

การศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ปริญญานิพนธ์
ของ
ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2548
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

บทคัดย่อ
ของ
ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2548

ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์. (2548). การศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินซ์นิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :
รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธัญญฤติ, ผู้ช่วยศาสตราจารย์วีรวัฒน์ งามสันติกุล.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ (1) สร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (2) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
ที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น (3) ศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547
โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ซึ่งได้มาจาก
การสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม จากประชากรทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน

ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เมื่อสิ้นสุดการสอนให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงและแบบวัด
เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยพบว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิต
การแปลงได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

A STUDY OF CONGRUENCE BY USING TRANSFORMATION GEOMETRY FOR
MATHAYOMSUKSA II STUDENTS

AN ABSTRACT
BY
TEERASAK CHALADGARN

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
May 2005

Teerasak Chaladgarn. (2005). *A Study of Congruence by Using Transformation Geometry for Mathayomsuksa II Students*. Master Thesis, M.Ed.(Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committees : Assoc. Prof. Yongyouth Tanugrit, Assist. Prof. Raweewan Ngamsuntikul.

The purposes of this study were 1) to construct the lesson on congruence by using transformation geometry for mathayomsuksa II students 2) to study the students' achievement on congruence by using transformation geometry 3) to study the students' attitude toward mathematics after learning through the congruence by using transformation geometry.

The study was conducted during the second semester of the 2004 academic year at Khonsawan School in Chaiyaphum province. The experimental group with 40 students was using cluster sampling approach. The researcher taught the experimental group with lesson on congruence by using transformation geometry. At the end of the experiment they were given an achievement test on congruence by using transformation geometry and questionnaire on attitude toward mathematics.

An analysis of the data, with at .01 level of significance, revealed that more than 50% of the subjects performed better than 50% of the total score. This shows that the mathayomsuksa II students are able to learn the concept of congruence by using transformation geometry created by the researcher

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ของ
นายธีรศักดิ์ จลดาการณ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญศิริ จีระเดชากุล)
วันที่ พฤษภาคม พ.ศ. 2548

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธัญญฤดี)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์รวีวรรณ งามสันติกุล)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องมาจากได้รับความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ฐนุกฤติ ประธานคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์รวิวรรณ งามสันติกุล กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์ดูแลและให้คำแนะนำปรึกษา รวมถึงให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ และ อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ ให้คำแนะนำและตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและกรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดในสิ่งที่ เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการและรองผู้อำนวยการ คณะครูโรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ โดยเฉพาะอย่างยิ่งอาจารย์เยาวภา สมนาม ที่ให้ความอนุเคราะห์คำแนะนำและความสะดวกต่าง ๆ ในการดำเนินการเก็บข้อมูลการวิจัยครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี และขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนคอนสวรรค์ที่ให้ความร่วมมือในการวิจัยด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดาและบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ทำให้กำลังใจ และกำลังทรัพย์สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบคุณ พี่ เพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโทสาขาวิชาคณิตศาสตร์ รุ่นปี 2545 ทุกคน ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา โดยเฉพาะอย่างยิ่ง คุณพรพิศ ศรีชาคำ และ คุณอาคเนย์ ฉัตรบรรยงค์ ที่ให้ความช่วยเหลือแนะนำผู้วิจัยตลอดเวลาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา ครู อาจารย์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

ธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ภูมิหลัง.....	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
	ความสำคัญของการวิจัย.....	4
	ขอบเขตของการวิจัย.....	4
	ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	4
	กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	4
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	ตัวแปรที่ศึกษา.....	
5	นิยามศัพท์เฉพาะ.....	
5	สมมติฐานของการวิจัย.....	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
	หลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา	7
	หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทย	8
	หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521	
	(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)	9
	หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544	15
	ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต	18
	ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต	18
	ระดับชั้นของแวนฮีลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต	21
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	22
	งานวิจัยภายในประเทศ	22
	งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต	22
	งานวิจัยเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลง	24
	งานวิจัยต่างประเทศ	25

3	วิธีดำเนินการวิจัย.....	27
	การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง.....	27
สารบัญ (ต่อ)		
บทที่		หน้า
3(ต่อ)	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	27
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	28
	การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	33
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	35
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	
36		
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	37
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	37
5	สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	43
	ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	43
	สมมติฐานของการวิจัย.....	43
	วิธีดำเนินการวิจัย.....	43
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	44
	สรุปผลการวิจัย.....	44
	อภิปรายผล.....	45
	ข้อเสนอแนะ.....	48
	บรรณานุกรม.....	49
	ภาคผนวก.....	55
	ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล.....	56
	ภาคผนวก ข ตัวอย่างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิต	
	การแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	64
	ภาคผนวก ค แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ	
	โดยใช้เรขาคณิตการแปลง	174

ภาคผนวก ง คู่มือครูและแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง	189
ภาคผนวก จ แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์	213
ภาคผนวก ฉ รายนามผู้เชี่ยวชาญ	217

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	219

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบอัตนัยเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง	34
2 คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	38
2 คำร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	38
4 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง	39
5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและการประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง.....	40
6 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)	57
7 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบอัตนัย)	58
8 แสดงค่าความยากง่าย (p) , ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	59
9 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงและค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์	60
10 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง	61
11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง.....	63

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ปัจจุบันสังคมมีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว ซึ่งเป็นผลมาจากความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการทางด้านต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความเจริญก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งในการพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจำเป็นต้องพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ก่อน เพราะความรู้ทางคณิตศาสตร์จะเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็น และเป็นเครื่องมือที่มนุษย์นำไปใช้ในการพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้เจริญก้าวหน้าต่อไป (ปานทอง กุลนาถศิริ. 2543 : 15) นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม (กรมวิชาการ. 2545 : 1-2) จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าว จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องให้ความสำคัญต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพสังคมในปัจจุบัน

สำหรับหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทยที่ใช้อยู่ในปัจจุบันเป็นหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้เริ่มใช้ในการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานในโรงเรียนทั่วประเทศในปีการศึกษา 2546 ในหลักสูตรได้กำหนดสาระการเรียนรู้ที่เป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (กรมวิชาการ. 2545 : 6) โดยเรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของรูป ได้แก่ ขนาด รูปร่าง และตำแหน่งในปริภูมิ (สิริวรรณ ตั้งจิตพัฒนกุล. 2542 : 62) เป็นที่ทราบกันดีว่าความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีส่วนเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์เราอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในชีวิตจริงเพื่อทำความเข้าใจหรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เรขาคณิตช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ ได้แก่ การคิด การให้เหตุผล การคิดสร้างสรรค์ การแก้ปัญหา และทักษะเชิงมิติสัมพันธ์หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial sense) ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความรู้แขนงอื่น ๆ อีกด้วย (สสวท. 2544 : 2) ความรู้ที่ได้จากการศึกษาวิชาเรขาคณิตถือเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่จะนำไปช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ อีกทั้งพัฒนาผู้เรียนให้เป็นคนมีเหตุผล ทำงานเป็นขั้นตอนอย่างมีระบบ และช่วยพัฒนาความสามารถในด้านการค้นพบ นอกจากนี้โจทย์ปัญหาทางเรขาคณิตบางรูปแบบยังท้าทายให้อยากคิด เป็นการฝึกฝนให้ใช้สติปัญญาในการคิดแก้ไขปัญหาต่าง ๆ (โกมล ไพศาล. 2540 : 2) ซึ่งสอดคล้องกับ พิชากร แปลงประสพโชค (2540 : 38) ที่กล่าวว่า “เรขาคณิตนอกจากเป็นวิชาที่ฝึกทักษะในด้านมิติสัมพันธ์แล้วยังฝึกในด้านการให้เหตุผลแบบต่าง ๆ ตลอดจนสามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน และเป็นพื้นฐานของหลายสาขาวิชาตลอดจนเป็นพื้นฐานที่จะเข้าใจ

คณิตศาสตร์อื่น ๆ” จากความสำคัญดังกล่าวเรขาคณิตจึงเป็นพื้นฐานหนึ่งที่สำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในทุกระดับหลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ว่าในยุคใดสมัยใดจะมีการพัฒนาปรับปรุงอย่างไรเรขาคณิตจะต้องเป็นสาขาหนึ่งที่จัดบรรจุลงในหลักสูตร (ปานทอง กุลนาถศิริ. 2541 : 65)

จากงานวิจัยของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้ทำการสำรวจเกี่ยวกับการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั่วประเทศ ในปีการศึกษา 2523 พบว่าเนื้อหาที่เป็นปัญหาสำหรับครูมากเป็นอันดับ 2 คือ การพิสูจน์ในเรขาคณิต (สสวท. 2527 : 16) ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ จุไร ทวีรัตน์ (2528 : 71) ได้ทำการสำรวจเนื้อหาคณิตศาสตร์ ค 203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 เขตการศึกษา 12 พบว่า การให้เหตุผลต่าง ๆ ในการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมีแนวโน้มเป็นปัญหามากขึ้น และผลการวิจัยของ อภิญา คุณเลิศดี (2534 : 85) พบว่าเนื้อหาที่เป็นปัญหาสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตการศึกษา 9 เป็นอันดับ 1 คือ การพิสูจน์เรขาคณิตสำหรับในประเทศไทย ตั้งแต่เริ่มจัดการศึกษาเป็นต้นมา นักเรียนระดับมัธยมศึกษาทุกคนต้องเรียนวิชาเรขาคณิตตามแบบของยุคลิดเป็นวิชาบังคับเหมือนกันทั้งประเทศและเป็นเรขาคณิตชนิดเดียวเท่านั้นที่นักเรียนระดับนี้ได้เรียนรู้ คนไทยโดยทั่วไปจึงเข้าใจว่ามีเรขาคณิตตามแบบของยุคลิดแบบเดียวเท่านั้น (เสริมศักดิ์ วิชาลาภรณ์. 2514 : 1) ซึ่งหากพิจารณาแล้วเรขาคณิตมีอยู่หลายสาขา สาขาหนึ่งที่ถือว่ามีประโยชน์อย่างยิ่ง ได้แก่ เรขาคณิตการแปลง (Transformation Geometry) หรือเรขาคณิตการเคลื่อนที่ (Motion Geometry) เพราะเรขาคณิตการแปลงมีส่วนเกี่ยวข้องกับการดำเนินชีวิตสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ เช่น งานศิลปะ ในด้านการออกแบบลวดลาย สถาปัตยกรรม ปฎิมากรรม การเรียนเรขาคณิตการแปลงถือเป็นการเรียนสิ่งที่สัมพันธ์กับชีวิต ดังจะเห็นได้จากการสมมาตรที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ การถ่ายภาพ การขยายภาพ เป็นต้น ในการศึกษาเรขาคณิตการแปลงจะทำให้ผู้เรียนมีความสามารถด้านการมองในเชิงมิติทางเรขาคณิต ซึ่งเป็นเรื่องที่มีความสำคัญเทียบเท่ากับความสามารถด้านการพิสูจน์เชิงนิรนัย และนอกจากนี้ยังเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความเปลี่ยนแปลงของโลก (วิทยา รุ่งอดุลพิศาล. 2517 : 8-9 ; Geddes & Fortunato. 1993 : 213) ซึ่งสอดคล้องกับ โอ ดาฟเฟอร์และคลีเมนส์ ที่กล่าวว่า “เรขาคณิตการแปลงมีส่วนเกี่ยวข้องกับการดำเนินชีวิตของคนเราอยู่ตลอดเวลา อาจกล่าวได้ว่าเราอาศัยอยู่ในโลกที่มีการเคลื่อนที่หลากหลายรูปแบบ การรับรู้เกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่ของเราจึงควรได้รับการปรับปรุงและขยายวงให้กว้างขวางเพิ่มขึ้นอยู่เสมอ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการอธิบายและการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ คณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่หรือเรขาคณิตการแปลงจึงเป็นหัวข้อที่เหมาะสมในการศึกษาสำหรับนักเรียนทุกระดับชั้น (O' Daffer & Clemens. 1992 : 196) โดยในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดเรขาคณิตการแปลงเป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระการเรียนรู้เรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) (กรมวิชาการ. 2545 : 114) โดยได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลงไว้ว่าผู้เรียนควรมีความสามารถเข้าใจเกี่ยวกับการแปลง (Transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้

(กรมวิชาการ. 2545 : 17) โดยในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) สาระที่ 3 นั้น ได้กล่าวถึงเฉพาะการแปลงทางเรขาคณิตที่ขนาดยังคงเหมือนเดิมหรือการแปลงเฉพาะตำแหน่ง ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน ซึ่งการแปลงทั้ง 3 ประเภทนี้เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีสมบัติสมมิติ (Isometry) ครบถ้วน กล่าวคือ สมบัติสมมิติเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่ภาพ (image) และบุพภาพ (pre-image) เท่ากันทุกประการ (สุวัฒนา เอี่ยมอพรพรรณ. 2546 : 16-17)

ในปี ค.ศ. 1908 นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ คลายน์ (Klein) ได้ค้นพบจุดอ่อนและข้อบกพร่องในเรขาคณิตตามแบบของยุคลิดหลายประการ (วิทยา รุ่งอดุลพิศาล. 2517 : 2 อ้างอิงจาก Eves and Newsom. 1964 : 37) หนึ่งในนั้นคือการพิสูจน์เกี่ยวกับสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการด้วยวิธีการยกยู่ซ้อนกัน (Principle of Superposition) นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังเห็นว่าวิธีการเช่นนั้นไม่รัดกุมพอ เพราะสามารถหาเหตุผลมาแย้งได้ เช่น วูล์ฟ (Wolfe) ให้เหตุผลไว้ว่าถ้าถือว่าจุดเป็นตำแหน่งก็จะเคลื่อนที่ไม่ได้ แต่ถ้าถือว่าจุดเป็นสิ่งที่เคลื่อนที่ได้แล้วมิติ (Dimension) ของสิ่งที่เคลื่อนที่ได้ก็จะต้องเปลี่ยนแปลงไปตามหลักของวิชาฟิสิกส์แผนใหม่ และ มิลลิงตัน (Millington) กล่าวว่า เรขาคณิตแบบยุคลิดมีอิสระในเรื่องการเปลี่ยนรูปมาก แต่ขณะเดียวกันก็ขาดคุณสมบัติคงค่า (Invariant Property) ที่จะเน้นให้ทราบว่ารูปที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นยังมีขนาดและรูปร่างคงเดิม (วิทยา รุ่งอดุลพิศาล. 2517 : 3) ซึ่งสอดคล้องกับที่ สมัย เหล่าวานิชย์ (2519 : 23) กล่าวไว้ว่า การยกยู่ซ้อนกัน ซึ่งถือว่าเป็นเรื่องสำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ยุคลิดได้ใช้วิธีพิสูจน์โดยยกสามเหลี่ยมรูปหนึ่งทับสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ซึ่งทางด้านฟิสิกส์ถือว่า เมื่อสสารเคลื่อนที่ไปในอากาศสสารนั้นจะเปลี่ยน รูปร่าง ดังนั้นการพิสูจน์โดยการยกยู่ทับจึงอาจจะทำให้เกิดข้อขัดแย้งขึ้นได้ และจากการศึกษางานวิจัยของ ยูซิสกิน (Usiskin. 1970 : 688-A) ที่ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์และทัศนคติในการเรียนวิชาเรขาคณิตของยุคลิดด้วยวิธีการแปลงของนักเรียนเกรด 10 พบว่า ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตของยุคลิดสามารถพัฒนาโดยใช้วิธีการแปลงได้ โดยเนื้อหาหนึ่งในบทเรียนที่ได้สร้างขึ้นก็คือ การพิสูจน์เรื่องการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมด้วยวิธีการแปลง ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ วิลลิฟอร์ด (Williford. 1971 : 6462-A) ที่ได้ทดลองสอนวิชาเรขาคณิตการแปลง เรื่องการเคลื่อนที่ของแผนภาพสามมิติและการเท่ากันทุกประการกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2-3 ผลการทดลองพบว่า นักเรียนสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงตามเนื้อหาที่นำไปทดลองสอนได้ รวมทั้งผลการวิจัยของ

อลสัน (Olson. 1970 : 5944-A) ที่ได้ทดลองสอนวิชาเรขาคณิตเรื่องแผนภาพในระนาบโดยใช้วิธีการแปลงแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยได้สรุปผลว่านักเรียนสามารถเข้าใจเนื้อหาวิชาเรขาคณิตตามแบบเรียนที่สร้างขึ้น ซึ่งเนื้อหาหนึ่งในแบบเรียนก็คือ การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และ โซลไฮม์ (Solheim. 1971 : 3165-A) ได้เปรียบเทียบการสอนวิชาเรขาคณิตระหว่างการใช้วิธีสอนแบบเดิมกับการใช้วิธีการแปลง ปรากฏว่านักเรียนที่ได้รับการสอน

ด้วยวิธีการแปลงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตไม่แตกต่างจากนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธี

แบบเดิม แต่ทัศนคติของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีการแปลงเปลี่ยนไปจากเดิม กล่าวคือทัศนคติของนักเรียนกลุ่มนี้ต่อวิชาคณิตศาสตร์ทั่วไปเปลี่ยนไปในทางบวก

จากผลการวิจัยข้างต้นหากสามารถนำเนื้อหาในเรื่องเรขาคณิตการแปลงมาเชื่อมโยงเข้ากับความเท่ากันทุกประการได้ก็จะเป็นอีกแนวทางหนึ่งในการศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการซึ่งต่างไปจากวิธีการที่ศึกษาอยู่เดิม ทั้งยังเป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาทางคณิตศาสตร์สองเนื้อหาเข้าด้วยกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากรเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. ได้แนวทางในการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โดยการสุ่มตัวอย่าง

แบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน จากประชากรจำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน ซึ่งทางโรงเรียนจัดนักเรียนแต่ละห้องเรียนแบบความสามารถของนักเรียน คือ มีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับสูง ระดับปานกลาง และระดับต่ำ อยู่ในห้องเรียน เดียวกัน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โดยใช้เวลาในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนปกติ จำนวน 20 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง แบ่งเป็นเวลาที่ใช้ในการเรียนการสอน 18 คาบ และเวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง 2 คาบ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ทบทวนเรขาคณิตการแปลง
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต
 - 2.1 บทนิยามความเท่ากันทุกประการ
 - 2.2 ความเท่ากันทุกประการของรูปสองรูป
 - 2.3 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง
 - 2.4 ความเท่ากันทุกประการของมุม
3. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)
 - 3.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)
 - 3.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)
4. การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผล

และแก้ปัญหา

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **เรขาคณิตการแปลง** หมายถึง การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตที่ลักษณะและขนาดของรูปยังคงเดิม ซึ่งเป็นผลจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน หรือการหมุน โดยไม่กล่าวถึงสมการหรือสูตรที่แสดงความสัมพันธ์ในการแปลง

2. **บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง** หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งใน บทเรียนเน้นการใช้เรขาคณิตการแปลง ประกอบด้วย การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน มาใช้ในการให้เหตุผลและการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการ

3. **แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน** หมายถึง แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อวัดผลการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนด จำนวน 25 ข้อ ประกอบด้วย แบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

4. **ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน** หมายถึง ความสามารถในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งวัดจากคะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

5. **เกณฑ์** หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์

6. **เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์** หมายถึง ความรู้สึก ความคิดเห็น ทำความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งในทางบวกและทางลบ หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. หลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา
2. หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทย
 - 2.1 หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)
 - 2.2 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544
3. ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต
 - 3.1 ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต
 - 3.2 ระดับขั้นของแวนฮิลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 4.1 งานวิจัยภายในประเทศ
 - 4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

1. หลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา หรือ NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) ได้จัดทำเอกสารเพื่อเป็นการกำหนดทิศทางการจัดการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับเกรด K-12 ให้ได้มาตรฐานเดียวกันทั่วประเทศ โดยได้จัดทำเอกสารดังต่อไปนี้ คือ ในปี ค.ศ. 1989 ได้จัดทำมาตรฐาน หลักสูตรและการวัดผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ที่ชื่อว่า The Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics การจัดทำมาตรฐานนี้เพื่อเป็นการประกันคุณภาพของการศึกษา ตลอดจนกำหนดเป้าหมายในการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และเพื่อเป็นการส่งเสริมโอกาสในการศึกษา อีกสองปีต่อมาคือในปี ค.ศ. 1991 ได้จัดทำมาตรฐานการสอนที่ชื่อว่า The Professional Standards for Teaching Mathematics และต่อมาในปี ค.ศ. 1995 ได้จัดทำมาตรฐานการประเมินผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ที่ชื่อว่า The Assessment Standards for School Mathematics ซึ่งได้มีการใช้เอกสารมาตรฐานหลักสูตรและการวัดผลของ NCTM เป็นแนวทางในการจัดการศึกษาเรื่อยมา

เนื่องจากตลอดเวลา 10 ปีที่ผ่านมาคือตั้งแต่ ค.ศ. 1991 ถึง ค.ศ. 1999 โลกได้มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว ดังนั้นในปี ค.ศ. 1999 NCTM จึงได้มีการพิจารณาทบทวนการจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ว่าควรจะมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงไปเช่นไร เพื่อให้สอดคล้องและเหมาะสมกับสถานการณ์ในปัจจุบันและได้จัดทำเอกสารที่ชื่อว่า หลักการและมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Principles and Standards for School Mathematics) ซึ่งได้มีการนำมาใช้ในปี ค.ศ. 2000

เอกสารหลักการและมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน กล่าวถึง หลักการและมาตรฐานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหลักการ 6 หลักการ และมาตรฐาน 10 มาตรฐาน ประกอบด้วยมาตรฐานที่เกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ 5 มาตรฐาน และมาตรฐานที่เกี่ยวกับ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ 5 มาตรฐานมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ (The National Council of Teachers of Mathematics. 2000 : 11)

หลักการ (Principles) มีทั้งหมด 6 หลักการ ได้แก่

1. การเสมอภาค (The Equity)
2. หลักสูตร (The Curriculum)
3. การสอน (The Teaching)
4. การเรียนรู้ของนักเรียน (The Learning)
5. การประเมินผล (The Assessment)
6. เทคโนโลยี (The Technology)

มาตรฐานเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) มี 5 มาตรฐาน
ได้แก่

1. จำนวนและการดำเนินการ (Number and Operation)
2. พีชคณิต (Algebra)
3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)

มาตรฐานกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards)
มี 5 มาตรฐาน ได้แก่

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
2. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
3. การเชื่อมโยง (Connections)
4. การสื่อสาร (Communications)
5. การแสดง/การนำเสนอ (Representations)

2. หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทย

นับตั้งแต่กระทรวงศึกษาธิการประกาศใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 เป็นต้นมา หน่วยงานต่าง ๆ ที่รับผิดชอบโดยตรง และมีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดการศึกษาในระดับนี้ ได้ติดตามและประเมินผลการใช้หลักสูตรเป็นระยะอย่างต่อเนื่องและได้นำข้อมูลต่าง ๆ มาปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตรในรายละเอียดตลอดมา จนมาถึงหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) กรมวิชาการได้จัดพิมพ์แจกโรงเรียนมัธยมศึกษาในโครงการ

โรงเรียนร่วมพัฒนาการใช้หลักสูตรซึ่งเริ่มใช้หลักสูตรนี้ในปีการศึกษา 2533 ต่อมาได้ปรับปรุงแก้ไขในรายละเอียดอีกครั้งหนึ่ง แล้วจึงจัดพิมพ์ฉบับสมบูรณ์ขึ้นเพื่อแจกโรงเรียนมัธยมศึกษาทั่วประเทศซึ่งเริ่มใช้หลักสูตรนี้ในปี พ.ศ. 2534 เป็นต้นมา จนกระทั่งปัจจุบันได้เปลี่ยนมาใช้หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ตามพระราชบัญญัติการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2542 ที่ได้ประกาศใช้ เมื่อวันที่ 14 สิงหาคม พ.ศ. 2542 โดยในหลักสูตรทั้งสองฉบับประกอบด้วยเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) ดังนี้

2.1 หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) มีเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 ค 011 และ ค 021 ซึ่ง สมพล เล็กสกุล และชวลีพร สุภธีระ (2538 : 2-16) ได้สรุปเนื้อหาเรขาคณิตในส่วนที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ที่นักเรียนควรมีความรู้ความเข้าใจในแต่ละรายวิชาดังนี้

รายวิชา ค 101

เส้นตรงและมุม

1. ลักษณะ สมบัติและการใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม นอกจากนั้นยังใช้สัญลักษณ์แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงและขนาดของมุมได้ถูกต้อง
2. สมบัติของจุดและเส้นตรงบางประการ ได้แก่
 - 2.1 สามารถลากเส้นตรง หรือส่วนของเส้นตรงผ่านจุดสองจุดได้เพียงเส้นเดียว
 - 2.2 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะได้จุดตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น
3. การสร้าง (ใช้เพียงวงเวียนและสันตรง) โดยไม่ต้องเขียนคำอธิบายวิธีสร้าง แต่ต้องแสดงให้เห็นร่องรอยของการสร้าง ได้แก่
 - 3.1 สร้างส่วนของเส้นตรงและมุมให้มีขนาดเท่าที่กำหนดให้
 - 3.2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งครึ่งมุม
 - 3.3 การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งมุมออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งมุม
 - 3.4 สร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา และ 60 องศา
 - 3.5 สร้างมุมขนาดต่าง ๆ โดยอาศัยการสร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ 60 องศา
 - 3.6 สร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้
 - 3.7 สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น
 - 3.8 สร้างรูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยมบางรูปให้มีความยาวของด้านหรือขนาดของมุมตามที่กำหนดให้

รายวิชา ค 031

เป็นการสร้างเพิ่มเติมจากในรายวิชา ค 101 โดยมีการให้นักเรียนเขียนวิธีสร้างพอสังเขป หรืออย่างละเอียดด้วย ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มเติมมีดังนี้

การสร้าง

1. การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการสร้างมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน
2. สร้างมุมขนาดต่าง ๆ ที่ยากขึ้น เช่น สร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 82.5 องศา โดยใช้ความสัมพันธ์ $82.5 = \frac{(120 + 45)}{2}$ รวมทั้งสามารถหาขนาดของมุมบางมุมที่สร้างไว้แล้วโดยใช้การวัดด้วย
3. การสร้างรูปสามเหลี่ยมบางรูปที่กำหนดให้มีขนาดของมุมที่สร้างยากขึ้น
4. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสี่เหลี่ยมอื่น ๆ ในกลุ่มเดียวกัน เช่น รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้
 - 4.1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ โดยอาศัยสมบัติ “ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นและทำให้ขนาดของมุมแย้งเท่ากันแล้วเส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน”
 - 4.2 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยการสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่
 - 4.3 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่และให้ด้านคู่นี้ยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 203

1. บทนิยามของการเท่ากันทุกประการ คือ รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี
2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน (สรุป : ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงนั้นยาวเท่ากัน)
3. มุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และมุมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน (สรุป : มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน)
4. มุมตรงข้ามที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกันย่อมมีขนาดเท่ากัน
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ
6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อมีความสัมพันธ์แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

6.1 มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้นเท่ากัน (ด.ม.ด.)

6.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันนั้นยาวเท่ากัน (ม.ด.ม.)

6.3 มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ (ด.ด.ด.)

7. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.1 มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

8.2 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

8.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

9. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

รายวิชา ค 204

เส้นขนาน

1. บทนิยามของเส้นขนาน คือ เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

2. สมบัติของเส้นขนาน

2.1 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

2.2 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

2.3 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา หรือสองมุมฉาก

4. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว มุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย

5. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 360 องศา หรือสี่มุมฉาก

6. ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป ขนาดของมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

7. สมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด. คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดมีขนาดของมุมที่เท่ากันสองคู่และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพิ่มเติมอีกคือ “ถ้าลากเส้นตรงจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐานจะแบ่งครึ่งฐาน”

ความคล้าย

1. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน”

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันคือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

รายวิชา ค 011

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

1. ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังที่เคยเรียนมา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองแล้ว ยังมีอีกแบบหนึ่งที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ของพื้นที่ คือ “ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก”

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และบทกลับของทฤษฎีบทของพีทาโกรัส : ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a , b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว c หน่วยเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

วงกลม

1. ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ได้แก่ จุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลาง ส่วนโค้ง (ใหญ่หรือน้อย) ของวงกลม

2. สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

2.1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก

2.2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

2.3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

2.4 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งทีรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

2.5 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งมีขนาดเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.6 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

2.7 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.8 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมสองวงที่เท่ากัน คอร์ดที่เท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือส่วนโค้งน้อยเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่เท่ากับส่วนโค้งใหญ่

2.9 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมสองวงที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดส่วนโค้งออกยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน

2.10 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

2.11 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

2.12 จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย

2.13 เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

3. รู้จักวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป โดยอาศัยวงกลมและความรู้เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งสามารถหาขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งเท่ากับ $\frac{180(n-2)}{n}$ องศา

รายวิชา ค 021

เน้นการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาทั้งหมดในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ปีที่สอง และ ค 011 มีดังนี้

1. บทนิยาม : การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

2. สังพจน์ : เคลื่อนที่รูปเรขาคณิตได้

3. บทนิยาม : รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

4. สังพจน์ : เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกันก็ต่อเมื่อผลบวกของขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็น 180 องศา

5. ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต

5.1 สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

5.2 ในบรรดาส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงนั้น จะมีส่วนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นเส้นตั้งฉากและเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

5.3 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปเท่ากันทุกประการ (จ.ด.ด.) คือ “ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ”

5.4 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.1 ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

5.4.2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.3 มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมมีขนาดเท่ากัน

5.4.4 ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.5 สมบัติบางประการที่สรุปได้จากแบบฝึกหัด

5.5.1 รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5.5.2 เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน

5.5.3 ส่วนของเส้นตรงที่ปิดกันหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากันจะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย

5.5.4 ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

5.5.5 เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และขนานกับอีกด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จะตัดกับด้านที่สามที่จุดกึ่งกลางของด้านที่สามนั้น

5.5.6 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

5.5.7 ถ้าต่อด้านด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

5.6 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับวงกลม

5.6.1 เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

5.6.2 คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดเส้นนั้นยาวเท่ากัน

6. การพิสูจน์เกี่ยวกับรูปที่สร้างขึ้นโดยใช้วงเวียนและสันตรง

6.1 การพิสูจน์เกี่ยวกับรูปที่สร้างในตัวอย่าง

6.1.1 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง

6.1.2 การสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ซึ่งปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 และ ค 011 มีเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ คือ เส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส และวงกลม ส่วนรายวิชา ค 021 นั้น เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้สมบัติทางเรขาคณิตที่นักเรียนจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาแล้ว โดยเนื้อหาในส่วนนี้จะเน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่งจากข้างต้นจะเห็นได้ว่า หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ยังไม่มีการบรรจุเนื้อหาสาระเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลงเข้าไปในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

2.2 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ. 2545 : 98-117) ได้กำหนดกรอบสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) ไว้ดังนี้

มาตรฐานการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3)

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

1. อธิบายลักษณะและสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้

2. สร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยไม่เน้นการพิสูจน์ได้

3. วิเคราะห์ลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพสองมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

1. เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้

2. เข้าใจเกี่ยวกับการแปลง (transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน (translation) การสะท้อน (reflection) และการหมุน (rotation) และนำไปใช้ได้

3. บอกภาพที่เกิดขึ้นจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนรูปต้นแบบ และสามารถอธิบายวิธีการที่จะได้ภาพที่ปรากฏเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและภาพนั้นให้

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) เรขาคณิต
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

สาระการเรียนรู้

1. พื้นฐานทางเรขาคณิต

1) การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้วงเวียนและสันตรง

- การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่

กำหนดให้

- การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

- การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

- การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

- การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

- การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

2) การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยใช้การสร้างพื้นฐาน

3) การสำรวจสมบัติทางเรขาคณิต

2. ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

1) ภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติที่เกิดจากการคลี่รูปเรขาคณิตสามมิติ

2) ภาพสองมิติที่ได้จากการมองทางด้านหน้า (front view) ด้านข้าง (side view) หรือด้านบน (top view) ของรูปเรขาคณิตสามมิติ

3) การวาดหรือประดิษฐ์รูปเรขาคณิตที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สาระการเรียนรู้

1. การแปลงทางเรขาคณิต

1) การเลื่อนขนาน

2) การสะท้อน

3) การหมุน

2. ความเท่ากันทุกประการ

1) ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

2) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

3) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

4) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

5) ใช้สมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในการให้เหตุผลและ

แก้ปัญหาได้

3. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1) ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2) บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

3) การแก้ปัญหหรือสถานการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ

4. เส้นขนาน

1) สมบัติของเส้นขนาน

2) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

3) การให้เหตุผลและแก้ปัญหโดยใช้สมบัติของเส้นขนานและความเท่ากัน

ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สาระการเรียนรู้

1. ความคล้าย

1) รูปที่คล้ายกัน

2) รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

3) สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

4) การนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหได้

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) เรขาคณิต

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

สาระการเรียนรู้

1. การสร้าง

1) การสร้างมุมขนาดต่าง ๆ

2) การสร้างรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2. การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

สาระการเรียนรู้

1. การประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต

1) การสร้างสรรค์งานศิลปะโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต

2) การออกแบบโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สาระการเรียนรู้

1. การให้เหตุผล

1) สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

2) การให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต

จากการศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ข้างต้นเห็นได้ว่าทั้งใน
ส่วนของมาตรฐานการเรียนรู้และกรอบสาระการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-3) มี

เนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลงเพิ่มเติมเข้ามาทั้งในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม ดังนั้นเพื่อเป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตและความเท่ากันทุกประการ ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

3. ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

3.1 ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต ครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่เลือกสรรวิธีการสอนและการจัดลำดับชั้นการเสนอเนื้อหาสาระที่สอดคล้องกับระดับของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีความรู้ความเข้าใจเนื้อหาสาระเหล่านั้น ได้อย่างถูกต้องและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาเรขาคณิต ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ครูต้องมีความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ซึ่งมีหลายท่านได้กล่าวถึงความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิตไว้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 75-77) ได้กล่าวถึง วิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยแยกเป็น 3 ลักษณะคือ

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังนี้

- 1.1 ให้ผู้เรียนค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป
- 1.2 ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล
- 1.3 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
- 1.4 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียงเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด มีขั้นตอนดังนี้

- 2.1 ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผลหรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกแยะได้ จะต้องพยายามฝึกจนกว่าจะแยกได้
- 2.2 เขียนรูปประกอบ
- 2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์หรือใช้วิธีวิเคราะห์ ร่วมกับสังเคราะห์ ซึ่งต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง มีขั้นตอนดังนี้

- 3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วก็มาถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

มานะ เอกจริยวงศ์ (2537 : 1-5) ได้กล่าวถึง จุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียนว่าเรขาคณิตเป็นวิชาที่เรียนรู้โดยผ่านทาง การมองเห็น (Visual Subject) ดังนั้นการสอนเรขาคณิตควรมีจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้ตระหนักถึงคุณค่าของเรขาคณิตว่ามีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิตในโลกที่เป็นจริง
2. เพื่อท้าทายความคิด ปลูกฝังความสามารถเชิงปริภูมิ และพัฒนาแบบความคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Cast of Mind) ในส่วนที่เป็นแบบความคิดที่เกิดจากการใช้ภาพ และความสามารถในการคิดเชิงนามธรรม โดยอาศัยองค์ประกอบด้านภาษาเพื่อการใช้เหตุผล (Verbal-Logical)

3. เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ มองเห็นความหมายและความสำคัญของการพิสูจน์

4. เพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางเรขาคณิตกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ อันเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา

โกมล ไพศาล (2540 : 22) ได้เสนอแนะว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน
2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป
3. การจัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกต และการสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปมโนคติหรือแก้ปัญหาโจทย์

4. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม เช่น ใช้วิธีการถามตอบใช้อุปกรณ์การสอนสำเร็จรูปและการเขียนรูปในแต่ละขั้นตอนจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

วรรณวิภา สุทรเกียรติ (2542 : 27) กล่าวว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตต้องอาศัยบทบาทของครูในการกำหนดกิจกรรม การวางแผนขั้นตอนที่เหมาะสม รวมทั้งบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และให้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองเพื่อค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ซึ่งเป็นสิ่งที่ท้าทายความสามารถ ความอยากรู้อยากเห็นตามลักษณะของวัยของนักเรียน เพื่อให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น และยังส่งผลให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีจินตนาการพร้อมที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ

สมเดช บุญประจักษ์ (2544 : 2) กล่าวว่า เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิตสามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ ผู้เรียนจะต้องได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทาย ผู้เรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลองและสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพ สร้างภาพ และเปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ กัน

สินธุ (Sidhu. 1981 : 291) ได้แนะนำการสอนเรขาคณิตดังนี้คือ

1. งานที่ให้ผู้เรียนฝึกทำควรได้สัดส่วนและชัดเจน
2. ครูควรให้ผู้เรียนสังเกตสิ่งต่าง ๆ ด้วยตัวเอง โดยการทดลองวัดจริงหรือประสบการณ์

3. กระดานดำที่ใช้ควรได้สัดส่วน สะอาดและถูกต้องเพื่อหลีกเลี่ยงความสงสัยและความเข้าใจผิดของผู้เรียน ขณะเดียวกันครูควรใช้ภาษาที่ถูกต้องชัดเจน และใช้ชอล์กสีเพื่อเน้นรายละเอียดที่สำคัญ

4. การให้แบบฝึกหัดผู้เรียน ไม่ควรทิ้งค้างไว้เพื่อให้ทำตอนท้ายของภาคเรียน แต่ควรจะให้ทำพร้อมกับทฤษฎีบทนั้น

