประเภท โดยเฉพาะสินทรัพย์ที่มีค่าเสื่อมราคาสูง เช่น รถยนต์และรถจักรยานยนต์

โดยทั่วไป การผ่อนชำระมักกำหนดเป็นรายเดือน และอาจเริ่มชำระตั้งแต่ต้นงวดแรก ณ วันทำสัญญา หรือเริ่มชำระเมื่อสิ้นงวดแรกก็ได้ อย่างไรก็ตาม ค่ารายงวดอัตราราบแบบต้นงวด พบไม่มากนัก ในหัวข้อนี้จึงพิจารณาเฉพาะการผ่อนชำระแบบปลายงวดซึ่งพบได้บ่อยในทางปฏิบัติ

หลักการคำนวณค่ายางวดอัตรา

ค่ายางวดหรือเงินที่ต้องผ่อนชำระในแต่ละงวดคำนวณได้จาก

$$\text{เงินผ่อนชำระแต่ละงวด} = \frac{\text{ราคาสินค้าที่ต้องจ่าย} + \text{ดอกเบี้ย}}{\text{จำนวนงวด}} \quad (2.63)$$

ให้ P เป็นราคาสินค้าหรือบริการส่วนที่ต้องการผ่อน i_f เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวต่อหนึ่งงวดของอัตราที่กำหนด f เป็นเงินผ่อนชำระแต่ละงวด และ $N = mT$ เป็นจำนวนงวดทั้งหมด โดย m เป็นจำนวนครั้งที่ชำระต่อปี และ T เป็นจำนวนปีที่ต้องชำระ

เมื่ออัตรา i_f กำหนดต่อหนึ่งงวดเท่ากับที่ใช้คำนวณดอกเบี้ย เงินที่ต้องจ่ายทั้งหมดเท่ากับ

$$\text{ราคาสินค้า} + \text{ดอกเบี้ย} = P + i_f NP = (1 + i_f N)P$$

ดังนั้น

$$f = \frac{(1 + i_f N)P}{N} = \frac{(1 + i_f N)P}{mT} \quad (2.64)$$

ในทางปฏิบัติ อัตราดอกเบี้ยประกาศเป็นอัตราต่อปี สมมติใช้อัตราดอกเบี้ย j_f และผ่อนชำระ m ครั้งต่อปี เป็นเวลา T ปี จะมี $N = mT$ งวด และ $i_f = j_f/m$ เมื่อนำไปแทนในสมการ (2.64) จะได้รูปที่ใช้บ่อยว่า

$$f = \frac{(1 + j_f T)P}{mT}$$

หลังจากชำระแล้ว t งวด โดย $0 \leq t \leq N$ ยอดค้างงวดตามสัญญาที่ยังไม่ได้ชำระเท่ากับเงินที่ต้องจ่ายทั้งหมด หักด้วยเงินที่ชำระไปแล้ว t งวด กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \text{ยอดค้างงวดตามสัญญาที่ยังไม่ได้ชำระหลังงวดที่ } t &= (1 + i_f N)P - ft \\ &= Nf - ft \\ &= (N - t)f \end{aligned} \quad (2.65)$$

ข้อสังเกต

ค่าจากสมการ (2.65) เป็น *ยอดค้างงวดตามสัญญาที่ยังไม่ได้ชำระ* มิใช่ยอดเงินต้นคงเหลือที่คำนวณด้วยวิธีลดต้นลดดอก นอกจากนี้ ค่ารายงวดอาจรวมภาษีมูลค่าเพิ่มแล้วหรืออาจต้องบวกภาษีมูลค่าเพิ่มเพิ่มเติมขึ้นอยู่กับประเภทสินค้าและเงื่อนไขของสัญญา ตัวอย่างต่อไปนี้จะสมมติฐานตามที่โจทย์ระบุ

ตัวอย่าง 2.19. นายเอซื้อรถยนต์มือสองราคาเงินสด 400,000 บาท ชำระเงินดาวน์ 100,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 4 ปี ถ้าคิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 5 ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระต่อเดือนรวมภาษีมูลค่าเพิ่มร้อยละ 7

วิธีทำ ยอดเงินที่ต้องนำไปคำนวณค่าผ่อนเท่ากับ

$$P = 400,000 - 100,000 = 300,000 \text{ บาท}$$

เงินต้นรวมดอกเบี้ยตลอด 4 ปีเท่ากับ

$$300,000\{1 + 0.05(4)\} = 360,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ค่ารายงวดก่อนภาษีมูลค่าเพิ่มเท่ากับ

$$\frac{360,000}{4(12)} = 7,500 \text{ บาทต่อเดือน}$$

ภาษีมูลค่าเพิ่มเท่ากับ

$$0.07(7,500) = 525 \text{ บาทต่อเดือน}$$

ดังนั้น นายเอต้องผ่อนชำระเดือนละ

$$7,500 + 525 = 8,025 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 2.20. นายบีซื้อรถยนต์ป้ายแดงราคาเงินสด 800,000 บาท ชำระเงินดาวน์ 100,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 4 ปี ถ้าคิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 3 ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระต่อเดือน

วิธีทำ ยอดเงินที่ต้องนำไปคำนวณค่าผ่อนเท่ากับ

$$P = 800,000 - 100,000 = 700,000 \text{ บาท}$$

เงินต้นรวมดอกเบี้ยตลอด 4 ปีเท่ากับ

$$700,000\{1 + 0.03(4)\} = 784,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ค่ารายงวดต่อเดือนเท่ากับ

$$\frac{784,000}{4(12)} \approx 16,333.33 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นายปีต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 16,333.33 บาท



ตัวอย่าง 2.21. ปัจจุบันนายเออายุ 25 ปี ต้องการซื้อรถราคา 1,000,000 บาทในอีก 5 ปี โดยออมเงินทุกต้นเดือน เดือนละ 5,000 บาท บัญชีเงินฝากให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 2.4 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน เงินออมสะสมเมื่อครบ 5 ปีจะใช้เป็นเงินดาวน์ ส่วนที่เหลือกู้จากธนาคารและผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 5 ปี โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 3.2 ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่นายเอต้องผ่อนชำระในแต่ละเดือน

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยเงินฝากต่อเดือนเท่ากับ

$$i = \frac{0.024}{12} = 0.002$$

เงินออมเป็นการฝากต้นเดือนจำนวน 60 งวด จึงมีเงินสะสมเมื่อสิ้นปีที่ 5 เท่ากับ

$$\begin{aligned} FV &= 5,000\ddot{s}_{\overline{60}|0.002} \\ &= 5,000 \left(\frac{1.002^{60} - 1}{0.002(1.002)^{-1}} \right) \\ &\approx 319,041.16 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเงินที่ต้องกู้เท่ากับ

$$1,000,000 - 319,041.16 = 680,958.84 \text{ บาท}$$

เงินต้นรวมดอกเบี้ยเชิงเดียวตลอด 5 ปีเท่ากับ

$$680,958.84\{1 + 0.032(5)\} \approx 789,912.25 \text{ บาท}$$

จึงมีค่ารายงวดต่อเดือนเท่ากับ

$$\frac{789,912.25}{5(12)} \approx 13,165.20 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นายเอต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 13,165.20 บาท



2.4 การประยุกต์การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด

การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวดเป็นแนวคิดทางการเงินที่มีบทบาทสำคัญ ในชีวิตประจำวัน การเงินส่วนบุคคล และระบบเศรษฐกิจโดยรวม ความรู้เหล่านี้นำไปใช้ได้หลายบริบท เช่น การวางแผนเกษียณ การประเมินมูลค่าทางเศรษฐกิจ การจัดการหนี้สิน และการวิเคราะห์โครงการลงทุน โดยเฉพาะการประยุกต์ด้านคณิตศาสตร์ประกันภัย (Actuarial Science) และการเงินเชิงปริมาณ (Quantitative Finance) หัวข้อนี้แสดงการเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎี กับการตัดสินใจทางการเงินในสถานการณ์จริง

2.4.1 การวางแผนเกษียณอายุ

การวางแผนเกษียณอายุเป็นตัวอย่างที่ชัดเจนของการประยุกต์ค่ารายงวด ผู้ที่ต้องการมีรายได้อย่างต่อเนื่องหลังเกษียณสามารถใช้หลักการของค่ารายงวดเพื่อตั้งเป้าหมายเงินสะสม และวางแผนการออมอย่างเป็นระบบ เช่น คำนวณจำนวนเงินที่ต้องออมรายเดือน เพื่อให้เพียงพอกับค่าใช้จ่ายหลังเกษียณตามช่วงเวลาที่คาดว่าจะมีชีวิตอยู่

ตัวอย่าง 2.22 (การวางแผนเกษียณอายุ). สมมติปัจจุบันนายสมชายอายุ 25 ปี ต้องการวางแผนการเงินให้มีรายได้เพียงพอ หลังเกษียณอายุที่ 60 ปี โดยตั้งเป้าว่าจะมีเงินสำหรับใช้จ่ายเดือนละ 35,000 บาท จนถึงอายุ 85 ปี รวมระยะเวลา 25 ปี หรือ 300 เดือน คาดว่าอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนเฉลี่ยเท่ากับร้อยละ 6 ต่อปี และอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยระยะยาวเท่ากับร้อยละ 2 ต่อปี

อัตราผลตอบแทนรายเดือนเทียบเท่าและอัตราเงินเฟ้อรายเดือนเทียบเท่าคือ

$$i = (1.06)^{1/12} - 1 \approx 0.004868, \quad g = (1.02)^{1/12} - 1 \approx 0.001651$$

จงพิจารณากรณีต่อไปนี้

- 1) หากไม่พิจารณาเงินเพื่อ นายสมชายควรรวมเงินต้นที่ทุกต้นเดือนเดือนละเท่าใด ตั้งแต่อายุ 25–60 ปี รวม 420 เดือน เพื่อให้มีเงินเพียงพอสำหรับใช้จ่ายเดือนละ 35,000 บาทเป็นเวลา 300 เดือน
- 2) หากพิจารณาเงินเพื่อ ค่าครองชีพเดือนละ 35,000 บาทในปัจจุบัน จะเทียบเท่าเดือนละเท่าใดเมื่อ นายสมชายอายุ 60 ปี
- 3) หากพิจารณาเงินเพื่อ นายสมชายต้องมีเงินสะสม ณ วันเกษียณเท่าใด เพื่อถอนเงินรายเดือนตามเป้าหมายจนถึงอายุ 85 ปี
- 4) หากพิจารณาเงินเพื่อ นายสมชายควรรวมเงินต้นที่ทุกต้นเดือนเดือนละเท่าใด ตั้งแต่อายุ 25–60 ปี รวม 420 เดือน

วิธีทำ

1) กรณีไม่พิจารณาเงินเพื่อ

เงินที่ต้องมี ณ วันเกษียณเท่ากับมูลค่าปัจจุบัน ณ อายุ 60 ปี ของเงินถอนปลายเดือนจำนวน 300 งวด ดังนี้

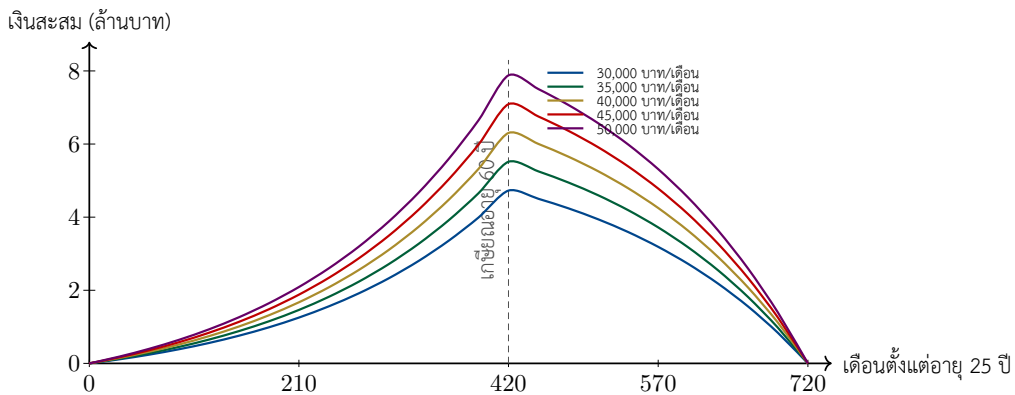
$$\begin{aligned}
 PV &= 35,000a_{\overline{300}|0.004868} \\
 &= 35,000 \left(\frac{1 - (1.004868)^{-300}}{0.004868} \right) \\
 &\approx 5,514,820 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

สมมติออมเงินต้นที่ทุกต้นเดือน เดือนละ x บาท เป็นเวลา 420 เดือน จะได้

$$\begin{aligned}
 5,514,820 &= x\ddot{s}_{\overline{420}|0.004868} \\
 &= x \left(\frac{(1.004868)^{420} - 1}{0.004868(1.004868)^{-1}} \right) \\
 &\approx 1,380.4613x
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x \approx \frac{5,514,820}{1,380.4613} \approx 3,994.91 \text{ บาทต่อเดือน}$$



รูปที่ 2.22 เปรียบเทียบมูลค่าเงินสะสมตลอดช่วงชีวิตภายใต้เป้าหมายการรับเงินรายเดือนหลังเกษียณที่แตกต่างกัน

รูปที่ 2.22 แสดงว่า เมื่อเป้าหมายรายได้หลังเกษียณสูงขึ้น ผู้วางแผนต้องออมรายเดือนมากขึ้นในช่วงก่อนเกษียณ ทำให้ยอดเงินสะสม ณ อายุ 60 ปีสูงขึ้น หลังจากนั้นยอดเงินจะค่อย ๆ ลดลงตามการถอนใช้ และลดลงถึงศูนย์เมื่อสิ้นระยะเวลา 300 เดือน

2) ค่าครองชีพ ณ อายุ 60 ปีเมื่อพิจารณาเงินเพื่อ

เงินเดือนละ 35,000 บาทในปัจจุบัน เมื่อปรับด้วยเงินเฟ้อร้อยละ 2 ต่อปีเป็นเวลา 35 ปี จะเทียบเท่ากับ

$$P = 35,000(1.02)^{35} \approx 69,996 \text{ บาทต่อเดือน}$$

หลังเกษียณ สมมติให้เงินถอนเพิ่มขึ้นทุกเดือนด้วยอัตราเงินเฟ้อรายเดือน $g \approx 0.001651$ ดังนั้นเงินถอนในเดือนที่ k เท่ากับ

$$69,996(1.001651)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 300$$

3) เงินสะสม ณ วันเกษียณเมื่อพิจารณาเงินเพื่อ

เงินถอนหลังเกษียณเป็นค่ารายงวดปลายงวดที่เพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ จึงได้

$$\begin{aligned} PV &= 69,996 Ga_{\overline{300}|0.004868} \\ &= 69,996 \left[\frac{1 - ((1.001651)(1.004868)^{-1})^{300}}{0.004868 - 0.001651} \right] \\ &\approx 13,443,472 \text{ บาท} \end{aligned}$$

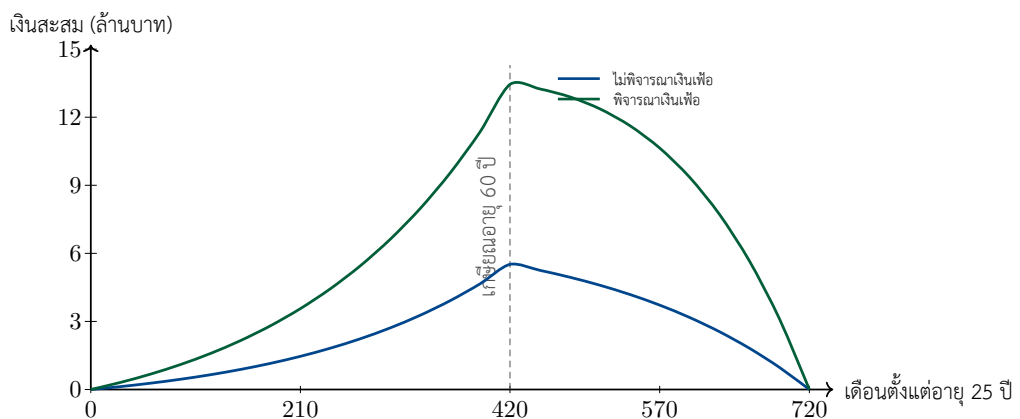
4) เงินออมรายเดือนเมื่อพิจารณาเงินเพื่อ

สมมติออมเงินทันทีทุกต้นเดือน เดือนละ x บาท เป็นเวลา 420 เดือน จะได้

$$13,443,472 = x \ddot{s}_{420|0.004868} \approx 1,380.4613x$$

ดังนั้น

$$x \approx \frac{13,443,472}{1,380.4613} \approx 9,738.41 \text{ บาทต่อเดือน}$$



รูปที่ 2.23 เปรียบเทียบมูลค่าเงินสะสมตลอดช่วงชีวิตระหว่างกรณีไม่พิจารณาเงินเพื่อกับกรณีพิจารณาเงินเพื่อ

รูปที่ 2.23 แสดงผลกระทบของเงินเพื่อต่อแผนเกษียณอย่างชัดเจน กรณีถอนเงินคงที่เดือนละ 35,000 บาท ต้องมีเงิน ณ อายุ 60 ปีประมาณ 5.5 ล้านบาท ขณะที่กรณีปรับเงินถอนตามเงินเพื่อ โดยเริ่มถอนเดือนละประมาณ 69,996 บาท และเพิ่มขึ้นเดือนละประมาณร้อยละ 0.1651 ต้องมีเงินมากกว่า 13 ล้านบาท ความแตกต่างดังกล่าวชี้ให้เห็นถึงความสำคัญของการวางแผนที่คำนึงถึงกำลังซื้อในอนาคต □

หากพิจารณาความไม่แน่นอนของอัตราผลตอบแทนจากการลงทุน i_t อัตราเงินเพื่อ π_t และระยะเวลาการมีชีวิตอยู่ ตัวแบบที่กำหนดให้อัตราต่าง ๆ คงที่ตลอดช่วงเวลาอาจไม่สะท้อนความเสี่ยงระยะยาวได้ครบถ้วน Milevsky and Huang (2011) ศึกษานโยบายการใช้จ่ายหลังเกษียณภายใต้ระยะเวลาการมีชีวิตที่ไม่แน่นอน และชี้ให้เห็นความสำคัญของความเสี่ยงด้านอายุชี้ยต่อการกำหนดอัตราการถอนเงินที่เหมาะสม อย่างไรก็ตาม งานดังกล่าวไม่ได้เสนอให้ใช้แบบจำลอง CIR สำหรับอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราเงินเพื่อโดยตรง จึงควรใช้อ้างอิงเฉพาะประเด็นความเสี่ยงด้านอายุชี้ยและการวางแผนการถอนเงินหลังเกษียณ

รูปที่ 2.24 แสดงตัวอย่างเชิงสถิติของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น อัตราเงินเฟ้อ และอัตราดอกเบี้ยจริงตลอดระยะเวลา 20 ปี โดยจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นด้วยแบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross หรือแบบจำลอง CIR ซึ่งกำหนดด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สุ่ม

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t,$$

เมื่อ r_t คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ณ เวลา t , θ คือระดับเฉลี่ยระยะยาว, κ คืออัตราเร็วในการปรับกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ย, σ คือพารามิเตอร์ความผันผวน และ W_t คือกระบวนการบราวเนียน แบบจำลองนี้มีคุณสมบัติสำคัญคืออัตราดอกเบี้ยมีแนวโน้ม ปรับกลับเข้าสู่ระดับเฉลี่ยระยะยาว และได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่ออธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ย มิใช่แบบจำลองผลตอบแทนจากการลงทุนทุกประเภทโดยทั่วไป

สำหรับภาพตัวอย่าง อัตราเงินเฟ้อกำหนดขึ้นแยกต่างหากให้มีลักษณะเป็นวัฏจักรเพื่อประกอบคำอธิบาย มิได้จำลองด้วยแบบจำลอง CIR ดังนั้นภาพดังกล่าวมิใช่แบบจำลองร่วมเชิงสุ่มของอัตราดอกเบี้ย และอัตราเงินเฟ้อ แต่เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อแสดงผลของเงินเฟ้อต่ออัตราดอกเบี้ยจริง อัตราดอกเบี้ยจริง ณ เวลา t คำนวณได้จาก

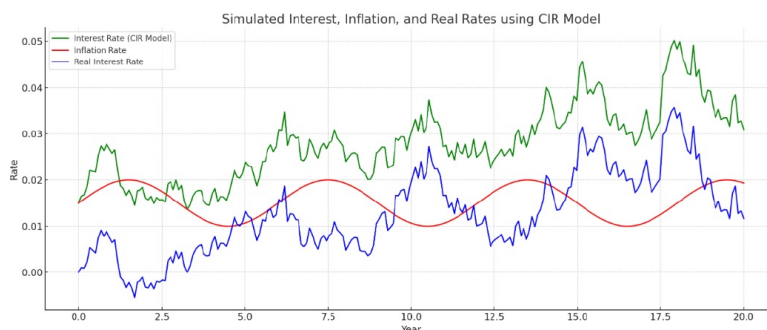
$$i_t^{(r)} = \frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} - 1 = \frac{i_t - \pi_t}{1 + \pi_t}$$

เมื่ออัตราดอกเบี้ยและอัตราเงินเฟ้อมีค่าไม่สูงมาก อาจประมาณได้ว่า

$$i_t^{(r)} \approx i_t - \pi_t$$

เมื่ออัตราเงินเฟ้อเพิ่มขึ้นโดยที่อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามไม่ได้เพิ่มขึ้นในสัดส่วนเดียวกัน อัตราดอกเบี้ยจริงจะลดลง ทำให้อำนาจซื้อของผลตอบแทนจากการลงทุนลดลงตามไปด้วย ควรกล่าวว่า “ลดลงอย่างชัดเจนในภาพจำลอง” แทน “ลดลงอย่างมีนัยสำคัญ” เพราะภาพดังกล่าวไม่ได้มาจากการประมาณค่าข้อมูลจริงหรือการทดสอบนัยสำคัญทางสถิติ

รูปที่ 2.24 เป็นภาพประกอบเชิงสถิติ มิใช่การพยากรณ์อัตราดอกเบี้ย หรืออัตราเงินเฟ้อในอนาคต การวิเคราะห์ที่ละเอียดขึ้นอาจกำหนดให้อัตราดอกเบี้ย ผลตอบแทนจากการลงทุน อัตราเงินเฟ้อ และอายุขัยเป็นตัวแปรสุ่มร่วมกัน แล้วประเมินผลด้วยการจำลองมอนติคาร์โลหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย งานที่ศึกษาการบริโภคหลังเกษียณภายใต้อัตราดอกเบี้ยชีวิตแบบสุ่มและแก้ปัญหา ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยปรากฏในงานต่อมาของ Huang, Milevsky, and Salisbury จึงไม่ควรอ้างว่าเป็นผลโดยตรงจาก Milevsky and Huang (2011) เพียงงานเดียว



รูปที่ 2.24 ตัวอย่างเชิงสถิติของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่จำลองตามแนวคิด CIR อัตราเงินเฟ้อที่กำหนดให้มีลักษณะเป็นวัฏจักร และอัตราดอกเบี้ยจริงที่ปรับด้วยอัตราเงินเฟ้อ

2.4.2 การคำนวณเงินผ่อนชำระ

สินเชื่อเพื่อซื้อบ้าน รถยนต์ หรือเครื่องใช้ไฟฟ้ามักจัดทำเป็นสัญญาผ่อนชำระรายงวด โดยอิงกับค่ารายงวดที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยและระยะเวลาผ่อน เช่น การคำนวณเงินที่ผู้กู้ต้องชำระรายเดือนเพื่อชำระเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยให้หมดภายในระยะเวลาที่กำหนด

2.4.3 การประเมินมูลค่าโครงการลงทุน

ในบริบทของการเงินองค์กรและการวิเคราะห์โครงการลงทุน แนวคิดการจ่ายแบบต่อเนื่อง (continuous payment) และค่ารายงวด (annuity) เป็นเครื่องมือสำคัญในการประเมินความคุ้มค่า โดยเฉพาะโครงการที่มีกระแสเงินสดเกิดขึ้นเป็นประจำ เช่น โรงไฟฟ้า ทางพิเศษ หรือระบบสาธารณสุข

องค์ประกอบหลักคือการประมาณกระแสเงินสดสุทธิ CF_t ในแต่ละช่วงเวลา และคิดลดกระแสเงินสดเหล่านั้นกลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบันด้วยอัตราคิดลด i

กรณีกระแสเงินสดแบบรายงวด

มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value: NPV) ของกระแสเงินสดรายงวดคำนวณได้จาก

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t} - I_0,$$

เมื่อ I_0 เป็นเงินลงทุนเริ่มต้น หากกระแสเงินสดแต่ละงวดคงที่ $CF_t = C$ จะได้

$$NPV = Ca_{\overline{n}|i} - I_0 = C \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) - I_0$$

กรณีกระแสเงินสดเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง

หากกระแสเงินสดเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องตลอดช่วงเวลา เช่น รายได้จากค่าผ่านทาง หรือค่าไฟฟ้าที่จัดเก็บตามปริมาณการใช้งาน สามารถใช้แบบจำลองอินทิกรัล

$$NPV = \int_0^T C(t)e^{-\delta t} dt - I_0,$$

โดย $C(t)$ คือกระแสเงินสดสุทธิ ณ เวลา t , δ คือกำลังดอกเบี้ยที่ใช้คิดลด และ T คืออายุโครงการ หาก $C(t) = C$ คงที่ จะได้

$$NPV = C \left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} \right) - I_0$$

แบบจำลองเหล่านี้ช่วยให้ผู้วิเคราะห์เปรียบเทียบโครงการหลายรูปแบบ และตัดสินใจลงทุนโดยพิจารณามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดในอนาคต หากโครงการมีความไม่แน่นอนสูง เช่น ราคาพลังงานหรืออุปสงค์เปลี่ยนแปลงตามเวลา อาจขยายการวิเคราะห์ด้วยกระบวนการสุ่ม (stochastic process) หรือการวิเคราะห์ตัวเลือกที่แท้จริง (real options analysis) เพื่อสะท้อนความเสี่ยงและความยืดหยุ่นของโครงการ

ตัวอย่าง 2.23 (การประเมินมูลค่าโครงการโรงไฟฟ้าด้วย NPV). บริษัทแห่งหนึ่งกำลังพิจารณาลงทุนสร้างโรงไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ โดยมีข้อมูลดังนี้

- 1) เงินลงทุนเริ่มต้น $I_0 = 50,000,000$ บาท
- 2) กระแสเงินสดสุทธิปีละ 10,000,000 บาท เป็นเวลา 15 ปี
- 3) อัตราคิดลดร้อยละ 8 ต่อปี หรือ $i = 0.08$

จงพิจารณาว่าควรลงทุนในโครงการนี้หรือไม่ โดยใช้เกณฑ์มูลค่าปัจจุบันสุทธิ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 NPV &= \sum_{t=1}^{15} \frac{10,000,000}{(1.08)^t} - 50,000,000 \\
 &= 10,000,000 a_{\overline{15}|0.08} - 50,000,000 \\
 &\approx 85,594,786.88 - 50,000,000 \\
 &\approx 35,594,786.88 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $NPV > 0$ โครงการสร้างผลตอบแทนสูงกว่าต้นทุนเงินทุนที่ใช้ในการประเมิน จึงมีความคุ้มค่าเชิงการเงินและควรพิจารณาลงทุน □

2.4.4 การออมเงินเพื่อเป้าหมายเฉพาะ

ผู้ที่มีเป้าหมายทางการเงิน เช่น การซื้อบ้านในอีก 10 ปี การศึกษาของบุตร หรือการท่องเที่ยว สามารถใช้ตารางงวดคำนวณเงินออมที่เหมาะสมในแต่ละเดือน โดยพิจารณาผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับและระยะเวลาการออม

บทสรุปท้ายบทที่ 2

บทนี้นำเสนอความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการจ่ายเงินในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งมีความสำคัญทั้งเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้จริง โดยเฉพาะด้านการลงทุน การวางแผนการเงินส่วนบุคคล และผลิตภัณฑ์ทางการเงินที่เกี่ยวข้องกับการกู้ยืมและการออม

ประเด็นสำคัญประกอบด้วย

- 1) **การจ่ายแบบต่อเนื่อง** เป็นพื้นฐานสำคัญในทฤษฎีการเงิน ใช้สร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์การลงทุนที่มีการจ่ายถี่ เช่น รายวันหรือรายสัปดาห์ และช่วยให้เข้าใจการสะสมเงินภายใต้การคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง
- 2) **ค่ารายงวด** เป็นหัวใจของธุรกรรมทางการเงินในชีวิตประจำวัน เช่น การกู้ซื้อบ้าน การผ่อนรถยนต์ และการรับเงินบำนาญ โดยรูปแบบต้นงวด ปลายงวด ตลอดไป และแบบแปรเปลี่ยน ช่วยให้ออกแบบกระแสเงินสดได้อย่างเป็นระบบ
- 3) **ค่ารายงวดแปรเปลี่ยน** สะท้อนความยืดหยุ่นในการชำระเงิน และช่วยให้ผู้วางแผนการเงินออกแบบภาระผ่อนชำระให้เหมาะสมกับความสามารถของลูกค้า
- 4) **ค่ารายงวดอัตราราบ** พบในสินเชื่อเชิงพาณิชย์บางประเภท และเป็นกรณีศึกษาสำคัญในการทำความเข้าใจความแตกต่างระหว่าง Flat Rate กับวิธีคิดดอกเบี้ยทบต้นหรือลดต้นลดดอกเบี้ย

การประยุกต์ใช้ในโลกรการเงินและการลงทุน

- นักวางแผนการเงินใช้ค่ารายงวดเพื่อวางแผนเกษียณ วางแผนชำระหนี้ และกำหนดเงินออมตามเป้าหมายในอนาคต
- นักวิเคราะห์การเงินใช้แบบจำลองการจ่ายต่อเนื่องเพื่อประเมินโครงการที่มีรายได้ กระจายตลอดเวลา เช่น โครงการโครงสร้างพื้นฐาน
- นักลงทุนเปรียบเทียบผลิตภัณฑ์ทางการเงินที่มีรูปแบบการจ่ายแตกต่างกัน เพื่อเลือกให้สอดคล้องกับกระแสเงินสดของตน
- ผู้ประกอบการและธนาคารออกแบบแผนชำระหนี้ที่ยืดหยุ่น เช่น การเพิ่มค่างวดเมื่อรายได้เพิ่มขึ้น หรือการผ่อนแบบขั้นบันได (step-up)

บทนี้จึงไม่เพียงเสริมสร้างความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ของกระแสเงินสด แต่ยังชี้ให้เห็นความสำคัญของการบริหารเงินอย่างมีแบบแผน ความรู้ดังกล่าวเป็นเครื่องมือสำหรับบุคคลทั่วไปในการตัดสินใจทางการเงิน และสำหรับผู้เชี่ยวชาญในการออกแบบผลิตภัณฑ์และให้คำปรึกษาอย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

- [1] มานพ วราภักดิ์. *ทฤษฎีดอกเบี้ย (Theory of Interest)*. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2549.
- [2] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อบปี้ปริ้นท์, กรุงเทพฯ, 2558.
- [3] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *CISA ระดับ 1 การวิเคราะห์เชิงปริมาณ: กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน*. พิมพ์ครั้งที่ 3, ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2552.
- [4] Milevsky, M. A., and Huang, H. (2011). "Spending Retirement on Planet Vulcan: The Impact of Longevity Risk Aversion on Optimal Withdrawal Rates." *Financial Analysts Journal*, 67(2), 45–58. <https://doi.org/10.2469/faj.v67.n2.2>
- [5] Härdle, W., Kleinow, T., and Stahl, G. *Applied Quantitative Finance: Theory and Computational Tools*. Springer, 2002.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

- 1) (ระดับ ปานกลาง) นางเอมกู้เงินจำนวน 500,000 บาท มีกำหนดชำระหนี้ภายใน 10 ปี โดยช่วง 5 ปีแรกชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 2,000 บาท และช่วง 5 ปีหลังชำระทุกสิ้นปี ปีละเท่า ๆ กัน กำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 10 ต่อปี และใช้อัตราดอกเบี้ยเทียบเท่าตามความถี่ของการชำระในแต่ละช่วง จงหาจำนวนเงินที่นางเอมต้องชำระในแต่ละปีตลอดช่วง 5 ปีหลัง เพื่อให้ชำระหนี้ครบเมื่อสิ้นปีที่ 10
- 2) (ระดับ ปานกลาง) นางอรชรฝากเงินจำนวน 20,000,000 บาทในบัญชีที่ให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน และถอนเงินทุกสิ้นเดือน เดือนละ 100,000 บาท เป็นเวลา 40 ปี โดยใช้อัตราดอกเบี้ยรายเดือนเทียบเท่า จงพิจารณาว่าเมื่อครบ 40 ปี นางอรชรจะมีเงินคงเหลือหรือไม่ และหากมี จะเหลือเป็นมรดกแก่ลูกหลานจำนวนเท่าใด
- 3) (ระดับ ปานกลาง) นายโอห์มกู้เงินจากสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง โดยผ่อนชำระคืนเป็นรายเดือน เดือนละ 12,000 บาท ทุกต้นเดือนเป็นเวลา 10 ปี และในงวดสุดท้ายต้องจ่ายเพิ่มอีก 200,000 บาท สถาบันการเงินคิดดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหา
 - 3.1) เงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนชำระค่ารายงวด
 - 3.2) มูลค่าอนาคตของเงินผ่อนชำระค่ารายงวด ณ ปลายปีที่ 10
 - 3.3) ดอกเบี้ยสะสมของเงินกู้
 - 3.4) หลังจากผ่อนชำระแล้ว 5 ปี นายโอห์มต้องการปิดยอดหนี้ทั้งหมด ต้องชำระเงินเท่าใด ณ ปลายปีที่ 5
- 4) (ระดับ ง่าย) นายเอนำเงินจำนวน 1,000,000 บาทฝากเข้ากองทุนทันที กองทุนให้ผลตอบแทนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องร้อยละ 4 ต่อปี ตั้งแต่ต้นปีที่ 2 นายเอนำเงินเพิ่มอย่างต่อเนื่องด้วยอัตราคงที่ 5,000 บาทต่อปี จนถึงสิ้นปีที่ 20 จงหาเงินสะสมทั้งหมดในกองทุน ณ สิ้นปีที่ 20 โดยสมมติว่าอัตราผลตอบแทนคงที่ตลอดระยะเวลา และไม่พิจารณาภาษีหรือค่าธรรมเนียม
- 5) (ระดับ ยาก) จงหามูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตของการจ่ายค่ารายงวดต่อเนื่อง ที่จ่ายตั้งแต่ต้นปีแรกเป็นเวลา 20 ปี ด้วยอัตรา $t^2 + 1$ บาทต่อปี และมีกำลังดอกเบี้ยเท่ากับ $1/(t + 1)$ ต่อปี โดย ณ ปลายปีที่ 20 ต้องจ่ายเพิ่มอีก 100,000 บาท

- 6) (ระดับ ง่าย) นายเอกชัยลงทุนซื้อพันธบัตรคอนโซลราคา 10,000,000 บาท ซึ่งจ่ายดอกเบี้ยปีละเท่า ๆ กันตลอดไป โดยจ่ายครั้งแรก ณ สิ้นปีที่ 5 กำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 5 ต่อปี จงหาจำนวนเงินดอกเบี้ยที่นายเอกชัยและทายาทจะได้รับในแต่ละปี
- 7) (ระดับ ปานกลาง) นายพรชัยฝากเงินจำนวน 10,000,000 บาทไว้กับธนาคาร และเขียนพินัยกรรมให้นำดอกเบี้ยจากเงินฝากบริจาคแก่มูลนิธิคนตาบอดทุกสิ้นเดือนตลอดไป โดยจ่ายครั้งแรก ณ สิ้นเดือนที่ 10 ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน และให้ใช้อัตราดอกเบี้ยรายเดือนเทียบเท่าในการคำนวณ กำหนดให้เงินต้นคงอยู่ครบจำนวนตลอดไป และไม่พิจารณาภาษีหรือค่าธรรมเนียม จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินบริจาคทั้งหมด
- 8) (ระดับ ปานกลาง) นายเอกธวัชระหนี้เงินกู้ 200,000 บาท โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน งวดแรก 12,000 บาท และตั้งยอดเงินชำระลงเดือนละ 1,000 บาท แต่เงินชำระแต่ละเดือนต้องไม่ต่ำกว่า 5,000 บาท กำหนด $i^{(12)} = 0.12$ จงหาว่าต้องผ่อนชำระนานกี่เดือนโดยประมาณ
- 9) (ระดับ ยาก) นายเอ็มซื้อบ้านหลังหนึ่งโดยจ่ายเงินดาวน์ 300,000 บาท และตกลงชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี ผู้ขายคิดดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหา
- 9.1) ราคาเงินสดของบ้าน
 - 9.2) หากขาดชำระงวดที่ 12–15 ในงวดที่ 16 ต้องชำระเท่าใด เพื่อให้หลังจากนั้นกลับไปชำระค่ารายงวดตามปกติ
 - 9.3) หลังจากชำระครบ 120 งวด ตั้งแต่ววดที่ 121 เพิ่มค่างวดเป็น 20,000 บาท จะผ่อนได้เร็วกว่าเดิมกี่เดือนโดยประมาณ
 - 9.4) หลังจากชำระครบ 120 งวด หากต้องการชำระหนี้ที่เหลือทั้งหมดในงวดที่ 121 ต้องชำระเงินเท่าใด
- 10) (ระดับ ยาก) นายหนึ่งซื้อบ้านโดยชำระเงินดาวน์ทันที 200,000 บาท และผ่อนชำระต้นเดือน เดือนละ 8,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี รวม 120 งวด โดยชำระงวดแรกในวันทำสัญญา กำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี ทบต้นรายเดือน และให้พิจารณาแต่ละข้อแยกจากกัน
- 10.1) บ้านหลังนี้มีมูลค่าเป็นเงินสดเท่าใด
 - 10.2) หากขาดชำระ 12 งวดแรก และรีไฟแนนซ์ยอดหนี้ทั้งหมด ณ ต้นเดือนที่ 13 ให้ผ่อนต้นเดือนเท่า ๆ กันใน 108 งวดที่เหลือ จงหาค่างวดใหม่
 - 10.3) หากชำระครบ 12 งวดแล้ว และต้องการชำระหนี้ที่เหลือให้หมดภายใน 6 ปี โดยเริ่มค่างวดใหม่ตั้งแต่ววดที่ 13 จงหาค่างวดรายเดือนใหม่
 - 10.4) หากชำระครบ 24 งวดแล้ว และตั้งแต่ววดที่ 25 เพิ่มค่างวดเป็นเดือนละ 8,800 บาท จงหา

จำนวนงวดที่ต้องชำระทั้งหมด และจำนวนงวดที่ลดลงจากแผนเดิม โดยปรับงวดสุดท้ายตามยอดหนี้คงเหลือจริง

- 11) **(ระดับ ปานกลาง)** สัญญาฉบับหนึ่งกำหนดให้ชำระ 16,000 บาททุก 6 เดือน เป็นเวลา 10 ปี และชำระเพิ่มอีก 100,000 บาท ณ วันครบสัญญา จงหามูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตของเงินตามสัญญา ถ้ากำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน และจ่ายปลายงวด
- 12) **(ระดับ ง่าย)** นายสงบซื้อรถเก๋งราคา 54,000 บาท ชำระเงินดาวน์ 9,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระรายเดือนเท่า ๆ กัน 15 งวด โดยงวดแรกครบกำหนดในอีก 1 เดือน คิดอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวร้อยละ 6 ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระรายเดือนรวมภาษีมูลค่าเพิ่มร้อยละ 7
- 13) **(ระดับ ง่าย)** กมลวรรณซื้อโทรทัศน์ราคา 25,000 บาท โดยชำระเงินก้อนแรกในวันที่ซื้อ 1,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระปลายเดือนเท่า ๆ กัน 6 เดือน คิดดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 1.3 ต่อเดือน จงหาค่ารายงวดต่อเดือน
- 14) **(ระดับ ปานกลาง)** นายคมกฤษซื้อบ้านราคาเงินสด 3,000,000 บาท ชำระเงินดาวน์ 260,000 บาท ณ วันทำสัญญา และกู้ส่วนที่เหลือจากธนาคาร โดยชำระต้นงวดเดือนละ 23,006.64 บาท เป็นเวลา 15 ปี รวม 180 งวด ชำระงวดแรกทันทีในวันทำสัญญา และธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นรายเดือนด้วยอัตราคงที่ตลอดอายุสัญญา จงหา
 - a) อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน
 - b) อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี
- 15) **(ระดับ ง่าย)** นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษาจำนวน 20,000 บาท โดยชำระคืนทุก 3 เดือนติดต่อกันเป็นเวลา 5 ปี กองทุนคิดดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน จงหาค่ารายงวด โดยชำระปลายงวด
- 16) **(ระดับ ปานกลาง)** นาย A กู้เงินกับธนาคารสีเขียวแก่จำนวน 40,000 บาท อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 28 ต่อปี ซึ่งรวมค่าธรรมเนียมและภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว สัญญากำหนดให้ชำระเงินต้นคงที่เดือนละ 8,000 บาท จงสร้างตารางผ่อนชำระหนี้ในแต่ละเดือน และหาจำนวนเงินทั้งหมดที่ชำระกับธนาคาร โดยชำระปลายงวด
- 17) **(ระดับ ปานกลาง)** นาย A กู้เงินกับธนาคารสีชมพูจำนวน 40,000 บาท อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 28 ต่อปี ซึ่งรวมค่าธรรมเนียมและภาษีมูลค่าเพิ่มแล้ว สัญญากำหนดให้ชำระเงินรายเดือนคงที่เดือนละ 8,000 บาท จงสร้างตารางผ่อนชำระหนี้ในแต่ละเดือน หาจำนวนเงินทั้งหมดที่ชำระกับธนาคาร

และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับข้อ 16

- 18) **(ระดับ ง่าย)** นายเอซื้อรถยนต์ป้ายแดงราคาเงินสด 890,000 บาท บริษัทสินเชื่อนมัสตังเงินร้อยละ 90 ของราคาเงินสด ส่วนที่เหลือชำระเป็นเงินดาวน์ทันทีในวันทำสัญญา บริษัทคิดดอกเบี้ยอัตราดอกเบี้ย 4 ต่อปี และให้ผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 5 ปี รวม 60 งวดเท่า ๆ กัน ไม่พิจารณาภาษีมูลค่าเพิ่ม ค่าธรรมเนียม เบี้ยประกันภัย หรือค่าใช้จ่ายอื่น จงหา
 - 18.1) เงินดาวน์
 - 18.2) จำนวนเงินกู้หรือยอดจัดสินเชื่อ
 - 18.3) ดอกเบี้ยทั้งหมดตลอดอายุสัญญา
 - 18.4) ค่างวดต่อเดือน
 - 18.5) จำนวนเงินทั้งหมดที่จ่ายเพื่อซื้อรถยนต์ รวมเงินดาวน์และค่างวดทั้งหมด
- 19) **(ระดับ ปานกลาง)** นาย A ซื้อคอนโดมิเนียมแถวลาดพร้าว พื้นที่ 32 ตารางเมตร ราคา 1,850,000 บาท โดยกู้สินเชื่อที่อยู่อาศัยจากธนาคารสี่ส้ม ซึ่งให้วงเงินร้อยละ 90 ของราคาประเมิน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 6 ต่อปี เป็นเวลา 20 ปี หากราคาประเมินเท่ากับ 2,000,000 บาท จงหา

ค่าผ่อนชำระต้นเดือนและจำนวนเงินทั้งหมดที่จ่าย

หมายเหตุ: ราคาประเมินคือราคาสินทรัพย์ที่ประเมินโดยสถาบันการเงินผู้ให้กู้ ซึ่งอาจสูงกว่าราคาซื้อขายจริง และวงเงินกู้คำนวณจากราคาประเมิน
- 20) **(ระดับ ปานกลาง)** นาย A กู้เงิน 200,000 บาทจากสถาบันการเงิน โดยคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 7 ต่อปี ทบต้นรายเดือน และผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 24 งวด จากนั้นนำเงินทั้งหมดไปปล่อยกู้แก่ลูกค้ารายย่อย โดยให้ลูกค้าชำระคืนทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 24 งวด ในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อเดือน กำหนดให้ค่างวดของแต่ละสัญญามีจำนวนเท่ากันทุกงวด และไม่พิจารณาหนี้เสีย ภาษี หรือค่าธรรมเนียม จงหาทำไรสุทธิรวมตลอด 2 ปี และคิดเป็นร้อยละของเงินต้นที่นำไปปล่อยกู้
- 21) **(ระดับ ง่าย)** ไก่ซื้อห้องชุดโดยวางเงินดาวน์ 100,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระกับธนาคารต้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท จำนวน 120 เดือน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 9 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหาราคาเงินสดของห้องชุด
- 22) **(ระดับ ปานกลาง)** นายหนูซื้อบ้านราคา 2,000,000 บาท ชำระเงินดาวน์ร้อยละ 20 ของราคาบ้าน และผ่อนยอที่เหลือทุกต้นเดือน เดือนละ 20,000 บาท ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นรายเดือน โดยชำระงวดแรกทันทีในวันทำสัญญา จงหาจำนวนเดือนที่ต้องผ่อนจนหมดหนี้ โดยปรับยอดงวดสุดท้ายตามหนี้คงเหลือจริง

- 23) **(ระดับ ยาก)** นายเปิดซื้อบ้านราคา 3,000,000 บาท วางเงินดาวน์ 600,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 20 ปี ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นทุกเดือน จงหาค่ารายงวดต่อเดือน
- 24) **(ระดับ ยาก)** นางกวางซื้อบ้านราคาเงินสด 2,000,000 บาท ชำระเงินดาวน์ทันที 200,000 บาท และกู้ส่วนที่เหลือจากธนาคาร ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี ทบต้นรายเดือน นางกวางชำระทุกสิ้นเดือน โดยงวดแรก 28,000 บาท และลดลงเดือนละ 1,000 บาทจนเหลือ 20,000 บาท หลังจากนั้นชำระเดือนละ 20,000 บาทจนหมดหนี้ จงหา
- 24.1) จำนวนงวดทั้งหมด ระยะเวลาคิดเป็นปี และยอดชำระงวดสุดท้าย
- 24.2) สมมติชำระตามกำหนดถึงงวดที่ 20 แต่ไม่ได้ชำระงวดที่ 21 หากต้องการชำระยอดค้างทั้งหมดพร้อมค่างวดที่ 22 ณ วันครบกำหนดงวดที่ 22 เพื่อให้แผนหลังจากนั้นคงเดิม ต้องชำระในงวดที่ 22 เท่าใด กำหนดให้ยอดค้างคิดดอกเบี้ยตามสัญญา และไม่คิดค่าปรับหรือค่าธรรมเนียมเพิ่มเติม
- 25) **(ระดับ ยาก)** นายเลื้อซื้อห้องชุดราคา 1,000,000 บาท โดยกู้เต็มจำนวน และผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนงวดแรก 10,000 บาท เพิ่มขึ้นเดือนละ 1,000 บาททุกงวด ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี ทบต้นรายเดือน จงหาจำนวนงวดที่ต้องชำระจนหมดหนี้ ระยะเวลาคิดเป็นปี และดอกเบี้ยสะสมทั้งหมด โดยปรับงวดสุดท้ายตามยอดหนี้คงเหลือจริง
- 26) **(ระดับ ปานกลาง)** นายยกซื้อบ้านราคา 2,000,000 บาท โดยกู้เต็มจำนวน และผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 20 ปี ช่วง 10 ปีแรกชำระเดือนละ 15,000 บาท จำนวน 120 งวด ในอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 3 ต่อปี ทบต้นรายเดือน ช่วง 10 ปีหลังชำระเดือนละเท่า ๆ กันอีก 120 งวด ตั้งแต่วางที่ 121 โดยคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี ทบต้นรายเดือน จงหาค่างวดรายเดือนในช่วง 10 ปีหลัง เพื่อให้หมดหนี้เมื่อครบ 20 ปี
- 27) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเออายุ 40 ปี ซื้อประกันชีวิตแบบเงินได้ประจำ โดยชำระเบี้ยประกันต้นปี ปีละ 10,000 บาท ตั้งแต่อายุ 40 ถึง 59 ปี รวม 20 งวด จากนั้นได้รับเงินคืนปีละเท่า ๆ กัน ณ วันที่อายุครบ 60 ปี และทุกปีจนถึงอายุครบ 79 ปี รวม 20 งวด กำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 3 ต่อปี และไม่พิจารณาค่าใช้จ่ายหรือผลประโยชน์อื่น จงหาเงินที่นายเอได้รับในแต่ละปี
- 28) **(ระดับ ปานกลาง)** ปัจจุบัน นาย เอ อายุ ครบ 60 ปี และมี เงิน สะสม เพื่อ ใช้ จ่าย หลัง เกษียณ 15,000,000 บาท คาดว่าจะมีอายุถึง 80 ปี และต้องการให้มีเงินคงเหลือ 2,000,000 บาท ณ วันที่อายุครบ 80 ปี เพื่อนำไปมอบเป็นมรดก เงินสะสมได้รับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามสุทธิหลังภาษี ร้อยละ 3 ต่อปี ทบต้นรายเดือน และนายเอถอนเงินเท่ากันทุกต้นเดือน เป็นเวลา 20 ปี รวม 240 ครั้ง โดย

ถอนครั้งแรกทันทีเมื่ออายุครบ 60 ปี กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยคงที่ และไม่พิจารณาเงินเพื่อ ค่าธรรมเนียม หรือค่าใช้จ่ายอื่น จงหาจำนวนเงินสูงสุดที่ถอนใช้ได้ในแต่ละเดือน โดยยังมีเงินเหลือ 2,000,000 บาท เมื่ออายุครบ 80 ปี

29) (ระดับ ง่าย) ปัจจุบันนางสาวปีอายุ 40 ปี มีเงินเก็บเพื่อเกษียณ 3,000,000 บาท และนำไปลงทุนทันที นอกจากนี้ออมเพิ่มทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท จนถึงอายุ 60 ปี รวม 240 เดือน กำหนดให้อัตราผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 6 ต่อปีคงที่ และเงินออมรายเดือนได้รับผลตอบแทนในอัตราเดียวกันโดยไม่พิจารณาภาษี ค่าธรรมเนียม และเงินเพื่อ จงหาเงินสะสม ณ วันที่อายุครบ 60 ปี

30) (ระดับ ปานกลาง) ปัจจุบันนายเออายุ 50 ปี มีเงินเก็บเพื่อเกษียณ 5,000,000 บาท และตั้งใจออมเพิ่มทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี รวม 120 งวด เพื่อให้มีเงินเกษียณรวม 10,000,000 บาท ณ วันที่อายุครบ 60 ปี จงหาอัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีที่ทำให้บรรลุเป้าหมาย

31) (ระดับ ยาก) นายเอต้องการฝากเงิน 1,000,000 บาทกับธนาคารพาณิชย์เป็นเวลา 3 ปี ธนาคารเสนอเงินฝากประจำ 4 รูปแบบ ดังนี้

1. เงินฝากประจำ 3 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี
2. เงินฝากประจำ 6 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3.5 ต่อปี
3. เงินฝากประจำ 12 เดือน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี
4. เงินฝากประจำ 555 วัน อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5.55 ต่อปี

กำหนดให้

- อัตราดอกเบี้ยที่ระบุเป็นอัตราต่อปี และคำนวณดอกเบี้ยตามสัดส่วนของระยะเวลาฝาก
- เมื่อครบกำหนดแต่ละรอบ ธนาคารจ่ายดอกเบี้ยและหักภาษี ณ ที่จ่ายร้อยละ 15 ของดอกเบี้ยที่ได้รับ
- เงินต้นพร้อมดอกเบี้ยสุทธิถูกนำไปฝากต่อโดยอัตโนมัติด้วยอัตราเดิม
- อัตราดอกเบี้ยแต่ละรูปแบบคงที่ตลอด 3 ปี
- ไม่พิจารณาค่าธรรมเนียมและการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย
- เพื่อเปรียบเทียบเงินฝาก 555 วัน กับ ทางเลือกอื่น ให้แปลงผลตอบแทนสุทธิเป็น อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปี แล้วคำนวณเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 3 การคำนวณนี้เป็นการเปรียบเทียบด้วยอัตราแท้จริงต่อปีเทียบเท่า มิใช่มูลค่าถอนจริงก่อนครบกำหนดตามสัญญา

จงหา

- a) อัตราผลตอบแทนสุทธิต่อปีที่แท้จริงของแต่ละรูปแบบ

- b) เงินสะสมสุทธิ ณ สิ้นปีที่ 3 ของแต่ละรูปแบบ
- c) รูปแบบที่ควรเลือกเมื่อพิจารณาจากเงินสะสมสุทธิสูงสุด

32) **(ระดับ ง่าย)** ปัจจุบันนายเออายุ 20 ปี ต้องการเก็บเงินสำหรับวางแผนเกษียณอายุ 15 ปี เพื่อซื้อรถราคา 1,000,000 บาท ในอีก 5 ปี ส่วนที่เหลือจะฝากกับธนาคาร จงหาจำนวนเงินที่ต้องออมทุกต้นเดือน เพื่อให้ได้เงินตามเป้าหมาย เมื่ออัตราดอกเบี้ยเงินฝากแท้จริงเท่ากับร้อยละ 2.4 ต่อปี

33) **(ระดับ ปานกลาง)** ปัจจุบันนายเออายุ 40 ปี ได้รับมรดก 10,000,000 บาท และแบ่งเงินออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ดังนี้

1. เงิน 5,000,000 บาท ฝากประจำประเภท 3 เดือน ให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 3 ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน เมื่อครบกำหนดแต่ละรอบ ธนาคารนำเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยไปต่ออายุอีก 3 เดือนโดยอัตโนมัติ ด้วยอัตราเดิมตลอด 40 ปี
2. เงิน 5,000,000 บาท ฝากบัญชีออมทรัพย์ ให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 1 ต่อปี ทบต้นรายเดือน นายเอถอนทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 40 ปี รวม 480 ครั้ง โดยถอนครั้งแรกเมื่อสิ้นเดือนแรก

กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยคงที่ ไม่พิจารณาภาษี ค่าธรรมเนียม และเงินเฟ้อ และไม่มีการฝากหรือถอนอื่นนอกเหนือจากที่กำหนด หากนายเอเสียชีวิตเมื่ออายุครบ 80 ปี จงหา

- a) เงินสะสมในบัญชีฝากประจำเมื่ออายุครบ 80 ปี
- b) เงินคงเหลือในบัญชีออมทรัพย์เมื่ออายุครบ 80 ปี
- c) เงินมรดกรวมที่ส่งต่อให้บุตร

บทที่ 3 ส่วนลดและอัตราส่วนลด

เนื้อหาประกอบด้วย

1. ส่วนลดและอัตราส่วนลด
2. ประเภทของอัตราส่วนลด
3. อัตราส่วนลดเพียงในนาม
4. วิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน
5. การประยุกต์ใช้ส่วนลดและอัตราส่วนลดในทางปฏิบัติ

บทนำ

ในการเงิน การเปรียบเทียบมูลค่าของเงินที่เกิดขึ้นต่างเวลากันเป็นหลักการพื้นฐานที่สำคัญ โดยเฉพาะในการวิเคราะห์การลงทุน การคำนวณต้นทุนของเงินทุน และการประเมินความคุ้มค่า ทางเศรษฐศาสตร์ของโครงการ แนวคิดเรื่อง **ส่วนลด** (Discount) และ **อัตราส่วนลด** (Discount Rate) เป็นเครื่องมือที่ใช้แปลงมูลค่าอนาคต (Future Value) ให้เป็นมูลค่าปัจจุบัน (Present Value) ด้วยอัตราที่เหมาะสม แนวคิดนี้จึงเป็นพื้นฐานของการวิเคราะห์ตราสารหนี้ การวางแผนการเงินส่วนบุคคล และการประเมินมูลค่าธุรกิจ

บทนี้นำเสนอทั้งอัตราส่วนลดเชิงเดียว (Simple Discount Rate) และอัตราส่วนลดทบต้น (Compound Discount Rate) ตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราส่วนลดแท้จริง อัตราส่วนลดเพียงในนาม และอัตราดอกเบี้ยที่เทียบเท่ากัน นอกจากนี้ยังเสนอวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Iteration) สำหรับประมาณอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราส่วนลดจากสมการกระแสเงินสด ในกรณีที่ไม่สามารถหาคำตอบในรูปปิดได้

ในการประยุกต์ใช้จริง อัตราส่วนลดเกี่ยวข้องกับการกำหนดราคาพันธบัตร การประเมินโครงการลงทุน การวิเคราะห์สินเชื่อ และการคำนวณมูลค่าปัจจุบันสุทธิ ดังนั้น จุดมุ่งหมายของบทนี้คือให้ผู้อ่านเข้าใจทั้งหลักการทางคณิตศาสตร์ ความหมายทางการเงิน และข้อควรระวังในการใช้อัตราแต่ละประเภทอย่างถูกต้อง

3.1 ส่วนลดและอัตราส่วนลด

ในบทก่อนหน้าได้กล่าวถึงอัตราดอกเบี้ย ซึ่งมีกวดผลตอบแทนเทียบกับเงินต้นที่ลงทุน ณ ต้นงวด และรับดอกเบี้ยเมื่อสิ้นงวด อย่างไรก็ตาม ธุรกิจบางประเภทกำหนดผลตอบแทน ในรูป **ส่วนลด** โดยหักผลตอบแทนออกจากจำนวนเงินที่จะได้รับในอนาคตล่วงหน้า จึงอาจเรียกว่าเป็นการรับดอกเบี้ยล่วงหน้า (Interest in Advance)

พิจารณาตราสารหนี้อายุ 1 ปี มูลค่าไถ่ถอน 1,000 บาท และกำหนดอัตราส่วนลดร้อยละ 10 ต่อปี ส่วนลดเท่ากับ

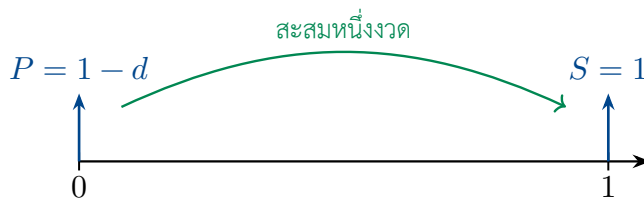
$$0.10(1,000) = 100 \text{ บาท}$$

ผู้ลงทุนจึงชำระเงินวันนี้เพียง 900 บาท และได้รับ 1,000 บาทเมื่อครบกำหนด ดังนั้น

$$\text{อัตราส่วนลด} = \frac{\text{ส่วนลด}}{\text{จำนวนเงินที่จะได้รับปลายงวด}} = \frac{100}{1,000} = 0.10 = 10\%,$$

ขณะที่อัตราดอกเบี้ยที่เทียบเท่ากันเท่ากับ

$$\text{อัตราดอกเบี้ย} = \frac{\text{ส่วนลด}}{\text{เงินลงทุนต้นงวด}} = \frac{100}{900} = 0.111111 \dots = 11.1111\%$$



รูปที่ 3.1 กระแสเงินสดจากการลงทุนภายใต้อัตราส่วนลด d ต่อหนึ่งงวด

ให้ d เป็นอัตราส่วนลดต่อหนึ่งงวด และ i เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อหนึ่งงวด ที่เทียบเท่ากัน เมื่อกำหนดมูลค่าอนาคตเท่ากับ 1 จะมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ $1 - d$ และมีดอกเบี้ยเท่ากับ d ดังนั้น

$$i = \frac{d}{1 - d}, \quad d = \frac{i}{1 + i}, \quad 1 + i = \frac{1}{1 - d} \quad (3.1)$$

ข้อสังเกต

อัตราดอกเบี้ย i และอัตราส่วนลด d ที่มีตัวเลขเท่ากันไม่ใช่อัตราที่เทียบเท่ากัน เพราะ i ใช้เงินต้นงวดเป็นฐาน ขณะที่ d ใช้มูลค่าอนาคตเป็นฐาน สำหรับอัตราบวกจะได้ $i > d$ เสมอ และต้องใช้สมการ (3.1) ในการแปลงอัตรา

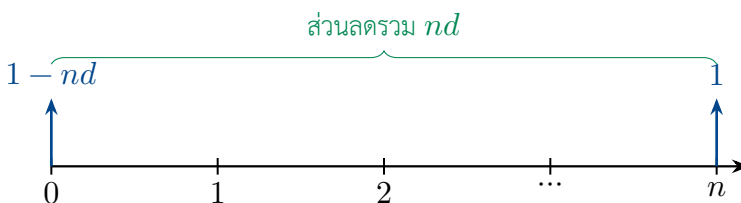
3.2 ประเภทของอัตราส่วนลด

อัตราส่วนลดแบ่งเป็นสองประเภทหลัก ได้แก่ อัตราส่วนลดเชิงเดียว และอัตราส่วนลดทบต้น แต่ละประเภทมีฟังก์ชันเงินสะสมและเงื่อนไขการใช้งานต่างกัน

3.2.1 อัตราส่วนลดเชิงเดียว

อัตราส่วนลดเชิงเดียว (Simple Discount Rate) คำนวณส่วนลดในแต่ละงวด จากมูลค่าที่จะได้รับเมื่อครบกำหนด โดยไม่นำมูลค่าหลังหักส่วนลดของงวดก่อนหน้า มาเป็นฐานในงวดถัดไป

พิจารณาเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ ปลายงวดที่ n ภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียว d ต่องวด ส่วนลดรวมเท่ากับ nd บาท และมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ $1 - nd$ บาท โดยต้องมี $0 \leq nd < 1$



รูปที่ 3.2 กระแสเงินสดภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียว d ต่องวด

หากมูลค่าเมื่อครบกำหนดเท่ากับ S บาท มูลค่าปัจจุบัน P เท่ากับ

$$P = S - ndS = (1 - nd)S, \quad 0 \leq nd < 1 \quad (3.2)$$

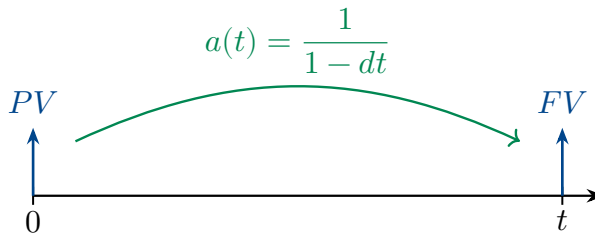
สำหรับระยะเวลา t ปี ฟังก์ชันเงินสะสมที่สอดคล้องกันคือ

$$a(t) = \frac{1}{1 - dt} \quad (3.3)$$

ถ้า i เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวต่อปีที่ให้มูลค่าสะสมเท่ากันตลอดระยะเวลา t จะได้

$$1 + it = \frac{1}{1 - dt}, \quad i = \frac{d}{1 - dt}, \quad d = \frac{i}{1 + it} \quad (3.4)$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นความสัมพันธ์ที่ขึ้นกับระยะเวลา t จึงไม่ควรนำอัตราเชิงเดียว ไปเทียบกันโดยละเว้นช่วงเวลาที่กำหนด



รูปที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันกับมูลค่าอนาคตภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียว

จากรูปที่ 3.3 ได้ว่า

$$FV = \frac{PV}{1 - dt} \iff PV = FV(1 - dt), \quad 0 \leq dt < 1 \quad (3.5)$$

ตัวอย่าง 3.1. นายเอต้องการได้รับเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 ภายใต้อัตราส่วนลดเชิงเดียวร้อยละ 8 ต่อปี จงหาเงินที่ต้องลงทุนทันที

วิธีทำ จาก (3.2)

$$\begin{aligned} P &= (1 - td)S \\ &= (1 - 5(0.08))(1,000,000) \\ &= 600,000 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น นายเอต้องลงทุนทันที 600,000 บาท

□

ตัวอย่าง 3.2. เงินลงทุนหลักหักส่วนลดเท่ากับ 10,000 บาท และได้รับอัตราส่วนลดเชิงเดียว ร้อยละ 5 ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี จงหามูลค่าอนาคต

วิธีทำ

$$10,000 = (1 - 10(0.05))S = 0.5S,$$

จึงได้

$$S = 20,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าอนาคตเท่ากับ 20,000 บาท

□

ตัวอย่าง 3.3. โครงการหนึ่งต้องลงทุนทันที 900,000 บาท และให้เงินรับ 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 จงหาอัตราส่วนลดเชิงเดียวต่อปี และอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวต่อปีที่เทียบเท่ากัน

วิธีทำ จาก

$$900,000 = (1 - 5d)(1,000,000)$$

ได้

$$d = 0.02 = 2\% \text{ ต่อปี}$$

ส่วนอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียวได้จาก

$$1,000,000 = (1 + 5i)(900,000),$$

ดังนั้น

$$i = \frac{1,000,000/900,000 - 1}{5} = 0.022222 \dots = 2.2222\% \text{ ต่อปี}$$

□

3.2.2 อัตราส่วนลดทบต้น

อัตราส่วนลดทบต้น (Compound Discount Rate) คิดส่วนลดในแต่ละงวด จากมูลค่าหลังหักส่วนลดของงวดนั้น ๆ ดังนั้นตัวประกอบมูลค่าปัจจุบันหนึ่งงวดเท่ากับ $1 - d$ และตัวประกอบมูลค่าปัจจุบัน n งวดเท่ากับ $(1 - d)^n$



รูปที่ 3.4 กระแสเงินสดภายใต้อัตราส่วนลดทบต้น d ต่องวด

ถ้ามูลค่าเมื่อครบกำหนดเท่ากับ S บาท มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$P = (1 - d)^n S, \quad 0 \leq d < 1, \quad (3.6)$$

และส่วนลดรวมเท่ากับ

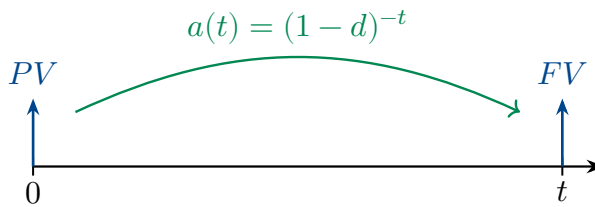
$$[1 - (1 - d)^n]S.$$

ฟังก์ชันเงินสะสมสำหรับเวลา t คือ

$$a(t) = (1 + i)^t = (1 - d)^{-t} \quad (3.7)$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยทบต้น i และอัตราส่วนลดทบต้น d ที่เทียบเท่ากันเป็นไปตาม

$$1 + i = \frac{1}{1 - d}, \quad i = \frac{d}{1 - d}, \quad d = \frac{i}{1 + i} \quad (3.8)$$



รูปที่ 3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าปัจจุบันกับมูลค่าอนาคตภายใต้อัตราส่วนลดทบต้น

จากรูปที่ 3.5

$$FV = (1 - d)^{-t} PV \iff PV = FV(1 - d)^t \quad (3.9)$$

ตัวอย่าง 3.4. นายเอต้องการได้รับเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 ภายใต้อัตราส่วนลดทบต้นร้อยละ 8 ต่อปี จงหาเงินที่ต้องลงทุนทันที

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 PV &= (1 - d)^t FV \\
 &= (1 - 0.08)^5 (1,000,000) \\
 &\approx 659,081.52 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.5. เงินลงทุนปัจจุบันเท่ากับ 10,000 บาท และได้รับอัตราส่วนลดทบต้น ร้อยละ 10 ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี จงหามูลค่าอนาคต

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 FV &= (1 + d)^t PV \\
 &= (1 + 0.10)^{10} (10,000) \\
 &\approx 28,679.72 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.6. โครงการหนึ่งต้องลงทุนทันที 900,000 บาท และให้เงินรับ 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 จงหาอัตราส่วนลดทบต้นต่อปี และอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปีที่เทียบเท่ากัน

วิธีทำ จาก

$$900,000 = (1 - d)^5 (1,000,000)$$

ได้

$$d = 1 - (0.9)^{1/5} \approx 0.02085164 = 2.085164\%$$

และจาก

$$1,000,000 = (1 + i)^5 (900,000)$$

ได้

$$i = (1/0.9)^{1/5} - 1 \approx 0.02129569 = 2.129569\%$$

ผลลัพธ์สอดคล้องกับ $d = i/(1 + i)$

□

ข้อสังเกต

คำว่า “ทบต้น” ในบริบทของอัตราส่วนลดหมายถึงการคูณตัวประกอบมูลค่าปัจจุบัน $(1-d)$ ซ้ำในแต่ละงวด มิใช่การนำส่วนลดเป็นจำนวนเงินไปบวกสะสมเหมือนดอกเบี้ย

3.3 อัตราส่วนลดเพียงในนาม

อัตราส่วนลดที่คิดลดหนึ่งครั้งต่อปีเรียกว่า **อัตราส่วนลดแท้จริงต่อปี** (Effective Annual Discount Rate) แต่ในทางปฏิบัติอาจกำหนดอัตราส่วนลดต่อปีและคิดลดมากกว่าหนึ่งครั้งต่อปี เช่น อัตราส่วนลดร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน หมายถึงอัตราส่วนลดต่องวดเท่ากับ $0.10/2 = 0.05$

หากต้องการได้รับเงิน 1 บาทเมื่อสิ้นปี มูลค่าปัจจุบันภายใต้อัตราดังกล่าวเท่ากับ

$$(1 - 0.05)^2 = 0.9025 = 1 - 0.0975$$

ดังนั้น อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน เทียบเท่ากับอัตราส่วนลดแท้จริงร้อยละ 9.75 ต่อปี

บทนิยาม 3.1

ให้ $d^{(m)}$ แทนอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี เรียก

$$\frac{d^{(m)}}{m}$$

ว่า **อัตราส่วนลดต่องวด** โดยต้องมี $0 \leq d^{(m)}/m < 1$

โดยทั่วไป m อาจพิจารณาเป็นจำนวนจริงบวกได้ในทางทฤษฎี เช่น $m = 1/2$ หมายถึงคิดส่วนลดหนึ่งครั้งในทุกสองปี และ $m = 2/3$ หมายถึงคิดส่วนลดสองครั้งในทุกสามปี อย่างไรก็ตาม ในธุรกรรมทั่วไป m มักเป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 3.2

ให้ $d^{(m)}$ เป็นอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี และให้ d เป็นอัตราส่วนลดแท้จริง

ต่อปี จะกล่าวว่าอัตราทั้งสองเทียบเท่ากันเมื่อ

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \quad (3.10)$$

ถ้า i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี และ $i^{(m)}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้น m ครั้งต่อปี อัตราทั้งสองที่เทียบเท่ากันเป็นไปตาม

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = (1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m} \quad (3.11)$$

และสำหรับทุก $t \geq 0$

$$a(t) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = (1 + i)^t = (1 - d)^{-t} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt} \quad (3.12)$$

ตัวอย่าง 3.7. จงหาอัตราส่วนลดแท้จริงต่อปีที่เทียบเท่ากับอัตราส่วนลดเพียงในนาม ร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

วิธีทำ ในที่นี้ $m = 4$ และ $d^{(4)}/4 = 0.08/4 = 0.02$ จาก (3.10)

$$1 - d = (1 - 0.02)^4,$$

ดังนั้น

$$d = 1 - (0.98)^4 = 0.07763184 = 7.763184\%$$

□

ตัวอย่าง 3.8. จงหาอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน ซึ่งเทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี ที่คิดทบต้นทุก 3 เดือน

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยต่องวดไตรมาสเท่ากับ $0.08/4 = 0.02$ เทียบเงินสะสมหนึ่งปีได้ว่า

$$(1 + 0.02)^4 = \left(1 - \frac{d^{(12)}}{12}\right)^{-12}$$

แก้สมการได้

$$\begin{aligned} d^{(12)} &= 12 [1 - (1.02)^{-1/3}] \\ &\approx 0.07894965 = 7.894965\% \end{aligned}$$

□

จาก (3.10) อัตราส่วนลดแท้จริงเขียนในรูป $d^{(m)}$ ได้เป็น

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \quad (3.13)$$

ทฤษฎีบท 3.3. กำหนด $c > 0$ เป็นอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปีคงที่ และให้

$$d_m = 1 - \left(1 - \frac{c}{m}\right)^m, \quad m > c$$

แล้ว d_m เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ของ m กล่าวคือ เมื่อเพิ่มจำนวนครั้งของการคิดส่วนลดต่อปี โดยคงอัตราส่วนลดเพียงในนาม c ไว้เท่าเดิม อัตราส่วนลดแท้จริงต่อปีจะลดลง

พิสูจน์. ขยายโดเมนเป็นตัวแปรจริง $x > c$ และกำหนด

$$g(x) = x \ln \left(1 - \frac{c}{x}\right), \quad D(x) = 1 - \exp(g(x))$$

จะได้

$$g'(x) = \ln \left(1 - \frac{c}{x}\right) + \frac{c}{x - c}$$

ให้ $y = c/x \in (0, 1)$ และกำหนด

$$h(y) = \ln(1 - y) + \frac{y}{1 - y}$$

เนื่องจาก

$$h'(y) = \frac{y}{(1 - y)^2} > 0 \quad \text{และ} \quad h(0) = 0,$$

จึงมี $h(y) > 0$ สำหรับ $0 < y < 1$ ดังนั้น $g'(x) > 0$ และ

$$D'(x) = -\exp(g(x))g'(x) < 0$$

จึงสรุปว่า $D(x)$ และลำดับ $d_m = D(m)$ ลดลงโดยแท้เมื่อ m เพิ่มขึ้น □

จากทฤษฎีบทข้างต้น หากกำหนดอัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปีเท่ากัน การคิดทบต้นทุก 3 เดือนให้

$$1 - \left(1 - \frac{0.06}{4}\right)^4 \approx 0.058663 = 5.8663\%,$$

ขณะที่การคิดทบต้นทุก 6 เดือนให้

$$1 - \left(1 - \frac{0.06}{2}\right)^2 = 0.0591 = 5.91\%$$

ดังนั้น การคิดส่วนลดบ่อยขึ้นภายใต้ตัวเลขอัตราส่วนลดเพียงในนามเดียวกัน ทำให้อัตราส่วนลดแท้จริงและอัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่เทียบเท่ากันลดลง

จัดรูป (3.10) เพื่อเขียนอัตราส่วนลดเพียงในนาม ในรูปของอัตราส่วนลดแท้จริงได้เป็น

$$d^{(m)} = m [1 - (1 - d)^{1/m}] \quad (3.14)$$

ทฤษฎีบท 3.4. เมื่อกำหนดอัตราส่วนลดแท้จริง $d \in (0, 1)$ คงที่ ฟังก์ชัน

$$d^{(m)} = m [1 - (1 - d)^{1/m}], \quad m > 0,$$

เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ของ m

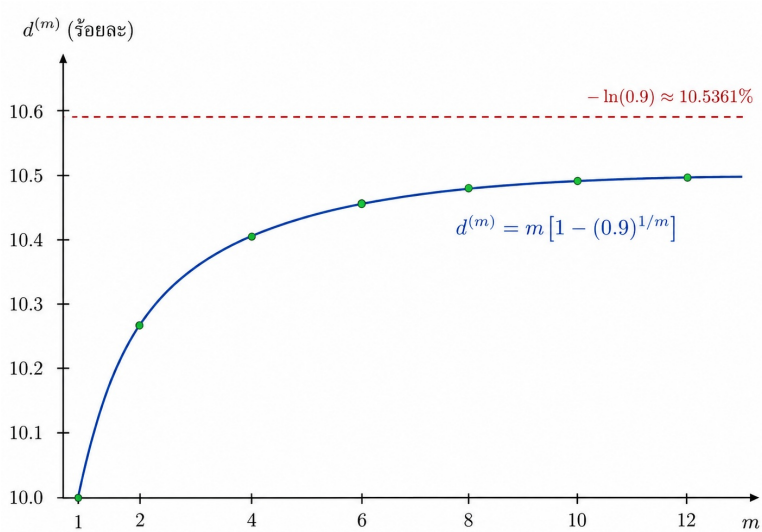
พิสูจน์. ให้ $L = -\ln(1 - d) > 0$ และกำหนด

$$H(x) = x(1 - e^{-L/x}), \quad x > 0$$

จะได้

$$H'(x) = 1 - e^{-L/x} \left(1 + \frac{L}{x}\right)$$

เมื่อกำหนด $y = L/x > 0$ จากอสมการ $e^y > 1 + y$ ได้ว่า $e^{-y}(1 + y) < 1$ ดังนั้น $H'(x) > 0$ จึงสรุปว่า $d^{(m)} = H(m)$ เพิ่มขึ้นโดยแท้เมื่อ m เพิ่มขึ้น □



รูปที่ 3.6 การเพิ่มขึ้นของอัตราส่วนลดเพียงในนาม $d^{(m)}$ เมื่อกำหนด $d = 10\%$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $d = 10\%$ คงที่

$$d^{(4)} = 4 [1 - (0.9)^{1/4}] \approx 0.103996 = 10.3996\%,$$

และ

$$d^{(2)} = 2 [1 - (0.9)^{1/2}] \approx 0.102633 = 10.2633\%$$

จึงได้ $d^{(4)} > d^{(2)}$ ตามทฤษฎีบท

ตัวอย่าง 3.9. จงหาอัตราส่วนลดเพียงในนาม $d^{(4)}$ ที่เทียบเท่ากับ อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(12)} = 12\%$

วิธีทำ เทียบเงินสะสมหนึ่งปี

$$(1 + 0.12/12)^{12} = \left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}$$

ดังนั้น

$$d^{(4)} = 4 [1 - (1.01)^{-3}]$$

$$\approx 0.11763941 = 11.763941\%$$

□

ตัวอย่าง 3.10. กองทุนกำหนดอัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน นายดีต้องการได้รับเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 จงหาเงินลงทุนปัจจุบันและอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีที่เทียบเท่ากัน

วิธีทำ



รูปที่ 3.7 แผนภาพการหามูลค่าปัจจุบันจากมูลค่าอนาคต

อัตราส่วนลดต่อไตรมาสเท่ากับ $0.08/4 = 0.02$ และมีทั้งหมด 20 ไตรมาส ดังนั้น

$$PV = (1 - 0.02)^{20}(1,000,000) \approx 667,607.97 \text{ บาท}$$

อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีที่เทียบเท่ากันเป็น

$$1 + i = (1 - 0.02)^{-4},$$

จึงได้

$$i = (0.98)^{-4} - 1 \approx 0.08416578 = 8.416578\%$$

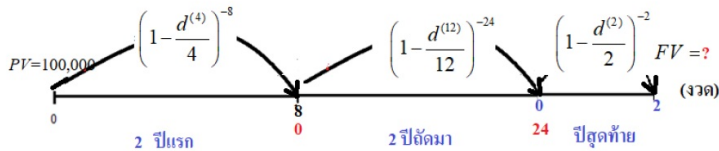
□

ตัวอย่าง 3.11. จงหามูลค่าอนาคต ณ สิ้นปีที่ 5 ของเงินลงทุน 100,000 บาท เมื่อผลตอบแทนเป็นดังนี้

- สองปีแรก: อัตราส่วนลดเพียงในนาม 4% ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
- สองปีถัดมา: อัตราส่วนลดเพียงในนาม 6% ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน

- ปิดสุดท้าย: อัตราส่วนลดเพียงในนาม 8% ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน

วิธีทำ



รูปที่ 3.8 แผนภาพการสะสมมูลค่าแบบหลายช่วง

$$FV = 100,000 \left(1 - \frac{0.04}{4}\right)^{-8} \left(1 - \frac{0.06}{12}\right)^{-24} \left(1 - \frac{0.08}{2}\right)^{-2}$$

$$\approx 132,623.97 \text{ บาท}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5. ให้อัตราดอกเบี้ยแท้จริง i และอัตราส่วนลดแท้จริง d เทียบเท่ากัน และให้ $i^{(m)}$, $d^{(m)}$ เป็นอัตราเพียงในนามที่เทียบเท่ากัน จะได้

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \ln(1 + i) = -\ln(1 - d) = \delta,$$

เมื่อ δ คือกำลังดอกเบี้ยคงที่ที่เทียบเท่ากัน

พิสูจน์. จาก (3.14)

$$d^{(m)} = m \left[1 - \exp\left(\frac{\ln(1 - d)}{m}\right) \right]$$

ใช้ลิมิต $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ จะได้

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = -\ln(1 - d)$$

เนื่องจาก $1 - d = (1 + i)^{-1}$ จึงมี $-\ln(1 - d) = \ln(1 + i)$ ส่วนลิมิตของ $i^{(m)}$ ได้ผลเดียวกันจาก $i^{(m)} = m[(1 + i)^{1/m} - 1]$ □

ทฤษฎีบท 3.6. สำหรับอัตราที่เทียบเท่ากัน จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$1) \quad \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}/m}{1 + i^{(m)}/m} = \frac{i^{(m)}}{m} v^{1/m}, \quad v = (1 + i)^{-1} = 1 - d;$$

$$2) \quad 1 + \frac{i^{(m)}}{m} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1};$$

$$3) \quad a(t) = (1 + i)^t = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$$

ดังนั้น เงินสะสมของเงินต้น P ณ เวลา t ภายใต้อัตราที่เทียบเท่ากันเท่ากับ

$$S_t = P(1 + i)^t = P(1 - d)^{-t} = P \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt} \quad (3.15)$$

ตัวอย่าง 3.12. จงหามูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 10 ของเงินลงทุน 100,000 บาท ภายใต้อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 3 ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน กำหนดให้หนึ่งปีมี 365 วัน

วิธีทำ

$$S_{10} = 100,000 \left(1 - \frac{0.03}{365}\right)^{-3650} \\ \approx 134,987.55 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 3.13. กำหนดกำลังดอกเบี้ย

$$\delta(t) = \frac{2}{(t+1)(t+2)}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

จงหาอัตราส่วนลดแท้จริงต่อปีคงที่ที่ให้เงินสะสมตลอด 10 ปีเท่ากัน

วิธีทำ เงินสะสมตลอดช่วงเวลาเท่ากับ

$$\begin{aligned} a(10) &= \exp \left(\int_0^{10} \frac{2}{(t+1)(t+2)} dt \right) \\ &= \exp \left(2 \ln \frac{11}{6} \right) = \left(\frac{11}{6} \right)^2 = \frac{121}{36} \end{aligned}$$

ให้อัตราส่วนลดแท้จริงคงที่เท่ากับ d จะมี

$$(1-d)^{-10} = \frac{121}{36}$$

ดังนั้น

$$d = 1 - \left(\frac{36}{121} \right)^{1/10} \approx 0.114167 = 11.4167\%$$

□

ตัวอย่าง 3.14. พิจารณาโครงการลงทุนระยะเวลา 10 ปีสองโครงการ

โครงการ	นโยบายผลตอบแทน
AAA	สามปีแรกใช้อัตราส่วนลดเชิงเดียว 10% ต่อปี จากนั้นใช้อัตราส่วนลดเพียงในนาม 10% ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน เป็นเวลา 7 ปี
BBB	สามปีแรกใช้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม 10% ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จากนั้นใช้อัตราส่วนลดแท้จริง 10% ต่อปี เป็นเวลา 7 ปี

จงพิจารณาว่าโครงการใดให้อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีสูงกว่า

วิธีทำ โครงการ AAA มีตัวประกอบเงินสะสมตลอด 10 ปีเท่ากับ

$$A_{AAA} = \frac{1}{1 - 3(0.10)} \left(1 - \frac{0.10}{4} \right)^{-28} \approx 2.90250329$$

จึงมีอัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปี

$$i_{AAA} = A_{AAA}^{1/10} - 1 \approx 0.11244173 = 11.244173\%$$

โครงการ BBB มีตัวประกอบเงินสะสมเท่ากับ

$$A_{BBB} = \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^{12} (1 - 0.10)^{-7} \approx 2.81182844,$$

และ

$$i_{BBB} = A_{BBB}^{1/10} - 1 \approx 0.10891659 = 10.891659\%$$

ดังนั้น โครงการ AAA ให้อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีสูงกว่า

□

3.4 วิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

วิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) เป็นวิธีเชิงตัวเลขสำหรับประมาณรากของสมการ

$$f(i) = 0.$$

วิธีนี้ใช้เส้นสัมผัสของกราฟ $y = f(i)$ ที่จุดประมาณปัจจุบัน เพื่อสร้างจุดประมาณในรอบถัดไป และมักลู่เข้าอย่างรวดเร็วเมื่อค่าเริ่มต้นอยู่ใกล้ราก ฟังก์ชันมีความเรียบเพียงพอ และอนุพันธ์ไม่เป็นศูนย์ใกล้ราก

ให้ i_0 เป็นค่าเริ่มต้น และสมมติว่า f หาอนุพันธ์ได้ เส้นสัมผัสที่จุด $(i_0, f(i_0))$ มีสมการ

$$y - f(i_0) = f'(i_0)(i - i_0)$$

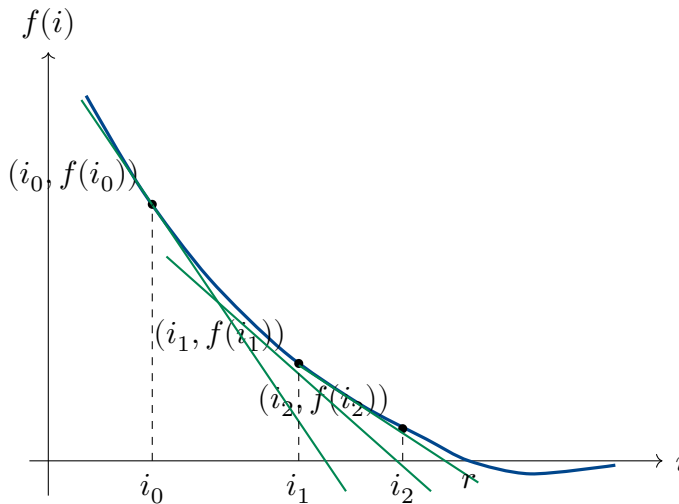
เมื่อกำหนด $y = 0$ จุดตัดแกนอนของเส้นสัมผัสคือ

$$i_1 = i_0 - \frac{f(i_0)}{f'(i_0)}, \quad f'(i_0) \neq 0$$

ทำซ้ำกระบวนการนี้ได้สูตรทั่วไป

$$i_n = i_{n-1} - \frac{f(i_{n-1})}{f'(i_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

ตราบเท่าที่ $f'(i_{n-1}) \neq 0$



รูปที่ 3.9 หลักเรขาคณิตของวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

ถ้าต้องการคำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ m เกณฑ์หยุดเชิงสัมบูรณ์ที่ใช้ได้คือ

$$|i_n - i_{n-1}| < \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-m} \quad (3.17)$$

อย่างไรก็ตาม ควรตรวจสอบค่าคงเหลือ $|f(i_n)|$ ร่วมด้วย และในกรณีที่ค่ารากมีขนาดต่างกันมาก อาจใช้เกณฑ์สัมพัทธ์

$$\frac{|i_n - i_{n-1}|}{\max\{1, |i_n|\}} < \varepsilon$$

ข้อสังเกต

วิธีนิวตัน-ราฟสันไม่รับประกันการลู่เข้าจากค่าเริ่มต้นทุกค่า หาก $f'(i_n)$ มีค่าน้อยมาก การหารอาจทำให้เกิดภาวะระโดดขนาดใหญ่ และถ้าสมการกระแสเงินสดมีหลายราก ค่าเริ่มต้นต่างกันอาจนำไปสู่รากต่างกัน จึงควรตรวจสอบช่วงของราก ความสมเหตุสมผลทางการเงิน และเครื่องหมายของกระแสเงินสด ก่อนใช้ผลลัพธ์

ตัวอย่าง 3.15. นายเอกู้เงินจากธนาคาร 800,000 บาท และชำระคืนทุกสิ้นเดือน เดือนละเท่า ๆ กัน เป็นเวลา 60 เดือน หากยอดชำระรวมเท่ากับ 900,000 บาท จงประมาณอัตราดอกเบี้ยเพียงปีเดียวที่คิดทบต้นทุกเดือน ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้ความแม่นยำของอัตราดอกเบี้ยต่อเดือนถึงทศนิยม 6 ตำแหน่ง

วิธีทำ ค่างวดรายเดือนเท่ากับ

$$R = \frac{900,000}{60} = 15,000 \text{ บาท}$$

ให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อเดือน จากสมการมูลค่าปัจจุบัน

$$800,000 = 15,000 \frac{1 - (1 + i)^{-60}}{i}$$

หารด้วย 15,000 และจัดรูปได้

$$\frac{160}{3}i + (1 + i)^{-60} - 1 = 0$$

กำหนด

$$f(i) = \frac{160}{3}i + (1 + i)^{-60} - 1, \quad f'(i) = \frac{160}{3} - 60(1 + i)^{-61}$$

ใช้ (3.16) และเลือก $i_0 = 0.10$ ได้ผลดังตาราง

รอบที่ n	i_n	$f(i_n)$	$f'(i_n)$
0	0.100000000	4.336617604	53.154191318
1	0.018414381	0.316702370	33.620215071
2	0.008994383	0.064053162	18.584710419
3	0.005547831	0.013407585	10.519461860
4	0.004273281	0.002165961	7.075546168
5	0.003967161	0.000132481	6.207257530
6	0.003945818	6.52442×10^{-7}	6.146105259
7	0.003945712	1.61493×10^{-11}	6.145800900

จึงได้อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน

$$i \approx 0.003945712$$

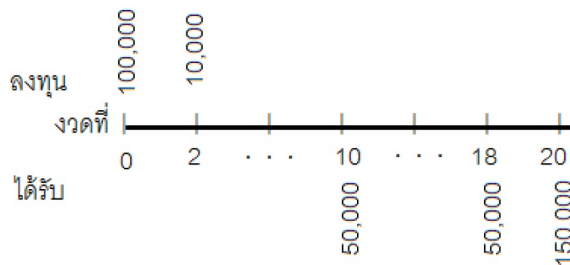
อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือนเท่ากับ

$$i^{(12)} = 12i \approx 0.047348547 = 4.734855\%$$

หาก ปิด อัตรา ต่อ เดือน ถึง ทศนิยม 6 ตำแหน่ง ก่อน คุณ จะได้ 4.7352% แต่ค่าที่แม่นยำกว่า คือ 4.734855% $\square$

ตัวอย่าง 3.16. นักลงทุนลงทุน 100,000 บาท ณ ปัจจุบัน และลงทุนเพิ่ม 10,000 บาท ณ ต้นปีที่ 2 จากนั้นได้รับเงิน 50,000, 50,000 และ 150,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5, 9 และ 10 ตามลำดับ จงประมาณอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุก 6 เดือน

วิธีทำ



รูปที่ 3.10 แผนภาพกระแสเงินสดของโครงการลงทุน

กำหนดหนึ่งงวดเท่ากับ 6 เดือน และให้

$$v = (1 + i)^{-1},$$

เมื่อ i เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อครึ่งปี กระแสเงินสดเกิด ณ งวดที่ 0, 2, 10, 18, 20 ดังนั้น

$$100,000 + 10,000v^2 = 50,000v^{10} + 50,000v^{18} + 150,000v^{20}$$

หารด้วย 10,000 และจัดรูปได้

$$f(v) = 15v^{20} + 5v^{18} + 5v^{10} - v^2 - 10 = 0,$$

โดย

$$f'(v) = 300v^{19} + 90v^{17} + 50v^9 - 2v$$

เลือก $v_0 = 0.9$ และใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน ได้

n	v_n	$ v_n - v_{n-1} $
0	0.90000000	—
1	0.98880914	0.08880914
2	0.96226523	0.02654392
3	0.95367830	0.00858693
4	0.95294856	0.00072974
5	0.95294375	0.00000481
6	0.95294375	2.07×10^{-10}

ดังนั้น

$$v \approx 0.9529437502, \quad i = v^{-1} - 1 \approx 0.0493798818$$

จึงได้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี

$$i^{(2)} = 2i \approx 0.0987597636 = 9.875976\%$$

□

ตัวอย่างข้างต้นสามารถคำนวณด้วยภาษา Python ได้ดังนี้

```

def f(v):
    return 15*v**20 + 5*v**18 + 5*v**10 - v**2 - 10

def f_prime(v):
    return 300*v**19 + 90*v**17 + 50*v**9 - 2*v

v = 0.9
Tolerance = 1e-8
max_iter = 100

for n in range(max_iter):
    fv = f(v)
    dfv = f_prime(v)
    if abs(dfv) < 1e-14:
        raise ZeroDivisionError("Derivative is too close to zero")

    v_new = v - fv/dfv
    if abs(v_new - v) < Tolerance and abs(f(v_new)) < Tolerance:
        v = v_new
        break
    v = v_new
else:
    raise RuntimeError("Newton-Raphson did not converge")

i_half_year = 1/v - 1
nominal_annual_rate = 2*i_half_year

print(f"v = {v:.10f}")
print(f"semiannual rate = {i_half_year:.10f}")
print(f"nominal annual rate = {nominal_annual_rate:.10f}")

```

3.5 การประยุกต์ใช้ส่วนลดและอัตราส่วนลดในทางปฏิบัติ

ส่วนลดและอัตราส่วนลดมีบทบาทสำคัญในการเปรียบเทียบกระแสเงินสดที่เกิดขึ้นต่างเวลา การใช้งานที่พบบ่อย ได้แก่ การกำหนดราคาตราสารหนี้ การประเมินโครงการลงทุน และการให้สินเชื่อแบบหักส่วนลดล่วงหน้า อย่างไรก็ตาม ผู้วิเคราะห์ต้องระบุให้ชัดเจนว่า คำว่า “อัตราคิดลด” ในแต่ละบริบทหมายถึงอัตราดอกเบี้ย i หรืออัตราส่วนลดตามทฤษฎีดอกเบี้ย d

3.5.1 พันธบัตรแบบไม่มีคูปอง

พันธบัตรแบบไม่มีคูปอง (Zero-Coupon Bond) ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยระหว่างอายุพันธบัตร ผู้ลงทุนซื้อพันธบัตรในราคาต่ำกว่ามูลค่าไถ่ถอน และได้รับผลตอบแทนจากส่วนต่าง ระหว่างราคาซื้อกับมูลค่าไถ่ถอน

สมมติพันธบัตรอายุหนึ่งปีมีมูลค่าไถ่ถอน 1,000 บาท และราคาซื้อ 950 บาท ส่วนลดเท่ากับ

$$1,000 - 950 = 50 \text{ บาท}$$

อัตราส่วนลดตามทฤษฎีดอกเบี้ยเท่ากับ

$$d = \frac{50}{1,000} = 0.05 = 5\%,$$

แต่อัตราดอกเบี้ยที่เทียบเท่ากันเท่ากับ

$$i = \frac{50}{950} = 0.05263158 = 5.263158\%$$

ผลต่างเกิดจากการใช้ฐานคำนวณต่างกัน โดย d ใช้มูลค่าไถ่ถอนเป็นฐาน ขณะที่ i ใช้ราคาซื้อจริงเป็นฐาน

สำหรับพันธบัตรแบบไม่มีคูปองอายุ n ปี มูลค่าไถ่ถอน F และอัตราส่วนลดแท้จริงต่อปี d ราคาพันธบัตรคือ

$$B_0 = F(1 - d)^n$$

ถ้าใช้อัตราผลตอบแทนต่อปี i ที่เทียบเท่ากัน จะเขียนได้ว่า

$$B_0 = \frac{F}{(1 + i)^n}, \quad 1 - d = (1 + i)^{-1}$$

3.5.2 พันธบัตรที่มีคูปอง

พันธบัตรที่มีคูปองให้กระแสเงินสดหลายครั้ง จึงต้องคิดลดคูปองแต่ละงวด และมูลค่าไถ่ถอนกลับมายังวันประเมินราคา หากพันธบัตรจ่ายคูปอง C_t ณ สิ้นงวดที่ t และจ่ายมูลค่าไถ่ถอน F ณ สิ้นงวดที่ n ราคาพันธบัตรภายใต้อัตราผลตอบแทนต่องวด i คือ

$$B_0 = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1 + i)^t} + \frac{F}{(1 + i)^n}$$

เมื่อใช้อัตราส่วนลดต่องวด $d = i/(1+i)$ ที่เทียบเท่ากัน จะได้

$$B_0 = \sum_{t=1}^n C_t(1-d)^t + F(1-d)^n$$

สูตรทั้งสองให้ราคาเดียวกันหากอัตราที่ใช้เทียบเท่ากันอย่างถูกต้อง

3.5.3 ข้อควรระวังเกี่ยวกับคำว่าอัตราคิดลด

ในทฤษฎีดอกเบี้ย อัตราส่วนลดแท้จริงหนึ่งงวดนิยามโดย

$$d = \frac{FV - PV}{FV}, \quad PV = FV(1-d)$$

แต่ในการประเมินโครงการลงทุน คำว่า **อัตราคิดลด** มักหมายถึงอัตราผลตอบแทนที่ต้องการหรือต้นทุนเงินทุน ซึ่งมีลักษณะเป็นอัตราดอกเบี้ย i และใช้สูตร

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^t}$$

อัตราทั้งสองสัมพันธ์กันด้วย

$$d = \frac{i}{1+i}, \quad i = \frac{d}{1-d}$$

ดังนั้น ไม่ควรแทน d และ i ด้วยตัวเลขเดียวกันโดยตรง เว้นแต่ได้แปลงเป็นอัตราที่เทียบเท่ากันแล้ว

3.5.4 การประเมินโครงการลงทุนด้วยมูลค่าปัจจุบันสุทธิ

มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value: NPV) คือผลต่างระหว่าง มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดรับกับมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดจ่าย ถ้าโครงการมีเงินลงทุนเริ่มต้น I_0 และมีกระแสเงินสดสุทธิ CF_t ณ สิ้นปีที่ t ภายใต้อัตราผลตอบแทนที่ต้องการ i จะได้

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

โดยทั่วไป โครงการที่มี $NPV > 0$ สร้างมูลค่าเพิ่มเมื่อเทียบกับอัตราผลตอบแทนที่กำหนด ส่วน $NPV < 0$ หมายถึงผลตอบแทนไม่เพียงพอต่อเกณฑ์ดังกล่าว

สมมติโครงการให้กระแสเงินสดรับปลายปี ปีละ 100,000 บาท เป็นเวลา 5 ปี และใช้อัตราผลตอบแทนที่ต้องการร้อยละ 8 ต่อปี มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดรับเท่ากับ

$$PV = 100,000 \left[\frac{1 - (1.08)^{-5}}{0.08} \right]$$

$$\approx 399,271.00 \text{ บาท}$$

หากต้นทุนเริ่มต้นเท่ากับ 350,000 บาท จะได้

$$NPV = 399,271.00 - 350,000 = 49,271.00 \text{ บาท}$$

ค่า NPV เป็นบวก จึงบ่งชี้ว่าโครงการผ่านเกณฑ์ผลตอบแทนร้อยละ 8 ต่อปี ทั้งนี้ การตัดสินใจจริงยังต้องพิจารณาความเสี่ยง ความไม่แน่นอนของกระแสเงินสด ข้อจำกัดด้านเงินทุน และปัจจัยเชิงกลยุทธ์ร่วมด้วย

3.5.5 สินเชื่อแบบหักส่วนลดล่วงหน้า

สินเชื่อระยะสั้นบางประเภท เช่น ตั๋วสัญญาใช้เงิน อาจคิดผลตอบแทนแบบหักส่วนลดล่วงหน้า ผู้กู้ได้รับเงินสดน้อยกว่ามูลค่าที่ต้องชำระเมื่อครบกำหนด ตัวอย่างเช่น ตั๋วสัญญาใช้เงินมูลค่าครบกำหนด 100,000 บาท อายุหนึ่งปี และอัตราส่วนลดเชิงเดียวร้อยละ 5 ต่อปี ผู้กู้ได้รับเงินสด

$$100,000(1 - 0.05) = 95,000 \text{ บาท},$$

แต่ต้องชำระคืน 100,000 บาทเมื่อครบกำหนด อัตราดอกเบี้ยแท้จริงที่ผู้กู้รับภาระเท่ากับ

$$\frac{5,000}{95,000} = 0.05263158 = 5.263158\%$$

จึงสูงกว่าตัวเลขอัตราส่วนลดร้อยละ 5

ข้อสังเกต

การเปรียบเทียบข้อเสนอทางการเงินควรแปลงอัตราทั้งหมดให้เป็นฐานเวลา และรูปแบบการคิดทบต้นเดียวกันก่อน เช่น อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี จากนั้นจึงเปรียบเทียบต้นทุนหรือผลตอบแทน การเปรียบเทียบเพียงตัวเลขร้อยละ โดยไม่พิจารณาฐานคำนวณและความถี่ของการทบต้นอาจนำไปสู่ข้อสรุปที่ผิด

บทสรุปท้ายบทที่ 3

บทนี้อธิบายส่วนลดและอัตราส่วนลดในฐานะเครื่องมือสำหรับเชื่อมโยงมูลค่าปัจจุบัน กับมูลค่าอนาคต โดยเน้นความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยซึ่งใช้เงินต้นงวดเป็นฐาน กับอัตราส่วนลดซึ่งใช้มูลค่าอนาคตเป็นฐาน

อัตราส่วนลดเชิงเดียวให้ตัวประกอบมูลค่าปัจจุบัน $1 - dt$ และใช้ได้ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq dt < 1$ ขณะที่อัตราส่วนลดทบต้นให้ตัวประกอบ $(1 - d)^t$ และสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยทบต้นผ่าน $1 + i = (1 - d)^{-1}$

อัตราส่วนลดเพียงในนาม $d^{(m)}$ กำหนดอัตราส่วนลดต่องวดเป็น $d^{(m)}/m$ และอัตราส่วนลดแท้จริงที่เทียบเท่ากันเป็น

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

เมื่อคงตัวเลขอัตราส่วนลดเพียงในนามไว้ การเพิ่มความถี่ของการคิดส่วนลด ทำให้อัตราส่วนลดแท้จริงลดลง แต่เมื่อคงอัตราส่วนลดแท้จริงไว้ อัตราส่วนลดเพียงในนามจะเพิ่มขึ้นตามความถี่

สำหรับสมการกระแสเงินสดที่ไม่สามารถแก้ในรูปปิดได้ วิธีนิวตัน-ราฟสันให้สูตรทำซ้ำ

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

การใช้งานต้องตรวจสอบค่าเริ่มต้น อนุพันธ์ เกณฑ์หยุด ค่าคงเหลือ และความสมเหตุสมผลของรากในทางการเงิน

ในทางปฏิบัติ แนวคิดของบทนี้ใช้ในการกำหนดราคาพันธบัตร การคำนวณมูลค่าปัจจุบันสุทธิ และการวิเคราะห์สินเชื่อแบบหักส่วนลดล่วงหน้า หลักสำคัญคือ ต้องระบุชนิดของอัตรา ฐานเวลา และความถี่ของการทบต้นให้ชัดเจน ก่อนแปลงหรือเปรียบเทียบอัตราทางการเงิน

เอกสารอ้างอิง

- [1] มานพ วราภักดิ์. *ทฤษฎีดอกเบี้ย (Theory of Interest)*. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2549.
- [2] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *CISA ระดับ 1 การวิเคราะห์เชิงปริมาณ: กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน*. พิมพ์ครั้งที่ 3, ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2552.
- [3] Ross, S. A., Westerfield, R. W., and Jordan, B. D. *Fundamentals of Corporate Finance*.

- 12th ed., McGraw–Hill Education, 2019.
- [4] Brealey, R. A., Myers, S. C., and Allen, F. *Principles of Corporate Finance*. 13th ed., McGraw–Hill Education, 2020.
- [5] Damodaran, A. *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. 3rd ed., Wiley, 2012.
- [6] Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 10th ed., Pearson, 2018.
- [7] Bodie, Z., Kane, A., and Marcus, A. J. *Investments*. 12th ed., McGraw–Hill Education, 2021.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือกิจกรรมที่ซับซ้อน

- 1) (ระดับ ง่าย) นายเอต้องการลงทุนเป็นเวลา 1 ปี จงหาอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(2)}$ ที่คิดทบต้นทุก 6 เดือน ซึ่งให้มูลค่าสะสมตลอดหนึ่งปีเทียบเท่ากับอัตราส่วนลดเชิงเดียวร้อยละ 4 ต่อปี
- 2) (ระดับ ปานกลาง) จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 400,000 บาท ที่จะได้รับเมื่อสิ้นสุดระยะเวลา 10 ปี 8 เดือน โดยช่วง 10 ปีแรก ใช้อัตราส่วนลดทบต้นแท้จริงร้อยละ 5 ต่อปี และช่วง 8 เดือนสุดท้าย ใช้อัตราส่วนลดเชิงเดียวร้อยละ 5 ต่อปี
- 3) (ระดับ ยาก) บริษัทประกันภัยต่อแห่งหนึ่งออกพันธบัตรภัยพิบัติ (CAT Bond) อายุ 5 ปี โดยผู้ลงทุนชำระเงินซื้อพันธบัตร 10,000,000 บาท และสัญญากำหนดผลตอบแทนเทียบเท่าอัตราส่วนลดทบต้นแท้จริงร้อยละ 4 ต่อปี หากตลอดอายุพันธบัตรไม่เกิดเหตุภัยพิบัติถึงระดับที่กำหนด บริษัทจะชำระมูลค่าไถ่ถอน เมื่อครบ 5 ปี แต่หากเกิดเหตุถึงระดับที่กำหนด ผู้ลงทุนได้รับคืนเพียงเงินต้น 10,000,000 บาท บริษัทนำเงินร้อยละ 20 ของเงินที่ได้รับไปฝากธนาคารภายใต้อัตราส่วนลดทบต้นแท้จริง ร้อยละ 2 ต่อปี และนำเงินส่วนที่เหลือไปลงทุนภายใต้อัตราดอกเบี้ยทบต้นแท้จริง i ต่อปี จงหา i ที่ทำให้มูลค่าอนาคตของเงินลงทุนทั้งสองส่วนเพียงพอชำระ มูลค่าไถ่ถอนในกรณีที่ไม่มีเกิดเหตุภัยพิบัติ
- 4) (ระดับ ง่าย) จงหาอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(12)}$ ที่คิดทบต้นทุกเดือน และให้มูลค่าสะสมตลอดหนึ่งปีเทียบเท่ากับ อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปีที่คิดทบต้นทุก 6 เดือน
- 5) (ระดับ ปานกลาง) นายหมียต้องการมีเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 120 โดยฝากเงินจำนวนเท่ากันทุกสิ้นเดือนรวม 120 งวด บัญชีให้อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 3 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาจำนวนเงินฝากแต่ละเดือน โดยแปลงอัตราส่วนลดต่องวดเป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวด ที่เทียบเท่ากันก่อน
- 6) (ระดับ ยาก) จงหามูลค่าอนาคต ณ สิ้นปีที่ 5 ของเงินลงทุนเริ่มต้น 100,000 บาท ภายใต้ผลตอบแทนดังนี้
 - สองปีแรก: อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 2 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน
 - สองปีถัดมา: กำลังดอกเบี้ยคงที่ $\delta = 0.06$ ต่อปี
 - ปีสุดท้าย: อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน

- 7) **(ระดับ ง่าย)** นายเก่งต้องการมีเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 และกำลังพิจารณาข้อเสนอจากสถาบันการเงินสามแห่ง

สถาบัน	ข้อเสนอ
AAA	อัตราส่วนลดแท้จริงร้อยละ 10 ต่อปี
BBB	อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน
CCC	อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน

จงคำนวณเงินลงทุนปัจจุบันที่ต้องใช้ในแต่ละแห่ง และระบุข้อเสนอที่ใช้เงินลงทุนต่ำที่สุด

- 8) **(ระดับ ง่าย)** จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 200,000 บาท ที่จะได้รับ ณ สิ้นปีที่ 10 ภายใต้อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 2 ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน กำหนดให้หนึ่งปีมี 365 วัน
- 9) **(ระดับ ปานกลาง)** กำหนดกำลังดอกเบี้ย

$$\delta(t) = \frac{1}{t+2}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

จงหา (ก) มูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ สิ้นปีที่ 10 และ (ข) อัตราส่วนลดทบต้นแท้จริงต่อปีคงที่ที่ให้มูลค่าสะสมตลอด 10 ปีเท่ากัน

- 10) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเอมีเงิน 1,000,000 บาท และแบ่งลงทุนเป็นเวลา 1 ปีในกองทุนสองกองทุน

- กองทุน AAA ให้อัตราส่วนลดทบต้นแท้จริงร้อยละ 4 ต่อปี
- กองทุน BBB ให้อัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน

จงหาเงินที่ควรลงทุนในแต่ละกองทุน เพื่อให้กำไร ณ สิ้นปีที่ 1 จากทั้งสองกองทุนเท่ากัน

- 11) **(ระดับ ยาก)** นายเอลงทุนเริ่มต้น 100,000 บาท และฝากเพิ่มวันละ 100 บาททุกสิ้นวัน กองทุนให้ผลตอบแทนด้วยกำลังดอกเบี้ยคงที่ $\delta = 0.03$ ต่อปี กำหนดให้หนึ่งปีมี 365 วัน จงหาจำนวนวันอย่างน้อยที่ต้องลงทุนเพื่อให้เงินสะสมไม่น้อยกว่า 10,000,000 บาท โดยถือว่าการฝากแต่ละวันเป็นกระแสเงินสดต่อเนื่อง

- 12) **(ระดับ ยาก)** กำหนดกำลังดอกเบี้ยแปรตามเวลา

$$\delta(t) = 0.01t + 0.20, \quad 0 \leq t \leq 10$$

จงหาอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(4)}$ ซึ่งคิดทบต้นทุก 3 เดือน และให้มูลค่าสะสมตลอดช่วง 10 ปี เท่ากับมูลค่าสะสมจากกำลังดอกเบี้ยดังกล่าว

- 13) (ระดับ ปานกลาง) นายเอฝากเงิน 1,000,000 บาท ณ ต้นปีที่ 1 และฝากเพิ่มปีละ 5,000 บาท ณ ต้นปีที่ 2 ถึงต้นปีที่ 20 กองทุนให้ผลตอบแทนด้วยกำลังดอกเบี้ยคงที่ $\delta = 0.04$ ต่อปี จงหามูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 20
- 14) (ระดับ ง่าย) มีการชำระเงินปีละ 10,000 บาท ณ ต้นปีที่ 1 ถึงต้นปีที่ 20 รวม 20 ครั้ง และชำระเพิ่มอีก 100,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 20 กำหนดอัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหา (ก) มูลค่าปัจจุบัน ณ ต้นปีที่ 1 และ (ข) มูลค่าอนาคต ณ สิ้นปีที่ 20 ของกระแสเงินสดทั้งหมด
- 15) (ระดับ ง่าย) นายเอกซื้อพันธบัตรคอนโซลราคา 10,000,000 บาท ซึ่งจ่ายคูปองจำนวนเท่ากันทุกสิ้นปีตลอดไป โดยจ่ายครั้งแรก ณ สิ้นปีที่ 5 กำหนดอัตราส่วนลดทบต้นแท้จริงร้อยละ 5 ต่อปี จงหาคูปองรายปีที่สอดคล้องกับราคาพันธบัตร
- 16) (ระดับ ยาก) นายพรชัยฝากเงินต้น 10,000,000 บาทไว้กับธนาคาร ธนาคารกำหนดอัตราส่วนลดเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน กำหนดจำนวนเงินบริจากรายเดือนให้เท่ากับดอกผลหนึ่งเดือนของเงินต้น โดยใช้อัตรารายเดือนที่เทียบเท่ากัน และจ่ายเงินบริจากรายเดือนเท่ากันทุกสิ้นเดือนตลอดไป เริ่มจ่ายครั้งแรก ณ สิ้นเดือนที่ 10 โดยคงเงินต้น 10,000,000 บาทไว้เท่าเดิม จงหา (ก) เงินบริจากรายเดือน และ (ข) มูลค่าปัจจุบัน ณ วันฝากเงินของกระแสเงินบริจากรายเดือนทั้งหมด
- 17) (ระดับ ปานกลาง) จงหารากของสมการต่อไปนี้ในช่วง $(0, 1)$ ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5
 - 17.1) $100,000(1+i)^{-3} + 30,000(1+i)^{-2} + 20,000(1+i)^{-1} - 108,000 = 0$
 - 17.2) $100,000(1+i)^{-4} + 30,000(1+i)^{-2} + 10,000(1+i)^{-1} - 100,000 = 0$
 - 17.3) $360,000(1+i)^{-2} + 240,000(1+i)^{-1} - 500,000 = 0$
 - 17.4) $20,000(1+i)^{-5} + 100,000(1+i)^{-3} + 40,000(1+i)^{-1} - 120,000 = 0$
- 18) (ระดับ ปานกลาง) นายพรศักดิ์กู้เงิน 200,000 บาท และชำระคืนทุกสิ้นปี ปีละ 30,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี จงประมาณอัตราดอกเบี้ยทบต้นแท้จริงต่อปีด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5

- 19) **(ระดับ ปานกลาง)** นายพรชัยชำระเงินทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 60 เดือน หากมูลค่าสะสมของเงินงวดทั้งหมด ณ สิ้นเดือนที่ 60 เท่ากับ 1,000,000 บาท จงประมาณอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5
- 20) **(ระดับ ปานกลาง)** นายพรพลซื้อบ้านราคา 3,000,000 บาท และผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 20,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี สมมติว่าไม่มีเงินดาวน์และไม่มีค่าธรรมเนียมอื่น จงประมาณอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5
- 21) **(ระดับ ยาก)** นายพรหมพรกู้เงิน 200,000 บาท เป็นเวลา 1 ปี และชำระคืนทุกสิ้นเดือนจำนวนเท่ากัน โดยยอดชำระรวมตลอดสัญญาเท่ากับ 224,000 บาท จงประมาณอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(12)}$ ที่คิดทบต้นทุกเดือน โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันและให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5
- 22) **(ระดับ ยาก)** นายพรวิทย์กู้เงินจำนวน P บาท เป็นเวลา 1 ปี และชำระคืนทุกสิ้นเดือนจำนวนเท่ากัน R บาท รวม 12 งวด โดยดอกเบี้ยรวมตลอดสัญญาเท่ากับ 20,000 บาท และมูลค่าสะสม ณ สิ้นเดือนที่ 12 ของเงินงวดทั้ง 12 งวดเท่ากับ 400,000 บาท จงประมาณ P , R และอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(12)}$ ที่คิดทบต้นทุกเดือน โดยใช้สมการ

$$12R - P = 20,000, \quad P = R a_{\overline{12}|i}, \quad 400,000 = R s_{\overline{12}|i},$$

และวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบอัตราถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5

- 23) **(ระดับ ยาก)** นายพรแสวงลงทุน 40,000 บาท ณ ปัจจุบัน ลงทุนเพิ่ม 30,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 1 และ 10,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 3 จากนั้นได้รับเงิน 120,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5 จงประมาณอัตราดอกเบี้ยทบต้นแท้จริงต่อปีด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน
- 24) **(ระดับ ยาก)** นายจตุพรฝากเงิน 20,000 บาท วันที่ 1 มกราคม 2550 และฝากเพิ่ม 30,000 บาท วันที่ 1 มกราคม 2553 โดยไม่มีรายการอื่น หากวันที่ 1 มกราคม 2556 มียอดเงินหลังหักภาษีดอกเบี้ยเท่ากับ 60,000 บาท สมมติว่าธนาคารประกาศอัตราดอกเบี้ยทบต้นแท้จริงต่อปี i และหักภาษีร้อยละ 15 จากดอกเบี้ยทุกสิ้นปี ทำให้อัตราดอกเบี้ยสุทธิที่เข้าบัญชีเท่ากับ $0.85i$ ต่อปี จงประมาณ i จากสมการ

$$20,000(1 + 0.85i)^6 + 30,000(1 + 0.85i)^3 = 60,000$$

ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ให้คำตอบถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 5

- 25) (ระดับ ง่าย) จงหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี $i^{(12)}$ ที่คิดทบต้นทุกเดือน ซึ่งเทียบเท่ากับอัตราส่วนลดเพียงในนามต่อปี $d^{(2)} = 6\%$ ที่คิดทบต้นทุก 6 เดือน

บทที่ 4 ค่ายางวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย

เนื้อหาประกอบด้วย

1. ค่ายางวดที่จ่ายงวดแรกไม่เต็มคาบ
2. ค่ายางวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย
3. ค่ายางวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย
4. ค่ายางวดงวดสุดท้ายที่จ่ายไม่ปกติ

บทนำ

การคำนวณค่ายางวดในบทก่อนหน้าอาศัยสมมติฐานว่าเวลาจ่ายเงินสอดคล้องกับ งวดที่ใช้อัตราดอกเบี้ย เช่น จ่ายทุกสิ้นเดือนและใช้อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน อย่างไรก็ตาม ธุรกิจจริงอาจเริ่มต้นกลางงวด จ่ายเงินถี่กว่าหรือน้อยกว่า ความถี่ของการคิดดอกเบี้ย หรือกำหนดเงินก้อนในงวดสุดท้าย หากนำอัตราที่มีฐานเวลาไม่ตรงกับกระแสเงินสดมาใช้โดยตรง มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคตที่คำนวณได้ย่อมคลาดเคลื่อน

หลักสำคัญของบทนี้มีสองประการ ได้แก่

- (1) กำหนดเส้นเวลาและตำแหน่งของกระแสเงินสดให้ชัดเจนก่อนตั้งสมการ และ
- (2) แปลงอัตราดอกเบี้ยให้เป็นอัตราแท้จริงต่อช่วงเวลาระหว่างการจ่ายเงิน โดยรักษาความสมดุลของมูลค่าสะสม

สัญลักษณ์พื้นฐานของบท

i	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งคาบมาตรฐาน
$v = (1 + i)^{-1}$	ตัวประกอบมูลค่าปัจจุบันต่อหนึ่งคาบ และโดยทั่วไป $v^t = (1 + i)^{-t}$ สำหรับระยะเวลา t คาบ
$a_{\overline{n} i}$, $\ddot{a}_{\overline{n} i}$	มูลค่าปัจจุบันของค่ายางวดปลายงวดและต้นงวด ตามลำดับ
$s_{\overline{n} i}$, $\ddot{s}_{\overline{n} i}$	มูลค่าอนาคตของค่ายางวดปลายงวดและต้นงวด ตามลำดับ

4.1 ค่ารายงวดที่จ่ายงวดแรกไม่เต็มคาบ

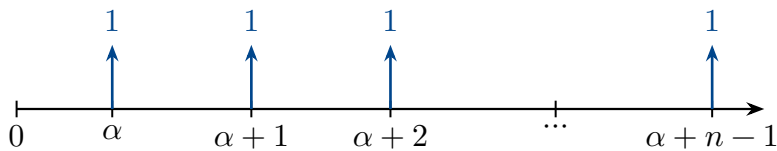
กำหนดสัญลักษณ์

n	จำนวนงวดการจ่ายทั้งหมด
$\alpha \in (0, 1)$	สัดส่วนของคาบแรกจากวันประเมินมูลค่าถึงวันจ่ายงวดแรก
$k = 0, 1, \dots, n-1$	ดัชนีของเงินจ่ายแต่ละงวด
$a_{\overline{n} i}^{[\alpha]}$	มูลค่าปัจจุบัน ณ เวลา 0 ของเงินจ่ายที่เกิด ณ เวลา $\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+n-1$
$s_{\overline{n} i}^{[\alpha]}$	มูลค่าอนาคต ณ วันจ่ายงวดสุดท้ายของกระแสเงินสดชุดเดียวกัน

พิจารณาการจ่ายเงินงวดละ 1 บาท จำนวน n งวด โดยจ่ายงวดแรก ณ เวลา α และจ่ายงวดถัดไปทุกหนึ่งคาบ ดังนั้นเวลาจ่ายคือ

$$\alpha, \alpha+1, \dots, \alpha+n-1, \quad 0 < \alpha < 1$$

ค่าพารามิเตอร์ α คือสัดส่วนของคาบแรกตั้งแต่วันประเมินมูลค่าถึงวันจ่ายงวดแรก



รูปที่ 4.1 กระแสเงินสดของค่ารายงวดที่จ่ายงวดแรกหลังเวลา α คาบ

มูลค่าปัจจุบัน ณ เวลา 0 เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{n}|i}^{[\alpha]} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{\alpha+k} = v^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \\
 &= v^{\alpha} \ddot{a}_{\overline{n}|i}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

หากกำหนดมูลค่าค่างวด ณ วันจ่ายงวดสุดท้าย $t = \alpha + n - 1$ จะได้

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|i}^{[\alpha]} &= a_{\overline{n}|i}^{[\alpha]}(1+i)^{\alpha+n-1} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{n-1} = s_{\overline{n}|i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ดังนั้น มูลค่าค่างวด ณ วันจ่ายงวดสุดท้ายไม่ขึ้นกับ α เพราะการเลื่อนวันจ่ายทุกงวดไปพร้อมกันไม่ได้เปลี่ยนระยะห่างระหว่างงวด แต่ α มีผลต่อมูลค่าปัจจุบัน ณ เวลา 0

ข้อสังเกต

ต้องระบุวันประเมินมูลค่าและวันวัดมูลค่าอนาคตให้ชัดเจนเสมอ หากวัดมูลค่าอนาคต ณ เวลาอื่นที่ไม่ใช่วันจ่ายงวดสุดท้าย สูตร (4.2) ต้องปรับตัวประกอบสะสมตามระยะเวลาที่เพิ่มหรือลดลง

ตัวอย่าง 4.1. นายเอทำสัญญาชำระหนี้ในวันที่ 20 มกราคม และชำระงวดแรกวันที่ 31 มกราคม หลังจากนั้นชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 16,000 บาท จำนวน 120 งวด กำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหามูลค่าปัจจุบัน ณ วันที่ทำสัญญาและมูลค่าอนาคต ณ วันชำระงวดสุดท้าย โดยใช้อัตราส่วนวันแบบ Actual/31 สำหรับค่างวดแรก

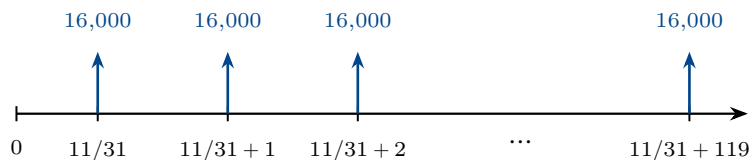
วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคือ

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005, \quad v = (1.005)^{-1}$$

จากวันที่ 20 ถึงวันที่ 31 มกราคมมี 11 วัน จึงให้

$$\alpha = \frac{11}{31}$$

กระแสเงินสดเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 4.2 แผนภาพกระแสเงินสดรายงวด

จาก (4.1)

$$\begin{aligned} PV &= 16,000 v^{11/31} \ddot{a}_{\overline{120}|0.005} \\ &= 16,000(1.005)^{-11/31} \left(\frac{1 - 1.005^{-120}}{0.005(1.005^{-1})} \right) \\ &\approx 1,445,820.09 \text{ บาท} \end{aligned}$$

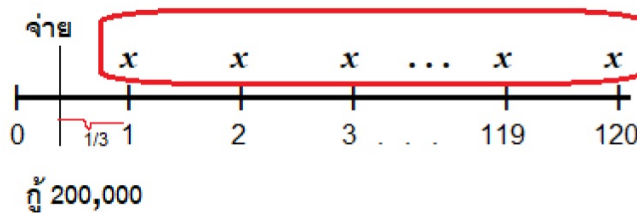
มูลค่าอนาคต ณ วันจ่ายงวดสุดท้ายคือ

$$\begin{aligned} FV &= PV(1.005)^{119+11/31} \\ &= 16,000 s_{\overline{120}|0.005} \\ &\approx 2,622,069.55 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 4.2. นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษาจำนวน 200,000 บาท ณ สิ้นเดือนกุมภาพันธ์ โดยชำระคืนทุก 3 เดือน จำนวน 20 งวด งวดแรกครบกำหนด ณ สิ้นเดือนมีนาคม ซึ่งเป็นเวลา 1 เดือนหลังจากกู้ กองทุนคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินชำระแต่ละงวด

วิธีทำ



รูปที่ 4.3 แผนภาพกระแสเงินสดของเงินกู้

อัตราดอกเบี้ยต่อคาบ 3 เดือนคือ

$$i = \frac{0.06}{4} = 0.015$$

งวดแรกเกิดหลังจาก 1 เดือน หรือ $\alpha = 1/3$ ของคาบ 3 เดือน สมมติให้เงินชำระแต่ละงวดเท่ากับ x บาท จะได้

$$200,000 = xv^{1/3} \ddot{a}_{\overline{20}|0.015}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{200,000}{(1.015)^{-1/3} \ddot{a}_{20|0.015}} \\ \approx 11,534.09 \text{ บาท}$$

นายสมชายต้องชำระงวดละประมาณ 11,534.09 บาท

□

ข้อสังเกต

คำว่า “ชำระเป็นเวลา 5 ปี ทุก 3 เดือน” หมายถึง $5(4) = 20$ งวด ไม่ใช่ 15 งวด ส่วนระยะเวลาเพียง 1 เดือนก่อนงวดแรกสะท้อนผ่าน $\alpha = 1/3$ และไม่ควรถูกนำไปหักออกจากจำนวนงวดของการชำระ

4.2 ค่ารายงวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย

กำหนดสัญลักษณ์

$i^{(p)}$	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นปีละ p ครั้ง
p	จำนวนครั้งของการคิดดอกเบี้ยต่อปี
m	จำนวนครั้งของการจ่ายเงินต่อปี โดยหัวข้อนี้กำหนดให้ $m > p$
j	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งงวดการจ่าย ซึ่งหาได้จาก $(1 + j)^m = (1 + i^{(p)}/p)^p$
n	ระยะเวลารวมของค่ารายงวด หน่วยเป็นปี เว้นแต่จะระบุเป็นอย่างอื่น

เมื่อความถี่ของการจ่ายเงินสูงกว่าความถี่ที่ระบุในการคิดดอกเบี้ย ต้องแปลงอัตราดอกเบี้ยให้เป็นอัตราแท้จริงต่อช่วงเวลาระหว่างการจ่ายก่อน ห้มนำอัตราดอกเบี้ยเดิมมาหารตามสัดส่วนโดยตรง เว้นแต่สัญญากำหนดเช่นนั้นโดยชัดแจ้ง

