การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี

ปริญญานิพนธ์

ของ

ยศศักดิ์ สายสนิท

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2548

การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี

บทคัดย่อ

ของ

ยศศักดิ์ สายสนิท

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2548

ยศศักดิ์ สายสนิท. (2548). *การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี*
ปริญญานิพนธ์ วศ.ม.(เครื่องกล).กรุงเทพฯ:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
คณะกรรมการควบคุม: พันโท ผศ. ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว, พันตรี ดร.เศรษฐพงค์ มะลิสุวรรณ

ปริญญานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ที่มุ่งเน้นวิจัยเพื่อศึกษาวิธีการวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่แล่นในสนามแข่งขัน โดยใช้วิธีมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชัน (Minimum time optimization) มาเป็นเครื่องมือสำหรับทำการวิเคราะห์และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาเป็นเครื่องมือช่วยในการหาคำตอบซึ่งก็คือ ค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งนั่นเอง

การศึกษาวิจัยกระทำในลักษณะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองของรถแข่งซึ่งเป็นรถยนต์แบบห้าระดับขั้นความเสรี ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของรถแข่งทั้งหมดห้าสมการ (ไม่คิดผลกระทบจากอากาศพลศาสตร์) และใช้แบบจำลองของรถแข่งที่มีมวลขนาดต่างๆ เพื่อใช้เปรียบเทียบกัน โดยแบบจำลองของรถแข่งทั้งสองมีเงื่อนไขบังคับ ก็คือรูปร่างของสนามแข่งขัน แล้วให้รถแข่งวิ่งในสนามดังกล่าว โดยจะป้อนค่าคอนโทรลอินพุตในรูปของแรงขับเคลื่อนและมุมเลี้ยวให้กับแบบจำลองของรถแข่งเพื่อดูผลลัพธ์ก็คือได้ความเร็วสูงสุดเท่าใด ด้วยการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ซึ่งทั้งแบบจำลองของรถแข่งและสนามแข่งขันจะถูกแปลงให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ แล้วใช้ฟังก์ชัน fmincon ของโปรแกรม Matlab มาเป็นเครื่องมือในการคำนวณหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง

ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่าวิธีการมีนนิมัมไมท์ออปติไมต์เซชันสามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ได้ และผลของคำตอบอยู่ในเกณฑ์ที่ย้อมรับได้ แต่มีความยากในการหาคำตอบค่อนข้างมาก เนื่องจากจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของเวลาให้ใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุด แต่ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้หาเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆ ได้เช่นกัน

Maximum Velocity of a Five Degree of Freedom Racing Car

AN ABSTRACT

BY

YOTSAK SAISANIT

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Engineering degree in Mechanical Engineering

at Srinakharinwiroj University

March 2005

Yotsak Saisanit. (2005). *Maximum Velocity of a Five Degree of Freedom Racing Car* Master thesis, M.Eng.(Mechnical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew : Major. Dr. Settapong Malisuwan.

The purpose of this research is to analyze optimum maximum velocity of a racing car along the given path by using the minimum time optimization method, and then use computer software to finding the results is optimum maximum velocity, respectively.

The research methods are acting by mathematical model. The racing car model is a five degree of freedom model and has five equations of motion (No aerodynamic effect). There are many racing car models for comparison by varies mass. The constraints are racing circuit. The racing car models have to travel along the racing circuit path by given the controls input traction force and steering angle for compare the time motion results. The racing car models and racing circuits have to transfer to mathematical terms, finally use Matlab program by fmincon function to finding the results, respectively.

The results of study, the minimum time optimization method can use for predict maximum velocity of racing car and has feasible solution, but very difficult to use this method because have to input initial gauss final time close to solution. The minimum time optimization can apply with another problem that closes to this study, but carefully to use.

การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี

ปริญญานิพนธ์

ของ

ยศศักดิ์ สายสนิท

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2548

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี

ของ

นายยศศักดิ์ สายสนิท

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

…………………………………………......................คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่ ……..เดือน……..……พ.ศ. 2548

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

………………………………………..............ประธาน
(พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว)

………………………………………..............กรรมการ
(พันตรี อาจารย์ ดร.เศรษฐพงค์ มะลิสุวรรณ)

………………………………………..............กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว)

………………………………………..............กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประกอบ สุรวัฒนาวรรณ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันตรี อาจารย์ ดร. เศรษฐพงค์ มะลิสุวรรณ กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว, ดร.พิชัย อัษฎมงคล, พันเอก อาจารย์ สุภโชค สัมปัตตะวณิช และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ประกอบ สุรวัฒนาวรรณ ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่ให้โอกาสในการศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณบิดา มารดา พี่สาวและภรรยา ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่าน ในความสนับสนุนช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้น โครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร. จปร.สาขาวิศวกรรมเครื่องกล รุ่น 1 ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ

ยศศักดิ์ สายสนิท

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

บัญชีตาราง

บัญชีภาพประกอบ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการแข่งขันรถยนต์ทางเรียบ เช่น การแข่งขันรถยนต์สูตรหนึ่ง (Formula one) การแข่งขันแนสคาร์ (Nascar) เหล่านี้เป็นต้น ล้วนแล้วแต่มีเป้าหมายสูงสุดเหมือนกันคือเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่หนึ่ง นั่นก็คือขับรถให้วิ่งเร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้ แต่ก็ไม่รู้ว่าค่าความเร็วค่าใดเป็นค่าความเร็วสูงสุดที่รถแข่งจะวิ่งได้ในสนามแข่งขันนั้น เนื่องจากสนามแข่งขันและสภาพของรถแข่งจะประกอบไปด้วยตัวแปรต่างๆ เช่น ทางตรง ทางโค้ง ทางขึ้นเนิน ลงเนิน สภาพถนนแห้งหรือเปียก ทิศทางและความเร็วลม องศาการเลี้ยวโค้ง มุมเอียงของถนน ความเรียบของผิวถนน สภาพยาง ความดันลมยาง จุดศูนย์ถ่วง มุมล้อ ฯลฯ เหล่านี้ล้วนแล้วแต่ส่งผลกระทบต่อความเร็วของรถแข่งทั้งสิ้น ดังนั้นผู้ขับขี่จะไม่สามารถขับขี่ที่ความเร็วคงที่ตลอดทั้งสนามแข่งขันได้ จึงเป็นเหตุให้เกิดเหตุการณ์ที่ไม่คาดคิดขึ้นบ่อยครั้ง สาเหตุส่วนหนึ่งก็เนื่องมาจากการตัดสินใจใช้ความเร็วสูงสุดที่ไม่เหมาะสมของนักแข่งนั่นเอง เหตุที่ทำให้มีการตัดสินใจใช้ความเร็วที่ไม่เหมาะสมนี้อาจเนื่องมาจากมีประสบการณ์น้อยและที่สำคัญอีกอย่างก็คือไม่รู้ค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมกับสภาพของสนามแข่งขันในแต่ละช่วงนั่นเอง ดังนั้นหากเราสามารถหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งในแต่ละช่วงของสนามแข่งขันได้ก็จะเป็นประโยชน์อย่างมากกับผู้ขับขี่ในเรื่องการวางแผนการกำหนดจังหวะการขับขี่และยังเกิดความปลอดภัยในการขับรถแข่งอีกด้วยนั่นเอง

ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงเกิดแรงบันดาลใจในการที่จะทำการวิจัยศึกษาเพื่อวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่จะวิ่งได้ในสนามแข่งขัน โดยการทำเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาเป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ ซึ่งการวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้จะเป็นวิธีที่ประหยัด รวดเร็ว และยังสามารถทำการปรับเปลี่ยนตัวแปรต่างๆ ที่ส่งผลต่อความเร็วของรถแข่งได้อีกด้วย อีกทั้งยังสามารถนำเอาหลักการและวิธีการนี้ไปพัฒนาและปรับปรุงให้สามารถใช้กับงานจริงๆ ได้ต่อไปในอนาคต

การศึกษาวิจัยจะเริ่มด้วยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา เริ่มต้นด้วยการหาสมการการเคลื่อนที่ของรถแข่ง (ในการวิจัยครั้งนี้จะยังไม่นำเอาอากาศพลศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้อง) และสร้างเงื่อนไขบังคับ ขึ้นมาเป็นตัวจำกัดกรอบหรือขอบเขตของปัญหา โดยที่เงื่อนไขบังคับนี้จะอยู่ในรูปของการกำหนดลักษณะรูปร่างของเส้นทางวิ่งหรือสนามแข่งขัน ตลอดจนขีดจำกัดของตัวแปรต่างๆ อาธิเช่น แรงขับเคลื่อน แรงเบรก รัศมีโค้งและความยาวของแต่ละช่วงของสนามแข่งขัน เป็นต้น ส่วนด้านวิธีการหรือเครื่องมือที่จะนำเอามาใช้สำหรับหาคำตอบหรือแก้ปัญหานี้ก็คือ ใช้วิธีการออปติไมซ์เซชัน

(Optimization) ในส่วนของมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum Time Optimization) ดังนั้นหาก นำเอาหลักการออปติไมซ์เซชัน เข้ามาทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่าความเร็วสูงสุดได้แล้วก็นับได้ว่าเป็น การพัฒนาและเป็นการประยุกต์วิธีการหาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่จะส่งผลในด้าน การนำไปพัฒนาต่อเพื่อตอบสนองความต้องการของวงการแข่งขันความเร็วรถยนต์และนักแข่งได้เป็น อย่างดียิ่งในอนาคต

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.2.1 เพื่อนำเอาเทคนิควิธีมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum Time Optimization) มาประยุกต์ใช้กับปัญหาด้านพลศาสตร์ยานยนต์ในกรณีการหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง

1.2.2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาสำหรับใช้หาคำตอบของการมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum Time Optimization) กรณีการหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1.3.1 การศึกษาวิจัยครั้งนี้ มุ่งศึกษาวิธีการนำเอาหลักการมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum Time Optimization) มาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่จะวิ่งได้ในสนามแข่งขัน โดยทั้งรถแข่งและสนามแข่งขันล้วนแต่ถูกจำลองขึ้นมา

1.3.2 แบบจำลองของรถแข่งที่ใช้ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้เป็นแบบห้าระดับขั้นความเสรี (Five Degree of Freedom Model)

1.3.3 การศึกษาวิจัยครั้งนี้จะยังไม่นำเอาผลกระทบทางด้านอากาศพลศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้อง

1.3.4 ตัวแปรที่ศึกษาในการวิจัยครั้งนี้ประกอบไปด้วย

- ตัวแปรต้นคือลักษณะของสนามแข่งขันและลักษณะของรถแข่ง
- ตัวแปรตามคือเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปสู่จุดสุดท้ายที่เหมาะสมที่สุด

1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ

1.4.1 ศึกษาลักษณะจำเพาะการเคลื่อนที่ของรถแข่งที่วิ่งในสนามแข่งขัน โครงสร้างและสมรรถนะของรถแข่ง หลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของรถแข่งเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ เส้นแนววิ่งที่เหมาะสม ลักษณะจำเพาะของสนามแข่งขัน ขีดจำกัดของความเร็ว

1.4.2 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือสมการการเคลื่อนที่ของรถแข่ง สมการและอสมการเงื่อนไข กำหนดสภาวะเริ่มต้นและสภาวะสุดท้าย เงื่อนไขขอบ และสร้างคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

1.4.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.4.4 ทดสอบโปรแกรมและเปรียบเทียบซีพียูรันไทม์ (CPU Runtime)

1.4.5 วิเคราะห์ผลในสองรูปแบบคือ สนามเดิมแต่เปลี่ยนแปลงรถแข่ง กับรถแข่งคันเดิมแต่เปลี่ยนแปลงสนามแข่ง เพื่อตรวจสอบผลของคำตอบที่ได้

1.4.6 สรุปและรายงานผล

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1. ผลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาเพื่อให้สามารถใช้กับงานจริงได้ต่อไปในอนาคต หรือเอาไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาที่มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันได้

1.5.2. ผลการวิจัยครั้งนี้จะให้ข้อมูลสำหรับการประยุกต์เอาหลักการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปใช้งานกับปัญหาด้านพลศาสตร์และเป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นๆ

1.5.3. ผลการวิจัยครั้งนี้จะทำให้ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้คำนวณหาคำตอบของปัญหาและยังอาจจะสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. บทปริทัศน์วรรณกรรม
2. ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)
3. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

2.1 บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature review)

การออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ตัวอย่างการหาค่าต่ำสุดที่เหมาะสม เช่น การลดน้ำหนักของคานรองรับให้ต่ำที่สุดโดยค่าความแข็งแรงยังคงเป็นที่ยอมรับได้, การคำนวณเวลาที่น้อยที่สุดในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ส่วนตัวอย่างการหาค่าสูงสุดที่เหมาะสมเช่น การออกแบบเครื่องยนต์ให้มีสมรรถนะสูงสุด, การหาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่เป็นต้น ดังนั้นเป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง

มีงานวิจัยของผู้อื่นที่ได้ทำมาก่อนที่ได้มีการนำเอาวิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาใช้ที่มีลักษณะใกล้เคียงและเกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยในครั้งนี้ดังต่อไปนี้

คาสโนวา ดี, ชาร์ป อาร์เอส และ ไซมอนด์ พี (Casanova D, Sharp RS, Symonds P. 2000: Abstract) ได้นำเอาการออปติไมซ์เซชันวิธีเอสคิวพี (SQP: Sequential Quadratic Programming) เข้ามาแก้ปัญหาการโปรแกรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear Programming Problem) เพื่อศึกษาว่าโมเมนต์ความเฉื่อยจากการส่าย (Yaw Moment of Inertia) มีผลกระทบอย่างไรต่อสมรรถนะการเปลี่ยนวิถีทางวิ่งของรถ ซึ่งผลการศึกษาพบว่าวิธีการนี้ให้ผลในการทำนายสมรรถนะของรถได้เป็นอย่างดี ซึ่งคณะผู้วิจัยได้แนะนำไว้ว่าวิธีการนี้สามารถที่จะนำไปพัฒนาเพื่อใช้แสดงเวลาในการเคลื่อนที่ของรถได้

คาสโนวา ดี, ชาร์ป อาร์เอส และ ไซมอนด์ พี (Casanova D, Sharp RS, Symonds P. 2000: Abstract) ได้นำเอาวิธีมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum Time Optimization) มาเป็นเครื่องมือในการศึกษาวิจัยเพื่อพิสูจน์ว่ามวลของรถมีผลต่อความเร็วในการเคลื่อนที่ของรถแข่งสูตรหนึ่ง

โดยการศึกษาวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการจำลองทั้งรถแข่งและสนามแข่งขึ้นมาเอง ซึ่งแบบจำลองของรถแข่งมีเจ็ดองศาอิสระด้วยกัน ผลการวิจัยพบว่ามวลของรถแข่งมีผลต่อความเร็วของรถแข่งอย่างมาก

คาสโนวา ดี, ชาร์ป อาร์เอส และ ไซมอนด์ พี (Casanova D, Sharp RS, Symonds P. 2001: Abstract) ได้นำเอาวิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาเป็นเครื่องมือเพื่อศึกษาหาตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงที่เหมาะสมที่สุดของรถแข่งสูตรหนึ่งที่มีผลต่อความเร็วในการเคลื่อนที่ ผลการศึกษาก็พบว่าตำแหน่งของจุดศูนย์ถ่วงของมวลมีผลต่อความเร็วของรถแข่งอย่างมาก

พีรูน รามานาตา (Peeroon Ramanata. 1998: Abstract) ได้ทำการศึกษาเพื่อค้นหาเส้นแนววิ่งที่เหมาะสมของยานยนต์ โดยการใช้วิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาเป็นเครื่องมือในการศึกษา ซึ่งเขาได้กำหนด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) ออกเป็นสองส่วนก็คือมีนนิมัมไทม์ (Minimum Time) กับ แมกซิมัมไทร์ฟอร์ส (Maximum Tire Force) แบบจำลองของยานยนต์ที่ใช้เป็นแบบ 3 ระดับขั้นความเสรีและมีการรวมเอาผลกระทบจากมุมเลี้ยว (Steering Angle) และแรงขับเคลื่อนไปตามพื้นถนน (Longitudinal Force) เข้าเป็นส่วนหนึ่งของสมการการเคลื่อนที่ของยานยนต์ด้วย จากนั้นใช้วิธีการหาคำตอบโดยวิธีรัง-กัตตาอันดับสาม (Third Order Rung-Katta Integration) ผลของการศึกษาพบว่าวิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) สามารถให้คำตอบที่ดีและสามารถนำไปใช้ในการออกแบบทดสอบเส้นทาง (Track Test System) แบบอัตโนมัติเพราะสามารถค้นหาเส้นทางที่เหมาะสมที่สุดได้

ไบร์อัล เอฟ, ดา ลิโอ เอ็ม (Biral F, Da Lio M. 2001: Abstract) ได้ทำการสร้างแบบจำลองของคนขับรถด้วยวิธีออปติมอลแมนนูเวอร์ (Optimal Manoeuvre Method) ซึ่งเป็นวิธีการออบติไมต์เซชัน (Optimization) อันหนึ่งและกำหนดกรอบของปัญหาเป็นแบบทีพีบีวีพี (TPBVP: Two Point Boundary Value Problem) เพื่อที่จะแสดงพฤติกรรมการขับรถที่ส่งผลต่อสมรรถนะของรถ ซึ่งผลการศึกษาพบว่าวิธีการอันนี้สามารถแสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมการขับรถของคนขับแต่ละคนมีผลต่อสมรรถนะของรถ

นอกจากที่กล่าวมานั้นยังได้มีการนำเอาหลักการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาใช้ในการออกแบบ เช่นการออกแบบสนามแข่งและออกแบบรถ แต่ปัญหาต่างๆ ในเรื่องของการแข่งขันรถยนต์ก็ยังไม่หมดไป เนื่องจากว่ามีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของรถแข่งอยู่มากมาย ซึ่งงานวิจัยแต่ละงานก็ไม่สามารถทำการแก้ไขหรือให้คำตอบได้ทั้งหมด อาจจะด้วยเหตุผลทางด้านเวลา งบประมาณ เครื่องมือ ความซับซ้อนของปัญหา ฯลฯ และปัญหาอันหนึ่งที่ยังไม่ได้รับการแก้ไขหรือให้คำตอบที่ชัดเจนอีกปัญหาหนึ่งนั่นก็คือ ปัญหาในเรื่องการทำนายค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมกับรถแข่งและสภาพของสนามแข่งขัน ว่าค่าความเร็วสูงสุดที่รถแข่งยังทำได้จะมีขีดจำกัดสูงสุดเป็นเท่าใดโดยที่จะไม่หลุดหรือไถลออกนอกเส้นทางหรือสนามแข่ง ซึ่งหากสามารถหาคำตอบนี้ได้ก็จะเป็นประโยชน์ต่อนักแข่งใน

การที่จะใช้เป็นข้อมูลในการวางแผนการขับ ในการเลือกใช้ความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมในแต่ละช่วงของสนามแข่งขัน ในสนามแข่งจะมีจุดที่เป็นจุดวิกฤตที่สุดอยู่ที่โค้งต่างๆ เนื่องจากนักขับไม่สามารถที่จะรู้ได้ว่าค่าความเร็วเท่าใดที่จะเหมาะสมที่สุดที่จะผ่านไปได้ด้วยความปลอดภัยและใช้เวลาน้อยที่สุด ซึ่งนักขับมักจะใช้ความรู้สึกและประสบการณ์มาเป็นเครื่องช่วยตัดสินใจ ด้วยการกระทำเช่นนี้จึงเกิดอุบัติเหตุจนไม่สามารถแข่งขันจนจบครบรอบการแข่งขันได้นั่นเอง แต่หากเราสามารถทำการคำนวณเพื่อหาค่าความเร็วที่เหมาะสมนี้ได้แล้วก็จะเป็นการเพิ่มความมั่นใจในการขับให้กับนักแข่งโดยไม่ต้องกังวลกับปัญหาว่าจะใช้ความเร็วสักเท่าใดจึงจะเหมาะสมที่สุด

2.2 **ออปติไมซ์เซชัน** (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธีออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการพรรณนาถึงลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน ซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of problem formulation) ในเทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและจำเป็นต้องทำความเข้าใจสามเทอมด้วยกัน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.2.1 **ดีไซน์วาริเอเบิล** (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่ระบุชี้ชัดถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์แล้วตัวแปรของการออกแบบก็คือตัวไม่ทราบค่าที่จะต้องถูกค้นหาค่านั่นเอง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม คือ ดีไซน์วาริเอเบิลก็คือความยาวและความสูง ในการกำหนดหรือเลือกว่าสิ่งไหนคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) นั้น ผู้ออกแบบจำเป็นจะต้องใช้สัญชาตญาณ, ความชำนาญและพื้นความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ แต่ก็มีหลักการพื้นฐานเช่นกันคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท์ (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ตัวอย่างเช่น การออกแบบหน้าตัดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราจะไม่สามารถกำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาว, ความกว้างและพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรากำหนดดีไซน์วาริเอเบิล

(Design variables) เป็นความยาวและความกว้างแล้ว ตัวแปรที่สามคือพื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) สามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร *n* แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร *x* และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[\mathbf{X}]$, $\mathbf{X}$ หรือ $\mathbf{x}$, $[x_1, x_2, ..., x_n]^T$ และ $x_i, i = 1,2,...,n$

2.2.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ, คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, ..., p_q]^T$

2.2.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) มาประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) นี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออปเจคทิฟว์และ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาการออกแบบที่เหมาะสมขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้การได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี่ก็กลายเป็นออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี่ก็จะเป็นคอนสเทรนท์ฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

2.2.3.1 ออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งของออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยทั่วไปจะเป็นแบบฟังก์ชันเดี่ยว รูปแบบของวัตถุประสงค์จะเป็นการหาปริมาณที่น้อยที่สุดหรือปริมาณที่มากที่สุด และปริมาณที่ว่านี้ก็เป็นปริมาณสเกลาร์ ในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นจะเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $f(X)$ และ $f(x_1, x_2, ..., x_q)$

2.2.3.2 คอนสเทรนท์ฟังก์ชัน (Constraint Functions)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการออกแบบเป็นอย่างมาก และสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ (เป็นได้ทั้งสมการและอสมการ) ดังนั้นจึงเป็นเวกเตอร์

(Vector: matrix) และจะใช้เครื่องหมายดำเนินการเปรียบเทียบสามตัวคือ $\leq, \geq$ และ $=$ ซึ่งเงื่อนไขบังคับนี้จะมีได้สามรูปแบบด้วยกันคือ อันคอนสเทรนท์ (Unconstraint), อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraint) มีรายละเอียดดังนี้

2.2.3.2.1 **อีควอลิตีคอนสเทรนท์** (Equality Constraints)

เป็นเงื่อนไขที่บังคับให้การออกแบบต้องเป็นไปตามเงื่อนไขอย่างเคร่งครัดโดยจะต้องไม่ขาดและไม่เกินจากเงื่อนไข มีลักษณะเป็นสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร g เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[G]$, $[g_1, g_2, ..., g_l]$ และ $g_l, l = 1,2,...,m$ จำนวนดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) n จะต้องมีขนาดที่มากกว่าจำนวน m อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) จึงจะสามารถทำการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ได้โดยจะต้องสอดคล้องกับออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $g_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 500 = 0$ เป็นต้น

2.2.3.2.2 **อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์** (Inequality Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีความยืดหยุ่นในการออกแบบ เพราะจะบังคับในลักษณะเป็นช่วงให้เปรียบเทียบ มีลักษณะเป็นอสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร c เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและจะเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[C]$, $[c_1, c_2, ..., c_m]$ และ $c_l, l = 1,2,...,m$ เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับและน้อยกว่าหรือเท่ากับแต่จะนิยมแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับในงานด้านวิศวกรรมมากกว่า โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $c_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 1 \leq 0$ เป็นต้น

2.2.3.2.3 **ไซด์คอนสเทรนท์** (Side Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่นำมาใช้เพื่อกำหนดตัวเลขช่วงให้กับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และมักมีการกำหนดเป็นลักษณะขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง

2.2.3.2.4 **ดีไซน์สเปส** (Design Space)

ก็คือปริภูมิที่จะถูกใช้เพื่อการออกแบบที่เหมาะสมนั่นเอง เป็นปริภูมิที่เกิดขึ้นจากหลักการของปริภูมิยูคลิดเดียนหรือปริภูมิคาร์ทีเซียน (Euclidean or cartesian n-dimensional space) ที่มีมิติใดๆ ซึ่งมิติใดๆ นี้เกิดขึ้นจากกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) แต่จะไม่เหมือนกับระบบปริภูมิอ้างอิงทั่วไปที่มีสามมิติตามที่เราคุ้นเคยกัน เพราะจะมีความซับซ้อนกว่า ยกตัวอย่างเช่น มีดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) 10 ตัว ก็จะมีมิติของปริภูมิเป็น 10 มิติ เป็นการยากมากที่จะอธิบายโดยการวาดภาพหรือเขียนกราฟออกมา ด้วยเหตุนี้จึงใช้ไซด์คอนสเทรนท์ (Side constraints) มาเป็นตัวจำกัดขอบเขตของปริภูมิ ซึ่งหากผลเฉลยอยู่ในช่วงขอบเขตนี้ก็ถือว่ายอมรับได้ (Feasible)

2.2.4 **ฟอร์มมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน** (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นล้วนแต่เป็นองค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทั้งสิ้น และมีการเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (2.1)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

$g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ (2.2)

$g_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

$c_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$

$c_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$ (2.3)

$c_l(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$

$x_j^l \le x_j \le x_j^u,\ j = 1,2,...,n$ (2.4)

หรือเขียนสั้นๆ ได้ดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (2.5)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: $g_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ l = 1,2,...,m$ (2.6)

$c_l(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0,\ l = 1,2,...,m$ (2.7)

$x_j^l \le x_j \le x_j^u,\ j = 1,2,...,n$ (2.8)

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ $f(X), [X]_n$ (2.9)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: $[g(X)]_l = 0$ (2.10)

$[c(X)]_l \le 0$ (2.11)

$X^{low} \le X \le X^{up}$ (2.12)

จากฟอร์มมาตรฐานของปัญหาการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดได้ดังนี้ คือ หาค่าน้อยที่สุด

(Minimize) ของออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) f โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (Subject to) บังคับเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จำนวน l เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) จำนวน i เงื่อนไข ทั้งนี้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ทั้งหมดจำนวน n ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของไซด์คอนสเทรนท์ (Side constraints) เท่านั้น

2.2.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยสุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นโกลบอลมีนิมัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq f(x_1 + h_1,\ldots,x_n + h_n) \tag{2.13}$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1\ h_2 \ldots h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมีนนิมัม (Local minimum)

กรณีมากสุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นโกลบอลเม็กซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1,\ldots,x_n) \geq f(x_1 + h_1,\ldots,x_n + h_n) \tag{2.14}$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1\ h_2\ \ldots\ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลเม็กซิมัม (Local maximum)

2.2.5.1 สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ไม่ขึ้นกับเวลา ถือว่าเป็นปัญหาพื้นฐาน แต่ก็มีความสำคัญต่อการเข้าใจไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) เพราะต้องอาศัยหลักการแก้ปัญหาของสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) เช่นกัน ดังนั้นจึงควรทำการศึกษาหลักการและเทคนิคการค้นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และการตรวจสอบค่าของตัวแปรที่หาได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด ดังนี้

กรณีอันคอนสเทรนท์ (Unconstraint) เราจะเรียกกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่าน้อยสุดหรือมากสุดนั้นว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ถ้ากำหนดให้ $x_1,\ldots,x_n$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,\ldots,x_n)$ แล้วทำการพิจารณาโดยการเพิ่มค่า h_i ให้กับ $x_i, i = 1,\ldots,n$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ก็จะได้

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1,\ldots,x_n + h_n) &= f(x_1,\ldots,x_n) + \delta f(x_1,\ldots,x_n) \\ &\quad + \delta^2 f(x_1,\ldots,x_n) + higher - order\ terms \end{aligned} \tag{2.15}$$

เมื่อ $$\delta f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} h_i$$

$$\delta^2 f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}[h_1\ \ldots\ h_n] H(x_1,\ldots,x_n) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

(H เรียกว่า เฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian matrix)) ต่อไปเราพิจารณาในกรณีน้อยสุด (Minimum) ดังนั้นสมการ (2.15) ก็จะมีการเปลี่ยนแปลงดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_1+h_1,...,x_n+h_n)-f(x_1,...,x_n)\\ &= \delta f(x_1,...,x_n)+\delta^2 f(x_1,...,x_n)+\ldots \geq 0\end{aligned} \tag{2.16}$$

จากสมการ (2.16) หากเราตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้

$$\Delta f = \delta f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} h_i \geq 0 \tag{2.17}$$

จากสมการ (2.17) หากทำการตัด h_i ออกไปจะทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้หาค่า $x_1,...,x_n$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,...,x_n)$ เป็นค่าน้อยสุด (Minimum) ในทำนองเดียวกันยังสามารถหาค่ามากสุด (Maximum) ได้เช่นกัน ดังนั้นจึงได้สมการที่ใช้หาค่า $x_1,...,x_n$ เป็น