5. ควรฝึกผู้เรียนให้เขียนรูปจากทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดที่เห็นสมควรแล้วแต่กรณี ในเบื้องต้นการสร้างทั้งหมดควรใช้วงเวียนและไม้บรรทัด

6 ครูควรมีการทบทวน โดยการถามผู้เรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้เรียนผ่านมาแล้วเท่าที่สามารถกระทำได้

7. ศัพท์ทางเรขาคณิต ครูผู้สอนต้องนำมาใช้ให้ถูกต้อง

8. ครูผู้สอนควรสนับสนุนผู้เรียนให้แสดงเนื้อหาสาระ โดยการเขียนรูป การสร้างและถ้อยคำเท่าที่เป็นไปได้

9. ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปผลลัพธ์สุดท้ายด้วยตนเอง

ซิมมอนส์ (Simmons. 1992 : 41) ได้เสนอกิจกรรมซึ่งสามารถนำมาใช้ประโยชน์สำหรับการเริ่มต้นบทเรียน ดังนี้

1. การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

2. การเสนอเค้าโครงย่อประเด็นหลักของบทเรียน

3. ใช้การอุปมาอุปมัย เป็นการสร้างสถานการณ์ของหัวข้อเรื่องใหม่ให้สัมพันธ์กับประสบการณ์ของผู้เรียน ตลอดจนบางสิ่งที่คุ้นเคยกับผู้เรียน

4. การทบทวนสิ่งที่เกี่ยวข้องก่อนหน้า เช่น การทบทวนที่เกี่ยวกับความรู้โดยตรง ทักษะ หรือความเข้าใจ

จากการศึกษาเอกสารดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยพบว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป

3. จัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกตและสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปนิยามหรือแก้ปัญหาโจทย์

4. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม เช่น ใช้วิธีการถามตอบ ใช้อุปกรณ์การสอนสำเร็จรูป และการเขียนรูปในแต่ละขั้นตอน จนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

5. ควรให้ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ โดยให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทาย

3.2 ระดับขั้นของแวนฮีลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต (The Van Hiele Level of Geometric Thought)

เนื่องจากนักเรียนส่วนมากมีปัญหาไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยเฉพาะการพิสูจน์ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงมีครูและนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านได้พยายามศึกษาและค้นคว้า เพื่อแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต ในปี ค.ศ. 1954 สามี – ภรรยาชาวเนเธอร์แลนด์ เพียร์ แวน ฮีลี (Pierre Van Hiele) และ ไดนา แวน ฮีลี (Dina Van Hiele) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการรับรู้ทางเรขาคณิตเป็นผลให้ได้ แวนฮีลีโมเดล หรือเป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่า ระดับขั้นของ แวน ฮีลี เกี่ยวกับพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิต (The Van Hiele Levels of Geometric Thought) ซึ่งเป็นขั้นกระบวนการคิดในการเรียนเรขาคณิตโดยเริ่มจากง่ายไปหายากดังต่อไปนี้ (วรรณวิภา สุทธเกียรติ. 2542 : 21-22 อ้างอิงจาก Serra. 1989 : 4 ; Thomas. 1992 : 71-86 ; Clements & Battista. 1992 : 421-428 ; Burger & Culpepper. 1993 : 140-142)

ระดับ 0 : การสร้างภาพนามธรรม (Visualization)

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถเรียนรู้ศัพท์และจดจำ (Vocabulary and Recognizes) ได้จากรูปร่างที่มองเห็น แต่ไม่สามารถบอกลักษณะย่อยที่มีความสัมพันธ์ระหว่างภายในรูปและระหว่างรูปที่มองเห็นได้

ระดับ 1 : การวิเคราะห์ (Analysis)

เป็นขั้นที่นักเรียนรับรู้และสามารถวิเคราะห์ห้โนมติเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้นจากการสังเกต การวัด การสร้างรูปและแบบจำลอง แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงลักษณะของรูปหนึ่งกับอีกรูปหนึ่งได้

ระดับ 2 : การพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่มีแบบแผน (Informal Deduction)

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปต่าง ๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันได้ รวมทั้งบอกลักษณะที่แตกต่างกันได้ แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจบทบาทของสัจพจน์และการเชื่อมโยงของข้อความต่าง ๆ โดยใช้ตรรกศาสตร์

ระดับ 3 : การพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction)

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ค้นเคยกับการพิสูจน์โดยทราบว่าจะอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ รู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล รู้ว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นได้อย่างไร อาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้มากกว่าหนึ่งวิธี

ระดับ 4 : การ คิดขั้นละเอียด (Rigor)

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่าง ๆ เช่น การเปรียบเทียบ สัจพจน์ ทฤษฎีบท และเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด จัดทฤษฎีบทต่าง ๆ เข้าเป็นระบบระเบียบและสร้างทฤษฎีบท

ระดับขั้นพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลส์มีความสำคัญต่อการศึกษาและการนำไปใช้ในทางเรขาคณิตเพื่อยกระดับการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียน ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะใช้ระดับขั้นพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลส์เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยภายในประเทศ

งานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องเนื้อหาที่เป็นปัญหาในการเรียนการสอนเรขาคณิตและการพัฒนาบทเรียนเกี่ยวกับเรขาคณิต ดังนี้

จุไร ทวีรัตน์ (2528 : 74-77) ได้ศึกษาเนื้อหาเรขาคณิตศาสตร์ ค 203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตการศึกษา 12 ผลการศึกษาพบว่า การให้เหตุผลในการพิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมเป็นเนื้อหาที่เป็นปัญหาอยู่ในระดับกลางแต่มีแนวโน้มที่จะเป็นปัญหาในระดับค่อนข้างมาก

อภิญา คุณเลิศดี (2534 : 78-82) ได้ศึกษาปัญหาการสอนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตการศึกษา 9 ผลการศึกษาพบว่า ปัญหาการสอนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ด้านเนื้อหาที่นับว่าเป็นปัญหาสูงกว่าเนื้อหาอื่น ๆ ได้แก่ การพิสูจน์ในเรขาคณิต

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี (2535 : 40-42) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษาวิธีสอนการพิสูจน์และสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 321 จำนวน 100 คน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอน โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและ นักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

โกมล ไพศาล (2540 : 76-79) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิต สำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหรือผู้เตรียมตัวออกไปเป็นครูที่ยังขาดความรู้และมีประสบการณ์การสอนทางเรขาคณิตน้อย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 2 จำนวน 36 คน ผลการวิจัยพบว่าชุดการสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือ 75/75

วรรณวิภา สุทธเกียรติ (2542 : 81-85) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่าบทเรียนที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70

สุภาพร บุญหนัก (2544 : 71-73) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการเพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อพัฒนาชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการ ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนก่อนการทดลองและหลังการทดลองใช้ชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการเพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 148 คน ผลการวิจัยพบว่าชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากัน ทุกประการเพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 ทั้ง 7 ชุดการเรียนรู้ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหา เรื่องความเท่ากันทุกประการ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เชวงศักดิ์ ช้อนบุญ (2546 : 70-74) ได้ทำการวิจัยเรื่องบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรม คิด-จับคู่-เล่าสู่กันฟัง ผลการวิจัยพบว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรม คิด-จับคู่-เล่าสู่กันฟัง สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมของผู้เรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย โดยใช้กิจกรรม คิด-จับคู่-เล่าสู่กันฟัง สูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผู้เรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายหลังจากเรียนบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย โดยใช้กิจกรรม คิด-จับคู่-เล่าสู่กันฟัง ดีกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วลีพร เดชเดชา (2547 : 41-43) ได้ทำการวิจัยเรื่องการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อสร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตและศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนที่

ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต เรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยม มุมฉาก กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์โน้ตส์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต จำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โน้ตส์ทางเรขาคณิตทุกเนื้อหาวิชา ที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิตดังข้างต้นเห็นได้ว่าการให้เหตุผลในการพิสูจน์เรขาคณิตค่อนข้างเป็นปัญหาและได้มีความพยายามในการหาวิธีการที่จะสอนการพิสูจน์และพัฒนาบทเรียน ชุดการเรียนการสอนเรขาคณิตอย่างต่อเนื่องเพื่อที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถเกี่ยวกับการให้เหตุผลในการพิสูจน์เรขาคณิตของนักเรียน โดยเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการถือเป็นเนื้อหาหนึ่งที่ค่อนข้างเป็นปัญหา ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการ

งานวิจัยที่เกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลง

งานวิจัยที่เกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลง ที่ผู้วิจัยได้ศึกษาเป็นงานวิจัยที่มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลง โดยมีรายละเอียดดังนี้

โชคชัย ศักดิ์ศรี (2516 : 21) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษานักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายสามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงได้หรือไม่และศึกษาว่าชั้นใดเรียนได้ผลดีที่สุด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-7 เนื้อหาวิชาเรขาคณิตการแปลงประกอบด้วย ความหมายของการแปลง ชนิดของการแปลง 3 ชนิดได้แก่ การเลื่อน การสะท้อน การหมุน และชุดของแผนภาพบางชุดซึ่งถูกปิดโดยการแปลง ผลการศึกษาพบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ไม่สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงตามเนื้อหาที่สร้างขึ้นได้ ส่วนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สามารถเรียนเรขาคณิตการแปลงตามเนื้อหาที่สร้างขึ้นได้ และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสูงกว่านักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .05

วิทยา รุ่งอรุณพิศาล (2517 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงเบื้องต้นได้หรือไม่ และศึกษาว่าควรจะเริ่มสอนตั้งแต่ชั้นใด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 จำนวน 120 คน เนื้อหาวิชาเรขาคณิตการแปลงเบื้องต้นประกอบด้วย 5 หัวข้อ คือ ระบบแกนมุมฉาก การสะท้อน การเลื่อน การหมุน และการแปลงที่สัมพันธ์กับเรื่องอื่น ผลการศึกษาพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2-3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงเบื้องต้นได้ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีผลสัมฤทธิ์ในการ

เรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงเบื้องต้นสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงเบื้องต้นแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

สุกัญญา ยีกา (2545 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 จุดมุ่งหมายของการวิจัยเพื่อสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 70/70 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลงของนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดการสอนที่สร้างขึ้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 40 คน เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาที่อยู่ นอกเหนือจากหลักสูตรปกติ ได้แก่ ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตและคู่ขนาน การเลื่อน การหมุน การสะท้อน การแก้ปัญหาและบทประยุกต์ ผลการวิจัยพบว่าชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ และนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลงมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยต่างประเทศที่ผู้วิจัยได้ศึกษาเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิตโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ในระดับต่าง ๆ ดังนี้

ยูซิสกิน (Usiskin. 1970 : 688-A) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์และทัศนคติในการเรียนวิชาเรขาคณิตของยุคคิดด้วยวิธีการแปลงของนักเรียนชั้นปีที่ 10 โดยสร้างแบบเรียนขึ้นและนำบทเรียนไปทดลองสอนนักเรียนซึ่งเนื้อหาในบทเรียน ได้แก่

1. คุณสมบัติและกฎของการสะท้อน
2. นิยามของการเท่ากันทุกประการและการคล้ายกันในเชิงของการแปลง
3. หลักการพิสูจน์ด้วยวิธีการแปลง
4. การพิสูจน์เรื่องการเท่ากันทุกประการและการคล้ายกันของรูปสามเหลี่ยมด้วย

วิธีการแปลง

5. เมทริกซ์ของการแปลง

ภายหลังจากการทดลองสอนและทดสอบ ยูซิสกินได้สรุปผลว่า

1. การสอนวิชาเรขาคณิตของยุคคิดสามารถพัฒนาโดยใช้วิธีการแปลงได้
2. ครูผู้สอนวิชาเรขาคณิตอยู่แล้วสามารถใช้แบบเรียนที่สร้างขึ้นได้โดยไม่จำเป็นต้องผ่านการฝึกอบรมใด ๆ ทั้งสิ้น
3. นักเรียนสามารถนำวิธีการที่ได้จากการเรียนตามแบบเรียนนี้ไปช่วยแก้ปัญหาใน

วิชาคณิตศาสตร์ที่เรียนอยู่ในปัจจุบันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ออลสัน (Olson. 1970 : 5944-A) ได้ทดลองสอนเรขาคณิตระนาบโดยใช้การแปลงกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วย การตั้งฉาก การขนาน การเท่ากัน ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และการแปลงบางหัวข้อที่สามารถแสดงได้ในรูปโครงสร้างทางพีชคณิต ซึ่งปรับปรุงมาจากเนื้อหาในหนังสือ Plane Geometry and Its Groups ของ Guggenheimer วิธีการที่ใช้ประกอบการสอนมีดังนี้

1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดทุกครั้งที่ยเรียนจบแต่ละบทเรียน
2. ฉายภาพโปร่งแสงประกอบการสอน
3. ครูให้คำแนะนำแก่นักเรียน

ผลของการทดลองสรุปได้ว่า นักเรียนชายและนักเรียนหญิงสามารถเข้าใจในวิธีการแปลงได้ไม่แตกต่างกัน นักเรียนที่มีความสามารถในระดับสูง สนใจอุปกรณ์การสอนมากกว่านักเรียนที่มีความสามารถในระดับต่ำ และเห็นว่าอุปกรณ์การสอนเหมาะสมกับนักเรียนที่มีความสามารถในระดับสูงเท่านั้น

วิลลิฟอร์ด (Williford. 1971 : 6462-A) ได้ทดลองสอนวิชาเรขาคณิตการแปลง เรื่องการเคลื่อนที่ของแผนภาพสามมิติและการเท่ากันทุกประการกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2-3 จำนวน 63 คน ซึ่งได้ทดสอบด้วยแบบทดสอบ 2 ชุด ได้แก่ แบบทดสอบด้านทักษะและด้านการนำไปใช้ ภายหลังการสอน ผลการทดลองพบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2-3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงตามเนื้อหาที่นำไปทดลองสอนได้โดยมีผลสัมฤทธิ์ในด้านทักษะสูงกว่าด้านการนำไปใช้

โซลไฮม์ (Soiheim. 1971 : 3165-A) ได้ทดลองสอนวิชาเรขาคณิตโดยเปรียบเทียบระหว่างการใช้วิธีสอนแบบเก่าและการใช้วิธีการแปลง พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีการแปลงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างจากนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยวิธีแบบเก่า แต่เจตคติของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการใช้วิธีการแปลงต่อวิชาคณิตศาสตร์เปลี่ยนไปในทางบวก

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิตการแปลงและความเท่ากันทุกประการ ดังข้างต้น เห็นได้ว่ามีงานวิจัยต่างประเทศที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงในระดับที่แตกต่างกันไป ในส่วนของประเทศไทย หลังจากได้ประกาศใช้หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้มีการจัดเนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลงบรรจุเป็นเนื้อหาหนึ่งในการจัดการเรียนการสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (ช่วงชั้นที่ 3) ด้วยเหตุดังกล่าวผู้วิจัยจึงได้นำเนื้อหาเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตมาเชื่อมโยงเข้ากับเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการ เพื่อให้นักเรียนได้เห็นถึงความเชื่อมโยงและความต่อเนื่องของทั้งสองเนื้อหา และเพื่อเป็นอีกแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอกอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน จากประชากรจำนวน 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน ซึ่งทางโรงเรียนจัดนักเรียนแต่ละห้องเรียนแบบความสามารถของนักเรียน คือ มีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับสูง ระดับปานกลาง และระดับต่ำ อยู่ในห้องเรียนเดียวกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยประกอบด้วย

1.1 คำชี้แจงการใช้บทเรียน

1.2 บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งแบ่งเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทบทวนเรขาคณิตการแปลง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผล

1.3 คู่มือครู ประกอบด้วย คู่มือการใช้บทเรียนและแผนการจัดการเรียนรู้

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

3. แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีขั้นตอนในการสร้างและหาประสิทธิภาพดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การเตรียมงานด้านวิชาการ

1. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ดังนี้

1.1 หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ของสสวท. (กรมวิชาการ. 2534)

1.2 คู่มือครูรายวิชา ค 203 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ของสสวท. (สสวท. 2541)

1.3 คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ กรมวิชาการ (กรมวิชาการ. 2545)

1.4 คู่มือการจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาของสสวท. (สสวท. 2546)

2. ศึกษาเนื้อหาเรื่องเรขาคณิตการแปลงและความเท่ากันทุกประการ จากหนังสือ

2.1 Mathematics for Elementary Teachers : A Contemporary Approach ของ Gary L. Musser & William F. Burger

2.2 Intermediate Mathematics : with Applications A Modern Approach Using Transformations, Matrices, Groups ของ Zalman P. Usiskin

2.3 Principles and Standards for School Mathematics ของ NCTM

2.4 Essentials of Classroom Teaching Elementary Mathematics ของ Jame E. Schwartz & C. Alan Riedesel

2.5 Geometry : An Investigative Approach 2nd ed. ของ Phares G. O' Daffer and Stanley R. Clemens

2.6 Geometry for High School ของ The Philippine University Curriculum
Development Center for Science and Mathematics, Science Education
Center

2.7 Discovering Geometry : An Inductive Approach ของ Michael Serra

2.8 Geometry 2nd ed. ของ James F. Ulrich

2.9 Mathematics for Elementary Teachers : A Conceptual Approach
5th ed. ของ Albert B. Bennett , Jr.

2.10 Geometry Activities for Middle School Students with The Geometer's
Sketchpad ของ Karen Windham Wyatt

2.11 Teaching Elementary School Mathematics 5th ed. ของ
C. Alan Riedesel

2.12 Geometry for Teachers ของ Ward D. Bouwsma

2.13 Using Geometry 2nd ed. ของ David W. Wells

2.14 Guiding Children's Learning of Mathmatics 7th ed. ของ
Leonard M. Kennedy & Steve Tipps

2.15 Geometry ของ Ray C. Jurgensen

2.16 Math in my World V 5 ของ Douglas H. Clements

2.17 หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ของ สสวท.
(สสวท. 2541)

2.18 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการ
เรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ สสวท. (สสวท. 2547ก)

2.19 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการ
เรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ สสวท. (สสวท. 2547ข)

3. กำหนดเนื้อหา ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เรื่องความเท่ากัน
ทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยผู้วิจัยได้กำหนด
เนื้อหาขึ้น 4 หน่วยการเรียนรู้ ใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 18 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง ได้แก่

หน่วยการเรียนรู้ 1 ทบทวนเรขาคณิตการแปลง จำนวน 3 คาบ

คาบที่ 1 การเลื่อนขนาน และการสะท้อน

คาบที่ 2-3 การหมุน และสมบัติของสมมติ (Isometry)

หน่วยการเรียนรู้ 2 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต จำนวน 2 คาบ

คาบที่ 1 บทนิยามความเท่ากันทุกประการ

ความเท่ากันทุกประการของรูปสองรูป

คาบที่ 2	ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง ความเท่ากันทุกประการของมุม	
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	จำนวน 9 คาบ
คาบที่ 1-3	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)	
คาบที่ 4-6	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)	
คาบที่ 7-9	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)	
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4	การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา	จำนวน 4 คาบ

ขั้นที่ 2 การสร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

1. ผู้วิจัยสร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงตามเนื้อหาและจุดประสงค์ที่กำหนด โดยบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการทดลองนี้มีจำนวน 1 บท
2. สร้างคู่มือครูของบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงประกอบด้วย
 - 2.1 คู่มือการใช้บทเรียน ประกอบด้วย
 - 2.1.1 หลักการและเหตุผล
 - 2.1.2 วัตถุประสงค์
 - 2.1.3 เนื้อหาของบทเรียน
 - 2.1.4 แนวทางการใช้บทเรียน
 - 2.1.5 ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนการสอน
 - 2.1.6 ข้อเสนอแนะในการใช้บทเรียน
 - 2.2 แผนการสอนประกอบด้วย
 - 2.2.1 ชื่อเรื่อง
 - 2.2.2 เวลาที่ใช้
 - 2.2.3 จุดประสงค์การเรียนรู้
 - 2.2.4 สาระการเรียนรู้
 - 2.2.5 สื่อการเรียนรู้
 - 2.2.6 กิจกรรมการเรียนรู้
 - 2.2.7 ใบงาน
 - 2.2.8 การวัดผลและการประเมินผล

3. นำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่านเพื่อตรวจสอบคุณภาพ

4. นำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ไปปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

5. นำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ให้พิจารณาอีกครั้งหนึ่งแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

6. นำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงไปทดลองกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ ที่ไม่ใช้กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน เพื่อดูความชัดเจนของภาษา ความเหมาะสมของเนื้อหาและขั้นตอนในการสอน ตลอดจนระยะเวลาที่ใช้

7. นำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงมาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง แล้วนำบทเรียนที่ปรับปรุงเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ จากนั้นนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง เป็นแบบทดสอบที่ใช้ทดสอบหลังการเรียนการสอน ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของ ชวาล แพรัตกุล (2520 : 1-40) การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของ พร้อมพรรณ อุดมสิน (2538 : 28-59) การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้นของ กังวล เทียนกันต์เทศน์ (2540 : 92-112) และเทคนิคการวัดผลการเรียนรู้ของ ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2543 : 196-198)

2. วิเคราะห์เนื้อหา ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของเนื้อหาที่ใช้ในการทดลองเพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

3. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย 10 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ตามที่กำหนด

4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญการสอน
คณิตศาสตร์ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าข้อสอบที่
สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือไม่ โดยใช้ดัชนีความสอดคล้อง
(IOC) ซึ่งมีเกณฑ์ดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญ
การสอนคณิตศาสตร์มาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดย
คัดเลือกแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ จากทั้งหมด 40 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย
จำนวน 8 ข้อ จากทั้งหมด 10 ข้อ

6. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงในข้อ 5 ไปทดลองใช้กับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง
จำนวน 10 คน ที่ผ่านการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
มาแล้ว โดยใช้เวลาในการทดสอบ 3 ชั่วโมง

7. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงในข้อ 6 มาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) คัดเลือก
ข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.20 – 0.80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป โดย
คัดเลือกแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ

8. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลงทั้งแบบปรนัยและอัตนัยที่ได้ในข้อ 7 มาหาค่าความเชื่อมั่น โดยการหาค่า
สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) แล้วนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

เป็นแบบสอบถามเกี่ยวกับความรู้สึกและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์
หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ผู้วิจัยดำเนินการสร้าง
แบบสอบถามวัดเจตคติ ดังนี้

1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบสอบถามวัดเจตคติจากเอกสาร หนังสือ เอกสารงานวิจัยที่
เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างแบบสอบถามวัดเจตคติ

2. สร้างแบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียนเรื่องความเท่ากัน
ทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีลักษณะเป็น

มาตรฐานค่า 5 ระดับ จำนวน 30 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของสมพร แผลงภู (2541 : 203-207) โดยข้อความประกอบด้วยข้อความทางบวกและทางลบ ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

กรณีที่ข้อความมีความหมายทางบวก (Positive) กำหนดการให้คะแนนข้อความดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน

กรณีที่ข้อความมีความหมายทางลบ (Negative) กำหนดการให้คะแนนข้อความดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน	4	คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน	2	คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

3. นำแบบสอบถามวัดเจตคติจำนวน 30 ข้อ เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรและผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา และความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และคัดเลือกแบบสอบถามวัดเจตคติมาจำนวน 20 ข้อ

4. นำแบบสอบถามวัดเจตคติในข้อ 3 ไปทดลองใช้กับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ที่ผ่านการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงมาแล้ว เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบถามวัดเจตคติ โดยใช้วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

5. นำแบบสอบถามวัดเจตคติในข้อ 4 ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยใช้บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น สอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในเวลาเรียนปกติ ใช้เวลาทั้งหมด 18 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง

2. เมื่อสิ้นสุดการสอน ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ โดยใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง

3. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งใช้เกณฑ์การให้คะแนนของกรมวิชาการ (2546 : 121-123) โดยผู้วิจัย ปรับให้เหมาะสมกับแบบทดสอบดังนี้

3.1 แบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก ตรวจให้คะแนนโดยข้อที่ตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบในแต่ละข้อให้ 0 คะแนน

3.2 แบบทดสอบอัตนัย มีเกณฑ์ในการให้คะแนนในแต่ละข้อดังตาราง 1

ตาราง 1 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบอัตนัยเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

คะแนน/ ความหมาย	ผลการทำแบบทดสอบที่ปรากฏให้เห็น
4 ดีมาก	- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ครบ - บอกข้อความและให้เหตุผลที่สอดคล้องกันในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผล
3 ดี	- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ครบ - บอกข้อความและให้เหตุผลที่สอดคล้องกันในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ได้บางส่วน - หรือ - บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้บางส่วน - บอกข้อความและให้เหตุผลที่สอดคล้องกันในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผล
2 พอใช้	- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ได้บางส่วน - บอกข้อความและให้เหตุผลที่สอดคล้องกันในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ได้บางส่วน
1 ต้องปรับปรุง	- มีความพยายามที่จะบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ - มีความพยายามที่จะบอกข้อความและให้เหตุผลที่สอดคล้องกันในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์ได้

ตาราง 1 (ต่อ)

คะแนน/ ความหมาย	ผลการทำแบบทดสอบที่ปรากฏให้เห็น
0 ไม่พยายาม	- ไม่บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ - ไม่บอกข้อความและไม่ให้เหตุผลในแต่ละขั้นตอนของการพิสูจน์

หมายเหตุ การตรวจให้คะแนนของข้อสอบแต่ละข้ออาจจะไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับคำถามในแต่ละข้อ

4. นำคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง มาวิเคราะห์หาค่าสถิติพื้นฐานเพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด

5. ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ หลังเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ใช้เวลา 15 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้สถิติทดสอบ Z (Z – Test for Population Proportion) ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร
3. วิเคราะห์แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และประเมินระดับความคิดเห็น โดยใช้เกณฑ์การประเมินของ ประคอง กรรณสูต (2538 : 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 1.00 ถึง 1.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อยที่สุด

คะแนนเฉลี่ย 1.50 ถึง 2.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อย

คะแนนเฉลี่ย 2.50 ถึง 3.49 หมายถึง เห็นด้วยปานกลาง

คะแนนเฉลี่ย 3.50 ถึง 4.49 หมายถึง เห็นด้วยมาก

คะแนนเฉลี่ย 4.50 ถึง 5.00 หมายถึง เห็นด้วยมากที่สุด

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ ค่า IOC ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
3. สถิติสำหรับการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ สถิติทดสอบ Z (Z - Test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อสร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 นอกจากนี้ได้ศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยตามลำดับดังนี้

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
3. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
4. การประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอคอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง เป็นแบบปรนัย 20 ข้อ และแบบอัตนัย 5 ข้อ และคะแนนของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นดังนี้

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	40	40	22.93	57.33	6.51

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 22.93 คิดเป็นร้อยละ 57.33 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 6.51

2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	40	28	70.00

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน 28 คน คิดเป็นร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

3. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ (คน)	ค่าสถิติทดสอบ Z
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2	40	28	2.53 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

4. การประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

โดยแบบสอบถามวัดเจตคติมีลักษณะเป็นมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) แบ่งเป็น 5 ระดับ ซึ่งมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

กรณีที่ข้อความมีความหมายทางบวก (Positive) กำหนดการให้คะแนนข้อความดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน

กรณีที่ข้อความมีความหมายทางลบ (Negative) กำหนดการให้คะแนนข้อความ
ดังนี้

เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน	4	คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน	2	คะแนน
เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

การแปลผลความหมายของคะแนนเฉลี่ยรวมซึ่งเป็นผลของการวัดเจตคติต่อวิชา
คณิตศาสตร์หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ทั้งฉบับใช้
เกณฑ์การประเมินของประคอง กรณสูตร (2538 : 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 1.00 ถึง 1.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อยที่สุด

คะแนนเฉลี่ย 1.50 ถึง 2.49 หมายถึง เห็นด้วยน้อย

คะแนนเฉลี่ย 2.50 ถึง 3.49 หมายถึง เห็นด้วยปานกลาง

คะแนนเฉลี่ย 3.50 ถึง 4.49 หมายถึง เห็นด้วยมาก

คะแนนเฉลี่ย 4.50 ถึง 5.00 หมายถึง เห็นด้วยมากที่สุด

ซึ่งการประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและการประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง

ข้อที่	ข้อความ	ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)	แปลผล
1.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบ	4.25	0.59	เห็นด้วยมาก
2.	การเรียนรู้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายเพราะ มีขั้นตอน	3.65	0.77	เห็นด้วยมาก
3.	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชา อื่น ๆ โดยเฉพาะวิชาที่ต้องท่องจำ	3.15	0.95	เห็นด้วยปานกลาง
4.	คณิตศาสตร์น่าเบื่อหน่าย	2.93	1.21	เห็นด้วยปานกลาง

ตาราง 5 (ต่อ)

ข้อที่	ข้อความ	ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)	แปลผล
5.	ฉันสามารถเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้ รวดเร็วกว่าวิชาอื่น	3.10	0.87	เห็นด้วยปานกลาง
6.	คณิตศาสตร์ช่วยให้การทำงานมีขั้นตอนดี ขึ้น	3.88	0.61	เห็นด้วยมาก
7.	ฉันไม่สนุกกับการพิสูจน์เกี่ยวกับ คณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน	2.75	1.15	เห็นด้วยปานกลาง
8.	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์	3.30	1.07	เห็นด้วยปานกลาง
9.	ฉันไม่ชอบทำการบ้านคณิตศาสตร์	2.90	1.13	เห็นด้วยปานกลาง
10.	ฉันสบายใจเมื่อได้ทำกิจกรรมหรืองาน เกี่ยวกับคณิตศาสตร์	3.40	0.93	เห็นด้วยปานกลาง
11.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนสนุก	3.68	1.00	เห็นด้วยมาก
12.	ฉันชอบทำแบบฝึกหัดวิชาอื่นมากกว่าวิชา คณิตศาสตร์	2.52	0.96	เห็นด้วยปานกลาง
13.	ฉันรู้สึกมั่นใจในการทำข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์	2.88	1.16	เห็นด้วยปานกลาง
14.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนตัดสินใจอย่าง มีเหตุผล	3.85	0.98	เห็นด้วยมาก
15.	ฉันมีความมั่นใจเวลาเขียนพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์	3.00	0.99	เห็นด้วยปานกลาง
16.	ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์	2.42	1.22	เห็นด้วยมาก
17.	ฉันรู้สึกประหม่าหรือกลัว เมื่อครูให้ออกไป ทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน	2.50	1.13	เห็นด้วยปานกลาง
18.	ฉันชอบตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์	2.85	1.03	เห็นด้วยปานกลาง
19.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ ความพยายาม	4.05 3.30	1.04 1.14	เห็นด้วยมาก เห็นด้วยปานกลาง
20.	ฉันรู้สึกรำคาญเมื่อพ่อแม่หรือครูถามปัญหา เกี่ยวกับคณิตศาสตร์			
รวมทั้งฉบับ		3.22	1.00	เห็นด้วยปานกลาง

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า ผลการประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่อข้อคำถามส่วนใหญ่ทั้งในทางบวกและทางลบ นักเรียนมีความคิดเห็นอยู่ในระดับเห็นด้วยปานกลาง และเมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยของผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ทั้งฉบับ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3.22 แสดงว่านักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงอยู่ในระดับเห็นด้วยปานกลาง และน่าสังเกตว่านักเรียนเห็นด้วยมากกว่าคณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบ ช่วยให้การงานมีขั้นตอนดีขึ้น การเรียนรู้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายเพราะมีขั้นตอน เป็นวิชาที่เรียนสนุก ฝึกให้คนตัดสินใจอย่างมีเหตุผลและคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ความพยายาม แต่นักเรียนมีความคิดเห็นว่ารู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับเห็นด้วยมากเช่นกัน โดยข้อที่มีค่าเฉลี่ยต่ำ ได้แก่ ข้อความ ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์และฉันรู้สึกประหม่าหรือกลัวเมื่อครูให้ออกไปทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน ซึ่งค่าเฉลี่ยอยู่ในระดับเห็นด้วยมากและเห็นด้วยปานกลางตามลำดับ

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานในการวิจัย และวิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เพื่อศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนคอนสวรรค์ อำเภอคอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 จำนวน 40 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
3. แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 40 คน โดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการเรียนการสอนทั้งหมด 18 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง

2. เมื่อสิ้นสุดการสอน ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ โดยใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง

3. ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างตอบแบบสอบถามวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ หลังจากเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ใช้เวลา 15 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับดังนี้

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

3. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

4. การประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังจากการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

สรุปผลการวิจัย

1. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 22.93 คิดเป็นร้อยละ 57.33 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 6.51

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบสอบถามวัดเจตคติ พบว่า นักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับเห็นด้วยปานกลาง

อภิปรายผล

1. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลปรากฏว่า นักเรียนสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งผลการวิจัยสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุกัญญา ยีกา (2545 : บทคัดย่อ) ที่ได้ทำการวิจัยเรื่องการสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องเรขาคณิตการแปลงมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และยูซิสกิน (Usiskin. 1970 : 683-A) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์และทัศนคติในการเรียนวิชาเรขาคณิตของยุคลิตด้วยวิธีการแปลงของนักเรียนชั้นปีที่ 10 โดยสร้างแบบเรียนและนำบทเรียนไปทดลองสอนนักเรียน ผลการวิจัยปรากฏว่า การสอนวิชาเรขาคณิตของยุคลิตสามารถพัฒนาโดยใช้วิธีการแปลงและนักเรียนมีความสามารถในการเรียนตามบทเรียนที่สร้างขึ้น

2. จากผลการวิจัยที่พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด อาจเนื่องมาจาก

2.1 บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ เรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะประกอบด้วย เนื้อหา พร้อมตัวอย่างและภาพประกอบเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้ง่าย ในตัวอย่างการพิสูจน์มีการนำเสนอการพิสูจน์อย่างละเอียดทุกขั้นตอน พร้อมภาพประกอบตั้งแต่การวิเคราะห์โจทย์ การวางแผนทางในการพิสูจน์ การเขียนแสดงการพิสูจน์พร้อมการให้เหตุผล จนกระทั่งสรุปผล การเขียนแสดงตัวอย่างด้วยวิธีดังกล่าวทำให้นักเรียนสามารถศึกษาตัวอย่างได้ด้วยความเข้าใจมากกว่าที่จะใช้การท่องจำ สอดคล้องกับงานวิจัยของ เชวงศักดิ์ ช่อนบุญ (2546 : 78) ที่พบว่าการนำเสนอตัวอย่างการพิสูจน์ทุกขั้นตอนตั้งแต่การวิเคราะห์โจทย์จนกระทั่งถึงสรุปการพิสูจน์ ทำให้ผู้เรียนรู้สึกว่เนื้อหาไม่ยุ่งยากซับซ้อนและทำให้ง่ายต่อการเรียน

2.2 เมื่อสิ้นสุดการสอนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะมีใบงานให้นักเรียนได้ฝึกทักษะ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันและกัน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามข้อสงสัยจากการทำใบงาน เพื่อเป็นการทบทวนความรู้ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้และตรวจสอบดูว่านักเรียนมีความรู้และเข้าใจเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้มากน้อยเพียงใด เมื่อทำการตรวจใบงานและแจ้งผลการทำ

ไปงานคืนให้นักเรียนแล้วผู้วิจัยก็จะทำการเฉลยและชี้ข้อบกพร่องต่าง ๆ ให้นักเรียนทราบทันที ทำให้นักเรียนได้ทราบถึงข้อบกพร่องของตนเองและทราบว่าควรปรับปรุงข้อบกพร่องอย่างไรให้ถูกต้องดีขึ้น

2.3 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่สอนโดยใช้บทเรียนเรื่องความเท่ากัน

ทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ผู้วิจัยได้อาศัยระดับขั้นของแวนฮิลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต (The Van Hiele of Geometric Thought) เป็นแนวทางในการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน กล่าวคือเป็นขั้นกระบวนการคิดในการเรียนเรขาคณิตโดยเริ่มจากง่ายไปหายาก (วรรณวิภา สุทธเกียรติ. 2542 : 21-22 อ้างอิง Serra. 1989 : 4 ; Thomas. 1992 : 71-86 ; Clements & Battista. 1992 : 421-428 ; Burger & Culpepper. 1993 : 140-142) โดยเริ่มจากทบทวนการแปลงทางเรขาคณิตให้กับนักเรียนก่อนแล้วจึงค่อยนำการแปลงทางเรขาคณิตไปใช้ พิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งในระหว่างการเรียนการสอนผู้สอนได้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ชักถามและมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนควบคู่ไปพร้อมกันและให้นักเรียนได้ทำงานร่วมกันเป็นคู่และเป็นกลุ่มให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันและกันมีการให้นักเรียนนำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียนพร้อมอธิบายให้เพื่อนร่วมชั้นฟังเป็นการให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม กล้าแสดงออก มีความกระตือรือร้น สนใจที่จะเรียนในเนื้อหาต่อไป

2.4 นักเรียนให้ความสนใจและตั้งใจเรียนดีในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจาก เนื้อหายังไม่ยากเท่าที่ควร เมื่อเข้าสู่หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความสนใจและความตั้งใจเรียนของนักเรียนเริ่มลดลง อาจมีสาเหตุมาจากในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มีเนื้อหาและขั้นตอนการพิสูจน์ค่อนข้างยุ่งยากหลายขั้นตอนทำให้นักเรียนเรียนรู้ได้ช้า ดังนั้นการเรียนการสอนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 จึงค่อนข้างช้าและต้องค่อยเป็นค่อยไป แต่มีนักเรียนส่วนหนึ่งสามารถที่จะเรียนรู้ตามได้เร็วและสนใจตั้งใจเรียนดีตลอดจนครบทุกหน่วยการเรียนรู้ สำหรับในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 นักเรียนให้ความสนใจและตั้งใจเรียนดี อาจมีสาเหตุมาจาก ขั้นตอนการพิสูจน์และการเขียนการพิสูจน์ไม่ยุ่งยากเหมือนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เพราะเป็นการนำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมาให้เกิดเหตุผลและสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบใด

2.5 ค่าเฉลี่ยของคะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ไม่สูงมากนัก ซึ่งกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ทำคะแนนในส่วนที่เป็นแบบทดสอบปรนัยได้ดีกว่าส่วนที่เป็นแบบทดสอบอัตนัย ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากในส่วนของแบบทดสอบอัตนัยเป็นการเขียนการพิสูจน์อย่างเป็นขั้นตอนตามลำดับอย่างมีเหตุผลและต้องรู้ว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นจริงได้อย่างไร ซึ่งตามระดับขั้นของแวนฮิลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิตนั้นจัดอยู่ในระดับ 3 โดยนักเรียนที่จะมีความสามารถในระดับนี้จะต้องสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์และได้รับการฝึกทักษะในการเขียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต รวมถึงการใช้ภาษาหรือข้อความที่อ้างในการให้เหตุผลในการพิสูจน์ได้อย่างสมเหตุสมผลพอสมควร แต่เนื่องจากด้วยเวลาที่จำกัดในการเก็บรวบรวมข้อมูลและผู้วิจัยเองยังขาดประสบการณ์ในการสอน จึงยังไม่สามารถทำให้นักเรียนพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮิลีได้ถึงระดับ 3 ทำให้

นักเรียนทำคะแนนจากแบบทดสอบอัตนัยได้ไม่ดีนัก แต่นักเรียนส่วนใหญ่สามารถบอกจุดและด้านคู่ที่สมนัยกัน บอกได้ว่ารูปใดเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปต้นแบบรูปใดได้ นอกจากนี้ยังสามารถบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้ แต่ในขั้นตอนการพิสูจน์ยังพบว่านักเรียนที่สับสนเกี่ยวกับขั้นตอนการใช้การแปลงทางเรขาคณิตเพื่อพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันตามที่กำหนดให้เท่ากันทุกประการอยู่บ้าง และบางขั้นตอนในการพิสูจน์นักเรียนยังให้เหตุผลไม่ถูกต้องเท่าที่ควร ในส่วนของการพิสูจน์ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 นักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลประกอบการพิสูจน์ในข้อที่ไม่ซับซ้อนมากนักได้ แต่ยังมีนักเรียนที่ไม่สามารถเขียนพิสูจน์และให้เหตุผลได้เช่นกันแต่เป็นส่วนน้อย และมีนักเรียนบางส่วนที่สามารถให้เหตุผลในขั้นตอนการพิสูจน์ได้แต่ให้เหตุผลตอนสรุปการพิสูจน์ไม่ถูกต้องด้วยเช่นกัน

3. ผลการศึกษาเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างหลังจากการเรียนรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบวัดเจตคติ พบว่า นักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับเห็นด้วยปานกลาง ทั้งนี้อาจมีสาเหตุเนื่องมาจาก

3.1 บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีเนื้อหาค่อนข้างยากและมีขั้นตอนในการพิสูจน์หลายขั้นตอนทำให้นักเรียนบางส่วนที่มีพื้นฐานทางด้านวิชาคณิตศาสตร์ไม่ค่อยดี เรียนรู้ได้ช้าและเห็นว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก ในทางกลับกันนักเรียนที่มีพื้นฐานทางด้านวิชาคณิตศาสตร์ค่อนข้างดี ให้ความสนใจ กระตือรือร้น และซักถามกับผู้วิจัยเมื่อเกิดปัญหาหรือข้อสงสัย และเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ความพยายาม นอกจากนี้เนื้อหาในบทเรียนที่สร้างขึ้นเน้นการพิสูจน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปโดยใช้เรขาคณิตการแปลงไม่ได้เน้นในการนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการไปประยุกต์ใช้เท่าที่ควร อาจทำให้นักเรียนไม่ค่อยเห็นถึงความสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันเท่าที่ควร

3.2 ในระหว่างการเรียนการสอนผู้วิจัยได้ให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่ม ๆ ทำให้นักเรียนได้ปรึกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และนักเรียนที่เรียนรู้ได้เร็วกว่าสามารถที่จะช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนตามไม่ทันได้ไปพร้อมกัน นอกจากนั้นยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามเมื่อเกิดปัญหาหรือข้อสงสัยและติชมให้คำแนะนำเมื่อให้นักเรียนตอบคำถาม นำเสนองานหน้าชั้นเรียนหรือแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียน เป็นการกระตุ้นและให้กำลังใจให้นักเรียนกระตือรือร้นและสนใจที่จะเรียนเนื้อหาต่อไป

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการนำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปใช้ ควรศึกษาการแปลงทางเรขาคณิตที่ใช้ในบทเรียนอันได้แก่ การเลื่อนขนาน

การสะท้อน และการหมุน ให้เข้าใจเสียก่อน ทั้งนี้เนื่องจากบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีวิธีการในการให้เหตุผลและขั้นตอนการเขียนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการที่แตกต่างไปจากที่มีการเรียนการสอนในชั้นเรียนทั่วไป ดังนั้นผู้สอนจึงควรที่จะศึกษาวิธีการในการให้เหตุผลและขั้นตอนการเขียนการพิสูจน์ในบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงให้เข้าใจ เพราะจะทำให้ผู้สอนเข้าใจในเนื้อหา หลักการพิสูจน์โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและลำดับขั้นตอนในการสอนได้เป็นอย่างดี

1.2 ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรนำเทคโนโลยีมาช่วยในการเรียนการสอน โดยเฉพาะในส่วนของการแปลงทางเรขาคณิต หากสามารถทำให้นักเรียนเห็นภาพขณะรูปเกิดการเลื่อนขนาน สะท้อนหรือหมุนได้จะทำให้นักเรียนสามารถมองเห็นภาพเป็นรูปธรรมมากขึ้นเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจและกระตือรือร้นที่จะเรียนมากขึ้น

1.3 ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ควรเพิ่มเวลาในการเรียนให้มากขึ้น เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกการพิสูจน์และเห็นตัวอย่างที่หลากหลายขึ้น

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการนำบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงแก้ไข และนำไปทดลองซ้ำกับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นเพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

2.2 ควรมีการวิจัยที่เกี่ยวกับการนำการแปลงทางเรขาคณิตไปเชื่อมโยงกับเนื้อหาในระดับต่าง ๆ โดยเฉพาะในระดับที่สูงขึ้นไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ, กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). *หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2545). *หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- _____. (2546). *การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี. (2535). *การสอนการพิสูจน์เรื่องการเท่ากันทุกประการ*. ปรินญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2545). *คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- กั้ววล เทียนกัณฑ์เทศน์. (2540). *การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้น*. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- โกมล ไพศาล. (2540). *การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. ปรินญานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จุไร ทวีรัตน์. (2528). *เนื้อหาคณิตศาสตร์ ค 203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตการศึกษา 12*. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- ชวาล แพรัตกุล. (2520). *เทคนิคการเขียนข้อทดสอบ*. กรุงเทพฯ: วัฒนาพานิช.
- เชวงศักดิ์ ช้อนบุญ. (2546). *บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กิจกรรม คิด-จับคู่-เล่าสู่กันฟัง*. ปรินญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- โชคชัย ตักดีศรี. (2516). *การศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงสภาพของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย*. ปรินญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ประคอง กรรณสูตร. (2538). *สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- ปานทอง กุลนาถศิริ. (2541, มีนาคม-เมษายน). การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาใน
ศตวรรษที่ 21. คณิตศาสตร์. 41(474-475) : 65-68.
- _____. (2543, มกราคม-มีนาคม). ความเคลื่อนไหว ... เกี่ยวกับ NCTM : Principles
and Standards for School Mathematics ในปี ค.ศ. 2000. สสวท. 28(108) : 15.
- พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2538). การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิชากร แปลงประสพโชค. (2540). การพัฒนาหลักสูตรพิเศษทางเรขาคณิตเสริมสำหรับนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์. ปรินิพนธ์
การศึกษาดุษฎีบัณฑิต. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- มานะ เอกจริยวงศ์. (2537, พฤษภาคม-มิถุนายน). จุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียน.
คณิตศาสตร์. 38(428-429) : 1-5.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ. (2543). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. พิมพ์ครั้งที่ 2.
กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- วรรณวิภา สุทธเกียรติ. (2542). การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็น
เครื่องมือในการเรียนรู้. ปรินิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต. (คณิตศาสตร์ศึกษา).
กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วลีพร เดชเดชา. (2547). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์โมโนทัศน์ทางเรขาคณิต. ปรินิพนธ์
การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วิทยา รุ่งอรุณพิศาล. (2517). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตการแปลงสภาพ
(Transformation Geometry) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินิพนธ์
การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย
วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2527). รายงานการสำรวจเกี่ยวกับการใช้
หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ม.3) ทั่วประเทศ ปีการศึกษา 2523.
กรุงเทพฯ: สถาบันฯ.
- _____. (2541). คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 203 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2541). หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สถาบันฯ.
- _____. (2546). คู่มือการจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ: สถาบันฯ.
- _____. (2547ก). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2547ข). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สมพร แผลงภู. (2541). การพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ. ปรินูญานิพนธ์การศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สมพล เล็กสกุล และ ชุติพร สุภธีระ. (2538). เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2544). เรขาคณิต. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (2519). เรขาคณิตแนวใหม่. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา.
- สิริวรรณ ตั้งจิตวัฒนะกุล. (2542). รากฐานเรขาคณิต. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- สุกัญญา ยีกา. (2545). การสร้างชุดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตการแปลงสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุภาพร บุญหนัก. (2544). การพัฒนาชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยวิธีการแก้ปัญหาเรื่องความเท่ากันทุกประการ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุวัฒนา เอี่ยมมอรรถ. (2546). ปฏิรูปกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์: การแปลงทางเรขาคณิต. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์. (2514). *Foundations of Geometry*. วิทยาลัยวิชาการศึกษา พิษณุโลก. พิมพ์โรเนียว.
- อภิญา คุณเลิศ. (2534). ปัญหาการสอนของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตการศึกษา 9. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- Bennett, Albert B., Jr. (2001). *Mathematics for Elementary Teachers : A Conceptual Approach*. 5th ed. New York: McGraw-Hill.
- Bouwsma, Ward D. (1972). *Geometry for Teachers*. New York: Macmillan.
- Burger, William F & Culpepper, Barbara. (1993). *Restructuring Geometry, in Research Ideas for the Classroom*. New York: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, Douglas H. (1998). *Math in my World V 5*. New York: McGraw-Hill.
- Clements H. Douglas & Battista, Michael T. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning, in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. p 420-464. New York: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Eves, Howard & Newsom, Carroll V. (1964). *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Geddes, Dorothy & Fortunato, Irene. (1993). *Geometry : Research and Classroom Activities, Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics*. New York: Macmillan.
- Jurgensen, Ray C. (1985). *Geometry*. Boston: Houghton Mifflin.
- Kennedy, Leonard M. & Tipps, Steve. (1994). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. 7th ed. California: Wadsworth.
- Musser, Gary L. & Burger, William F. (2000). *Mathematics for Elementary Teachers : A Contemporary Approach*. 5th ed. New York: John Wiley & Sons.
- O' Daffer, Phares G and Clemens, Stanley R. (1992). *Geometry : An Investigative Approach*. 2nd ed. California: Addison Wesley.
- Olson, Alton Thorpe. (1970, May). High School Plane Geometry Through Transformation : An Exploratory Study. *Dissertation Abstract International*. 31(11) : 5944-A.
- Riedesel, C. Alan. (1990). *Teaching Elementary School Mathematics*. 5th ed. New Jersey: Prentice-Hall.
- Schwartz, James E. & Riedesel, C. Alan. (1994). *Essentials of Classroom Teaching Elementary Mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Science Education Center. (1978). *Geometry for High School*. The Philippine University Curriculum Development Center for Science and Mathematics. Philippines: Depart of Education and Culture.
- Serra, Michael. (1989). *Discovering Geometry : an Inductive Approach Content of Teacher's Guide and Answer Key*. Berkeley Calif: Key Curriculum Press.

- Serra, Michael. (1993). *Discovering Geometry : An Inductive Approach*. California: Key Curriculum Press.
- Sidhu, Kulbir Singh. (1981). *The Teaching of Mathematics*. 3rd ed. New Delhi: Sterling Printer.
- Simmons, Malcolm. (1992). *The Effective Teaching of Mathematics*. New York: Longman Publishing.
- Solheim, Jerome Harold. (1971, December). The Effect of the Study of Transformations of the Plane on the Attitudes of Secondary School Geometry Students. *Dissertation Abstracts International*. 32(6) : 3165-A.
- The National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. United States of America: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Thomas, David V. (1992). *Teenagers, Teachers, and Mathematics*. Boston: Ally and Bacon.
- Ulich, James F. (1972). *Geometry*. 2nd ed. New York.
- Usiskin, Zalman Philip. (1970, August). The Effects of Teaching Euclidean Geometry via Transformation on Students Achievement and Attitudes in Tenth-Grade Geometry. *Dissertation Abstract International*. 31(2) : 688-A.
- _____. (1972). *Intermediate Mathematics with Applications a Modern Approach Using Transformations, Matrices, Groups Part I*. Illinois: University of Chicago.
- Wells, David W. (1984). *Using Geometry*. 2nd ed. The United States of America: Laidlaw Brothers.
- Williford, Harold Johnson. (1971, June). A Study of Transformation Geometry Instruction in the Primary Grades. *Dissertation Abstract International*. 31(12) : 6462-A.
- Wyatt, Karen Windham. (1998). *Geometry Activities for Middle School Students with the Geometer's Sketchpad*. California: Key Curriculum Press.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 6 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
(แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
18	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
19	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
22	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
23	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
24	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
25	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
26	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
27	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
28	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 6 (ต่อ)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
29	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
30	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
31	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
32	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
33	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
34	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
35	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
36	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
37	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
38	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
39	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
40	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 7 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบอัตนัย)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

หมายเหตุ คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

ตาราง 8 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง
 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ข้อที่	p	r
1.	0.70	0.20
2.	0.80	0.40
3.	0.30	0.20
4.	0.60	0.40
5.	0.60	0.40
6.	0.70	0.20
7.	0.60	0.40
8.	0.50	0.20
9.	0.60	0.40
10.	0.20	0.40
11.	0.70	0.60
12.	0.40	0.80
13.	0.30	0.20

ข้อที่	p	r
14.	0.30	0.20
15.	0.40	0.40
16.	0.40	0.40
17.	0.70	0.20
18.	0.70	0.20
19.	0.40	0.40
20.	0.70	0.20
21.*	0.30	0.60
22.*	0.50	0.47
23.*	0.53	0.40
24.*	0.40	0.80
25.*	0.55	0.30

หมายเหตุ * แบบทดสอบแบบอัตนัย

- ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือกเท่ากับ 0.74
- ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอัตนัยเท่ากับ 0.72
- ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับเท่ากับ 0.81

ตาราง 9 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงและค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อ	ข้อความ	$\bar{x}$	S.D.
1.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบ	4.30	0.48
2.	การเรียนรู้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายเพราะมีขั้นตอน	4.10	0.32
3.	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชาอื่น ๆ โดยเฉพาะวิชาที่ต้องท่องจำ	3.10	0.57
4.	คณิตศาสตร์น่าเบื่อหน่าย	2.80	0.92
5.	ฉันสามารถเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้รวดเร็วกว่าวิชาอื่น	3.10	0.32
6.	คณิตศาสตร์ช่วยให้การทำงานมีขั้นตอนดีขึ้น	4.10	0.57
7.	ฉันไม่สนุกกับการพิสูจน์เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน	2.80	1.03
8.	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์	3.60	0.52
9.	ฉันไม่ชอบทำการบ้านคณิตศาสตร์	2.50	0.97
10.	ฉันสบายใจเมื่อได้ทำกิจกรรมหรืองานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	3.70	0.68
11.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนสนุก	4.20	0.42
12.	ฉันชอบทำแบบฝึกหัดวิชาอื่นมากกว่าวิชาคณิตศาสตร์	3.00	0.82
13.	ฉันรู้สึกมั่นใจในการทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์	3.50	0.53
14.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนตัดสินใจอย่างมีเหตุผล	4.10	0.88
15.	ฉันมีความมั่นใจเวลาเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3.60	0.70
16.	ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์	3.40	1.27
17.	ฉันรู้สึกประหม่าหรือกลัว เมื่อครูให้ออกไปทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน	3.70	0.02
18.	ฉันชอบตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์	2.80	0.79
19.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ความพยายาม	4.40	0.70
20.	ฉันรู้สึกรำคาญเมื่อพ่อแม่หรือครูถามปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	2.10	0.99
เฉลี่ย		3.45	0.68

ค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนทั้งฉบับ (α) เท่ากับ 0.81

ตาราง 10 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง

x	f	fx	x ²	fx ²
11	1	11	121	121
12	1	12	144	144
15	2	30	225	450
16	3	48	256	768
17	1	17	289	289
18	3	54	324	972
19	1	19	361	361
20	5	100	400	2000
21	4	84	441	1764
22	3	66	484	1452
25	1	25	625	625
26	3	78	676	2028
27	1	27	729	729
28	1	28	784	784
29	2	58	841	1682
30	3	90	900	2700
31	1	31	961	961
33	2	66	1089	2178
36	1	36	1296	1296
37	1	37	1369	1600
ผลรวม	40	917		22673

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\sum fx}{\sum f} = \sqrt{\frac{n \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{n(n-1)}} \\
 &= \frac{917}{40} = \sqrt{\frac{40(22673) - (917)^2}{40(39)}} \\
 &= 22.93 = 6.51
 \end{aligned}$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง ซึ่งใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร โดยใช้สถิติทดสอบ Z (z-test for population proportion)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.50$

$H_1 : p > 0.50$

สถิติทดสอบ
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{28}{40} = 0.70$$

$$p_0 = 0.50$$

n แทนจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 40 คน

แทนค่า
$$Z = \frac{0.70 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{40}}} = \frac{0.20}{\sqrt{0.00625}}$$

ดังนั้น $Z = 2.53$

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $Z > Z_{.01}$

จากตารางได้ $Z_{.01} = 2.33$

และ $2.53 > 2.33$ อยู่ในบริเวณวิกฤต

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตาราง 11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิต
การแปลง

ข้อ	ข้อความ	$\bar{x}$	S.D.
1.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบ	4.25	0.59
2.	การเรียนรู้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายเพราะมีขั้นตอน	3.65	0.77
3.	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชาอื่น ๆ โดยเฉพาะวิชาที่ต้องท่องจำ	3.15	0.95
4.	คณิตศาสตร์น่าเบื่อหน่าย	2.93	1.21
5.	ฉันสามารถเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้รวดเร็วกว่าวิชาอื่น	3.10	0.87
6.	คณิตศาสตร์ช่วยให้การทำงานมีขั้นตอนดีขึ้น	3.88	0.61
7.	ฉันไม่สนุกกับการพิสูจน์เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน	2.75	1.15
8.	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์	3.30	1.07
9.	ฉันไม่ชอบทำการบ้านคณิตศาสตร์	2.90	1.13
10.	ฉันสบายใจเมื่อได้ทำกิจกรรมหรืองานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	3.40	0.93
11.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนสนุก	3.68	1.00
12.	ฉันชอบทำแบบฝึกหัดวิชาอื่นมากกว่าวิชาคณิตศาสตร์	2.52	0.96
13.	ฉันรู้สึกมั่นใจในการทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์	2.88	1.16
14.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนตัดสินใจอย่างมีเหตุผล	3.85	0.98
15.	ฉันมีความมั่นใจเวลาเขียนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	3.00	0.99
16.	ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์	2.42	1.22
17.	ฉันรู้สึกประหม่าหรือกลัว เมื่อครูให้ออกไปทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน	2.50	1.13
18.	ฉันชอบตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์	2.85	1.03
19.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ความพยายาม	4.05	1.04
20.	ฉันรู้สึกรำคาญเมื่อพ่อแม่หรือครูถามปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	3.30	1.14
เฉลี่ย		3.22	1.00

ใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทบทวนเรขาคณิตการแปลง

การเลื่อนขนาน

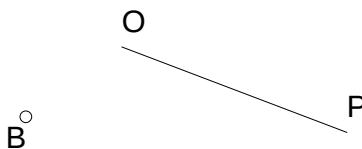
1. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 กำหนดให้ จุด Q เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานจุด Q ตาม $\overline{MN}$



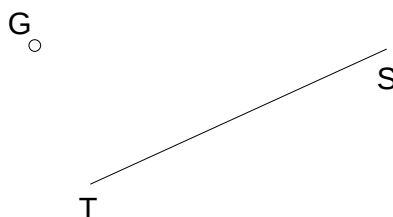
ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

1.2 กำหนดให้ จุด B เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานจุด B ตาม $\overline{OP}$



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

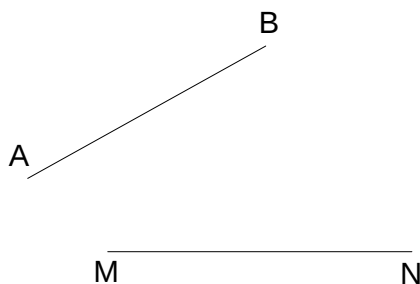
1.3 กำหนดให้ จุด G เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานจุด G ตาม $\overline{TS}$



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

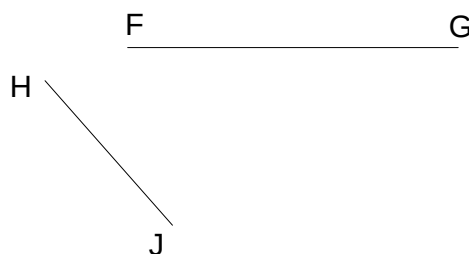
2. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนาน $\overline{AB}$ ตาม $\overline{MN}$



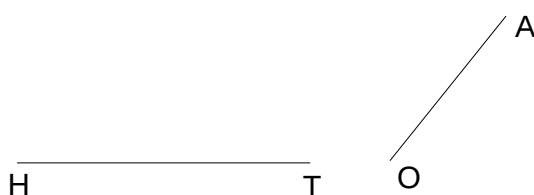
ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

2.2 กำหนดให้ $\overline{FG}$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนาน $\overline{FG}$ ตาม $\overline{HJ}$



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

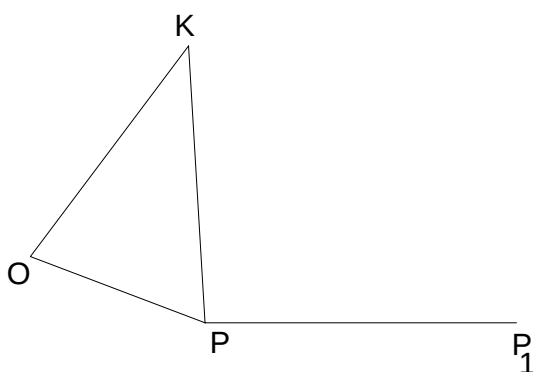
2.3 กำหนดให้ $\overline{HT}$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนาน $\overline{HT}$ ตาม $\overline{OA}$



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ ตาม

3. ให้นักเรียนแสดงการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปต้นแบบที่กำหนดให้ตามส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทางต่อไปนี้

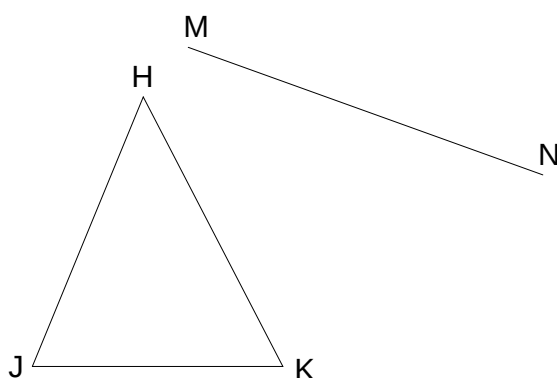
3.1 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม KOP เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{PP_1}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง



1. ลาก และ ให้มีทิศทางและขนาดเช่นเดียวกับ $\overline{PP_1}$

2. ลาก , และ จะได้ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน $\triangle KOP$ ตาม $\overline{PP_1}$

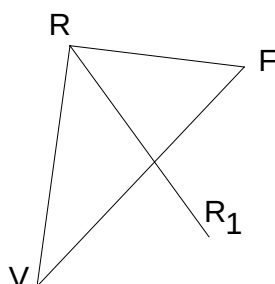
3.2 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม HJK เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{MN}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง



1. ลาก , และ ให้มีทิศทางและขนาดเช่นเดียวกับ $\overline{MN}$

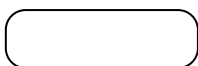
2. ลาก , และ จะได้ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน $\triangle HJK$ ตาม $\overline{MN}$

3.3 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม RFV เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{RR_1}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง



1. ลาก และ ให้มีทิศทางและขนาดเช่นเดียวกับ $\overline{RR_1}$

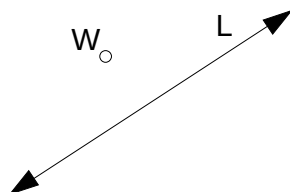
2. ลาก , และ จะได้ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน $\triangle RFV$ ตาม $\overline{RR_1}$



การสะท้อน

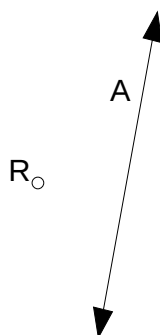
4. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 กำหนดให้ จุด W เป็นรูปต้นแบบและเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



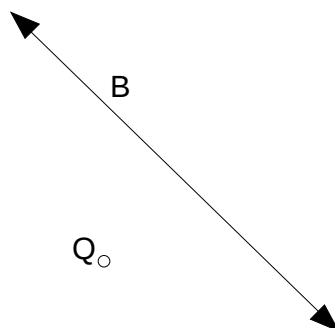
ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

4.2 กำหนดให้ จุด R เป็นรูปต้นแบบและเส้นตรง A เป็นเส้นสะท้อน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

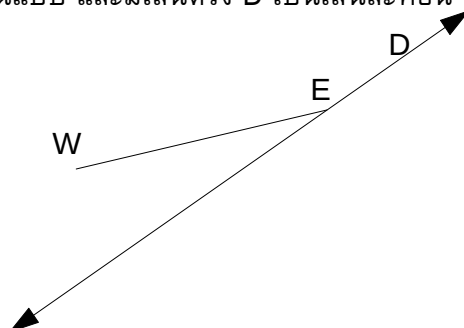
4.3 กำหนดให้ จุด Q เป็นรูปต้นแบบและเส้นตรง B เป็นเส้นสะท้อน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

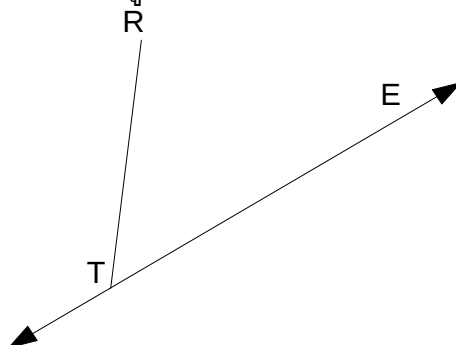
5. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 กำหนดให้ $\overline{WE}$ เป็นรูปต้นแบบ และมีเส้นตรง D เป็นเส้นสะท้อน



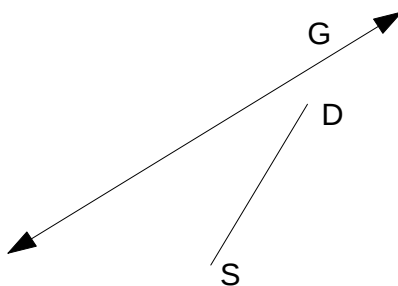
ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

5.2 กำหนดให้ $\overline{RT}$ เป็นรูปต้นแบบ และมีเส้นตรง E เป็นเส้นสะท้อน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

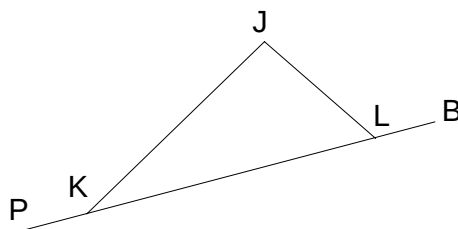
5.3 กำหนดให้ $\overline{DS}$ เป็นรูปต้นแบบ และมีเส้นตรง G เป็นเส้นสะท้อน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของ โดยมีเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

6. ให้นักเรียนแสดงการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปต้นแบบที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยมีส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้เป็นเส้นสะท้อน

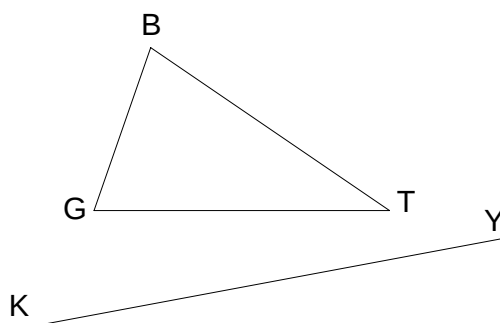
6.1 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม JKL เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสะท้อน



1. ลาก ตั้งฉากกับ $\overline{PB}$ ที่จุด D
2. หาจุด บน $\overline{JD}$ โดยให้ $JD = \dots\dots\dots$
3. ลาก ,

จะได้ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\triangle JKL$ ด้วยเส้นสะท้อน $\overline{PB}$

6.2 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม BGT เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{KY}$ เป็นเส้นสะท้อน



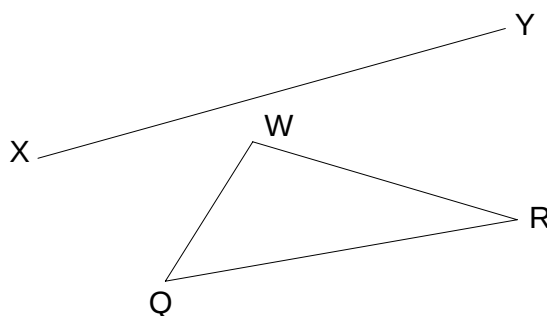
1. ลาก $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ ตั้งฉากกับ $\overline{KY}$ ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ

2. หาจุด , และ บน $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{TF}$ ตามลำดับ
โดยให้ $GD = \dots\dots\dots$, $BE = \dots\dots\dots$ และ $TF = \dots\dots\dots$

3. ลาก , และ

จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle BGT$ ด้วยเส้นสะท้อน $\overline{KY}$

6.3 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม QWR เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน



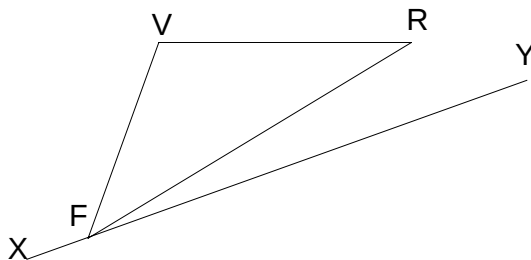
1. ลาก $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{WE}$ และ ตั้งฉากกับ $\overline{XY}$ ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ

2. หาจุด , และ บน $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{WE}$ และ $\overrightarrow{RF}$ ตามลำดับ
โดยให้ $QD = \dots\dots\dots$, $WE = \dots\dots\dots$ และ $RF = \dots\dots\dots$

3. ลาก , และ

จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle QWR$ ด้วยเส้นสะท้อน $\overline{XY}$

6.4 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม VFR เป็นรูปต้นแบบ และ $\overline{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน



1. ลาก $\overrightarrow{VD}$ และ ตั้งฉากกับ $\overline{XY}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ

2. หาจุด และ บน $\overrightarrow{VD}$ และ $\overrightarrow{RE}$ ตามลำดับ
โดยให้ $VD = \dots\dots\dots$ และ $RE = \dots\dots\dots$

3. ลาก , และ

จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle VFR$ ด้วยเส้นสะท้อน $\overline{XY}$



การหมุน

7. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นจุด ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้จุด R เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน

R
○

○
O

ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

7.2 กำหนดให้จุด B เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 30° โดยมีจุด C เป็นจุดหมุน

C
○

B[○]

ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

8. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นจุด ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

8.1 กำหนดให้จุด F เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด D เป็นจุดหมุน

○
F

○
D

ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

8.2 กำหนดให้จุด G เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 45° โดยมีจุด E เป็นจุดหมุน

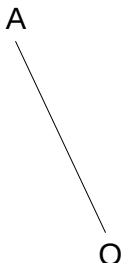
E[°]

G[°]

ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

9. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน

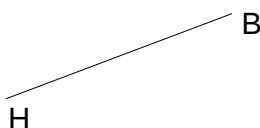
9.1 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง OA เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

9.2 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง HB เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 30° โดยมีจุด C เป็นจุดหมุน

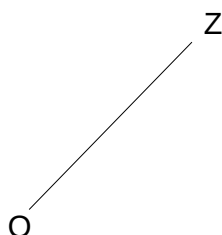
C[°]



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

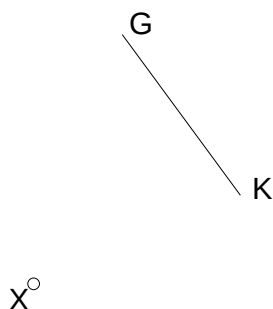
10. ให้นักเรียนหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน

10.1 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง OZ เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

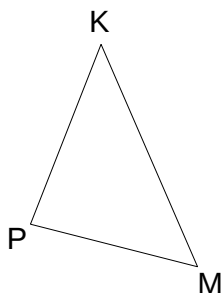
10.2 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง GK เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 45° โดยมีจุด X เป็นจุดหมุน



ตอบ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วย
ขนาดมุม โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

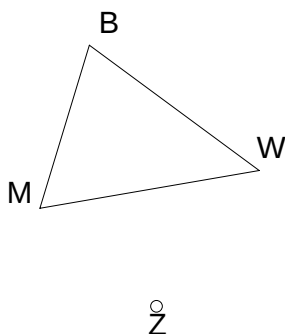
11. ให้นักเรียนแสดงการหาภาพที่เกิดจากการหมุนรูปต้นแบบที่กำหนดให้ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

11.1 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม KPM เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด M เป็นจุดหมุน



1. เนื่องจากจุด M อยู่บนรูปต้นแบบ สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60°
2. ใช้ M เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
3. สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60°
4. ใช้ M เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
5. ลาก , และ จะได้รูป เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle KPM$ ในทิศทางเข็มนาฬิกาการรอบจุด M ด้วยมุมที่มีขนาด 60°

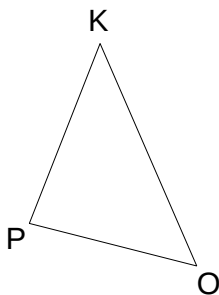
11.2 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม BMW เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 45° โดยมีจุด Z เป็นจุดหมุน



1. ลาก $\overline{MZ}$ สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 45°
2. ใช้ Z เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
3. ลาก สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 45°
4. ใช้ Z เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
5. ลาก สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 45°
6. ใช้ Z เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
7. ลาก , และ จะได้รูป เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle BMW$ ในทิศตามเข็มนาฬิกา รอบจุด Z ด้วยมุมที่มีขนาด 45°

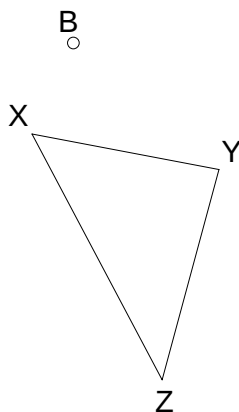
12. ให้นักเรียนแสดงการหาภาพที่เกิดจากการหมุนรูปต้นแบบที่กำหนดให้ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

12.1 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม KPO เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน



1. เนื่องจากจุด O อยู่บนรูปต้นแบบ สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60°
2. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
3. สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60°
4. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
5. ลาก , และ จะได้รูป เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle KPO$ ในทิศทางเข็มนาฬิกาการรอบจุด O ด้วยมุมที่มีขนาด 60°

12.2 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นรูปต้นแบบ หมุนด้วยขนาดมุม 30° โดยมีจุด B เป็นจุดหมุน



1. ลาก $\overline{YB}$ สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 30°
2. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
3. ลาก สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 30°
4. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
5. ลาก สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 30°
6. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด ที่จุด
7. ลาก , และ จะได้รูป เป็นภาพที่ได้จากการหมุน $\triangle XYZ$ ในทิศตามเข็มนาฬิกา รอบจุด B ด้วยมุมที่มีขนาด 30°

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทบทวนเรขาคณิตการแปลง

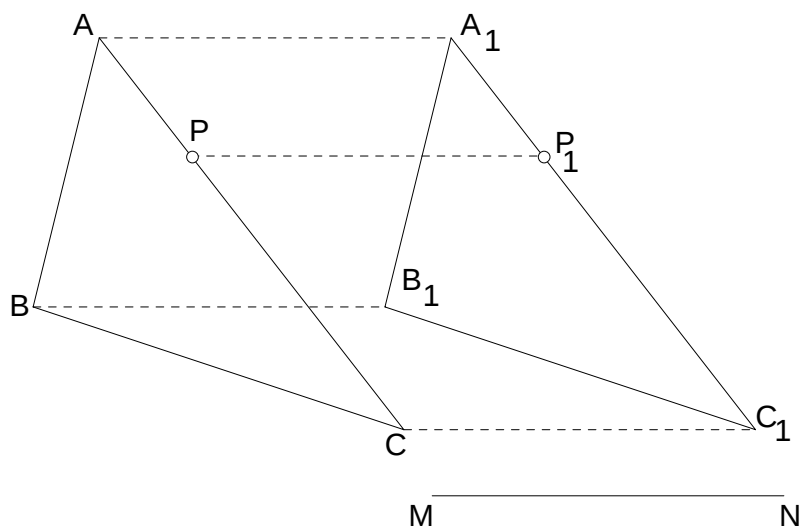
การแปลงทางเรขาคณิต 3 แบบ ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน การแปลงทางเรขาคณิตทั้งสามแบบนี้จะได้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ

1. การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานของรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบ หมายถึง การแปลงซึ่งจุดทุกจุดในรูปต้นแบบเลื่อนไปบนระนาบเป็นระยะทางที่เท่ากันและในทิศทางเดียวกัน

ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง $\overline{MN}$ อาจเขียนแทนด้วย $\overline{MN}$ ซึ่ง $\overline{MN}$ จะมีทิศทางจากจุดเริ่มต้น M ไปยังจุดสิ้นสุด N และมีขนาดเท่ากับความยาวของ $\overline{MN}$

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ การเลื่อนขนานของรูปสามเหลี่ยม ABC ในทิศทางตาม $\overline{MN}$ แล้วได้ภาพคือรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ หมายถึง ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนรูปต้นแบบ จะได้ภาพ P_1 บนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ โดยที่ PP_1 ยาวเท่ากับ $\overline{MN}$ และ PP_1 ขนานกับ $\overline{MN}$ และมีทิศทางเดียวกัน



ดังนั้น จากรูป จะเห็นว่า มีการเลื่อนจุด A ไปที่จุด A_1 เลื่อนจุด B ไปที่จุด B_1 และเลื่อนจุด C ไปที่จุด C_1 ในทิศทางเดียวกันและเป็นระยะเท่ากัน จะได้ว่า $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ และ $\overline{CC_1}$ ขนานกันและยาวเท่ากัน นั่นคือ ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนรูป $\triangle ABC$ แล้วจะมี P_1 บนรูป $\triangle A_1B_1C_1$ ซึ่งทำให้ $\overline{PP_1}$ ขนานและยาวเท่ากับ $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ และ $\overline{CC_1}$ ด้วย

จากการเลื่อนขนานข้างต้นจะได้ว่า

1. $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ และ $\overline{PP_1}$ จะขนานกันกับ $\overline{MN}$

$$2. AA_1 = BB_1 = CC_1 = PP_1 = MN$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้จุด **A** เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด **A** ตาม $\overline{MN}$

A
○

M N

แนวคิด ในการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบซึ่งเป็นจุด ให้ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด A ในทิศทางเดียวกับ $\overline{MN}$ และมีขนาดเท่ากัน

A
○-----

M N

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง **AB** เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง **AB** ตาม $\overline{MN}$

A
/

B

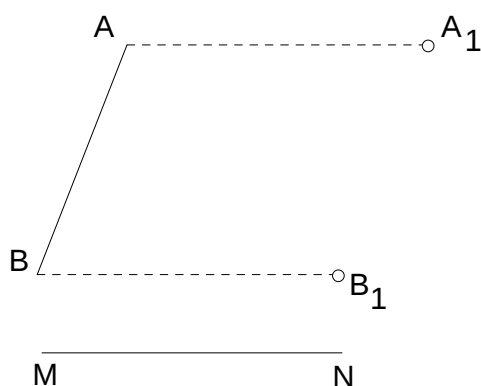
M N

แนวคิด ในการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรง AB ให้หาจุด

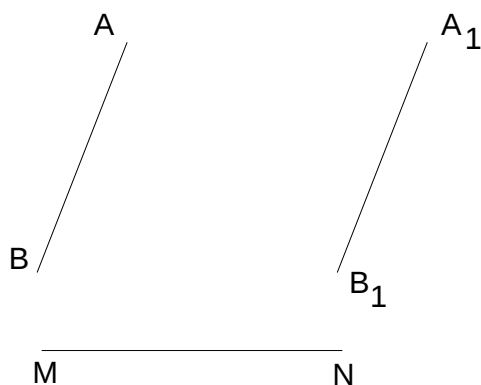
..... และ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของจุด A และ B ตามลำดับ ก็เป็นการ
เพียงพอที่จะได้ ซึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง AB

จากแนวคิดทำได้ดังนี้

1. ลาก และ ให้มีทิศทางและขนาดเช่นเดียวกับ $\overline{MN}$

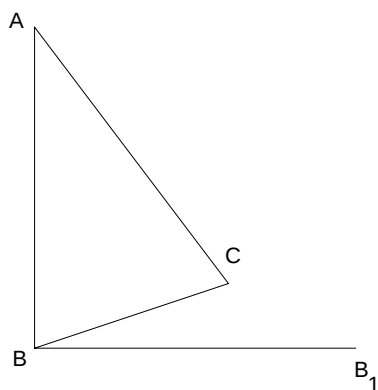


2. ลาก $\overline{A_1B_1}$ จะได้ส่วนของเส้นตรง เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง AB
ตาม $\overline{MN}$

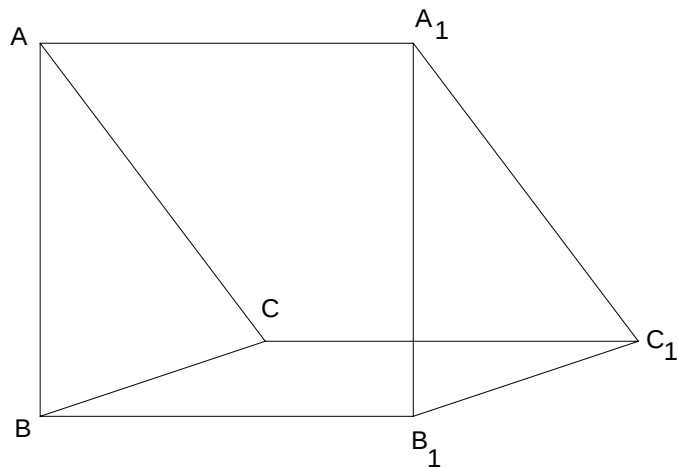


ตัวอย่างที่ 3

จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ตาม $\overline{BB_1}$

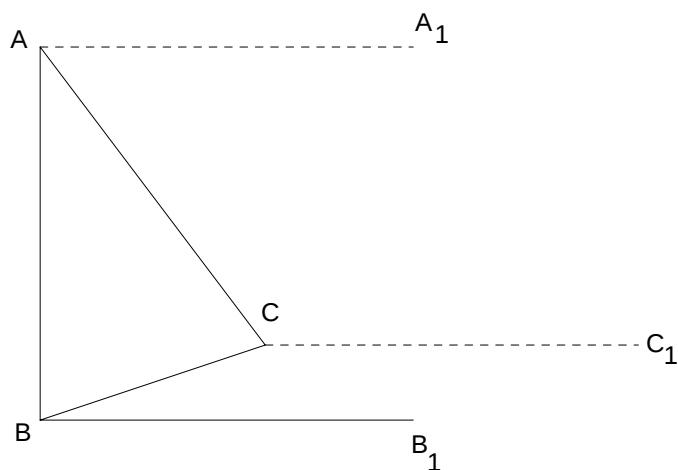


แนวคิด ในการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบซึ่งเป็นรูป $\triangle ABC$ ให้หาจุด
 และ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานของจุด A และ C ตามลำดับ ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้รูป $\triangle A_1B_1C_1$ ซึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูป $\triangle ABC$

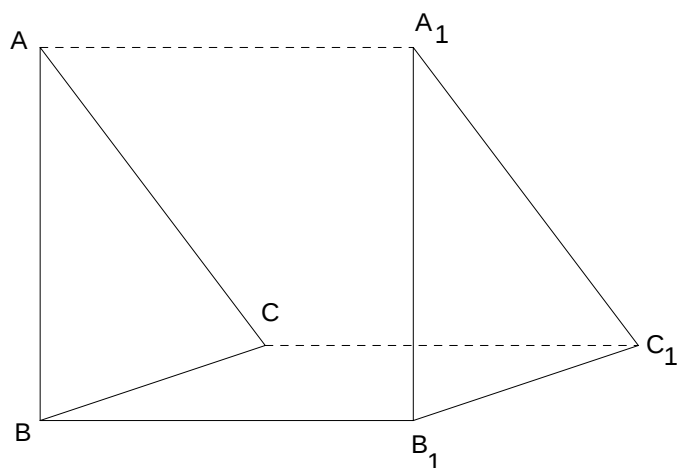


จากแนวคิดทำได้ดังนี้

1. ลาก และ ให้มีทิศทางและขนาดเช่นเดียวกับ $\overline{BB_1}$



2. ลาก , และ จะได้ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน $\triangle ABC$ ตาม $\overline{BB_1}$

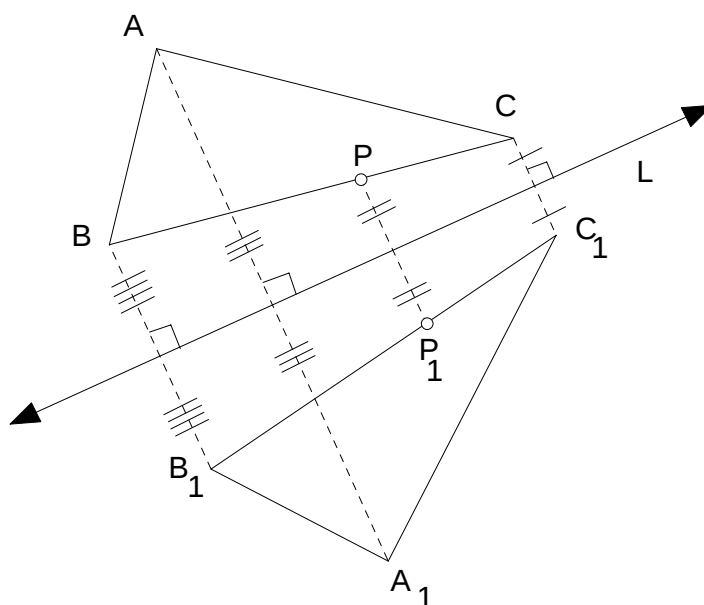


2. การสะท้อน

การสะท้อนของรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบที่มีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน หมายถึง การแปลงซึ่งแต่ละจุด P บนรูปต้นแบบจะมีคู่ของจุด P หรือภาพของจุด P สมมติว่าชื่อจุด P_1 เป็นภาพที่ได้จากการแปลงจุด P โดยที่เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง PP_1

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ

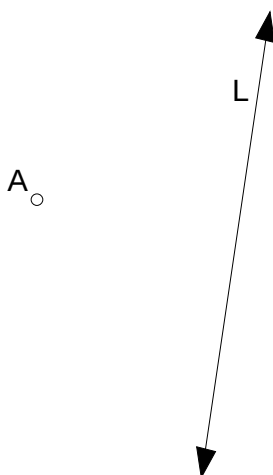
การสะท้อนของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน แล้วได้ภาพคือรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ หมายถึง ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนรูปต้นแบบจะได้ภาพจุด P_1 บนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ โดยที่เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง PP_1



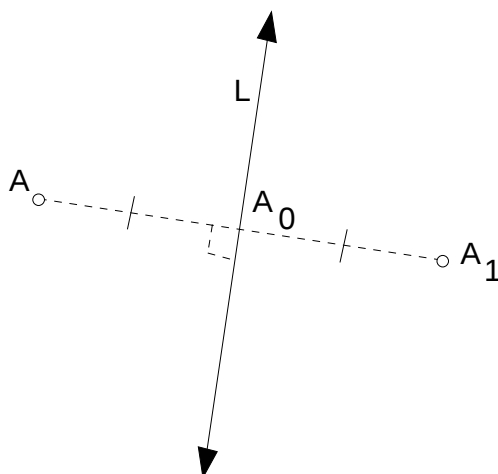
ดังนั้น จากรูปจะเห็นว่าการสะท้อนจุด A ไปที่จุด A_1 สะท้อนจุด B ไปที่จุด B_1 และสะท้อนจุด C ไปที่จุด C_1 โดยที่เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ และ $\overline{CC_1}$

นั่นคือ ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนรูปสามเหลี่ยม ABC แล้วจะมีจุด P_1 บนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ ซึ่งเส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{PP_1}$ ด้วย

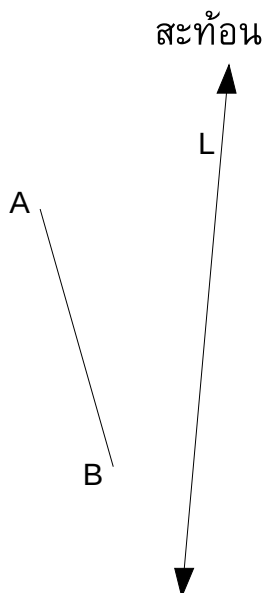
ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้จุด A เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



แนวคิด ในการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นจุด ให้เราลากส่วนของเส้นตรง โดยให้ตั้งฉากกับเส้นตรง L ที่จุด แล้วต่อออกไปถึงจุด โดยให้ $A_0A_1 = \dots\dots\dots$ จะได้จุด เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนจุด A ดังนี้



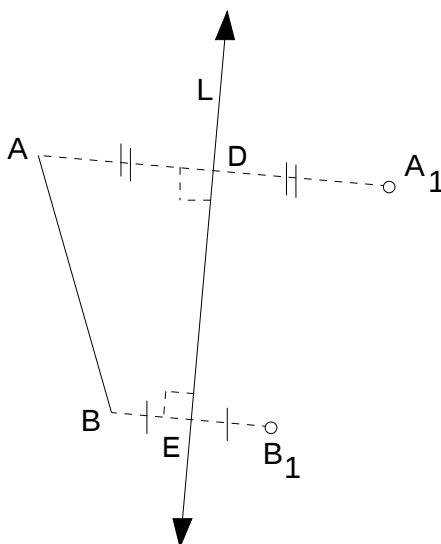
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง **AB** เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการสะท้อนส่วนของเส้นตรง **AB** โดยมีเส้นตรง **L** เป็นเส้น



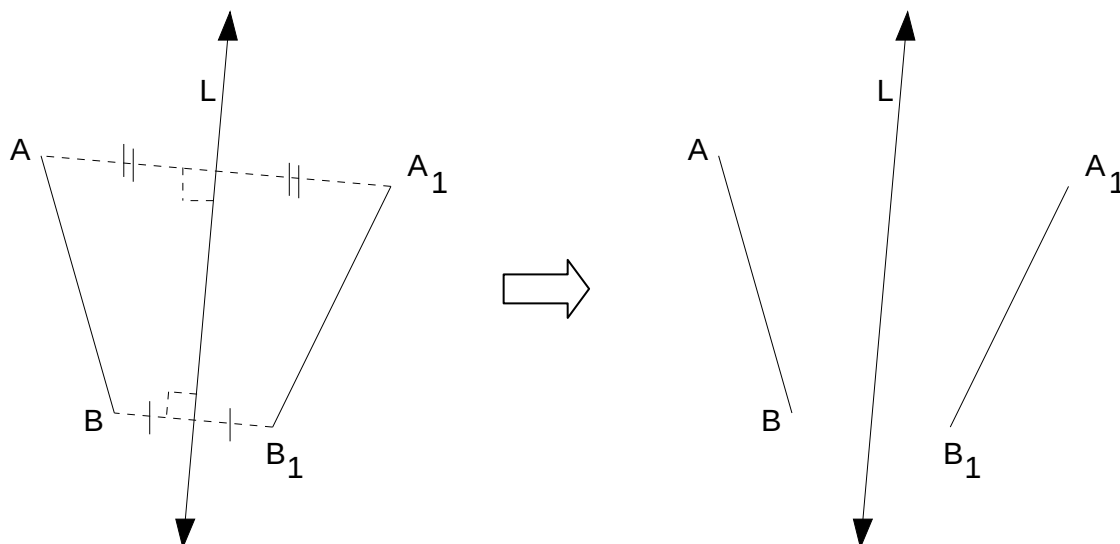
แนวคิดในการหาภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรง **AB** เราหาจุด และ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด **A** และ **B** ตามลำดับ ด้วยเส้นสะท้อน **L** ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ภาพที่ได้จากการสะท้อนส่วนของเส้นตรง **AB**

จากแนวคิดทำได้ดังนี้

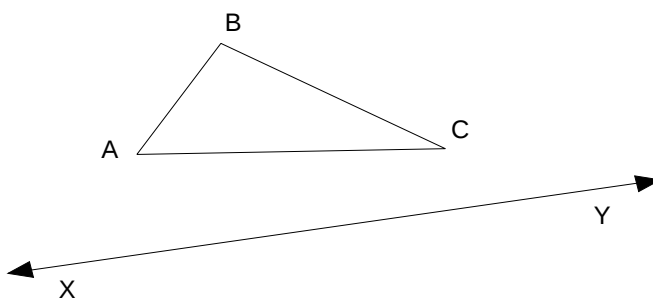
1. ลาก และ ให้ตั้งฉากกับเส้นตรง **L** ที่จุด **D** และ **E** ตามลำดับ และให้เส้นตรง **L** แบ่งครึ่ง และ



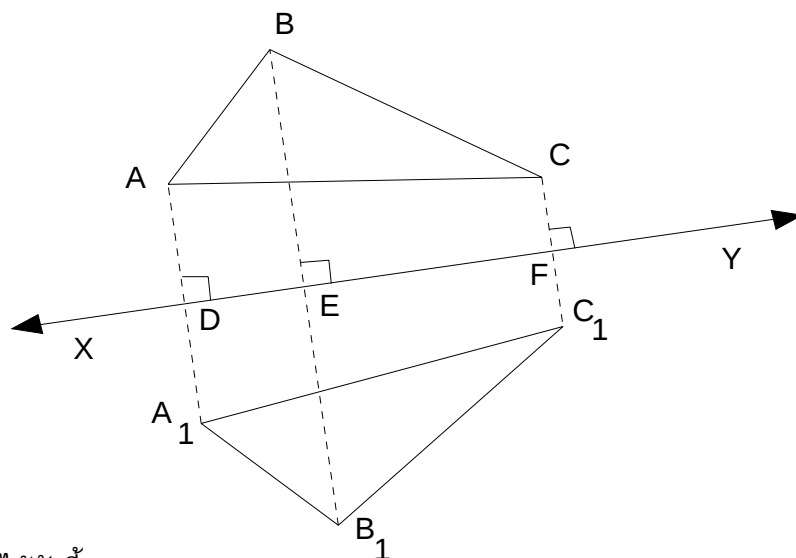
2. ลาก จะได้ส่วนของเส้นตรง เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนส่วนของเส้นตรง AB โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



ตัวอย่างที่ 6 กำหนดรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบและ $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นสะท้อน จงหาภาพที่ได้จากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$

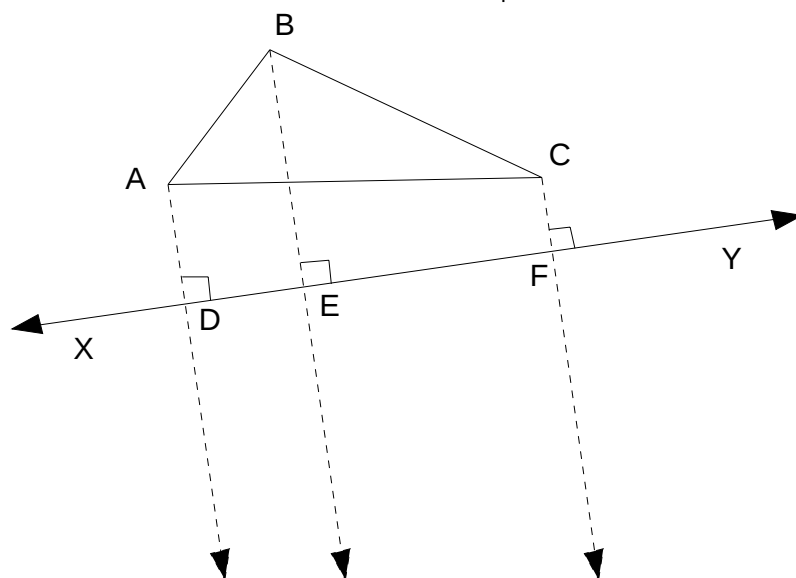


แนวคิดในการหาภาพที่ได้จากการสะท้อนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นรูป $\triangle ABC$ เราหาจุด , และ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด A , B และ C ตามลำดับ ด้วยเส้นสะท้อน $\overleftrightarrow{XY}$ ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ $\triangle A_1B_1C_1$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$

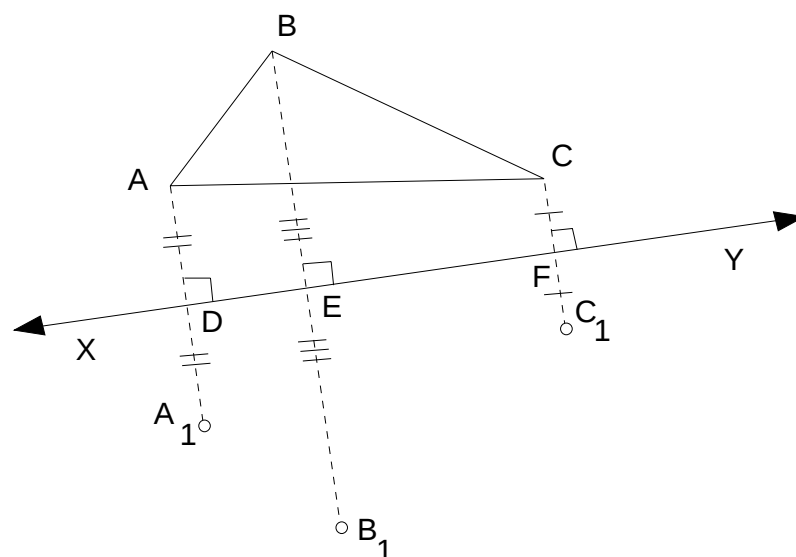


จากแนวคิดทำได้ดังนี้

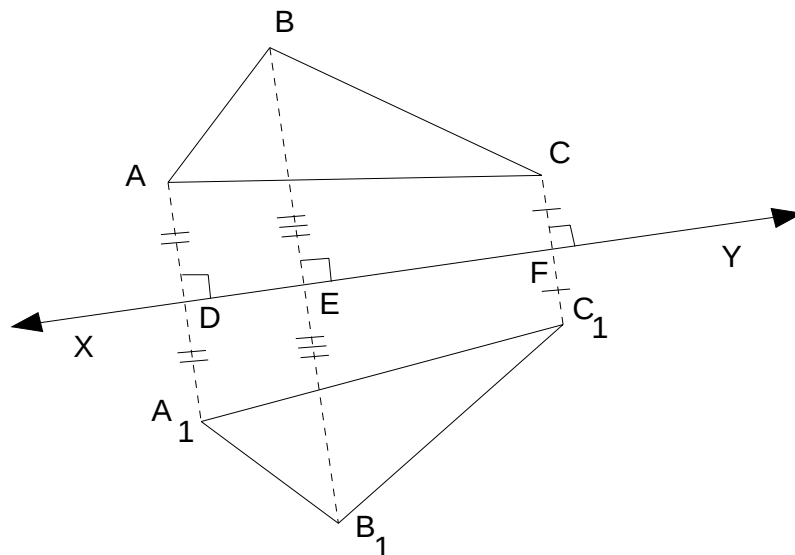
1. ลาก , และ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{XY}$ ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ



2. หาจุด , และ บน $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ และ $\overleftrightarrow{CF}$ ตามลำดับ โดยให้ $AD = \dots\dots\dots$, $BE = \dots\dots\dots$ และ $CF = \dots\dots\dots$

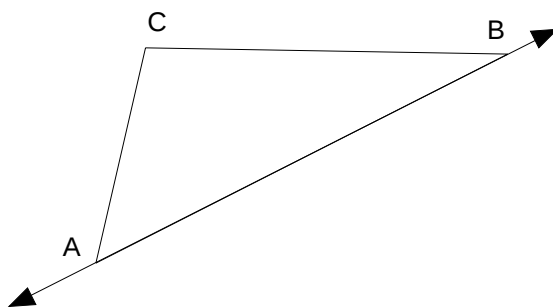


3. ลาก , และ

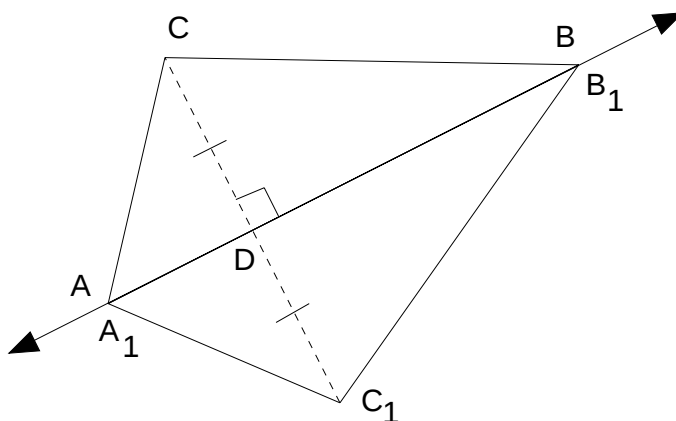


จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$ ด้วยเส้นสะท้อน $\overleftrightarrow{XY}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบและ $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นสะท้อน จงหาภาพที่ได้จากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$

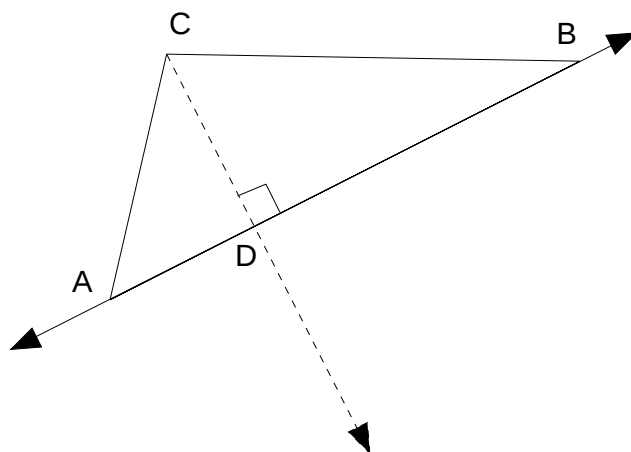


แนวคิด ในการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นรูป $\triangle ABC$ ที่มีด้าน AB อยู่บนเส้นสะท้อน เราหาจุด ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนจุด C ด้วยเส้นสะท้อน AB ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ $\triangle A_1B_1C_1$ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$

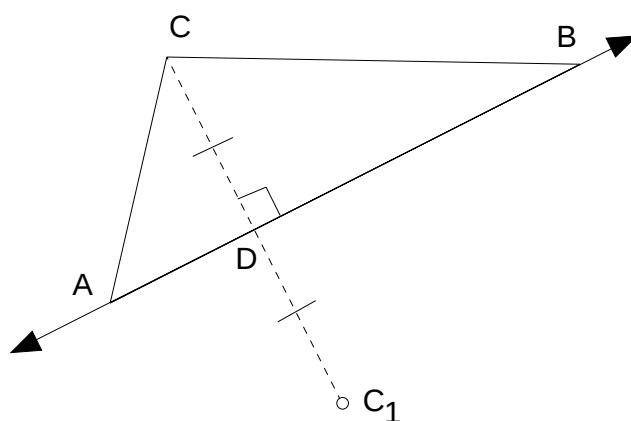


จากแนวคิด ทำได้ดังนี้

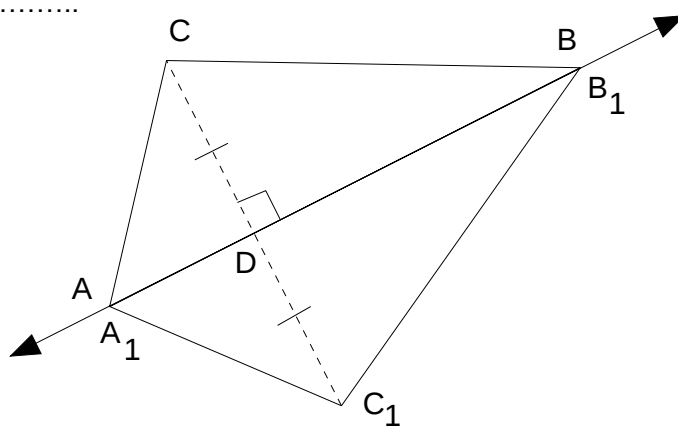
1. ลาก ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$ ที่จุด D



2. หาจุด บน $\overrightarrow{CD}$ โดยให้ $CD = \dots\dots\dots$



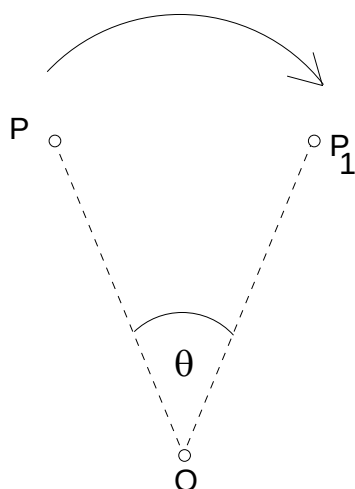
3. ลาก ,



จะได้ เป็นภาพที่ได้จากการสะท้อน $\triangle ABC$ ด้วยเส้นสะท้อน AB

3. การหมุน

การหมุนรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบที่มีจุด O เป็นจุดหมุน ด้วยมุมที่มีขนาด θ ซึ่งระบุทิศทาง (ทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา) หมายถึง การแปลงซึ่งแต่ละจุด P บนรูปต้นแบบจะมีจุด P_1 บนภาพซึ่ง $OP = OP_1$ และมุม POP_1 มีขนาดเท่ากับ θ โดยมีทิศทางตามที่ระบุ



ถ้าให้ O เป็นจุดหมุน

หมุนจุด P ซึ่งเป็นจุดต้นแบบบนระนาบที่ไม่ใช่จุดหมุน

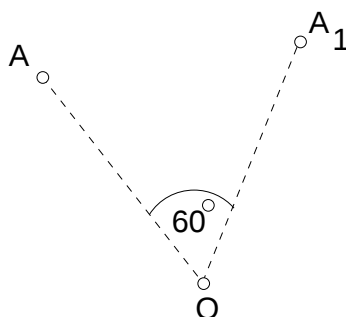
จะได้จุด P_1 เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนจุด P รอบจุดหมุน ด้วยมุมที่มีขนาด θ ในทิศทางเข็มนาฬิกา ซึ่งทำให้ $OP = OP_1$ และมุม POP_1 มีขนาดเท่ากับ θ

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้จุด A เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการหมุนจุด A ในทิศทางเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° องศา โดยมีจุด O เป็นจุดหมุน

A ○

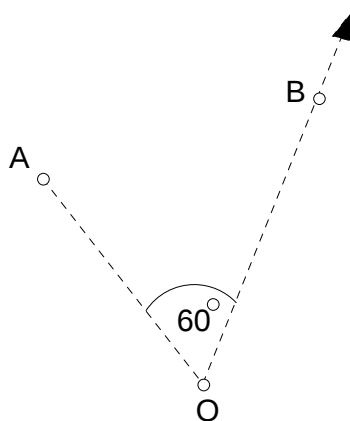
○
 O

แนวคิด ในการหาภาพที่ได้จากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นจุด เราจะสร้าง ในทิศทางเข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ และให้ $OA = \dots\dots\dots$ ก็จะได้จุด เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนจุด A ตามทิศทางและขนาดมุมดังกล่าวข้างต้น

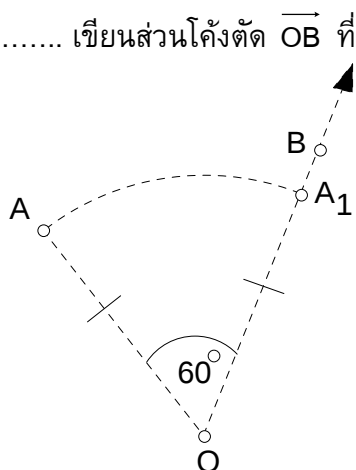


จากแนวคิดทำได้ดังนี้

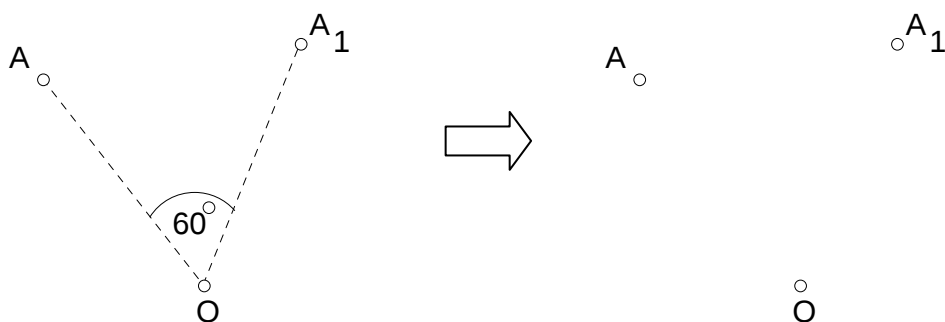
1. ลาก $\overline{AO}$ แล้วสร้าง ในทิศตามเข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ 60° องศา



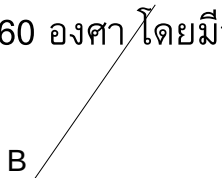
2. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด A_1



3. จะได้จุด เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด A ตามเข็มนาฬิกาการรอบจุด O ด้วยมุมที่มีขนาด 60°

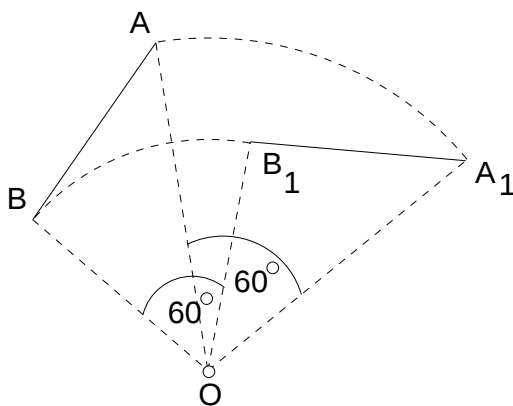


ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ส่วนของเส้นตรง **AB** เป็นรูปต้นแบบ จงหาภาพที่ได้จากการหมุนส่วนของเส้นตรง **AB** ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60 องศา โดยมีจุด **O** เป็นจุดหมุน



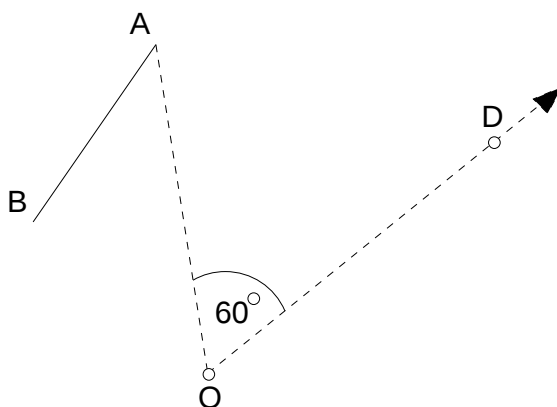
O

แนวคิด ในการหาภาพที่ได้จากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรง **AB** เราหาจุด และ ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด **A** และ **B** ตามลำดับ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60 องศา โดยมีจุด **O** เป็นจุดหมุน ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ภาพที่ได้จากการหมุนส่วนของเส้นตรง **AB**

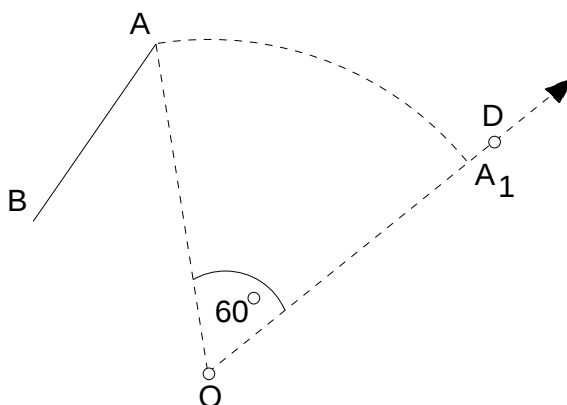


จากแนวคิดทำได้ดังนี้

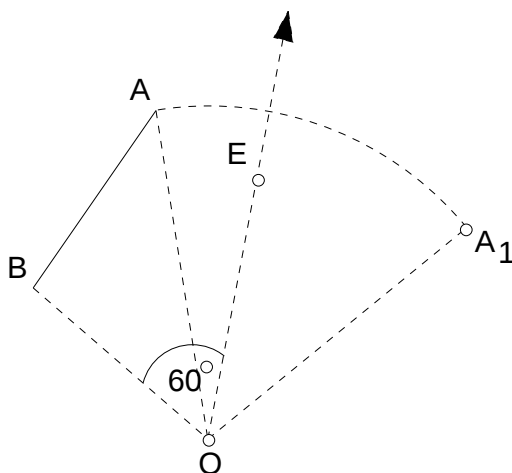
1. สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา ตามเข็มนาฬิกา



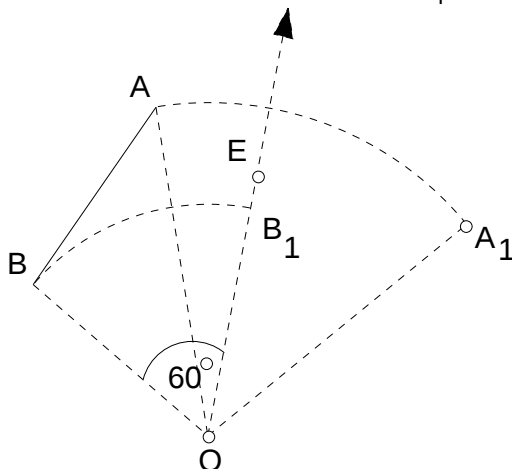
2. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OD}$ ที่จุด A_1