สมมติว่าอัตราที่ประกาศคืออัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี $i^{(p)}$ คิดทบต้นปีละ p ครั้ง และมีการจ่ายเงินปีละ m ครั้ง โดยในหัวข้อนี้ $m > p$ อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งงวดการจ่ายเท่ากับ

$$j = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p/m} - 1$$

ความสัมพันธ์นี้เกิดจากการรักษาค่าตัวประกอบสะสมตลอดหนึ่งปีให้เท่ากัน คือ

$$(1 + j)^m = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p$$

4.2.1 ค่ารายงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง

สัญลักษณ์เพิ่มเติม

i	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี
$i^{(m)}$	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามที่เทียบเท่ากับ i และคิดทบต้นปีละ m ครั้ง
$a_{\overline{n} i}^{(m)}$, $\ddot{a}_{\overline{n} i}^{(m)}$	มูลค่าปัจจุบันของค่ารายงวดปลายงวดและต้นงวดที่แบ่งจ่ายปีละ m ครั้ง โดยเงินจ่ายรวมต่อปีเท่ากับ 1
$s_{\overline{n} i}^{(m)}$, $\ddot{s}_{\overline{n} i}^{(m)}$	มูลค่าอนาคต ณ เวลา n ของค่ารายงวดดังกล่าว

พิจารณากระแสเงินสดรวมปีละ 1 บาท โดยแบ่งจ่ายปีละ m ครั้ง ครั้งละ $1/m$ บาท เป็นเวลา n ปี ให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี และกำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ที่เทียบเท่ากันและคิดทบต้นปีละ m ครั้งเป็น

$$i^{(m)} = m \left((1 + i)^{1/m} - 1 \right)$$

ดังนั้นอัตราต่อหนึ่งงวดการจ่ายคือ $i^{(m)}/m$

4.2.1.1 จ่ายต้นงวด

ค่ารายงวดต้นงวดปีละ m ครั้งมีการจ่าย ณ เวลา

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, n - \frac{1}{m}$$

รูปที่ 4.4 กระแสเงินสดค่ารายงวดต้นงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง

มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1}{m} \ddot{a}_{\overline{mn}|i^{(m)}/m} \\ &= \frac{1 - v^n}{i^{(m)}v^{1/m}}\end{aligned}\quad (4.3)$$

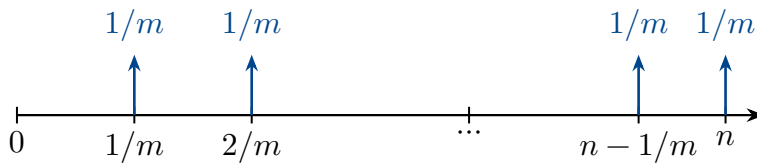
และมูลค่าอนาคต ณ เวลา n เท่ากับ

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}v^{1/m}} \quad (4.4)$$

4.2.1.2 จ่ายปลายงวด

ค่ารายงวดปลายงวดปีละ m ครั้งมีการจ่าย ณ เวลา

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, n$$

รูปที่ 4.5 กระแสเงินสดค่ารายงวดปลายงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต ณ เวลา n คือ

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} a_{\overline{mn}|i^{(m)}/m} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}} \quad (4.5)$$

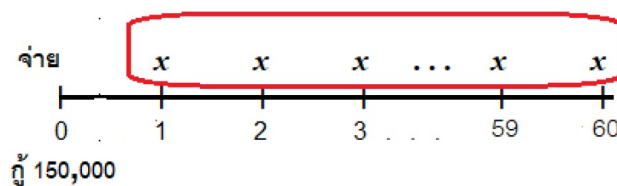
$$s_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1}{m} s_{\overline{mn}|i^{(m)}/m} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} \quad (4.6)$$

ข้อสังเกต

สัญลักษณ์ $i^{(m)}$ ในสูตร (4.3)–(4.6) หมายถึงอัตราเพียงในนามที่เทียบเท่า กับอัตราแท้จริงต่อปี i และคิดทบต้นปีละ m ครั้ง ไม่จำเป็นต้องเป็นอัตราที่ธนาคารประกาศแต่เดิม หากอัตราที่ประกาศคิดทบต้นปีละ p ครั้ง ต้องรักษาความสมมูล $(1+j)^m = (1+i^{(p)}/p)^p$ เพื่อหาอัตราต้องงวดการจ่ายก่อน

ตัวอย่าง 4.3. นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษาจำนวน 150,000 บาท และชำระคืนทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 5 ปี กองทุนคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินชำระรายเดือน

วิธีทำ



รูปที่ 4.6 แผนภาพการชำระเงินกู้รายเดือน

อัตราต่อไตรมาสคือ

$$\frac{i^{(4)}}{4} = \frac{0.06}{4} = 0.015$$

เนื่องจากหนึ่งไตรมาสมี 3 เดือน อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อเดือน j เป็นไปตาม

$$(1+j)^3 = 1.015,$$

จึงได้

$$j = 1.015^{1/3} - 1 \approx 0.0049752063$$

ให้ x เป็นเงินชำระรายเดือน จำนวนงวดเท่ากับ 60 งวด สมการมูลค่าปัจจุบันคือ

$$150,000 = xa_{\overline{60}|j}$$

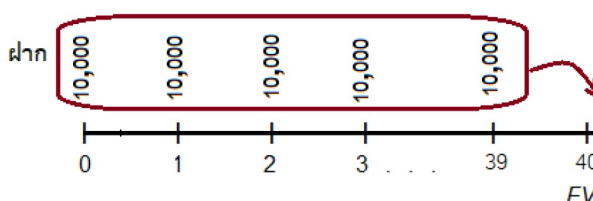
ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= \frac{150,000}{a_{\overline{60}|j}} \\ &= \frac{150,000}{(1 - (1 + j)^{-60}) / j} \\ &\approx 2,897.85 \text{ บาท} \end{aligned}$$

นายสมชายต้องชำระเดือนละประมาณ 2,897.85 บาท

□

ตัวอย่าง 4.4. นายเอฝากเงินทุก 3 เดือน งวดละ 10,000 บาท โดยฝากงวดแรกทันทีและฝากติดต่อกัน 10 ปี ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 10 วิธีทำ



รูปที่ 4.7 แผนภาพการฝากเงินรายไตรมาส

อัตราต่อครึ่งปีคือ $0.04/2 = 0.02$ และหนึ่งครึ่งปีมีสองงวดฝาก จึงให้อัตราแท้จริงต่อ 3 เดือนเป็น j โดย

$$(1 + j)^2 = 1.02$$

ดังนั้น

$$j = 1.02^{1/2} - 1 \approx 0.0099504938$$

มีเงินฝากทั้งหมด 40 งวด ณ เวลา $0, 1, \dots, 39$ ไตรมาส และวัดมูลค่า ณ ปลายไตรมาสที่ 40 จึงเป็นค่ารายงวดต้นงวด

$$\begin{aligned} FV &= 10,000 \ddot{s}_{\overline{40}|j} \\ &= 10,000(1 + j) \frac{(1 + j)^{40} - 1}{j} \\ &\approx 493,224.58 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น ณ สิ้นปีที่ 10 นายเอมีเงินสะสมประมาณ 493,224.58 บาท



4.3 ค่ารายงวดที่จ่ายน้อยกว่าการคิดดอกเบี้ย

กำหนดสัญลักษณ์

$i^{(p)}$	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นปีละ p ครั้ง
p	จำนวนครั้งของการคิดดอกเบี้ยต่อปี
m	จำนวนครั้งของการจ่ายเงินต่อปี โดยหัวข้อนี้กำหนดให้ $m < p$
j	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งงวดการจ่าย
i	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี ซึ่งในกรณี $m = 1$ มีค่า $i = (1 + i^{(p)}/p)^p - 1$

เมื่อความถี่ของการจ่ายเงินต่ำกว่าความถี่ของการคิดดอกเบี้ย แนวทางคำนวณยังคงเหมือนหัวข้อก่อนหน้า กล่าวคือ ต้องหาอัตราดอกเบี้ยแท้จริง ต่อหนึ่งงวดการจ่ายให้ได้ก่อน แล้วจึงใช้สูตรค่ารายงวดแบบปกติ

สมมติว่าอัตราที่ประกาศคืออัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี $i^{(p)}$ คิดทบต้นปีละ p ครั้ง และมีการจ่ายเงินปีละ m ครั้ง โดย $m < p$ อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งงวดการจ่ายคือ

$$j = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p/m} - 1$$

ในกรณีจ่ายปีละครั้ง ($m = 1$) จะได้อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี

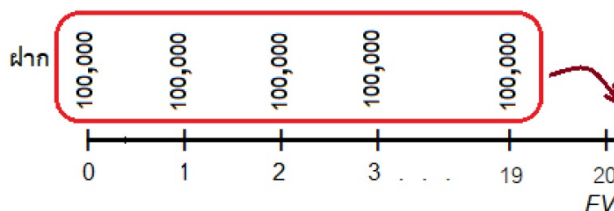
$$i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p - 1$$

ข้อสังเกต

การคูณอัตราดอกเบี้ยด้วยจำนวนคาบใช้ได้กับอัตราเพียงในนามเท่านั้น ไม่ใช่วิธีหาอัตราแท้จริงสำหรับหลายคาบ ตัวอย่างเช่น อัตราร้อยละ 1 ต่อไตรมาสให้ผลตอบแทนแท้จริงต่อปี $(1.01)^4 - 1 = 4.060401\%$ ไม่ใช่ 4%

ตัวอย่าง 4.5. นายเอฝากเงินทุกต้นครึ่งปี งวดละ 100,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 2 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินสะสมเมื่อครบ 10 ปี ผลตอบแทนเป็นจำนวนเงิน และผลตอบแทนคิดเป็นร้อยละของเงินฝากทั้งหมด

วิธีทำ



รูปที่ 4.8 แผนภาพการฝากเงินทุกครึ่งปี

อัตราต่อไตรมาสคือ

$$\frac{0.02}{4} = 0.005$$

หนึ่งงวดฝากมีระยะเวลา 2 ไตรมาส จึงได้อัตราแท้จริงต่อครึ่งปี

$$j = (1.005)^2 - 1 = 0.010025$$

มีเงินฝากทั้งหมด 20 งวด และเป็นค่ารายงวดต้นงวด ดังนั้น

$$\begin{aligned} FV &= 100,000 \ddot{s}_{\overline{20}|0.010025} \\ &= 100,000(1.010025) \frac{1.010025^{20} - 1}{0.010025} \\ &\approx 2,224,515.70 \text{ บาท} \end{aligned}$$

เงินฝากรวมเท่ากับ

$$100,000(20) = 2,000,000 \text{ บาท}$$

จึงได้ผลตอบแทน

$$2,224,515.70 - 2,000,000 = 224,515.70 \text{ บาท,}$$

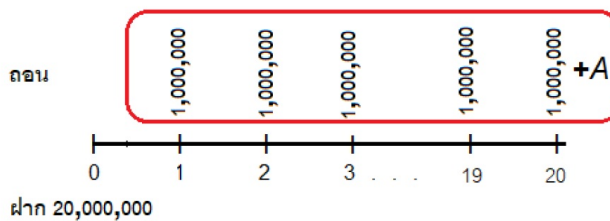
คิดเป็น

$$\frac{224,515.70}{2,000,000}(100) \approx 11.2258\%$$

□

ตัวอย่าง 4.6. นางอรชรฝากเงิน 20,000,000 บาทไว้กับธนาคาร ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม ร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน เธอถอนเงิน 1,000,000 บาททุกสิ้นปี เป็นเวลา 20 ปี จงหาเงินคงเหลือทันทีหลังจากถอนเงินครั้งที่ 20

วิธีทำ



รูปที่ 4.9 แผนภาพการถอนเงินรายปี

อัตราต่อไตรมาสคือ $0.04/4 = 0.01$ จึงได้อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี

$$i = (1.01)^4 - 1 = 0.04060401$$

ให้ A เป็นเงินคงเหลือทันทีหลังการถอนปลายปีที่ 20 เมื่อสะสมกระแสเงินสดทั้งหมดไปยังปลายปีที่ 20 จะได้

$$20,000,000(1+i)^{20} = 1,000,000s_{\overline{20}|i} + A$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= 20,000,000(1.04060401)^{20} - 1,000,000 \frac{(1.04060401)^{20} - 1}{0.04060401} \\ &\approx 14,368,908.88 \text{ บาท} \end{aligned}$$

นางอรชรยังมีเงินเหลือประมาณ 14,368,908.88 บาท

□

ข้อสังเกต

เพื่อหลีกเลี่ยงความคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษ ควรเก็บอัตราที่แปลงแล้ว อย่างน้อย 8–10 ตำแหน่งทศนิยมระหว่างการคำนวณ และปิดเศษเฉพาะคำตอบสุดท้ายเป็นสองตำแหน่งทศนิยม

4.4 ค่ารายงวดงวดสุดท้ายที่จ่ายไม่ปกติ

กำหนดสัญลักษณ์

P	เงินต้นหรือมูลค่าเงินกู้ ณ เวลา 0
r	เงินชำระปกติต่อหนึ่งงวด
B	เงินชำระก่อนสุดท้าย โดยในหัวข้อนี้ให้ B ใช้แทนค่างวดปกติในงวดสุดท้าย
n	พารามิเตอร์กำหนดปลายสัญญา โดยกรณีจ่ายต้นงวดงวดสุดท้ายอยู่ที่เวลา $n - 1$ และกรณีจ่ายปลายงวดงวดสุดท้ายอยู่ที่เวลา n
i	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อหนึ่งคาบ และ $v = (1 + i)^{-1}$

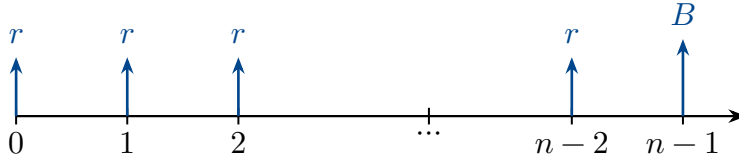
สัญญาทางการเงินบางประเภทกำหนดให้ผู้ชำระเงินรายงวดตามปกติช่วงหนึ่ง แล้วชำระเงินก้อนใหญ่ในงวดสุดท้าย เรียกว่า **การชำระแบบก้อนโต (Balloon Payment)** การจัดโครงสร้างเช่นนี้ช่วยลดค่างวดระหว่างสัญญา แต่ทำให้ผู้กู้มีภาระก้อนใหญ่หรือความเสี่ยงในการจัดหาเงินใหม่เมื่อครบกำหนด

Balloon Payment ไม่เหมือนกับ **Bullet Payment** โดยสมบูรณ์ กล่าวคือ สัญญาแบบ Balloon มักมีการทยอยชำระเงินต้นบางส่วนระหว่างสัญญา และเหลือยอดก้อนใหญ่ตอนท้าย ขณะที่สัญญาแบบ Bullet มักชำระเงินต้นทั้งหมด หรือเกือบทั้งหมดเมื่อครบกำหนด โดยระหว่างทางอาจชำระเฉพาะดอกเบี้ย

ให้ P เป็นเงินต้น ณ เวลา 0 ให้ r เป็นเงินชำระปกติ และให้ B เป็นเงินชำระงวดสุดท้ายซึ่งใช้แทนค่างวดปกติในงวดนั้น

4.4.1 จ่ายต้นงวด

สมมติว่าจ่าย r บาท ณ เวลา $0, 1, \dots, n - 2$ รวม $n - 1$ งวด และจ่าย B บาท ณ เวลา $n - 1$



รูปที่ 4.10 กระแสเงินสดที่จ่ายต้นงวดและมีเงินก้อนในงวดสุดท้าย

สมการมูลค่าปัจจุบันคือ

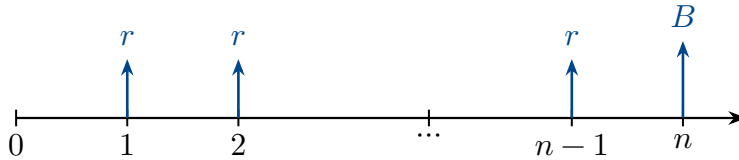
$$P = r\ddot{a}_{\overline{n-1}|i} + Bv^{n-1} \quad (4.7)$$

จึงได้

$$B = \frac{P - r\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}}{v^{n-1}} = P(1+i)^{n-1} - r\ddot{s}_{\overline{n-1}|i} \quad (4.8)$$

4.4.2 จ่ายปลายงวด

สมมติว่าจ่าย r บาท ณ เวลา $1, 2, \dots, n-1$ รวม $n-1$ งวด และจ่าย B บาท ณ เวลา n



รูปที่ 4.11 กระแสเงินสดที่จ่ายปลายงวดและมีเงินก้อนในงวดสุดท้าย

สมการมูลค่าปัจจุบันคือ

$$P = ra_{\overline{n-1}|i} + Bv^n \quad (4.9)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} B &= \frac{P - ra_{\overline{n-1}|i}}{v^n} \\ &= P(1+i)^n - r(1+i)s_{\overline{n-1}|i} \end{aligned} \quad (4.10)$$

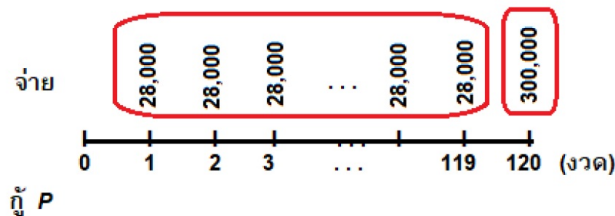
ตัวประกอบ $(1+i)$ ในพจน์สุดท้ายจำเป็น เพราะเงินชำระปกติงวดสุดท้าย เกิด ณ เวลา $n-1$ แต่กำลังสะสมมูลค่าไปยังเวลา n

ข้อสังเกต

หากสัญญาระบุว่าในงวดสุดท้ายต้องจ่าย “ค่างวดปกติ r เพิ่มด้วยเงินก้อน B ” กระแสเงินสด ณ งวดสุดท้ายเท่ากับ $r + B$ และต้องเขียนสมการต่างจาก (4.7) หรือ (4.9) ซึ่งนิยามให้ B ใช้แทนค่างวดปกติในงวดสุดท้าย

ตัวอย่าง 4.7. นางกวางซื้อบ้านโดยจ่ายเงินดาวน์ 200,000 บาท ส่วนที่เหลือผ่อนกับธนาคารเดือนละ 28,000 บาท ณ สิ้นเดือน จำนวน 119 งวด และชำระเงินก้อน 300,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 120 ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาราคาเงินสดของบ้าน

วิธีทำ



รูปที่ 4.12 แผนภาพกระแสเงินสดของการผ่อนชำระค่าบ้าน

อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคือ

$$i = \frac{0.12}{12} = 0.01$$

ให้ P เป็นจำนวนเงินที่กู้ จะได้

$$P = 28,000a_{\overline{119}|0.01} + 300,000(1.01)^{-120}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 28,000 \left(\frac{1 - 1.01^{-119}}{0.01} \right) + 300,000(1.01)^{-120} \\ &\approx 2,034,029.20 \text{ บาท} \end{aligned}$$

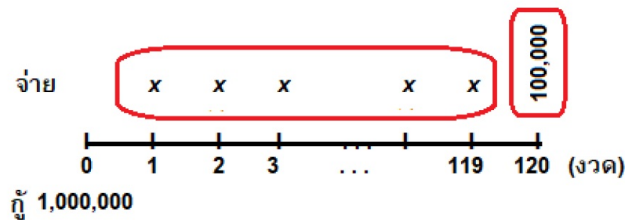
ราคาเงินสดของบ้านจึงเท่ากับ

$$2,034,029.20 + 200,000 = 2,234,029.20 \text{ บาท}$$



ตัวอย่าง 4.8. นายเสือซื้อห้องชุดราคา 1,000,000 บาท โดยกู้เต็มราคา ชำระเงินจำนวนเท่ากันทุกสิ้นเดือน ในเดือนที่ 1 ถึงเดือนที่ 119 และชำระเงินก้อน 100,000 บาทในเดือนที่ 120 ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาเงินชำระปกติต่อเดือน

วิธีทำ



รูปที่ 4.13 แผนภาพการผ่อนชำระพร้อมเงินก้อนงวดสุดท้าย

อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคือ

$$i = \frac{0.09}{12} = 0.0075$$

ให้ x เป็นเงินชำระปกติต่อเดือน จะได้

$$1,000,000 = xa_{\overline{119}|0.0075} + 100,000(1.0075)^{-120}$$

ดังนั้น

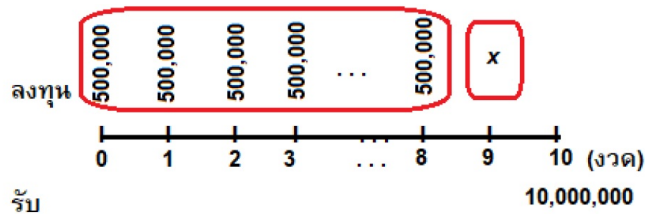
$$x = \frac{1,000,000 - 100,000(1.0075)^{-120}}{a_{\overline{119}|0.0075}} \approx 12,213.94 \text{ บาท}$$

นายเสือต้องชำระปกติเดือนละประมาณ 12,213.94 บาท



ตัวอย่าง 4.9. นายเสือต้องการมีเงิน 10,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 10 เขาลงทุน 500,000 บาททุกต้นปี ณ เวลา 0, 1, ..., 8 และลงทุนเงินก้อน x บาท ณ ต้นปีที่ 10 หรือเวลา 9 โครงการให้อัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี จงหา x

วิธีทำ



รูปที่ 4.14 แผนภาพกระแสเงินสดของโครงการลงทุน

อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีคือ

$$i = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = 0.0609$$

เงินลงทุน 500,000 บาท จำนวน 9 งวดที่เวลา 0 ถึง 8 มีมูลค่า ณ เวลา 9 เท่ากับ $500,000\ddot{s}_{\overline{9}|i}$ จากนั้น สะสมต่ออีกหนึ่งปีถึงเวลา 10 ส่วนเงินก้อน x ที่เวลา 9 สะสมหนึ่งปีเช่นกัน จึงได้

$$500,000\ddot{s}_{\overline{9}|0.0609}(1.0609) + x(1.0609) = 10,000,000$$

ดังนั้น

$$x = \frac{10,000,000 - 500,000\ddot{s}_{\overline{9}|0.0609}(1.0609)}{1.0609}$$

$$\approx 3,307,640.25 \text{ บาท}$$

นายเสื่อต้องลงทุนเงินก้อนประมาณ 3,307,640.25 บาท ณ เวลา 9

□

บทสรุปท้ายบทที่ 4

บทนี้ศึกษาค่ารายงวดที่เวลาจ่ายเงินไม่สอดคล้องกับคาบมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย กรณีงวดแรกไม่เต็มคาบ สามารถประเมินมูลค่าปัจจุบันด้วยตัวประกอบ v^α โดย α เป็นสัดส่วนของคาบแรก ส่วนมูลค่าอนาคต ณ วันจ่ายงวดสุดท้าย ขึ้นกับจำนวนงวดและระยะห่างระหว่างงวด ไม่ขึ้นกับการเลื่อนกระแสเงินสดทั้งชุด

เมื่อความถี่ของการจ่ายเงินต่างจากความถี่ของการคิดดอกเบี้ย ต้องแปลงอัตราให้เป็นอัตราแท้จริงต่อหนึ่งงวด การจ่ายผ่านความสัมพัทธ์

$$(1 + j)^m = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p$$

จากนั้นจึงใช้สูตรค่ารายงวดต้นงวดหรือปลายงวดตามตำแหน่งของกระแสเงินสด การหารหรือคูณอัตราโดยไม่นำนึ่งถึงการทบต้นอาจทำให้คำตอบคลาดเคลื่อน

สำหรับสัญญาที่มีเงินก้อนในงวดสุดท้าย ต้องกำหนดให้ชัดเจนว่าเงินก้อนนั้น ใช้แทนค่างวดปกติหรือจ่ายเพิ่มจากค่างวดปกติ การชำระแบบ Balloon Payment ลดภาระรายงวดในช่วงต้น แต่เพิ่มความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง การจัดหาเงินใหม่ และความผันผวนของมูลค่าหลักประกัน ไกลวันครบกำหนด ดังนั้นการประเมินสัญญาควรพิจารณาทั้งมูลค่าปัจจุบัน ตารางกระแสเงินสด และความสามารถในการชำระเงินก้อนสุดท้ายร่วมกัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] มานพ วรารักษ์. *ทฤษฎีดอกเบี้ย (Theory of Interest)*. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, 2549.
- [2] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *CISA ระดับ 1 การวิเคราะห์เชิงปริมาณ: กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน*. พิมพ์ครั้งที่ 3, ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ, 2552.
- [3] Kellison, S. G. *The Theory of Interest*. 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, 2009.
- [4] Bodie, Z., Kane, A., and Marcus, A. J. *Investments*. 12th ed., McGraw-Hill Education, 2021.
- [5] Miller, M. H., and Upton, C. W. "Leasing, Buying, and the Cost of Capital Services." *The Journal of Finance*, 31(3), 761–786, 1976.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

- 1) (ระดับปานกลาง) นายเอทำสัญญากู้เงิน 100,000 บาท ในวันที่ 11 มีนาคม โดยชำระงวดแรกวันที่ 31 มีนาคม หลังจากนั้นชำระทุกสิ้นเดือน รวมทั้งหมด 120 งวด กำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน และใช้อัตราส่วนวัน Actual/31 สำหรับค่างวดแรก จงหา
 - (a) เงินชำระรายเดือน และ
 - (b) มูลค่าอนาคตของเงินชำระทั้งหมด ณ วันชำระงวดสุดท้าย
- 2) (ระดับปานกลาง) นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษา ณ สิ้นเดือนกุมภาพันธ์ และตกลงชำระหนี้ทุก 6 เดือน งวดละ 20,000 บาท จำนวน 10 งวด โดยงวดแรกครบกำหนด 6 เดือนหลังวันกู้ กองทุนคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหา
 - (a) จำนวนเงินที่กู้ ณ วันเริ่มสัญญา และ
 - (b) ยอดปิดหนี้ ณ วันครบกำหนดงวดที่ 7 ทันทีก่อนชำระงวดที่ 7 หากเขาต้องการชำระเงินก่อนเดียวแทนงวดที่ 7-10
- 3) (ระดับง่าย) นายสมชายกู้เงิน 150,000 บาท และชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 2,897.85 บาท กองทุนคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเดือนที่ต้องชำระ โดยใช้อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนที่เทียบเท่ากัน
- 4) (ระดับยาก) นายเอฝากเงินโดยหักบัญชีอัตโนมัติวันละ 100 บาท ฝากครั้งแรกทันที ณ ต้นวันที่ 1 มกราคม และฝากทุกวันติดต่อกัน 10 ปี ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี กำหนดให้หนึ่งปีมี 365 วันและไม่พิจารณาปีอธิกสุรทิน จงหาเงินสะสม ณ สิ้นวันที่ 3,650 โดยแปลงอัตราดอกเบี้ยเป็นอัตราแท้จริงต่อวันก่อนคำนวณ
- 5) (ระดับปานกลาง) นายเอวางแผนฝากเงินทุกต้นครึ่งปี เป็นเวลา 10 ปี เพื่อให้มีเงิน 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 10 ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 2 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหา
 - (a) เงินฝากแต่ละงวด
 - (b) ผลตอบแทนรวมเป็นจำนวนเงิน และ
 - (c) ผลตอบแทนรวมคิดเป็นร้อยละของเงินฝากทั้งหมด

- 6) (ระดับปานกลาง) นางอรชรฝากเงินที่ได้จากการขายที่ดินทั้งหมด ไว้กับธนาคาร ธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน เธอถอนเงิน 1,000,000 บาททุกสิ้นปี หลังจากถอนเงินครั้งที่ 20 แล้วพบว่าเงินคงเหลือ 5,555,555 บาท จงหาเงินที่ได้รับจากการขายที่ดิน ณ วันเริ่มฝาก
- 7) (ระดับปานกลาง) นายกึ่งกู้เงิน 2,000,000 บาทเพื่อซื้อบ้าน ธนาคารกำหนดให้ชำระเงินจำนวนเท่ากัน ทุกสิ้นเดือนในเดือนที่ 1–239 และชำระเงินก้อน 200,000 บาทในเดือนที่ 240 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามเท่ากับร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาเงินชำระปกติต่อเดือน
- 8) (ระดับยาก) นายเสือซื้อห้องชุดโดยกู้เต็มราคา สัญญากำหนดให้ชำระเดือนละ 15,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 1–179 และชำระเงินก้อน 100,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 180 ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หลังจากชำระครบ 99 งวดแล้ว นายเสือต้องการปิดหนี้ ณ วันครบกำหนดงวดที่ 100 ทันทีก่อนชำระงวดดังกล่าว จงหายอดปิดหนี้ทั้งหมด ณ วันนั้น
- 9) (ระดับยาก) นายกึ่งกู้เงินเพื่อซื้อบ้านและชำระปลายเดือน โดยปีแรกชำระเดือนละ 10,000 บาท จากนั้นเพิ่มเงินชำระรายเดือนขึ้นร้อยละ 10 เมื่อเริ่มต้นปีสัญญาใหม่ทุกปี สัญญามีอายุ 20 ปี เงินชำระปกติเกิดในเดือนที่ 1–239 ส่วนเดือนที่ 240 ชำระเงินก้อน 200,000 บาทแทนเงินชำระปกติ ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาจำนวนเงินที่กู้ ณ วันเริ่มสัญญา
- 10) (ระดับยาก) นายเสือกู้เงิน 2,000,000 บาท และชำระเดือนละ 15,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 1–179 จากนั้นชำระเงินก้อน 100,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 180 จงหาอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน โดยตั้งสมการมูลค่าปัจจุบันและใช้วิธีเชิงตัวเลขหาคำตอบ
- 11) (ระดับยาก) นายเสือลงทุน 4,000,000 บาททันที ณ เวลา 0 และลงทุนเงินจำนวนเท่ากัน x บาท ทุกต้นปี ณ เวลา 1, 2, ..., 9 เขาถอนเงิน 5,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 7 และต้องการมีเงินเหลือ 10,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 10 โครงการให้อัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน จงหา x โดยให้รายการฝากและถอนที่เกิด ณ เวลาเดียวกันถือว่าเกิดพร้อมกัน
- 12) (ระดับยาก: การวางแผนผ่อนบ้านแบบ Balloon Payment) นายวัฒน์ซื้อบ้านราคา 3,000,000 บาท วางเงินดาวน์ 300,000 บาท และกู้ส่วนที่เหลือเป็นเวลา 20 ปี ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 5 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน ให้ชำระเงินจำนวนเท่ากัน ณ สิ้นเดือนที่ 1–239 และชำระเงินก้อน 400,000 บาท ณ สิ้นเดือนที่ 240
 - (a) จงหาเงินชำระปกติต่อเดือน

- (b) หากนายวัฒน์ชำระเงินงวดที่ 180 แล้วต้องการปิดหนี้ทันที จงหายอดปิดหนี้ ณ เวลานั้น
 - (c) อธิบายว่าการกำหนด Balloon Payment ส่งผลต่อค่างวดช่วงต้น ภาระช่วงปลายสัญญา และความเสี่ยงในการจัดหาเงินอย่างไร
- 13) (ระดับยาก: การออมเพื่อเกษียณ) นางสาวรัตนต้องการออมเงินเป็นเวลา 25 ปี โดยฝากทุกสิ้นเดือน และฝากครั้งแรกหนึ่งเดือนนับจากวันนี้ ธนาคารเสนออัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4.5 ต่อปี คิดทบต้นทุกไตรมาส
- (a) หากฝากเดือนละ 5,000 บาทตลอด 25 ปี จงหาเงินสะสม ณ สิ้นเดือนที่ 300
 - (b) หากฝากเดือนละ 6,000 บาทใน 120 เดือนแรก และฝากเดือนละ 5,000 บาทใน 180 เดือนถัดไป จงหาเงินสะสม ณ สิ้นเดือนที่ 300
 - (c) เปรียบเทียบคำตอบของสองกรณีและอธิบายผลของการเพิ่มเงินออมในช่วงต้น ต่อเงินสะสมปลายแผน

บทที่ 5 สินเชื่อและหลักการชำระหนี้

เนื้อหาประกอบด้วย

1. สินเชื่อและประเภทของสินเชื่อ
2. หลักพื้นฐานของการชำระหนี้และการชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย
3. การชำระหนี้ด้วยวิธีเงินทุนสะสม
4. สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้
5. การบริหารหนี้และการจัดการหนี้ให้มีประสิทธิภาพ

บทนำ

การจัดหาเงินทุนเพื่อการอุปโภคบริโภค การศึกษา การลงทุน หรือการดำเนินธุรกิจ เป็นกลไกสำคัญของระบบเศรษฐกิจ สินเชื่อช่วยให้ผู้สามารถนำทรัพยากรในอนาคต มาใช้ในปัจจุบัน โดยแลกกับภาระที่จะต้องชำระคืนเงินต้น ดอกเบี้ย และค่าใช้จ่ายอื่นตามเงื่อนไขของสัญญา ดังนั้น การตัดสินใจก่อหนี้จึงไม่ควรพิจารณา เฉพาะจำนวนเงินที่ได้รับในวันเริ่มต้น แต่ต้องพิจารณากระแสเงินสดตลอดอายุสัญญา จังหวะเวลาของการชำระ อัตราดอกเบี้ย ค่าธรรมเนียม ความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย และความสามารถในการชำระหนี้ร่วมกัน

ในทางคณิตศาสตร์การเงิน การชำระหนี้เป็นการเปรียบเทียบมูลค่าของกระแสเงินสด ที่เกิดขึ้นต่างเวลากัน ภายใต้อัตราดอกเบี้ยที่กำหนด บทนี้จึงเริ่มจากความหมาย และประเภทของสินเชื่อ ก่อนศึกษาวิธีชำระหนี้ที่สำคัญสองวิธี ได้แก่ วิธีตัดจ่าย (Amortization Method) และ วิธีเงินทุนสะสม (Sinking Fund Method) จากนั้นจึงเชื่อมโยงไปสู่ การประเมินสินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้ และการบริหารภาระหนี้ในทางปฏิบัติ

5.1 สินเชื่อและประเภทของสินเชื่อ

บทนิยาม 5.1

สินเชื่อ (Credit) หมายถึง ความเชื่อถือว่าทำให้บุคคลหรือกิจการหนึ่ง ยินยอมให้บุคคลหรือกิจการอีกฝ่าย ได้รับเงิน สินค้า บริการ หรือสิทธิในการใช้เงิน ก่อน แล้วชำระคืนในภายหลังตามเงื่อนไขที่ตกลงกัน

เงินกู้ (Loan) เป็นรูปแบบหนึ่งของสินเชื่อที่ผู้ให้กู้ส่งมอบเงินต้น ให้แก่ผู้กู้ และผู้กู้มีหน้าที่ชำระคืนเงินต้น พร้อมดอกเบี้ยและค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้อง ตามกำหนดเวลาในสัญญา

คู่สัญญาหลักประกอบด้วย **ผู้ให้กู้หรือเจ้าหนี้** (Lender/Creditor) และ **ผู้กู้หรือลูกหนี้** (Borrower/Debtor) สัญญาควรระบุอย่างน้อย จำนวนเงินต้น วันเริ่มต้นสัญญา อัตราดอกเบี้ยและวิธีการคิดดอกเบี้ย กำหนดชำระจำนวนและจังหวะเวลาของค่างวด ค่าธรรมเนียม หลักประกัน เงื่อนไขการชำระก่อนกำหนด และผลของการผิดนัดชำระหนี้

ข้อสังเกต

คำว่า “อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี” ยังไม่เพียงพอสำหรับการคำนวณ ต้องทราบด้วยว่าเป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงหรืออัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม คิดทบต้นกี่ครั้งต่อปี และค่างวดจ่ายเมื่อใด หากฐานเวลาของอัตราดอกเบี้ย ไม่ตรงกับฐานเวลาของกระแสเงินสด ต้องแปลงอัตราให้สอดคล้องกันก่อนเสมอ

5.1.1 เหตุผลสำคัญของการกู้ยืม

เหตุผลในการกู้ยืมสะท้อนทั้งความจำเป็นและการตัดสินใจทางเศรษฐกิจของผู้กู้ โดยจำแนกได้เป็นกลุ่มสำคัญดังนี้

- 1) **การกู้ยืมเพื่อการอุปโภคบริโภค** (Consumption Borrowing) เช่น ค่าใช้จ่ายในชีวิตประจำวัน เครื่องใช้ไฟฟ้า การเดินทาง หรือค่ารักษาพยาบาล หนี้ประเภทนี้มักไม่สร้างกระแสเงินสดกลับคืนโดยตรง จึงต้องควบคุมไม่ให้ค่างวดรวมสูงเกินรายได้ที่มั่นคง
- 2) **การกู้ยืมเพื่อความสะดวกในการชำระเงิน** (Convenience Borrowing) เช่น การใช้บัตรเครดิตเพื่อจัดการจังหวะรับและจ่ายเงิน หากชำระเต็มจำนวนภายในกำหนด อาจไม่เกิดดอกเบี้ยซื้อสินค้า แต่หากชำระเพียงขั้นต่ำ หนี้จะสะสมและมีต้นทุนสูงได้อย่างรวดเร็ว
- 3) **การกู้ยืมเพื่อรองรับเหตุการณ์ฉุกเฉิน** (Contingency Borrowing) เช่น การเจ็บป่วย การว่างงาน หรือความเสียหายต่อทรัพย์สิน สินเชื่อฉุกเฉินช่วยแก้ปัญหาสภาพคล่องระยะสั้น แต่ไม่ควรใช้แทนเงินสำรองฉุกเฉิน อย่างถาวร

- 4) การกู้ยืมเพื่อการศึกษาและการพัฒนาทุนมนุษย์ (Education and Human-Capital Borrowing) เป็นการลงทุนที่คาดว่าจะเพิ่มศักยภาพ ในการสร้างรายได้ในอนาคต การประเมินควรเปรียบเทียบต้นทุนรวมของเงินกู้ กับรายได้ที่คาดว่าจะเพิ่มขึ้นและความไม่แน่นอนของการมีงานทำ
- 5) การกู้ยืมเพื่อการลงทุน (Investment Borrowing) เช่น การขยายกิจการ ซื้อเครื่องจักร หรือซื้ออสังหาริมทรัพย์ ผู้กู้ต้องพิจารณาว่าผลตอบแทน หลังหักภาษีและความเสี่ยงเพียงพอ ชดเชย ต้นทุนดอกเบี้ยและภาระชำระหนี้หรือไม่ การที่ผลตอบแทนคาดหวังสูงกว่าอัตราดอกเบี้ย ไม่ได้รับประกันว่าการลงทุนจะคุ้มค่า เพราะกระแสเงินสดอาจเกิดช้าหรือผันผวน

5.1.2 การจำแนกประเภทของสินเชื่อ

การจำแนกประเภทช่วยให้ผู้กู้เปรียบเทียบเงื่อนไขได้เหมาะสม และช่วยให้ผู้ให้กู้ประเมินความเสี่ยงและกำหนดโครงสร้างสัญญา สินเชื่อหนึ่งรายการอาจอยู่ได้หลายประเภทพร้อมกัน

5.1.2.1 จำแนกตามวัตถุประสงค์การใช้เงิน

- สินเชื่อเพื่อการบริโภค (Consumer Loan) เช่น บัตรเครดิต สินเชื่อส่วนบุคคล สินเชื่อเช่าซื้อ และสินเชื่อเพื่อซื้อสินค้าอุปโภคบริโภค
- สินเชื่อที่อยู่อาศัย (Mortgage/Housing Loan) มักเป็นสินเชื่อระยะยาวและมีอสังหาริมทรัพย์เป็นหลักประกัน
- สินเชื่อเพื่อการศึกษา (Education Loan) ออกแบบให้สอดคล้องกับช่วงเวลาศึกษาและความสามารถในการหารายได้ภายหลังสำเร็จการศึกษา
- สินเชื่อเพื่อธุรกิจ (Business or Commercial Loan) ใช้เป็นเงินทุนหมุนเวียน ลงทุนในสินทรัพย์ถาวรหรือขยายกิจการ
- สินเชื่อภาครัฐและโครงการโครงสร้างพื้นฐาน มักมีวงเงินสูง ระยะเวลายาว และต้องประเมินความยั่งยืนทางการคลัง

5.1.2.2 จำแนกตามระยะเวลา

เกณฑ์ระยะเวลามักแตกต่างกันตามประเภทสถาบันและวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์ แต่โดยทั่วไปสามารถแบ่งเป็น

- **สินเชื่อระยะสั้น** อายุไม่เกินหนึ่งปี ใช้บริหารสภาพคล่อง หรือรองรับรอบการดำเนินงานระยะสั้น
- **สินเชื่อระยะกลาง** อายุประมาณหนึ่งถึงห้าปี เหมาะกับการลงทุนที่ให้ผลตอบแทนในช่วงเวลาปานกลาง
- **สินเชื่อระยะยาว** อายุมากกว่าห้าปี เช่น สินเชื่อที่อยู่อาศัย อาคาร โรงงาน หรือโครงสร้างพื้นฐาน

5.1.2.3 จำแนกตามหลักประกัน

- **สินเชื่อมีหลักประกัน (Secured Loan)** ผู้นำทรัพย์สินหรือสิทธิเรียกร้องมาประกันการชำระหนี้ หลักประกันช่วยลดความเสี่ยงของผู้ให้กู้หากเกิดการผิดนัด แต่ไม่ได้ทำให้ความเสี่ยงเป็นศูนย์ เพราะมูลค่าหลักประกันอาจลดลง และมีต้นทุนในการบังคับหลักประกัน
- **สินเชื่อไม่มีหลักประกัน (Unsecured Loan)** พิจารณาจากรายได้ กระแสเงินสด ประวัติการชำระหนี้ และความน่าเชื่อถือของผู้กู้ โดยทั่วไปมีอัตราดอกเบี้ยสูงกว่าเมื่อปัจจัยอื่นเหมือนกัน

5.1.2.4 จำแนกตามลักษณะของวงเงิน

- **สินเชื่อแบบกำหนดวงเงินและระยะเวลาแน่นอน (Term Loan)** ผู้กู้ได้รับเงินครั้งเดียวหรือเบิกตามงวดของโครงการ แล้วชำระคืนตามตารางที่กำหนด
- **สินเชื่อแบบหมุนเวียน (Revolving Credit)** ผู้กู้สามารถเบิก ใช้ และชำระคืนซ้ำได้ภายในวงเงิน เช่น บัตรเครดิต และวงเงินเบิกเกินบัญชี ดอกเบี้ยมักคิดจากยอดใช้จริงและจำนวนวันที่ใช้วงเงิน
- **วงเงินผูกพันและวงเงินไม่ผูกพัน (Committed and Uncommitted Facilities)** แตกต่างกันที่ภาระของผู้ให้กู้ ในการจัดหาเงินให้เมื่อผู้กู้ปฏิบัติตามเงื่อนไข

5.1.2.5 จำแนกตามรูปแบบการชำระคืน

- **ชำระเงินต้นและดอกเบี้ยเป็นงวด** โดยค่างวดอาจคงที่หรือเปลี่ยนแปลง
- **ชำระเงินต้นคงที่** ทำให้ค่างวดรวมลดลงตามยอดหนี้คงเหลือ
- **ชำระเฉพาะดอกเบี้ยระหว่างสัญญา** และชำระเงินต้นทั้งหมดเมื่อครบกำหนด (Interest-only/Bullet Loan)
- **ชำระก้อนใหญ่ในงวดสุดท้าย (Balloon Payment)** โดยมีการตัดเงินต้นบางส่วนระหว่างสัญญา
- **มีระยะปลอดชำระเงินต้นหรือดอกเบี้ย (Grace Period)** ซึ่งต้องระบุให้ชัดว่าดอกเบี้ยระหว่างพักชำระถูกยกเว้นหรือทบเข้าเงินต้น

5.1.2.6 จำแนกตามคุณภาพหรือสถานะของสินเชื่อ

- **สินเชื่อปกติ (Performing Loan)** ลูกหนี้ชำระตามเงื่อนไข และไม่มีหลักฐานสำคัญว่าความเสี่ยงเครดิตเพิ่มขึ้นจนผิดปกติ
- **สินเชื่อที่ต้องเฝ้าระวัง** มีสัญญาณว่าความเสี่ยงเครดิตเพิ่มขึ้น แม้อาจยังไม่เป็นหนี้เสีย เช่น รายได้ลดลง การขอปรับโครงสร้างหนี้ หรือค้างชำระช่วงสั้น
- **สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้ (Non-Performing Loan: NPL)** หรือสินเชื่อด้วยคุณภาพ เป็นสินเชื่อที่มีหลักฐานการด้อยค่าด้านเครดิต เช่น ค้างชำระเป็นสาระสำคัญหรือมีแนวโน้มสูงว่าจะไม่สามารถชำระได้ครบตามสัญญา รายละเอียดจะกล่าวในหัวข้อ 5.4

5.1.3 หนี้ที่ก่อให้เกิดรายได้และหนี้ที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้

ในมุมมองของผู้กู้ อาจจำแนกหนี้เพื่อการบริหารการเงินส่วนบุคคลเป็น **หนี้ที่ก่อให้เกิดรายได้หรือเพิ่มศักยภาพ (Productive Debt)** และ **หนี้ที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้โดยตรง (Non-Productive Debt)** อย่างไรก็ตาม การจำแนกนี้ไม่ใช่กฎตายตัว ตัวอย่างเช่น รถยนต์อาจเป็นหนี้เพื่อการบริโภค สำหรับบุคคลหนึ่ง แต่เป็นสินทรัพย์ที่สร้างรายได้สำหรับผู้ประกอบอาชีพขนส่ง จึงควรวิเคราะห์จากกระแสเงินสดและประโยชน์ที่แท้จริง ไม่ใช่จากชื่อสินทรัพย์เพียงอย่างเดียว

หลักตัดสินใจเบื้องต้นก่อนก่อหนี้

การก่อหนี้มีเหตุผล เมื่อผู้กู้เข้าใจต้นทุนรวมของสัญญา มีกระแสเงินสดเพียงพอรองรับ ค่างวดภายใต้สถานการณ์ที่ไม่เป็นไปตามคาด และประโยชน์ที่ได้รับมีมูลค่าสูงกว่าต้นทุนและความเสี่ยงของหนี้

5.2 หลักพื้นฐานของการชำระหนี้และการชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย

วิธีตัดจ่าย (Amortization Method) เป็นวิธีชำระหนี้ที่เงินจ่ายแต่ละงวด ถูกแบ่งเป็นดอกเบี้ยของงวดนั้นและเงินต้นที่ตัดออกจากยอดหนี้ เมื่อชำระครบทุกงวดตามสัญญา ยอดหนี้คงเหลือต้องเท่ากับศูนย์

กำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

สัญลักษณ์	ความหมาย
$S_0 = S$	เงินต้นหรือมูลค่าหนี้ ณ เวลา 0
S_k	หนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ k
r_k	เงินที่ชำระ ณ ปลายงวดที่ k
i_k	อัตราดอกเบี้ยแท้จริงสำหรับงวดที่ k
I_k	ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในงวดที่ k
P_k	ส่วนของเงินชำระงวดที่ k ที่ใช้ตัดเงินต้น
$I = \sum_{k=1}^n I_k$	ดอกเบี้ยรวมตลอดสัญญา

จังหวะเวลาที่มีความสำคัญมาก ในบทยี่ S_k หมายถึงยอดหนี้ หลัง ชำระงวดที่ k แล้ว ดังนั้นดอกเบี้ยงวดที่ k จึงคำนวณจากยอดหนี้หลังงวดก่อนหน้า คือ S_{k-1}

5.2.1 หลักพื้นฐานของการชำระหนี้

เงินชำระแต่ละงวดประกอบด้วยเงินต้นและดอกเบี้ย

$$r_k = P_k + I_k \quad (5.1)$$

เมื่ออัตราดอกเบี้ยในงวดที่ k เท่ากับ i_k จะได้

$$I_k = i_k S_{k-1} \quad (5.2)$$

ดังนั้นเงินต้นที่ตัดจ่ายคือ

$$P_k = r_k - I_k = r_k - i_k S_{k-1}, \quad (5.3)$$

และยอดหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ k คือ

$$S_k = S_{k-1} - P_k \quad (5.4)$$

แทนสมการ (5.3) ในสมการ (5.4) จะได้สมการเวียนเกิดที่สำคัญ

$$S_k = (1 + i_k) S_{k-1} - r_k \quad (5.5)$$

ข้อสังเกต

หาก $r_k > I_k$ จะได้ $P_k > 0$ และยอดหนี้ลดลง หาก $r_k = I_k$ ยอดหนี้ไม่ลดลง เพราะชำระเฉพาะดอกเบี้ย และหาก $r_k < I_k$ จะเกิด การตัดจ่ายติดลบ (Negative Amortization) กล่าวคือ ดอกเบี้ยที่ชำระไม่ครบถูกทบเข้าเงินต้น ทำให้ $S_k > S_{k-1}$

ทฤษฎีบท 5.1. หากชำระหนี้ครบ n งวดและ $S_n = 0$ แล้ว

$$\sum_{k=1}^n P_k = S_0, \quad (5.6)$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = I, \quad (5.7)$$

$$\sum_{k=1}^n r_k = S_0 + I \quad (5.8)$$

พิสูจน์. จาก $P_k = S_{k-1} - S_k$ จะได้ผลบวกแบบหักล้าง

$$\sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n (S_{k-1} - S_k) = S_0 - S_n = S_0$$

ส่วนสมการที่สองเป็นบทนิยามของ I และจาก $r_k = P_k + I_k$ เมื่อนำมาบวกทุกงวดจะได้สมการที่สาม $\square$

5.2.2 กระแสเงินสดการชำระหนี้

5.2.2.1 อัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงตามงวด

กำหนดให้

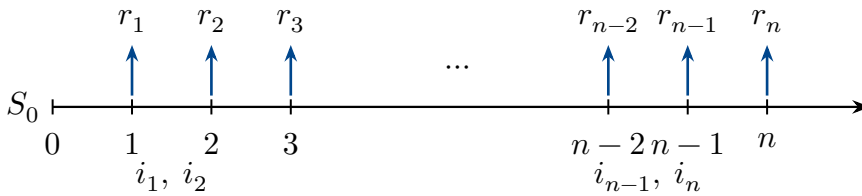
$$v_k = (1 + i_k)^{-1}$$

เป็นตัวประกอบส่วนลดของงวดที่ k เงินชำระ r_k ที่เวลา k มีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$r_k \prod_{h=1}^k v_h = r_k (v_1 v_2 \cdots v_k) = r_k v_1 v_2 \cdots v_k$$

ดังนั้นสมการมูลค่าของเงินกู้ทั่วไปคือ

$$S_0 = \sum_{k=1}^n r_k \prod_{h=1}^k v_h \quad (5.9)$$



รูปที่ 5.1 กระแสเงินสดการชำระหนี้เมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงตามงวด

หากทราบอัตราดอกเบี้ยทั้งหมดล่วงหน้าและกำหนดให้ชำระเท่ากันทุกงวด คือ $r_k = r$ จะได้

$$r = \frac{S_0}{\sum_{k=1}^n \prod_{h=1}^k v_h} \quad (5.10)$$

สังเกตว่าตัวส่วนต้องเป็น ผลบวกของผลคูณตัวประกอบส่วนลด ไม่ใช่เพียงผลคูณ $\prod_{k=1}^n v_k$

5.2.2.2 การปรับค่างวดเมื่ออัตราดอกเบี้ยลอยตัว

หากไม่ทราบอัตราดอกเบี้ยในอนาคต แต่สัญญากำหนดให้ปรับค่างวดใหม่ทุกงวด โดยใช้อัตราปัจจุบัน i_k เป็นอัตราสำหรับงวดที่เหลือทั้งหมด หลังจากทราบยอดหนี้ S_{k-1} แล้ว ค่างวดใหม่สำหรับงวดที่ $k, \dots, n$ คือ

$$r_k = \frac{S_{k-1}}{a_{\overline{n-k+1}|i_k}} \quad (5.11)$$

เมื่อ

$$a_{\overline{m}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}$$

จากนั้นคำนวณ

$$I_k = i_k S_{k-1}, \quad (5.12)$$

$$P_k = r_k - I_k, \quad (5.13)$$

$$S_k = S_{k-1} - P_k \quad (5.14)$$

ข้อสังเกต

สมการ (5.11) เป็นกฎการปรับค่างวดแบบหนึ่งเท่านั้น ไม่ใช่ผลที่จำเป็นสำหรับสินเชื่ออัตราลอยตัวทุกสัญญา สัญญาจริงอาจปรับอัตราแต่คงค่างวดเดิม ปรับอายุสัญญา กำหนดเพดานค่างวด หรือมีงวดพักชำระ ผู้วิเคราะห์ต้องใช้เงื่อนไขจริงของสัญญา

5.2.3 ตารางการชำระหนี้

ตารางการชำระหนี้แสดงการแบ่งค่างวดเป็นดอกเบี้ยและเงินต้น รวมทั้งยอดหนี้หลังชำระแต่ละงวด โดยใช้สมการ (5.2)–(5.5)

ตารางที่ 5.1 โครงสร้างทั่วไปของตารางการชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย

งวดที่ k	เงินชำระ r_k	ดอกเบี้ย I_k	เงินต้น P_k	หนี้คงเหลือ S_k
0	–	–	–	$S_0 = S$
1	r_1	$i_1 S_0$	$r_1 - i_1 S_0$	$S_0 - P_1$
2	r_2	$i_2 S_1$	$r_2 - i_2 S_1$	$S_1 - P_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	r_n	$i_n S_{n-1}$	$r_n - i_n S_{n-1}$	0
รวม	$\sum r_k$	I	S_0	

ตัวอย่าง 5.1. นายเอกู้เงิน 100,000 บาท ชำระทุกสิ้นปีเป็นเวลา 10 ปี โดยค่างวดถูกปรับใหม่ต้นแต่ละปี ตามสมการ (5.11) อัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นดังนี้

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i_k	.02	.03	.03	.04	.05	.06	.06	.06	.06	.06

จงสร้างตารางการชำระหนี้

วิธีทำ ในปีที่ 1

$$r_1 = \frac{100,000}{a_{\overline{10}|0.02}} = 11,132.65,$$

$$I_1 = 0.02(100,000) = 2,000, \quad P_1 = 11,132.65 - 2,000 = 9,132.65$$

คำนวณชำระด้วยยอดหนี้และอัตราดอกเบี้ยของแต่ละปี ได้ตารางดังนี้

k	r_k	I_k	P_k	S_k
0	–	–	–	100,000.00
1	11,132.65	2,000.00	9,132.65	90,867.35
2	11,670.44	2,726.02	8,944.42	81,922.92
3	11,670.44	2,457.69	9,212.76	72,710.17
4	12,114.21	2,908.41	9,205.81	63,504.36
5	12,511.47	3,175.22	9,336.25	54,168.11
6	12,859.31	3,250.09	9,609.23	44,558.88
7	12,859.31	2,673.53	10,185.78	34,373.10
8	12,859.31	2,062.39	10,796.93	23,576.17
9	12,859.31	1,414.57	11,444.74	12,131.43
10	12,859.31	727.89	12,131.43	0.00

ค่าที่แสดงปิดทศนิยมสองตำแหน่ง แต่การคำนวณแต่ละแถวควรใช้ค่าที่ยังไม่ปัดเศษ เพื่อไม่ให้เกิดยอดคงเหลือเล็กน้อยในงวดสุดท้าย □

5.2.4 การคำนวณหนี้คงเหลือ

ในหัวข้อนี้สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่องวดคงที่เท่ากับ i และ $v = (1 + i)^{-1}$ จากสมการมูลค่าปัจจุบัน

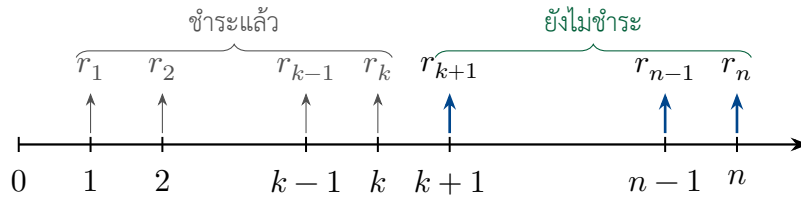
$$S_0 = \sum_{k=1}^n r_k v^k \tag{5.15}$$

ต้องการหาหนี้คงเหลือ S_k ทันทีหลังชำระงวดที่ k สามารถทำได้สองวิธีซึ่งต้องให้คำตอบเท่ากัน

5.2.4.1 วิธีมองไปข้างหน้า

วิธีมองไปข้างหน้า (Prospective Method) ประเมินหนี้คงเหลือจากมูลค่า ณ เวลา k ของเงินชำระที่ยังไม่ถึงกำหนด

$$S_k = \sum_{x=1}^{n-k} r_{k+x} v^x \quad (5.16)$$



รูปที่ 5.2 แนวคิดการคำนวณหนี้คงเหลือด้วยวิธีมองไปข้างหน้า

5.2.4.2 วิธีมองย้อนหลัง

วิธีมองย้อนหลัง (Retrospective Method) เริ่มจากมูลค่าสะสมของเงินกู้ ณ เวลา k แล้วหักด้วยมูลค่าสะสมของเงินที่ชำระแล้ว

$$S_k = S_0(1+i)^k - \sum_{x=1}^k r_x(1+i)^{k-x} \quad (5.17)$$

ความเท่ากันของสมการ (5.16) และ (5.17) เกิดจากสมการมูลค่าเดียวกัน ต่างกันเพียงวันวัดมูลค่าและชุดกระแสเงินสดที่นำมาคำนวณ

5.2.4.3 กรณีค่างวดคงที่

หาก $r_k = r$ ทุกงวด จะได้

$$S_0 = ra_{\overline{n}|i}, \quad r = \frac{S_0}{a_{\overline{n}|i}} \quad (5.18)$$

หลังชำระงวดที่ k แล้ว วิธีมองไปข้างหน้าให้

$$S_k = ra_{\overline{n-k}|i}, \quad (5.19)$$

และวิธีมองย้อนหลังให้

$$S_k = S_0(1+i)^k - rs_{\overline{k}|i} \quad (5.20)$$

ดอกเบี้ยและเงินต้นของงวดที่ k คือ

$$I_k = iS_{k-1} = ira_{\overline{n-k+1}|i}, \quad (5.21)$$

$$P_k = r - I_k = rv^{n-k+1} \quad (5.22)$$

ดังนั้นเงินต้นที่ตัดจ่ายเพิ่มขึ้นเป็นลำดับเรขาคณิต

$$P_k = (1+i)P_{k-1} = (1+i)^{k-1}P_1 \quad (5.23)$$

ในขณะที่ดอกเบี้ยลดลงตามยอดหนี้คงเหลือ

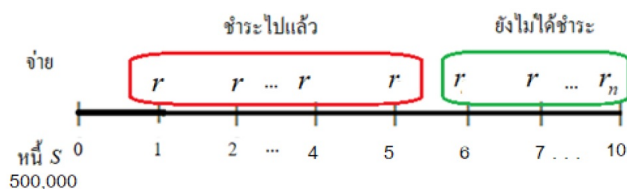
ตารางที่ 5.2 ตารางมาตรฐานเมื่อเงินกู้เท่ากับ $a_{\overline{n}|i}$ และชำระงวดละ 1

งวด	เงินชำระ	ดอกเบี้ย	เงินต้น	หนี้คงเหลือ
0	–	–	–	$a_{\overline{n} i}$
1	1	$ia_{\overline{n} i} = 1 - v^n$	v^n	$a_{\overline{n-1} i}$
2	1	$ia_{\overline{n-1} i} = 1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-2} i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$ia_{\overline{1} i} = 1 - v$	v	0
รวม	n	$n - a_{\overline{n} i}$	$a_{\overline{n} i}$	

ตัวอย่าง 5.2. นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษา 500,000 บาท ชำระทุกสิ้นปีเป็นเวลา 10 ปี อัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 6.5 ต่อปี จงหา

- 1) หนี้คงเหลือหลังชำระปลายปีที่ 5
- 2) ดอกเบี้ยและเงินต้นในการชำระงวดที่ 6

วิธีทำ



รูปที่ 5.3 แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 5

ค่างวดประจำปีคือ

$$r = \frac{500,000}{a_{10|0.065}} = 69,552.35 \text{ บาท}$$

หลังชำระงวดที่ 5 เหลือเงินชำระอีก 5 งวด จึงได้

$$S_5 = ra_{5|0.065} = 289,037.25 \text{ บาท}$$

ดังนั้น

$$I_6 = 0.065S_5 = 18,787.42 \text{ บาท},$$

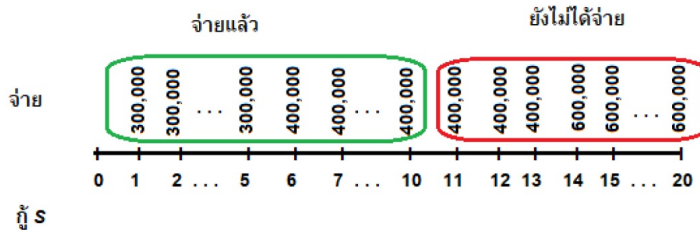
$$P_6 = r - I_6 = 50,764.92 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 5.3. นายเอชำระหนี้ทุกสิ้นปี โดย 5 ปีแรกจ่ายปีละ 300,000 บาท 8 ปีถัดมาจ่ายปีละ 400,000 บาท และ 7 ปีสุดท้ายจ่ายปีละ 600,000 บาท อัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 4 ต่อปี จงหา

- 1) หนี้คงเหลือหลังชำระปลายปีที่ 10
- 2) ดอกเบี้ยและเงินต้นของงวดที่ 11

วิธีทำ



รูปที่ 5.4 แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 10

ณ ปลายปีที่ 10 ยังเหลือเงินชำระ 400,000 บาทอีก 3 งวด ที่เวลา 11, 12, 13 และเงินชำระ 600,000 บาทอีก 7 งวด ที่เวลา 14, ..., 20 ดังนั้น

$$S_{10} = 400,000a_{\overline{3}|0.04} + 600,000v^3a_{\overline{7}|0.04} = 4,311,519.26 \text{ บาท}$$

งวดที่ 11 มีเงินชำระ 400,000 บาท จึงได้

$$I_{11} = 0.04S_{10} = 172,460.77 \text{ บาท,}$$

$$P_{11} = 400,000 - I_{11} = 227,539.23 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 5.4. นายเอชำระหนี้ทุกสิ้นเดือน เดือนละ 2,000 บาท อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หลังชำระงวดที่ 18 หนี้คงเหลือเท่ากับ 50,000 บาท จงหา

- 1) เงินกู้เริ่มต้น
- 2) ระยะเวลาชำระหนี้

วิธีทำ อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคือ $i = 0.06/12 = 0.005$ จากวิธีมองย้อนหลัง

$$50,000 = S_0(1.005)^{18} - 2,000s_{\overline{18}|0.005},$$

จึงได้

$$S_0 = (50,000 + 2,000s_{\overline{18}|0.005})(1.005)^{-18} = 80,052.34 \text{ บาท}$$

สำหรับจำนวนงวดที่เหลือเชิงทฤษฎี ให้ $m = n - 18$ แล้วใช้วิธีมองไปข้างหน้า

$$50,000 = 2,000a_{\overline{m}|0.005}$$

จึงได้

$$(1.005)^{-m} = 1 - \frac{50,000(0.005)}{2,000} = 0.875$$

และ

$$m = -\frac{\ln(0.875)}{\ln(1.005)} = 26.7730$$

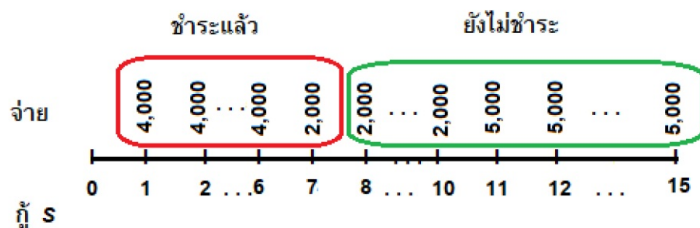
ดังนั้น $n = 44.7730$ เดือน เป็นคำตอบเชิงคณิตศาสตร์แบบเวลาเศษส่วน แต่ในทางปฏิบัติชำระได้เฉพาะสิ้นเดือน จึงชำระเต็มจำนวน 2,000 บาท ถึงงวดที่ 44 และปิดหนี้ในงวดที่ 45 ด้วยเงินประมาณ

$$1,546.85 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 5.5. นางอรชรชำระหนี้เป็นเวลา 15 เดือน โดย 6 เดือนแรกชำระเดือนละ 4,000 บาท 4 เดือนถัดมาชำระเดือนละ 2,000 บาท และ 5 เดือนสุดท้ายชำระเดือนละ 5,000 บาท อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาหนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ 7 ด้วยวิธีมองไปข้างหน้า และวิธีมองย้อนหลัง

วิธีทำ



รูปที่ 5.5 แผนภาพหนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 7

อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคือ

$$i = \frac{0.04}{12} = 0.003333 \dots$$

หลังงวดที่ 7 ยังเหลือเงินชำระ 2,000 บาทอีก 3 งวด และ 5,000 บาทอีก 5 งวด จึงได้จากวิธีมองไปข้างหน้า

$$S_7 = 2,000a_{\overline{3}|i} + 5,000v^3a_{\overline{5}|i} = 30,466.27 \text{ บาท}$$

เพื่อใช้วิธีมองย้อนหลัง หาเงินกู้เริ่มต้นก่อน

$$S_0 = 4,000a_{\overline{6}|i} + 2,000v^6a_{\overline{4}|i} + 5,000v^{10}a_{\overline{5}|i} = 55,441.20 \text{ บาท}$$

เมื่อสะสมถึงเวลา 7 และหักเงินชำระ 6 งวดแรกกับงวดที่ 7

$$S_7 = S_0(1+i)^7 - 4,000s_{\overline{6}|i}(1+i) - 2,000 = 30,466.27 \text{ บาท,}$$

ซึ่งผลลัพธ์ตรงกับผลลัพธ์ที่คำนวณด้วยวิธีมองไปข้างหน้า



สรุปสูตรนี้คงเหลือ

เมื่ออัตราดอกเบี้ยคงที่ i และค่างวดเท่ากับ r

$$S_k = ra_{\overline{n-k}|i} = S_0(1+i)^k - rs_{\overline{k}|i}$$

สูตรแรกเหมาะเมื่อทราบกระแสเงินสดที่เหลือ สูตรที่สองเหมาะเมื่อทราบเงินกู้เริ่มต้นและกระแสเงินสดที่ชำระแล้ว

5.3 การชำระหนี้ด้วยวิธีเงินทุนสะสม

วิธีเงินทุนสะสม (Sinking Fund Method) เป็นการแยกภาระออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกคือการชำระดอกเบี้ยแก่ผู้ให้กู้ และส่วนที่สองคือการฝากเงินเป็นงวด เข้าในกองทุนเพื่อสะสมให้เท่ากับเงินต้นเมื่อครบกำหนด

สมมติว่ากู้เงิน S บาท เป็นเวลา n งวด อัตราดอกเบี้ยเงินกู้แท้จริง ต่องวดเท่ากับ i และกองทุนให้ผลตอบแทนแท้จริงต่องวดเท่ากับ j ผู้ชำระดอกเบี้ยแก่เจ้าหนี้งวดละ iS และฝากเงินเข้ากองทุนงวดละ q ทุกปลายงวด โดยต้องการให้กองทุนมีมูลค่า S ณ ปลายงวดที่ n

จาก

$$qs_{\overline{n}|j} = S$$

จึงได้

$$q = \frac{S}{s_{\overline{n}|j}} \quad (5.24)$$

กระแสเงินสดออกทั้งหมดของผู้กู้ในแต่ละงวดคือ

$$r = iS + q = S \left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} \right) \quad (5.25)$$

ข้อสังเกต

ยอดหนี้ตามสัญญากับผู้ให้กู้ยังคงเท่ากับ S ตลอดงวดที่ 1 ถึง $n - 1$ เพราะยังไม่ได้ตัดเงินต้น กองทุนเป็นสินทรัพย์แยกต่างหากของผู้กู้ ดังนั้นควรเรียก $S - V_k$ ว่า **หนี้สุทธิหลังหักเงินสะสม** ไม่ใช่ยอดหนี้ตามสัญญา

5.3.1 เงินสะสมในกองทุนและหนี้สุทธิ

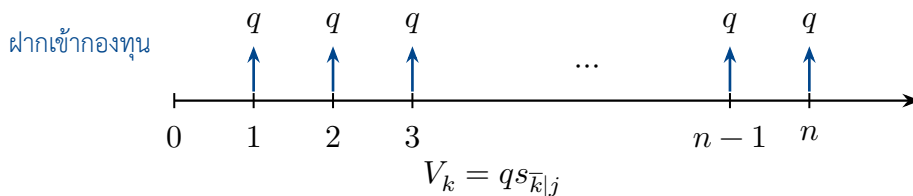
ให้ V_k เป็นมูลค่ากองทุนทันทีหลังฝากเงินงวดที่ k จะได้

$$V_k = qs_{\overline{k}|j} = \frac{S}{s_{\overline{n}|j}} s_{\overline{k}|j} \quad (5.26)$$

หนี้สุทธิหลังหักเงินสะสมคือ

$$B_k = S - V_k \quad (5.27)$$

เมื่อ $k = n$ จะได้ $V_n = S$ และ $B_n = 0$



รูปที่ 5.6 กระแสเงินสดที่ฝากเข้ากองทุนสะสม

แม้ยอดหนี้ตามสัญญาไม่ลดลง แต่การเพิ่มขึ้นของกองทุนในแต่ละงวด สามารถตีความเป็นเงินต้นที่ลดลงในเชิง

สุทธิได้ กำหนด

$$P_k = B_{k-1} - B_k = V_k - V_{k-1}$$

จากสมการ (5.26)

$$P_k = q(1+j)^{k-1} \quad (5.28)$$

ผลตอบแทนของกองทุนในงวดที่ k คือ jV_{k-1} ดังนั้นดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ k เท่ากับ

$$I_k^{\text{net}} = iS - jV_{k-1} \quad (5.29)$$

และ

$$P_k + I_k^{\text{net}} = q + iS = r \quad (5.30)$$

ตารางที่ 5.3 โครงสร้างวิธีเงินต้นสะสม

k	จ่ายเจ้าหนี้	ฝากกองทุน	ดอกเบี้ยรับ	เงินสะสม V_k	หนี้สุทธิ B_k
0	–	–	–	0	S
1	iS	q	0	q	$S - q$
2	iS	q	jV_1	$qs_{\overline{2} j}$	$S - V_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	iS	q	jV_{n-1}	S	0

ในงวดสุดท้าย เงินกองทุน S ถูกนำไปชำระเงินต้นแก่ผู้ให้กู้ จึงไม่ควรนับเงินต้น S เข้าเป็นกระแสเงินสดออกเพิ่มเติมของผู้กู้ หากเงินกองทุนถูกกันไว้และนำไปใช้ตามวัตถุประสงค์จริง

5.3.2 ความสัมพันธ์กับวิธีตัดจ่าย

หากอัตราดอกเบี้ยเงินกู้และอัตราผลตอบแทนกองทุนเท่ากัน คือ $i = j$ จะมีเอกลักษณ์

$$i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

ดังนั้น

$$r = S \left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right) = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} \quad (5.31)$$

กล่าวคือ กระแสเงินสดออกต่อคาบของผู้กู้เท่ากับค่างวดของวิธีตัดจ่าย แต่โครงสร้างทางกฎหมายและเส้นทางของเงินแตกต่างกัน

หาก $j > i$ เงินฝากเข้ากองทุนต่อคาบจะลดลงเมื่อเทียบกับกรณี $j = i$ แต่ผู้กู้ต้องรับความเสี่ยงว่าผลตอบแทนกองทุนอาจไม่เป็นไปตามสมมติฐาน หากกองทุนมีความเสี่ยง ควรวิเคราะห์สถานการณ์ผลตอบแทนต่ำกว่าคาดด้วย

ตัวอย่าง 5.6. นายเสื่อซื้อห้องชุดราคา 1,000,000 บาทและกู้เต็มจำนวน สัญญาเป็นเวลา 240 เดือน โดยชำระเฉพาะดอกเบี้ยแก่ธนาคารในแต่ละเดือน และสะสมเงินในกองทุนเพื่อคืนเงินต้นเมื่อครบกำหนด ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน ส่วนกองทุนให้ผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหา

- 1) ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารต่อเดือน
- 2) เงินฝากเข้ากองทุนต่อเดือน
- 3) เงินจ่ายรวมต่อเดือน
- 4) เงินต้นที่ลดลงในเชิงสุทธิของงวดที่ 80
- 5) ดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ 80
- 6) หนี้สุทธิหลังงวดที่ 80

วิธีทำ ให้

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005, \quad j = \frac{0.09}{12} = 0.0075$$

ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารคือ

$$iS = 0.005(1,000,000) = 5,000 \text{ บาท}$$

เงินฝากเข้ากองทุนคือ

$$q = \frac{1,000,000}{s_{\overline{240}|0.0075}} = 1,497.26 \text{ บาท}$$

เงินจ่ายรวมต่อเดือนเท่ากับ

$$r = 5,000 + 1,497.26 = 6,497.26 \text{ บาท}$$

เงินต้นที่ลดลงในเชิงสุทธิของงวดที่ 80 คือ

$$P_{80} = q(1.0075)^{79} = 2,701.82 \text{ บาท}$$

ดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ 80 คือ

$$I_{80}^{\text{net}} = r - P_{80} = 3,795.44 \text{ บาท}$$

เงินสะสมหลังงวดที่ 80 คือ

$$V_{80} = qs_{\overline{80}|0.0075} = 163,309.89 \text{ บาท},$$

จึงมีหนี้สุทธิ

$$B_{80} = 1,000,000 - V_{80} = 836,690.11 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 5.7. นางกวางซื้อบ้านโดยชำระเงินดาวน์ 200,000 บาท ส่วนที่เหลือใช้วิธีเงินทุนสะสมเป็นเวลา 120 เดือน โดยทั้งธนาคารและกองทุนใช้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หากนางกวางจ่ายรวมเดือนละ 28,000 บาท จงหา

- 1) ราคาเงินสดของบ้าน
- 2) ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารและเงินฝากเข้ากองทุนต่อเดือน
- 3) เงินต้นที่ลดลงในเชิงสุทธิและดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ 80
- 4) หนี้สุทธิหลังงวดที่ 80

วิธีทำ ให้ $i = j = 0.06/12 = 0.005$ และ $r = 28,000$ จากสมการ (5.25)

$$28,000 = S \left(0.005 + \frac{1}{s_{\overline{120}|0.005}} \right),$$

จึงได้

$$S = 2,522,056.69 \text{ บาท}$$

ดังนั้นราคาเงินสดของบ้านเท่ากับ

$$200,000 + S = 2,722,056.69 \text{ บาท}$$

ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารคือ

$$iS = 12,610.28 \text{ บาทต่อเดือน,}$$

และเงินฝากเข้ากองทุนคือ

$$q = 28,000 - 12,610.28 = 15,389.72 \text{ บาทต่อเดือน}$$

สำหรับงวดที่ 80

$$P_{80} = q(1.005)^{79} = 22,821.78 \text{ บาท,}$$

$$I_{80}^{\text{net}} = 28,000 - P_{80} = 5,178.22 \text{ บาท}$$

เงินสะสมหลังงวดที่ 80 เท่ากับ

$$V_{80} = qs_{\overline{80}|0.005} = 1,509,234.31 \text{ บาท,}$$

จึงมีหนี้สุทธิ

$$B_{80} = S - V_{80} = 1,012,822.38 \text{ บาท}$$

□

สรุปวิธีเงินต้นคง

$$\begin{aligned} q &= \frac{S}{s_{\overline{n}|j}}, & r &= iS + q, \\ V_k &= qs_{\overline{k}|j}, & B_k &= S - V_k, \\ P_k &= q(1+j)^{k-1}, & I_k^{\text{net}} &= iS - jV_{k-1} \end{aligned}$$

5.4 สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้

สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้ (Non-Performing Loan: NPL) เป็นสินเชื่อที่คุณภาพเครดิตเสื่อมลงอย่างมีนัยสำคัญ จนมีหลักฐานว่าลูกหนี้อาจไม่สามารถชำระเงินต้นและดอกเบี้ยได้ครบตามสัญญา ในทางปฏิบัติ สินเชื่อที่ค้างชำระเกิน 90 วันมักเป็นเกณฑ์สำคัญในการระบุการผิดนัด หรือสินเชื่อด้วยค่าด้านเครดิต แต่การพิจารณาไม่ควรอาศัยจำนวนวันค้างชำระเพียงอย่างเดียว เพราะข้อมูลเชิงคุณภาพ เช่น การล้มละลาย การปรับโครงสร้างหนี้เนื่องจากลูกหนี้มีปัญหา หรือการที่กระแสเงินสดของกิจการลดลงอย่างรุนแรง อาจทำให้ต้องจัดเป็นสินเชื่อด้วยคุณภาพ ก่อนครบ 90 วันได้

ภายใต้กรอบ TFRS 9/IFRS 9 สินทรัพย์ทางการเงินที่เกิดการด้อยค่าด้านเครดิต มักจัดอยู่ใน **Stage 3** และรับรู้ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตที่คาดว่าจะเกิดขึ้น ตลอดอายุสัญญา (Lifetime Expected Credit Loss) แนวคิดดังกล่าวแตกต่างจาก ระบบเดิมที่กำหนดอัตราสำรองตายตัวตามชั้นหนี้ เพราะการวัดผลขาดทุนต้องอาศัย กระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ ความน่าจะเป็นของแต่ละสถานการณ์ มูลค่าหลักประกัน ระยะเวลาในการเรียกคืน และมูลค่าเงินตามเวลา

5.4.1 การประเมินมูลค่ากระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ

ให้ CF_t เป็นกระแสเงินสดสุทธิที่คาดว่าจะได้รับ ณ เวลา t หลังหักค่าใช้จ่ายในการติดตามหนี้ บังคับหลักประกัน และขายทรัพย์สินแล้ว ถ้าใช้อัตราคิดลดต่องวดเท่ากับ d มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดคาดหวังคือ

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{E(CF_t)}{(1+d)^t} \quad (5.32)$$

หากวิเคราะห์หลายสถานการณ์ ให้ w_s เป็นความน่าจะเป็นของสถานการณ์ที่ s และ $CF_{t,s}$ เป็นกระแสเงินสดสุทธิในสถานการณ์นั้น จะได้

$$V_0 = \sum_{s=1}^m w_s \sum_{t=1}^T \frac{CF_{t,s}}{(1+d)^t}, \quad \sum_{s=1}^m w_s = 1 \quad (5.33)$$

ข้อสังเกต

ไม่ควรปรับทั้งกระแสเงินสดให้ต่ำลงด้วยความน่าจะเป็นของการผิดนัด และเพิ่มส่วนชดเชยความเสี่ยงในอัตราคิดลดโดยไม่มีหลักเกณฑ์ที่สอดคล้องกัน เพราะอาจนับความเสี่ยงซ้ำสองครั้ง สำหรับการวัด ECL

ตามมาตรฐานการรายงานทางการเงิน โดยทั่วไปจะคิดลดกระแสเงินสดขาดมือด้วยอัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงเดิมของสัญญา หรืออัตราที่มาตรฐานกำหนดให้ใช้ในกรณีนั้น

ให้ G_0 เป็นมูลค่าตามบัญชีก่อนหักค่าเผื่อ ณ วันประเมิน ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตแบบย่อสามารถเขียนเป็น

$$ECL = \max\{0, G_0 - V_0\} \quad (5.34)$$

สมการนี้เน้นแนวคิด **กระแสเงินสดขาดมือ** (Cash Shortfall) กล่าวคือ ผลต่างระหว่างกระแสเงินสดตามสัญญาที่กิจการมีสิทธิได้รับ กับกระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับจริง หลังคิดลดมายังวันรายงาน

สำหรับการวิเคราะห์พอร์ตสินเชื่ออย่างง่าย มักพบสูตรประมาณ

$$ECL \approx PD \times LGD \times EAD, \quad (5.35)$$

โดย PD คือความน่าจะเป็นของการผิดนัด LGD คือสัดส่วนความสูญเสียเมื่อผิดนัด และ EAD คือยอดสินเชื่อที่คาดว่าจะคงค้างเมื่อเกิดการผิดนัด แต่การใช้จริงต้องกำหนดช่วงเวลา สถานการณ์เศรษฐกิจ กระแสเงินสด และการคิดลดให้สอดคล้องกับมาตรฐานและข้อมูลของพอร์ต

5.4.2 การตัดจำหน่ายหนี้และการตั้งค่าเผื่อ

5.4.2.1 การตัดจำหน่ายหนี้

การตัดจำหน่ายหนี้ (Write-off) คือการตัดมูลค่าตามบัญชีของสินทรัพย์ทางการเงิน ออกทั้งหมดหรือบางส่วน เมื่อไม่มีความคาดหวังอย่างสมเหตุสมผลว่าจะเรียกเก็บได้ การตัดจำหน่ายเป็นรายการทางบัญชีและไม่จำเป็นต้องหมายถึงการยกหนี้ให้ลูกหนี้ สิทธิทางกฎหมายในการติดตามเรียกเก็บอาจยังคงอยู่ตามกฎหมายและเงื่อนไขของสัญญา

การตัดจำหน่ายควรแยกจาก

- **การยกหนี้** (Debt Forgiveness) ซึ่งเจ้าหนี้สละสิทธิเรียกร้อง และ
- **การขายหนี้** ซึ่งสิทธิเรียกร้องถูกโอนไปยังผู้ซื้อ โดยราคาขายอาจสูงหรือต่ำกว่ามูลค่าตามบัญชีสุทธิ

5.4.2.2 ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตและ Coverage Ratio

ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตเป็นบัญชีปรับมูลค่าสินทรัพย์ เพื่อสะท้อนผลขาดทุนที่คาดว่าจะเกิดขึ้น ไม่ใช่เงินสดที่ถูกแยกเก็บไว้ในบัญชีเฉพาะเสมอไป อัตราส่วนที่ใช้ติดตามความสามารถในการรองรับ NPL คือ

$$\text{NPL Coverage Ratio} = \frac{\text{ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตที่เกี่ยวข้อง}}{\text{ยอด NPL ขั้นต้น}} \times 100\% \quad (5.36)$$

อัตราส่วนที่สูงกว่า 100% ไม่ได้หมายความว่า จะเรียกเก็บหนี้ไม่ได้ทั้งหมด แต่หมายความว่าค่าเผื่อที่มีอยู่มากกว่ายอด NPL ขั้นต้นตามตัวส่วนที่เลือกใช้ การเปรียบเทียบระหว่างสถาบันต้องตรวจสอบนิยามของตัวเลข และตัวส่วนให้ตรงกัน

ตัวอย่าง 5.8. ธนาคารแห่งหนึ่งพิจารณาขาย NPL ซึ่งมียอดตามบัญชีขั้นต้น 300,000 บาท คาดว่าจะได้รับกระแสเงินสดสุทธิ 100,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 1, 2, 3 โดยความน่าจะเป็นที่จะได้รับกระแสเงินสดของแต่ละปีเท่ากับ 0.6, 0.4, 0.2 ตามลำดับ ใช้อัตราคิดลดร้อยละ 12 ต่อปี จงหา

- 1) มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดคาดหวัง
- 2) ส่วนลดจากยอดหนี้ขั้นต้นหากขายที่มูลค่าดังกล่าว
- 3) ค่าเผื่อที่สอดคล้องกับ Coverage Ratio ร้อยละ 80

วิธีทำ กระแสเงินสดคาดหวังในปีที่ 1, 2, 3 เท่ากับ 60,000, 40,000, 20,000 บาท จึงได้

$$V_0 = \frac{60,000}{1.12} + \frac{40,000}{1.12^2} + \frac{20,000}{1.12^3} = 99,694.79 \text{ บาท}$$

หากขายที่ราคานี้ ส่วนลดจากยอดหนี้ขั้นต้นเท่ากับ

$$300,000 - 99,694.79 = 200,305.21 \text{ บาท,}$$

หรือ

$$\frac{200,305.21}{300,000} \times 100 = 66.77\%$$

หากกำหนด Coverage Ratio ร้อยละ 80 ค่าเผื่อเป้าหมายคือ

$$0.80(300,000) = 240,000 \text{ บาท}$$

อย่างไรก็ตาม ค่าเผื่อที่ต้องรับรู้ตาม TFRS 9 ต้องคำนวณจาก ECL ไม่ใช่กำหนดจาก Coverage Ratio เพียงอย่างเดียว ☐

หลักสำคัญในการประเมิน NPL

- 1) ประเมินกระแสเงินสดสุทธิจากการชำระหนี้ การปรับโครงสร้าง และหลักประกัน
- 2) ใช้หลายสถานการณ์และน้ำหนักความน่าจะเป็นเมื่อมีความไม่แน่นอนที่มีสาระสำคัญ
- 3) คัดลดด้วยอัตราที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์และมาตรฐานที่ใช้
- 4) แยกมูลค่าตามบัญชี ค่าเผื่อ ราคาขาย และยอดหนี้ตามกฎหมายออกจากกัน

5.5 การบริหารหนี้และการจัดการหนี้อย่างมีประสิทธิภาพ

การบริหารหนี้ (Debt Management) คือกระบวนการวางแผน ควบคุม ติดตาม และปรับโครงสร้างภาระหนี้ เพื่อให้ผู้กู้สามารถชำระหนี้ได้ตรงเวลา รักษาสภาพคล่อง ลดต้นทุนทางการเงิน และจำกัดความเสี่ยงจากเหตุการณ์ที่ไม่คาดคิด เป้าหมายไม่ใช่เพียงการมีหนี้ที่น้อยที่สุด แต่คือการมีโครงสร้างหนี้ที่เหมาะสม กับรายได้ กระแสเงินสด อายุของสินทรัพย์ และความเสี่ยงที่ยอมรับได้

5.5.1 แนวทางสำคัญในการบริหารหนี้

- 1) **จัดทำบัญชีหนี้ทั้งหมด** ระบุเจ้าหนี้ ยอดคงเหลือ อัตราดอกเบี้ย ค่างวด วันครบกำหนด ค่าปรับ หลักประกัน และเงื่อนไขการชำระก่อนกำหนด การดูเฉพาะค่างวดโดยไม่ดูยอดหนี้และอัตราดอกเบี้ยอาจทำให้ประเมินภาระต่ำเกินจริง
- 2) **รักษาเงินสำรองฉุกเฉิน** เงินสำรองช่วยลดความจำเป็นในการใช้สินเชื่อดอกเบี้ยสูงเมื่อรายได้สะดุด และลดโอกาสผิมนัดจากเหตุการณ์ชั่วคราว
- 3) **กำหนดลำดับการชำระหนี้** สองแนวทางที่ใช้บ่อยคือ
 - **Debt Avalanche** ชำระขั้นต่ำทุกบัญชี แล้วนำเงินส่วนเกินไปชำระหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ยสูงที่สุดก่อน โดยทั่วไปช่วยลดดอกเบี้ยรวม
 - **Debt Snowball** ชำระหนี้ที่มียอดคงเหลือน้อยที่สุดก่อน เพื่อให้เห็นความก้าวหน้าเร็วและเพิ่มแรงจูงใจ

การเลือกวิธีควรพิจารณาทั้งต้นทุนทางคณิตศาสตร์และพฤติกรรมของผู้กู้

- 4) หลีกเลี่ยงการก่อหนี้ใหม่เพื่อชำระหนี้เดิมโดยไม่มีแผน การรวมหนี้หรือรีไฟแนนซ์มีประโยชน์เมื่ออัตราดอกเบี้ยและต้นทุนรวมลดลงจริง ระยะเวลาไม่ยาวเกินควร และผู้กู้ควบคุมการใช้จ่ายเงินเดิมได้
- 5) เปรียบปรับโครงสร้างหนี้ก่อนผิต้นรุนแรง ทางเลือกอาจประกอบด้วย การลดค่างวดชั่วคราว ขยายระยะเวลา ลดอัตราดอกเบี้ย พักชำระเงินต้น หรือแปลงหนี้ระยะสั้นเป็นระยะยาว แต่ต้องประเมินดอกเบี้ยรวมและผลกระทบต่อเครดิตด้วย
- 6) ติดตามแผนและทดสอบภาวะวิกฤต ควรจำลองกรณีรายได้ลดลง ดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น หรือมีค่าใช้จ่ายฉุกเฉิน เพื่อดูว่ากระแสเงินสดยังรองรับค่างวดได้หรือไม่

5.5.2 ตัวชี้วัดความสามารถในการชำระหนี้

5.5.2.1 สัดส่วนภาระหนี้ต่อรายได้

สำหรับบุคคลหรือครัวเรือน นิยมใช้

$$DTI = \frac{\text{ภาระชำระหนี้ต่อเดือนทั้งหมด}}{\text{รายได้ต่อเดือนที่ใช้เป็นฐาน}} \times 100\% \quad (5.37)$$

ฐานรายได้อาจเป็นรายได้ขั้นต้นหรือรายได้สุทธิ ขึ้นอยู่กับเกณฑ์ของผู้ให้กู้ จึงต้องระบุนิยามทุกครั้ง ค่า DTI ที่เหมาะสมไม่มีเกณฑ์เดียวสำหรับทุกคน เพราะยังขึ้นกับความมั่นคงของรายได้ จำนวนผู้พึ่งพิง ค่าใช้จ่ายจำเป็น และเงินสำรองที่มีอยู่

5.5.2.2 อัตราส่วนความสามารถในการชำระดอกเบี้ย

สำหรับธุรกิจ ใช้

$$ICR = \frac{EBIT}{\text{ดอกเบี้ยจ่ายในช่วงเวลาเดียวกัน}} \quad (5.38)$$

ค่า ICR สูงแสดงว่ากำไรก่อนดอกเบี้ยและภาษีมีส่วนเผื่อรองรับดอกเบี้ยมาก แต่ ICR ไม่สะท้อนการชำระคืนเงินต้น จึงควรพิจารณาควบคู่กับกระแสเงินสด และอัตราส่วนความสามารถในการชำระหนี้ทั้งหมด

5.5.2.3 อัตราส่วนความสามารถในการชำระหนี้ทั้งหมด

อัตราส่วน Debt Service Coverage Ratio (DSCR) เขียนโดยทั่วไปเป็น

$$DSCR = \frac{\text{กระแสเงินสดที่พร้อมสำหรับชำระหนี้}}{\text{เงินต้นและดอกเบี้ยที่ครบกำหนดในช่วงเวลาเดียวกัน}} \quad (5.39)$$

หาก $DSCR < 1$ กระแสเงินสดในช่วงเวลานั้นไม่เพียงพอชำระหนี้ทั้งหมด โดยไม่ใช้เงินออมหรือแหล่งเงินอื่น

5.5.2.4 ประวัติเครดิตและพฤติกรรมการชำระหนี้

ประวัติการชำระตรงเวลา จำนวนบัญชีสินเชื่อ ระดับการใช้วงเงิน อายุบัญชี และการขอสินเชื่อใหม่ เป็นข้อมูลสำคัญที่ผู้ให้กู้นำไปสร้างแบบจำลองเครดิต แต่ช่วงคะแนนและเกณฑ์อนุมัติแตกต่างกันระหว่างสถาบันและประเทศ จึงไม่ควรนำช่วงคะแนนของระบบใดระบบหนึ่งมาใช้เป็นเกณฑ์ทั่วไปโดยไม่มีแหล่งอ้างอิง

ตัวอย่าง 5.9. คราวเรือนหนึ่งมีรายได้ต่อเดือน 45,000 บาท และมีภาระชำระหนี้ดังนี้

รายการ	ยอดหนี้	อัตราดอกเบี้ยต่อปี	ค้างงวดต่อเดือน
บัตรเครดิต	120,000	18%	5,000
รถยนต์	240,000	6%	6,500
สินเชื่อบ้าน	1,200,000	3.5%	9,000

หลังหักค่าใช้จ่ายจำเป็น คราวเรือนมีกระแสเงินสดพร้อมชำระหนี้เดือนละ 15,000 บาท จงวิเคราะห์สถานะหนี้ และประเมินผลของการเพิ่มเงินชำระ บัตรเครดิตจาก 5,000 เป็น 8,000 บาทต่อเดือน โดยสมมติว่าไม่มีการใช้บัตรเพิ่มและดอกเบี้ยคิดทบต้นรายเดือน

วิธีทำ ภาระชำระหนี้รวมต่อเดือนเท่ากับ

$$5,000 + 6,500 + 9,000 = 20,500 \text{ บาท}$$

ดังนั้น

$$DTI = \frac{20,500}{45,000} \times 100 = 45.56\%$$

เมื่อใช้กระแสเงินสดหลังค่าใช้จ่ายจำเป็นเป็นตัวเศษ

$$DSCR = \frac{15,000}{20,500} = 0.73$$

แม้การคำนวณเฉพาะดอกเบี้ยอาจดูว่าชำระได้ แต่ DSCR ต่ำกว่า 1 แสดงว่ากระแสเงินสดประจำไม่พอชำระค่างวดทั้งหมด คราวเรือนจึงต้องลดค่าใช้จ่าย เพิ่มรายได้ หรือปรับโครงสร้างหนี้

สำหรับหนี้บัตรเครดิต อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเท่ากับ $0.18/12 = 0.015$ หากชำระเดือนละ 5,000 บาท จะปิดหนี้ได้ในประมาณ 30 เดือน และจ่ายดอกเบี้ยรวมประมาณ 29,876.22 บาท หากเพิ่มเป็นเดือนละ 8,000 บาท จะปิดหนี้ได้ในประมาณ 18 เดือน และจ่ายดอกเบี้ยรวมประมาณ 16,965.87 บาท จึงลดระยะเวลาประมาณ 12 เดือน และประหยัดดอกเบี้ยประมาณ 12,910.35 บาท ภายใต้สมมติฐานที่กำหนด

□

หลักปฏิบัติในการบริหารหนี้

ชำระตรงเวลา รู้ต้นทุนรวม รักษาเงินสำรอง ให้ความสำคัญกับหนี้ดอกเบี้ยสูง ตรวจสอบกระแสเงินสดหลังค่าใช้จ่ายจำเป็น และขอปรับโครงสร้างหนี้ตั้งแต่เริ่มเห็นสัญญาณว่าค่างวดเกินกำลัง

บทสรุปท้ายบทที่ 5

บทนี้เริ่มจากความหมายและการจำแนกสินเชื่อตามวัตถุประสงค์ ระยะเวลา หลักประกัน ลักษณะวงเงิน รูปแบบการชำระ และคุณภาพของสินเชื่อ การจำแนกเหล่านี้ช่วยให้ผู้กู้เข้าใจต้นทุนและความเสี่ยงของสัญญา และช่วยให้ผู้ให้กู้กำหนดเงื่อนไขให้สอดคล้องกับกระแสเงินสดของลูกค้า

สำหรับวิธีตัดจ่าย เงินชำระงวดที่ k แบ่งเป็นดอกเบี้ย $I_k = i_k S_{k-1}$ และเงินต้น $P_k = r_k - I_k$ ทำให้ยอดหนี้เปลี่ยนแปลงตาม

$$S_k = (1 + i_k)S_{k-1} - r_k$$

เมื่ออัตราดอกเบี้ยคงที่ หนี้คงเหลือสามารถคำนวณได้ทั้งจากมูลค่าปัจจุบัน ของเงินชำระที่เหลือ หรือจากมูลค่าสะสมของเงินกู้หักเงินชำระที่ผ่านมา สองวิธีนี้เรียกว่าวิธีมองไปข้างหน้าและวิธีมองย้อนหลัง

วิธีเงินทุนสะสมแยกการชำระดอกเบี้ยออกจากการฝากเงินในกองทุน ยอดหนี้ตามสัญญายังคงเท่ากับเงินต้นจนถึงวันครบกำหนด แต่หนี้สุทธิจะลดลงตามมูลค่ากองทุน หากอัตราดอกเบี้ยเงินกู้เท่ากับผลตอบแทนกองทุน กระแสเงินสดออกต่อคาบจะเท่ากับค่างวดของวิธีตัดจ่าย แม้โครงสร้างทางการเงินและความเสี่ยงจะแตกต่างกัน

ในส่วนของ NPL การประเมินที่เหมาะสมต้องพิจารณากระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ จากการชำระ การปรับโครงสร้าง และหลักประกัน ภายใต้หลายสถานการณ์ และคิดลดมายังวันประเมิน การตั้งค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตตาม TFRS 9 อาศัยแนวคิด Expected Credit Loss ไม่ใช่อัตราสำรองตายตัวเพียงอย่างเดียว

ท้ายที่สุด การบริหารหนี้ที่มีประสิทธิภาพต้องเชื่อมโยงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับพฤติกรรมและข้อจำกัดจริงของผู้กู้ ตัวชี้วัดอย่าง DTI, ICR และ DSCR ช่วยให้เห็นภาระจากมุมมองต่างกัน แต่ไม่ควรใช้ตัวเลขใดตัวเลขหนึ่งตัดสินโดยลำพัง การรักษาวินัยชำระหนี้ เงินสำรองฉุกเฉิน และการปรับแผนก่อนเกิดการผิดนัด เป็นองค์ประกอบสำคัญของความมั่นคงทางการเงินในระยะยาว

เอกสารอ้างอิง

- [1] มานพ วราภักดิ์. (2549). *ทฤษฎีดอกเบี้ย*. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [2] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2552). *CISA ระดับ 1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณ กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร: ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.
- [3] Kellison, S. G. (2009). *The Theory of Interest* (3rd ed.). McGraw-Hill/Irwin.
- [4] Bank of Thailand. (2025). *Sustainable Solutions to Thailand's Household Debt Problems*. Available from [Bank of Thailand website](#).
- [5] Bank of Thailand. (2026). *Banking Sector Quarterly Brief: Q1 2026*. Available from [Bank of Thailand website](#).
- [6] ธนาคารแห่งประเทศไทย. (2563). *พร้อมรับมือกับมาตรฐานใหม่ TFRS 9*. สืบค้นจาก [เว็บไซต์ธนาคารแห่งประเทศไทย](#).
- [7] สภาวิชาชีพบัญชี ในพระบรมราชูปถัมภ์. (2564). *สรุปประเด็นสำคัญมาตรฐานการรายงานทางการเงิน กลุ่มเครื่องมือทางการเงิน*.
- [8] IFRS Foundation. (2024). *IFRS 9 Financial Instruments*. London: IFRS Foundation.
- [9] World Bank. (2022). *Global Financial Development Report 2022: Banking on SMEs*. Washington, DC: World Bank.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่าชำระเงินทุกปลายงวด อัตราที่กำหนดเป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่องวด และให้ใช้ค่าที่ไม่ขัดแย้งระหว่างการคำนวณ ก่อนตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

- 1) (ระดับ ยาก) นายบีชำระหนี้ทุกสิ้นปี ปีละ 100,000 บาท เป็นเวลา 15 ปี โดยอัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็น

k	1	2	3	4	5	6	7	8
i_k	.02	.03	.03	.04	.05	.06	.06	.06

k	9	10	11	12	13	14	15
i_k	.06	.06	.06	.06	.06	.06	.06

จงหา

- จำนวนเงินกู้ ณ เวลา 0
 - มูลค่าสะสมของเงินกู้ ณ ปลายปีที่ 15
 - หนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ 12
 - ดอกเบี้ยและเงินต้นในการชำระงวดที่ 13
- 2) (ระดับ ปานกลาง) นายสมชายกู้เงินจากกองทุนเพื่อการศึกษาและชำระทุกสิ้นปี ปีละ 100,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6.5 ต่อปี จงหาเงินกู้เริ่มต้น หนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 6 และดอกเบี้ยกับเงินต้นของงวดที่ 7
- 3) (ระดับ ยาก) นายเอชำระหนี้ทุกสิ้นปี ปีละ 100,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปีใน 5 ปีแรก ร้อยละ 6 ต่อปีใน 8 ปีถัดมา และร้อยละ 8 ต่อปีใน 7 ปีสุดท้าย โดยทราบอัตราทั้งหมดตั้งแต่วันที่สัญญา จงหาเงินกู้เริ่มต้น มูลค่าสะสม ณ ปลายปีที่ 20 หนี้คงเหลือหลังงวดที่ 10 และดอกเบี้ยกับเงินต้นของงวดที่ 11
- 4) (ระดับ ปานกลาง) นายเอกู้เงิน 1,000,000 บาท ชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 48 เดือน ด้วยค่างวดเท่ากัน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหา
- ค่างวดต่อเดือน

- (b) หนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ 18
 - (c) ดอกเบี้ยและเงินต้นของงวดที่ 19
- 5) **(ระดับ ยาก)** นางอรชรชำระหนี้ทุกสิ้นเดือน เดือนละ 5,000 บาท เป็นเวลา 15 เดือน อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปีใน 5 เดือนแรก ร้อยละ 6 ต่อปีใน 5 เดือนถัดมา และร้อยละ 3 ต่อปีใน 5 เดือนสุดท้าย โดยคิดทบต้นรายเดือนและทราบอัตราทั้งหมดล่วงหน้า จงหา
- (a) เงินกู้เริ่มต้น
 - (b) หนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ 7 ด้วยวิธีมองไปข้างหน้า
 - (c) หนี้คงเหลือเดียวกันด้วยวิธีมองย้อนหลัง
- 6) **(ระดับ ยาก)** นายเสือใช้วิธีเงินทุนสะสมเป็นเวลา 240 เดือน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 5 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน กองทุนให้ผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 4 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หากเงินจ่ายรวมแก่ธนาคารและกองทุนเท่ากับเดือนละ 20,000 บาท จงหา
- (a) เงินกู้เริ่มต้น
 - (b) ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารต่อเดือน
 - (c) เงินฝากเข้ากองทุนต่อเดือน
 - (d) เงินต้นที่ลดลงในเชิงสุทธิและดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ 120
 - (e) หนี้สุทธิหลังงวดที่ 120
- 7) **(ระดับ ปานกลาง)** นางกวางกู้เงิน 2,000,000 บาทเต็มจำนวนเพื่อซื้อบ้าน และใช้วิธีเงินทุนสะสมเป็นเวลา 120 เดือน ธนาคารและกองทุนใช้อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงหาเงินจ่ายรวมต่อเดือน ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคาร เงินฝากเข้ากองทุน เงินต้นที่ลดลงในเชิงสุทธิของงวดที่ 50 ดอกเบี้ยสุทธิของงวดที่ 50 และหนี้สุทธิหลังงวดที่ 50
- 8) **(ระดับ ยาก)** นายกรจ่ายรวมตามวิธีเงินทุนสะสมเดือนละ 15,000 บาท สัญญาเดิมมีอายุ 60 เดือน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน และกองทุนให้ผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หลังฝากเข้ากองทุนครบ 49 งวด นายกรต้องการปิดหนี้ทั้งหมดในวันชำระงวดที่ 50 จงหาเงินที่ต้องจ่ายเพิ่มในวันดังกล่าว หลังนำเงินสะสมในกองทุน รวมทั้งเงินฝากประจำงวดที่ 50 ไปหักจากเงินต้นแล้ว
- 9) **(ระดับ ยาก)** นายเอกู้เงินจำนวนหนึ่ง ชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หนี้คงเหลือ ทันทีหลัง ชำระงวดที่ 18 เท่ากับ 50,000 บาท

งหาเงินกู้เริ่มต้น

- 10) **(ระดับ ปานกลาง)** ใช้ข้อมูลเดียวกับข้อ 9 แต่หนี้ 50,000 บาทเป็นยอด *ทันทีหลังคิดดอกเบี้ยงวดที่ 18 และก่อนชำระงวดที่ 18* งหาเงินกู้เริ่มต้น และอธิบายว่าทำไมคำตอบจึงต่างจากข้อ 9
- 11) **(ระดับ ยาก)** ยอดหนี้คงเหลือทันทีหลังชำระสามงวดติดต่อกันเท่ากับ 500,000 บาท 490,000 บาท และ 479,900 บาท ตามลำดับ โดยค้างงวดเท่ากันและอัตราดอกเบี้ยต่อเดือนคงที่ งหาค้างงวด อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน และอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน
- 12) **(ระดับ ง่าย)** นายเอกู้เงิน 100,000 บาท ชำระเงินต้นคงที่เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 10 เดือน และชำระดอกเบี้ยของเดือนนั้นเพิ่มเติม ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน จงสร้างตารางการชำระหนี้ครบทุกงวด พร้อมหาดอกเบี้ยรวม
- 13) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเอกู้เงินและชำระทุกสิ้นเดือนด้วยค้างงวดเท่ากัน เป็นเวลา 24 เดือน อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 12 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน หนี้คงเหลือทันทีหลังชำระงวดที่ 15 เท่ากับ 20,000 บาท งหาค้างงวดต่อเดือนและเงินกู้เริ่มต้น พร้อมตรวจสอบยอดหนี้หลังงวดที่ 15 ด้วยทั้งวิธีมองไปข้างหน้า และวิธีมองย้อนหลัง
- 14) **(ระดับ ยาก)** เงินกู้หนึ่งชำระด้วยค้างงวดคงที่เป็นเวลา 24 เดือน ในการชำระงวดที่ 10 ค้างงวดเท่ากับ 6,000 บาท แบ่งเป็นเงินต้น 5,000 บาทและดอกเบี้ย 1,000 บาท งหาอัตราดอกเบี้ยต่อเดือน เงินกู้เริ่มต้น และอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน
- 15) **(ระดับ ยาก)** เงินกู้หนึ่งใช้วิธีเงินทุนสะสมเป็นเวลา 24 เดือน ผู้กู้จ่ายดอกเบี้ยแก่ธนาคารเดือนละ 1,000 บาท และฝากเข้ากองทุนเดือนละ 5,000 บาท กองทุนให้ผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน งหาเงินกู้เริ่มต้น อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ต่อเดือน และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้เพียงในนามต่อปีที่คิดทบต้นทุกเดือน
- 16) **(ระดับ ปานกลาง)** นายกรู้เงิน 1,000,000 บาทและใช้วิธีเงินทุนสะสมเป็นเวลา 60 เดือน ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี กองทุนให้ผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 9 ต่อปี ทั้งสองอัตราคิดทบต้นทุกเดือน งหาเงินจ่ายรวมต่อเดือน และแยกเป็นดอกเบี้ยกับเงินฝากเข้ากองทุน
- 17) **(ระดับ ปานกลาง)** คุณธนารู้ซื้อโทรทัศน์ราคา 24,000 บาท โดยผ่อนชำระ 12 งวดปลายเดือน ด้วยวิธีลดต้นลดดอก อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามร้อยละ 10 ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน งหา

- (a) ค่างวดต่อเดือน
 - (b) ดอกเบี้ยรวม
 - (c) DTI หลังรวมค่างวดโทรทัศน์ หากมีรายได้ต่อเดือน 18,000 บาท ค่าใช้จ่ายจำเป็น 12,000 บาท และไม่มีหนี้อื่น
 - (d) ประเมินความเหมาะสมของการซื้อสดและการผ่อน โดยระบุสมมติฐานที่ใช้
- 18) **(ระดับ ปานกลาง)** ธนาคารมีลูกหนี้ผิวดิน โดยมูลค่าตามบัญชีก่อนหักค่าเผื่อเท่ากับ เงินต้น 50,000 บาทและดอกเบี้ยค้างรับ 10,000 บาท คาดว่าจะได้รับเงินสด 35,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 1 และไม่มีเงินรับอื่น ใช้อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงเดิมร้อยละ 5 ต่อปี จงหามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ และค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิตจากวิธีกระแสเงินสดขาดมือ
- 19) **(ระดับ ปานกลาง)** ลูกหนี้รายหนึ่งค้างชำระค่างวดรายเดือนเกิน 90 วัน และมีหลักฐานว่าฐานะการเงินเสื่อมลงอย่างมีนัยสำคัญ ยอดหนี้ตามบัญชีเท่ากับ 400,000 บาท คาดว่าจะได้รับคืนสุทธิจากการชำระและหักประกันเพียงร้อยละ 25 ของยอดหนี้ โดยสมมติว่าได้รับทันทีและไม่ต้องคิดลด จง
- (a) อธิบายเหตุผลที่สินเชื่อนี้ควรพิจารณาเป็น NPL หรือ Stage 3
 - (b) คำนวณ ECL แบบสถานการณ์เดียว
 - (c) คำนวณ NPL Coverage Ratio หากธนาคารมีค่าเผื่อสำหรับลูกหนี้รายนี้ เท่ากับ ECL ที่คำนวณได้
- 20) **(ระดับ ง่าย)** นายสมชายมีรายได้ต่อเดือน 42,000 บาท ผ่อนบ้าน 9,000 บาท ผ่อนรถ 6,000 บาท และชำระบัตรเครดิต 4,000 บาทต่อเดือน จงคำนวณ DTI และอธิบายว่าข้อมูลใดเพิ่มเติมที่ต้องใช้ ก่อนสรุปว่าภาระหนี้อยู่ในระดับเสี่ยงหรือไม่

- 21) **(ระดับ ยาก)** คุณวารินมีหนี้ดังนี้

หนี้	ยอดคงเหลือ	ดอกเบี้ยต่อปี	ค่างวดขั้นต่ำ
บัตรเครดิต A	30,000	18%	2,000
สินเชื่อส่วนบุคคล	45,000	10%	2,500
โทรศัพท์มือถือ	12,000	0%	1,000

มีงบชำระหนี้รวมเดือนละ 7,000 บาท สมมติว่าดอกเบี้ยคิดทบต้นรายเดือน ไม่มีค่าธรรมเนียมและไม่มีการก่อกำหนดเพิ่ม ให้ชำระขั้นต่ำทุกบัญชี และเมื่อหนี้หนึ่งหมดให้นำเงินเดิมไปเพิ่มแก่บัญชีถัดไป จงสร้างตารางจำลองรายเดือนและเปรียบเทียบ

- (a) Debt Snowball
 - (b) Debt Avalanche
 - (c) จำนวนเดือนและดอกเบี้ยรวมของแต่ละวิธี
- 22) (ระดับ ยาก) บริษัท ABC จำกัด ขอสินเชื่อใหม่ 5,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี ชำระด้วยค่างวดเท่ากันทุกสิ้นปีเป็นเวลา 5 ปี บริษัทมี EBIT คงที่ 2,500,000 บาทต่อปี และมีดอกเบี้ยจ่ายจากหนี้เดิม 600,000 บาทต่อปี จง
- (a) หาค่างวดประจำปีของสินเชื่อใหม่
 - (b) สร้างตารางแยกดอกเบี้ยและเงินต้นของสินเชื่อใหม่ครบ 5 ปี
 - (c) คำนวณ ICR ก่อนรับสินเชื่อ และ ICR ของแต่ละปีหลังรับสินเชื่อ โดยรวมดอกเบี้ยของหนี้เดิม
 - (d) ประเมินว่าบริษัทผ่านเกณฑ์ ICR ขั้นต่ำ 2 เท่าทุกปีหรือไม่ และอธิบายข้อจำกัดของการใช้ ICR เพียงตัวเดียว

บทที่ 6 การประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน

เนื้อหาประกอบด้วย

1. ความรู้พื้นฐาน ผลตอบแทน และการประเมินราคาตราสารทุน
2. ผลตอบแทนและการประเมินราคาตราสารหนี้
3. เวลาเทียบเท่า ดูเรชัน และความไวของราคาตราสารหนี้
4. ความผันผวน การประมาณราคา และการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

บทนำ

ตลาดทุนเป็นกลไกสำคัญในการระดมเงินออมระยะกลางและระยะยาวไปสู่การลงทุนของภาคธุรกิจ ภาครัฐ และโครงการโครงสร้างพื้นฐาน สินทรัพย์ทางการเงินที่ซื้อขายในตลาดทุนมีหลายประเภท แต่บทนี้มุ่งเน้นสองกลุ่มหลัก ได้แก่ **ตราสารทุน** ซึ่งให้สิทธิในความเป็นเจ้าของกิจการ และ **ตราสารหนี้** ซึ่งก่อให้เกิดสิทธิเรียกร้องตามสัญญาต่อผู้ออกตราสาร

หลักร่วมของการประเมินราคาสินทรัพย์ทั้งสองประเภทคือ **มูลค่าของสินทรัพย์เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต** อย่างไรก็ตาม กระแสเงินสดของตราสารทุนมีความไม่แน่นอนสูงกว่า เพราะเงินปันผลและราคาขายในอนาคตขึ้นกับผลประกอบการและนโยบายของบริษัท ในขณะที่กระแสเงินสดตามสัญญาของตราสารหนี้มักกำหนดไว้ล่วงหน้า แต่ยังมีความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย เครดิต สภาพคล่อง และการไถ่ถอนก่อนกำหนด

บทนี้เริ่มจากตัวแบบคิดลดเงินปันผลสำหรับตราสารทุน จากนั้นพัฒนาสูตรการประเมินราคาตราสารหนี้ในหลายกรณี รวมถึงมูลค่าตามบัญชี ราคาคลีน ราคากรอสส์ และดอกเบี้ยค้างรับ ส่วนท้ายของบทอธิบายเวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด ดูเรชันแมคคอกเลย์ ดูเรชันดัดแปลง ความผันผวน และหลักการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย เพื่อเชื่อมโยงการประเมินราคาเข้ากับการบริหารความเสี่ยงของพอร์ตตราสารหนี้อย่างเป็นระบบ

ข้อสังเกต

ทุกสูตรในบทนี้ใช้หลัก *ฐานเวลาเดียวกัน* กล่าวคือ อัตราผลตอบแทนและช่วงเวลาของกระแสเงินสดต้องสอดคล้องกัน หากกระแสเงินสดจ่ายทุกครึ่งปี ต้องใช้อัตราผลตอบแทนต่อครึ่งปี หรือแปลงอัตรารายปีให้เป็นอัตราต่อครึ่งปีที่สมมูลก่อนเสมอ

6.1 ความรู้พื้นฐาน ผลตอบแทน และการประเมินราคาตราสารทุน

ตราสารทุนเป็นหลักทรัพย์ที่แสดงสิทธิความเป็นเจ้าของในกิจการ ผู้ลงทุนจึงไม่ได้รับกระแสเงินสดที่กำหนดแน่นอนตามสัญญาเหมือนผู้ถือตราสารหนี้ แต่ได้รับผลตอบแทนตามผลประกอบการ นโยบายการจ่ายเงินปันผล และราคาของผู้ลงทุนรายอื่นยินดีซื้อขายในตลาด ก่อนพัฒนาตัวแบบประเมินราคา จึงจำเป็นต้องเข้าใจฐานะของผู้ถือหุ้น ชนิดของหุ้น ความหมายของราคาและมูลค่า โครงสร้างเงินปันผล การเปลี่ยนแปลงจำนวนหุ้น และความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องให้ชัดเจน

6.1.1 ความหมาย บทบาท และกลไกของตราสารทุน

บทนิยาม 6.1

ตราสารทุน (Equity Security) คือหลักทรัพย์ที่แสดงสิทธิส่วนได้เสียในสินทรัพย์สุทธิ และผลการดำเนินงานของกิจการ หลังจากหักสิทธิเรียกร้องของเจ้าหนี้และภาระผูกพันอื่นแล้ว ผู้ถือตราสารทุนจึงมีฐานะเป็นผู้รับสิทธิคงเหลือ (residual claimant) มีใช่เจ้าหนี้ของกิจการ

สิทธิสำคัญของผู้ถือหุ้นอาจประกอบด้วย

- 1) สิทธิได้รับเงินปันผลเมื่อบริษัทประกาศจ่าย
- 2) สิทธิออกเสียงและมีส่วนกำกับดูแลกิจการตามชนิดและจำนวนหุ้นที่ถือ
- 3) สิทธิได้รับส่วนแบ่งสินทรัพย์คงเหลือเมื่อเลิกกิจการ หลังชำระหนี้และสิทธิที่มีลำดับสูงกว่าแล้ว
- 4) สิทธิซื้อหุ้นออกใหม่ก่อนบุคคลภายนอกในบางกรณี เพื่อรักษาสัดส่วนความเป็นเจ้าของ
- 5) ความรับผิดชอบจำกัด โดยทั่วไปผู้ถือหุ้นรับความเสี่ยงไม่เกินเงินที่ลงทุน เว้นแต่มีการละเมิดกฎหมายหรือข้อตกลงเฉพาะ

การระดมทุนและการซื้อขายหุ้นเกิดขึ้นในสองตลาดที่มีบทบาทต่างกัน

- **ตลาดแรก (Primary Market)** เป็นการออกหุ้นใหม่เพื่อระดมทุนเข้าสู่บริษัท เช่น การเสนอขายหุ้นครั้งแรก และการเพิ่มทุน
- **ตลาดรอง (Secondary Market)** เป็นการซื้อขายหุ้นที่ออกแล้วระหว่างผู้ลงทุน เงินซื้อขายจึงเปลี่ยนมือระหว่างผู้ลงทุน มิได้เข้าสู่บริษัทโดยตรง แต่ตลาดรองช่วยสร้างสภาพคล่องและทำให้เกิดราคาตลาดที่ใช้อ้างอิง

ข้อสังเกต

ตราสารทุนโดยทั่วไปไม่มีวันครบกำหนดและไม่มีภาระบังคับให้บริษัทจ่ายเงินปันผลทุกงวด แม้บริษัทมีกำไร คณะกรรมการอาจเลือกเก็บกำไรไว้ลงทุนต่อได้ ดังนั้นการประเมินราคาหุ้นต้องอาศัยการคาดการณ์มากกว่าการประเมินตราสารหนี้

6.1.2 ประเภทของตราสารทุนและลำดับสิทธิเรียกร้อง

ตราสารทุนพื้นฐานแบ่งเป็นหุ้นสามัญและหุ้นบุริมสิทธิ ความแตกต่างที่สำคัญสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ประเด็น	หุ้นสามัญ	หุ้นบุริมสิทธิ
ฐานะทางเศรษฐกิจ	ผู้เป็นเจ้าของและผู้รับสิทธิคงเหลือขั้นสุดท้าย	อยู่ในส่วนของเจ้าของ แต่ได้รับสิทธิบางประการก่อนหุ้นสามัญ
สิทธิออกเสียง	โดยทั่วไปมีสิทธิออกเสียง	มักจำกัดหรือไม่มีสิทธิออกเสียง เว้นแต่สัญญากำหนด
เงินปันผล	ไม่แน่นอน ขึ้น กับ กำไร และ นโยบายบริษัท	มัก กำหนด อัตรา หรือ จำนวน ไว้ ล่วงหน้า แต่การจ่ายยังขึ้นกับเงื่อนไขของหุ้น
ลำดับรับเงินปันผล	หลังหุ้นบุริมสิทธิ	ก่อนหุ้นสามัญ
ลำดับรับสินทรัพย์เมื่อเลิกกิจการ	หลังเจ้าหนี้และหุ้นบุริมสิทธิ	หลังเจ้าหนี้ แต่ก่อนหุ้นสามัญ
ศักยภาพกำไรจากราคา	สูงกว่าเมื่อกิจการเติบโต	มัก จำกัด กว่า เพราะ ผลตอบแทนมีลักษณะใกล้เคียงที่
ความเสี่ยง	โดยทั่วไปสูงกว่า	โดยทั่วไปต่ำกว่าหุ้นสามัญ แต่สูงกว่าตราสารหนี้ของผู้ออกรายเดียวกัน

หุ้นบุริมสิทธิอาจมีเงื่อนไขสะสมเงินปันผล แบ่งกำไรเพิ่มเติม แปลงสภาพเป็นหุ้นสามัญ หรือให้ผู้ออกไถ่ถอนคืนได้ จึงต้องอ่านข้อกำหนดของตราสารก่อนใช้สูตรประเมินราคา นอกจากนี้ หุ้นบุริมสิทธิบางชนิดที่มีภาระไถ่ถอนหรือจ่ายเงินอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ อาจมีลักษณะทางบัญชีใกล้เคียงหนี้สิน การจัดประเภทจึงขึ้นกับสาระของสัญญา ลำดับสิทธิเรียกร้องโดยสังเขปเป็นดังนี้

เจ้าหนี้ → ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิ → ผู้ถือหุ้นสามัญ

ลำดับที่ต่ำกว่ารับความเสี่ยงมากกว่า แต่มีโอกาสได้รับผลตอบแทนส่วนเกินมากกว่าเช่นกัน



รูปที่ 6.1 ตัวอย่างใบหุ้น ซึ่งเป็นเอกสารแสดงสิทธิความเป็นเจ้าของหุ้นในบริษัท

6.1.3 ความหมายของราคาและมูลค่าหุ้น

คำว่า “ราคาหุ้น” และ “มูลค่าหุ้น” อาจหมายถึงคนละแนวคิด ดังนี้

- 1) **มูลค่าที่ตราไว้ (Par Value)** เป็นมูลค่าต่อหุ้นที่กำหนดในเอกสารจัดตั้งหรือการออกหุ้น ใช้ทางกฎหมายและบัญชีบางประการ แต่ไม่ใช่มูลค่าทางเศรษฐกิจของหุ้น
- 2) **มูลค่าตามบัญชีต่อหุ้น (Book Value per Share: BVPS)** คือส่วนของผู้ถือหุ้นสามัญตามบัญชีหารด้วยจำนวนหุ้นสามัญที่มีสิทธิในส่วนของผู้ถือหุ้น

$$BVPS = \frac{\text{ส่วนของผู้ถือหุ้นที่เป็นของผู้ถือหุ้นสามัญ}}{N}, \quad (6.1)$$

เมื่อ N คือจำนวนหุ้นสามัญที่ใช้คำนวณ

- 3) **ราคาตลาด (Market Price)** คือราคาที่เกิดจากอุปสงค์และอุปทานในตลาด ณ ขณะหนึ่ง ซึ่งอาจสูงหรือต่ำกว่ามูลค่าตามบัญชีได้มาก
- 4) **มูลค่าที่แท้จริงหรือมูลค่าพื้นฐาน (Intrinsic Value)** คือมูลค่าที่ผู้ประเมินคำนวณจาก กระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับและความเสี่ยงที่เหมาะสม มูลค่านี้ขึ้นกับสมมติฐาน จึงไม่จำเป็นต้องเท่ากับราคาตลาด

ข้อสังเกต

การเปรียบเทียบราคาตลาดกับมูลค่าที่แท้จริงเป็นหัวใจของการตัดสินใจลงทุน แต่ “ราคาต่ำ” ไม่ได้แปลว่า “มูลค่าถูก” เสมอไป เพราะราคาต่อหุ้นต้องพิจารณาพร้อมกับจำนวนหุ้น กระแสเงินสด ความเสี่ยง และโอกาสเติบโตของกิจการ

6.1.4 กำไรต่อหุ้น เงินปันผล และอัตราการเติบโตที่ยั่งยืน

กำไรสุทธิของบริษัทอาจถูกแบ่งเป็นเงินปันผลและกำไรสะสม ตัวแปรต่อหุ้นที่ใช้เชื่อมโยงผลประโยชน์จากการประเมินราคา ได้แก่

$$EPS = \frac{\text{กำไรที่เป็นของผู้ถือหุ้นสามัญ}}{\text{จำนวนหุ้นสามัญถัวเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก}}, \quad (6.2)$$

$$DPS = \frac{\text{เงินปันผลของหุ้นสามัญ}}{\text{จำนวนหุ้นสามัญที่มีสิทธิรับเงินปันผล}} \quad (6.3)$$

กำหนดอัตราการจ่ายเงินปันผลและอัตราการเก็บกำไรไว้ลงทุนต่อเป็น

$$\rho = \frac{DPS}{EPS}, \quad b = 1 - \rho, \quad (6.4)$$

เมื่อ ρ คืออัตราการจ่ายเงินปันผล (payout ratio) และ b คืออัตราการเก็บกำไร (retention ratio)

หากบริษัทสามารถนำกำไรสะสมไปลงทุนด้วยอัตราผลตอบแทนต่อส่วนของผู้ถือหุ้น ROE ได้อย่างคงที่ และไม่มีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างทุนอย่างมีนัยสำคัญ อัตราการเติบโตระยะยาวของกำไรและเงินปันผลมักประมาณได้จาก

$$g \approx b \text{ ROE} \quad (6.5)$$

ความสัมพันธ์นี้อธิบายว่า บริษัทจะเติบโตได้จากทั้งสัดส่วนกำไรที่เก็บไว้ และประสิทธิภาพในการสร้างผลตอบแทนจากส่วนของผู้ถือหุ้น

ข้อสังเกต

สูตร $g \approx b \text{ ROE}$ เป็นความสัมพันธ์ภายใต้สมมติฐานค่อนข้างเข้ม ไม่ควรนำอัตราเติบโตสูงในอดีตไปใช้ตลอดไปโดยอัตโนมัติ สำหรับตัวแบบเติบโตคงที่ ต้องเลือก g ที่ยั่งยืนในระยะยาวและต้องมี $g < k_e$

ตัวอย่าง 6.1. การวิเคราะห์กำไรต่อหุ้น นโยบายเงินปันผล และการเติบโตที่ยั่งยืน

บริษัทแห่งหนึ่งมีกำไรสุทธิที่เป็นของผู้ถือหุ้นสามัญ 1,000 ล้านบาท มีจำนวนหุ้นสามัญถัวเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก 400 ล้านหุ้น และประกาศจ่ายเงินปันผลให้แก่ผู้ถือหุ้นสามัญรวม 400 ล้านบาท โดยมีหุ้นที่มีสิทธิรับเงินปันผลจำนวน 400 ล้านหุ้น สมมติว่าบริษัทมีอัตราผลตอบแทนต่อส่วนของผู้ถือหุ้น เท่ากับร้อยละ 14 ต่อปี

ขั้นที่ 1 คำนวณกำไรต่อหุ้นและเงินปันผลต่อหุ้น

$$\begin{aligned} \text{EPS} &= \frac{1,000}{400} = 2.50 \text{ บาทต่อหุ้น,} \\ \text{DPS} &= \frac{400}{400} = 1.00 \text{ บาทต่อหุ้น} \end{aligned}$$

ดังนั้น บริษัทมีกำไรต่อหุ้นเท่ากับ 2.50 บาท แต่จ่ายเป็นเงินปันผลเพียง 1.00 บาทต่อหุ้น ส่วนที่เหลือจะถูกเก็บไว้เป็นกำไรสะสมเพื่อนำไปลงทุนต่อ

ขั้นที่ 2 คำนวณอัตราการจ่ายเงินปันผลและอัตราการเก็บกำไร

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{DPS}}{\text{EPS}} = \frac{1.00}{2.50} = 0.40, \\ b &= 1 - \rho = 1 - 0.40 = 0.60 \end{aligned}$$

บริษัทจึงจ่ายเงินปันผลคิดเป็นร้อยละ 40 ของกำไร และเก็บกำไรไว้ลงทุนต่อคิดเป็นร้อยละ 60 ของกำไร

ขั้นที่ 3 ประเมินอัตราการเติบโตที่ยั่งยืน

เมื่อ $\text{ROE} = 0.14$ จะได้

$$g \approx b \text{ ROE} = (0.60)(0.14) = 0.084$$

ดังนั้น อัตราการเติบโตที่ยั่งยืนของกำไรและเงินปันผล ภายใต้สมมติฐานของตัวแบบเท่ากับประมาณร้อยละ 8.4 ต่อปี