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.18}$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ (2.18) หาค่าของ $x_1,...,x_n$ ได้แล้วแต่ก็ยังบอกไม่ได้ว่าค่าที่หามาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Minimum or maximum) กันแน่ แต่เราก็มีวิธีที่จะบอกได้ว่าค่า $x_1,...,x_n$ ที่หามาได้นั้นเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient conditions) โดยพิจารณาดังนี้ คือ จากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ดังที่ผ่านมา ณ เทอมกำลังสอง เราจะพบว่า Δf จะมีค่าเป็นบวก ถ้า

$$\delta^2 f = \frac{1}{2}[h_1 \ldots h_n] H(x_1,...,x_n) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} > 0 \tag{2.19}$$

ซึ่งหมายความว่าค่า $x_1,...,x_n$ จะสอดคล้องกับสมการ (2.19) ได้จะต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับโลคอลมีนนิมัม (Local minimum) ส่วนค่า h_i ที่เพิ่มเข้าไปนั้นทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน Δf เป็นบวก ดังนั้นเราจึงบอกได้ว่าถ้า

$\delta^2 f > 0$ ทำให้ $x_1,...,x_n$ มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด เป็นค่าน้อยสุด (Minimum)

$\delta^2 f < 0$ ทำให้ $x_1,...,x_n$ มีเครื่องหมายเป็นลบทั้งหมด เป็นค่ามากสุด (Maximum)

แต่เราสามารถลดความซับซ้อนในการพิสูจน์ได้โดยการใช้เฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian matrix) ให้เป็นประโยชน์ เพราะเฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian matrix) ที่ทำให้สอดคล้องกับสมการ (2.19) ได้จะมีค่าเจาะจง (Eigenvalues) เป็นบวกทั้งหมด (Positive definite matrices) นั่นคือ ถ้า

$H > 0$ ทำให้ค่าเจาะจง (Eigenvalues) มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite matrices) ทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยสุด (Minimum)

$H < 0$ ทำให้ค่าเจาะจง (Eigenvalues) มีเครื่องหมายเป็นลบทั้งหมด (Negative definite matrices) ทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่ามากสุด (Maximum)

ถ้าค่าเจาะจง (Eigenvalues) มีค่าบวกบ้างลบบ้างจะเรียกว่าแซดเดิลพอยด์ (Saddle point)

กรณีอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) หัวข้อนี้จะมาพิจารณาการหาค่า $x_1,...,x_n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,...,x_n)$ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ นั่นคือ

$$g_l(x_1,...,x_n) = 0, l = 1,\ldots,m \quad \text{เมื่อ } m < n \tag{2.20}$$

โดยทั่วไปจะมีวิธีการหาค่าอยู่สองวิธีการด้วยกันคือวิธีพาร์ติชัน (Partition method) กับวิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier method)

วิธีพาร์ติชัน (Partition Method) การออปติไมต์เซชัน (Optimization) ที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraint) จะทำให้ตัวแปร $x_1,...,x_n$ ไม่เป็นอิสระ (Independent) ซึ่งตัวแปรทั้งหมดต้องสอดคล้องกับอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) ทั้งหมดจำนวน m สมการ ถ้าตัวแปร x_i ถูกเพิ่มค่าด้วย h_i จะทำให้พบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน Δf เป็น

$$\Delta f = f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.21}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออก จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันคือ

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \tag{2.22}$$

โดยที่ δf เป็นค่าประมาณของ Δf เพราะตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ทำนองเดียวกันค่า h_i ที่เพิ่มให้กับตัวแปร x_i จะต้องมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับด้วย นั่นคือ

$$g_l(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) = 0, l = 1, \ldots, m \text{ เมื่อ } m < n \tag{2.23}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออกได้การเปลี่ยนแปลง

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_l}{\partial x_i} h_i = 0, l = 1, \ldots, m \tag{2.24}$$

เพื่อความเหมาะสมของสัญลักษณ์ ตัวแปร $x_1, \ldots, x_n$ จะแยกออกเป็นสองกลุ่มคือ $y_1, \ldots, y_m$ และ $z_1, \ldots, z_{n-m}$ ตัวแปรที่เพิ่มค่าให้กับกลุ่มตัวแปร $y_1, \ldots, y_m$ สามารถคำนวณหาได้จากการเพิ่มค่าในเทอมของกลุ่ม $z_1, \ldots, z_{n-m}$ ดังนั้นเราจึงเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(m\times m)} \begin{bmatrix} h_{y_1} \\ h_{y_2} \\ \vdots \\ h_{y_m} \end{bmatrix}_{(m\times 1)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{n-m}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial z_{n-m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial z_{n-m}} \end{bmatrix}_{(m\times n-m)} \begin{bmatrix} h_{z_1} \\ h_{z_2} \\ \vdots \\ h_{z_{n-m}} \end{bmatrix}_{(n-m\times 1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(m\times 1)} \tag{2.25}$$

เราเขียนสมการ (2.25) ใหม่เพื่อความกระชับได้เป็น

$$J_y h_y + J_z h_z = 0 \tag{2.26}$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่า h_y ได้เมื่อกำหนดค่าให้กับ h_z ดังนี้

$$h_y = -J_y^{-1} J_z h_z \tag{2.27}$$

โดยที่ J_y^{-1} คือแมตริกซ์ผกผัน ดังนั้นสมการ (2.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแมตริกซ์เป็น

$$\delta f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{y_1}\\ \vdots \\ h_{y_m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{z_1}\\ \vdots \\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix}$$

$$=\left(-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}\end{bmatrix}J_y^{-1}J_z+\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}h_{z_1}\\ \vdots \\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\delta f=\begin{bmatrix}\frac{\partial_c f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial_c f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{z_1}\\ \vdots \\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix} \quad (2.29)$$

เมื่อ

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial_c f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial_c f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}\end{bmatrix}J_y^{-1}J_z+\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ดังนั้นจะทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับ $\delta f=0$ เป็น

$$\frac{\partial_c f}{\partial z_i}=0, i=1,...,n-m \quad (2.31)$$

สมการ (2.31) จะนำมาใช้เพื่อเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันที่มีอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraint)

ต่อไปมาดูการตรวจสอบว่าค่า $x_1,...,x_n$ ที่หามาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือค่ามากสุด (Sufficient conditions) จากการใช้ อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) เมื่อค้นพบว่าเอ็กทรีมัมจะหาได้เมื่อ $\delta f=0$ ดังนั้นการตรวจสอบว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุดก็สามารถค้นหาได้จาก $\Delta f=\delta^2 f$ และจากการแบ่งแยกออกเป็นสองกลุ่มทำให้เราพบว่า

$$\delta^2 f=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_z^T & h_y^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{zz} & H_{zy}\\ H_{yz} & H_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_z\\ h_y\end{bmatrix} \quad (2.32)$$

เมื่อ

$$H_{zz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_{n-m}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_{n-m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial z_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m}^2} \end{bmatrix}$$

$$H_{zy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_m} \end{bmatrix}$$

$$H_{yz} = H_{zy}^T$$

$$H_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_m \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_m \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2} \end{bmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม $h_y = -J_y^{-1} J_z h_z$ ดังนั้น Δf สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta f = \delta^2 f = \frac{1}{2} h_z^T \widetilde{H} h_z \tag{2.33}$$

เมื่อ $\widetilde{H} = H_{zz} - H_{zy} J_y^{-1} J_z - J_z^T \left(J_y^T\right)^{-1} H_{yz} + J_z^T \left(J_y^T\right)^{-1} H_{yy} J_y^{-1} J_z$

ซึ่งถ้าค่าของ $\widetilde{H}$ เป็นบวกก็จะทำให้ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\widetilde{H}$ เป็นลบ จะทำให้ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นค่ามากสุด

วิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier Method) วิธีการนี้จะทำการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้โดยการเปลี่ยนสมการอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraint) ให้ไปอยู่ในรูปแบบอันคอนสเทรนท์ (Unconstraint) ด้วยการเพิ่มสมการอีควอลิตีคอนสเทรนท์(Equality constraint) เข้าไปในฟังก์ชันดั้งเดิม (Original function) โดยที่คอนสเทรนท์อีเควชันนี้จะต้องคูณด้วยลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) นั่นคือ $\lambda_l, l = 1, \ldots, m$ ซึ่งจะเรียกสมการนี้ว่า ลากรานซ์ฟังก์ชัน (Lagrange function) เขียนได้เป็น

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l g_l \tag{2.34}$$

เมื่อ x_i และ λ_l เป็นอินดิเพนเดนท์วาริเอเบิล (Independent variables) ของลากรานซ์ฟังก์ชัน (Lagrange function) ดังนั้นจะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.35}$$

$$g_l = 0, l = 1, \ldots, m \tag{2.36}$$

โดยที่สมการจำนวน $n + m$ สมการ จะต้องถูกแก้สมการเพื่อเอ็กทรีมัม (Extremum) $x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ตามลำดับ

เมื่อเอ็กทรีมัมได้แล้วก็มีความจำเป็นที่ต้องการทราบว่าเอ็กทรีมัมที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient conditions) จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า $\Delta f = \delta f + \delta^2 f + \ldots$ หากเราพิจารณาโดยการเพิ่มค่าให้กับอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraint) ก็จะพบว่า

$$\Delta g_l(x_1, \ldots, x_n) = g_l(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - g_l(x_1, \ldots, x_n) = \delta g_l + \delta^2 g_l + \ldots \tag{2.37}$$

เมื่อ

$$\delta g_l(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}h_i$$

$$\delta^2 g_l(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1 & \ldots & h_n\end{bmatrix}H_l(x_1,\ldots,x_n)\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}$$

$$H_l(x_1,\ldots,x_n)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

ทำการรวมเทอม Δf และ Δg_l เข้าด้วยกันก็จะได้

$$\Delta f+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\Delta g_l=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\frac{\partial g_l}{\partial x_i}\right)h_i+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1 & \ldots & h_n\end{bmatrix}\left[H+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l H_l\right]\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}+\ldots \tag{2.38}$$

ดังนั้นหากตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออกเราจะพบว่า

$$\Delta f=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1 & \ldots & h_n\end{bmatrix}\hat{H}\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix} \tag{2.39}$$

เมื่อ

$$\hat{H}=H+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l H_l \tag{2.40}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\hat{H}$ เป็นบวกทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\hat{H}$ เป็นลบก็เป็นค่ามากสุด

กรณีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraint) หัวข้อนี้จะมาพิจารณาการหาค่า $x_1,...,x_n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,...,x_n)$ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ นั่นก็คือ

$$c_l(x_1,...,x_n) \le 0, l = 1,\ldots,m \tag{2.41}$$

จะสามารถทำการแปลงสมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraint) นี้ให้เป็นสมการอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality vonstraint) ได้ด้วยการเติมแสลกวาริเอเบิล (Slack variables) คือ $s_l, l = 1,\ldots,m$ ดังนั้นจะได้สมการเงื่อนไขใหม่เป็น

$$c_l + s_l^2 = 0, l = 1,\ldots,m \tag{2.42}$$

ทำให้เราสามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิซัน (Necessary conditions) เพื่อใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) โดยใช้วิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier method) ได้คือ

$$\tilde{f}(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m,s_1,...,s_m) = f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l (c_l + s_l^2) \tag{2.43}$$

โดยที่ตัวแปร x_i, λ_l และ $s_l, i = 1,\ldots,n, l = 1,\ldots,m$ ล้วนแต่เป็นอินดิเพนเดนท์วาริเอเบิลทั้งสิ้น ดังนั้นจะได้เนคเซสเซอรีคอนดิซัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial c_l}{\partial x_i} = 0, i = 1,\ldots,n \tag{2.44}$$

$$c_l + s_l^2 = 0, l = 1, \ldots, m \tag{2.45}$$

$$\lambda_l s_l = 0, l = 1, \ldots, m \tag{2.46}$$

สมการจำนวน $n+2n$ สมการจะถูกแก้เพื่อหาค่า $x_1,...,x_n$, $s_1,...,s_m$ และ $\lambda_1,...,\lambda_m$ เมื่อได้เอ็กทรีมัมแล้ว

ต่อไปก็ทำการพิสูจน์ว่าค่าที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient conditions) โดยการพิจารณาจากสมการ (2.39) แล้วทำการปรับปรุงได้เป็น

$$\begin{aligned} \Delta\widetilde{f} &= \widetilde{f}\left(x_1 + h_1^x,...,x_n + h_n^x, s_1 + h_1^s,...,s_m + h_m^s\right) \\ &\quad - \widetilde{f}\left(x_1,...,x_n, s_1,...,s_m\right) \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\Delta\widetilde{f} = \frac{1}{2}\left[h_1^x \quad \ldots \quad h_n^x \; h_1^s \quad \ldots \quad h_m^s\right]\widetilde{H}\left[h_1^x \quad \ldots \quad h_n^x \; h_1^s \quad \ldots \quad h_m^s\right]^T \tag{2.48}$$

เมื่อ

$$\widetilde{H} = \begin{bmatrix} \hat{H} & \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \vdots & 2\lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & & 2\lambda_m \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\hat{H} = H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l$

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$H_l = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 c_l}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (2.48) ได้ใหม่เป็น

$$\Delta\tilde{f} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_1^x & \ldots & h_n^x \end{bmatrix}\left[H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l \right]\begin{bmatrix} h_1^x \\ \vdots \\ h_n^x \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{m} 2\lambda_l \left(h_l^s\right)^2 \qquad (2.49)$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\hat{H}$ เป็นบวกและ $\lambda_l \geq 0, l = 1,\ldots,m$ ก็จะทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\hat{H}$ เป็นลบและ $\lambda_l \leq 0, l = 1,\ldots,m$ จะทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่ามากสุด

2.2.5.2 ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ (Variables) ขึ้นกับเวลา (Time-dependent) จะถูกเรียกว่าไดนามิก (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) มาเป็นตัวแสดงระบบไดนามิก (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m,t\right), i = 1,\ldots,n \qquad (2.50)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสเตตวาริเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวาริเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสเตตวาริเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอณุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.50) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.50) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการ

กำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ เพื่อให้ออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi\left(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \qquad (2.51)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1,\ldots,x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสภาวะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสเตตวาริเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวาริเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นความรู้จาก สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิก (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีไดเรคท์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) ซึ่งวิธีไดเรคท์ (Direct methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่าแต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) ในการวิจัยศึกษาในครั้งนี้จะใช้วิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) เข้ามาเป็นเครื่องมือสำหรับหาคำตอบ

ดังนั้นจึงต้องทำการศึกษาและทำความเข้าใจวิธีการแบบอินไดเรคท์ (Indirect methods) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการศึกษาและทำความเข้าใจแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) โดยเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) เพราะต้องใช้เป็นฐานในการใช้งานกับวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) จากนั้นก็จะลงลึก

ในรายละเอียดของวิธีการอินไดเรคท์ (Indirect methods) โดยจะเน้นหนักลงไปเกี่ยวกับมีนนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum time optimization)

2.2.6 แคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \tag{2.52}$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) dt \tag{2.53}$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.53) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.6.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.6.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t,x,\dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่อง โดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0)=h(t_f)=0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x+h]-J[x]=\int_{t_0}^{t_f}\left[F\left(t,x+h,\dot{x}+\dot{h}\right)-F(t,x,\dot{x})\right]dt \tag{2.54}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt \tag{2.55}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.55) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)h\,dt+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_f}-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_0} \tag{2.56}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad (2.57)$$

ซึ่งสมการ (2.57) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.6.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.6.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.54-2.56) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad (2.58)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0 \qquad (2.59)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \qquad (2.60)$$

ซึ่งสมการ (2.58-2.60) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.6.1.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคลายๆ กับกรณี (2.1.6.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x})dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})\right] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})dt
\end{aligned} \tag{2.61}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.62) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h})\Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.63}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x\big|_{t_0} - \dot{x}\big|_{t_0}\delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x\big|_{t_f} - \dot{x}\big|_{t_f}\delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.63) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)h\,dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right)\bigg|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right)\bigg|_{t_0} \\ + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\bigg|_{t_f}\delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\bigg|_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.64}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x\big|_{t_f}$, $\delta x\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\bigg|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\bigg|_{t_0} = 0 \tag{2.66}$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

2.2.6.2 **ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน** (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.6.2.1 **กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว** (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \ldots x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i = 1, \ldots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals)

$J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1,\ldots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)dt \tag{2.67}$$

ถ้า $x_i(t), i=1,\ldots,n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1,\ldots,n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0)=h_i(t_f)=0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n]-J[x_1,\ldots,x_n]\\ &=\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}F(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n)\\ -F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\end{bmatrix}dt\end{aligned} \tag{2.68}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i\right)dt \tag{2.69}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.69) ก็จะพบว่า

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\Big|_{t_f}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\Big|_{t_0}\right] \tag{2.70}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.71}$$

ซึ่งสมการ (2.71) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.6.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.6.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.68-2.70) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.72}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_f} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.74}$$

ซึ่งสมการ (2.72-2.74) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$

ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.2.6.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคลายๆ กับกรณี (2.1.6.2.1) ถ้า $x_i(t), i = 1,\ldots,n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1,\ldots,x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$
\begin{aligned}
\Delta J &= J[x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n] - J[x_1,\ldots,x_n] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\right)dt \\
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right) \\ - F\left(t, x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\right) \end{bmatrix} dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\
&\quad + F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F\left(t, x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.76) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\bigg|_{t_f} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\bigg|_{t_0} \\ &+ \left[F\left(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n + \dot{h}_n\right)\right]_{t_f}\delta t_f \\ &- \left[F\left(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n + \dot{h}_n\right)\right]_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.77}$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i\big|_{t_0} - \dot{x}_i\big|_{t_0}\delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i\big|_{t_f} - \dot{x}_i\big|_{t_f}\delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.77) จะเป็น

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\bigg|_{t_f} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\bigg|_{t_0} \\ &+ \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\bigg|_{t_f}\delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\bigg|_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.78}$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i\big|_{t_f}$, $\delta x_i\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.79}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t_f} = 0, i = 1, \ldots, n \\ &\left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\bigg|_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\bigg|_{t_0} = 0, i = 1, \ldots, n\end{aligned} \tag{2.80}$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

2.2.6.3 **ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ** (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier)

2.2.6.3.1 **ฟังก์ชันคอนสเทรนท์** (Function Constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \ldots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) = 0,\ j = 1, ..., m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \\ + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) g_j(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \end{bmatrix} dt \tag{2.81}$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1} \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั่นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.2.6.3.2 **ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย** (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \ldots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, ..., x_n)_{t_f} = 0, k = 1, ..., p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)dt + \sum_{k=1}^{p}\upsilon_k s_k \tag{2.82}$$

เมื่อ υ_k คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.78) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta J' = {} & \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p}\upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right\}\delta x_i\right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p}\upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial t}\right]_{t_f}\delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.83}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i\big|_{t_f}$, $\delta x_i\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1,\ldots,n \tag{2.84}$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned}&\left[F - \sum_{k=1}^{p}\upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right]_{t_f} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0\ i = 1,\ldots,n \\ &\left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p}\upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial t}\right]\Bigg|_{t_f} = 0;\ \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0} = 0\end{aligned} \tag{2.85}$$

2.2.6.3.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (2.1.6.3.1 และ 2.1.6.3.2) เราสามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1,\ldots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) $g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)=0$ เมื่อ $j=1,...,m$ โดย $m<n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t,x_1,...,x_n)_{t_f}=0, k=1,...,p$ โดย $p<m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix} F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \\ +\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n) \end{bmatrix}dt+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k s_k \tag{2.86}$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ υ_k คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.78) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F'}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right\}\delta x_i\right]_{t_f} \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Bigg|_{t_0}+\left[F'-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial t}\right]_{t_f}\delta t_f \\ &\quad -\left[F'-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.87}$$

เมื่อ $F'=F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j$

ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$\left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right]_{t_f} = 0$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0, i = 1, \ldots, n$$

$$\left[F' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \tag{2.88}$$

$$\left[F' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0} = 0$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \ldots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \ldots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.2.6.4 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากสุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t)dt$ นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้อย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ $x, \dot{x}$ และ t ต่อไปหากเรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยสุด ต่อไปลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0) = h(t_f) = 0$ เราจะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x+h] - J[x]$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + high - order - terms \tag{2.89}$$

เมื่อ
$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h\Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h\Big|_{t_0}$$

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \dot{x}}\right) dt$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านๆ มา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากสุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \widetilde{F} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} dt \tag{2.90}$$

เมื่อ

$$\widetilde{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\widetilde{F}$ เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\widetilde{F}$ เป็นลบ (Negative definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากสุด

2.2.7 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่ามีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้เราจะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.2.7.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.50), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.51), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0),\ldots,x_n(t_f)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวาริเอเบิลและสเตตวาริเอเบิล

(Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.7.1.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วทำให้เทอม $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ ในสมการ (2.51) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.6.3.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)\,dt \tag{2.91}$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\left[f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i\right]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) ดังนั้นมีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = {} & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\,dt \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j}\Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \tag{2.92}$$

แต่ว่ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j}\big|_{t_f} = h_{x_j}\big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.92) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j,$$
$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} = \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k},\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \tag{2.93}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k}, $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ สำหรับ $j = 1,\dots,n$ และ $k = 1,\dots,m$ ด้วยการแทนสมการ (2.93) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\dots,n \tag{2.94}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\dots,m \tag{2.95}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตต (Costate equations) คือสมการ (2.94) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.95) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two point boundary value problems) ส่วน $H = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of system)

2.2.7.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l\left(t,x_1,\ldots,x_n\right)_{t_f}=0$ เมื่อ $l=1,\ldots,p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (2.1.6.3.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$
\begin{aligned}
J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m] = \Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f} &+ \sum_{l=1}^{p}\upsilon_l s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$
\begin{aligned}
L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) &= L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\left[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)-\dot{x}_i\right]
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$
\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}\,dt + \int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}\,dt \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_0}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right)\Bigg|_{t_f} \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{t_f} h_{x_j}\Big|_{t_f}
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j}\Big|_{t_f}$ จะทำให้

$\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\dfrac{\partial L'}{\partial x_j} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\dfrac{\partial L'}{\partial u_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \dfrac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.100}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.101}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.99) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.100) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขและต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.101) ส่วนค่า υ_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l\Big|_{t_f} = 0$

2.2.7.1.3 **อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์** (Auxiliary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \ldots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m] = \Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \tag{2.102}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) &= L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) - \dot{x}_i] \\ &+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \end{aligned} \tag{2.103}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\, dt \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right)\Bigg|_{t_f} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right)\Bigg|_{t_f} h_{x_j}\Big|_{t_f} \end{aligned} \tag{2.104}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j}, h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}\big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิซัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, \ j = 1, \ldots, n \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \ldots, m \tag{2.106}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f}, \ j = 1, \ldots, n \tag{2.107}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และ υ_l สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.105) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.106) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีเควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.107)

2.2.7.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.7.1) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.50), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.51), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \ldots, x_n(t_f)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \ldots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \ldots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวาริเอเบิลและสเตตวาริเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.7.2.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m] = \Phi\left(t,x_1,\ldots,x_n\right)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \tag{2.108}$$

เมื่อ

$$L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) = L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J' = {} & \int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}dt + \int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}dt \\ & + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_0}\right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^{n}\dot{u}_k\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right]_{t_f}\delta t_f\end{aligned} \tag{2.109}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.109) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.110}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.111}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right]_{t_f} = 0 \tag{2.112}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.110) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.111) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.112) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.2.7.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \ldots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับ (2.1.7.1.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt \tag{2.113}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] \tag{2.114}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน และได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\delta J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\, dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big\|_{t_f}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big\|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \tag{2.115}$$
$$+ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^{n} \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.117}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.118}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.119}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.116) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.117) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.119) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขและต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.118)

2.2.7.2.3 **อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์** (Auxiliary Constraints)

สเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \ldots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุด

ท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$\begin{aligned} J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] &= \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt \end{aligned} \tag{2.120}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) &= L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] \\ &\quad + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \end{aligned} \tag{2.121}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big\|_{t_f} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big\|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ &\quad + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \tag{2.122}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.122) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n \tag{2.123}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \ldots, m \tag{2.124}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \ldots, n \tag{2.125}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.126}$$

ผลเฉลยของสเตตวาริเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.123) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.124) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.126) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.125)

2.2.7.2.4 **การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด** (Minimum Time Motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาที่น้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L = 1$ และ $\Phi = 0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ (2.1.7.2.3) จะทำให้ได้สมการเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_l \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1,\ldots,n \tag{2.127}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_l \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1,\ldots,m \tag{2.128}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f}, j = 1,\ldots,n \tag{2.129}$$

$$\left[1 + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right]_{t_f} = 0 \tag{2.130}$$

ผลเฉลยของสเตตวาริเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.127) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.128) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.130) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.129)

2.2.7.3 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากสุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) นี้มีค่าน้อยสุด

$$J[\bar{x},\bar{u}] = \Phi(t,\bar{x})\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t,\bar{x},\bar{u})dt \tag{2.131}$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\overline{x}} = \overline{f}(t,\overline{x},\overline{u})$ และ $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ เมื่อ $\overline{x}(t) \in R^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว ต่อไปหากเรากำหนดให้ $\overline{h}_x(t) \in R^n$ และ $\overline{h}_u(t) \in R^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังนี้

$$\Delta J = J[\overline{x} + \overline{h}_x, \overline{u} + \overline{h}_u] - J[\overline{x}, \overline{u}] \tag{2.132}$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + higher-order-terms \tag{2.133}$$

เมื่อ

$$\delta J = \overline{h}_x^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{x}} - \overline{\lambda} \right] \Bigg|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\overline{h}_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial \overline{x}} + \dot{\overline{\lambda}} \right) + \overline{h}_u^T \frac{\partial H}{\partial \overline{u}} \right] dt$$

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \overline{h}_x^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{x}^2} \overline{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\overline{h}_x^T \quad \overline{h}_u^T \right] \widetilde{H} \begin{bmatrix} \overline{h}_x \\ \overline{h}_u \end{bmatrix} dt$$

$$\widetilde{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u} \partial \overline{x}} \\ \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u} \partial \overline{x}} \right)^T & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u}^2} \end{bmatrix} \tag{2.134}$$

ซึ่งโคสเตตเวกเตอร์ (Costate vector) แสดงอยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตันเนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian function) $H = L + \overline{\lambda}^T \overline{f}$ และ $\overline{\lambda}(t) \in R^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\overline{x}(t)$ และ $\overline{u}(t)$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้สมการ (2.133) เขียนได้เป็น $\Delta J = \delta^2 J + higher-order-terms$ ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\overline{x}(t)$ และ $\overline{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{x}^2} > 0; \widetilde{H} > 0 \tag{2.135}$$

2.2.8 อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x},\bar{u}] = \Phi(t,\bar{x})\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t,\bar{x},\bar{u})dt \tag{2.136}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}) \tag{2.137}$$

$$c_i(\bar{x},\bar{u},t) \le 0, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.138}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \tag{2.139}$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x},\bar{u},t), i = 1,\ldots,p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Variable inequality constraints) และสเตตวาริเอเบิลอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (State variable inequality constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x},\bar{u},t) + s_i^2(t) = 0, i = 1,\ldots,p \tag{2.140}$$

ซึ่งสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) ในสมการ (2.140) จะเป็นคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.137) และสมการ (2.140) เข้าไปใน

สมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.136) ด้วยการใช้ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $\overline{\lambda} \in R^n$ และ $\overline{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt \tag{2.141}$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.142}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.143}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,m \tag{2.144}$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.145}$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.146}$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.147}$$

$$\lambda_i(t_f) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right|_{t_f}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.148}$$

ซึ่งสมการ (2.142-2.148) คือลักษณะของบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.142 และ 2.143) คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.144-2.146) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.147 และ 2.148) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับกรณีที่เป็นการหาค่าน้อยสุด (Minimum) เราสามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i c_i \right) dt \tag{2.149}$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.150}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.151}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,m \tag{2.152}$$

$$0 = \mu_i c_i, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.153}$$

$$0 \le \mu_i, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.154}$$

$$0 \ge c_i, i = 1,2,\ldots,p \tag{2.155}$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.156}$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\Big|_{t_f}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.157}$$

2.2.9 **การหาผลเฉลยด้วยวิธีอินไดเรคท์** (Indirect Solution)

วิธีการหาผลเฉลยวิธีนี้จะใช้หลักการของแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variation) โดยจะทำการค้นหาค่าของสเตต (State), โคสเตตวาริเอเบิล (Costate variables) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) ด้วยการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problems) ซึ่งเทคนิควิธีที่ให้ความแม่นยำในการแก้ปัญหาค่าขอบที่เกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์ก็คือมัลติเปิลชูดติ้งเทคนิค (Multiple shooting techniques) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.2.9.1 **ปัญหาค่าขอบของการควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal Control Boundary Value Problems)**