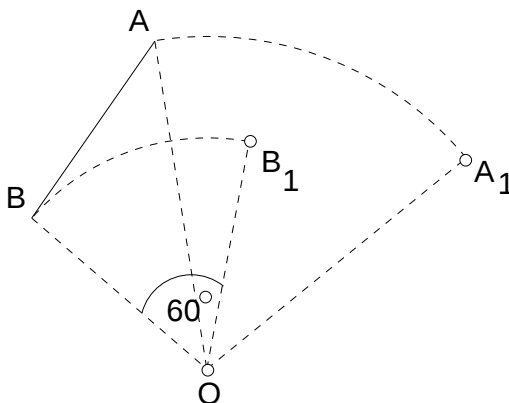
3. สร้าง ให้มีขนาดเท่ากับ 60 องศา ตามเข็มนาฬิกา



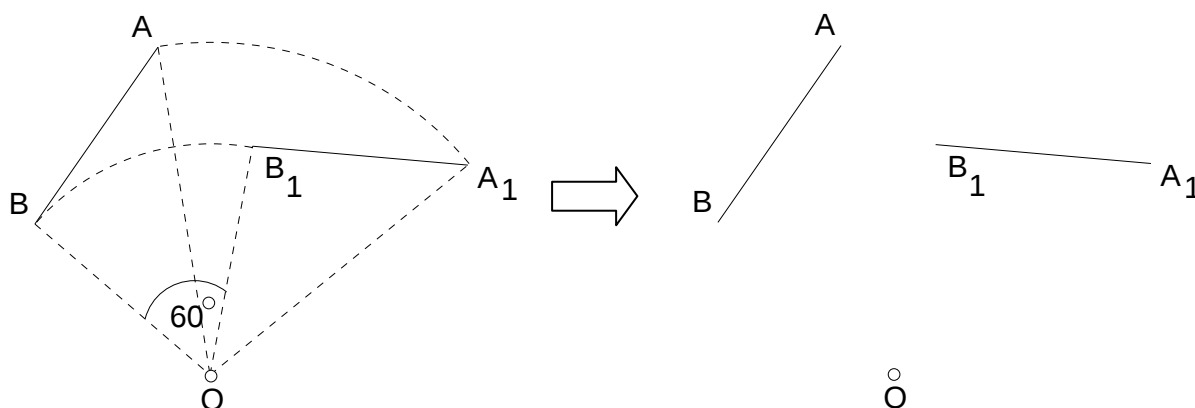
4. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OE}$ ที่จุด B_1



5. จะได้จุด และ เป็นภาพที่ได้จากการหมุนจุด A และ B ตามเข็มนาฬิกา รอบจุด O ด้วยมุมที่มีขนาด 60°

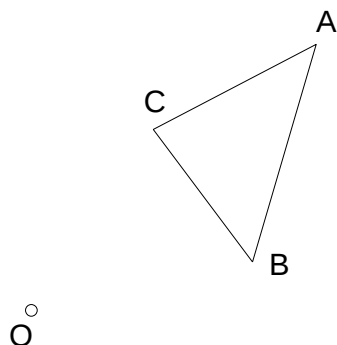


6. ลาก จะได้ส่วนของเส้นตรง เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรง AB ตามเข็มนาฬิกา รอบจุด O ด้วยมุมที่มีขนาด 60°



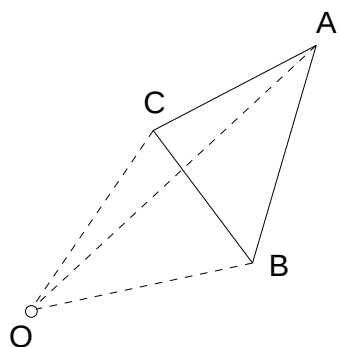
ตัวอย่างที่ 10

กรณีที่ จุดหมุน O ไม่อยู่บนรูปต้นแบบ

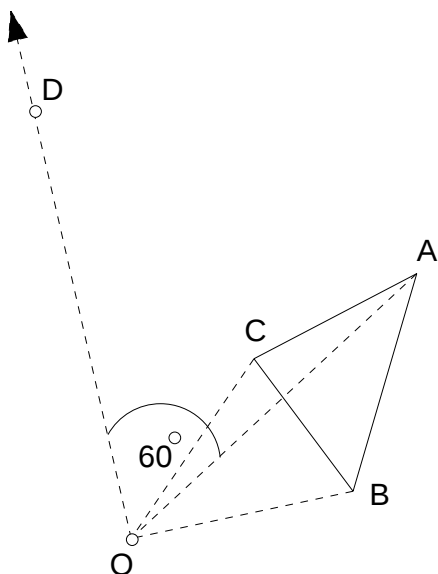


กำหนดรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ และมีจุด O เป็นจุดหมุนซึ่งไม่อยู่บนรูปต้นแบบ

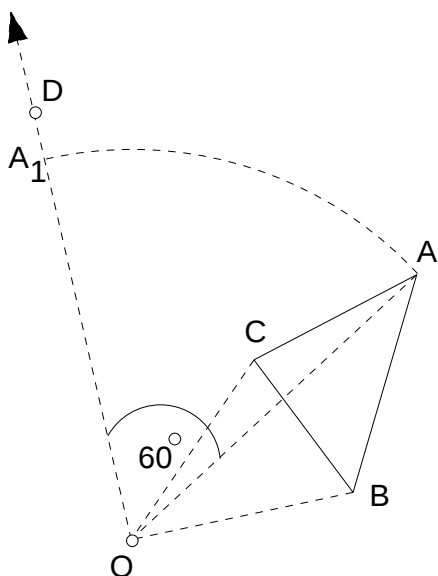
ถ้าหมุนรูป $\triangle ABC$ รอบจุดหมุน O ในทิศทางเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° จะดำเนินการดังต่อไปนี้



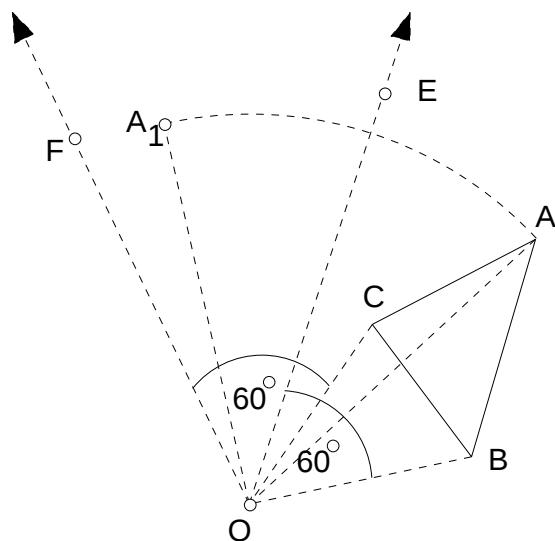
1. ลาก ,และ



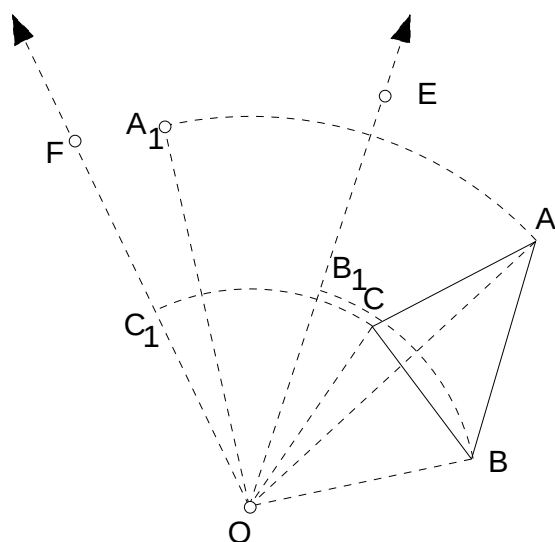
2. สร้าง ในทิศทวนเข็มนาฬิกาให้
มีขนาดเท่ากับ 60°



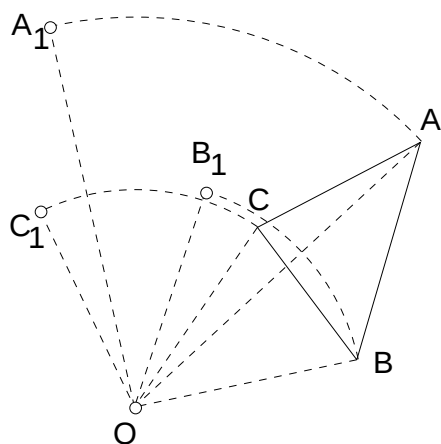
3. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี
เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OD}$ ที่จุด A_1



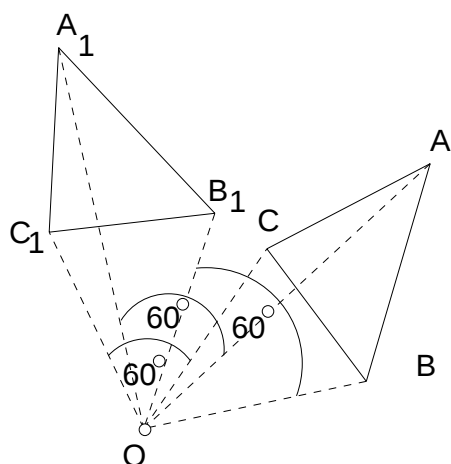
4. ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2
สร้าง และ ในทิศทวน
เข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ 60°



5. ในทำนองเดียวกับข้อ 3
ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี
และ เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OE}$ และ
 $\overrightarrow{OF}$ ที่จุด และ ตามลำดับ



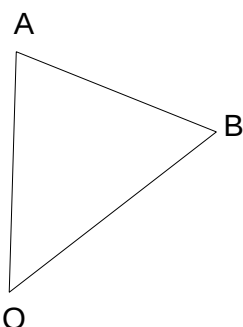
6. จะได้จุด , และ เป็น
ภาพที่เกิดจากการหมุนของ A , B และ
C ตามลำดับ



7. ลาก , และ
จะได้รูป เป็นภาพที่ได้
จากการหมุน $\triangle ABC$ ทวนเข็มนาฬิกา
รอบจุด O ด้วยมุมที่มีขนาด
 60°

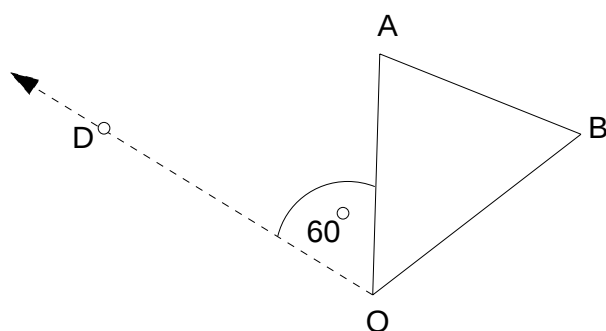
ตัวอย่างที่ 11

กรณีที่ 2 จุดหมุน O อยู่บนรูปต้นแบบ

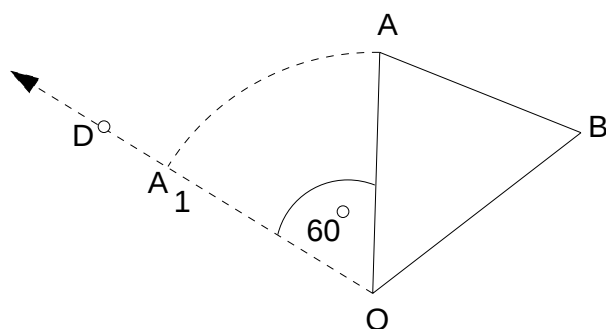


กำหนดรูป $\triangle ABO$ เป็นรูปต้นแบบ และมีจุด O เป็นจุดหมุนซึ่งอยู่บนรูปต้นแบบ

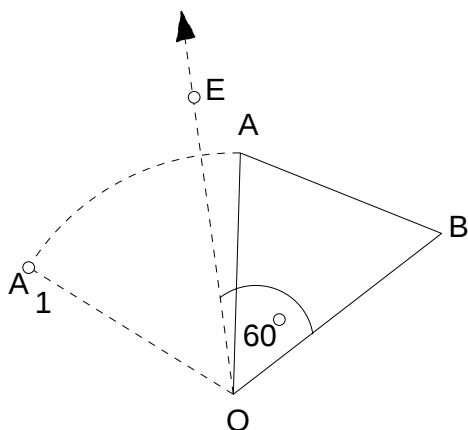
ถ้าหมุนรูป $\triangle ABO$ รอบจุดหมุน O ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° จะดำเนินการดังต่อไปนี้



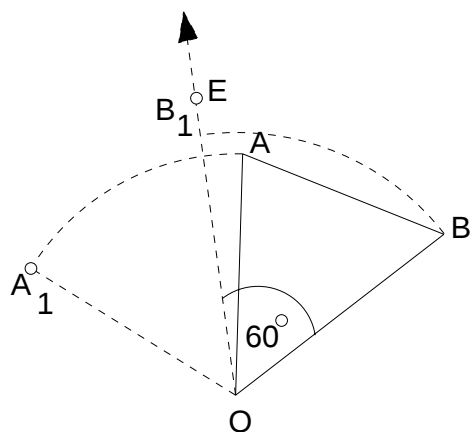
- เนื่องจากจุด O อยู่บนรูปต้นแบบ สร้าง ในทิศทวนเข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ 60°



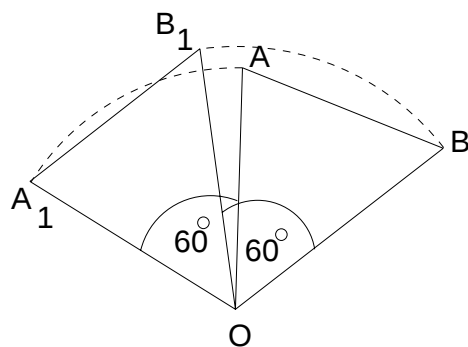
- ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OD}$ ที่จุด A_1



3. สร้าง ในทิศทวน
เข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ
 60°

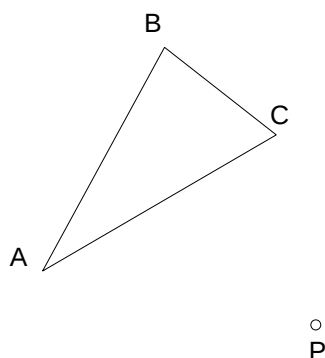


4. ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี
..... เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{OE}$
ที่จุด B_1

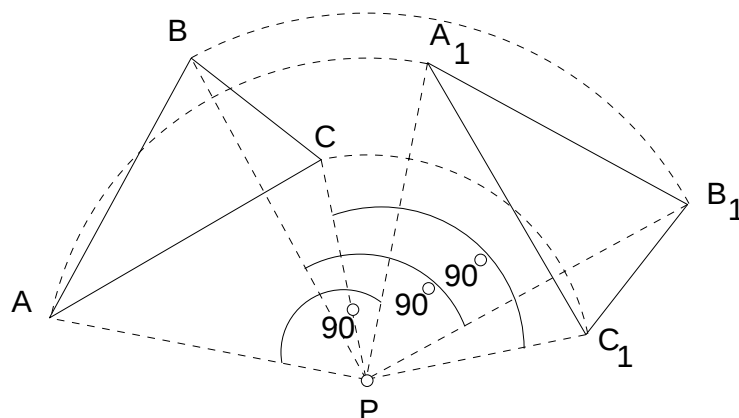


5. เนื่องจากจุด O เป็นจุดหมุนที่อยู่บน
รูปต้นแบบ
ดังนั้น ลาก , และ
.....
จะได้รูป เป็นภาพที่ได้จาก
การหมุน $\triangle ABO$ ทวนเข็มนาฬิการอบจุด
O ด้วยมุมที่มีขนาด 60°

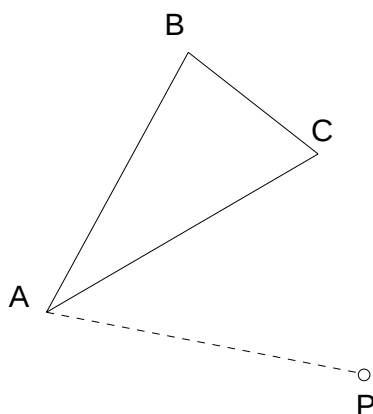
ตัวอย่างที่ 12 กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบและจุด P เป็นจุดหมุน จงหาภาพที่เกิดจากการหมุน $\triangle ABC$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยมุมที่มีขนาด 90°



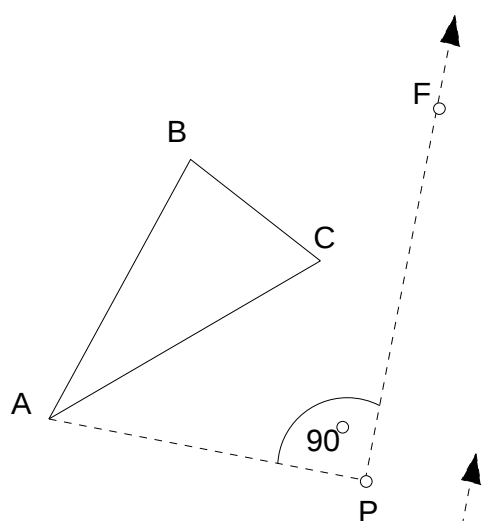
แนวคิด ในการหาภาพที่ได้จากการหมุนของรูปต้นแบบซึ่งเป็นรูป $\triangle ABC$ เราจะสร้าง ,
 และ ในทิศตามเข็มนาฬิกาให้มีขนาดเท่ากับ 90° และให้ $PA = \dots\dots\dots$,
 $PB = \dots\dots\dots$ และ $PC = \dots\dots\dots$ แล้วลาก , และ ก็จะได้รูป $\triangle A_1B_1C_1$
 เป็นภาพที่ได้จากการหมุนรูป $\triangle ABC$ ตามทิศทางและขนาดมุมดังข้างต้น



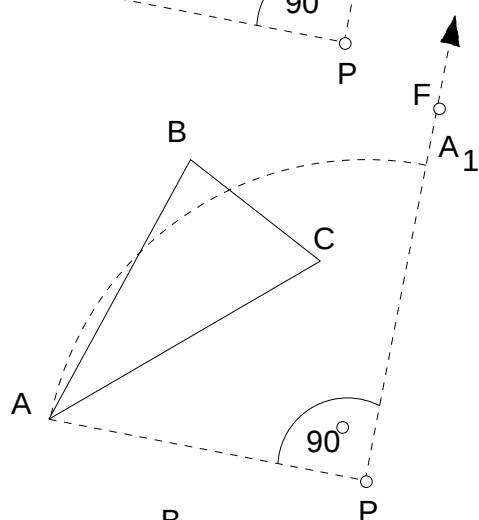
จากแนวคิดทำได้ดังนี้



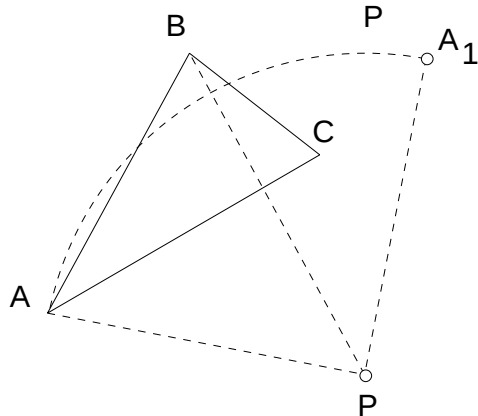
1. ลาก



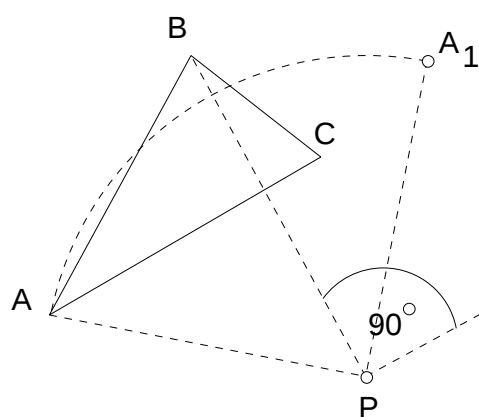
2. สร้าง ในทิศตาม
เข็มนาฬิกาให้มีขนาด
เท่ากับ 90°



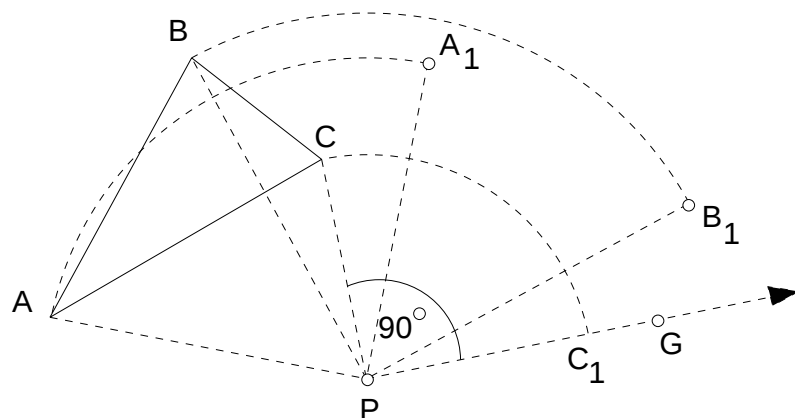
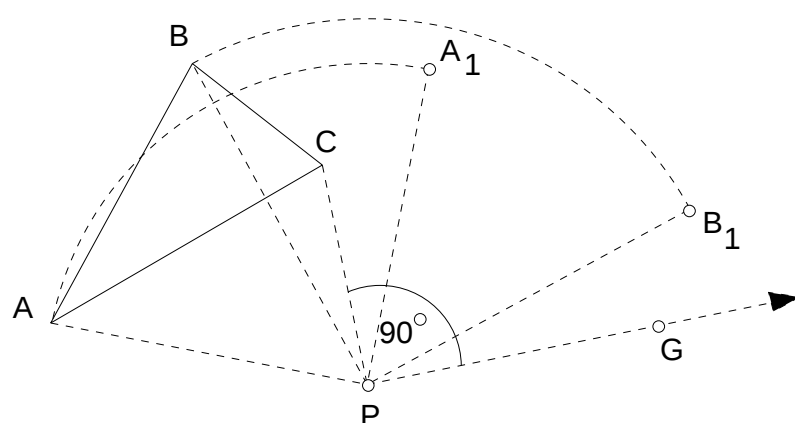
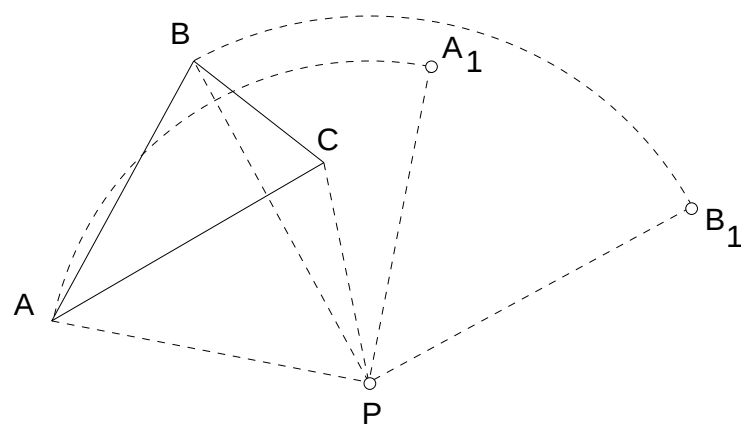
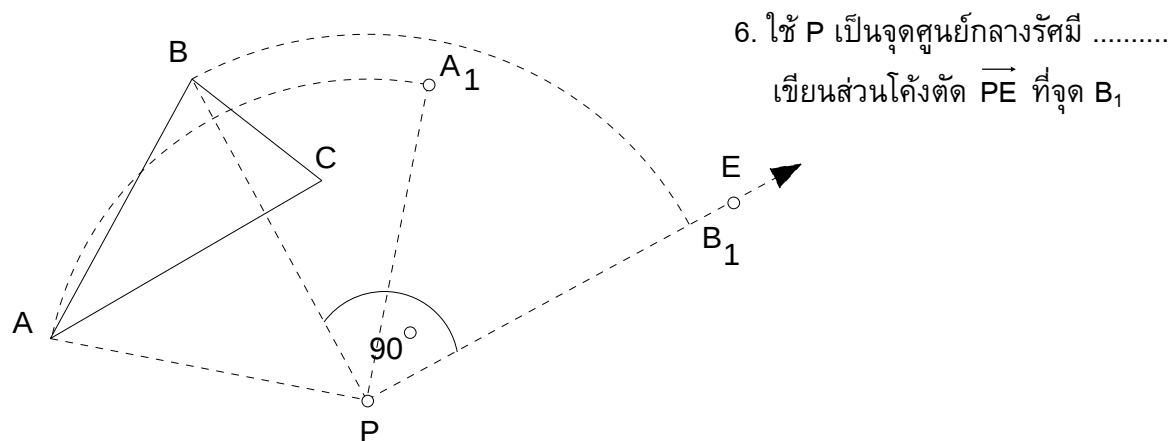
3. ใช้ P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี
เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{PF}$ ที่จุด A_1

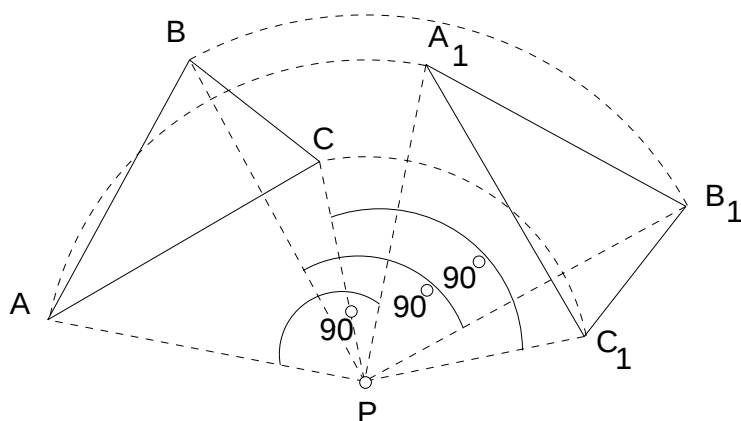


4. ลาก



5. สร้าง ในทิศตาม
เข็มนาฬิกาให้มีขนาด
เท่ากับ 90°





10. ลาก , และ

.....

จะได้ $\triangle A_1B_1C_1$ เป็น
ภาพที่ได้จากการหมุน
 $\triangle ABC$ ตามเข็มนาฬิกา
รอบจุด P ด้วยมุมที่มีขนาด
 90°

ข้อสังเกต

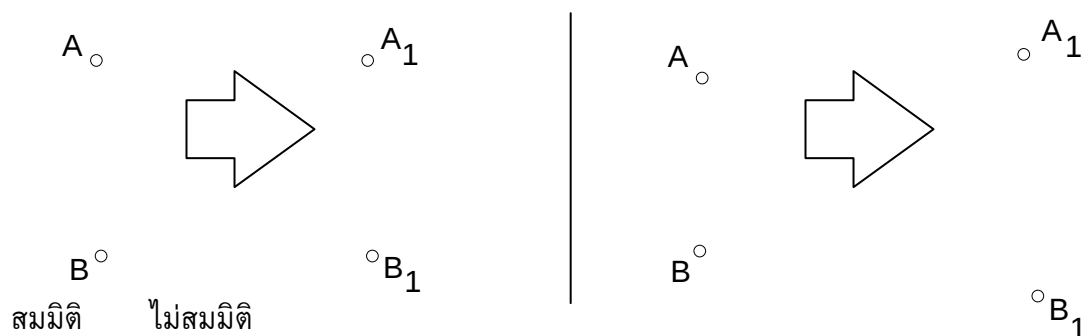
จุดบนรูปต้นแบบและจุดบนภาพที่ได้จากการหมุน แต่ละคู่จะอยู่บนวงกลมที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลางเดียวกัน แต่วงกลมเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน

สมบัติสมมติของการแปลง

สมบัติสมมติ (isometry) ของรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการแปลงมีสมบัติดังต่อไปนี้

1) ระยะห่างระหว่างจุด (Distance)

ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ บนรูปต้นแบบจะเท่ากับระยะห่างระหว่างภาพของจุดสองจุดนั้น

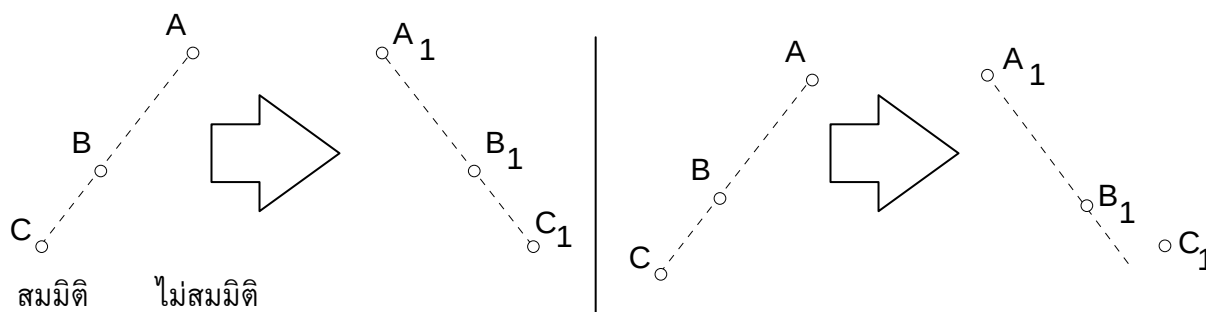


ระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ
ระยะห่างระหว่างภาพของจุด A และจุด B คือ
จุด A_1 และจุด B_1 ตามลำดับ

ระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B ไม่เท่ากับ
ระยะห่างระหว่างภาพของจุด A และจุด B
คือจุด A_1 และจุด B_1 ตามลำดับ

2) ภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity)

ถ้าจุดสามจุดบนรูปต้นแบบอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วภาพของจุดทั้งสามนั้นจะต้องอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน

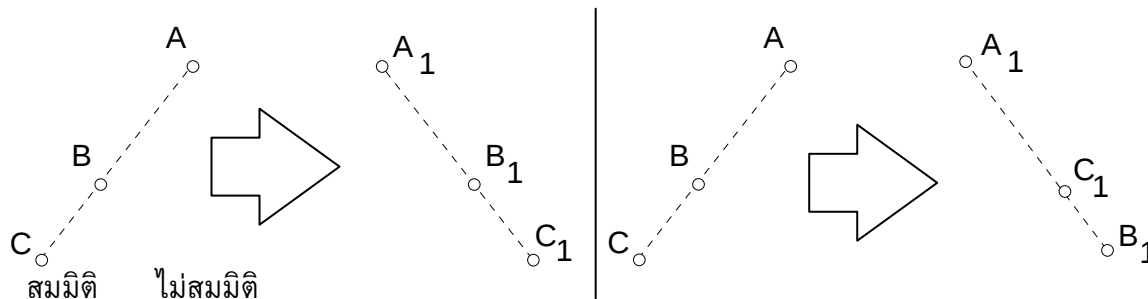


จุด A , B และ C อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และภาพของจุด A , B และ C คือ จุด A₁ , B₁ และ C₁ ตามลำดับก็อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จุด A , B และ C อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แต่ภาพของจุด A , B และ C คือ จุด A₁ , B₁ และ C₁ ตามลำดับ ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

3) การอยู่ระหว่างจุด (Betweenness)

ถ้า A , B และ C เป็นจุดบนรูปต้นแบบโดยที่จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C แล้วภาพของจุด B จะต้องอยู่ระหว่างภาพของจุด A และภาพของจุด C ด้วย

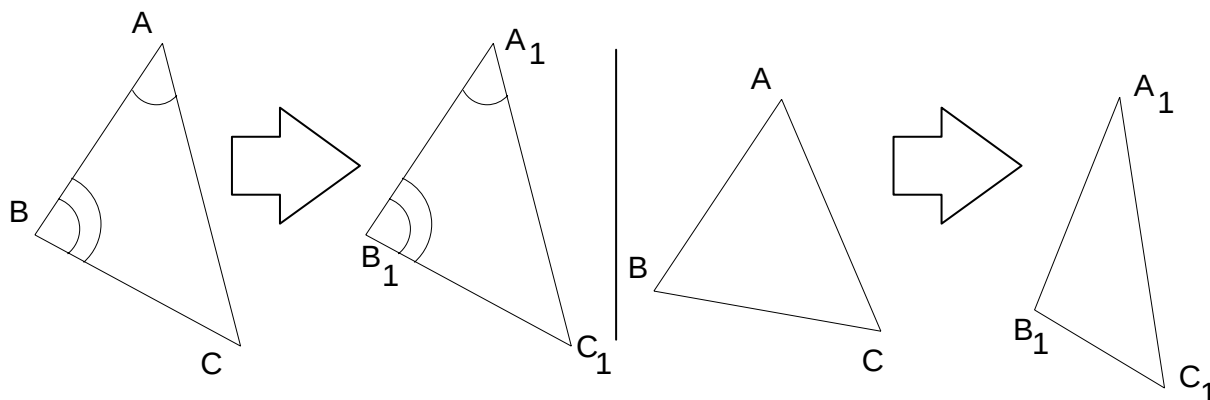


จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C และภาพของจุด B คือจุด B₁ อยู่ระหว่างภาพของจุด A และจุด C คือจุด A₁ และจุด C₁ ตามลำดับ

จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C แต่ภาพของจุด B คือจุด B₁ ไม่ได้อยู่ระหว่างภาพของจุด A และจุด C คือจุด A₁ และจุด C₁ ตามลำดับ

4) ขนาดของมุม (Angle Measure)

ขนาดของมุมใด ๆ บนรูปต้นแบบจะต้องเท่ากับขนาดของภาพของมุมนั้น ๆ



สมมติ ไม่สมมติ

$$\hat{BAC} = \hat{B_1A_1C_1} \quad , \quad \hat{ABC} = \hat{A_1B_1C_1} \quad \text{และ} \\ \hat{ACB} = \hat{A_1C_1B_1}$$

$$\hat{BAC} \neq \hat{B_1A_1C_1} \quad \text{หรือ} \quad \hat{ABC} \neq \hat{A_1B_1C_1} \\ \text{หรือ} \quad \hat{ACB} \neq \hat{A_1C_1B_1}$$

จากสมบัติสมมติเห็นได้ว่าการแปลงทางเรขาคณิตทั้ง 3 แบบ ดังข้างต้น มีสมบัติสมมติครบถ้วน
เนื่องจากทำให้เกิดภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเท่ากันกับรูปต้นแบบเสมอ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยม

นิยาม รูปสามเหลี่ยม ABC คือรูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A, B และ C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เรียกจุด A, B และ C ว่า “จุดยอด” ของรูปสามเหลี่ยม ABC

เรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า “ด้าน” ของรูปสามเหลี่ยม ABC

และเขียน $\triangle ABC$ แทนรูปสามเหลี่ยม ABC

ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

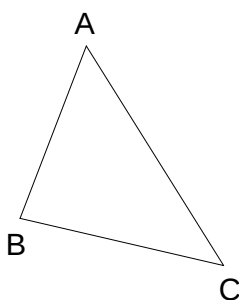
นิยาม

รูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ เท่ากันทุกประการเมื่อรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง

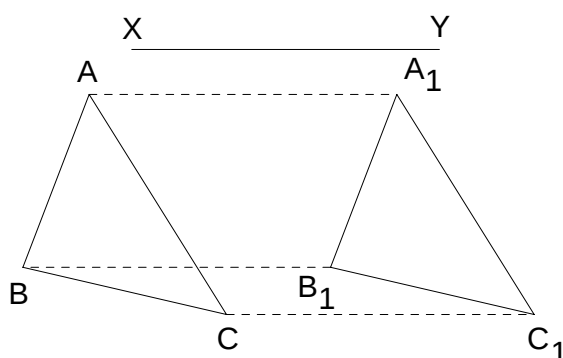
ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนพิจารณาภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่

กำหนดให้ต่อไปนี้

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ

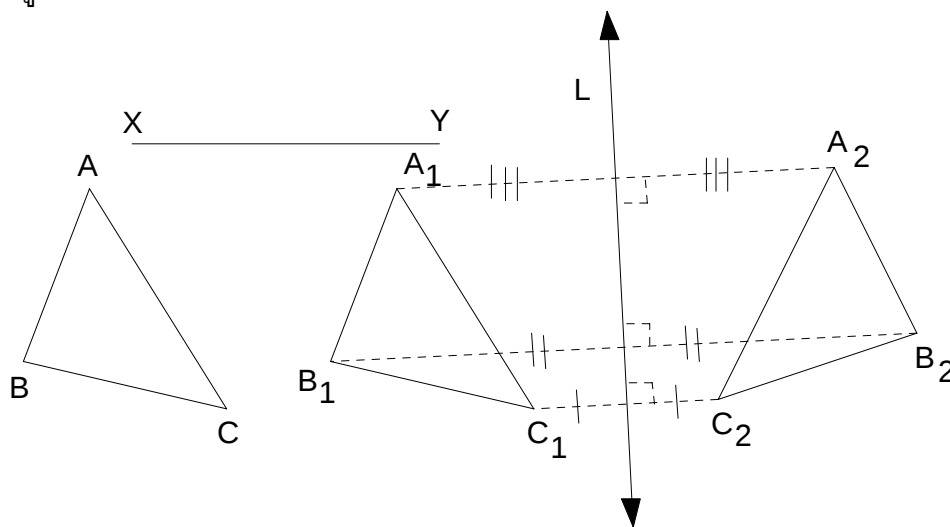


1. เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ตาม $\overline{XY}$



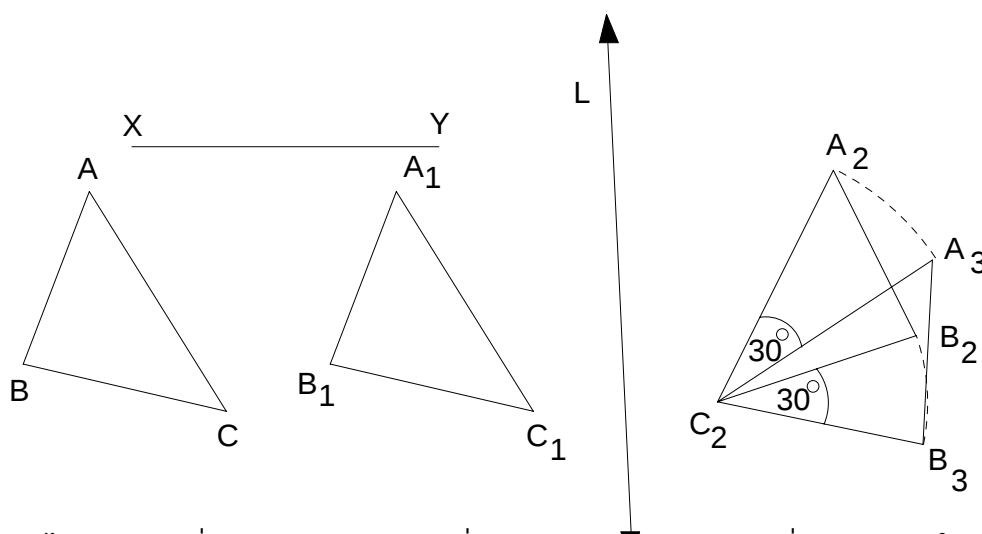
จะได้รูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ตาม $\overline{XY}$