ความหมายในเชิงธุรกิจคือ หากบริษัทสามารถรักษาอัตราผลตอบแทนต่อส่วนของ ผู้ถือหุ้นไว้ที่ร้อยละ 14 และยังคงเก็บกำไรร้อยละ 60 ไว้ลงทุนต่อ บริษัทอาจเพิ่มกำไรและเงินปันผลได้ในอัตราประมาณร้อยละ 8.4 ต่อปี โดยไม่จำเป็นต้องออกหุ้นใหม่เพื่อจัดหาเงินทุนเพิ่มเติม

ขั้นที่ 4 เชื่อมโยงกับการประเมินราคาหุ้น

สมมติว่านักลงทุนต้องการอัตราผลตอบแทนจากส่วนของผู้ถือหุ้น $k_e = 0.12$ หรือร้อยละ 12 ต่อปี เงินปันผลที่คาดว่าจะได้รับในปีถัดไปคือ

$$D_1 = D_0(1 + g) = 1.00(1 + 0.084) = 1.084 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

เนื่องจาก $g = 0.084 < k_e = 0.12$ จึงสามารถใช้ตัวแบบเงินปันผลเติบโตคงที่ได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{D_1}{k_e - g} \\ &= \frac{1.084}{0.12 - 0.084} \\ &= 30.11 \text{ บาทต่อหุ้น} \end{aligned}$$

ภายใต้สมมติฐานดังกล่าว มูลค่าพื้นฐานของหุ้นจึงอยู่ที่ประมาณ 30.11 บาทต่อหุ้น

หากราคาหุ้นในตลาดปัจจุบันเท่ากับ 27.00 บาทต่อหุ้น อัตราผลตอบแทนที่ตลาดต้องการโดยนัยสามารถประมาณได้จาก

$$\begin{aligned} k_e &\approx \frac{D_1}{P_0} + g \\ &= \frac{1.084}{27.00} + 0.084 \\ &= 0.1241 \end{aligned}$$

กล่าวคือ ราคาตลาด 27.00 บาท สะท้อนว่า นักลงทุนกำลังต้องการ อัตราผลตอบแทนประมาณร้อยละ 12.41 ต่อปี หากนักลงทุนประเมินว่าความเสี่ยงของบริษัทเหมาะสมกับผลตอบแทนที่ต้องการ เพียงร้อยละ 12 ราคาตลาดดังกล่าวอาจต่ำกว่ามูลค่าที่ประเมินได้จากตัวแบบ อย่างไรก็ตาม นักลงทุนยังต้องตรวจสอบว่าสมมติฐานเรื่อง ROE และอัตราการเติบโตสามารถรักษาไว้ได้จริงหรือไม่

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ผลของการเปลี่ยนนโยบายเงินปันผล

สมมติว่ากำไรต่อหุ้นยังคงเท่ากับ 2.50 บาท $ROE = 14\%$ และ $k_e = 12\%$ ผลจากนโยบายการจ่ายเงินปันผลที่แตกต่างกันแสดงได้ดังตาราง

อัตราจ่ายเงินปันผล	อัตราเก็บกำไร	D_0	$g = b ROE$	$P_0 = \frac{D_1}{k_e - g}$
30%	70%	0.75	9.8%	37.43
40%	60%	1.00	8.4%	30.11
50%	50%	1.25	7.0%	26.75

ในกรณีนี้ $ROE = 14\%$ สูงกว่าอัตราผลตอบแทนที่นักลงทุนต้องการ $k_e = 12\%$ การเก็บกำไรไว้ลงทุนต่อจึงมีแนวโน้มสร้างมูลค่าเพิ่ม ตัวแบบจึงให้มูลค่าหุ้นสูงขึ้นเมื่อบริษัทลดสัดส่วนการจ่ายเงินปันผล และนำไปลงทุนในโครงการที่ยังให้ผลตอบแทนร้อยละ 14

อย่างไรก็ตาม หากบริษัทนำกำไรสะสมไปลงทุนแล้วได้รับ $ROE < k_e$ การเก็บกำไรไว้มากขึ้นอาจไม่สร้างมูลค่าให้แก่ผู้ถือหุ้น ในกรณีดังกล่าว การจ่ายเงินปันผลคืนแก่ผู้ถือหุ้นอาจเหมาะสมกว่า ดังนั้น การพิจารณานโยบายเงินปันผลต้องวิเคราะห์ทั้ง อัตราการเก็บกำไรและคุณภาพของโครงการลงทุนควบคู่กัน ☐

ข้อสังเกต

การที่บริษัทมีอัตราการเก็บกำไรสูงไม่ได้หมายความว่าบริษัทจะมีมูลค่าสูงขึ้น เสมอไป การเก็บกำไรจะสร้างมูลค่าเมื่อบริษัทสามารถนำเงินดังกล่าวไปลงทุน ด้วยอัตราผลตอบแทนที่สูงกว่าอัตราผลตอบแทนที่ผู้ถือหุ้นต้องการ กล่าวคือ $ROE > k_e$ หาก $ROE < k_e$ การลงทุนต่ออาจทำลายมูลค่า แม้จะทำให้กำไรทางบัญชีเติบโตขึ้นก็ตาม

6.1.5 เหตุการณ์ที่เปลี่ยนจำนวนหุ้นและราคาต่อหุ้น

เหตุการณ์เกี่ยวกับทุนอาจทำให้จำนวนหุ้นและราคาต่อหุ้นเปลี่ยน แม้มูลค่ารวมของผู้ถือหุ้นเดิมอาจไม่เปลี่ยนในเชิงทฤษฎีทันที จึงต้องปรับข้อมูลต่อหุ้นให้เปรียบเทียบกับพื้นฐานเดียวกัน

6.1.5.1 เงินปันผลเงินสดและราคาหลังขึ้นเครื่องหมาย

หากหุ้นจ่ายเงินปันผลเงินสด D บาทต่อหุ้น ภายใต้ตลาดที่ไม่มีภาษี ต้นทุนธุรกรรม และข่าวใหม่อื่น ราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิรับเงินปันผลประมาณได้จาก

$$P_{\text{ex}} \approx P_{\text{cum}} - D \quad (6.6)$$

ในตลาดจริงผลต่างอาจไม่เท่ากับ D พอดี เพราะราคาได้รับอิทธิพลจากข้อมูลและการซื้อขายอื่นพร้อมกัน

6.1.5.2 การแตกหุ้นและหุ้นปันผล

หากหุ้นหนึ่งหุ้นเดิมถูกแตกเป็น m หุ้นใหม่ จำนวนหุ้นและราคาทฤษฎีต่อหุ้นจะปรับเป็น

$$N_{\text{new}} = mN_{\text{old}}, \quad P_{\text{new}} \approx \frac{P_{\text{old}}}{m} \quad (6.7)$$

ดังนั้นมูลค่ารวม NP ของผู้ถือหุ้นเดิมไม่เปลี่ยนจากการแตกหุ้นเพียงอย่างเดียว

หากจ่ายหุ้นปันผลในอัตรา q หุ้นใหม่ต่อหนึ่งหุ้นเดิม จะได้

$$N_{\text{new}} = (1 + q)N_{\text{old}}, \quad P_{\text{new}} \approx \frac{P_{\text{old}}}{1 + q} \quad (6.8)$$

กำไรต่อหุ้นและเงินปันผลต่อหุ้นในอดีตควรปรับย้อนหลังให้สอดคล้องกับจำนวนหุ้นใหม่ ก่อนนำไปประมาณอัตราการเติบโต

ตัวอย่าง 6.2. การวิเคราะห์ผลของเงินปันผลเงินสด การแตกหุ้น และหุ้นปันผล

บริษัทหลักทรัพย์จำลองแห่งหนึ่งมีหุ้นสามัญจำนวน 100 ล้านหุ้น ราคาปิดก่อนขึ้นเครื่องหมายหมดสิทธิรับเงินปันผล เท่ากับ 48.00 บาทต่อหุ้น และประกาศจ่ายเงินปันผลเงินสด 1.50 บาทต่อหุ้น นักลงทุนรายหนึ่งถือหุ้นของบริษัทจำนวน 2,000 หุ้น ให้วิเคราะห์ผลของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. การขึ้นเครื่องหมายหมดสิทธิรับเงินปันผล
2. การแตกหุ้นในอัตรา 2 หุ้นใหม่ต่อ 1 หุ้นเดิม
3. การจ่ายหุ้นปันผลในอัตราร้อยละ 10
4. การปรับกำไรต่อหุ้นและการวิเคราะห์การเติบโตย้อนหลัง

1. ราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิรับเงินปันผล

ราคาทฤษฎีหลังขึ้นเครื่องหมายหมดสิทธิรับเงินปันผลเท่ากับ

$$\begin{aligned} P_{\text{ex}} &\approx P_{\text{cum}} - D \\ &= 48.00 - 1.50 \\ &= 46.50 \text{ บาทต่อหุ้น} \end{aligned}$$

ก่อนขึ้นเครื่องหมาย นักลงทุนมีมูลค่าหุ้นในพอร์ตเท่ากับ

$$2,000(48.00) = 96,000 \text{ บาท}$$

เมื่อหุ้นขึ้นเครื่องหมายหมดสิทธิรับเงินปันผล มูลค่าหุ้นตามราคาทฤษฎีจะเหลือ

$$2,000(46.50) = 93,000 \text{ บาท}$$

ขณะเดียวกัน นักลงทุนมีสิทธิได้รับเงินปันผล

$$2,000(1.50) = 3,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่ารวมทางทฤษฎีหลังหมดสิทธิรับเงินปันผลคือ

$$93,000 + 3,000 = 96,000 \text{ บาท}$$

ในตลาดที่ไม่มีภาษีและต้นทุนธุรกรรม ความมั่งคั่งรวมของนักลงทุนจึงไม่เปลี่ยนแปลงทันที เพียงแต่มูลค่าบางส่วนถูกเปลี่ยนจากราคาหุ้นเป็นเงินปันผลเงินสด

การเปรียบเทียบกับราคาที่เกิดขึ้นจริง

สมมติว่าราคาปิดในวันขึ้นเครื่องหมายเท่ากับ 47.20 บาทต่อหุ้น ซึ่งสูงกว่าราคาทฤษฎี 46.50 บาท มูลค่ารวมของนักลงทุนจะเป็น

$$2,000(47.20) + 3,000 = 97,400 \text{ บาท}$$

ผลต่างจากมูลค่าทฤษฎีเท่ากับ

$$97,400 - 96,000 = 1,400 \text{ บาท}$$

ผลต่างนี้ไม่ได้เกิดจากเงินปันผลเพียงอย่างเดียว แต่อาจสะท้อนข้อมูลใหม่เกี่ยวกับผลประกอบการ ภาวะตลาด อุปสงค์และอุปทาน หรือความคาดหวังของนักลงทุน ที่เกิดขึ้นพร้อมกันในวันซื้อขายดังกล่าว

2. ผลของการแตกหุ้นในอัตรา 2 ต่อ 1

ต่อมาบริษัทประกาศแตกหุ้นในอัตรา 2 หุ้นใหม่ต่อ 1 หุ้นเดิม ดังนั้น $m = 2$

จำนวนหุ้นทั้งหมดของบริษัทจะเพิ่มจาก

$$N_{\text{old}} = 100 \text{ ล้านหุ้น}$$

เป็น

$$N_{\text{new}} = 2(100) = 200 \text{ ล้านหุ้น}$$

หากใช้ราคาก่อนแตกหุ้นเท่ากับ 46.50 บาท ราคาทฤษฎีหลังแตกหุ้นจะเป็น

$$P_{\text{new}} \approx \frac{46.50}{2} = 23.25 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

นักลงทุนซึ่งเดิมถือหุ้น 2,000 หุ้น จะมีหุ้นหลังการแตกหุ้นเท่ากับ

$$2(2,000) = 4,000 \text{ หุ้น}$$

มูลค่าหุ้นในพอร์ตหลังแตกหุ้นคือ

$$4,000(23.25) = 93,000 \text{ บาท}$$

ซึ่งเท่ากับมูลค่าหุ้นก่อนแตกหุ้น

$$2,000(46.50) = 93,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น การแตกหุ้นเพียงอย่างเดียวไม่ได้สร้างมูลค่าเพิ่มให้แก่ผู้ถือหุ้น แต่ทำให้ราคาต่อหุ้นลดลงและจำนวนหุ้นเพิ่มขึ้นตามสัดส่วนเดียวกัน ซึ่งอาจช่วยให้หุ้นมีราคาซื้อขายต่อหน่วยที่เข้าถึงได้ง่ายขึ้น

3. การปรับตัวเลขต่อหุ้นหลังการแตกหุ้น

สมมติว่าก่อนแตกหุ้น บริษัทมีกำไรต่อหุ้น $EPS = 6.00$ บาท และเงินปันผลต่อหุ้น $DPS = 1.50$ บาท ภายหลังการแตกหุ้น 2 ต่อ 1 ตัวเลขต่อหุ้นต้องปรับเป็น

$$EPS_{\text{adjusted}} = \frac{6.00}{2} = 3.00 \text{ บาทต่อหุ้น,}$$

$$DPS_{\text{adjusted}} = \frac{1.50}{2} = 0.75 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

ก่อนการแตกหุ้น อัตราส่วนราคาต่อกำไรเท่ากับ

$$P/E_{\text{old}} = \frac{46.50}{6.00} = 7.75 \text{ เท่า}$$

หลังการแตกหุ้น อัตราส่วนราคาต่อกำไรเท่ากับ

$$P/E_{\text{new}} = \frac{23.25}{3.00} = 7.75 \text{ เท่า}$$

อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลก่อนแตกหุ้นคือ

$$\frac{1.50}{46.50} = 0.03226 \approx 3.23\%$$

หลังแตกหุ้นจะได้

$$\frac{0.75}{23.25} = 0.03226 \approx 3.23\%$$

จึงเห็นได้ว่าอัตราส่วนทางการเงินไม่ควรเปลี่ยนแปลง จากการแตกหุ้นเพียงอย่างเดียว หากมีการปรับข้อมูลอย่างถูกต้อง

4. ผลของหุ้นปันผลร้อยละ 10

ภายหลังการแตกหุ้น บริษัทประกาศจ่ายหุ้นปันผลในอัตราร้อยละ 10 หรือ $q = 0.10$

จำนวนหุ้นทั้งหมดของบริษัทจะเพิ่มจาก 200 ล้านหุ้นเป็น

$$N_{\text{new}} = (1 + 0.10)(200) = 220 \text{ ล้านหุ้น}$$

ราคาทฤษฎีต่อหุ้นหลังจ่ายหุ้นปันผลเท่ากับ

$$P_{\text{new}} \approx \frac{23.25}{1.10} = 21.1364 \text{ บาทต่อหุ้น.}$$

นักลงทุนซึ่งถือหุ้น 4,000 หุ้น จะได้รับหุ้นปันผล

$$0.10(4,000) = 400 \text{ หุ้น}$$

ดังนั้น นักลงทุนจะถือหุ้นรวม

$$4,000 + 400 = 4,400 \text{ หุ้น}$$

มูลค่าหุ้นรวมทางทฤษฎีหลังจ่ายหุ้นปันผลเท่ากับ

$$4,400(21.1364) \approx 93,000 \text{ บาท}$$

จึงเท่ากับมูลค่าก่อนจ่ายหุ้นปันผลโดยประมาณ การได้รับหุ้นเพิ่มขึ้นจึงไม่ได้หมายความว่านักลงทุนมีความมั่งคั่งเพิ่มขึ้น ในทันที เพราะราคาต่อหุ้นจะปรับลดลงตามจำนวนหุ้นที่เพิ่มขึ้น

5. การปรับ EPS และ DPS หลังจ่ายหุ้นปันผล

กำไรต่อหุ้นและเงินปันผลต่อหุ้นก่อนจ่ายหุ้นปันผล ซึ่งปรับผลของการแตกหุ้นแล้ว เท่ากับ 3.00 บาท และ 0.75 บาท ตามลำดับ

เมื่อจ่ายหุ้นปันผลร้อยละ 10 จะต้องปรับเป็น

$$\begin{aligned} \text{EPS}_{\text{adjusted}} &= \frac{3.00}{1.10} = 2.7273 \text{ บาทต่อหุ้น,} \\ \text{DPS}_{\text{adjusted}} &= \frac{0.75}{1.10} = 0.6818 \text{ บาทต่อหุ้น} \end{aligned}$$

อัตราส่วนราคาต่อกำไรหลังจ่ายหุ้นปันผลจึงเท่ากับ

$$\frac{21.1364}{2.7273} \approx 7.75 \text{ เท่า}$$

ซึ่งยังคงเท่ากับอัตราส่วนเดิม

6. ผลต่อการวิเคราะห์อัตราการเติบโตของกำไรต่อหุ้น

สมมติว่าในปีก่อนบริษัทมีกำไรสุทธิ 600 ล้านบาท และมีหุ้นหลังแตกหุ้นจำนวน 200 ล้านหุ้น จึงรายงานกำไรต่อหุ้นเดิมเป็น

$$EPS_0 = \frac{600}{200} = 3.00 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

หลังจากนั้นบริษัทจ่ายหุ้นปันผลร้อยละ 10 ทำให้จำนวนหุ้นเพิ่มเป็น 220 ล้านหุ้น ในปีถัดมา กำไรสุทธิเพิ่มขึ้นร้อยละ 8 เป็น

$$600(1.08) = 648 \text{ ล้านบาท}$$

กำไรต่อหุ้นของปีถัดไปเท่ากับ

$$EPS_1 = \frac{648}{220} = 2.9455 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

หากนักวิเคราะห์นำ EPS ปีถัดไปไปเปรียบเทียบกับ EPS เดิม 3.00 บาทโดยไม่ปรับย้อนหลัง จะคำนวณอัตราการเติบโตได้เป็น

$$g_{\text{unadjusted}} = \frac{2.9455}{3.00} - 1 = -0.0182 = -1.82\%$$

ผลดังกล่าวทำให้ดูเหมือนว่ากำไรต่อหุ้นลดลงร้อยละ 1.82 ทั้งที่กำไรสุทธิของบริษัทเพิ่มขึ้นจริงร้อยละ 8 EPS ของปีก่อนจึงต้องปรับย้อนหลังตามหุ้นปันผลเป็น

$$EPS_{0,\text{adjusted}} = \frac{3.00}{1.10} = 2.7273 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

อัตราการเติบโตที่ถูกต้องคือ

$$g_{\text{adjusted}} = \frac{2.9455}{2.7273} - 1 = 0.08 = 8.00\%$$

จึงสอดคล้องกับการเพิ่มขึ้นของกำไรสุทธิของบริษัท สรุปผลการวิเคราะห์

เหตุการณ์	จำนวนหุ้นของผู้ลงทุน	ราคาทฤษฎีต่อหุ้น	มูลค่าหุ้นรวม
ก่อนขึ้นเครื่องหมาย	2,000	48.00	96,000
หลังหมดสิทธิรับปันผล	2,000	46.50	93,000
หลังแตกหุ้น 2 ต่อ 1	4,000	23.25	93,000
หลังหุ้นปันผล 10%	4,400	21.1364	93,000

กรณีศึกษาี้แสดงให้เห็นว่าเงินปันผลเงินสด การแตกหุ้น และหุ้นปันผลมีผลต่อจำนวนหุ้นและราคาต่อหุ้นแตกต่างกัน แต่ไม่ได้ทำให้มูลค่ารวมของผู้ถือหุ้นเปลี่ยนแปลงทันทีในเชิงทฤษฎี การวิเคราะห์ข้อมูลจริงจึงต้องปรับ EPS, DPS ราคาหุ้น และข้อมูลต่อหุ้นย้อนหลังให้มีฐานจำนวนหุ้นเดียวกัน ก่อนคำนวณอัตราการเติบโตหรือเปรียบเทียบผลประกอบการระหว่างงวด

ข้อสังเกต

ในการวิเคราะห์หุ้นจริง ควรตรวจสอบวันขึ้นเครื่องหมาย อัตราการแตกหุ้น อัตราหุ้นปันผล และจำนวนหุ้นด้วยแล้วนำหน้าจากประกาศของตลาดหลักทรัพย์และงบการเงินของบริษัท ไม่ควรใช้จำนวนหุ้น ณ วันสิ้นสุดงวดแทนจำนวนหุ้นด้วยโดยอัตโนมัติ เพราะอาจทำให้ EPS และอัตราการเติบโตคลาดเคลื่อนได้

6.1.5.3 การเพิ่มทุนแบบให้สิทธิผู้ถือหุ้นเดิม

สมมติผู้ถือหุ้นเดิมทุก n หุ้นมีสิทธิซื้อหุ้นใหม่ 1 หุ้นที่ราคาใช้สิทธิ S และราคาก่อนหมดสิทธิเท่ากับ P_{cum} ราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิ (Theoretical Ex-Rights Price: TERP) คือ

$$P_{\text{TERP}} = \frac{nP_{\text{cum}} + S}{n + 1} \quad (6.9)$$

มูลค่าทฤษฎีของสิทธิที่ติดมากับหุ้นเดิมหนึ่งหุ้นเท่ากับ

$$V_R = P_{\text{cum}} - P_{\text{TERP}} = \frac{P_{\text{cum}} - S}{n + 1} \quad (6.10)$$

ผู้ถือหุ้นที่ไม่ใช้สิทธิและไม่ขายสิทธิอาจถูกลดสัดส่วนความเป็นเจ้าของและเสียมูลค่าทางเศรษฐกิจ

ตัวอย่าง 6.3. หุ้นบริษัทหนึ่งซื้อขายก่อนหมดสิทธิที่ราคา 50 บาทต่อหุ้น ผู้ถือหุ้นเดิมทุก 4 หุ้นมีสิทธิซื้อหุ้นใหม่ 1 หุ้นที่ราคา 30 บาท จงหาราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิและมูลค่าของสิทธิต่อหุ้นเดิมหนึ่งหุ้น

วิธีทำ จากสมการ (6.9)

$$P_{\text{TERP}} = \frac{4(50) + 30}{5} = 46 \text{ บาท}$$

ดังนั้น จากสมการ (6.10)

$$V_R = 50 - 46 = 4 \text{ บาทต่อหุ้นเดิมหนึ่งหุ้น}$$

□

6.1.6 ผลตอบแทนจากการลงทุนในตราสารทุน

ผลตอบแทนจากการถือหุ้นประกอบด้วยเงินปันผลและกำไรหรือขาดทุนจากส่วนต่างราคา หากซื้อหุ้นที่ราคา P_0 ได้รับเงินปันผล D_1 และขายปลายงวดที่ราคา P_1 อัตราผลตอบแทนจากการถือครองหนึ่งงวดคือ

$$R_1 = \frac{D_1 + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{D_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0} \quad (6.11)$$

ส่วนแรกคืออัตราผลตอบแทนจากเงินปันผล และส่วนที่สองคืออัตรากำไรหรือขาดทุนจากส่วนต่างราคา

หากมีต้นทุนธุรกรรมรวม C_0 เมื่อซื้อและ C_1 เมื่อขาย ควรใช้เงินลงทุนสุทธิและเงินรับสุทธิ ดังนี้

$$R_1^{\text{net}} = \frac{D_1 + P_1 - C_1 - (P_0 + C_0)}{P_0 + C_0} \quad (6.12)$$

สำหรับการลงทุนหลายงวด หากผลตอบแทนในงวดที่ t เท่ากับ R_t ผลตอบแทนสะสมตลอด n งวดคือ

$$1 + R_{0,n} = \prod_{t=1}^n (1 + R_t), \quad (6.13)$$

และผลตอบแทนเฉลี่ยทบต้นต่องวดเท่ากับ

$$\bar{R}_g = \left(\prod_{t=1}^n (1 + R_t) \right)^{1/n} - 1 \quad (6.14)$$

ตัวอย่าง 6.4. ผู้ลงทุนซื้อหุ้นที่ราคา 40 บาท ได้รับเงินปันผล 1.20 บาท และขายปลายปีที่ราคา 44 บาท โดยไม่คิดต้นทุนธุรกรรม จงหาอัตราผลตอบแทนรวม อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผล และอัตราผลตอบแทนจากส่วนต่างราคา

วิธีทำ

$$R_1 = \frac{1.20 + 44 - 40}{40} = 0.13 = 13\%$$

โดยอัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลเท่ากับ $1.20/40 = 3\%$ และอัตราผลตอบแทนจากส่วนต่างราคาเท่ากับ $(44 - 40)/40 = 10\%$ □

หากผลตอบแทนอาจเกิดได้หลายกรณี R_j ด้วยความน่าจะเป็น q_j ค่าคาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนคือ

$$E(R) = \sum_j q_j R_j, \quad \sigma_R = \sqrt{\sum_j q_j (R_j - E(R))^2} \quad (6.15)$$

ค่าคาดหวังสะท้อนผลตอบแทนเฉลี่ยภายใต้แบบจำลอง ส่วน σ_R สะท้อนการกระจายของผลตอบแทน มิได้แสดงความเสี่ยงทุกประเภททั้งหมด

ความเสี่ยงสำคัญของตราสารทุน ได้แก่ ความเสี่ยงธุรกิจ ความเสี่ยงจากการใช้หนี้ ความเสี่ยงตลาด ความเสี่ยงสภาพคล่อง ความเสี่ยงด้านธรรมาภิบาล ความไม่แน่นอนของเงินปันผล และความเสี่ยงจากการเพิ่มทุนหรือการลดสัดส่วนความเป็นเจ้าของ

6.1.7 หลักการประเมินราคาตราสารทุน

หลักการพื้นฐานคือ มูลค่าหุ้นเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เป็นของผู้ถือหุ้น โดยใช้อัตราผลตอบแทนที่สะท้อนความเสี่ยงของกระแสเงินสดนั้น

$$\text{มูลค่าตราสารทุน} = \sum_{t \geq 1} \frac{E(\text{กระแสเงินสดแก่ผู้ถือหุ้น ณ เวลา } t)}{(1 + k_e)^t} \quad (6.16)$$

เมื่อ k_e คืออัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการสำหรับตราสารทุน

แนวทางประเมินราคาที่ใช้กันทั่วไป ได้แก่

- 1) ตัวแบบคิดลดเงินปันผล ซึ่งใช้เงินปันผลที่ผู้ถือหุ้นได้รับจริง

- 2) ตัวแบบกระแสเงินสดอิสระของผู้ถือหุ้น ซึ่งใช้เงินสดที่กิจการสามารถจ่ายให้ผู้ถือหุ้นได้
- 3) การประเมินเชิงเปรียบเทียบด้วยอัตราส่วนราคา เช่น ราคาเทียบกำไรหรือราคาเทียบมูลค่าตามบัญชี

บทนี้มุ่งเน้นตัวแบบคิดลดเงินปันผล เพราะเชื่อมโยงโดยตรงกับหลักมูลค่าปัจจุบัน และสามารถพัฒนาเป็นสูตรเงินงวดและอนุกรมเรขาคณิตได้อย่างชัดเจน

ข้อสังเกต

การประเมินราคาต้องรักษาความสอดคล้องสามประการ ได้แก่ (1) กระแสเงินสดและอัตราคิดลดต้องเป็นของผู้ถือหุ้นกลุ่มเดียวกัน (2) หน่วยเวลาและฐานการทบต้นต้องตรงกัน และ (3) ราคาปลายงวดหรือมูลค่าคงเหลือต้องไม่ทำให้เกิดการนับกระแสเงินสดซ้ำ

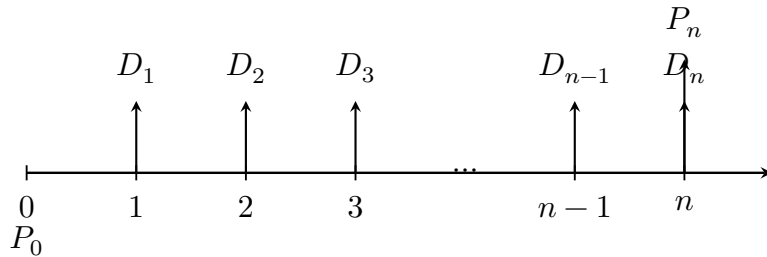
6.1.8 ตัวแบบคิดลดเงินปันผล

บทนิยาม 6.2

ตัวแบบคิดลดเงินปันผล (Dividend Discount Model: DDM) เป็นตัวแบบที่กำหนดให้มูลค่าหุ้นเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลในอนาคต และราคาขายเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาถือครอง โดยคิดลดด้วยอัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ

กำหนดให้

สัญลักษณ์	ความหมาย
D_t	เงินปันผลต่อหุ้นที่ได้รับปลายงวดที่ t
k_e	อัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการต่องวดสำหรับตราสารทุน
$v_e = (1 + k_e)^{-1}$	ตัวประกอบส่วนลดต่องวด
P_n	ราคาขายที่คาดไว้ ณ ปลายงวดที่ n
P_0	ราคาประเมินหุ้น ณ เวลา 0



รูปที่ 6.2 แผนภาพกระแสเงินสดของแบบจำลอง DDP

หากผู้ลงทุนถือหุ้นเป็นเวลา n งวด จะได้

$$P_0 = \sum_{t=1}^n D_t v_e^t + P_n v_e^n \quad (6.17)$$

สูตรนี้เป็นสมการพื้นฐานของการประเมินราคาหุ้นในช่วงเวลาถือครองจำกัด

ข้อสังเกต

k_e ไม่ใช่อัตราดอกเบี้ยที่บริษัทรับประกัน แต่เป็นอัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ ซึ่งสะท้อนความเสี่ยงของกิจการ ความผันผวนของกำไร โครงสร้างเงินทุน สภาพคล่องของหุ้น และภาวะตลาด ดังนั้นผู้ประเมินต่างรายอาจได้ราคาประเมินต่างกัน แม้ใช้ประมาณการเงินปันผลชุดเดียวกัน

6.1.9 กรณีสำคัญของตัวแบบคิดลดเงินปันผล

6.1.9.1 เงินปันผลคงที่และถือครองจำกัด

หาก $D_t = D$ สำหรับทุก $t = 1, \dots, n$ จะได้

$$P_0 = D a_{\overline{n}|k_e} + P_n v_e^n \quad (6.18)$$

6.1.9.2 ไม่มีเงินปันผลระหว่างถือครอง

หาก $D_t = 0$ ทุกงวด จะได้

$$P_0 = P_n v_e^n \quad (6.19)$$

ราคาปัจจุบันจึงขึ้นอยู่กับราคาขายที่คาดหวังและอัตราผลตอบแทนที่ต้องการทั้งหมด

6.1.9.3 ถือครองตลอดไป

หากถือครองหุ้นตลอดไปและอนุกรมลู่เข้า จะได้

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} D_t v_e^t \quad (6.20)$$

6.1.9.4 เงินปันผลคงที่ตลอดไป

หาก $D_t = D$ ทุกงวด จะได้

$$P_0 = \frac{D}{k_e} \quad (6.21)$$

สูตรนี้เหมาะกับหุ้นบุริมสิทธิที่จ่ายเงินปันผลคงที่และไม่มีวันครบกำหนด ภายใต้สมมติฐานว่าบริษัทสามารถจ่ายเงินปันผลดังกล่าวได้อย่างต่อเนื่อง

6.1.9.5 เงินปันผลเติบโตคงที่

สมมติว่าเงินปันผลงวดแรกเท่ากับ D_1 และเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ g ต่องวด ดังนั้น

$$D_t = D_1(1 + g)^{t-1}$$

หากถือครอง n งวด จะได้

$$P_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D_1(1 + g)^{t-1}}{(1 + k_e)^t} + \frac{P_n}{(1 + k_e)^n} \quad (6.22)$$

$$= \frac{D_1}{k_e - g} \left[1 - \left(\frac{1 + g}{1 + k_e} \right)^n \right] + P_n v_e^n, \quad k_e \neq g \quad (6.23)$$

หากถือครองตลอดไปและ $g < k_e$ จะได้ตัวแบบกอร์ดอน

$$P_0 = \frac{D_1}{k_e - g}, \quad g < k_e \quad (6.24)$$

ข้อสังเกต

เงื่อนไข $g < k_e$ เป็นเงื่อนไขจำเป็นของการลู่เข้า การใช้ g ที่ใกล้ k_e มากทำให้ราคาประเมินไวต่อความคลาดเคลื่อนของสมมติฐานอย่างรุนแรง จึงควรใช้ค่าเติบโตระยะยาวที่ยั่งยืนและทำการวิเคราะห์ความไวประกอบเสมอ

6.1.9.6 ตัวแบบเงินปันผลหลายช่วง

ในทางปฏิบัติ บริษัทอาจเติบโตสูงในช่วงแรกและเข้าสู่อัตราเติบโตคงที่ในระยะยาว หากเงินปันผลช่วงปีที่ 1 ถึง N ประมาณเป็น $D_1, \dots, D_N$ และหลังจากปีที่ N เติบโตคงที่ด้วยอัตรา $g < k_e$ จะได้มูลค่าปลายปีที่ N

$$P_N = \frac{D_{N+1}}{k_e - g}, \quad (6.25)$$

และราคาปัจจุบันคือ

$$P_0 = \sum_{t=1}^N \frac{D_t}{(1 + k_e)^t} + \frac{P_N}{(1 + k_e)^N} \quad (6.26)$$

ตัวอย่าง 6.5. บริษัทหนึ่งออกหุ้นบุริมสิทธิซึ่งจ่ายเงินปันผล 0.08 บาทต่อหุ้นทุกสิ้นปีตลอดไป กำหนดอัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี จงหาราคาประเมินต่อหุ้น

วิธีทำ อัตราผลตอบแทนต่อครึ่งปีคือ

$$k_e = \frac{0.06}{2} = 0.03$$

จากสมการ (6.21)

$$P_0 = \frac{0.08}{0.03} = 2.6667 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

ดังนั้น ราคาประเมินเท่ากับประมาณ 2.67 บาทต่อหุ้น

□

ตัวอย่าง 6.6. หุ้นสามัญของบริษัทหนึ่งคาดว่าจะจ่ายเงินปันผลปลายปีหน้า 1 บาทต่อหุ้น และเงินปันผลจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 5 ต่อปีตลอดไป หากผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี จงหาราคาประเมินหุ้น

วิธีทำ กำหนด $D_1 = 1$, $g = 0.05$ และ $k_e = 0.06$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข $g < k_e$ จากสมการ

(6.24)

$$P_0 = \frac{1}{0.06 - 0.05} = 100 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

□

ตัวอย่าง 6.7. หุ้นสามัญของบริษัทหนึ่งจ่ายเงินปันผลคงที่ D บาทต่อหุ้นในปลายปีที่ 1 และ 2 จากนั้นเงินปันผลเพิ่มขึ้นร้อยละ 8 ต่อปีตลอดไป ราคาหุ้นปัจจุบันเท่ากับ 50 บาทต่อหุ้น และผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี จงหาเงินปันผลปลายปีที่ 5

วิธีทำ กระแสเงินปันผลเป็น

$$D_1 = D, \quad D_2 = D, \quad D_t = D(1.08)^{t-2}, \quad t \geq 3$$

ณ ปลายปีที่ 1 มูลค่าของเงินปันผลตั้งแต่ปีที่ 2 เป็นต้นไปเท่ากับ

$$\frac{D}{0.10 - 0.08} = 50D$$

ดังนั้น

$$50 = \frac{D + 50D}{1.10} = 46.363636D,$$

จึงได้

$$D = 1.078431 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

เงินปันผลปลายปีที่ 5 คือ

$$D_5 = D(1.08)^3 = 1.078431(1.08)^3 = 1.3585 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

□

ตัวอย่าง 6.8. การประเมินมูลค่าหุ้นด้วยเงินปันผลหลายช่วงและมูลค่าคงเหลือ

บริษัทแห่งหนึ่งคาดว่าจะจ่ายเงินปันผลต่อหุ้นในช่วงสามปีข้างหน้า ดังนี้

$$D_1 = 1.20, \quad D_2 = 1.40, \quad D_3 = 1.60 \quad \text{บาทต่อหุ้น}$$

ตั้งแต่ปีที่ 4 เป็นต้นไป คาดว่าเงินปันผลจะเติบโตในอัตราคงที่ ร้อยละ 4 ต่อปี และนักลงทุนต้องการอัตราผลตอบแทนจากหุ้น เท่ากับร้อยละ 10 ต่อปี จงหามูลค่าพื้นฐานของหุ้น ณ ปัจจุบัน และวิเคราะห์เมื่อราคาตลาดของหุ้นเท่ากับ 22.00 บาทต่อหุ้น

ขั้นที่ 1 คำนวณเงินปันผลในปีที่ 4

เนื่องจากเงินปันผลเริ่มเติบโตในอัตราคงที่ตั้งแต่ปีที่ 4 เงินปันผลในปีที่ 4 เท่ากับ

$$D_4 = D_3(1 + g) = 1.60(1 + 0.04) = 1.664 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณมูลค่าหุ้น ณ สิ้นปีที่ 3

ณ สิ้นปีที่ 3 หุ้นสามารถประเมินด้วยตัวแบบเงินปันผลเติบโตคงที่ โดยมูลค่าหุ้น ณ เวลาดังกล่าวเท่ากับมูลค่าปัจจุบัน ณ เวลา 3 ของเงินปันผลตั้งแต่ปีที่ 4 เป็นต้นไป ดังนั้น

$$P_3 = \frac{D_4}{k_e - g} = \frac{1.664}{0.10 - 0.04} = 27.7333 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

ค่า P_3 เรียกว่า *มูลค่าคงเหลือ* หรือ *มูลค่าปลายช่วงพยากรณ์* ซึ่งรวมมูลค่าของเงินปันผลตั้งแต่ $D_4, D_5, \dots$ ไว้ทั้งหมดแล้ว

ขั้นที่ 3 คำนวณกระแสเงินสดทั้งหมดกลับมาถึงปัจจุบัน

มูลค่าหุ้นในปัจจุบันเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผล ในปีที่ 1 ถึงปีที่ 3 รวมกับมูลค่าปัจจุบันของราคาหุ้น ณ สิ้นปีที่ 3 ดังนี้

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{D_1}{(1 + k_e)} + \frac{D_2}{(1 + k_e)^2} + \frac{D_3}{(1 + k_e)^3} + \frac{P_3}{(1 + k_e)^3} \\ &= \frac{1.20}{1.10} + \frac{1.40}{(1.10)^2} + \frac{1.60}{(1.10)^3} + \frac{27.7333}{(1.10)^3} \\ &= 1.0909 + 1.1570 + 1.2021 + 20.8365 \\ &= 24.2865 \end{aligned}$$

มูลค่าพื้นฐานของหุ้นจึงเท่ากับประมาณ

$$P_0 \approx 24.29 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

อีกวิธีหนึ่งสามารถรวมกระแสเงินสดที่เกิด ณ สิ้นปีที่ 3 เข้าด้วยกันได้เป็น

$$P_0 = \frac{D_1}{1 + k_e} + \frac{D_2}{(1 + k_e)^2} + \frac{D_3 + P_3}{(1 + k_e)^3}$$

เนื่องจากทั้ง D_3 และ P_3 เป็นจำนวนเงินที่ผู้ลงทุนได้รับหรือถือครอง ณ สิ้นปีที่ 3

ขั้นที่ 4 เปรียบเทียบกับราคาตลาด

หากราคาตลาดปัจจุบันเท่ากับ 22.00 บาทต่อหุ้น ส่วนต่างระหว่างมูลค่าพื้นฐานกับราคาตลาดเท่ากับ

$$24.29 - 22.00 = 2.29 \text{ บาทต่อหุ้น}$$

คิดเป็นส่วนต่างร้อยละ

$$\frac{24.29 - 22.00}{22.00} \times 100 \approx 10.41\%$$

ภายใต้สมมติฐานของตัวแบบ หุ้นมีราคาตลาดต่ำกว่ามูลค่าที่ประเมินได้ ประมาณร้อยละ 10.41 อย่างไรก็ตาม ส่วนต่างดังกล่าวไม่ควรถูกตีความ ว่าเป็นกำไรที่แน่นอน เพราะมูลค่าที่คำนวณได้ขึ้นอยู่กับความถูกต้องของประมาณการเงินปันผล อัตราการเติบโต และอัตราผลตอบแทนที่ต้องการ

หากนักลงทุนถือหุ้นจำนวน 1,000 หุ้น มูลค่าพื้นฐานของเงินลงทุนคือ

$$1,000(24.29) = 24,290 \text{ บาท}$$

ขณะที่มูลค่าตามราคาตลาดเท่ากับ

$$1,000(22.00) = 22,000 \text{ บาท}$$

ส่วนต่างของมูลค่าทั้งพอร์ตจึงเท่ากับประมาณ

$$24,290 - 22,000 = 2,290 \text{ บาท}$$

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์สัดส่วนของมูลค่าคงเหลือ

มูลค่าปัจจุบันของมูลค่าคงเหลือเท่ากับ 20.8365 บาทต่อหุ้น คิดเป็นสัดส่วนของมูลค่าหุ้นทั้งหมดเท่ากับ

$$\frac{20.8365}{24.2865} \times 100 \approx 85.80\%$$

จึงเห็นได้ว่า มูลค่าหุ้นประมาณร้อยละ 85.80 เกิดจากกระแสเงินสดหลังสิ้นสุดช่วงพยายกรณสามปีแรก ผลการประเมินจึงมีความไวสูงต่อสมมติฐานของ g และ k_e

ขั้นที่ 6 การวิเคราะห์ความไวของมูลค่าหุ้น

ผลการประเมินภายใต้สมมติฐานที่ต่างกันแสดงได้ดังนี้

k_e	g	มูลค่าหุ้น P_0
9%	4%	29.21 บาท
10%	4%	24.29 บาท
11%	4%	20.77 บาท
10%	3%	21.14 บาท
10%	5%	28.69 บาท

ตารางแสดงว่า เมื่ออัตราผลตอบแทนที่นักลงทุนต้องการเพิ่มขึ้น มูลค่าหุ้นจะลดลง เนื่องจากกระแสเงินสดในอนาคตถูกคิดลดในอัตราที่สูงขึ้น ในทางกลับกัน เมื่ออัตราการเติบโตระยะยาวเพิ่มขึ้น มูลค่าหุ้นจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก

ตัวอย่างเช่น หากนักลงทุนประเมินความเสี่ยงสูงขึ้นและกำหนด $k_e = 11\%$ มูลค่าหุ้นจะลดลงเหลือประมาณ 20.77 บาท ซึ่งต่ำกว่าราคาตลาด 22.00 บาท ข้อเสนอจึงเปลี่ยนจากหุ้นที่อาจมีราคาต่ำกว่ามูลค่า เป็นหุ้นที่อาจมีราคาสูงกว่ามูลค่าได้

ข้อสรุปเชิงวิเคราะห์

การประเมินราคาหุ้นในกรณีนี้ประกอบด้วยสองส่วนสำคัญ ได้แก่

$$\underbrace{\sum_{t=1}^3 \frac{D_t}{(1+k_e)^t}}_{\text{เงินปันผลในช่วงพยายกรณ}} + \underbrace{\frac{P_3}{(1+k_e)^3}}_{\text{มูลค่ากระแสเงินสดหลังช่วงพยายกรณ}}$$

การนำตัวแบบไปใช้จริงจึงควรวิเคราะห์อย่างน้อยสามประเด็น ได้แก่ ความสมเหตุสมผลของประมาณการเงินปันผล ความยั่งยืนของอัตราการเติบโตระยะยาว และความเหมาะสมของอัตราผลตอบแทนที่ใช้คิดลด ไม่ควรสรุปจากค่าประมาณเพียงกรณีเดียว แต่ควรใช้การวิเคราะห์ความไวประกอบการตัดสินใจ □

ข้อสังเกต

ในการคำนวณมูลค่าคงเหลือ ณ สิ้นปีที่ 3 ต้องใช้เงินปันผลของปีถัดไปคือ D_4 ในสูตร

$$P_3 = \frac{D_4}{k_e - g}.$$

ค่า P_3 รวมเงินปันผลตั้งแต่ปีที่ 4 เป็นต้นไปแล้ว จึงไม่ควรนำ D_4 มาบวกแยกต่างหากอีกครั้ง มิฉะนั้นจะเกิดการนับกระแสเงินสดซ้ำ นอกจากนี้ ต้องมี $g < k_e$ เพื่อให้อนุกรมมูลค่าปัจจุบันลู่เข้า และทำให้มูลค่าที่คำนวณได้มีความหมายทางเศรษฐศาสตร์

สรุปตัวแบบคิดลดเงินปันผล

$$P_0 = \sum_{t=1}^n D_t(1 + k_e)^{-t} + P_n(1 + k_e)^{-n},$$

$$P_0 = \frac{D}{k_e} \quad \text{สำหรับเงินปันผลคงที่ตลอดไป,}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{k_e - g}, \quad g < k_e, \quad \text{สำหรับเงินปันผลเติบโตคงที่ตลอดไป}$$

6.2 ผลตอบแทนและการประเมินราคาตราสารหนี้

ตราสารหนี้เป็นสัญญาที่ผู้ออกตราสารมีภาระชำระเงินแก่ผู้ถือครองตามเงื่อนไขที่กำหนด กระแสเงินสดของตราสารหนี้ทั่วไปประกอบด้วย

- 1) ดอกเบี้ยคูปองที่จ่ายระหว่างอายุสัญญา
- 2) เงินต้นหรือราคาไถ่ถอนเมื่อครบกำหนด
- 3) ผลตอบแทนจากการนำคูปองไปลงทุนต่อ
- 4) กำไรหรือขาดทุนจากส่วนต่างระหว่างราคาซื้อ ราคาขาย และราคาไถ่ถอน



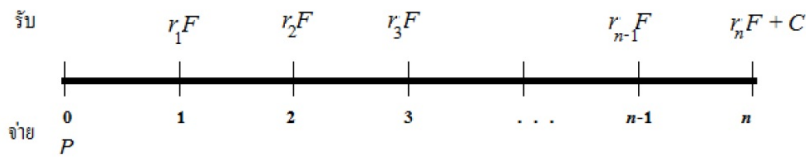
รูปที่ 6.3 ตัวอย่างใบหุ้นกู้ ซึ่งเป็นตราสารหนี้ที่ออกโดยภาคเอกชน

การประเมินราคาในหัวข้อนี้สมมติว่ากระแสเงินสดตามสัญญาจ่ายครบถ้วน จึงเป็นการประเมินภายใต้อัตราผลตอบแทนถึงกำหนดหรืออัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ หากตราสารมีความเสี่ยงผิดนัด ต้องปรับกระแสเงินสดหรืออัตราคิดลดให้สะท้อนความเสี่ยงเครดิตเพิ่มเติม

6.2.1 ราคาตราสารหนี้ ณ วันจ่ายคูปอง

กำหนดให้

สัญลักษณ์	ความหมาย
F	ราคาที่ตราไว้หรือมูลค่าหน้าตัว
C	ราคาไถ่ถอนเมื่อครบกำหนด
r_t	อัตราคูปองของงวดที่ t คิดจากราคาที่ตราไว้
$K_t = r_t F$	เงินคูปองที่จ่ายปลายงวดที่ t
i	อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่องวดที่ใช้ประเมินราคา
$v = (1 + i)^{-1}$	ตัวประกอบส่วนลดต่องวด
n	จำนวนงวดคงเหลือจนถึงวันไถ่ถอน
P	ราคาประเมินทันทีหลังวันจ่ายคูปอง ณ เวลา 0



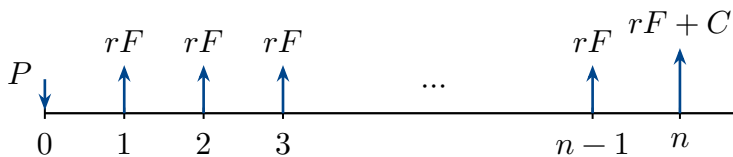
รูปที่ 6.4 แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ทั่วไป

จากรูปที่ 6.4 ผู้ลงทุนจ่ายเงินจำนวน P ณ เวลา 0 เพื่อแลกกับกระแสเงินสด จากคูปองในงวดต่าง ๆ คือ $r_1F, r_2F, \dots, r_nF$ และในงวดสุดท้าย ได้รับเพิ่มอีก C ซึ่งเป็นราคาไถ่ถอน ดังนั้นราคาตราสารหนี้เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของคูปองและราคาไถ่ถอน คือ

$$P = \sum_{t=1}^n r_t F v^t + C v^n \quad (6.27)$$

หากอัตราคูปองคงที่ $r_t = r$ และ rF จะได้

$$P = rF a_{\overline{n}|i} + C v^n \quad (6.28)$$



รูปที่ 6.5 กระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่จ่ายคูปองคงที่

6.2.1.1 สูตรพรีเมียม-ดิสเคานต์

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $K = rF$ และจาก $v^n = 1 - ia_{\overline{n}|i}$ แทนในสมการ (6.28) จะได้

$$P = a_{\overline{n}|i} + C(1 - ia_{\overline{n}|i}) \quad (6.29)$$

$$= C + (K - iC)a_{\overline{n}|i} \quad (6.30)$$

หากกำหนดอัตราดอกเบี้ยดัดแปลง

$$g = \frac{K}{C} = \frac{rF}{C}, \quad (6.31)$$

จะได้

$$P = C + (g - i)Ca_{\overline{n}|i} \quad (6.32)$$

6.2.1.2 สูตรมูลค่าพื้นฐาน

กำหนดให้

$$G = \frac{K}{i}$$

เมื่อใช้ $a_{\overline{n}|i} = (1 - v^n)/i$ จะได้

$$P = G + (C - G)v^n \quad (6.33)$$

G คือมูลค่าของเงินก้อนที่ให้ดอกเบี้ยงวดละ K ภายใต้อัตรา i

6.2.1.3 สูตรของเมกแฮม

กำหนดให้ $Q = Cv^n$ เป็นมูลค่าปัจจุบันของราคาไถ่ถอน จะได้

$$P = Q + \frac{g}{i}(C - Q) \quad (6.34)$$

สูตรนี้แยกราคาออกเป็นมูลค่าปัจจุบันของเงินไถ่ถอน และมูลค่าคูปองซึ่งเขียนผ่านอัตราดอกเบี้ยดัดแปลง g

บทนิยาม 6.3

ตราสารหนี้ซื้อขายที่

- 1) ราคาส่วนลด (Discount Price) เมื่อ $P < C$
- 2) ราคาไถ่ถอน เมื่อ $P = C$
- 3) ราคาพรีเมียม (Premium Price) เมื่อ $P > C$

หาก $C = F$ คำว่า “ราคาไถ่ถอน” ตรงกับ “ราคาที่ตราไว้” หรือราคาพาร์

ทฤษฎีบท 6.1. กำหนดให้ $g = K/C$ เป็นอัตราดอกเบี้ยดัดแปลง และ $i > 0$ เป็นอัตราผลตอบแทนต่องวด

สำหรับตราสารหนี้ที่มี $n \geq 1$ จะได้

- 1) $g < i$ ก็ต่อเมื่อ $P < C$
- 2) $g = i$ ก็ต่อเมื่อ $P = C$
- 3) $g > i$ ก็ต่อเมื่อ $P > C$

พิสูจน์. จากสมการ (6.32)

$$P - C = (g - i)Ca_{\overline{n}|i}$$

เนื่องจาก $C > 0$ และ $a_{\overline{n}|i} > 0$ เครื่องหมายของ $P - C$ จึงเหมือนกับเครื่องหมายของ $g - i$ ทำให้ได้ผลทั้งสามข้อทันที $\square$

บทแทรก 6.1. หาก $F = C$ จะได้ $g = r$ ดังนั้น

- 1) $r < i$ ก็ต่อเมื่อ $P < F$
- 2) $r = i$ ก็ต่อเมื่อ $P = F$
- 3) $r > i$ ก็ต่อเมื่อ $P > F$

6.2.1.4 ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

หาก $K_t = 0$ ทุกงวด จะได้

$$P = Cv^n \tag{6.35}$$

หาก $C = F$ จะได้ $P = Fv^n$

ตัวอย่าง 6.9. ตราสารหนี้ไม่มีคูปองมีราคาไถ่ถอน 100,000 บาท อายุ 5 ปี และให้อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี จงหาราคาประเมิน

วิธีทำ จากสมการ (6.35)

$$P = 100,000(1.06)^{-5} = 74,725.82 \text{ บาท}$$

$\square$

ตัวอย่าง 6.10. พันธบัตรมีราคาที่เราได้และราคาไถ่ถอนเท่ากับ 10,000 บาท อายุ 10 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี จงหาราคา ณ วันออกพันธบัตร เมื่ออัตราผลตอบแทนเท่ากับร้อยละ 8 ต่อปี

วิธีทำ คูณดอกเบี้ยเท่ากับ $K = 0.10(10,000) = 1,000$ บาท ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 1,000a_{\overline{10}|0.08} + 10,000(1.08)^{-10} \\ &= 11,342.02 \text{ บาท} \end{aligned}$$

เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 สูงกว่าอัตราผลตอบแทนร้อยละ 8 พันธบัตรจึงมีราคาพรีเมียม □

ตัวอย่าง 6.11. พันธบัตรมีอายุ 10 ปี ราคาที่เราได้ 1,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี และมูลค่าปัจจุบันของราคาไถ่ถอนเท่ากับ 627,412.37 บาท เมื่อใช้อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี จงหาราคาพันธบัตร

วิธีทำ

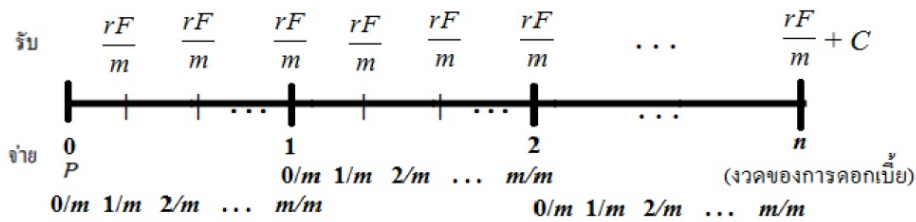
$$\begin{aligned} P &= 100,000a_{\overline{10}|0.06} + 627,412.37 \\ &= 1,363,421.08 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

6.2.2 ความถี่ของการจ่ายดอกเบี้ยและฐานอัตราผลตอบแทน

สมมติว่าตราสารมีอายุ n ปี จ่ายดอกเบี้ย m ครั้งต่อปี อัตราดอกเบี้ยรายปีเท่ากับ r และแต่ละงวดจ่าย

$$K_m = \frac{rF}{m}$$



รูปที่ 6.6 แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่มีความถี่ของการจ่ายคูปองและฐานอัตราผลตอบแทน

หากอัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีเท่ากับ i อัตราผลตอบแทนที่สมมูลต่อหนึ่งงวดคูปองคือ

$$j = (1 + i)^{1/m} - 1 \quad (6.36)$$

ดังนั้น

$$P = \frac{rF}{m} a_{\overline{mn}|j} + C(1 + i)^{-n} \quad (6.37)$$

หากกำหนดอัตราผลตอบแทนเพียงในนาม $i^{(m)}$ ต่อปี คิดทบต้น m ครั้งต่อปี จะใช้

$$j = \frac{i^{(m)}}{m}$$

และ

$$P = \frac{rF}{m} a_{\overline{mn}|i^{(m)}/m} + C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn} \quad (6.38)$$

ข้อสังเกต

หากตราสารจ่ายคูปองปีละครั้ง แต่ตลาดประกาศอัตราผลตอบแทนเพียงในนาม คิดทบต้นรายไตรมาส ห้ามเปลี่ยนคูปองรายปีให้เป็นคูปองรายไตรมาส เพราะกระแสเงินสดตามสัญญายังคงจ่ายปีละครั้ง วิธีที่ถูกต้องคือแปลงอัตราผลตอบแทนเป็นอัตราแท้จริงต่อปี แล้วคิดลดคูปองรายปีตามจังหวะเวลาจริง

ตัวอย่าง 6.12. พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 1,000,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นไตรมาส กำหนดอัตราผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 6 ต่อปี จงหาราคาพันธบัตร ณ วันออกตราสาร

วิธีทำ คูปองต่อไตรมาสเท่ากับ

$$K_4 = \frac{0.10(1,000,000)}{4} = 25,000 \text{ บาท}$$

อัตราผลตอบแทนที่สมมูลต่อไตรมาสคือ

$$j = (1.06)^{1/4} - 1 = 0.014673846$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 25,000a_{\overline{40}|0.014673846} + 1,000,000(1.06)^{-10} \\ &= 1,310,762.66 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 6.13. พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 1,000,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี ตลาดกำหนดอัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกไตรมาส จงหาราคาพันธบัตร

วิธีทำ อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีคือ

$$i = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = 0.061363551$$

คูปองยังคงจ่ายปีละ 100,000 บาท ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 100,000a_{\overline{10}|0.061363551} + 1,000,000(1.061363551)^{-10} \\ &= 1,282,539.56 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

6.2.3 มูลค่าตามบัญชีและการตัดจ่ายพรีเมียมหรือสะสมส่วนลด

ให้ B_k เป็นมูลค่าตามบัญชีทันทีหลังจ่ายคูปองงวดที่ k โดย $B_0 = P$ และ $B_n = C$ หากคูปองคงที่ $K = rF$ จะได้

$$B_k = K a_{\overline{n-k}|i} + Cv^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (6.39)$$

และสมการเวียนเกิด

$$B_k = (1 + i)B_{k-1} - K, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.40)$$

ดอกเบี้ยที่รับรู้ในงวดที่ k คือ

$$I_k = iB_{k-1}, \quad (6.41)$$

ส่วนปรับยอดเงินต้นกำหนดเป็น

$$A_k = K - I_k = B_{k-1} - B_k \quad (6.42)$$

หากซื้อที่พรีเมียม $P > C$ จะได้ $B_k < B_{k-1}$ และ $A_k > 0$ เรียกว่า การตัดจ่ายพรีเมียม หากซื้อที่ส่วนลด $P < C$ จะได้ $B_k > B_{k-1}$ และ $A_k < 0$ โดยจำนวนเงินสะสมส่วนลดเท่ากับ $-A_k = B_k - B_{k-1}$

ทฤษฎีบท 6.2. สำหรับตราสารหนี้คูปองคงที่ K อายุ n งวด จะได้

$$\sum_{k=1}^n A_k = P - C, \quad (6.43)$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = nK - P + C, \quad (6.44)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k = \frac{nK - P + C}{i} \quad (6.45)$$

พิสูจน์. จาก $A_k = B_{k-1} - B_k$ ผลรวมเป็นอนุกรมหักล้าง

$$\sum_{k=1}^n A_k = B_0 - B_n = P - C$$

เนื่องจาก $I_k = K - A_k$

$$\sum_{k=1}^n I_k = nK - (P - C) = nK - P + C$$

และจาก $I_k = iB_{k-1}$ จึงได้สมการสุดท้าย

□

ตัวอย่าง 6.14. พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้ 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี และราคาไถ่ถอน 10,500 บาท จงหามูลค่าตามบัญชีทันทีหลังจ่ายดอกเบี้ยงวดที่ 6

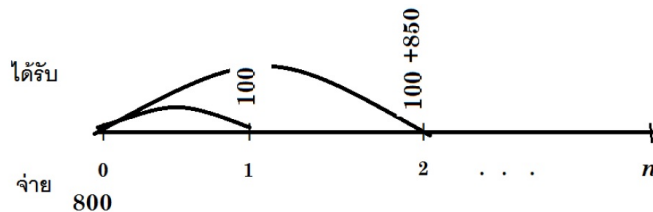
วิธีทำ เหลือกระแสเงินสดอีก 4 งวด จึงได้

$$\begin{aligned} B_6 &= 1,000a_{\overline{4}|0.06} + 10,500(1.06)^{-4} \\ &= 11,782.09 \text{ บาท} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 6.15. นักลงทุนซื้อพันธบัตรในราคา 800 บาท ได้รับดอกเบี้ยปีละ 100 บาท และทันทีหลังรับดอกเบี้ยปลายปีที่ 2 พันธบัตรมีมูลค่าตามบัญชี 850 บาท จงหาอัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีของการลงทุนในช่วงสองปีแรก

วิธีทำ



รูปที่ 6.7 แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่มีความถี่ของการจ่ายดอกเบี้ยตามข้อกำหนด

สมการมูลค่าปัจจุบันคือ

$$800 = 100v + (100 + 850)v^2$$

จึงได้

$$19v^2 + 2v - 16 = 0$$

รากที่เป็นบวกคือ

$$v = \frac{-1 + \sqrt{305}}{19} = 0.8665394$$

ดังนั้น

$$i = v^{-1} - 1 = 0.154016$$

อัตราผลตอบแทนเท่ากับประมาณร้อยละ 15.40 ต่อปี

□

ตัวอย่าง 6.16. พันธบัตรอายุ 5 ปี ราคาที่ตราไว้ 10,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกครึ่งปี ราคาไถ่ถอน 10,500 บาท และอัตราผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 6 ต่อปี จงสร้างตารางมูลค่าตามบัญชีทุกครึ่งปี

วิธีทำ มีทั้งหมด $n = 10$ งวด คูปองต่องวด $K = 500$ บาท และอัตราผลตอบแทนต่อครึ่งปีคือ

$$j = (1.06)^{1/2} - 1 = 0.0295630141$$

มูลค่าตามบัญชีเริ่มต้นคือ

$$B_0 = 500a_{\overline{10}|j} + 10,500(1+j)^{-10} = 12,120.84 \text{ บาท}$$

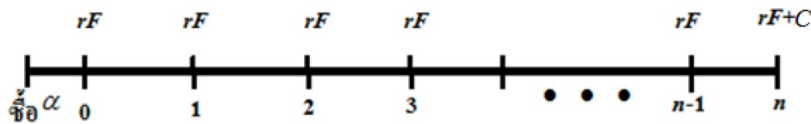
ใช้ความสัมพันธ์ $B_k = (1+j)B_{k-1} - 500$ ได้ตารางดังนี้

k	คูปอง K	ดอกเบี้ย I_k	ตัดจ่ายพรีเมียม A_k	B_k
0	–	–	–	12,120.84
1	500.00	358.33	141.67	11,979.17
2	500.00	354.14	145.86	11,833.31
3	500.00	349.83	150.17	11,683.14
4	500.00	345.39	154.61	11,528.53
5	500.00	340.82	159.18	11,369.34
6	500.00	336.11	163.89	11,205.46
7	500.00	331.27	168.73	11,036.72
8	500.00	326.28	173.72	10,863.00
9	500.00	321.14	178.86	10,684.14
10	500.00	315.86	184.14	10,500.00

ผลรวมตัดจ่ายพรีเมียมเท่ากับ $12,120.84 - 10,500 = 1,620.84$ บาท ตามทฤษฎีบทข้างต้น $\square$

6.2.4 ราคาตราสารหนี้ระหว่างวันจ่ายคูปอง

การซื้อขายมักเกิดระหว่างวันจ่ายคูปอง จึงต้องแยก **ราคากรอสส์หรือราคาขั้นต้น** (Gross/Dirty Price) ซึ่งเป็นมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดทั้งหมดที่ผู้ซื้อจะได้รับ ออกจาก **ราคาคลีน** (Clean Price) ซึ่งเป็นราคาที่ไม่รวมดอกเบี้ยค้างรับของผู้ขาย



รูปที่ 6.8 แผนภาพกระแสเงินสดของตราสารหนี้ราคาตราสารหนี้ระหว่างวันจ่ายคูปอง

ให้ $\alpha \in [0, 1)$ เป็นสัดส่วนเวลาที่ผ่านไปนับจากวันจ่ายคูปองครั้งก่อน และ $w = 1 - \alpha$ เป็นสัดส่วนเวลาจนถึงวันจ่ายคูปองครั้งถัดไป สมมติว่ามีคูปองเหลือ N งวด รวมงวดถัดไปและงวดครบกำหนด คูปองต่องวดเท่ากับ $K = rF$ และอัตราผลตอบแทนต่องวดเท่ากับ i ราคากรอสส์คือ

$$P_{\text{dirty}} = \sum_{j=1}^N K v^{w+j-1} + C v^{w+N-1} \quad (6.46)$$

$$= v^{-\alpha} (Ka_{\overline{N}|i} + Cv^N) \quad (6.47)$$

ภายใต้การคำนวณดอกเบี้ยค้างรับแบบสัดส่วนเชิงเส้น

$$AI = \alpha K, \quad (6.48)$$

และ

$$P_{\text{clean}} = P_{\text{dirty}} - AI \quad (6.49)$$

การปฏิบัติจริงต้องใช้เกณฑ์นับวันของตราสาร เช่น Actual/Actual หรือ 30/360 แทนการประมาณด้วยจำนวนเดือนเมื่อรายละเอียดยวันมีผลต่อราคา

ข้อสังเกต

ในตำราทฤษฎีดอกเบี้ยบางเล่มอาจคิดสิทธิของผู้ขายเป็นมูลค่าปัจจุบัน $AI_{\text{act}} = \alpha K v^w$ ซึ่งเรียกว่าแนวทางเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย แต่ตลาดตราสารหนี้โดยทั่วไปใช้ดอกเบี้ยค้างรับตามเกณฑ์นับวันแบบไม่คิดลด จึงต้องระบุนโยบายให้ชัดเจนก่อนคำนวณ

ตัวอย่าง 6.17. พันกู้มีราคาที่เราได้และราคาใกล้เคียง 100,000 บาท อายุ 5 ปี ออกวันที่ 1 มกราคม 2556 จ่ายคูปองร้อยละ 10 ต่อปีทุกวันที่ 30 มิถุนายน และ 31 ธันวาคม ต่อมาซื้อขายวันที่ 30 เมษายน 2558 กำหนดอัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 8 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี จงหาราคาการROSS ราคาคลีน และดอกเบี้ยค้างรับ โดยประมาณสัดส่วนเวลาจากเดือน

วิธีทำ คูปองต่องวด $K = 5,000$ บาท อัตราผลตอบแทนต่องวด $i = 0.04$ จากวันที่ซื้อถึงวันคูปองถัดไปเหลือ $w = 2/6$ งวด และมีคูปองเหลือทั้งหมด $N = 6$ งวด ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_{\text{dirty}} &= (1.04)^{-2/6} (5,000a_{\overline{6}|0.04} + 100,000(1.04)^{-6}) \\ &= 108,030.21 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ผู้ขายถือครองมา $\alpha = 4/6$ ของงวด จึงมีดอกเบี้ยค้างรับ

$$AI = \frac{4}{6}(5,000) = 3,333.33 \text{ บาท}$$

ราคาคืนตามอนุสัญญาตลาดคือ

$$P_{\text{clean}} = 108,030.21 - 3,333.33 = 104,696.88 \text{ บาท}$$

หากใช้แนวทางเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย

$$AI_{\text{act}} = \frac{4}{6}(5,000)(1.04)^{-2/6} = 3,290.04 \text{ บาท},$$

จะได้ราคาคืน 104,740.17 บาท ความต่างเกิดจากอนุสัญญาการคำนวณดอกเบี้ยค้างรับ มิใช่ความผิดพลาดของการคิดลด □

6.2.5 ตราสารหนี้ชุด

ตราสารหนี้ชุดประกอบด้วยตราสารย่อยหลายฉบับที่มีวันครบกำหนดต่างกัน ให้ตราสารฉบับที่ j มีอายุ n_j ราคาที่ตราไว้ F_j ราคาไถ่ถอน C_j อัตราคูปอง r_j และอัตราผลตอบแทน i_j จะได้

$$P_j = r_j F_j a_{\overline{n_j}|i_j} + C_j(1 + i_j)^{-n_j}, \quad (6.50)$$

และราคารวมของชุดคือ

$$P_{\text{series}} = \sum_{j=1}^m P_j \quad (6.51)$$

ตัวอย่าง 6.18. พันธบัตรชุดประกอบด้วยพันธบัตร 5 ฉบับ แต่ละฉบับมีราคาที่ตราไว้ 20,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 5 ต่อปี ครบกำหนดปลายปีที่ 6, 7, 8, 9, 10 และมีราคาไถ่ถอนตามลำดับ 20,000, 21,000, 21,500, 22,000 และ 22,500 บาท จงหาราคารวมที่ให้อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี วิธีทำ คูปองแต่ละฉบับเท่ากับ 1,000 บาทต่อปี ราคาของแต่ละฉบับคือ

$$P_1 = 1,000a_{\overline{6}|0.06} + 20,000(1.06)^{-6} = 19,016.54,$$

$$P_2 = 1,000a_{\overline{7}|0.06} + 21,000(1.06)^{-7} = 19,548.58,$$

$$P_3 = 1,000a_{\overline{8}|0.06} + 21,500(1.06)^{-8} = 19,699.16,$$

$$P_4 = 1,000a_{\overline{9}|0.06} + 22,000(1.06)^{-9} = 19,823.46,$$

$$P_5 = 1,000a_{\overline{10}|0.06} + 22,500(1.06)^{-10} = 19,923.97$$

ดังนั้น

$$P_{\text{series}} = 98,011.70 \text{ บาท}$$

□

สรุปการประเมินราคาตราสารหนี้

$$P = \sum_{t=1}^n K_t v^t + C v^n, \quad P = K a_{\overline{n}|i} + C v^n \quad \text{เมื่อคูบองคงที่,}$$

$$P = C + (K - iC) a_{\overline{n}|i} = C + (g - i) C a_{\overline{n}|i},$$

$$B_k = K a_{\overline{n-k}|i} + C v^{n-k}, \quad B_k = (1 + i) B_{k-1} - K,$$

$$P_{\text{clean}} = P_{\text{dirty}} - AI$$

6.3 เวลาเทียบเท่า ดูเรชัน และความไวของราคาตราสารหนี้

การประเมินราคาบอกมูลค่าของตราสารหนี้ ณ อัตราผลตอบแทนที่กำหนด แต่การบริหารความเสี่ยงต้องตอบคำถามต่อไปว่า หากอัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลง ราคาจะเปลี่ยนแปลงมากเพียงใด แนวคิดเรื่องเวลาเทียบเท่าและดูเรชันช่วยสรุปโครงสร้างเวลาของกระแสเงินสด ส่วนดูเรชันดัดแปลงเชื่อมโยงโดยตรงกับความไวอันดับหนึ่งของราคา

ข้อสังเกต

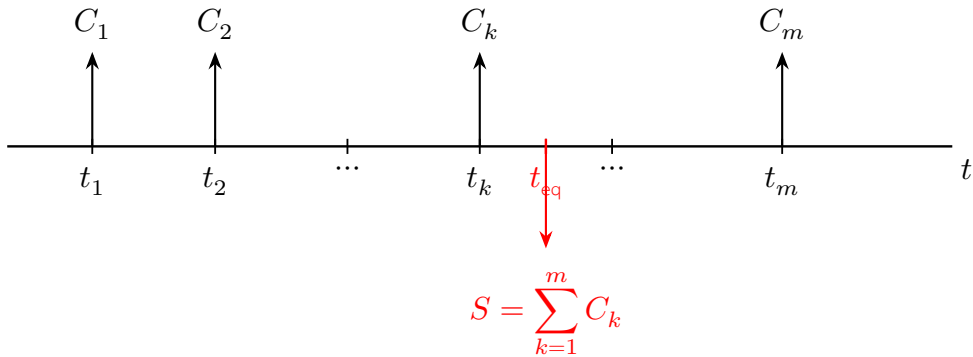
คำว่า “ระยะเวลา” ในวรรณกรรมอาจหมายถึงหลายแนวคิด หัวข้อนี้จึงแยกให้ชัดเจนระหว่าง

- 1) เวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด ซึ่งทำให้มูลค่าปัจจุบันเท่ากันพอดี
- 2) เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด ซึ่งไม่ใช้การคิดลด
- 3) ดูเรชันแมคคอกเลย์ ซึ่งถ่วงน้ำหนักด้วยมูลค่าปัจจุบันและใช้วัดความไวของราคา

ทั้งสามค่าไม่จำเป็นต้องเท่ากัน และไม่ควรใช้แทนกันโดยไม่ระบุความหมาย

6.3.1 เวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด

สมมติว่าตราสารให้กระแสเงินสดบวก $C_1, \dots, C_m$ ณ เวลา $t_1, \dots, t_m$ และใช้อัตราผลตอบแทนแท้จริง i ต่อหน่วยเวลา



รูปที่ 6.9 แผนภาพแสดงเวลาเทียบเท่าของกระแสเงินสด โดยเงินก้อนเดียว $S = \sum_{k=1}^m C_k$ ณ เวลา t_{eq} มีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับกระแสเงินสดเดิมทั้งหมด

กำหนด $v = (1 + i)^{-1}$ เวลาเทียบเท่า t_{eq} คือเวลาที่หากนำผลรวมของกระแสเงินสดทั้งหมด

$$S = \sum_{k=1}^m C_k$$

ไปจ่ายเป็นเงินก้อนเดียว ณ เวลา t_{eq} จะมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับกระแสเงินสดเดิม กล่าวคือ

$$\left(\sum_{k=1}^m C_k \right) v^{t_{eq}} = \sum_{k=1}^m C_k v^{t_k} \quad (6.52)$$

ดังนั้น

$$t_{eq} = \frac{1}{\ln(1 + i)} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^m C_k}{\sum_{k=1}^m C_k (1 + i)^{-t_k}} \right) \quad (6.53)$$

ค่า t_{eq} ขึ้นกับอัตราผลตอบแทน i และเป็นการทำให้มูลค่าปัจจุบันเท่ากันแบบพอดี แต่ไม่ใช่ดูเรชันแมคคอกเลย์ และไม่ใช่วิธีการชั่งน้ำหนักของฟังก์ชันราคา

6.3.1.1 กรณีตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

หากมีเงินสดเพียงก้อนเดียว C ณ เวลา n จากสมการ (6.53) ได้ทันทีว่า

$$t_{\text{eq}} = n \quad (6.54)$$

6.3.1.2 กรณีคูปองคงที่

ตราสารอายุ n งวด จ่ายคูปอง K ทุกปลายงวด และจ่ายราคาไถ่ถอน C ในงวดสุดท้าย มีผลรวมกระแสเงินสด $nK + C$ และราคา

$$P = Ka_{\overline{n}|i} + Cv^n$$

ดังนั้น

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{\ln(1+i)} \ln \left(\frac{nK + C}{Ka_{\overline{n}|i} + Cv^n} \right) \quad (6.55)$$

ตัวอย่าง 6.19. จงคำนวณเวลาเทียบเท่าของตราสารต่อไปนี้ที่อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี โดยสมมติว่ากระแสเงินสดจ่ายทุกสิ้นปี

- 1) ตราสารอายุ 12 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 20,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 8 ต่อปี
- 2) ตราสารอายุ 12 ปี ราคาที่ตราไว้ 20,000 บาท ราคาไถ่ถอน 18,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 4 ต่อปี
- 3) ตราสารไม่มีคูปอง อายุ 12 ปี จ่าย 30,000 บาทเมื่อครบกำหนด

วิธีทำ กรณีที่ 1 มี $K = 1,600$, $C = 20,000$ และ $n = 12$

$$\begin{aligned} t_{\text{eq}} &= \frac{1}{\ln(1.06)} \ln \left(\frac{12(1,600) + 20,000}{1,600a_{\overline{12}|0.06} + 20,000(1.06)^{-12}} \right) \\ &= 8.8886 \text{ ปี} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 มี $K = 800$, $C = 18,000$ และ $n = 12$

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{\ln(1.06)} \ln \left(\frac{12(800) + 18,000}{800a_{\overline{12}|0.06} + 18,000(1.06)^{-12}} \right)$$

$$= 9.7339 \text{ ปี}$$

กรณีที่ 3 มีเงินสดเพียงก้อนเดียว จึงได้

$$t_{\text{eq}} = 12 \text{ ปี}$$

□

ตัวอย่าง 6.20. พอร์ตประกอบด้วยตราสารไม่มีคูปองซึ่งจ่ายเงินดังนี้

เวลาที่รับเงิน (ปี)	เงินสดที่รับ (บาท)
2	30,000
4	40,000
6	50,000
9	60,000
10	120,000

หากอัตราผลตอบแทนเท่ากับร้อยละ 8 ต่อปี จงหาเวลาเทียบเท่าของพอร์ต

วิธีทำ ผลรวมกระแสเงินสดเท่ากับ 300,000 บาท และมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$\begin{aligned} P &= 30,000(1.08)^{-2} + 40,000(1.08)^{-4} + 50,000(1.08)^{-6} \\ &\quad + 60,000(1.08)^{-9} + 120,000(1.08)^{-10} \\ &= 172,228.00 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$t_{\text{eq}} = \frac{\ln(300,000/172,228.00)}{\ln(1.08)} = 7.2110 \text{ ปี}$$

□

6.3.2 เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด

หากต้องการสรุปเวลารับเงินโดยไม่คิดลด สามารถใช้

$$t_{\text{cash}} = \frac{\sum_{k=1}^m t_k C_k}{\sum_{k=1}^m C_k} \quad (6.56)$$

ค่านี้ขึ้นกับสัดส่วนของจำนวนเงินสดแต่ละงวด แต่ไม่ขึ้นกับอัตราผลตอบแทน จึงเหมาะกับการอธิบายเวลาเฉลี่ยเชิงพรรณนา ไม่ควรใช้แทนดูเรชันดัดแปลงเพื่อประมาณการเปลี่ยนแปลงราคา

ตัวอย่าง 6.21. ตารางหนึ่งให้กระแสเงินสดดังนี้

เวลา t_k	เงินสด C_k (บาท)
1	5,000
3	10,000
5	10,000
7	10,000
10	150,000

จงหาเวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด

วิธีทำ

$$\begin{aligned} t_{\text{cash}} &= \frac{5,000(1) + 10,000(3) + 10,000(5) + 10,000(7) + 150,000(10)}{185,000} \\ &= 8.9459 \text{ ปี} \end{aligned}$$

□

6.3.3 ตูเรชันแมคคولهย์

บทนิยาม 6.4

ให้ตราสารจ่ายกระแสเงินสดบวก C_k ณ เวลา t_k และมีราคา

$$P = \sum_{k=1}^m C_k v^{t_k}, \quad v = (1 + i)^{-1}$$

กำหนดน้ำหนักมูลค่าปัจจุบัน

$$w_k = \frac{C_k v^{t_k}}{P}, \quad \sum_{k=1}^m w_k = 1$$

ตูเรชันแมคคولهย์ (Macaulay Duration) นิยามเป็น

$$D_{\text{Mac}} = \sum_{k=1}^m t_k w_k = \frac{\sum_{k=1}^m t_k C_k v^{t_k}}{\sum_{k=1}^m C_k v^{t_k}} \quad (6.57)$$

ระยะเวลาแมคคولهย์ (Macaulay duration) เป็นเวลาเฉลี่ยของการได้รับกระแสเงินสดจากพันธบัตร โดยถ่วงน้ำหนักเวลาของกระแสเงินสดแต่ละงวดด้วยสัดส่วนมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดนั้นต่อราคาพันธบัตร จึงช่วยสรุปว่าโดยเฉลี่ยแล้วผู้ลงทุนต้องรอเป็นระยะเวลาเท่าใดจึงจะได้รับมูลค่าทางเศรษฐกิจของกระแสเงินสดจากพันธบัตรกลับคืนมา แนวคิดดังกล่าวนำไปสู่ระยะเวลาเชิงดัดแปลง (modified duration) ซึ่งใช้วัดความไวโดยประมาณของราคาพันธบัตรต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทน

6.3.3.1 ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

หากจ่ายเงินเพียงก้อนเดียวที่เวลา n

$$D_{\text{Mac}} = n \quad (6.58)$$

6.3.3.2 ตราสารหนี้มีคูปองคงที่

สำหรับคูปอง K ราคาไถ่ถอน C และอายุ n งวด

$$D_{\text{Mac}} = \frac{K \sum_{k=1}^n kv^k + nCv^n}{Ka_{\overline{n}|i} + Cv^n} \quad (6.59)$$

หาก $C = F$ และ $K = rF$ สามารถตัด F ออกได้

$$D_{\text{Mac}} = \frac{r \sum_{k=1}^n kv^k + nv^n}{ra_{\overline{n}|i} + v^n} \quad (6.60)$$

6.3.3.3 เงินงวดคงที่ปลายงวด

สำหรับเงินงวด C จำนวน n งวด

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_{k=1}^n kv^k}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \quad (6.61)$$

ตัวอย่าง 6.22. พันธบัตรจ่ายคูปอง 10,000 บาททุกสิ้นปีเป็นเวลา 10 ปี และจ่ายเงินต้น 100,000 บาท พร้อมคูปองงวดสุดท้าย กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี จงหา เวลาเทียบเท่า เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด และดูเรชันแมคคอกเลย์

วิธีทำ กระแสเงินสดปีที่ 1–9 เท่ากับ 10,000 บาท และปีที่ 10 เท่ากับ 110,000 บาท เวลาเทียบเท่าจากสมการ (6.53) คือ

$$t_{\text{eq}} = 7.2725 \text{ ปี}$$

เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสดคือ

$$t_{\text{cash}} = \frac{10,000(1 + \dots + 9) + 110,000(10)}{200,000} = 7.7500 \text{ ปี}$$

เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยเท่ากับอัตราผลตอบแทน ราคาพันธบัตรเท่ากับ 100,000 บาท และ

$$D_{\text{Mac}} = \frac{\sum_{k=1}^9 k(10,000)(1.10)^{-k} + 10(110,000)(1.10)^{-10}}{100,000} = 6.7590 \text{ ปี}$$

ตัวอย่างนี้ยืนยันว่าค่าทั้งสามมีความหมายต่างกันและให้ผลไม่เท่ากัน

□

ตัวอย่าง 6.23. พันธบัตรรัฐบาลอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท จ่ายคูปองร้อยละ 10 ต่อปี และอัตราผลตอบแทนตลาดร้อยละ 6 ต่อปี จงหาดูเรชันแมคคอกเลย์และดูเรชันดัดแปลง
วิธีทำ ราคาพันธบัตรคือ

$$P = 10,000a_{\overline{10}|0.06} + 100,000(1.06)^{-10} = 129,440.35 \text{ บาท}$$

จากสมการ (6.59)

$$D_{\text{Mac}} = 7.1695 \text{ ปี}$$

ดูเรชันดัดแปลงซึ่งนิยามในหัวข้อถัดไปเท่ากับ

$$D_{\text{mod}} = \frac{7.1695}{1.06} = 6.7637 \text{ ปี}$$

□

6.3.4 ดูเรชันดัดแปลงและความไวอันดับหนึ่งของราคา

ให้ราคาเป็นฟังก์ชันของอัตราผลตอบแทน

$$P(i) = \sum_{k=1}^m C_k(1+i)^{-t_k}$$

หาอนุพันธ์ได้

$$P'(i) = - \sum_{k=1}^m t_k C_k (1+i)^{-t_k-1} \quad (6.62)$$

$$= - \frac{P(i) D_{\text{Mac}}}{1+i} \quad (6.63)$$

บทนิยาม 6.5

ดูเรชันดัดแปลง (Modified Duration) นิยามเป็น

$$D_{\text{mod}} = -\frac{P'(i)}{P(i)} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1+i} \quad (6.64)$$

สำหรับการเปลี่ยนแปลงอัตราผลตอบแทนขนาดเล็ก Δi

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta i \quad (6.65)$$

เครื่องหมายลบสะท้อนความสัมพันธ์ผกผันระหว่างราคาและอัตราผลตอบแทน หาก $D_{\text{mod}} = 6.5$ และอัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 0.01 ราคาจะลดลงประมาณร้อยละ 6.5 สำหรับการเปลี่ยนแปลงขนาดเล็ก

6.3.5 ผลของอัตราผลตอบแทนต่อดูเรชันแมคคولهย์

เมื่อกระแสเงินสด $C_k > 0$ คงที่และเปลี่ยนเฉพาะอัตราผลตอบแทน น้ำหนัก $w_k = C_k v^{t_k} / P$ ทำให้

$$\frac{dD_{\text{Mac}}}{di} = -\frac{1}{1+i} \left[\sum_{k=1}^m t_k^2 w_k - \left(\sum_{k=1}^m t_k w_k \right)^2 \right] \quad (6.66)$$

พจน์ในวงเล็บคือความแปรปรวนถ่วงน้ำหนักของเวลา จึงไม่เป็นลบ และเป็นบวกเมื่อกระแสเงินสดเกิดมากกว่าหนึ่งเวลา ดังนั้นโดยทั่วไป

$$\frac{dD_{\text{Mac}}}{di} < 0 \quad (6.67)$$

กล่าวคือ เมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้น น้ำหนักมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดระยะไกลลดลงเร็วกว่า ทำให้ดูเรชันแมคคولهย์ลดลง

ตัวอย่าง 6.24. กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปีและราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงหาดูเรชันแมคคولهย์และดูเรชันดัดแปลงของตราสารต่อไปนี้

- พันธบัตรไม่มีคูปอง อายุ 10 ปี
- พันธบัตรอายุ 8 ปี อัตราคูปองร้อยละ 8 ต่อปี
- พันธบัตรอายุ 6 ปี จ่ายคูปองร้อยละ 2, 4, 6, 8, 10, 12 ตามลำดับในปีที่ 1-6

วิธีทำ

a) ตราสารไม่มีคูปองมี

$$D_{\text{Mac}} = 10, \quad D_{\text{mod}} = \frac{10}{1.10} = 9.0909 \text{ ปี}$$

b) เมื่อตัดราคาที่เราไว้ออกจากเศษและส่วนของสูตรดูเรชัน จะได้

$$D_{\text{Mac}} = 6.0911, \quad D_{\text{mod}} = \frac{6.0911}{1.10} = 5.5373 \text{ ปี}$$

c) ใช้กระแสเงินสดต่อราคาที่เราไว้นิ่งหน่วย

$$0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 1.12$$

ณ ปีที่ 1-6 ตามลำดับ จะได้

$$D_{\text{Mac}} = 5.3733, \quad D_{\text{mod}} = \frac{5.3733}{1.10} = 4.8848 \text{ ปี}$$

ตราสารที่จ่ายกระแสเงินสดก่อนวันครบกำหนดมากขึ้นมีดูเรชันต่ำกว่า แม้อายุสัญญาอาจใกล้เคียงกัน

□

สรุปเวลาและดูเรชัน

$$t_{\text{eq}} = \frac{1}{\ln(1+i)} \ln \left(\frac{\sum C_k}{\sum C_k (1+i)^{-t_k}} \right),$$

$$t_{\text{cash}} = \frac{\sum t_k C_k}{\sum C_k}, \quad D_{\text{Mac}} = \frac{\sum t_k C_k (1+i)^{-t_k}}{\sum C_k (1+i)^{-t_k}},$$

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1+i}, \quad \frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta i$$

6.4 ความนูน การประมาณ ราคา และการสร้าง ภูมิคุ้มกัน ความเสี่ยง อัตราดอกเบี้ย

ดูเรชันดัดแปลงใช้เส้นสัมผัสเพื่อประมาณความสัมพันธ์ระหว่างราคาและอัตราผลตอบแทน จึงให้ผลดีเมื่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนมีขนาดเล็ก แต่เส้นราคาตราสารหนี้ทั่วไปมีลักษณะโค้ง การเพิ่มพจน์ความนูนช่วยให้ประมาณราคาได้แม่นยำขึ้น และเป็นพื้นฐานของการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ยของพอร์ตสินทรัพย์และหนี้สิน

6.4.1 ความนูนของราคา

สำหรับกระแสเงินสด C_k ณ เวลา t_k ราคาเป็น

$$P(i) = \sum_{k=1}^m C_k(1+i)^{-t_k}$$

อนุพันธ์อันดับสองคือ

$$P''(i) = \sum_{k=1}^m t_k(t_k + 1)C_k(1+i)^{-t_k-2} \quad (6.68)$$

เมื่อกระแสเงินสดเป็นบวกทุกงวด จะได้ $P''(i) > 0$ จึงกล่าวว่าฟังก์ชันราคามีความนูนเมื่อเทียบกับอัตราผลตอบแทน

บทนิยาม 6.6

ความนูน (Convexity) ของตราสารหนี้ภายใต้อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่องวด i นิยามเป็น

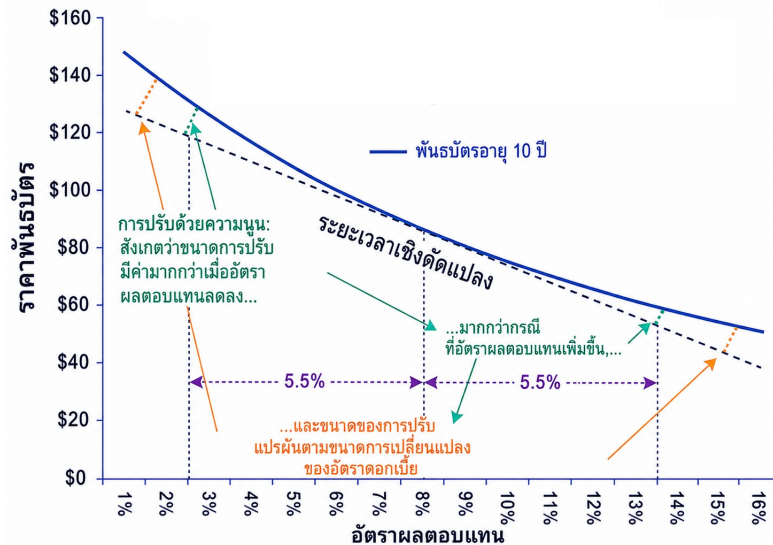
$$\mathcal{C} = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{\sum_{k=1}^m t_k(t_k + 1)C_k(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^m C_k(1+i)^{-t_k}} \quad (6.69)$$

จากการกระจายเทย์เลอร์อันดับสอง

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta i + \frac{1}{2} \mathcal{C} (\Delta i)^2 \quad (6.70)$$

พจน์ความนูนเป็นบวกสำหรับตราสารหนี้ปกติที่กระแสเงินสดคงที่ จึงช่วยแก้การประมาณแบบเส้นตรงที่มักประเมินการลดลงของราคามากเกินไปเมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่ม และประเมินการเพิ่มขึ้นของราคาน้อยเกินไป

เมื่ออัตราผลตอบแทนลด



รูปที่ 6.10 ความสัมพันธ์ระหว่างราคาพันธบัตรกับอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรอายุ 10 ปีที่มีอัตราคูปองร้อยละ 6

จากรูปที่ 6.10 เส้นทึบแสดงความสัมพันธ์ที่แท้จริงระหว่างราคาพันธบัตรกับอัตราผลตอบแทน ซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นโค้งนูนลงจากซ้ายไปขวา กล่าวคือ เมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้น ราคาพันธบัตรจะลดลง และเมื่ออัตราผลตอบแทนลดลง ราคาพันธบัตรจะเพิ่มขึ้น ส่วนเส้นประแสดงค่าประมาณเชิงเส้นที่ได้จากระยะเวลาเชิงดัดแปลง อัตราผลตอบแทนเริ่มต้น ดังนั้น ระยะเวลาเชิงดัดแปลงจึงเหมาะสำหรับประมาณการเปลี่ยนแปลงของราคาเมื่ออัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

อย่างไรก็ตาม เมื่ออัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลงมากขึ้น ความแตกต่างระหว่างเส้นราคา that แท้จริงกับเส้นประมาณเชิงเส้นจะเพิ่มขึ้น ดังตัวอย่างในรูปที่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนจากค่าตั้งต้นในขนาดเท่ากันคือร้อยละ 5.5 ทั้งในทิศทางที่ลดลงและเพิ่มขึ้น หากอัตราผลตอบแทนลดลง ราคาพันธบัตรที่แท้จริงจะเพิ่มขึ้นมากกว่าค่าที่ประมาณจากระยะเวลาเชิงดัดแปลง ในทางกลับกัน หากอัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้น ราคาพันธบัตรที่แท้จริงจะลดลงน้อยกว่าค่าที่ประมาณด้วยเส้นตรง

ความแตกต่างดังกล่าวเรียกว่า *การปรับด้วยความนูน* (convexity adjustment) ซึ่งสะท้อนว่าความสัมพันธ์ระหว่างราคาพันธบัตรกับอัตราผลตอบแทนไม่ได้เป็นเชิงเส้นโดยสมบูรณ์ การใช้ระยะเวลาเชิงดัดแปลงร่วมกับความนูนจึงช่วยให้การประมาณการเปลี่ยนแปลงของราคาพันธบัตรมีความแม่นยำมากขึ้น โดยเฉพาะเมื่ออัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแปลงในขนาดมาก และช่วยให้ผู้ลงทุนประเมินความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ย เปรียบเทียบพันธบัตรและบริหารพอร์ตตราสารหนี้ได้อย่างเหมาะสมยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 6.25. พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี อัตราผลตอบแทนปัจจุบันร้อยละ 6 ต่อปี จงประมาณราคาเมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่มเป็นร้อยละ 7 โดยใช้ดูเรชันและความนูน แล้วเปรียบเทียบกับราคาที่ยกมาโดยตรง

วิธีทำ จากตัวอย่างก่อนหน้า

$$P_0 = 129,440.35, \quad D_{\text{mod}} = 6.7637$$

คำนวณความนูนจากสมการ (6.69) ได้

$$C = 61.6420$$

เมื่อ $\Delta i = 0.01$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &\approx -6.7637(0.01) + \frac{1}{2}(61.6420)(0.01)^2 \\ &= -0.064555 \end{aligned}$$

ดังนั้นราคาประมาณคือ

$$P_{\text{approx}} = 129,440.35(1 - 0.064555) = 121,084.40 \text{ บาท}$$

ราคาที่คำนวณโดยตรงที่อัตราร้อยละ 7 คือ

$$P(0.07) = 10,000a_{\overline{10}|0.07} + 100,000(1.07)^{-10} = 121,070.74 \text{ บาท}$$

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณมีเพียงประมาณ 13.66 บาท ซึ่งต่ำกว่าการใช้ดูเรชันอันดับหนึ่งเพียงอย่างเดียว □

6.4.2 ดูเรชันและความนูนของพอร์ต

ให้พอร์ตประกอบด้วยตราสาร $j = 1, \dots, m$ มีมูลค่าตลาด P_j ดูเรชันดัดแปลง D_j และความนูน C_j กำหนดน้ำหนักมูลค่าตลาด

$$w_j = \frac{P_j}{\sum_{\ell=1}^m P_\ell}$$

หากอัตราผลตอบแทนของตราสารทุกฉบับเปลี่ยนแปลงในทิศทางเดียวกันและขนาดเท่ากัน ดูเรชันและความรุนแรงของพอร์ตคือ

$$D_{\text{port}} = \sum_{j=1}^m w_j D_j, \quad (6.71)$$

$$C_{\text{port}} = \sum_{j=1}^m w_j C_j \quad (6.72)$$

ดังนั้น

$$\frac{\Delta P_{\text{port}}}{P_{\text{port}}} \approx -D_{\text{port}} \Delta i + \frac{1}{2} C_{\text{port}} (\Delta i)^2 \quad (6.73)$$

6.4.3 หลักการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

การสร้างภูมิคุ้มกัน (Immunization) มีเป้าหมายให้มูลค่าสุทธิของพอร์ตสินทรัพย์และหนี้สิน ไรต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยน้อยลง สำหรับหนี้สินที่มีมูลค่าปัจจุบัน P_L และดูเรชันแมคคอลลีย์ D_L เลือกพอร์ตสินทรัพย์ที่มีมูลค่าปัจจุบัน P_A และดูเรชัน D_A โดยใช้เงื่อนไขพื้นฐาน

$$P_A = P_L, \quad (6.74)$$

$$D_A = D_L \quad (6.75)$$

เพื่อเพิ่มความมั่นคงต่อการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่ ควรมี

$$C_A \geq C_L \quad (6.76)$$

ข้อสังเกต

การจับคู่ดูเรชันไม่ใช่การป้องกันความเสี่ยงแบบถาวร เพราะเมื่อเวลาผ่านไป อัตราผลตอบแทนเปลี่ยน หรือ กระแสเงินสดเกิดขึ้น มูลค่าและดูเรชันของสินทรัพย์กับหนี้สินจะเปลี่ยนต่างกัน จึงต้องติดตามและปรับสมดุลพอร์ตเป็นระยะ

6.4.3.1 ขั้นตอนวิธีสร้างพอร์ตภูมิคุ้มกัน

สมมติว่ามีตราสารหนี้ที่สามารถเลือกลงทุนได้จำนวน n รายการ โดยตราสารรายการที่ i มีราคา ดูเรชัน และความผันเท่ากับ P_i , D_i และ C_i ตามลำดับ กำหนดให้

$$z_i = x_i P_i$$

เป็นมูลค่าเงินลงทุนในตราสารรายการที่ i เมื่อ x_i คือจำนวนหน่วยของตราสารดังกล่าว

มูลค่าปัจจุบัน ดูเรชัน และความผันของพอร์ตสินทรัพย์คำนวณได้จาก

$$P_A = \sum_{i=1}^n z_i, \quad (6.77)$$

$$D_A = \frac{\sum_{i=1}^n z_i D_i}{\sum_{i=1}^n z_i}, \quad (6.78)$$

$$C_A = \frac{\sum_{i=1}^n z_i C_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad (6.79)$$

ดังนั้น เงื่อนไขการสร้างภูมิคุ้มกันสามารถเขียนในรูปที่เหมาะสมสำหรับ การคำนวณเชิงตัวเลขได้เป็น

$$\sum_{i=1}^n z_i = P_L, \quad (6.80)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i D_i = P_L D_L, \quad (6.81)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i C_i \geq P_L C_L, \quad (6.82)$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.83)$$

สมการ (6.81) เป็นเงื่อนไขการจับคู่ดูเรชันในรูปของ ดูเรชันเชิงมูลค่า (dollar duration) ส่วนสมการ (6.82) กำหนดให้ความนูนของพอร์ตสินทรัพย์ไม่น้อยกว่าความนูนของหนี้สิน

หากมีพอร์ตเดิมอยู่แล้ว กำหนดให้ $z_i^{(0)}$ เป็นมูลค่าการลงทุนเดิม และสามารถเลือกพอร์ตใหม่ด้วยปัญหา การหาค่าเหมาะที่สุด

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{z_1, \dots, z_n} \quad \sum_{i=1}^n w_i (z_i - z_i^{(0)})^2 \\ & \text{ภายใต้เงื่อนไข} \quad \sum_{i=1}^n z_i = P_L, \\ & \quad \sum_{i=1}^n z_i D_i = P_L D_L, \\ & \quad \sum_{i=1}^n z_i C_i \geq P_L C_L, \\ & \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.84)$$

เมื่อ $w_i > 0$ เป็นน้ำหนักที่สะท้อนต้นทุนธุรกรรม สภาพคล่อง หรือข้อจำกัดในการปรับสถานะของตราสารแต่ละรายการ หากเป็นการสร้างพอร์ตครั้งแรก สามารถกำหนด $z_i^{(0)} = 0$ หรือเปลี่ยนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้ลดความกระจุกตัวของพอร์ตได้

ขั้นตอนวิธี 1 การสร้างและติดตามพอร์ตภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

ข้อมูลนำเข้า: กระแสเงินสดของหนี้สิน $\{L_t\}$, กระแสเงินสดของตราสารที่สามารถเลือกลงทุน $\{CF_{i,t}\}$, อัตราผลตอบแทน y , ค่าตลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ $\varepsilon_P, \varepsilon_D$ และชุดสถานการณ์การเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย $\mathcal{S}$

ผลลัพธ์: มูลค่าเงินลงทุน z_i และจำนวนหน่วยลงทุน x_i ที่ทำให้พอร์ตมีภูมิคุ้มกันต่อความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

- 1: คำนวณมูลค่าปัจจุบันของหนี้สิน P_L จากกระแสเงินสด $\{L_t\}$
- 2: คำนวณดูเรชัน D_L และความนูน C_L ของหนี้สิน
- 3: สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ทำ
- 4: คำนวณราคา P_i ของตราสารรายการที่ i
- 5: คำนวณดูเรชัน D_i และความนูน C_i

- 6: จบการวนซ้ำ
- 7: แก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ตามสมการ (6.84) เพื่อหาค่า $z_1, \dots, z_n$
- 8: ถ้า ไม่พบคำตอบที่เป็นไปได้ แล้ว
- 9: เพิ่มตราสารที่มีดูเรชันต่ำกว่า D_L
- 10: เพิ่มตราสารที่มีดูเรชันสูงกว่า D_L
- 11: แก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดอีกครั้ง

12: จบเงื่อนไข

- 13: สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ทำ
- 14: คำนวณจำนวนหน่วยลงทุน

$$x_i = \frac{z_i}{P_i}$$

- 15: จบการวนซ้ำ
- 16: คำนวณมูลค่ารวมของพอร์ตสินทรัพย์

$$P_A = \sum_{i=1}^n z_i$$

- 17: คำนวณดูเรชันและความผันของพอร์ตสินทรัพย์

$$D_A = \frac{\sum_{i=1}^n z_i D_i}{P_A}, \quad C_A = \frac{\sum_{i=1}^n z_i C_i}{P_A}$$

- 18: คำนวณค่าตลาดเคลื่อนไหวของมูลค่าและดูเรชัน

$$\eta_P = \frac{|P_A - P_L|}{P_L}, \quad \eta_D = |D_A - D_L|$$

- 19: ถ้า $\eta_P > \varepsilon_P$ หรือ $\eta_D > \varepsilon_D$ หรือ $C_A < C_L$ แล้ว
- 20: ปรับองค์ประกอบของพอร์ต
- 21: กลับไปแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดอีกครั้ง
- 22: จบเงื่อนไข
- 23: สำหรับทุก $\Delta y \in \mathcal{S}$ ทำ
- 24: ประเมินมูลค่าสินทรัพย์ $P_A(y + \Delta y)$ จากกระแสเงินสดของตราสารแต่ละรายการ
- 25: ประเมินมูลค่าหนี้สิน $P_L(y + \Delta y)$ จากกระแสเงินสดของหนี้สิน

26: คำนวณส่วนเกินสุทธิภายใต้สถานการณ์ Δy

$$S(\Delta y) = P_A(y + \Delta y) - P_L(y + \Delta y)$$

27: จบการวนซ้ำ

28: ถ้า $S(\Delta y) < 0$ สำหรับสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่ง แล้ว

29: ปรับพอร์ตโดยเพิ่มความนูนของพอร์ตสินทรัพย์

30: พิจารณาเปลี่ยนตราสารที่ใช้สร้างภูมิคุ้มกัน

31: ประเมินพอร์ตภายใต้ชุดสถานการณ์ S อีกครั้ง

32: จบเงื่อนไข

33: ติดตามอัตราดอกเบี้ย กระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบัน และดูเรชันของพอร์ตเป็นระยะ

34: ปรับสมดุลพอร์ตเมื่อเงื่อนไขภูมิคุ้มกัน คลาดเคลื่อนเกินค่าที่ยอมรับได้

กรณีใช้ตราสารหนี้สองรายการ สมมติว่าเลือกตราสารหนี้สองรายการที่มีดูเรชัน D_1 และ D_2 โดย

$$D_1 < D_L < D_2$$

กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นมูลค่าเงินลงทุนในตราสาร รายการที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เงื่อนไขการจับคู่มูลค่าและดูเรชันคือ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= P_L, \\ z_1 D_1 + z_2 D_2 &= P_L D_L \end{aligned}$$

การแก้ระบบสมการให้ผลเป็น

$$z_1 = P_L \frac{D_2 - D_L}{D_2 - D_1} \quad (6.85)$$

$$z_2 = P_L \frac{D_L - D_1}{D_2 - D_1} \quad (6.86)$$

จากนั้น จำนวนหน่วยที่ต้องลงทุนคือ

$$x_1 = \frac{z_1}{P_1} \quad x_2 = \frac{z_2}{P_2}$$

ภายหลังการคำนวณต้องตรวจสอบเพิ่มเติมว่า

$$C_A = \frac{z_1 C_1 + z_2 C_2}{P_L} \geq C_L$$

หาก $C_A < C_L$ แม้พอร์ตจะจับคู่มูลค่าและดูเรชันได้แล้ว พอร์ตดังกล่าวอาจยังไม่มั่นคงเพียงพอเมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลง ในขนาดใหญ่ จึงควรเพิ่มตราสารรายการที่สามหรือเลือกตราสาร ที่มีความนูนสูงขึ้น

ข้อสังเกต

เงื่อนไข $P_A = P_L$ และ $D_A = D_L$ ช่วยลดผลกระทบอันดับหนึ่งจากการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย ส่วนเงื่อนไข $C_A \geq C_L$ ช่วยเพิ่มความมั่นคงต่อการเปลี่ยนแปลง ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น อย่างไรก็ตาม ภูมิคุ้มกันมิใช่กลยุทธ์ที่จัดพอร์ต เพียงครั้งเดียวแล้วใช้ได้ตลอดไป เพราะเมื่อเวลาผ่านไป ดูเรชันของสินทรัพย์และหนี้สินจะเปลี่ยนในอัตราที่แตกต่างกัน จึงต้องประเมินและปรับสมดุลพอร์ตเป็นระยะ ขั้นตอนวิธีนี้ตั้งอยู่บนสมมติฐานสำคัญว่าเส้นอัตราผลตอบแทน เปลี่ยนแปลงในลักษณะขนานโดยประมาณ หากอัตราดอกเบี้ยแต่ละช่วงอายุ เปลี่ยนแปลงไม่เท่ากัน ควรใช้การจับคู่กระแสเงินสด ดูเรชันตามช่วงอายุ หรือคีย์เรตดูเรชันเพิ่มเติม

ตัวอย่าง 6.26. บริษัทมีภาระจ่ายเงิน 1,000,000 บาท ณ ปลายปีที่ 7 และต้องการสร้างภูมิคุ้มกันด้วยตราสารไม่มีคูปองสองฉบับ ซึ่งครบกำหนดปลายปีที่ 4 และ 10 กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 5 ต่อปี จงหามูลค่าตลาดที่ควรลงทุนในตราสารแต่ละฉบับ และราคาไถ่ถอนของแต่ละฉบับ

วิธีทำ มูลค่าปัจจุบันของหนี้สินคือ

$$P_L = 1,000,000(1.05)^{-7} = 710,681.33 \text{ บาท,}$$

และดูเรชันเท่ากับ 7 ปี

ให้ x และ y เป็นมูลค่าตลาดของตราสารอายุ 4 และ 10 ปี ตามลำดับ เงื่อนไขมูลค่าและดูเรชันคือ

$$x + y = 710,681.33,$$

$$4x + 10y = 7(710,681.33)$$

แก้สมการได้

$$x = y = 355,340.67 \text{ บาท}$$

ราคาไถ่ถอนที่สอดคล้องกันคือ

$$C_4 = x(1.05)^4 = 431,918.80 \text{ บาท},$$

$$C_{10} = y(1.05)^{10} = 578,812.50 \text{ บาท}$$

พอร์ตนี้มีมูลค่าปัจจุบันและดูเรชันตรงกับหนี้สิน ณ วันที่สร้างพอร์ต

□

6.4.4 ข้อจำกัดของดูเรชันและความนูน

แม้ดูเรชันและความนูนเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่ทรงพลัง การใช้ในทางปฏิบัติต้องตระหนักถึงข้อจำกัดสำคัญ

- 1) สูตรพื้นฐานสมมติว่ากระแสเงินสดไม่เปลี่ยนเมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยน จึงไม่เหมาะสมโดยตรงกับตราสารที่มีสิทธิเรียกคืน สิทธิไถ่ถอน หรือการชำระล่วงหน้า
- 2) การรวมดูเรชันของพอร์ตสมมติการเลื่อนของเส้นอัตราผลตอบแทนแบบขนาน แต่ในตลาดจริงอัตราระยะสั้น กลาง และยาวอาจเปลี่ยนต่างกัน
- 3) การเปลี่ยนแปลงของส่วนชดเชย ความเสี่ยง เครดิต และ สภาพคล่อง อาจทำให้ราคาเปลี่ยน แม้ อัตราดอกเบี้ยไร้ความเสี่ยงไม่เปลี่ยน
- 4) การประมาณด้วยดูเรชันและความนูนเป็นการประมาณเฉพาะบริเวณ เมื่ออัตราผลตอบแทนเปลี่ยนมาก ควรประเมินราคาจากกระแสเงินสดใหม่โดยตรง
- 5) พอร์ตที่สร้างภูมิคุ้มกันต้องปรับสมดุลเมื่อเวลาผ่านไปและเมื่อโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยน

สรุปความไวและการสร้างภูมิคุ้มกัน

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{\text{mod}} \Delta i + \frac{1}{2} C (\Delta i)^2,$$

$$D_{\text{port}} = \sum_j w_j D_j, \quad C_{\text{port}} = \sum_j w_j C_j,$$

$$P_A = P_L, \quad D_A = D_L, \quad C_A \geq C_L$$

บทสรุปท้ายบทที่ 6

บทนี้ประยุกต์หลักมูลค่าของเงินตามเวลาเพื่อประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน โดยเริ่มจากตราสารทุนซึ่งมีผลตอบแทนจากเงินปันผลและส่วนต่างราคา ตัวแบบคิดลดเงินปันผลกำหนดให้ราคาหุ้นเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลและราคาขายในอนาคต กรณีสำคัญประกอบด้วยเงินปันผลคงที่ เงินปันผลเติบโตคงที่ และตัวแบบหลายช่วงสำหรับกิจการที่มีอัตราเติบโตเปลี่ยนไปตามวัฏจักรธุรกิจ

สำหรับตราสารหนี้ ราคาเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของคูปองและราคาไถ่ถอน บทนี้ได้พัฒนาสูตรพรีเมียม-ดิสเคานต์ สูตรมูลค่าพื้นฐาน และสูตรของแมกแฮม พร้อมอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอัตราคูปองกับอัตราผลตอบแทน การแปลงฐานอัตราเมื่อความถี่ของคูปองและการคิดดอกเบี้ยต่างกัน มูลค่าตามบัญชี การตัดจ่ายพรีเมียม การสะสมส่วนลด ราคาคลีน ราคากรอสส์ ดอกเบี้ยค้างรับ และการประเมินตราสารหนี้ชุด

ส่วนการวิเคราะห์ความเสี่ยงได้แยกเวลาเทียบเท่า เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด และดูเรชันแมคคอเลย์ออกจากกันอย่างชัดเจน ดูเรชันคิดแปลงให้ค่าประมาณอันดับหนึ่งของร้อยละการเปลี่ยนแปลงราคา ส่วนความนูนเพิ่มความแม่นยำสำหรับการเปลี่ยนแปลงอัตราผลตอบแทนที่มากขึ้น ท้ายที่สุด การจับคู่มูลค่าปัจจุบัน ดูเรชันและความนูน เป็นหลักพื้นฐานของการสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย แต่การใช้งานจริงยังต้องพิจารณาการเปลี่ยนรูปของเส้นอัตราผลตอบแทน ความเสี่ยงเครดิต สภาพคล่อง สิทธิแฝงในตราสาร และการปรับสมดุลพอร์ตอย่างต่อเนื่อง

เอกสารอ้างอิง

- [1] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., and Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2nd ed.). Society of Actuaries.
- [2] Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset* (3rd ed.). Wiley.
- [3] Fabozzi, F. J. (2012). *Bond Markets, Analysis, and Strategies* (8th ed.). Pearson.
- [4] Hull, J. C. (2015). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9th ed.). Pearson.
- [5] Kellison, S. G. (2009). *The Theory of Interest* (3rd ed.). McGraw-Hill/Irwin.
- [6] Tuckman, B., and Serrat, A. (2011). *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets* (3rd ed.). Wiley.
- [7] มานพ วรภักดิ์. (2549). *ทฤษฎีดอกเบี้ย*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [8] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2552). *CISA ระดับ 1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณ กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน* (พิมพ์ครั้งที่ 3). ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.
- [9] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2561). *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้พริ้นท์.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่ากระแสเงินสดจ่ายทุกปลายงวด อัตราผลตอบแทนเป็นอัตราแท้จริงต่องวดเดียวกับกระแสเงินสด ราคาได้ถอนจ่ายพร้อมคูปองงวดสุดท้าย และให้ใช้ค่าที่ไม่ปิดเศษระหว่างการคำนวณก่อนตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

- 1) (ระดับ ง่าย) จงอธิบายความแตกต่างระหว่างตลาดแรกและตลาดรอง พร้อมระบุว่าเงินจากการซื้อขายในแต่ละตลาดไหลเข้าสู่บริษัทผู้ออกหุ้นโดยตรงหรือไม่ และอธิบายเหตุผลที่ตลาดรองยังมีความสำคัญต่อการระดมทุนในตลาดแรก
- 2) (ระดับ ง่าย) ผู้ลงทุนซื้อหุ้นที่ราคา 32 บาทต่อหุ้น ได้รับเงินปันผลระหว่างปี 0.80 บาทต่อหุ้น และขายปลายปีที่ราคา 35.20 บาทต่อหุ้น โดยมีค่านายหน้าซื้อและขายครั้งละ 0.10 บาทต่อหุ้น จงหา
 - (a) อัตราผลตอบแทนรวมก่อนต้นทุนธุรกรรม
 - (b) อัตราผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนธุรกรรม
 - (c) อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลและจากส่วนต่างราคา ก่อนต้นทุนธุรกรรม
- 3) (ระดับ ปานกลาง) บริษัทมี $EPS = 4.50$ บาทต่อหุ้น และจ่ายเงินปันผล 1.80 บาทต่อหุ้น โดยมี $ROE = 15\%$ ต่อปี ภายใต้สมมติฐานว่าอัตราการจ่ายเงินปันผลและ ROE คงที่ จงหาอัตราการจ่ายเงินปันผล อัตราการเก็บกำไร และอัตราการเติบโตที่ยั่งยืนโดยประมาณ จากนั้นอภิปรายว่าควรนำอัตราเติบโตดังกล่าวไปใช้ในตัวแบบกอร์ดอนตลอดไปโดยอัตโนมัติหรือไม่
- 4) (ระดับ ปานกลาง) หุ้นบริษัทหนึ่งซื้อขายก่อนหมดสิทธิที่ราคา 72 บาทต่อหุ้น ผู้ถือหุ้นเดิมทุก 5 หุ้นมีสิทธิซื้อหุ้นใหม่ 1 หุ้นที่ราคาใช้สิทธิ 42 บาท จงหา
 - (a) ราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิ
 - (b) มูลค่าทฤษฎีของสิทธิต่อหุ้นเดิมหนึ่งหุ้น
 - (c) จำนวนเงินที่ผู้ถือหุ้นเดิมซึ่งมี 500 หุ้นต้องใช้เพื่อรักษาสัดส่วนความเป็นเจ้าของ
 - (d) ผลกระทบเชิงเศรษฐกิจหากผู้ถือหุ้นไม่ใช้สิทธิและไม่ขายสิทธิ
- 5) (ระดับ ง่าย) หุ้นบุริมสิทธิจ่ายเงินปันผล 0.04 บาทต่อหุ้นทุกสิ้นปีตลอดไป ผู้ลงทุนต้องการผล

ตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 5 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี จงหาราคาประเมินต่อหุ้น

- 6) **(ระดับ ง่าย)** หุ้นสามัญคาดว่าจะจ่ายเงินปันผลปลายปีหน้า 0.50 บาทต่อหุ้น และเงินปันผลเพิ่มขึ้นร้อยละ 2 ต่อปีตลอดไป ผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี จงหาราคาหุ้นทันทีหลังจ่ายเงินปันผลปลายปีที่ 5
- 7) **(ระดับ ปานกลาง)** หุ้นสามัญไม่จ่ายเงินปันผลในปลายปีที่ 1 และ 2 เริ่มจ่ายเงินปันผล D_3 บาทต่อหุ้นในปลายปีที่ 3 จากนั้นเพิ่มขึ้นร้อยละ 5 ต่อปีตลอดไป หากราคาปัจจุบันเท่ากับ 60 บาทต่อหุ้น และผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี จงหา D_3
- 8) **(ระดับ ปานกลาง)** เดิมหุ้นบุริมสิทธิจ่ายเงินปันผลคงที่ปีละ 5 บาทต่อหุ้นตลอดไป ต่อมาบริษัทต้องการเปลี่ยนนโยบายเป็นจ่ายเงินปันผลเริ่มต้น D_1 บาทในปลายปีหน้า และเพิ่มขึ้นร้อยละ 2 ต่อปีตลอดไป หากผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี และบริษัทต้องการให้ราคาประเมินก่อนและหลังเปลี่ยนนโยบายเท่ากัน จงหา D_1
- 9) **(ระดับ ยาก)** พันธบัตรอายุเดิม 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี ผู้ออกต้องการเรียกคืนทันทีหลังจ่ายดอกเบี้ยปลายปีที่ 6 จงหาราคาเรียกคืนที่ทำให้ผู้ถือพันธบัตรไม่เสียประโยชน์ เมื่ออัตราผลตอบแทนตลาด ณ วันเรียกคืนเท่ากับร้อยละ 8 ต่อปี
- 10) **(ระดับ ง่าย)** พันธบัตรไม่มีดอกเบี้ยมีราคาไถ่ถอน 1,000,000 บาท อายุ 10 ปี และให้อัตราผลตอบแทนร้อยละ 6 ต่อปี จงหาราคาซื้อและเปรียบเทียบกับมูลค่าปัจจุบันของราคาไถ่ถอน 627,412.37 บาทที่ปรากฏในตัวอย่างของพันธบัตรมีดอกเบี้ย
- 11) **(ระดับ ปานกลาง)** หุ้นกู้มีราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 10,000 บาท อายุ 10 ปี ออกวันที่ 1 มกราคม 2554 จ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปีทุกวันที่ 31 ธันวาคม ซื้อขายวันที่ 30 เมษายน 2558 กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 8 ต่อปี และประมาณหนึ่งปีเป็น 12 เดือน จงหา
 - (a) ดอกเบี้ยค้างรับตามสัดส่วนเวลา
 - (b) ราคากรอสส์
 - (c) ราคาคลีน
- 12) **(ระดับ ปานกลาง)** กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท จงหาราคาของตราสารต่อไปนี้
 - (a) ตราสารไม่มีดอกเบี้ย อายุ 5 ปี

- (b) พันธบัตรอายุ 10 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี
- (c) พันธบัตรอายุ 8 ปี อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี
- พร้อมระบุว่าแต่ละฉบับซื้อขายที่ส่วนลด พาร์ หรือพรีเมียม
- 13) (ระดับ ยาก) พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จงคำนวณร้อยละการเปลี่ยนแปลงของราคาเมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่มจากร้อยละ 8 เป็นร้อยละ 9 ต่อปี โดย
- (a) คำนวณราคาก่อนและหลังโดยตรง
- (b) ประมาณด้วยดูเรชันดัดแปลง ณ อัตราดอกเบี้ย 8
- (c) อธิบายสาเหตุของความคลาดเคลื่อน
- 14) (ระดับ ยาก) ให้ B_k เป็นมูลค่าตามบัญชีทันทีหลังจ่ายคูปองงวดที่ k ของพันธบัตรคูปองคงที่ K อายุ n งวด โดย $B_0 = P$ และ $B_n = C$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=1}^n (K - iB_{k-1}) = P - C$$

และ

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k = \frac{nK - P + C}{i}$$

- 15) (ระดับ ปานกลาง) พันธบัตรอายุ 10 ปี ราคาที่ตราไว้ 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี จ่ายทุกครึ่งปี อัตราผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 6 ต่อปี และราคาไถ่ถอน 105,000 บาท จงหามูลค่าตามบัญชีทันทีหลังจ่ายคูปองงวดที่ 10
- 16) (ระดับ ยาก) พันธบัตรอายุ 5 ปี ราคาที่ตราไว้ 10,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี จ่ายทุกสิ้นปี ตลาดเสนออัตราผลตอบแทนเพียงในนามร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี และราคาไถ่ถอน 10,500 บาท จง
- (a) แปลงอัตราผลตอบแทนเป็นอัตราแท้จริงต่อปี
- (b) หาราคาพันธบัตร
- (c) สร้างตารางมูลค่าตามบัญชีรายปีจนถึงวันครบกำหนด
- 17) (ระดับ ยาก) ตราสารหนี้ชุดประกอบด้วยตราสารย่อย 4 ฉบับ แต่ละฉบับมีราคาที่ตราไว้ F บาท อัตรา

คูปอง r ต่อปี และครบกำหนดปลายปีที่ 5, 10, 15, 20 ราคาไถ่ถอนตามลำดับคือ

$$F, \quad F + 5,000, \quad F + 10,000, \quad F + 15,000$$

หากอัตราผลตอบแทนของทุกฉบับเท่ากับ $1.2r$ ต่อปี จงเขียนราคารวมของตราสารหนี้ชุดในรูปของ F และ r โดยกำหนด $r > 0$

- 18) (ระดับ ปานกลาง) พันธบัตรชุดประกอบด้วยพันธบัตร 5 ฉบับ แต่ละฉบับมีราคาที่เราได้และราคาไถ่ถอน 20,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 5 ต่อปี ครบกำหนดปลายปีที่ 8, 10, 12, 15, 20 จงหาราคารวมของชุดที่ให้อัตราผลตอบแทนเท่ากับร้อยละ 7.5 ต่อปี

- 19) (ระดับ ยาก) สำหรับตราสารหนี้อายุ n งวด ราคาไถ่ถอน C อัตราคูปองดัดแปลง $g = K/C$ และอัตราผลตอบแทน i กำหนด

$$P(g, i) = gCa_{\overline{n}|i} + Cv^n, \quad v = (1 + i)^{-1}$$

จงแสดงว่า

$$\frac{\partial P}{\partial g} = Ca_{\overline{n}|i}$$

และ

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -Cv \left(g \sum_{k=1}^n kv^k + nv^n \right)$$

จากนั้นอธิบายเครื่องหมายของอนุพันธ์ทั้งสองในเชิงการเงิน

- 20) (ระดับ ง่าย) จงหาดูเรชันแมคคولهย์และดูเรชันดัดแปลงของพันธบัตรไม่มีคูปอง อายุ 5 ปี เมื่ออัตราผลตอบแทนเท่ากับร้อยละ 20 ต่อปี
- 21) (ระดับ ปานกลาง) หุ่นุริมสิทธิจ่ายเงินปันผลคงที่ปีละ D บาทตลอดไป และผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี จงหาดูเรชันแมคคولهย์และดูเรชันดัดแปลงของกระแสเงินปันผล โดยถือว่าเงินปันผลจ่ายทุกสิ้นปี
- 22) (ระดับ ปานกลาง) กำหนดอัตราผลตอบแทนร้อยละ 10 ต่อปี และราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่เราได้ จงหาดูเรชันแมคคولهย์และดูเรชันดัดแปลงของ

- (a) พันธบัตรไม่มีคูปอง อายุ 5 ปี
- (b) พันธบัตรอายุ 5 ปี อัตราคูปองร้อยละ 10 ต่อปี
- (c) พันธบัตรคอนโซลซึ่งจ่ายคูปองคงที่ตลอดไป
- และเปรียบเทียบเหตุผลที่ค่าดูเรชันแตกต่างกัน
- 23) **(ระดับ ยาก)** นายธีระพงษ์เงินและตกลงชำระทุกสิ้นปีเป็นเวลา 5 ปี งวดแรก 50,000 บาท และแต่ละงวดถัดไปเพิ่มขึ้นร้อยละ 20 จากงวดก่อน กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปี จงหา
- (a) จำนวนเงินกู้ ณ เวลา 0
- (b) ดูเรชันแมคคولهย์ของกระแสการชำระหนี้
- (c) ดูเรชันดัดแปลง
- (d) เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด และเปรียบเทียบกับดูเรชันแมคคولهย์
- 24) **(ระดับ ปานกลาง)** พันธบัตรอายุ 8 ปี ราคาที่ตราไว้และราคาไถ่ถอน 100,000 บาท อัตราคูปองร้อยละ 6 ต่อปี อัตราผลตอบแทนปัจจุบันร้อยละ 5 ต่อปี จงหา
- (a) ราคา ดูเรชันดัดแปลง และความนูน
- (b) ราคาที่ประมาณเมื่ออัตราผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 0.75 จุดร้อยละ โดยใช้ดูเรชันอย่างเดียว
- (c) ราคาที่ประมาณโดยใช้ดูเรชันร่วมกับความนูน
- (d) ราคาที่คำนวณโดยตรง และเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อน
- 25) **(ระดับ ยาก)** บริษัทมีภาระจ่ายเงิน 2,000,000 บาท ณ ปลายปีที่ 6 ต้องการสร้างภูมิคุ้มกันด้วยตราสารไม่มีคูปองที่ครบกำหนดปลายปีที่ 3 และ 9 อัตราผลตอบแทนเท่ากับร้อยละ 4 ต่อปี จงหา
- (a) มูลค่าปัจจุบันของหนี้สิน
- (b) มูลค่าตลาดที่ต้องลงทุนในตราสารแต่ละฉบับ เพื่อให้มูลค่าปัจจุบันและดูเรชันตรงกับหนี้สิน
- (c) ราคาไถ่ถอนของตราสารแต่ละฉบับ
- (d) ตรวจสอบว่าความนูนของพอร์ตสินทรัพย์สูงหรือต่ำกว่าหนี้สิน
- 26) **(ระดับ ยาก)** พอร์ตตราสารหนี้มีดูเรชันดัดแปลง 6.2 ปี แต่ประกอบด้วยตราสารระยะสั้นและระยะยาวจำนวนมาก ในวันหนึ่งอัตราผลตอบแทนระยะ 2 ปีเพิ่มขึ้น 0.50 จุดร้อยละ อัตราระยะ 10 ปีลดลง 0.30 จุดร้อยละ และส่วนชดเชยความเสี่ยงเครดิตเพิ่มขึ้น 0.40 จุดร้อยละ จงอภิปรายอย่างเป็นระบบว่าเหตุใดการใช้

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -6.2\Delta i$$

ด้วย Δi เพียงค่าเดียวจึงอาจไม่เพียงพอ และเสนอข้อมูลเพิ่มเติมที่ควรใช้ในการประเมินความเสี่ยงของพอร์ต

บทที่ 7 การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง

เนื้อหาประกอบด้วย

1. ผลตอบแทน ความผันผวน ความสัมพันธ์ และความเสี่ยงทางเลือก
2. กลยุทธ์ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ Bollinger Bands, MACD และการทดสอบย้อนหลัง
3. การกระจายความเสี่ยง ทฤษฎีพอร์ตสมัยใหม่ และพอร์ตที่อนุญาตให้ขายชอร์ต
4. มูลค่าที่ความเสี่ยง มูลค่าที่ความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไข และการตรวจสอบแบบจำลอง
5. มาตรวัดผลตอบแทนที่ปรับด้วยความเสี่ยงและการตัดสินใจหลายมิติ
6. กรณีศึกษาที่เรียบเรียงต่อยอดจากงานวิจัยของผู้เขียน

บทนำ

บทที่ 7 เชื่อมต่อจากการประเมินมูลค่าหุ้นและตราสารหนี้ในบทก่อนหน้า โดยเปลี่ยนคำถามจาก “สินทรัพย์หนึ่งรายการควรมีราคาเท่าใด” ไปสู่ “เมื่อมีสินทรัพย์หลายรายการและผลตอบแทนไม่แน่นอน ควรจัดสรรเงินและควบคุมความเสี่ยงอย่างไร” แกนกลางของบทจึงประกอบด้วยผลตอบแทน ความเสี่ยง การกระจายการลงทุน การสร้างภูมิต้านทาน การตรวจสอบผลย้อนหลัง และการประเมินผลบนฐานความเสี่ยงเดียวกัน

เนื้อหาส่วนหนึ่งเรียบเรียงใหม่จากเอกสารของผู้เขียนเรื่องมาตรวัดผลตอบแทนที่ปรับด้วยความเสี่ยง และความเสี่ยงด้านตลาดกับมูลค่าที่ความเสี่ยง โดยปรับบทนิยาม สัญลักษณ์ สมการ และข้อจำกัดของวิธีให้สอดคล้องกับมาตรฐานคณิตศาสตร์การเงินและการบริหารความเสี่ยงสมัยใหม่ พร้อมบูรณาการผลการวิจัยด้าน Bollinger Bands การขายชอร์ต พอร์ตการลงทุน และ VaR–CVaR ของผู้เขียนอย่างเป็นระบบ [16, 17, 18].