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal control problem) ที่อันคอนสเทรนท์ โดยจะเป็นการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่เกี่ยวข้องเฉพาะกับสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi\left(\bar{x}\left(t_f\right)\right) + \int_0^{t_f} L\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) dt \tag{2.158}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right), \quad t \in [0, t_f] \tag{2.159}$$
$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{2.160}$$
$$\bar{\psi}\left(\bar{x}\left(t_f\right)\right) = 0 \tag{2.161}$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{x}_0$ คือกลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น (Set of initial conditions), และ $\bar{\psi}\left(\bar{x}\left(t_f\right)\right) \in R^{n_f}$ คือเงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Final state constraint) ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับหัวข้อ 2.1.7.1.2 คือสภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface) ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_\lambda = \bar{f}\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) \tag{2.162}$$
$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \tag{2.163}$$
$$0 = H_u \tag{2.164}$$
$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \tag{2.165}$$
$$0 = \bar{\psi}\left(\bar{x}\left(t_f\right)\right) \tag{2.166}$$
$$0 = \bar{\lambda}\left(t_f\right) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\upsilon}_f \tag{2.167}$$

เมื่อ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ คือโคสเตตวาริเอเบิล (State variables), สเกลาร์ $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$, $H_x = \partial H / \partial \bar{x}$, $H_u = \partial H / \partial \bar{u}$, $\Phi_x = \partial \Phi / \partial \bar{x}$ ตามลำดับ ส่วน $\bar{\upsilon}_f \in R^{n_f}$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เพื่อให้ลดความซับซ้อนลงเราจะทำการสมมุติให้อยู่ในสภาวะคงที่ (Stationary condition) คือ $H_u = 0$ และทำการจัดรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) $\bar{u}$ ในเทอมของสเตตวาริเอเบิล (State) และ

โคสเตตวาริเอเบิล (Costate) นอกจากนี้เราจะทำการสมมุติให้สมการ (2.165-2.167) มีจำนวน $2n+n_f$ เพื่อใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขเพื่อให้อยู่ในเทอมของ $\bar{x}$ และ $\bar{\lambda}$ ด้วยการกำจัด $\bar{\upsilon}_f$ ออก ส่วนปัญหาที่ไม่มีการกำจัด $\bar{\upsilon}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากการกำจัด $\bar{\upsilon}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะทำให้ได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.162-2.167) กลายเป็น

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t,\bar{y}) \tag{2.168}$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0),\bar{y}(t_f)) \tag{2.169}$$

เมื่อ $\bar{y} = [\bar{x}^T,\bar{\lambda}^T]^T \in R^{2n}$, $\bar{h}(t,\bar{y}) = [H_\lambda^T,-H_x^T]^T \in R^{2n}$ และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข ได้จากสมการ (2.165-2.167)

2.2.9.2 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ้ง (Multiple Shooting Solution)

มีหลายๆ เทคนิควิธีที่สามารถใช้หาผลเฉลยทางตัวเลขปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.168-2.169) ยกตัวอย่างเช่น วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference methods), วิธีจัดตำแหน่ง (Collocation method) และวิธีค่าเริ่มต้นหรือชูดติ้ง (Initial value or shooting method) แต่วิธีที่มีประสิทธิภาพและให้ความแม่นยำสูงในการแก้ปัญหาแบบไม่เชิ้งเส้น (Nonlinear) ก็คือวิธีมัลติเปิลชูดติ้ง (Multiple shooting method)

2.2.9.2.1 มัลติเปิลชูดติ้งอัลกอริทึม (Multiple Shooting Algorithm)

เพื่อให้ใช้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับปัญหาที่มีค่าขอบ (Boundary value) สมการ (2.168-2.169) ได้ จะทำการแบ่งช่วงเวลา $[0,t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t;\bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem)

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t,\bar{y}), \qquad t \in (t_i,t_{i+1}) \tag{2.170}$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y,\ i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{2.171}$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ของสมการ (2.168-2.169) ณ ที่โหนด $t_i, i = 0,1,2,\ldots,M$ อย่างไรก็ตามสำหรับ $M = 1$ เราจะได้วิธีซิมเปิลชูดติ้ง (Simple shooting method) ซึ่งหลักการเบื้องต้นของวิธีนี้ก็คือการเดาค่าตัวแปรที่ไม่รู้ค่าของ $\bar{s}_0^y$ จากนั้นก็ทำการหาผลรวมของค่าเริ่มต้นของปัญหาสมการ (2.170-2.171) เพื่อให้ได้ $\bar{s}_1^y$ การใช้ค่าผิดพลาดที่คำนวณได้จากสมการ (2.169) จะถูกนำมาใช้เพื่อปรับปรุงค่าที่เดาสำหรับตัวไม่ทราบค่าที่เวลา $t = 0$ ขั้นตอนนี้จะถูกกระทำซ้ำหลายๆ ครั้งจนกระทั่งได้ผลเฉลย $\bar{s}_0^y$ ที่ลู่เข้าหาคำตอบ (Converge) และ/หรือสอดคล้องกับสมการ (2.169)

มัลติเปิลชูคติ้งเทคนิค (Multiple shooting technique) อาศัยหลักการเดียวกันกับวิธีซิมเปิลชูดติ้ง (Simple shooting method) ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ให้โหนดแต่ละโหนดต่อเนื่องกัน ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นดังนี้

- ผลเฉลยที่แต่ละโหนดมีความต่อเนื่อง นั่นคือ

$$\bar{y}\left(t_{i+1}; \bar{s}_i^y\right) - \bar{s}_{i+1}^y = 0,\ i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

เมื่อ $\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) สมการ (2.170) ที่เวลา $t = t_{i+1}$ โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) $\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y$

- ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) นั่นคือ

$$\bar{r}\left(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y\right) = 0$$

สภาวะเหล่านี้จะทำให้เกิดนอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equations) จำนวน $2n(M+1)$ สมการ จะมีตัวไม่ทราบค่า $2n(M+1)$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$F\left(\bar{s}\right) = \begin{bmatrix} \bar{y}\left(t_1; \bar{s}_0^y\right) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{y}\left(t_M; \bar{s}_{M-1}^y\right) - \bar{s}_M^y \\ \bar{r}\left(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y\right) \end{bmatrix} = 0;\ \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \end{bmatrix} \tag{2.172}$$

นอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.172) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ (Iterative) ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) ดังนั้นถ้าเดาค่าเริ่มต้น (initial gauss) $\bar{s}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.168-2.169) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{s}^{k+1}$ ดังรูปแบบนี้

$$\bar{s}^{k+1} = \bar{s}^{k} + \alpha\Delta\bar{s}, \alpha \in (0,1] \quad (2.173)$$

$$J\left(\bar{s}^{k}\right)\Delta\bar{s} = -F\left(\bar{s}^{k}\right), \; k = 1,2,\ldots, until\ convergence) \quad (2.174)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) คือ $J(\bar{s}) = \partial F(\bar{s})/\partial\bar{s}$ มีขนาดมิติ $2n(M+1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบเป็นดังนี้

$$J\left(\bar{s}\right) = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix}$$

$$A_i = \left[\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^{y}}\right]; \; C_i = -I, i = 0,1,\ldots, M-1 \quad (2.175)$$

$$B_0 = \left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{s}_0^{y}}\right]; \; B_M = \left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{s}_M^{y}}\right]$$

จะทำซ้ำสมการ (2.173-2.175) ไปจนกระทั่งลู่เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta\bar{s}\| \le \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \le \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแดมปิ้งแฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \le \|F(\bar{s}^{k})\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{s}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) สมการ (2.168-2.169) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้เป็น

ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \ldots, t_{M-1}, \bar{s}^{0}$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

1. คำนวณค่า $F\left(\bar{s}^{0}\right)$
2. ถ้า $\left\|F\left(\bar{s}^{0}\right)\right\| \le \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^{0}$ ก็คือผลเฉลย
3. คำนวณค่า $\Delta\bar{s} = -J^{-1}(\bar{s}^{0})F(\bar{s}^{0})$

   ถ้า $\|\Delta\bar{s}\| \le \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^{0}$ ก็คือผลเฉลย
4. ค้นหาค่า $\alpha^{*} > 0$ ที่ทำให้ $F\left(\bar{s}^{0} + \alpha^{*}\Delta\bar{s}\right) < F\left(\bar{s}^{0}\right)$
5. กำหนด $\bar{s}^{0} = \bar{s}^{0} + \alpha^{*}\Delta\bar{s}$

   กำหนด $F\left(\bar{s}^{0}\right) = F\left(\bar{s}^{0} + \alpha^{*}\Delta\bar{s}\right)$

ย้อนกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีซิมเปิลชูตติ้ง (Simple shooting method) จะพบว่ามัลติเปิลชูคติ้งเทคนิค (Multiple shooting technique) มีคุณสมบัติที่มีความเสถียรทางตัวเลขมากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาที่มีความไม่เชิงเส้นสูง (Nonlinear) และปัญหาที่ตัวแปรเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

สรุปได้ว่าวิธีมัลติเปิลชูคติ้งเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

1. หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.170-2.171)
2. คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.175)
3. หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.174)

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) สมการ (2.170-2.171) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีก็คือวิธีรัง-กัตตาอันดับ 4(3) (Runge-Kutta method of order 4(3)) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.170-2.171) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ค่าปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y}\right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y}, \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \tag{2.176}$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I,\ i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{2.177}$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Solution of linear system of equations) นั้นก็สามารถใช้จาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) มาคำนวณหาค่าแดมพ์ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) โดยการแก้ปัญหาสมการ (2.174) แต่จะทำการจัดเรียงใหม่ดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} C_0 & & & & A_0 \\ A_1 & C_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & A_{M-1} & C_{M-1} & \\ & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{s}_1 \\ \Delta\bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta\bar{s}_M \\ \Delta\bar{s}_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix} \tag{2.178}$$

ต่อไปก็ทำการหาค่าแมตริกซ์ทแยง (Orthogonal factorization matrix) $Q_0 \in R^{4n\times 4n}$ นั่นคือ

$$Q_0^T \begin{bmatrix} C_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $R_0 \in R^{2n\times 2n}$ จะเป็นแมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) ทำการคูณทั้งสองข้างของสมการ (2.178) ด้วย (Q_0^T, I) จึงทำให้ได้สมการเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & & G_0 \\ & \widetilde{C}_1 & & & & \widetilde{G}_1 \\ & A_2 & C_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_{M-1} & C_{M-1} & \\ & & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{s}_1 \\ \Delta\bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta\bar{s}_M \\ \Delta\bar{s}_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_0' \\ F_1'' \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix} \tag{2.179}$$

ในทำนองเดียวกันโดยใช้ $\begin{bmatrix} \widetilde{C}_i \\ A_{i+1} \end{bmatrix}$, $i = 1,2,\ldots,M-1$ ทำให้เราได้สมการใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & \\ & R_1 & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \widetilde{C}_{M-1} & \widetilde{G}_{M-1} \\ & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{s}_1 \\ \Delta\bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta\bar{s}_M \\ \Delta\bar{s}_0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_0' \\ F_1' \\ \vdots \\ F_{M-1}' \\ F_M'' \end{bmatrix} \tag{2.180}$$

$$\begin{matrix} \widetilde{C}_{M-1} & \overline{G}_{M-1} \\ B_M & B_0 \end{matrix}$$

ดังนั้นเมื่อทำการลดสมการ (2.178) ไปเป็นแมตริกซ์สามเหลี่ยมบน ด้วยการทำเช่นนี้ จะทำให้สามารถหาค่า $\Delta \bar{s}$ ด้วยการแทนค่ากลับ (Back substitution) นั่นเอง

2.2.9.3 อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์ (Auxiliary Constraints)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal control problem) ที่มีอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) เข้ามาเกี่ยวข้องกับสเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and control variables) โดยเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential and algebraic equations: BVP-DAE) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u})dt \qquad (2.181)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \qquad (2.182)$$

$$0 = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \qquad (2.183)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \qquad (2.184)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \qquad (2.185)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอีควอลิตีคอนสเทรนท์(Equality constraints) ของสเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and control variables) จำนวน $(0 \le p \le n + m)$, และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือช่วงสุดท้ายที่หลากหลายของสภาวะ $0 \le n_f \le n$ ในสมการคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) (2.181) ประกอบไปด้วย สเกลาร์เทอร์มินอลเวตติ้งฟังก์ชัน (Scalar terminal weighting function) Φ, และสเกลาร์เพอร์ฟอมานซ์ฟังก์ชัน (Scalar performance function) L ส่วนเวลาสุดท้าย t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว

โดยทั่วไปแล้วปัญหาการหาค่าควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal control problem) สามารถทำให้อยู่ในรูปสมการ (2.181-2.185) ส่วนกรณีที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) จะมีการเพิ่มสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) เข้าไปเพื่อเปลี่ยนให้เป็นเงื่อนไขเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จากนั้นก็ใช้แคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) มีเทอมฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ $H(t,\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = L(t,\bar{x},\bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}) + \bar{\mu}^T \bar{c}(t,\bar{x},\bar{u})$ เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrance multiplier) ด้วยการใช้ฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_\lambda = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}) \tag{2.186}$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \tag{2.187}$$

$$0 = H_u \tag{2.188}$$

$$0 = H_\mu = \bar{c}(t,\bar{x},\bar{u}) \tag{2.189}$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \tag{2.190}$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \tag{2.191}$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - (\Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\upsilon}_f) \tag{2.192}$$

เมื่อ $\bar{\upsilon}_f \in R^{n_f}$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในสมการ (2.186-2.192) เพื่อบอกลักษณะของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์คือสมการ (2.186-2.187) ส่วนสมการพีชคณิตคือสมการ (2.188-2.189) และสมการเงื่อนไขขอบเขตคือสมการ (2.190-2.192) สมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสเตตวาริเอเบิล (State variables) $(\bar{x})$, โคสเตตวาริเอเบิล (Costate variables) $(\bar{\lambda})$, คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) $(\bar{u})$ และลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) $(\bar{\mu})$ ซึ่งเขียนดังนี้

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \ \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

$$\bar{h}(t,\bar{y},\bar{z}) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \ \bar{g}(t,\bar{y},\bar{z}) = \begin{bmatrix} H_u \\ H_\mu \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

และ $\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z})$ (2.193)

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.194)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.195)$$

สมการปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) สมการ (2.193-2.195) จะลดรูปลงเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้นด้วยการใช้สมการพีชคณิตสมการ (2.194) มาหาค่า $\bar{z} = G(\bar{y})$ ดังนั้นสมการ (2.193) สามารถเขียนเป็น $\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, G(\bar{y}))$ รวมกับสมการ (2.195) จะมีลักษณะเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential equations: BVP-DE)

2.2.9.3.1 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ้งของบีวีพี-ดีเออี (Multiple Shooting Solution to the BVP-DAE)

เพื่อให้ใช้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับระบบดีเออี (DAE system) สมการ (2.193-2.195) ได้ จะทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$ เป็นผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) คือ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}), \ \ t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.196)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) - \bar{k}_i, \ \ t \in (t_i, t_{i+1}), \ \bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = cons\tan t \quad (2.197)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \ \bar{z}(\mathrm{t_i}) = \bar{s}_i^z, \ i = 0,1,\ldots, M-1 \quad (2.198)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.193-2.195) ณ ที่โหนด $t_i, i = 0,1,2,\ldots, M$ และเพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.193-2.195) จะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

$$\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, \ i = 0,1,2,\ldots, M-1$$

$$\bar{g}(t_i; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = 0, \ i = 0,1,2,\ldots, M$$

$$\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$$

สภาวะแรกก็คือผลเฉลยที่โหนด t_i ซึ่ง $\bar{s}_i^y$ ต้องมีความต่อเนื่อง, สภาวะที่สองคือสมการพีชคณิต (2.194) จะต้องสอดคล้องกับทุกโหนดและสภาวะที่สามคือจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ถ้าสอดคล้องกับสภาวะที่สองจะทำให้ $\bar{k}_i = 0$ ($\bar{k}_i$ คือแฟกเตอร์คลาย (Relaxation factor)) ในสมการ (2.197) สภาวะเหล่านี้จะทำให้เกิดนอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n+m+p)(M+1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ จำนวน $(2n+m+p)(M+1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}\left(t_0;\bar{s}_0^y,\bar{s}_0^z\right) \\ \bar{y}\left(t_1;\bar{s}_0^y,\bar{s}_0^z\right)-\bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}\left(t_{M-1};\bar{s}_{M-1}^y,\bar{s}_{M-1}^z\right) \\ \bar{y}\left(t_M;\bar{s}_{M-1}^y,\bar{s}_{M-1}^z\right)-\bar{s}_M^y \\ \bar{g}\left(t_M;\bar{s}_M^y,\bar{s}_M^z\right) \\ \bar{r}\left(\bar{s}_0^y,\bar{s}_M^y\right) \end{bmatrix} = 0;\ \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \qquad (2.199)$$

นอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.199) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ (Iterative) ด้วยวิธีนิวตัน (Newton’s method) ดังนั้นถ้าเดาค่าเริ่มต้น (initial gauss) $\bar{s}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.193-2.195) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{s}^{k+1}$ ดังต่อไปนี้

$$\bar{s}^{k+1} = \bar{s}^k + \alpha\Delta\bar{s}, \alpha \in (0,1] \qquad (2.200)$$

$$J\left(\bar{s}^k\right)\Delta\bar{s} = -F\left(\bar{s}^k\right),\ k = 1,2,\ldots, until\ convergence \qquad (2.201)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) คือ $J(\bar{s}) = \partial F(\bar{s})/\partial\bar{s}$ มีขนาดมิติ $(2n+m+p)(M+1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้

$$J(\bar{s})=\begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix};\ A_i=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^y} & \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^z} \\ \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} & \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} \end{bmatrix}$$

$$C_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}, i=0,1,\ldots,M-1 \qquad (2.202)$$

$$B_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix};\ B_M=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^y} & \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^z} \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix}$$

จะทำซ้ำสมการ (2.200-2.202) ไปจนกระทั่งลู่เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta\bar{s}\| \le \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \le \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแดมปิ้งแฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \le \|F(\bar{s}^{k})\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{s}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.193-2.195) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้ดังนี้

ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \ldots, t_{M-1}, \bar{s}^0$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

1. คำนวณค่า $F(\bar{s}^0)$
2. ถ้า $\|F(\bar{s}^0)\| \le \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
3. คำนวณค่า $\Delta\bar{s} = -J^{-1}(\bar{s}^0)F(\bar{s}^0)$

   ถ้า $\|\Delta\bar{s}\| \le \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
4. ค้นหาค่า $\alpha^* > 0$ ที่ทำให้ $F(\bar{s}^0 + \alpha^*\Delta\bar{s}) < F(\bar{s}^0)$
5. กำหนด $\bar{s}^0 = \bar{s}^0 + \alpha^*\Delta\bar{s}$

   กำหนด $F(\bar{s}^0) = F(\bar{s}^0 + \alpha^*\Delta\bar{s})$

   ย้อนกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

สรุปได้ว่าวิธีมัลติเปิลชูคติ้งเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

1. หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.196) ในแต่ละช่วงของเวลา M เพื่อนำมาใช้คำนวณหาฝั่งขวามือของสมการ (2.201)
2. คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.202)
3. หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.201) เพื่อให้ได้ $\Delta\bar{s}$

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีก็คือวิธีรัง-กัตตาอันดับ 4(3) (Runge-Kutta method of order 4(3)) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.196) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ค่าปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y}\ ,\ t \in (t_i, t_{i+1}) \tag{2.203}$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{y}}\ , \tag{2.204}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z}\ , \tag{2.205}$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{z}}\ , \tag{2.206}$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I,\ \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = 0 \tag{2.207}$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = 0,\ \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = I \tag{2.208}$$

สมการ (2.203-2.207) คือกลุ่มของสมการอนุพันธ์-พีชคณิตแบบเชิงเส้น (Linear differential-algebraic equations)

2.2.9.4 อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

จะใช้เทคนิคฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function technique) เปลี่ยนให้ไม่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u})dt \tag{2.209}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.210}$$

$$\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0 \tag{2.211}$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{2.212}$$

เมื่อ $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ของสเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and control variables) และกระจายด้วยการใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) คือ

$$C_i = \begin{cases} -1/c_i & if\ -c_i \geq \sigma \\ \left(3 + 3c_i/\sigma + (c_i/\sigma)^2\right)/\sigma & if\ -c_i < \sigma \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{2.213}$$

เมื่อ σ คือพารามิเตอร์ ด้วยการใช้สมการ (2.213) ทำให้เปลี่ยนอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ให้เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstraint) ได้ โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$I(\rho_k) = \Phi\left(\bar{x}(t_f)\right) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{p} \rho_k C_i(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \tag{2.214}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.215}$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{2.216}$$

เมื่อ $\sigma = \sqrt{\rho_k}$, $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$

2.2.9.4.1 **ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ้งต่อเนื่อง** (Multiple Shooting-Continuation Solution)

การควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal control) ของปัญหาสมการ (2.209) สามารถที่จะหาคำตอบได้โดยการทำให้อยู่รูปของสมการ (2.214) ด้วยการเพิ่มค่าเพียงเล็กน้อยของ ρ_k และเนคเซสเซอรีคอนดิชันของปัญหานี้สามารถทำให้อยู่ในเทอมของฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$
\begin{aligned}
&H(t,\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda};\rho_k) = L(t,\bar{x},\bar{u}) + \rho_k \sum_{i=1}^{l} C_i(\sigma,t,\bar{x},\bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}) \\
&\dot{\bar{x}} = H_\lambda = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; 0 = H_u \\
&0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0; 0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)); 0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\upsilon}_f
\end{aligned}
\tag{2.217}
$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\upsilon}_f \in R^{n_f}$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) บีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.217) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$
\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \ \bar{z} = \bar{u} \in R^m
$$

$$
\bar{h}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \ \bar{g}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k) = H_u \in R^m
$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k) \tag{2.218}$$

$$0 = \bar{g}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k) \tag{2.219}$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0),\bar{y}(t_f)) \tag{2.220}$$

สมการ (2.217) จำนวน $2n + n_f$ จะลดลงเป็น $2n$ ในสมการ (2.220) ด้วยการตัด n_f ออกเพราะเกี่ยวข้องกับลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) υ_f

วิธีมัลติเปิลชูดติ้งต่อเนื่อง (Multiple shooting-continuation method) จะถูกนำมาใช้แก้ปัญหาโดยการกำหนดค่า $\rho_k \to 0$ และทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่

$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t;\bar{s}_i^y,\bar{s}_i^z;\rho_k)$, $\bar{z}(t;\bar{s}_i^y,\bar{s}_i^z;\rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k),\quad t \in (t_i,t_{i+1}) \tag{2.221}$$

$$0 = \bar{g}(t,\bar{y},\bar{z};\rho_k) - \bar{k}_i,\ \bar{k}_i = \bar{g}(t;\bar{s}_i^y,\bar{s}_i^z) = cons\tan t \tag{2.222}$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y,\ \bar{\mathrm{z}}(\mathrm{t_i}) = \bar{s}_i^z,\ i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{2.223}$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.218-2.220) ณ ที่โหนด $t_i, i = 0,1,2,\ldots,M$ เพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) จะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

- มีความสืบเนื่องของผลเฉลยที่โหนด คือ $\bar{y}(t_{i+1};\bar{s}_i^y,\bar{s}_i^z;\rho_k) - \bar{s}_{i+1}^y = 0,\ i = 0,1,2,\ldots,M-1$
- เป็นไปตามสมการพีชคณิตที่โหนด คือ $\bar{g}(t_i;\bar{s}_i^y,\bar{s}_i^z;\rho_k) = 0,\ i = 0,1,2,\ldots,M$
- เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ $\bar{r}(\bar{s}_0^y,\bar{s}_M^y) = 0$

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n+m+p)(M+1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ และ ρ_k จำนวน $(2n+m+p)(M+1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0;\bar{s}_0^y,\bar{s}_0^z;\rho_k) \\ \bar{y}(t_1;\bar{s}_0^y,\bar{s}_0^z;\rho_k) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1};\bar{s}_{M-1}^y,\bar{s}_{M-1}^z;\rho_k) \\ \bar{y}(t_M;\bar{s}_{M-1}^y,\bar{s}_{M-1}^z;\rho_k) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M;\bar{s}_M^y,\bar{s}_M^z;\rho_k) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y,\bar{s}_M^y;\rho_k) \end{bmatrix} = 0;\ \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \tag{2.224}$$

เมื่อกำหนดค่า ρ_k ก็จะได้ผลเฉลยของนอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.224) เป็นผลเฉลยโดยประมาณของสมการ (2.214) ที่โหนด $t_i, i = 0,1,2,\ldots,M$

2.2.9.4.2 **วิธีต่อเนื่อง** (Continuation Method)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.214) ที่มีระบบสมการ (2.224) จะต้องทำการแก้ปัญหาด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยการ $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้ขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation or homotopy procedure) โดยเริ่มจากทำการแก้สมการ (2.224) ด้วยการกำหนดค่า ρ_k ซึ่งผลที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นค่าเดาเริ่มต้นให้กับพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Penalty parameter) $\rho_{k+1} < \rho_k$ และขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะทำไปจนกระทั่ง ρ_k เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ประมาณค่าโพลีโนเมียลนอกช่วง (Prediction via Polynomial Extrapolation)

ในการหาค่าของ $(\bar{s}^{k-1};\rho_{k-1})$ และ $(\bar{s}^{k-2};\rho_{k-2})$ จะต้องทำการประมาณค่า ρ_k โดยการใช้วิธีการใดวิธีการหนึ่งดังนี้คือ

1. ตัวทำนายกำหลังศูนย์ (Zeroth-order predictor)

$$\hat{s}^k = \bar{s}^{k-1}$$

$$\rho_k = h_{k-1}\rho_{k-1}$$

2. ตัวทำนายกำหลังหนึ่ง (First-order predictor (secant))

$$\hat{s}^k = \bar{s}^{k-2}\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-2} - \rho_{k-1}} + \bar{s}^{k-1}\frac{\rho_k - \rho_{k-2}}{\rho_{k-1} - \rho_{k-2}}$$

$$\rho_k = h_{k-1}\rho_{k-1}$$

เมื่อ $\hat{s}^k$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณที่ ρ_k และ $h_{k-1} \in (0,1)$ เป็นแฟกเตอร์ปรับ

ขั้นตอนที่ 2 แก้ค่าแดมพ์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via Damped Newton’s Iteration)

วิธีการเหมือนกับในหัวข้อ (2.1.9.3.1) ณ ช่วงสุดท้ายของขั้นตอนนี้ กำหนดให้ N_{cor} เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

ขั้นตอนที่ 3 ปรับขนาดช่วง (Stepsize adjustment)

ขนาดช่วง h_k ที่เหมาะสมจะมีขนาดใกล้กับหนึ่ง ณ ที่ทุกๆ k แต่ก็สามารถทำการปรับขนาดช่วงได้เช่นกัน คือ

$$h_{k-1}^{new} = h_{k-1}^{old}\frac{N_{cor}}{N_{opt}}$$

$$0 < h_{\min} \le h_{k-1}^{new} \le h_{\max} < 1$$

ขั้นตอนการทำต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะสิ้นสุดเมื่อ $\left|I(\rho_k) - I(\rho_{k-1})\right| < \varepsilon$ หรือ $\left|\rho_k\right| < \varepsilon_\rho$

2.2.9.5 **ปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุดที่มีพารามิเตอร์** (Optimal Control Problems with Parameters)

โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ และมีพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) dt \tag{2.225}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \tag{2.226}$$

$$0 \geq \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \tag{2.227}$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \tag{2.228}$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \tag{2.229}$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) จะทำให้เขียนสมการได้เป็น

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} \left(L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^{p} C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \right) dt \tag{2.230}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \tag{2.231}$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \tag{2.232}$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \tag{2.233}$$

เมื่อ $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$ และ $\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0$ ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{x}} = H_\lambda = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; \dot{\bar{\gamma}} = H_p \\
&0 = H_u = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 = \bar{\gamma}(0) = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f),\bar{p}) \\
&0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\upsilon}_f = \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{\upsilon}_f
\end{aligned} \tag{2.234}$$

โดยฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$H(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p},\bar{\lambda};\rho_k) = L(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^{l} C_i(\sigma,t,\bar{x},\bar{u},\bar{p},\rho_k) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\upsilon}_f \in R^{n_f}$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multipliers) ส่วน $\bar{\gamma} \in R^{n_p}$ คือผลเฉลยอย่างง่ายของปัญหา (Facilitate) สมการ (2.234) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p},\ \bar{z} = \bar{u} \in R^m,\ \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\upsilon}_f \end{bmatrix} \in R^{n_p+n_f}$$

$$\bar{h}(t,\bar{y},\bar{z},\bar{\omega};\rho_k) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \\ H_p \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p},\ \bar{g}(t,\bar{y},\bar{z},\bar{\omega};\rho_k) = H_u \in R^m$$

$$\bar{r}(\bar{y}(0),\bar{y}(t_f),\bar{\omega};\rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \\ \gamma(0) \\ \bar{\psi}(\bar{x}(t_f),\bar{p}) \\ \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\upsilon}_f \\ \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{\upsilon}_f \end{bmatrix} \in R^{2n+2n_p+n_f}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t,\bar{y},\bar{z},\bar{\omega};\rho_k) \tag{2.235}$$

$$0 = \bar{g}\left(t, \bar{y}, \bar{z}, \varpi; \rho_k\right) \tag{2.236}$$

$$0 = \bar{r}\left(\bar{y}(0), \bar{y}\left(t_f\right), \varpi\right) \tag{2.237}$$