2. สะท้อนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน



จะได้รูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม $A_1B_1C_1$ โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน

3. หมุนรูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 30° โดยมีจุด C_2 เป็นจุดหมุน



จะได้รูปสามเหลี่ยม $A_3B_3C_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูปสามเหลี่ยม $A_2B_2C_2$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 30° โดยมีจุด C_2 เป็นจุดหมุน

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม $A_3B_3C_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม ABC จำนวน 3 ครั้งโดย การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน

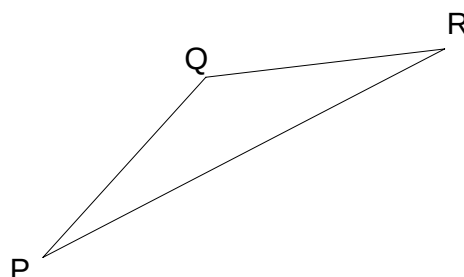
$$\text{ทำให้ } \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_3B_3C_2$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_2$$

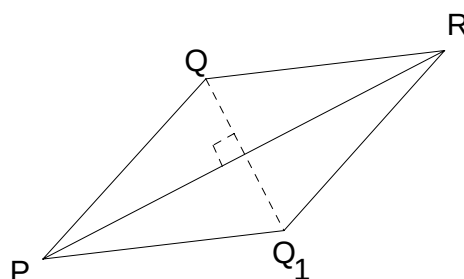
ตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนพิจารณาภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่

กำหนดให้ต่อไปนี้

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม PQR เป็นรูปต้นแบบ

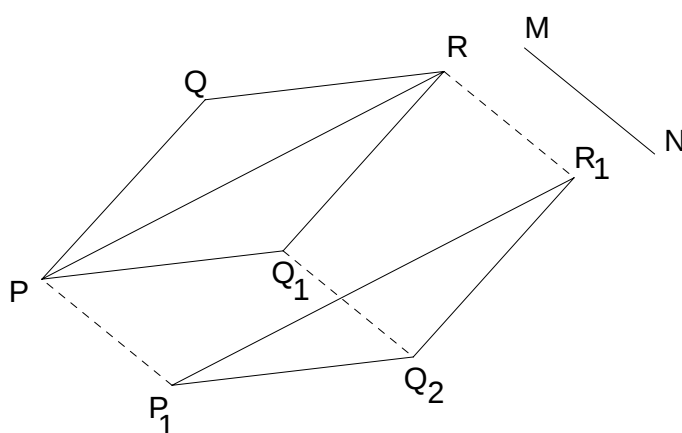


1. สะท้อนรูปสามเหลี่ยม PQR โดยมีส่วนของเส้นตรง PR เป็นเส้นสะท้อน



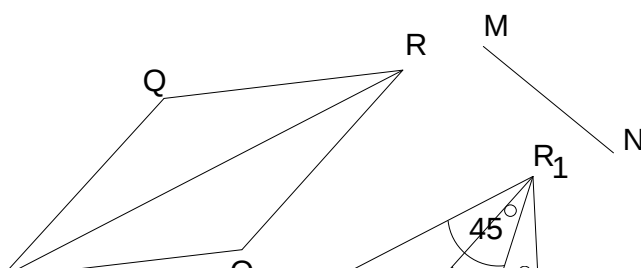
จะได้รูปสามเหลี่ยม เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม PQR โดยมีส่วนของเส้นตรง เป็นเส้นสะท้อน

2. เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม PQ_1R ตาม $\overline{MN}$



จะได้รูปสามเหลี่ยม เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม PQ_1R ตาม $\overline{MN}$

3. หมุนรูปสามเหลี่ยม $P_1Q_2R_1$ ในทิศทางเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 45° โดยมีจุด R_1 เป็นจุดหมุน



จะได้รูปสามเหลี่ยม เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูปสามเหลี่ยม $P_1Q_2R_1$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 45° โดยมีจุด เป็นจุดหมุน

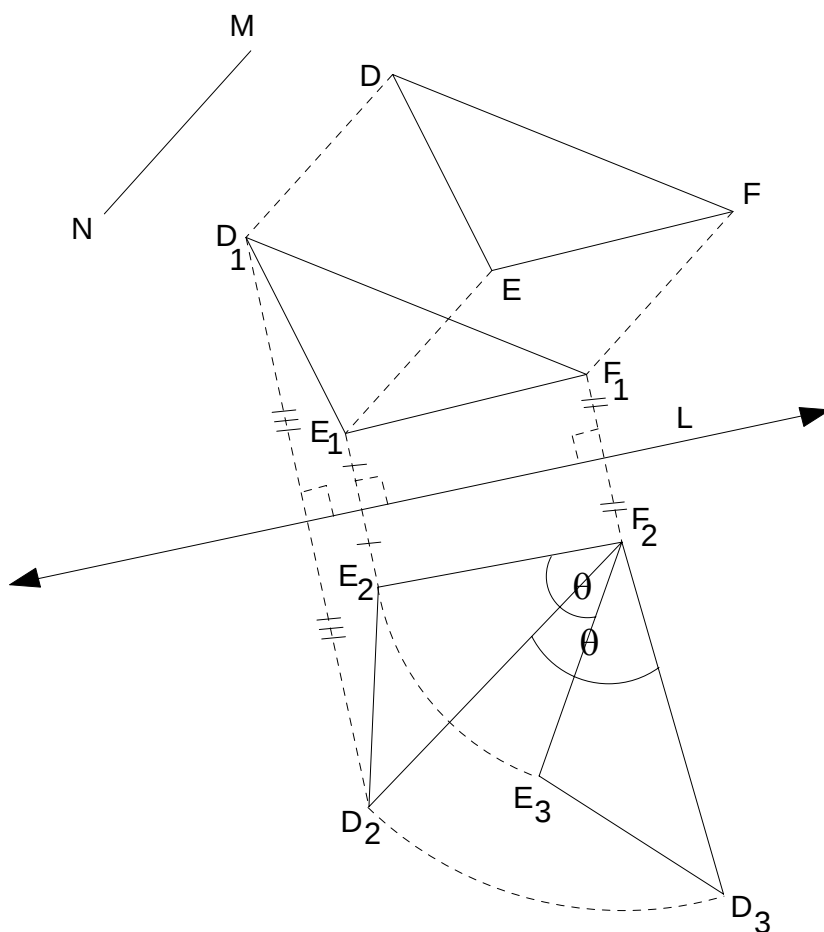
นั่นคือ รูปสามเหลี่ยม $P_2Q_3R_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม PQR จำนวน ครั้ง ได้แก่

ทำให้ $\triangle PQR \cong \dots \cong \dots \cong \dots$

ดังนั้น $\triangle PQR \cong \dots$

ตัวอย่างที่ 3 ให้นักเรียนพิจารณาภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม DEF แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

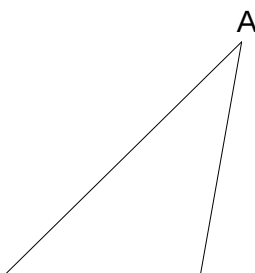
กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นรูปต้นแบบ $\overline{MN}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง และ L เป็นเส้นตรง



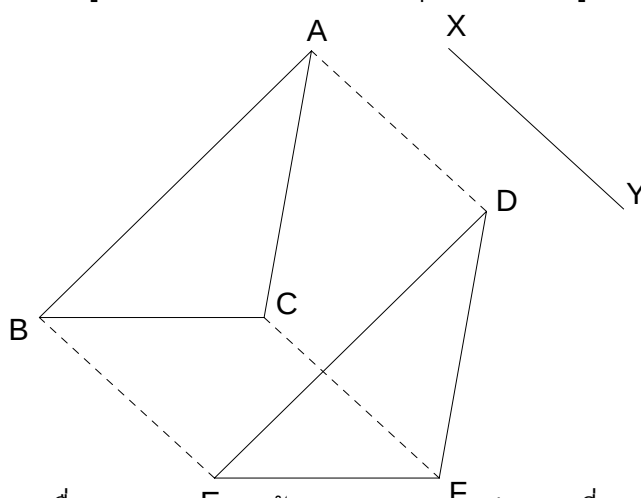
1. ภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปสามเหลี่ยม DEF ตาม $\overline{MN}$ คือ
 2. ภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม $D_1E_1F_1$ โดยมีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน คือ
 3. ภาพที่เกิดจากการหมุนรูปสามเหลี่ยม $D_2E_2F_2$ คือ ซึ่งมีจุดหมุนคือ และ หมุนในทิศ ด้วยขนาดมุม
 4. รูปสามเหลี่ยม $D_3E_3F_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม DEF จำนวน ครั้ง ได้แก่
- ดังนั้น $\triangle DEF \cong \dots \cong \dots \cong \dots$

ภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ



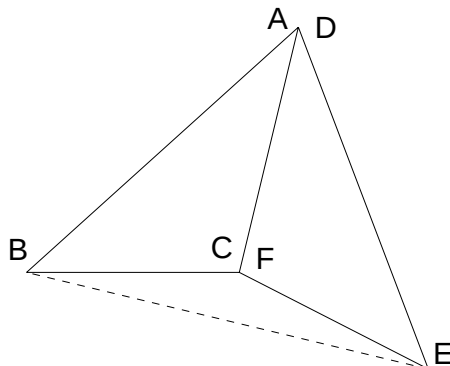
1. เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ตาม $\overline{XY}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน จากสมบัติสมมติทำให้รูปสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ABC



ดังนั้น ภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุด ด้าน และมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

- จุดที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
- ภาพของจุด A คือ จุด D
- ภาพของจุด B คือ จุด E
- ภาพของจุด C คือ จุด F
- ด้านที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
- ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE
- ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF
- ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD
- มุมที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
- ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF
- ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD
- ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE

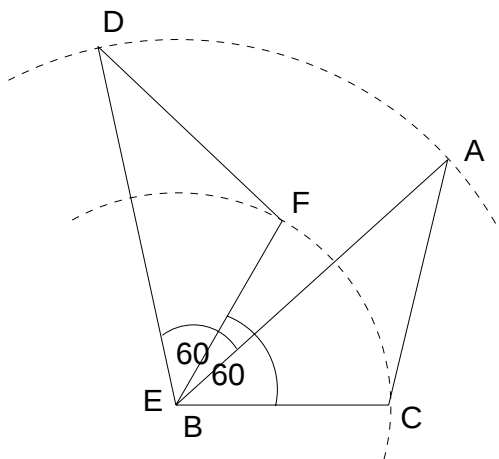
2. สะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีส่วนของเส้นตรง AC เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อน จากสมบัติสมมติทำให้รูปสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ABC



ดังนั้น ภาพที่เกิดจากการสะท้อนของจุด ด้าน และมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

- จุดที่เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
 - ภาพของจุด A คือ จุด D (A)
 - ภาพของจุด B คือ จุด E
 - ภาพของจุด C คือ จุด F (C)
- ด้านที่เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
 - ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE
 - ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF
 - ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD (CA)
- มุมที่เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
 - ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF
 - ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD
 - ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE

3. หมุนรูปสามเหลี่ยม ABC ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60 องศา โดยมีจุด B เป็นจุดหมุน จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน จากสมบัติสมมติทำให้รูปสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม ABC



ดังนั้น ภาพที่เกิดจากการหมุนของจุด ด้าน และมุม ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

- จุดที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
- ภาพของจุด A คือ จุด D
- ภาพของจุด B คือ จุด E (B)
- ภาพของจุด C คือ จุด F
- ด้านที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้
- ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE
- ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF
- ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD

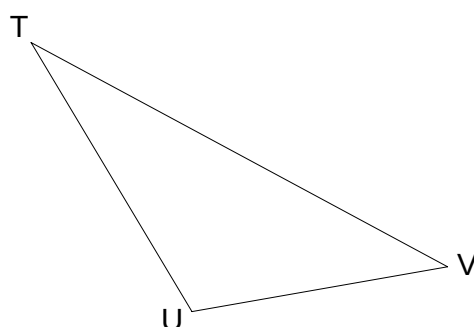
- มุมที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ต่อไปนี้

- ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF
- ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD
- ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE

สรุป

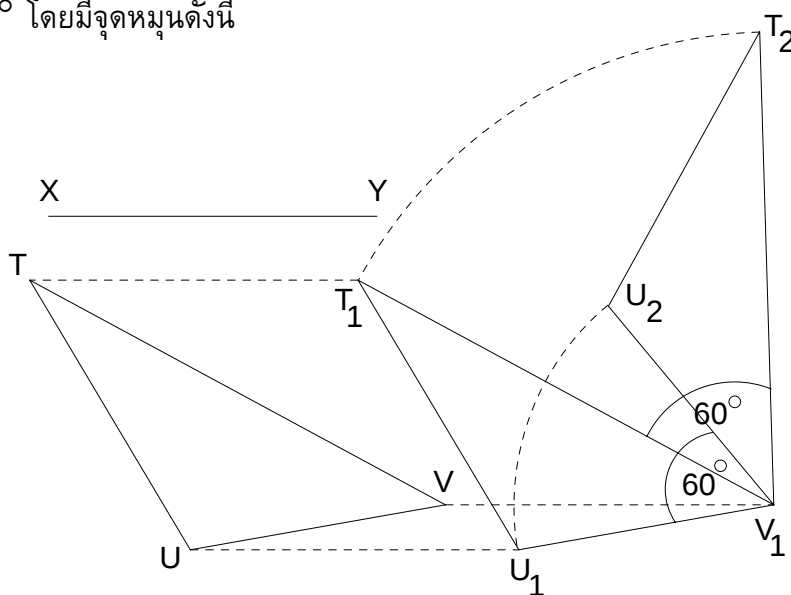
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งเป็นคู่ ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม TUV เป็นรูปต้นแบบ



ให้นักเรียนพิจารณาภาพของจุด ด้าน และมุมที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม TUV ต่อไปนี้

1. เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$
2. หมุนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปสามเหลี่ยม TUV ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุดหมุนดังนี้



1. จุดใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้
 - ภาพของจุด T คือ จุด
 - ภาพของจุด U คือ จุด
 - ภาพของจุด V คือ จุด
2. ด้านใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของด้านของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้
 - ภาพของด้าน TU คือ ด้าน

- ภาพของด้าน UV คือ ด้าน

- ภาพของด้าน VT คือ ด้าน

3. มุมใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของมุมของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้

- ภาพของมุม TUV คือ มุม

- ภาพของมุม UVT คือ มุม

- ภาพของมุม VTU คือ มุม

4. จุดใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- ภาพของจุด T_1 คือ จุด

- ภาพของจุด U_1 คือ จุด

- ภาพของจุด V_1 คือ จุด

5. ด้านใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของด้านของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- ภาพของด้าน T_1U_1 คือ ด้าน

- ภาพของด้าน U_1V_1 คือ ด้าน

- ภาพของด้าน V_1T_1 คือ ด้าน

6. มุมใดที่เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของมุมของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- ภาพของมุม $T_1U_1V_1$ คือ มุม

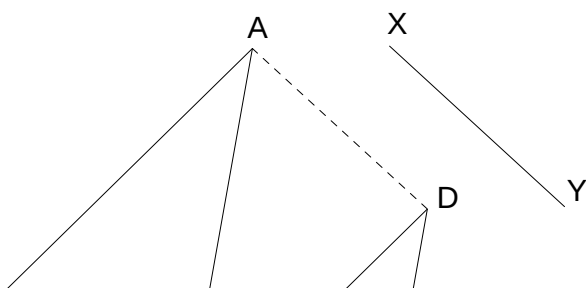
- ภาพของมุม $U_1V_1T_1$ คือ มุม

- ภาพของมุม $V_1T_1U_1$ คือ มุม

คู่สมนัยที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม

จากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน รูปสามเหลี่ยม ABC ดังข้างต้น จะเห็นได้ว่าภาพที่เกิดขึ้นจากการแปลงทั้ง 3 แบบ จะมีขนาดและรูปร่างเหมือนกับรูปต้นแบบทุกประการ หรือกล่าวได้ว่า ภาพที่ได้เท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบ

ในการพิจารณาคู่สมนัยของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการซึ่งเกิดจากการแปลงทั้ง 3 แบบนั้นพิจารณาดังนี้



1.

จากการเลื่อนขนานรูป
สามเหลี่ยม ABC ตาม $\overline{XY}$ จะได้
รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิด
จากการเลื่อนขนาน

จากภาพจะได้คู่สมนัยของ
รูปสามเหลี่ยม ABC และรูป
สามเหลี่ยม DEF ดังนี้

1. จุดยอดคู่ที่สมนัยกันได้แก่

จุด A สมนัยกับจุด D

จุด B สมนัยกับจุด E

จุด C สมนัยกับจุด F

2. ด้านคู่ที่สมนัยกันได้แก่

ด้าน AB สมนัยกับด้าน DE

ด้าน BC สมนัยกับด้าน EF

ด้าน CA สมนัยกับด้าน FD

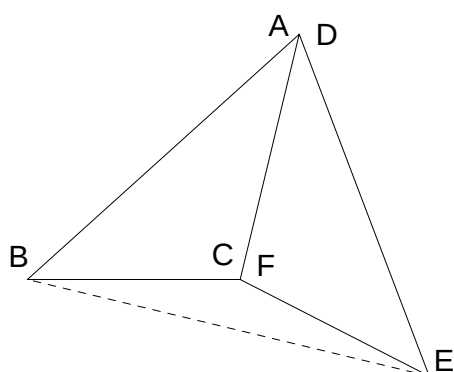
3. มุมคู่ที่สมนัยกันได้แก่

มุม ABC สมนัยกับมุม DEF

มุม BCA สมนัยกับมุม EFD

มุม CAB สมนัยกับมุม FDE

2.



จากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC
โดยมีส่วนของเส้นตรง AC เป็นเส้นสะท้อน
จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิด
จากการสะท้อน

จากภาพจะได้คู่สมนัยของรูป
สามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF
ดังนี้

1. จุดยอดคู่ที่สมนัยกันได้แก่

จุด A สมนัยกับจุด D (A)

จุด B สมนัยกับจุด E (B)

จุด C สมนัยกับจุด F (C)

2. ด้านคู่ที่สมนัยกันได้แก่

ด้าน AB สมนัยกับด้าน DE

ด้าน BC สมนัยกับด้าน EF

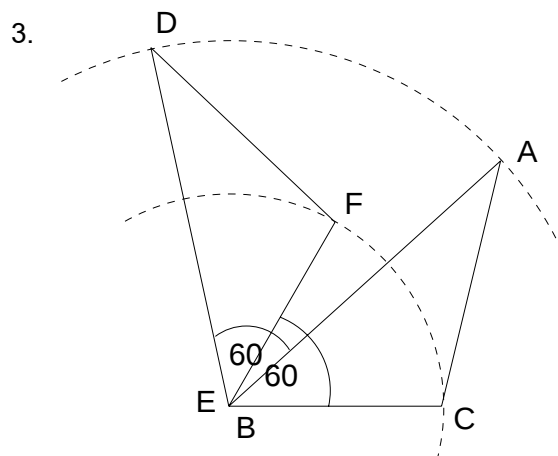
ด้าน CA สมนัยกับด้าน FD (CA)

3. มุมคู่ที่สมนัยกันได้แก่

มุม ABC สมนัยกับมุม DEF

มุม BCA สมนัยกับมุม EFD

มุม CAB สมนัยกับมุม FDE



จากการหมุนรูปสามเหลี่ยม ABC
ในทิศทางเข็มนาฬิกาทำมุม 60 องศา โดยมี
จุด B เป็นจุดหมุน จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF
เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน

จากภาพจะได้คู่สมนัยของรูป
สามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF
ดังนี้

1. จุดยอดคู่ที่สมนัยกันได้แก่

จุด A สมนัยกับจุด D

จุด B สมนัยกับจุด E (B)

จุด C สมนัยกับจุด F

2. ด้านคู่ที่สมนัยกันได้แก่

ด้าน AB สมนัยกับด้าน DE

ด้าน BC สมนัยกับด้าน EF

ด้าน CA สมนัยกับด้าน FD

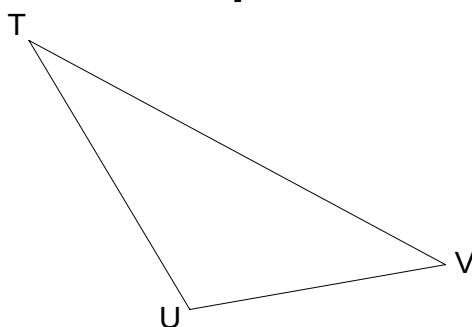
3. มุมคู่ที่สมนัยกันได้แก่

มุม ABC สมนัยกับมุม DEF

มุม BCA สมนัยกับมุม EFD

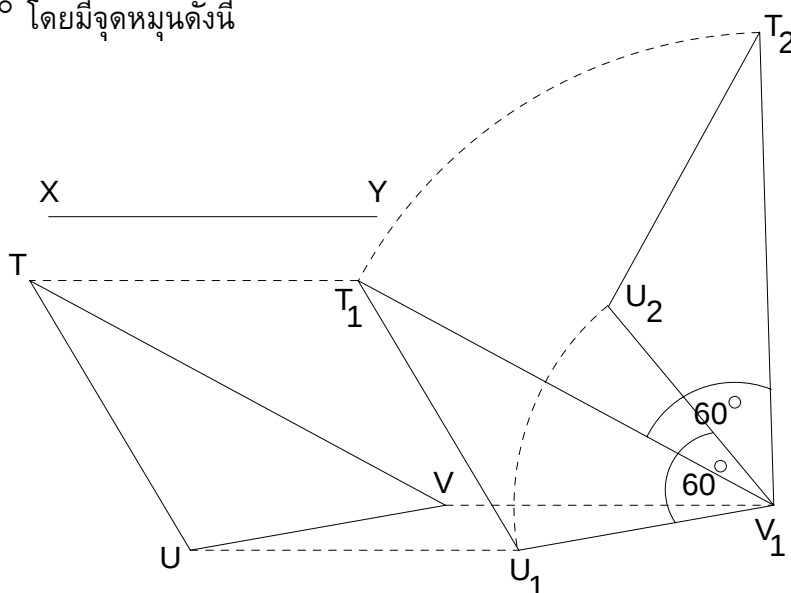
มุม CAB สมนัยกับมุม FDE

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม TUV เป็นรูปต้นแบบ



ให้นักเรียนพิจารณาคู่สมนัยของจุด ด้าน และมุมที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม TUV ต่อไปนี้

1. เลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$
2. หมุนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปสามเหลี่ยม TUV ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุดหมุนดังนี้



1. จุดใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้

- จุด T สมนัยกับจุด
- จุด U สมนัยกับจุด
- จุด V สมนัยกับจุด

2. ด้านใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการเลื่อนขนานของด้านของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้

- ด้าน TU สมนัยกับด้าน
- ด้าน UV สมนัยกับด้าน

- ด้าน VT สมัยกับด้าน

3. มุมใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการเลื่อนขนานของมุมของรูปสามเหลี่ยม TUV ตาม $\overline{XY}$ ต่อไปนี้

- มุม TUV สมัยกับมุม

- มุม UVT สมัยกับมุม

- มุม VTU สมัยกับมุม

4. จุดใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการหมุนของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- จุด T_1 สมัยกับจุด

- จุด U_1 สมัยกับจุด

- จุด V_1 สมัยกับจุด

5. ด้านใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการหมุนของด้านของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- ด้าน T_1U_1 สมัยกับด้าน

- ด้าน U_1V_1 สมัยกับด้าน

- ด้าน V_1T_1 สมัยกับด้าน

6. มุมใดที่เป็นคู่สมนัยที่เกิดจากการหมุนของมุมของรูปสามเหลี่ยม $T_1U_1V_1$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 60° โดยมีจุด V_1 เป็นจุดหมุน ต่อไปนี้

- มุม $T_1U_1V_1$ สมัยกับมุม

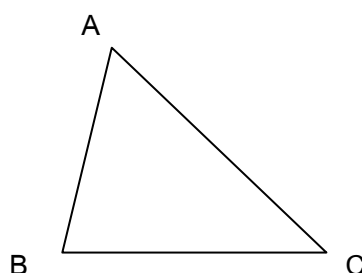
- มุม $U_1V_1T_1$ สมัยกับมุม

- มุม $V_1T_1U_1$ สมัยกับมุม

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

มุมในระหว่างด้าน

จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

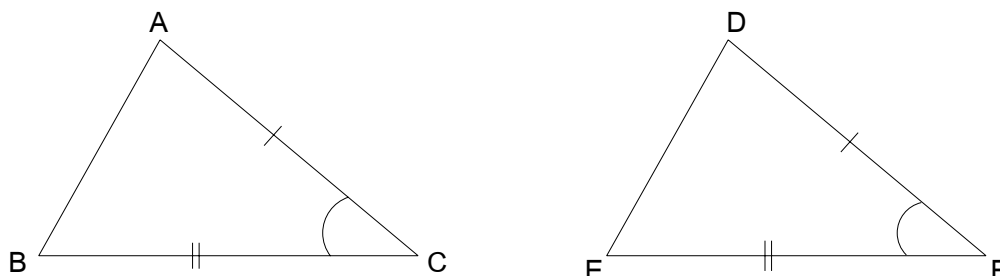


เราเรียกมุม ABC ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AB กับด้าน BC”

เราเรียกมุม BAC ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AB กับด้าน AC”

และเราเรียกมุม ACB ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AC กับด้าน BC”

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $AC = DF$, $BC = EF$ และ $\hat{ACB} = \hat{DFE}$

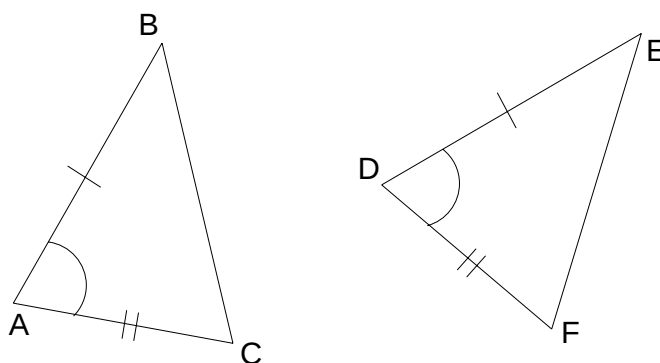


เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน” และเขียน ด.ม.ด แทน ด้าน-มุม-ด้าน

ทฤษฎีบท 1 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (ด้าน-มุม-ด้าน)

พิสูจน์ กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $AB = DE$
2. $\hat{BAC} = \hat{EDF}$
3. $AC = DF$



จะแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ดังนี้

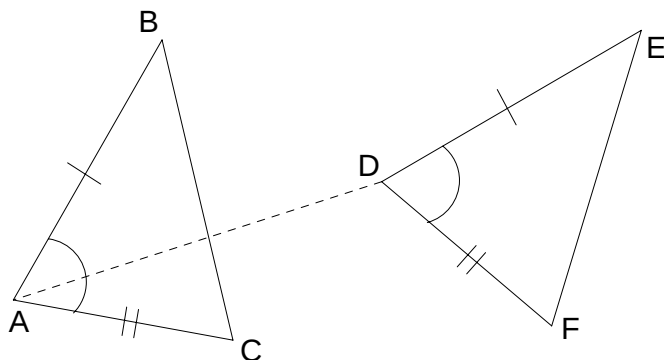
1. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ
 $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $AB = DE$ และ $AC = DF$

2. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน

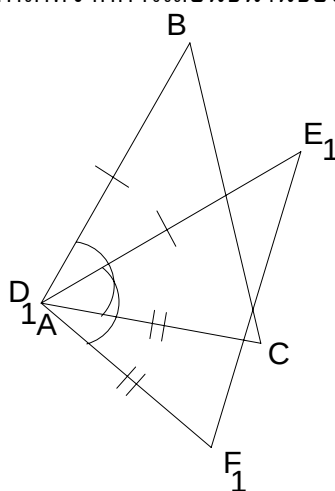
เนื่องจาก $\hat{BAC} = \hat{EDF}$ ดังนั้น จุด A สมนัยกับจุด D

ด้าน AB สมนัยกับด้าน DE และ ด้าน AC สมนัยกับด้าน DF

3. เลื่อนขนานรูปต้นแบบ $\triangle DEF$ ตาม $\overline{DA}$



จะได้ $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป $\triangle DEF$



นั่นคือ $\triangle DEF \cong \triangle D_1E_1F_1$ และ จุด A กับ จุด D_1 เป็นจุดยอดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

4. จาก $\triangle DEF \cong \triangle D_1E_1F_1$ ดังนั้น $\hat{E_1D_1F_1} = \hat{EDF} = \hat{BAC}$ ซึ่ง

$$\hat{BAC} = \hat{BAE_1} + \hat{E_1AC} \quad \text{และ} \quad \hat{E_1D_1F_1} = \hat{E_1D_1C} + \hat{CD_1F_1}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \hat{BAE_1} + \hat{E_1AC} = \hat{E_1D_1C} + \hat{CD_1F_1}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \hat{E_1AC} = \hat{E_1D_1C} \quad \text{นั่นคือ} \quad \hat{BAE_1} = \hat{CD_1F_1}$$

5. เนื่องจาก $\hat{BAE_1} = \hat{CD_1F_1}$ และ $AB = D_1E_1, AC = D_1F_1$

ดังนั้น $\overline{AB}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{D_1E_1}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นขนาด

เท่ากับมุม $\hat{BAE_1}$ โดยมีจุด D_1 เป็นจุดหมุน และ

$\overline{AC}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{D_1F_1}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นขนาด

เท่ากับมุม $\hat{CD_1F_1}$ โดยมีจุด D_1 เป็นจุดหมุน

นั่นคือ จากสมบัติสมมติจะได้ว่า $\overline{BC}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{E_1F_1}$ ในทิศทาง
เข็มนาฬิกาเป็นขนาดเท่ากับมุม $\widehat{BAE_1}$ โดยมีจุด D_1 เป็นจุดหมุน

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\triangle D_1E_1F_1$ ในทิศทางและขนาดมุมดัง
ข้างต้น ทำให้ $\triangle ABC \cong \triangle D_1E_1F_1$

6. เนื่องจากรูป $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ $\triangle DEF$

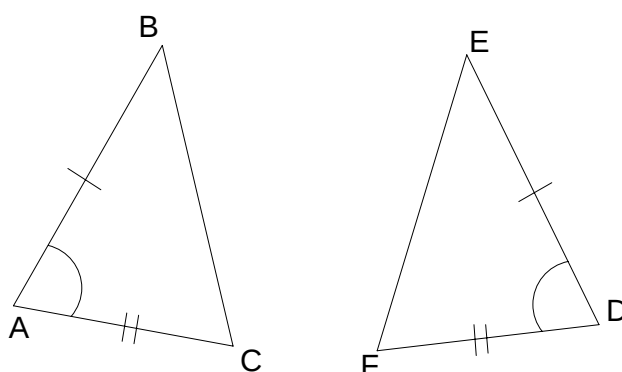
และรูป $\triangle ABC$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$ ในทิศทางและขนาดมุมดัง
ข้างต้น

ดังนั้น $\triangle ABC$ จึงเป็นภาพของ $\triangle DEF$ ที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตเป็นจำนวน
2 ครั้ง

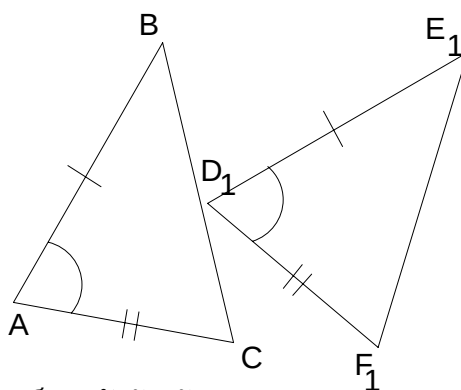
นั่นคือ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

□

ในทำนองเดียวกันถ้าหากรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน มีลักษณะ
หันไปคนละทาง เช่น



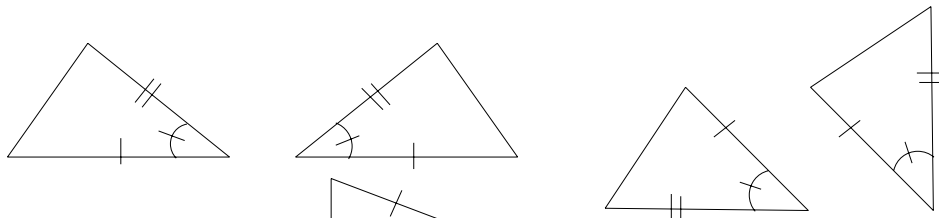
ให้สะท้อนรูป $\triangle DEF$ โดยมี $\overline{EF}$ เป็นเส้นสะท้อน จะได้รูป $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการ
สะท้อนรูป $\triangle DEF$



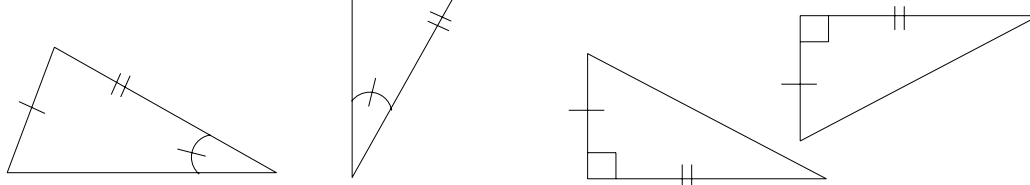
แล้วดำเนินการพิสูจน์ตามดังข้างต้น

ตัวอย่างที่ 6 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ คู่ใดบ้างที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

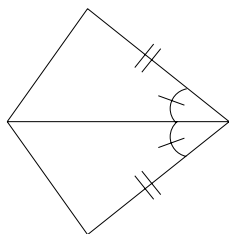
1. 2.



3. 4.



5.

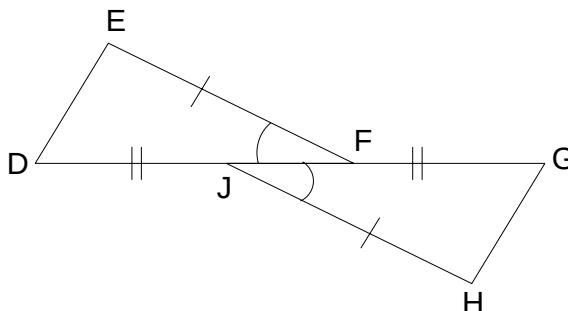


รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมในข้อ

.....

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ DEF และ GHJ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $EF = HJ$
2. $\angle FDE = \angle JGH$
3. $FD = JG$



จงแสดงว่า $\triangle DEF \cong \triangle GHJ$

พิสูจน์

1. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

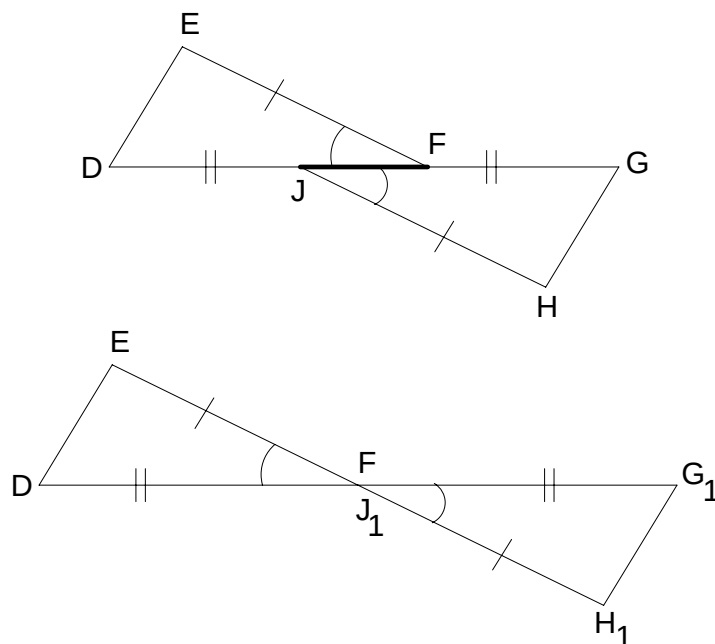
.....

2. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน

เนื่องจาก $\widehat{EFD} = \widehat{HJG}$ ดังนั้น จุด สมนัยกับจุด

ด้าน สมนัยกับด้าน และ ด้าน สมนัยกับด้าน

3. ให้รูป $\triangle GHJ$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานรูปต้นแบบคือรูป $\triangle GHJ$ ตาม $\overline{JF}$



จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูป $\triangle GHJ$

นั่นคือ $\triangle GHJ \cong \triangle G_1H_1J_1$ และจุด F กับจุด เป็นจุดยอดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

4. จาก $\triangle GHJ \cong \triangle G_1H_1J_1$ ดังนั้น $\widehat{EFD} = \widehat{HJG} = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $\widehat{EFD} = \dots\dots\dots$

5. เนื่องจาก $\widehat{EFD} = \widehat{H_1J_1G_1}$, $EF = HJ = H_1J_1$ และ $FD = JG = J_1G_1$

กำหนดให้จุด J_1 เป็นจุดหมุน จะได้ว่า

..... เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{J_1G_1}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม

$G_1J_1FE + \widehat{EFD}$

และ $\overline{EF}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม

.....

