

การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับ
ครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น



13 พ.ค. 2540

ปริญญานิพนธ์

ของ

โกมล ไพศาล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขุภัณฑ์ สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา

มีนาคม 2540

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

๕๓.๖๗

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุฎิบัณฑิต สาขา
คณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.....ประธาน
(รศ.ดร. สมพล เล็กสกุล)

.....กรรมการ
(รศ.ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย)

.....กรรมการ
(ผศ.ดร.ไพโรจน์ เบาใจ)

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน
(รศ.ดร.สมพล เล็กสกุล)

.....กรรมการ
(รศ.ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย)

.....กรรมการ
(ผศ.ดร.ไพโรจน์ เบาใจ)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รศ.ดร. ปิยวดี วงษ์ใหญ่)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ศ.ดร. สุชาติ รัตนกุล)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาการศึกษาดุฎิบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ดร.ศิริภา พูลสุวรรณ)

วันที่ 14 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2540

ประกาศคุณประการ

การทำปริญญานิพนธ์ครั้งนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล รองศาสตราจารย์ ดร.สมสรร วงษ์อยู่น้อย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ เมาใจ ที่กรุณาได้ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ให้มีความกระชับชัดเจนเหมาะสม เพื่อความสมบูรณ์ของปริญญานิพนธ์ จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ รัตนกุล และ รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่ ที่ช่วยแนะนำและได้กรุณาเป็นกรรมการสอบปากเปล่าเพิ่มเติม ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาของท่านเป็นอย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่กรุณาช่วยตรวจ และให้คำแนะนำเกี่ยวกับชุดการสอนรายบุคคลและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เพื่อความสมบูรณ์และถูกต้องของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

ขอขอบคุณอาจารย์และนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ปีการศึกษา 2539 สถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ ที่ให้การร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

คุณค่า ประโยชน์และความดีทั้งหลายที่ได้รับจากปริญญานิพนธ์เล่มนี้ ขอมอบแด่ บิดา มารดา ครู-อาจารย์ และผู้มีพระคุณ ที่ให้ความรู้และกำลังใจตลอดมา

โกมล ไพศาล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1. บทนำ	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	6
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า.....	6
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า.....	7
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	8
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	9
ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับการสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น.....	9
ความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต.....	20 ✓
ความรู้เกี่ยวกับการศึกษารายบุคคล.....	26
ความรู้เกี่ยวกับชุดการสอน.....	29
3. วิธีดำเนินการวิจัย.....	43
การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง	43
การกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย.....	44
การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	56
4. ผลการวิจัย.....	58
ผลการศึกษาสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต.....	58
ผลการตรวจสอบความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต.....	59
ผลการสร้างชุดการสอน.....	62
ผลการทดลองเป็นรายบุคคล.....	64
ผลการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 1.....	68
การทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	70
การปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 2.....	73
ผลการทดลองภาคสนาม.....	73

บทที่	หน้า
5. สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	76
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	76
กลุ่มตัวอย่าง.....	76
การกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย.....	76
สรุปผลการวิจัย.....	78
การอภิปรายผล.....	79
ข้อเสนอแนะ.....	81
บรรณานุกรม.....	84
ภาคผนวก.....	90
ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต.....	91
ภาคผนวก ข แบบสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและ การสอนเรขาคณิต.....	93
ภาคผนวก ค แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	98
ภาคผนวก ง การวิเคราะห์ข้อมูล.....	144
ภาคผนวก จ ชุดการสอนรายบุคคล.....	170
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	360

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1.	แสดงสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยที่ควรเพิ่มเติมตามความเห็นผู้เชี่ยวชาญ ด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต.....	61
2.	แสดงข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องของชุดการสอนจากการทดลอง เป็นรายบุคคล...	65
3.	แสดงค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1 / E_2 จากการ ทดลองเป็นรายบุคคล.....	67
4.	แสดงข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องและการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนจากการ ทดลองเป็นรายบุคคล.....	69
5.	แสดงค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1 / E_2 จากการ ทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	71
6.	แสดงค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1 / E_2 จากการทดลองภาคสนาม.....	74
7.	แสดงผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพของครู ด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต.....	145
8.	แสดงการคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วย.....	147
9.	แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบฉบับรวม.....	151
10.	แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของตัวอย่าง 1 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล.....	153
11.	แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของตัวอย่าง 1 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล.....	154
12.	แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 5 คน จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	158
13.	แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 5 คน จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	159

14. แสดงคะแนนของผู้เรียนทั้งหมดในแต่ละจุดประสงค์ และคะแนนรวม ของแต่ละคนซึ่งได้จำแนกรายชื่อ จากการทดลองภาคสนาม.....	162
15. แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม.....	165
16. แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม.....	166

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1. กรอบแนวคิดในการทดลองเป็นรายบุคคล.....	52
2. กรอบแนวคิดในการทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	54

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันหลายประเทศรวมทั้งประเทศไทย ได้พัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วอันจะเห็นได้จากสิ่งประดิษฐ์ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่อำนวยความสะดวกและมีประสิทธิภาพแก่มนุษย์มากขึ้น เช่น การใช้แสงเลเซอร์ในการผ่าตัด การใช้ดาวเทียมในการส่งข้อมูลข่าวสาร การนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการควบคุมการบิน เป็นต้น เนื่องหลังการพัฒนาดังกล่าวเกิดจากความคิดของมนุษย์ที่มีการสร้างสรรค์คิดสิ่งใหม่ๆ มีเหตุผลและมีระบบแบบแผน มีการตั้งข้อสันนิษฐานและตรวจสอบ ซึ่งสิ่งเหล่านี้ควรได้รับการปลูกฝัง และฝึกฝนให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่สามารถพัฒนาผู้เรียน ให้เกิดลักษณะดังกล่าวและเป็นเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าที่นำไปใช้กับแขนงอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ สถาปัตยกรรม วิศวกรรมและศิลปกรรม เป็นต้น ดังนั้น ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้เล็งเห็นความสำคัญดังกล่าว จึงกำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับสำหรับนักเรียนทุกคนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นปีที่ 1 - 2 ส่วนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก็เป็นวิชาเลือกเสรี สำหรับนักเรียนผู้สนใจทางคณิตศาสตร์และต้องการมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนในระดับที่สูงขึ้นไป สำหรับจุดประสงค์ของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้กำหนดไว้ ดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 40)

1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ ข้อมูลที่ปรากฏในสิ่งแวดล้อมสามารถคิดอย่างมีเหตุผล และใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระบบชัดเจนและรัดกุม
2. เพื่อให้มีทักษะในการคิดคำนวณ
3. เพื่อให้เห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ที่มีต่อชีวิตประจำวันและเป็นเครื่องมือแสวงหาความรู้
4. เพื่อให้สามารถนำความรู้ความเข้าใจ และทักษะทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ยกเว้นแต่รายวิชา ค 021 ในทุกรายวิชาได้จัดเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ไว้ในลักษณะบูรณาการ กล่าวคือ นำเนื้อหาสาระที่มีลักษณะเกี่ยวข้องกัน หรือสัมพันธ์กันไว้ในรายวิชาเดียวกัน สำหรับ เรขาคณิตซึ่งเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่ศึกษาสมบัติเกี่ยวกับจุด เส้น ระนาบ และ ปริภูมิ เป็นต้น หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น ได้จัดเนื้อหาเรขาคณิตไว้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาสาระในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ ประกอบด้วย เส้นตรงและมุม ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและบทกลับ วงกลมและการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต เนื้อหาสาระเหล่านี้ส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับชีวิตของมนุษย์ ดังจะเห็นได้จากสิ่งที่ปรากฏอยู่รอบตัวเราในธรรมชาติ เช่น รังผึ้ง ปลาฉลาม ใบไม้และดอกไม้ รวมตลอดถึงสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น เช่น งานด้านก่อสร้าง งานด้านศิลปกรรม ล้วนมีรูปแบบทางเรขาคณิตเป็นพื้นฐาน หรือต้องใช้ความรู้ทางเรขาคณิตมาเกี่ยวข้องด้วย เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตยังเป็นเครื่องมือที่นำไปช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่น ตรรกโกณมิติ พีชคณิตและการวิเคราะห์ ด้วยวิธีการที่ง่ายและหาคำตอบได้เร็วขึ้น อีกทั้งพัฒนาผู้เรียนให้เป็นคนมีเหตุผล ทำงานอย่างมีระบบ ขั้นตอน และพัฒนาความสามารถด้านการค้นพบ นอกจากนี้โจทย์ปัญหาทางเรขาคณิตบางรูปแบบยังท้าทายชวนให้อยากคิดให้ความสนุกและเพลิดเพลิน เป็นการศึกษาผ่านใช้สติปัญญาแก้ปัญหา

จากความสำคัญของวิชาเรขาคณิตดังกล่าว นักเรียนที่จบหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นจึงควรมีความรู้ และประสบการณ์ในวิชาเรขาคณิตพอสมควรเพื่อจะได้นำไปประยุกต์ใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อตนเองและสังคม แต่โดยทั่วไปนักเรียนส่วนมากไม่ชอบวิชาเรขาคณิต มักคิดว่าเรขาคณิตเป็นเรื่องยากและมีปัญหาในการเรียน ทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุพจน์ ไชยสังข์ ที่พบว่าผลการเรียนของนักเรียนในวิชาเรขาคณิตอยู่ในระดับที่ไม่น่าพอใจ (สุพจน์ ไชยสังข์. ม.ป.ป. : 1-13) ในสหรัฐอเมริกา ก็ประสบปัญหาเช่นเดียวกัน คือ นักเรียนระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาเรียนรู้โน้มนำเกี่ยวกับเรขาคณิตเบื้องต้น และการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตอยู่ในระดับต่ำ (Clements and Battista. 1992 : 421) นอกจากนี้ สมพล เล็กสกุล กล่าวว่า ปัญหาที่ทำให้นักเรียน เรียนเรขาคณิตไม่ได้ผลดีเท่าที่ควร ได้แก่ อ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจความหมายของโจทย์หรือทฤษฎีบทนั้น ไม่สามารถแยกแยะโจทย์ได้ว่าข้อความตอนใดเป็นเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ และตอนใดเป็นผลหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เขียนรูปไม่ถูกต้องมักจะเขียนตามความคุ้นเคย สรุปผลหรือ

อ้างอิงจากการสรุปหรือจากการทดลอง การลำดับขั้นตอนของการพิสูจน์ยังไม่ต่อเนื่อง ใช้วิธีท่องจำการพิสูจน์ (สมพล เล็กสกุล. ม.ป.ป. : 7-9) ขณะเดียวกันจากการประเมินการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) บางแห่ง เช่น ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น สังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 5 ในปี พ.ศ. 2535 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่จบชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเฉพาะกลุ่ม วิชาคณิตศาสตร์ ที่มีเรขาคณิตรวมอยู่ด้วยมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับไม่น่าพอใจ (สำนักงานศึกษาธิการ เขต 5, 2535 : 78-85) ด้วยเหตุนี้จึงมีความจำเป็นที่ต้องมีการพัฒนาคุณภาพการศึกษากลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ในส่วนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

การพัฒนาคุณภาพด้านการศึกษแก่ผู้เรียนในระดับใดก็ตามให้ดีขึ้นได้นั้นประกอบ ด้วยปัจจัยหลายอย่าง แต่ปัจจัยที่มีบทบาทสำคัญที่สุด คือ ครูหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู ซึ่งเป็นผู้มีความใกล้ชิดผู้เรียนที่ช่วยสร้างสรรค์ และพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถและคุณลักษณะอื่น ๆ ที่จำเป็นต่อการสอนตามหลักสูตรอย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อให้ผู้เรียนจะได้เป็นพลังสำคัญในการพัฒนาชาติให้เจริญก้าวหน้าทุก ๆ ด้านในอนาคต ดังผลการวิจัยของโครงการสภาพแวดล้อมห้องเรียนระยะที่ 1 ปี พ.ศ.2529 พบว่า การสอนของครูเป็นตัวกำหนดที่สำคัญอย่างหนึ่งของผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียน และองค์ประกอบที่สำคัญของการสอนที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ ความรู้เนื้อหาสาระในวิชาที่สอน ความรู้เกี่ยวกับวิธีการสอน (กระทรวงศึกษาธิการ. 2529 : 196) นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยของ เฟนเนมา และแฟรงค์ (Fennema and Franke) มีผลการวิจัยสอดคล้องกัน คือความรู้เนื้อหาสาระของครูในวิชาที่สอนมีผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียน (Fennema and Franke. 1992 : 151) ดังนั้นคุณภาพของครูหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูด้านความรู้เนื้อหาสาระในวิชาที่สอนจึงเป็นกุญแจสำคัญต่อการพัฒนาคุณภาพการศึกษาทุกระดับ

ในการสอนเรขาคณิตก็เช่นกันครูจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตเป็นอย่างดีแต่เมื่อผู้วิจัยได้ทำการศึกษาหลักสูตรของสถาบันการฝึกหัดครู ซึ่งมีหน้าที่โดยตรงในการผลิตครู หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูและบุคลากรทางการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ พบว่า บางสถาบันเคยจัดเรขาคณิตเป็นวิชาเลือกสำหรับผู้เรียน เช่น มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (ศรีนครินทรวิโรฒ. 2530 : 332) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ (สงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี. 2531 : 46-47) ซึ่งทั้งสองแห่งนี้เป็นสถาบันขนาดใหญ่ผลิตครูหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูมีนิสิตนักศึกษาจำนวนมากแต่นิสิตนักศึกษาส่วนใหญ่ในขณะนั้นไม่เลือกเรียนวิชาเรขาคณิตเนื่องจากนิสิตนักศึกษารู้สึกว่าเรขาคณิตเป็นเรื่องที่เข้าใจยากและต้องใช้เวลามากในการศึกษาให้เข้าใจ บุคคลเหล่านี้เมื่อจบออกไปก็ได้บรรจุเป็นครูในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

หรือมัธยมศึกษาตอนปลาย และผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเอกสารจากสำนักงานการประถมศึกษา จังหวัดราชบุรีเกี่ยวกับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนขยายโอกาสทางการศึกษาชั้นพื้นฐานจังหวัดราชบุรีพบว่า มีครูจำนวนมากไม่ได้จบเอกวิชาคณิตศาสตร์ แต่ครูเหล่านั้นก็ทำการสอนวิชาคณิตศาสตร์ (สำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดราชบุรี. 2537) ทั้งสองประเด็นนี้น่าจะเป็นไปได้ว่ามีครูที่มีความรู้ในเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตอันจำเป็นต่อการสอนน้อยไปหรือไม่ลึกซึ้งเพียงพอ แม้ว่าครูเหล่านั้นส่วนหนึ่งเคยได้รับการฝึกอบรมด้านคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตมาแล้วก็ตาม แต่เป็นอบรมระยะเวลาสั้น ๆ อย่างรวบรัดและเร่งรีบไม่กี่ชั่วโมงในลักษณะเป็นแบบการบรรยายเป็นกลุ่มใหญ่ในห้องเรียนที่จำกัด ซึ่งครูในกลุ่มแต่ละคนมีความแตกต่างกันในด้านความรู้ รูปแบบการเรียนรู้ ระยะเวลาที่เรียนรู้ ซึ่งอาจมีผลทำให้ครูบางคนไม่สามารถเรียนรู้ได้ทันตามที่บรรยายอีกประการหนึ่งการอบรมครูที่ผ่านมาระทำได้จำกัดในด้านจำนวนผู้เข้ารับการอบรม ด้วยเหตุที่งบประมาณที่ใช้ในการจัดการอบรมมีจำกัด และที่ผ่านมามีการอบรมด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตน้อยมาก อีกทั้งครูส่วนหนึ่งมีภารกิจที่จะต้องปฏิบัติงานประจำจึงไม่มีโอกาสได้มาศึกษาต่อหรือเข้ารับการอบรมเพื่อเพิ่มพูนความรู้ด้านเรขาคณิต การที่จะให้ครูศึกษาด้วยตนเองจากหนังสือเรียนหรือหนังสืออื่นๆ ก็ทำได้ยาก เนื่องจากหนังสือดังกล่าวเขียนไว้กว้าง ๆ ไม่มีรายละเอียดเพียงพอ ทำให้ครูเหล่านั้นสอนตามที่ตนเองเคยศึกษามาในระดับมัธยมศึกษา หรือจากประสบการณ์ที่ได้รับซึ่งบางครั้งก็เกิดปัญหาในการสอน คือไม่สามารถอธิบายให้ผู้เรียนเข้าใจได้ด้วยเหตุที่ไม่เข้าใจในเนื้อหาสาระที่สอนอย่างลึกซึ้งและเพียงพอ

จากการเปิดเผยของ วิชัย ดันศิริ เลขานุการคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ พบว่า การขยายโอกาสทางการศึกษาชั้นพื้นฐานประสบความสำเร็จอย่างมาก โดยเฉพาะในเรื่องของการเรียนต่อชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของนักเรียน แต่ในการดำเนินการได้ประสบปัญหาที่สำคัญที่สุด คือปัญหาด้านคุณภาพ พบว่าครูในระดับประถมศึกษาที่ต้องสอนระดับมัธยมศึกษาขาดความรู้ความชำนาญ เมื่อเทียบกับครูในระดับมัธยมศึกษาโดยตรง (ชัยวิทย์ จิตเมตตา. 2537 : 45) เมื่อสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ทำการสำรวจความต้องการเกี่ยวกับการเข้ารับการอบรมวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สังกัดสำนักงานการประถมศึกษา พบว่าครูยังมีความต้องการที่จะเข้ารับการอบรมทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตเป็นจำนวนมาก (สสวท. 2536) และจากการวิจัยของ อภิญา คุณเลิศดี พบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหามากสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในเขตการศึกษา 9 คือ การพิสูจน์ในเรขาคณิต (อภิญา คุณเลิศดี. 2534 : 85) ปัญหานี้ก็เกิดกับนักศึกษาฝึกสอนเช่นเดียวกัน ผู้วิจัยเคยไป

นิเทศนักศึกษาฝึกสอนวิชาเอกคณิตศาสตร์ ของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง ที่ฝึกสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พบว่านักศึกษาฝึกสอนมีปัญหาในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากขาดความรู้ในเนื้อหาสาระที่สอนโดยเฉพาะเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เช่น การพิสูจน์ในเรขาคณิตและการสร้างที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากนักศึกษาฝึกสอนไม่คุ้นเคยกับเนื้อหาสาระเหล่านั้น อีกทั้งเรขาคณิตที่เรียนในระดับอุดมศึกษาไม่ได้เน้นสำหรับการนำไปใช้สอนโดยตรง

จากที่ได้กล่าวมาก็พอจะชี้ให้เห็นได้ว่าการสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นยังเป็นปัญหาอยู่มากและองค์ประกอบที่สำคัญที่เอื้ออำนวยต่อความสำเร็จของเป้าหมายก็คือครูผู้สอน ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องพัฒนาคุณภาพของครูผู้สอนปัจจุบันหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู การพัฒนาคุณภาพของบุคคลเหล่านี้ ที่สำคัญก็คือ ด้านการเรียนการสอน เพราะมีผลโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยปรับปรุงสมรรถภาพด้านความรู้ เพื่อจะได้มีความรู้เนื้อหาสาระดีพอที่จะถ่ายทอดความรู้และตอบปัญหาของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง ก็มีคำถามตามมาว่า จะใช้วิธีการใดที่จะช่วยให้ครูผู้สอนปัจจุบันหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู มีคุณภาพดีขึ้น โดยเฉพาะความรู้ในเนื้อหาสาระที่สอน จากการศึกษาพบว่า รูปแบบและกระบวนการพัฒนาครูประจำการมี 3 รูปแบบที่นิยมใช้กัน ได้แก่ รูปแบบพัฒนาครูประจำการที่เน้นวิทยากรเป็นหลักหรือศูนย์กลาง รูปแบบพัฒนาครูประจำการที่เน้นสื่อการฝึกอบรมและกิจกรรมภาคปฏิบัติ รูปแบบพัฒนาครูประจำการที่เน้นตัวผู้เข้ารับการฝึกอบรมเป็นหลักหรือศูนย์กลาง (พลสันต์ โพธิ์ศรีทอง. 2535 : 36 - 37) แต่เนื่องจากปัจจุบันได้มีการนำนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษาเข้ามาใช้ในการแก้ปัญหาในกระบวนการเรียนการสอนและการฝึกอบรมอย่างกว้างขวาง เช่น การผลิตบทเรียนโปรแกรม ชุดการสอน รายการวิทยุศึกษา รายการโทรทัศน์ศึกษา และการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน เป็นต้น สิ่งดังกล่าวนอกจากจะช่วยแก้ปัญหาแล้วยังอำนวยความสะดวกในการเรียนการสอน และการฝึกอบรมได้หลายประการ ผู้วิจัยจึงเห็นควรเลือกใช้รูปแบบการพัฒนาครูประจำการที่เน้นสื่อการฝึกอบรมและกิจกรรมภาคปฏิบัติโดยใช้สื่อในรูปของชุดการสอนเป็นแบบอย่างในการพัฒนาครูหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู

ชุดการสอนเป็นนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่ง ที่เป็นชุดอำนวยความสะดวกแก่ผู้เรียน ให้ผู้เรียนได้ผลสัมฤทธิ์ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม มีองค์ประกอบที่สำคัญได้แก่ คู่มือการใช้ชุดการสอน บัตรงาน เนื้อหาสาระหรือประสบการณ์ แบบประเมินผลการนำเสนอสื่อในชุดการสอนตามแบบหน่วยการเรียนรู้ซึ่งมีโครงสร้าง 7 ประการ คือ หลักการและเหตุผล จุดประสงค์ ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนการสอน การประเมินหลังเรียน และสื่อการเรียนการสอน ชุดการสอนนี้ ผู้เรียนสามารถศึกษาสิ่งที่

เขาต้องการได้ด้วยตนเอง ตามโปรแกรมการเรียนการสอนที่กำหนดไว้อย่างมีระบบขั้นตอน มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่สามารถเลือกปฏิบัติได้ ตามความแตกต่างระหว่างบุคคล และผู้เรียนสามารถประสบความสำเร็จด้วยวิธีการของตนเอง ตามอัตราการเรียนที่ตนต้องการ ซึ่งการเรียนรู้ในลักษณะของชุดการสอน ได้มีผู้ทดลองแล้วใช้ได้ดีกับการสอนรายวิชาต่าง ๆ ดังการวิจัยของโกสุม เจริญรวย (2527) จินตนา ดั่งแพง (2531) และสมคิด เครือรัตน์ (2532) มีผลการวิจัยสอดคล้องกันคือ ชุดการสอนสามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้จริง และมีความรู้เพิ่มขึ้นจากก่อนเรียน

จากสภาพปัญหาและแนวความคิดข้างต้น ผู้วิจัยได้ตระหนักถึงความสำคัญและความจำเป็นที่จะปรับปรุงประสิทธิภาพการจัดการเรียนการสอนด้านเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ให้ดีขึ้นจึงเห็นควรพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู ที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย ตลอดจนผู้ที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์เป็นวิชาเอกแต่ต้องทำการสอนเรขาคณิต การวิจัยครั้งนี้จะทดลองกับนักศึกษาผู้ที่เตรียมตัวออกไปเป็นครู เนื่องจากนักศึกษาเป็นผู้มีบทบาทในการจัดการเรียนการสอนในอนาคตต่อไปและยังมีสภาพเป็นนักศึกษาอยู่การยอมรับแนวคิดและความรู้ใหม่ ๆ ได้ดีและง่ายกว่าครูผู้สอนปัจจุบัน อีกประการหนึ่ง ผู้ที่เตรียมตัวออกไปเป็นครู อาจนำแนวคิดความรู้ใหม่ ๆ ไปเป็นแบบอย่างให้ครูผู้สอนปัจจุบันไปปฏิบัติตามเมื่อเห็นว่าดีและมีประโยชน์กับนักเรียน นอกจากนี้การให้ความรู้กับนักศึกษาซึ่งเป็นคนรุ่นใหม่จะเป็นการแก้ปัญหาที่ต้นเหตุทำให้มีความพร้อมในการเตรียมตัวออกไปเป็นครูด้วย

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ในการวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายที่จะพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ได้สื่อเป็นชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิต สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูซึ่งผู้เรียนสามารถศึกษาด้วยตนเอง ตามอัตราการเรียนที่ต้องการ โดยไม่ต้องมาเข้ารับการอบรมหรือศึกษาในสถานที่ใดที่หนึ่ง เนื่องจากอาจมีภารกิจที่ต้องปฏิบัติงานอยู่ประจำ

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ขุดการสอนนี้ครอบคลุมเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ดังต่อไปนี้

1.1 เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ตามหนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้าง และการนำไปใช้แต่ไม่เกี่ยวกับการคำนวณหาความยาว ขนาดของมุม พื้นที่และปริมาตรของ รูปเรขาคณิตโดยตรง

1.2 เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาบางเนื้อหาที่จำเป็นสำหรับ ผู้ที่เป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

นอกจากการนำเสนอเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตโดยตรงแล้วยังมีข้อเสนอแนะ ครอบคลุมถึงวิธีการสอนเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตแก่นักเรียนตามเนื้อหาในหนังสือเรียนวิชา คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. ในลักษณะเน้นหนักส่วนที่เด่นและ แตกต่างไปจากที่มีอยู่ในคู่มือครูปกติที่จัดทำโดย สสวท. ด้วย

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองได้แก่นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาค เรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษา ของสถาบัน ราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ จำนวน 36 คน ซึ่งเป็นอาสาสมัคร จากจำนวนทั้งหมด 38 คน โดยใช้นักศึกษาในการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

2.1 การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้การเลือกอย่างเจาะจง เพื่อเลือกนักศึกษาจำนวน 1 คน ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง การทดลองนี้เพื่อตรวจสอบแก้ไข ข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

2.2 การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ใช้การเลือกอย่างเจาะจงเพื่อเลือกนักศึกษาจำนวน 5 คน แยกเป็นนักศึกษาที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง 1 คน ปานกลาง 2 คนและ ต่ำ 2 คน การทดลองนี้เพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

2.3 การทดลองภาคสนาม ใช้นักศึกษาจำนวน 30 คน ที่เหลือจากการทดลอง ครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 ส่วนใหญ่เป็นนักศึกษาที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง หรือต่ำกว่า ในการทดลองนี้เพื่อตรวจสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

การเลือกใช้นักศึกษาข้างต้นเป็นกลุ่มตัวอย่าง เนื่องจากนักศึกษากลุ่มนี้ส่วนใหญ่มีผล การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลางหรือต่ำกว่า ประสิทธิภาพในการสอนเรขาคณิตมี น้อยหรือไม่มีเลย และเมื่อจบแล้วก็จะออกไปเป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นลักษณะที่ พอดีสอดคล้องกับความมุ่งหมายในการสร้างชุดการสอนเพื่อผู้เรียนในลักษณะนี้

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต หมายถึง ความรู้ ความสามารถ และทักษะด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับครู เพื่อให้สามารถปฏิบัติการสอนด้านเรขาคณิตตามเนื้อหาในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. ได้อย่างมีประสิทธิภาพ สอดคล้องกับจุดประสงค์ของหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

2. ชุดการสอนรายบุคคล หมายถึง สื่อการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามแบบหน่วยการเรียนรู้โดยสอดคล้องกับเนื้อหาวิชาที่ต้องการให้ผู้เรียนได้รับ มีองค์ประกอบที่สำคัญ คือ คู่มือการใช้ชุดการสอน บัตรงาน เนื้อหาสาระหรือประสบการณ์ แบบประเมินผล โดยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย จะมีเพียงเรื่องเดียวหรือมนต์เดียว มีโครงสร้าง คือ บทนำ จุดประสงค์ ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนรู้ การประเมินหลังเรียน และสื่อการเรียน ซึ่งผู้เรียนศึกษารายบุคคลตามความต้องการและความสามารถของตนเอง ตามลำดับขั้นตอนที่ได้ระบุไว้ด้วยวิธีการ และสื่อการเรียนที่เหมาะสม เพื่อให้ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์ของการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมีลักษณะดังนี้

- 2.1 เป็นชุดการสอนที่ยึดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เป็นหลัก
- 2.2 ใช้แนวความคิดในการพัฒนาสื่อชุดการสอนตามแบบหน่วยการเรียนรู้
- 2.3 ใช้หลักการเรียนรู้ที่ทำให้ผู้เรียนทราบผลได้ทันที

3. ครู หมายถึง ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ หรือ ผู้เตรียมออกไปเป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย ตลอดจนผู้ที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์เป็นวิชาเอกแต่ต้องทำการสอนเรขาคณิตตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โดยใช้หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ที่ สสวท. เป็นผู้จัดทำ

4. ประสิทธิภาพของชุดการสอน หมายถึง คุณภาพของชุดการสอนที่เมื่อนำไปใช้สอนแล้ว ทำให้ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ในงานวิจัยนี้ใช้สูตร E_1/E_2 ดังรายละเอียดในบทที่ 3 สำหรับพิจารณาตรวจสอบโดยถือเกณฑ์ 75/75

5. ระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง ซึ่งกำหนดเป็น 3 ระดับดังนี้ คือ ระดับสูงสำหรับผู้มีค่าระดับชั้นเฉลี่ยสะสมวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ 2.75 ขึ้นไป ระดับปานกลาง สำหรับผู้มีค่าระดับชั้นเฉลี่ยสะสมวิชาคณิตศาสตร์ ต่ำกว่า 2.75 แต่ไม่ต่ำกว่า 2.00 และระดับต่ำสำหรับผู้มีค่าระดับชั้นเฉลี่ยสะสมวิชาคณิตศาสตร์ ต่ำกว่า 2.00

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต ที่เกี่ยวข้องกับการสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

- 1.1 รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน
- 1.2 สมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

2. ความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

- 2.1 ความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต
- 2.2 ระดับขั้นของแวนฮิลล์เกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต
- 2.3 งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

3. ความรู้เกี่ยวกับการศึกษารายบุคคล

- 3.1 ความหมายของการศึกษารายบุคคล
- 3.2 จุดมุ่งหมายของการศึกษารายบุคคล
- 3.3 บทบาทของผู้สอนในการศึกษารายบุคคล

4. ความรู้เกี่ยวกับชุดการสอน

- 4.1 ความหมายของชุดการสอน
- 4.2 ประเภทของชุดการสอน
- 4.3 องค์ประกอบของชุดการสอน
- 4.4 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการผลิตชุดการสอน
- 4.5 หลักการผลิตชุดการสอน
- 4.6 งานวิจัยเกี่ยวกับชุดการสอน

1. ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต ที่เกี่ยวข้องกับการสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

- 1.1 รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โครงสร้างกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์ - คณิตศาสตร์ ได้แบ่งรายวิชาคณิตศาสตร์เป็น วิชาบังคับกับแกน และวิชาเลือกเสรี ในส่วนที่เกี่ยวกับเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ตามหนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 ค 011

และ ค 021 ซึ่ง สมพล เล็กสกุล และ หุสรีพร สุทธิระ (2538 : 2-16) ได้สรุปเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตในส่วนเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ที่นักเรียนควรมีความรู้ความเข้าใจในแต่ละรายวิชาดังนี้

รายวิชา ค 101

เส้นตรงและมุม

1. ลักษณะ สมบัติและการใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม นอกจากนั้นยังใช้สัญลักษณ์แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงและขนาดของมุมได้ถูกต้อง

2. สมบัติของจุดและเส้นตรงบางประการ ได้แก่

2.1 สามารถลากเส้นตรง หรือส่วนของเส้นตรงผ่านจุดสองจุดได้เพียงเส้นเดียว

2.2 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะได้จุดตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

3. การสร้าง (ใช้เพียงวงเวียนและสันตรง) โดยไม่ต้องเขียนคำอธิบาย วิธีสร้างแต่ต้องแสดงให้เห็นร่องรอยการสร้าง ได้แก่

3.1 สร้างส่วนของเส้นตรงและมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้

3.2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งครึ่งมุม

3.3 การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งมุมออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งมุม

3.4 สร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา และ 60 องศา

3.5 สร้างมุมขนาดต่าง ๆ โดยอาศัยการสร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ 60 องศา และการแบ่งครึ่งมุม เช่น สร้างมุมขนาดเท่ากับ 75 องศา หรือ 135 องศา

3.6 สร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

3.7 สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

3.8 สร้างรูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยมบางรูปให้มีความยาวของด้านหรือขนาดของมุมตามที่กำหนดให้

4. สมบัติที่ควรทราบหลังจากทำแบบฝึกหัด

4.1 เส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งมีเพียงเส้นเดียว

4.2 เส้นตั้งฉากที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดหนึ่ง

4.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

4.4 เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐานจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง
 รายวิชา ค 031 เป็นการสร้างเพิ่มเติมจากในรายวิชา ค 101 โดยมีการให้นักเรียน
 เขียนวิธีสร้างพอสังเขป หรืออย่างละเอียดด้วยความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มเติม
 มีดังนี้

การสร้าง

1. การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการสร้างมุม
 แฉงที่มีขนาดเท่ากัน

2. สร้างมุมขนาดต่าง ๆ ที่ยากขึ้น เช่น สร้างมุมขนาดเท่ากับ 82.5 องศา โดยใช้
 ความสัมพันธ์ $82.5 = \frac{120+45}{2}$ รวมทั้งสามารถหาขนาดของมุมบางมุมที่สร้างไว้แล้ว
 โดยใช้การวัดด้วย

3. การสร้างรูปสามเหลี่ยมบางรูปที่กำหนดให้มีขนาดของมุมที่สร้างยากขึ้น

4. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสี่เหลี่ยมอื่น ๆ ในกลุ่มเดียวกัน เช่น
 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้

4.1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน
 สองคู่ ด้วยการอาศัยสมบัติ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นและทำให้ ขนาดของ
 มุมแย้งเท่ากันแล้วเส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน”

4.2 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่า
 กันสองคู่

4.3 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่
 และให้ด้านคู่นี้ยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 203

ความเท่ากันทุกประการ

1. บทนิยามของความเท่ากันทุกประการ “รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถ
 นำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี”

2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และส่วนของเส้นตรง
 สองเส้นที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน (สรุป : ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากัน
 ทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน)

3. มุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทุกประการและมุมสองมุมที่เท่ากัน
 ทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน (สรุป : มุมสองมุมเท่ากันทุกประการเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาด
 เท่ากัน)

4. มุมตรงข้ามที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกันย่อมมีขนาดเท่ากัน
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ
6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อมีความสัมพันธ์แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้
 - 6.1 มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้นเท่ากัน (ด.ม.ด.)
 - 6.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันนั้นยาวเท่ากัน (ม.ด.ม.)
 - 6.3 มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ (ด.ด.ด.)
7. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว “รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน”
8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 - 8.1 มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
 - 8.2 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
 - 8.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 - 8.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

รายวิชา ค 204

เส้นขนาน

 1. บทนิยามของเส้นขนาน “เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน เมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน”
 2. สมบัติของเส้นขนาน ได้แก่
 - 2.1 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

2.2 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

2.3 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา หรือสองมุมฉาก

4. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว มุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย

5. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 360 องศา หรือสี่มุมฉาก

6. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป ขนาดของมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

7. สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ม.ม.ค. คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดมีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพิ่มเติมอีกคือ “ถ้าลากเส้นตรงจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐานจะแบ่งครึ่งฐาน”

ความคล้าย

1. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน”

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

รายวิชา ค 011

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

1. ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังที่เคยเรียนมา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองแล้ว ยังมีอีกแบบหนึ่งที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ของพื้นที่ คือ “ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก”

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และบทกลับของทฤษฎีบทของพีทาโกรัส : ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a, b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

วงกลม

1. ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน สิ่งเกี่ยวข้องกับวงกลม ได้แก่ จุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลาง ส่วนโค้ง (ใหญ่หรือน้อย) ของวงกลม มุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม เส้นสัมผัสวงกลม

2. สมบัติเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่

2.1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก

2.2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

2.3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมี ขนาดเท่ากัน

2.4 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งทีรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

2.5 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางทีรองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.6 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งทีรองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

2.7 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมจะรองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.8 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือส่วนโค้งน้อยเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่เท่ากับส่วนโค้งใหญ่

2.9 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

2.10 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

2.11 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

2.12 จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย

2.13 เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

3. รู้จักวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป โดยอาศัยวงกลมและความรู้เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งสามารถหาขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งเท่ากับ $180 \frac{(n-1)}{n}$ องศา

4. สมบัติที่ควรทราบหลังจากทำแบบฝึกหัด

4.1 ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา

4.2 มุมที่เกิดจากคอร์ดจรดกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

4.3 จากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดนั้นมาสัมผัสวงกลม จะลากได้เพียงสองเส้น และส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน

รายวิชา ค-021 ที่เน้นการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาทั้งหมดในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ปีที่สอง และ ค-011 มีดังนี้

1. บทนิยาม : การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

2. สังพจน์ : เคลื่อนที่รูปเรขาคณิตได้

3. บทนิยาม : รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

4. สังพจน์ : เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกันก็ต่อเมื่อ ผลบวกของขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็น 180 องศา

5. ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต

5.1 สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

5.2 ในบรรดาส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงเส้นนั้นจะมีส่วนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นเส้นตั้งฉากและเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

5.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปเท่ากันทุกประการ (ฉ.ด.ด.) คือ “ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ”

5.4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.1 ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

5.4.2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.3 มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีขนาดเท่ากัน

5.4.4 ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.5 สมบัติบางประการที่สรุปได้จากแบบฝึกหัด

5.5.1 รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5.5.2 เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน

5.5.3 ส่วนของเส้นตรงที่ปิดกันหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากันจะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย

5.5.4 ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

5.5.5 เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และขนานกับอีกด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกับด้านที่สามที่จุดกึ่งกลางของด้านที่สามนั้น

5.5.6 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

5.5.7 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

5.6 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม

5.6.1 เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

5.6.2 คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่งจะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

6. ใช้การพิสูจน์กับรูปที่สร้างขึ้นโดยใช้วงเวียนและสันตรง

(สมพล เล็กสกุล และชูลีพร สุภธีระ. 2538 : 2-16)

รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ซึ่งปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 และ ค 011 มี

เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ คือ เส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส และ วงกลม โดย เนื้อหาสาระเหล่านี้จะไม่เป็นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน แต่เป็นการเรียนในลักษณะของการทำกิจกรรมและการทดลอง เพื่อให้ได้ข้อสรุป และสำหรับรายวิชา ค 031 นั้นเกี่ยวข้องกับการเรียนรู้สมบัติทางเรขาคณิตที่นักเรียนจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาแล้ว โดยเนื้อหาในส่วนนี้จะเน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน

1.2 สมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

การกำหนดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นสิ่งจำเป็น เพื่อครูสามารถปฏิบัติการสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพและสอดคล้องกับจุดประสงค์ของหลักสูตร ในแง่เนื้อหาสาระของวิชา ปัจจุบันสถาบันการศึกษาหลายสถาบัน เช่น มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สถาบันราชภัฏ ได้กำหนดรายวิชาเรขาคณิต สำหรับผู้เรียนที่เรียนคณิตศาสตร์เป็นวิชาเอก เพื่อการเตรียมครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น มีหัวข้อเนื้อหาสาระสรุปได้ดังนี้

1.2.1 พื้นฐานเชิงประวัติศาสตร์

1.2.2 เรขาคณิตเบื้องต้นแนวใหม่ (ทฤษฎีบทของเมเนเลอัส ทฤษฎีบทของเซวา อัตราส่วนไขว้ ปัญหาที่มีชื่อเสียง 3 ปัญหาในเรขาคณิต)

1.2.3 การแปลงเบื้องต้น ทฤษฎีการแปลงแบบจุดเบื้องต้นของระนาบ

1.2.4 เรขาคณิตโพเรเจกทิฟ (ภาวะมีแกนร่วม ภาวะมีศูนย์ร่วม ภาวะโพเรเจกทิฟ)

1.2.5 รากฐานของเรขาคณิต (ระบบสัจพจน์ การวิเคราะห์ระบบสัจพจน์ ข้อบกพร่องของหนังสือ “เอลิเมนต์” ของยุคลิด)

1.2.6 เรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (สัจพจน์ที่ 5 การค้นพบเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด)

(ศรีนครินทรวิโรฒ. 2530 : 300 ; ศึกษาธิการ. 2536 : 311-334)

ส่วนในต่างประเทศก็มีหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกับการส่งเสริมสนับสนุนการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยให้การสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน มีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้น ตัวอย่างเช่น ในสหรัฐอเมริกา เมื่อปี ค.ศ. 1991 สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติ (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM) ซึ่งเป็นหน่วยงานที่ช่วยส่งเสริมสนับสนุน และปรับปรุงคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ได้กำหนดสมรรถภาพของครุคณิตศาสตร์ ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ตลอดจนการประเมินคุณภาพของหลักสูตรและผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียน เพื่อเป็นแนวทางในการปฏิรูปการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน อีก 10 ปีข้างหน้า ดังนี้

1. รากฐานของเรขาคณิต เช่น การพัฒนาการของเรขาคณิตเชิงประวัติศาสตร์ ระเบียบวิธีเกี่ยวกับสัจพจน์ (Axiomatic Method) เรขาคณิตระบบยูคลิด สัจพจน์ของการขนาน เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด...

2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด เช่น รูปหลายเหลี่ยม ความคล้าย ความเท่ากันทุกประการ การเขียนรูป การสมมาตร

3. การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิดและทฤษฎีเซต

(NCTM. 1991 : 132-140)

นอกจากนี้ เบล (Bell. 1981) กล่าวว่า คุณลักษณะของครุคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่ดีจะต้องมีความรู้ความเข้าใจเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์มากกว่าในหลักสูตรกำหนดไว้ กล่าวอีกอย่างหนึ่งครูสอนต้องมีความรู้ความเข้าใจทั้งแนวกว้างและแนวลึกของคณิตศาสตร์ระดับวิทยาลัย เพื่อจะได้เตรียมการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาได้อย่างถูกต้อง น่าสนใจและเป็นประโยชน์กับนักเรียนทุกคน ขณะเดียวกันนักคณิตศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ศึกษามีความเห็นสอดคล้องกันว่า ครุคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นควรมี ความรู้ความเข้าใจเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตดังนี้

1. เรขาคณิตระบบยูคลิด

2. ระนาบคาร์ทีเซียนและเรขาคณิตปริภูมิที่เกี่ยวข้อง เส้น ระนาบ วงกลม และทรงกลม

3. การหมุนในระนาบและปริภูมิ

4. เรขาคณิตโพรงเจกทิฟ และเรขาคณิตสัมพรรค

5. การยกตัวอย่างเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด

(Bell. 1981 : 3-5)

2. ความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

2.1 ความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต ครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่เลือกสรรวิธีการสอน และการจัดลำดับขั้นการสอนเนื้อหาสาระที่สอดคล้องกับระดับของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาสาระเหล่านั้นได้อย่างถูกต้องและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาเรขาคณิต ดังนั้น จึงมีความจำเป็นที่ครูต้องมีความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ซึ่งที่สำคัญกล่าวไว้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2530:75-77) ได้กล่าวถึง วิธีการสอนการพิสูจน์เรขาคณิต โดยแยกเป็น 3 ลักษณะคือ

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังนี้

- 1.1 ให้ผู้เรียนค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป
- 1.2 ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล
- 1.3 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
- 1.4 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมกันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด มีขั้นตอนดังนี้

- 2.1 ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผลหรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกแยะได้ จะต้องพยายามฝึกจนกว่าจะแยกได้
- 2.2 เขียนรูปประกอบ
- 2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์หรือใช้วิธีวิเคราะห์ ร่วมกับสังเคราะห์ ซึ่งต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง มีขั้นตอนดังนี้

- 3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วก็มาถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

ซิมมอนส์ (Simmons. 1992 : 41) ได้เสนอกิจกรรมซึ่งสามารถนำมาใช้ประโยชน์ สำหรับการเริ่มต้นบทเรียน ดังนี้

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยด้านเรขาคณิต ผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย สำหรับครู ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. รากฐานของเรขาคณิต

- 1.1 การพัฒนาการของเรขาคณิตเชิงประวัติศาสตร์
- 1.2 ระบบสัจพจน์
- 1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของยูคลิด
- 1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต

นอกระบบยูคลิด

2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด

- 2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม
- 2.2 ความเท่ากันทุกประการ
- 2.3 เส้นขนาน
- 2.4 รูปหลายเหลี่ยม เช่น รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
- 2.5 ความคล้ายกัน
- 2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 2.7 ทฤษฎีบทของเมเนเลอัส และ ทฤษฎีบทของเชวา

3. วงกลม

- 3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน และ สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม เช่น จุดศูนย์กลาง รัศมี และคอร์ด
- 3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม
- 3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลาง และคอร์ดของวงกลม
- 3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัส

4. การสร้างในเรขาคณิต

- 4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน
- 4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
- 4.3 การสร้างวงกลมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป
- 4.4 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ บางรูป
- 4.5 ปัญหาการสร้างที่มีชื่อเสียง 3 ข้อ

1. การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน
2. การเสนอเค้าโครงย่อประเด็นหลักของบทเรียน
3. ใช้การอุปมาอุปมัย เป็นการสร้างสถานการณ์ของหัวข้อเรื่องใหม่ให้สัมพันธ์กับประสบการณ์ของผู้เรียน ตลอดจนบางสิ่งที่คุ้นเคยกับผู้เรียน

4. การทบทวนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับงานก่อนหน้า เช่น การทบทวนที่เกี่ยวกับความรู้โดยตรง ทักษะ หรือความเข้าใจ

สิธุ (Sidhu, 1981 : 291) ได้ให้ข้อคิดในการสอนเรขาคณิตว่าในการเริ่มต้นเรียนเรขาคณิต ถ้าผู้เรียนสามารถใช้ตรรกศาสตร์ได้ ครูผู้สอนก็อย่าไปขัดขวาง ในความเป็นจริงแล้วผู้เรียนสามารถเริ่มใช้เหตุผลตั้งแต่วัยเด็ก ถ้าผู้เรียนสามารถมองเห็นการเชื่อมโยง ระหว่างข้อเท็จจริงโดยใช้ตรรกศาสตร์ครูผู้สอนก็ควรสนับสนุนแต่ต้องไม่ลืมว่าเป้าหมายหลักในการเรียนเรขาคณิตก็คือ เพื่อเก็บรวบรวมข้อความเป็นข้อเท็จจริง ถ้าผู้เรียนคนใดไม่สามารถตอบสนองทางตรรกศาสตร์เป็นที่พอใจก็ไม่ต้องเร่งรีบหรือกังวลเกี่ยวกับเรื่องนั้น

นอกจากนี้ยังได้แนะนำการสอนเรขาคณิต ดังนี้คือ

1. งานที่ให้ผู้เรียนฝึกทำควรได้สัดส่วนและชัดเจน
2. ครูควรให้ผู้เรียนสังเกตสิ่งต่าง ๆ ด้วยตัวเอง โดยการทดลองวัดจริงหรือประสบการณ์
3. กระดานดำที่ใช้ควรได้สัดส่วน สะอาดและถูกต้องเพื่อหลีกเลี่ยงความสงสัยและความเข้าใจผิดของผู้เรียน ขณะเดียวกันครูควรใช้ภาษาที่ถูกต้องชัดเจนและใช้ชอล์กสีเพื่อเน้นรายละเอียดที่สำคัญ
4. การให้แบบฝึกหัดผู้เรียนไม่ควรทิ้งค้างไว้ เพื่อให้ทำตอนท้ายของภาคเรียนแต่ควรจะให้ทำข้างเคียงกับทฤษฎีบทนั้น
5. ควรฝึกผู้เรียนให้เขียนรูปจากทฤษฎีบท และแบบฝึกหัดที่เห็นสมควรแล้วแต่กรณี ในเบื้องต้นการสร้างทั้งหมดควรใช้วงเวียนและไม้บรรทัด
6. ครูควรมีการทบทวน โดยการถามผู้เรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้เรียน ผ่านมาแล้วเท่าที่สามารถกระทำได้
7. ศัพท์ทางเรขาคณิตครูผู้สอนนำมาใช้ให้ถูกต้อง
8. ครูผู้สอนควรสนับสนุนผู้เรียนให้แสดงเนื้อหาสาระ โดยการเขียนรูป การสร้างและถ้อยคำเท่าที่เป็นไปได้
9. ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปผลลัพธ์สุดท้ายด้วยตนเอง

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ผู้วิจัยพบว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน
2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป
3. การจัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกตและสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปนิยามหรือแก้ปัญหาโจทย์
4. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมเช่น ใช้วิธีการถามตอบ ใช้อุปกรณ์การสอนสำเร็จรูปและการเขียนรูปในแต่ละขั้นตอน จนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ
5. การสอนแบบผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง เน้นการศึกษาในลักษณะค้นพบด้วยตนเอง ให้ผู้เรียนช่วยกันสรุปกฎเกณฑ์และสิ่งที่ผู้เรียนเห็นว่าสำคัญ

2.2 ระดับขั้นของแวนฮิลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต (The Van Hiele Levels of Geometric Thought)

เนื่องจากนักเรียนส่วนมากมีปัญหาไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยเฉพาะ การพิสูจน์ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงมีครูและนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านได้พยายามศึกษาและค้นคว้า เพื่อหาวิธีแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิตดังกล่าว ที่มีชื่อเสียงคือ ในปี ค.ศ. 1954 สองสามี-ภรรยา เพียร์ แวนฮิลี (Pierre Van Hiele) และ ไดนา แวนฮิลี (Dina Van Hiele) ครูคณิตศาสตร์ชาวเนเธอร์แลนด์ ซึ่งกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกได้สนใจในการค้นหาวิธีเพื่อให้นักเรียนรู้จักคิดและวิเคราะห์ปัญหา กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ การพัฒนาการหยั่งรู้ (Insight) ของนักเรียน แวนฮิลีจึงได้สร้างตัวแบบแวนฮิลีขึ้น ซึ่งประกอบด้วยความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียน 5 ขั้น โดยเริ่มจากง่ายไปยากหรือลำดับซับซ้อนมากขึ้น ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 : การมองเห็น (Visualization)

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถรับรู้รูปเรขาคณิตทั้งรูป สามารถบอกชื่อรูปเรขาคณิตที่มองเห็นได้แต่ไม่รับรู้สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติภายในรูปและระหว่างรูปเรขาคณิต เช่น บอกความแตกต่างของวงกลมกับวงรีไม่ได้

ขั้นที่ 2 : การวิเคราะห์ (Analysis)

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถรับรู้สมบัติของรูปเรขาคณิต สามารถรู้จักรูปเรขาคณิตโดยอาศัยสมบัติและรู้สมบัติต่าง ๆ จากการสังเกต การวัด การสร้างรูป และแบบจำลอง แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงสมบัติของรูปหนึ่งกับสมบัติอีกรูปหนึ่งได้

ขั้นที่ 3 : การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถเข้าใจบทบาทของบทนิยาม สามารถเชื่อมโยงสมบัติของรูปเรขาคณิตทั้งที่เป็นสมบัติของรูปเดียวกันและต่างรูปกันได้ สามารถลำดับสมบัติต่าง ๆ ของรูป และระหว่างรูปเรขาคณิตได้ เช่น การจำแนกรูปเรขาคณิต สามารถบอกว่าสมบัติข้อหนึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากสมบัติอีกข้อหนึ่ง แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจบทบาทของสัจพจน์และการเชื่อมโยงของข้อความต่าง ๆ โดยใช้ตรรกศาสตร์

ขั้นที่ 4 : การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction)

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถเข้าใจความสำคัญของการอนุมานว่า เป็นหนทางในการสร้างและพัฒนาทฤษฎีบทต่าง ๆ ของเรขาคณิต เข้าใจบทบาทของสัจพจน์ บทนิยาม และทฤษฎีบท เข้าใจโครงสร้างทางตรรกวิทยาของการพิสูจน์

ขั้นที่ 5 : การคิดขั้นสุดยอด (Rigor)

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม เข้าใจบทบาทและความจำเป็นของการพิสูจน์ทางอ้อม การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ สามารถสร้างทฤษฎีบทในระบบสัจพจน์ที่ต่างกันออกไป เช่น ระบบฮิลแบร์ต นอกจากนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์เปรียบเทียบระบบต่าง ๆ เช่น การเปรียบเทียบเรขาคณิตระบบยูคลิด กับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด เป็นต้น

(Thomas. 1992 : 71-86 ; Post. 1988 : 237-240)

ระดับขั้นของแวนฮิลีเกี่ยวกับความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิตได้มีความสำคัญต่อการศึกษาและการนำไปใช้ในทางเรขาคณิตเพื่อยกระดับการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียนและเป็นแนวทางสำหรับการจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้ในแต่ละขั้นได้อย่างเหมาะสม ดังที่มีผู้วิจัยหลายท่านได้ทำการวิจัยซึ่งอาศัยระดับขั้นของแวนฮิลีเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ครูผู้สอนจะต้องเข้าใจรูปแบบของแวนฮิลีที่กล่าวถึงลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิต

2.3 งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

จากการศึกษาค้นคว้างานวิจัยด้านนี้ ผู้วิจัยไม่พบงานวิจัยที่เกี่ยวกับ ชุดการสอนเรขาคณิตสำหรับครูประจำการหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูโดยตรง แต่มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาและวิธีสอนเรขาคณิต เป็นต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

สำหรับงานวิจัยในประเทศไทยที่เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

อารีย์ คำปล้อง (2536 : 43-44) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสอนแบบปฏิบัติการ เรื่อง คุณสมบัติที่เกี่ยวกับวงกลม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์

ค 311 (ปัจจุบันเป็น ค 011) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการ และนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับวงกลม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี (2535 : 40-42) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา

ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้รับการสอน โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอน โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

ส่วนงานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต มีดังนี้

วอลเลซ (Wallace, 1991: 4052-A) ได้ทำการวิจัยเรื่องครูรู้เรขาคณิตอย่างไรเพื่อสืบค้นความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตของครู และความรู้เกี่ยวกับวิธีการสอนเนื้อหา กลุ่มตัวอย่าง เป็นครูเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จำนวน 4 คน ซึ่งเลือกแบบเจาะจงจากผู้สนใจที่มีประสบการณ์และมีความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต และผู้สอนเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่าความรู้เนื้อหาสาระกับวิธีการสอนเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กันมาก นอกจากนี้ยังรู้ว่าแหล่งความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาสาระเรขาคณิต ครูได้มาหลายทางด้วยกัน เช่น เพื่อนร่วมงาน การฝึกอบรม และการอ่านทั่ว ๆ ไป เป็นต้น ครูบางคนได้เรียนรู้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการสอนเนื้อหาจากตอนอยู่มัธยมตอนปลาย หรือวิทยาลัยครู

เฮนเดอร์สัน (Henderson, 1989: 2571-A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตและการเปลี่ยนแปลงในการสอนเรขาคณิตของครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ สืบค้นลักษณะการคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตของครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจเรขาคณิตกับชนิดของคำถามที่ได้ถามในระหว่างการสอนและตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจเรขาคณิตกับความสามารถในการปรับปรุงการสอน กลุ่มตัวอย่างเป็นครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 5 คน เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย เป็นรูปแบบของแว่นฮิลีที่พัฒนาการคิดเกี่ยวกับเรขาคณิต การวิจัยพบว่าครูฝึกสอนได้แสดงความเข้าใจเรขาคณิตในระดับ 2 จำนวน 1 คน ในระดับ 3 จำนวน 1 คน ในระดับ 4 จำนวน 2 คน และในระดับ 5 จำนวน 1 คน นอกจากนี้จากการสังเกตครูฝึกสอนทั้ง 5 คน พบว่าสามารถปรับปรุงการสอนหลังจากได้วิเคราะห์อุปสรรคจากนักเรียน

ทอมสัน (Thompson. 1993: 2724-A) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการสอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 3 วิธี ที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ ความคงทนและเจตคติ
วิธีการสอนแบบที่ 1 การสอนแบบร่วมมือกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมที่ใช้กระดาษและดินสอ

วิธีการสอนแบบที่ 2 การสอนแบบร่วมมือกลุ่มขนาดเล็กโดยใช้คอมพิวเตอร์ และซอฟต์แวร์ (software) ที่มีกิจกรรมคล้ายแบบที่ 1

วิธีการสอนแบบที่ 3 สอนแบบปกติทั้งกลุ่มใหญ่ ตามแบบเรียน

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่เรียนวิชาเรขาคณิต ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐมอนทานา ผลการวิจัยพบว่าครูสอนเรขาคณิตควรพิจารณาวิธีการสอน โดยการสอนแบบร่วมมือพร้อมด้วยสื่อการสอนเป็นทางเลือกกับนักเรียน ในด้านเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตของนักเรียน พบว่าการสอนทั้ง 3 แบบ นักเรียนมีเจตคติไม่แตกต่างกัน ส่วนในด้านความคงทนพบว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบที่ 1 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบที่ 3

จอง (Jeon. 1988: 1410-A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนเกาหลีระดับมัธยมศึกษา โดยเน้นการวิเคราะห์แบบพิสูจน์และถ่ายทอดความรู้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับ 8 ในเกาหลี ผลการวิจัยพบว่า

- (1) ความยากของปัญหาเรขาคณิตเป็นผลจากเงื่อนไขที่ให้มาในโจทย์ปัญหา
- (2) การเสนอปัญหาโดยการเขียนรูป และมีสัญลักษณ์ให้จะทำให้ให้นักเรียนเก่ง และปานกลางประสบความสำเร็จมากกว่าการนำเสนอปัญหารูปแบบอื่น
- (3) นักเรียนส่วนมากยกเว้นนักเรียนเก่งบางคนไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้
- (4) ปัญหาซึ่งเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายนักเรียนพิสูจน์ได้น้อยกว่าปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ
- (5) ปัญหาที่ต้องใช้เส้นช่วยในการพิสูจน์ (auxiliary lines) จะยากกว่าปัญหาที่ไม่ใช้เส้นช่วยในการพิสูจน์
- (6) ความสำเร็จของการแก้ปัญหาส่วนมากขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานมากกว่าการเลือกยุทธวิธีแก้ปัญหา

คิปฟิงเกอร์ (Kipfinger. 1990: 488-A) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการสอนเรขาคณิต 2 วิธี สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้รูปแบบของแวนฮิลส์ซึ่งเป็นการวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ในวิชาเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาเกรด 6 ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้วิธีปกติ

กลุ่มที่ 2 สอนโดยลงมือปฏิบัติ

ผลการวิจัยพบว่า คะแนนสอบก่อนเรียนของทั้ง 2 กลุ่ม ไม่แตกต่างกัน แต่หลังจากการทดลอง คะแนนสอบหลังเรียนแตกต่างกันโดยที่คะแนนของนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ดีกว่า

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต สรุปได้ว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตที่เน้นให้นักเรียนลงมือทำกิจกรรมด้วยตนเอง ดังเช่นการสอนแบบปฏิบัติการการสอนแบบร่วมมือกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมที่ใช้กระดาษและดินสอ การสอนแบบร่วมมือกลุ่มขนาดเล็กโดยใช้คอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์พร้อมกิจกรรมและการสอนโดยลงมือปฏิบัติทำให้นักเรียนมีผลการเรียนดีกว่าการสอนแบบปกติ

3. ความรู้เกี่ยวกับการศึกษารายบุคคล

3.1 ความหมายของการศึกษารายบุคคล

กู๊ด (Good, 1973 : 306) ได้กล่าวว่าการศึกษารายบุคคล หมายถึง การเรียนการสอนประเภทหนึ่งซึ่งครูให้ความสำคัญกับผู้เรียนแต่ละคน ตัวอย่างเช่น การศึกษา ที่เป็นอิสระซึ่งอนุญาตให้ผู้เรียนทุกระดับชั้นและทุกระดับสาขาวิชาทำงานด้วยตนเอง ตามความก้าวหน้าของตนเองภายใต้คำแนะนำของครู

นอกจากนั้น จันทรฉาย เติมียาคาร (2529 : 1.1) กิดานันท์ มลิทอง (2536 : 164) ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526 : 180) ได้ให้ความหมายของการศึกษารายบุคคลในลักษณะที่สอดคล้องกัน ซึ่งพอสรุปได้ว่า การศึกษารายบุคคล หมายถึง รูปแบบ การพัฒนาผู้เรียนที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ซึ่งผู้เรียนสามารถเรียนรู้ด้วยตนเองจากสื่อการเรียนที่เหมาะสมโดยไม่ต้องมารับการฟังคำบรรยายจากผู้สอนในสถานที่แห่งใดแห่งหนึ่ง ที่กำหนดไว้ แต่จะเป็นการศึกษาในสถานที่และเวลาที่ผู้เรียนมีความพร้อม และผู้สอนมีบทบาทในฐานะที่ปรึกษาและพร้อมที่จะให้คำแนะนำเมื่อผู้เรียนมีปัญหาในการเรียนเพื่อให้บรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนด

3.2 จุดมุ่งหมายของการศึกษารายบุคคล

กาย์และ บริกส์ (Gagne and Briggs, 1979 : 262) ได้กล่าวถึงการศึกษา รายบุคคลว่า เป็นการจัดการสอน เพื่อเป็นแนวทางให้การสอนบรรลุจุดมุ่งหมายตามความต้องการ และบุคลิกภาพของผู้เรียนแต่ละคนการสอนแบบนี้มีจุดมุ่งหมายสำคัญ 5 ประการ คือ

1. เพื่อเป็นแนวทางในการประเมินทักษะเบื้องต้นของผู้เรียน
2. เพื่อช่วยในการค้นหาจุดเริ่มต้นของผู้เรียนแต่ละคนในการจัดลำดับการเรียนรู้ตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้
3. เพื่อช่วยในการจัดวัสดุอุปกรณ์ให้เหมาะสมกับการเรียนรู้รูปแบบต่าง ๆ
4. เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้ตามอัตราความสามารถของตนเองโดยไม่ต้องรอซึ่งกันและกัน
5. เพื่อสะดวกต่อการประเมินผลได้บ่อยครั้ง เป็นการส่งเสริมความก้าวหน้าทางการเรียนรู้ของผู้เรียนแต่ละคน

จันทร์ฉาย เดมิยาการ (2529 : 1.2 - 1.3) กล่าวว่าจุดประสงค์หรือ เป้าหมายที่มีการคิดค้นวิธีการศึกษารายบุคคลใช้ในการศึกษานั้น ก็เนื่องมาจากหลักการและเหตุผลหลายประการ ซึ่งพอจะรวบรวมได้ดังนี้ คือ

1. เพื่อสนองความแตกต่างที่มีต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน ความแตกต่างที่สำคัญได้แก่ อัตราเร็วในการสัมฤทธิ์ผล วิธีการเรียน ความสามารถและความสนใจ
2. เพื่อส่งเสริมหลักสูตรมุ่งไปที่ผู้เรียน โดยหลักสูตรมุ่งไปที่ผู้เรียนเป็นหลัก แทนที่จะให้ครูเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนก็เปลี่ยนให้ผู้เรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอน แทนที่ครูจะเป็นแหล่งความรู้ของผู้เรียนแต่เพียงอย่างเดียว ดังการเรียนการสอนปกติก็พยายามหาทางให้ผู้เรียนรู้จักค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเองโดยมีครูเป็นผู้ชี้แนะแหล่งข้อมูล ในลักษณะของผู้เรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียนนี้ต้องการให้ทั้งผู้สอนและผู้เรียนหรือผู้เรียนด้วยกันเองได้มีโอกาสได้ทำกิจกรรมร่วมกัน

3. เพื่อสนับสนุนให้ผู้เรียนอยู่ในบรรยากาศของการเรียนรู้ ในการเรียนการสอนปัจจุบัน นักการศึกษาพยายามสร้างบรรยากาศส่งเสริมความรู้สึกลึกใฝ่หาความรู้ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยยึดหลักจิตวิทยาเข้าช่วย เช่น เปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีวิธีทางที่จะทราบว่าการตัดสินใจหรือการทำงานของตนนั้นถูกหรือผิดอย่างไรมีการเสริมแรงทางบวก นอกจากนี้การสนับสนุนให้ผู้เรียนรับผิดชอบในการเรียนของตนเอง รู้จักแก้ปัญหาและตัดสินใจเอง อันเป็นเป้าหมายที่จะนำไปสู่การศึกษาตลอดชีวิต เพื่อเขาเหล่านั้นจะได้รู้จักวิธีการแสวงหาความรู้และเลือกเรียนรู้สิ่งที่จะเป็นประโยชน์ต่อตนเองและประเทศชาติต่อไป

จากจุดมุ่งหมายของการศึกษารายบุคคลดังกล่าว สรุปได้ดังนี้ คือ ช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้ตามอัตราความสามารถของตน โดยไม่ต้องรอกันและเป็นการส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความรับผิดชอบในการเรียน รู้จักแก้ปัญหาและตัดสินใจด้วยตนเอง เพื่อเป็นพื้นฐานไปสู่การศึกษาตลอดชีวิต

3.3 บทบาทของผู้สอนในการศึกษารายบุคคล

เนื่องจากการศึกษารายบุคคลเป็นการเรียนที่จัดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางของการเรียน ดังนั้นผู้สอนจึงมีบทบาทในการศึกษาระบบนี้โดยการเป็นผู้ช่วยเหลือให้คำปรึกษา แนะนำและให้ข้อคิดเห็นที่จะช่วยให้ผู้เรียนตัดสินใจได้เอง นอกจากนี้ผู้สอนยังมีบทบาทสำคัญ ดังนี้

จันทร์ฉาย เติมียาคาร (2529 : 4.1) ได้สรุปไว้ว่า ลำดับขั้นของการเป็นผู้สอนที่เข้ามามีบทบาทกับการสอนรายบุคคลก็คือ

1. สร้างเจตคติเกี่ยวกับการสอนรายบุคคลให้ถูกต้อง
2. เตรียมผู้เรียนให้พร้อมที่จะเป็นผู้เรียนที่เรียนตามเอกัตภาพของตนเอง
3. จัดเตรียมสื่อการสอนและสิ่งอำนวยความสะดวกในการเรียน
4. ขั้นตอนการ เข้าพบผู้เรียน ทำความคุ้นเคย ติดตามผลและเป็นที่ปรึกษาของผู้เรียน
5. ขั้นตอนประเมินผล นำเครื่องมือวัดที่เตรียมไว้มาใช้ เพื่อติดตามความก้าวหน้าของผู้เรียน

นอกจากนี้ กิดานันท์ มลิทอง (2536 : 175) ได้กล่าวถึงบทบาทของผู้สอนในการศึกษารายบุคคลดังนี้คือ

1. เป็นผู้วางแผนการเรียน โดยกำหนดวัตถุประสงค์ วิธีการเรียน ตลอดจนแบบฝึกหัดและแบบทดสอบต่าง ๆ
2. จะต้องวางแผนว่าจะให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองอย่างไร เช่น การอ่านและการฟังหรือการเรียนในรูปแบบอื่น ๆ เพื่อการจัดเตรียมเอกสาร และสื่อวัสดุอุปกรณ์อย่างเหมาะสมแก่ผู้เรียน
3. ให้ข้อมูลย้อนกลับแก่ผู้เรียนสม่ำเสมอ เพื่อให้ผู้เรียนจะได้ทราบว่าที่ตนได้ศึกษาไปนั้นถูกต้องหรือไม่
4. มีการประเมินผลผู้เรียนทุกครั้งที่เรียนจบบทเรียนแต่ละบท เพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบความก้าวหน้าของตนเอง และเพื่อเป็นการก้าวไปเรียนในบทต่อไป
5. จะต้องให้เวลาและความสนใจผู้เรียนมากกว่าการเรียนอย่างปกติ เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสขอคำปรึกษาและข้อเสนอแนะในการเรียนและต้องเรียนรู้ถึงความถนัด ความสนใจและความสามารถของผู้เรียนแต่ละคนด้วย

จากบทบาทของผู้สอนในการศึกษารายบุคคลดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่าผู้สอนควรจัดเตรียมเอกสารและสื่อการเรียนต่าง ๆ ที่จำเป็นให้เพียงพอกับจำนวนของผู้เรียนมีการเตรียม

ผู้เรียนให้พร้อมที่จะเรียนด้วยตนเอง โดยการปูความรู้พื้นฐานที่จำเป็น และผู้สอนควรจะสร้างความคุ้นเคย ติดตามผลและเป็นที่ปรึกษาของผู้เรียนอย่างสม่ำเสมอ ส่วนการประเมินผล ควรให้ข้อมูลย้อนกลับทันที เพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบความก้าวหน้าของตนเอง

4. ความรู้เกี่ยวกับชุดการสอน

4.1 ความหมายของชุดการสอน

กูด (Good. 1973 : 306) ได้กล่าวถึงชุดการสอนว่า หมายถึง ชุดโปรแกรมการสอน แต่ละหน่วยประกอบด้วยสื่อการสอน เครื่องมือการเรียนรู้ เครื่องมือแนะนำผู้สอนหรือคู่มือ แบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ข้อมูลที่มีความเที่ยงตรง คำบรรยายลักษณะของผู้เรียนที่ตั้งใจเรียน จุดประสงค์การเรียนรู้

นอกจากนั้น ชลียา ลิ้มปิยากร (2536 : 210) ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526 : 196) และ บุญชม ศรีสะอาด (2537 : 95) ได้ให้ความหมายของชุดการสอนในลักษณะที่สอดคล้องกัน ซึ่งพอสรุปได้ว่า ชุดการสอน หมายถึง การนำสื่อการสอนหลายอย่างที่สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา และหัวข้อเรื่องมาใช้ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

4.2 ประเภทของชุดการสอน

ชุดการสอนแบ่งตามลักษณะการใช้ได้ 3 ประเภท คือ

4.2.1 ชุดการสอนสำหรับครู

ชุดการสอนแบบนี้เป็นชุดที่จัดสำหรับครูโดยเฉพาะเป็นคู่มือและเครื่องมือสำหรับครู ซึ่งพร้อมที่ให้ครูนำไปใช้สอน เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และมีพฤติกรรมตามที่คาดหวัง ถ้ามีครูหลาย ๆ คนที่จะต้องสอนเนื้อหาเดียวกัน ให้นักเรียนหลาย ๆ กลุ่ม และถ้าครูเหล่านั้นใช้ชุดการสอนชุดเดียวกันก็จะทำให้การสอนอยู่ในมาตรฐานเดียวกัน เป็นการลดความแตกต่างในเรื่องการสอนลงได้บ้าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งครูใหม่ที่ยังมีประสบการณ์ในการสอนน้อยก็จะได้อาศัยชุดการสอนเป็นหลัก เป็นตัวอย่างในการสอน ชุดการสอนแบบนี้ครูยังคงเป็นผู้ทำกิจกรรมเป็นผู้ควบคุมกิจกรรมทั้งหมด นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมภายใต้การดูแลของครูที่สอนวิชาเดียวกันควรจะได้ช่วยกันจัดทำชุดการสอนแบบนี้ได้

4.2.2 ชุดการสอนรายบุคคล (ชุดการสอนสำหรับนักเรียน)

ชุดการสอนแบบนี้เป็นชุดที่นักเรียนเรียนด้วยตนเอง ทำกิจกรรมทุกอย่างด้วยตนเอง อาจจะใช้ศึกษาในชั่วโมงเรียน นอกชั่วโมงเรียน ที่โรงเรียนหรือที่บ้านก็ได้ ครูมีหน้าที่แต่เพียงจัดและมอบชุดการสอนให้นักเรียน แล้วคอยรับรายงานผลการเรียนเป็นระยะ ๆ

ให้คำแนะนำเมื่อมีปัญหาและประเมินผล ถ้าครูมีชุดการสอนรายบุคคลหลาย ๆ ชุดไว้ใช้ก็จะเป็นการแก้ปัญหาหลายประการที่เคยเกิดแก่ครู เช่น สอนไม่ทันหลักสูตร ความแตกต่างของนักเรียนในการเรียนรู้ ไม่มีเวลาช่วยเหลือเด็กที่เรียนอ่อน ไม่มีเวลาเสริมนักเรียนที่เรียนเก่ง ไม่มีเวลาเตรียมการสอน เป็นต้น นักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดการสอนแบบนี้จะได้รับการฝึกหัดมีความรับผิดชอบ รู้จักควบคุมตนเอง ฝึกการเรียนรู้ด้วยตนเอง ซึ่งจำเป็นอย่างยั้งที่ต้องฝึกให้เกิดเป็นนิสัย เมื่อนักเรียนจบการศึกษาจากโรงเรียนจะมีความสามารถเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ อันเป็นการเรียนเพื่อชีวิตและพัฒนาตนเอง

