

510.7

ล 9237

ร 3

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบ
การสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

เสริม จันทวี

ห้องสมุดโรงเรียนวิจิตร
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2530

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

177932

๑๔ พ.ค. 2535

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบ
 การสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

บทคัดย่อ
 ของ
 เสริม จันทวี

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
 เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
 ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
 กุมภาพันธ์ 2530

การศึกษาค้างนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติ
ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบการสอน
ส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้างนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา
2529 ของโรงเรียนกุรุราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภोजอมบึง จังหวัดราชบุรี จำนวน 2 กลุ่ม
กลุ่มละ 30 คน และในแต่ละกลุ่มจะแบ่งเป็นนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางการเรียนสูง
10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน นักเรียนแต่ละระดับความสามารถของกลุ่มทดลอง
จะได้รับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลโดยศึกษาเนื้อหาที่ใช้สำหรับการทดลองด้วยตนเอง
จากเอกสารประกอบบทเรียนที่ผู้วิจัยจัดเตรียมไว้ให้ นักเรียนแต่ละระดับความสามารถของกลุ่ม
ควบคุมจะศึกษาเนื้อหาที่ใช้สำหรับการทดลองจากการสอนแบบการสอนตามปกติ ซึ่งจัดกิจกรรม
การเรียนการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. โดยผู้วิจัย สอนนักเรียนแต่ละระดับด้วยตัวเอง
การวิจัยเชิงทดลองนี้ใช้แบบแผนการวิจัยแบบ Treatments X Levels Designs

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลคือ Two-way Analysis of Variance และ
t-test

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบ
การสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เมื่อ
ทดสอบความแตกต่างเป็นรายคู่พบว่า นักเรียนแต่ละระดับความสามารถของกลุ่มทดลองและ
กลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ
2. ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน
3. เจตคติหลังเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
กับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

A COMPARATIVE STUDY OF THE ACHIEVEMENT AND THE ATTITUDE
TOWARDS MATHEMATICS OF MATHAYOM SUKSA IV STUDENTS
USING PERSONALIZED SYSTEM OF INSTRUCTION AND
IPST APPROACHES

AN ABSTRACT

BY

SERM JANTAWEE

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University

February 1987

The purpose of the study was to compare the mathematics achievement and attitude towards mathematics of Mathayom Sukse IV students using Personalized System of Instruction and IPST approaches.

The samples of this study were Mathayom Sukse IV students during the 1986 academic year of Kururatrangsarit School, Chombung district, Ratchaburi Province. They were divided into two groups, thirty students per group. All students of each group were classified into three levels of mathematics achievement; 10 students of high level of mathematics achievement; 10 students of moderate level; and 10 students of low level. The students of each level of the experimental group would be provided with Personalized System of Instruction by studying the contents from the texts prepared by the researcher. The students of each level of the control group would study the contents which were prepared for this study from IPST approaches. The IPST approaches were presented according to the teacher's guide of The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. The researcher taught the students of each level by himself. Treatments X Levels Designs were used on this experimental study and Two-way analysis of variance and t-test were used to test the hypothesis.

The results of this study were as follows :

1. The mathematics achievement of the students using Personalized system of Instruction and that of students using IPST approaches were significantly different at the .05 level. The test of significance between means of each pair, students of each level

of experimental group and control group were insignificantly different at the .05 level.

2. There was no interaction between instruction and level of mathematics achievement.

3. The attitude towards mathematics of the students using Personalized system of Instruction and IFST approaches were significantly different at the .05 level.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิต และคณะกรรมการสอบโคฟีพิจารณา
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา
การศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

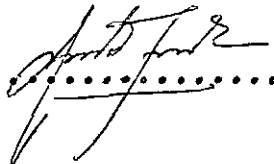
คณะกรรมการที่ปรึกษา


.....ประธาน

.....กรรมการ

คณะกรรมการสอบ


.....ประธาน

.....กรรมการ

.....กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งในด้านการให้คำแนะนำ ข้อคิดเห็น ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องในทุกด้านจาก รองศาสตราจารย์ ดร.โชติ เพชรชื่น และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย ทิสสระ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.โกศล มีคุณ รองศาสตราจารย์ธีรวัฒน์ นาคะบุตร อาจารย์สมปอง สกุลหิมา อาจารย์ไพศาล กมลฉำ อาจารย์อรุณ มณีคำ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำเกี่ยวกับรูปแบบของการวิจัย การสร้างเครื่องมือวิจัยและการแปลเอกสารงานวิจัย รวมทั้ง อาจารย์พูลศักดิ์ เทศนิยม ที่กรุณาช่วยเหลือรับเป็นกรรมการสอบปากเปล่าเพิ่มเติม และช่วยแก้ไขให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ผู้อำนวยการและคณะอาจารย์หมวดคณิตศาสตร์โรงเรียนสุรราษฎร์รังสฤษฎ์ และขอขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2529 ที่ให้ความสะดวกและร่วมมือในการทดลองงานวิจัยเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณ คุณอรพิน จันทวี และเพื่อนร่วมงานทุกท่านที่ได้ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณมารดา ผู้ล่วงลับไปแล้ว บิดา ครูอาจารย์ และผู้อุปการคุณทุกท่านของผู้วิจัย

เสริม จันทวี

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า	8
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	8
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	9
	นิยามศัพท์เฉพาะ	10
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	11
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล	11
	รายละเอียดที่สำคัญของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือ	
	แผนการเรียนการสอนของเคล เลอร์	15
	การเตรียมการสอน	25
	ขั้นตอนการเรียนการสอนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือ	
	แผนการเรียนการสอนของเคล เลอร์	26
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการ	
	เรียนการสอนของเคล เลอร์	29
	เอกสารและบทความเกี่ยวกับเจตคติ	33
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์	35
	สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า	38
3	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	39
	ประชากร	39
	กลุ่มตัวอย่าง	39

วิธีการเลือกกลุ่มตัวอย่าง	39
แบบแผนของการทดลอง	40
วิธีคำนวณการ	41
ขั้นตอนการ เรียนการสอนตามขั้นตอนการสอนแบบระบบการสอน	
ส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่.. .. .	44
ระยะเวลาของการทดลอง	49
เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง	49
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	50
ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือสำหรับการทดลอง	52
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	61
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	67
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	67
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	67
สรุปผลการทดลอง	75
5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	77
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	77
สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า	77
วิธีดำเนินการวิจัย	78
สรุปผลการทดลอง	80
อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า	81
ข้อเสนอแนะ	84
บรรณานุกรม	86

บทที่

หน้า

ภาคผนวก	92
ภาคผนวก ก	93
ภาคผนวก ข	114

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แบบแผนการวิจัย	40
2 การเปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนรู้การสอนของเคลเลอร์เคิม กับการสอนแบบระบบ การสอนส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่	45
3 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วย การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล กับการสอนตามปกติ	68
3.1 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของกลุ่มทดลองกับกลุ่ม ควบคุม ที่มีความสามารถทางการเรียนสูง	69
3.2 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของกลุ่มทดลองกับ กลุ่มควบคุมที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลาง	70
3.3 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของกลุ่มทดลองกับ กลุ่มควบคุมที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำ	71
4 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแสดงปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับ ความสามารถทางการเรียน	72
5 ผลการเปรียบเทียบคะแนนของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง	73
6 ผลการเปรียบเทียบคะแนนของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มควบคุม	73

7	ผลการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของการสอบวัดเจตคติ ต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม	74
8	ผลการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของการสอบวัดเจตคติ ต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม	75

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

- 1 แสดงขั้นตอนการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
หรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ 28
- 2 แสดงขั้นตอนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่ ... 43

บทที่ ๑

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สร้างสรรค์จิตวิญญาณซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิดกระบวนการและเหตุผล คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระเบียบและเป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น (บุฟฟิน พิพิชกุล 2523 : 1) คณิตศาสตร์นับเป็นวิชาที่นักการศึกษามองเห็นความสำคัญจึงจัดให้เป็นวิชาหนึ่งในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย ปัจจุบันหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้รับการพัฒนาปรับปรุงในทุกส่วน โดยกำหนดจุดมุ่งหมายใหม่ให้เหมาะสมควรกับกาลเวลา กำหนดเนื้อหามุ่งให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายและคำนึงถึงความสัมพันธ์อย่างต่อเนื่องของเนื้อหาด้วย มีการเน้นความเข้าใจและการนำไปใช้มากขึ้น การเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนสามารถค้นพบด้วยตนเอง มีการสร้างวัสดุอุปกรณ์ ตารางเรียน กำหนดวิธีการวัดผลและประเมินผลให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายและสามารถที่จะนำไปปรับปรุงการเรียนการสอนได้ (สสวท. 2518 : 4)

หลักสูตรจะกำหนดหลักการ จุดหมายและโครงสร้างไว้อย่างที่เลืิอกอย่างใดก็ตาม ความสำเร็จของการใช้หลักสูตรขึ้นอยู่กับการจัดกระบวนการเรียนการสอนของครู (กระทรวงศึกษาธิการ 2522 : 1) การจัดกระบวนการเรียนการสอนที่เหมาะสมของครูจึงเป็นส่วนประกอบที่สำคัญที่จะช่วยให้ผู้เรียนบรรลุตามจุดประสงค์ของการเรียน และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาที่เรียนด้วย (จันทร์ฉาย เติมียาคาร (จันทร์ฉาย เติมียาคาร 2526 : 16 - 17) ได้กล่าวถึงวิธีการจัดการเรียนการสอนที่ดีไว้ว่า จะต้องทำให้บรรยากาศในการเรียนเป็นไปเพื่อผู้เรียนและผู้สอนได้มีเสรีภาพในการเรียนการสอนอย่างกว้างขวาง ผู้สอนต้องมีความเชื่อมั่นในเอกัตภาพของผู้เรียนทุกคนและมีความเชื่อมั่นว่าผู้เรียนจะต้องเกิดการเรียนรู้จากการพัฒนาความคิด โดยเฉพาะทำให้โอกาสแก่ผู้เรียนได้รับนิชอบการทำงานของตนเองมากกว่าที่ผู้สอนจะเป็นผู้ออกคำสั่งและตักเตือน ผู้สอนควรระลึกอยู่เสมอว่าการเรียนไม่ใช่การสอน

ทวีป อภิลิทธิ์ (ทวีป อภิลิทธิ์ 2526 : 13 - 15) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนที่น่าสนใจไว้สองแบบ คือการใช้สื่อสอนคนและการใช้กิจกรรมสอนคน การใช้สื่อสอนคน คือ การสอนให้คนรู้จักวิธีที่จะไปศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง นั่นคือสอนให้คนรู้จักวิธีเรียนนั่นเอง การใช้กิจกรรมสอนคน (คำว่ากิจกรรม หมายถึงทุกสิ่งทุกอย่างที่ผู้เรียนจะต้องลงมือกระทำแล้วเกิดความรู้ ความเข้าใจ ทาได้คือ จำได้นานไม่ลืมง่าย พร้อมทั้งมีความรู้และทักษะด้วย) เป็นการสอนที่ต้องการให้ผู้เรียนเรียนรู้จากการลงมือทำงาน (กิจกรรม) ด้วยตนเองนั่นเอง

นอกจากนี้ นิพนธ์ สุขปรีดี (นิพนธ์ สุขปรีดี 2525 : 2) ได้กล่าวว่า ผู้เรียนจะเรียนได้ดีที่สุดเมื่อได้เรียนตามความเหมาะสมกับความสามารถของแต่ละบุคคล ได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ ได้มีประสบการณ์แห่งความสำเร็จ ตลอดจนได้รับการเสริมแรงอย่างเหมาะสม และ สุวัฒน์ นิยมคำ (สุวัฒน์ นิยมคำ 2520 : 12) ได้ให้ข้อเสนอแนะว่า วิธีการจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับความแตกต่างของ เด็กแต่ละคนนั้น อาจทำได้หลายวิธีดังต่อไปนี้ คือจัดวิธีสอนให้แตกต่างกันหรือให้เวลาในการเรียนแตกต่างกัน หรือให้ความยากง่ายของ เนื้อหาวิชาแตกต่างกัน

อนึ่งการจัดการเรียนการสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนั้น กระทรวงศึกษาธิการ ได้กำหนดวิธีการจัดการเรียนการสอนไว้ในคู่มือการบริหารการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 ไว้ว่า การจัดการเรียนการสอนควรจัดให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง หมายถึง การที่ผู้เรียนได้ทำงานตามลำพัง โดยอาจจะทำแบบฝึกหัด ศึกษาค้นคว้า ทำงานที่ได้รับมอบหมายจากครู ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ เป็นการให้ผู้เรียนแต่ละคนทำงานแต่ละอย่างตามความต้องการของเขา ซึ่งงานที่ทานั้นอาจจะเหมือนกันหรือแตกต่างกันก็ได้ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ (กระทรวงศึกษาธิการ 2526 : 127)

แต่การจัดการเรียนการสอนในปัจจุบันมิได้สอดคล้องกับวิธีการจัดการเรียนการสอนดังกล่าวมาแล้ว จึงทำให้เกิดปัญหาในการเรียนการสอนดังผลการวิจัยของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ที่ทำการวิจัยเพื่อศึกษาพฤติกรรมการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กลุ่มตัวอย่างได้แก่ ห้องเรียนซึ่งประกอบด้วยครูและนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 57 ห้องเรียน จากโรงเรียนมัธยมทั่วประเทศผลการวิจัยสรุปได้ว่า พฤติกรรม

การเรียนการสอนที่พบมากคือ ครูสอนโดยการบรรยายหรืออธิบาย มีการถามนักเรียนและเขียนสรุปข้อความบนกระดานดำ อุปกรณ์ที่ใช้นั้นได้แก่ กระดานดำและชอล์ก ส่วนนักเรียนจะนั่งฟังคำบรรยายของครูด้วยความสงบเรียบร้อย มีการตอบปัญหาที่ครูถามและทำงานที่ครูมอบหมายให้ในชั้นเรียน กล่าวโดยสรุปแล้วมีการเปลี่ยนหลักสูตรใหม่ คือ ใช้หลักสูตรพุทธศักราช 2521 ซึ่งแนวการสอนตามหลักสูตรใหม่นั้นนักเรียนจะต้องมีบทบาทในการเรียนเป็นอย่างมาก ครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะเท่านั้นแต่ผลจากการวิจัยพบว่า พฤติกรรมการสอนของครูมิได้เปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับแนวการสอนตามหลักสูตรใหม่แต่อย่างใด กล่าวคือ กิจกรรมการสอนยังเป็นการบรรยายและการอธิบายของครูเป็นส่วนใหญ่ ด้านพฤติกรรมการเรียนของนักเรียน นักเรียนมีบทบาทเพียงเป็นผู้รับฟังและคอยรับความรู้ เฉพาะที่ครูเป็นผู้มอบให้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น เมื่อเป็นเช่นนี้แสดงให้เห็นว่าการเรียนการสอนที่เป็นอยู่ไม่เป็นไปตามหลักสูตรใหม่แต่อย่างใด (กรมวิชาการ 2527 : 74)

ด้านผลสำเร็จในการเรียนของนักเรียนนั้นจากการประเมินผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ในปีการศึกษา 2522 ที่ตั้งเกณฑ์ไว้ว่า นักเรียนควรทำข้อสอบได้ร้อยละ 60 ของจำนวนจุดประสงค์ทั้งหมดในแต่ละวิชาพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่บรรลุตามจุดประสงค์ของหลักสูตร โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนที่สามารถทำข้อสอบได้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดมีเพียงร้อยละ 14.26 (กรมวิชาการ 2523 : 60 - 61)

นอกจากนั้นสำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประเมินผลการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเพื่อรวบรวมและตรวจสอบจุดประสงค์การเรียนรู้และสมรรถนะที่คาดหวังจากการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2518 โดยสร้างเครื่องมือในการประเมินผลวิชาต่าง ๆ 6 วิชา ได้แก่ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาไทย ศิลปศึกษา พลานามัย และสังคมศึกษา โดยกำหนดเกณฑ์ตายตัวไว้สองระดับคือ ระดับ 60 % (พอใช้) และระดับ 80 % (ดี) ถ้านักเรียนตอบข้อสอบถูกเฉลี่ยร้อยละ 60 หรือร้อยละ 80 ก็ถือว่าถึงเกณฑ์มาตรฐาน ผลการประเมินพบว่าแทบทุกหมวดวิชาผลที่ได้รับไม่เป็นที่น่าพอใจ โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ได้ประเมินผลสมรรถนะทั้งหมด 7 สมรรถนะ ผลปรากฏว่าทุกสมรรถนะได้ผลไม่เป็นที่น่าพอใจ ทั้งนี้เพราะตามเกณฑ์เฉลี่ยตามที่กำหนดไว้

พบว่าทั้ง 7 สมรรถนะอยู่ต่ำกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 ทั้งสิ้น (สำนักทดสอบทางการศึกษา 2524 : 5 - 13)

ผลของการวิจัยและประเมินผลดังกล่าวเป็นสิ่งบ่งบอกว่าการจัดการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมในปัจจุบันยังมีปัญหาที่จะต้องได้รับการปรับปรุงแก้ไข โดยเฉพาะ ในด้านการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู ครูจะต้องเปลี่ยนพฤติกรรมการสอนจากที่ครู เป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอนมาให้นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนการสอน เปลี่ยน วิธีสอนจากการบรรยายมาเป็นการเรียนที่นักเรียนได้ศึกษาจากกิจกรรมที่ครูจัดให้ เปลี่ยน อุปกรณ์จากการมีเฉพาะชอล์กกับกระดานดำมาใช้อุปกรณ์ที่นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตัว นักเรียนเอง บุคลากรที่มีหน้าที่ในการแก้ปัญหานี้ได้แก่ ผู้จัดการศึกษาและครูผู้สอนแนวทางหนึ่ง ที่น่าจะช่วยลดปัญหาในการจัดการเรียนการสอนได้ คือการคิดค้นหาวิธีสอนและกิจกรรมการเรียน การสอนที่สนองต่อความต้องการของผู้เรียนในหลาย ๆ ด้าน ทั้งที่ จันทร์ฉาย เติมียาคาร (จันทร์ฉาย เติมียาคาร 2526 : 16 - 17) ได้กล่าวถึงวัตถุประสงค์ของการจัดการเรียน การสอนที่ดีไว้ว่า ต้องให้ผู้เรียนมีความมั่นใจในตนเอง ผู้เรียนได้เรียนตามความสามารถ มีความคิดอิสระ มีความมุ่งหมายในการเรียน มีวินัยในตนเองและมีเจตคติที่ดีต่อการเรียน

เนื่องจากผู้เรียนมีลักษณะแตกต่างกันทั้งในด้านสติปัญญา อารมณ์ จิตใจ และลักษณะนิสัย จึงไม่มีวิธีการสอนใดที่ดีที่สุดสำหรับผู้เรียนทุกคน ผู้สอนจะต้องเลือกวิธีการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหา ระยะเวลา และข้อสำคัญทำอย่างไรจึงจะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ มีการพัฒนาความคิด (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 62) และเพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนทุกคนได้รับการเรียนรู้เต็มตามความสามารถของผู้เรียนเอง ผู้สอนควรยึดแนวทางในการจัดการเรียน การสอนดัง สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ 2523 : 1) ได้กล่าวไว้ดังนี้

1. นักเรียนทุกคนสามารถเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ตามที่สอนสิ่งกันในโรงเรียนได้อย่างเท่าเทียมกันถ้าจัดการเรียนการสอนได้เหมาะสม

2. นักเรียนทุกคนสามารถเรียนได้ผลสัมฤทธิ์เท่ากันก็ต่อเมื่อนักเรียนประเภทโง่ช้า ได้รับเวลาในการเรียนอย่างเพียงพอและได้รับการช่วยเหลือในเรื่องการเรียนอย่างดี จากครูผู้สอนและเพื่อนนักเรียนที่มีพื้นฐานทางการศึกษามาอย่างดี

ดังนั้นการค้นหาวีธีการสอนที่ดีควรควบคู่ไปกับการค้นหาวีธีการที่จะทำให้การจัด
การเรียนการสอนกระทำได้อย่างเหมาะสมกับผู้เรียนแต่ละคน ที่มีความแตกต่างกันในทุก ๆ ด้าน
 ในปัจจุบันมีวิธีสอนหลายวิธีที่ถูกคิดค้นขึ้นเพื่อนำมาใช้สอนเพื่อสนองตอบความแตกต่างระหว่าง
บุคคล การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล (Personalized System of Instruction)
 หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ (Keller Plan) เป็น
 การจัดการเรียนการสอนให้ผู้เรียนได้เรียนด้วยตนเองและเป็นกลวิธีในการเรียนเพื่อความรู้
 ที่ได้นำเอาหลักการเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) และทฤษฎีการเสริมแรง
 (Reinforcement Theory) มาใช้เป็นหลักในการสอนซึ่ง เฟรด เอส เคลเลอร์ (Fred
 S. Keller) คิดค้นขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1963 และได้อธิบายลักษณะสำคัญของการสอนแบบระบบ
 การสอนส่วนบุคคลไว้ดังนี้ (Keller. 1968 : 18)

1. ลักษณะที่ผู้เรียนสามารถก้าวไปตามกำลังความสามารถ ซึ่งยอมให้ผู้เรียน
เรียนจบบทเรียนได้ด้วยความเร็วที่เป็นอัตราส่วนระหว่างความสามารถของผู้เรียน และความ
สามารถอื่น ๆ ที่มีต่อเวลาของตน
2. ความต้องการสำหรับความก้าวหน้าเป็นไปในลักษณะที่ต้องการความสมบูรณ์
ในหน่วย ซึ่งยอมให้ผู้เรียนก้าวไปยังเนื้อหาใหม่หลังจากได้แสดงให้เห็นถึงความรู้ในเนื้อหา
ที่มาก่อน
3. การใช้การบรรยายและการสาธิตเป็นเครื่องมือในการกระตุ้นให้ผู้เรียนมีความ
สนใจที่จะเรียนรู้นานกว่าเป็นการถ่ายทอดความรู้ให้แก่ผู้เรียน
4. มีการเน้นหลักเกี่ยวกับสื่อการสอนที่เป็นลายลักษณ์อักษรที่เขียนขึ้นในการสื่อสาร
ระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน
5. การใช้ผู้ควบคุมชั้นดูแลผู้เรียน การให้คะแนนทันทีหลังเสร็จสิ้นการสอน มีการ
ทดสอบซ้ำถ้าผลการสอบไม่ผ่านเกณฑ์ และเน้นการซักถามเป็นรายบุคคลระหว่างผู้เรียนกับ
ผู้ควบคุมชั้น

เมื่อพิจารณาลักษณะทั้ง 5 ประการของระบบการสอนส่วนบุคคล จะเห็นว่าการสอนแบบนี้ควรจะนำมาใช้กับการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เพราะการสอนแบบนี้คำนึงถึงหลักการ เรียนรู้อย่างนี้

1. ผู้เรียนแต่ละคนย่อมแตกต่างกัน มีความรู้ ความสามารถในการเรียนไม่เท่ากัน ฉะนั้นผู้เรียนแต่ละคนจึงไม่ควรที่จะเรียนไปพร้อม ๆ กันถ้าผู้สอนคณิตศาสตร์ได้มีการวางแผนการสอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคน โดยจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและมอบหมายงานที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียนจะช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนาการได้สูงสุดตามศักยภาพของผู้เรียนเองซึ่งเป็นการเรียนการสอนที่คำนึงถึงผู้เรียนเป็นหลัก

2. ใช้หลักจิตวิทยาในเรื่องการให้รางวัลตอบสนอง ผู้เรียนจะเกิดทราบผลการเรียนของตนทันทีจากผู้ควบคุมชั้นหรือผู้สอน เมื่อผู้เรียนผ่านข้อทดสอบแต่ละหน่วยการเรียนก็จะได้รับคำชมเชยและมีสิทธิ์ที่จะเรียนหน่วยต่อไป แต่ถ้าผู้เรียนไม่สามารถผ่านหน่วยการเรียนใดก็จะไม่ได้รับการลงโทษและไม่เรียกว่าเป็นการสอบตกเพียงแต่จะต้องกลับไปศึกษาหน่วยการเรียนนั้นใหม่

3. เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะแตกต่างจากวิชาอื่น คือ เนื้อหาวิชาจะเริ่มต้นจากง่ายไปหายากและแต่ละหัวข้อจะมีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกัน ฉะนั้นการแบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วยย่อย ๆ จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้และทำความเข้าใจเรื่องที่ยากขึ้น เพราะแต่ละหน่วยจะเป็นไปตามลำดับขั้นของเนื้อหาวิชา ซึ่งเป็นเหตุผลซึ่งกันและกัน

4. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมซับซ้อน ดังนั้นคู่มือแนะนำการเรียนจะเป็นประโยชน์มากในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพราะจะช่วยให้ผู้เรียนได้รู้ว่าควรจะเริ่มต้นเรียนอย่างไร ใช้วิธีการเรียนรู้แบบใด ควรจะศึกษาค้นคว้าอย่างไร ผลการเรียนที่ต้องการคืออะไร การที่ผู้เรียนรู้วาทนเองอยู่ตรงไหน มีจุดมุ่งหมายปลายทางที่ใด และจะไปยังจุดหมายนั้นได้อย่างไร จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

5. การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจะต้องเอาใจใส่อย่างสม่ำเสมอการเรียนจึงจะประสบผลสำเร็จ ฉะนั้นการทดสอบเมื่อจบหน่วยการเรียนแต่ละหน่วยการเรียน จะทำให้ผู้เรียนกระตือรือร้นสนใจเรียนตลอดเวลา ซึ่งสอดคล้องกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์

6. ผู้ควบคุมชั้นมีบทบาทสำคัญยิ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากเนื้อหาวิชาซับซ้อนและเข้าใจยาก ผู้เรียนมักจะเกิดปัญหาค้นการเรียน ผู้ควบคุมชั้นจะช่วยแก้ไข ปัญหาและตอบข้อสงสัยของผู้เรียนแต่ละคนได้ทันที ทำให้ผู้เรียนประหยัดเวลา และสามารถทำความเข้าใจกับบทเรียนส่วนอื่น ๆ ต่อไปได้ ซึ่งการซักถามเป็นรายบุคคลจะทำได้ไม่ทั่วถึง ในระบบการเรียนการสอนตามปกติ

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลมีวิธีการจัดการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในปัจจุบัน ซึ่งมุ่งเน้นการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้เรียนด้วยตนเองดังกล่าวแล้ว การสอนแบบนี้จะช่วยลดปัญหาในการจัดการเรียนการสอนและเป็นการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนบรรลุจุดประสงค์ที่วางไว้ พร้อมทั้งเป็นการสร้างเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียนด้วย ซึ่งจากผลการวิจัยในต่างประเทศเช่นของ คูลิค คูลิค และคาไมเคิล (Kulik, Kulik and Carmichael. 1974 : 379 - 383) ได้รวบรวมผลการวิจัยเปรียบเทียบการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนแบบบรรยายในรายวิชาต่าง ๆ ในระดับอุดมศึกษา สรุปผลได้ว่าการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้เนื้อหาบางวิชาได้มากกว่าการสอนแบบบรรยาย แต่อย่างไรก็ตามผลการวิจัยดังกล่าวยังไม่ได้ทดสอบในวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับการวิจัยในประเทศไทยนั้น กิตติ พัฒนตระกูลสุข (กิตติ พัฒนตระกูลสุข 2524 : 105) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ตามแนวความคิดของบลูม และตามแนวคิดของเคลเลอร์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัยของการใช้กลวิธีการเรียนรู้ของบลูมสูงกว่าการใช้แผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ นอกจากนี้ สุรพล วัฒนวิทย์กิจ (สุรพล วัฒนวิทย์กิจ 2526 : เอกสารอัครสำเนา) ได้กล่าวว่า การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่น้อยที่สุด แต่ได้รับการพิสูจน์ว่ามีประสิทธิภาพ ทำให้เกิดการเรียนรู้

ปัญหาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด สรุปได้ว่าวิธีการหนึ่งที่จะช่วยลดปัญหาของการจัดการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายได้ก็คือ การจัดหารูปแบบของการสอนที่เหมาะสม ซึ่งเป็นรูปแบบการสอนที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนตามความสามารถ

ได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง มีขั้นตอนการประเมินผลที่รัดกุม การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล เป็นการสอนรูปแบบหนึ่งที่มีกระบวนการจัดการเรียนการสอนสอดคล้องกับหลักการดังกล่าว และได้รับการยืนยันแล้วว่าเป็นการสอนที่มีประสิทธิภาพสามารถใช้ได้กับการสอนในระดับอุดมศึกษา แต่ยังไม่มีการยืนยันผลของการสอนแบบนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย การวิจัยครั้งนี้จึงต้องการที่จะตรวจสอบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติมีความแตกต่างกันหรือไม่ เพื่อจะได้เป็นแนวทางของการจัดการเรียนการสอนที่จะได้เลือกใช้รูปแบบของการสอนที่เหมาะสมต่อไป

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ
2. เพื่อศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนทั้งสองแบบ กับระดับความสามารถทางการเรียนที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
3. เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อจะได้เลือกใช้การสอนให้เหมาะสมกับนักเรียนที่มีวิธีการเรียนรู้พื้นฐานความรู้และระดับความสามารถที่แตกต่างกัน
2. เป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนและผู้สนใจในการที่จะหาวิธีการส่งเสริมหรือปลูกฝังเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลไปใช้ทดลองสอนในระดับชั้นอื่นหรือนำไปวิจัยต่อไป

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีขอบเขตดังนี้

1. ประชากร

ประชากรที่ต้องการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทย์ - คณิต ของโรงเรียนคุรุราษฎร์รังสฤษดิ์ อําเภोजอมบึง จังหวัดราชบุรี ปีการศึกษา 2529 มีนักเรียน 4 ห้องเรียน จำนวน 180 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้กระทำกับกลุ่มตัวอย่างซึ่งได้มาโดยสุ่มห้องเรียนมา 2 ห้องเรียน จากห้องเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน นำนักเรียนทั้ง 2 ห้องมารวมกันแล้วแบ่งตามระดับความสามารถทางการเรียนเป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ แล้วสุ่มจากนักเรียนแต่ละระดับความสามารถกลุ่มละ 20 คน จากนั้นสุ่มนักเรียนในแต่ละระดับความสามารถเข้าสู่กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละเท่า ๆ กัน จะได้กลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลองที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน กลุ่มควบคุมมีนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน

3. ตัวแปรที่จะศึกษามีดังนี้

3.1 ตัวแปรอิสระมี 2 ตัวแปร คือ

3.1.1 การสอน 2 แบบ คือ

3.1.1.1 การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

3.1.1.2 การสอนตามปกติตามคู่มือครูของ สสวท.

3.1.2 ระดับความสามารถทางการเรียนแบ่งเป็น 3 กลุ่ม

3.1.2.1 กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนสูง

3.1.2.2 กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลาง

3.1.2.3 กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำ

3.2 ตัวแปรตาม มี 2 ตัวแปร คือ

3.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

3.2.2 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หมายถึง การสอนที่มุ่งจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ให้ผู้เรียนได้เรียนด้วยตนเอง ตามเนื้อหาที่ได้วิเคราะห์แบ่งแยกเป็นหน่วยย่อย ๆ ให้เหมาะสมกับการเรียนรู้ในเวลาที่กำหนดพร้อมทั้งมีคู่มือสำหรับการเรียนรู้ในหน่วยนั้น ๆ และมีความคุ้นเคยเป็นผู้ช่วยผู้เรียนตลอดจนการประเมินผลการเรียนให้เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด

การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนที่ผู้วิจัยสอนเองโดยใช้เนื้อหาและกิจกรรมตามแนวในคู่มือของ สสวท.

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ ความเข้าใจ และความสามารถในการประยุกต์หลักการทางคณิตศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหา โดยวัดได้จากความสามารถในการตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ระดับความสามารถทางการเรียน หมายถึง ระดับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มสูง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มต่ำ โดยอาศัยระดับคะแนนจากผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2529 ที่ทางโรงเรียนได้วัดผลไว้แล้ว โดยกำหนดดังนี้

1. กลุ่มสูง หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนในระดับคะแนน 3 หรือ 4
2. กลุ่มปานกลาง หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนในระดับคะแนน 2
3. กลุ่มต่ำ หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนในระดับคะแนน 1 หรือ 0

เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ท่าที ความคิดเห็น ความรู้สึกของบุคคลที่มีต่อเนื้อหาและกิจกรรมในวิชาคณิตศาสตร์ ในการศึกษาครั้งนี้มุ่งศึกษาเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังจากที่กลุ่มตัวอย่างได้เรียนจบเนื้อหาที่ทดลองแล้ว ซึ่งวัดออกมาเป็นคะแนนได้โดยใช้แบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาและรวบรวมเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรต่าง ๆ ที่ศึกษาและครอบคลุมถึงจุดมุ่งหมายของการวิจัย ซึ่งประกอบด้วยลักษณะสำคัญแบ่งเป็นหัวข้อย่อยได้ดังนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
3. เอกสารและบทความที่เกี่ยวข้องกับเจตคติ
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลเป็นการสอนที่มุ่งให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง เนื้อหาของรายวิชาได้ถูกแบ่งแยกไปเป็นหน่วยเล็ก ๆ จำนวนมาก และมีคู่มือซึ่งแจกแจงรายละเอียดของเนื้อหาได้ถูกจัดพิมพ์ไว้ควบคู่กับตำราเรียนที่จำเป็น มีผู้ควบคุมชั้น (Proctor) เป็นผู้ช่วยผู้เรียนในกระบวนการเรียนรู้ ผู้เรียนจะมีอิสระเสรีภาพในการเรียนมากกว่าการเรียนในชั้นเรียนตามปกติ และผู้เรียนจะต้องมีความรับผิดชอบในกระบวนการเรียนของตนเอง เนื่องจากไม่มีผู้สอน ผู้สอนเพียงแต่จะทำหน้าที่เขียนบทเรียนที่เป็นแนวชี้นำ (Controlled Lesson) ให้ผู้เรียนมีวิธีการเรียนที่ได้ผลเป็นขั้นตอน ผู้เรียนจึงต้องเรียนแต่ละบทจะเร็วหรือช้าด้วยตนเองเรียกว่าเรียนด้วยความสามารถของตนเอง โดยมีผู้สอนชี้นำอยู่ในบทเรียนที่มีโครงสร้างเป็นระบบอยู่แล้ว ในระบบที่ว่านี้ผู้เรียนจะสามารถเลือกสื่อการสอนสำหรับตัวเอง วิธีเรียน ตลอดจนกำหนดเวลาที่จะทำการประเมินผลตัวเองได้ เพราะผู้เรียนจะได้รับการประเมินผลทันทีที่เขาารู้สึกว่าเขาพร้อม (พัชรี พลาวงศ์ 2526 : 84)

สติช (Stice. 1979 : 175) ได้กล่าวถึงสิ่งกับการเรียนรู้ (Learning Concept) ที่เป็นพื้นฐานของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนรู้การสอนของเคลเลอร์ไว้ดังนี้

1. บุคคลย่อมแตกต่างกันในด้านความถนัดสำหรับการเรียนรู้วิชาการต่าง ๆ กัน
2. บุคคลต้องการที่จะเรียนรู้สิ่งที่ตนคาดหวังไว้
3. ผู้เรียนยังต้องการที่จะเรียนรู้กระบวนการที่จะตามมาในการเรียนรู้เนื้อหาที่กำหนดให้
4. ผู้เรียนใช้ยุทธวิธีในการแสวงหาความรู้แตกต่างกัน
5. การเรียนรู้จะเกิดขึ้นดีที่สุด เมื่อแบ่งเนื้อหาออกเป็นส่วนย่อย
6. การเรียนรู้ดำเนินไปตามลำดับก่อนหลังของขั้นตอนหลักแห่งเหตุผลมากหรือน้อย และความคิดเห็นจะดำเนินจากสิ่งที่ย้ายไปสู่สิ่งที่สลับซับซ้อนมากขึ้น
7. ผู้เรียนต้องการเวลาในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ แตกต่างกันไปตามความถนัดสำหรับเนื้อหาที่เรียนและวิธีการเรียนรู้

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลยึดหลักการของสิ่งกับการเรียนรู้ดังกล่าวเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอน ซึ่ง เฟรด เอส เคลเลอร์ (Fred S. Keller) และคณะได้เริ่มคิดค้นการสอนแบบนี้เมื่อราวเดือนมีนาคม 1963 และทดลองใช้สอนจิตวิทยาในมหาวิทยาลัยโคลัมเบีย เคลเลอร์ พบว่าการสอนแบบนี้ช่วยให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จมากกว่าการสอนแบบบรรยาย จากนั้นเคลเลอร์เริ่มเผยแพร่การสอนแบบนี้จนกระทั่งเป็นที่รู้จักในวงการศึกษาของอเมริกาเมื่อปี ค.ศ. 1968 (สุนันท์ ภัทมาคม 2519 : 92) ทอมสัน (Keller citing Thomson. 1980 : 362) ได้อธิบายถึงการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลไว้ว่าเป็นการสอนที่ต้องประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้

1. หน่วยการเรียนรู้ที่ต้องการให้เรียนเพื่อรู้
2. การศึกษาอย่างอิสระด้วยตนเอง
3. สื่อการสอนที่เป็นลายลักษณ์อักษรโดยให้ผู้เรียน เขียน ทบทวน และศึกษาจากวัสดุอุปกรณ์ที่ผู้สอนเตรียมให้

4. ผู้ควบคุมชั้น (Procter) ทำหน้าที่ตรวจให้คะแนนในการสอนบันทึกผลการเรียน และให้คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา

นอกจากนั้น สติซ (Stice. 1979 : 177) ได้อธิบายถึงลักษณะการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลไว้ว่า เป็นการสอนที่ต้องการให้ครูวิเคราะห์สิ่งที่คุณเรียนต้องเรียนในรายวิชาหนึ่งอย่างละเอียดถี่ถ้วน เมื่อครูได้กำหนดจุดประสงค์ปลายทางและจุดประสงค์ข้อเนื่องแล้วครูจะต้องแบ่งเนื้อหาของรายวิชาออกเป็นหน่วย แต่ละหน่วยจะประกอบด้วยงานที่มอบหมายให้อ่านแยกคำถามที่เกี่ยวข้องหนังสืออ้างอิงให้อ่านเพิ่มเติม เนื้อหาที่เป็นคำแนะนำหรือเป็นคำอธิบายที่จำเป็น โดยปกติแล้วแต่ละหน่วยจะใช้เวลาในการศึกษาให้สำเร็จในเวลาประมาณ 1 สัปดาห์ ถ้าหากผู้เรียนพร้อมที่จะศึกษาผู้เรียนก็จะศึกษาแต่ละหน่วยของบทเรียนได้ตามลำดับในอัตราความเร็วและสถานที่ที่ตนเองพอใจ เมื่อผู้เรียนรู้สึกว่าคุณมีความรอบรู้ (มีความรู้ความเข้าใจอย่างแจ่มแจ้ง) ในเนื้อหาที่กำหนดให้แล้ว ผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น ก็จะทำให้เข้าทดสอบความพร้อม (Readiness test) เพื่อดูว่าผู้เรียนมีความพร้อมที่จะศึกษาหน่วยต่อไปได้หรือไม่ ในการทดสอบความพร้อมนั้นผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบให้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด (ปกติใช้เกณฑ์ 100 %) ถ้าหากผู้เรียนไม่สามารถทำแบบทดสอบได้เสร็จสมบูรณ์ผู้เรียนจะได้รับแจ้งให้ศึกษาหน่วยนั้นโดยตลอดอีกครั้งหนึ่งแล้วกลับมาทดสอบใหม่ โดยผู้เรียนจะเข้าทดสอบความพร้อมสักก็ครั้งก็ตามเขาก็ไม่เคยถูกลงโทษหรือได้รับคำติเตียน การสอนแบบนี้ต้องการเพียงให้ผู้เรียนได้แสดงถึงความเชี่ยวชาญเท่านั้น เมื่อผู้เรียนได้แสดงให้เห็นถึงความรอบรู้ในหน่วยแรกก็ได้รับคู่มือในการศึกษาสำหรับหน่วยต่อไปผู้เรียนจะผ่านตลอดรายวิชาได้ตามความสามารถของตน

เคลเลอร์และเชอร์แมน (Keller and Sherman. 1974 : 24) ได้กล่าวถึงลักษณะเด่นของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ไว้ 5 ประการดังนี้

1. เป็นการเรียนเพื่อรู้
2. เป็นการศึกษาด้วยตนเอง
3. เน้นสื่อความหมายเป็นลายลักษณ์อักษร

4. มีครูผู้ควบคุมชั้น

5. ใช้การบรรยายเพื่อจูงใจให้ผู้เรียนสนใจในการเรียนมากกว่าให้รายละเอียดของเนื้อหาวิชา

สรุป วัฒนวิทย์กิจ (สรุป วัฒนวิทย์กิจ 2526 : เอกสารอักษราเนา) ได้สรุปถึงเหตุผลที่นักวิจัยได้ประสบผลสำเร็จในการให้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ ไว้ดังนี้

1. การปฏิบัติการขั้นสุดท้ายที่จำเป็นในการพิจารณาว่าเกิดการรอบรู้ในแต่ละชั้นนั้นสามารถระบุในแง่วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมได้
2. เนื้อหาที่ใช้เรียนถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ให้มากพอที่จะทำให้เกิดการรอบรู้ได้อย่างสมบูรณ์ มีพื้นฐานความรู้ที่มั่นคง
3. ให้แรงเสริมได้บ่อยและเป็นไปในทันทีทันใด
4. สามารถให้ความเอาใจใส่ในค่านส่วนบุคคลแก่ผู้เรียนได้ตามที่ผู้เรียนต้องการ
5. ความล้มเหลวในการทดสอบในหน่วยที่เรียนจะไม่ได้รับการลงโทษ และผู้เรียนอาจทำการทดสอบใหม่จนกระทั่งเกิดการรอบรู้
6. การได้เลือกเวลาและสถานที่ที่คิดว่าตนเองจะมีสมาธิในการเรียน การเรียนมีความยืดหยุ่นมากพอสมควร
7. ผู้เรียนได้เรียนรู้จากการกระทำของตนเอง หรือมีโอกาสช่วยเหลือตัวเองได้มากที่สุดก่อนที่จะไปขอความช่วยเหลือจากผู้อื่น เป็นการฝึกนิสัยสร้างความเชื่อมั่นในตัวเอง
8. เป็นการสอนแบบเอาใจผู้เรียนมาใส่ใจผู้สอน ซึ่งหมายความว่าผู้สอนจะพยายามอย่างดีที่สุดที่จะอำนวยความสะดวกทางการศึกษา ให้ความดูแลเอาใจใส่ เพื่อให้ผู้เรียนได้บรรลุจุดมุ่งหมายของการเรียน
9. จากคู่มือแนะนำการเรียน ผู้เรียนจะรู้ตัวเองตลอดเวลาว่าจะต้องเรียนรู้อะไรบ้าง มากน้อยแค่ไหน ทำให้เห็นจุดหมายปลายทางที่เด่นชัด

รายละเอียดที่สำคัญของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอน เคลเลอร์

เนื่องจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์ ทำให้บทบาทของผู้สอนและผู้เรียนเปลี่ยนไปจากเดิม จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนแนวความคิดของผู้สอนและผู้เรียนให้สอดคล้องกับการจัดการเรียนการสอนแบบนี้ เพราะเป็นการสอนที่ออกแบบมาเพื่อเปลี่ยนบทบาทของทุก ๆ คนที่อยู่ในระบบการสอนแบบนี้ **นั่นก็คือ** ไม่ต้องการให้ผู้สอนมีหน้าที่ถ่ายทอดเนื้อหาวิชาเพียงอย่างเดียว และไม่ต้องการให้ผู้เรียนเป็นผู้รับการถ่ายทอดเนื้อหาวิชาที่ผู้สอนหยิบยื่นให้ รายละเอียดที่จะกล่าวต่อไปนี้มีอิทธิพลอย่างสำคัญที่ทำให้บทบาทของทุกคนในระบบการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์เปลี่ยนไปดังที่ เคลเลอร์และเชอร์แมน (Keller and Sherman, 1974 : 34 - 47) ได้กล่าวถึงรายละเอียดแต่ละส่วนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์

1. วัสดุอุปกรณ์

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลต้องอาศัยสมมุติปฏิบัติการณ์ที่ได้มาตรฐาน วารสาร บทความ เอกสารประกอบบทเรียนและสิ่งตีพิมพ์อื่น ๆ ซึ่งออกแบบมาเพื่อให้การศึกษาเป็นรายบุคคล วัสดุอุปกรณ์ดังกล่าวไม่ต้องการให้ผู้สอนใช้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่ในการเรียนการสอนนั้นต้องการให้ใช้หลาย ๆ อย่างประกอบกัน และต้องคำนึงถึงคู่มือประกอบบทเรียน (Study Guide)

จากคู่มือประกอบบทเรียน จะทำให้ทราบจำนวนหน่วยการเรียนรู้ในเนื้อหาวิชานั้น ๆ ซึ่งในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะประกอบด้วย บทนำ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม วิธีการต่าง ๆ คำถาม และบทเรียนเสริมทักษะ

เมื่อจบหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ ผู้เรียนจะต้องทำแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้ ทำให้การทดสอบแต่ละครั้งจะนำไปคิดเกรดด้วย ดังนั้นผู้สอนจึงจำเป็นต้องคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1.1 จำนวนหน่วยการเรียนรู้ สำหรับจำนวนหน่วยการเรียนรู้ในบทเรียนหนึ่ง จะประกอบด้วยจำนวนหน่วยการเรียนรู้เท่าไรนั้น ไม่สามารถกำหนดเป็นตัวเลขที่แน่นอนได้ จำนวนหน่วยการเรียนรู้นั้นผู้สอนเป็นผู้กำหนดให้เหมาะสมกับเวลา เนื้อหาและการสอน

1.2 ขนาดของหน่วยการเรียนรู้ การหาขนาดของหน่วยการเรียนรู้ไม่มีสูตรที่ใช้หาขนาดของหน่วยการเรียนรู้โดยเฉพาะแต่ให้ผู้สอนเป็นผู้พิจารณาวัสดุอุปกรณ์ ความยาวของแบบทดสอบที่ใช้ในหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ และเวลาที่กำหนดให้ผู้เรียนต้องศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง ในหนึ่งสัปดาห์ต่อหนึ่งหน่วยการเรียนรู้

1.3 ลำดับก่อนและหลังของหน่วยการเรียนรู้ หลักเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา ลำดับก่อนและหลังของหน่วยการเรียนรู้ก็คือ หน่วยการเรียนรู้แรก ๆ ต้องเป็นพื้นฐานในการหาวิธีการและเนื้อหาสำหรับหน่วยการเรียนรู้ที่ต้องใช้ความสามารถสูงขึ้น หรือหน่วยการเรียนรู้แรก ๆ ควรง่ายและให้ข้อมูลที่จำเป็นที่จะนำไปใช้ในหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

1.4 หน่วยการเรียนรู้เพื่อการทบทวน ตามปกติจากเนื้อหาในบทเรียนหนึ่ง ๆ ผู้สอนจะเป็นผู้แบ่งเนื้อหาในบทเรียนนั้นออกเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อย ๆ ผลจากการแบ่งดังกล่าวบางครั้งผู้เรียนจะได้รับเนื้อหาไปครบถ้วนตามต้องการ หรือบางครั้งการเรียนบางหน่วยการเรียนรู้ต้องกล่าวถึงความรู้ในหน่วยการเรียนรู้อื่น ๆ จึงจำเป็นต้องมีหน่วยการเรียนรู้เพื่อการทบทวนซึ่งมีวิธีสร้างได้ 2 วิธี ดังต่อไปนี้

1.4.1 เมื่อเรียนไปแล้วทำหรือทบทวนหน่วยการเรียนรู้ แล้วจึงทบทวนเนื้อหาในทำหรือทบทวนหน่วยการเรียนรู้ครั้งหนึ่ง

1.4.2 เมื่อจะเรียนหน่วยการเรียนรู้ที่ห้า ในหน่วยการเรียนรู้ที่ห้านี้ จะรวมเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ที่หนึ่งไว้เพื่อทบทวนด้วย และในหน่วยการเรียนรู้ที่หกจะรวมเนื้อหาในหน่วยที่สองไว้ด้วย กระทำเช่นนี้เรื่อยไปจนจบบทเรียน

1.5 จำนวนวัสดุอุปกรณ์ที่ต้องใช้ จำนวนวัสดุอุปกรณ์ขึ้นอยู่กับ กิจกรรม ขนาดของหน่วยการเรียนรู้ จำนวนหน่วยการเรียนรู้และผู้เรียน ซึ่งผู้สอนต้องจัดเตรียมไว้ล่วงหน้าสำหรับผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง โดยผู้สอนมีหน้าที่เพียงแค่เฝ้าดูให้ผู้เรียนได้ศึกษาให้เกิดความรอบรู้เท่านั้น ไม่มีหน้าที่นำวัสดุอุปกรณ์ดังกล่าวมาสอนเพื่อถ่ายทอดความรู้

1.6 คู่มือประกอบบทเรียน เป็นส่วนประกอบอยู่ในสมุดปฏิบัติการหรือวัสดุอุปกรณ์อื่น ๆ มีรายละเอียดที่ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

1.6.1 บทนำ บทนำนั้นจะเขียนไว้สั้นหรือยาวขึ้นอยู่กับความเหมาะสม แต่ต้องเน้นให้ผู้เรียนทราบว่า จะศึกษาหรืออ่านงาน (Assignment) ที่มอบหมายให้อย่างไร และที่สำคัญก็คือต้องทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจหรือเร้าใจให้อยากเรียนรู้

1.6.2 คำถาม ส่วนนี้จะเป็นส่วนที่ทำให้ผู้สอนทราบความก้าวหน้าในการเรียนของผู้เรียน

1.6.3 วิธีการ จุดสำคัญของส่วนนี้จะกำหนดกิจกรรมที่ผู้เรียนต้องทำเพื่อนำไปสู่จุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียน การเขียนวิธีการที่ดีนั้นควรบอกให้ผู้เรียนทราบว่า จะต้องทำอย่างไร จะทดสอบอย่างไร จะพบทวนเมื่อไร และลักษณะใดจึงจะเรียกว่า ทาสาเร็จ (Finish) แล้ว

1.7 แบบทดสอบ วัตถุประสงค์ของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนมี 2 ประการ คือ

1.7.1 คำถามแต่ละข้อในแบบทดสอบต้องสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ที่ได้กำหนดไว้ อย่าสร้างคำถามในลักษณะที่จะใช้เป็นตัวกั๊ก (Trap) ให้ผู้เรียนหลงผิด

1.7.2 ต้องการทราบว่า ผู้เรียนเรียนรู้ถึงระดับความรอบรู้ตามที่ต้องการแล้วหรือไม่ และผู้เรียนได้เข้าใจเกี่ยวกับจุดประสงค์ในแต่ละข้อของหน่วยการเรียนแต่ละหน่วยหรือไม่

เนื่องจากแบบทดสอบของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนแบบเคลเลอร์ไม่มีรูปแบบที่มาตรฐานแน่นอน แต่แบบที่นิยมใช้กันมากเรียกว่า "แบบผสม (Mixed)" ดังเช่น แบบทดสอบฉบับหนึ่งมีจำนวน 10 ข้อ จะประกอบด้วยคำถามชนิด ถูก - ผิด จำนวน 2 ข้อ แบบเลือกตอบจำนวน 3 ข้อ แบบจับคู่จำนวน 2 ข้อ แบบเติมคำจำนวน 2 ข้อ และแบบให้เขียนเรื่องสั้น ๆ จำนวน 1 ข้อ เป็นต้น ข้อแนะนำดังกล่าวไม่ใช่กฎเกณฑ์ที่ต้องถือปฏิบัติ การเลือกแบบทดสอบชนิดใดให้อยู่ในดุลยพินิจของผู้สอน

1.8 เอกสารสำหรับผู้ควบคุมชั้น ตามหลักการแล้วผู้ควบคุมชั้นไม่มีหน้าที่ที่จะให้คำตอบ แต่จะเป็นผู้ตัดสินว่าคำตอบถูกต้องหรือไม่ พิจารณาระดับความรู้ของผู้เรียนแต่ละคน และจัดเตรียมวัสดุอุปกรณ์สำหรับผู้เรียนที่ยังสอบไม่ผ่านเกณฑ์ความรู้ได้ศึกษาใหม่ ดังนั้นกระดาษเฉลยคำตอบซึ่งประกอบด้วยคำตอบที่ถูกต้องสำหรับคำถามแต่ละข้อ และคำแนะนำต่าง ๆ จึงเป็นเอกสารสำหรับผู้ควบคุมชั้น ส่วนรายละเอียดในเอกสารดังกล่าวเป็นเช่นไรขึ้นอยู่กับสิ่งต่อไปนี้

1.8.1 การฝึกหัดให้ผู้ควบคุมชั้นได้สัมพันธ์กับผู้เรียนและหน้าที่ที่ต้องกระทำ

1.8.2 ชนิดของแบบทดสอบที่ใช้

1.8.3 การกำหนดขอบเขตของหน้าที่

2. การปฐมนิเทศเกี่ยวกับการเรียนการสอน

การปฐมนิเทศปกติจะกระทำในวันแรกของการเรียนเพื่ออธิบายให้ผู้เรียนทราบว่าบทเรียนที่จะเรียนกันต่อไปนี้มีวิธีการจัดการเรียนการสอนกันอย่างไร รายละเอียดที่ผู้สอนควรแจ้งให้ผู้เรียนทราบในอันดับแรกก็คือ ชื่อของผู้สอน สถานที่ที่ผู้สอนอยู่ประจำ การกำหนดเวลาให้ผู้เรียนเข้าพบเมื่อปรึกษาปัญหาต่าง ๆ นอกเวลาเรียน ชื่อของวิชาที่เรียน การใช้สมุดปฏิบัติการและรายละเอียดอื่น ๆ ที่สำคัญดังนี้

2.1 หลักการให้เกรด เกี่ยวกับการให้เกรดนั้น เฟรด เอส เคลเลอร์ ได้กำหนดหลักเกณฑ์ไว้ว่า ผู้เรียนที่จะได้เกรด A จะต้องสอบผ่านเกณฑ์ความรู้บนแบบทดสอบของหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย และสอบผ่านเกณฑ์ความรู้แบบทดสอบเพื่อสรุปผลการเรียนด้วย

ในทางปฏิบัติ การปฏิบัติตามแนวความคิดนี้ทำได้ยากมาก และเกิดปัญหาในทางปฏิบัติบ่อย ๆ ต่อมาได้มีการแก้ไขเกี่ยวกับการให้เกรดใหม่ โดยไม่ทิ้งหลักการเดิมทั้งหมด แนวทางแก้ปัญหานี้ใช้วิธีประนีประนอมดังนี้ ถ้ามีหน่วยการเรียนรู้ทั้งหมด 18 หน่วยการเรียนรู้ ผู้ที่สอบผ่านทั้งหมดจะได้เกรด A ถ้าผ่าน 17, 16 และ 15 หน่วยการเรียนรู้ จะได้เกรด A, B และ B⁻ ตามลำดับ ส่วนผู้เรียนที่สอบผ่านเพียง 14 หน่วยการเรียนรู้ จะได้เกรด C สำหรับวิชานั้น หรือจะใช้วิธีการอื่น เช่น ถ้า

หน่วยการเรียนรู้ทั้งหมดมี 20 หน่วยการเรียนรู้ ใน 3 หน่วยกิต ถ้าสอบผ่านเกณฑ์ความรู้ 20 หน่วยการเรียนรู้ก็จะได้รับเกรด A ทั้ง 3 หน่วยกิต และถ้าสอบผ่าน 15 และ 10 หน่วยการเรียนรู้ ก็จะได้รับเกรด A จำนวน 2 และ 1 หน่วย ตามลำดับ

2.2 การสอบไล่ ตามหลักปรัชญาพื้นฐานของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์ กำหนดให้มีการสอบไล่โดยคำนึงถึงประโยชน์ 2 ประการ ดังต่อไปนี้

2.2.1 เพื่อแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนที่ได้เกรด A นั้นมีคุณภาพเชื่อถือได้ เมื่อเปรียบเทียบกับผู้เรียนกลุ่มอื่น ๆ ที่เข้าสอบในสนามสอบเดียวกันและเนื้อหาเดียวกัน

2.2.2 การสอบไล่จัดขึ้นเพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ความพยายามครั้งสุดท้ายที่จะนำความรู้และรายละเอียดต่าง ๆ มาแสดงผลงานเพื่อใช้แก้ปัญหา

ผลการสอบไล่ต้องนำมาคิดเกรดรวมกับจำนวนหน่วยการเรียนรู้ที่สอบผ่านเกณฑ์ โดยกำหนดให้ผลของการสอบไล่มีน้ำหนักเพียง 25 % เมื่อเทียบกับ เกรดรวมของวิชาที่เรียน และกำหนดให้ผลงานของการสอนประจำหน่วยการเรียนรู้มีน้ำหนัก 75 % ของเกรดรวมทั้งหมด ดังนั้นการที่ผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ความรู้รอบรู้ย่อย ๆ ผลจะปรากฏให้เห็นเด่นชัดในการสอบไล่ เพราะการสอบไล่จะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสอบได้เพียงครั้งเดียว

2.3 การสอบก่อนสอบไล่ สำหรับผู้ที่สอบผ่านเกณฑ์ความรู้ของหน่วยการเรียนรู้ทั้งหมดแล้ว ก่อนสิ้นสุดการเรียนในเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ควรจะจัดการสอบก่อนสอบไล่ขึ้นประมาณหนึ่งหรือสองครั้ง เพื่อให้ผู้เรียนปรับปรุงจุดบกพร่องของตนเอง และเตรียมตัวก่อนสอบไล่

การจัดเกี่ยวกับการสอบก่อนสอบไล่ทำได้หลายแบบ เช่น จัดก่อนสอบไล่ประมาณ 1 เดือน จัดก่อนสิ้นสุดการเรียนหนึ่งสัปดาห์ หรือจัดในวันที่ทุกคนเรียน "สำเร็จ" ตามจุดประสงค์การจัดเช่นนี้จะทำให้ผู้เรียนเกิดความพยายามและมีความหวังว่าตนเองสามารถหาคะแนนได้ดีในตอนที่สอบไล่ เพราะสามารถปรับปรุงจุดบกพร่องของตนเองได้ทุกจุด

2.4 การให้เกรด I แนวความคิดตรงจุดนี้มีข้อโต้แย้งกันมาก เพราะตามแนวคิดของการจัดการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์นั้น ผู้เรียนต้องสอบผ่านเกณฑ์ความรอบรู้ทุกหน่วยการเรียนในเวลาที่กำหนดหนึ่งภาคการศึกษา การได้รับเกรด I จึงไม่น่าจะเกิดขึ้น แต่ในทางปฏิบัติการได้เกรด I หมายความว่า ผู้เรียนไม่สามารถเรียนให้ "สำเร็จ" ทุก ๆ หน่วยการเรียนเมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษา แต่ที่ต้องให้เกรด I นั้นเพื่อเปิดโอกาสให้ได้ศึกษาในภาคการศึกษาต่อไป และต้องการสรุปผลการเรียนตามกฎเกณฑ์ที่สถานศึกษากำหนดไว้ ดังนั้นผู้เรียนที่ได้เกรด I จึงมีสาเหตุที่เป็นไปได้ 2 ประการ ดังต่อไปนี้

2.4.1 ไม่สามารถสอบผ่านหน่วยการเรียนในระยะเวลาที่กำหนดไว้ หรือสอบผ่านหน่วยการเรียนได้เพียงครึ่งหนึ่งของหน่วยการเรียนทั้งหมด

2.4.2 ผู้เรียนมีความสามารถในการเรียนรู้หรือไม่มีความก้าวหน้าในการเรียนรู้

2.5 กฎการสอบประจำหน่วยการเรียน ในการเรียนวิชาหนึ่ง ๆ กำหนดให้ผู้เรียนเข้ารับการทดสอบเพียงหนึ่งครั้ง ต่อวันต่อหนึ่งหน่วยการเรียน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่สอบไม่ผ่านในครั้งแรก สามารถสอบใหม่ในครั้งที่สองและครั้งที่สามได้ ในบางครั้งผู้สอนสามารถจัดการสอบได้สองครั้งในหนึ่งวัน แต่มีข้อแม้ว่าระยะเวลาสอบครึ่งหนึ่งและครั้งที่สองต้องห่างกันสามสัปดาห์

2.6 ความหมายของคำว่า "ผ่าน (Pass)" เกณฑ์ความรอบรู้กำหนดให้ผู้เรียนต้องทำข้อทดสอบได้ถูกต้อง 100 % (Perfect Performance) สำหรับหน่วยการเรียนหน่วยหนึ่ง ๆ จึงจะอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนหน่วยต่อไป ดังนั้นคำว่า "ผ่าน" ในที่นี้คือเกณฑ์ที่กำหนดให้ผู้เรียนต้องทำข้อทดสอบได้ถูกต้องทั้งหมด

2.7 ผู้ควบคุมชั้นเป็นนิสิต นักศึกษา ที่เคยเรียนเนื้อหาวิชาที่ผู้เรียนกำลังเรียนอยู่มาก่อนและได้ผ่านการฝึกให้มาทำหน้าที่ผู้ควบคุมชั้น อัตราส่วนของผู้ควบคุมชั้นต่อผู้เรียนเป็นหนึ่งต่อสิบ ผู้ควบคุมชั้นจะเป็นผู้ที่ให้คำแนะนำ ให้รายละเอียดที่จำเป็นและ

มีประโยชน์ แนะนำกลวิธีการเรียนรู้ สร้างความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียน ให้กำลังใจ พยายามให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และทำงานตามกำหนดเวลาที่กำหนดให้ และลดการผลัดวันประกันพรุ่งของผู้เรียน

2.8 เวลาในห้องเรียน มีผู้สอนจำนวนมากที่นำเอาการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ไปใช้ กำหนดว่า วันอังคารและพฤหัสบดีให้ใช้เวลาในห้องเรียน 70 นาที และวันจันทร์ พุธ และศุกร์ ให้ใช้เวลาวันละ 50 นาที และเปิดโอกาสให้เข้ารับการทดสอบอาทิตย์ละ 3 ครั้ง ข้อกำหนดดังกล่าวไม่ใช่สิ่งตายตัว ข้อสำคัญคือ ในเวลาเรียนรู้ในห้องเรียนอย่าปล่อยให้ผู้เรียนอยู่กันตามลำพัง โดยไม่มีผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น

2.9 โอกาสพิเศษ บางวิชาจำเป็นต้องจัดโอกาสพิเศษให้แก่ผู้เรียนเพิ่มเติม ในบางครั้งผู้เรียนต้องการคำวิจารณ์บางอย่างที่มีประโยชน์ในการเรียนรู้ ผู้สอนสามารถจัดโอกาสพิเศษขึ้นด้วยวิธีการต่อไปนี้

2.9.1 การบรรยาย การจัดการบรรยายจะจัดขึ้นในโอกาสที่ผู้เรียนต้องการ เนื่องจากพบเงื่อนไขบางประการที่ไม่สามารถทำความเข้าใจได้ ผู้สอนสามารถจัดบรรยายขึ้นเพื่อชี้แจงและแนะนำเพื่อช่วยให้ผู้เรียนมากกว่าเป็นการถ่ายทอดเนื้อหาวิชา

2.9.2 การใช้วิธีอย่างอื่น การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์เป็นระบบการเรียนการสอนที่พยายามจะหลีกเลี่ยงการใช้เครื่องมือที่เป็นเครื่องจักรกล ไม่สนับสนุนการจัดการศึกษานอกสถานที่ การสาธิต การใช้สตูดิโอ และการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ แต่หากิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นจำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับสิ่งดังกล่าวก็สามารถนำสิ่งดังกล่าวมาใช้ได้

2.9.3 การเข้าห้องปฏิบัติการ การเรียนรู้ในแต่ละหน่วยไม่จำเป็นต้องให้ผู้เรียนจะต้องศึกษาโดยการอ่านจากวัสดุต่าง ๆ ที่ผู้สอนจัดมาให้ การเข้าห้องปฏิบัติการก็ถือเป็นหน่วยการเรียนรู้หนึ่งให้ผู้เรียนจะต้องศึกษาให้เกิดความรอบรู้เป็นรายบุคคล โดยการทดลองด้วยตนเอง

2.9.4 ป้ายประกาศ เนื่องจากการพบปะระหว่างผู้สอนกับผู้เรียนทุกคนทำได้ยาก ดังนั้นผู้เรียนแต่ละคนควรดูป้ายประกาศอย่างน้อยสัปดาห์หนึ่งครั้ง เพื่อให้การติดต่อกันระหว่างผู้เรียนและผู้สอนไม่ขาดหายไป

2.9.5 แผนการück ผู้เรียนทุกคนควรเขียนชื่อ ที่อยู่ หมายเลขโทรศัพท์ เพื่อให้ผู้สอนใช้เป็นสื่อในการติดต่อกับผู้เรียนและส่งคำตอบที่ผู้เรียนต้องการทราบในกรณีที่เกิดความยากลำบากในการติดต่อกับผู้เรียน

2.9.6 ป้ายแสดงความก้าวหน้าของผู้เรียนแต่ละคน ผู้สอนต้องจัดป้ายแสดงความก้าวหน้าของผู้เรียนแต่ละคน โดยจัดทำเป็นแผนกระดานกราฟใหญ่สำหรับผู้เรียนแต่ละคนมาลงจุด (Plot) และลากเส้นกราฟเพื่อจะได้ทราบอัตราสูงสุด และต่ำสุดในการเรียนรู้แต่ละหน่วย และจำนวนหน่วยการเรียนรู้ที่ผ่านแล้ว รวมทั้งจำนวนหน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เรียนผ่านในแต่ละวัน จำนวนหน่วยการเรียนรู้ที่เหลือและตารางกำหนดวันเวลาที่ควรเข้าทดสอบ ป้ายแสดงความก้าวหน้าของผู้เรียนแต่ละคนอาจแสดงเป็นรายวันหรือรายสัปดาห์ก็ได้

2.9.7 คำเตือน ผู้เรียนในระบบการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์จะต้องควบคุมตนเองเป็นพิเศษเกี่ยวกับการทำกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนั้นการให้คำเตือนเป็นพิเศษเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความรับผิดชอบเนื่องจากผู้เรียนไม่ไ้พัฒนาตนเองให้เกิดความก้าวหน้าในการเรียนรู้และไม่พยายามสร้างนิสัยการรักเรียน แต่ถ้ามีใครคอยให้คำเตือนแล้วผู้เรียนจะพยายามปรับปรุงพฤติกรรมของตนเองให้ดีขึ้น

2.9.8 การรักษากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในขณะที่ยังมีการเรียนรู้อย่างต่าง ๆ คาเนินไป กฎเกณฑ์ต่าง ๆ จะถูกใช้ไปพร้อมกัน ดังนั้นผู้สอนอาจหาสัญลักษณ์บอกให้นักเรียนทราบว่าจุดใดผู้เรียนควรปฏิบัติอย่างไร เพื่อเป็นการรักษากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ไว้ ให้คาเนินไปอย่างปกติธรรมดา

3. สิ่งสนับสนุนการเรียนการสอน

รายละเอียดต่าง ๆ ตามที่ได้กล่าวมาแล้วถือเป็นเรื่องเล็กน้อย ถ้ากิจกรรมภายในห้องเรียนคาเนินไปแล้ว กฎเกณฑ์ต่าง ๆ เหล่านั้นจะถูกใช้ไปพร้อมกันด้วยโดยไม่รู้ตัว แต่เรื่องที่สำคัญที่ควรคำนึงถึงก็คือ การตัดสินใจแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น ซึ่งปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นอาจมาจากสิ่งต่อไปนี้

3.1 สภาพของห้องเรียน เนื่องจากกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การเรียน การทดสอบอื่น ๆ จะเกิดขึ้นในห้องเรียนเดียวกัน ดังนั้นห้องเรียนจึงควรเป็นห้องเรียนที่ใหญ่พอเหมาะกับผู้เรียน มีที่ว่างพอที่จะสามารถเคลื่อนย้ายที่นั่ง เพื่อจัดแบ่งผู้เรียนเป็นหมู่ ๆ ในการอภิปรายร่วมกัน ควรมีระบบแสงและเสียงที่ดี มีที่สำหรับวางอุปกรณ์ต่าง ๆ และมีโต๊ะสำหรับผู้ช่วยสอน ถ้าจะให้ดีกว่านี้ควรมีสองห้อง โดยที่ห้องหนึ่งสำหรับเรียน และอีกห้องหนึ่งใช้เป็นห้องสอบ หรือใช้สำหรับผู้ช่วยสอนและผู้เรียนได้สนทนาหรือสัมภาษณ์บางสิ่งบางอย่าง

3.2 คู่มือประกอบบทเรียนและวัสดุอุปกรณ์อื่น ๆ ในการเรียนตามแบบ การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เคล เลอร์ เมื่อผู้เรียน ผ่านหน่วยการเรียนหน่วยหนึ่งแล้วจะได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนต่อไป ซึ่งการเรียน หน่วยการเรียนต่อไปจำเป็นต้องมีคู่มือประกอบบทเรียนและเอกสารประกอบบทเรียนอื่น ๆ เพื่อนำไปศึกษาที่บ้านหรือหอพักในบางครั้งจำนวนวัสดุอุปกรณ์ดังกล่าวอาจจะไม่เพียงพอ ดังนั้น ผู้สอนควรมีต้นฉบับให้ผู้เรียนขอยืมไปถ่ายเอกสาร (Xerox)

3.3 แบบทดสอบ การนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของ เคล เลอร์ ไปใช้มักจะพบว่า มีการทุจริตในการสอบประจำหน่วยการเรียน กันมาก เพื่อเป็นการป้องกันการทุจริตควรจะทำแบบทดสอบไว้หลาย ๆ ฉบับในการสอบแต่ละครั้งให้ใช้วิธีสุ่มแบบทดสอบ เช่น ผู้เรียนคนที่หนึ่งในการสอบครั้งแรก เมื่อทำแบบทดสอบครั้งแรกไม่นานก็สอบครั้งที่สองก็ต้องใช้วิธีสุ่มคือ นัก เรียนว่าจะได้แบบทดสอบฉบับใด และ เมื่อทำแบบทดสอบเสร็จแล้วการนำแบบทดสอบที่จัดไว้จะต้องเซ็นชื่อ ทั้งนี้ผู้คุมสอบต้องคอยดูแลอย่างระมัดระวังไม่ให้ผู้สอบออกนอกห้องสอบ

3.4 กระดาษคำตอบ กระดาษคำตอบต้องมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.4.1 ลำดับที่ของหน่วยการเรียน

3.4.2 ฉบับที่ของแบบทดสอบ

3.4.3 ชื่อผู้สอบ

3.4.4 วันที่สอบ

3.4.5 ชื่อผู้ควบคุมชั้น

3.4.6 ของสรุปผลการเรียนโดยเขียนว่า "ผ่าน - ตก"

3.5 การบันทึกความก้าวหน้าของผู้เรียน ทุก ๆ ชั่วโมง ผู้ควบคุมชั้นควรบันทึกผลงานจากผู้เรียน กระจายคำตอบ หน่วยการเรียนรู้ แบบทดสอบและรวบรวมเกร็ดที่ผู้เรียนได้รับเพื่อที่จะนำข้อมูลที่รวบรวมได้จากการบันทึกนี้มาใช้ในการแก้ไขปัญหาให้ผู้เรียนแต่ละคน จากบันทึกนี้จะทำให้การแก้ปัญหารวดเร็วและตรงเป้าหมายยิ่งขึ้น

3.6 แฟ้มสำหรับผู้ควบคุมชั้น ผู้ควบคุมชั้นจำเป็นต้องมีแฟ้มเก็บแบบทดสอบทุกฉบับในทุก ๆ หน่วยการเรียนรู้ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของกระดาษคำตอบที่แจกให้ผู้เรียนตอบคำถาม ในแฟ้มนี้จะบันทึกชื่อของผู้ควบคุมชั้น หน่วยการเรียนรู้ เวลาที่ใช้ และวันที่ ซึ่งอาจจะมีประโยชน์ในกรณีที่เปลี่ยนผู้ควบคุมชั้น แฟ้มนี้จะช่วยให้ผู้ควบคุมชั้นคนใหม่ดำเนินงานต่อไปได้

3.7 ผู้ควบคุมชั้นมีหน้าที่อธิบายเกี่ยวกับนโยบายของวิชาที่เรียนและให้รายละเอียดต่าง ๆ ตามเอกสารสำหรับผู้ควบคุมชั้น ผู้ควบคุมชั้นจะมาก่อนเวลาเรียนเพื่อรับแฟ้มสำหรับผู้ควบคุมชั้น และให้คำแนะนำเกี่ยวกับการเรียนหน่วยการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังต้องทำหน้าที่ในการมอบหมายให้ผู้เรียนปฏิบัติแนะนำให้ผู้เรียนเข้าพบผู้สอน เก็บรักษาและรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับผู้เรียนแต่ละคนให้ทันสมัยอยู่เสมอ และตัดสินใจความพร้อมของผู้เรียนว่าพร้อมที่จะเรียนหน่วยต่อไปหรือไม่หลังจากผู้เรียนได้ผ่านการทดสอบในหน่วยการเรียนรู้ที่ได้ศึกษาผ่านมาแล้ว

3.8 ผู้เรียน บทบาทของผู้เรียนจะเป็นอย่างไรนั้น ศึกษาได้จากนโยบายของวิชาที่เรียน และคู่มือประกอบบทเรียน ผู้เรียนจะต้องเข้าห้องเรียนตามวันและเวลาที่กำหนดศึกษาหน่วยการเรียนรู้ รับแบบทดสอบ กระจายคำตอบ เช่นหรือก่อนส่งแบบทดสอบคืนคืนกระดาษคำตอบให้ผู้ควบคุมชั้น รับหน่วยการเรียนรู้ใหม่และเตรียมตัวสอบใหม่ในกรณีที่ต้องการสอบครั้งแรกไม่ถึงเกณฑ์

3.9 ผู้สอน มีหน้าที่ในการใช้ความคิดสร้างสรรค์และใช้ความสามารถเฉพาะคิดค้นหาวิธีการสอน สร้างสื่อการสอน สร้างแบบทดสอบ เตรียมวิธีสอนสำหรับผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ความรู้ในการทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ 3 ครั้ง เจลยข้อสอบ ตอบคำถามที่ผู้ช่วยสอนไม่สามารถตอบได้ แนะนำหนังสือประกอบบทเรียน เตรียมและแก้ไขคู่มือประกอบบทเรียนและเตรียมเอกสารสำหรับผู้ควบคุมชั้น รวมทั้งนัดหมายการประชุมร่วมกันระหว่างผู้สอนและผู้ควบคุมชั้น

3.10 วิธีการพิเศษ ผู้สอนสามารถใช้วิธีการพิเศษเพื่อให้การเรียนการสอน
สมบูรณ์ขึ้นดังนี้

3.10.1 ทาแผนภูมิ เพื่อบันทึกความก้าวหน้าของผู้เรียนแต่ละวัน
หรือแต่ละหน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เรียนผ่านมาแล้ว

3.10.2 ให้อิสระแก่ผู้ควบคุมชั้น ได้ปรับปรุงผลงานในหน้าที่ของ
ตนเอง

การเตรียมการสอน

1. กำหนดจุดมุ่งหมายของวิชาและขอบเขตของเนื้อหาให้ชัดเจน
2. แบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยการเรียนรู้ กลุ่มเนื้อหาที่จะเรียน
ใน 1 สัปดาห์
3. เขียนจุดมุ่งหมายให้ชัดเจนว่า ต้องการให้เรียนรู้ เกิดความสามารถและทักษะ
ด้านใด และจะวัดผลตามจุดมุ่งหมายอย่างไร
4. รวบรวมตำรา ที่กล่าวถึงเนื้อหาแต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยคำนึงถึงความ
เหมาะสมของพื้นความรู้ของผู้เรียน และทำคู่มือประกอบบทเรียน เพื่อให้ทราบว่าความรู้
หาได้จากที่ใด
5. ถ้าผู้สอนเป็นผู้รวบรวมเนื้อหาเอง ผู้สอนต้องมีเวลาว่างมาก คือสอนสัปดาห์ละ
ประมาณ 2 - 3 คาบ
6. จัดเนื้อหาที่ง่ายและกระชับไว้ก่อนในหน่วยการเรียนรู้แรก ๆ เพื่อดึงดูดความสนใจ
และหลีกเลี่ยงรายละเอียดที่ไม่จำเป็น
7. เตรียมแบบฝึกหัดทบทวน เพื่อให้ผู้เรียนตรวจสอบความรู้ ความเข้าใจ และ
เฉลยไว้ต่างหาก
8. การที่ให้ผู้เรียนเข้าเรียนทั้งชั้น หรือรายบุคคลขึ้นอยู่กับการพิจารณาของผู้สอน
และการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเลือกเวลาเรียนเองตามความพอใจ แต่ถ้าเรียนตามความสมัครใจ
ก็จะลดค่าใช้จ่ายด้านวัสดุอุปกรณ์ลงได้

9. หน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยควรมีแบบทดสอบประมาณ 4 ฉบับ จำนวนข้อทดสอบไม่ควรมากเกินไป ควรใช้เวลาประมาณ 10 - 20 นาที และควรใช้การสอบปากเปล่าบ้าง แต่ไม่ควรใช้การสอบปากเปล่าเพียงอย่างเดียวเกี่ยวกับคิดผลการเรียนรู้

10. บันทึกผลการสอบเฉพาะผู้ผ่านเกณฑ์ความรอบรู้ได้เพิ่มของแต่ละคน ถ้าผู้ใดสอบไม่ถึงเกณฑ์ต้องชี้แจงและแนะนำให้ศึกษาเพิ่มเติม การสอบใหม่ให้ห่างจากการสอบเดิมอย่างน้อย 1 วัน

11. ควรจัดสถานที่สอบไว้เฉพาะ และมีที่ว่างพอให้ผู้สอน ผู้ควบคุมชั้น และผู้เรียนใช้เป็นที่พักผ่อนหรือกิน

12. กำหนดเวลาที่จะทดสอบให้แน่นอน

13. ให้นายผลการสอบแต่ละหน่วยไปรวมกับผลการสอบโดยรวม

ขั้นตอนการเรียนรู้การสอนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนรู้ของเคลเลอร์

เคลเลอร์ (Keller. 1968 : 79 - 83) ได้เสนอแนะขั้นตอนของการเรียนการสอนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนรู้ของเคลเลอร์ไว้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้สอนเสนอแนะรายชื่อหนังสือหรือสื่อการสอนอื่น และหัวข้อที่ผู้เรียนต้องไปศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองประมาณ 20 ถึง 50 หน้า ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ โดยผู้สอนแนะนำวิธีศึกษาค้นคว้าและกำหนดชุดของคำถามประมาณ 15 ถึง 30 ข้อ ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของหน่วยการเรียนรู้

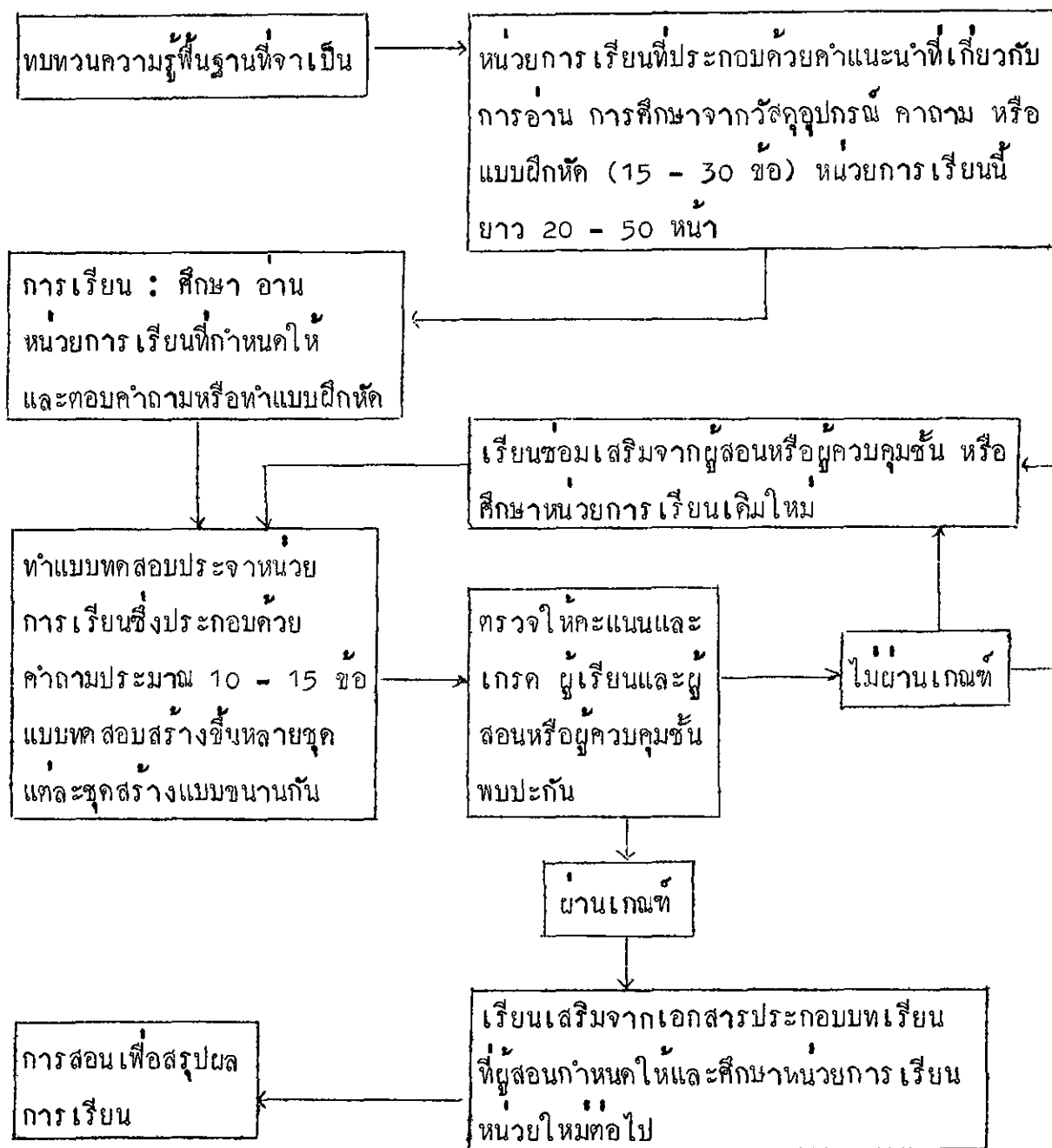
ขั้นที่ 2 ผู้เรียนต้องอ่านและศึกษาในสิ่งที่ผู้สอนกำหนดไว้ เมื่อเข้าใจแล้วจึงตอบคำถามที่ใหไว้ในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 เมื่อการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ เสร็จสิ้นไปแล้ว ผู้เรียนจะได้รับแบบทดสอบประจำหน่วย แบบทดสอบจะเป็นชนิดเลือกตอบและ/หรือ แบบเติมคำตอบสั้น ๆ ประมาณ 10 ถึง 15 ข้อ

ขั้นที่ 4 เมื่อผู้เรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้วให้ผู้เรียนหรือผู้ควบคุมชั้น ตรวจสอบความถูกต้องของแบบทดสอบ สำหรับผู้ที่ได้คะแนน 100 % จะได้รับคำชมเชยจากผู้ควบคุมชั้นและได้รับอนุญาตให้ศึกษาหน่วยการเรียนรู้หน่วยต่อไป

ขั้นที่ 5 สำหรับผู้เรียนที่ผลการเรียนไม่ถึงเกณฑ์ความรอบรู้ จะได้รับการขอร้องให้กลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้เดิมหรือผู้ควบคุมชั้นเป็นผู้สอนซ่อมเสริมให้ก็ได้ แล้วจึงกลับมาสอบใหม่ โดยใช้แบบสอบที่แตกต่างจากเดิม แต่สอบเนื้อหาเดียวกัน ถ้าผลการสอบยังไม่เกิดความรอบรู้ระดับ 100 % ผู้เรียนจะต้องกลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้เดิมอีก จะไม่มีการลงโทษหรือทำทัณฑ์ แต่จะไม่ได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนรู้ต่อไป

การเรียนการสอนตามระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคอเลอร์นั้น การสอน การกลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้หน่วยเดิม และการสอบใหม่นี้จะเป็นระบบที่ต่อเนื่องกันไปจนกระทั่งผู้เรียนเกิดความรอบรู้ถึงระดับ 100 % นักเรียนจึงจะได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยการเรียนรู้ต่อไป



ภาพประกอบ 1 แสดงขั้นตอนการจัดการเรียนการสอน แบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือ แผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์

งานวิจัยต่างประเทศ ในปี ค.ศ. 1968 เคลเลอร์ (Keller. 1968 : 79-89) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ระบบการเรียนเพื่อรู้ การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการเรียนเพื่อรู้ที่เน้นระบบการสอนส่วนบุคคลกับการศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม สำหรับนิสิตปริญญาตรี วิชาจิตวิทยาทั่วไป ผลการวิจัยปรากฏว่า นิสิตจำนวน 65 % ถึง 70 % ได้เกรด A หรือ B และระบบการสอนส่วนบุคคลมีประสิทธิภาพดีกว่า

ฟิลลิปป์สและซอมเมอร์เฟลด์ (Philippas and Sommerfeldt. 1972 : 1300 - 1306) รายงานว่า เมื่อสอนโดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลแล้วจะมีผู้เรียนได้เกรด "B" ตอนต้นภาคเรียนมากกว่าการสอนโดยการสอนแบบบรรยาย เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบจำนวนหน่วยการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสอบผ่านกับเวลาที่ล่วงไปเป็นสัปดาห์แล้ว จะได้ความสัมพันธ์ชนิดแปรโดยตรง แต่ไม่เป็นเส้นตรงเอกรูป ถ้าต้องการให้ความสัมพันธ์นี้เป็นชนิดแปรโดยตรงและค่อนข้างจะเป็นเส้นตรงจะต้องสร้างเงื่อนไขบังคับให้ผู้เรียนเข้ามาทดสอบตามกำหนดเวลา อย่างไรก็ตามรายงานของฟิลลิปป์สและซอมเมอร์เฟลด์ แสดงให้เห็นว่า ผู้ที่เรียนได้เร็วและมีความพยายามสูงสามารถเรียนจบรายวิชาได้ก่อนกำหนดเวลา ปรากฏการณ์เช่นนี้ย่อมเปิดโอกาสให้ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมส่งเสริมผู้เรียนที่เรียนได้เร็วให้สามารถพัฒนาไปได้จนเต็มศักยภาพ

เมื่อปี ค.ศ. 1974 มีการรวบรวมผลการทดลองเปรียบเทียบการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนแบบบรรยาย โดย คูลิก คูลิก และคาไมเคิล (Kulik, Kulik and Carmichael. 1974 : 379 - 383) ซึ่งมีผลการวิจัยดังนี้

รายวิชา	ครั้งที่ของการ เปรียบเทียบ	ผลของการเปรียบเทียบ
จิตวิทยาเบื้องต้น	1	98 % ของผู้เรียนชอบการสอนแบบระบบการสอน ส่วนบุคคล ผลของการสอนได้คะแนนสูงกว่า ความแปรปรวนน้อยกว่ากลุ่มที่เรียนจากการ บรรยาย
	2	ผู้เรียน 145 คน (จากจำนวน 152 คน) ตอบ อย่างชัดเจนว่า จะแนะนำให้เพื่อนเข้าเรียน รายวิชาที่สอนโดยระบบการสอนส่วนบุคคล
	3	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่ใช้การสอน แบบระบบการสอนส่วนบุคคลสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ
	4	ผลสัมฤทธิ์ด้านปฏิบัติงานของกลุ่มที่ใช้การสอน แบบระบบการสอนส่วนบุคคล สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ
มนุษย์วิทยา	1	กลุ่มที่ใช้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ประสบผลสำเร็จมากกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมี นัยสำคัญ
บรรณารักษศาสตร์	1	ผู้เรียนทุกคนในกลุ่มที่ใช้การสอนแบบระบบ การสอนส่วนบุคคล ชอบการสอนแบบนี้มากกว่า การสอนแบบบรรยาย และ 93 % ของกลุ่มนี้ บอกว่าการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล เป็นการสอนที่ดีที่สุดในชีวิต

รายวิชา	ครั้งที่ของการ เปรียบเทียบ	ผลของการเปรียบเทียบ
วิศวกรรมระบบพิจิตาล	1	กลุ่มที่ใช้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ใช้การสอน แบบบรรยายอย่างมีนัยสำคัญจากการสำรวจพบว่า 90 % ของผู้เรียนเทอมที่ 1 และ 79 % ของ ผู้เรียนเทอมที่ 5 ชอบการสอนแบบระบบการสอน ส่วนบุคคลมากกว่าการสอนแบบบรรยาย
วิศวกรรมเครื่องยนต์	1	64 % ของผู้เรียนชอบการสอนแบบระบบการสอน ส่วนบุคคลมากกว่าการสอนแบบธรรมดา
วิศวกรรมไฟฟ้า	1	91 % ของผู้เรียนชอบการสอนแบบระบบการสอน ส่วนบุคคลมากกว่าการสอนแบบธรรมดา
การวิจัย	1	59 % ของผู้เรียนชอบการสอนแบบระบบการสอน ส่วนบุคคลมากกว่าการสอนแบบธรรมดา
ชีววิทยา	1	กลุ่มที่ใช้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญ
	2	ค่าระดับคะแนน (เกรด) ของกลุ่มที่เรียนโดย การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลสูงกว่า กลุ่มควบคุม เมื่อสอบไล่ปลายภาค

จากผลการรวบรวมงานวิจัยของ คูลิก คูลิก และคาไมเคิล สรุปได้ว่า การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้เนื้อหาบางวิชาได้มากกว่าการสอนแบบธรรมดาและการสอนแบบบรรยาย อย่างไรก็ตามก็ผลการทดลองเปรียบเทียบในแนวทางเช่นนี้ก็ยังไม่สามารถช่วยให้ผู้วิจัยสรุปผลได้ว่า การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลเป็นการสอนที่เลือกหน้าที่ดีไปได้เนื่องจากการสอนแบบนี้มิได้บังคับให้ผู้เรียนเข้าทดสอบความรู้ตามกำหนด ดังนั้นผู้เรียนมักจะท้วงเหนียวหรือถ่วงเวลาผลัดวันประกันพรุ่งในการทดสอบความรู้ เนลสัน และเบนเนท (Nelson and Bennett. 1973 : 130 - 133) พบว่าถ้าตัดทอนบทเรียนเพื่อหาหน่วยการเรียนรู้ให้เล็กลง (หรือจำนวนหน่วยการเรียนรู้จะต้องมากขึ้น) จะทำให้เกิดการกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้ความพยายามในการเรียนมากขึ้น

งานวิจัยภายในประเทศ กิตติ พัฒนตระกูลสุข (กิตติ พัฒนตระกูลสุข 2524 : บทคัดย่อ) ได้วิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัย ตามแนวความคิดของบลูม และตามแนวความคิดของเกลเลอร์กับนักเรียนชั้น ม. 1 ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัยของการใช้กลวิธีการเรียนรู้ของบลูมสูงกว่าของการใช้แผนการเรียนการสอนของเกลเลอร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

จากผลการวิจัยดังกล่าวพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรายวิชาต่าง ๆ ของนักศึกษาในระดับอุดมศึกษา ที่ได้จากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลสูงกว่าที่ได้จากการสอนแบบบรรยายในทุกสาขาวิชา สำหรับในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านพุทธิพิสัยของการใช้กลวิธีของบลูมสูงกว่าการใช้แผนการเรียนการสอนของเกลเลอร์ เนื่องจากนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีวุฒิภาวะใกล้เคียงกับนักศึกษาในระดับอุดมศึกษา ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลมาทดลองใช้สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อจะศึกษาว่าการสอนแบบนี้จะใช้ได้ดีสำหรับการสอนในระดับนี้หรือไม่

เอกสารและบทความเกี่ยวกับเจตคติ

นักการศึกษาได้ให้ความหมายของเจตคติไว้หลายท่านได้แก่

กู๊ด (Good. 1963 : 48) ได้ให้คำจำกัดความของเจตคติไว้ว่า เจตคติคือ ความพร้อมที่จะแสดงออกในลักษณะหนึ่ง อาจเป็นการต่อต้านสถานการณ์บางอย่าง บุคคล หรือสิ่งใด ๆ เช่น รักเกลียด หรือกลัว หรือไม่พอใจมากน้อยเพียงใดต่อสิ่งนั้น

เทอร์สโตน (Thurstone. 1967 : 77) กล่าวว่า เจตคติเป็นการแสดงออก ทางค่านิยมรวมของความโน้มเอียงและความรู้สึก ความมีอคติ ความรู้สึกที่เกิดขึ้นอยู่ในใจ มาก่อน ความคิด ความกลัว การบังคับขู่เข็ญ และการลงความเห็นของมนุษย์เกี่ยวกับเรื่อง ใดเรื่องหนึ่ง

สมบุญ จิตพงศ์ (สมบุญ จิตพงศ์ 2519 : 14) ได้ให้ความหมายของเจตคติ ไว้ว่า หมายถึง ท่าที ความคิดเห็น ความรู้สึกเอนเอียงทางจิตใจของบุคคลที่มีต่อสิ่งหนึ่งสิ่งใด ภายหลังที่บุคคลได้มีประสบการณ์ในสิ่งนั้น พฤติกรรมเช่นนี้อาจจะไม่สามารถวัดได้โดยตรง แต่สามารถสังเกตได้และวัดได้จากพฤติกรรมที่บุคคลแสดงออกต่อสิ่งนั้น โดยแสดงออกให้เห็น ในลักษณะความเชื่อ ท่าทาง ความคิดเห็น ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะ

1. เจตคติเชิงนิมาน เป็นการแสดงออกในลักษณะของความพึงพอใจ เห็นด้วย ชอบ สนับสนุน ปฏิบัติตามด้วยความเต็มใจ
2. เจตคติเชิงนิเสธ เป็นการแสดงออกในลักษณะตรงข้ามกับเจตคติเชิง นิมาน เช่น ไม่พึงพอใจ ไม่เห็นด้วย ไม่ร่วมมือ ไม่ทำตาม
3. เจตคติที่เป็นกลาง เป็นการแสดงออกในลักษณะที่ไม่เป็นทั้งเจตคติเชิง นิมาน และจิตคติเชิงนิเสธ แต่อยู่ระหว่างกลางไม่เข้าข้างใดข้างหนึ่ง เช่น รู้สึกเฉย ๆ ไม่ถึงกับชอบหรือเกลียด เป็นต้น

จากความหมายของเจตคติที่กล่าวมาแล้วพอสรุปได้ว่า เจตคติ หมายถึง ท่าที ความคิดเห็น ความรู้สึกของบุคคลที่มีต่อสิ่งหนึ่งสิ่งใดภายหลังจากการที่บุคคลได้รับประสบการณ์ ในสิ่งนั้น ในการศึกษาครั้งนี้มุ่งวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนและหลังที่กลุ่มตัวอย่างได้เรียน จบเนื้อหาที่ทดลองแล้ว ซึ่งวัดออกมาเป็นคะแนนโดยใช้แบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ประภาเพ็ญ สุวรรณ (ประภาเพ็ญ สุวรรณ 2520 : 4) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของเจตคติไว้ว่า

1. ช่วยทำให้เข้าใจสิ่งแวดล้อมรอบ ๆ ตัว โดยการจัดรูปหรือจัดระบบสิ่งของต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวเขา
2. ช่วยให้มีการเข้าข้างตนเอง (Self - Esteem) โดยช่วยให้บุคคลหลีกเลี่ยงสิ่งที่ไม่ดี หรือปกปิดบางสิ่งบางอย่าง ซึ่งนำความไม่พอใจมาสู่ตัวเขา
3. ช่วยในการปรับตัวให้เข้ากับสิ่งแวดล้อมที่สลับซับซ้อน ซึ่งการมีปฏิริยาโต้ตอบหรือการกระทำสิ่งใดสิ่งหนึ่งลงไปในนั้น ส่วนมากจะทำในสิ่งที่ไม่ความพอใจมาให้หรือเป็นบ่าเห็นจรรยาวัธจากสิ่งแวดล้อม
4. ช่วยให้บุคคลสามารถแสดงออกถึงกานิยมของตนเอง ซึ่งแสดงว่าเจตคตินั้นนำความพอใจมาสู่บุคคลนั้น

สำหรับการเปลี่ยนเจตคติ ชูชีพ อ่อนโคกสูง (ชูชีพ อ่อนโคกสูง 2518 : 7) แปลมาจาก Herbert C. Calman ได้อธิบายการเปลี่ยนเจตคติว่า เป็นไปตามสภาพแวดล้อมของสังคมภายใต้กระบวนการดังนี้

1. การยินยอม (Compliance) คือการยอมรับอิทธิพลจากผู้อื่น เพื่อให้เขาปฏิบัติตัวในทางที่ตนต้องการหรือพอใจ
2. การเลียนแบบ (Identification) คือการแสดงพฤติกรรมเพื่อให้เหมือนสมาชิกในสังคม หรือเพื่อให้คนอื่นเห็นว่าตนเป็นคนเก่ง เพื่อจะมีสัมพันธภาพอันดีกับคนอื่น
3. รับอิทธิพลจากสิ่งต่าง ๆ เนื่องจากตรงกับค่านิยมที่มีอยู่ในตัวบุคคลเอง (Internalization)

นอกจากนี้ ไทรแอนด์ส (Triandis. 1971 : 3) ได้กล่าวถึงสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงเจตคติไว้ดังนี้ คือ

1. ได้รับข้อมูลใหม่จากบุคคลหรือสื่อมวลชน
2. ได้รับประสบการณ์ตรงหรือความกระทบกระเพื่อใจ
3. ถูกบังคับให้ปฏิบัติไม่ตรงกับเจตคติของตน
4. การรักษาทางจิตใจเพื่อให้เข้าใจเหตุผลที่ถูกต้องขึ้น
5. เปลี่ยนเพื่อให้สอดคล้องกับพฤติกรรมใหม่

จะเห็นว่าเจตคติของบุคคลสามารถที่จะเปลี่ยนแปลงได้ภายใต้สถานการณ์หลาย ๆ อย่างดังกล่าวนั้นแล้ว ในทำนองเดียวกันเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ก็สามารถเปลี่ยนแปลงได้

การทดสอบวัดเจตคติกระทำเพื่อจะไต่ถามถึงเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้สามารถจัดสภาพแวดล้อมต่าง ๆ ได้ถูกต้องเหมาะสมในการเรียนการสอน

ในการวัดเจตคตินั้น มีนักการศึกษาหลายท่านได้สร้างเครื่องมือวัดเจตคติไว้อย่างหลายแบบด้วยกัน เช่น วัดเจตคติโดยใช้ Equal Appearing Intervals ของ เซอร์สตัน การวัดเจตคติโดยใช้วิธี Scalogram Analysis ของ กัดแมน การวัดเจตคติโดยใช้วิธี Semantic Differential ของ ออสกูดและคนอื่น ๆ นอกจากนี้อาจใช้วัดเจตคติโดยใช้วิธี Projective Techniques ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกใช้วิธี Summated Rating ของ Likert ที่สมบูรณ์ จิตพงศ์ สร้างไว้นามาใช้ในการวิจัย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ในต่างประเทศได้มีผู้วิจัยเกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ฟรานซิส (Francies. 1971 : 133-A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาเลขคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนเกรด 4 และเกรด 6 ในโรงเรียนประถม จำนวน 150 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเลขคณิตในระดับปานกลางและระดับสูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ดีกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเลขคณิตต่ำ นอกจากนี้ยังพบอีกว่านักเรียนเกรด 4 มีเจตคติในเรื่องความรู้สึกส่วนตัวต่อวิชาเลขคณิตดีกว่านักเรียนเกรด 6 และนักเรียนเกรด 6 มีเจตคติในเรื่องความสำคัญของวิชาเลขคณิตดีกว่านักเรียนเกรด 4

บราวน์และโฮลทซ์แมน (Brown and Holtzman. 1976 : 4) ได้ศึกษา

พบว่า

1. เจตคติในการเรียนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญ
2. นักเรียนที่มีสติปัญญาเท่าเทียมกัน แต่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันเป็นเพราะมีเจตคติและแรงจูงใจในการเรียนแตกต่างกัน
3. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนส่วนใหญ่ที่มีเจตคติไปในทางลบจะได้คะแนนต่ำกว่าระดับคะแนนที่คาดหวัง ส่วนนักเรียนที่มีเจตคติไปในทางบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์สามารถหาคะแนนเฉลี่ยได้เหนือกว่าระดับคะแนนที่คาดหวัง

จากผลการวิจัยทั้งสองครั้งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ พอสรุปได้ว่า นักเรียนที่มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงด้วย ฉะนั้นการเสริมสร้างเจตคติจึงเป็นส่วนสำคัญมากในการสอนคณิตศาสตร์

สำหรับในประเทศไทย ได้มีผู้วิจัยเกี่ยวกับเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

सानนท์ นายศรีศิริ (सानนท์ นายศรีศิริ 2522 : 103) ได้ศึกษาองค์ประกอบบางประการที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในจังหวัดนครปฐมพบว่า เจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นตัวพยากรณ์ที่ดี กล่าวคือนักเรียนที่มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มีแนวโน้มว่าจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงด้วย

วัฒนา หงษ์ภู (วัฒนา หงษ์ภู 2523 : 50 - 51) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเจตคติทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า เจตคติทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

เคชา นุ่นพันธุ์ (เคชา นุ่นพันธุ์ 2525 : 43) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ พบว่ากลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากงานวิจัยดังกล่าวจะเห็นว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่น่าสนใจควรจะนำมาศึกษาค้นคว้า เนื่องจากเจตคติเป็นเครื่องบ่งชี้หนึ่งของพฤติกรรมอันจะนำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายของหลักสูตร

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังกล่าวข้างต้นได้ให้ข้อคิดที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล และประสิทธิภาพของการสอนแบบนี้ที่ได้นำไปใช้สอนในระดับอุดมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ตลอดจนข้อคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ พอสรุปได้ว่าการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลเป็นการสอนที่ช่วยให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและมีเจตคติต่อวิชาที่เรียนดีขึ้นในเกือบทุกรายวิชา ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำแนวการจัดการเรียนการสอนของการสอนแบบนี้มาทดลองใช้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อศึกษาว่า เมื่อผู้เรียนได้เรียนโดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลแล้ว จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร เมื่อเปรียบเทียบกับ การสอนตามปกติ ตลอดจนศึกษาถึงปฏิสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนทั้งสองแบบกับระดับความสามารถทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องแสดงให้เห็นว่า การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเดอร์มีประสิทธิภาพดีในการใช้สอนในระดับอุดมศึกษา เนื่องจากภาวะของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีระดับใกล้เคียงกับนักศึกษาในระดับอุดมศึกษา ฉะนั้นการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลจึงน่าจะใช้ได้ดีกับนักเรียนในระดับนี้ด้วย ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจะศึกษาผลของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติว่าจะส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายแตกต่างกันหรือไม่

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล กับการสอนตามปกติแตกต่างกัน
2. มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับความสามารถทางการเรียน
3. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เกิดจากการสอนทั้งสองแบบแตกต่างกัน

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ คือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทย์ - คณิต ของโรงเรียนคุรุราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอจอมบึง จังหวัดราชบุรี ปีการศึกษา 2529 มีนักเรียน 4 ห้องเรียน จำนวน 180 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทย์ - คณิต โรงเรียนคุรุราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอจอมบึง จังหวัดราชบุรี ปีการศึกษา 2529 จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ

1. กลุ่มทดลอง จำนวน 30 คน เป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน ได้รับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
2. กลุ่มควบคุม จำนวน 30 คน เป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน ได้รับการสอนแบบการสอนตามปกติ

วิธีการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยวิธีการสุ่มตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 สุ่มห้องเรียน 2 ห้องเรียนจากห้องเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียน โดยวิธี

การจับฉลาก

ขั้นที่ 2 แบ่งนักเรียนทั้ง 2 ห้องเรียนเป็นกลุ่มตามความสามารถทางการเรียน โดยใช้ผลการสอบวัดผลวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2529 เป็นเกณฑ์ในการจัดกลุ่มจะได้นักเรียน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ

ขั้นที่ 3 สุ่มโดยวิธีจับฉลากจากรายชื่อนักเรียนที่แบ่งเป็นกลุ่มตามความสามารถทางการเรียนในข้อ 2 มากลุ่มละ 20 คน จะได้กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 20 คน ปานกลาง 20 คน และต่ำ 20 คน

ขั้นที่ 4 สุ่มนักเรียนในแต่ละระดับความสามารถเข้าสู่กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละเท่า ๆ กัน จะได้กลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลองมีนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน กลุ่มควบคุมมีนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง 10 คน ปานกลาง 10 คน และต่ำ 10 คน

แบบแผนของการทดลอง

การวิจัยครั้งนี้เป็นวิจัยเชิงทดลองโดยใช้แบบแผนการทดลองแบบ Treatments x levels Designs ชนิด 2 Treatments และ 3 Levels ตามรูปแบบของ ลินควิส (Lindquist. 1956 : 121 - 127) กำหนดไว้ตามแผนผังที่แสดงไว้ในตาราง 1

ตาราง 1 แบบแผนการวิจัย

	A_1	A_2
L_1	m_{11}	m_{12}
L_2	m_{21}	m_{22}
L_3	m_{31}	m_{32}

เมื่อ A คือ การสอนสองแบบ ซึ่งเป็นแฟกเตอร์ที่ต้องจัดกระทำการทดลอง (Treatment) ได้แก่

A_1 คือ การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

A_2 คือ การสอนตามปกติ

- L คือ ระดับความสามารถซึ่งเป็นแฟกเตอร์ที่ไม่ต้องกระทำการทดลอง (Non - Treatment) แบ่งเป็น 3 ระดับ ได้แก่
- L_1 คือ กลุ่มที่มีระดับความสามารถทางการเรียนสูง
 - L_2 คือ กลุ่มที่มีระดับความสามารถทางการเรียนปานกลาง
 - L_3 คือ กลุ่มที่มีระดับความสามารถทางการเรียนต่ำ

วิธีดำเนินการ

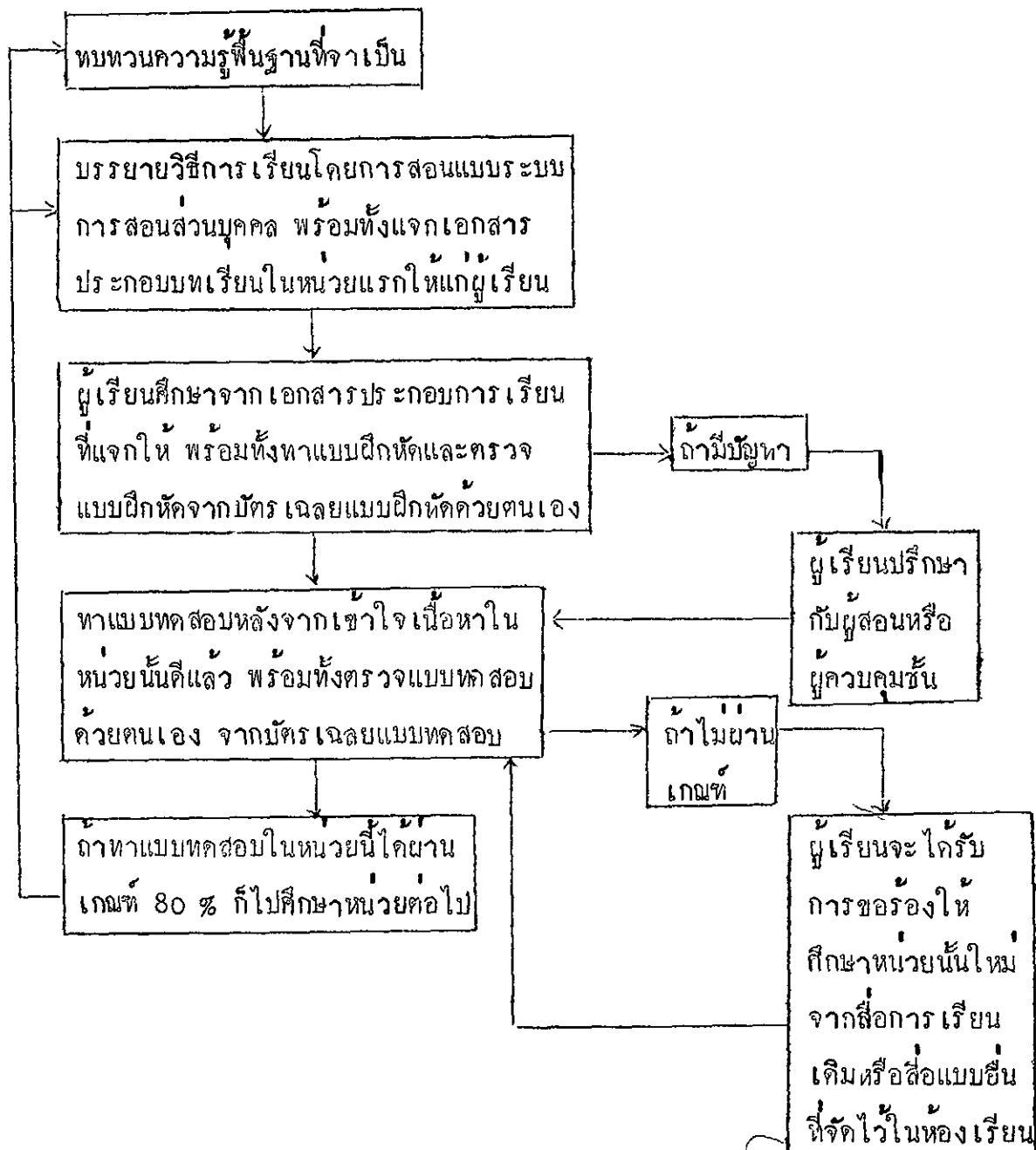
1. การเตรียมการก่อนการทดลอง

1.1 ปรับปรุงแก้ไขวิธีการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ให้เหมาะสมกับสภาพการจัดการเรียนการสอนของโรงเรียนชั้นมัธยมศึกษาในประเทศไทย

เนื่องจากการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์ นั้น มีปัญหาและอุปสรรคบางประการที่ไม่สามารถนำวิธีการทั้งหมดของการสอนดังกล่าวมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาของประเทศไทยได้ ทั้งที่ สุรพล วัฒนวิทย์กิจ (สุรพล วัฒนวิทย์กิจ 2526 : เอกสารอัครสำเนา) ได้กล่าวว่า ปัญหาและอุปสรรคที่สำคัญของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์ คือ การสอนแบบนี้มิได้บังคับให้ผู้เรียนเข้าทดสอบความรู้ตามเวลาที่กำหนด ดังนั้นผู้เรียนมักทวนเวียนหรือถ่วงเวลา ผลัดวันประกันพรุ่ง ซึ่งทำให้ผู้เรียนไม่สามารถเรียนเนื้อหาได้ทันตามที่หลักสูตรกำหนด นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดบางประการที่ กิตติ พัฒนตระกูลสุข (กิตติ พัฒนตระกูลสุข 2524 : 115) ได้กล่าวถึงปัญหาในการจัดการเรียนการสอนแบบนี้ว่า การหาผู้ควบคุมชั้นที่มากพอและมีคุณสมบัติตามที่ผู้สอนต้องการทำได้ยาก และวิธีการจัดการเรียนการสอนยังขัดแย้งกับกฎเกณฑ์ของสถานศึกษาที่ระบุให้ผู้เรียนต้องเข้าห้องเรียนตามปกติ อีกประการหนึ่งจากประสบการณ์ของผู้วิจัยเอง พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาของไทยนั้นยังต้องการการควบคุมอย่างใกล้ชิด การปล่อยให้ผู้เรียนเรียนอย่างอิสระเสรีเกินไป โดยที่ผู้สอนไม่สามารถติดตามหรือควบคุมการกระทำของผู้เรียนขณะที่อยู่ในโรงเรียนได้อย่างทั่วถึงนั้นอาจจะทำให้เกิดความเสียหายในหลาย ๆ ด้าน ทั้ง

ด้านการเรียนและด้านความประพฤติของผู้เรียน ด้วยเหตุผลดังกล่าวแล้ว ผู้วิจัยจึงได้ปรับปรุงแก้ไขวิธีการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เกกเลอร์ในบางขั้นตอนให้เหมาะสมกับสภาพการจัดการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษาในประเทศไทย

การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของ เกกเลอร์ที่ผู้วิจัยได้ปรับปรุงแก้ไข ขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอนมีดังนี้



ภาพประกอบ 2 แสดงขั้นตอนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่

ขั้นตอนการเรียนการสอนตามขั้นตอนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่

ขั้นที่ 1 ทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับใช้ในการศึกษาเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ แล้วชี้แจงรายละเอียดของวิธีการเรียน โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล พร้อมชี้แจงเอกสารประกอบบทเรียน วิธีการศึกษาเนื้อหา ในหน่วยการเรียนรู้จากเอกสารประกอบบทเรียน ตลอดจนเกณฑ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการศึกษาหน่วยนี้

ขั้นที่ 2 ผู้เรียนรับเอกสารประกอบบทเรียน และศึกษาค้นคว้าจากเอกสารประกอบบทเรียน โดยผู้สอนและผู้ควบคุมชั้นจะจัดเอกสารต่าง ๆ ได้แก่ เอกสารแนะแนวทางบทเรียนโปรแกรม และตำราประกอบบทเรียนหลาย ๆ เล่ม ไว้ในห้องเรียนเพื่อให้ผู้เรียนได้เลือกใช้เอกสารต่าง ๆ เหล่านั้นตามความต้องการ จากนั้นผู้เรียนจะทำแบบฝึกหัด และตรวจแบบฝึกหัดด้วยตนเอง จากบัตรเฉลยที่จัดเตรียมไว้ให้

ขั้นที่ 3 เมื่อการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้หนึ่ง ๆ เสร็จสิ้นไปแล้ว ผู้เรียนจะได้รับแบบทดสอบประจำหน่วย

ขั้นที่ 4 หลังจากทำแบบทดสอบประจำหน่วยเสร็จแล้วผู้เรียนจะได้รับบัตรเฉลยแบบทดสอบ ผู้เรียนจะตรวจแบบทดสอบด้วยตนเองจากบัตรเฉลยที่จัดไว้ให้สำหรับผู้ที่ได้คะแนน 80 % ขึ้นไป จะได้รับคำชมเชยจากผู้สอน และบันทึกผลการเรียนในหน่วยนั้น และได้รับอนุญาตให้ศึกษาหน่วยการเรียนรู้หน่วยต่อไป

สำหรับเกณฑ์ที่กำหนดในระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ เคมีนั้น ได้กำหนดให้ผู้เรียนต้องผ่านเกณฑ์ 100 % ในแต่ละหน่วยจึงจะผ่านไปเรียนหน่วยต่อไปได้ ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้นี้สูงเกินไป ผู้เรียนจะทากะแนนให้ผ่านเกณฑ์ได้ยาก และเพื่อให้สอดคล้องกับเกณฑ์การวัดผลของกระทรวงศึกษาธิการ ที่กำหนดเกณฑ์ไว้ว่า ผู้ที่สอบได้คะแนนร้อยละ 80 - 100 จะมีผลการเรียนในระดับ "ดีมาก" ฉะนั้นผู้วิจัยจึงกำหนดเกณฑ์ผ่านในแต่ละหน่วยการเรียนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ในการวิจัยครั้งนี้ไว้เพียง 80 % ถือว่าผู้เรียนมีความรอบรู้ พอที่จะเรียนหน่วยต่อไปได้

ขั้นที่ 5 สำหรับผู้เรียนที่ผลการเรียนไม่ถึงเกณฑ์ความรอบรู้จะได้รับการขอร้องให้กลับไปทบทวนหน่วยการเรียนรู้เดิม จากสื่อการเรียนรู้เดิมหรือสื่อการเรียนรู้แบบอื่นที่จัดไว้ให้

ในห้องเรียน ในกรณีที่มีปัญหามาก ๆ ผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น อาจจะเป็นผู้สอนให้ก็ได้เมื่อผู้เรียนเกิดการเรียนรู้แล้วจึงกลับมาสอบใหม่ โดยใช้แบบทดสอบที่แตกต่างจากเดิมแต่สอบเนื้อหาเดียวกัน

เนื่องจากมีข้อจำกัดเกี่ยวกับเวลาซึ่งหลักสูตรได้กำหนดไว้จำกัด ทำให้ผู้เรียนไม่สามารถที่จะศึกษาเนื้อหาในหน่วยเดียวได้หลาย ๆ ครั้ง ผู้วิจัยจึงได้ปรับเกณฑ์การสอบผ่านครั้งที่ 2 ไว้เพียง 50 % โดยยึดเอาเกณฑ์การวัดผลของกระทรวงศึกษาธิการ ที่กำหนดเกณฑ์ไว้ว่าผู้ที่สอบได้คะแนนร้อยละ 50 - 59 จะมีผลการเรียนได้ระดับ "ผ่าน" ฉะนั้นถ้าผู้เรียนทำคะแนนของแบบทดสอบครั้งที่ 2 ได้ร้อยละ 50 ถือว่าผู้เรียนมีความรู้พื้นฐานพอที่จะเรียนหน่วยต่อไปได้

ข้อแตกต่างระหว่างการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือแผนการเรียนการสอนของเซลล์เลอร์แบบเดิม กับการจัดการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลที่ผู้วิจัยได้ปรับปรุงแก้ไขใหม่สรุปได้ดังตาราง 2 ดังนี้

ตาราง 2 การเปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลหรือแผนการเรียนการสอนของเซลล์เลอร์เดิม กับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลที่ปรับปรุงแก้ไขใหม่

แบบเดิม	แบบปรับปรุงใหม่
1. ผู้เรียนจะศึกษาเนื้อหาในหน่วยการเรียนจากเอกสารประกอบบทเรียนที่ผู้สอนแจกให้ โดยจะศึกษาสถานที่ใดเวลาใดก็ได้	1. ผู้เรียนจะศึกษาเนื้อหาในหน่วยการเรียนจากเอกสารประกอบบทเรียนที่ผู้สอนแจกให้ในช่วงเวลาและสถานที่ที่ผู้สอนกำหนดให้

ตาราง 2 (ต่อ)

แบบเดิม	แบบปรับปรุงใหม่
2. ผู้สอนจะกำหนดวัน และช่วงเวลา ที่ผู้เรียนสามารถจะมาขอแบบทดสอบและ ทำการทดสอบได้ทันทีหลังจากเข้าใจ บทเรียนนี้แล้ว และผู้สอนจะกำหนดวันสอบ ที่แน่นอนไว้เฉพาะวันสุดท้ายที่ผู้เรียนจะต้อง สอบให้ผ่านในหน่วยการเรียนทุกหน่วย การเรียนเท่านั้น	2. ผู้สอนกำหนดเวลาสอบของแต่ละหน่วย ไว้แน่นอน ผู้เรียนสามารถที่จะขอสอบก่อน กำหนดเวลาได้ แต่จะสอบหลังเวลาที่กำหนด โดยไม่มีเหตุผลที่เพียงพอไม่ได้
3. เมื่อผู้เรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว จะส่งแบบทดสอบให้ผู้ควบคุมชั้นเป็นผู้ตรวจ ให้คะแนนและตัดสินว่าผ่านเกณฑ์หรือไม่ผ่าน เกณฑ์ของการสอบ	3. เมื่อผู้เรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้เรียนจะตรวจสอบแบบทดสอบด้วยตัวผู้เรียนเอง จากบัตรเฉลยแบบทดสอบ และเป็นผู้ตัดสิน ตัวเองว่าผ่านเกณฑ์ 80 % หรือไม่ โดยที่ ผู้สอนมีการควบคุมข้อผิดพลาดในการตรวจ แบบทดสอบ 2 ชั้นตอน คือ
4. ถ้าผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด จะได้รับการขอร้องให้กลับไปศึกษาเนื้อหา ในหน่วยนั้นใหม่อีกครั้ง เมื่อคิดว่าตนเอง เข้าใจเนื้อหานั้นดีแล้วก็กลับไปสอบใหม่	3.1 เตือนให้นักเรียนชื่อสำคัญต่อ ตนเอง 3.2 ผู้สอนให้ผู้เรียนทำสำเนา คำตอบส่งผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้นก่อนที่จะรับ บัตรเฉลยแบบทดสอบ 4. ถ้าผู้เรียนไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดจะ ได้รับการขอร้องให้กลับไปศึกษาในหน่วยเดิม แต่สามารถจะศึกษาจากสื่อการเรียนอย่างเดิม หรือ เปลี่ยนสื่อการเรียนอย่างอื่นที่จัดเตรียม

ตาราง 2 (ต่อ)

แบบเดิม	แบบปรับปรุงใหม่
ถ้าสอบได้ผ่านเกณฑ์ 100 % ก็ได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยต่อไป ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ 100 % ก็ได้รับการขอรองให้กลับไปศึกษาหน่วยนั้นใหม่จนกว่าจะสามารถสอบผ่านเกณฑ์ 100 %	ไว้ให้ในห้องเรียน เมื่อคิดว่าตนเองเข้าใจเนื้อหานั้นก็แล้วก็กลับไปสอบใหม่ ถ้าสอบได้ผ่านเกณฑ์ 80 % แต่ผ่านเกณฑ์ 50 % ก็จะได้รับอนุญาตให้เรียนหน่วยต่อไป

ข้อจำกัดที่สำคัญอีกประการหนึ่งของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล หรือ แผนการเรียนการสอนของ เคลเลอร์ คือ การหาผู้ควบคุมชั้นที่มากพอและมีคุณสมบัติตามที่ผู้สอนต้องการทำได้ยาก (กิตติ พัฒนตระกูลสุข 2524 : 115) ผู้วิจัยจึงได้ลดจำนวนของผู้ควบคุมชั้นเหลือเพียง 1 คน และได้เพิ่มวิธีการจัดการเรียนการสอนบางประการ เพื่อทดแทนผู้ควบคุมชั้น ได้แก่

ก. ทำบัตรเฉลยแบบฝึกหัด เพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจแบบฝึกหัดที่ผู้เรียนทำเสร็จแล้วด้วยตัวผู้เรียนเอง

ข. ทำบัตรเฉลยแบบทดสอบประจำหน่วยเพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจแบบทดสอบและตัดสินผลการสอบด้วยตัวผู้เรียนเอง

ค. เตรียมบทเรียนโปรแกรมไว้สำหรับการซ่อมเสริม

1.2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ สร้างแผนการสอนรายคาบ สำหรับการสอนตามปกติ เขียนคำแนะนำสำหรับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล เขียนคำแนะนำเนื้อหาในแต่ละหน่วย เขียนคำแนะนำประจำหน่วยการเรียน เขียนเอกสารประกอบบทเรียน และคัดเลือกตำราประกอบบทเรียน สำหรับใช้ในการสอนแบบ

ระบบการสอนส่วนบุคคล สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ใช้
สำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ประจำหน่วยการเรียนรู้และวัดผลสัมฤทธิ์หลังจากจบบทเรียน

1.3 คำเป็นการติดต่อบุคลากรโรงเรียน เพื่อขอความร่วมมือในการใช้
สถานที่และบุคลากรสำหรับใช้ในการทดลอง

1.4 ขอความร่วมมือจากผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ทำการทดลอง
เพื่อทำหน้าที่เป็นผู้ควบคุมชั้น

1.5 ติดต่อบุคลากรและแยกต่าง ๆ เกี่ยวกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง
จากอาจารย์ประจำชั้นและอาจารย์ประจำวิชา

1.6 สุ่มกลุ่มตัวอย่างดังได้กล่าวแล้วในการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

1.7 ประชุมชี้แจงรายละเอียดในการทดลองเป็นการประชุมร่วมกัน
ทั้งผู้วิจัย ผู้ควบคุมชั้น และกลุ่มตัวอย่าง

1.8 ทดสอบก่อนการเรียนโดยใช้แบบทดสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
ใช้เวลา 30 นาที

2. การดำเนินการทดลอง

2.1 ผู้วิจัยเป็นผู้สอนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุมด้วยตนเองด้วยการ
แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามระดับความสามารถแล้วสอนด้วยการสอนตามปกติ โดยใช้
เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันและกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวในคู่มือครูของ สสวท. เหมือนกัน
ทุกกลุ่ม ใช้เวลาในการสอน 12 คาบ

2.2 กลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลองจะได้รับการสอนด้วยการสอนแบบระบบ
การสอนส่วนบุคคล นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจะศึกษาเนื้อหาเรื่องฟังก์ชันจากเอกสารประกอบ
บทเรียนที่ผู้สอนจัดไว้ให้ด้วยตัวนักเรียนเองตามสถานที่และเวลาที่กำหนด โดยมีผู้สอนและ
ผู้ควบคุมชั้นคอยให้ความช่วยเหลือตามความจำเป็นใช้เวลาในการสอน 12 คาบ

3. เมื่อสิ้นสุดการเรียนการสอนตามกำหนด ให้ผู้เรียนทั้งสองกลุ่มทำการทดสอบ หลังการเรียนด้วยแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบ วัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

4. ตรวจสอบผลการทดสอบ แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

ระยะเวลาของการทดลอง

การวิจัยครั้งนี้ทำการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2529 ใช้เวลา กลุ่มละ 3 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 คาบ คาบละ 50 นาที จำนวนคาบทั้งหมด 12 คาบ

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้คือ วิชาคณิตศาสตร์ ค.012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 ของกระทรวงศึกษาธิการ เรื่อง ฟังก์ชัน โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 หัวข้อเรื่อง คือ

1. ความหมายของฟังก์ชัน
2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ
3. ฟังก์ชันคอมโพสิท
4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส
5. พีชคณิตฟังก์ชัน

จากเนื้อหาทั้ง 5 หัวข้อเรื่อง ผู้วิจัยได้แบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยย่อย ๆ สำหรับใช้ สอนทั้งการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลและการสอนตามปกติ ออกเป็น 3 หน่วย ใช้ เวลาสอนหน่วยละ 1 สัปดาห์ แต่ละหน่วยประกอบด้วยหัวข้อย่อย ดังนี้

หน่วยที่ 1

เรื่องที่ 1 ความหมายของฟังก์ชันและการตรวจสอบฟังก์ชัน

เรื่องที่ 2 ความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B

เรื่องที่ 3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

เรื่องที่ 4 รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

หน่วยที่ 2

เรื่องที่ 5 ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

เรื่องที่ 6 ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ (ต่อ)

เรื่องที่ 7 ฟังก์ชันควอราติก การเขียนกราฟ และการหาค่าต่ำสุด
สูงสุด

เรื่องที่ 8 ฟังก์ชันอินเวอร์ส

หน่วยที่ 3

เรื่องที่ 9 คอมโพสิตฟังก์ชัน

เรื่องที่ 10 คอมโพสิตฟังก์ชัน (ต่อ)

เรื่องที่ 11 ฟิสิกคิตฟังก์ชัน

เรื่องที่ 12 ฟิสิกคิตฟังก์ชัน (ต่อ)

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. แผนการสอนรายคาบใช้สำหรับสอนกลุ่มควบคุม โดยใช้การสอนตามคู่มือครู
ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามแนวการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนของคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค.012
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของกระทรวงศึกษาธิการ จำนวน 12 คาบ

2. เครื่องมือที่ใช้สำหรับกลุ่มทดลอง ซึ่งประกอบด้วย

2.1 คำแนะนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลเป็นคำแนะนำให้
ผู้เรียนได้ทำความเข้าใจรายละเอียดต่าง ๆ ของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

ส่วนบุคคล

- 2.1.1 กำหนดการเรียนรู้โดยการสอนแบบระบบการสอน
- 2.1.2 ขั้นตอนการเรียนรู้โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
- 2.1.3 องค์ประกอบของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
- 2.1.4 สาเหตุสำคัญที่ทำให้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

ประสบผลสำเร็จ

2.2 คำแนะนำเนื้อหาในแต่ละหน่วยและขั้นตอนในการเรียนแต่ละหน่วยการเรียนรู้
ผู้วิจัยได้เขียนคำแนะนำในรูปแบบของการบรรยายรายละเอียดในแต่ละขั้นตอนซึ่งประกอบด้วย
หัวข้อต่อไปนี้

- 2.2.1 ชื่อเรื่องและรายละเอียดในการแบ่งเนื้อหาของแต่ละหน่วย
- 2.2.2 ส่วนประกอบของหน่วยการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย
 - ก. หัวข้อเรื่องที่จะต้องศึกษา
 - ข. สิ่งที่ต้องทบทวน
 - ค. วัตถุประสงค์ของการสอนแต่ละหน่วย
 - ง. แบบฝึกหัดประจำหน่วยและบัตรเฉลยแบบฝึกหัด
 - จ. เอกสารประกอบบทเรียน
 - ฉ. แนวคิดในการศึกษาเนื้อหาในแต่ละหน่วย
 - ช. แบบทดสอบประจำหน่วยและบัตรเฉลยแบบทดสอบ
- 2.2.3 ขั้นตอนการเรียนรู้โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
- 2.2.4 กำหนดเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย
- 2.2.5 กำหนดเวลาสอบประจำบทเรียน

2.3 คำแนะนำประจำหน่วยการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่าง ๆ ตาม
หัวข้อ 2.2.2 โดยขยายรายละเอียดของส่วนประกอบต่าง ๆ ไว้อย่างชัดเจน

2.4 เอกสารประกอบบทเรียนเป็นสื่อการเรียนรู้สำหรับการใช้
ในหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วย ซึ่งประกอบด้วยสื่อการเรียนรู้ 3 ชนิด ได้แก่

2.4.1 เอกสารแนะแนวทาง

2.4.2 บทเรียนโปรแกรม

2.4.3 ตารางประกอบบทเรียน

2.5 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบอิงโคเมนวัด
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบทดสอบอิงโคเมน 2 ชุด

2.6 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

2.7 แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือสำหรับการทดลอง

1. แผนการสอนรายคาบมีลำดับขั้นการสร้างดังนี้

1.1 ศึกษาเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค. 012 เรื่องฟังก์ชันแล้วจัดแบ่ง
เนื้อหาเป็นหัวข้อย่อย 12 หัวข้อเรื่อง ๆ ละ 1 คาบ

1.2 เขียนความคิดรวบยอดของแต่ละหัวข้อเรื่อง

1.3 เขียนจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของแต่ละหัวข้อเรื่อง

1.4 เขียนกิจกรรมการเรียนรู้การสอนของแต่ละหัวข้อเรื่อง

1.5 กำหนดอุปกรณ์ที่จะใช้ในแต่ละหัวข้อเรื่อง

1.6 กำหนดวิธีการวัดและประเมินผลในแต่ละหัวข้อเรื่อง

1.7 นำแผนการสอนที่สร้างเสร็จแล้วให้อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์

ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นผู้ตรวจแผนการสอนเพื่อดูความเหมาะสมของเนื้อหา จุดประสงค์
เชิงพฤติกรรม กิจกรรมการเรียนรู้การสอนอุปกรณ์ การวัดและประเมินผล

2. คำแนะนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ผู้วิจัยได้เขียนบรรยาย
รายละเอียดของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลตามลำดับหัวข้อเรื่องที่กำหนดไว้ใน
เรื่องเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

3. คำแนะนำเนื้อหาในแต่ละหน่วยและขั้นตอนในการเรียนการสอนในแต่ละหน่วย ผู้วิจัยได้จัดทำขึ้นตามลำดับขั้นดังนี้

3.1 ศึกษารายละเอียดของเนื้อหาเรื่อง พังกัณฑ์ จากหลักสูตรคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 แล้วแบ่งเนื้อหาจาก 5 หัวข้อ ตามที่หลักสูตรกำหนด เป็น 3 หน่วยย่อยแต่ละหน่วยประกอบด้วย 4 หัวข้อเรื่องเพื่อให้ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย 3 ท่านช่วยตรวจสอบในเรื่องความเหมาะสมของเนื้อหา

3.2 กำหนดส่วนประกอบของหน่วยการเรียนรู้ว่าในหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วยประกอบด้วยอะไรบ้าง ซึ่งได้กล่าวแล้วในเรื่อง เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

3.3 บรรยายขั้นตอนการเรียนรู้โดยการสอนแบบระบบการมีส่วนร่วมบุคคล

3.4 ระบุเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย

3.5 กำหนดเวลาสอบประจำบทเรียน

4. คำแนะนำประจำหน่วยการเรียนรู้ ผู้วิจัยได้เขียนบรรยายรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้ไว้อย่างชัดเจนตามลำดับขั้นดังนี้

4.1 หัวข้อเรื่องที่ต้งศึกษา ระบุหน่วยที่ต้งการศึกษาและหัวข้อเรื่องย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

4.2 กำหนดความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับใช้ในการศึกษาเนื้อหาในหน่วยนั้น ๆ

4.3 เขียนวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมในการสอนหน่วยนั้น ๆ

4.4 กำหนดแบบฝึกหัดประจำหน่วยพร้อมทั้งบัตรเฉลยแบบฝึกหัดนั้นด้วย

4.5 เขียนเอกสารประกอบการเรียน (จะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อเรื่องต่อไป)

4.6 เสนอแนะแนวคิดที่ผู้เรียนควรสนใจในการศึกษาเนื้อหาในหน่วยนั้น ๆ

4.7 เขียนแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ พร้อมทั้งทาบัตรเฉลยสำหรับแบบทดสอบนั้นด้วย

5. เอกสารประกอบการเรียน

5.1 เอกสารแนะแนวทาง ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้

5.1.1 ศึกษารายละเอียดของเนื้อหาและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้แล้วในคำแนะนำประจำหน่วยการเรียนรู้

5.1.2 ศึกษาถึงปัญหาและอุปสรรคในการสอนและการเรียน เนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน จากผู้สอนที่ทำการสอนเนื้อหานี้มาแล้วหลายครั้ง และจากนักเรียนที่เรียนเนื้อหาเรื่องนี้มาแล้ว เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการเขียนรายละเอียดของเนื้อหา

5.1.3 เขียนบรรยายรายละเอียดของเนื้อหาทุกแง่มุม โดยใช้ภาษาอย่างง่าย ๆ เหมาะสมกับระดับชั้น พร้อมทั้งมีตัวอย่างประกอบทุกขั้นตอน

5.1.4 นำเอกสารแนะแนวทางที่เขียนเสร็จแล้วไปให้ผู้สอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่ง เป็นผู้เชี่ยวชาญในเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน เป็นอย่างดี เป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาและดูความเหมาะสมของการใช้ภาษาของเอกสารแนะแนวทาง

5.1.5 นำเอกสารแนะแนวทางที่เขียนเสร็จแล้วไปทดลองใช้ตามลำดับชั้น ดังนี้

ชั้นที่ 1 ทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่เป็นกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 2 คน พร้อม ๆ กัน เพื่อหาข้อบกพร่องและปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 1

ชั้นที่ 2 ทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่ในกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 2 คน พร้อม ๆ กัน เพื่อหาข้อบกพร่องและปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 2

ชั้นที่ 3 ทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่ในกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 1 ห้องเรียน เพื่อทดลองลำดับขั้นตอนการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลและเป็นการปรับปรุงครั้งสุดท้ายก่อนที่จะนำไปทดลองสอนจริง

5.2 บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้

5.2.1 ศึกษาเนื้อหาและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้แล้วในแต่ละหน่วยการเรียนรู้อย่างละเอียด

5.2.2 เขียนแบบเรียนตามลำดับเนื้อหาและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้แล้ว

5.2.3 ปรับปรุงแบบเรียนตามลำดับขั้นดังนี้

ก. ปรับปรุงความถูกต้องของเนื้อหา โดยให้ผู้สอน คณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญในเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน เป็นอย่างดี เป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา

ข. นำแบบเรียนที่ปรับปรุงแล้วในข้อ ก. ไปทดลองใช้ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 1 คน แล้วนำแบบเรียนไปปรับปรุงด้านภาษา

ค. นำแบบเรียนที่ปรับปรุงแล้วในข้อ ข. ไปทดลองใช้ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 5 คน พร้อม ๆ กัน ผู้วิจัย สังเกตและบันทึกข้อบกพร่องของแบบเรียนแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ง. นำแบบเรียนที่ปรับปรุงแล้วในข้อ ค. ไปทดลองใช้ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน พร้อม ๆ กัน เช่นเดียว กับข้อ ค. เป็นการทดลองครั้งสุดท้ายก่อนนำไปสอนจริง

5.3 ทำารประกอบบทเรียน ผู้วิจัยได้เลือกหนังสือตำราแบบเรียนวิชา คณิตศาสตร์จากผู้แต่งหลาย ๆ ท่านที่มีเนื้อหาเรื่องฟังก์ชัน เป็นเนื้อหาบทหนึ่งในตำรา แบบเรียนนั้น สำหรับให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้า

5.4 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบอิงโคเนน ซึ่งมี ลำดับขั้นในการสร้างดังนี้

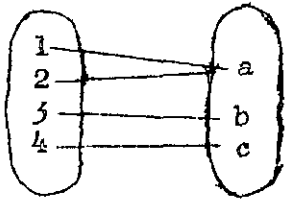
5.4.1 ศึกษาทฤษฎีและเอกสารงานวิจัย ที่เกี่ยวข้องกับการสร้าง แบบทดสอบอิงโคเนนตลอดจนหลักสูตร คู่มือครู เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบทดสอบ

5.4.2 ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์ของหลักสูตร เพื่อวิเคราะห์ เนื้อหาจุดประสงค์กำหนดโคเนนและกำหนดจุดประสงค์ย่อยในแต่ละโคเนน

5.4.3 นำเนื้อหา โดเมนและจุดประสงค์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญในเนื้อหา จำนวน 3 คน ตัดสินว่า โดเมนและจุดประสงค์ที่กำหนดขึ้นครอบคลุมเนื้อหาหรือไม่ โดยใช้วิธีของ โรวินเนลลีและแฮมเบิลตัน (สงวน ลักษณะ 2525 : 40 อ้างอิงมาจาก Rovinelli and Hambleton. 1977 : Unpagged)

หลังจากผู้เชี่ยวชาญ กำหนดคะแนนการพิจารณาความสอดคล้องระหว่าง โดเมนและจุดประสงค์กับเนื้อหาแล้วนำเอาคะแนนรวมของแต่ละจุดประสงค์ในแต่ละโดเมนจากผู้เชี่ยวชาญทั้งหมดไปหาค่าดัชนีความสอดคล้อง โดยดูว่าก่านักค่าเฉลี่ยของผู้เชี่ยวชาญ ถ้าค่าเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.5 ก็ถือว่า จุดประสงค์นั้นวัดไม่ครอบคลุมเนื้อหา

5.4.4 เขียนลักษณะเฉพาะของข้อสอบ ตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ โดยเขียนลักษณะเฉพาะของข้อสอบตามแบบของ สงวน ลักษณะ (สงวน ลักษณะ 2525 : 16) เมื่อเขียนลักษณะเฉพาะของข้อสอบตามจุดประสงค์แต่ละจุดประสงค์แล้ว เขียนข้อสอบตามลักษณะเฉพาะของข้อสอบจำนวน 4 ข้อ ต่อหนึ่งลักษณะเฉพาะของข้อสอบ ดังตัวอย่าง

จุดประสงค์	ลักษณะคำถาม	ลักษณะคำตอบ
บอกความสัมพันธ์ที่เป็นหรือไม่เป็น ฟังก์ชัน จากความสัมพันธ์ที่กำหนด ให้ได้	1. กำหนดความสัมพันธ์ใน รูปแผนภาพ หรือคู่อันดับ 2. โจทย์คำถามเขียนเป็น ประโยคว่า "ความสัมพันธ์ ในข้อใดเป็นหรือไม่เป็น ฟังก์ชัน"	1. รูปแบบการจัดตัว เลือก ให้อยู่ในแนวจากซ้ายไป ขวา 2. มี 5 ตัว เลือก แต่ละ ตัวเลือกจัดอยู่ในรูป  2.1 ตัว เลือกที่ถูก 1 ตัว 2.2 ตัวลงมี 4 ตัว การลากเส้น แสดงความ สัมพันธ์ แต่ละ ตัวเลือกให้มี ลักษณะคล้ายกัน

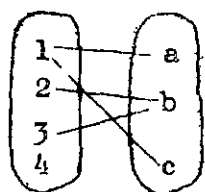
ตัวอย่างข้อสอบ

คำสั่งแจง จง เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด จากคำตอบ

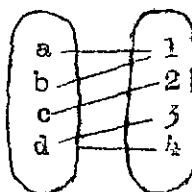
ก ข ค และ ง ของคำถามแต่ละคำถาม เพียงคำตอบเดียว

ข้อ (๐) ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

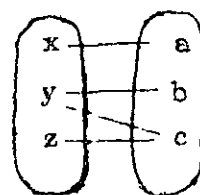
ก.



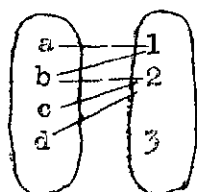
ข.



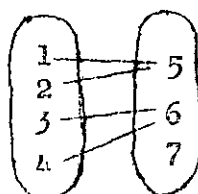
ค.



ง.



จ.



5.4.5 นำข้อสอบพร้อมลักษณะเฉพาะของข้อสอบ ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ
ในเนื้อหาวิชา ตักสินว่าลักษณะของข้อสอบแต่ละข้อ าคได้ตรงตามจุดประสงค์หรือไม่ ตาม
วิธีของ โรวินเนลลี และแฮมเบิลตัน (สงบ ลักษณะ 2525 : 40 อ้างอิงมาจาก

Rovinelli and Hambleton. 1977 : Unpaged) ดังตัวอย่างการประเมินดังนี้

คำชี้แจง ให้ท่านพิจารณาว่าลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบที่
สร้างจากลักษณะเฉพาะของข้อสอบนั้น มีความสอดคล้องกับ
จุดประสงค์หรือไม่ โดยพิจารณาให้หนักแน่น

1 แน่ใจว่าลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบนั้นมีความ
สอดคล้องกับจุดประสงค์

0 ไม่แน่ใจว่าลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบมีความ
สอดคล้องกับจุดประสงค์

-1 แน่ใจว่าลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบไม่มีความ
สอดคล้องกับจุดประสงค์

จุดประสงค์	ลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบ	ผลการประเมิน		
		1	0	-1
บอกความสัมพันธ์ที่เป็นหรือไม่เป็น พหุสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้	1. ลักษณะเฉพาะของข้อสอบตาม จุดประสงค์ที่ 1 2. ข้อสอบ ข้อ (0) ความสัมพันธ์ในข้อใด เป็นพหุสัมพันธ์			

หลังจากผู้เชี่ยวชาญกำหนดคะแนนการพิจารณาความสอดคล้องระหว่างลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบกับจุดประสงค์แล้วนั้น เขาจะแนรวมของแต่ละลักษณะเฉพาะของข้อสอบแต่ละข้อไปหาค่าดัชนี ความสอดคล้อง โดยดูจากน้ำหนักเฉลี่ยของผู้เชี่ยวชาญ ถ้าค่าเฉลี่ยมีค่าสูงกว่า 0.5 ถือว่าลักษณะเฉพาะของข้อสอบและข้อสอบมีความสอดคล้องกับจุดประสงค์ ถ้าค่าดัชนีต่ำกว่า หรือเท่ากับ 0.5 จะต้องปรับปรุงแก้ไข

5.4.6 แยกแบบทดสอบแต่ละโดเมนเป็น 2 ชุด ที่คู่ขนานกัน โดยวิธีการสุ่มข้อสอบ ที่สร้างจากลักษณะเฉพาะของข้อสอบเดียวกันออกเป็น 2 กลุ่ม แต่ละกลุ่มจะมีข้อสอบจำนวน 2 ข้อ

5.4.7 นำแบบทดสอบที่มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน ทั้งก่อนสอนและหลังสอน

5.4.8 วิเคราะห์ข้อสอบรายข้อ คัดเลือกและปรับปรุงข้อสอบ โดยพิจารณาจากค่าดัชนี เอส ที่มีค่าตั้งแต่ .00 - 1.00 ซึ่งถือว่ามีความน่าเชื่อถือ

5.4.9 หาคะแนนจุดตัดเกณฑ์ที่เหมาะสมของแบบทดสอบแต่ละฉบับ โดยวิธีให้ผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาพิจารณาจากเกณฑ์ที่นับลดจาก 100 % ตามเทคนิคของกลาส (ประเทือง ทาสีแสง 2527 : 82 - 83 อ้างอิงมาจาก Glass. 1978 : 237 - 261)

5.4.10 หากคุณภาพของแบบทดสอบ คือค่าความเชื่อมั่นโดยวิธีของ สวามินาน แอมเบิลตัน และอัจจินา (โกวิท ประวาลพุกภัย และสมศักดิ์ สินธุระเวช 2527 : 257 - 259 อ้างอิงมาจาก Swaminan, Hambleton and Algina)

6. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 012 เรื่องฟังก์ชัน เพื่อใช้ประเมินผลหลังการเรียนทั้งหมด 30 ข้อ เป็นแบบเลือกตอบ 5 ตัวเลือก ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างดังนี้

6.1 ศึกษาวิธีสร้างและเทคนิคการสร้างข้อสอบที่ดี จากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของ ขวาล แพร่พิบูล (ขวาล แพร่พิบูล 2520 : 111 - 173) และหนังสือหลักการสร้างและวิเคราะห์ข้อสอบของ วิเชียร เกตุสิงห์ (วิเชียร เกตุสิงห์ 2518 : 1 - 161)

6.2 ผู้วิจัยร่วมกับผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ รวม 4 คน ทำการวิเคราะห์หลักสูตรและสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรในเนื้อหาคณิตศาสตร์ ค. 012 เรื่องฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

6.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันแบบปรนัย ชนิด 5 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ โดยยึดตารางวิเคราะห์หลักสูตรแล้วส่งให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity)

6.4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันมาแล้ว จำนวน 111 คน

6.5 นำแบบทดสอบที่นักเรียนทำแล้วมาตรวจให้คะแนนโดยมีเกณฑ์ให้คะแนนแต่ละข้อดังนี้ ถ้านักเรียนตอบถูก จะได้คะแนน 1 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือเว้นไม่ตอบให้ 0 คะแนน เมื่อตรวจและรวมคะแนนจากการตอบแบบทดสอบเรียบร้อยแล้ว นำผลที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเป็นรายชื่อ โดยใช้หลักการจัดกลุ่ม 27 เปอร์เซนต์ เป็นกลุ่มสูงและต่ำ เปิดตารางสำเร็จของ จุง เทห์ ฟาน (Fan. 1952 : 1 - 32) แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่ระดับค่าความยากง่าย

อยู่ในช่วง .20 - .80 และค่าอำนาจจำแนก ตั้งแต่ .20 ขึ้นไปเป็นจำนวน 30 ข้อ
จากนั้นรวมคะแนน เฉพาะข้อสอบที่คัดเลือกไว้ นามาค่าความเชื่อมั่นแบบ คูเดอร์ -
ริชาร์ดสัน (Kuder - Richardson) ที่ 20 (KR-20) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .85

ตัวอย่าง ข้อสอบ

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดจากคำตอบ ก ข ค ง และ จ
ของคำถาม แต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

ข้อ (0) ถ้า $g(2x+3) = 3x+2$ แล้วข้อใดคือ $g(x)$

ก. $g(x) = \frac{1}{3}(3x-1)$

ข. $g(x) = 3x-5$

ค. $g(x) = \frac{3}{2}(x-3) - 2$

ง. $g(x) = \frac{1}{2}(3x-5)$

จ. $g(x) = x-1$

7. แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อใช้วัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนก่อนและหลังเรียน ผู้วิจัยได้ใช้แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของสมบูรณ์
ชิตพงศ์ (สมบูรณ์ ชิตพงศ์ 2519 : ไม่มีเลขหน้า) จำนวน 20 ข้อ ซึ่งก่อนใช้ผู้วิจัยได้
ทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 50 คน เพื่อหาความเชื่อมั่นของ
แบบทดสอบ โดยคำนวณหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ได้เท่ากับ .78

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าเฉลี่ยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ และอังกษา สายยศ
2528 : 59)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

ΣX แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนน คำนวณจากสูตร (ล่วน สายยศ และ
อังคณา สายยศ 2528 : 63)

$$s^2 = \frac{N \Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{N(N - 1)}$$

เมื่อ s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน

X แทน คะแนนแต่ละตัวในกลุ่มตัวอย่าง

f แทน ความถี่ของคะแนนแต่ละตัวในกลุ่มตัวอย่าง

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

3. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ใช้สูตร KR-20 ของคูเคอร์ - ริชาร์ดสัน (ล่วน สายยศ และอังคณา สายยศ
2528 : 168)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\Sigma pq}{s_t^2} \right]$$

เมื่อ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่น

n แทน จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

p แทน สัดส่วนของผู้ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ

q แทน สัดส่วนของผู้ทำผิดในข้อหนึ่ง ๆ หรือคือ $1 - p$

s_t^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของ เครื่องมือฉบับนั้น

4. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ คำนวณจากสูตร (ลวน สายยศ และอังคณา สายยศ 2528 : 170 - 171)

$$r = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum s_1^2}{s_t^2} \right]$$

เมื่อ r แทน ค่าสัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

n แทน จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

s_1^2 แทน คะแนนความแปรปรวน เป็นรายข้อ

s_t^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของ เครื่องมือทั้งฉบับ

5. เปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวน 2 ทาง (Two - way analysis of variance) ซึ่งใช้กับ Treatments X Levels Designs (Lindquist. 1956 : 121 - 127) สูตรการคำนวณมีดังนี้

แหล่งความแปรปรวน	df	ss	ms
ระหว่างสัณท์ (A) (ระหว่างการสอน)	$c - 1$	$SS_A = \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{N}$	$\frac{SS_A}{c-1}$
ระหว่างแถว (L) (ระดับความสามารถ)	$L - 1$	$SS_L = \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{N}$	$\frac{SS_L}{L-1}$
ระหว่างกลุ่ม (Cell)	$(aL-1)$	$SS_{ceLL} = \sum_i \sum_j \frac{T_{ij}^2}{n_{ij}} - \frac{T^2}{N}$	
ปฏิกริยารวม ($A \times L$)	$(a-1) \times (L-1)$	$SS_{AL} = SS_{ceLL} - SS_A - SS_L$	$\frac{SS_{AL}}{(a-1)(L-1)}$
ภายในกลุ่ม (w)	$N - aL$	$S_W = SS_T - SS_{Cell}$	$\frac{SS_W}{N - aL}$
ทั้งหมด	$N - 1$	$SS_T = \sum_i \sum_j \frac{n_{ij} X^2}{j} - \frac{T^2}{N}$	

เมื่อ	N	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด
	A	แทน กลุ่มตัวอย่างที่ต้องจัดกระทำ
	L	แทน ระดับความสามารถทางการเรียนกลุ่มตัวอย่าง
	a	แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่างที่ต้องจัดกระทำ
	n	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม
	ss	แทน Sum of Squares
	ms	แทน Mean Square
	df	แทน degree of freedom
	F	แทน ค่าสถิติที่ใช้ในการพิจารณาใน F - distribution

6. เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์จากคะแนนความแตกต่างระหว่างคะแนนสอบวัดเจตคติก่อนเรียนกับคะแนนสอบวัดเจตคติหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม คำนวณจากสูตร (ประกอบ กรรณสูตร 2524 : 142)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N - 1}}}$$

เมื่อ	N	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
	D	แทน ผลต่างระหว่างคะแนนแต่ละคู่
	D ²	แทน กำลังสองของผลต่างระหว่างคะแนนแต่ละคู่

7. เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม ทั้งก่อนเรียนและหลังเรียน คำนวณจากสูตร (วิเชียร เกตุสิงห์ 2523 : 77)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right) \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} \right)}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

เมื่อ	$\bar{x}_1$	แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1
	$\bar{x}_2$	แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2
	n_1	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ 1
	n_2	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ 2
	s_1^2	แทน ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ 1
	s_2^2	แทน ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ 2

8. หากค่าดัชนี เอส โคยวิธีของ คริสปิน และเฟลด์ฮาสัน (สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ 2525 : 17 - 18 อ้างอิงมาจาก Krispin and Feldhasan. 1974 : Unpagged) สูตรการคำนวณมีดังนี้

$$S = \frac{R_{pos} - R_{pre}}{T}$$

เมื่อ	S	แทน ค่าดัชนีอำนาจจำแนก
	R_{pos}	แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบข้อสอบถูกหลังสอน
	R_{pre}	แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบข้อสอบถูกก่อนสอน
	T	แทน จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบ

9. การหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ ใช้วิธีของ สวามินาน, แฮมเบิลตัน และอัลจินา (โกวิท ประวาลพุกษ์ และสมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ 2527 : 257 - 259 อ้างอิงมาจาก Swaminar, Hambleton and Algina) สูตรการคำนวณมีดังนี้

$$K = \frac{P_o - P_c}{1 - P_c}$$

- เมื่อ K แทน ค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบแบบอิง เกณฑ์
 P_o แทน สัดส่วนของความสอดคล้องที่สังเกตได้จากการสอบซ้ำ
 P_c แทน สัดส่วนของความสอดคล้องที่คาดหวังได้จากความบังเอิญ

การแจกแจงผลการสอบเป็นดังนี้

		ผลการสอบครั้งที่ 1		รวม
		ผ่าน	ไม่ผ่าน	
ผลการสอบครั้งที่ 2	ผ่าน	a	b	a + b
	ไม่ผ่าน	c	d	c + d
	รวม	a + c	b + d	(a+b+c+d)

เมื่อ a, b, c และ d คือสัดส่วนที่ใช้จำนวนนักเรียนทั้งหมดหาร
 จำนวนนักเรียนในแต่ละช่องตาราง

$$P_o = a + d$$

$$P_c = (a+b) (a+c) + (c+d) (b+d)$$

10. การกำหนดคะแนนจุดตัดโดยให้ผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาประเมินความสำคัญของ
 โดเมน ตามเทคนิคของกลาส เพื่อให้สอดคล้องกับเกณฑ์การตัดสินผ่านในแต่ละหน่วย
 การเรียนของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ผู้เชี่ยวชาญจึงกำหนดคะแนนจุดตัดเพียง
 ระดับเดียวคือ 80 %

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลการทดลอง และการแปลความหมายของผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อให้เข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยได้ใช้สัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

df แทน degree of freedom

ss แทน Sum of Squares

ms แทน Mean Square

F แทน ค่าสถิติที่ใช้ในการพิจารณาใน F - distribu

$\bar{x}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน

t แทน ค่าสถิติที่ใช้พิจารณาใน t - distribution

กลุ่มทดลอง หมายถึง กลุ่มที่สอนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

กลุ่มควบคุม หมายถึง กลุ่มที่สอนด้วยการสอนตามปกติ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษารั้งนี้ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ปีที่ 4

จากจุดมุ่งหมายข้อที่ 1 เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล กับการสอนตามปกติ นั้น มีสมมติฐานว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของนักเรียน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ แตกต่างกัน ซึ่งจากการวิเคราะห์ข้อมูล ปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

แหล่งความแปรปรวน	df	ss	ms	F
ระหว่างกลุ่ม (ระหว่างการสอน)	1	48.60	48.60	5.17 *
ภายในกลุ่ม	54	507.40	9.40	
รวม	55	556.00		

$$F_{.05} (1, 54) = 4.02$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 3 ค่า F มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 1 ที่ตั้งไว้ ดังนั้นจึงได้ทดสอบ เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็นรายคู่ โดยใช้วิธีของเชฟเฟ (Scheffe) ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏดังตาราง 3.1 3.2 และ 3.3

ตาราง 3.1 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม ที่มีความสามารถทางการเรียน
 สูง

กลุ่มตัวอย่าง	กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง
	คะแนนเฉลี่ย		
กลุ่มควบคุม	12.00	-	2.40

$$P > .05 \quad d = 2.74$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 3.1 ค่า d ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่า
 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่ม
 ควบคุมที่มีความสามารถทางการเรียนสูง ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
 กับการสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรืออาจกล่าวได้
 ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง
 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล กับการสอนตามปกติ ไม่แตกต่างกัน

ตาราง 3.2 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของกลุ่มทดลอง กับกลุ่มควบคุม ที่มีความสามารถทางการ
เรียนปานกลาง

กลุ่มตัวอย่าง	กลุ่มควบคุม		กลุ่มทดลอง
	คะแนนเฉลี่ย	8.70	9.90
กลุ่มควบคุม	8.70	-	1.20

$$P > .05 \quad d = 2.74$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 3.2 ค่า d ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมที่มีความ
สามารถทางการเรียนปานกลาง ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการมีส่วนร่วมบุคคลกับการ
สอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หรืออาจกล่าวได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางที่เรียนด้วยการ
สอนแบบระบบการมีส่วนร่วมบุคคลกับการสอนตามปกติไม่แตกต่างกัน

ตาราง 3.3 ผลการทดลองความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม ที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำ

กลุ่มตัวอย่าง	กลุ่มควบคุม		
	คะแนนเฉลี่ย	7.80	9.60
กลุ่มควบคุม	7.80	-	1.80

$$P > .05 \quad d = 2.74$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 3.3 ค่า d ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนกลุ่มทดลองและ กลุ่มควบคุมที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำ ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล กับ การสอนตามปกติ แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หรืออาจกล่าวได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติไม่แตกต่างกัน

2. ศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนทั้งสองแบบกับระดับความสามารถทางการเรียนที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากจุดมุ่งหมายข้อที่ 2 เพื่อศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างผลการสอนทั้งสองแบบกับความสามารถทางการเรียนที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น มีสมมติฐานว่า มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับความสามารถทางการเรียน ซึ่งจากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏดังตาราง 4

ตาราง 4 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนแสดงปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอน กับความสามารถทางการเรียน

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F
ปฏิกริยา	2	3.60	1.80	.19
ภายในกลุ่ม	54	507.40	9.40	
รวม	56	511.00		

$$F_{.05} (2, 54) = 3.17$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 5 ค่า F ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน นั่นคือ ไม่มีการสอนแบบใดใช้ได้ดีสำหรับนักเรียนกลุ่มหนึ่งกลุ่มใดโดยเฉพาะ

3. เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

จากจุดมุ่งหมายของข้อที่ 5 เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ นั้นมีสมมติฐานว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เกิดจากสอนทั้งสองแบบแตกต่างกัน ซึ่งจากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏทั้งตาราง 5 6 7 และ 8

ตาราง 5 ผลการเปรียบเทียบคะแนนของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

การทดสอบ	N	ΣD	ΣD^2	t
ก่อนการเรียน	30			
หลังการเรียน	30	168	1262	9.22 *

* $P < .05$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 5 ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรืออาจกล่าวได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลแตกต่างกัน

ตาราง 6 ผลการเปรียบเทียบคะแนนของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มควบคุม

การทดสอบ	N	ΣD	ΣD^2	t
ก่อนการเรียน	30			
หลังการเรียน	30	81	1364	2.35 *

* $P < .05$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 6 ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียน และหลังเรียนของกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรืออาจกล่าวได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกัน

ตาราง 7 ผลการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{x}$	s^2	t
กลุ่มควบคุม	30	73.9	28.64	1.14
กลุ่มทดลอง	30	75.47	20.88	

$$P > .05$$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 7 ค่า t ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรืออาจกล่าวได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน

ตาราง 8 ผลการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของการสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{x}$	s^2	t
กลุ่มควบคุม	30	76.50	21.91	3.88*
กลุ่มทดลอง	30	81.07	17.37	

* $P < .05$

ผลการวิเคราะห์ในตาราง 8 ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติแสดงว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรืออาจกล่าวได้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน

สรุปผลการทดลอง

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูงของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม และนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ
3. ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียนนั่นคือไม่มีการสอนใดที่ใช้ได้ดีสำหรับนักเรียนกลุ่มหนึ่งกลุ่มใดโดยเฉพาะ
4. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลก่อนเรียนกับหลังเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
5. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติก่อนเรียนกับหลังเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
6. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มควบคุมจะเรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ
7. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

บทที่ 5

สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ ซึ่งลำดับขั้นและผลของการศึกษารูปได้ดังนี้

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ
2. เพื่อศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนทั้งสองแบบกับระดับความสามารถทางการเรียนที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
3. เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติ

สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกัน
2. มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน
3. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เกิดจากการสอนทั้งสองแบบแตกต่างกัน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

โรงเรียนคุรุราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอจอมบึง จังหวัดราชบุรี ปีการศึกษา 2529 จำนวน 60 คน แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 30 คน กลุ่มทดลองเป็นกลุ่มที่สอนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล ในกลุ่มนี้แบ่งออกเป็นกลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนสูงจำนวน 10 คน กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางจำนวน 10 คน และกลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำจำนวน 10 คน กลุ่มควบคุมเป็นกลุ่มที่สอนด้วยการสอนตามปกติ ในกลุ่มนี้แบ่งออกเป็นกลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนสูงจำนวน 10 คน กลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางจำนวน 10 คน และความสามารถทางการเรียนต่ำจำนวน 10 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้

2.1 แผนการสอนรายคาบซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นตามแนวการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของกระทรวงศึกษาธิการ จำนวน 12 คาบ

2.2 เอกสารสำหรับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลประกอบด้วย

2.2.1 คาแนะนาการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

2.2.2 คาแนะนาเนื้อหาในแต่ละหน่วยและขั้นตอนในการเรียนแต่ละหน่วยการเรียน

2.2.3 คาแนะนาประจำหน่วยการเรียน

2.2.4 เอกสารประกอบบทเรียนเป็นสื่อการเรียนสำหรับใช้ศึกษาเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนประกอบด้วยสื่อ 3 ชนิด ได้แก่ เอกสารแนะแนวทางบทเรียนโปรแกรมและตารางประกอบบทเรียน

2.3 แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนเป็นแบบทดสอบอิงโคเมน วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันเป็นแบบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก แต่ละหน่วยจะมีแบบทดสอบหน่วยละ 2 ชุด ซึ่งค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแต่ละชุดเป็นดังนี้

ชุดที่ 1 ของหน่วยที่ 1 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.66 ชุดที่ 2 ของหน่วยที่ 1 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.64 ชุดที่ 1 ของหน่วยที่ 2 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.75 ชุดที่ 2 ของหน่วยที่ 2 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.75 ชุดที่ 1 ของหน่วยที่ 3 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.66 ชุดที่ 2 ของหน่วยที่ 3 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.67

2.4 แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ใช้แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ สมบูรณ์ ชิตพงศ์ ซึ่งผู้วิจัยได้ทดลองใช้และคำนวณค่าความเชื่อมั่นได้เท่ากับ 0.78

2.5 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 เรื่องฟังก์ชันเป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.84

3. การดำเนินการทดลอง การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2529

3.1 ก่อนการทดลองสอน ให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ทดสอบก่อนเรียนโดยใช้แบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

3.2 การทดลองสอน ผู้วิจัยเป็นผู้สอนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุมด้วยตนเอง โดยการแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มตามระดับความสามารถทางการเรียน แล้วสอนด้วยกิจกรรมตามแนวในคู่มือครูของ สสวท. เหมือนกันทุกกลุ่ม กลุ่มทดลองสอนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลด้วยการให้นักเรียนศึกษาบทเรียนจากเอกสารประกอบบทเรียนที่ผู้สอนจัดไว้ให้ด้วยตัวนักเรียนเอง ใช้เวลาในการทดลองสอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 3 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 คาบ คาบละ 50 นาที จำนวน 12 คาบ

3.3 หลังการทดลอง ให้นักเรียนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 เรื่องฟังก์ชันและแบบสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ชุดเดียวกันกับที่ทดสอบก่อนการทดลองสอน

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

4.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม และศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับความสามารถทางการเรียน

ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวน 2 ทาง ซึ่งใช้กับ Treatments X Levels Designs ถ้าพบว่ามีความแตกต่างกันแล้วจะทดสอบความแตกต่างเป็นรายคู่โดยวิธีของเชฟเฟ (Scheffe)

4.2 เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จากคะแนนความแตกต่างระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้ t-test

4.3 เปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมจากคะแนนของแบบสอบถามเจตติก่อนเรียนโดยใช้ t-test ถ้าพบว่าแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ก็จะเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมจากคะแนนของแบบสอบถามเจตติหลังเรียนโดยใช้ t-test

สรุปผลการทดลอง

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูงของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม และนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนต่ำของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมที่ได้รับจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

3. ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน นั่นคือไม่มีการสอนใดที่ใช้ได้ดีสำหรับนักเรียนกลุ่มหนึ่งกลุ่มใดโดยเฉพาะ

4. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบการสอนระบบการสอนส่วนบุคคลก่อนเรียนกับหลังเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

5. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติก่อนเรียนกับหลังเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

6. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองที่จะเรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มควบคุมที่จะเรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

7. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า

สมมติฐานข้อที่ 1

จากผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ แต่เมื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติ โดยเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนระดับเดียวกัน คือระดับสูงกับระดับสูง ระดับปานกลางกับระดับปานกลางและระดับต่ำกับระดับต่ำ พบว่าแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลในตาราง 3.1, 3.2 และ 3.3 พบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลทุกระดับมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติ ถึงแม้ไม่ถึงระดับความเชื่อมั่น 95 % แต่ก็ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติแตกต่างกัน ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ บุญมา ปีสาร (บุญมา ปีสาร 2528 : 24) ซึ่งได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องลำดับและอนุกรมโดยวิธีสอนแบบ PSI ผลการทดลองพบว่านิสิตที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบ PSI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากนิสิตที่เรียนด้วยวิธีสอนปกติ

ผลการวิจัยที่ปรากฏออกมาดังกล่าวนี้อาจเนื่องมาจาก

1. นักเรียนสามารถศึกษาค้นคว้าและสรุปบทเรียนได้ด้วยตนเองตามคำแนะนำของเอกสารประกอบบทเรียน
2. นักเรียนต้องเรียนรู้เนื้อหาในแต่ละหน่วยจนมีความมั่นใจว่ามีความรอบรู้เนื้อหาในหน่วยนั้นแล้วจึงมาขอรับการทดสอบและต้องทำคะแนนจากแบบทดสอบให้ถึงเกณฑ์ที่กำหนดจึงสามารถผ่านไปเรียนหน่วยต่อไปได้ ถ้านักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดก็จะได้ศึกษาเนื้อหาในหน่วยนั้นใหม่จนมีความมั่นใจว่ามีความรู้ในเนื้อหานั้นดีพอแล้วจึงมาขอรับการทดสอบ ถ้านักเรียนมีข้อข้องใจในส่วนใดก็สามารถสอบถามจากผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้

3. การแบ่งเนื้อหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ และนักเรียนต้องทดสอบย่อยให้ได้คะแนนตามเกณฑ์มาตรฐานที่แต่ละหน่วยทำให้เกิดแรงจูงใจในการเรียน

ข้อสังเกตที่ผู้วิจัยพบระหว่างทำการทดลองสอน

1. นักเรียนมารับแบบทดสอบหน่วยแรกช้ากว่าเกณฑ์ที่กำหนด ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนไม่เคยชินกับวิธีการเรียนแบบนี้ แต่เมื่อเริ่มมีนักเรียนส่วนหนึ่งทดลองมาขอรับการทดสอบและผู้สอนได้ประกาศผลความก้าวหน้าของผู้ที่สอบผ่านไว้หน้าชั้นเรียน และผู้ที่สอบไม่ผ่านได้รับการชี้แจง และแนะนำเนื้อหาในส่วนที่ไม่ผ่านแล้วให้กลับไปศึกษาใหม่ทำให้นักเรียนคนอื่น ๆ มีความกระตือรือร้นที่จะศึกษาและพยายามจะสอบให้ผ่านในแต่ละหน่วยตามเกณฑ์ที่กำหนด

2. ในช่วงที่ศึกษาเนื้อหาในหน่วยแรก ๆ นักเรียนจะมีปัญหาในการสรุปบทเรียน เนื่องจากนักเรียนไม่เคยชินกับการอ่าน แต่เมื่อนักเรียนได้อ่านเอกสารประกอบบทเรียนได้ทำแบบฝึกหัดพร้อมทั้งเฉลยแบบฝึกหัดได้ด้วยตนเอง และสามารถสอบถามข้อสงสัยจากผู้สอนและผู้ควบคุมชั้นได้ทันที ทำให้นักเรียนมีความเชื่อมั่นในการศึกษามากขึ้น

3. มีนักเรียนบางคนจำเป็นต้องขาดเรียนในบางวัน แต่ก็สามารถศึกษาได้ทันตามกำหนด

4. นักเรียนส่วนมากให้ความสนใจและมีความรับผิดชอบในการศึกษาตามวิธีการของการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล สังเกตได้จากที่นักเรียนกระตือรือร้นที่จะอ่านและซักถามปัญหาที่สงสัยจากผู้สอนและผู้ควบคุมชั้น และขอรับการทดสอบทันทีที่คิดว่าตนเองมีความรอบรู้เนื้อหาในแต่ละหน่วยโดยไม่มีการทวนทบทวนหรือถ่วงเวลา

สมมติฐานข้อที่ 2

จากผลการศึกษาพบว่า ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้

ผลการวิจัยที่ปรากฏออกมาดังกล่าวนี้อาจเป็น เพราะนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ที่มีพื้นฐานความรู้แตกต่างกันอย่างแท้จริง และการสอนทั้งสองแบบคือการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลและการสอนตามปกติเป็นการสอนที่ช่วยให้ นักเรียนได้เรียนรู้ตามระดับความสามารถของนักเรียนเอง จึงไม่มีการสอนแบบใดใช้ได้ดี สำหรับนักเรียนกลุ่มหนึ่งกลุ่มใดโดยเฉพาะ

สมมติฐานข้อที่ 3

จากผลการศึกษาพบว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลกับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ เมื่อศึกษาถึงเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนกับหลังเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลและการสอนตามปกติ พบว่าแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากผลการวิจัยที่ปรากฏออกมาดังกล่าวนี้อาจเนื่องมาจาก

1. นักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนที่ผู้วิจัยสุ่มมาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนเดียวกัน จึงทำให้นักเรียนทั้งสองมีพื้นฐานความรู้และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

2. นักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลและการสอนตามปกติ ต่างก็ได้รับการสอนที่แตกต่างไปจากเดิม ถึงแม้ว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกตินั้นจะเรียนด้วยวิธีการที่ไม่แตกต่างไปจากที่นักเรียนเคยเรียนอยู่ แต่เนื่องจากเปลี่ยนตัวผู้สอนและการสอนเน้นกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมมากขึ้นจึงทำให้เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเปลี่ยนไป

3. จากการสังเกตของผู้สอนพบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลจะเริ่มเรียนทันทีที่เริ่มต้นคาบใหม่และสนใจเรียนจนหมดเวลา นักเรียนจะซักถามปัญหาที่เป็นข้อสงสัยตลอดเวลาและขอสอบเมื่อแน่ใจว่าตนเองรอบรู้ใบเนื้อหาของหน่วยนั้นดีพอ จึงทำให้เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลเปลี่ยนแปลงไปมาก

ข้อเสนอแนะ

จากผลการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน และต่อการศึกษาค้นคว้าต่อไปดังนี้

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการสอนตามปกติ ดังนั้นควรจะได้มีการส่งเสริมการสร้างบทเรียน การวิจัยและการใช้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้แพร่หลายเพื่อจะได้เกิดประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุงการสอนและช่วยลดเวลาในการสอนของครูอีกด้วย

1.2 จากการสังเกตขณะทำการทดลองสอนพบว่านักเรียนกลุ่มทดลองที่มีความสามารถทางการเรียนสูงสามารถศึกษาบทเรียนหน่วยต่าง ๆ ได้เร็วกว่านักเรียนกลุ่มที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางและต่ำ ดังนั้นถ้าครูผู้สอนสร้างเอกสารประกอบบทเรียนสำหรับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลไว้ใช้เฉพาะนักเรียนที่มีความสามารถ

ทางการเรียนสูงจะทำให้ครูผู้สอนมีเวลาเอาใจใส่นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนปานกลางและต่ำได้มากขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้การเรียนการสอนโดยรวมดีขึ้น

1.3 เนื่องจากการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล เน้นการช่วยเหลือผู้เรียนเป็นรายบุคคลและให้ผู้เรียนได้ศึกษาจากสื่อการสอน จึงจำเป็นต้องมีผู้ควบคุมชั้นและสื่อการสอนที่มีคุณภาพ ฉะนั้นถ้าผู้สอนในโรงเรียนเดียวกันได้ร่วมมือกันสอนในลักษณะเป็นทีมโดยร่วมมือกันสร้างสื่อการสอนและเป็นผู้ควบคุมชั้น ก็จะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

1.4 สถาบันฝึกหัดครูต่าง ๆ ควรพิจารณานำเอาการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลไปใช้สอนในรายวิชาที่เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อให้บัณฑิตนักศึกษามีความรู้ความเข้าใจและมีทักษะในการใช้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลจะเป็นการส่งเสริมให้สามารถนำไปใช้ในการสอนอย่างมีประสิทธิภาพ

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 เนื่องจากนักเรียนในระดับชั้น ม. 1 - 3 เป็นวัยที่สามารถรู้จักคิดในเชิงวิเคราะห์ สังเคราะห์ หรือการตั้งและทดสอบข้อสมมติฐาน จึงควรนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลมาทดลองสอนกับนักเรียนในระดับชั้น ม. 1 - 3 เพื่อคว้านักเรียนระดับนี้จะเรียนรู้เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลได้ดีกว่าการสอนตามปกติหรือไม่

2.2 ควรมีการสร้างบทเรียนที่ใช้ในการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลสำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อนและวิจัยเพื่อดูว่าการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลสามารถช่วยนักเรียนที่เรียนอ่อนได้มากน้อยเพียงใด

2.3 ผลการวิจัยครั้งนี้พบว่าไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างการสอนกับระดับความสามารถทางการเรียน จึงควรทำวิจัยซ้ำอีกครั้งโดยใช้ระยะเวลาในการวิจัยเพิ่มขึ้น เพื่อศึกษาว่าผลการวิจัยเหมือนเดิมหรือไม่

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กิตติ พัฒนตระกูลสุข เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ด้านพุทธิพิสัยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างการใช้กลวิธีการเรียนรู้ของบลูมกับแผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์ วิทยานิพนธ์ ก.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2524, 102 หน้า อักษรสำเนา
- โกวิท ประวาลพุกษ์ และสมศักดิ์ สันธุระเวช การประเมินผลในชั้นเรียน พิมพ์ครั้งที่ 2 วัฒนาพานิช 2527, 374 หน้า
- จันทร์ฉาย เติมียาคาร "นักเรียนเรียนด้วยตนเองจะแบ่งเบาภาระผู้สอนจริงหรือไม่" ศึกษาศาสตร์สาร 11 (3 - 4) : เมษายน - กันยายน 2526, หน้า 16 - 22
- ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการเขียนข้อทดสอบ โรงพิมพ์คุรุสภา 2520, 407 หน้า
- ชูชีพ อ่อนโคงสูง เอกสารประกอบการสอนวิชาจิตวิทยาการศึกษา วารุณีการพิมพ์ 2518, 209 หน้า
- เคชา นุ่นพันธุ์ ผลของการสอนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความภูมิใจในตนเองและทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิทยานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 156 หน้า อักษรสำเนา
- ทวีป อภิลิทธิ์ "สอนหนังสือหรือสอนคน" ประชาศึกษา ปีที่ 33 ฉบับที่ 12 : กันยายน 2526, หน้า 13 - 15
- นิพนธ์ สุขปรีดี วารสารทางวิชาการ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน มิถุนายน - ตุลาคม 2525, หน้า 2
- บุญมา ยี่สาร การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับและอนุกรม โดยวิธีสอนแบบ PSI วิทยานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2528, 270 หน้า อักษรสำเนา
- ประคอง กรรณสุต สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิจัยการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2524, 429 หน้า

- ประคอง ทาสีแสง การสร้างแบบทดสอบอิงโคเมนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องมูลค่าับและกราฟ
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปริญญาโท กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
 2527, 177 หน้า อัดสำเนา
- ประภาเพ็ญ สุวรรณ ทัศนคติ : การวัด การเปลี่ยนแปลงและพฤติกรรมอนามัย ไทยวัฒนา
 พานิช 2520, 143 หน้า
- พัชรี พลาวงศ์ "การเรีนนด้วยตนเอง (Individualized Learning)" ว.รามคำแหง
 ฉบับพิเศษพัฒนาคณากร 2526, 82 - 91
- ยุพิน พิพิธกุล การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2525, 507 หน้า
- ล้วน สายยศ และอังกษา สายยศ หลักการวิจัยทางการศึกษา พิมพ์ครั้งที่ 1 ศึกษาพร
 2528, 314 หน้า
- วัฒนา หงษ์ภู ความสัมพันธ์ระหว่างทัศนคติทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สังกัดการบริหารส่วนจังหวัดฉะเชิงเทรา
 วิทยานิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523, 93 หน้า อัดสำเนา
- วิเชียร เกตุสิงห์ สถิติวิเคราะห์สำหรับการวิจัย พิมพ์ครั้งที่ 7 กองวิจัยการศึกษา
 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ 2523, 181 หน้า
- _____ คู่มือการสร้างและวิเคราะห์ข้อสอบ โอเคียนการพิมพ์ 2518, 164 หน้า
- ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ คู่มือการบริหารการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย
พุทธศักราช 2524 อมรินทร์การพิมพ์ 2526, 202 หน้า
- _____ แนวการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง)
 อมรินทร์การพิมพ์ 2522, 179 หน้า
- _____ บทคัดยอรายงานการวิจัยทางการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ 2519 - 2524
 โรงพิมพ์การศาสนา 2523, 195 หน้า
- _____ รายงานการประเมินมาตรฐานการศึกษาระดับชาติ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ประจำปีการศึกษา 2524 เฉลิมชัยการพิมพ์ 2524, 432 หน้า

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานผลการปฏิบัติงานของกรมวิชาการ ประจำปี
งบประมาณ 2524 - 2525 ทองสยามการพิมพ์ 2527, 211 หน้า

_____ หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 อมรินทร์การพิมพ์ 2523,
372 หน้า

_____ คู่มือวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว 2524, 121 หน้า

_____ หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (ป.4) โรงพิมพ์
คุรุสภาลาดพร้าว 2524, 174 หน้า

สงบ ลักษณะ 'การกำหนดลักษณะเฉพาะของข้อสอบ' เอกสารประกอบการประชุม
การปฏิบัติการเพื่อปรับปรุงและส่งเสริมการวัดผลและการประเมินผลการศึกษา ระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลาย ชุดที่ 2 : 1 - 30 สิงหาคม 2525

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 'รายละเอียดเกี่ยวกับ สสวท.'