โดยวัตถุประสงค์บทนี้มุ่งอธิบายเครื่องมือสำหรับการศึกษาและการสร้างแบบจำลอง ไม่ใช่คำแนะนำให้ซื้อหรือขายหลักทรัพย์ ผลจากข้อมูลย้อนหลังไม่รับประกันผลในอนาคต และแบบจำลองทุกชนิดต้องพิจารณาค่าธรรมเนียม สภาพคล่อง ข้อจำกัดการขายชอร์ต ภาษี ความเสี่ยงของข้อมูล และความเสี่ยงจากการเลือกแบบจำลอง

ข้อตกลงสัญลักษณ์ที่ใช้ในบทนี้

t	ดัชนีเวลา เช่น วัน เดือน หรือปี และ T คือจำนวนงวดทั้งหมดในช่วงศึกษา
i, j	ดัชนีหลักทรัพย์หรือสินทรัพย์ในพอร์ต โดยทั่วไป $i, j \in \{1, \dots, n\}$; เมื่อพิจารณาหุ้นหลักทรัพย์ i หมายถึงหลักทรัพย์รายการหนึ่ง และ j หมายถึงหลักทรัพย์อีกรายการหนึ่ง ทั้งสองตัวอักษรเป็นเพียงดัชนี ไม่ได้สื่อว่ารายการใดดีกว่าหรือสำคัญกว่า
$P_{i,t}$	ราคาของหลักทรัพย์ที่ i ณ เวลา t
$D_{i,t}$	เงินปันผล ดอกเบี้ย หรือกระแสเงินสดจากหลักทรัพย์ที่ i ระหว่างเวลา $t - 1$ ถึง t
$R_{i,t}$	ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ i ในงวด t ; เมื่อไม่เน้นเวลาอาจเขียนย่อเป็น R_i
μ_i, σ_i	ผลตอบแทนคาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของหลักทรัพย์ที่ i
w_i	สัดส่วนเงินลงทุนสุทธิในหลักทรัพย์ที่ i เทียบกับฐานเงินทุนที่กำหนด
σ_{ij}, ρ_{ij}	ความแปรปรวนร่วมและสหสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์ที่ i กับหลักทรัพย์ที่ j
p, m, f, b	ตัวห้อยแทนพอร์ต ตลาด สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง และเกณฑ์อ้างอิง ตามลำดับ

ในบางหัวข้อ j อาจใช้เป็นดัชนีย้อนหลังของหน้าต่างเวลา และในหัวข้อการตัดสินใจหลายมิติ j ใช้แทนเกณฑ์การประเมิน ความหมายเฉพาะดังกล่าวจะระบุไว้ใกล้สมการเพื่อป้องกันความสับสน ตัวหนา เช่น R และ w หมายถึงเวกเตอร์ ส่วน $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ หมายถึงเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

7.1 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของการลงทุน

7.1.1 ราคา กระแสเงินสด และอัตราผลตอบแทน

ให้ $P_t > 0$ เป็นราคาหลักทรัพย์ปลายงวด t และให้ D_t เป็นเงินปันผล ดอกเบี้ย หรือกระแสเงินสดที่ผู้ลงทุนได้รับระหว่างเวลา $t - 1$ ถึง t ในช่วงแรกพิจารณาหลักทรัพย์เพียงรายการเดียวจึงจะดัชนีหลักทรัพย์ไว้ หากมีหลายหลักทรัพย์ ให้เขียนราคาและกระแสเงินสดเป็น $P_{i,t}$ และ $D_{i,t}$ โดย i ระบุว่าเป็นหลักทรัพย์รายการใด ส่วน t ระบุว่าเป็นเวลาใด อัตราผลตอบแทนอย่างง่ายของงวดที่ t คือ

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (7.1)$$

หากไม่มีการจ่ายกระแสเงินสด จะได้ $R_t = P_t/P_{t-1} - 1$ สำหรับหลักทรัพย์ที่ i สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

ในการคำนวณอนุกรมเวลาของหลักทรัพย์หนึ่งรายการ ให้ตรง i แล้วเปลี่ยน t แต่ในการเปรียบเทียบหลักทรัพย์หลายรายการ ณ จุดเดียวกัน ให้ตรง t แล้วเปลี่ยน i การแยกสองมิตินี้ช่วยป้องกันการนำข้อมูลต่างเวลาไปเปรียบเทียบเสมือนเกิดขึ้นพร้อมกัน และมูลค่าการลงทุนเปลี่ยนตาม

$$V_t = V_{t-1}(1 + R_t) \quad (7.2)$$

ผลตอบแทนสะสมจากงวดที่ 1 ถึง T คือ

$$R_{1:T} = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1 \quad (7.3)$$

สมการนี้แสดงว่าผลตอบแทนหลายงวดต้องทบต้น ไม่ใช่ นำผลตอบแทนรายงวดมาบวกกันโดยตรง

ในกรณีไม่มีเงินปันผล ผลตอบแทนลอการิทึมคือ

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + R_t), \quad R_t = e^{r_t} - 1 \quad (7.4)$$

ข้อดีของผลตอบแทนลอการิทึมคือสามารถบวกข้ามเวลาได้

$$\sum_{t=1}^T r_t = \ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) \quad (7.5)$$

แต่ไม่สามารถบวกข้ามหลักทรัพย์เพื่อหาผลตอบแทนพอร์ตได้โดยตรง การสร้างพอร์ตหนึ่งงวดควรใช้ผลตอบแทนอย่างง่าย

บทนิยาม 7.1

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของผลตอบแทนอย่างง่าย $R_1, \dots, R_T$ คือ

$$\bar{R}_A = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t, \quad \bar{R}_G = \left[\prod_{t=1}^T (1 + R_t) \right]^{1/T} - 1 \quad (7.6)$$

$\bar{R}_A$ เหมาะกับการประมาณผลตอบแทนคาดหวังหนึ่งงวด ส่วน $\bar{R}_G$ คืออัตราการเติบโตทบต้นเฉลี่ยที่ทำให้มูลค่าต้นงวดเปลี่ยนเป็นมูลค่าปลายงวดจริง เมื่อผลตอบแทนไม่คงที่ โดยทั่วไป $\bar{R}_G \leq \bar{R}_A$

ตัวอย่าง 7.1. ราคาหลักทรัพย์ปลายงวดหกเวลาเป็น

100, 103, 101, 106, 108, 105 บาท

และได้รับเงินปันผล 0.80 บาทในงวดที่สอง และ 1.00 บาทในงวดที่ห้า จงหาอัตราผลตอบแทนรายงวด ผลตอบแทนสะสม ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

วิธีทำ จากสมการ (7.1) ได้

t	1	2	3	4	5
R_t	0.030000	-0.011650	0.049505	0.018868	-0.018519

ดังนั้น

$$R_{1:5} = \prod_{t=1}^5 (1 + R_t) - 1 = 0.068396,$$

$$\bar{R}_A = 0.013641,$$

$$\bar{R}_G = (1.068396)^{1/5} - 1 = 0.013320$$

ผลตอบแทนสะสมเท่ากับร้อยละ 6.8396 และค่าเฉลี่ยเรขาคณิตต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเล็กน้อยเนื่องจากผลของความผันผวน □

7.1.2 การแปลงหน่วยเวลาและข้อจำกัดของกฎรากที่สอง

ถ้ามี m งวดต่อปีและผลตอบแทนเฉลี่ยเรขาคณิตต่องวดเท่ากับ g อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปีคือ

$$R_{\text{ann}} = (1 + g)^m - 1 \quad (7.7)$$

หากผลตอบแทนลอการิทึมรายงวดมีค่าเฉลี่ย $\bar{r}$ จะได้

$$r_{\text{ann}} = m\bar{r}, \quad R_{\text{ann}} = e^{m\bar{r}} - 1 \quad (7.8)$$

ภายใต้สมมติฐานว่าผลตอบแทนรายงวดเป็นอิสระและมีความแปรปรวนคงที่ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อปี

ประมาณได้จาก

$$\sigma_{\text{ann}} = \sqrt{m} \sigma_{\text{period}} \quad (7.9)$$

กฎรากที่สองไม่ควรใช้โดยอัตโนมัติเมื่อผลตอบแทนมีอัตราสัมพันธ์ ความผันผวนเปลี่ยนตามเวลา หรือมีการแจกแจงทางหนา

7.1.3 ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มแทนผลตอบแทนหนึ่งงวด

$$\mu = E[R], \quad \sigma^2 = \text{Var}(R) = E[(R - \mu)^2], \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (7.10)$$

สำหรับข้อมูลตัวอย่าง $R_1, \dots, R_T$ ใช้

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t, \quad s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2 \quad (7.11)$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการกระจายทั้งด้านกำไรและขาดทุน จึงเป็นมาตรวัดความเสี่ยงรวม ไม่ใช่มาตรวัดความเสียหายด้านล่างโดยเฉพาะ

7.1.4 ความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และค่าเบต้า

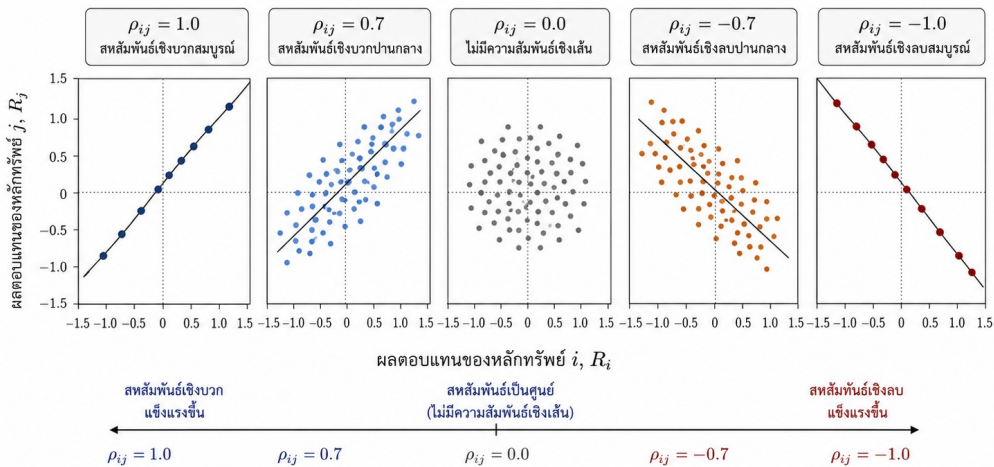
สำหรับผลตอบแทน R_i และ R_j โดย i และ j แทนหลักทรัพย์สองรายการที่ต้องการศึกษาความเคลื่อนไหวร่วมกัน

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j) = E[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)], \quad (7.12)$$

และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คือ

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad -1 \leq \rho_{ij} \leq 1 \quad (7.13)$$

เมื่อ $i = j$ จะได้ $\sigma_{ii} = \text{Var}(R_i) = \sigma_i^2$ และ $\rho_{ii} = 1$ ส่วนกรณี $i \neq j$ พจน์ σ_{ij} วัดการเปลี่ยนแปลงร่วมกันของหลักทรัพย์สองรายการ โดย $\sigma_{ij} > 0$ หมายถึงมีแนวโน้มเคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกัน $\sigma_{ij} < 0$ หมายถึงมีแนวโน้มเคลื่อนไหวสวนทางกัน และค่าที่ใกล้ศูนย์หมายถึง ไม่พบความสัมพันธ์เชิงเส้นเด่นชัด ทั้งนี้ไม่ได้แปลว่าเป็นอิสระต่อกัน



รูปที่ 7.1 ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนของหลักทรัพย์ i และ j ภายใต้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ_{ij} ที่แตกต่างกัน เมื่อ $\rho_{ij} = 1$ ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสองเคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกันอย่างสมบูรณ์ ขณะที่ $\rho_{ij} = -1$ หมายถึงการเคลื่อนไหวสวนทางกันอย่างสมบูรณ์ ส่วน $\rho_{ij} = 0$ หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างผลตอบแทนทั้งสอง

รูปที่ 7.1 แสดงความหมายเชิงเรขาคณิตของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ระหว่างผลตอบแทนของหลักทรัพย์สองรายการ โดยแต่ละจุดแทนคู่ผลตอบแทน $(R_{i,t}, R_{j,t})$ ในช่วงเวลา t เดียวกัน รูปแบบการกระจายของจุดช่วยอธิบายทั้งทิศทางและความเข้มของความสัมพันธ์ได้อย่างชัดเจน

เมื่อ $\rho_{ij} > 0$ ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสองมีแนวโน้มเคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกัน และยิ่ง ρ_{ij} เข้าใกล้ 1 การเคลื่อนไหวร่วมกันยิ่งมีความชัดเจน ในกรณี $\rho_{ij} = 1$ จะเกิดความสัมพันธ์เชิงเส้นบวกอย่างสมบูรณ์ กล่าวคือ เมื่อผลตอบแทนของหลักทรัพย์หนึ่งเพิ่มขึ้น ผลตอบแทนของอีกหลักทรัพย์จะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันอย่างเป็นระบบ

ในทางกลับกัน เมื่อ $\rho_{ij} < 0$ ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสองมีแนวโน้มเคลื่อนไหวสวนทางกัน และเมื่อ ρ_{ij} เข้าใกล้ -1 ความสัมพันธ์สวนทางดังกล่าวจะยิ่งชัดเจน โดย $\rho_{ij} = -1$ หมายถึงความสัมพันธ์เชิงเส้นลบอย่างสมบูรณ์

สำหรับกรณี $\rho_{ij} = 0$ หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้งสอง อย่างไรก็ตาม ไม่ได้หมายความว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระต่อกันเสมอไป เนื่องจากอาจยังมีความสัมพันธ์ในรูปแบบไม่เชิง

เส้นได้ จากข้อมูลผลตอบแทน T งวด ค่าประมาณความแปรปรวนร่วมของหลักทรัพย์ที่ i และ j คือ

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j), \quad \hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}$$

ความแปรปรวนร่วมมีหน่วยเป็นผลตอบแทนกำลังสอง จึงเปรียบเทียบข้ามคู่ได้ไม่สะดวก ขณะที่สหสัมพันธ์ไม่มีหน่วยและอยู่ในช่วง $[-1, 1]$ จึงตีความได้ง่ายกว่า อย่างไรก็ตาม สหสัมพันธ์ต่ำช่วยลดความแปรปรวนของพอร์ตได้ก็ต่อเมื่อพิจารณาร่วมกับ น้ำหนักและความผันผวนของแต่ละหลักทรัพย์ และค่าความสัมพันธ์ที่ประมาณจากอดีต อาจเพิ่มขึ้นในช่วงวิกฤต

ในบริบทของการบริหารพอร์ตการลงทุน ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีบทบาทสำคัญต่อประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยง เนื่องจากหลักทรัพย์ที่มีสหสัมพันธ์ต่ำหรือเป็นลบ สามารถช่วยลดความแปรปรวนรวมของพอร์ตได้ แม้ว่าความเสี่ยงของหลักทรัพย์แต่ละรายการเมื่อพิจารณาแยกกันอาจไม่ได้ต่ำก็ตาม ดังนั้น การเลือกหลักทรัพย์เข้าสู่พอร์ตจึงไม่ควรพิจารณาเฉพาะ ผลตอบแทนคาดหวังและความผันผวนของแต่ละหลักทรัพย์ แต่ต้องพิจารณาโครงสร้างความสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์ร่วมด้วย

เมื่อ R_m เป็นผลตอบแทนตลาด ค่าเบต้าของหลักทรัพย์หรือพอร์ต p คือ

$$\beta_p = \frac{\text{Cov}(R_p, R_m)}{\text{Var}(R_m)} = \rho_{pm} \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \quad (7.14)$$

ค่าเบต้าวัดความไวเชิงเส้นต่อการเปลี่ยนแปลงของตลาด ไม่ใช่ความเสี่ยงทั้งหมดของพอร์ต

7.1.5 ความเสี่ยงขาดและ Maximum Drawdown

ให้ R_T เป็นผลตอบแทนเป้าหมาย ความเป็ยเบนขาดกำหนดโดย

$$\text{DD}(R_T) = \sqrt{E[\min(R - R_T, 0)^2]} \quad (7.15)$$

มาตรวัดนี้ไม่นับผลตอบแทนที่สูงกว่าเป้าหมายเป็นความเสี่ยง

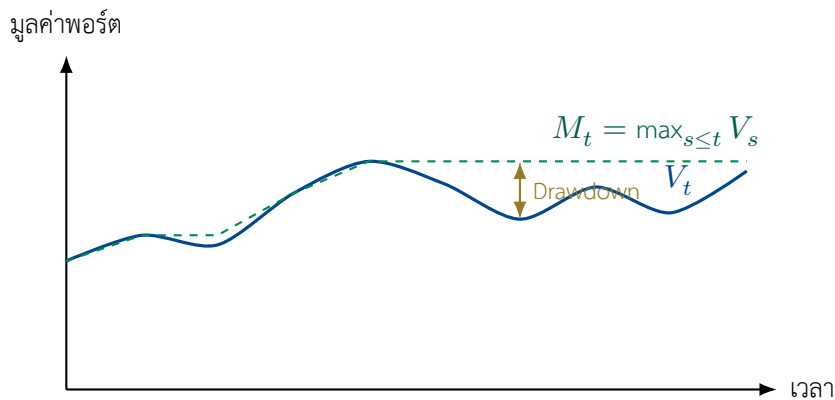
ให้ V_t เป็นมูลค่าพอร์ต และ

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} V_s \quad (7.16)$$

Drawdown ณ เวลา t และ Maximum Drawdown คือ

$$D_t = \frac{M_t - V_t}{M_t}, \quad \text{MDD} = \max_{0 \leq t \leq T} D_t \quad (7.17)$$

MDD สะท้อนความเสียหายจากจุดสูงสุดถึงจุดต่ำสุดถัดมา แต่ขึ้นกับช่วงข้อมูลและลำดับเวลาของผลตอบแทน



รูปที่ 7.2 มูลค่าพอร์ต จุดสูงสุดสะสม และการลดลงจากจุดสูงสุด

ตัวอย่าง 7.2. การวิเคราะห์สหสัมพันธ์ เบต้า และประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยง

นักลงทุนกำลังพิจารณาหลักทรัพย์สองรายการ A และ B เพื่อสร้างพอร์ตการลงทุน โดยมีข้อมูลผลตอบแทนรายเดือนย้อนหลัง 8 เดือน พร้อมผลตอบแทนตลาด ดังตาราง

เดือน t	$R_{A,t} (\%)$	$R_{B,t} (\%)$	$R_{m,t} (\%)$
1	3.0	1.0	2.0
2	-1.0	2.0	-0.5
3	4.0	0.5	3.0
4	2.0	-1.0	1.0
5	-2.0	2.5	-1.5
6	1.0	1.0	0.5
7	5.0	-0.5	2.5
8	-1.5	2.0	-1.0

ในการคำนวณให้แปลงผลตอบแทนจากร้อยละเป็นเลขทศนิยม เช่น $3\% = 0.03$

1. คำนวณผลตอบแทนเฉลี่ย

ผลตอบแทนเฉลี่ยของหลักทรัพย์ A , B และตลาด คือ

$$\begin{aligned}\bar{R}_A &= \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 R_{A,t} = 0.013125 = 1.3125\%, \\ \bar{R}_B &= 0.009375 = 0.9375\%, \\ \bar{R}_m &= 0.007500 = 0.7500\%\end{aligned}$$

ในข้อมูลตัวอย่างนี้ หลักทรัพย์ A ให้ผลตอบแทนเฉลี่ยสูงกว่า หลักทรัพย์ B แต่การพิจารณาเฉพาะผลตอบแทนเฉลี่ยยังไม่เพียงพอ เพราะต้องพิจารณาความเสี่ยงและความสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์ด้วย

2. คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จาก

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_A &= 0.026314 = 2.6314\% \text{ ต่อเดือน}, \\ \hat{\sigma}_B &= 0.012374 = 1.2374\% \text{ ต่อเดือน}\end{aligned}$$

ดังนั้น หากพิจารณาหลักทรัพย์แต่ละรายการแยกกัน หลักทรัพย์ A มีความผันผวนมากกว่าหลักทรัพย์ B ประมาณสองเท่า

3. คำนวณความแปรปรวนร่วม

ความแปรปรวนร่วมระหว่าง A และ B คือ

$$\hat{\sigma}_{AB} = \frac{1}{8-1} \sum_{t=1}^8 (R_{A,t} - \bar{R}_A)(R_{B,t} - \bar{R}_B) = \frac{-0.001834375}{7} = -0.00026205$$

ค่าเป็นลบแสดงว่า ในข้อมูลชุดนี้ เมื่อผลตอบแทนของหลักทรัพย์ A สูงกว่าค่าเฉลี่ย หลักทรัพย์ B มักมีแนวโน้มให้ผลตอบแทนต่ำกว่าค่าเฉลี่ย และในทางกลับกัน

อย่างไรก็ตาม ขนาดของความแปรปรวนร่วมขึ้นกับหน่วย จึงควรคำนวณสหสัมพันธ์เพื่อให้ตีความได้ชัดเจนขึ้น

4. คำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

จาก

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{\hat{\sigma}_{AB}}{\hat{\sigma}_A \hat{\sigma}_B}$$

จะได้

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{-0.00026205}{(0.026314)(0.012374)} \approx -0.8048$$

ดังนั้น

$$\hat{\rho}_{AB} \approx -0.805$$

แสดงว่าผลตอบแทนของหลักทรัพย์ A และ B มีความสัมพันธ์เชิงลบค่อนข้างสูงในช่วงข้อมูลที่ศึกษาในการลงทุน ผลดังกล่าวน่าสนใจ เพราะหลักทรัพย์ที่เคลื่อนไหวสวนทางกันสามารถช่วยลด ความผันผวนรวมของพอร์ตได้

5. สร้างพอร์ตลงทุนอย่างง่ายแบบ 50:50

สมมติว่านักลงทุนจัดสรรเงิน

$$w_A = 0.50, \quad w_B = 0.50$$

ผลตอบแทนคาดหวังของพอร์ตประมาณจากค่าเฉลี่ยตัวอย่างได้เป็น

$$\bar{R}_p = w_A \bar{R}_A + w_B \bar{R}_B = 0.5(0.013125) + 0.5(0.009375) = 0.01125$$

ดังนั้น

$$\bar{R}_p = 1.125\% \text{ ต่อเดือน}$$

ความแปรปรวนของพอร์ตสองหลักทรัพย์คือ

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$$

แทนค่าได้

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_p^2 &= (0.5)^2(0.026314)^2 + (0.5)^2(0.012374)^2 \\ &\quad + 2(0.5)(0.5)(-0.00026205) \approx 0.00008036 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{0.00008036} = 0.008964 = 0.8964\% \text{ ต่อเดือน}$$

จึงได้

$$\hat{\sigma}_p \approx 0.896\% \text{ ต่อเดือน}$$

ผลลัพธ์นี้สำคัญมาก เพราะพอร์ต 50:50 มีความผันผวนเพียงร้อยละ 0.896 ต่อเดือน ซึ่งต่ำกว่าทั้ง

$$\hat{\sigma}_A = 2.631\%$$

และ

$$\hat{\sigma}_B = 1.237\%$$

นั่นคือ การรวมสินทรัพย์ที่มีความสัมพันธ์เชิงลบ สามารถทำให้ความเสี่ยงของพอร์ตต่ำกว่า ความเสี่ยงของสินทรัพย์แต่ละรายการได้

หากเฉลี่ยความแปรปรวนร่วมและใช้เพียงค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะได้

$$0.5(2.6314) + 0.5(1.2374) = 1.9344\%$$

แต่ความผันผวนที่คำนวณอย่างถูกต้องคือเพียง

$$0.8964\%$$

ความแตกต่างเกิดจากพจน์

$$2w_A w_B \sigma_{AB} < 0,$$

ซึ่งเป็นประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยง (*diversification benefit*)

6. คำนวณค่าเบต้าของหลักทรัพย์ A

จากข้อมูลตลาด ได้

$$\widehat{\text{Var}}(R_m) = 0.00027857$$

และ

$$\widehat{\text{Cov}}(R_A, R_m) = 0.00043036$$

ดังนั้น

$$\hat{\beta}_A = \frac{\widehat{\text{Cov}}(R_A, R_m)}{\widehat{\text{Var}}(R_m)} = \frac{0.00043036}{0.00027857} \approx 1.545$$

จึงได้

$$\hat{\beta}_A \approx 1.55$$

ค่า $\beta_A > 1$ บ่งชี้ว่า ในช่วงข้อมูลที่ศึกษา หลักทรัพย์ A มีความไวต่อการเคลื่อนไหวของตลาดมากกว่าตลาด ตัวอย่างเช่น ในการตีความเชิงเส้นอย่างง่าย หากตลาดเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ส่วนของผลตอบแทนของ A ที่สัมพันธ์กับการเคลื่อนไหวของตลาด จะมีความไวประมาณร้อยละ 1.55 ทั้งนี้ได้หมายความว่าราคาหุ้นจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 1.55 ทุกครั้ง เพราะยังมีปัจจัยเฉพาะของหลักทรัพย์และความคลาดเคลื่อนอื่น

7. ค่าเบต้าของหลักทรัพย์ B

ในทำนองเดียวกัน

$$\widehat{\text{Cov}}(R_B, R_m) = -0.00015179$$

จึงได้

$$\hat{\beta}_B = \frac{-0.00015179}{0.00027857} \approx -0.545$$

ดังนั้น

$$\hat{\beta}_B \approx -0.54$$

ในข้อมูลตัวอย่างนี้ B มีความสัมพันธ์สวนทางกับตลาด จึงสามารถช่วยลดความเสี่ยงตลาดของพอร์ตได้

8. ค่าเบต้าของพอร์ต 50:50

ค่าเบต้าของพอร์ตเป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของเบต้าแต่ละหลักทรัพย์

$$\beta_p = w_A \beta_A + w_B \beta_B = 0.5(1.545) + 0.5(-0.545) = 0.500$$

ดังนั้น

$$\beta_p \approx 0.50$$

แม้ว่าพอร์ตยังมีหลักทรัพย์ A ซึ่งมีเบต้าสูงถึงประมาณ 1.55 การรวมหลักทรัพย์ B ที่มีเบต้าเป็นลบ ช่วยลดความไวของพอร์ตต่อตลาดลงเหลือประมาณครึ่งหนึ่งของตลาด

9. หาสัดส่วนพอร์ตที่มีความแปรปรวนต่ำสุด

สำหรับพอร์ตที่ประกอบด้วยหลักทรัพย์สองรายการ และกำหนดเงื่อนไข

$$w_A + w_B = 1$$

น้ำหนักของหลักทรัพย์ A ที่ทำให้ความแปรปรวนของพอร์ตต่ำสุดคือ

$$w_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}$$

แทนค่าได้

$$w_A^* = \frac{0.00015313 - (-0.00026205)}{0.00069241 + 0.00015313 - 2(-0.00026205)} \approx 0.3031$$

ดังนั้น

$$w_A^* \approx 30.31\%, \quad w_B^* \approx 69.69\%$$

ผลตอบแทนเฉลี่ยของพอร์ตนี้คือประมาณ

$$\bar{R}_p^* \approx 1.0512\% \text{ ต่อเดือน}$$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานลดลงเหลือ

$$\hat{\sigma}_p^* \approx 0.5222\% \text{ ต่อเดือน}$$

เปรียบเทียบได้ดังนี้

การลงทุน	ผลตอบแทนเฉลี่ยต่อเดือน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อเดือน
หลักทรัพย์ A	1.3125%	2.6314%
หลักทรัพย์ B	0.9375%	1.2374%
พอร์ต 50:50	1.1250%	0.8964%
พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุด	1.0512%	0.5222%

การประยุกต์ใช้ในการตัดสินใจลงทุน

จากข้อมูลตัวอย่าง หากนักลงทุนเลือก A เพียงรายการเดียว จะได้ผลตอบแทนเฉลี่ยสูงสุด แต่ต้องยอมรับความผันผวนและ ความไวต่อตลาดที่สูง

หากเป้าหมายคือการลดความเสี่ยง การเพิ่มหลักทรัพย์ B เข้ามาในพอร์ตมีประโยชน์อย่างมาก เนื่องจาก $\rho_{AB} \approx -0.805$ ทำให้ความผันผวนบางส่วนของหลักทรัพย์ทั้งสองหักล้างกัน

พอร์ต 50:50 เป็นตัวอย่างที่สร้างได้ง่าย และลดส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจาก 2.6314% ของ A เหลือเพียง 0.8964% ขณะที่รักษากำไรผลตอบแทนเฉลี่ยไว้ที่ประมาณ 1.125% ต่อเดือน

หากวัตถุประสงค์หลักคือการลดความแปรปรวน ภายใต้ข้อมูลชุดนี้ สัดส่วนประมาณ

30.3% ใน A และ 69.7% ใน B

ให้ความแปรปรวนต่ำที่สุดในกลุ่มพอร์ตสองหลักทรัพย์ โดยไม่มีการขายชอร์ต



ข้อสังเกต

ค่าความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และเบต้าในตัวอย่างเป็นค่าประมาณ จากข้อมูลย้อนหลังเพียง 8 งวด จึงใช้เพื่อแสดงหลักการคำนวณ มากกว่าการเป็นค่าพยากรณ์ที่แน่นอน

ในการ วิเคราะห์ จริง ควร ใช้ ข้อมูล ที่มี จำนวน งวด เพียง พอ เลือก ความถี่ ของ ข้อมูล ให้ สอดคล้อง กับ วัตถุประสงค์ และ ตรวจสอบ ความ เสถียร ของ ค่า ประมาณ เป็น ระยะ โดยเฉพาะ สห สัมพันธ์ ซึ่ง อาจ เปลี่ยนแปลงตามภาวะตลาด และมักเพิ่มขึ้นในช่วงที่ตลาดมีความผันผวนสูง

ดังนั้น พอร์ตที่มีความแปรปรวนต่ำสุดจากข้อมูลในอดีต ไม่จำเป็นต้องเป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดในอนาคต ควรใช้ร่วมกับการวิเคราะห์สถานการณ์ การทดสอบภาวะวิกฤต และข้อจำกัดด้านการลงทุนอื่น

ตัวอย่าง 7.3. การวิเคราะห์ Drawdown และ Maximum Drawdown ของพอร์ตลงทุน

นักลงทุนเริ่มต้นด้วยเงินลงทุน 1,000,000 บาท และติดตามมูลค่าพอร์ต ณ สิ้นเดือนเป็นเวลา 12 เดือน ได้ข้อมูลดังนี้

เดือน t	มูลค่าพอร์ต V_t (บาท)
0	1,000,000
1	1,050,000
2	1,100,000
3	1,080,000
4	1,150,000
5	1,100,000
6	1,000,000
7	920,000
8	980,000
9	1,040,000
10	1,120,000
11	1,180,000
12	1,160,000

แม้มูลค่าพอร์ตปลายปีเท่ากับ 1,160,000 บาท และพอร์ตให้ผลตอบแทนสะสม

$$R_{0:12} = \frac{1,160,000}{1,000,000} - 1 = 0.16 = 16\%,$$

แต่การพิจารณาเฉพาะผลตอบแทนปลายงวดอาจมองไม่เห็น ความเสียหายที่เกิดขึ้นระหว่างทาง จึงคำนวณ Drawdown และ Maximum Drawdown เพิ่มเติม

ขั้นที่ 1 คำนวณจุดสูงสุดสะสม

สำหรับแต่ละเดือน กำหนด

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} V_s$$

ตัวอย่างเช่น ณ เดือนที่ 3

$$M_3 = \max\{1,000,000, 1,050,000, 1,100,000, 1,080,000\} = 1,100,000$$

แม้มูลค่าพอร์ต ณ เดือนที่ 3 ลดลงเหลือ 1,080,000 บาท จุดสูงสุดสะสมยังคงอยู่ที่ 1,100,000 บาท ณ เดือนที่ 4 พอร์ตสร้างจุดสูงสุดใหม่

$$M_4 = 1,150,000$$

จากนั้นมูลค่าพอร์ตลดลงต่อเนื่องจนถึงเดือนที่ 7 แต่ค่า M_t ยังคงเท่ากับ 1,150,000 บาท

ขั้นที่ 2 คำนวณ Drawdown ในแต่ละเดือน

จาก

$$D_t = \frac{M_t - V_t}{M_t}$$

ได้ผลดังตาราง

เดือน t	V_t (บาท)	M_t (บาท)	Drawdown D_t
0	1,000,000	1,000,000	0.00%
1	1,050,000	1,050,000	0.00%
2	1,100,000	1,100,000	0.00%
3	1,080,000	1,100,000	1.82%
4	1,150,000	1,150,000	0.00%
5	1,100,000	1,150,000	4.35%
6	1,000,000	1,150,000	13.04%
7	920,000	1,150,000	20.00%
8	980,000	1,150,000	14.78%
9	1,040,000	1,150,000	9.57%
10	1,120,000	1,150,000	2.61%
11	1,180,000	1,180,000	0.00%
12	1,160,000	1,180,000	1.69%

ตัวอย่างเช่น ณ เดือนที่ 6

$$D_6 = \frac{1,150,000 - 1,000,000}{1,150,000} = 0.1304 = 13.04\%$$

และ ณ เดือนที่ 7

$$D_7 = \frac{1,150,000 - 920,000}{1,150,000} = 0.20 = 20.00\%$$

ดังนั้น Maximum Drawdown ของพอร์ตคือ

$$\text{MDD} = 20.00\%$$

กล่าวคือ ในช่วงเวลาที่ศึกษา พอร์ตเคยสูญเสียมูลค่ามากที่สุดร้อยละ 20 เมื่อวัดจากจุดสูงสุดก่อนหน้านี้

ขั้นที่ 3 ระบุ Peak, Trough และ Recovery

Maximum Drawdown ครั้งนี้เริ่มจากจุดสูงสุด (peak) ณ เดือนที่ 4

$$V_4 = 1,150,000$$

และลดลงถึงจุดต่ำสุด (trough) ณ เดือนที่ 7

$$V_7 = 920,000$$

จำนวนเงินที่ลดลงจากจุดสูงสุดเท่ากับ

$$1,150,000 - 920,000 = 230,000 \text{ บาท}$$

หลังจากนั้นพอร์ตค่อย ๆ พ้นตัว และกลับขึ้นเหนือจุดสูงสุดเดิมได้ในเดือนที่ 11

$$V_{11} = 1,180,000 > 1,150,000$$

ดังนั้น ช่วงที่พอร์ตอยู่ต่ำกว่าจุดสูงสุดเดิม กินเวลาดังแต่หลังเดือนที่ 4 จนกระทั่งพ้นตัวในเดือนที่ 11

ขั้นที่ 4 ผลตอบแทนที่ต้องใช้ในการฟื้นตัว

ข้อสังเกตที่สำคัญคือ การขาดทุนร้อยละ 20 ไม่สามารถชดเชยด้วยผลตอบแทนบวกร้อยละ 20 ได้

เมื่อพอร์ตลดลงจาก 1,150,000 บาท เหลือ 920,000 บาท ผลตอบแทนที่ต้องการเพื่อกลับไปยังจุดสูงสุดเดิมคือ

$$R_{\text{recovery}} = \frac{1,150,000}{920,000} - 1 = 0.25 = 25\%$$

ดังนั้น

Drawdown 20% $\implies$ ต้องได้ผลตอบแทน 25% เพื่อกลับสู่จุดเดิม

ความไม่สมมาตรนี้มีความสำคัญอย่างมากต่อการบริหารความเสี่ยง เพราะยิ่ง Drawdown มีขนาดใหญ่ ผลตอบแทนที่ต้องใช้เพื่อชดเชยการขาดทุนจะยิ่งเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

โดยทั่วไป หากเกิด Drawdown เท่ากับ d ผลตอบแทนที่ต้องใช้ในการฟื้นตัวคือ

$$R_{\text{recovery}} = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{d}{1-d} \quad (7.18)$$

ตัวอย่างเช่น

Drawdown	ผลตอบแทนที่ต้องใช้เพื่อฟื้นตัว
10%	11.11%
20%	25.00%
30%	42.86%
40%	66.67%
50%	100.00%

ขั้นที่ 5 เชื่อมโยงกับความเบี่ยงเบนخالลง

จากมูลค่าพอร์ต สามารถคำนวณผลตอบแทนรายเดือนได้จาก

$$R_t = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1$$

ได้ประมาณ

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_t(\%)$	5.00	4.76	-1.82	6.48	-4.35	-9.09	-8.00	6.52	6.12	7.69	5.36	-1.69

สมมติให้นักลงทุนกำหนดผลตอบแทนเป้าหมายรายเดือนเป็น

$$R_T = 0$$

เฉพาะผลตอบแทนที่ต่ำกว่าเป้าหมายเท่านั้น ที่จะถูกนำมาคำนวณความเบี่ยงเบนخالลง ได้แก่

$$-1.82\%, \quad -4.35\%, \quad -9.09\%, \quad -8.00\%, \quad -1.69\%$$

ส่วนเดือนที่ผลตอบแทนเป็นบวกจะมีค่า

$$\min(R_t - R_T, 0) = 0$$

ดังนั้น จากข้อมูล 12 เดือน

$$\widehat{DD}(0) = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} \min(R_t, 0)^2} \approx 0.03783$$

หรือ

$$\widehat{DD}(0) \approx 3.78\% \text{ ต่อเดือน}$$

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานจึงตอบคำถามว่า “ผลตอบแทนที่ต่ำกว่าเป้าหมายมีความรุนแรงโดยเฉลี่ยเพียงใด” ขณะที่ Maximum Drawdown ตอบคำถามว่า “ในช่วงที่เลวร้ายที่สุด พอร์ตเคยลดลงจากจุดสูงสุดมากที่สุดในเท่าใด” มาตราวัดทั้งสองจึงให้ข้อมูลด้านความเสี่ยงที่แตกต่างกัน

ขั้นที่ 6 การนำไปใช้กำหนดนโยบายความเสี่ยง

สมมติว่าผู้จัดการกองทุนกำหนดนโยบายว่า

$$MDD_{\max} = 15\%$$

ณ เดือนที่ 6 พอร์ตมี Drawdown

$$D_6 = 13.04\% < 15\%$$

จึงยังไม่เกินระดับความเสี่ยงที่กำหนด

แต่เมื่อถึงเดือนที่ 7

$$D_7 = 20\% > 15\%$$

พอร์ตได้ละเมิดข้อจำกัดด้านความเสี่ยง ผู้จัดการพอร์ตจึงอาจต้องดำเนินการตามนโยบายที่กำหนดไว้ล่วงหน้า เช่น ลดน้ำหนักสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูง เพิ่มสินทรัพย์ที่มีความผันผวนต่ำ ปรับสมดุลพอร์ต หรือทบทวนว่าสมมติฐานในการลงทุนเดิมยังคงใช้ได้หรือไม่

ตัวอย่างนี้แสดงว่า MDD สามารถใช้เป็น *risk limit* หรือระดับเตือนภัยของพอร์ตได้ โดยไม่จำเป็นต้องรอจนถึงปลายปีจึงประเมินผลการลงทุน

ข้อสรุปเชิงวิเคราะห์

แม้พอร์ตนี้ให้ผลตอบแทนสะสมตลอด 12 เดือนเท่ากับ

$$+16\%$$

แต่ระหว่างทางผู้ลงทุนต้องเผชิญ

$$\text{MDD} = 20\%$$

ดังนั้น นักลงทุนสองรายที่พิจารณาเพียงผลตอบแทนปลายปี อาจมองว่าพอร์ตนี้มีผลการดำเนินงานดี แต่ผู้ลงทุนที่มีข้อจำกัดด้านสภาพคล่อง มีระยะเวลาลงทุนสั้น หรือไม่สามารถยอมรับการขาดทุนระหว่างทางร้อยละ 20 ได้ อาจเห็นว่าพอร์ตนี้มีความเสี่ยงสูงเกินไป

Drawdown และ MDD จึงช่วยเติมข้อมูลที่ค่าเฉลี่ยผลตอบแทน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเพียงอย่างเดียวไม่สามารถสะท้อนได้ครบถ้วน



สรุปการวัดผลตอบแทนและความเสี่ยง

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \quad R_{1:T} = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) - 1,$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(R), \quad \rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}, \quad \beta_p = \frac{\text{Cov}(R_p, R_m)}{\text{Var}(R_m)},$$

$$\text{MDD} = \max_t \left(\frac{\max_{s \leq t} V_s - V_t}{\max_{s \leq t} V_s} \right)$$

การเปรียบเทียบผลตอบแทนและความเสี่ยงต้องใช้หน่วยเวลาเดียวกัน และต้องไม่ตีความส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เบต้า หรือ Drawdown ว่าเป็นมาตรวัดชนิดเดียวกัน

7.2 กลยุทธ์การลงทุนและการทดสอบย้อนหลัง

สัญลักษณ์เฉพาะส่วนกลยุทธ์และการทดสอบย้อนหลัง

P_t คือราคาในเวลา t , n คือความยาวหน้าต่าง, $j = 0, \dots, n-1$ คือจำนวนงวดที่ย้อนหลังจากเวลา t ดังนั้น P_{t-j} คือราคาย้อนหลัง j งวด ไม่ใช่ราคาของหลักทรัพย์ที่ j ; $s_t \in \{-1, 0, 1\}$ คือสถานะที่ตัดสินใจเมื่อสิ้นเวลา t และ R_{t+1}^{strat} คือผลตอบแทนที่เกิดขึ้นในงวดถัดไปหลังจากใช้สถานะ s_t

7.2.1 ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่

ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่เป็นตัวกรองข้อมูลราคาเพื่อลดความผันผวนระยะสั้นและแสดงแนวโน้ม ให้ P_t เป็นราคาปิด ณ เวลา t และ n เป็นจำนวนงวดในหน้าต่าง ในสมการของค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ตัวดัชนี j ทำหน้าที่นับระยะย้อนหลัง โดย $j = 0$ หมายถึงข้อมูลล่าสุด P_t และ $j = n-1$ หมายถึงข้อมูลเก่าสุดในหน้าต่าง หากคำนวณให้หลักทรัพย์หลายรายการ อาจเติมดัชนีหลักทรัพย์เป็น $P_{i,t-j}$ โดยตรง i วัชณะเลื่อนหน้าต่างตามเวลา ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่ายคือ

$$\text{SMA}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_{t-j} \quad (7.19)$$

ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักแบบเส้นตรง ซึ่งให้ข้อมูลล่าสุดมีน้ำหนักมากที่สุด คือ

$$\text{WMA}_n(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)P_{t-j}}{\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)P_{t-j} \quad (7.20)$$

ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียลกำหนดแบบเวียนเกิดเป็น

$$\text{EMA}_n(t) = \alpha P_t + (1 - \alpha) \text{EMA}_n(t-1), \quad \alpha = \frac{2}{n+1} \quad (7.21)$$

ค่าเริ่มต้นอาจใช้ $\text{SMA}_n(n)$ และต้องระบุวิธีเริ่มต้นเมื่อเปรียบเทียบผลจากโปรแกรมต่างชนิด

ให้ $E_1(t) = \text{EMA}_n(P)_t$, $E_2(t) = \text{EMA}_n(E_1)_t$ และ $E_3(t) = \text{EMA}_n(E_2)_t$ ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสองชั้นและสามชั้นคือ

$$\text{DEMA}_n(t) = 2E_1(t) - E_2(t), \quad (7.22)$$

$$\text{TEMA}_n(t) = 3E_1(t) - 3E_2(t) + E_3(t) \quad (7.23)$$



รูปที่ 7.3 ตัวอย่างการเปรียบเทียบเส้นค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (EMA) และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียลสามชั้น (TEMA) สำหรับช่วงย้อนหลัง 20 และ 50 จุดบนกราฟราคาหุ้น เส้นที่ใช้ช่วงย้อนหลังสั้นและ TEMA มีแนวโน้มตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลง ของราคาได้รวดเร็วกว่าเส้นค่าเฉลี่ยระยะยาว ลูกศรแสดงบริเวณที่ลักษณะของเส้นค่าเฉลี่ย และการตัดกันของเส้น สามารถใช้ประกอบการสังเกตการเปลี่ยนแปลงของแนวโน้มราคา

รูปที่ 7.3 แสดงให้เห็นการแลกเปลี่ยนระหว่างความเรียบและความล่าช้าของค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เส้นที่ตอบสนองเร็วจะติดตามการเปลี่ยนแปลงของราคาได้ไวกว่า แต่มีความไวต่อความผันผวนระยะสั้นมากกว่า ในขณะที่เส้นค่าเฉลี่ยที่ใช้ช่วงย้อนหลังยาวจะเรียบกว่า แต่ตอบสนองต่อการเปลี่ยนทิศทางของราคาช้ากว่า ดังนั้น การเลือกชนิดและจำนวนจุดของค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ควรสอดคล้องกับช่วงเวลาการลงทุนและวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์

DEMA และ TEMA มีวัตถุประสงค์ลดความล่าช้าของ EMA แต่ความไวที่เพิ่มขึ้นอาจทำให้เกิดสัญญาณซื้อขายถี่และต้นทุนสูงขึ้น งานของ Witayakiattlerd และ Panichkitkosolkul เปรียบเทียบ SMA, EMA, DEMA, TEMA และ WMA ภายใต้กรอบ Bollinger Bands และยืนยันว่าต้องประเมินผลนอกกลุ่มตัวอย่าง ไม่ควรเลือกชนิดค่าเฉลี่ยจากผลย้อนหลังชุดเดียว [18]

ตัวอย่าง 7.4. กำหนดราคาปิดแปดจุดเป็น

100, 102, 101, 104, 107, 106, 109, 111

จงหา $SMA_4(8)$, $WMA_4(8)$ และ $EMA_4(8)$ โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $EMA_4(4) = SMA_4(4)$

วิธีทำ

$$SMA_4(8) = \frac{107 + 106 + 109 + 111}{4} = 108.25,$$

$$WMA_4(8) = \frac{1(107) + 2(106) + 3(109) + 4(111)}{10} = 109.00$$

เนื่องจาก $\alpha = 2/5 = 0.4$ และ $EMA_4(4) = 101.75$ จะได้

$$E_5 = 0.4(107) + 0.6(101.75) = 103.85,$$

$$E_6 = 0.4(106) + 0.6(103.85) = 104.71,$$

$$E_7 = 0.4(109) + 0.6(104.71) = 106.426,$$

$$E_8 = 0.4(111) + 0.6(106.426) = 108.2556$$

ดังนั้น WMA ตอบสนองต่อราคาล่าสุดมากกว่า SMA ในตัวอย่างนี้ แต่ไม่ได้หมายความว่าจะให้ผลการซื้อขายดีกว่าเสมอไป □

7.2.2 Bollinger Bands และตัวชี้วัดความกว้างของแถบ

กำหนดเส้นกลางเป็นค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ $M_n(t)$ ชนิดที่เลือก และกำหนดส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแบบหน้าต่างด้วย

$$s_{P,n}(t) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (P_{t-j} - SMA_n(t))^2} \quad (7.24)$$

ในทางปฏิบัติอาจใช้ตัวหาร $n - 1$ ได้ แต่ต้องใช้คำนิยามเดียวกันตลอดการศึกษา Bollinger Bands คือ

$$MB(t) = M_n(t), \quad (7.25)$$

$$UB(t) = M_n(t) + ks_{P,n}(t), \quad (7.26)$$

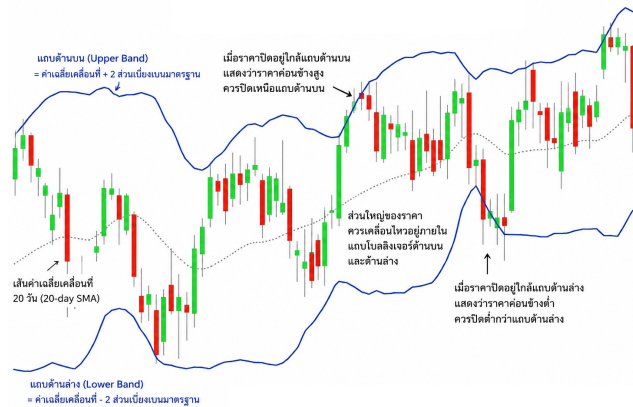
$$LB(t) = M_n(t) - ks_{P,n}(t), \quad (7.27)$$

โดยค่าที่ใช้บ่อยคือ $n = 20$ และ $k = 2$ แต่ไม่ควรถือว่าเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดสำหรับทุกหลักทรัพย์และทุกสภาวะตลาด ตำแหน่งสัมพัทธ์ของราคาในแถบและความกว้างของแถบกำหนดได้เป็น

$$\%B(t) = 100 \times \frac{P_t - LB(t)}{UB(t) - LB(t)}, \quad (7.28)$$

$$BBW(t) = 100 \times \frac{UB(t) - LB(t)}{MB(t)} \quad (7.29)$$

$\%B < 0$ หมายถึงราคาต่ำกว่าแถบล่าง และ $\%B > 100$ หมายถึงราคาสูงกว่าแถบบน แต่ค่าดังกล่าวไม่ใช่สัญญาณกลับตัวโดยอัตโนมัติ เพราะราคาอาจเคลื่อนตามแนวโน้มอยู่นอกแถบได้หลายงวด



รูปที่ 7.4 ภาพเชิงแนวคิดของราคาและ Bollinger Bands

7.2.3 MACD และกฎสัญญาณ

Moving Average Convergence Divergence (MACD) เป็นเครื่องมือวิเคราะห์ทางเทคนิค ที่ใช้เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential Moving Average: EMA) สองช่วงเวลา เพื่อสะท้อนทั้งทิศทางและโมเมนตัมของราคาหลักทรัพย์ แนวคิดสำคัญคือ หากค่าเฉลี่ยระยะสั้นเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับค่าเฉลี่ยระยะยาว ความแตกต่างดังกล่าวสามารถใช้เป็นตัวบ่งชี้การเปลี่ยนแปลงของแนวโน้มราคาได้

ให้ P_t แทนราคาหลักทรัพย์ ณ เวลา t และกำหนด EMA ที่มีช่วงเวลา n โดยสมการเวียนเกิด

$$EMA_n(t) = \alpha_n P_t + (1 - \alpha_n) EMA_n(t - 1), \quad \alpha_n = \frac{2}{n + 1} \quad (7.30)$$

โดยทั่วไปค่า α_n จะลดลงเมื่อ n เพิ่มขึ้น ดังนั้น EMA ระยะสั้นจะตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของราคาได้เร็วกว่า EMA ระยะยาว

เส้น MACD เส้นสัญญาณ และฮิสโตแกรม

กำหนดให้ $n_s < n_l$ เป็นจำนวนช่วงเวลาของ EMA ระยะสั้นและระยะยาว ตามลำดับ และให้ n_g เป็นจำนวนช่วงเวลาที่ใช้คำนวณเส้นสัญญาณ เส้น MACD นิยามโดย

$$\text{MACD}_t = \text{EMA}_{n_s}(t) - \text{EMA}_{n_l}(t) \quad (7.31)$$

เส้นสัญญาณ (Signal Line) คือ EMA ของอนุกรม MACD

$$\text{Signal}_t = \text{EMA}_{n_g}(\text{MACD})_t, \quad (7.32)$$

และ MACD Histogram นิยามเป็นผลต่างระหว่างเส้น MACD กับเส้นสัญญาณ

$$H_t = \text{MACD}_t - \text{Signal}_t \quad (7.33)$$

ค่าพารามิเตอร์มาตรฐานที่นิยมใช้คือ

$$(n_s, n_l, n_g) = (12, 26, 9) \quad (7.34)$$

กล่าวคือ ใช้ EMA 12 ช่วงเวลาเป็นเส้นระยะสั้น EMA 26 ช่วงเวลาเป็นเส้นระยะยาว และใช้ EMA 9 ช่วงเวลาของ MACD เป็นเส้นสัญญาณ อย่างไรก็ตาม ค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวไม่จำเป็นต้องเหมาะสมกับหลักทรัพย์ หรือความถี่ของข้อมูลทุกประเภท จึงควรประเมินด้วยข้อมูลย้อนหลัง ก่อนนำไปประยุกต์ใช้จริง



รูปที่ 7.5 องค์ประกอบของ MACD ประกอบด้วยเส้น MACD เส้นสัญญาณ (Signal Line) และฮิสโตแกรม (Histogram) ซึ่งแสดงผลต่างระหว่างเส้น MACD กับเส้นสัญญาณ ค่าฮิสโตแกรมเหนือเส้นศูนย์หมายถึง $MACD_t > Signal_t$ ส่วนค่าที่อยู่ต่ำกว่าเส้นศูนย์หมายถึง $MACD_t < Signal_t$

จากรูปที่ 7.5 เมื่อเส้น MACD อยู่เหนือเส้นสัญญาณจะได้ $H_t > 0$ ขณะที่เมื่อเส้น MACD อยู่ต่ำกว่าเส้นสัญญาณจะได้ $H_t < 0$ ดังนั้นจุดที่ฮิสโตแกรมเปลี่ยนเครื่องหมายจึงตรงกับบริเวณที่เส้น MACD และเส้นสัญญาณตัดกัน

กฎสัญญาณตัดขึ้นและตัดลง

เพื่อหลีกเลี่ยงความกำกวมในการระบุจุดตัด ควรนิยามสัญญาณโดยอาศัยข้อมูลอย่างน้อยสองเวลาติดต่อกัน กล่าวคือ

$$\text{ตัดขึ้นที่เวลา } t : \quad H_{t-1} \leq 0 \quad \text{และ} \quad H_t > 0, \quad (7.35)$$

$$\text{ตัดลงที่เวลา } t : \quad H_{t-1} \geq 0 \quad \text{และ} \quad H_t < 0$$

เนื่องจาก

$$H_t = MACD_t - Signal_t,$$

เงื่อนไขในสมการ (7.35) สามารถเขียนในรูปของเส้น MACD และเส้นสัญญาณได้โดยตรงว่า

$$\begin{aligned} \text{ตัดขึ้นที่เวลา } t : \quad & MACD_{t-1} \leq Signal_{t-1}, \\ & MACD_t > Signal_t, \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \text{ตัดลงที่เวลา } t : \quad & MACD_{t-1} \geq Signal_{t-1}, \\ & MACD_t < Signal_t \end{aligned}$$

ในทางปฏิบัติ สัญญาณตัดขึ้น (bullish crossover) มักถูกตีความว่าโมเมนตัมระยะสั้นกำลังปรับตัวดีขึ้น และอาจใช้เป็นเงื่อนไขประกอบการเปิดสถานะซื้อ ขณะที่ สัญญาณตัดลง (bearish crossover) มักสะท้อนว่าโมเมนตัมระยะสั้นกำลังอ่อนตัวลง และอาจใช้เป็นเงื่อนไขประกอบการขายหรือลดสถานะลงทุน

อย่างไรก็ตาม สัญญาณดังกล่าวไม่ควรถูกตีความว่าเป็นคำสั่งซื้อหรือขาย โดยอัตโนมัติ เนื่องจากในช่วงที่ราคาหลักทรัพย์เคลื่อนไหวในกรอบแคบ (sideways market) เส้น MACD และเส้นสัญญาณอาจตัดกันหลายครั้ง และก่อให้เกิดสัญญาณหลอก (false signal) ได้

การตีความขนาดของฮิสโทแกรม

นอกจากเครื่องหมายของ H_t แล้ว ขนาดของฮิสโทแกรมยังให้ข้อมูลเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่าง MACD กับเส้นสัญญาณ กล่าวคือ

$$|H_t| = |\text{MACD}_t - \text{Signal}_t|$$

หาก $|H_t|$ เพิ่มขึ้น แสดงว่าระยะห่างระหว่างเส้นทั้งสองกำลังเพิ่มขึ้น ซึ่งอาจสะท้อนว่าโมเมนตัมของแนวโน้มกำลังแข็งแกร่งขึ้น ในทางตรงกันข้าม หาก $|H_t|$ ลดลงและเข้าใกล้ศูนย์ อาจเป็นสัญญาณว่าโมเมนตัมเดิมกำลังอ่อนตัวลง และมีโอกาสเกิดการตัดกันของเส้นทั้งสองในเวลาต่อมา

จึงควรแยกความหมายของตัวแปรสองส่วนออกจากกันอย่างชัดเจน คือ เครื่องหมายของ H_t ใช้ระบุตำแหน่งสัมพันธ์ของ MACD กับเส้นสัญญาณ ส่วนขนาด $|H_t|$ ใช้บ่งชี้ระดับความแตกต่าง ระหว่างเส้นทั้งสอง

การปรับเส้นสัญญาณและการทดสอบย้อนหลัง

ข้อจำกัดสำคัญของ MACD คือ EMA เป็นตัวชี้วัดที่คำนวณจากข้อมูลในอดีต ดังนั้นสัญญาณที่เกิดขึ้นจึงมีความล่าช้า (lag) เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของราคา โดยเฉพาะเมื่อใช้กับตลาดที่มีความผันผวนสูงหรือมีการกลับทิศอย่างรวดเร็ว

Boonprasurt, Sampaokit และ Witayakiattilerd เสนอแนวทางปรับปรุงเส้นสัญญาณให้สามารถตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลง ของข้อมูลได้รวดเร็วยิ่งขึ้น รวมทั้งต่อยอดสัญญาณซื้อขายด้วยระดับความเชื่อมั่นแบบฟัซซี [3]

ในบทนี้จะนำแนวคิดดังกล่าวมาใช้เฉพาะในส่วนของการปรับเส้นสัญญาณและการประเมินประสิทธิภาพของกลยุทธ์ ด้วยการทดสอบย้อนหลัง (backtesting) ส่วนรายละเอียดเกี่ยวกับระบบฟัซซีและการกำหนดระดับความเชื่อมั่น อยู่นอกขอบเขตของบทนี้

ในการประเมินกลยุทธ์ MACD ควรพิจารณาทั้งผลตอบแทนและความเสี่ยง ไม่ควรพิจารณาเฉพาะจำนวนครั้งที่สัญญาณซื้อขายถูกต้อง ตัวชี้วัดที่สามารถนำมาใช้ประกอบการประเมิน ได้แก่ ผลตอบแทนสะสม ความผันผวน

อัตราส่วนชาร์ป การลดลงสูงสุดของมูลค่าพอร์ต (Maximum Drawdown) จำนวนธุรกรรม และผลกระทบจากต้นทุนการซื้อขาย ซึ่งจะทำให้การเปรียบเทียบกลยุทธ์มีความสมจริงมากขึ้น

อัตราความสำเร็จของธุรกรรมจำนวน N ครั้งกำหนดเป็น

$$\text{SuR} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1_{\{\Pi_k > 0\}}, \quad (7.37)$$

เมื่อ Π_k แทนกำไรสุทธิของธุรกรรมที่ k และ $1_{\{\Pi_k > 0\}}$ เป็นฟังก์ชันบ่งชี้ (indicator function) ซึ่งนิยามโดย

$$1_{\{\Pi_k > 0\}} = \begin{cases} 1, & \Pi_k > 0, \\ 0, & \Pi_k \leq 0 \end{cases} \quad (7.38)$$

ดังนั้น SuR จึงเป็นสัดส่วนของธุรกรรมที่ให้กำไรสุทธิ เมื่อเทียบกับจำนวนธุรกรรมทั้งหมด โดยมีค่าอยู่ในช่วง

$$0 \leq \text{SuR} \leq 1$$

หากต้องการแสดงในรูปเปอร์เซ็นต์ สามารถใช้

$$100 \times \text{SuR} \%$$

อย่างไรก็ตาม อัตราความสำเร็จไม่สะท้อนขนาดของกำไรและขาดทุน กลยุทธ์ที่มีธุรกรรมที่ทำกำไรจำนวนมากอาจยังให้ผลขาดทุนรวมได้ หากขนาดของการขาดทุนในแต่ละครั้งสูงกว่าขนาดของกำไรโดยเฉลี่ย ดังนั้นควรพิจารณา SuR ร่วมกับตัวชี้วัดอื่น เช่น ผลตอบแทนเฉลี่ยต่อธุรกรรม อัตราส่วนกำไรต่อขาดทุน ผลตอบแทนสะสม และการลดลงสูงสุดของมูลค่าพอร์ต (Maximum Drawdown)

7.2.4 ผลตอบแทนของกลยุทธ์และต้นทุนธุรกรรม

ให้ $s_t \in \{-1, 0, 1\}$ เป็นสถานะที่กำหนดเมื่อสิ้นสุดเวลา t โดย 1 หมายถึงถือสถานะซื้อ -1 หมายถึงถือสถานะขายชอร์ต และ 0 หมายถึงถือเงินสด เพื่อป้องกัน Look-ahead Bias ต้องนำ s_t ไปคูณผลตอบแทนของงวดถัดไป

$$R_{t+1}^{\text{strat}} = s_t R_{t+1} - \kappa |s_t - s_{t-1}|, \quad (7.39)$$

เมื่อ $\kappa \geq 0$ เป็นต้นทุนต่อหน่วย Turnover หากเปลี่ยนจากสถานะซื้อเป็นขายชอร์ต Turnover เท่ากับ 2 มูลค่าพอร์ตของกลยุทธ์คือ

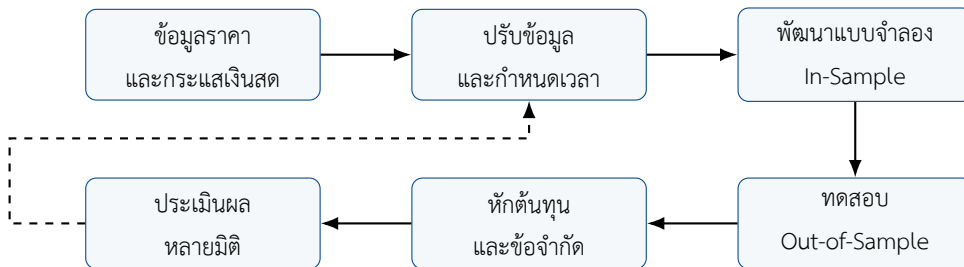
$$V_{t+1} = V_t(1 + R_{t+1}^{\text{strat}}). \quad (7.40)$$

แบบจำลองที่ไม่หักค่าธรรมเนียม Bid-Ask Spread ดอกเบี้ยเงินกู้ ค่าธรรมเนียมยืมหุ้น และผลกระทบต่อราคา มีแนวโน้มประเมินผลตอบแทนสูงเกินจริง

7.2.5 กรอบการทดสอบย้อนหลังที่เข้มงวด

การทดสอบย้อนหลังที่น่าเชื่อถือควรมีองค์ประกอบต่อไปนี้

- 1) **กำหนดข้อมูลและเวลาให้ชัดเจน** รวมการปรับราคาจากเงินปันผล การแตกหุ้น หลักทรัพย์ที่เพิกถอน และเวลาที่ข้อมูลพร้อมใช้งานจริง
- 2) **แบ่ง In-Sample และ Out-of-Sample** ใช้ข้อมูลส่วนแรกพัฒนาแบบจำลอง และเก็บข้อมูลส่วนหลังไว้ประเมินโดยไม่แก้พารามิเตอร์ตามผลทดสอบ
- 3) **ใช้ Walk-Forward Testing** ประมาณพารามิเตอร์จากหน้าต่างอดีต แล้วเลื่อนไปข้างหน้าตามลำดับเวลา
- 4) **ควบคุม Data Snooping** เมื่อทดลองพารามิเตอร์หรือกลยุทธ์จำนวนมาก ต้องรายงานจำนวนแบบที่ทดลองและใช้การตรวจสอบความทนทาน
- 5) **ใช้ Benchmark ที่เหมาะสม** เช่น Buy-and-Hold, เงินสด หรือดัชนีตลาด โดยใช้ช่วงเวลาและต้นทุนเดียวกัน
- 6) **วิเคราะห์ความไว** ต่อหน้าต่างค่าเฉลี่ย ค่า k ต้นทุนธุรกรรม ช่วงเวลาถือครอง และภาวะตลาด
- 7) **รายงาน หลาย มาตร วัด** ทั้งผลตอบแทน ความผันผวน Sharpe Ratio, Maximum Drawdown, Turnover, VaR และ ES



รูปที่ 7.6 วงจรการพัฒนาและตรวจสอบกลยุทธ์การลงทุน

ตัวอย่าง 7.5. กลยุทธ์หนึ่งให้สถานะปลายวันเป็น

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = -1$$

และผลตอบแทนของสินทรัพย์ในวันถัดไปเป็น

$$R_1 = 1.0\%, \quad R_2 = -0.5\%, \quad R_3 = 2.0\%, \quad R_4 = -1.5\%$$

กำหนดต้นทุนต่อหน่วย Turnover $\kappa = 0.10\%$ จงคำนวณผลตอบแทนกลยุทธ์สำหรับงวดที่ 2–4

วิธีทำ ใช้สถานะที่ทราบก่อนเริ่มงวดตามสมการ (7.39)

$$R_2^{\text{strat}} = 1(-0.5\%) - 0.10\%|1 - 0| = -0.60\%,$$

$$R_3^{\text{strat}} = 1(2.0\%) - 0.10\%|1 - 1| = 2.00\%,$$

$$R_4^{\text{strat}} = (-1)(-1.5\%) - 0.10\%|-1 - 1| = 1.30\%$$

การเปลี่ยนจากซื้อเป็นขายซอร์ตมี Turnover เท่ากับ 2 จึงหักต้นทุน 0.20% ผลตอบแทนสะสมสามงวดคือ

$$(1 - 0.006)(1 + 0.020)(1 + 0.013) - 1 = 2.7060\%$$

□

ข้อสังเกต

งานวิจัย Bollinger Bands ของผู้เขียนใช้ข้อมูลหุ้น SET50 ช่วงปี 2018–2022 แบ่งข้อมูล 80:20 สำหรับการพัฒนาและทดสอบนอกกลุ่มตัวอย่าง และเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ห้าชนิด ผลที่ DEMA และ

TEMA ทำได้ดีในหลักทรัพย์บางรายการไม่ควรถูกตีความว่าเหนือกว่าในทุกตลาด ประเด็นสำคัญเชิงวิธีวิจัยคือการตรวจสอบนอกกลุ่มตัวอย่าง การเปรียบเทียบกับ Buy-and-Hold และการวิเคราะห์ความไวต่อข้อกำหนดของกลยุทธ์ [18]

7.3 การสร้างและบริหารพอร์ตการลงทุน

สัญลักษณ์เฉพาะส่วนพอร์ตการลงทุน

ให้ n เป็นจำนวนหลักทรัพย์ และ $i, j \in \{1, \dots, n\}$ เป็นดัชนีหลักทรัพย์ R_i คือผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ i , $\mu_i = E[R_i]$, $\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i)$, w_i คือน้ำหนักสุทธิของหลักทรัพย์ที่ i และ $\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$ คือสมาชิกแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของ Σ พจน์แนวทแยง σ_{ii} คือความแปรปรวนของหลักทรัพย์ที่ i ส่วนพจน์นอกแนวทแยง σ_{ij} เมื่อ $i \neq j$ คือความแปรปรวนร่วมระหว่างสองหลักทรัพย์

7.3.1 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต

พิจารณาพอร์ตที่ประกอบด้วยหลักทรัพย์ n รายการ ให้

$$R = (R_1, \dots, R_n)^T, \quad w = (w_1, \dots, w_n)^T$$

เป็นเวกเตอร์ผลตอบแทนและเวกเตอร์น้ำหนักของหลักทรัพย์ในพอร์ต ตามลำดับ โดย w_i แทนสัดส่วนของเงินลงทุนในหลักทรัพย์ที่ i

กำหนดเวกเตอร์หนึ่ง (vector of ones) ขนาด $n \times 1$ เป็น

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 1_n^T = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1), \quad (7.41)$$

เมื่อ 1_n^T เป็นเวกเตอร์แถวขนาด $1 \times n$

หากพอร์ตนำเงินทุนทั้งหมดไปลงทุนในหลักทรัพย์โดยไม่ถือเงินสด ผลรวมน้ำหนักของพอร์ตต้องเท่ากับหนึ่ง

กล่าวคือ

$$1_n^T w = \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (7.42)$$

ถ้าอนุญาตให้ขายชอร์ต ค่า w_i อาจเป็นลบได้ แต่ยังคงต้องเป็นไปตามเงื่อนไขในสมการ (7.42) ส่วนกรณีที่ไม่อนุญาตให้ขายชอร์ตจะมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

ผลตอบแทนของพอร์ตในหนึ่งงวดคือ

$$R_p = w^T R = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (7.43)$$

ให้

$$\mu = E[R] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ผลตอบแทนคาดหวัง และให้

$$\Sigma = [\sigma_{ij}]_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) โดย

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

และ

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{Var}(R_i)$$

เมทริกซ์ Σ เป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ และเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite)

ดังนั้น

$$x^T \Sigma x \geq 0$$

สำหรับเวกเตอร์ x ทุกเวกเตอร์ที่มีมิติเหมาะสม

ผลตอบแทนคาดหวังและความแปรปรวนของพอร์ตจึงเท่ากับ

$$\mu_p = E[R_p] = w^T \mu, \quad (7.45)$$

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p) = w^T \Sigma w \quad (7.46)$$

ดังนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนพอร์ต ซึ่งนิยมใช้เป็น ตัววัดความเสี่ยงของพอร์ต คือ

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w} \quad (7.47)$$

เมื่อกระจายสมการความแปรปรวนของพอร์ตออกเป็นรายพจน์ จะได้

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (7.48)$$

ผลรวมแรกสะท้อนความเสี่ยงจากหลักทรัพย์แต่ละรายการ ส่วนผลรวมที่สองสะท้อนผลจากการเคลื่อนไหวร่วมกันของหลักทรัพย์ แต่ละคู่ ดังนั้นความเสี่ยงของพอร์ตไม่ได้ขึ้นอยู่กับ σ_i ของหลักทรัพย์แต่ละรายการเพียงอย่างเดียว แต่ยังขึ้นอยู่กับความแปรปรวนร่วม σ_{ij} และน้ำหนัก w_i, w_j ของหลักทรัพย์ทุกคู่ด้วย

ถ้า $w_i, w_j > 0$ และ $\sigma_{ij} < 0$ พจน์

$$2w_i w_j \sigma_{ij}$$

จะมีค่าเป็นลบและช่วยลดความแปรปรวนของพอร์ต อย่างไรก็ตาม หากมีการขายชอร์ตและน้ำหนักบางรายการเป็นลบ ทิศทางของผลกระทบต้องพิจารณาจากเครื่องหมายของ $w_i w_j \sigma_{ij}$ โดยตรง

กรณีพอร์ตสองหลักทรัพย์

สำหรับพอร์ตที่มีหลักทรัพย์สองรายการ โดย $w_2 = 1 - w_1$ จะได้

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (7.49)$$

พจน์สุดท้ายเป็นแหล่งสำคัญของประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยง (diversification benefit) ในกรณีทั่วไปสามารถแทนหลักทรัพย์ 1 และ 2 ด้วยหลักทรัพย์ที่ i และ j ได้ โดยพจน์ร่วมมีรูป

$$2w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

การเลือกหลักทรัพย์ที่มีความผันผวนต่ำแต่มีสหสัมพันธ์กันสูงมาก อาจลดความเสี่ยงของพอร์ตได้น้อยกว่าการรวมหลักทรัพย์ที่มี ความผันผวนสูงกว่าแต่มีสหสัมพันธ์ต่ำ ดังนั้นการกระจายการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ จึงหมายถึงการกระจายแหล่งความเสี่ยง มิใช่เพียงการเพิ่มจำนวนหลักทรัพย์ในพอร์ตเท่านั้น

ตัวอย่าง 7.6. พอร์ตที่ประกอบด้วยหลักทรัพย์ 4 รายการ

สมมติว่านักลงทุนจัดสรรเงินลงทุนในหลักทรัพย์ 4 รายการ โดยมีเวกเตอร์น้ำหนัก

$$w = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก

$$1_4^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

จึงตรวจสอบเงื่อนไขงบประมาณได้ว่า

$$1_4^T w = 0.30 + 0.25 + 0.25 + 0.20 = 1$$

สมมติผลตอบแทนคาดหวังต่อปีของหลักทรัพย์ทั้งสี่เป็น

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.10 \\ 0.06 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเป็น

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.02250 & 0.00900 & 0.00300 & 0.00375 \\ 0.00900 & 0.04000 & 0.00500 & 0.02000 \\ 0.00300 & 0.00500 & 0.01000 & 0.00375 \\ 0.00375 & 0.02000 & 0.00375 & 0.06250 \end{pmatrix}$$

ผลตอบแทนคาดหวังของพอร์ตคือ

$$\begin{aligned} \mu_p &= w^T \mu \\ &= (0.30)(0.08) + (0.25)(0.10) + (0.25)(0.06) + (0.20)(0.12) = 0.088 \end{aligned}$$

ดังนั้นพอร์ตมีผลตอบแทนคาดหวัง

$$\mu_p = 8.8\% \text{ ต่อปี}$$

สำหรับความเสี่ยงของพอร์ต เริ่มจาก

$$\Sigma w = \begin{pmatrix} 0.010500 \\ 0.017950 \\ 0.005400 \\ 0.0195625 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w^T \Sigma w \\ &= (0.30)(0.010500) + (0.25)(0.017950) \\ &\quad + (0.25)(0.005400) + (0.20)(0.0195625) = 0.012900 \end{aligned}$$

จึงได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนพอร์ตเป็น

$$\sigma_p = \sqrt{0.012900} \approx 0.1136$$

ดังนั้นความผันผวนของพอร์ตเท่ากับประมาณ

$$\sigma_p \approx 11.36\% \text{ ต่อปี}$$

□

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การคำนวณความเสี่ยงของพอร์ตไม่สามารถหาได้จาก ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของหลักทรัพย์ แต่ต้องนำความแปรปรวนร่วมระหว่างหลักทรัพย์ทุกคู่มาพิจารณาด้วย ผ่านเมทริกซ์ Σ

กล่าวอีกนัยหนึ่ง แม้พอร์ตนี้ประกอบด้วยหลักทรัพย์ที่แต่ละรายการ มีความเสี่ยงแตกต่างกัน แต่ระดับความเสี่ยงรวมของพอร์ต ยังขึ้นอยู่กับว่าผลตอบแทนของหลักทรัพย์เหล่านั้น เคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกันมากน้อยเพียงใด ซึ่งเป็นหัวใจของหลักการกระจายความเสี่ยง ในการบริหารพอร์ตการลงทุน

7.3.2 พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุด

ปัญหาพอร์ตความแปรปรวนต่ำสุดทั่วโลก (Global Minimum-Variance Portfolio: GMV) คือ

$$\min_w w^T \Sigma w \quad \text{ภายใต้} \quad 1^T w = 1 \quad (7.50)$$

ถ้า Σ เป็นบวกแน่นอนและอนุญาตให้ขายชอร์ต คำตอบมีรูปปิด

$$w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (7.51)$$

สำหรับสองหลักทรัพย์ น้ำหนักของหลักทรัพย์ที่ 1 คือ

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \quad \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (7.52)$$

หากกำหนด $0 \leq w_i \leq 1$ ต้องตรวจว่าน้ำหนักจากรูปปิดอยู่ในช่วงหรือไม่ มิฉะนั้นคำตอบภายใต้ข้อจำกัดจะอยู่บนขอบเขต ในเชิงปฏิบัติ $w_i = 0.20$ หมายถึงจัดสรรร้อยละ 20 ของฐานเงินทุนให้หลักทรัพย์ที่ i ส่วน $w_i < 0$ หมายถึงมีสถานะขายชอร์ตสุทธิในหลักทรัพย์นั้น น้ำหนักที่มีค่าสูงมากทั้งบวกและลบมักสะท้อน Leverage และความไวต่อความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณ

ตัวอย่าง 7.7. หลักทรัพย์ 1 และ 2 มีผลตอบแทนคาดหวังร้อยละ 10 และ 14 ต่อปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานร้อยละ 12 และ 20 ต่อปี และสหสัมพันธ์เท่ากับ -0.25 จงหาพอร์ตความแปรปรวนต่ำสุดโดยไม่จำกัดการขายชอร์ต

วิธีทำ

$$\sigma_{12} = (-0.25)(0.12)(0.20) = -0.006$$

จากสมการ (7.52)

$$w_1^* = \frac{0.20^2 - (-0.006)}{0.12^2 + 0.20^2 - 2(-0.006)} = 0.692771,$$

$$w_2^* = 0.307229$$

ดังนั้น

$$\mu_p = 0.692771(0.10) + 0.307229(0.14) = 0.112289,$$

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w} = 0.090181$$

พอร์ตให้ผลตอบแทนคาดหวังร้อยละ 11.2289 และความผันผวนร้อยละ 9.0181 ซึ่งต่ำกว่าความผันผวนของหลักทรัพย์ทั้งสอง เพราะสหสัมพันธ์เป็นลบ □

7.3.3 พอร์ตผลตอบแทนเป้าหมายและเส้นขอบประสิทธิภาพ

พอร์ตที่มีผลตอบแทนเป้าหมาย μ_0 หาได้จาก

$$\min_w w^T \Sigma w \quad \text{ภายใต้} \quad w^T \mu = \mu_0, \quad 1^T w = 1 \quad (7.53)$$

กำหนด

$$A = 1^T \Sigma^{-1} 1, \quad B = 1^T \Sigma^{-1} \mu, \quad C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad D = AC - B^2 \quad (7.54)$$

ในสมการนี้ A, B, C, D เป็นค่าคงที่ที่สรุปข้อมูลจาก μ และ Σ ไม่ใช่ชื่อหลักทรัพย์ A, B, C และ D ค่า A สัมพันธ์กับความแปรปรวนต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขงบประมาณ ขณะที่ B และ C เชื่อมข้อมูลผลตอบแทนคาดหวัง

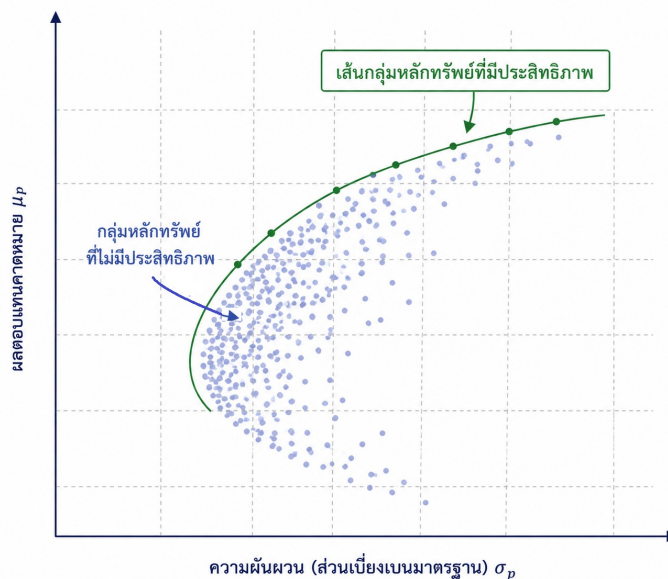
กับโครงสร้างความเสี่ยง เมื่อ $D > 0$ คำตอบคือ

$$w(\mu_0) = \Sigma^{-1} \left[\frac{C - B\mu_0}{D} \mathbf{1} + \frac{A\mu_0 - B}{D} \mu \right] \quad (7.55)$$

และความแปรปรวนต่ำสุดที่ผลตอบแทน μ_0 คือ

$$\sigma^2(\mu_0) = \frac{A\mu_0^2 - 2B\mu_0 + C}{D} \quad (7.56)$$

ส่วนของเส้นที่อยู่เหนือพอร์ต GMV เรียกว่าเส้นขอบประสิทธิภาพ เพราะไม่มีพอร์ตอื่นที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าโดยมีความเสี่ยงไม่มากกว่า



รูปที่ 7.7 กลุ่มพอร์ตการลงทุนที่เป็นไปได้และเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ ในระนาบผลตอบแทนคาดหวังและความผันผวน

7.3.4 สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงและพอร์ตสัมผัส

ให้ R_f เป็นผลตอบแทนของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง (risk-free asset) ในหน่วยเวลาเดียวกับเวกเตอร์ผลตอบแทนคาดหวัง μ และให้

$$\mu - R_f \mathbf{1}$$

เป็นเวกเตอร์ผลตอบแทนส่วนเกินที่คาดหวัง (expected excess returns) ของสินทรัพย์เสี่ยงแต่ละรายการ

พอร์ตสัมผัส (Tangency Portfolio) คือพอร์ตของสินทรัพย์เสี่ยงที่ให้ Sharpe Ratio สูงที่สุด กล่าวคือ เป็นคำตอบของปัญหา

$$\max_w \frac{w^T \mu - R_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \quad \text{ภายใต้} \quad 1^T w = 1 \quad (7.57)$$

ดังนั้นพอร์ตสัมผัสไม่ได้หมายถึงพอร์ตที่มีผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด หรือพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุดโดยตรง แต่เป็นพอร์ตที่ให้ ผลตอบแทนส่วนเกินต่อหนึ่งหน่วยของความเสี่ยงรวมสูงที่สุด

ภายใต้สมมติฐานว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม Σ ผกผันได้ และอนุญาตให้ขายชอร์ตได้โดยไม่มีข้อจำกัด น้ำหนักของพอร์ตสัมผัสมีรูปปิดเป็น

$$w_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}(\mu - R_f \mathbf{1})} \quad (7.58)$$

โดยตัวส่วนทำหน้าที่ปรับมาตราส่วนให้น้ำหนักรวมเท่ากับหนึ่ง กล่าวคือ

$$\mathbf{1}^T w_T = 1$$

ผลตอบแทนคาดหวังและความผันผวนของพอร์ตสัมผัสเท่ากับ

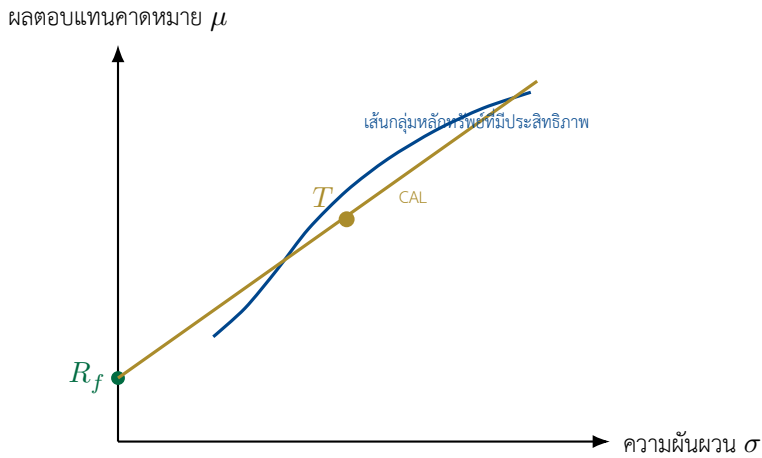
$$\mu_T = w_T^T \mu, \quad (7.59)$$

$$\sigma_T = \sqrt{w_T^T \Sigma w_T} \quad (7.60)$$

ดังนั้น Sharpe Ratio สูงสุดที่ได้จากกลุ่มสินทรัพย์เสี่ยงคือ

$$S_T = \frac{\mu_T - R_f}{\sigma_T} \quad (7.61)$$

ในเชิงเรขาคณิต หากพิจารณาเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ ในระนาบ (σ, μ) แล้วลากเส้นตรงจากจุด $(0, R_f)$ ให้สัมผัสเส้นดังกล่าว จุดสัมผัสคือพอร์ตสัมผัส T และความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ Sharpe Ratio ของพอร์ตสัมผัส



รูปที่ 7.8 พอร์ตสัมผัส T เป็นพอร์ตสินทรัพย์เสี่ยงที่ทำให้เส้นจาก สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงสัมผัสเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ และให้ Sharpe Ratio สูงที่สุด

เมื่อผสมสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงกับพอร์ตสัมผัส ให้ y เป็นสัดส่วนที่ลงทุนในพอร์ตสัมผัส และ $1 - y$ เป็นสัดส่วนที่ลงทุนในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง จะได้ผลตอบแทนของพอร์ตผสม

$$R_c = (1 - y)R_f + yR_T \quad (7.62)$$

ดังนั้น

$$E[R_c] = R_f + y(\mu_T - R_f), \quad (7.63)$$

$$\sigma_c = |y|\sigma_T \quad (7.64)$$

สำหรับกรณี $y \geq 0$ สามารถกำจัด y ออกจากสมการ เพื่อเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนกับความเสี่ยงได้เป็น

$$E[R_c] = R_f + \frac{\mu_T - R_f}{\sigma_T} \sigma_c \quad (7.65)$$

เส้นตรงในสมการ (7.65) เรียกว่า เส้นการจัดสรรเงินทุน (Capital Allocation Line: CAL) และความชันของเส้นคือ

$$\frac{\mu_T - R_f}{\sigma_T} = S_T$$

ซึ่งเป็น Sharpe Ratio ของพอร์ตสัมผัส

หาก $0 < y < 1$ นักลงทุนแบ่งเงินระหว่างสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง กับพอร์ตผสม หาก $y = 1$ จะลงทุนทั้งหมดในพอร์ตผสม และหาก $y > 1$ จะหมายถึงการกู้ยืมเงินเพื่อนำมาลงทุนใน พอร์ตผสมในสัดส่วนมากกว่าร้อยละ 100

CAL และ CML

เส้นที่เชื่อมสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงกับ พอร์ตสินทรัพย์เสี่ยงใด ๆ เรียกว่า Capital Allocation Line (CAL) เมื่อเลือกพอร์ตเสี่ยงเป็นพอร์ตผสม จะได้ CAL ที่มีความชันสูงสุด หรือ Sharpe Ratio สูงที่สุด ภายใต้สมมติฐานของ CAPM เมื่อพอร์ตผสมตรงกับพอร์ตตลาด เส้น CAL ดังกล่าวเรียกว่า Capital Market Line (CML) ดังนั้น CAL และ CML ไม่ควรใช้แทนกันโดยไม่มีเงื่อนไข

อย่างไรก็ตาม รูปปิดในสมการ (7.58) มีความไวต่อความคลาดเคลื่อนในการประมาณ μ และ Σ โดยเฉพาะค่าผลตอบแทนคาดหวัง เพราะความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยอาจทำให้น้ำหนักพอร์ต เปลี่ยนแปลงมากและอาจก่อให้เกิดน้ำหนักบวกหรือลบ ในขนาดที่ไม่สมเหตุผล

ในการประยุกต์ใช้จริงจึงมักพิจารณาวิธีลดความไม่แน่นอนของค่าประมาณ เช่น การหดตัวของค่าประมาณ (shrinkage estimation) การกำหนดข้อจำกัดของน้ำหนัก

$$l_i \leq w_i \leq u_i,$$

การห้ามขายชอร์ต

$$w_i \geq 0$$

หรือการหาค่าเหมาะที่สุดแบบทนทาน (robust optimization) เพื่อให้พอร์ตมีเสถียรภาพและสามารถนำไปใช้ลงทุนจริงได้มากขึ้น

7.3.5 ข้อจำกัดการขายชอร์ตและ Leverage

ถ้าไม่อนุญาตขายชอร์ต กำหนด

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.66)$$

หากอนุญาตขายชอร์ต น้ำหนักบางรายการอาจเป็นลบ และควรควบคุม Gross Exposure ด้วย

$$\sum_{i=1}^n |w_i| \leq G_{\max} \quad (7.67)$$

Net Exposure คือ $\sum_i w_i$ ส่วน Gross Exposure คือ $\sum_i |w_i|$ หากฐานเงินทุนที่ใช้กำหนดน้ำหนักเท่ากับ V มูลค่าสถานะสุทธิและมูลค่าสถานะรวมคือ $V \sum_i w_i$ และ $V \sum_i |w_i|$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น $w_i = 0.80$ และ $w_j = -0.70$ ให้ Net Exposure เท่ากับ 0.10 แต่ Gross Exposure เท่ากับ 1.50 แสดงว่าพอร์ตมีสถานะรวมร้อยละ 150 ของฐานเงินทุน พอร์ตที่ Net Exposure ต่ำจึงอาจยังมีความเสี่ยงสูงหาก Gross Exposure สูงมาก

พอร์ต Long-Short ที่ไม่ใช้เงินสดสุทธิในอุดมคติมีเงื่อนไข

$$1^T w = 0 \quad (7.68)$$

แต่คำว่า “Cashless” ไม่ได้หมายความว่าไม่มีข้อกำหนดด้านเงินทุนจริง ผู้ลงทุนยังต้องวางหลักประกัน ชำระค่าธรรมเนียมยืมหุ้น รับความเสี่ยง Short Squeeze และอาจถูกเรียกหลักประกันเพิ่ม

งานของ Witayakiattilerd และคณะพัฒนากลยุทธ์สองหลักทรัพย์ โดยใช้คู่หลักทรัพย์ที่มีความสัมพันธ์เชิงลบ สัญญาณ Cross EMA และการขายชอร์ตเพื่อจัดหาเงินซื้อสถานะ Long จากข้อมูลหุ้น SET50 จำนวน 41 หลักทรัพย์ [17] แนวคิดดังกล่าวเชื่อมทฤษฎีพอร์ตกับกฎซื้อขายเชิงเวลา แต่การนำไปใช้ต้องเพิ่มต้นทุนยืมหุ้น สภาพคล่อง และข้อจำกัดมาร์จิน

ตัวอย่าง 7.8. ผู้ลงทุนเปิดสถานะ Long ในหลักทรัพย์ A มูลค่า 1,000,000 บาท และ Short หลักทรัพย์ B มูลค่า 1,000,000 บาท ภายในหนึ่งเดือน A ให้ผลตอบแทน 3% และ B ให้ผลตอบแทน -2% ค่าธรรมเนียมซื้อขายรวมทั้งสองด้านเท่ากับ 0.20% ของ Gross Exposure และค่าธรรมเนียมยืมหุ้น B เท่ากับ 0.40% ต่อเดือนของมูลค่า Short จงหากำไรสุทธิ

วิธีทำ กำไรจาก Long A เท่ากับ

$$1,000,000(0.03) = 30,000 \text{ บาท}$$

กำไรจาก Short B เท่ากับ

$$-1,000,000(-0.02) = 20,000 \text{ บาท}$$

Gross Exposure เท่ากับ 2,000,000 บาท จึงมีค่าธรรมเนียมซื้อขาย 4,000 บาท และค่าธรรมเนียมยืมหุ้น 4,000 บาท ดังนั้นกำไรสุทธิเท่ากับ

$$30,000 + 20,000 - 4,000 - 4,000 = 42,000 \text{ บาท}$$

แม้ Net Initial Investment เชิงทฤษฎีเป็นศูนย์ แต่ผลตอบแทนควรวัดเทียบกับเงินประกันหรือเงินทุนทางเศรษฐกิจที่ต้องใช้จริง □

ตัวอย่าง 7.9. การสร้างพอร์ตประสิทธิภาพ พอร์ตสัมผัส และการควบคุม Leverage

ผู้จัดการกองทุนมีสินทรัพย์เสี่ยงให้เลือกลงทุน 3 รายการ โดยประมาณผลตอบแทนคาดหวังต่อปีเป็น

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \end{bmatrix},$$

และประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมต่อปีเป็น

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0036 & 0.0025 \\ 0.0036 & 0.0324 & 0.0180 \\ 0.0025 & 0.0180 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสินทรัพย์แต่ละรายการคือประมาณ

$$10\%, \quad 18\%, \quad 25\%$$

ต่อปีตามลำดับ

สมมติว่าผู้ลงทุนมีเงินลงทุน 1,000,000 บาท และอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ

$$R_f = 3\% \text{ ต่อปี}$$

1. คำนวณค่าคงที่ A, B, C, D

จากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจะได้โดยประมาณ

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 104.2184 & -11.0284 & -0.9926 \\ -11.0284 & 37.9101 & -10.4770 \\ -0.9926 & -10.4770 & 19.0571 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 116.1897,$$

$$B = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = 10.5584,$$

$$C = \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = 1.0613,$$

$$D = AC - B^2 = 11.8322$$

ค่าทั้งสี่นี้สามารถนำไปใช้สร้างพอร์ตบนเส้นขอบ ความแปรปรวนต่ำสุดได้ทุกระดับผลตอบแทนเป้าหมาย

2. พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุดทั่วโลก

น้ำหนักของพอร์ต GMV คือ

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{A} = \begin{bmatrix} 0.7935 \\ 0.1412 \\ 0.0653 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เงินลงทุน 1,000,000 บาทจะถูกจัดสรรประมาณเป็น

$$793,508, \quad 141,189, \quad 65,303 \text{ บาท}$$

ผลตอบแทนคาดหวังของพอร์ตคือ

$$\mu_{GMV} = w_{GMV}^T \boldsymbol{\mu} = 0.09087 = 9.09\% \text{ ต่อปี}$$

และความผันผวนคือ

$$\sigma_{GMV} = \sqrt{\frac{1}{A}} \approx 0.09277 = 9.28\% \text{ ต่อปี}$$

ดังนั้น จุด GMV ของเส้นขอบคือประมาณ

$$(\sigma, \mu) = (9.28\%, 9.09\%)$$

3. พอร์ตที่ต้องการผลตอบแทนร้อยละ 12

กำหนด

$$\mu_0 = 0.12$$

จากสมการ (7.55) ได้

$$w(0.12) \approx \begin{bmatrix} 0.3579 \\ 0.2842 \\ 0.3579 \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$0.3579 + 0.2842 + 0.3579 = 1$$

และ

$$0.3579(0.08) + 0.2842(0.12) + 0.3579(0.16) \approx 0.12$$

ดังนั้น หากมีเงิน 1,000,000 บาท จะจัดสรรประมาณ

$$357,912, \quad 284,176, \quad 357,912 \text{ บาท}$$

ความเสี่ยงต่ำสุดสำหรับผลตอบแทนเป้าหมายนี้คือ

$$\sigma^2(0.12) = \frac{A(0.12)^2 - 2B(0.12) + C}{D}$$

$$\sigma(0.12) \approx 0.13015$$

ดังนั้น

$$\mu_p = 12\% \quad \sigma_p \approx 13.01\%$$

นี่คือจุดหนึ่งบนเส้นขอบประสิทธิภาพ

4. เมื่อเพิ่มเป้าหมายผลตอบแทนเป็นร้อยละ 15

หากกำหนด

$$\mu_0 = 15\%$$

คำตอบภายใต้การอนุญาตให้ขายชอร์ตคือ

$$w(0.15) \approx \begin{bmatrix} -0.0907 \\ 0.4314 \\ 0.6593 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ

$$w_1 = -9.07\%, \quad w_2 = 43.14\%, \quad w_3 = 65.93\%$$

สำหรับเงินทุน 1,000,000 บาท หมายถึงการขายชอร์ตสินทรัพย์ที่ 1 ประมาณ 90,721 บาท แล้วนำเงินร่วมกับทุนเดิมไปลงทุนในสินทรัพย์ที่ 2 และ 3

ความผันผวนของพอร์ตคือประมาณ $\sigma_p = 20.72\%$ ผลลัพธ์นี้แสดงให้เห็นว่า การมุ่งหวังผลตอบแทนสูงขึ้นทำให้พอร์ตเคลื่อนขึ้นไปตาม เส้นขอบประสิทธิภาพ แต่ต้องแลกกับความเสี่ยงที่สูงขึ้น

5. ผลของข้อจำกัดห้ามขายชอร์ต

หากกำหนด

$$w_i \geq 0$$

พอร์ตข้างต้นไม่สามารถใช้ได้ เนื่องจาก $w_1 < 0$

สำหรับผลตอบแทนเป้าหมาย 15% คำตอบแบบ Long-only คือ

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

เพราะ

$$0.25(0.12) + 0.75(0.16) = 0.15$$

ความผันผวนของพอร์ตนี้คือ

$$\sigma_p \approx 20.96\%$$

เปรียบเทียบได้ว่า

$$20.96\% > 20.72\%$$

ดังนั้น การห้ามขายชอร์ตทำให้ชุดพอร์ตที่เลือกได้แคบลง และความเสี่ยงต่ำสุดสำหรับผลตอบแทนเป้าหมายเดียวกัน อาจเพิ่มขึ้น

6. หาพอร์ตสัมผัสเมื่อ $R_f = 3\%$

จากสมการ (7.58)

$$w_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - 0.031)}{1^T \Sigma^{-1}(\mu - 0.031)}$$

จะได้

$$w_T \approx \begin{bmatrix} 0.5782 \\ 0.2119 \\ 0.2099 \end{bmatrix}$$

ผลตอบแทนคาดหวังและความผันผวนของพอร์ตสัมผัสคือ

$$\mu_T \approx 10.53\% \quad \sigma_T \approx 10.32\%$$

Sharpe Ratio เท่ากับ

$$S_T = \frac{\mu_T - R_f}{\sigma_T} = \frac{0.1053 - 0.03}{0.1032} \approx 0.730$$

ดังนั้นพอร์ตสัมผัสเป็นพอร์ตสินทรัพย์เสี่ยง ที่ให้ Sharpe Ratio สูงสุดภายใต้สมมติฐานของตัวแบบ

7. นักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพียงร้อยละ 8

แทนที่จะเลือกพอร์ตเสี่ยงใหม่ นักลงทุนสามารถผสมพอร์ตสัมผัสกับสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงให้ y เป็นสัดส่วนที่ลงทุนในพอร์ตสัมผัส จะได้

$$0.08 = y(0.1053) + (1 - y)(0.03)$$

ดังนั้น

$$y = \frac{0.08 - 0.03}{0.1053 - 0.03} \approx 0.6643$$

จึงลงทุน

$$66.43\%$$

ในพอร์ตสัมพัทธ์ และ

33.57%

ในสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

สำหรับทุน 1,000,000 บาท สัดส่วนโดยรวมจะประมาณเป็น

สินทรัพย์	น้ำหนัก	เงินลงทุน (บาท)
สินทรัพย์ 1	38.41%	384,074
สินทรัพย์ 2	14.07%	140,739
สินทรัพย์ 3	13.95%	139,460
สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง	33.57%	335,727
รวม	100%	1,000,000

ความผันผวนของพอร์ตเท่ากับ

$$\sigma_p = y\sigma_T = 0.6643(0.1032) \approx 6.85\%$$

ดังนั้น นักลงทุนได้พอร์ตที่มี

$$\mu_p = 8\%, \quad \sigma_p \approx 6.85\%$$

8. การใช้ Leverage เพื่อเพิ่มผลตอบแทนเป้าหมาย

สมมติว่าต้องการผลตอบแทน

$$\mu_p = 13\%$$

จะได้

$$y = \frac{0.13 - 0.03}{0.1053 - 0.03} \approx 1.3285$$

หมายความว่า นักลงทุนต้องลงทุนในพอร์ตสัมพัทธ์

132.85%

และมีน้ำหนักของสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง

$$1 - y = -32.85\%$$

ในทางเศรษฐศาสตร์หมายถึง ต้องกู้ยืมเงินประมาณร้อยละ 32.85 ของทุน เพื่อเพิ่มขนาดการลงทุนในสินทรัพย์เสี่ยง

ความผันผวนจะเพิ่มเป็น

$$\sigma_p = 1.3285(10.32\%) \approx 13.71\%$$

จึงเห็นว่า Leverage สามารถเพิ่มผลตอบแทนคาดหวัง แต่เพิ่มความเสี่ยงในสัดส่วนเดียวกัน

9. Gross Exposure และข้อจำกัด Leverage

พิจารณาพอร์ตผลตอบแทนเป้าหมาย 16% ภายใต้การขายชอร์ตแบบไม่จำกัด

$$w(0.16) \approx \begin{bmatrix} -0.2403 \\ 0.4805 \\ 0.7597 \end{bmatrix}$$

Net Exposure คือ

$$-0.2403 + 0.4805 + 0.7597 = 1$$

แต่ Gross Exposure คือ

$$G = |-0.2403| + |0.4805| + |0.7597| \approx 1.4805$$

หรือ

$$G \approx 148.05\%$$

สำหรับทุน 1,000,000 บาท พอร์ตมีสถานะรวมประมาณ 1,480,500 บาท แม้ Net Exposure จะเท่ากับร้อยละ 100 แต่ความเสี่ยงจริงของพอร์ตเกี่ยวข้องกับสถานะรวมเกือบร้อยละ 148

หากนโยบายกองทุนกำหนด $G_{\max} = 1.40$ พอร์ตดังกล่าวจะไม่ผ่านข้อจำกัด

เมื่อเพิ่มเงื่อนไข

$$\sum_i |w_i| \leq 1.40$$

คำตอบที่ข้อบข้อจำกัดสำหรับเป้าหมาย 16% สามารถเป็น

$$w = \begin{bmatrix} -0.20 \\ 0.40 \\ 0.80 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมี

$$G = 0.20 + 0.40 + 0.80 = 1.40$$

และ

$$\mu_p = -0.20(0.08) + 0.40(0.12) + 0.80(0.16) = 0.16$$

แต่ความผันผวนเพิ่มขึ้นเป็นประมาณ

$$\sigma_p \approx 23.61\%$$

จึงแสดงให้เห็นว่า ข้อจำกัดด้าน Leverage สามารถทำให้พอร์ตที่เหมาะสมที่สุด เปลี่ยนไปจากคำตอบเชิงวิเคราะห์แบบไม่มีข้อจำกัด

10. ตัวอย่างพอร์ต Long-Short แบบ Zero Investment

สมมติผู้จัดการกองทุนคาดว่าสินทรัพย์ที่ 3 จะให้ผลตอบแทนสูงกว่าสินทรัพย์ที่ 1 จึงสร้างสถานะ

$$w_3 = 0.70, \quad w_1 = -0.70, \quad w_2 = 0$$

จะได้

$$1^T w = -0.70 + 0 + 0.70 = 0$$

จึงเป็นพอร์ต Zero Investment ในเชิงทฤษฎี

Gross Exposure เท่ากับ

$$G = |-0.70| + |0.70| = 1.40$$

ผลตอบแทนคาดหวังของกลยุทธ์คือ

$$\mu_{LS} = 0.70(0.16) - 0.70(0.08) = 0.056 = 5.60\%$$

ความผันผวนของกลยุทธ์ประมาณ

$$\sigma_{LS} \approx 18.19\%$$

ดังนั้น คำว่า Zero Investment ไม่ได้หมายความว่ากลยุทธ์ไม่มีความเสี่ยง เพราะยังมีสถานะรวมถึงร้อยละ 140 และในการลงทุนจริงยังมีต้นทุนยืมหุ้น ค่าธรรมเนียม หลักประกัน และความเสี่ยงจาก Short Squeeze

11. สรุปผลการวิเคราะห์

พอร์ต	ผลตอบแทนคาดหวัง	ความผันผวน	ลักษณะสำคัญ
GMV	9.09%	9.28%	ความแปรปรวนต่ำสุด
Target 12%	12.00%	13.01%	อยู่บนเส้นขอบประสิทธิภาพ
Target 15%, Short allowed	15.00%	20.72%	มีสถานะขายชอร์ต
Target 15%, Long-only	15.00%	20.96%	ความเสี่ยงสูงขึ้นเล็กน้อย
Tangency	10.53%	10.32%	Sharpe Ratio สูงสุด
CAL Target 8%	8.00%	6.85%	ผสมสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง
CAL Target 13%	13.00%	13.71%	ใช้ Leverage

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า การหาพอร์ตที่เหมาะสมมิได้สิ้นสุดที่การคำนวณ $w^T \Sigma w$ เท่านั้น แต่ต้องนำข้อจำกัดในการลงทุนจริงเข้ามาพิจารณาด้วย เช่น การห้ามขายชอร์ต ข้อจำกัด Gross Exposure ต้นทุนการกู้ยืม สภาพคล่อง และความสามารถในการยืมหุ้น □

7.3.6 ความเสี่ยงจากการประมาณค่าและการปรับสมดุลพอร์ต

พอร์ต Mean-Variance ขึ้นกับค่าประมาณผลตอบแทนคาดหวังและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ความคลาดเคลื่อนเล็กน้อยใน μ อาจทำให้น้ำหนักเปลี่ยนมาก โดยเฉพาะเมื่อหลักทรัพย์มีความสัมพันธ์สูงหรือ Σ เกือบเอกฐาน แนวทางลดปัญหา ได้แก่

- 1) จำกัดน้ำหนักและ Gross Exposure
- 2) ใช้ Covariance Shrinkage หรือ Factor Model

- 3) ลดจำนวนหลักทรัพย์หรือกำหนดกลุ่มอุตสาหกรรม
- 4) เพิ่มค่าปรับ Turnover ในฟังก์ชันเป้าหมาย
- 5) ทดสอบผลนอกกลุ่มตัวอย่างและภายใต้ Stress Scenario

เมื่อปรับสมดุลจาก w_{t-1} เป็น w_t Turnover แบบครึ่งหนึ่งกำหนดเป็น

$$TO_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |w_{i,t} - w_{i,t-1}^+|, \quad (7.69)$$

เมื่อ $w_{i,t-1}^+$ เป็นน้ำหนักก่อนปรับสมดุลหลังราคาขยับแล้ว ค่าครึ่งหนึ่งป้องกันการนับยอดขายและยอดซื้อซ้ำ

สมการหลักของพอร์ต

$$R_p = w^T R, \quad \mu_p = w^T \mu, \quad \sigma_p^2 = w^T \Sigma w,$$

$$w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}, \quad \sum_i |w_i| \leq G_{\max}$$

ประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยงขึ้นกับความแปรปรวนร่วม ไม่ใช่จำนวนหลักทรัพย์เพียงอย่างเดียว

7.4 การวัดความเสี่ยงด้วย VaR และ CVaR

สัญลักษณ์เฉพาะส่วน VaR และ CVaR

L คือผลตอบแทนโดยกำหนดให้ค่าบวกหมายถึงขาดทุนและค่าลบหมายถึงกำไร, V_0 คือมูลค่าพอร์ตต้นงวด, $\alpha \in (0, 1)$ คือระดับความเชื่อมั่น, $1 - \alpha$ คือความน่าจะเป็นของส่วนหาง, F_L คือฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ L , $q_L(u)$ คือควอนไทล์ระดับ u , และ $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,t|t-1}$ คือ VaR สำหรับเวลา t ที่คำนวณจากข้อมูลซึ่งมีอยู่ถึงเวลา $t - 1$

7.4.1 ตัวแปรผลตอบแทนและฟังก์ชันควอนไทล์

การวัดความเสี่ยงส่วนหางควรเริ่มจากตัวแปรสุ่มผลตอบแทน L โดยกำหนดให้ค่าบวกหมายถึงขาดทุน และค่าลบหมายถึงกำไร หากพอร์ตมีมูลค่าต้นงวด V_0 และผลตอบแทนหนึ่งงวด R_p ผลขาดทุนเชิงเส้นโดยประมาณคือ

$$L = -V_0 R_p \quad (7.70)$$

ให้ $F_L(\ell) = \Pr(L \leq \ell)$ ควอนไทล์ซ้ายของ L ที่ระดับ $u \in (0, 1)$ คือ

$$q_L(u) = \inf\{\ell \in \mathbb{R} : F_L(\ell) \geq u\} \quad (7.71)$$

บทนิยาม 7.2

มูลค่าที่ความเสี่ยง (Value at Risk) ที่ระดับความเชื่อมั่น α คือ

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_L(\alpha) = \inf\{\ell \in \mathbb{R} : \Pr(L \leq \ell) \geq \alpha\} \quad (7.72)$$

กล่าวคือ ผลขาดทุนจะไม่เกิน VaR_α ด้วยความน่าจะเป็นอย่างน้อย α ภายใต้แบบจำลองและช่วงเวลาถือครองที่กำหนด

การตีความต้องระบุงบประกอบครบสามส่วน ได้แก่ มูลค่าพอร์ต ช่วงเวลาถือครอง และระดับความเชื่อมั่น เช่น “สำหรับพอร์ตมูลค่า 10 ล้านบาท ภายใต้แบบจำลองที่กำหนด VaR หนึ่งวันที่ระดับร้อยละ 99 เท่ากับ 350,000 บาท” หมายความว่าในหนึ่งวันมีโอกาสอย่างน้อยร้อยละ 99 ที่ผลขาดทุนจะไม่เกิน 350,000 บาท และมีโอกาสประมาณร้อยละ 1 ที่ผลขาดทุนจะเกินค่านี้ ไม่ควรถูกตีความว่าเป็นผลขาดทุนสูงสุดที่เป็นไปได้ และไม่ควรรนำ VaR ต่างช่วงเวลาหรือคนละระดับความเชื่อมั่นมาเปรียบเทียบโดยตรง

7.4.2 Expected Shortfall หรือ CVaR

VaR บอกตำแหน่งควอนไทล์ แต่ไม่บอกความรุนแรงหลังผ่านจุดดังกล่าว Expected Shortfall (ES) หรือ CVaR ในความหมายที่ใช้กันทั่วไปกำหนดโดย

$$\text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du \quad (7.73)$$

นิยามนี้ใช้ได้ทั้งการแจกแจงต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง ถ้า F_L ต่อเนื่องและไม่มีมวลความน่าจะเป็นที่ VaR_α จะได้

$$\text{ES}_\alpha(L) = \mathbb{E}[L \mid L \geq \text{VaR}_\alpha(L)] \quad (7.74)$$

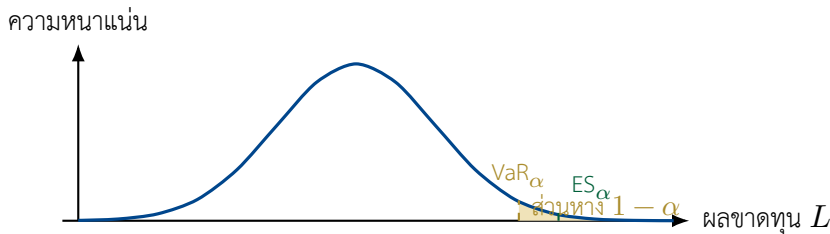
อีกนิยามที่มีประโยชน์ต่อการคำนวณและการหาค่าเหมาะที่สุดคือ

$$\text{ES}_\alpha(L) = \min_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(L - \eta)_+] \right\}, \quad (7.75)$$

เมื่อ $(x)_+ = \max(x, 0)$ ค่าต่ำสุดเกิดที่ควอนไทล์ระดับ α ภายใต้เงื่อนไขทั่วไป รูปนี้ทำให้ปัญหา Portfolio Optimization ที่ใช้ ES สามารถเขียนเป็นปัญหาเชิงนูนได้ [11]

ทฤษฎีบท 7.1

Expected Shortfall เป็นมาตรวัดความเสี่ยงแบบสอดคล้อง (coherent risk measure) ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม กล่าวคือ มีสมบัติ Monotonicity, Translation Invariance, Positive Homogeneity และ Subadditivity ในทางตรงกันข้าม VaR อาจไม่เป็น Subadditive สำหรับการแจกแจงบางชนิด จึงอาจไม่สะท้อนประโยชน์จากการกระจายความเสี่ยงได้เสมอ



รูปที่ 7.9 VaR เป็นจุดควอนไทล์ ส่วน ES เป็นค่าเฉลี่ยของผลขาดทุนในส่วนหาง

7.4.3 วิธีพารามetri ภายใต้การแจกแจงปกติ

สมมติ $R_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$ และ $L = -V_0 R_p$ จะได้ $L \sim N(-V_0 \mu_p, V_0^2 \sigma_p^2)$ ถ้า $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ และ ϕ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นปกติมาตรฐาน

$$\text{VaR}_\alpha(L) = V_0(-\mu_p + z_\alpha \sigma_p), \quad (7.76)$$

$$\text{ES}_\alpha(L) = V_0 \left(-\mu_p + \sigma_p \frac{\phi(z_\alpha)}{1 - \alpha} \right) \quad (7.77)$$

สูตรนี้ใช้ผลตอบแทนและความผันผวนในช่วงเวลาถือครองเดียวกัน หากประมาณจากรายวันแล้วขยายหลายวัน ด้วยกฎรากที่สอง ต้องตระหนักว่าสมมติฐานความเป็นอิสระและความผันผวนคงที่อาจไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 7.10. พอร์ตมีมูลค่า 10,000,000 บาท ผลตอบแทนรายวันมีค่าเฉลี่ย 0.04% และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.50% สมมติการแจกแจงปกติ จงหา VaR และ ES หนึ่งวันที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

วิธีทำ $z_{0.99} = 2.326348$ และ $\phi(z_{0.99}) = 0.026652$ จากสมการ (7.76)–(7.77)

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{0.99} &= 10,000,000[-0.0004 + 2.326348(0.015)] \\ &= 344,952.18 \text{ บาท},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ES}_{0.99} &= 10,000,000 \left[-0.0004 + 0.015 \frac{0.026652}{0.01} \right] \\ &= 395,782.13 \text{ บาท}\end{aligned}$$

ES สูงกว่า VaR เพราะเป็นค่าเฉลี่ยของผลขาดทุนในส่วนหางที่รุนแรงกว่า

□

7.4.4 EWMA และความผันผวนที่เปลี่ยนตามเวลา

ข้อมูลตลาดมักมี Volatility Clustering จึงสามารถให้ผลตอบแทนล่าสุดมีน้ำหนักมากกว่าข้อมูลเก่า ให้ $\lambda \in (0, 1)$ เป็นพารามิเตอร์ลดทอน ความแปรปรวนคาดการณ์หนึ่งก้าวของ EWMA คือ

$$\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 = \lambda \hat{\sigma}_{t-1|t-2}^2 + (1 - \lambda)(r_{t-1} - \hat{\mu}_{t-1})^2 \quad (7.78)$$

เมื่อใช้ค่าเฉลี่ยใกล้เคียง อาจแทนพจน์สุดท้ายด้วย r_{t-1}^2 จากนั้นนำ $\hat{\sigma}_{t|t-1}$ ไปแทนในสูตร VaR แบบปกติ

EWMA ตอบสนองต่อความผันผวนใหม่ได้เร็ว แต่ยังสมมติรูปการแจกแจงปกติเมื่อใช้สูตรปกติ จึงอาจประเมิน Tail Risk ต่ำเกินไปในข้อมูลที่เบ้หรือหางหนา งานของ Witayakiattilerd และคณะใช้ Normal EWMA ร่วมกับ Historical Simulation เพื่อเปรียบเทียบ VaR และ CVaR ของหุ้นธนาคารไทย และตรวจสอบแบบจำลองด้วยข้อมูลย้อนหลัง [16]

7.4.5 Historical Simulation และ Monte Carlo

ให้ผลขาดทุนย้อนหลัง $L_1, \dots, L_T$ และเรียงจากน้อยไปมากเป็น $L_{(1)} \leq \dots \leq L_{(T)}$ ค่าประมาณ VaR แบบ Nearest-Rank คือ

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha}^{\text{HS}} = L_{(\lceil \alpha T \rceil)} \quad (7.79)$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความกำกวมของการเฉลี่ยที่จุดควอนไทล์ ค่าประมาณ ES จึงประจักษ์ใช้รูป Optimization ได้ว่า

$$\widehat{\text{ES}}_{\alpha}^{\text{HS}} = \min_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{(1 - \alpha)T} \sum_{t=1}^T (L_t - \eta)_+ \right\} \quad (7.80)$$

Historical Simulation ไม่กำหนดรูปการแจกแจง แต่ถือว่าอดีตเป็นตัวแทนอนาคตและทุกเหตุการณ์ในหน้าต่างมีน้ำหนักเท่ากัน

Monte Carlo Simulation มีขั้นตอนทั่วไปคือ

- 1) ประมาณแบบจำลองของปัจจัยเสี่ยงและโครงสร้างการพึ่งพากัน
- 2) สุ่มสถานการณ์ M ชุด
- 3) ประเมินราคาพอร์ตในแต่ละสถานการณ์และคำนวณ $L^{(m)}$
- 4) หาควอนไทล์และค่าเฉลี่ยส่วนหางของ $L^{(1)}, \dots, L^{(M)}$

วิธีนี้รองรับพอร์ตไม่เชิงเส้นได้ดี แต่ไวต่อแบบจำลองและต้นทุนการคำนวณ

ตัวอย่าง 7.11. ผลขาดทุนจำลองสิบสถานการณ์ หน่วยเป็นพันบาท คือ

$$-18, -10, -4, 2, 6, 9, 12, 16, 25, 40$$

จงหา Historical VaR และ ES ที่ระดับ 80%

วิธีทำ ข้อมูลเรียงแล้วและ $[0.8(10)] = 8$ ดังนั้น

$$\widehat{\text{VaR}}_{0.8} = L_{(8)} = 16 \text{ พันบาท}$$

เนื่องจากส่วนหางมีสัดส่วน 20% หรือสองสถานการณ์รุนแรงที่สุด

$$\widehat{\text{ES}}_{0.8} = \frac{25 + 40}{2} = 32.5 \text{ พันบาท}$$

□

7.4.6 การตรวจสอบ VaR ด้วยจำนวนข้อยกเว้น

ให้ $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, t|t-1}$ เป็นค่าที่พยากรณ์ก่อนเห็นผลขาดทุน L_t กำหนดตัวบ่งชี้ข้อยกเว้น

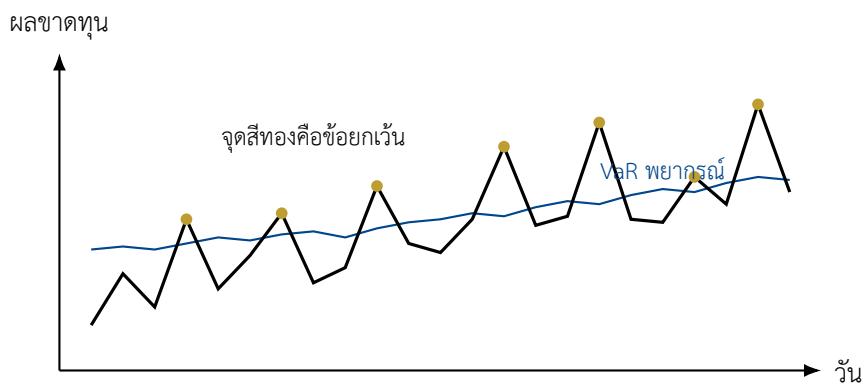
$$I_t = 1\{L_t > \widehat{\text{VaR}}_{\alpha, t|t-1}\}, \quad X = \sum_{t=1}^T I_t \quad (7.81)$$

ถ้าแบบจำลองมี Coverage ถูกต้อง คาดว่า $E[X] = T(1 - \alpha)$ แต่จำนวนช้อยกเว้นที่ใกล้ค่าคาดหวังเพียงอย่างเดียวไม่รับประกันว่า ช้อยกเว้นไม่กระจุกตัวตามเวลา

ให้ $p = 1 - \alpha$ และ $\hat{p} = X/T$ สถิติ Kupiec Unconditional Coverage คือ

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{(1-p)^{T-X} p^X}{(1-\hat{p})^{T-X} \hat{p}^X} \right] \xrightarrow{d} \chi_1^2 \quad (7.82)$$

การทดสอบ Christoffersen เป็นการตรวจสอบความเป็นอิสระของลำดับช้อยกเว้น และควรใช้ร่วมกับกราฟผลขาดทุนจริงกับ VaR



รูปที่ 7.10 แนวคิดการตรวจสอบ VaR ด้วยช้อยกเว้นรายเวลา

7.4.7 Basel Traffic-Light Approach และข้อจำกัดในการตีความ

กรอบ Basel แบบดั้งเดิมสำหรับ VaR หนึ่งวันที่ระดับ 99% และหน้าต่างทดสอบ 250 วัน แบ่งจำนวนช้อยกเว้นเป็นโซนสีเขียว 0-4 ครั้ง สีเหลือง 5-9 ครั้ง และสีแดงตั้งแต่ 10 ครั้งขึ้นไป [1] ขอบเขตนี้เป็นกรอบกำกับดูแลเฉพาะ ไม่ใช่กฎทั่วไปสำหรับทุกระดับความเชื่อมั่นหรือทุกขนาดตัวอย่าง สำหรับกรณีอื่นควรคำนวณความน่าจะเป็นทวินามโดยตรง

$$\Pr(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k} \quad (7.83)$$

7.4.8 ข้อจำกัดของ VaR และ ES

- 1) ความเสี่ยงแบบจำลอง ผลลัพธ์ขึ้นกับการแจกแจง หน้าต่างข้อมูล พารามิเตอร์ และวิธีประเมินราคาพอร์ต

- 2) ความเสี่ยงสภาพคล่อง VaR ปกติสมมติว่าสามารถปิดสถานะในช่วงถือครอง โดยไม่มีผลกระทบต่อราคา
- 3) การเปลี่ยนแปลงโครงสร้าง ข้อมูลดีต่ออาจไม่ครอบคลุมวิกฤตหรือระบอบตลาดใหม่
- 4) VaR ไม่บอกความเสียหายเหนือคอนไทล์ จึงควรรายงาน ES และ Stress Loss ประกอบ
- 5) ES ต้องใช้ข้อมูลส่วนหางมาก ทำให้ค่าประมาณมีความไม่แน่นอนสูง โดยเฉพาะที่ระดับความเชื่อมั่นสูง และตัวอย่างสั้น
- 6) การทดสอบย้อนหลัง ES ซับซ้อนกว่า VaR ควรใช้วิธีที่สอดคล้องกับนิยามและตรวจทั้ง Coverage กับ ความรุนแรงของช้อยกเว้น

ข้อสังเกต

เอกสารเดิมของผู้เขียนนำเสนอ VaR, CVaR, Normal EWMA, Historical Simulation, Violation Ratio และ Three-Zone Approach เนื้อหาใน Section นี้รักษาแก่นประยุกต์ดังกล่าวไว้ แต่แก้สัญลักษณ์ให้กำหนดบนตัวแปรผลขาดทุนอย่างสม่ำเสมอ ใช้นิยาม ES ที่รองรับการแจกแจงไม่ต่อเนื่อง และแยกการทดสอบ Coverage ออกจากการทดสอบการกระจุกตัวของช้อยกเว้น

ตัวอย่าง 7.12. การตรวจสอบย้อนหลัง VaR ของพอร์ตลงทุนจริงด้วย Exception, Kupiec Test และ Christoffersen Test

ผู้จัดการกองทุนบริหารพอร์ตมูลค่าประมาณ 50 ล้านบาท และใช้แบบจำลองเพื่อพยากรณ์ VaR หนึ่งวัน ณ ระดับความเชื่อมั่น 99% ก่อนเริ่มซื้อขายในแต่ละวัน

ให้ $\alpha = 0.99$, $p = 1 - \alpha = 0.01$ ทำการตรวจสอบย้อนหลังเป็นเวลา $T = 250$ วันทำการ โดยเปรียบเทียบผลขาดทุนที่เกิดขึ้นจริง L_t กับค่า VaR ที่พยากรณ์ไว้ล่วงหน้า $\widehat{\text{VaR}}_{0.99,t|t-1}$ กำหนดช้อยกเว้นโดย

$$I_t = \begin{cases} 1, & L_t > \widehat{\text{VaR}}_{0.99,t|t-1}, \\ 0, & L_t \leq \widehat{\text{VaR}}_{0.99,t|t-1} \end{cases}$$

จากข้อมูล 250 วัน พบช้อยกเว้น 7 วัน ตัวอย่างวันที่เกิดช้อยกเว้นแสดงดังตาราง

วัน t	VaR พยากรณ์ (ล้านบาท)	ผลขาดทุนจริง (ล้านบาท)	I_t
32	0.92	1.08	1
121	0.88	0.95	1
122	0.93	1.20	1
123	1.10	1.34	1
188	0.98	1.02	1
189	1.04	1.16	1
231	1.15	1.42	1

สังเกตว่าช่วงวันที่ 121–123 และ 188–189 มีช้อยกเว้นเกิดขึ้นติดกัน ซึ่งเป็นข้อมูลสำคัญที่การนับจำนวนช้อยกเว้นเพียงอย่างเดียว อาจไม่สามารถตรวจพบได้

1. จำนวนช้อยกเว้นที่คาดหวัง

ถ้าแบบจำลอง VaR ที่ระดับ 99% มี Coverage ถูกต้อง ความน่าจะเป็นของช้อยกเว้นในแต่ละวันคือ

$$p = 0.01$$

ดังนั้น จำนวนช้อยกเว้นที่คาดหวังใน 250 วันคือ

$$E[X] = Tp = 250(0.01) = 2.5$$

แต่จากข้อมูลจริงพบ

$$X = 7$$

อัตราช้อยกเว้นที่สังเกตได้คือ

$$\hat{p} = \frac{X}{T} = \frac{7}{250} = 0.028$$

หรือ

$$\hat{p} = 2.8\%$$

ค่าดังกล่าวสูงกว่าอัตราที่แบบจำลองกำหนดไว้ 1% อย่างชัดเจน

2. Violation Ratio

สามารถคำนวณอัตราส่วนจำนวนข้อบกพร่องจริง ต่อจำนวนข้อบกพร่องที่คาดหวังได้เป็น

$$VR = \frac{X}{T(1 - \alpha)}$$

ดังนั้น

$$VR = \frac{7}{250(0.01)} = \frac{7}{2.5} = 2.80$$

จึงได้

$$VR = 2.80$$

หมายความว่า จำนวนข้อบกพร่องจริงมีประมาณ 2.8 เท่าของจำนวนที่คาดหวังจากแบบจำลอง อย่างไรก็ตาม การใช้ Violation Ratio เพียงค่าเดียว ยังไม่สามารถสรุปเชิงสถิติได้ว่าแบบจำลองไม่เหมาะสม จึงต้องใช้การทดสอบ Coverage เพิ่มเติม

3. Kupiec Unconditional Coverage Test

กำหนดสมมติฐาน

$$H_0 : p = 0.01$$

กล่าวคือ แบบจำลองมีอัตราข้อบกพร่องถูกต้องตามระดับ VaR ที่กำหนด

จาก

$$T = 250, \quad X = 7, \quad p = 0.01, \quad \hat{p} = 0.028$$

สถิติ Kupiec คือ

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{(1 - p)^{T-X} p^X}{(1 - \hat{p})^{T-X} \hat{p}^X} \right]$$