4.2.3 ชุดการสอนสำหรับกิจกรรมกลุ่ม

ชุดการสอนแบบนี้มีลักษณะผสมระหว่างแบบที่ 1 กับแบบที่ 2 ครูเป็นผู้คอยควบคุมดูแล กิจกรรมบางอย่างครูต้องเป็นผู้นำแสดงให้นักเรียนดู กิจกรรมบางอย่าง นักเรียนแต่ละคนทำเองทั้งหมด บางกิจกรรมอาจทำเป็นกลุ่ม บางกิจกรรมครูและนักเรียน ต้องทำร่วมกัน เช่น การอภิปราย ชุดการสอนแบบนี้เหมาะสมอย่างยิ่งที่จะใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ซึ่งเริ่มฝึกให้รู้จักการเรียนรู้ด้วยตนเองภายใต้การดูแลควบคุมอย่างใกล้ชิดของครูผู้สอน

(ทพวงมหาวิทยาลัย. 2524 : 250 - 251 ; ไชยศ เรืองสุวรรณ. 2526 : 197 - 198)

จากประเภทของชุดการสอนดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยได้นำไปเป็นแนวทางในการผลิตชุดการสอนรายบุคคลดังนี้คือ การให้ผู้เรียนได้ทำกิจกรรมทุกอย่างด้วยตนเองตามขั้นตอนในชุดการสอนรายบุคคลที่เตรียมไว้ให้ โดยผู้เรียนนำชุดการสอนรายบุคคลไปเรียนในสถานที่แห่งใดแห่งหนึ่งเมื่อมีความพร้อม และมีเวลาพอสำหรับการเรียน

4.3 องค์ประกอบของชุดการสอน

ชุดการสอนเป็นชุดของประสบการณ์ที่อำนวยความสะดวกแก่ผู้เรียน เพื่อให้สัมฤทธิ์ผลตามจุดมุ่งหมายเฉพาะ ชุดการสอนอาจมีรูปแบบแตกต่างกันออกไปทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายของบทเรียนและวัตถุประสงค์ของการใช้ แต่จะต้องประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ที่สำคัญดังต่อไปนี้ (สันศักดิ์ ภีบาลสุข และคณะ . 2525 : 196 - 197 ; กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 44)

1. คู่มือการใช้ชุดการสอน เป็นคู่มือสำหรับครูหรือผู้เรียนตามลักษณะของชุดการสอน ภายในคู่มือจะชี้แจงถึงวิธีการใช้ชุดการสอนเอาไว้โดยละเอียด ครูและผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำชี้แจงนั้นอย่างเคร่งครัด จึงจะสามารถใช้ชุดการสอนนั้นได้ผล คู่มืออาจทำเป็นเล่มหรือเป็นแผ่น

2. บัตรงาน เป็นบัตรที่มีคำสั่งว่าจะให้ผู้เรียนปฏิบัติอะไรบ้าง โดยระบุกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนของการเรียน

3. เนื้อหาสาระหรือประสบการณ์ จะถูกบรรจุไว้ในรูปของสื่อการสอน ต่าง ๆ

อาจประกอบด้วยหนังสือ บทเรียน สไลด์ เทปบันทึกเสียง แผ่นภาพโปรงใส และรูปภาพ เป็นต้น ผู้เรียนจะศึกษาจากสื่อการสอนต่าง ๆ ที่บรรจุอยู่ในชุดการสอนตามบัตรคำสั่งที่กำหนดไว้ให้

4. แบบประเมินผลเป็นแบบทดสอบที่ใช้สำหรับตรวจสอบว่าหลังจากเรียนชุดการสอนจบแล้ว ผู้เรียนเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้หรือไม่ อาจอยู่ในลักษณะของแบบฝึกหัด ให้เติมคำในช่องว่าง จับคู่ เลือกคำตอบที่ถูกต้อง หรือให้เหตุผลจากการทดลอง หรือทำกิจกรรม องค์ประกอบเหล่านี้สอดคล้องกับของ กิดานันท์ มลิทอง (2536 : 81)

4.4 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการผลิตชุดการสอน

แนวความคิดทางทฤษฎีการเรียนรู้ที่เป็นแนวทางในการสร้างชุดการสอนที่มีประสิทธิภาพ มีอยู่ 3 กลุ่มใหญ่คือ (อรพรรณ พรสีมา. 2530 : 7-8 ; สุรางค์ โค้วตระกูล. 2533 : 135- 177)

1. กลุ่มพฤติกรรมนิยมหรือกลุ่มเชื่อมโยง (Behavioral Theories or Association Theories) นักจิตวิทยาในกลุ่มนี้เชื่อว่าการเรียนรู้ของมนุษย์เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง สิ่งเร้านี้ก็คือข้อมูลข่าวสารที่ส่งไปยังผู้เรียน คำพูด ภาษาเขียน รูปภาพ และสื่อการสอนทั้งหลายเป็นตัวอย่างของสิ่งเร้า ๆ แต่ละอันจะมี ประสิทธิภาพในการสื่อความหมายต่างกันตามชนิดของวัตถุประสงค์ในการสื่อความหมาย ส่วนการตอบสนองก็คือปฏิกิริยาที่ผู้รับข่าวสารแสดงออกเมื่อได้รับสิ่งเร้า

พฤติกรรมการสอนส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง แนวคิดนี้ได้ถูกนำมาใช้ในบทเรียนแบบโปรแกรมซึ่งคิดโดย บีเอฟ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) เขาเชื่อว่าผู้เรียนจะต้องรับผิดชอบการเรียนรู้ของตนเอง ลำดับขั้นการเรียนรู้จะถูกแตกย่อยเป็นตอนสั้น ๆ ในแต่ละตอนจะต้องมีการตอบสนองที่ถูกต้อง และผู้เรียนจะได้รู้ผลแห่งการกระทำทันที การรู้ว่าการกระทำของตนถูกต้องจะเป็นเครื่องเสริมแรงให้กับผู้เรียน การศึกษารายบุคคลส่วนใหญ่จะใช้รูปแบบการเรียนรู้ดังกล่าว

2. กลุ่มทฤษฎีสานาม (The Organismic, Gestalt, Field or Cognitive Theories) ลักษณะสำคัญพื้นฐานของทฤษฎีนี้ก็คือ กระบวนการทางปัญญา ความเฉลียวฉลาดและความสามารถในการจัดระเบียบความสัมพันธ์ของประสบการณ์เดิม กับประสบการณ์ใหม่เป็นรากฐานสำคัญของการเรียนรู้หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ คุณภาพของการเรียนรู้เป็นไปตามคุณภาพของความฉลาดและความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ทฤษฎีนี้

จึงเน้นเฉพาะพัฒนาการทางปัญญา โดยเฉพาะการเรียนรู้แบบรู้แจ้งมากกว่าการพัฒนาพฤติกรรมภายนอก

3. กลุ่มทฤษฎีสังคม (Social Learning Theory) เป็นทฤษฎีที่กำลังได้รับความสนใจเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ทฤษฎีนี้จะให้ความสนใจองค์ประกอบทางบุคลิกภาพและการปะทะสัมพันธ์ระหว่างบุคคล ไม่ว่าจะเป็นการเรียนรู้จากประสบการณ์ตรงหรือโดยผ่านประสบการณ์ต่าง ๆ จากสื่อการสอน การเรียนรู้ส่วนใหญ่จะต้องเกี่ยวข้องหรือเกิดจากการปะทะ สัมพันธ์กับบุคคลอื่นในสังคม

จากทฤษฎีทั้ง 3 กลุ่ม Kemp และ Smellie (1989 : 19) กล่าวว่า มีจุดเน้นที่คล้ายคลึงกันและเป็นองค์ประกอบที่สำคัญกับการออกแบบและการใช้สื่อการสอน ดังนี้

1. แรงจูงใจ (Motivation)

การเรียนรู้ที่ได้ผลนั้นต้องเริ่มจากการที่ผู้เรียนมีความต้องการ ความสนใจหรือความปรารถนาที่จะเรียนรู้และสิ่งที่เรียนนั้นมีความหมายก็จะทำให้การเรียนการสอนบรรลุผลสำเร็จ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องสร้างให้ผู้เรียนเกิดความสนใจโดยการเสนอสื่อการสอนที่ก่อให้เกิดแรงจูงใจ คือจัดประสบการณ์หรือกิจกรรมในการเรียนรู้ซึ่งมีความหมายหรือน่าสนใจสำหรับผู้เรียน

2. ความแตกต่างระหว่างบุคคล (Individual Differences)

ผู้เรียนแต่ละคนมีอัตราการเรียนรู้และวิธีการเรียนรู้ที่ต่างกัน องค์ประกอบทางสติปัญญา ระดับการศึกษา บุคลิกภาพและรูปแบบการเรียนรู้จะเป็นตัวกำหนดความพร้อม และความสามารถในการเรียนรู้ การกำหนดอัตราในการนำเสนอเนื้อหาในสื่อ ควรพิจารณาเกี่ยวกับความเหมาะสมของช่วงเวลาที่จะช่วยให้ผู้เรียนได้เกิดความเข้าใจด้วย

3. จุดประสงค์ของการเรียนรู้ (Learning Objectives)

ในการจัดการเรียนการสอน หากผู้เรียนได้ทราบจุดประสงค์ของการเรียนรู้ ก็จะทำให้ผู้เรียนมีโอกาสบรรลุจุดประสงค์ได้มากกว่าที่ไม่ทราบ นอกจากนี้จุดประสงค์ของการเรียนรู้ยังช่วยในการวางแผนสร้างสื่อการเรียนการสอน คือทำให้ทราบว่าควรบรรจุเนื้อหาใดในสื่อ

4. การจัดเนื้อหา (Organization of Content)

การเรียนรู้จะง่ายขึ้นเมื่อมีการกำหนดเนื้อหา วิธีการและกิจกรรมที่ผู้เรียนจะต้องกระทำอย่างเหมาะสมและมีความหมายต่อผู้เรียน การจัดลำดับเนื้อหาอย่างสมเหตุสมผลจะช่วยให้ผู้เรียนจดจำเนื้อหาได้ดีขึ้น นอกจากนี้อัตราความเร็วที่ไม่เหมาะสมในการนำเสนอเนื้อหา อาจทำให้เกิดความยากลำบากและซับซ้อนในการเรียนรู้เนื้อหาได้

5. การเตรียมความพร้อมให้กับผู้เรียน (Prelearning Preparation)

ผู้เรียนควรมีพื้นฐานความรู้หรือประสบการณ์ที่จำเป็นในการเรียนอย่างเพียงพอในการเรียนรู้จากครูหรือในการเรียนด้วยตนเองจากสื่อการสอน ในการออกแบบการสอนและ การวางแผนเพื่อการผลิตสื่อจึงต้องให้ความสนใจต่อระดับความรู้ ความสามารถ พื้นฐานที่ผู้เรียนควรมีด้วย

6. อารมณ์ (Emotion)

การเรียนรู้จะเกี่ยวข้องกับอารมณ์และความรู้สึกของบุคคลพอ ๆ กับความสามารถทางสติปัญญา ดังนั้นในการสร้างสื่อการสอนควรตอบสนองอารมณ์ ซึ่งก่อให้เกิดแรงจูงใจในการเรียนรู้เป็นสำคัญ

7. การมีส่วนร่วม (Participation)

การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้เมื่อบุคคลสร้างสถานะความเป็นเจ้าของข่าวสาร หรือยอมรับเอาข่าวสารนั้นมาเป็นส่วนหนึ่งของตน ดังนั้นการเรียนรู้จึงต้องอาศัยกิจกรรม เพื่อช่วยให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนอย่างกระฉับกระเฉงแทนการนั่งฟังการบรรยายอันยาวนาน การมีส่วนร่วมหมายถึงกิจกรรมทางกายและสมองที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องระหว่างการเรียนการสอน การมีส่วนร่วมจะขยายโอกาสให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และจดจำเรื่องที่เรียนได้ดียิ่งขึ้น จนในที่สุดเกิดความรู้อย่างที่ตนเองเป็นเจ้าของข่าวสารนั้นด้วย

8. การสะท้อนกลับ (Feedback)

การเรียนรู้จะเพิ่มขึ้นหากผู้เรียนได้ทราบความก้าวหน้าในการเรียนของตนเอง ซึ่งเป็นการสร้างแรงจูงใจในการเรียนต่อไป

9. การเสริมแรง (Reinforcement)

เมื่อผู้เรียนแต่ละคนบรรลุผลในการเรียนรู้เนื้อหาสาระใดแล้ว เขาก็จะถูกกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องต่อไป ซึ่งการเรียนรู้ก็เป็นรางวัลที่สร้างความเชื่อมั่น และส่งผลให้เกิดพฤติกรรมในทางบวกแก่นักเรียน

10. การฝึกปฏิบัติและการทำซ้ำ (Practice and Repetition)

อาจกล่าวได้ว่าแทบจะไม่มีใครเรียนรู้สิ่งใหม่ ๆ อันใดที่จะประสบผลสำเร็จได้โดยอาศัยการสอนเพียงครั้งเดียว ความรู้และทักษะที่สะสมไว้นั้นเป็นความเฉลียวฉลาดหรือความสามารถของแต่ละบุคคลนั้นย่อมเกิดจากการฝึกปฏิบัติ และการกระทำซ้ำ ๆ ในสภาพการณ์ต่าง ๆ กัน

11. การนำไปประยุกต์ใช้ (Application)

การนำไปประยุกต์ใช้ผลผลิตของการเรียนรู้ที่ฟังปรารภนั้นก็คือ การที่ผู้เรียนแต่ละคนมีความสามารถในการนำความรู้ไปประยุกต์ หรือการถ่ายโยงการเรียนรู้ไปสู่สถานการณ์ใหม่

หรือการแก้ปัญหาใหม่ ๆ ความเข้าใจที่สมบูรณ์แบบนี้จะเกิดขึ้น สิ่งแรกที่ผู้เรียนจะต้องรู้หรือค้นพบก็คือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ หรือข้อสรุปต่าง ๆ ซึ่งสัมพันธ์กับงานหรือหัวข้อการเรียนรู้ ต่อจากนั้นต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตัดสินใจโดยนำกฎเกณฑ์ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่ หรือใช้ในการแก้ปัญหาที่แท้จริง

จากทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับชุดการสอนดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยได้นำไปเป็นแนวทางประยุกต์ใช้ในการผลิตชุดการสอนรายบุคคลดังต่อไปนี้คือ

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ก้าวไปด้วยตนเองตามความสามารถ ความพร้อม และอัตราเร็วของแต่ละบุคคล เมื่อผู้เรียนตอบคำถามก็สามารถตรวจสอบคำตอบได้ทันทีซึ่งเป็นการเสริมแรงได้ทันทีทันที อีกทั้งมีการจัดกิจกรรมกลุ่มเพื่อให้ผู้เรียนได้รู้จักการทำงานเป็นกลุ่ม และได้ตอบข้อสงสัยของตนเอง ซึ่งเป็นการเพิ่มความเข้าใจในหน่วยการเรียนรู้ได้ดีขึ้น

2. การแบ่งเนื้อหาเป็นหน่วยการเรียนรู้ และจัดลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยาก เพื่อช่วยต่อการเรียนรู้ ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะมีการกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยให้ผู้เรียนได้ทราบล่วงหน้าก่อนการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยที่ใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน

3. มีแบบฝึกให้ผู้เรียนได้ฝึกทำและมีเฉลยของแบบฝึกให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบเพื่อให้ผู้เรียนทราบความก้าวหน้าของตนและเป็นการเสริมแรง

4. ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้มีการทดสอบก่อนเรียนในแต่ละหน่วยโดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วย เพื่อประเมินผลว่าก่อนเรียนผู้เรียนมีความรู้ในสิ่งที่จะเรียนมากน้อยเพียงใดและควรเริ่มต้นเรียนในหน่วยการเรียนรู้ใด ซึ่งจะวัดส่วนที่เป็นสมรรถภาพเกี่ยวข้องต่อการเรียนในหน่วยนั้นและส่วนที่เป็นความรู้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย อีกทั้งมีการทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบซึ่งเป็นชุดเดิมเพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบความก้าวหน้าในการเรียนของตนเองและเป็นเกณฑ์ที่จะพิจารณาว่าผู้เรียนได้บรรลุจุดประสงค์ของหน่วยนั้นหรือไม่ อันเป็นแนวทางในการขอคำแนะนำจากอาจารย์ที่ปรึกษาเมื่อมีปัญหาในการเรียน

4.5 หลักการผลิตชุดการสอน

การผลิตชุดการสอนหรือสื่อการสอนประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 3 ขั้นตอนคือ (ฉลองชัย สุรวฒนบุรณ. 2528 : 190 - 200 ; วิชัย วงษ์ใหญ่. 2525 : 189-191)

- 1. ขั้นวางแผนดำเนินงาน (Planning)
- 2. ขั้นตอนการผลิต (Production Process)
- 3. ขั้นตอนทดสอบประเมินผล (Developmental Testing)

4.5.1 ขั้นวางแผนดำเนินงาน (Planning) มีขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาสาระของวิชาทั้งหมดอย่างละเอียดว่าสิ่งที่เรานำมาทำเป็นชุดการสอนนั้น จะมุ่งเน้นให้เกิดหลักการของการเรียนรู้อะไรบ้าง นำเนื้อหาสาระวิชาที่ได้ทำการศึกษาวิเคราะห์แล้วมาแบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ ในแต่ละหน่วยนั้นจะประกอบด้วยหัวข้อย่อย ๆ ซึ่งเราต้องศึกษาพิจารณาให้ละเอียดชัดเจนเพื่อไม่ให้เกิดการซ้ำซ้อนในหน่วยอื่น ๆ อันจะสร้างความสับสนให้กับผู้เรียน ได้และควรคำนึงถึงการแบ่งหน่วยการเรียนรู้ของแต่ละวิชานั้นควรจะเรียงลำดับขั้นตอนของเนื้อหาสาระให้ถูกต้องว่าอะไรเป็นสิ่งจำเป็นที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้ก่อน อันเป็นพื้นฐานตามขั้นตอนของความรู้และลักษณะธรรมชาติในวิชานั้น
2. เมื่อศึกษาเนื้อหาสาระและแบ่งหน่วยการเรียนรู้ได้แล้วจะต้องพิจารณาตัดสินใจอีกครั้งหนึ่งว่า จะทำชุดการสอนแบบใดโดยคำนึงถึงข้อกำหนดว่าผู้เรียนคือใคร จะทำอะไรกับผู้เรียน จะให้ทำกิจกรรมอย่างไร สิ่งเหล่านี้จะเป็นเกณฑ์ในการกำหนดการเรียน
3. การกำหนดหน่วยการเรียนรู้ โดยประมาณเนื้อหาสาระที่เราจะสามารถถ่ายทอดความรู้แก่นักเรียนได้ตามชั่วโมงที่กำหนด โดยคำนึงถึงว่าเป็นหน่วยที่น่าสนใจน่าเรียนรู้ให้ความรู้ความเข้าใจแก่ผู้เรียน หาสื่อการเรียนได้ง่าย
4. การกำหนดมโนคติ มโนคติที่เรากำหนดขึ้นจะต้องสอดคล้องกับหน่วยการเรียนรู้และหัวข้อ โดยสรุปแนวคิดสาระและหลักเกณฑ์ที่สำคัญเพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกัน
5. การกำหนดจุดประสงค์ของการเรียนรู้จะต้องให้สอดคล้องกับมโนคติ โดยกำหนดเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งหมายถึงความสามารถของผู้เรียนที่แสดงออกมาให้เห็นได้ภายหลังจากการเรียนการสอนบทเรียนแต่ละเรื่องจบไปแล้ว โดยผู้สอนสามารถวัดได้ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมนี้ถ้าผู้สอนกำหนดหรือระบุให้ชัดเจนมากเท่าใด ก็ยิ่งทำให้ประสบความสำเร็จในการสอนมากเท่านั้น ดังนั้นจึงควรใช้เวลาตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนรู้แต่ละข้อให้ถูกต้องและครอบคลุมเนื้อหาสาระของการเรียนรู้
6. นำจุดประสงค์ของการเรียนรู้แต่ละข้อมาหา กิจกรรมการเรียนการสอน แล้ว จัดลำดับกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมถูกต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่กำหนดไว้แต่ละข้อ
7. เรียงลำดับกิจกรรมของแต่ละข้อเพื่อให้เกิดการประสานกลมกลืนกับการเรียนการสอนและนำมาหลอมเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นที่สมบูรณ์ที่สุด
8. สื่อการสอน คือวัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการเรียนรู้ที่ครูและนักเรียนจะต้องกระทำ เพื่อเป็นแนวทางในการเรียนรู้ ซึ่งครูจะต้องจัดทำขึ้นและจัดหาไว้ให้เรียบร้อย

9. การประเมินผล คือการตรวจสอบว่าหลังการเรียนการสอนแล้วได้มีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตามที่จุดประสงค์ของการเรียนรู้กำหนดไว้หรือไม่ การประเมินผลนี้จะใช้วิธีการใดก็ตาม แต่จะต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์ของการเรียนรู้ที่เราตั้งไว้ ถ้าการประเมินผลไม่ตรงตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้เมื่อใด ความยุติธรรมก็จะไม่เกิดขึ้นกับผู้เรียน และไม่ตรงเป้าหมายที่กำหนดไว้ การเรียนรู้สิ่งนั้นจะไม่เกิดขึ้น ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมาก็ไม่มีคุณภาพ

10. การทดลองใช้ชุดการสอน การทดลองมี 3 ชั้น คือการทดลองรายบุคคล การทดลองเป็นกลุ่ม การทดลองกับห้องเรียนจริง หรือการทดลองภาคสนามตามลำดับ เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการสอนโดยนำไปทดลองใช้กับกลุ่มเล็ก ๆ ดูก่อน แล้วตรวจสอบหาข้อบกพร่องและปรับปรุงแก้ไขอย่างดี จึงนำไปทดลองใช้กับผู้เรียนทั้งชั้นหรือกลุ่มใหญ่

4.5.2 ขั้นตอนการผลิต (Production Process)

เป็นขั้นตอนการผลิตตามที่ได้ออกแบบในขั้นที่ 1 โดยผู้ผลิตควรตรวจสอบความสอดคล้องของทุกขั้นตอน และควรควบคุมระยะเวลาในการผลิตให้เป็นไปตามแผนที่วางไว้

4.5.3 ขั้นตอนทดสอบประเมินผล (Developmental Testing) หรือเพื่อการพัฒนา

เมื่อผลิตชุดการสอนแล้ว จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องนำไปทดสอบหาประสิทธิภาพ เพื่อเป็นหลักประกันว่า ชุดการสอนนั้นมีคุณค่าที่จะนำไปสอน ในการทดสอบนี้ อาศัยการทดลองโดยมีลำดับขั้นดังต่อไปนี้ (ฉลองชัย สุรวัฒนบุรณ, 2528 : 214 - 215)

1. ทดลองกับผู้เรียนแบบเดี่ยว (1:1) คือการทดลองใช้กับผู้เรียน 1 คน ซึ่งมีระดับความรู้ความสามารถ ปานกลาง คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อแล้วปรับปรุงให้ดีขึ้น
2. ทดลองกับผู้เรียนเป็นกลุ่ม (1 : 10) เป็นการทดลองกับผู้เรียน 6-10 คน ทั้งเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อแล้วปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้น
3. ทดลองภาคสนาม (1 : 100) เป็นการทดลองกับนักเรียนทั้งชั้น 40-100 คน คำนวณหาประสิทธิภาพของสื่อแล้วปรับปรุงแก้ไข ผลลัพธ์ที่ได้ควรใกล้เคียงกับเกณฑ์ที่ตั้งไว้ต่ำกว่าเกณฑ์ได้ไม่เกิน 2.5 %

ดังนั้นในการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนจำเป็นจะต้องมีเกณฑ์ในการประเมินประสิทธิภาพ จึงเกิดแนวคิดในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบประสิทธิภาพของชุดการสอนหรือสื่อหลายแนวด้วยกัน บางแนวคิดใช้เกณฑ์พัฒนาการของผู้เรียนแต่ละคนเป็นหลัก บางแนวใช้เกณฑ์ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการและผลลัพธ์โดยเฉลี่ย หรือบางแนวใช้เกณฑ์ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนทดสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งกลุ่มกับคะแนนทดสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งกลุ่มในแต่ละจุดประสงค์ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ได้เลือกใช้แนวทางหลังนี้ เป็นเกณฑ์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

เนื่องจากเป็นวิธีการที่สามารถชี้วัดประสิทธิภาพได้ทั้งภาพรวมในลักษณะกว้างและวัดส่วนย่อยเป็นรายจุดประสงค์ทำให้ได้ผลการวัดที่ชัดเจน นำข้อมูลที่ได้มาเป็นเครื่องตัดสินใจได้โดยไม่ต้องใช้วิธีการอื่น มาประกอบให้เกิดการซ้ำซ้อนอีกอันมีรายละเอียดดังนี้

เกณฑ์ความสัมพัทธ์ระหว่างคะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งกลุ่มและคะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งกลุ่มในแต่ละจุดประสงค์เป็นการประเมินผลพฤติกรรม ขั้นสุดท้าย โดยพิจารณาจากคะแนนสอบหลังเรียน เกณฑ์ที่ใช้คือ E_1/E_2 อาจเท่ากับ 80/80 หรือ 90/90 หรืออื่น ๆ อีกก็ได้ แต่ถ้ากำหนดเกณฑ์ไว้ต่ำเกินไปอาจทำให้ผู้ใช้บทเรียนไม่เชื่อถือในคุณภาพของบทเรียน การหาค่า E_1 และ E_2 ใช้วิธีการคำนวณหาค่าร้อยละ โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

โดยที่ E_1 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม

$\bar{X}$ แทน คะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งหมด

A แทน คะแนนเต็มของการสอบหลังเรียน

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$$

โดยที่ E_2 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์

$\bar{F}$ แทน คะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียน ทั้งหมดในแต่ละจุดประสงค์

P แทน คะแนนเต็มของการสอบหลังเรียนในแต่ละจุดประสงค์

(อรรถพร พรสีมา. 2530 : 130 - 131)

เกณฑ์ประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนที่ผลิตได้นั้น กำหนดได้ 3 ระดับ

(จลองชัย สุรวฒนบุรณ์. 2528 : 215) คือ

1. สูงกว่าเกณฑ์ เมื่อประสิทธิภาพของชุดการสอนสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้มีค่าเกิน 2.5 % ขึ้นไป

2. เท่ากับเกณฑ์เมื่อประสิทธิภาพของชุดการสอนเท่ากับหรือสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ไม่เกิน 2.5 %

3. ต่ำกว่าเกณฑ์ เมื่อประสิทธิภาพของชุดการสอนต่ำกว่าเกณฑ์ แต่ไม่ต่ำกว่า 2.5 % ถือว่ายังมีประสิทธิภาพที่ยอมรับได้

นอกจากนี้ ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526 : 199 - 200) ได้กำหนดหลักการผลิต

ชุดการสอนไว้ 10 ขั้นตอนด้วยกัน

1. กำหนดหมวดหมู่เนื้อหาและประสบการณ์ อาจกำหนดเป็นหมวดวิชาหรือบูรณาการเป็นแบบสหวิทยาการตามที่เห็นเหมาะสม
2. กำหนดหน่วยการเรียนรู้ โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยการเรียนรู้ประมาณเนื้อหาวิชาที่จะให้ครูสามารถถ่ายทอดความรู้แก่นักเรียนได้ในหนึ่งสัปดาห์หรือสอนได้หน่วยละครั้ง
3. กำหนดหัวเรื่อง ผู้สอนจะต้องถามตัวเองว่าในการสอนแต่ละหน่วยควรให้ประสบการณ์อะไรแก่ผู้เรียนบ้างแล้วกำหนดหัวข้อเรื่องออกเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อย
4. กำหนดหลักการและมโนคติ หลักการและมโนคติที่กำหนดขึ้นจะต้องสอดคล้องกับหน่วยและหัวเรื่อง โดยสรุปรวมแนวความคิด สาระ และหลักเกณฑ์ที่สำคัญไว้เพื่อเป็นแนวทางจัดเนื้อหาการสอนให้สอดคล้องกัน
5. กำหนดวัตถุประสงค์ให้สอดคล้องกับหัวเรื่อง โดยเขียนเป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ต้องมีเกณฑ์การเปลี่ยนพฤติกรรมไว้ทุกครั้ง
6. กำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งจะเป็นแนวทางการเลือกและการผลิตสื่อการสอน “กิจกรรมการเรียนรู้” หมายถึงกิจกรรมทุกอย่างที่ผู้เรียนปฏิบัติ เช่น การอ่านบัตรคำสั่ง ตอบคำถาม เขียนภาพ ทำการทดลองทางวิทยาศาสตร์ การเล่นเกม เป็นต้น
7. กำหนดแบบประเมินผล ต้องประเมินผลผู้เรียนให้ตรงกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยใช้แบบทดสอบอิงเกณฑ์ (Criterion Test) เพื่อให้ผู้สอนทราบว่า หลังจากการเรียนรู้จากชุดการสอนแบบศูนย์การเรียนรู้แล้ว ผู้เรียนได้เปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้หรือไม่
8. เลือกและผลิตสื่อการสอน วัสดุอุปกรณ์และวิธีการที่ครูใช้ ถือเป็นสื่อการสอนทั้งสิ้น เมื่อผลิตสื่อการสอนของแต่ละหัวเรื่องแล้ว ก็จัดสื่อการสอนเหล่านั้นไว้เป็นหมวดหมู่ในกล่องที่เตรียมไว้ เพื่อนำไปทดลองหาประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐานที่ตั้งไว้ ส่วนมากจะกำหนดเกณฑ์ไว้ไม่ต่ำกว่า 80/80
9. หาประสิทธิภาพของชุดการสอน เพื่อเป็นการประกันว่า ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพในการสอน ผู้สร้างจำต้องกำหนดเกณฑ์ขึ้นโดยคำนึงถึงหลักการที่ว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการเพื่อช่วยให้การเปลี่ยนพฤติกรรมของผู้เรียนบรรลุผล
10. การใช้ชุดการสอน เป็นขั้นการนำชุดการสอนไปใช้ซึ่งจะต้องมีการตรวจสอบและปรับปรุงอยู่ตลอดเวลา

จากการศึกษามาข้างต้นในการพัฒนาชุดการสอนครั้งนี้ ผู้วิจัยจึงได้แนวทางดำเนินการพัฒนาชุดการสอนตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต โดยผ่านการพิจารณาเห็นชอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตตามรายละเอียดในบทที่ 3

2. การกำหนดหน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อย จากการศึกษสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตในขั้นตอนที่หนึ่ง ทำให้ได้สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยที่จำเป็นสำหรับครู ผู้วิจัยจึงกำหนดให้สมรรถภาพหลักหนึ่งสมรรถภาพเป็นหนึ่งหน่วยการเรียนรู้และสมรรถภาพย่อยหนึ่งสมรรถภาพเป็นหนึ่งหน่วยการเรียนรู้ย่อย

3. การกำหนดคโมโนมิติ เป็นการสรุปรวมแนวความคิด โดยให้ตรงกับหัวข้อเรื่องที่นำมาสอน เพื่อเป็นแนวทางในการจัดเนื้อหาสาระมาสอนให้สอดคล้อง

4. การกำหนดจุดประสงค์ ในลักษณะสอดคล้องกับมโนมิติ โดยเขียนเป็นจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย เพื่อใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียนและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยเพื่อใช้วัดพฤติกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างหลังเรียนชุดการสอนทั้งหมด

5. การกำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยโดยผู้วิจัยนำจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยแต่ละข้อมาวิเคราะห์ เพื่อกำหนดเป็นกิจกรรมให้ผู้เรียนได้ปฏิบัติตามความเหมาะสม เช่น การตอบคำถาม เขียนรูป การสังเกตและการทดลองจากสื่อการสอนสำเร็จรูป

6. การกำหนดแบบประเมินผล มีการประเมินผลที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยโดยใช้แบบทดสอบแบบอิงเกณฑ์ ตามรายละเอียดในบทที่ 3

7. การเลือกสื่อการเรียนรู้ การพิจารณาว่าจะเลือกสื่อการเรียนรู้ชนิดใดนั้นต้องคำนึงถึงจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยและกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบกัน

8 การทดลองเพื่อหาข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของชุดการสอน เพื่อเป็นการตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องและประกันว่า ชุดการสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพในการสอน ตามรายละเอียดในบทที่ 3

4.6 งานวิจัยเกี่ยวกับชุดการสอน

การเรียนการสอนได้มีการนำเอาชุดการสอนมาใช้เป็นจำนวนมาก ทั้งในการสอนระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษาและอุดมศึกษา ซึ่งผลการวิจัยส่วนใหญ่พบว่า การใช้ชุดการสอนจะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น ดังเช่น

นภาพร สิงห์ทิต (2531 : 90-92) ได้ทำการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลเพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางการวิจัยแก่ครูและบุคลากรประจำการ

มีขั้นตอนในการวิจัยดังนี้

1) ศึกษาสมรรถภาพทางการวิจัยที่จำเป็นสำหรับครู และบุคลากรทางการศึกษาประจำการ

2) พัฒนาชุดการสอนเพื่อให้ผู้เรียนได้มีสมรรถภาพหลักทางการวิจัย โดยสร้างชุดการสอนตามรูปแบบของ ชุมพันธุ์ ญูชรรณ อยุรยา ซึ่งประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ คือ หลักการและเหตุผล จุดมุ่งหมาย ความรู้พื้นฐาน การประเมินผลเบื้องต้น กิจกรรมการเรียน การประเมินผลหลังการเรียน และการซ่อมเสริม

3) สร้างแบบทดสอบวัดสมรรถภาพทางการวิจัย

4) หาประสิทธิภาพของชุดการสอน โดยนำไปทดลองใช้เพื่อพัฒนาให้ได้ประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 90/90

ผลการศึกษา พบว่าประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคลมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 90/90 การทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคะแนนสอบหลังเรียนสูงกว่าคะแนนก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

โควิน คลังแสง (2536 : 188 - 192) ได้ทำการศึกษา การสร้างชุดพัฒนาตนเอง เรื่องเทคนิคการจูงใจในการทำงานสำหรับผู้บริหารวิชาการในสถานศึกษา สังกัดกรมอาชีวศึกษา มีวิธีดำเนินการดังนี้

1. ศึกษาสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยเกี่ยวกับเทคนิคการจูงใจในการทำงานที่จำเป็นสำหรับผู้บริหารวิชาการ ในสถานศึกษาสังกัดกรมอาชีวศึกษา

2. การสร้างชุดพัฒนาตนเองเพื่อพัฒนาเทคนิคการจูงใจในการทำงาน

3. การสร้างแบบทดสอบและแบบประเมินตนเอง

4. การหาประสิทธิภาพของชุดการสอน โดยนำไปทดลองใช้เพื่อพัฒนาให้ได้ประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 90/90

ผลการศึกษา พบว่าประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคลมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 90/90 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคะแนนสอบหลังเรียนสูงกว่าคะแนนก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

ประนอม โอทกานนท์ (2527 : 67-81) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับชุดการเรียนด้วยตนเอง เสริมสร้างสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับพยาบาลในการสนับสนุนงาน สาธารณสุขมูลฐาน

กลุ่มตัวอย่างเป็นพยาบาลที่ปฏิบัติงานในโรงพยาบาลจำนวน 60 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 30 คน และกลุ่มควบคุม 30 คน มีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. สํารวจเอกสารงานวิจัย และไปสังเกตพฤติกรรมเกี่ยวกับสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับพยาบาล ในการสนับสนุนงานสาธารณสุขมูลฐาน
2. จัดทำโครงร่างชุดการเรียน
3. ยกร่างชุดการเรียนอย่างละเอียด
4. ตรวจสอบประสิทธิภาพของชุดการเรียน
5. การพัฒนาชุดการเรียน

ผลการวิจัย พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยกลุ่มทดลองสามารถทำแบบทดสอบได้คะแนนสูงกว่ากลุ่มควบคุม และชุดการเรียนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 90/90

นันทิยา จิตภิรมย์ (2532 : 47 - 50) ได้ทำการศึกษาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนที่ใช้สอนเรื่องพหุนาม ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 80 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 40 คน และกลุ่มควบคุม 40 คน นักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนการสอน ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพทางการเรียนเรื่องพหุนามของนักเรียนในกลุ่มทดลองกับนักเรียนในกลุ่มควบคุม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

รัชณีเพ็ญ เทพหัสดิน ณ. อยุธยา (2533 : 55 - 58) ได้ทำการศึกษาการสร้างชุดการสอนวิชาภาษาอังกฤษ เพื่อการสื่อสารด้านการท่องเที่ยวและการโรงแรม

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 สาขาวิชาการท่องเที่ยว จำนวน 30 คน

ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังการใช้ชุดการสอนสูงกว่าก่อนใช้ชุดการสอนอย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ 0.05 และ ชุดการสอนมีประสิทธิภาพ 96.31/82.80

ส่วนงานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวกับชุดการสอนที่รวบรวมได้มีดังนี้

แลงสตาฟ (Langstaff. 1973 : 1566-A) ได้ทำการพัฒนาและศึกษาการใช้ชุดการสอนรายบุคคลสำหรับการฝึกหัดครู โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของครูในชั้นเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นครูประจำการและนักศึกษาครู ในรัฐแคลิฟอร์เนีย ตอนใต้ สหรัฐอเมริกา จำนวน 97 คน

ผลการศึกษาพบว่า ครูประจำการและนักศึกษาครูที่เรียนด้วยชุดการสอนรายบุคคลดังกล่าวได้รับความรู้และมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการสอนในชั้นเรียนตามจุดประสงค์ นักเรียนที่เรียนจากครูและนักศึกษาครูเหล่านี้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากครูในชั้นเรียนปกติ

เบลี (Bailey. 1984 : 2124-A) ได้ทำการศึกษาเรื่องการพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพสำหรับผู้บริหารอาชีวศึกษา

กลุ่มตัวอย่างสำหรับการทดลองภาคสนาม เป็นผู้บริหารอาชีวศึกษาซึ่งได้อาสาสมัครเข้ารับการอบรมในมหาวิทยาลัยเท็มเปิล รัฐเพนซิลเวเนีย สหรัฐอเมริกา จำนวน 23 คน

การสร้างหน่วยการเรียนรู้ได้ยึดตามสมรรถภาพหลักที่จำเป็นสำหรับการทำงานด้านการนิเทศและการบริหารอาชีวศึกษา ซึ่งกระบวนการสร้างหน่วยการเรียนรู้ได้มีการตรวจสอบและปรับปรุงเป็นระยะ ๆ ก่อนนำไปทดสอบภาคสนาม

ผลการศึกษาพบว่าหน่วยการเรียนรู้มีลักษณะสอดคล้องกับความต้องการและสามารถนำไปใช้ได้ผลในการฝึกให้ผู้บริหารอาชีวศึกษามีสมรรถภาพตามจุดประสงค์

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับชุดการสอน ผู้วิจัยพบว่า ในการเรียนการสอนสาขาวิชาต่าง ๆ ทั้งในระดับมัธยมศึกษาและอุดมศึกษา ได้มีการนำชุดการสอนที่พัฒนาขึ้นมาไปใช้ โดยมีการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนสองแนวทางดังนี้

1. เมื่อใช้กลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว
2. เมื่อใช้กลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มคือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมเปรียบเทียบกัน

ผลการวิจัยส่วนใหญ่พบว่า ชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และการใช้ชุดการสอนจะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

นอกจากนี้ยังพบว่า สาขาวิชาต่าง ๆ ส่วนใหญ่ที่กล่าวถึงได้ใช้กระบวนการสร้างชุดการสอนรายบุคคลในลักษณะเดียวกัน ทำให้ผู้วิจัยได้กรอบแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนและกระบวนการในการสร้างชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตของผู้วิจัยให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายที่จะพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิต สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้ และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย

การพัฒนาชุดการสอนได้ดำเนินการตามลำดับดังนี้

1. การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง
2. การกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย
3. การวิเคราะห์ข้อมูล และสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษา ของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ จำนวน 36 คน ซึ่งเป็นอาสาสมัคร จากจำนวนทั้งหมด 38 คน และส่วนใหญ่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลางหรือต่ำกว่า ได้ใช้นักศึกษาในการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้การเลือกอย่างเจาะจงเพื่อเลือกนักศึกษาจำนวน 1 คน ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับปานกลาง
2. การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ใช้การเลือกอย่างเจาะจงเพื่อเลือกนักศึกษาจำนวน 5 คน ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง 1 คน ปานกลาง 2 คน และต่ำ 2 คน
3. การทดลองภาคสนาม ใช้นักศึกษาจำนวน 30 คน ที่เหลือจากการทดลองครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2

การเลือกใช้นักศึกษาข้างต้นเป็นกลุ่มตัวอย่างเพราะมีเหตุผลว่า นักศึกษาเหล่านี้ส่วนใหญ่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลางหรือต่ำกว่า ประสบการณ์ในการสอนเรขาคณิตมีน้อย หรือไม่มีเลย และในอนาคตเมื่อจบแล้วก็จะออกไปเป็นครูคณิตศาสตร์ ซึ่งลักษณะดังกล่าวพอจะสอดคล้องกับความมุ่งหมายในการสร้างชุดการสอนสำหรับครู

คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย

2. การกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย

ในการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลผู้วิจัยดำเนินการกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัยเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างชุดการสอนรายบุคคล

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 4 การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคล

รายละเอียดของการดำเนินการแต่ละขั้นตอนมีดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

การวิจัยเกี่ยวกับสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตยังไม่มีมากนัก ดังนั้น ในการกำหนดสมรรถภาพของครู ผู้วิจัยจึงศึกษาสังเคราะห์เอกสารเพื่อกำหนดกรอบแนวคิดเกี่ยวกับสมรรถภาพของครู และตรวจสอบกรอบแนวคิดรายการสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต โดยการสำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับดังนี้

1. ผู้วิจัยศึกษาสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต จากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์และคู่มือครู ในรายวิชา ค 101 ค 203 ค 204 ค 031 ค 011 และ ค 021 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. นอกจากนั้นยังศึกษาจากตำราเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา อุดมศึกษา เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อวิเคราะห์หาสมรรถภาพหลักสมรรถภาพย่อย ที่จะนำมากำหนดเป็นกรอบสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

2. สร้างแบบสอบถามในลักษณะหัวข้อเนื้อหาสาระต่าง ๆ ที่กำหนดเป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ที่ได้จากการศึกษาหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ คู่มือครู ตำรา เอกสารและงานวิจัยในข้อ 1 แล้วให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท ตรวจสอบความเหมาะสมและปรับปรุงแก้ไขจนได้แบบสอบถามที่ต้องการ ซึ่งได้นำเสนอไว้ในภาคผนวก ข.

3. นำแบบสอบถามที่ได้จากข้อ 2 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตจำนวน 5 ท่าน ตามรายชื่อในภาคผนวก ก. ตรวจสอบความเที่ยงตรงในการพิจารณาหาสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตซึ่งมีการกำหนดเป็นคะแนน ดังนี้

3.1 ถ้าแน่ใจว่าสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตนั้นจำเป็นสำหรับครู ให้คะแนน 1

3.2 ถ้าไม่แน่ใจว่าสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตนั้นจำเป็นสำหรับครู ให้คะแนน 0

3.3 ถ้าแน่ใจว่าสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตนั้นไม่จำเป็นสำหรับครู ให้คะแนน -1

นำผลการประเมินหรือการให้คะแนนของผู้เชี่ยวชาญแต่ละคน ที่ให้คะแนนแต่ละข้อ มาหาดัชนีความสอดคล้อง (Index of Objective Congruence : IOC) ในสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตแต่ละข้อ

ถ้าสมรรถภาพข้อใดได้ดัชนีความสอดคล้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0.60 ก็แสดงว่าสมรรถภาพนั้น มีความจำเป็นสำหรับครู ถ้าสมรรถภาพข้อใดได้ดัชนีความสอดคล้องต่ำกว่า 0.60 ก็จะกำจัดออกไปหรือนำไปปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้น สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่จำเป็นตามที่กำหนดไว้ในขั้นตอนนี้ได้นำเสนอไว้ในบทที่ 4

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างชุดการสอนรายบุคคล

รายละเอียดในการสร้างชุดการสอนรายบุคคลมีดังนี้

1. นำสมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างเป็นชุดการสอน โดยสมรรถภาพหลักหนึ่งสมรรถภาพเป็นแนวทางกำหนดเนื้อหาและกิจกรรมของหน่วยการเรียนรู้หนึ่งหน่วย และใช้สมรรถภาพย่อย ๆ เป็นแนวทางกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย ที่ใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน กิจกรรมการเรียนรู้และการประเมินผลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ทำให้ได้ชุดการสอนจำนวน 4 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

1.1 หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต

1.2 หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด

1.3 หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม

1.4 หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต

ในหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยจะประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ย่อย ๆ ซึ่งมีเนื้อหาสาระจบในตัวเองเรียงลำดับต่อเนื่องกันจากง่ายไปหายาก ผู้เรียนจะได้เรียนไปตามลำดับขั้นที่ละน้อย ทำให้ง่ายต่อการศึกษาให้เข้าใจ มีการเสนอกิจกรรมการเรียนรู้บางหัวข้อที่ครอบคลุมถึงวิธีสอนเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตแก่นักเรียนตามเนื้อหาในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยม

ศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. และมีสื่อการเรียนที่ทำให้ผู้เรียนได้ข้อสรุปและเข้าใจเนื้อหาสาระได้ดีขึ้นพร้อมกันนี้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยจะมีเนื้อหาสาระที่เป็นความรู้เสริมทางเรขาคณิตและความรู้ทั่วไปซึ่งจัดอยู่ในลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ กิจกรรมเสริม กิจกรรมสำรวจ มุมน่าคิด มุมปริศนา และมุมชอกแซก ในลักษณะเนื้อหาที่เสริมความรู้ทางเรขาคณิตทั่ว ๆ ไป ตลอดจนสาระที่ทำให้ผ่อนคลายความเครียดแทรกอยู่ในลักษณะของมุมปล่อยก๊าก (มุมตลกขบขัน) และการดูที่ช่วยเพิ่มบรรยากาศการเรียนให้น่าสนใจ อีกทั้งมีแบบฝึกหัดพร้อมคำตอบในตอนท้ายของทุกหน่วยการเรียนรู้ย่อยและในหน่วยการเรียนรู้ย่อยใดที่มีเนื้อหาสาระจำนวนมากจนอาจทำให้สับสนก็จะมีบทสรุปเนื้อหาสาระเหล่านั้นไว้ในตอนท้ายของหน่วยการเรียนรู้ย่อย เพื่อให้ผู้เรียนสามารถทบทวนเนื้อหาสาระที่เรียนได้เร็วขึ้น

2. กำหนดและเขียนโครงร่างของหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งมีโครงสร้าง 7 ประการ คือ บทนำ จุดประสงค์ (จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย) ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนรู้ การประเมินหลังเรียน และสื่อการเรียน ที่ส่วนใหญ่รวบรวมไว้ในรูปเอกสารประกอบหน่วยการเรียนรู้โดยมีการดำเนินการดังนี้

2.1 การกำหนดบทนำ ผู้วิจัยได้กำหนดในลักษณะสรุปรวมเนื้อหาและข้อเท็จจริงทั่ว ๆ ไป ที่เกี่ยวข้องกับหน่วยการเรียนรู้นั้น ๆ

2.2 การกำหนดจุดประสงค์ ทั้งจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย ผู้วิจัยได้กำหนดให้สอดคล้องกับมโนคติของหัวเรื่องและหัวเรื่องย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

2.3 การกำหนดความรู้พื้นฐาน ผู้วิจัยได้กำหนดหน่วยการเรียนรู้หน่วยที่ 1 เรื่องรากฐานของเรขาคณิตเป็นความรู้พื้นฐานของทุกหน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ลำดับก่อนหน้าจะเป็นความรู้พื้นฐานของหน่วยการเรียนรู้ลำดับถัดไปเสมอ

2.4 การกำหนดการประเมินก่อนเรียน ผู้วิจัยได้กำหนดให้มีการทดสอบก่อนเรียน ในหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย ก่อนจะทำการศึกษาจากหน่วยการเรียนรู้ นั้น โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วย

2.5 การกำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้วิจัยได้เลือกกิจกรรมให้สอดคล้องและเหมาะสมกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย เช่น การตอบคำถาม เขียนรูป การสังเกตและการทดลองจากสื่อการสอนทั่ว ๆ ไปที่มีอยู่ตามปกติ เช่น กระดาษแข็ง วงเวียน ไม้บรรทัด และสื่อการสอนสำเร็จรูป เช่น สื่อการสอนที่แสดงถึงว่า ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180° (สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 3)

2.6 การกำหนดการประเมินหลังเรียน ผู้วิจัยได้ให้ผู้เรียนทุกคนที่เรียนจากหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยจบแล้ว ทำการทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วย ซึ่งเป็นแบบทดสอบชุดเดียวกับแบบทดสอบที่ใช้ในการกำหนดการประเมินก่อนเรียน

2.7 การกำหนดสื่อการเรียน ผู้วิจัยได้เลือกสื่อการเรียนให้มีประสิทธิภาพและสอดคล้องกับเนื้อหาสาระ จึงได้ใช้สื่อการเรียนในรูปแบบต่าง ๆ ได้แก่ เอกสารประกอบหน่วยการเรียนรู้ต่าง ๆ สื่อการสอนทั่ว ๆ ไป ที่มีอยู่ตามปกติ สื่อการสอนสำเร็จรูป และคู่มือการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

3. จากโครงร่างของหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยที่ได้จากข้อ 2 นำมารวมสร้างเป็นโครงร่างชุดการสอน แล้วให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัณฑิตตรวจสอบ เพื่อพิจารณาความเหมาะสมและปรับปรุงแก้ไข

4. นำโครงร่างชุดการสอนที่ได้ปรับปรุงจากข้อ 3 ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตจำนวน 5 ท่าน ซึ่งเป็นชุดเดิม ตรวจสอบเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของโครงร่างทั้งหมด

5. ปรับปรุงโครงร่างชุดการสอนตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตในข้อ 4 แล้วให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัณฑิตตรวจสอบ เพื่อพิจารณาความเหมาะสม และปรับปรุงแก้ไข

6. เขียนรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้ และรวบรวมทำเป็นชุดการสอนที่สมบูรณ์พร้อมที่จะนำไปตรวจสอบหาประสิทธิภาพ

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต เนื่องจากจำเป็นต้องใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต 2 แบบทดสอบ คือ แบบทดสอบประจำหน่วยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้และแบบทดสอบฉบับรวม จึงกำหนดลักษณะและวิธีการสร้างดังนี้

1. แบบทดสอบประจำหน่วยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้เป็นแบบทดสอบอิงเกณฑ์ การกำหนดเกณฑ์ได้นำจำนวนข้อสอบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้เป็นฐานเทียบ โดยกำหนดว่าถ้าผู้เรียนคนใดทำข้อสอบได้อย่างน้อยร้อยละ 80 ของจำนวนข้อสอบทั้งหมดในหน่วยการเรียนรู้ ถือว่าผู้เรียนสอบผ่านเกณฑ์ที่กำหนดของหน่วยการเรียนรู้

แบบทดสอบฉบับนี้เป็นองค์ประกอบส่วนหนึ่งของชุดการสอนรายบุคคล สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบผลการเรียนในทันที โดยทำการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ซึ่งผู้วิจัยใช้แบบทดสอบชุดเดียวกัน โดยมีวิธีการสร้าง ดังนี้

1.1 จากจุดประสงค์การเรียนรู้จำหน่วยย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ นำมาสร้างแบบทดสอบประจำหน่วยซึ่งมีข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยที่กำหนดไว้ในแต่ละจุดประสงค์จะมีข้อสอบ 2-4 ข้อ ลักษณะข้อสอบเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก แล้วเสนอคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตร เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาและความถูกต้องเหมาะสมของภาษา ตัวเลือก ตัวลวง แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข

1.2 นำข้อสอบที่ได้ปรับปรุงจากข้อ 1.1 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตจำนวน 5 ท่าน ซึ่งเป็นชุดเดิม ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา กำหนดคะแนนเลือกแบบทำนองเดียวกันกับการตรวจสอบความเที่ยงตรงของสมรรถภาพในขั้นตอนที่ 1 ที่ผ่านมาเพื่อหาดัชนีความสอดคล้อง ระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ คัดเลือกปรับปรุงให้ผู้เชี่ยวชาญดังกล่าวและคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบจนในที่สุดได้ข้อสอบในแต่ละจุดประสงค์ที่มีดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป นำมารวมเป็นข้อสอบสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนรู้ซึ่งหน่วยที่ 1 เรื่องรากฐานของเรขาคณิต มีจำนวน 16 ข้อ หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด มีจำนวน 37 ข้อ หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม มีจำนวน 18 ข้อ และหน่วยที่ 4 การสร้างในเรขาคณิต มีจำนวน 11 ข้อ ซึ่งข้อสอบแต่ละข้อในหน่วยการเรียนรู้หนึ่งใช้เวลาทำตามความต้องการและความสามารถของนักเรียนแต่ละคน

1.3 นำข้อสอบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ จากข้อ 1.2 ไปทดสอบกับนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 3 และ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 ที่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษามาแล้วของสถาบันราชภัฏเพชรบุรี สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ จำนวน 55 คน

1.4 การวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ

นำคำตอบที่ได้จากการทดสอบในข้อ 1.3 ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้มาตรวจให้คะแนนแบบ 0 กับ 1 โดยข้อที่เลือกตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิด ข้อที่ไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ให้ 0 คะแนน แล้วไปหาค่าความเชื่อมั่น โดยวิธีของโลเวทท์ (Lovett) ได้ค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.93 0.87 0.82 และ 0.89 ตามลำดับ ตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอไว้ในภาคผนวก ง.

รายละเอียดของแบบทดสอบประจำหน่วยทั้งหมดอยู่ในหน้า 99 ถึง 121

2. แบบทดสอบฉบับรวมเป็นแบบทดสอบอิงกลุ่ม

การสร้างแบบทดสอบฉบับรวมมีจุดมุ่งหมายเพื่อใช้วัดพฤติกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่าง หลังเรียนจากชุดการสอนทั้งหมด โดยมีวิธีการสร้างดังนี้

2.1 จากจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย นำมาสร้างข้อสอบให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ในแต่ละจุดประสงค์จะมีข้อสอบ 2 - 4 ข้อ ลักษณะข้อสอบเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก แล้วเสนอคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรเพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาและความถูกต้องเหมาะสมของภาษา ตัวเลือก ตัวลง แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข

2.2 นำข้อสอบที่ได้ปรับปรุงจากข้อ 2.1 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตจำนวน 5 ท่าน ซึ่งเป็นชุดเดิม ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา กำหนดคะแนนเลียนแบบทำนองเดียวกันกับการตรวจสอบความเที่ยงตรงของสมรรถภาพในขั้นตอนที่ 1 ที่ผ่านมาเพื่อหาดัชนีความสอดคล้อง ระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ คัดเลือกปรับปรุงให้ผู้เชี่ยวชาญดังกล่าวและคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบจนในที่สุดได้ข้อสอบในแต่ละจุดประสงค์ที่มีดัชนีความสอดคล้องตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป นำมารวมเป็นข้อสอบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งหน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต จำนวน 15 ข้อ หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด จำนวน 35 ข้อ หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม จำนวน 17 ข้อ หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต จำนวน 13 ข้อ กำหนดเวลาในการทำข้อสอบแต่ละข้อใช้เวลา 2 นาที

2.3 นำข้อสอบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ จากข้อ 2.2 มารวมกันเป็นแบบทดสอบฉบับรวม 80 ข้อ กำหนดเวลาในการทำข้อสอบ 2 ชั่วโมง 40 นาที ไปทดสอบกับนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 และ 4 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 ที่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษามาแล้ว ของสถาบันราชภัฏนครปฐม และ สถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ จำนวน 105 คน

2.4 การวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ

2.4.1 นำคำตอบที่ได้จากการทดสอบในข้อ 2.3 มาตรวจให้คะแนน แบบ 0 กับ 1 โดยข้อที่เลือกตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิด ข้อที่ไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ให้ 0 คะแนนแล้วหาค่าอำนาจจำแนกและ ค่าความยากง่าย คำนวณโดยโปรแกรมสรี คัดเลือกปรับปรุงจนได้ข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.58 และค่าความยากง่าย ตั้งแต่ 0.23 ถึง 0.78 ซึ่งจะได้แบบทดสอบฉบับรวม ที่มีข้อสอบจำนวน 60 ข้อ ซึ่งแยกเป็นหน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต จำนวน 11 ข้อ หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด จำนวน 28 ข้อ หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม จำนวน 12 ข้อ หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต จำนวน 9 ข้อ กำหนดเวลาในการทำ

ทำข้อสอบ 2 ชั่วโมง เพื่อนำไปประเมินหลังเรียนหน่วยการเรียนรู้ทั้งหมด

2.4.2 นำแบบทดสอบฉบับรวมจากข้อ 2.4.1 ไปหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตร KR-20 คำนวณโดย โปรแกรม สิริ ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.89 ตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอไว้ในภาคผนวก ง.

รายละเอียดของแบบทดสอบฉบับรวมอยู่ในหน้า 123 ถึง 140

ขั้นตอนที่ 4 การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคล

ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยมีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของชุดการสอนจากสูตร E_1/E_2 เมื่อ

E_1 ตัวแรก หมายถึง ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวมที่คิดเป็นร้อยละ

E_2 ตัวหลัง หมายถึง ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ที่คิดเป็นร้อยละ

เกณฑ์การตัดสิน E_1/E_2 ดังไว้ที่ 75/75 ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอแนะของ อธิพร ศรียมก (2529 : 247) ที่กล่าวว่า การกำหนดเกณฑ์ประสิทธิภาพของกระบวนการ/ ประสิทธิภาพของผลลัพธ์ จะกำหนดให้มีค่าเท่าใดนั้นให้ผู้สอนเป็นผู้พิจารณาตามความพอใจ และปกติเนื้อหาที่เป็นทักษะหรือเจตคติศึกษา อาจตั้งไว้ 75/75 หรือต่ำกว่า และจะถือตามแนวคิดของ ฉลองชัย สุรวฒนบุรณ์ (2528 : 215) ว่า E_1/E_2 ได้ตามเกณฑ์ 75/75 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้มีค่าของ E_1 และ E_2 แต่ละตัวอยู่ในช่วง 72.50 ถึง 77.50 หรือตัวใดตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า 77.50 แต่ตัวที่เหลือมีค่าอยู่ในช่วง 72.50 ถึง 77.50 E_1/E_2 สูงกว่าเกณฑ์ 75/75 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้มีค่าของ E_1 และ E_2 แต่ละตัวมากกว่า 77.50 E_1/E_2 ต่ำกว่าเกณฑ์ 75/75 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้มีค่าของ E_1 หรือ E_2 อยู่ในช่วงอื่น ๆ นอกจากที่กล่าวมานี้

ในภาพรวมถือว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 เมื่อทุก E_1/E_2 เป็นไปตามเกณฑ์ หรือสูงกว่าเกณฑ์ 75/75

ผู้วิจัยนำชุดการสอนไปทดลองกับนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษา ของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึงจำนวน 36 คน ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยกำหนดขั้นตอนการตรวจสอบประสิทธิภาพ 3 ครั้ง ตามข้อเสนอแนะของ ฉลองชัย สุรวฒนบุรณ์ (2528 : 214) คือ

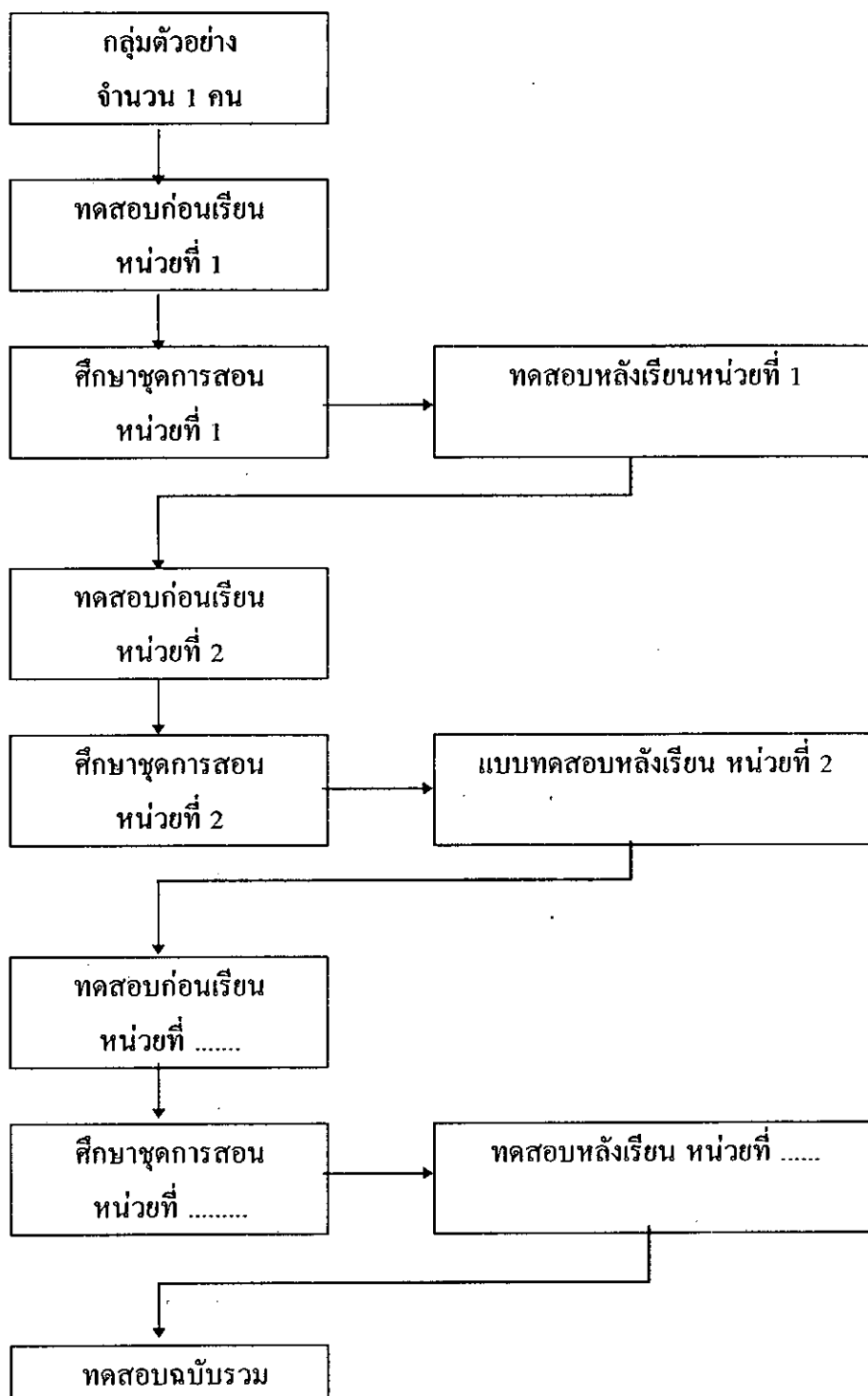
1. การทดลองเป็นรายบุคคล การทดลองในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของชุดการสอนในด้านต่าง ๆ ดังนี้คือ ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติ เวลาที่ใช้ในการเรียน อื่น ๆ ที่กลุ่มตัวอย่างจะให้

ข้อคิดเห็นและหาประสิทธิภาพของชุดการสอน โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง โดยการเลือกอย่างเจาะจงจากนักศึกษาวิชาเอก คณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษา ของสถาบันสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง จำนวน 1 คน ซึ่งมีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง

1.2. การทดลองใช้ชุดการสอน ผู้วิจัยชี้แจงให้นักศึกษาตัวอย่างทราบถึงจุดมุ่งหมายในการเรียนและนำชุดการสอนให้นักศึกษาตัวอย่างเรียนด้วยตนเองที่หน่วยการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยทำหน้าที่เพียงเป็นที่ปรึกษาทางวิชาการให้ซักถามเนื้อหาได้เท่าที่จำเป็น การทดลองกระทำในระหว่างวันที่ 17 มิถุนายน 2539 ถึงวันที่ 17 สิงหาคม 2539 รวมเวลาทั้งหมด 60 วัน แต่ละหน่วยการเรียนรู้จะใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง โดยเริ่มจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในการเริ่มต้นเรียนแต่ละหน่วยการเรียนรู้จากชุดการสอน ผู้เรียนต้องทำการทดสอบก่อนเรียนโดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วย ที่ผู้เรียนทำการทดสอบเองเมื่อผู้เรียนเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ก็ทำการทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยซึ่งเป็นชุดเดิมที่ผู้เรียนทำการทดสอบเองและผู้วิจัยได้สอบถามความเห็นจากผู้เรียนเพื่อหาข้อบกพร่องของชุดการสอนด้วย เมื่อผู้เรียนเรียนครบทุกหน่วยการเรียนรู้แล้ว ให้ผู้เรียนมีเวลาทบทวนความรู้และมารับคำปรึกษาในส่วนที่ยังไม่เข้าใจประมาณ 1 สัปดาห์ จึงมาทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบฉบับรวม เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการสอนตามสูตร E_1/E_2

กรอบแนวคิดในการทดลองครั้งที่หนึ่งแสดงภาพประกอบได้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการทดลองเป็นรายบุคคล

1.3 การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยได้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชนิดคือ

1.3.1 ข้อมูลเชิงคุณภาพ ใช้วิธีการตัดสินใจโดยอาศัยวิจารณญาณเพื่อระบุเป็นข้อบกพร่องที่จะต้องได้รับการปรับปรุงแก้ไข ซึ่งการปรับปรุงแก้ไขได้กระทำโดยอาศัยคำปรึกษาแนะนำจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรและผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต จำนวน 5 ท่าน ซึ่งเป็นชุดเดิม

1.3.2 ข้อมูลเชิงปริมาณใช้ในการหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

2. การทดลองเป็นกลุ่มย่อยการทดลองในครั้งที่สองนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของชุดการสอนในด้านต่าง ๆ และหาประสิทธิภาพของชุดการสอนเหมือนกับการทดลองในครั้งที่หนึ่ง โดยมีขั้นตอนดังนี้

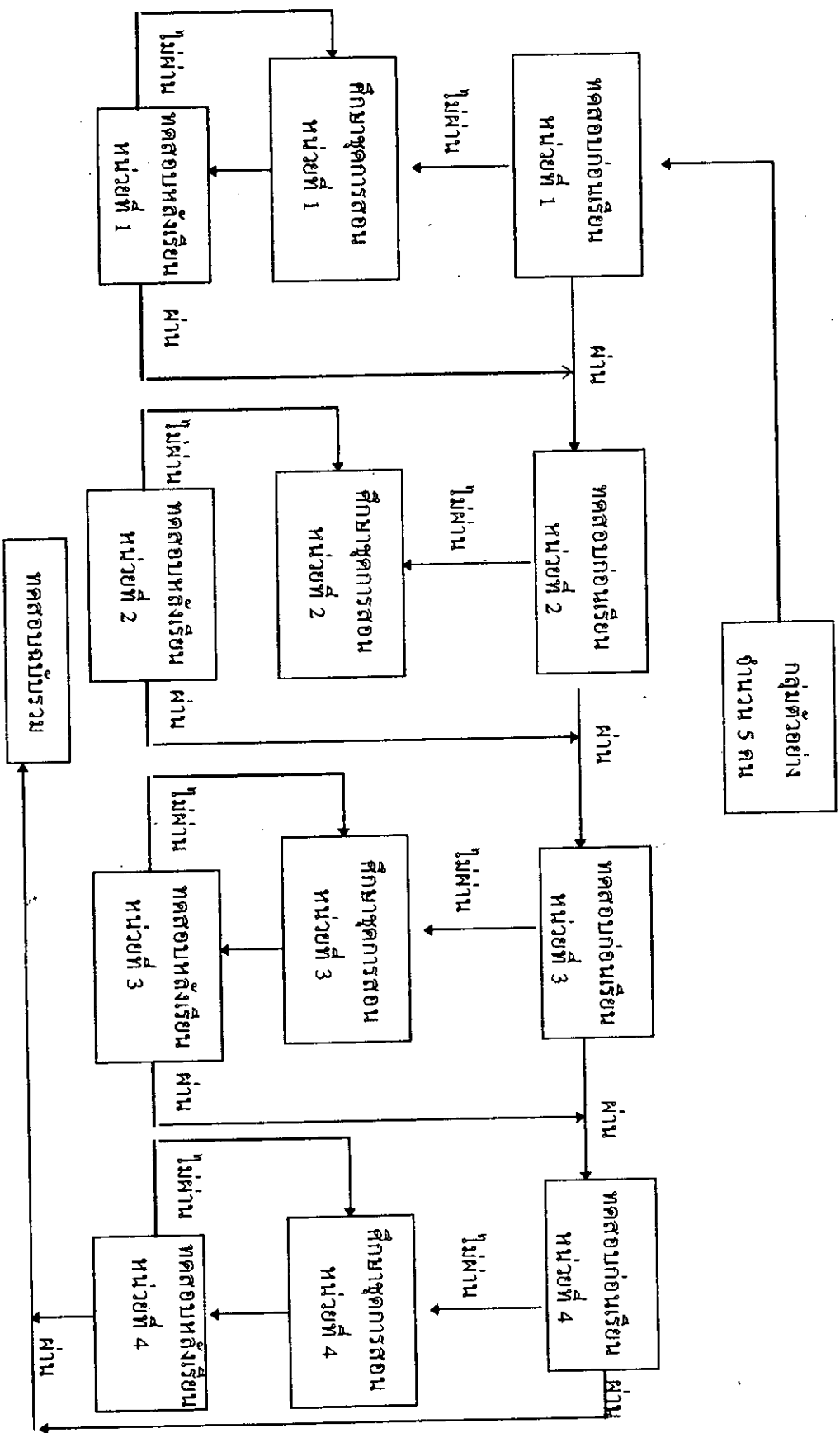
2.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง โดยเลือกอย่างเจาะจงจากนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง จำนวน 5 คน ซึ่งมีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง จำนวน 1 คน ระดับปานกลาง จำนวน 2 คน และระดับต่ำจำนวน 2 คน

2.2 การทดลองใช้ชุดการสอน ผู้วิจัยชี้แจงให้กลุ่มตัวอย่างทราบถึงจุดมุ่งหมายในการเรียนและนำชุดการสอนให้กลุ่มตัวอย่างเรียนด้วยตนเองพร้อมกันทั้งกลุ่มทีละหน่วย การเรียนที่ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นเพียงที่ปรึกษาทางวิชาการให้ซักถามเนื้อหาได้เท่าที่จำเป็น การทดลองกระทำในวันที่ 19 สิงหาคม 2539 ถึง วันที่ 19 ตุลาคม 2539 รวมเวลาทั้งหมด 60 วัน แต่ละหน่วยจะใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง โดยเริ่มจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในการเริ่มต้นเรียนแต่ละหน่วยการเรียนจากชุดการสอน ผู้เรียนต้องทำการทดสอบก่อนเรียน โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยที่ผู้เรียนทำการทดสอบเองและดำเนินการต่อไป

2.2.1 ถ้าผู้เรียนคนใดสอบผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนทำข้อสอบได้อย่างน้อยร้อยละ 80 ของจำนวนข้อสอบทั้งหมดในหน่วยการเรียนรู้ก็ให้ศึกษาหน่วยต่อไป กรณีไม่ผ่านเกณฑ์ให้ศึกษาหน่วยการเรียนนั้นทั้งหมดเมื่อมีความพร้อมจึงทำการทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยซึ่งเป็นชุดเดิมและผู้วิจัยได้สอบถามความเห็นจากผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อระบุข้อบกพร่องของชุดการสอน พร้อมทั้งให้มาขอคำปรึกษาจนกระทั่งผ่านเกณฑ์จึงให้เรียนหน่วยต่อไป