2.2.9.5.1 **ผลเฉลยมัลติเปิลชูตติ้งต่อเนื่อง** (Multiple Shooting-Continuation Solution)

การแก้ปัญหาสมการ (2.235-2.237) สามารถที่จะหาคำตอบได้โดยใช้ขั้นตอนเหมือนกับในหัวข้อ (2.1.9.4.1) แต่ต้องเพิ่มเติมในส่วนของตัวไม่ทราบค่า ϖ และทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \varpi; \rho_k)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \varpi; \rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}\left(t, \bar{y}, \bar{z}, \varpi; \rho_k\right), \quad t \in \left(t_i, t_{i+1}\right) \tag{2.238}$$

$$0 = \bar{g}\left(t, \bar{y}, \bar{z}, \varpi; \rho_k\right) - \bar{k}_i, \; \bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \varpi; \rho_k) = cons\tan t \tag{2.239}$$

$$\bar{y}\left(t_i\right) = \bar{s}_i^y, \; \bar{z}\left(\mathrm{t_i}\right) = \bar{s}_i^z, \; i = 0,1,\ldots, M-1 \tag{2.240}$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$, $\bar{s}_i^z$ และ ϖ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.235-2.237) ณ ที่โหนด $t_i, i = 0,1,2,\ldots, M$ และจะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

- มีความสืบเนื่องของผลเฉลย $\bar{s}_i^y$ ที่โหนด
- เป็นไปตามสมการพีชคณิต สมการ (2.236) ที่แต่ละโหนด
- เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สมการ (2.237)

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์อีเควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1) + n_p + n_f$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\left(\bar{s}, \varpi\right)$ และ ρ_k และเขียนสมการได้เป็น

$$F\left(\bar{s}, \varpi; \rho_k\right) = \begin{bmatrix} \bar{g}\left(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \varpi; \rho_k\right) \\ \bar{y}\left(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \varpi; \rho_k\right) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}\left(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \varpi; \rho_k\right) \\ \bar{y}\left(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \varpi; \rho_k\right) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}\left(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z, \varpi; \rho_k\right) \\ \bar{r}\left(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y, \varpi; \rho_k\right) \end{bmatrix} = 0; \; \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \tag{2.241}$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.241) จะต้องทำการแก้ปัญหาด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยการ $\lim_{k\to\infty}\rho_k = 0$ และมีขั้นตอนเหมือนกับหัวข้อ (2.1.9.4.2) แต่ขั้นตอนแก้ค่าแดมพ์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via Damped Newton’s Iteration) หาจากสมการนี้คือ

$$J(\bar{s},\bar{\varpi};\rho_k) = \begin{bmatrix} F_s & F_\varpi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & E_0 \\ 0 & A_1 & C_1 & & E_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & A_{M-1} & C_{M-1} & E_{M-1} \\ B_0 & & 0 & B_M & E_M \end{bmatrix} \tag{2.242}$$

เมื่อ

$$\begin{gathered} A_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{s}_i^y} & \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{s}_i^z} \\ \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^y} & \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^z} \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{s}_M^y} & \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{s}_M^z} \\ \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix} \\ C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}; E_M = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{\varpi}} \\ \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\varpi}} \end{bmatrix}; E_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{\varpi}} \\ \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\varpi}} \end{bmatrix}, i = 0,1,\ldots,M-1 \end{gathered} \tag{2.243}$$

จากสมการ (2.238-2.240) สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ในช่วงเวลา $t \in (t_i, t_{i+1})$ ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^y} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^y} + \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{s}_i^y} \tag{2.244}$$

$$0 = \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^y} + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{s}_i^y} - \frac{\partial\bar{k}_i}{\partial\bar{y}} \tag{2.245}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^z} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^z} + \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{s}_i^z} \tag{2.246}$$

$$0 = \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{s}_i^z} + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{s}_i^z} - \frac{\partial\bar{k}_i}{\partial\bar{z}} \tag{2.247}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\varpi}} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\varpi}} + \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{\varpi}} + \frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{\varpi}} \tag{2.248}$$

$$0=\frac{\partial\overline{g}}{\partial\overline{y}}\frac{\partial\overline{y}}{\partial\overline{\omega}}+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\overline{\omega}}-\frac{\partial\overline{k}_i}{\partial\overline{\omega}}+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\overline{\omega}} \qquad (2.249)$$

$$\frac{\partial\overline{y}(t_i)}{\partial\overline{s}_i^y}=I,\ \frac{\partial\overline{z}(t_i)}{\partial\overline{s}_i^y}=0 \qquad (2.250)$$

$$\frac{\partial\overline{y}(t_i)}{\partial\overline{s}_i^z}=0,\ \frac{\partial\overline{z}(t_i)}{\partial\overline{s}_i^z}=I \qquad (2.251)$$

$$\frac{\partial\overline{y}(t_i)}{\partial\overline{\omega}}=0,\ \frac{\partial\overline{z}(t_i)}{\partial\overline{\omega}}=0 \qquad (2.252)$$

2.2.10 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.50) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m,t), i=1,\ldots,n$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากสุด ดังนี้

$$J=\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f} L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม

(Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L=\sum_{i=1}^{m}u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L=\sum_{i=1}^{m}\left|u_i\right|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi=t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi=x_2\left(t_f\right)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไดเรคท์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange multiplier) υ_l , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J=\Phi+\sum_{l=1}^{q}\upsilon_l s_l+\int_{t_0}^{t_f}L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\dot{x}_i-f_i\right)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i g_i+\sum_{i=1}^{p}\mu_i\left(c_i+s_i^2\right)dt$$

$$J'=\Phi'+\int_{t_0}^{t_f}L'dt$$

เมื่อ

$$\Phi'=\Phi+\sum_{l=1}^{q}\upsilon_l s_l$$

$$L'=L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\dot{x}_i-f_i\right)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i g_i+\sum_{i=1}^{p}\mu_i\left(c_i+s_i^2\right)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

2.3 **แบบจำลองทางคณิตศาสตร์** (Mathematical Model)

ในการวิเคราะห์และสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบไดนามิกยานยนต์นั้น ส่วนใหญ่แล้วนิยมใช้ระบบแกนอ้างอิงตามมาตรฐาน SAE J670e แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้น

มาเพื่อเอาไปใช้กับการศึกษาและวิเคราะห์พฤติกรรมด้านต่างๆ ของยานยนต์ โดยเริ่มตั้งแต่ระบบสองระดับขั้นความเสรี (2 DOFs) ขึ้นไป ส่วนแบบจำลองที่จะใช้กับการศึกษาวิจัยครั้งนี้จะใช้ห้าระดับขั้นความเสรี (5 DOFs) และเป็นแบบจำลองของยานยนต์ในลักษณะจักรยานหรือสองมิติ เนื่องจากว่าเป็นที่นิยมและบริษัทผลิตยานยนต์ (Tahari S. 1990: Thesis) เช่น ฮอนดา (Honda) ได้นำไปใช้ในการวิเคราะห์และวิจัยด้วย

2.3.1 **ระบบแกนอ้างอิงของยานยนต์** (Vehicle Axis System)

ระบบแกนอ้างอิงที่นำมาใช้กับตัวยานยนต์มักจะนิยมใช้ระบบแกนอ้างอิงตามมาตรฐาน SAE J670e ซึ่งอาศัยกฎของมือขวาดังภาพประกอบ 1 ดังนี้ โดย

ทิศทางตามแนวแกน x แทนการเคลื่อนที่ไปทางตรง (Longitudinal direction)

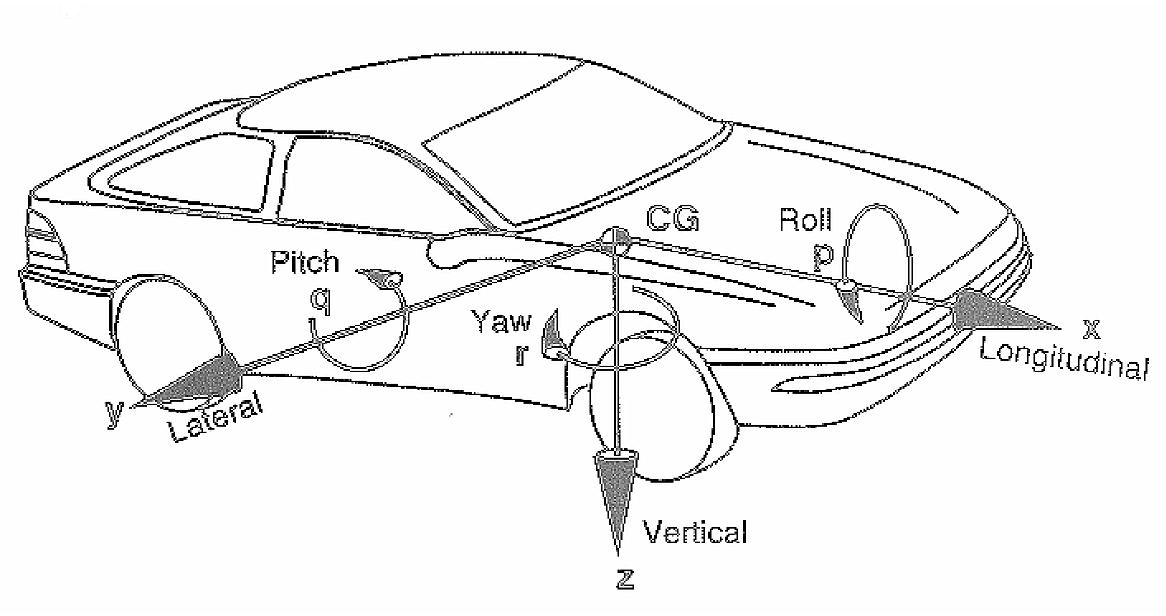
ทิศทางตามแนวแกน y แทนการเคลื่อนที่ไปทางขวาง (Lateral direction)

ทิศทางตามแนวแกน z แทนการเคลื่อนที่ขึ้น-ลง (Vertical direction)

การหมุนรอบแนวแกน x แทนการโครงตัว (Roll)

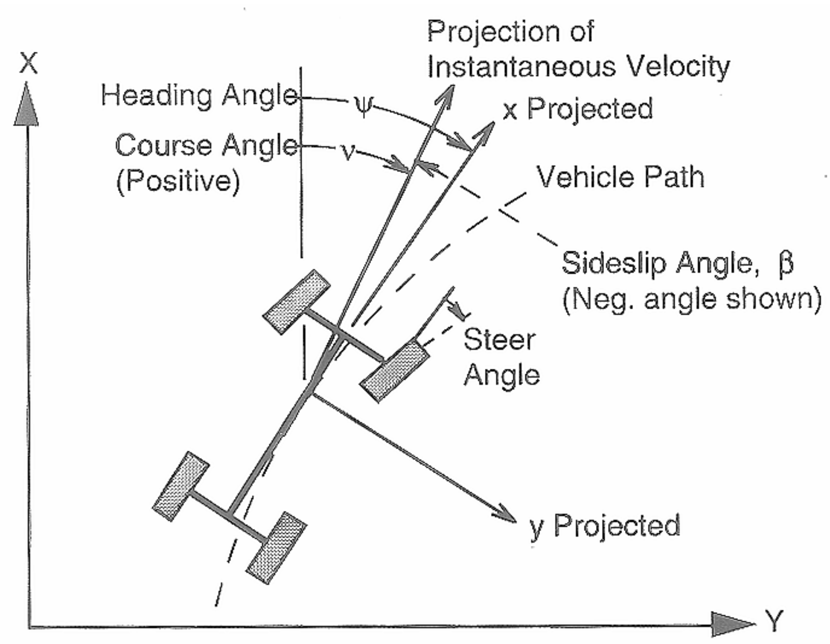
การหมุนรอบแนวแกน y แทนการกระดอน (Pitch)

การหมุนรอบแนวแกน z แทนการส่าย (Yaw)



ภาพประกอบ 1 ระบบแกนอ้างอิงของยานยนต์ (Body axis) ตามมาตรฐาน SAE J760e

ในการเคลื่อนที่ของยานยนต์โดยทั่วไปแล้วจะพรรณนาได้ด้วยความเร็วในการเคลื่อนที่ของระบบแกนของยานยนต์เปรียบเทียบกับระบบแกนของโลก พิจารณาจากภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 การเคลื่อนที่ของยานยนต์ในระบบแกนโลก (Global coordinate)

โดยการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันพิจารณาการเคลื่อนที่ทั้งสองระบบคือเชิงเส้นและเชิงหมุน จะได้สมการในการเคลื่อนที่อย่างง่ายของรถ ดังนี้

ระบบการเคลื่อนที่เชิงเส้น (Translational Systems) คือ

$$\sum F_x = ma_x \text{ , } \sum F_y = ma_y \text{ , } \sum F_z = ma_z$$

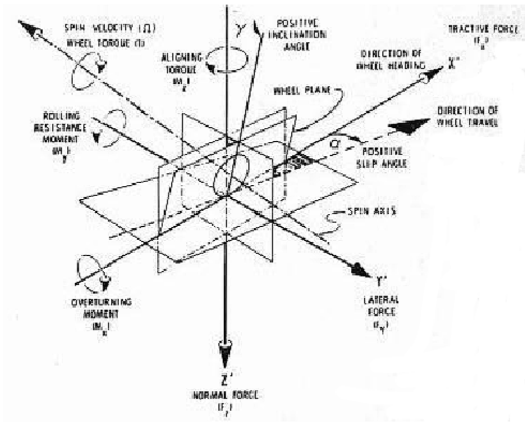
และระบบการเคลื่อนที่เชิงหมุน (Rotational Systems) คือ

$$\sum T_x = I_{xx}\alpha_x \text{ , } \sum T_y = I_{yy}\alpha_y \text{ , } \sum T_z = I_{zz}\alpha_z$$

โดยที่ $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{W}{g}m = F_f + F_r - R_a - R_{rf} - R_{rr} - R_d - R_g$ และ $\frac{d^2x}{dt^2} = a$

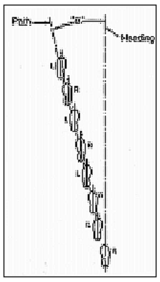
เมื่อ F_f คือแรงขับเคลื่อนล้อหน้า (Tractive effort of the front tire), F_r คือแรงขับเคลื่อนที่ล้อหลัง (Tractive effort of the rear tire), R_a คือแรงต้านจากอากาศ (Aerodynamic resistance), R_{rf} คือแรงต้านการเคลื่อนที่ของล้อหน้า (Resistance of the front tire), R_{rr} คือแรงต้านการเคลื่อนที่ของล้อหลัง (Resistance of the rear tire), R_d คือแรงต้านการลาก (Drawbar load), R_g คือแรงต้านทางชัน (Grade resistance) ตามลำดับ เป็นต้น

ส่วนระบบแกนอ้างอิงของยางมักนิยมใช้ระบบแกนอ้างอิงของ Milliken ดังภาพประกอบ 3

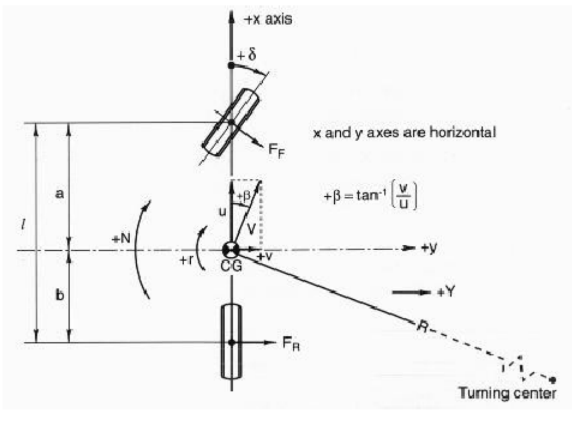


ภาพประกอบ 3 ระบบแกนอ้างอิงของยาง

ในการเคลื่อนที่ของยานยนต์นั้นจะมีลักษณะการเลื่อน (Slip) เกิดขึ้นด้วย ซึ่งประกอบไปด้วยการเลื่อนของยาง (Tire slip angle) ดังภาพประกอบ 4 และมีการเลื่อนของตัวยานยนต์ด้วย ดังแสดงในภาพประกอบ 5 ตามลำดับ



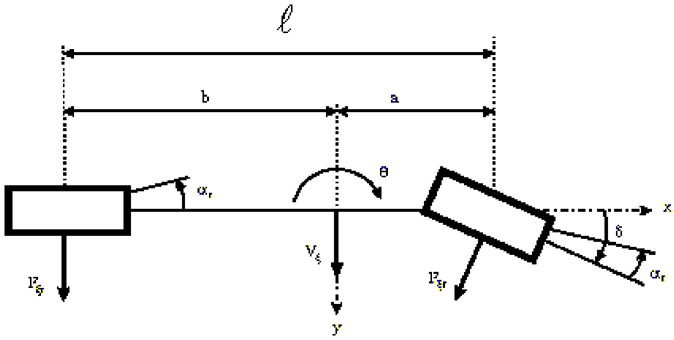
ภาพประกอบ 4 ลักษณะการเลื่อนของยาง (Tire slip angle)



ภาพประกอบ 5 ลักษณะการเลื่อนของตัวยานยนต์ (Body slip angle)

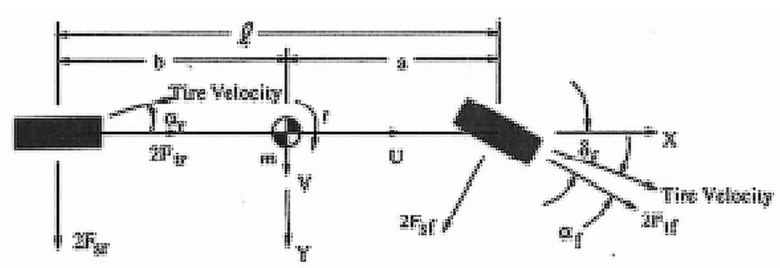
2.3.2 **ลักษณะแบบจำลองของยานยนต์** (Vehicle Model Characteristic)

แบบจำลองด้านไดนามิกยานยนต์มักจะเริ่มต้นจากแบบจำลองอย่างง่ายก่อนโดยมีตั้งแต่สองระดับขั้นความเสรีขึ้นไป แบบจำลองที่เป็นที่รู้จักกันทั่วไปก็คือแบบจำลองยานยนต์แบบจักรยานสองระดับขึ้นความเสรี (Two degree of freedom bicycle model) เช่นการเคลื่อนที่ไปทางขวางและการส่าย (Lateral and yaw motion) เพื่อทำการศึกษาผลกระทบต่อความเสถียรของยานยนต์ ดังแสดงในภาพประกอบ 6 เป็นต้น



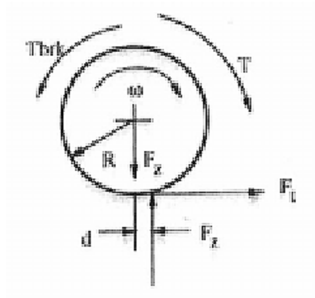
ภาพประกอบ 6 ลักษณะของแบบจำลองยานยนต์สองระดับขั้นความเสรี

ส่วนแบบจำลองยานยนต์แบบจักรยานสามระดับขึ้นความเสรี (Three degree of freedom bicycle model) ทำโดยเพิ่มเติมการเคลื่อนที่ในทางตรง (Longitudinal Motion) เข้าไป เพื่อทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของยานยนต์ในระนาบ $X-Y$ อย่างสมบูรณ์ โดยเพิ่มตัวแปรความเร็วทางตรง (Longitudinal velocity) และแรงกระทำทางตรง (Longitudinal force) เข้าไปในแบบจำลอง ดังแสดงในภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 ลักษณะของแบบจำลองยานยนต์สามระดับขั้นความเสรี

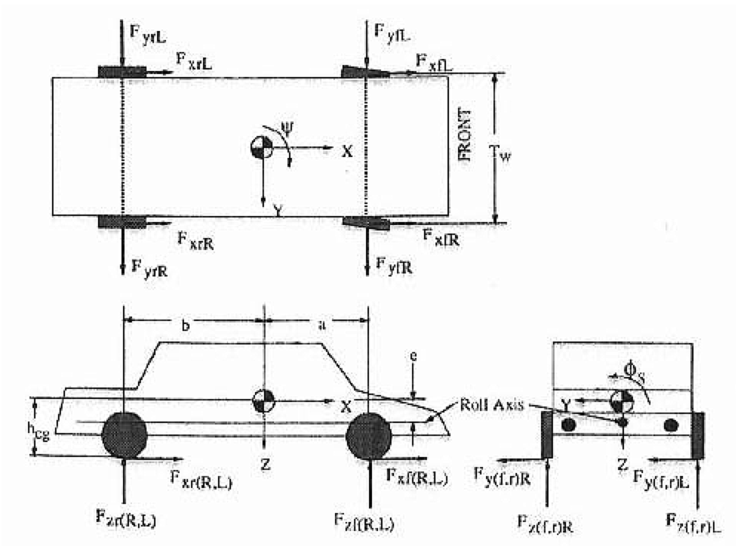
ในบางการศึกษาจะทำการเพิ่มระดับขั้นความเสรีการหมุนของล้อหน้าและล้อหลังเข้าไปในแบบจำลองและเพิ่มผลกระทบการเลื่อนจากทางทรง (Longitudinal slip) ดังแสดงในภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 ลักษณะของแบบจำลองการหมุนของล้อ

ซึ่งแบบจำลองนี้จะเรียกว่าแบบจำลองยานยนต์แบบจักรยานห้าระดับขั้นความเสรี (Five Degree of Freedom Bicycle Model) และจะถูกนำมาใช้กับการศึกษาวิจัยในครั้งนี้ และจะกล่าวในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

ทั้งนี้ความแตกต่างของระดับขั้นความเสรีของแบบจำลองจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของแต่ละการศึกษาวิจัย การศึกษาวิจัยบางงานอาจจะมีระดับขั้นความเสรีถึง 8 ระดับขั้นซึ่งวัตถุประสงค์ของการศึกษาวิจัยก็เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่แบบไม่สมมาตรกันของฝั่งขวาและฝั่งซ้ายของยานยนต์ เพื่อทำการออกแบบระบบรองรับเป็นต้น ดังแสดงในภาพประกอบ 9

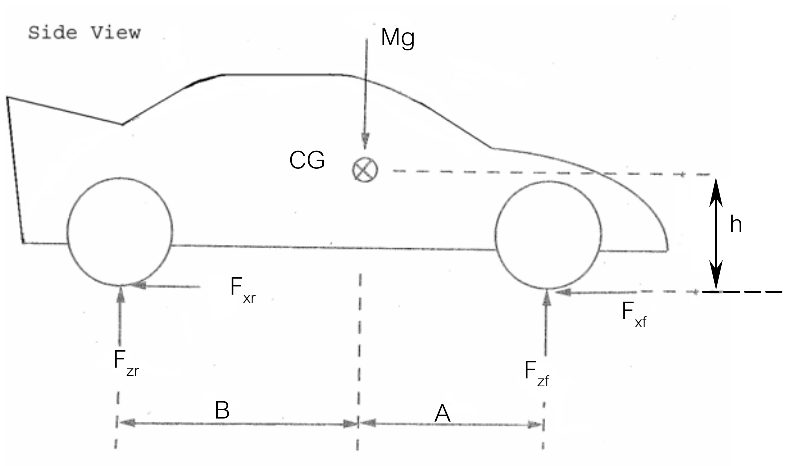


ภาพประกอบ 9 แบบจำลองยานยนต์แบบ 8 ระดับขั้นความเสรี

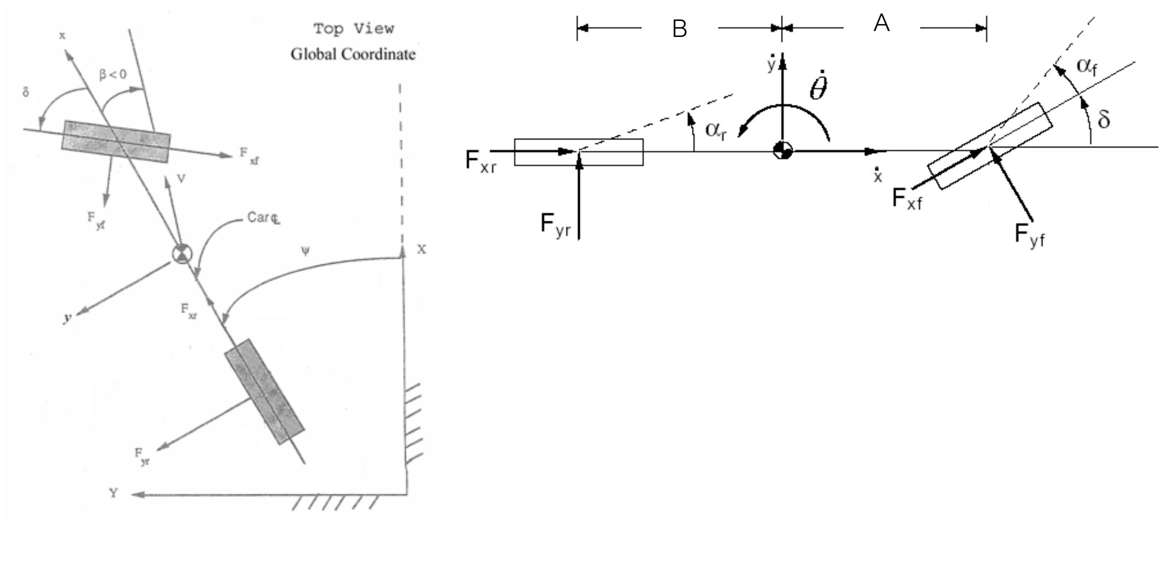
2.3.3 แบบจำลองยานยนต์ห้าระดับขั้นความเสรี (Five Degree of Freedom Model)

แบบจำลองยานยนต์ที่จะใช้สำหรับการศึกษาวิจัยครั้งนี้ใช้แบบจักรยานห้าระดับขั้นความเสรี (Tahari S. 1990: Thesis) ประกอบไปด้วยการหมุนของล้อหน้าและล้อหลัง, การเคลื่อนที่ไปทางตรง, การเคลื่อนที่ไปทางขวาง และการเคลื่อนที่หมุนรอบแกน z (การส่าย) ซึ่งแบบจำลองลักษณะนี้จะคลอบคลุมการควบคุมยานยนต์ให้เคลื่อนที่ไปได้ทั้งทางตรงและทางโค้งในระนาบ $X-Y$ (แกนโลก) อย่างสมบูรณ์

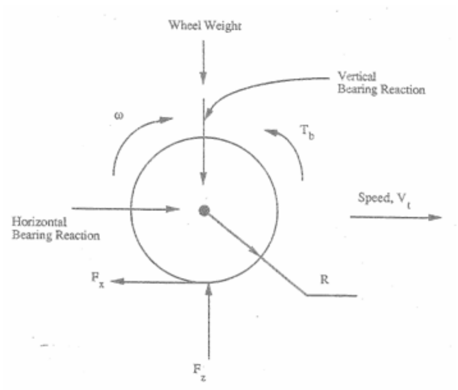
ต่อไปเรามาศึกษาสมการการเคลื่อนที่ของแบบจำลองของยานยนต์แบบห้าระดับขั้นความเสรี (Five Degree of Freedom Model) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้



ภาพประกอบ 10 ผังวัตถุยานยนต์ 5 ระดับขั้นความเสรี (มุมมองด้านข้าง)



ภาพประกอบ 11 ผังวัตถุอิสระยานยนต์ 5 ระดับขั้นความเสรี (มุมมองด้านบน)



ภาพประกอบ 12 ผังวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของล้อ (มุมมองด้านข้าง)

ผังวัตถุอิสระ (Free body diagram) มุมมองด้านข้างและมุมมองด้านบนในภาพประกอบ 2.10-2.12 นี้จะถูกนำมาใช้หาสมการการเคลื่อนที่ของยานยนต์ โดยที่ไม่นำเอาผลกระทบจากมุมแคมเบอร์ (Camber angle), โมเมนต์ทรงตัว (Self aligning moment) และผลกระทบเนื่องจากระบบรองรับมาเกี่ยวข้อง ทำให้สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้ดังต่อไปนี้ คือ

ผลรวมของแรงกระทำทางตรง (Longitudinal force) ตามแนวแกน x , ผลรวมของแรงกระทำด้านข้าง (Lateral force) ตามแนวแกน y , ผลรวมของโมเมนต์จากการส่าย (Yaw moment) รอบจุด *CG* (รอบแกน z), ผลรวมของแรงบิดรอบแกนของล้อหน้าและล้อหลังมีค่าดังนี้คือ

$$M(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta}) = F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr} \qquad (2.253)$$

$$M(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta}) = F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr} \qquad (2.254)$$

$$I_z\ddot{\theta} = A(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta) - BF_{yr} \qquad (2.255)$$

$$I_w\dot{\omega}_f = F_{xf}R_w \qquad (2.256)$$

$$I_w\dot{\omega}_r = F_{xr}R_w \qquad (2.257)$$

เมื่อ F_{xf} คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหน้าตามแนวแกน x