แทนค่าจะได้

$$LR_{uc} = -2 \ln \left[\frac{(0.99)^{243} (0.01)^7}{(0.972)^{243} (0.028)^7} \right] \approx 5.497$$

ภายใต้ H_0

$$LR_{uc} \sim \chi_1^2$$

ที่ระดับนัยสำคัญ 5%

$$\chi_{1,0.95}^2 \approx 3.841$$

เนื่องจาก

$$5.497 > 3.841,$$

จึงปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 5%

หรือพิจารณาจาก

$$p\text{-value} \approx 0.019$$

ดังนั้น มีหลักฐานว่าความถี่ของช้อยกเว้น สูงกว่าที่ควรจะเป็นสำหรับ VaR ระดับ 99%

ในเชิงบริหารความเสี่ยง ผลดังกล่าวบ่งชี้ว่า แบบจำลองอาจประเมินความเสี่ยงต่ำเกินไป (*underestimate risk*)

4. ตรวจสอบด้วยการแจกแจงทวินาม

หากช้อยกเว้นแต่ละวันเป็นอิสระ จะได้

$$X \sim \text{Binomial}(250, 0.01)$$

ความน่าจะเป็นที่จะพบช้อยกเว้นอย่างน้อย 7 ครั้งคือ

$$\Pr(X \geq 7) = 1 - \Pr(X \leq 6) = 1 - \sum_{k=0}^6 \binom{250}{k} (0.01)^k (0.99)^{250-k} \approx 0.0137$$

ดังนั้น

$$\Pr(X \geq 7) \approx 1.37\%$$

จำนวนช้อยกเว้นตั้งแต่ 7 ครั้งขึ้นไป จึงเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่บ่อยนัก หากแบบจำลอง VaR 99% ถูกต้องจริง

5. Basel Traffic-Light Approach

สำหรับกรอบ VaR หนึ่งวันที่ระดับ 99% และระยะทดสอบ 250 วัน

จำนวนช้อยกเว้น	โซน
0-4	สีเขียว
5-9	สีเหลือง
10 ขึ้นไป	สีแดง

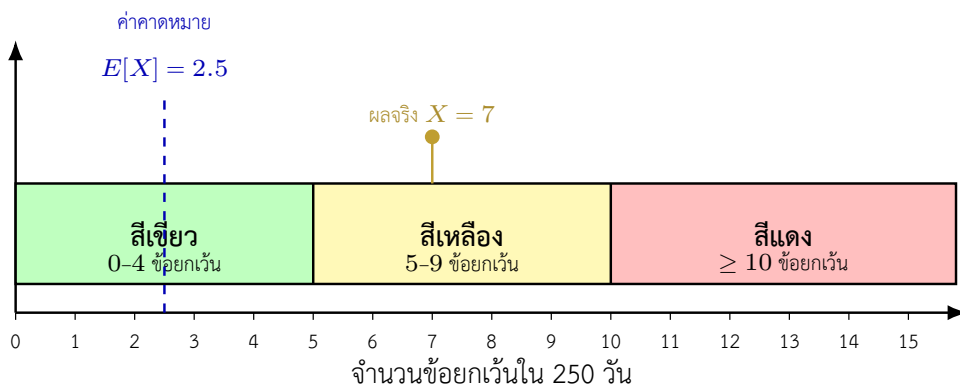
เนื่องจาก

$$X = 7$$

แบบจำลองจึงอยู่ใน

โซนสีเหลือง

ผลนี้เป็นสัญญาณว่าควรตรวจสอบแบบจำลองเพิ่มเติมแต่ต้องระวังว่า Traffic-Light Approach เป็นกรอบกำกับดูแลเฉพาะ ไม่ใช้การทดสอบสมมติฐานทางสถิติโดยตรง



รูปที่ 7.11 กรอบ Basel Traffic-Light สำหรับ VaR หนึ่งวันที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ภายใต้หน้าต่างทดสอบย้อนหลัง 250 วัน โดยจากตัวอย่างพบช้อยกเว้น $X = 7$ ครั้ง จึงอยู่ในโซนสีเหลือง ซึ่งเป็นสัญญาณว่าควรตรวจสอบแบบจำลองเพิ่มเติม

6. เหตุใดจำนวนช้อยกเว้นเพียงอย่างเดียวจึงยังไม่เพียงพอ

สมมติว่าช้อยกเว้น 7 ครั้งเกิดในวันที่

32, 121, 122, 123, 188, 189, 231

จะเห็นว่าช้อยกเว้นบางช่วงเกิดติดกัน

$$121 \rightarrow 122 \rightarrow 123$$

และ

$$188 \rightarrow 189$$

หากแบบจำลอง VaR สามารถปรับตัวต่อการเปลี่ยนแปลงของความผันผวนได้ดี ช้อยกเว้นไม่ควรมีแนวโน้มเกิดเป็นกลุ่มอย่างชัดเจน จึงควรตรวจสอบความเป็นอิสระของช้อยกเว้นด้วย Christoffersen Independence Test

7. สร้างตารางการเปลี่ยนสถานะของช้อยกเว้น

กำหนด

$$n_{ij} = \text{จำนวนครั้งที่ } I_{t-1} = i \text{ และ } I_t = j$$

จากลำดับข้อมูลตัวอย่างได้

$$n_{00} = 238, \quad n_{01} = 4, \quad n_{10} = 4, \quad n_{11} = 3$$

จึงเขียนเป็นตารางได้ว่า

	$I_t = 0$	$I_t = 1$
$I_{t-1} = 0$	238	4
$I_{t-1} = 1$	4	3

ประมาณความน่าจะเป็นของช้อยกเว้นหลังวันที่ ไม่มีช้อยกเว้นได้เป็น

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} = \frac{4}{242} \approx 0.0165$$

ส่วนความน่าจะเป็นที่จะเกิดช้อยกเว้น หลังจากวันก่อนหน้าเกิดช้อยกเว้นแล้วคือ

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

ดังนั้น

$$\hat{\pi}_{11} = 42.86\% \gg \hat{\pi}_{01} = 1.65\%$$

ผลดังกล่าวแสดงสัญญาณของ *exception clustering* อย่างชัดเจน

8. Christoffersen Independence Test

กำหนด

$$\hat{\pi} = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}} = \frac{7}{249} \approx 0.0281$$

Likelihood ภายใต้สมมติฐานว่าช้อยกเว้นเป็นอิสระคือ

$$L_0 = (1 - \hat{\pi})^{n_{00} + n_{10}} \hat{\pi}^{n_{01} + n_{11}}$$

ขณะที่ likelihood ภายใต้แบบจำลอง Markov ลำดับหนึ่งคือ

$$L_1 = (1 - \hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}$$

สถิติการทดสอบคือ

$$LR_{\text{ind}} = -2 \ln \left(\frac{L_0}{L_1} \right)$$

แทนค่าจะได้ประมาณ

$$LR_{\text{ind}} \approx 13.49$$

ภายใต้สมมติฐานความเป็นอิสระ

$$LR_{\text{ind}} \sim \chi_1^2$$

เนื่องจาก

$$13.49 > 3.841$$

จึงปฏิเสธสมมติฐานว่าช้อยกเว้นเป็นอิสระ ที่ระดับนัยสำคัญ 5%

โดยมี

$$p\text{-value} \approx 0.00024$$

ผลนี้แสดงว่า ปัญหาไม่ได้มีเพียงจำนวนช้อยกเว้นมากเกินไป แต่ช้อยกเว้นยังมีแนวโน้มจะจุกตัวตามเวลาอีกด้วย

9. Conditional Coverage Test

สามารถรวมการทดสอบ Coverage และ Independence เข้าด้วยกันได้จาก

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

ดังนั้น

$$LR_{cc} = 5.497 + 13.488 \approx 18.985$$

ภายใต้ H_0

$$LR_{cc} \sim \chi^2_2$$

จึงได้

$$LR_{cc} \approx 18.98$$

และมี p -value ต่ำมากจึงปฏิเสธความถูกต้องของแบบจำลองในเชิง Conditional Coverage

10. สรุปผลสำหรับผู้จัดการความเสี่ยง

ผลการตรวจสอบสามารถสรุปได้ดังนี้

การตรวจสอบ	ผลที่ได้	เกณฑ์/ค่าคาดหวัง	ข้อสรุป
จำนวนข้อบกพร่อง	7	2.5	สูงกว่าค่า
Exception rate	2.80%	1.00%	สูงกว่าค่า
Violation Ratio	2.80	ประมาณ 1	ความเสี่ยงถูกประเมินต่ำ
Kupiec LR_{uc}	5.497	3.841 ที่ระดับ 5%	ไม่ผ่าน
Christoffersen LR_{ind}	13.49	3.841 ที่ระดับ 5%	มีการกระจุกตัว
Basel Traffic Light	7 ครั้ง	5–9	สีเหลือง

ดังนั้น ไม่ควรสรุปเพียงว่า “แบบจำลองอยู่ในโซนสีเหลือง” แต่ควรวิเคราะห์เพิ่มเติมว่าเหตุใดแบบจำลองจึงเกิดข้อบกพร่องมากกว่าค่าและเกิดเป็นกลุ่ม ในทางปฏิบัติ ผู้จัดการความเสี่ยงควรตรวจสอบอย่างน้อย

- (1) ความยาวของหน้าต่างข้อมูลที่ใช้ประมาณความผันผวน
- (2) ความสามารถของแบบจำลองในการตอบสนองต่อ volatility clustering
- (3) สมมติฐานการแจกแจงของผลตอบแทนและลักษณะทางหนา
- (4) สถานะใหม่หรือความเสี่ยงที่เพิ่มขึ้นในพอร์ต
- (5) ความเสี่ยงสภาพคล่องและการเปลี่ยนแปลงของตลาด

หากพบว่าข้อยกเว้นส่วนใหญ่เกิดในช่วงตลาดผันผวนสูง แบบจำลองที่ใช้ความผันผวนคงที่อาจปรับตัวช้าเกินไป จึงอาจพิจารณาใช้ EWMA, GARCH, Historical Simulation แบบถ่วงน้ำหนัก หรือแบบจำลองที่รองรับหางหนา พร้อมทำ Stress Testing ประกอบ □

ข้อสังเกต

การตรวจสอบย้อนหลัง VaR ควรประเมินอย่างน้อยสองมิติ คือ *Coverage* และ *Independence* จำนวนข้อยกเว้นใกล้ค่าคาดหวังไม่ได้ รับประกันว่าแบบจำลองดี หากข้อยกเว้นเกิดกระจุกตัวในช่วงตลาดผันผวนสูง

ในทางกลับกัน จำนวนข้อยกเว้นที่สูงกว่าค่าคาดหวัง ก็ไม่ควรนำไปแก้ด้วยการเพิ่ม VaR อย่างไม่มีหลักการ เพราะแบบจำลองที่ให้ VaR สูงเกินไปอาจผ่าน Backtest แต่ทำให้การวัดความเสี่ยงอนุรักษ์นิยมเกินความจำเป็น จึงควรพิจารณาทั้งความถูกต้องทางสถิติ ความเหมาะสมทางเศรษฐศาสตร์ และการใช้งานบริหารความเสี่ยงร่วมกัน

สมการหลักของ VaR และ ES

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{\ell : F_L(\ell) \geq \alpha\}, \quad \text{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) \, du,$$

$$\text{VaR}_\alpha^N = V_0(-\mu + z_\alpha \sigma), \quad \text{ES}_\alpha^N = V_0 \left(-\mu + \sigma \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \right)$$

VaR ต้องรายงานร่วมกับช่วงเวลาถือครอง ระดับความเชื่อมั่น แบบจำลอง และผลการตรวจสอบย้อนหลัง

7.5 การประเมินผลการลงทุนและการตัดสินใจ

สัญลักษณ์เฉพาะส่วนการประเมินผล

ตัวห้อย p หมายถึงพอร์ตหรือกลยุทธ์ที่ประเมิน, m หมายถึงพอร์ตตลาด, f หมายถึงสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง และ b หมายถึงเกณฑ์อ้างอิง (benchmark);

$\bar{R}$ คือผลตอบแทนเฉลี่ยในหน่วยเวลาที่กำหนด, σ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทน, β คือความเสี่ยงเชิงระบบ และ α_p คือผลตอบแทนผิดปกติ (abnormal return) หลังควบคุมความเสี่ยงตลาด

การเปรียบเทียบทุกมาตรวัดควรใช้ช่วงข้อมูล ระยะเวลา อัตราผลตอบแทนปราศจากความเสี่ยง และสมมติฐานเกี่ยวกับต้นทุนธุรกรรมที่สอดคล้องกัน

7.5.1 เหตุผลของการปรับผลตอบแทนด้วยความเสี่ยง

การเปรียบเทียบพอร์ตโดยพิจารณาเฉพาะผลตอบแทนอาจทำให้ เลือกพอร์ตที่ให้ผลตอบแทนสูงเพราะรับความเสี่ยงสูงกว่า ดังนั้นการประเมินประสิทธิภาพการลงทุนจึงควรพิจารณา ผลตอบแทนต่อหนึ่งหน่วยความเสี่ยง (risk-adjusted performance)

อย่างไรก็ตาม ความเสี่ยงสามารถนิยามได้หลายลักษณะ เช่น ความเสี่ยงรวม ความเสี่ยงเชิงระบบ ความเสี่ยงขาด ความเสี่ยงเฉพาะตัว หรือเงินทุนทางเศรษฐกิจ ดังนั้นมาตรวัดแต่ละชนิดจึงตอบคำถามที่ต่างกัน และอาจจัดอันดับพอร์ตไม่เหมือนกัน

ให้ $\bar{R}_p$, $\bar{R}_m$ และ $\bar{R}_f$ เป็นผลตอบแทนเฉลี่ยของพอร์ต ตลาด และสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงในหน่วยเวลาเดียวกัน และให้ σ_p , σ_m เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทน

7.5.2 CAPM: ผลตอบแทนที่ต้องการและความเสี่ยงเชิงระบบ

Capital Asset Pricing Model (CAPM) เชื่อมโยงผลตอบแทนคาดหวังของหลักทรัพย์หรือพอร์ต กับความเสี่ยงเชิงระบบที่วัดด้วยค่าเบต้า

สำหรับพอร์ต p กำหนด

$$\beta_p = \frac{\text{Cov}(R_p, R_m)}{\text{Var}(R_m)} = \rho_{pm} \frac{\sigma_p}{\sigma_m}, \quad (7.84)$$

เมื่อ ρ_{pm} คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง ผลตอบแทนของพอร์ตกับผลตอบแทนตลาด

ภายใต้ CAPM ผลตอบแทนคาดหวังของพอร์ตมีความสัมพันธ์กับเบต้าเป็น

$$E[R_p] = R_f + \beta_p (E[R_m] - R_f) \quad (7.85)$$

พจน์

$$E[R_m] - R_f$$

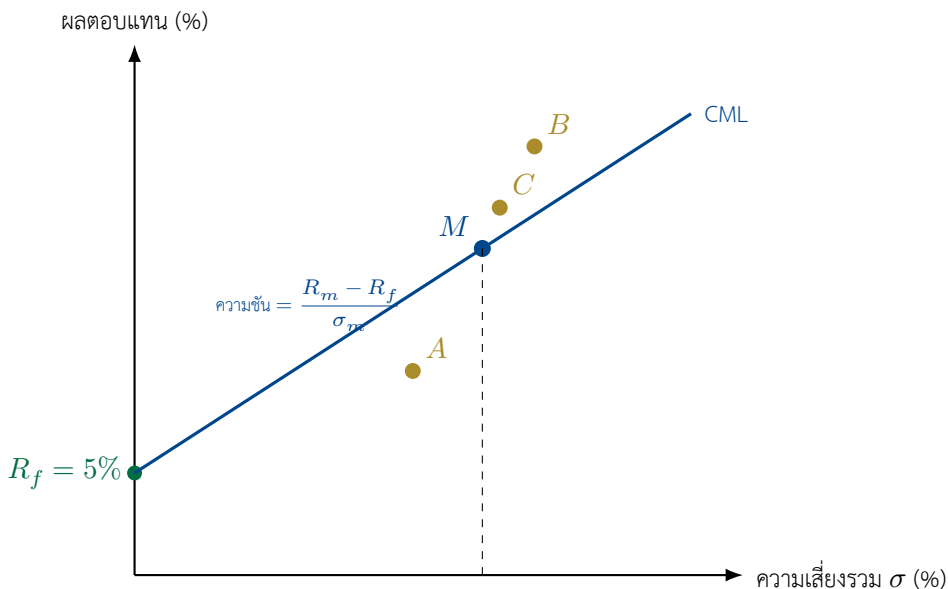
เรียกว่า ค่าชดเชยความเสี่ยงตลาด (market risk premium) ส่วน

$$\beta_p (E[R_m] - R_f)$$

คือค่าชดเชยที่พอร์ตควรได้รับจากการรับความเสี่ยงเชิงระบบ

ในทางปฏิบัติ เมื่อประเมินผลจากข้อมูลย้อนหลัง ค่าคาดหวังมักถูกแทนด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง เช่น $\bar{R}_p$ และ $\bar{R}_m$ จึงต้องแยกความหมายระหว่าง ผลตอบแทนที่แบบจำลองกำหนด กับ ผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงจากตัวอย่างอย่างชัดเจน

7.5.3 Capital Market Line และความเสี่ยงรวม



รูปที่ 7.12 Capital Market Line แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทน กับความเสี่ยงรวม โดยความชันของเส้นเท่ากับ Sharpe Ratio ของพอร์ตตลาด

ในกรอบค่าเฉลี่ย-ความแปรปรวน หากนักลงทุนสามารถผสมสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง กับพอร์ตตลาด M ได้ กลุ่มพอร์ตที่มีประสิทธิภาพจะอยู่บน Capital Market Line (CML)

สมการ CML คือ

$$E[R_p] = R_f + \frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m} \sigma_p. \quad (7.86)$$

ความชันของ CML คือ

$$\frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m} \quad (7.87)$$

ซึ่งเท่ากับ Sharpe Ratio ของพอร์ตตลาด

จุดสำคัญคือ CML ใช้ **ความเสี่ยงรวม** ซึ่งวัดด้วย σ เป็นตัวแปรบนแกนนอน และในเชิงทฤษฎี CML อธิบายเฉพาะพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งเกิดจากการผสมระหว่างสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง กับพอร์ตตลาด

7.5.4 Sharpe Ratio

Sharpe Ratio หรือ Reward-to-Variability Ratio วัดผลตอบแทนส่วนเกินต่อหนึ่งหน่วยของความเสี่ยงรวม โดยกำหนดเป็น

$$S_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\sigma_p} \quad (7.88)$$

ในเชิงเรขาคณิต S_p คือความชันของเส้นตรง ที่เชื่อมจุดสินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยงกับจุดแทนพอร์ต p ในระนาบ $(\sigma, \bar{R})$

ดังนั้น Sharpe Ratio ที่สูงกว่า หมายถึงพอร์ตให้ผลตอบแทนส่วนเกินมากกว่า ต่อหนึ่งหน่วยของความเสี่ยงรวม

มาตรวัดนี้เหมาะเมื่อพอร์ตเป็นการลงทุนหลักของผู้ลงทุน หรือเมื่อพอร์ตยังมีความเสี่ยงเฉพาะตัวอยู่ในระดับที่มีนัยสำคัญ

หากผลตอบแทนรายงวดเป็นอิสระและมีหน่วยเวลาเท่ากัน Sharpe Ratio ต่อปีสามารถประมาณได้ด้วย

$$S_{\text{ann}} \approx \sqrt{m} S_{\text{period}}, \quad (7.89)$$

เมื่อ m คือจำนวนงวดต่อปี อย่างไรก็ตาม การปรับด้วย $\sqrt{m}$ ไม่ควรใช้โดยอัตโนมัติ หากผลตอบแทนมีอัตราสัมพันธ์ (autocorrelation) อย่างมีนัยสำคัญ

จากรูป 7.12 เส้นที่ลากจากจุด R_f ไปยังพอร์ตแต่ละพอร์ต มีความชันเท่ากับ Sharpe Ratio ของพอร์ตนั้น จึงสามารถเปรียบเทียบประสิทธิภาพของพอร์ต จากความชันได้โดยตรง

7.5.5 Security Market Line และผลตอบแทนตาม CAPM

จากสมการ CAPM

$$E[R_p] = R_f + \beta_p (E[R_m] - R_f)$$

เมื่อเขียนผลตอบแทนคาดหวังเทียบกับค่าเบต้า จะได้เส้นตรงที่เรียกว่า Security Market Line (SML)

สมการ SML คือ

$$E[R] = R_f + \beta (E[R_m] - R_f) \quad (7.90)$$

จุดตัดแกนตั้งของ SML คือ R_f และความชันของเส้นคือ

$$E[R_m] - R_f \quad (7.91)$$

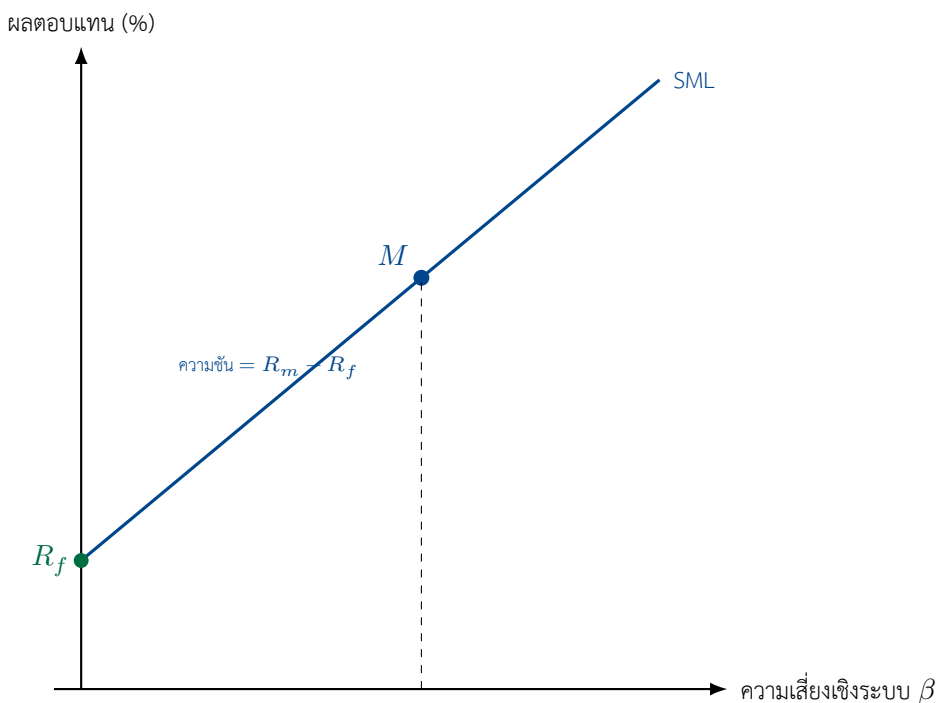
หรือค่าชดเชยความเสี่ยงตลาด

เมื่อ $\beta = 1$ จะได้พอร์ตตลาด ดังนั้น

$$E[R] = E[R_m]$$

หากผลตอบแทนของหลักทรัพย์หรือพอร์ตอยู่เหนือ SML แสดงว่าผลตอบแทนที่ได้รับสูงกว่าระดับที่ CAPM กำหนด สำหรับความเสี่ยงเชิงระบบระดับนั้น

ในทางกลับกัน จุดที่อยู่ต่ำกว่า SML แสดงว่าผลตอบแทนต่ำกว่าระดับที่ CAPM กำหนด



รูปที่ 7.13 Security Market Line แสดงความสัมพันธ์ตาม CAPM ระหว่างผลตอบแทนที่ต้องการกับความเสี่ยงเชิงระบบที่วัดด้วยค่าเบต้า

7.5.6 Treynor Ratio

Treynor Ratio วัดผลตอบแทนส่วนเกิน ต่อหนึ่งหน่วยของความเสี่ยงเชิงระบบ

$$T_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\beta_p} \quad (7.92)$$

ในเชิงเรขาคณิต Treynor Ratio คือความชันของเส้น ที่เชื่อมจุด $(0, \bar{R}_f)$ กับจุด $(\beta_p, \bar{R}_p)$ ในระนาบ $(\beta, \bar{R})$ สำหรับพอร์ตตลาด $\beta_m = 1$ จึงได้

$$T_m = \bar{R}_m - \bar{R}_f \quad (7.93)$$

Treynor Ratio จึงเหมาะกับพอร์ตที่กระจายความเสี่ยงได้ดี จนความเสี่ยงเฉพาะตัวมีบทบาทค่อนข้างน้อย

หาก $\beta_p \leq 0$ การใช้ Treynor Ratio เพื่อจัดอันดับพอร์ต อาจให้ผลที่ตีความได้ยาก จึงควรพิจารณาตำแหน่งของพอร์ตเทียบกับ SML และผลตอบแทนตาม CAPM ประกอบด้วย

7.5.7 Jensen's Alpha และสมการถดถอย CAPM

Jensen's Alpha วัดส่วนต่างในแนวตั้งระหว่าง ผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงของพอร์ต กับผลตอบแทนที่ CAPM กำหนดสำหรับค่าเบต้าของพอร์ตนั้น

สมการถดถอย CAPM แบบอนุกรมเวลา คือ

$$R_{p,t} - R_{f,t} = \alpha_p + \beta_p (R_{m,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{p,t}, \quad E[\varepsilon_{p,t}] = 0 \quad (7.94)$$

ค่า α_p คือค่าจุดตัดของสมการถดถอย และตีความเป็นผลตอบแทนผิดปกติเฉลี่ย หลังควบคุมความเสี่ยงตลาดแล้ว

จึงไม่ควรนำค่าคลาดเคลื่อนรายงวด $\varepsilon_{p,t}$ มารวมเป็นส่วนหนึ่งของอัลฟา

สำหรับการคำนวณจากค่าเฉลี่ย

$$\alpha_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) - \beta_p (\bar{R}_m - \bar{R}_f) \quad (7.95)$$

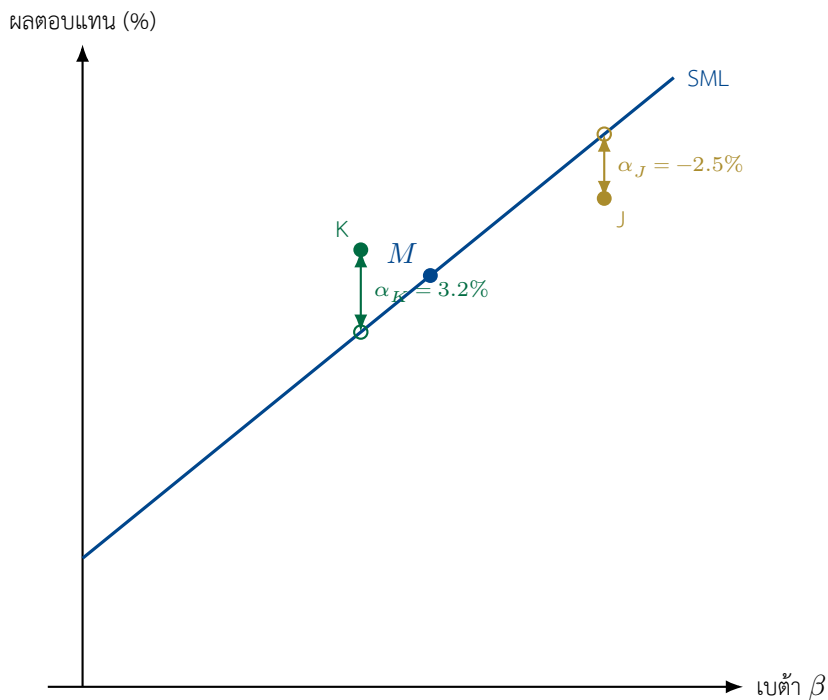
ดังนั้น

$$\alpha_p > 0$$

หมายถึงพอร์ตให้ผลตอบแทนสูงกว่า CAPM กำหนด ขณะที่

$$\alpha_p < 0$$

หมายถึงพอร์ตให้ผลตอบแทนต่ำกว่า CAPM กำหนด



รูปที่ 7.14 Jensen's Alpha เป็นระยะในแนวดิ่งระหว่าง ผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจริงกับผลตอบแทนบน Security Market Line ที่ CAPM กำหนด

อย่างไรก็ตาม ค่าอัลฟาที่ประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง ควรได้รับการทดสอบนัยสำคัญทางสถิติ และตรวจสอบสมมติฐานของค่าคลาดเคลื่อนด้วย

CML และ SML ต่างกันอย่างไร?

	CML	SML
แกนนอน	ความเสี่ยงรวม σ	ความเสี่ยงเชิงระบบ β
แกนตั้ง	ผลตอบแทนคาดหวัง	ผลตอบแทนคาดหวัง
สมการ	$E[R_p] = R_f + \frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m} \sigma_p$	$E[R_p] = R_f + \beta_p (E[R_m] - R_f)$
ความชัน	$\frac{E[R_m] - R_f}{\sigma_m}$	$E[R_m] - R_f$
มาตรวัดที่เกี่ยวข้อง	Sharpe Ratio	Treynor Ratio และ Jensen's Alpha
ขอบเขต	พอร์ต ที่มี ประสิทธิภาพ จาก การผสมสินทรัพย์ ปลอดภัย กับ พอร์ตตลาด	ในกรอบ CAPM ใช้กับหลักทรัพย์ หรือพอร์ต ที่พิจารณาความเสี่ยงเชิงระบบ

7.5.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen

จากสมการค่าเฉลี่ยของ CAPM

$$\bar{R}_p - \bar{R}_f = \alpha_p + \beta_p (\bar{R}_m - \bar{R}_f)$$

เมื่อ $\beta_p \neq 0$ จะได้

$$T_p = \frac{\alpha_p}{\beta_p} + T_m, \quad T_m = \bar{R}_m - \bar{R}_f \quad (7.96)$$

นอกจากนี้ จาก

$$\beta_p = \rho_{pm} \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

จะได้

$$S_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\sigma_p} = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \rho_{pm} \frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma_m} = \frac{\alpha_p}{\sigma_p} + \rho_{pm} S_m$$

สมการเหล่านี้แสดงให้เห็นว่า Sharpe Ratio, Treynor Ratio และ Jensen's Alpha มีใช้มาตรวัดที่แยกขาดจากกัน แต่เป็นการมองผลตอบแทนที่ปรับด้วยความเสี่ยง จากมุมที่แตกต่างกัน

Sharpe Ratio ใช้ความเสี่ยงรวม Treynor Ratio ใช้ความเสี่ยงเชิงระบบ ส่วน Jensen's Alpha วัดส่วนเกินของผลตอบแทน เมื่อเทียบกับผลตอบแทนที่ CAPM กำหนด

ดังนั้นการจัดอันดับพอร์ตด้วยมาตรวัดทั้งสาม มีแนวโน้มใกล้เคียงกันเมื่อพอร์ตมีการกระจายความเสี่ยงดี มีความเสี่ยงเฉพาะตัวต่ำ และมีสหสัมพันธ์กับพอร์ตตลาดสูง แต่สำหรับพอร์ตที่ยังมีความเสี่ยงเฉพาะตัวมาก Sharpe Ratio และ Treynor Ratio อาจให้ลำดับการประเมินที่แตกต่างกันได้

7.5.9 Appraisal Ratio และ Information Ratio

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าคลาดเคลื่อนในสมการ (7.94) คือความเสี่ยงเฉพาะตัว $\sigma_{\varepsilon,p}$ Appraisal Ratio คือ

$$AR_p = \frac{\alpha_p}{\sigma_{\varepsilon,p}} \quad (7.97)$$

เป็นผลตอบแทนผิดปกติต่อหนึ่งหน่วยความเสี่ยงเฉพาะตัว

หากมี Benchmark b ให้ผลตอบแทน Active Return เป็น $A_t = R_{p,t} - R_{b,t}$ Information Ratio คือ

$$IR_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_b}{SD(R_p - R_b)} \quad (7.98)$$

ตัวหารเรียกว่า Tracking Error IR เหมาะกับการประเมินผู้จัดการที่มีนโยบายอ้างอิงดัชนีชัดเจน

7.5.10 Sortino, M^2 และ Calmar Ratio

Sortino Ratio ใช้ Downside Deviation จากสมการ (7.15)

$$\text{Sortino}_p = \frac{\bar{R}_p - R_T}{DD(R_T)} \quad (7.99)$$

เหมาะเมื่อผู้ลงทุนมองผลตอบแทนต่ำกว่าเป้าหมายเป็นความเสี่ยง แต่ไม่ลงโทษผลตอบแทนด้านบวก

มาตรวัด Modigliani–Modigliani ปรับความผันผวนของพอร์ตให้เท่าตลาด

$$M_p^2 = \bar{R}_f + S_p \sigma_m, \quad \Delta M_p^2 = M_p^2 - \bar{R}_m \quad (7.100)$$

โดย M_p^2 คือผลตอบแทนของพอร์ตที่ปรับให้มีความผันผวนเท่าตลาด ส่วน ΔM_p^2 เป็นผลตอบแทนส่วนเพิ่มเมื่อเทียบกับตลาด

Calmar Ratio เปรียบเทียบอัตราการเติบโตเทียบกับ Maximum Drawdown

$$\text{Calmar}_p = \frac{\text{CAGR}_p}{\text{MDD}_p} \quad (7.101)$$

ควรใช้ช่วงประเมินเดียวกัน เพราะ MDD ไล่ต่อจุดเริ่มต้นและสิ้นสุด

7.5.11 RAROC และเงินทุนทางเศรษฐกิจ

สำหรับสถาบันการเงิน สามารถประเมินผลตอบแทนเทียบเงินทุนที่รองรับความเสี่ยงด้วย

$$\text{RAROC} = \frac{\text{รายได้หลังหักต้นทุนและผลขาดทุนคาดหมาย}}{\text{เงินทุนทางเศรษฐกิจ}} \quad (7.102)$$

ตัวเลขและตัวส่วนต้องใช้ช่วงเวลาเดียวกัน และเงินทุนทางเศรษฐกิจต้องไม่ถูกนับซ้ำกับ Expected Loss แนวทางหนึ่งคือกำหนดเงินทุนจาก Unexpected Loss เช่น

$$K_\alpha = \text{VaR}_\alpha(L) - E[L], \quad (7.103)$$

แต่ในงานจริงอาจใช้ ES, Stress Capital หรือข้อกำหนดกำกับดูแลแทน

7.5.12 การตัดสินใจหลายมิติ

ไม่ควรเลือกกลยุทธ์ด้วยมาตรวัดเดียว เพราะกลยุทธ์ที่ Sharpe Ratio สูงอาจมี Maximum Drawdown สูง หรือกลยุทธ์ที่ VaR ต่ำอาจให้ผลตอบแทนต่ำเกินไป กรอบประเมินขั้นต่ำควรประกอบด้วย

$$\mathcal{M} = \{R_{\text{ann}}, \sigma_{\text{ann}}, S_p, \text{MDD}, \text{VaR}_\alpha, \text{ES}_\alpha, \text{TO}, \text{ต้นทุน}\} \quad (7.104)$$

หากต้องรวมหลายเกณฑ์ สามารถปรับมาตรฐานคะแนน x_{ij} ของทางเลือก i ภายใต้เกณฑ์ j ในหัวข้อนี้ความหมายของดัชนีเปลี่ยนจากส่วนพอร์ตการลงทุน กล่าวคือ $i = 1, \dots, q$ ใช้แทนทางเลือก เช่น หุ้น พอร์ต หรือกลยุทธ์ที่ต้องการจัดอันดับ ส่วน $j = 1, \dots, m$ ใช้แทนเกณฑ์ เช่น ผลตอบแทน ความผันผวน หรือ Drawdown ดังนั้น x_{ij} คือค่าดิบของทางเลือกที่ i บนเกณฑ์ที่ j , z_{ij} คือค่าที่ปรับมาตรฐานแล้ว และ ω_j คือน้ำหนักความ

สำคัญของเกณฑ์ที่ j แล้วคำนวณคะแนนถ่วงน้ำหนัก

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \omega_j z_{ij}, \quad \omega_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \omega_j = 1 \quad (7.105)$$

ต้องกำหนดทิศทางของเกณฑ์ให้ถูกต้อง โดยผลตอบแทนและ Sharpe เป็นเกณฑ์ที่ยิ่งสูงยิ่งดี ส่วนความผันผวน Drawdown, VaR, ES และต้นทุนเป็นเกณฑ์ที่ยิ่งต่ำยิ่งดี คะแนน Q_i ที่สูงจึงหมายถึงทางเลือกที่เหมาะสมกว่าภายใต้ วิธีปรับมาตรฐานและน้ำหนักที่กำหนด ไม่ได้หมายความว่าเส้นทางเลือกที่ดีที่สุดโดยปราศจากเงื่อนไข ผู้ใช้ควรวิเคราะห์ความไวของอันดับเมื่อเปลี่ยนน้ำหนัก ω_j และตรวจว่าการเพิ่มหรือลดเกณฑ์ไม่ให้อันดับเปลี่ยนอย่างไม่มีความเหตุผลทางเศรษฐศาสตร์

วิธี TOPSIS หรือวิธีฟิชชีสามารถใช้เมื่อเกณฑ์มีจำนวนมากหรือข้อมูลมีความคลุมเครือ แต่บทนี้กล่าวถึงเพียงแนวคิด ไม่ลงรายละเอียดทฤษฎีฟิชชี งานของผู้เขียนด้านการเลือกหุ้นภายใต้ความคลุมเครือเป็นแนวทางอ่านเพิ่มเติม [15, 7]

ตารางที่ 7.1 การเลือกมาตรวัดตามคำถามที่ต้องการตอบ

มาตรวัด	ตัวปรับความเสี่ยง	เหมาะกับคำถาม
Sharpe	ความผันผวนรวม	พอร์ตเป็นการลงทุนหลักหรือยังไม่กระจายความเสี่ยงเต็มที่
Treynor	เบต้า	พอร์ตเป็นส่วนหนึ่งของพอร์ตที่กระจายดีแล้ว
Jensen Alpha	CAPM	ผลตอบแทนเกินเกณฑ์ตลาดหลังควบคุมเบต้า
Appraisal Ratio	ความเสี่ยงเฉพาะตัว	อัลฟาต่อความเสี่ยงที่กระจายออกได้
Information Ratio	Tracking Error	ผู้จัดการเทียบ Benchmark
Sortino	Downside Deviation	ความเสี่ยงต่ำกว่าเป้าหมาย
Calmar	Maximum Drawdown	ความเสียหายตามลำดับเวลาของมูลค่าพอร์ต
RAROC	เงินทุนทางเศรษฐกิจ	ผลตอบแทนต่อเงินทุนรองรับความเสี่ยง

ข้อสังเกต

เอกสารมาตรวัดผลตอบแทนเดิมของผู้เขียนเน้น Sharpe, Treynor, Jensen ความสัมพันธ์ระหว่างมาตรวัด และ Appraisal Ratio Section นี้คงตัวอย่างเชิงตัวเลขที่มีประโยชน์ไว้ พร้อมแก่ประเด็นสำคัญ ได้แก่ การประมาณ Jensen's alpha จากสมการถดถอย การระบ่ง Treynor Ratio เมื่อเบต้าไม่เป็นบวก และการแยก Information Ratio ออกจาก Appraisal Ratio

สรุปมาตรวัดผลตอบแทนที่ปรับด้วยความเสี่ยง

$$S_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\sigma_p}, \quad T_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_f}{\beta_p}, \quad \alpha_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) - \beta_p(\bar{R}_m - \bar{R}_f),$$

$$IR_p = \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_b}{SD(R_p - R_b)}, \quad \text{Sortino}_p = \frac{\bar{R}_p - R_T}{DD(R_T)}, \quad \text{Calmar}_p = \frac{\text{CAGR}_p}{\text{MDD}_p}$$

มาตรวัดทุกตัวต้องใช้ผลตอบแทน ความเสี่ยง Benchmark และอัตราปราศจากความเสียหายในหน่วยเวลาเดียวกัน

ตัวอย่าง 7.13. กรณีศึกษา: การประเมินผลพอร์ตของผู้จัดการกองทุน

สมมติว่าผู้วิเคราะห์ใช้ข้อมูลผลตอบแทนรายเดือนย้อนหลัง แล้วปรับให้อยู่ในหน่วยต่อปี ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

รายการ	ค่า
ผลตอบแทนเฉลี่ยของพอร์ต $\bar{R}_p$	11.0%
ผลตอบแทนเฉลี่ยของตลาด $\bar{R}_m$	9.0%
อัตราผลตอบแทนปราศจากความเสียหาย $\bar{R}_f$	2.5%
ความผันผวนของพอร์ต σ_p	16.0%
ความผันผวนของตลาด σ_m	18.0%
เบต้าของพอร์ต β_p	0.85
ผลตอบแทนเป้าหมาย R_T	4.0%
Downside Deviation	9.0%
CAGR ของพอร์ต	10.4%
Maximum Drawdown	14.0%

ข้อมูลดังกล่าวเป็นตัวอย่างเชิงสมมติ เพื่อแสดงขั้นตอนการประเมินผลการลงทุนแบบครบวงจร

ขั้นที่ 1: ประเมินผลตอบแทนตาม CAPM

ค่าชดเชยความเสี่ยงตลาดเท่ากับ

$$\bar{R}_m - \bar{R}_f = 0.09 - 0.025 = 0.065$$

ดังนั้นผลตอบแทนที่ CAPM กำหนดสำหรับพอร์ตที่มี $\beta_p = 0.85$ คือ

$$R_p^{\text{CAPM}} = R_f + \beta_p(R_m - R_f) = 0.025 + 0.85(0.065) = 0.08025$$

หรือ

$$R_p^{\text{CAPM}} = 8.025\%$$

แต่พอร์ตให้ผลตอบแทนจริงเฉลี่ย 11% จึงให้ผลตอบแทนสูงกว่าระดับที่ CAPM กำหนด

ขั้นที่ 2: Jensen's Alpha

จาก

$$\alpha_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) - \beta_p(\bar{R}_m - \bar{R}_f)$$

ได้

$$\alpha_p = (0.11 - 0.025) - 0.85(0.09 - 0.025) = 0.085 - 0.05525 = 0.02975$$

ดังนั้น $\alpha_p = 2.975\%$

ในเชิงเศรษฐศาสตร์ ผลลัพธ์นี้หมายความว่า พอร์ตให้ผลตอบแทนสูงกว่าผลตอบแทนที่ CAPM กำหนดประมาณ 2.98 จุดร้อยละต่อปี หลังควบคุมความเสี่ยงเชิงระบบแล้ว

อย่างไรก็ตาม ในงานจริงต้องทดสอบว่า α_p แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ ก่อนสรุปว่าผู้จัดการกองทุนมีความสามารถสร้างผลตอบแทนส่วนเกิน

ขั้นที่ 3: Sharpe Ratio

ผลตอบแทนส่วนเกินของพอร์ตคือ

$$\bar{R}_p - \bar{R}_f = 0.11 - 0.025 = 0.085$$

ดังนั้น

$$S_p = \frac{0.085}{0.16} = 0.5313$$

สำหรับตลาด

$$S_m = \frac{0.09 - 0.025}{0.18} = 0.3611$$

จึงได้ $S_p = 0.5313 > S_m = 0.3611$ พอร์ตจึงให้ผลตอบแทนส่วนเกินต่อหนึ่งหน่วยของ ความเสี่ยง

รวม สูงกว่าตลาด

ขั้นที่ 4: เปรียบเทียบกับ Capital Market Line

จากข้อมูลตลาด ความชันของ CML คือ

$$\frac{\bar{R}_m - \bar{R}_f}{\sigma_m} = \frac{0.065}{0.18} = 0.3611$$

หากต้องการพอร์ตบน CML ที่มีความผันผวนเท่ากับพอร์ตที่กำลังประเมิน คือ $\sigma_p = 16\%$ ผลตอบแทนบน CML จะเท่ากับ

$$R_{\text{CML}} = 0.025 + \frac{0.065}{0.18}(0.16) \approx 0.08278$$

ดังนั้น $R_{\text{CML}} \approx 8.28\%$

ในข้อมูลตัวอย่าง พอร์ตให้ผลตอบแทนย้อนหลัง 11% สูงกว่าค่าที่ได้จาก CML ซึ่งสะท้อนผลการดำเนินงานย้อนหลังที่ดี แต่ไม่ควรตีความว่าเป็นผลตอบแทนที่รับประกันในอนาคต เนื่องจากค่าเฉลี่ยและความเสี่ยงเป็นค่าประมาณจากข้อมูลตัวอย่าง

ขั้นที่ 5: Treynor Ratio

$$T_p = \frac{0.11 - 0.025}{0.85} = 0.1000$$

ดังนั้น $T_p = 10.00\%$

สำหรับตลาด

$$T_m = 0.09 - 0.025 = 0.065 = 6.50\%$$

พอร์ตจึงให้ผลตอบแทนส่วนเกินต่อหนึ่งหน่วยของ ความเสี่ยงเชิงระบบสูงกว่าตลาด

ขั้นที่ 6: ความสัมพันธ์ระหว่าง Sharpe, Treynor และ Jensen

จากความสัมพันธ์

$$T_p = \frac{\alpha_p}{\beta_p} + T_m$$

จะได้

$$T_p = \frac{0.02975}{0.85} + 0.065 = 0.1000$$

ซึ่งตรงกับค่าที่คำนวณโดยตรง

นอกจากนี้ จาก

$$\beta_p = \rho_{pm} \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพอร์ตกับตลาดได้เป็น

$$\rho_{pm} = \frac{\beta_p \sigma_m}{\sigma_p} = \frac{0.85(0.18)}{0.16} = 0.9563$$

ค่าดังกล่าวแสดงว่าพอร์ตเคลื่อนไหวสัมพันธ์กับตลาดในระดับสูง

ขั้นที่ 7: Appraisal Ratio

จากแบบจำลองตลาดเดียว หากค่าตลาดเคลื่อนไหวไม่สัมพันธ์กับผลตอบแทนตลาด จะมี

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon,p}^2$$

ดังนั้น

$$\sigma_{\varepsilon,p} = \sqrt{0.16^2 - 0.85^2(0.18)^2} \approx 0.0468$$

จึงได้

$$AR_p = \frac{0.02975}{0.0468} \approx 0.636$$

ค่าบวกลบหมายความว่าพอร์ตสร้างอัลฟาบวกเมื่อเทียบกับ ความเสี่ยงเฉพาะตัวที่ต้องรับ

ขั้นที่ 8: Information Ratio

หากใช้ตลาดเป็น Benchmark Tracking Error คือ

$$TE = SD(R_p - R_m)$$

เนื่องจาก

$$\text{Cov}(R_p, R_m) = \beta_p \sigma_m^2 = 0.85(0.18)^2 = 0.02754$$

จึงได้

$$TE = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_m^2 - 2 \text{Cov}(R_p, R_m)} = \sqrt{0.16^2 + 0.18^2 - 2(0.02754)} \approx 0.0540$$

ดังนั้น

$$IR_p = \frac{0.11 - 0.09}{0.0540} \approx 0.370$$

กล่าวคือ พอร์ตสร้าง Active Return ประมาณ 0.37 หน่วย ต่อหนึ่งหน่วยของ Tracking Error

ขั้นที่ 9: Sortino Ratio

กำหนดผลตอบแทนเป้าหมาย $R_T = 4\%$ และ Downside Deviation เท่ากับ 9% จะได้

$$\text{Sortino}_p = \frac{0.11 - 0.04}{0.09} = 0.7778$$

ดังนั้น $\text{Sortino}_p \approx 0.78$

มาตรวัดนี้มองเฉพาะความผันผวนด้านที่ต่ำกว่าเป้าหมาย จึงเหมาะกับนักลงทุนที่ไม่ถือว่าผลตอบแทนที่สูงกว่าค่าเฉลี่ย เป็น “ความเสี่ยง”

ขั้นที่ 10: Modigliani–Modigliani Measure

จาก

$$M_p^2 = R_f + S_p \sigma_m$$

จะได้

$$M_p^2 = 0.025 + (0.5313)(0.18) \approx 0.1206$$

ดังนั้น $M_p^2 \approx 12.06\%$

เมื่อเทียบกับผลตอบแทนตลาด 9%

$$\Delta M_p^2 = 12.06\% - 9.00\% = 3.06\%$$

กล่าวคือ หากปรับความเสี่ยงของพอร์ตให้เท่ากับความเสี่ยงตลาด พอร์ตจะให้ผลตอบแทนสูงกว่าตลาด ประมาณ 3.06 จุดร้อยละ

ขั้นที่ 11: Calmar Ratio

สมมติ CAGR ของพอร์ตเท่ากับ 10.4% และ Maximum Drawdown เท่ากับ 14% จะได้

$$\text{Calmar}_p = \frac{0.104}{0.14} = 0.7429$$

ดังนั้น

$$\text{Calmar}_p \approx 0.74$$

Calmar Ratio ทำให้เห็นมิติที่ Sharpe Ratio ไม่ได้แสดงโดยตรง คือความเสียหายสูงสุดตามเส้นทางของมูลค่าพอร์ต

สรุปผลการวิเคราะห์

มาตรวัด	ผลการคำนวณ	การตีความ
Sharpe Ratio	0.531	สูงกว่าตลาด
Treynor Ratio	10.00%	สูงกว่าตลาด
Jensen's Alpha	2.975%	ผลตอบแทนสูงกว่า CAPM
Appraisal Ratio	0.636	อัลฟาบวกต่อความเสี่ยงเฉพาะตัว
Information Ratio	0.370	Active Return เป็นบวก
Sortino Ratio	0.778	ผลตอบแทนต่อ Downside Risk เป็นบวก
M^2	12.06%	สูงกว่าตลาดเมื่อปรับความเสี่ยง
Calmar Ratio	0.743	ต้องพิจารณาร่วมกับ Drawdown

ในกรณีศึกษา นี้ มาตรวัดหลายชนิดให้ข้อสรุปไปในทิศทางเดียวกันว่า พอร์ตมีผลการดำเนินงานย้อนหลังดีกว่าตลาดหลังปรับด้วยความเสี่ยง อย่างไรก็ตาม การตัดสินใจลงทุนจริงยังต้องพิจารณา ความมีนัยสำคัญทางสถิติของอัลฟา ความเสถียรของค่าประมาณ ค่าธรรมเนียม ภาษี สภาพคล่อง และผลการทดสอบนอกตัวอย่างประกอบด้วย □

ตัวอย่าง 7.14. กรณีศึกษา: การประเมินพอร์ตสินเชื่อด้วย RAROC

สมมติธนาคารกำลังพิจารณาพอร์ตสินเชื่อดูธุรกิจ และประมาณค่าความเสี่ยงในช่วงเวลา 1 ปีได้ดังนี้

$$\text{VaR}_{99\%}(L) = 120 \text{ ล้านบาท}, \quad E[L] = 40 \text{ ล้านบาท}$$

เงินทุนทางเศรษฐกิจจาก Unexpected Loss จึงเท่ากับ

$$K_{99\%} = \text{VaR}_{99\%}(L) - E[L] = 120 - 40 = 80 \text{ ล้านบาท}$$

ส่วนเกณฑ์ที่ยิ่งต่ำยิ่งดี ใช้

$$z_{ij} = \frac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

จะได้เมทริกซ์คะแนนโดยประมาณ

$$Z = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.400 & 0.400 & 0.429 & 0.571 \\ 0.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

คะแนนของกลยุทธ์ A คือ

$$Q_A = 0.25(0.500) + 0.25(0.400) + 0.20(0.400) \\ + 0.15(0.429) + 0.15(0.571) \approx 0.455$$

สำหรับกลยุทธ์ B

$$Q_B = 0.25(0) + 0.25(1) + 0.20(1) + 0.15(1) + 0.15(1) = 0.750$$

และสำหรับกลยุทธ์ C

$$Q_C = 0.25(1) = 0.250$$

ดังนั้น

$$Q_B = 0.750 > Q_A = 0.455 > Q_C = 0.250$$

และกลยุทธ์ B เป็นทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด ภายใต้น้ำหนักและวิธีปรับมาตรฐานที่กำหนด ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า กลยุทธ์ที่ให้ผลตอบแทนสูงที่สุดไม่จำเป็นต้องเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุด เมื่อพิจารณาความเสี่ยง Drawdown และต้นทุนพร้อมกัน

ในทางปฏิบัติ ควรเปลี่ยนน้ำหนัก w_j ภายในช่วงที่สมเหตุสมผลแล้วตรวจสอบว่าอันดับยังคงเสถียรหรือไม่ หากอันดับเปลี่ยนง่ายเมื่อปรับน้ำหนักเพียงเล็กน้อย แสดงว่าข้อสรุปยังมีความไวต่อสมมติฐานของผู้ตัดสินใจ

□

7.6 กรณีศึกษาจากงานวิจัยและแนวทางต่อยอด

หัวข้อนี้สังเคราะห์งานวิจัยของผู้เขียนให้เป็นลำดับการเรียนรู้เดียวกัน ตั้งแต่การสร้างสัญญาณ การสร้างพอร์ต การวัดความเสี่ยง ไปจนถึงการประเมินผลโดยไม่คัดลอกโครงสร้างบทความเดิม เป้าหมายคือแสดงให้เห็นว่างานวิจัยสามารถต่อยอดจากหลักคณิตศาสตร์การเงินพื้นฐาน และถูกตรวจสอบด้วยกรอบเชิงคำนวณที่ทำได้

7.6.1 กรณีศึกษาที่ 1: Bollinger Bands กับค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ทางเลือก

Witayakiattilerd และ Panichkitkosolkul ศึกษา Bollinger Bands ที่ใช้ SMA, EMA, DEMA, TEMA และ WMA เป็นเส้นกลาง ด้วยข้อมูลรายวันของหุ้นใน SET50 ช่วงเดือนมกราคม 2018 ถึงธันวาคม 2022 แบ่งข้อมูล 80:20 ระหว่างการพัฒนาแบบจำลองและการทดสอบนอกกลุ่มตัวอย่าง และประเมินผลด้วย Success Rate, Profit Rate และ Benchmark แบบ Buy-and-Hold [18]

สาระสำคัญเชิงตำราคือ

- 1) การเปลี่ยนเส้นกลางทำให้จังหวะและจำนวนสัญญาณเปลี่ยน
- 2) ค่าเฉลี่ยที่ตอบสนองเร็วลด Lag แต่เพิ่มความไวต่อ Noise
- 3) ต้องแยกผล In-Sample กับ Out-of-Sample
- 4) ผลที่ดีในหุ้นบางตัวไม่ควรขยายเป็นกฎสากล
- 5) ควรเปรียบเทียบกำไรหลังต้นทุนและ Drawdown ไม่ใช่ Success Rate เพียงค่าเดียว

ผลการวิจัยพบว่า DEMA และ TEMA เพิ่มประสิทธิภาพในหลักทรัพย์บางรายการ และมีความแม่นยำนอกกลุ่มตัวอย่างสูงกว่าร้อยละ 60 ในบางกรณี แต่ผลแตกต่างกันตามหลักทรัพย์และสถานะตลาด จึงสนับสนุนหลัก “เลือกแบบจำลองด้วยการตรวจสอบ” มากกว่า “เลือกแบบจำลองที่ซับซ้อนที่สุด”

7.6.2 กรณีศึกษาที่ 2: พอร์ต Long-Short และกลยุทธ์ Cashless

งานของ Witayakiattilerd และคณะประยุกต์ทฤษฎีพอร์ตสมัยใหม่ ร่วมกับการขายชอร์ตและสัญญาณ Cross EMA โดยวิเคราะห์ข้อมูลราคาปิดรายวันของหุ้น SET50 จำนวน 41 หลักทรัพย์ ช่วงปี 2017–2021 ใช้ข้อมูลสี่ปีแรกสร้างแบบจำลอง และใช้ปี 2021 ทดสอบกลยุทธ์ งานวิจัยระบุคู่หลักทรัพย์ที่มีความสัมพันธ์เชิงลบตามเกณฑ์ และสร้างพอร์ตที่เหมาะสม 72 คู่ก่อนจัดอันดับด้วยผลกำไรและอัตราความสำเร็จ [17]

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของพอร์ตสองขา คือ

$$R_{LS,t} = w_L R_{L,t} + w_S R_{S,t} - c_t - b_t, \quad w_L > 0, \quad w_S < 0, \quad (7.106)$$

เมื่อ c_t เป็นต้นทุนซื้อขายและ b_t เป็นต้นทุนยืมหุ้น ถ้าใช้เงินจากการขายซอร์ตทั้งหมดซื้อขา Long จะมี Net Exposure ไกล่ศูนย์ แต่ Gross Exposure เป็นบวกและอาจสูง

ข้อสังเกต

การเลือกคู่จากสหสัมพันธ์เชิงลบในอดีตเป็นขั้นคัดกรอง ไม่ใช่หลักประกันการป้องกันความเสี่ยง ควรทดสอบความคงที่ของสหสัมพันธ์ ความสัมพันธ์ในช่วงขาดทุนรุนแรง ความเสี่ยง Basis Risk และความเป็นไปได้ของการยืมหุ้นจริง

7.6.3 กรณีศึกษาที่ 3: การจัดอันดับหุ้นธนาคารด้วย VaR และ CVaR

Witayakiattilerd และคณะศึกษาหุ้นธนาคารไทยและดัชนี SET Finance จากข้อมูลระหว่างวันที่ 1 มกราคม 2017 ถึง 31 ธันวาคม 2021 คำนวณ VaR และ CVaR ที่ระดับความเชื่อมั่นร้อยละ 95 และ 99 ด้วย Normal EWMA และ Historical Simulation จากนั้นตรวจสอบแบบจำลองด้วย Violation Ratio, Three-Zone Approach และ Normalized CVaR [16]

การนำผลมาใช้ในการตรวจสอบแยกสามขั้นตอน

$$\begin{aligned} \text{ประมาณความเสี่ยง} &\longrightarrow \text{ตรวจสอบแบบจำลอง} \\ &\longrightarrow \text{นำค่าที่ผ่านการตรวจสอบไปเปรียบเทียบ} \end{aligned} \quad (7.107)$$

การจัดอันดับหุ้นจากค่าความเสี่ยงต่ำเพียงอย่างเดียว ไม่เท่ากับการจัดอันดับความน่าลงทุน เพราะยังต้องพิจารณาผลตอบแทน สภาพคล่อง คุณภาพข้อมูล และความเหมาะสมกับวัตถุประสงค์ของผู้ลงทุน

7.6.4 กรณีศึกษาที่ 4: MACD ที่ปรับปรุงและความไม่แน่นอนของสัญญาณ

Boonprasurt, Sampaokit และ Witayakiattilerd เสนอ MACD ที่ปรับเส้นสัญญาณเพื่อให้ตรวจจับ การเปลี่ยนแปลงได้เร็วขึ้น พร้อมใช้กระบวนการฟิชซีให้ระดับความเชื่อมั่นและน้ำหนักการซื้อขาย [3] ในบทนี้ใช้ เฉพาะข้อสรุปเชิงวิธีว่า การเปลี่ยนเส้นสัญญาณต้องถูกประเมินด้วยสัญญาณที่เกิดจริงหลัง Lag ต้นทุนธุรกรรม และข้อมูลนอกกลุ่มตัวอย่าง ส่วนฟิชซีถูกกล่าวถึงเป็นแนวทางต่อยอดเท่านั้น

7.6.5 ตัวอย่างบูรณาการ: เปรียบเทียบสามกลยุทธ์

สมมติการทดสอบนอกกลุ่มตัวอย่างให้ผลดังตาราง

กลยุทธ์	ผลตอบแทน ต่อปี	σ	Sharpe	MDD	VaR _{0.99}	Turnover
Buy-and-Hold	12.0%	18.0%	0.50	24.0%	4.1%	0.10
DEMA-BB	15.0%	20.0%	0.60	21.0%	4.5%	2.40
Long-Short	10.0%	11.0%	0.64	12.0%	2.5%	3.10

กำหนดอัตราปราศจากความเสียหายร้อยละ 3 ต่อปี ค่า Sharpe Ratio ตรวจได้จากสมการ (7.88) เช่น Long-Short มี

$$S = \frac{0.10 - 0.03}{0.11} = 0.6364 \approx 0.64$$

กลยุทธ์ Long-Short มี Sharpe Ratio สูงที่สุด และมีความผันผวน MDD และ VaR ต่ำที่สุด แต่ Turnover สูงที่สุด จึงต้องประเมินต้นทุนยืมหุ้น สภาพคล่อง และความสามารถในการซื้อขาย ก่อนสรุปว่าเหนือกว่ากลยุทธ์อื่นในทางปฏิบัติ

7.6.6 กรอบการวิจัยที่ทำซ้ำได้

การต่อยอดงานวิจัยด้านการลงทุนควรใช้วงจรต่อไปนี้



รูปที่ 7.15 กรอบการวิจัยเชิงคำนวณสำหรับกลยุทธ์และการบริหารความเสี่ยง

องค์ประกอบขั้นต่ำของงานที่ทำซ้ำได้ ได้แก่

- 1) แหล่งข้อมูล ช่วงเวลา และกฎปรับข้อมูล
- 2) สมการและค่าเริ่มต้นของตัวชี้วัดทุกชนิด

- 3) เวลาที่ใช้สร้างสัญญาณและเวลาที่ดำเนินธุรกรรม
- 4) ค่าธรรมเนียม สภาพคล่อง และข้อจำกัดสถานะ
- 5) วิธีแบ่งข้อมูลและรายการพารามิเตอร์ที่ทดลอง
- 6) Benchmark และมาตรวัดผลทั้งหมด
- 7) โค้ดหรือขั้นตอนวิธีที่เพียงพอให้ผู้อื่นทำซ้ำ

7.6.7 แนวทางต่อยอด

จากกรอบในบทนี้สามารถต่อยอดได้หลายแนวทาง

- 1) **Robust Portfolio Optimization** กำหนดเขตความไม่แน่นอนของ μ และ Σ แทนการใช้ค่าประมาณจุดเดียว
- 2) **CVaR Portfolio Optimization** ใช้สมการ (7.75) เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย และใส่ข้อจำกัด Turnover หรือ Sector Exposure
- 3) **Dynamic Correlation** ประเมินสหสัมพันธ์ที่เปลี่ยนตามเวลาและ Stress Correlation สำหรับพอร์ต Long-Short
- 4) **Multiple-Testing Adjustment** ควบคุม Data Snooping เมื่อทดลองตัวชี้วัดและพารามิเตอร์จำนวนมาก
- 5) **Explainable Machine Learning** ใช้แบบจำลองเรียนรู้เพื่อประมาณสัญญาณหรือความเสี่ยง แต่ต้องรักษาการแบ่งเวลาและอธิบายแหล่งผลตอบแทน
- 6) **Fuzzy Extension** ใช้ฟัซซีแทนความคลุมเครือของเกณฑ์หรือน้ำหนักการตัดสินใจ โดยไม่แทนที่ความไม่แน่นอนเชิงความน่าจะเป็นทั้งหมด

กรอบรวมของบท

ราคาและกระแสเงินสด → ผลตอบแทน → สัญญาณ → พอร์ต
→ VaR/ES → ผลตอบแทนปรับความเสี่ยง → การตัดสินใจ

ทุกถูกควรต้องมีสมมติฐาน ข้อมูล และการตรวจสอบที่สอดคล้องกัน

บทสรุปท้ายบทที่ 7

บทนี้ต่อยอดจากการประเมินมูลค่าสินทรัพย์รายตัวไปสู่การลงทุนหลายสินทรัพย์ เริ่มจากนิยามผลตอบแทนอย่างง่าย ผลตอบแทนลอการิทึม ผลตอบแทนสะสม ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและเรขาคณิต จากนั้นวัดความเสี่ยงด้วยความแปรปรวน สหสัมพันธ์ เบต้า Downside Deviation และ Maximum Drawdown

ส่วนกลยุทธ์การลงทุนอธิบาย SMA, WMA, EMA, DEMA, TEMA, Bollinger Bands และ MACD พร้อมกำหนดสมการผลตอบแทนกลยุทธ์ที่ใช้สถานะล่าช้าหนึ่งงวด และหักต้นทุนตาม Turnover เน้นว่าการทดสอบย้อนหลังต้องแยก In-Sample กับ Out-of-Sample ควบคุม Look-ahead Bias, Survivorship Bias และ Data Snooping

ทฤษฎีพอร์ตสมัยใหม่ใช้ความแปรปรวนร่วมเป็นหัวใจของการกระจายความเสี่ยง บทนี้ให้ทั้งสูตรพอร์ต GMV รูปปิด เส้นขอบประสิทธิภาพ พอร์ตสัมผัส ข้อจำกัด Long-only, Short Selling, Gross Exposure และการตีความพอร์ต Cashless อย่างระมัดระวัง

สำหรับ Tail Risk บทนี้นิยาม VaR บนตัวแปรผลขาดทุน และนิยาม ES ด้วยอินทิกรัลของควอนไทล์ ครอบคลุมวิธีปกติ EWMA, Historical Simulation, Monte Carlo รวมทั้ง Kupiec Test และแนวคิด Traffic-Light Approach ES ให้ข้อมูลความรุนแรงหลัง VaR และมีสมบัติ Subadditivity แต่ค่าประมาณส่วนหางยังมีความไม่แน่นอนสูง

การประเมินผลใช้ Sharpe, Treynor, Jensen's alpha, Appraisal Ratio, Information Ratio, Sortino, M^2 , Calmar และ RAROC โดยชี้ว่าแต่ละมาตรวัดใช้ตัวปรับความเสี่ยงต่างกัน จึงต้องเลือกตามคำถามและบริบทของพอร์ต สุดท้ายได้สังเคราะห์งานวิจัยของผู้เขียนด้าน Bollinger Bands พอร์ต Long-Short, MACD และ VaR-CVaR เป็นกรอบวิจัยที่ทำซ้ำและตรวจสอบได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Basel Committee on Banking Supervision. (1996). *Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*. Bank for International Settlements.
- [2] Bollinger, J. (2002). *Bollinger on Bollinger Bands*. McGraw-Hill.
- [3] Boonprasurt, P., Sampaokit, P., & Witayakiattilerd, W. (2022). MACD indicator with the modified signal line and trading weight inference in fuzzy environment. *Thailand Statistician*, 20(1), 98–123.

- [4] Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [5] Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862.
- [6] Jensen, M. C. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *Journal of Finance*, 23(2), 389–416.
- [7] Kesamoon, C., & Witayakiattilerd, W. (2019). Hierarchy analysis process under fuzzy environment: A positive way of selecting stocks into portfolio under ambiguity in stock information. *Science & Technology Asia*, 24(4), 1–11.
- [8] Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84.
- [9] Lo, A. W. (2002). The statistics of Sharpe ratios. *Financial Analysts Journal*, 58(4), 36–52.
- [10] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- [11] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
- [12] Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3), 425–442.
- [13] Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *Journal of Business*, 39(1), 119–138.
- [14] Treynor, J. L. (1965). How to rate management of investment funds. *Harvard Business Review*, 43(1), 63–75.
- [15] Witayakiattilerd, W. (2019). Fuzzy quantitative analysis method for stock selection into portfolio. *Chiang Mai Journal of Science*, 46(4), 799–811.
- [16] Witayakiattilerd, W., Reunprot, N., Limpanawannakul, W., & Phuphon, J. (2024). Analyzing stock performance in the banking sector: Unveiling Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk strategies. *Thailand Statistician*, 22(4), 877–893.
- [17] Witayakiattilerd, W., Neaimsri, C., Atthaphichan, T., Boontam, C., & Senarat, P. (2025).

Unleashing the potential: Exploring cashless investment strategies through short-selling techniques and modern portfolio theory. *Thailand Statistician*, 23(4), 875–892.

- [18] Witayakiattilerd, W., & Panichkitkosolkul, W. (2026). Robust backtesting of Bollinger Bands with alternative moving averages: An empirical study on SET50 stocks. *Bangmod International Journal of Mathematical and Computational Science*, 12, 96–118. DOI: <https://doi.org/10.58715/bangmodjmcs.2026.12.6>.
- [19] Yamai, Y., & Yoshiba, T. (2005). Value-at-Risk versus Expected Shortfall: A practical perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997–1015.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่าผลตอบแทนและอัตราปราศจากความเสี่ยงอยู่ในหน่วยเวลาเดียวกัน ผลขาดทุนกำหนดให้เป็นบวก ค่าธรรมเนียมคิดจากมูลค่าธุรกรรม และให้ใช้ค่าที่ไม่ปิดเศษระหว่างการคำนวณก่อนตอบอย่างน้อยสี่ตำแหน่ง

- 1) (ระดับ ง่าย) ราคาปิดของหุ้นหนึ่งในห้าวันติดต่อกันเท่ากับ 50, 52, 51, 54, 55 บาท และได้รับเงินปันผล 0.50 บาทในวันที่สาม
 - (a) จำนวนผลตอบแทนอย่างง่ายทุกงวด
 - (b) จำนวนผลตอบแทนสะสม
 - (c) จำนวนค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยเรขาคณิต
 - (d) อธิบายเหตุผลที่ผลตอบแทนลอการิทึมจากราคาเพียงอย่างเดียวไม่รวมผลของเงินปันผล
- 2) (ระดับ ปานกลาง) กองทุนมีผลตอบแทนรายเดือนร้อยละ 1.2, -0.8 , 2.5, 0.4, -1.5 , 1.8
 - (a) หาผลตอบแทนสะสมหกเดือน
 - (b) หาอัตราการเติบโตทบต้นเฉลี่ยต่อเดือนและแปลงเป็นต่อปี
 - (c) หาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างต่อเดือนและ Annualized Volatility
 - (d) ระบุสมมติฐานที่จำเป็นสำหรับการใช้กฎรากที่สอง
- 3) (ระดับ ง่าย) ผลตอบแทนของหุ้น A และตลาดในสี่สถานการณ์มีความน่าจะเป็นเท่ากัน

สถานการณ์	1	2	3	4
$R_A(\%)$	-8	2	10	16
$R_m(\%)$	-5	3	8	12

จงหา $E[R_A]$, $E[R_m]$, ความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และเบต้าของ A

- 4) (ระดับ ปาน กลาง) มูลค่า พอร์ต ใน ปลาย แต่ละ เดือน เป็น 100, 108, 105, 112, 98, 101, 117, 109 ล้านบาท
 - (a) หาจุดสูงสุดสะสมและ Drawdown ทุกเดือน

- (b) หา Maximum Drawdown
- (c) ระบุ Peak, Trough และ Recovery Date ถ้ามี
- 5) **(ระดับ ง่าย)** กำหนดราคาปิด 20, 21, 22, 21, 24, 25, 23, 26 จงหา $SMA_3(8)$, $WMA_3(8)$ และ $EMA_3(8)$ โดยเริ่ม EMA จาก SMA สามงวดแรก
- 6) **(ระดับ ปานกลาง)** ใช้ข้อมูลข้อ 5 และกำหนด $n = 4$, $k = 2$
- (a) คำนวณเส้นกลาง SMA ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแบบตัวหาร n และ Bollinger Bands ที่เวลา 8
- (b) คำนวณ $\%B(8)$ และ $BBW(8)$
- (c) อธิบายว่าราคาเหนือแถบบนควรถูกตีความอย่างไรโดยไม่สรุปเป็นสัญญาณขายทันที
- 7) **(ระดับ ปานกลาง)** กำหนด EMA ระยะสั้นและยาวของวัน $t - 1$, t เป็น
- | | $t - 1$ | t |
|------------|---------|-------|
| EMA_{12} | 101.2 | 102.0 |
| EMA_{26} | 101.0 | 101.4 |
| $Signal$ | 0.30 | 0.42 |
- (a) หา MACD และ Histogram ทั้งสองวัน
- (b) เกิดสัญญาณตัดขึ้นหรือไม่ตามนิยามในบท
- (c) ถ้าดำเนินธุรกรรมได้ตั้งวัน $t + 1$ อธิบายว่าควรใช้ผลตอบแทนงวดใดในการ Backtest
- 8) **(ระดับ ปานกลาง)** กลยุทธ์มีสถานะ $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0$ และผลตอบแทนสินทรัพย์งวดที่ 1-5 เท่ากับ 2%, -1%, 3%, -2%, 1% ต้นทุนต่อหน่วย Turnover เท่ากับ 0.15% จงหาผลตอบแทนกลยุทธ์งวดที่ 2-5 และมูลค่าปลายงวดจากเงินต้น 1,000,000 บาท
- 9) **(ระดับ ยาก)** ออกแบบ Walk-Forward Backtest สำหรับ Bollinger Bands โดยมีข้อมูลรายวัน 1,500 วัน ทดลอง $n \in \{10, 20, 30, 50\}$ และ $k \in \{1.5, 2, 2.5\}$ กำหนดความยาวหน้าต่างพัฒนาหน้าต่างทดสอบ วิธีเลือกพารามิเตอร์ Benchmark ต้นทุนธุรกรรม และมาตรวัดอย่างน้อยห้ารายการ พร้อมอธิบายวิธีลด Data-Snooping Bias
- 10) **(ระดับ ง่าย)** หุ่น A และ B มี $\sigma_A = 15\%$, $\sigma_B = 25\%$, $\rho_{AB} = 0.20$ พอร์ตลงทุนใน A ร้อย

ละ 60 และ B ร้อยละ 40 จงหาความผันผวนของพอร์ต

- 11) (ระดับ ปานกลาง) หุ้น A และ B มีผลตอบแทนคาดหวัง 8% และ 15% ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10% และ 22% และสหสัมพันธ์ -0.30

- (a) หาน้ำหนักพอร์ต GMV
- (b) หาผลตอบแทนและความผันผวนของ GMV
- (c) ตรวจสอบว่าน้ำหนักสอดคล้องกับข้อจำกัด Long-only หรือไม่

- 12) (ระดับ ยาก) กำหนด

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.11 \\ 0.15 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0020 & 0.0015 \\ 0.0020 & 0.0225 & 0.0030 \\ 0.0015 & 0.0030 & 0.0400 \end{bmatrix}.$$

- (a) หาพอร์ต GMV ด้วยสมการเมทริกซ์
 - (b) หาพอร์ตผลตอบแทนเป้าหมาย 12%
 - (c) เปรียบเทียบความเสี่ยงของทั้งสองพอร์ต
 - (d) ตรวจสอบความถูกต้องของเงื่อนไขผลรวมของน้ำหนักและผลตอบแทนเป้าหมาย
- 13) (ระดับ ปานกลาง) พอร์ต Long-Short ถือ Long หุ้น A มูลค่า 2 ล้านบาท และ Short หุ้น B มูลค่า 1.5 ล้านบาท
- (a) หา Net Exposure และ Gross Exposure
 - (b) ถ้า A ให้ผลตอบแทน -4% และ B ให้ผลตอบแทน 6% จงหากำไรขาดทุนก่อนต้นทุน
 - (c) หาผลสุทธิเมื่อค่าธรรมเนียมซื้อขาย 0.25% ของ Gross Exposure และค่าหุ้นยืม 0.50% ของมูลค่า Short
 - (d) อธิบายเหตุผลที่ Net Exposure ต่ำไม่ได้แปลว่าความเสี่ยงต่ำเสมอไป

- 14) (ระดับ ยาก) พิสูจน์สมการน้ำหนักพอร์ต GMV

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

ด้วยวิธีตัวคูณลากรองจ์ และตรวจสอบ Second-Order Condition เมื่อ Σ เป็นบวกแน่นอน

- 15) (ระดับ ง่าย) พอร์ตมีมูลค่า 5 ล้านบาท ผลตอบแทนหนึ่งวันเป็นปกติ มีค่าเฉลี่ย 0.02% และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.2% จงหา VaR และ ES ที่ระดับ 95% โดยใช้ $z_{0.95} = 1.644854$ และ $\phi(z_{0.95}) = 0.103136$

- 16) (ระดับ ปานกลาง) ผลขาดทุนย้อนหลัง หน่วยพันบาท เรียงจากน้อยไปมากเป็น

−12, −8, −3, 0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 21, 25, 30, 36, 44, 55, 80

- (a) หา Historical VaR ที่ 90% ด้วย Nearest-Rank
 (b) หา ES โดยใช้ค่าเฉลี่ยสองสถานการณั้รุนแรงที่สุด
 (c) เปรียบเทียบ VaR กับ ES และอธิบายผล
- 17) (ระดับ ปานกลาง) แบบจำลอง VaR ระดับ 99% ถูกทดสอบ 250 วันและพบข้อบกพร่อง 7 ครั้ง
 (a) หา Violation Ratio $X/[T(1 - \alpha)]$
 (b) จัดโซนตาม Basel Traffic-Light แบบดั้งเดิม
 (c) คำนวณ $\hat{p} = X/T$
 (d) เขียนสมการ Kupiec LR_{uc} สำหรับข้อมูลนี้
- 18) (ระดับ ยาก) แบบจำลอง A และ B มีข้อบกพร่องเท่ากัน 10 ครั้งจาก 1,000 วัน แต่ A มีข้อบกพร่องกระจายห่างกัน ส่วน B มี 8 ครั้งติดกันในช่วงวิกฤต อธิบายว่าทำไม Kupiec Test อาจให้ข้อสรุปเหมือนกัน แต่ Christoffersen Independence Test ควรแยกความแตกต่างได้ และเสนอ Stress Test เพิ่มเติม
- 19) (ระดับ ง่าย) กำหนด $R_f = 3\%$ และข้อมูลต่อไปนี้

	$\bar{R}$	σ	β
A	11%	14%	0.80
B	14%	20%	1.10
	10%	12%	1.00

จงหา Sharpe และ Treynor Ratio ของ A, B และตลาด แล้วเปรียบเทียบอันดับ

- 20) (ระดับ ปานกลาง) กำหนด $R_f = 4\%$, $R_m = 12\%$ พอร์ต P ให้ผลตอบแทน 13.5%, $\beta_P = 0.9$, $\sigma_P = 15\%$, $\sigma_m = 13\%$ และ $\rho_{Pm} = 0.78$

- (a) หา Jensen's alpha
- (b) หา Sharpe ของ P และตลาด
- (c) ตรวจสอบการ $S_P = \alpha_P / \sigma_P + \rho_{Pm} S_m$
- (d) อธิบายผลของความเสี่ยงเฉพาะตัวต่อความแตกต่างของ Sharpe กับ Treynor

21) **(ระดับ ปานกลาง)** กองทุนมีผลตอบแทนเฉลี่ย 12%, Benchmark 9%, Tracking Error 5%, Jensen's alpha 2% และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Residual 4% จงหา Information Ratio และ Appraisal Ratio พร้อมอธิบายว่าตัวหารต่างกันอย่างไร

22) **(ระดับ ปานกลาง)** กลยุทธ์ A และ B มีข้อมูลดังนี้

	CAGR	σ	Downside Dev.	MDD	Var _{0.99}
A	15%	19%	12%	25%	4.3%
B	11%	12%	7%	10%	2.6%

กำหนด $R_f = 3\%$ และผลตอบแทนเป้าหมาย 4% จงหา Sharpe, Sortino และ Calmar Ratio แล้วอธิบายว่าแต่ละมาตรวัดสนับสนุนกลยุทธ์ใด

23) **(ระดับ ยาก)** บริษัทลงทุนคำนวณรายได้ก่อนผลขาดทุนคาดหวัง 18 ล้านบาท ต้นทุนดำเนินงาน 4 ล้านบาท ผลขาดทุนคาดหวัง 5 ล้านบาท VaR ที่ระดับเป้าหมาย 40 ล้านบาท และค่าเฉลี่ยผลขาดทุน 12 ล้านบาท

- (a) หาเงินทุนทางเศรษฐกิจจาก Unexpected Loss
- (b) หา RAROC
- (c) ถ้าอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำต่อเงินทุนเท่ากับ 20% ควรยอมรับธุรกิจหรือไม่
- (d) วิเคราะห์ผลเมื่อเปลี่ยนเงินทุนเป็น ES ลบ Expected Loss เท่ากับ 36 ล้านบาท

24) **(ระดับ ยาก)** ออกแบบโครงงานวิจัยต่อยอดจากงาน Bollinger Bands ของผู้เขียน โดยเพิ่มต้นทุนธุรกรรม สภาพคล่อง และการปรับ Multiple Testing ระบุคำถามวิจัย สมมติฐาน ข้อมูล วิธีแบ่ง In-Sample/Out-of-Sample Benchmark มาตรวัดผล และเกณฑ์สรุปว่าผลมีนัยสำคัญเชิงเศรษฐศาสตร์

25) **(ระดับ ยาก)** ออกแบบการศึกษาต่อยอดจากงานพอร์ต Cashless Long-Short โดยไม่ใช่ฟิชซี ให้เลือกคู่หลักทรัพย์ด้วย Rolling Correlation และ Beta กำหนดข้อจำกัด Gross Exposure, Stop-

Loss, Borrowing Fee และ Margin Call พร้อมเขียนสมการผลตอบแทนสุทธิและแผน Walk-Forward Validation

- 26) **(ระดับ ยาก)** ใช้กรณีศึกษาหุ่นธนาคารของผู้เขียนเป็นต้นแบบ ออกแบบระบบรายงานความเสี่ยงที่รวม Historical VaR, Normal-EWMA VaR, Historical ES, Kupiec Test, Christoffersen Test, Stress Loss, Sharpe Ratio และ Maximum Drawdown อธิบายว่าเหตุใดการจัดอันดับ “ความเสี่ยงต่ำ” ไม่ควรถูกใช้แทนการจัดอันดับ “ความน่าลงทุน” โดยตรง

บทที่ 8 คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต

เนื้อหาประกอบด้วย

1. พื้นฐานความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่ม และมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง
2. ความน่าจะเป็นของชีพ ตารางชีพ และฟังก์ชันสืบเปลี่ยน
3. การประกันชีวิต ค่ารายงวดชีวิต เบี้ยประกันสุทธิ และการประยุกต์

ข้อตกลงและสัญลักษณ์หลักของบท

ตลอดบทนี้ หากไม่ได้ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ใช้ข้อตกลงดังต่อไปนี้

- x แทนอายุเต็มปีของบุคคล ณ เวลาเริ่มพิจารณา, $t \geq 0$ แทนเวลาต่อเนื่องในอนาคต และ n, k แทนจำนวนปีหรืองวดที่เป็นจำนวนเต็มไม่ลบตามบริบท
- i แทนอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี,

$$v = (1 + i)^{-1}$$

แทนตัวประกอบส่วนลดหนึ่งปี,

$$d = \frac{i}{1 + i} = 1 - v$$

แทนอัตราส่วนลดแท้จริงต่อปี และ δ แทนกำลังดอกเบี้ย (force of interest) โดยเมื่ออัตราดอกเบี้ยคงที่

$$\delta = \ln(1 + i) = -\ln v$$

- $P(A)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A , $E[X]$ แทนค่าคาดหวัง, $\text{Var}(X)$ แทนความแปรปรวน และ $\text{Cov}(X, Y)$ แทนความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม X และ Y
- 1_A แทนตัวแปรบ่งชี้ของเหตุการณ์ A กล่าวคือ

$$1_A = \begin{cases} 1, & A \text{ เกิดขึ้น,} \\ 0, & A \text{ ไม่เกิดขึ้น} \end{cases}$$

- T_x แทนอายุขัยในอนาคตแบบต่อเนื่องของบุคคลอายุ x และ $K_x = [T_x]$ แทนอายุขัยในอนาคตแบบจำนวนเต็ม

- ${}_t p_x$ แทนความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x อยู่รอดอย่างน้อยอีก t ปี, ${}_t q_x$ แทนความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิตภายใน t ปี และ ${}_k|q_x$ แทนความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอด k ปีแล้วเสียชีวิตในปีถัดไป
- l_x แทนจำนวนผู้มีชีวิตอยู่เมื่ออายุครบ x ปี, d_x แทนจำนวนผู้เสียชีวิตระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ ปี, p_x แทนความน่าจะเป็นอยู่รอดหนึ่งปี และ q_x แทนความน่าจะเป็นเสียชีวิตภายในหนึ่งปี
- D_x, N_x, C_x, M_x แทนฟังก์ชันสับเปลี่ยน (commutation functions) และ ω แทนอายุสิ้นสุดของตารางชีพฉบับสมบูรณ์
- Z แทนตัวแปรสุ่มมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดแบบมีเงื่อนไข, Z_B แทนมูลค่าปัจจุบันแบบสุ่มของผลประโยชน์ และ Z_P แทนมูลค่าปัจจุบันแบบสุ่มของเบี้ยประกัน โดย

$$EPV(Z) = E[Z]$$

- สัญลักษณ์มาตรฐานสำหรับมูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย ของผลประโยชน์หนึ่งหน่วย ได้แก่

$${}_n E_x \text{ (สะสมทรัพย์แท้จริง } n \text{ ปี), } A_{x:\overline{n}|}^1 \text{ (ประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลา } n \text{ ปี),}$$

$$A_x \text{ (ประกันชีวิตแบบตลอดชีพ), } A_{x:\overline{n}|} \text{ (ประกันสะสมทรัพย์ } n \text{ ปี)}$$

- สัญลักษณ์ค่ารายงวดชีวิตหนึ่งหน่วย ได้แก่

$$a_x, \ddot{a}_x$$

สำหรับค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพแบบปลายงวดและต้นงวดตามลำดับ,

$${}_n|a_x, {}_n|\ddot{a}_x$$

สำหรับค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย และ

$$a_{x:\overline{n}|}, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

สำหรับค่ารายงวดชีวิตชั่วคราว n ปี

- $\bar{a}_x$ แทนมูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย ของค่ารายงวดชีวิตแบบจ่ายต่อเนื่อง และ $\bar{A}_x$ แทนมูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยของประกันชีวิตที่จ่ายผลประโยชน์ทันทีเมื่อเสียชีวิต

รายละเอียดและสูตรคำนวณของแต่ละสัญลักษณ์จะกำหนดเพิ่มเติม เมื่อปรากฏครั้งแรกในเนื้อหาของบท

ข้อสังเกต

โปรดแยกความหมายระหว่าง d ซึ่งแทนอัตราส่วนลดแท้จริงต่อปี กับ d_x ซึ่งแทนจำนวนผู้เสียชีวิตระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ ในตารางชีพ ทั้งสองเป็นสัญลักษณ์มาตรฐานแต่มีความหมายต่างกัน

บทนำ

สัญญาทางการเงินทั่วไปมีกระแสเงินสดและวันจ่ายที่กำหนดแน่นอน แต่สัญญาประกันชีวิตและเงินบำนาญมีการจ่ายเงินที่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ไม่แน่นอน เช่น การมีชีวิตอยู่ถึงอายุหนึ่ง การเสียชีวิตภายในระยะเวลาที่กำหนด หรือ การเสียชีวิตในปีใดปีหนึ่ง การประเมินมูลค่าของสัญญาเหล่านี้จึงต้องผสม **มูลค่าของเงินตามเวลา** เข้ากับ **ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดและการเสียชีวิต**

แนวคิดแกนกลางของบทนี้คือ **มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง** (Expected Present Value: EPV) ซึ่งคำนวณโดยนำมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด ในแต่ละสถานการณ์คูณด้วยความน่าจะเป็นของสถานการณ์นั้นแล้วรวมกัน หลักการนี้เป็นพื้นฐานของการคำนวณเบี้ยประกันสุทธิ การประเมินผลประโยชน์ การตั้งสำรอง และการวิเคราะห์ความเสี่ยงอายุยืน

บทนี้เริ่มจากการทบทวนความน่าจะเป็นและตัวแปรสุ่ม จากนั้นพัฒนาแบบจำลองอายุชีพ ตารางชีพ และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ประกันภัย ก่อนประยุกต์สู่การประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลา แบบตลอดชีพ แบบสะสมทรัพย์ ค่ารายงวดชีวิตแบบต่าง ๆ ตลอดจนการชำระเบี้ยหลายงวด

ข้อสังเกต

ตารางชีพและตัวอย่างในบทนี้จัดทำเพื่อการศึกษาเท่านั้น การกำหนดราคาและเงินสำรองจริงต้องใช้ตารางมรณะและสมมติฐานที่ได้รับการรับรอง พร้อมพิจารณาค่าใช้จ่าย การคัดเลือกความเสี่ยง การเลิกกรมธรรม์ กำไร ภาษี เงินกองทุน และความเสี่ยงแบบจำลองเพิ่มเติม

8.1 พื้นฐานความน่าจะเป็นและมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง

8.1.1 ปริภูมิความน่าจะเป็นและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ให้ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น โดย Ω เป็นเซตของผลลัพธ์ทั้งหมด $\mathcal{F}$ เป็นกลุ่มเหตุการณ์ และ $\mathbb{P}$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นซึ่งมีสมบัติ

$$\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

และถ้า $A_1, A_2, \dots$ ไม่ทับซ้อนกันเป็นคู่ จะได้

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

บทนิยาม 8.1

ให้ $A, B \in \mathcal{F}$ และ $\mathbb{P}(B) > 0$ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อทราบว่า B เกิดขึ้น นิยามโดย

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (8.1)$$

จากสมการ (8.1) ได้กฎการคูณ

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A), \quad (8.2)$$

เมื่อความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องนิยามได้

บทนิยาม 8.2

เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน เมื่อ

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad (8.3)$$

ถ้า $\mathbb{P}(A) > 0$ และ $\mathbb{P}(B) > 0$ เงื่อนไขนี้สมมูลกับ

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{และ} \quad \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$$

ถ้า $A_1, \dots, A_m$ เป็นการแบ่ง Ω กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ และ $\bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega$ จะได้กฎความน่าจะเป็นรวม

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) \quad (8.4)$$

8.1.2 ตัวแปรสุ่มและการแจกแจง

ตัวแปรสุ่ม X เป็นฟังก์ชันที่วัดได้จาก Ω ไปยังจำนวนจริง สำหรับตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง กำหนดฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ ส่วนตัวแปรสุ่มต่อเนื่องมีฟังก์ชันความหนาแน่น $f_X(x)$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad (8.5)$$

ถ้า X ต่อเนื่อง จะได้

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \, dt, \quad f_X(x) = F'_X(x)$$

ณ จุดที่หาอนุพันธ์ได้

ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน เมื่อสำหรับทุกเซตโบเรล A และ B

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) \quad (8.6)$$

ในกรณีไม่ต่อเนื่อง เงื่อนไขนี้เท่ากับ

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$

สำหรับทุกค่าที่เป็นไปได้ของ x และ y

8.1.3 ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และตัวแปรบ่งชี้

บทนิยาม 8.3

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ค่าคาดหวังของ X คือ

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \mathbb{P}(X = x), \quad (8.7)$$

เมื่อนุกรมลู่อเข้าแบบสัมบูรณ์

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีความหนาแน่น f_X ค่าคาดหวังคือ

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad (8.8)$$

เมื่ออินทิกรัลมีอยู่

สำหรับฟังก์ชัน g ที่เหมาะสม

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x) \quad \text{หรือ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (8.9)$$

สมบัติเชิงเส้นของค่าคาดหวังให้ว่า

$$\mathbb{E}[aX + bY + c] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c, \quad (8.10)$$

โดยไม่จำเป็นต้องสมมติว่า X และ Y เป็นอิสระกัน ถ้า X และ Y เป็นอิสระและค่าคาดหวังมีอยู่ จะได้

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (8.11)$$

บทนิยาม 8.4

ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X นิยามโดย

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2], \quad (8.12)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (8.13)$$

สำหรับตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่มีโมเมนต์อันดับสองจำกัด ความแปรปรวนร่วม (covariance) นิยามโดย

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \quad (8.14)$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ แต่บทกลับไม่จำเป็นต้องเป็นจริงเสมอไป

สูตรคำนวณที่ใช้บ่อยคือ

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2, \quad (8.15)$$

และ

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad (8.16)$$

สำหรับตัวแปรสุ่มใด ๆ ที่มีความแปรปรวนจำกัด

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (8.17)$$

ดังนั้น ถ้า $X_1, \dots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) \quad (8.18)$$

ให้ 1_A เป็นตัวแปรบ่งชี้ของเหตุการณ์ A โดย $1_A = 1$ เมื่อ A เกิดขึ้น และ $1_A = 0$ เมื่อ A ไม่เกิดขึ้น จะได้

$$\mathbb{E}[1_A] = \mathbb{P}(A), \quad \text{Var}(1_A) = \mathbb{P}(A)\{1 - \mathbb{P}(A)\} \quad (8.19)$$

ตัวแปรบ่งชี้มีประโยชน์มากในการเขียนผลประโยชน์ประกันชีวิต เพราะใช้เปิดหรือปิดกระแสเงินสดตามเหตุการณ์การอยู่รอดหรือเสียชีวิตได้โดยตรง

8.1.4 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ $P(A) > 0$ ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อทราบว่า A เกิดขึ้นคือ

$$\mathbb{E}[X | A] = \sum_x x P(X = x | A) \quad (8.20)$$

สำหรับกรณีต่อเนื่อง และนิยามด้วยความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไขในกรณีต่อเนื่อง ถ้า $A_1, \dots, A_m$ เป็นการแบ่ง Ω จะได้กฎค่าคาดหวังรวม

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X | A_i] P(A_i) \quad (8.21)$$

8.1.5 มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง

ให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มแทนมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ตามสัญญา มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$\text{EPV}(Z) = \mathbb{E}[Z] \quad (8.22)$$

ถ้าผลประโยชน์จำนวน B_j จ่าย ณ เวลา t_j เมื่อเหตุการณ์ A_j เกิดขึ้น และอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีเท่ากับ i จะเขียนตัวแปรมูลค่าปัจจุบันได้เป็น

$$Z = \sum_{j=1}^m B_j v^{t_j} \mathbf{1}_{A_j}, \quad v = (1 + i)^{-1} \quad (8.23)$$

ดังนั้น ด้วยสมบัติเชิงเส้นของค่าคาดหวัง

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{j=1}^m B_j v^{t_j} P(A_j) \quad (8.24)$$

ตัวอย่าง 8.1. สัญญาหนึ่งจ่ายเงิน 100,000 บาท ณ ปลายปีที่ 5 เฉพาะเมื่อผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ถึงเวลานั้น ถ้าความน่าจะเป็นของการอยู่รอด 5 ปีเท่ากับ 0.92 และอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี จงหามูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผู้เอาประกันอยู่รอดถึงปลายปีที่ 5 ตัวแปรมูลค่าปัจจุบันคือ

$$Z = 100,000(1.03)^{-5}1_A$$

ดังนั้น

$$\mathbb{E}[Z] = 100,000(1.03)^{-5}(0.92) = 79,350.17 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.2. สัญญาหนึ่งจ่าย 200,000 บาท ณ ปลายปีที่ 10 ถ้าผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ และจ่าย 80,000 บาท ณ ปลายปีที่เสียชีวิต ถ้าเสียชีวิตในช่วง 10 ปีแรก ให้ A_k เป็นเหตุการณ์ที่เสียชีวิตในปีที่ k และ S เป็นเหตุการณ์ที่อยู่รอดครบ 10 ปี จงเขียนตัวแปรมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์

วิธีทำ เหตุการณ์ $A_1, \dots, A_{10}, S$ ไม่ทับซ้อนกันและครอบคลุมทุกกรณีที่เกี่ยวข้อง จึงเขียนได้ว่า

$$Z = 80,000 \sum_{k=1}^{10} v^k 1_{A_k} + 200,000 v^{10} 1_S$$

ดังนั้น

$$\mathbb{E}[Z] = 80,000 \sum_{k=1}^{10} v^k \mathbb{P}(A_k) + 200,000 v^{10} \mathbb{P}(S)$$

□

หลักคิดสำคัญของคณิตศาสตร์ประกันชีวิต

$$\text{มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง} = \sum (\text{จำนวนเงิน}) (\text{ตัวประกอบส่วนลด}) (\text{ความน่าจะเป็นที่จ่าย})$$

สูตรประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิตทั้งหมดในบทนี้ เป็นกรณีเฉพาะของหลักการดังกล่าว

8.2 ความน่าจะเป็นของชีพ ตารางชีพ และฟังก์ชันสลับเปลี่ยน

8.2.1 อายุขัยในอนาคตและฟังก์ชันการอยู่รอด

ให้ T_0 เป็นตัวแปรสุ่มแทนอายุขัยตั้งแต่เกิด และให้ $S_0(t)$ เป็นฟังก์ชันการอยู่รอดของเด็กแรกเกิด

$$S_0(t) = \mathbb{P}(T_0 > t), \quad t \geq 0 \quad (8.25)$$

ฟังก์ชันการแจกแจงของ T_0 คือ

$$F_0(t) = \mathbb{P}(T_0 \leq t) = 1 - S_0(t) \quad (8.26)$$

ถ้า T_0 มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f_0(t)$ จะได้

$$f_0(t) = F'_0(t) = -S'_0(t) \quad (8.27)$$

สำหรับบุคคลที่มีอายุครบ x ปี ให้ T_x เป็นอายุขัยในอนาคตแบบต่อเนื่อง (Future Lifetime) กล่าวคือ T_x เป็นจำนวนปีนับจากอายุ x จนถึงเวลาที่เสียชีวิต ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x อยู่รอดต่อไปอย่างน้อย t ปี คือ

$${}_t p_x = \mathbb{P}(T_x > t) = \mathbb{P}(T_0 > x + t \mid T_0 > x) = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)} \quad (8.28)$$

ความน่าจะเป็นที่เสียชีวิตภายใน t ปี คือ

$${}_t q_x = \mathbb{P}(T_x \leq t) = 1 - {}_t p_x \quad (8.29)$$

กำหนด $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ เป็นอายุขัยในอนาคตแบบจำนวนเต็ม (Curtate Future Lifetime) ดังนั้น $K_x = k$ หมายถึงบุคคลอายุ x มีชีวิตครบอีก k ปี แต่เสียชีวิตก่อนครบ $k + 1$ ปี และ

$$\mathbb{P}(K_x = k) = {}_k|q_x = {}_k p_x \times q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.30)$$

โดยสัญลักษณ์ ${}_k|q_x$ อ่านว่า ความน่าจะเป็นที่เลื่อนการเสียชีวิตไป k ปีแล้วเสียชีวิตในปีถัดไป

ถ้า S_0 หาอนุพันธ์ได้ กำลังมรณะหรืออัตรามรณะทันที (Force of Mortality) ณ อายุ y นิยามโดย

$$\mu_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(y < T_0 \leq y + h \mid T_0 > y) = -\frac{d}{dy} \ln S_0(y) = \frac{f_0(y)}{S_0(y)} \quad (8.31)$$

จึงได้ความสัมพันธ์

$${}_t p_x = \exp \left(- \int_x^{x+t} \mu_y \, dy \right) \quad (8.32)$$

8.2.2 ตารางชีพและสัญลักษณ์พื้นฐาน

ตารางชีพ (Life Table) เริ่มจากกลุ่มสมมติจำนวน l_0 คน เรียกว่า **radix** แล้วติดตามจำนวนผู้มีชีวิตอยู่ ณ อายุเต็มปีต่าง ๆ สัญลักษณ์สำคัญมีดังนี้

สัญลักษณ์	ความหมาย
l_x	จำนวนคนจากกลุ่มเริ่มต้นที่ยังมีชีวิตอยู่เมื่ออายุครบ x ปี
d_x	จำนวนคนที่เสียชีวิตระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ ปี
p_x	ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x อยู่รอดอีก 1 ปี
q_x	ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x เสียชีวิตภายใน 1 ปี
${}_n p_x$	ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x อยู่รอดอย่างน้อยอีก n ปี
${}_n q_x$	ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x เสียชีวิตภายใน n ปี
${}_n q_x$	ความน่าจะเป็นที่อยู่รอด n ปีแล้วเสียชีวิตในปีถัดไป

จากนิยามของตารางชีพ

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (8.33)$$

ดังนั้น

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad (8.34)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - p_x \quad (8.35)$$

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = p_x \times p_{x+1} \times \cdots \times p_{x+n-1}, \quad (8.36)$$

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}, \quad (8.37)$$

$${}_n|q_x = {}_np_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_np_x - {}_{n+1}p_x \quad (8.38)$$

ความสัมพันธ์แบบลูกโซ่ที่สำคัญคือ

$${}_{m+n}p_x = {}_mp_x \times {}_np_{x+m} \quad (8.39)$$

ตัวอย่าง 8.3. จากตารางที่ 8.1 จงหา

- 1) p_{20} และ q_{20}
- 2) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 28 อยู่รอดถึงอายุ 65
- 3) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 28 เสียชีวิตก่อนอายุ 65
- 4) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 28 เสียชีวิตภายใน 1 ปี
- 5) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 อยู่รอดถึงอายุ 35 แล้วเสียชีวิตก่อนอายุ 36

วิธีทำ

- 1) $p_{20} = \frac{l_{21}}{l_{20}} = \frac{95,342}{95,491} = 0.998440$,
 $q_{20} = 1 - p_{20} = 0.001560$
- 2) ${}_{37}p_{28} = \frac{l_{65}}{l_{28}} = \frac{64,065}{94,375} = 0.678834$
- 3) ${}_{37}q_{28} = 1 - {}_{37}p_{28} = 0.321166$
- 4) $q_{28} = \frac{d_{28}}{l_{28}} = \frac{255}{94,375} = 0.002702$
- 5) ${}_{10}|q_{25} = \frac{d_{35}}{l_{25}} = \frac{187}{94,823} = 0.001972$

□

ตารางที่ 8.1 ตัวอย่างตารางชีพที่ใช้ในบทนี้

อายุ x	l_x	d_x	อายุ x	l_x	d_x	อายุ x	l_x	d_x	อายุ x	l_x	d_x
0	100,000	2,756	20	95,491	149	40	91,681	294	60	75,276	1,895
1	97,244	152	21	95,342	131	41	91,387	335	61	73,381	2,011
2	97,092	109	22	95,211	143	42	91,052	401	62	71,370	2,104
3	96,983	56	23	95,068	112	43	90,651	445	63	69,266	2,589
4	96,927	64	24	94,956	133	44	90,206	523	64	66,677	2,612
5	96,863	52	25	94,823	142	45	89,683	517	65	64,065	2,577
6	96,811	54	26	94,681	113	46	89,166	524	66	61,488	2,745
7	96,757	59	27	94,568	193	47	88,642	659	67	58,743	2,781
8	96,698	43	28	94,375	255	48	87,983	709	68	55,962	2,813
9	96,655	47	29	94,120	297	49	87,274	785	69	53,149	2,835
10	96,608	86	30	93,823	228	50	86,489	832	70	50,314	2,781
11	96,522	106	31	93,595	217	51	85,657	881	71	47,533	2,745
12	96,416	98	32	93,378	159	52	84,776	983	72	44,788	2,786
13	96,318	125	33	93,219	175	53	83,793	974	73	42,002	2,801
14	96,193	134	34	93,044	249	54	82,819	1,023	74	39,201	2,897
15	96,059	146	35	92,795	187	55	81,796	1,098	75	36,304	2,887
16	95,913	101	36	92,608	183	56	80,698	1,101	76	33,417	2,798
17	95,812	110	37	92,425	178	57	79,597	1,213	77	30,619	2,981
18	95,702	109	38	92,247	272	58	78,384	1,652	78	27,638	2,884
19	95,593	102	39	91,975	294	59	76,732	1,456	79	24,754	2,812

ข้อสังเกต

ตารางที่ 8.1 เป็นตารางตัวอย่างที่ตัดข้อมูลไว้ถึงอายุ 79 ปี จึงเหมาะสำหรับฝึกคำนวณเฉพาะช่วงอายุที่ปรากฏ ไม่ควรตีความว่าอายุ 79 เป็นอายุสิ้นสุดของมนุษย์ และไม่ควรรู้กำหนดราคา เงินสำรอง หรือเงินกองทุนของผลิตภัณฑ์จริง

8.2.3 การอยู่รอดของบุคคลสองคน

ให้บุคคลสองคนมีอายุ x และ y ถ้าอายุขัยของทั้งสองคนเป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$P(\text{ทั้งสองอยู่รอด } n \text{ ปี}) = {}_n p_x \times {}_n p_y, \quad (8.40)$$

$$P(\text{อย่างน้อยหนึ่งคนอยู่รอด } n \text{ ปี}) = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x \times {}_n p_y, \quad (8.41)$$

$$P(\text{คนอายุ } x \text{ อยู่รอด แต่คนอายุ } y \text{ เสียชีวิต}) = {}_n p_x \times {}_n q_y \quad (8.42)$$

นอกจากนี้

$$P(\text{ทั้งสองเสียชีวิตภายใน } n \text{ ปี}) = {}_n q_x \times {}_n q_y \quad (8.43)$$

ข้อสังเกต

สมมติฐานความเป็นอิสระเป็นแบบจำลองเบื้องต้น สำหรับคู่สมรสหรือบุคคลในครัวเรือนเดียวกัน การเสียชีวิตอาจสัมพันธ์กัน จากอุบัติเหตุร่วม โรคติดต่อ พฤติกรรมสุขภาพ หรือสภาพแวดล้อมเดียวกัน การประเมินผลิตภัณฑ์ร่วมชีวิตจริงจึงอาจต้องใช้แบบจำลองการพึ่งพาเพิ่มเติม

ตัวอย่าง 8.4. นายเอและนายบีมีอายุ 42 และ 45 ปีตามลำดับ สมมติว่าอายุขัยเป็นอิสระต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นในช่วง 10 ปีข้างหน้า

วิธีทำ

$${}_{10}p_{42} = \frac{l_{52}}{l_{42}} = \frac{84,776}{91,052}, \quad {}_{10}p_{45} = \frac{l_{55}}{l_{45}} = \frac{81,796}{89,683}$$

ดังนั้น

$$P(\text{เออยู่รอด ปีเสียชีวิต}) = {}_{10}p_{42} \times {}_{10}q_{45} = 0.081881,$$

$$P(\text{บีอยู่รอด เอเสียชีวิต}) = {}_{10}p_{45} \times {}_{10}q_{42} = 0.062866,$$

$$P(\text{ทั้งสองอยู่รอด}) = {}_{10}p_{42} \times {}_{10}p_{45} = 0.849191,$$

$$P(\text{อย่างน้อยหนึ่งคนอยู่รอด}) = 0.993938$$

□

8.2.4 ตัวแบบการอยู่รอดแบบต่อเนื่อง

ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของอายุขัยตั้งแต่เกิดคือ $f_0(t)$ ฟังก์ชันการอยู่รอดคำนวณได้จาก

$$S_0(t) = \int_t^\infty f_0(s) \, ds = 1 - \int_0^t f_0(s) \, ds \quad (8.44)$$

ความน่าจะเป็นที่เสียชีวิตระหว่างอายุ a และ b คือ

$$\mathbb{P}(a < T_0 \leq b) = S_0(a) - S_0(b) = \int_a^b f_0(t) \, dt \quad (8.45)$$

ตัวอย่าง 8.5. กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของอายุขัย

$$f_0(t) = 0.5e^{-0.5t}, \quad t \geq 0$$

จงหา $S_0(t)$ และความน่าจะเป็นที่เสียชีวิตระหว่างอายุ 15 กับ 20 ปี

วิธีทำ ฟังก์ชันที่กำหนดเป็นความหนาแน่นที่ถูกต้องเพราะ $\int_0^\infty 0.5e^{-0.5t} \, dt = 1$ และ

$$S_0(t) = \int_t^\infty 0.5e^{-0.5s} \, ds = e^{-0.5t}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{P}(15 < T_0 \leq 20) = e^{-7.5} - e^{-10} = 0.000508$$

□

8.2.5 อายุคาดหมาย

อายุขัยในอนาคตคาดหมายแบบต่อเนื่องของบุคคลอายุ x คือ

$$\dot{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^\infty t p_x \, dt, \quad (8.46)$$

ส่วนอายุขัยในอนาคตกาดหมายแบบจำนวนเต็มคือ

$$e_x = \mathbb{E}[K_x] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_x \quad (8.47)$$

ค่าอายุคาดหมายเป็นค่าเฉลี่ยของการแจกแจง มิใช่อายุที่ทุกคนจะเสียชีวิต จึงไม่เพียงพอสำหรับประเมินค่ารายงวดชีวิตซึ่งขึ้นกับความน่าจะเป็นการอยู่รอดทุกช่วงเวลา

8.2.6 ฟังก์ชันสลับเปลี่ยน

เมื่ออัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีเท่ากับ i และ $v = (1 + i)^{-1}$ กำหนดฟังก์ชันสลับเปลี่ยนพื้นฐาน

$$D_x = v^x l_x, \quad (8.48)$$

$$N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k, \quad (8.49)$$

$$C_x = v^{x+1} d_x, \quad (8.50)$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{\omega-1} C_k, \quad (8.51)$$

เมื่อ ω เป็นอายุสิ้นสุดของตารางชีพฉบับสมบูรณ์ ฟังก์ชัน D_x และ N_x ใช้สะดวกกับผลประโยชน์ที่จ่ายเมื่อยังมีชีวิต ส่วน C_x และ M_x ใช้กับผลประโยชน์ที่จ่ายปลายปีที่เสียชีวิต

สำหรับตารางตัวอย่างซึ่งมีข้อมูลถึงอายุ 79 ปีเท่านั้น จะใช้ผลรวมแบบตัดช่วง

$$N_x^{[79]} = \sum_{k=x}^{79} D_k, \quad N_{80}^{[79]} = 0$$

เพื่อให้สัญลักษณ์ไม่ซับซ้อน ตารางต่อไปยังเขียน N_x แทน $N_x^{[79]}$ การกำหนด $N_{80}^{[79]} = 0$ หมายถึงสิ้นสุดขอบเขตการคำนวณที่อายุ 79 มิได้หมายความว่าไม่มีผู้มีชีวิตถึงอายุ 80

ตารางที่ 8.2 ฟังก์ชันสลับเปลี่ยน D_x และ N_x จากตารางตัวอย่าง เมื่อ $i = 0.03$

x	l_x	D_x	N_x	x	l_x	D_x	N_x
0	100,000	100,000.00	2,828,621.60	40	91,681	28,105.44	547,417.90
1	97,244	94,411.65	2,728,621.60	41	91,387	27,199.33	519,312.46
2	97,092	91,518.52	2,634,209.95	42	91,052	26,310.32	492,113.13
3	96,983	88,753.18	2,542,691.43	43	90,651	25,431.50	465,802.82
4	96,927	86,118.38	2,453,938.24	44	90,206	24,569.57	440,371.32
5	96,863	83,554.87	2,367,819.86	45	89,683	23,715.65	415,801.75
6	96,811	81,077.69	2,284,264.98	46	89,166	22,892.17	392,086.10
7	96,757	78,672.30	2,203,187.30	47	88,642	22,094.80	369,193.93
8	96,698	76,334.29	2,124,515.00	48	87,983	21,291.78	347,099.14
9	96,655	74,078.01	2,048,180.71	49	87,274	20,505.05	325,807.36
10	96,608	71,885.42	1,974,102.70	50	86,489	19,728.75	305,302.31
11	96,522	69,729.55	1,902,217.27	51	85,657	18,969.87	285,573.55
12	96,416	67,624.24	1,832,487.73	52	84,776	18,227.93	266,603.68
13	96,318	65,587.87	1,764,863.48	53	83,793	17,491.81	248,375.75
14	96,193	63,594.91	1,699,275.61	54	82,819	16,784.94	230,883.94
15	96,059	61,656.62	1,635,680.71	55	81,796	16,094.77	214,099.00
16	95,913	59,769.81	1,574,024.09	56	80,698	15,416.23	198,004.23
17	95,812	57,967.84	1,514,254.28	57	79,597	14,763.01	182,588.00
18	95,702	56,214.84	1,456,286.44	58	78,384	14,114.59	167,824.99
19	95,593	54,515.35	1,400,071.61	59	76,732	13,414.68	153,710.40
20	95,491	52,871.05	1,345,556.25	60	75,276	12,776.83	140,295.72
21	95,342	51,251.02	1,292,685.20	61	73,381	12,092.41	127,518.89
22	95,211	49,689.91	1,241,434.18	62	71,370	11,418.47	115,426.48
23	95,068	48,170.17	1,191,744.27	63	69,266	10,759.08	104,008.01
24	94,956	46,712.06	1,143,574.10	64	66,677	10,055.27	93,248.94
25	94,823	45,287.99	1,096,862.04	65	64,065	9,379.97	83,193.67
26	94,681	43,903.08	1,051,574.05	66	61,488	8,740.44	73,813.71
27	94,568	42,573.48	1,007,670.97	67	58,743	8,107.04	65,073.26
28	94,375	41,249.12	965,097.49	68	55,962	7,498.29	56,966.23
29	94,120	39,939.48	923,848.37	69	53,149	6,913.96	49,467.94
30	93,823	38,653.83	883,908.89	70	50,314	6,354.53	42,553.98
31	93,595	37,436.80	845,255.06	71	47,533	5,828.44	36,199.46
32	93,378	36,262.14	807,818.26	72	44,788	5,331.89	30,371.02
33	93,219	35,146.01	771,556.12	73	42,002	4,854.59	25,039.13
34	93,044	34,058.28	736,410.12	74	39,201	4,398.88	20,184.54
35	92,795	32,977.80	702,351.83	75	36,304	3,955.15	15,785.65
36	92,608	31,952.76	669,374.03	76	33,417	3,534.58	11,830.51
37	92,425	30,960.80	637,421.27	77	30,619	3,144.31	8,295.92
38	92,247	30,001.14	606,460.47	78	27,638	2,755.52	5,151.62
39	91,975	29,041.43	576,459.33	79	24,754	2,396.10	2,396.10

ข้อสังเกต

ค่า N_x ในตารางที่ 8.2 คำนวณจากข้อมูลที่มีถึงอายุ 79 เท่านั้น ดังนั้นค่ารายงวด “ตลอดชีพ” ที่คำนวณจากตารางนี้ เป็นมูลค่าของกระแสเงินสดที่ถูกตัด ณ อายุ 79 ไม่ใช่มูลค่าตลอดชีพจากตารางมรณะฉบับสมบูรณ์

สรุปความน่าจะเป็นของชีพ

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x,$$

$${}_n | q_x = {}_n p_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x - {}_{n+1} p_x,$$

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k, \quad C_x = v^{x+1} d_x, \quad M_x = \sum_{k=x}^{\omega-1} C_k$$

8.3 การประกันชีวิต ค่ารายงวดชีวิต และเบี้ยประกัน

การประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิตเป็นสัญญาทางการเงิน ที่กระแสเงินสดขึ้นอยู่กับสถานะการมีชีวิตหรือการเสียชีวิตของผู้เอาประกัน ดังนั้นการประเมินมูลค่าของสัญญาจึงต้องพิจารณาทั้ง *มูลค่าเงินตามเวลา* และ *ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทางชีพ* ร่วมกัน

ในมุมมองทางคณิตศาสตร์ ผลประโยชน์ตามกรมธรรม์สามารถมองเป็นกระแสเงินสดแบบมีเงื่อนไข (contingent cash flow) กล่าวคือ จำนวนเงินและเวลาที่มีการจ่ายขึ้นอยู่กับว่า ผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ เสียชีวิต หรืออยู่รอดถึงเวลาที่กำหนดหรือไม่ แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของการหามูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย (actuarial present value) ค่ารายงวดชีวิต และเบี้ยประกันภัย

หัวข้อนี้เริ่มจากการจำแนกผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตตามโครงสร้างผลประโยชน์ จากนั้นจึงพัฒนาไปสู่การคำนวณมูลค่าผลประโยชน์ ค่ารายงวดชีวิต และหลักสมมูลที่ใช้กำหนดเบี้ยประกันภัย

8.3.1 ประเภทของผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตและโครงสร้างผลประโยชน์

ผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตสามารถจำแนกได้จาก เหตุการณ์ที่ทำให้เกิดการจ่ายผลประโยชน์ และ เวลาที่มีการจ่าย โดย โครงสร้างพื้นฐานส่วนใหญ่สามารถอธิบายได้จาก ผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต (death benefit) ผลประโยชน์กรณีอยู่รอด (survival benefit) หรือการจ่ายเป็นงวดตราบเท่าที่ยังมีชีวิตอยู่

ตารางที่ 8.3 การจำแนกผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตพื้นฐาน

ประเภท	เหตุการณ์ที่ก่อให้เกิดการจ่าย	วัตถุประสงค์หลัก
ประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลา (Term Insurance)	เสียชีวิตภายในระยะเวลาคุ้มครอง	คุ้มครองความเสี่ยงจากการเสียชีวิตในช่วงที่มีภาระทางการเงิน
ประกันชีวิตแบบตลอดชีพ (Whole Life Insurance)	เสียชีวิตเมื่อใดก็ตามภายในช่วงอายุที่แบบจำลองกำหนด	ให้ความคุ้มครองระยะยาว เช่น เงินมรดกหรือค่าใช้จ่ายเมื่อเสียชีวิต
สะสมทรัพย์แท้จริง (Pure Endowment)	มีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด	สร้างเงินก้อนในอนาคตภายใต้เงื่อนไขการอยู่รอด
ประกันสะสมทรัพย์ (Endowment Insurance)	เสียชีวิตภายในระยะเวลาสัญญา หรือมีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด	ผสมการคุ้มครองชีวิตกับการสะสมเงิน
ค่ารายงวดชีวิตหรือประกันบำนาญ (Life Annuity)	มีชีวิตอยู่ ณ เวลาที่กำหนดจ่ายในแต่ละงวด	สร้างรายได้ต่อเนื่องและลดความเสี่ยงจากการมีชีวิตยืนยาว
แบบเชื่อมโยงการลงทุน หรือแบบยืดหยุ่น	ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขความคุ้มครองมูลค่าบัญชี และโครงสร้างของสัญญา	ผสมความคุ้มครองกับการลงทุน หรือเพิ่มความยืดหยุ่นด้านเบี้ยและผลประโยชน์

จากตาราง 8.3 จะเห็นว่าผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดแตกต่างกันที่ เงื่อนไขการจ่ายผลประโยชน์ มากกว่าที่จำนวนเงินจ่ายเพียงอย่างเดียว ตัวอย่างเช่น ประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลากำหนดจ่ายผลประโยชน์ เมื่อเกิดการเสียชีวิตภายในช่วงที่กำหนด ขณะที่สะสมทรัพย์แท้จริงจ่ายเมื่อผู้เอาประกัน มีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด ส่วนค่ารายงวดชีวิตมีการจ่ายต่อเนื่องเฉพาะงวดที่ผู้รับผลประโยชน์ยังมีชีวิตอยู่

ข้อสังเกต

สะสมทรัพย์แท้จริง (Pure Endowment) จ่ายผลประโยชน์เฉพาะกรณีที่ผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด และตามนิยามพื้นฐานจะไม่จ่ายผลประโยชน์หากเสียชีวิตก่อนกำหนด

ส่วน **ประกันสะสมทรัพย์ (Endowment Insurance)** สามารถมองเป็นการรวมกันของ ประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลาและสะสมทรัพย์แท้จริง จึงมีผลประโยชน์ทั้งกรณีเสียชีวิตระหว่างระยะเวลาสัญญา และกรณีมีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด

อีกมิติหนึ่งของการออกแบบกรมธรรม์คือ **รูปแบบการชำระเบี้ยประกัน** ซึ่งอาจเป็นการชำระครั้งเดียว (single premium) ชำระต่อเนื่องตลอดระยะเวลาที่กำหนด หรือชำระแบบจำกัดจำนวนปี (limited-payment premium)

รูปแบบการชำระเบี้ยไม่ได้เปลี่ยนเหตุการณ์ที่ก่อให้เกิดผลประโยชน์โดยตรง แต่มีผลต่อมูลค่าปัจจุบันของกระแสเบี้ย การชำระของผู้เอาประกัน และความเสี่ยงที่กรมธรรม์จะสิ้นผลบังคับก่อนครบสัญญา

ดังนั้น ในการวิเคราะห์ผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตทางคณิตศาสตร์ ควรแยกพิจารณาอย่างน้อยสามองค์ประกอบ ได้แก่

$$\text{เหตุการณ์จ่าย} + \text{เวลาที่จ่าย} + \text{จำนวนเงินที่จ่าย}$$

ก่อนนำ ความน่าจะเป็นการอยู่รอดหรือเสียชีวิต และ อัตราดอกเบี้ย มารวมกัน เพื่อคำนวณมูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย ในหัวข้อถัดไป

8.3.2 ตัวแปรมูลค่าปัจจุบันและหลักสมมูล

ในการประเมินสัญญาประกันชีวิต จำนวนเงินและเวลาที่เกิดกระแสเงินสดขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ทางชีพ เช่น การเสียชีวิตหรือการอยู่รอด ดังนั้นมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์และเบี้ยประกัน จึงเป็นตัวแปรสุ่ม

ให้ Z_B แทนมูลค่าปัจจุบันแบบสุ่มของผลประโยชน์ (random present value of benefits) และให้ Z_P แทนมูลค่าปัจจุบันแบบสุ่มของเบี้ยประกัน (random present value of premiums)

ค่าคาดหวังของตัวแปรเหล่านี้เรียกว่า **มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย** (actuarial present value: APV หรือ expected present value: EPV)

หลักสมมูลสำหรับเบี้ยประกันสุทธิ (Equivalence Principle) กำหนดให้ มูลค่าปัจจุบันคาดหวังของเบี้ยประกัน เท่ากับมูลค่าปัจจุบันคาดหวังของผลประโยชน์ กล่าวคือ

$$\mathbb{E}[Z_P] = \mathbb{E}[Z_B] \quad (8.52)$$

แนวคิดนี้หมายความว่า ณ วันเริ่มสัญญา กระแสเบี้ยสุทธิตี่คาดว่าจะได้รับ มีมูลค่าเท่ากับกระแสผลประโยชน์ที่คาดว่าจะจ่าย ภายใต้สมมติฐานอัตราดอกเบี้ยและการตายที่กำหนด

เบี้ยที่ได้จากหลักสมมูลเรียกว่า **เบี้ยประกันสุทธิ** (Net Premium) เนื่องจากยังไม่รวมค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน ค่าคอมมิชชัน กำไร ภาษี เงินกองทุน ความเสี่ยงของแบบจำลอง และส่วนเผื่อสำหรับความผันผวน

ถ้าเบี้ยสุทธิชำระครั้งเดียว ณ เวลา 0 จำนวน P บาท จะมี

$$Z_P = P$$

จึงได้จากหลักสมมูลว่า

$$P = \mathbb{E}[Z_B] = \text{EPV}(\text{ผลประโยชน์}) \quad (8.53)$$

ตัวอย่าง 8.6. เบี้ยประกันสุทธิชำระครั้งเดียวของประกันชีวิต 1 ปี

ชายอายุ x ปีซื้อประกันชีวิตแบบชั่วระยะเวลา 1 ปี ให้ผลประโยชน์ 1,000,000 บาท โดยจ่าย ณ สิ้นปีหากเสียชีวิตภายในปีนั้น

สมมติว่า $q_x = 0.005$, $i = 0.03$, $v = \frac{1}{1.03}$ ตัวแปรมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์คือ

$$Z_B = \begin{cases} 1,000,000 v, & \text{ถ้าเสียชีวิตภายใน 1 ปี,} \\ 0, & \text{ถ้ามีชีวิตอยู่ครบ 1 ปี} \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{E}[Z_B] = 1,000,000 v q_x = 1,000,000 \left(\frac{1}{1.03} \right) (0.005) \approx 4,854.37$$

จากหลักสมมูล เบี้ยประกันสุทธิชำระครั้งเดียวจึงเท่ากับ $P \approx 4,854.37$ บาท

กล่าวคือ ภายใต้สมมติฐานการตายและอัตราดอกเบี้ยที่กำหนด บริษัทต้องเก็บเบี้ยสุทธิประมาณ 4,854 บาท เพื่อให้มูลค่าปัจจุบันคาดหมายของเบี้ย เท่ากับมูลค่าปัจจุบันคาดหมายของผลประโยชน์

ในทางปฏิบัติ เบี้ยที่เรียกเก็บจริงมักสูงกว่านี้ เพราะต้องรวมค่าใช้จ่าย กำไร และส่วนเผื่อความเสี่ยงอื่นเพิ่มเติม

□

8.3.3 ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง

ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง (pure endowment) เป็นสัญญาประกันชีวิตที่จ่ายผลประโยชน์ เฉพาะเมื่อผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่จนถึงเวลาที่กำหนด หากผู้เอาประกันเสียชีวิตก่อนครบกำหนดสัญญา จะไม่มีการจ่ายผลประโยชน์ตามสัญญานี้ ดังนั้น สัญญาประเภทนี้จึงสะท้อนทั้งมิติของการออมและความไม่แน่นอนเกี่ยวกับการอยู่รอดของผู้เอาประกัน

พิจารณามูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาท ณ ปลายปีที่ n เฉพาะเมื่อยังมีชีวิตอยู่ถึงอายุ $x + n$ ถ้าให้ T_x แทนอายุขัยในอนาคต (future lifetime) ของบุคคลอายุ x เหตุการณ์ที่บุคคลดังกล่าวมีชีวิตอยู่ครบอีก n ปี คือ

$$T_x > n$$

ดังนั้น ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สามารถเขียนได้เป็น

$$Z = v^n 1_{\{T_x > n\}},$$

โดยที่ $1_{\{T_x > n\}}$ เป็นฟังก์ชันบ่งชี้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่ถึงเวลา n และมีค่าเท่ากับ 0 หากเสียชีวิตก่อนเวลานั้น

กล่าวอีกนัยหนึ่ง

$$Z = \begin{cases} v^n, & T_x > n, \\ 0, & T_x \leq n \end{cases}$$

ดังนั้น หากผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่ครบ n ปี บริษัทประกันจะจ่ายเงิน 1 บาท ณ เวลา n ซึ่งมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ v^n แต่หากเสียชีวิตก่อนครบกำหนด จะไม่มีการจ่ายผลประโยชน์

มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์หนึ่งหน่วย เขียนแทนด้วย ${}_nE_x$ และมีค่า

$${}_nE_x = v^n {}_np_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad (8.54)$$

สูตรข้างต้นแสดงให้เห็นว่า มูลค่าของประกันสะสมทรัพย์แท้จริงประกอบด้วย สองส่วนสำคัญ คือ

$$\underbrace{v^n}_{\text{ตัวประกอบคิดลด}} \quad \text{และ} \quad \underbrace{{}_np_x}_{\text{ความน่าจะเป็นที่จะมีชีวิตอยู่ครบ } n \text{ ปี}}$$

ดังนั้น สามารถตีความได้ว่า

มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย = มูลค่าปัจจุบันทางการเงิน $\times$ ความน่าจะเป็นของการอยู่รอด

ตัวอย่างเช่น หากบุคคลอายุ 40 ปีมีความน่าจะเป็นที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปอีก 10 ปีเท่ากับ

$${}_{10}p_{40} = 0.95$$

และสมมติว่าตัวประกอบการคิดลดสำหรับเวลา 10 ปีมีค่า

$$v^{10} = 0.75,$$

จะได้ว่า

$${}_{10}E_{40} = v^{10} {}_{10}p_{40} = (0.75)(0.95) = 0.7125$$

จึงตีความได้ว่า เงิน 1 บาทที่จะจ่ายในอีก 10 ปี เฉพาะเมื่อบุคคลอายุ 40 ปียังมีชีวิตอยู่ มีมูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยเท่ากับประมาณ 0.7125 บาท