2.2.2 เมื่อผู้เรียนศึกษาครบทุกหน่วยแล้ว ให้ผู้เรียนมีเวลาทบทวนความรู้และมารับคำปรึกษาในส่วนที่ยังไม่เข้าใจ ประมาณ 1 สัปดาห์จึงมาทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบฉบับรวม เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการสอนตามสูตร E_1/E_2

กรอบแนวคิดในการทดลองครั้งที่สอง แสดงภาพประกอบได้ดังนี้



ภาพประกอบ 2 กรอบแนวคิดในการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

2.3 การวิเคราะห์ข้อมูล เนื่องจากผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลในลักษณะเช่นเดียวกับในการทดลองครั้งที่หนึ่ง จึงใช้การวิเคราะห์และการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนด้วยเงื่อนไขเหมือนกันกับการทดลองครั้งที่หนึ่ง

3. การทดลองภาคสนาม การทดลองในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอน โดยดำเนินการดังนี้

3.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง จำนวน 30 คน ซึ่งเหลือจากการทดลองครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สองตามลำดับ

3.2 การทดลองใช้ชุดการสอน ผู้วิจัยชี้แจงให้กลุ่มตัวอย่างทราบถึงจุดมุ่งหมายในการเรียนและนำชุดการสอนให้กลุ่มตัวอย่างเรียนด้วยตนเองทั้งกลุ่มที่ละหน่วยการเรียน ซึ่งผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นเพียงที่ปรึกษาทางวิชาการ ให้ซักถามเนื้อหาได้เท่าที่จำเป็น และกระตุ้นให้ผู้เรียนได้พบปะกันอย่างไม่เป็นทางการสัปดาห์ละครั้ง เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้กันในด้านเนื้อหาสาระและอื่น ๆ ทำให้ได้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหาหรือข้อสงสัยที่มีอยู่ อีกทั้งได้มีโอกาสพบผู้วิจัยซึ่งอาจจะให้คำแนะนำในทางวิชาการที่สงสัยและไม่สามารถหาคำตอบเองได้ ช่วงการทดลองกระทำระหว่างวันที่ 21 ตุลาคม 2539 ถึงวันที่ 26 ธันวาคม 2539 รวมเวลาทั้งหมด 65 วัน ในส่วนของเวลาเรียนแต่ละหน่วยการเรียนได้กำหนดไว้ดังนี้ หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต ใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด ใช้เวลาเรียนประมาณ 20 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม ใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต ใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง โดยเริ่มจากหน่วยการเรียนที่ 1 ในการเริ่มต้นเรียนแต่ละหน่วยการเรียนจากชุดการสอน ผู้เรียนต้องทำการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบประจำหน่วยที่ผู้เรียนทำการทดสอบเองและดำเนินการต่อไป

3.2.1 ถ้าผู้เรียนคนใดสอบผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนทำข้อสอบได้อย่างน้อยร้อยละ 80 ของจำนวนข้อสอบทั้งหมดในหน่วยการเรียนก็ให้ศึกษาหน่วยต่อไป กรณีไม่ผ่านเกณฑ์ให้ศึกษาหน่วยการเรียนนั้นทั้งหมด เมื่อมีความพร้อมก็มาทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยซึ่งเป็นชุดเดิมพร้อมทั้งให้มาขอคำปรึกษาด้านเนื้อหากับผู้วิจัยได้จนกระทั่งผู้เรียนผ่านเกณฑ์จึงให้เรียนหน่วยต่อไป

3.2.2 เมื่อผู้เรียนศึกษาครบทุกหน่วยแล้วให้ผู้เรียนมีเวลาทบทวนความรู้และมารับคำปรึกษาในส่วนที่ยังไม่เข้าใจ ประมาณ 1 สัปดาห์ จึงมาทดสอบหลังเรียนโดยใช้

แบบทดสอบฉบับรวม

3.3 การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการทดสอบโดยใช้แบบทดสอบฉบับรวม เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดการสอนตามเกณฑ์ 75/75 โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้าหา E_1/E_2 ทุกจุดประสงค์ได้ตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ก็จะยุติในการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนในกรณีที่ได้ต่ำกว่าเกณฑ์ก็ต้องทำการหาประสิทธิภาพของชุดการสอนใหม่ โดยการสุ่มผู้เรียนมาจำนวนหนึ่งและทำการสัมภาษณ์ เพื่อหาข้อบกพร่องของชุดการสอนในด้านภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติและเวลาที่ใช้ในการเรียนพร้อมทั้งปรึกษาคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัณฑิตและผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวแล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มใหม่ ทำดังนี้จนกระทั่งได้ E_1/E_2 ตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ 75/75

3. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยแบ่งการวิเคราะห์ข้อมูลออกเป็น 3 ตอน คือ

1. วิเคราะห์ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ด้วยดัชนีความสอดคล้อง (IOC) (บุญเชิด ภิญโญนันตพงษ์. 2527 : 69)
2. วิเคราะห์หาคุณภาพของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ได้แก่ ค่าอำนาจจำแนก ค่าความยากง่าย และหาค่าความเชื่อมั่น (บุญชม ศรีสะอาด. 2535 : 86 - 93)
3. วิเคราะห์หาประสิทธิภาพของชุดการสอน ตามเกณฑ์ 75/75

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

1. หาดัชนีความสอดคล้อง (IOC)

โดยใช้สูตร

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้อง

R แทน ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วย ซึ่งเป็นแบบทดสอบ
อิงเกณฑ์ โดยใช้สูตรของ โลเวทท์ (Lovett)

$$r_{cc} = 1 - \frac{K \sum X_i - \sum X_i^2}{(K-1) \sum (X_i - C)^2}$$

เมื่อ r_{cc} แทน ค่าความเชื่อมั่น

K แทน จำนวนข้อสอบ

C แทน คะแนนเกณฑ์หรือจุดตัดของแบบทดสอบ

X_i แทน คะแนนของแต่ละคน

3. หาประสิทธิภาพของชุดการสอน จากสูตร E_1 / E_2

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

เมื่อ E_1 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม

$\bar{X}$ แทน คะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งหมด

A แทน คะแนนเต็มของการสอบหลังเรียน

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P}$$

เมื่อ E_2 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์

$\bar{F}$ แทน คะแนนสอบหลังเรียนโดยเฉลี่ยของผู้เรียนทั้งหมดใน
แต่ละจุดประสงค์

P แทน คะแนนเต็มของการสอบหลังเรียนในแต่ละ
จุดประสงค์

(อรพรรณ พรสีมา. 2530 : 130-131)

อนึ่งแม้ว่าในการหาประสิทธิภาพของชุดการสอน จากสูตร E_1/E_2 โดยทั่วไป
มักนิยมหาค่า E_2 จากคะแนนที่ได้จากการสอบหรือการประเมินพฤติกรรมที่เกี่ยวข้องในแต่ละ
จุดประสงค์ระหว่างการเรียนก็ตาม แต่เนื่องจากชุดการสอนนี้มีลักษณะเป็นการให้ผู้เรียนศึกษา
ด้วยตนเองเป็นรายบุคคลตามความต้องการและความสามารถของแต่ละบุคคลที่แตกต่างกันไป
ในเวลาและสถานที่ที่ตัวเองสะดวกทำให้มีปัญหาและอุปสรรคในการเก็บข้อมูลผลการสอบหรือ
การประเมินพฤติกรรมที่เกี่ยวข้องในแต่ละจุดประสงค์ระหว่างการเรียนดังนั้นจึงได้ใช้วิธีหาค่า
 E_2 จากคะแนนเฉลี่ยในการทำแบบทดสอบฉบับรวมของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดในแต่ละจุด
ประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ซึ่งน่าจะอนุโลมแทนกันได้

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย ซึ่งชุดการสอนนี้ผู้เรียนสามารถเรียนด้วยตนเองได้ โดยกระบวนการพัฒนาเป็นไป ตามรายละเอียดในบทที่ 3 ด้วยเงื่อนไขที่ต้องการให้ชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 ในบทนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยครั้งนี้ตามลำดับขั้นคือ

1. ผลการศึกษสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต
 2. ผลการตรวจสอบความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต
 3. ผลการสร้างชุดการสอน
 4. ผลการทดลองเป็นรายบุคคล
 5. ผลการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 1
 6. ผลการทดลองเป็นกลุ่มย่อย
 7. ผลการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 2
 8. ผลการทดลองภาคสนาม
- รายละเอียดของแต่ละขั้นมีดังนี้

1. ผลการศึกษสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

เนื่องจากมีความจำเป็นต้องหาสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตเพื่อกำหนดเป็นกรอบแนวคิดในการสร้างชุดการสอน ภายหลังจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยด้านเรขาคณิต ผู้วิจัยจึงได้กำหนดหัวข้อของเนื้อหาสาระต่าง ๆ เป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยสำหรับครู ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. รากฐานของเรขาคณิต
 - 1.1 พัฒนาการของเรขาคณิตเชิงประวัติศาสตร์
 - 1.2 ระบบสัจพจน์
 - 1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยูคลิด
 - 1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของยูคลิด

1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต
นอกระบบยูคลิด

2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด

2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม

2.2 ความเท่ากันทุกประการ

2.3 เส้นขนาน

2.4 รูปหลายเหลี่ยมเช่น รูปสี่เหลี่ยมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

2.5 ความคล้ายกัน

2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิด

2.7 ทฤษฎีบทของเมเนเลอัส และทฤษฎีบทของเชวา

3. วงกลม

3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลมเช่น
จุดศูนย์กลาง รัศมีและคอร์ด

3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม

3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม

3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้น

สัมผัส

4. การสร้างในเรขาคณิต

4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน

4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

4.3 การสร้างวงกลม และรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป

4.4 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ บางรูป

4.5 ปัญหาการสร้างที่มีชื่อเสียง 3 ข้อ

2. ผลการตรวจสอบความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

ผู้วิจัยได้นำหัวข้อเนื้อหาสาระต่างๆ ที่กำหนดเป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย
ดังได้กล่าวไว้ข้างต้นไปสร้างเป็นแบบสอบถามเพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอน
เรขาคณิตตรวจสอบว่าสมรรถภาพใดจำเป็นและสมรรถภาพใดไม่จำเป็นสำหรับครู โดยอาศัย
การวิเคราะห์หาค่าดัชนีความสอดคล้องเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ กล่าวคือ สมรรถภาพหลัก
และสมรรถภาพย่อยข้อใดที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง มากกว่าหรือเท่ากับ 0.60 ตาม

รายละเอียดในภาคผนวก ง. ถือว่าเป็นสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับครู ปรากฏว่าได้
สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยเพื่อนำไปสร้างหน่วยการเรียนรู้ดังนี้

1. สมรรถภาพหลัก : รากฐานของเรขาคณิตซึ่งแบ่งเป็นสมรรถภาพย่อย คือ
 - 1.1 พัฒนาการของเรขาคณิตเชิงประวัติศาสตร์
 - 1.2 ระบบสัจพจน์
 - 1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยูคลิด
 - 1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของยูคลิด
 - 1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต
นอกระบบยูคลิด
 2. สมรรถภาพหลัก : ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด ซึ่งแบ่งเป็น
สมรรถภาพย่อยคือ
 - 2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม
 - 2.2 ความเท่ากันทุกประการ
 - 2.3 เส้นขนาน
 - 2.4 รูปหลายเหลี่ยม
 - 2.5 ความคล้ายกัน
 - 2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิด
 3. สมรรถภาพหลัก : วงกลม ซึ่งแบ่งเป็นสมรรถภาพย่อย คือ
 - 3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
 - 3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม
 - 3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม
 - 3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัส
 4. สมรรถภาพหลัก : การสร้างในเรขาคณิต ซึ่งแบ่งเป็นสมรรถภาพย่อย คือ
 - 4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน
 - 4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
 - 4.3 การสร้างวงกลมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป
- ส่วนสมรรถภาพสำหรับครู ที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง น้อยกว่า 0.60 ตามรายละเอียดในภาคผนวก ง. ได้คัดลอกไม่นำมาสร้างเป็นหน่วยการเรียนรู้ ในชุดการสอนรายบุคคล
มีดังนี้

1. ทฤษฎีบทของเมเนเลอัสและทฤษฎีบทของเซวา

2. การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับรูปหลายเหลี่ยม

3. ปัญหาการสร้างที่มีชื่อเสียง 3 ข้อ

นอกจากนี้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตบางท่านให้ความเห็นว่าควรเพิ่มสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยที่ควรเพิ่มเติมตามความเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

สมรรถภาพหลัก	สมรรถภาพย่อย
1. วงกลม	1.1 วงกลมแนบใน 1.2 วงกลมล้อมรอบ 1.3 วงกลมแนบนอก 1.4 วงกลมสองวงสัมผัสกัน 1.5 เส้นสัมผัสร่วม
2. การสร้างในเรขาคณิต	2.1 การพิสูจน์เกี่ยวกับการสร้าง
3. ทรงเรขาคณิต	3.1 ความหมายและชนิดของทรงเรขาคณิตบางรูป 3.2 การหาพื้นที่ผิว 3.3 การหาปริมาตร
4. การพิสูจน์	4.1 การพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ การคาดเดา 4.2 วิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ

จากข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ดังตาราง 1 ผู้วิจัยได้นำสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยบางส่วนไปปรับปรุงโดยกำหนดเป็นหัวข้อย่อยในหน่วยการเรียนรู้บางหน่วยได้แก่

หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม จะมีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับวงกลมสองวงสัมผัสกัน และเส้นสัมผัสร่วม

หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต จะมีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับวงกลมแนบใน วงกลมล้อมรอบ และการพิสูจน์เกี่ยวกับการสร้าง

ส่วนสมรรถภาพหลักที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ ผู้วิจัยจะแทรกไว้ในเนื้อหาสาระของหน่วย การเรียนทุกหน่วย แต่สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยที่เกี่ยวกับทรงเรขาคณิตได้คัดออก เพราะสมรรถภาพตามข้อเสนอเน้นการคำนวณเป็นส่วนมาก แต่ชุดการสอนนี้ไม่ได้เน้นการ คำนวณหาพื้นที่และปริมาตรของรูปเรขาคณิตโดยตรง และผู้เรียนสามารถฝึกการคำนวณ ดังกล่าวได้เองจากแบบเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. อีกประการหนึ่ง ถ้าเพิ่มเนื้อหาเข้ามามากจะทำให้ในชุดการสอนมีเนื้อหามากเกินไปในขณะที่เวลาเรียนมีจำกัด

3. ผลการสร้างชุดการสอน

การสร้างชุดการสอนเพื่อให้ได้ชุดการสอนที่มีโครงสร้าง 7 ประการคือ บทนำ จุดประสงค์ (จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย) ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนรู้ การประเมินหลังเรียน และสื่อการเรียน มีขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 โดยสมรรถภาพหลักหนึ่งสมรรถภาพเป็น แนวทางกำหนดเนื้อหาและกิจกรรมของหน่วยการเรียนรู้หนึ่งหน่วย และใช้สมรรถภาพย่อย เป็น แนวทางกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย ที่ใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน กิจกรรมการเรียนรู้และการประเมินผลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ทำให้ได้ชุดการสอนจำนวน 4 หน่วยการเรียนรู้ดังนี้

1. หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต ซึ่งมี 5 หน่วยการเรียนรู้ย่อยคือ
 - 1.1 พัฒนาการของเรขาคณิตเชิงประวัติศาสตร์
 - 1.2 ระบบสัจพจน์
 - 1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยุคลิด
 - 1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของยุคลิด
 - 1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต

นอกกระบวนยุคลิด

2. หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด ซึ่งมี 6 หน่วยการเรียนรู้ย่อย คือ

- 2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม
- 2.2 ความเท่ากันทุกประการ
- 2.3 เส้นขนาน
- 2.4 รูปหลายเหลี่ยม เช่น รูปสี่เหลี่ยม และ รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

- 2.4 รูปหลายเหลี่ยม เช่น รูปสี่เหลี่ยม และ รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
- 2.5 ความคล้ายกัน
- 2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 3. หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม ซึ่งมี 4 หน่วยการเรียนรู้ย่อย คือ
 - 3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
 - 3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม
 - 3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม
 - 3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้น

สัมผัส

- 4. หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต ซึ่งมี 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อย คือ
 - 4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน
 - 4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
 - 4.3 การสร้างวงกลมและรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยมีดังนี้

หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต จำนวน 5 จุดประสงค์ คือ

- 1. อธิบายถึงองค์ประกอบและสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับระบบสัจพจน์
- 2. อธิบายถึงพัฒนาการและลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 3. บอกแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด
- 4. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก
- 5. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงวงรี

หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด จำนวน 10 จุดประสงค์ คือ

- 1. บอกแนวคิดหรือสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุมในเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 2. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด พร้อมทั้งสามารถบอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
- 3. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ และนำเงื่อนไขนี้ไปใช้
- 4. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันและบทกลับ
- 5. บอกได้ว่าขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันได้สองมุมจากและนำสมบัตินี้ไปใช้

6. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ขนมเปียกปูน ผืนผ้า จัตุรัส คางหมู และสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้

7. บอกได้ว่ารูป n เหลี่ยม สองรูปที่กำหนดให้ คล้ายกันหรือไม่

8. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากันย่อมเท่ากันทั้งสามอัตราส่วนและนำสมบัตินี้ไปใช้

9. บอกสมบัติของการสะท้อน การเลื่อนทางขนาน และการหมุนของรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้

10. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตรูปใดมีการสมมาตร

หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม จำนวน 5 จุดประสงค์ คือ

1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

2. บอกสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้

3. บอกสมบัติเกี่ยวกับ corde ของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้

4. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้

5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม จะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้

หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต จำนวน 4 จุดประสงค์ คือ

1. บอกความหมายของการสร้าง สร้างและบอกวิธีการสร้างขั้นพื้นฐานและการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายบางรูปที่กำหนดให้

2. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้านขนาดของมุม หรือเงื่อนไขอื่น ๆ มาให้

3. สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบในรูปสามเหลี่ยม

4. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป

4. ผลการทดลองเป็นรายบุคคล

การทดลองเป็นรายบุคคล มีความมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของชุดการสอนในด้านต่าง ๆ ดังนี้ ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติเวลาที่ใช้ในการเรียนและหาประสิทธิภาพของชุดการสอน ได้ทำการทดลองกับนัก

ศึกษาตัวอย่างจำนวน 1 คน โดยมีขั้นตอนดำเนินการ ดังได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 ได้ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องของชุดการสอน ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องของชุดการสอนจากการทดลองเป็นรายบุคคล

หน่วยที่	ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่อง
1. รากฐานของเรขาคณิต 2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด	- ข้อความบางตอนในเรขาคณิตเชิงวงรี ซึ่งขัดแย้งกับเรขาคณิตระบบยูคลิด ทำให้ผู้เรียนมีความสับสนและมองภาพไม่ออก ตัวอย่างเช่น มีรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมฉากสองมุม มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดมากกว่า 90° - มีความสับสนกับข้อความบางตอนเช่น แก้อีที่มี้ 3 ขาสามารถวางอยู่บนพื้นได้โดยไม่โยกเสมอ แก้อีที่มี้ 4 ขา วางอยู่บนพื้นอาจโยกได้ในบางครั้ง - การเรียงลำดับเนื้อหาบางหัวข้อยังไม่ต่อเนื่องกัน เช่น การกล่าวถึง “ความยาวของส่วนของเส้นตรง” ก่อนแล้วจึงกล่าวถึงสัจพจน์ “The ruler postulate” - การทำกิจกรรมสำรวจบางกิจกรรมที่ใช้ก้านมะพร้าวจะไม่สะดวก เพราะการจะทำให้ก้านมะพร้าวหักหรืองอตามที่ต้องการลำบาก - ควรมีสื่อการสอนสำเร็จรูปในกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่องความคล้าย - การหมุนรูปเรขาคณิต ผู้เรียนจะมองภาพไม่ออกกว่าเมื่อหมุนรูปเรขาคณิต ด้วยมุมขนาดต่าง ๆ แล้วภาพที่เกิดขึ้นจะอยู่ในลักษณะใด
3. วงกลม	- เนื้อหาสาระในหน่วยนี้ส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับสมบัติที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ทำให้มีความสับสนในการจำ

ตาราง 2 (ต่อ)

หน่วยที่	ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่อง
4. การสร้างในเรขาคณิต	- ข้อความในหน่วยนี้เช่นที่กล่าวว่า “จุดที่พบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยม” ซึ่งเป็นภาษาที่ยังไม่สื่อความหมายสำหรับนักศึกษาตัวอย่าง

นักศึกษาตัวอย่างได้ให้ข้อคิดเห็นในภาพรวมว่า เนื่องจากเนื้อหาเป็นมากควรเน้นเนื้อหาสำคัญบางจุดมาด้วย

ในการทดสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอน กับนักศึกษาตัวอย่างข้างต้น โดยให้ทำแบบทดสอบฉบับรวม หลังจากศึกษาหน่วยการเรียนรู้ครบทุกหน่วยในชุดการสอน แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 ด้วยการคำนวณ ตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอในภาคผนวก ง. ผลปรากฏว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวมเท่ากับร้อยละ 73.33 ซึ่งอยู่ในช่วง 72.50 ถึง 77.50 สำหรับ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ ปรากฏผลดังตาราง 3 ที่พบว่าค่าของ E_2 ในจุดประสงค์บางข้อ ต่ำกว่า 72.50 เช่น จุดประสงค์ข้อที่ 4 : อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก ของหน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต มีค่าของ E_2 เท่ากับร้อยละ 66.67 และจุดประสงค์ข้อที่ 3 : สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบในรูปสามเหลี่ยม ของหน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิตมีค่าของ E_2 เท่ากับร้อยละ 50.00

ตาราง 3 แสดงค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1/E_2 จากการทดลองเป็นรายบุคคล

หน่วยที่และข้อที่ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
หน่วยที่ 1			
เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
1	1,2	100.00	73.33/100.00
2	3,4	100.00	73.33/100.00
3	5,6	50.00	73.33/50.00
4	7,8,9	66.67	73.33/66.67
5	10,11	50.00	73.33/50.00
หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้น เกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด			
1	12,13,14	66.67	73.33/66.67
2	15,16	100.00	73.33/100.00
3	17,18,19	100.00	73.33/100.00
4	20,21,22	66.67	73.33/66.67
5	23,24	50.00	73.33/50.00
6	25,26,27,28	50.00	73.33/50.00
7	29,30	100.00	73.33/100.00
8	31,32,33,34	75.00	73.33/75.00
9	35,36,37	66.67	73.33/66.67
10	38,39	50.00	73.33/50.00
หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม			
1	40,41	100.00	73.33/100.00
2	42,43	100.00	73.33/100.00
3	44,45,46,47	50.00	73.33/50.00

ตาราง 3 (ต่อ)

หน่วยที่และข้อที่ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
4	48,49	50.00	73.33/50.00
5	50,51	100.00	73.33/100.00
หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต			
1	52,53,54	66.67	73.33/66.67
2	55,56	50.00	73.33/50.00
3	57,58	100.00	73.33/100.00
4	59,60	100.00	73.33/100.00

เมื่อมองภาพรวมของค่า E_1 และ E_2 ในรูป E_1/E_2 กล่าวได้ว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพต่ำกว่าเกณฑ์ 75/75 เพราะว่ามี E_1/E_2 บางตัวไม่เป็นไปตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ 75/75

จากการหาค่า E_2 ที่พบว่า มี E_2 ในบางจุดประสงค์ต่ำกว่าเกณฑ์ ทำให้ได้แนวทางหาข้อบกพร่องเพื่อพิจารณาปรับปรุงแก้ไขเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับจุดประสงค์นั้น อันจะทำให้ชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด โดยนำข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องที่นักศึกษาตัวอย่างให้ไว้ไปร่วมพิจารณาด้วย

5. ผลการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 1

การปรับปรุงชุดการสอนครั้งที่ 1 มีความมุ่งหมายเพื่อนำข้อคิดเห็นและข้อบกพร่องจากการใช้ชุดการสอนครั้งที่ 1 มาเป็นแนวทางการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้น โดยผู้วิจัยได้ตรวจสอบรายละเอียดและแนวทางแก้ไขของข้อบกพร่องก่อนการตัดสินใจปรับปรุงแก้ไข ผลปรากฏว่า ผู้วิจัยทำการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนตามข้อคิดเห็นของนักศึกษาตัวอย่างดังตาราง 4 โดยผลการปรับปรุงแก้ไขปรากฏในชุดการสอน

ตาราง 4 แสดงข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่องและการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนจากการทดลองเป็นรายบุคคล

ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่อง	การปรับปรุงแก้ไข
หน่วยที่ 1 เรื่องรากฐานของเรขาคณิต - ข้อความบางตอนในเรขาคณิตเชิงวงรีซึ่งขัดแย้งกับเรขาคณิตระบบยูคลิดทำให้ผู้เรียนมีความสับสนและมองภาพไม่ออก ตัวอย่างเช่น มีรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมฉากสองมุม มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดมากกว่า 90° หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด - มีความสับสนกับข้อความบางส่วน เช่น แก์อี้ที่มี 3 ขา สามารถวางอยู่บนพื้นได้โดยไม่โยกเสมอ แก์อี้ที่มี 4 ขา วางอยู่บนพื้นอาจโยกได้ในบางครั้ง - การเรียงลำดับเนื้อหาบางหัวข้อยังไม่ต่อเนื่องกัน เช่น การกล่าวถึง “ความยาวของส่วนของเส้นตรง” ก่อน แล้วจึงกล่าวถึงสัจพจน์ “The ruler postulate” - การทำกิจกรรมสำรวจบางกิจกรรมที่ใช้ ก้านมะพร้าวจะไม่สะดวกเพราะการจะทำให้ ก้านมะพร้าวหักหรืองอตามที่ต้องการลำบาก - ควรมีสื่อการสอนสำเร็จรูปในกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่อง ความคล้ายกัน - การหมุนรูปเรขาคณิต ผู้เรียนจะมองภาพไม่ออกว่าเมื่อหมุนรูปเรขาคณิตด้วยมุมขนาดต่าง ๆ แล้วภาพที่เกิดขึ้นจะอยู่ในลักษณะใด	- ใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 1 เป็นสื่อการเรียนรู้เพิ่มเติม - ใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 2 เป็นสื่อการเรียนรู้เพิ่มเติม - กล่าวถึง สัจพจน์ “The ruler postulate” ก่อน แล้วจึงกล่าวถึง “ความยาวของส่วนของเส้นตรง” - นำหลอดดูดมาแทนก้านมะพร้าว - ใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 5 เป็นสื่อการเรียนรู้เพิ่มเติม - ใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 7 เป็นสื่อการเรียนรู้เพิ่มเติม

ตาราง 4 (ต่อ)

ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับข้อบกพร่อง	การปรับปรุงแก้ไข
หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม - เนื้อหาสาระในหน่วยนี้ส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับสมบัติที่เกี่ยวกับวงกลม ทำให้มีความสับสนในการจำ หน่วยที่ 4 เรื่องการสร้างในเรขาคณิต - ข้อความในหน่วยนี้เช่นที่กล่าวว่า “จุดที่พบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยม” ซึ่งเป็นภาษาที่ยังไม่สื่อความหมายสำหรับนักศึกษาตัวอย่าง	- เพิ่มทศรูปในตอนท้ายของหน่วยการเรียนรู้ นี้ อีกทั้งยังมีโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ในชีวิตประจำวันเช่น การเดินเรือให้ปลอดภัยจากการชนแนวหินโสโครก - แก้ไขข้อความ เป็น “จุดที่ห่างจากด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากัน”

สำหรับในภาพรวม นักศึกษาตัวอย่างได้ให้ข้อคิดเห็นว่าควรเน้นเนื้อหาสำคัญบางจุดนั้น ได้แก้ไขโดยใช้เทคนิคการเน้นข้อความหรือสมบัติต่าง ๆ เช่น พิมพ์ตัวหนาและขีดเส้นใต้ให้ชัดเจน

6. ผลการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

การทดลองเป็นกลุ่มย่อย มีความมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของชุดการสอนในด้านต่าง ๆ เช่นเกี่ยวกับการทดลองใช้ชุดการสอนครั้งที่ 1 ได้ทำการทดลองกับตัวอย่างจำนวน 5 คน โดยมีขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 ผู้เรียนได้ให้ข้อคิดเห็นว่าเนื้อหาสาระในหน่วยที่ 2 นี้มีมากเกินไปและเวลาที่ให้ในการศึกษาหน่วยที่ 2 น้อยไป ส่วนในหน่วยการเรียนรู้ที่เหลืออื่น ๆ ไม่มีข้อคิดเห็น

นอกจากนั้นผู้เรียนบางคนได้ให้ข้อคิดเห็นในภาพรวมว่า ควรมีการนัดพบผู้เรียนทั้งกลุ่มอย่างน้อยสัปดาห์ละ 1 ครั้ง และให้ผู้เรียนทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกันบ้างเพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาสาระในชุดการสอนและซักถามข้อสงสัยได้

ในการทดสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอน กับกลุ่มตัวอย่างโดยให้ทำแบบทดสอบฉบับรวม หลังจากศึกษาหน่วยการเรียนรู้ครบทุกหน่วยในชุดการสอน แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 ด้วยการคำนวณตามรายละเอียดที่นำเสนอในภาคผนวก ง. ผลปรากฏว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวมเท่ากับร้อยละ 81.00 ซึ่งมีค่ามากกว่า 77.50 สำหรับ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์เฉพาะจุดประสงค์ ปรากฏผลดังตาราง 5 ที่พบว่าค่าของ E_2 ในจุดประสงค์บางข้ออยู่ในช่วง 72.50 ถึง 77.50 และค่าของ E_2 ตัวที่เหลืออื่น ๆ มากกว่า 77.50

ตาราง 5 แสดงค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1/E_2 จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

หน่วยที่และข้อที่ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
หน่วยที่ 1			
เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
1	1 , 2	80.00	81.00/80.00
2	3 , 4	90.00	81.00/90.00
3	5 , 6	80.00	81.00/80.00
4	7 , 8 , 9	80.00	81.00/80.00
5	10, 11	80.00	81.00/80.00
หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้น เกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด			
1	12 , 13 , 14	80.00	81.00/80.00
2	15 , 16	90.00	81.00/90.00
3	17 , 18 , 19	86.67	81.00/86.67
4	20 , 21 , 22	80.00	81.00/80.00
5	23 , 24	90.00	81.00/90.00
6	25 , 26 , 27, 28	75.00	81.00/75.00

ตาราง 5 (ต่อ)

หน่วยที่และข้อที่ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
7	29 , 30	80.00	81.00/80.00
8	31 , 32 , 33 , 34	75.00	81.00/75.00
9	35 , 36 , 37	86.67	81.00/86.67
10	38 , 39	80.00	81.00/80.00
หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม			
1	40 , 41	90.00	81.00/90.00
2	42 , 43	80.00	81.00/80.00
3	44 , 45 , 46 , 47	75.00	81.00/75.00
4	48 , 49	80.00	81.00/80.00
5	50 , 51	80.00	81.00/80.00
หน่วยที่ 4 เรื่องการสร้างในเรขาคณิต			
1	52 , 53 , 54	80.00	81.00/80.00
2	55 , 56	80.00	81.00/80.00
3	57 , 58	80.00	81.00/80.00
4	59 , 60	80.00	81.00/80.00

เมื่อมองภาพรวมของค่า E_1 และ E_2 ในรูป E_1/E_2 กล่าวได้ว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 เพราะว่าทุก E_1/E_2 เป็นไปตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ 75/75 อย่างไรก็ตามชุดการสอนยังมีบางส่วนที่ผู้วิจัยเห็นว่าควรแก้ไข เช่น ลักษณะการนำเสนอเนื้อหาในบางตอนที่น่าจะมีการปรับปรุงให้ดูน่าสนใจ

7. ผลการปรับปรุงแก้ไขชุดการสอนครั้งที่ 2

จากการใช้ชุดการสอนครั้งที่ 2 ผู้เรียนได้ให้ข้อคิดเห็นเฉพาะในหน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด กล่าวคือ หน่วยที่ 2 มีเนื้อหาสาระมากเกินไป และให้เวลาศึกษาน้อย นอกจากนั้นผู้เรียนยังให้ข้อคิดเห็นในภาพรวมว่าควรมีการนัดพบผู้เรียนทั้งกลุ่มและจัดกิจกรรมกลุ่มร่วมกันบ้าง ผู้วิจัยได้ตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมของข้อคิดเห็นนั้นก่อนการตัดสินใจปรับปรุงแก้ไข ผู้วิจัยได้ทำการปรับปรุงแก้ไขตามข้อคิดเห็นของผู้เรียนคือได้แนะนำในการใช้ชุดการสอนครั้งต่อ ๆ ไป ให้เพิ่มเวลาเรียนในหน่วยที่ 2 จากที่กำหนดไว้เดิม 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง เป็น 20 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง และกระตุ้นให้ผู้เรียนได้พบปะกันอย่างไม่เป็นทางการสัปดาห์ละครั้ง เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้กันในด้านเนื้อหาสาระและอื่น ๆ ทำให้เกิดแนวคิดในการแก้ปัญหาหรือข้อสงสัยที่มีอยู่ อีกทั้งได้มีโอกาสพบผู้วิจัยซึ่งอาจจะให้คำแนะนำในทางวิชาการที่สงสัยและไม่สามารถหาคำตอบเองได้

นอกจากนี้แล้วยังได้มีการปรับปรุงสิ่งต่อไปนี้ เช่น การเขียนรูปต่าง ๆ รูปแบบปกและความเหมาะสมของการจัดหน้าในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เพื่อให้ชุดการสอนน่าสนใจขึ้น

8. ผลการทดลองภาคสนาม

การทดลองภาคสนาม มีความมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของชุดการสอนได้ทำการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 30 คน ซึ่งไม่มีผู้เรียนคนใดทำแบบทดสอบก่อนเรียนผ่านเกณฑ์ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ขั้นตอนดำเนินการทดลองภาคสนามได้กล่าวแล้วในบทที่ 3

ในการทดสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอนกับกลุ่มตัวอย่างโดยให้ทำแบบทดสอบฉบับรวม หลังจากการศึกษาหน่วยการเรียนรู้ครบทุกหน่วยในชุดการสอนแล้วนำคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 ด้วยการคำนวณตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอในภาคผนวก ง. ผลปรากฏว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวมเท่ากับร้อยละ 80.38 ซึ่งมีค่ามากกว่า 77.50 สำหรับ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ ปรากฏผลดังตาราง 6 ที่พบค่า E_2 ในจุดประสงค์บางข้ออยู่ในช่วง 72.50 ถึง 77.50 และค่าของ E_2 ตัวที่เหลืออื่น ๆ มากกว่า 77.50

ตาราง 6 แสดงค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) และ E_1/E_2 จากการทดลองภาคสนาม

หน่วยที่และข้อที่ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
หน่วยที่ 1			
เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
1	1 , 2	76.50	80.38/76.50
2	3 , 4	86.50	80.38/86.50
3	5 , 6	75.00	80.38/75.00
4	7 , 8 , 9	80.00	80.38/80.00
5	10 , 11	80.00	80.38/80.00
หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้น เกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด			
1	12 , 13 , 14	83.30	80.38/83.30
2	15 , 16	88.50	80.38/88.50
3	17 , 18 , 19	89.00	80.38/89.00
4	20 , 21 , 22	76.70	80.38/76.70
5	23 , 24	91.50	80.38/91.50
6	25 , 26 , 27 , 28	75.00	80.38/75.00
7	29 , 30	78.50	80.38/78.50
8	31 , 32 , 33 , 34	76.80	80.38/76.80
9	35 , 36 , 37	81.00	80.38/81.00
10	38 , 39	75.00	80.38/75.00
หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม			
1	40 , 41	93.50	80.38/93.50
2	42 , 43	75.00	80.38/75.00
3	44 , 45 , 46 , 47	75.00	80.38/75.00

ตาราง 8 (ต่อ)

หน่วยที่และข้อที่ ของจุดประสงค์ การเรียนรู้ประจำหน่วย	ข้อสอบข้อที่	E_2	E_1/E_2
4	48 , 49	75.00	80.38/75.00
5	50 , 51	80.00	80.38/80.00
หน่วยที่ 4 เรื่องการสร้างในเรขาคณิต			
1	52 , 53 , 54	89.00	80.38/89.00
2	55 , 56	83.50	80.38/83.50
3	57 , 58	76.50	80.38/76.50
4	59 , 60	75.00	80.38/75.00

เมื่อมองภาพรวมของค่า E_1 และ E_2 ในรูป E_1/E_2 กล่าวได้ว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 เพราะว่าทุก E_1/E_2 เป็นไปตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ 75/75 อีกทั้งในขั้นตอนนี้ไม่พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับชุดการสอน ดังนั้นจึงยุติการทดลองทำให้ได้ชุดการสอนที่สามารถพัฒนาให้กลุ่มตัวอย่างเกิดการเปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนรู้ตามจุดประสงค์ที่กำหนดได้

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย ซึ่งสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองตามความสามารถ ความสนใจและความพร้อม ตามอัตราความเร็วช้าในการเรียนแตกต่างกันของแต่ละบุคคลดังมีรายละเอียดพอสังเขปดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ในการวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ นักศึกษาอาชีวศึกษา จำนวน 36 คน วิชาเอก คณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนวิชาเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ และส่วนใหญ่ของกลุ่มตัวอย่างมีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับปานกลางหรือต่ำกว่า โดยทำการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้นักศึกษา จำนวน 1 คน ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง
2. การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ใช้นักศึกษา จำนวน 5 คน ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับสูง ปานกลางและต่ำ ในอัตราส่วน 1:2:2
3. การทดลองภาคสนาม ใช้นักศึกษาจำนวน 30 คน ที่เหลือจากการทดลองครั้งที่ 1 และ ครั้งที่ 2 ตามลำดับ

การกำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย

ผู้วิจัยได้กำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย เป็น 4 ขั้นตอนคือ

1. การกำหนดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับดังนี้

1.1 ผู้วิจัยศึกษาสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตจากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์และคู่มือครู ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่จัดทำโดย สสวท. อีกทั้งศึกษาจากตำราเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา อุดมศึกษา เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.2 นำสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่ได้จากข้อ 1.1 มาสร้างแบบสอบถามผู้เชี่ยวชาญในลักษณะหัวข้อเนื้อหาสาระต่าง ๆ เพื่อกำหนดเป็นสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับครู

2. การสร้างชุดการสอนรายบุคคล ผู้วิจัยนำสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับครูซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างเป็นชุดการสอนที่มีโครงสร้าง 7 ประการ คือ บทนำ จุดประสงค์ (จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย และจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย) ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนรู้ การประเมินหลังเรียน และสื่อการเรียนรู้ ที่ส่วนใหญ่ของชุดการสอนรวบรวมไว้ในรูปเอกสารประกอบหน่วยการเรียนรู้ทำให้ได้ชุดการสอน จำนวน 4 หน่วย คือ

2.1 หน่วยที่ 1 เรื่องรากฐานของเรขาคณิต

2.2 หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด

2.3 หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม

2.4 หน่วยที่ 4 เรื่องการสร้างในเรขาคณิต

3. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตโดยผู้วิจัย ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 แบบทดสอบ คือ

3.1 แบบทดสอบประจำหน่วย เป็นแบบทดสอบอิงเกณฑ์ โดยอิงเกณฑ์ผ่านอย่างน้อย ร้อยละ 80 ของจำนวนข้อสอบทั้งหมด แบบทดสอบนี้ใช้ทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียน หน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยสร้างโดยอาศัยจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้เป็นหลัก แบ่งออกเป็น 4 ชุด ดังนี้

3.1.1 แบบทดสอบประจำหน่วยของหน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต มีจำนวนข้อสอบ 16 ข้อ

3.1.2 แบบทดสอบประจำหน่วยของหน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด มีจำนวนข้อสอบ 37 ข้อ

3.1.3 แบบทดสอบประจำหน่วยของหน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม มีจำนวนข้อสอบ 18 ข้อ

3.1.4 แบบทดสอบประจำหน่วยของหน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างใน
เรขาคณิต มีจำนวนข้อสอบ 11 ข้อ

3.2 แบบทดสอบฉบับรวมเป็นแบบทดสอบอิงกลุ่ม ซึ่งใช้วัดพฤติกรรมกา
เรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างหลังเรียนชุดการสอนทั้งหมด สร้างโดยอาศัยจุดประสงค์การเรียนรู้
ประจำหน่วยเป็นหลัก มีจำนวนข้อสอบทั้งหมด 60 ข้อ

4. การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคล ผู้วิจัยได้นำชุด
การสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง โดยกำหนดการตรวจสอบหาข้อบกพร่อง
และประสิทธิภาพของชุดการสอน 3 ครั้ง ดังนี้

4.1 การทดลองเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยนำชุดการสอนให้นักศึกษา จำนวน 1 คน
ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 เรียนด้วยตนเองทีละหน่วยการเรียนและสอบถาม
ความคิดเห็น เพื่อหาข้อบกพร่องของชุดการสอนจากผู้เรียนเมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยและ
เมื่อผู้เรียนเรียนจบทุกหน่วยจึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบฉบับรวม เพื่อนำข้อมูลไป
หาประสิทธิภาพของชุดการสอน

4.2 การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ภายหลังการปรับปรุงแก้ไข ผู้วิจัยนำชุดการ
สอนให้นักศึกษาจำนวน 5 คน ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2539 เรียนด้วยตนเองพร้อม
กันทีละหน่วยการเรียน และสอบถามความคิดเห็นเพื่อหาข้อบกพร่องของชุดการสอนจากผู้
เรียนเมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยและเมื่อผู้เรียน เรียนจบทุกหน่วยจึงทำการทดสอบด้วยแบบ
ทดสอบฉบับรวม เพื่อนำข้อมูลไปหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

4.3 การทดลองภาคสนาม ภายหลังการปรับปรุงแก้ไข ผู้วิจัย นำชุดการสอน
ให้นักศึกษา จำนวน 30 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2539 เรียนด้วยตนเองพร้อมกันที่
ละหน่วย เมื่อผู้เรียนเรียนจบทุกหน่วยการเรียนจึงทำการสอบด้วยแบบทดสอบฉบับรวม
เพื่อนำข้อมูลไปหาประสิทธิภาพของชุดการสอน

สรุปผลการวิจัย

จากการดำเนินการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์
การสอนทางเรขาคณิตน้อย ด้วยขั้นตอนการวิจัย 4 ขั้นตอน ดังได้กล่าวมาแล้ว ทำให้ได้ชุด
การสอนที่ต้องการ โดยชุดการสอนนี้ได้ผ่านการทดลองเพื่อตรวจสอบแก้ไขและหา
ประสิทธิภาพของชุดการสอน ทั้งหมด 3 ครั้ง ซึ่งปรากฏผลดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยได้พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับภาษาในเนื้อหาและการนำเสนอเนื้อหาในบางตอน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของชุดการสอนพบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 เพราะว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวมเท่ากับร้อยละ 73.33 และ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์เฉพาะจุดประสงค์มีค่าอยู่ในช่วง 50.00 ถึง 100.00

2. การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ภายหลังจากการปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 1 พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอเนื้อหาในบางตอน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของชุดการสอนพบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 เพราะว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวมเท่ากับร้อยละ 81.00 และ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์เฉพาะจุดประสงค์มีค่าอยู่ในช่วง 75.00 ถึง 90.00

3. การทดลองภาคสนาม ภายหลังจากการปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 2 ในขั้นตอนนี้ไม่พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับชุดการสอน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของชุดการสอนพบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 เพราะว่า E_1 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวมเท่ากับร้อยละ 80.38 และ E_2 ที่เป็นค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์เฉพาะจุดประสงค์มีค่าอยู่ในช่วง 75.00 ถึง 93.50 ดังนั้น จึงยุติการทดลอง

การอภิปรายผล

จากการพัฒนาจนได้ชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิต สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย โดยในการทดลองครั้งสุดท้ายซึ่งเป็นการทดลองภาคสนามกับกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 30 คน พบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น 75/75 กล่าวคือ ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบฉบับรวมของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดเป็น 75 หรือมากกว่า แสดงว่าการนำเสนอเนื้อหาสาระในภาพรวมของชุดการสอนมีประสิทธิภาพที่สามารถพัฒนาผู้เรียนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดได้ และร้อยละของคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบฉบับรวมของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดในแต่ละจุดประสงค์เป็น 75 หรือมากกว่า แสดงว่าการนำเสนอเนื้อหาสาระในส่วนหัวเรื่องย่อยของชุดการสอนมีประสิทธิภาพที่สามารถพัฒนาผู้เรียนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดได้ ซึ่งอาจเป็นเพราะผู้วิจัยได้ดำเนินการต่าง ๆ มาดังนี้

1. ชุดการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีการแบ่งเนื้อหาสาระเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อย ๆ จบในตัวเองเรียงลำดับต่อเนื่องกันจากง่ายไปหายาก มีการกำหนดจุดประสงค์ (จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยและจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย) ให้ผู้เรียนได้ทราบทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตรงตามเนื้อหาและจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ในชุดการสอนอย่างครบถ้วน และเมื่อผู้เรียนได้เรียนเนื้อหาสาระในหน่วยการเรียนรู้ใดจบแล้วก็สามารถตรวจสอบความเข้าใจในบทเรียน จากการทำกิจกรรมเสริมหรือแบบฝึกหัดท้ายบทในแต่ละหน่วยซึ่งผู้เรียนสามารถตรวจคำตอบได้ทันที ทำให้ผู้เรียนทราบความก้าวหน้าในการเรียนของตนเอง ซึ่งเป็นการเสริมแรงในการเรียนต่อไป ดังคำกล่าวของสกินเนอร์ที่ว่า "การกระทำใดถ้าได้รับการเสริมแรงย่อมมีแนวโน้มที่จะแสดงพฤติกรรมนั้นเพิ่มขึ้น" (พรณี ข.เจนจิต. 2538 : 288-298) อีกทั้งผู้วิจัยกระตุ้นให้ผู้เรียนได้พบปะกันอย่างไม่เป็นทางการสัปดาห์ละครั้งเพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้กันในด้านเนื้อหาสาระและอื่น ๆ ทำให้ได้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหา หรือข้อสงสัยที่มีอยู่ ถ้าผู้เรียนคนใดยังมีปัญหาที่ไม่เข้าใจก็สามารถซักถามจากผู้เรียนคนอื่น ๆ ก็จะทำให้เข้าใจดีขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ยัง (Young. 1972 : 630) ที่กล่าวว่า "ผู้เรียนสามารถเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ จากกันและกันได้ดี เนื่องจากภาษาที่ใช้สื่อความหมายอยู่ในระดับเดียวกัน" ลักษณะของชุดการสอนและกิจกรรมต่าง ๆ ข้างต้นสอดคล้องกับคำกล่าวของเวสเลย์ (Wesley. 1950 : 237) ที่ได้กล่าวถึงลักษณะของแบบเรียนที่ดีไว้ว่า ควรมีเนื้อหาสาระ คำอธิบาย รูปภาพ กิจกรรม แบบฝึกหัดสอดคล้องกับจุดประสงค์ของวิชานั้น ๆ อีกทั้งมีการจัดระเบียบวางลำดับบทเรียนก่อนหลังตามหลักวิชาเพื่อความสะดวกต่อการเรียนการสอน มีการแบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วย มีเนื้อหาวิชาเหมาะสมที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจในแต่ละหน่วยได้ในเวลาอันสมควร มีเวลาทบทวนและหาความรู้เพิ่มเติมได้

2. ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยของชุดสอนนอกจากนำเสนอเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตโดยตรงแล้วยังมีเนื้อหาสาระที่เป็นความรู้เสริมทางเรขาคณิต และความรู้ทั่วไปซึ่งจัดอยู่ในลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ กิจกรรมเสริม กิจกรรมสำรวจ มุมน่าคิด มุมปริศนา และมุมชอกแซก ในลักษณะเนื้อหาที่เสริมความรู้ทางเรขาคณิตทั่ว ๆ ไป ตลอดจนสาระที่ทำให้ผ่อนคลายความเครียดแทรกอยู่ในลักษณะของมุมปล่อยเก๋าก (มุมตลกขบขัน) และการ์ตูนที่ช่วยเพิ่มบรรยากาศการเรียนรู้ให้น่าสนใจ

3. ชุดการสอนได้เน้นความเข้าใจมโนคติของเนื้อหา โดยให้ผู้เรียนได้ทำกิจกรรมสำรวจ ได้ใช้สื่อการสอนทั่วไปและสื่อการสอนสำเร็จรูป เพื่อค้นหาข้อเท็จจริงแล้วจึงสรุปเป็นมโนคติ ทำให้ผู้เรียนเรียนรู้มโนคติได้อย่างง่ายและถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าว

ของบรูเนอร์ที่ว่า "เราสามารถจัดการเรียนการสอนเนื้อหาวิชาใด ๆ ให้กับเด็กในช่วงใดของชีวิตได้ถ้ารู้จักเลือกวิธีการที่เหมาะสม" (Bruner, 1966 : 23-30) และสอดคล้องกับคำกล่าวของ สกินเนอร์ ที่กล่าวว่า "การเรียนรู้เกิดจากผู้เรียนเป็นผู้ลงมือกระทำเอง" (พรณี ช.เจนจิต 2538 : 204-288)

4. การเรียนโดยใช้ชุดการสอน ผู้เรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองตามลำพัง ทำให้เกิดความสบายใจ ความรู้สึกที่เป็นอิสระ โดยไม่ถูกรุ้ และคำวิจารณ์จากเพื่อน อีกทั้งผู้เรียนสามารถนำชุดการสอนไปศึกษาในสถานที่ใดที่หนึ่งตามความสามารถความพร้อม และด้วยอัตราเร็วของแต่ละบุคคล ซึ่งผู้เรียนที่เรียนได้เร็วก็สามารถศึกษาล่วงหน้าไปก่อนได้ ส่วนผู้เรียนที่เรียนได้ช้าก็สามารถทบทวนบทเรียนได้เองจนเกิดความรู้ การเรียนในลักษณะดังกล่าวเป็นการส่งเสริมให้ผู้เรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ซึ่งสามารถเรียนได้ตลอดชีวิต ฝึกหัดให้มีความรับผิดชอบ ความกระตือรือร้น การพึ่งตนเองและความเชื่อมั่นในตัวเอง ซึ่งสอดคล้องกับความเห็นของสกินเนอร์เกี่ยวกับบทเรียนสำเร็จรูปว่า "การเรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปทำให้ผู้เรียนได้รับการเสริมแรงทันทีที่ทำงานได้ตามลำพังและการพึ่งตนเอง" (พรณี ช.เจนจิต. 2538 : 311; อรพรรณ พรสีมา. 2530 : 7)

5. ในหน่วยการเรียนย่อยบางหน่วยของชุดการสอนที่มีเนื้อหาสาระจำนวนมาก และสับสนจะมีบทสรุปเนื้อหาสาระเหล่านั้นไว้ในตอนท้ายของหน่วยการเรียนย่อยเพื่อให้ผู้เรียนสามารถทบทวนเนื้อหาสาระที่เรียนได้เร็วขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับความเห็นของ ฌูรท์ สุทธิจิตต์ เกี่ยวกับการเสนอเกณฑ์ในการวิเคราะห์คุณภาพทางวิชาการของแบบเรียนที่ดี ว่าควรมีบทสรุปไว้ท้ายบทเรียนอย่างสม่ำเสมอ (ฌูรท์ สุทธิจิตต์. 2520 : 179-183)

ข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยครั้งนี้ สรุปเป็นข้อเสนอแนะในการนำไปใช้และในการวิจัยครั้งต่อไป ดังนี้

1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

1.1 เนื่องจากชุดการสอนรายบุคคล สามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ ดังนั้นจึงควรส่งเสริมให้มีการสร้างและการใช้ชุดการสอนรายบุคคลให้แพร่หลายต่อไป ทั้งนี้ นอกจากชุดการสอนรายบุคคลจะสามารถทำให้ผู้เรียน มีความรู้ได้แล้วยังทำให้ผู้เรียนมีความเชื่อมั่นในตนเอง มีความรับผิดชอบ ความกระตือรือร้นและรู้วิธีการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ซึ่งเป็นแนวทางในการศึกษาตลอดชีวิต (พรณี ช. เจตจิต. 2538 : 311 ; อรพรรณ

พรสิมา. 2530 : 7) อีกทั้งในอนาคตการจัดการเรียนการสอนจะต้องสอนให้ผู้เรียนรู้จักวิธีการแสวงหาความรู้มากกว่าที่จะให้เนื้อหาสำเร็จรูปเลย ทำให้ผู้เรียนต้องเรียนด้วยตนเองจากสื่อต่าง ๆ มากขึ้น ชุดการสอนก็เป็นแนวทางเลือกหนึ่งซึ่งมีความสมบูรณ์ในตัวพกพาได้สะดวกและสามารถเรียนด้วยตนเอง

1.2 ผู้ที่จะนำชุดการสอนรายบุคคลนี้ไปใช้เรียนด้วยตนเอง ควรดำเนินการตามลำดับดังนี้

1.2.1 ศึกษาวิธีการใช้จากคำชี้แจงการใช้อย่างละเอียดก่อนเพื่อให้เข้าใจลักษณะและองค์ประกอบที่เป็นโครงสร้างของชุดการสอนรายบุคคล

1.2.2 เนื่องจากการนำชุดการสอนไปเรียนด้วยตนเอง ไม่ได้จำกัดอยู่เฉพาะผู้ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย แต่อาจเป็นครูหรือนิสิตนักศึกษาทั่วไปที่ต้องการเพิ่มความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ดังนั้นเพื่อให้ผู้เรียนได้แน่ใจว่าตนเองมีความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตตามที่มิในชุดการสอนเพียงใด จึงควรทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบฉบับรวม ถ้าได้คะแนนรวมไม่ถึงร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม ควรศึกษาชุดการสอนนั้น โดยเริ่มศึกษาจากหน่วยที่ 1 ก่อนและปฏิบัติตามข้อกำหนด ในหน่วยการเรียนทุกขั้นตอน ถ้าได้คะแนนรวมสูงกว่าร้อยละ 80 ก็อาจไม่จำเป็นต้องศึกษาชุดการสอน เพราะถือว่ามีความรู้ในชุดการสอนนี้แล้ว

1.3 หากการใช้ชุดการสอนรายบุคคลนี้ให้ได้ผลดี ผู้เรียนควรมีเวลาเพียงพอในการศึกษาชุดการสอนแต่ละหน่วยซึ่งหน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต ใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด ใช้เวลาเรียนประมาณ 20 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลมใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต ใช้เวลาเรียนประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง และหากจะได้ผลดียิ่งขึ้นไปอีกก็ควรจัดให้ผู้เรียนมีการพบปะกันอย่างไม่เป็นทางการประมาณสัปดาห์ละครั้ง เพื่อให้ได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้กันในด้านเนื้อหาสาระและกิจกรรมอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

1.4 นอกจากผู้เรียนจะใช้ชุดการสอนเพื่อการเรียนรู้โดยตรงแล้วยังอาจใช้เป็นแหล่งค้นคว้าหรือเสริมความรู้ได้ด้วย อีกทั้งครูอาจใช้ชุดการสอนนี้เป็นเอกสารประกอบการสอนหรือคู่มือครูเพื่อการสอนเรขาคณิตกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นได้เป็น

อย่างดี โดยเฉพาะกิจกรรมสำรวจที่มีอยู่ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยบางหน่วย และสื่อการสอนสำเร็จรูปบางชุดเช่น สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 3 และ 4 นำไปใช้เพื่อแสดงสมบัติของเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันและแสดงสมบัติของขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่รวมกันแล้วเท่ากับ 180° ซึ่งครูสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการสอนนักเรียนได้

2. ข้อเสนอในการวิจัยต่อไป

2.1 ควรนำชุดการสอนรายบุคคลนี้ไปฝึกอบรบครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนขยายโอกาสทางการศึกษาขั้นพื้นฐานโดยการมอบชุดการสอนให้ครูเรียนด้วยตนเองตามสถานที่ใดที่หนึ่งตามความเหมาะสม เมื่อครูเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้ จึงทำการทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบทดสอบฉบับรวมเพื่อดูผลที่เกิดขึ้นและปรับปรุงแก้ไข

2.2 ชุดการสอนรายบุคคลนี้พัฒนาขึ้นได้รับการทดสอบประสิทธิภาพเฉพาะในเรื่องความรู้ความเข้าใจเนื้อหาสาระหลังการศึกษาชุดการสอนจบเท่านั้น ไม่ได้ศึกษาประสิทธิภาพที่มีผลต่อเนื่องไปถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการสอน การปฏิบัติและเจตคติต่อการสอน ดังนั้น ผู้สนใจอาจวิจัยให้ทราบถึงประสิทธิภาพของชุดการสอนในประเด็นดังกล่าว

2.3 ในการวิจัยครั้งนี้ ชุดการสอนรายบุคคลได้สร้างขึ้นตามกรอบแนวคิดสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เฉพาะในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้แต่ไม่ได้เกี่ยวกับการคำนวณหาความยาว ขนาดของมุมพื้นที่และปริมาตรของรูปเรขาคณิตโดยตรง จึงควรมีการศึกษาสมรรถภาพของครูคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหาอื่น ๆ เพื่อเป็นกรอบแนวคิดสำหรับการสร้างชุดการสอนต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรองทิพย์ พงษ์ลิมศรี. การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการ. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2535. อัดสำเนา.
- กิดานันท์ มลิทอง. เทคโนโลยีการศึกษาร่วมสมัย. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท เอ็ดดิสันเพรสโปรดักส์, 2536.
- โกสุม เจริญรว. “การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเทคโนโลยีและนวัตกรรมทางการศึกษาของครูและบุคลากรทางการศึกษาประจำการที่ศึกษาด้วยตนเองจากชุดการสอนเอกัตภาพ,” ใน ประมวลผลงานวิจัยของบุคลากรกรมการฝึกหัดครู. หน้า 144. ม.ป.ท., ม.ป.ป.
- โควิน คลังแสง. การสร้างชุดพัฒนาดตนเอง เรื่อง เทคนิคการจูงใจในการทำงานสำหรับผู้บริหารวิชาการในสถานศึกษา สังกัดกรมอาชีวศึกษา. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ด. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2536. อัดสำเนา.
- จันทร์ฉาย เตมียาการ. การสอนรายบุคคล ภาควิชาเทคโนโลยีการศึกษา : มหาวิทยาลัย เชียงใหม่, 2529. อัดสำเนา.
- จินตนา ค้วงแพง. “การสร้างชุดการสอนสำหรับห้องเรียนแบบศูนย์การเรียนวิชาสอนภาษาไทยเรื่องการสอนภาษาไทยแก่เด็กประถมศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาตรีทางการศึกษา สาขาวิชาประถมศึกษา พุทธศักราช 2524,” ใน ประมวลผลงานวิจัยของบุคลากรกรมการฝึกหัดครู. หน้า 187. ม.ป.ท., ม.ป.ป.
- ฉลองชัย สุรวฒนบุรณ์. การเลือกและการใช้สื่อการสอน ภาควิชาเทคโนโลยีการศึกษา : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2528. อัดสำเนา.
- ชลียา ลิ้มปิยากร. เทคโนโลยีการศึกษา. กรุงเทพฯ : พิษณุการพิมพ์, 2536.
- ชัยวิทย์ จิตเมตตา. “ข่าวการศึกษา,” ใน การศึกษา กทม. 17(12) : 45; กันยายน 2537.
- ไชยยศ เรืองสุวรรณ. เทคโนโลยีทางการศึกษา : หลักการและแนวปฏิบัติ. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์วัฒนาพานิช, 2526.
- ณรุทธิ์ สุทธิจิตต์. การวิเคราะห์เนื้อหาและการประเมินแบบเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน ชาวเขา. วิทยานิพนธ์ ก.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520. อัดสำเนา.
- นันทิยา จิตภิรมย์. การศึกษาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนที่ใช้สอนเรื่องพหุนามใน ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2532. อัดสำเนา.

- นภาพร สิงห์ทัด. การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลเพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางการวิจัยแก่ครูและบุคลากรประจำการ. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ค. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2531. อัดสำเนา.
- บุญชม ศรีสะอาด. การพัฒนาการสอน. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น, 2537.
- _____. การวิจัยเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น, 2535.
- บุญเชิด ภิญโญนันต์พงศ์. การทดสอบแบบอิงเกณฑ์ : แนวคิดและวิธีการ. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์โอเคียนสโตร์, 2527.
- ประนอม โอทกานนท์. ชุดการเรียนรู้ด้วยตนเองเพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับพยาบาลในการสนับสนุนงานสาธารณสุขมูลฐาน พุทธศักราช 2527. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ค. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.
- พรรณี ช. เจริญจิต. จิตวิทยาการเรียนการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัทคอมแพคท์พริ้นท์ จำกัด, 2538.
- พลสันต์ โพธิ์ศรีทอง. “รูปแบบและกระบวนการฝึกอบรมเพื่อพัฒนาครูประจำการ,” ใน การศึกษาแห่งชาติ. 26(4) : 35-37; เมษายน-พฤษภาคม 2535.
- /มหาวิทยาลัย, ทบวง. ชุดการเรียนรู้การสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตวัสดุอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย, 2524.
- ยุพิน พิพิธกุล. การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชามัธยมศึกษา. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2530. อัดสำเนา
- รัชนี้เพ็ญ เทพหัสดิน ณ อยุธยา. การสร้างชุดการสอนวิชาภาษาอังกฤษเพื่อการสื่อสารด้านการท่องเที่ยว. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2533. อัดสำเนา
- วิชัย วงษ์ใหญ่. พัฒนาหลักสูตรและการสอนมิติใหม่. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : ชเนศวรการพิมพ์, 2525.
- ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย. คู่มือและหลักสูตรการศึกษานานาชาติ ป.ศ. 2530. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2530.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. การวิเคราะห์รูปแบบนวัตกรรมการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพระดับมัธยมศึกษา. กองวิจัยการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, 2535.
- _____. คู่มือและหลักสูตรการศึกษานานาชาติ ป.ศ. 2536. กรุงเทพฯ : กรมการฝึกหัดครู กระทรวงศึกษาธิการ, 2536.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. โครงการสภาพแวดล้อมห้องเรียน ระยะที่ 1. กรมการฝึกหัดครู
กระทรวงศึกษาธิการ, 2529.

_____. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย, 2535.

สงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี, มหาวิทยาลัย. คู่มือการศึกษา 2531. สงขลา :
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 2531.

สมคิด เครือรัตน์. "การสร้างชุดการสอนวิชาการอ่านทั่วไปสำหรับนักศึกษาวิทยาลัยครู,"
ใน ประมวลผลงานวิจัยของบุคลากร กรมการฝึกหัดครู. หน้า 281. ม.ป.ท.,
ม.ป.ป.

สมพล เล็กสกุล. เอกสารประกอบอบรมครู. กรุงเทพฯ : ม.ป.ท., ม.ป.ป.

สมพล เล็กสกุลและสุสิทธิ์ สุกรีระ. เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ :
ม.ป.ท., 2538.

สสวท. โครงการสำรวจความต้องการเกี่ยวกับการเข้ารับการอบรมวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
สังกัดสำนักงานการประถมศึกษา. กรุงเทพฯ : สสวท., 2536.

สันศักดิ์ ภิบาลสุขและพิมพ์ใจ ภิบาลสุข. การใช้สื่อการสอน. กรุงเทพฯ : พิธีพัฒนาการ
พิมพ์, 2525.

สุพจน์ ไชยสังข์. การสำรวจระดับความคิดและความสามารถในการพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิต
ของนักเรียนไทย. ม.ป.ท., ม.ป.ป.

สุรางค์ ไคว์ตระกูล. จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,
2533.

สำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดราชบุรี. รายงานผลการสำรวจครูคณิตศาสตร์ในโรงเรียน
ขยายโอกาสทางการศึกษาขั้นพื้นฐานจังหวัดราชบุรี. เขตการศึกษา 5 : ม.ป.ท., ม.ป.ป.

สำนักงานศึกษาธิการเขต 5 ประเมินการใช้หลักสูตรของสถานศึกษา ชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 3
และ 6 ปีการศึกษา 2535. เขตการศึกษา 5 ศูนย์การศึกษานอกโรงเรียนภาคกลาง,
2535.

อธิพร ศรียมก. "การประเมินสื่อประสม," ชุดวิชาสื่อการสอนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
เล่มที่ 3 หน่วยที่ 11-15. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช,
2539.

อภิญญา คุณเลิศดี. ปัญหาการสอนของครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในเขต 9.
ปริญญาณิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร,

2534. อัดสำเนา.

อรพรรณ พรสีมา. เทคโนโลยีทางการสอน. กรุงเทพฯ : โอ.เอส.พรินต์ เฮ้าส์, 2530.

_____. เอกสารประกอบการสอนวิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา. ภาควิชาเทคโนโลยี
ทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน, 2530.

อารีย์ คำปล้อง. การสอนแบบปฏิบัติการเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับวงกลม. ปริญญานิพนธ์
กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2536. อัดสำเนา.

Bailey, Judith Greene. "Development of a Competency - Based Instructional Module for
Vocational Leadership Personnel : Manage Selceted Interpersonal Conflict,"
Dissertation Abstracts International. 44(7) : 2124-A; January, 1984.

Bell, Frederick H. Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools). 2nd ed.
Iowa : Wm. C. Brown Company Publishers, 1981.

Bruner, Jerome Seymour. The process of education. Cambridge : Harvard University
Press, 1966.

Clements, Douglas H. and Battista, Michael T. "Geometry and Spatial Reasoning,"
Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Grouws, Douglas
A, p. 421. New York : Macmillan Publishing Company, 1992.

Fennema, Elizabeth and Franke, Megan L. "Teachers' Knowledge and its Impact,"
Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Grouws, Douglas
A. p. 151. New York : Macmillan Publishing Company, 1992.

Gagne, Robert M. and Briggs Leslie J. Principles of Instructional Design. 2nd ed. New
York : Holt Rinehart and Winston, 1979.

Good, Carter V. Dictionary of Education. rd ed. New York : Mc Graw-Hill. Book
Company Inc., 1973.

Henderson, Elizabeth Marie. "Preservice Secondary Mathematics Teachers' Geometric
Thinking and Their Flexibility in Teaching Geometry," Dissertation Abstracts
International. 49(9) : 2571-A; March, 1989.

Jeon, Pyung Kook. "Geometry Problem Solving of Korean Middle School Students : an
Analysis of Representation and Transfer," Dissertation Abstracts International.
49 (6) : 1410-A; December, 1988.