เอกสารพิมพ์แจกสำหรับผู้สนใจทั่วไป สำนักพิมพ์สมพงษ์ 2518, 12 หน้า

สมบูรณ์ จิตพงศ์ การประเมินผลหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ค. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 119 หน้า อัดสำเนา

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ การประเมินผลแบบอิงเกณฑ์ สำนักทดสอบทางการศึกษา กรม
วิชาการ 2525, 48 หน้า อัดสำเนา

สานนท์ นายศรีศิริ องค์ประกอบบางประการที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในจังหวัดนครปฐม ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ค. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2522, 103 หน้า อัดสำเนา

สุนันท์ ปัทมาคม "ระบบการสอนตามเอกัตภาพ" วารสารครูศาสตร์ 6 (1) : พฤษภาคม -
มิถุนายน 2519, หน้า 12 - 16

สุรพล วัฒนวิทย์กิจ การสอนแบบ พี เอส ไอ เอกสารอัดสำเนา ไม่มีเลขหน้า

สุวัฒน์ นิยมคำ 'การเพิ่มคุณภาพของการเรียนรู้จากการสอนทำโครงจริงหรือ' ศึกษาศาสตร์สาร
1 : 4 - 13 มกราคม - มีนาคม 2520

สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ "การเรียนรู้เพื่อรอบรู้" วารสารการวัดผลการศึกษา ฉบับที่ 3 :

มกราคม - เมษายน 2523, หน้า 2 - 3

Brown, William F. and Wayne H. Holtzman. SSHA Manual Survey of Study Habits and Attitudes. New York Psychological Corporation, 1976.

Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. Educational Testing Service, Princeton, New Jersey, 1952. 32 p.

Francies, Hallie Davis. "Arithmetic Attitudes and Arithmetic Achievement of Fourth and Sixth Grade Students in Urban Peverty-Area Elementary Schools," Dissertation Abstracts. 32 : 1333-A, September, 1971.

Good, Carter V. Dictionary of Education. Prepared Under the Anspices of Phi Delta Kappa 2nd, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

Keller, Fred S. "Good-Bye, Teacher . . .," Journal of Applied Behavior Analysis I. p. 79 - 89, Spring, 1968.

Keller, Fred S. and Sherman, J. Gilmour. The Keller Plan Handbook. W.A. Benjamin, Inc., 1974.

Kulik, J.A., Kulik, Chen-Lin, and Carmichael, Kevin. "The Keller Plan in Teaching," Since. p. 379 - 383, 183 : February, 1974.

Lindquist, E.F. Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Houghton Mifflin Company, Boston, 1956. 393 p.

Nelson, Terry F. and Bennett, Marcie L. "Unit size and Progress Rates in Self-Paced Instruction," Journal of College Science Teaching. p. 130 - 133 3(2) : December, 1973.

Phillippes, Michael A. and Sommerfeldt R.W. "Keller VS Lecture Method in General Physics," American Journal of Physics. p. 1300 - 1396, September, 1972.

Stice, James E. "PSI & Bloom's Mastery Model," A Review & Comparison," The American Society for Engineering Education. p. 175 - 180, 70(2), November, 1979.

Thomson, Samuel B. "Do Individualized Mastery and Traditional Instruction System Yield Different Course Effects In College Calculus ?," America Educational Research Journal. 1980.

Thurstone, L.L. Attitude Theory Measurement. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1967.

Triandis, Haruru C. Attitude and Attitude Change. p. 3, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1971.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 9 แสดงคะแนนสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน
ของนักเรียนกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง แยกตามระดับความสามารถ

ระดับ ความสามารถ	วิธีสอน	การสอนแบบระบบ การสอนส่วนบุคคล	การสอนตามปกติ	ทั้งหมด
สูง		13 15 12 16 8 17 20 11 12 20	16 16 12 9 8 6 10 11 14 18	
	รวม	144	120	264
	เฉลี่ย	14.4	12.0	13.2
ปานกลาง		5 8 9 14 10 9 7 12 13 12	7 14 10 8 6 11 7 8 9 7	
	รวม	99	87	186
	เฉลี่ย	9.9	8.7	9.3
ต่ำ		11 11 7 9 12 12 7 10 8 9	6 12 7 11 10 5 7 3 7 10	
	รวม	96	78	174
	เฉลี่ย	9.6	7.8	8.7
คะแนนทั้งหมด		339	285	624
ค่าเฉลี่ยทั้งหมด		11.3	9.5	

ตาราง 10 สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน

แหล่งความแปรปรวน	df	ss	ms	F
ระหว่างสคัมภ์ (A) (ระหว่างการสอน)	1	$ss_A = 48.60$	$ms_A = \frac{48.60}{1}$ $= 48.60$	$F = \frac{48.60}{9.40}$ $= 5.17^*$
ระหว่างแถว (L) (ระดับความสามารถ)	2	$ss_L = 238.80$		
ระหว่างกลุ่ม (cell)	5	$ss_{cell} = 291$		
ปฏิกริยารวม (A x L)	2	$ss_{AL} = 3.60$	$ms_{AL} = \frac{3.60}{2}$ $= 2.80$	$F = \frac{1.80}{9.40}$ $= .19$
ภายในกลุ่ม (w)	54	$ss_w = 507.40$	$ms_w = \frac{507.40}{54}$ $= 9.40$	
ทั้งหมด	59	$ss_T = 798.40$		

$$F_{.05(2, 54)} = 3.17$$

$$F_{.05(1, 54)} = 4.02$$

ตาราง 11 แสดงค่าความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน

ข้อที่	P	r
1	.63	.32
2	.30	.24
3	.36	.60
4	.52	.37
5	.71	.50
6	.76	.31
7	.79	.62
8	.36	.36
9	.55	.25
10	.80	.33
11	.27	.37
12	.69	.27
13	.46	.47
14	.71	.40
15	.43	.28

ข้อที่	P	r
16	.78	.37
17	.21	.62
18	.40	.58
19	.50	.40
20	.59	.24
21	.31	.27
22	.29	.50
23	.48	.30
24	.33	.30
25	.43	.28
26	.78	.37
27	.59	.44
28	.27	.37
29	.23	.65
30	.42	.41

ตาราง 12 แสดงค่า P ค่า q และค่า Pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน

ข้อที่	P	$q=1-P$	Pq
1	.63	.37	.23
2	.30	.70	.21
3	.36	.64	.23
4	.52	.48	.25
5	.71	.29	.21
6	.76	.24	.18
7	.79	.21	.17
8	.36	.64	.23
9	.55	.45	.25
10	.80	.20	.16
11	.27	.73	.20
12	.69	.31	.21
13	.46	.54	.25
14	.71	.29	.21
15	.43	.57	.25

ข้อที่	P	$q=1-P$	Pq
16	.78	.22	.17
17	.21	.79	.17
18	.40	.60	.24
19	.50	.50	.25
20	.59	.41	.24
21	.31	.69	.21
22	.29	.71	.21
23	.48	.52	.25
24	.33	.67	.22
25	.43	.57	.25
26	.78	.22	.17
27	.59	.41	.24
28	.27	.73	.20
29	.23	.77	.18
30	.42	.58	.24

$$Pq = 6.48$$

ตาราง 13 ค่าความแปรปรวนจากการสอบนักเรียน 111 คน *

x	f	fx	x ²	fx ²
3	4	12	9	36
4	3	12	16	48
6	4	24	36	144
7	8	56	49	392
8	7	56	64	448
9	7	63	81	567
10	8	80	100	800
11	7	77	121	847
12	9	108	144	1296
13	3	39	169	507
14	5	70	196	980
15	5	75	225	1125
16	7	112	256	1792

x	f	fx	x ²	fx ²
17	5	85	289	1445
18	8	144	324	2592
20	5	100	400	2000
22	4	88	484	1936
24	5	120	576	2880
25	4	100	625	2500
27	3	81	729	2187
	111	1502		24522

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{N(\sum fx^2) - (\sum fx)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{(111 \times 24522) - (1502)^2}{111(111-1)} \\
 &= \frac{2721942 - 2256004}{12210} \\
 &= \frac{465938}{12210} \\
 &= 38.16 \\
 S &= 6.18
 \end{aligned}$$

* เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{pq}{s_t^2} \right] \\
 &= \frac{30}{29} \left[1 - \frac{6.48}{38.16} \right] \\
 &= (1.03) [1 - .17] \\
 &= .85
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันนับนี้มีค่าเท่ากับ .85
ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 s_e &= s \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= (6.18) \sqrt{1 - .85} \\
 &= (6.18) (.39) \\
 &= 2.41
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 2.41

การหาค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

s_t^2 คือคะแนนความแปรปรวนของเครื่องมือทั้งฉบับ

$$\text{จากสูตร } s_t^2 = \frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } s_t^2 &= \frac{50 \times 280225 - (3725)^2}{50 \times 49} \\ &= \frac{14011250 - 13875625}{2450} \\ &= \frac{135625}{2450} \\ &= 55.35 \end{aligned}$$

n คือจำนวนข้อของเครื่องมือวัด

s_1^2 คือคะแนนความแปรปรวนเป็นรายข้อ

α คือค่าสัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น

$$n = 20$$

$$\sum_{i=1}^{20} s_1^2 = 14.03$$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร } \alpha &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum s_1^2}{s_t^2} \right] \\ &= \frac{20}{19} \left[1 - \frac{14.03}{55.35} \right] \\ &= .78 \end{aligned}$$

ตาราง 14 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 1
ชุดที่ 1

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.24	.69	.44
2	.33	.87	.53
3	.29	.82	.53
4	.20	.67	.47
5	.31	.78	.47
6	.31	.78	.47
7	.27	.67	.40
8	.22	.82	.60
9	.42	.87	.44
10	.27	.73	.47
11	.27	.87	.60
12	.36	.78	.42
13	.33	.84	.51
14	.27	.71	.44
15	.29	.69	.40
16	.27	.82	.56

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
17	.33	.76	.43
18	.42	.84	.42
19	.17	.67	.49
20	.47	.87	.40
21	.15	.80	.64
22	.47	.89	.42
23	.24	.69	.47
24	.29	.73	.44
25	.27	.89	.62
26	.20	.60	.40
27	.33	.78	.44
28	.24	.73	.49

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.40	-	= .40
c	d	c + d
.18	.42	= .59
a + c = .58	b + d = .42	a + b + c + d
		= 1

$$P_o = a + d = .40 + .42 = .82$$

$$\begin{aligned} P_c &= (a + b)(a + c) + (c + d)(b + d) \\ &= (.40)(.58) + (.59)(.42) \\ &= .23 + .24 \\ &= .47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\ &= \frac{.82 - .47}{1 - .47} \\ &= \frac{.35}{.53} \\ &= .66 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้
หน่วยที่ 1 ชุดที่ 1 นี้มีค่าเท่ากับ .66

ตาราง 15 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียน หน่วยที่ 1
ชุดที่ 2

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.20	.62	.42
2	.27	.82	.56
3	.22	.78	.56
4	.17	.60	.42
5	.38	.84	.47
6	.33	.78	.44
7	.20	.62	.42
8	.24	.89	.64
9	.38	.89	.51
10	.31	.73	.42
11	.24	.82	.58
12	.31	.71	.40
13	.29	.78	.49
14	.31	.73	.42
15	.33	.73	.40
16	.22	.78	.56

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
17	.36	.76	.40
18	.40	.87	.47
19	.13	.60	.47
20	.44	.84	.40
21	.11	.76	.64
22	.42	.84	.42
23	.20	.71	.51
24	.27	.73	.47
25	.22	.84	.62
26	.15	.62	.47
27	.33	.76	.42
28	.29	.71	.42

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.42	.05	= .47
c	d	c + d
.13	.40	= .53
a + c = .55	b + d = .45	a + b + c + d = 1

$$P_o = a + d = .42 + .40 = .82$$

$$\begin{aligned} P_c &= (a + b) (a + c) + (c + d) (b + d) \\ &= (.47) (.55) + (.45) (.53) \\ &= .26 + .24 \\ &= .5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\ &= \frac{.82 - .5}{1 - .5} \\ &= \frac{.32}{.5} \\ &= .64 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของหน่วยการเรียน
หน่วยที่ 1 ชุดที่ 2 นี้มีค่าเท่ากับ .64

ตาราง 16 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 2
ชุดที่ 1

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.20	.67	.41
2	.27	.73	.41
3	.33	.80	.41
4	.24	.78	.53
5	.24	.69	.44
6	.29	.67	.51
7	.17	.62	.44
8	.15	.67	.51
9	.27	.82	.56
10	.22	.78	.56
11	.20	.69	.49
12	.36	.89	.53
13	.31	.84	.53
14	.17	.84	.67

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
15	.29	.87	.58
16	.29	.84	.56
17	.31	.89	.58
18	.31	.80	.49
19	.24	.82	.58
20	.20	.69	.49
21	.29	.82	.53
22	.27	.89	.62
23	.15	.78	.62
24	.22	.80	.58

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.45	.02	= .47
c	d	c + d
.11	.42	= .53
a + c = .56	b + d = .44	a + b + c + d = 1

$$P_o = a + d = .45 + .42 = .87$$

$$\begin{aligned} P_c &= (a + b) (a + c) + (c + d) (b + d) \\ &= (.47) (.56) + (.53) (.44) \\ &= .26 + .23 \\ &= .49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\ &= \frac{.87 - .49}{1 - .49} \\ &= \frac{.38}{.51} \\ &= .75 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้
หน่วยที่ 2 ชุดที่ 1 นี้มีค่าเท่ากับ .75

ตาราง 17 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 2
ชุดที่ 2

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.24	.71	.47
2	.22	.78	.56
3	.29	.84	.56
4	.24	.76	.51
5	.27	.71	.44
6	.24	.64	.40
7	.20	.62	.42
8	.20	.69	.49
9	.27	.82	.56
10	.22	.80	.58
11	.22	.71	.49
12	.31	.84	.53
13	.29	.82	.53
14	.22	.89	.67

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
15	.29	.84	.58
16	.33	.84	.53
17	.27	.89	.62
18	.31	.78	.47
19	.22	.80	.58
20	.24	.73	.49
21	.27	.80	.53
22	.27	.89	.62
23	.17	.80	.62
24	.24	.82	.58

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.47	-	= .47
c	d	c + d
.13	.40	= .53
a + c = .60	b + d = .40	a + b + c + d
		= 1

$$P_o = a + \bar{d} = .47 + .40 = .87$$

$$\begin{aligned} P_c &= (a + b)(a + c) + (c + d)(b + d) \\ &= (.47)(.60) + (.53)(.40) \\ &= .28 + .21 \\ &= .49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\ &= \frac{.87 - .49}{1 - .49} \\ &= \frac{.38}{.51} \\ &= .79 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้
หน่วยที่ 2 ชุดที่ 2 นี้มีค่าเท่ากับ .75

ตาราง 18 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยที่ 3 ชุดที่ 1

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.29	.82	.53
2	.24	.69	.44
3	.20	.80	.60
4	.22	.69	.47
5	.29	.87	.58
6	.17	.82	.64
7	.31	.73	.42
8	.15	.60	.44
9	.40	.80	.40
10	.22	.69	.47
11	.22	.69	.47
12	.24	.71	.47
13	.31	.82	.51
14	.42	.84	.42

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
15	.20	.69	.49
16	.33	.73	.40
17	.29	.76	.47
18	.22	.69	.47
19	.38	.87	.49
20	.17	.64	.47
21	.22	.76	.53
22	.29	.69	.40
23	.31	.80	.49
24	.24	.69	.44

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.47	.04	= .51
c	d	c + d
.13	.36	= .49
a + c = .60	b + d = .40	a + b + c + d
		= 1

$$P_o = a + d = .47 + .36 = .83$$

$$\begin{aligned} P_c &= (a + b)(a + c) + (c + d)(b + d) \\ &= (.51)(.60) + (.49)(.40) \\ &= .30 + .20 \\ &= .50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\ &= \frac{.83 - .50}{1 - .50} \\ &= \frac{.33}{.50} \\ &= .66 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของหน่วยการเรียน
หน่วยที่ 3 ชุดที่ 1 นี้มีค่าเท่ากับ .66

ตาราง 19 ค่าความยากง่ายก่อนสอน ค่าความยากง่ายหลังสอน และค่าดัชนีความไวของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 3 ชุดที่ 2

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
1	.33	.87	.53
2	.20	.67	.47
3	.22	.82	.60
4	.27	.73	.47
5	.27	.87	.60
6	.15	.80	.64
7	.33	.76	.42
8	.20	.60	.40
9	.36	.78	.42
10	.27	.73	.47
11	.17	.67	.49
12	.24	.69	.44
13	.33	.84	.51
14	.47	.87	.40

ข้อที่	P		S
	ก่อนสอน	หลังสอน	
15	.15	.64	.49
16	.29	.68	.40
17	.31	.78	.47
18	.20	.67	.47
19	.38	.84	.47
20	.17	.67	.49
21	.24	.73	.49
22	.31	.71	.40
23	.33	.82	.49
24	.20	.64	.44

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

a	b	a + b
.45	.04	= .49
c	d	c + d
.13	.38	= .51
a + c = .58	b + d = .42	a + b + c + d
		= 1

$$P_o = a + d = .45 + .38 = .83$$

$$\begin{aligned}
 P_c &= (a + b)(a + c) + (c + d)(b + d) \\
 &= (.49)(.58) + (.51)(.42) \\
 &= .28 + .21 \\
 &= .49
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{P_o - P_c}{1 - P_c} \\
 &= \frac{.83 - .49}{1 - .49} \\
 &= \frac{.34}{.51} \\
 &= .67
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ชุดที่ 2 นี้มีค่าเท่ากับ .67

ตาราง 20 ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างจุดประสงค์กับเนื้อหาวิชาของแบบทดสอบของ
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หน่วยการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่	ลำดับที่จุดประสงค์	ค่าดัชนีความสอดคล้อง
1	1	1.00
	2	0.67
	3	1.00
	4	1.00
	5	1.00
	6	0.67
2	1	1.00
	2	1.00
	3	1.00
	4	0.67
	5	1.00
	6	1.00
3	1	1.00
	2	1.00
	3	1.00
	4	0.67
	5	1.00
	6	1.00

ภาคผนวก ข

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เอกสารประกอบบทเรียนสำหรับการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล
แผนการสอนรายคาบสำหรับการสอนตามปกติ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทังก์นัย
แบบทดสอบวัด เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ป ระจ าหน่วยการ เรียน

เอกสารประกอบการ เรียนสำหรับการสอนแบบระบบการ สอนส่วนบุคคล

คำสั่ง

1. เอกสารประกอบบทเรียนสำหรับการสอนแบบระบบการ สอนส่วนบุคคล
ประกอบด้วย
 - 1.1 คำแนะนำการสอนแบบระบบการ สอนส่วนบุคคล
 - 1.2 คำแนะนำเนื้อหาและขั้นตอนในการ เรียนแต่ละหน่วยการเรียน
 - 1.3 คำแนะนำหน่วยการเรียน
 - 1.4 เอกสารแนะแนวทางประจาหน่วยการเรียน
 - 1.5 บทเรียนโปรแกรม
2. ให้นักเรียนศึกษาเอกสารในข้อ 1.1 และ 1.2 เสียก่อน แล้วจึงศึกษาเอกสารในข้อ 1.3 และ 1.4
3. การศึกษาเอกสารในข้อ 1.3 และ 1.4 ให้นักเรียนศึกษาแต่ละหน่วยการเรียนไปตามลำดับของเนื้อหาที่กำหนดคือเริ่มจาก เรื่องที่ 1 ของเนื้อหาหน่วยที่ 1 จนถึง เรื่องที่ 12 ของเนื้อหาหน่วยที่ 3 วิธีการศึกษาในแต่ละหน่วยการเรียนนั้นๆ ได้จากเอกสารในข้อ 1.2
4. เอกสารในข้อ 1.5 คือบทเรียนโปรแกรมมีไว้สำหรับให้นักเรียนใช้ศึกษาในกรณีที่นักเรียนสอบไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนด หรือสำหรับนักเรียนที่สนใจจะศึกษาเพิ่มเติม

คำแนะนำการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปว่า ความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนเป็นปัญหาที่ยากในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน นักเรียนเข้ามาเรียนล้วนมีความแตกต่างกันในหลาย ๆ ด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง วิธีการเรียน พื้นฐานความรู้ ความสามารถ ความถนัด วัตรากการ เรียนรู้ตลอดจนเจตคติต่อวิชาและครูสอน นอกจากปัญหาดังกล่าวแล้ว การจัดการเรียนการสอนยังขาดการฝึกให้นักเรียนได้เรียนรู้โดยการศึกษาด้วยตนเอง เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้รู้จักคิดตัดสินใจและแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนควรจะทำให้สอดคล้องกับลักษณะส่วนบุคคลของนักเรียนแต่ละคน ฝึกให้นักเรียนแสวงหาความรู้ด้วยตนเองให้มากที่สุด

ในบรรดาวิธีการสอนแบบต่าง ๆ ที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนและเป็นวิธีสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนตามความสามารถ โดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองมากที่สุด ที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน คือ "แผนการเรียนการสอนของเคลเลอร์" (Keller Plan) หรือการสอนแบบ "ระบบการสอนส่วนบุคคล" (Personalized System of Instruction) ซึ่งวิธีการสอนแบบนี้กำลังแพร่หลายในมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ในสหรัฐอเมริกา จากผลการวิจัยทางการสอนในรอบสิบปีที่ผ่านมาบ่งชี้ให้เห็นว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล มีความรู้ความสามารถในวิชาที่เรียนโดยเฉลี่ยดีกว่านิสิตที่เรียนโดยใช้วิธีสอนแบบบรรยาย (Lecture) นอกจากนี้ยังพบว่านิสิตรู้จักช่วยตัวเองในการเรียนได้ดียิ่งขึ้นและนิสิตส่วนใหญ่ชอบการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลมากกว่าการสอนแบบบรรยาย ในปัจจุบันการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลได้ถูกนำไปใช้ในประเทศต่าง ๆ ในทวีปยุโรป ออสเตรเลีย แอฟริกาและอเมริกาใต้

การเรียนการสอนโดยการสอนแบบระบบการสอบส่วนบุคคล มีลักษณะดังนี้

เนื้อหาวิชาจะถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ตามลำดับแต่ละหน่วยจะมีคู่มือแนะนำการเรียน (Study Guide) เพื่อให้ให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองตามกำหนดการเรียนซึ่งประกอบด้วย

1. กำหนดการเรียนโดยการสอนแบบระบบการสอบส่วนบุคคลเพื่อให้
นักเรียนได้ทำความเข้าใจวิธีการเรียน
2. กำหนดเนื้อหาหน่วยการเรียนซึ่งประกอบด้วย หัวข้อเรื่อง สิ่งที่ต้องการ
ทบทวน วัตถุประสงค์ แบบฝึกหัด เอกสารประกอบบทเรียน แนวคิดในการศึกษาและ
แบบทดสอบประจำหน่วย

นักเรียนทุกคนจะเริ่มเรียนบทเรียนหน่วยที่ 1 พร้อม ๆ กัน ซึ่งมีขั้นตอนการเรียนแต่ละ
หน่วย ดังนี้

1. นักเรียนทุกคนรับคู่มือแนะนำการเรียนและเอกสารประกอบบทเรียนจาก
ผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น (Proctor) จากนั้นนักเรียนแต่ละคนจะศึกษาเนื้อหาวิชาในหน่วย
ด้วยตนเองตามกำหนดการเรียนโดยให้นักเรียนศึกษาตามเวลาและสถานที่ ๆ กำหนดให้
2. เมื่อนักเรียนมีความมั่นใจว่าตนเองมีความรอบรู้ในหน่วยการเรียนนั้นแล้ว
นักเรียนจะมาที่ศูนย์การเรียน (Learning Center) เพื่อขอรับการทดสอบพร้อมทั้งตรวจ
แบบทดสอบด้วยตนเองจากบัตร เฉลยแบบทดสอบพร้อมทั้งทำสำเนาคำตอบส่งผู้สอนหรือ
ผู้ควบคุมชั้น 1 ชุด
3. ถ้านักเรียนหาคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึง เกณฑ์ที่กำหนด (80 % ขึ้นไป)
ก็สามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้ ถ้านักเรียนได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์เล็กน้อย
ผู้ควบคุมชั้นจะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ชี้แจงหรือแก้ไขข้อผิดพลาดแล้วสามารถผ่านไปเรียน
บทเรียนหน่วยต่อไปได้ เพราะแบบทดสอบมิได้มีจุดประสงค์เพื่อลงโทษนักเรียนที่ทำได้
แต่มีจุดประสงค์เพื่อทดสอบความรู้ของนักเรียน

4. นักเรียนที่ทำคะแนนแบบทดสอบได้ไม่ถึงเกณฑ์จะต้องกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยเดิมใหม่ จากสื่อการเรียนเดิมหรือจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้สอบจัดไว้ให้ในขณะเดียวกันผู้ควบคุมชั้นจะให้กำลังใจแก่นักเรียนพยายามสร้างความมั่นใจในตัวนักเรียนเกี่ยวกับการเรียนเพื่อให้นักเรียนกลับไปศึกษาบทเรียนหน่วยเดิม เมื่อนักเรียนพร้อมที่จะสอบก็จะกลับมารับการทดสอบใหม่อีก แต่เป็นแบบทดสอบคนละชุดกับชุดแรกซึ่งวัดความรู้เนื้อหาเดิมและมีวิธีปฏิบัติตามแนวข้อ 3 จนกว่านักเรียนจะทำคะแนนจากแบบทดสอบได้ถึงเกณฑ์ที่กำหนดจึงสามารถเรียนหน่วยการเรียนต่อไปได้

กล่าวโดยสรุปการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล มีองค์ประกอบ 5 ประการ คือ

1. นักเรียนเรียนด้วยตนเองตามความสามารถของนักเรียนเอง
2. นักเรียนต้องสอบผ่านในแต่ละหน่วยตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ (80 % ขึ้นไป) ก่อนที่จะเรียนหน่วยต่อไป
3. มีผู้ควบคุมชั้นคอยวัดความก้าวหน้า ให้กำลังใจ และช่วยอธิบายข้อบกพร่อง สิ่งที่ต้องแก้ไข หรือถ้ามีเวลาอาจจะสอนให้บ้าง
4. นักเรียนจะเรียนแต่ละหน่วยตามลำดับขั้นและตามคำแนะนำในคู่มือแนะนำการเรียน
5. มีการประชุมร่วมกันทั้งชั้นเป็นครั้งคราว เพื่อแก้ไขปัญหาที่อาจเกิดขึ้น

สาเหตุสำคัญที่ทำให้การสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคลประสบผลสำเร็จ คือ

1. การปฏิบัติขั้นสุดท้ายที่จำเป็นในการพิจารณาว่า เกิดการรอบรู้ในแต่ละขั้นนั้นสามารถระบุในแง่วัตถุประสงค์และในแง่พฤติกรรมได้
2. เนื้อหาที่ใช้เรียนถูกแบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ให้มากพอที่จะทำให้เกิดการรอบรู้ได้อย่างสมบูรณ์ มีพื้นฐานความรู้ที่มั่นคง
3. ให้แรงเสริมบ่อยและเป็นไปในทันทีทันใด

4. สามารถให้ความเข้าใจในค่านิยมบุคคลแก่ผู้เรียนได้ตามที่ผู้เรียนต้องการ
5. ความล้มเหลวในการทดสอบในหน่วยที่เรียนจะไม่ได้รับการลงโทษและ
ผู้เรียนอาจทำการทดสอบใหม่จนกระทั่งเกิดการรอบรู้

คำแนะนำเนื้อหาและขั้นตอนในการ เรียนแต่ละหน่วยการเรียน

เรื่อง ฟังก์ชัน

เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 3 หน่วย และแต่ละหน่วยมีหัวข้อเรื่องดังนี้

หน่วยที่ 1

เรื่องที่

1. ความหมายของฟังก์ชันและการตรวจสอบฟังก์ชัน
2. ความหมายของฟังก์ชัน จาก A ไป B
3. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
4. รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

หน่วยที่ 2

เรื่องที่

5. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ
6. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ (ต่อ)
7. ฟังก์ชันควอราติก การเขียนกราฟและการหาค่าต่ำสุดสูงสุด
8. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

หน่วยที่ 3

เรื่องที่

9. คอมโพสิทฟังก์ชัน
10. คอมโพสิทฟังก์ชัน (ต่อ)
11. พีชคณิตฟังก์ชัน

12. พิศคณิเทศฟังก์ชัน (ต่อ)

เนื้อหาในแต่ละหน่วยประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- ก. หัวข้อที่จะต้องศึกษา
- ข. สิ่งที่ต้องทบทวน
- ค. วัตถุประสงค์ของการสอนแต่ละหน่วย
- ง. แบบฝึกหัดประจำหน่วยและ เฉลยแบบฝึกหัด
- จ. เอกสารประกอบบทเรียน
- ฉ. แนวคิดในการศึกษาเนื้อหาในแต่ละหน่วย
- ช. แบบทดสอบประจำหน่วยและบัตรเฉลยแบบทดสอบ

ขั้นตอนการเรียนรู้โดยการสอนแบบระบบการสอนส่วนบุคคล

นักเรียนมีขั้นตอนการเรียนรู้ตามลำดับดังนี้

- ขั้นที่ 1 รับคู่มือแนะนำการเรียน
- ขั้นที่ 2 รับบทเรียนครั้งแรก 1 หน่วย พร้อมเอกสารประกอบบทเรียน
- ขั้นที่ 3 ศึกษาบทเรียนด้วยตนเองจาก เอกสารประกอบบทเรียนของหน่วยนั้นตามคำแนะนำของคู่มือแนะนำการเรียน
- ขั้นที่ 4 รับการทดสอบประจำหน่วย
- ขั้นที่ 5 นักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์จะได้รับบทเรียนหน่วยต่อไป นักเรียนที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์จะถูกขอรองให้กลับไปศึกษาใหม่อีกครั้งหนึ่ง

นักเรียนจะได้รับคำแนะนำการเรียนในความแรกของการเรียนพร้อมทั้งรับฟังการบรรยายถึงวิธีการเรียนอย่างละเอียดจากผู้สอน เมื่อผู้เรียนเข้าใจดีแล้วก็ไปศึกษารายละเอียดต่าง ๆ จากคู่มือแนะนำการเรียน

เมื่อนักเรียนได้รับคำแนะนำการเรียนและเอกสารประกอบบทเรียนแล้ว ให้นักเรียนศึกษาตามหัวข้อที่ปรากฏในหน่วยนั้น ๆ นักเรียนจะศึกษาในสถานที่และเวลาที่ผู้สอนกำหนดให้ ในช่วงเวลาที่ศึกษานี้ หากนักเรียนมีข้อสงสัยไม่เข้าใจหรืออยากซักถามเกี่ยวกับเนื้อหาหรือแบบฝึกหัดให้นักเรียนซักถามจากผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้นได้

หลังจากนักเรียนมีความมั่นใจว่ามีความรอบรู้ในหน่วยที่กำลังศึกษาอยู่ให้นักเรียนมารับแบบทดสอบที่ผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้น แล้วทำแบบทดสอบนั้นโดยทาสำเนาคำตอบไว้ด้วย เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นำสำเนาคำตอบไปรับบัตรเฉลยแบบทดสอบมาตรวจคำตอบที่นักเรียนตอบไว้ ถ้านักเรียนสอบได้ตามเกณฑ์ที่กำหนด (80 % ขึ้นไป) จะถือว่านักเรียนมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นเป็นอย่างดี นักเรียนจะได้รับบทเรียนหน่วยต่อไป ถ้านักเรียนทำไม่ได้ไม่ถึงเกณฑ์ผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้นจะช่วยหาส่วนที่บกพร่องให้ แล้วให้นักเรียนกลับไปศึกษาใหม่ โดยนักเรียนจะศึกษาจากคำชี้แจงเพิ่มเติมแบบเดิมหรือแบบใหม่ก็ได้ เมื่อนักเรียนมีความมั่นใจแล้วก็กลับมารับการทดสอบใหม่อีกครั้ง หรือถ้าครั้งก็ได้จนกว่าจะได้ตามเกณฑ์จึงจะได้รับอนุญาตให้ศึกษาหน่วยต่อไปได้ แบบทดสอบในการทำการทดสอบแต่ละครั้งจะต่างชุดกัน

การทดสอบความรู้ประจำหน่วยมีไว้เพื่อเป็นเครื่องวัดหรือเป็นเครื่องชี้ว่า นักเรียนมีความรอบรู้ในหน่วยนั้นมากน้อยเพียงใด มิได้มีไว้เพื่อสอบได้หรือสอบตก ผลการสอบประจำหน่วยจะไม่มีผลกระทบต่อการคิดในปลายภาคเรียน

กำหนดเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละหน่วย

เพื่อเป็นการช่วยให้นักเรียนได้จัดตารางเรียนประจำหน่วยและจัดการเรียนให้เป็นไปตามช่วงเวลาที่กำหนด จึงกำหนดเวลาที่นักเรียนควรสอบผ่านในแต่ละหน่วยดังนี้

หน่วยที่ 1	สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 15 พฤศจิกายน 2529
หน่วยที่ 2	สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 22 พฤศจิกายน 2529
หน่วยที่ 3	สอบให้ผ่านเกณฑ์ภายในวันที่ 29 พฤศจิกายน 2529

กำหนดเวลาสอบประมวลบทเรียน วันที่ 2 ธันวาคม 2529

กาแนะนำหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 1

เนื้อหา

เรื่องที่

1. ความหมายของฟังก์ชันและการตรวจสอบฟังก์ชัน
2. ความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B
3. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
4. รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

สิ่งที่ควรทบทวน

นักเรียนควรทบทวนทำความเข้าใจเนื้อหาเรื่อง เซต ระบบจำนวนจริง ความสัมพันธ์และเส้นตรง ก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในลักษณะการจับคู่แบบต่าง ๆ ให้ นักเรียนสามารถสรุปรูปแบบของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและให้ความหมายของฟังก์ชันได้
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้ความหมายของฟังก์ชันให้เหตุผลได้ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด
3. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้วิธีการตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดเซต A และ B และกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ พร้อมทั้งอธิบายความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ถูกต้อง

5. นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของ $y = f(x)$ ได้ถูกต้องและเมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
6. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้อง
7. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถตรวจรูปแบบของฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้อง

แบบฝึกหัด

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหลังเนื้อหาแต่ละหัวข้อเรื่อง (นักเรียนส่งสัยแบบฝึกหัดข้อใดให้ไปตรวจกับคาเนลยที่ศูนย์การ เรียน)

เอกสารประกอบบทเรียน

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาในหน่วยที่ 1 นี้ จากเอกสารแนบแนวทางหน่วยที่ 1 ที่แจกไปพร้อมกับคำแนะนำประจำหน่วย ให้นักเรียนศึกษาไปที่ละหัวข้อเรื่องให้เข้าใจ พร้อมทำแบบฝึกหัดทุกข้อ มีข้อสงสัยหรือไม่เข้าใจตอนใดอย่าเก็บไว้จึงไปปรึกษากับผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้นที่ศูนย์การ เรียน ซึ่งพร้อมที่จะช่วยเหลือนักเรียนด้วยความเต็มใจ

นอกจากเอกสารแนบแนวทางที่กำหนดให้ศึกษาแล้วนักเรียนควรอ่านคำราต่อไปนี้เพิ่มเติม

1. คณิตศาสตร์เบื้องต้น ของ สุเทพ จันทรสมบัติ
2. คณิตศาสตร์ 2 ของ กมล เอกไทยเจริญ และสมัย เหล่าวานิชย์
3. เสริมประสบการณ์คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เล่ม 2 ของ สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย
4. เอกสารอบรมครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา ของภาควิชาคณิตศาสตร์ มศว.ประสานมิตร

แนวคิดในการศึกษาเนื้อหา หน่วยที่ 1

1. ฟังก์ชันเป็นรูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษ คือ ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

ก. $D_f = A$

ข. ถ้าคู่อันดับ (x, y) และ (x, z) เป็นคู่อันดับสองคู่ใน f แล้ว y จะต้องเท่ากับ z เท่านั้น f จึงจะเป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้

ค. $R_f \subseteq B$

2. สัญลักษณ์ $y = f(x)$ เป็นสัญลักษณ์ฟังก์ชันที่นิยมเขียนกันมาก โดยที่ $f(x)$ นั้นหมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น เรากาหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันในรูป $y = 2x + 1$ ก็แสดงว่า

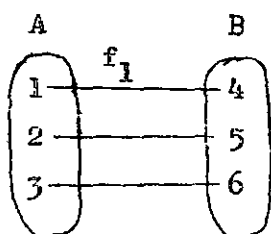
ถ้า $f(x) = 2x + 1$ หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ก็มีค่าเท่ากับ $2x + 1$

ถ้า $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$ หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ 3

มีค่าเท่ากับ 7 นั่นคือค่าของฟังก์ชัน f จะมีค่าเท่าไรขึ้นอยู่กับค่าของ x นั้นเอง

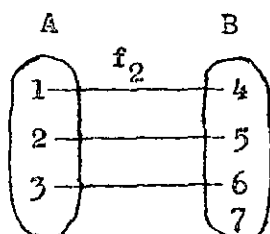
3. ความสัมพันธ์ของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f: A \longrightarrow B$ จะสัมพันธ์กันได้ในลักษณะใดลักษณะหนึ่งใน 4 ลักษณะต่อไปนี้

ก.

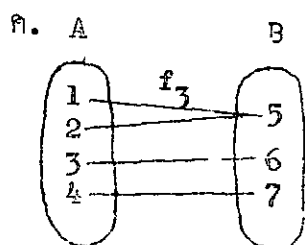


หรือ $f_1 : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

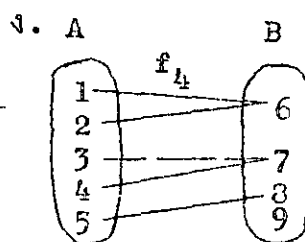
ข.



หรือ $f_2 : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$



หรือ $f_3 : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{many-to-one}} B$



หรือ $f_4 : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{many-to-one}} B$

แบบทดสอบประจำหน่วย

เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้เข้าใจอย่างดีแล้ว ให้นักเรียนไปรับแบบทดสอบจากผู้ควบคุมชั้นที่ศูนย์การเรียนให้นักเรียนหาสำเนาคำตอบ 1 ชุด เมื่อตอบคำถามเสร็จแล้วให้นำสำเนาคำตอบไปรับบัตรเฉลยคำตอบจากผู้ควบคุมชั้นและตรวจคำตอบ พร้อมทั้งให้คะแนนด้วยตัวนักเรียนเอง

หมายเหตุ

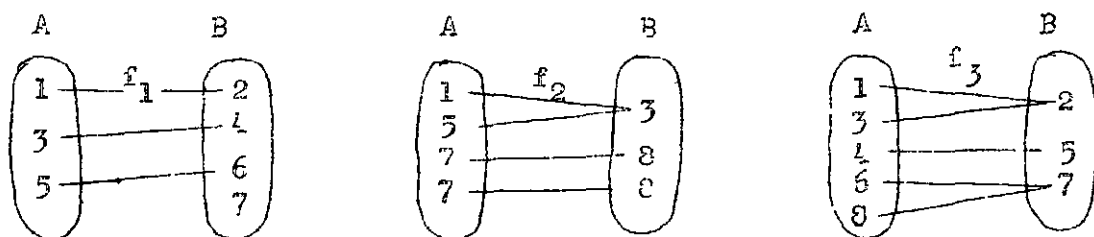
1. ถ้านักเรียนทดสอบผ่านในหน่วยนี้แล้วให้รับคำแนะนำหน่วยต่อไป
2. ถ้านักเรียนไม่ผ่านการทดสอบในหน่วยนี้จึงสอบถามจากผู้ควบคุมชั้นว่านักเรียนบกพร่องในจุดใด นักเรียนอาจจะสอบถามข้อข้องใจจากผู้ควบคุมชั้นหรือกลับไปศึกษาเองก็ได้เมื่อเข้าใจแล้วก็ขอกลับเข้าสอบใหม่

เอกสารแนะแนวทางหน่วยที่ 1

เรื่องที่ 1 ความหมายของฟังก์ชัน และการตรวจสอบฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน (Function) เป็นรูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์ (Relation) ความสัมพันธ์ที่จะเป็นฟังก์ชันได้นั้นต้อง เป็นความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเฉพาะ กล่าวคือถ้า f เป็นความสัมพันธ์ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อแต่ละสมาชิกในโดเมน (สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ) จะจับคู่หรือมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ (สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ) ได้เพียงสมาชิกเดียว

นักเรียนดูตัวอย่างของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันจากแบบภาพต่อไปนี้



หรือเขียนในรูปของ เซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$f_1 = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$$

$$f_2 = \{(1, 3), (5, 3), (7, 8), (7, 8)\}$$

$$f_3 = \{(1, 2), (3, 2), (4, 5), (6, 7), (8, 7)\}$$

นักเรียนจะเห็นว่าความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันนั้นแต่ละสมาชิกในโดเมน (สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ) จะจับคู่หรือมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ (สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ) ได้เพียงตัวเดียว ดังตัวอย่างในความสัมพันธ์ f_1, f_2, f_3

ข้อที่ควรสังเกต

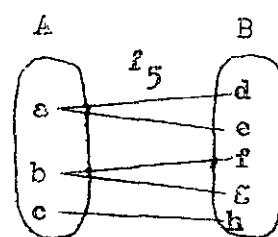
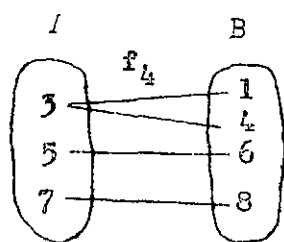
1. ใน f_2 มีสมาชิกในโดเมน คือ 7 มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ถึง

สองตัว คือ 8 กับ 8 แต่สมาชิกสองตัวนั้นคือตัวเดียวกัน คือ 8 เราถือว่า 7 ไม่ความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว ฉะนั้น f_2 จึงเป็นฟังก์ชัน

2. สมาชิกของโดเมนใน f_2 และ f_3 บางตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ซ้ำได้แก่

$$\begin{array}{l} 1 \searrow 3 \\ 5 \nearrow 3 \end{array} \text{ ใน } f_2 \quad \begin{array}{l} 1 \searrow 2 \\ 3 \nearrow 2 \end{array} \text{ และ } \begin{array}{l} 6 \searrow 7 \\ 8 \nearrow 7 \end{array} \text{ ใน } f_3$$

แต่เรายังกล่าวได้ว่า สมาชิกในโดเมนของ f_2 และ f_3 มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียวซึ่งต่างกับความสัมพันธ์ ที่ไม่ได้เป็นฟังก์ชัน ดังตัวอย่างนักเรียนดูตัวอย่างของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน ต่อไปนี้



หรือเขียนในรูปของ เซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$f_4 = \{(3, 1), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$$

$$f_5 = \{(a, d), (a, e), (b, f), (b, g), (c, h)\}$$

จะเห็นว่าความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน นั้นจะมีสมาชิกในโดเมนบางตัว (อย่างน้อยหนึ่งตัว) มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เกินหนึ่งตัว จากตัวอย่างใน f_4 และ f_5 จะมี

$$\begin{array}{l} 3 \begin{array}{l} \searrow 1 \\ \nearrow 4 \end{array} \text{ อยู่ใน } f_4 \\ \text{และ } f_5 \end{array} \quad \begin{array}{l} d \\ \nearrow e \end{array} \text{ และ } \begin{array}{l} b \begin{array}{l} \searrow f \\ \nearrow g \end{array} \text{ อยู่ใน } f_5 \end{array} \text{ ดังนั้น } f_4$$

จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

จากตัวอย่างดังกล่าว เราสามารถให้นิยามของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้ดังนี้

นิยาม 1.1 ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์หรือเซตของคู่อันดับ ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย หรือความสัมพันธ์ f จะเป็น ฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

ตัวอย่าง 1.1 จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

$$r_1 = \{ (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (2, 4) \}$$

$$r_2 = \{ (4, -2), (1, -1), (0, 0), (4, 2) \}$$

$$r_3 = \{ (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (2, 4) \}$$

วิธีทำ

r_1 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดในความสัมพันธ์ r_1 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ได้แก่ $(4, 2), (4, -2)$

r_3 เป็นฟังก์ชัน มีเหตุผลเหมือน r_1

แนวคิด

1. นักเรียนจงหาใจให้สบายแล้วยอมรับว่าขณะนี้เรารู้จักฟังก์ชันแล้ว ซึ่งไม่ได้เป็นเรื่องลึกลับอะไรเลย ค. จริงก็คือ เรื่องของความสัมพันธ์ที่เราเคยเรียนมาแล้วนั่นเอง เพียงแต่เราศึกษาเฉพาะความสัมพันธ์ที่มีลักษณะตามนิยามที่กล่าวมาแล้ว และเรียกความสัมพันธ์นั้นว่าฟังก์ชัน เพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

2. การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่นั้น เราพิจารณาโดยใช้นิยามมาเป็นหลักในการพิจารณาเมื่อนักเรียนศึกษาต่อไป เราจะมีวิธีการพิจารณาอย่างอื่นเพิ่มขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 1.1

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใด เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

$$r_1 = \{ (1, a), (2, a), (2, b), (3, c) \}$$

$$r_2 = \{ (1, 3), (2, 4), (5, 7), (1, 6) \}$$

$$r_3 = \{ (1, a), (2, b), (2, b), (1, b), (3, a) \}$$

$$r_4 = \{ (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1) \}$$

$$r_5 = \{ (1, a), (1, b), (1, c) \}$$

$$r_6 = \{ (1, a), (2, b), (3, c) \}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1

- r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ใค้แก่ $(2, a), (2, b)$
- r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ใค้แก่ $(1, 3), (1, 6)$
- r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ใค้แก่ $(1, a), (1, b)$
- r_4 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใค้ใน x_4 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังใค้เหมือนกัน
- r_5 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ใค้แก่ $(1, c), (1, b), (1, c)$
- r_6 เป็นฟังก์ชัน เหตุผลเหมือน r_4

การตรวจสอบฟังก์ชัน

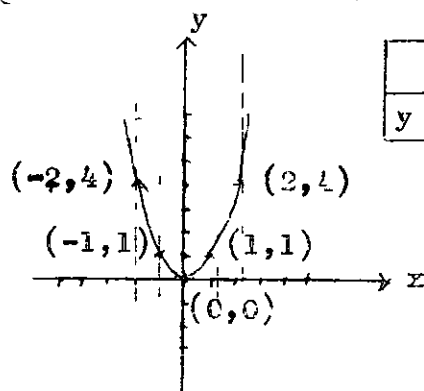
การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่นั้น นอกจากจะมีวิธีการตรวจสอบ โดยใช้นิยามตามที่กล่าวมาในหัวข้อที่ 1 แล้ว เรายังมีวิธีการตรวจสอบโดยวิธีการอื่นได้หลายวิธีดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 โดยวิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์ จากกราฟของความสัมพันธ์เราตรวจสอบได้โดยการลากเส้นให้ขนานกับแกน y ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์นั้น ถ้าเส้นที่ลากนั้นทุกเส้นตัดกับกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน ถ้ามีเส้นขนานกับแกน y นั้นๆ ตัดกับกราฟเกินกว่า 1 จุดก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.2 จงตรวจสอบว่า $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$ และ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีตรวจสอบ

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

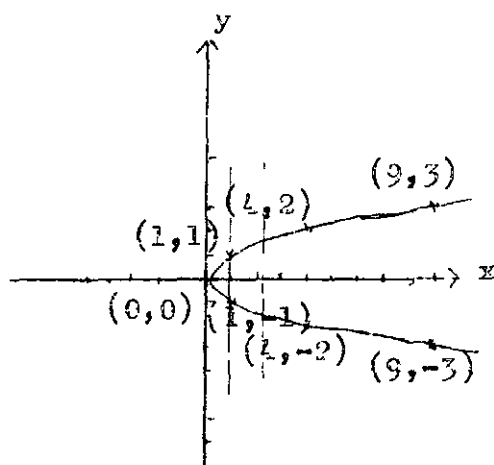


x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

จากกราฟของ $y = x^2$ เราลากเส้นขนานกับแกน y ก็จะได้ทุกตามแต่ละเส้น
จะตัดกราฟ $y = x^2$ เพียงจุดเดียวเท่านั้น นั่นคือ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$
เป็นฟังก์ชัน

Ans

$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x\}$$



x	0	1	4	9	16
$y^2 = x$	0	± 1	± 2	± 3	± 4

จากกราฟของ $y^2 = x$ เราลากเส้นขนานกับแกน y เพียงเส้นเดียว
ก็ตัดกราฟของ $y^2 = x$ ถึง 2 จุด นั่นคือ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x\}$
ไม่เป็นฟังก์ชัน

Ans

วิธีที่ 2 ใช้วิธีการคาดคะเน คือใช้วิธีพิจารณาจากตัวแปร y ว่าอยู่ในรูปกำลังที่เป็นจำนวนเต็มหรือไม่ หรืออยู่ในรูปค่าสมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าว ความสัมพันธ์นั้นก็ไม่ควรเป็นฟังก์ชัน เช่น

$$y^2 = x \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้า } x = 1 \text{ จะได้ } y = 1 \text{ และ } -1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้า } x = 0 \text{ จะได้ } y = 2 \text{ และ } -2$$

$$|y| = x \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้า } x = 2 \text{ จะได้ } y = 2 \text{ และ } -2$$

วิธีที่ 3 ตรวจสอบโดยวิธีสมมติค่า โดยการสมมติค่าใน r ดังนี้

ให้ $(a, b) \in r$ และ $(a, c) \in r$; $\left[\begin{matrix} a < b \\ a < c \end{matrix} \right]$ ถ้าสามารถสรุปได้ว่า $b = c$ ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็น ฟังก์ชัน วิธีนี้เป็นวิธีที่แน่นอน นักเรียนควรฝึกทำโดยวิธีนี้มาก ๆ

ตัวอย่างที่ 1.3 จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใด เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 = \{ (x, y) \in R \times R / y = 3x + 1 \}$$

$$r_2 = \{ (x, y) \in R \times R / y^2 = \sqrt{2x + 1} \}$$

$$r_3 = \{ (x, y) \in R \times R / y^2 = 5x - 2 \}$$

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_1 จะได้ $y = 3x + 1$

$$\text{ให้ } (a, b) \in r_1 \quad \text{จะได้ } b = 3a + 1 \quad (1)$$

$$\text{และ } (a, c) \in r_1 \quad \text{จะได้ } c = 3a + 1 \quad (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) \quad \text{จะได้ } b = c$$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ $r_1 = \{ (x, y) \in R \times R / y = 3x + 1 \}$

เป็นฟังก์ชัน

Ans

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_2 จะได้ $y^2 = \sqrt{2x+1}$

ให้ $(a, b) \in r_2$ จะได้ $b^2 = \sqrt{2a+1}$ (1)

และ $(a, c) \in r_2$ จะได้ $c^2 = \sqrt{2a+1}$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$

$$b = \pm \sqrt{c^2}$$

$$b = \pm c$$

ดังนั้นไม่สามารถสรุปได้ว่า

$$b = c$$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

Ans

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_3 จะได้ $y^2 = 5x - 2$

ให้ $(a, b) \in r_3$ จะได้ $b^2 = 5a - 2$ (1)

และ $(a, c) \in r_3$ จะได้ $c^2 = 5a - 2$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$

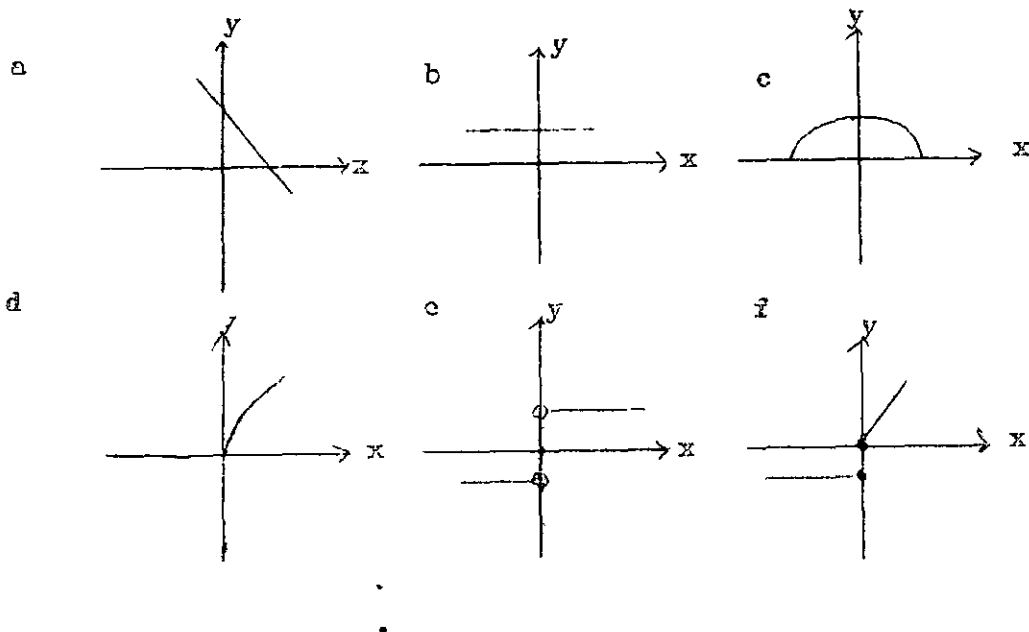
$$b = \pm \sqrt{c^2} = \pm c$$

ดังนั้นไม่สามารถสรุปได้ว่า $b = c$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน

Ans

ตัวอย่างที่ 1.4 ตรวจสอบว่ากราฟของความสัมพันธ์และความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่



$$g) \quad r_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1 \}$$

$$h) \quad r_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 1 \}$$

$$i) \quad r_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 5 \}$$

วิธีทำ

ตรวจสอบในข้อ a ถึง f โดยการลากเส้นขนานกับแกน y จะได้ว่า

กราฟในข้อ a เป็นฟังก์ชัน

b เป็นฟังก์ชัน

c เป็นฟังก์ชัน

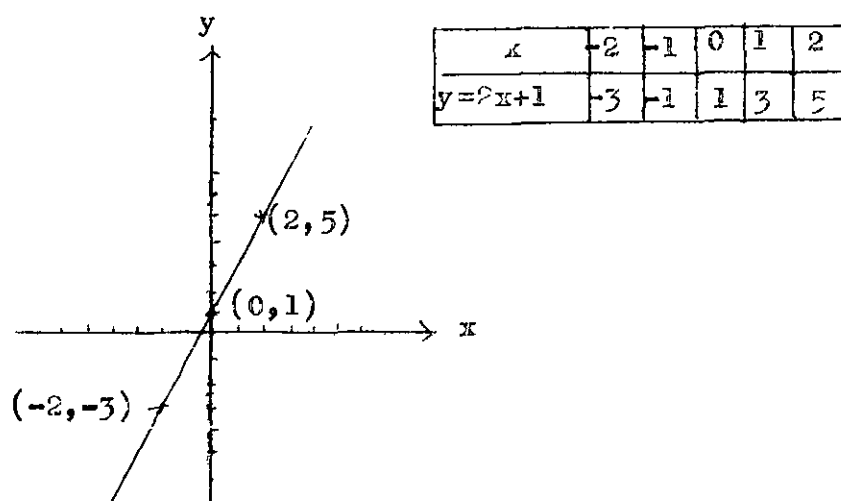
d เป็นฟังก์ชัน

e เป็นฟังก์ชัน

f ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข้อ ๕ $r_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1 \}$

ตรวจสอบโดยกราฟ



กราฟของ $y = 2x + 1$ เราลากเส้นขนานกับแกน y ที่เส้นที่ถาม
แต่ละเส้นจะตัดกราฟ $y = 2x + 1$ เพียงจุดเดียวเท่านั้น
นั่นคือ $y = 2x + 1$ เป็นฟังก์ชัน

Ans

ข้อ ๖ $r_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 1 \}$

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_2 จะได้ $xy = 1$

ให้ $(a,b) \in r_2$ จะได้ $a \cdot b = 1$
 $b = \frac{1}{a}$ (1)

และ $(a,c) \in r_2$ จะได้ $a \cdot c = 1$
 $c = \frac{1}{a}$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $b = c$

ดังนั้นความสัมพันธ์ $r_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 1 \}$ เป็นฟังก์ชัน

Ans

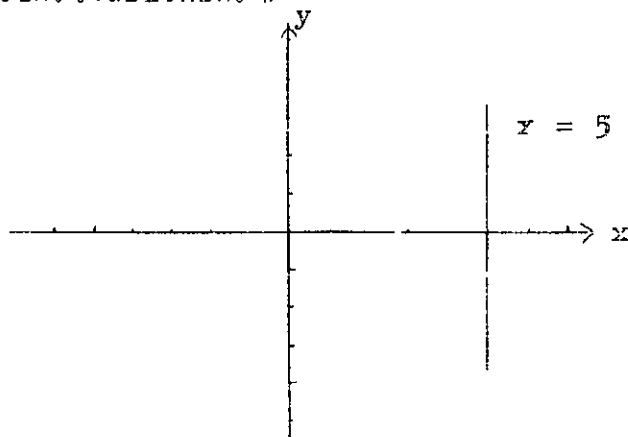
ข้อ 1 $r_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 5 \}$

ตรวจสอบโดยวิธีที่ 2 ได้ว่า ถ้า $x = 5$ แล้ว y จะับจำนวนจริง
ได้ทุกจำนวน

นั่นคือ $r_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 5 \}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

Ans

หรือตรวจสอบโดยกราฟ



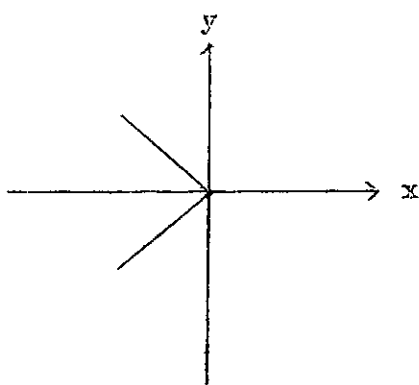
นั่นคือ $r_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x=5 \}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

Ans

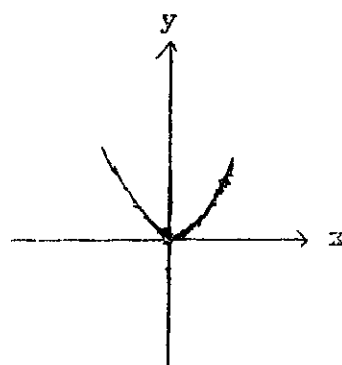
แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟของฟังก์ชันและกราฟใดไม่เป็นกราฟของฟังก์ชัน

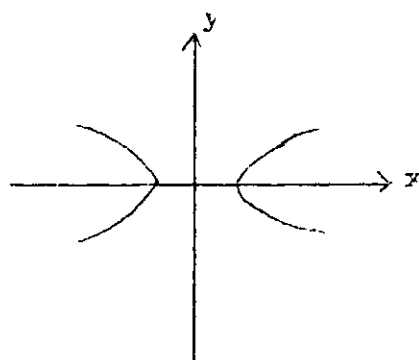
ก.



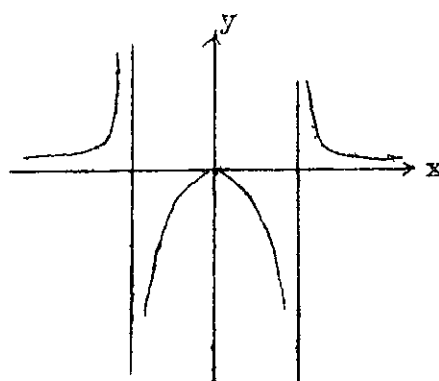
ข.



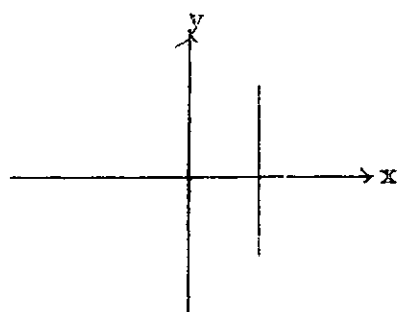
ค.



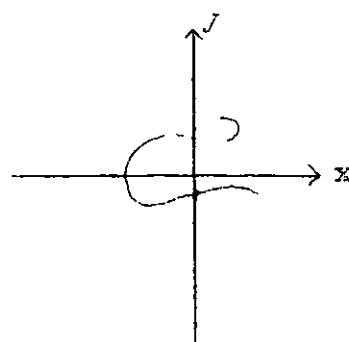
ง.



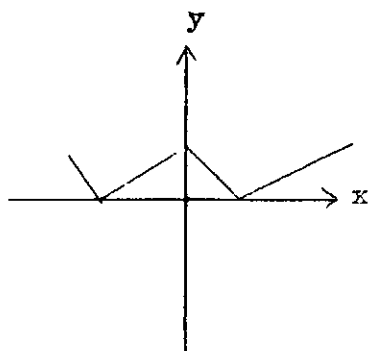
จ.



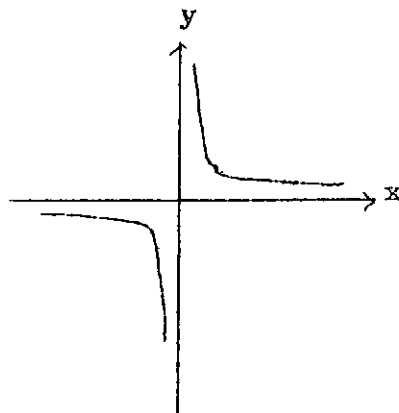
ฉ.



๖.



๗.



2. จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันหรือไม่

$$r_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 3 \}$$

$$r_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = -2 \}$$

$$r_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x} \}$$

$$r_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \right\}$$

เรื่องที่ 2 ความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B

นักเรียนลองทบทวนนิยามของความสัมพันธ์ที่เคยเรียนมาแล้ว จากเรื่องความสัมพันธ์ เรานิยามของความสัมพันธ์ดังนี้

r เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

นักเรียนจงสังเกตความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{x, y, z\}$$

$$r_1 = \{(1, y), (2, z), (3, x)\}$$

$$r_2 = \{(1, x), (2, y), (2, z)\}$$

$$r_3 = \{(1, z), (2, x)\}$$

ความสัมพันธ์ r_1, r_2, r_3 ต่างก็เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะต่างก็เป็นสับเซตของ $A \times B$ ตามนิยามดังกล่าว

นักเรียนมาลองพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ r_1, r_2, r_3 ความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

จะได้ความสัมพันธ์ r_1, r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดใดในความสัมพันธ์ r_1 และ r_3 ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน
ความสัมพันธ์ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ได้แก่ $(2, y)$ และ $(2, z)$ อยู่ใน r_2

ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1, y), (2, z), (3, x)\}$ และ $r_3 = \{(1, z), (2, x)\}$ ต่างก็เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แต่ความสัมพันธ์ r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่จะเป็นฟังก์ชันจากเซต $\{1, 2\}$ ไป B ส่วนความสัมพันธ์ r_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะสมาชิกทุกตัวใน A มีความสัมพันธ์กับสมาชิกใน B (ทุกตัวหรือบางตัวก็ได้)

นักเรียนดูตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ และมีความสัมพันธ์

$$r_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$$

$$r_2 = \{(1, 4), (2, 8), (3, 6)\}$$

$$r_3 = \{(1, 2), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$$

จะได้ว่า

r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B r_2 เป็นฟังก์ชันแต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่เป็นฟังก์ชันจากเซต $\{1, 2, 3\}$ ไป B

เราสรุปความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ดังนี้

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

1. โดเมนของ f เท่ากับ A

2. สองคู่อันดับใด ๆ ใน f ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

3. เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B

หรือเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 1.2 ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

$$1. D_f = A$$

$$2. \text{ ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f \text{ แล้วจะได้ } y = z$$

$$3. R_f \subseteq B$$

ความสำคัญของนิยามนี้อยู่ที่ว่า

1. โดเมนของฟังก์ชันจาก A ไป B จะต้องเป็น A หมายความว่าสมาชิกทุกตัวใน A จะต้องมีความสัมพันธ์กับสมาชิกใน B ถ้ามีสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งใน A เหลืออยู่ความสัมพันธ์นั้นจะไม่ใช่ฟังก์ชันจาก A ไป B

2. สมาชิกแต่ละตัวของ A จะเป็นสมาชิกตัวแรกของแต่ละคู่อันดับใน f ได้เพียงคู่อันดับเดียวเท่านั้น

3. เรนจ์ของฟังก์ชันจะต้องเป็นสับเซตของ B

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

$$r_1 = \{(2, 4), (3, 6)\}$$

$$r_2 = \{(1, 6), (2, 7), (3, 7)\}$$

$$r_3 = \{(1, 4), (2, 6), (3, 7)\}$$

วิธีทำ

r_1 เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะโดเมนของ

r_1 คือ $\{2, 3\}$ ไม่เท่ากับ A

r_2 เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B เพราะ

1. โดเมนของ r_2 คือ $\{1, 2, 3\}$ ซึ่งเท่ากับ A

2. ไม่มีคู่อันดับใดใน r_2 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกับ แต่สมาชิก

ตัวหลังไม่เหมือนกัน

3. เรนจ์ของ r_2 เป็นสับเซตของ B

r_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เหตุผลเหมือน r_2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f: A \longrightarrow B$ อ่านว่า " f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B "

เรียก A ว่า โดเมน (Domain) ของฟังก์ชัน f

เรียก B ว่า โค-โดเมน (Co-Domain) ของฟังก์ชัน f

ดังนั้น เรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน f จะต้องเป็นสับเซตของ B

นั่นคือ $R_f \subseteq B$

เมื่อเราพูดถึง $f : A \longrightarrow B$ ถ้าเราให้ $x \in A$ และ $y \in B$
 ในกรณีที่ $y \in R_f$ จะได้ คู่อันดับ $(x, y) \in f$
 ถ้า $(x, y) \in f$ เราจะเรียก y ว่าเป็นอิมเมจ (image) ของ x
 ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$y = f(x)$$

และเรียก x ว่าเป็นพรี-อิมเมจ (Pre-image) ของ y

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$ และ $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือ $f : A \longrightarrow B$
 จากตัวอย่างเราจะพบว่า $1 \in A$ และ $a \in B$ จะได้คู่อันดับ $(1, a) \in f$
 ซึ่งเราจะเรียก a ว่าเป็นอิมเมจของ 1 ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนใน

รูป $y = f(x)$ ได้ $a = f(1)$ หรือ $f(1) = a$

ดังนั้นเราจะได้ $b = f(2)$ หรือ $f(2) = b$ และ

$$c = f(3) \quad \text{หรือ} \quad f(3) = c$$

ต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์

$$f : x \longrightarrow y$$

แทนความหมายว่า y เป็น อิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f และ x
 เป็นพรี-อิมเมจของ y ซึ่งเขียนแทนด้วย $y = f(x)$

นั่นคือ ถ้า $f : x \longrightarrow y$ จะได้ $y = f(x)$

ถ้า $f : a \longrightarrow b$ จะได้ $b = f(a)$ แสดงว่า b

เป็น อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f

ถ้า $f : x \longrightarrow 2x$ จะได้ $f(x) = 2x$ แสดงว่า $2x$ เป็น

อิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f

ถ้า $f : a \longrightarrow a^2$ จะได้ $f(a) = a^2$ แสดงว่า a^2 เป็น

อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f

ดังนั้น จาก $f : x \longrightarrow y$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$f : x \longrightarrow f(x)$$

แสดงว่า $f(x)$ ใช้แทนสมาชิกตัวที่สองในคู่อันดับ เมื่อสมาชิกตัวแรกเป็น x

ดังนั้นเราอาจใช้คู่อันดับ $(x, f(x))$ แทนคู่อันดับ (x, y) ได้

ถ้าฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow y$ เขียนแทนด้วย เซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$f = \{ (0, 1), (3, 4), (6, 7), (9, 10) \}$$

$$\text{ถ้า } x = 0 \quad \text{จะได้ } f(x) = f(0) = 1$$

$$x = 3 \quad \text{จะได้ } f(x) = f(3) = 4$$

$$x = 6 \quad \text{จะได้ } f(x) = f(6) = 7$$

$$x = 9 \quad \text{จะได้ } f(x) = f(9) = 10$$

$f(x)$ อ่านว่า "เอฟทีเอกซ์" หรือ "เอฟของเอกซ์" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน

f ที่ x

ถ้า $f(m)$ เราอ่านว่า "เอฟทีเอ็ม" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ m

หรือ $f(3)$ เราอ่านว่า "เอฟทีสาม" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ 3

ถ้ากำหนด ฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow y$ และ $y = 2x + 1$

ดังนั้น จะได้ $f : x \longrightarrow 2x + 1$

นั่นคือ $f(x) = 2x + 1$

และเราทราบว่า $f(x)$ หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก $f(x)$ หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งเราหาค่าฟังก์ชันได้

โดยแทนค่า x ในเทอม $2x+1$

จำนวนที่เราจะใช้แทน x ในเทอม $2x+1$ นั้นเราเอามาจากไหน ถึงตรงนี้

เราจำเป็นต้องรู้อะไรบางอย่างเพิ่มเติมเราจึงจะรู้ว่าฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$

จะมีลักษณะอย่างไร สิ่งที่เราจะต้องรู้เพิ่มเติม คือ

1. โดเมนของฟังก์ชัน

2. เงื่อนไขหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชัน

จากฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ สิ่งที่เราารู้แล้วคือเงื่อนไขของฟังก์ชันคือ

$$f(x) = 2x + 1$$

ดังนั้น สิ่งที่เราต้องรู้เพิ่มเติมคือโดเมนของฟังก์ชันนี้ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชันนั้นจะมีการกำหนดเซตของโดเมนของฟังก์ชันนั้น ๆ มาให้เสมอ

จากฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ ถ้ากำหนดโดเมน คือ $D_f = \{ x \in I / -2 \leq x \leq 3 \}$ นั่นคือ $D_f = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$ นั่นเอง

เมื่อเรารู้โดเมนและเงื่อนไขหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชันแล้ว เราย่อมหาค่าของฟังก์ชันแต่ละค่าและสามารถเขียนฟังก์ชันนั้นออกมาเป็นเซตของคู่อันดับและเขียนกราฟได้

ดังนั้น จากที่เรากำหนด $f : x \longrightarrow y$ และ $y = 2x + 1$

และ $D_f = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$ เราสามารถหาค่าฟังก์ชันแต่ละค่าและเขียนฟังก์ชัน f นี้ ออกมาเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

เพราะว่า $y = f(x) = 2x + 1$

ดังนั้น $f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(0) = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$$

เขียนเป็นคู่อันดับได้ดังนี้ $f = \{ (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}$

ในทางอ้อมเดียวกัน เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันอื่น ๆ ได้ ถ้าเรารู้โดเมนและเงื่อนไขหรือสูตรฟังก์ชันนั้น ๆ

ก่อนที่จะดูตัวอย่าง เรามาทำความเข้าใจเกี่ยวกับการเขียนเงื่อนไขหรือสูตรสำหรับอธิบายฟังก์ชันเสียก่อน เรามีวิธีการเขียนเงื่อนไขหรือสูตรสำหรับอธิบายฟังก์ชันอยู่ 3 วิธีคือ

ถ้ากำหนด $f : x \longrightarrow y$ และ $y = 3x^2 - 1$ เราเขียนได้ดังนี้

แบบที่ 1 $f : x \longrightarrow 3x^2 - 1$

แบบที่ 2 $f(x) = 3x^2 - 1$ โดยทั่วไปเราถือว่าโดเมนของฟังก์ชันนี้เป็น

จำนวนจริง หรือบางครั้งเขียนในรูป $y = 3x^2 - 1$

แบบที่ 3 $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x^2 - 1 \}$

การเขียนในแบบที่ 2 และ 3 จะเป็นแบบที่นิยมเขียนกันมาก

ฟังก์ชันบางชนิดอาจจะเขียนเงื่อนไขในการอธิบายฟังก์ชันแต่ละช่วงแตกต่างกัน

เช่น

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x \leq 4 \\ x + 1 & ; \quad x > 4 \end{cases}$$

ดังนั้น เวลาหาค่าของฟังก์ชัน f หรือค่าของเรนจ์ของ f หรืออิมเมจของฟังก์ชัน f ก็ต้องใช้เงื่อนไขแตกต่างกันไปตามช่วงของ x เช่น

ต้องการหา $f(3)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = 2x$ เพราะ $3 < 4$

จะได้ $f(3) = 2 \times 3 = 6$

ต้องการหา $f(6)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = x + 1$ เพราะ $6 > 4$

จะได้ $f(6) = 6 + 1 = 7$

ต้องการหา $f(4)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = 2x$ เพราะ $4 = 4$

จะได้ $f(4) = 2 \times 4 = 8$

ต้องการหา $f(-1)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = 2x$ เพราะ $-1 < 4$

จะได้ $f(-1) = 2(-1) = -2$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1.6 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ และ $f: A \longrightarrow B$
โดยที่ $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$
จงหาค่าของ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$

วิธีทำ $f(1) = 3$

$f(2) = 5$

$f(3) = 7$

$f(4) = 9$

ตัวอย่างที่ 1.7 ถ้า $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x^2 - x + 3\}$
จงหาค่าของ $g(1)$, $g(0)$, $g(-1)$, $g(-2)$

$g(-3)$, $g(a + b)$

วิธีทำ จากเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้ $y = 2x^2 - x + 3$

$$y = g(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$g(1) = 2(1)^2 - (1) + 3$$

$$= 2 - 1 + 3$$

$$= 4$$

$$g(0) = 2(0)^2 - (0) + 3$$

$$= 0 - 0 + 3$$

$$= 3$$

$$g(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 3$$

$$= 2 + 1 + 3$$

$$= 6$$

$$g(-2) = 2(-2)^2 - (-2) + 3$$

$$= (2 \times 4) + 2 + 3$$

$$= 8 + 2 + 3$$

$$= 13$$

$$\begin{aligned}
 f(-3) &= 2(-3)^2 - (-3) + 3 \\
 &= (2 \times 9) + 3 + 3 \\
 &= 18 + 3 + 3 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(a+b) &= 2(a+b)^2 - (a+b) + 3 \\
 &= 2(a^2 + 2ab + b^2) - a - b + 3 \\
 &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 - a - b + 3
 \end{aligned}$$

Ans

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ แล้ว

$$f_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3)\}$$

$$f_2 = \{(1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$f_3 = \{(2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$$

$$f_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

$$f_5 = \{(1, 2), (3, 3), (2, 3)\}$$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2. กำหนด $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ จงหาค่าของ

ก. $f(1)$

ข. $f(-2)$

ค. $f(3)$

ง. $f(a)$

จ. $f(-b)$

ฉ. $f(a+b)$

ช. $f(a) + f(b)$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 1 \\ 0 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ -1 & , x > 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ $f(-2), f(0), f(1), f(\frac{1}{2}), f(\sqrt{3}), f(5)$

4. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^3 - 2x + 1\}$ จงตรวจสอบว่า

ก. $f(3) + (2) = f(3 + 2)$ หรือไม่

ข. $f(4.5) = f(4) \cdot f(5)$ หรือไม่

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1. f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ
 1. $D_{f_1} = A$
 2. ไม่มีคู่อันดับใดใน f_1 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน
 3. $R_{f_1} \subset B$ f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ
เหตุผลเหมือน f_1
 f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $D_{f_3} \neq A$
แต่ f_3 เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A เพราะ
 1. $D_{f_3} = B$
 2. ไม่มีคู่อันดับใดใน f_3 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน
 3. $R_{f_3} \subset A$ f_4, f_5 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เหตุผลเหมือน f_1
2. ก. $9(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 3$

$$= 2 - 4 + 3$$

$$= 1$$
 ข. $f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 3$

$$= (2 \times 4) + 8 + 3$$

$$= 8 + 8 + 3$$

$$= 19$$
 ค. $f(3) = 2(3)^2 - 4(3) + 3$

$$= (2 \times 9) - 12 + 3$$

$$= 18 - 12 + 3$$

$$= 9$$

$$8. \quad f(a) = 2a^2 - 4a + 3$$

$$\begin{aligned} 9. \quad f(-b) &= 2(-b)^2 - 4(-b) + 3 \\ &= 2b^2 + 4b + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad f(a+b) &= 2(a+b)^2 - 4(a+b) + 3 \\ &= 2(a^2 + 2ab + b^2) - 4a - 4b + 3 \\ &= 2a^2 + 4ab + 2b^2 - 4a - 4b + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad f(a) &= 2a^2 - 4a + 3 \\ f(b) &= 2b^2 - 4b + 3 \\ f(a) + f(b) &= 2a^2 + 2b^2 - 4a - 4b + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad f(-2) &= 1 & f(0) &= 1 \\ f(1) &= 0 & f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ f(\sqrt{3}) &= 0 & f(9) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \text{ii. } f(3) &= 3^3 - 2(3) + 1, & f(3+2) &= f(5) \\ &= 27 - 6 + 1 & &= 5^3 - 2(5) + 1 \\ &= 22 & &= 125 - 10 + 1 \\ & & &= 116 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2(2) + 1 \\ &= 8 - 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) + f(2) &= 22 + 5 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3) + f(2) \neq f(3 + 2)$$

$$\begin{aligned}
 f(4) &= 4^3 - 2(4) + 1 \\
 &= 64 - 8 + 1 \\
 &= 56 + 1 \\
 &= 57 \\
 1. \quad f(4.5) &= f(20) \\
 &= 20^3 - (2 \times 20) + 1 \\
 &= 8000 - 40 + 1 \\
 &= 7960 + 1 \\
 &= 7961 \\
 f(5) &= 5^3 - 2(5) + 1 \\
 &= 125 - 10 + 1 \\
 &= 116 \\
 f(4) \cdot f(5) &= 57 \times 116 \\
 &= 6612 \\
 \therefore f(4.5) &\neq f(4) \cdot f(5)
 \end{aligned}$$

เรื่องที่ 3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์มาแล้ว ในเรื่องของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นจะศึกษาต่อจากโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ในการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นเราจะศึกษากันเฉพาะโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ที่กำหนดเงื่อนไขในรูป $y = f(x)$ เท่านั้น และเราอาศัยนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่ว่า

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนด้วย $D_r = \{x / (x,y) \in r\}$ และ

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย $R_r = \{y / (x,y) \in r\}$

จากนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ เรานำความรู้ที่ได้รับมาหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้ดังนี้

การหาโดเมนของฟังก์ชัน

1. เขียนสมการ y ในเทอมของ x หรือจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$
2. เซตของจำนวนจริง x ที่ทำให้ y เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับกฎหรือเงื่อนไขของฟังก์ชัน คือ โดเมนของฟังก์ชัน ซึ่งนิยมเขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขหรือช่วง

การหาเรนจ์ของฟังก์ชัน

1. เขียนสมการ x ในเทอมของ y หรือจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = f(y)$
 2. เซตของจำนวนจริง y ที่ทำให้ x เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับกฎหรือเงื่อนไขของฟังก์ชัน คือ เรนจ์ของฟังก์ชัน ซึ่งนิยมเขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขหรือช่วง
- หมายเหตุ

ในการศึกษาบทเรียนต่อไปนี้จะกำหนดการเขียนเงื่อนไขของฟังก์ชันใน

สองรูปแบบ คือ แบบ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$ กับแบบที่เขียนในรูป $f(x) = x^2$ หรือ $y = x^2$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x - 1\}$

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้

$y = 3x - 1$ หาโดเมนของ

f จาก $y = 3x - 1$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง x

จะได้ y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$

หรือ $D_f = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

หาเรนจ์จาก $y = 3x - 1$

จะได้ $x = \frac{y+1}{3}$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง y

จะได้ x เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นเรนจ์ของ f คือ $\mathbb{R}$

หรือ $R_f = \mathbb{R} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$

Ans

แนวคิด

วิธีหาโดเมน

1. การหาโดเมนต้องจัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูป

$y = f(x)$ จะได้ $y = 3x - 1$

2. ตรวจสอบว่ามีค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

ค่าใดบ้างที่เมื่อนำไปแทนค่า x แล้วทำให้เราไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันได้ ซึ่ง

ตรวจสอบแล้ว ปรากฏว่าไม่มี ดังนั้น x จึง

เป็นจำนวนจริงได้ทุกค่า นั่นคือ ทุก ๆ x

เป็นจำนวนจริง

หรือ $D_f = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

วิธีหาเรนจ์

1. การหาเรนจ์ต้องจัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูป

$x = f(y)$ จากฟังก์ชันจะได้ $y = 3x - 1$

$$\therefore y + 1 = 3x$$

$$\therefore \frac{y+1}{3} = x \text{ หรือ } x = \frac{y+1}{3}$$

2. ตรวจสอบว่ามีค่า y ที่เป็นจำนวนจริง

ค่าใดบ้าง เมื่อนำไปแทนค่า y แล้วหา

ให้เราไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันได้

ซึ่งตรวจสอบปรากฏว่า ไม่มี ดังนั้น y

จึงเป็นจำนวนจริงได้ทุกค่า นั่นคือ ทุก ๆ y

เป็นจำนวนจริง หรือ $R_f = \mathbb{R} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x-2}\}$

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้

$$y = \sqrt{x-2}$$

หาโดเมนจาก $y = \sqrt{x-2}$

ค่าของ y หรือ $\sqrt{x-2}$

เป็นจำนวนจริงเมื่อ $x-2 \geq 0$

หรือ เมื่อ $x \geq 2$ ดังนั้น โดเมน

ของ f คือ $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$

หรือ $[2, \infty)$

หาเรนจ์จาก $y = \sqrt{x-2}$

จะได้ $y^2 = x-2$

หรือ $y^2 + 2 = x$

จาก $y^2 + 2 = x$ จะเห็นว่าทุก ๆ

จำนวนจริง y จะได้ x เป็น

จำนวนจริงเสมอ แต่เงื่อนไข

ของฟังก์ชัน คือ $y = \sqrt{x-2}$

ซึ่ง $y \geq 0$ ดังนั้น เรนจ์ของ f

คือ $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

หรือ $[0, \infty)$

แนวคิด

วิธีหาโดเมน

1. ต้องจัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

ในตัวอย่างนี้เราได้โจทย์ในรูปแบบนั้นแล้ว

คือ $y = \sqrt{x-2}$

2. ตรวจสอบว่ามี x ที่เป็นจำนวนจริง

ค่าใดบ้างที่เมื่อนำไปแทนค่า x

แล้ว ทำให้ไม่สามารถหาค่าของสมการ

ได้ เราพิจารณา $\sqrt{x-2}$ ถ้า $x = 2$

หรือ มากกว่า 2 จะทำให้ได้ค่า $x-2$

เป็น 0 หรือ มากกว่า 0 คือ เป็น

จำนวนบวกซึ่งหารากที่ 2 ได้ แต่ถ้า

น้อยกว่า 2 เช่น $x = 1$ จะได้

$x-2 = 1-2 = -1$ ซึ่งเป็น

จำนวนลบ ทำให้ไม่สามารถหาค่า

รากที่ 2 ได้เป็นจำนวนจริง ดังนั้นค่า

ของ x จากฟังก์ชันนี้ต้องเท่ากับ 2 หรือ

มากกว่า 2 ซึ่งสามารถเขียนแบบมอ

เงื่อนไขหรือช่วงได้ ดังนี้

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$ หรือ $[2, \infty)$

วิธีเรนจ์

1. จัดฟังก์ชันให้ x อยู่ในเทอมของ y

จาก $y = \sqrt{x-2}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

จะได้ $y^2 = x - 2$ หรือ $y^2 + 2 = x$

2. ตรวจสอบว่ามีค่า y ที่เป็นจำนวนจริง
ค่าใดบ้างเมื่อนำไปแทนค่า y ในฟังก์ชัน
แล้วไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันได้ ตรวจสอบ
แล้วปรากฏว่าไม่มี ดังนั้น y จึงเป็น
จำนวนจริงได้ทุกค่า

3. ต้องพิจารณาข้อสำคัญอีกประการหนึ่ง
คือ เงื่อนไขของฟังก์ชัน ในที่นี้มีเงื่อนไข
ว่า $y = \sqrt{x-2}$ ซึ่ง y ต้องเป็นจำนวน
จริงบวกหรือศูนย์ ดังนั้น จะได้
 $y \geq 0$ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป
เงื่อนไขหรือช่วงใดเป็น
 $R_f = \{ y \in \mathbb{R} / y \geq 0 \}$ หรือ $[0, \infty)$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x}{x+3} \}$
วิธีทำ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้ $y = \frac{x}{x+3}$

หาโดเมนจาก $y = \frac{x}{x+3}$

ค่าของ y หรือ $\frac{x}{x+3}$ เป็นจำนวนจริง

เมื่อ $x+3 \neq 0$ หรือเมื่อ $x \neq -3$

ดังนั้นโดเมนของ f คือ $\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -3 \}$

หรือ $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

หาเรนจ์จาก $y = \frac{x}{x+3}$ จะได้ $y(x+3) = x$

$$xy + 3y = x$$

$$x - xy = 3y$$

$$x(1-y) = 3y$$

$$x = \frac{3y}{1-y}$$

$x = \frac{3y}{1-y}$ จะเป็นจำนวนจริงเมื่อ $y \neq 1$

ดังนั้นเรนจ์ของ f คือ $\{y \in \mathbb{R} / y \neq 1\}$ หรือ

$$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Ans

ข้อควรสังเกต

ในการหาเรนจ์ของฟังก์ชันในบางครั้งไม่จำเป็นต้องจัดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $x = f(y)$ ก็ได้ ถ้ารูปของเงื่อนไขของฟังก์ชันนั้นอยู่ในรูปที่เราสามารถพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันได้ เช่น เงื่อนไขของฟังก์ชันอยู่ในรูป $y = \sqrt{x}$ หรือ $y = |x+2|$ ฯลฯ ลักษณะเช่นนี้ เราจะพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันจากเงื่อนไข $\sqrt{x}$ หรือ $|x+2|$

เรนจ์ของ $y = \sqrt{x}$ เนื่องจาก $x < 0$ ไม่สามารถหาค่าของ $\sqrt{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้ ค่าของ x จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้นจึงจะสามารถหาค่า $\sqrt{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันนี้จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้น นั่นคือ $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ เป็นต้น

จากการศึกษาเรื่องโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ทำให้เราสามารถตรวจสอบว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ตามที่กำหนดให้หรือไม่ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.11 จงพิจารณาว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x-3}\}$
เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่ ถ้าไม่เป็น f จะเป็นฟังก์ชันจาก
เซตใดไปเซตใด

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน จะได้ $y = \sqrt{x-3}$

หาโดเมนของ f จาก $y = \sqrt{x-3}$

จะได้ว่า $x-3$ ต้องเป็นจำนวนบวกหรือ 0 เท่านั้น

จึงจะทำให้ y หรือ $\sqrt{x-3}$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $x-3 \geq 0$

$$x \geq 3$$

แสดงว่าโดเมนของ $f \neq \mathbb{R}$ เพราะ x ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 3

ซึ่งทำให้ค่าของ y เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

หาเรนจ์ของ f จาก $y = \sqrt{x-3}$

จะได้ว่า y มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้น

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

นั่นคือ f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เมื่อ

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$$

$$\text{และ } B = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

Ans

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันและตรวจสอบว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปเซตใด

$$1. f_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 5x \}$$

$$2. f_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2x + 3y = 7 \}$$

$$3. f_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{3x}{x-2} \}$$

$$4. f_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| \}$$

$$5. f_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 4x + 6 \}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.4

1. $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 5x\}$

วิธีหา หาโดเมนของ $y = 5x$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง x จะได้ y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นโดเมนของ f_1 คือ $\mathbb{R}$

หรือ $D_{f_1} = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

หาเรนจ์ของ $y = 5x$ จัดรูปสมการใหม่เป็นสมการ x

ในเทอมของ y จะได้ $x = \frac{y}{5}$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง y จะได้ค่า x เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นเรนจ์ของ f_1 คือ $\mathbb{R}$

หรือ $R_{f_1} = \mathbb{R} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$

ดังนั้น f_1 เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

2. $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2x + 3y = 7\}$

วิธีหา หาโดเมนของ $2x + 3y = 7$ โดยจัดสมการ y ในเทอมของ x

ได้เป็น $3y = 7 - 2x$

$$y = \frac{7 - 2x}{3}$$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง x จะได้ค่า y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นโดเมนของ f_2 คือ $\mathbb{R}$

หรือ $D_{f_2} = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

หาเรนจ์ของ $2x + 3y = 7$ จัดรูปสมการใหม่เป็นสมการ x

ในเทอมของ y จะได้

$$2x = 7 - 3y$$

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง y จะได้ค่า x เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น เรนจ์ของ f_2 คือ R

$$\text{หรือ } R_{f_2} = R = \{y / y \in R\}$$

ดังนั้น f_2 เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R

$$3. f_3 = \left\{ (x, y) \in R \times R / y = \frac{3x}{x-2} \right\}$$

วิธีหา หาดโคเมนของ $y = \frac{3x}{x-2}$

จะเห็นว่าเมื่อ $x = 2$ จะทำให้ $x - 2 = 0$ ทำให้ $\frac{3x}{x-2}$

หาค่าไม่ได้ (ไม่มีความหมาย)

ดังนั้นโคเมนของ f_3 คือ $\{x \in R / y \neq 2\}$ หรือ

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

หาเรนจ์ของ $y = \frac{3x}{x-2}$ จัดรูปสมการใหม่เป็นสมการ x

ในเทอม y จะได้

$$y(x - 2) = 3x$$

$$xy - 2y = 3x$$

$$xy - 3x = 2y$$

$$x(y - 3) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y-3}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $y = 3$ จะทำให้ $y - 3 = 0$ ทำให้ $\frac{2y}{y-3}$

หาค่าไม่ได้ (ไม่มีความหมาย)

ดังนั้นเรนจ์ของ f_3 คือ $\{y \in \mathbb{R} / y \neq 3\}$ หรือ

$(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

ดังนั้น f_3 จึงเป็นฟังก์ชันจากเซต $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$ ไป $\{y \in \mathbb{R} / y \neq 3\}$

$$4. f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$$

วิธีทำ หาโดเมนของ $y = |x|$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง x จะได้ค่า y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นโดเมนของ $f_4 = \mathbb{R}$

หรือ $D_{f_4} = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

หาเรนจ์ของ $y = |x|$

พิจารณาจาก $|x|$ ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกหรือลบจะได้

ค่า y เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ และถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 0$

ดังนั้น เรนจ์ของ f_4 คือ $\{y / y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

หรือ $\{0\} \cup (0, \infty)$

ดังนั้น f_4 จึงเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $[0, \infty)$

$$5. f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 4x + 6\}$$

วิธีทำ หาโดเมนของ $y = x^2 - 4x + 6$

จะเห็นว่าทุก ๆ จำนวนจริง x จะได้ค่า y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นโดเมนของ f_5 คือ $\mathbb{R}$

หรือ $D_{f_5} = \mathbb{R} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

หาเรนจ์ของ $y = x^2 - 4x + 6$

เนื่องจากฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันควอดราติกและมีสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นบวก
ดังนั้นจะเป็นพาราโบลาหงาย ซึ่งค่าต่ำสุดที่

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{เมื่อ } a = 1, b = -4$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x &= -\left(\frac{-4}{2}\right) \\ &= -(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= 2^2 - (4 \times 2) + 6 \\ &= 4 - 8 + 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ฉะนั้นค่าของ $y \geq 2$

ดังนั้นเรนจ์ของ $f_5 = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 2\}$

ดังนั้น f_5 เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 2\}$

Ans

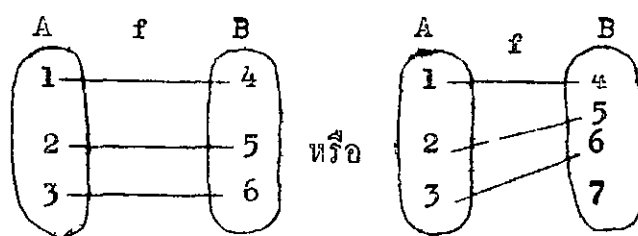
เรื่องที่ 4 รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

จากการศึกษาถึงความหมายของฟังก์ชันสามารถสรุปเป็นนิยามของฟังก์ชันได้ว่า ความสัมพันธ์ f จาก A ไป B จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

1. $D_f = A$
2. ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$
3. $R_f \subseteq B$

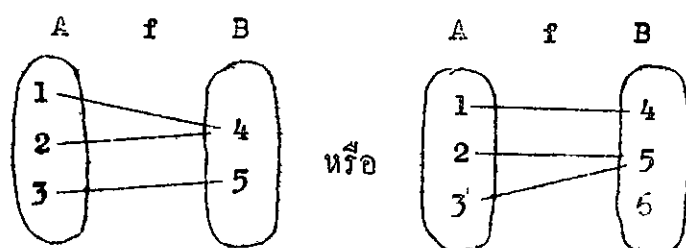
ดังนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วคุณสมบัติอย่างแรกที่ต้องมีคือโดเมนของฟังก์ชันนั้นต้องเท่ากับ A แต่เรนจ์ของฟังก์ชันจะเท่ากับ B หรือไปก็ได้ ฉะนั้น ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วจะมีความสัมพันธ์กันระหว่างโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชันได้หลายลักษณะ เช่น เรนจ์ของ f อาจจะเท่ากับ B ก็ได้ หรืออาจจะปี $x_1, x_2 \in A$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ อาจจะเท่ากันก็ได้ นั่นคือ x_1 และ x_2 ไปสัมพันธ์กับสมาชิกใน B ตัวเดียวกัน ดังนั้นเราจึงสามารถจำแนกรูปแบบของฟังก์ชันตามลักษณะที่แตกต่างกันได้ดังนี้

1. ฟังก์ชัน 1 - 1 (one-to-one Function) พิจารณาจากแผนภาพ

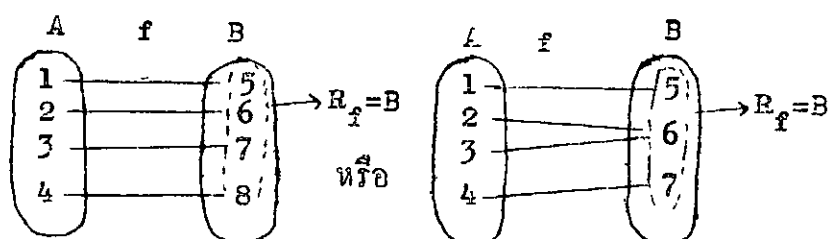


ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า ฟังก์ชันแบบ 1 - 1 (อ่านว่าหนึ่งต่อหนึ่ง หรืออ่านฟังก์ชันวัน ทุ วัน) ก็ต่อเมื่อสมาชิกในเรนจ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวเท่านั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าไม่มีสมาชิกในโดเมน 2 สมาชิกหรือมากกว่าไปมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงสมาชิกเดียว ดังแผนภาพข้างบน

ในกรณีที่ $f : A \longrightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบ Many - to - one ดังตัวอย่างข้างล่าง



2. ฟังก์ชันแบบ ไปทั่วถึง (onto Function) พิจารณาจากแผนภาพ

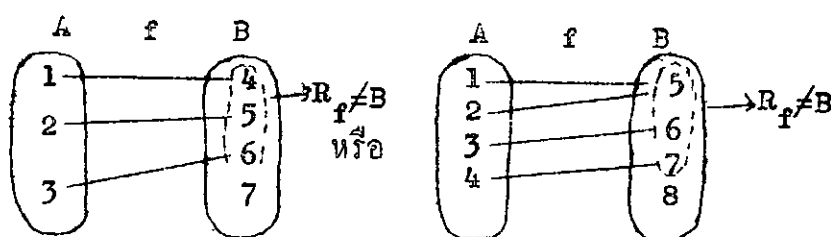


ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

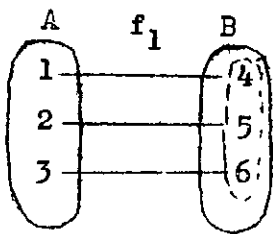
จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$

ดังตัวอย่างข้างบน

ในกรณีที่ $f : A \longrightarrow B$ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B เราเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบ A ไปยัง B (into Function) ดังตัวอย่างข้างล่าง



จากรูปแบบของฟังก์ชันดังกล่าวมาทั้งหมดสามารถสรุปได้ในรายละเอียดว่า ฟังก์ชันทั้งหมดแยกออกเป็น 4 แบบ ดังแผนภาพต่อไปนี้



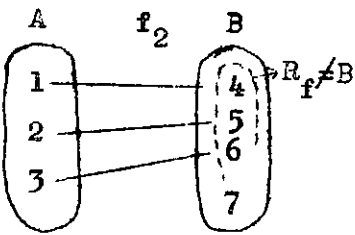
f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ 1 - 1

หรือ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$f_1 : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$$

หรือ เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นแบบ

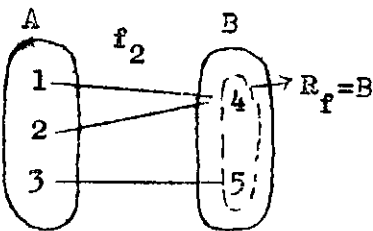
one-to-one Correspondence



f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แบบ 1 - 1

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$f_2 : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$$

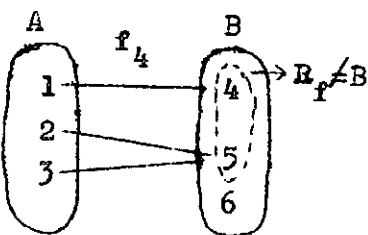


f_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ

Many - to - one

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$f_3 : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{Many - to - one}} B$$



f_4 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แบบ

Many - to - one

หรือ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$f_4 : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} B$$

การตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่ จะมีวิธีการตรวจสอบคล้ายคลึงกับ การตรวจสอบว่า ความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพียงแต่เราใช้วิธีการกลับกันดังนี้

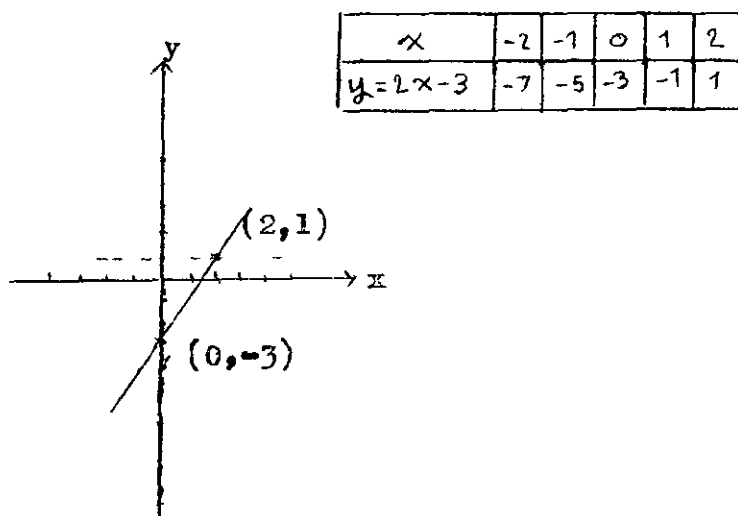
วิธีที่ 1 โดยวิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชัน เราตรวจสอบได้โดยการลากเส้นขนานกับแกน x ให้ตัดกับกราฟของฟังก์ชันนั้น ถ้ามีเส้นที่ลากขนานกับแกน x เส้นใดเส้นหนึ่งตัดกับเส้นกราฟเกิน 1 จุด ก็แสดงว่าฟังก์ชันนั้นไม่เป็น ฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$

จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีทำ ตรวจสอบโดยวิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชัน

จากเงื่อนไขของ ฟังก์ชัน จะได้ $y = 2x - 3$



ดังนั้น $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$ เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 เพราะเมื่อลากเส้นขนานกับแกน x แล้วแต่ละเส้นจะตัดกับแกนกราฟเพียงจุดเดียว

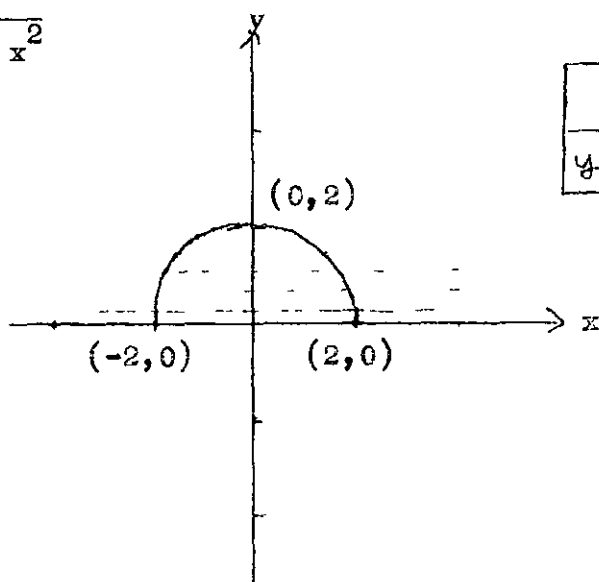
Ans

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{4 - x^2}\}$

จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีทำ ตรวจสอบ โดยวิธีการเขียนกราฟของฟังก์ชัน จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

จะได้ $y = \sqrt{4 - x^2}$



x	0	1	-2
$y = \sqrt{4 - x^2}$	2	0	0

ดังนั้น $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{4 - x^2}\}$

ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 เพราะเมื่อลากเส้นขนานกับแกน แล้วจะมี
บางเส้นตัดแกนกราฟเกิน 1 จุด

Ans

วิธีที่ 2

โดยวิธีการคาดคะเน กล่าวคือ ใช้วิธีการพิจารณาจากตัวแปร x ว่าอยู่ในรูป
ยกกำลังที่เป็นจำนวนเต็มคู่ หรืออยู่ในรูปค่าสมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าว ฟังก์ชัน
นั้นไม่ควรเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 กล่าวคือ ฟังก์ชันนั้นจะเป็นฟังก์ชัน แบบ (Many-to-one)

วิธีที่ 3 โดยวิธีสมมติค่า เป็นการตรวจสอบ โดยการสมมติคู่อันดับใด ๆ ใน
ฟังก์ชันแล้วทดสอบดังนี้

$$\text{ให้ } (a,c) \in f \text{ และ } (b,c) \in f, \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] \rightarrow c$$

ถ้าสามารถสรุปได้ว่า $a = b$ ก็แสดงว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1 \}$

จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีทำ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน จะได้ $y = x^2 + 1$

$$\text{ให้ } (a,c) \in f \quad \text{จะได้ } c = a^2 + 1 \quad (1)$$

$$\text{และ } (b,c) \in f \quad \text{จะได้ } c = b^2 + 1 \quad (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) \quad \text{จะได้ } a^2 + 1 = b^2 + 1$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm \sqrt{b^2}$$

$$a = \pm b$$

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $a = b$

ดังนั้น $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1 \}$ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1- 1

Ans

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1 \}$

จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีทำ จากเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้ $y = 2x + 1$

$$\text{ให้ } (a,c) \in f \quad \text{จะได้ } c = 2a + 1 \quad (1)$$

$$\text{และ } (b,c) \in f \quad \text{จะได้ } c = 2b + 1 \quad (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) \quad \text{จะได้ } 2a + 1 = 2b + 1$$

$$2a = 2b$$

$$a = b$$

ดังนั้น $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1 \}$ เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

Ans

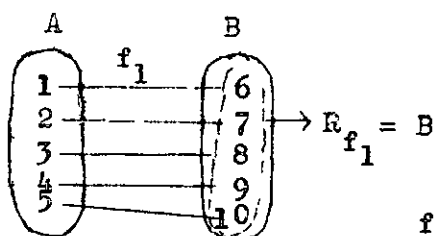
ถ้าฟังก์ชันใดไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 ก็จะเป็นแบบ Many - to - one

การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึง (onto Function)

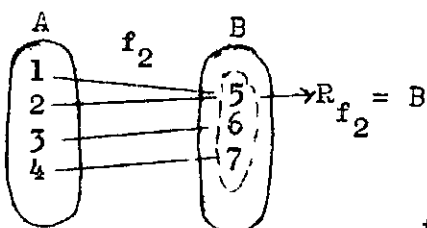
หรือไม่นั้น เราพิจารณาจากเรนจ์ของฟังก์ชัน เนื่องจากฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงนั้นโคเมนของฟังก์ชันจะไปถึงสัมพันธ์กับเรนจ์ของฟังก์ชันทุกตัว นั่นคือ ถ้า B เป็นเซตที่เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน ฟังก์ชันนี้จะเป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงก็ต่อเมื่อ $R_f = B$ หรือเรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ B นั้นเอง

การทดสอบว่า f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่เราก็เพียงแต่ตรวจสอบว่า $R_f = B$ หรือไม่ ถ้า $R_f = B$ f ก็จะเป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B

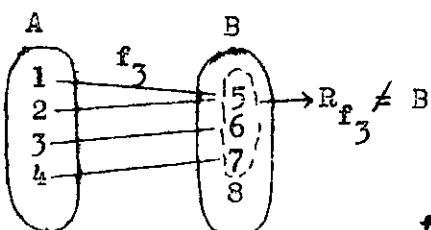
วิธีการตรวจสอบเหมือนกับการหาเรนจ์ของฟังก์ชัน



f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ $R_{f_1} = B$



f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ $R_{f_2} = B$



f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ $R_{f_3} \neq B$

เรียก f_3 ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

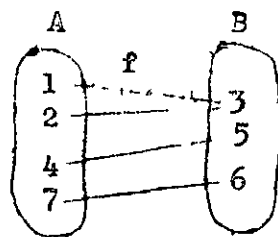
หมายเหตุ ต่อไปนี้เป็นข้อที่นักเรียนควรสังเกตและมีความจำเป็นในการพิจารณาฟังก์ชัน

1. ในการกำหนดฟังก์ชันที่เขียนโดยการบอกเงื่อนไข เราจะกำหนดให้ฟังก์ชันนั้นเป็นสับเซตของ $R \times R$ เสมอ เช่น $f = \{(x, y) \in R \times R / y = 2x - 1\}$ ก็แสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของ $R \times R$ หรือจะเขียนในรูป $y = 2x - 1$ ก็แสดงว่า ฟังก์ชันนี้เป็นสับเซตของ $R \times R$

2. แต่ฟังก์ชันที่กำหนดดังกล่าวตามข้อ 1 นั้น ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน จาก R ไป R อาจจะเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปยังเซตใดก็ได้ตามเงื่อนไขที่ฟังก์ชันกำหนด แต่อย่างไรก็ตามฟังก์ชันนั้นก็ยังเป็นสับเซตของ $R \times R$ ดังนั้นในการพิจารณารูปแบบของฟังก์ชันนักเรียนจะต้องสังเกตว่าเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปยังเซตใด นั่นคือต้องพิจารณาเงื่อนไขของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้น ๆ ด้วย (ดูรายละเอียดในตัวอย่างที่ 1.18)

ตัวอย่างที่ 1.16 ให้ $A = \{1, 2, 4, 7\}$; $B = \{3, 6, 5\}$ และ
 $f = \{(1, 3), (2, 3), (7, 6), (4, 5)\}$ จงพิจารณารูปแบบ
 ของฟังก์ชัน

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



พิจารณา ก. f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1 เพราะมี $(1,3) \in f$ และ $(2,3) \in f$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one

ข. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ $R_f = B$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ Many-to-one

หรือ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{Many-to-one}} B$

Ans

ตัวอย่างที่ 1.17 ให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x+1\}$ จงพิจารณารูปแบบของฟังก์ชัน

วิธีทำ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน จะได้ $y = 2x + 1$

พิจารณา ก. ให้ $(a,c) \in f$ จะได้ $c = 2a + 1$ (1)

และ $(b,c) \in f$ จะได้ $c = 2b + 1$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $2a + 1 = 2b + 1$

$$2a = 2b$$

$$a = b$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบ 1-1

ข. พิจารณา $R_f = \mathbb{R}$ หรือไม่ (วิธีการตรวจสอบเหมือนกับวิธีการหาเรนจ์ของฟังก์ชัน)

จากเงื่อนไข ฟังก์ชันจะได้ $y = 2x + 1$

$$\begin{aligned} y - 1 &= 2x \\ x &= \frac{y - 1}{2} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ทุก ๆ จำนวนจริง y จะได้ x เป็นจริงเสมอ

$$\therefore R_f = \mathbb{R}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง R

และเนื่องจากโคโดเมนของ f ก็เท่ากับ R

จาก ก และ ข จะได้ f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R แบบ onto

หรือ $f : R \xrightarrow{1-1} R$
onto

Ans

ตัวอย่างที่ 1.18 ให้ $f = \{ (x,y) \in R \times R / y = \sqrt{4 - x^2} \}$

จงพิจารณารูปแบบของฟังก์ชัน

วิธีทำ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน จะได้ $y = \sqrt{4 - x^2}$

พิจารณา ก. ให้ $(a,c) \in f$ จะได้ $c = \sqrt{4 - a^2}$ (1)

และ $(b,c) \in f$ จะได้ $c = \sqrt{4 - b^2}$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\sqrt{4 - a^2} = \sqrt{4 - b^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$4 - a^2 = 4 - b^2$$

$$- a^2 = - b^2$$

- 1 คูณทั้งสองข้าง

$$a^2 = b^2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{b^2}$$

$$a = \pm b$$

ซึ่งไม่สามารถสรุปได้ว่า $a = b$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบ Many - to - one

ข. พิจารณาว่า $R_f = R$ หรือไม่

จากเงื่อนไขฟังก์ชันจะได้ $y = \sqrt{4 - x^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2}$$

จะได้ว่า $(4 - y^2) \geq 0$ เท่านั้นจึงจะได้ค่า

ของ $\sqrt{4 - y^2}$ เป็นจำนวนจริง

$$\text{จาก } 4 - y^2 \geq 0$$

$$-y^2 \geq -4$$

เอา - 1 คูณทั้งสองข้าง

$$y^2 \leq 4$$

$$y \leq \pm 2$$

แต่จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = \sqrt{4 - x^2}$

แสดงว่า $y \geq 0$ เท่านั้น และจากค่าที่หาได้

$$y \leq \pm 2$$

ฉะนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 2\}$ ซึ่งไม่เท่ากับ $\mathbb{R}$

ดังนั้น f เป็น ฟังก์ชันแบบ into

และเนื่องจาก โดเมนของ f ไม่เท่ากับ $\mathbb{R}$ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{จะได้ } D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$$

จาก ก และ ข f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แบบ into

หรือ $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} \mathbb{R}$ เมื่อ $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$

แบบฝึกหัดที่ 1.5

1. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ และ

$$f_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3)\}$$

$$f_2 = \{(1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$f_3 = \{(2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$$

จงตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน f_1, f_2, f_3

2. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 5\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ และ

$$f_4 = \{(1, 2), (3, 3), (2, 3), (5, 4)\}$$

$$f_5 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$$

จงตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน f_4, f_5

3. จงตรวจสอบฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันรูปแบบใด

$$f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 - 1}\}$$

$$f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{6x}{3x+2}\}$$

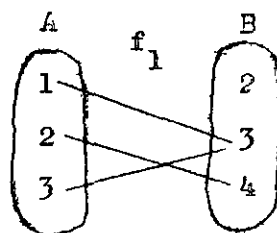
$$f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| - 2\}$$

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$

$$f_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3)\}$$

เขียนแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

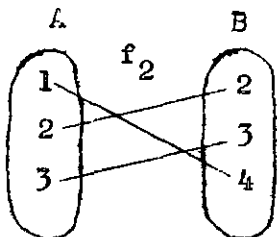


$\therefore f_1$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แบบ Many - to - one

หรือ $f_1 : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} B$

$$f_2 = \{(1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

เขียนแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

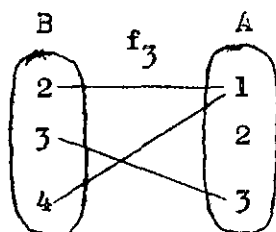


$\therefore f_2$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ one - to - one

หรือ $f_2 : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

$$f_3 = \{(2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$$

เขียนแสดงแผนภาพได้ดังนี้



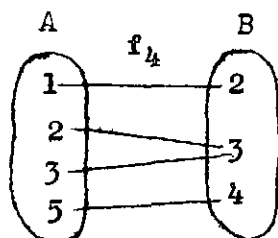
$\therefore f_3$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A แบบ Many - to - one

หรือ $f : B \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} A$

2. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 5\}$; $B = \{2, 3, 4\}$

$$f_4 = \{(1, 2), (3, 3), (2, 3), (5, 4)\}$$

เขียนแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

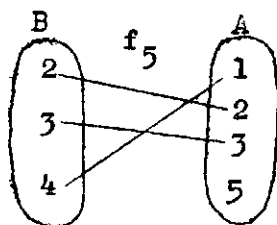


$\therefore f_4$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ Many - to - one

หรือ $f_4 : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{Many - to - one}} B$

$$f_5 = \{(2,2), (3,3), (4,1)\}$$

เขียนแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



$\therefore f_5$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A แบบ one - to - one

$$\text{หรือ } f_5 : B \xrightarrow[\text{into}]{1-1} A$$

3. ตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน

$$f_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 - 1}\}$$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\text{พิจารณา ก. ให้ } (a,c) \in f_1 \text{ จะได้ } c = \sqrt{a^2 - 1} \quad (1)$$

$$\text{และ } (b,c) \in f_1 \text{ จะได้ } c = \sqrt{b^2 - 1} \quad (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{b^2 - 1}$$

$$a^2 - 1 = b^2 - 1$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm \sqrt{b^2} = \pm b$$

จะได้ f_1 ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 (one-to-one)

ดังนั้น f_1 เป็นฟังก์ชันแบบ Many - to - one

ข. พิจารณาว่า $R_{f_1} = \mathbb{R}$ หรือไม่

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = \sqrt{x^2 - 1}$ จะได้ $y \geq 0$

$$\therefore R_{f_1} \neq \mathbb{R}$$

ดังนั้น f_1 จะเป็นฟังก์ชันแบบ into

และเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = \sqrt{x^2 - 1}$ จะได้ $x \leq -1$

และ $x \geq 1$ เท่านั้นจะทำให้ y เป็นจำนวนจริง

จะได้ $f_1 = \{x / x \geq 1 \text{ และ } x \leq -1\}$

จาก ก. และ ข. จะได้ f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง R แบบ into

หรือ $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} R$ เมื่อ $A = \{x | x \geq 1$

และ $x \leq -1\}$

$$f_2 = \left\{ (x, y) \in R \times R / y = \frac{6x}{3x+2} \right\}$$

วิธีหา จาก $y = \frac{6x}{3x+2}$

$$\text{ให้ } (a, c) \in f_2 \quad \text{จะได้ } c = \frac{6a}{3a+2} \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } (b, c) \in f_2 \quad \text{จะได้ } c = \frac{6b}{3b+2} \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \frac{6a}{3a+2} = \frac{6b}{3b+2}$$

$$6a(3b+2) = 6b(3a+2)$$

$$18ab + 12a = 18ab + 12b$$

$$12a = 12b$$

$$a = b$$

จะได้ f_2 เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ข. พิจารณาว่า $R_{f_2} = R$ หรือไม

จาก $y = \frac{6x}{3x+2}$ จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$y(3x+2) = 6x$$

$$3xy + 2y = 6x$$

$$\begin{aligned}
 6x - 3xy &= 2y \\
 x(6 - 3y) &= 2y \\
 x &= \frac{2y}{6 - 3y}
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าเมื่อ $y = 2$ จะทำให้หาค่า $x = \frac{2y}{6 - 3y}$

เป็นจำนวนจริงไม่ได้

ดังนั้น $R_{f_2} \neq R$

นั่นคือ f_2 เป็นฟังก์ชันแบบ into

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = \frac{6x}{3x + 2}$ จะพบว่า $x = -\frac{2}{3}$

จะหาค่า $y = \frac{6x}{3x + 2}$ เป็นจำนวนจริงไม่ได้

ดังนั้น $D_{f_2} = \{x \in R \mid x \neq -\frac{2}{3}\}$

จาก (ก) และ (ข) จะได้ว่า f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง R

แบบ 1 - 1

หรือ $f_2 : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} R$ เมื่อ $A = \{x \in R \mid x \neq -\frac{2}{3}\}$

$f_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x| - 2\}$

วิธีทำ จาก $y = |x| - 2$

ก. ให้ $(a, c) \in f_3$ จะได้ $c = |a| - 2$ (1)

$(b, c) \in f_3$ จะได้ $c = |b| - 2$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $|a| - 2 = |b| - 2$

$$|a| = |b|$$

ไม่สามารถสรุปได้ว่า $a = b$

ดังนั้น f_3 จึงเป็นฟังก์ชันแบบ Many - to - one

ข. พิจารณาว่า $R_{f_3} = R$ หรือไม่

จาก $y = |x| - 2$ จะได้ว่า ขณะที่ $x = 0$ จะได้ค่า y เป็น -2 นอกจากนั้นจะได้ค่า y มากกว่า -2 ทั้งสิ้น

ดังนั้น $R_{f_3} = \{y \in R / y \geq -2\}$ นั่นคือ $R_{f_3} \neq R$ ดังนั้น f_3 จึงเป็นฟังก์ชันแบบ into ฟังก์ชัน จาก (ก) และ (ข) จะได้ f_3 เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R แบบ Many - to - one

หรือ $f : R \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} R$

Ans

คำแนะนำหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 2

เนื้อหา

- เรื่องที่ 1. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ
2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ (ต่อ)
3. ฟังก์ชันควอราติก การเขียนกราฟและการหาค่าต่ำสุดสูงสุด
4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

สิ่งที่ควรทบทวน

นักเรียนควรทบทวนทำความเข้าใจเนื้อหา เรื่องฟังก์ชันในหน่วยที่ 1 เรื่องกำลังของสัมบูรณ์ การหาเซตของคำตอบของสมการให้เข้าใจอย่างถ่องแท้เสียก่อน ก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเป็นฟังก์ชันพีชคณิต หรือฟังก์ชันทรานเซนเดนทัลได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันพีชคณิตให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เป็นฟังก์ชันพีชคณิตชนิดใดได้ถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันเชิงเส้น ควอราติก ชันบินโค และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ให้นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดฟังก์ชันโพลิโนเมียลให้นักเรียนสามารถบอกดีกรีของฟังก์ชันได้ถูกต้อง
5. เมื่อกำหนดฟังก์ชันควอราติกให้นักเรียนสามารถหาค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด จุดต่ำสุด หรือ จุดสูงสุดและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

6. เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันและบอกได้ว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันและหาค่าของ f^{-1} ที่ x ได้ถูกต้อง

แบบฝึกหัด

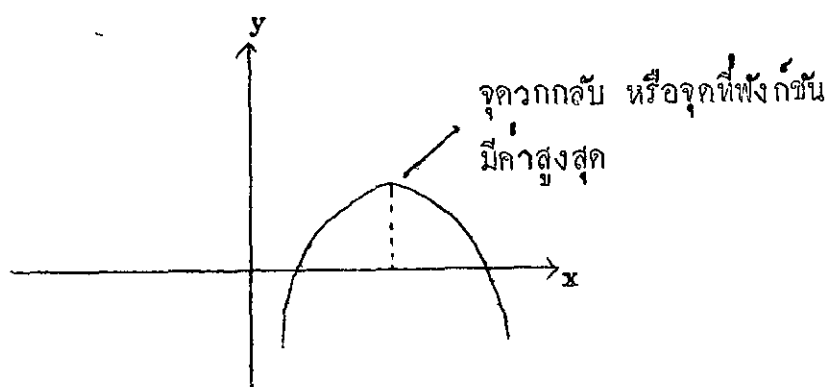
ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด หลังเนื้อหาแต่ละหัวข้อเรื่อง หรืออาจจะหาแบบฝึกหัดเพิ่มเติมจากตำราเรียนที่จัดไว้ให้

เอกสารประกอบบทเรียน

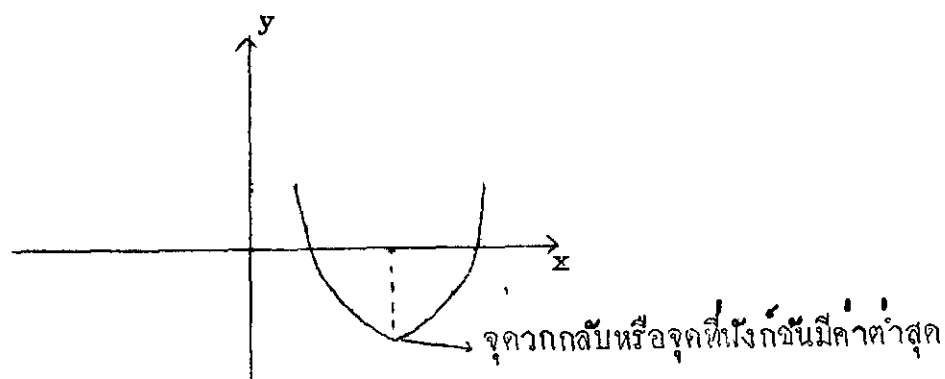
ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาในหน่วยที่ 2 นี้จากเอกสารแนะแนวทางหน่วยที่ 2 หรือจากตำราเรียนที่จัดไว้ให้ ให้นักเรียนศึกษาไปตามลำดับหัวข้อเรื่องให้เข้าใจ พร้อมทั้งหาแบบฝึกหัดทุกข้อ มีข้อสงสัยหรือไม่เข้าใจตอนใดอย่าเก็บไว้ จงไปปรึกษากับผู้สอนหรือผู้ควบคุมชั้นที่ศูนย์การเรียน

แนวคิดในการศึกษาเนื้อหา หน่วยที่ 2

ฟังก์ชันควอราติก เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งซึ่งเราเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้แล้วจะได้เป็นกราฟพาราโบลาเสมอ กราฟพาราโบลาที่จะศึกษาในบทนี้จะเป็นกราฟพาราโบลาคว่ำกับกราฟพาราโบลาหงาย กราฟจะหงายหรือคว่ำ เราสังเกตได้จากสัมประสิทธิ์ของ x^2 เมื่อเราจัดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ แล้วจะได้ว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนลบหรือน้อยกว่าศูนย์ เช่น $y = -5x^2 + 2x - 1$ แล้วเราจะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ กราฟพาราโบลาคว่ำรูปกราฟจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จากทางซ้ายมือไปถึงจุด ๆ หนึ่งเรียกว่า จุดวกกลับ ค่าของฟังก์ชันตรงจุดนี้จะเป็นค่าสูงของฟังก์ชัน รูปกราฟจะลดต่ำลงเรื่อย ๆ ทางขวามือดังรูป



ถ้าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนบวกหรือมากกว่าศูนย์ เช่น $y = 3x^2 + x - 1$ แล้วเราจะได้กราฟพาราโบลาหงาย กราฟพาราโบลาหงาย รูปกราฟจะลดลงเรื่อย ๆ จากทางซ้ายมือไปถึงจุด ๆ หนึ่งเรียกว่า จุดวกกลับ ค่าของฟังก์ชันตรงจุดนี้จะเป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน รูปกราฟจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ทางขวามือ ดังรูป



2. ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันมีประโยชน์ในการแก้โจทย์ปัญหามางชนิด

3. ฟังก์ชันทุกชนิดสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้เสมอ สิ่งสำคัญที่จะต้อง

ศึกษากันก็คืออินเวอร์สของฟังก์ชันนั้น ๆ จะเป็นฟังก์ชันอยู่หรือไม่ นั่นคือ อิบเวอร์สของฟังก์ชัน อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นก็ได้ ถ้าเป็นฟังก์ชันเราเรียกฟังก์ชันชนิดนั้นว่า "ฟังก์ชันอินเวอร์ส"

แบบทดสอบประจำหน่วย

เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้เข้าใจแล้วก็ให้เข้ารับการทดสอบ ซึ่งมีแนวปฏิบัติเหมือนกันกับหน่วยที่ 1

เอกสารแนะแนวทางหน่วยที่ 2

เรื่องที่ 5 - 6 ชนิดของฟังก์ชัน

โดยทั่วไปฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) เป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วย
ตัวแปรจำนวน และโอเปอเรชันทางพีชคณิต (Algebraic Operation) ได้แก่ การบวก
ลบ คูณ หาร กรณฑ์ และยกกำลัง ดังตัวอย่าง

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

2. ฟังก์ชันทรานเซนเดนทัล (Transcendental Function) ฟังก์ชันชนิดนี้
ได้แก่ ฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ได้แก่

2.1 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) ดังตัวอย่าง

$$f(x) = \log x$$

2.2 ฟังก์ชันตรีโกณ (Trigonometric Function) ดังตัวอย่าง

$$f(x) = \sin x$$

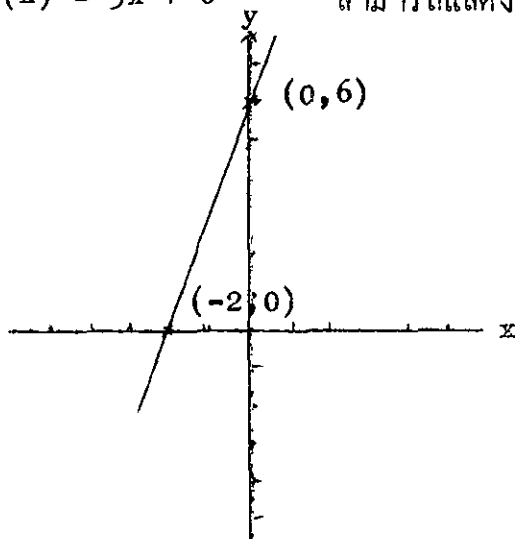
2.3 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง (Exponential Function) ดังตัวอย่าง

$$f(x) = e^x$$

ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะ ฟังก์ชันพีชคณิตเท่านั้น ฟังก์ชันพีชคณิตที่สำคัญที่นักเรียน
ควรรู้จัก ได้แก่

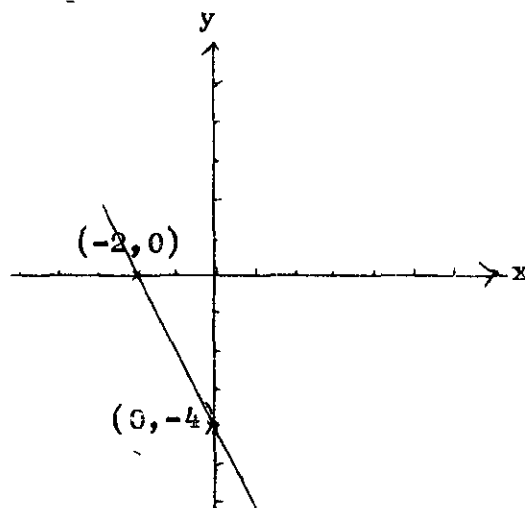
1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) ฟังก์ชันเชิงเส้น มีรูปทั่วไปอยู่ใน
รูป $f(x) = ax + b$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรง
เสมอ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 2.1 $f(x) = 3x + 6$ สามารถแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



x	-2	0
$y = 3x + 6$	0	6

ตัวอย่างที่ 2.2 $f(x) = -2x - 4$ สามารถแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้

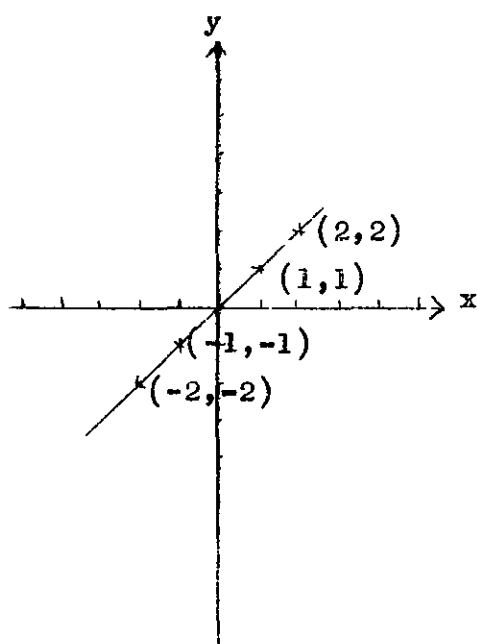


x	-2	0
$y = -2x - 4$	0	-4

จากตัวอย่างจะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $y = f(x) = ax + b$ จะมีกราฟเป็นเส้นตรงเสมอและเป็นเส้นตรงที่มีความชัน (กราฟทำมุมเอียงกับแกน x) เท่ากับ a ระยะตัดแกน y เท่ากับ b จะได้จุดตัดบนแกน y คือ $(0, b)$ ถ้าต้องการหาระยะตัดแกน x ต้องกำหนดให้ $y = 0$ แล้วแก้สมการ $0 = ax + b$ ค่า x ที่ได้จะเป็นระยะตัดแกน x จะได้จุดตัดบนแกน x คือ $(-\frac{b}{a}, 0)$ ดังนั้นถ้าเรารู้ระยะตัดแกนทั้งสองแกนหรือรู้จุดตัดบนแกนทั้งสองแล้ว เราก็สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นนั้นได้ ดังตัวอย่าง 2.1 และ 2.2

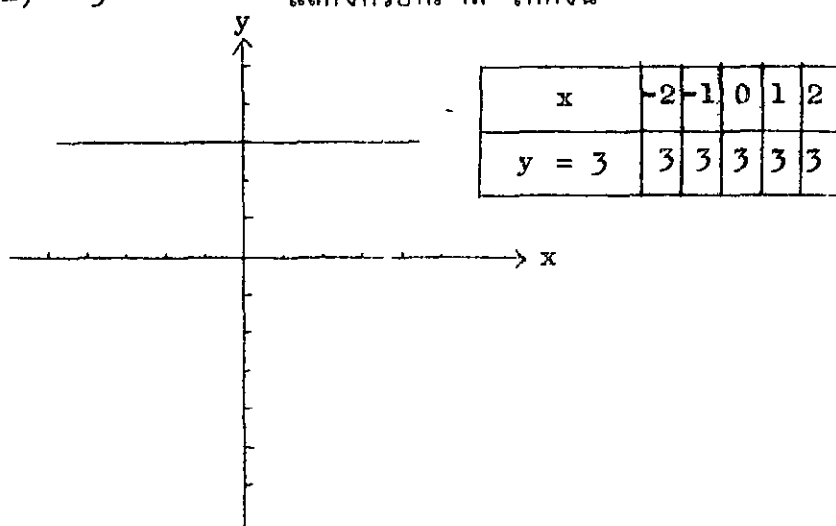
นอกจากฟังก์ชันเชิงเส้นตามตัวอย่างที่กล่าวยังมีฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีลักษณะพิเศษอีก 2 ชนิด คือ

1.1 ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity Function) ฟังก์ชันเอกลักษณ์ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = x$ แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



x	-1	0	1	2
$y = x$	-1	0	1	2

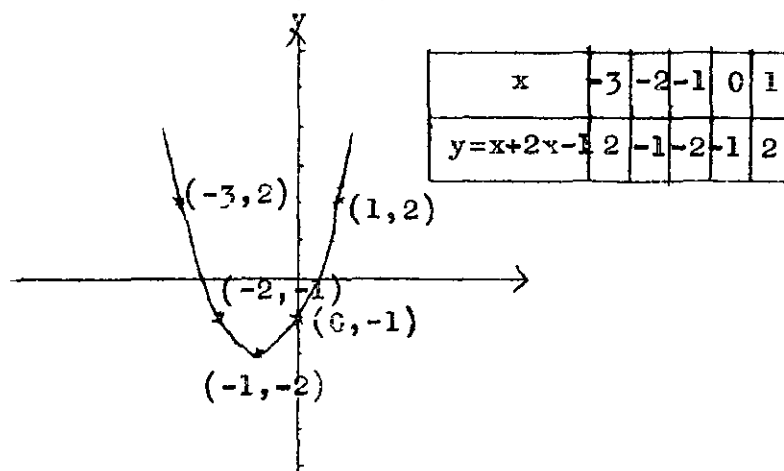
1.2 ฟังก์ชันคงที่ (Constant Function) ฟังก์ชันค่าคงที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
ที่มีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = b$, เมื่อ b เป็นจำนวนจริง เช่น
 $f(x) = 3$ แสดงด้วยกราฟ ได้ดังนี้



2. ฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic Function) ฟังก์ชันควอดราติกมีรูปทั่วไป
อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ กราฟของ
ฟังก์ชันนี้จะเป็นเส้นโค้ง เรียกว่า พาราโบลา ซึ่งมี 2 ลักษณะ คือ พาราโบลาหงาย กับ
พาราโบลาคว่ำ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนจริง a กล่าวคือ

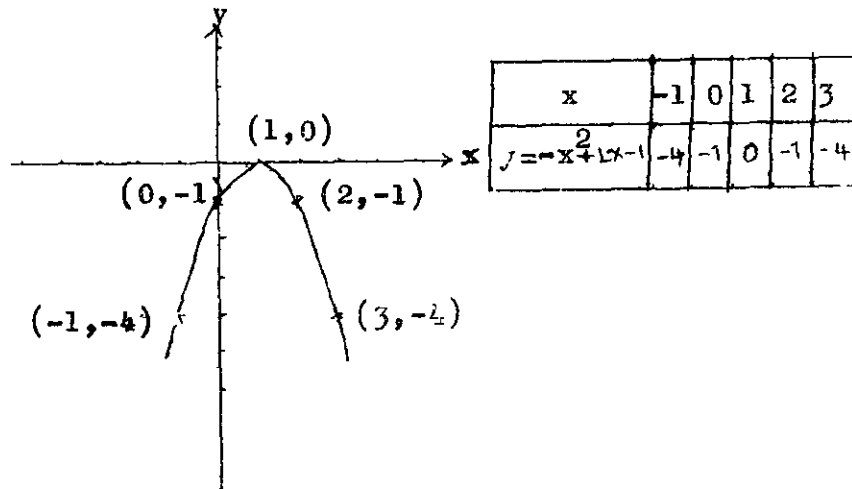
กรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย ดังตัวอย่าง

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \text{ฟังก์ชันนี้มีค่า } a = 1$$



กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$ กราฟจะเป็น พาราโบลาคว่ำดังตัวอย่าง

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 \quad \text{ฟังก์ชันนี้มีค่า } a = -1$$



3. ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ฟังก์ชันพหุนามมีรูปแบบทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f(x) = 5x^3 + 2x + 3 \quad \text{เป็นต้น}$$

ข้อควรสังเกต ฟังก์ชันพหุนามจะมีค่า n หรือเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

ในการเรียกฟังก์ชันพหุนามว่าเป็นฟังก์ชันพหุนามมีดีกรี (Degree) เท่าไรนั้น เราดูได้จาก เลขชี้กำลังของตัวแปรที่มากที่สุด ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับศูนย์ ดังตัวอย่าง

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 1 \quad \text{เป็นพหุนามมีดีกรีเป็น 5}$$

$$f(x) = 2x^4 - x^2 + 5 \quad \text{เป็นพหุนามมีดีกรีเป็น 4}$$

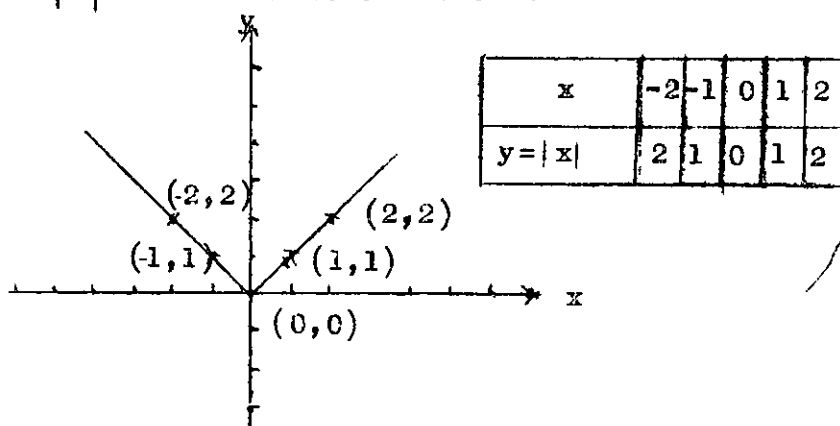
$$f(x) = 5x - 1 \quad \text{เป็นพหุนามมีดีกรีเป็น 1}$$

$$f(x) = 3 \quad \text{เป็นพหุนามมีดีกรีเป็น 0}$$

4. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์เป็นฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ เช่น

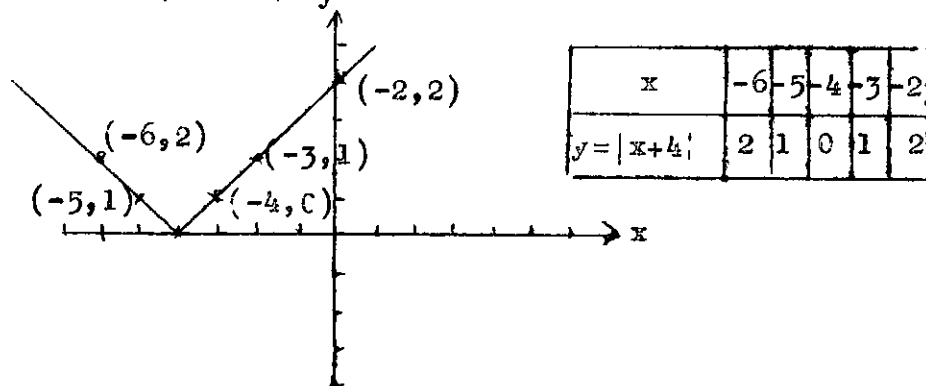
$$f(x) = |x|$$

แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



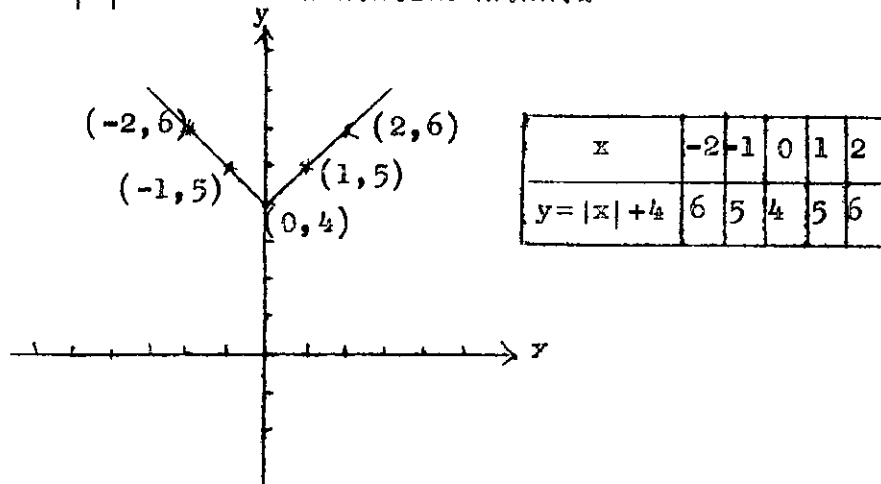
$$f(x) = |x + 4|$$

แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



$$f(x) = |x| + 4$$

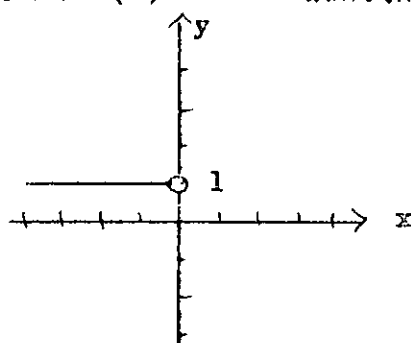
แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



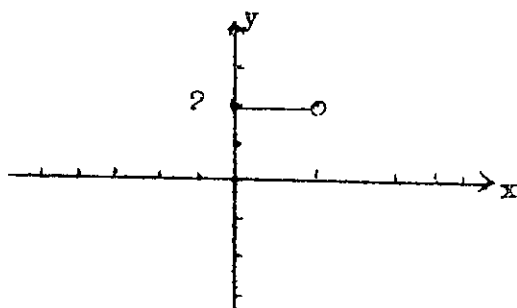
5. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) ฟังก์ชันขั้นบันได เป็นฟังก์ชันที่มีค่าคงที่เป็นช่วง ๆ กราฟรูปร่างคล้ายขั้นบันได เช่น

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

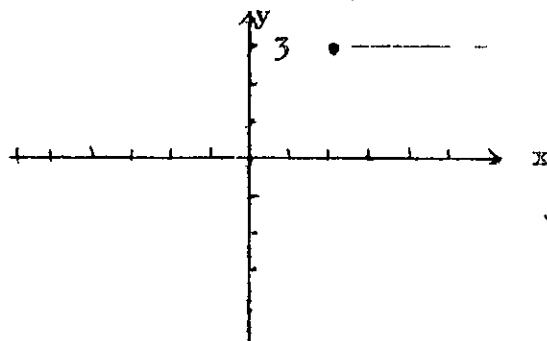
ฟังก์ชัน $f(x)$ จะกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ $f(x)$ กับค่าของ x เป็นช่วง ๆ เช่น ขณะที่ $x < 0$ จะได้ค่า $f(x) = 1$ แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



ขณะที่ $0 \leq x < 2$ จะได้ค่า $f(x) = 2$ แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้

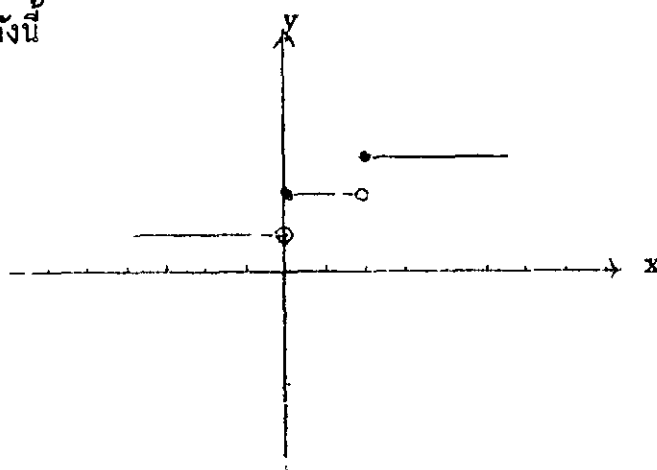


ขณะที่ $x \geq 2$ จะได้ค่า $f(x) = 3$ แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



ฉะนั้นเมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$

รวมในรูปกราฟเดียวกันจะได้ดังนี้



นอกจากนี้ ฟังก์ชันขั้นบันไดอาจจะกำหนดอยู่ในรูปโจทย์ปัญหาได้ เช่น

ตัวอย่างที่ 2.2 อัตราค่าโดยสารรถแท็กซี่มีดังนี้ ระยะทาง 1 กิโลเมตรแรก 3 บาท กิโลเมตรต่อไป กิโลเมตร 1 บาท เศษของกิโลเมตรคิดเป็น 1 กิโลเมตร จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับค่าโดยสาร พร้อมทั้งกราฟของฟังก์ชันนี้

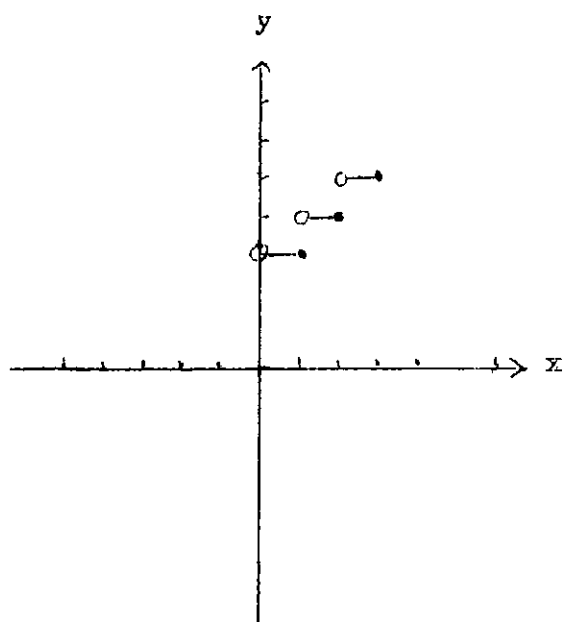
วิธีทำ ให้ $f(x)$ แทน อัตราค่าโดยสารรถแท็กซี่

x แทน ระยะทางในการโดยสารรถแท็กซี่

ดังนั้น เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับค่าโดยสารได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x \leq 1 \\ 4, & 1 < x \leq 2 \\ 5, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

เขียนแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้ ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันทรานแซนเดนทัล
 1. $f(x) = x^3 + 3x - 9 + \frac{1}{x}$
 2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - 7$
 3. $f(x) = e^x$
 4. $f(x) = \sin^{-1} x + c$
 5. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
 6. $f(x) = 1 - \log x$
2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่กำหนดเงื่อนไขให้ดังต่อไปนี้ ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันใดไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
 1. $y = \frac{2}{3}x - 5$
 2. $x^2 + y^2 = 4$
 3. $y = 3x^2$
 4. $f(x) = x^3$
 5. $f(x) = 2x - 8$
 6. $y = 2$
3. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดเงื่อนไขเป็นสมการดังนี้
 1. $4x - 3y - 9 = 0$
 2. $3x + 2y = 0$
4. จงบอกดีกรีของฟังก์ชันโพลิโนเมียล ต่อไปนี้
 1. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$..
 2. $f(x) = x^9 - x^7 + x^5 - 10$
 3. $f(x) = x - 5$

4. $f(x) = 10$

5. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

5. จงพิจารณาว่า $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้ว่าฟังก์ชันใด
เป็นฟังก์ชัน ควอราติกฟังก์ชันใด ไม่เป็นฟังก์ชันควอราติก

1. $x + y - 5 = 0$

2. $y = x^2 - 4$

3. $f(x) = 2x^3$

4. $f(x) = 1 - 2x - x^2$

5. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - 7$

6. $f(x) = xy + y^2$

7. $y = 3x^2$

8. $y = x^{-2} + 2x^{-1} + 5$

6. กำหนด $f(x) = |x + 3|$ จงหาค่าของ

1. $f(1)$

2. $f(2)$

3. $f(-1)$

4. $f(-5)$

5. จุดที่กราฟตัดแกน x คือ

6. จุดที่กราฟตัดแกน y คือ

7. กำหนด $f(x) = |x| + 3$ จงหาค่าของ

1. $f(1) =$

2. $f(2) =$

3. $f(-1) =$

4. $f(-2) =$

5. จุดที่กราฟตัดแกน x คือ

6. จุดที่กราฟตัดแกน y คือ

8. จงวาดกราฟของฟังก์ชันในข้อ 6 , 7 ลงบนแกนกราฟเดียวกัน
9. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไขดังนี้
 1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
 2. $f(x) = 4 - x^2$
10. จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของค่าตอบแทนการแสดง ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้
 ผู้ใหญ่หรือเด็กอายุเกิน 15 ปีขึ้นไป เสียค่าชมการแสดง 30 บาท เด็กอายุ
 ตั้งแต่ 5 ปี ถึง 15 ปี เสียค่าชมการแสดง 15 บาท เด็กอายุ ต่ำกว่า 5 ปี
 ไม่ต้องเสียค่าชมการแสดง
11. อัตราค่าไปรษณียบากรในการส่งพัสดุภายในประเทศเป็นเงิน 5 บาท คอิกิโลกรัม
 ถ้าไม่ถึงกิโลกรัมคิดเป็นหนึ่งกิโลกรัม ถ้าเกินกิโลกรัมก็ก็ตามคิดเป็นกิโลกรัมถัดไป
 จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักของพัสดุ พร้อมทั้งเขียนกราฟของ
 ฟังก์ชันนี้

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1. 1. เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
2. เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
3. เป็นฟังก์ชันหราบ เชนเคนทิล
4. เป็นฟังก์ชันหราบ เชนเคนทิล
5. เป็นฟังก์ชันพีชคณิต
6. เป็นฟังก์ชันหราบ เชนเคนทิล

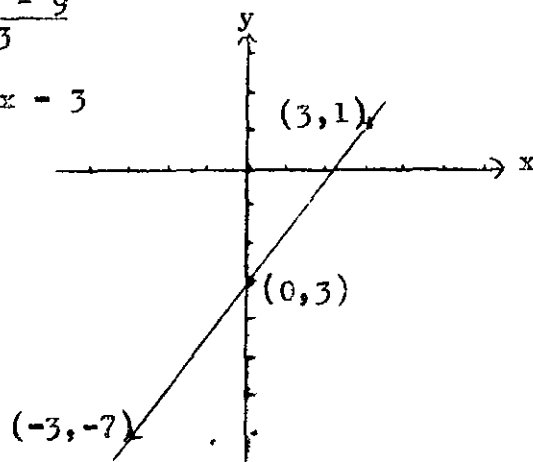
2. 1. เป็น
2. ไม่เป็น
3. ไม่เป็น
4. ไม่เป็น
5. เป็น
6. เป็น

3. 3.1 จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $4x - 3y - 9 = 0$
จัดอยู่ในรูปเงื่อนไข $y = f(x)$ ได้เป็น

$$3y = 4x - 9$$

$$y = \frac{4x - 9}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$



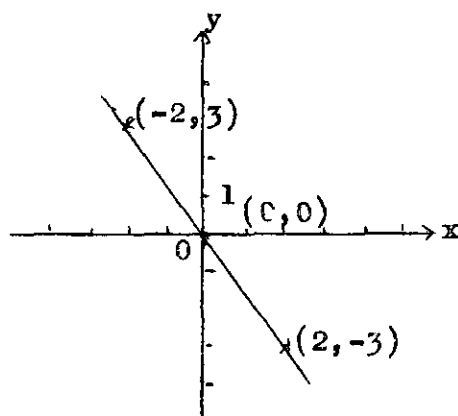
x	-3	0	3
$y = \frac{4}{3}x - 3$	-7	-3	1

3.2 จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $3x + 2y = 0$

จัดให้อยู่ในรูปเงื่อนไข $y = f(x)$ ได้เป็น

$$2y = -3x$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$



x	-2	0	2
$y = -\frac{3}{2}x$	3	0	-3

ดังนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้เป็นเส้นตรง

4.

1. คีกรี่ 5

2. คีกรี่ 9

3. คีกรี่ 1

4. คีกรี่ 0

5. คีกรี่ 2

5.

1. ไม่เป็น

2. เป็น

3. ไม่เป็น

4. เป็น

5. เป็น

6. ไม่เป็น

7. เป็น

8. ไม่เป็น

6. $f(1) = 4$

$f(-5) = 2$

$f(2) = 5$

จุดที่กราฟตัดแกน x คือ $(-3, 0)$

$f(-1) = 2$

จุดที่กราฟตัดแกน y คือ $(0, 3)$

7. $f(1) = 4$

$f(-2) = 5$

$f(2) = 5$

จุดที่กราฟตัดแกน x คือจุดที่ค่า $y = 0$

$f(-1) = 4$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $0 = x + 3$

หรือ $x = -3$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นกราฟนี้จะไม่ตัดแกน x

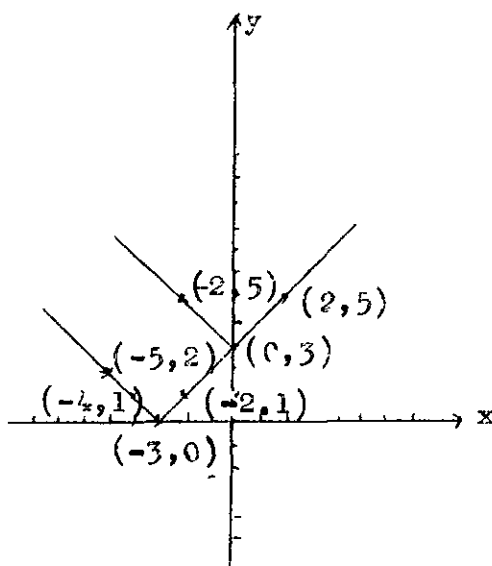
จุดที่กราฟตัดแกน y คือ $(0, 3)$

8. $y = |x + 3|$

x	-5	-4	-3	-2	-1
$y = x + 3 $	2	1	0	1	2

$y = |x| + 3$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x + 3$	5	4	3	4	5



9.