ถ้าผลประโยชน์ที่กำหนดไว้เท่ากับ R บาท เบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียวคือ

$$P = R \times {}_nE_x \quad (8.55)$$

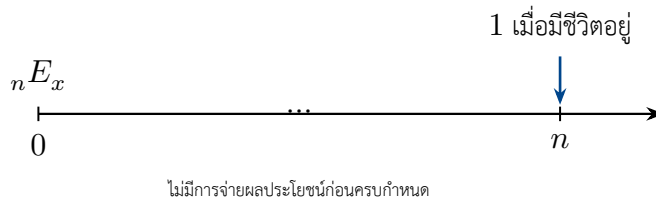
ซึ่งเป็นไปตามหลักสมมูล โดยให้มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของเบี้ยประกัน เท่ากับมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์

นอกจากนี้ ประกันสะสมทรัพย์แท้จริงยังมีสมบัติการแยกช่วงเวลา

$${}_{m+n}E_x = {}_mE_x \times {}_nE_{x+m} \quad (8.56)$$

เนื่องจากการมีชีวิตอยู่จากอายุ x ถึงอายุ $x + m + n$ สามารถแยกออกเป็นสองช่วงต่อเนื่องกัน คือ การมีชีวิตอยู่จากอายุ x ถึงอายุ $x + m$ และการมีชีวิตอยู่ต่อจากอายุ $x + m$ ถึงอายุ $x + m + n$ พร้อมกับสมบัติของตัวประกอบการคิดลด

$$v^{m+n} = v^m v^n$$



รูปที่ 8.1 กระแสเงินสดของประกันสะสมทรัพย์แท้จริงหนึ่งหน่วย โดยจะจ่ายเงิน 1 บาท ณ เวลา n เฉพาะเมื่อผู้เอาประกันอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ถึงเวลานั้น

จากรูป จะเห็นว่าสัญญานี้ไม่มีการจ่ายผลประโยชน์ระหว่างทาง และมีการจ่ายเงินเพียงครั้งเดียว ณ เวลา n ภายใต้เงื่อนไขว่าผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ ดังนั้น มูลค่าของสัญญาจึงขึ้นอยู่กับว่าทั้ง ระยะเวลาจนถึงวันครบกำหนด อัตราดอกเบี้ย และความน่าจะเป็นของการอยู่รอด ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานสำคัญสำหรับการประเมินมูลค่าผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตประเภทอื่นต่อไป

ตัวอย่าง 8.7. ชายอายุ 25 ปีต้องการรับเงิน 100,000 บาทเมื่อครบ 20 ปี เฉพาะเมื่อยังมีชีวิตอยู่ กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

วิธีทำ

$$P = 100,000 \times {}_{20}E_{25} = 100,000 \times \frac{D_{45}}{D_{25}} = 100,000 \times \frac{23,715.65}{45,287.99}$$

ดังนั้น

$$P = 52,366.31 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.8. ชายอายุ 45 ปีจ่ายเบี้ยสุทธิครั้งเดียว 10,000 บาท เพื่อรับเงินสะสมทรัพย์แท้จริงเมื่อครบ 15 ปี กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2.5 ต่อปี จงหาผลประโยชน์

วิธีทำ

$$10,000 = R(1.025)^{-15} \frac{l_{60}}{l_{45}}$$

จึงได้

$$R = 10,000(1.025)^{15} \frac{l_{45}}{l_{60}} = 17,254.87 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.9. ชายอายุ 45 ปีจ่ายเบี้ยสุทธิ 10,000 บาท และจะได้รับ 20,000 บาทเมื่อครบ 15 ปีหากยังมีชีวิตอยู่ จงหาอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปีที่ทำให้สัญญาสมดุล

วิธีทำ

$$10,000 = 20,000(1 + i)^{-15} \frac{l_{60}}{l_{45}}$$

ดังนั้น

$$i = \left(2 \frac{l_{60}}{l_{45}} \right)^{1/15} - 1 = 0.035138$$

อัตราดอกเบี้ยเท่ากับร้อยละ 3.5138 ต่อปี

□

8.3.4 ประกันชั่วระยะเวลา ตลอดชีพ และสะสมทรัพย์

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาประกันชีวิตที่จ่ายผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต ณ **ปลายปีที่ผู้เอาประกันเสียชีวิต** และใช้ตัวแปรสุ่ม K_x แทนอายุขัยในอนาคตแบบจำนวนเต็ม (curtate future lifetime) ของบุคคลอายุ x

ถ้า

$$K_x = k$$

หมายความว่าบุคคลอายุ x มีชีวิตอยู่ครบ k ปี และเสียชีวิตภายในปีถัดไป กล่าวคือ เสียชีวิตในช่วงอายุ $x + k$ ถึง $x + k + 1$ ดังนั้น หากผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตเท่ากับ 1 บาท เงินดังกล่าวจะจ่าย ณ เวลา $k + 1$ และมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ

$$v^{k+1}$$

ความแตกต่างของประกันชีวิตแต่ละประเภทจึงอยู่ที่ **ช่วงเวลาที่ให้ความคุ้มครองและเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการจ่ายผลประโยชน์** ขณะที่หลักการประเมินมูลค่ายังคงอาศัยแนวคิดเดียวกัน คือ นำผลประโยชน์ในอนาคตมาคิดลดและถ่วงน้ำหนักด้วยความน่าจะเป็น ของเหตุการณ์ที่ทำให้เกิดการจ่ายเงิน

8.3.4.1 ประกันชั่วระยะเวลา n ปี

ประกันชั่วระยะเวลา n ปี (n -year term insurance) ให้ความคุ้มครองกรณีเสียชีวิตเฉพาะในช่วง n ปีแรก นับจากวันที่เริ่มสัญญา

สำหรับบุคคลอายุ x หากเสียชีวิตภายในระยะเวลา n ปี จะได้รับผลประโยชน์ 1 บาท ณ ปลายปีที่เสียชีวิต แต่หากยังมีชีวิตอยู่เมื่อครบ n ปี สัญญาจะสิ้นสุดลงโดยไม่มีการจ่ายผลประโยชน์

ดังนั้น ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันคือ

$$Z = v^{K_x+1} 1_{\{K_x < n\}}$$

เงื่อนไข $K_x < n$ ครอบคลุมกรณีเสียชีวิตในปีที่ $1, 2, \dots, n$ จึงได้มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์หนึ่งหน่วยเป็น

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k|q_x \quad (8.57)$$

โดยที่

$${}_k|q_x = {}_k p_x q_{x+k}$$

คือความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x มีชีวิตอยู่ต่ออีก k ปี และเสียชีวิตภายในหนึ่งปีถัดไป

เมื่อใช้ข้อมูลจากตารางชีพ

$${}_k|q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}$$

จึงสามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งว่า

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} d_{x+k}$$

หากใช้ฟังก์ชันสลับเปลี่ยน จะได้

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad (8.58)$$

กล่าวโดยสรุป ประกันชั่วระยะเวลาให้ความคุ้มครอง เฉพาะความเสี่ยงจากการเสียชีวิตภายในช่วงเวลาที่กำหนด โดยไม่มีผลประโยชน์กรณีผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่จนถึงวันครบกำหนด

8.3.4.2 ประกันตลอดชีพ

ประกันตลอดชีพ (whole life insurance) ให้ความคุ้มครองกรณีเสียชีวิตตลอดช่วงชีวิตที่เหลือของผู้เอาประกัน โดยไม่มีการกำหนดวันสิ้นสุดความคุ้มครอง

ดังนั้น ไม่ว่าผู้เอาประกันจะเสียชีวิตในปีใด บริษัทประกันจะจ่ายผลประโยชน์ 1 บาท ณ ปลายปีที่เสียชีวิต

ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันจึงเป็น

$$Z = v^{K_x+1},$$

และมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x = \frac{M_x}{D_x} \quad (8.59)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับประกันชั่วระยะเวลา จะเห็นว่าประกันตลอดชีพมีโครงสร้างคล้ายกัน แต่ผลรวมครอบคลุมทุกช่วงเวลาให้ผู้เอาประกันอาจเสียชีวิตในอนาคต

อีกวิธีหนึ่งในการทำความเข้าใจประกันตลอดชีพ คือแบ่งช่วงความคุ้มครองออกเป็นสองส่วน ได้แก่

1. ความคุ้มครองกรณีเสียชีวิตภายใน n ปีแรก และ
2. หากมีชีวิตอยู่ถึงเวลา n ให้เริ่มพิจารณาประกันตลอดชีพสำหรับบุคคลอายุ $x + n$

จึงได้ความสัมพันธ์

$$A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x A_{x+n} \quad (8.60)$$

พจน์

$$A_{x:\overline{n}|}^1$$

แทนมูลค่าความคุ้มครองกรณีเสียชีวิตใน n ปีแรก

ส่วนพจน์

$${}_nE_x A_{x+n}$$

แทนมูลค่าปัจจุบันของความคุ้มครองตลอดชีพ ที่เริ่มเมื่อผู้เอาประกันมีอายุ $x + n$ โดยต้องคำนึงถึงเงื่อนไขว่าบุคคลนั้นต้องมีชีวิตอยู่ถึงเวลา n ก่อน

ความสัมพันธ์นี้แสดงให้เห็นแนวคิดสำคัญว่า ผลลัพธ์ประกันชีวิตที่ซับซ้อนสามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบย่อย แล้วประเมินมูลค่าของแต่ละส่วนแยกกันได้

8.3.4.3 ประกันสะสมทรัพย์ n ปี

ประกันสะสมทรัพย์ n ปี (n -year endowment insurance) เป็นผลิตภัณฑ์ที่รวม ความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต และ ผลประโยชน์กรณีอยู่รอดถึงวันครบกำหนด ไว้ในสัญญาเดียวกัน

สำหรับผลประโยชน์หนึ่งหน่วย เงื่อนไขการจ่ายคือ

1. หากผู้เอาประกันเสียชีวิตภายใน n ปี จะจ่าย 1 บาท ณ ปลายปีที่เสียชีวิต
2. หากผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่เมื่อครบ n ปี จะจ่าย 1 บาท ณ เวลา n

ดังนั้น ไม่ว่าจะเสียชีวิตก่อนวันครบกำหนด หรือมีชีวิตอยู่จนถึงวันครบกำหนด สัญญาจะมีการจ่ายผลประโยชน์จำนวน 1 บาทหนึ่งครั้ง

ในเชิงโครงสร้าง ประกันสะสมทรัพย์จึงเท่ากับ ผลรวมของ **ประกันชั่วระยะเวลา n ปี** และ **ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง n ปี**

จึงได้

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \quad (8.61)$$

โดยที่

$$A_{x:\overline{n}|}^1$$

เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต และ

$${}_nE_x$$

เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์กรณีอยู่รอด ถึงวันครบกำหนด

เมื่อใช้ฟังก์ชันสับเปลี่ยน จะได้

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \quad (8.62)$$

โครงสร้างผลประโยชน์ประกันชีวิต

ประกันสะสมทรัพย์ = ประกันชั่วระยะเวลา + สะสมทรัพย์แท้จริง

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x$$

เพื่อให้เห็นความแตกต่างของผลิตภัณฑ์ทั้งสามประเภท สามารถสรุปได้ดังนี้

- ประกันชั่วระยะเวลา : จ่ายเมื่อเสียชีวิตภายในระยะเวลาที่กำหนด,
 ประกันตลอดชีพ : จ่ายเมื่อเสียชีวิต ไม่ว่าเกิดขึ้นเมื่อใด,
 ประกันสะสมทรัพย์ : จ่ายเมื่อเสียชีวิตภายในระยะเวลาที่กำหนด
 หรือจ่ายเมื่ออยู่รอดถึงวันครบกำหนด

ตัวอย่าง 8.10. การคำนวณประกันชั่วระยะเวลาและประกันสะสมทรัพย์

พิจารณาบุคคลอายุ 40 ปี ซื้อประกันที่มีระยะเวลาค้นครอง 3 ปี สมมติอัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปีเท่ากับ

$$i = 0.03, \quad v = \frac{1}{1.03}$$

จากตารางชีพในบทนี้ มีข้อมูล

$$l_{40} = 91,681, \quad d_{40} = 294, \quad d_{41} = 335, \quad d_{42} = 401,$$

และ

$$l_{43} = 90,651$$

1) ประกันชั่วระยะเวลา 3 ปี

ผลประโยชน์จะจ่ายหากผู้เอาประกันเสียชีวิต ในปีที่ 1, 2 หรือ 3

ความน่าจะเป็นของการเสียชีวิตในแต่ละปีคือ

$$q_{40} = \frac{d_{40}}{l_{40}} = \frac{294}{91,681},$$

$${}_1|q_{40} = \frac{d_{41}}{l_{40}} = \frac{335}{91,681},$$

และ

$${}_2|q_{40} = \frac{d_{42}}{l_{40}} = \frac{401}{91,681}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์หนึ่งหน่วยคือ

$$A_{40:\overline{3}|}^1 = v \frac{294}{91,681} + v^2 \frac{335}{91,681} + v^3 \frac{401}{91,681} \approx 0.010560$$

ถ้าจำนวนเงินเอาประกันเท่ากับ 100,000 บาท เบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียวสำหรับความคุ้มครองส่วนนี้คือ

$$P_{\text{term}} = 100,000(0.010560) \approx 1,056.03 \text{ บาท}$$

ค่าที่ค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับจำนวนเงินเอาประกัน เกิดจากสัญญาที่จ่ายเงินเฉพาะกรณีที่ผู้เอาประกันเสียชีวิตภายในช่วงเวลาเพียง 3 ปีเท่านั้น

2) ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง 3 ปี

หากผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่ครบ 3 ปี จะได้รับผลประโยชน์ ณ เวลา 3

ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดจากอายุ 40 ถึงอายุ 43 คือ

$${}_3p_{40} = \frac{l_{43}}{l_{40}} = \frac{90,651}{91,681}$$

ดังนั้น

$${}_3E_{40} = v^3 {}_3p_{40} = v^3 \frac{90,651}{91,681} \approx 0.904860$$

หากผลประโยชน์กรณีอยู่รอดเท่ากับ 100,000 บาท มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ส่วนนี้คือ

$$P_{\text{pure}} = 100,000(0.904860) \approx 90,486.04 \text{ บาท}$$

3) ประกันสะสมทรัพย์ 3 ปี

ประกันสะสมทรัพย์ประกอบด้วย ประกันชั่วระยะเวลา 3 ปี และประกันสะสมทรัพย์แท้จริง 3 ปี ดังนั้น

$$A_{40:\overline{3}|} = A_{40:\overline{3}|}^1 + {}_3E_{40} = 0.010560 + 0.904860 \approx 0.915421$$

หากจำนวนเงินเอาประกันเท่ากับ 100,000 บาท เบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียวจึงเป็น

$$P_{\text{endowment}} = 100,000(0.915421) \approx 91,542.07 \text{ บาท}$$

สามารถตรวจสอบโครงสร้างของผลประโยชน์ได้จาก

$$\underbrace{1,056.03}_{\text{กรณีเสียชีวิต}} + \underbrace{90,486.04}_{\text{กรณีอยู่รอด}} = \underbrace{91,542.07}_{\text{ประกันสะสมทรัพย์}} \text{ บาท}$$

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่า

$$\text{มูลค่าประกันสะสมทรัพย์} = \text{มูลค่าความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต} + \text{มูลค่าผลประโยชน์กรณีอยู่รอด}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x$$

□

จากตัวอย่างจะเห็นว่า ประกันชั่วระยะเวลาและประกันสะสมทรัพย์แท้จริง ครอบคลุมเหตุการณ์ที่ไม่เกิดพร้อมกัน กล่าวคือ เหตุการณ์แรกเกี่ยวข้องกับการเสียชีวิตก่อนครบกำหนด ส่วนเหตุการณ์หลังเกี่ยวข้องกับการมีชีวิตอยู่ถึงวันครบกำหนด เมื่อนำผลประโยชน์ทั้งสองส่วนมารวมกัน จึงได้ประกันสะสมทรัพย์ซึ่งให้ผลประโยชน์หนึ่งหน่วยไม่ว่าผู้เอาประกันจะเสียชีวิตก่อนครบกำหนด หรือมีชีวิตอยู่จนถึงวันครบกำหนดก็ตาม

8.3.5 ค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ

ค่ารายงวดชีวิต (life annuity) เป็นสัญญาที่จ่ายเงินเป็นงวด **ตราบไต่ที่ผู้รับเงินยังมีชีวิตอยู่** ดังนั้น จำนวนงวดที่ได้รับจึงไม่ทราบล่วงหน้า และขึ้นอยู่กับอายุขัยในอนาคตของผู้รับเงิน

ในมุมมองของผู้รับเงิน ค่ารายงวดชีวิตช่วยสร้างกระแสรายได้ต่อเนื่อง แม้จะมีชีวิตยืนยาวกว่าที่คาดไว้ จึงเป็นกลไกสำคัญในการจัดการ **ความเสี่ยงจากการมีชีวิตยืนยาว (longevity risk)** โดยโอนความเสี่ยงดังกล่าวไปยังบริษัทประกันหรือกองทุนบำนาญ

ค่ารายงวดชีวิตมีบทบาทสำคัญในผลิตภัณฑ์เพื่อการเกษียณ เช่น เงินบำนาญตลอดชีพ การแปลงเงินก้อนหลังเกษียณเป็นรายได้ประจำ และการประเมินมูลค่าภาระผูกพันของกองทุนบำนาญ

ในหัวข้อนี้สมมติว่าจ่ายเงินงวดละ 1 บาทต่อปี และใช้อัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปี i โดย $v = (1 + i)^{-1}$

8.3.5.1 ค่ารายงวดชีวิตปลายงวด

ค่ารายงวดชีวิตปลายงวด (life annuity-immediate) จ่ายเงินงวดละ 1 บาท ณ ปลายปีที่ 1, 2, 3, ... เฉพาะเมื่อบุคคลอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ ณ เวลาที่ต้องจ่ายเงิน

ตัวอย่างเช่น เงินงวดที่เวลา 1 จะได้รับ เมื่อบุคคลนั้นมีชีวิตอยู่ครบหนึ่งปี เงินงวดที่เวลา 2 จะได้รับ เมื่อมีชีวิตรอยู่ครบสองปี และเป็นเช่นนั้นต่อไป

ดังนั้น ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันคือ

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} v^k 1_{\{T_x > k\}}$$

โดยที่

$$1_{\{T_x > k\}} = \begin{cases} 1, & \text{ถ้าบุคคลอายุ } x \text{ ยังมีชีวิตอยู่ ณ เวลา } k, \\ 0, & \text{มิฉะนั้น.} \end{cases}$$

เมื่อหาค่าคาดหวัง จะได้มูลค่าปัจจุบันเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย ของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดหนึ่งหน่วยเป็น

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x \quad (8.63)$$

โดย ${}_k p_x$ คือความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x จะมีชีวิตรอยู่ต่อไปอย่างน้อย k ปี

แต่ละพจน์ในสมการจึงมีความหมายว่า

$$\underbrace{v^k}_{\text{การคิดลด}} \times \underbrace{{}_k p_x}_{\text{ความน่าจะเป็นที่จะได้รับเงินงวดที่ } k}$$

เมื่อใช้ตารางชีพ

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x},$$

จึงได้

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

จากนิยามฟังก์ชันสลับเปลี่ยน

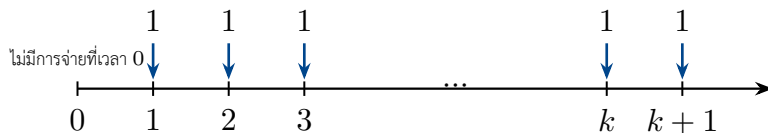
$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j,$$

โดย ω แทนอายุสูงสุดในตารางชีพ จะได้

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad (8.64)$$

ถ้าจ่ายเงินงวดละ R บาท มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของกระแสเงินทั้งหมดคือ

$$PV_{\text{immediate}} = Ra_x \quad (8.65)$$



รูปที่ 8.2 กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดหนึ่งหน่วย โดยแต่ละงวดจะจ่ายเมื่อผู้รับยังมีชีวิตอยู่ ณ เวลาที่กำหนด

8.3.5.2 ค่ารายงวดชีวิตต้นงวด

ค่ารายงวดชีวิตต้นงวด (life annuity-due) แตกต่างจากค่ารายงวดชีวิตปลายงวดตรงที่ **งวดแรกจ่ายทันที ณ เวลา 0** จากนั้นจ่ายอีก ณ เวลา 1, 2, 3, ... ตราบใดที่ผู้รับยังมีชีวิตอยู่

เนื่องจากบุคคลอายุ x มีชีวิตอยู่ ณ วันที่เริ่มสัญญา เงินงวดแรกที่เวลา 0 จึงเป็นเงินที่ได้รับแน่นอน และมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ 1

ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันสามารถเขียนได้เป็น

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbf{1}_{\{T_x > k\}}$$

ดังนั้น

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \quad (8.66)$$

โดยเมื่อ $k = 0$ จะมี

$${}_0p_x = 1$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันสับเปลี่ยน จะได้

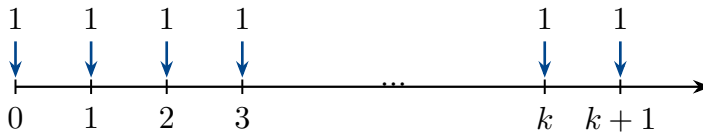
$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (8.67)$$

เนื่องจากค่ารายงวดชีวิตต้นงวดมีเงินงวดแรก 1 บาท เพิ่มขึ้นมาจากค่ารายงวดชีวิตปลายงวด จึงได้ความสัมพันธ์พื้นฐาน

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \quad (8.68)$$

ถ้าจ่ายเงินงวดละ R บาท มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$PV_{\text{due}} = R\ddot{a}_x \quad (8.69)$$



รูปที่ 8.3 กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดหนึ่งหน่วย โดยงวดแรกจ่ายทันที ณ เวลา 0 และงวดถัดไปจ่ายเมื่อผู้รับยังมีชีวิตอยู่

8.3.5.3 ความสัมพันธ์ระหว่างประกันชีวิตกับค่ารายงวดชีวิต

ให้

$$d = \frac{i}{1+i} = 1 - v$$

เป็นอัตราส่วนลดมีผลต่อปี (effective annual rate of discount)

ประกันชีวิตตลอดชีพที่จ่ายผลประโยชน์หนึ่งหน่วย ณ ปลายปีที่เสียชีวิต และค่ารายงวดชีวิตต้นงวดมีความสัมพันธ์พื้นฐานว่า

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1 \quad (8.70)$$

ความสัมพันธ์นี้สามารถเห็นได้โดยพิจารณาเส้นทางชีวิตหนึ่งเส้นทาง สมมติว่า

$$K_x = k$$

ผู้เอาประกันจะได้รับค่ายางวดชีวิตต้นงวด ณ เวลา $0, 1, \dots, k$, ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของค่ายางวดบนเส้นทางนี้คือ

$$1 + v + v^2 + \dots + v^k$$

เนื่องจาก $d = 1 - v$ จึงมี $d(1 + v + \dots + v^k) = 1 - v^{k+1}$ ในขณะเดียวกัน ผลประโยชน์ประกันชีวิตหนึ่งหน่วย ที่จ่าย ณ ปลายปีที่เสียชีวิต มีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ v^{k+1} ดังนั้น สำหรับทุกเส้นทางชีวิต

$$v^{k+1} + d(1 + v + \dots + v^k) = 1$$

เมื่อหาค่าคาดหวังทั้งสองข้าง จึงได้

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

ความสัมพันธ์นี้มีประโยชน์อย่างมากในทางปฏิบัติ เพราะหากทราบค่าใดค่าหนึ่งระหว่าง A_x และ $\ddot{a}_x$ ก็สามารถหาค่าอีกค่าหนึ่งได้ทันที เช่น

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x \quad (8.71)$$

และ

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} \quad (8.72)$$

ความสัมพันธ์สำคัญของค่ายางวดชีวิตตลอดชีพ

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

ตัวอย่าง 8.11. การประเมินมูลค่าเงินบำนาญตลอดชีพ

สมมติว่าบุคคลอายุ 60 ปีต้องการรับเงินบำนาญ ปีละ 120,000 บาทตลอดชีพ และใช้อัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปี $i = 0.03$ สมมติว่าจากตารางฟังก์ชันสืบเปลี่ยนที่คำนวณด้วยอัตราดอกเบี้ยดังกล่าวได้

$$D_{60} = 12,500, \quad N_{60} = 190,000, \quad N_{61} = 177,500$$

สังเกตว่า

$$N_{60} = D_{60} + N_{61} = 12,500 + 177,500 = 190,000$$

ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของฟังก์ชัน N_x

1) กรณีจ่ายปลายปี

ถ้าเงินบำนาญงวดแรกจ่ายเมื่อครบหนึ่งปี ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดคือ

$$a_{60} = \frac{N_{61}}{D_{60}} = \frac{177,500}{12,500} = 14.2$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของเงินบำนาญปีละ 120,000 บาทคือ

$$PV = 120,000(14.2) = 1,704,000 \text{ บาท}$$

กล่าวคือ ภายใต้สมมติฐานอัตราดอกเบี้ยและการรอดชีวิตที่กำหนด เงินก้อนประมาณ 1.704 ล้านบาท มีมูลค่าเทียบเท่ากับการจ่ายเงินบำนาญ ปีละ 120,000 บาท ณ ปลายปี ตราบใดที่บุคคลอายุ 60 ปียังมีชีวิตอยู่

2) กรณีจ่ายต้นปี

หากเงินบำนาญงวดแรกจ่ายทันที ณ อายุ 60 ปี ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดคือ

$$\ddot{a}_{60} = \frac{N_{60}}{D_{60}} = \frac{190,000}{12,500} = 15.2$$

จึงได้

$$PV = 120,000(15.2) = 1,824,000 \text{ บาท}$$

หรือใช้ความสัมพันธ์

$$\ddot{a}_{60} = 1 + a_{60}$$

จะได้

$$\ddot{a}_{60} = 1 + 14.2 = 15.2$$

เช่นเดียวกัน

ความแตกต่างของมูลค่าระหว่างสองรูปแบบคือ

$$1,824,000 - 1,704,000 = 120,000 \text{ บาท}$$

ซึ่งเท่ากับเงินงวดแรกที่จ่ายทันที ณ เวลา 0 พอดี

3) เชื่อมโยงกับประกันชีวิตตลอดชีพ

เมื่อ

$$d = \frac{0.03}{1.03} \approx 0.029126$$

จากความสัมพันธ์

$$A_{60} + d\ddot{a}_{60} = 1$$

จะได้

$$A_{60} = 1 - (0.029126)(15.2) \approx 0.5573$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์ประกันชีวิตตลอดชีพ จำนวน 1 บาท สำหรับบุคคลอายุ 60 ปี ภายใต้สมมติฐานเดียวกันมีค่าประมาณ 0.5573 บาท

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ค่ารายงวดชีวิตและประกันชีวิตตลอดชีพไม่ได้เป็นแนวคิดที่แยกจากกัน แต่เชื่อมโยงกันผ่านแบบจำลองการรอดชีวิตและการคิดลดเดียวกัน $\square$

ในทางปฏิบัติ ค่ารายงวดชีวิตสามารถใช้ในการวิเคราะห์ได้หลายลักษณะ ได้แก่ การหาจำนวนเงินก้อนที่ต้องมี ณ วันเกษียณ เพื่อสร้างรายได้ตลอดชีพ การกำหนดจำนวนเงินบำนาญที่สามารถจ่ายได้จากเงินก้อนที่มีอยู่ การประเมินภาระผูกพันของกองทุนบำนาญ และการกำหนดราคาผลิตภัณฑ์ประกันบำนาญ

ตัวอย่างเช่น หากมีเงินก้อน ณ วันเกษียณเท่ากับ W และต้องการรับเงินบำนาญต้นปีจำนวนเท่ากันทุกปีตลอดชีพ จำนวนเงินบำนาญต่อปีที่รองรับได้ในเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยคือ

$$R = \frac{W}{\ddot{a}_x} \quad (8.73)$$

ในทางกลับกัน หากต้องการเงินบำนาญปีละ R บาท เงินก้อนที่ต้องเตรียมไว้ ณ วันเริ่มรับบำนาญคือ

$$W = R\ddot{a}_x$$

จึงเห็นได้ว่า $\ddot{a}_x$ หรือ a_x ทำหน้าที่เสมือน ตัวคูณสำหรับแปลงระหว่างเงินก้อนกับกระแสรายได้ตลอดชีพ โดยรวมทั้งผลของอัตราดอกเบี้ยและความน่าจะเป็นของการอยู่รอด ไว้ในปริมาณเดียว

ตัวอย่าง 8.12. ชายอายุ 25 ปีจะได้รับเงินทุกสิ้นปีปีละ 10,000 บาท ตราบใดที่ยังมีชีวิตอยู่ภายในช่วงตารางตัวอย่าง กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

วิธีทำ

$$P = 10,000a_{25} = 10,000 \times \frac{N_{26}}{D_{25}} = 10,000 \times \frac{1,051,574.05}{45,287.99}$$

ดังนั้น

$$P = 232,197.10 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.13. ชายอายุ 45 ปีมีเงิน 100,000 บาท เพื่อซื้อค่ารายงวดชีวิตปลายงวดตลอดช่วงตารางตัวอย่าง กำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี จงหาเงินรายปี

วิธีทำ

$$100,000 = Ra_{45} = R \frac{N_{46}}{D_{45}}$$

ดังนั้น

$$R = 100,000 \times \frac{D_{45}}{N_{46}} = 100,000 \times \frac{23,715.65}{392,086.10} = 6,048.58 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.14. ชายอายุ 45 ปีมีเงิน 100,000 บาท เพื่อซื้อค่ารายงวดชีวิตต้นงวดตลอดช่วงตารางตัวอย่าง จงหาเงินรายปีเมื่อ $i = 0.03$

วิธีทำ

$$100,000 = R\ddot{a}_{45} = R \frac{N_{45}}{D_{45}}$$

ดังนั้น

$$R = 100,000 \times \frac{23,715.65}{415,801.75} = 5,703.60 \text{ บาท}$$

เงินรายปีต่ำกว่ากรณีปลายงวด เพราะมีการจ่ายงวดแรกทันที

□

8.3.6 ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย

ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย (deferred life annuity) เป็นค่ารายงวดชีวิตที่ไม่ได้เริ่มจ่ายทันที แต่กำหนดให้มีช่วงเลื่อนการจ่าย (deferment period) เป็นเวลา n ปีก่อนเริ่มจ่ายเงินรายงวด

สัญญาประเภทนี้พบได้บ่อยในการวางแผนเกษียณ ตัวอย่างเช่น บุคคลอายุ 40 ปีอาจซื้อสัญญาในวันนี้ แต่กำหนดให้เริ่มรับเงินบำนาญเมื่ออายุ 60 ปี ในกรณีดังกล่าวมีช่วงเลื่อนการจ่าย 20 ปี

ประเด็นสำคัญคือ ผู้รับเงินต้อง มีชีวิตอยู่จนถึงเวลาที่กำหนดให้เริ่มจ่าย จึงจะเข้าสู่ช่วงการรับเงินรายงวด ดังนั้น มูลค่าของสัญญาจึงขึ้นอยู่กับ

1. การคิดลดตามระยะเวลาที่เลื่อนการจ่าย และ
2. ความน่าจะเป็นที่ผู้รับเงินจะมีชีวิตอยู่ถึงวันเริ่มรับเงิน

8.3.6.1 ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อนจ่าย

พิจารณามูลค่าอายุ x และค่ารายงวดชีวิตปลายงวดที่เลื่อนการจ่ายออกไป n ปี

สัญญาจะยังไม่จ่ายเงินในช่วงเวลา $0, 1, \dots, n$ และงวดแรกจำนวน 1 บาทจะจ่าย ณ ปลายปีที่ $n + 1$ หากบุคคลนั้นยังมีชีวิตอยู่

จากนั้นจะจ่าย 1 บาท ณ ปลายปีทุกปีต่อไป ตราบใดที่ผู้รับเงินยังมีชีวิตอยู่

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$${}_n|a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = {}_n E_x a_{x+n} \quad (8.74)$$

ความสัมพันธ์

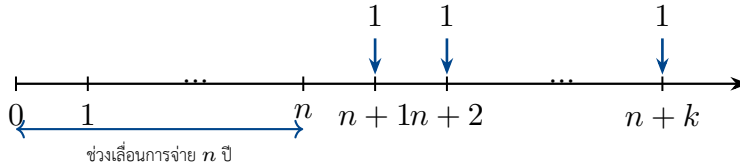
$${}_n|a_x = {}_n E_x a_{x+n}$$

มีความหมายที่สำคัญในเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย กล่าวคือ สามารถแบ่งการประเมินมูลค่าออกเป็นสองขั้นตอน

$$\underbrace{{}_n E_x}_{\substack{\text{อยู่รอดถึงเวลา } n \\ \text{พร้อมคิดลดกลับมาปัจจุบัน}}} \times \underbrace{a_{x+n}}_{\substack{\text{มูลค่ารายงวดชีวิต} \\ \text{เมื่อมีอายุ } x+n}}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง บริษัทประกันจะเริ่มมีภาระในการจ่ายเงินรายงวด ก็ต่อเมื่อบุคคลอายุ x มีชีวิตอยู่ถึงอายุ $x + n$

แล้วจึงมองบุคคลนั้นเสมือนเป็นผู้รับค่ารายงวดชีวิตปลายงวด ที่มีอายุ $x + n$ ในขณะนั้น



รูปที่ 8.4 กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อน n ปี โดยงวดแรกจ่าย ณ เวลา $n + 1$ หากผู้รับยังมีชีวิตอยู่

8.3.6.2 ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อนจ่าย

ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดที่เลื่อนการจ่าย n ปี มีงวดแรกจ่าย ณ เวลา n หากผู้รับยังมีชีวิตอยู่ถึงเวลานั้น และจ่ายต่อไป ณ เวลา $n + 1, n + 2, \dots$ ตราบใดที่ยังมีชีวิตอยู่

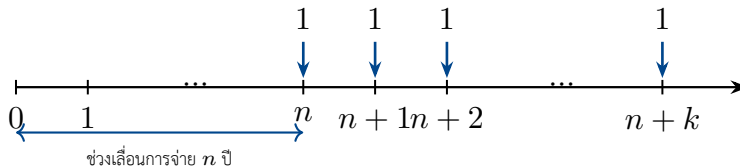
มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$${}_n|\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} \quad (8.75)$$

สูตร

$${}_n|\ddot{a}_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n}$$

มีความหมายว่า ต้องมีชีวิตอยู่ถึงเวลา n ก่อน จากนั้นจึงได้รับค่ารายงวดชีวิตต้นงวด สำหรับบุคคลอายุ $x + n$



รูปที่ 8.5 กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อน n ปี โดยงวดแรกจ่าย ณ เวลา n หากผู้รับยังมีชีวิตอยู่

เนื่องจากค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อนจ่าย มีเงินงวดหนึ่งหน่วย ณ เวลา n เพิ่มขึ้นมา เมื่อเทียบกับค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อนจ่าย จึงได้

$${}_n|\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x + {}_n|a_x = {}_n E_x + {}_n|a_x \quad (8.76)$$

ความสัมพันธ์นี้คล้ายกับ

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x,$$

แต่เงินงวดที่เพิ่มขึ้นไม่ได้จ่ายทันทีที่เวลา 0 หากจ่ายที่เวลา n และต้องมีชีวิตอยู่ถึงเวลานั้นก่อน มูลค่าของเงินงวดดังกล่าวจึงเท่ากับ

$${}_nE_x = v^n {}_np_x$$

ค่ายางงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย

$${}_n|a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = {}_nE_x a_{x+n}$$

$${}_n|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}$$

$${}_n|\ddot{a}_x = {}_nE_x + {}_n|a_x$$

ตัวอย่าง 8.15. การหาเบี้ยประกันของค่ายางงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย

ชายอายุ 25 ปีต้องการได้รับเงินปีละ 10,000 บาทตลอดชีพ โดยเลื่อนการจ่ายออกไป 10 ปี และเริ่มรับเงินงวดแรก ณ ปลายปีที่ 11 กำหนดอัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปีเท่ากับ $i = 0.03$ จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

วิธีทำ เนื่องจากงวดแรกจ่าย ณ ปลายปีที่ 11 สัญญานี้เป็นค่ายางงวดชีวิตปลายงวดแบบเลื่อน 10 ปี ดังนั้น

$$P = 10,000 {}_{10}|a_{25}$$

จากฟังก์ชันสืบเปลี่ยน

$${}_{10}|a_{25} = \frac{N_{25+10+1}}{D_{25}} = \frac{N_{36}}{D_{25}}$$

เมื่อ

$$N_{36} = 669,374.03 \quad D_{25} = 45,287.99$$

จะได้

$$P = 10,000 \left(\frac{669,374.03}{45,287.99} \right) \approx 147,803.87 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ชายอายุ 25 ปีต้องชำระเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว ประมาณ 147,803.87 บาท เพื่อแลกกับสิทธิรับเงินปีละ 10,000 บาทตลอดชีพ โดยเริ่มรับครั้งแรกเมื่อครบ 11 ปีนับจากวันทำสัญญา หากยังมีชีวิตอยู่ ☐

ตัวอย่าง 8.16. การหาเงินบำนาญจากเงินก้อนที่มีอยู่

ชายอายุ 45 ปีมีเงินจำนวน 100,000 บาท สำหรับซื้อค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อน 10 ปี โดยต้องการเริ่มรับเงินงวดแรกเมื่อมีอายุครบ 55 ปี กำหนด $i = 0.03$

จงหาจำนวนเงินรายปี R ที่สามารถรับได้ตลอดชีพ

วิธีทำ

เนื่องจากงวดแรกจ่ายเมื่อครบอายุ 55 ปี หรือ ณ เวลา 10 จึงเป็นค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบเลื่อน 10 ปี สมการมูลค่าคือ

$$100,000 = R_{10|}\ddot{a}_{45}$$

โดย

$$_{10|}\ddot{a}_{45} = \frac{N_{55}}{D_{45}}$$

ดังนั้น

$$100,000 = R \frac{N_{55}}{D_{45}}$$

ทำให้

$$R = 100,000 \frac{D_{45}}{N_{55}}$$

เมื่อ

$$D_{45} = 23,715.65 \quad N_{55} = 214,099.00$$

จะได้

$$R = 100,000 \left(\frac{23,715.65}{214,099.00} \right) \approx 11,076.96 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เงินก้อน 100,000 บาทในวันนี้ สามารถแลกเป็นเงินรายงวดประมาณ 11,076.96 บาทต่อปี โดยเริ่มจ่ายเมื่ออายุครบ 55 ปี และจ่ายต่อไปตราบใดที่ผู้รับยังมีชีวิตอยู่ ☐

การประยุกต์ในการวางแผนเกษียณ ถ้าบุคคลอายุ x มีเงินก้อนในปัจจุบันเท่ากับ W และต้องการเริ่มรับเงินบำนาญต้นงวดเมื่อผ่านไป n ปี จำนวนเงินบำนาญต่อปีที่รองรับได้คือ

$$R = \frac{W}{n|\ddot{a}_x} \quad (8.77)$$

ในทางกลับกัน หากต้องการเงินบำนาญปีละ R บาท เงินก้อนที่ต้องมีในวันนี้คือ

$$W = Rn|\ddot{a}_x \quad (8.78)$$

อย่างไรก็ตาม หาก W หมายถึง **เงินก้อนที่มีอยู่ ณ วันเกษียณ** แทนที่จะเป็นเงินก้อนในวันนี้ จะไม่ต้องใช้ตัวประกอบการเลื่อนจ่ายอีก และสำหรับเงินบำนาญต้นงวดจะมี

$$W = R\ddot{a}_{x+n}$$

ข้อแตกต่างนี้มีความสำคัญในทางปฏิบัติ เพราะต้องกำหนดให้ชัดเจนเสมอว่า **มูลค่าเงินก้อนถูกวัด ณ เวลาใด**

8.3.7 ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว

ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว (temporary life annuity) เป็นค่ารายงวดชีวิตที่กำหนด **จำนวนปีสูงสุดในการจ่าย**เงิน ต่างจากค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพซึ่งสามารถจ่ายต่อไปได้ตลอดชีวิต

สำหรับสัญญาระยะเวลา n ปี การจ่ายเงินจะสิ้นสุดเมื่อเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งก่อน ได้แก่

1. ผู้รับเงินเสียชีวิต หรือ
2. ครบกำหนดระยะเวลา n ปี

ดังนั้น สัญญานี้เหมาะสำหรับกรณีที่ต้องการรายได้ เฉพาะในช่วงเวลาหนึ่ง เช่น เงินช่วยเหลือหลังเกษียณในช่วง 10 หรือ 20 ปีแรก เงินสำหรับค่าใช้จ่ายของผู้พึ่งพิง หรือกระแสเงินเพื่อรองรับภาระทางการเงินที่มีระยะเวลาจำกัด

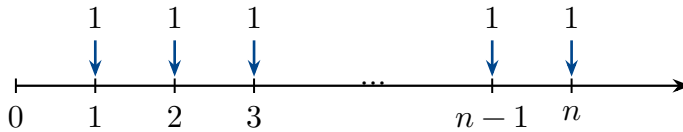
8.3.7.1 ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว

ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว n ปี จ่ายเงิน 1 บาท ณ ปลายปีที่ $1, 2, \dots, n$ หากบุคคลอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ ณ วันจ่ายเงิน

มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad (8.79)$$

ผลรวมสิ้นสุดที่ $k = n$ เนื่องจากหลังจากเวลา n สัญญาสิ้นสุดแล้ว แม้ว่าผู้รับเงินจะยังมีชีวิตอยู่ก็ตาม



รูปที่ 8.6 กระแสเงินสดของค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว n ปี โดยมีการจ่ายไม่เกิน n งวดและหยุดจ่ายทันทีเมื่อเสียชีวิต

8.3.7.2 ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว

ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว n ปี จ่ายเงินงวดแรกทันที ณ เวลา 0 และหากยังมีชีวิตอยู่ จะจ่ายต่อไป ณ เวลา $1, 2, \dots, n-1$

ดังนั้น มีจำนวนงวดสูงสุดเท่ากับ n งวด และมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (8.80)$$

เนื่องจากงวดแรก ณ เวลา 0 ได้รับแน่นอนและมีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับ 1 จึงมีความสัมพันธ์

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}, \quad n \geq 1 \quad (8.81)$$

8.3.7.3 การแยกค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ

ค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพสามารถแบ่งออกเป็น ส่วนที่จ่ายใน n ปีแรก และ ส่วนที่จ่ายหลังจากปีที่ n ได้

สำหรับค่ารายงวดชีวิตปลายงวด

$$a_x = a_{x:\overline{n}|} + {}_n p_x a_{x+n} \quad (8.82)$$

กล่าวคือ

$$\underbrace{a_x}_{\text{ตลอดชีพ}} = \underbrace{a_{x:\overline{n}|}}_{n \text{ ปีแรก}} + \underbrace{{}_n|a_x}_{\text{หลังปีที่ } n}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่ารายงวดชีวิตต้นงวด

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_n|\ddot{a}_x \quad (8.83)$$

ความสัมพันธ์ทั้งสองมีประโยชน์ทั้งในการคำนวณ และในการออกแบบผลิตภัณฑ์ เพราะช่วยให้กระแสเงินสดตลอดชีพ สามารถแยกออกเป็นช่วงเวลาต่าง ๆ ได้

8.3.7.4 ความสัมพันธ์กับประกันชีวิตชั่วระยะเวลา

เมื่อพิจารณาเฉพาะช่วงเวลา n ปี ประกันชีวิตชั่วระยะเวลาและค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว มีความสัมพันธ์พื้นฐานว่า

$$A_{x:\overline{n}|}^1 + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x \quad (8.84)$$

โดย

$$d = \frac{i}{1+i} = 1 - v$$

และ

$${}_nE_x = v^n {}_np_x$$

เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์หนึ่งหน่วย ที่จะจ่าย ณ เวลา n เมื่อบุคคลยังมีชีวิตอยู่ สมการนี้เป็นฉบับจำกัดระยะเวลาของความสัมพันธ์

$$A_x + d\ddot{a}_x = 1$$

สามารถตีความได้ว่า ภายในช่วง n ปี มูลค่าหนึ่งหน่วยถูกแบ่งออกเป็นสามองค์ประกอบ ได้แก่

1. ผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตภายใน n ปี ซึ่งมีมูลค่า $A_{x:\overline{n}|}^1$
2. กระแสค่ารายงวดชีวิตต้นงวดในช่วง n ปี ซึ่งเมื่อคูณด้วย d มีมูลค่า $d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$
3. ผลประโยชน์กรณีอยู่รอดถึงเวลา n ซึ่งมีมูลค่า ${}_nE_x$

จึงสามารถเขียนในรูป

$$A_{x:\overline{n}|}^1 + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = 1$$

ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_x = a_{x:\overline{n}|} + {}_n|a_x, \quad \ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_n|\ddot{a}_x$$

ตัวอย่าง 8.17. ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว

ชายอายุ 25 ปีจะได้รับเงินปลายปี ปีละ 10,000 บาท เป็นเวลาไม่เกิน 20 ปี โดยหยุดจ่ายทันทีหากเสียชีวิต กำหนด $i = 0.03$ จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

วิธีทำ เนื่องจากจ่าย ณ ปลายปี และมีจำนวนงวดสูงสุด 20 งวด จึงเป็นค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว 20 ปี

ดังนั้น

$$P = 10,000a_{25:\overline{20}|}$$

จากฟังก์ชันสลับเปลี่ยน

$$a_{25:\overline{20}|} = \frac{N_{26} - N_{46}}{D_{25}}$$

เมื่อ

$$N_{26} = 1,051,574.05, \quad N_{46} = 392,086.10, \quad D_{25} = 45,287.99,$$

จะได้

$$P = 10,000 \left(\frac{1,051,574.05 - 392,086.10}{45,287.99} \right) \approx 145,620.94 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียวประมาณ 145,620.94 บาท

มูลค่านี้ต่ำกว่าค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ เพราะบริษัทประกันมีภาระจ่ายเงินไม่เกิน 20 ปี แม้ว่าผู้รับจะมีชีวิตอยู่เกินกว่านั้นก็ตาม □

ตัวอย่าง 8.18. ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว

ชายอายุ 25 ปีจะได้รับเงินต้นปี ปีละ 10,000 บาท เป็นเวลาไม่เกิน 20 ปี โดยจ่ายงวดแรกทันทีและหยุดจ่ายเมื่อเสียชีวิต กำหนด $i = 0.03$ จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

วิธีทำ สัญญานี้เป็นค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบชั่วคราว 20 ปี จึงมี

$$P = 10,000\ddot{a}_{25:\overline{20}|}$$

โดย

$$\ddot{a}_{25:\overline{20}|} = \frac{N_{25} - N_{45}}{D_{25}}$$

เมื่อ

$$N_{25} = 1,096,862.04, \quad N_{45} = 415,801.75, \quad D_{25} = 45,287.99,$$

จะได้

$$P = 10,000 \left(\frac{1,096,862.04 - 415,801.75}{45,287.99} \right) \approx 150,384.30 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียวประมาณ 150,384.30 บาท มูลค่าของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดสูงกว่ากรณีปลายงวด เพราะมีการจ่ายเงินงวดแรกทันที ณ เวลา 0 และการจ่ายแต่ละงวดเกิดเร็วกว่ากรณีปลายงวด □

การเลือกใช้ในทางปฏิบัติ ค่ารายงวดชีวิตแต่ละรูปแบบเหมาะกับวัตถุประสงค์ที่แตกต่างกัน ดังนี้

ค่ารายงวดชีวิตตลอดชีพ	เหมาะสำหรับสร้างรายได้ที่ต้องการให้ดำเนินต่อไปตราบใดที่ยังมีชีวิตอยู่ และใช้ป้องกันความเสี่ยงจากการมีชีวิตยืนยาว
ค่า ราย กวด ชีวิต แบบ เลื่อนจ่าย	เหมาะสำหรับการวางแผนรายได้ในอนาคต เช่น ซื้อสัญญาในวัยทำงานและเริ่มรับเงินเมื่อเกษียณ
ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว	เหมาะสำหรับรายได้ที่ต้องการเฉพาะช่วงเวลาหนึ่ง เช่น รายได้เสริมในช่วง 10-20 ปีแรกหลังเกษียณ หรือเพื่อรองรับภาระค่าใช้จ่ายที่มีระยะเวลาจำกัด

ในการประยุกต์จริงจึงควรถามให้ชัดเจนอย่างน้อยสามประเด็น คือ เริ่มจ่ายเมื่อใด จ่ายต้นงวดหรือปลายงวด และต้องการให้จ่ายนานเพียงใด เพราะเงื่อนไขทั้งสามประการเป็นตัวกำหนดชนิดของค่ารายงวดชีวิต และสูตรที่ต้องใช้ในการประเมินมูลค่า

นอกจากนี้ การคำนวณเบี้ยประกันสุทธิในหัวข้อนี้ ยังไม่รวมค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน ค่าคอมมิชชั่น ส่วนเผื่อความเสี่ยง กำไร ภาษี หรือเงื่อนไขเพิ่มเติมของผลิตภัณฑ์จริง ดังนั้น เบี้ยประกันที่บริษัทประกันเรียกเก็บจริง อาจแตกต่างจากค่าที่คำนวณได้จากหลักสมมูลสุทธิ

8.3.8 ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่ายและชั่วคราว

ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดที่เลื่อน m ปีและจ่ายไม่เกิน n งวด คือ

$${}_m|a_{x:\overline{n}}| = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} = {}_m E_x \times a_{x+m:\overline{n}}| \quad (8.85)$$

ส่วนค่ารายงวดชีวิตต้นงวดที่เลื่อน m ปีและจ่ายไม่เกิน n งวด คือ

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}}| = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} = {}_m E_x \times \ddot{a}_{x+m:\overline{n}}| \quad (8.86)$$

สูตรนี้ช่วยป้องกันความคลาดเคลื่อนของดัชนีระหว่าง “เลื่อน m ปี” กับ “เริ่มจ่ายปลายปีที่ $m + 1$ ”

8.3.9 มูลค่าสะสมของค่ารายงวดชีวิตชั่วคราว

ถ้าค่ารายงวดชีวิตต้นงวดชั่วคราว n ปีไม่ได้จ่ายออกทีละงวด แต่สะสมเป็นเงินก้อน ณ เวลา n โดยเงินก้อนจ่ายเฉพาะเมื่อผู้เอาประกันภัยยังมีชีวิตอยู่ มูลค่าสะสมเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัยต่อเงินรายงวด 1 บาทคือ

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}}| = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}|}{{}_n E_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \quad (8.87)$$

สูตรนี้ต่างจากค่ารายงวดแน่นอน เพราะมีเงื่อนไขการอยู่รอดทั้งในช่วงจ่ายและ ณ วันรับเงินก้อน

ตัวอย่าง 8.19. ชายอายุ 25 ปีมีสิทธิรับเงินต้นปีปีละ 10,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี แต่เลือกสะสมทั้งหมด และรับเป็นเงินก้อนเมื่ออายุครบ 45 ปี จงหาเงินก้อนเมื่อ $i = 0.03$

วิธีทำ

$$S = 10,000 \ddot{s}_{25:\overline{20}|} = 10,000 \times \frac{N_{25} - N_{45}}{D_{45}}$$

ดังนั้น

$$S = 10,000 \times \frac{1,096,862.04 - 415,801.75}{23,715.65} = 287,177.59 \text{ บาท}$$

□

8.3.10 การจ่ายค่ารายงวดหลายครั้งต่อปี

ในทางปฏิบัติ การจ่ายเงินปีละครั้งอาจไม่สอดคล้องกับรูปแบบการดำรงชีวิตจริง เนื่องจากค่าใช้จ่ายของครัวเรือนส่วนใหญ่เกิดขึ้นเป็นรายเดือน เช่น ค่าอาหาร ค่าเช่าที่อยู่อาศัย ค่าสาธารณูปโภค และค่าใช้จ่ายด้านสุขภาพ

ผลิตภัณฑ์บำนาญและค่ารายงวดชีวิตจึงมักกำหนดให้มีการจ่ายเงิน มากกว่าหนึ่งครั้งต่อปี เช่น

$$m = \begin{cases} 2, & \text{จ่ายทุกครึ่งปี,} \\ 4, & \text{จ่ายทุกไตรมาส,} \\ 12, & \text{จ่ายทุกเดือน} \end{cases}$$

ถ้ากำหนดอัตราผลประโยชน์เท่ากับ 1 บาทต่อปี และมีการจ่ายปีละ m ครั้ง แต่ละงวดจะมีจำนวนเงินเท่ากับ $\frac{1}{m}$

ตัวอย่างเช่น หากกำหนดผลประโยชน์ในอัตราปีละ 120,000 บาทและจ่ายรายเดือน จะมี $m = 12$ และจำนวนเงินแต่ละงวดเท่ากับ $\frac{120,000}{12} = 10,000$ บาทต่อเดือน

ดังนั้น การจ่ายหลายครั้งต่อปีไม่ได้หมายความว่า ผลประโยชน์รวมต่อปีเพิ่มขึ้น แต่เป็นการแบ่งผลประโยชน์รายปีออกเป็นงวดย่อย เพื่อให้สอดคล้องกับความถี่ในการรับเงินที่กำหนด

8.3.10.1 ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบจ่ายปีละ m ครั้ง

ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดแบบจ่ายปีละ m ครั้ง จ่ายเงินงวดละ $1/m$ ณ เวลา $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$ ตราบใดที่ผู้รับเงินยังมีชีวิตอยู่

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} v^{j/m} {}_{j/m}p_x \quad (8.88)$$

แต่ละพจน์

$$\frac{1}{m} v^{j/m} {}_{j/m}p_x$$

ประกอบด้วยสามส่วน ได้แก่

$$\underbrace{\frac{1}{m}}_{\text{จำนวนเงินต้องงวด}} \underbrace{v^{j/m}}_{\text{การคิดลด}} \underbrace{{}_{j/m}p_x}_{\text{ความน่าจะเป็นที่ยังมีชีวิตอยู่}}$$

จึงเห็นได้ว่า การคำนวณยังใช้หลักการเดียวกับค่ารายงวดชีวิตรายปี แต่ต้องประเมินทั้งมูลค่าเงินตามเวลา และความน่าจะเป็นของการอยู่รอดที่เวลาเป็นเศษส่วนของปี

8.3.10.2 ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบจ่ายปีละ m ครั้ง

สำหรับค่ารายงวดชีวิตปลายงวด เงินงวดแรกจ่ายเมื่อครบระยะเวลา $1/m$ ปี จากนั้นจ่ายต่อไปทุก $1/m$ ปี

จึงมีมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังเป็น

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\infty} v^{j/m} {}_{j/m}p_x \quad (8.89)$$

ความแตกต่างระหว่างค่ารายงวดชีวิตต้นงวด และปลายงวดอยู่ที่เงินงวดแรกเท่านั้น

สำหรับต้นงวด มีการจ่ายเงิน $\frac{1}{m}$ ทันที ณ เวลา 0 ขณะที่ปลายงวดไม่มีการจ่ายเงิน ณ เวลา 0

ดังนั้น

$$\ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \quad (8.90)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\ddot{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m}$$

เมื่อ $m = 1$ จะกลับไปเป็นกรณีการจ่ายปีละครั้ง

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

8.3.10.3 เหตุใดจึงต้องมีสมมติฐานการเสียชีวิตภายในปี

ตารางชีพทั่วไปมักให้ข้อมูลเฉพาะอายุเต็มปี เช่น l_{60} , l_{61} , $l_{62}, \dots$ ดังนั้น สามารถคำนวณความน่าจะเป็น เช่น

$${}_1p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}}$$

ได้โดยตรง

อย่างไรก็ตาม หากมีการจ่ายเงินทุกเดือน จำเป็นต้องใช้ความน่าจะเป็น เช่น

$${}_{1/12}p_{60}, \quad {}_{2/12}p_{60}, \quad {}_{3/12}p_{60}, \dots$$

ซึ่งไม่สามารถอ่านได้โดยตรงจากตารางชีพรายปี

จึงจำเป็นต้องกำหนดสมมติฐานเกี่ยวกับ รูปแบบการเสียชีวิตภายในแต่ละปีอายุ ก่อนทำการประมาณค่าความน่าจะเป็นสำหรับช่วงเวลาที่เป็นเศษส่วนของปี

8.3.10.4 สมมติฐานการกระจายการเสียชีวิตสม่ำเสมอ

สมมติฐานที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ การกระจายการเสียชีวิตสม่ำเสมอภายในปี (Uniform Distribution of Deaths: UDD)

ภายใต้สมมติฐาน UDD จำนวนผู้รอดชีวิตระหว่างอายุเต็มปีสองอายุ ลดลงในลักษณะเชิงเส้น

สำหรับ $0 \leq s \leq 1$ จะมี

$$l_{x+s} = l_x - sd_x$$

ดังนั้น

$${}_sp_x = \frac{l_{x+s}}{l_x} = 1 - sq_x \quad (8.91)$$

ในกรณีทั่วไป ถ้า $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq s \leq 1$ จะได้

$${}_{k+s}p_x = \frac{l_{x+k} - s d_{x+k}}{l_x} \quad (8.92)$$

สูตรนี้ทำให้สามารถประมาณความน่าจะเป็นของการอยู่รอด ณ เวลาเป็นรายเดือน รายไตรมาส หรือช่วงเวลาเศษส่วนอื่น ๆ ได้จากตารางชีพรายปี

8.3.10.5 สมมติฐานกำลังมรณะคงที่

อีกสมมติฐานหนึ่งคือ กำลังมรณะคงที่ภายในแต่ละปีอายุ (constant force of mortality)

ถ้ากำลังมรณะมีค่าคงที่ในช่วงอายุ x ถึง $x + 1$ จะได้

$${}_sp_x = (p_x)^s, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (8.93)$$

ดังนั้น สำหรับเวลา $k + s$

$${}_{k+s}p_x = {}_kp_x (p_{x+k})^s \quad (8.94)$$

UDD และสมมติฐานกำลังมรณะคงที่ อาจให้ผลลัพธ์แตกต่างกันเล็กน้อย จึงควรระบุสมมติฐานที่ใช้ทุกครั้ง เมื่อคำนวณผลประโยชน์ที่จ่ายภายในปี

หลักสำคัญของการจ่ายหลายครั้งต่อปี

สำหรับผลประโยชน์ในอัตรา 1 บาทต่อปี และจ่ายปีละ m ครั้ง

$$\text{เงินต้องงวด} = \frac{1}{m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} v^{j/m} {}_{j/m}p_x$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{\infty} v^{j/m} {}_{j/m}p_x$$

และ

$$\ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} = \frac{1}{m}$$

ตัวอย่าง 8.20. การหาความน่าจะเป็นของการอยู่รอดรายเดือนด้วยสมมติฐาน UDD

พิจารณาบุคคลอายุ 60 ปี จากตารางชีพในบทนี้มี

$$l_{60} = 75,276, \quad d_{60} = 1,895$$

ภายใต้สมมติฐานการกระจายการเสียชีวิตสม่ำเสมอภายในปี (Uniform Distribution of Deaths: UDD) จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ 60 ปียังมีชีวิตอยู่เมื่อครบ 1 เดือน
2. ความน่าจะเป็นที่ยังมีชีวิตอยู่เมื่อครบ 6 เดือน
3. ตรวจสอบว่าค่าที่เวลา 1 ปีสอดคล้องกับข้อมูลในตารางชีพ

วิธีทำ

ภายใต้สมมติฐาน UDD สำหรับ $0 \leq s \leq 1$ จะมี

$$l_{x+s} = l_x - sd_x$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x จะมีชีวิตอยู่ต่ออีก s ปีคือ

$${}_s p_x = \frac{l_{x+s}}{l_x} = \frac{l_x - sd_x}{l_x}$$

1) ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดครบ 1 เดือน

เมื่อ $s = \frac{1}{12}$ จะได้

$$l_{60+1/12} = 75,276 - \frac{1}{12}(1,895)$$

ดังนั้น

$${}_{1/12} p_{60} = \frac{75,276 - \frac{1}{12}(1,895)}{75,276} \approx 0.997902$$

จึงได้ว่าความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ 60 ปีจะมีชีวิตอยู่เมื่อครบ 1 เดือนมีค่าประมาณ ${}_{1/12} p_{60} \approx 0.997902$ หรือประมาณ 99.7902%

2) ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดครบ 6 เดือน

เมื่อ $s = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ จะได้

$$l_{60+1/2} = 75,276 - \frac{1}{2}(1,895)$$

ดังนั้น

$${}_{1/2}p_{60} = \frac{75,276 - \frac{1}{2}(1,895)}{75,276} \approx 0.987413$$

จึงได้ว่าความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ 60 ปีจะยังมีชีวิตอยู่เมื่อครบ 6 เดือนมีค่าประมาณ

$${}_{1/2}p_{60} \approx 0.987413$$

หรือประมาณ 98.7413%

3) ตรวจสอบเมื่อครบ 1 ปี

เมื่อ $s = 1$ จากสมมติฐาน UDD จะได้

$$l_{61} = l_{60} - d_{60}$$

แทนค่า

$$l_{61} = 75,276 - 1,895 = 73,381$$

ดังนั้น

$${}_1p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}} = \frac{73,381}{75,276} \approx 0.974827$$

ซึ่งตรงกับการคำนวณจากตารางชีพโดยตรง

$${}_1p_{60} = \frac{l_{61}}{l_{60}}$$

สรุป

ผลการคำนวณได้

ระยะเวลาหลังอายุ 60 ปี	ความน่าจะเป็นของการอยู่รอด
1 เดือน	0.997902
6 เดือน	0.987413
12 เดือน	0.974827

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า สมมติฐาน UDD ทำหน้าที่ประมาณจำนวนผู้รอดชีวิตระหว่างอายุเต็มปีในลักษณะเชิงเส้น จึงช่วยให้สามารถประมาณความน่าจะเป็นของการอยู่รอดสำหรับช่วงเวลาที่พิเศษส่วนของปี เช่น รายเดือนหรือรายไตรมาส จากตารางชีพที่ให้ข้อมูลเพียงรายปีได้

แนวคิดนี้มีความสำคัญเมื่อนำไปคำนวณผลิตภัณฑ์ที่มีการจ่ายผลประโยชน์หลายครั้งต่อปี เช่น ค่ารายงวดชีวิต รายเดือน เงินบำนาญรายเดือน หรือผลิตภัณฑ์ที่กำหนดการจ่ายผลประโยชน์ระหว่างปี □

ตัวอย่าง 8.21. การประเมินเงินบำนาญที่จ่ายรายเดือน

บุคคลอายุ 60 ปีต้องการรับเงินบำนาญตลอดชีพในอัตราปีละ $R = 120,000$ บาท โดยกำหนดให้จ่ายเงินบำนาญทุกสิ้นเดือน สมมติว่าจากตารางชีพ อัตราดอกเบี้ย และสมมติฐานการเสียชีวิตภายในปีที่กำหนด คำนวณค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบจ่ายรายเดือนได้ $a_{60}^{(12)} = 14.35$ จงหา

1. จำนวนเงินบำนาญที่ได้รับในแต่ละเดือน
2. เงินก้อนที่ต้องมี ณ อายุ 60 ปี เพื่อรองรับการจ่ายเงินบำนาญดังกล่าวตลอดชีพ
3. สูตรสำหรับหาเงินบำนาญรายเดือน หากมีเงินก้อน ณ วันเกษียณเท่ากับ W บาท

วิธีทำ

1) หาเงินบำนาญที่ได้รับในแต่ละเดือน

เนื่องจากจ่ายปีละ 12 ครั้ง จำนวนเงินที่จ่ายในแต่ละเดือนคือ

$$R_{\text{month}} = \frac{R}{12}$$

แทนค่า

$$R_{\text{month}} = \frac{120,000}{12} = 10,000 \text{ บาทต่อเดือน}$$

ดังนั้น ผู้รับบำนาญจะได้รับเงิน 10,000 บาทต่อเดือน ตราบใดที่ยังมีชีวิตอยู่

2) หาเงินก้อนที่ต้องมี ณ อายุ 60 ปี

สำหรับค่ารายงวดชีวิตปลายงวดที่จ่ายปีละ m ครั้ง หากกำหนดผลประโยชน์ในอัตรา R บาทต่อปี มูลค่าปัจจุบันของเงินบำนาญคือ

$$PV = Ra_x^{(m)}$$

ในกรณีนี้

$$m = 12, \quad x = 60$$

ดังนั้น

$$PV = 120,000a_{60}^{(12)}$$

แทนค่า

$$PV = 120,000(14.35) = 1,722,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ภายใต้สมมติฐานที่กำหนด บุคคลอายุ 60 ปีต้องมีเงินก้อน ณ วันเริ่มรับบำนาญประมาณ

$$1,722,000 \text{ บาท}$$

เพื่อรองรับการจ่ายเงินบำนาญเดือนละ 10,000 บาทตลอดช่วงชีวิตที่เหลือ

3) หาเงินบำนาญรายเดือนจากเงินก้อน W บาท

ถ้าบุคคลมีเงินก้อน ณ วันเกษียณเท่ากับ W บาท และต้องการเปลี่ยนเงินก้อนดังกล่าวเป็นเงินบำนาญปลายเดือนตลอดชีพ จะมีความสัมพันธ์

$$W = Ra_x^{(12)}$$

ดังนั้น อัตราเงินบำนาญต่อปีคือ

$$R = \frac{W}{a_x^{(12)}}$$

เนื่องจากจ่ายปีละ 12 ครั้ง เงินบำนาญต่อเดือนจึงเป็น

$$R_{\text{month}} = \frac{W}{12a_x^{(12)}} \quad (8.95)$$

ตัวอย่างเช่น หากบุคคลอายุ 60 ปีมีเงินก้อน

$$W = 2,000,000 \text{ บาท}$$

และยังใช้

$$a_{60}^{(12)} = 14.35$$

จะได้รับเงินบำนาญต่อเดือนประมาณ

$$R_{\text{month}} = \frac{2,000,000}{12(14.35)} \approx 11,614.40 \text{ บาทต่อเดือน}$$

ดังนั้น เงินก้อน ณ วันเกษียณสามารถแปลงเป็นกระแสรายได้รายเดือนตลอดชีพได้ผ่านค่ารายงวดชีวิต $a_x^{(12)}$ ซึ่งรวมผลของทั้งอัตราดอกเบี้ยและความน่าจะเป็นของการอยู่รอดไว้แล้ว ☐

ความเชื่อมโยงกับผลิตภัณฑ์ทางการเงินในทางปฏิบัติ แนวคิดการจ่ายค่ารายงวดหลายครั้งต่อปี มีความสำคัญมากกว่าการเปลี่ยนหน่วยจาก “รายปี” เป็น “รายเดือน” เพราะความถี่ของการจ่ายมีผลต่อทั้ง มูลค่าปัจจุบัน ความสะดวกของผู้รับเงิน และการออกแบบผลิตภัณฑ์ทางการเงิน

ตัวอย่างการประยุกต์ ได้แก่

1. เงินบำนาญหลังเกษียณ

ผู้เกษียณมักมีค่าใช้จ่ายเป็นรายเดือน การจ่ายเงินบำนาญเดือนละครั้งจึงสอดคล้องกับกระแสเงินสดจริงมากกว่าการจ่ายเงินก้อนปีละครั้ง

2. ผลิตภัณฑ์ค่ารายงวดของบริษัทประกัน

บริษัทประกันสามารถเสนอทางเลือกการรับผลประโยชน์ เป็นรายเดือน รายไตรมาส หรือรายปี โดยใช้ $a_x^{(m)}$ หรือ $\ddot{a}_x^{(m)}$ ในการประเมินมูลค่าของกระแสเงินแต่ละรูปแบบ

3. กองทุนบำนาญและระบบสวัสดิการ

หน่วยงานที่มีภาระจ่ายบำนาญรายเดือน จำเป็นต้องประเมินมูลค่าปัจจุบันของภาระผูกพัน โดยคำนึงถึงความถี่ของการจ่าย อัตราดอกเบี้ย และความน่าจะเป็นของการอยู่รอด

4. Micro-pension และ micro-annuity

สำหรับประชาชนที่มีรายได้ไม่สูงหรือรายได้ไม่สม่ำเสมอ การรับเงินจำนวนไม่มากแต่ถี่ เช่น รายสัปดาห์หรือรายเดือน อาจสอดคล้องกับพฤติกรรมการใช้จ่ายมากกว่าการรับเงินก้อนใหญ่เป็นรายปี

ในกรณีนี้ หลักการค่ารายงวดชีวิตแบบจ่ายหลายครั้งต่อปี สามารถใช้เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับ ออกแบบ ผลิตภัณฑ์บำนาญขนาดเล็ก (micro-pension หรือ micro-annuity) ให้เหมาะกับกลุ่มประชากร ที่มีเงินออมจำกัด

ความเชื่อมโยงกับ Microinsurance

แนวคิดในหัวข้อนี้สามารถเชื่อมโยงกับ **microinsurance** ได้ แต่ควรแยกความหมายให้ชัดเจน Microinsurance โดยทั่วไปมุ่งให้ความคุ้มครองความเสี่ยง แก่ประชาชนที่มีรายได้จำกัด โดยใช้เบี้ยประกัน และจำนวนเงินเอาประกันที่ไม่สูง รวมถึงออกแบบวิธีการชำระเบี้ยและการรับผลประโยชน์ ให้สอดคล้องกับ กระแสรายได้ของผู้เอาประกัน

อย่างไรก็ตาม **ค่ารายงวดชีวิตที่จ่ายหลายครั้งต่อปี มีความเชื่อมโยงโดยตรงกับ micro-pension หรือ micro-annuity มากกว่า** เนื่องจากเป็นการเปลี่ยนเงินออมขนาดเล็ก ให้เป็นกระแสรายได้ประจำในวัยสูงอายุ

ตัวอย่างเช่น บุคคลอาจสะสมเงินจำนวนไม่มากเป็นรายเดือนในช่วงวัยทำงาน แล้วเมื่อเกษียณจึงเปลี่ยนเงิน สะสมดังกล่าว เป็นเงินรายเดือนที่จ่ายตราบไต่ที่ยังมีชีวิตอยู่

ในเชิงคณิตศาสตร์ แบบจำลองค่ารายงวดชีวิตช่วยตอบคำถามสำคัญว่า

เงินก้อนที่มีอยู่ $\longleftrightarrow$ รายได้ต่อเดือนตลอดชีพ

ภายใต้สมมติฐานเกี่ยวกับอัตราดอกเบี้ย การเสียชีวิต และความถี่ในการจ่ายเงิน

หากประยุกต์กับ **microinsurance** ต้องพิจารณาเพิ่มเติมถึงความเสี่ยงในการชำระเบี้ย ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน การขาดส่งเบี้ย การเวนคืนหรือยกเลิกสัญญา และข้อจำกัดด้าน **affordability** ซึ่งไม่ได้รวมอยู่ในแบบ จำลองค่ารายงวดสุทธิพื้นฐานในหัวข้อนี้

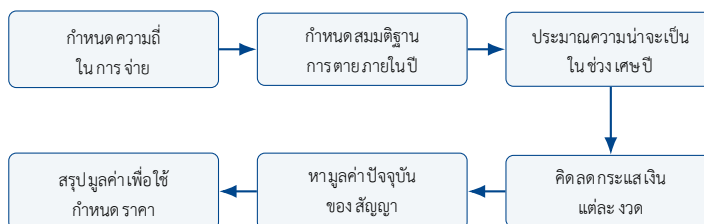
ข้อสังเกตสำหรับการนำไปใช้จริง การเพิ่ม ความถี่ในการ จ่ายจาก ราย ปี เป็น ราย เดือน ไม่ได้ หมายความว่า สามารถนำความน่าจะเป็นรายปี มาหารด้วย 12 ได้โดยตรง

การคำนวณต้องพิจารณา

$$1/12P_x, 2/12P_x, \dots$$

ตามเวลาที่เกิดการจ่ายเงินจริง และต้องมีสมมติฐานเกี่ยวกับการเสียชีวิตภายในปีรองรับ

ดังนั้น ในการออกแบบผลิตภัณฑ์จริง ลำดับการคำนวณควรเป็น



รูปที่ 8.7 ขั้นตอนการประเมินมูลค่าค่ารายงวดชีวิตที่จ่ายหลายครั้งต่อปี

แนวคิดนี้ทำให้แบบจำลองค่ารายงวดชีวิต สามารถก้าวจากตารางชีพรายปี ไปสู่การออกแบบผลิตภัณฑ์ที่จ่ายเงินจริงเป็นรายเดือน หรือหลายครั้งต่อปีได้อย่างเป็นระบบ

8.3.11 ผลประโยชน์แบบจ่ายต่อเนื่อง

ถ้าผลประโยชน์จ่ายอย่างต่อเนื่องในอัตรา 1 บาทต่อปี ตราบใดที่บุคคลอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ และกำลังดอกเบี้ยคงที่เท่ากับ δ มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของค่ารายงวดชีวิตแบบต่อเนื่องคือ

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \, dt \quad (8.96)$$

ถ้าประกันตลอดชีพจ่าย 1 บาททันที ณ เวลาที่เสียชีวิต มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \times \mu_{x+t} \, dt \quad (8.97)$$

เมื่อเงื่อนไขปลายทาง $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} {}_t p_x = 0$ เป็นจริง การอินทิเกรตโดยส่วนให้ความสัมพันธ์

$$\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1 \quad (8.98)$$

สูตรแบบต่อเนื่องมีประโยชน์ต่อการสร้างแบบจำลองเชิงทฤษฎี และเป็นขีดจำกัดของการจ่ายหลายครั้งต่อปีเมื่อความถี่เพิ่มขึ้น

8.3.12 เบี้ยประกันสุทธิแบบรายปี

ถ้าผลประโยชน์มีมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังเท่ากับ B และชำระเบี้ยต้นปีปีละ P ขณะยังมีชีวิตอยู่เป็นเวลาไม่เกิน n ปี มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของเบี้ยคือ $P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ จากหลักสมมูล

$$P = \frac{B}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad (8.99)$$

ถ้าชำระเบี้ยตลอดชีพ

$$P = \frac{B}{\ddot{a}_x} \quad (8.100)$$

สำหรับแผนเกษียณที่ชำระเบี้ยต้นปี n ปี แล้วเริ่มรับค่ารายงวดชีวิตต้นงวดตลอดชีพเมื่ออายุ $x + n$ ถ้าเบี้ยรายปีเท่ากับ K และผลประโยชน์รายปีเท่ากับ R หลักสมมูลให้

$$K \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = R \times {}_n|\ddot{a}_x \quad (8.101)$$

ใช้ฟังก์ชันสลับเปลี่ยนจะได้

$$R = K \frac{N_x - N_{x+n}}{N_{x+n}}, \quad K = R \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad (8.102)$$

ตัวอย่าง 8.22. ชายอายุ 25 ปีชำระเบี้ยต้นปีปีละ 12,000 บาทเป็นเวลา 20 ปี จากนั้นเริ่มรับเงินต้นปีตลอดช่วงตารางตัวอย่างเมื่ออายุครบ 45 ปี จงหาเงินรายปีเมื่อ $i = 0.03$

วิธีทำ

$$R = 12,000 \times \frac{N_{25} - N_{45}}{N_{45}}$$

ดังนั้น

$$R = 12,000 \times \frac{1,096,862.04 - 415,801.75}{415,801.75} = 19,655.34 \text{ บาท}$$

□

ตัวอย่าง 8.23. ชายอายุ 45 ปีต้องการรับเงินต้นปีละ 10,000 บาท ตั้งแต่อายุ 65 ปีตลอดช่วงตารางตัวอย่าง และชำระเบี้ยต้นปีเป็นเวลา 20 ปี จงหาเบี้ยรายปีเมื่อ $i = 0.03$

วิธีทำ

$$K = 10,000 \times \frac{N_{65}}{N_{45} - N_{65}}$$

จึงได้

$$K = 10,000 \times \frac{83,193.67}{415,801.75 - 83,193.67} = 2,501.25 \text{ บาท}$$

□

8.3.13 ความแปรปรวนและการกระจายความเสี่ยง

มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง (Expected Present Value: EPV) เป็นเครื่องมือพื้นฐานสำหรับการกำหนดต้นทุนเฉลี่ยของผลประโยชน์ประกันชีวิต แต่ EPV เพียงอย่างเดียวไม่สามารถอธิบายได้ว่า ผลประโยชน์ที่บริษัทต้องจ่ายจริงจะผันผวนจากค่าเฉลี่ยมากเพียงใด

ในทางปฏิบัติ บริษัทประกันจึงต้องพิจารณาทั้ง

ค่าคาดหวัง ร่วมกับ ความผันผวน

เพราะแม้กรรมธรรม์สองประเภทจะมี EPV เท่ากัน แต่หากประเภทหนึ่งมีความแปรปรวนสูงกว่า บริษัทอาจต้องถือเงินกองทุนหรือส่วนเผื่อความเสี่ยงมากกว่า

พิจารณาประกันสะสมทรัพย์แท้จริงที่จ่ายผลประโยชน์จำนวน B บาท ณ เวลา n เฉพาะเมื่อบุคคลอายุ x ยังมีชีวิตอยู่ ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันคือ

$$Z = Bv^n \mathbf{1}_{\{T_x > n\}}$$

เนื่องจาก $\mathbf{1}_{\{T_x > n\}}$ เป็นตัวแปรบ่งชี้แบบแบร์นูลลี ที่มีความน่าจะเป็นของความสำเร็จเท่ากับ ${}_np_x$ จึงได้

$$\mathbb{E}[Z] = Bv^n {}_np_x, \quad (8.103)$$

$$\text{Var}(Z) = B^2 v^{2n} {}_np_x {}_nq_x \quad (8.104)$$

โดย ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$ คือความน่าจะเป็นที่บุคคลอายุ x เสียชีวิตก่อนครบ n ปี

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมูลค่าผลประโยชน์คือ

$$SD(Z) = Bv^n \sqrt{np_x nq_x} \quad (8.105)$$

ค่าคาดหวังบอกถึง “ต้นทุนเฉลี่ย” ในขณะที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานบอกถึง “ขนาดของความไม่แน่นอน” รอบค่าเฉลี่ยนั้น

8.3.13.1 การรวมกลุ่มความเสี่ยง

หลักสำคัญของธุรกิจประกันภัยคือ การนำความเสี่ยงของผู้เอาประกันจำนวนมากมารวมกัน (risk pooling)

สมมติว่าบริษัทรับประกันบุคคลจำนวน m คน ซึ่งมีลักษณะความเสี่ยงเหมือนกัน และสมมติว่าความเสี่ยงของแต่ละคนเป็นอิสระต่อกัน

กำหนดให้ $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ แทนมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์แต่ละกรมธรรม์ และกำหนดให้ $S_m = \sum_{j=1}^m Z_j$ เป็นมูลค่าปัจจุบันรวมของผลประโยชน์ทั้งพอร์ต จะได้

$$E[S_m] = mE[Z_1], \quad (8.106)$$

$$\text{Var}(S_m) = m \text{Var}(Z_1), \quad (8.107)$$

และ

$$SD(S_m) = \sqrt{m} SD(Z_1)$$

ดังนั้น อัตราส่วนระหว่างส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน กับค่าคาดหวังของพอร์ตคือ

$$\frac{SD(S_m)}{E[S_m]} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{SD(Z_1)}{E[Z_1]} \quad (8.108)$$

จึงเห็นได้ว่า ความเสี่ยงสัมพัทธ์ลดลงตามอัตรา $1/\sqrt{m}$

นี่คือพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของการรวมกลุ่มความเสี่ยง กล่าวคือ เมื่อจำนวนกรมธรรม์เพิ่มขึ้น ผลลัพธ์จริงของพอร์ตมีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าคาดหวังมากขึ้น แม้ว่าความเสี่ยงรวมในหน่วยบาทจะเพิ่มขึ้นก็ตาม

ตัวอย่าง 8.24. ผลของการรวมกลุ่มความเสี่ยง

บริษัท ประกัน แห่ง หนึ่ง ออก กรมธรรม์ ประกัน สะสม ททรัพย์ แท้จริง โดย จ่าย ผล ประโยชน์ $B =$

100,000 บาท เมื่อครบ 10 ปี หากผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ กำหนดอัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปี $i = 0.03$ และความน่าจะเป็นที่ผู้เอาประกันจะมีชีวิตอยู่ครบ 10 ปีเท่ากับ ${}_{10}p_x = 0.90$ จงหา

1. มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลประโยชน์สำหรับกรมธรรม์หนึ่งฉบับ
2. ความเสี่ยงสัมพัทธ์ของกรมธรรม์หนึ่งฉบับ
3. มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ ความเสี่ยงสัมพัทธ์ ของพอร์ตที่มีกรมธรรม์ลักษณะเดียวกันและเป็นอิสระจำนวน 100 ฉบับ
4. ความเสี่ยงสัมพัทธ์ของพอร์ตหากเพิ่มจำนวนกรมธรรม์เป็น 10,000 ฉบับ

วิธีทำ

สำหรับกรมธรรม์หนึ่งฉบับ ตัวแปรสุ่มของมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์คือ

$$Z = Bv^{10}1_{\{T_x > 10\}}$$

โดย

$$v^{10} = (1.03)^{-10} \approx 0.744094$$

1) มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังคือ

$$\mathbb{E}[Z] = Bv^{10}{}_{10}p_x$$

แทนค่า

$$\mathbb{E}[Z] = 100,000(0.744094)(0.90) \approx 66,968.45 \text{ บาท}$$

เนื่องจาก

$${}_{10}q_x = 1 - {}_{10}p_x = 0.10$$

ความแปรปรวนของมูลค่าผลประโยชน์คือ

$$\text{Var}(Z) = B^2v^{20}{}_{10}p_x{}_{10}q_x$$

แทนค่า

$$\text{Var}(Z) = 100,000^2(0.744094)^2(0.90)(0.10) \approx 498,308,178.77$$

ดังนั้น

$$\text{SD}(Z) = \sqrt{\text{Var}(Z)} \approx 22,322.82 \text{ บาท}$$

2) ความเสี่ยงสัมพัทธ์ของกรมธรรม์หนึ่งฉบับ

ความเสี่ยงสัมพัทธ์วัดจากอัตราส่วน

$$\frac{\text{SD}(Z)}{\mathbb{E}[Z]}$$

จึงได้

$$\frac{\text{SD}(Z)}{\mathbb{E}[Z]} = \frac{22,322.82}{66,968.45} \approx 0.3333 = 33.33\%$$

กล่าวได้ว่า สำหรับกรมธรรม์เพียงหนึ่งฉบับ ความผันผวนของผลประโยชน์มีขนาดประมาณ 33.33% ของค่าคาดหวัง

3) พอร์ตจำนวน 100 กรมธรรม์

สมมติกรมธรรม์ทุกฉบับมีลักษณะเหมือนกันและความเสี่ยงเป็นอิสระต่อกัน ให้

$$S_{100} = \sum_{j=1}^{100} Z_j$$

จะได้

$$\mathbb{E}[S_{100}] = 100\mathbb{E}[Z]$$

ดังนั้น

$$\mathbb{E}[S_{100}] = 100(66,968.45) \approx 6,696,845.23 \text{ บาท}$$

เนื่องจากความเสี่ยงของแต่ละกรมธรรม์เป็นอิสระ

$$\text{SD}(S_{100}) = \sqrt{100} \text{SD}(Z)$$

จึงได้

$$SD(S_{100}) = 10(22,322.82) \approx 223,228.17 \text{ บาท}$$

ความเสี่ยงสัมพัทธ์ของพอร์ตคือ

$$\frac{SD(S_{100})}{E[S_{100}]} = \frac{223,228.17}{6,696,845.23} \approx 0.0333 = 3.33\%$$

จะเห็นว่าเมื่อเพิ่มจำนวนกรมธรรม์จาก 1 ฉบับเป็น 100 ฉบับ ความเสี่ยงสัมพัทธ์ลดลงจาก 33.33% เหลือประมาณ 3.33%

4) พอร์ตจำนวน 10,000 กรมธรรม์

จากความสัมพันธ์

$$\frac{SD(S_m)}{E[S_m]} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{SD(Z)}{E[Z]}$$

เมื่อ $m = 10,000$ จะได้

$$\frac{SD(S_{10,000})}{E[S_{10,000}]} = \frac{1}{\sqrt{10,000}}(33.33\%) = \frac{1}{100}(33.33\%) \approx 0.33\%$$

สรุป

ผลการคำนวณสามารถสรุปได้ดังนี้

จำนวนกรมธรรม์	ความเสี่ยงสัมพัทธ์
1	33.33%
100	3.33%
10,000	0.33%

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นหลักสำคัญของการรวมกลุ่มความเสี่ยง กล่าวคือ เมื่อจำนวนกรมธรรม์ที่มีลักษณะคล้ายกันและเป็นอิสระเพิ่มขึ้น ความเสี่ยงสัมพัทธ์ของพอร์ตจะลดลงตามอัตรา $\frac{1}{\sqrt{m}}$ บริษัทประกันจึงสามารถใช้การรวมกรมธรรม์จำนวนมากเพื่อให้ผลรวมของการจ่ายผลประโยชน์มีความเสถียรมากขึ้นเมื่อเทียบกับขนาดของพอร์ต แม้ว่าความไม่แน่นอนของผู้เอาประกันแต่ละรายจะยังคงมีอยู่ □

8.3.13.2 ข้อจำกัดของการกระจายความเสี่ยง

สมมติฐานความเป็นอิสระมีความสำคัญอย่างมาก หากความเสี่ยงของผู้เอาประกันมีความสัมพันธ์กัน ผลของการกระจายความเสี่ยงจะลดลง

ถ้าแต่ละกรมธรรม์มี $\text{Var}(Z_j) = \sigma^2$ และมีสหสัมพันธ์ระหว่างกรมธรรม์ทุกคู่เท่ากับ ρ จะได้

$$\text{Var}(S_m) = m\sigma^2 + m(m-1)\rho\sigma^2 \quad (8.109)$$

หรือ

$$\text{Var}(S_m) = m\sigma^2 [1 + (m-1)\rho]$$

ดังนั้น

$$\frac{\text{SD}(S_m)}{\mathbb{E}[S_m]} = \frac{\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{1 + (m-1)\rho}{m}} \quad (8.110)$$

เมื่อ $\mu = \mathbb{E}[Z_j]$

ถ้า $\rho = 0$ จะกลับไปเป็นกรณีความเสี่ยงอิสระ และความเสี่ยงสัมพัทธ์ลดลงตาม $1/\sqrt{m}$

แต่ถ้า $\rho > 0$ เมื่อจำนวนกรมธรรม์เพิ่มขึ้นมาก ความเสี่ยงส่วนหนึ่งยังคงเหลืออยู่

ในทางประกันภัย ตัวอย่างของความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นพร้อมกัน ได้แก่

- โรคระบาด
- ภัยพิบัติขนาดใหญ่
- การเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยในประชากรพร้อมกัน
- การมีอายุยืนมากกว่าที่แบบจำลองคาดการณ์
- ภาวะเศรษฐกิจหรืออัตราดอกเบี้ยที่เปลี่ยนแปลงพร้อมกัน

ความเสี่ยงเหล่านี้เรียกโดยกว้างว่า **ความเสี่ยงเชิงระบบ (systematic risk)** หรือความเสี่ยงที่ไม่สามารถกำจัดได้ทั้งหมด ด้วยการเพิ่มจำนวนกรมธรรม์เพียงอย่างเดียว

ดังนั้น บริษัทประกันจึงต้องใช้เครื่องมืออื่นร่วมด้วย เช่น การประกันภัยต่อ การกระจายพอร์ตตามอายุและภูมิภาค การถือเงินกองทุน และการบริหารสินทรัพย์และหนี้สิน

หลักของการรวมกลุ่มความเสี่ยง

ภายใต้ความเสี่ยงที่เป็นอิสระ

$$\text{ความเสี่ยงสัมพัทธ์} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$

แต่การเพิ่มจำนวนกรมธรรม์

ลดความเสี่ยงเฉพาะบุคคลได้ดี แต่ไม่สามารถกำจัดความเสี่ยงระบบทั้งหมดได้

8.3.14 เบี้ยประกันขั้นต้นและข้อจำกัดของเบี้ยสุทธิ

สูตรที่พิจารณาในหัวข้อก่อนหน้านี้ ส่วนใหญ่ใช้หลักสมมูลของ **เบี้ยประกันสุทธิ (net premium)** กล่าวคือ กำหนดให้มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของเบี้ยประกัน เท่ากับมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์

แนวคิดดังกล่าวมีประโยชน์ในการศึกษาพื้นฐาน แต่บริษัทประกันไม่สามารถดำเนินธุรกิจ โดยเก็บเพียงต้นทุนเฉลี่ยของผลประโยชน์เท่านั้น

ในทางปฏิบัติยังมีต้นทุนและความเสี่ยงอื่น เช่น

- ค่าจัดจำหน่ายและค่าคอมมิชชัน
- ค่าใช้จ่ายในการออกกรมธรรม์
- ค่าใช้จ่ายในการบริหารกรมธรรม์
- ค่าใช้จ่ายในการพิจารณาและจ่ายสินไหม
- ค่าใช้จ่ายด้านเทคโนโลยีและการให้บริการ
- ต้นทุนจากการประกันภัยต่อ
- ส่วนเผื่อสำหรับความไม่แน่นอนของสมมติฐาน
- ต้นทุนเงินทุนและผลตอบแทนที่ต้องการ

ดังนั้น เบี้ยที่เรียกเก็บจริงจึงเรียกว่า **เบี้ยประกันขั้นต้น (gross premium)** ซึ่งโดยทั่วไปสูงกว่าเบี้ยประกันสุทธิ

8.3.14.1 สมการมูลค่าของเบี้ยประกันขั้นต้น

กำหนดให้

$$\begin{aligned} G &= \text{เบี้ยประกันต่อหน่วยของกระแสเบี้ย,} \\ B &= \text{EPV ของผลประโยชน์,} \\ E &= \text{EPV ของค่าใช้จ่ายที่ไม่แปรตามเบี้ย,} \\ a_P &= \text{EPV ของกระแสเบี้ยหนึ่งหน่วย,} \\ R_M &= \text{ส่วนเผื่อความเสี่ยง,} \\ \alpha &= \text{สัดส่วนค่าใช้จ่ายที่แปรตามเบี้ย} \end{aligned}$$

มูลค่าปัจจุบันของเบี้ยทั้งหมดคือ Ga_P

หากค่าใช้จ่ายบางส่วนคิดเป็นสัดส่วน α ของมูลค่ากระแสเบี้ย ค่าใช้จ่ายส่วนนี้จะมีมูลค่า αGa_P

หลักสมมูลของเบี้ยขั้นต้นจึงให้

$$Ga_P = B + E + \alpha Ga_P + R_M \quad (8.111)$$

จัดรูปใหม่ได้

$$(1 - \alpha)Ga_P = B + E + R_M$$

ดังนั้น

$$G = \frac{B + E + R_M}{(1 - \alpha)a_P} \quad (8.112)$$

สูตรนี้แสดงให้เห็นว่า เบี้ยประกันขั้นต้นจะเพิ่มขึ้นเมื่อ

- มูลค่าผลประโยชน์ B เพิ่มขึ้น
- ค่าใช้จ่าย E เพิ่มขึ้น
- ส่วนเผื่อความเสี่ยง R_M เพิ่มขึ้น
- สัดส่วนค่าใช้จ่าย α เพิ่มขึ้น
- มูลค่ากระแสเบี้ย a_P ลดลง

ตัวอย่าง 8.25. จากเบี้ยประกันสุทธิสู่เบี้ยประกันขั้นต้น

บริษัทประกันกำลังพิจารณากำหนดเบี้ยประกันสำหรับกรมธรรม์หนึ่ง โดยมีมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์ (Expected Present Value: EPV) เท่ากับ $B = 85,000$ บาท กำหนดให้

$$E = 3,000 \text{ บาท}, \quad R_M = 5,000 \text{ บาท}, \quad \alpha = 0.12, \quad a_P = 7.5$$

โดย E เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของค่าใช้จ่ายที่ไม่แปรตามเบี้ยประกัน R_M เป็นส่วนเผื่อความเสี่ยง α เป็นสัดส่วนค่าใช้จ่ายที่แปรตามเบี้ยประกัน และ a_P เป็นมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของกระแสเบี้ยหนึ่งหน่วย จงหา

1. เบี้ยประกันสุทธิต่อปี
2. เบี้ยประกันขั้นต้นต่อปี
3. ส่วนต่างระหว่างเบี้ยประกันขั้นต้นกับเบี้ยประกันสุทธิ พร้อมอธิบายความหมาย

วิธีทำ**1) เบี้ยประกันสุทธิ**

หากพิจารณาเฉพาะมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์ โดยยังไม่รวมค่าใช้จ่ายและส่วนเผื่อความเสี่ยง จากหลักสมมูลจะได้

$$G_{\text{net}} a_P = B$$

ดังนั้น

$$G_{\text{net}} = \frac{B}{a_P}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} G_{\text{net}} &= \frac{85,000}{7.5} \\ &= 11,333.33 \text{ บาทต่อปี} \end{aligned}$$

ดังนั้น เบี้ยประกันสุทธิเท่ากับ

$$G_{\text{net}} = 11,333.33 \text{ บาทต่อปี}$$

2) เบี้ยประกันขั้นต้น

ในทางปฏิบัติ บริษัทประกันต้องพิจารณาทั้งผลประโยชน์ ค่าใช้จ่าย และส่วนเผื่อความเสี่ยง จากสมการมูลค่า

ของเบี้ยประกันขั้นต้น

$$Ga_P = B + E + \alpha Ga_P + R_M$$

จัดรูปได้เป็น

$$(1 - \alpha)Ga_P = B + E + R_M$$

จึงได้

$$G = \frac{B + E + R_M}{(1 - \alpha)a_P}$$

แทนค่า

$$G = \frac{85,000 + 3,000 + 5,000}{(1 - 0.12)(7.5)} = \frac{93,000}{6.6} = 14,090.91 \text{ บาทต่อปี}$$

ดังนั้น เบี้ยประกันขั้นต้นเท่ากับประมาณ $G = 14,090.91$ บาทต่อปี

3) ส่วนต่างระหว่างเบี้ยประกันขั้นต้นกับเบี้ยประกันสุทธิ

ส่วนต่างของเบี้ยทั้งสองประเภทคือ

$$G - G_{\text{net}} = 14,090.91 - 11,333.33 = 2,757.58 \text{ บาทต่อปี}$$

ดังนั้น เบี้ยประกันขั้นต้นสูงกว่าเบี้ยประกันสุทธิ 2,757.58 บาทต่อปี ส่วนต่างดังกล่าวไม่ได้หมายถึงกำไรของบริษัทประกันทั้งหมด แต่เป็นจำนวนเงินที่ต้องรองรับค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน ค่าใช้จ่ายที่แปรตามเบี้ยส่วนเพื่อความเสี่ยง และต้นทุนอื่นตามสมมติฐานที่ใช้ในการกำหนดราคา

สรุป

จากการคำนวณได้

รายการ	จำนวนเงินต่อปี
เบี้ยประกันสุทธิ	11,333.33 บาท
เบี้ยประกันขั้นต้น	14,090.91 บาท
ส่วนต่าง	2,757.58 บาท

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า เบี้ยประกันสุทธิสะท้อนต้นทุนเชิงคณิตศาสตร์ของผลประโยชน์ ขณะที่ เบี้ยประกันขั้นต้นสะท้อนต้นทุนและความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินธุรกิจประกันภัยจริง จึงเป็นแนวคิดที่ใกล้เคียงกับการกำหนดราคาลิทธิภัณฑ์ประกันภัยในทางปฏิบัติมากกว่า ☐

8.3.14.2 เหตุใดเบี้ยสุทธิจึงไม่เพียงพอสำหรับการกำหนดราคาจริง

เบี้ยสุทธิอาศัยค่าคาดหวังเป็นหลัก จึงเหมาะสำหรับการอธิบายหลักคณิตศาสตร์พื้นฐาน แต่ไม่สามารถสะท้อนองค์ประกอบทั้งหมดของธุรกิจประกันภัย

ในทางปฏิบัติ การกำหนดราคาอาจต้องพิจารณาร่วมกันอย่างน้อย

$$\text{ผลประโยชน์} + \text{ค่าใช้จ่าย} + \text{ความเสี่ยง} + \text{ต้นทุนเงินทุน}$$

นอกจากนี้ สมมติฐานที่ใช้กำหนดราคา อาจแตกต่างจากประสบการณ์จริง เช่น

- ผู้เอาประกันเสียชีวิตมากหรือน้อยกว่าที่คาด
- ผู้รับบำนาญมีชีวิตยืนยาวกว่าที่คาด
- อัตราดอกเบี้ยลดลง
- ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น
- ผู้เอาประกันยกเลิกกรมธรรม์ในอัตราที่แตกต่างจากสมมติฐาน

ดังนั้น การกำหนดราคา การตั้งเงินสำรอง และการบริหารความเสี่ยง จึงเป็นกระบวนการที่เกี่ยวข้องกัน แต่ไม่ใช่สิ่งเดียวกัน

8.3.15 ความเสี่ยงอายุยืน อัตราดอกเบี้ย และการกำหนดราคา

มูลค่าของผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต ขึ้นอยู่กับทั้ง เวลาของกระแสเงินสด และ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในอนาคต

สำหรับค่ารายงวดชีวิต มูลค่ามีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อ

1) อัตราดอกเบี้ยที่ใช้คิดลดลง

เมื่ออัตราดอกเบี้ยลดลง ตัวประกอบคิดลด v^k มีค่าสูงขึ้น ทำให้เงินที่จะจ่ายในอนาคต มีมูลค่าปัจจุบันสูงขึ้น

2) ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดเพิ่มขึ้น

หากประชากรมีชีวิตยืนยาวขึ้น บริษัทคาดว่าจะต้องจ่ายเงินรายงวดเป็นจำนวนงวดมากขึ้น จึงทำให้มูลค่าของหนี้สินเพิ่มขึ้น

3) เริ่มจ่ายเงินเร็วขึ้น

การจ่ายเงินที่เกิดขึ้นเร็วขึ้น ถูกคิดลดเป็นเวลาสั้นลง จึงมีมูลค่าปัจจุบันสูงขึ้น

4) เพิ่มระยะเวลารับประกันการจ่าย

หากผลิตภัณฑ์รับประกันว่าจะจ่ายอย่างน้อยจำนวนหนึ่ง แม้ผู้รับเงินเสียชีวิตก่อนครบกำหนด ภาระของบริษัทประกันย่อมสูงขึ้น

8.3.15.1 ความเสี่ยงอายุยืน

สำหรับบริษัทที่ขายค่ารายงวดชีวิตหรือเงินบำนาญ การที่ผู้รับเงินมีชีวิตยืนยาวกว่าสมมติฐาน เรียกว่า **ความเสี่ยงอายุยืน (longevity risk)**

ตัวอย่างเช่น หากบริษัทกำหนดราคาโดยคาดว่า ผู้รับบำนาญอายุ 60 ปี จะได้รับเงินโดยเฉลี่ยประมาณ 18 ปี แต่ประสบการณ์จริงพบว่าได้รับเงินเฉลี่ย 22 ปี บริษัทจะต้องจ่ายเงินมากกว่าที่คาดไว้เดิม

ความเสี่ยงนี้แตกต่างจากความเสี่ยงการเสียชีวิตของประกันชีวิตบางประเภท

ประกันชีวิต : การเสียชีวิตเร็วกว่าคาดอาจเพิ่มการจ่ายสินไหม

ค่ารายงวดชีวิต : การมีชีวิตยืนยาวกว่าคาดอาจเพิ่มจำนวนงวดที่ต้องจ่าย

ดังนั้น ผลลัพธ์สองประเภทนี้ อาจมีความเสี่ยงด้านอัตราผลตอบแทนที่เคลื่อนไปในทิศทางตรงกันข้ามบางส่วน

ตัวอย่าง 8.26. ผลของอัตราดอกเบี้ยและการมีอายุยืนต่อมูลค่าค่ารายงวดชีวิต

สมมติบริษัทประกันแห่งหนึ่งมีภาระจ่ายค่ารายงวดชีวิตปลายงวด แบบชั่วคราว 5 ปี ให้แก่ผู้เอาประกันอายุ x เป็นจำนวนปีละ 100,000 บาท โดยจะจ่าย ณ ปลายปีแต่ละปีเฉพาะเมื่อผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ สมมติความน่าจะเป็นของการอยู่รอดในกรณีฐานเป็น

$${}_1p_x = 0.980, \quad {}_2p_x = 0.955, \quad {}_3p_x = 0.925, \quad {}_4p_x = 0.890, \quad {}_5p_x = 0.850$$

และใช้อัตราดอกเบี้ยมีผลต่อปี $i = 0.03$ จงคำนวณและวิเคราะห์มูลค่าปัจจุบันของภาระในกรณีต่อไปนี้

1. กรณีฐาน
2. อัตราดอกเบี้ยลดลงจาก 3% เป็น 2% โดยความน่าจะเป็นของการอยู่รอดไม่เปลี่ยนแปลง

3. ผู้รับเงินมีชีวิตยืนยาวขึ้น โดยความน่าจะเป็นของการอยู่รอดเปลี่ยนเป็น

$$0.985, \quad 0.965, \quad 0.940, \quad 0.910, \quad 0.880$$

แต่อัตราดอกเบี้ยยังคงเท่ากับ 3%

4. อัตราดอกเบี้ยลดลงเป็น 2% และความน่าจะเป็นของการอยู่รอดเพิ่มขึ้นพร้อมกัน พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้นกับภาระของบริษัทประกัน

วิธีทำ

ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดแบบชั่วคราว 5 ปีหนึ่งหน่วยคือ

$$a_{x:\overline{5}|} = \sum_{k=1}^5 v^k {}_k p_x, \quad v = \frac{1}{1+i}$$

เนื่องจากบริษัทต้องจ่ายปีละ 100,000 บาท มูลค่าปัจจุบันของภาระจึงเป็น

$$PV = 100,000 a_{x:\overline{5}|}$$

1) กรณีฐาน

เมื่อ $i = 0.03$, $v = \frac{1}{1.03}$ จะได้

$$a_{x:\overline{5}|} = v(0.980) + v^2(0.955) + v^3(0.925) + v^4(0.890) + v^5(0.850) \approx 4.2221$$

ดังนั้น

$$PV_0 = 100,000(4.2221) \approx 422,211 \text{ บาท}$$

บริษัทจึงมีมูลค่าปัจจุบันของภาระในกรณีฐานประมาณ 422,211 บาท

2) กรณีอัตราดอกเบี้ยลดลงเป็น 2%

เมื่ออัตราดอกเบี้ยลดลงเป็น $i = 0.02$, $v = \frac{1}{1.02}$, แต่ความน่าจะเป็นของการอยู่รอดยังคงเดิม
จะได้

$$a_{x:\overline{5}|} \approx 4.3424$$

ดังนั้น

$$PV_1 = 100,000(4.3424) \approx 434,244 \text{ บาท}$$

มูลค่าภาระเพิ่มขึ้น

$$434,244 - 422,211 = 12,033 \text{ บาท}$$

คิดเป็นประมาณ $\frac{12,033}{422,211} \times 100 \approx 2.85\%$ ดังนั้น เมื่ออัตราดอกเบี้ยลดลง มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินในอนาคตจะสูงขึ้น ทำให้ภาระของบริษัทประกันเพิ่มขึ้น

3) กรณีผู้รับเงินมีชีวิตยืนยาวขึ้น

สมมติความน่าจะเป็นของการอยู่รอดใหม่เป็น

$${}_1p_x = 0.985, \quad {}_2p_x = 0.965, \quad {}_3p_x = 0.940, \quad {}_4p_x = 0.910, \quad {}_5p_x = 0.880$$

และยังคงใช้อัตราดอกเบี้ย $i = 0.03$

จะได้

$$a_{x:\overline{5}|} \approx 4.2938$$

ดังนั้น

$$PV_2 = 100,000(4.2938) \approx 429,377 \text{ บาท}$$

มูลค่าภาระเพิ่มขึ้นจากกรณีฐานประมาณ

$$429,377 - 422,211 = 7,166 \text{ บาท}$$

หรือประมาณ $\frac{7,166}{422,211} \times 100 \approx 1.70\%$ ผลดังกล่าวเกิดจากความน่าจะเป็นที่บริษัทต้องจ่ายเงิน ในแต่ละงวดสูงขึ้น เมื่อผู้รับเงินมีแนวโน้มมีชีวิตยืนยาวขึ้น

4) กรณีอัตราดอกเบี้ยลดลงและผู้รับเงินมีชีวิตยืนยาวขึ้นพร้อมกัน

ใช้อัตราดอกเบี้ย $i = 0.02$ ร่วมกับความน่าจะเป็นของการอยู่รอดชุดใหม่ จะได้ $a_{x:\overline{5}|} \approx 4.4167$ ดังนั้น

$$PV_3 = 100,000(4.4167) \approx 441,674 \text{ บาท}$$

เมื่อเทียบกับกรณีฐาน มูลค่าภาระเพิ่มขึ้น

$$441,674 - 422,211 = 19,463 \text{ บาท}$$

$$\text{หรือประมาณ } \frac{19,463}{422,211} \times 100 \approx 4.61\%$$

สรุปผล สามารถสรุปผลการวิเคราะห์ได้ดังนี้

สถานการณ์	มูลค่าภาระ (บาท)	เพิ่มจากกรณีฐาน
กรณีฐาน	422,211	—
ดอกเบี้ยลดลง	434,244	2.85%
อายุยืนขึ้น	429,377	1.70%
ดอกเบี้ยลดลงและอายุยืนขึ้น	441,674	4.61%

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า อัตราดอกเบี้ยและสมมติฐานการอยู่รอดเป็นปัจจัยสำคัญ ที่กำหนดมูลค่าหนี้สินของบริษัทประกัน อัตราดอกเบี้ยที่ลดลงทำให้กระแสเงินสดในอนาคต มีมูลค่าปัจจุบันสูงขึ้น ขณะที่การมีชีวิตยืนยาวขึ้นทำให้บริษัทมีโอกาสต้องจ่าย ค่ารายงวดจำนวนมากขึ้น เมื่อความเสี่ยงทั้งสองเกิดขึ้นพร้อมกัน ผลกระทบต่อภาระของบริษัทประกันอาจสูงกว่าการพิจารณา ความเสี่ยงแต่ละประเภทแยกจากกัน ดังนั้น ในการกำหนดราคา การตั้งเงินสำรอง และการบริหารสินทรัพย์และหนี้สิน ควรมีการวิเคราะห์สถานการณ์และความไวของสมมติฐาน ควบคู่กันไป □

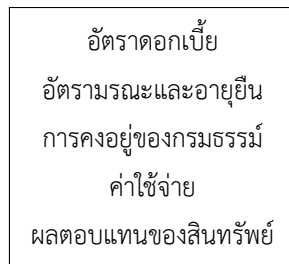
8.3.15.2 จากการกำหนดราคาสู่การบริหารสินทรัพย์และหนี้สิน

ในทางปฏิบัติ บริษัทประกันไม่ได้เพียงคำนวณว่า ควรเรียกเก็บเบี้ยเท่าใด แต่ยังต้องพิจารณาว่า สินทรัพย์ที่นำเบี้ยประกันไปลงทุน สามารถรองรับกระแสเงินสดของหนี้สินในอนาคตได้หรือไม่

ตัวอย่างเช่น บริษัทขายเงินบำนาญตลอดชีพ ซึ่งอาจต้องจ่ายเงินต่อเนื่องเป็นเวลาหลายสิบปี หากนำเงินไปลงทุนในสินทรัพย์ระยะสั้นเป็นส่วนใหญ่ บริษัทอาจเผชิญความเสี่ยง เมื่ออัตราดอกเบี้ยลดลงและต้องนำเงินไปลงทุนใหม่ ในอัตราผลตอบแทนที่ต่ำกว่าเดิม

แนวคิดนี้นำไปสู่ การบริหารสินทรัพย์และหนี้สิน (Asset–Liability Management: ALM) ซึ่งพิจารณาให้โครงสร้างของสินทรัพย์ สอดคล้องกับลักษณะของหนี้สินประกันภัย

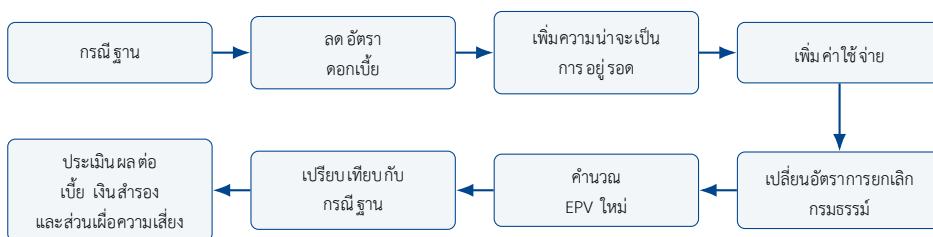
สำหรับผลิตภัณฑ์ค่ารายงวดชีวิต ตัวแปรสำคัญที่ควรติดตามพร้อมกัน ได้แก่



8.3.15.3 การวิเคราะห์ความไวในการกำหนดราคา

ก่อนกำหนดราคาผลิตภัณฑ์จริง บริษัทไม่ควรพิจารณาเฉพาะกรณีฐานเพียงกรณีเดียว แต่ควรวิเคราะห์ความไว (sensitivity analysis) ต่อสมมติฐานสำคัญ

ตัวอย่างโครงสร้างการวิเคราะห์คือ



รูปที่ 8.8 กระบวนการวิเคราะห์ความไวของสมมติฐานที่มีผลต่อการกำหนดราคาและเงินสำรอง

การวิเคราะห์ดังกล่าวช่วยตอบคำถามเชิงธุรกิจว่า

- หากอัตราดอกเบี้ยลดลง ผลลัพธ์ยังมีกำไรเพียงพอหรือไม่
- หากผู้รับบำนาญมีชีวิตยืนยาวขึ้น เงินสำรองเพียงพอหรือไม่
- เบี้ยที่กำหนดมีส่วนเผื่อสำหรับความคลาดเคลื่อนของสมมติฐานมากเพียงใด
- บริษัทควรปรับโครงสร้างการลงทุนหรือการประกันภัยต่อหรือไม่

ข้อสังเกต

การเปรียบเทียบกรมธรรม์ด้วย “เงินที่ได้รับรวม” เพียงอย่างเดียวอาจทำให้ตัดสินใจผิด เพราะไม่ได้คำนึงถึง จังหวะเวลาของการจ่ายเงิน ความน่าจะเป็นที่จะได้รับแต่ละงวด ความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต สภาพคล่อง ค่าใช้จ่าย ภาษี และความเสี่ยงของผู้รับประกัน

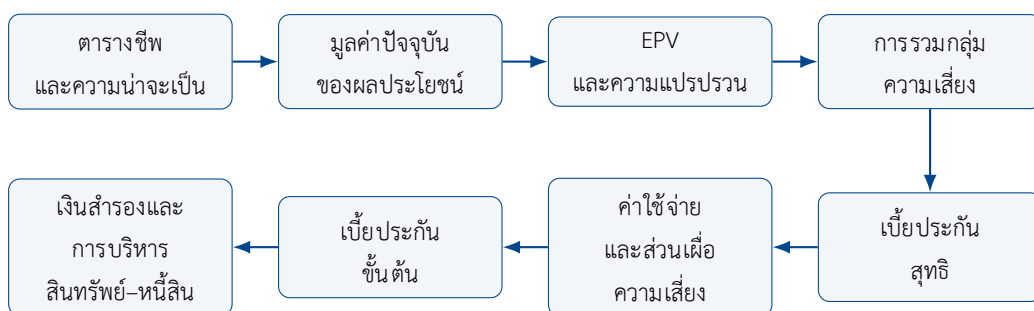
ตัวอย่างเช่น การได้รับเงินรวม 1,000,000 บาท ในอีก 20 ปี ไม่ได้มีมูลค่าเท่ากับการได้รับ 1,000,000 บาทในวันนี้ และหากผลประโยชน์นั้นขึ้นอยู่กับการณ์มีชีวิตอยู่ ยังต้องพิจารณาความน่าจะเป็นของการได้รับเงินด้วย

ดังนั้น การเปรียบเทียบผลิตภัณฑ์ที่เหมาะสมกว่า ควรพิจารณาอย่างน้อย

กระแสเงินสดตามสถานการณ์ + EPV + ความเสี่ยง + วัตถุประสงค์ของผู้เอาประกัน

ร่วมกัน

ภาพรวมเชิงปฏิบัติ เนื้อหาในส่วนนี้แสดงให้เห็นลำดับความคิดจาก คณิตศาสตร์ประกันภัยพื้นฐานไปสู่การดำเนินธุรกิจประกันจริง กล่าวคือ



รูปที่ 8.9 ลำดับความคิดจากตารางชีพสู่การกำหนดราคาและการบริหารความเสี่ยงในธุรกิจประกันชีวิต

ดังนั้น คณิตศาสตร์ประกันภัยไม่ได้มีหน้าที่เพียง “คำนวณเบี้ยประกัน” แต่เป็นกรอบสำหรับเชื่อมโยง **ความน่าจะเป็น** กระแสเงินสด ความเสี่ยง การกำหนดราคา และความมั่นคงทางการเงินของบริษัทประกัน เข้าด้วยกันอย่างเป็นระบบ

บทสรุปท้ายบทที่ 8

บทนี้พัฒนาคณิตศาสตร์การเงินจากกระแสเงินสดที่กำหนดแน่นอน ไปสู่กระแสเงินสดที่ขึ้นอยู่กับชีวิตมนุษย์ เครื่องมือหลักคือความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันการอยู่รอด ตารางชีพ และมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง

ตารางชีพเชื่อมโยงจำนวนผู้มีชีวิต l_x จำนวนผู้เสียชีวิต d_x กับความน่าจะเป็น $p_x, q_x, {}_n p_x, {}_n q_x$ ส่วนฟังก์ชันสับเปลี่ยน D_x, N_x, C_x, M_x ช่วยลดการคำนวณผลรวมซ้ำ ๆ และทำให้สูตรประกันชีวิตกับค่ายางงวด

ชีวิตกระชับขึ้น

ด้านผลิตภัณฑ์ บทนี้แยกความหมายของประกันชั่วระยะเวลา ประกันตลอดชีพ สะสมทรัพย์แท้จริง ประกันสะสมทรัพย์ และค่ารายงวดชีวิตอย่างชัดเจน โดยเน้นว่าค่ารายงวดชีวิตปลายงวด เริ่มจ่ายสิ้นปีแรก ขณะที่ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดเริ่มจ่ายทันที นอกจากนี้ยังครอบคลุมรายงวดชั่วคราว รายงวดเลื่อนจ่าย รายงวดหลายครั้งต่อปี มูลค่าสะสม และการชำระเบี้ยหลายงวด

หลักสมมูลทำให้มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของเบี้ยสุทธิ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของผลประโยชน์ อย่างไรก็ตาม เบี้ยจริงต้องรวมค่าใช้จ่าย กำไร ส่วนเผื่อความเสี่ยง และข้อกำหนดด้านเงินกองทุน จึงไม่ควรใช้เบี้ยสุทธิเป็นราคาขายโดยตรง

ในเชิงการประยุกต์ สูตรในบทนี้สนับสนุนการวางแผนเกษียณ การเปรียบเทียบกรมธรรม์ การวิเคราะห์ผลกระทบของอัตราดอกเบี้ยและอายุยืน ตลอดจนการออกแบบผลิตภัณฑ์ที่สมดุลระหว่างความคุ้มครอง ความสามารถในการชำระเบี้ย และความมั่นคงของบริษัทประกัน

เอกสารอ้างอิง

- [1] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., and Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2nd ed.). Society of Actuaries.
- [2] Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., and Waters, H. R. (2013). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [3] Haberman, S., and Pitacco, E. (1999). *Actuarial Models for Disability Insurance*. Chapman & Hall/CRC.
- [4] Kellison, S. G. (2009). *The Theory of Interest* (3rd ed.). McGraw-Hill/Irwin.
- [5] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., and Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press.
- [6] Promislow, S. D. (2015). *Fundamentals of Actuarial Mathematics* (3rd ed.). Wiley.
- [7] มานพ วราภักดิ์. (2549). *ทฤษฎีดอกเบี้ย*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [8] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2561). *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้พริ้นท์.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง **(ระดับ ปานกลาง)** ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน **(ระดับ ยาก)** ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ใช้ตารางที่ 8.1 และฟังก์ชันสลับเปลี่ยนในตารางที่ 8.2 กำหนดอัตราดอกเบี้ยแท้จริงร้อยละ 3 ต่อปี สมมติว่าอายุขัยของบุคคลต่างคนเป็นอิสระต่อกัน และให้ใช้ค่าที่ไม่พิเศษระหว่างการคำนวณก่อนตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง เนื่องจากตารางตัวอย่างมีข้อมูลถึงอายุ 79 ปี คำว่า “ตลอดชีพ” ในแบบฝึกหัดที่ใช้ตารางนี้ให้หมายถึงจ่ายได้ไม่เกินอายุ 79 ปี

- 1) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเออายุ 40 ปี ชำระเบี้ยต้นปีปีละ 10,000 บาท ตั้งแต่อายุ 40 ถึง 59 ปี รวม 20 งวด จากนั้นรับเงินต้นปีจำนวนเท่ากันตั้งแต่อายุ 60 ถึง 79 ปี โดยจ่ายเฉพาะเมื่อยังมีชีวิตอยู่
 - (a) จงหาเงินรายปีจากหลักสมมูล
 - (b) หากนายเอมีชีวิตครบทุกงวด จงหาอัตราส่วนผลประโยชน์ตามสัญญารวม ต่อเบี้ยตามสัญญารวม
 - (c) อธิบายว่าเหตุใดอัตราส่วนในข้อ (b) จึงไม่ใช่อัตราผลตอบแทนที่รับความเสี่ยงแล้ว

- 2) **(ระดับ ง่าย)** กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นของอายุขัย

$$f_0(t) = 0.4e^{-0.4t}, \quad t \geq 0$$

- (a) จงตรวจสอบว่า f_0 เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น
 - (b) จงหา $S_0(t)$
 - (c) จงหาความน่าจะเป็นที่เสียชีวิตระหว่างอายุ 20 กับ 30 ปี
 - (d) จงหากำลังมรณะ μ_t
- 3) **(ระดับ ปานกลาง)** นายเอและนายบีอายุ 48 และ 54 ปีตามลำดับ
 - (a) จงหาความน่าจะเป็นที่นายเออยู่รอดถึงอายุ 63 แต่นายบีเสียชีวิตก่อนอายุ 69
 - (b) จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยหนึ่งคนเสียชีวิตภายใน 15 ปี
 - (c) จงหาความน่าจะเป็นที่มีเพียงหนึ่งคนเท่านั้นที่อยู่รอดครบ 15 ปี
- 4) **(ระดับ ง่าย)** นายเออายุ 30 ปี ต้องการรับเงินสะสมทรัพย์แท้จริง 200,000 บาทเมื่อครบ 25 ปี หากยังมีชีวิตอยู่ จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

- 5) **(ระดับ ยาก)** บิดาจ่ายเบี้ยสุทธิตั้งเดียว 20,000 บาท เพื่อซื้อสะสมทรัพย์แท้จริงให้บุตรเมื่อบุตรอายุ 10 ปี สัญญาครบกำหนดเมื่อบุตรอายุ 30 ปี เมื่อได้รับเงินก้อน บุตรนำเงินทั้งหมดไปซื้อค่ารายงวดชีวิตปลายงวด ที่เลื่อน 30 ปี และเริ่มรับงวดแรกปลายปีที่มียอายุ 60 ปี จงหาเงินรายปี โดยพิจารณาการจ่ายได้ถึงอายุ 79 ปี
- 6) **(ระดับ ง่าย)** ชายอายุ 25 ปีซื้อค่ารายงวดชีวิตปลายงวด ด้วยเบี้ยสุทธิตั้งเดียว 500,000 บาท จงหาเงินรายปี
- 7) **(ระดับ ยาก)** ชายอายุ 25 ปีมีงบประมาณเท่ากับเบี้ยสุทธิของ ค่ารายงวดชีวิตปลายงวดปีละ 15,000 บาท เขาเปลี่ยนเป็นค่ารายงวดชีวิตต้นงวดที่เลื่อน 20 ปี และจ่ายไม่เกิน 20 งวด ตั้งแต่อายุ 45 ถึง 64 ปี จงหาเงินรายปีใหม่ที่ทำให้เบี้ยสุทธิเท่าเดิม
- 8) **(ระดับ ง่าย)** จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว ของค่ารายงวดชีวิตต้นงวดปีละ 30,000 บาท สำหรับชายอายุ 45 ปี
- 9) **(ระดับ ปานกลาง)** ชายอายุ 35 ปีซื้อสัญญาสองฉบับ
 - ฉบับที่ 1: ค่ารายงวดชีวิตปลายงวด เลื่อน 10 ปี จ่ายไม่เกิน 20 งวด เบี้ยสุทธิ 100,000 บาท
 - ฉบับที่ 2: ค่ารายงวดชีวิตต้นงวด เลื่อน 10 ปี จ่ายไม่เกิน 20 งวด เบี้ยสุทธิ 200,000 บาท
 จงหาเงินรายปีของแต่ละฉบับ และเปรียบเทียบจำนวนเงินรวมสูงสุดตามสัญญา ในกรณีที่ผู้เอาประกันมีชีวิตครบทุกงวด
- 10) **(ระดับ ปานกลาง)** ชายอายุ 35 ปีต้องการรับเงินต้นปีปีละ 15,000 บาท ตั้งแต่อายุครบ 50 ปีถึงอายุ 79 ปี โดยจ่ายเฉพาะเมื่อยังมีชีวิตอยู่ เขาชำระเบี้ยต้นปีปีละเท่ากันตั้งแต่อายุ 35 ถึง 49 ปี จงหาเบี้ยสุทธิรายปี
- 11) **(ระดับ ปานกลาง)** ชายอายุ 35 ปีซื้อสัญญาสองฉบับ
 - ฉบับที่ 1: ค่ารายงวดชีวิตปลายงวด เลื่อน 10 ปี เบี้ยสุทธิ 100,000 บาท
 - ฉบับที่ 2: ค่ารายงวดชีวิตต้นงวด เลื่อน 10 ปี เบี้ยสุทธิ 200,000 บาท
 จงหาเงินรายปีของแต่ละฉบับ และอธิบายสาเหตุที่เงินรายปีต่างกัน
- 12) **(ระดับ ยาก)** ชายอายุ 35 ปีซื้อค่ารายงวดชีวิตปลายงวดชั่วคราว ปีละ 10,000 บาท เป็นเวลาไม่เกิน

15 ปี เงินทุกงวดที่ได้รับถูกสะสมตามเงื่อนไขการอยู่รอดจนถึงอายุ 50 ปี แล้วใช้ซื้อค่ารายงวดชีวิตต้นงวดตั้งแต่อายุ 50 ถึง 79 ปี จงหา

- (a) เบี้ยสุทธิของสัญญาฉบับแรก
- (b) เงินก้อนเชิงคณิตศาสตร์ประกันภัย ณ อายุ 50
- (c) เงินรายปีของสัญญาฉบับที่สอง

13) (ระดับ ง่าย) ชายอายุ 25 ปีจะได้รับเงินต้นปีปีละ 100,000 บาท เป็นเวลาไม่เกิน 10 ปี จงหาเบี้ยประกันสุทธิแบบจ่ายครั้งเดียว

14) (ระดับ ยาก) ชายอายุ 25 ปีมีเงิน 100,000 บาท และพิจารณาสองทางเลือก

- สะสมทรัพย์แท้จริงครบกำหนด 5 ปี
- ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดชั่วคราว 5 ปี

สำหรับแต่ละทางเลือก จงหาจำนวนผลประโยชน์ตามสัญญา ที่ซื้อได้ด้วยเงิน 100,000 บาท จากนั้นเปรียบเทียบ

- (a) ผลประโยชน์รวมสูงสุดเมื่อมีชีวิตครบทุกงวด
- (b) จังหวะเวลาของกระแสเงินสด
- (c) ข้อจำกัดของการใช้ “ผลประโยชน์รวม” เป็นเกณฑ์ตัดสินใจเพียงอย่างเดียว

15) (ระดับ ปานกลาง) นายเออายุ 35 ปีต้องการรับเงินปลายปีปีละ 50,000 บาท เริ่มปลายปีที่ที่มีอายุ 36 ปีและจ่ายได้ถึงอายุ 79 ปี จงหามูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังและเบี้ยสุทธิครั้งเดียว

16) (ระดับ ปานกลาง) กำหนดกำลังดอกเบี้ยแปรตามเวลา

$$\delta(t) = \frac{1}{t+2}, \quad t \geq 0$$

จงหา

- (a) ฟังก์ชันส่วนลดจากเวลา 0 ถึง n
- (b) มูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาทที่จะได้รับ ณ เวลา n
- (c) อัตราดอกเบี้ยแท้จริงคงที่ต่อปีที่เทียบเท่าสำหรับช่วงเวลา 0 ถึง n

17) (ระดับ ง่าย) ใช้ตารางชีพหาค่าต่อไปนี้

- (a) p_{25} และ q_{35}

- (b) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 อยู่รอดถึงอายุ 65
- (c) ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 เสียชีวิตก่อนอายุ 70
- (d) q_{60}
- (e) $5|q_{45}$

18) (ระดับ ปานกลาง) นายเอและนายบีอายุ 37 และ 25 ปีตามลำดับ จงหาในช่วง 20 ปีข้างหน้า

- (a) เออยู่รอด แต่บีเสียชีวิต
- (b) บีอยู่รอด แต่เอเสียชีวิต
- (c) ทั้งสองอยู่รอด
- (d) อย่างน้อยหนึ่งคนอยู่รอด
- (e) ทั้งสองเสียชีวิต

19) (ระดับ ง่าย) กำหนด

$$f_0(t) = 0.8e^{-0.8t}, \quad t \geq 0$$

จงหา $S_0(t)$ กำลังมรณะ μ_t และความน่าจะเป็นที่เสียชีวิตระหว่างอายุ 38 กับ 45 ปี

20) (ระดับ ปานกลาง) ณ อายุ 60 ปี บริษัทเสนอ

- แบบ A: จ่ายปลายปีปีละ 20,000 บาท ไม่เกิน 15 ปี
- แบบ B: จ่ายปลายปีปีละ 20,000 บาท ถึงอายุ 79 ปี โดยหยุดจ่ายเมื่อเสียชีวิต