- Kemp, Jerrold E. and Smellie, Don C. Planning Producing and Using Instructional Media. 6th ed. New York : Harper & Row Publishers Inc., 1989.
- Kipfinger, Mary Elizabeth. "A Comparison of Two Methods of Teaching Geometry at The Middle school Level as Influenced by The Van Hiele Model," Dissertation Abstracts International. 28(4) : 488-A; November, 1990.
- Langstaff, Anne Louise. "Development and Evaluation of on Auto - Instructional Media Package for Teacher Education," Dissertation Abstracts International. 33 : 1566-A ; October, 1973.
- NCTM. Professional Standard for Teaching Mathematics. New York : NCTM, 1991.
- Post, Thomas R. Teaching Mathematics in Grades K-8. Boston : Allyn and Bacon Inc., 1988.
- Sidhu, Kulbir Singh. The Teaching of Mathematics. 3rd ed. New Delhi : Sterling Printers, 1981.
- Simmons, Malcolm. The effective Teaching of Mathematics. New York : Longman Publishing, 1993.
- Thomas, David. V. Teenagers, Teachers, and Mathematics. Boston : Allyn and Bacon Inc., 1992.
- Thompson, Edward Otis. "Three Methods of Instruction in High School Geometry and The Effecton They have on Achievement, Retention and Attitude," Dissertation Abstracts International. 53(8) : 2724-A; Febuary, 1993.
- Wallace, Martha Louise Tibbetts. "How do Teachers Know Geometry? A Multi-Case study of Seconary School Geometry Teachers' Subject-Matter and Pedagogical Content Knowledge," Dissertation Abstracts International. 51(12) : 4052-A; June, 1991.
- Wesley, Edgar Bruce. Teaching Social Studies in High School. Boston : B.C. Health, 1950.
- Young, Carolyn. "Team Learning," The Arithmetic Teacher. December, 1972.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

รายชื่อ	สถานที่ทำงาน
1. รศ.สุเทพ จันทรสมศักดิ์	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
2. อ.สุวรรณา คล้ายกระแสน	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
3. ผศ.ดร.สุพจน์ ไชยสังข์	สถาบันราชภัฏจันทรเกษม
4. ผศ.ฉวีวรรณ แก้วไพเราะ	สถาบันราชภัฏสวนสุนันทา
5. อ.บุสิทธิ์ สุภธีระ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

ภาคผนวก ข

แบบสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

**แบบสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับสมรรถภาพของครู
ด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น**

จุดประสงค์

การศึกษาครั้งนี้ จะเป็นการหาข้อมูลไปใช้ในการกำหนดกรอบสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับครูสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครู ที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย เพื่อนำไปสร้างเป็นชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิต

คำชี้แจง

สมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต หมายถึง ความรู้ความสามารถและทักษะด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับครู เพื่อให้สามารถปฏิบัติการสอนด้านเรขาคณิตตามเนื้อหาในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ที่จัดทำโดย สสวท. ได้อย่างมีประสิทธิภาพและสอดคล้องกับจุดประสงค์ของหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ข้อมูลที่นำมาสร้างแบบสอบถามฉบับนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับเรขาคณิตและการสอนเรขาคณิต โดยคำนึงถึงการเตรียมความรู้พื้นฐานเบื้องต้นและความรู้ในระดับสูงบางหัวข้อทางเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับครูแล้วได้สรุปเป็นร่างสมรรถภาพของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต เพื่อให้สมรรถภาพดังกล่าวได้รับการตรวจสอบให้มีความสอดคล้องและเหมาะสมตามความเห็นของท่านในฐานะผู้เชี่ยวชาญ ผู้วิจัยจึงใคร่ขอความกรุณาจากท่านได้โปรดแสดงความคิดเห็นว่าสมรรถภาพใดมีความจำเป็น สมรรถภาพใดไม่มีความจำเป็นสำหรับครูผู้สอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยกาเครื่องหมาย (/) ลงในช่องที่ตรงกับความเห็นของท่าน ในกรณีที่ท่านเห็นว่าควรมีสมรรถภาพอื่น ๆ เพิ่มเติมนอกจากที่นำเสนอมา ขอได้โปรดระบุในช่องว่างที่กำหนดให้ในแต่ละข้อสำหรับสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ตามรายละเอียดของแบบสอบถามที่แนบมาต่อท้ายนี้

ผู้วิจัยหวังว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี

ขอขอบพระคุณในความกรุณาของท่าน

(นายโกมล ไพศาล)

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความเห็น		
	แน่ใจว่า จำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น
1. รากฐานของเรขาคณิต.....			
1.1 พัฒนาการของเรขาคณิต เชิงประวัติศาสตร์			
1.2 ระบบสัจพจน์			
1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยูคลิด			
1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของยูคลิด			
1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่นำไปสู่ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตนอก ระบบยูคลิด			
1.6 (สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลักเรื่องรากฐานของเรขาคณิต)			
.....			
.....			
.....			
.....			
2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด.....			
2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม			
2.2 ความเท่ากันทุกประการ			
2.3 เส้นขนาน			
2.4 รูปหลายเหลี่ยม			
2.5 ความคล้ายกัน			
2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบยูคลิด			
2.7 ทฤษฎีบทของเมเนเลอัสและทฤษฎีบท ของเซวา			

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความเห็น		
	แน่ใจว่า จำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น
2.8 (สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลัก เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด)			
.....			
.....			
.....			
3. วงกลม.....			
3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน และสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม			
3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม			
3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลาง และคอร์ดของวงกลม			
3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัส			
3.5 (สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลัก เรื่องวงกลม).....			
.....			
.....			
.....			
4. การสร้างในเรขาคณิต			
4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน			
4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม			
4.3 การสร้างวงกลมและรูปหลายเหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าบางรูป			
4.4 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่ เท่ากับ รูปหลายเหลี่ยม			

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความเห็น		
	แน่ใจว่า จำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น
4.5 ปัญหาการสร้างที่มีชื่อเสียง 3 ข้อ			
4.6 .. (สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลักเรื่องการสร้างใน เรขาคณิต).....			
5. (สมรรถภาพหลักอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม)			
5.1 (สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม ในสมรรถภาพหลักที่ระบุมา)			
5.2			
5.3			
5.4			
5.5			

ภาคผนวก ค

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

- แบบทดสอบประจำหน่วย
- แบบทดสอบฉบับรวม
- แนวคำตอบ

แบบทดสอบประจำหน่วย**หน่วยที่ 1****เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต****คำชี้แจง**

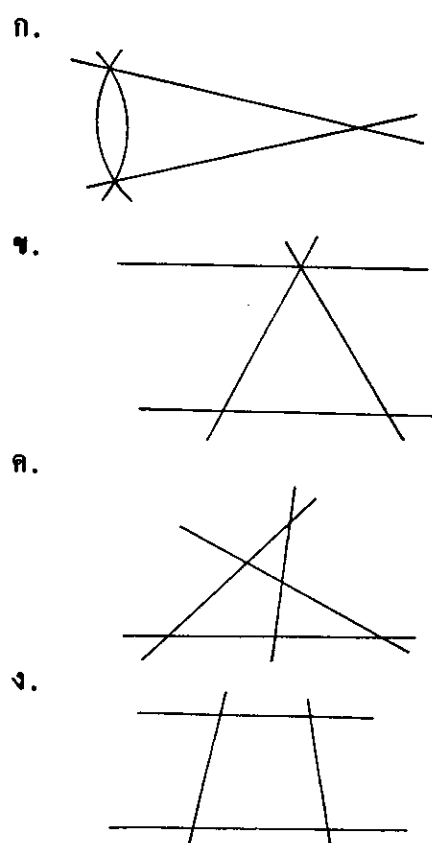
1. ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 16 ข้อ
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ให้ตรงกับตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ
3. ไม่ควรเสียเวลาในการทำข้อใดข้อหนึ่งนานเกินไป ถ้าคิดไม่ออกควรข้ามไปทำข้ออื่น ๆ ก่อน เมื่อมีเวลาค่อยย้อนกลับมาคิดใหม่
4. เมื่อทำเสร็จแล้วถ้ามีเวลาเหลือควรตรวจสอบอีกครั้งก่อนส่งกระดาษคำตอบ
5. ให้ส่งกระดาษคำตอบพร้อมข้อสอบ

หมายเหตุ

ห้ามเขียนในข้อสอบ

1. เรขาคณิตเมื่อประมาณ 4,000 ปีก่อน
คริสต์ศักราชเป็นเรขาคณิตแบบใด
 - ก. เรขาคณิตวิเคราะห์
 - ข. เรขาคณิตเชิงระบบ
 - ค. เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด
 - ง. เรขาคณิตเชิงประสบการณ์
2. ข้อใดไม่ใช่เป้าหมายของการพัฒนา
เรขาคณิตของชาวบาบิโลเนีย
และอียิปต์โบราณ
 - ก. เป็นเครื่องมือใช้สอย
 - ข. เป็นการประเทืองปัญญา
 - ค. ช่วยแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน
 - ง. การแบ่งปันและการแลกเปลี่ยนสิ่งของ
3. ข้อความใดซึ่งได้จากการให้เหตุผลแบบ
นิรนัย
 - ก. ทฤษฎีบท
 - ข. บทนิยาม
 - ค. สัจพจน์
 - ง. คำอธิบาย
4. ถ้าเปรียบเรขาคณิตเป็นเกมกีฬาแล้ว
สิ่งใดเปรียบได้กับกติกาการเล่นกีฬา
 - ก. ทฤษฎีบท
 - ข. สัจพจน์
 - ค. บทนิยาม
 - ง. บทแทรก
5. กำหนดสัจพจน์ชุดหนึ่งดังนี้
 1. เส้นทุกเส้นประกอบด้วยจุด
 2. ถ้า l_1 และ l_2 เป็นเส้นจะมีจุด ๆ
เดียวที่อยู่บนเส้น l_1 และ l_2
 3. จุดแต่ละจุดอยู่บนเส้น 2 เส้น
 4. มีเส้นทั้งหมด 4 เส้น

รูปใดข้างล่างนี้ที่เป็นตัวแทนของสัจพจน์
ชุดดังกล่าว



6. ข้อใดไม่ใช่เนื้อหาสาระที่มีในหนังสือ
เอลิเมนต์ของยูคลิด
 - ก. พีชคณิต
 - ข. เรขาคณิต
 - ค. ทฤษฎีเซต
 - ง. ทฤษฎีจำนวน

7. ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

- ก. ยุคลิตเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก
- ข. หนังสือเอลิเมนต์มีทั้งหมด 13 เล่ม
- ค. หนังสือเอลิเมนต์เป็นตำราทางเรขาคณิตเล่มแรกของโลก
- ง. เนื้อหาสาระในหนังสือเอลิเมนต์ยุคลิตได้คิดขึ้นมาเองทั้งหมด

8. ข้อใดไม่ใช่ส่วนประกอบของหนังสือเอลิเมนต์

- ก. คำนิยาม
- ข. บทนิยาม
- ค. แอ็กเซียม
- ง. สัจพจน์

9. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่ลักษณะของสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิต

- ก. มีถ้อยคำยาวและอ่านเข้าใจยาก
- ข. บทกลับของสัจพจน์ที่ 5 เป็นทฤษฎีบท
- ค. สามารถแสดงได้ว่าเป็นผลมาจากสัจพจน์ข้ออื่น ๆ ของยุคลิต
- ง. อยู่ในรูปของคำถามเชิงเงื่อนไข (ถ้า...แล้ว...) คล้ายกับจะเป็นทฤษฎีบท

10. สัจพจน์ที่สมมูลกับสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิตซึ่งได้รับความนิยมมากที่สุดเป็นของใคร

- ก. เกาส์
- ข. เพลแฟร์
- ค. เลอจองด์
- ง. ลัมแบร์ต

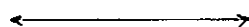
11. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกเส้นแต่ละเส้นมีสมบัติอย่างไร

- ก. มีความยาวไม่จำกัด
- ข. เส้นทุกเส้นขนานกัน
- ค. มีความยาวจำกัดและยาวเท่ากันทุกเส้น
- ง. มีความยาวจำกัดและมีเส้นที่ยาวไม่เท่ากัน

12. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกเมื่อกำหนดจุด P ซึ่งไม่อยู่บนเส้น 1 ดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง

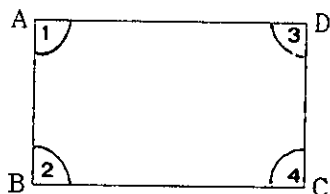
P

1



- ก. เส้นทุกเส้นที่ผ่านจุด P จะตัดเส้น 1 เสมอ
- ข. มีเส้นที่ผ่านจุด P และขนานกับเส้น 1 เพียงเส้นเดียว
- ค. มีเส้นที่ผ่านจุด P และไม่ตัดเส้น 1 มากกว่า 1 เส้น
- ง. มีเส้นที่ผ่านจุด P และไม่ตัดเส้น 1 เพียงเส้นเดียว

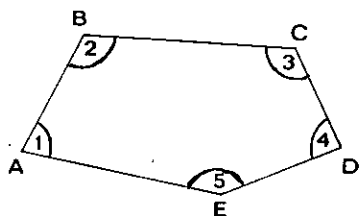
13. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคี่โค้งที่ตรงรูปข้อใดเป็นจริง



- ก. $\hat{1} = \hat{2} = 90^\circ$
 ข. $\hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = 90^\circ$
 ค. $\hat{3} = \hat{4} = 90^\circ$ และ $AB = CD$
 ง. $\hat{3} = \hat{4} = 90^\circ$ และ $AD = BC$

14. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิกเมื่อกำหนด

ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยม ดังรูป
 $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$ มีขนาดเท่าใด



- ก. เท่ากับ 360 องศา
 ข. เท่ากับ 540 องศา
 ค. น้อยกว่า 540 องศา
 ง. มากกว่า 540 องศา

15. ข้อใดกล่าวถึงเส้นในเรขาคณิตเชิงวงรีได้ถูกต้อง

- ก. เส้นทุกเส้นขนานกัน
 ข. เส้นทุกเส้นตัดกันเสมอ
 ค. เส้นทุกเส้นมีความยาวไม่จำกัด
 ง. มีทั้งเส้นที่ตัดกันและเส้นที่ขนานกัน

16. ในเรขาคณิตเชิงวงรี ข้อใด

ต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. มีรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันน้อยกว่า 170 องศา
 ข. มีรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันเท่ากับ 170 องศา
 ค. มีรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันเท่ากับ 180 องศา
 ง. มีรูปห้าเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายในรวมกันมากกว่า 540 องศา

แบบทดสอบประจำหน่วย

หน่วยที่ 2เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระนาบยุคลิดคำชี้แจง

1. ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 37 ข้อ
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ให้ตรงกับตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ
3. ไม่ควรเสียเวลาในการทำข้อใดข้อหนึ่งนานเกินไป ถ้าคิดไม่ออกควรข้ามไปทำข้ออื่น ๆ ก่อน เมื่อมีเวลาค่อยย้อนกลับมาคิดใหม่
4. เมื่อทำเสร็จแล้วถ้ามีเวลาเหลือควรตรวจสอบอีกครั้งก่อนส่งกระดาษคำตอบ
5. ให้ส่งกระดาษคำตอบพร้อมข้อสอบ

หมายเหตุ

ห้ามเขียนในข้อสอบ

1. ข้อใดเป็นตัวอย่างของคำนิยามในวิชาเรขาคณิตระบบยุคลิด

ก. มุม
ข. รั้งสี่
ค. เส้นตรง
ง. ส่วนของเส้นตรง

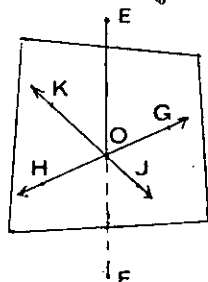
2. ในเรขาคณิตระบบยุคลิดข้อใดต่อไปนี้

ไม่ถูกต้อง

ก. เส้นตรงมีความยาวไม่จำกัด
ข. $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{BA}$ มีความหมายเหมือนกัน
ค. จุด ๆ หนึ่งสามารถลากเส้นตรงผ่านได้มากมายนับไม่ถ้วน
ง. ระนาบคือสิ่งที่มีความกว้างและความยาวแต่ไม่มีความหนา

3. ในรูปข้างล่างเซตของจุดในข้อใดซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

ก. E, H, O และ G
ข. E, O, F และ J
ค. K, O, G และ E
ง. H, K, O และ J



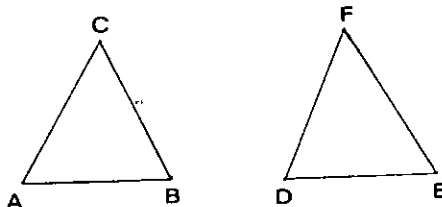
4. ข้อใดต่อไปนี้มีความยาวจำกัด

ก. $\overleftrightarrow{AC}$
ข. $\overline{AC}$
ค. $\overrightarrow{AC}$
ง. $\overleftrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{AC}$

5. สิ่งที่กำหนดคู่ใดต่อไปนี้ ไม่จำเป็น ต้องเท่ากันทุกประการ

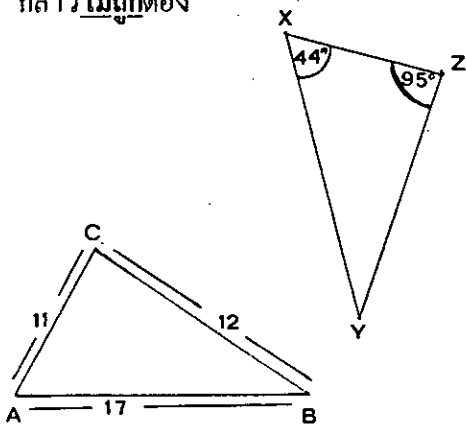
ก. มุมฉากสองมุม
ข. ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง
ค. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีฐานยาวเท่ากันและส่วนสูงยาวเท่ากัน
ง. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปที่มีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากันด้านต่อด้าน

6. กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ ดังรูป ข้อใดกล่าว ไม่ถูกต้อง



ก. $AC = EF$
ข. $AB = DF$
ค. $\angle A = \angle E$
ง. $\angle C = \angle F$

7. กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

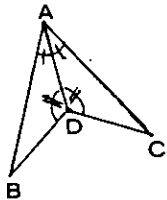


- ก. $ZY = 11$ หน่วย
ข. $XY = 17$ หน่วย
ค. $\hat{B} = 41$ องศา
ง. $\hat{C} = 95$ องศา

8. กำหนด $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\hat{BAC}$ และ $\hat{BDA} = \hat{CDA}$ ดังรูป $\triangle ADB$ และ $\triangle ADC$ มีความสัมพันธ์กันแบบใด

- ก. มุม-ด้าน-มุม
ข. ด้าน-มุม-ด้าน
ค. ด้าน-ด้าน-ด้าน
ง. มีความสัมพันธ์ตามข้อ ก, ข

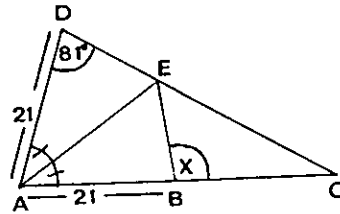
หรือ ค แบบใดก็ได้



9. ข้อใดไม่ใช่เป็นการอ้างในการพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

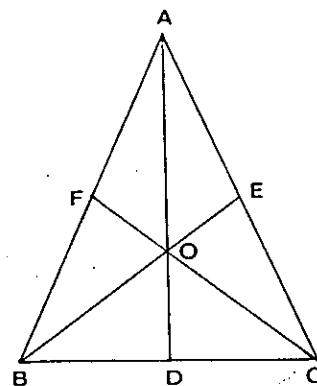
- ก. มุม-ด้าน-มุม
ข. ด้าน-ด้าน-มุม
ค. ด้าน-มุม-ด้าน
ง. ด้าน-ด้าน-ด้าน

10. กำหนด $\overline{AE}$ แบ่งครึ่ง $\hat{BAD}$
 $AD=AB=21$ หน่วย X เท่ากับ
กี่องศา



- ก. 40.5
ข. 81
ค. 91
ง. 99

11. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\hat{A}$ เป็นมุมยอด $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐานซึ่งตัดกันที่จุด O ดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

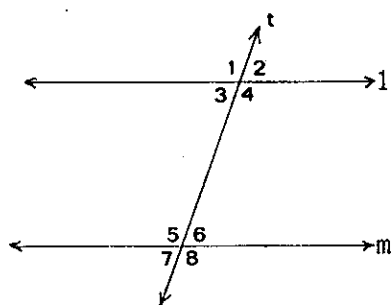


- ก. $\hat{OCE} = \hat{OAE}$
ข. $AB = AC$
ค. $CF = BE$
ง. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

12. ลักษณะของสิ่งต่อไปนี้ข้อใดไม่เหมือนกัน

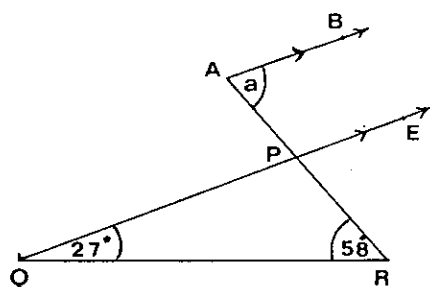
- ก. รางรถไฟ
- ข. สายไฟฟ้าแรงสูง
- ค. รอยล้อรถยนต์ที่วิ่งบนพื้นดิน
- ง. เส้นแสดงอาณาเขตของประเทศต่าง ๆ

13. ข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้สรุปได้ว่า $\vec{l} \parallel \vec{m}$



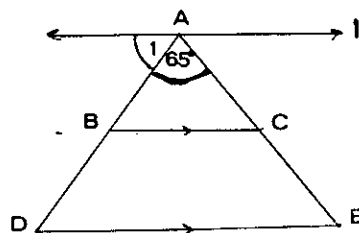
- ก. $\angle 2 = \angle 8$
- ข. $\angle 3 = \angle 5$
- ค. $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$
- ง. $\angle 1 = \angle 4$

14. ถ้า $\vec{AB} \parallel \vec{QE}$, $\angle PQR = 27^\circ$ และ $\angle PRQ = 58^\circ$ แล้ว a เท่ากับกี่องศา



- ก. 58
- ข. 85
- ค. 90
- ง. 95

15. กำหนดให้ $AC = BC$, $\vec{BC} \parallel \vec{DE}$ และ $\vec{BC} \parallel \vec{l}$ ดังรูป ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

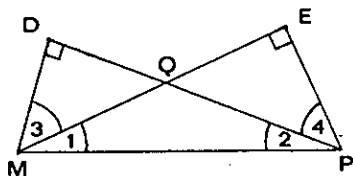


- ก. $\angle AED = 50$ องศา
 - ข. $\angle 1 = 65$ องศา
 - ค. $\angle ADE = 65$ องศา
 - ง. $\angle BCA = \angle BDE$
16. ถ้าอัตราส่วนของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น 1:2:3 แล้ว อัตราส่วนของขนาดของมุมภายนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนี้เป็นเช่นใด
- ก. 3 : 2 : 1
 - ข. 4 : 3 : 2
 - ค. 5 : 4 : 3
 - ง. 6 : 5 : 4

17. ในเรขาคณิตระบบยูคลิดข้อใดต่อไปนี้
ไม่ถูกต้อง

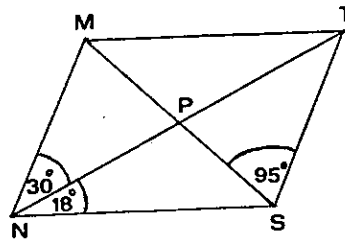
- ก. มีรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี
มุมที่ฐานเป็นมุมป้าน
- ข. ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามุม
แต่ละมุมมีขนาดเท่ากับ 60 องศา
- ค. ขนาดของมุมทั้งสามของรูป
สามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้
180 องศา
- ง. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูป
ใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว
มุมคู่อื่นจะมีขนาดเท่ากันด้วย

18. จากรูป $\hat{D}$ และ $\hat{E}$ เป็นมุมฉาก $\hat{1} = \hat{2}$
ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง



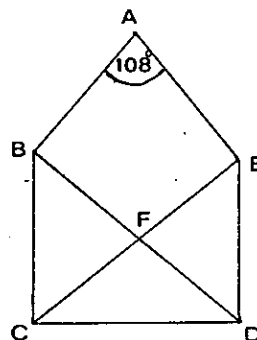
- ก. $DQ = QE$
- ข. $MD = PE$
- ค. $DQ = MD$
- ง. $DP = ME$

19. $\square STMN$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป
 $\hat{MSN}$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา



- ก. 30
- ข. 37
- ค. 48
- ง. 65

20. รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป มีเส้น
รอบรูปยาว 20 หน่วย ถ้า $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$
และ $\overline{CE} \parallel \overline{BA}$ ความยาวของเส้นรอบ
รูปของรูปสี่เหลี่ยม ABFE ยาวกี่หน่วย

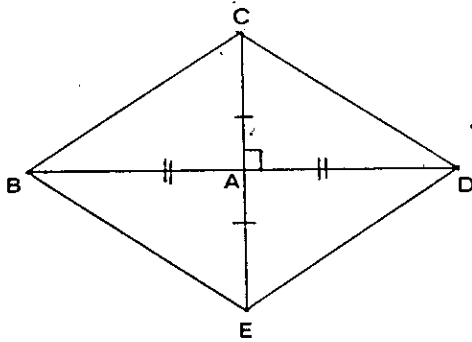


- ก. 14
- ข. 15
- ค. 16
- ง. 20

21. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อกล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน
- ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกรูปมีสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
- ค. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีเส้นทแยงมุมยาวเท่ากันแต่ไม่ตั้งฉากกัน
- ง. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทุกรูปมีสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

22. กำหนด $BA = AD$ และ $CA = AE$
 ดังรูป BCDE เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด

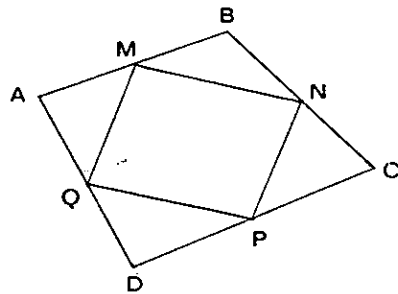


- ก. รูปสี่เหลี่ยมยาว
- ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- ค. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
- ง. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

23. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อกล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. เส้นมัธยฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูจะตั้งฉากกับฐานทั้งสอง
- ข. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วยาวเท่ากัน
- ค. มุมที่ฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
- ง. เส้นมัธยฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของฐานทั้งสอง

24. กำหนด M, N, P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสี่เหลี่ยม ABCD จะได้ว่า MNPQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด



- ก. รูปสี่เหลี่ยมยาว
- ข. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- ค. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
- ง. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

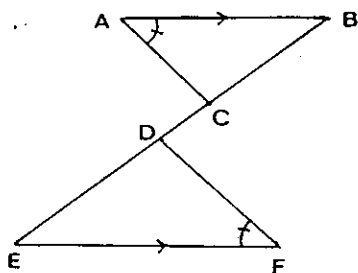
25. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อกล่าวถึงความคล้ายกัน
ไม่ถูกต้อง

- ก. วงกลมสองวงคล้ายกัน
- ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปคล้ายกัน
- ค. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนสองรูปคล้ายกัน
- ง. รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปคล้ายกัน

26. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

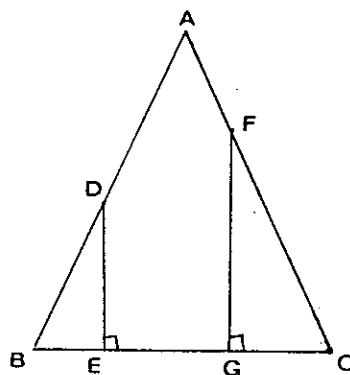
- ก. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ คล้ายกัน
- ข. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านสองรูปใด ๆ คล้ายกัน
- ค. รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าสองรูปใด ๆ คล้ายกัน
- ง. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉากสองรูปใด ๆ คล้ายกัน

27. กำหนด $\angle CAB = \angle EFD$, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ ถ้าทราบความยาวของ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{EF}$ แล้วจะสามารถหาความยาวของด้านใดได้บ้าง



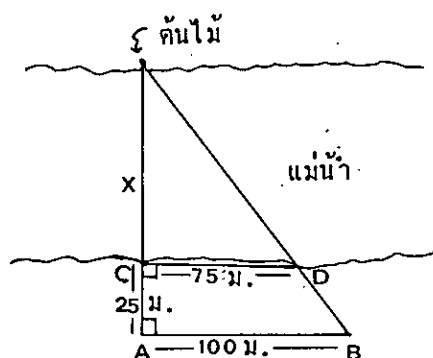
- ก. $\overline{DE}$
- ข. $\overline{AC}$
- ค. $\overline{DF}$
- ง. $\overline{CD}$

28. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี $\overline{BC}$ เป็นฐาน $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ และ $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ดังรูปข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

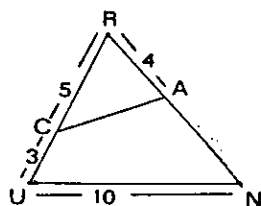


- ก. $\frac{AF}{AD} = \frac{DB}{FC}$
- ข. $\frac{DE}{FG} = \frac{BE}{GC}$
- ค. $\frac{EG}{BC} = \frac{FC}{AC}$
- ง. $\frac{DB}{GC} = \frac{DE}{FC}$

29. สำหรับการหาระยะทาง x ซึ่งเป็นความกว้างของแม่น้ำ นักสำรวจได้กำหนดตำแหน่งของจุด A, B, C และ D ตลอดจนวัดความยาวของระยะต่าง ๆ ดังรูปจะได้ x ยาวกี่เมตร



- ก. 50 เมตร
ข. 75 เมตร
ค. 100 เมตร
ง. 125 เมตร
30. กำหนดให้ $\triangle RUN \sim \triangle RAC$
ดังรูป $\overline{AC}$ ยาวกี่หน่วย

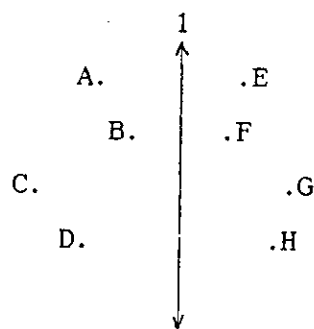


- ก. 5 หน่วย
ข. 6 หน่วย
ค. $25/4$ หน่วย
ง. $25/2$ หน่วย

31. ถ้า A และ B เป็นจุดสองจุด A' และ B' เป็นภาพของการสะท้อนของจุด A และ B ข้ามเส้นตรง l ตามลำดับข้อใดกล่าว ไม่ถูกต้อง

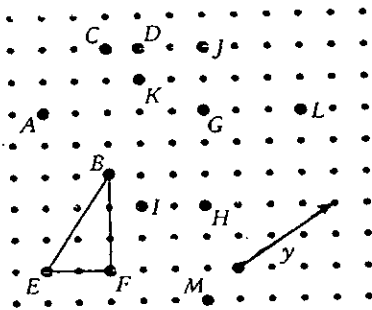
- ก. $AB = A'B'$
ข. $AA' = BB'$
ค. เส้นตรง l แบ่งครึ่ง $\overline{AA'}$ และ $\overline{BB'}$
ง. เส้นตรง l ตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$ และ $\overline{BB'}$

32. จากรูปที่กำหนดให้ภาพของการสะท้อนของจุด C ข้ามเส้นตรง l คือจุดในข้อใด



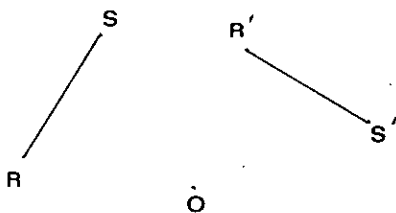
- ก. G
ข. B
ค. F
ง. H

33. จากรูปที่กำหนดให้ภาพของการเลื่อน
ทางขนานของ $\triangle BEF$ ตามทิศทาง
ของ y คือข้อใด



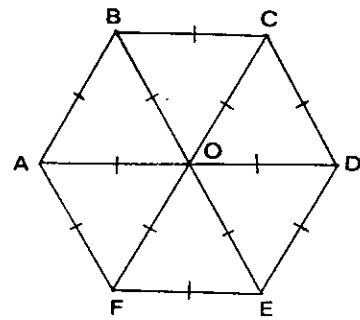
- ก. $\triangle GKJ$
ข. $\triangle BAC$
ค. $\triangle MIH$
ง. $\triangle GIH$

34. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้า $\overline{RS'}$ เป็นภาพ
ของการหมุนของ $\overline{RS}$ เมื่อหมุนรอบ
จุด O ให้บอกมุมที่สามารถวัดได้
เพื่อหาขนาดของมุมของการหมุน



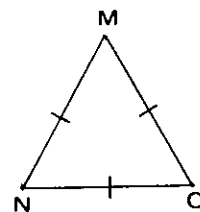
- ก. $\angle ROS$
ข. $\angle ROR'$
ค. $\angle SOR'$
ง. $\angle SOR$

35. ข้อใดต่อไปนี้เป็นภาพของการหมุน
ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$
ด้วยมุมที่มีขนาดเท่ากับ 60°
รอบจุด O ทวนเข็มนาฬิกา



- ก. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $AFED$
ข. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $FCBA$
ค. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $EOCD$
ง. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $AOCB$

36. ในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีแกนสมมาตร
ทั้งหมดกี่เส้น



- ก. 1 เส้น
ข. 2 เส้น
ค. 3 เส้น
ง. 4 เส้น
37. ตัวอักษรในข้อใดที่มีการหมุนสมมาตร แต่ไม่มี
แกนสมมาตร
- ก. N
ข. F
ค. W
ง. X

แบบทดสอบประจำหน่วย

หน่วยที่ 3

เรื่อง วงกลม

คำชี้แจง

1. ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 18 ข้อ
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ให้ตรงกับตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ
3. ไม่ควร เสียเวลาในการทำข้อใดข้อหนึ่งนานเกินไป ถ้าคิดไม่ออกควรข้ามไปทำข้ออื่น ๆ ก่อน เมื่อมีเวลาค่อยย้อนกลับมาคิดใหม่
4. เมื่อทำเสร็จแล้วถ้ามีเวลาเหลือควรตรวจสอบอีกครั้งก่อนส่งกระดาษคำตอบ
5. ให้ส่งกระดาษคำตอบพร้อมข้อสอบ

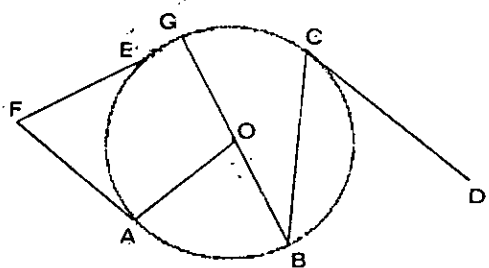
หมายเหตุ

ห้ามเขียนในข้อสอบ

1. กำหนด R และ S เป็นจุดที่ต่างกัน บนวงกลมส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด R และ S สามารถเป็นสิ่งที่ใดต่อไปนี้

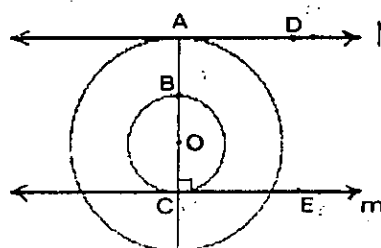
- ก. เส้นตัดวงกลม
- ข. รัศมีของวงกลม
- ค. คอร์ดของวงกลม
- ง. เส้นสัมผัสของวงกลม

2. จากรูปที่กำหนดให้ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม



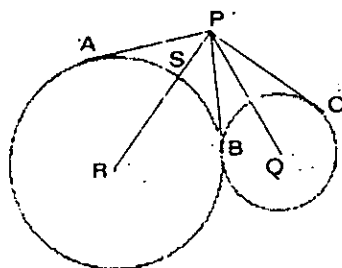
- ก. $\angle CBG$
- ข. $\angle BCD$
- ค. $\angle AOB$
- ง. $\angle AFE$

3. จากรูปที่กำหนดให้เป็นวงกลมร่วม ศูนย์กลางเดียวกัน มีเส้นตรง 1 เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด A และ $\angle OCE = 90^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง



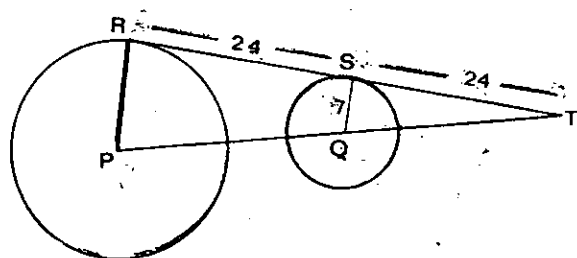
- ก. $\angle OAD = 90^\circ$
- ข. $OB = AB$
- ค. เส้นตรง 1 ขนานกับเส้นตรง m
- ง. เส้นตรง m เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด C

4. จากรูปที่กำหนดให้ $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ และ $\overline{PC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม R และวงกลม Q ที่ลากจากจุด P ซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง



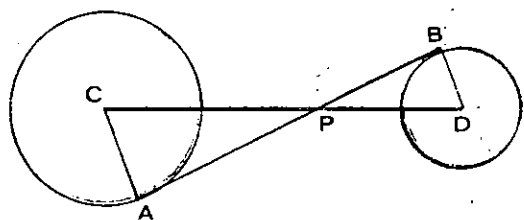
- ก. $\angle APR = \angle CPQ$
- ข. $\angle SPB = \angle QPB$
- ค. $PR = PQ$
- ง. $AP = CP$

5. กำหนด $\overline{RT}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของ วงกลม P และวงกลม Q ที่จุด R และ S ตามลำดับดังรูป $\overline{PR}$ ยาวกี่หน่วย



- ก. 10
ข. 14
ค. 20
ง. 25

6. จากรูปที่กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม C และวงกลม D ที่จุด A และ B ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง



- ก. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
ข. $\widehat{CAP} = \widehat{DBP}$
ค. $PB = \frac{1}{2}AP$
ง. $\triangle PCA \sim \triangle PDB$

7. กำหนดวงกลม O ซึ่งมี M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

- ก. $AM = MB$
ข. $AB = 2AM$
ค. $m(\widehat{AM}) = m(\widehat{MB})$
ง. $m(\widehat{AB}) = 2m(\widehat{AM})$

8. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมี $\angle AOB = 90^\circ$

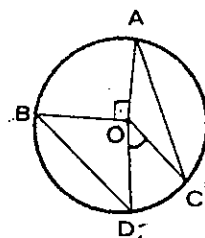
$$m(\widehat{AB}) = \frac{1}{4} \text{ ของความยาวเส้น}$$

รอบวงของวงกลม

$$\text{และ } m(\widehat{CD}) = \frac{1}{12} \text{ ของความยาว}$$

เส้นรอบวงของวงกลม

แล้ว $\widehat{COD}$ มีขนาดเป็นเท่าใด



- ก. 15 องศา
ข. 30 องศา
ค. 45 องศา
ง. 60 องศา

9. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี

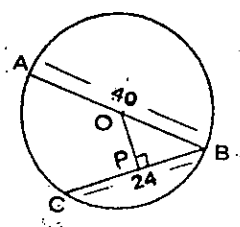
$\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\overline{BC}$ เป็นคอร์ดที่มีจุดปลาย

ร่วมกับเส้นผ่านศูนย์กลาง

จุดหนึ่ง ดังรูป OP

ยาวกี่หน่วย



ก. 12

ข. 14

ค. 16

ง. 17

10. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

ก. เส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง

ย่อมแบ่งครึ่งคอร์ดเสมอ

ข. เส้นที่ตั้งฉากกับคอร์ดของ

วงกลมย่อมผ่านจุดศูนย์กลาง

ของวงกลม

ค. เส้นที่แบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม

(ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง)

ย่อมผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

ง. เส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางมา

แบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม

(ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง)

จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

11. กำหนดวงกลมวงหนึ่งซึ่งมี $\overline{PQ}$ และ $\overline{RS}$ เป็น คอร์ดที่ยาวเท่ากัน ถ้า $\overline{PQ}$

อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับ $4x$

หน่วย และ $\overline{RS}$ อยู่ห่างจาก

จุดศูนย์กลาง x^2 หน่วย แล้ว $\overline{RS}$

อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางกี่หน่วย

ก. 16

ข. 20

ค. 25

ง. ข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอที่จะหา

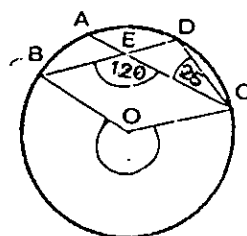
คำตอบได้

12. จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

มี $\angle BEC = 120^\circ$ และ $\angle ECD = 25^\circ$

แล้วจะได้ว่ามุมกลับ $\angle BOC$ มีขนาด

เป็นเท่าใด



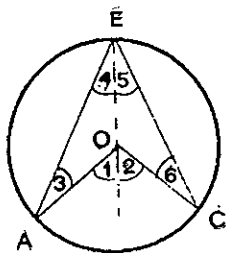
ก. 190 องศา

ข. 195 องศา

ค. 200 องศา

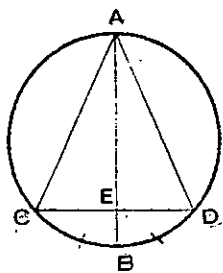
ง. 205 องศา

13. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง



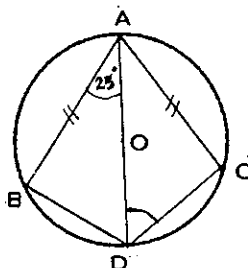
- ก. $\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$
 ข. $\angle 2 = \angle 5 + \angle 6$
 ค. $\angle 1 + \angle 2 = 2(\angle 4 + \angle 5)$
 ง. $\angle 3 + \angle 4 = \angle 5 + \angle 6$

14. กำหนด $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ของวงกลมและ $m(\widehat{CB}) = m(\widehat{BD})$
ดังรูป คำตอบข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

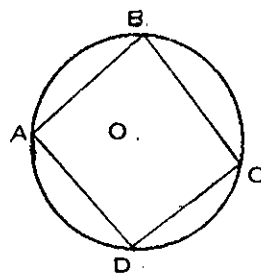


- ก. $CD = AB$
 ข. $\angle CAB = \angle DAB$
 ค. $\angle ADC = \angle ACD$
 ง. $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{AD})$

15. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ซึ่งมี $\angle BAD = 25^\circ$ และ $AB = AC$
ดังรูป $\angle ADC$ มีขนาดเป็นเท่าใด

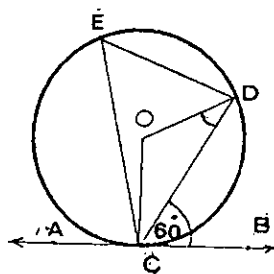


- ก. 65 องศา
 ข. 70 องศา
 ค. 75 องศา
 ง. 80 องศา
16. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ แนบใน
วงกลม O ดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง

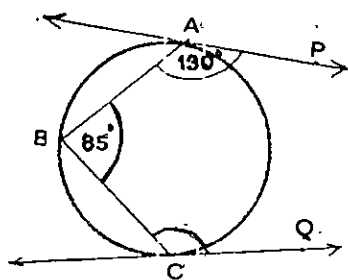


- ก. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 ข. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
 เท่านั้น
 ค. มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$
 มีขนาดเท่ากัน
 ง. ขนาดของมุมตรงข้ามของรูป
 สี่เหลี่ยม $ABCD$ รวมกัน
 เท่ากับ 180°

17. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
 มี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด C
 และ $\angle BCD = 60^\circ$ ดังรูป
 $\angle ODC$ มีขนาดเป็นเท่าใด



- ก. 25 องศา
 ข. 30 องศา
 ค. 35 องศา
 ง. 40 องศา
18. จากรูป $\overleftrightarrow{AP}$ และ $\overleftrightarrow{CQ}$ เป็นเส้นสัมผัสของ
 วงกลม ดังรูป $\angle BCQ$ มีขนาดเท่าใด



- ก. 125 องศา
 ข. 130 องศา
 ค. 135 องศา
 ง. 140 องศา

แบบทดสอบประจำหน่วย

หน่วยที่ 4เรื่อง การสร้างในเรขาคณิตคำชี้แจง

1. ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 11 ข้อ
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ให้ตรงกับตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ
3. ไม่ควรเสียเวลาในการทำข้อใดข้อหนึ่งนานเกินไป ถ้าคิดไม่ออกควรข้ามไปทำข้ออื่น ๆ ก่อน เมื่อมีเวลาค่อยย้อนกลับมาคิดใหม่
4. เมื่อทำเสร็จแล้วถ้ามีเวลาเหลือควรตรวจสอบอีกครั้งก่อนส่งกระดาษคำตอบ
5. ให้ส่งกระดาษคำตอบพร้อมข้อสอบ

หมายเหตุ

ห้ามเขียนในข้อสอบ

1. ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ เป็นการสร้างขั้นพื้นฐาน

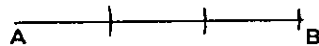
- ก. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
- ข. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้
- ค. การสร้างเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด ๆ หนึ่ง ที่กำหนดให้
- ง. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้มี ความยาวเท่ากับที่กำหนดให้

2. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ขั้นตอนแรกที่ต้องสร้างคืออะไร

- ก. ให้จุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัดเส้นตรงที่กำหนดให้
- ข. กำหนดจุด 2 จุด บนเส้นตรงที่กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัดกัน
- ค. กำหนดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนส่วนโค้งตัดเส้นตรงที่กำหนดให้
- ง. จากจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ลากเส้นตรงมาตัดกับเส้นตรงที่กำหนดให้และกำหนดจุดตัดเป็นจุดศูนย์กลาง

3. ข้อใดต่อไปนี้ เป็น การแบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กันโดยใช้วงเวียนและสันตรงที่ถูกต้อง

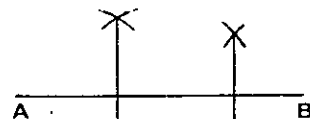
ก.



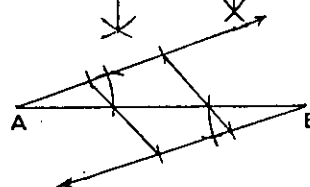
ข.



ค.



ง.



4. การสร้างเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่ลากมาจากจุด P ซึ่งอยู่ภายนอกวงกลม กระบวนการในข้อใดต่อไปนี้ ไม่จำเป็นต้องสร้าง

- ก. ลาก $\overline{OP}$
- ข. เส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{OP}$
- ค. วงกลมที่ผ่านจุด O และ P
- ง. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{OP}$

5. สิ่งที่กำหนดให้ในข้อใดสร้างรูปสามเหลี่ยมไม่ได้

- ก. กำหนดด้านซึ่งมีความยาว 2, 3 และ 5 ตามลำดับ
- ข. กำหนดความยาวของฐานและเส้นมัธยฐาน
- ค. กำหนดความยาวของฐานและส่วนสูง
- ง. กำหนดความยาวของด้านแต่ละด้านให้ซึ่งความยาวของด้านสองด้านรวมกันมากกว่าความยาวของด้านที่สาม

6. ข้อใดต่อไปนี้นักกล่าวได้ถูกต้อง

- ก. เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้เสมอตามเงื่อนไขที่กำหนดให้
- ข. เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากัน 3 มุม ได้เพียงรูปเดียว
- ค. การสร้างรูปสามเหลี่ยมเราต้องคำนึงถึงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมชนิดนั้น ๆ มาประกอบด้วย
- ง. เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากับ x° , y° และ $(x+y)^\circ$ ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

7. ข้อใดต่อไปนี้นักกล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. เมื่อกำหนดความยาวของด้านด้านหนึ่งจะสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้เพียงรูปเดียว
- ข. เมื่อกำหนดความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งจะสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้เพียงรูปเดียว
- ค. เมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านซึ่งยาวไม่เท่ากันจะสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้เพียงรูปเดียว
- ง. เมื่อกำหนดความยาวของด้านด้านหนึ่งและความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งจะสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้เพียงรูปเดียว

8. ข้อใดต่อไปนี้นักกล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. สามารถสร้างวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมได้เสมอ
- ข. รูปสามเหลี่ยมที่แนบในวงกลมจุดยอดทุกจุดของรูปสามเหลี่ยมจะอยู่บนวงกลม
- ค. จุดที่เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยม พบกันนั้นจะอยู่ห่างจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเท่ากัน
- ง. จุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมกับจุดที่เส้นมัธยฐานแต่ละเส้นของรูปสามเหลี่ยมนั้นตัดกันเป็นจุดเดียวกัน

9. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. สามารถสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมได้เสมอ
- ข. จุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบในรูปสามเหลี่ยมอยู่ห่างจุดยอดรูปสามเหลี่ยมเท่ากันเสมอ
- ค. เส้นแบ่งครึ่งมุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม
- ง. จุดที่เส้นแบ่งครึ่งมุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมพบกันจะอยู่ห่างจากด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเท่ากัน

10. ข้อใดต่อไปนี้เป็นขนาดของมุมที่สามารถสร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง

- ก. 1 องศา
- ข. 2 องศา
- ค. 3 องศา
- ง. 4 องศา

11. กำหนด ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\widehat{AOB}$ เท่ากับกี่องศา

- ก. 60
- ข. 72
- ค. 75
- ง. 90

แบบทดสอบฉบับรวม
(แบบทดสอบสอบวัดความรู้เนื้อหาทางเรขาคณิต
สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น)

คำชี้แจง

1. ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 60 ข้อ เวลา 2 ชั่วโมง
2. ให้ผู้เรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ☐ ให้ตรงกับตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ
3. ไม่ควรเสียเวลาในการทำข้อใดข้อหนึ่งนานเกินไป ถ้าคิดไม่ออกควรข้ามไปทำข้ออื่น ๆ ก่อน เมื่อมีเวลาค่อยย้อนกลับมาคิดใหม่
4. เมื่อทำเสร็จแล้วถ้ามีเวลาเหลือควรตรวจสอบอีกครั้งหนึ่งก่อนส่งกระดาษคำตอบ
5. ให้ส่งกระดาษคำตอบพร้อมข้อสอบ

หมายเหตุ ห้ามเขียนในข้อสอบ

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 1

อธิบายถึงองค์ประกอบและสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับระบบสัจพจน์

1. ข้อใดต่อไปนี้ซึ่งใช้เป็นเหตุผลในการพิสูจน์ไม่ได้

ก. สัจพจน์	ข. คำนิยาม
ค. บทนิยาม	ง. ข้อความคาดคะเน
2. สมบัติของระบบเกี่ยวกับสัจพจน์ข้อใดที่สำคัญที่สุด

ก. ความบริบูรณ์	ข. ความเป็นอิสระ
ค. ความไม่ขัดแย้งกัน	ง. ความสมเหตุสมผล

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 2

อธิบายถึงพัฒนาการและลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิด

3. สัจพจน์ข้อใดของยูคลิดที่มีความซับซ้อนเข้าใจยากจนทำให้นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังพยายามแก้ไขให้ดูง่ายและรัดกุมขึ้น

ก. สัจพจน์ที่ 2	ข. สัจพจน์ที่ 3
ค. สัจพจน์ที่ 4	ง. สัจพจน์ที่ 5
4. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถึงลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิดในหนังสือเอलिเมนต์เล่มที่หนึ่ง ไม่ถูกต้อง
 - ก. ยูคลิดได้ให้นิยามคำศัพท์ต่าง ๆ ไว้อย่างชัดเจนและรัดกุม
 - ข. ยูคลิดได้ใช้ข้อความบางอย่างที่ไม่ได้กล่าวไว้เป็นสัจพจน์ก่อนหน้ามาอ้างอิงการพิสูจน์
 - ค. ยูคลิดได้ใช้รูปที่เขียนขึ้นจากสิ่งที่กำหนดให้ของทฤษฎีบทนั้น ๆ สำหรับอ้างอิงการพิสูจน์
 - ง. ยูคลิดสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทและบทสร้าง 28 บทแรกโดยไม่ใช้สัจพจน์ที่ 5 มาอ้างอิงการพิสูจน์

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 3

บอกแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด

5. ต่อไปนี้เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. ทั้งพีทาโกรัสและทาลีสเป็นบุคคลที่มีบทบาทสำคัญในการค้นพบเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด
- ข. เกาส์ เป็นบุคคลที่ชี้ให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างเส้นที่สามารถต่อออกไปเรื่อย ๆ และเส้นที่มีความยาวไม่จำกัด
- ค. ข้อความที่เป็นปฏิสัจแนวทางหนึ่งของสัจพจน์ของเพลแฟร์มีใจความว่า “เส้นสองเส้นใด ๆ ตัดกันเสมอ” เป็นแนวคิดที่นำไปสู่เรขาคณิตเชิงวงรี
- ง. ริมันน์เป็นบุคคลคนหนึ่งที่สามารถพิสูจน์ข้อความที่กล่าวว่า “มีเส้นสองเส้นผ่านจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นที่กำหนดให้และขนานกับเส้นที่กำหนดให้”

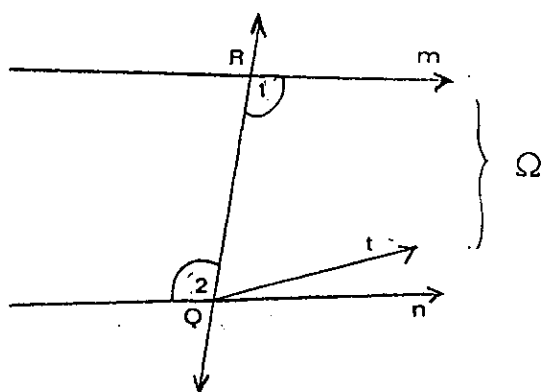
6. ข้อใดเป็นแนวคิดสำคัญที่นำไปสู่การค้นพบเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด

- ก. การพยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 ของยูคลิด
- ข. การกำหนดสัจพจน์ของการขนานของยูคลิด
- ค. การกล่าวถึงเส้นที่สามารถต่อออกไปได้เรื่อย ๆ
- ง. การพยายามพิสูจน์บทกลับของสัจพจน์ที่ 5 ของยูคลิด

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 4

อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก

7. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก กำหนดเส้น m และ n ขนานกันดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง



ก. $\hat{1} = \hat{2}$

ข. เส้น t ตัดกับเส้น m

ค. เส้น t ขนานกับเส้น m

ง. ไม่สามารถสรุปจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้

8. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก มุมสัมผัสของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของแต่ละรูปเป็นเช่นใด

- ก. มุมสัมผัสเป็นมุมฉาก
- ข. มุมสัมผัสมีขนาดไม่เท่ากัน
- ค. มุมสัมผัสมีขนาดเท่ากันและเป็นมุมแหลม
- ง. มุมสัมผัสมีขนาดเท่ากันและเป็นมุมป้าน

9. ในเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก ขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันมีลักษณะเป็นอย่างไร

- ก. เท่ากับ 180 องศา
- ข. น้อยกว่า 180 องศา
- ค. มากกว่า 180 องศา
- ง. เป็นกึ่งองศาก็ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 5

อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงวงรี

10. ในเรขาคณิตเชิงวงรีต่อไปนี้ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. เส้นสองเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นเส้นหนึ่งย่อมขนานกันเสมอ
- ข. ไม่มีรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในเป็นมุมฉากสองมุม
- ค. เมื่อกำหนดเส้น AB เป็นเส้นใด ๆ จะสามารถลากเส้นที่ขนานกับเส้น AB ได้เสมอ
- ง. เมื่อกำหนดจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้น AB จะสามารถลากเส้นผ่านจุดนั้นและตั้งฉากกับเส้น AB ได้หลายเส้น

11. ในเรขาคณิตเชิงวงรี ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง

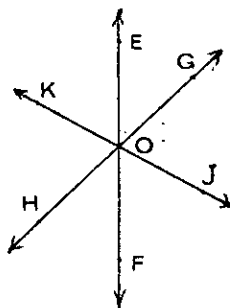
- ก. มุมสัมผัสของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นมุมป้าน
- ข. มีรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมฉากสองมุม
- ค. มีรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดไม่เท่ากัน
- ง. เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมยาวกว่าครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 6

บอกแนวคิดหรือสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุมในเรขาคณิตระบบยูคลิด

12. ในรูปข้างล่างเซตของจุดในข้อใดที่อยู่บนระนาบได้มากกว่าหนึ่งระนาบ

- ก. G, O และ J
- ข. E, O และ G
- ค. H, E และ G
- ง. G, O และ H



13. เมื่อ P และ Q เป็นจุดสองจุดบนระนาบ ข้อใดมีความหมาย ต่างกัน

- ก. $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{QP}$
- ข. $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{QP}$
- ค. $\overline{PQ}$ และ $\overline{QP}$
- ง. PQ และ QP

14. ในเรขาคณิตระบบยูคลิด ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

- ก. ณ จุดจุดหนึ่งจะสามารถลากเส้นตรงผ่านได้เป็นจำนวนจำกัดเส้น
- ข. ระนาบที่ต่างกันสองระนาบตัดกันทำให้เกิดส่วนของเส้นตรง
- ค. ถ้าจุด E อยู่ระหว่างจุด D และจุด F แล้ว $\overrightarrow{ED}$ และ $\overrightarrow{EF}$ ทำให้เกิด $\overleftrightarrow{DF}$
- ง. $\overrightarrow{RS}$ และ $\overrightarrow{RT}$ เป็นรังสีเดียวกัน เมื่อจุด S และ T อยู่ข้างเดียวกันของจุด R

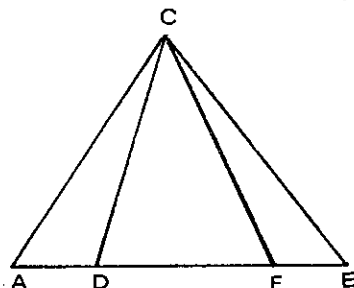
จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 7

บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด พร้อมทั้งสามารถบอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

15. สิ่งที่กำหนดคู่ใดต่อไปนี้เท่ากันทุกประการ

- ก. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าสองรูป
- ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
- ค. มุมสองมุมที่มีแขนของมุมข้างหนึ่งร่วมกัน
- ง. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน

16. กำหนด $\triangle CDB \cong \triangle CEA$ ดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

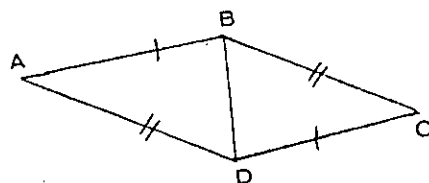


- ก. $CD = CE$
 ข. $BD = AE$
 ค. $\angle ACE = \angle BCD$
 ง. $\angle ECB = \angle DAC$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 8

บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการและนำเงื่อนไขนี้ไปใช้

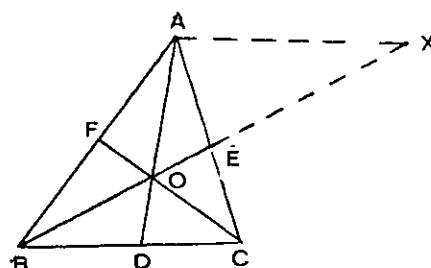
17. ในรูปข้างล่าง รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบใด



- ก. ด้าน - ด้าน - ด้าน
 ข. มุม - ด้าน - มุม
 ค. ด้าน - มุม - ด้าน
 ง. มุม - มุม - มุม

18. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐานซึ่งตัดกันที่จุด O ต่อ $\overline{BE}$ ไปถึงจุด X ซึ่งทำให้ $BE = EX$ ดังรูป

$\triangle AEX \cong \triangle CEB$ ด้วยความสัมพันธ์แบบใด



- ก. มุม - มุม - มุม
 ข. มุม - ด้าน - มุม
 ค. ด้าน - มุม - ด้าน
 ง. ด้าน - ด้าน - ด้าน

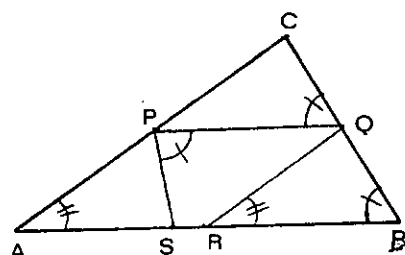
19. ข้อใดไม่ใช่สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

- ก. มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน
 ข. มีมุมที่ฐานเป็นมุมแหลมเท่านั้น
 ค. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดและเส้นมัธยฐานเป็นเส้นเดียวกัน
 ง. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดและส่วนสูงอาจไม่เป็นเส้นเดียวกัน

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 9

บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันและบทกลับ

20. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง



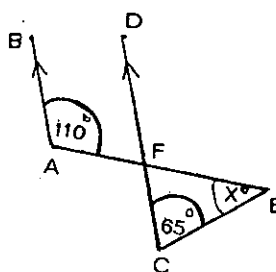
ก. $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

ข. $\overline{PS} \parallel \overline{BC}$

ค. $\angle CPQ = \angle SRQ$

ง. $\angle QPS + \angle SRQ = 180^\circ$

21. กำหนด $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ดังรูป X เท่ากับกี่องศา



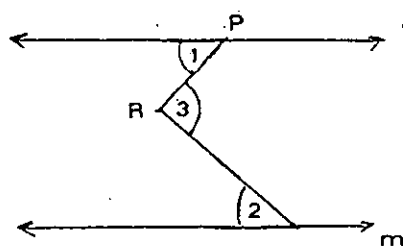
ก. 45

ข. 65

ค. 70

ง. 75

22. กำหนด $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ ดังรูป



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\angle 2 = \angle 1$

ข. $\angle 2 = \angle 3$

ค. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

ง. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + 180^\circ$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 10

บอกได้ว่าขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันได้สองมุมจาก และนำสมบัตินี้ไปใช้

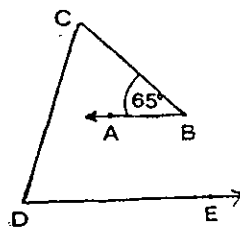
23. กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$ และ $\angle B = 65^\circ$ ดังรูป $\angle C + \angle D$ มีขนาดเท่ากับ กี่องศา

ก. 65

ข. 115

ค. 150

ง. 180



24. ถ้าอัตราส่วนของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น $1 : 3 : 5$
แล้วมุมที่มีขนาดโตที่สุดเป็นกี่องศา

ก. 60

ข. 80

ค. 100

ง. 120

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 11

นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ขนมหยากรูปนูน ผืนผ้า จัตุรัส คางหมู
และสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้

25. ข้อใดต่อไปนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ก. ด้านตรงข้ามขนานกัน

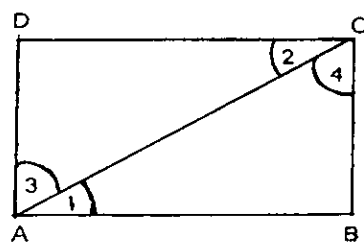
ข. เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน

ค. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

ง. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

26. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD ซึ่งมี $\overline{AC}$ เป็นเส้นทแยงมุม ดังรูป

ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง



ก. ถ้า $AB = DC$ และ $\hat{1} = \hat{2}$ แล้ว $\hat{3} = \hat{4}$

ข. ถ้า $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ และ $\hat{1} = \hat{2}$ แล้ว

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ค. ถ้า $\hat{1} = \hat{2}$ และ $\hat{2} + \hat{4} = 90^\circ$ แล้ว

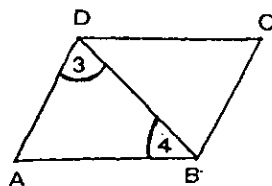
ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ง. ถ้า $AB = DC$ และ $AC = BC$ แล้ว

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

27. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\hat{3} \neq \hat{4}$ และ $\hat{3} + \hat{4} = 90^\circ$

ดังรูปข้อใดสรุปถูกต้อง



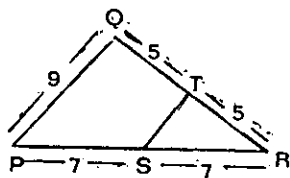
ก. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมวาว

ข. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ค. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ง. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมหยากรูปนูน

28. รูปสามเหลี่ยม PQR ดังรูป ข้อใดกล่าวถึง $\overline{ST}$ ได้ถูกต้อง



- ก. $\overline{ST}$ ขนานกับ $\overline{PQ}$
- ข. $\overline{ST}$ ตั้งฉากกับ $\overline{QR}$
- ค. $ST = 6$ หน่วย
- ง. $ST = 2\sqrt{6}$ หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 12

บอกได้ว่ารูป n เหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่

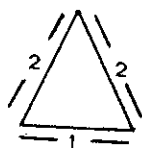
29. รูปหลายเหลี่ยมในข้อใดที่คล้ายกัน

- ก. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปใด ๆ
- ข. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปใด ๆ
- ค. รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปใด ๆ
- ง. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีขนาดของมุมภายในมุมหนึ่งเท่ากับ 75 องศาสองรูปใด ๆ

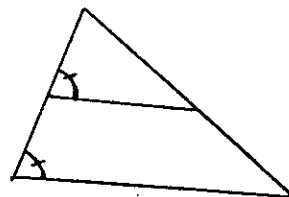
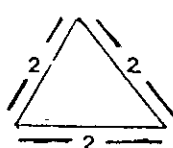
30. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ ข้อใดไม่เป็น

รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

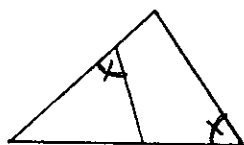
ก.



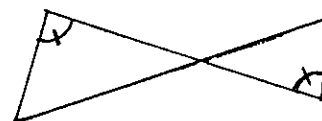
ข.



ค.



ง.



จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 13

บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่อที่มีขนาดเท่ากันย่อส่วนเท่ากันทั้งสามอัตราส่วนและนำสมบัตินี้ไปใช้

31. กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ซึ่งมี $AB = 8$ หน่วย และ $DE = 12$ หน่วย

$\overline{DF}$ ยาวกี่หน่วย

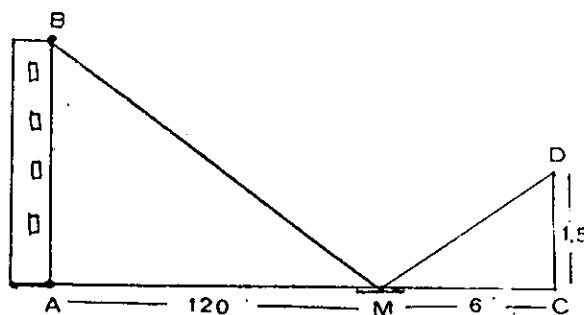
ก. $6 \frac{2}{3}$

ข. 15

ค. 18

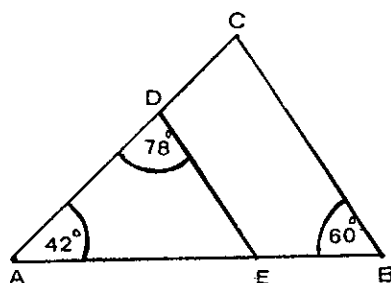
ง. 30

32. นายแดงต้องการวัดความสูงของตึก โดยทางอ้อมเขาจึงได้นำกระจกไปวางไว้บนพื้นที่จุด M ในตำแหน่งที่เมื่อเขายืนที่จุด C เขาสามารถมองเห็นยอดของหลังคาตึกจากกระจกพอดีโดยเขาวางกระจกห่างจากฐานของตึก 120 เมตร และ $\angle BMA = \angle DMC$ ดังรูป ถ้าความสูงของนายแดงวัดจากเท้าถึงระดับตาได้ 1.50 เมตร และเขายืนห่างจากกระจก 6 เมตร แล้วเขาสามารถหาความสูงของตึกตามที่คาดหวังไว้ได้หรือไม่อย่างไร



- ก. ได้ความสูงของตึกเท่ากับ 7.5 เมตร
 ข. ได้ความสูงของตึกเท่ากับ 25 เมตร
 ค. ได้ความสูงของตึกเท่ากับ 30 เมตร
 ง. หาไม่ได้ เพราะว่าข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอ

33. จากรูป ข้อใดสรุปไม่ถูกต้อง



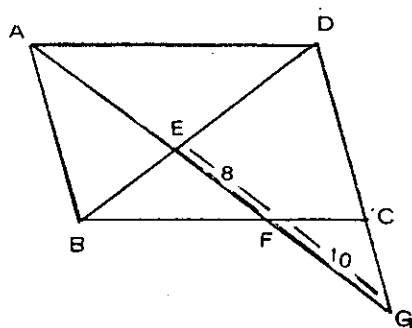
ก. $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

ข. $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

ค. $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$

ง. $\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{CB}$

34. กำหนด $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง



ก. $\frac{AE}{BE} = \frac{18}{ED}$

ค. $\frac{AE}{S} = \frac{ED}{BE}$

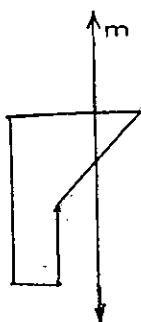
ข. $\frac{S}{FC} = \frac{BF}{10}$

ง. $\frac{AE}{8} = \frac{18}{AE}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 14

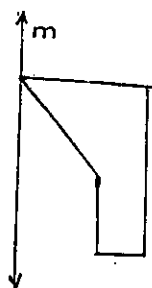
บอกสมบัติของการสะท้อน การเลื่อนทางขนาน และการหมุนของรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้

35.

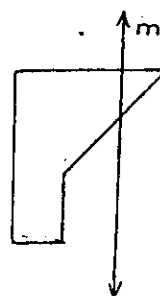


จากรูปที่กำหนดให้ ภาพของการสะท้อนข้ามเส้น m ของรูปนี้คือ ข้อใด

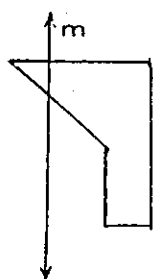
ก.



ข.



ค.



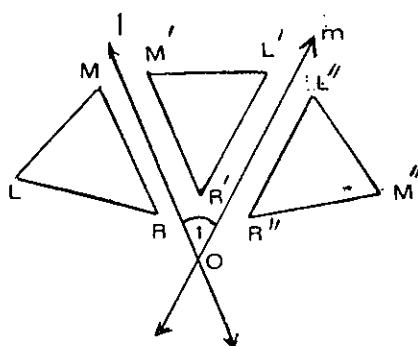
ง.



36. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. การเลื่อนทางขนานมีความขึ้นยงของตำแหน่ง
- ข. การเลื่อนทางขนานมีความขึ้นยงของระยะทาง
- ค. การเลื่อนทางขนานมีความขึ้นยงของขนาดของมุม
- ง. การเลื่อนทางขนานมีความขึ้นยงของการอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันของจุด

37. จากรูปข้างล่าง $\hat{1} = 50^\circ$ และ $\triangle L'M'R'$ เป็นภาพของการสะท้อนของ $\triangle LMR$ ภายใต้การประกอบของการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตรง l และ m ซึ่งตัดกัน เราอาจกล่าวได้ว่า $\triangle L'M'R'$ เป็นภาพของการหมุนของ $\triangle LMR$ รอบจุด O ด้วยมุมของการหมุนที่มีขนาดกี่องศา



ก. 90

ข. 100

ค. 130

ง. 180

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 15

บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตรูปใดมีการสมมาตร

38. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีการหมุนสมมาตรด้วยมุมที่มีขนาดกี่องศา

ก. 60

ข. 90

ค. 120

ง. 180

39. ตัวอักษรในข้อใดที่มีแกนสมมาตรเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ก. J

ข. H

ค. O

ง. E

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 16

บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

40. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง

ก. รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน

ข. เส้นผ่านศูนย์กลางไม่เป็นคอร์ดของวงกลม

ค. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมีเป็นจำนวนมากมายนับไม่ถ้วน

ง. วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ

41. ข้อใดกล่าวถึงมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมได้ถูกต้อง

ก. มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและมีแขนข้างหนึ่งสัมผัสวงกลม

ข. มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

ค. มุมที่มีแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง

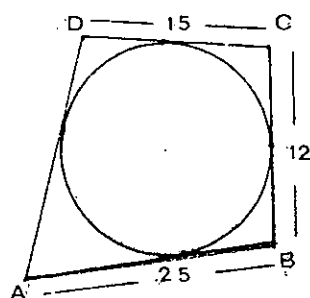
ง. มุมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดยอดมุมและมีแขนของมุมทับกับรัศมีของวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 17

บอกสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้

42. กำหนด $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม $AB = 25$ หน่วย

$BC = 12$ หน่วย และ $CD = 15$ หน่วย $\overline{DA}$ ยาวกี่หน่วย



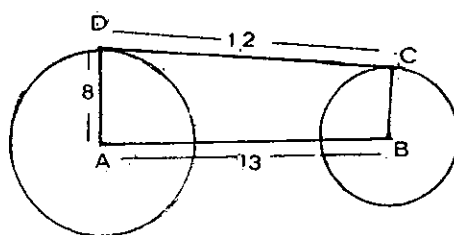
ก. 28

ข. 35

ค. 37

ง. 40

43. จากรูป $\overline{AB}$ ยาว 13 หน่วย $\overline{AD}$ ยาว 8 หน่วย $\overline{DC}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม A และ B ที่จุด D และ C ตามลำดับ และ $\overline{BC}$ ยาว 12 หน่วย $\overline{BC}$ ยาวกี่หน่วย



- ก. 2
ข. 3
ค. 4
ง. 5

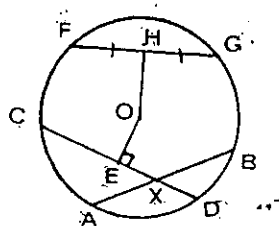
จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 18

บอกสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้

44. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ไม่ถูกต้อง

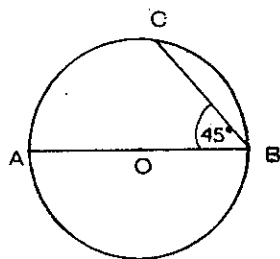
- ก. ในวงกลมเดียวกันคอร์ดที่ยาวเท่ากันย่อมตัดส่วนโค้งได้ยาวเท่ากัน
ข. ในวงกลมเดียวกันมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน ส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นย่อมยาวเท่ากัน
ค. ในวงกลมเดียวกันส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งมีขนาดเท่ากับ 180° เป็นครึ่งวงกลม
ง. ในวงกลมเดียวกันคอร์ดที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งมีขนาดเท่ากับ 120° ย่อมยาวเป็นสองเท่าของคอร์ดที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลาง ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 60°

45. จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $AB = CD$ และ $FH = HG$ คำตอบข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ไม่ถูกต้อง



- ก. $\overline{OH} \perp \overline{FG}$
ข. $CE = ED$
ค. $m(\widehat{CF}) = m(\widehat{GB})$
ง. $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{DB})$

46. กำหนด $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 8 หน่วย และ $\angle ABC = 45^\circ$ ดังรูป
 $\overline{BC}$ อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง O กี่หน่วย



- ก. $2\sqrt{2}$
 ข. $4\sqrt{2}$
 ค. 5
 ง. 6

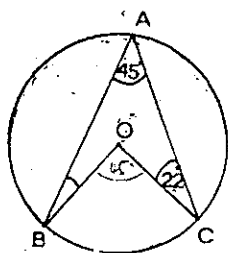
47. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่ถูกต้อง

- ก. ในวงกลมเดียวกันคอร์ดของวงกลมที่ยาวเท่ากันย่อมขนานกัน
 ข. ในวงกลมวงหนึ่ง คอร์ดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันย่อมยาวเท่ากัน
 ค. ถ้า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดของวงกลมเดียวกัน และ $AB < CD$ แล้ว $\overline{CD}$ ย่อมอยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่า $\overline{AB}$
 ง. ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ยาว 34 ซม. แล้ว คอร์ดที่ยาว 30 ซม. ย่อมห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับ 8 ซม.