1. พิจารณา $f(x) = x^2 + 4x - 1$ สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็น 1

ฉะนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้เป็น พาราโบลาหงายโดยมี $a = 1$, $b = 4$

กราฟนี้จะมีค่าต่ำสุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$

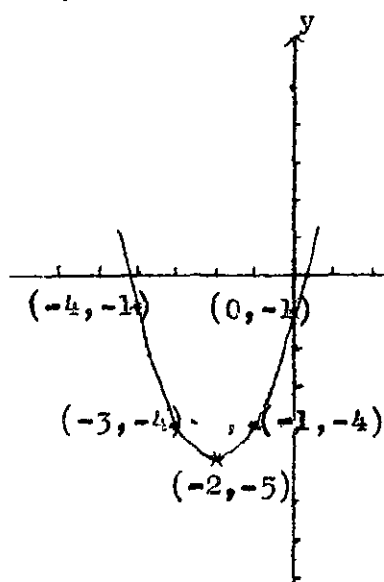
$$= -\frac{4}{2}$$

$$= -2$$

$$\therefore f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 1 = 4 - 8 - 1$$

$$= -5$$

จุดต่ำสุดคือ $(-2, -5)$



x	-4	-3	-2	-1	0
$y = x^2 + 4x - 1$	-1	-4	-5	-4	-1

2. พิจารณา $f(x) = 4 - x^2$ จักรูปสมการใหม่

$f(x) = -x^2 + 4$ สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็น -1

ฉะนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นพาราโบลาคว่ำ

โดยมี $a = -1$, $b = 0$

กราฟนี้จะมีค่าสูงสุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$

$$= -\frac{0}{2(-1)}$$

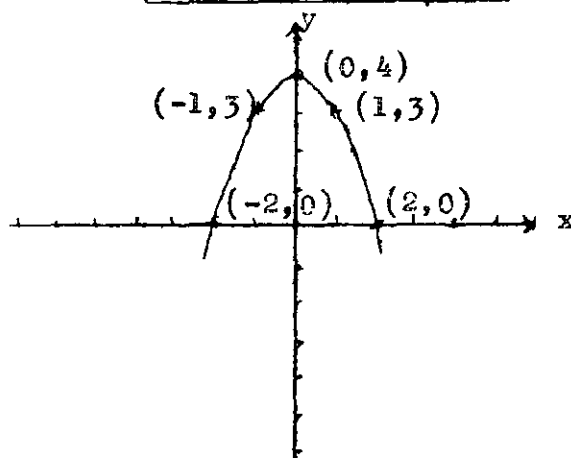
$$= 0$$

$$\therefore f(0) = 0 + 4$$

$$= 4$$

จุดสูงสุดคือ $(0, 4)$

x	-2	-1	0	1	2
$y = 4 - x^2$	0	3	4	3	0

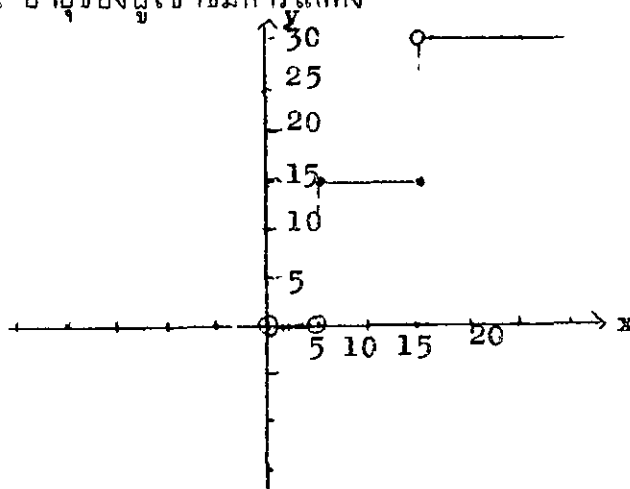


10. ให้ $f(x)$ เป็นอัตราค่าการแสดงและ x คือ อายุของผู้ดูการแสดง ดังนั้นฟังก์ชันคือ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x < 5 \\ 15 & , 5 \leq x \leq 15 \\ 30 & , x > 15 \end{cases}$$

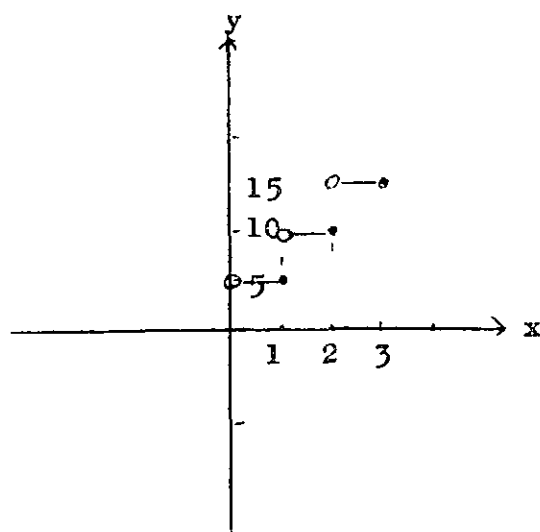
ให้แกน y แทน อัตราค่าการแสดง

แกน x แทน อายุของผู้เข้าชมการแสดง



11. ให้ $f(x)$ คือ อัตราค่าไปรษณียากรและ x คือ น้ำหนักของพัสดุ ดังนั้นฟังก์ชันคือ

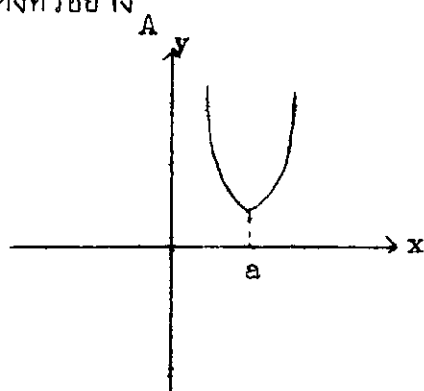
$$f(x) = \begin{cases} 5, & 0 < x \leq 1 \\ 10, & 1 < x \leq 2 \\ 15, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



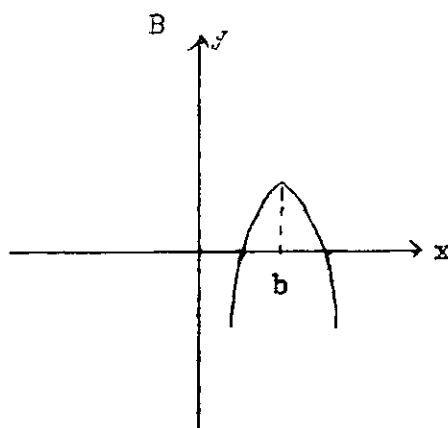
เรื่องที่ 7 พังก์ชันควอราติกและการเขียนกราฟ การหาค่าต่ำสุดและสูงสุด

พังก์ชันควอราติกเป็นพังก์ชันหนึ่งที่มีความสำคัญที่นักเรียนจะได้พบและจำเป็นต้องใช้พังก์ชันนี้อยู่เสมอ ในบทนี้เราจะมาศึกษาพังก์ชันควอราติกเพิ่มเติมจากที่เราเคยรู้จัก พังก์ชันนี้มาแล้ว

จากรูปทั่วไปของพังก์ชันควอราติก $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ นักเรียนทราบแล้ว กราฟนี้จะเป็นพาราโบลาหงาย หรือว่า ขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 ถ้าค่าของ a มากกว่าศูนย์ คือ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้กราฟพาราโบลาหงาย ถ้าค่าของ a น้อยกว่าศูนย์คือเป็นจำนวนจริงลบจะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ ดังตัวอย่าง



ในกรณีที่ $a > 0$



ในกรณีที่ $a < 0$

นักเรียนจะเห็นความแตกต่างระหว่างกราฟ A และ B ในรูปกราฟ นั้น เส้นกราฟจะลดลงมาจากทางซ้ายมือจนมาถึงจุด a แล้วลากเส้นกราฟจะวกกลับมาเพิ่มขึ้นทางขวามือ เราเรียกจุด a นี้ว่า จุดวกกลับ ค่าของพังก์ชันตรงจุดนี้จะเป็นค่าต่ำสุดของพังก์ชัน

ในกราฟ B นักเรียนจะเห็นว่า เส้นกราฟจะเพิ่มขึ้นจากทางซ้ายมือไปจนถึงจุด b แล้ว เส้นกราฟจะลดลงทางขวามือ เราเรียกจุด b นี้ว่า จุดวกกลับ ค่าของพังก์ชันตรงจุดนี้จะเป็นค่าสูงสุดของพังก์ชัน

ในหัวข้อเรื่องนี้ เราจะหาจุดวกกลับ หรือค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน
ควอราติก ซึ่งเรามีวิธีการหาค่าสูงสุด ได้ดังนี้

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอราติก $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\therefore f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

ในกรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ และเราทราบแล้วว่า $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

$\therefore f(x)$ จะมีค่าน้อยที่สุดในขณะที่ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ $x = -\frac{b}{2a}$

กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$

$$\therefore a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

$\therefore f(x)$ จะมีค่ามากที่สุดในขณะที่ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ $x = -\frac{b}{2a}$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นกฎการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันควอราติก ได้ดังนี้

ฟังก์ชันควอราติกที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$; เมื่อ a, b, c

เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$ จะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ นั่นคือ

จุดวกกลับ จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของฟังก์ชันคือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

ตัวอย่างที่ 2.3 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 4x + 5$

พร้อมทั้งหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ด้วย

วิธีทำ พิจารณา $f(x) = x^2 - 4x + 5$ สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็น 1

ฉะนั้นกราฟนี้จะเป็นพาราโบลาหงาย โดยมีค่า $a = 1$, $b = 4$

กราฟนี้จะมีค่าต่ำสุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$

$$= -\left(\frac{-4}{2 \times 1}\right)$$

$$= -\left(\frac{-4}{2}\right)$$

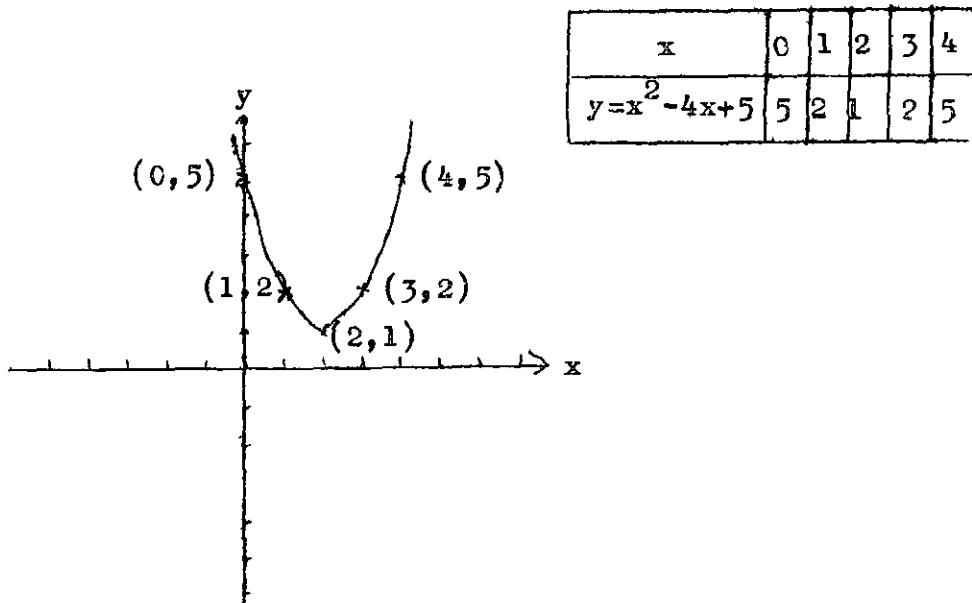
$$= -(-2)$$

$$= 2$$

$$\therefore f(2) = 2^2 - (4 \times 2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 9 - 8 = 1$$

ดังนั้นค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน คือ 1

$\therefore$ จุดต่ำสุดคือ $(2, 1)$



หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการเขียนกราฟให้หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันเสียก่อนแล้วมาเขียนตารางหาค่าความสัมพันธ์โดยกำหนดให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดนั้นเป็นจุดกลางของตารางค่าความสัมพันธ์

ตัวอย่างที่ 2.4 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = 12 - 2x - 2x^2$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชันนี้ไม่ได้อยู่ในรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอดราติก ฉะนั้นเราต้องจัดฟังก์ชันนี้ให้อยู่ในรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอดราติกเสียก่อน

รูปทั่วไปของฟังก์ชันควอดราติกคือ $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{ฉะนั้น } 2y = 12 - 2x - 2x^2$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{12}{2} - \frac{2x}{2} - \frac{2x^2}{2}$$

$$y = 6 - x - x^2$$

$$y = -x^2 - x + 6$$

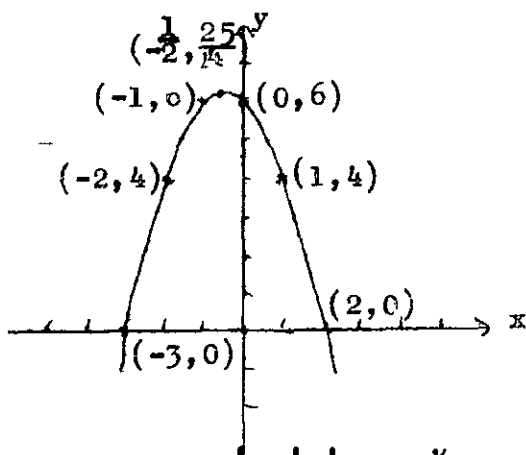
จะได้สัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ -1 ฉะนั้นกราฟนี้จะเป็นพาราโบลาคว่ำ โดยมีค่า $a = -1$, $b = -1$ กราฟนี้จะมีค่าสูงสุดที่

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{(-1)}{2(-1)} \\ &= -\frac{(-1)}{(-2)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 \\ &= \frac{-1 + 2}{4} + 6 \\ &= \frac{1}{4} + 6 \\ &= 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าสูงสุดของฟังก์ชันคือ $\frac{25}{4}$

จุดสูงสุด คือ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$



x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
$y = -x^2 - x + 6$	4	6	$\frac{25}{4}$	4	0

นอกจากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว ความรู้เรื่อง การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันควอราติก สามารถที่จะนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหาที่มีสมการอยู่ในรูป ฟังก์ชันควอราติกได้ด้วยกันดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 2.5 จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด
ผลคูณของทั้งสองจำนวนนั้น จึงจะมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้ x คือ จำนวนแรก

$\therefore$ จำนวนที่สอง คือ $20 - x$

ให้ y เป็นผลคูณของจำนวนทั้งสอง

$$\begin{aligned}\therefore y &= x(20 - x) = 20x - x^2 \\ &= -x^2 + 20x\end{aligned}$$

จากสมการ $y = -x^2 + 20x$ จะได้ $a = -1$, $b = 20$

$$\begin{aligned}\text{ค่าสูงสุดของฟังก์ชันอยู่ที่ } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{20}{2(-1)} = -\left(\frac{20}{-2}\right) \\ &= -(-10) = 10\end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุดเมื่อ $x = 10$

$\therefore$ ผลคูณของจำนวนทั้งสองจะมีค่ามากที่สุด เมื่อจำนวนแรก = 10

และอีกจำนวนหนึ่ง คือ $20 - 10 = 10$

Ans

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงตรวจสอบลักษณะของกราฟของฟังก์ชัน พร้อมทั้งหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดและหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันควอราติกที่กำหนดให้ต่อไป

ฟังก์ชัน	หงายหรือคว่ำ	ค่าสูงสุดหรือ ค่าต่ำสุด	จุดสูงสุดหรือ ต่ำสุด
1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$			
2. $2y = -2x^2 - 2x + 4$			
3. $-y = -2x^2 - 4x + 4$			
4. $f(x) = (-x-1)^2$			
5. $f(x) = -(x+4)^2$			
6. $f(x) = 4 - x^2$			

2. จงวาดกราฟของฟังก์ชันควอราติกที่กำหนดให้ในข้อ 1
3. จงหาจำนวนสองจำนวนที่มีผลต่าง 10 และผลคูณที่มีค่าน้อยที่สุด
4. ชายคนหนึ่งปลูกบ้านริมแม่น้ำ เขามีวัสดุสำหรับทำรั้วไว้นาน 100 เมตร และต้องการทำรั้วล้อมบ้าน โดยเว้นคานแม่น้ำไว้ รั้วของเขาควรกว้างยาวเท่าไร จึงจะทำให้ได้เนื้อที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก ภายในรั้วมากที่สุด

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

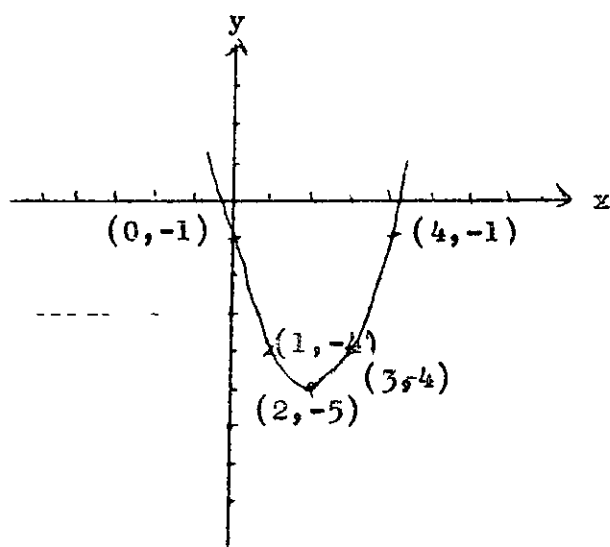
1.

ฟังก์ชัน	หงายหรือคว่ำ	ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด
1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$	หงาย	ค่าต่ำสุดคือ -5	(2, -5)
2. $2y = -2x^2 - 2x + 4$	คว่ำ	ค่าสูงสุดคือ $\frac{5}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
3. $-y = -2x^2 - 4x + 4$	หงาย	ค่าต่ำสุดคือ -6	(-1, -6)
4. $f(x) = (-x - 1)^2$	หงาย	ค่าต่ำสุดคือ 0	(-1, 0)
5. $f(x) = -(x + 4)^2$	คว่ำ	ค่าสูงสุดคือ 0	(-4, 0)
6. $f(x) = 4 - x^2$	คว่ำ	ค่าสูงสุดคือ 4	(0, 4)

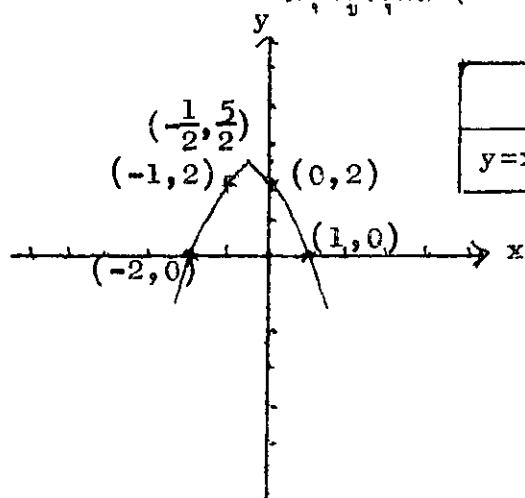
2. วาดกราฟของฟังก์ชันควอราติกที่กำหนดให้ในข้อ 1

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$ มีจุดต่ำสุดที่ (2, -5)

x	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 4x - 1$	-1	-4	-5	-4	-1

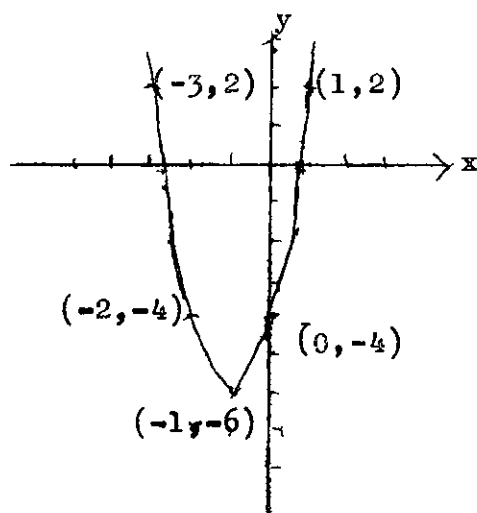


2. $2y = -2x^2 - 2x + 4$ จัดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้
 $y = -x^2 - x + 2$ มีจุดสูงสุดที่ $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$



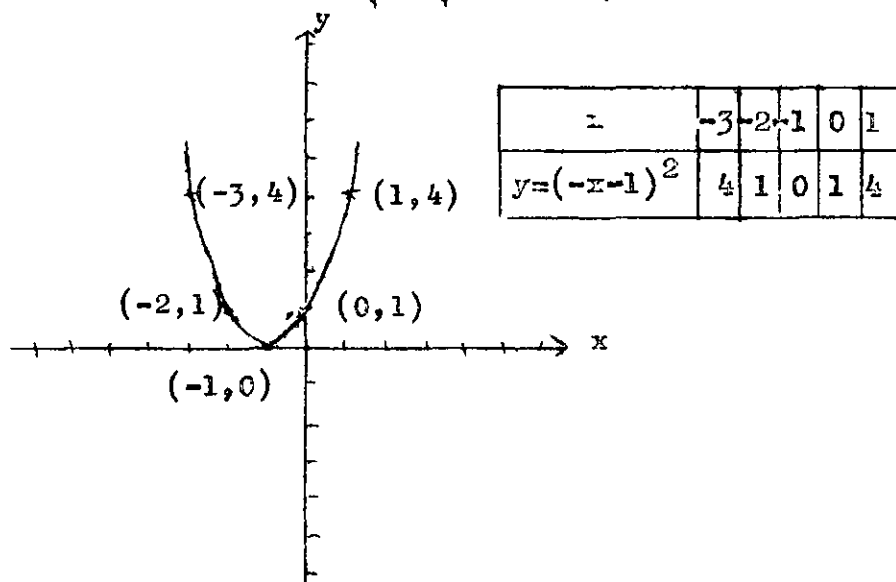
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$y = -x^2 - x + 2$	0	2	$\frac{5}{2}$	2	0

3. $-y = -2x^2 - 4x + 4$ จัดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้
 $y = 2x^2 + 4x - 4$ มีจุดต่ำสุดที่ $(-1, -6)$

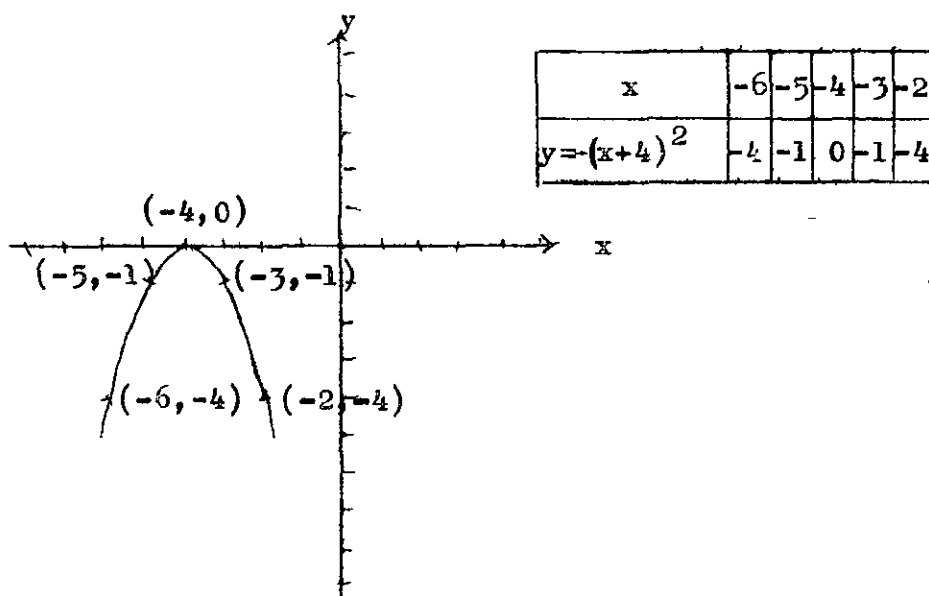


x	-3	-2	-1	0	1
$y = 2x^2 + 4x - 4$	-2	-4	-6	-4	2

4. $f(x) = (-x - 1)^2$ จักรูปฟังก์ชันนี้ใหม่ได้เป็น
 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ มีจุดต่ำสุดที่ $(-1, 0)$



5. $f(x) = -(x+4)^2$ จักรูปฟังก์ชันนี้ใหม่ได้เป็น
 $f(x) = -x^2 - 8x - 16$ มีจุดสูงสุดที่ $(-4, 0)$

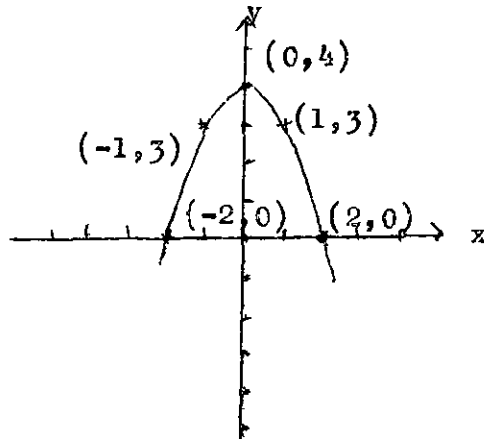


6. $f(x) = 4 - x^2$

$f(x) = -x^2 + 4$

จัดรูปฟังก์ชันใหม่ได้เป็น

มีจุดสูงสุดที่ $(0, 4)$



x	-2	-1	0	1	2
$y = 4 - x^2$	0	3	4	3	0

3. วิธีหา ให้ x คือ จำนวนแรกที่มีค่าน้อยกว่าจำนวนที่สอง ผลต่างระหว่างจำนวนที่สองกับจำนวนแรกเป็น 10

$\therefore$ จำนวนที่สองคือ $x + 10$ ซึ่งจะได้

$$(x + 10) - x = 10$$

ให้ y เป็นผลคูณของทั้งสองจำนวน

$$\text{จะได้ } y = x(x + 10)$$

$$= x^2 + 10x$$

เนื่องจาก $y = x^2 + 10x$ เป็นฟังก์ชันควอดราติก

ดังนั้น ค่าของ y จะน้อยที่สุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$

เพื่อ $a = 1$ และ $b = 10$

$$\therefore x = -\frac{10}{2} = -5$$

จะได้จำนวนแรกคือ -5

จำนวนที่สองคือ $x + 10 = -5 + 10 = 5$ คือ จำนวนสองจำนวน

ที่มีผลต่างเป็น 10 และ ผลคูณมีค่าน้อยที่สุด

Ans

4. วิธีทำ มีวัสดุสำหรับทำรั้วยาว 100 เมตร ทำรั้ว ฉ ล้อมบ้าน โดยเว้นด้านหนึ่งไว้ ฉะนั้นจึงใช้วัสดุนี้ทำรั้วแค่ 3 ด้าน
 ถ้าให้ x เป็นความยาวของด้านกว้าง 2 ด้าน
 ฉะนั้น จะเหลือด้านยาว $(100 - 2x)$ เมตร
 ให้ y เป็นพื้นที่ของบริเวณบ้าน

$$\therefore \text{จะได้ } y = x(100 - 2x)$$

$$y = 100x - 2x^2$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณหรือค่าของ y จะมากที่สุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$

$$\text{เมื่อ } a = -2, b = 100$$

$$x = \frac{100}{-2(-2)}$$

$$= -\left(\frac{100}{-4}\right)$$

$$= -(-25)$$

$$= 25$$

ฉะนั้นจะได้ด้านกว้างซึ่งทำให้พื้นที่มากที่สุดคือ 25 เมตร

$$\text{ฉะนั้นด้านยาวจะ} = 100 - (2 \times 25)$$

$$= 100 - 50$$

$$= 50 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น ถ้ารั้วให้ด้านกว้าง กว้างด้านละ 25 เมตร

และด้านยาว ยาว 50 เมตร จะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด

Ans

เรื่องที่ 8 ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Function)

จากการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์นักเรียนทราบว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วอินเวอร์สของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

นั่นคือ ถ้า $r_1 = \{(x, y) / x \in A \text{ และ } y \in B\}$

จะได้ $r_1^{-1} = \{(y, x) / y \in B \text{ และ } x \in A\}$

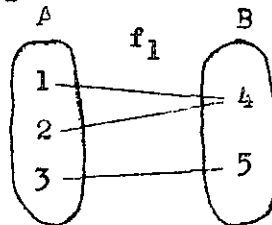
หรือ ถ้า $r_2 = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x + 1\}$

จะได้ $r_2^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / y = 2x + 1\}$

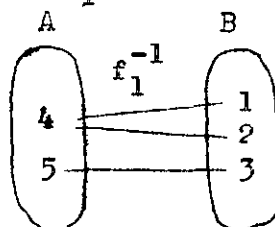
หรือ $r_2^{-1} = \{(x, y) \in B \times A / x = 2y + 1\} = \{(x, y) \in B \times A / y = \frac{x-1}{2}\}$

ด้วยเหตุนี้ ฟังก์ชันทุก ๆ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้เสมอ ปัญหาสำคัญอยู่ที่ อินเวอร์สของฟังก์ชันที่หามาได้ จะยังเป็นฟังก์ชันอยู่หรือไม่ นักเรียนควรช่วยกันพิจารณา

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนด $f_1 : A \longrightarrow B$ แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

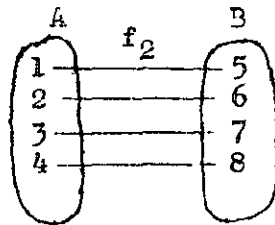


อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_1 แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

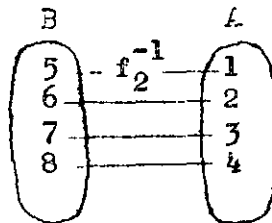


จากแผนภาพแสดงให้เห็นว่า f_1^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A แต่ยังเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $f_2 : A \longrightarrow B$ แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

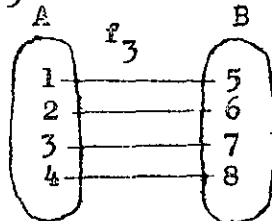


อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_2 แสดงตามแผนภาพได้ดังนี้

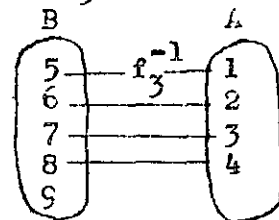


จากแผนภาพแสดงให้เห็นว่า f_2^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนด $f_3 : A \longrightarrow B$ แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_3 แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



จากแผนภาพแสดงให้เห็นว่า f_3^{-1} เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A เพราะมีสมาชิกของ B คือ ๑ ไม่ได้เป็นสมาชิกของ $D_{f_3^{-1}}$ ดังนั้น f_3^{-1} จะเป็นฟังก์ชันจากเซต $\{5,6,7,8\}$ ไป A

จากตัวอย่างทั้งสามตัวอย่าง เราพบว่า

1. อินเวอร์สของฟังก์ชันจะไม่เป็นฟังก์ชันเสมอไป
2. อินเวอร์สของฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B $(f: A \xrightarrow{1-1 \text{ onto}} B)$ จะเป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A แบบ 1 - 1 เสมอ ดังตัวอย่างที่ 2
3. อินเวอร์สของฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก A ไปยัง B $(f: A \xrightarrow{1-1 \text{ into}} B)$ อาจจะเป็นฟังก์ชันก็ได้ แต่ต้องมีการกำหนดโคโดเมนของฟังก์ชันนั้นเสียใหม่ ดังตัวอย่างที่ 3

เราสรุป อินเวอร์สของฟังก์ชันได้ว่า

ถ้า $f: A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B แล้วจะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก B ไปทั่วถึง A ในกรณีเช่นนี้ เราจะเรียก f^{-1} ว่าเป็น "ฟังก์ชันอินเวอร์สของ f " หรือกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่มี "ฟังก์ชันอินเวอร์ส"

นิยาม 2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก B ไปทั่วถึง A โดยมีนิยามดังนี้

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) = y$$

เราจะเรียกฟังก์ชัน f^{-1} ว่าเป็นฟังก์ชัน อินเวอร์สของ f

หลักในการหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

เรามีวิธีการหาฟังก์ชันอินเวอร์ส อยู่ 2 แบบ คือ

1. เปลี่ยนคู่อันดับ (x, y) เป็น (y, x) แต่ตรงเงื่อนไขของฟังก์ชันไม่ต้องเปลี่ยน ดังตัวอย่าง

$$f = \{ (x, y) \in A \times B / y = 2x + 1 \}$$

$$f^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A / y = 2x + 1 \}$$

2. คู่อันดับ (x, y) ยังคงใช้เหมือน แต่ไปเปลี่ยนตรงเงื่อนไขของฟังก์ชัน โดยเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y แล้วจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ในบทเรียนนี้ เราจะใช้วิธีการแบบที่ 2 ในการหาฟังก์ชันอินเวอร์ส ดังตัวอย่าง

$$f = \{ (x, y) \in A \times B / y = 2x + 1 \}$$

$$f^{-1} = \{ (x, y) \in B \times A / x = 2y + 1 \} = \{ (x, y) \in B \times A / y = \frac{x-1}{2} \}$$

ข้อควรสังเกตในการหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

เนื่องจาก $f : A \longrightarrow B$ และ $f^{-1} : B \longrightarrow A$

ดังนั้น ในการหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน เราต้องพิจารณาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเสียก่อน แล้วจึงหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน แล้วพิจารณาว่า อินเวอร์สของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันจากเรนจ์ของฟังก์ชันไปยังโดเมนของฟังก์ชันเดิมหรือไม่ ถ้าเป็น เราเรียกฟังก์ชันนั้นว่าเป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส

ตัวอย่างที่ 2.9 จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จะมีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่
ถ้ามี จงหา $f^{-1}(x)$ และวาดกราฟของ $f(x)$
และ $f^{-1}(x)$ ด้วย

1. $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x}\}$
2. $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1\}$
3. $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$

วิธีทำ $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x}\}$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = \sqrt{x}$

จะได้ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

และ $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชันโดยการเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_1 คือ $x = \sqrt{y}$, $x \geq 0$

จัดรูปสมการใหม่ โดยยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$x^2 = y , \quad x \geq 0$$

$$\therefore y = x^2 ; \quad x \geq 0$$

$$\therefore f_1^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 , \quad x \geq 0\}$$

พิจารณาว่า f_1^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ไปยัง

$\{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ หรือไม่

จากเงื่อนไขของ f_1^{-1} จะได้ $y = x^2$

ถ้า $x \geq 0$ จะได้ y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น $D_{f_1}^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

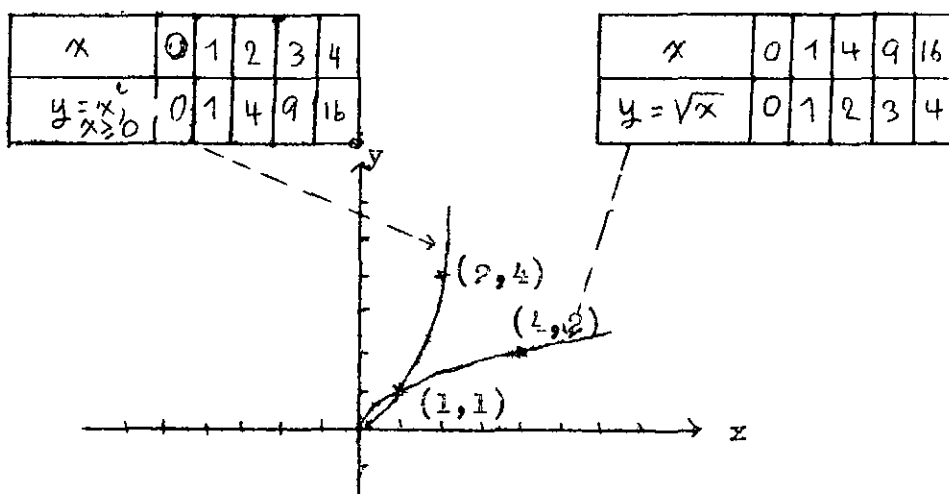
และจากเงื่อนไขของ f_1^{-1} จะได้ $y = x^2$ นั้นก็จะได้ $y \geq 0$

นั่นคือ

$$\therefore R_{f_1}^{-1} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

$f_1^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2, x \geq 0\}$ เป็นฟังก์ชันจาก
 $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ไป $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

นั่นคือ $f_1(x)$ มีฟังก์ชันอินเวอร์ส



$$f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = x^2 + 1$

จะได้ $D_{f_2} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

และ $R_{f_2} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน โดยการเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y

จะได้อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_2 คือ $x = y^2 + 1$

จากรูปของสมการใหม่จะได้

$$y^2 = x - 1$$

$$y = \pm \sqrt{x - 1}$$

$$\therefore f_2^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \pm \sqrt{x - 1} \}$$

พิจารณาว่า f_2^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$ ไปยัง

$\{y / y \in \mathbb{R}\}$ หรือไม่

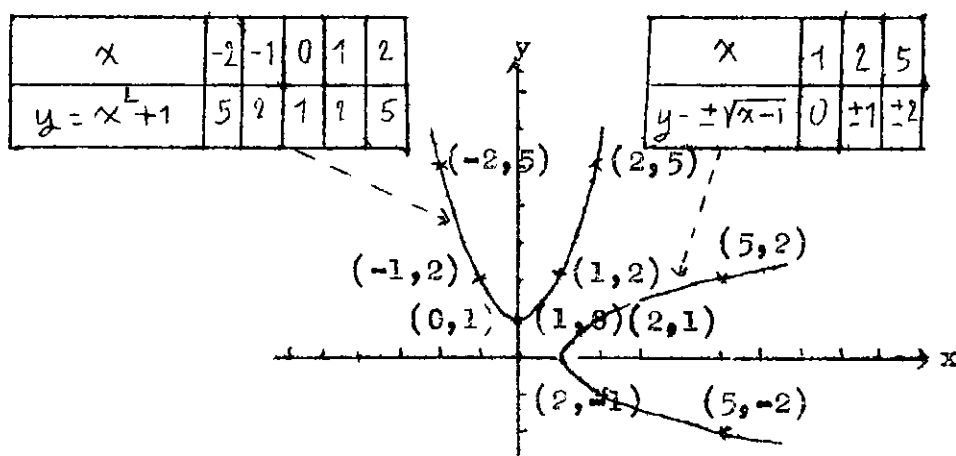
จากเงื่อนไขของ f_2^{-1} จะได้ $y = \pm \sqrt{x - 1}$

จะพบว่า มีคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ที่สมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เท่ากัน
เป็นสมาชิกของ f_2^{-1} เช่น

$(5, 2)$ และ $(5, -2)$ เป็นสมาชิกของ f_2^{-1}

ดังนั้น f_2^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$ ไป $\{y / y \in \mathbb{R}\}$

ดังนั้น $f_2(x)$ ไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส



$$f_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| \}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = |x|$

$$\text{จะได้ } D_{f_3} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{และ } R_{f_3} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน โดยการเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้อินเวอร์สของฟังก์ชัน f_3 คือ $x = |y|$

$$\therefore f_3^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = |y|\}$$

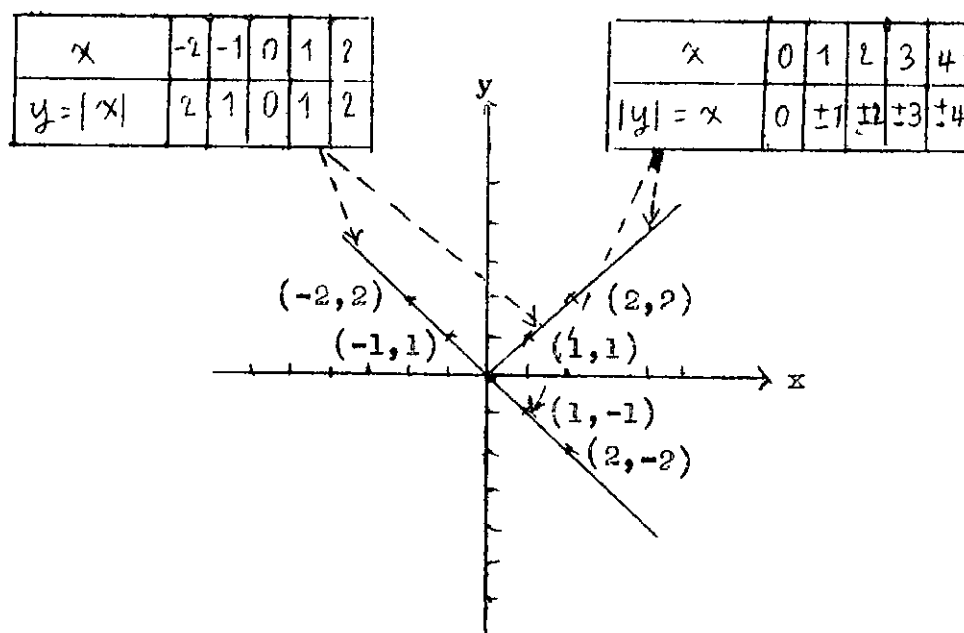
พิจารณาว่า f_3^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ไปยัง $\{y / y \in \mathbb{R}\}$ หรือไม่

จากเงื่อนไขของ f_3^{-1} จะได้ $x = |y|$

จะพบว่า f_3^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

เหตุผลเหมือน ตัวอย่างที่ f_2

ดังนั้น $f_3(x)$ ไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส



แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. กำหนดให้ $f = \{(1, 2), (3, 0), (5, 1), (7, 4)\}$
จงหา f^{-1} พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของ f^{-1}
2. กำหนดให้ $f = \{(-5, -2), (-3, -2), (0, 0), (3, 5), (4, 7)\}$ จงหา f^{-1} พร้อมทั้งพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด
3. กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด พร้อมเขียนภาพของ f และ f^{-1} ด้วย
4. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด ให้เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ด้วย
5. จากข้อ 3 จงหา $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$ และ $f^{-1}(\frac{1}{2})$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.3

1. กำหนด $f = \{ (1, -2), (3, 0), (5, 1), (7, 4) \}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{ (-2, 1), (0, 3), (1, 5), (4, 7) \}$

$$D_{f^{-1}} = \{ -2, 0, 1, 4 \}$$

$$R_{f^{-1}} = \{ 1, 3, 5, 7 \}$$

2. กำหนด $f = \{ (-5, -2), (-3, -2), (0, 0), (3, 5), (4, 7) \}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{ (-2, -5), (-2, -3), (0, 0), (5, 3), (7, 4) \}$

f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีคู่อันดับ $(-2, 5)$ และ

$(-2, -3)$ อยู่ใน f^{-1}

3. กำหนด $f(x) = 2x - 1$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = 2x - 1$

จะได้ $D_f = \{ x / x \in \mathbb{R} \}$

และ $R_f = \{ y / y \in \mathbb{R} \}$

จะได้ อินเวอร์สของ f คือ $x = 2y - 1$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

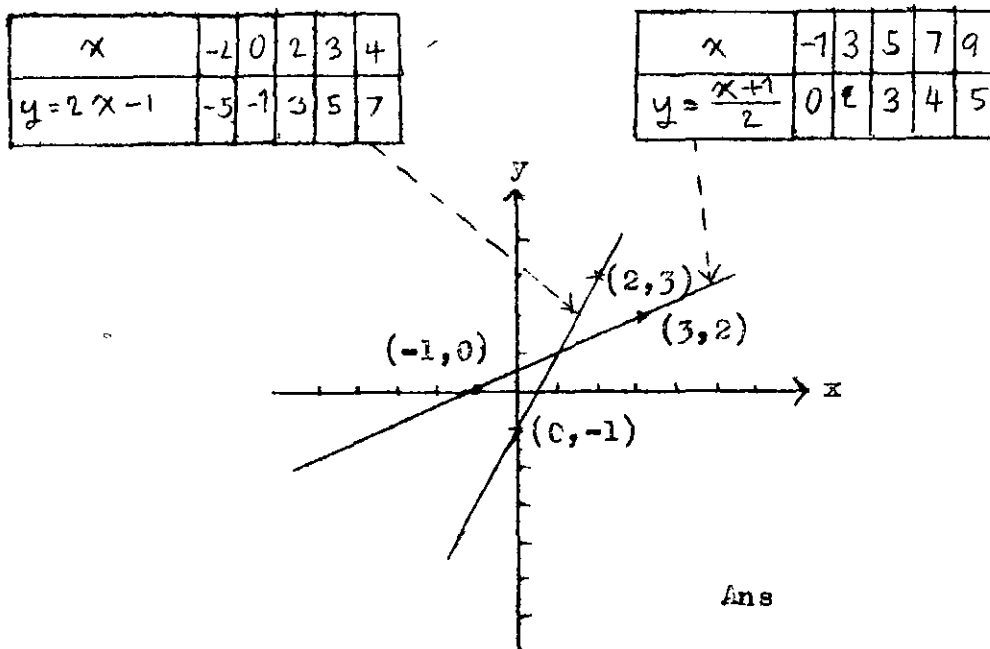
$$2y = x + 1$$

$$y = \frac{x + 1}{2}$$

$$\therefore f^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x + 1}{2} \}$$

พิจารณาแล้วพบว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

นั่นคือ $f(x) = 2x + 1$ มีฟังก์ชันอินเวอร์ส



4. กำหนด $f(x) = x^2$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน $y = x^2$

จะได้ $D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

และ $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

จะได้อินเวอร์สของฟังก์ชัน f คือ $x = y^2$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$y = \pm \sqrt{x}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \pm \sqrt{x}\}$$

พิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ หรือไม่

จะพบว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีสองคู่ลำดับใด ๆ ใน f^{-1}

ที่สมาชิกตัวหน้าเท่ากัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เท่ากัน เช่น มี $(2, 4)$ และ

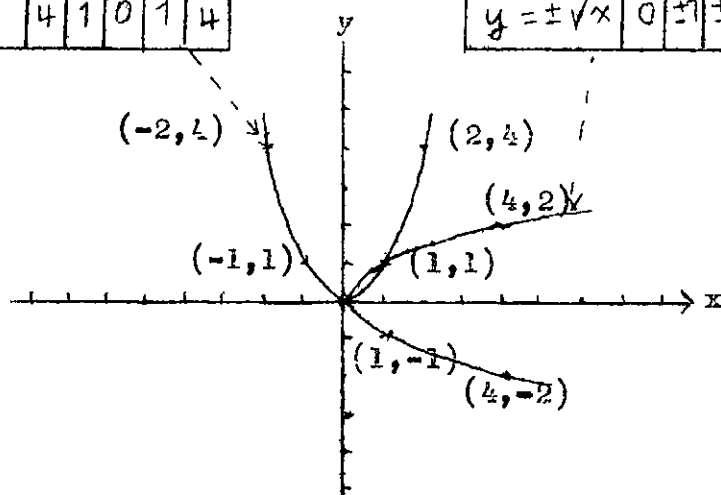
$(2, -4)$ อยู่ใน f^{-1}

ดังนั้น f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

นั่นคือ $f(x) = x^2$ ไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

x	0	1	4	9	16
$y = \pm\sqrt{x}$	0	± 1	± 2	± 3	± 4



5. จากข้อ 3 จะได้

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$f^{-1}(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(-1) = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f^{-1}(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{\frac{1+2}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

คำแนะนำหน่วยการเรียนรู้ หน่วยที่ 3

เนื้อหา

- เรื่องที่ 1 คอมโพลีฟังก์ชัน
- 2 คอมโพลีฟังก์ชัน (ต่อ)
- 3 ฟังก์ชันคอมโพสิท
- 4 ฟังก์ชันคอมโพสิท (ต่อ)

สิ่งที่ควรพบพาน

นักเรียนควรพบพานทำความเข้าใจ เนื้อหา เรื่อง นิยามของฟังก์ชัน การหาค่าของ x ที่ x การเขียนกราฟของฟังก์ชัน การบวก ลบ คูณ หาร โพลีโนเมียล ให้เข้าใจอย่างถ่องแท้เสียก่อน ก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถบอกถึงความสัมพันธ์เกี่ยวกับกันของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสองได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถบอกถึง คุณสมบัติของทั้งสองฟังก์ชันที่ทำให้สามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้ และบอกนิยามของคอมโพสิทฟังก์ชันได้ถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ทั้งในรูปการกำหนดเงื่อนไขและแผนภาพประกอบ นักเรียนสามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันของคอมโพสิทฟังก์ชัน ตามค่าของสมาชิกตัวหน้าที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
5. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปให้นักเรียนสามารถ หาผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ถูกต้องและบอกนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทได้ถูกต้อง

6. นักเรียนสามารถหาโดเมนของฟังก์ชันพหุนามและหาค่าฟังก์ชันของฟังก์ชันพหุนามที่หาคำว่าที่กำหนดให้ถูกต้อง

แบบฝึกหัด

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด หลัง เนื้อหาแต่ละหัวข้อเรื่อง หรือหาแบบฝึกหัดเพิ่มเติม จากตำราเรียนที่จัดไว้ให้

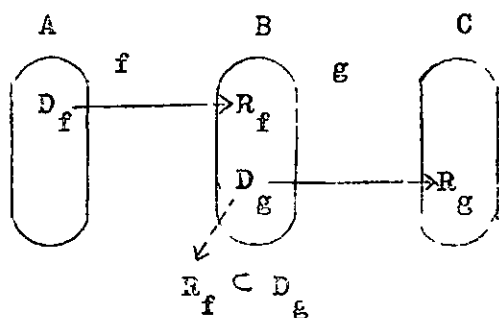
เอกสารประกอบบทเรียน

ให้นักเรียนศึกษา เนื้อหาในหน่วยที่ 3 จากเอกสารแนะแนวทางหน่วยที่ 3 หรือจากตำราที่จัดไว้ให้ ให้นักเรียนศึกษาไปตามลำดับหัวข้อเรื่องให้เข้าใจ พร้อมทั้งทำแบบฝึกหัดทุกข้อ มีข้อสงสัยหรือไม่เข้าใจตอนใดอย่าเก็บไว้ จงไปปรึกษากับผู้สอน หรือผู้ควบคุมชั้นที่ศูนย์การเรียนรู้

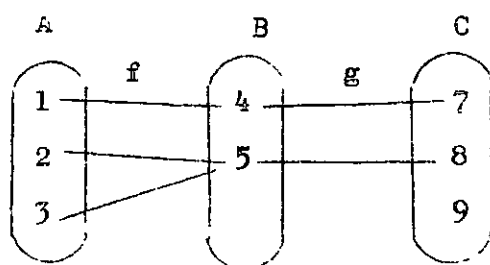
แนวคิดในการศึกษาเนื้อหา หน่วยที่ 3

1. คอมโพสิทฟังก์ชัน เป็นเรื่องการสร้างฟังก์ชันใหม่ โดยอาศัยฟังก์ชันเดิมสองฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันทั้งสองนั้น ต้องมีคุณสมบัติเกี่ยวข้องกันดังนี้

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ถ้าเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g แล้ว เราสามารถสร้างฟังก์ชันจากฟังก์ชันทั้งสองได้ โดยโดเมนของฟังก์ชันใหม่ คือ โดเมนของ f และเรนจ์ของฟังก์ชันใหม่ คือ เรนจ์ของ g ดูจากแผนภาพ



หรือ



ลักษณะดังนี้ เราสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้เป็น $f : A \longrightarrow C$

2. ฟังก์ชันประกอบ เป็นเรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร โพลิโนเมียลที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วนั่นเอง เพราะส่วนหนึ่งของเงื่อนไขของฟังก์ชันเขียนอยู่ในรูปโพลิโนเมียล เช่น

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{หรือ} \quad g(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

เราบวก ลบ คูณ และหาร ฟังก์ชันโดยเอาส่วนหนึ่งของเงื่อนไข คือ เอา $2x - 1$ และ $2x^2 + 3x + 1$ มาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน

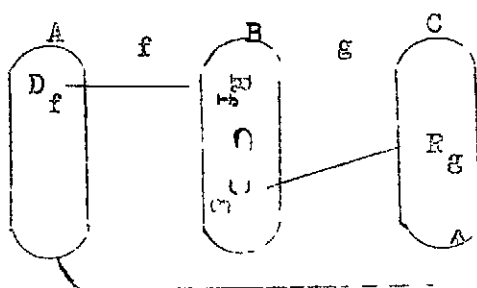
แบบทดสอบประจำหน่วย

เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาในหน่วยนี้แล้วให้เข้าเฝ้าเจ้าก็เข้ารับการทดสอบซึ่งมีแนวปฏิบัติเหมือนกับหน่วยที่ 1

เอกสารแนะแนวทางหน่วยที่ 3

เรื่องที่ 9 - 10 คอมโพสิทฟังก์ชัน (Composite Function)

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ และฟังก์ชัน $z = g(y)$ เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่สัมพันธ์กันในลักษณะที่สมาชิกของเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชัน g เขียนเป็น แผนภาพได้ดังนี้



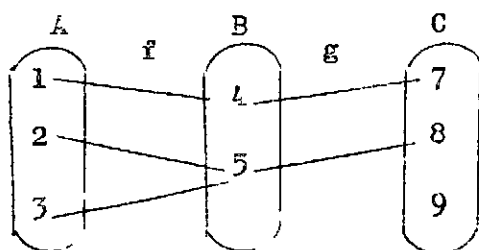
จากแผนภาพข้างบน ถ้าเรากำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{4, 5\}$, $C = \{7, 8, 9\}$ และ $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$;

$g = \{(4, 7), (5, 8)\}$

เราเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow B$

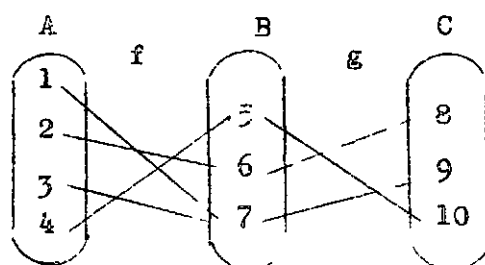
และ $g : B \longrightarrow C$ ได้ดังนี้



ถ้ามีความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสองฟังก์ชันในลักษณะดังกล่าว เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C คือ $\{(1,7), (2,8), (3,8)\}$ เราเรียกฟังก์ชันที่สร้างใหม่นี้ว่า คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $g \circ f$ " อ่านว่า "จี คอมโพสิทเอฟ" หรือ "จี โอ เอฟ"

ดังนั้น ถ้า $f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,5)\}$,
 $g = \{(5,10), (6,8), (7,9)\}$

แสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้

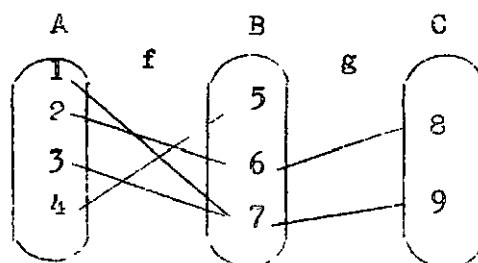


จะได้ $g \circ f = \{(1,9), (2,8), (3,9), (4,10)\}$

ถ้ากำหนด $f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,5)\}$

$g = \{(6,8), (7,9)\}$

แสดงด้วยภาพได้ดังนี้



จะพบว่าเราไม่สามารถสร้าง $g \circ f$ ได้ เพราะ R_f ไม่ได้เป็นสับเซตของ D_g จากแผนภาพ จะเห็นว่า $R_f = \{5, 6, 7\}$ และ $D_g = \{6, 7\}$ ในลักษณะนี้จะทำให้สมาชิก 4 ใน D_f ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสมาชิก 5 ใน R_f ไม่สามารถมีความสัมพันธ์กับสมาชิกใน R_g ได้ เราจึงไม่สามารถสร้าง $g \circ f$ ได้

ที่นักเรียนได้ศึกษามาทั้งหมด สรุปได้ว่า

ถ้า f เป็น ฟังก์ชัน จาก A ไป B

และ g เป็น ฟังก์ชัน จาก B ไป C

เราอาจสร้างฟังก์ชันใหม่เรียกว่า คอมโพสิทฟังก์ชัน ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ อ่านว่า "จี โอ เอฟ" ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

ฟังก์ชัน $g \circ f$ จะสร้างได้ก็ต่อเมื่อเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g เท่านั้น

เราสรุปเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 3.1 คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g คือ $g \circ f$ เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g

และ $(x, z) \in g \circ f$ ก็ต่อเมื่อมี y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$

และ $g \circ f = \{(x, z) / \text{ มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in f ; (y, z) \in g\}$

เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น ให้นักเรียนศึกษาจากคาออธิบายเพิ่มเติมต่อไปนี้

ถ้าให้ $x \in A$, $y \in B$ และ $z \in C$

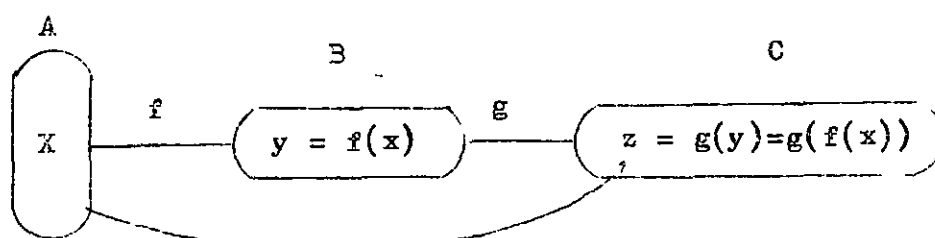
f เป็น ฟังก์ชัน จาก A ไป B โดยที่ $(x, y) \in f$ หรือ $y = f(x)$

g เป็น ฟังก์ชัน จาก B ไป C โดยที่ $(y, z) \in g$ หรือ $z = g(y)$

เนื่องจาก $z = g(y)$ และ $y = f(x)$

ดังนั้น $z = g(f(x))$

เขียนแทนด้วยแผนภาพได้ดังนี้



การหาคุณสมบัติของเซต $g \circ f$ แสดงด้วยแผนภาพดังนี้

$$x \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow z = g(y) = g(f(x))$$

จากแผนภาพจะได้ $(x, z) \in g \circ f$ นั่นคือ

$$z = (g \circ f)(x) \quad (1)$$

จากแผนภาพจะได้

$$z = g(f(x)) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $(g \circ f)(x)$ และ $g(f(x))$ ต่างก็เท่ากับ z

ดังนั้น $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน $g \circ f$ ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$

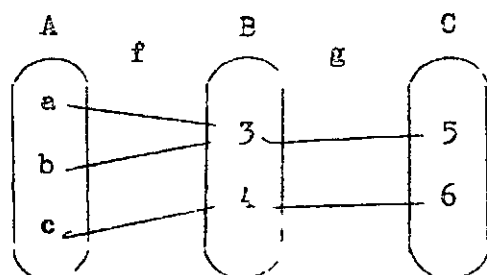
สรุป

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เราจะหา $g \circ f$ ได้ก็ต่อเมื่อ $B_f \subset D_g$ ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา $f \circ g$ ได้ก็ต่อเมื่อ $B_g \subset D_f$

2. การหาค่าฟังก์ชันของ $g \circ f$ ที่ x จะเท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนด $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ ดังแสดงใน

แผนภาพ จงหา $g \circ f$



วิธีทำ $\therefore R_f = \{3, 4\}$

และ $D_g = \{3, 4\}$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3) = 5$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(3) = 5$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(4) = 6$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(a, 5), (b, 5), (c, 6)\}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนด $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$

$$\text{และ } f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$$

$$g = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ ก. หา $g \circ f$

$$\therefore R_f = \{1, 3\}$$

$$\text{และ } D_g = \{1, 3, 5\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 4)\}$$

c

Ans

ข. หา $f \circ g$

$$E_g = \{2, 4\}$$

$$D_f = \{a, b, c\}$$

จะได้ $E_g \not\subset D_f$ ทำให้ไม่สามารถหา $f \circ g$ ได้ Ans

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x\}$ และ
 $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 7x - 2\}$ จะหา $g \circ f$
 ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ กำหนด $f(x) = 3x$

$$\therefore E_f = \{y/y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{กำหนด } g(x) = 7x - 2$$

$$\therefore D_g = \{x/x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $E_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(3x) \\ &= 7(3x) - 2 \\ &= 21x - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 21x - 2\}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x}\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่

วิธีทำ ก. หา $g \circ f$

$$\text{กำหนด } f(x) = 2x - 3$$

$$E_f = \{y/y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{กำหนด } g(x) = \sqrt{x}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

จะได้ $R_f \not\subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ไม่ได้

ข. หา $f \circ g$

$$\text{กำหนด } g(x) = \sqrt{x}$$

$$R_g = \{y \in \mathbb{R} / y \geq c\}$$

$$\text{กำหนด } f(x) = 2x - 3$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $R_g \subset D_f$ ทำให้หา $f \circ g$ ได้

$$\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$$

$$\text{ดังนั้น } (f \circ g)(x) = 2\sqrt{x} - 3$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 2x - 1\}$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x + 1\}$$

$$\text{จงหา } (g \circ f)(x), (g \circ f)(-1) \text{ และ } (f \circ g)(0)$$

$$\text{วิธีทำ ก. } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2 - 2x - 1)$$

$$= 3(x^2 - 2x - 1) + 1$$

$$= 3x^2 - 6x - 3 + 1$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x - 2$$

$$(g \circ f)(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) - 2$$

$$= 3 + 6 - 2$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(-1) = 7$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(3x + 1) \\
 &= (3x + 1)^2 - 2(3x + 1) - 1 \\
 (f \circ g)(0) &= (0 + 1)^2 - 2(0 + 1) - 1 \\
 &= 1 - 2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (f \circ g)(0) = -2$$

หรือใช้วิธีอีกวิธีหนึ่ง คือ

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(-1) &= g(f(-1)) \\
 &= g((-1)^2 - 2(-1) - 1) \\
 &= g(1 + 2 - 1) \\
 &= g(2) \\
 &= (2 \times 3) + 1 \\
 &= 6 + 1 = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(0) &= f(g(0)) \\
 &= f((3 \times 0) + 1) \\
 &= f(0 + 1) \\
 &= f(1) \\
 &= 1^2 - 2(1) - 1 \\
 &= 1 - 2 - 1 \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.6 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$

และ $f = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$

จงหา $f^{-1} \circ f$ และ $f \circ f^{-1}$

วิธีทำ จาก $f = \{(1,x), (2,y), (3,z)\}$
 $f^{-1} = \{(x,1), (y,2), (z,3)\}$
 ดังนั้น $f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
 และ $f \circ f^{-1} = \{(x,x), (y,y), (z,z)\}$

Ans

จากตัวอย่างที่ 6 เราพบว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แล้ว $f^{-1} \circ f$ และ $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีสมาชิกตัวแรกและตัวหลังของแต่ละคู่อันดับเท่ากัน

นั่นคือ จะได้ว่า

1. $(f \circ f^{-1})(x) = x$
2. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
3. $(f \circ f^{-1})(x)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $(f^{-1} \circ f)(x)$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r, s\}$, $C = \{a, b, c, d\}$

$$\text{และ } f = \{(1, q), (2, r), (3, p)\}$$

$$g = \{(p, a), (q, b), (r, c), (s, d)\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

2. กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^3 + 1$ จงหา $f(g(x))$, $g(f(x))$

และ $f(g(x))$ เท่ากับ $g(f(x))$ หรือไม่

3. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$,

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x - 1\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

4. กำหนด $f = \{(x, y) / y = \sqrt{x - 1} ; x \geq 1\}$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^3\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่

5. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 2 \mid x \geq 1\}$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1\}$$

จงหา $(g \circ f)(-1)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(-3)$, $(f \circ g)(-2)$

6. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1\}$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$

7. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x - 3\}$

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

$$h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1\}$$

จงหา $(g \circ f) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. ก. หา $g \circ f$

$$\therefore R_f = \{p, q, r\}$$

$$\text{และ } D_g = \{p, q, r, s\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$\text{ดังนั้น } g \circ f = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

ข. หา $f \circ g$

$$\therefore R_g = \{a, b, c, d\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3\}$$

จะได้ $R_g \not\subset D_f$ ทำให้ไม่สามารถหา $f \circ g$ ได้

2. กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^3 + 1$

$$\begin{aligned} \text{ก. หา } f(g(x)) &= f(x^3 + 1) \\ &= (x^3 + 1)^2 \\ &= x^6 + 2x^3 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ข. หา } g(f(x)) &= g(x^2) \\ &= (x^2)^3 + 1 \\ &= x^6 + 1 \end{aligned}$$

ค. จากข้อ ก และ ข สรุปได้ว่า $f(g(x)) \neq g(f(x))$
หรือ $f \circ g \neq g \circ f$

3. ก. หา $g \circ f$

$$\text{กำหนด } f(x) = x^2$$

$$\therefore R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

$$\text{กำหนด } g(x) = x - 1$$

$$\therefore D_g = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(x) = x^2 - 1$$

ข. หา $f \circ g$

$$\text{กำหนด } g(x) = x - 1$$

$$\therefore R_g = \{y / y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{กำหนด } f(x) = x^2$$

$$\therefore D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $R_g \subset D_f$ ทำให้หา $f \circ g$ ได้

$$\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{ดังนั้น } (f \circ g)(x) = (x - 1)^2$$

4. ก. หา $g \circ f$

$$\text{กำหนด } f(x) = \sqrt{x - 1} ; x \geq 1$$

$$\therefore R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

$$\text{กำหนด } g(x) = x^3$$

$$\therefore D_g = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ทำให้หา $g \circ f$ ได้

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(x) = (\sqrt{x - 1})^3$$

ข. หา $f \circ g$

$$\text{กำหนด } g(x) = x^3$$

$$\therefore R_g = \{y / y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{กำหนด } f(x) = \sqrt{x - 1} , x \geq 1$$

$$\therefore D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$$

จะได้ $R_g \not\subset D_f$ ทำให้หา $f \circ g$ ไม่ได้

5. กำหนด $f(x) = x^2 - 2|x|$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= (x^2 - 2|x|)^2 + 1$$

$$= x^4 - 4x^2|x| + 4|x|^2 + 1$$

$$= x^4 - 4x^2|x| + 4x^2 + 1 \quad \because (|x|^2 = x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 1)^2 - 2|x^2 + 1|$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2(x^2 + 1) \quad (\because |x^2 + 1| = x^2 + 1)$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2 = x^4 - 1$$

$$(g \circ f)(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^2|-1| + 4(-1)^2 + 1$$

$$= 1 - 4 + 4 + 1$$

$$= 2$$

$$(g \circ f)(2) = (2)^4 - 4(2)^2|2| + 4(2)^2 + 1$$

$$= 16 - 32 + 16 + 1$$

$$= 1$$

$$(f \circ g)(-3) = (-3)^4 - 1$$

$$= 80$$

$$(f \circ g)(-2) = 15$$

6. กำหนด $f(x) = 2x + 1$

$$g(x) = x^2$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= (2x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= 2x^2 + 1$$

พิจารณาค่า x ที่ทำให้ $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

$$\text{จาก } (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

$$\text{จะได้ } (2x + 1)^2 = 2x^2 + 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 2x^2 + 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 0 \text{ และ } x = -2$$

$$\text{แต่ค่า } x = -2 \text{ ไม่ทำให้ } (2x + 1)^2 = 2x^2 + 1$$

$$\text{ดังนั้น } x = 0 \text{ เป็นค่า } x \text{ ที่ทำให้ } (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

7. กำหนด $f(x) = x - 3$

$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$((g \circ f) \circ h)(x) = (g \circ f)(h(x))$$

$$= (2x + 1)^2 - 6(2x + 1) + 9$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 - 12x - 6 + 9$$

$$= 4x^2 - 8x + 4$$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x))$$

$$= (2x + 1)^2$$

$$= 4x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) \\
 &= (4x^2 + 4x + 1) - 3 \\
 &= 4x^2 + 4x + 1 - 3 \\
 &= 4x^2 + 4x - 2
 \end{aligned}$$

เรื่องที่ 11 - 12

พีชคณิตของฟังก์ชัน

ถ้าฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไปมีโดเมนร่วมกัน เราอาจสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่ได้ โดยการนำฟังก์ชันทั้งหมดนั้นมาบวก ลบ คูณ หาร กัน เช่น

กำหนดฟังก์ชัน f และ g โดยตารางดังนี้

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	3	5	7	9

x	1	2	3	4
$y = g(x)$	2	4	6	8

ฟังก์ชัน f และ g มีโดเมนร่วมกัน คือ $\{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ฟังก์ชัน $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ กำหนดโดยการตารางดังนี้

x	1	2	3	4
$(f+g)(x)$	$3+2=5$	$5+4=9$	$7+6=13$	$9+8=17$
$(f-g)(x)$	$3-2=1$	$5-4=1$	$7-6=1$	$9-8=1$
$(f \cdot g)(x)$	$3 \times 2=6$	$5 \times 4=20$	$7 \times 6=42$	$9 \times 8=72$
$(\frac{f}{g})(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{8}$

จะเห็นว่า $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 3 + 2 = 5$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 3 - 2 = 1$$

$$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 3 \times 2 = 6$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{3}{2}$$

จากตัวอย่างเราอาจสรุปเป็นนิยามของพีชคณิตของฟังก์ชันในรูปทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้
 นิยาม 3.2 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน มีโดเมนเป็น D_f และ D_g
 ตามลำดับ ฟังก์ชัน $f+g, f-g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

$$1. (f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{โดยที่ } D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$2. (f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad \text{โดยที่ } D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{โดยที่ } D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{โดยที่ } D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) \neq 0\}$$

ข้อที่นักเรียนควรสนใจให้มากที่สุดคือ กรณีที่เป็นผลหาร เพราะจะต้องพิจารณาถึงกรณีที่ตัวหารมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนด ฟังก์ชัน f และ g ดังต่อไปนี้

$$f = \{(1,2), (2,5), (3,6), (4,8)\}$$

$$g = \{(1,-3), (2,2), (3,7), (6,9)\}$$

วิธีทำ พิจารณาโดเมนของ f และ g จะได้

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_g = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$$

ตามนิยามของพีชคณิตของฟังก์ชันจะได้

$$\begin{aligned} f+g &= \{(1, 2 + (-3)), (2, 5 + 2), (3, 6 + 7)\} \\ &= \{(1, -1), (2, 7), (3, 13)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f-g &= \{(1, 2 - (-3)), (2, 5 - 2), (3, 6 - 7)\} \\ &= \{(1, 5), (2, 3), (3, -1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f \cdot g &= \{ (1, 2 \times (-3)), (2, 5 \times 2), (3, 6 \times 7) \} \\
 &= \{ (1, -6), (2, 10), (3, 42) \} \\
 \frac{f}{g} &= \{ (1, \frac{2}{-3}), (2, \frac{5}{2}), (3, \frac{6}{7}) \} \\
 &= \{ (1, -\frac{2}{3}), (2, \frac{5}{2}), (3, \frac{6}{7}) \}
 \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนด $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x^2 + 7 \}$

$$g = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 4 \}$$

จงหา $f+g, f-g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของฟังก์ชันเหล่านี้

วิธีทำ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (3x^2 + 7) + (2x + 4)$$

$$= 3x^2 + 7 + 2x + 4$$

$$= 3x^2 + 2x + 11$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (3x^2 + 7) - (2x + 4)$$

$$= 3x^2 - 2x + 3$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$(f \cdot g)(x) = (3x^2 + 7)(2x + 4)$$

$$= 6x^3 + 14x + 12x^2 + 28$$

$$= 6x^3 + 12x^2 + 14x + 28$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{3x^2 + 7}{2x + 4}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \in E \mid x \neq -2\}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x - 1\}$

$$g = \{(x, y) \mid y = 2x \text{ เมื่อ } -5 \leq x \leq 5\}$$

จงหา $f+g, f-g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเขียนกราฟของฟังก์ชัน

เหล่านี้ด้วย

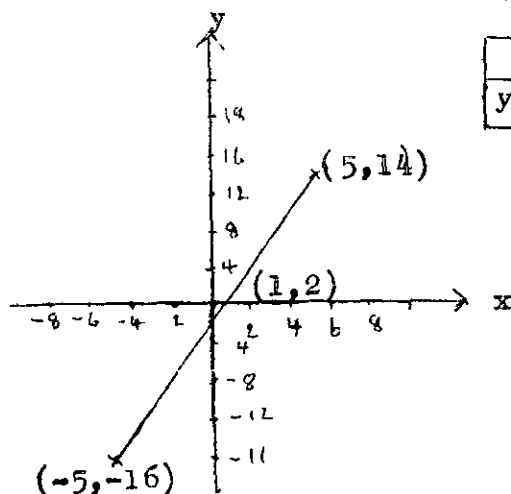
วิธีทำ

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x-1) + 2x \\ &= x-1 + 2x \\ &= 3x - 1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = [-5, 5]$

$\therefore -5 \leq x \leq 5$ เขียนในรูปช่วงได้เป็น $[-5, 5]$

$$\therefore D_{f+g} = \mathbb{R} \cap [-5, 5] = [-5, 5]$$

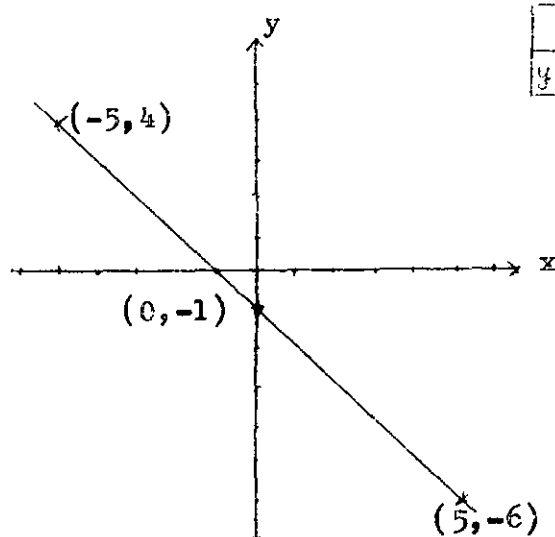


x	-5	-1	0	1	5
y=3x-1	-16	-4	-1	2	14

$$\begin{aligned}
 (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
 &= (x-1) - 2x \\
 &= x-1 - 2x \\
 &= -x - 1
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = [-5, 5]$

$$\therefore D_{f-g} = \mathbb{R} \cap [-5, 5] = [-5, 5]$$



x	5	-1	0	1	5
$y = -x - 1$	4	0	-1	-2	6

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= (x-1)(2x) \\
 &= 2x^2 - 2x
 \end{aligned}$$

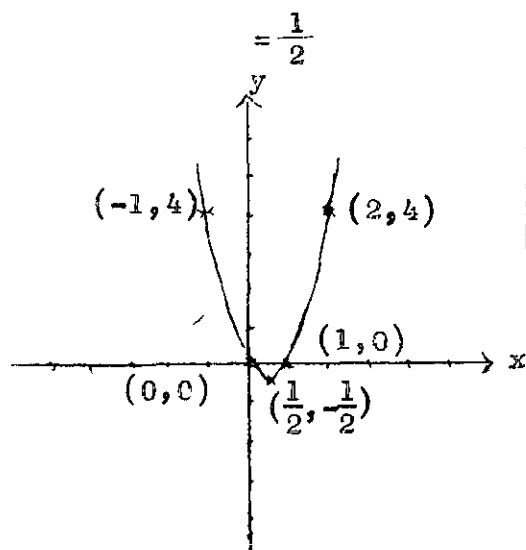
เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = [-5, 5]$

$$\therefore D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \cap [-5, 5] = [-5, 5]$$

เนื่องจาก $y = 2x^2 - 2x$ จึงได้กราฟเป็นกราฟพาราโบลาหงาย

มีค่า $a = 2$ $b = -2$

กราฟมีค่าสูงสุดที่จุด $x = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-2}{2 \times 2}\right) = \frac{2}{4}$

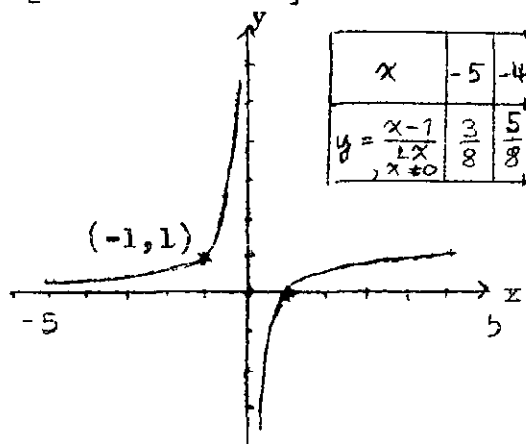


x	1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^2 - 2x$	4	0	$-\frac{1}{2}$	0	4

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{2x}, \quad x \neq 0$$

เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = [-5, 5]$

$$\begin{aligned} \therefore D_{\frac{f}{g}} &= \mathbb{R} \cap [-5, 5] - \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = [-5, 5] - \{0\} \\ &= [-5, 0) \cup (0, 5] \end{aligned}$$



x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
$y = \frac{x-1}{2x}, x \neq 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. กำหนดฟังก์ชัน f และ g ดังตารางข้างล่างนี้

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	1	-2	-5	-8	-11

x	1	2	3	4	5
$y = g(x)$	-7	-4	1	8	17

จงเติมจำนวนลงในตารางข้างล่างให้ถูกต้อง

x	1	2	3	4	5
$(f + g)(x)$					
$(f - g)(x)$					
$(f \cdot g)(x)$					
$(\frac{f}{g})(x)$					

2. กำหนด $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ และ

$$g = \{(2,-4), (3,-2), (4,1), (5,6), (6,9)\} \text{ จงหา}$$

$$f + g, f - g, f \cdot g \text{ และ } \frac{f}{g}$$

3. กำหนด $f = \{(x,y) \mid y = 2x^2 \text{ เมื่อ } -3 \leq x \leq 3\}$ และ

$$g = \{(x,y) \mid y = x-2 \text{ เมื่อ } -2 \leq x \leq 4\} \text{ จงหา } (f+g)(x), (f-g)(x)$$

$$(f \cdot g)(x), (\frac{f}{g})(x) \text{ พร้อมทั้งบอกโดเมนของแต่ละฟังก์ชันด้วย}$$

4. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x\}$, $g(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

$$h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

ก. จงหาโดเมนและเขียนกราฟของ $(f + g)(x)$

ข. จงเขียนกราฟของ $(f \cdot h)(x)$

ค. จงเขียนกราฟของ $(\frac{h}{f})(x)$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.2

1.

x	1	2	3	4	5
$(f+g)(x)$	-6	-6	-4	0	6
$(f-g)(x)$	8	2	-6	-16	-28
$(f \cdot g)(x)$	-7	8	-5	-64	-187
$(\frac{f}{g})(x)$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	-5	-1	$-\frac{11}{17}$

2. พิจารณาโดเมนของ f และ g จะได้ว่า

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_g = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$D_f \cap D_g = \{2, 3, 4, 5\}$$

ตามนิยามของฟังก์ชันของฟังก์ชันจะได้

$$\begin{aligned} f+g &= \{(2, 2 + (-4)), (3, 3 + (-2)), (4, 4 + 1), (5, 5 + 6)\} \\ &= \{(2, -2), (3, 1), (4, 5), (5, 11)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f-g &= \{(2, 2 - (-4)), (3, 3 - (-2)), (4, 4 - 1), (5, 5 - 6)\} \\ &= \{(2, 6), (3, 5), (4, 3), (5, -1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{(2, 2 \times (-4)), (3, 3 \times (-2)), (4, 4 \times (-1)), \\ &\quad (5, 5 \times 6)\} \\ &= \{(2, -8), (3, -6), (4, -4), (5, 30)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= \{(2, \frac{2}{-4}), (3, \frac{3}{-2}), (4, \frac{4}{1}), (5, \frac{5}{6})\} \\ &= \{(2, -\frac{1}{2}), (3, -\frac{3}{2}), (4, 4), (5, \frac{5}{6})\} \end{aligned}$$

$$3. \quad (f+g)(x) = 2x^2 + (x - 2) \\ = 2x^2 + x - 2$$

$$D_f = [-3, 3] \text{ และ } D_g = [-2, 4]$$

$$\therefore D_{f+g} = [-3, 3] \cap [-2, 4] = [-2, 3]$$

$$(f-g)(x) = 2x^2 - (x - 2) \\ = 2x^2 - x + 2$$

$$D_{f-g} \text{ มีวิธีหาค่าและมีค่าเท่ากับ } D_{f+g}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x^2)(x - 2) \\ = 2x^3 - 4x^2$$

$$D_{f \cdot g} \text{ มีวิธีหาค่าและมีค่าเท่ากับ } D_{f+g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{x-2}, \quad x \neq 2$$

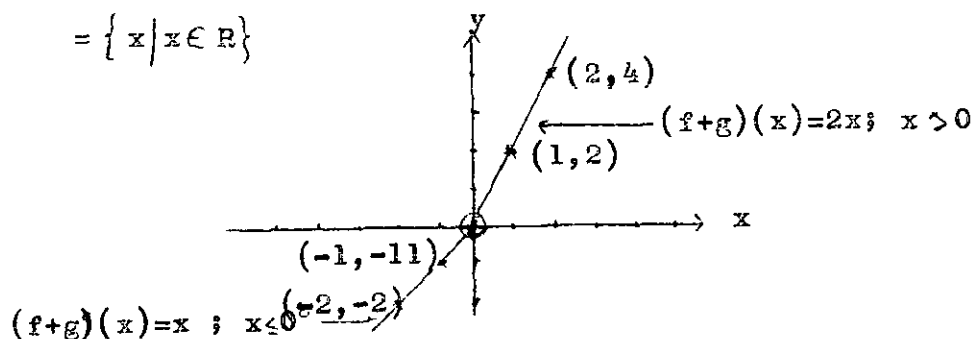
$$D_f = [-3, 3] \text{ และ } D_g = [-2, 4]$$

$$\therefore D_{\frac{f}{g}} = [-3, 3] \cap [-2, 4] - \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} \\ = [-2, 2) \cup (2, 3]$$

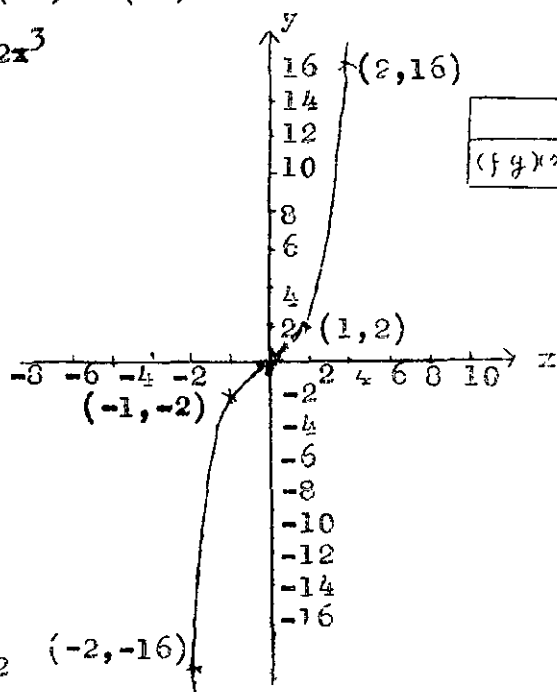
$$4. \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 2x + (-x) = x & ; x \leq 0 \\ 2x + 0 = 2x & , x > 0 \end{cases}$$

$$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

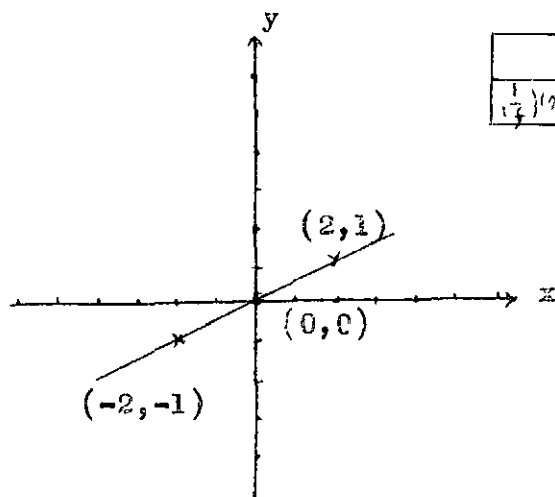


5. $(f \cdot h)(x) = (2x) \cdot (x^2)$
 $= 2x^3$



x	-2	-1	0	1	2
$(f \cdot h)(x) = 2x^3$	-16	-2	0	2	16

6. $(\frac{h}{f})(x) = \frac{x^2}{2x}$
 $= \frac{x}{2}$



x	-2	-1	0	1	2
$(\frac{h}{f})(x) = \frac{x}{2}$	-1	-\frac{1}{2}	0	\frac{1}{2}	1

6.

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง ฟังก์ชัน (Function)

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในลักษณะการจับคู่แบบต่าง ๆ ให้ นักเรียนสามารถสรุปรูปแบบของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและให้ความหมายของฟังก์ชันได้
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้ความหมายของฟังก์ชันให้เหตุผลได้ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด
3. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้วิธีการตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดเซต A และ B และกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ พร้อมทั้งอธิบายความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ถูกต้อง
5. นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของ $y = f(x)$ ได้ถูกต้องและเมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนนี้เรียกว่าบทเรียนโปรแกรม เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ นักเรียนเรียนได้ด้วยตนเอง บทเรียนจะทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวนักเรียน ดังนั้นนักเรียนจะต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนมีดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมนี้เขียนขึ้นตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ค.012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชัน

2. เนื้อหาในบทเรียนแบ่งออกเป็นชั้นเล็ก ๆ เรียกว่ากรอบ ซึ่งเรียงจากง่ายไปหายากตามลำดับ

3. ในแต่ละกรอบจะมีข้อความให้นักเรียน และมีคำถามให้นักเรียนคิดและตอบคำถาม นักเรียนจะเรียนรู้ไปทีละชั้น และสามารถทดสอบความเข้าใจไปพร้อม ๆ กับการเรียนด้วยการตอบคำถามเป็นชั้น ๆ ไป

4. นักเรียนจะทราบทันทีว่า คำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะมีคำตอบเฉลยไว้ด้วย

5. ในแต่ละกรอบแบ่งเป็น 2 ช่อง ดังนี้

	1. ในช่องนี้มีข้อความให้นักเรียนและมีคำถามให้นักเรียนตอบ หรือเติมข้อความที่ขาดหายไป
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 1	2.
ในช่องนี้มีคำตอบเฉลยของกรอบที่ 2	3.