ใช้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี

- (a) จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวังของทั้งสองแบบโดยตรงจาก l_x
- (b) จงอธิบายว่าเหตุใดแบบ B จึงมีมูลค่าไม่น้อยกว่าแบบ A
- (c) วิเคราะห์ว่าการเปรียบเทียบด้วยอายุขัยเฉลี่ยเพียงค่าเดียวมีข้อจำกัดอย่างไร

21) (ระดับ ยาก) นายบีอายุ 40 ปี ต้องการรับเงินต้นปีปีละ 100,000 บาท ตั้งแต่อายุครบ 65 ปีถึงอายุ 79 ปี ใช้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปี และชำระเงินออมต้นปีปีละเท่ากันตั้งแต่อายุ 40 ถึง 64 ปี จงหาเงินออมรายปีโดยคำนวณจาก l_x โดยตรง

22) (ระดับ ยาก) สำหรับผู้เอาประกันอายุ 60 ปี ให้สถานการณ์ฐานใช้ q_x จากตาราง และสถานการณ์อายุยืนกำหนด

$$q_x^{(L)} = 0.8q_x, \quad x = 60, \dots, 78,$$

จากนั้นสร้างความน่าจะเป็นการอยู่รอดใหม่แบบเวียนเกิด

$${}_{k+1}p_{60}^{(L)} = {}_kp_{60}^{(L)}(1 - q_{60+k}^{(L)}), \quad {}_0p_{60}^{(L)} = 1$$

สำหรับค่ารายงวดชีวิตปลายงวดปีละ 80,000 บาทจนถึงอายุ 79 ปี

- เปรียบเทียบ EPV ที่อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 และ 5 ภายใต้สถานการณ์ฐาน
- เปรียบเทียบสถานการณ์ฐานกับสถานการณ์อายุยืนที่อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3
- อภิปรายผลต่อการตั้งสำรองและเงินกองทุน

- 23) **(ระดับ ยาก)** บริษัทออกผลิตภัณฑ์สำหรับผู้มีอายุ 45 ปี จ่ายปลายปีปีละ 60,000 บาท เป็นเวลา 20 ปี ตราบเท่าที่ผู้เอาประกันยังมีชีวิตอยู่ ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ $k + 1$ หลังเริ่มสัญญา โดย $k = 0, \dots, 19$ บริษัทจ่าย ณ ปลายปีที่เสียชีวิต เป็นเงินรับประกันเท่ากับยอดรายงวดที่เหลือ

$$60,000(20 - k)$$

- เขียนตัวแปรมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ทั้งหมด โดยระบุให้ชัดว่ารายงวดที่จ่ายก่อนเสียชีวิตนับอย่างไร
 - สร้างสูตรเบี้ยสุทธิครั้งเดียว โดยแยกผลประโยชน์รายงวดขณะมีชีวิตและผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต
 - ถ้าบริษัทเพิ่มส่วนเผื่อความเสี่ยงร้อยละ 10 ของ EPV จงเขียนสูตรเบี้ยที่เรียกเก็บก่อนรวมค่าใช้จ่าย
 - อธิบายความเสี่ยงจากการรับประกันยอดคงเหลือ และตรวจสอบว่ามีการนับผลประโยชน์ซ้ำหรือไม่
- 24) **(ระดับ ปานกลาง)** ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดจ่ายรายเดือน ปีละ 12 ครั้ง งวดละ $1/12$ บาท
- เขียนสูตร $\ddot{a}_x^{(12)}$ โดยใช้ความน่าจะเป็นการอยู่รอดรายเดือน
 - แสดงว่า $\ddot{a}_x^{(12)} - a_x^{(12)} = 1/12$
 - อธิบายว่าเหตุใดต้องกำหนดสมมติฐานการตายภายในปี เมื่อมีเพียงตารางชีพรายปี
- 25) **(ระดับ ยาก)** บริษัทกำหนดเบี้ยประกันขึ้นต้นจากผลประโยชน์ที่มี EPV 500,000 บาท ค่าใช้จ่ายเริ่มต้น 20,000 บาท ค่าใช้จ่ายแปรผันเท่ากับร้อยละ 5 ของเบี้ยแต่ละงวด และส่วนเผื่อความเสี่ยงเท่ากับร้อยละ 8 ของ EPV ผลประโยชน์ ผู้เอาประกันอายุ 40 ปีและชำระเบี้ยต้นปีไม่เกิน 10 ปี

- (a) จงสร้างสมการมูลค่าสำหรับเบี้ยขั้นต้นรายปี G
- (b) จงหา G โดยใช้ $\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$
- (c) เปรียบเทียบ G กับเบี้ยสุทธิรายปี และอธิบายส่วนต่าง

บทที่ 9 การประยุกต์ คณิตศาสตร์ การเงิน กับ การกำหนด เบี้ยประกันภัย

เนื้อหาประกอบด้วย

1. พื้นฐานการประกันภัย มูลค่าปัจจุบันสุทธิ และอัตราผลตอบแทนภายใน
2. ตัวแบบกระแสเงินสด Myers–Cohn และเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม
3. การแยกรายได้ ฐานเงินทุน อัตราผลตอบแทน และการวิเคราะห์ความไว
4. พื้นฐานและตัวแบบกระแสเงินสดของการประกันภัยต่อ
5. การประยุกต์ Myers–Cohn กับ การประกันภัยต่อและการบริหารเงินทุน

บทนำ

การกำหนดเบี้ยประกันภัยเป็นกระบวนการประมาณราคาของการโอนความเสี่ยงในอนาคต เบี้ยประกันที่เหมาะสมต้องเพียงพอสำหรับค่าสินไหมทดแทนและค่าใช้จ่าย สะท้อนถึงระยะเวลาของกระแสเงินสด ภาษี รายได้จากการลงทุน และต้นทุนเงินทุน พร้อมทั้งไม่ทำให้ผู้เอาประกันภัยกลุ่มหนึ่งอุดหนุนอีกกลุ่มหนึ่งอย่างไม่สมเหตุสมผล ในทางปฏิบัติ การกำหนดราคาเริ่มจากการประมาณความถี่และความรุนแรงของความเสียหาย แล้วจึงปรับด้วยค่าใช้จ่าย กำไร ความไม่แน่นอน และข้อกำหนดด้านเงินกองทุน

บทนี้มุ่งเน้นมิติทางการเงินของการกำหนดราคา โดยใช้การวิเคราะห์กระแสเงินสดคิดลด (Discounted Cash Flow: DCF) เป็นแกนกลาง เริ่มจากมูลค่าปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value: NPV) และอัตราผลตอบแทนภายใน (Internal Rate of Return: IRR) ก่อนพัฒนาไปสู่ตัวแบบ Myers–Cohn ซึ่งประเมินเบี้ยประกันภัยจากมูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมและค่าใช้จ่าย ภาษีจากผลการรับประกันภัย และภาษีจากรายได้ของยอดเงินที่นำไปลงทุนได้ จากนั้นขยายกรอบไปสู่การประกันภัยต่อทั้งแบบตามสัดส่วนและไม่เป็นสัดส่วน เพื่อวิเคราะห์ผลต่อค่าสินไหมสุทธิ เบี้ยประกันภัยต่อ ความเสี่ยงส่วนหาง เงินทุน และมูลค่าทางเศรษฐกิจของบริษัทผู้โอนความเสี่ยง

ข้อสังเกต

ตัวแบบ Myers-Cohn พัฒนาขึ้นสำหรับการกำหนดราคาและการกำกับอัตรา ของการประกันวินาศภัย หรือประกันทรัพย์สินและความรับผิด จึงไม่ใช่ตัวแบบทดแทนคณิตศาสตร์ประกันชีวิตในบทที่ 8 โดยตรง อย่างไรก็ตาม หลักการคิดลดกระแสเงินสดหลังภาษี การแยกเงินกองทุนผู้ถือกรรมธรรม์ และการกำหนดผลตอบแทนที่ผู้ถือหุ้นต้องการ สามารถประยุกต์กับผลิตภัณฑ์ประกันประเภทอื่นได้เมื่อปรับสมมติฐานให้เหมาะสม

9.1 พื้นฐานการกำหนดเบี้ยประกันภัย มูลค่าปัจจุบันสุทธิ และอัตราผลตอบแทนภายใน

9.1.1 ความหมายและประเภทของการประกันภัย

การประกันภัยเป็นสัญญาโอนผลกระทบทางการเงินจากเหตุการณ์ไม่แน่นอน จากผู้เอาประกันภัยไปยังผู้รับประกันภัย แลกกับการชำระเบี้ยประกันภัย การแบ่งประเภทที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์กระแสเงินสดมีดังนี้

- 1) **การประกันชีวิตและเงินบำนาญ** กระแสเงินสดขึ้นกับการอยู่รอดหรือการเสียชีวิต และมักมีระยะเวลายาว การประเมินมูลค่าจึงอาศัยตารางชีพและมูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง
- 2) **การประกันวินาศภัย** ครอบคลุมทรัพย์สิน อุบัติเหตุ ความรับผิด สุขภาพบางประเภท และความเสี่ยงทางธุรกิจ โดยระยะเวลารับประกันมักสั้นกว่าระยะเวลาชำระสินไหม ทำให้เกิดเงินสำรองค่าสินไหมและยอดเงินที่นำไปลงทุนได้
- 3) **การประกันภัยต่อ** ผู้รับประกันภัยโอนความเสี่ยงบางส่วนให้ผู้รับประกันภัยต่อ กระแสเงินสดจึงต้องรวมเบี้ยประกันภัยต่อ ค่าสินไหมรับคืน ค่านายหน้า และผลของการลดเงินกองทุนที่ต้องดำรง

สำหรับการกำหนดราคาเชิงคณิตศาสตร์ ควรแยกคำสำคัญต่อไปนี้ให้ชัดเจน

บทนิยาม 9.1

ค่าสินไหมทดแทน (Claim Payment หรือ Loss Payment) คือจำนวนเงินที่ผู้รับประกันภัยจ่ายตามความคุ้มครองเมื่อเกิดเหตุที่อยู่ในเงื่อนไขสัญญา ส่วน **ค่าใช้จ่ายจัดการสินไหม** (Loss Adjustment Expense: LAE) คือค่าใช้จ่ายในการตรวจสอบ ประเมิน ต่อรอง และชำระค่าสินไหม

ผู้เอาประกันภัย (Policyholder หรือ Insured ในกรณีที่เป็นบุคคลเดียวกัน) คือคู่สัญญาหรือบุคคลที่มีสิทธิตามกรมธรรม์ ส่วน **ผู้รับประกันภัย** (Insurer) คือบริษัทที่รับภาระชดใช้ตามสัญญา

9.1.2 สมการพื้นฐานของการกำหนดอัตรา

ในรูปเชิงคำอธิบาย สมการพื้นฐานของการกำหนดอัตราสามารถเขียนได้ว่า

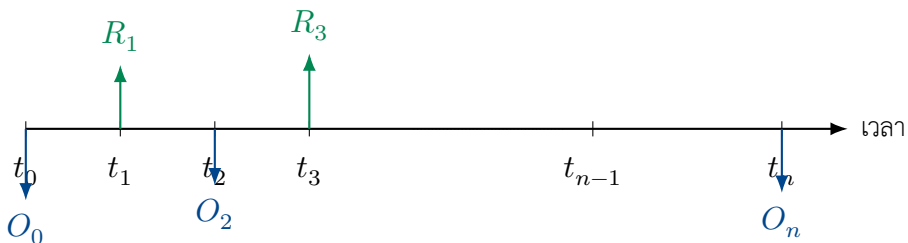
$$\begin{aligned} \text{เบี้ยประกันที่คาดหวัง} &= \text{ค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายจัดการสินไหม} \\ &+ \text{ค่าใช้จ่ายอื่น} + \text{ต้นทุนเงินทุนและส่วนเผื่อกำไร} \end{aligned} \quad (9.1)$$

สมการ (9.1) เป็นสมการเชิงเศรษฐศาสตร์ ไม่ใช่เพียงการบวกลบยอดบัญชี เพราะรายการแต่ละประเภทอาจเกิดคนละเวลา มีความเสี่ยงและภาพต่างกัน จึงต้องนำมาคิดลดด้วยอัตราที่เหมาะสม

ให้ R_k และ O_k แทนเงินสดรับและเงินสดจ่าย ณ เวลา t_k และกำหนดกระแสเงินสดสุทธิ

$$C_k = R_k - O_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (9.2)$$

โดยถือว่าเงินสดรับเป็นบวกและเงินสดจ่ายเป็นลบ



รูปที่ 9.1 ตัวอย่างแผนภาพเงินสดรับและเงินสดจ่ายในหลายช่วงเวลา

9.1.3 มูลค่าปัจจุบันสุทธิ

กำหนดอัตราผลตอบแทนที่ต้องการหรืออัตราคิดลด $i > -1$ และ $v = (1 + i)^{-1}$ มูลค่าปัจจุบันสุทธิของกระแสเงินสดคือ

$$\text{NPV}(i) = \sum_{k=0}^n C_k v^{t_k} = \sum_{k=0}^n R_k v^{t_k} - \sum_{k=0}^n O_k v^{t_k} \quad (9.3)$$

ถ้า $t_k = k$ จะได้

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{(1+i)^k} \quad (9.4)$$

อัตรา i อาจเป็นต้นทุนค่าเสียโอกาส ต้นทุนเงินทุนเฉลี่ย หรืออัตราผลตอบแทนที่ปรับความเสี่ยงแล้ว สิ่งสำคัญคือหน่วยเวลาของ i ต้องตรงกับหน่วยของ t_k และอัตราคิดลดต้องสะท้อนความเสี่ยงของกระแสเงินสดที่กำลังประเมิน

เกณฑ์ NPV

ภายใต้อัตราผลตอบแทนที่ต้องการ i

$NPV(i) > 0 \Rightarrow$ โครงการสร้างมูลค่าเพิ่ม,

$NPV(i) = 0 \Rightarrow$ อยู่ที่จุดคุ้มทุนเชิงมูลค่าปัจจุบัน,

$NPV(i) < 0 \Rightarrow$ โครงการให้ผลตอบแทนต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

สำหรับโครงการที่เลือกได้เพียงโครงการเดียวและมีความเสี่ยงเทียบเคียงกัน ควรเลือกโครงการที่มี NPV สูงสุด ไม่ใช่โครงการที่มี IRR สูงสุดเสมอไป

ตัวอย่าง 9.1. โครงการหนึ่งมีเงินลงทุนและเงินสดรับ หน่วยเป็นล้านบาท ดังตาราง

ปีที่	0	1	2	3	4	5	6	7	8
เงินลงทุน	10	2	0	2	0	2	0	2	0
เงินสดรับ	0	1	3	5	3	4	3	4	5
กระแสเงินสดสุทธิ	-10	-1	3	3	3	2	3	2	5

จงหา NPV เมื่ออัตราผลตอบแทนที่ต้องการเท่ากับร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ จากสมการ (9.4)

$$\begin{aligned} NPV(0.10) &= -10 - \frac{1}{1.10} + \frac{3}{1.10^2} + \frac{3}{1.10^3} + \frac{3}{1.10^4} + \frac{2}{1.10^5} \\ &\quad + \frac{3}{1.10^6} + \frac{2}{1.10^7} + \frac{5}{1.10^8} = 2.16735028 \text{ ล้านบาท} \end{aligned}$$

ดังนั้นโครงการสร้างมูลค่าเพิ่มประมาณ 2.17 ล้านบาท ณ อัตราผลตอบแทนที่ต้องการร้อยละ 10 ต่อปี $\square$

ตัวอย่าง 9.2. บริษัทมีเงินลงทุนได้เพียง 2 ล้านบาท และต้องเลือกหนึ่งในสามโครงการ

- โครงการ 1: $(-2, 0.6, 2.2)$ ล้านบาท ณ เวลา 0, 1, 2 ปี
- โครงการ 2: $(-2, 0, 2.85)$ ล้านบาท ณ เวลา 0, 1, 2 ปี
- โครงการ 3: จ่าย 1.5 ล้านบาท ณ เวลา 0 จ่ายเพิ่ม 0.5 ล้านบาท ณ เวลา 1 ปี และรับ 0.7 ล้านบาททุกสิ้นครึ่งปีเป็นเวลา 2 ปี

จงเปรียบเทียบ NPV ที่อัตราผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ สำหรับสองโครงการแรก

$$NPV_1 = -2 + 0.6(1.10)^{-1} + 2.2(1.10)^{-2} = 0.36363636,$$

$$NPV_2 = -2 + 2.85(1.10)^{-2} = 0.35537190$$

โครงการ 3 มีคาบครึ่งปี จึงใช้อัตราแท้จริงต่อครึ่งปี

$$j = (1.10)^{1/2} - 1 = 0.04880885$$

กระแสเงินสดสุทธิทุกครึ่งปีคือ $(-1.5, 0.7, 0.2, 0.7, 0.7)$ ล้านบาท ดังนั้น

$$\begin{aligned} NPV_3 &= -1.5 + 0.7(1+j)^{-1} + 0.2(1+j)^{-2} \\ &\quad + 0.7(1+j)^{-3} + 0.7(1+j)^{-4} \\ &= 0.53450331 \text{ ล้านบาท} \end{aligned}$$

ทุกโครงการมี NPV เป็นบวก แต่เมื่อเลือกได้เพียงโครงการเดียว ควรเลือกโครงการ 3 เพราะสร้างมูลค่าปัจจุบันสุทธิสูงสุด □

9.1.4 อัตราผลตอบแทนภายใน

บทนิยาม 9.2

อัตราผลตอบแทนภายในของกระแสเงินสด คือค่าราก $r > -1$ ของสมการ

$$f(r) = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{(1+r)^{t_k}} = 0 \quad (9.5)$$

ถ้ากระแสเงินสดเป็นงวดเท่ากัน $t_k = k$ ค่า r คืออัตราผลตอบแทนแท้จริงต้องวาด

ถ้ากระแสเงินสดมีการเปลี่ยนเครื่องหมายเพียงครั้งเดียว เช่น จ่ายเงินลงทุนก่อนแล้วจึงรับเงินในภายหลัง ฟังก์ชัน $f(r)$ มักลดลงอย่างต่อเนื่องและมีรากบวกได้ไม่เกินหนึ่งค่า แต่ถ้ากระแสเงินสดเปลี่ยนเครื่องหมายหลายครั้ง อาจมี IRR หลายค่า ไม่มีค่า หรือได้ค่าที่ไม่สอดคล้องกับการตัดสินใจ

ทฤษฎีบท 9.1

ให้ $C_0 < 0$ และ $C_k \geq 0$ สำหรับ $k = 1, \dots, n$ โดยมีอย่างน้อยหนึ่งค่า $C_k > 0$ ถ้า $\sum_{k=0}^n C_k > 0$ แล้วสมการ (9.5) มีรากบวกเพียงหนึ่งค่า

พิสูจน์ สำหรับ $r > -1$

$$f'(r) = - \sum_{k=1}^n \frac{kC_k}{(1+r)^{k+1}} < 0,$$

ดังนั้น f ลดลงอย่างเคร่งครัด นอกจากนี้ $f(0) = \sum_{k=0}^n C_k > 0$ และ $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = C_0 < 0$ ทฤษฎีบทค่าระหว่างจึงให้ว่ามีรากบวกหนึ่งค่า และความลดลงอย่างเคร่งครัดให้ว่ารากนั้นมีเพียงค่าเดียว $\square$

เกณฑ์ IRR ใช้ได้โดยเปรียบเทียบกับอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำ i_0 สำหรับกระแสเงินสดแบบปกติ

$$\text{IRR} > i_0 \iff \text{NPV}(i_0) > 0$$

อย่างไรก็ตาม เมื่อโครงการมีขนาดหรือจังหวะกระแสเงินสดต่างกัน การจัดอันดับด้วย IRR อาจขัดกับ NPV จึงควรใช้ NPV เป็นเกณฑ์หลักสำหรับโครงการที่ตัดกัน

9.1.5 การคำนวณ IRR ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

จากสมการ (9.5) ถ้า $t_k = k$ จะได้

$$f'(r) = - \sum_{k=1}^n \frac{kC_k}{(1+r)^{k+1}} \quad (9.6)$$

วิธีนิวตัน-ราฟสันกำหนดลำดับ

$$r_{m+1} = r_m - \frac{f(r_m)}{f'(r_m)} \quad (9.7)$$

ควรตรวจสอบว่า $r_m > -1$ อนุพันธ์ไม่ใกล้ศูนย์ และผลลัพธ์ทำให้ $|f(r_m)|$ เล็กตามเกณฑ์ที่กำหนด ในงานที่ต้องการความทนทานควรคร่อมรากก่อน แล้วใช้วิธีแบ่งครึ่งหรือ Brent แทนการฟิงนิวตัน-ราฟสันเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 9.3. จากตัวอย่างโครงการลงทุนสามโครงการก่อนหน้านี้ จงหา IRR และเปรียบเทียบกับอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำร้อยละ 10 ต่อปี

วิธีทำ แก่สมการมูลค่าปัจจุบันของแต่ละโครงการได้

$$IRR_1 = 0.20948101 = 20.9481\%, \quad IRR_2 = 0.19373364 = 19.3734\%.$$

สำหรับโครงการ 3 รากต่อครึ่งปีคือ $j^* = 0.18795011$ จึงเทียบเป็นอัตราแท้จริงต่อปีได้

$$IRR_3 = (1 + j^*)^2 - 1 = 0.41122547 = 41.1225\%$$

ทั้งสามโครงการผ่านเกณฑ์ร้อยละ 10 ต่อปี และในกรณีนี้ทั้ง NPV และ IRR จัดอันดับโครงการเหมือนกัน คือ โครงการ 3 โครงการ 1 และโครงการ 2 ตามลำดับ แต่ข้อสรุปดังกล่าวไม่ได้เป็นจริงสำหรับทุกชุดกระแสเงินสด

□

ตัวอย่าง 9.4. กรมธรรม์สองแบบมีเบี้ยจ่ายครั้งเดียว 100,000 บาท ณ เวลา 0 และผลประโยชน์ที่รับจริงตามตาราง

ปีที่ t	กรมธรรม์ 1	กรมธรรม์ 2
0	-100,000	-100,000
1	10,000	0
2	10,000	20,000
3	10,000	20,000
4	10,000	20,000
5	10,000	20,000
6	60,000	20,000

จงเปรียบเทียบผลตอบแทนภายในจากกระแสเงินสดที่กำหนด

วิธีทำ สมการของกรมธรรม์ 1 และ 2 คือ

$$0 = -100,000 + 10,000 \sum_{t=1}^5 (1+r)^{-t} + 60,000(1+r)^{-6},$$

$$0 = -100,000 + 20,000 \sum_{t=2}^6 (1+r)^{-t}$$

การแก้สมการให้ $IRR_1 = 2.091969\%$, $IRR_2 = 0.000000\%$

ดังนั้น หากพิจารณาเฉพาะกระแสเงินสดที่รับจริงตามตาราง กรมธรรม์ 1 มีผลตอบแทนภายในสูงกว่า แต่การเปรียบเทียบผลิตภัณฑ์ประกันชีวิตต้องรวมมูลค่าความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต สภาพคล่อง เงื่อนไขเวนคืนภาษี และความเสี่ยงเครดิตของผู้รับประกันภัยด้วย จึงไม่ควรใช้ IRR ของเงินคืนเพียงอย่างเดียวตัดสินคุณค่าของกรมธรรม์ □

สรุป NPV และ IRR

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^n C_k(1+i)^{-t_k}, \quad IRR = r \text{ ที่ทำให้ } NPV(r) = 0$$

- ใช้ NPV เป็นเกณฑ์หลักในการเลือกโครงการที่ตัดกัน
- ใช้ IRR เป็นตัวสื่อสารผลตอบแทน แต่ต้องตรวจจำนวนรากและหน่วยเวลา
- กระแสเงินสดหลายเครื่องหมายอาจทำให้ IRR หลายค่า จึงควรวิเคราะห์ NPV เป็นฟังก์ชันของอัตราคิดลดร่วมด้วย

9.2 ตัวแบบกระแสเงินสด Myers-Cohn และเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม

9.2.1 แนวคิดของเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม

ในกรอบการเงิน คำว่า **เบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม (Fair Premium)** ไม่ได้หมายความว่าเบี้ยต้องเท่ากับค่าคาดหวังของสินไหมเพียงอย่างเดียว แต่หมายถึงเบี้ยที่ทำให้มูลค่าปัจจุบันสุทธิของธุรกรรมประกันภัย หลังรวมค่าสินไหมค่าใช้จ่าย ภาษี รายได้จากการลงทุน และผลตอบแทนที่เหมาะสมต่อเงินทุน เท่ากับศูนย์ ณ วันประเมิน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ผู้ถือกรรมธรรม์จ่ายราคาที่ครอบคลุมต้นทุนเศรษฐกิจของการโอนความเสี่ยง ขณะที่ผู้ถือหุ้นได้รับผลตอบแทนที่สอดคล้องกับความเสี่ยงที่รับไว้

ตัวแบบ Myers-Cohn เริ่มจากเอกลักษณ์มูลค่าปัจจุบัน

$$\begin{aligned} PV(\text{เบี้ยประกัน}) = & PV(\text{ค่าสินไหมและค่าใช้จ่าย}) \\ & + PV(\text{ภาษีจากการรับประกัน}) + PV(\text{ภาษีจากยอดเงินลงทุน}) \end{aligned} \quad (9.8)$$

ถ้าเบี้ยรับทั้งหมด ณ เวลา 0 และใช้สัญลักษณ์ P แทนเบี้ย สมการพื้นฐานเขียนได้เป็น

$$P = PV(LE) + PV(UWPT) + PV(IBT), \quad (9.9)$$

โดย

- LE คือค่าสินไหม ค่าใช้จ่ายจัดการสินไหม และค่าใช้จ่ายอื่นที่เกี่ยวข้อง
- UWPT คือภาษีที่เกิดจากกำไรหรือขาดทุนจากการรับประกันภัย
- IBT คือภาษีจากรายได้ของยอดเงินที่นำไปลงทุนได้

ข้อสังเกต

สมการ (9.9) ไม่ได้กำหนดว่าองค์ประกอบทุกประเภทต้องใช้อัตราคิดลดเดียวกัน ค่าสินไหมควรใช้อัตราที่สะท้อนความเสี่ยงของค่าสินไหม ส่วนกระแสภาษีที่มีความเสี่ยงต่ำกว่าอาจใช้อัตราปราศจากความเสี่ยงหลังภาษี หรืออัตราที่เหมาะสมกับความเสี่ยงของภาษีนั่น การใช้อัตราเดียวกันทั้งสมการเป็นแบบจำลองย่อเพื่อการสอน ไม่ใช่ข้อบังคับของตัวแบบดั้งเดิม

9.2.2 สัญลักษณ์และจังหวะเวลาของกระแสเงินสด

ตารางต่อไปนี้จะสรุปสัญลักษณ์หลักของบท

ตารางที่ 9.1 สัญลักษณ์หลักในตัวแบบ Myers–Cohn

สัญลักษณ์	ความหมาย
P	เบี้ยประกันภัยที่รับ ณ เวลา 0
L_t	ค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายจัดการสินไหมที่จ่ายปลายคาบ t
E_t	ค่าใช้จ่ายอื่นที่จ่าย ณ เวลา t
T	อัตราภาษีเงินได้นิติบุคคลที่ใช้กับฐานภาษีในแบบจำลอง
R_b	อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนก่อนภาษีต่อคาบ
R_a	อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนหลังภาษีต่อคาบ โดยในกรณีง่าย $R_a = R_b(1 - T)$
i_L	อัตราคิดลดหลังภาษีที่ใช้กับค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายหลังปรับความเสี่ยง
i_T	อัตราคิดลดของกระแสภาษี
B_{t-1}	ยอดเงินที่นำไปลงทุนได้ในช่วงคาบ $t - 1$ ถึง t
S_{t-1}	เงินส่วนเกินหรือเงินทุนผู้ถือหุ้นที่จัดสรรให้สายธุรกิจในช่วงคาบ t
F	อัตราส่วนหนี้สินต่อเงินส่วนเกินที่กำหนด เช่น $F = L/S$ ในแบบย่อ

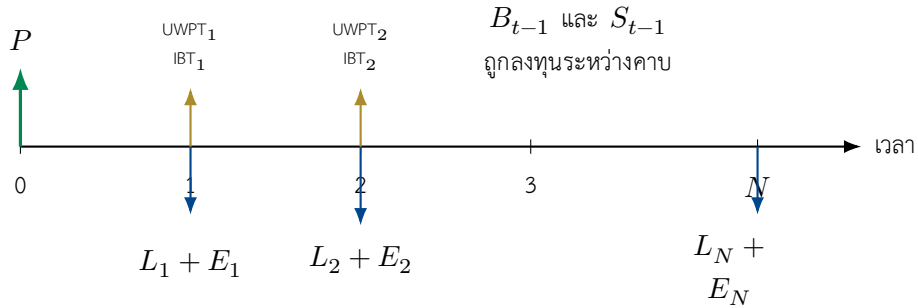
สำหรับแบบจำลอง N คาบ กำหนดจังหวะเวลาเพื่อการสอนดังนี้

MH1) เบี้ย P รับ ณ ต้นคาบแรกหรือเวลา 0

MH2) ค่าสินไหม L_t และค่าใช้จ่าย E_t จ่าย ณ เวลาที่ระบุอย่างชัดเจน ไม่จำเป็นต้องรวมอยู่ปลายคาบเดียวกันทั้งหมด

MH3) ภาษีเกิดขึ้นตามฐานภาษีและเวลาชำระภาษีที่กำหนด หากใช้ผลขาดทุนทางภาษีเป็นเครดิต ต้องระบุว่าบริษัทมีรายได้อื่นเพียงพอให้ใช้เครดิตได้ทันที

MH4) เงินส่วนเกิน S_{t-1} และเงินสำรองค่าสินไหมรวมอยู่ในยอดเงินที่นำไปลงทุนได้ B_{t-1} แต่ต้องหลีกเลี่ยงการนับเงินก้อนเดียวกันซ้ำ



รูปที่ 9.2 โครงสร้างเวลาของกระแสเงินสดในตัวแบบ Myers-Cohn แบบหลายคาบ

9.2.3 สมการทั่วไปแบบหลายคาบ

ให้ $v_L = (1 + i_L)^{-1}$ และ $v_T = (1 + i_T)^{-1}$ สมการมูลค่าปัจจุบันแบบหลายคาบเขียนได้เป็น

$$P = \sum_{t=0}^N (L_t + E_t) v_L^t + \sum_{t=0}^N \text{UWPT}_t v_T^t + \sum_{t=1}^N \text{IBT}_t v_T^t \quad (9.10)$$

ถ้าฐานภาษีจากการรับประกันภัย ณ เวลา t คือ U_t และฐานภาษีจากรายได้ลงทุนคือ $R_b B_{t-1}$ อาจกำหนด

$$\text{UWPT}_t = T U_t, \quad \text{IBT}_t = T R_b B_{t-1} \quad (9.11)$$

ในทางบัญชี U_t อาจไม่เท่ากับกระแสเงินสดสุทธิของคานานั้น เพราะการรับรู้เบี้ยและค่าสินไหมอาจใช้เกณฑ์คงค้าง รวมถึงมีเงินสำรอง เบี้ยรับล่วงหน้า ค่าใช้จ่ายรอการตัดบัญชี และข้อกำหนดภาษีเฉพาะประเทศ ดังนั้นสมการ (9.10) ต้องสร้างจากตารางเวลาของกระแสเงินสดและฐานภาษีที่ตรวจสอบได้

ถ้าบริษัทสามารถใช้ผลขาดทุนจากการรับประกันภัยลดภาษีจากรายได้อื่นได้ทันที UWPT_t อาจเป็นลบและทำหน้าที่เป็นเครดิตภาษี แต่ถ้าไม่สามารถใช้เครดิตได้ทันที ควรกำหนด

$$\text{UWPT}_t = T \max(U_t, 0) \quad (9.12)$$

หรือสร้างบัญชีสินทรัพย์ภาษีเงินได้รอการตัดบัญชีแยกต่างหาก ซึ่งทำให้สมการเบี้ยเป็นสมการไม่เชิงเส้นแบบแบ่งช่วง

9.2.4 แบบย่สองคาบที่ใช้ในบทนี้

เพื่อให้เห็นกลไกเชิงพีชคณิต พิจารณาแบบจำลองย่อดังนี้

- รับเบี้ย P ณ เวลา 0
- จ่ายภาระรวม $H = L + E$ ณ ปลายคาบที่ N
- รับรู้ภาษีจากผลการรับประกัน ณ เวลา N_T โดยฐานภาษีเท่ากับ $P - H$
- จัดสรรเงินส่วนเกินคงที่ $S = L/F$ ตั้งแต่แต่ละคาบ และได้รับผลตอบแทนก่อนภาษี $R_b S$ ปลายแต่ละคาบ
- ใช้อัตราคิดลด i กับภาระและภาษีจากการลงทุนในแบบย่อ และใช้อัตรา i_T กับภาษีจากการรับประกัน

มูลค่าปัจจุบันขององค์ประกอบต่าง ๆ คือ

$$PV(H) = H(1+i)^{-N}, \quad (9.13)$$

$$PV(UWPT) = T(P-H)(1+i_T)^{-N_T}, \quad (9.14)$$

$$PV(IBT) = TR_b S \sum_{t=1}^N (1+i)^{-t} \quad (9.15)$$

ให้

$$a_{\overline{N}|i} = \sum_{t=1}^N (1+i)^{-t} = \frac{1 - (1+i)^{-N}}{i}, \quad i \neq 0 \quad (9.16)$$

แทนสมการ (9.13)–(9.15) ในสมการ (9.9) ได้

$$P = H(1+i)^{-N} + T(P-H)(1+i_T)^{-N_T} + TR_b S a_{\overline{N}|i} \quad (9.17)$$

จึงแก้เบี้ยได้เป็น

$$P = \frac{H(1+i)^{-N} - TH(1+i_T)^{-N_T} + TR_b S a_{\overline{N}|i}}{1 - T(1+i_T)^{-N_T}}, \quad (9.18)$$

เมื่อส่วนหารไม่เท่ากับศูนย์

ข้อสังเกต

ในตัวอย่างต้นฉบับกำหนด $i = R_a - \lambda_L$ โดย λ_L เป็นค่าปรับความเสี่ยงหลังภาษีที่หักออกจากอัตราผลตอบแทนลงทุน นี่เป็นการกำหนดเชิงแบบจำลอง ไม่ใช่เอกลักษณ์ทั่วไป ในงานจริงต้องประมาณอัตราคิดลดจากความเสี่ยงของกระแสค่าสินไหม และทดสอบความไวต่อสมมติฐานอย่างเป็นระบบ

9.2.5 ตัวอย่างการคำนวณเบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม

ตัวอย่าง 9.5. พิจารณาแบบจำลอง 2 คาบ กำหนด

$$L = 1,000, \quad E = 0, \quad R_b = 0.10, \quad T = 0.35, \quad F = 4$$

ค่าสินไหมจ่ายปลายคาบที่ 2 อัตราผลตอบแทนหลังภาษีคือ

$$R_a = R_b(1 - T) = 0.065$$

กำหนดค่าปรับความเสี่ยงหลังภาษี $\lambda_L = 0.013$ จึงใช้อัตราคิดลดในแบบย่อ

$$i = R_a - \lambda_L = 0.052$$

ภาษีจากผลการรับประกันรับรู้ ณ เวลา $N_T = 0$ และบริษัทสามารถใช้เครดิตภาษีจากผลขาดทุนได้ทันที
จึงหาเบี้ยประกันภัยตามสมการ (9.18)

วิธีทำ เงินส่วนเกินที่จัดสรรคือ

$$S = \frac{L}{F} = \frac{1,000}{4} = 250 \text{ บาท}$$

มูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมเท่ากับ

$$PV(L) = 1,000(1.052)^{-2} = 903.58397548$$

ตัวประกอบค่ารายงวดคือ

$$a_{\overline{2}|0.052} = \frac{1 - (1.052)^{-2}}{0.052} = 1.85415432$$

ดังนั้น

$$PV(IBT) = (0.35)(0.10)(250)(1.85415432) = 16.22385028$$

และ

$$PV(UWPT) = 0.35(P - 1,000) = 0.35P - 350$$

สมการเบี้ยคือ

$$\begin{aligned} P &= 903.58397548 + (0.35P - 350) + 16.22385028, \\ 0.65P &= 569.80782576, \end{aligned}$$

จึงได้

$$P = 876.62742425 \text{ บาท}$$

หรือประมาณ 876.63 บาท



ข้อสังเกต

เบี้ย 876.63 บาทต่ำกว่าค่าสินไหมตามจำนวนเงิน 1,000 บาท เพราะค่าสินไหมจ่ายในอนาคตจึงมีมูลค่าปัจจุบันต่ำกว่า 1,000 บาท และผลขาดทุนจากการรับประกันตามฐานภาษี $P - L < 0$ ก่อให้เกิดเครดิตภาษีในแบบจำลอง ผลลัพธ์จะเปลี่ยนอย่างมีนัยสำคัญหากไม่อนุญาตให้ใช้เครดิตภาษีทันที หรือหากเพิ่มค่าใช้จ่ายและต้นทุนเงินทุนประเภทอื่น

9.2.6 ตัวอย่างเมื่อไม่ปรับความเสี่ยง

ตัวอย่าง 9.6. ใช้ข้อมูลเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ แต่ไม่หักค่าปรับความเสี่ยง จึงใช้อัตราคิดลด $i = R_a = 0.065$ จงหาเบี้ยประกันภัย

วิธีทำ

$$\begin{aligned} PV(L) &= 1,000(1.065)^{-2} = 881.65928277, \\ a_{\overline{2}|0.065} &= \frac{1 - (1.065)^{-2}}{0.065} = 1.82062642, \\ PV(IBT) &= (0.35)(0.10)(250)(1.82062642) = 15.93048117 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$P = 881.65928277 + (0.35P - 350) + 15.93048117,$$

$$P = 842.44579067 \text{ บาท}$$

เบี้ยในกรณีไม่ปรับความเสี่ยงต่ำกว่าเบี้ย 876.63 บาท เพราะใช้อัตราคิดลดค่าสินไหมสูงกว่า ทำให้มูลค่าปัจจุบันของภาระต่ำกว่า □

ขั้นตอนใช้ตัวแบบ Myers-Cohn

- 1) สร้างตารางเวลาเบี้ย ค่าสินไหม ค่าใช้จ่าย ภาษี และยอดเงินลงทุน
- 2) แยกอัตราคิดลดตามความเสี่ยงของกระแสเงินสดแต่ละประเภท
- 3) กำหนดฐานภาษีและเงื่อนไขการใช้เครดิตภาษีอย่างชัดเจน
- 4) คำนวณ $PV(LE)$, $PV(UWPT)$ และ $PV(IBM)$
- 5) แก้มการเบี้ย ซึ่งอาจเป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น
- 6) ตรวจสอบดุล $P - PV(LE) - PV(UWPT) - PV(IBM) = 0$ และวิเคราะห์ความไวต่ออัตราคิดลด ภาษี จังหวะสินไหม และเงินทุน

9.3 การวิเคราะห์รายได้ ผลตอบแทน และการนำตัวแบบไปใช้

9.3.1 การแยกองค์ประกอบของรายได้

ตัวแบบกระแสเงินสดช่วยแยกแหล่งที่มาของผลตอบแทนออกเป็นสามส่วน ได้แก่ ผลจากการรับประกันภัย ผลจากการลงทุนเงินกองทุนผู้ถือกรมธรรม์ และผลจากการลงทุนเงินส่วนเกินของผู้ถือหุ้น การแยกดังกล่าวสำคัญเพราะอัตราผลตอบแทนรวมที่ดี อาจเกิดจากผลการลงทุนชดเชยผลขาดทุนจากการรับประกัน ซึ่งมีนัยต่อคุณภาพการตั้งราคาและความยั่งยืนของสายธุรกิจ

สำหรับแบบย่อในหัวข้อ 9.2.4 กำหนดรายได้จากการรับประกันภัยหลังภาษี ณ เวลา 0 เป็น

$$PV(UI) = (P - H)(1 - T), \quad (9.19)$$

เมื่อ $H = L + E$ เป็นฐานค่าเสียหายและค่าใช้จ่ายที่หักภาษีได้ในแบบจำลอง ถ้าเวลารับรู้รายได้และค่าใช้จ่ายต่างจากเวลา 0 ต้องเขียน UI_t เป็นรายคาบแล้วคิดลดตามเวลาแทนสมการย่อข้างต้น

มูลค่าปัจจุบันสุทธิของรายได้จากการดำเนินงานนิยามโดย

$$NPV(OI) = PV(P) - PV(H) - PV(UWPT) \quad (9.20)$$

จากสมการ Myers–Cohn จะได้เอกลักษณ์

$$NPV(OI) = PV(IBT), \quad (9.21)$$

สำหรับเบี้ยที่ทำให้สมการมูลค่าปัจจุบันสมดุล เอกลักษณ์นี้เป็นผลของนิยามในแบบจำลอง ไม่ได้หมายความว่า รายได้จากการดำเนินงานทางบัญชีเท่ากับภาษีจากการลงทุนในทุกกรณี

เครดิตรายได้จากการลงทุนของเงินกองทุนผู้ถือกรรมสิทธิ์กำหนดเป็นส่วนต่าง

$$PV(PIIC) = NPV(OI) - PV(UI) \quad (9.22)$$

ส่วนเครดิตรายได้จากการลงทุนของเงินส่วนเกินคือ

$$PV(SIIC) = \sum_{t=1}^N R_a S_{t-1} (1 + i_S)^{-t} \quad (9.23)$$

ถ้า $S_{t-1} = S$ คงที่และ $i_S = i$

$$PV(SIIC) = R_a S a_{\overline{N}|i} \quad (9.24)$$

มูลค่าปัจจุบันสุทธิของรายได้รวมจึงเป็น

$$NPV(TI) = NPV(OI) + PV(SIIC) \quad (9.25)$$

9.3.2 ฐานเงินทุนและอัตราผลตอบแทน

การหารายได้ด้วยยอดเงิน ณ วันใดวันหนึ่งอาจทำให้อัตราผลตอบแทนบิดเบือน เมื่อเงินสำรองและเงินส่วนเกินถูกผูกไว้หลายคาบ จึงกำหนด **ฐานการใช้เงินทุนคิดลด** (discounted capital-exposure base) ของหนี้สินผู้ถือ

กรรมธรรม์และเงินส่วนเกินเป็น

$$\mathcal{B}_{PL} = \sum_{t=1}^N PL_{t-1}(1+i_B)^{-t}, \quad (9.26)$$

$$\mathcal{B}_S = \sum_{t=1}^N S_{t-1}(1+i_B)^{-t} \quad (9.27)$$

ถ้า $PL_{t-1} = L$ และ $S_{t-1} = S$ คงที่ จะได้ $\mathcal{B}_{PL} = La_{\overline{N}|i_B}$ และ $\mathcal{B}_S = Sa_{\overline{N}|i_B}$

อัตราผลตอบแทนเชิงมูลค่าปัจจุบันที่ใช้ในบทนี้คือ

$$UR = \frac{PV(UI)}{\mathcal{B}_{PL}}, \quad (9.28)$$

$$OR = \frac{NPV(OI)}{\mathcal{B}_{PL}}, \quad (9.29)$$

$$ROS = \frac{NPV(TI)}{\mathcal{B}_S} \quad (9.30)$$

ข้อสังเกต

UR, OR และ ROS ในสมการ (9.28)–(9.30) เป็นอัตราส่วนรายได้ต่อฐานการใช้เงินทุนคิดลดตามนิยามของบทนี้ ไม่ใช่ IRR ของกระแสเงินสดผู้ถือหุ้นโดยอัตโนมัติ หากต้องการผลตอบแทนผู้ถือหุ้นตามเวลา ต้องสร้างกระแสเงินสดเพิ่มทุน เงินปันผล การคืนทุน และมูลค่าคงเหลือ แล้วแก้สมการ IRR แยกต่างหาก

9.3.3 ตัวอย่างการคำนวณรายได้และผลตอบแทน

ตัวอย่าง 9.7. ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างในหัวข้อ 9.2.5 ซึ่งได้

$$P = 876.62742425, \quad L = 1,000, \quad T = 0.35,$$

$$R_a = 0.065, \quad i = 0.052, \quad S = 250$$

จึงคำนวณองค์ประกอบรายได้ ฐานการใช้เงินทุน และอัตราผลตอบแทน

วิธีทำ จากการคำนวณเดิม

$$\begin{aligned}PV(L) &= 903.58397548, \\PV(UWPT) &= 0.35(P - L) = -43.18040151, \\PV(IBT) &= 16.22385028, \\a_{\overline{2}|0.052} &= 1.85415432\end{aligned}$$

จึงได้ค่าตามตาราง 9.2

ตารางที่ 9.2 องค์ประกอบรายได้และอัตราผลตอบแทนเมื่อใช้อัตราคิดลดร้อยละ 5.2

รายการ	จำนวนเงินหรืออัตรา
$PV(UI) = (P - L)(1 - T)$	-80.19217424 บาท
$NPV(OI) = P - PV(L) - PV(UWPT)$	16.22385028 บาท
$PV(PIIC) = NPV(OI) - PV(UI)$	96.41602452 บาท
$PV(SIIC) = R_a Sa_{\overline{2} i}$	30.13000766 บาท
$NPV(TI) = NPV(OI) + PV(SIIC)$	46.35385794 บาท
$B_{PL} = La_{\overline{2} i}$	1,854.15431769 บาท-คาบ
$B_S = Sa_{\overline{2} i}$	463.53857942 บาท-คาบ
$UR = PV(UI)/B_{PL}$	-4.3250%
$OR = NPV(OI)/B_{PL}$	0.8750%
$ROS = NPV(TI)/B_S$	10.0000%

ผลการรับประกันภัยหลังภาษีเป็นลบ แต่เครดิตรายได้จากการลงทุนของเงินกองทุนผู้ถือกรรมธรรม์ ทำให้รายได้จากการดำเนินงานเป็นบวก และเมื่อรวมรายได้ลงทุนจากเงินส่วนเกินแล้ว อัตราผลตอบแทนต่อฐานเงินส่วนเกินเท่ากับร้อยละ 10 ตามอัตราผลตอบแทนก่อนภาษีที่ใช้สร้างแบบจำลอง □

9.3.4 ตารางเศรษฐกิจของยอดเงินลงทุน

เพื่อป้องกันความสับสนระหว่างกระแสเงินสดกับรายการบัญชี ตาราง 9.3 แสดงตารางเศรษฐกิจแบบย่อ สำหรับตัวอย่างข้างต้น โดยสมมติว่าเงินสำรองค่าสินไหม 1,000 บาท และเงินส่วนเกิน 250 บาทถูกจัดสรรเป็นฐาน

ลงทุนในแต่ละคาบ

ตารางที่ 9.3 ตารางเศรษฐกิจแบบย่อของฐานลงทุนและรายได้ต่อคาบ

รายการ	เวลา 0	ปลายคาบ 1	ปลายคาบ 2
เบี้ยประกันรับ	876.6274	–	–
เครดิตภาษีจากการรับประกัน	43.1804	–	–
เงินส่วนเกินที่จัดสรร	250.0000	250.0000	0
ฐานเงินสำรองค่าสินไหม	1,000.0000	1,000.0000	0 หลังชำระสินไหม
รายได้ลงทุนหลังภาษีจากเงินสำรอง	–	65.0000	65.0000
รายได้ลงทุนหลังภาษีจากเงินส่วนเกิน	–	16.2500	16.2500
ค่าสินไหมจ่าย	–	–	–1,000.0000

ตารางนี้แสดงฐานและรายได้ที่แบบจำลองกำหนด แต่ยังไม่ใช้บุคคลตามมาตรฐานการบัญชี เพราะไม่ได้แสดงการเคลื่อนไหวของเงินสำรอง เบี้ยรับรู้ สินทรัพย์ภาษี เงินปันผล และการคืนเงินทุนอย่างครบถ้วน หากต้องการจัดทำงบดุลและงบกำไรขาดทุนจริง ต้องกำหนดกฎการรับรู้รายการและสมการเปลี่ยนแปลงยอดคงเหลือทุกบัญชี ให้สินทรัพย์เท่ากับหนี้สินบวกส่วนของผู้ถือหุ้นในทุกเวลา

9.3.5 การเปรียบเทียบกรณีปรับและไม่ปรับความเสี่ยง

ตาราง 9.4 เปรียบเทียบผลลัพธ์สองกรณี โดยคงข้อมูลอื่นเท่าเดิม

ตารางที่ 9.4 ผลของการปรับความเสี่ยงต่อเบี้ยและอัตราผลตอบแทน

รายการ	ปรับความเสี่ยง $i = 5.2\%$	ไม่ปรับความเสี่ยง $i = 6.5\%$
$PV(L)$	903.5840	881.6593
$PV(IBT)$	16.2239	15.9305
เบี้ย P	876.6274	842.4458
$PV(UI)$	-80.1922	-102.4102
$NPV(OI)$	16.2239	15.9305
$PV(SIIC)$	30.1300	29.5852
UR	-4.3250%	-5.6250%
OR	0.8750%	0.8750%
ROS	10.0000%	10.0000%

ในแบบจำลองนี้ การลดอัตราคิดลดจากร้อยละ 6.5 เป็นร้อยละ 5.2 เพิ่มมูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมและทำให้เบี้ยสูงขึ้น ส่วน OR และ ROS คงที่เพราะโครงสร้างสมการถูกสร้างให้สอดคล้องกับ อัตราผลตอบแทนและฐานเงินทุนที่กำหนด จึงไม่ควรตีความความคงที่นี้เป็นข้อเท็จจริงเชิงประจักษ์ของธุรกิจประกันภัย

9.3.6 การวิเคราะห์ความไวและเงื่อนไขสำคัญ

สมการ (9.18) ช่วยวิเคราะห์ทิศทางของเบี้ยภายใต้แบบย่อได้

- 1) ค่าสินไหมและค่าใช้จ่าย เมื่อ H เพิ่ม เบี้ยเพิ่มโดยตรง ทั้งจากมูลค่าปัจจุบันของภาระ และจากการเปลี่ยนฐานภาษี
- 2) จังหวะการจ่ายสินไหม การเลื่อนการจ่ายออกไปลด $PV(H)$ เมื่ออัตราคิดลดเป็นบวก แต่ในแบบหลายคาบอาจเพิ่มระยะเวลาที่เงินสำรองถูกลงทุน จึงต้องพิจารณาผลสุทธิทั้งสองด้าน
- 3) อัตราคิดลด เมื่ออัตราคิดลดภาระลดลง มูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมสูงขึ้นและเบี้ยมีแนวโน้มเพิ่ม โดยเฉพาะสายธุรกิจที่ชำระสินไหมช้า
- 4) ภาษี ผลของ T ไม่จำเป็นต้องมีทิศทางเดียว เพราะภาษีเพิ่มทั้งภาษีจากรายได้ลงทุนและมูลค่าของเครดิตภาษีจากขาดทุนรับประกัน จึงต้องระบุข้อจำกัดการใช้เครดิตภาษีให้ชัดเจน
- 5) เงินส่วนเกินและอัตราส่วน F ในแบบย่อ $S = L/F$ และมีเฉพาะภาษีจากรายได้ลงทุนของส่วนเกิน

การลด S อาจทำให้เบี้ยที่คำนวณได้ลดลง แต่ข้อสรุปนี้เกิดจากแบบยอที่ยังไม่รวมต้นทุนเงินทุนและข้อจำกัดความมั่นคง จึงไม่ควรใช้สนับสนุนการดำรงเงินกองทุนต่ำกว่าระดับเหมาะสม

- 6) ค่าใช้จ่ายที่แปรตามเบี้ย ถ้า $E = eP + E_0$ สมการเบี้ยมี P ทั้งสองข้าง ต้องแก้สมการโดยตรวจว่า $1 - e$ และผลของภาษีไม่ทำให้ส่วนหารเป็นศูนย์หรือเป็นลบ

ตัวอย่าง 9.8. สมมติภาวะค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายคงที่ $H = 1,000$ บาท จ่ายปลายปีที่ 2 ไม่มีภาษีและไม่มีเงินส่วนเกิน จงเปรียบเทียบเบี้ยเมื่อใช้อัตราคิดลดร้อยละ 3, 5 และ 7

วิธีทำ ในกรณีนี้ $P = H(1 + i)^{-2}$ จึงได้

i	3%	5%	7%
P	942.60	907.03	873.44

อัตราคิดลดที่สูงขึ้นทำให้มูลค่าปัจจุบันของภาระลดลง แต่การเลือกอัตราที่สูงขึ้นโดยไม่มีเหตุผลทางความเสี่ยงจะทำให้เบี้ยต่ำเกินไปและเพิ่มความเสี่ยงความไม่เพียงพอของราคา □

9.3.7 การนำไปใช้จริงและการตรวจสอบแบบจำลอง

การใช้ตัวแบบ Myers-Cohn ในงานจริงควรดำเนินการอย่างน้อยดังนี้

- 1) ประเมินค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายจากข้อมูลที่ปรับแนวโน้ม ระดับอัตราปัจจุบัน การพัฒนาสินไหม และการเปลี่ยนส่วนผสมของพอร์ตแล้ว
- 2) กำหนดรูปแบบการรับเบี้ย การจ่ายสินไหม และการเกิดค่าใช้จ่ายเป็นรายเดือนหรือรายไตรมาส สำหรับสายธุรกิจที่จังหวะเวลาเป็นสาระสำคัญ
- 3) เชื่อมตารางกระแสเงินสดกับเงินสำรองและเงินทุนที่จัดสรร เพื่อไม่ให้เกิดการนับยอดเงินลงทุนซ้ำ
- 4) ใช้อัตราคิดลดที่มีเหตุผลเชิงเศรษฐศาสตร์ พร้อมเปิดเผยวิธีประมาณส่วนขาดเขยความเสียง
- 5) ตรวจสอบผลย้อนหลัง ทดสอบภาวะวิกฤต และวิเคราะห์ความไว ต่ออัตราเงินเพื่อค่าสินไหม อัตราดอกเบี้ย ภาษี ความล่าช้าในการชำระ และอัตราส่วนเงินกองทุน
- 6) แยกการประมาณต้นทุนจากการตัดสินใจเชิงพาณิชย์ เช่น ส่วนลดทางการตลาด การแข่งขัน และข้อจำกัดทางกฎหมาย เพื่อให้เห็นชัดว่าราคาที่เรียกเก็บต่างจากราคาที่แบบจำลองบ่งชี้เพราะเหตุใด

ข้อสังเกต

แบบจำลองกระแสเงินสดไม่ทดแทนแบบจำลองความถี่และความรุนแรงของสินไหม แต่เป็นชั้นการประเมินทางการเงินที่น่าผลลาคความหมายของสินไหม จังหวะการจ่าย ค่าใช้จ่าย ภาษี และเงินทุนมารวมในหน่วยมูลค่าปัจจุบันเดียวกัน คุณภาพของเบี้ยจึงขึ้นกับทั้งแบบจำลองสินไหมและแบบจำลองการเงิน

สรุปตัวแบบ Myers-Cohn และอัตราผลตอบแทน

$$P = PV(LE) + PV(UWPT) + PV(IBT),$$

$$NPV(OI) = PV(P) - PV(LE) - PV(UWPT),$$

$$NPV(TI) = NPV(OI) + PV(SIIC)$$

$$UR = \frac{PV(UI)}{\mathcal{B}_{PL}}, \quad OR = \frac{NPV(OI)}{\mathcal{B}_{PL}},$$

$$ROS = \frac{NPV(TI)}{\mathcal{B}_S}$$

หัวใจของการประยุกต์คือความสอดคล้องของจังหวะเวลา ฐานภาษี ยอดเงินลงทุน อัตราคิดลด และนิยามเงินทุน

9.4 พื้นฐานและตัวแบบกระแสเงินสดของการประกันภัยต่อ

9.4.1 บทบาทของการประกันภัยต่อและคำศัพท์สำคัญ

การประกันภัยต่อ (Reinsurance) คือสัญญาที่ผู้รับประกันภัยเดิม โอนความเสี่ยงบางส่วนหรือทั้งหมดจากธุรกิจประกันภัยที่ตนรับไว้ ให้แก่ผู้รับประกันภัยต่อ แลกกับการชำระเบี้ยประกันภัยต่อ บริษัทประกันภัยที่โอนความเสี่ยงเรียกว่า **บริษัทผู้เอาประกันภัยต่อ** หรือ **บริษัทผู้โอนความเสี่ยง** (Cedant หรือ Ceding Insurer) ส่วนบริษัทที่รับโอนความเสี่ยงเรียกว่า **ผู้รับประกันภัยต่อ** (Reinsurer)

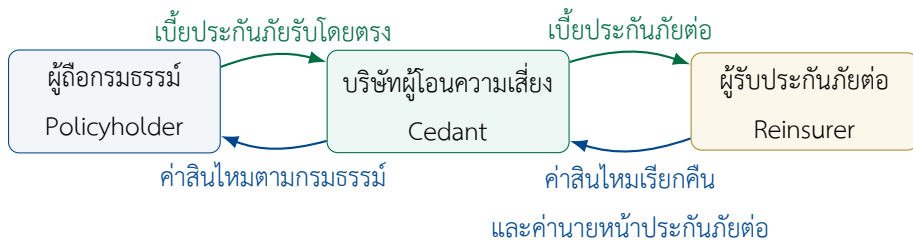
การประกันภัยต่อมีวัตถุประสงค์สำคัญ ได้แก่ การจำกัดความเสียหายต่อหนึ่งความเสี่ยงหรือหนึ่งเหตุการณ์ การลดความผันผวนของผลการรับประกันภัย การเพิ่มความสามารถในการรับประกันภัย การป้องกันความเสียหายจากภัยพิบัติ และการบริหารเงินทุนให้สอดคล้องกับระดับความเสี่ยงของกิจการ อย่างไรก็ตาม การประกันภัยต่อมิได้ทำให้ความเสี่ยงหายไปโดยไม่มีต้นทุน เพราะบริษัทผู้โอนต้องจ่ายเบี้ยประกันภัยต่อ และยังเผชิญความเสี่ยงด้านเครดิตและความล่าช้าในการเรียกคืนค่าสินไหม

บทนิยาม 9.3

ให้ $X \geq 0$ แทนค่าสินไหมรวมก่อนการประกันภัยต่อ (Gross Loss) ให้ $Y \geq 0$ แทนค่าสินไหมที่ผู้รับประกันภัยต่อรับผิดชอบ หรือค่าสินไหมเรียกคืนจากผู้รับประกันภัยต่อ (Ceded Loss หรือ Reinsurance Recovery) และให้ $Z \geq 0$ แทนค่าสินไหมที่บริษัทผู้โอนรับไว้เอง (Retained Loss หรือ Net Loss) ดังนั้น

$$X = Y + Z \quad (9.31)$$

ฟังก์ชัน $Y = g(X)$ เรียกว่า ฟังก์ชันค่าสินไหมที่โอน ส่วน $Z = X - g(X)$ เรียกว่า ฟังก์ชันค่าสินไหมที่รับไว้เอง



รูปที่ 9.3 โครงสร้างกระแสเงินสดระหว่างผู้ถือกรมธรรม์ บริษัทผู้โอนความเสี่ยง และผู้รับประกันภัยต่อ

9.4.2 การประกันภัยต่อตามสัดส่วน

การประกันภัยต่อตามสัดส่วน (Proportional Reinsurance) กำหนดให้เบี้ยและค่าสินไหมถูกแบ่งระหว่างบริษัทผู้โอนกับผู้รับประกันภัยต่อ ตามสัดส่วนเดียวกันหรือสัดส่วนที่คำนวณจากทุนประกันของแต่ละความเสี่ยง

9.4.2.1 สัญญาแบ่งส่วนคงที่

ในสัญญา Quota Share กำหนดสัดส่วนที่โอนเท่ากับ α โดย $0 \leq \alpha \leq 1$ ถ้า P_G คือเบี้ยประกันภัยรับโดยตรง และ X คือค่าสินไหมรวม จะได้

$$P_R = \alpha P_G, \quad (9.32)$$

$$Y = \alpha X, \quad (9.33)$$

$$Z = (1 - \alpha)X \quad (9.34)$$

เมื่อ P_R คือเบี้ยประกันภัยต่อ ถ้าผู้รับประกันภัยต่อจ่ายค่านายหน้าประกันภัยต่อในอัตรา c ของเบี้ยประกันภัยต่อ จะได้

$$C_R = cP_R = c\alpha P_G \quad (9.35)$$

ดังนั้นเบี้ยสุทธิที่บริษัทผู้โอนเหลือไว้ใช้รองรับความเสี่ยงและค่าใช้จ่ายคือ

$$P_N = P_G - P_R + C_R = P_G\{1 - \alpha(1 - c)\} \quad (9.36)$$

สมบัติของ Quota Share

ถ้า $Z = (1 - \alpha)X$ และ X มีโมเมนต์อันดับสอง จะได้

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= (1 - \alpha)\mathbb{E}[X], \\ \text{Var}(Z) &= (1 - \alpha)^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

นอกจากนี้ สำหรับ $q \in (0, 1)$ และนิยามควอนไทล์แบบซ้าย

$$\text{VaR}_q(Z) = (1 - \alpha) \text{VaR}_q(X), \quad \text{TVaR}_q(Z) = (1 - \alpha) \text{TVaR}_q(X)$$

จึงเห็นชัดว่า Quota Share ลดทั้งค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และมาตรวัดความเสี่ยงเชิงทางในสัดส่วนเดียวกัน แต่บริษัทผู้โอนต้องแบ่งเบี้ยในสัดส่วนเดียวกับค่าสินไหมด้วย

ตัวอย่าง 9.9. บริษัทประกันภัยรับเบี้ยประกันภัยโดยตรง 12 ล้านบาท มีค่าสินไหมเกิดขึ้น 8 ล้านบาท และมีค่าใช้จ่ายของบริษัท 2 ล้านบาท บริษัททำ Quota Share ร้อยละ 35 และได้รับค่านายหน้าประกันภัยต่อ ร้อยละ 25 ของเบี้ยที่โอน จงหากระแสเงินสดสุทธิที่เกี่ยวข้องกับการรับประกันภัย
วิธีทำ ให้ $\alpha = 0.35$ และ $c = 0.25$ จะได้

$$\begin{aligned} P_R &= 0.35(12) = 4.20 \text{ ล้านบาท}, \\ C_R &= 0.25(4.20) = 1.05 \text{ ล้านบาท}, \\ Y &= 0.35(8) = 2.80 \text{ ล้านบาท}, \\ Z &= 8 - 2.80 = 5.20 \text{ ล้านบาท} \end{aligned}$$

เบี้ยสุทธิหลังการประกันภัยต่อเท่ากับ

$$P_N = 12 - 4.20 + 1.05 = 8.85 \text{ ล้านบาท}$$

ผลการรับประกันภัยสุทธิหลังหักค่าใช้จ่ายจึงเป็น

$$8.85 - 5.20 - 2.00 = 1.65 \text{ ล้านบาท}$$

หากไม่มีการประกันภัยต่อ ผลการรับประกันภัยเท่ากับ $12 - 8 - 2 = 2$ ล้านบาท ส่วนต่าง 0.35 ล้านบาทสะท้อนต้นทุนสุทธิของสัญญาในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจริงนี้ ทั้งนี้ ในการตัดสินใจต้องพิจารณาประโยชน์จากการลดความผันผวนและเงินทุนประกอบด้วย $\square$

9.4.2.2 สัญญาส่วนเกิน

Surplus Share เป็นสัญญาตามสัดส่วนที่คำนวณสัดส่วนโอนแยกตามแต่ละความเสี่ยง ให้ $B > 0$ เป็นทุนประกันภัยของความเสี่ยงหนึ่ง ให้ $M > 0$ เป็นวงเงินรับไว้เองหรือหนึ่งไลน์ (Retained Line) และให้ m เป็นจำนวนไลน์สูงสุดที่ผู้รับประกันภัยต่อยอมรับ จำนวนทุนประกันที่โอนได้คือ

$$B_C = \min\{(B - M)_+, mM\}, \quad (x)_+ = \max(x, 0) \quad (9.37)$$

สัดส่วนที่โอนจึงเป็น

$$\alpha(B) = \frac{B_C}{B} = \frac{\min\{(B - M)_+, mM\}}{B} \quad (9.38)$$

ถ้าค่าสินไหมจากความเสียหายนั้นคือ X ผู้รับประกันภัยต่อรับผิดชอบ $Y = \alpha(B)X$ และบริษัทผู้โอนรับผิดชอบ $Z = \{1 - \alpha(B)\}X$

ข้อสังเกต

Surplus Share ไม่ใช่ Excess-of-Loss เพราะค่า M ใช้กำหนด สัดส่วน ของทุนประกันที่โอน หลังจากคำนวณสัดส่วนแล้ว ผู้รับประกันภัยต่อรับผิดชอบค่าสินไหมทุกขนาด ตามสัดส่วนนั้น มิใช่เฉพาะส่วนของค่าสินไหมที่เกิน M

ตัวอย่าง 9.10. บริษัทกำหนดวงเงินรับไว้เอง $M = 2$ ล้านบาท และมีสัญญาส่วนเกินสูงสุด $m = 3$ โฉนพิจารณาความเสี่ยงสามรายการดังตาราง

ทุนประกัน B	ค่าสินไหม X	สัดส่วนโอน $\alpha(B)$	ค่าสินไหมโอน Y	ค่าสินไหมรับไว้ Z
1.5	0.6	0%	0.0	0.6
5.0	1.0	60%	0.6	0.4
10.0	2.5	60%	1.5	1.0

หน่วยเป็นล้านบาท

สำหรับความเสี่ยงที่สอง จำนวนทุนประกันที่โอนคือ $\min(5 - 2, 6) = 3$ ล้านบาท จึงโอนร้อยละ $3/5 = 60\%$ สำหรับความเสี่ยงที่สาม บริษัทโอนได้สูงสุดเพียง 6 ล้านบาท แม้ว่าทุนประกันส่วนที่เกินวงเงินรับไว้เองจะเท่ากับ 8 ล้านบาท จึงโอนร้อยละ $6/10 = 60\%$ ผลลัพธ์แสดงให้เห็นบทบาทของจำนวนไลน์สูงสุดอย่างชัดเจน $\square$

9.4.3 การประกันภัยต่อแบบไม่เป็นสัดส่วน

การประกันภัยต่อแบบไม่เป็นสัดส่วน (Non-proportional Reinsurance) กำหนดความรับผิดชอบของผู้รับประกันภัยต่อจากระดับของค่าสินไหม โดยไม่ได้แบ่งเบี้ยและค่าสินไหมทุกจำนวนในสัดส่วนคงที่

9.4.3.1 Excess-of-Loss ต่อความเสียหายหนึ่งรายการหรือหนึ่งเหตุการณ์

ให้ $d \geq 0$ เป็นวงเงินรับไว้เอง (Retention หรือ Attachment Point) และ $u > 0$ เป็นขีดจำกัดของชั้นความคุ้มครอง (Limit) ค่าสินไหมที่ผู้รับประกันภัยต่อจ่ายคือ

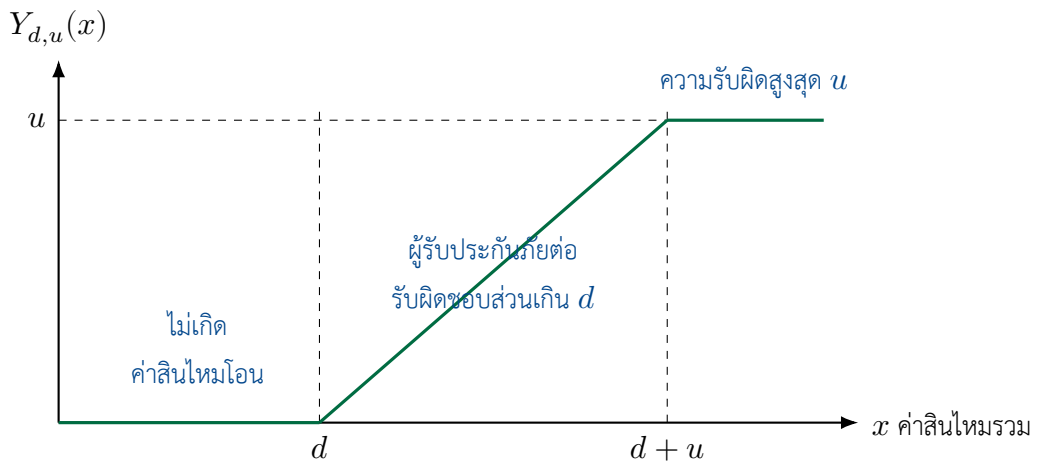
$$Y_{d,u}(X) = \min\{(X - d)_+, u\} = (X - d)_+ - (X - d - u)_+ \quad (9.39)$$

ส่วนค่าสินไหมที่บริษัทผู้โอนรับไว้คือ

$$Z_{d,u}(X) = X - Y_{d,u}(X) = \min(X, d) + (X - d - u)_+ \quad (9.40)$$

ในภาษาตลาด สัญญานี้เรียกว่า “ u เกิน d ” หรือ “ u xs d ”

$$Y_{d,u}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq d, \\ x - d, & d < x < d + u, \\ u, & x \geq d + u \end{cases} \quad (9.41)$$

รูปที่ 9.4 ฟังก์ชันค่าสินไหมของสัญญา Excess-of-Loss ชั้น u เกิน d

ตัวอย่าง 9.11. พิจารณาสัญญา Excess-of-Loss วงเงิน 500,000 บาท เกินวงเงินรับไว้เอง 300,000 บาท จงคำนวณค่าสินไหมโอนและค่าสินไหมรับไว้สำหรับค่าสินไหมแต่ละจำนวน

ค่าสินไหมรวม X	ค่าสินไหมโอน $Y_{300,000,500,000}(X)$	ค่าสินไหมรับไว้ Z
100,000	0	100,000
300,000	0	300,000
450,000	150,000	300,000
900,000	500,000	400,000
1,200,000	500,000	700,000

กรณีค่าสินไหม 1.2 ล้านบาท ผู้รับประกันภัยต่อจ่ายเต็มวงเงิน 0.5 ล้านบาท แต่ส่วนที่สูงกว่า $d + u = 0.8$ ล้านบาทกลับมาเป็นความรับผิดของบริษัทผู้โอน จึงไม่ควรเข้าใจว่าสัญญาแบบมีขีดจำกัดทำให้ค่าสินไหมรับไว้ถูกจำกัดที่ d □

9.4.3.2 Stop-Loss หรือ Aggregate Excess-of-Loss

ให้ $S = \sum_{j=1}^N X_j$ เป็นค่าสินไหมรวมของพอร์ตในช่วงเวลาที่กำหนด สัญญา Stop-Loss ที่มีวงเงินรับไว้รวม d_A และขีดจำกัด u_A จ่าย

$$Y_A = \min\{(S - d_A)_+, u_A\}, \quad Z_A = S - Y_A \quad (9.42)$$

สัญญาประเภทนี้ป้องกันผลรวมของความเสียหายตลอดปีหรือรอบบัญชี ต่างจาก Per-Risk หรือ Per-Occurrence Excess-of-Loss ซึ่งใช้กับค่าสินไหมรายความเสี่ยงหรือรายเหตุการณ์

ตัวอย่าง 9.12. ในปีหนึ่ง บริษัทมีค่าสินไหมรายเดือนที่สำคัญสี่ก้อนเท่ากับ 120,000, 250,000, 400,000 และ 700,000 บาท ทำ Stop-Loss วงเงิน 500,000 บาทเกินค่าสินไหมรวม 900,000 บาท ค่าสินไหมรวมคือ

$$S = 1,470,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น

$$Y_A = \min(1,470,000 - 900,000, 500,000) = 500,000 \text{ บาท}$$

และบริษัทรับไว้เอง

$$Z_A = 1,470,000 - 500,000 = 970,000 \text{ บาท}$$

วงเงินของสัญญาถูกใช้เต็มจำนวน เพราะส่วนเกินจาก 900,000 บาท เท่ากับ 570,000 บาท ซึ่งสูงกว่าขีดจำกัด 500,000 บาท □

9.4.4 ค่าคาดหวังของชั้นความคุ้มครองและหลักเบี้ยประกันภัยต่อ

ให้ $\bar{F}_X(x) = \Pr(X > x)$ เป็นฟังก์ชันการอยู่รอดของค่าสินไหม X สำหรับสัญญา Excess-of-Loss ตามสมการ (9.39) ใช้เอกลักษณ์อินทิกรัลทางจะได้

$$\mathbb{E}[Y_{d,u}(X)] = \int_d^{d+u} \bar{F}_X(x) \, dx \quad (9.43)$$

ถ้า $u = \infty$ จะได้สัญญา Stop-Loss แบบไม่มีขีดจำกัด

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] = \int_d^\infty \bar{F}_X(x) \, dx \quad (9.44)$$

และโมเมนต์อันดับสองของชั้นความคุ้มครองแบบมีขีดจำกัดคือ

$$\mathbb{E}[Y_{d,u}^2] = 2 \int_d^{d+u} (x - d) \bar{F}_X(x) \, dx \quad (9.45)$$

จึงคำนวณความแปรปรวนได้จาก $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \{\mathbb{E}[Y]\}^2$

หลักเบี้ยค่าคาดหมาย (Expected Value Premium Principle) กำหนดเบี้ยประกันภัยต่อเป็น

$$Q = (1 + \theta)\mathbb{E}[Y], \quad \theta > 0, \quad (9.46)$$

เมื่อ θ คืออัตราบรรทุกความเสี่ยงและค่าใช้จ่าย หลักนี้เหมาะสำหรับปูพื้นฐาน แต่การตั้งราคาในงานจริงยังต้องรวมค่าใช้จ่าย ค่านายหน้า ความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ ความเสี่ยงภัยพิบัติ ต้นทุนเงินทุน จังหวะการจ่ายสินไหมและความเสี่ยงด้านเครดิตของคู่สัญญา

ตัวอย่าง 9.13. ให้ค่าสินไหมรายความเสี่ยง X มีการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียล ที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 200,000$ บาท ดังนั้น $\bar{F}_X(x) = \exp(-x/\mu)$ บริษัทซื้อชั้นความคุ้มครอง 500,000 บาทเกิน 300,000 บาท และผู้รับประกันภัยต่อใช้อัตราบรรทุก $\theta = 25\%$ จงหาค่าสินไหมคาดหมายของชั้นและเบี้ยตามหลักค่าคาดหมาย

วิธีทำ จากสมการ (9.43)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_{300,000}^{800,000} \exp\left(-\frac{x}{200,000}\right) \, dx \\ &= 200,000 (e^{-1.5} - e^{-4}) \\ &= 40,962.90 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้นเบี้ยประกันภัยต่อคือ

$$Q = 1.25(40,962.90) = 51,203.63 \text{ บาท}$$

ค่าดังกล่าวเป็นเบี้ยทางเทคนิคตามหลักคำาคาดหมาย ยังไม่ใช่ราคาเสนอขายสุดท้ายหากมีค่าใช้จ่ายคงที่ ค่า
นายหน้า หรือผลตอบแทนเงินทุนของผู้รับประกันภัยต่อเพิ่มเติม □

9.4.5 ความเสี่ยงด้านเครดิตและเงื่อนไขสัญญา

แม้สมการพื้นฐานจะถือว่าค่าสินไหมโอน Y ได้รับคืนเต็มจำนวน แต่กระแสเงินสดที่เรียกเก็บได้จริงอาจต่ำกว่า
เนื่องจากการผิดนัด ข้อพิพาทด้านความคุ้มครอง ความล่าช้า หรือข้อกำหนดหลักประกัน ให้ $A \in [0, 1]$ เป็น
สัดส่วนที่เรียกเก็บได้จริง จะได้

$$\tilde{Y} = AY \quad (9.47)$$

ถ้า A เป็นอิสระจาก Y

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}] = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[Y] \quad (9.48)$$

แต่ในภาวะวิกฤต A และ Y อาจสัมพันธ์เชิงลบ เช่น ผู้รับประกันภัยต่อมีโอกาสผิดนัดสูงขึ้นในปีที่เกิดภัยพิบัติ
รุนแรง จึงไม่ควรใช้ผลคูณของค่าาคาดหมายโดยไม่มีการทดสอบสมมติฐาน

ข้อสังเกต

ก่อนใช้ตัวแบบ ต้องตรวจเงื่อนไขสัญญาอย่างน้อยเรื่องฐานความคุ้มครอง (Per-Risk, Per-Occurrence
หรือ Aggregate) การรวมค่าใช้จ่ายจัดการสินไหม ข้อจำกัดรายปี การเติมวงเงินกลับ (Reinstatement)
เบี้ยเพิ่มเติมตามประสบการณ์ ลำดับการใช้หลายชั้นความคุ้มครอง และจังหวะการชำระค่าสินไหมเรียกคืน
เพราะเงื่อนไขเหล่านี้เปลี่ยนทั้งฟังก์ชัน $Y = g(X)$ และกระแสเงินสดอย่างมีนัยสำคัญ

9.5 การประยุกต์ตัวแบบ Myers–Cohn กับการประกันภัยต่อและการบริหาร เงินทุน

9.5.1 กระแสเงินสดก่อนและหลังการประกันภัยต่อ

การนำการประกันภัยต่อเข้าสู่กรอบกระแสเงินสดคิดลด ต้องแยกรายการก่อนการประกันภัยต่อ (Gross) และ
หลังการประกันภัยต่อ (Net) อย่างชัดเจน เพื่อหลีกเลี่ยงการหักค่าสินไหมซ้ำหรือบันทึกเบี้ยประกันภัยต่อผิดเวลา
กำหนดให้

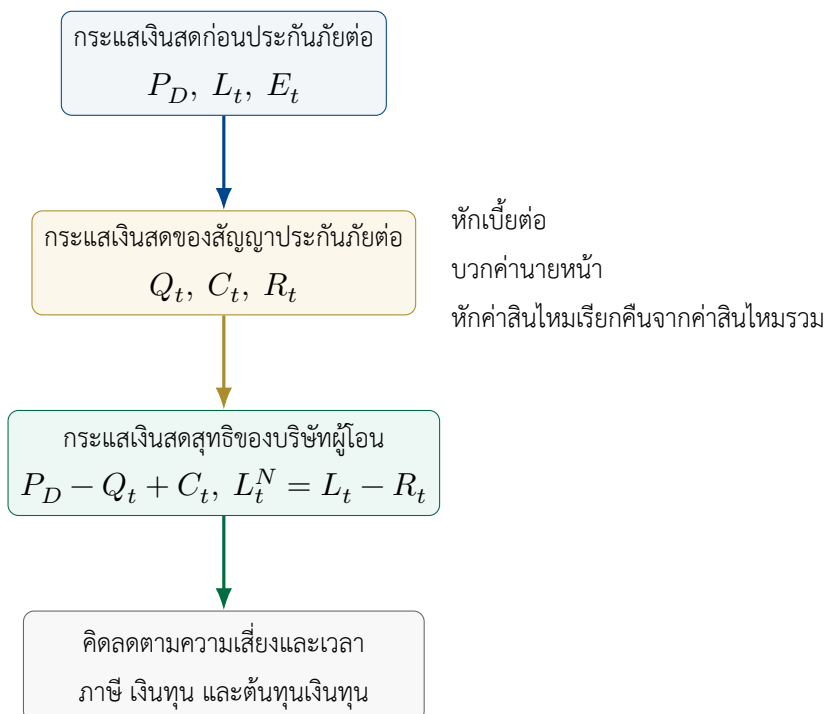
- P_D คือเบี้ยประกันภัยรับโดยตรงจากผู้ถือกรมธรรม์

- Q_t คือเบี้ยประกันภัยต่อที่จ่าย ณ เวลา t
- C_t คือค่านายหน้าหรือเงินชดเชยค่าใช้จ่ายจากผู้รับประกันภัยต่อ ณ เวลา t
- L_t คือค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายจัดการสินไหมก่อนการประกันภัยต่อ
- R_t คือค่าสินไหมเรียกคืนจากผู้รับประกันภัยต่อ
- $L_t^N = L_t - R_t$ คือค่าสินไหมสุทธิที่บริษัทผู้โอนรับไว้
- E_t^N คือค่าใช้จ่ายสุทธิอื่นหลังพิจารณาค่านายหน้าและการจัดสรรค่าใช้จ่ายแล้ว

ถ้าเบี้ยประกันภัยรับโดยตรงเกิด ณ เวลา 0 กระแสเงินสดสุทธิของบริษัทผู้โอน ณ เวลา t เขียนเชิงโครงสร้างได้เป็น

$$C_t^N = 1_{\{t=0\}}P_D - (L_t - R_t) - E_t^N - Q_t + C_t - ext_t \quad (9.49)$$

เครื่องหมายของทุกองค์ประกอบต้องยึดมุมมองเดียวกันตลอดทั้งแบบจำลอง ในบทนี้เงินสดรับเป็นบวกและเงินสดจ่ายเป็นลบ



รูปที่ 9.5 ลำดับการแปลงกระแสเงินสดก่อนประกันภัยต่อเป็นกระแสเงินสดสุทธิและมูลค่าทางเศรษฐกิจ

9.5.2 ส่วนขยายของสมการ Myers-Cohn

สมการในหัวข้อนี้เป็น ส่วนขยายเชิงการสอน ของกรอบกระแสนเงินสด Myers-Cohn มิใช่การอ้างว่าตัวแบบดั้งเดิม กำหนดรูปสัญญาประกันภัยต่อไว้โดยตรง ให้ $v_L = (1 + i_L)^{-1}$, $v_Q = (1 + i_Q)^{-1}$ และ $v_T = (1 + i_T)^{-1}$ แทนตัวประกอบส่วนลดของค่าสินไหมสุทธิ กระแสนเงินสดของสัญญาประกันภัยต่อ และภาษี ตามลำดับ เบี้ยรับโดยตรงที่สมดุลเชิงมูลค่าปัจจุบันเขียนได้เป็น

$$P_D = \sum_{t=0}^N (L_t - R_t + E_t^N) v_L^t + \sum_{t=0}^N (Q_t - C_t) v_Q^t + \sum_{t=0}^N \text{UWPT}_t^N v_T^t + \sum_{t=1}^N \text{IBT}_t^N v_T^t \quad (9.50)$$

โดย UWPT_t^N และ IBT_t^N ต้องคำนวณจากฐานภาษี และยอดเงินลงทุนหลังการประกันภัยต่อ

สมการ (9.50) สะท้อนหลักสำคัญสองประการ ประการแรก ค่าสินไหมเรียกคืน R_t ลดภาระค่าสินไหมสุทธิ แต่ต้องแลกกับเบี้ยประกันภัยต่อสุทธิ $Q_t - C_t$ ประการที่สอง การลดความเสี่ยงอาจเปลี่ยนเงินสำรอง เงินส่วนเกิน ที่จัดสรร รายได้ลงทุน และภาษี จึงไม่ควรประเมินสัญญาจากอัตราส่วนเบี้ยประกันภัยต่อต่อค่าสินไหมคาดหวัง เพียงอย่างเดียว

ข้อสังเกต

หาก Q_t หรือ C_t ถูกบันทึกรวมไว้ใน E_t^N แล้ว ห้ามนำมาบวกซ้ำในพจน์ $Q_t - C_t$ เช่นเดียวกัน ถ้า L_t เป็นค่าสินไหมสุทธิหลังการประกันภัยต่ออยู่แล้ว ห้ามหัก R_t อีกครั้ง การกำหนดพจนานุกรมข้อมูล และตรวจสอบ Gross-to-Net Reconciliation จึงเป็นขั้นตอนควบคุมแบบจำลองที่จำเป็น

9.5.3 แบบย่อสองคาบภายใต้ Quota Share

เพื่อเชื่อมกับตัวแบบสองคาบในหัวข้อ 9.2.4 กำหนดสมมติฐานต่อไปนี้

RQ1) รับเบี้ยประกันภัยโดยตรง P_D ณ เวลา 0

RQ2) ค่าสินไหมรวม L จ่ายปลายคาบที่ N และทำ Quota Share ในสัดส่วน α จึงมีค่าสินไหมสุทธิ $L^{\text{net}} = (1 - \alpha)L$

RQ3) จ่ายเบี้ยประกันภัยต่อ Q และรับค่านายหน้า $C = cQ$ ณ เวลา 0

RQ4) รับรู้ฐานภาษีจากการรับประกัน ณ เวลา 0 เป็น $P_D - Q + C - L^{\text{net}}$ และสามารถใช้จ่ายเครดิตภาษีได้ทันที

RQ5) จัดสรรเงินส่วนเกิน $S^{\text{net}} = L^{\text{net}}/F$ ตั้งแต่ละคาบ และคิดภาษีรายได้ลงทุนจากเงินส่วนเกินตามแบบย่อเดิม

ภายใต้สมมติฐานดังกล่าว สมการเบี้ยคือ

$$P_D = L^{\text{net}}(1+i)^{-N} + (Q - C) + T(P_D - Q + C - L^{\text{net}}) + TR_b S^{\text{net}} a_{\overline{N}|i} \quad (9.51)$$

แก้สมการได้

$$P_D = \frac{L^{\text{net}}(1+i)^{-N} - TL^{\text{net}} + TR_b S^{\text{net}} a_{\overline{N}|i}}{1-T} + (Q - C), \quad (9.52)$$

เมื่อ $T \neq 1$

ถ้ากำหนดเบี้ยประกันภัยต่อจากมูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมส่วนที่โอน ด้วยอัตราบรรทุก θ

$$Q = (1 + \theta)\alpha L(1 + i_Q)^{-N}, \quad (9.53)$$

ต้องระบุให้ชัดว่า i_Q เป็นอัตราที่ใช้ตั้งราคาให้ผู้รับประกันภัยต่อ ซึ่งอาจไม่เท่ากับ i ของค่าสินไหมสุทธิของบริษัทผู้โอน

ตัวอย่าง 9.14. ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างเบี้ยประกันภัย 876.63 บาทในหัวข้อก่อนหน้า กล่าวคือ

$$L = 1,000, \quad N = 2, \quad i = 0.052, \quad T = 0.35, \quad R_b = 0.10, \quad F = 4$$

บริษัททำ Quota Share ร้อยละ 40 ผู้รับประกันภัยต่อคิดอัตราบรรทุก 20% จากมูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมที่โอน และจ่ายค่านายหน้าร้อยละ 10 ของเบี้ยประกันภัยต่อ กำหนด $i_Q = i$ จงหาเบี้ยประกันภัยรับโดยตรงที่สมดุลตามแบบย่อ

วิธีทำ กำหนด $\alpha = 0.40$, $\theta = 0.20$ และ $c = 0.10$ ค่าสินไหมสุทธิและเงินส่วนเกินคือ

$$L^{\text{net}} = 0.60(1,000) = 600, \quad S^{\text{net}} = \frac{600}{4} = 150$$

มูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมสุทธิต่อเท่ากับ

$$600(1.052)^{-2} = 542.15038529$$

เบี้ยประกันภัยต่อและค่านายหน้าคือ

$$Q = 1.20(400)(1.052)^{-2} = 433.72030823,$$

$$C = 0.10Q = 43.37203082$$

ภาษีจากรายได้ลงทุนของเงินส่วนเกินมีมูลค่าปัจจุบัน

$$PV(\text{IBT}^{\text{net}}) = (0.35)(0.10)(150)a_{\overline{2}|0.052} = 9.73431017$$

แทนในสมการ (9.52)

$$\begin{aligned} P_D &= \frac{542.15038529 - 0.35(600) + 9.73431017}{0.65} + (433.72030823 - 43.37203082) \\ &= 916.32473196 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้นเบี้ยรับโดยตรงเพิ่มจากกรณีไม่มีการประกันภัยต่อ ประมาณ

$$916.32473196 - 876.62742425 = 39.69730771 \text{ บาท}$$

ผลเพิ่มเกิดจากอัตราบรรทุกของผู้รับประกันภัยต่อสูงกว่าประโยชน์จากค่านายหน้า และการลดฐานเงินส่วนเกินในแบบย่อ ตัวอย่างนี้แสดงว่า การประกันภัยต่ออาจเพิ่มเบี้ยที่ต้องเรียกเก็บ แม้จะลดความเสี่ยงและความต้องการเงินทุน □

9.5.4 การประเมินประโยชน์ทางเศรษฐกิจและต้นทุนเงินทุน

ตัวแบบ Myers–Cohn แบบย่อในบทนี้คำนวณภาษีจากรายได้ลงทุนของเงินส่วนเกิน แต่ยังไม่ได้ใส่ต้นทุนเงินทุนของผู้ถือหุ้นเป็นพจน์แยกโดยตรง เพื่อประเมินประโยชน์ของการประกันภัยต่ออย่างครบถ้วน สามารถขยายเป็นต้นทุนทางเศรษฐกิจดังนี้

ให้ $\mathcal{C}^0$ เป็นต้นทุนกรณีไม่มีการประกันภัยต่อ และ $\mathcal{C}^R$ เป็นต้นทุนกรณีมีการประกันภัยต่อ

$$\mathcal{C}^0 = \text{PV}(L + E) + \text{PV}(\text{Tax}^0) + \text{PV}(\text{CoC}(K^0)), \quad (9.54)$$

$$\mathcal{C}^R = \text{PV}(L - R + E) + \text{PV}(Q - C) + \text{PV}(\text{Tax}^R) \quad (9.55)$$

$$+ \text{PV}(\text{CoC}(K^R)) + \text{PV}(\text{Counterparty Cost}) \quad (9.56)$$

กำหนดมูลค่าทางเศรษฐกิจของการประกันภัยต่อจากมุมมองบริษัทผู้โอนเป็น

$$\Delta V_R = \mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^R \quad (9.57)$$

ถ้า $\Delta V_R > 0$ สัญญาลดต้นทุนทางเศรษฐกิจภายใต้สมมติฐานที่ใช้ ถ้า $\Delta V_R < 0$ ต้นทุนของสัญญาสูงกว่าประโยชน์ที่วัดได้

ตัวอย่างหนึ่งของกฎเงินทุนเชิงความเสี่ยงคือ

$$K(W) = \max\{\text{TVaR}_q(W) - \mathbb{E}[W], 0\}, \quad (9.58)$$

และถ้าอัตราต้นทุนเงินทุนต่อปีเท่ากับ k ต้นทุนเงินทุนหนึ่งปีที่จ่ายปลายปีมีมูลค่าปัจจุบัน

$$\text{PV}(\text{CoC}(K)) = \frac{kK}{1 + i_c} \quad (9.59)$$

กฎนี้เป็นแบบจำลองเพื่อการวิเคราะห์ มิใช่สูตรเงินกองทุนตามกฎหมาย

บทนิยาม 9.4

สำหรับตัวแปรสุ่มความเสียหาย W และระดับ $q \in (0, 1)$ กำหนด

$$\text{VaR}_q(W) = \inf\{w : F_W(w) \geq q\}$$

และ

$$\text{TVaR}_q(W) = \frac{1}{1 - q} \int_q^1 \text{VaR}_p(W) \, dp$$

นิยามแบบอินทิกรัลควอนไทล์ใช้ได้กับการแจกแจงไม่ต่อเนื่อง และหลีกเลี่ยงความกำกวมที่จุดซึ่งมีมวลความน่าจะเป็น

9.5.5 ตัวอย่างเปรียบเทียบไม่มีประกันภัยต่อ Quota Share และ Excess-of-Loss

ตัวอย่าง 9.15. พิจารณาค่าสินไหมรวมหนึ่งปี S หน่วยเป็นพันบาท มีการแจกแจงดังนี้

S	0	200	500	1,000
ความน่าจะเป็น	0.50	0.30	0.15	0.05

บริษัทเปรียบเทียบสามทางเลือก

- (i) ไม่มีการประกันภัยต่อ
- (ii) Quota Share ร้อยละ 40 โดยผู้รับประกันภัยต่อคิดเบี้ย 1.25 เท่าของค่าสินไหมคาดหวังที่โอน และจ่ายค่านายหน้าร้อยละ 10 ของเบี้ยประกันภัยต่อ
- (iii) Excess-of-Loss วงเงิน 500 เกิน 300 โดยคิดเบี้ย 1.30 เท่าของค่าสินไหมคาดหวังที่โอน และไม่มีค่านายหน้า

กำหนด $q = 0.95$, อัตราต้นทุนเงินทุน $k = 6\%$ และอัตราคิดลดหนึ่งปี $i_c = 4\%$ ไม่พิจารณาภาษีเพื่อให้เห็นผลของการประกันภัยต่อและเงินทุนโดยตรง

วิธีทำ ค่าสินไหมคาดหวังก่อนการประกันภัยต่อคือ

$$E[S] = 0.30(200) + 0.15(500) + 0.05(1,000) = 185$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นร้อยละ 5 สูงสุดอยู่ที่ค่าสินไหม 1,000 จึงได้ $\text{TVaR}_{0.95}(S) = 1,000$ และเงินทุนตามสมการ (9.58) เท่ากับ 815

สำหรับ Quota Share ค่าสินไหมสุทธิคือ $0.6S$ จึงมีค่าเฉลี่ย 111, $\text{TVaR}_{0.95} = 600$ และ $K = 489$ ค่าสินไหมที่โอนมีค่าเฉลี่ย 74 เบี้ยประกันภัยต่อเท่ากับ $1.25(74) = 92.50$ และค่านายหน้าเท่ากับ 9.25

สำหรับ Excess-of-Loss ค่าสินไหมโอนตามแต่ละสถานการณ์คือ

$$(0, 0, 200, 500)$$

และค่าสินไหมสุทธิคือ

$$(0, 200, 300, 500)$$

จึงได้ $E[R] = 55$, $E[S - R] = 130$ $\text{TVaR}_{0.95}(S - R) = 500$ และ $K = 370$ เบี้ยประกัน

ภัยต่อเท่ากับ $1.30(55) = 71.50$

ผลการคำนวณสรุปได้ดังตาราง

รายการ	ไม่มีประกันภัยต่อ	Quota Share	Excess-of-Loss
$\mathbb{E}[\text{ค่าสินไหมสุทธิ}]$	185.0000	111.0000	130.0000
$\text{TVaR}_{0.95}$	1,000.0000	600.0000	500.0000
เงินทุน K	815.0000	489.0000	370.0000
เบี้ยต่อสุทธิจากค่านายหน้า	0.0000	83.2500	71.5000
PV ค่าสินไหมสุทธิ	177.8846	106.7308	125.0000
PV ต้นทุนเงินทุน	47.0192	28.2115	21.3462
ต้นทุนทางเศรษฐกิจ C	224.9038	218.1923	217.8462
ΔV_R	0.0000	6.7115	7.0577

หน่วยเป็นพันบาท

ภายใต้กฎเงินทุนและสมมติฐานที่กำหนด ทั้งสองสัญญาสร้างมูลค่าทางเศรษฐกิจเป็นบวก โดย Excess-of-Loss ให้ ΔV_R สูงกว่าเล็กน้อย เพราะป้องกันสถานการณ์ส่วนทางได้ตรงเป้าหมายมากกว่า อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์นี้ไม่ใช่ข้อสรุปทั่วไป เพราะจะเปลี่ยนตามราคา ค่านายหน้า การแจกแจงค่าสินไหม ระดับ q ต้นทุนเงินทุน และความเสี่ยงด้านเครดิต $\square$

9.5.6 การเลือกวงเงินรับไว้เองที่เหมาะสม

ให้ d เป็นวงเงินรับไว้เองของสัญญา Excess-of-Loss และให้ Z_d เป็นค่าสินไหมสุทธิหลังการประกันภัยต่อ การเลือก d ไม่ควรพิจารณาเฉพาะเบี้ยประกันภัยต่อ เพราะการเพิ่ม d ลดเบี้ยต่อแต่เพิ่มความเสี่ยงและเงินทุน กรอบการตัดสินใจหนึ่งคือ

$$d^* = \arg \min_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \text{PV}(\mathbb{E}[Z_d]) + \text{PV}(Q_d - C_d) + \text{PV}(\text{CoC}(K_d)) + \text{PV}(\text{Tax}_d) + \text{PV}(\text{Counterparty Cost}_d) \right\} \quad (9.60)$$

ภายใต้ข้อจำกัด เช่น

$$\text{TVaR}_q(Z_d) \leq K_{\max}, \quad \Pr(Z_d > A_{\max}) \leq \varepsilon \quad (9.61)$$

เซต $\mathcal{D}$ ควรสะท้อนชั้นความคุ้มครองที่ซื้อได้จริง ข้อจำกัดด้านงบประมาณ ความเสี่ยงกระจุกตัว และความสามารถในการเรียกเก็บค่าสินไหมจากคู่สัญญา

ข้อสังเกต

การหาค่าเหมาะที่สุดมีความไวต่อแบบจำลองส่วนทางอย่างมาก โดยเฉพาะสัญญาภัยพิบัติหรือชั้นสูงที่มีข้อมูลน้อย จึงควรใช้หลายการแจกแจง ทดสอบพารามิเตอร์ จำลองเหตุการณ์รุนแรง และรายงานช่วงผลลัพธ์ แทนการนำเสนอค่า d^* เพียงค่าเดียวโดยไม่มีความไม่แน่นอน

9.5.7 ข้อจำกัดและแนวทางตรวจสอบแบบจำลอง

การใช้ตัวแบบกระแสเงินสดกับการประกันภัยต่อควรตรวจสอบอย่างน้อยดังนี้

- 1) ตรวจสอบ Gross, Ceded และ Net ให้สอดคล้องกันทุกตาราง และตรวจเอกลักษณ์ $X = Y + Z$ รายเหตุการณ์และรายพอร์ต
- 2) ตรวจสอบเขตสัญญา เช่น Per-Risk, Per-Occurrence, Aggregate วงเงินรับไว้ ชิดจำกัด จำนวนไลน์ และการเติมวงเงินกลับ
- 3) แยกเบี้ยประกันภัยต่อ คำนายหน้า คำนายหน้าปรับตามผล และเบี้ยเพิ่มเติมตามประสบการณ์ตามเวลาที่เกิดจริง
- 4) ประมาณ ค่าสินไหม เรียกคืน โดยใช้ข้อมูลที่พัฒนาเป็นระดับปัจจุบัน รวมเงินเพื่อ แนวโน้ม และการเปลี่ยนแปลงพอร์ต
- 5) ปรับความเสี่ยงด้านเครดิต หลักประกัน และระยะเวลาการเรียกคืน โดยไม่ถือว่าค่าสินไหมโอนเท่ากับเงินสดรับในทันที
- 6) เชื่อมผลการประกันภัยต่อกับเงินสำรอง เงินทุน และภาษี โดยไม่ใช่ประโยชน์จากการลดเงินทุนซ้ำทั้งในส่วนลดและต้นทุนเงินทุน
- 7) ทดสอบความไวต่อการแจกแจงส่วนทาง ความถี่ภัยพิบัติ ความสัมพันธ์ระหว่างความเสี่ยง ราคาเบี้ยต่ออัตราคิดลด และระดับมาตรวัดความเสี่ยง

สรุปตัวแบบกระแสเงินสดหลังการประกันภัยต่อ

$$L_t^N = L_t - R_t, \quad \Pi_t^{\text{net}} = 1_{\{t=0\}} P_D - Q_t + C_t,$$

$$P_D = \text{PV}(L^N + E^N) + \text{PV}(Q - C) \\ + \text{PV}(\text{UWPT}^N) + \text{PV}(\text{IBT}^N),$$

$$\Delta V_R = \mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^R$$

การประกันภัยต่อสร้างมูลค่าเมื่อประโยชน์จากการลดค่าสินไหมสุทธิตามความผันผวนและต้นทุนเงินทุนมากกว่าต้นทุนเบี้ยประกันภัยต่อ ภาษี ค่าใช้จ่าย และความเสี่ยงด้านเครดิตที่เพิ่มขึ้น

บทสรุปท้ายบทที่ 9

บทนี้พัฒนาการวิเคราะห์การกำหนดเบี้ยประกันภัยจากหลักมูลค่าของเงินตามเวลา เริ่มจากการสร้างกระแสเงินสดสุทธิและคำนวณมูลค่าปัจจุบันสุทธิ ซึ่งเป็นเกณฑ์หลักสำหรับการเลือกโครงการหรือผลิตภัณฑ์ที่ตัดกัน จากนั้นนิยามอัตราผลตอบแทนภายในและข้อจำกัดสำคัญ ได้แก่ การมีหลายราก การไม่มีราก และความขัดแย้งกับ NPV เมื่อโครงการมีขนาดหรือจังหวะกระแสเงินสดต่างกัน

ตัวแบบ Myers–Cohn ขยายหลัก DCF ไปสู่ธุรกิจประกันภัย โดยกำหนดให้เบี้ยประกันภัยสมมูลกับมูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมและค่าใช้จ่าย ภาษีจากผลการรับประกันภัย และภาษีจากรายได้ของยอดเงินที่นำไปลงทุนได้ การคำนวณที่ถูกต้องต้องระบุจังหวะเวลา ฐานภาษี การใช้เครดิตภาษี เงินสำรอง เงินส่วนเกิน และอัตราคิดลดตามความเสี่ยงอย่างชัดเจน

บทนี้ยังแยกรายได้จากการรับประกัน รายได้จากการลงทุนของเงินกองทุนผู้ถือกรรมธรรม์ และรายได้จากเงินส่วนเกินของผู้ถือหุ้น พร้อมกำหนดฐานการใช้เงินทุนคิดลดสำหรับคำนวณ UR, OR และ ROS การวิเคราะห์ดังกล่าวทำให้เห็นว่ากำไรจากการลงทุนอาจชดเชยขาดทุนจากการรับประกัน แต่ไม่ควรใช้เป็นเหตุผลปกป้องราคาที่ไม่เพียงพอ

ส่วนการประกันภัยต่อได้เชื่อมโครงสร้างความคุ้มครองกับกระแสเงินสดอย่างเป็นระบบ ทั้ง Quota Share, Surplus Share, Excess-of-Loss และ Stop-Loss โดยกำหนดฟังก์ชันค่าสินไหมโอนและค่าสินไหมรับไว้ให้ตรวจสอบได้ พร้อมแสดงการคำนวณค่าคาดหวังของชั้นความคุ้มครอง เบี้ยประกันภัยต่อ และผลต่อความแปรปรวนกับความเสี่ยงส่วนทาง

การขยายกรอบ Myers–Cohn ให้รวมการประกันภัยต่อ แสดงให้เห็นว่าเบี้ยรับโดยตรงต้องรองรับทั้งค่าสินไหมสุทธิ เบี้ยประกันภัยต่อสุทธิ ภาษี และผลของเงินทุนหลังการโอนความเสี่ยง การตัดสินใจจึงควรประเมินมูลค่าทางเศรษฐกิจสุทธิ โดยเปรียบเทียบต้นทุนก่อนและหลังการประกันภัยต่อ รวมถึงต้นทุนเงินทุนและความเสี่ยงด้านเครดิต ไม่ควรตัดสินใจจากการลดค่าสินไหมคาดหวังเพียงรายการเดียว

ในงานขั้นสูง สามารถขยายตัวแบบไปสู่กระแสเงินสดสุ่มหลายสถานการณ์ อัตราดอกเบี้ยสุ่ม เงินเพื่อค่าสินไหม ความเสี่ยงภัยพิบัติ สัญญาหลายชั้น การพึ่งพากันของค่าสินไหม การหาเงินรับไว้เองที่เหมาะสม และการประเมินเงินทุนด้วย VaR, TVaR หรือมาตรวัดความเสี่ยงอื่น อย่างไรก็ตาม ทุกส่วนขยายต้องรักษาหลักพื้นฐานเดิม คือ กระแสเงินสดทุกประเภทต้องถูกนับครั้งเดียว อยู่ในเวลาที่ถูกต้อง และคิดลดด้วยอัตราที่สอดคล้องกับความเสี่ยง

เอกสารอ้างอิง

- [1] Casualty Actuarial Society. (1988/2021). *Statement of Principles Regarding Property and Casualty Insurance Ratemaking*. Casualty Actuarial Society.
- [2] Cai, J., & Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin*, 37(1), 93–112.
- [3] Clark, D. R. (2014). *Basics of Reinsurance Pricing* (Revised actuarial study note). Casualty Actuarial Society.
- [4] Cummins, J. D. (1990). Multi-period discounted cash flow ratemaking models in property-liability insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 57(1), 79–109.
- [5] Cummins, J. D., & Harrington, S. E. (Eds.). (1987). *Fair Rate of Return in Property-Liability Insurance*. Kluwer-Nijhoff/Springer.
- [6] D’Arcy, S. P., & Garven, J. R. (1990). Property-liability insurance pricing models: An empirical evaluation. *Journal of Risk and Insurance*, 57(3), 391–430.
- [7] Fairley, W. B. (1979). Investment income and profit margins in property-liability insurance: Theory and empirical results. *Bell Journal of Economics*, 10(1), 192–210.
- [8] Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2019). *Loss Models: From Data to Decisions* (5th ed.). Wiley.
- [9] Myers, S. C., & Cohn, R. A. (1987). A discounted cash flow approach to property-liability insurance rate regulation. In J. D. Cummins & S. E. Harrington (Eds.), *Fair Rate of Return in Property-Liability Insurance* (pp. 55–78). Springer. DOI: 10.1007/978-94-015-7753-3_3.
- [10] Patrik, G. S. (1980). Pricing excess-of-loss casualty working cover reinsurance treaties. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 67, 399–456.
- [11] Bu, Y. (2005). On optimal reinsurance arrangement. *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 2005, 1–20.
- [12] Werner, G., & Modlin, C. (2016). *Basic Ratemaking* (Version 5). Casualty Actuarial Society.

- [13] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2561). *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้พริ้นท์.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

เกณฑ์ระดับความยาก (ระดับ ง่าย) ใช้สูตรหรือแนวคิดหลักโดยตรง (ระดับ ปานกลาง) ต้องเชื่อมโยงหลายขั้นตอน (ระดับ ยาก) ต้องวิเคราะห์กระแสเงินสดหลายช่วงหรือแก้สมการที่ซับซ้อน

เว้นแต่ระบุเป็นอย่างอื่น ให้ถือว่าเงินสดรับเป็นบวก เงินสดจ่ายเป็นลบ กระแสเงินสดเกิด ณ สิ้นปี อัตราดอกเบี้ยเป็นอัตราแท้จริงต่อปี และใช้ค่าที่ไม่ปัดเศษระหว่างการคำนวณก่อนตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

สำหรับโจทย์ตัวแบบ Myers–Cohn แบบย่อ ให้ใช้สมมติฐานต่อไปนี้ เว้นแต่โจทย์กำหนดเป็นอย่างอื่น

$$H = L + E, \quad S = \frac{L}{F}, \quad R_a = R_b(1 - T), \quad i = R_a - \lambda_L,$$

$$P = H(1 + i)^{-N} + T(P - H) + TR_bSa_{\overline{N}|i},$$

โดยภาษีจากผลการรับประกันรับรู้ ณ เวลา 0 และบริษัทสามารถใช้เครดิตภาษีจากผลขาดทุนได้ทันที

- 1) (ระดับ ง่าย) โครงการหนึ่งมีกระแสเงินสดสุทธิ หน่วยเป็นล้านบาท

$$(-8, -2, 3, 4, 5, 3)$$

ณ เวลา 0, 1, ..., 5 ปี

- (a) จงหา NPV ที่อัตราผลตอบแทนร้อยละ 8 ต่อปี
 - (b) จงหามูลค่าอนาคตสุทธิ ณ ปลายปีที่ 5
 - (c) โครงการควรได้รับการยอมรับหรือไม่ภายใต้เกณฑ์ NPV
- 2) (ระดับ ปานกลาง) บริษัทมีเงินทุน 5 ล้านบาทและเลือกได้เพียงหนึ่งโครงการ

โครงการ/ปี	0	1	2	3	4
A	−5.00	1.50	1.80	2.20	2.50
B	−5.00	0.20	0.80	2.50	4.20
C	−5.00	2.40	2.10	1.50	0.80

จงคำนวณ NPV และ IRR ของทุกโครงการ เมื่ออัตราผลตอบแทนขั้นต่ำเท่ากับร้อยละ 9 ต่อปี แล้วอธิบายว่าควรเลือกโครงการใดและเหตุใด

- 3) (ระดับ ปานกลาง) กรมธรรม์สะสมทรัพย์มีเงินสดจากมุมมองผู้เอาประกันภัยนี้ จ่ายเบี้ย 150,000 บาท ณ เวลา 0 รับเงินคืน 20,000 บาทปลายปีที่ 1-4 และรับ 100,000 บาทปลายปีที่ 5
- เขียนสมการ $f(r) = 0$ สำหรับหา IRR
 - ใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยเริ่ม $r_0 = 0.04$ จนกระทั่ง $|r_{m+1} - r_m| < 10^{-8}$
 - ตรวจสอบคำตอบโดยแทนกลับในสมการ $NPV(r) = 0$
 - อธิบายข้อจำกัดของการใช้ IRR นี้ประเมินกรมธรรม์ เมื่อยังไม่ได้รวมความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต

- 4) (ระดับ ยาก) พิจารณากระแสเงินสด

$$(-100, 230, -132)$$

ณ เวลา 0, 1, 2 ปี

- จงหาค่า IRR ทุกค่าที่มากกว่า -1
 - วาดหรืออธิบายกราฟ $NPV(i)$ บนช่วง $-0.5 < i < 1.0$
 - ถ้าอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำเท่ากับร้อยละ 15 จงตัดสินใจด้วยเกณฑ์ NPV
 - อธิบายว่าเหตุใดการรายงาน IRR เพียงค่าเดียวจึงทำให้เข้าใจผิด
- 5) (ระดับ ง่าย) โครงการมีเงินลงทุน 1,000,000 บาท ณ เวลา 0 และรับเงิน 300,000 บาททุกสิ้นปีจำนวน 4 งวด อัตราผลตอบแทนขั้นต่ำเท่ากับร้อยละ 8 ต่อปีแบบแท้จริง
- จงหาอัตราแท้จริงต่อครั้งที่สอดคล้องกัน
 - จงหา NPV
 - จงหา IRR ต่อครั้งที่และแปลงเป็นอัตราแท้จริงต่อปี
- 6) (ระดับ ปานกลาง) พิจารณาตัวแบบ Myers-Cohn 2 คาบ มีค่าสินไหม $L = 2,000$ บาทและค่าใช้จ่าย $E = 1,000$ บาท จ่ายพร้อมกันปลายคาบที่ 2 กำหนด $R_b = 20\%$, $T = 40\%$, $\lambda_L = 3\%$ หลังภาษี และ $F = 5$
- จงหา R_a , i , S , $PV(H)$, $PV(UWPT)$ และ $PV(IBT)$
 - จงคำนวณเบี้ย P
 - ตรวจสอบสมการสมดุลมูลค่าปัจจุบัน
 - คำนวณ $PV(UI)$, $NPV(OI)$, $PV(SIIC)$ และ $NPV(TI)$
- 7) (ระดับ ปานกลาง) ใช้ข้อมูลเดียวกับข้อ 6 แต่ไม่ปรับความเสี่ยง กล่าวคือ $\lambda_L = 0$

- (a) จงคำนวณเบี้ยใหม่
 - (b) เปรียบเทียบกับข้อ 6 และอธิบายทิศทางของความแตกต่าง
 - (c) จงคำนวณร้อยละการเปลี่ยนแปลงของเบี้ย
- 8) **(ระดับ ยาก)** พิจารณาตัวแบบ Myers-Cohn 3 คาบ รับเบี้ย P ณ เวลา 0 ค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายรวมเท่ากับ 40,000, 50,000 และ 30,000 บาท ณ ปลายปีที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ กำหนด $T = 30\%$, $R_b = 5\%$, $R_a = 3.5\%$ และใช้อัตราคิดลดค่าสินไหม $i_L = 3\%$ ภาษีจากผลการรับประกันรับรู้ปลายปีที่ 1 โดยฐานภาษีเท่ากับ $P - 120,000$ ยอดเงินที่นำไปลงทุนได้ต้นปีที่ 1-3 เท่ากับ 100,000, 60,000 และ 20,000 บาท
- (a) เขียนสมการ Myers-Cohn แบบหลายคาบ โดยคิดลดภาษีด้วย $R_a = 3.5\%$
 - (b) จงคำนวณเบี้ย P
 - (c) วิเคราะห์ว่าเบี้ยเปลี่ยนอย่างไรถ้าภาษีจากผลการรับประกันชำระ ณ เวลา 0 แทนปลายปีที่ 1
- 9) **(ระดับ ปานกลาง)** กรมธรรม์ A และ B มีค่าสินไหมคาดหวัง 100,000 บาทปลายปีที่ 2 ไม่มีค่าใช้จ่ายและภาษี กรมธรรม์ A ใช้อัตราคิดลดหลังปรับความเสี่ยงร้อยละ 5 ส่วนกรมธรรม์ B ใช้อัตราร้อยละ 2
- (a) จงหาเบี้ยที่เป็นธรรมของแต่ละกรมธรรม์
 - (b) กรมธรรม์ใดมีมูลค่าปัจจุบันของภาระสูงกว่า
 - (c) อธิบายว่าอัตราคิดลดต่ำกว่าอาจสะท้อนกระแสค่าสินไหมที่มีความเสี่ยงเชิงระบบสูงกว่า หรือคุณสมบัติการป้องกันความเสี่ยงที่ต่างกันได้อย่างไร
- 10) **(ระดับ ปานกลาง)** บริษัทจัดสรรเงินส่วนเกิน 80,000 บาทต้นแต่ละปีเป็นเวลา 3 ปี ได้รับผลตอบแทนก่อนภาษีร้อยละ 5 ต่อปี อัตราภาษีร้อยละ 30 และใช้อัตราคิดลดหลังภาษีร้อยละ 3.5
- (a) จงหา PV(IBT) ซึ่งเป็นมูลค่าปัจจุบันของภาษีจากรายได้ลงทุน
 - (b) จงหา PV(SIIC) ซึ่งเป็นมูลค่าปัจจุบันของรายได้ลงทุนหลังภาษี
 - (c) อธิบายความแตกต่างระหว่าง IBT กับ SIIC และผลของแต่ละรายการต่อการสมการเบี้ยและรายได้ผู้ถือหุ้น
- 11) **(ระดับ ยาก)** บริษัทรับเบี้ย $P = 90,000$ บาท ณ เวลา 0 จ่ายค่าสินไหม 20,000, 25,000 และ 30,000 บาท ปลายปีที่ 1, 2 และ 3 มีรายได้ลงทุนหลังภาษี 5,000 บาทปลายแต่ละปี และจ่ายภาษีจากการรับประกันเท่ากับร้อยละ 10 ของเบี้ย ณ เวลา 0
- (a) จากมุมมองผู้รับประกันภัย จงสร้างกระแสเงินสดสุทธิ และหา IRR ของธุรกรรม

- (b) ถ้าอัตราคิดลดค่าสินไหมเท่ากับร้อยละ 4 และรายได้ลงทุนกับภาษีคิดลดที่ร้อยละ 3 จงหา NPV ของธุรกรรม
- (c) จงหาเบี้ยที่ทำให้ $NPV = 0$ และเปรียบเทียบกับเบี้ย 90,000 บาท
- 12) (ระดับ ปานกลาง) กรมธรรม์มีค่าสินไหม 60,000 บาทปลายปีที่ 2 ค่าใช้จ่ายคงที่ 4,000 บาท ณ เวลา 0 ค่าใช้จ่ายแปรตามเบี้ยร้อยละ 10 ของ P ณ เวลา 0 และบริษัทต้องการมูลค่าปัจจุบันของกำไรหลังภาษีเท่ากับร้อยละ 5 ของ P กำหนดอัตราภาษีร้อยละ 20 และอัตราคิดลดร้อยละ 4 โดยไม่มีรายได้ลงทุนอื่น
- (a) สร้างสมการเบี้ยจากมูลค่าปัจจุบันของต้นทุนและกำไรเป้าหมาย
- (b) จงคำนวณ P
- (c) ตรวจสอบว่าอัตราส่วนค่าใช้จ่ายแปรผันบวกกำไรเป้าหมายต่ำกว่า 1 และอธิบายเหตุผลที่เงื่อนไขจำเป็น
- 13) (ระดับ ปานกลาง) ผู้รับประกันภัยเรียกเก็บเบี้ย 80,000 บาท ณ เวลา 0 และคาดว่าจะจ่ายค่าสินไหม 20,000, 30,000 และ 35,000 บาท ปลายปีที่ 1, 2 และ 3
- (a) จงหา NPV ที่อัตราผลตอบแทนร้อยละ 3 จากมุมมองผู้รับประกันภัย
- (b) จงหาเบี้ยขั้นต่ำที่ทำให้ NPV เท่ากับศูนย์ที่ร้อยละ 5
- (c) เบี้ยต้องเพิ่มขึ้นหรือลดลงจาก 80,000 บาทเท่าใด
- (d) อธิบายความแตกต่างระหว่างคำว่า “เบี้ยที่ทำให้ $NPV = 0$ ” กับ “เบี้ยที่ทำให้ $IRR = 5\%$ ” สำหรับกระแสเงินสดแบบปกติ
- 14) (ระดับ ยาก) บริษัทมีผู้อุปประกันสองกลุ่ม โดยทั้งสองกลุ่มมีค่าสินไหมจ่ายปลายปีที่ 1
- | รายการ | กลุ่ม A | กลุ่ม B |
|---|---------|---------|
| ค่าสินไหมคาดหมาย | 30,000 | 42,000 |
| ค่าใช้จ่าย ณ เวลา 0 | 3,000 | 4,000 |
| อัตราคิดลดค่าสินไหม | 4% | 2% |
| ส่วนเผื่อความไม่แน่นอนเป็นร้อยละของ $PV(L)$ | 5% | 12% |
- ไม่มีภาษีและรายได้ลงทุน
- (a) จงหาเบี้ยที่เป็นธรรมของแต่ละกลุ่ม
- (b) แยกผลต่างของเบี้ยเป็นผลจากค่าสินไหมคาดหมาย ค่าใช้จ่าย อัตราคิดลด และส่วนเผื่อความไม่

แน่นอน

- (c) อธิบายเงื่อนไขที่การแบ่งกลุ่มความเสี่ยงช่วยลดการอุดหนุนข้ามกลุ่ม และความเสี่ยงด้านความเป็นธรรมที่อาจเกิดจากตัวแปรจัดกลุ่มที่ไม่เหมาะสม

- 15) (ระดับ ยาก) พิจารณาแบบจำลองในตัวอย่างเบี่ยง 876.63 บาทของบทนี้ ทำการวิเคราะห์ความไวแบบหนึ่งตัวแปรต่อครั้ง โดยใช้ค่า

$$T \in \{0.25, 0.35, 0.45\}, \quad F \in \{3, 4, 5\}, \quad \lambda_L \in \{0, 0.013, 0.025\}.$$

- (a) สร้างตารางเบี่ยงสำหรับทุกค่า โดยคงตัวแปรอื่นที่ค่าฐาน $L = 1,000$, $E = 0$, $R_b = 10\%$, $N = 2$
- (b) ระบุว่าตัวแปรใดทำให้เบี่ยงเปลี่ยนมากที่สุดในช่วงที่กำหนด
- (c) อธิบายเหตุผลที่ผลของอัตราภาษีอาจไม่เป็นเอกทิศ เมื่อแบบจำลองอนุญาตเครดิตภาษีจากขาดทุนรับประกัน
- (d) เสนออย่างน้อยสองสถานการณ์ทดสอบภาวะวิกฤตเพิ่มเติม
- 16) (ระดับ ยาก) ตรวจสอบแบบจำลอง Myers-Cohn ที่มีสมการ

$$P = PV(L) + PV(E) + PV(UWPT) + PV(IBM)$$

ผู้วิเคราะห์พบข้อผิดพลาดดังนี้

- ใช้ค่าสินไหมที่รวมค่าใช้จ่ายจัดการสินไหมแล้ว แต่บวกค่าใช้จ่ายจัดการสินไหมซ้ำใน E
- ใช้อัตราดอกเบี้ยรายปีคิดลดกระแสเงินสดรายเดือนโดยไม่แปลงอัตรา
- บันทึกเครดิตภาษีทันที แม้บริษัทไม่มีรายได้ทางภาษีอื่น
- ใช้เงินสำรองและเบี่ยงที่ยังไม่รู้เป็นยอดลงทุนพร้อมกัน ทำให้เงินก้อนเดียวถูกนับสองครั้ง

จงอธิบายผลกระทบของข้อผิดพลาดแต่ละรายการต่อเบี่ยงที่คำนวณได้ และเสนอวิธีตรวจสอบควบคุมแบบจำลองเพื่อป้องกันข้อผิดพลาดดังกล่าว

- 17) (ระดับ ยาก) บริษัทประกันภัยมีเบี้ยประกันภัยรับโดยตรง 20 ล้านบาท ค่าสินไหมรวม 13 ล้านบาท และค่าใช้จ่ายของบริษัท 3 ล้านบาท ทำ Quota Share ร้อยละ 30 และได้รับค่านายหน้าประกันภัยต่อร้อยละ 22 ของเบี่ยงที่โอน

- (a) จงหาเบี้ยประกันภัยต่อ ค่านายหน้า ค่าสินไหมโอน และค่าสินไหมรับไว้
- (b) จงหาผลการรับประกันภัยสุทธิหลังการประกันภัยต่อ
- (c) เปรียบเทียบกับกรณีไม่มีการประกันภัยต่อ และอธิบายว่าความแตกต่างเป็นต้นทุนที่ยอมรับได้หรือไม่ โดยยังไม่พิจารณาประโยชน์จากการลดเงินทุน

- 18) (ระดับ ปานกลาง) บริษัทกำหนดวงเงินรับไว้เองของ Surplus Share เท่ากับ 3 ล้านบาท และรับประกันภัยต่อได้สูงสุด 4 โหล่น พิจารณาความเสี่ยงสัรยการที่มีทุนประกันและค่าสินไหมดังนี้

รายการ	ทุนประกัน (ล้านบาท)	ค่าสินไหม (ล้านบาท)
1	2	0.8
2	6	1.5
3	12	4.0
4	20	7.0

- (a) จงหาสัดส่วนที่โอนของแต่ละรายการ
 - (b) จงหาค่าสินไหมโอนและค่าสินไหมรับไว้
 - (c) ตรวจสอบว่าจำนวนทุนประกันที่โอนไม่เกิน 4 โหล่น
 - (d) อธิบายว่าเหตุใดสัญญาไม่ใช่ Excess-of-Loss
- 19) (ระดับ ปานกลาง) สัญญา Excess-of-Loss ให้ ความคุ้มครอง 800,000 บาท เกินวงเงินรับไว้เอง 400,000 บาท ค่าสินไหมรายเหตุการณ์ในปีหนึ่งเท่ากับ 150,000, 400,000, 650,000, 1,000,000 และ 1,500,000 บาท
- (a) จงหาค่าสินไหมโอนและค่าสินไหมรับไว้ของทุกเหตุการณ์
 - (b) จงหาค่าสินไหมรวมก่อนและหลังการประกันภัยต่อ
 - (c) เหตุการณ์ใดทำให้ชั้นความคุ้มครองถูกใช้เต็มวงเงิน
 - (d) ถ้าสัญญา มีขีดจำกัดรวมรายปี 1,600,000 บาท ผลลัพธ์จะเปลี่ยนหรือไม่ จงแสดงการคำนวณ
- 20) (ระดับ ปานกลาง) ให้ค่าสินไหม X มีการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ย 300,000 บาท บริษัทซื้อชั้นความคุ้มครอง 600,000 บาทเกิน 400,000 บาท
- (a) ใช้อินทิกรัลฟังก์ชันการอยู่รอดหา $E[Y_{d,u}]$
 - (b) หา $E[Y_{d,u}^2]$ และ $\text{Var}(Y_{d,u})$
 - (c) ถ้าใช้อัตราบรรทุก 30% จงหาเบี้ยตามหลักค่าคาดหวัง

- (d) ถ้าเรียกเก็บค่าสินไหมได้จริงโดยเฉลี่ยเพียง 95% และสมมติสัดส่วนที่เรียกเก็บได้เป็นอิสระจากค่าสินไหม จงหาค่าคาดหวังของเงินสดรับคืนจริง

- 21) (ระดับ ปานกลาง) ค่าสินไหมรวมรายปี S หน่วยเป็นล้านบาทที่มีการแจกแจง

S	0.4	0.8	1.2	2.0
ความน่าจะเป็น	0.25	0.35	0.30	0.10

บริษัทซื้อ Stop-Loss วงเงิน 0.8 ล้านบาท เกินค่าสินไหมรวม 1.0 ล้านบาท

- จงหาค่าสินไหมโอนและค่าสินไหมรับไว้ในทุกสถานการณ์
 - จงหาค่าคาดหวังและความแปรปรวนของค่าสินไหมก่อนและหลังการประกันภัยต่อ
 - จงหาเบี้ยประกันภัยต่อตามหลักค่าคาดหวังที่มีอัตราบรรทุก 20%
 - พิจารณาว่าสัญญาลดสัมประสิทธิ์การแปรผันของค่าสินไหมรับไว้หรือไม่
- 22) (ระดับ ยาก) พิจารณาตัวแบบ Myers-Cohn สองคาบที่มี

$$L = 2,000,000, \quad E = 200,000, \quad R_b = 8\%, \\ T = 25\%, \quad \lambda_L = 1\%, \quad F = 5.$$

ค่าสินไหมและค่าใช้จ่ายจ่ายปลายคาบที่ 2 บริษัททำ Quota Share ร้อยละ 35 เฉพาะค่าสินไหม ผู้รับประกันภัยต่อคิดเบี้ย

$$Q = 1.25\{0.35L(1+i)^{-2}\}$$

และจ่ายค่านายหน้าร้อยละ 15 ของ Q โดย $i = R_b(1-T) - \lambda_L$ กำหนดฐานภาษี ณ เวลา 0 เป็น $P_D - Q + C - \{(1-0.35)L + E\}$ และให้เงินส่วนเกินเท่ากับค่าสินไหมสุทธิหารด้วย F

- สร้างสมการเบี้ยรับโดยตรง P_D
 - จงคำนวณ P_D และตรวจสอบการมูลค่าปัจจุบัน
 - คำนวณเบี้ยกรณีไม่มีการประกันภัยต่อภายใต้สมมติฐานเดียวกัน
 - แยกผลต่างของเบี้ยเป็นผลจากค่าสินไหมสุทธิ เบี้ยประกันภัยต่อสุทธิ และการเปลี่ยนภาษีจากเงินส่วนเกิน
- 23) (ระดับ ยาก) ค่าสินไหมรวมหนึ่งปี S หน่วยเป็นพันบาทที่มีการแจกแจง