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 19

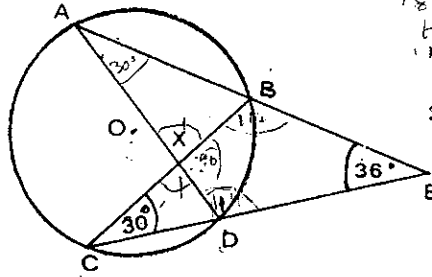
บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้

48. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ACO = 22^\circ$ ดังรูป
 $\angle OBA$ มีขนาดเป็นกี่องศา



- ก. 22
 ข. 23
 ค. 24
 ง. 25

49. จากรูป $\angle AEC = 36^\circ$ และ $\angle BCE = 30^\circ$ $\angle AXB$ เป็นกี่องศา



ก. 60

ข. 66

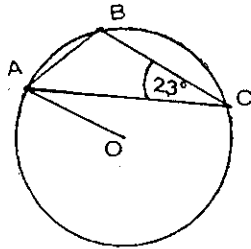
ค. 74

ง. 84

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 20

บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้

50. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\angle BAO$ มีขนาดเป็นกี่องศา



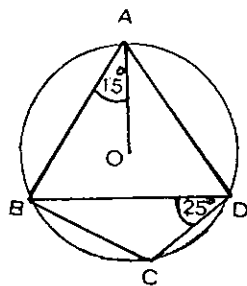
ก. 63

ข. 65

ค. 67

ง. 69

51. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมี $\angle OAB = 15^\circ$ และ $\angle BDC = 25^\circ$ ดังรูป $\angle ABC$ มีขนาดเป็นกี่องศา



ก. 80

ข. 75

ค. 70

ง. 65

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 21

บอกความหมายของการสร้าง สร้างและบอกวิธีการสร้างขั้นพื้นฐานและการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายบางรูปที่กำหนดให้

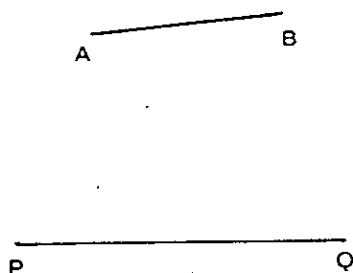
52. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องในการเปรียบเทียบการกระทำเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิตกับการเขียนรูปเรขาคณิต

- ก. ต่างกัน เพราะรูปที่ได้จากการเขียนมีความถูกต้องมากกว่ารูปที่ได้จากการสร้าง
- ข. เหมือนกัน เพราะว่ารูปเรขาคณิตที่สามารถเขียนรูปได้ก็จะสามารถสร้างรูปได้เช่นเดียวกัน
- ค. เหมือนกัน เพราะทั้งการสร้างรูปและการเขียนรูปเรขาคณิต สามารถใช้เครื่องมือใด ๆ ในการสร้างก็ได้
- ง. ต่างกัน เพราะการสร้างสามารถใช้เครื่องมือเพียงสองอย่างคือสันตรงและวงเวียน ส่วนการเขียนรูปใช้เครื่องมืออะไรก็ได้

53. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่การสร้างขั้นพื้นฐาน

- ก. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้
- ข. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- ค. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับที่กำหนดให้
- ง. การแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กัน

54. ในรูปข้างล่าง จะหาดำแหน่งของจุดบน $\overline{PQ}$ ซึ่งห่างจากจุด A และ B เท่ากัน ได้อย่างไร

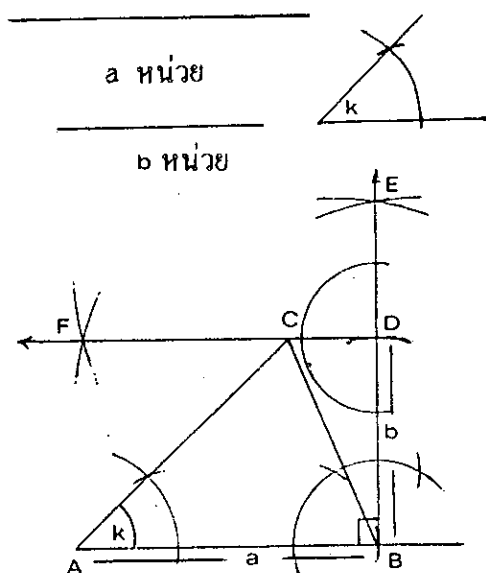


- ก. ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ไปตัด $\overline{PQ}$
- ข. ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ ไปตัด $\overline{AB}$
- ค. ลากเส้นจากจุด B มาตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$
- ง. ลากเส้นตั้งฉากจากจุด P ไปตัด $\overline{AB}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 22

สร้างและบอกวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้าน
ขนาดของมุม หรือเงื่อนไขอื่น ๆ มาให้

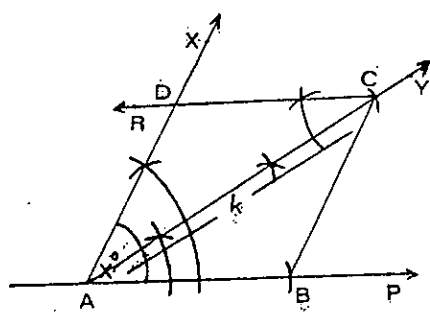
55. เมื่อกำหนด a เป็นความยาวของฐาน b เป็นความยาวของส่วนสูง
 k เป็นขนาดของมุมที่ฐานมุมหนึ่งเราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมให้สอดคล้องกับ
เงื่อนไขดังกล่าวได้ดังรูป



ข้อใดต่อไปนี้คือการสร้างเป็นอันดับแรก

- สร้าง $\overline{BD}$ ยาว b หน่วย
- สร้าง $\overline{AB}$ ยาว a หน่วย
- สร้าง $\overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด B
- สร้าง $\overline{DF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BE}$ ที่จุด D

56. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $ABCD$ โดยให้เส้นทแยงมุม AC ยาว
 k หน่วยและ $\widehat{DAB}$ มีขนาดเท่ากับ x° ดังรูปข้างล่าง ข้อต่อไปนี้ข้อใดควรสร้าง
เป็นอันดับแรก



- สร้าง $\overline{CR} \parallel \overline{AP}$
- สร้าง $\widehat{XAP}$ ให้มีขนาดเท่ากับ x°
- สร้าง $\overline{AB}$ ให้ยาวพอสมควร
- สร้าง $\widehat{AC}$ ให้ยาว k หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 23

สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบในรูปสามเหลี่ยม

57. ข้อใดต่อไปนี้เป็นขั้นตอนแรกในการสร้างรูปวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมที่

กำหนดให้

ก. กำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลม

ข. ลากเส้นมัธยฐานสองเส้นให้ตัดกัน

ค. ลากเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้นให้ตัดกัน

ง. ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมให้ตัดกัน

58. การสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ขั้นตอนแรกที่ต้องทำคืออะไร

ก. ลากเส้นมัธยฐานสองเส้นให้ตัดกัน

ข. ลากส่วนสูงสองเส้นของรูปสามเหลี่ยมนั้นให้ตัดกัน

ค. ลากเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้นให้ตัดกัน

ง. ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นให้ตัดกัน

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 24

สร้างและบอกวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป

59. ข้อใดต่อไปนี้เป็นชนิดของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถสร้างด้วย

วงเวียนและสันตรง

ก. 17 เหลี่ยม

ข. 19 เหลี่ยม

ค. 27 เหลี่ยม

ง. 90 เหลี่ยม

60. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อกล่าวที่ไม่ถูกต้อง

ก. มุมที่จุดศูนย์กลางของรูป 15 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีขนาดเท่ากับ 24°

ข. ถ้าทราบขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมรูปใดแล้วจะสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมรูปนั้นได้เสมอ

ค. ความยาวของด้านของรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมซึ่งมีรัศมียาว r หน่วย จะเท่ากับ r หน่วย

ง. จำนวนของด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีขนาดของมุมภายในแต่ละมุมเท่ากับ 170° เท่ากับ 36 ด้าน

แนวคำตอบ
แบบทดสอบประจำหน่วย
หน่วยที่ 1

1. ง	7. ง	13. ง
2. ข	8. ก	14. ก
3. ก	9. ค	15. ข
4. ข	10. ข	16. ง
5. ค	11. ก	
6. ค	12. ค	

หน่วยที่ 2

1. ค	16. ค	31. ข
2. ง	17. ก	32. ก
3. ค	18. ค	33. ง
4. ง	19. ข	34. ข
5. ค	20. ง	35. ข
6. ข	21. ค	36. ค
7. ก	22. ง	37. ก
8. ก	23. ก	
9. ข	24. ง	
10. ง	25. ค	
11. ก	26. ง	
12. ง	27. ก	
13. ค	28. ข	
14. ข	29. ข	
15. ง	30. ก	

หน่วยที่ 3

1. ค	7. ข	13. ง
2. ก	8. ข	14. ก
3. ข	9. ค	15. ก
4. ง	10. ง	16. ง
5. ข	11. ก	17. ข
6. ค	12. ก	18. ค

หน่วยที่ 4

1. ค	6. ก	11. ข
2. ก	7. ค	
3. ง	8. ง	
4. ข	9. ข	
5. ก	10. ค	

แนวคำตอบ
แบบทดสอบฉบับรวม

1. ง	16. ง	31. ข	46. ก
2. ค	17. ก	32. ค	47. ก
3. ง	18. ค	33. ค	48. ข
4. ก	19. ง	34. ข	49. ง
5. ค	20. ง	35. ค	50. ค
6. ก	21. ก	36. ก	51. ก
7. ข	22. ค	37. ข	52. ง
8. ค	23. ข	38. ค	53. ง
9. ข	24. ค	39. ง	54. ก
10. ง	25. ข	40. ข	55. ข
11. ค	26. ค	41. ง	56. ข
12. ง	27. ข	42. ก	57. ง
13. ก	28. ก	43. ข	58. ค
14. ก	29. ค	44. ง	59. ก
15. ข	30. ก	45. ค	60. ข

หมายเหตุ

ในแบบทดสอบฉบับรวม จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 1 ถึง 5 ตรงกับ
จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต ข้อที่ 1 ถึง 5

ในแบบทดสอบฉบับรวม จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 6 ถึง 15 ตรงกับ
จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด
ข้อที่ 1 ถึง 10

ในแบบทดสอบฉบับรวม จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อที่ 16 ถึง 20 ตรง
กับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม ข้อที่ 1 ถึง 5

ในแบบทดสอบฉบับรวม จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย ข้อ 21 ถึง 24 ตรงกับ
จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต ข้อที่ 1 ถึง 4

ภาคผนวก ง
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 7 : แสดงผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพ
ของครูด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

ตาราง 8 : แสดงการคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วย

ตาราง 9 : แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความ
เชื่อมั่นของแบบทดสอบฉบับรวม คำนวณโดยใช้โปรแกรมสปีรี

ตาราง 10 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์รวม (E_1) ของ
ตัวอย่าง 1 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

ตาราง 11 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์เฉพาะจุดประสงค์
(E_2) ของตัวอย่าง 1 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

ตาราง 12 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์รวม (E_1) ของกลุ่ม
ตัวอย่าง 5 คน จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

ตาราง 13 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์เฉพาะจุดประสงค์
(E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 5 คน จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

ตาราง 14 : แสดงคะแนนของผู้เรียนทั้งหมดในแต่ละจุดประสงค์และคะแนน
รวมของแต่ละคน ซึ่งได้จำแนกรายข้อ จากการทดลองภาคสนาม

ตาราง 15 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์รวม (E_1) ของกลุ่ม
ตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

ตาราง 16 : แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพ์เฉพาะจุดประสงค์
(E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

ตาราง 7 แสดงผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพของครูด้าน
เนื้อหาสาระทางเรขาคณิต

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความเห็น			
	แน่ใจว่า จำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น	IOC
1. รากฐานของเรขาคณิต				
1.1 พัฒนาการของเรขาคณิต เชิงประวัติศาสตร์	4	1	-	0.80
1.2 ระบบสัจพจน์	5	-	-	1.00
1.3 โครงสร้างของเรขาคณิตระบบยูคลิด	5	-	-	1.00
1.4 ข้อบกพร่องในหนังสือเอลิเมนต์ของ ยูคลิด	4	1	-	0.80
1.5 สัจพจน์ของการขนานและแนวคิดที่ นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับ เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด	4	1	-	0.80
2. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบ ยูคลิด				
2.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม	5	-	-	1.00
2.2 ความเท่ากันทุกประการ	5	-	-	1.00
2.3 เส้นขนาน	5	-	-	1.00
2.4 รูปหลายเหลี่ยม	5	-	-	1.00
2.5 ความคล้ายกัน	5	-	-	1.00
2.6 การแปลงสภาพในเรขาคณิตระบบ ยูคลิด	5	-	-	1.00
2.7 ทฤษฎีบทของเมเนเลอัสและ ทฤษฎีบทของเซวา	2	3	-	0.40*

ตาราง 7 (ต่อ)

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความเห็น			
	แน่ใจว่า จำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น	IOC
3. วงกลม				
3.1 ความหมายของวงกลม วงกลมที่ เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม	5	-	-	1.00
3.2 สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลม	5	-	-	1.00
3.3 สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่ จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม	5	-	-	1.00
3.4 สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของ วงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและ เส้นสัมผัส	5	-	-	1.00
4. การสร้างในเรขาคณิต				
4.1 การสร้างขั้นพื้นฐาน	5	-	-	1.00
4.2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมและ รูปสี่เหลี่ยม	5	-	-	1.00
4.3 การสร้างวงกลมและรูปหลายเหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าบางรูป	5	-	-	1.00
4.4 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่ เท่ากับรูปหลายเหลี่ยม	3	1	1	0.40*
4.5 ปัญหาการสร้างที่มีชื่อเสียง 3 ข้อ	1	4	-	0.20*
หมายเหตุ * สมรรถภาพที่ตัดออก (IOC < 0.60)				

ตาราง 8 แสดงการคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วย

หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต

X_i	f	$X_i - C$
10	2	-3
9	1	-4
8	4	-5
7	11	-6
6	12	-7
5	11	-8
4	10	-9
3	4	-10

$$\text{จากสูตร } r_u = 1 - \frac{K \sum X_i - \sum X_i^2}{(K-1) \sum (X_i - C)^2}$$

$$n = 55$$

$$C = 13$$

$$K = 16$$

$$\sum X_i = 317$$

$$\sum X_i^2 = 1979$$

$$\sum (X_i - C)^2 = 3032$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อแทนค่าจะได้ } r_u &= 1 - \frac{16(317) - 1979}{(16-1)(3032)} \\ &= 0.93 \end{aligned}$$

หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบขุกถิด

X_i	f	$X_i - C$	X_i	f	$X_i - C$
35	1	5	22	1	-8
34	0	4	21	8	-9
33	2	3	20	1	-10
32	2	2	19	4	-11
31	2	1	18	1	-12
30	4	0	17	1	-13
29	2	-1	16	2	-14
28	4	-2	15	0	-15
27	3	-3	14	0	-16
26	4	-4	13	0	-17
25	5	-5	12	1	-18
24	2	-6	11	1	-19
23	4	-7			

$$\text{จากสูตร } r_n = 1 - \frac{K \sum X_i - \sum X_i^2}{(K-1) \sum (X_i - C)^2}$$

$$n = 55$$

$$C = 30$$

$$K = 37$$

$$\sum X_i = 1343$$

$$\sum X_i^2 = 34321$$

$$\sum (X_i - C)^2 = 3241$$

เมื่อแทนค่าจะได้

$$r_n = 1 - \frac{37(1343) - 34321}{(37-1)(3241)}$$

$$= 0.87$$

หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม

X_i	f	$X_i - C$
18	3	3
17	2	2
16	6	1
15	6	0
14	6	-1
13	4	-2
12	8	-3
11	2	-4
10	6	-5
9	2	-6
8	3	-7
7	4	-8
6	3	-9

$$\text{จากสูตร } r_n = 1 - \frac{K \sum X_i - \sum X_i^2}{(K-1) \sum (X_i - C)^2}$$

$$n = 55$$

$$C = 15$$

$$K = 18$$

$$\sum X_i = 676$$

$$\sum X_i^2 = 8940$$

$$\sum (X_i - C)^2 = 1035$$

$$\text{เมื่อแทนค่าจะได้ } r_n = 1 - \frac{18(676) - 8940}{(18-1)(1035)}$$

$$= 0.82$$

หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต

X_i	f	$X_i - C$
9	1	0
8	1	-1
7	2	-2
6	12	-3
5	12	-4
4	14	-5
3	5	-6
2	6	-7
1	1	-8
0	1	-9

$$\text{จากสูตร } r_u = 1 - \frac{K \sum X_i - \sum X_i^2}{(K-1) \sum (X_i - C)^2}$$

$$n = 55$$

$$C = 9$$

$$K = 11$$

$$\sum X_i = 247$$

$$\sum X_i^2 = 1269$$

$$\sum (X_i - C)^2 = 1278$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อแทนค่าจะได้ } r_u &= 1 - \frac{11(247) - 1269}{(11-1)(1278)} \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

ตาราง ๑ แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของ
แบบทดสอบฉบับรวม จำนวนโดยใช้โปรแกรมสำเร็จ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	0.59	0.51	21	0.78	0.21	41	0.65	0.44
2	0.35	0.50	22	0.78	0.25	42	0.59	0.37
3	0.41	0.58	23	0.35	0.20	43	0.42	0.23
4	0.50	0.63	24	0.76	0.32	44	0.58	0.44
5	0.40	0.43	25	0.76	0.22	45	0.43	0.50
6	0.46	0.35	26	0.47	0.28	46	0.50	0.39
7	0.45	0.43	27	0.29	0.21	47	0.56	0.45
8	0.41	0.55	28	0.65	0.30	48	0.49	0.31
9	0.43	0.52	29	0.43	0.32	49	0.42	0.28
10	0.47	0.20	30	0.47	0.27	50	0.24	0.26
11	0.30	0.29	31	0.66	0.27	51	0.39	0.20
12	0.57	0.57	32	0.50	0.29	52	0.62	0.58
13	0.57	0.56	33	0.68	0.47	53	0.58	0.55
14	0.78	0.32	34	0.73	0.27	54	0.48	0.48
15	0.70	0.27	35	0.28	0.36	55	0.71	0.31
16	0.63	0.42	36	0.44	0.37	56	0.34	0.45
17	0.71	0.24	37	0.23	0.40	57	0.36	0.42
18	0.78	0.26	38	0.61	0.55	58	0.31	0.31
19	0.55	0.20	39	0.47	0.49	59	0.29	0.46
20	0.75	0.22	40	0.74	0.42	60	0.48	0.33

สรุปเกี่ยวกับการทดสอบของแบบทดสอบฉบับรวม

จำนวนผู้เข้าสอบเท่ากับ	105 คน
คะแนนสูงสุดเท่ากับ	52 คน
คะแนนต่ำสุดเท่ากับ	15 คน
คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ	31.13 คะแนน
จำนวนข้อสอบเท่ากับ	60 ข้อ

ค่าความเชื่อมั่นคำนวณจากสูตร KR- 20 คำนวณโดยใช้โปรแกรมสปีรี
เท่ากับ 0.89

ตาราง 10 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของตัวอย่าง 1 คน
จากการทดลองเป็นรายบุคคล

คำนวณค่า E_1 ได้จากสูตร

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

X_i	f	fX_i
44	1	44
รวม	1	44

เนื่องจาก $X = 44$

$$n = 1$$

$$A = 60$$

จะได้
$$\bar{X} = \frac{44}{1}$$

$$= 44$$

เมื่อแทนค่าในสูตรจะได้ ;

$$E_1 = \frac{44}{60} \times 100$$

$$= 73.33$$

ตาราง 11 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของ
ตัวอย่าง 1 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

คำนวณค่า E_2 ได้จากสูตร

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. อธิบายถึงองค์ประกอบและสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับระบบ สัจพจน์ (ข้อสอบข้อที่ 1 และ 2)	2	2.00	100.00
2. อธิบายถึงพัฒนาการและลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 3 และ 4)	2	2.00	100.00
3. บอกแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต นอกระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 5 และ 6)	2	1.00	50.00
4. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก (ข้อสอบข้อที่ 7, 8 และ 9)	3	2.00	66.67
5. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงวงรี (ข้อสอบข้อที่ 10 และ 11)	2	1.00	50.00
หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกแนวคิดหรือสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุมในเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 12, 13 และ 14)	3	2.00	66.67

ตาราง 11 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
2. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด พร้อมทั้งสามารถบอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ (ข้อสอบข้อที่ 15 และ 16)	2	2.00	100.00
3. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการและ นำเงื่อนไขนี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 17, 18 และ 19)	3	3.00	100.00
4. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันและบทกลับ (ข้อสอบข้อที่ 20, 21 และ 22)	3	2.00	66.67
5. บอกได้ว่าขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันได้สองมุมฉากและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 23 และ 24)	2	1.00	50.00
6. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ขนมหยากรูปน สี่เหลี่ยมจัตุรัส ทางมุมและสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 25 , 26 , 27 และ 28)	4	2.00	50.00
7. บอกได้ว่ารูป n เหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ (ข้อสอบข้อที่ 29 และ 30)	2	2.00	100.00
8. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ย่อมเท่ากันทั้งสามอัตราส่วนและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 31, 32 , 33 และ 34)	4	3.00	75.00
9. บอกสมบัติของการสะท้อน การเลื่อนทางขนาน และการหมุนของรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ (ข้อสอบข้อที่ 35 , 36 และ 37)	3	2.00	66.67

ตาราง 11 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
10. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตรูปใดมีการสมมาตร (ข้อสอบข้อที่ 38 และ 39)	2	1.00	50.00
หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ วงกลม (ข้อสอบข้อที่ 40 และ 41)	2	2.00	100.00
2. บอกสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมและนำสมบัตินี้ ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 42 และ 43)	2	2	100.00
3. บอกสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลม เดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 44, 45, 46 และ 47)	4	2	50.00
4. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือ วงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 48 และ 49)	2	1.00	50.00
5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และ รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุม ที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 50 และ 51)	2	2.00	100.00
หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกความหมายของการสร้าง สร้างและบอกวิธีการสร้าง ขั้นพื้นฐานและการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายบางรูปที่ กำหนดให้ (ข้อสอบข้อที่ 52, 53 และ 54)	3	2.00	66.67

ตาราง 11 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\overline{F}$	E_2
2. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เมื่อ กำหนดความยาวของด้าน ขนาดของมุม หรือเงื่อนไขอื่น ๆ มาให้ (ข้อสอบข้อที่ 55 และ 56)	2	1.00	50.00
3. สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบใน รูปสามเหลี่ยม (ข้อสอบข้อที่ 57 และ 58)	2	2.00	100.00
4. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบาง รูป (ข้อสอบข้อที่ 59 และ 60)	2	2.00	100.00

ตาราง 12 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของตัวอย่าง 5 คน
จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

คำนวณค่า E_1 ได้จากสูตร

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

X_i	f	fX_i
55	1	55
53	1	53
49	1	49
43	2	86
รวม	5	243

เนื่องจาก

$$n = 5$$

$$A = 60$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX_i}{N} = \frac{243}{5}$$

$$= 48.6$$

$$\text{จากสูตร } E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

$$\text{เมื่อแทนค่าจะได้ ; } E_1 = \frac{48.6}{60} \times 100$$

$$= 81.00$$

ตาราง 13 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของ
กลุ่มตัวอย่าง 5 คน จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย

คำนวณค่า E_2 ได้จากสูตร

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. อธิบายถึงองค์ประกอบและสมบัติที่สำคัญที่เกี่ยวกับระบบ สัจพจน์ (ข้อสอบข้อที่ 1 และ 2)	2	1.60	80.00
2. อธิบายถึงพัฒนาการและลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 3 และ 4)	2	1.80	90.00
3. บอกแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต นอกระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 5 และ 6)	2	1.60	80.00
4. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก (ข้อสอบข้อที่ 7, 8 และ 9)	3	2.40	80.00
5. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงวงรี (ข้อสอบข้อที่ 10 และ 11)	2	1.60	80.00
หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกแนวคิดหรือสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุมในเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 12, 13 และ 14)	3	2.40	80.00

ตาราง 13 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
10. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตรูปใดมีการสมมาตร (ข้อสอบข้อที่ 38 และ 39) หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม จุดประสงค์ข้อที่	2	1.60	80.00
1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ วงกลม (ข้อสอบข้อที่ 40 และ 41)	2	1.80	90.00
2. บอกสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 42 และ 43)	2	1.60	80.00
3. บอกสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลม เดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 44,45 , 46 และ 47)	4	3.00	75.00
4. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือ วงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 48 และ 49)	2	1.60	80.00
5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และ รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุม ที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 50 และ 51)	2	1.60	80.00
หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกความหมายของการสร้าง สร้างและบอกวิธีการสร้าง ขั้นพื้นฐานและการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายบางรูปที่ กำหนดให้ (ข้อสอบข้อที่ 52, 53 และ 54)	3	2.40	80.00

ตาราง 18 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
2. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เมื่อ กำหนดความยาวของด้าน ขนาดของมุม หรือเงื่อนไขอื่น ๆ มาให้ (ข้อสอบข้อที่ 55 และ 56)	2	1.60	80.00
3. สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบใน รูปสามเหลี่ยม (ข้อสอบข้อที่ 57 และ 58)	2	1.60	80.00
4. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า บางรูป (ข้อสอบข้อที่ 59 และ 60)	2	1.60	80.00

ตาราง 12 (ต่อ)

จุดประสงค์ ข้อที่	เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	รวม
		ข้อที่																														
13	31	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	92
	32	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	33	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
	34	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
14	35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	73
	36	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	
	37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	
15	38	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	45
	39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
16	40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	56
	41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
17	42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	45
	43	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
18	44	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	90
	45	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	
	46	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	
	47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	
19	48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	45
	49	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
20	50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	48
	51	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	
21	52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	80
	53	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	54	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	
22	55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	50
	56	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	46
	58	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	
24	59	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	45
	60	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	
รวม		55	53	53	53	52	51	50	50	50	50	50	49	49	49	48	48	48	48	47	47	46	46	46	46	46	46	45	44	43	39	

ตาราง 15 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง
30 คนจากการทดลองภาคสนาม

คำนวณค่า E_1 ได้จากสูตร

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

X_i	f	fX_i	
55	1	55	
54	0	0	
53	3	159	
52	1	52	
51	1	51	
50	5	250	
49	3	147	
48	4	192	
47	2	94	เนื่องจาก $n = 30$
46	6	276	$A = 60$
45	1	45	$\bar{X} = \frac{\sum fX_i}{n} = \frac{1447}{30}$
44	1	44	
43	1	43	$= 48.23$
42	0	0	จากสูตร $E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$
41	0	0	เมื่อแทนค่าจะได้
40	0	0	$E_1 = \frac{48.23}{60} \times 100$
39	1	39	
รวม	30	1447	$= 80.38$

ตาราง 16 แสดงการคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์เฉพาะจุดประสงค์ (E_2) ของ
กลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

คำนวณค่า E_2 ได้จากสูตร

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$$

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. อธิบายถึงองค์ประกอบและสมบัติที่สำคัญที่เกี่ยวกับระบบ สัจพจน์ (ข้อสอบข้อที่ 1 และ 2)	2	1.53	76.50
2. อธิบายถึงพัฒนาการและลักษณะของเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 3 และ 4)	2	1.73	86.50
3. บอกแนวคิดที่นำไปสู่ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิต นอกระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 5 และ 6)	2	1.50	75.00
4. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตไฮเพอร์โบลิก (ข้อสอบข้อที่ 7, 8 และ 9)	3	2.40	80.00
5. อธิบายถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงวงรี (ข้อสอบข้อที่ 10 และ 11)	2	1.60	80.00
หน่วยที่ 2 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกแนวคิดหรือสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุมในเรขาคณิตระบบยูคลิด (ข้อสอบข้อที่ 12, 13 และ 14)	3	2.50	83.30

ตาราง 16 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
2. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด พร้อมทั้งสามารถบอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ (ข้อสอบข้อที่ 15 และ 16)	2	1.77	88.50
3. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการและ นำเงื่อนไขนี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 17, 18 และ 19)	3	2.67	89.00
4. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันและบทกลับ (ข้อสอบข้อที่ 20, 21 และ 22)	3	2.30	76.70
5. บอกได้ว่าขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันได้สองมุมฉาก และนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 23 และ 24)	2	1.83	91.50
6. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ขนมนเปียกปูน สี่เหลี่ยมจัตุรัส คางหมูและสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 25 , 26 , 27 และ 28)	4	3.00	75.00
7. บอกได้ว่ารูป n เหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ (ข้อสอบข้อที่ 29 และ 30)	2	1.57	78.50
8. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ข้อมเท่ากันทั้งสามอัตราส่วนและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 31, 32 , 33 และ 34)	4	3.07	76.80
9. บอกสมบัติของการสะท้อน การเลื่อนทางขนาน และการหมุนของรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ (ข้อสอบข้อที่ 35 , 36 และ 37)	3	2.43	81.00

ตาราง 16 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
10. บอกได้ว่ารูปเรขาคณิตรูปใดมีการสมมาตร (ข้อสอบข้อที่ 38 และ 39)	2	1.50	75.00
หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ วงกลม (ข้อสอบข้อที่ 40 และ 41)	2	1.87	93.50
2. บอกสมบัติที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมและนำสมบัตินี้ ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 42 และ 43)	2	1.50	75.00
3. บอกสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลม เดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 44, 45 , 46 และ 47)	4	3.00	75.00
4. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือ วงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 48 และ 49)	2	1.50	75.00
5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และ รูปเหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุม ที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้ (ข้อสอบข้อที่ 50 และ 51)	2	1.60	80.00
หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต			
จุดประสงค์ข้อที่			
1. บอกความหมายของการสร้าง สร้างและบอกวิธีการสร้าง ขั้นพื้นฐานและการสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายบางรูปที่ กำหนดให้ (ข้อสอบข้อที่ 52, 53 และ 54)	3	2.67	89.00

ตาราง 16 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย	P	$\bar{F}$	E_2
2. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม เมื่อ กำหนดความยาวของด้าน ขนาดของมุม หรือเงื่อนไขอื่น ๆ มาให้ (ข้อสอบข้อที่ 55 และ 56)	2	1.67	83.50
3. สร้างและบอกวิธีสร้างวงกลมล้อมรอบหรือแนบ ในรูปสามเหลี่ยม (ข้อสอบข้อที่ 57 และ 58)	2	1.53	76.50
4. สร้างและบอกวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า บางรูป (ข้อสอบข้อที่ 59 และ 60)	2	1.50	75.00

ภาคผนวก จ

ชุดการสอนรายบุคคล

- คำชี้แจงสำหรับผู้ใช้ชุดการสอน
- ตัวอย่างเอกสารประกอบหน่วยการเรียนรู้
หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม
- คำแนะนำการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

คำชี้แจงสำหรับผู้ใช้ในการสอน

คำชี้แจงสำหรับผู้ใช้ชุดการสอน

ชุดการสอนนี้สร้างขึ้นสำหรับครูคณิตศาสตร์หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อเสริมสร้างความรู้และประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิต โดยการศึกษาด้วยตนเองจากชุดการสอน ซึ่งแบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ทั้งหมด 4 หน่วย คือ

หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต

หน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด

หน่วยที่ 3 เรื่อง วงกลม

หน่วยที่ 4 เรื่อง การสร้างในเรขาคณิต

ในหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยจะประกอบด้วยหัวเรื่องย่อย ๆ ซึ่งจัดในลักษณะของหน่วยการเรียนรู้ย่อย ทำให้สะดวกต่อการศึกษาค้นคว้าและการจดจำ พร้อมกันนี้หน่วยการเรียนรู้ย่อยแต่ละหน่วยจะมีเนื้อหาสาระที่เป็นความรู้ตรง ความรู้เสริมทางเรขาคณิตและความรู้ทั่วไป ซึ่งจัดอยู่ในลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ กิจกรรมเสริม กิจกรรมสำรวจ มุมนำคิด มุมปริศนา และมุมชอกแซก ในลักษณะเสริมความรู้ทางเรขาคณิตทั่ว ๆ ไป ตลอดจนสาระที่ทำให้ผ่อนคลายความเครียดแทรกอยู่ในลักษณะมุมปล่อยก้าก (มุมตลกขบขัน) และรูปการ์ตูนที่ช่วยเพิ่มบรรยากาศการเรียนรู้ทำให้น่าสนใจ อีกทั้งมีแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยในตอนท้ายของทุกหน่วยการเรียนรู้และสำหรับหน่วยการเรียนรู้ที่ 1.1 มีบทเรียนเทปโทรทัศน์ประกอบการเรียนเพื่อช่วยให้เข้าใจบทเรียนยิ่งขึ้น

การนำชุดการสอนไปใช้ควรดำเนินการตามลำดับดังนี้

1. ศึกษาวิธีการใช้จากคำชี้แจงการใช้อย่างละเอียดก่อนเพื่อให้เข้าใจลักษณะและองค์ประกอบที่เป็นโครงสร้างของชุดการสอน

2. เนื่องจากการนำชุดการสอนไปเรียนด้วยตนเอง ไม่ได้จำกัดอยู่เฉพาะผู้ที่ไม่เคยเรียนเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย แต่อาจเป็นครูหรือนิสิตนักศึกษาทั่วไป ซึ่งต้องการเพิ่มความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิต ดังนั้นเพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบว่าตนเองมีความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตตามที่มีในชุดการสอนเพียงใด จึงควรทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบฉบับรวมที่รวมอยู่ในชุดการสอนนี้ ถ้าได้คะแนนรวมไม่ถึงร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม ควรศึกษาชุดการสอน ถ้าได้คะแนนรวมสูงกว่าร้อยละ 80 ก็อาจไม่จำเป็นต้องศึกษาชุดการสอน เพราะถือว่ามีความรู้ในชุดการสอนนี้แล้ว

3. การศึกษาในหน่วยที่ 1,3 และ 4 ผู้เรียนควรใช้เวลาประมาณ 15 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง ส่วนหน่วยที่ 2 ควรใช้เวลาประมาณ 20 วัน ๆ ละ 2 ชั่วโมง เพื่อศึกษารายละเอียดของเนื้อหาสาระโดยเริ่มศึกษาจากหน่วยที่ 1 ไปตามลำดับจนถึงหน่วยที่ 4 ซึ่งเป็นหน่วยสุดท้าย ส่วนรายละเอียดของการศึกษาได้กล่าวไว้ในแผนการสอนของหน่วยการเรียนรู้และคำแนะนำของหน่วยการเรียนรู้ย่อยแล้ว

เมื่อผู้เรียนพร้อมที่จะศึกษาจากชุดการสอนนี้โปรดลงมือทันที

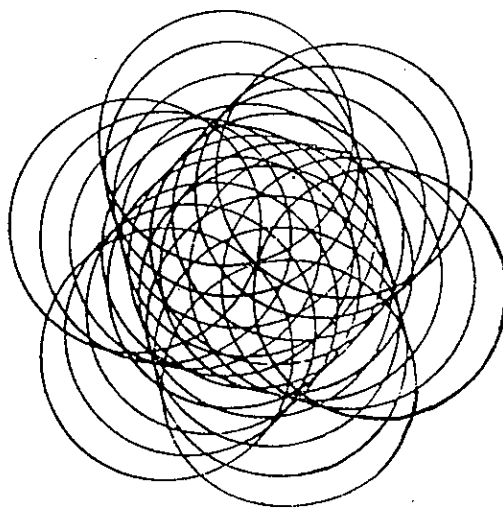
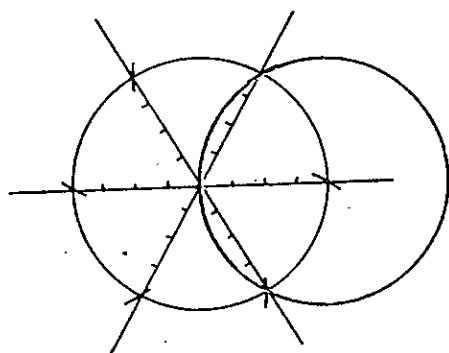
ตัวอย่างเอกสารประกอบหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 3 เรื่องวงกลม

หน่วยการเรียนรู้

หน่วยที่ 3

เรื่อง

วงกลม



วิชาคณิตศาสตร์

แผนการสอนของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

1. บทนำ

นับได้ว่าในชีวิตความเป็นอยู่และการดำเนินงานของมนุษย์เราเป็นเวลานานที่เกี่ยวข้องกับวงกลมและการใช้สมบัติของวงกลม สิ่งหนึ่งที่สำคัญมากในการนำวงกลมมาประยุกต์ใช้ก็คือ การประดิษฐ์เป็นลูกล้อ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่ทำให้เกิดล้อเฟือง และเพลอา อันเป็นส่วนประกอบของเครื่องจักรต่าง ๆ เรือ รถยนต์ รถไฟและเครื่องบิน

นอกจากนี้สิ่งก่อสร้างต่าง ๆ ตลอดจนผลิตภัณฑ์ที่บรรจุเครื่องบริโภค อุปกรณ์ ก็ล้วนแต่มีวงกลมเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยแทบทั้งสิ้น

อย่างไรก็ตาม เราไม่ทราบแน่ชัดว่า การประดิษฐ์คิดค้นและการใช้ลูกล้อที่เป็นวงกลมในสมัยโบราณเกิดขึ้นเมื่อไร และใครเป็นคนคิด ผู้มีชื่อเสียงบางคนเชื่อว่าลูกล้อได้สร้างขึ้นในทวีปเอเชีย เมื่อประมาณ 10,000 ปี มาแล้ว ซึ่งลูกล้อที่เก่าแก่ที่สุดที่มีอยู่ในปัจจุบันได้ค้นพบในแคว้นเมโสโปเตเมีย (Mesopotamia) ใน ค.ศ. 1927 เมื่อนักโบราณคดีได้เปิดเผยลูกล้อของรถม้าโบราณ ซึ่งสันนิษฐานกันว่าสร้างขึ้นเมื่อประมาณ 5,500 ปี มาแล้ว

ถึงกระนั้นการพัฒนาเกี่ยวกับวงกลมก็ยังไม่หยุดจนกระทั่งถึงยุคกรีกโบราณซึ่งมีบุคคลสำคัญได้แก่ ทาเลส ปีทาโกรัส และ อาร์คิมิดีส มีผลงานที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ดังเช่น ผลงานของทาเลส ที่ได้พิสูจน์ว่า มุมภายในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

ด้วยเหตุนี้รายวิชาคณิตศาสตร์ ของหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้บรรจุเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่เกี่ยวกับวงกลมไว้ในหลักสูตรดังกล่าว ดังนั้นผู้เตรียมตัวเป็นครูคณิตศาสตร์หรือครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ต้องมีความรู้เกี่ยวกับวงกลมเป็นอย่างดี เพื่อจะได้นำไปถ่ายทอดให้นักเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วย

ให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมและนำสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกสมบัติเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันและนำสมบัตินี้ไปใช้
4. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน และนำสมบัตินี้ไปใช้
5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° และรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากับ 180° และนำสมบัตินี้ไปใช้

3. ความรู้พื้นฐาน

หน่วยที่ 1 เรื่อง รากฐานของเรขาคณิต และหน่วยที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด

4. การประเมินก่อนเรียน

ประเมินผลก่อนเรียน โดยใช้แบบทดสอบ ประจำหน่วยที่ 3 ถ้าผู้เรียนทำได้ 15 ข้อขึ้นไป จากจำนวน 18 ข้อ ผู้เรียนก็ไม่ต้องศึกษาหน่วยนี้ และถ้าทำได้ไม่ถึง 15 ข้อ ผู้เรียนจะต้องศึกษาหน่วยที่ 3 ทั้งหมด

5. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ทำแบบประเมินผลก่อนเรียน หน่วยที่ 3
2. ศึกษาหน่วยการเรียนรู้หน่วยที่ 3 ซึ่งมี 4 หน่วยการเรียนรู้ย่อย คือ
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 : ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

มีกิจกรรมการเรียนรู้ 2 กิจกรรมด้วยกัน

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 : ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 : ทำกิจกรรมตามที่มอบหมาย

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2 : สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม

มีกิจกรรมการเรียนรู้ 2 กิจกรรมด้วยกัน

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 : ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 : ทำกิจกรรมตามที่มอบหมาย

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3 : สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ด
ของวงกลม

มีกิจกรรมการเรียนรู้ 2 กิจกรรมด้วยกัน

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 : ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 : ทำกิจกรรมตามที่มอบหมาย

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 : สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่
สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัส

มีกิจกรรมการเรียนรู้ 2 กิจกรรมด้วยกัน

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 : ศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 : ทำกิจกรรมตามที่มอบหมาย

3. ทำแบบประเมินผลหลังเรียน หน่วยที่ 3

6. การประเมินหลังเรียน

การประเมินผลหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3 ซึ่งเป็นฉบับเดียวกับการประเมินก่อนเรียน ถ้าผู้เรียนทำได้ 15 ข้อขึ้นไปจากจำนวน 18 ข้อ ถือว่าผ่านเกณฑ์ในหน่วยนี้ ถ้าทำได้ไม่ถึง 15 ข้อ ผู้เรียนจะต้องศึกษาหน่วยที่ 3 ซ้ำทั้งหมด และมารับคำปรึกษาจากอาจารย์ที่ปรึกษา เมื่อแน่ใจว่าเข้าใจดีแล้ว ก็ทำการทดสอบอีกครั้งหนึ่งด้วยแบบทดสอบชุดเดิม

7. สื่อการเรียนรู้

1. แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3 ซึ่งใช้ในการประเมินก่อนเรียนและหลังเรียน พร้อม
เฉลย รวมจำนวน 2 ชุด
2. หน่วยการเรียนรู้ย่อย จำนวน 4 ชุด
3. สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 9 และ 10

เมื่ออ่านแผนการสอนจบแล้ว ขอให้ผู้เรียนทำแบบประเมิน
ก่อนเรียน หน่วยที่ 3 แล้วจึงศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยต่อไป



กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1

เรื่อง ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากันและสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม



คำแนะนำ

1. ให้ผู้เรียนศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ด้วยตนเอง ไปตามลำดับ
2. ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจเนื้อหาอย่างละเอียดด้วยการอ่านอย่างตั้งใจและคิดวิเคราะห์
3. เมื่อผู้เรียนอ่านรายละเอียดของแต่ละหัวเรื่องในหน่วยการเรียนรู้ย่อยจบแล้วควรบันทึกสาระสำคัญของแต่ละหัวเรื่องและปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ตามที่ระบุไว้ในท้ายแต่ละหัวเรื่อง (ถ้ามี) รวมทั้งกิจกรรมรวมที่กำหนดไว้ในท้ายหน่วยการเรียนรู้ด้วย
4. เมื่อปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละกิจกรรมแล้ว โปรดตรวจเฉลยจากแนวตอบในหน่วยการเรียนรู้ย่อย ปฏิบัติจนครบทุกกิจกรรมการเรียนรู้ ก่อนจะศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยอื่น ๆ ต่อไป
5. ถ้าผู้เรียนมีข้อสงสัยให้ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา



โปรดอ่านหัวเรื่อง แนวคิด และจุดประสงค์
ของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 แล้วศึกษารายละเอียดต่อไป

วงกลม

หัวข้อ

1. ความหมายของวงกลม
2. สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
 - 2.1 รัศมีของวงกลม
 - 2.2 วงกลมที่เท่ากัน
 - 2.3 คอร์ด
 - 2.4 เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 - 2.5 ส่วนโค้งของวงกลม
 - 2.6 เส้นสัมผัสของวงกลม
 - 2.7 มุมในครึ่งวงกลม
 - 2.8 มุมในส่วนโค้งของวงกลม
 - 2.9 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

แนวคิด

1. วงกลมเป็นรูปซึ่งประกอบด้วยจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจากจุดหนึ่งที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกัน เป็นระยะทางเท่า ๆ กันจุดคงที่เรียกว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดบนวงกลม เรียกว่ารัศมีของวงกลม
2. วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และเราเรียกววงกลมที่เท่ากันทุกประการว่า “วงกลมที่เท่ากัน”
3. คอร์ดของวงกลมคือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใด ๆ บนวงกลมนั้น
4. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมคือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใด ๆ บนวงกลม และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้นด้วย
5. คอร์ดของวงกลมอาจแบ่งวงกลมเป็นส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ หรือครึ่งวงกลม
6. เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงหรือรังสีที่ประกอบด้วยคอร์ดของวงกลม

7. เส้นสัมผัสของวงกลมคือ เส้นตรงที่ตัดหรือแตะวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น
8. มุมในครึ่งวงกลมคือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง
9. มุมในส่วนโค้งของวงกลมคือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลมที่จุดซึ่งไม่ใช่จุดยอดมุม
10. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นจุดยอดมุมและมีแขนของมุมเป็นรัศมีของวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย

ให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน
2. ระบุจุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลางและส่วนโค้งของวงกลม
3. ระบุเส้นสัมผัสและมุมในส่วนต่าง ๆ ของวงกลม

ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน
และสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

1

ความหมายของวงกลม

ในชีวิตประจำวันของเราได้เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตที่เป็นวงกลมมากมาย อย่างเช่น
ดินนอนขึ้นมาก็ต้องมองดูนาฬิกาที่หน้าปัดเป็นวงกลม รับประทานอาหารก็ต้องใช้จาน
ใส่อาหารที่ชอบของจานเป็นวงกลม เมื่อไปโรงเรียนก็ต้องนั่งรถซึ่งมีล้อเป็นวงกลม
นอกจากนี้เงินเหรียญชนิดต่าง ๆ ก็ล้วนเกี่ยวข้องกับวงกลมแทบทั้งสิ้น
ดังนั้นเพื่อการกล่าวถึงวงกลมได้อย่างถูกต้อง เราจึงจำเป็นต้องเรียนรู้ความหมายและ
ชื่อของส่วนต่าง ๆ ของวงกลมเป็นพื้นฐานก่อน ดังนี้



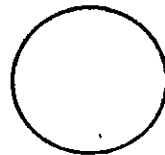
เธอคิดว่ารูปวงกลม
มีลักษณะอย่างไร

ผมคิดว่าต้อง
เป็นอย่างรูปนี้



วงกลม คือ รูปซึ่งประกอบ
ด้วยจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุด
หนึ่งบนระนาบเดียวกัน เป็นระยะทาง
เท่า ๆ กัน

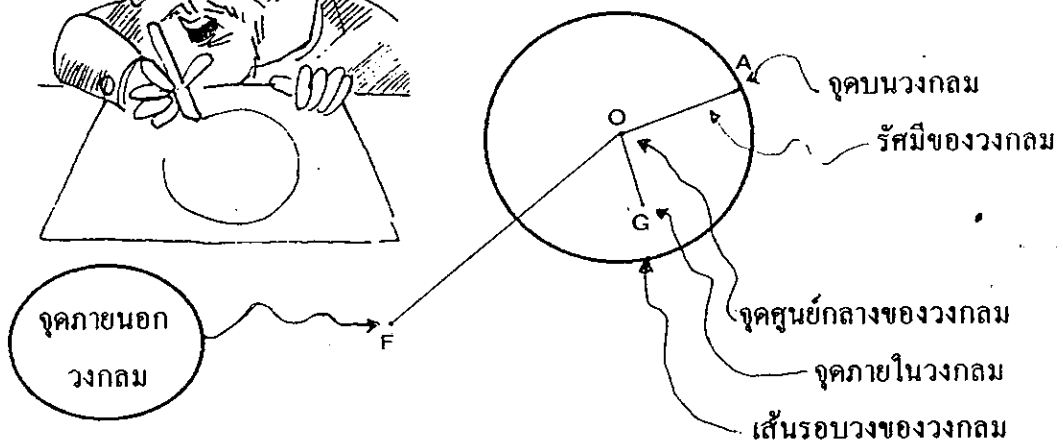
โดยทั่วไปเราจะใช้วงเวียน
เพื่อเขียนวงกลม



2 สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม



เราารู้จักกับส่วนต่าง ๆ ของวงกลม
ว่ามีชื่อเรียกว่าอย่างไรบ้าง



จากรูปข้างต้น

O เป็นจุดคงที่ เรียกจุด O ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม ส่วนรัศมีของวงกลม คือ ส่วนของเส้นตรง ที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดบนวงกลมหรือเราอาจหมายถึงระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมและจุดบนวงกลม ดังเช่นกล่าวว่า $\overline{OA}$ เป็นรัศมีของวงกลมหรือรัศมีของวงกลมยาว OA หน่วย

การกำหนดชื่อของวงกลม เรานิยมใช้ชื่อจุดศูนย์กลางเป็นหลัก ดังเช่น วงกลม O หรือ $\odot O$ (วงกลมโอ)

เรากล่าวว่า **จุด A** เป็นจุดบนวงกลม O เมื่อ OA เท่ากับ ความยาวของ รัศมีของวงกลม

จุด G เป็นจุดภายในวงกลม O เมื่อ OG น้อยกว่า ความยาวของ รัศมีของวงกลม

จุด F เป็นจุดภายนอกวงกลม O เมื่อ OF มากกว่า ความยาวของ รัศมีของวงกลม

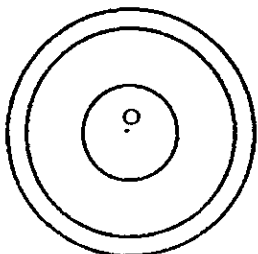
คำถาม : 1



1. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมีกี่เส้น
2. รัศมีสองเส้นใดๆ ของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากันหรือไม่
3. วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

ถ้าอยากทราบคำตอบให้ศึกษาต่อไปอีกสักนิด

ถ้าวงกลมสองวงหรือมากกว่า มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดเดียวกัน และรัศมีไม่เท่ากัน เราเรียกว่า **วงกลมร่วมศูนย์กลาง** (Concentric Circles)



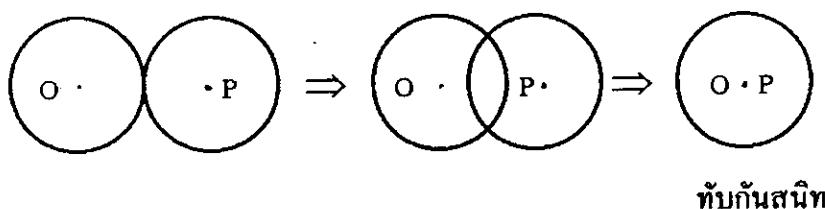
วงกลมร่วมศูนย์กลาง



กิจกรรมเสริม : 1

เป็นการอธิบายคำตอบของเฉลย : 1 เพิ่มเติม

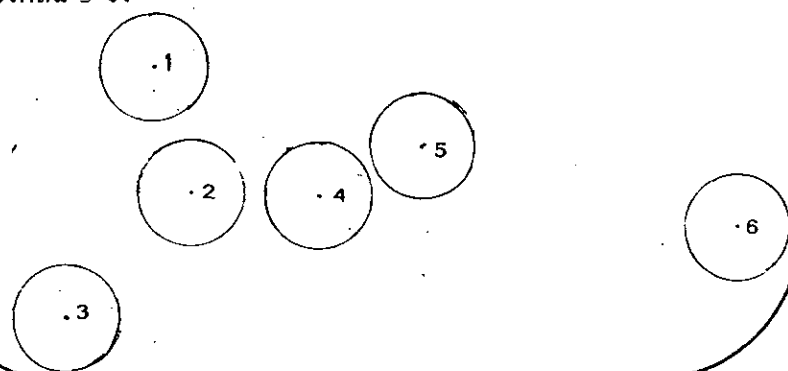
- 1 มีรัศมีเป็นจำนวนมากนับไม่ถ้วน เนื่องจากข้อเท็จจริงที่ว่าจุด ๆ หนึ่ง มีเส้นตรงลากผ่านได้เป็นจำนวนมากนับไม่ถ้วน ดังนั้นที่จุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งเป็นจุดปลายจุดหนึ่งของรัศมี สามารถลากไปยังจุดบนวงกลมได้เป็นจำนวนมากนับไม่ถ้วน
- 2 รัศมียาวเท่ากัน เพราะว่ารัศมีเป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลาง และจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย และจุดทุกจุดบนวงกลมอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน
- 3 ให้ผู้เรียนเขียนวงกลม 2 วง ที่มีรัศมียาวเท่ากัน แล้วนำมาซ้อนกัน วงกลมทั้งสองจะทับกันสนิท



เรียกวงกลมที่เท่ากันทุกประการว่า วงกลมที่เท่ากัน

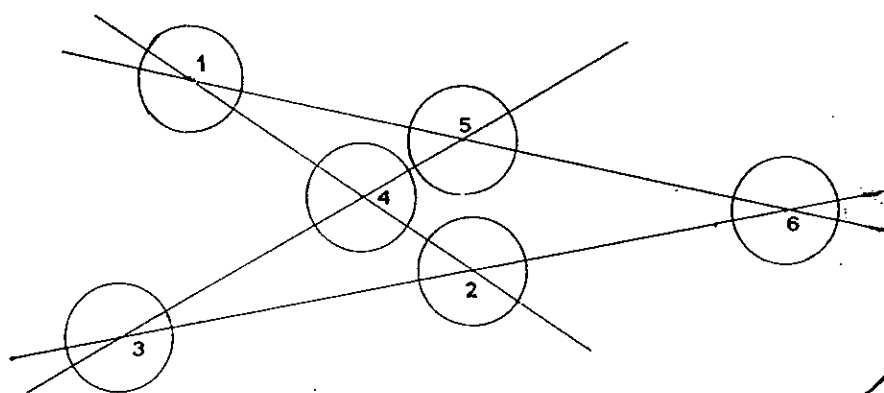
นุมนปริศนา

ในรูปข้างล่าง ให้ผู้เรียนย้ายวงกลมหนึ่งวงไปวางตำแหน่งใหม่เพื่อให้สามารถลากเส้นตรง 4 เส้น ซึ่งแต่ละเส้นจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม 3 วง



เฉลย : นุมนปริศนา

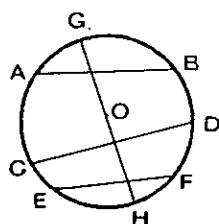
ย้ายวงกลมวงที่ 2 ดังนี้



คอร์ดและเส้นผ่านศูนย์กลาง

พิจารณารูปต่อไปนี้ เพื่อเป็นแนวทางในการกำหนดความหมายของสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลมเพิ่มขึ้นไปอีก

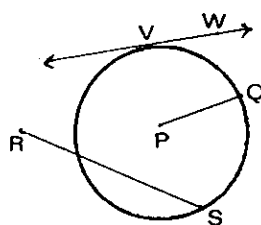
①



O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{GH}$

เป็นคอร์ดของวงกลม O

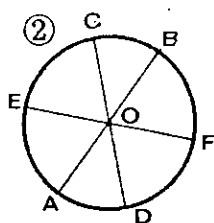


P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

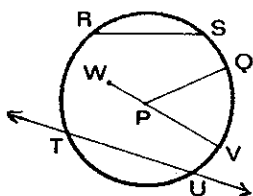
$\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ และ $\overleftrightarrow{VW}$

ไม่เป็นคอร์ดของวงกลม P

คอร์ดของวงกลม คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใด ๆ บนวงกลมนั้น



$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{EF}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ของวงกลม O



$\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{TU}$, และ $\overline{VW}$
ไม่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ของวงกลม P

เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดใด ๆ บน
วงกลมและผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้นด้วย



ข้อสังเกต

1. เมื่อกล่าวถึงเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมสามารถอ้างถึง
ส่วนของเส้นตรงหรือความยาวของส่วนของเส้นตรงได้เช่นเดียวกับ
รัศมีของวงกลม ดังเช่น กล่าวว่า $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่าน
ศูนย์กลางของวงกลม O หรือ เส้นผ่านศูนย์กลางของ
วงกลม O ยาว AB หน่วย
2. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมายาวเป็นสองเท่าของรัศมีของ
วงกลมเดียวกัน

คำถาม : 2



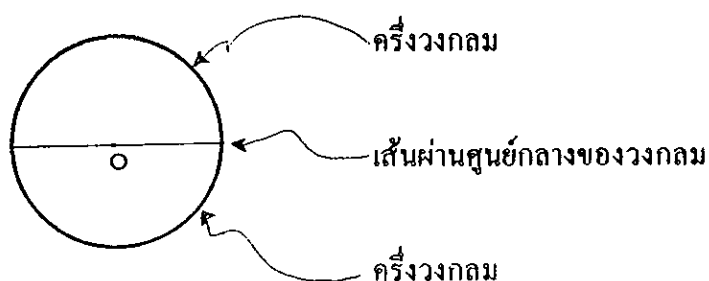
1. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็นคอร์คด้วยหรือไม่
เพราะเหตุใด
2. คอร์คที่ยาวที่สุดของวงกลมวงหนึ่ง ๆ คือเส้นใด
และคอร์คนี้จะแบ่งวงกลมออกเป็นอย่างไร
3. วงกลมวงหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางกี่เส้น

เฉลย : 2

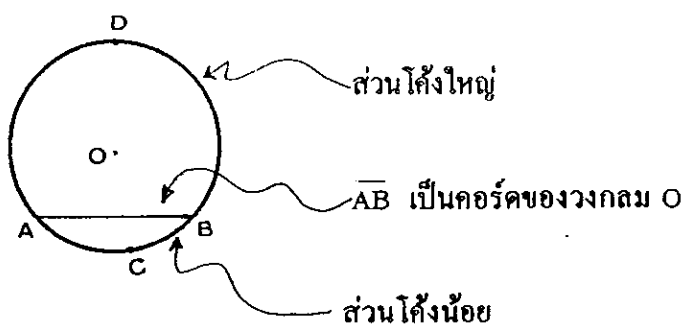
1. เป็นคอร์คด้วย เพราะว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง
มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลม
2. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมและเป็นเส้น
ที่แบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งที่เท่ากัน
ทุกประการ กำลังจะแนะนำในหน้าต่อไป
3. มีเป็นจำนวนมากมายับไม่ถ้วน



ถ้าเราลากเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเส้นหนึ่ง เส้นผ่านศูนย์กลางเส้นนั้น
จะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งสองส่วนที่เท่ากันทุกประการ เรียกส่วนโค้ง
แต่ละส่วนว่า ครึ่งวงกลม ดังรูป



ถ้าคอร์ดของวงกลม แบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งสองส่วนที่ไม่เท่ากัน
ส่วนโค้งที่ใหญ่กว่า เราเรียกว่า ส่วนโค้งใหญ่
ส่วนโค้งที่เล็กกว่า เราเรียกว่า ส่วนโค้งน้อย ดังรูปข้างล่างนี้



O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



เราจะกำหนดชื่อของ
ส่วนโค้งและความยาวของส่วนโค้ง
อย่างไร

ดังนี้

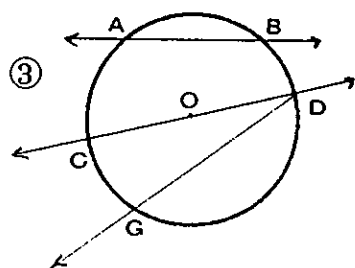
จากรูปข้างต้น

เรียกส่วนโค้ง $\widehat{ADB}$ ว่าส่วนโค้งใหญ่ AB เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\widehat{ADB}$

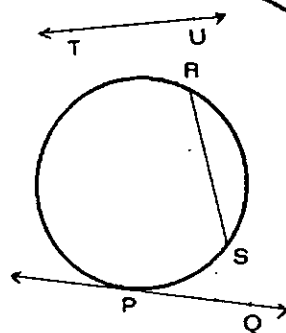
เรียกส่วนโค้ง $\widehat{ACB}$ ว่า ส่วนโค้งน้อย AB เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\widehat{ACB}$
หรือ $\widehat{AB}$

ความยาวของ $\widehat{ADB}$ เขียนแทนด้วย $m(\widehat{ADB})$

ความยาวของ $\widehat{ACB}$ และ $\widehat{AB}$ เขียนแทนด้วย $m(\widehat{ACB})$ และ
 $m(\widehat{AB})$ ตามลำดับ



③ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{DG}$
 เป็นเส้นตัดวงกลม



$\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ และ $\overleftrightarrow{TU}$
 ไม่เป็นเส้นตัดวงกลม

เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงหรือรังสีที่ประกอบด้วยคอร์ดของวงกลม

ข้อสังเกต

เส้นตัดวงกลมจะตัดวงกลมที่จุดสองจุดเสมอ



มุมป้อยก้าก

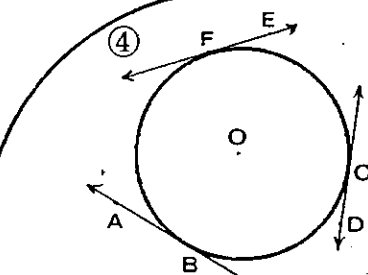
นายสมชายทำงานบริษัทแห่งหนึ่ง เขามักไปตัดผมในเวลาทำงานเสมอ
วันหนึ่งเขาพบกับผู้จัดการ โดยบังเอิญ

ผู้จัดการถามเขาว่า “ทำไมคุณต้องตัดผมในเวลาทำงาน”

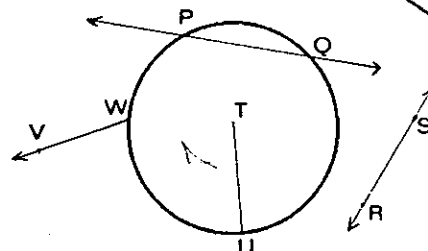
“ก็ผมมันยาวในเวลาทำงานนี่ครับ” สมชายตอบ

ผู้จัดการตอบกลับด้วยความโกรธว่า “แต่มีบางส่วนที่ยาวมาจากบ้านใช่ไหม”

“ถ้าอย่างนั้น เคียวผมจะให้ช่างตัดส่วนที่ยาวที่บริษัทก็แล้วกัน” สมชายตอบ



$\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$, และ $\overleftrightarrow{CD}$ เป็นเส้น
สัมผัสของวงกลม

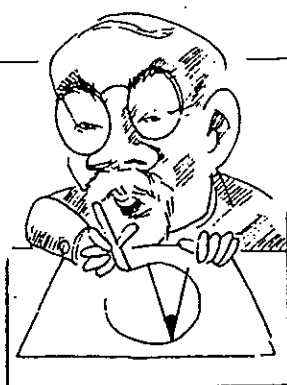


$\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{WV}$, $\overleftrightarrow{TU}$ และ $\overleftrightarrow{SR}$ ไม่เป็นเส้น
สัมผัสของวงกลม

เส้นสัมผัสของวงกลม คือ เส้นตรงซึ่งตัดหรือแตะวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น

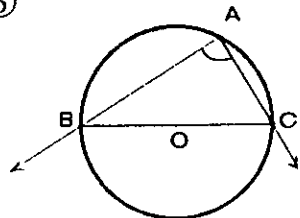
ข้อสังเกต

1. เราอาจกล่าวได้ว่า $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O หรือ $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสกับวงกลม O
2. จุดที่เส้นสัมผัสตัดหรือแตะกับวงกลมเรียกว่า จุดสัมผัส
ดังเช่น จุด B, C และ F เป็นจุดสัมผัสของวงกลม O

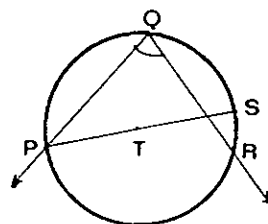


ต่อไปนี้จะกล่าวถึงมุมในส่วนต่าง ๆ
ของวงกลม

⑤



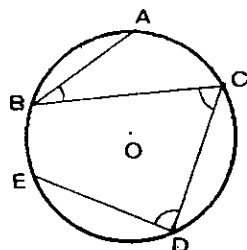
$\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
 $\widehat{BAC}$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม



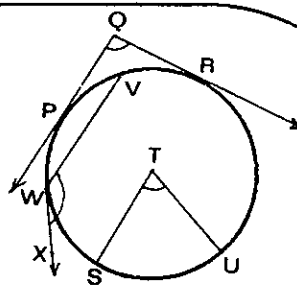
$\overline{PS}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
 $\widehat{PQR}$ ไม่เป็นมุมในครึ่งวงกลม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุม
ผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง

⑥


 $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ และ $\widehat{CDE}$

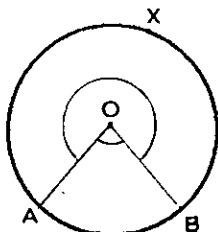
เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

มี $\widehat{AC}$ รองรับ $\widehat{ABC}$ $\widehat{BED}$ รองรับ $\widehat{BCD}$ และ $\widehat{CBE}$ รองรับ $\widehat{CDE}$ 
 $\widehat{PQR}$, $\widehat{STU}$ และ $\widehat{VWX}$

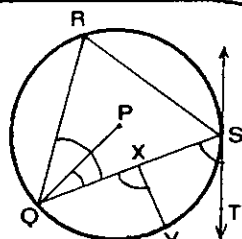
ไม่เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลมที่จุดซึ่งไม่ใช่จุดยอดมุม

⑦


 $\widehat{AOB}$ และมุมกลับ $\widehat{AOB}$

เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มี $\widehat{AB}$ รองรับ $\widehat{AOB}$ และมี $\widehat{AXB}$ รองรับมุมกลับ $\widehat{AOB}$ 
 $\widehat{PQR}$, $\widehat{PQS}$, $\widehat{QRS}$, $\widehat{QST}$ และ $\widehat{QXY}$

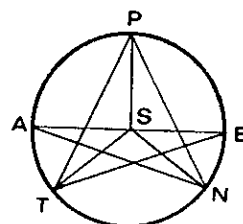
ไม่เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดยอดมุมและมีแขนของมุมเป็นรัศมีของวงกลม

แบบฝึกหัด ก. 3.1

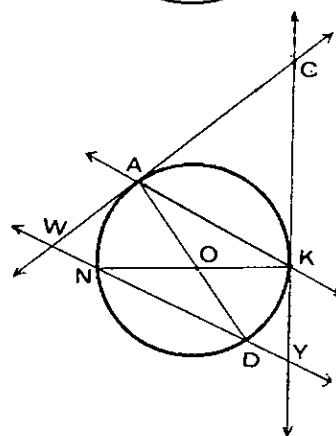
◆ ใช้รูปด้านขวามือสำหรับการตอบคำถามข้อ 1 ถึงข้อ 4

1. บอกชื่อมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม S มา 3 มุม
2. บอกชื่อมุมในส่วนโค้งของวงกลม S มา 2 มุม
3. บอกชื่อส่วนโค้งน้อยมา 3 เส้น
4. บอกชื่อส่วนโค้งซึ่งเป็นครึ่งวงกลมมา 2 เส้น



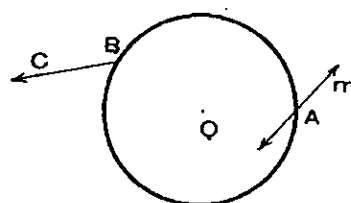
◆ รูปต่อไปนี้ใช้สำหรับการตอบคำถามข้อ 5 ถึง ข้อ 8

5. บอกชื่อเส้นสัมผัสของวงกลม O มา 2 เส้น
6. บอกชื่อเส้นตัดวงกลม O มา 2 เส้น
7. บอกชื่อส่วนโค้งใหญ่มา 2 เส้น
8. บอกชื่อคอร์คของวงกลม O มา 2 เส้น



◆ รูปต่อไปนี้ใช้สำหรับการตอบคำถามข้อ 9 ถึงข้อ 12

9. เส้นตรง m เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม Q หรือไม่ เพราะเหตุใด
10. จุด A เป็นจุดสัมผัสของวงกลม Q หรือไม่
11. เส้นตรง m เป็นเส้นตัดวงกลม Q หรือไม่ เพราะเหตุใด
12. รังสี BC เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม Q หรือไม่ เพราะเหตุใด



◆ สำหรับข้อ 13 ถึงข้อ 14 กำหนดจุด P อยู่ภายนอกวงกลม O

13. เส้นตรงที่ผ่านจุด P และสัมผัสกับวงกลม O มีกี่เส้น

14. เส้นตรงที่ผ่านจุด P และเป็นเส้นตัดวงกลม O มีกี่เส้น

◆ สำหรับข้อ 15 ถึงข้อ 16 กำหนดจุด Q อยู่ภายในวงกลม O

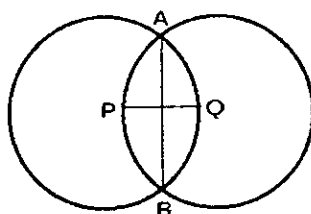
15. เส้นตรงที่ผ่านจุด Q และสัมผัสกับวงกลม O มีกี่เส้น

16. เส้นตรงที่ผ่านจุด Q และมีเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O เป็นส่วนประกอบมีกี่เส้น



แบบฝึกหัด ข. 3.1

1. เราใช้วิธีการพับกระดาษเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมได้อย่างไรเมื่อกำหนดรูปวงกลมวงหนึ่งให้
2. จงบอกชื่อของเครื่องมือที่ใช้ที่เกี่ยวข้องกับวงกลมมา 2 ชนิด
3. จงเขียนวงกลมวงหนึ่งพร้อมด้วยเส้นตรงที่ไม่เป็นเส้นตัดวงกลมและเส้นสัมผัสของวงกลม
4. จงเขียนวงกลมวงหนึ่งพร้อมด้วยส่วนของเส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุดแต่ไม่เป็นคอร์ดของวงกลม
5. ในรูปข้างล่าง กำหนดจุด P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{AB}$ และ $\overline{PQ}$ เป็นเช่นใด



มุมปล่อยก๊าก

สมชาย อายุ 8 ขวบ แต่ในชีวิตของเขาไม่เคยพูดเลย ทำให้พ่อแม่เป็นห่วงมาก
วันหนึ่งที่บ้านมีแขกมา ทุกคนต้องทำงาน ไม่มีใครสนใจสมชายเลย

“ผมขออนุญาตใส่น้ำตาลด้วยนีนึงครับ”

แม่ก็ใจมากเมื่อได้ยินสมชายพูดพร้อมกับถามว่า

“ทำไมเมื่อก่อนลูกถึงไม่ยอมพูด”

“ก็เมื่อก่อนแม่ดูผมอย่างนี้นี่ครับ ไม่เห็นจำเป็นต้องเอ่ยปากขออะไรเลย”!!

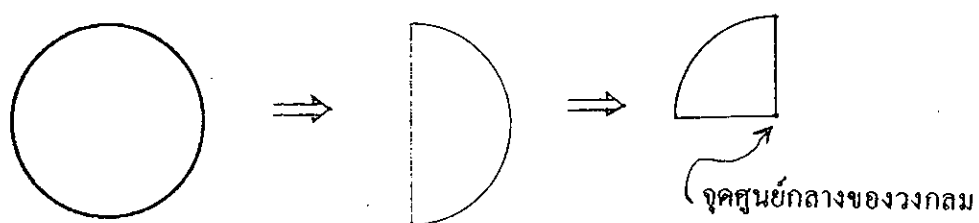
เฉลยแบบฝึกหัด ก. 3.1

1. เช่น $\widehat{PST}$, $\widehat{PSN}$ และ $\widehat{TSN}$
2. เช่น $\widehat{NAE}$ และ $\widehat{TPN}$
3. เช่น $\widehat{ATN}$, $\widehat{TNE}$ และ $\widehat{TAP}$
4. $\widehat{APE}$ และ $\widehat{ANE}$
5. $\overleftrightarrow{WC}$ และ $\overleftrightarrow{YC}$
6. เช่น $\overrightarrow{AK}$ และ $\overrightarrow{DN}$
7. เช่น $\widehat{ANK}$ และ $\widehat{DKN}$
8. เช่น $\overline{AD}$ และ $\overline{ND}$
9. ไม่เป็น เพราะว่าเมื่อตัดออกไปมันจะตัดวงกลม Q อีกจุดหนึ่ง นอกจากจุด A
10. จุด A ไม่เป็นจุดสัมผัสวงกลม Q สำหรับเส้นตรง m แต่มันอาจจะเป็นจุดสัมผัสวงกลม Q สำหรับเส้นตรงเส้นอื่น
11. เป็น เพราะว่า ถ้าต่อเส้นตรง m ออกไปแล้วจะตัดวงกลม Q อีกจุดหนึ่ง นอกจากจุด A
12. ไม่เป็น เพราะว่า ถ้าต่อรังสีไปทางด้านตรงข้าม แล้วจะตัดวงกลม Q อีกจุดหนึ่ง นอกจากจุด B
13. 2 เส้น
14. มีเป็นจำนวนมากมายับไม่ถ้วน
15. ไม่มี
16. 1 เส้น



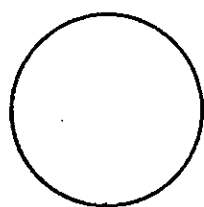
เฉลยแบบฝึกหัด ข. 3.1

1. จากรูปวงกลมที่กำหนดให้ และพับครึ่งวงกลม จากนั้นให้พับครึ่งของครึ่งวงกลม อีกครึ่งรอยพับที่เกิดขึ้นจะตัดกันที่จุดศูนย์กลาง ดังรูป

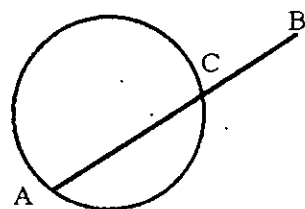


2. เช่น รถยนต์ที่มีล้อเป็นวงกลม และ นาฬิกาที่มีหน้าปัดเป็นวงกลม

3.

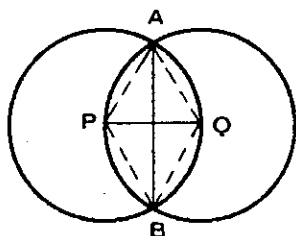


4.