คำแนะนำในการเรียน

บทเรียนนี้สร้างขึ้นสำหรับให้นักเรียนเรียนด้วยตนเอง นักเรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้าท่านทำตามคำแนะนำต่อไปนี้อย่างเคร่งครัด

1. ให้นักเรียนใช้กระดาษแข็งปิดข้อความในกรอบที่ 2
2. อ่านข้อความในกรอบที่ 1 อย่างละเอียดแล้วตอบคำถาม หรือเติมข้อความลงในช่องว่างที่เว้นไว้ให้

3. ตรวจสอบคำตอบของนักเรียนได้โดยการเลื่อนกระดาษซึ่งลงไปปิดกรอบที่ 3 แล้วนักเรียนจะพบเฉลยคำตอบของกรอบที่ 1 อยู่ทางด้านซ้ายมือของกรอบที่ 2

4. ถ้านักเรียนตอบถูกให้นักเรียนอ่านกรอบที่ 2 ต่อไป และดำเนินการเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ

5. ถ้านักเรียนตอบผิด หรือคำตอบของนักเรียนไม่ตรงกับเฉลย ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมาย "X" หลังคำตอบที่ผิด และเขียน "O" ล้อมรอบหมายเลขของกรอบนั้น แล้วอ่านคำอธิบายในกรอบเดิมซ้ำอีกจนเข้าใจ และทราบว่าทำไมนักเรียนจึงตอบผิด แล้วจึงอ่านกรอบต่อไป

6. นักเรียนจะต้องชื่อสัตย์ต่อตนเอง อย่าลอกคำตอบจากที่เฉลยเอาไว้มาตอบเป็นอันขาด เพราะจะทำให้นักเรียนขาดความรู้ ความเข้าใจในบทเรียน และจะไม่ได้ผลอะไรเลย

7. ทำทุก ๆ กรอบ จากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด ระวังไว้เสมอว่า คำถามในแต่ละกรอบไปใช้แบบทดสอบ แต่เป็นคำถามที่ถ่วงการให้นักเรียนได้คิดและเรียนรู้ ซึ่งเหมือนกับคำถามที่ครูถามนักเรียนในขณะที่ครูอธิบายในห้องเรียนนั่นเอง

8. การอ่านข้อความในแต่ละกรอบ นักเรียนจะต้องอ่านอย่างละเอียด และนักเรียนจะต้องใช้ความสังเกต เปรียบเทียบ และสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ให้ได้ เพื่อจะได้นำไปใช้ในกรอบถัดไป

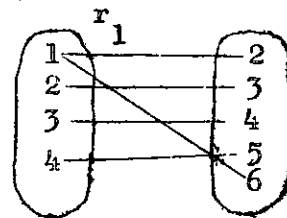
นักเรียนพร้อมหรือยัง ถ้าพร้อมแล้วเริ่มอ่านบทเรียนได้ ขวี้ได้ไซค์ดี

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง ฟังก์ชัน (function)

	1. ก่อนจะศึกษาเรื่องฟังก์ชันนักเรียนลองทบทวนเรื่องความสัมพันธ์ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วเสียก่อน นิยามของความสัมพันธ์ ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือ สับเซตของ $A \times B$ กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b\}$ $r_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ $r_2 = \{(a, 3), (b, 1), (b, 3)\}$ $r_3 = \{(1, a), (b, 2), (b, 3)\}$ จงพิจารณาว่า r_1, r_2 และ r_3 เซตใดเป็นความสัมพันธ์ และถ้าเป็นจะเป็นความสัมพันธ์จากเซตใดไปยังเซตใด ตอบ $r_1 \dots \dots \dots r_2 \dots \dots \dots$ $r_3 \dots \dots \dots$
r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A r_3 ไม่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และไม่เป็น	2. ต่อไปนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ที่มีลักษณะเฉพาะซึ่งเราจะเรียกความสัมพันธ์ชนิดนี้ว่า <u>ฟังก์ชัน</u> ก่อนอื่นนักเรียนลองพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (1, 6)\}$ ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของ r_1 ได้ดังนี้

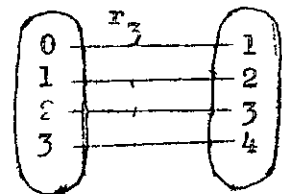
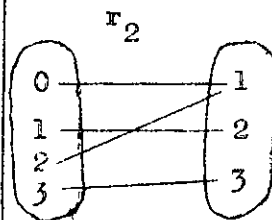
ความสัมพันธ์จาก B ไป A
 เพราะมี $(1, a) \in r_3$ และ
 $(b, 2) \in r_3$ โดยที่ $(1, a) \in A \times B$
 และ $(b, 2) \in B \times A$



$$r_2 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

$$r_3 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

ซึ่งแสดงด้วยแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิก
 ตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของ r_2 และ r_3 ได้ดังนี้



ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิก
 ตัวหลังของ r_1 , r_2 และ r_3 มีข้อแตกต่างที่น่าสนใจ
 คือ

ในความสัมพันธ์ r_1 มีคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน
 จับคู่กับสมาชิกตัวหลังที่แตกต่างกันได้แก่ $(1, 2)$ กับ $(1, 6)$
 ในทางคณิตศาสตร์ เราถือว่าความสัมพันธ์ในลักษณะนี้เป็น ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

ในความสัมพันธ์ r_2 และ r_3 จะเห็นว่าสมาชิกตัวหน้า
 แต่ละตัวไปสัมพันธ์กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น
 แสดงว่าไม่มีคู่อันดับใดที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกันจับคู่กับสมาชิกตัวหลัง
 ที่ต่างกัน อาจจะมีสมาชิกตัวหน้าไปจับคู่กับสมาชิกตัวหลังซ้ำกัน

เช่น $(0, 1)$ และ $(2, 1)$ ใน r_2 แต่เรากล่าวได้ว่า 0 และ 2 ไปสัมพันธ์กันกับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวซึ่งต่างกับคู่อันดับในความสัมพันธ์ r_1 ซึ่งพอจะเปรียบเทียบให้เห็นชัดเจนได้ดังนี้

$1 \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 6 \end{matrix}$ อยู่ใน r_1 ; $0 \text{ --- } 1$ และ

$2 \longrightarrow 1$ หรือ $0 \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$ อยู่ใน r_2

ในทางคณิตศาสตร์ เราถือว่าความสัมพันธ์ในลักษณะนี้เป็น ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$r_1 = \{ (1, a), (2, a), (2, b), (3, c) \}$$

$$r_2 = \{ (1, a), (2, b), (3, c) \}$$

r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่เพราะเหตุใด

ตอบ r_1 เพราะ

r_2 เพราะ

r_1 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีคู่อันดับ $(2, a)$ และ $(2, b)$ ซึ่งสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันสัมพันธ์กับสมาชิกตัวหลังที่แตกต่างกัน อยู่ใน r_1

r_2 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกันสัมพันธ์กับสมาชิกตัวหลังที่แตกต่างกัน

3. จากที่ได้ศึกษาจากกรอบที่ 2 จะเห็นว่าฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์เสมอ แต่ความสัมพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป บางความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน บางความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน และเราอาจให้นิยามของฟังก์ชันในขั้นต้นได้ดังนี้

นิยามฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์หรือเซตของคู่อันดับซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

	หรือความสัมพันธ์ f จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ $r = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ตอบ
ไม่เป็นเพราะมี $(1, 2)$, และ $(1, 3)$, อยู่ในความสัมพันธ์ r	4. จงใช้นิยามในกรอบที่ 3 จินตนาการว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ใดไม่เป็น ฟังก์ชันเพราะเหตุใด $r_1 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (3, 4)\}$ $r_2 = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$ $r_3 = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$ $r_4 = \{(-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2)\}$ ตอบ r_1 เพราะ..... r_2 เพราะ..... r_3 เพราะ..... r_4 เพราะ.....
r_1 เป็นฟังก์ชันเพราะไม่มีสองคู่อันดับใดใน r_1 ที่สมาชิก	5. เรามีวิธีตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใด ๆ เป็นฟังก์ชันหรือไม่อยู่หลายวิธี โดย

ตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิก

ตัวหลังไม่เหมือนกัน

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ

มีคู่อันดับที่สมาชิกด้านหน้า

เหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลัง

ไม่เหมือนกันได้แก่ $(4, -2)$

และ $(4, 2)$

r_3 เป็นฟังก์ชันเหตุผล

เหมือน r_1

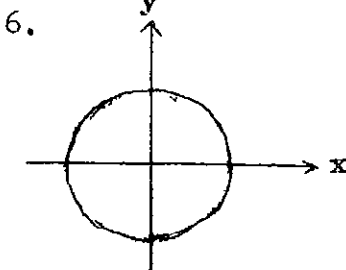
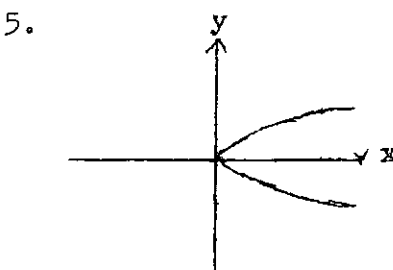
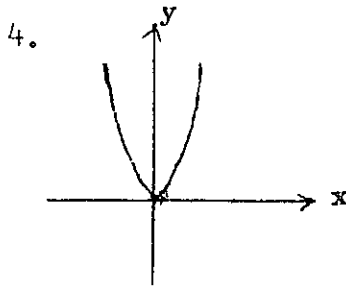
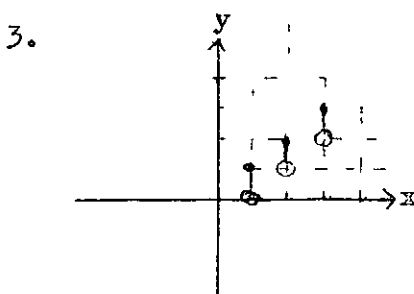
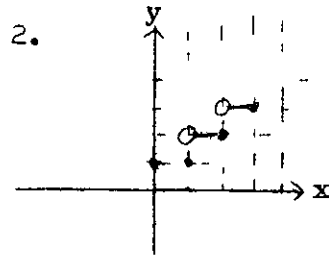
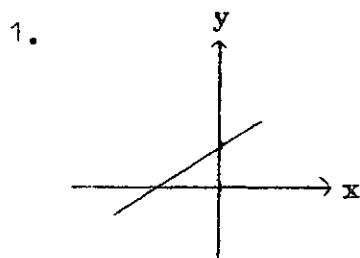
r_4 เป็นฟังก์ชันเหตุผล

เหมือน r_1

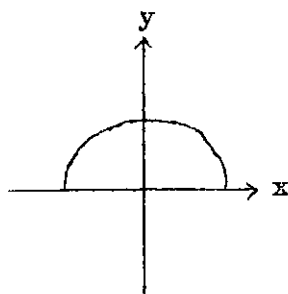
ก. ตรวจสอบโดยวิธีใช้นิยามตามที่กล่าวมาแล้ว
ในกรอบที่ 2 ถึงกรอบที่ 4

ข. ตรวจสอบโดยวิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์
เราสามารถตรวจสอบได้โดยการลากเส้นตรงขนานกับแกน y
ถ้าเส้นตรงที่ลากนั้นทุกเส้นตัดกับเส้นกราฟของความสัมพันธ์
เพียงจุดเดียว ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน ถ้าเส้น
ตรงที่ลากนั้นตัดกับกราฟของความสัมพันธ์เกิน 1 จุด ก็แสดง
ว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน วิธีนี้เรียกว่า **Vertical-
line test**

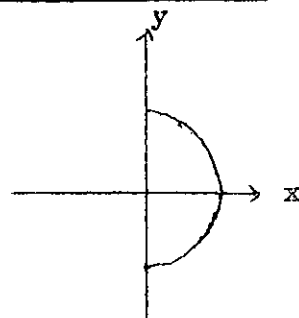
กำหนดกราฟในลักษณะต่อไป



7.



8.



จงพิจารณาว่ากราฟในข้อใด เป็นฟังก์ชันและกราฟในข้อใด
ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ เป็นฟังก์ชัน
..... ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข้อ 1, 2, 4 และ 7 เป็น
กราฟของฟังก์ชันข้อ 3, 5, 6
และ 8 ไม่เป็นกราฟของ
ฟังก์ชัน

6. วิธีตรวจสอบฟังก์ชันวิธีต่อไปได้แก่

ค. ใช้วิธีการคาดคะเน

คือใช้วิธีพิจารณาจากตัวแปร y ถ้าตัวแปร y อยู่ในรูป
ยกกำลังที่เป็นจำนวนเต็มคู่หรืออยู่ในรูปกำลังสมมูลความ
สัมพันธ์นั้นก็ไม่ควรเป็นฟังก์ชัน เช่น

$y^2 = x$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะว่า $x = 1$
จะได้ $y = 1$ และ $x = 1$ จะได้ $y = -1$ นั่นคือมี
(1, -1) และ (1, 1) อยู่ในความสัมพันธ์ $y^2 = x$

$|y| = x$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะว่า $x = 2$
จะได้ $y = 2$ และ $x = 2$ จะได้ $y = -2$ นั่นคือมี
(2, 2) และ (2, -2) อยู่ในความสัมพันธ์ $|y| = x$

ลองใช้วิธีการคาดคะเน ศึกษาว่า $x^2 + y^2 = 4$
และ $|y + 3| = x$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตอบ $x^2 + y^2 = 4$
 $|y + 3| = x$

$x^2 + y^2 = 4$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ

ถ้าเราจัดสมการใหม่จะได้

$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$ จะได้ $(0, 2)$ และ

$(0, -2)$ อยู่ใน $x^2 + y^2 = 4$

$|y + 3| = x$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ

ว่า $y = -4$ จะได้ $x = 1$ และ $y =$

-2 จะได้ $x = 1$ นั่นคือ $(1, 4)$

และ $(1, -2)$ อยู่ใน $|y + 3| = x$

7. วิธีการตรวจสอบฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่งได้แก่

ง. วิธีการสมมติค่า เป็นการตรวจสอบ

โดยการสมมติคู่อันดับใด ๆ ในความสัมพันธ์แล้วทดสอบ
ดังนี้

ให้ $(a, b) \in r$ และ $(a, c) \in r$

$$\begin{bmatrix} a < b \\ a < c \end{bmatrix}$$

ถ้าทดสอบแล้วสามารถสรุปได้ว่า

$b = c$ ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน

กำหนด $r_1 = \{(x, y) \in R \times R / y = 3x + 1\}$

พิจารณาว่า r_1 เป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาให้ $(a, b) \in r_1$ จะได้

$$b = 3a + 1 \quad (1)$$

และ $(a, c) \in r_1$ จะได้

$$c = 3a + 1 \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $b = c$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R / y = 3x + 1\}$

เป็นฟังก์ชัน

ลองใช้วิธีการสมมติค่า ตรวจสอบดูว่า

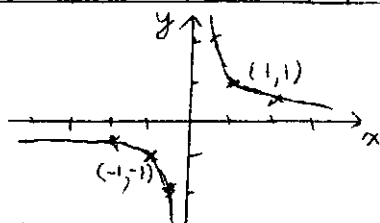
$$r_2 = \{(x, y) \in R \times R / y^2 = 3x + 1\}$$

เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตรวจสอบ พิจารณา $r_2 = \{(x,y) \in R \times R / y^2 = 3x+1\}$ ให้ $(a,b) \in r_2$ จะได้ $b^2 = 3a+1$ _____ (1) และ $(a,c) \in r_2$ จะได้ $c^2 = 3a+1$ _____ (2) จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$ $b = \pm \sqrt{c^2} = \pm c$ ไม่สามารถสรุปได้ว่า $b = c$ ดังนั้น $r_2 = \{(x,y) \in R \times R / y^2 = 3x + 1\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน	8. กำหนด $r = \{(x,y) \in R \times R / xy = 1\}$ ผู้เรียนลองใช้วิธีที่ตรวจสอบทั้งสามวิธีที่ตรวจสอบดูว่าความสัมพันธ์ r เป็นฟังก์ชันหรือไม่
ตรวจสอบโดยวิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ $xy = 1$ หรือ $y = \frac{1}{x}$	9. จากเรื่องความสัมพันธ์เราเคยให้นิยามของความสัมพันธ์จาก A ไป B ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ นักเรียนลองสังเกตความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตารางความสัมพันธ์ได้ดังนี้

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3		4	2	1



ดังนั้น $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy=1\}$

เป็นฟังก์ชันเพราะเส้นตรงที่ลากขนานกับแกน y ที่เส้นก็ตามแต่ละเส้นจะตัดเส้นกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น

ตรวจสอบโดยวิธีคาด

คะเน

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ $xy=1$ จะเห็นว่าค่า x ที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์หนึ่งค่าจะหาค่า y ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น ดังนั้น $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy=1\}$

เป็นฟังก์ชัน

ตรวจสอบโดยวิธีสมมติค่า

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ $xy=1$ หรือ $y = \frac{1}{x}$

ให้ $(a,b) \in r$ จะได้

$$b = \frac{1}{a} \quad (1)$$

ให้ $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b,c\}$ และ

$$r_1 = \{(1,a), (2,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$r_2 = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$r_3 = \{(1,a), (2,b), (3,a)\}$$

$$r_4 = \{(1,a), (2,b), (1,a), (2,b)\}$$

จะได้ว่า r_1, r_2, r_3, r_4 และ r_5 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะทางก็เป็นสับเซตของ $A \times B$

และจะได้ r_2, r_3 และ r_4 เป็นฟังก์ชันเพราะไม่มีคู่อันดับใดในความสัมพันธ์ r_2, r_3 และ r_4 ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน

นักเรียนลองสังเกตโดเมนของทั้งสามความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันจะพบความแตกต่างดังนี้ โดเมนของ r_2 และ r_3 เท่ากับ A คือเท่ากับ $\{1,2,3\}$ ส่วนโดเมนของ r_4 ไม่เท่ากับ A ซึ่งมีสมาชิกเป็น $\{1,2\}$

เราสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะอย่าง r_2 และ r_3 เรียกว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ส่วนความสัมพันธ์ที่มีลักษณะอย่าง r_4 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่เป็นฟังก์ชันจาก $\{1,2\}$ ไป B

ดังนั้น

$$r_6 = \{(1,c), (2,c), (3,c)\} \text{ และ}$$

$$r_7 = \{(2,a), (3,b), (1,c)\}$$

เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่.....

และ $(a, c) \in r$ จะได้ $b = \frac{1}{a}$ (2) จาก (1) และ (2) จะได้ $b = c$ ดังนั้น $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 1 \}$ เป็นฟังก์ชัน	นักเรียนสามารถสรุปความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้อย่างไร
เป็น ความสัมพันธ์ r จะเป็น ฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ (1) โดเมนของ r เท่ากับ A (2) ไม่มีคู่อันดับใดใน r ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน (3) เรนจ์ของ r เป็นสับเซตของ B	10. จากกรอบที่ 9 เราพอสรุป ลักษณะสำคัญของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ดังนี้ ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน r จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ โดเมนของ r เท่ากับเซต A นั่นคือ สมาชิกทุกตัวใน A จะไปสัมพันธ์กับสมาชิกใน B (ทุกตัวหรือบางตัวก็ได้) ดังตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 4, 6, 8\}$ และมีความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ $r_2 = \{(1, 4), (2, 8), (3, 6)\}$ $r_3 = \{(1, 2), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$ จะได้ว่า r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B อย่างไรก็ตาม r_2 ก็ยังเป็นฟังก์ชันแต่เป็นฟังก์ชันจาก $\{1, 2, 3\}$ ไปยัง B ถ้า $r_4 = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 4)\}$ $r_5 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$

	r_4 และ r_5 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ถ้าเป็นฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปเซตใด r_4 r_5
r_4 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ 1. $D_{r_4} = A$ 2. ไม่มีคู่อันดับใดใน r_4 ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน r_5 เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่ง $D_{r_5} = \{1, 3, 4\}$ ซึ่งไม่เท่ากับ A	11. จากกรอบที่ 9 และกรอบที่ 10 เราอาจสรุปได้ว่า ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ 1. โดเมนของ f เท่ากับ A 2. สองคู่อันดับใด ๆ ใน f ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย 3. เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B เราสรุปเป็นนิยามของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ดังนี้ นิยาม ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ 1. $D_f = A$ 2. ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ จะได้ว่า $y = z$ 3. $R_f \subseteq B$ นั่นคือ ถ้า $x \in A$ จะต้องมีย $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(x, y) \in f$ ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{6, 4, 7\}$ อยากทราบว่าความสัมพันธ์ $r_1 = \{(1, 6), (2, 4), (3,)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ ตอบ

เป็นเพราะ 1. $D_{r_1} = A$ 2. ไม่มีคู่อันดับใด ในที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน	12. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6, 7\}$ อยากทราบว่า ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ ตอบ
เป็น	13. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{x, y, z\}$ และกำหนดความสัมพันธ์จาก A ไป B ดังต่อไปนี้ $r_1 = \{(a, y), (b, x), (c, z), (d, y)\}$ $r_2 = \{(a, y), (b, x), (a, z), (c, z),$ $(d, y)\}$ ตรวจสอบดูว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ตอบ ตอบ
r_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน และไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B	14. ตอนนี้ลองกลับมาทบทวนนิยามของฟังก์ชัน อีกครั้ง นิยาม ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

$$1. D_f = A$$

$$2. \text{ ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f \text{ จะได้ } y = z$$

$$3. R_f \subset B$$

ความสำคัญของนิยามอยู่ที่ว่า

1. โดเมนของฟังก์ชันจาก A ไป B จะต้องเป็น A หมายความว่าสมาชิกทุกตัวในเซต A จะต้องไปสัมพันธ์กับสมาชิกของ B ถ้ามีสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งใน A เหลืออยู่ ความสัมพันธ์นั้นจะไม่ใช่ฟังก์ชันจาก A ไป B

2. สมาชิกแต่ละตัวของ A จะเป็นสมาชิกตัวแรกในคู่อันดับใน f ได้เพียงคู่อันดับเดียวเท่านั้น

ลองพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

$$1. A = \{3, 4\} ; B = \{3, 4\}$$

$$r_1 = \{(4, 3), (3, 4)\} \dots$$

$$2. A = B = \{1, 2, 3\}$$

$$r_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \dots$$

$$3. A = \{3, 4\} , B = \{3, 5\}$$

$$r_3 = \{(3, 3), (4, 3), (3, 5)\} \dots$$

$$4. A = \{1, 2, 3, 4\} ; B = \{5\}$$

$$r_4 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \dots$$

	5. $A = \{1, 2\}$; $B = \{5, 6, 7\}$ $r_5 = \{(1, 5), (2, 7)\} \dots$ 6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3\}$ $r_6 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \dots$
r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B r_6 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่ r_6 เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A	15. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \longrightarrow B \text{ หรือ } A \xrightarrow{f} B$ และอ่านว่า " f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B " A เรียกว่า โดเมน (Domain) ของ f และ B เรียกว่า โค-โดเมน (Co-Domain) ของ f ดังนั้นสัญลักษณ์ $f : S \longrightarrow T$ จะต้องอ่านว่า S เรียกว่า ของ f T เรียกว่า ของ f
f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป T" S เรียกว่า โดเมนของ f T เรียกว่า โค-โดเมนของ f	16. เพราะว่า $f : A \longrightarrow B$ หมายถึง f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ A คือ โดเมนของ f B คือ โค-โดเมนของ f ดังนั้น เรนจ์ (Range) ของ f จะต้องเป็นสับเซตของ B นั่นคือ $R_f \subseteq B$

ถ้า $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6, 7\}$

$f : A \longrightarrow B$ ซึ่ง $f = \{(1, 5), (2, 7)\}$

โดเมนของ f หรือ $D_f = \dots\dots\dots$

เรนจ์ของ f หรือ $R_f = \dots\dots\dots$

โค-โดเมนของ $f = \dots\dots\dots$

$D_f = A = \{1, 2\}$

$R_f = \{5, 7\}$

โค-โดเมนของ

$f = \{5, 6, 7\}$

17. ถ้า $f : A \longrightarrow B$ และให้ $x \in A$

และ $y \in B$ ในกรณีที่ $y \in R_f$ จะได้ $(x, y) \in f$

ถ้า $(x, y) \in f$ เราจะเรียก y ว่าเป็น

อิมเมจ (image) ของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทน
ด้วยสัญลักษณ์ $y = f(x)$

และเรียก x ว่าเป็นพรีอิมเมจ (Pre-image)

ของ y

ต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์

$f : x \longrightarrow y$

แทนความหมายว่า x เป็นพรีอิมเมจของ y และ y เป็น

อิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนได้ว่า $y = f(x)$

นั่นคือ ถ้า $f : x \longrightarrow y$ จะได้ $y = f(x)$

ดังนั้น ถ้า $f : a \longrightarrow b$ จะได้ $b = f(a)$

นั่นคือ b เป็น อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f

ถ้า $f : x \longrightarrow 2x$ จะได้ $f(x) = 2x$

แสดงว่า อิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f

คือ $2x$

ถ้า $f : a \longrightarrow a^2$ จะได้ $f(a) = a^2$

แสดงว่า อิมเมจของ a ภายใต้ฟังก์ชัน f คือ a^2
 ดังนั้น จาก $f : x \longrightarrow y$ อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$f : x \longrightarrow f(x)$$

แสดงว่า $f(x)$ ใช้แทนสมาชิกตัวที่สองในคู่อันดับเมื่อสมาชิกตัวแรกเป็น x

และเราอาจใช้คู่อันดับ $(x, f(x))$ แทนคู่อันดับ (x, y) ได้

ถ้า ฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow f(x)$ ซึ่งเขียนเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

$$f = \{(0,1), (3,4), (6,7), (9,10)\}$$

$$f = \{(0,1), (3,4), (6,7), (9,10)\}$$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $f(x) = f(0) = 1$

$x = 3$ จะได้ $f(x) = f(3) = 4$

ดังนั้นถ้า $x = 9$ จะได้ $f(x) = \dots$

$x = 6$ จะได้ $f(x) = \dots$

$$f(9) = 10$$

$$f(6) = 7$$

18. $f(x)$ อ่านว่า "เอฟของเอ็กซ์" หรือ "เอฟทีเอ็กซ์" หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ดังนั้น

1. $f(๓)$ จะต้องอ่านว่า ...

หมายถึง

2. $f(3)$ จะต้องอ่านว่า

หมายถึง

3. $f(-1)$ จะต้องอ่านว่า

หมายถึง ..

"เอฟของเอ็ม" หรือ

"เอฟทีเอ็ม"

หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน

f ที่ ๓

"เอฟของสาม" หรือ

"เอฟทีสาม" หมายถึง

ค่าของฟังก์ชัน f ที่ 3

"เอฟของลบหนึ่ง" หรือ

"เอฟทีลบหนึ่ง" หมายถึง

ค่าของฟังก์ชัน f ที่ -1

19. กำหนดฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow y$ และ

$$\text{กำหนด } y = 2x + 1$$

$$\text{ดังนั้นจะได้ } f : x \longrightarrow 2x + 1$$

$$\text{นั่นคือ } f(x) = 2x + 1$$

และเราทราบว่า $f(x)$ หมายถึงค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ดังนั้นเราสามารถหาค่าของฟังก์ชัน $y = 2x + 1$ ได้ดังนี้

$f(x)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

นั่นคือ เราหาค่าของฟังก์ชัน $y = 2x+1$ โดยการแทนค่า x

ในเทอม $2x+1$ ด้วย x จะได้ $2x+1$ นั่นคือ

$$f(x) = 2x+1$$

$f(1)$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ 1

นั่นคือเราหาค่าของฟังก์ชัน $y = 2x+1$ โดยการแทนค่า

x ในเทอม $2x + 1$ ด้วย 1 จะได้ $2(1) + 1 =$

$$2 + 1 = 3$$

$$\text{ดังนั้น } f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\therefore f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

แสดงว่าคู่อันดับ $(1,3), (2,5)$ และ $(-2,-3)$ เป็น

สมาชิกของฟังก์ชัน $y = 2x + 1$

นักเรียนลองหา

$$1) f(-3) = \dots\dots\dots$$

$$f(-1) = \dots\dots\dots$$

$$f(0) = \dots\dots\dots$$

$$f(3) = \dots\dots\dots$$

$$f(7) = \dots\dots\dots$$

2) จงเขียนสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับที่ทำให้คู่อันดับต่อไปนี้เป็นสมาชิกของ r

$$r = \{(-3, \dots), (-1, \dots), (0, \dots), (3, \dots), (7, \dots)\}$$

$$f(-3) = 2(-3) + 1$$

$$= -6 + 1 = -5$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1$$

$$= 1 = -2 + 1 = -1$$

$$f(0) = 2(0) + 1 =$$

$$0 + 1 = 1$$

$$f(3) = 2(3) + 1 =$$

$$6 + 1 = 7$$

$$f(7) = 2(7) + 1 =$$

$$14 + 1 = 15$$

$$f = \{(-3, -5), (-1, -1),$$

$$(0, 1), (3, 7), (7, 15)\}$$

20. ถ้าเราพูดถึงฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow y$ เราจะต้องรู้อย่างไรเพิ่มเติม จึงจะรู้ว่าฟังก์ชันมีลักษณะอย่างไร และเขียนกราฟได้รูปชนิดใด สิ่งที่จะต้องรู้เพิ่มเติมคือ

1. โคโดเมนของฟังก์ชัน

2. เงื่อนไขหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f : x \longrightarrow y$ และ

$$y = 3x - 2$$

โดยมีโคโดเมน เป็นเซตของจำนวนจริง จะเห็นว่า

1. โคโดเมนของฟังก์ชัน คือจำนวนจริง

2. เงื่อนไขหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชัน คือ

$$y = 3x - 2 \text{ หรือ } f(x) = 3x - 2$$

เมื่อเรารู้โคโดเมนและเงื่อนไขหรือสูตรที่อธิบายฟังก์ชันแล้ว เราสามารถเขียนฟังก์ชันออกมาเป็นเซตของคู่อันดับและเขียนกราฟได้

ดังนั้น ถ้าเรากำหนด $f : x \longrightarrow y$

และ $y = 3x - 2$ และโคโดเมนของ f คือ

$D_f = \{x \in I / -2 \leq x \leq 3\}$ เราสามารถเขียนฟังก์ชันออกมาเป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้

เพราะว่า $y = f(x) = 3x - 2$

เรหาคาของ y หรือค่าของ $f(x)$ ได้จาก การแทน x ด้วยโดเมนของ $f = \{x \in \mathbb{I} / -2 \leq x \leq 3\}$

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

ดังนั้นเราจะได้ $f(-2) = (3)(-2) - 2 = -6 - 2 = -8$

$$f(-1) = (3)(-1) - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$f(0) = (3)(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = (3)(1) - 2 = 3 - 2 = 1$$

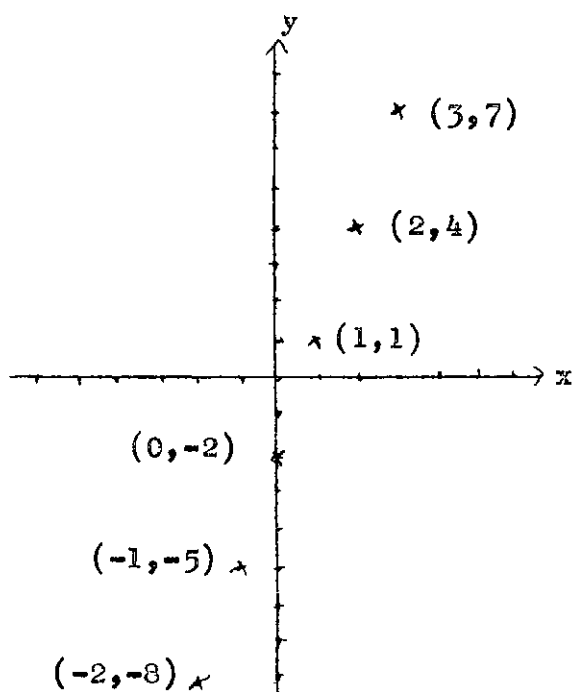
$$f(2) = (3)(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$f(3) = (3)(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

ซึ่งเขียนเป็นคู่อันดับได้ดังนี้

$$f = \{(-2, -8), (-1, -5), (0, -2), (1, 1), (2, 4), (3, 7)\}$$

และเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



	ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $f : x \longrightarrow y$ และ $y = 6x - x^2$ และมีโดเมนคือ $D_f = \{a, 1, 2, -1, \frac{1}{2}, 0\}$ จะได้ $f(x) = \dots\dots\dots$ $f(a) = \dots\dots\dots$ $f(1) = \dots\dots\dots$ $f(2) = \dots\dots\dots$ $f(-1) = \dots\dots\dots$ $f(\frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$ $f(0) = \dots\dots\dots$ แล้วเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับได้ดังนี้ $f = \dots\dots\dots$
$f(x) = 6x - x^2$ $f(a) = 6a - a^2$ $f(1) = 5$ $f(2) = 0$ $f(-1) = -7$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$ $f(0) = 0$ $f = \{(a, 6a - a^2),$ $(1, 5), (2, 0),$ $(-1, -7),$ $(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}), (0, 0)\}$	21. เรามีวิธีเขียนเงื่อนไขหรือสูตรสำหรับอธิบายฟังก์ชันได้ 3 แบบ ดังนี้ ถ้า $f : x \longrightarrow y$ และ $y = 3x + 2$ เราอาจเขียนเป็นฟังก์ชันได้ 3 แบบ คือ แบบที่ 1 $f : x \longrightarrow 3x + 2$ แบบที่ 2 $f(x) = 3x + 2$ แบบที่ 3 $f = \{(x, y)/y = 3x + 2\}$ หรือ $y = 3x + 2$ ถ้ากำหนดฟังก์ชัน g ซึ่ง $g = \{(x, y)/y = x^2\}$ และ $D_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ เขียนฟังก์ชัน g เป็นเซตของคู่อันดับจะได้ $g = \dots\dots\dots$

$$g = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

22. พังก์ชันบางชนิดอาจป็นสูตรในการอธิบายฟังก์ชันแต่ละช่วงแตกต่างกัน เช่น

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 4 \\ x + 1 & ; x > 4 \end{cases}$$

ดังนั้น เวลาหาค่าของฟังก์ชัน f หรือค่าของเรนจ์ของ f หรืออิมเมจของฟังก์ชัน f ก็ต้องใช้สูตรแตกต่างกันไปตามช่วงของ x ตัวอย่างเช่น

ต้องการหา $f(3)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = 2x$

เพราะว่า $3 < 4$

$$\text{ดังนั้น } f(3) = 2 \times 3 = 6$$

ต้องการหา $f(6)$ ก็ต้องใช้ $f(x) = x + 1$

เพราะว่า $6 > 4$

$$\text{ดังนั้น } f(6) = 6 + 1 = 7$$

$$\text{จงหา } f(-1) = \dots\dots\dots$$

$$f(0) = \dots\dots\dots$$

$$f(2) = \dots\dots\dots$$

$$f(4) = \dots\dots\dots$$

$$f(-1) = -2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 4$$

$$f(4) = 8$$

23. มีวิธีเขียนฟังก์ชัน โดยวิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

คือ

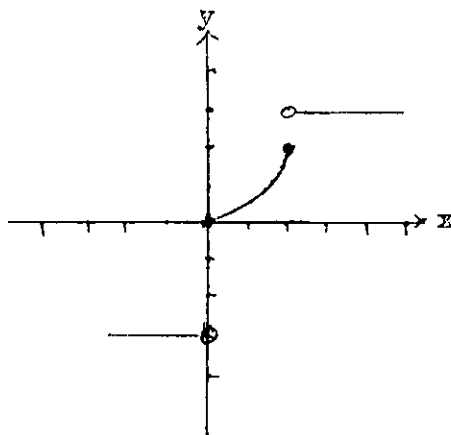
1) โดยการแจกแจงสมาชิก หมายถึงเขียนสมาชิกทั้งหมด เช่น

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

2) โดยใช้ตารางแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของสองเซต เช่น

x	1	2	3	4	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

3) เขียนแสดงโดยกราฟ เช่น



จุดที่บ่งชี้ว่ากราฟรวมจุดปลายด้วย ส่วนจุดโปร่งแสงว่ากราฟไม่รวมจุดปลาย กราฟในรูปมีสมการดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

4) โดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต เช่น

$$f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x \}$$

$$g = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + 1 \}$$

การเขียนโดยบอกเงื่อนไขในสมาชิกนี้ อาจเขียนย่อ ๆ ได้ดังนี้

ฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $y = 2x$

ฟังก์ชัน g เขียนแทนด้วย $y = x^2 + 1$

24. สรุป

1) นิยามของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไป

ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์หรือเซตของคู่อันดับซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

2) นิยามของฟังก์ชัน จาก A ไป B

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

$$2.1 \quad D_f = A$$

$$2.2 \quad \text{ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f$$

$$\text{ได้ } y = z$$

$$2.3 \quad R_f \subseteq B$$

3) วิธีตรวจสอบฟังก์ชัน

3.1 ตรวจสอบโดยใช้นิยามในกรณีที่

ความสัมพันธ์นั้นเขียนในรูปการแจกแจงสมาชิก

3.2 ตรวจสอบโดยวิธีเขียนกราฟของ

ความสัมพันธ์แล้วลากเส้นตรงให้ขนานกับแกน y ให้ผ่านแต่ละจุดใน D_f ของความสัมพันธ์ r จาก A ไป B ถ้า

3.2.1 เส้นตรงเหล่านี้

ทุกเส้นตัดกราฟของ r ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชันจาก D_r ไป B

3.2.2 ถ้ามีเส้นตรงเส้น

หนึ่งเส้นใดเพียงเส้นเดียว ตัดกราฟของ r ได้มากกว่าหนึ่งจุด ความสัมพันธ์ r จะไม่เป็นฟังก์ชันจาก D_r ไป B

4) $f : A \longrightarrow B$ หรือ
 $A \xrightarrow{f} B$ อ่านว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A
 ไป B "

A เรียกว่าเป็น โดเมนของ f

B เรียกว่าเป็น โคโดเมนของ f

เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B นั่นคือ $R_f \subset B$

ถ้า $(x, y) \in f$ เราจะเรียก y
 ว่าเป็นอิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$y = f(x)$$

และเรียก x ว่าเป็น พรีอิมเมจของ y

5) $f(x)$ อ่านว่า "เอฟของเอ็กซ์"

หมายถึง ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

ดังนั้น $f(2)$ อ่านว่า "เอฟของสอง" หมายถึงค่าของ
 ฟังก์ชัน f ที่ 2 (หรือที่ $x = 2$)

6) สัญลักษณ์ $f : x \longrightarrow y$

หมายถึง x เป็นพรีอิมเมจ และ y เป็นอิมเมจของ x

ภายใต้ฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนได้เป็น $y = f(x)$

7) มีวิธีเขียนสูตรอธิบายฟังก์ชันได้

3 แบบ ดังนี้

ถ้า $f : x \longrightarrow y$ และ $y = x^2$

อาจเขียนได้ดังนี้

แบบที่ 1 $f : x \longrightarrow x^2$

แบบที่ 2 $f(x) = x^2$

แบบที่ 3 $f = \{(x,y)/y = x^2\}$

ซึ่งนิยมเขียนย่อ ๆ เป็น $y = x^2$

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์

เมื่อกาหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้อง

ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงและคำแนะนำในการเรียน จากบทเรียนโปรแกรมเรื่องฟังก์ชันให้เข้าใจเสียก่อน แล้วจึงอ่านบทเรียนต่อไป

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1. ก่อนที่จะศึกษาเรื่องโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเรามาทบทวนเรื่องโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์กันก่อน เราให้นิยามโดเมนของความสัมพันธ์ r ไว้ดังนี้

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย D_r ซึ่ง

$$D_r = \{x/(x,y) \in r\}$$

และให้นิยามเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ไว้ดังนี้

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย R_r ซึ่ง

$$R_r = \{y/(x,y) \in r\}$$

กำหนด $r = \{(1,3), (2,8), (4,9)\}$

จงหา D_r และ R_r

$$D_r = \dots\dots\dots$$

$$R_r = \dots\dots\dots$$

$$D_r = \{1,2,4\}$$

$$R_r = \{3,8,9\}$$

2. ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ในรูปของเงื่อนไข เราสามารถหาโดเมนและเรนจ์ได้ 2 แบบ

แบบที่ 1 โดยการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งจะไม่พูดถึงในที่นี้

แบบที่ 2 โดยพิจารณาจากตัวแปรในเงื่อนไขของความสัมพันธ์

2.1 หาโดเมนของความสัมพันธ์

2.1.1 จัดเงื่อนไขของความสัมพันธ
ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

2.1.2 เขตของจำนวนจริง x ที่แทน
ค่าในเงื่อนไขของความสัมพันธ์แล้วทำให้ y เป็นจำนวนจริง
และสอดคล้องกับเงื่อนไขของความสัมพันธ์ก็จะเป็นโดเมน
ของความสัมพันธ์

2.2 หาเรนจ์ของความสัมพันธ์

2.2.1 จัดเงื่อนไขของความสัมพันธ
ให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

2.2.2 เขตของจำนวนจริง y ที่แทนค่า
ในเงื่อนไขของความสัมพันธ์แล้วทำให้ x เป็นจำนวนจริง
และสอดคล้องกับเงื่อนไขของความสัมพันธ์ ก็จะเป็นเรนจ์
ของความสัมพันธ์

ถ้า $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 1 \}$

จะหาโดเมนของ r ได้ดังนี้

เงื่อนไขของความสัมพันธ์ r จัดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$
จะได้

$$y = 2x + 1$$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริงเราสามารถหา
ค่า y ที่เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับเงื่อนไขของความ
สัมพันธ์ดังกล่าวได้เสมอ

ดังนั้น $D_r = \{ x / x \in \mathbb{R} \} (\mathbb{R} = \text{เซตของจำนวนจริง})$

จะหาเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ได้ดังนี้

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r จัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

$$\text{จะได้ } y = 2x + 1$$

$$y - 1 = 2x$$

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{2}$$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ y ที่เป็นจำนวนจริง สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับเงื่อนไขของความสัมพันธ์ดังกล่าวได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{y/y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{ดังนั้น ถ้ากำหนด } r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{2x + 1}{x - 1}\}$$

จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

จะหาโดเมนของ r ได้ดังนี้

.....

.....

.....

จะหาเรนจ์ของ r ได้ดังนี้

.....

.....

.....

หาโดเมนของ r

จากเงื่อนไขของความ

สัมพันธ์ r จะได้

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

3. เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น

เราสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันโดยใช้หลักการ
เดียวกันกับการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

พบว่าทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็น
จำนวนจริงยกเว้น $x = 1$
เราสามารถหาค่า y ที่
เป็นจำนวนจริงและสอดคล้อง
กับเงื่อนไขของความสัมพันธ์
 r ได้เสมอ

ดังนั้น $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
หาเรนจ์ของ r

จากเงื่อนไขของความ
สัมพันธ์ r

$$\text{ได้ } y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

จัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

$$\text{จะได้ } xy - y = 2x + 1$$

$$xy - 2x = y + 1$$

$$x(y - 2) = y + 1$$

$$x = \frac{y + 1}{y - 2}$$

ซึ่งอยู่ในรูป $x = f(y)$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ y
ที่เป็นจำนวนจริง

$$\text{ยกเว้น } y = 2$$

เราสามารถหาค่า x ที่

เป็นจำนวนจริงและสอดคล้อง
กับเงื่อนไขของความสัมพันธ์
ได้เสมอ

$$\text{ถ้า } r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

จะหาโดเมนของ r ได้ดังนี้

จากเงื่อนไขของ r จัดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

$$\text{จะได้ } y = x^2$$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง เราสามารถ
หาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ
ฟังก์ชัน r ได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

จะหาเรนจ์ของฟังก์ชัน r ได้ดังนี้

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน r จัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

จะได้

$$y = x^2$$

$$\pm \sqrt{y} = \sqrt{x^2}$$

$$x = \pm \sqrt{y}$$

จะพบว่าค่าของ y ที่ $y \geq 0$ เท่านั้นที่เราสามารถจะหา
ค่า x ที่เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ
ฟังก์ชันดังกล่าวได้เสมอ

$$\text{ดังนั้น } R_r = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

$$\text{ดังนั้นถ้า } f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x - 2}\}$$

จะหาโดเมนของ f ได้ดังนี้

ดังนั้น $R_f = \{ y \in \mathbb{R} / y \neq 2 \}$	 และจะหาเรนจ์ของ f ได้ดังนี้
จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จัดให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้ $y = \sqrt{x - 2}$ พบว่าค่าของ x ที่ $x - 2 \geq 0 \quad \text{หรือ}$ $x \geq 2$ เท่านั้นที่เราสามารถจะหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับเงื่อนไขของความฟังก์ชันดังกล่าวได้เสมอ ดังนั้น $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \}$ จะหาเรนจ์ของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$	4. กำหนดให้ $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x}{x+3} \}$ จะหาโดเมนของ f ได้ดังนี้ จะหาเรนจ์ของ f ได้ดังนี้

จะได้ $y = \sqrt{x-2}$

$$(y)^2 = (\sqrt{x-2})^2$$

$$y^2 = x - 2$$

$$x = y^2 + 2$$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ y

ที่เป็นจำนวนจริงเรา

สามารถหาค่า x ที่เป็น

จำนวนจริงและสอดคล้อง

กับเงื่อนไขของฟังก์ชัน f

ได้เสมอแต่จากเงื่อนไข

ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{x-2}$

จะได้ $y \geq 0$ เท่านั้น

ดังนั้น $B_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f

ได้ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

จะได้ $y = \frac{x}{x+3}$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ x

ยกเว้น $x = -3$

เราสามารถหาค่า y

ที่เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้อง

กับเงื่อนไขของฟังก์ชัน f

ได้เสมอ

5. สรุป

1. การหาโดเมนของฟังก์ชัน f

เร หาค่าโดยจกัรูปของเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

ถ้ากำหนด $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2y - 6x = 4\}$ ในการหาโดเมนเราต้องหาค่าเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้

$$2y - 6x = 4$$

$$2y = 6x + 4$$

$$y = 3x + 2$$

จะได้ $y = f(x)$ คือ $y = 3x + 2$

ดังนั้น $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3\}$

หาเรนจ์ของฟังก์ชัน f

ได้ดังนี้ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

f จัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

จะได้
$$y = \frac{x}{x+3}$$

$$xy + 3y = x$$

$$x - xy = 3y$$

$$x(1-y) = 3y$$

$$x = \frac{3}{1-y}$$

จะพบว่าทุก ๆ ค่าของ y

ยกเว้น $y = 1$ เราสามารถ

หาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ

ฟังก์ชัน f ได้เสมอ

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 1\}$

พิจารณาโดเมนของ f คือ เซตของจำนวนจริง x ที่ทำให้ y เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$y = \frac{x}{x+3}$$

ดังนั้น $D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

2. ในการหาเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นให้จัดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $x = f(y)$ แล้วใช้หลักพิจารณาเช่นเดียวกันกับการพิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน

3. ในการพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันในบางครั้งไม่จำเป็นต้องจัดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $x = f(y)$ ก็ได้ ถ้าเงื่อนไขของฟังก์ชันนั้นอยู่ในรูปที่สามารถพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันได้ จากเงื่อนไขนั้น เช่น $y = \sqrt{x}$

เงื่อนไขของฟังก์ชันในลักษณะนี้เราทราบว่า ค่าของฟังก์ชันหรือค่า y จะเป็นจำนวนจริงที่น้อยกว่าศูนย์ไม่ได้ เพราะถ้ามีค่าน้อยกว่าศูนย์ค่า x หาค่าเป็นจำนวนจริงไม่ได้

$$\text{หรือ } y = |x + 2|$$

ลักษณะนี้เราพิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชันจาก

$|x + 2|$ ได้โดยไม่ต้องจัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

วัตถุประสงค์

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชันนั้นได้ถูกต้อง

ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงและคำแนะนำในการเรียน จากบทเรียนโปรแกรมเรื่อง ฟังก์ชันให้เข้าใจเสียก่อน แล้วจึงอ่านบทเรียนต่อไปนี้

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

1. จากการศึกษารูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชัน เราสรุปนิยามของฟังก์ชัน จาก A ไป B ได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ f จาก A ไป B จะเป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

$$1. D_f = A$$

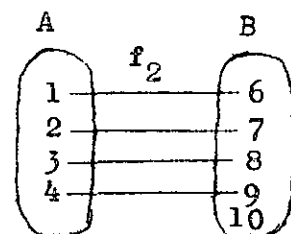
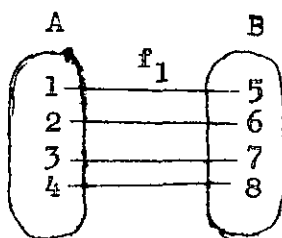
$$2. \text{ ถ้า } (x, y) \in f \text{ และ } (x, z) \in f$$

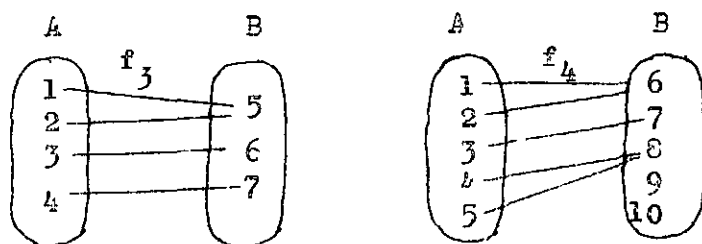
$$\text{แล้ว } y = z$$

$$3. B_f \subseteq B$$

จากนิยามนี้เรารู้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็แสดงว่า สมาชิกทุกตัวของ A มีความสัมพันธ์กับสมาชิกของ B ทุกตัวหรือบางตัวก็ได้ โดยที่สมาชิกของ A หนึ่งตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกของ B ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

นักเรียนวงสังเกต รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชัน ที่เขียนเป็นแผนภาพ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ A และ B ต่อไปนี้

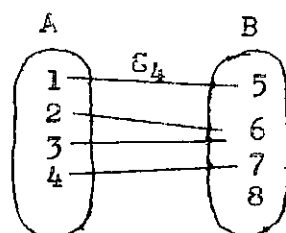
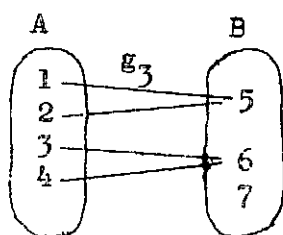
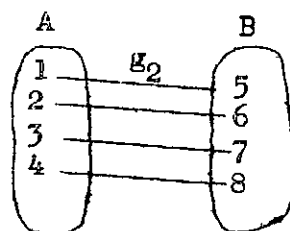
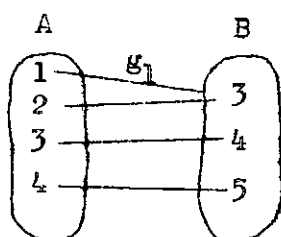




จากรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่าง A และ B ที่เป็นฟังก์ชัน f_1, f_2, f_3 และ f_4 เราสรุปเป็นรูปแบบของฟังก์ชันได้ดังนี้

1. ฟังก์ชันแบบ 1 - 1 (one-to-one Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกใน B (เรนจ์ของฟังก์ชัน) แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกใน A (โดเมนของฟังก์ชัน) เพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่าง f_1 และ f_2
2. ถ้าฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จะเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one ดังตัวอย่าง f_3 และ f_4
3. ฟังก์ชันแบบไปทั่วถึง (onto Function) หมายถึง ฟังก์ชันที่เรนจ์ของฟังก์ชันเท่ากับ B หรือ f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$ ดังตัวอย่าง f_1 และ f_3
4. ถ้าฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B จะเรียก f ว่า เป็นฟังก์ชันแบบ f ไปยัง B ดังตัวอย่าง f_2 และ f_4

ถ้ากำหนดฟังก์ชันในรูปของแผนภูมิดังนี้



จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันรูปแบบใด

$g_1 = \dots\dots\dots$

$g_2 = \dots\dots\dots$

$g_3 = \dots\dots\dots$

$g_4 = \dots\dots\dots$

g_1 เป็นฟังก์ชันแบบ
Many-to-one และ
onto

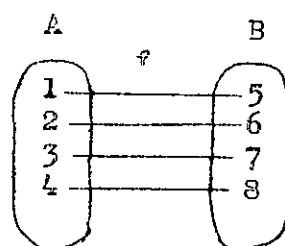
g_2 เป็นฟังก์ชันแบบ
1 - 1 และ onto

2. จากการศึกษารูปแบบของฟังก์ชันในกรอบที่ 1
เราจะพบว่าแต่ละฟังก์ชันนั้นจะมีความสัมพันธ์ระหว่าง A
(โคเมนของฟังก์ชัน) กับ B เป็นสองแบบจากสี่แบบที่กล่าว
มาแล้วเสมอ ซึ่งเราสรุปรูปแบบของฟังก์ชันตามความสัมพันธ์
ของ A (โคเมนของฟังก์ชัน) กับ B ได้ดังนี้

E_3 เป็นฟังก์ชันแบบ
Many-to-one และ
onto
 E_4 เป็นฟังก์ชันแบบ
Many-to-one และ
onto

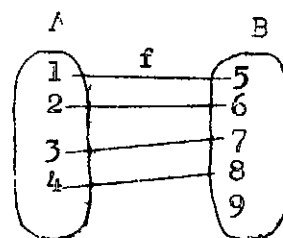
1. ฟังก์ชันแบบ "1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$
ดังตัวอย่าง



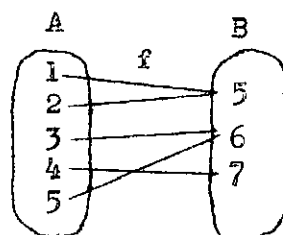
2. ฟังก์ชันแบบ "1 - 1 จาก A ไปยัง B" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$f : A \xrightarrow[into]{1-1} B$
ดังตัวอย่าง



3. ฟังก์ชันแบบ "Many-to-one จาก A ไปทั่วถึง B" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$f : A \xrightarrow[onto]{Many-to-one} B$
ดังตัวอย่าง

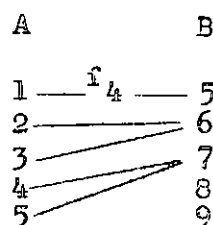


4. ฟังก์ชันแบบ "Many-to-one

จาก A ไปยัง B " เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} B$$

ดังตัวอย่าง

กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ และ

$$f_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 7)\}$$

$$f_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

จงพิจารณาว่า f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันแบบใดกำหนด $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ

$$f_3 = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

$$f_4 = \{(1, 2), (3, 1), (5, 3), (7, 3)\}$$

จงพิจารณาว่า f_3 และ f_4 เป็นฟังก์ชันแบบใด

$$f_1 \quad \dots\dots\dots$$

$$f_2 \quad \dots\dots\dots$$

$$f_3 \quad \dots\dots\dots$$

$$f_4 \quad \dots\dots\dots$$

$$f_1 : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} B$$

$$f_2 : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$$

$$f_3 : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$$

$$f_4 : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} B$$

3. จากการศึกษาในกรอบที่ 1 และ 2 เราพบว่า ฟังก์ชันแบบ 1 - 1 นั้น คือฟังก์ชันที่เรนจ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวมีความสัมพันธ์กับโคเมนของฟังก์ชันเพียงตัวเดียวเท่านั้น หรือกล่าวได้ว่า ถ้าคู่อันดับ $(a, c) \in f$ และ คู่อันดับ $(b, c) \in f$ แล้ว $a = b$

ในขณะเดียวกันเราพบว่าฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B นั้น คือฟังก์ชันที่ $R_f = B$

จากความรู้ดังกล่าวเราสามารถนำความรู้ที่ได้รับมาตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของการวางเงื่อนไขได้ดังนี้

การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่ เรามีวิธีการตรวจสอบคล้ายคลึงกับการตรวจสอบว่าความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ แต่เราใช้วิธีการกลับกัน (ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะวิธีการสมมติค่าเท่านั้น)

การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน โดยวิธีสมมติค่านั้น เรามีวิธีตรวจสอบดังนี้

ให้ $(a, b) \in f$ และ $(e, c) \in f$ แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $b = c$

แต่การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่ เรามีวิธีกลับกันดังนี้

ให้ $(a, c) \in f$ และ $(b, c) \in f$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า $a = b$ ก็แสดงว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 f ก็จะเป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one

กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$
 จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีการตรวจสอบ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = 2x - 3$

ให้ $(a,c) \in f$ จะได้ $c = 2a - 3$ (1)

และ $(b,c) \in f$ จะได้ $c = 2b - 3$ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $2a - 3 = 2b - 3$

$$2a = 2b$$

จะได้ว่า $a = b$

ดังนั้น $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$

เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

กำหนด $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 1\}$

จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่

วิธีการตรวจสอบ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f

จะได้ $y = x^2 - 1$

ให้ $(a,c) \in f$

จะได้ $c = a^2 - 1$ (1)

และ $(b,c) \in f$

จะได้ $c = b^2 - 1$ (2)

จาก (1) และ (2)

จะได้ $a^2 - 1 = b^2 - 1$

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm \sqrt{b^2} = \pm b$$

4. การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ "A ไปทั่วถึง B" หรือไม่ จากกรอบที่ 3 เราพบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B จะได้ว่า $R_f = B$

นั่นคือ ถ้า x เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

และเราพิสูจน์ได้ว่า $R_f = B$ ก็แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (onto Function) และถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B ก็จะเป็นฟังก์ชันแบบ A ไปยัง B

กำหนด $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6\}$ และ

$f = \{(1, 4), (5, 2), (3, 6), (7, 4)\}$

จงตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน f

ไม่สามารถสรุปได้ว่า

$$a = b$$

$$\text{ดังนั้น } f = \{(x, y) \in$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 1\}$$

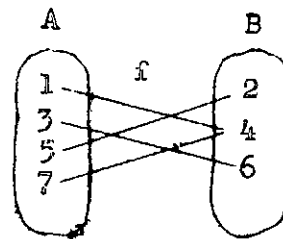
ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบ

Many-to-one

วิธีตรวจสอบ

ฟังก์ชัน f เขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ก. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1
หรือไม่พบว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 เพราะมี
(1, 4) และ (7, 4) อยู่ใน f

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one

ข. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่ว
ถึง B หรือไม่ คือตรวจสอบว่า $P_f = B$ หรือไม่ พบว่า
 $P_f = B = \{2, 4, 6\}$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึง (onto Function)

จาก ก และ ข จะได้ $f : I \xrightarrow[\text{onto}]{\text{Many-to-one}} B$

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1\}$$

ตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน *

วิธีการตรวจสอบ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = \sqrt{x^2 + 1}$

ก ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1
หรือไม่ ให้ $(a, c) \in f$ จะได้ $c = \sqrt{a^2 + 1}$ (1)
และ $(b, c) \in f$ จะได้ $c = \sqrt{b^2 + 1}$ (2)
จาก (1) และ (2) จะได้ $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{b^2 + 1}$

$$a^2 + 1 = b^2 + 1$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm \sqrt{b^2} = \pm b$$

ไม่สามารถสรุปได้ว่า $a = b$

ดังนั้น $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 + 1}\}$

ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบ

Many-to-one

ข. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ R ไปทั่วถึง
หรือไม่

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = \sqrt{x^2 + 1}$

พบว่าเรนจ์ของ f จะมีความมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ซึ่ง $\mathbb{R}_f \neq \mathbb{R}$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ R ไปทั่วถึง R

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบ R ไปยัง R

จาก ก และ ข จะได้ $f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} \mathbb{R}$

กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x - 2\}$

จงตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน f

วิธีการตรวจ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$f \text{ จะได้ } y = 3x - 2$$

ก. ตรวจสอบว่า เป็น

ฟังก์ชันแบบ 1 - 1

หรือไม่

ให้ $(a, c) \in f$ จะได้

$$c = 3a - 2 \quad (1)$$

และ $(b, c) \in f$

$$\text{จะได้ } c = 3b - 2 \quad (2)$$

จาก (1) และ (2)

จะได้

$$3a - 2 = 3b - 2$$

$$3a = 3b$$

จะได้ว่า $a = b$

ดังนั้น $f = \{(x, y) \in$

$$R \times R / y = 3x - 2\}$$

เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ข. ตรวจสอบว่า f

เป็นฟังก์ชันแบบ A

ไปทั่วถึง B หรือไม่

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$y = 3x - 2$$

5. จากการศึกษารูปแบบของโดเมนและเรนจ์ของ

ฟังก์ชันเรารู้ว่าในการกำหนดฟังก์ชัน โดยการกำหนด

เงื่อนไขนั้น เราจะกำหนดให้ฟังก์ชันนั้น ๆ เป็นสับเซต

ของ $P \times R$ เสมอ ถึงแม้ว่าการกำหนดเงื่อนไขนั้นจะเขียน

อยู่ในรูปของเงื่อนไขเพียงอย่างเดียว เช่น กำหนดฟังก์ชัน

ในรูป $y = x^2$ นั้นก็แสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็นความสัมพันธ์ที่เป็น

สับเซตของ $R \times R$ แต่ฟังก์ชันดังกล่าวไม่จำเป็นต้องเป็น

ฟังก์ชันจาก R ไป R เสมอไป ฟังก์ชันที่กำหนดจะเป็นฟังก์ชัน

จากเซตใดไปเซตใดขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่กำหนด แต่อย่างไร

ก็ตามฟังก์ชันนั้นก็ยังเป็นสับเซตของ $R \times R$ อยู่ ดังนั้นในการ

พิจารณารูปแบบของฟังก์ชัน นักเรียนจะต้องพิจารณาเงื่อนไข

ของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนั้นด้วย

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \in R \times R / y = \frac{x}{x-2}\}$$

พิจารณารูปแบบของฟังก์ชัน

วิธีการตรวจสอบ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = \frac{x}{x-2}$

ก. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

หรือไม่

$$\text{ให้ } (a, c) \in f \text{ จะได้ } c = \frac{a}{a-2} \quad (1)$$

$$\text{และ } (b, c) \in f \text{ จะได้ } c = \frac{b}{b-2} \quad (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \frac{c}{a-2} = \frac{b}{b-2}$$

$$ab - 2a = ab - 2b$$

$$-2a = -2b$$

จะได้ว่า

$$a = b$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูป

$$x = f(y) \text{ จะได้ } x = \frac{y+2}{3}$$

พบว่าทุก ๆ ค่า y

ที่เป็นจำนวนจริง

จะได้ x เป็นจำนวนจริง

$$\text{ดังนั้น } R_f = \{y/y \in P\}$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

แบบ R ไปทั่วถึง R

จาก ก และ ข จะได้

$$f : R \xrightarrow{1-1} \text{onto} \rightarrow R$$

$$\text{ดังนั้น } f = \{(x,y) \in R \times R / y = \frac{x}{x-2}\}$$

เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ข. ตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันแบบ R ไปทั่วถึง P หรือไม่

$$\text{จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน } f \text{ จะได้ } y = \frac{x}{x-2}$$

จัดให้อยู่ในรูป $x = g(y)$ จะได้

$$y = \frac{2y}{y-1}$$

พบว่าค่า y ที่เป็นจำนวนจริงยกเว้น $y = 1$ จะได้ค่า x เป็นจำนวนจริงเสมอ

$$\text{ดังนั้น } P_f = \{y \in R / y \neq 1\}$$

$$\text{และจากเงื่อนไขของฟังก์ชัน } y = \frac{x}{x-2}$$

$$\text{จะได้ } D_f = \{x \in R / x \neq 2\}$$

$$\text{จาก ก และ ข จะได้ } f : A \xrightarrow{1-1} \text{onto} \rightarrow B$$

$$\text{เมื่อ } A = \{x \in R / x \neq 2\}$$

$$\text{และ } B = \{y \in R / y \neq 1\}$$

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง อินเวอร์สฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์

เมื่อกาหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันและบอกได้ว่า
อินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันและหาค่าของ x^{-1} ที่ x ได้ถูกต้อง

ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงและคำแนะนำในการเรียน จากบทเรียนโปรแกรมเรื่อง
ฟังก์ชันให้เข้าใจเสียก่อน แล้วจึงอ่านบทเรียนต่อไป

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง อินเวอร์สฟังก์ชัน

1. จากการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์เรารู้ว่า ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

นักเรียนจงพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$ และ

$$r = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

จะเห็นว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

นั่นคือ ถ้า $r = \{(x, y) / x \in A \text{ และ } y \in B\}$ แล้ว

$$r^{-1} = \{(y, x) / y \in B \text{ และ } x \in A\}$$

เนื่องจากฟังก์ชันทุก ๆ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นเราสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้เช่นเดียวกันกับการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์

$$\text{กำหนด } f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

$$f_2 = \{(a, x), (b, y), (c, x)\}$$

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 3)\}$$

$$\text{จงหา } f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}$$

$$f_1^{-1} = \dots\dots\dots$$

	$f_2^{-1} = \dots\dots\dots$ $f_3^{-1} = \dots\dots\dots$
$f_1^{-1} = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4)\}$ $f_2^{-1} = \{(x,e), (y,b), (x,c)\}$ $f_3^{-1} = \{(2,1), (3,2), (1,3), (3,4)\}$	2. จากกรอบที่ 1 ลองพิจารณา f_1^{-1}, f_2^{-1} และ f_3^{-1} จะพบว่า f_1^{-1} เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดใน f_1^{-1} ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน f_2^{-1} และ f_3^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมี (x,a) และ (x,c) อยู่ใน f_2^{-1} และมี $(3,2)$ และ $(3,4)$ อยู่ใน f_3^{-1}. เราจึงสรุปได้ว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันอาจจะ เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ กำหนด $f_1 = \{(1,3), (4,2), (5,7), (1,7)\}$ $f_2 = \{(a,x), (b,y), (c,z), (d,y)\}$ $f_3 = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)\}$ จงหา f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1} และพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันใดบ้าง เป็นฟังก์ชัน $f_1^{-1} = \dots\dots\dots$ $f_2^{-1} = \dots\dots\dots$ $f_3^{-1} = \dots\dots\dots$

$$f_1^{-1} = \{(3,1), (2,4), (7,5), (7,1)\}$$

ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะ

มี (7,5) และ

(7,1) อยู่ใน f_1^{-1}

$$f_2^{-1} = \{(x,a), (y,b), (z,c), (y,d)\}$$

ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมี

(y,b)

และ (y,d)

อยู่ใน f_2^{-1}

$$f_3^{-1} = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4)\}$$

เป็นฟังก์ชัน

3. ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชันอยู่ในรูปการวางเงื่อนไข เรามีวิธีการหาอินเวอร์สของฟังก์ชันอยู่ 2 แบบ คือ

1. เปลี่ยนคู่อันดับ (x,y) เป็น (y,x)

แต่ตรงความสัมพันธ์ไม่เปลี่ยน เช่น

$$f = \{(x,y) \in A \times B / y = 2x + 1\}$$

$$f^{-1} = \{(y,x) \in B \times A / y = 2x + 1\}$$

2. คู่อันดับ (x,y) ยังคงใช้เหมือนเดิมแต่

ไปเปลี่ยนตรงสมการแสดงความสัมพันธ์กล่าวคือ เปลี่ยน

จาก x เป็น y และเปลี่ยนจาก y เป็น x จากนั้นจัด

สมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ เหมือนเดิม วิธีนี้เป็นวิธี

ที่นิยมใช้กันมากจึงต้องทำความเข้าใจให้ดี เช่น

$$f = \{(x,y) \in A \times B / y = 2x + 1\}$$

$$f^{-1} = \{(x,y) \in B \times A / x = 2y + 1\}$$

$$= \{(x,y) \in B \times A / y = \frac{x-1}{2}\}$$

$$\text{กำหนด } f = \{(x,y) \in E \times R / y = \frac{2x+1}{x-3}; x \neq 3\}$$

จงหา f^{-1}

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = \frac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$

เปลี่ยนจาก x เป็น y และเปลี่ยนจาก y เป็น x

จะได้

$$x = \frac{2y+1}{y-3}$$

จัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้

$$x(y-3) = 2y + 1$$

$$xy - 3x = 2y + 1$$

$$xy - 2y = 3x + 1$$

$$y(x-2) = 3x + 1$$

$$y = \frac{3x+1}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$$\therefore f_1^{-1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{3x+1}{x-2}; \right. \\ \left. x \neq 2 \right\}$$

$$\text{กำหนด } f_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{2x-1}{2} \right\}$$

$$\text{จงหา } f^{-1} \dots\dots\dots$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$f_2 \text{ จะได้ } y = \frac{2x-1}{2}$$

เปลี่ยนจาก y เป็น x

และจาก x เป็น y

$$\text{จะได้ } x = \frac{2y-1}{2}$$

จัดสมการให้อยู่ในรูป

$$y = f(x) \text{ จะได้}$$

$$2x = 2y - 1$$

$$2y = 2x + 1$$

$$y = \frac{2x+1}{2}$$

$$\therefore f_2^{-1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \right.$$

$$\left. y = \frac{2x+1}{2} \right\}$$

$$4. \text{ กำหนด } f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P} / y = \sqrt{2x+3} \right\}$$

$$\text{จงหา } f^{-1}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$f \text{ จะได้ } y = \sqrt{2x + 3}$$

เปลี่ยนจาก y

เป็น x และเปลี่ยน

จาก x เป็น y

จะได้

$$x = \sqrt{2y + 3}, \quad x \geq 0$$

จัดสมการให้อยู่ในรูป

$$y = f(x)$$

โดยยกกำลังสองทั้ง

สองข้างจะได้

$$x^2 = 2y + 3, \quad x \geq 0$$

$$2y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{x^2 - 3}{2}, \quad x \geq 0$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x^2 - 3}{2}, x \geq 0\}$$

หมายเหตุ

1. ที่ต้องกำหนดให้

$x \geq 0$ ในเงื่อนไข

$$x = \sqrt{2y + 3}$$

เพราะค่าของ x นี้มาจาก

การเปลี่ยนค่า y ในเงื่อนไข

$$\text{เดิมคือ } y = \sqrt{2x + 3}$$

$$5. \text{ กำหนด } f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = x^2$

เปลี่ยนจาก y เป็น x และเปลี่ยนจาก x

เป็น y จะได้ $x = y^2$

จัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้

$$y^2 = x$$

$$y = \pm \sqrt{x}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \pm \sqrt{x}\}$$

จะพบว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีคู่อันดับสองคู่อันดับ

ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน

เช่น ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = -1$ และ 1 เป็นต้น

$$\text{กำหนด } g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$$

จงหา g^{-1} และพิจารณาว่า g^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ซึ่งค่า y ในเงื่อนไขเดิมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้น x ในเงื่อนไขใหม่คือ y ในเงื่อนไขเดิมก็จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ด้วย 2. เงื่อนไขในลักษณะ $y = \sqrt{2x+3}$ นั้นมีลักษณะที่เป็นเงื่อนไขที่ต้องการ y ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ซึ่งเงื่อนไขเดิมอาจจะมีค่า y ที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ นั่นคือเงื่อนไขเดิมอาจจะเป็น $y = \pm \sqrt{2x+3} \text{ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน}$ ถ้าต้องการให้เป็นฟังก์ชันต้องตัดเงื่อนไขนี้ออกเป็นช่วง ๆ ดังนั้นจึงได้ $y = \sqrt{2x+3} \text{ ซึ่งเป็นฟังก์ชันด้วยเหตุนี้}$ จึงต้องกำหนดว่า $y \geq 0$	
จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน g จะได้ $y = x \text{ เปลี่ยนจาก } y \text{ เป็น } x$ และเปลี่ยนจาก x เป็น y จะได้ $x = y $ จัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ จะได้ $y = x$	6. จากการศึกษาเรื่องอินเวอร์สฟังก์ชันจากกรอบที่ 1 ถึงกรอบที่ 5 สรุปได้ว่า 1. เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นเราสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันเหมือนกับการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ 2. เรามีวิธีหาอินเวอร์สของฟังก์ชันอยู่ 2 วิธี แต่วิธีที่นิยมกันมากคือวิธีเปลี่ยนเงื่อนไขของฟังก์ชันโดยเปลี่ยนจาก y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y

$$\therefore f^{-1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} /$$

$$|y| = x \}$$

จะพบว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน
 เพราะมีคู่อันดับสองคู่ที่สมาชิก
 ตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิก
 ตัวหลังไม่เหมือนกัน เช่น
 ถ้า $x = 2$ จะได้ $y = 2$ และ
 -2 เป็นต้น

แล้วจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ เหมือนเดิม

3. จากกรอบที่ 1 ถึงกรอบที่ 4 พบว่า
 ถ้าฟังก์ชันใดก็ตามเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไป
 ถึง B $[f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B]$ แล้ว อินเวอร์สของฟังก์ชัน
 นั้นจะเป็นฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก B ไปถึง A

$$[f^{-1} : B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A] \text{ เสมอ}$$

4. ถ้าฟังก์ชันใดไม่ใช่ฟังก์ชันแบบ 1 - 1
 จาก A ไปถึง B แล้วอินเวอร์สของฟังก์ชันนั้นจะไม่เป็น
 ฟังก์ชันจาก B ไป A แต่อาจจะเป็นฟังก์ชันจากเซตอื่นไปยัง
 A ได้ ดังตัวอย่างในกรอบที่ 5 นั่นคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน
 แบบ 1 - 1 จาก A ไปถึง B $[f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B]$
 แล้วจะได้ว่า f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน แบบ 1 - 1 จาก B
 ไปถึง A ในกรณีเช่นนี้เราเรียก f^{-1} ว่าเป็น "ฟังก์ชัน
 อินเวอร์สของ f " หรือกล่าวได้ว่า " f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชัน
 อินเวอร์ส"

$$\text{กำหนด } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x-1} \}$$

จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส
 หรือไม่

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = \sqrt{x-1}$
 เปลี่ยนจาก x เป็น y และเปลี่ยนจาก y เป็น x
 จะได้ $x = \sqrt{y-1} ; x \geq 0$

จัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ โดยยกกำลัง
 สองข้างจะได้

	$x^2 = y - 1 ; x \geq 0$ $y = x^2 + 1 ; x \geq 0$ ดังนั้น $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 + 1 ; x \geq 0\}$ พิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่ จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$ $R_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ จากเงื่อนไขของ f^{-1} จะได้ $y = x^2 + 1 ; x \geq 0$ จะพบว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน และ $D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส หรือ f มีฟังก์ชันอินเวอร์ส กำหนด $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x - 2 \}$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่
จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน g จะได้ $y = x - 2$ เปลี่ยนจาก y เป็น x และ เป็น x เป็น y จะได้ $x = y - 2$	

จัดสมการอยู่ในรูป $y = f(x)$

จะได้ $|y - 2| = x$

$\therefore g^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |y - 2| = x\}$

จะพบว่า g^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะมีคู่อันดับ $(3, -1), (3, 5)$

อยู่ใน g^{-1} ดังนั้นฟังก์ชัน g จึงไม่มี

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง คอมพิวเตอร์ฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกถึงความสัมพันธ์
เกี่ยวข้องกันของโคเมนาและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสองได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกถึง คุณสมบัติของ
ทั้งสองฟังก์ชันที่ทำให้สามารถสร้างคอมพิวเตอร์ฟังก์ชันได้ และบอกนิยามของคอมพิวเตอร์ฟังก์ชัน
ได้ถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันทั้งในรูปแบบการกำหนดเงื่อนไขและแผนภาพ
ประกอบนักเรียนสามารถสร้างคอมพิวเตอร์ฟังก์ชันได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันของคอมพิวเตอร์ฟังก์ชัน ตามค่าของสมาชิก
ตัวหน้าที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงและคำแนะนำในการเรียน จากบทเรียนโปรแกรมเรื่อง
ฟังก์ชันให้เข้าใจเสียก่อน แล้วจึงอ่านบทเรียนต่อไปนี้

บทเรียนโปรแกรม

เรื่อง คอมโพสิทฟังก์ชัน

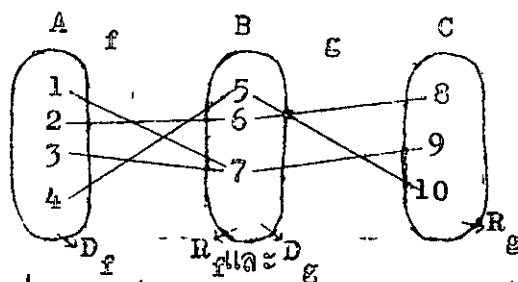
1. คอมโพสิทฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากผลของการกระทำของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ซึ่งทั้งสองฟังก์ชันนั้นมีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่เรนจ์ของฟังก์ชันแรกต้องเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชันที่สอง

ลองพิจารณาฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

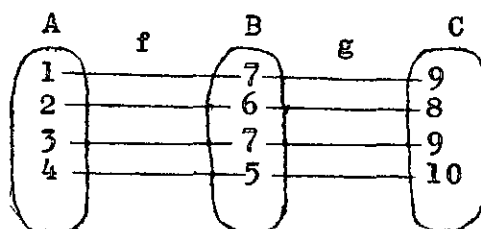
$$f = \{(1,7), (2,6), (3,7), (4,5)\}$$

$$g = \{(5,10), (6,8), (7,9)\}$$

เขียนแสดงด้วยแผนภาพได้ดังนี้



จะพบว่า เรนจ์ของ $f(R_f)$ มีความสัมพันธ์กับโดเมนของ $g(D_g)$ ในลักษณะที่ $R_f \subset D_g$
 ในลักษณะนี้เราสามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใหม่ได้ เป็นฟังก์ชัน จาก D_f ไป R_g [จากแผนภาพคือ จาก $A \longrightarrow C$] จากแผนภาพจะได้



จะได้ $(1, 9)$ อยู่ในฟังก์ชันใหม่
 จะได้ $(2, 8)$ อยู่ในฟังก์ชันใหม่
 จะได้ $(3, 9)$ อยู่ในฟังก์ชันใหม่
 จะได้ $(4, 10)$ อยู่ในฟังก์ชันใหม่

ดังนั้นเราจะได้สมาชิกของฟังก์ชันใหม่เท่ากับ $\{(1, 9), (2, 8), (3, 9), (4, 10)\}$

ถ้ากำหนด $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$g = \{(a, 5), (b, 4), (c, 4)\}$

เราจะสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชัน f และ g ได้หรือไม่
 เพราะอะไร ถ้าได้จงหาสมาชิกของฟังก์ชันใหม่ด้วย

ได้เพราะ $R_f = \{a, b, c\}$

และ $D_g = \{a, b, c\}$

ดังนั้น $R_f \subset D_g$

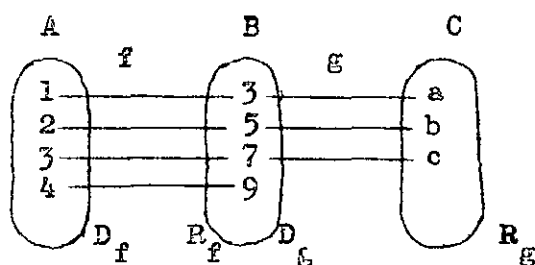
2. มาลองดูตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$

$g = \{(3, a), (5, b), (7, c)\}$

ได้ สมาชิกของฟังก์ชันใหม่ คือ
 $\{(1,5), (2,4), (3,4)\}$

เขียนแสดงด้วยภาพได้ดังนี้



จะพบว่าเรนจ์ของ $f(R_f)$ ไม่ได้เป็นสับเซตของโดเมนของ $g(D_g)$ ในลักษณะนี้จะเห็นว่า 4 ซึ่งอยู่ในโดเมนของ f มีความสัมพันธ์กับ 9 ในเรนจ์ของ f แต่ 9 ไม่มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ของ $g(R_g)$ ในลักษณะนี้เราไม่สามารถสร้างฟังก์ชันจาก D_f ไปยัง R_g

[จาก $A \longrightarrow C$] ได้

$$\text{ถ้ากำหนด } f = \{(a,x), (b,y), (c,z)\}$$

$$g = \{(x,1), (y,2)\}$$

เราจะสร้างฟังก์ชันใหม่ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก D_f ไปยัง R_g ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

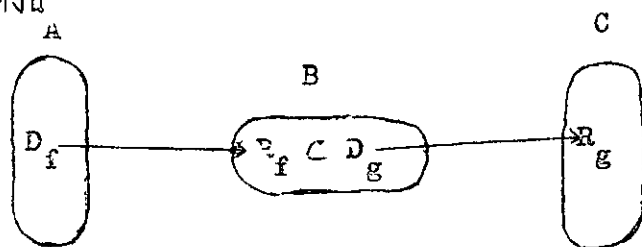
ไม่ได้เพราะ $R_f = \{x,y,z\}$

และ $D_g = \{x,y\}$

ดังนั้น $R_f \not\subseteq D_g$

3. จากกรอบที่ 1 และ 2 เราสรุปได้ว่าถ้าฟังก์ชันสองฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่เรนจ์ของฟังก์ชันแรกเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชันที่สองแล้วเราสามารถสร้างฟังก์ชันซึ่งเกิดขึ้นจากการกระทำของทั้งสองฟังก์ชัน โดยเป็นฟังก์ชันจากโดเมนของฟังก์ชันแรกไปยังเรนจ์ของฟังก์ชันที่สอง

นั่นคือ ถ้ามี $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชันโดยที่ $R_f \subset D_g$ แล้ว เราสามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใหม่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก D_f ไปยัง R_g หรือเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C นั่นเอง ซึ่งสรุปได้เป็นแผนภาพดังนี้



ถ้าความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g เป็นไปตามลักษณะดังกล่าวมาแล้ว เราเรียกฟังก์ชันที่เกิดขึ้นใหม่จากการกระทำของฟังก์ชันทั้งสองนี้ว่า กอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"gof"

อ่านว่า 'จิคอมโพสิทเอฟ' หรือ "จีโอเอฟ"

$$\text{กำหนด } f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$$

$$g = \{(5, 3), (7, 4), (9, 5), (11, 6)\}$$

จะหา gof ได้หรือไม่

$$\text{เพราะว่า } R_f = \{5, 7, 9\}$$

$$\text{และ } D_g = \{5, 7, 9, 11\}$$

ดังนั้น $R_f \subset D_g$ สามารถหา gof ได้

$$\text{นั่นคือ } gof = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$

$$\text{กำหนด } f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$$

จะหา gof ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

เพราะว่า $R_f = \{1, 2, 3\}$

และ $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

ดังนั้น $R_f \subset D_g$

สามารถหา $g \circ f$ ได้

$$g \circ f = \{(a, 3), (b, 5), (c, 7)\}$$

4. จากกรอบที่ 1, 2 และ 3 เราสรุปเป็นนิยามของคอมโพสิทฟังก์ชันได้ดังนี้

นิยาม คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g คือ $g \circ f$ เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g

และ $(x, z) \in g \circ f$ ก็ต่อเมื่อมี y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$ และ $g \circ f = \{(x, z) / \text{มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in f \text{ และ } (y, z) \in g\}$

จากนิยามจะได้ว่า

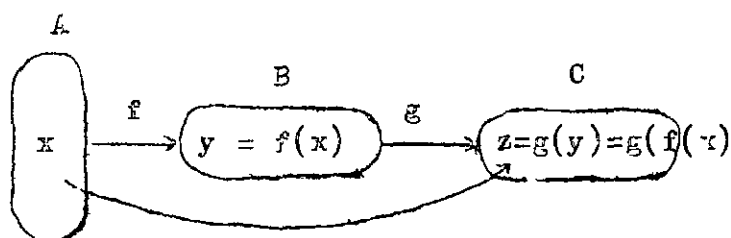
ถ้า $f : A \longrightarrow B$ โดยที่ $y = f(x)$

เมื่อ $(x, y) \in A \times B$

และ $g : B \longrightarrow C$ โดยที่ $z = g(y)$

เมื่อ $(y, z) \in B \times C$

เราสามารถสร้างฟังก์ชันซึ่งเกิดขึ้นจากการกระทำของฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C แสดงโดยแผนภูมิได้ดังนี้



นั่นคือ $g \circ f = \{(x, z) \in A \times C / z = g(y) = g(f(x))\}$

จากแผนภาพและจากการเขียนฟังก์ชัน $g \circ f$ ในรูปของเงื่อนไข เราจะได้

$(x, z) \in \text{gof}$ นั่นคือ

$$z = (g \circ f)(x) \quad (1)$$

$$\text{และ } z = g(f(x)) \quad (2)$$

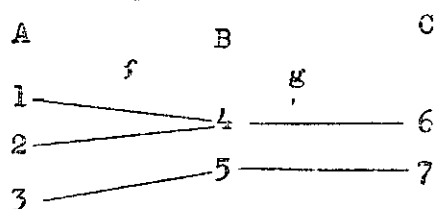
จาก (1) และ (2) จะได้ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

เพราะตัวก็เท่ากับ z

นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน gof ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$

กำหนด $f: A \longrightarrow B$ และ $g: B \longrightarrow C$

ดังแสดงในแผนภาพ



จะหา gof ได้หรือไม่

เพราะว่า $R_f = \{4, 5\}$

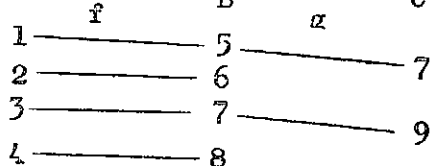
และ $D_g = \{4, 5\}$

ดังนั้น $R_f \subset D_g$ สามารถหา gof ได้

$$\text{gof} = \{(1, 6), (2, 6), (3, 7)\}$$

กำหนด $f: A \longrightarrow B$ และ $g: B \longrightarrow C$

ดังแสดงในแผนภาพ



จะหา gof ได้หรือไม่

ไม่ได้เพราะ

$$R_f = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{และ } D_g = \{5, 7\}$$

$$\text{ดังนั้น } R_f \not\subset D_g$$

ไม่สามารถหา $g \circ f$ ได้

5. ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชันในรูปการวางเงื่อนไข เราสามารถหา $g \circ f$ ได้ โดยอาศัยความรู้จากกรอบที่ 4 สรุปเป็นขั้นตอนการสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้ 2 ขั้นตอนดังนี้

$$1. \text{ พิสูจน์ให้ได้ว่า } R_f \subset D_g$$

$$2. \text{ เงื่อนไขหรือกฎของฟังก์ชัน } g \circ f$$

ได้มาจากเงื่อนไขที่ว่า $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 5x\} \text{ และ}$$

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

จะหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

หา $g \circ f$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = 5x$

$$\therefore R_f = \{y / y \in \mathbb{R}\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน g จะได้ $y = x^2$

$$\therefore D_g = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

ดังนั้น $R_f \subset D_g$ สามารถหา $g \circ f$ ได้

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(fx)$$

$$= g(5x) \left[\because f(x) = 5x \right]$$

$$= (5x)^2 \left[\because g(x) = x^2 \text{ และ แทน} \right]$$

$$= 25x^2 \text{ ค่า } x \text{ ใดๆ } 5x \right]$$

$$\text{นั่นคือ } g \circ f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 25x^2\}$$

หา $f \circ g$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน g จะได้ $y = x^2$

$$\therefore R_g = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = 5x$

$$\therefore D_f = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

ดังนั้น $R_g \subset D_f$ สามารถหา $f \circ g$ ได้

$$\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2) \quad [\because g(x) = x^2]$$

$$= 5(x^2) \quad [\because f(x) = 5x \text{ และ}$$

$$\text{นั่นคือ } f \circ g = \{(x, y) \in R \times R / y = 5x^2\}$$

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \in R \times R / y = 3x - 2\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in R \times R / y = \sqrt{x}\}$$

จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่

หา $g \circ f$ จากเงื่อนไขของ
ฟังก์ชัน f จะได้ $y = 3x - 2$

$$\therefore R_f = \{y / y \in R\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน

$$g \text{ จะได้ } y = \sqrt{x}$$

$$D_g = \{x \in R / x \geq 0\}$$

ดังนั้น $R_f \not\subset D_g$ ไม่สามารถ

หา $g \circ f$ ได้

หา $f \circ g$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน g

$$\text{จะได้ } y = \sqrt{x}$$

$$\therefore R_g = \{y \in R / y \geq 0\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f

$$\text{จะได้ } y = 3x - 2$$

$$\therefore D_f = \{x / x \in R\}$$

6. ถ้าเราต้องการหาค่าของฟังก์ชัน $g \circ f$
ที่ x ตามค่าของ x ที่กำหนดให้ เราก็ทำได้โดยหาค่าของ
($g \circ f$)(x) แล้ว หาค่าของฟังก์ชันตามที่กำหนดเหมือนกับ
การหาค่าของฟังก์ชันโดยทั่วไป

$$\text{กำหนด } f = \{(x, y) \in R \times R / y = x^2 - 1\} \text{ และ}$$

$$g = \{(x, y) \in R \times R / y = 2x\}$$

$$\text{จงหา } (g \circ f)(0), (g \circ f)(-1), (f \circ g)(0)$$

$$\text{และ } (f \circ g)(-1)$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2 - 1)$$

$$= 2(x^2 - 1)$$

$$= 2x^2 - 2$$

ดังนั้น $\supset_g \supset_f$ สามารถหา $f \circ g$ ได้ $\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$ $= f(\sqrt{x})$ $= 3\sqrt{x} - 2$ นั่นคือ $f \circ g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3\sqrt{x} - 2\}$	$\therefore (g \circ f)(x) = 2x^2 - 2$ $(g \circ f)(0) = -2$ $(g \circ f)(-1) = 2(-1)^2 - 2$ $= 2 - 2$ $= 0$ $\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$ $= f(2x)$ $= (2x)^2 - 1$ $\therefore (f \circ g)(x) = 4x^2 - 1$ $(f \circ g)(0) = -1$ $(f \circ g)(-1) = 4(-1)^2 - 1$ $(f \circ g)(-1) = 4(-1)^2 - 1$ $= 4 - 1 = 3$ กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 1\}$ $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x + 1\}$ จงหา $(g \circ f)(-2), (g \circ f)(5)$ $(g \circ f)(-3), (f \circ g)(0)$
$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x))$ $= g(2x-1)$ $= 3(2x-1)+1$ $= 6x-3+1$ $\therefore (g \circ f)(x) = 6x-2$ $(g \circ f)(-2) = 6(-2)-2$ $= -12-2$ $= -14$	7. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ และ $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ จงหา $f^{-1}, f^{-1} \circ f$ และ $f \circ f^{-1}$ $\therefore f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ $\therefore f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ $f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ $f \circ f^{-1} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

$$(g \circ f)(5) = 6(5) - 2$$

$$= 30 - 2$$

$$= 28$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(3x+1)$$

$$= 2(3x+1)$$

$$= 6x+2$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = 6x+2$$

$$(f \circ g)(-3) = 6(-3)+2$$

$$= -18+2$$

$$= -16$$

$$(f \circ g)(0) = 2$$

กำหนด $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ และ

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$$

จงหา f^{-1} , $f^{-1} \circ f$ และ $f \circ f^{-1}$

$$f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,7)\}$$

$$f^{-1} \circ f = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7)\}$$

$$f^{-1} \circ f = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$$

8. จากกรอบที่ 7 สรุปได้ว่า

ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B แล้วเราพบว่า

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

จาก B ไปทั่วถึง A

2. $f^{-1} \circ f$ จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

จาก A ไปทั่วถึง A หรือ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ เมื่อ $x \in D_f$

3. $f \circ f^{-1}$ จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

จาก B ไปทั่วถึง B หรือ $(f \circ f^{-1})(x) = x$

เมื่อ $x \in R_f$ หรือ $x \in D_{f^{-1}}$

4. $f \circ f^{-1}$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ

$f^{-1} \circ f$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า g เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B จะได้

$$(g^{-1} \circ g)(x) = x \quad \text{เมื่อ } x \in D_g \text{ และ}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = x \quad \text{เมื่อ } x \in D_{g^{-1}}$$

ต่อไปนี้จะพิจารณาอย่างระมัดระวัง เราจะมาศึกษากันว่าถ้ากำหนด $(g \circ f)(x)$ และ $g(x)$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B เราจะมีวิธีหา $f(x)$ ได้อย่างไร

จงสังเกตเปรียบเทียบไปที่ละขั้นตอนดังนี้

$$\text{เราทราบว่า } (g^{-1} \circ g)(x) = x$$

เมื่อ $x \in D_g$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $(g \circ f)(f(x)) = f(x)$
 [แทนค่า x ด้วย $f(x)$]

$$\text{เราทราบว่า } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{ดังนั้นเราจะได้ว่า } (g^{-1} \circ g)(f(x)) = g^{-1}(g(f(x)))$$

$$\text{ดังนั้นเราจะได้ว่า } f(x) = g^{-1}(g(f(x))) \quad (1)$$

$$\text{และเนื่องจาก } g(f(x)) = (g \circ f)(x) \quad (2)$$

จากผลสรุปใน (1) และ (2) สามารถหาฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
 ถ้ากำหนด $(g \circ f)(x)$ และฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่ง
 ต้องเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B

กำหนด $g(x) = 3x + 9$ และ $(g \circ f)(x) = 3x + 21$
 จงหา $f(x)$

$$\text{จาก } g(x) = 3x + 9 \quad \text{จะได้}$$

$$y = 3x + 9 \quad \text{หา } g^{-1}(x) \text{ จะได้}$$

$$x = 3y + 9$$

$$y = \frac{x - 9}{3}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x - 9}{3}$$

$$\therefore f(x) = g^{-1}(g(f(x))) \quad (1)$$

$$= g^{-1}((g \circ f)(x)) \quad (2)$$

$$= g^{-1}(3x + 21) \quad [\because (g \circ f)(x) = 3x + 21]$$

$$= \frac{(3x + 21) - 9}{3} \quad \text{แทนค่า } 3x + 21$$

$$= \frac{3x + 12}{3} \quad \text{ลงใน } x \text{ ของ } g^{-1}(x) = \frac{x - 9}{3}$$

$$\therefore f(x) = x + 4$$

ในทำนองเดียวกันถ้ากำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B เราก็สามารถหาค่า $g(x)$ ได้ดังนี้

$$g(x) = f^{-1}(f(g(x))) \quad (1)$$

$$\text{และ } f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad (2)$$

กำหนด $f(x) = 2x$ และ

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - x \quad \text{จงหา } g(x)$$

.....