F_{xr} คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหลังตามแนวแกน x

F_{yf} คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหน้าตามแนวแกน y

F_{yr} คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหลังตามแนวแกน y

M คือมวลของยานยนต์ (Mass)

$\dot{x}$ คือความเร็วในแนวแกน x (Longitudinal component of vehicle velocity)

$\dot{y}$ คือความเร็วในแนวแกน y (Lateral component of vehicle velocity)

$\dot{\theta}$ คืออัตราการส่าย (Yaw rate)

δ คือมุมเลี้ยว (Steering angle) ของล้อหน้า

θ คือมุมส่าย (Yaw angle) ของยานยนต์

I_z คือโมเมนต์ความเฉื่อยจากการส่าย (Yaw Moment of Inertia)

ω_f คือความเร็วเชิงมุมของล้อหน้า (Angular velocity for front wheel)

ω_r คือความเร็วเชิงมุมของล้อหลัง (Angular velocity for rear wheel)

I_w คือความเฉื่อยของล้อรอบแกนหมุน (Inertia of the wheel about the axle)

R_w คือรัศมีของล้อ (Wheel radius)

A คือระยะจากจุดศูนย์ถ่วงถึงล้อหน้า (Vehicle center of gravity location from front tire)

B คือระยะจากจุดศูนย์ถ่วงถึงล้อหลัง (Vehicle center of gravity location from rear tire)

และเราสามารถหาค่าความเร็วในเคลื่อนที่ของยานยนต์ในระบบแกนโลก (Global Coordinate) ได้ดังต่อไปนี้

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} \tag{2.258}$$

$$\dot{X} = \dot{x}\cos\psi - \dot{y}\sin\psi \tag{2.259}$$

$$\dot{Y} = \dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi \tag{2.260}$$

เมื่อ $\dot{X}$ คือองค์ประกอบความเร็วของยานยนต์ในแนวแกน X ของระบบแกนโลก

$\dot{Y}$ คือองค์ประกอบความเร็วของยานยนต์ในแนวแกน Y ของระบบแกนโลก

$\dot{\psi}$ คืออัตราการส่าย (Yaw rate) รอบแกน Z ของระบบแกนโลก

$\dot{x}$ คือองค์ประกอบความเร็วในแนวแกน x ของระบบแกนยานยนต์

$\dot{y}$ คือองค์ประกอบความเร็วในแนวแกน y ของระบบแกนยานยนต์

ψ คือมุมส่าย (Yaw angle) ของยานยนต์ในแนวแกน Z ของระบบแกนโลก

2.3.3.1 การคำนวณหาแรงยาง (Tire Force Calculation)

เราสามารถหาแรงกระทำตั้งฉากกับยาง (Normal Loads) ของล้อหน้าและล้อหลังได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของความเร่งทางตรง (Longitudinal acceleration) เนื่องจากแรงกระทำตั้งฉาก (Normal forces) จะมีค่าตามการเปลี่ยนแปลงของความเร่งทางตรง (Longitudinal acceleration) โดยไม่นำผลกระทบเนื่องจากระบบรองรับมาเกี่ยวข้อง ทำให้เราสามารถหาแรงตั้งฉากของล้อหน้าและล้อหลังได้จากผลรวมของโมเมนต์รอบจุดสัมผัสที่วัดจากจุดศูนย์ถ่วงไปหาล้อทั้งสองข้าง (Contact patch) ดังแบบจำลองในภาพประกอบ 10

ดังนั้นจะได้แรงกระทำตั้งฉากของล้อหน้า (Normal load of front tire) และได้แรงกระทำตั้งฉากของล้อหลัง (Normal load of rear tire) ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$F_{zf} = \frac{MgB - \left(F_{xf} + F_{xr}\right)h}{A+B} \tag{2.261}$$

$$F_{zr} = \frac{MgA + \left(F_{xf} + F_{xr}\right)h}{A+B} \tag{2.262}$$

เมื่อ F_{zf} คือแรงกระทำตั้งฉากกับล้อหน้า (Normal load of front tire)

F_{zr} คือแรงกระทำตั้งฉากกับล้อหลัง (Normal load of rear tire)

h คือความสูงจากพื้นถึงจุดศูนย์ถ่วงของยานยนต์ (Height of the CG from the ground)

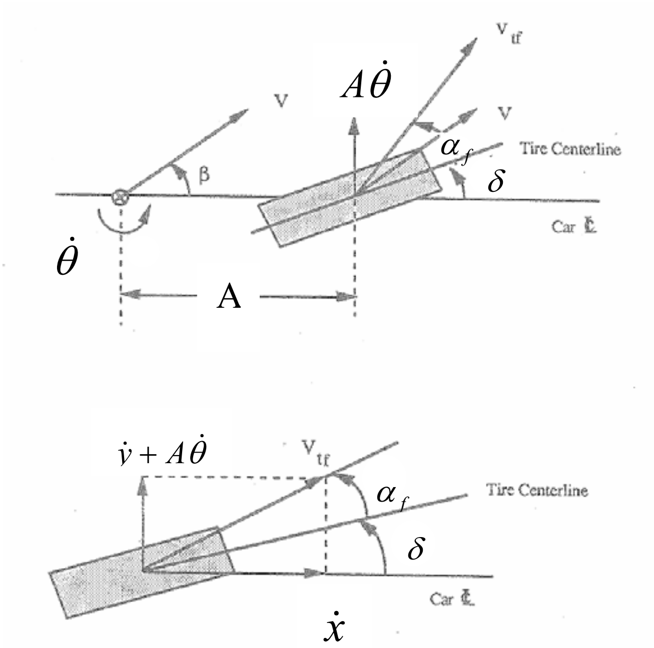
และเราสามารถหามุมเลื่อนของยาง (Slip angle) คือ α_f และ α_r ได้โดยทำการพิจารณาภาพประกอบ 13 โดยที่ไม่มีการนำเอาผลกระทบจากการเปลี่ยนเกียร์ (Lateral weight shift), แรงต้านการเลี้ยว (Roll steer and steering compliance) และมุมแคมเบอร์ (Camber angle) ทำให้เราสามารถหาค่าความเร็วของล้อหน้า $\left(V_{tf}\right)$ ได้ดังนี้คือ

$$\vec{V}_{tf} = \vec{V} + \dot{\theta}\hat{k} \times a\hat{i} \tag{2.263}$$

$$\vec{V}_{tf} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{\theta}\hat{k} \times a\hat{i} \tag{2.264}$$

$$\vec{V}_{tf} = \dot{x}\hat{i} + \left(\dot{y} + \dot{\theta}a\right)\hat{j} \tag{2.265}$$

เมื่อ $\vec{V}_{tf}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของยางหน้า, $\vec{V}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของยานยนต์ที่จุด CG, $\dot{\theta}\hat{k}$ คือความเร็วเชิงมุมของการส่ายของรถ (Yaw angular velocity), $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย



ภาพประกอบ 13 มุมเลื่อน (Slip angle) ของล้อหน้า (มุมมองด้านบน)

จากสมการดังกล่าวทำให้ได้มุมเลื่อนของล้อหน้า (Front tire slip angle) α_f และด้วยหลักการเดียวกันทำให้ได้มุมเลื่อนของล้อหลัง (Rear tire slip angle) α_r ดังนี้ คือ

$$\alpha_f = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}+\dot{\theta}A}{\dot{x}}\right)-\delta \tag{2.266}$$

$$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}-\dot{\theta}B}{\dot{x}}\right) \tag{2.267}$$

และสามารถหาขนาดความเร็วขอบของล้อหน้าและล้อหลัง (Magnitude of the front and rear tire axle velocity) แทนด้วย V_{tf} และ V_{tr} ตามลำดับ ได้ดังนี้ คือ

$$V_{tf} = \sqrt{\left(\dot{y} + A\dot{\theta}\right)^2 + \dot{x}^2} \tag{2.268}$$

$$V_{tr} = \sqrt{\left(\dot{y} - B\dot{\theta}\right)^2 + \dot{x}^2} \tag{2.269}$$

และเราสามารถคำนวณหาขนาดของความเร็วในการเคลื่อนที่ไปทางตรงของล้อหน้าและล้อหลัง (Magnitude of the front and rear tire longitudinal velocity) แทนด้วย v_{wxf} และ v_{wxr} ตามลำดับ ได้ดังนี้ คือ

$$v_{wxf} = V_{tf}\cos\alpha_f \tag{2.270}$$

$$v_{wxr} = V_{tr}\cos\alpha_r \tag{2.271}$$

ดังนั้นทำให้เราสามารถหาค่ามุมเลื่อนทางตรง (Longitudinal slip) ของล้อหน้าและล้อหลังเมื่อมีการเบรกขึ้นได้ดังนี้ คือ

$$S_{af} = \left(\frac{v_{wxf} - \omega_f R_w}{v_{wxf}}\right) \tag{2.272}$$

$$S_{ar} = \left(\frac{v_{wxr} - \omega_r R_w}{v_{wxr}}\right) \tag{2.273}$$

สมการ 2.253-2.273 คือสมการต่างๆ ที่เกิดขึ้นของแบบจำลองของยานยนต์แบบห้าระดับขั้นความเสรี (Five Degree of Freedom Model) ที่มีการควบคุมการเลี้ยวที่สองล้อหน้า โดยสมการทั้งหมดได้จากแบบจำลองที่มีลักษณะแบบไม่เชิงเส้น (Non-linear vehicle model)

แต่เนื่องจากแบบจำลองของยานยนต์แบบไม่เชิงเส้นมีความซับซ้อนมาก ดังนั้นเพื่อหาค่าบางค่า เช่น F_{yf} และ F_{yr} จะมีความซับซ้อนตามไปด้วย ดังนั้นเพื่อลดความซับซ้อนลง จึงต้องทำการทำการวิเคราะห์พฤติกรรมด้านไดนามิก ของยานยนต์เป็นแบบเชิงเส้น (Linear vehicle model) ซึ่งเราสามารถทำการเปลี่ยนแบบจำลองของยานยนต์แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear vehicle model) ให้เป็น

แบบจำลองแบบเชิงเส้น (Linear vehicle model) ได้ โดยกำหนดให้ค่าความเร็วทางตรง (Longitudinal velocity) มีค่าคงที่ และต้องทำแบบจำลองของยางให้เป็นแบบเชิงเส้น (Tire linear model) ด้วย นั่นคือต้องสมมุติให้มุมเลี้ยวมีค่าน้อยๆ และจากการที่ค่าความเร็วทางตรงคงที่จะทำให้ค่าของแรงตามแนวแกน x เป็นศูนย์ ทำให้สมการ (2.254-2.255) มีค่าดังนี้

$$\ddot{y} = \frac{F_{yf} + F_{yr}}{m} - \dot{x}\dot{\theta} \tag{2.274}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{AF_{yf}}{I_z} - \frac{BF_{yr}}{I_z} \tag{2.275}$$

จากสมการทั้งสองทำให้สามารถหาค่าของแรงกระทำด้านข้าง (Linear lateral tire force) ได้จากสมการต่อไปนี้

$$F_{yf} = -C_{\alpha_f}\alpha_f \tag{2.276}$$

$$F_{yr} = -C_{\alpha_r}\alpha_r \tag{2.277}$$

เมื่อ

$$\alpha_f = \left(\frac{\dot{y} + A\dot{\theta}}{\dot{x}}\right) - \delta \tag{2.278}$$

$$\alpha_r = \left(\frac{\dot{y} - B\dot{\theta}}{\dot{x}}\right) \tag{2.279}$$

และ C_{α_f} คือ Front tire cornering stiffness

$C_{\alpha r}$ คือ Rear tire cornering stiffness

โดย C_{α_f} และ $C_{\alpha r}$ หาค่าได้จากกราฟระหว่างแรงกระทำด้านข้างกับมุมเลื่อน (Lateral force vs. slip angle plot) ส่วนค่าของแรงกระทำตามทางตรง (Longitudinal forces) สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$F_{xf} = \mu_f F_{zf} \tag{2.280}$$

$$F_{xr} = \mu_r F_{zr} \tag{2.281}$$

$$a_x = \frac{g\left(F_{zf} + F_{zr}\right)}{W} \tag{2.282}$$

เมื่อ μ_f คือค่าสัมประสิทธิ์ความฝืดของถนน (Friction coefficient) ของล้อหน้า

μ_r คือค่าสัมประสิทธิ์ความฝืดของถนน (Friction coefficient) ของล้อหลัง

g คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก

W คือน้ำหนักรวมของยานยนต์

สำหรับกรณีที่ยานยนต์ขับเคลื่อนด้วยล้อหลังสามารถคำนวณหาแรงขับตามแนวแกน x ได้จาก

$$F_x = \frac{\mu a m g / L}{1 - \mu h / L} \tag{2.283}$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (State of the problem)
2. การแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical methods)
3. การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Programming)

3.1 การกำหนดปัญหา (State of the Problem)

3.1.1 สเตตอีเควชัน (State Equations)

อ้างอิงจากบทที่ 2 มีสมการการเคลื่อนที่ของยานยนต์ อยู่ทั้งหมด 5 สมการ คือ

$$M\left(\ddot{x}-\dot{y}\dot{\theta}\right)=F_{xf}\cos\delta-F_{yf}\sin\delta+F_{xr} \tag{3.1}$$

$$M\left(\ddot{y}+\dot{x}\dot{\theta}\right)=F_{xf}\sin\delta+F_{yf}\cos\delta+F_{yr} \tag{3.2}$$

$$I_z\ddot{\theta}=A\left(F_{xf}\sin\delta+F_{yf}\cos\delta\right)-BF_{yr} \tag{3.3}$$

$$I_w\dot{\omega}_f=F_{xf}R_w \tag{3.4}$$

$$I_w\dot{\omega}_r=F_{xr}R_w \tag{3.5}$$

สมการทั้ง 5 สมการนี้ ต้องแปลงให้อยู่รูปสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ได้กับออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เสียก่อน ด้วยการเปลี่ยนตัวแปรต่างๆ ในสมการเสียใหม่ดังนี้ โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{x}_1 \\
\ddot{y} &= \ddot{x}_2 \\
\ddot{\theta} &= \ddot{x}_3 \\
\dot{\omega}_f &= \dot{x}_4 \\
\dot{\omega}_r &= \dot{x}_5
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ทำให้เขียนสมการ (3.1-3.5) ได้เป็น

$$M(\ddot{x}_1 - \dot{x}_2\dot{x}_3) = F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr} \tag{3.7}$$

$$M(\ddot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_3) = F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr} \tag{3.8}$$

$$I_z\ddot{x}_3 = A(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta) - BF_{yr} \tag{3.9}$$

$$I_w\dot{x}_4 = F_{xf}R_w \tag{3.10}$$

$$I_w\dot{x}_5 = F_{xr}R_w \tag{3.11}$$

สามารถแปลงสมการ (3.7-3.11) ให้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order differential equation) ซึ่งจะสอดคล้องกับสมการ (2.50) ได้ดังนี้ โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_6 \\
\dot{x}_2 &= x_7 \\
\dot{x}_3 &= x_8 \\
\dot{x}_6 &= \ddot{x}_1 \\
\dot{x}_7 &= \ddot{x}_2 \\
\dot{x}_8 &= \ddot{x}_3
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ดังนั้นเราจึงเขียนสมการ (3.7-3.12) ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order differential equation: $\dot{x}_i = f_i$) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_6 \tag{3.13}$$

$$\dot{x}_2 = x_7 \tag{3.14}$$

$$\dot{x}_3 = x_8 \tag{3.15}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{F_{xf} R_w}{I_w} \tag{3.16}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{F_{xr} R_w}{I_w} \tag{3.17}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{F_{xf} \cos\delta - F_{yf} \sin\delta + F_{xr}}{M} + x_7 x_8 \tag{3.18}$$

$$\dot{x}_7 = \frac{F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta + F_{yr}}{M} - x_6 x_8 \tag{3.19}$$

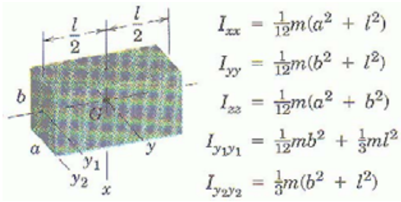
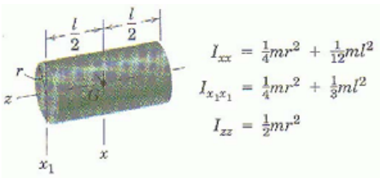
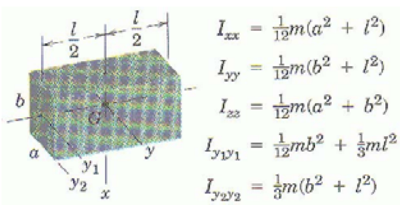
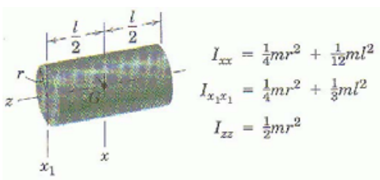
$$\dot{x}_8 = \frac{A\left(F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta\right) - BF_{yr}}{I_z} \tag{3.20}$$

ทำให้สรุปได้ว่ามีสเตตอีเควชัน (State Equations) ทั้งหมดจำนวน 8 สมการด้วยกัน

3.1.2 **ดีไซน์พารามิเตอร์** (Design Parameters)

จากสมการการเคลื่อนที่ของยานยนต์ตัวแปรบางตัวต้องจัดให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameter) ซึ่งประกอบไปด้วย M , I_z , I_w , R_w , A และ B ซึ่งจะต้องมีค่าคงที่ตลอดการคำนวณในแต่ละครั้ง และในการศึกษาวิจัยครั้งนี้จะใช้แบบจำลองของยานยนต์ 2 แบบจำลองด้วยกัน ดังนี้

ตาราง 1 แสดงพารามิเตอร์ของยานยนต์แบบ A และแบบ B (ข้อมูลจากรถฮอนดา ซิตี)

ยานยนต์ แบบ	ยานยนต์ ชิ้นส่วน	โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล รูปทรง	ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) สมการ	M (kg)	A (m)	B (m)	h (m)	I_z (kg.m^2)	I_w (kg.m^2)
A	ตัวถัง	a (m): 1.7 b (m): 1.5 l_b (m): 4.3  	$I_{zz} = \frac{1}{12}m\left(a^2 + l^2\right)$	1000	1.4	1.4	0.3	1782	0.4
	ล้อ	m_w (kg): 20 R_w (m): 0.2 l_w (m): 0.185  	$I_w = \frac{1}{2}m_w R_w^2$						
B	ตัวถัง	a (m): 1.7 b (m): 1.5 l_b (m): 4.3  	$I_{zz} = \frac{1}{12}m\left(a^2 + l^2\right)$	800	1.4	1.4	0.3	1425	0.4
	ล้อ	m_w (kg): 20 R_w (m): 0.2 l_w (m): 0.185  	$I_w = \frac{1}{2}m_w R_w^2$						

3.1.3 **คอนโทรลอินพุต** (Control input)

ตัวแปรที่ต้องจัดให้เป็นคอนโทรลอินพุต (Control input) ประกอบไปด้วย F_{xf} , F_{yf} , F_{xr} , F_{yr} , δ โดยจะถูกจำกัดค่าอยู่ระหว่างขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้จะศึกษาเฉพาะยานยนต์ที่ขับเคลื่อนด้วยล้อหลังเท่านั้น ซึ่งสามารถหาค่าแรงขับเคลื่อนและแรงเบรกสูงสุด รวมทั้งมุมเลี้ยวได้ดังนี้

ตาราง 2 แสดงคอนโทรลของยานยนต์แบบ A และแบบ B (อ้างอิงค่า μ จากกรมการขนส่งทางบก)

ยานยนต์	**สมการ**		**คอนโทรลอินพุต** (Control input)									
			ค่าต่ำสุด					**ค่าสูงสุด**				
		μ	F_{xf} (N)	F_{yf} (N)	F_{xr} (N)	F_{yr} (N)	δ deg.	F_{xf} (N)	F_{yf} (N)	F_{xr} (N)	F_{yr} (N)	δ deg.
A	$F=\dfrac{\mu AMg/(A+B)}{1-\mu h/(A+B)}$	0.6	-3145	-3145	-3145	-3145	-45	3145	3145	3145	3145	45
B			-2516	-2516	-2516	-2516	-45	2516	2516	2516	2516	45

3.1.4 **เงื่อนไขบังคับ** (Constraints)

เริ่มด้วยการพิจารณากำหนดรูปร่างของสนามแข่ง ซึ่งในการศึกษาวิจัยครั้งนี้กำหนดลักษณะรูปร่างของสนามแข่งขันโดยตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ให้พื้นถนนเป็นแบบราบเรียบ และไม่ซับซ้อนมาก และบังคับให้ยานยนต์วิ่งไปบนสนามแข่งนี้เท่านั้น โดยที่สนามแข่งขันเป็นอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) $g_i(x)$ กำหนดให้สนามเป็นเส้นตรงทำมุม 45 องศากับแกน *x*

3.1.5 **เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (Initial and Boundary Conditions)**

เพื่อให้เป็นปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two-point boundary value problem involving differential and algebraic equations) จึงต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) โดยพิจารณาให้ยานยนต์เริ่มต้นเคลื่อนที่ในสนามแข่งขัน ณ จุดสตาร์ท ($x(0)=x_0, \dot{x}\ (0)=\dot{x}_0$) และกลับเข้าเส้นชัย ณ จุดสตาร์ท ($x(t_f)=x_f, \dot{x}(t_f)=\dot{x}_f$) โดยกำหนดค่าไว้ดังต่อไปนี้

ตาราง 3 แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของยานยนต์แบบ A และแบบ B

สนาม	สมการสนามที่ใช้	เงื่อนไขเริ่มต้น	เงื่อนไขขอบเขต
1	$x_2 = x_1$	$x_1(0)=0, \dot{x}_1(0)=0$ $x_2(0)=0, \dot{x}_2(0)=0$ $x_3(0)=0, \dot{x}_3(0)=0$ $\dot{x}_4(0)=0$ $\dot{x}_5(0)=0$	$x_1(t_f)=1{,}000, \dot{x}_1(t_f)=\dot{x}_1(t_f)$ $x_2(t_f)=1{,}000, \dot{x}_2(t_f)=\dot{x}_2(t_f)$ $x_3(t_f)=0, \dot{x}_3(t_f)=\dot{x}_3(t_f)$ $\dot{x}_4(t_f)=\dot{x}_4(t_f)\,\dot{x}_5(t_f)=\dot{x}_5(t_f)$
2	$x_2 = x_1$	$x_1(0)=0, \dot{x}_1(0)=0$ $x_2(0)=0, \dot{x}_2(0)=0$ $x_3(0)=0, \dot{x}_3(0)=0$ $\dot{x}_4(0)=0$ $\dot{x}_5(0)=0$	$x_1(t_f)=1{,}500, \dot{x}_1(t_f)=\dot{x}_1(t_f)$ $x_2(t_f)=1{,}500, \dot{x}_2(t_f)=\dot{x}_2(t_f)$ $x_3(t_f)=0, \dot{x}_3(t_f)=\dot{x}_3(t_f)$ $\dot{x}_4(t_f)=\dot{x}_4(t_f)\,\dot{x}_5(t_f)=\dot{x}_5(t_f)$

3.1.6 **คอสฟังก์ชันนอล** (Cost Functional)

เมื่อเราทำการวิเคราะห์ปัญหาได้แล้ว ขั้นต่อไปก็คือต้องกำหนดปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) อ้างอิงจากบทที่ 2 ทำให้เราสามารถกำหนดปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยจะเป็นการค้นหาค่าคอนโทรลอินพุต (Control input) ($u(t)$) ซึ่งก็คือ $F_{xf}, F_{xr}, F_{yf}, F_{yr}$ ที่ทำให้ได้เวลาสุดท้าย (t_f) น้อยสุด สามารถเขียนปัญหาการหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งในรูปแบบปัญหาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ได้เป็น

3.1.6.1 **คอสฟังก์ชันนอล** (Cost Functional) **ของยานยนต์แบบ** A **สนามที่** 1

หาค่าน้อยที่สุดของ $$\int_0^{t_f} dt \tag{3.23}$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $$\dot{x}_1 = x_6 \tag{3.24}$$

$$\dot{x}_2 = x_7 \tag{3.25}$$

$$\dot{x}_3 = x_8 \tag{3.26}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{0.2F_{xf}}{0.4} \tag{3.27}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{0.2F_{xr}}{0.4} \tag{3.28}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{1000} + x_7 x_8 \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_7 = \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{1000} - x_6 x_8 \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_8 = \frac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1782} \quad (3.31)$$

$$g_1 : x_2 - x_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$-3145 \le F_{xf}, F_{xr}, F_{yf}, F_{yr} \le 3145, -45 \le \delta \le 45 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) &= 0, \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_3(0) &= 0, \dot{x}_3(0) = 0 \\ \dot{x}_4(0) &= 0 \\ \dot{x}_5(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} x_1(t_f) &= 1{,}000, \dot{x}_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f) \\ x_2(t_f) &= 1{,}000, \dot{x}_2(t_f) = \dot{x}_2(t_f) \\ x_3(t_f) &= 0, \dot{x}_3(t_f) = \dot{x}_3(t_f) \\ \dot{x}_4(t_f) &= \dot{x}_4(t_f) \\ \dot{x}_5(t_f) &= \dot{x}_5(t_f) \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.1.6.2 **คอสฟังก์ชันนอล** (Cost Functional) **ของยานยนต์แบบ** A **สนามที่** 2

หาค่าน้อยที่สุดของ $\int_0^{t_f} dt$ (3.36)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $\dot{x}_1 = x_6$ (3.37)

$$\dot{x}_2 = x_7 \quad (3.38)$$

$$\dot{x}_3 = x_8 \quad (3.39)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{0.2F_{xf}}{0.4} \quad (3.40)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{0.2F_{xr}}{0.4} \quad (3.41)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{1000} + x_7 x_8 \tag{3.42}$$

$$\dot{x}_7 = \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{1000} - x_6 x_8 \tag{3.43}$$

$$\dot{x}_8 = \frac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1782} \tag{3.44}$$

$$g_1 : x_2 - x_1 = 0 \tag{3.45}$$

$$-3145 \le F_{xf}, F_{xr}, F_{yf}, F_{yr} \le 3145, -45 \le \delta \le 45 \tag{3.46}$$

$$\begin{gathered} x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0, \dot{x}_3(0) = 0 \\ \dot{x}_4(0) = 0 \\ \dot{x}_5(0) = 0 \end{gathered} \tag{3.47}$$

$$\begin{gathered} x_1(t_f) = 1{,}500, \dot{x}_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f) \\ x_2(t_f) = 1{,}500, \dot{x}_2(t_f) = \dot{x}_2(t_f) \\ x_3(t_f) = 0, \dot{x}_3(t_f) = \dot{x}_3(t_f) \\ \dot{x}_4(t_f) = \dot{x}_4(t_f) \\ \dot{x}_5(t_f) = \dot{x}_5(t_f) \end{gathered} \tag{3.48}$$

3.1.6.3 **คอสฟังก์ชันนอล** (Cost Functional) **ของยานยนต์แบบ** B **สนามที่** 1

หาค่าน้อยที่สุดของ $$\int_0^{t_f} dt \tag{3.49}$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $$\dot{x}_1 = x_6 \tag{3.50}$$

$$\dot{x}_2 = x_7 \tag{3.51}$$

$$\dot{x}_3 = x_8 \tag{3.52}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{0.2F_{xf}}{0.4} \tag{3.53}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{0.2F_{xr}}{0.4} \tag{3.54}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} + x_7 x_8 \qquad (3.55)$$

$$\dot{x}_7 = \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} - x_6 x_8 \qquad (3.56)$$

$$\dot{x}_8 = \frac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1425} \qquad (3.57)$$

$$g_1 : x_2 - x_1 = 0 \qquad (3.58)$$

$$-2516 \le F_{xf}, F_{xr}, F_{yf}, F_{yr} \le 2516, -45 \le \delta \le 45 \qquad (3.59)$$

$$\begin{gathered} x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0, \dot{x}_3(0) = 0 \\ \dot{x}_4(0) = 0 \\ \dot{x}_5(0) = 0 \end{gathered} \qquad (3.60)$$

$$\begin{gathered} x_1(t_f) = 1{,}000, \dot{x}_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f) \\ x_2(t_f) = 1{,}000, \dot{x}_2(t_f) = \dot{x}_2(t_f) \\ x_3(t_f) = 0, \dot{x}_3(t_f) = \dot{x}_3(t_f) \\ \dot{x}_4(t_f) = \dot{x}_4(t_f) \\ \dot{x}_5(t_f) = \dot{x}_5(t_f) \end{gathered} \qquad (3.61)$$

3.1.6.4 **คอสฟังก์ชันนอล** (Cost Functional) **ของยานยนต์แบบ** B **สนามที่** 2

หาค่าน้อยที่สุดของ $\int_0^{t_f} dt$ (3.62)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $\dot{x}_1 = x_6$ (3.63)

$\dot{x}_2 = x_7$ (3.64)

$\dot{x}_3 = x_8$ (3.65)