S	0	100	300	700	1,400
ความน่าจะเป็น	0.35	0.30	0.20	0.10	0.05

เปรียบเทียบสามทางเลือก ได้แก่ ไม่มีการประกันภัยต่อ Quota Share ร้อยละ 30 ซึ่งคิดเบี้ย 1.20 เท่าของค่าสินไหมที่โอน และ Excess-of-Loss วงเงิน 600 เกิน 250 ซึ่งคิดเบี้ย 1.35 เท่าของค่าสินไหมที่โอน ไม่มีค่านายหน้าทั้งสองสัญญา กำหนด

$$K(W) = \max\{\text{TVaR}_{0.95}(W) - \mathbb{E}[W], 0\},$$

ต้นทุนเงินทุนร้อยละ 7 และอัตราคิดลดหนึ่งปีร้อยละ 4 ไม่พิจารณาภาษี

- จงหาค่าคาดหวัง $\text{TVaR}_{0.95}$ และ K ของค่าสินไหมสุทธิทุกทางเลือก
- จงหาต้นทุนทางเศรษฐกิจ $\mathcal{C} = \text{PV}(\mathbb{E}[W]) + Q + \text{PV}(0.07K)$
- จงหา ΔV_R และเลือกทางเลือกที่เหมาะสมภายใต้เกณฑ์นี้
- วิเคราะห์ความไวเมื่ออัตราบรรทุกของ Excess-of-Loss เพิ่มขึ้นจาก 35% เป็น 50%

- 24) (ระดับ ยาก) ให้ค่าสินไหมรายความเสี่ยง X มีการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียล ที่มีค่าเฉลี่ย 500,000 บาท บริษัทพิจารณาซื้อ Excess-of-Loss แบบไม่มีขีดจำกัด ด้วยวงเงินรับไว้เอง

$$d \in \{200,000, 400,000, 600,000, 800,000\}.$$

ผู้รับประกันภัยต่อคิดเบี้ย $Q_d = 1.30\mathbb{E}[(X - d)_+]$ ค่าสินไหมรับไว้คือ $Z_d = \min(X, d)$ กำหนด $q = 0.95$ ต้นทุนเงินทุนร้อยละ 8 และอัตราคิดลดหนึ่งปีร้อยละ 3

- พิสูจน์ว่า $\mathbb{E}[(X - d)_+] = 500,000e^{-d/500,000}$ และ $\mathbb{E}[Z_d] = 500,000(1 - e^{-d/500,000})$
- หา $\text{TVaR}_{0.95}(Z_d)$ และเงินทุน $K_d = \max\{\text{TVaR}_{0.95}(Z_d) - \mathbb{E}[Z_d], 0\}$ สำหรับทุกค่า d
- คำนวณต้นทุน

$$\mathcal{C}(d) = \frac{\mathbb{E}[Z_d]}{1.03} + Q_d + \frac{0.08K_d}{1.03}$$

และเลือก d ที่ทำให้ต้นทุนต่ำสุด

- ถ้าค่าสินไหมเรียกคืนได้จริงเพียง 90% จงปรับแบบจำลองและตรวจว่าคำตอบเปลี่ยนแปลงหรือไม่
- อธิบายว่าเหตุใดการเลือกจากกริดสี่ค่า ยังไม่ใช่หลักฐานว่าค่า d ที่ได้เหมาะสมที่สุดในเซตต่อเนื่อง

บทที่ A เฉลยแบบฝึกหัดเฉพาะคำตอบ

ข้อสังเกต

ภาคผนวกนี้แสดงเฉพาะคำตอบสุดท้ายของแบบฝึกหัดท้ายบท เพื่อให้ผู้อ่านตรวจสอบผลการคำนวณด้วยตนเอง รายละเอียดวิธีทำสามารถจัดทำเป็นคู่มือเฉลยแยกต่างหากได้

บทที่ 1

ตารางที่ A.1 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1: มูลค่าของเงินตามเวลา

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1	29,580.15 บาท	–
2	32,536.94 บาท	คุณอัตรากำไรและขาดทุนสะสมตามลำดับเวลา
3	เงินรวม 119,314.54 บาท; ผลตอบแทนรวม 19.31%	–
4	เงินรวม 99,496.86 บาท; ขาดทุนรวม 0.50%	–
5	1,646.73 บาท	–
6	1,641.60 บาท	ราคาสุทธิหลังหักเงินคืน 5%
7.1	0.8977 บาท	ค่าของเงินปี 2553 เทียบกับปี 2550
7.2	ค่าเงินลดลง 12.67%	–
7.3	230.24 บาท	–
7.4	20,954.20 บาทต่อเดือน	–
8.1	ปรับขึ้น 362.60 บาท; ราคาใหม่ 2,862.60 บาท	–
8.2	ขึ้นอย่างน้อย 1.69%; เงินเดือนใหม่ 25,423.73 บาท	–
8.3	1.69%	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
8.4	0.8881 บาท	ค่าของเงินปี 2554 เทียบกับปี 2552
8.5	1,077,199.28 บาท	–
9	2,252,324.84 บาท	ใช้ $2,000,000(1.02)^6$
10	12,000.00 บาท	–
11	4 ปี	–
12	8.3333 ปี หรือประมาณ 8 ปี 4 เดือน	–
13	ดอกเบี้ยย 35.26 บาท; เงินรวม 1,685.26 บาท	–
14	28.57% ต่อปี	–
15	39,834.71 บาท	คิดลดค่างวดเดือนถัดไปกลับมายังวัน ซื้อ
16	332.88 บาท	–
17.1	5,794.52 บาท	ใช้จำนวนวัน 282 วัน ตามวิธีไม่นับ วันแรกแต่นับถึงวันครบกำหนด
17.2	5,875.00 บาท	ใช้ฐาน 360 วัน
18.1	เงินรวม 12,544.00 บาท; ดอกเบี้ย 2,544.00 บาท	–
18.2	เงินรวม 12,667.70 บาท; ดอกเบี้ย 2,667.70 บาท	–
18.3	เงินรวม 12,697.35 บาท; ดอกเบี้ย 2,697.35 บาท	–
18.4	เงินรวม 12,469.32 บาท; ดอกเบี้ย 2,469.32 บาท	ใช้ความถี่ทบต้นทุก 18 เดือน
19	18,772.08 บาท	–
20	40,797.75 บาท	–
21	24,478.07 บาท	ทบต้นครบงวดครึ่งปี แล้วคิดเศษงวด แบบดอกเบี้ยเชิงเดียว
22	1,530,187.94 บาท	–
23	เงินรวม 108,472.21 บาท; ผลตอบแทนรวม 8.47%	–
24	อย่างน้อย 153 เดือน; ได้เงินประมาณ 150,136.79 บาท	ปัดขึ้นเป็นจำนวนเดือนที่ครบงวดฝาก ประจำ

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
25	ถอนเงินได้ 215,888.93 บาท; ดอกเบี้ยรวม 15,888.93 บาท	แยกเงินฝากแต่ละครั้งเป็นกระแสเงินสดคนละก้อน แล้วสะสมถึงวันที่ปิดบัญชี
26	เงินรวมประมาณ 268,248.19 บาท; เงินต้น 246,000.00 บาท; ดอกเบี้ย 22,248.19 บาท	เงินฝากรายเดือนเท่ากับ 3,000 บาท; คำนวณขึ้นกับสมมติฐานวันฝากและการคิดเศษงวด
27	เงินรวม 87,756.42 บาท; เงินต้นสุทธิ 80,000.00 บาท; ดอกเบี้ย 7,756.42 บาท	สะสมเงินฝากและเงินถอนแต่ละรายการถึงวันที่ 31 ต.ค. 2555
28	111,111.11 บาท	–
29	67,297.13 บาท	–
30	A: 100,000.00 บาท; B: 110,095.02 บาท; C: 104,929.28 บาท; D: 102,432.00 บาท ดังนั้นควรเลือกโครงการ B	เปรียบเทียบดอกเบี้ยรวมของทุกโครงการ
31	ประมาณ 7.85% ต่อปี ทบต้นทุก 6 เดือน	ใช้การเทียบอัตรา ณ เวลา 1 ปี
32	144,578.73 บาท	ใช้ทบต้นช่วงจำนวนเต็มปี และใช้ดอกเบี้ยเชิงเดียวสำหรับเศษปี
33.1	14,693,280.77 บาท	–
33.2	ต้องลงทุนส่วนที่เหลือด้วยอัตราประมาณ 9.31% ต่อปี	แยกเงินสำรอง 20% ไปสะสมที่ 2% ก่อน แล้วคำนวณอัตราของเงินส่วนที่เหลือ
34	5.93% ต่อปี ทบต้นทุกเดือน	–
35	ฝากปลายเดือน: เดือนละ 6,102.05 บาท; ฝากต้นเดือน: เดือนละ 6,071.69 บาท	โจทย์ควรระบุเวลาฝากรายเดือนให้ชัดเจน
36	132,312.98 บาท	ใช้ดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องหลายช่วงเวลา
37	ควรเลือก AAA; AAA: 620,921.32 บาท, BBB: 640,816.47 บาท, CCC: 671,210.44 บาท	เปรียบเทียบมูลค่าปัจจุบันของเงิน 1,000,000 บาท ณ ปลายปีที่ 5
38	134,066.95 บาท	ใช้ 1 ปี = 365 วัน

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
39	มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ $\frac{2^2}{(n+2)^2}$	ใช้ $PV = \exp\left(-\int_0^n \delta(t) dt\right)$
40	ลงทุนกองทุน AAA 482,088.87 บาท และ BBB 517,911.13 บาท; จะได้ผลตอบแทนจากแต่ละกองทุนประมาณ 48,208.89 บาท	ตั้งผลตอบแทนจากสองกองทุนให้เท่ากัน
41	ประมาณ 31.04 ปี	ประมาณเงินฝากรายวันเป็นกระแสเงินสดต่อเนื่อง
42	ประมาณ 25.80% ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน	ใช้อัตราทบต้นต่อเนื่องเทียบเป็นอัตราเพียงในนามตลอดช่วง 0–10 ปี
43	โครงการ AAA: ลงทุนต้นปีปีละ 103,577.75 บาท ต้นทุนรวม 1,035,777.49 บาท; โครงการ BBB: ลงทุนต้นเดือนเดือนละ 8,901.62 บาท ต้นทุนรวม 1,068,194.65 บาท ดังนั้นควรเลือกโครงการ AAA	ใช้ต้นทุนรวมต่ำสุดเป็นเกณฑ์
44	11.43%	คิดผลตอบแทนหลังหักภาษีก่อน แล้วจึงปรับด้วยเงินเฟ้อ
45	31.20 บาทต่อจาน	รักษากำไรจริงเดิมโดยปรับทั้งต้นทุนและกำไรตามเงินเฟ้อ
46	19.52%	กำไรหลังภาษี = $30\%(1-0.15)$ แล้วปรับด้วยเงินเฟ้อ
47	46,810.70 บาท	ใช้ตัวประกอบจริงรายปีจากดอกเบี้ยและเงินเฟ้อ
48	จ่ายเงินทั้งสิ้น 1,313,966.52 บาท; มูลค่าปัจจุบันของเงินจ่าย/เงินกู้โดยนัย 981,601.14 บาท; ดอกเบี้ยรวม 332,365.38 บาท	กระแสเงินจ่ายรายเดือนแบบต้นงวด และจำนวนเงินรายเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 2%
49	อัตราผลตอบแทนต่อปีแบบทบต้นก่อนเงินเฟ้อ 37.17%; อัตราดอกเบี้ยแท้จริงหลังเงินเฟ้อประมาณ 30.64% ต่อปี	คิดผลตอบแทนจากราคาซื้อ 900 บาท เป็น 1,000 บาทใน 4 เดือนก่อน

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
50	422,035.09 บาท	มูลค่าปัจจุบันของเงินจ่ายรายปี 5 งวด โดยงวดถัดไปเพิ่มตามเงินเพื่อ 3%
51	$PV = R \frac{1 - v^n}{1 - v}$, เมื่อ $v = (1 + i_r)^{-1}$	ใช้ผลบวกอนุกรมเรขาคณิตของเงินจ่ายต้นปี
52.1	390,599.20 บาท	ไม่คำนึงถึงเงินเพื่อ และทบต้นปีละครั้ง
52.2	524,932.66 บาท	คำนึงถึงเงินเพื่อ 3% ต่อปี
52.3	389,703.47 บาท	ไม่คำนึงถึงเงินเพื่อ และทบต้นทุก 3 เดือน
52.4	523,728.87 บาท	คำนึงถึงเงินเพื่อ 3% ต่อปี และทบต้นทุก 3 เดือน

บทที่ 2

ตารางที่ A.2 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2: การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1	ชำระช่วง 5 ปีหลัง ปีละ 172,030.92 บาท	–
2	เงินไม่เพียงพอครบ 40 ปี โดยถอนได้เต็มจำนวน 329 เดือน หลังงวดที่ 329 เหลือ 23,609.37 บาท และก่อนถอนงวดที่ 330 มีเพียง 23,687.81 บาท จึงไม่มีเงินเหลือเป็นมรดก	เงินหมดในงวดที่ 330 หรือประมาณ 27 ปี 6 เดือน
3.1	เงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบัน 1,196,762.03 บาท	–
3.2	มูลค่าอนาคต ณ สิ้นปีที่ 10 เท่ากับ 2,177,384.92 บาท	–
3.3	ดอกเบี้ยสะสม 443,237.97 บาท	–
3.4	ยอดปิดหนี้ ณ สิ้นปีที่ 5 เท่ากับ 772,826.07 บาท	–
4	เงินสะสม ณ สิ้นปีที่ 20 เท่ากับ 2,367,825.46 บาท	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
5	มูลค่าปัจจุบัน $180 + 2 \ln 21 + \frac{100,000}{21} = 4,947.99$ บาท; มูลค่าอนาคต $100,000 + 3,780 + 42 \ln 21 = 103,907.87$ บาท	ใช้ ตัวประกอบ คิด ลด $\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{s+1} ds\right) = \frac{1}{t+1}$ แล้วบวกเงินก้อนที่เวลา 20
6	ได้รับดอกเบี้ยปีละ 607,753.13 บาทตลอดไป	ค่าของ perpetuity หนึ่งงวดก่อนการจ่ายครั้งแรกอยู่ ณ สิ้นปีที่ 4
7	มูลค่าปัจจุบันของเงินบริจาคทั้งหมด 9,705,901.48 บาท	อัตรารายเดือนเทียบเท่า $j = (1.01)^{1/3} - 1$ และเงินบริจาครายเดือนเท่ากับ 10,000,000j
8	ชำระหมดในงวดที่ 43; งวดสุดท้าย 3,112.31 บาท	หลังเงินชำระลดลงถึง 5,000 บาท ให้ใช้ 5,000 บาทต่อเดือนจนปิดหนี้
9.1	ราคาเงินสดของบ้าน 1,695,807.72 บาท	–
9.2	งวดที่ 16 ต้องชำระ 50,502.51 บาท	สะสมค่างวดที่ขาดชำระงวด 12–15 มายังวันครบกำหนดงวดที่ 16 แล้วบวกค่างวดที่ 16
9.3	ชำระรวมทั้งหมด 172 งวด จึงเร็วกว่าแผนเดิม 68 เดือน; งวดสุดท้าย 3,072.54 บาท	หายอดหนี้หลังงวดที่ 120 แล้วเปลี่ยนเป็นค่างวด 20,000 บาท
9.4	ยอดปิดหนี้ในงวดที่ 121 เท่ากับ 905,238.21 บาท	ยอดหนี้หลังงวดที่ 120 ต้องสะสมดอกเบี้ยอีก 1 เดือน
10.1	มูลค่าเงินสดของบ้าน 863,767.66 บาท โดยยอดเงินกู้เท่ากับ 663,767.66 บาท	ใช้ค่ารายงวดต้นงวด 120 งวด
10.2	ค่างวดใหม่เดือนละ 9,296.66 บาท	สะสมยอดเงินกู้เดิมผ่านช่วงที่ขาดชำระ 12 เดือน แล้วกระจายเป็นค่ารายงวดต้นงวด 108 งวด
10.3	ค่างวดใหม่เดือนละ 10,774.18 บาท	หายอดหนี้หลังชำระครบ 12 งวด แล้วกระจายเป็นค่ารายงวดต้นงวด 72 งวด
10.4	ชำระรวม 109 งวด ลดลงจากแผนเดิม 11 งวด; งวดสุดท้าย 2,290.78 บาท	หลังงวดที่ 24 ใช้ค่างวดต้นงวด 8,800 บาท และปรับงวดสุดท้ายตามยอดจริง

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
11	มูลค่าปัจจุบัน 276,103.27 บาท; มูลค่าอนาคต 554,874.09 บาท	–
12	ผ่อนเดือนละ 3,450.75 บาท รวมภาษีมูลค่าเพิ่มร้อยละ 7	ค่างวดก่อนภาษี 3,225.00 บาท
13	ค่ารายงวดเดือนละ 4,183.96 บาท	–
14.a	อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน 0.5000%	–
14.b	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี 6.0000%	–
15	ค่ารายงวดทุก 3 เดือน งวดละ 1,136.41 บาท	–
16	เงินชำระ งวดที่ 1–5 เท่ากับ 8,933.33, 8,746.67, 8,560.00, 8,373.33 และ 8,186.67 บาท ตามลำดับ; ชำระรวม 42,800.00 บาท	เงินต้นลดลงคงที่งวดละ 8,000 บาท
17	งวดที่ 1–5 ชำระงวดละ 8,000.00 บาท และงวดที่ 6 ชำระ 3,048.36 บาท; ชำระรวม 43,048.36 บาท มากกว่าข้อ 16 จำนวน 248.36 บาท	ระยะเวลาชำระยาวกว่าข้อ 16 จำนวน 1 เดือน
18.1	เงินดาวน์ 89,000.00 บาท	–
18.2	ยอดจัดสินเชื่อ 801,000.00 บาท	–
18.3	ดอกเบี้ยทั้งหมด 160,200.00 บาท	–
18.4	ค่างวดเดือนละ 16,020.00 บาท	–
18.5	จำนวนเงินทั้งหมดที่จ่าย 1,050,200.00 บาท	รวมเงินดาวน์และค่างวดทั้งหมด
19	วงเงินกู้ 1,800,000.00 บาท; เงินส่วนต่างที่ต้องชำระเอง 50,000.00 บาท; ผ่อนต้นเดือนเดือนละ 12,831.60 บาท; ค่างวดรวม 3,079,584.25 บาท และจ่ายรวมทั้งสิ้น 3,129,584.25 บาท	วงเงินกู้คิดจากร้อยละ 90 ของราคาประเมิน
20	ค่างวดเงินกู้จากสถาบันการเงิน 8,954.52 บาท; ค่างวดที่ได้รับจากลูกค้า 10,574.22 บาท; กำไรสุทธิรวม 38,872.89 บาท หรือ 19.44% ของเงินต้น	–
21	ราคาเงินสดของห้องชุด 895,337.55 บาท	–
22	ชำระทั้งหมด 102 งวด หรือประมาณ 8 ปี 6 เดือน; งวดสุดท้าย 15,137.56 บาท	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
23	ค่ารายงวดเดือนละ 17,194.35 บาท	–
24.1	ชำระทั้งหมด 216 งวด เท่ากับ 18 ปี; งวดสุดท้าย 5,466.80 บาท	คำนวณยอดหนี้แบบเดือนต่อเดือน: งวด 1–9 ลดจาก 28,000 ถึง 20,000 บาท แล้วคงที่ 20,000 บาท
24.2	งวดที่ 22 ต้องชำระ 40,200.00 บาท	ค่างวดที่ 21 สะสมดอกเบี้ย 1 เดือน แล้วบวกค่างวดที่ 22
25	ชำระ ทั้งหมด 41 งวด หรือ 3 ปี 5 เดือน; งวดสุดท้าย 24,535.56 บาท; ดอกเบี้ยสะสม 204,535.56 บาท	สร้างยอดหนี้รายเดือนด้วยค่างวด 10,000, 11,000, 12,000, ... และปรับงวดสุดท้าย
26	ยอดหนี้หลัง 10 ปีแรก 602,585.81 บาท; ค่างวดช่วง 10 ปี หลัง เดือนละ 6,689.94 บาท	–
27	ได้รับเงินคืนปีละ 18,061.11 บาท	–
28	ถอนใช้ได้สูงสุดเดือนละ 76,905.42 บาท	–
29	เงินสะสมเมื่ออายุครบ 60 ปี เท่ากับ 14,155,792.74 บาท	ใช้อัตรารายเดือนเทียบเท่ากับผลตอบแทนแท้จริงร้อยละ 6 ต่อปี
30	ต้องได้รับอัตราผลตอบแทนแท้จริงประมาณ 5.3596% ต่อปี หรือประมาณ 5.36% ต่อปี	อัตรารายเดือนเทียบเท่าประมาณ 0.4360%
31.a	รูปแบบ 3 เดือน: 2.5745% ต่อปี; 6 เดือน: 2.9971% ต่อปี; 12 เดือน: 3.4000% ต่อปี; 555 วัน: 4.6614% ต่อปี	หักภาษีดอกเบี้ยทุกครั้งที่ครบกำหนด แล้วแปลงเป็นอัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปี; สำหรับ 555 วันใช้ฐาน 365 วัน
31.b	เงินสะสมสุทธิ ณ สิ้นปีที่ 3: รูปแบบ 3 เดือน 1,079,240.11 บาท; 6 เดือน 1,092,635.55 บาท; 12 เดือน 1,105,507.30 บาท; 555 วัน 1,146,460.60 บาท	ใช้อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปี เทียบเท่าตามเงื่อนไขโจทย์
31.c	ควรเลือกเงินฝากประจำ 555 วัน	ให้เงินสะสมสุทธิสูงสุด
32	ต้องออมทุกต้นเดือน เดือนละ 2,352.38 บาท	–
33.a	เงินสะสมในบัญชีฝากประจำ 16,526,419.57 บาท	–
33.b	เงินคงเหลือในบัญชีออมทรัพย์ 1,558,966.47 บาท	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
33.c	เงินมรดกรวม 18,085,386.04 บาท	–

บทที่ 3

ตารางที่ A.3 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3: ส่วนลดและอัตราส่วนลด

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1	$d^{(2)} = 0.04040821 \approx 4.04082\%$ ต่อปี	ใช้ $\left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2 = 1 - 0.04$
2	มูลค่าปัจจุบัน 231,511.62 บาท	ช่วง 8 เดือนสุดท้ายคิดลดแบบ เชิงเดียว แล้วคิดลดช่วง 10 ปีแรก แบบทบต้น
3	มูลค่าไถ่ถอน 12,264,330.20 บาท; เงินฝากธนาคารสะสมเป็น 2,212,583.23 บาท; ดังนั้น $i \approx 4.67195\%$ ต่อปี	ตั้งสมการ $2,000,000(1 - 0.02)^{-5} + 8,000,000(1 + i)^5 = 10,000,000(1 - 0.04)^{-5}$
4	$d^{(12)} = 0.05897222 \approx 5.89722\%$ ต่อปี	เทียบ มูลค่า สะสม หนึ่งปี: $\left(1 - \frac{d^{(12)}}{12}\right)^{-12} = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2$
5	ต้องฝากสิ้นเดือนเดือนละ 7,153.28 บาท	อัตราดอกเบี้ยรายเดือนที่เทียบ เท่า $i_m = \frac{0.03/12}{1 - 0.03/12} = 0.00250627$
6	มูลค่าอนาคต 122,193.88 บาท	ใช้ ตัวประกอบ สะสม สาม ช่วง ตาม ลำดับ: $\left(1 - \frac{0.02}{12}\right)^{-24} e^{0.06(2)} \left(1 - \frac{0.04}{2}\right)^{-2}$
7	AAA: 590,490.00 บาท; BBB: 634,359.31 บาท; CCC: 669,422.89 บาท; ดังนั้นเลือก AAA	เปรียบเทียบเงินลงทุนปัจจุบันที่ทำให้ ได้ 1,000,000 บาท ณ สิ้นปีที่ 5

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
8	มูลค่าปัจจุบัน 163,745.25 บาท	ใช้ $200,000 \left(1 - \frac{0.02}{365}\right)^{3650}$
9.ก	$PV = \frac{1}{6} = 0.16666667$ บาท	$\int_0^{10} \frac{1}{t+2} dt = \ln 6$
9.ข	$d = 0.16404120 \approx 16.40412\%$ ต่อปี	ใช้ $(1-d)^{-10} = 6$
10	ลงทุนใน AAA 496,091.82 บาท และ BBB 503,908.18 บาท; กำไรจากแต่ละกองทุน 20,670.49 บาท	ตั้งกำไรจากทั้งสองกองทุนให้เท่ากัน
11	ต้องลงทุนอย่างน้อย 26,066 วัน หรือประมาณ 71.414 ปี; วันดังกล่าวมีเงินสะสมประมาณ 10,000,896.97 บาท	ใช้อัตราสะสมรายวัน $e^{0.03/365}$; เมื่อ 25,065 วัน มีเงินเพียง 9,999,975.02 บาท
12	$d^{(4)} = 0.24234775 \approx 24.23477\%$ ต่อปี	$\int_0^{10} (0.01t+0.20) dt = 2.5$ และ $\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-40} = e^{2.5}$
13	มูลค่าสะสม ณ สิ้นปีที่ 20 เท่ากับ 2,370,690.12 บาท	เงินก้อนแรกสะสม 20 ปี และเงินฝากเพิ่มสะสมเป็นอนุกรมเรขาคณิต
14.ก	มูลค่าปัจจุบัน 149,432.64 บาท	อัตราคิดลดรายปีที่ใช้คือ $v = \left(1 - \frac{0.06}{4}\right)^4$
14.ข	มูลค่าอนาคต ณ สิ้นปีที่ 20 เท่ากับ 500,664.78 บาท	สะสมค่าปัจจุบันทั้งหมดไปยังสิ้นปีที่ 20
15	คูปองรายปี 646,177.72 บาท	การจ่ายครั้งแรกอยู่ ณ สิ้นปีที่ 5: $10,000,000 = C \frac{0.95^5}{0.05}$
16.ก	อัตราดอกเบี้ยรายเดือนที่เทียบเท่า $j = (0.99)^{-1/3} - 1 = 0.00335573$; เงินบริจากรายเดือน 33,557.30 บาท	อัตราส่วนลดต่อไตรมาสเท่ากับ $0.04/4 = 0.01$
16.ข	มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินบริจาครายทั้งหมด 9,702,990.00 บาท	เมื่อ $v_m = 0.99^{1/3}$, $PV = R \frac{v_m^{10}}{1 - v_m} = 10,000,000 v_m^9$
17.1	$i \approx 0.14054$ หรือ 14.05359%	-

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
17.2	$i \approx 0.10736$ หรือ 10.73563%	–
17.3	$i \approx 0.12182$ หรือ 12.18163%	–
17.4	$i \approx 0.11364$ หรือ 11.36367%	–
18	$i \approx 0.08144$ หรือ 8.14417% ต่อปี	แก้ $200,000 = 30,000a_{\overline{10} i}$
19	อัตราดอกเบี้ยรายเดือน $i_m \approx 1.61503\%$; อัตราดอกเบี้ยเพียง ในนาม $i^{(12)} \approx 19.38032\%$ ต่อปี	แก้ $10,000s_{\overline{60} i_m} = 1,000,000$
20	อัตราดอกเบี้ยรายเดือน $i_m \approx 0.42676\%$; อัตราดอกเบี้ยเพียง ในนาม $i^{(12)} \approx 5.12115\%$ ต่อปี	แก้ $3,000,000 = 20,000a_{\overline{240} i_m}$
21	อัตราดอกเบี้ยรายเดือนที่เทียบเท่า $i_m \approx 1.78810\%$; ดังนั้น $d^{(12)} \approx 21.08025\%$ ต่อปี	คำนวณเดือนละ $224,000/12$ บาท และ $d^{(12)} = 12 \frac{i_m}{1+i_m}$
22	$P \approx 361,910.23$ บาท; $R \approx 31,825.85$ บาทต่อเดือน; $i_m \approx 0.83739\%$; $d^{(12)} \approx 9.96523\%$ ต่อปี	ใช้สามสมการที่กำหนดร่วมกัน แล้ว แปลง $d^{(12)} = 12 \frac{i_m}{1+i_m}$
23	$i \approx 0.09906$ หรือ 9.90642% ต่อปี	แก้ $40,000 + 30,000(1+i)^{-1} + 10,000(1+i)^{-3} = 120,000(1+i)^{-5}$
24	อัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารประกาศก่อนหักภาษี $i \approx 0.05161$ หรือ 5.16083% ต่อปี	อัตราสุทธิที่เข้าบัญชีแต่ละปีคือ $0.85i$
25	$i^{(12)} = 0.06107330 \approx 6.10733\%$ ต่อปี	เทียบ มูลค่า สะสม: $\left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} = \left(1 - \frac{0.06}{2}\right)^{-2}$

บทที่ 4

ตารางที่ A.4 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4: ค่ารายงวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.a	เงินชำระรายเดือน 1,108.24 บาท	ใช้ $\alpha = 20/31, i = 0.06/12$ และ $100,000 = Rv^\alpha \ddot{a}_{120 i}$
1.b	มูลค่าอนาคต ณ วันชำระงวดสุดท้าย 181,617.97 บาท	$FV = Rs_{120 i}$
2.a	จำนวนเงินที่กู้ 170,275.84 บาท	อัตราต่อ 6 เดือน คือ $j =$ $(1.005)^6 - 1 =$ 0.0303775094
2.b	ยอดปิดหนี้ก่อนชำระงวดที่ 7 เท่ากับ 76,531.19 บาท	รวมงวดที่ 7-10: $20,000\ddot{a}_{4 j}$
3	ชำระทั้งหมด 60 เดือน; งวดสุดท้ายควรปรับเป็นประมาณ 2,897.54 บาท	อัตรารายเดือนเทียบเท่า $j =$ $(1.015)^{1/3} - 1$; ความคลาด เคลื่อนเล็กน้อยเกิดจากการปัดค่างวด เป็น 2,897.85 บาท
4	เงินสะสม ณ สิ้นวันที่ 3,650 เท่ากับ 447,870.93 บาท	ใช้ อัตรารายวัน $j =$ $(1.02)^{2/365} - 1$ และ ค่า รายงวดต้นงวด $100\ddot{s}_{3650 j}$
5.a	ฝากต้นครึ่งปีงวดละ 44,953.61 บาท	อัตราต่อครึ่งปี $j = (1.005)^2 -$ $1 = 0.010025$
5.b	ผลตอบแทนรวม 100,927.90 บาท	เงินฝากรวม 899,072.10 บาท
5.c	ผลตอบแทนรวมคิดเป็น 11.2258% ของเงินฝากทั้งหมด	–
6	เงินจากการขายที่ดิน ณ วันเริ่มฝาก 16,058,374.07 บาท	ใช้อัตราแท้จริงต่อปี $i =$ $(1.02)^2 - 1 = 0.0404$ และรวมมูลค่าปัจจุบันของเงินคง เหลือหลังถอนครั้งที่ 20
7	เงินชำระปกติเดือนละ 13,925.90 บาท	ตั้ง 2,000,000 = $Ra_{239 0.005} + 200,000v^{240}$
8	ยอดปิดหนี้ก่อนชำระงวดที่ 100 เท่ากับ 961,670.15 บาท	ณ เวลานั้นเหลือค้างงวดปกติ 80 งวด และเงินก้อนในอีก 80 เดือน

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
9	จำนวนเงินที่กู้ 3,364,989.39 บาท	ปีที่ 20 มีค่างวดปกติเพียง 11 งวด เพราะเดือนที่ 240 ถูกแทนด้วยเงินก้อน 200,000 บาท
10	อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน 0.377510%; อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปีทบต้นรายเดือน 4.53012%	แก้สมการ $2,000,000 = 15,000a_{\overline{179} i} + 100,000(1+i)^{-180}$ ด้วยวิธีเชิงตัวเลข
11	ลงทุน ณ เวลา 1, 2, ..., 9 ครั้งละ 754,737.14 บาท	อัตราแท้จริงต่อปี $i = (1.015)^4 - 1 = 0.0613635506$; เงินถอน ณ สิ้นปีที่ 7 ต้องสะสมผลกระทบถึงสิ้นปีที่ 10
12.a	เงินชำระปกติเดือนละ 16,886.73 บาท	ยอดกู้เริ่มต้น 2,700,000 บาท
12.b	ยอดปิดหนี้ทันทีหลังชำระงวดที่ 180 เท่ากับ 1,193,363.79 บาท	หลังงวดที่ 180 เหลือค่างวดปกติ 59 งวด และ Balloon Payment ในอีก 60 เดือน
12.c	Balloon Payment ช่วยลดค่างวดปกติช่วงต้น แต่ทำให้มียอดเงินก้อนสูงในปลายสัญญาและเพิ่มความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง การรีไฟแนนซ์ และอัตราดอกเบี้ย	-
13.a	เงินสะสม ณ สิ้นเดือนที่ 300 เท่ากับ 2,758,186.30 บาท	อัตรารายเดือนเทียบเท่า $j = (1.01125)^{1/3} - 1 = 0.0037360247$
13.b	เงินสะสม ณ สิ้นเดือนที่ 300 เท่ากับ 3,053,763.92 บาท	เงินฝากช่วง 120 เดือนแรกสะสมดอกเบี้ยต่ออีก 180 เดือน
13.c	เงินสะสมเพิ่มขึ้น 295,577.61 บาท หรือ ประมาณ 10.7164% เมื่อเทียบกับข้อ 13.a	การเพิ่มเงินออมในช่วงต้นให้ผลสูงกว่า เพราะเงินส่วนเพิ่มได้รับดอกเบี้ยทบต้นเป็นเวลานานกว่า

บทที่ 5

ตารางที่ A.5 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5: สินเชื่อและหลักการชำระหนี้

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.a	เงินกู้เริ่มต้น 1,081,970.34 บาท	คิดลดค่างวดด้วยผลคูณของตัวประกอบสะสมรายปี $\prod_{j=1}^k (1 + i_j)$
1.b	มูลค่าสะสม ณ ปลายปีที่ 15 เท่ากับ 2,289,661.43 บาท	–
1.c	หนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 12 เท่ากับ 267,301.19 บาท	เหลือค่างวด 3 งวดที่อัตราร้อยละ 6 ต่อปี
1.d	งวดที่ 13: ดอกเบี้ย 16,038.07 บาท; เงินต้น 83,961.93 บาท	–
2.a	เงินกู้เริ่มต้น 718,883.02 บาท	–
2.b	หนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 6 เท่ากับ 342,579.86 บาท	เหลือค่างวด 4 งวด
2.c	งวดที่ 7: ดอกเบี้ย 22,267.69 บาท; เงินต้น 77,732.31 บาท	–
3.a	เงินกู้เริ่มต้น 1,275,407.68 บาท	ใช้อัตราร้อยละ 3, 6, 8 ตามช่วงเวลาที่กำหนด
3.b	มูลค่าสะสม ณ ปลายปีที่ 20 เท่ากับ 4,038,762.94 บาท	–
3.c	หนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 10 เท่ากับ 704,438.06 บาท	–
3.d	งวดที่ 11: ดอกเบี้ย 42,266.28 บาท; เงินต้น 57,733.72 บาท	อัตราในงวดที่ 11 เท่ากับร้อยละ 6
4.a	ค่างวดเดือนละ 23,485.03 บาท	อัตรารายเดือน $i = 0.06/12 = 0.005$
4.b	หนี้คงเหลือหลังชำระงวดที่ 18 เท่ากับ 652,744.16 บาท	เหลือค่างวด 30 งวด
4.c	งวดที่ 19: ดอกเบี้ย 3,263.72 บาท; เงินต้น 20,221.31 บาท	–
5.a	เงินกู้เริ่มต้น 72,777.92 บาท	ใช้อัตรา ราย เดือน 0.04/12, 0.06/12, 0.03/12 ตามลำดับ
5.b	วิธีมองไปข้างหน้า: หนี้คงเหลือหลังงวดที่ 7 เท่ากับ 39,296.32 บาท	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
5.c	วิธีมองย้อนหลัง: หนี้คงเหลือหลังงวดที่ 7 เท่ากับ 39,296.32 บาท	ทั้งสองวิธีต้องให้คำตอบเดียวกันเมื่อใช้ค่าไม่ปัดเศษ
6.a	เงินกู้เริ่มต้น 2,901,436.76 บาท	$\text{แก้ } 20,000 = S \left(0.05/12 + 1/s_{240 0.04/12} \right)$
6.b	ดอกเบี้ยที่จ่ายแก่ธนาคารเดือนละ 12,089.32 บาท	–
6.c	เงินฝากเข้ากองทุนเดือนละ 7,910.68 บาท	–
6.d	งวดที่ 120: เงินต้นลดลงสุทธิ 11,754.32 บาท; ดอกเบี้ยสุทธิ 8,245.68 บาท	เงินต้นลดลงสุทธิเท่ากับเงินฝากงวดแรกสะสมถึงงวดที่ 120
6.e	หนี้สุทธิหลังงวดที่ 120 เท่ากับ 1,736,590.65 บาท	หนี้สุทธิ = $S - V_{120}$
7.a	เงินจ่ายรวมเดือนละ 22,204.10 บาท	–
7.b	ดอกเบี้ยแก่ธนาคารเดือนละ 10,000.00 บาท; เงินฝากกองทุนเดือนละ 12,204.10 บาท	–
7.c	งวดที่ 50: เงินต้นลดลงสุทธิ 15,582.70 บาท; ดอกเบี้ยสุทธิ 6,621.40 บาท	–
7.d	หนี้สุทธิหลังงวดที่ 50 เท่ากับ 1,308,696.74 บาท	–
8	ต้องจ่ายเพิ่มเพื่อปิดเงินต้น 163,709.83 บาท; เงินสดที่จ่ายรวมในวันงวดที่ 50 เท่ากับ 178,709.83 บาท	เงินกู้โดยนัย 821,541.69 บาท; ค่างวดปกติ 15,000 บาทประกอบด้วยดอกเบี้ย 4,107.71 บาทและเงินฝากกองทุน 10,892.29 บาท
9	เงินกู้เริ่มต้น 205,783.55 บาท	ยอด 50,000 บาทเป็นหนี้หลังชำระงวดที่ 18
10	เงินกู้เริ่มต้น 197,423.38 บาท	ก่อนชำระงวดที่ 18 มียอด 50,000 บาท จึงเหลือหลังชำระเพียง 40,000 บาท; คำตอบต่ำกว่าข้อ 9 จำนวน 8,360.17 บาท
11.a	ค่างวดเดือนละ 15,000.00 บาท	–
11.b	อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน 1.00%	ใช้ผลต่างของสมการเวียนเกิดสองงวดติดกัน

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
11.c	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี ทบต้นรายเดือน 12.00%	–
12.1	งวด 1: ดอกเบี้ย 1,000 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 11,000 บาท; คงเหลือ 90,000 บาท	–
12.2	งวด 2: ดอกเบี้ย 900 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,900 บาท; คงเหลือ 80,000 บาท	–
12.3	งวด 3: ดอกเบี้ย 800 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,800 บาท; คงเหลือ 70,000 บาท	–
12.4	งวด 4: ดอกเบี้ย 700 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,700 บาท; คงเหลือ 60,000 บาท	–
12.5	งวด 5: ดอกเบี้ย 600 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,600 บาท; คงเหลือ 50,000 บาท	–
12.6	งวด 6: ดอกเบี้ย 500 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,500 บาท; คงเหลือ 40,000 บาท	–
12.7	งวด 7: ดอกเบี้ย 400 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,400 บาท; คงเหลือ 30,000 บาท	–
12.8	งวด 8: ดอกเบี้ย 300 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,300 บาท; คงเหลือ 20,000 บาท	–
12.9	งวด 9: ดอกเบี้ย 200 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,200 บาท; คงเหลือ 10,000 บาท	–
12.10	งวด 10: ดอกเบี้ย 100 บาท; เงินต้น 10,000 บาท; ชำระ 10,100 บาท; คงเหลือ 0 บาท	ดอกเบี้ยรวม 5,500.00 บาท
13.a	ค่างวดเดือนละ 2,334.81 บาท	หลังงวดที่ 15 เหลืออีก 9 งวด
13.b	เงินกู้เริ่มต้น 49,599.21 บาท	–
13.c	หนี้หลังงวดที่ 15 จากทั้งวิธีมองไปข้างหน้าและมองย้อนหลังเท่ากับ 20,000.00 บาท	–
14.a	อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน 1.222894%	ใช้ $P_{10} = 6,000v^{15} = 5,000$
14.b	เงินกู้เริ่มต้น 124,140.72 บาท	–
14.c	อัตราดอกเบี้ยเพียงในนามต่อปี ทบต้นรายเดือน 14.67473%	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
15.a	เงินกู้เริ่มต้น 127,159.78 บาท	ใช้ $S = 5,000s_{\overline{24} 0.005}$
15.b	อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ต่อเดือน 0.786412%	ดอกเบี้ยธนาคารเดือนละ 1,000 บาท
15.c	อัตราดอกเบี้ยเงินกู้เพียงในนามต่อปี ทบต้นรายเดือน 9.43695%	–
16.a	เงินจ่ายรวมเดือนละ 18,258.36 บาท	–
16.b	ดอกเบี้ยแก่ธนาคารเดือนละ 5,000.00 บาท	–
16.c	เงินฝากเข้ากองทุนเดือนละ 13,258.36 บาท	–
17.a	ค่างวดเดือนละ 2,109.98 บาท	–
17.b	ดอกเบี้ยรวม 1,319.78 บาท	–
17.c	$DTI = 11.72\%$; เงินเหลือหลังค่าใช้จ่ายจำเป็นและค่างวดประมาณ 3,890.02 บาทต่อเดือน	ค่าใช้จ่ายจำเป็นไม่รวมอยู่ในตัวเลขของ DTI
17.d	หากมีเงินสด 24,000 บาทโดยไม่กระทบเงินสำรองฉุกเฉิน การซื้อสดประหยัดดอกเบี้ย 1,319.78 บาท; หากไม่มีเงินก้อน การผ่อนยังมีกระแสเงินสดเป็นบวกตามข้อมูลที่กำหนด	การตัดสินใจจริงต้องพิจารณาเงินสำรองฉุกเฉินและต้นทุนค่าเสียโอกาสของเงินสด
18.a	มูลค่าปัจจุบันของเงินสดที่คาดว่าจะได้รับ 33,333.33 บาท	$35,000/1.05$
18.b	ค่าเผื่อผลขาดทุนด้านเครดิต 26,666.67 บาท	กระแสเงินสดขาดมือ = $60,000 - 33,333.33$
19.a	ควรพิจารณาเป็น NPL หรือ Stage 3	ค้างชำระเกิน 90 วันและมีหลักฐานการด้อยค่าด้านเครดิต
19.b	เงินรับ คืนคาด หมาย 100,000.00 บาท; $ECL = 300,000.00$ บาท	สมมติรับคืนทันที จึงไม่ต้องคิดลด
19.c	$NPL\ Coverage\ Ratio = 75.00\%$	$300,000/400,000 \times 100$
20	$DTI = 45.24\%$	ยังสรุประดับความเสี่ยงจาก DTI เพียงค่าเดียวไม่ได้; ต้องทราบฐานรายได้ที่ใช้ เกณฑ์ผู้ให้กู้ ความมั่นคงของรายได้ ค่าใช้จ่ายจำเป็น ภาระเลี้ยงดู หนี้อื่น เงินสำรองฉุกเฉิน และความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
21.a	Debt Snowball: เป้าหมายตามลำดับ โทรศัพท์มือถือ → บัตรเครดิต A → สินเชื่อส่วนบุคคล; ปิดบัญชีในเดือนที่ 5, 10, 14 ตามลำดับ; ดอกเบี้ยรวม 6,348.51 บาท; จ่ายรวม 93,348.51 บาท	จำลองโดยคิดดอกเบี้ยต้นเดือนก่อนชำระ และโอนเงินส่วนเกินไปบัญชีถัดไปภายในเดือนเดียวกัน
21.b	Debt Avalanche: เป้าหมายตามลำดับ บัตรเครดิต A → สินเชื่อส่วนบุคคล → โทรศัพท์มือถือ; บัตรเครดิตปิดเดือนที่ 10, โทรศัพท์ปิดเดือนที่ 12 จากค่างวดขั้นต่ำ, และสินเชื่อส่วนบุคคลปิดเดือนที่ 14; ดอกเบี้ยรวม 5,666.75 บาท; จ่ายรวม 92,666.75 บาท	–
21.c	ทั้งสองวิธีปลดหนี้หมดใน 14 เดือน; Avalanche ประหยัดดอกเบี้ยกว่า Snowball 681.76 บาท	ผลขึ้นกับสมมติฐานเรื่องจังหวะคิดดอกเบี้ยและการโอนเงินส่วนเกิน
22.a	ค่างวดประจำปี 1,186,982.00 บาท	–
22.b1	ปี 1: ดอกเบี้ย 300,000.00 บาท; เงินต้น 886,982.00 บาท; หนี้คงเหลือ 4,113,018.00 บาท	–
22.b2	ปี 2: ดอกเบี้ย 246,781.08 บาท; เงินต้น 940,200.92 บาท; หนี้คงเหลือ 3,172,817.08 บาท	–
22.b3	ปี 3: ดอกเบี้ย 190,369.02 บาท; เงินต้น 996,612.98 บาท; หนี้คงเหลือ 2,176,204.10 บาท	–
22.b4	ปี 4: ดอกเบี้ย 130,572.25 บาท; เงินต้น 1,056,409.76 บาท; หนี้คงเหลือ 1,119,794.34 บาท	–
22.b5	ปี 5: ดอกเบี้ย 67,187.66 บาท; เงินต้น 1,119,794.34 บาท; หนี้คงเหลือ 0.00 บาท	ความคลาดเคลื่อนระดับสตางค์อาจเกิดจากการปัดค่างวด
22.c	ICR ก่อนกู้ = 4.17 เท่า; หลังกู้ปีที่ 1–5 เท่ากับ 2.78, 2.95, 3.16, 3.42, 3.75 เท่า	ใช้ดอกเบี้ยเดิม 600,000 บาทบวกดอกเบี้ยสินเชื่อใหม่ของแต่ละปี
22.d	ผ่านเกณฑ์ $ICR \geq 2$ ทุกปี	ICR ไม่สะท้อนการชำระเงินต้น กระแสเงินสดจริง ความผันผวนของ EBIT เงินทุนหมุนเวียน หรือภาระหนี้ที่อาจเกิดขึ้นอื่น

บทที่ 6

ตารางที่ A.6 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6: การประเมินราคาหลักทรัพย์ในตลาดทุน

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1	ตลาดแรกเป็นการออกหลักทรัพย์ใหม่ เงินจากผู้ลงทุนไหลเข้าสู่บริษัทผู้ออกโดยตรง; ตลาดรองเป็นการซื้อขายหลักทรัพย์เดิมระหว่างผู้ลงทุน เงินไม่ไหลเข้าสู่บริษัทโดยตรง แต่ช่วยสร้างสภาพคล่อง การค้นหาราคา และความเชื่อมั่น จึงลดต้นทุนการระดมทุนในตลาดแรก	–
2.a	อัตราผลตอบแทนรวมก่อนต้นทุนธุรกรรม 12.50%	$(0.80 + 35.20 - 32.00)/32.00$
2.b	อัตราผลตอบแทนสุทธิหลังต้นทุนธุรกรรม 11.84%	เงินจ่ายจริง 32.10 บาท; เงินรับสุทธิรวมปันผล 35.90 บาท
2.c	Dividend yield 2.50%; Capital-gain yield 10.00%	รวมกันเป็น 12.50% ก่อนต้นทุนธุรกรรม
3	อัตราจ่ายเงินปันผล 40.00%; อัตราเก็บกำไร 60.00%; อัตราเติบโตที่ยั่งยืนโดยประมาณ $g = 9.00\%$ ต่อปี	ไม่ควรใช้ 9% ตลอดไปโดยอัตโนมัติ ต้องตรวจสอบความยั่งยืนของ ROE และ payout รวมทั้งเงื่อนไข $g < k_e$ และอัตราเติบโตระยะยาวของเศรษฐกิจ
4.a	ราคาทฤษฎีหลังหมดสิทธิ 67.00 บาทต่อหุ้น	$P_{\text{TERP}} = (5(72) + 42)/6$
4.b	มูลค่าทฤษฎีของสิทธิ 5.00 บาทต่อหุ้นเดิมหนึ่งหุ้น	$(72 - 42)/(5 + 1)$
4.c	ซื้อหุ้นใหม่ 100 หุ้น และใช้เงิน 4,200.00 บาท	ผู้ถือหุ้นเดิมมี $500/5 = 100$ หน่วยสิทธิซื้อหุ้นใหม่
4.d	หากไม่ใช้และไม่ขายสิทธิ จะสูญเสียมูลค่าทางเศรษฐกิจประมาณ 2,500.00 บาท และสัดส่วนความเป็นเจ้าของลดลง	มูลค่าสิทธิรวม $500(5)$ บาท
5	ราคาประเมิน 1.60 บาทต่อหุ้น	อัตราผลตอบแทนต่อครั้งปี = $0.05/2 = 0.025$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
6	ราคาหุ้นทันทีที่หลังจ่ายเงินปันผลปลายปีที่ 5 เท่ากับ 6.90 บาทต่อหุ้น	$P_5 = D_6/(k - g)$, $D_6 = 0.50(1.02)^5$
7	$D_3 = 3.63$ บาทต่อหุ้น	มูลค่า ณ ปลายปีที่ 2 คือ $D_3/(0.10 - 0.05)$
8	$D_1 = 4.00$ บาทต่อหุ้น	ให้ $5/0.10 = D_1/(0.10 - 0.02)$
9	ราคาเรียกคืนทันทีหลังจ่ายคูปอง ปลายปีที่ 6 เท่ากับ 106,624.25 บาท	เท่ากับมูลค่าปัจจุบัน ณ ปีที่ 6 ของคูปองอีก 4 งวดและเงินไถ่ถอน
10	ราคาซื้อพันธบัตรไม่มีคูปอง 558,394.78 บาท ต่ำกว่า 627,412.37 บาทอยู่ 69,017.59 บาท	$1,000,000(1.06)^{-10}$; ค่า 627,412.37 บาทตรงกับการคิดลดประมาณ 8 ปี ไม่ใช่ 10 ปี
11.a	ดอกเบี้ยย้ค้างรับ 333.33 บาท	$1,000(4/12)$
11.b	ราคากรอสส์ 11,208.46 บาท	เหลือคูปอง 6 งวด; งวดแรกอีก $8/12$ ปี
11.c	ราคาคลีน 10,875.12 บาท	ราคาคลีน = ราคากรอสส์ — ดอกเบี้ยค้างรับ
12.a	62,092.13 บาท; ซื้อขายที่ส่วนลด	ตราสารไม่มีคูปองอายุ 5 ปี
12.b	100,000.00 บาท; ซื้อขายที่พาร์	อัตราคูปองเท่ากับอัตราผลตอบแทน
12.c	89,330.15 บาท; ซื้อขายที่ส่วนลด	อายุ 8 ปี อัตราคูปอง 8% ต่ำกว่า yield 10%
13.a	$P(8\%) = 113,420.16$ บาท; $P(9\%) = 106,417.66$ บาท; ราคาเปลี่ยนแปลง -6.1740%	-
13.b	$D_{\text{Mac}} = 6.9658$ ปี, $D_{\text{mod}} = 6.4498$ ปี; ประมาณการเปลี่ยนแปลง -6.4498% และราคาประมาณ 106,104.77 บาท	ใช้ $\Delta i = 0.01$
13.c	การใช้ดูเรชันอย่างเดียวประเมินราคาต่ำกว่าค่าจริง 312.89 บาท เพราะละเลยความนูนของเส้นราคา-ผลตอบแทน	ความนูนเป็นบวกทำให้ราคาจริงสูงกว่าค่าประมาณเส้นสัมผัสเมื่อ yield เพิ่มขึ้น

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
14	$\sum_{k=1}^n (K - iB_{k-1}) = P - C \text{ และ } \sum_{k=0}^{n-1} B_k = \frac{nK - P + C}{i}$	ใช้ $B_k = (1+i)B_{k-1} - K$ จึงมี $K - iB_{k-1} = B_{k-1} - B_k$ แล้วรวมแบบ telescoping
15	มูลค่าตามบัญชีทันทีหลังจ่ายคูปองงวดที่ 10 เท่ากับ 99,835.25 บาท	อัตราต่อครึ่งปี $j = (1.06)^{1/2} - 1 = 2.9563\%$; เหลือ 10 งวดครึ่งปี
16.a	อัตราผลตอบแทนแท้จริงต่อปี 6.09%	$i = (1 + 0.06/2)^2 - 1$
16.b	ราคาพันธบัตร 11,174.64 บาท	คูปองปีละ 800 บาท; ราคาไถ่ถอน 10,500 บาท
16.c0	$B_0 = 11,174.64$ บาท	มูลค่าตามบัญชี ณ วันซื้อ
16.c1	ดอกเบี้ย 680.54 บาท; ตัดจ่ายพรีเมียม 119.46 บาท; $B_1 = 11,055.18$ บาท	-
16.c2	ดอกเบี้ย 673.26 บาท; ตัดจ่ายพรีเมียม 126.74 บาท; $B_2 = 10,928.44$ บาท	-
16.c3	ดอกเบี้ย 665.54 บาท; ตัดจ่ายพรีเมียม 134.46 บาท; $B_3 = 10,793.98$ บาท	-
16.c4	ดอกเบี้ย 657.35 บาท; ตัดจ่ายพรีเมียม 142.65 บาท; $B_4 = 10,651.33$ บาท	-
16.c5	ดอกเบี้ย 648.67 บาท; ตัดจ่ายพรีเมียม 151.33 บาท; $B_5 = 10,500.00$ บาท	คูปองแต่ละปี 800 บาท
17	$v = (1 + 1.2r)^{-1},$ $P_{\text{set}} = rF \sum_{n \in \{5, 10, 15, 20\}} a_{\overline{n} 1.2r}$ $+ F \sum_{n \in \{5, 10, 15, 20\}} v^n$ $+ 5,000v^{10} + 10,000v^{15} + 15,000v^{20}.$	รวมราคาของตราสารย่อยทั้ง 4 ฉบับ
18	ราคา ตาม อายุ 8, 10, 12, 15, 20 ปี เท่ากับ 17,071.35, 16,567.96, 16,132.36, 15,586.44, 14,902.75 บาท ตามลำดับ; ราคารวม 80,260.86 บาท	คูปองฉบับละ 1,000 บาทต่อปี

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
19	$\frac{\partial P}{\partial g} = C a_{\overline{n} i} > 0,$ $\frac{\partial P}{\partial i} = -Cv \left(g \sum_{k=1}^n kv^k + nv^n \right) < 0.$	คูปองสูงขึ้นทำให้ราคาสูงขึ้น; yield สูงขึ้นทำให้ราคาลดลง เมื่อ $C, g, i > 0$
20	$D_{\text{Mac}} = 5.0000$ ปี; $D_{\text{mod}} = 4.1667$ ปี	ตราสารไม่มีคูปองมี Macaulay duration เท่ากับอายุสัญญา
21	$D_{\text{Mac}} = 11.0000$ ปี; $D_{\text{mod}} = 10.0000$ ปี	สำหรับ perpetuity จ่ายปลาย ปี $D_{\text{Mac}} = (1 + i)/i$ และ $D_{\text{mod}} = 1/i$
22.a	พันธบัตรไม่มีคูปอง: $D_{\text{Mac}} = 5.0000$ ปี; $D_{\text{mod}} = 4.5455$ ปี	-
22.b	พันธบัตรคูปอง 10%: $D_{\text{Mac}} = 4.1699$ ปี; $D_{\text{mod}} = 3.7908$ ปี	ราคาเท่าพาร์
22.c	พันธบัตรคอนโซล: $D_{\text{Mac}} = 11.0000$ ปี; $D_{\text{mod}} = 10.0000$ ปี	กระแสเงินสดก่อนกำหนดลด duration ของพันธบัตรคูปอง; consol ไม่มีวันครบกำหนดจึงมี duration สูงกว่า
23.a	จำนวนเงินกู้ 272,525.47 บาท	กระแสชำระ 50,000, 60,000, 72,000, 86,400, 103,680 บาท
23.b	$D_{\text{Mac}} = 3.1735$ ปี	-
23.c	$D_{\text{mod}} = 2.8850$ ปี	-
23.d	เวลาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนเงินสด 3.3595 ปี ซึ่งสูงกว่า Macaulay duration ประมาณ 0.1860 ปี	การคิดลดถ่วงน้ำหนักของเงินจ่ายช่วง ปลาย
24.a	ราคา 106,463.21 บาท; $D_{\text{mod}} = 6.3162$ ปี; ความนูน $C = 50.5940$	$D_{\text{Mac}} = 6.6321$ ปี
24.b	ราคาประมาณด้วยดูเรชันอย่างเดียว 101,419.85 บาท	$\Delta i = 0.0075$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
24.c	ราคาประมาณด้วยดูเรชันและความนูน 101,571.34 บาท	ใช้ $\frac{1}{2}\mathcal{C}(\Delta i)^2$
24.d	ราคาที่ยคำนวณโดยตรงที่ yield 5.75% เท่ากับ 101,567.93 บาท; คลาดเคลื่อนของวิธี duration-only 148.07 บาท และวิธี duration-convexity 3.42 บาท	ใช้ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์
25.a	มูลค่าปัจจุบันของหนี้สิน 1,580,629.05 บาท	$2,000,000(1.04)^{-6}$
25.b	ลงทุนในตราสารอายุ 3 ปีและ 9 ปี ฉบับละ 790,314.53 บาท ตามมูลค่าตลาด	เงื่อนไขมูลค่าและ duration ทำให้น้ำหนักเท่ากัน
25.c	ราคาไถ่ถอนตราสารอายุ 3 ปี 888,996.36 บาท; อายุ 9 ปี 1,124,864.00 บาท	–
25.d	ความนูนพอร์ตโฟลิโอ $\mathcal{C}_A = 47.1524$ สูงกว่าความนูนหนี้สิน $\mathcal{C}_L = 38.8314$	เป็นไปตามเงื่อนไขเสริม $\mathcal{C}_A \geq \mathcal{C}_L$
26	การใช้ Δi ค่าเดียวไม่เพียงพอ เพราะเส้นอัตราผลตอบแทนเปลี่ยนแบบไม่ขนาน อัตรา 2 ปีและ 10 ปีเคลื่อนไหวคนละทิศ และเครดิตสเปรดเพิ่มแยกจากอัตราไร้ความเสี่ยง จึงอาจเกิดการชดเชยหรือขยายผลต่างกันในแต่ละช่วงอายุ	ควรใช้ key-rate duration/DV01 แยกตาม tenor, spread duration/CS01, convexity, cash-flow bucketing, credit quality, liquidity และ optionality พร้อมทำ scenario/stress test และ full repricing รายตราสาร

บทที่ 7

ตารางที่ A.7 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7: การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.a	ผล ตอบแทน ราย งวด เท่ากับ 4.0000%, -0.9615%, 5.8824%, 1.8519%	เงินปันผล 0.50 บาทอยู่ในผลตอบแทนงวดจากวันที่ 2 ไปวันที่ 3
1.b	ผลตอบแทนสะสม 11.0784%	ใช้ $\prod_{t=1}^4 (1 + R_t) - 1$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.c	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 2.6932% ต่องวด; ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต 2.6615% ต่องวด	ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตทำให้เงินเติบโตจากต้นงวดถึงปลายงวดจริง
1.d	$\ln(P_t/P_{t-1})$ ใช้เฉพาะการเปลี่ยนแปลงราคา จึงไม่รวมกระแสเงินสด D_t ; ถ้าต้องการผลตอบแทนรวมต้องปรับราคาให้รวมเงินปันผล หรือใช้ $(P_t - P_{t-1} + D_t)/P_{t-1}$	ผลตอบแทนลอการิทึมจากราคาเพียงอย่างเดียวไม่ใช่ Total Return
2.a	ผลตอบแทนสะสม 3.5938%	–
2.b	อัตราการเติบโตทบต้นเฉลี่ย 0.5902% ต่อเดือน; อัตราแท้จริงต่อปี 7.3168%	$g = (1 + R_{1:6})^{1/6} - 1$, $R_{\text{ann}} = (1 + g)^{12} - 1$
2.c	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง 1.5375% ต่อเดือน; Annualized Volatility 5.3262% ต่อปี	ใช้ตัวหาร $n - 1$ และคูณด้วย $\sqrt{12}$
2.d	ต้องสมมติว่าผลตอบแทนรายเดือนเป็นอิสระ หรืออย่างน้อยไม่มีอัตสหสัมพันธ์ที่มีสาระสำคัญ และมีความแปรปรวนคงที่ตามเวลา	ไม่ควรใช้กฎรากที่สองโดยอัตโนมัติ เมื่อมี Volatility Clustering
3	$\mathbb{E}[R_A] = 5.0000\%$, $\mathbb{E}[R_m] = 4.5000\%$; $\text{Cov}(R_A, R_m) = 0.005700$ หรือ $57.00\%^2$; $\rho_{Am} = 0.998273$; $\beta_A = 1.416149$	ใช้ความน่าจะเป็นสถานการณ์ ละ 1/4; ความแปรปรวนตลาด $= 0.004025$
4.a	จุด สูงสุด สะสม: 100, 108, 108, 112, 112, 112, 117, 117 ถ้าน บาท; Drawdown: 0, 0, 2.7778%, 0, 12.5000%, 9.8214%, 0, 6.8376%	$D_t = (M_t - V_t)/M_t$
4.b	Maximum Drawdown = 12.5000%	จาก 112 ลดลงเป็น 98 ล้านบาท
4.c	Peak เดือนที่ 4 ที่ 112 ล้านบาท; Trough เดือนที่ 5 ที่ 98 ล้านบาท; Recovery Date เดือนที่ 7 เมื่อมูลค่าเป็น 117 ล้านบาท	Recovery หมายถึงกลับขึ้นไม่น้อยกว่า Peak เดิม
5	$\text{SMA}_3(8) = 24.6667$, $\text{WMA}_3(8) = 24.8333$, $\text{EMA}_3(8) = 24.6875$	EMA ใช้ $\alpha = 2/(3 + 1) = 0.5$ และเริ่มจาก $\text{SMA}_3(3) = 21$
6.a	$MB(8) = 24.5000$; ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแบบตัวหาร n เท่ากับ 1.118034; $UB(8) = 26.7361$, $LB(8) = 22.2639$	ใช้ข้อมูล 24, 25,

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
6.c	ราคาที่สูงกว่าแถบบนอาจสะท้อน Momentum หรือแนวโน้มที่แรง ไม่ใช่สัญญาณขายหรือกลับตัวโดยอัตโนมัติ; ต้องยืนยันด้วยกฎออก ต้นทุน และผลนอกกลุ่มตัวอย่าง	ในข้อมูลข้อนี้ราคา 26 ยังต่ำกว่า $UB(8)$
7.a	วัน $t - 1$: $MACD = 0.20$, $Histogram = -0.10$; วัน t : $MACD = 0.60$, $Histogram = 0.18$	$Histogram = MACD - Signal$
7.b	เกิดสัญญาณตัดขึ้นที่วัน t	เพราะ $H_{t-1} \leq 0$ และ $H_t > 0$
7.c	ใช้ผลตอบแทนงวด $t + 1$	สถานะจากข้อมูลสิ้นวัน t ไม่สามารถรับผลตอบแทนงวด t ได้
8	ผล ตอบแทน กลยุทธ์ จวด ที่ 2-5 เท่ากับ -1.1500% , -3.3000% , 2.0000% , -0.1500% ; มูลค่าปลายงวดเท่ากับ 973,534.59 บาท หรือผลตอบแทนสะสม -2.6465%	งวดที่ 3 เปลี่ยนจาก Long เป็น Short จึงมี Turnover = 2
9	คำตอบตัวอย่าง: ใช้ Rolling Development Window 500 วัน, Test Window 100 วัน และเลื่อนครั้งละ 100 วัน จนครบ 10 ชุดทดสอบ; เลือก (n, k) จาก Net Sharpe ในหน้าต่างพัฒนา; Benchmark คือ Buy-and-Hold, เงินสด และดัชนีตลาด; หักค่าคอมมิชชั่น Spread และ Slippage; รายงาน CAGR, Volatility, Sharpe, Sortino, MDD, Turnover, VaR และ ES	เลือกชุดพารามิเตอร์ก่อนทดสอบ; ใช้ Walk-Forward OOS; รายงานทุกแบบที่ทดลองและใช้ White Reality Check/SPA, Deflated Sharpe หรือการปรับ Multiple Testing เพื่อลด Data-Snooping Bias
10	ความแปรปรวนพอร์ต = 0.021700 ; ความผันผวนพอร์ต = 14.7309%	$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$
11.a	$w_A = 0.768156$, $w_B = 0.231844$ หรือ 76.8156% และ 23.1844%	$Cov_{AB} = -0.0066$
11.b	ผลตอบแทนคาดหวัง GMV = 9.6229% ; ความผันผวน = 7.8431%	—
11.c	สอดคล้องกับข้อจำกัด Long-only	น้ำหนักทั้งสองเป็นบวกและรวมกันเท่ากับ 1

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
12.a	พอร์ต GMV: $w_{\text{GMV}} = (0.630578, 0.236342, 0.133080)^T$ ผลตอบแทนคาดหวัง 9.6406%; ความผันผวน 8.3535%	$w_{\text{GMV}} = \Sigma^{-1} \mathbf{1} / (\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1})$
12.b	พอร์ตผลตอบแทนเป้าหมาย 12%: $w_{0.12} = (0.222809, 0.360084, 0.417107)^T$ ความผันผวน 10.8967%	เป็นคำตอบความแปรปรวนต่ำสุดภายใต้ $\mathbf{1}^T w = 1$ และ $\mu^T w = 0.12$
12.c	พอร์ตเป้าหมาย 12% มีความเสี่ยงสูงกว่า GMV ประมาณ 2.5432 จุดร้อยละ	$10.8967\% - 8.3535\% = 2.5432\%$
12.d	GMV: $\mathbf{1}^T w = 1.000000$; พอร์ตเป้าหมาย: $\mathbf{1}^T w = 1.000000$, $\mu^T w = 0.120000$	เงื่อนไขทั้งสองถูกต้องภายใต้ความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข
13.a	Net Exposure = 0.50 ล้านบาท; Gross Exposure = 3.50 ล้านบาท	Net = 2.0 - 1.5, Gross = 2.0 + 1.5
13.b	กำไรขาดทุนก่อนต้นทุน = -170,000 บาท	Long A ขาดทุน 80,000 บาท; Short B ขาดทุน 90,000 บาท
13.c	ค่าซื้อขาย 8,750 บาท; ค่าหุ้นยืม 7,500 บาท; ผลสุทธิ = -186,250 บาท	ต้นทุนรวม 16,250 บาท
13.d	Net Exposure ต่ำอาจยังมี Gross Exposure, Leverage, Basis Risk, Short Squeeze และความเสี่ยงสหสัมพันธ์สูง; จึงไม่ใช่หลักฐานว่าความเสี่ยงรวมต่ำ	ควรรายงานทั้ง Net และ Gross Exposure

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
14	ให้ $\mathcal{L}(w, \lambda) = w^T \Sigma w - \lambda(1^T w - 1)$. เรื่อนไขอันดับหนึ่งให้ $2\Sigma w - \lambda 1 = 0$, ดังนั้น $w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} 1, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{1^T \Sigma^{-1} 1},$ จึงได้ $w_{\text{GMV}} = \frac{\Sigma^{-1} 1}{1^T \Sigma^{-1} 1}.$ Hessian เท่ากับ $2\Sigma \succ 0$; สำหรับทิศทางที่เป็นไปได้ $d \neq 0$, $1^T d = 0$, มี $d^T (2\Sigma) d > 0$, จึงเป็นจุดต่ำสุดทั่วโลกที่มีคำตอบเดียว	ความเป็นบวกแน่นอนของ Σ ให้ทั้ง SOC และเอกรฐานผกผัน
15	$\text{VaR}_{0.95} = 97,691.24$ บาท; $\text{ES}_{0.95} = 122,763.20$ บาท	ใช้ $\mu = 0.0002, \sigma = 0.012$ และมูลค่าพอร์ต 5 ล้านบาท
16.a	Historical VaR ที่ 90% เท่ากับ 44 พันบาท	Nearest-Rank = $[0.90(20)] = 18$
16.b	ES เท่ากับ 67.50 พันบาท	เฉลี่ย 55 และ 80 พันบาท
16.c	ES สูงกว่า VaR เพราะสะท้อนขนาดเฉลี่ยของผลขาดทุนในทาง ขณะที่ VaR ระบุเพียงจุดควอนไทล์และไม่บอกความรุนแรงหลังจุดนั้น	–
17.a	$\text{Violation Ratio} = 7/[250(0.01)] = 2.8000$	มีข้อยกเว้นจริง 2.8 เท่าของจำนวนคาดหวัง
17.b	อยู่ในเขตสีเหลือง (Yellow Zone)	Basel แบบดั้งเดิม: 0–4 เขียว, 5–9 เหลือง, ตั้งแต่ 10 แดง
17.c	$\hat{p} = 7/250 = 0.0280 = 2.8000\%$	–
17.d	$LR_{\text{uc}} = -2 \ln \left[\frac{0.99^{243} 0.01^7}{0.972^{243} 0.028^7} \right] = 5.49699.$ ที่ระดับ 5%, $5.49699 > 3.84146$ จึงปฏิเสธ Correct Unconditional Coverage	สถิติอ้างอิง χ_1^2 ภายใต้สมมติฐานศูนย์

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
18	Kupiec Test ใช้เพียงจำนวนข้อยกเว้นรวม จึงให้ค่าเดียวกัน แก่ A และ B; Christoffersen Test ใช้ความถี่การเปลี่ยนสถานะ $0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$ จึงตรวจพบ p_{11} สูงและการกระจุกตัวของ B; ควรเพิ่ม Crisis-Window Stress, Volatility Shock, Correlation/Spread Shock, Gap Loss และ Liquidity Stress	รายงาน Conditional-Coverage Test ควบคู่กับการทดสอบจำนวนข้อยกเว้น
19	Sharpe: $A = 0.5714, B = 0.5500$, ตลาด = 0.5833; อันดับ ตลาด $> A > B$. Treynor: $A = 0.1000, B = 0.1000$, ตลาด = 0.0700; อันดับ $A = B > \text{ตลาด}$	Sharpe ใช้ความเสี่ยงรวม; Treynor ใช้เบต้า
20.a	Jensen's alpha = 2.3000% ต่อปี	$(13.5 - 4) - 0.9(12 - 4) = 2.3$ จุดร้อยละ
20.b	Sharpe ของ P = 0.633333; Sharpe ของ ตลาด = 0.615385	–
20.c	$\frac{\alpha_P}{\sigma_P} + \rho_{Pm} S_m = \frac{0.023}{0.15} + 0.78 \left(\frac{0.08}{0.13} \right) = 0.633333 = S_P$	สมการสอดคล้องพอดีกับข้อมูลที่กำหนด
20.d	เมื่อ $\rho_{Pm} < 1$ พอร์ตมีความเสี่ยงเฉพาะตัว; ความเสี่ยงดังกล่าวเพิ่ม σ_P แต่ไม่เพิ่มเบต้าในสัดส่วนเดียวกัน จึงกด Sharpe เมื่อเทียบกับมาตรวัดที่ใช้ความเสี่ยงเชิงระบบ; ในข้อนี้อัลฟาบวกขดเขยได้มากพอให้ Sharpe สูงกว่าตลาดเล็กน้อย	Treynor ของ P = $(0.135 - 0.04)/0.9 = 0.10556$
21	Information Ratio = $(12\% - 9\%)/5\% = 0.6000$; Appraisal Ratio = $2\%/4\% = 0.5000$	IR ใช้ Tracking Error ของ Active Return; AR ใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Residual หรือความเสี่ยงเฉพาะตัว
22	กลยุทธ์ A: Sharpe 0.6316, Sortino 0.9167, Calmar 0.6000. กลยุทธ์ B: Sharpe 0.6667, Sortino 1.0000, Calmar 1.1000. ทั้งสามมาตรวัดสนับสนุนกลยุทธ์ B	Sortino ใช้ผลตอบแทนเป้าหมาย 4%; Calmar ใช้ CAGR ทหาร MDD

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
23.a	เงินทุนทางเศรษฐกิจจาก Unexpected Loss = $40 - 12 = 28$ ล้านบาท	ใช้ VaR ลบค่าเฉลี่ยผลขาดทุนตามข้อมูลโจทย์
23.b	รายได้สุทธิที่ปรับผลขาดทุนคาดหวัง = $18 - 4 - 5 = 9$ ล้านบาท; RAROC = $9/28 = 32.1429\%$	–
23.c	ควรยอมรับ เพราะ $32.1429\% > 20\%$	พิจารณาเฉพาะเกณฑ์ที่โจทย์กำหนด
23.d	เมื่อใช้เงินทุน 36 ล้านบาท, RAROC = $9/36 = 25.0000\%$; ยังสูงกว่าเกณฑ์ 20% แต่ส่วนเผื่อเหนือเกณฑ์ลดลง	ES มักสะท้อนความรุนแรงในส่วนหางมากกว่า VaR
24	คำตอบตัวอย่าง: คำถามวิจัยคือ Bollinger Bands ที่ใช้ค่าเฉลี่ยหลายชนิด ยังสร้าง Net Alpha หลังต้นทุน สภาพคล่อง และ Multiple Testing หรือไม่; H_0 : ไม่มีแบบใดให้ผลสุทธินอกกลุ่มตัวอย่างสูงกว่า Benchmark; ใช้หุ้น SET50 แบบ Point-in-Time พร้อมราคาปรับสิทธิและข้อมูล Bid-Ask/Volume; แบ่ง Rolling 500 วันพัฒนา–100 วันทดสอบ; Benchmark คือ Buy-and-Hold, เงินสด และดัชนี; รายงาน Net CAGR, Alpha, Sharpe, Sortino, MDD, Turnover, VaR/ES และ Capacity; ปรับ Multiple Testing ด้วย SPA/Reality Check, Deflated Sharpe และ Holm/FDR; ถือว่ามีนัยสำคัญเชิงเศรษฐศาสตร์เมื่อผลสุทธิเป็นบวก ทนต่อค่าต้นทุนหลายระดับและเสถียรในหลายช่วงตลาด	ต้องแยกผลทางสถิติออกจากผลที่มีขนาดคุ่มต้นทุนจริง

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
25	คำตอบตัวอย่าง: เลือกคู่จาก Rolling Correlation ที่สูงและเสถียร พร้อมประมาณ Rolling Beta; สร้าง Spread $z_t = \ln P_{A,t} - \hat{\beta}_t \ln P_{B,t}$; กำหนด $w_A + w_B \leq G_{\max}$, Beta-Neutral $w_A + \hat{\beta}_t w_B = 0$, Stop-Loss $L_{\max}$, Borrowing Fee และ Maintenance Margin. ผลตอบแทนสุทธิ: $r_{t+1}^{\text{net}} = w_{A,t} r_{A,t+1} + w_{B,t} r_{B,t+1} - c \sum_i \Delta w_{i,t} - b_t \sum_i \max(-w_{i,t}, 0).$ ใช้ Rolling Train 252 วัน–Test 21 วัน, เลือกคู่และประมาณเบต้าใหม่เฉพาะข้อมูลอดีต; Liquidate เมื่อ Stop-Loss หรือ Margin Call ทำงาน	รายงานผลทั้งก่อนและหลังค่าหุ้น ยืม Slippage และข้อจำกัด Gross Exposure
26	ระบบรายงานควรแสดง Historical VaR, Normal–EWMA VaR, Historical ES, จำนวนช้อยกเว้น, Kupiec p-value, Christoffersen p-value, Stress Loss, Sharpe Ratio และ MDD พร้อมวันที่ข้อมูล Horizon ระดับความเชื่อมั่น สถานะผ่าน/ไม่ผ่าน และกราฟช้อยกเว้นตามเวลา. คำว่า “ความเสี่ยงต่ำ” ไม่เท่ากับ “นำลงทุน” เพราะยังไม่รวมผลตอบแทนคาดหวัง มูลค่าพื้นฐาน สภาพคล่อง ต้นทุน อัลฟา ความสามารถในการกระจายความเสี่ยง และความเสี่ยงแบบจำลอง; ควรจัดอันดับอย่างน้อยสองมิติ Risk–Return แทนการใช้ Risk Rank เพียงค่าเดียว	VaR ต่ำอาจเกิดจากผลตอบแทนต่ำ ข้อมูลสงบชั่วคราว หรือแบบจำลองประเมินทางต่ำเกินไปจริง

บทที่ 8

ตารางที่ A.8 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8: คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.a	เงินรายปี $R = 29,018.86$ บาท	$R = 10,000 (N_{40} - N_{60})/N_{60}$
1.b	อัตราส่วนผลประโยชน์รวมต่อเบี้ยรวม = 2.901886 หรือ 290.1886%	เมื่อมีชีวิตครบทุกงวด ผลประโยชน์รวม = $20R$ และเบี้ยรวม = 200,000 บาท
1.c	ไม่ใช่อัตราผลตอบแทนที่ปรับความเสี่ยงแล้ว	ไม่คำนึงถึงมูลค่าเงินตามเวลา ความน่าจะเป็นการอยู่รอด จังหวะเวลาของกระแสเงินสด และความไม่แน่นอนของการได้รับแต่ละงวด
2.a	เป็น ฟังก์ชัน ความหนาแน่น เพราะ $f_0(t) \geq 0$ และ $\int_0^\infty 0.4e^{-0.4t} dt = 1$	-
2.b	$S_0(t) = e^{-0.4t}, t \geq 0$	-
2.c	$\Pr(20 < T_0 \leq 30) = e^{-8} - e^{-12} = 0.0003293184$ หรือประมาณ 0.0329318%	-
2.d	$\mu_t = 0.4$	$\mu_t = f_0(t)/S_0(t)$
3.a	0.282039	$\frac{l_{63}}{l_{48}} \left(1 - \frac{l_{69}}{l_{54}}\right)$
3.b	0.494773	$1 - \frac{l_{63}}{l_{48}} \frac{l_{69}}{l_{54}}$
3.c	0.418561	$p_{AqB} + q_{APB}$ สำหรับช่วงเวลา 15 ปี
4	เบี้ยประกันสุทธิครั้งเดียว 83,276.44 บาท	$200,000 {}_{25}E_{30} = 200,000 D_{55}/D_{30}$
5	เงินรายปี 11,274.47 บาท	เงินครบกำหนด ณ อายุ 30 นำไปซื้อ ${}_{30}a_{30} = N_{61}/D_{30}$; จึงได้ $R = 20,000 D_{10}/N_{61}$
6	เงินรายปี 21,533.43 บาท	$R = 500,000 D_{25}/N_{26}$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
7	เงินรายปีใหม่ 47,424.02 บาท	ตั้ง $15,000a_{25} = R_{20 \ddot{a}_{25:\overline{20} }}$, จึงได้ $R = 15,000N_{26}/(N_{45} - N_{65})$
8	เบี้ยประกันสุทธิครั้งเดียว 525,984.02 บาท	$30,000\ddot{a}_{45} = 30,000N_{45}/D_{45}$
9.1	ฉบับที่ 1: เงินรายปี 10,361.50 บาท; ผลประโยชน์รวมสูงสุด 207,230.05 บาท	$R_1 = 100,000D_{35}/(N_{46} - N_{66})$
9.2	ฉบับที่ 2: เงินรายปี 19,829.83 บาท; ผลประโยชน์รวมสูงสุด 396,596.53 บาท	$R_2 = 200,000D_{35}/(N_{45} - N_{65})$; จวดแรกจ่าย ณ เวลา 10
10	เบี้ยสุทธิรายปี 11,533.91 บาท	$K = 15,000N_{50}/(N_{35} - N_{50})$
11.1	ฉบับที่ 1: เงินรายปี 8,410.86 บาท	$R_1 = 100,000D_{35}/N_{46}$; จวดแรกปลายปีที่ 11
11.2	ฉบับที่ 2: เงินรายปี 15,862.27 บาท	$R_2 = 200,000D_{35}/N_{45}$; จวดแรกต้นปีที่ 10
11.3	ฉบับที่ 2 จ่ายรายปีมากกว่าเพราะเบี้ยเริ่มต้นเป็นสองเท่า แต่ต่อเบี้ยหนึ่งบาท ฉบับต้นงวดให้เงินรายปีต่ำกว่า เนื่องจากเริ่มจ่ายเร็วกว่า	ตัวประกอบ N_{45}/D_{35} มากกว่า N_{46}/D_{35}
12.a	เบี้ยสุทธิของสัญญาฉบับแรก 116,381.46 บาท	$10,000(N_{36} - N_{51})/D_{35}$
12.b	เงิน ก้อน เชิง คณิตศาสตร์ ประกัน ภัย ณ อายุ 50 เท่ากับ 194,538.64 บาท	สะสมแบบมีเงื่อนไขการอยู่รอด: $10,000(N_{36} - N_{51})/D_{50}$
12.c	เงินรายปีของสัญญาฉบับที่สอง 12,571.16 บาท	$R = 194,538.64/\ddot{a}_{50} = 10,000(N_{36} - N_{51})/N_{50}$
13	เบี้ยประกันสุทธิครั้งเดียว 871,114.36 บาท	$100,000\ddot{a}_{25:\overline{10} } = 100,000(N_{25} - N_{35})/D_{25}$
14.1	สะสมทรัพย์แท้จริง: ซื้อผลประโยชน์ครบกำหนดได้ 117,163.00 บาท	$B = 100,000D_{25}/D_{30}$
14.2	ค่ารายงวดชีวิตต้นงวดชั่วคราว 5 ปี: เงินรายปี 21,266.65 บาท; ผลประโยชน์รวมสูงสุด 106,333.23 บาท	$R = 100,000D_{25}/(N_{25} - N_{30})$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
14.3	สะสมทรัพย์สินจ่ายเงินก้อนเมื่อครบ 5 ปีและต้องมีชีวิตถึงวันครบกำหนด; ค่ารายงวดจ่ายต้นปีตั้งแต่เวลา 0-4 ขณะยังมีชีวิตอยู่	ผลประโยชน์รวมไม่คำนึงถึงเวลา โอกาสได้รับแต่ละงวด สภาพคล่อง และวัตถุประสงค์ความคุ้มครอง
15	มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง และ เบี้ย สุทธิ ครั้งเดียว เท่ากับ 1,014,885.74 บาท	$50,000a_{35} =$ $50,000N_{36}/D_{35}$ ภายใต้ ตารางที่ตัด ณ อายุ 79
16.a	ฟังก์ชัน ส่วนลด จาก เวลา 0 ถึง n คือ $v(0, n) =$ $\exp[-\int_0^n (t+2)^{-1} dt] = \frac{2}{n+2}$	-
16.b	มูลค่าปัจจุบันของเงิน 1 บาท ณ เวลา n คือ $\frac{2}{n+2}$ บาท	-
16.c	อัตราดอกเบี้ยแท้จริง คงที่ ที่เทียบ เท่า คือ $i_n =$ $\left(\frac{n+2}{2}\right)^{1/n} - 1$	ใช้ $(1+i_n)^{-n} = 2/(n+2)$
17.a	$p_{25} = 0.998502, q_{35} = 0.002015$	-
17.b	$40p_{25} = 0.675627$	l_{65}/l_{25}
17.c	$50q_{20} = 0.473102$	$1 - l_{70}/l_{20}$
17.d	$q_{60} = 0.025174$	d_{60}/l_{60}
17.e	$5 q_{45} = 0.009277$	d_{50}/l_{45}
18.a	เออยู่รอด แต่ปีเสียชีวิต: 0.046683	-
18.b	บีอยู่รอด แต่เอเสียชีวิต: 0.131270	-
18.c	ทั้งสองอยู่รอด: 0.814524	-
18.d	อย่างน้อยหนึ่งคนอยู่รอด: 0.992477	-
18.e	ทั้งสองเสียชีวิต: 0.007523	ใช้ ความเป็นอิสระ โดย $20p_{37} = l_{57}/l_{37}$ และ $20p_{25} = l_{45}/l_{25}$
19	$S_0(t) = e^{-0.8t}, \mu_t = 0.8$, และ $\Pr(38 < T_0 \leq 45) = e^{-30.4} - e^{-36} = 6.2494 \times 10^{-14}$	-

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
20.a	แบบ A: 170,068.53 บาท; แบบ B: 185,731.63 บาท	คำนวณโดยตรงจาก $20,000 \sum v^k l_{60+k}/l_{60}$. โดย A ใช้ $k = 1, \dots, 15$ และ B ใช้ $k = 1, \dots, 19$
20.b	แบบ B สูงกว่าแบบ A 15,663.10 บาท	แบบ B มีงวดที่เป็นไปได้เพิ่มอีก 4 งวด และทุกพจน์มีค่าไม่เป็นลบ
20.c	อายุขัยเฉลี่ยเพียงค่าเดียวไม่บอกการแจกแจงเวลาตาย จังหวะเวลา การจ่าย หรือความน่าจะเป็นการอยู่รอดในแต่ละปี	EPV ต้องใช้เส้นโค้งการอยู่รอด ทั้งหมด
21	เงินออมต้นปีปีละ 12,033.66 บาท	$K = \frac{100,000 \sum_{k=25}^{39} v^k l_{40+k}/l_{40}}{\sum_{k=0}^{24} v^k l_{40+k}/l_{40}},$ เมื่อ $i = 0.05$
22.a	สถานการณ์ฐาน: ที่ $i = 3\%$, EPV = 798,438.49 บาท; ที่ $i = 5\%$, EPV = 693,320.96 บาท	เมื่ออัตราดอกเบี้ยเพิ่มจาก 3% เป็น 5%, EPV ลดลง 105,117.53 บาท หรือ 13.1654%
22.b	สถานการณ์อายุยืนที่ $i = 3\%$: EPV = 853,481.62 บาท	สูงกว่าสถานการณ์ฐาน 55,043.12 บาท หรือ 6.8938%
22.c	อัตราดอกเบี้ยต่ำและอัตราผลตอบแทนต่ำทำให้ EPV สูงขึ้น จึงต้องเพิ่ม เงินสำรองและอาจเพิ่มเงินกองทุนเพื่อรองรับความเสี่ยงอายุยืน	ควรทดสอบสถานการณ์ร่วมของ อัตราดอกเบี้ย และการปรับปรุง อัตราผลตอบแทน
23.a	ให้ $K = K_{45}$. ตัวแปรมูลค่าปัจจุบันคือ $Z = 60,000 \left[\sum_{j=1}^{20} v^j 1_{\{K \geq j\}} + v^{K+1} (20 - K) 1_{\{K < 20\}} \right].$	ถ้าเสียชีวิตในปี $k + 1$ จะได้รับรายงวดก่อนเสียชีวิต k งวด
23.b	เบี้ยสุทธิครั้งเดียว $P = 60,000 \left[\sum_{j=1}^{20} v^j {}_j p_{45} + \sum_{k=0}^{19} (20 - k) v^{k+1} {}_k q_{45} \right].$	พจน์แรกคือรายงวดขณะมีชีวิต พจน์ ที่สองคือผลประโยชน์กรณีเสียชีวิต

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
23.c	เบี้ยก่อนรวมค่าใช้จ่าย = $1.10P$	ส่วนเพื่อความเสี่ยงเท่ากับ 10% ของ EPV
23.d	ไม่มีการนับซ้ำ หากไม่จ่ายรายงวดปลายปีที่เสียชีวิต: เมื่อ $K = k < 20$ จ่ายรายงวดแล้ว k งวด และผลประโยชน์กรณีเสียชีวิตครอบคลุมอีก $20 - k$ งวด	ความเสี่ยงสำคัญคือการเสียชีวิต เร็ว การกระจุกตัวของมรณะ อัตราดอกเบี้ย และการตั้งสมมติฐานมรณะต่ำเกินไป
24.a	$\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{\infty} v^{j/12} {}_{j/12}p_x$	สำหรับตารางตัดช่วง ให้หยุดผลรวมที่งวดสุดท้าย ซึ่งสอดคล้องกับอายุ 79
24.b	$\ddot{a}_x^{(12)} - a_x^{(12)} = \frac{1}{12}$	ผลต่างมีเพียงงวดทันที ณ เวลา 0
24.c	ตารางชีพรายปีให้เฉพาะความน่าจะเป็นที่อายุเต็มปี จึงต้องใช้สมมติฐาน เช่น UDD หรือกำลังมรณะคงที่ภายในปี เพื่อหา ${}_{j/12}p_x$	–
25.a	สมการมูลค่า	$\ddot{a}_{40:\overline{10} } = 8.61454635$ $G\ddot{a}_{40:\overline{10} } = 500,000 + 20,000 + 0.08(500,000) + 0.05G\ddot{a}_{40:\overline{10} }$
25.b	เบี้ยประกันขั้นต้นรายปี $G = 68,427.71$ บาท	$G = 560,000 / [0.95\ddot{a}_{40:\overline{10} }]$
25.c	เบี้ยสุทธิรายปี = 58,041.36 บาท; ส่วนต่าง = 10,386.35 บาท หรือ 17.8947% ของเบี้ยสุทธิ	ส่วนต่างเกิดจากค่าใช้จ่ายเริ่มต้น ค่าใช้จ่ายแปรผัน และส่วนเพื่อความเสี่ยง

บทที่ 9

ตารางที่ A.9 เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9: การประยุกต์คณิตศาสตร์การเงินกับการกำหนดเบี้ยประกันภัย

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
1.a	$NPV = 1.61239243$ ล้านบาท หรือประมาณ 1.61 ล้านบาท	ใช้อัตราคิดลด 8% ต่อปี
1.b	มูลค่าอนาคตสุทธิปลายปีที่ 5 เท่ากับ 2.36913347 ล้านบาท หรือประมาณ 2.37 ล้านบาท	$FV_5 = NPV(1.08)^5$
1.c	ยอมรับโครงการ เพราะ $NPV > 0$	—
2	โครงการ A: $NPV = 1.36103746$ ล้านบาท, $IRR = 19.7952\%$; โครงการ B: $NPV = 0.76267482$ ล้านบาท, $IRR = 13.7593\%$; โครงการ C: $NPV = 0.69437824$ ล้านบาท, $IRR = 16.3844\%$. ควรเลือก A เพราะเป็นโครงการที่ตัดกันและ A ให้ NPV สูงสุด	เมื่อเงินทุนจำกัดและเลือกได้เพียงหนึ่งโครงการ ให้ใช้ NPV เป็นเกณฑ์หลัก ไม่ใช่จัดอันดับด้วย IRR
3.a	$f(r) = -150,000 + \sum_{t=1}^4 \frac{20,000}{(1+r)^t} + \frac{100,000}{(1+r)^5} = 0$	—
3.b	$IRR = 0.04865043135$ หรือ 4.865043% ต่อปี	จาก $r_0 = 0.04$: $r_1 = 0.04846023764$, $r_2 = 0.04865033868$, $r_3 = 0.04865043135$ และลู่อเข้าเมื่อผลต่างต่ำกว่า 10^{-8}
3.c	$NPV(0.04865043135) \approx 1.46 \times 10^{-11}$ บาท ซึ่งเท่ากับ ศูนย์ในเชิงตัวเลข	ใช้ค่าที่ไม่ปิดเศษแทนกลับ
3.d	ค่า IRR นี้วัดเฉพาะกระแสเงินสดกรณีอยู่รอดตามที่โจทย์ให้ จึงยังไม่รวมมูลค่าความคุ้มครองกรณีเสียชีวิต ความน่าจะเป็นการเกิดเหตุและความเสี่ยงของบริษัทประกันภัย	ไม่ควรตีความเป็นผลตอบแทนรวมของกรรมธรรม์โดยไม่มีตัวแบบมรณะและผลประโยชน์ทั้งหมด
4.a	มี IRR สองค่า คือ 10% และ 20%	$(1+i)^2 NPV(i) = -100(i - 0.10)(i - 0.20)$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
4.b	บนช่วง $-0.5 < i < 1$, $NPV(i) < 0$ เมื่อ $i < 0.10$, เป็นศูนย์ที่ 0.10, เป็นบวกเมื่อ $0.10 < i < 0.20$, เป็นศูนย์ที่ 0.20, และเป็นลบเมื่อ $i > 0.20$	ตัวส่วน $(1 + i)^2 > 0$ เมื่อ $i > -1$
4.c	ที่อัตราขั้นต่ำ 15%, $NPV = 0.18903592$ หน่วย จึงยอมรับตามเกณฑ์ NPV	-
4.d	การเปลี่ยนเครื่องหมายของกระแสเงินสดมากกว่าหนึ่งครั้งทำให้เกิด IRR หลายค่า จึงไม่สามารถรายงานค่าเดียวเป็นเกณฑ์ตัดสินใจได้	ใช้ NPV ที่อัตราผลตอบแทนขั้นต่ำแทน
5.a	อัตราแท้จริงต่อครึ่งปี $j = (1.08)^{1/2} - 1 = 3.923048\%$	-
5.b	$NPV = 90,946.35$ บาท	คิดลดเงินรับสิ่งวัดด้วยอัตราครึ่งปี j
5.c	IRR ต่อครึ่งปี = 7.713847%; อัตราแท้จริงต่อปี = $(1 + 0.07713847)^2 - 1 = 16.022729\%$	-
6.a	$R_a = 12\%$, $i = 9\%$, $S = 400.00$ บาท; $PV(H) = 2,525.039980$ บาท; $PV(UWPT) = 0.40(P - 3,000) = -279.112308$ บาท; $PV(IBT) = 56.291558$ บาท	$a_{\overline{2} 0.09} = 1.759111186$
6.b	เบี้ย $P = 2,302.219230$ บาท หรือประมาณ 2,302.22 บาท	-
6.c	$2,302.219230 = 2,525.039980 - 279.112308 + 56.291558$	ผลต่างของสองข้างเป็นศูนย์ในเชิงตัวเลข
6.d	$PV(UI) = -418.668462$ บาท; $NPV(OI) = 56.291558$ บาท; $PV(SIIC) = 84.437337$ บาท; $NPV(TI) = 140.728895$ บาท	$PV(SIIC) = R_a S a_{\overline{2} i}$
7.a	เบี้ยใหม่ $P = 2,076.105442$ บาท หรือประมาณ 2,076.11 บาท	เมื่อ $\lambda_L = 0$, ใช้ $i = R_a = 12\%$
7.b	เบี้ยลดลง 226.113787 บาท เพราะอัตราคิดลดสูงขึ้น ทำให้มูลค่าปัจจุบันของค่าสินไหมลดลง	เปรียบเทียบกับข้อ 6
7.c	เบี้ยเปลี่ยนแปลง -9.821558% เมื่อวัดเทียบกับเบี้ยข้อ 6	-

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
8.a	$P = \frac{40,000}{1.03} + \frac{50,000}{1.03^2} + \frac{30,000}{1.03^3} + \frac{0.30(P - 120,000)}{1.035} + \sum_{t=1}^3 \frac{0.30(0.05)A_{t-1}}{1.035^t},$ เมื่อ $(A_0, A_1, A_2) = (100,000, 60,000, 20,000)$	ภาษีจากผลการรับประกันเกิดปลายปีที่ 1
8.b	$PV(H) = 113,418.996694$ บาท, $PV(IBT) = 2,560.017804$ บาท และ $P = 114,337.795926$ บาท	–
8.c	ถ้ารับรู้ภาษี ณ เวลา 0 จะได้ $P = 114,255.734997$ บาท ลดลง 82.060929 บาท หรือ 0.071771%	ในกรณีนี้ฐานภาษีเป็นลบ จึงเป็นเครดิตภาษี; การได้รับเครดิตเร็วขึ้นลดเบี้ยที่ต้องเรียกเก็บ
9.a	กรมธรรม์ A: 90,702.95 บาท; กรมธรรม์ B: 96,116.88 บาท	$P = 100,000(1 + i)^{-2}$
9.b	กรมธรรม์ B มีมูลค่าปัจจุบันของภาระสูงกว่า A อยู่ 5,413.93 บาท	–
9.c	อัตราคิดลดต่ำทำให้ให้น้ำหนักกระแสเงินสดอนาคตสูงขึ้น อาจสะท้อนความเสี่ยงเชิงระบบที่ไม่สามารถกระจายได้หรือกระแสที่มีคุณสมบัติป้องกันความเสี่ยงต่ำกว่า จึงต้องการค่าชดเชยน้อยลงในการคิดลด	การตีความต้องยึดแบบจำลองความเสี่ยงและข้อมูลตลาดที่สอบเทียบแล้ว
10.a	$PV(IBT) = 3,361.96$ บาท	$0.30(0.05)(80,000)a_{\overline{3} 0.035}$
10.b	$PV(SIIC) = 7,844.58$ บาท	$0.035(80,000)a_{\overline{3} 0.035}$
10.c	IBT คือภาษีจากรายได้ลงทุน จึงเป็นต้นทุนในสมการเบี้ย; SIIC คือรายได้ลงทุนหลังภาษีจากเงินส่วนเกิน จึงเพิ่มรายได้รวมของผู้ถือหุ้น	ทั้งสองรายการมีฐานเดียวกันแต่ใช้อัตรา $TR_b = 1.5\%$ และ $R_a = 3.5\%$ ตามลำดับ
11.a	กระแสเงินสด สุทธิ ของ ผู้รับ ประกัน ภัย คือ $(81,000, -15,000, -20,000, -25,000)$ บาท และ $IRR = -12.700355\%$	กระแสเงินสดเริ่มด้วยเงินรับ จึงต้องระวังการตีความ IRR แบบโครงการลงทุนทั่วไป

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
11.b	$NPV = 26,128.49$ บาท	$90,000 - 9,000 - PV_{4\%}(L) + PV_{3\%}(I)$
11.c	เบี้ยที่ทำให้ $NPV = 0$ เท่ากับ 60,968.34 บาท ต่ำกว่า 90,000 บาทอยู่ 29,031.66 บาท	ภาษี ณ เวลา 0 เท่ากับ $0.10P$, จึงใช้ $0.90P = PV(L) - PV(I)$
12.a	$\left[0.90P - 4,000 - \frac{60,000}{1.04^2} \right] (1 - 0.20) = 0.05P$ หรือ $P = 4,000 + \frac{60,000}{1.04^2} + 0.10P + \frac{0.05P}{0.80}.$	กำไรเป้าหมาย $5\%P$ เป็นกำไรหลังภาษี จึงต้อง gross-up ด้วย $1 - T$
12.b	$P = 71,012.98$ บาท	–
12.c	อัตราส่วนรวม $0.10 + 0.05/0.80 = 0.1625 < 1$	ต้องต่ำกว่า 1 เพื่อให้สัมประสิทธิ์ของ P ทางซ้ายเป็นบวกและมีเบี้ยจำกัดที่เป็นบวก
13.a	$NPV = 274.69$ บาท ที่อัตรา 3%	มุมมองผู้รับประกันภัย: เบี้ยเป็นบวก ค่าสินไหมเป็นลบ
13.b	เบี้ยขั้นต่ำที่ทำให้ $NPV = 0$ ที่ 5% เท่ากับ 76,492.82 บาท	–
13.c	เบี้ยลดลงจาก 80,000 บาทได้ 3,507.18 บาท	–
13.d	สำหรับกระแสเงินสดปกติที่มีเงินรับต้นงวดและจ่ายภายหลัง การตั้งเบี้ยให้ $NPV = 0$ ที่ 5% เทียบเท่ากับทำให้รากของสมการมี $IRR = 5\%$; ความแตกต่างอยู่ที่มุมมองและวิธีตั้งใจทย์ ไม่ใช่ค่าตัวเลข	ความเทียบเท่านี้อาจล้มเหลวเมื่อกระแสเงินสดเปลี่ยนเครื่องหมายหลายครั้งหรือมีหลายอัตราคิดลด
14.a	กลุ่ม A: 33,288.46 บาท; กลุ่ม B: 50,117.65 บาท	$P = E + PV(L)[1 + \text{loading}]$
14.b	ผลต่าง B-A เท่ากับ 16,829.19 บาท แยกตามลำดับได้เป็น: ค่าสินไหมคาดหวัง 11,538.46, อัตราคิดลด 791.86, ค่าใช้จ่าย 1,000.00, และส่วนเผื่อความไม่แน่นอน 3,498.87 บาท	การแยกผลแบบลำดับขึ้นกับลำดับที่เลือก แต่ผลรวมต้องเท่ากับผลต่างเบี้ย

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
14.c	การแบ่งกลุ่มช่วยลดการอุดหนุนข้ามกลุ่มเมื่อกลุ่มมีความแตกต่างด้านความเสี่ยงที่พิสูจน์ได้ ข้อมูลน่าเชื่อถือ และตัวแปรมีความสัมพันธ์เชิงเหตุผลกับค่าสินไหม; ความเสี่ยงด้านความเป็นธรรมเกิดเมื่อใช้ตัวแปรตัวแทนของคุณลักษณะอ่อนไหว ข้อมูลลำเอียง หรือแบ่งกลุ่มละเอียดเกินไป	ควรตรวจสอบความเท่าเทียม ความเสถียร และผลกระทบต่อผู้เอาประกันควบคู่กับความแม่นยำ
15.a	เปลี่ยน T : $T = 0.25, 0.35, 0.45$ ให้เบี้ย 864.10, 876.63, 894.85 บาท; เปลี่ยน F : $F = 3, 4, 5$ ให้เบี้ย 884.95, 876.63, 871.64 บาท; เปลี่ยน λ_L : 0, 0.013, 0.025 ให้ เบี้ย 842.45, 876.63, 909.32 บาท	เปลี่ยนทีละตัวแปร โดยตัวอื่นอยู่ที่ค่าฐาน
15.b	ในช่วงที่กำหนด λ_L ทำให้เบี้ยเปลี่ยนมากที่สุด: ช่วง 66.88 บาท; – เทียบกับ T ช่วง 30.75 บาท และ F ช่วง 13.31 บาท	
15.c	T เปลี่ยนพร้อมกันทั้งอัตราหลังภาษี R_a , อัตราคิดลด i , เครดิต หรือภาษีจากผลการรับประกัน และ IBT; ผลเหล่านี้อาจหักล้างกัน จึงไม่รับประกันความเป็นเอกทิศในแบบจำลองทั่วไป	ในชุดค่าซ้ำนี้เบี้ยเพิ่มตาม T แต่ไม่ใช่ทฤษฎีทั่วไป
15.d	ตัวอย่างสถานการณ์วิกฤต: ค่าสินไหมสูงขึ้นและจ่ายเร็วขึ้น; ผลตอบแทนลงทุนลดลงหรือเป็นลบ; ใช้เครดิตภาษีล่าช้าหรือใช้ไม่ได้; เงินทุนที่ต้องดำรงเพิ่มขึ้น; และความเสี่ยงเงินเพื่อค่าสินไหม	ควรทดสอบสถานการณ์ร่วม ไม่ใช่เปลี่ยนทีละตัวแปรเท่านั้น

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
16	(1) นับค่าใช้จ่ายจัดการสินไหมชำทำให้ E และเบี้ยสูงเกินจริง; ควบคุมด้วย data dictionary และ reconciliation ระหว่าง gross loss กับ LAE. (2) ใช้อัตรารายปีเป็นอัตรารายเดือนทำให้คิดลดแรงเกินไป จึงมักทำให้ PV และเบี้ยต่ำเกินจริง; แปลงด้วย $(1 + i_a)^{1/12} - 1$ และทดสอบหน่วยเวลา. (3) รับรู้เครดิตภาษีทันทีที่หักที่ไม่ได้ทำให้ PV ภาษีต่ำเกินจริงและเบี้ยต่ำเกินจริง; ใช้ตาราง taxable-income และ carryforward. (4) นัยยอดลงทุนชำทำให้ฐานรายได้ลงทุนผิด; ในสมการของบทนี้ทำให้ PV(IBM) และเบี้ยสูงเกินจริง แต่ถ้าแบบจำลองเครดิตรายได้ลงทุนสุทธิด้วยอาจทำให้เบี้ยต่ำเกินจริง; ใช้ cash-flow roll-forward และบัญชีแหล่งเงินแบบไม่ชำ	เพิ่ม unit test, independent replication, balance check, lineage, version control และ sensitivity/limit check
17.a	เบี้ยประกันภัยต่อ 6.00 ล้านบาท; ค่านายหน้า 1.32 ล้านบาท; ค่าสินไหมโอน 3.90 ล้านบาท; ค่าสินไหมรับไว้ 9.10 ล้านบาท	Quota Share 30%
17.b	เบี้ยสุทธิหลังประกันภัยต่อ 15.32 ล้านบาท; ผลการรับประกันภัยสุทธิ = $15.32 - 9.10 - 3.00 = 3.22$ ล้านบาท	ค่าใช้จ่ายบริษัทไม่เปลี่ยน
17.c	กรณีไม่มีประกันภัยต่อมีกำไรรับประกัน 4.00 ล้านบาท จึงลดลง 0.78 ล้านบาทหลังทำสัญญา	ยังสรุปว่า “คุ้ม” ไม่ได้จนกว่าจะรวมประโยชน์จากการลดความผันผวนเงินทุน ความเสี่ยงล้มละลาย และเครดิตของผู้รับประกันภัยต่อ
18.a	สัดส่วนโอนของรายการ 1-4 เท่ากับ 0%, 50%, 75%, 60% ตามลำดับ	ทุนโอน = $\min\{(B - 3)_+, 12\}$ ล้านบาท
18.b	ค่าสินไหมโอน: 0, 0.75, 3.00, 4.20 ล้านบาท; ค่าสินไหมรับไว้: 0.80, 0.75, 1.00, 2.80 ล้านบาท	–
18.c	ทุนประกันที่โอนเท่ากับ 0, 3, 9, 12 ล้านบาท หรือ 0, 1, 3, 4 ไหล่ จึงไม่เกิน 4 ไหล่	รายการที่ 4 เกินความจรรวม ทำให้บริษัทรับไว้เอง 8 ล้านบาท
18.d	Surplus Share กำหนดสัดส่วนร่วมรับผิดชอบตามทุนประกันก่อนเกิดความเสียหาย ส่วน Excess-of-Loss เริ่มจ่ายเมื่อค่าสินไหมเกิน retention	–

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
19.a	ค่า สินไหม 150,000, 400,000, 650,000, 1,000,000, 1,500,000 บาท ให้ ค่า สินไหม โอน 0, 0, 250,000, 600,000, 800,000 บาท และ รับ ไว้ 150,000, 400,000, 400,000, 400,000, 700,000 บาท	$Y = \min\{(X - 400,000)_+, 800,000\}$
19.b	ค่าสินไหมรวมก่อนประกันภัยต่อ 3,700,000 บาท; โอนรวม 1,650,000 บาท; รับไว้รวม 2,050,000 บาท	–
19.c	เหตุการณ์ 1,500,000 บาทใช้ชั้นความคุ้มครองเต็ม 800,000 บาท	ชั้นเต็มเมื่อ $X \geq 1,200,000$ บาท
19.d	ขีดจำกัดรวมรายปี 1,600,000 บาททำให้เงินเรียกคืนรวมลดลง 50,000 บาท; ตามลำดับเหตุการณ์ เงินเรียกคืนเหตุการณ์สุดท้ายเหลือ 750,000 บาท และค่าสินไหมรับไว้รวมเพิ่มเป็น 2,100,000 บาท	ก่อนเหตุการณ์สุดท้ายใช้วงเงินไปแล้ว 850,000 บาท
20.a	$E[Y_{d,u}] = 68,376.94$ บาท	$300,000(e^{-400/300} - e^{-1000/300})$, โดยหน่วยในเลขชี้กำลังเป็นพันบาท
20.b	$E[Y_{d,u}^2] = 28,183,528,453.31$ บาท ² ; $\text{Var}(Y_{d,u}) = 23,508,122,060.41$ บาท ²	$E[Y^2] = 2\mu^2 e^{-d/\mu} [1 - (1 + u/\mu)e^{-u/\mu}]$
20.c	เบี้ยประกันภัยต่อ = 88,890.03 บาท	$1.30E[Y]$
20.d	ค่าคาดหมายเงินสดรับคืนจริง = 64,958.10 บาท	ใช้ความเป็นอิสระ: $E[BY] = E[B]E[Y] = 0.95E[Y]$
21.a	สำหรับ $S = 0.4, 0.8, 1.2, 2.0$ ล้านบาท: ค่าสินไหมโอน $Y = 0, 0, 0.2, 0.8$ และรับไว้ $Z = 0.4, 0.8, 1.0, 1.2$ ล้านบาท	$Y = \min\{(S - 1.0)_+, 0.8\}$
21.b	ก่อนประกันภัยต่อ: $E[S] = 0.94$, $\text{Var}(S) = 0.2124$; หลังประกันภัยต่อ: $E[Z] = 0.80$, $\text{Var}(Z) = 0.0680$ ล้านบาท ²	ค่าสินไหมโอนมี $E[Y] = 0.14$, $\text{Var}(Y) = 0.0564$
21.c	เบี้ยประกันภัยต่อ = 0.1680 ล้านบาท	$1.20(0.14)$

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
21.d	ลดสัมประสิทธิ์การแปรผัน: จาก 0.490286 เหลือ 0.325960	ใช้ $CV = \sigma/\mu$
22.a	ให้ $i = 5\%$, $L_N = 1,300,000$, $H_N = 1,500,000$, $Q = 793,650.79$, $C = 119,047.62$, $S_N =$ 260,000 บาท; สมการคือ $P_D = H_N(1.05)^{-2} + (Q - C)$ $+ 0.25(P_D - Q + C - H_N)$ $+ 0.25(0.08)S_N a_{\overline{2} 0.05}.$	ค่าใช้จ่าย E ไม่ได้โอน
22.b	$P_D = 2,001,554.04$ บาท; $PV(H_N) = 1,360,544.22$, $Q - C = 674,603.17$, $PV(UWPT) = -43,262.28$, $PV(IBM) = 9,668.93$ บาท และผลรวมเท่ากับ P_D	ตรวจด้วยค่าที่ไม่ปิดเศษ
22.c	กรณีไม่มีการประกันภัยต่อได้เบี้ย $P_0 = 1,947,120.18$ บาท	$S_0 = L/F = 400,000$ บาท
22.d	ผลต่าง $P_D - P_0 = 54,433.86$ บาท แยกเป็น: ผล จากค่าสินไหมสุทธิ $-613,227.51$, เบี้ยประกันภัยต่อสุทธิ $+674,603.17$, และการเปลี่ยนภาษีรายได้ลงทุนจากเงินส่วน เกิน $-6,941.80$ บาท	ผลจากค่าสินไหมสุทธิตามการเปลี่ยน เครดิตภาษีรับประกันที่เกิดจากการ ลด H
23.a	ไม่มีประกันภัยต่อ: $E[W] = 230$, $\text{TVaR}_{0.95} = 1,400$, $K = 1,170$; Quota Share: 161, 980, 819; Excess-of-Loss: 145, 800, 655 หน่วยเป็นพันบาท	TVaR ใช้ค่าเฉลี่ยของหางบนสุด 5%; ในแต่ละกรณีมวลหางบนสุดอยู่ที่ สถานการณ์ $S = 1,400$
23.b	ต้นทุนทางเศรษฐกิจ: ไม่มีประกันภัยต่อ 299.9038, Quota Share 292.7327, Excess-of-Loss 298.2596 พันบาท	เบี้ยต่อ: QS 82.80, XOL 114.75 พันบาท
23.c	ΔV_R : ไม่มี 0, QS 7.1712, XOL 1.6442 พันบาท; จึงเลือก Quota Share ภายใต้เกณฑ์ที่กำหนด	$\Delta V_R = C_{no} - C_{re}$
23.d	เมื่ออัตราบรรทุก XOL เพิ่มขึ้นเป็น 50%, เบี้ยต่อเป็น 127.50 และ $C = 311.0096$ พันบาท; $\Delta V_R = -11.1058$ พันบาท จึง ไม่คุ้มตามเกณฑ์นี้	ต้นทุนเพิ่ม 12.75 พันบาท

มีต่อหน้าถัดไป

ข้อ	คำตอบเฉพาะผลลัพธ์	Hint / หมายเหตุ
24.a	$\mathbb{E}[(X - d)_+] = 500,000e^{-d/500,000}$ และ $\mathbb{E}[Z_d] = 500,000(1 - e^{-d/500,000})$	ใช้อินทิกรัลฟังก์ชันการอยู่รอด และ $X = Z_d + (X - d)_+$
24.b	สำหรับ $d = 200,000, 400,000, 600,000, 800,000$ บาท: $\text{TVaR}_{0.95}(Z_d) = d$; $K_d =$ 35,160.02, 124,664.48, 250,597.11, 400,948.26 บาท ตามลำดับ	เพราะควอนไทล์ 95% ของ X เท่ากับ 1,497,866.14 บาท ซึ่งสูงกว่า d ทุกค่า และ Z_d มีมวลที่ d มากกว่า 5%
24.c	$\mathcal{C}(d)$ ตามลำดับค่า d : 598,477.72, 569,062.54, 554,466.20, 549,803.22 บาท; เลือก $d = 800,000$ บาทในกริดที่กำหนด	เบี่ยงต่อ Q_d ตามลำดับ: 435,708.03, 292,063.83, 195,776.24, 131,232.74 บาท
24.d	เมื่อได้รับคืนจริง 90% และคงเบี่ยงต่อเดิม ให้ค่าสินไหมสุทธิจริง $W_d = X - 0.9(X - d)_+$. ต้นทุนใหม่เท่ากับ 642,378.35, 601,540.27, 578,774.81, 568,123.78 บาท ตามลำดับ; ยังเลือก $d = 800,000$ บาทในกริด	ใช้ $\mathbb{E}[W_d] = \mu - 0.9\mu e^{-d/\mu}$ และ $\text{TVaR}_{0.95}(W_d) = 0.1 \text{TVaR}_{0.95}(X) + 0.9d$
24.e	การตรวจเพียงสี่ค่าแสดงได้เฉพาะค่าที่ดีที่สุดในการิต ไม่รับประกันค่าต่ำสุดบนช่วงต่อเนื่อง; ค่าที่ดีกว่าอาจอยู่ระหว่างจุดกริดหรือนอกช่วงที่ตรวจ	ควรวิเคราะห์อนุพันธ์หรือทำ numerical optimization บนโดเมนต่อเนื่องและทดสอบขอบเขต

บรรณานุกรม

เอกสารภาษาไทย

- [1] ธนาคารแห่งประเทศไทย. (2563). *พร้อมรับมือกับมาตรฐานใหม่ TFRS 9*. สืบค้นจากเว็บไซต์ธนาคารแห่งประเทศไทย.
- [2] มานพ วราภักดิ์. (2549). *ทฤษฎีดอกเบี้ย (Theory of Interest)*. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- [3] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2558). *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้ปรินท์, กรุงเทพฯ.
- [4] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2561). *วิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน*. ปลาทองก๊อปปี้ปรินท์.
- [5] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2548). *ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์สำหรับผู้ขายหลักทรัพย์ (Single License)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ.
- [6] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2552). *CISA ระดับ 1: การวิเคราะห์เชิงปริมาณ กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน* (พิมพ์ครั้งที่ 3). ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ.
- [7] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2556). *การวิเคราะห์ตราสารอนุพันธ์ (DR2)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ.
- [8] สภาวิชาชีพบัญชี ในพระบรมราชูปถัมภ์. (2564). *สรุปประเด็นสำคัญมาตรฐานการรายงานทางการเงิน กลุ่มเครื่องมือทางการเงิน*.

เอกสารภาษาอังกฤษ

- [9] Avellaneda, M., & Laurence, P. (2000). *Quantitative Modeling of Derivative Securities*. Chapman & Hall/CRC.
- [10] Bank of Thailand. (2025). *Sustainable Solutions to Thailand's Household Debt Problems*. Available from Bank of Thailand website.

- [11] Bank of Thailand. (2026). *Banking Sector Quarterly Brief: Q1 2026*. Available from Bank of Thailand website.
- [12] Basel Committee on Banking Supervision. (1996). *Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*. Bank for International Settlements.
- [13] Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2021). *Investments* (12th ed.). McGraw-Hill Education.
- [14] Bollinger, J. (2002). *Bollinger on Bollinger Bands*. McGraw-Hill.
- [15] Boonprasurt, P., Sampaokit, P., & Witayakiattilerd, W. (2022). MACD indicator with the modified signal line and trading weight inference in fuzzy environment. *Thailand Statistician*, 20(1), 98–123.
- [16] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2nd ed.). Society of Actuaries.
- [17] Brealey, R. A., Myers, S. C., & Allen, F. (2020). *Principles of Corporate Finance* (13th ed.). McGraw-Hill Education.
- [18] Bu, Y. (2005). On optimal reinsurance arrangement. *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 2005, 1–20.
- [19] Cai, J., & Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin*, 37(1), 93–112.
- [20] Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [21] Casualty Actuarial Society. (1988/2021). *Statement of Principles Regarding Property and Casualty Insurance Ratemaking*. Casualty Actuarial Society.
- [22] Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 841–862.

- [23] Clark, D. R. (2014). *Basics of Reinsurance Pricing* (Revised actuarial study note). Casualty Actuarial Society.
- [24] Cummins, J. D. (1990). Multi-period discounted cash flow ratemaking models in property-liability insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 57(1), 79–109.
- [25] Cummins, J. D., & Harrington, S. E. (Eds.). (1987). *Fair Rate of Return in Property-Liability Insurance*. Kluwer-Nijhoff/Springer.
- [26] D’Arcy, S. P., & Garven, J. R. (1990). Property-liability insurance pricing models: An empirical evaluation. *Journal of Risk and Insurance*, 57(3), 391–430.
- [27] Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset* (3rd ed.). Wiley.
- [28] Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2013). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [29] Fabozzi, F. J. (2012). *Bond Markets, Analysis, and Strategies* (8th ed.). Pearson.
- [30] Fairley, W. B. (1979). Investment income and profit margins in property-liability insurance: Theory and empirical results. *Bell Journal of Economics*, 10(1), 192–210.
- [31] Haberman, S., & Pitacco, E. (1999). *Actuarial Models for Disability Insurance*. Chapman & Hall/CRC.
- [32] Härdle, W., Kleinow, T., & Stahl, G. (2002). *Applied Quantitative Finance: Theory and Computational Tools*. Springer.
- [33] Hull, J. C. (2015). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9th ed.). Pearson.
- [34] Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [35] IFRS Foundation. (2024). *IFRS 9 Financial Instruments*. IFRS Foundation, London.
- [36] Jensen, M. C. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *Journal of Finance*, 23(2), 389–416.

V

Value-at-Risk (VaR)	308, 310, 312
Varying Annuity	72
Volatility	261, 311

W

Weighted Average Time	232
Whole Life Insurance	380
Write-off	177

Z

Zero-Coupon Bond	123, 218
----------------------------	----------

ก

กระแสเงินสด	51, 161, 447
กำไรต่อหุ้น	193
กำลังดอกเบี้ย	18
การกระจายความเสี่ยง	287, 415
การกำหนดเบี้ยประกันภัย	440, 447
การคิดลดเงินปันผล	206
การจัดการหนี้	179
การจ่ายแบบต่อเนื่อง	51
การชำระหนี้ด้วยวิธีตัดจ่าย	159
การชำระหนี้ด้วยวิธีเงินทุนสะสม	170
การทดสอบย้อนหลัง	277, 285

การประกันภัยต่อ	460, 468
การประกันชีวิต	372
การประเมินโครงการลงทุน	89, 124
การประเมินราคาตราสารทุน	190
การประเมินราคาตราสารหนี้	214
การปรับสมดุลพอร์ต	307
การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง	257
การวัดความเสี่ยง	308
การวางแผนเกษียณอายุ	84
การสร้างภูมิคุ้มกันความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย	241
การอยู่รอดของบุคคลสองคน	368
การออมเงินเพื่อเป้าหมายเฉพาะ	91
กลยุทธ์ Cashless	341
กลยุทธ์ Long-Short	341

ข

ข้อจำกัดการขายชอร์ต	297
ข้อยกเว้นของ VaR	312

ค

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	358, 362
ความน่าจะเป็นของชีพ	364
ความสูงของราคา	238, 238
ความแปรปรวน	261, 360
ความแปรปรวนร่วม	261
ความผันผวน	261, 311

ความเสี่ยงขาดลง	263	จ	
ความเสี่ยงจากการประมาณค่า	307		จำนวนหนี้คงเหลือ 164
ความเสี่ยงด้านเครดิต	468	ด	
ความเสี่ยงอายุยืน	425		ดอกเบี้ย 1
ค่าคาดหวัง	261, 360		ดอกเบี้ยเชิงเดียว 4, 5
ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข	362		ดอกเบี้ยทบต้น 4
ค่ารายงวด	56		ดัชนีราคาผู้บริโภค 30, 34
ค่ารายงวดจ่ายต้นงวด	56		ดัชนีราคาผู้ผลิต 30
ค่ารายงวดจ่ายปลายงวด	60		ดูเรชั่น 228
ค่ารายงวดจ่ายต่อเนื่อง	66		ดูเรชั่นดัดแปลง 235
ค่ารายงวดจ่ายตลอดไป	69		ดูเรชั่นแมคคولهย์ 233
ค่ารายงวดจ่ายแปรเปลี่ยน	72	ด	
ค่ารายงวดอัตราราบ	80		ต้นทุนธุรกรรม 284
ค่ารายงวดชีวิต	385, 397		ต้นทุนเงินทุน 472
ค่ารายงวดชีวิตแบบเลื่อนจ่าย	393, 402		ตราสารทุน 190
ค่ารายงวดชีวิตแบบชั่วคราว	397		ตราสารหนี้ 214
ค่าสินไหมทดแทน	440, 447		ตราสารหนี้ชุด 227
คูปองค้ำรับ	225		ตราสารหนี้มีคูปอง 215
ง			ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 123, 218
เงินต้น	1		ตารางชีพ 365
เงินปันผล	193, 206		ตัวประกอบส่วนลด 14
เงินทุนทางเศรษฐกิจ	329		ตัวแบบ Myers-Cohn 447, 470
เงินรายงวด	56		ตัวแบบคิดลดเงินปันผล 206, 207
เงินสะสม	1, 14		ตัวแปรผลขาดทุน 308
			ตัวแปรสุ่ม 359

ท	ผู้กู้	156, 159
ทฤษฎีพอร์ตการลงทุน	ผู้รับประกันภัย	440, 460
	ผู้ให้กู้	156, 159
บ		
เบต้า	พ	
เบี้ยประกัน	พอร์ตการลงทุน	287
เบี้ยประกันขั้นต้น	พอร์ตความแปรปรวนต่ำสุด	292
เบี้ยประกันสุทธิ	พอร์ตผลตอบแทนเป้าหมาย	293
เบี้ยประกันภัยที่เป็นธรรม	พอร์ตสัมผัสน	294
แบบจำลองการจ่ายแบบต่อเนื่อง	พริเมียมของตราสารหนี้	216, 222
	พันธบัตร	123, 123
ป		
ประกันชั่วระยะเวลา	ฟ	
ประกันตลอดชีพ	ฟังก์ชันการอยู่รอด	364, 369
ประกันสะสมทรัพย์	ฟังก์ชันควอนไทล์	308
ประกันสะสมทรัพย์แท้จริง	ฟังก์ชันสับเปลี่ยน	370
ประกันภัยต่อแบบไม่เป็นสัดส่วน	ฟังก์ชันสะสม	1
ประกันภัยต่อตามสัดส่วน	ฟังก์ชันส่วนลด	14
ประเภทของสินเชื่อ		
ปริญญามีความน่าจะเป็น	ภ	
	ภาวะเงินฝืด	33
ผ	ภาวะเงินเฟ้อ	30
ผลตอบแทน		
ผลตอบแทนของกลยุทธ์	ม	
ผลตอบแทนของพอร์ต	มูลค่าตามบัญชี	222
ผลตอบแทนปรับด้วยความเสี่ยง	มูลค่าปัจจุบัน	14

มูลค่าปัจจุบันที่คาดหวัง	362	สัญญาแบ่งส่วนคงที่	461
มูลค่าปัจจุบันสุทธิ	124, 441	สัญญาส่วนเกิน	463
มูลค่าอนาคต	14	สัดส่วนภาระหนี้ต่อรายได้	180
ร		สินเชื่อ	156
ราคาและมูลค่าหุ้น	192	สินเชื่อที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้	176
ราคากรอสส์	225	สินทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง	294
ราคาคลื่น	225	สูตรของเมกแอม	217
ราคาไถ่ถอน	215	สูตรพรีเมียม-ดิสเคานต์	216
ราคาพรีเมียม	216	สูตรมูลค่าพื้นฐาน	217
ราคาส่วนลด	216	เส้นขอบประสิทธิภาพ	293
รายได้จากการรับประกันภัย	453	ห	
รายได้จากการลงทุน	453	หนี้ที่ก่อให้เกิดรายได้	159
ระดับความเชื่อมั่น	308	หนี้ที่ไม่ก่อให้เกิดรายได้	159, 176
ระยะเวลาเทียบเท่า	229	หุ้นปันผล	197
ว		หุ้นบุริมสิทธิ	191
วงเงินรับไว้เอง	475	หุ้นสามัญ	191
วิธีนิวตัน-ราฟสัน	117, 445	หลักการชำระหนี้	160
วิธีพาราเมตริก	310	หลักสมมูล	374
วิเคราะห์ความไว	458	อ	
ส		อัตราкупอง	215, 219
สหสัมพันธ์	261	อัตราเงินเฟ้อ	30
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	261	อัตราจริงของดอกเบี้ย	36
ส่วนลด	102	อัตราดอกเบี้ย	1
		อัตราดอกเบี้ยแท้จริง	18

อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม	18	อัตราส่วนลด	102
อัตราผลตอบแทน	204, 258	อัตราส่วนลดเชิงเดียว	103
อัตราผลตอบแทนภายใน	444, 445	อัตราส่วนลดทบต้น	105
อัตราส่วนความสามารถในการชำระดอกเบี้ย	180	อัตราส่วนลดเพียงในนาม	108
อัตราส่วนความสามารถในการชำระหนี้ทั้งหมด	181		

เกี่ยวกับหนังสือ

ตำราเล่มนี้นำเสนอหลักการคณิตศาสตร์การเงินอย่างเป็นระบบ ตั้งแต่แนวคิดพื้นฐานเรื่องมูลค่าของเงินตามเวลา การจ่ายแบบต่อเนื่อง ค่ารายงวด ส่วนลดและอัตราส่วนลด ไปจนถึงสินเชื่อ การประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง ตลอดจนคณิตศาสตร์ประกันชีวิตและการประยุกต์ใช้ในการกำหนดเบี้ยประกันภัย เหมาะสำหรับการศึกษา การวิจัย และการประยุกต์ใช้ในโลกรการเงินยุคปัจจุบัน

เนื้อหาครอบคลุม

1. มูลค่าของเงินตามเวลา
2. การจ่ายแบบต่อเนื่องและค่ารายงวด
3. ส่วนลดและอัตราส่วนลด
4. ค่ารายงวดที่จ่ายไม่ตรงกับงวดการคิดดอกเบี้ย
5. สินเชื่อและหลักการชำระหนี้
6. การประเมินราคาสินทรัพย์ในตลาดทุน
7. การลงทุนและการบริหารความเสี่ยง
8. คณิตศาสตร์ประกันชีวิตและค่ารายงวดชีวิต
9. การประยุกต์คณิตศาสตร์การเงินกับการกำหนดเบี้ยประกันภัย

ผู้เขียน

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



ได้รับทุนสนับสนุนการเขียนตำราจาก
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2568