จาก $f(x) = 2x$ จะได้

$$y = 2x \quad \text{หา } f^{-1}(x)$$

จะได้ $x = \frac{y}{2}$

$$y = \frac{x}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

$$\therefore g(x) = f^{-1}(f(g(x)))$$

$$= f^{-1}((f \circ g)(x))$$

$$= f^{-1}(2x^2 - x)$$

$$= \frac{2x^2 - x}{2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{2x^2 - x}{2}$$

9. ในกรณีที่ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B เราอาจใช้วิธีการสังเกตดังนี้

กำหนด $f(x) = x^2 - 2x + 1$ และ $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x$ จงหา $g(x)$

$$\therefore (g \circ f)(x) = x^2 - 2x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2 - 2x + 1)$$

$$\therefore g(x) = x - 1 \quad \left[\begin{array}{l} \text{เพราะเมื่อแทนค่า} \\ x^2 - 2x + 1 \text{ ลงใน } x \text{ แล้วจะได้ } (x^2 - 2x + 1) - 1 \\ = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x \end{array} \right]$$

กำหนด $(f \circ g)(x) = x^6 - 1$ และ

$$g(x) = x^3 \text{ จงหา } f(x)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\therefore (f \circ g)(x) = x^6 - 1$$

$$\text{และ } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^3)$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 1$$

แผนการสอนรายคาบสำหรับการสอนตามปกติ

- คาบที่ 1 ความหมายของฟังก์ชันและการตรวจสอบ
- คาบที่ 2 ความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B
- คาบที่ 3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
- คาบที่ 4 รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ
- คาบที่ 5, 6 ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ
- คาบที่ 7 ฟังก์ชันควอราติก การเขียนกราฟ และการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด
- คาบที่ 8 ฟังก์ชันอินเวอร์ส
- คาบที่ 9, 10 คอมโพสิตฟังก์ชัน
- คาบที่ 11, 12 พีชคณิตฟังก์ชัน

คาบที่ 1

ความหมายของฟังก์ชันและการตรวจสอบฟังก์ชัน

ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์หรือเซตของคู่อันดับ ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย

2. เราสามารถตรวจสอบฟังก์ชันได้หลายวิธี

2.1 วิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์ ตรวจสอบโดยลากเส้นตรงขนานกับแกน y ให้ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์ ถ้าเส้นตรงทุกเส้นตัดกับกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียวก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

2.2 วิธีการคาดคะเน ตรวจสอบจากตัวแปร y (เรนจ์ของความสัมพันธ์) ว่าอยู่ในรูปของการยกกำลังที่เป็นจำนวนคู่ หรืออยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์หรือไม่ ถ้าอยู่ในลักษณะดังกล่าวความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

2.3 วิธีการสมมติค่า โดยกำหนดให้ (a,b) และ (a,c) อยู่ในความสัมพันธ์ ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า $b=c$ สามารถสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในลักษณะการจับคู่แบบต่าง ๆ ให้ นักเรียนสามารถสรุปรูปแบบของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน และให้ความหมายของฟังก์ชันได้

2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้ความหมายของฟังก์ชัน ให้เหตุผลได้ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

3. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้นักเรียนสามารถใช้วิธีการตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ถูกต้อง

เนื้อหา

1. ฟังก์ชัน

1.1 ความหมายของฟังก์ชัน

1.2 การใช้ความหมายของฟังก์ชันตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1.3 วิธีการตรวจสอบฟังก์ชัน

1.3.1 วิธีการเขียนกราฟของความสัมพันธ์

1.3.2 วิธีการคาดคะเน

1.3.3 วิธีการสมมติค่า

วิธีสอนและกิจกรรม

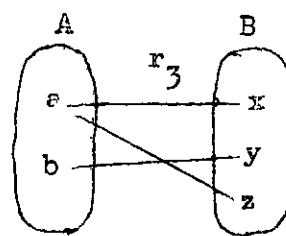
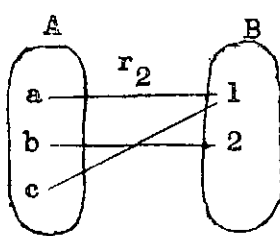
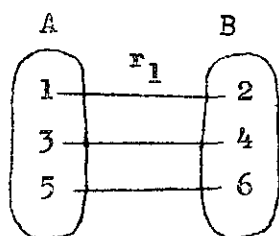
1. ครูให้นักเรียนทบทวนเรื่องความสัมพันธ์ โดยให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เขียนอยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิก 3 - 5 ความสัมพันธ์ เช่น

$$r_1 = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$$

$$r_2 = \{(a,1), (b,2), (c,1)\}$$

$$r_3 = \{(a,x), (b,y), (c,z)\}$$

ครูให้นักเรียนช่วยกันเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโกเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่นักเรียนยกตัวอย่างมา เพื่อให้นักเรียนพิจารณาการจับคู่ของสมาชิก จะได้แผนภาพดังนี้



2. ศึกษากตัวอย่างความสัมพันธ์บนกระดานดำ 3 - 5 ความสัมพันธ์ เช่น

$$r_1 = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$$

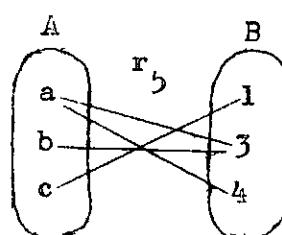
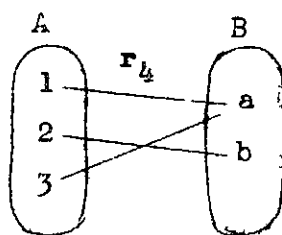
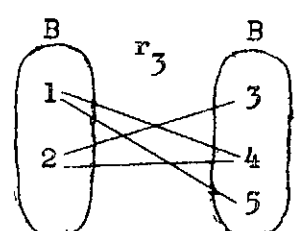
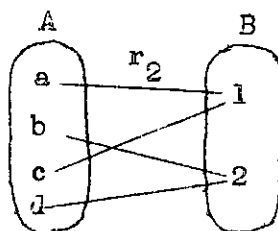
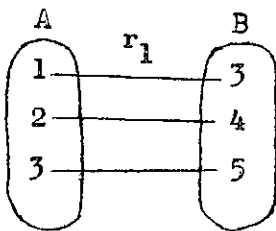
$$r_2 = \{(e,1), (b,2), (c,1), (d,2)\}$$

$$r_3 = \{(1,4), (2,3), (1,5), (2,4)\}$$

$$r_4 = \{(1,a), (2,b), (3,a)\}$$

$$r_5 = \{(e,3), (c,1), (b,3), (a,4)\}$$

ครูให้นักเรียนเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่ศึกษากตัวอย่าง พร้อมทั้งพิจารณารูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่ศึกษากตัวอย่างด้วย



สรุปความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r_1 ถึง r_5 ได้ดังนี้

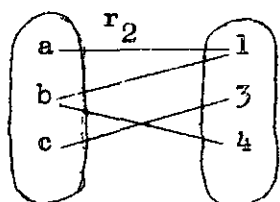
แบบที่ 1 โดเมนของความสัมพันธ์ 1 ตัว ไปสัมพันธ์กับเรนจ์ของความสัมพันธ์ 1 ตัว ดังเช่นในความสัมพันธ์ r_1, r_2, r_4

แบบที่ 2 โดเมนของความสัมพันธ์ 1 ตัว ไปสัมพันธ์กับเรนจ์ของความสัมพันธ์มากกว่า 1 ตัว ดังเช่นในความสัมพันธ์ r_3 และ r_5

ครูสรุปรูปแบบของความสัมพันธ์ที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง โดยสรุปให้เห็นความแตกต่างอย่างเด่นชัดของแบบที่ 1 และแบบที่ 2 และสรุปว่า ความสัมพันธ์ในรูปแบบที่ 1 นั้นเราเรียก ความสัมพันธ์ที่มีรูปแบบความสัมพันธ์แบบนี้ว่าฟังก์ชัน

3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของฟังก์ชัน เสร็จแล้วครูกำหนดความสัมพันธ์ทั้งที่อยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิกและแผนภาพได้ ให้นักเรียนใช้นิยามของฟังก์ชันที่สรุปมาแล้วพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็น หรือไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด เช่น

$r_1 = \{(1,3), (2,4), (5,2)\}$ เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดในความสัมพันธ์ r_1 ที่สมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน



r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังไม่เหมือนกัน ได้แก่ $(b,1)$ และ $(b,4)$

4. ครูกำหนดความสัมพันธ์ในรูปการวางเงื่อนไข เช่น

$$r_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 1\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$$

$$r_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x\}$$

$$r_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$$

ครูให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของความสัมพันธ์ทั้งหมดบนกระดานดำจากรูปกราฟ ครูให้นักเรียนใช้นิยามของฟังก์ชันมาพิจารณาว่า กราฟของความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน และช่วยกันสรุปวิธีพิจารณาฟังก์ชัน จากกราฟของความสัมพันธ์

5. ครุยกตัวอย่างความสัมพันธ์ ในรูปการวางเงื่อนไข เช่น

$$r_1 = \{ (x, y) \in R \times R / y^2 = x \}$$

$$r_2 = \{ (x, y) \in R \times R / |y| = x \}$$

ครูให้นักเรียนใช้วิธีคาดคะเนจากเรนจ์ของความสัมพันธ์ว่า มีเรนจ์ใดบ้างที่ไม่เหมือนกัน ไข้ความสัมพันธ์กับโดเมนตัวเดียวกัน เช่น จากตัวอย่าง จะพบว่า $(1, -1)$ และ $(1, 1)$ อยู่ใน r_1 และ $(2, -2)$, $(2, 2)$ อยู่ใน r_2

จากนั้นครูสรุปวิธีตรวจสอบฟังก์ชันโดยวิธีการคาดคะเนให้นักเรียนได้เข้าใจดียิ่งขึ้นอีกครั้งหนึ่ง

6. ครูอธิบายถึงวิธีตรวจสอบฟังก์ชันวิธีที่สำคัญและใช้มากที่สุด คือวิธีสมมติค่าโดยครุยกตัวอย่างพร้อมอธิบายให้นักเรียนฟังเป็นขั้นตอน เช่น

$$r_1 = \{ (x, y) \in R \times R / y = x^2 \}$$

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ r_1 จะได้ $y = x^2$

$$\text{ให้ } (a, b) \in r_1 \quad \text{จะได้ } b = a^2 \quad (1)$$

$$\text{และ } (a, c) \in r_1 \quad \text{จะได้ } c = a^2 \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $b = c$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ r_1 เป็นฟังก์ชัน

$$r_2 = \{ (x, y) \in R \times R / y^2 = x \}$$

วิธีทำ

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน r_2 จะได้ $y^2 = x$

$$\text{ให้ } (a, b) \in r_2 \quad \text{จะได้ } b^2 = a \quad (1)$$

$$\text{และ } (a, c) \in r_2 \quad \text{จะได้ } c^2 = a \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $b^2 = c^2$

$$b = \pm \sqrt{c^2} = \pm c$$

ไม่สามารถสรุปได้ว่า $b = c$

เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

จากนั้นครูกำหนดความสัมพันธ์บนกระดานคำแล้วให้นักเรียนเลือกใช้วิธีต่าง ๆ ตรวจสอบดูว่า ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

7. ครูสรุป นิยามของฟังก์ชัน และวิธีการตรวจสอบฟังก์ชันให้ชัดเจนอีกครั้งหนึ่ง พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

8. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

ตอนที่ 2ความหมายของฟังก์ชัน จาก A ไป B ความคิดรวบยอด

1. ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ
 - 1.1 โดเมนของ f เท่ากับ A
 - 1.2 สองคู่อันดับใด ๆ ใน f ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย
 - 1.3 เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B
2. ค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ หาได้โดยจัดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ แล้วแทนค่า x ตามที่กำหนดลงในเงื่อนไขของฟังก์ชันจะได้ค่าของฟังก์ชันตามค่า x ที่กำหนด

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนด A และ B และกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ พร้อมทั้งอธิบายความหมายของฟังก์ชัน จาก A ไป B ได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของ $y = f(x)$ ได้ถูกต้อง และเมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

เนื้อหา

1. ความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B
2. การหาค่าของฟังก์ชัน

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทบทวนนิยามของความสัมพันธ์จากที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วและครูกำหนดเซต A และ B และความสัมพันธ์ให้ 3 - 5 ความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้นั้นเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B หรือไม่ เช่น

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\}$$

$$r_1 = \{(1, b), (2, c), (3, c)\}$$

$$r_2 = \{(2, c), (3, b), (2, a)\}$$

$$r_3 = \{(3, a), (b, 1), (2, c), (c, 2)\}$$

$$r_4 = \{(1, c), (3, c), (2, b)\}$$

$$r_5 = \{(2, a), (3, c), (2, a)\}$$

จะได้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B

r_2 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B

r_3 เป็นความสัมพันธ์แต่ไม่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r_4 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B

r_5 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B

2. จากกิจกรรมทบทวน ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน จะได้

r_1 เป็นฟังก์ชัน

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

r_4 เป็นฟังก์ชัน

r_5 เป็นฟังก์ชัน

ครูให้นักเรียนพิจารณาโดเมนของ r_1, r_4 และ r_5 ว่ามีความสัมพันธ์อย่างไรกับเซต A จะได้

$$D_{r_1} = A$$

$$D_{r_2} = A$$

$$D_{r_5} \neq A$$

ครูสรุปจากคำตอบของนักเรียนและสรุปว่า r_1 และ r_2 เราเรียกว่า เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ให้นักเรียนดู ส่วน r_3 เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แต่เป็นฟังก์ชันจาก $\{2,3\}$ ไป B จากนั้น ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วสรุปเป็นนิยามของฟังก์ชัน จาก A ไป B และครูสรุปให้ชัดเจนอีกครั้งหนึ่ง แล้วให้นักเรียนทำตัวอย่าง 3 - 5 ข้อ

3. จากสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน จาก A ไป B ซึ่งเขียนได้เป็น $f : A \longrightarrow B$ อ่านว่า " f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B " จากสัญลักษณ์ครูอธิบายถึงโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จะได้ว่า $f : A \longrightarrow B$ A คือ โดเมนของฟังก์ชัน และ B คือ เรนจ์ของฟังก์ชัน ดังนั้น เรนจ์ของ f จะต้องเป็นสับเซตของ B หรือ $R_f \subset B$

จากนั้นครูอธิบายถึงความหมายของ $y = f(x)$

ถ้า $f : A \longrightarrow B$ โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ ในกรณีที่ $y \in R_f$ จะได้ $(x,y) \in f$ และถ้า $(x,y) \in f$ เราเรียก y ว่าเป็นอิมเมจของ x ภายใต้ฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และเรียก x ว่าเป็น พรีอิมเมจของ y

ครูให้ตัวอย่าง เช่น กำหนด $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y,z\}$ และ $f = \{(1,y), (2,x), (3,z)\}$

ให้นักเรียนหา อิมเมจของ 1,2,3 เช่น

y เป็นอิมเมจของ 1 ภายใต้ฟังก์ชัน f หรือ $f(1) = y$

จากนั้นครูยกตัวอย่าง $f : A \longrightarrow B$ ในรูปอื่น เช่น $f : x \longrightarrow 2x$ เป็นต้น ให้นักเรียนหาอิมเมจและเขียนฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$

จากนั้นครูอธิบายความหมายของ $f(x)$ และให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตามค่า x ที่กำหนดให้ เช่น

กำหนด $f : x \longrightarrow y$ เขียนเป็นเซตของคู่อันดับดังนี้

$f = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$ ให้นักเรียนหา $f(1)$, $f(3)$

จนถึง $f(7)$

จากนั้นครูอธิบายวิธีหาค่าของฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของเงื่อนไข เช่น

$$f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad \text{ให้หา } f(1), f(-1) \quad \text{เป็นต้น}$$

ครูกำหนดโจทย์บนกระดานแล้วให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตามที่กำหนดให้

4. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามของฟังก์ชันจาก A ไป B และสรุปการหาค่าของฟังก์ชัน
เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจดียิ่งขึ้น
5. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

คาบที่ 3

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ความคิดรวบยอด

1. โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในฟังก์ชัน f
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในฟังก์ชัน f

วัตถุประสงค์

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

เนื้อหา

โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทบทวนนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว โดยให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับนิยามของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ และให้หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในรูปของเซตของคู่อันดับ 3 - 5 ความสัมพันธ์ เช่น

$$r_1 = \{(1,2), (3,5), (5,3)\}$$

$$r_2 = \{(a,1), (b,5), (c,1)\}$$

$$r_3 = \{(2,3), (4,1), (6,5)\}$$

2. ครูให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันซึ่งสรุปได้ว่า ฟังก์ชันก็คือ รูปแบบหนึ่งของความสัมพันธ์นั่นเอง ครูให้นักเรียนช่วยกันเขียนนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จากนั้นครูกำหนดฟังก์ชันในรูปของ เซตของคู่อันดับ $2 - 3$ ฟังก์ชันแล้วอธิบายว่ามีวิธีการโดเมนและเรนจ์ เช่นเดียวกันกับความสัมพันธ์ เช่น

$$f_1 = \{(a,1), (b,3), (c,5)\}$$

$$f_2 = \{(1,3), (2,4), (3,6), (4,3)\}$$

ให้นักเรียนหา $D_{f_1}, D_{f_2}, R_{f_1}, R_{f_2}$

3. ครูกำหนดฟังก์ชันที่อยู่ในรูปการวางเงื่อนไข แล้วอธิบายวิธีหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันดังนี้

การหาหาโดเมนของฟังก์ชัน ให้เขียนเงื่อนไขของฟังก์ชันในรูปของ $y = f(x)$ เซตของจำนวนจริงที่แทนค่า x ใน $f(x)$ แล้วทำให้ค่า y เป็นจำนวนจริงคือโดเมนของฟังก์ชัน

การหาเรนจ์ของฟังก์ชัน ให้เขียนเงื่อนไขของฟังก์ชันในรูป $x = f(y)$ เซตของจำนวนจริง y ที่แทนค่า y ใน $f(y)$ แล้วทำให้ค่า x เป็นจำนวนจริงคือเรนจ์ของฟังก์ชัน

จากนั้น ครูให้นักเรียนช่วยกันหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

4. ครูให้ตัวอย่างการหาเรนจ์ของฟังก์ชันในบางฟังก์ชันที่สามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขของฟังก์ชันได้โดยไม่ต้องจัดให้อยู่ในรูป $x = f(y)$ เช่น

$$f_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{1-x^2}\}$$

$$f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x|\}$$

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามและวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

คาบที่ 4

รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 (one-to-one Function) ก็ต่อเมื่อ สมาชิกในเรนจ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one

2. ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันแบบ "ไปทั่วถึง" (onto Function) ก็ต่อเมื่อ ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วเรนจ์ของ f จะเท่ากับ B หรือ $R_f = B$

ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบ " A ไปยัง B " (into)

วัตถุประสงค์

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

เนื้อหา

รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชันและการตรวจสอบ

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ให้นักเรียนทบทวนความหมายของฟังก์ชันจาก A ไป B โดยครูกำหนดให้ดังนี้

$$A = \{1, 2, 3\} ; B = \{a, b, c\} \text{ และ}$$

$$r_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

$$r_2 = \{(1, b), (3, a), (2, b)\}$$

$$r_3 = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

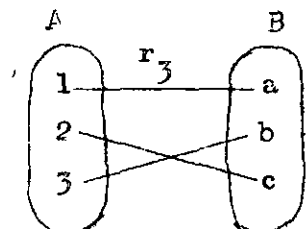
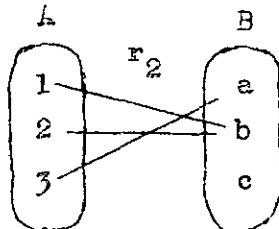
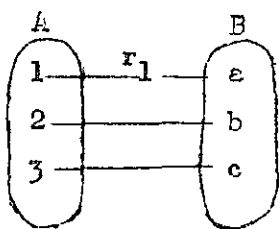
จากนั้นครูกำหนด $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b\}$ และ

$$r_4 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$$

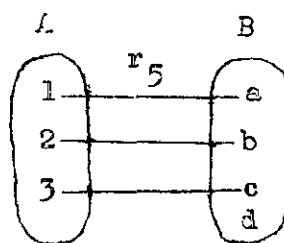
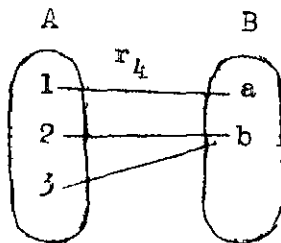
$$r_5 = \{(2, a), (1, b), (2, b)\}$$

ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2. ครูให้นักเรียน เขียนแผนภูมิแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B ในกิจกรรมที่ 1 จะได้



พร้อมกันนั้นครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ในลักษณะอื่น เช่น



ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันแล้วอภิปรายกันว่ามีรูปแบบเหมือนกัน หรือแตกต่างกันอย่างไรบ้าง

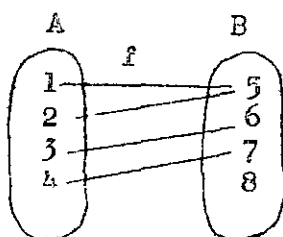
3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันในกิจกรรมที่ 2 ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

ก. ฟังก์ชันแบบ 1 - 1 ดังตัวอย่างใน r_1 , r_3 และ r_5 ครูอธิบายความหมายของฟังก์ชันแบบ 1 - 1 เพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจดียิ่งขึ้นและสรุปว่า ถ้าฟังก์ชันใดไม่เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จะเรียกฟังก์ชันนั้นว่า เป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one ดังตัวอย่างใน r_2 และ r_4

ข. ฟังก์ชันแบบ "ไปทั่วถึง" ดังตัวอย่างใน r_1 , r_3 และ r_4 ครูอธิบายความหมายของฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจดียิ่งขึ้น และสรุปว่าถ้าฟังก์ชันใดไม่เป็นฟังก์ชันแบบไปทั่วถึงจะเรียกฟังก์ชันนั้นว่า เป็นฟังก์ชันแบบ "ไปยัง" ดังตัวอย่างใน r_2 และ r_5

จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ บนกระดานดำ

4. จากฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ที่นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างในกิจกรรมที่ 3 ครูเลือกรูปแบบตามที่ครูต้องการแล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่าแต่ละฟังก์ชันนั้น สามารถพิจารณารูปแบบอื่นได้อีกหรือไม่ เช่น



จะพบว่าเป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one และ เพื่อพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันแบบ "A ไปทั่วถึง B" หรือไม่ ก็ปรากฏว่า ไม่เป็นฟังก์ชันแบบ "A ไปทั่วถึง B" จึงเป็นฟังก์ชันแบบ "A ไปยัง B" จึงสรุปรูปแบบของฟังก์ชันนี้ได้ว่าเป็นฟังก์ชัน "จาก A ไปยัง B แบบ Many-to-one" หรือเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many-to-one}} B$

จากนั้นครูยกตัวอย่างพร้อมอธิบายรูปแบบอื่นอีก 3 รูปแบบได้แก่

1. $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ หรือฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ 1 - 1

2. $f : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$ หรือฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แบบ 1 - 1

3. $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{Many-to-one}} B$ หรือฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ Many-to-one

ครูให้นักเรียนเขียนฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ บนกระดานดำ เสร็จแล้ว

ครูตรวจพร้อมกัน อธิบายเพิ่มเติม

5. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันที่เขียนในรูปของการวางเงื่อนไข เช่น

$$f = \{ (x, y) \in R \times R / y = 3x - 2 \}$$

ครูอธิบายให้นักเรียนได้เข้าใจถึงการตรวจสอบรูปแบบของฟังก์ชัน โดยเริ่มต้นจากการตรวจสอบว่าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 หรือไม่ โดยใช้วิธีการสมมติค่า โดยใช้ความรู้ที่ว่า ฟังก์ชันแบบ 1 - 1 นั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน 1 ตัว จะไปสัมพันธ์กับโดเมนของฟังก์ชันเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นถ้า $(a, c) \in f$ และ $(b, c) \in f$ เราต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $a = b$ ถ้าไม่สามารถตรวจสอบได้ว่า $a = b$ ก็แสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one จากนั้นครูแสดงวิธีตรวจสอบให้นักเรียนดู

ขั้นต่อไปคือตรวจสอบว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันแบบ "ไปทั่วถึง" หรือไม่ โดยตรวจสอบให้ได้ว่าโดเมนทุกตัวของฟังก์ชัน ไปสัมพันธ์กับเรนจ์ของฟังก์ชันทุกตัว นั่นคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เราต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $R_f = B$ แล้วฟังก์ชันนี้จะเป็นฟังก์ชันแบบ A ไปทั่วถึง B ถ้าพิสูจน์แล้วสรุปได้ว่า $R_f \neq B$ ฟังก์ชันนี้ก็จะไม่เป็นฟังก์ชันแบบ "A ไปยัง B" จากนั้นครูแสดงวิธีการตรวจสอบให้นักเรียน พร้อมทั้งให้นักเรียนตรวจสอบรูปแบบฟังก์ชันตามที่ครูกำหนดให้

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป รูปแบบของฟังก์ชันและการตรวจสอบ
7. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

คาบที่ 5, 6

ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชันมีหลายชนิด การพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันชนิดใดให้พิจารณาจากเงื่อนไขของแต่ละฟังก์ชัน
2. คีกรี่ของฟังก์ชันโพลีโนเมียล พิจารณาจากเลขชี้กำลังของตัวแปรมากที่สุดของแต่ละฟังก์ชันที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับศูนย์

วัตถุประสงค์

1. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เป็นฟังก์ชันพีชคณิต หรือฟังก์ชันทรานเซนเดนทัลได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชันพีชคณิตให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เป็นฟังก์ชันพีชคณิตชนิดใดได้ถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดเงื่อนไขของฟังก์ชัน เชิงเส้น ควอดราติก ซี่แบนโด และฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ให้ นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดฟังก์ชันโพลีโนเมียลให้นักเรียนสามารถบอกคีกรี่ของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

เนื้อหา

ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

1. ฟังก์ชันทรานเซนเดนทัล (Transcendental Function)
2. ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function)

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทบทวน เรื่อง รูปแบบของฟังก์ชันที่เรียนมาแล้วโดยการถามตอบและกำหนดฟังก์ชันแล้วให้นักเรียนหารูปแบบของฟังก์ชันที่ครูกำหนด

2. ครูกล่าวมาถึงเนื้อหาที่จะเรียนในชั่วโมงนี้ เกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ ครูอธิบายถึงชนิดของฟังก์ชันว่ามี 2 ชนิด คือ

1. ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันที่ประกอบด้วยตัวแปร จำนวน และโอเปอเรชันทางพีชคณิต ได้แก่ การบวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ และยกกำลัง

2. ฟังก์ชันทรานเซนเดนทัล ได้แก่ ฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ได้แก่

2.1 ฟังก์ชันลอการิทึม ดังตัวอย่าง

$$f(x) = \log x$$

2.2 ฟังก์ชันตรีโกณ ดังตัวอย่าง

$$f(x) = \sin x$$

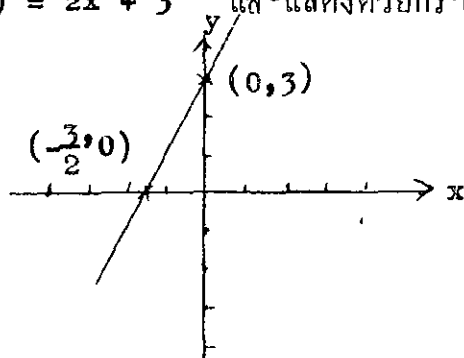
2.3 ฟังก์ชันเลขยกกำลัง ดังตัวอย่าง

$$f(x) = e^x$$

ครูกล่าวต่อไปว่า เราจะศึกษากันเฉพาะฟังก์ชันพีชคณิตเท่านั้น และครูอธิบายต่อไปว่า ฟังก์ชันพีชคณิตที่ควรรู้จักได้แก่

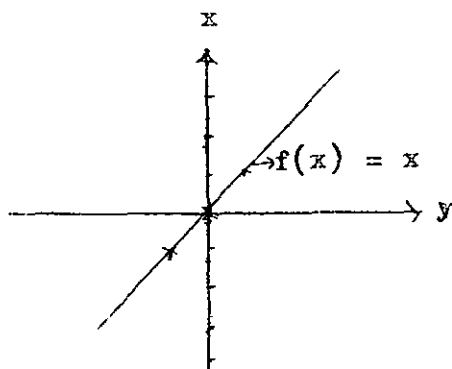
1. ฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง และกราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรงเสมอ พร้อมยกตัวอย่าง เช่น

$$f(x) = 2x + 3 \text{ และแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้}$$

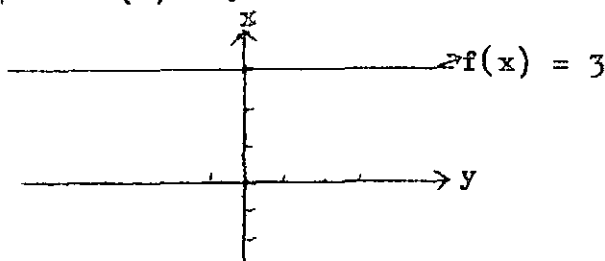


ครูยกตัวอย่างอื่นและให้นักเรียนช่วยกันหาบนกระดานคำ และอธิบายเพิ่มเติมว่า นอกจากตัวอย่างดังกล่าวแล้วยังมี ฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีลักษณะพิเศษอีก 2 ฟังก์ชันได้แก่

1.1 ฟังก์ชันเอกลักษณ์ ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = x$ แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้

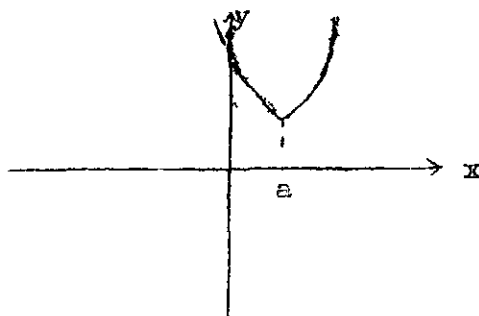


1.2 ฟังก์ชันค่าคงที่ ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ เช่น $f(x) = 3$ แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้

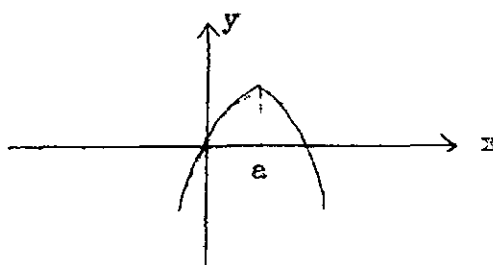


2. ฟังก์ชันควอดราติก ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นเส้นโค้งเรียกว่าพาราโบลา ซึ่งมี 2 ลักษณะคือ พาราโบลาหงายกับพาราโบลาคว่ำ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนจริง a กล่าวคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย ดังตัวอย่าง

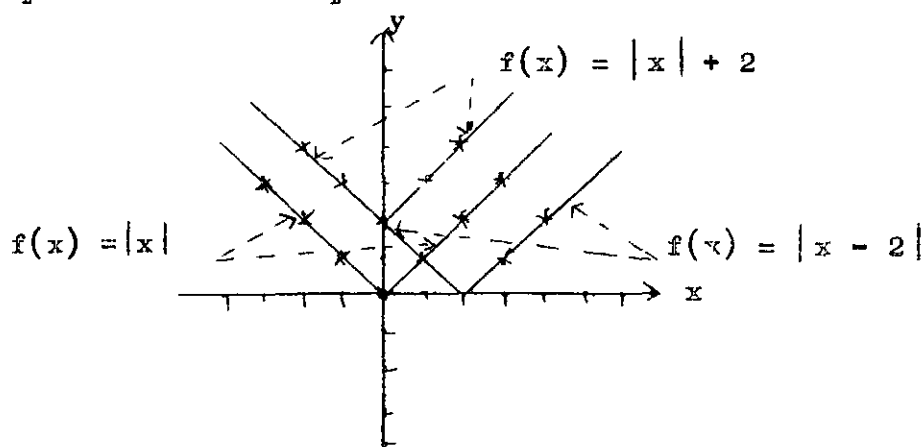


กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำ ดังตัวอย่าง



ครูบอกนักเรียนว่า ฟังก์ชันควอราติกนี้ เราจะศึกษากันอย่างละเอียดในบทต่อไป

3. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = |x|$ เช่น $f(x) = |x|$; $f(x) = |x| + 2$; $f(x) = |x - 2|$ เป็นต้น ครูให้นักเรียนออกมาเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ที่ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนดูบนแกนกราฟเดียวกันบนกระดาษคำจะได้



จากนั้นครูให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์รูปแบบอื่น เช่น

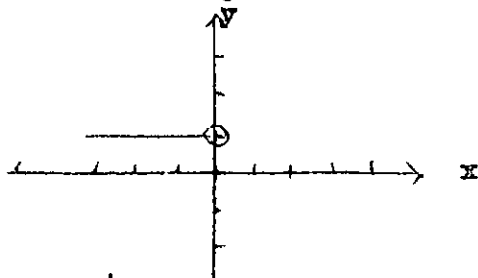
$$f(x) = |x|^3 ; f(x) = |x^2 - 1| ; f(x) = |x^2 - 2x - 1| \quad \text{เป็นต้น}$$

4. ฟังก์ชันขั้นบันได เป็นฟังก์ชันที่มีค่าคงที่เป็นช่วง ๆ กล้ายบันได เช่น

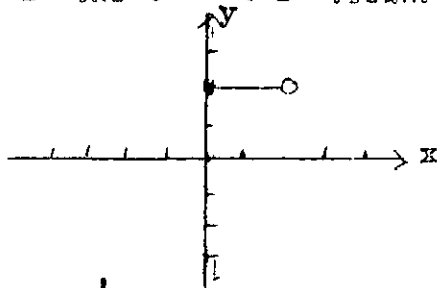
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

ซึ่งแบ่งเป็นช่วง ๆ ได้ดังนี้

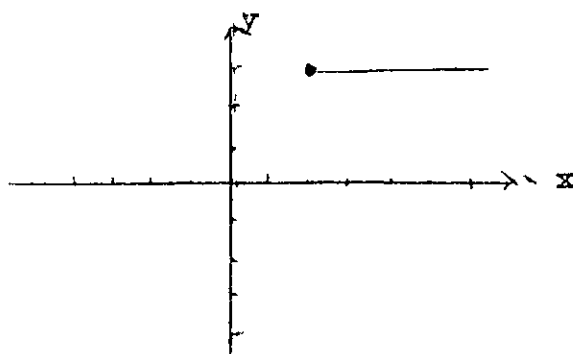
$f(x) = 1$ เมื่อ $x < 0$ เขียนเป็นกราฟได้ดังนี้



$f(x) = 2$ เมื่อ $0 \leq x < 2$ เขียนกราฟได้ดังนี้

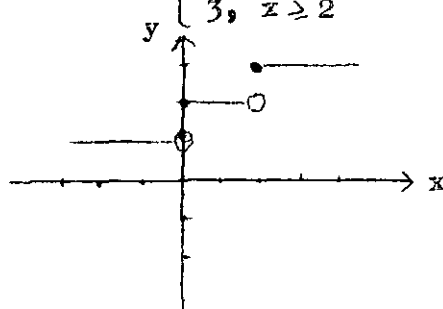


$f(x) = 3$ เมื่อ $x \geq 2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



กันจะได้

ฉะนั้นเมื่อเขียนกราฟของ $f(x) = \begin{cases} 1; & x < 0 \\ 2; & 0 \leq x < 2 \\ 3; & x \geq 2 \end{cases}$ รวมในแกนภาพเดียว



ครูให้นักเรียนฝึกหัดเขียนกราฟของฟังก์ชันขั้นบันไดตามที่กำหนดให้

จากนั้นครูอธิบายต่อไปว่า ฟังก์ชันขั้นบันไดนั้นอาจจะกำหนดอยู่ในรูปของโจทย์ปัญหาได้ เช่น อัตราค่าโดยสารรถแท็กซี่มีดังนี้ ระยะทางกิโลเมตรแรก 3 บาท กิโลเมตรต่อไป กิโลเมตรละ 1 บาท เกษของกิโลเมตรคิดเป็น 1 กิโลเมตร จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับค่าโดยสาร พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้ และถ้านั่งรถไป $3\frac{1}{2}$ กิโลเมตร จะต้องจ่ายเงินเท่าไร

ครูให้นักเรียนช่วยกันคิดหาคำตอบ เสร็จแล้วครูเฉลยและอธิบายเพิ่มเติม

5. ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ซึ่งมีรูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f(x) = 5x^1 + 2x - 3$$

$$f(x) = 2x \quad \text{เป็นต้น}$$

ครูอธิบายต่อไปว่า ฟังก์ชันโพลิโนเมียลจะมีค่า n หรือเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ต่อจากนั้นครูอธิบายถึงชื่อของฟังก์ชันโพลิโนเมียลว่าฟังก์ชันโพลิโนเมียลจะมีชื่ออะไรบ้าง เราดูได้จากเลขชี้กำลังของตัวแปรที่มากที่สุดของฟังก์ชันนั้นที่สัมประสิทธิ์ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น

$f(x) = 3x^5 - 2x^4 - x^3 - 3x^2 - x - 1$ เป็นโพลิโนเมียลมีดีกรีเป็น 5

$f(x) = 2x^4 - x^2 + 5$ เป็นโพลิโนเมียลมีดีกรีเป็น 4

$f(x) = 5x - 1$ เป็นโพลิโนเมียลมีดีกรีเป็น 1

$f(x) = 3$ เป็นโพลิโนเมียลมีดีกรีเป็น 0

3. ครูให้ตัวอย่างซึ่งเป็นรูปแบบของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ ให้นักเรียนได้ออกชนิดของฟังก์ชันให้เขียนกราฟ และตอบคำถามต่าง ๆ เกี่ยวกับฟังก์ชันชนิดนั้น ๆ

4. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

คาบที่ 7 ฟังก์ชันควอราติก การเขียนกราฟ และการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด

ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชันควอราติก ปิ่รูปทั่วไปอยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันควอราติกจะเป็นพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และจะเป็นพาราโบลาคว่ำเมื่อ $a < 0$
2. ฟังก์ชันควอราติกจะมีค่าสูงสุด หรือต่ำสุดที่ $x = -\frac{b}{2a}$ นั่นคือ จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดอยู่ที่ $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$
3. กราฟของฟังก์ชันควอราติกจะเขียนได้สะดวก เมื่อทราบจุดสูงสุด หรือต่ำสุดของฟังก์ชันนั้น

วัตถุประสงค์

เมื่อกาหนดฟังก์ชันควอราติกให้ นักเรียนสามารถหาค่าต่ำสุด สูงสุด และหาจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ถูกต้อง

เนื้อหา

ฟังก์ชันควอราติก

1. การหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน
2. การหาจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของฟังก์ชัน
3. การเขียนกราฟของฟังก์ชันควอราติก
4. การแก้โจทย์ปัญหาที่อยู่ในรูปฟังก์ชันควอราติก

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทบทวนรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอราติกโดยครูกำหนดรูปแบบของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ ให้ เช่น

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{2}$$

$$f(x) = x$$

ให้นักเรียนบอกว่าฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชันควอราติก

2. ครูทบทวนรูปแบบของฟังก์ชันควอราติกอีกครั้งหนึ่ง แล้วกำหนดรูปแบบของควอราติก เช่น

$$f(x) = -x^2$$

$$f(x) = x^2$$

ให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟ แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะของกราฟว่าถ้าค่า $a > 0$ เช่นตัวอย่าง $f(x) = x^2$ จะได้กราฟพาราโบลาหงาย ถ้าค่า $a < 0$ เช่น ตัวอย่าง $f(x) = -x^2$ จะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ ครูให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 1$ และ $f(x) = 1 - x^2$ โดยให้นักเรียนลองพิจารณาลักษณะของกราฟก่อนแล้วจึงเขียนกราฟตรวจสอบกับคำตอบที่นักเรียนตอบไว้แล้ว

3. ครูอธิบาย ถึงวิธีการหาจุดวกกลับ ซึ่งเป็นจุดสูงสุดในขณะที่เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ และเป็นจุดต่ำสุดขณะที่กราฟเป็นพาราโบลาหงาย ซึ่งมีวิธีหาจุดวกกลับหรือจุดสูงสุด หรือต่ำสุดได้ดังนี้

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันควอราติก

$$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$\text{โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์จะได้}$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\therefore f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

พิจารณาค่าของ $f(x)$ จะได้ว่า

ในกรณีที่ 1 ถ้า $a > 0$ และเราทราบว่า $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

$\therefore f(x)$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ

$$x = -\frac{b}{2a}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $a < 0$

$$\therefore a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

$\therefore f(x)$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ หรือ

$$x = -\frac{b}{2a}$$

ดังนั้น พังก์ชันกวอราติกที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$

ดังนั้น จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของฟังก์ชันคือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

จากนั้น กรอค่าพิกัดฟังก์ชันกวอราติก ให้นักเรียนหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดและหาจุดต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ 2 - 3 ฟังก์ชัน เช่น

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

เนื่องจาก $a = -1$ ดังนั้นกราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นพาราโบลาคว่ำ

มีค่า $a = -1$ $b = 2$

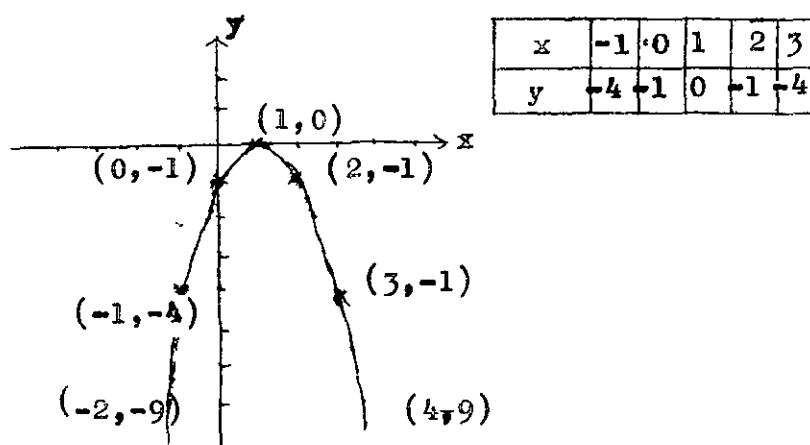
$$\begin{aligned} \text{กราฟนี้จะมีจุดสูงสุดที่ } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\left(-\frac{2}{2}\right) \\ &= -(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2(1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$$

- ∴ ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน คือ 0
- ∴ จุดสูงสุดของฟังก์ชัน คือ $(1, 0)$

4. ครูอธิบายให้นักเรียนฟังถึงวิธีการนำเอาความรู้ในการนิยามลักษณะของกราฟและการหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันมาใช้ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน

จากตัวอย่างในกิจกรรมที่ 3 เราทราบว่ากราฟที่ได้เป็นพาราโบลาคว่ำ และจุดสูงสุดคือ $(1, 0)$ ดังนั้นเราเขียนตารางค่าความสัมพันธ์ โดยให้จุดสูงสุด คือ $(1, 0)$ เป็นจุดกึ่งกลางของตารางค่าความสัมพันธ์ เช่น



หมายเหตุ การเขียนกราฟของฟังก์ชันให้เขียนต่อจากการหาจุดสูงสุดของฟังก์ชันในกิจกรรมที่ 3

5. ครูกำหนดโจทย์ปัญหา เช่น

จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าไร ผลคูณของทั้งสองจำนวนนั้น จึงจะมากที่สุด

จากโจทย์ครูอธิบายให้นักเรียนฟังว่า ถ้าเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของสิ่งที่กำหนดให้ในโจทย์ให้อยู่ในรูปของเงื่อนไขของฟังก์ชันควอราติกได้ เราก็สามารถใช้ความรู้ของการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาได้ จากนั้นครูให้นักเรียนวิเคราะห์โจทย์ เพื่อหาสมการแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จะได้

ให้ x คือ จำนวนแรก

$\therefore$ จำนวนที่สอง คือ $20 - x$

ให้ y เป็นผลคูณของทั้งสองจำนวน

$$\therefore y = x(20 - x) = 20x - x^2$$

จากสมการ $y = -x^2 + 20x$ จะได้ $a = -1$; $b = 20$

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุดของฟังก์ชันอยู่ที่ } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\left(\frac{20}{-2}\right) \\ &= -(-10) \\ &= 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุด เมื่อ $x = 10$

ผลคูณของจำนวนทั้งสองจะมีความมากที่สุดเมื่อจำนวนแรก = 10

อีกจำนวนหนึ่งคือ $20 - 10 = 10$ Ans

ครูกำหนดโจทย์ปัญหาในรูปแบบอื่น ให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันควอดราติกที่เรียนมาทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

7. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

คาบที่ 8

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ความคิดรวบยอด

1. ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ จึงสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้ เหมือนกับหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์
2. ถ้าอินเวอร์สของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย f^{-1} เป็นฟังก์ชันจะเรียก f^{-1} ว่า เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ f หรือกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ $1 - 1$ จาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแบบ $1 - 1$ จาก B ไปทั่วถึง A
4. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ $1 - 1$ จาก A ไปยัง B แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันแต่ไม่ใช่จาก B ต้องมีการกำหนดโคโดเมนของฟังก์ชันนั้นเสียใหม่
5. การหาอินเวอร์สฟังก์ชันนิยมใช้การเปลี่ยนเงื่อนไขของฟังก์ชัน โดยเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y แล้วจัดสมการให้อยู่ใน $y = f(x)$ ส่วนคู่กลับ (x, y) ยังคงเดิม
6. การหาค่าของ f^{-1} ที่ x ใช้วิธีการเหมือนกับการหาค่าของ f ที่ x

วัตถุประสงค์

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน และบอกได้ว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน และหาค่า f^{-1} ที่ x ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

1. การหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน
2. การหาค่าของ f^{-1} ที่ x เทียบค่าของ x ที่กำหนดให้

วิธีสอนและกิจกรรม

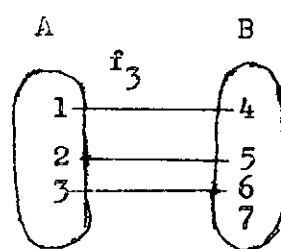
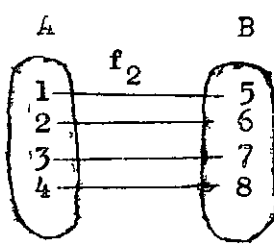
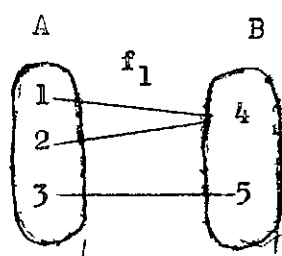
1. ครูให้นักเรียนทบทวนการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ โดยให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับนิยามของอินเวอร์สของความสัมพันธ์และให้นักเรียนหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ทั้งในรูปเซตของคู่อันดับและแบบการวางเงื่อนไข เช่น

$$r_1 = \{(1,3), (2,5), (4,7)\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 1\}$$

ให้นักเรียนหา r_1^{-1} และ r_2^{-1}

2. ครูถามถึงความสัมพันธ์กันระหว่างความสัมพันธ์กับฟังก์ชันจะได้ว่า ฟังก์ชันทุกฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์แต่ความสัมพันธ์บางความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ การหาอินเวอร์สของฟังก์ชันจึงใช้วิธีเดียวกันกับการหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ จากนั้นครูกำหนดฟังก์ชันในรูปของแผนภาพดังนี้



ให้นักเรียนหา f_1^{-1} , f_2^{-1} , f_3^{-1}

ครูให้นักเรียนพิจารณาว่า อินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน จากนั้นสรุปเกี่ยวกับอินเวอร์สของฟังก์ชันว่า

อินเวอร์สของฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปทั่วถึง B จะเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก B ไปทั่วถึง A ดังตัวอย่าง f_2

อินเวอร์สของฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จาก A ไปยัง B จะเป็นฟังก์ชัน แต่ไม่ใช่เป็นฟังก์ชันจาก B ต้องกำหนดโคโดเมนของฟังก์ชันใหม่ ดังตัวอย่าง f_3 ซึ่งโคโดเมนของ f_3^{-1} คือ $\{4, 5, 6\}$

ครูกำหนดฟังก์ชันในรูปเซตของคู่อันดับ และแผนภูมิ 3 - 5 ฟังก์ชัน ให้นักเรียนหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน และพิจารณาว่า อินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน

3. ครูกำหนดฟังก์ชันในรูปการวางเงื่อนไข เช่น

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = 3x - 1\}$$

ครูอธิบายถึงวิธีหาอินเวอร์สของฟังก์ชันซึ่งเป็นวิธีที่ใช้กันมาก คือ วิธีที่คงคู่อันดับ (x, y) ไว้ แล้วไปเปลี่ยนตรงเงื่อนไขของฟังก์ชัน โดยเปลี่ยนจาก y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y แล้วจัดสมการให้อยู่ในรูป $y = f(x)$

ครูกำหนดให้นักเรียนหาอินเวอร์สของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยอาศัยความรู้ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วเพื่อช่วยในการพิจารณา จากตัวอย่าง ให้นักเรียนพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เช่น

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = 3x - 1\}$$

จากเงื่อนไขของฟังก์ชัน f จะได้ $y = 3x - 1$

พิจารณาโดเมนและเรนจ์ของ f จะได้

$$D_f = \{x/x \in R\}$$

$$R_f = \{y/y \in R\}$$

หาอินเวอร์สของฟังก์ชัน โดยการเปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \{(x, y) \in R \times R / x = 3y - 1\} \\ &= \{(x, y) \in R \times R / y = \frac{x+1}{3}\} \end{aligned}$$

พิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

จากเงื่อนไขของ f^{-1} จะได้ $y = \frac{x+1}{3}$

จะได้ว่าทุก ๆ $x \in R$ จะได้ y เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันมี $D_{f^{-1}} = \{x/x \in R\}$

พิจารณาเรนจ์ของ f^{-1}

จากเงื่อนไขของ f^{-1} จะได้ $x = 3y - 1$

จะได้ว่า ทุก ๆ $y \in \mathbb{R}$ จะได้ x เป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น $R_{f^{-1}} = \{ y/y \in \mathbb{R} \}$

นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

จากนั้นครูกำหนดฟังก์ชันในรูปการวางเงื่อนไขให้นักเรียนหาอินเวอร์สของฟังก์ชันและพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหรือไม่

4. จากกิจกรรมที่ 3 ถ้าอินเวอร์สของฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันตามที่ครูกำหนด โดยครูอธิบายเพิ่มเติมว่ามีวิธีการเหมือนกับการหาค่า f ที่ x ตามที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว

5. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนเนื้อหาที่เรียนในคาบนี้อีกครั้งหนึ่ง

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด

คาบที่ 9, 10

คอมโพสิทฟังก์ชัน

ความคิดรวบยอด

1. คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g คือ $g \circ f$ เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของเรนจ์ของ g
2. ฟังก์ชัน $g \circ f$ ที่ x จะเท่ากับฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$ หรือ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
3. การหาค่าฟังก์ชัน $g \circ f$ ที่ x ใช้วิธีการเหมือนกับการหาค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

วัตถุประสงค์

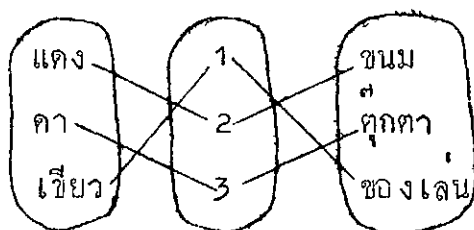
1. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกถึงความสัมพันธ์เกี่ยวกับของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันทั้งสองได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถบอกถึงคุณสมบัติของทั้งสองฟังก์ชันที่ทำให้สามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้และนอกระบบของคอมโพสิทฟังก์ชันได้ถูกต้อง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันให้ นักเรียนสามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันของคอมโพสิทฟังก์ชันตามค่าของสมาชิกตัวหน้าที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

คอมโพสิทฟังก์ชัน

วิธีสอนและกิจกรรม

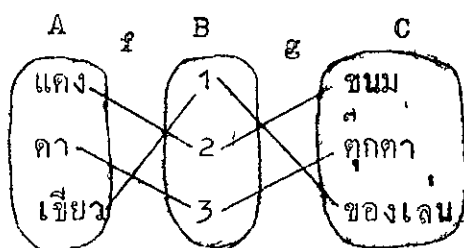
1. ครูเล่าเรื่องการจัดงานวันปีใหม่ในส่วนที่เกี่ยวกับการจับฉลากครั้งนี้ แดง คำ และเชียว ร่วมกันจัดงานปีใหม่ โดยทั้งสามเอาของขวัญมาจนละชิ้นแล้วเอาของขวัญนั้นมาติดเบอร์ ครูถามนักเรียนว่าใครจะไ้ของขวัญชิ้นใดบ้าง ให้นักเรียนลองเขียนความสัมพันธ์ระหว่างคน เบอร์ฉลากของขวัญ และของขวัญว่าสัมพันธ์กันในลักษณะใดบ้าง เช่น



จากนั้นให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับระหว่างคน กับของขวัญที่ได้รับ เช่น
 $\{(\text{แดง}, \text{ขนม}), (\text{คำ}, \text{ตุ๊กตา}), (\text{เชียว}, \text{ของเล่น})\}$

2. จากกิจกรรมที่ 1 ครูกำหนดให้ A เป็นเซตของคน B เป็นเซตของเบอร์ฉลากของขวัญ และ C เป็นเซตของของขวัญ ครูให้นักเรียนเขียนเซตแต่ละเซตในรูปของแผนภาพแล้วให้นักเรียนลองอภิปรายถึงผลของการจับฉลากที่เป็นไปได้อย่างไรบ้าง และสรุปว่านักเรียนได้แนวคิดอะไรบ้างจากกิจกรรมนี้

จากนั้นครูช่วยสรุปผลการอภิปรายโดยสรุปจากแผนภาพ เช่น



จากแผนภาพ การกระทำครั้งแรกคือจับฉลากจะ เขียนได้ในรูปฟังก์ชัน f

คือ $f : A \longrightarrow B$

$$f = \{(\text{แดง}, 2), (\text{ดำ}, 3), (\text{เขียว}, 1)\}$$

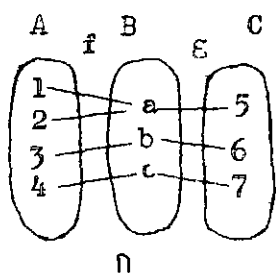
ครั้งที่สอง เปิดฉากออกเขียนได้ในรูปฟังก์ชัน 2 คือ $\varepsilon : B \longrightarrow C$

$$\varepsilon = \{(1, \text{ของเล่น}), (2, \text{ขนม}), (3, \text{ตุ๊กตา})\}$$

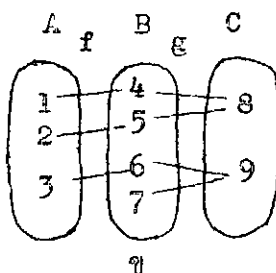
ครั้งที่สาม จะได้ฟังก์ชันใหม่จาก โคเมนของ f ไปยังเรนจ์ของฟังก์ชัน ε คือ

$$\{(\text{แดง}, \text{ขนม}), (\text{ดำ}, \text{ตุ๊กตา}), (\text{เขียว}, \text{ของเล่น})\}$$

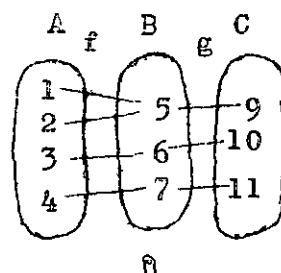
ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันระหว่างเรนจ์ของ f และโคเมนของ ε ซึ่งทำให้เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่จากโคเมนของ f ไปยังเรนจ์ของ ε ได้ จากนั้นครูยกตัวอย่างอื่นเพื่อให้นักเรียนได้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างเรนจ์ของฟังก์ชันแรกกับโคเมนของฟังก์ชันที่สองอีก เช่น



ก



ข



ค

ให้นักเรียนสรุปถึงความสัมพันธ์ระหว่างเรนจ์ของฟังก์ชันแรกกับโคเมนของฟังก์ชันที่สองของทั้งสามแผนภาพว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกันอย่างไรและความสัมพันธ์แบบใด สามารถสร้างฟังก์ชันจากโคเมนของฟังก์ชันแรกไปยังเรนจ์ของฟังก์ชันที่สองได้

3. จากกิจกรรมที่ 2 ครูอธิบายสรุปถึงรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างเรนจ์ของฟังก์ชันแรกและโคเมนของฟังก์ชันที่สองที่ทำให้สามารถสร้างฟังก์ชันจากโคเมนของฟังก์ชันแรกไปยังเรนจ์ของฟังก์ชันที่สองได้และเรียกฟังก์ชันที่สร้างใหม่นี้ว่า คอมโพสิทฟังก์ชัน ดังแผนภาพ ก และ ข เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\varepsilon \circ f$ " อ่านว่า "จี โอ เอช" ครูให้นักเรียนของคอมโพสิทฟังก์ชัน แล้วกำหนดฟังก์ชันในรูปแบบภาพและเซตของคู่อันดับให้ 3 - 5 ฟังก์ชันให้นักเรียนพิจารณาว่าฟังก์ชันคูใดที่สามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันได้พร้อมให้เหตุผลและเขียนฟังก์ชันที่สร้างใหม่อีกด้วย เช่น

$$\text{กำหนด } f = \{(1,3), (2,5), (4,7)\}$$

$$g = \{(3,a), (5,b), (7,c)\}$$

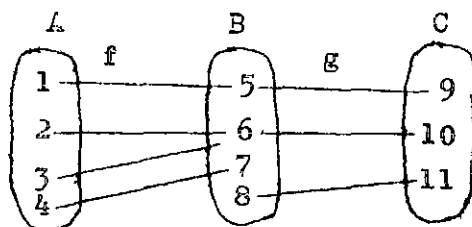
$$R_f = \{3, 5, 7\}$$

$$D_g = \{3, 5, 7\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ดังนั้นสามารถ $g \circ f$ ได้

$$g \circ f = \{(1,a), (2,b), (4,c)\}$$

กำหนด



$$R_f = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$D_g = \{5, 6, 8\}$$

จะได้ $R_f \not\subset D_g$ จึงไม่สามารถหา $g \circ f$ ได้

4. จากนิยามของคอมโพสิทฟังก์ชัน ครูสรุปให้นักเรียนฟังว่า คอมโพสิทฟังก์ชันของ f และ g คือ $g \circ f$ เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของโดเมนของ g และ $(x, z) \in g \circ f$ ก็ต่อเมื่อมี y ที่ทำให้ $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$ และ $g \circ f = \{(x, z) / \text{มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in f, (y, z) \in g\}$ จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนเข้าใจดียิ่งขึ้น โดยกำหนด $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ ถ้าให้ $x \in A, y \in B$ และ $z \in C$ ดังนั้น จะได้

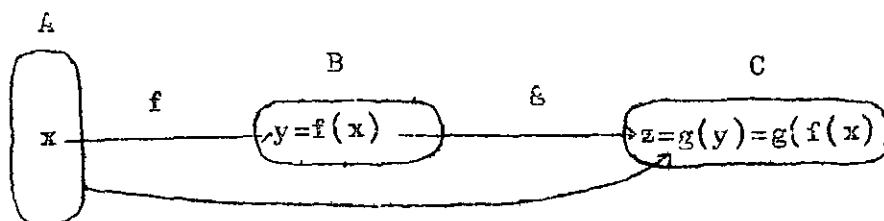
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะได้ $(x, y) \in f$ หรือ $y = f(x)$

g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C จะได้ $(y, z) \in g$ หรือ $z = g(y)$

เนื่องจาก $z = g(y)$ และ $y = f(x)$

$$\text{ดังนั้น } z = g(f(x)) \quad (1)$$

มาพิจารณาแผนภาพ



จากแผนภาพจะได้ $(x, z) \in g \circ f$ นั่นคือ

$$z = (g \circ f)(x) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

สรุปว่า ค่าของฟังก์ชัน $g \circ f$ ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$ และสรุปวิธีการสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันว่า ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f และ g เราจะหา $g \circ f$ ได้คือ

1. ต้องพิสูจน์ได้ได้ว่า $R_f \subset D_g$ ถ้า $R_f \not\subset D_g$ จะหา $g \circ f$ ไม่ได้
2. เมื่อพิสูจน์ข้อ 1 ได้แล้ว ก็หาฟังก์ชัน $g \circ f$ โดยใช้สูตร

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

จากนั้นครูกำหนดฟังก์ชันในรูปการวางเงื่อนไข 2 - 3 ฟังก์ชันให้นักเรียนหาคอมโพสิทฟังก์ชันบนกระดานดำ เสร็จแล้วครูตรวจพร้อมอธิบายสรุป เช่น กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = 2x + 3$ จะสร้าง $g \circ f$ ได้หรือไม่เพราะเหตุใด

$$\text{จาก } f(x) = x^2$$

$$\therefore R_f = \{y/y \geq 0\}$$

$$\text{และ } g(x) = 2x + 3$$

$$D_g = \{x/x \in \mathbb{R}\}$$

จะได้ $R_f \subset D_g$ ดังนั้นสามารถหา $g \circ f$ ได้

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \end{aligned}$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$$

5. ครูอธิบายถึงการหาค่าของฟังก์ชันของกอมโพลีทฟังก์ชันว่ามีวิธีการ เหมือนกับการหาค่าของฟังก์ชัน f ที่ x จากนั้นครูให้นักเรียนหาค่าของฟังก์ชันของกอมโพลีทฟังก์ชันที่นักเรียนได้สร้างไว้แล้วในกิจกรรมที่ 4 ตามโจทย์ที่ครูกำหนดให้
6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความรู้ทั้งหมดที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วอีกครั้งหนึ่ง
7. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

ตอนที่ 11, 12

พีชคณิตฟังก์ชัน

ความคิดรวบยอด

1. f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่ $D_f \cap D_g \neq \{\}$ สามารถร่างฟังก์ชันใหม่ได้โดย

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{โดยที่ } D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) && \text{โดยที่ } D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) && \text{โดยที่ } D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x/g(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

2. โดเมนของ $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ หาได้โดยอาศัยนิยาม

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g \\ D_{\frac{f}{g}} &= (D_f \cap D_g) - \{x/g(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

3. การหาค่าของฟังก์ชัน $(f + g)$ ที่ x , $(f - g)$ ที่ x , $(f \cdot g)$ ที่ x และ $\left(\frac{f}{g}\right)$ ที่ x ใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่าของ f ที่ x

วัตถุประสงค์ -

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปให้นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถหาโดเมนของพีชคณิตฟังก์ชันและหาค่าฟังก์ชันของพีชคณิตฟังก์ชันตามสมาชิกตัวหน้าที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

เนื้อหา

1. พีชคณิตฟังก์ชัน
2. โดเมนของพีชคณิตฟังก์ชัน
3. การหาค่าฟังก์ชันของพีชคณิตฟังก์ชัน

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ครูอธิบายในเรื่องของจำนวนจริงว่า ถ้ามีจำนวนจริงสองจำนวนเราสามารถสร้างจำนวนจริงใหม่ขึ้นมาใหม่ได้โดยใช้การบวก ลบ คูณ หารกัน เช่น

$3 - 2$ จะได้จำนวนจริงใหม่ คือ 1 เป็นต้น

2. ครูอธิบายต่อกิจกรรมที่ 1 ว่า ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีฟังก์ชันสองฟังก์ชันเราก็สามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใหม่โดยการนำฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวก ลบ คูณ หารกัน เช่น

$$\text{ถ้า } f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$$

$$g = \{(1, -2), (3, 1), (5, -1)\}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f + g &= \{(1, 2 + (-2)), (3, 4 + 1), (5, 6 + (-1))\} \\ &= \{(1, 0), (3, 5), (5, 5)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f - g &= \{(1, 2 - (-2)), (3, 4 - 1), (5, 6 - (-1))\} \\ &= \{(1, 4), (3, 3), (5, 7)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{(1, 2 \times (-2)), (3, 4 \times 1), (5, 6 \times (-1))\} \\ &= \{(1, -4), (3, 4), (5, -6)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= \{(1, \frac{2}{-2}), (3, \frac{4}{1}), (5, \frac{6}{-1})\} \\ &= \{(1, -1), (3, 4), (5, -6)\} \end{aligned}$$

$$\text{ถ้า } f = \{(a, 1), (b, -2), (c, -3)\}$$

$$g = \{(a, -1), (b, 0), (c, 1), (d, 2)\}$$

$$\therefore D_f = \{a, b, c\} ; D_g = \{a, b, c, d\}$$

$$\text{และ } D_f \cap D_g = \{a, b, c\}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f + g &= \{(a, 1 + (-1)), (b, (-2) + 0), (c, (-3) + 1)\} \\ &= \{(a, 0), (b, -2), (c, -2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f - g &= \{(a, 1 - (-1)), (b, (-2) - 0), (c, (-3) - 1)\} \\ &= \{(a, 2), (b, -2), (c, -4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \{(a, 1 \times (-1)), (b, (-2) \times 0), (c, (-3) \times 1)\} \\ &= \{(a, -1), (b, 0), (c, -3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= \{(a, \frac{1}{-1}), (c, \frac{-3}{1})\} \\ &= \{(a, -1), (c, -3)\} \end{aligned}$$

ครูให้นักเรียนสังเกตการหาค่า $\frac{f}{g}$ ในกรณีที่ $(b, -2) \notin f$ และ $(b, 0) \in g$ จะได้โดเมนของ $\frac{f}{g} = \{a, c\}$ ยกเว้น b

จากตัวอย่างที่กล่าวมาทั้งหมด ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นนิยามของฟังก์ชันฟังก์ชัน จะได้ว่า

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) \neq 0\}$$

3. ครูกำหนดฟังก์ชันทั้งที่อยู่ในรูปการแจกแจงสมาชิกและแบบกำหนดเงื่อนไขให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ เช่น

$$\text{กำหนด } f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$$

$$g = \{(1, -2), (3, -1), (5, 0)\}$$

จงหา $f+g, f-g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$

กำหนด $f(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 1\}$

$g(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$

จงหา $f+g, f-g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$

4. จากตัวอย่างในกิจกรรมที่ 3 ครูให้นักเรียนช่วยกันหา โกลเมทริกซ์ของฟังก์ชันและหาค่าของฟังก์ชันตามที่กำหนดให้
5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาที่เรียนมาทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง
6. ให้นักเรียนหาแบบฝึกหัด

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มี 30 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง
2. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบทั้งหมดให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากข้อ ก, ข, ค, ง หรือ โดยแรเงาลงในช่องว่างใต้อักษรที่ต้องการในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง 0 กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^3 - 1$ ข้อใดคือ $(g \circ f)(x)$

ก. $8x^3 - 1$ ข. $3x^3 - 1$

ค. $8x^3 + 1$ ง. $8x^3$

จ. $3x^8 + 1$

ถ้านักเรียนคิดว่าคำตอบข้อ ก. ถูกที่สุดให้นักเรียนแรเงาในช่องว่างใต้อักษร

ก. ดังนี้

ก. ข. ค. ง. จ.

0 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

3. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ เช่นเปลี่ยนจากข้อ ก. เป็นข้อ ค.

ให้ทำดังนี้

ก. ข. ค. ง. จ.

0 ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

4. แบบทดสอบแต่ละข้อจะมีคำตอบถูกเพียงคำตอบเดียว ข้อใดที่นักเรียนตอบมากกว่า 1 คำตอบ ข้อนั้นถือว่าผิด และไม่ให้คะแนน

5. ห้ามเขียนข้อความใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้ ถ้าต้องการทดสอบให้ใช้ช่องว่างสำหรับทศที่เตรียมไว้ให้หรือใช้ด้านหลังกระดาษคำตอบ

1. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 16 - x^2\}$

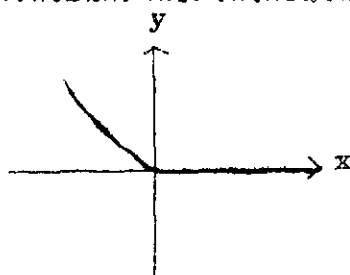
ข. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}$

ค. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{x}\}$

ง. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 0\}$

จ. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}$

2. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด



ก. $f(x) = x^2 - |x|$

ข. $f(x) = x^2 + x|x|$

ค. $f(x) = x^2 + |x|$

ง. $f(x) = x^2 - x|x|$

จ. $f(x) = x^2 - x^2|x|$

3. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{5, 6, 7\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ก. $\{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

ข. $\{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 5)\}$

ค. $\{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$

ง. $\{(1, 7), (2, 6), (4, 5), (4, 7)\}$

จ. $\{(1, 5), (2, 6), (3, 4), (4, 7), (6, 5)\}$

4. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 3, 5, 7\}$

$$r_1 = \{(1, 1), (3, 5), (2, 1), (1, 7), (4, 3)\}$$

$$r_2 = \{(1, 3), (3, 1), (5, 4), (3, 1), (7, 2)\}$$

$$r_3 = \{(1, 1), (3, 5), (2, 1), (3, 5), (4, 7)\}$$

ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันและเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B

ก. r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชัน $r_1 : A \longrightarrow B$, $r_2 : B \longrightarrow A$

ข. r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน $r_2 : A \longrightarrow B$, $r_3 : B \longrightarrow A$

ค. r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน $r_1 : A \longrightarrow B$, $r_3 : A \longrightarrow B$

ง. r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชัน $r_1 : A \longrightarrow B$, $r_2 : A \longrightarrow B$

จ. r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน $r_2 : B \longrightarrow A$, $r_3 : A \longrightarrow B$

5. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 3; & x < -3 \\ x^2 - 1; & -3 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1; & x > 1 \end{cases}$ ข้อใดคือค่าของ $f(-4)$

ก. -1

ข. 1

ค. -7

ง. 7

จ. หาค่าไม่ได้

6. กำหนด $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) = 5$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 ข้อใดคือโคโดเมนของ f

ก. $\{x / x = 7\}$

ข. $\{x / x = 2\}$

ค. $\{x / x = 0\}$

ง. $\{x / x \in \mathbb{R}\}$

จ. $\{x / x < 0\}$

7. กำหนด $f(x) = x^2 - 1$ และ $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ข้อใดคือ R_f

ก. $\{-1, 0, 3\}$

ข. $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$

ค. $\{-1, 0, 3\}$

ง. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จ. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

8. โดเมนของ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{2-x^2}\}$ คือข้อใด

ก. $\{x / x \geq 2\}$

ข. $\{x / x \leq \sqrt{-2}\}$

ค. $\{x / -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}\}$

ง. $\{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

9. กำหนด $f : A \longrightarrow B; f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ

1 - 1 เมื่อใด

ก. f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 ข. $R_f = B$

ค. f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ ง. f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 และ

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง $R_f = B$

10. กำหนด f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x เป็นคนในโลกและ y

เป็นอายุของ x

ง เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x เป็นประเทศในโลกและ y เป็นจำนวนพลเมืองในปัจจุบัน ของ x (ปัจจุบันไม่มีประเทศใดในโลกที่มีพลเมืองเท่ากัน)

h เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ x เป็นหนังสือที่มีผู้แต่งคนเดียวและ y เป็นผู้แต่ง

คำตอบในข้อใดถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แต่ ง ไม่ใช่ฟังก์ชัน แบบ 1 - 1

ข. f เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แต่ h ไม่ใช่ฟังก์ชัน แบบ 1 - 1

ค. ง เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แต่ h ไม่ใช่ฟังก์ชัน แบบ 1 - 1

ง. h เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แต่ f ไม่ใช่ฟังก์ชัน แบบ 1 - 1

จ. h เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 แต่ ง ไม่ใช่ฟังก์ชัน แบบ 1 - 1

11. พังก์ชันในข้อใดไม่ใช่พังก์ชันพีชคณิต

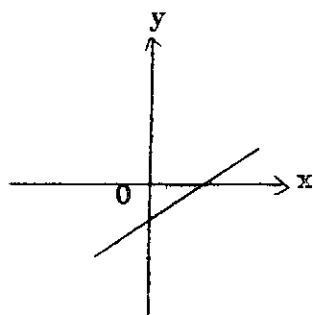
ก. $f(x) = x^5 + \frac{2}{2^x} - 3$ ข. $f(x) = \sqrt{x} + 7$

ค. $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ ง. $f(x) = x^3$

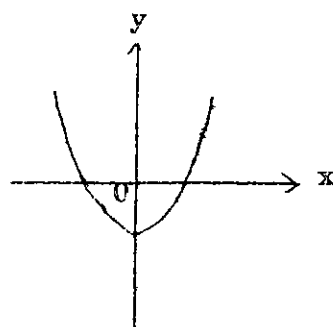
จ. $f(x) = -3$

12. กราฟในข้อใดเป็นกราฟของพังก์ชันค่าสัมบูรณ์

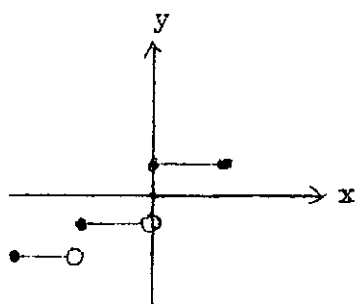
ก.



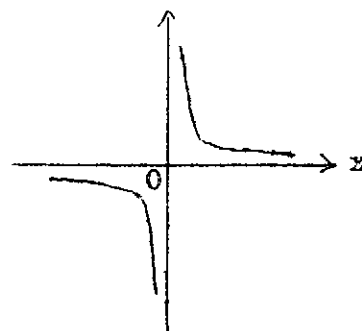
ข.



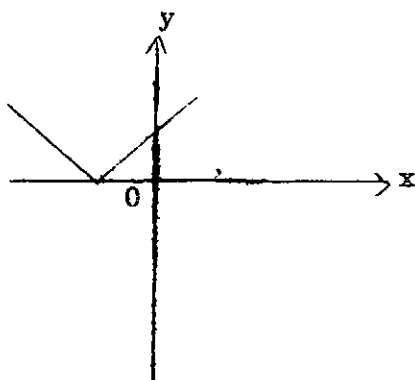
ค.



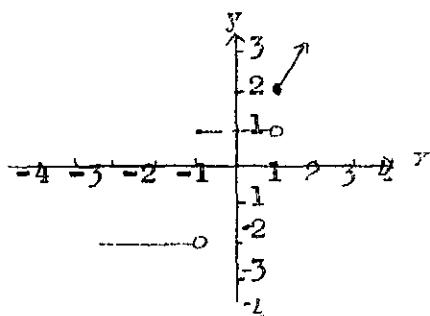
ง.



จ.



13. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด



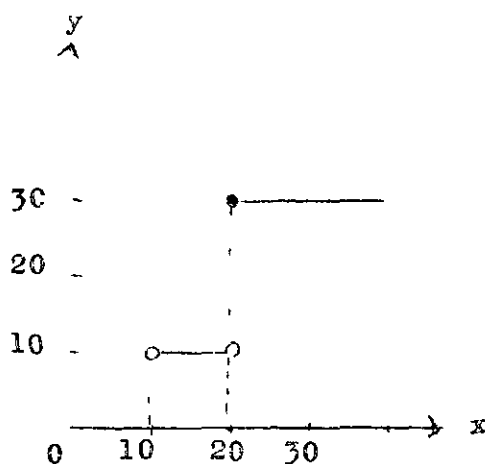
$$\text{ก. } f(x) = \begin{cases} -2 ; x < -1 \\ 1 ; -1 \leq x \leq 1 \\ 2 ; x > 1 \end{cases} \quad \text{ข. } f(x) = \begin{cases} -2 , x \leq -1 \\ 1 , -1 \leq x \leq 1 \\ 2 ; x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ค. } f(x) = \begin{cases} -2 ; x \leq -1 \\ 1 , -1 < x < 1 \\ 2x , x > 1 \end{cases} \quad \text{ง. } f(x) = \begin{cases} -2, x \leq -1 \\ 1 , -1 \leq x \leq x \\ 2x ; x > 1 \end{cases}$$

$$\text{จ. } f(x) = \begin{cases} -2 ; x < -1 \\ 1 , -1 < x < 1 \\ 2x ; x \geq 1 \end{cases}$$

14. กราฟแสดงอัตราค่าเช่ารถคนตรี โดยแกน x แทนอายุของผู้เช่ารถ

แกน y แทนราคาบัตร



จากกราฟ ผู้เข้าชมคนแรกที่มียุ่ 60 ปี ต้องเสียค่าบัตรเข้าชมคนตรีเป็นกัเท่า
ของผู้เข้าชมคนตรี ที่มีอายุ 15 ปี

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. 4

จ. จะไม่ต้องเสียเลย

15. กำหนด $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -y = x^2 - 2x - 1\}$

ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และลักษณะของฟังก์ชัน f ก่อข้อใด

ก. เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุด คือ 2

ข. เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุด คือ 1

ค. เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุด คือ 1

ง. เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุด คือ 2

จ. เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุด คือ -1

16. จุดอันดับ $(-1, 0)$ คือจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดของฟังก์ชันในข้อใด

ก. จุดต่ำสุดของ $f(x) = (x - 1)^2$

ข. จุดต่ำสุดของ $f(x) = (-x-1)^2$

ค. จุดสูงสุดของ $f(x) = (1 - x)^2$

ง. จุดสูงสุดของ $f(x) = -(-x - 1)^2$

จ. จุดสูงสุดของ $f(x) = -(x - 1)^2$

17. เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใด ๆ ระยะความสูงของก้อนหิน
จากพื้นเป็นไปตามสมการ $h(t) = 20t - 5t^2$ ก้อนหินที่โยนจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง
เท่าไร (หน่วยเป็นเมตร)

ก. 5 เมตร ข. 10 เมตร

ค. 20 เมตร ง. 30 เมตร

จ. 40 เมตร

18. กำหนด f เป็นฟังก์ชัน และ

1. ถ้า $f: A \xrightarrow{\text{into}} B$ แล้ว $f^{-1}: B \xrightarrow{\text{into}} A$

2. ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$ แล้ว $f^{-1}: B \xrightarrow[\text{into}]{1-1} A$

3. ถ้า $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ แล้ว $f^{-1}: B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$

ข้อใดถูกต้อง

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. ข้อ 1, 2

จ. ข้อ 1, 3

19. กำหนด $f = 2x^3 - 7$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x - 7}$

ข. $f^{-1}(x) = 2x^3 + 7$

ค. $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 7}{2}$

ง. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+7}{2}}$

จ. f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

20. กำหนด $f(x) = -4$ และ $g(x) = 5x^3$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $(f+g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-4}{5}}$

ข. $(f+g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+4}{5}}$

ค. $(f+g)^{-1}(x) = \sqrt{5x^3 - 4}$

ง. $(f+g)^{-1}(x) = \left(\frac{x+4}{5}\right)^3$

จ. $(f+g)^{-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

21. กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันและ

1. $g \circ f$ เท่ากับ $f \circ g$ เสมอ

2. เราจะหา $g \circ f$ ได้ก็ต่อเมื่อ $R_f \subset D_g$

3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแล้วเราสามารถหา $g \circ f$ ได้เสมอ

ข้อใดถูกต้อง

ก. ข้อ 1

ข. ข้อ 2

ค. ข้อ 3

ง. ถูกต้องทั้งสามข้อ

จ. ถูกเพียง 2 ข้อ

22. ฟังก์ชันแต่ละตัวในข้อใดหา $g \circ f$ ไม่ได้

ก. $f(x) = x + 1$

ข. $f(x) = 2x$

ค. $g(x) = x^2$

ง. $g(x) = \sqrt{x}$

ด. $f(x) = x$

จ. $f(x) = \frac{x-1}{2x}$

ข. $g(x) = (x-1)^2$

ค. $g(x) = \frac{x-2}{2}$

ง. ถูกทุกข้อ

23. กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^3 - 1$ ข้อใดคือ $(g \circ f)(x)$

ก. $8x^3 - 1$

ข. $3x^8 - 1$

ค. $8x^3 + 1$

ง. $8x^3$

จ. $3x^8 + 1$

24. กำหนด $g(2x+3) = 3x+2$ แล้วข้อใดคือ $g(x)$

ก. $g(x) = \frac{1}{3}(3x-1)$

ข. $g(x) = 3x-5$

ค. $g(x) = \frac{3}{2}(x-3) - 2$

ง. $g(x) = \frac{1}{2}(3x-5)$

จ. $g(x) = x-1$

25. กำหนด $f(x) = x-1$ และ $g(x) = x^2$ ข้อใดคือค่าของ x เมื่อ

$g(f(x)) = 4$

ก. 0

ข. 3 และ -1

ค. 2 และ -2

ง. 3 และ -3

จ. ข้อ ข และ ข้อ ง ถูกต้อง

26. กำหนด $f(x) = x^2$

$g(x) = 2x - 1$

แล้ว $x^2 - 2x + 1$ หมายถึงข้อใด

ก. $\frac{f}{g}(x)$

ข. $(g \circ g)(x)$

ค. $(f - g)(x)$

ง. $(f + g)(x)$

จ. $(g \circ f)(x)$

27. กำหนด $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ และ $(f - g)(x) = x^2 - 5x + 5$

ข้อใดคือ $g(x)$

ก. $-x^2 - 2x + 3$

ข. $-3x^2 + 2x - 3$

ค. $x^2 + 2x - 3$

ง. $x^2 - 2x + 3$

จ. $3x^2 - 2x + 3$

28. กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชัน และ

1. สามารถหาพีชคณิตฟังก์ชันของ f และ g ได้เสมอถ้า $D_f \cap D_g \neq \{\}$

2. โดเมนของ $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ จะเท่ากันเสมอ

3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน $1-1$ แล้ว $(f+g)$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ข้อใดถูกต้อง

ก. ข้อ 1

ข. ข้อ 2

ค. ข้อ 3

ง. ข้อ 1 และ ข้อ 2

จ. ข้อ 1 และข้อ 3

29. กำหนด $f(x) = x^2$; $D_f = \{x \mid x \geq -2\}$

$g(x) = x + 2$, $D_g = \{x \mid -10 \leq x \leq 50\}$

ข้อใดคือโดเมนของ $\frac{f}{g}$

ก. $\{x \mid x \geq -2\}$

ข. $\{-10 \leq x \leq 50\}$

ค. $\{-2 \leq x \leq 50\}$

ง. $\{-2 < x \leq 50\}$

จ. $\{-2 \leq x < 50\}$

30. กำหนด $f(x) = x^2 + x$; $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$

$g(x) = x^2 - 1$; $D_g = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$

ข้อใดคือเรนจ์ของ

ก. $\{y \mid -\frac{9}{8} \leq y \leq 4\}$

ข. $\{y \mid \frac{1}{4} \leq y \leq 2\}$

ค. $\{y \mid -\frac{9}{8} \leq y \leq 2\}$

ง. $\{y \mid -\frac{9}{8} \leq y \leq 9\}$

จ. $\{y \mid -\frac{9}{8} \leq y < 4\}$

แบบทดสอบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

ให้นักเรียนขีดเครื่องหมาย ✓ หลังข้อนั้นในช่องที่แสดงว่านักเรียนมีความรู้สึก
 "เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง" ตามความรู้สึกที่
 เป็นจริงเฉพาะตัวของท่าน

	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยิ่งเรียนยิ่งน่าสนใจ					
2. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เนื้อหาไม่ยาก					
3. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนมากกว่า วิชาอื่น ๆ					
4. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ควรบังคับเรียนใน ทุกระดับ					
5. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนด้วยความ สนุกสนาน					
6. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนรู้ได้อย่าง กว้างขวาง					
7. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีค่าควรแก่การศึกษา					
8. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าจะใช้เวลาเรียน ให้มากกว่านี้					
9. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ส่งเสริมความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์					

	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
10. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สามารถนำไปใช้ ในชีวิตประจำวัน					
11. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ช่วยในการพัฒนา สมอง					
12. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ทันสมัยและก้าวหน้า อยู่เสมอ					
13. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ทำให้มนุษย์มีเหตุผล มากขึ้น				✓	
14. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนแล้วมีความ รู้สึกภาคภูมิใจ				✓	
15. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นที่ยอมรับมา นานแล้ว					
16. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเนื้อหา ซึ่ง ท้าทายความคิดมนุษย์					
17. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นรากฐานสำคัญ ในการเรียนวิทยาศาสตร์					
18. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สร้างความมั่นใจ ให้กับผู้เรียน					
19. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่คนฉลาดเรียนได้ อย่างรวดเร็ว					

	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
20. คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีรากฐานทาง ความคิดอยู่ในระดับสูง					

แบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. หน่วยการเรียนรู้ทั้ง 3 หน่วยการเรียนรู้ จะมีแบบทดสอบหน่วยละ 2 ชุด
2. เมื่อศึกษาเนื้อหาในหัวข้อเรื่องย่อยของแต่ละหน่วยการเรียนรู้จนจบแล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 1 ของเนื้อหาเรื่องนั้น ถ้านักเรียนไม่สามารถสอบผ่านแบบทดสอบชุดที่ 1 ให้กลับไปศึกษาเนื้อหานั้นใหม่เมื่อพร้อมที่จะทำการทดสอบอีกครั้ง ก็ให้ทำแบบทดสอบชุดที่ 2 ของเนื้อหานั้น ซึ่งเป็นแบบทดสอบคู่ขนานกับชุดที่ 1
3. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบทั้งหมด ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากข้อ ก, ข, ค, ง หรือ จ. โดยแรเงาลงในช่องว่างใต้อักษรที่ต้องการในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง ๐ กำหนด $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x^3 - 1$ ข้อใดคือ $(g \circ f)(x)$

ก. $8x^3 - 1$

ข. $3x^3 - 1$

ค. $8x^3 + 1$

ง. $8x^3$

จ. $3x^3 + 1$

ถ้านักเรียนคิดว่าคำตอบข้อ ก. ถูกที่สุดให้นักเรียนแรเงาในช่องว่างใต้อักษร

ก. ดังนี้

	ก	ข	ค	ง	จ
๐	☒	☐	☐	☐	☐

4. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ เช่น เปลี่ยนจากข้อ ก. เป็นข้อ ค.

ให้ทำดังนี้

	ก	ข	ค	ง	จ
๐	☒	☐	☒	☐	☐

5. แบบทดสอบแต่ละข้อจะมีคำตอบถูกเพียงคำตอบเดียว ข้อใดที่นักเรียนตอบมากกว่า 1 คำตอบ ข้อนั้นถือว่าผิด และไม่ให้คะแนน
6. ห้ามเขียนข้อความใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้ ถ้าต้องการทandaiให้ว่างสำหรับทที่เตรียมไว้ให้หรือ ใช้คานหลังกระดาษคำตอบ

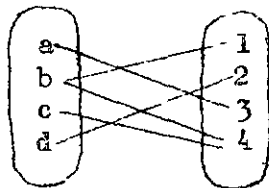
แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 1

เรื่อง 1/1 ความหมายของฟังก์ชัน และการตรวจสอบฟังก์ชัน (ชุดที่ 1)

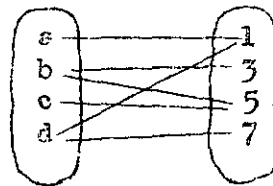
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

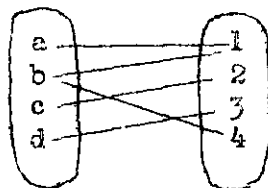
ก.



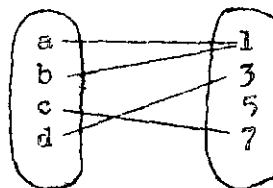
ข.



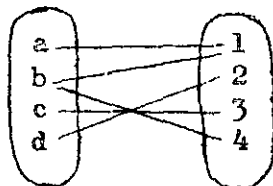
ค.



ง.

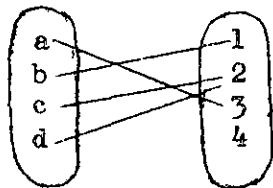


จ.

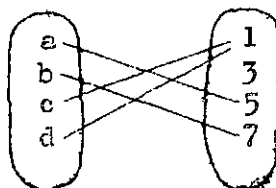


2. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

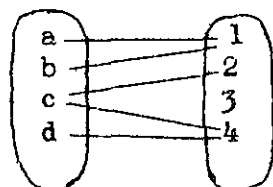
ก.



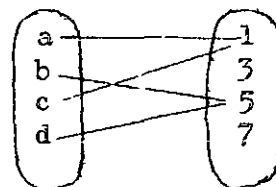
ข.



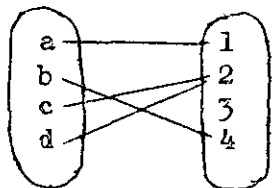
ค.



ง.



จ.



$$\begin{aligned} \text{กำหนด } r_1 &= \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 1)\} \\ r_2 &= \{(1, 2), (3, 4), (1, 4), (2, 4)\} \\ r_3 &= \{(a, b), (c, d), (d, e), (e, b)\} \\ r_4 &= \{(1, 3), (3, 4), (1, 3), (3, 5)\} \end{aligned}$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 4

3. ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

ก. r_1 และ r_2

ข. r_2 และ r_4

ค. r_2 และ r_3

ง. r_1 และ r_3

จ. r_1 และ r_4

8. ความสัมพันธ์ในข้อใด เหมาะสมกับการใช้การตรวจสอบ โดยวิธีคาดคะเน

ก. $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| \}$

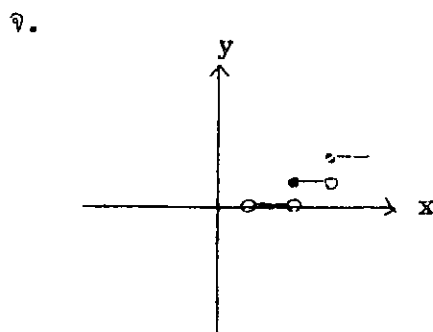
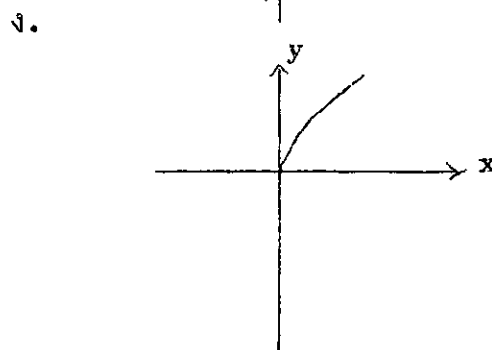
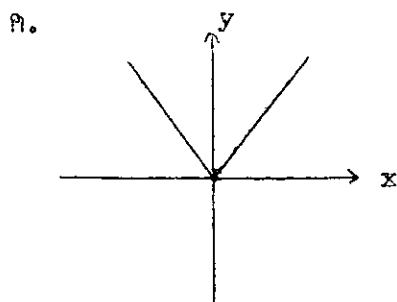
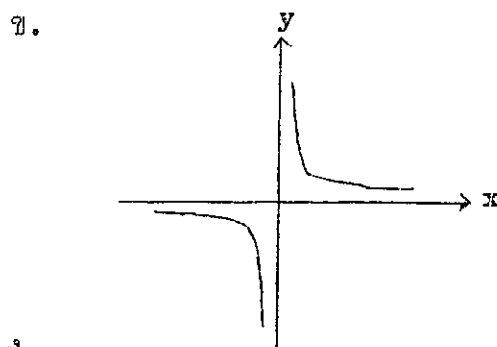
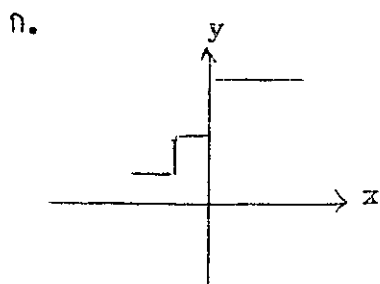
ข. $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \}$

ค. $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x} \}$

ง. ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง

จ. ข้อ ก, ข และ ข้อ ค ถูกต้อง

9. กราฟในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน



10. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| - x \}$$

$$f_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = |y - 2| \}$$

$$f_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 4 - x^2 \}$$

ความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_3

จ. ไม่มีความสัมพันธ์ใดเลยที่เป็นฟังก์ชัน

เรื่องที่ 1/2 ฟังก์ชันจาก A ไป B (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ได้เมื่อใด

ก. $D_f = A$

ข. ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

ก. $R_f \neq A$

ง. ข้อ ก และ ข้อ ข ถูก

จ. ข้อ ข และ ค ถูก

2. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 3, 5\}$ และ

$$r_1 = \{(1, 1), (3, 1), (2, 5), (4, 3)\}$$

$$r_2 = \{(1, 3), (3, 1), (5, 4), (2, 1)\}$$

$$r_3 = \{(1, 5), (2, 1), (4, 1), (3, 5)\}$$

ความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ก. r_1

ข. r_2

ค. r_3

ง. r_1 และ r_2

จ. r_1 และ r_3

3. กำหนด $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ

$$r_1 = \{(1, 5), (3, 1), (5, 2), (7, 4)\}$$

$$r_2 = \{(1, 2), (3, 5), (5, 1), (7, 1), (5, 3)\}$$

$$r_3 = \{(1, 3), (3, 5), (5, 1), (4, 7), (2, 1)\}$$

ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน และเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B

ก. r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชัน ข. r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 : A \longrightarrow B$$

$$r_2 : A \longrightarrow B$$

$$r_2 : B \longrightarrow A$$

$$r_3 : B \longrightarrow A$$

ค. r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน ง. r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 : B \longrightarrow A$$

$$r_2 : B \longrightarrow A$$

$$r_3 : A \longrightarrow B$$

$$r_3 : A \longrightarrow B$$

จ. r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

$$r_1 : A \longrightarrow B$$

$$r_3 : B \longrightarrow A$$

4. กำหนด $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ข้อใด คือค่าของ $f(-2)$

ก. -13

ข. -5

ค. 13

ง. 15

จ. 16

5. กำหนด
$$f(x) = \begin{cases} -2 & ; 1 < x \leq 2 \\ 0 & ; 2 < x \leq 3 \\ 2 & , 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

ข้อใดคือค่าของ $f\left(\frac{5}{2}\right)$

ก. -2

ข. 0

ค. 2

ง. -2 และ 0

จ. 0 และ 2

6. กำหนด $f(x) = -|x - 2|$ ข้อใดคือค่าของ $f(0)$

ก. 0

ข. -4

ค. 4

ง. 2

จ. -2

เรื่องที่ 1/3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกข้อที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

$$\begin{aligned} \text{กำหนด } f_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x \} \\ f_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{5x}{2-x} \} \\ f_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 \} \end{aligned}$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 2

1 ฟังก์ชันในข้อใดมีโดเมนและเรนจ์เท่ากับเซตของจำนวนจริง

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_3

จ. คำตอบข้อ ก - ง ไม่มีข้อใดถูกต้อง

2 โดเมนของฟังก์ชันใด ไม่เท่ากับเซตของจำนวนจริง

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_2

จ. f_2 และ f_3

3 โดเมนของ $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4-x^2} \}$ คือข้อใด

ก. $\{x \mid x \geq 2\}$

ข. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

ค. $\{x \mid x \leq 2\}$

ง. $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$

จ. $\{x \mid x \geq -2\}$

4 ฟังก์ชันในข้อใด เป็น $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ก. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1 \}$

ข. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-2}{2} \}$

ค. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| + 3 \}$

ง. $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x-1} \right\}$

จ. $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \begin{cases} 0 & , x > -1 \\ -1 & ; x \leq -1 \end{cases} \right\}$

5. เวกซ์ของ $f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x + 1| \right\}$ คือเซตใด

ก. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ข. $\{y \mid y \geq 0\}$

ค. $\{y \mid y \geq 1\}$

ง. $\{y \mid y \leq 1\}$

จ. $\{y \mid y \leq 0\}$

6. โดเมนของ $f(x) = \begin{cases} -1 & ; -2 < x \leq 2 \\ 0 & ; 2 < x \leq 3 \\ 1 & ; 3 < x \leq 4 \end{cases}$ คือเซตใด

ก. $\{-2 \leq x \leq 4\}$

ข. $\{-2 < x < 4\}$

ค. $\{-2 < x < 4\}$

ง. $\{-2 < x \leq 4\}$

จ. $\{-2 \leq x \leq 3\}$

เรื่องที่ 1/4 รูปแบบหรือลักษณะของฟังก์ชัน (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

$$\text{กำหนด } f_1 = \{ (1, 4), (2, 5), (3, 5) \}$$

$$f_2 = \{ (1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 5) \}$$

$$f_3 = \{ (1, 4), (2, 5), (3, 6) \}$$

ใช้ตอบคำถามในข้อ 1 - 2

1. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_2

จ. f_2 และ f_3

2. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ Many-to-one

ก. f_1

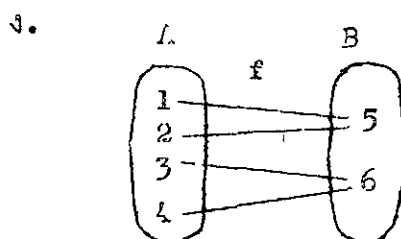
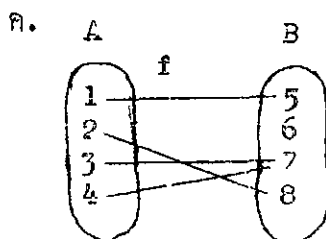
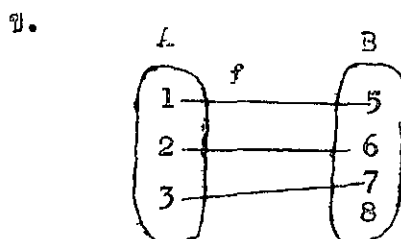
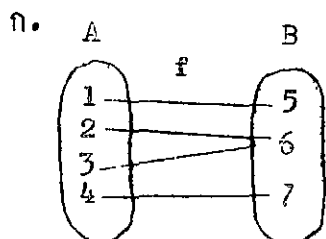
ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_2

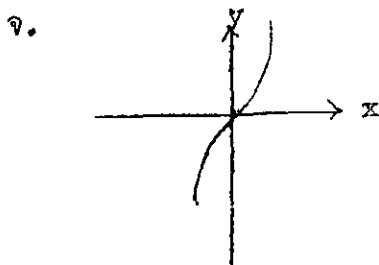
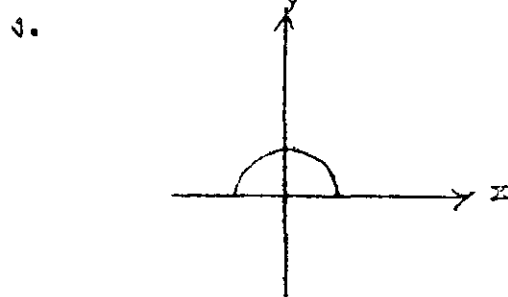
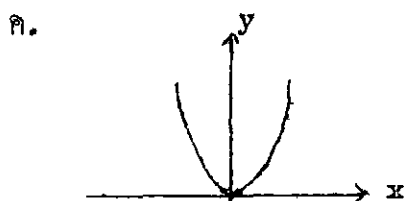
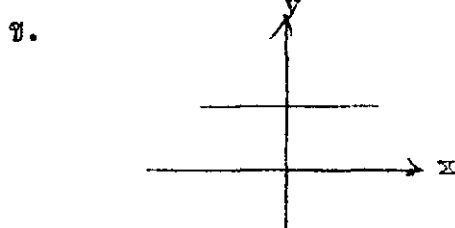
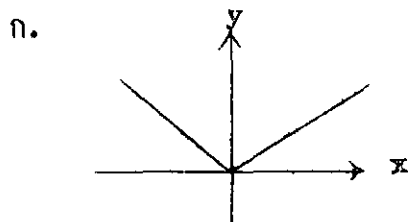
จ. f_2 และ f_3

3. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} B$



จ. ถูกทุกข้อ

4. กราฟของฟังก์ชันในข้อใด เป็นกราฟของฟังก์ชันแบบ 1 - 1



แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 2

เรื่องที่ 2/1-2 พังก์ชันชนิดต่าง ๆ (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

กำหนด $f_1(x) = 2^x - 5$

$$f_2(x) = |x| - 2$$

$$f_3(x) = \frac{2}{x}$$

$$f_4(x) = 5 - \log x$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 2

1. พังก์ชันใดเป็นพังก์ชันพีชคณิต

ก. f_2 และ f_4

ข. f_2 และ f_3

ค. f_1 และ f_4

ง. f_3 และ f_4

จ. f_1 และ f_2

2. พังก์ชันใดเป็นพังก์ชันหรรมาเซนเคนทัล

ก. f_2 และ f_3

ข. f_3 และ f_4

ค. f_1 และ f_3

ง. f_1 และ f_4

จ. f_4

กำหนด $f_1(x) = 2x^2 - 3x - 1$

$$f_2(x) = |x - 2|$$

$$f_3(x) = \frac{3x - 2}{2}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq 4 \\ 3 & ; x > 4 \end{cases}$$

$$f_5(x) = 5x + 1$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 5

3. ข้อใดเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ก. f_2 และ f_5

ข. f_1 และ f_5

ค. f_3 และ f_5

ง. f_2 และ f_3

จ. f_2, f_3 และ f_5

4. ข้อใดเป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_4

จ. f_5

5. ข้อใดเป็นฟังก์ชันควอดราติก

ก. f_5

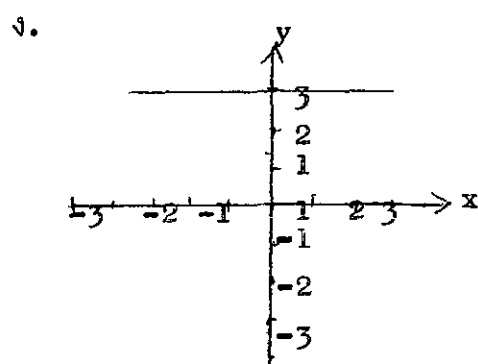
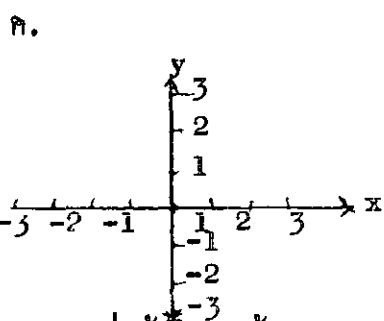
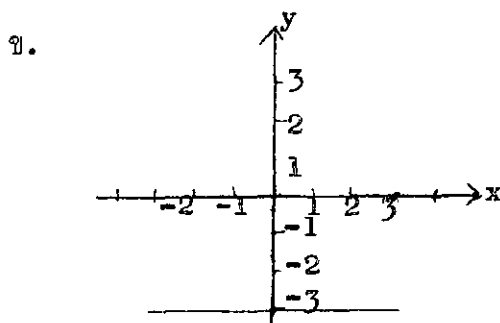
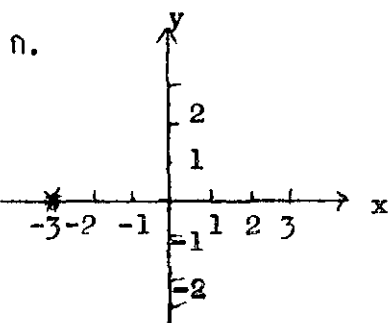
ข. f_4

ค. f_3

ง. f_2

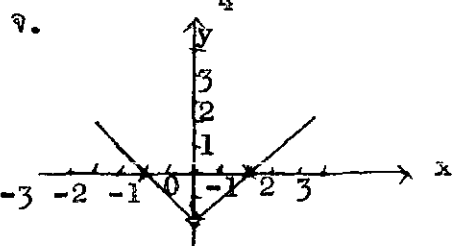
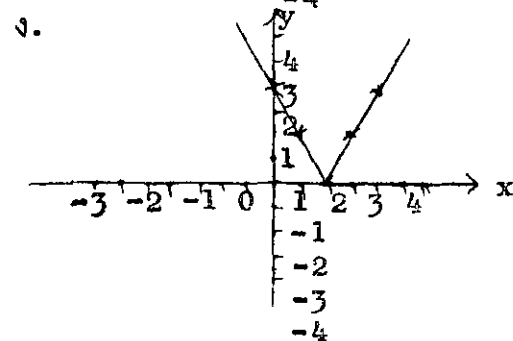
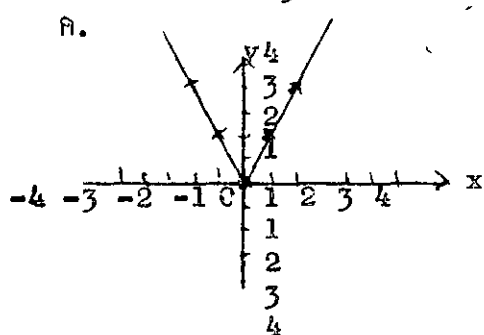
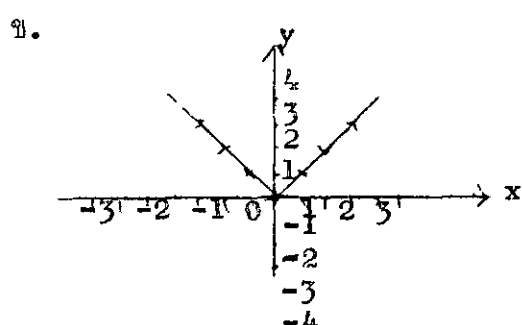
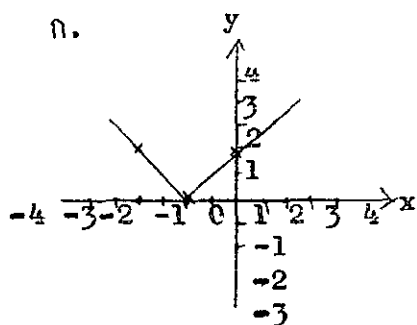
จ. f_1

6. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -3$

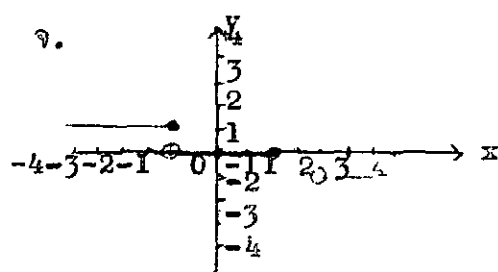
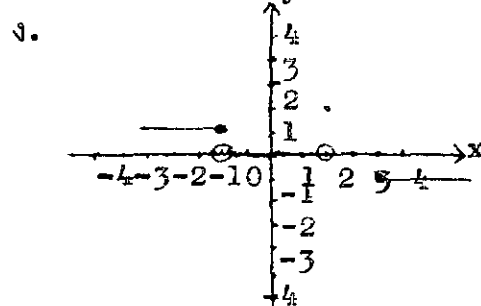
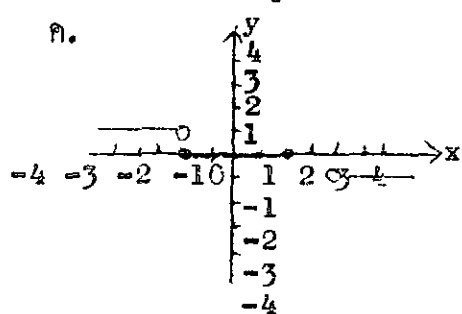
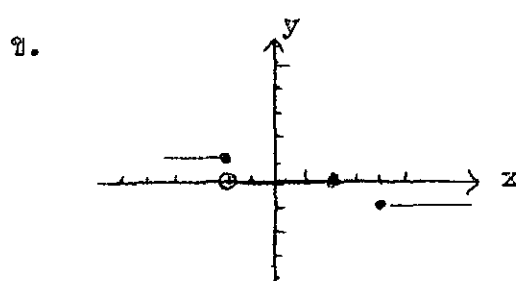
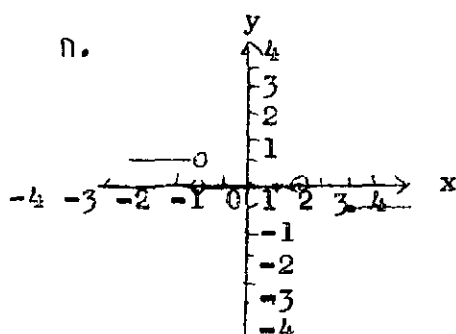


จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

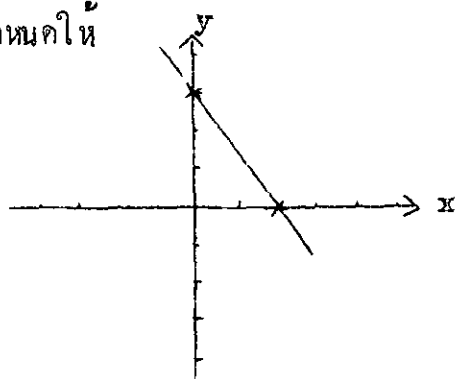
7. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = |2x|$



8. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < -2 \\ 0 & ; -2 < x \leq 2 \\ -1 & ; x \geq 4 \end{cases}$



9. กราฟที่กำหนดให้



เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด

ก. $-2y = -3x + 6$

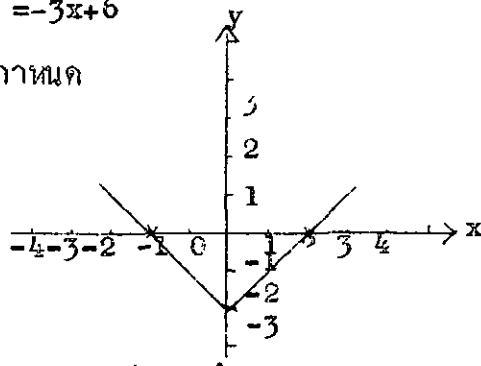
ข. $2y = 3x + 6$

ค. $2y = -3x - 6$

ง. $2y = 3x - 6$

จ. $2y = -3x + 6$

10. กราฟที่กำหนด



เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด

ก. $y = |x| + 2$

ข. $y = |x - 2|$

ค. $y = |x + 2|$

ง. $y = |x| - 2$

จ. $y = |2x| - 2$

11. ข้อใดเป็นจำนวนดีกรีของ $f(x) = 3x^5 - x^3 + 2x - 1$

ก. 9

ข. 8

ค. 5

ง. 3

จ. 1

12. ข้อใดมีจำนวนดีกรีเท่ากับ 3

ก. $f(x) = 3x - 1$

ข. $f(x) = 1 - 2x + x^2$

ค. $f(x) = x^3 - 2x$

ง. $f(x) = 3$

จ. $f(x) = 3x^2 - 5x$

เรื่องที่ 2/3 ฟังก์ชันควอดราติก การเขียนกราฟและการหาค่าสูงสุด สูงสุด (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดเป็นเงื่อนไขของฟังก์ชันควอดราติก

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

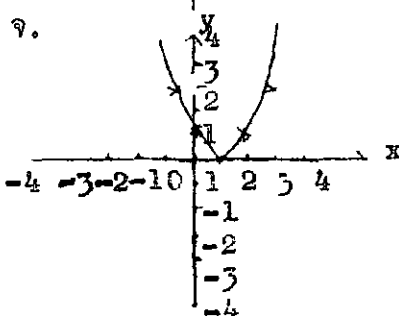
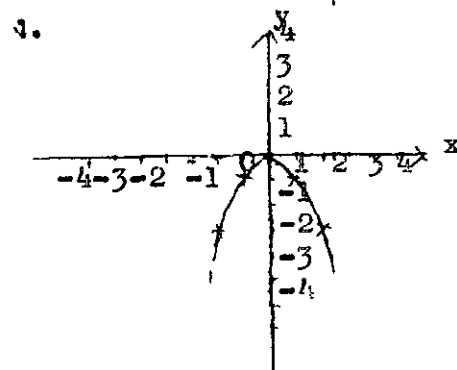
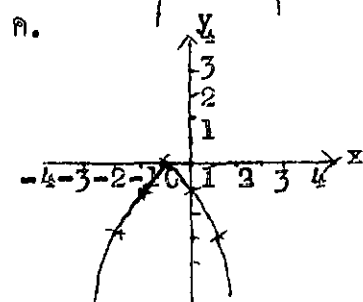
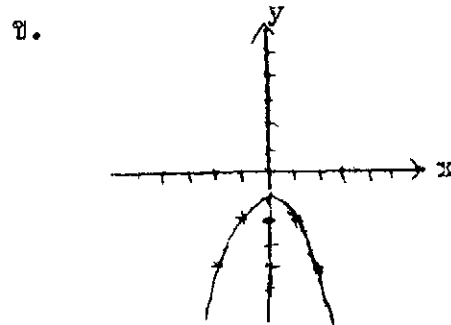
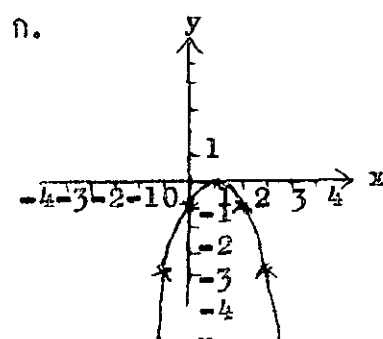
ข. $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ค. $f(x) = ax^2 + b + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

ง. $f(x) = b$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

2. กราฟในข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^2 + 2x - 1$



3. กำหนด $-y = 1 - 2x + x^2$ ลักษณะของฟังก์ชัน และค่าต่ำสุด หรือสูงสุด คือข้อใด
- เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุด คือ 1
 - เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุด คือ 0
 - เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุด คือ 1
 - เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุด คือ -1
 - เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุด คือ $\frac{1}{2}$
4. ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = (-x-1)^2$ คือข้อใด
- ค่าต่ำสุดคือ -1
 - ค่าสูงสุดคือ -1
 - ค่าต่ำสุดคือ 0
 - ค่าสูงสุดคือ 0
 - ไม่มีข้อใดถูกต้อง
5. คู่อันดับ $(0, 4)$ คือ จุดต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันในข้อใด
- จุดต่ำสุดของ $f(x) = 4 - x^2$
 - จุดต่ำสุดของ $f(x) = x^2 + 4$
 - จุดสูงสุดของ $f(x) = (x + 4)^2$
 - จุดต่ำสุดของ $f(x) = - (x + 4)^2$
 - ถูกทุกข้อ
6. เจ้าของหอพักแห่งหนึ่ง พบว่าผลกำไรมีความสัมพันธ์กับจำนวนห้องดังนี้
 $p = 2s^2 + 88s$ เมื่อ p เป็นกำไร s เป็นจำนวนห้อง ถ้าต้องการผลกำไรมากที่สุดจะต้องมีห้องกี่ห้อง
- 11
 - 22
 - 44
 - 1368
 - 1936

เรื่องที่ 2/4 ฟังก์ชันอินเวอร์ส (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า $f : A \longrightarrow B$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันรูปแบบใด อินเวอร์สของฟังก์ชัน

f จึงจะเป็นฟังก์ชันจาก $B \longrightarrow A$ เสมอ

ก. $f : A \xrightarrow[\text{into}]{1-1} B$ ข. $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

ค. $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{many-to-one}} B$ ง. $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{many-to-one}} B$

จ. ถูกทุกข้อ

2. ถ้า $f(x) = 3x - 2$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

ก. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ ข. $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

ค. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ ง. $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

จ. $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2}$

3. อินเวอร์สของฟังก์ชันในข้อใด เป็นฟังก์ชัน จาก $R \longrightarrow R$

ก. $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{2x-2}{x}\}$ ข. $f = \{(x,y) \in R \times R \mid 2y = |x|\}$

ค. $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 5x + 1\}$ ง. $f = \{(x,y) \in R \times R \mid xy = 1\}$

จ. $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1\}$

4. กำหนดความสัมพันธ์ f จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จะได้ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

2. ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันเสมอ

ข้อความใดกล่าวได้ถูกต้อง

ก. ข้อ 1

ข. ข้อ 2

ค. ข้อ 3

ง. ข้อ 1 กับข้อ 2

จ. ข้อ 1 กับข้อ 3

5. กำหนด $f(x) = 3x - 5$ ข้อใดคือ $f^{-1}(-4)$

ก. $-\frac{1}{3}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. 3

ง. -3

จ. 0

6. กำหนด $f(x) = \frac{x-2}{3}$ ข้อใดคือ $f^{-1}(0)$

ก. -1

ข. 1

ค. -2

ง. 2

จ. 0

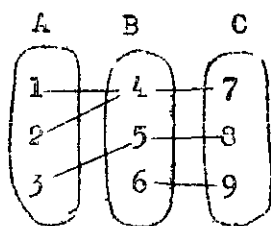
แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3

เรื่องที่ 3/1 - 2 คอมโพลีฟังก์ชัน (ชุดที่ 1)

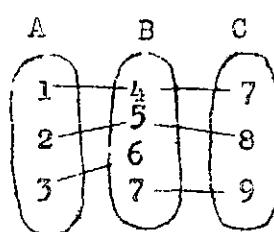
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. แผนภาพในข้อใด สามารถสร้างคอมโพลีฟังก์ชันจาก A ไป C ได้

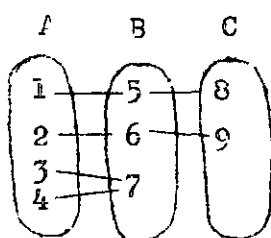
ก.



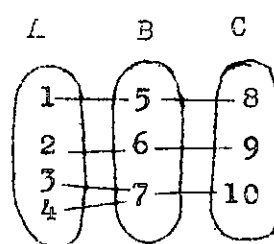
ข.



ค.



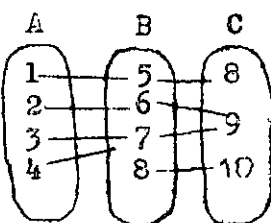
ง.



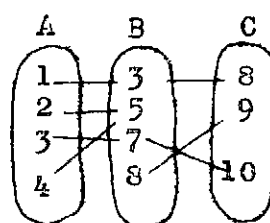
จ. ข้อ ก และข้อ ง ถูกต้อง

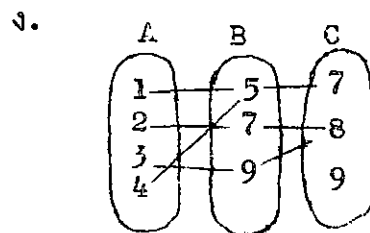
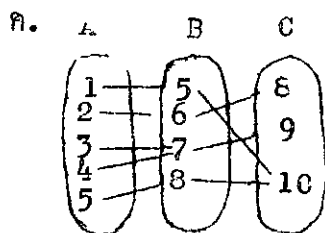
2. แผนภาพในข้อใด ไม่สามารถสร้างคอมโพลีฟังก์ชันจาก A ไป C ได้

ก.



ข.





จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

3. กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เงื่อนไขในข้อใดสามารถสร้าง $g \circ f$ ได้

ก. $R_f \subset D_g$

ข. $D_f \subset R_g$

ค. $R_f \subset R_g$

ง. $R_g \subset D_f$

จ. $D_g \subset R_f$

4. กำหนด $f = \{(1, q), (2, r), (3, p)\}$ และ $g = \{(p, a), (q, b), (r, e), (s, d)\}$ แล้ว $g \circ f$ คือข้อใด

ก. $\{(1, b), (2, c), (3, d)\}$

ข. $\{(1, b), (2, c), (3, a)\}$

ค. $\{(1, b), (2, c), (3, c)\}$

ง. $\{(1, b), (2, b), (3, a)\}$

จ. หา $g \circ f$ ไม่ได้

5. ฟังก์ชันแต่ละคู่ในข้อใดที่หา $g \circ f$ ไม่ได้

ก. $f(x) = 2x$

ข. $f(x) = x$

$g(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{x}$

ค. $f(x) = x$

ง. $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$

$g(x) = (x + 2)^2$

$g = \{(2, 4), (4, 8), (8, 12)\}$

จ. ข้อ ก กับข้อ ค ถูกต้อง

กำหนด $f(x) = x^2$ และ

$$g(x) = x^3 + 1$$

ใช้ตอบคำถามในข้อ 6 - 8

6. $(g \circ f)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^5 + 1$

ข. $x^3 + x^2 + 1$

ค. $x^6 + 1$

ง. $x + 1$

จ. $x^6 + x^2$

7. $(g \circ f)(-2)$ คือข้อใด

ก. 68

ข. 65

ค. -1

ง. -3

จ. -31

8. $f(g(x))$ คือข้อใด

ก. $2x^3 + 2$

ข. $x^6 + 2x^3$

ค. $x^6 + x^3 + 1$

ง. $x^6 + 2x^3 + 1$

จ. $2x^6 + 1$

9. กำหนด $g(x) = x+1$ และ $(g \circ f)(x) = x^2 + x + 5$ ข้อใดคือ $f(x)$

ก. x^2

ข. $x^2 + 4$

ค. $x^2 + x + 4$

ง. $x^2 + 2x + 6$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

10. กำหนด $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2$ ข้อใดคือค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. $\frac{1}{2}$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

11. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 3, 4, 5\}$ และ $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ แล้วข้อความในข้อใดถูกต้อง

ก. $f^{-1} \circ f$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B

ข. $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป A

ค. $f^{-1} \circ f$ เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป A

ง. $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

12. กำหนด $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x - 1$; $h(x) = 2x^2$
ข้อใดคือค่าของ $(g \circ (h \circ f))(1)$

ก. -1

ข. 7

ค. 15

ง. 16

จ. 17

เรื่องที่ 3/3 - 4 ฟังก์ชันพหุนาม (ชุดที่ 1)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน แล้วเงื่อนไขในข้อใด สามารถหาฟังก์ชันพหุนามได้

ก. $D_f \cap D_g \neq \{\}$

ข. $D_f \cap D_g = D_f$

ค. $D_f \cap D_g = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

ง. $D_f \cap D_g = \{x | x \leq 0\}$

จ. ถูกทุกข้อ

กำหนด $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

$g = \{(1, -3), (2, 2), (3, 7), (6, 9)\}$

ใช้ตอบคำถามข้อ 2 - 3

2. $(f - g)$ คือข้อใด

ก. $\{(1, 5), (2, 3), (3, -1)\}$

ข. $\{(1, 5), (2, 5), (3, -1), (4, -1)\}$

ค. $\{(1, 5), (2, 3), (3, -1), (6, -1)\}$

ง. $\{(1, 5), (2, 3), (3, -1), (4, -1), (6, 1)\}$

จ. ถูกทุกข้อ

3. โดเมนของ $(f + g)$ คือข้อใด

ก. $\{1, 2, 3, 4\}$

ข. $\{1, 2, 3\}$

ค. $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

ง. $\{1, 2, 3, 6\}$

จ. $\{2, 3, 4, 6\}$

กำหนด $f(x) = x^2 - 4$

$g(x) = x - 2$

ใช้ตอบคำถามข้อ 4 - 7

4. $(f + g)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 - 6$

ค. $x^2 + x + 6$

จ. $x^2 + x - 6$

ข. $x^2 - x + 6$

ง. $x^2 + 6x$

5. $(f - g)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 - 6$

ค. $x^2 + x + 2$

จ. $x^2 + x - 2$

ข. $x^2 - 2$

ง. $x^2 - x - 2$

6. $(f \cdot g)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 = 4x$

ค. $x^3 - 6x^2 + 8$

จ. $x^3 + 2x^2 - 4x + 8$

ข. $x^3 - 4x$

ง. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

7. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ คือข้อใด

ก. $x + 2$

ค. $x^2 + 2$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

กำหนด $f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = 2x$

ใช้ตอบคำถามข้อ 8 - 10

8. $(f - g)(0)$ คือข้อใด

ก. -2

ค. 0

จ. 2

ข. -1

ง. 1

9. $(f \circ g)(-1)$ คือข้อใด

ก. -4

ข. -2

ค. 0

ง. 2

จ. 4

10. โดเมนของ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ คือข้อใด

ก. $\mathbb{R}$

ข. $\mathbb{R}^+$

ค. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq -2\}$

ง. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq 2\}$

จ. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq 0\}$

11. กำหนด $(f+g)(x) = 5x^2 + 2$ และ $g(x) = 2x^2 - 3x$ แล้ว $f(x)$ คือข้อใด

ก. $-3x^2 + 3x + 2$

ข. $-3x^2 + 3x - 2$

ค. $5x^2 + 3x + 2$

ง. $5x^2 - 3x - 2$

จ. $3x^2 + 3x - 2$

12. กำหนด $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x$ และ $f(x) = 3x$ แล้ว $g(x)$ คือข้อใด

ก. $x - 2$

ข. $x^2 - 2$

ค. $3x - 2$

ง. $3x^2 - 2x$

จ. $x^2 - 2x$

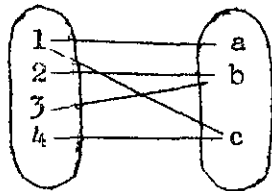
แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 1

เรื่อง 1/1 ความหมายของฟังก์ชัน (ชุดที่ 2)

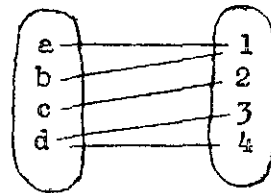
จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด ของคำถามแต่ละคำถามเกี่ยวกับ

1. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

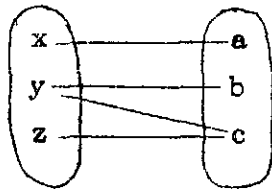
ก.



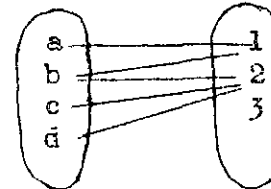
ข.



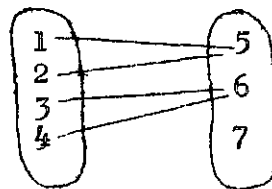
ค.



ง.

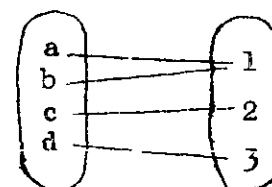


จ.

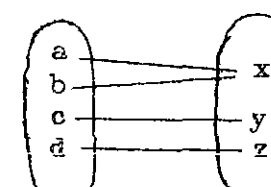


2. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

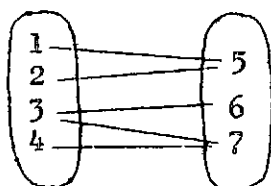
ก.



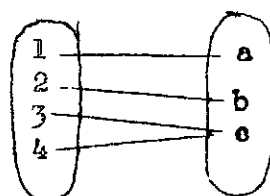
ข.



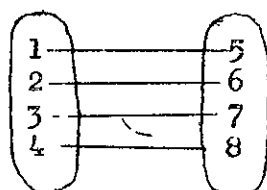
ค.



ง.



จ.



กำหนด $r_1 = \{ (1, 4), (2, 1), (3, 2), (2, 1) \}$
 $r_2 = \{ (1, 5), (2, 5), (1, 6), (3, 7) \}$
 $r_3 = \{ (1, a), (2, a), (3, c), (4, c) \}$
 $r_4 = \{ (a, 1), (b, 2), (c, 2), (a, 1) \}$

ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 4

3. ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

ก. r_1 และ r_2

ข. r_2 และ r_4

ค. r_1 และ r_4

ง. r_1 และ r_3

จ. r_3 และ r_4

4. ความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. r_1 และ r_2

ข. r_2 และ r_4

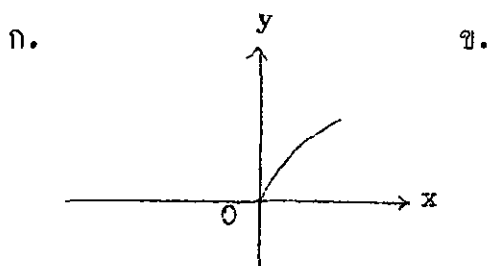
ค. r_1 และ r_4

ง. r_2 และ r_3

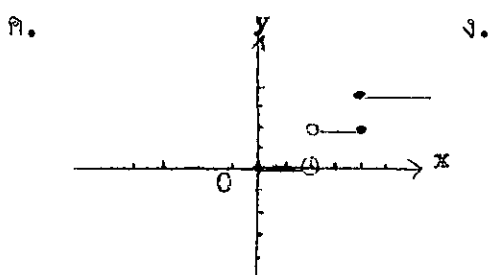
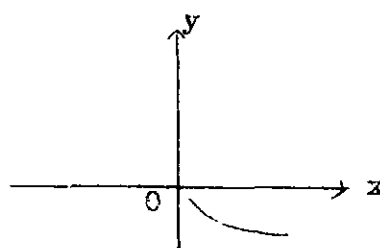
จ. r_3 และ r_4

5. ถ้า f เป็นความสัมพันธ์แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ
- ถ้า $(a,b) \in f$ และ $(b,c) \in f$ แล้ว $b = c$
 - ถ้า $(a,b) \in f$ และ $(c,d) \in f$ แล้ว $a = c$
 - ถ้า $(a,b) \in f$ และ $(c,d) \in f$ แล้ว $b = d$
 - ถ้า $(a,b) \in f$ และ $(a,c) \in f$ แล้ว $b = c$
 - ไม่มีข้อใดถูกต้อง
6. ข้อใดเป็นหลักเกณฑ์การตรวจสอบฟังก์ชันโดยวิธีเขียนกราฟของความสัมพันธ์
- ดูจำนวนจุดตัดที่เส้นตรง ที่ลากขนานกับแกน y ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์
 - ดูจำนวนจุดตัดที่เส้นตรง ที่ลากขนานกับแกน x ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์
 - ดูจำนวนจุดตัดที่เส้นตรงลากขนานกับแกน x และ y ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์
 - ถูกทุกข้อ
 - ผิดทุกข้อ
7. ข้อใดเป็นหลักเกณฑ์ในการตรวจสอบฟังก์ชันโดยวิธีสมมติว่า
- กำหนด (a,c) และ (b,c) อยู่ใน r แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $a = c$
 - กำหนด (a,b) และ (a,c) อยู่ใน r แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $b = c$
 - กำหนด (a,b) และ (c,d) อยู่ใน r แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $a = c$
 - กำหนด (a,b) และ (c,d) อยู่ใน r แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $b = d$
 - ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง
8. ความสัมพันธ์ในข้อใดเหมาะสมกับการใช้การตรวจสอบโดยวิธีคาดคะเน
- $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| = x\}$
 - $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
 - $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$
 - ข้อ ก และข้อ ค ถูกต้อง
 - ข้อ ก ข และ ค ถูกต้อง

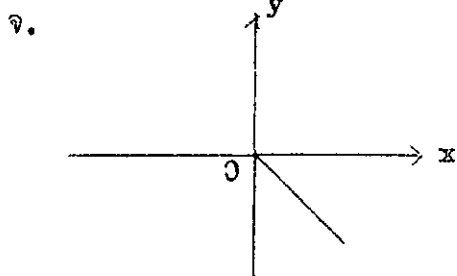
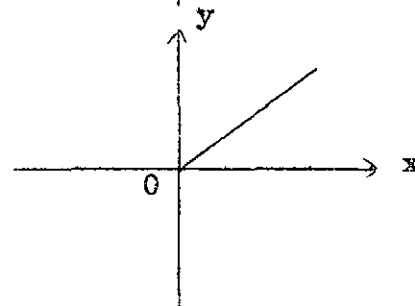
9. กราฟในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน



ข.



ง.



10. กำหนด $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$
 $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 4\}$
 $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| - 2 = x\}$

ความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชัน

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_3

จ. f_2 และ f_3

เรื่องที่ 1/2 ฟังก์ชันจาก A ไป B (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า g เป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปยัง C เราจะเรียก g ว่าเป็นฟังก์ชัน จาก B ไป C ได้เมื่อไร

ก. $D_g = B$

ข. ถ้า $(x, y) \in g$ และ $(x, z) \in g$ แล้ว $y = z$

ค. $D_g = C$

ง. ข้อ ก และ ข ถูก

จ. ข้อ ข และ ค ถูก

2. กำหนด $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{1, 3, 5\}$ และ

$$r_1 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 1), (d, 3)\}$$

$$r_2 = \{(a, 1), (c, 3), (d, 5)\}$$

$$r_3 = \{(c, 1), (b, 3), (a, 5), (d, 3)\}$$

ความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ก. r_1

ข. r_2

ค. r_3

ง. r_1 และ r_2

จ. r_1 และ r_3

3. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5\}$ และ

$$r_1 = \{(1, 1), (3, 5), (5, 5), (4, 1), (2, 3)\}$$

$$r_2 = \{(1, 4), (7, 3), (5, 5), (1, 1), (3, 2)\}$$

$$r_3 = \{(5, 4), (7, 2), (1, 1), (3, 3)\}$$

ความสัมพันธ์ใด เป็นฟังก์ชันและเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B

ก. r_1 และ r_2 เป็นฟังก์ชัน ข. r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

$$r_1: A \longrightarrow B$$

$$r_1: A \longrightarrow B$$

$$r_2: B \longrightarrow A$$

$$r_3: A \longrightarrow B$$

ค. r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน ง. r_1 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

$$r_2: B \longrightarrow A$$

$$r_1: A \longrightarrow B$$

$$r_3: B \longrightarrow A$$

$$r_3: B \longrightarrow A$$

จ. ถูกทุกข้อ

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x < 2 \\ 6 & 2 \leq x < 4 \\ 0 & x \geq 4 \end{cases}$

ก. 0

ค. 4

จ. 6

5. กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ค่าของ $f(3)$ คือข้อใด

ก. -1

ข. 0

ค. 1

ง. -1 และ 0

จ. 0 และ 1

6. กำหนด $f(x) = |2x| - 2$ ค่าของ $f(-1)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. 4

ค. -4

ง. 2

จ. ไม่มีข้อใดถูก

เรื่องที่ 1/3 โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

$$\begin{aligned} \text{กำหนด } f_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{x} \right\} \\ f_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2 - 1 \right\} \\ f_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{2} - 3 \right\} \end{aligned}$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 2

1. ฟังก์ชันในข้อใด มีโดเมนและเรนจ์เท่ากับเซตของจำนวนจริง

ก. f_1	ข. f_2
ค. f_3	ง. f_1 และ f_2
จ. f_2 และ f_3	

2. โดเมนของฟังก์ชันใดไม่เท่ากับเซตของจำนวนจริง

ก. f_1	ข. f_2
ค. f_3	ง. f_1 และ f_2
จ. f_1, f_2 และ f_3	

3. โดเมนของ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{3-x^2}\}$ คือข้อใด

ก. $\{x \mid x \geq 3\}$	ข. $\{x \mid x \leq -\sqrt{3}\}$
ค. $\{x \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$	ง. $\{x \mid -3 < x < \sqrt{3}\}$
จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง	

4. ฟังก์ชันในข้อใดเป็น $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ก. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x-2| \}$

ข. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \begin{cases} -1 & ; x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \}$

ค. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{x+2}{2x} \}$

ง. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy = 1 \}$

จ. $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{3x-2}{5} \}$

5. เรนจ์ของ $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| - 2 \}$ คือข้อใด

ก. $\{ y / y \geq -2 \}$ ข. $\{ y / y \geq -1 \}$

ค. $\{ y / y \geq 0 \}$ ง. $\{ y / y \geq 1 \}$

จ. $\{ y / y \geq 2 \}$

6. โดเมนของ $f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ -1 & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ คือข้อใด

ก. $\{ -1, 0, 1 \}$ ข. $\{ -1 \leq x \leq 2 \}$

ค. $\{ -1 \leq x \leq 2 \}$ ง. $\{ -1, 0, 1, 2 \}$

จ. $\{ -1 < x < 2 \}$

เรื่องที่ 1.4 รูปแบบของฟังก์ชัน (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด. ของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว.

$$\text{กำหนด } f_1 = \{(a,1), (b,2), (c,1)\}$$

$$f_2 = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,2)\}$$

$$f_3 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e)\}$$

ใช้แทนคำตอบในข้อ 1 - 2

1. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_2

จ. f_2 และ f_3

2. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ Many - to - one

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

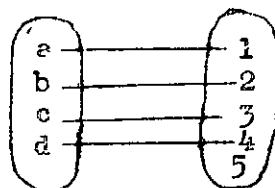
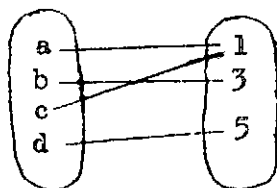
ง. f_1 และ f_2

จ. f_1 และ f_3

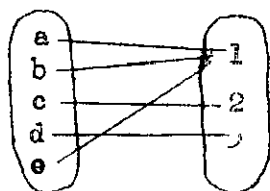
3. ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ $f : A \xrightarrow[\text{into}]{\text{Many - to - one}} B$

ก.

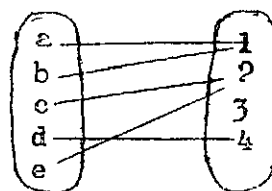
ข.



ค.



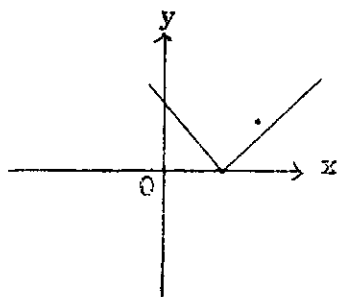
ง.



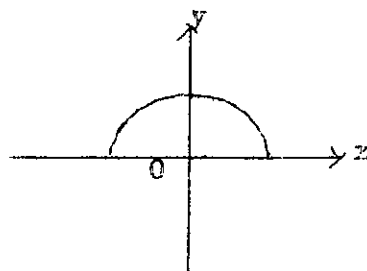
จ. ถูกทุกข้อ

4. กราฟของฟังก์ชันในข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชันแบบ 1 - 1

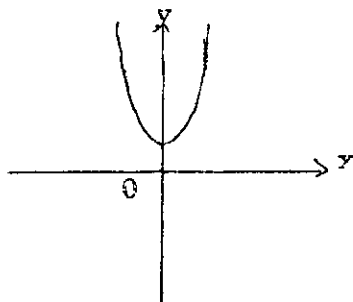
ก.



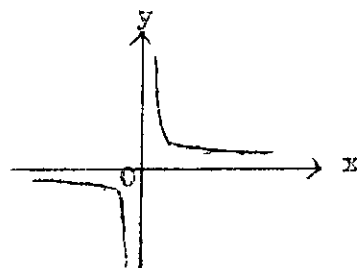
ข.



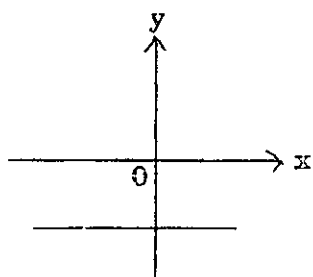
ค.



ง.



จ.



5. กำหนด $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| - 1\}$
 $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{3x-1}{2}\}$
 $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{2} - 3\}$

ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันแบบ $f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}$

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_1 และ f_3

จ. f_2 และ f_3

6. เงื่อนไขของฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันแบบ $f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{into}]{1-1} \mathbb{R}$
เมื่อ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\}$

ก. $y = \frac{2x}{2x+1}$

ข. $y = \frac{x}{2x-1}$

ค. $y = 2x - 1$

ง. $y = \frac{2x-2}{x}$

จ. $y = \frac{2x-1}{2x+1}$

เรื่องที่ 2/1 - 2 ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

กำหนด $f_1(x) = x^{2x} - 3$

$$f_2(x) = \left| \frac{x}{2} - 1 \right|$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2}$$

$$f_4(x) = \log x - 2$$

ใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 2

1. ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชันพีชคณิต

ก. f_1 และ f_2

ข. f_2 และ f_3

ค. f_3 และ f_4

ง. f_1 และ f_4

จ. f_2 และ f_4

2. ฟังก์ชันใด เป็นฟังก์ชันทราแซนเซนเดนทัล

ก. f_1 และ f_3

ข. f_2 และ f_4

ค. f_3 และ f_4

ง. f_1 และ f_4

จ. f_2 และ f_3

กำหนด $f_1(x) = \frac{2x-3}{3}$

$$f_2(x) = |x| + 2$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -2 & ; x \leq 0 \\ 4 & ; x \geq -1 \end{cases}$$

$$f_4(x) = 5x+2$$

3. ข้อใดเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ก. f_2

ข. f_1 และ f_2

ค. f_1 และ f_4

ง. f_3

จ. f_2 และ f_3

4. ข้อใดเป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ก. f_1

ข. f_2

ค. f_3

ง. f_4

จ. f_2 และ f_3

5. ข้อใดเป็นฟังก์ชันควอดราติก

ก. f_1

ข. f_2

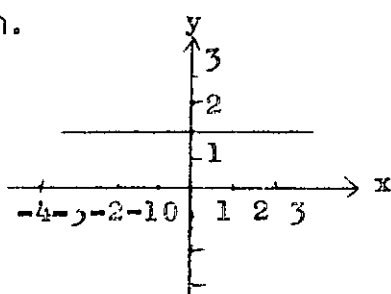
ค. f_3

ง. f_4

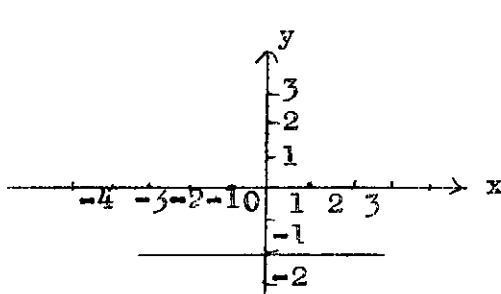
จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

6. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2$

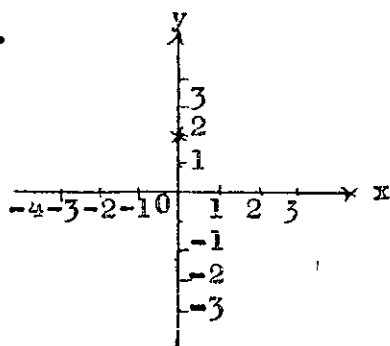
ก.



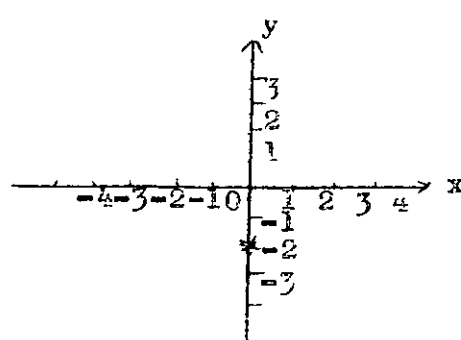
ข.

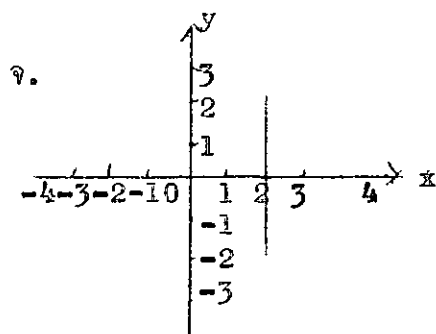


ค.

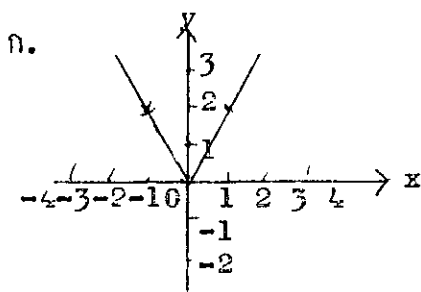


ง.

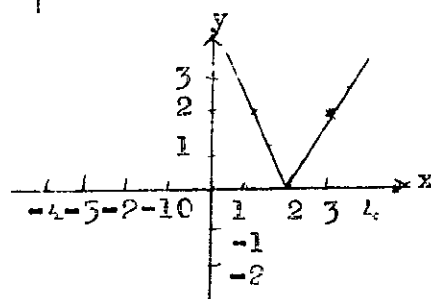




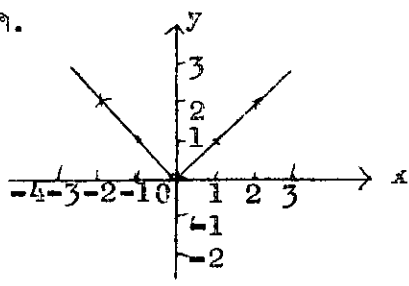
7. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = |-2x|$



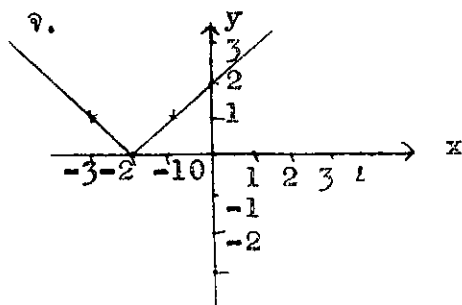
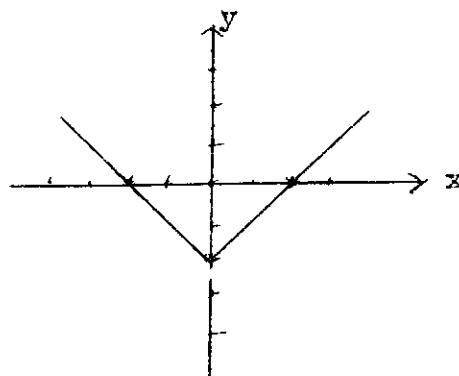
ข.



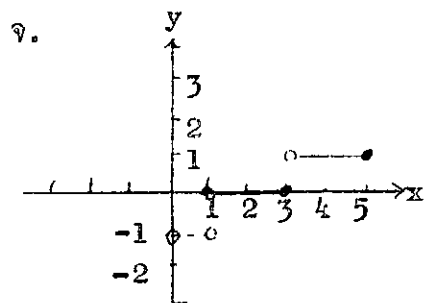
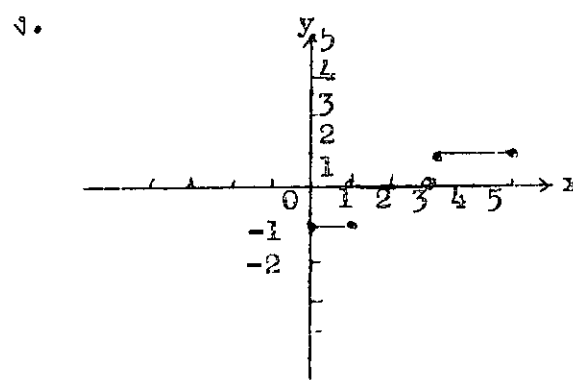
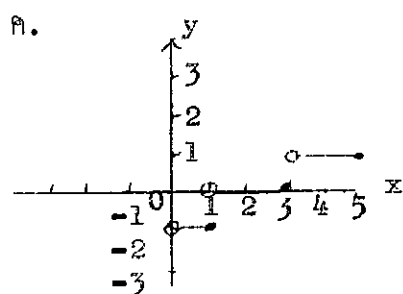
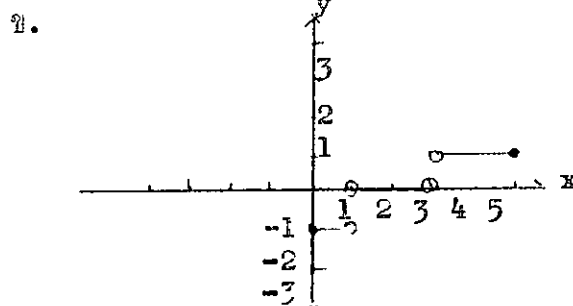
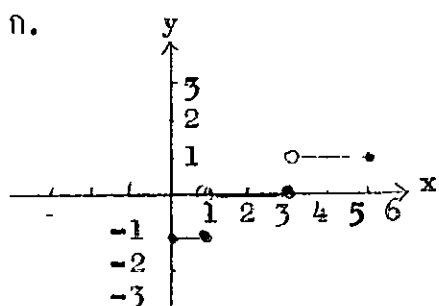
ค.



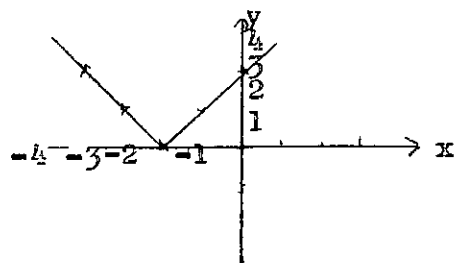
ง.



8. ข้อใดคือกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} -1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; 1 < x \leq 3 \\ 1 & ; 3 < x \leq 5 \end{cases}$



9. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด



ก. $y = |x| + 2$

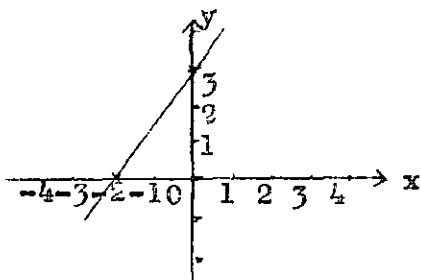
ข. $y = |x - 2|$

ค. $y = |x + 2|$

ง. $y = |x| - 2$

จ. $y = |2x| - 2$

10. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด



ก. $-2y = -3x + 6$ ข. $2y = 3x + 6$

ค. $2y = -3x - 6$ ง. $2y = 3x - 6$

จ. $2y = -3x + 6$

11. ฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^4 - x^3 - 7$ จะมีกี่รากที่เท่ากับ 0

ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. 3

จ. 4

12. ฟังก์ชันพหุนามในข้อใดมีดีกรีเท่า 2

ก. $f(x) = 2x - 1$ ข. $f(x) = 1 + 2x - x^2$

ค. $f(x) = x^3 - 2x$ ง. $f(x) = 2$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

เรื่องที่ 2/3 ฟังก์ชันควอดราติก การเขียนกราฟ และการหาค่าต่ำสุด สูงสุด (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดเป็นเงื่อนไขฟังก์ชันควอดราติก

ก. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

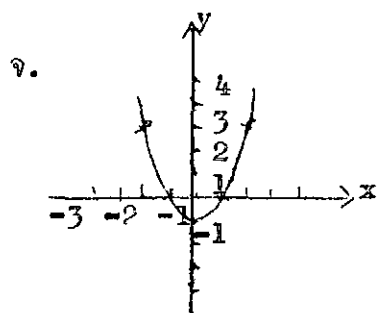
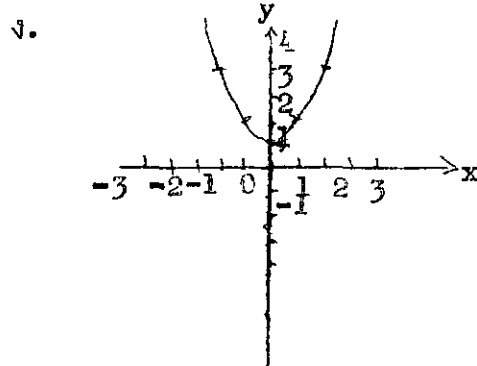
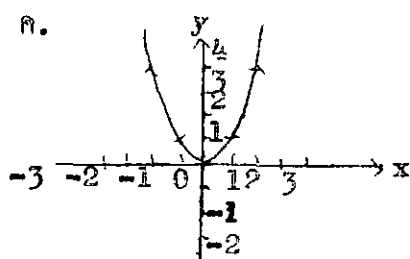
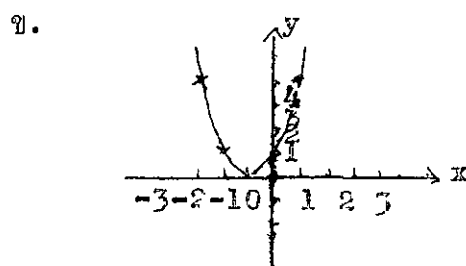
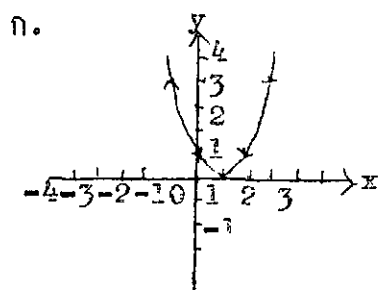
ข. $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

ค. $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

ง. $f(x) = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

2. กราฟในข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 1 - 2x + x^2$



3. กำหนด $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / -2y = 2x^2 - 4x + 2 \}$ ลักษณะของฟังก์ชันและค่าต่ำสุดหรือสูงสุดคือข้อใด
- เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุดคือ 1
 - เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุดคือ 1
 - เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุดคือ 0
 - เป็นกราฟคว่ำ ค่าสูงสุดคือ 0
 - เป็นกราฟหงาย ค่าต่ำสุดคือ -1
4. ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = -(1-x)^2$ คือข้อใด
- ค่าสูงสุดคือ 0
 - ค่าต่ำสุดคือ 0
 - ค่าสูงสุดคือ -1
 - ค่าต่ำสุดคือ -1
 - ค่าสูงสุดคือ 1
5. ค่าอันดับ $(-4, 0)$ คือจุดต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน ในข้อใด
- จุดต่ำสุดของ $f(x) = -(x+4)^2$
 - จุดสูงสุดของ $f(x) = (x-4)^2$
 - จุดสูงสุดของ $f(x) = -(x-4)^2$
 - จุดต่ำสุดของ $f(x) = (x-4)^2$
 - ถูกทุกข้อ
6. ในวงจรไฟฟ้าซึ่งมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 110 โวลต์ และมีความต้านทาน 11 โอห์ม ถ้ามีกระแสไฟฟ้า I ไหลผ่านวงจรนี้ กำลังไฟฟ้า (มีหน่วยเป็นวัตต์) จะได้จากสมการ $W = 110I + 11 I^2$ จงหาค่าสูงสุดของกำลังไฟฟ้าที่ได้รับจากวงจรนี้
- 175 วัตต์
 - 275 วัตต์
 - 625 วัตต์
 - 875 วัตต์
 - 975 วัตต์

เรื่องที่ 2/4 ฟังก์ชันอินเวอร์ส (ชุดที่ 2)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า $f : x \longrightarrow y$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันรูปแบบใด อินเวอร์สของฟังก์ชัน f จึงเป็นฟังก์ชันจาก $y \longrightarrow x$

ก. $f : x \xrightarrow{\text{onto}} y$ ข. $f : x \xrightarrow{\text{many-to-one}} y$

ค. $f : x \xrightarrow{\text{into}} y$ ง. $f : x \xrightarrow{\text{many-to-one}} y$

จ. ถูกทุกข้อ

2. ถ้า $f(x) = \frac{2x-3}{2}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

ก. $\frac{2x-3}{2}$ ข. $\frac{2x+3}{2}$

ค. $\frac{3x-2}{3}$ ง. $\frac{3x+2}{3}$

จ. $\frac{3x-2}{2}$

3. อินเวอร์สของฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ก. $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x-2|\}$

ข. $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

ค. $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x^2 - 1\}$

ง. $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\}$

จ. $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-2}{3}\}$

4. กำหนดความสัมพันธ์ r จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า r เป็นฟังก์ชันแล้ว r^{-1} จะเป็นฟังก์ชันเสมอ

2. ถ้า r^{-1} เป็นฟังก์ชันแล้ว จะได้ r เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1

3. ถ้า r เป็นฟังก์ชันแบบ 1 - 1 จะได้ r^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ข้อความใดกล่าวถูกต้อง

ก. ข้อ 1

ข. ข้อ 2

ค. ข้อ 3

ง. ข้อ 1 กับข้อ 2

จ. ข้อ 2 กับข้อ 3

5. กำหนด $f(x) = 2x + 5$ ข้อใดคือ $f^{-1}(1)$

ก. 0

ข. -1

ค. $-\frac{3}{2}$

ง. -2

จ. $-\frac{5}{2}$

6. กำหนด $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ ข้อใดคือ $f^{-1}(-3)$

ก. 0

ข. 4

ค. -4

ง. 6

จ. -6

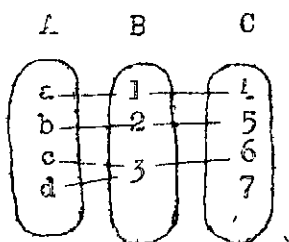
แบบทดสอบประจำหน่วยที่ 3

เรื่องที่ 3/1 - 2 คอมโพสิทฟังก์ชัน (ชุดที่ 2)

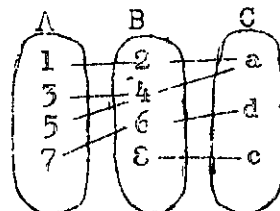
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. แผนภาพในข้อใด ไม่สามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันจาก A ไป ได้

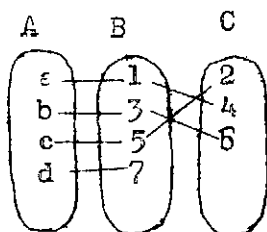
ก.



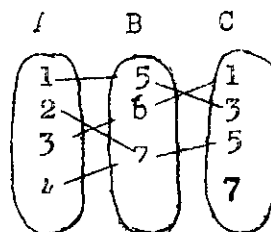
ข.



ค.



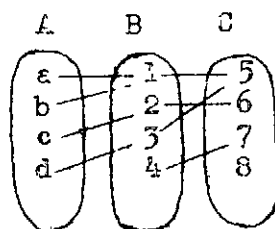
ง.



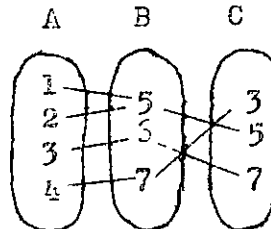
จ. ถูกทุกข้อ

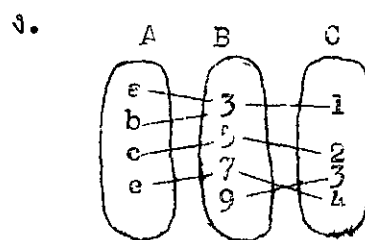
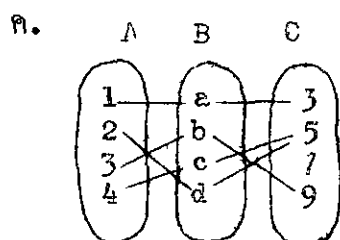
2. แผนภาพในข้อใด สามารถสร้างคอมโพสิทฟังก์ชันจาก A ไป c ได้

ก.



ข.





จ. ถูกทุกข้อ

3. กำหนด g และ h เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เงื่อนไขในข้อใดสามารถสร้าง $h \circ g$ ได้

ก. $R_h \subset D_g$

ข. $D_g \subset R_h$

ค. $R_g \subset D_h$

ง. $D_h \subset R_g$

จ. $R_h \subset R_g$

4. กำหนด $f = \{(a, 1), (c, 5), (b, 3)\}$ และ $g = \{(a, 3), (2, c), (1, b), (d, 7)\}$ แล้ว $f \circ g$ คือข้อใด

ก. $\{(1, 3), (5, 2), (3, 1)\}$

ข. $\{(a, b), (2, 5), (1, 3)\}$

ค. $\{(3, 1), (2, 5), (1, 3), (d, 7)\}$

ง. $\{(3, 1), (2, 5), (1, 3)\}$

จ. $\{(1, 3), (5, 2), (3, 1), (d, 7)\}$

5. ฟังก์ชันแต่ละตัวในข้อใดที่ทำให้ $g \circ f$ ไม่ได้

ก. $f(x) = 3x - 2$

ข. $f(x) = 2x$

$g(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = (x - 1)^2$

ค. $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$

ง. $f(x) = 2x + 1$

$g = \{(4, 7), (2, 5), (6, 5)\}$

$g(x) = 2x^2$

จ. $f(x) = 2x^2$

$g(x) = \sqrt{x}$

กำหนด $f(x) = 2x^2$

$g(x) = x^3 - 1$

ใช้ตอบคำถามในข้อ 6 - 8

6. $(g \circ f)(x)$ คือข้อใด

ก. $6x^8 - 1$

ข. $8x^6 - 1$

ค. $6x^6 - 1$

ง. $8x^8 - 1$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

7. $(g \circ f)(-1)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. -9

ค. -7

ง. 9

จ. 7

8. $f(g(x))$ คือข้อใด

ก. $2x^6 - 4x^3 + 1$

ข. $x^6 - 2x^3 + 1$

ค. $2x^6 - 2x^3 + 1$

ง. $2x^6 + 4x^3 + 1$

จ. $x^6 + 2x^3 + 1$

9. กำหนด $g(x) = x + 2$ และ $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$ ข้อใดคือ $f(x)$

ก. $x^2 - 3$

ข. x^2

ค. $\frac{x^2}{3}$

ง. $x^2 + 3$

จ. $3x^2 - 3$

10. กำหนด $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = x^2$ ข้อใดคือค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. 2

จ. -2

11. กำหนด $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ แล้ว ข้อความในข้อใดถูกต้อง

ก. $f^{-1} \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ข. $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป B

ค. $f \circ f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A

ง. $f^{-1} \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

จ. ถูกต้องทุกข้อ

12. กำหนด $f(x) = x$; $g(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2$ ข้อใดคือค่าของ $(h \circ (g \circ f))(1)$

ก. 4

ข. 5

ค. -2

ง. -8

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

เรื่องที่ 3/3 - 4 พืชคณิตฟังก์ชัน (ชุดที่ 4)

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดของคำถามแต่ละคำถามเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า g และ h เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน แล้วเงื่อนไขในข้อใดสามารถหาพืชคณิตฟังก์ชันได้

ก. $D_g \cap D_h \neq \emptyset$

ข. $D_g \cap D_h = D_h$

ค. $D_g \cap D_h = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ ง. $D_g \cap D_h = \{x \mid x \leq 0\}$

จ. ถูกทุกข้อ

กำหนด $f = \{(a, 1), (c, 3), (b, 5), (d, 3)\}$

$g = \{(a, -1), (d, 2), (c, 0), (e, 3)\}$

ใช้ตอบคำถามข้อ 2 - 3

2. $(f + g)$ คือข้อใด

ก. $\{(a, 0), (c, 3), (d, 5)\}$

ข. $\{(a, 0), (b, 5), (c, 3), (d, 5)\}$

ค. $\{(a, 0), (b, 5), (c, 3), (d, 5), (e, 3)\}$

ง. $\{(a, 0), (c, 1), (d, 1)\}$

จ. $\{(a, 2), (c, 1), (d, 1)\}$

3. โดเมนของ $(f - g)$ คือข้อใด

ก. $\{a, b, c, d, e\}$

ข. $\{a, c, d\}$

ค. $\{a, b, c, d\}$

ง. $\{b, c, d, e\}$

จ. $\{e, b, d\}$

กำหนด $f(x) = 2x - 1$

$g(x) = x^2 - 1$

ใช้ตอบข้อ 3 - 6

4. $(f + g)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 - x$

ข. $3x - 2$

จ. $x^2 - 2x - 2$

ข. $x^2 + 2x - 2$

ง. $3x^2 - 2$

5. $(f - g)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 - 2x$

ข. $x^2 - 2x$

จ. $2x - x^2$

ข. $x^2 - 2x - 2$

ง. $-x^2 - 2x$

6. $(f \cdot g)(x)$ คือข้อใด

ก. $2x^3 + x^2 - 2x + 1$

ข. $2x^3 - x^2 - 2x + 1$

จ. $2x^3 + x^2 + 1$

ข. $2x^3 - x^2 - 2x$

ง. $2x^3 + x^2 + 2x$

7. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ คือข้อใด

ก. $\frac{2x - 1}{x^2 - 1} ; x \neq 0$

ข. $\frac{2x - 1}{x^2 - 1} ; x \neq 1$

จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ข. $\frac{2x - 1}{x^2 - 1} ; x \neq -1$

ง. $\frac{2x - 1}{x^2 - 1}$

กำหนด $f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = x + 1$

ใช้คำตอบข้อ 8 - 10

8. $(f - g)(-1)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. 2

จ. 4

ข. 1

ง. 3

9. $(f \cdot g)(0)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. 2

จ. -2

10. โดเมนของ $(\frac{f}{g})(x)$ คือข้อใด

ก. $\mathbb{R}$

ข. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq 0\}$

ค. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq 1\}$

ง. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq 2\}$

จ. $\mathbb{R} - \{x \mid x \neq -1\}$

11. กำหนด $(f + g)(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = 3x - x^2$ แล้ว $f(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 + 1$

ข. $x^2 - 2$

ค. $x^2 - 1$

ง. $x^2 + 1$

จ. $x - 1$

12. กำหนด $(f \cdot g)(x) = 2x^3 - 3x$ และ $f(x) = \frac{x}{2}$ แล้ว $g(x)$ คือข้อใด

ก. $4x^2 - 3$

ข. $2x^2 - 6$

ค. $4x^2 - 2$

ง. $4x^2 - 6$

จ. $x^2 - 6$