$\overline{AB}$ ตัดวงกลมสองจุดคือจุด A และ C

5. $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$



ลาก $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ และ $\overline{BQ}$

จะได้ $AP = BP = PQ$ และ $AQ = BQ = PQ$
(รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $AP = BP = AQ = BQ$

(สมบัติของการเท่ากัน)

และ $\angle APB \neq 90^\circ$ ($\overline{AB}$ ไม่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของ Q)

ทำให้ $\square APBQ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ซึ่งมี $\overline{AB}$ และ $\overline{PQ}$ เป็นเส้นทแยงมุม

ดังนั้น $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$

(เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน)





กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2
เรื่อง สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม



คำแนะนำ

1. ให้ผู้เรียนศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ด้วยตนเอง ไปตามลำดับ
2. ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจเนื้อหาอย่างละเอียดโดยการอ่านอย่างตั้งใจและคิดวิเคราะห์
3. เมื่อผู้เรียนอ่านรายละเอียดของแต่ละหัวเรื่องในหน่วยการเรียนรู้ย่อยจบแล้วควรบันทึกสาระสำคัญของแต่ละหัวเรื่องและปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ตามที่ระบุไว้ในท้ายแต่ละหัวเรื่อง (ถ้ามี) รวมทั้งกิจกรรมรวมที่กำหนดไว้ในท้ายหน่วยการเรียนรู้ย่อยด้วย
4. เมื่อปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละกิจกรรมแล้ว โปรดตรวจเฉลยจากแนวตอบในหน่วยการเรียนรู้ย่อย ปฏิบัติจนครบทุกกิจกรรมการเรียนรู้ ก่อนจะศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยอื่น ๆ ต่อไป
5. ถ้าผู้เรียนมีข้อสงสัยให้ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา



โปรดอ่านหัวเรื่อง แนวคิด และจุดประสงค์
 ของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2 แล้วศึกษารายละเอียดต่อไป

สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม

♣ หัวเรื่อง

1. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสกับรัศมีของวงกลม
2. เส้นสัมผัสร่วม

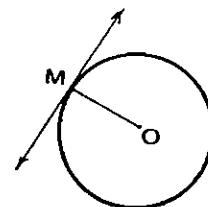
♣ แนวคิด

1. เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
 2. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีที่จุดปลายของรัศมีบนวงกลมย่อมเป็นเส้นสัมผัสของวงกลม
 3. เส้นตรงเส้นหนึ่งซึ่งทำหน้าที่เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมสองวงหรือหลายวงพร้อมกัน เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า “เส้นสัมผัสร่วม”
 4. เส้นสัมผัสร่วมของวงกลมได้นำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันอย่างมากมาย โดยเฉพาะเกี่ยวกับ เครื่องยนต์ เครื่องจักรต่าง ๆ ซึ่งมีล้อเฟืองและโซ่ เป็นส่วนประกอบที่สำคัญ
- ♣ จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย

ให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าเส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
2. บอกได้ว่าเส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีที่จุดปลายของรัศมีบนวงกลม ย่อมเป็นเส้นสัมผัสของวงกลม
3. บอกได้ว่าเส้นสัมผัสของวงกลมสองเส้นที่ลากจากจุดหนึ่งซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมย่อมยาวเท่ากัน
4. นำสมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมไปใช้
5. หาความยาวที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม

สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม



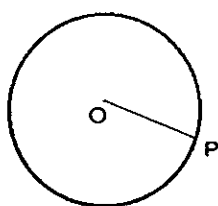
1

ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสกับรัศมีของวงกลม

กิจกรรมสำรวจ : 1

ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. เขียนวงกลม O และเลือกจุด P บนวงกลม ลาก $\overline{OP}$



2. เขียนเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับ $\overline{OP}$ ที่จุด P

ผู้เรียนคิดว่าเส้นตรงนั้นจะตัดวงกลม O จำนวนกี่จุด

..... (1)

3. เขียนเส้นตรงเส้นอื่นซึ่งผ่านจุด P แต่ไม่ตั้งฉากกับ $\overline{OP}$

ผู้เรียนคิดว่าเส้นตรงเหล่านั้นจะตัดวงกลมจำนวนกี่จุด

..... (2)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 1

(1) 1 จุด

(2) 2 จุด



① เราได้ทราบมาก่อนหน้าที่เส้นสัมผัสของวงกลมจะตัดวงกลมเพียงจุดเดียว เท่านั้น
ดังนั้นคำตอบจากกิจกรรมสำรวจข้างต้นจึงเป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสของวงกลมที่กล่าวว่า

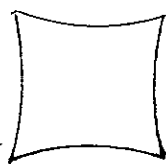
1. เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
2. เส้นที่ตั้งฉากกับรัศมีที่จุดปลายของรัศมีบนวงกลมย่อมเป็นเส้นสัมผัส

การแสดงผลจะกล่าว

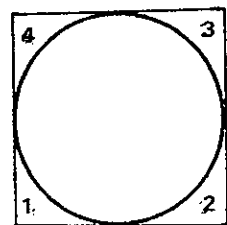
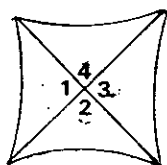
ในกิจกรรมเสริม : 1

มุมปริศนา

ในรูปทางขวามือ ถ้าต้องการตัดรูปนี้ออกเป็น 4 ส่วน
แล้วนำมาต่อเป็นรูปวงกลมได้ ควรตัดอย่างไร

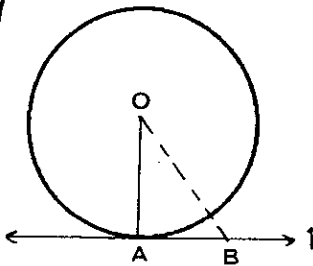


เฉลย: มุมปริศนา



กิจกรรมเสริม : 1

①



กำหนด วงกลม O มี OA เป็นรัศมี เส้นตรง l สัมผัส
วงกลม O ที่จุด A

ต้องการพิสูจน์ว่า เส้นตรง $l \perp OA$

พิสูจน์ ใช้การพิสูจน์ทางอ้อม

สมมติว่า เส้นตรง l ไม่ตั้งฉากกับ OA

ดังนั้น จะมี OB ซึ่ง $OB \perp$ เส้นตรง l

จะได้ $\triangle ABO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $\angle B = 90^\circ$

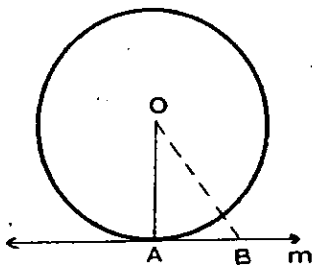
$OB < OA$ (รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด)

แต่ B เป็นจุดภายนอกวงกลม O (l เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O)

นั่นคือ $OB > OA$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $OB < OA$

ดังนั้น ที่สมมติไว้ เป็นเท็จ นั่นคือเส้นตรง $l \perp OA$

②



กำหนด วงกลม O มี OA เป็นรัศมี

เส้นตรง $m \perp OA$ ที่จุด A

ต้องการพิสูจน์ว่า เส้นตรง m สัมผัสวงกลม O ที่จุด A

พิสูจน์ กำหนด B เป็นอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง m

เนื่องจาก $\triangle OAB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $\angle A = 90^\circ$

ดังนั้น $OB > OA$ (รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด)

B เป็นจุดภายนอกวงกลม O

นั่นคือ มีจุด A เพียงจุดเดียวซึ่งอยู่บนเส้นตรง m และอยู่บนวงกลม O

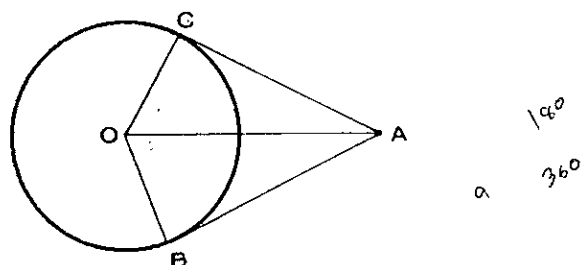
ดังนั้น เส้นตรง m สัมผัสวงกลม O ที่จุด A

กิจกรรมเสริม : 2

ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้



กำหนด วงกลม O ซึ่งมี $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัส
กับวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ
ลาก $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ และ $\overline{AO}$



1. ผู้เรียนคิดว่าขนาดของ $\angle OBA$ และ $\angle OCA$ แต่ละมุมเท่ากับกี่องศา
.....(1)
2. $\triangle OBA$ กับ $\triangle OCA$ เท่ากันทุกประการ หรือไม่
.....(2)
3. ผู้เรียนคิดว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ มีความสัมพันธ์กันเช่นใด
.....(3)
4. ผู้เรียนคิดว่า $\angle OAB$ และ $\angle OAC$ มีความสัมพันธ์กันเช่นใด
.....(4)

เฉลย : กิจกรรมเสริม : 2

$$(1) \hat{OBA} = \hat{OCA} = 90^\circ$$

(เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม
ที่จุดสัมผัส)

$$(2) \triangle OBA \cong \triangle OCA \text{ (น. ค. ค.)}$$

$$(3) AB = AC$$

$$(4) \hat{OAB} = \hat{OAC}$$



ผู้เรียนอาจใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป
หมายเลข 10 เป็นแนวทางในการตอบ
คำถามข้อ 3 ของกิจกรรมสำรวจ : 2

จากคำตอบข้างต้นเป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับ
เส้นสัมผัสวงกลม ซึ่งกล่าวว่า

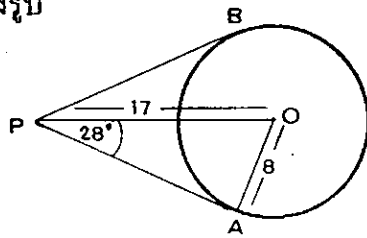
1. เส้นสัมผัสของวงกลมสองเส้นที่ลากจากจุดหนึ่งซึ่งอยู่นอกวงกลมนั้นยาวเท่ากัน
2. ส่วนของเส้นที่ลากจากจุดภายนอกวงกลมไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้นแบ่งครึ่งมุมซึ่งเกิดจากเส้นสัมผัสของวงกลมทั้งสองที่ลากจากจุดภายนอกวงกลมนั้น

กิจกรรมเสริม : 3

ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. กำหนด $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่ลากจากจุด P

ดังรูป



$OP = 17$ หน่วย

$OA = 8$ หน่วย

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

และ $\angle APO = 28^\circ$

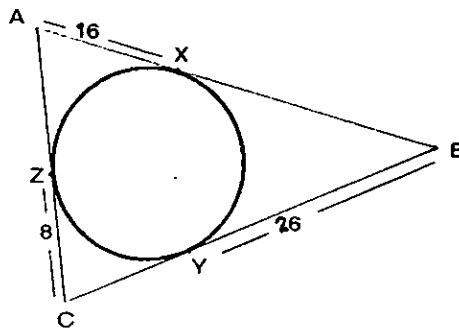
1.1 $\angle OPB$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา

1.2 $\angle AOP$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา

1.3 $\overline{BP}$ ยาวกี่หน่วย

2. ในรูปข้างล่าง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด X , Y และ Z ตามลำดับ

จงหาว่า $AB + BC + AC$ ยาวกี่หน่วย



เฉลย : กิจกรรมเสริม : 3

$$1.1 \quad \angle OPB = 28^\circ$$

$$1.2 \quad \angle AOP = 90 - 28 \\ = 62^\circ$$

$$1.3 \quad \text{จาก } AP^2 = OP^2 - OA^2 \\ = 17^2 - 8^2$$

$$AP^2 = 289 - 64$$

$$= 225$$

$$AP = \sqrt{225} = 25 \text{ หน่วย}$$

$$\text{แต่ } AP = BP$$

$$\text{ดังนั้น } BP = 25 \text{ หน่วย}$$

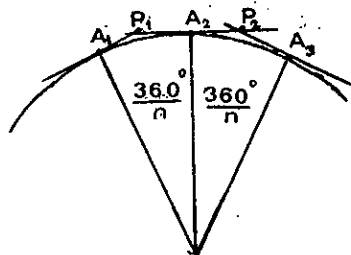
$$2. \quad AB + BC + AC = (AX + XB) + (BY + YC) + (AZ + ZC)$$

$$= (16 + 26) + (26 + 8) + (16 + 8)$$

$$= 42 + 34 + 24$$

$$= 100 \text{ หน่วย}$$

มูมนำคิด



กำหนดจุด $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ อยู่เรียงกัน

อยู่บนวงกลม ตามลำดับ สำหรับแต่ละ

$i, i = 1, 2, \dots, n$ โดยให้ $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{360}{n}^\circ$

ถ้าลากเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด A_i แต่ละจุด แล้ว $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ เป็นรูปหลายเหลี่ยมชนิดใด

เฉลย : มุมหน้ากิด

$P_1P_2P_3 \dots P_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เพราะว่า $\triangle A_1OP_1 \cong \triangle A_2OP_1 \cong \triangle P_2OA_2 \cong \triangle P_2OA_3 \dots$

(ณ. ค. ค.)

ดังนั้น $A_1P_1 = P_1A_2 = A_2P_2 = P_2A_3 = \dots$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

$P_1P_2 = P_2P_3 = \dots P_{n-1}P_n$

2

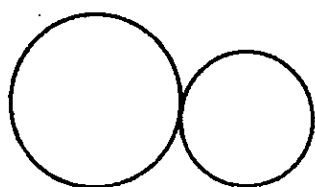
เส้นสัมผัสร่วม

วงกลมสองวงใด ๆ จะมีความสัมพันธ์กันแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

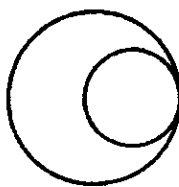
1. ตัดกันที่จุด 2 จุด หรือ
2. ตัดกันที่จุด ๑ จุด หรือ
3. ไม่ตัดกันเลย

เราเรียกววงกลมสองวงที่ตัดกันจุด ๑ จุดว่า วงกลมสัมผัสกัน

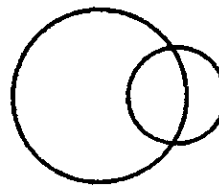
และเรียกจุดตัดนั้นว่า จุดสัมผัส



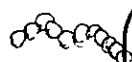
วงกลมสัมผัสกันภายนอก



วงกลมสัมผัสกันภายใน



วงกลมตัดกัน

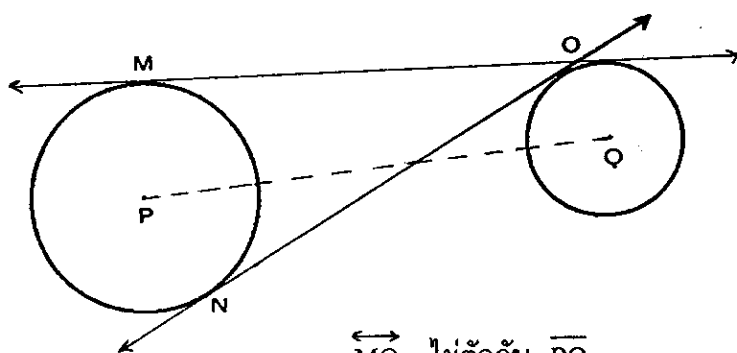


เส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลมสองวงซึ่งอยู่ใน
ระนาบเดียวกัน เราเรียกว่า เส้นสัมผัสร่วม
ของวงกลมทั้งสอง

เราแบ่งเส้นสัมผัสร่วม ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. เส้นสัมผัสร่วมภายนอก ซึ่งจะไม่ตัดกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม
จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง
2. เส้นสัมผัสร่วมภายใน ซึ่งจะตัดกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม
จุดศูนย์กลาง ของวงกลมทั้งสอง

ในรูปข้างล่าง $\overleftrightarrow{MO}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมภายนอกของวงกลม P และ Q
ส่วน $\overleftrightarrow{NO}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมภายใน ของวงกลม P และ Q



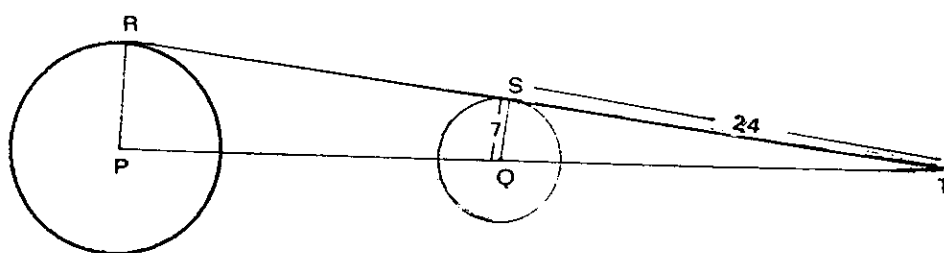
$\overleftrightarrow{MO}$ ไม่ตัดกับ $\overline{PQ}$

$\overleftrightarrow{NO}$ ตัดกับ $\overline{PQ}$



ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกรณำรูปตามเหลี่ยมคล้าย
มาใช้ในการหาความยาวที่เกี่ยวข้องกับเส้น
สัมผัสร่วม

ตัวอย่าง กำหนด $\overline{RT}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม P และวงกลม Q
ซึ่งมี $QS = 7$ หน่วย $ST = 24$ หน่วย และ $RT = 48$ หน่วย
ดังรูป จงหา PR และ QT



วิธีทำ เนื่องจาก $\triangle PTR \sim \triangle QTS$

$$\text{ดังนั้น } \frac{PR}{QS} = \frac{RT}{ST}$$

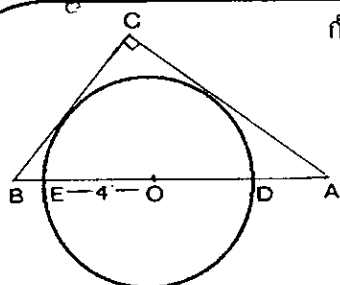
$$\frac{PR}{7} = \frac{48}{24}$$

$$PR = \frac{48}{24} (7)$$

$$PR = 14 \text{ หน่วย}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } QT^2 &= SQ^2 + ST^2 \quad (\text{ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส}) \\
 &= 7^2 + 24^2 \\
 &= 625 \\
 QT &= \sqrt{625} \\
 QT &= 25 \text{ หน่วย}
 \end{aligned}$$

มูมนำคิด



กำหนด $\overline{CA}$ และ $\overline{CB}$ เป็นเส้นสัมผัสของ
วงกลม O ซึ่ง $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ ที่จุด C
และรัศมีของวงกลม O ยาว 4 หน่วย
ดังรูป ถ้า $BE = 1$ หน่วยแล้ว $\overline{AD}$
ยาวกี่หน่วย

มูมปริศนา

เด็กหญิงแดงไปซื้อแอปเปิ้ลที่ตลาดมาจำนวน 9 ผล
เขามีถุงกระดาษอยู่ 4 ถุง จะบรรจุแอปเปิ้ลให้ได้เป็น
จำนวนกี่ผลในถุงกระดาษแต่ละถุงได้อย่างไร
(ห้ามผ่าแอปเปิ้ล และห้ามฉีกถุงกระดาษด้วย)

เฉลย : มุมนำคิด

$$AD = 8/3 \text{ หน่วย}$$

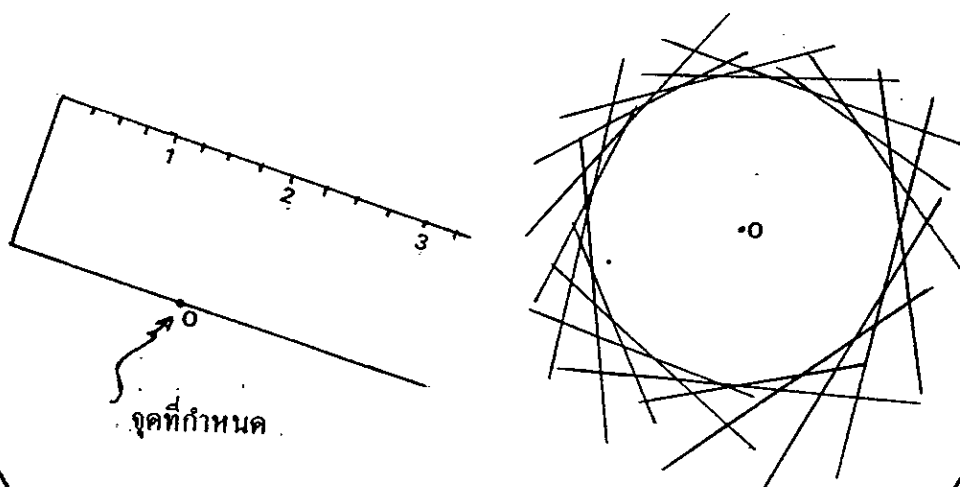
เฉลย : มุมปริศนา

นำแอปเปิลมาใส่ถุงกระดาษถุงละ 3 ผล จำนวน 3 ถุง
แล้วนำถุงทั้งสามนั้นไปใส่ในถุงกระดาษ ถุงที่สี่

กิจกรรมเสริม 4

การสร้างวงกลมด้วยไม้บรรทัด มีขั้นตอนดังนี้

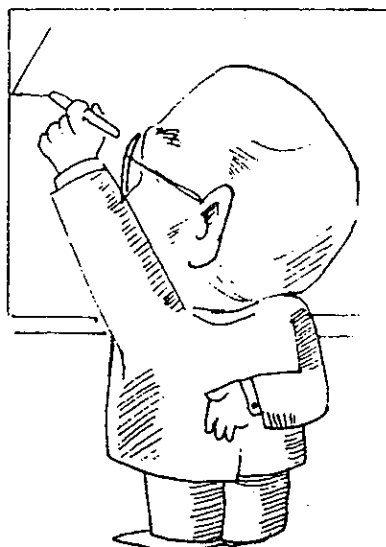
1. กำหนดจุด ๆ หนึ่งบนกระดาษที่ต้องการเขียนวงกลม
2. วางขอบหนึ่งของไม้บรรทัดตามแนวของจุดที่กำหนดและ
เขียนเส้นตรงตามแนวขอบของไม้บรรทัดที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น
3. ทำตามขั้นตอนที่ 2 หลาย ๆ ครั้ง ดังรูปข้างล่าง



คำถาม



ผู้เรียนคิดว่าเส้นตรงต่าง ๆ ที่ประกอบเป็นรูปร่างของ
วงกลมข้างต้นมีความสัมพันธ์กับวงกลมนั้นเช่นใด
และรัศมีของวงกลมยาวเท่าใด



เฉลย

เส้นตรงแต่ละเส้นเหล่านั้นจะเป็นเส้นสัมผัสของ
วงกลมและรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับความกว้าง
ของไม้บรรทัด

กิจกรรมเสริม : 5

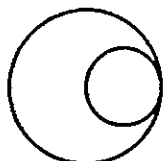


เรากล่าวได้ว่าสิ่งแวดล้อมที่อยู่รอบตัวเรามีเส้นสัมผัส
ของวงกลมเป็นส่วนประกอบอยู่มากมาย อย่างเช่นที่เรา
คุ้นเคยกันได้แก่ ล้อเฟืองและโซ่ของรถจักรยาน
สายสะพานและลูกรอกของเครื่องยนต์ ตลอดจน
เครื่องจักรต่าง ๆ ในโรงงานอุตสาหกรรม

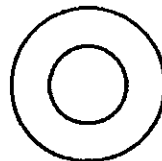
ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้ออกจำนวนของเส้นสัมผัสร่วมที่เกิดขึ้นสำหรับวงกลมแต่ละคู่
ต่อไปนี้

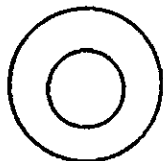
1.1



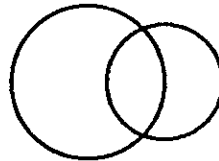
1.2



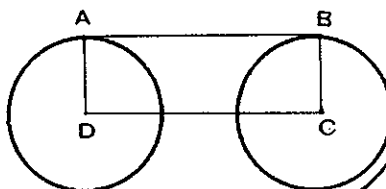
1.3



1.4



2. กำหนด $\overline{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของ
วงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากันดังรูป
จงแสดงว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม
มุมฉาก



เฉลย : กิจกรรมเสริม : 5

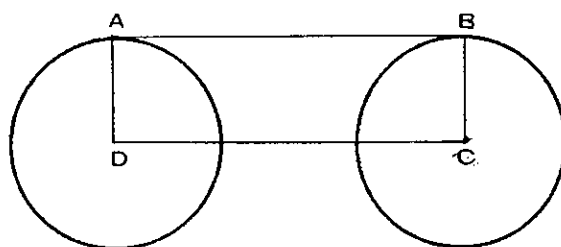
1.1 1 เส้น

1.2 ไม่มี

1.3 ไม่มี

1.4 2 เส้น

2.



เนื่องจาก $AD = BC$ (เป็นรัศมีของวงกลมที่ยาวเท่ากัน)

และ $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

(เส้นสัมผัสของวงกลมย่อมตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

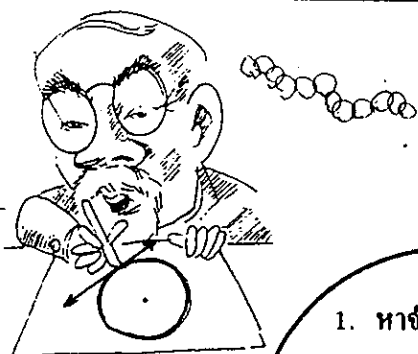
ดังนั้น $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นเดียวกันย่อมขนานกัน)

ทำให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ และ $AD = BC$)

แต่ $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

ดังนั้น $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



เพื่อเป็นการทดสอบความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นสัมผัส
ของวงกลมให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. หาจำนวนของเส้นสัมผัสร่วมภายในของวงกลม เมื่อ
 - 1.1 วงกลมสองวงร่วมจุดศูนย์กลางเดียวกัน
 - 1.2 วงกลมสองวงสัมผัสกันภายใน
 - 1.3 วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก
 - 1.4 วงกลมที่อยู่ในระนาบเดียวกันสองวงมีจุดร่วมกัน
2 จุด
2. หาจำนวนของเส้นสัมผัสร่วมภายนอกของวงกลม เมื่อ
 - 2.1 วงกลมสองวงร่วมจุดศูนย์กลางเดียวกัน
 - 2.2 วงกลมสองวงสัมผัสกันภายใน
 - 2.3 วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก
 - 2.4 วงกลมที่อยู่ในระนาบเดียวกันสองวงมีจุดร่วมกัน
2 จุด

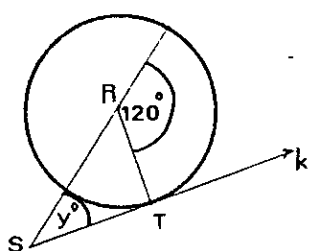
เฉลย

1	1.1	ไม่มี
	1.2	ไม่มี
	1.3	1 เส้น
	1.4	ไม่มี
2	2.1	ไม่มี
	2.2	1 เส้น
	2.3	2 เส้น
	2.4	2 เส้น

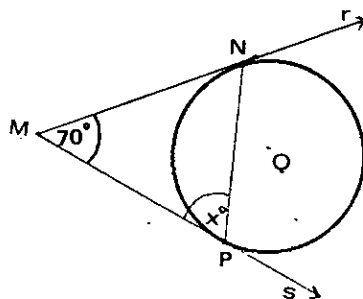
แบบฝึกหัด ก. 3.2

1. จงหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

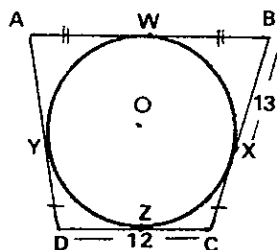
1.1 k เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม R
 y เท่ากับกี่องศา



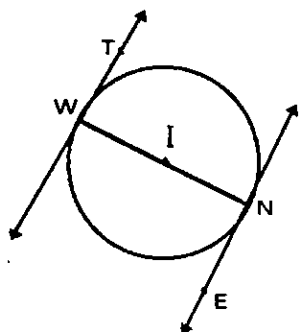
1.2 r และ s เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม Q
 x เท่ากับกี่องศา



1.3 วงกลม O แนบในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ $BX = 13$ หน่วย และ $CD = 12$ หน่วย
 เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ยาวกี่หน่วย



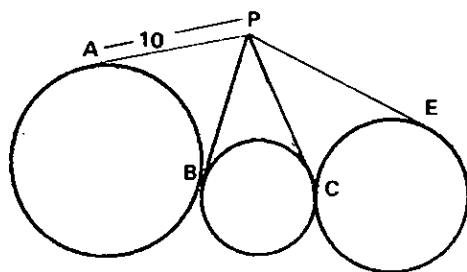
2. ในรูปข้างล่าง $\overleftrightarrow{WN}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม I , $\overleftrightarrow{TW}$ และ $\overleftrightarrow{NE}$ สัมผัสกับวงกลม I



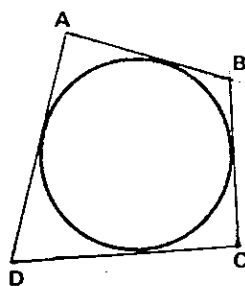
2.1 $\overleftrightarrow{TW}$ กับ $\overleftrightarrow{WN}$ สัมพันธ์กันอย่างไร

2.2 $\overleftrightarrow{TW}$ กับ $\overleftrightarrow{NE}$ สัมพันธ์กันอย่างไร

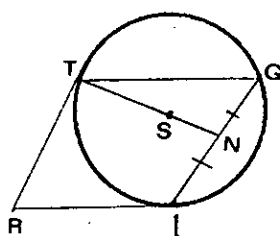
3. วงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรงที่กำหนดให้ที่จุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงนั้น มีจำนวนเท่าไร
4. รูปข้างล่างได้แสดงถึงเส้นสัมผัสของวงกลมแต่ละวง เมื่อ $PA = 10$ หน่วย
 $\overline{PE}$ ยาวกี่หน่วย



5. วงกลมแนบในรูปสี่เหลี่ยม ABCD จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $AB + DC$ และ $AD + BC$



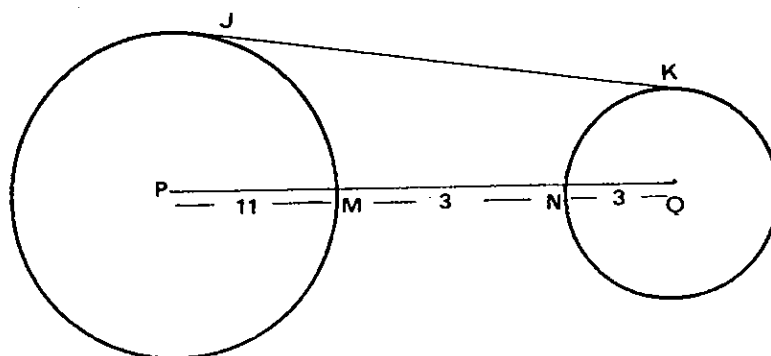
6. ในรูปข้างล่าง $\square TRIG$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $\overline{TN}$ แบ่งครึ่ง $\overline{IG}$
 S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



- 6.1 $\overline{RT} \parallel \overline{IG}$ เพราะอะไร
- 6.2 $\overline{TN}$ ตั้งฉากกับ $\overline{RT}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 6.3 $\overleftrightarrow{RT}$ สัมผัสกับวงกลม S หรือไม่ เพราะเหตุใด

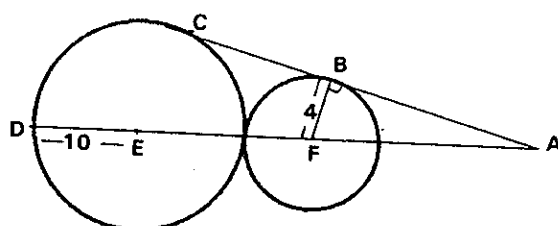
แบบฝึกหัด ข. 3.2

1. $\overline{JK}$ สัมผัสกับ วงกลม P และวงกลม Q , $PM = 11$ หน่วย $MN = 3$ หน่วย และ $NQ = 3$ หน่วย ดังรูป $\overline{JK}$ ยาวกี่หน่วย

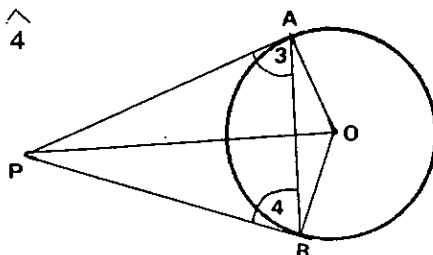


แนะนำ เขียนรูปสี่เหลี่ยม PQKJ

2. วงกลม E และ วงกลม F สัมผัสกันภายนอก $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม E และ วงกลม F ที่จุด C และ B ตามลำดับ $DE = 10$ หน่วย และ $FB = 4$ หน่วย ดังรูป แล้ว $\overline{AB}$ ยาวกี่หน่วย



3. กำหนด $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด A และ B ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\hat{3} = \hat{4}$



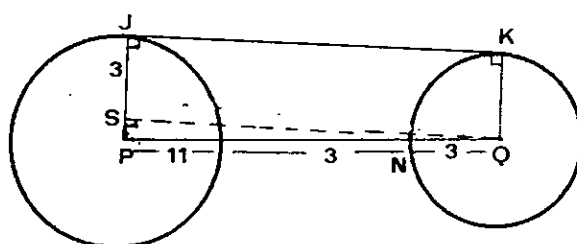
เฉลยแบบฝึกหัด ก. 3.2



1.
 - 1.1 $y = 30^\circ$
 - 1.2 $x = 55^\circ$
 - 1.3 76 หน่วย
2.
 - 2.1 ตั้งฉากกัน
 - 2.2 ขนานกัน
3. เป็นจำนวนมากมายับไม่ถ้วน
4. $PE = 10$ หน่วย
5. $AB + DC = AD + BC$
6.
 - 6.1 ด้านตรงข้ามคู่หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 - 6.2 $\overline{TN} \perp \overline{RT}$ เพราะว่า ขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180 องศา
 - 6.3 $\overleftrightarrow{RT}$ สัมผัสกับวงกลม S เพราะว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีที่จุดปลายนอกจะเป็นเส้นสัมผัส

เฉลยแบบฝึกหัด ข. 3.2

1.



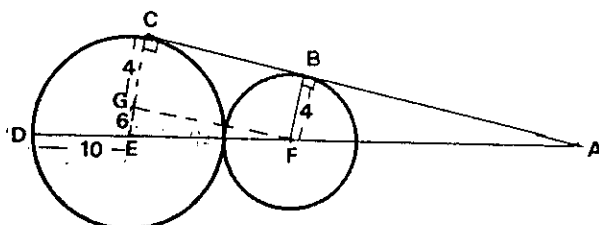
พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก SPQ และใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

จะได้ $SQ = 15$ หน่วย

เนื่องจาก $\square JSQK$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ทำให้ $JK = SQ = 15$ หน่วย

2.



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก GEF และใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

จะได้ $GF = 4\sqrt{10}$ หน่วย

เนื่องจาก $CGFB$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

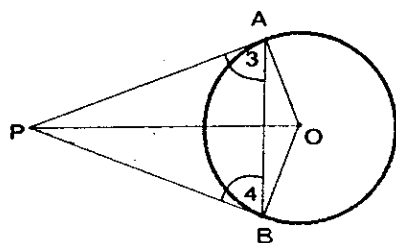
ทำให้ $CB = GF = 4\sqrt{10}$ หน่วย

เนื่องจาก $\triangle ABF \sim \triangle ACE$

$$\text{ดังนั้น } \frac{AB}{AB + 4\sqrt{10}} = \frac{4}{10}$$

$$\text{จะได้ } AB = \frac{8\sqrt{10}}{3} \text{ หน่วย}$$

- 3 เนื่องจาก $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด A และ B
ตามลำดับ (กำหนดให้)



ดังนั้น $PA = PB$

ทำให้ $\triangle PAB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $\hat{3} = \hat{4}$

มุมป้อยกัก



ตำรวจ 3 นายกำลังวิ่งไล่ตามโจรปล้นธนาคารคนหนึ่ง เมื่อจับได้ก็ให้
ตำรวจฮ้วนเป็นคนจับตัวเอาไว้ แต่ตำรวจฮ้วนจับไม่แน่นโจรจึงตบหน้า
ตำรวจฉาดใหญ่และรีบหนีไป

“ไม่ได้เรื่อง พวกคุณทำงานกันไม่เอาไหนจริง ๆ” นายตำรวจใหญ่กล่าว

“แต่ผมมีหลักฐานนะครับ” ตำรวจฮ้วนบอก

“ไหนล่ะหลักฐาน” “บนใบหน้าผมนี่ไงครับ” !



กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3

เรื่อง สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม



คำแนะนำ

1. ให้ผู้เรียนศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ด้วยตนเอง ไปตามลำดับ
2. ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจเนื้อหาอย่างละเอียดด้วยการอ่านอย่างตั้งใจและคิดวิเคราะห์
3. เมื่อผู้เรียนอ่านรายละเอียดของแต่ละหัวเรื่องในหน่วยการเรียนรู้ย่อยจบแล้วควรบันทึกสาระสำคัญของแต่ละหัวเรื่องและปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ตามที่ระบุไว้ในท้ายแต่ละหัวเรื่อง (ถ้ามี) รวมทั้งกิจกรรมรวมที่กำหนดไว้ในท้ายหน่วยการเรียนรู้ย่อยด้วย
4. เมื่อปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละกิจกรรมแล้ว โปรดตรวจเฉลยจากแนวตอบในหน่วยการเรียนรู้ย่อย ปฏิบัติจนครบทุกกิจกรรมการเรียนรู้ ก่อนจะศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยอื่น ๆ ต่อไป
5. ถ้าผู้เรียนมีข้อสงสัยให้ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา



โปรดอ่านหัวเรื่อง แนวคิด และจุดประสงค์
ของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3 แล้วศึกษารายละเอียดต่อไป

สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม

หัวเรื่อง

1. ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
2. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม
3. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง

แนวคิด

1. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นยาวเท่ากัน
2. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดของวงกลมยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อคอร์ดนั้นตัดส่วนโค้งได้ยาวเท่ากัน
3. เราสามารถหาจุดศูนย์กลางของวงกลมโดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง
4. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดของวงกลมยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อคอร์ดนั้นอยู่ห่าง จากจุดศูนย์กลางเท่ากัน

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย

ให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
2. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
3. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดของวงกลมที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้ง ออกได้ยาวเท่ากัน

4. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดของวงกลมที่ตัดวงกลมออกเป็น ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน
5. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมจะแบ่งครึ่ง คอร์ดนั้น
6. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
7. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันคอร์ดของวงกลมที่ยาวเท่ากันจะห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน
8. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันคอร์ดของวงกลมที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

สมบัติเกี่ยวกับส่วนโค้ง มุมที่จุดศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลม

①

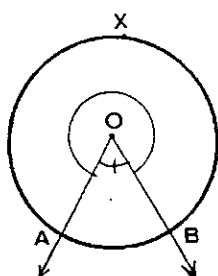
ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและ
มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี A และ B เป็นจุดบนวงกลมลาก $\vec{OA}$ และ $\vec{OB}$ จะได้มุม AOB และมุมกลับ AOB เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O และแขนของมุมจะตัดวงกลมออกเป็นส่วนโค้ง 2 ส่วนคือ $\widehat{AB}$ และ $\widehat{AXB}$ ซึ่ง

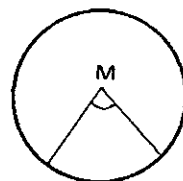
$\widehat{AB}$ รองรับมุม AOB และ

$\widehat{AXB}$ รองรับมุมกลับ AOB

ดังรูปทางซ้ายมือ



กิจกรรมสำรวจ : 1



บทเรียนกิจกรรม

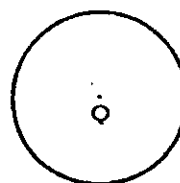
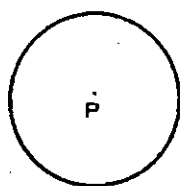
เรื่อง : ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

อุปกรณ์ : กระดาษลอกลาย วงเวียน

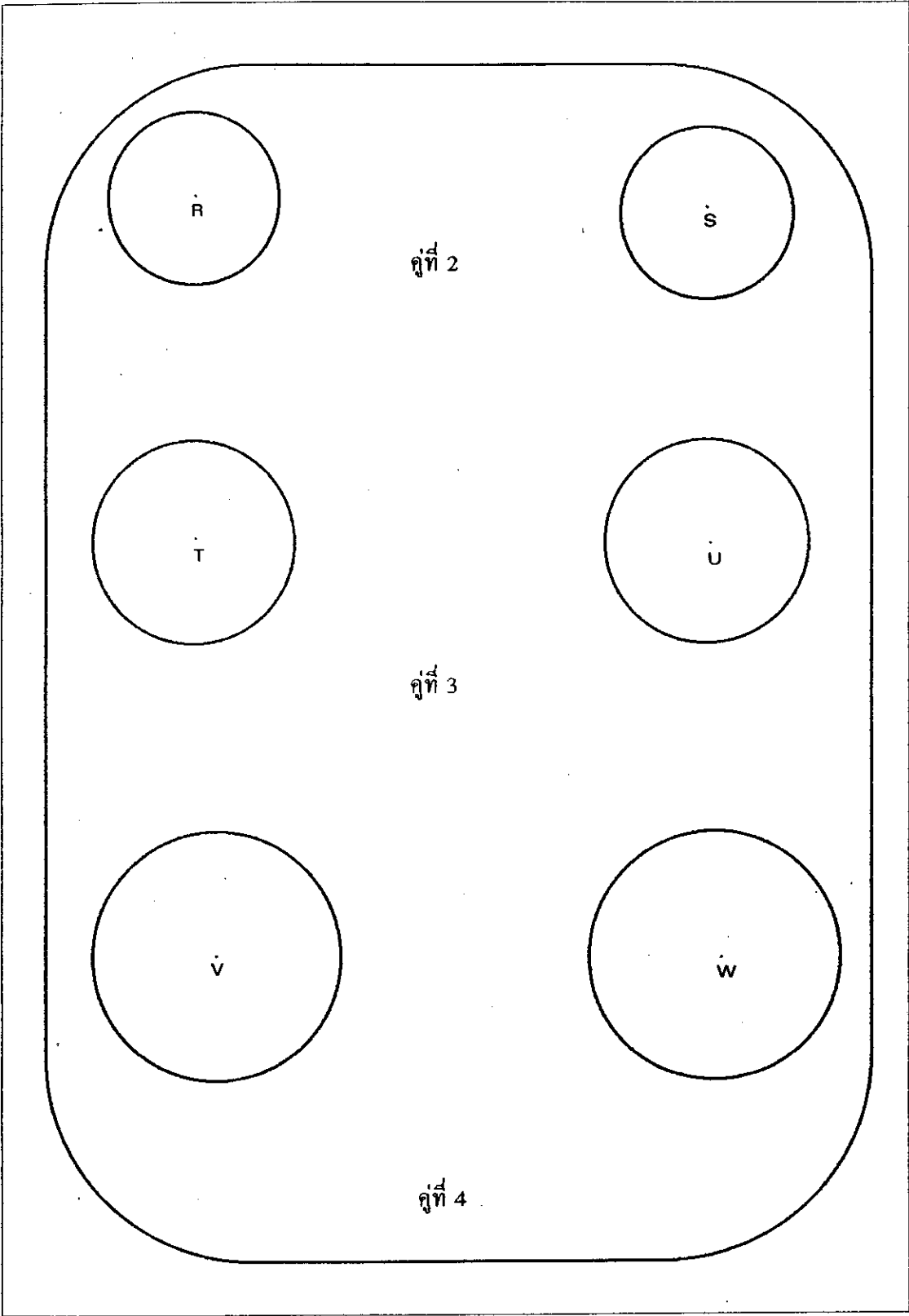
คำชี้แจง : ผู้เรียนปฏิบัติไปตามลำดับขั้นและตอบคำถามในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
เมื่อตอบคำถามแล้วตรวจสอบเฉลยที่ละเอียด

กิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนพิจารณาวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากัน ในแต่ละคู่ดังนี้



คู่ที่ 1

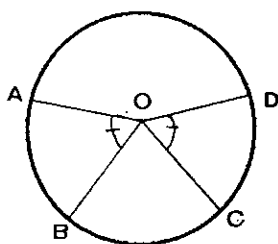


2. ในแต่ละคู่ สร้างมุมที่จุดศูนย์กลางให้มีขนาดเท่ากัน
3. ใช้กระดาษลอกลาย ตรวจสอบดูว่าส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางของแต่ละคู่ยาวเท่ากันหรือไม่
.....(1)
4. ผู้เรียนคิดว่าความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ส่วนโค้งนั้นรองรับอยู่เป็นเช่นใด
.....
.....(2)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 1



1. ยาวเท่ากัน
2. ในวงกลมที่เท่ากัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



ถ้าอยู่ในวงกลมเดียวกัน
ตั้งรูปข้างล่าง ละ!



ให้ตอบคำถามต่อไปนี้

คำถาม

จากรูปข้างต้น O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

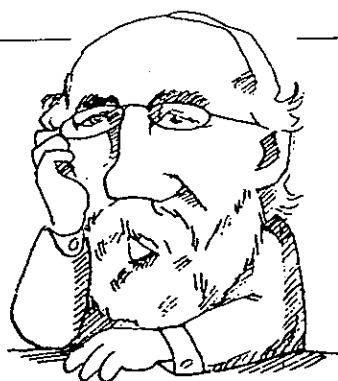
$$\text{และ } \angle AOB = \angle COD$$

ผู้เรียนคิดว่า $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ หรือไม่

เฉลย

ยาวเท่ากัน เนื่องจากวงกลมเดียวกัน
เป็นวงกลมที่เท่ากันทุกประการ จึง
ใช้ข้อสรุปจากกิจกรรมสำรวจ : 1 ได้
หรือโดยการลอกรูปมาซ้อนกัน





ผลที่ได้จากกิจกรรมสำรวจ : 1 นี้
เป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลม
ที่กล่าวว่า

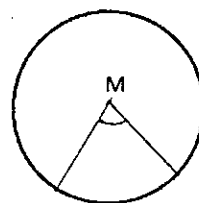
ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมี
ขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น
จะยาวเท่ากัน

ถ้าผู้เรียนสนใจการพิสูจน์ให้ศึกษา
ในคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 021
ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นของ สสวท.



กิจกรรมสำรวจ : 2

บทเรียนกิจกรรม



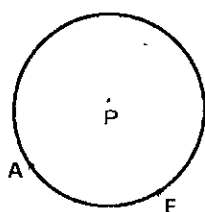
เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

อุปกรณ์ กระดาษลอกลาย ไม้บรรทัด วงเวียน

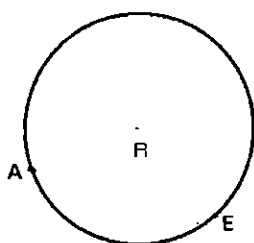
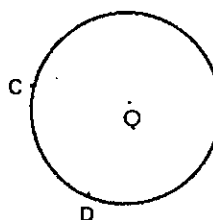
คำชี้แจง ผู้เรียนปฏิบัติไปตามลำดับขั้นและตอบคำถามในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
เมื่อตอบแล้วดูเฉลยทีละข้อ

กิจกรรม

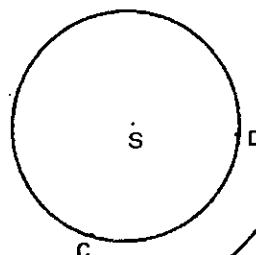
1. ให้ผู้เรียนพิจารณาวงกลมที่มีรัศมี **ยาวเท่ากัน** และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
ในแต่ละคู่ดังนี้

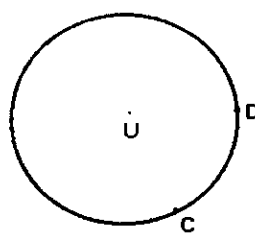
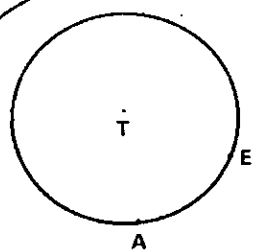


คู่ที่ 1

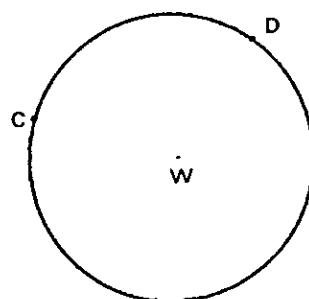
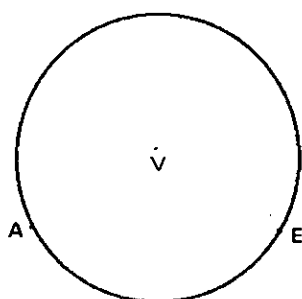


คู่ที่ 2





รูปที่ 3



รูปที่ 4

2. ให้ผู้เรียนสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมในวงกลมแต่ละคู่ โดยมีส่วนโค้งที่กำหนดให้รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น
3. ใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละคู่มีขนาดเท่ากันหรือไม่
4. ผู้เรียนคิดว่าความสัมพันธ์ระหว่างส่วนโค้งและมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ส่วนโค้งนั้นรองรับอยู่เป็นเช่นใด

.....(1)

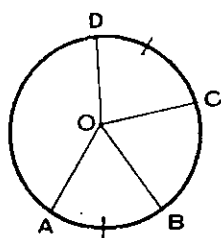
.....(2)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 2

1. ขนาดเท่ากัน
2. ในวงกลมที่เท่ากัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



สำหรับในวงกลมเดียวกัน
ดังรูปข้างล่างละ!



คำถาม

จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของ
วงกลม และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
ผู้เรียนคิดว่า $\angle AOB = \angle COD$ หรือไม่

เฉลย

ขนาดเท่ากัน เนื่องจากวงกลมเดียวกันเป็นวงกลมที่เท่ากัน
ทุกประการ จึงใช้คำตอบจากกิจกรรมสำรวจ : 2 ได้
หรือ โดยการลอกรูปมาซ้อนกัน

ผลที่ได้จากกิจกรรมสำรวจ : 2 นี้ เป็นไปตาม
สมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว
มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

มุนนำคิด

ให้ผู้เรียนทำตารางข้างล่างให้สมบูรณ์ โดยการเติมตัวเลขลงใน
ช่องว่างสำหรับแต่ละข้อ พร้อมทั้งสูตรทั่วไปสำหรับหาจำนวนของ
คอร์ค และจำนวนของส่วนโค้ง เมื่อมีจุด n จุดบนวงกลม

จำนวนของจุดบนวงกลม	2	3	4	5	...	n	
จำนวนของคอร์ค	1	3	6	...	(1)	...	(2)
จำนวนของส่วนโค้ง	2	6	12	...	(3)	...	(4)

เฉลย : มุนนำคิด

(1) 10 เส้น

(2) $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้น

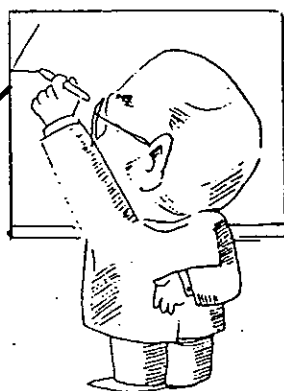
(3) 20 เส้น

(4) $n(n-1)$ เส้น

ดังนั้น

เมื่อมีจุด n จุดบนวงกลม
จะมีคอร์คที่เกิดขึ้น $\frac{n(n-1)}{2}$

เส้น และจะมีส่วนโค้ง
ที่เกิดขึ้น $n(n-1)$ เส้น



เฉลย

1. $\triangle APB \cong \triangle CQD$ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)
2. $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการย่อมมีขนาดเท่ากัน)
3. $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ (ต่างก็รองรับมุมที่จุดศูนย์กลาง ของวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน)
4. มุมกลับ $APB =$ มุมกลับ CQD (ขนาดของมุมรอบจุดศูนย์กลางที่เท่ากันเมื่อหักออกด้วยขนาดที่เท่ากัน ที่เหลือย่อมมีขนาดเท่ากัน)
5. $m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{CYD})$ (เหตุผลเหมือนข้อ 3)



จากคำตอบที่ได้เป็นไปตามสมบัติ
เกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัด
ส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากับส่วนโค้งน้อย
ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่

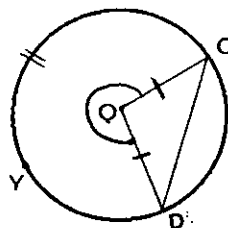
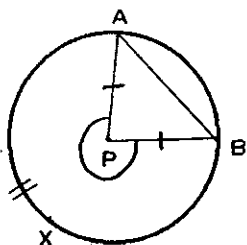


นอกจากนี้เราสามารถแสดงได้ว่า
ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง ซึ่งเป็น
บทกลับ ของสมบัติเกี่ยวกับวงกลม
ข้างต้น

ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ตัดวงกลม
ออกเป็นสองโค้งที่ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

การแสดงผล

การแสดงผล เราจะแบ่งออกเป็น 3 กรณี เพราะส่วนโค้งที่ยาว
เท่ากันอาจจะเป็นส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ หรือครึ่งวงกลม แต่ในที่นี้จะ
แสดงให้เห็นเฉพาะกรณีที่ เป็น ส่วนโค้งใหญ่ ของวงกลมที่เท่ากันสองวง
ดังรูปข้างล่าง



กำหนด P และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เท่ากันทุกประการ

ซึ่งมี $m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{CYD})$ (ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน)

ลาก $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$ และ $\overline{DQ}$

เนื่องจาก มุมกลับ $\angle APB = \angle CQD$ (มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วย
ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$ (หักมุมกลับ APB และมุมกลับ CQD ออกจาก
มุมรอบจุดศูนย์กลาง P และ Q)

$$\triangle APB \cong \triangle CQD \text{ (ด้าน - มุม - ด้าน)}$$

ทำให้ $AB = CD$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

นั่นคือ ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันคอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็น
ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน

3

ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและ
เส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง

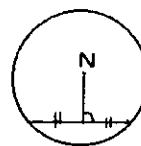
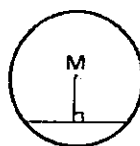


เธอคิดว่าคอร์ดและเส้นที่
ลากจากจุดศูนย์กลางมายัง
คอร์ดมีความสัมพันธ์กัน
เช่นใดบ้างล่ะ !

ง่ายมากเธอลองศึกษาใน
กิจกรรมสำรวจต่อไปนี้สิ

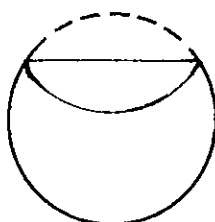


กิจกรรมสำรวจ : 3



ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

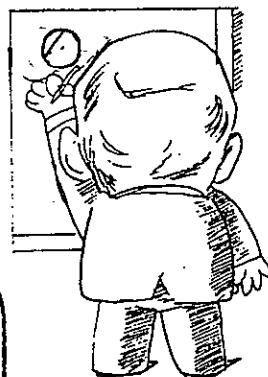
1. ให้ผู้เรียนหยิบกระดาษรูปวงกลมที่เตรียมไว้ให้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ขึ้นมา
2. พับวงกลมตามลักษณะ ดังรูป



3. คลี่ส่วนที่พับออก ผู้เรียนคิดว่ารอยพับที่เกิดขึ้นเป็น cords ของวงกลมหรือไม่
.....(1)
4. จากนั้นพับครึ่งวงกลม โดยให้รอยพับตัดรอยพับครั้งแรก
ผู้เรียนคิดว่ารอยพับที่ได้ใหม่นี้ซึ่งตัดรอยพับครั้งแรกเป็นเส้น
ผ่านศูนย์กลางของวงกลมหรือไม่
.....(2)
5. รอยพับที่เกิดขึ้นจากการพับในข้อ 2 และข้อ 4 จะทำมุม ซึ่งมีขนาด
เท่ากันหรือไม่
.....(3)
6. จากข้อ 5 มุมที่เท่ากันมีขนาดเท่ากับกี่องศา
.....(4)
7. รอยพับที่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมจากข้อ 4 แบ่งครึ่ง
 cords ของวงกลมหรือไม่
.....(5)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 3

1. เป็นคอร์คของวงกลม
2. เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
3. ขนาดเท่ากัน
4. เท่ากับ 90°
5. แบ่งครึ่งคอร์คของวงกลม



มุมป้อยกัก

มีชายสองคนยืนสนทนากัน
 ชายคนหนึ่งได้กล่าวว่า “สุนัขอ้วนหาย”
 ชายอีกคนหนึ่งจึงกล่าวว่า “แล้วทำไมนายไม่ลงลงประกาศ
 ในหนังสือพิมพ์ล่ะ”
 ชายคนแรกจึงตอบสวนไปว่า “โง่จริงหรือว่าแกสั่งโง่นะ
 นี่สื่อไม่รู้หรือว่าสุนัขมันอ่านหนังสือออกซะที่ไหน”

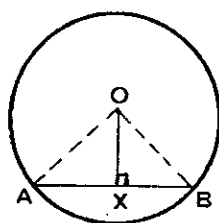
จากคำตอบที่ได้เป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับ
วงกลมที่กล่าวว่า

1. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลาง มาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น
2. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

เราสามารถแสดงเหตุผล
ได้ดังนี้



①



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและ

$\overline{OX} \perp \overline{AB}$ ที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ว่า $AX = BX$

พิสูจน์ ลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{OB}$

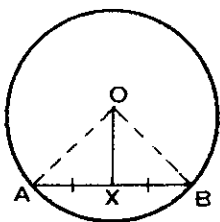
เนื่องจาก $OA = OB$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน)

และ $OX = OX$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\triangle AOX \cong \triangle BOX$ (ฉาก-ด้าน-ด้าน) ทำให้ $AX = BX$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

2



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

และ OX แบ่งครึ่งคอร์ด AB

ที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ว่า $OX \perp AB$

พิสูจน์ ลาก OA และ OB

เนื่องจาก $OA = OB$ (รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน)

และ $OX = OX$ (สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก $AX = BX$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $\triangle AOX \cong \triangle BOX$ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)

ทำให้ $\angle AXO = \angle BXO$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

จาก $\angle AXO + \angle BXO = 180^\circ$ (มุมตรงมีขนาดเท่ากับ 180°)

ดังนั้น $2(\angle AXO) = 180^\circ$ ($\angle AXO = \angle BXO$)

$\angle AXO = 90^\circ = \angle BXO$

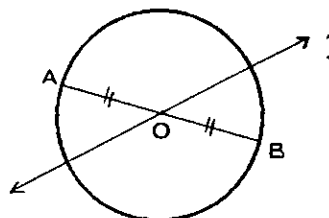
นั่นคือ $OX \perp AB$

คำถาม

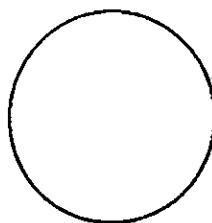
จากสมบัติในข้อ 2 ข้างต้น ทำไมไม่รวมคอร์ดที่เป็น
เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมด้วย

เฉลย

เพราะว่า มีเส้นตรงที่แบ่งครึ่งคอร์ดซึ่งเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางแต่ไม่ตั้งฉากกับคอร์ดนั้น ดังรูปข้างล่าง



เมื่อกำหนดวงกลมวงหนึ่ง ดังรูปข้างล่าง
ผู้เรียนคิดว่าจะสามารถหาจุดศูนย์กลาง
ของวงกลมวงนี้ได้อย่างไร

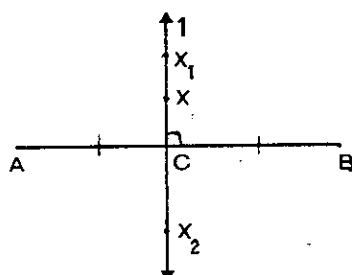


เพื่อตอบคำถามข้างต้นให้ผู้เรียน
ศึกษากิจกรรมเสริมต่อไปนี้



กิจกรรมเสริม : 1

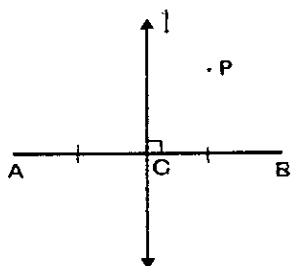
กำหนด A และ B เป็นจุดสองจุด บนระนาบ และลาก $\overline{AB}$ จากนั้นสร้างเส้นตรง l แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด C ดังรูป



ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้ X เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l
จุด X อยู่ห่างจากจุด A และ B
เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ถ้าใช้จุด X เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
จะสร้างวงกลมให้ผ่านจุด A และจุด B ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
3. ถ้าใช้จุด X_1 และ X_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม สร้างวงกลมให้
ผ่านจุด A และจุด B จะสร้างได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
4. แต่ละจุดบนเส้นตรง l จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งทีผ่าน
จุด A และ จุด B หรือไม่ เพราะเหตุใด

5.



ถ้าจุด P เป็นจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรง l
ผู้เรียนคิดว่าจุด P จะอยู่ห่างจากจุด A
และจุด B เท่ากันหรือไม่

6. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม จะสร้างวงกลมให้ผ่านจุด A
และจุด B ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

เฉลย : กิจกรรมเสริม : 1



1. ห่างเท่ากัน เพราะว่า สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
2. ได้ เพราะว่า จุด A และจุด B อยู่ห่างจากจุด X เท่ากัน
3. สร้างได้ โดยใช้เหตุผลเช่นเดียวกับข้อ 1 และข้อ 2
4. เป็น เพราะว่าแต่ละจุดบนเส้นตรง l อยู่ห่างจากจุด A และจุด B เท่ากัน
5. ไม่เท่ากัน
6. ไม่ได้ เพราะว่าจุด P อยู่ห่างจากจุด A และจุด B ไม่เท่ากัน



คำตอบที่ได้ข้างต้นเป็นไปตามสมบัติ
เกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวไว้ว่า

จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้จะอยู่
บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุด
ทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย

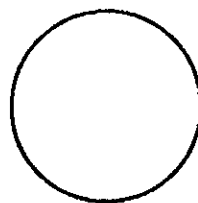
หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมผ่านจุดศูนย์กลาง
ของวงกลมนั้น

เมื่อมาถึงตอนนี้ก็คิดว่าผู้เรียนคงหา
จุดศูนย์กลางของวงกลมข้างต้นได้แล้ว

ตัวอย่าง

จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังรูป



วิธีทำ

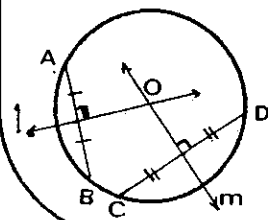
ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ดที่ไม่ขนานกัน

สร้างเส้นตรง l และเส้นตรง m แบ่งครึ่ง และ

ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตามลำดับ

ให้ O เป็นจุดตัดของเส้นตรง l และเส้นตรง m

จะได้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมตามต้องการ





คำถาม

1. จากรูปข้างต้น เพราะเหตุใด O จึงเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
2. ในการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมข้างต้น สร้างคอร์ด AB และคอร์ด CD ให้ขนานกัน ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด



เฉลย

1. จากข้อสรุปก่อนหน้านี้เราทราบว่า เส้นตรง l และเส้นตรง m ต่างก็ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม จุดศูนย์กลางของวงกลมจึงต้องเป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l และ เส้นตรง m ดังนั้น จุดตัดของเส้นตรง l และเส้นตรง m จึงเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
2. ได้ เพราะสามารถหาจุดศูนย์กลางได้เช่นกัน แต่เส้นตรง l และเส้นตรง m จะต่อเป็นเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตัดวงกลมที่จุดสองจุด ฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมก็คือจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดนั้น วิธีนี้ไม่นิยมใช้กัน เนื่องจากการยุ่งยากที่จะต้องสร้างคอร์ดทั้งสองให้ขนานกัน และอาจทำให้ไม่สะดวกและเสียเวลาในการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองนั้น

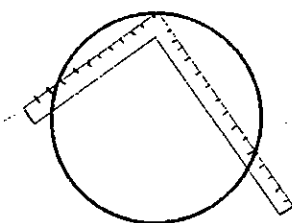
มุมป้อยก้าก

“ลุงเดิมกินพุทราแล้วหงุดหงิดมาก เมื่อเจอหนอนหนึ่งตัว
อยู่ในพุทรา และจะยิ่งหงุดหงิดมากขึ้น เมื่อ กินพุทราแล้วเจอ
หนอนครึ่งตัว”

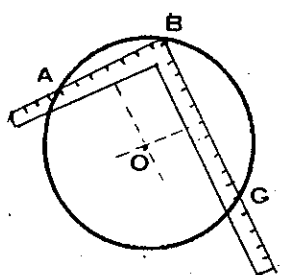
“ฮะฮ้า ไม่ให้หงุดหงิดได้ไง ! เมื่อ
อีกครั้งตัวอยู่ในปากลุงเดิม

มุมนำคิด

ให้ผู้เรียนอธิบายวิธีที่ช่างไม้จะสามารถหาจุดศูนย์กลาง
ของแผ่นไม้วงกลมอันหนึ่ง โดยใช้ไม้ฉากเพียงอย่างเดียว



เฉลย : มุมนำคิด



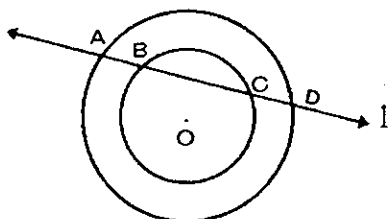
นำไม้ฉากวางบนแผ่นไม้ที่ต้องการหาจุดศูนย์กลาง
โดยจัดให้มุมฉากของไม้ฉากอยู่บนขอบของแผ่นไม้
พอดีกำหนดเป็นจุด B และแขนทั้งสองของมุมฉาก
ตัดกับขอบของแผ่นไม้ที่จุด A และ C ตามลำดับ
ดังรูป ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$

มีต่อ

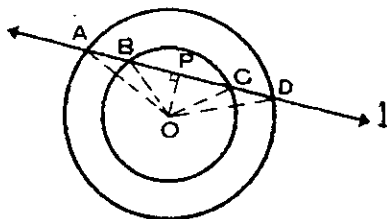
จากนั้นใช้ไม้ฉากลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากทั้งสองนั้นจะตัดกัน ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม กำหนดเป็นจุด O

มูมน่าคิด

กำหนดให้เส้นตรง l ตัดวงกลมร่วมศูนย์กลางสองวงที่จุด A, B, C และ D ตามลำดับ ดังรูป จงแสดงว่า $AB = CD$



เฉลย : มูมน่าคิด



ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ และ $\overline{DO}$ ตามลำดับ ลาก $\overline{OP} \perp l$ ที่จุด P

ทำให้ $BP = PC$ และ $AB = PD$

(ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉาก กับคอร์ดของวงกลมจะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น)

$$\text{ดังนั้น } AP - BP = PD - PC$$

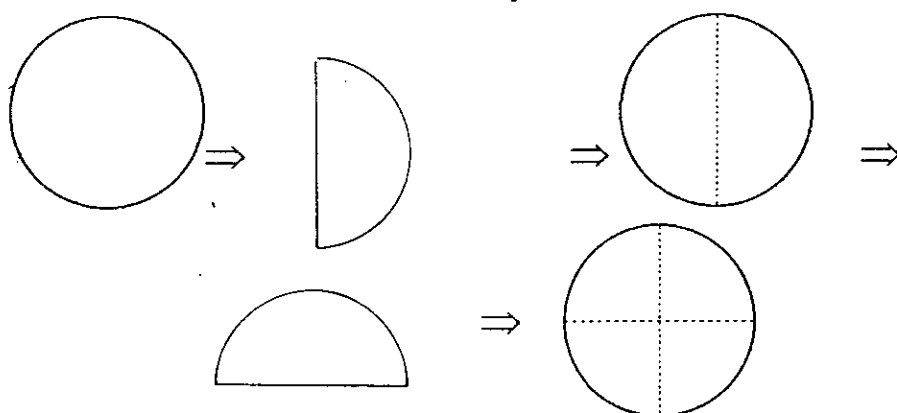
$$\text{นั่นคือ } AB = CD$$

กิจกรรมเสริม : 2

การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมโดยการพับกระดาษ

ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. ตัดกระดาษเป็นวงกลม แล้วพับครึ่งวงกลม
2. คลี่รอยพับครึ่งแรกออกและพับอีกครั้งไม่ให้ซ้ำรอยพับเดิม
3. คลี่รอยพับออกเป็นวงกลม คำนวณข้างล่าง



คำถาม

จุดที่เกิดจากรอยพับทั้งสองตัดกันเป็นจุดอะไรของวงกลม



เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



คำถาม

จุด 3 จุดใดๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรง
เดียวกัน เราสามารถสร้างวงกลม
ให้ผ่านจุดสามจุดนั้นได้เสมอหรือไม่



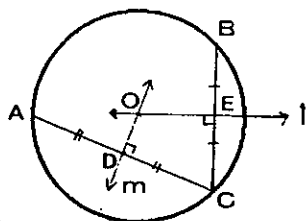
เสมอไป

การสร้างวงกลมวงหนึ่งให้ผ่านจุด
สามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง เดียวกัน



การที่วงกลมผ่านจุดสามจุดที่กำหนดให้ ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แสดงว่าจุดทั้งสามนั้นจะต้องอยู่ห่างจากจุดจุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องหาจุดนั้นให้ได้ ซึ่งกระทำได้ดังนี้

1. กำหนดจุด A, B และ C ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ดังรูปข้างล่าง
2. ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ (อาจลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ หรือ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$)
3. สร้างเส้นตรง l ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด E
4. สร้างเส้นตรง m ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D
5. ลากเส้นตรง l และเส้นตรง m ตัดกันที่จุด O จะได้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมตามต้องการ



คำถาม

เส้นตรง l และเส้นตรง m
ตัดกันเสมอไปหรือไม่



เฉลย

ตัดกันเสมอ เพราะถ้าเส้นตรง l และ
เส้นตรง m ไม่ตัดกัน ก็ต้องขนานกัน
ซึ่งจะทำให้ จุด A, B และ C อยู่บนเส้น
ตรงเดียวกัน จะขัดแย้งกับที่กำหนดให้ว่า
จุด A, B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กิจกรรมเสริม : 3

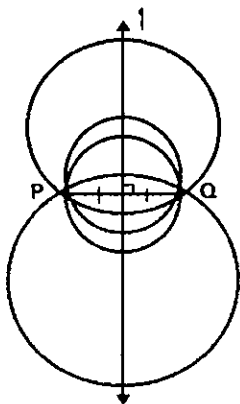
ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้ามีจุดสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะสร้างวงกลมให้มีจุดสามจุดนี้อยู่บนวงกลมเดียวกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ถ้ามีจุดสามจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ผู้เรียนคิดว่าจะสร้างวงกลมที่มีจุดทั้งสามนี้อยู่บนวงกลมเดียวกันได้ทั้งหมดกี่วง
3. ถ้ากำหนด P และ Q เป็นจุดสองจุด ผู้เรียนคิดว่าจะสร้างวงกลมที่มีจุด P และ Q อยู่บนวงกลมเดียวกันได้ทั้งหมดกี่วง
4. ถ้ามีจุดสี่จุดโดยที่สามจุดใด ๆ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะสร้างวงกลมให้มีจุดทั้งสี่อยู่บนวงกลมเดียวกันได้เสมอไปหรือไม่

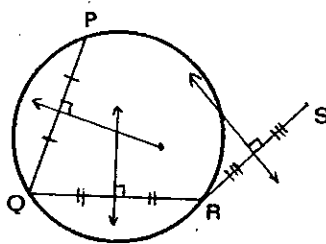
เฉลย : กิจกรรมเสริม : 3

1. **ไม่ได้** เพราะว่า ถ้าจุดสามจุดที่กำหนดให้ คือ จุด P , Q และ R อยู่บนเส้นตรงเดียวกันแล้ว เส้นตรง l และเส้นตรง m ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{QR}$ จะขนานกัน จึงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้ไม่ได้
2. **วงเดียว** (เพราะว่าจุดตัดของเส้นตรง l และเส้นตรง m ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการสร้างจะมีเพียงจุดเดียวที่อยู่ห่างจากจุด P , Q และ R เท่ากัน)

3. หับไม่ได้ เพราะว่าแต่ละจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละวงที่ผ่านจุด P และจุด Q ดังรูป



4. ไม่ได้เสมอไป เช่น มีจุด P, Q, R และ S ดังรูป จะสร้างไม่ได้



กิจกรรมสำรวจ : 4

บทเรียนกิจกรรม

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์คที่ยาวเท่ากัน

อุปกรณ์ วงเวียน โปรแทรกเตอร์

คำชี้แจง ผู้เรียนปฏิบัติไปตามลำดับและตอบคำถามในช่องว่างที่เว้นไว้ให้ เมื่อตอบแล้วดูเฉลยที่ละเอียด

กิจกรรม

1. สร้างวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และกำหนด A เป็นจุดหนึ่งบนวงกลม
2. ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัดวงกลม O ที่จุด B
3. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัดวงกลม O ที่จุด C
4. ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด O ที่จุด D
5. ใช้ D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด O ที่จุด E
6. ใช้ E เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด O ที่จุด F
7. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{FA}$
8. ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นจากข้อ 7 เป็นคอร์คของวงกลม O หรือไม่

..... (1)

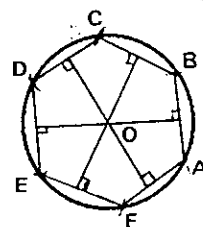
9. ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นจากข้อ 7 ยาวเท่ากันหรือไม่ เพราะอะไร

.....(2)

10. ลากเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางไปตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นจากข้อ 7
11. ตรวจสอบดูว่าส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากันหรือไม่
.....(3)
12. จากคำตอบในข้อ 9 และข้อ 11 ผู้เรียนคิดว่าในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากัน อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันหรือไม่
.....(4)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 4

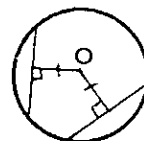
1. เป็นคอร์ด
2. ยาวเท่ากัน เพราะว่า เป็นรัศมีของวงกลมที่เท่ากัน
3. ห่างเท่ากัน
4. ห่างเท่ากัน



คำตอบที่ได้ข้างต้นเป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันย่อมห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน

กิจกรรมสำรวจ : 5



บทเรียนกิจกรรม

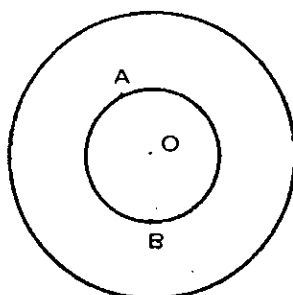
เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน

อุปกรณ์ วงเวียน ไม้บรรทัด

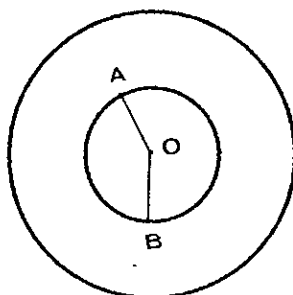
คำชี้แจง ผู้เรียนปฏิบัติไปตามลำดับและตอบคำถามในช่องว่าง
ที่เว้นไว้ให้ เมื่อตอบแล้วดูเฉลยที่ละเอียด

กิจกรรม

1. สร้างวงกลมสองวงที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางร่วมกัน และ
กำหนดจุดที่ต่างกัน 2 จุด บนวงกลมเล็กคือจุด A และ B ดังรูป

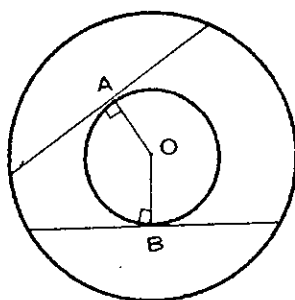


2. ลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดทั้ง 2 จุดนั้น
จะได้ $\overline{AO}$ และ $\overline{BO}$
ผู้เรียนคิดว่าส่วนของเส้นตรงดังกล่าวมีความยาวเท่ากันหรือไม่



.....(1)

3. ลากส่วนของเส้นตรงมาตั้งฉากกับ $\overline{AO}$ และ $\overline{BO}$ ที่จุด A และ B ตามลำดับ และให้ส่วนของเส้นตรงนั้นมีจุดปลายอยู่บนวงกลมใหญ่ เราเรียกส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นว่า **คอร์ดของวงกลมใหญ่** ดังรูป



ให้ผู้เรียนใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวของคอร์ดของวงกลมใหญ่ทั้งสองเส้นนั้น
ผู้เรียนคิดว่าคอร์ดของวงกลมใหญ่ทั้งสองเส้นนั้นยาวเท่ากันหรือไม่
.....(2)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 5

1. ยาวเท่ากัน เพราะเป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
2. ยาวเท่ากัน



จากคำตอบข้างต้นเป็นไปตามสมบัติ
เกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า
“ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน
คอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันจะ ยาวเท่ากัน”

กิจกรรมเสริม : 5

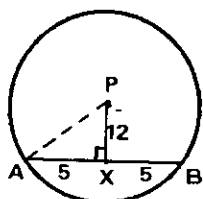
บัตรงาน

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม
เนื้อหา

1. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น
2. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
3. เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น
4. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันคอร์ดที่ยาวเท่ากันย่อมห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน
5. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกันคอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันจะยาวเท่ากัน

ตัวอย่าง กำหนดให้ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มีคอร์ด AB ยาว 10 หน่วย และห่างจากจุดศูนย์กลาง 12 หน่วย แล้วรัศมีของวงกลมยาวเท่าไร

วิธีทำ จาก $\overline{PX} \perp \overline{AB}$ ที่จุด X ทำให้ $AX = XB$
(ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปตั้งฉากกับคอร์ดย่อมแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น)



$$AX = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ หน่วย}$$

ลาก $\overline{AP}$ ทำให้ $\triangle AXP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสจะได้ $AP^2 = AX^2 + PX^2$

$$AP^2 = 5^2 + 12^2$$

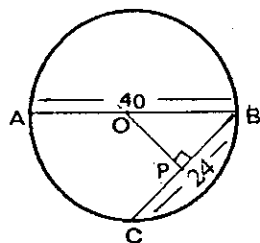
$$= 25 + 144 = 169$$

ดังนั้น $AP = \sqrt{169} = 13$ หน่วย

นั่นคือ รัศมีของวงกลมยาว 13 หน่วย

แบบฝึกหัด วงกลมต่อไปนี้ มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
จงเติมคำตอบที่ถูกต้องในช่องว่างที่เว้นไว้ให้

1



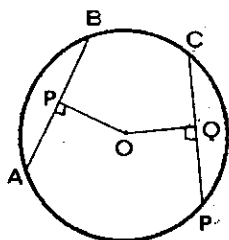
ให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{BC}$ เป็นคอร์ด
ที่มีจุดปลายร่วมกับเส้นผ่านศูนย์กลางจุดหนึ่ง

$$AB = 40 \text{ หน่วย}$$

$$BC = 24 \text{ หน่วย}$$

$$OP = \dots\dots\dots \text{หน่วย}$$

2



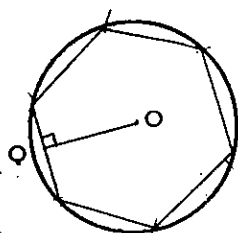
ให้ $PB = 3X-17$ หน่วย, $CD = 15-X$ หน่วย

และ $OQ = OP = 3$ หน่วย

$$AB = \dots\dots\dots \text{หน่วย}$$

รัศมีของ $\odot O$ ยาว = $\dots\dots\dots$ หน่วย

3

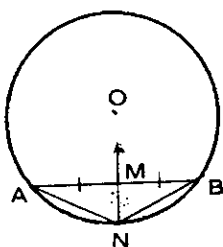


รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบใน $\odot O$

มีเส้นรอบรูปยาว 24 หน่วย

แต่ละด้านห่างจากจุด O = $\dots\dots\dots$ หน่วย

4



M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

$\triangle ANB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ที่มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน

แล้ว $\overrightarrow{NM}$ ผ่านจุด O หรือไม่

เหตุผล

เฉลย : กิจกรรมเสริม : 5

1. $OP = 16$ หน่วย

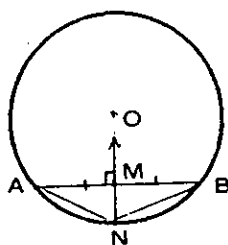
2. $AB = 8$ หน่วย

รัศมีของ $\odot O$ ยาว = 5 หน่วย

3. แต่ละด้านห่างจากจุด O = $2\sqrt{3}$ หน่วย

4. $\overrightarrow{NM}$ ผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ด้วยเหตุผลดังนี้



เนื่องจาก $\triangle ANB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $\overrightarrow{NM} \perp \overline{AB}$

AB เป็นคอร์ดของวงกลม O

และเนื่องจาก M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

ดังนั้น $\overrightarrow{NM}$ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB

เนื่องจากเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและ

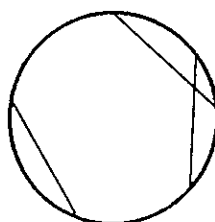
ตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมผ่าน

จุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น นั่นคือ $\overrightarrow{NM}$

ผ่านจุด O

มูมนำคิด

ผู้เรียนคิดว่าเซตของจุดกึ่งกลางของคอร์ดที่ยาวเท่ากันของวงกลมวงหนึ่งมีลักษณะเป็นเช่นใด



เฉลย : มูมนำคิด

เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลมที่กำหนดให้

มูมนำคิด

นักโบราณคดีได้ขุดพบชิ้นส่วนของวงล้อที่เก่าแก่อันหนึ่ง ดังรูปข้างล่างนี้ เขาต้องการทราบว่ารูปที่สมบูรณ์มีขนาดใหญ่เท่าใด เขาจะต้องทำอย่างไร



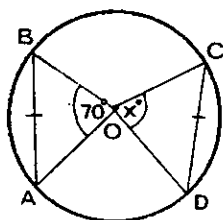
เฉลย : มูมนำคิด

เขาต้องกำหนดตำแหน่งของจุด A, B และ C บนส่วนโค้งด้านในของวงล้อชิ้นนั้นและหาเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ จุดตัดของเส้นทั้งสองนั้นคือจุดศูนย์กลางของวงกลม กำหนดเป็นจุด O จากนั้นวัดความยาวของ $\overline{OA}$ ซึ่งเป็นรัศมีของวงกลมด้านใน

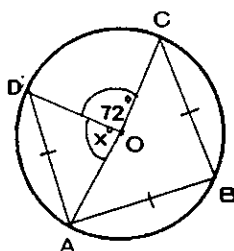
แบบฝึกหัด ก. 3.3

1. จงหาค่า X และ $m(\widehat{AB})$

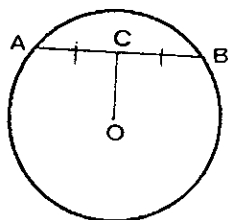
ยาวเท่ากับส่วนโค้งใด



3. จงหาค่า X

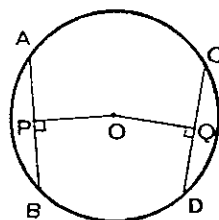


2. จงหาขนาดของ $\widehat{BCO}$



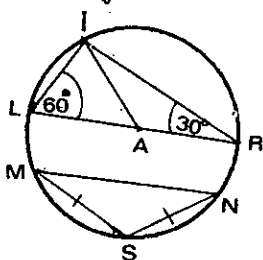
4. กำหนดให้ $AB = CD$ และ

$OP = 8$ หน่วย จงหาความยาวของ OQ



5. จงตรวจสอบว่าข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

เมื่อกำหนดรูปดังนี้



5.1 $m(\widehat{LI}) + m(\widehat{IR}) = m(\widehat{LIR})$

5.2 $LI + IR = LR$

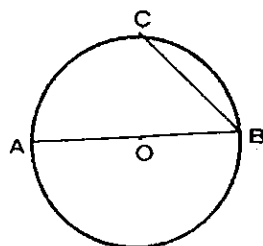
5.3 $m(\widehat{MSN}) = 2 \cdot m(\widehat{MS})$

5.4 $MN = 2 \cdot MS$

6. ถ้า AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง $AB = 8$ หน่วย

และ $\widehat{ABC} = 45^\circ$ แล้ว $\widehat{BC}$ ห่างจาก

จุดศูนย์กลาง O เท่าไร



เฉลยแบบฝึกหัด ก. 3.3



1. $X = 70^\circ$, $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
2. $\widehat{BCO} = 90^\circ$
3. $X = 96^\circ$
4. $OQ = 8$ หน่วย
- 5.1 เป็นจริง
- 5.2 เป็นเท็จ เพราะว่า $LI + IR > LR$
- 5.3 เป็นจริง
- 5.4 เป็นเท็จ เพราะว่า $MN < 2 \cdot MS$
6. BC ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากับ $2\sqrt{2}$ หน่วย

มุมป้อยก้าก

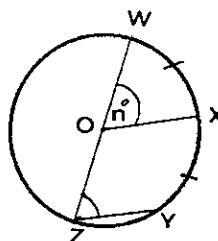
“รายการต่อไปเป็นข่าวสั้น “ นักข่าวคนหนึ่งพูด
“นายกรัฐมนตรีลงจากเครื่องบิน จบข่าว”

แบบฝึกหัด ข. 3.3

1. กำหนด $\overline{WZ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O , $m(\widehat{WX}) = m(\widehat{XY})$

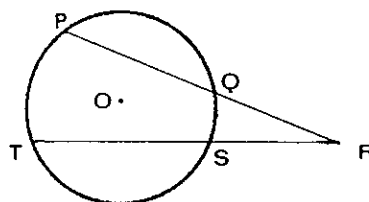
และ $\widehat{WOX} = n^\circ$

จงพิสูจน์ว่า $\widehat{WZY} = n^\circ$



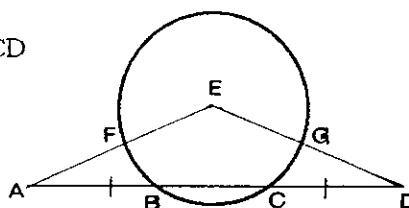
2. กำหนด วงกลม O ซึ่งมี $PQ = TS$

จงพิสูจน์ว่า $RQ = RS$



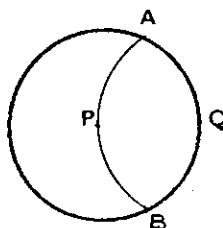
3. กำหนด วงกลม E และ $AB = CD$

จงพิสูจน์ $m(\widehat{FB}) = m(\widehat{CG})$

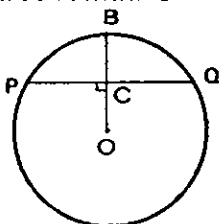


4. กำหนด วงกลม P และจุด Q อยู่บนวงกลม P ที่จุด Q เขียนส่วนโค้งผ่านจุด P ตัดวงกลม P ที่จุด A และ B

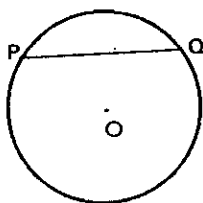
จงหาขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วย $\widehat{AQB}$ ดังรูป



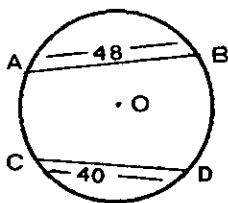
5. กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $\overline{BO} \perp \overline{PQ}$, $BC = 5$ หน่วย และ $PQ = 30$ หน่วย จงหารัศมีของวงกลม O



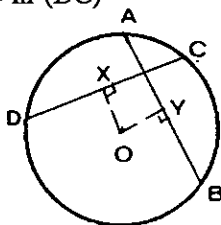
6. รัศมีของวงกลม O ยาว 13 หน่วย ความยาวของคอร์ด PQ เท่ากับ 10 หน่วย จงหาระยะทางจากจุดศูนย์กลาง O ไปยังคอร์ด PQ



7. จงหารัศมีของวงกลม O ซึ่งมีคอร์ดที่ยาว 48 ซม. อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่าคอร์ดที่ยาว 40 ซม. อยู่ 8 ซม.

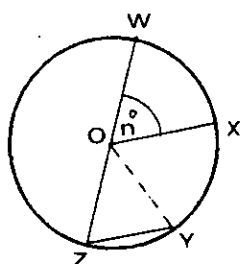


8. กำหนด $\overline{OY} \perp \overline{AB}$, $\overline{OX} \perp \overline{CD}$ และ $OX = OY$
จงพิสูจน์ว่า $m(\widehat{AD}) = m(\widehat{BC})$



เฉลยแบบฝึกหัด ข. 3.3

1.



ลาก $\overline{OY}$ จะได้ $\triangle OZY$

เนื่องจาก $m(\widehat{WX}) = m(\widehat{XY})$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $\widehat{XOY} = \widehat{WOX} = n^\circ$

(ในวงกลมที่เท่ากัน หรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

ใน $\triangle OZY$ จะได้ $\widehat{WOY} = \widehat{OZY} + \widehat{OYZ} \dots (1)$

(มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

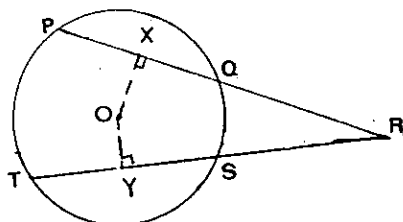
$\widehat{OZY} = \widehat{OYZ}$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น จาก (1) : $n + n = \widehat{OZY} + \widehat{OZY}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$$2n = 2(\widehat{OZY})$$

$$\widehat{OZY} = n^\circ$$

2.



ลาก $\overline{OX} \perp \overline{PQ}$ และ $\overline{OY} \perp \overline{TS}$ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ

จะได้ $OX = OY$ (คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน) และ $XQ = \frac{1}{2} PQ$,

$$YS = \frac{1}{2} TS \dots \dots \dots (1)$$

(เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด)

ลาก $\overline{OR}$; จะได้ $\triangle OXR \cong \triangle OYR$ (ม.ค.ค.)

$$\text{ทำให้ } XR = YR \dots \dots \dots (2)$$

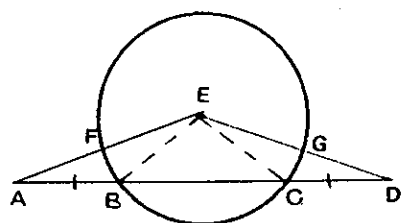
(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

แต่ $PQ = TS$ (กำหนดให้)

ดังนั้น จาก (1) ; $XQ = YS \dots (3)$ (ครึ่งหนึ่งของสิ่งที่ยาวเท่ากันย่อมเท่ากัน)

นั่นคือ $RQ = RS$ (จาก (2), (3) และสมบัติของการเท่ากัน)

3.



ลาก $\overline{BE}$ และ $\overline{CE}$

จะได้ BEC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ($BE = CE$)

ดังนั้น $\hat{EBC} = \hat{ECB} \dots (1)$

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ย่อมมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $\hat{ABC} = \hat{DCB}$ (มุมตรงมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\hat{ABE} = \hat{DCE}$ (จาก (1) และสมบัติของการเท่ากัน)

และจาก $AB = DC$ และ $BE = CE$

$$\triangle ABE \cong \triangle DCE \text{ (ค.ม.ค.)}$$

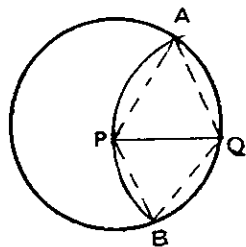
จะได้ $\hat{AEB} = \hat{DEC}$

(สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $m(\widehat{FB}) = m(\widehat{CG})$

(ในวงกลมเดียวกันถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน)

4.



ลาก $\overline{PA}$, $\overline{PQ}$ และ $\overline{QA}$

จะได้ $PA = PQ$ และ $PQ = AQ$

(รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $PA = PQ = AQ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ทำให้ $\triangle APQ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ดังนั้น $\hat{APQ} = 60^\circ$ (ขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ 60°)

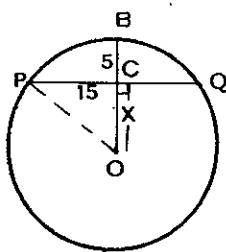
ทำนองเดียวกัน ; ลาก $\overline{PB}$ และ $\overline{QB}$ จะได้ $\triangle PQB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{จาก } \hat{APB} = \hat{APQ} + \hat{QPB}$$

$$= 60 + 60$$

$$\hat{APB} = 120^\circ$$

5.

จาก $\overline{OB} \perp \overline{PQ}$ (กำหนดให้)จะได้ $PC = \frac{1}{2} PQ$

$$= \frac{1}{2} (30)$$

$$PC = 15 \text{ หน่วย}$$

ลาก $\overline{OP}$ จะได้ $\triangle OCP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ $OC = X$ หน่วย จะได้ $OP = X + 5$ หน่วยจากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ $OP^2 = PC^2 + OC^2$

$$(X+5)^2 = (15)^2 + X^2$$

$$X^2 + 10X + 25 = 225 + X^2$$

$$10X = 200$$

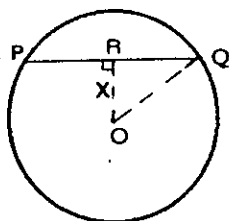
$$X = 20 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น } X + 5 = 20 + 5$$

$$= 25 \text{ หน่วย}$$

นั่นคือ รัศมีของวงกลม O ยาว 25 หน่วย

6.

ลาก $\overline{OQ}$ และ $\overline{OR} \perp \overline{PQ}$ ที่จุด Rจะได้ $\triangle ORQ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเนื่องจาก $PQ = 10$ หน่วย (กำหนดให้)

$$\text{จะได้ } QR = \frac{1}{2} (PQ) = \frac{1}{2} (10)$$

$$= 5 \text{ หน่วย}$$

(ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น)

กำหนดให้ $OR = X$ หน่วย และ $OQ = 13$ หน่วย

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้

$$OR^2 = OQ^2 - QR^2$$

$$= 13^2 - 5^2$$

$$= 169 - 25$$

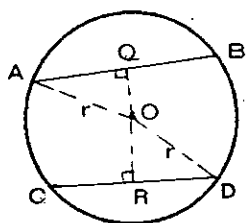
$$= 144$$

$$X = \sqrt{144} = 12 \text{ หน่วย}$$

นั่นคือระยะทางจากจุดศูนย์กลาง O ไปยังคอร์ด PQ ยาว 12 หน่วย

7.

ลาก $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ ที่จุด Q, $\overline{OR} \perp \overline{CD}$ ที่จุด R
และลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{OD}$



กำหนดให้ $AB = 48$ หน่วย

$CD = 40$ หน่วย

$OQ = X$ หน่วย

$OR = X + 8$ หน่วย

รัศมียาว r หน่วย

จะได้ $AQ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (48) = 24$ หน่วย

และ $RD = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} (40) = 20$ หน่วย

จาก $\triangle OQA$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

จะได้ $AO^2 = AQ^2 + OQ^2$

$$r^2 = 24^2 + X^2 \dots\dots\dots (1)$$

จาก $\triangle ORD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

จะได้ $OD^2 = OR^2 + RD^2$

$$r^2 = (X+8)^2 + 20^2 \dots\dots\dots (2)$$

จาก $(1) = (2)$; จะได้

$$24^2 + X^2 = (X+8)^2 + 20^2$$

$$576 + X^2 = X^2 + 16X + 64 + 400$$

$$16X = 112$$

$$X = 7 \text{ หน่วย}$$

แทนค่า $X = 7$ หน่วยใน (2) ; จะได้

$$r^2 = (7+8)^2 + 20^2$$

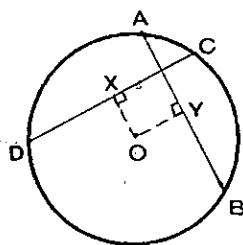
$$r^2 = 15^2 + 20^2$$

$$= 625$$

$$r = \sqrt{625} = 25$$

ดังนั้นรัศมีของวงกลม O ยาว 25 หน่วย

8.



เนื่องจาก $OX = OY$ (กำหนดให้)

ทำให้ $AB = CD$

(ในวงกลมเดียวกันคอร์ดห่างจาก

จุดศูนย์กลางเท่ากัน จะยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$

(ในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากันคือ ส่วนโค้ง
น้อยยาวเท่ากันส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่)

$$\text{แต่ } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CB})$$

$$\text{และ } m(\widehat{CD}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AD})$$

$$\text{ดังนั้น } m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{AD})$$

(สมบัติของการเท่ากัน)

$$m(\widehat{CB}) = m(\widehat{AD})$$

$$\text{นั่นคือ } m(\widehat{AD}) = m(\widehat{CB})$$



กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4

เรื่อง สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัส



คำแนะนำ

1. ให้ผู้เรียนศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ด้วยตนเอง ไปตามลำดับ
2. ผู้เรียนจะต้องทำความเข้าใจเนื้อหาอย่างละเอียดด้วยการอ่านอย่างตั้งใจและคิดวิเคราะห์
3. เมื่อผู้เรียนอ่านรายละเอียดของแต่ละหัวเรื่องในหน่วยการเรียนรู้ย่อยจบแล้วควรบันทึกสาระสำคัญของแต่ละหัวเรื่องและปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ตามที่ระบุไว้ในท้ายแต่ละหัวเรื่อง (ถ้ามี) รวมทั้งกิจกรรมรวมที่กำหนดไว้ในท้ายหน่วยการเรียนรู้ย่อยด้วย
4. เมื่อปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละกิจกรรมแล้ว โปรดตรวจเฉลยจากแนวตอบในหน่วยการเรียนรู้ย่อย ปฏิบัติจนครบทุกกิจกรรมการเรียนรู้ ก่อนจะศึกษาหน่วยการเรียนรู้ย่อยอื่น ๆ ต่อไป
5. ถ้าผู้เรียนมีข้อสงสัยให้ปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา



โปรดอ่านหัวเรื่อง แนวคิด และจุดประสงค์
ของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 แล้วศึกษารายละเอียดต่อไป

สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่สัมพันธ์กับคอร์ด และเส้นสัมผัส

หัวเรื่อง

1. มุมในส่วนโค้งของวงกลม
2. มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส

แนวคิด

สมบัติที่เกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม นับว่าเป็นสมบัติพื้นฐานที่สำคัญอันหนึ่งสำหรับนำไปใช้ในการตอบปัญหาต่าง ๆ เช่น ทำให้ทราบว่าขนาดของมุมในครึ่งวงกลมเท่ากับ 90° รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากับ 180 องศา รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่สามารถแนบในวงกลมได้ นอกจากนี้ในบางสาขาอาชีพได้นำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การหา มุมอันตราย (danger angle) ในการเดินเรือของชาวประมง การตรวจสอบครึ่งวงกลมของช่างไม้โดยใช้ไม้ฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยย่อย

ให้ผู้เรียนสามารถ

1. บอกได้ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
2. บอกได้ว่ามุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
3. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
4. บอกได้ว่าในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
5. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก
6. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากับ 180 องศา

7. บอกได้ว่ามุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น
8. นำสมบัติเกี่ยวกับวงกลมในข้อ 1-7 ไปใช้

สมบัติเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม
มุมที่สัมพันธ์กับคอร์คและเส้นสัมผัส

1

มุมในส่วนโค้งของวงกลม

ผู้เรียนได้รู้จักมุมในส่วนโค้งของวงกลมมาแล้วในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1
หน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้จึงกล่าวถึงความเกี่ยวข้องกันของมุมในส่วนโค้งของวงกลม
กับมุมที่จุดศูนย์กลางหรือกับส่วนโค้งที่รองรับมุมในส่วนโค้งของวงกลมนั้น

ผู้เรียนคิดว่ามุมในส่วนโค้งของวงกลมกับมุมที่
จุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง
เดียวกัน มีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร

กิจกรรมสำรวจ : 1

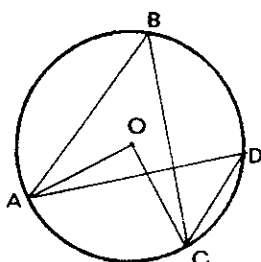
ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. นำวงกลมที่เตรียมไว้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้มาสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
และมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันให้มีขนาด
พอสมควรอย่างละหนึ่งมุม
2. ใช้กรรไกรตัดมุมที่จุดศูนย์กลางออกจากวงกลมและพับครึ่งมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น
3. นำมุมที่พับครึ่งแล้วไปซ้อนบนมุมในส่วนโค้งของวงกลม
4. ผู้เรียนสามารถจัดมุมดังในข้อ 3 ให้ทับกันสนิทได้หรือไม่
.....(1)
5. ผู้เรียนทำตามขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 กับวงกลมวงอื่น ๆ ผลลัพธ์ที่ได้ยังเหมือน
กับข้อ 4 หรือไม่
.....(2)



ผู้เรียนคิดว่ามุมในส่วนโค้งของวงกลม
ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีความ
เกี่ยวข้องกันอย่างไร

ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้



กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
มี $\widehat{AC}$ รองรับมุมทั้งสาม ดังรูป

คำถาม

1. ขนาดของ $\widehat{AOC}$ และขนาดของ $\widehat{ABC}$ เกี่ยวข้องกันอย่างไร
2. ขนาดของ $\widehat{AOC}$ และขนาดของ $\widehat{ADC}$ เกี่ยวข้องกันอย่างไร
3. ขนาดของ $\widehat{ABC}$ และขนาดของ $\widehat{ADC}$ เกี่ยวข้องกันอย่างไร

เฉลย

1. $\widehat{AOC} = 2 (\widehat{ABC})$
2. $\widehat{AOC} = 2 (\widehat{ADC})$
3. $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$





คำตอบที่ได้ข้างต้นเป็นไปตามสมบัติ
เกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
มีขนาดเท่ากัน

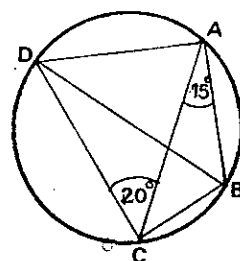
กิจกรรมเสริม : 1

ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้ผู้เรียนใช้รูปข้างล่างประกอบการตอบคำถามดังนี้

1.1 ให้บอกชื่อมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มี
ขนาด 15°

1.2 ให้บอกชื่อมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งมี
 $\widehat{AD}$ รองรับมุม



2. กำหนด $\widehat{AC}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{BAD}$, $\widehat{CAD} = 40^\circ$

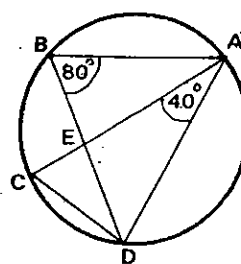
และ $\widehat{DBA} = 80^\circ$ ดังรูปข้างล่าง

2.1 ขนาดของ $\widehat{BAC}$ เท่ากับกี่องศา

2.2 ขนาดของ $\widehat{BDC}$ เท่ากับกี่องศา

2.3 ขนาดของ $\widehat{AEB}$ เท่ากับกี่องศา

2.4 ขนาดของ $\widehat{ADB}$ เท่ากับกี่องศา



เฉลย : กิจกรรมเสริม : 1

1.1 $\hat{CAB}$ และ $\hat{CDB}$

1.2 $\hat{DBA}$ และ $\hat{DCA}$

2.1 $\hat{BAC} = 40^\circ$

2.2 $\hat{BDC} = 40^\circ$

2.3 $\hat{AEB} = 60^\circ$

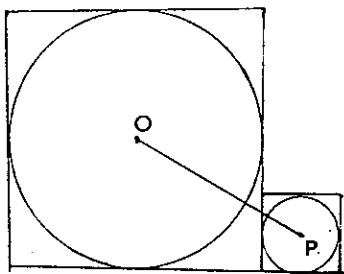
2.3 $\hat{ADB} = 20^\circ$



มูมนำคิด

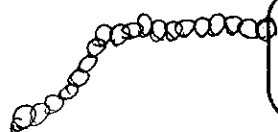
กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่อยู่ติดกันมีพื้นที่เท่ากับ 196 ตร.ซม.
และ 4 ตร.ซม. ตามลำดับ ดังรูป

จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง



เฉลย : มูมนำคิด

OP = 10 ซม.



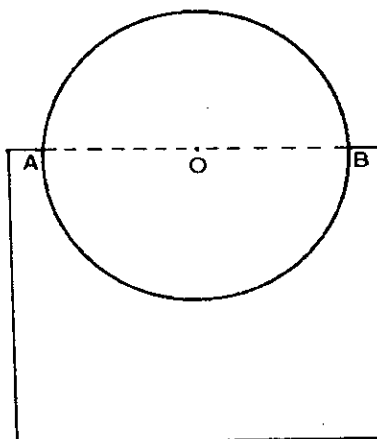
ต่อไปเป็นการกล่าวถึงขนาดของมุม
ในครึ่งวงกลม

กิจกรรมสำรวจ : 2

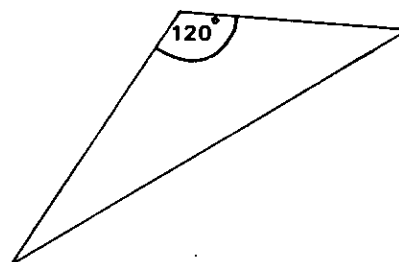
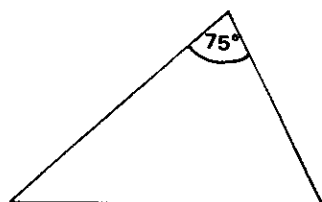
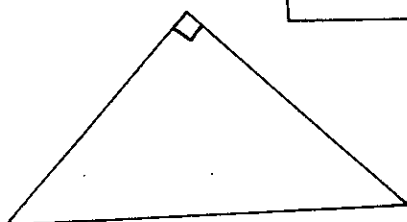
ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. พิจารณาสื่อการสอนสำเร็จรูปที่ได้เตรียมไว้ให้ในหน่วยการเรียนรู้
ย่อยนี้ ดังรูปข้างล่าง

○ เป็นจุด
ศูนย์กลาง
ของวงกลม



เส้นประเป็น
รอยตัด



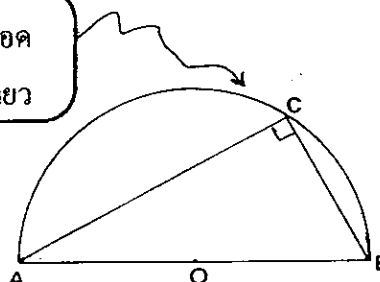
มีข้อ 2 

2. นำรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมยอดเป็นมุมขนาดต่าง ๆ สอดเข้าไปในวงกลมตามรอยเส้นประครึ่งละหนึ่งรูป โดยจัดให้มุมยอดของรูปสามเหลี่ยมนั้นอยู่บนวงกลมพอดี
3. ผู้เรียนสามารถจัดให้แขนทั้งสองของมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมรูปใดบ้างที่ผ่านจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนั้น

.....(1)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 2

รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมยอดเป็นมุมฉากเพียงรูปเดียว



คำตอบข้างต้นเป็นไปตามสมบัติที่เกี่ยวกับวงกลม ซึ่งกล่าวว่า

มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

การพิสูจน์ข้อความข้างต้นถ้าผู้เรียนสนใจให้ศึกษาได้จาก

คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 011

ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ที่จัดทำโดย สสวท.

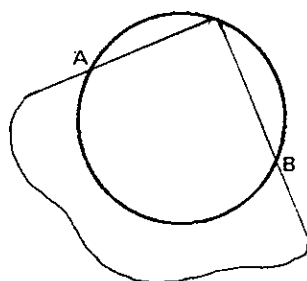
คำถาม : 1

ให้ผู้เรียนอธิบายถึงวิธีการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม
โดยใช้กระดาษที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก

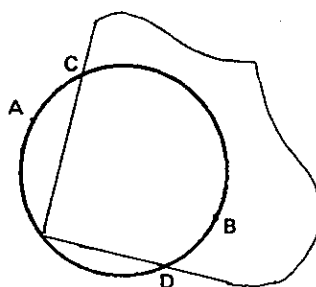
เฉลย : 1.

มีขั้นตอนการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมดังนี้

1. วางกระดาษที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉากบนวงกลม โดยให้จุดยอดของมุมฉากอยู่บนวงกลมพอดี แล้วกำหนดจุด A และ B ดังรูป

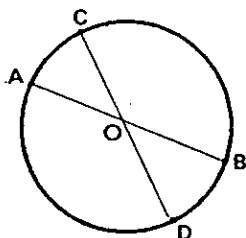


2. เลื่อนจุดยอดของมุมฉากบนวงกลมให้อยู่ตำแหน่งใหม่ แล้วกำหนดจุด C และ D ดังรูป



มีต่อข้อ 3

3. ลากเส้นเชื่อมจุด A กับจุด B และจุด C กับ จุด D ดังรูป



จะได้ว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ จะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง กำหนดเป็นจุด O
ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



เรามีความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยม
ที่แนบในวงกลมแค่ไหน ฉันจะถามคำถาม
เกี่ยวกับเรื่องนี้สัก 2 ข้อ

คำถาม : 2 ข้อ

1. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั่ว ๆ ไปแนบในวงกลมได้หรือไม่
2. รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมได้ต้องมีสมบัติอย่างไร

คำตอบอยู่ต่อท้ายกิจกรรมสำรวจ : 3

ข้อแนะนำ

รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมได้ แสดงว่าจุดยอดทุกจุด
ต้องอยู่บนวงกลมนั่นเอง

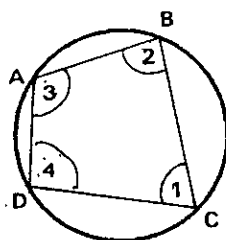


เพื่อความเข้าใจข้อเท็จจริงข้างต้นมากขึ้น
ให้ผู้เรียนศึกษากิจกรรมสำรวจต่อไปนี้

กิจกรรมสำรวจ : 3

ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

- นำวงกลมที่เตรียมไว้ในหน่วยการเรียนรู้ขอยื่นมาสสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนาดต่าง ๆ โดยที่จุดยอดทั้งสี่จุดอยู่บนวงกลมนั้น ดังรูป



- ตัดมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้นและนำมุมที่อยู่ตรงข้ามกัน ($\hat{1}$ กับ $\hat{3}$ และ $\hat{2}$ กับ $\hat{4}$) มาจัดให้ประชิดกัน ดังรูป



☞ มีต่อข้อ 3

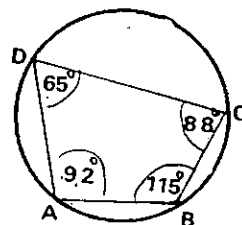
3. ผู้เรียนคิดว่าผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามแต่ละคู่ข้างต้นเท่ากับกี่องศา
.....(1)

ผู้เรียนอาจทำตามขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม : 3
ในการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 10 เพื่อเป็น
แนวทางในการตอบคำถามข้อ 3 ของกิจกรรมสำรวจ : 3

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 3

(1) 180 องศา

ดังเช่น



เฉลย : 2

1. ไม่ได้
2. ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ
ที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา



คำตอบจากกิจกรรมสำรวจ : 3 เป็นไป
ตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวไว้

ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ
ที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา

เราสามารถแสดงเหตุผล
ได้ดังนี้

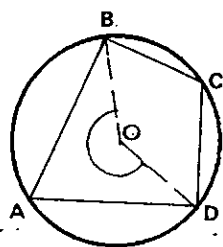


กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมี

$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O

ต้องการพิสูจน์ว่า $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ และ $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$

พิสูจน์ ลาก $\overline{BO}$ และ $\overline{OD}$



จะได้มุมกลับ $\angle BOD = 2(\angle BCD)$ และ

$\angle BOD = 2(\angle DAB)$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็น
สองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่
รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

ดังนั้น $2(\widehat{DAB}) + 2(\widehat{BCD}) = 360^\circ$

(ขนาดของมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360°)

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ \quad (\text{สมบัติของการเท่ากัน})$$

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$

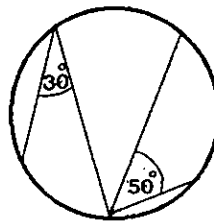
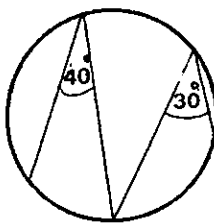
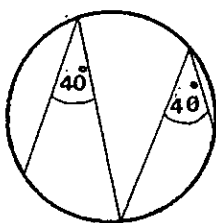


ผู้เรียนคิดว่ามุมในส่วนโค้งของวงกลมกับ
ส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น มีความสัมพันธ์กัน
เช่นใด

กิจกรรมสำรวจ : 4

ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

- นำวงกลมที่เตรียมไว้ให้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ ดังรูป มาซ้อนทับกัน



ผู้เรียนสามารถจัดวงกลมแต่ละวงให้ทับกันได้สนิทหรือไม่

..... (1)

2. ตัดวงกลมตามรอยแขนแต่ละมุมข้างต้นให้เป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง
3. นำรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งแต่ละรูปมาเปรียบเทียบความยาวของฐานโค้ง
ผู้เรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมฐานโค้งที่มีขนาดของมุมยอดเท่ากันย่อมทำให้
ความยาวของฐานโค้งเท่ากันหรือไม่ (อาจเปรียบเทียบความยาวของฐานโค้ง
โดยใช้กระดาษลอกลายหรือนำฐานโค้งของรูปเหลี่ยมแต่ละรูปมาซ้อนทับกัน)

(2)

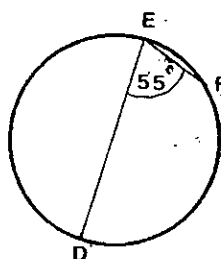
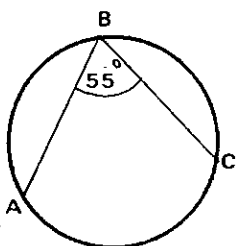
เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 4

1. ทับกันได้สนิท
2. เท่ากัน

คำตอบข้างต้นเป็นไปตามสมบัติ
เกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

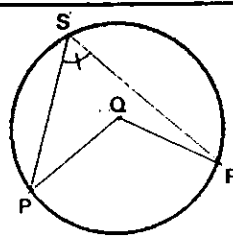
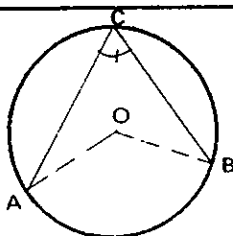


- 1 ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลม
มีขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน



$$m(\widehat{AC}) = m(\widehat{DF})$$

เราสามารถแสดงเหตุผล
ได้ดังนี้



กำหนด O และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\widehat{ACB}$ และ $\widehat{PSR}$ เป็น
มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมี $\widehat{AB}$, $\widehat{PR}$
รองรับมุมตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PR})$

การพิสูจน์

ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{PQ}$ และ $\overline{RQ}$

เนื่องจาก $\widehat{AOB} = 2(\widehat{ACB})$ และ $\widehat{PQR} = 2(\widehat{PSR})$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุม
ในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

แต่ $\widehat{ACB} = \widehat{PSR}$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $\widehat{AOB} = \widehat{PQR}$ (ต่างก็มีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่มี
ขนาดเท่ากัน)

ทำให้ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PR})$

(ต่างก็รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางที่มีขนาดเท่ากัน)

กิจกรรมสำรวจ : 5

บทเรียนกิจกรรม

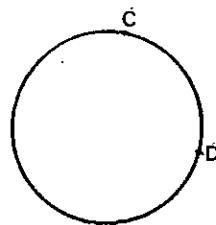
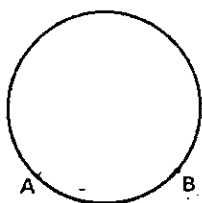
เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมกับส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น

อุปกรณ์ กระดาษลอกลาย ไม้บรรทัด วงเวียน

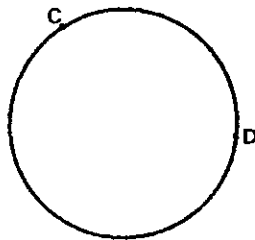
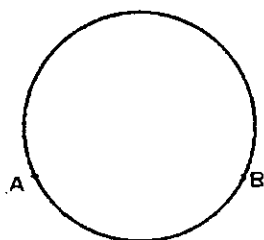
คำชี้แจง ผู้เรียนปฏิบัติไปตามลำดับขั้น และตอบคำถามในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
เมื่อตอบแล้วครูเฉลยทีละข้อ

กิจกรรม

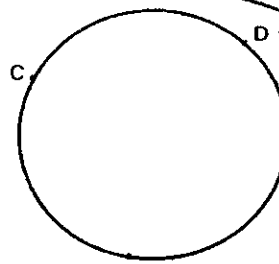
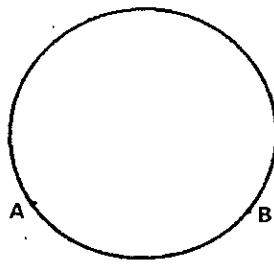
1. ให้ผู้เรียนพิจารณาวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากัน และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$
ในแต่ละคู่ดังนี้



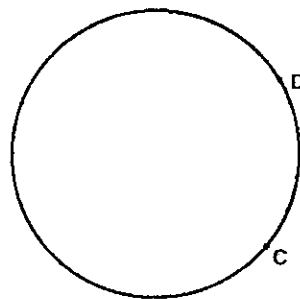
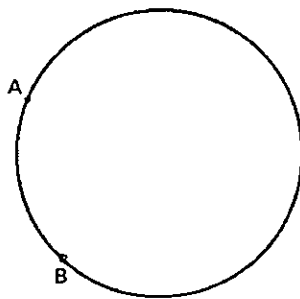
คู่ที่ 1



คู่ที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

2. ให้ผู้เรียนสร้างมุมในส่วนโค้งของวงกลมในวงกลมแต่ละคู่โดยมีส่วนโค้งที่กำหนดให้รองรับมุมนั้น
3. ใช้กระดาษลอกลายตรวจสอบว่ามุมในส่วนโค้งของวงกลมแต่ละคู่มีขนาดเท่ากันหรือไม่
4. ผู้เรียนคิดว่าความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมกับส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น เป็นเช่นใด

.....(1)

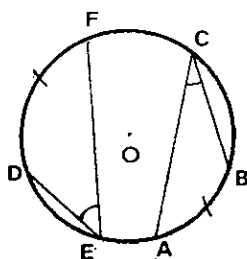
.....(2)

เฉลย : กิจกรรมสำรวจ : 5

1. ขนาดเท่ากัน
2. ในวงกลมที่เท่ากัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



สำหรับในวงกลมเดียวกัน
ดังรูปข้างล่างละ !



คำถาม

จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลาง
ของวงกลม และ $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{DE})$
ผู้เรียนคิดว่า $\angle ACB = \angle DEF$ หรือไม่

เฉลย

มีขนาดเท่ากัน เนื่องจากวงกลมเดียวกันเป็นวงกลม
ที่เท่ากันทุกประการ จึงใช้คำตอบจากกิจกรรมสำรวจ : 5
ได้ หรือ โดยการลากรูปมาซ้อนกัน

คำตอบจากกิจกรรมสำรวจ : 5 เป็นไป
ตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า



- 2 ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน
แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้น
จะมีขนาดเท่ากัน

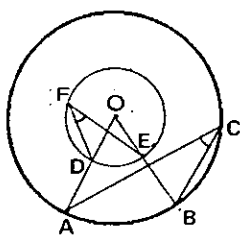
มูมนำคิด

ในรูปข้างล่างเป็นวงกลมร่วมศูนย์กลางกัน ซึ่งมี $\widehat{DFE}$

รองรับด้วย $\widehat{DE}$ และ $\widehat{ACB}$

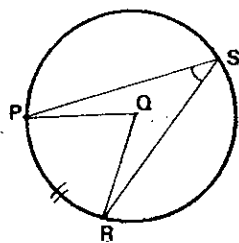
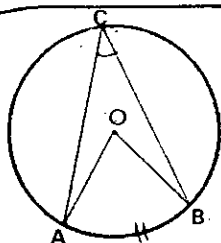
รองรับด้วย $\widehat{AB}$

ผู้เรียนคิดว่า $\widehat{DFE} = \widehat{ACB}$ หรือไม่



เราสามารถแสดงเหตุผลข้อความ

2 ได้ดังนี้



กำหนด O และ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เท่ากัน $\widehat{ACB}$ และ $\widehat{PSR}$
เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วย $\widehat{AB}$ และ $\widehat{PR}$ ตามลำดับ

$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PR})$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\widehat{ACB} = \widehat{PSR}$

การพิสูจน์: ลาก $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{PQ}$ และ $\overline{RQ}$

เนื่องจาก $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PR})$ (กำหนดให้)

ทำให้ $\widehat{AOB} = \widehat{PQR}$

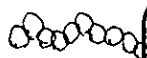
(ในวงกลมที่เท่ากันมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน)

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ACB} = \widehat{PSR}$$

(ต่างก็มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน)

เฉลย : มุมนำคิด

$$\widehat{DFE} = \widehat{ACB}$$



เธอดิคว่าเส้นขนานคู่หนึ่ง ตัดวงกลมวงหนึ่ง
ผลจะเป็นอย่างไรบ้าง

รู้สิผมจะยกตัวอย่างให้ดูดังนี้

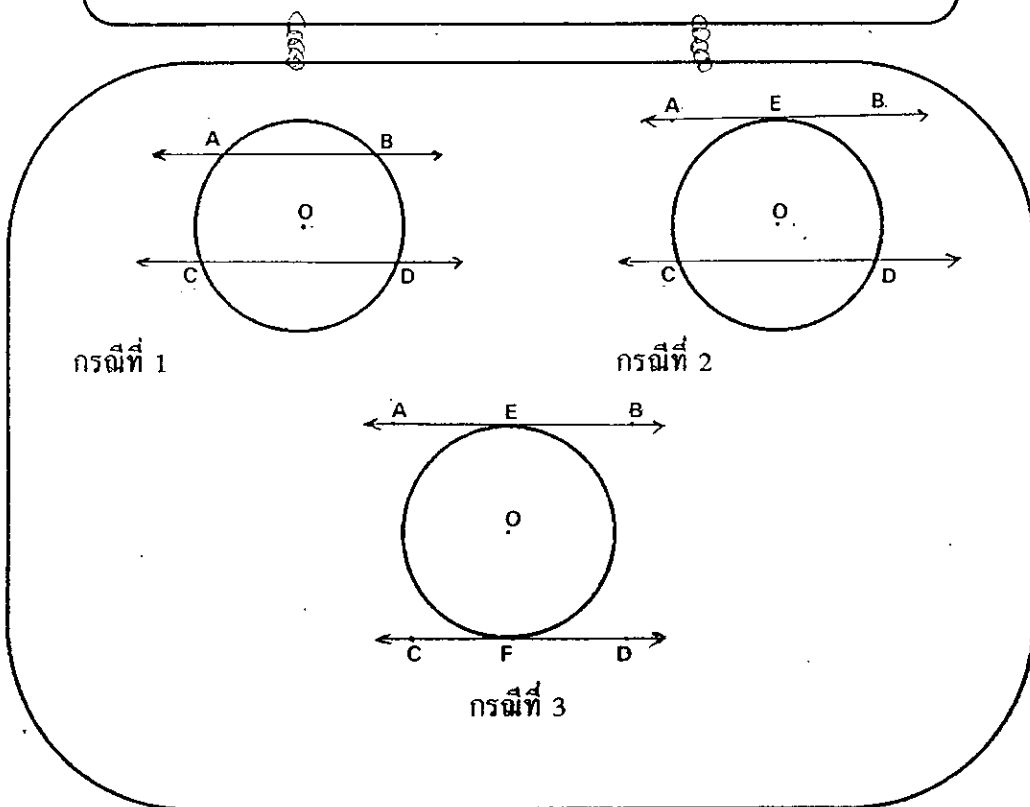


ตัวอย่าง

ถ้าเส้นขนานคู่หนึ่งตัดส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งแล้ว ส่วนโค้งทั้งสอง
ที่อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่นั้นย่อมยาวเท่ากัน

ผู้เรียนสามารถนำสมบัตินี้
ไปใช้อ้างอิงต่อไปได้

การแสดงความขัดแย้งกันเป็นจริง จะแบ่งออกเป็น 3 กรณี ดังรูป

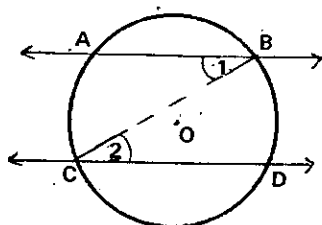


พิจารณากรณีที่ 1

กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$



การพิสูจน์ ลาก $\overline{CB}$

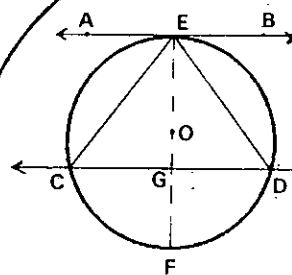
จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้น

ขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$

(ในวงกลมเดียวกันมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากันจะรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน)

พิจารณากรณีที่ 2



กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมี $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด E และ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\widehat{ED}) = m(\widehat{EC})$

การพิสูจน์ ให้ $\overline{EF}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ทำให้ $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E

ดังนั้น $\angle AEF = \angle DGE = 90^\circ$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\overline{EF}$ แบ่งครึ่ง $\overline{CD}$

(ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ดจะ แบ่งครึ่งคอร์ด)

ลาก $\overline{CE}$ และ $\overline{DE}$

จะได้ว่า $\triangle EGC \cong \triangle EGD$ (ค.ม.ค.)

ดังนั้น $\angle ECD = \angle EDC$ (สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม)

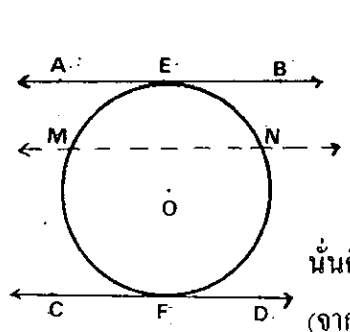
ทำให้ $m(\widehat{ED}) = m(\widehat{EC})$ (1)

(ในวงกลมเดียวกันมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากันจะรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน)

พิจารณากรณีที่ 3

กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมี $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ สัมผัส
วงกลม O ที่จุด E และ F ตามลำดับและ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $m(\widehat{EMF}) = m(\widehat{ENF})$



การพิสูจน์ ลาก $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$

จากกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$$m(\widehat{EM}) = m(\widehat{EN}) \dots\dots\dots (1)$$

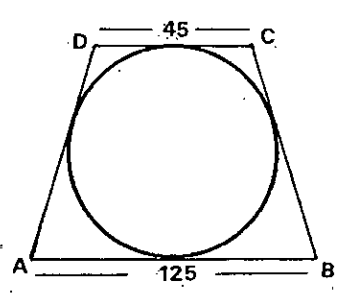
$$\text{และ } m(\widehat{MF}) = m(\widehat{NF}) \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{นั่นคือ } m(\widehat{EM}) + m(\widehat{MF}) = m(\widehat{EN}) + m(\widehat{NF})$$

(จาก (1) , (2) และสมบัติของการเท่ากัน)

$$\text{ดังนั้น } m(\widehat{EMF}) = m(\widehat{ENF})$$

มูมนาคิด



จงหาว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่แนบในรูป
สี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วดังรูปยาวกี่หน่วย

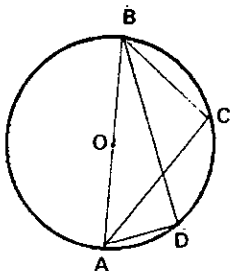
เฉลย : มูมนาคิด

75 หน่วย

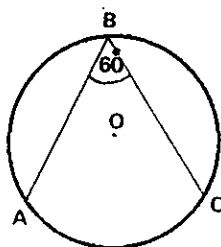
กิจกรรมเสริม : 2

ให้ผู้เรียนตอบคำถามต่อไปนี้

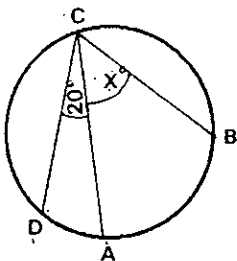
1. ในรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ความสัมพันธ์ระหว่าง $\widehat{BDA}$ และ $\widehat{BCA}$ เป็นเช่นใด



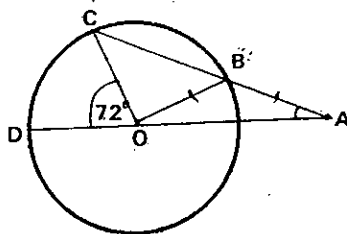
4. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $\widehat{ABC} = 60^\circ$ ถ้า $m(\widehat{CA}) = 2$ หน่วย แล้ว $m(\widehat{ABC})$ ยาวกี่หน่วย



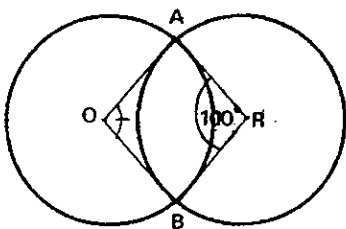
2. กำหนดให้ $m(\widehat{DCB}) = 3m(\widehat{AB})$ ดังรูป จงหาค่าของ X



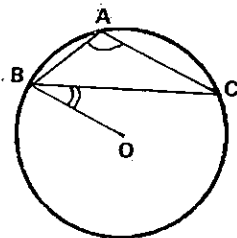
5. จากรูปข้างล่าง O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่ง $\widehat{DOC} = 72^\circ$ และ $OB = BA$ ขนาดของ $\widehat{OAB}$ เป็นเท่าใด



3. กำหนด O และ R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เท่ากันและตัดกันที่จุด A และ B ดังรูป ถ้า $\widehat{ARB} = 100^\circ$ แล้ว ขนาดของ $\widehat{BOA}$ เป็นเท่าใด



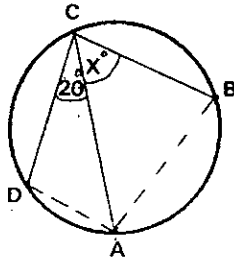
6. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังรูป ขนาดของ $(\widehat{BAC} - \widehat{OBC})$ เป็นเท่าใด



เฉลย : กิจกรรมเสริม : 2

$$1. \hat{BDA} = \hat{BCA}$$

2. ถ้า $\overline{DA}$ และ $\overline{AB}$ จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม



$$20 + X + \hat{DAB} = 180$$

$$\text{เนื่องจาก } m(\widehat{DCB}) = 3m(\widehat{AB})$$

$$\hat{DAB} = 3X^\circ$$

(ในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน)

$$\text{ดังนั้น } 20 + X + 3X = 180$$

$$4X = 160$$

$$X = 40$$

$$3. \hat{BOA} = 100 \text{ องศา}$$

$$4. m(\widehat{ABC}) = 4 \text{ หน่วย}$$

5. ต่อ $\overline{BO}$ ตัดวงกลม O ที่จุด E

$$\text{จะได้ } \hat{CBO} = \frac{X + 72}{2} \quad (1)$$

$$\text{แต่ } \hat{CBO} = 2(X) \dots\dots\dots(2)$$

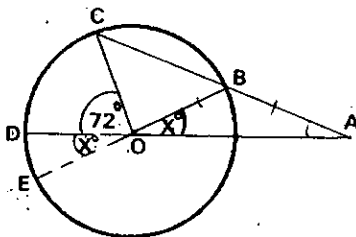
$$(1) = (2); 2X = \frac{X + 72}{2}$$

$$4X = X + 72$$

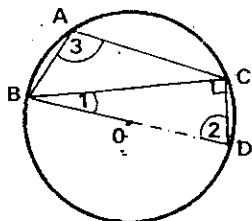
$$3X = 72$$

$$X = 24$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{OAB} = 24^\circ$$



6.



ต่อ $\overline{BO}$ ตัดวงกลม O ที่จุด D และ
ลาก $\overline{CD}$ จะได้

$$\hat{1} + \hat{2} = 90^\circ \dots\dots (1)$$

$$\hat{2} + \hat{3} = 180^\circ \dots\dots (2)$$

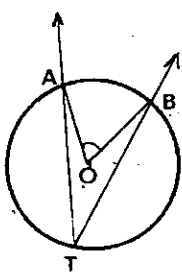
$$(2) - (1); \quad \hat{3} - \hat{1} = 180 - 90 = 90^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{BAC} - \hat{OBC} = 90^\circ$$

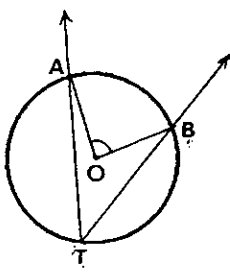
(2)

มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส

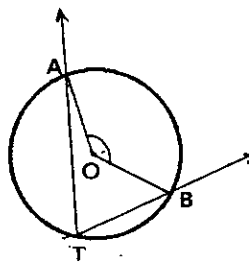
ในรูปข้างล่างจากซ้ายไปขวาจุด B เคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวง
ของวงกลมและเข้าใกล้จุด T มากขึ้นเรื่อย ๆ จนในที่สุด จุด B
ทับจุด T และแขนข้างหนึ่งของ $\hat{ATB}$ กลายเป็นเส้นสัมผัสของวงกลม
ดังในรูปที่ 4



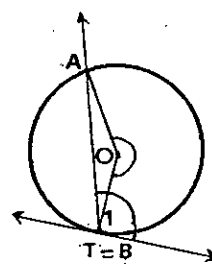
รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

เราสามารถใช้สมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า “มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมี ขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับ ด้วยส่วนโค้งเดียวกัน” กับรูปที่ 1, 2 และ 3 ทำให้ได้ $\widehat{AOB} = 2(\widehat{ATB}) \dots (1)$

คำถาม : 3

ผู้เรียนคิดว่าในรูปที่ 4 ยังคงเป็นจริงตามสมการ (1) ด้วยหรือไม่

ก่อนที่จะกล่าวต่อไปขอแนะนำว่า

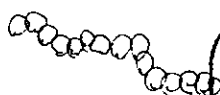


มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลม คือ มุมที่จุดยอดของมุมอยู่บนวงกลม และแขนของมุมเกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส ซึ่งตัดกันที่จุดสัมผัสดังเช่น รูปที่ 4 $\widehat{1}$ เป็นมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัส

เฉลย : 3

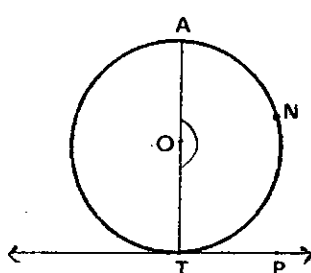
“เป็นจริงด้วย”

นั่นคือ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของ ขนาดของมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด สัมผัสซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



เราสามารถแสดงเหตุผลได้ โดยแยกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุด O อยู่บนแขน AT ของ $\widehat{ATP}$



$\overleftrightarrow{TP}$ สัมผัสกับวงกลม O ที่จุด T

$\overline{AT}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

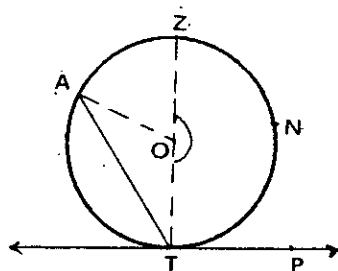
เนื่องจาก $OT \perp \overleftrightarrow{TP}$ (เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)

ดังนั้น $\widehat{ATP} = 90^\circ$

เนื่องจาก $\widehat{AOT} = 180^\circ$ (มุมตรงมีขนาดเท่ากับ 180°)

ดังนั้น $\widehat{AOT} = 2(\widehat{ATP})$

กรณีที่ 2 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุด O อยู่ภายใน $\widehat{ATP}$



$\overleftrightarrow{TP}$ สัมผัสกับวงกลม O ที่จุด T

$\overline{TZ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

เนื่องจาก $\widehat{AOZ} = 2(\widehat{ATZ})$ (1)

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

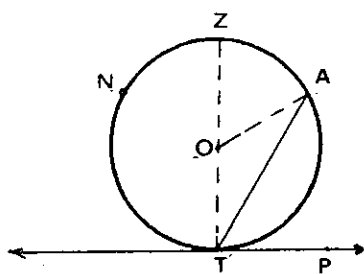
$\widehat{ZOT} = 2(\widehat{ZTP})$ (จากกรณีที่ 1)(2)

$\widehat{AOZ} + \widehat{ZOT} = 2(\widehat{ATZ} + \widehat{ZTP})$

(จาก (1), (2) และสมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น มุมกลับ $\widehat{AOT} = 2(\widehat{ATP})$

กรณีที 3 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุด O อยู่ภายนอก $\widehat{ATP}$



$\overrightarrow{TP}$ สัมผัสกับวงกลม O ที่จุด T

$\overrightarrow{TZ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

เนื่องจาก $\widehat{ZOA} = 2(\widehat{ZTA}) \dots\dots\dots(1)$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาด

เป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของ

วงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

$$\widehat{ZOT} = 2(\widehat{ZTP}) \quad (\text{จากกรณีที่ 1}) \dots\dots\dots(2)$$

$$\widehat{ZOT} - \widehat{ZOA} = 2(\widehat{ZTP} - \widehat{ZTA}) \quad (\text{จาก (1), (2) และสมบัติของการเท่ากัน})$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{AOT} = 2(\widehat{ATP})$$



จากเหตุผลทั้ง 3 กรณี เป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

“มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมที่เกิดจาก

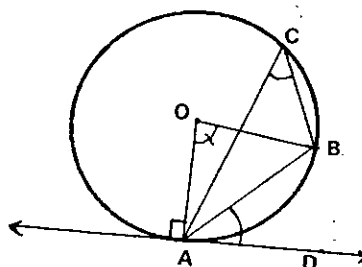
คอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัส ซึ่ง

รองรับส่วนโค้งเดียวกัน”

ให้ผู้เรียนพิจารณาวงกลม O

ดังรูปข้างล่าง

$\overrightarrow{AD}$ เป็น
เส้นสัมผัสของ
วงกลม O ที่จุด A



เราทราบว่า $\widehat{AOB} = 2(\widehat{ACB})$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน) และ $\widehat{AOB} = 2(\widehat{BAD})$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

ดังนั้น $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติเกี่ยวกับวงกลมที่กล่าวว่า

“มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น”

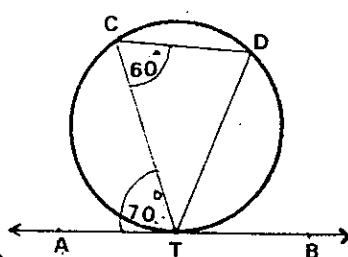
ผู้เรียนอาจทำตามขั้นตอนการดำเนินการ : 4 ในการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 10 เพื่อเพิ่มความเข้าใจ

กิจกรรมเสริม : 3

ตัวอย่าง กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด T ดังรูป

จงหาว่า

1. ขนาดของ $\widehat{DTB}$ เป็นเท่าใด
2. ขนาดของ $\widehat{CDT}$ เป็นเท่าใด

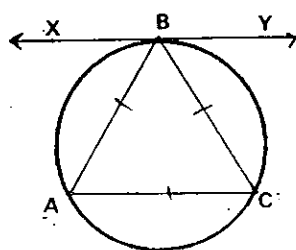


จะได้

1. $\widehat{DTB} = 60^\circ$
2. $\widehat{CDT} = 70^\circ$

จงหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

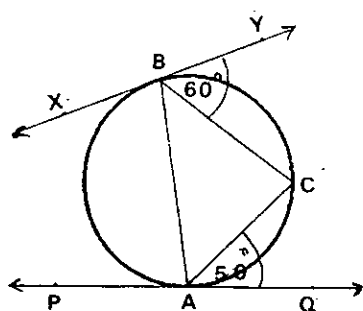
1. กำหนด $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B



1.1 ขนาดของ $\widehat{XBA}$ เป็นเท่าใด

1.2 ขนาดของ $\widehat{CBY}$ เป็นเท่าใด

2. กำหนด $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ



2.1 ขนาดของ $\widehat{ABC}$ เป็นเท่าใด

2.2 ขนาดของ $\widehat{PAB}$ เป็นเท่าใด

เฉลย

1.1 60°

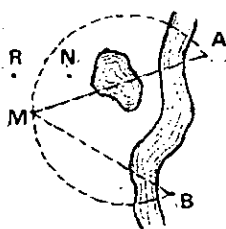
1.2 60°

2.1 50°

2.2 70°

มม่นำคิด

จากรูปข้างล่าง กำหนดจุด A และ B เป็นที่ตั้งของประภาคารซึ่งทำให้นักเดินเรือทราบว่าพวกเขาต้องแล่นเรือให้อยู่ภายนอกส่วนโค้ง AMB เพื่อป้องกันมิให้เรือเกิดอับปางจากการชนแนวหินโสโครก



1. กำหนดจุด N ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ภายในส่วนโค้ง AMB ผู้เรียนคิดว่าขนาดของ $\angle ANB$ กับขนาดของ $\angle AMB$ สัมพันธ์กันเช่นใด
2. กำหนดจุด R ซึ่งเป็นจุดใด ๆ ภายนอกส่วนโค้ง AMB ผู้เรียนคิดว่าขนาดของ $\angle ARB$ กับขนาดของ $\angle AMB$ สัมพันธ์กันเช่นใด
3. กำหนด $\angle AMB = 50^\circ$ เมื่อนักเดินเรือแล่นเรือมาอยู่ที่จุด Q ซึ่งทำให้ $\angle AQB < 50^\circ$ ผู้เรียนคิดว่าเรืออยู่ในตำแหน่งที่ปลอดภัยจากการชนแนวหินโสโครกหรือไม่

เฉลย : มม่นำคิด

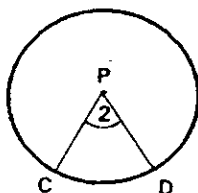
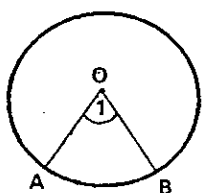
$$1. \angle ANB > \angle AMB$$

$$2. \angle ARB < \angle AMB$$

3. เรืออยู่ในตำแหน่งที่ปลอดภัย

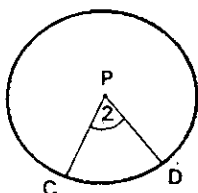
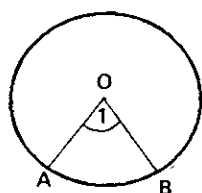
บทสรุป

1. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน



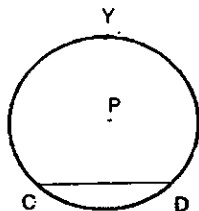
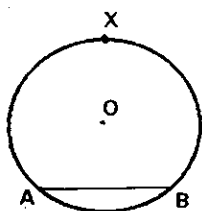
$$\text{ถ้า } \hat{1} = \hat{2} \text{ แล้ว} \\ m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$$

2. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



$$\text{ถ้า } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \\ \text{แล้ว } \hat{1} = \hat{2}$$

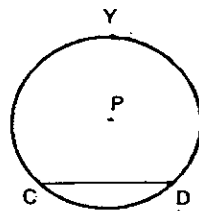
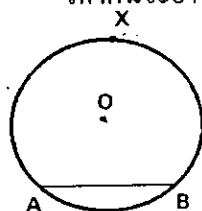
3. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากันคือ ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่



$$\text{ถ้า } AB = CD \text{ แล้ว } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$$

$$\text{ถ้า } AB = CD \text{ แล้ว } m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{CYD})$$

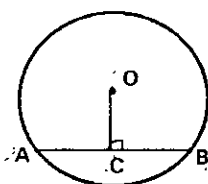
4. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งที่เท่ากันจะยาวเท่ากัน



$$\text{ถ้า } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \text{ แล้ว } AB = CD$$

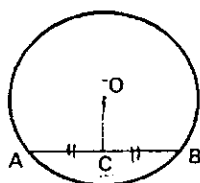
$$\text{ถ้า } m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{CYD}) \text{ แล้ว } AB = CD$$

5. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น



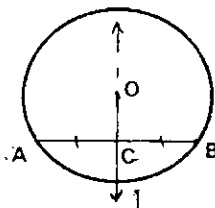
ถ้า $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ แล้ว $AC = CB$

6. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น



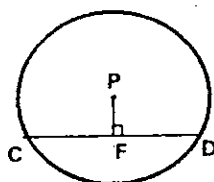
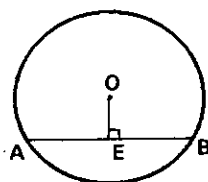
ถ้า $AC = CB$ แล้ว $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

7. เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น



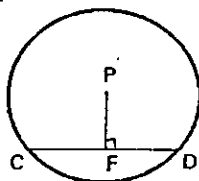
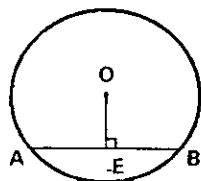
ถ้า $l \perp \overline{AB}$ และ $AC = CB$ แล้ว เส้นตรง l จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

8. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากัน จะยาวเท่ากัน



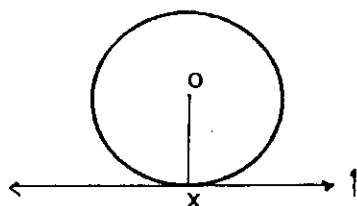
ถ้า $AB = CD$ แล้ว $OE = PF$

9. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันจะยาวเท่ากัน



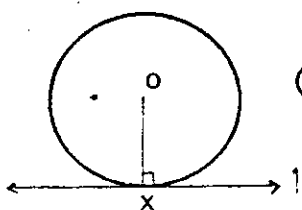
ถ้า $OE = PF$ แล้ว $AB = CD$

10. เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส



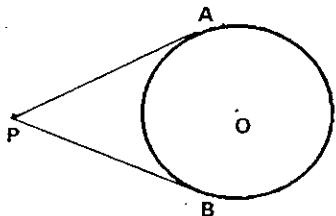
ถ้าเส้นตรง l เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด X แล้ว
 $\overline{OX} \perp l$

11. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีที่จุดปลายของรัศมีบนวงกลมจะเป็นเส้นสัมผัส



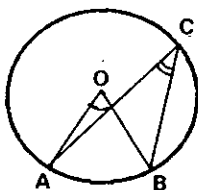
ถ้า $\overrightarrow{OX} \perp l$ ที่จุด X แล้ว l เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม

12. เส้นสัมผัสของวงกลมสองเส้นที่ลากจากจุดหนึ่งซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมน้อยกว่าเท่ากัน



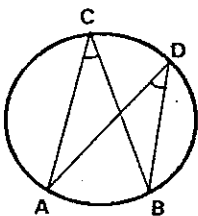
ถ้า $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด A
 และ B ตามลำดับแล้ว $PA = PB$

13. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้ง
 ของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



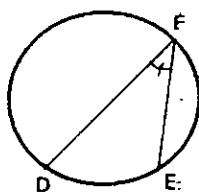
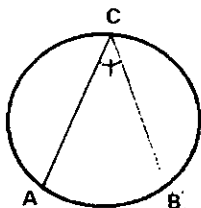
$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

14. มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน



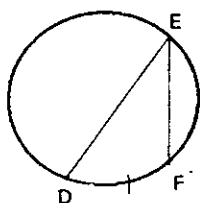
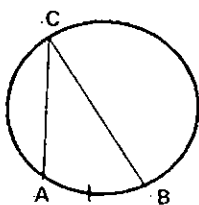
$$\angle ACB = \angle ADB$$

15. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นจะยาวเท่ากัน



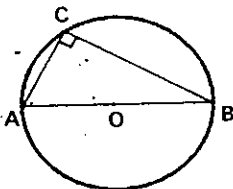
$$\text{ถ้า } \angle ACB = \angle DFE \text{ แล้ว } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{DE})$$

16. ในวงกลมที่เท่ากันหรือวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



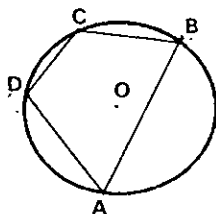
$$\text{ถ้า } m(\widehat{AB}) = m(\widehat{DE}) \text{ แล้ว } \angle ACB = \angle DFE$$

17. มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° หรือหนึ่งมุมฉาก



$$\angle ACB = 90^\circ$$

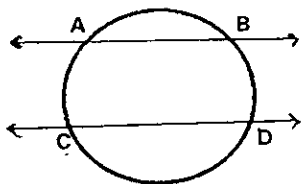
18. รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันย่อมเท่ากับ 180°



$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$$

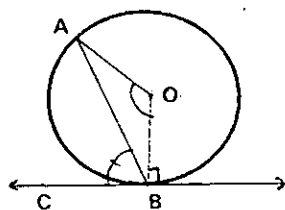
$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$$

19. ถ้าเส้นขนานคู่หนึ่งตัดส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งแล้ว ส่วนโค้งทั้งสองที่อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่นั้น จะยาวเท่ากัน



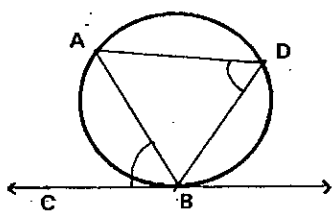
ถ้า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ แล้ว $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{DB})$

20. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมที่เกิดจากคอร์ด และเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



ถ้า $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด B และ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดแล้ว $\angle AOB = 2(\angle ABC)$

21. มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

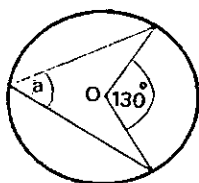


ถ้า $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุด B และ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ด แล้ว $\angle ABC = \angle ADB$

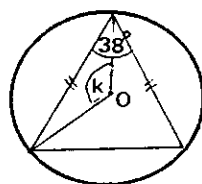
แบบฝึกหัด ก. 3.4

1. จงหาคำตอบเติมลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้

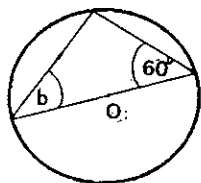
1.1 $a = \dots\dots\dots$



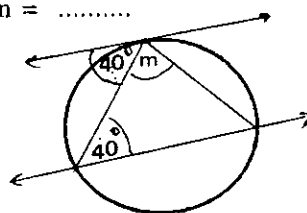
1.5 $k = \dots\dots\dots$



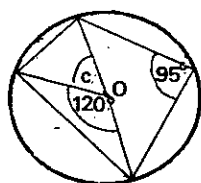
1.2 $b = \dots\dots\dots$



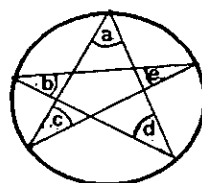
1.6 $m = \dots\dots\dots$



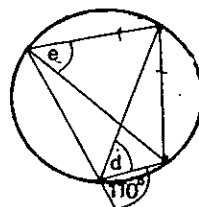
1.3 $c = \dots\dots\dots$



1.7 $a + b + c + d + e = \dots\dots\dots$

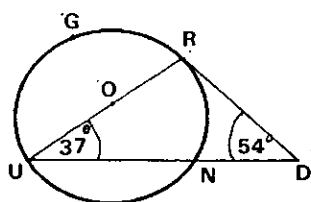


1.4 $d = \dots\dots\dots$, $e = \dots\dots\dots$



2. ในรูปข้างล่าง $\overline{UR}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

$$\widehat{RUD} = 37^\circ \text{ และ } \widehat{RDU} = 54^\circ$$



2.1 $\widehat{URD}$ มีขนาดเท่าไร

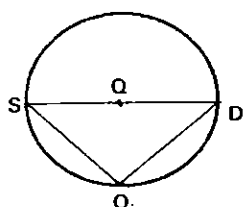
2.2 $\overline{RD}$ สัมผัสกับวงกลม O หรือไม่

2.3 $\widehat{UGR}$ เป็นครึ่งวงกลมหรือไม่

2.4 $\widehat{RN}$ รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางที่มีขนาดเท่าใด

2.5 $\widehat{UN}$ รองรับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่าใด

3. ในรูปข้างล่าง $\overline{SD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $m(\widehat{OD}) = 2m(\widehat{SO})$



3.1 จงหาว่า $\widehat{SO}$ และ $\widehat{OD}$ รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางที่มีขนาดเท่าใด

3.2 จงหาว่า $\widehat{OSD}$ และ $\widehat{SDO}$ มีขนาดเท่าใด

3.3 $OD = 2SO$ หรือไม่

มุมปด้อยก๊าก

ในห้องเรียนห้องหนึ่ง

ครู : ไหนลองใช้คำว่า “แป้ง” แต่งประโยคให้ครูฟังสักประโยคหนึ่งซิ

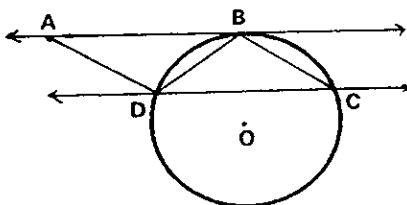
เบิกบาน : คุณแม่กำลังทานเค้ก

ครู : อ้าว แล้ว “แป้ง” อยู่ที่ไหนล่ะหือ?