นั่นคือจุด H_1 และ หมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมเท่ากัน

ดังนั้น ทุกจุดที่อยู่บน ก็จะหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมเท่ากันเช่นกัน

จากสมบัติสมมติ จะได้ว่า เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{H_1G_1}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาด้วย

ขนาดมุมที่เท่ากับหมุน $\overline{J_1G_1}$ และ $\overline{H_1J_1}$ เช่นกัน

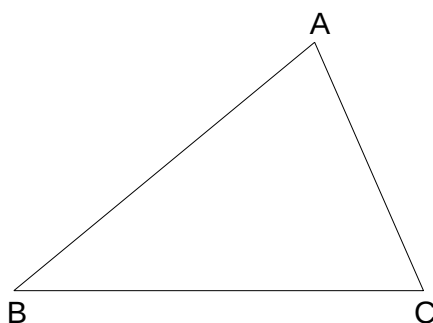
6. ดังนั้น รูป เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle G_1H_1J_1$
 และ รูป เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป $\triangle GHJ$
 นั่นคือ รูป เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูป $\triangle GHJ$ จำนวน
 ครั้ง
 ดังนั้น $\triangle DEF \cong \dots\dots\dots$ □

สรุป หลักการการพิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง มีดังนี้

1. พิจารณาสีที่โจทย์กำหนดให้
2. วาดรูปโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (ในกรณีที่โจทย์ไม่มีรูปให้)
3. หาสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
4. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ
5. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน
6. พิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปหันไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่ ถ้าหันไปคนละทางให้สะท้อนรูปที่กำหนดเป็นรูปต้นแบบ โดยมีด้านที่ไม่ได้กำหนดความสัมพันธ์เป็นเส้นสะท้อน
7. พิจารณาจุดยอดคู่ที่สมนัยกันแล้วเลื่อนขนานรูปต้นแบบ ตามส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทางที่เชื่อมจุดยอดคู่ที่สมนัยกัน
8. พิจารณาให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยแสดงว่าแขนของมุมคู่ที่สมนัยหมุนด้วยขนาดมุมที่เท่ากัน
9. สรุปผลว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง นั่นคือรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน เท่ากันทุกประการ

2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

แขนร่วมของมุม

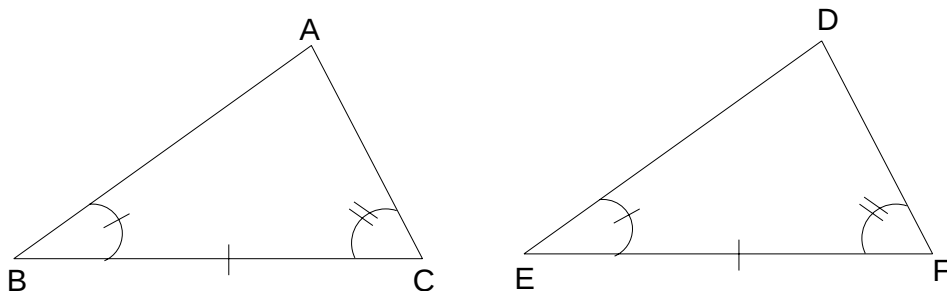


จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 เรียกด้าน BC ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม ABC และมุม ACB”

เรียกด้าน AC ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม BAC และมุม ACB”

เรียกด้าน AB ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม ABC และมุม BAC”

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $\hat{A}BC = \hat{D}EF$, $BC = EF$ และ $\hat{A}CB = \hat{D}FE$

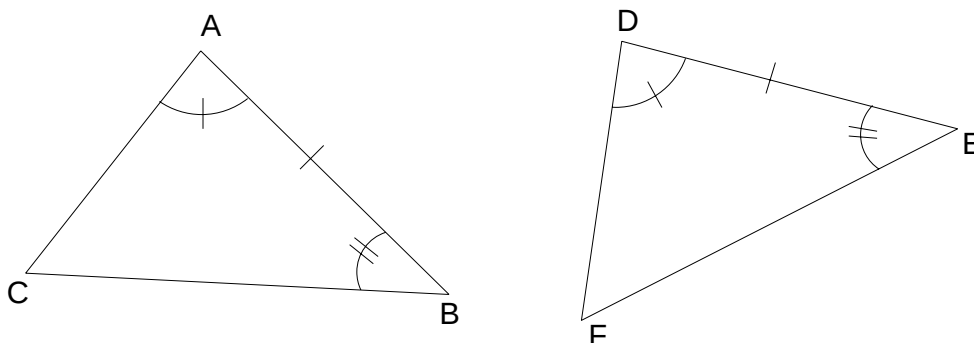


เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม” และเขียน ม.ด.ม แทน มุม-ด้าน-มุม

ทฤษฎีบท 2 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม-ด้าน-มุม)

พิสูจน์ กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $\hat{C}AB = \hat{F}DE$
2. $AB = DE$
3. $\hat{A}BC = \hat{D}EF$



จะแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ได้ดังนี้

1. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

$$\hat{BAC} = \hat{EDF}, AB = DE \text{ และ } \hat{ABC} = \hat{DEF}$$

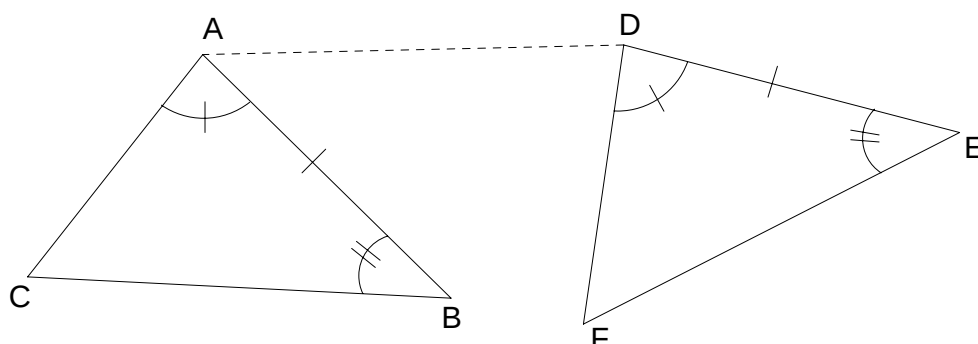
2. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน

เนื่องจาก $\hat{BAC} = \hat{EDF}$ ดังนั้น จุด A สมนัยกับจุด D

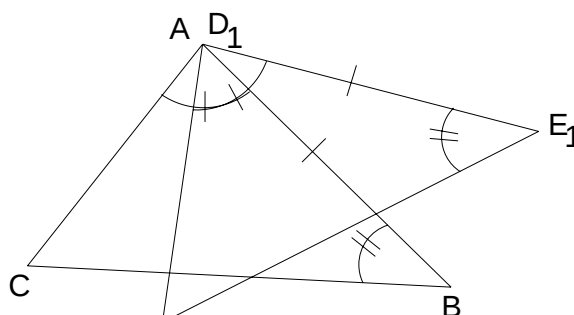
และ $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ ดังนั้น จุด B สมนัยกับจุด E

ด้าน AB สมนัยกับด้าน DE

3. เลื่อนขนานรูป $\triangle DEF$ ตาม $\overrightarrow{DA}$



จะได้ $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป $\triangle DEF$



นั่นคือ $\triangle DEF \cong \triangle D_1E_1F_1$ และ จุด A กับ จุด D_1 เป็นจุดยอดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน
ดังนั้น $\hat{BAC} = \hat{EDF} = \hat{E_1D_1F_1}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF} = \hat{D_1E_1F_1}$ และ $AB = DE = D_1E_1$

4. หมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$ ด้วยขนาดมุม $\angle E_1D_1B$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

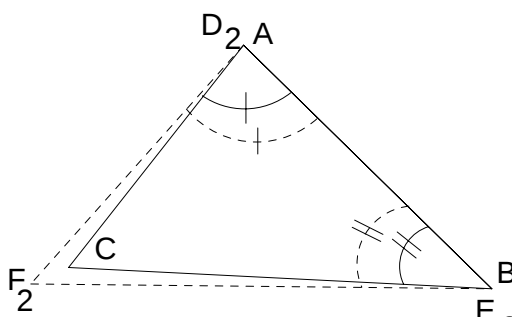
จะได้ $\overline{AB}$ เป็นภาพของ $\overline{D_1E_1}$

เนื่องจาก $\hat{BAC} = \hat{E_1D_1F_1}$ ซึ่ง $\hat{BAC} = \hat{BAF_1} + \hat{F_1AC}$ และ $\hat{E_1D_1F_1} = \hat{E_1D_1B} + \hat{BD_1F_1}$

ดังนั้น $\hat{BAF_1} + \hat{F_1AC} = \hat{E_1D_1B} + \hat{BD_1F_1}$

เนื่องจาก $\hat{BAF_1} = \hat{BD_1F_1}$ นั่นคือ $\hat{F_1AC} = \hat{E_1D_1B}$

จะได้รูป $\triangle D_2E_2F_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$



จะได้ว่า จุด A และ D_2 อยู่จุดเดียวกัน

จุด B และ E_2 อยู่จุดเดียวกัน

นั่นคือ $\overline{AB}$ และ $\overline{D_2E_2}$ มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกันและอยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกัน

5. เนื่องจาก $\hat{BAC} = \hat{E_2D_2F_2}$, $\hat{ABC} = \hat{D_2E_2F_2}$ และ $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน

ดังนั้น แขนงของมุม $\hat{BAC}$ และ $\hat{E_2D_2F_2}$ คือ $\overline{AC}$ และ $\overline{D_2F_2}$ ตามลำดับ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันโดยมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดเดียวกันคือ จุด A และ D_2

ในทำนองเดียวกัน แขนงของมุม $\hat{ABC}$ และ $\hat{D_2E_2F_2}$ คือ $\overline{BC}$ และ $\overline{E_2F_2}$ ตามลำดับ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันโดยมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดเดียวกันคือ จุด B และ E_2

นั่นคือ จุดตัดของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ จะเป็นจุดเดียวกันกับจุดตัดของ $\overline{D_2F_2}$ และ $\overline{E_2F_2}$

6. จากข้อ 4 และ 5 จะได้ว่า

รูป $\triangle ABC$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$ ทำมุมเป็นขนาดเท่ากับมุม $\hat{E_1D_1B}$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดยมีจุด A เป็นจุดหมุน

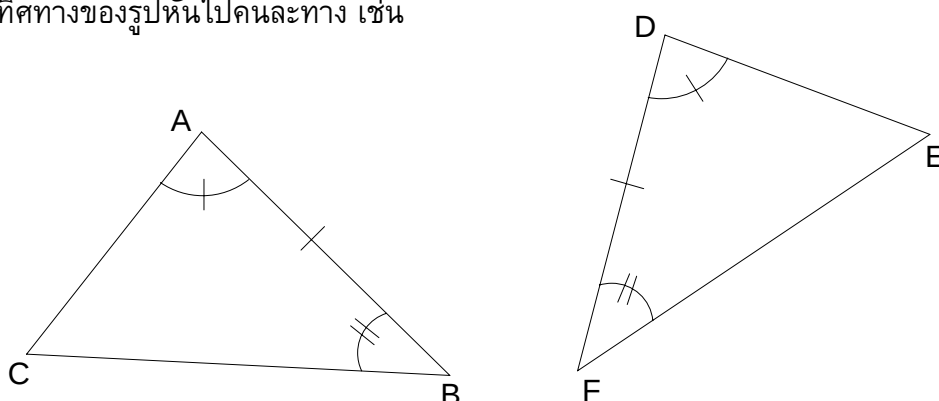
และรูป $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป $\triangle DEF$ ตาม $\overline{DA}$

นั่นคือ รูป $\triangle ABC$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูป $\triangle DEF$ จำนวน 2 ครั้ง

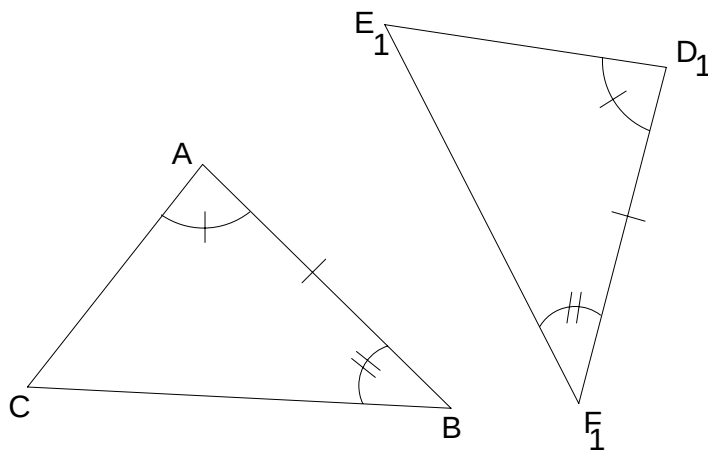
ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

□

ในทำนองเดียวกันถ้าหากรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม มีลักษณะทิศทางของรูปหันไปคนละทาง เช่น



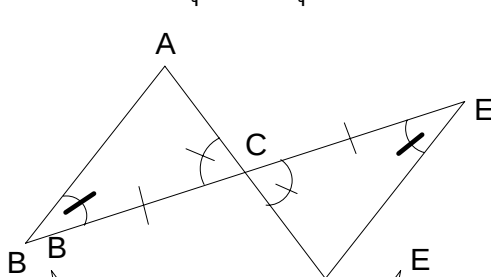
ให้สะท้อนรูป $\triangle DEF$ โดยมีด้านคู่ที่เท่ากันเป็นเส้นสะท้อน จากรูปก็คือ $\overline{DF}$ จะได้รูป $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle DEF$



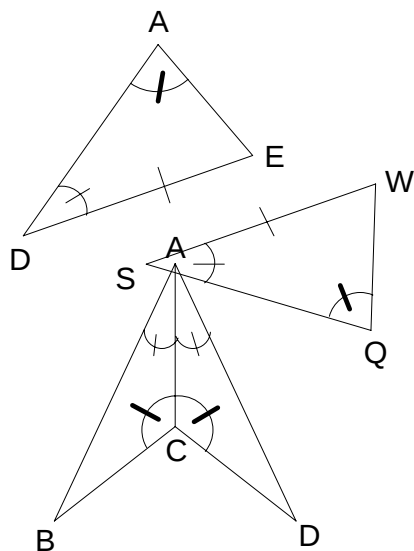
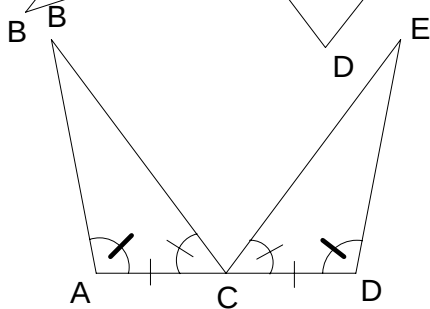
แล้วจึงดำเนินการพิสูจน์ตามดังข้างต้น

ตัวอย่างที่ 8 ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ ระบุใดบ้างที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

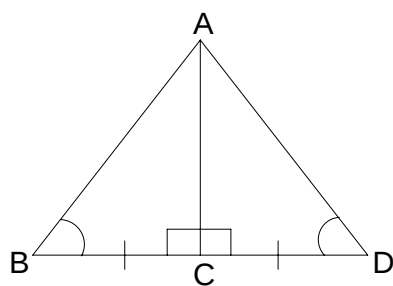
1. 2.



3. 4.



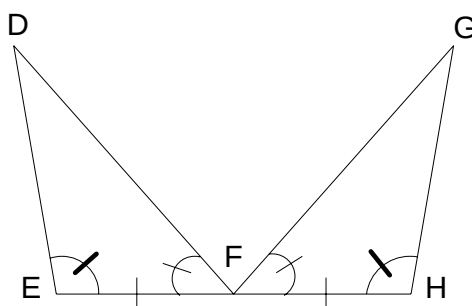
5.



รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมในข้อ

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ DEF และ GHF เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $\angle DFE = \angle GFH$
2. $EF = HF$
3. $\angle EDF = \angle GHF$



จงพิสูจน์ว่า $\triangle DEF \cong \triangle GHF$

พิสูจน์

1. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

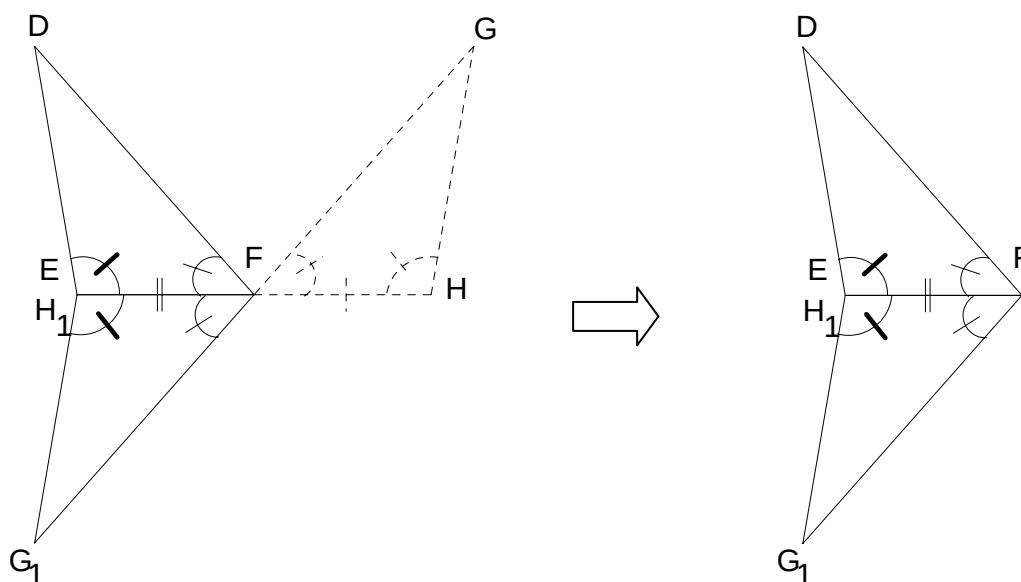
2. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน

เนื่องจาก $\angle DFE = \angle GFH$ ดังนั้น จุด สมนัยกับจุด

และ $\angle EDF = \angle GHF$ ดังนั้น จุด สมนัยกับจุด

ด้าน สมนัยกับด้าน

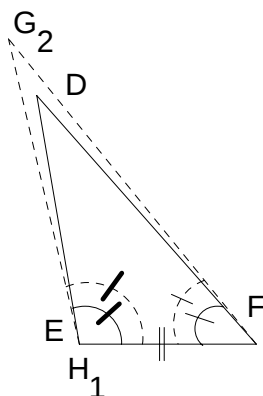
3. ให้รูป $\triangle GHF$ เป็นรูปต้นแบบ หมุนรูป $\triangle GHF$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม HFE โดยมีจุด F เป็นจุดหมุน



จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของรูป $\triangle GHF$

นั่นคือ $\triangle GHF \cong \dots\dots\dots$ และ $\overline{EF}$ กับ $\dots\dots\dots$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเดียวกัน และได้ว่า จุด E และ $\dots\dots\dots$ เป็นจุดที่อยู่จุดเดียวกัน

4. ถ้าให้ $\overline{EF}$ เป็นเส้นสะท้อน สะท้อนรูป $\triangle G_1H_1F$ จะได้รูป $\triangle G_2H_1F$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle G_1H_1F$



เนื่องจาก $\widehat{DFE} = \widehat{GFH} = \widehat{G_2FH_1}$

$\widehat{DEF} = \widehat{GHF} = \widehat{G_2H_1F}$

และ $\overline{EF}$ กับ $\overline{H_1F}$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเดียวกัน

ดังนั้น แขนของมุม DFE และมุม G_2FH_1 คือ $\overline{DF}$ และ $\dots\dots\dots$ ตามลำดับ จะอยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันโดยมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดเดียวกันคือ จุด F

และ แขนของมุม DEF และมุม G_2H_1F คือ $\overline{DE}$ และ $\dots\dots\dots$ ตามลำดับ จะอยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันโดยมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดเดียวกันคือ จุด E และ H_1

นั่นคือ จุดตัดของ $\overline{DF}$ และ $\dots\dots\dots$ จะเป็นจุดเดียวกันกับจุดตัดของ $\overline{G_2F}$ และ $\dots\dots\dots$

5. จากข้อ 3 และ 4 จะได้ว่า

รูป $\dots\dots\dots$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูป $\triangle G_1H_1F$ โดยมี $\overline{H_1F}$ เป็นเส้นสะท้อน

รูป $\dots\dots\dots$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของรูป $\triangle GHF$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม HFE โดยมีจุด F เป็นจุดหมุน

นั่นคือ รูป $\triangle DEF$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูป $\triangle GHF$ จำนวน $\dots\dots\dots$ ครั้ง

ดังนั้น $\triangle DEF \cong \dots\dots\dots$

□

สรุป หลักการการพิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง มีดังนี้

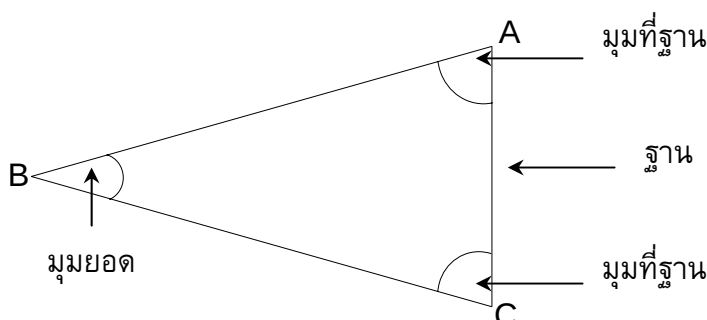
1. พิจารณาสี่ที่โจทย์กำหนดให้
2. วาดรูปโดยใช้ข้อมูลจากสี่ที่โจทย์กำหนดให้ (ในกรณีที่โจทย์ไม่มีรูปให้)
3. หาสี่ที่ได้เพิ่มเติมจากสี่ที่โจทย์กำหนดให้
4. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ
5. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน
6. พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปหันไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่ ถ้าหันไปคนละทางให้สะท้อนรูปที่กำหนดเป็นรูปต้นแบบ โดยมีด้านที่กำหนดความสัมพันธ์เป็นเส้นสะท้อน
7. พิจารณาจุดยอดคู่ที่สมนัยกันคู่ใดคู่หนึ่งแล้วเลื่อนขนานรูปต้นแบบ ตามส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทางที่เชื่อมจุดยอดคู่ที่สมนัยกัน
8. หมุนรูปสามเหลี่ยมที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบให้ด้านที่กำหนดความสัมพันธ์อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายทั้งสองด้านเป็นจุดเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยมีจุดคู่ที่สมนัยที่อยู่จุดเดียวกันเป็นจุดหมุน
9. พิจารณาให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยแสดงว่าแขนของมุมคู่ที่สมนัยกันตัดกันที่จุดเดียวกัน
10. สรุปผลว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง นั่นคือรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม เท่ากันทุกประการ

3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม

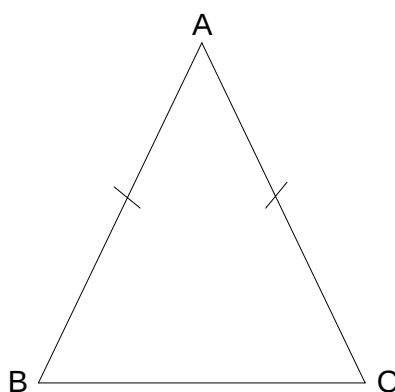
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี $BA = BC$ เรียกด้าน AC ว่า ฐาน
เรียก $\angle CAB$ และ $\angle CBA$ ว่า มุมที่ฐาน เรียก $\angle ABC$ ว่า มุมยอด

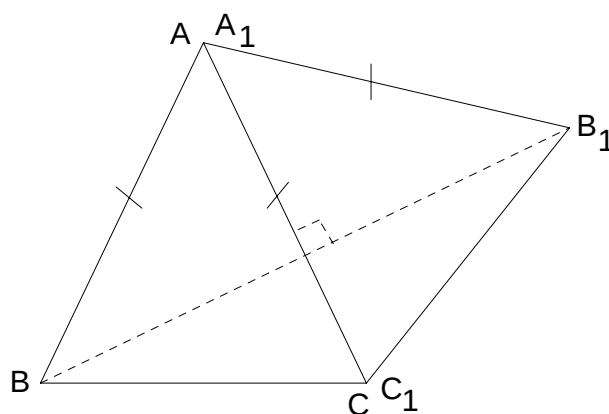
ทฤษฎีบท 3 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่นั้นยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน

พิสูจน์ กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งเป็นรูปต้นแบบที่มี $AB = AC$



จะแสดงว่า $\angle ABC = \angle ACB$

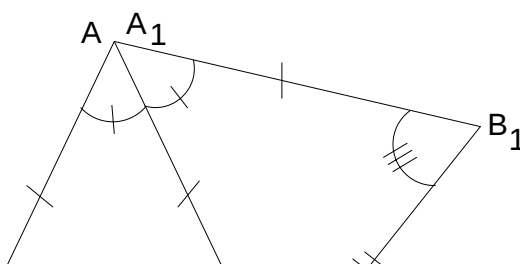
1. สะท้อนรูป $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นรูปต้นแบบ โดยมี $\overline{AC}$ เป็นเส้นสะท้อน
จะได้ภาพที่เกิดจากการสะท้อนเป็นรูป $\triangle A_1B_1C_1$



ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

ทำให้ $AB = AC = A_1C_1 = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ และ $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$



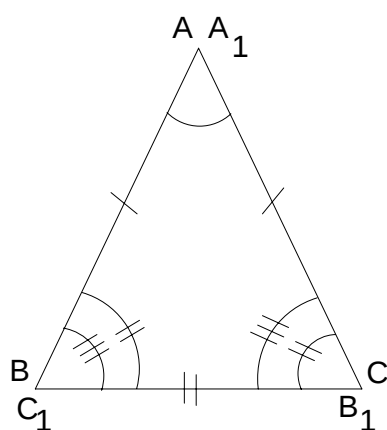
2. เนื่องจาก $\hat{BAC} = \hat{B_1A_1C_1}$, $AB = A_1C_1$, $AC = A_1B_1$

ดังนั้น $\overline{AB}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{A_1C_1}$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมเท่ากับ $\hat{BAC}$

$\overline{AC}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{A_1B_1}$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมเท่ากับ $\hat{B_1A_1C_1}$

$\overline{BC}$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน $\overline{B_1C_1}$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุมเท่ากับ $\hat{BAC}$

โดยมีจุด A_1 เป็นจุดหมุน



นั่นคือ $\hat{ABC} = \hat{A_1C_1B_1} = \hat{ACB}$ หรือ
 $\hat{ACB} = \hat{A_1B_1C_1} = \hat{ABC}$

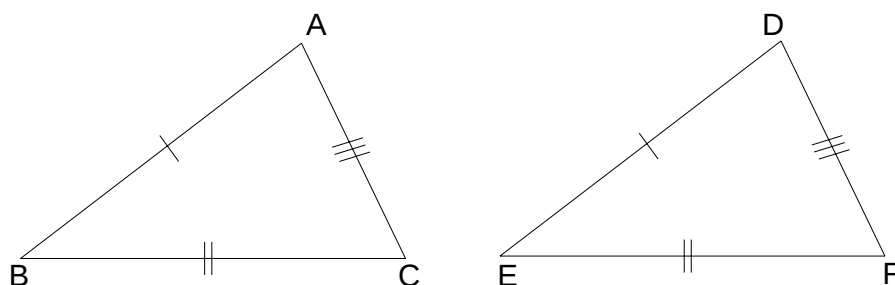
ดังนั้น $\hat{ABC} = \hat{ACB}$

□

นั่นคือ

ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

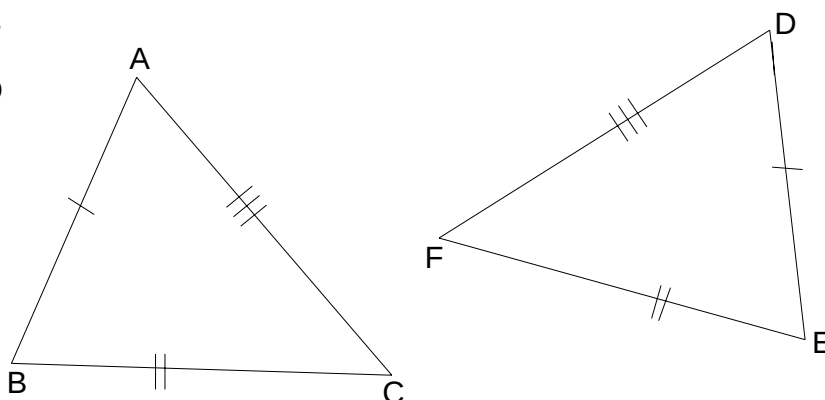


เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน” และเขียน ด.ด.ด แทน ด้าน-ด้าน-ด้าน

ทฤษฎีบท 4 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)

พิสูจน์ กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $AB = DE$
2. $BC = EF$
3. $CA = FD$



จะแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

1. พิจารณาด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

$AB = DE$, $BC = EF$ และ $CA = FD$

2. พิจารณาจุดยอดคู่ที่สมนัยกัน

เนื่องจาก AB และ BC เป็นแขนของ $\hat{ABC}$

และ DE และ EF เป็นแขนของ $\hat{DEF}$

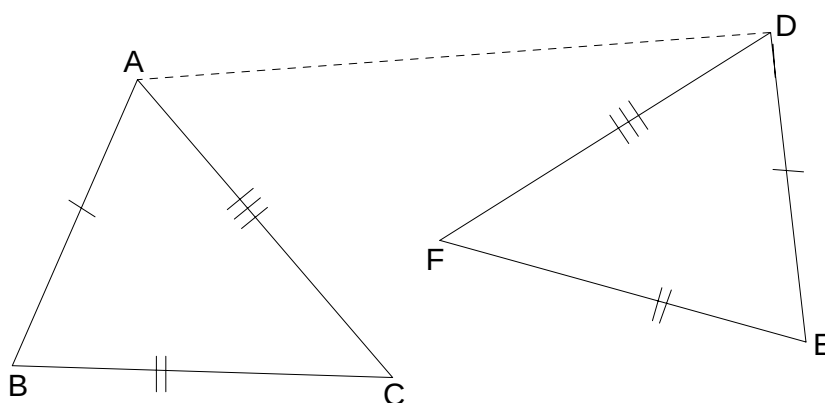
ซึ่ง $AB = DE$ และ $BC = EF$ ดังนั้น จุด B และ E เป็นจุดที่สมนัยกัน

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า จุด A และ D เป็นจุดที่สมนัยกัน

และ จุด C และ F เป็นจุดที่สมนัยกัน

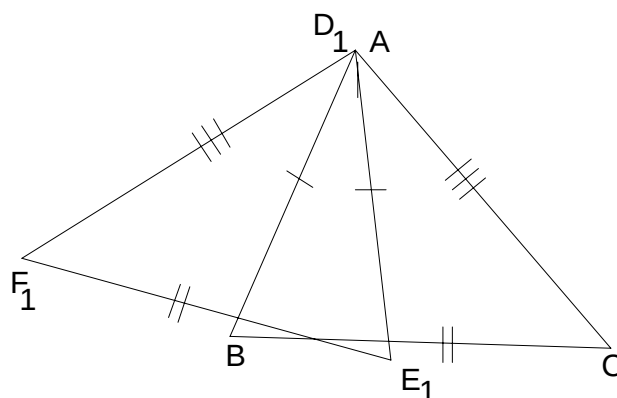
3. เลือกพิจารณาจุดที่สมนัยกัน 1 คู่ ในที่นี้เลือก จุด A กับจุด D

ให้รูป $\triangle DEF$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานรูป $\triangle DEF$ ตาม $\overrightarrow{DA}$

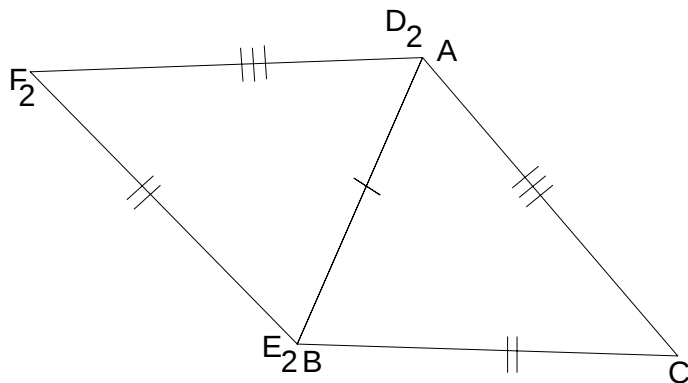


จะได้รูป $\triangle D_1E_1F_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน $\triangle DEF$

ดังนั้น $\triangle DEF \cong \triangle D_1E_1F_1$

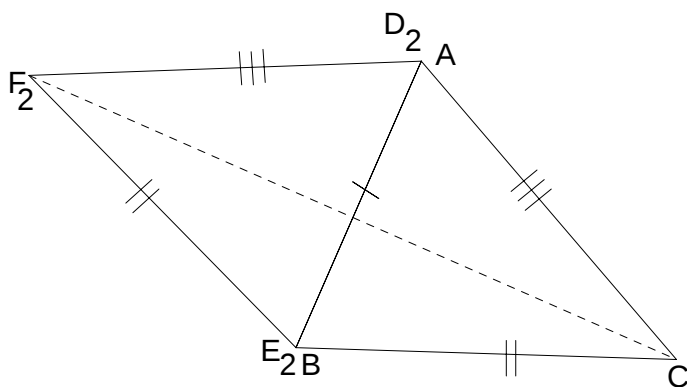


4. หมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$ ทำมุมเป็นขนาดเท่ากับมุม $\angle BD_1E_1$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา โดยมีจุด D_1 เป็นจุดหมุน จะได้รูป $\triangle D_2E_2F_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle D_1E_1F_1$
 ดังนั้น $\triangle D_2E_2F_2 \cong \triangle D_1E_1F_1 \cong \triangle DEF$



เนื่องจาก $AB = DE$
 ดังนั้น $AB = D_2E_2$
 นั่นคือ $\overline{AB}$ และ $\overline{D_2E_2}$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน

5. พิจารณาจุด C และ F_2 ลาก $\overline{CF_2}$ จะได้ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปคือ $\triangle CAF_2$ และ $\triangle CBF_2$



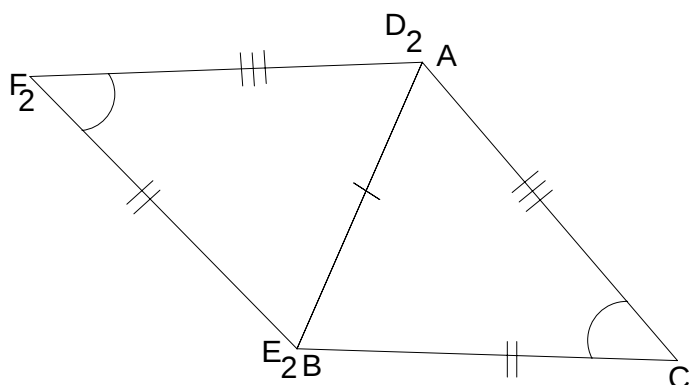
เนื่องจาก $\triangle CAF_2$ และ $\triangle CBF_2$
 เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 จะได้ $\angle AF_2C = \angle ACF_2$ และ $\angle BF_2C = \angle BCF_2$
 ดังนั้น $\angle AF_2C + \angle BF_2C = \angle ACF_2 + \angle BCF_2$
 เนื่องจาก

$$\angle AF_2C + \angle BF_2C = \angle AF_2B$$

$$\text{และ } \angle ACF_2 + \angle BCF_2 = \angle ACB$$

$$\text{ดังนั้น } \angle AF_2B = \angle ACB$$

นั่นคือ $\triangle ABC$ และ $\triangle D_2E_2F_2$ มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน



ดังนั้น เราสามารถแสดงได้ว่า

$\triangle D_2E_2F_2$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูป

$\triangle ABC$ ดังที่ได้แสดงในหัวข้อ

“รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มี

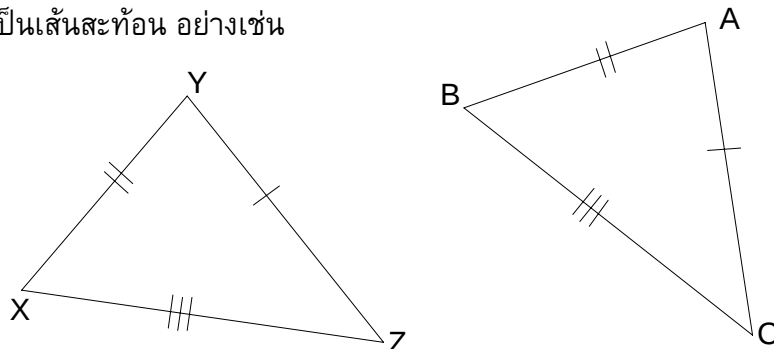
ความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน”

$$\text{ดังนั้น } \triangle ABC \cong \triangle D_2E_2F_2$$

$$\text{นั่นคือ } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

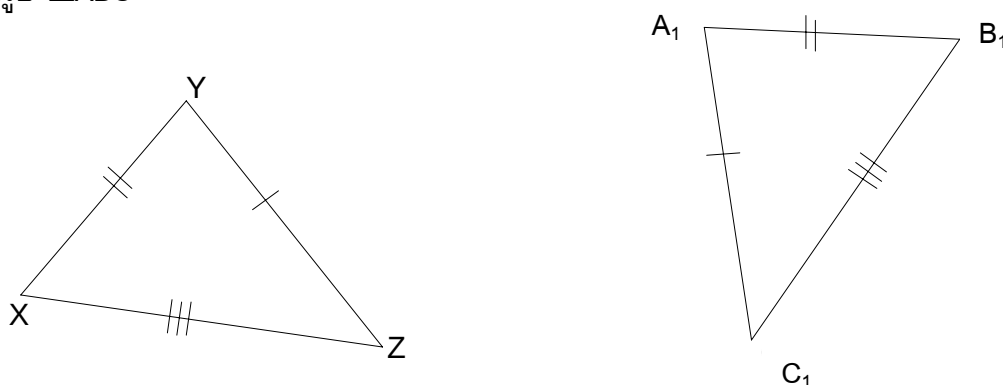
ในทำนองเดียวกัน จะเห็นได้ว่ารูป $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน ดังข้างต้น มีลักษณะของรูปหันไปในทิศทางตรงกันข้าม

ดังนั้นถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน มีลักษณะของรูปหันไปในทิศทางเดียวกัน ให้ทำการสะท้อนรูปใดรูปหนึ่งก่อน โดยใช้ด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมนั้น เป็นเส้นสะท้อน อย่างเช่น



ก่อนเลื่อนขนานรูปใดรูปหนึ่งมาที่จุดยอดคู่ที่สมนัย ให้ทำการสะท้อนโดยใช้ด้านใดด้านหนึ่งเป็นเส้นสะท้อน ดังนี้

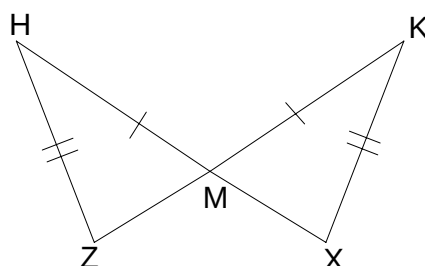
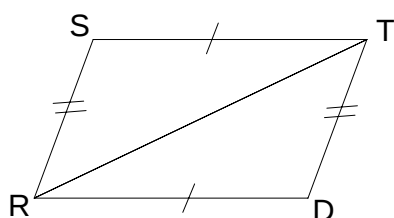
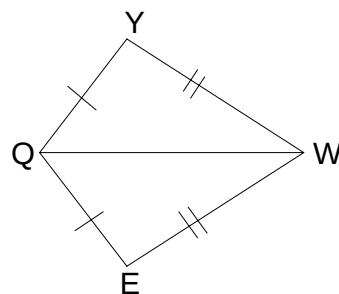
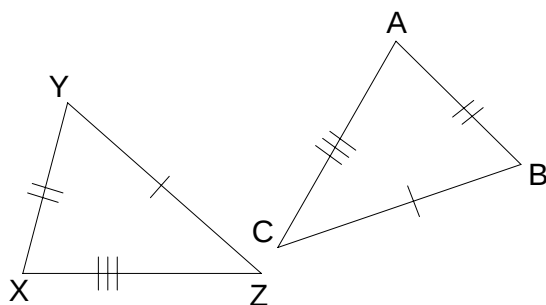
สะท้อนรูป $\triangle ABC$ โดยให้ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสะท้อน จะได้ $\triangle A_1B_1C_1$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle ABC$



แล้วจึงดำเนินการเช่นเดียวกับดังข้างต้นต่อไป

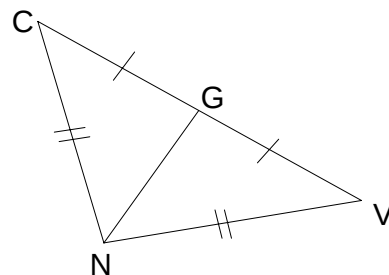
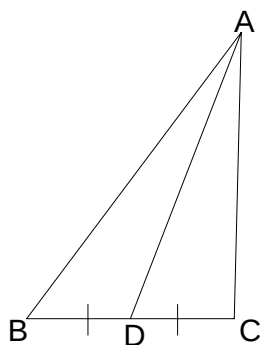
ตัวอย่างที่ 10 ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ คู่ใดบ้างที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

1. 2.