$\dot{x}_4 = \dfrac{0.2F_{xf}}{0.4}$ (3.66)

$$\dot{x}_5 = \frac{0.2F_{xr}}{0.4} \tag{3.67}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} + x_7 x_8 \tag{3.68}$$

$$\dot{x}_7 = \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} - x_6 x_8 \tag{3.69}$$

$$\dot{x}_8 = \frac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1425} \tag{3.70}$$

$$g_1 : x_2 - x_1 = 0 \tag{3.71}$$

$$-2516 \le F_{xf}, F_{xr}, F_{yf}, F_{yr} \le 2516, -45 \le \delta \le 45 \tag{3.72}$$

$$\begin{gathered} x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0, \dot{x}_3(0) = 0 \\ \dot{x}_4(0) = 0 \\ \dot{x}_5(0) = 0 \end{gathered} \tag{3.73}$$

$$\begin{gathered} x_1(t_f) = 1{,}500, \dot{x}_1(t_f) = \dot{x}_1(t_f) \\ x_2(t_f) = 1, 500, \dot{x}_2(t_f) = \dot{x}_2(t_f) \\ x_3(t_f) = 0, \dot{x}_3(t_f) = \dot{x}_3(t_f) \\ \dot{x}_4(t_f) = \dot{x}_4(t_f) \\ \dot{x}_5(t_f) = \dot{x}_5(t_f) \end{gathered} \tag{3.74}$$

3.2 การแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (Numerical methods)

ต่อไปก็ทำการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary condition) อ้างอิงจากสมการหลัก (หัวข้อ 2.1.10) ของปัญหาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ดังนี้

$$J' = \Phi + \sum_{l=1}^{q} \upsilon_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(\dot{x}_i - f_i\right) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i g_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i\left(c_i + s_i^2\right) dt \tag{3.75}$$

หรือ $J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$

เมื่อ $\Phi' = 0$ และ $L = 1$ ทำการแทนค่าต่างๆ ในสมการ (3.83) จะได้ดังนี้

3.2.1 เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) **ยานยนต์แบบ** A **สนามที่** 1

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{array}{l} 1 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_6) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - x_7) + \lambda_3 (\dot{x}_3 - x_8) + \lambda_4 \left(\dot{x}_4 - \dfrac{0.2F_{xf}}{0.4} \right) \\ + \lambda_5 \left(\dot{x}_5 - \dfrac{0.2F_{xr}}{0.4} \right) + \lambda_6 \left(\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf} \cos\delta - F_{yf} \sin\delta + F_{xr}}{1000} - x_7 x_8 \right) \\ + \lambda_7 \left(\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta + F_{yr}}{1000} + x_6 x_8 \right) \\ + \lambda_8 \left(\dot{x}_8 - \dfrac{1.4(F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta) - 1.4F_{yr}}{1782} \right) + \mu_1 (x_2 - x_1) \end{array} \right] dt \quad (3.76)$$

ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้

1. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1} = 0$ ได้ $-\mu_1 - \dot{\lambda}_1 = 0$
2. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2} = 0$ ได้ $\mu_1 - \dot{\lambda}_2 = 0$
3. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_3} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_3} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_3 = 0$
4. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_4} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_4} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_4 = 0$
5. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_5} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_5} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_5 = 0$
6. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_6} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_6} = 0$ ได้ $-\lambda_1 + \lambda_7 x_8 - \dot{\lambda}_6 = 0$
7. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_7} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_7} = 0$ ได้ $-\lambda_2 - \lambda_6 x_8 - \dot{\lambda}_7 = 0$
8. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_8} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_8} = 0$ ได้ $-\lambda_3 - \lambda_6 x_7 + \lambda_7 x_6 - \dot{\lambda}_8 = 0$
9. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_1} = 0$ ได้ $\dot{x}_1 - x_6 = 0$

10. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_2} = 0$ ได้ $\dot{x}_2 - x_7 = 0$

11. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_3} = 0$ ได้ $\dot{x}_3 - x_8 = 0$

12. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_4} = 0$ ได้ $\dot{x}_4 - 0.5F_{xf} = 0$

13. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_5} = 0$ ได้ $\dot{x}_5 - 0.5F_{xr} = 0$

14. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_6} = 0$ ได้ $\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{1000} - x_7 x_8 = 0$

15. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_7} = 0$ ได้ $\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta - F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{1000} + x_6 x_8 = 0$

16. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_8} = 0$ ได้ $\dot{x}_8 - \dfrac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1782} = 0$

17. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xf}} = 0$ ได้ $-\lambda_6 \dfrac{\cos\delta}{1000} - \lambda_7 \dfrac{\sin\delta}{1000} - \lambda_8 \dfrac{1.4\sin\delta}{1782} - 0.5\lambda_4 = 0$

18. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yf}} = 0$ ได้ $\lambda_6 \dfrac{\sin\delta}{1000} - \lambda_7 \dfrac{\cos\delta}{1000} - \lambda_8 \dfrac{1.4\cos\delta}{1782} = 0$

19. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_6}{1000} - 0.5\lambda_5 = 0$

20. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_7}{1000} + \dfrac{1.4\lambda_8}{1782} = 0$

21. $\dfrac{\partial L'}{\partial \mu_1} = 0$ ได้ $x_2 - x_1 = 0$

22. $\dfrac{\partial L'}{\partial \delta} = 0$ ได้

$$\lambda_6 \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta}{1000} - \lambda_7 \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta}{1000} - \lambda_8 \frac{1.4\left(F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta\right)}{1782} = 0$$

3.2.2 **เนคเซสเซอรีคอนดิชัน** (Necessary conditions) **ยานยนต์แบบ** A **สนามที่** 2

$$
J' = \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{array}{l} 1 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_6) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - x_7) + \lambda_3 (\dot{x}_3 - x_8) + \lambda_4 \left(\dot{x}_4 - \dfrac{0.2 F_{xf}}{0.4} \right) \\ + \lambda_5 \left(\dot{x}_5 - \dfrac{0.2 F_{xr}}{0.4} \right) + \lambda_6 \left(\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf} \cos\delta - F_{yf} \sin\delta + F_{xr}}{1000} - x_7 x_8 \right) \\ + \lambda_7 \left(\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta + F_{yr}}{1000} + x_6 x_8 \right) \\ + \lambda_8 \left(\dot{x}_8 - \dfrac{1.4 (F_{xf} \sin\delta + F_{yf} \cos\delta) - 1.4 F_{yr}}{1782} \right) + \mu_1 (x_2 - x_1) \end{array} \right] dt \qquad (3.77)
$$

ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้

1. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1} = 0$ ได้ $-\mu_1 - \dot{\lambda}_1 = 0$
2. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2} = 0$ ได้ $\mu_1 - \dot{\lambda}_2 = 0$
3. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_3} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_3} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_3 = 0$
4. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_4} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_4} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_4 = 0$
5. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_5} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_5} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_5 = 0$
6. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_6} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_6} = 0$ ได้ $-\lambda_1 + \lambda_7 x_8 - \dot{\lambda}_6 = 0$
7. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_7} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_7} = 0$ ได้ $-\lambda_2 - \lambda_6 x_8 - \dot{\lambda}_7 = 0$
8. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_8} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_8} = 0$ ได้ $-\lambda_3 - \lambda_6 x_7 + \lambda_7 x_6 - \dot{\lambda}_8 = 0$
9. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_1} = 0$ ได้ $\dot{x}_1 - x_6 = 0$
10. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_2} = 0$ ได้ $\dot{x}_2 - x_7 = 0$

11. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_3} = 0$ ได้ $\dot{x}_3 - x_8 = 0$

12. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_4} = 0$ ได้ $\dot{x}_4 - 0.5F_{xf} = 0$

13. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_5} = 0$ ได้ $\dot{x}_5 - 0.5F_{xr} = 0$

14. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_6} = 0$ ได้ $\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{1000} - x_7 x_8 = 0$

15. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_7} = 0$ ได้ $\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta - F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{1000} + x_6 x_8 = 0$

16. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_8} = 0$ ได้ $\dot{x}_8 - \dfrac{1.4(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta) - 1.4F_{yr}}{1782} = 0$

17. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xf}} = 0$ ได้ $-\lambda_6 \dfrac{\cos\delta}{1000} - \lambda_7 \dfrac{\sin\delta}{1000} - \lambda_8 \dfrac{1.4\sin\delta}{1782} - 0.5\lambda_4 = 0$

18. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yf}} = 0$ ได้ $\lambda_6 \dfrac{\sin\delta}{1000} - \lambda_7 \dfrac{\cos\delta}{1000} - \lambda_8 \dfrac{1.4\cos\delta}{1782} = 0$

19. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_6}{1000} - 0.5\lambda_5 = 0$

20. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_7}{1000} + \dfrac{1.4\lambda_8}{1782} = 0$

21. $\dfrac{\partial L'}{\partial \mu_1} = 0$ ได้ $x_2 - x_1 = 0$

22. $\dfrac{\partial L'}{\partial \delta} = 0$ ได้

$$\lambda_6 \frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta}{1000} - \lambda_7 \frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta}{1000} - \lambda_8 \frac{1.4(F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta)}{1782} = 0$$

3.2.3 **เนคเซสเซอรีคอนดิชัน** (Necessary conditions) **ยานยนต์แบบ** B **สนามที่** 1

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} 1+\lambda_1(\dot{x}_1 - x_6)+\lambda_2(\dot{x}_2 - x_7)+\lambda_3(\dot{x}_3 - x_8)+\lambda_4\left(\dot{x}_4 - \dfrac{0.2F_{xf}}{0.4}\right) \\ +\lambda_5\left(\dot{x}_5 - \dfrac{0.2F_{xr}}{0.4}\right)+\lambda_6\left(\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} - x_7x_8\right) \\ +\lambda_7\left(\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} + x_6x_8\right) \\ +\lambda_8\left(\dot{x}_8 - \dfrac{1.4(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta) - 1.4F_{yr}}{1425}\right) + \mu_1(x_2 - x_1) \end{bmatrix} dt \tag{3.78}$$

ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้

1. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1} = 0$ ได้ $-\mu_1 - \dot{\lambda}_1 = 0$
2. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2} = 0$ ได้ $\mu_1 - \dot{\lambda}_2 = 0$
3. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_3} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_3} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_3 = 0$
4. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_4} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_4} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_4 = 0$
5. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_5} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_5} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_5 = 0$
6. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_6} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_6} = 0$ ได้ $-\lambda_1 + \lambda_7 x_8 - \dot{\lambda}_6 = 0$
7. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_7} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_7} = 0$ ได้ $-\lambda_2 - \lambda_6 x_8 - \dot{\lambda}_7 = 0$
8. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_8} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_8} = 0$ ได้ $-\lambda_3 - \lambda_6 x_7 + \lambda_7 x_6 - \dot{\lambda}_8 = 0$
9. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_1} = 0$ ได้ $\dot{x}_1 - x_6 = 0$
10. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_2} = 0$ ได้ $\dot{x}_2 - x_7 = 0$

11. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_3} = 0$ ได้ $\dot{x}_3 - x_8 = 0$

12. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_4} = 0$ ได้ $\dot{x}_4 - 0.5F_{xf} = 0$

13. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_5} = 0$ ได้ $\dot{x}_5 - 0.5F_{xr} = 0$

14. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_6} = 0$ ได้ $\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} - x_7 x_8 = 0$

15. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_7} = 0$ ได้ $\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta - F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} + x_6 x_8 = 0$

16. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_8} = 0$ ได้ $\dot{x}_8 - \dfrac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1425} = 0$

17. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xf}} = 0$ ได้ $-\lambda_6\dfrac{\cos\delta}{800} - \lambda_7\dfrac{\sin\delta}{800} - \lambda_8\dfrac{1.4\sin\delta}{1425} - 0.5\lambda_4 = 0$

18. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yf}} = 0$ ได้ $\lambda_6\dfrac{\sin\delta}{800} - \lambda_7\dfrac{\cos\delta}{800} - \lambda_8\dfrac{1.4\cos\delta}{1425} = 0$

19. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_6}{800} - 0.5\lambda_5 = 0$

20. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_7}{800} + \dfrac{1.4\lambda_8}{1782} = 0$

21. $\dfrac{\partial L'}{\partial \mu_1} = 0$ ได้ $x_2 - x_1 = 0$

22. $\dfrac{\partial L'}{\partial \delta} = 0$ ได้

$$\lambda_6\frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta}{800} - \lambda_7\frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta}{800} - \lambda_8\frac{1.4\left(F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta\right)}{1425} = 0$$

3.2.4 **เนคเซสเซอรีคอนดิชัน** (Necessary conditions) **ยานยนต์แบบ** B **สนามที่** 2

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{array}{l} 1 + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_6) + \lambda_2(\dot{x}_2 - x_7) + \lambda_3(\dot{x}_3 - x_8) + \lambda_4\left(\dot{x}_4 - \dfrac{0.2F_{xf}}{0.4}\right) \\ + \lambda_5\left(\dot{x}_5 - \dfrac{0.2F_{xr}}{0.4}\right) + \lambda_6\left(\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} - x_7x_8\right) \\ + \lambda_7\left(\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} + x_6x_8\right) \\ + \lambda_8\left(\dot{x}_8 - \dfrac{1.4(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta) - 1.4F_{yr}}{1425}\right) + \mu_1(x_2 - x_1) \end{array} \right] dt \qquad (3.79)$$

ทำให้เราได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้

1. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1} = 0$ ได้ $-\mu_1 - \dot{\lambda}_1 = 0$
2. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2} = 0$ ได้ $\mu_1 - \dot{\lambda}_2 = 0$
3. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_3} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_3} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_3 = 0$
4. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_4} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_4} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_4 = 0$
5. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_5} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_5} = 0$ ได้ $0 - \dot{\lambda}_5 = 0$
6. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_6} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_6} = 0$ ได้ $-\lambda_1 + \lambda_7 x_8 - \dot{\lambda}_6 = 0$
7. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_7} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_7} = 0$ ได้ $-\lambda_2 - \lambda_6 x_8 - \dot{\lambda}_7 = 0$
8. $\dfrac{\partial L'}{\partial x_8} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{x}_8} = 0$ ได้ $-\lambda_3 - \lambda_6 x_7 + \lambda_7 x_6 - \dot{\lambda}_8 = 0$
9. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_1} = 0$ ได้ $\dot{x}_1 - x_6 = 0$
10. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_2} = 0$ ได้ $\dot{x}_2 - x_7 = 0$

11. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_3} = 0$ ได้ $\dot{x}_3 - x_8 = 0$

12. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_4} = 0$ ได้ $\dot{x}_4 - 0.5F_{xf} = 0$

13. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_5} = 0$ ได้ $\dot{x}_5 - 0.5F_{xr} = 0$

14. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_6} = 0$ ได้ $\dot{x}_6 - \dfrac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta + F_{xr}}{800} - x_7 x_8 = 0$

15. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_7} = 0$ ได้ $\dot{x}_7 - \dfrac{F_{xf}\sin\delta - F_{yf}\cos\delta + F_{yr}}{800} + x_6 x_8 = 0$

16. $\dfrac{\partial L'}{\partial \lambda_8} = 0$ ได้ $\dot{x}_8 - \dfrac{1.4\left(F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta\right) - 1.4F_{yr}}{1425} = 0$

17. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xf}} = 0$ ได้ $-\lambda_6\dfrac{\cos\delta}{800} - \lambda_7\dfrac{\sin\delta}{800} - \lambda_8\dfrac{1.4\sin\delta}{1425} - 0.5\lambda_4 = 0$

18. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yf}} = 0$ ได้ $\lambda_6\dfrac{\sin\delta}{800} - \lambda_7\dfrac{\cos\delta}{800} - \lambda_8\dfrac{1.4\cos\delta}{1425} = 0$

19. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{xr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_6}{800} - 0.5\lambda_5 = 0$

20. $\dfrac{\partial L'}{\partial F_{yr}} = 0$ ได้ $-\dfrac{\lambda_7}{800} + \dfrac{1.4\lambda_8}{1782} = 0$

21. $\dfrac{\partial L'}{\partial \mu_1} = 0$ ได้ $x_2 - x_1 = 0$

22. $\dfrac{\partial L'}{\partial \delta} = 0$ ได้

$$\lambda_6\frac{F_{xf}\sin\delta + F_{yf}\cos\delta}{800} - \lambda_7\frac{F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta}{800} - \lambda_8\frac{1.4\left(F_{xf}\cos\delta - F_{yf}\sin\delta\right)}{1425} = 0$$

3.3 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Programming)

ในการออกแบบโปรแกรมต้องการใช้งานโดยเชื่อมโยงกับกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ต่าง ๆ ของ MATLAB โดยนำเอาความสามารถของออปติไมต์เซชันโซลเวอร์ (Optimization solver) มาใช้คือ ฟังก์ชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งเป็นกล่องเครื่องมือออปติไมต์เซชัน (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วใน MATLAB เป็นฟังก์ชันหลักในการแก้ปัญหา (T. Veeraklaew. 1999: Thesis) ซึ่งฟังก์ชันต่างๆ ภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำหน้าที่ดังนี้

ขั้นแรก เมื่อรับอินพุต (Input) มาแล้วจะคืนค่าของเงื่อนไขบังคับที่เป็นอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ซึ่งแทนค่าออปติไมต์เซชันพารามิเตอร์ (Optimization parameter) $\underline{a}$ ลงไปแล้ว

ขั้นที่สอง เป็นการแทนค่าของ $F(\underline{a})$

ขั้นที่สาม เป็นการรับค่าจากสองขั้นตอนแรกนำมาคำนวณจนกว่าจะได้คำตอบ a^*

โดยทั่วไปการหาคำตอบของนอนลิเนียโปรแกรมมิ่ง (Nonlinear programming) จะมีการปรับเปลี่ยนค่าเกรเดียน (Gradient) ของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และจาโคเบียน (Jacobian) ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ตลอดเวลาซึ่งในที่นี้ใช้การคำนวณแบบแบ่งช่วงตรงกลาง (Central difference) ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเกรเดียน (Gradient) และจาโคเบียน (Jacobian) ไว้แล้วการคำนวณจะรวดเร็วขึ้น

บทที่ 4
ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

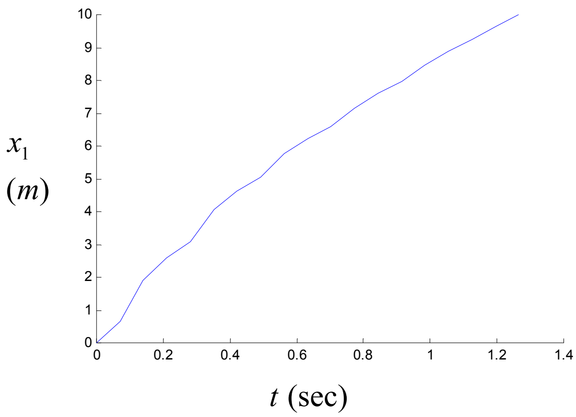
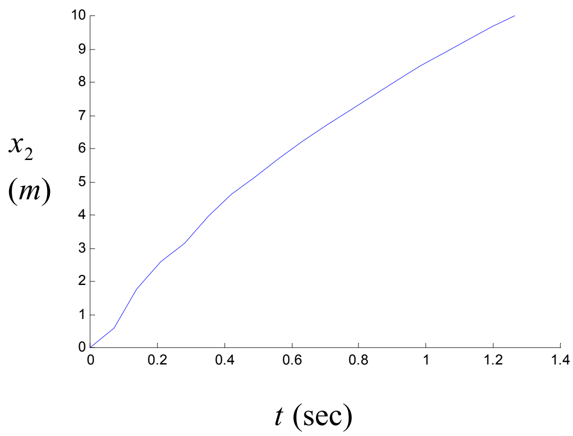
ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

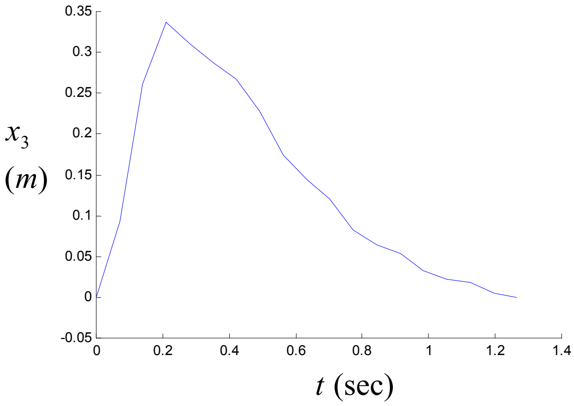
4.1.1 ยานยนต์แบบ A สนามที่ 1

ตาราง 4 ผลการทดสอบ (มาตราส่วน 1:100)

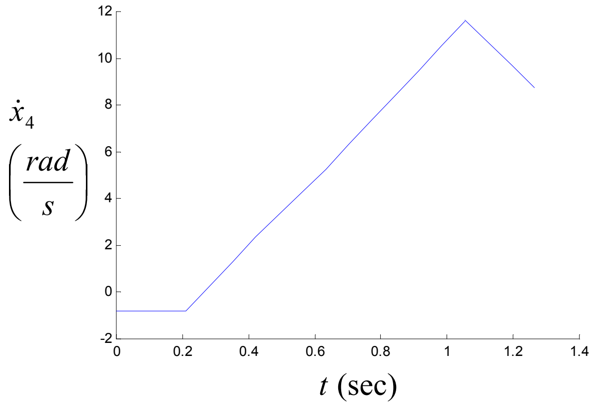
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร	
 กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน *x* กับเวลา	 กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน *y* กับเวลา

ตาราง 4 (ต่อ)

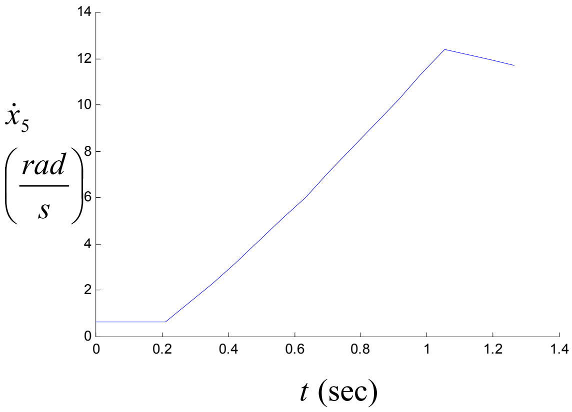
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร



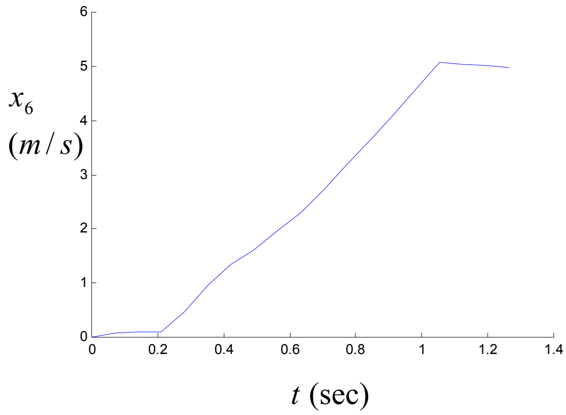
กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน z กับเวลา



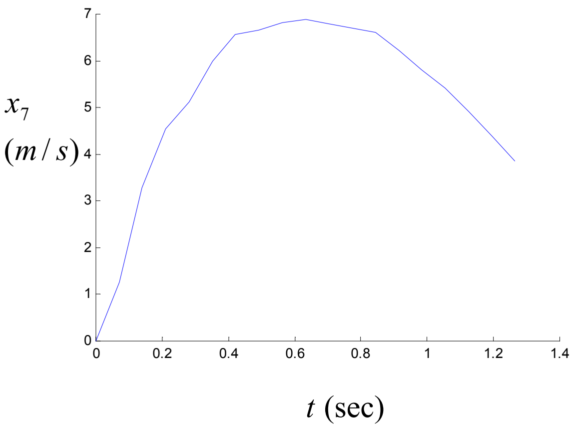
กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหน้ากับเวลา



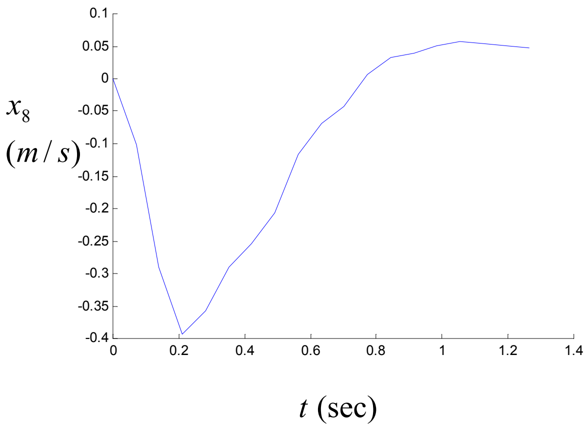
กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหลังกับเวลา



กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน x กับเวลา



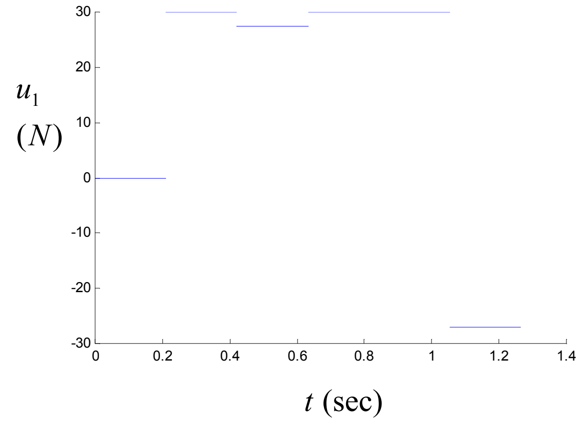
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน y กับเวลา



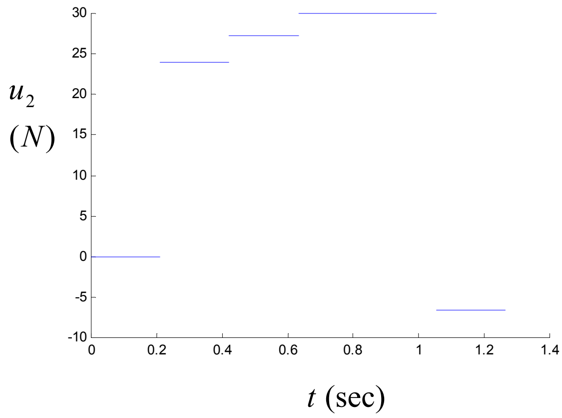
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน z กับเวลา

ตาราง 4 (ต่อ)

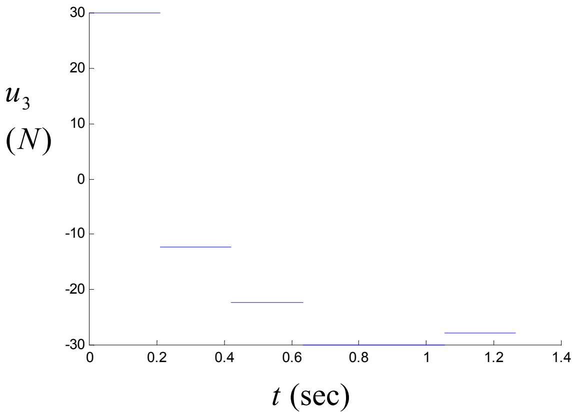
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ททที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร



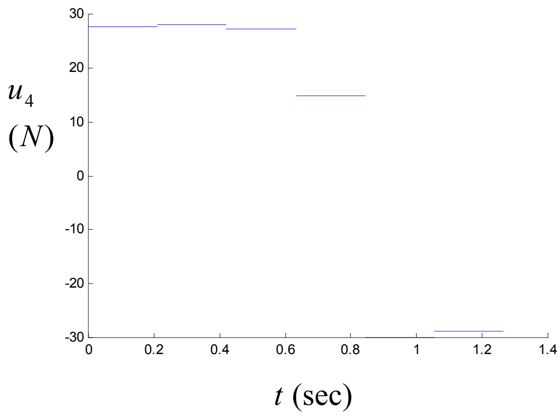
กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน *x* กับเวลา



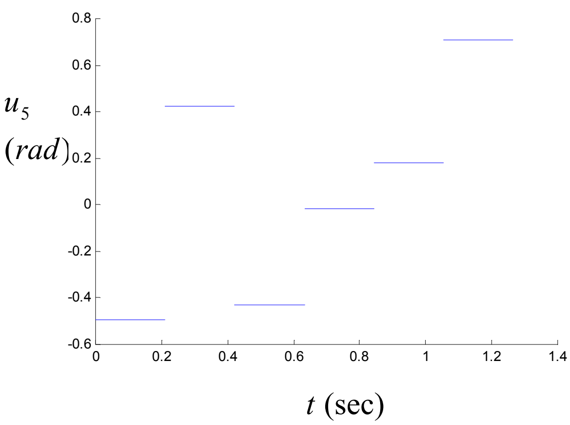
กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน *x* กับเวลา



กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน *y* กับเวลา



กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน *y* กับเวลา

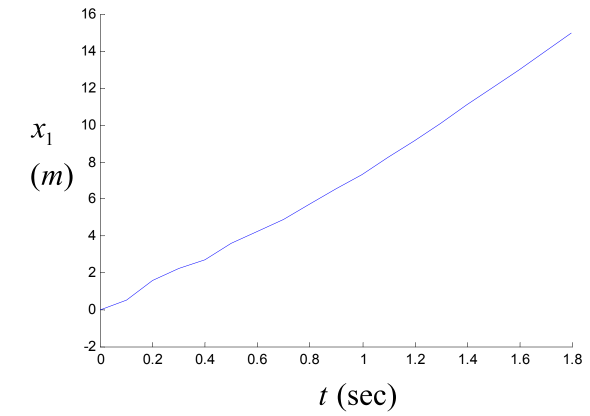


กราฟมุมเลี้ยวที่ล้อหน้ากับเวลา

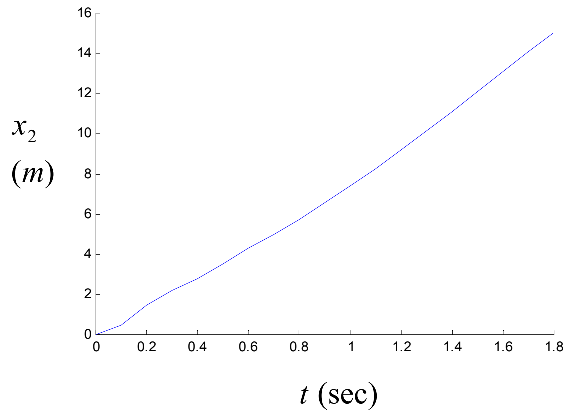
4.1.2 **ยานยนต์แบบ A สนามที่ 2**

ตาราง 5 ผลการทดสอบ (มาตราส่วน 1:100)

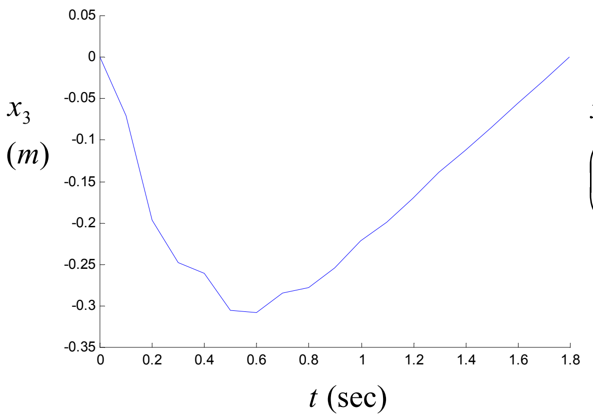
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร



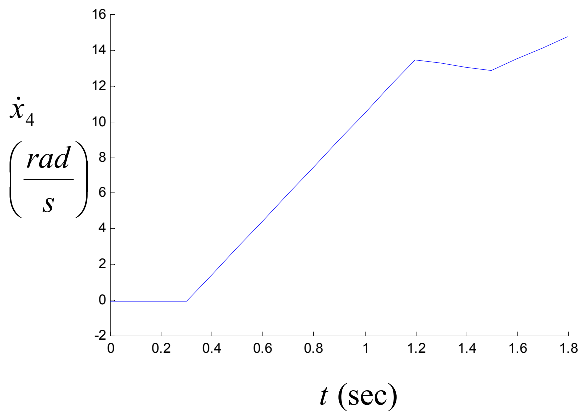
กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน x กับเวลา



กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน y กับเวลา

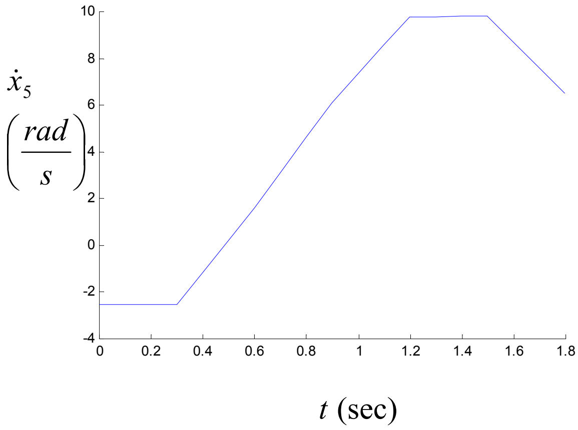
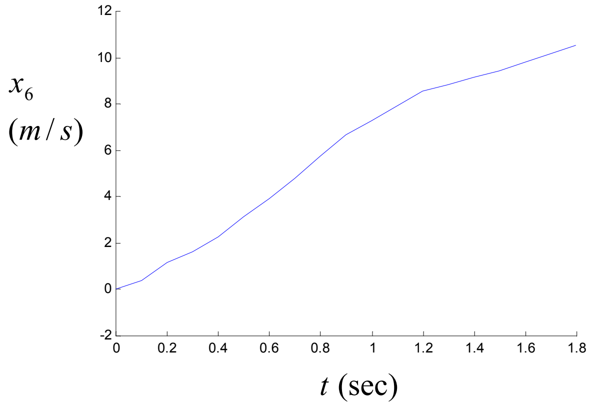
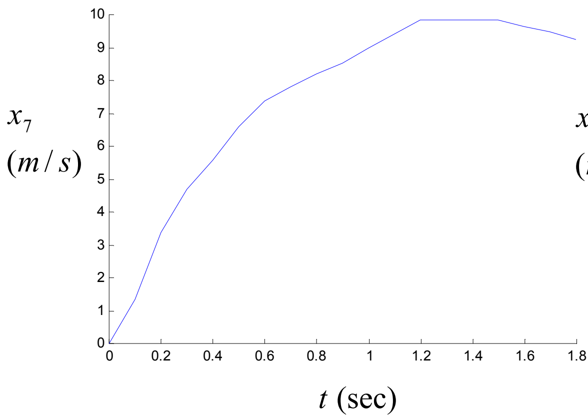
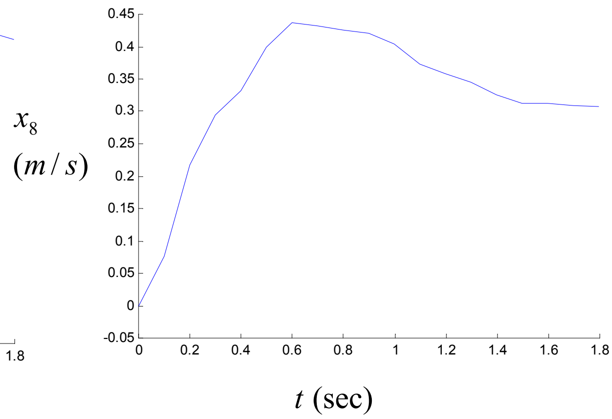
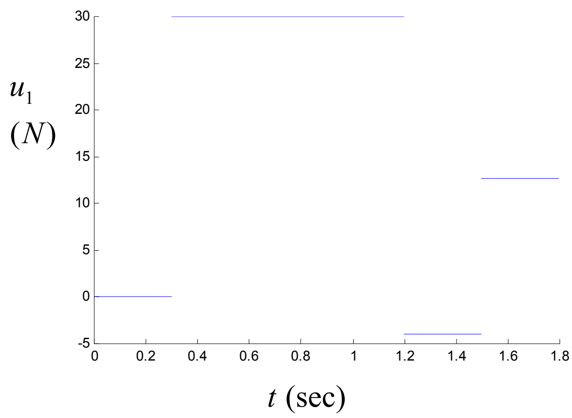
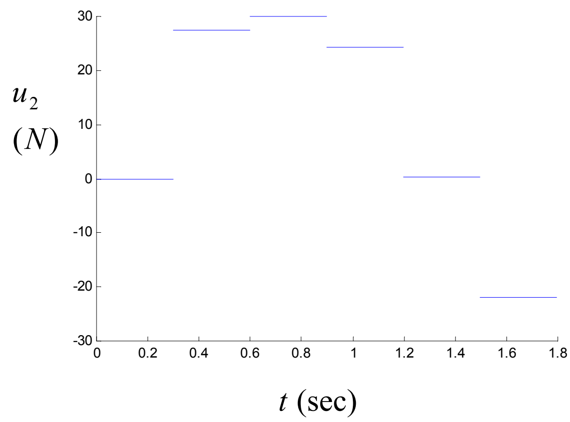


กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน z กับเวลา

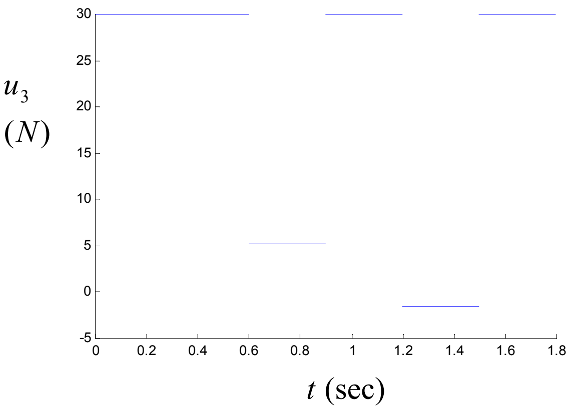
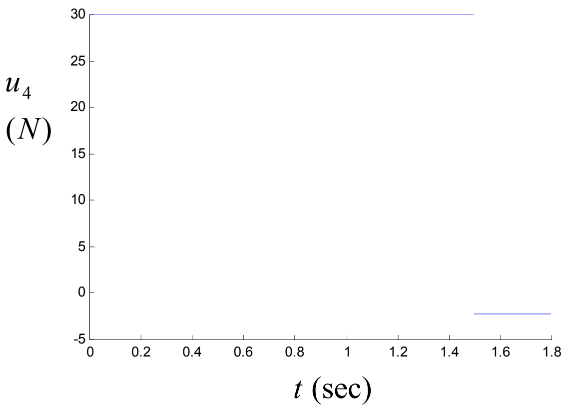
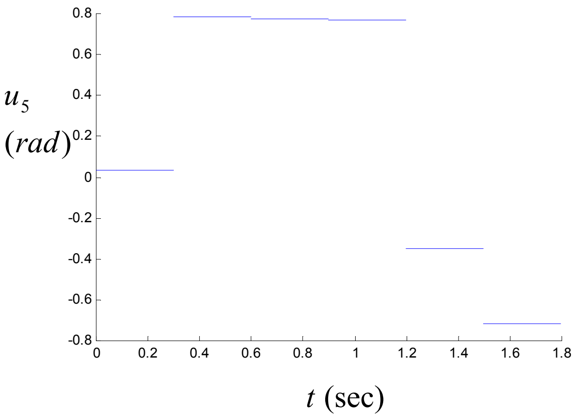


กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหน้ากับเวลา

ตาราง 5 (ต่อ)

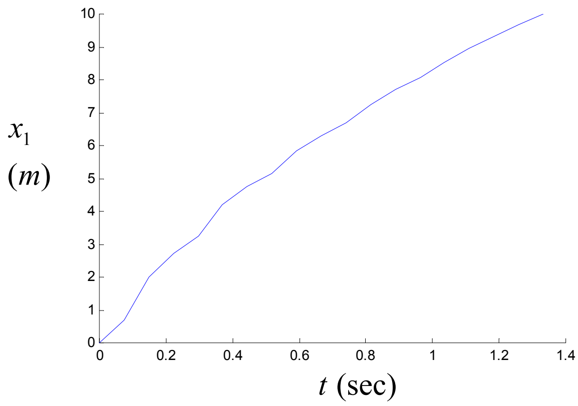
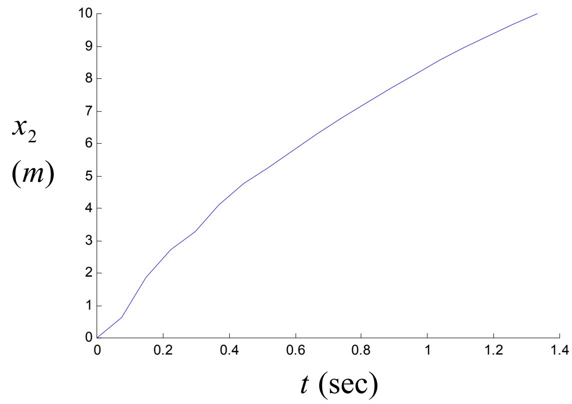
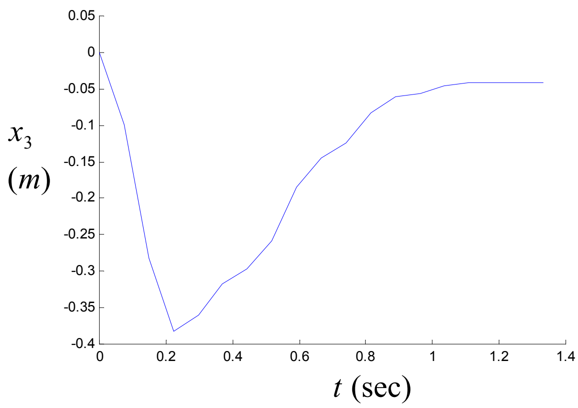
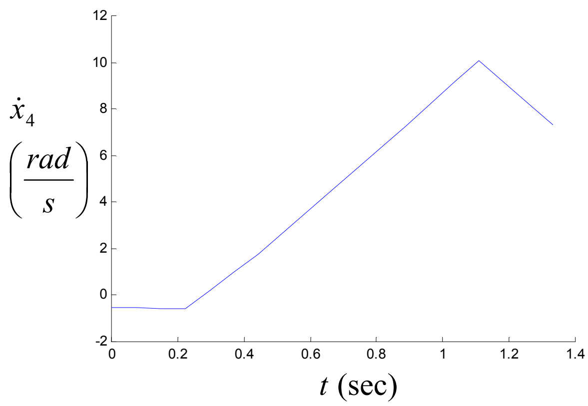
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร	
 กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหลังกับเวลา	 กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน x กับเวลา
 กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน y กับเวลา	 กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน z กับเวลา
 กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน x กับเวลา	 กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน x กับเวลา

ตาราง 5 (ต่อ)

สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ททที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร	
 กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน *y* กับเวลา	 กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน *y* กับเวลา
 กราฟมุมเลี้ยวที่ล้อหน้ากับเวลา	

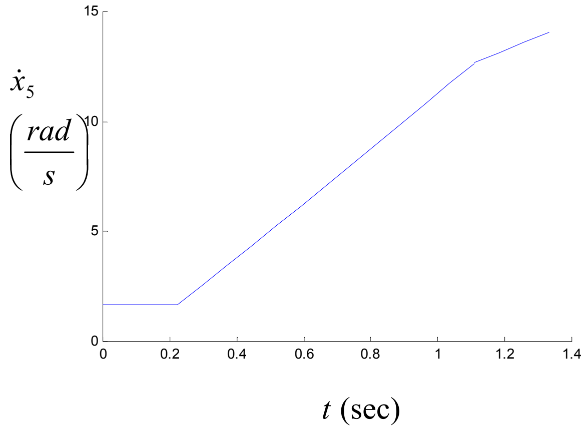
4.1.3 ยานยนต์แบบ B สนามที่ 1

ตาราง 6 ผลการทดสอบ (มาตราส่วน 1:100)

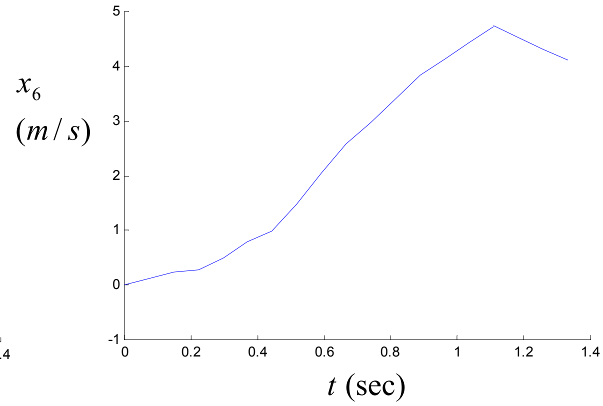
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ททที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร	
 กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน x กับเวลา	 กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน y กับเวลา
 กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน z กับเวลา	 กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหน้ากับเวลา

ตาราง 6 (ต่อ)

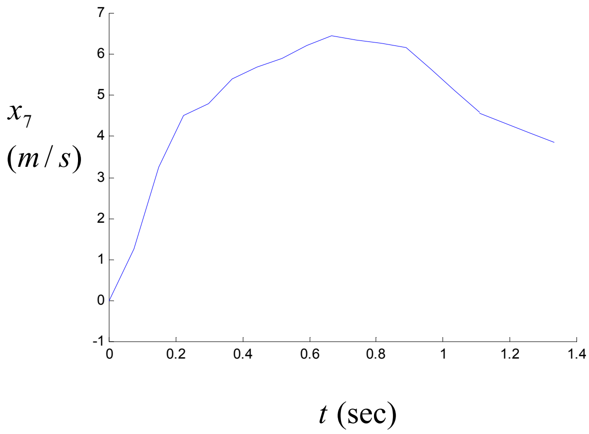
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร



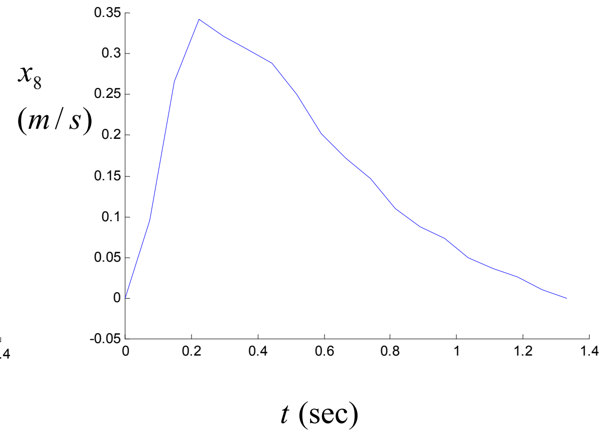
กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหลังกับเวลา



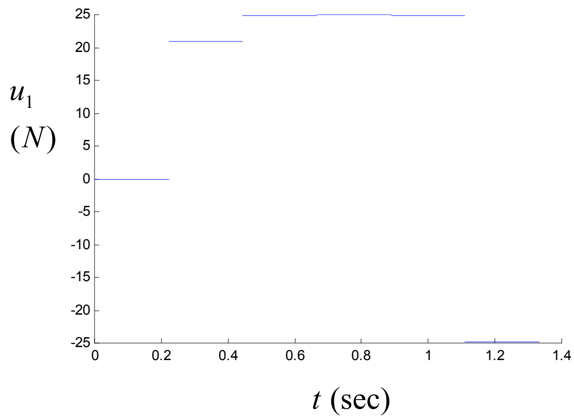
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน x กับเวลา



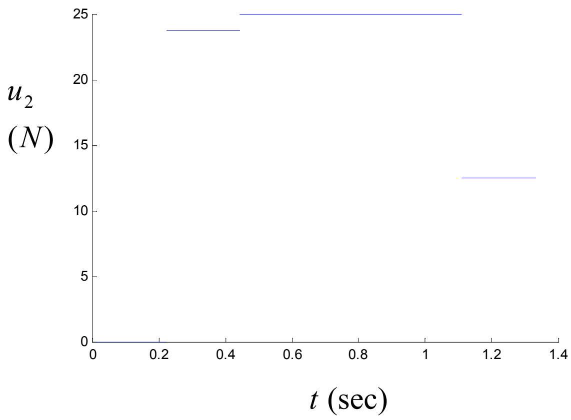
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน y กับเวลา



กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน z กับเวลา

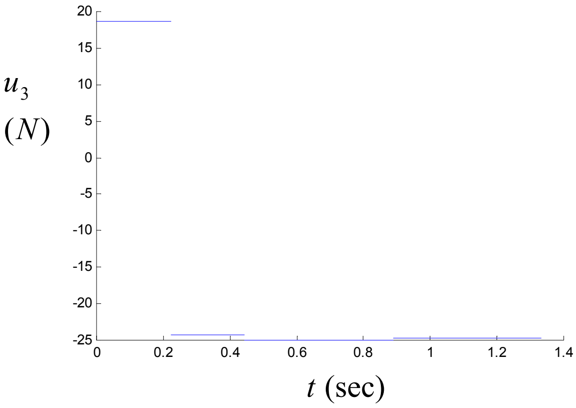
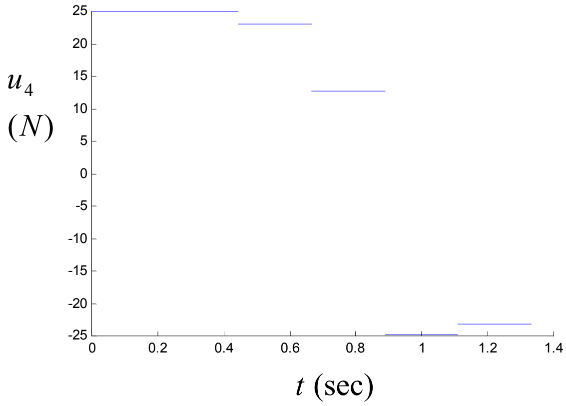
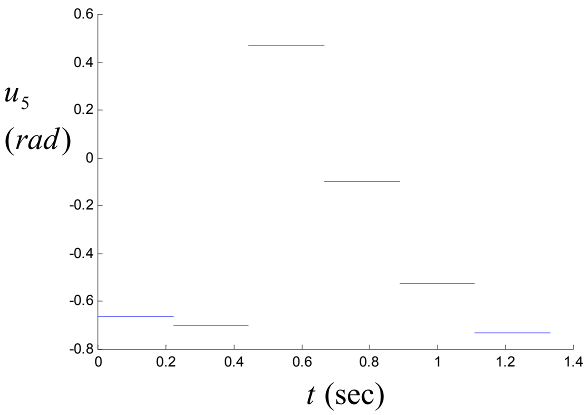


กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน x กับเวลา



กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน x กับเวลา

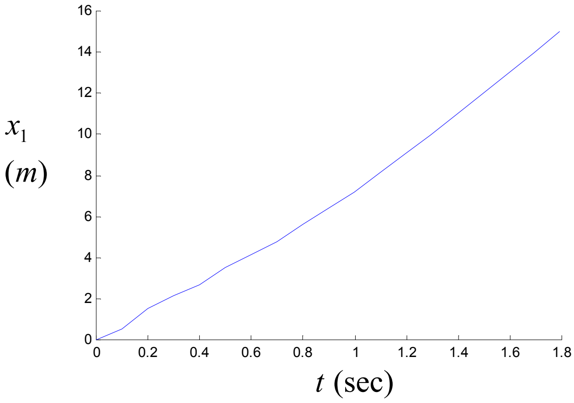
ตาราง 6 (ต่อ)

สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ททที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,000 เมตร	
 กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน y กับเวลา	 กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน y กับเวลา
 กราฟมุมเลี้ยวที่ล้อหน้ากับเวลา	

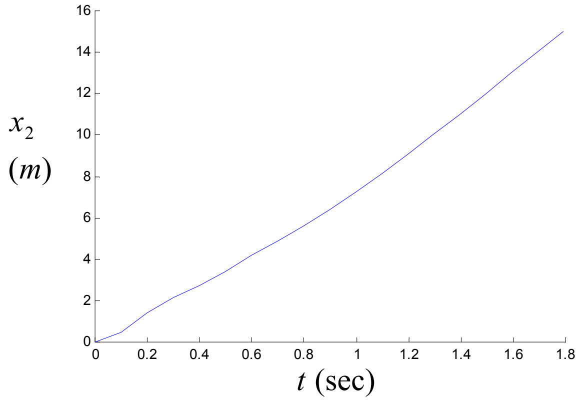
4.1.3 **ยานยนต์แบบ B สนามที่ 2**

ตาราง 7 ผลการทดสอบ (มาตราส่วน 1:100)

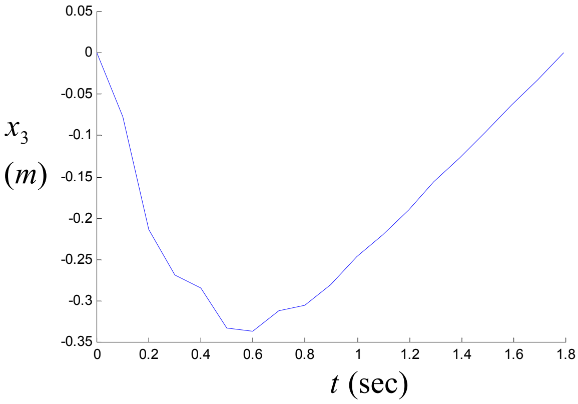
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ททที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร



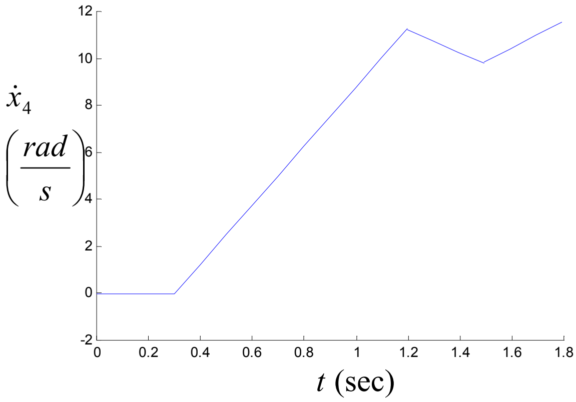
กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน *x* กับเวลา



กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน *y* กับเวลา



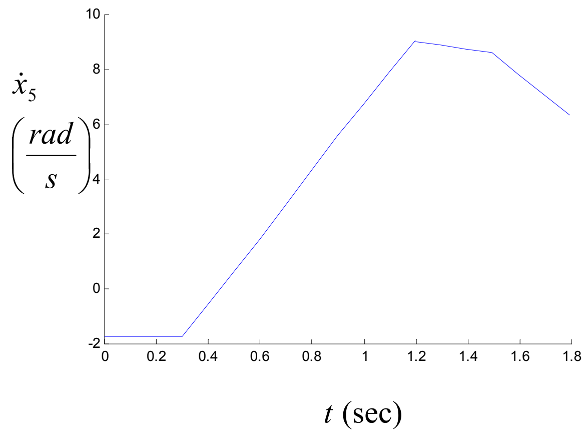
กราฟระยะขจัดของรถตามแนวแกน *z* กับเวลา



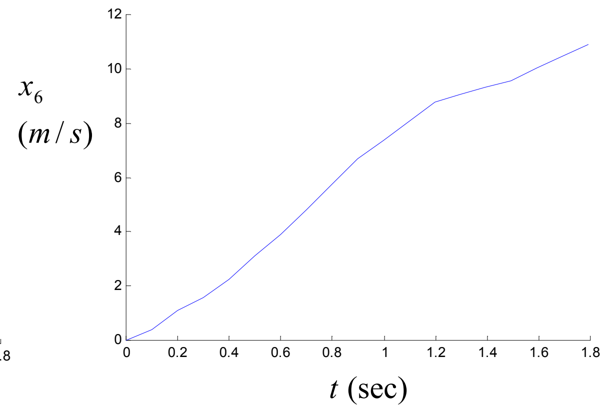
กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหน้ากับเวลา

ตาราง 7 (ต่อ)

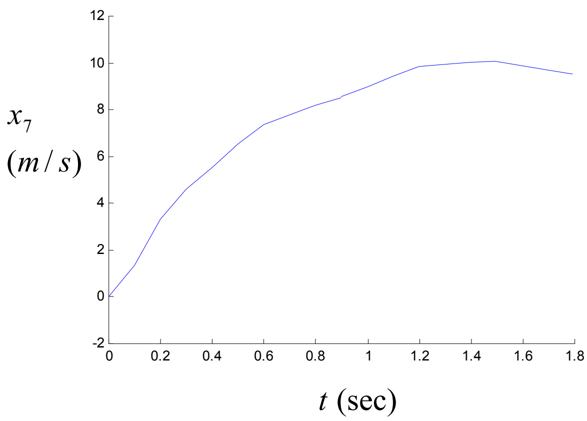
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร



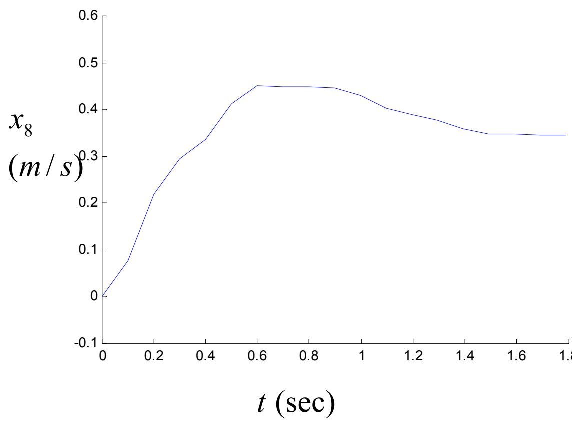
กราฟความเร็วเชิงมุมของล้อหลังกับเวลา



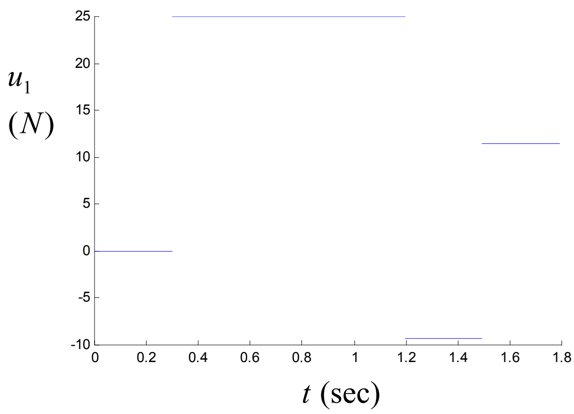
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน x กับเวลา