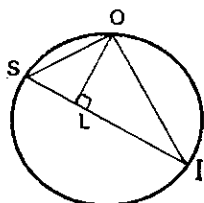
เบิกบาน : ก็อยู่ในเค้กนะสิครับ

แบบฝึกหัด ข. 3.4

1. กำหนด วงกลม O ซึ่ง $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสที่จุด B $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ดังรูป
จงพิสูจน์ว่า $\widehat{BCD} = \widehat{CDB}$



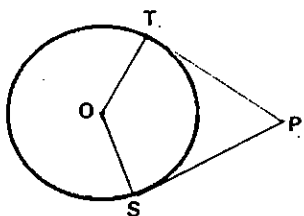
2.

กำหนด $\widehat{SOI}$ เป็นครึ่งวงกลม

$$\overline{OL} \perp \overline{SI}$$

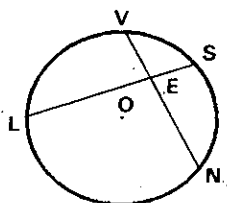
$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \frac{SL}{OL} = \frac{OL}{LI}$$

3. กำหนด $\overline{PT}$ และ $\overline{PS}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด T และ S ตามลำดับ
จงพิสูจน์ว่า $\widehat{TPS} + \widehat{TOS} = 180^\circ$



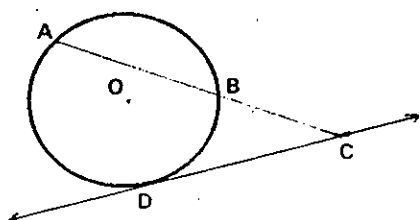
ผู้เรียนสามารถนำสมบัตินี้ไปใช้อ้างอิงต่อไปได้

4. กำหนด วงกลม O , $\overline{LS}$ และ $\overline{NV}$ เป็นคอร์ดของวงกลม ซึ่งตัดกันที่จุด E ซึ่งอยู่ภายในวงกลม O จงพิสูจน์ว่า $EV \cdot NE = ES \cdot LE$



ผู้เรียนสามารถนำสมบัตินี้ไปใช้อ้างอิงต่อไปได้

9. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overrightarrow{DC}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม O ที่จุด D และตัดกับ $\overline{AC}$ ที่จุด C ดังรูป จงพิสูจน์ว่า $(DC)^2 = AC \cdot BC$



ผู้เรียนสามารถนำสมบัตินี้
ไปใช้อ้างอิงต่อไปได้

(แนะนำ ใช้หลักของรูปสามเหลี่ยมคล้าย)



เฉลยแบบฝึกหัด ก. 3.4

1.

1.1 $a = 65^\circ$

1.2 $b = 30^\circ$

1.3 $c = 70^\circ$

1.4 $d = 35^\circ$

$e = 35^\circ$

1.5 $k = 142^\circ$

1.6 $m = 100^\circ$

1.7 $a + b + c + d + e = 180^\circ$

2.

2.1 $\hat{URD} = 89^\circ$

2.2 ไม่สัมผัส

2.3 เป็น

2.4 74°

2.5 53°

3.

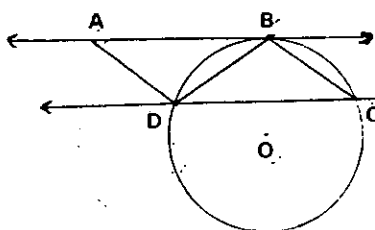
3.1 60° และ 120° ตามลำดับ

3.2 $\hat{OSD} = 60^\circ$ และ $\hat{SDO} = 30^\circ$

3.3 ไม่เท่ากัน

เฉลย แบบฝึกหัด ข. 3.4

1.



เนื่องจาก $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$

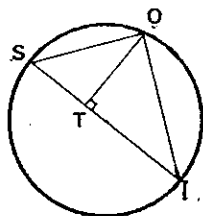
(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

และ $\widehat{BCD} = \widehat{ABD}$

(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลม มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

ดังนั้น $\widehat{BCD} = \widehat{CDB}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

2.



เนื่องจาก $\widehat{SOL} + \widehat{LOI} = 90^\circ$

และ $\widehat{LIO} + \widehat{LOI} = 90^\circ$

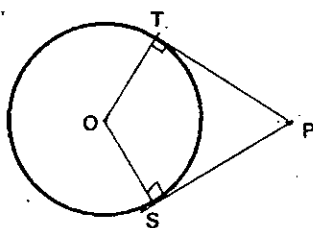
ดังนั้น $\widehat{SOL} = \widehat{LIO}$

ทำให้ $\widehat{OSL} = \widehat{LOI}$

$\triangle SLO \sim \triangle OLI$ (ม.ม.ม.)

$$\text{ทำให้ } \frac{SL}{OL} = \frac{OL}{LI}$$

3.



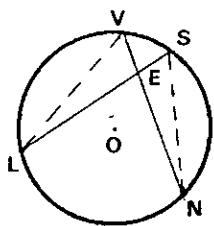
เนื่องจากขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม SPTO

รวมกันเท่ากับ 360° และ $\widehat{OTP}$ และ $\widehat{OSP}$ เป็นมุมฉาก

ซึ่ง $\widehat{OTP} + \widehat{OSP} = 180^\circ$

ดังนั้น $\widehat{TPS} + \widehat{TOS} = 180^\circ$

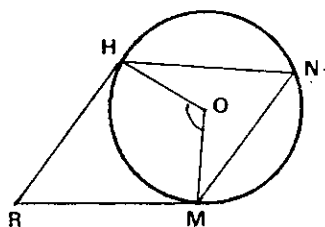
4.

ลาก $\overline{LV}$ และ $\overline{NS}$ จะได้ $\widehat{LVN} = \widehat{LSN}$ (มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)และ $\widehat{VLS} = \widehat{VNS}$ (มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน) $\widehat{VEL} = \widehat{SEN}$ (เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมมีขนาดเท่ากัน)ดังนั้น $\triangle LEV \sim \triangle NES$ (ม.ม.ม.)

$$\text{จะได้ } \frac{EV}{ES} = \frac{LE}{NE}$$

$$\text{นั่นคือ } EV \cdot NE = ES \cdot LE$$

5.



$$\text{ให้ } \widehat{HOM} = X^\circ$$

ดังนั้น $\widehat{HRM} = 180 - X$ (จากแบบฝึกหัด ข. 3.4 ข้อ 3)

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{HNM} = \frac{1}{2} (\widehat{HOM})$$

$$= \frac{1}{2} X$$

(มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{HRM} = \widehat{HNM}$$

(มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่อยู่ตรงข้ามกันย่อมมีขนาดเท่ากัน)

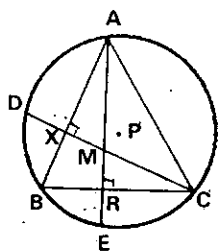
$$\text{ดังนั้น } 180 - X = \frac{1}{2} X$$

$$\frac{3}{2} X = 180$$

$$X = 120$$

$$\text{นั่นคือ } \widehat{HOM} = 120 \text{ องศา}$$

6.



เนื่องจาก $\widehat{XMA} = \widehat{RMC}$

(เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมมีขนาดเท่ากัน)

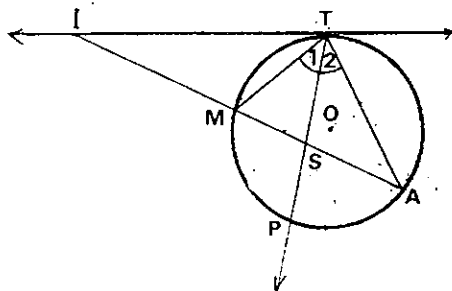
และ $\widehat{AXM} = \widehat{MRC}$ (มุมฉากมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\widehat{MCR} = \widehat{XAM}$ หรือ $\widehat{BAE} = \widehat{DCB}$

ทำให้ $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{EB})$

(ในวงกลมเดียวกันถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน
แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นจะยาวเท่ากัน)

7.



เนื่องจาก $\widehat{ITM} = \widehat{TAM}$ (มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมจะมีขนาดเท่ากับ
ขนาดของมุมภายในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

$\widehat{MST} = \widehat{1} + \widehat{TAM}$ (ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอก
ที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด)

นั่นคือ $\widehat{MST} = \widehat{1} + \widehat{ITM}$

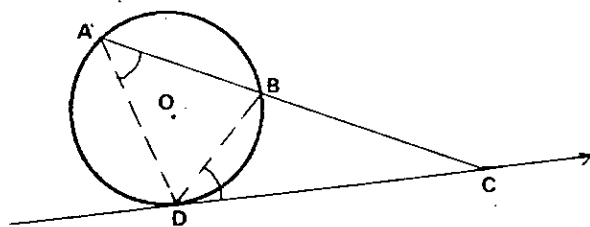
($\widehat{1} = \widehat{2}$, $\widehat{ITM} = \widehat{TAM}$ และสมบัติของการเท่ากัน)

$\widehat{MST} = \widehat{ITS}$

($\widehat{1} + \widehat{ITM} = \widehat{ITS}$)

ดังนั้น SIT เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

9.



ลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BD}$

จะได้ $\angle BDC = \angle BAD$

(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

ดังนั้น $\triangle CDB \sim \triangle CAD$ (ม.ม.ม.)

จะได้ $\frac{DC}{AC} = \frac{BC}{DC}$ (สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย)

นั่นคือ $(DC)^2 = AC \cdot BC$



หนังสืออ้างอิงและอ่านประกอบเพิ่มเติม

- ประสิทธิ์ ทองแจ่ม. รากฐานเรขาคณิต. สกลนคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครู
สกลนคร, 2526.
- พรรณทิพย์ ม้ามณี. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพฯ : สารศึกษาการพิมพ์, 2520.
- เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์. รากฐานของเรขาคณิต. พิษณุโลก : ภาควิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก, 2519.
- Burton, David M. The History of Mathematics and Introduction. 2nd ed. New York :
Wm.C. Brown Publishers, 1988.
- Clemens, Stanley R. and others. Geometry. New York : Addison-Wesley Publishing
Company. Inc., 1990.
- Goodwin, A. Wilson and others. Geometry. Ohio : Charles E. Merrill Publishing Co.,
1970.
- Hemmerling, edwin M. Fundamentals of College Geometry. 2nd ed. New York :
John Wiley & Sons Inc., 1970.
- Jacobs, Harold R. Geometry. 2nd ed. New York : W.H. Freeman and Company, 1987.
- Jurgensen, Ray C. and others. Geometry. Boston : Houghton Mifflin Company, 1985.
- Kane, Robert B. and others. Geometries. New York : Litton Education Publishing Inc.,
1970.
- Keedy, Mervin L. and Nelson, Charles W. Geometry a Modern Introduction. 2nd ed.
New York : Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1973.
- Keedy, Mervin L. and others. Informal Geometry. New York : Addison-Wesley
Publishing Company Inc., 1986.
- Lappan, Glenda and others. Similarity and Equivalent Fractions. New York : Addison-
Wesley Publishing Company Inc., 1986.
- Musser, Gary L. and Burger, William F. Mathematics for Elementary Teachers :
A Contemporary Approach. 3rd ed. New York : Macmillan Publishing Company,
1991.
- NCTM. Historical Topics for The Mathematics Classroom. New York : NCTM, 1969.
- _____. Learning and Teaching Geometry, K-12. New York : NCTM, 1987.

- NCTM. Research Ideas for The Classroom : High School Mathematics. New York : NCTM, 1993.
- _____. Research Within Reach : Secondary School Mathematics A Research - Guided Response to The Concerns of Educators. 4th ed. New York : NCTM, 1986.
- Posamentier, Alfred S. Excursions in Advanced Euclidean Geometry. 2nd ed. New York : Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1984.
- Posamentier, Alfred S. and Stepelman, Jay. Teaching Secondary School Mathematics Techniques and Enrichment Units. 4th ed. New Jersey : Prentice - Hall Inc., 1995.
- Ramsay, Arlan and Richtmyer, Robert D. Introduction to Hyperbolic Geometry. New York : Springer - Verlag. Inc., 1995.
- Rhoad, Richard and others. Geometry for Enjoyment and Challenge. New York : Mc Dougal Littell Company, 1991.
- Serra, Michael. Discovering Geometry An Inductive Approach. California : Key Curriculum Press, 1989.
- Seymour, F. Eugene and Smith, Paul James. Plane Geometry. New York : The Macmillan Company, 1946.
- Tannenbaum, Peter and Arnold, Robert. Excursions in Modern Mathematics. 2nd ed. New Jersey : Prentice-Hall Inc., 1995.
- Triola, Mario F. A Survey of Mathematics. Menlo Park : Cummings Publishing Company Inc., 1975.
- Wells, David. W. Using Geometry. 2nd ed. New York : Laidlaw Brothers Publishers, 1984.
- Wilder, Raymond. The Foundations of Mathematics. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1963.

คำแนะนำการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

คำแนะนำการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป

สื่อการสอนสำเร็จรูปสำหรับชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตนี้เตรียมไว้เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทดลองเป็นแนวทางไปสู่หัวข้อสรุปความรู้ด้านเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

สื่อการสอนสำเร็จรูป มีทั้งหมด 10 ชุด ซึ่งแต่ละชุดได้กำหนดหมายเลขกำกับไว้ดังนี้คือ

1. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 1 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5 เพื่อแสดงสมบัติเกี่ยวกับเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด
2. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 2 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1 เพื่อแสดงสมบัติเกี่ยวกับจุด เส้นตรง และระนาบ
3. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 3 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3 เพื่อแสดงสมบัติเกี่ยวกับเส้นขนาน
4. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 4 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3 เพื่อแสดงสมบัติเกี่ยวกับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
5. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 5 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.5 เพื่อแสดงสมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้าย
6. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 6 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.6 เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อน
7. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 7 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.6 เพื่อแสดงสมบัติของการหมุน
8. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 8 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.6 เพื่อแสดงการสมมาตรของรูปต่าง ๆ
9. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 9 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 เพื่อแสดงสมบัติของมุมในครึ่งวงกลม
10. สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 10 ใช้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2-3.4 เพื่อแสดงสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับวงกลม

สำหรับคำแนะนำในการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปแต่ละชิ้นจะบอกเป็น 3 หัวข้อคือ

1. ส่วนประกอบของสื่อการสอนสำเร็จรูปที่ใช้เป็นส่วนหนึ่งของสื่อการเรียนสำหรับการดำเนินกิจกรรมตามขั้นตอนที่กำหนดไว้
2. จุดประสงค์การใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป เป็นการคาดหวังไว้ว่าเมื่อผู้เรียนได้ทำกิจกรรมจากสื่อการสอนสำเร็จรูปนั้นจบแล้ว ผู้เรียนจะได้ข้อสรุปอย่างไร
3. ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ที่ผู้เรียนต้องปฏิบัติตามขั้นตอนจนเกิดแนวคิดที่จะนำไปสู่ข้อสรุป

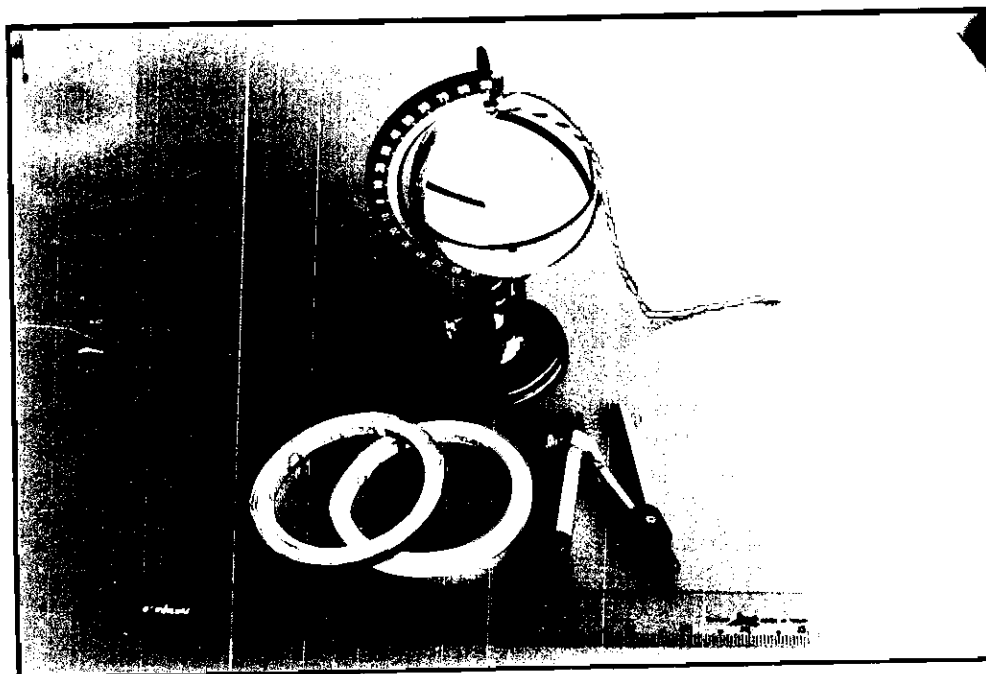
ดังนั้นก่อนเริ่มต้นการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปแต่ละชุด ผู้เรียนควรสำรวจส่วนประกอบของสื่อการสอนสำเร็จรูปนั้นให้ครบ ถ้ามีไม่ครบก็ต้องจัดหาเตรียมให้ครบก่อนแล้วจึงศึกษาจุดประสงค์การใช้สื่อการสอนสำเร็จรูปเพื่อจะได้นำสื่อการสอนสำเร็จรูปมาดำเนินกิจกรรมตรงตามจุดประสงค์ที่ต้องการ จากนั้นจึงทำตามขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมและตอบคำถามนำตามลำดับ จนกระทั่งผู้เรียนเกิดแนวคิดและได้ข้อสรุปที่เป็นสมบัติตามจุดประสงค์การใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป โดยในคำถามนำทุกขั้นตอนจะมีเฉลยที่ผู้เรียนสามารถตรวจสอบได้ ซึ่งจะอยู่ตอนท้ายของคู่มือการใช้สื่อการสอนสำเร็จรูป ผู้เรียนควรดำเนินการและพยายามตอบคำถามให้ครบทุกขั้นตอนสำหรับสื่อการสอนสำเร็จรูปแต่ละชุด จึงค่อยตรวจสอบเฉลยในภายหลังซึ่งในกรณีที่ติดขัดในการตอบคำถามบางขั้นตอน ถ้าจำเป็นจริง ๆ ก็อาจดูเฉลยในขั้นตอนนั้น ๆ ได้ เพื่อเป็นฐานในการนำไปสู่ขั้นตอนต่อไป

สื่อการสอนสำเร็จรูปบางชุด ได้แก่ สื่อการสอนสำเร็จรูปหมายเลข 2, 3, 4, 5, 9 และ 10 ผู้เรียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสอนจริงสำหรับบางหัวข้อของแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 1

ส่วนประกอบ

1. ทรงกลมที่มีรัศมียาวอย่างน้อย 5 ซม. จำนวน 1 ลูก
2. เทปสีซึ่งมีสีต่างกัน จำนวน 2 ม้วน
3. วงเวียน จำนวน 1 อัน
4. สันตรงพลาสติกแบบโค้งได้ จำนวน 1 อัน



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติของเรขาคณิตเชิงวงรีที่ไม่จริงในเรขาคณิตระบบยูคลิด เช่น มุมใน
ครึ่งวงกลมมีขนาดไม่เท่ากับ 90°

ขั้นตอนการดำเนินการกิจกรรม

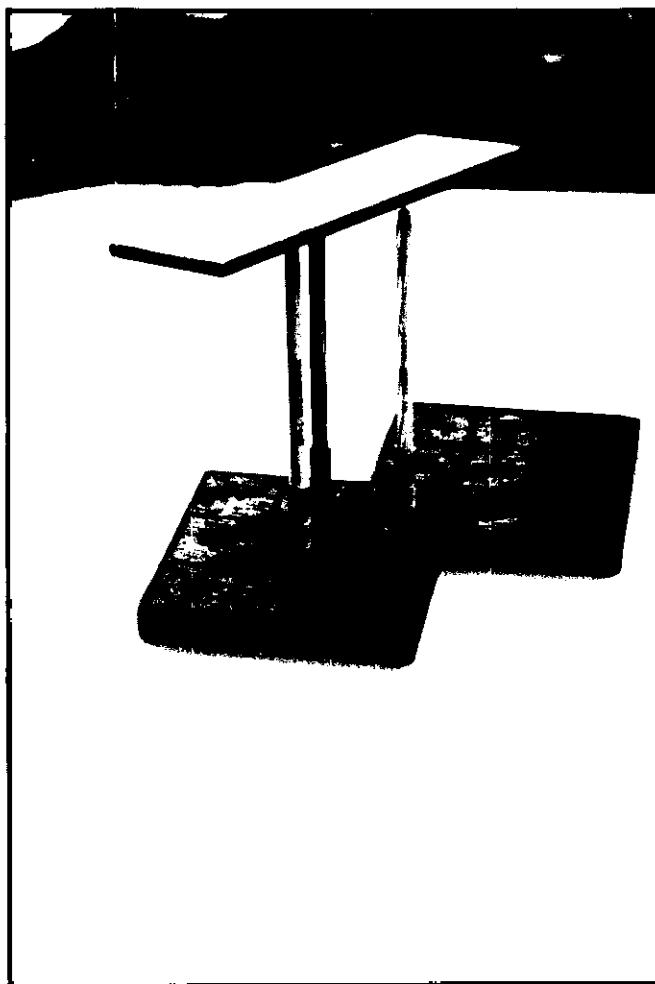
1. ให้ผู้เรียนสร้างครึ่งวงกลมบนทรงกลม โดยใช้วงเวียน
2. สร้างมุมในครึ่งวงกลม โดยใช้สันตรงพลาสติกแบบโค้งได้
กำหนดให้มุมดังกล่าวเป็น $\widehat{FGH}$
3. ให้ผู้เรียนใช้มุมที่ขอบกระดาษซึ่งเป็นมุมฉากเปรียบเทียบกับ $\widehat{FGH}$
4. ผู้เรียนคิดว่า $\widehat{FGH}$ เป็นมุมชนิดใด

.....(1)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 2

ส่วนประกอบ

1. ไม้อัด กว้าง 10 ซม. ยาว 12 ซม. และหนา 1 ซม. ซึ่งเจาะเป็นรูจำนวน 4 ถึง 17 รู จำนวน 1 แผ่น
2. ปากกาถูกลื่นที่ไม่ใช้แล้ว จำนวน 4 ด้าม
3. ไม้อัด กว้าง 5 ซม. ยาว 12 ซม. และหนา 2 มม. จำนวน 1 แผ่น



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติบางอย่างที่เกี่ยวกับจุด เส้นตรง และระนาบ

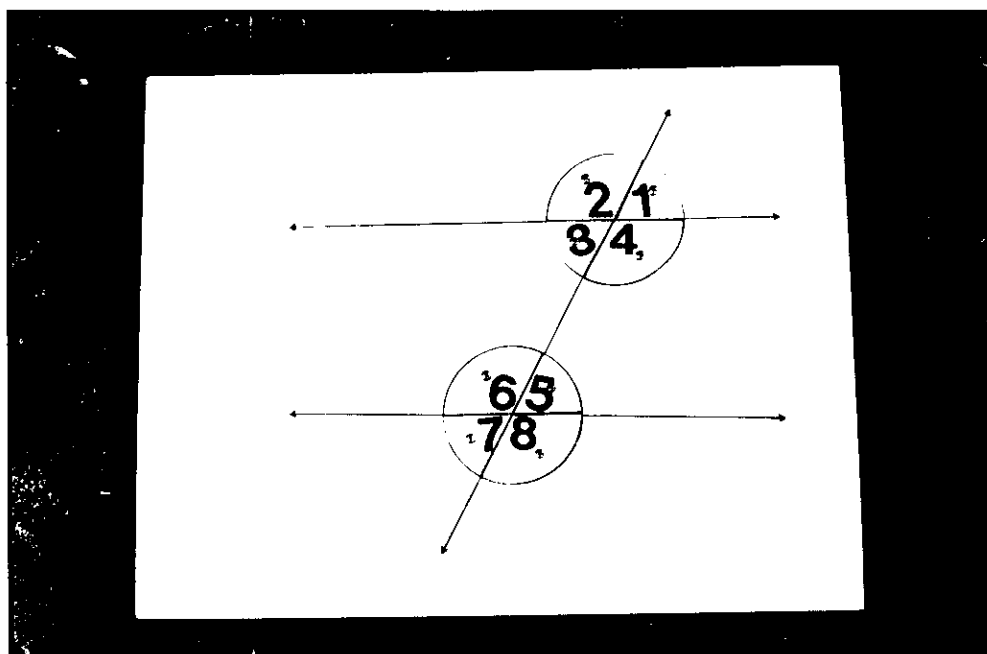
ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเขียนปากกาบนไม้อัดตามช่อง ซึ่งเรียงอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จำนวน 3 คำ
2. จากข้อ 1 นำไม้อัดอีกแผ่นหนึ่งวางบนปลายปากกาที่เขียนอยู่บนไม้อัดแผ่นนั้น
3. ผู้เรียนสามารถวางไม้อัด โดยไม่เอียงหรือหล่นได้หรือไม่
..... (1)
4. ให้ผู้เรียนเขียนปากกาลงในช่องบนไม้อัดซึ่งไม่เรียงอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จำนวน 3 คำ ผู้เรียนสามารถวางไม้อัดอีกแผ่นหนึ่งโดยไม่เอียงหรือหล่นได้หรือไม่
.....(2)
5. ถ้าเขียนปากกาจำนวน 4 คำ ลงในช่องบนไม้อัดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ผู้เรียนคิดว่าสามารถวางไม้อัดอีกแผ่นหนึ่งโดยให้ปลายปากกาแตะไม้อัดนั้นได้เสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด
.....(3)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 3

ส่วนประกอบ

1. ไม้อัด กว้าง 45 ซม. ยาว 60 ซม. และหนา 5 มม. ซึ่งตรงกลางเจาะเป็นวงกลมรัศมียาว 8 ซม.
2. มุมเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง ซึ่งมีความยาวของด้านประกอบมุมยอดเท่ากับ 8 ซม. และหนา 5 มม. จำนวน 8 มุม



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติของเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ได้แก่

1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมเป็น 180°
2. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน
3. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 1 :

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180°

ให้ผู้เรียนดำเนินการตามกิจกรรมสำรวจ 1 : ในหน่วยการเรียนรู้ข้อที่ 2.3

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 2 :

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

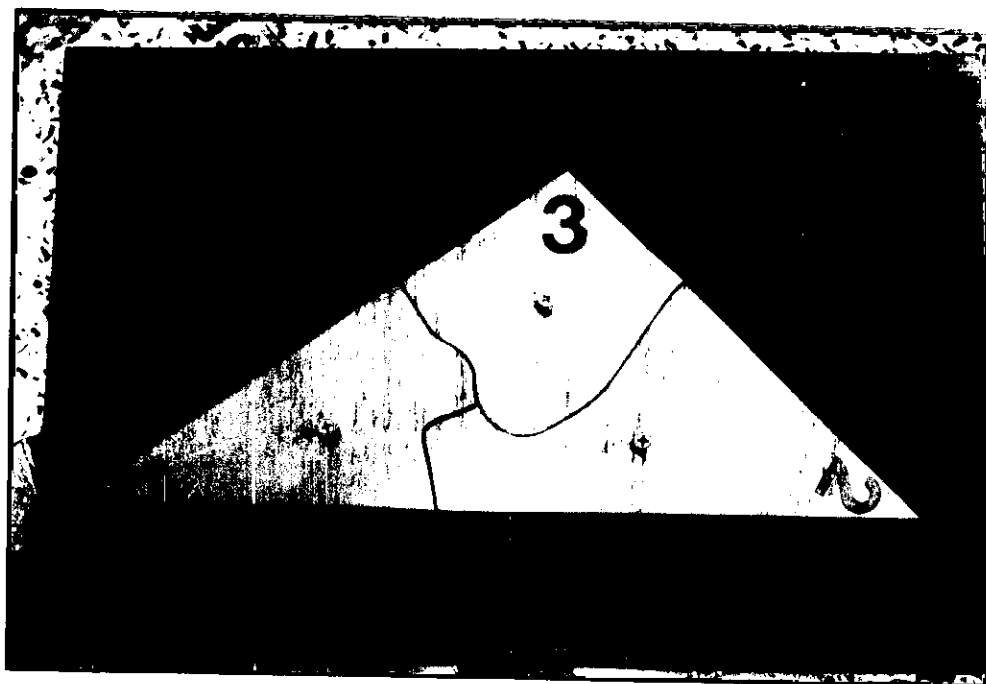
1. ให้ผู้เรียนยก $\hat{4}$ และ $\hat{6}$ ไปวางสับตำแหน่งกัน
2. ผู้เรียนสามารถนำมุมทั้งสองในข้อ 1 ไปวางในตำแหน่งใหม่ได้สนิทพอดีหรือไม่
..... (1)
3. ผู้เรียนคิดว่า $\hat{4}$ และ $\hat{6}$ มีขนาดเท่ากันหรือไม่
..... (2)
4. ให้ผู้เรียนทำกิจกรรมตามข้อ 1 โดยเปลี่ยน $\hat{4}$ และ $\hat{6}$ เป็น $\hat{3}$ และ $\hat{5}$
5. ผู้เรียนสามารถนำมุมทั้งสองในข้อ 4 ไปจัดวางในตำแหน่งใหม่ได้สนิทพอดีหรือไม่
..... (3)

6. ผู้เรียนคิดว่า $\hat{3}$ และ $\hat{5}$ มีขนาดเท่ากันหรือไม่
..... (4)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 4

ส่วนประกอบ

1. ไม้อัด ขนาดกว้าง 30 ซม. ยาว 40 ซม. และหนา 2 มม. ซึ่งเจาะเป็นรูปสามเหลี่ยมขนาดพอสมควร จำนวน 1 แผ่น
2. รูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากับรูปสามเหลี่ยมในข้อ 1 ซึ่งได้แบ่งเป็นสามส่วนโดยแต่ละส่วนมีมุมของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นส่วนประกอบอยู่ด้วย จำนวน 1 รูป
3. ไม้บรรทัด จำนวน 1 อัน



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติที่กล่าวว่า “ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180° ”

ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม

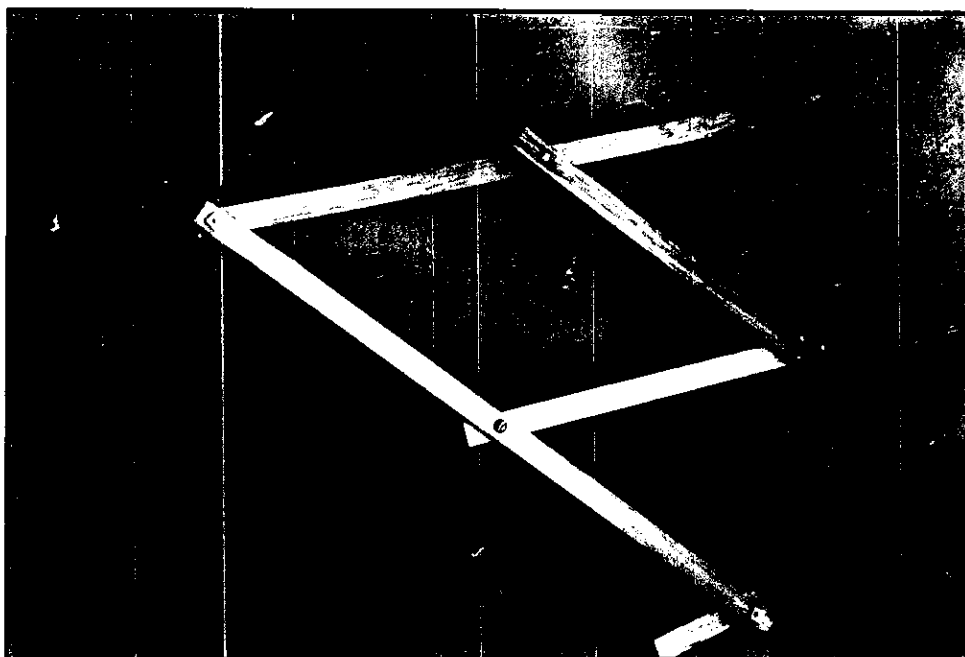
1. ให้ผู้เรียนยกมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมกำหนดให้มุมดังกล่าวเป็น $\hat{1}$, $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ และจัดให้มุมทั้งสามนี้ประชิดกันในแนวขอบของไม้บรรทัด
2. ผู้เรียนสามารถจัด $\hat{1}$, $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ ในแนวขอบของไม้บรรทัดได้หรือไม่
.....(1)
3. ผู้เรียนคิดว่า $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา
.....(2)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 5

ส่วนประกอบ

1. แผนโตกราฟที่ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้
 - 1.1 ไม้อัด กว้าง 1 ซม. ยาว 32 ซม. และหนา 5 มม. จำนวน 2 แผ่น
ซึ่งเจาะรูไว้ แผ่นละ 3 รู
 - 1.2 ไม้อัด กว้าง 1 ซม. ยาว 16 ซม. และหนา 5 ซม. จำนวน 2 แผ่น ซึ่ง
เจาะรูไว้แผ่นละ 2 รู
 - 1.3 ตัวหนีตที่ใช้ยึดไม้อัดดังกล่าวไว้ด้วยกัน จำนวน 5 ตัว
(รายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับแผนโตกราฟมีอยู่ในเอกสารประกอบ
หน่วยการเรียนรู้)

2. ไม้บรรทัด จำนวน 1 อัน
3. โพรแทรกเตอร์ จำนวน 1 อัน
4. ดินสอหรือปากกาถูกเส้น จำนวน 1 ด้าม
5. เทปใส จำนวน 1 ม้วน
6. วงเวียน จำนวน 1 อัน



จุดประสงค์

เพื่อใช้แสดงสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็น $\triangle ABC$ โดยที่ $AB = 2$ หน่วย $BC = 3$ หน่วย และ $AC = 4$ หน่วย ตามลำดับ โดยใช้วงเวียนและไม้บรรทัด

2. ใช้แพนโตกราฟลอก $\triangle ABC$ จะได้รูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งกำหนดเป็น $\triangle DEF$

3. ให้ผู้เรียนวัดขนาดของมุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้

4. ผู้เรียนคิดว่าขนาดของมุมแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองคือ $\hat{A}$ กับ $\hat{D}$, $\hat{B}$ กับ $\hat{E}$ และ $\hat{C}$ กับ $\hat{F}$ เป็นเช่นใด

.....(1)

5. ผู้เรียนคิดว่า $\triangle ABC$ คล้ายกับ $\triangle DEF$ หรือไม่

.....(2)

6. ให้ผู้เรียนวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของ $\triangle DEF$ ดังนี้คือ

$DE = \dots\dots\dots$ หน่วย $EF = \dots\dots\dots$ หน่วย และ $DF = \dots\dots\dots$ หน่วย(3)

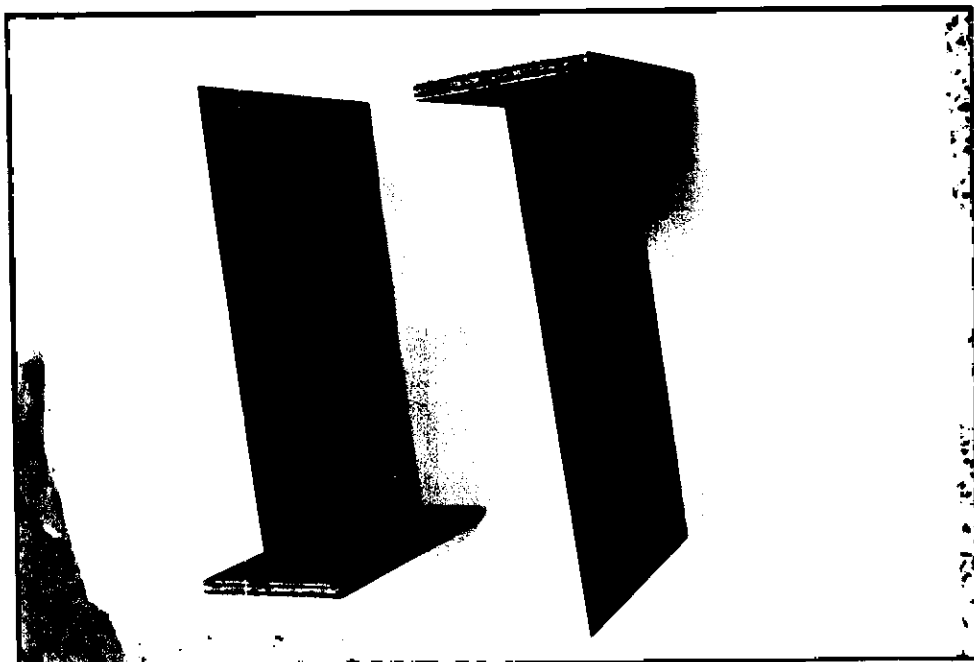
7. ให้ผู้เรียนหาอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ดังนี้คือ

$$\frac{AB}{DE} = \dots\dots\dots \quad \frac{BC}{EF} = \dots\dots\dots \quad \text{และ} \quad \frac{AC}{DF} = \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots(4)$$

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 6

ส่วนประกอบ

1. ไมรา ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้
 - 1.1 ไม้อัด กว้าง 10 ซม. ยาว 20 ซม. และหนา 1 ซม. ซึ่งมีช่องไว้สำหรับเสียบแผ่นพลาสติกใสได้พอดี จำนวน 2 แผ่น
 - 1.2 พลาสติกใส่น้ำเงิน ซึ่งสามารถมองเห็นภาพสะท้อนได้ กว้าง 20 ซม. ยาว 30 ซม. และหนา 1 มม. จำนวน 2 แผ่น
2. ไม้บรรทัด จำนวน 1 อัน
3. โพรแทรกเตอร์ จำนวน 1 อัน
4. วงเวียน จำนวน 1 อัน
5. เทปใส จำนวน 1 ม้วน



จุดประสงค์

1. เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อน
2. เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน
3. เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน

ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 1 : เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อน

ให้ผู้เรียนดำเนินการตามกิจกรรมสำรวจ 1 : ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.6

ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 2 :

เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

1. ลากเส้นตรงสองเส้นให้ขนานกันและอยู่ห่างกัน 7 ซม. กำหนดเป็นเส้นตรง m และ n ตามลำดับ
2. เขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้านหน้าเส้นตรง m และห่างจากเส้นตรง m พอสมควร
3. นำไมราทั้งสองอันไปวางทาบบนเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันนั้น
4. ให้ผู้เรียนมองภาพของ $\triangle ABC$ ที่ปรากฏอยู่ในไมราอันแรก แล้วกำหนดภาพของการสะท้อนของจุด A, B และ C เป็นจุด A', B' และ C' ตามลำดับ
5. ลาก $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$ และ $\overline{AC'}$ ตามลำดับ รูปที่ได้จะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด
.....(1)
6. ให้ผู้เรียนมองภาพของการสะท้อนของ $\triangle ABC'$ ในไมราอันที่สองแล้วกำหนดภาพของการสะท้อนของจุด A', B' และ C' เป็นจุด A'', B'' และ C'' ตามลำดับ
7. ลาก $\overline{AB''}$, $\overline{BC''}$ และ $\overline{AC''}$ รูปที่ได้จะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด
.....(2)
8. ให้ผู้เรียนยกไมราทั้งสองอันออกและวัดความยาวของ $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ และ $\overline{CC''}$ ตามลำดับ ดังนี้คือ
 $AA'' = \dots\dots\dots$ ซม. $BB'' = \dots\dots\dots$ ซม. และ $CC'' = \dots\dots\dots$ ซม.(3)
9. ผู้เรียนคิดว่าถ้าเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันดังกล่าวข้างต้นอยู่ห่างกัน 4 หน่วยแล้วความยาวของ $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ และ $\overline{CC''}$ เท่ากับกี่หน่วย
.....(4)

10. จากข้อ 1 ถึงข้อ 8 ผู้เรียนคิดว่าภาพของการเลื่อนของ $\triangle ABC$ เมื่อ AA'' เป็นขนาดของการเลื่อนและ $\overrightarrow{AA''}$ เป็นทิศทางของการเลื่อนคือ $\triangle A''B''C''$ หรือไม่

.....(5)

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 3 :

เพื่อแสดงสมบัติของการสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน

1. ลากเส้นตรงสองเส้นให้ตัดกันที่จุดจุดหนึ่งกำหนดเป็นจุด O และทำมุมซึ่งกันและกัน เป็นมุมแหลมขนาดเท่ากับ 60°

2. เขียนรูป $\triangle ABC$ ด้านหน้าเส้นตรง m และห่างจากเส้นตรง m พอสสมควร

3. นำไมราทั้งสองอันไปวางทาบบนเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันโดยให้จุดปลายข้างหนึ่งของไมราพทับกันที่จุด O พอดี

4. ให้ผู้เรียนมองภาพของ $\triangle ABC$ ที่ปรากฏอยู่ในไมราอันแรก แล้วกำหนดภาพของการสะท้อนของจุด A, B และ C เป็นจุด A', B' และ C' ตามลำดับ

5. ลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ และ $\overline{A'C'}$ ตามลำดับ รูปที่ได้จะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด

.....(1)

6. ให้ผู้เรียนมองภาพของการสะท้อนของ $\triangle A'B'C'$ ในไมราอันที่สอง แล้วกำหนดภาพของการสะท้อนของจุด A', B' และ C' เป็นจุด A'', B'' และ C'' ตามลำดับ

7. ลาก $\overline{A''B''}$, $\overline{B''C''}$ และ $\overline{A''C''}$ รูปที่ได้จะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด

.....(2)

8. ให้ผู้เรียนยกไมราทั้งสองอันออก และวัดขนาดของ $\widehat{AOA''}$, $\widehat{BOB''}$, และ $\widehat{COC''}$ จะได้ $\widehat{AOA''} = \dots\dots\dots$ องศา $\widehat{BOB''} = \dots\dots\dots$ องศา และ $\widehat{COC''} = \dots\dots\dots$ องศา(3)

9. ให้ผู้เรียนเปรียบเทียบความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่ดังนี้คือ

$\overline{OA}$ กับ $\overline{OA''}$ $\overline{OB}$ กับ $\overline{OB''}$ และ $\overline{OC}$ กับ $\overline{OC''}$ ตามลำดับ

.....(4)

10. ผู้เรียนคิดว่าถ้าเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกันดังกล่าวข้างต้นทำมุมซึ่งกันและกัน เป็นมุมแหลมขนาดเท่ากับ 70 องศา แล้วขนาดของ

$\widehat{AOA''}$, $\widehat{BOB''}$ และ $\widehat{COC''}$ เท่ากับกี่องศา

.....(5)

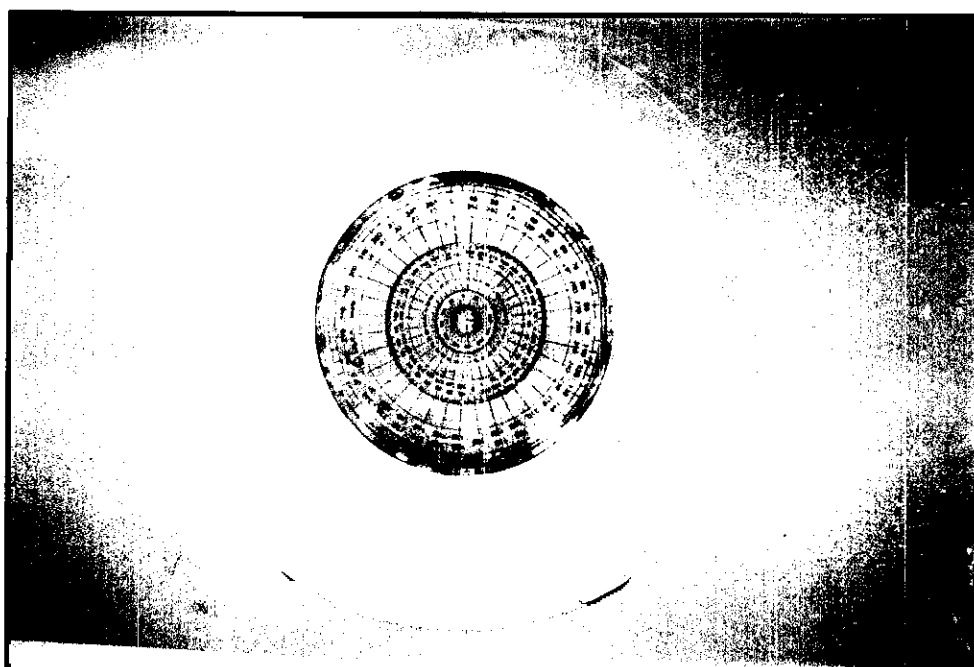
11. จากข้อ 1 ถึงข้อ 9 ผู้เรียนคิดว่าภาพของการหมุนของ $\triangle ABC$ ด้วยมุมของการหมุนที่มีขนาดเท่ากับ $\hat{AOA''}$ รอบจุด O คือ $\triangle A''B''C''$ หรือไม่

.....(6)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 7

ส่วนประกอบ

1. พลาสติกใสรูปวงกลม รัศมียาว 15 ซม. ซึ่งมีขีดวัดขนาดของมุมเป็นองศา อยู่รอบจุดศูนย์กลาง และมีแกนยึดอยู่ที่จุดศูนย์กลางด้วย จำนวน 1 แผ่น
2. พลาสติกใสรูปวงกลม รัศมียาว 15 ซม. ซึ่งเจาะรูไว้ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จำนวน 1 แผ่น
3. ปากกาเขียนแผ่นใสชนิดลบได้ จำนวน 1 ชุด
4. เทปใส จำนวน 1 ม้วน



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติของการหมุน

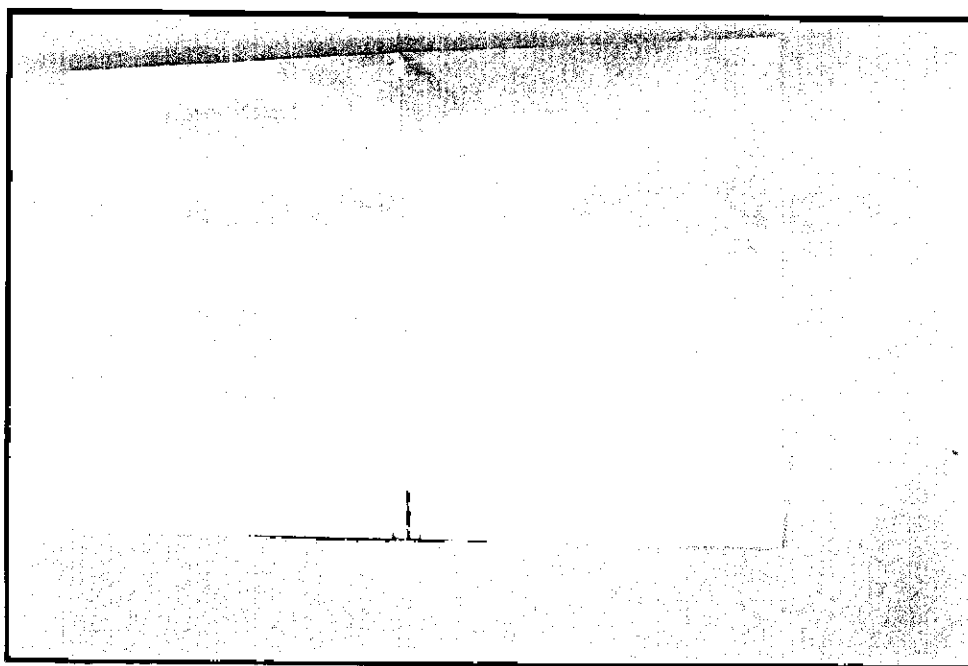
ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม

1. เขียน $\triangle ABC$ บนพลาสติกใสรูปวงกลมซึ่งมีแกนยึดอยู่ที่จุดศูนย์กลาง กำหนดเป็นจุด O
2. ลาก $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$
3. นำพลาสติกใสรูปวงกลมอีกแผ่นหนึ่งไปวางซ้อนทับกับแผ่นแรก โดยให้จุดศูนย์กลางร่วมกัน แล้วลอกจุด A, B และ C กำหนดเป็นจุด A', B' และ C' ตามลำดับ
4. หมุนพลาสติกใสรูปวงกลม ซึ่งมีจุด A', B' และ C' อยู่ตามลำดับ ทวนเข็มนาฬิกา ด้วยมุมขนาดเท่ากับ 60°
5. ลาก $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ และ $\overline{A'C'}$ รูปที่ได้จะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใด
.....(1)
6. ลาก $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ และ $\overline{OC'}$ ตามลำดับ ผู้เรียนคิดว่าความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่คือ OA กับ OA' , OB กับ OB' และ OC กับ OC' เท่ากันหรือไม่
.....(2)
7. ให้ผู้เรียนตรวจสอบดูว่า $\angle AOA'$, $\angle BOB'$ และ $\angle COC'$ แต่ละมุมมีขนาดเท่ากับกี่องศา
.....(3)
8. ให้ผู้เรียนตรวจสอบดูว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle A'B'C'$ เท่ากันทุกประการหรือไม่
.....(4)

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 8

ส่วนประกอบ

1. พลาสติกใส กว้าง 15 ซม. ยาว 20 ซม. และหนา 1 มม. ซึ่งยึดติดกันด้วยเทปใส จำนวน 2 แผ่น
2. วงเวียน จำนวน 1 อัน
3. ไม้บรรทัด จำนวน 1 อัน
4. เทปใส จำนวน 1 ม้วน



จุดประสงค์

เพื่อแสดงการสมมาตรของรูปต่าง ๆ

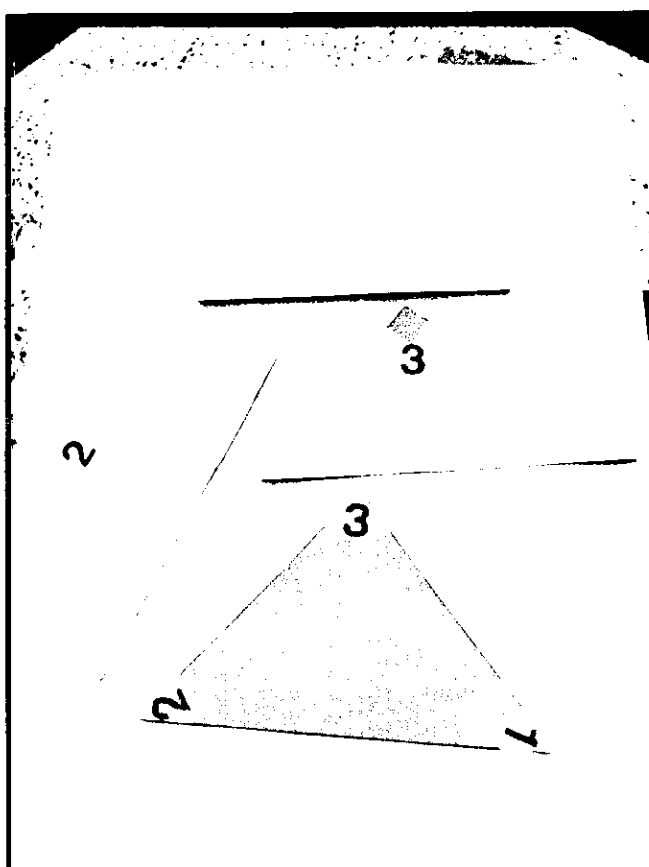
ขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม

1. ให้ผู้เรียนเขียนรูปสี่เหลี่ยม ABCD บนพลาสติกใสแผ่นที่ 1 โดยกำหนดให้เส้นแบ่งพลาสติกใสเป็นด้านด้านหนึ่งของรูปนั้นด้วย
2. ให้ผู้เรียนพับพลาสติกใสแผ่นที่ 2 ไปซ้อนทับพลาสติกใสแผ่นที่ 1 แล้ว ลอกจุด B และ C กำหนดเป็นจุด B' และ C' ตามลำดับ
3. ยกพลาสติกใสทั้งสองที่ทับกันออกจากกัน แล้วลาก AB', BC' และ CD ตามลำดับ รูปที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปที่มีสมมาตร เมื่อเทียบกับเส้นแบ่งครึ่งพลาสติกทั้งสองแผ่นนั้น

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 9

ส่วนประกอบ

1. กระดาษแข็งกว้าง 25 ซม. และยาว 25 ซม. ตัดเป็นรูปครึ่งวงกลมซึ่งรัศมีเท่ากับ 10 ซม. จำนวน 1 แผ่น
2. รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมยอดมุมหนึ่งขนาดเท่ากับ 75° , 90° และ 120° ตามลำดับ จำนวน 3 รูป



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติที่กล่าวว่า “มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° ”

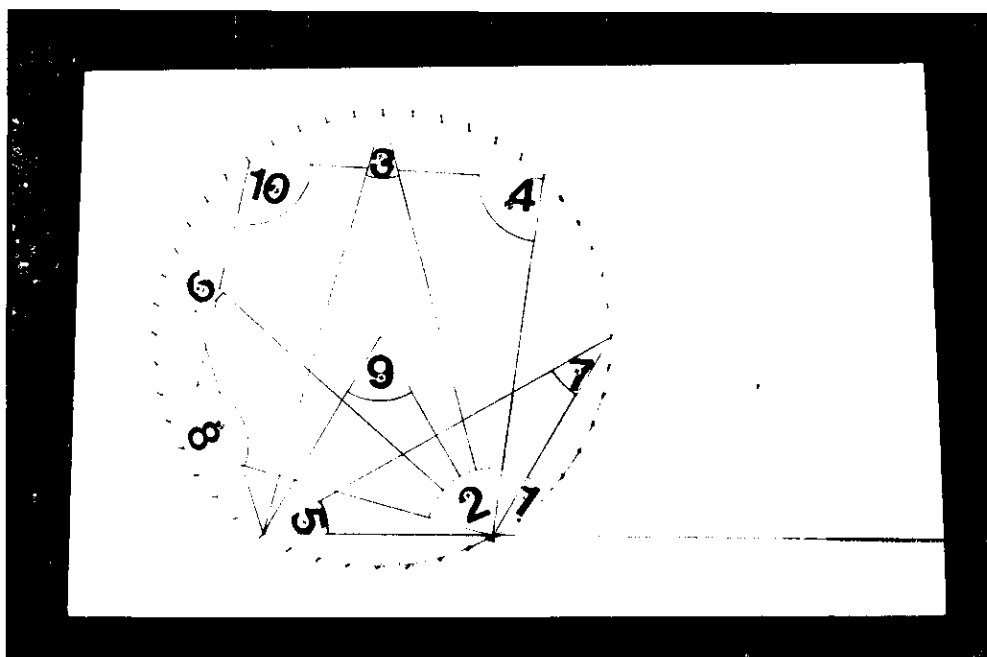
ขั้นตอนการดำเนินการ

ให้ผู้เรียนดำเนินการตามกิจกรรมสำรวจ 2 : ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 หน้า 285

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 10

ส่วนประกอบ

1. ไม้อัด กว้าง 50 ซม. ยาว 42 ซม. และหนา 4 มม. จำนวน 1 แผ่น ซึ่งประกอบด้วย ไม้อัดรูปวงกลม รัศมีเท่ากับ 18 ซม. และหนา 2 มม. จำนวน 1 แผ่น
2. ตะปูขนาดเล็ก ซึ่งตอกเรียงกันบนเส้นรอบวงของวงกลม โดยตอกระยะห่างเท่ากัน มีจำนวนรวมกัน 48 ตัว ส่วนตะปูอีกจำนวน 2 ตัว ตอกที่จุดศูนย์กลาง 1 ตัว และตอกนอกวงกลมอีก 1 ตัว
3. มุมเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งของวงกลม รัศมีเท่ากับ 5 ซม. จำนวน 10 มุม
4. เชือกขาวพอสสมควร จำนวน 1 เส้น ผูกติดไว้กับตะปู
5. มุมซึ่งทำด้วยแผ่นยางเป็นรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งของวงกลม ซึ่งมีขนาดเดียวกับมุมในข้อ 3 จำนวน 10 มุม



จุดประสงค์

เพื่อแสดงสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับวงกลม ได้แก่

1. เส้นสัมผัสของวงกลมสองเส้นที่ลากจากจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมย่อมยาวเท่ากัน
2. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
3. มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
4. รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันย่อมเท่ากับ 180°
5. มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 1 :

เส้นสัมผัสของวงกลมสองเส้นที่ลากจากจุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมย่อมยาวเท่ากัน

1. จากสื่อการสอนสำเร็จรูป ซึ่งมีเชือกผูกไว้ตรงจุดหนึ่งบนวงกลมที่เป็นจุดสัมผัสของวงกลมลากมาคล้องจุดอีกจุดหนึ่งซึ่งอยู่นอกวงกลมแล้วดึงไปยังอีกจุดหนึ่งซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุดแรก และเป็นจุดสัมผัสวงกลมด้วย
2. ให้ผู้เรียนเปรียบเทียบว่าระยะจากจุดภายนอกจุดหนึ่งไปยังจุดสัมผัสทั้งสองจุดนั้นยาวเท่ากันหรือไม่

.....(1)

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 2 :

- มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
- มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
- 1. จากสื่อการสอนสำเร็จรูป ให้ผู้เรียนบอกชื่อมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

.....(1)

2. ให้ผู้เรียนหิบบแผ่นยางซึ่งมีขนาดเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลางมาพับครึ่งมุมดังกล่าว แล้วนำไปแทนที่มุมในโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น ผู้เรียนสามารถนำมุมที่พับนั้นไปแทนที่มุมในโค้งดังกล่าวได้พอดีหรือไม่

.....(2)

3. ให้ผู้เรียนบอกชื่อมุมในส่วนโค้งของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

.....(3)

4. จากข้อ 3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีความสัมพันธ์กันเช่นใด

.....(4)

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 3 :

รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันย่อมเท่ากับ 180°

1. จากสื่อการสอนสำเร็จรูปนี้ ให้ผู้เรียนบอกชื่อมุมที่เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม

.....(1)

2. จากข้อ 1 มุมคู่ใดบ้างที่อยู่ตรงข้ามกัน

.....(2)

3. ให้ผู้เรียนนำมุมที่อยู่ตรงข้ามกันแต่ละคู่ จากข้อ 2 มาจัดให้ประชิดกันในแนวเส้นตรงได้หรือไม่

.....(3)

4. ผู้เรียนคิดว่าผลบวกของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันแต่ละคู่ข้างต้นเท่ากับกี่องศา

.....(4)

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 4 :

มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

1. จากสื่อการสอนสำเร็จรูปให้ผู้เรียนบอกชื่อมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัส มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

..... (1)

2. ให้ผู้เรียนนำมุมในข้อ 1 มาวางสับตำแหน่งกันได้สนิทพอดีหรือไม่

.....(2)

3. ผู้เรียนคิดว่ามุมในข้อ 2 มีขนาดเท่ากันหรือไม่

.....(3)

เฉลย : คำถามนำในขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมของ
สื่อการสอนสำเร็จรูปแต่ละชุด

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 1

- (1) นุ่มป้าน

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 2

- (1) ไม่ได้

- (2) ได้

- (3) ไม่ได้ เพราะว่าจุดสี่จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันอาจไม่มีระนาบผ่าน

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 3

ในขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 2

- (1) ได้สนิทพอดี

- (2) $\hat{4} = \hat{6}$

- (3) ได้สนิทพอดี

- (4) $\hat{3} = \hat{5}$

ในขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม 3

- (1) ได้สนิทพอดี

- (2) $\hat{1} = \hat{5}$

- (3) ได้สนิทพอดี

- (4) $\hat{2} = \hat{6}$

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 4

- (1) ได้

- (2) $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 5

- (1) มีขนาดเท่ากันสามคู่

- (2) คล้ายกัน

- (3) $DE = 4$ หน่วย $EF = 6$ หน่วย และ $DF = 8$ หน่วย

- (4) $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$ $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}$ และ $\frac{AC}{DF} = \frac{1}{2}$

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 6

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 2

- (1) รูปสามเหลี่ยม
- (2) รูปสามเหลี่ยม
- (3) $AA'' = 14$ ซม. $BB'' = 14$ ซม. และ $CC'' = 14$ ซม.
- (4) 8 หน่วย
- (5) ใช่

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 3

- (1) รูปสามเหลี่ยม
- (2) รูปสามเหลี่ยม
- (3) $\angle AOA'' = 120^\circ$ $\angle BOB'' = 120^\circ$ $\angle COC'' = 120^\circ$
- (4) $OA = OA''$ $OB = OB''$ และ $OC = OC''$
- (5) 140°
- (6) ใช่

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 7

- (1) รูปสามเหลี่ยม
- (2) $OA = OA'$ $OB = OB'$ และ $OC = OC'$
- (3) $\angle AOA' = 60^\circ$ $\angle BOB' = 60^\circ$ และ $\angle COC' = 60^\circ$
- (4) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

สื่อการสอนสำเร็จรูป หมายเลข 10

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 1

- (1) ยาวเท่ากัน

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 2

- (1) $\angle 9$; $\angle 3$; $\angle 6$ และ $\angle 7$
- (2) ได้พอดี
- (3) $\angle 3$, $\angle 6$ และ $\angle 7$
- (4) มีขนาดเท่ากัน

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 3

- (1) $\hat{2}$, $\hat{4}$, $\hat{8}$ และ $\hat{10}$
- (2) $\hat{2}$ กับ $\hat{10}$; $\hat{4}$ กับ $\hat{8}$
- (3) ได้
- (4) 180°

ในขั้นตอนการดำเนินงานกิจกรรม 4

- (1) $\hat{1}$ และ $\hat{5}$
- (2) ได้สนิทพอดี
- (3) มีขนาดเท่ากัน

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายโกมล ไผศาล
 เกิดวันที่ 14 สิงหาคม พุทธศักราช 2503
 สถานที่เกิด อำเภอท่าศาลา จังหวัดนครศรีธรรมราช
 สถานที่อยู่ปัจจุบัน 213/26 ซ.ราษฎร์ศรัทธา แขวงบ้านช่างหล่อ เขตบางกอกน้อย
 กรุงเทพมหานคร
 ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน อาจารย์ 1 ระดับ 4
 สถานที่ทำงานปัจจุบัน สถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง อ.จอมบึง จ.ราชบุรี

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2522	เตรียมอุดมศึกษา (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนเบญจมราชูทิศ จ. นครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2526	วท.บ. (ศึกษาศาสตร์) (เอกคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
พ.ศ. 2529	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
พ.ศ. 2539	กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับ
ครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

บทคัดย่อ
ของ
โกมล ไพศาล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา

มีนาคม 2540

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองตามขั้นตอนการพัฒนาชุดการสอน ได้แก่ นักศึกษาอาชีวศึกษา จำนวน 36 คน ในวิชาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนวิชาเรขาคณิตระดับอุดมศึกษา ของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ

ผู้วิจัยได้กำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย 4 ขั้นตอน คือ

1. การกำหนดสมรรถภาพด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับครู เพื่อให้สามารถปฏิบัติการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยผู้วิจัยทำการวิเคราะห์งานวิจัย เนื้อหาสาระจากหนังสือเรียนและตำราที่เกี่ยวข้อง แล้วสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต
2. การสร้างชุดการสอนรายบุคคล โดยผู้วิจัยนำสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับครู ซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างเป็นชุดการสอนที่มีโครงสร้าง 7 ประการ คือ บทนำ จุดประสงค์ความรู้พื้นฐาน การประเมินก่อนเรียน กิจกรรมการเรียนรู้ การประเมินหลังเรียนและสื่อการเรียนรู้ ทำให้ได้ชุดการสอน จำนวน 4 หน่วย ในเรื่อง รากฐานของเรขาคณิต ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด วงกลม และการสร้างในเรขาคณิต
3. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต โดยผู้วิจัย แบ่งออกเป็น 2 แบบทดสอบ ได้แก่ แบบทดสอบประจำหน่วย เป็นแบบทดสอบอิงเกณฑ์ ที่ใช้ทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วย และแบบทดสอบฉบับรวมเป็นแบบทดสอบอิงกลุ่ม ที่ใช้ทดสอบกลุ่มตัวอย่างเพื่อนำคะแนนมาหาประสิทธิภาพของชุดการสอน
4. การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของชุดการสอนรายบุคคล ผู้วิจัยได้นำชุดการสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยในการทดลองสองครั้งแรกเพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่อง ในลักษณะการทดลองเป็นรายบุคคลกับนักศึกษา 1 คน และเป็นกลุ่มย่อยกับนักศึกษา 5 คน พบว่าส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเกี่ยวกับภาษาที่ใช้และการนำเสนอเนื้อหาในบางตอน ในการทดลองครั้งที่สามซึ่งเป็นการตรวจสอบหาประสิทธิภาพของชุดการสอนในลักษณะการทดลองภาคสนามกับนักศึกษา 30 คน พบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75

ดังนั้น จึงได้ชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตที่น่าจะสามารถทำให้ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ตามที่กำหนด

THE DEVELOPMENT OF INDIVIDUALIZED INSTRUCTION PACKAGE
IN GEOMETRY FOR LOWER SECONDARY
MATHEMATICS TEACHERS

AN ABSTRACT
BY
KOMON PAISAL

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Doctor of Education degree in Mathematics Education
at Srinakharinwirot University

March 1997

The objective of this research was to develop the individualized instruction package in geometry for lower secondary mathematics teachers or preservice teachers who lacked of knowledge and had less experience in teaching geometry to meet the efficiency criterion of 75/75.

The experimental group for this research was a group of thirty-six sophomore volunteer student, majoring in Mathematics in the first and second semesters of the academic year 1996. These students came from Rajabhat Institute, Jombung village and had never studied geometry in the collegiate level.

The researcher designed the tools and divided the research into four steps as followed

1. Stating the competency of geometry content which was necessary to the teachers in helping them teach geometry in the lower secondary level effectively.

The researcher did the task analysis and content analysis from texts and related literature, then asking opinions from experts of the content and of teaching geometry.

2. Designing the individualized instruction package.

The researcher took the necessary competency for teachers from the first step to design the instruction package consisting of 7 aspects which were introduction, objectives, prerequisite knowledge, pre-assessment, learning activity, post-assessment, and instructional media. The instruction package consisted of 4 units: foundation of geometry, basic knowledge of Euclidean geometry, circle, and geometric construction.

3. Designing exam paper to evaluate the achievement in learning geometry in content.

The researcher divided the exam paper into two types: particular unit exam paper which was the criterion referenced test, both pre and post testing students in each unit, and total exam paper which was the norm referenced test, testing the experimental group in order to evaluate the effectiveness of the instruction package.

4. Examining the effectiveness of the individualized instruction package.

The researcher used the instruction package with the experimental group. In the first and second times, it was used to examine the mistakes as one-to-one testing with one student and as a small group testing with 5 students. The result showed that there were

still some mistakes in language used and in some parts of presenting. In the third time which was the examining of the instruction package effectiveness as field testing with 30 students, it was found that the instruction package met the efficiency criterion of 75/75.

Therefore, it was assumed that individualized instruction package should be able to help the learners met their achievement in studying as expected.