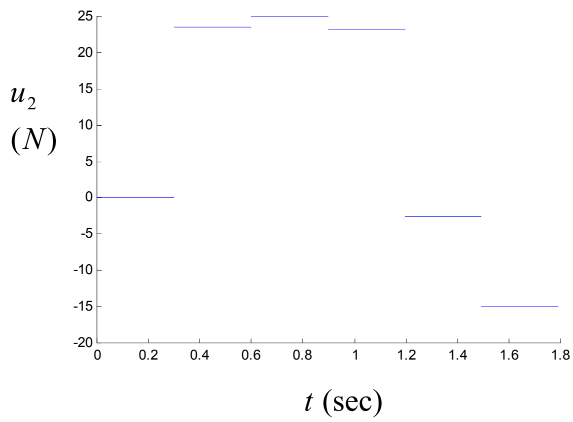
กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน y กับเวลา



กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน z กับเวลา



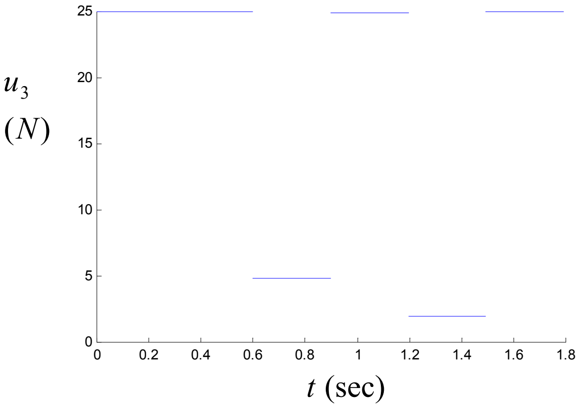
กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน x กับเวลา



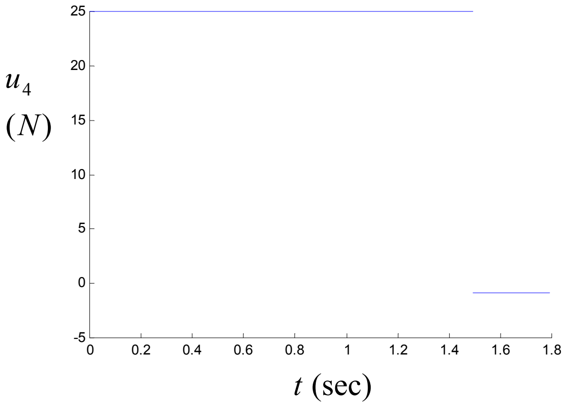
กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน x กับเวลา

ตาราง 7 (ต่อ)

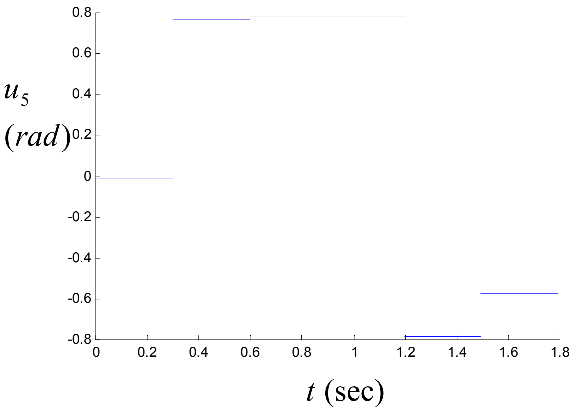
สนามเป็นทางตรง ออกสตาร์ทที่ x=y=0 และเข้าเส้นชัยที่พิกัด x=y=1,500 เมตร



กราฟแรงกระทำที่ล้อหน้าตามแนวแกน *y* กับเวลา



กราฟแรงกระทำที่ล้อหลังตามแนวแกน *y* กับเวลา



กราฟมุมเลี้ยวที่ล้อหน้ากับเวลา

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.2.1 ยานยนต์แบบ A สนามที่ 1

ยานยนต์แบบ A มีมวล 1,000 kg สนามแข่งขันเป็นทางตรง และกำหนดให้รถออกสตาร์ทจากจุดเริ่มต้นในพิกัด x=y=0 และเคลื่อนที่ออกไปตามสนามที่เป็นทางตรงตามความสัมพันธ์ x=y แล้วไปเข้าเส้นชัยยังพิกัด x=y=1,000 เมตร ดังนั้นสนามจะมีความยาวประมาณ 1,414 เมตร โดยป้อนแรงขับเคลื่อนที่ล้อของรถ โดยค่าสูงสุดเท่ากับ 3,145 N และมีแรงเบรกสูงสุดเท่ากับ –3,145 N และมีแรงกระทำตามแนวด้านข้างตามแนวแกน y ของรถสูงสุดเท่ากับ 3,145 N ต่ำสุดเท่ากับ –3,145 N ตามลำดับ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าเวลาน้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย และได้แสดงออกมาในลักษณะของกราฟทั้งหมด 13 กราฟ ประกอบไปด้วยระยะขจัดในแนวแกน x แกน y และแกน z ความเร็วของล้อหน้าและล้อหลัง ความเร็วในการเคลื่อนที่ในแนวแกน x แกน y และแกน z แรงกระทำในแนวแกน x แกน y ที่กระทำกับล้อหน้าและล้อหลัง และกราฟสุดท้ายคือมุมเลี้ยวของล้อหน้า ตามลำดับ โดยสเกลของกราฟทั้งหมดคือ 1:100

และจากกราฟจะพบว่าค่าเวลาที่เหมาะสมที่สุดที่รถใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังเส้นชัยจะใช้เวลาโดยประมาณเท่ากับ 125 วินาที

และเมื่อวิเคราะห์ความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยการพิจารณาความสอดคล้องและความสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งเงื่อนไขบังคับ ก็จะพบว่ามีความสมเหตุสมผล นั่นคือสังเกตระยะขจัดของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และแนวแกน y จะพบว่ารถแข่งเคลื่อนที่ไปในสนามแข่งขันที่เป็นทางตรง ความเร็วของรถแข่งเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดๆ หนึ่งก็จะมีความเร็วคงที่ โดยสอดคล้องกับความเร็วของล้อรถ โดยมีความสัมพันธ์กับแรงกระทำที่ล้อ ซึ่งพยายามให้การเคลื่อนที่ใช้เวลาน้อยที่สุด โดยจะสังเกตได้จากการที่ใช้แรงสูงสุดที่เรียกว่า แบง-แบง โซลูชัน (Bang-Bang Solution)

4.2.2 ยานยนต์แบบ A สนามที่ 2

ยานยนต์แบบ A มีมวล 1,000 kg สนามแข่งขันเป็นทางตรง และกำหนดให้รถออกสตาร์ทจากจุดเริ่มต้นในพิกัด x=y=0 และเคลื่อนที่ออกไปตามสนามที่เป็นทางตรงตามความสัมพันธ์ x=y แล้วไปเข้าเส้นชัยยังพิกัด x=y=1,500 เมตร ความยาวของสนามเพิ่มขึ้นกว่าสนามเดิม ดังนั้นสนามจะมีความยาวประมาณ 2,121 เมตร โดยป้อนแรงขับเคลื่อนที่ล้อของรถเท่าเดิม โดยค่าสูงสุดเท่ากับ 3,145 N และมีแรงเบรกสูงสุดเท่ากับ –3,145 N และมีแรงกระทำตามแนวด้านข้างตามแนวแกน y ของรถสูงสุดเท่ากับ 3,145 N ต่ำสุดเท่ากับ –3,145 N ตามลำดับ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าเวลาน้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย และได้แสดงออกมาในลักษณะของกราฟทั้งหมด 13 กราฟเช่นกัน ประกอบไปด้วย ระยะขจัดในแนวแกน x แกน y และแกน z ความเร็วของล้อหน้าและล้อหลัง ความเร็วในการเคลื่อนที่ในแนวแกน x แกน y และแกน z แรงกระทำในแนวแกน x แกน y ที่กระทำกับล้อหน้าและล้อหลัง และกราฟสุดท้ายคือมุมเลี้ยวของล้อหน้า ตามลำดับ โดยสเกลของกราฟคือ 1:100

และจากกราฟจะพบว่าค่าเวลาที่เหมาะสมที่สุดที่รถใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังเส้นชัยจะใช้เวลาโดยประมาณเท่ากับ 180 วินาที

และเมื่อวิเคราะห์ความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยการพิจารณาความสอดคล้องและสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งเงื่อนไขบังคับ ซึ่งพบว่ามีความสมเหตุสมผล นั่นคือ สังเกตระยะขจัดของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และแนวแกน y จะพบว่ารถแข่งเคลื่อนที่ไปในสนามแข่งขันที่เป็นทางตรง ความเร็วของรถแข่งเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดๆ หนึ่งก็จะมีความเร็วคงที่ โดยสอดคล้องกับความเร็วของล้อรถ โดยมีความสัมพันธ์กับแรงกระทำที่ล้อ ซึ่งพยายามให้การเคลื่อนที่ใช้เวลาน้อยที่สุด โดยจะสังเกตได้จากการที่ใช้แรงสูงสุดที่เรียกว่า แบง-แบง โซลูชัน (Bang-Bang Solution)

4.2.3 **ยานยนต์แบบ B สนามที่ 1**

ยานยนต์แบบ B มีมวล 800 kg สนามแข่งขันเป็นทางตรง และกำหนดให้รถออกสตาร์ทจากจุดเริ่มต้นในพิกัด x=y=0 และเคลื่อนที่ออกไปตามสนามที่เป็นทางตรงตามความสัมพันธ์ x=y แล้วไปเข้าเส้นชัยยังพิกัด x=y=1,000 เมตร ดังนั้นสนามจะมีความยาวประมาณ 1,414 เมตร โดยป้อนแรงขับเคลื่อนที่ล้อของรถ โดยค่าสูงสุดเท่ากับ 2,516 N มีแรงเบรกสูงสุดเท่ากับ –2,516 N และมีแรงกระทำตามแนวด้านข้างตามแนวแกน y ของรถสูงสุดเท่ากับ 2,516 N ต่ำสุดเท่ากับ –2,516 N ตามลำดับ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าเวลาน้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย และได้แสดงออกมาในลักษณะของกราฟทั้งหมด 13 กราฟ ประกอบไปด้วย ระยะขจัดในแนวแกน x แกน y และแกน z ความเร็วของล้อหน้าและล้อหลัง ความเร็วในการเคลื่อนที่ในแนวแกน x แกน y และแกน z แรงกระทำในแนวแกน x แกน y ที่กระทำกับล้อหน้าและล้อหลัง และกราฟสุดท้ายคือมุมเลี้ยวของล้อหน้า ตามลำดับ โดยสเกลของกราฟคือ 1:100

และจากกราฟจะพบว่าค่าเวลาที่เหมาะสมที่สุดที่รถใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังเส้นชัยจะใช้เวลาโดยประมาณเท่ากับ 132 วินาที

และเมื่อวิเคราะห์ความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยการพิจารณาความสอดคล้องและสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งเงื่อนไขบังคับ ซึ่งพบว่ามีความสมเหตุสมผล นั่นคือ

สังเกตระยะขจัดของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และแนวแกน y จะพบว่ารถแข่งเคลื่อนที่ไปในสนามแข่งขันที่เป็นทางตรง ความเร็วของรถแข่งเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดๆ หนึ่งก็จะมีความเร็วคงที่โดยสอดคล้องกับความเร็วของล้อรถ โดยมีความสัมพันธ์กับแรงกระทำที่ล้อ ซึ่งพยายามให้การเคลื่อนที่ใช้เวลาน้อยที่สุด โดยจะสังเกตได้จากการที่ใช้แรงสูงสุดที่เรียกว่า แบง-แบง โซลูชัน (Bang-Bang Solution)

4.2.4 ยานยนต์แบบ B สนามที่ 2

ยานยนต์แบบ B มีมวล 800 kg สนามแข่งขันเป็นทางตรง และกำหนดให้รถออกสตาร์ทจากจุดเริ่มต้นในพิกัด x=y=0 และเคลื่อนที่ออกไปตามสนามที่เป็นทางตรงตามความสัมพันธ์ x=y แล้วไปเข้าเส้นชัยยังพิกัด x=y=1,500 เมตร ดังนั้นสนามจะมีความยาวประมาณ 2,121 เมตร โดยป้อนแรงขับเคลื่อนที่ล้อของรถ โดยค่าสูงสุดเท่ากับ 2,516 N มีแรงเบรกสูงสุดเท่ากับ –2,516 N และมีแรงกระทำตามแนวด้านข้างตามแนวแกน y ของรถสูงสุดเท่ากับ 2,516 N ต่ำสุดเท่ากับ –2,516 N ตามลำดับ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าเวลาน้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย และได้แสดงออกมาในลักษณะของกราฟทั้งหมด 13 กราฟ ประกอบไปด้วยระยะขจัดในแนวแกน x แกน y และแกน z ความเร็วของล้อหน้าและล้อหลัง ความเร็วในการเคลื่อนที่ในแนวแกน x แกน y และแกน z แรงกระทำในแนวแกน x แกน y ที่กระทำกับล้อหน้าและล้อหลัง และกราฟสุดท้ายคือมุมเลี้ยวของล้อหน้า ตามลำดับ โดยสเกลของกราฟคือ 1:100

และจากกราฟจะพบว่าค่าเวลาที่เหมาะสมที่สุดที่รถใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นไปยังเส้นชัยจะใช้เวลาโดยประมาณเท่ากับ 180 วินาที

และเมื่อวิเคราะห์ความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยการพิจารณาความสอดคล้องและสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบ รวมทั้งเงื่อนไขบังคับ ซึ่งพบว่ามีความสมเหตุสมผล นั่นคือสังเกตระยะขจัดของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และแนวแกน y จะพบว่ารถแข่งเคลื่อนที่ไปในสนามแข่งขันที่เป็นทางตรง ความเร็วของรถแข่งเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดๆ หนึ่งก็จะมีความเร็วคงที่โดยสอดคล้องกับความเร็วของล้อรถ โดยมีความสัมพันธ์กับแรงกระทำที่ล้อ ซึ่งพยายามให้การเคลื่อนที่ใช้เวลาน้อยที่สุด โดยจะสังเกตได้จากการที่ใช้แรงสูงสุดที่เรียกว่า แบง-แบง โซลูชัน (Bang-Bang Solution)

4.2.5 วิเคราะห์โดยรวมทั้งหมด

จากข้อมูลที่ได้จากการทดลองใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้หาค่าเวลาในการเคลื่อนที่ทั้ง 4 กรณีดังกล่าว จะพบว่ามีปัจจัยหรือตัวแปรที่มีผลต่อความเร็วของรถแข่งอยู่อย่างมากมายหลายตัวแปร เช่น มวลของรถกับแรงขับเคลื่อน การบังคับเลี้ยว แรงกระทำด้านข้าง เป็นต้น

ดังนั้น การที่จะทำการหาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งให้ได้อย่างถูกต้องแม่นยำนั้น มิใช่เรื่องง่ายเลย เพราะมีปัจจัยต่างๆ มากมายที่ส่งผลต่อความเร็วในการเคลื่อนที่

จากการศึกษาครั้งนี้ ด้วยการใช้วิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันมาเป็นเครื่องมือ ซึ่งจากผลการทดลองดังกล่าวจะพบว่า วิธีการนี้สามารถนำมาใช้ในการหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งได้ และให้ผลของคำตอบที่ทวนสอบได้ ซึ่งกระทำการทวนสอบความน่าเชื่อถือของวิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชัน และโปรแกรมการคำนวณได้ด้วยการพิจารณาผลของคำตอบว่ามีความสอดคล้องกับสภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบ เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับหรือไม่

และจากผลการทดลอง เมื่อทำการทวนสอบความถูกต้องและน่าเชื่อถือในวิธีการและโปรแกรมการคำนวณแล้ว จะพบว่าผลการทดลองทุกกรณี มีความสอดคล้องและเป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขบังคับ ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาผลการทดลองว่ามีความสอดคล้องกับขอบเขตของการศึกษาก็จะพบว่า

- วิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันนั้นสามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งที่เป็นแบบจำลองได้
- เมื่อทำการทดลองปรับเปลี่ยนสนามแข่งขันและตัวรถแข่ง ก็พบว่าวิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชัน และโปรแกรมคำนวณก็ให้ผลของคำตอบที่ไปไปในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ ผลของคำตอบที่ได้เมื่อทวนสอบกับสภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขบังคับ ก็พบว่ามีความสอดคล้องกัน สังเกตกราฟของค่าต่างๆ กับเวลา ทำให้สรุปได้ว่า วิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันสามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งได้ และผลของคำตอบที่ได้ก็มีความน่าเชื่อถือได้ เพราะเมื่อทวนสอบกับสภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขบังคับ แล้วพบว่ามีความสอดคล้องกับเงื่อนไขต่างๆ ดังกล่าว
- และพบว่าเมื่อรถแข่งเคลื่อนที่ไปในสนามแข่งขันที่เป็นทางตรง ความเร็วของรถแข่งจะเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงจุดๆ หนึ่งก็จะมีความเร็วคงที่ โดยสอดคล้องกับความเร็วของล้อรถ โดยมีความสัมพันธ์กับแรงกระทำที่ล้อ ซึ่งพยายามให้การเคลื่อนที่ใช้เวลาน้อยที่สุด โดยจะสังเกตได้จากการที่ใช้แรงสูงสุดที่เรียกว่า แบง-แบง โซลูชัน (Bang-Bang Solution)

บทที่ 5
สรุปและวิจารณ์

5.1 สรุปและวิจารณ์

วิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันนั้นสามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งที่เป็นแบบจำลองได้ และเมื่อทำการทดลองปรับเปลี่ยนสนามแข่งขันและตัวรถแข่ง ก็พบว่าวิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชัน และโปรแกรมคำนวณก็ให้ผลของคำตอบที่ไปไปในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ ผลของคำตอบที่ได้เมื่อทวนสอบกับสภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขบังคับ ก็พบว่ามีความสอดคล้องกัน ทำให้สรุปได้ว่า วิธีการมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันสามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งได้ และผลของคำตอบที่ได้ก็มีความน่าเชื่อถือได้ เพราะเมื่อทวนสอบกับสภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขบังคับ แล้วพบว่ามีความสอดคล้องกับเงื่อนไขต่างๆ ดังกล่าว ซึ่งสังเกตได้จากกราฟที่แสดงไว้ในบทที่ 4 ซึ่งได้อธิบายรายละเอียดของกราฟไว้ด้วยแล้ว

ทั้งนี้หากต้องการเพิ่มความละเอียดในการคำนวณก็สามารถทำได้ ด้วยการเพิ่มความละเอียดของสเต็บไซด์ (Step size) แต่ก็ต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย

ผลจากการนำเอาวิธีมีนนิมัมไทม์ออบติไมต์เซชันมาใช้เพื่อคำนวณหาค่าเวลาในการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมที่สุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี พบว่าการค้นหาคำตอบจะมีความยากและต้องใช้เวลามาก โดยจำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้นเวลาให้ใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุดจึงจะทำให้ได้คำตอบที่ยอมรับได้ แต่ก็สามารถทำให้ปัญหาลดความยากลงได้ด้วยการสเกลปัญหาให้เล็กลงมา อาจจะด้วยวิธีการแปลงหน่วยให้ใหญ่ขึ้น เป็นต้น สำหรับวิธีการมีนนิมัมไทม์ออบติไมต์เซชันจากการศึกษาวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปปรับปรุงและพัฒนาใช้กับปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกับการศึกษาวิจัยนี้ได้ ตัวอย่างเช่น การแข่งขันรถประหยัดพลังงาน ซึ่งอาจจะนำไปใช้หาความเร็วที่เหมาะสมที่ทำให้ประหยัดพลังงานมากที่สุด เป็นต้น

และจากการศึกษาวิจัยครั้งนี้พบว่าวิธีการแก้ปัญหาแบบไดเรคท์มีความสะดวกในการหาคำตอบมากกว่าวิธีการแบบอินไดเรคท์มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีการแก้ปัญหาของมีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชันนี้ เนื่องจากวิธีการไดเรคท์มีความซับซ้อนน้อยกว่า เพราะในการแก้ปัญหาเดียวกัน วิธีการไดเรคท์จะมีตัวที่ไม่รู้ค่าน้อยกว่าวิธีการแบบอินไดเรคท์หนึ่งเท่าตัว จึงเป็นเหตุผลทำให้การหาคำตอบด้วยวิธีไดเรคท์มีความรวดเร็วกว่าวิธีอินไดเรคท์มาก แต่ผลของคำตอบที่ได้ก็จะมีความหยาบมากกว่าเช่นกัน แต่ก็ยังเป็นค่าคำตอบที่ยอมรับได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการพัฒนาในขั้นต่อไปอาจจะต้องหาวิธีการที่ช่วยให้การกำหนดค่าเริ่มต้นไม่จำเป็นจะต้องกำหนดค่าให้ใกล้เคียงกับคำตอบมากนัก ซึ่งจะเป็นการช่วยประหยัดเวลาในการหาคำตอบได้มาก หรือหาวิธีการให้ลู่เข้าสู่คำตอบได้เร็วขึ้น และอาจเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาให้มากขึ้น โดยคิดผลกระทบที่เกิดจากอากาศพลศาสตร์ ซึ่งจะต้องคำนึงถึงรูปทรงของรถแข่งด้วย รวมถึงเพิ่มความซับซ้อนของสนามแข่งขัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ธีระยุทธ สุวรรณประทีบ. (2538). *วิศวกรรมยานยนต์: ภาคคำนวณ*. กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.

Arthur E Bryson Jr, Yu-Chi Ho. (1975). *Applied Optimal Control Optimization Estimation and Control.* USA: John Wiley & sons Inc.

Biral F, Da Lio M. *Modelling Drivers with the Optimal Manoeuvre Method.* University of Trento. Italy. [serial online] 2001. Available from: URL: http://pdmec4.mecc.unipd.it/~cos/DINAMOTO/articoli%20moto/30articolo.pdf. Accessed September 12, 2002.

Casanova D, Sharp RS, Symonds P. *Minimum Time Manoeuvring: The Significance of Yaw Inertia*. [abstract]. [serial online] Vehicle System Dynamics 2000; Vol.34: No.2: pp. 77-115. Available from: URL: http://www.szp.swets.nl/szp/journals/vs342077.htm. Accessed August 4, 2002.

Casanova D, Sharp RS, Symonds P. *On minimum time optimization of Formula One Cars: The influence of vehicle mass.* [abstract]. ICTAM 2000 Chicago. Available from: URL: http://www.tam.uiuc.edu/ICTAM2000/Program/Abstracts/RF1.html. Accessed August 4, 2002.

Casanova D, Sharp RS, Symonds P. *On the Optimisation of the Longitudinal Location of the Mass Centre of a Formula One Car for Two Circuits.* School of Engineering. Cranfield University. Bedford. United Kingdom. [serial online] 2002. Available from: URL: http://www.ee.ic.ac.uk/CAP/Reports/2002/avec2002_paper.pdf. Accessed September 12, 2002.

Ellis JR. (1994). *Vehicle Handling Dynamics.* 1st ed. London: Page Bros Norwich.

Eric J Rossetter, J Christian Gerdes. *A Study of Lateral Vehicle Control under a Virtual Force Framework*. Stanford University. USA. Available from: URL: http://www-cdr.stanford.edu/dynamic/PF/papers/AVEC2002_v2.pdf Accessed December 12, 2003.

Peeroon Ramanata. (1998). *Optimal Vehicle Path Generator Using Optimization Methods.* [thesis]. USA: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Singiresu S Rao. (1996). *Engineering Optimization Theory and Practice.* 3rd ed. USA: John Wiley & sons Inc.

Sunil Kumar Agrawal, Brian C Fabien. (1999). *Optimization of Dynamic Systems.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thomas D Gillespie. (1992). *Fundamentals of Vehicle Dynamics.* 4th ed. USA: Society of Automotive Engineers Inc.

Taheri S. (1990). *An Investigation and Design of Slip Control Braking Systems Integrated with Four Wheel Steering*, Dissertation Ph.D (Mechanical Engineering). South Carolina: Graduate School of Clemson University. Photocopied.

T. Veeraklaew. (1999). *Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic Systems*, Dissertation Ph.D (Mechanical Engineering). Delaware: Graduate School of University of Delaware. Photocopied.

William F Milliken, Douglas L Milliken. (1995). *Race Car Vehicle Dynamics.* 2nd ed. USA: SAE International.

Wong JY. (2001). *Theory of Ground Vehicles.* 3rd ed. USA: John Wiley & sons Inc.

อภิธานศัพท์

g	คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
h	คือความสูงจากพื้นถึงจุดศูนย์ถ่วงของยานยนต์ (Height of the CG from the ground)
l_b	คือความยาวตัวถังรถ
l_w	คือหน้ากว้างยาง
$\dot{x}$	คือความเร็วในแนวแกน x (Longitudinal component of vehicle velocity)
$\dot{y}$	คือความเร็วในแนวแกน y (Lateral component of vehicle velocity)
A	คือระยะจากจุดศูนย์ถ่วงถึงล้อหน้า (Vehicle center of gravity location from front tire)
B	คือระยะจากจุดศูนย์ถ่วงถึงล้อหลัง (Vehicle center of gravity location from rear tire)
C_{α_f}	คือ Front tire cornering stiffness
$C_{\alpha r}$	คือ Rear tire cornering stiffness
H	เรียกว่า เฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian matrix)
F_{xf}	คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหน้าตามแนวแกน x
F_{xr}	คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหลังตามแนวแกน x
F_{yf}	คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหน้าตามแนวแกน y
F_{yr}	คือแรงกระทำทางตรง (Longitudinal component) ของล้อหลังตามแนวแกน y
F_{zf}	คือแรงกระทำตั้งฉากกับล้อหน้า (Normal load of front tire)
F_{zr}	คือแรงกระทำตั้งฉากกับล้อหลัง (Normal load of rear tire)
F_f	คือแรงขับเคลื่อนล้อหน้า (Tractive effort of the front tire)
F_r	คือแรงขับเคลื่อนที่ล้อหลัง (Tractive effort of the rear tire)
I_z	คือโมเมนต์ความเฉื่อยจากการส่าย (Yaw Moment of Inertia)
I_w	คือความเฉื่อยของล้อรอบแกนหมุน (Inertia of the wheel about the axle)
M	คือมวลของยานยนต์ (Mass)
R_a	คือแรงต้านจากอากาศ (Aerodynamic resistance)
R_{rf}	คือแรงต้านการเคลื่อนที่ของล้อหน้า (Resistance of the front tire)
R_{rr}	คือแรงต้านการเคลื่อนที่ของล้อหลัง (Resistance of the rear tire)
R_d	คือแรงต้านการลาก (Drawbar load)
R_g	คือแรงต้านทางชัน (Grade resistance)
R_w	คือรัศมีของล้อ (Wheel radius)

$\dot{X}$ คือองค์ประกอบความเร็วของยานยนต์ในแนวแกน X ของระบบแกนโลก

$\dot{Y}$ คือองค์ประกอบความเร็วของยานยนต์ในแนวแกน Y ของระบบแกนโลก

W คือน้ำหนักรวมของยานยนต์

$\vec{V}_{tf}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของยางหน้า

$\vec{V}$ คือเวกเตอร์ความเร็วของยานยนต์ที่จุด CG

θ คือมุมส่าย (Yaw angle) ของยานยนต์

$\dot{\theta}$ คืออัตราการส่าย (Yaw rate)

δ คือมุมเลี้ยว (Steering angle) ของล้อหน้า

ω_f คือความเร็วเชิงมุมของล้อหน้า (Angular velocity for front wheel)

ω_r คือความเร็วเชิงมุมของล้อหลัง (Angular velocity for rear wheel)

ψ คือมุมส่าย (Yaw angle) ของยานยนต์ในแนวแกน Z ของระบบแกนโลก

$\dot{\psi}$ คืออัตราการส่าย (Yaw rate) รอบแกน Z ของระบบแกนโลก

$\dot{\theta}\hat{k}$ คือความเร็วเชิงมุมของการส่ายของรถ (Yaw angular velocity)

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

μ_f คือค่าสัมประสิทธิ์ความฝืดของถนน (Friction coefficient) ของล้อหน้า

μ_r คือค่าสัมประสิทธิ์ความฝืดของถนน (Friction coefficient) ของล้อหลัง

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายยศศักดิ์ สายสนิท
วันเดือนปีเกิด	1 พฤษภาคม 2515
สถานที่เกิด	เชียงใหม่
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	40/131 หมู่บ้านนันทญา ต.คลองเจ็ด อ.คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12120
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2530	มัธยมศึกษาตอนต้น สันป่ายางวิทยาคม จ.เชียงใหม่
พ.ศ. 2533	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.ช่างยนต์) วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่
พ.ศ. 2535	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.ช่างยนต์) สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคพายัพ จ.เชียงใหม่
พ.ศ. 2537	อุดมศึกษา วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. เครื่องกล) สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
พ.ศ. 2547	บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