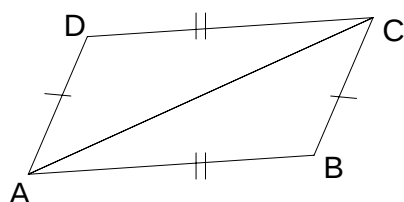
3. 4.

5. 6.



รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน ได้แก่ รูปสามเหลี่ยมในข้อ

ตัวอย่างที่ 11



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่ง

1. $AB = CD$

2. $BC = DA$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

พิสูจน์

1. พิจารณาด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

เนื่องจาก $\overline{AC}$ และ $\overline{CA}$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน
ดังนั้น $AC = \dots\dots\dots$

2. พิจารณาจุดยอดคู่ที่สมนัยกัน

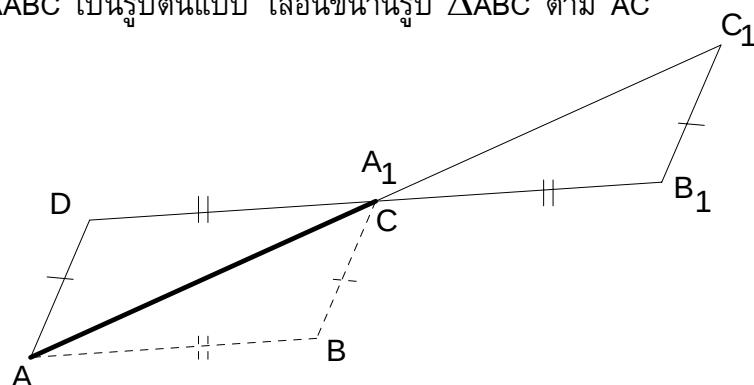
เนื่องจาก $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ เป็นแขนของมุม ABC

และ $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ เป็นแขนของมุม CDA

ซึ่ง $AB = CD$ และ $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ ดังนั้น จุด B และ $\dots\dots\dots$ เป็นจุดที่สมนัยกัน

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า จุด A และ เป็นจุดที่สมนัยกัน

3. เลือกพิจารณาจุดที่สมนัยกัน 1 คู่ ในที่นี้เลือกจุด A กับจุด C
ให้รูป $\triangle ABC$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานรูป $\triangle ABC$ ตาม $\overline{AC}$

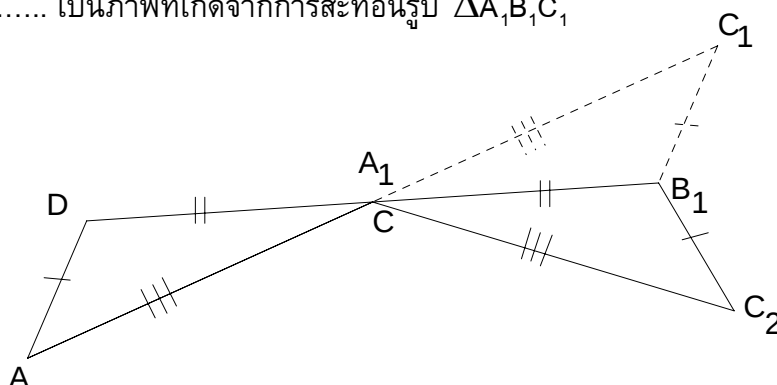


จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป $\triangle ABC$

ดังนั้น $\triangle A_1B_1C_1 \cong \dots\dots\dots$ และจุด A_1 และ เป็นจุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

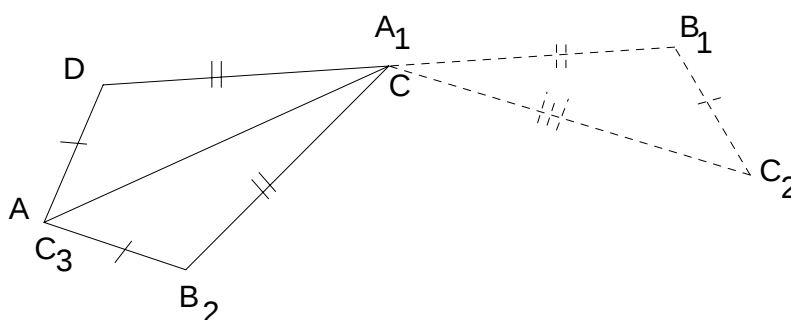
4. สะท้อนรูป $\triangle A_1B_1C_1$ โดยมี $\overline{A_1B_1}$ เป็นเส้นสะท้อน

จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูป $\triangle A_1B_1C_1$



ดังนั้น $\triangle A_1B_1C_2 \cong \dots\dots\dots$

5. หมุนรูป $\triangle A_1B_1C_2$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม $\angle C_2A_1A$ โดยมีจุด A_1 เป็นจุดหมุน จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนรูป $\triangle A_1B_1C_2$



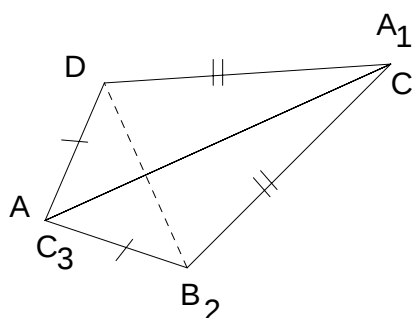
ดังนั้น $\triangle A_1B_2C_3 \cong \dots\dots\dots$

จากข้อ 3 และ 4 จะได้ว่า $\triangle A_1B_2C_3 \cong \dots\dots\dots$

เนื่องจาก $AC = CA$ ดังนั้น $AC = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $\overline{AC}$ และ $\dots\dots\dots$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน

6. พิจารณาจุด D และ B_2 ลาก $\overline{DB_2}$ จะได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปคือ $\triangle DAB_2$ และ $\triangle DA_1B_2$



เนื่องจาก $\triangle DAB_2$ และ $\triangle DA_1B_2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $\hat{A}DB_2 = \hat{A}B_2D$

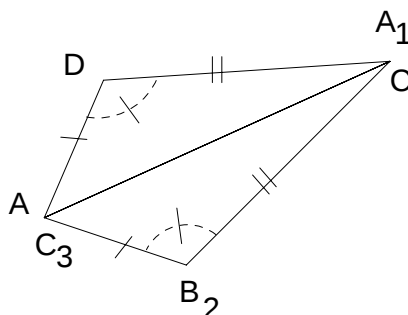
และ $\dots\dots\dots$

ดังนั้น $\hat{A}DB_2 + \hat{A}_1\hat{D}B_2 = \dots\dots\dots$

เนื่องจาก $\hat{A}DB_2 + \hat{A}_1\hat{D}B_2 = \dots\dots\dots$ และ $\hat{A}B_2D + \hat{A}_1\hat{B}_2D = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\hat{A}DA_1 = \dots\dots\dots$

นั่นคือ รูป $\triangle CDA$ และ $\triangle A_1B_2C_3$ มีความสัมพันธ์กันแบบ $\dots\dots\dots$



นั่นคือ สามารถแสดงได้ว่า รูป $\triangle CDA$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตเป็นจำนวนจำกัดครั้งของรูป $\dots\dots\dots$

ดังนั้น $\triangle CDA \cong \dots\dots\dots$

จากข้อ 5 ได้ว่า $\triangle A_1B_2C_3 \cong \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\dots\dots\dots \cong \dots\dots\dots$

□

สรุป หลักการการพิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง มีดังนี้

1. พิจารณาสีที่โจทย์กำหนดให้
2. วาดรูปโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (ในกรณีที่โจทย์ไม่มีรูปให้)
3. หาสิ่งที่ได้เพิ่มเติมจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
4. พิจารณาด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ
5. พิจารณาด้านคู่ที่สมนัยกัน
6. พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปหันไปในทิศทางเดียวกันหรือไม่ ถ้าหันไปทางเดียวกันให้สะท้อนรูปที่กำหนดเป็นรูปต้นแบบ โดยมีด้านใดด้านหนึ่งของรูปต้นแบบเป็นเส้นสะท้อน
7. พิจารณาจุดคู่ที่สมนัยกันคู่ใดคู่หนึ่งแล้วเลื่อนขนานรูปต้นแบบ ตามส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทางที่เชื่อมจุดคู่ที่สมนัยกัน
8. หมุนรูปสามเหลี่ยมที่เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบให้ด้านที่สมนัยกันด้านหนึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกันและมีจุดปลายทั้งสองด้านเป็นจุดเดียวกันกับรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง โดยมีจุดคู่ที่สมนัยที่อยู่จุดเดียวกันเป็นจุดหมุน
9. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างมุมคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับด้านร่วมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป แล้วใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้เหตุผลว่าเพราะเหตุใดรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจึงมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
10. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน เท่ากันทุกประการ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง นั่นคือรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน เท่ากันทุกประการ



ภาคผนวก ค
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

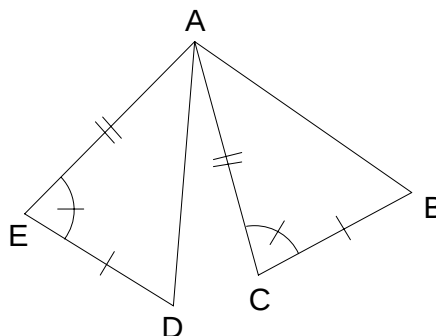
คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ
3. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 90 นาที
5. ข้อสอบแต่ละข้อ ข้อละ 4 คะแนน

ชื่อ ชั้น เลขที่

1. กำหนดให้ ABC และ ADE เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่ง

1. $BC = DE$
2. $\angle BCA = \angle DEA$
3. $CA = EA$



จงแสดงว่า $\triangle ABC \cong \triangle ADE$

พิสูจน์

1. พิจารณามุมและด้านคู่ที่เท่ากันเป็นคู่ ๆ

.....

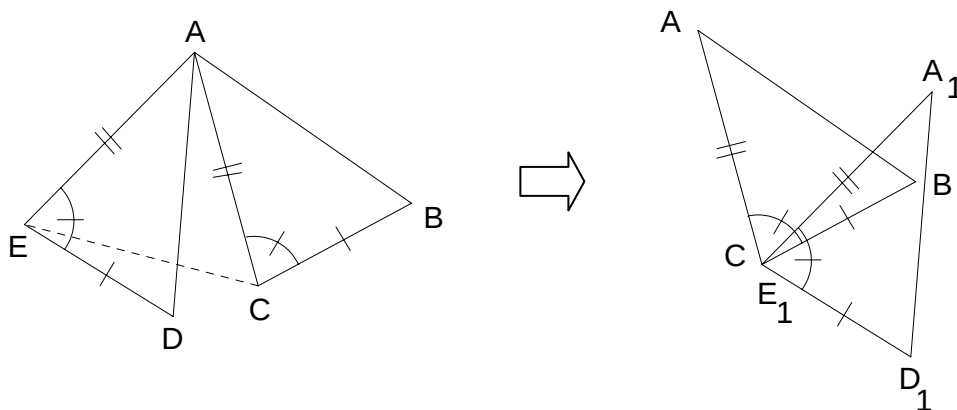
.....

2. พิจารณาจุดยอดและด้านคู่ที่สมนัยกัน

เนื่องจาก $\angle BCA = \angle DEA$ ดังนั้น จุด สมนัยกับจุด

ด้าน สมนัยกับด้าน และ ด้าน สมนัยกับด้าน

3. ให้รูป $\triangle ADE$ เป็นรูปต้นแบบ เลื่อนขนานรูปต้นแบบ $\triangle ADE$ ตาม $\overline{EC}$



จะได้รูป เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป

นั่นคือ $\triangle A_1D_1E_1 \cong \triangle ADE$ และจุด กับจุด เป็นจุดยอดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

4. จาก $\triangle A_1 D_1 E_1 \cong \dots\dots\dots$ ดังนั้น $D_1 \hat{E}_1 A_1 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ ซึ่ง

$$D_1 \hat{E}_1 A_1 = D_1 \hat{E}_1 B + \dots\dots\dots \text{ และ } B \hat{C} A = A_1 \hat{C} A + \dots\dots\dots$$

ดังนั้น $\dots\dots\dots$

เนื่องจาก $B \hat{E}_1 A_1 = \dots\dots\dots$ นั่นคือ $\dots\dots\dots$

5. เนื่องจาก $D_1 \hat{E}_1 B = \dots\dots\dots$ และ $BC = D_1 E_1, CA = \dots\dots\dots$

ดังนั้น รูป $\dots\dots\dots$ เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน รูป $\dots\dots\dots$ ในทิศทางเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดเท่ากับมุม $\dots\dots\dots$ โดยมีจุด $\dots\dots\dots$ เป็นจุดหมุน

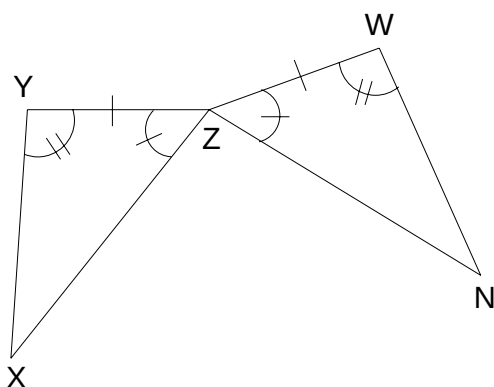
6. เนื่องจากรูป $\dots\dots\dots$ เป็นภาพที่เกิดจากการการเลื่อนขนานของรูป $\dots\dots\dots$

ดังนั้น $\dots\dots\dots$ จึงเป็นภาพของ $\dots\dots\dots$ ที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตเป็นจำนวน $\dots\dots\dots$ ครั้ง

นั่นคือ $\dots\dots\dots \cong \dots\dots\dots$



2.

กำหนดให้ $\angle X\hat{Y}Z = \angle N\hat{W}Z$, $YZ = WZ$ และ $\angle Y\hat{Z}X = \angle W\hat{Z}N$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle XYZ \cong \triangle WZN$ โดยใช้เรขาคณิตการแปลงอธิบายให้เข้าใจ
พอสังเขป

พิสูจน์กำหนดให้รูป เป็นรูปต้นแบบ

1. พิจารณาจุดคู่ที่สมนัยกัน

จุด สมนัยกับจุด

จุด สมนัยกับจุด

2.
.....

จะได้ รูป เป็นภาพที่เกิดจาก

การ

.....
.....

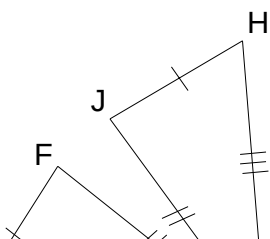
3. ดังนั้น รูป เป็นภาพที่เกิดจากการ ของรูป

จาก 2. รูป เป็นภาพที่เกิดจากการ ของรูป

ดังนั้น รูป เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปต้นแบบเป็นจำนวน ครั้ง

นั่นคือ $\cong$ $\cong$ ดังนั้น $\cong$ $\square$

3.

กำหนดให้ $EF = HJ$, $FG = JG$ และ $GE = GH$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle EFG \cong \triangle HJG$

โดยใช้เรขาคณิตการแปลงอธิบายให้เข้าใจพอ

พิสูจน์กำหนดให้รูป เป็นรูปต้นแบบ

1. พิจารณาจุดคู่ที่สมนัยกัน

จุด สมนัยกับจุด

จุด สมนัยกับจุด

จุด สมนัยกับจุด

2.

จะได้ รูป เป็นภาพที่เกิดจาก

การ

.....

3. ลาก จะได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปคือ และ

ดังนั้น = และ =

..... + = +

นั่นคือ =

ดังนั้นรูป และรูป มีความสัมพันธ์กันแบบ

ดังนั้น รูป เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูป

นั่นคือ $\cong$ $\cong$

ดังนั้น $\cong$



4. กำหนดให้ ACE และ LOG เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่จุด C และ O เป็นมุมฉากและ

$$AC = LO, \quad CAE = OLG$$

4.1 จงวาดภาพของ $\triangle ACE$ และ $\triangle LOG$

4.2 จงใช้ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม พิสูจน์ว่า $\triangle ACE \cong \triangle LOG$

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 1.

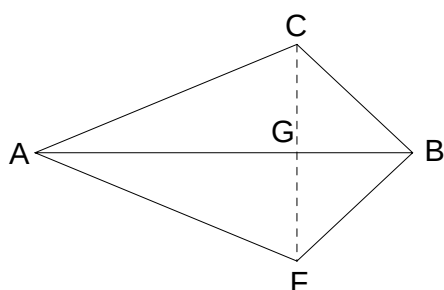
2.

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์พิจารณา $\triangle$ และ $\triangle$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{CAE} =$	
2.	กำหนดให้
3. $\hat{ACE} =$	
ดังนั้น $\triangle ACE \cong$	

5.



กำหนดให้ $\overline{CF}$ เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\triangle ACF$ และ $\triangle BCF$ และ $\overline{CF}$ ตัดกับ $\overline{AB}$ ที่จุด G

จงพิสูจน์ว่า 5.1 $\hat{ACB} = \hat{AFB}$

5.2 $\triangle ACB \cong \triangle AFB$

5.1

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 1.

2.

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

เนื่องจากรูป และ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $\overline{CF}$ เป็นฐาน

ดังนั้น 1. $\hat{ACF} = \dots\dots\dots$

2. $\hat{BCF} = \dots\dots\dots$

ฉะนั้น $\hat{ACF} + \dots\dots\dots = \hat{AFC} + \dots\dots\dots$

เนื่องจาก $\hat{ACF} + \hat{BCF} = \dots\dots\dots$ และ $\hat{AFC} + \hat{BFC} = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

5.2

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 1.

2.

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

เนื่องจากรูป และ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มี $\overline{CF}$ เป็นฐาน

ดังนั้น 1. $\hat{AC} = \dots\dots\dots (*)$

2. $\hat{BC} = \dots\dots\dots (**)$

และจากข้อ 7.1 ได้ว่า $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

พิจารณารูป และ

1. $\hat{AC} = \dots\dots\dots (\dots\dots\dots)$

2. $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots (\text{จากข้อ 7.1})$

3. $\hat{BC} = \dots\dots\dots (\dots\dots\dots)$

ดังนั้น $\dots\dots\dots \cong \dots\dots\dots (\dots\dots\dots)$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

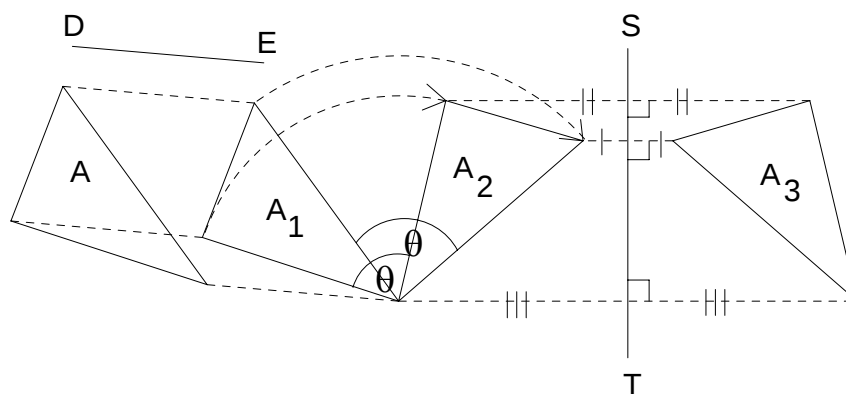
คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ
3. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบในแต่ละข้อ โดยเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว
4. ในแต่ละข้อคำถามจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียง 1 คำตอบเท่านั้น
5. ห้ามนักเรียนขีดเขียนหรือคิดคำนวณในแบบทดสอบนี้
6. ให้นักเรียนคิดคำนวณหรือวาดรูปประกอบในการหาคำตอบในกระดาษทดที่ได้รับ
7. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 30 นาที

1. รูปเรขาคณิตสองรูปใด ๆ จะเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ
 - ก. รูปสองรูปนั้นมีพื้นที่เท่ากัน
 - ข. รูปสองรูปนั้นมีลักษณะเดียวกัน
 - ค. รูปสองรูปนั้นมีความยาวรอบรูปเท่ากัน
 - ง. รูปสองรูปนั้นเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตเป็นจำนวนจำกัดครั้งของกันและกัน

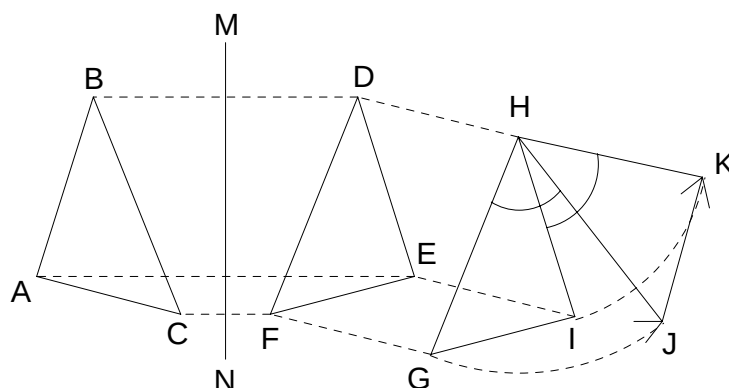
2. รูปคู่ใดต่อไปนี้ที่เท่ากันทุกประการ
 - ก. รูป A เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูป B เป็นจำนวนจำกัดครั้ง
 - ข. รูป C มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากันกับรูป D
 - ค. รูป E มีพื้นที่เท่ากันกับรูป F
 - ง. รูป G มีลักษณะเดียวกันกับรูป H

จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้ตอบคำถามข้อ 3 – 4



3. กำหนดให้รูป A เป็นรูปต้นแบบ รูป A_3 เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปต้นแบบเป็นจำนวนกี่ครั้ง และเกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตแบบใดบ้างตามลำดับ
 - ก. 3 ครั้ง ได้แก่ การเลื่อนขนาน , หมุน และสะท้อน
 - ข. 3 ครั้ง ได้แก่ การหมุน , สะท้อน และเลื่อนขนาน
 - ค. 2 ครั้ง ได้แก่ การสะท้อน และหมุน
 - ง. 2 ครั้ง ได้แก่ การหมุน และเลื่อนขนาน
4. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
 - ก. รูป A_3 เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป A_2 ตาม $\overline{DE}$
 - ข. รูป A_2 เป็นภาพที่เกิดจากการหมุนของรูป A_1 ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม θ องศา
 - ค. รูป A_1 เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูป A โดยมี $\overline{DE}$ เป็นเส้นสะท้อน
 - ง. รูป A เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูป A_1 ตาม $\overline{DE}$

จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ใช้ตอบคำถามข้อ 5 – 7



5. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของมุม $\angle ABC$

ก. $\angle DEF$ ข. $\angle EDF$ ค. $\angle EFD$ ง. $\angle GHI$

6. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นคู่สมนัยของ $\overline{AC}$ ทั้งหมด

ก. $\overline{EF}$, $\overline{IG}$ และ $\overline{HK}$

ข. $\overline{EF}$, $\overline{HG}$ และ $\overline{HK}$

ค. $\overline{EF}$, $\overline{HI}$ และ $\overline{KJ}$

ง. $\overline{EF}$, $\overline{IG}$ และ $\overline{KJ}$

7. ข้อใดต่อไปนี้ กล่าวได้ถูกต้อง

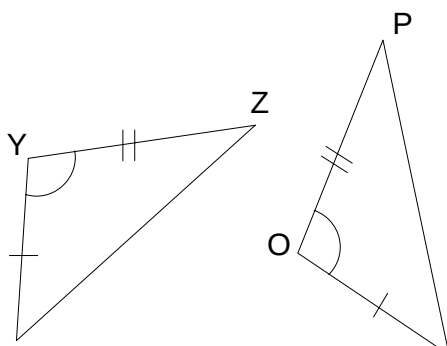
ก. $\triangle EDF$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ $\triangle ABC$

ข. $\triangle KHJ \cong \triangle ABC$ เพราะ $\triangle KHJ$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของ $\triangle ABC$ เป็นจำนวน 2 ครั้ง

ค. $\triangle IHG$ เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของ $\triangle ABC$

ง. $\triangle IHG \cong \triangle ABC$ เพราะ $\triangle IHG$ เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของ $\triangle ABC$ เป็นจำนวน 2 ครั้ง

8.



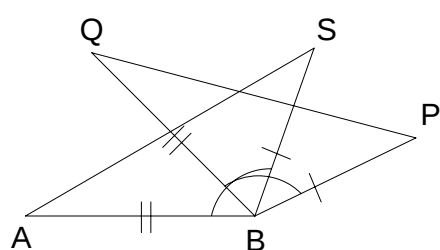
จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle XYZ \cong \triangle TOP$ จะต้องดำเนินการขั้นตอนตามข้อใดต่อไปนี้ ถ้ากำหนดให้ $\triangle TOP$ เป็นรูปต้นแบบ

ก. เลื่อนขนาน $\triangle TOP$ ตาม $\overline{PZ}$

ข. เลื่อนขนาน $\triangle TOP$ ตาม $\overline{OY}$

ค. เลื่อนขนาน $\triangle TOP$ ตาม $\overline{XY}$

9.



ถ้ากำหนดให้ $AB = QB$, $\angle ABS = \angle QBP$ และ $BS = BP$
 ต้องอธิบายด้วยการแปลงทางเรขาคณิตตามข้อใดจึงจะสรุป
 ได้ว่า $\triangle ABS \cong \triangle QBP$

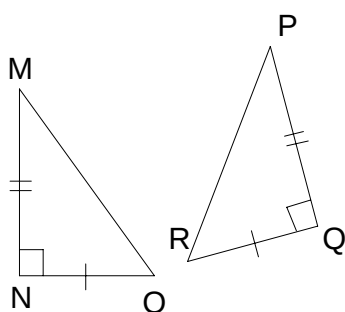
ก. เลื่อนขนาน $\triangle ABS$ ตาม $\overline{AQ}$

ข. สะท้อน $\triangle ABS$ โดยมี $\overline{BS}$ เป็นเส้นสะท้อน

ค. หมุน $\triangle ABS$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาด
 มุม SBP

ง. เลื่อนขนาน $\triangle ABS$ ตาม $\overline{BP}$

10.

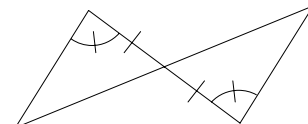
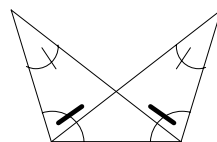
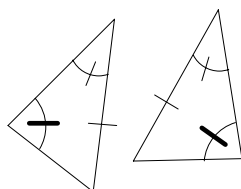
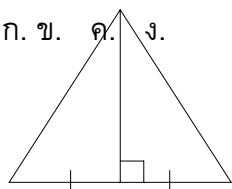


จากรูปที่กำหนดให้ถ้าต้องการแสดงว่า $\triangle MNO \cong \triangle PQR$
 จะต้องใช้การแปลงทางเรขาคณิตอย่างน้อยที่สุดกี่ครั้ง

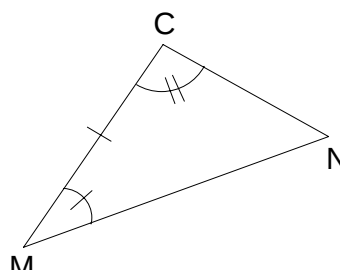
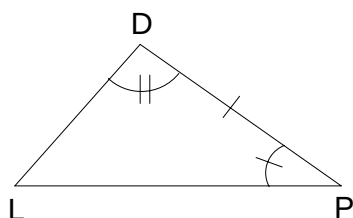
ก. 1 ครั้ง ข. 2 ครั้ง ค. 3 ครั้ง ง. 4 ครั้ง

11. รูปในข้อใดต่อไปนี้มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

ก. ข. ค. ง.



12.



กำหนดให้ $\angle D\hat{P} = \angle \hat{C}M$, $DP = CM$ และ $D\hat{P}L = \hat{C}M\hat{N}$

จากรูปข้อใดต่อไปนี้เป็น การดำเนินการแปลงทางเรขาคณิตขั้นที่ 1 เพื่อพิสูจน์ว่า

$\triangle LDP \cong \triangle NCM$ เมื่อกำหนดให้ $\triangle NCM$ เป็นรูปต้นแบบ

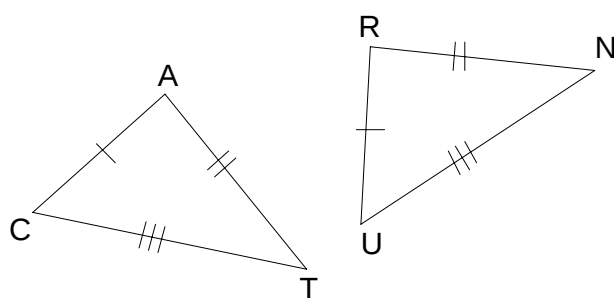
ก. เลื่อนขนาน $\triangle NCM$ ตาม $\overline{MP}$

ข. สะท้อนรูป $\triangle NCM$ โดยมี $\overline{CM}$ เป็นเส้นสะท้อน

ค. หมุนรูป $\triangle NCM$ ในทิศวนเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม $\angle NMC$ โดยมีจุด M เป็นจุดหมุน

ง. ข้อ ก. หรือ ข้อ ข.

จากรูปและข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 13 – 15



กำหนดให้

$AC = RU$, $CT = UN$ และ $TA = NR$

และให้ $\triangle RUN$ เป็นรูปต้นแบบ

13. จากรูปที่กำหนดให้เพื่อให้สะดวกต่อการพิสูจน์ว่าโดยใช้เรขาคณิตการแปลงควรดำเนินการตามข้อใดเป็นอันดับแรก

ก. เลื่อนขนาน $\triangle RUN$ ตาม $\overline{RC}$

ข. หมุน $\triangle RUN$ ในทิศตามเข็มนาฬิกาด้วยขนาดมุม 90° องศา โดยมีจุด U เป็นจุดหมุน

ค. สะท้อน $\triangle RUN$ โดยมี $\overline{UN}$ เป็นเส้นสะท้อน

ง. เลื่อนขนานรูป $\triangle RUN$ ตาม $\overline{RT}$

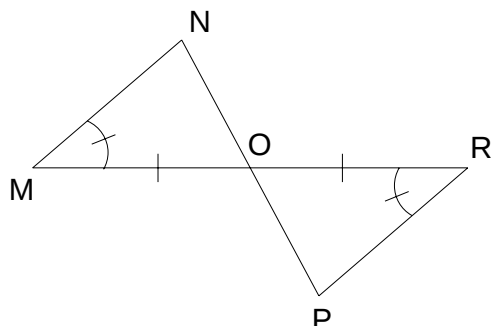
14. จากรูปถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle CAT \cong \triangle URN$ ต้องดำเนินการแปลงทางเรขาคณิตเพื่อแสดงว่ารูป $\triangle CAT$ และ $\triangle URN$ มีความสัมพันธ์แบบใด

ก. ด.ม.ด.ข. ม.ด.ม.ค. ด.ด.ด.ง. ม.ม.ม.

15. จากข้อ 14. ต้องอาศัยสมบัติในข้อใดจึงจะแสดงได้ว่า $\triangle CAT$ และ $\triangle URN$ มีความสัมพันธ์ดังกล่าว

- ก. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วข. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ค. สมบัติของมุมตรงข้ามง. สมบัติของเส้นขนาน

16.



$\triangle MNO \cong \triangle RPO$ ตามความสัมพันธ์แบบใด

ก. ด.ม.ด.ข. ม.ด.ม.

ค. ด.ด.ด.ง. ม.ม.ด.

17. จากข้อ 16. ข้อใดต่อไปนี้สรุปได้ถูกต้อง

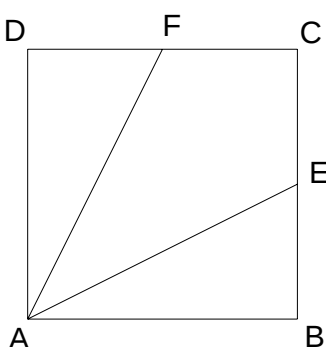
ก. $ON = OP$

ข. $NM = OP$

ค. $\angle ONM = \angle POR$

ง. $\angle MON = \angle OPR$

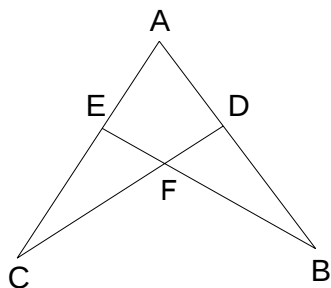
18.



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ DC ตามลำดับ
ดังนั้น $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ตามความสัมพันธ์แบบใด

ก. ด.ม.ด.ข. ม.ด.ม.ค. ด.ด.ด.ง. ม.ม.ด.

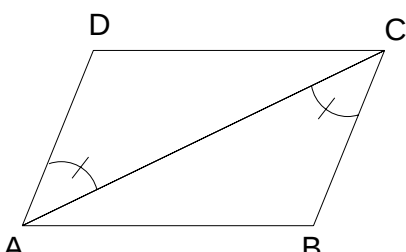
19.



ถ้า $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ตามความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.
โดย $AE = AD$ แล้วด้านคู่ที่เท่ากันอีกคู่หนึ่งคือข้อใด

ก. $BE = CD$ ข. $BF = CF$ ค. $AB = AC$ ง. $FD = FE$

20.



ถ้า $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ตามความสัมพันธ์แบบ ม.ด.ม.
แล้วจะต้องมีมุมคู่ใดเท่ากันอีกคู่หนึ่ง

ก. $\angle BAC = \angle DCA$

ข. $\angle ABC = \angle CDA$

ขอให้โชคดี

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)
เรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

- | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. ง | 2. ก | 3. ค | 4. ข | 5. ข | 6. ง | 7. ง | 8. ข | 9. ค | 10. ค |
| 11. ง | 12. ง | 13. ค | 14. ก | 15. ก | 16. ข | 17. ก | 18. ก | 19. ค | 20. ก |

คู่มือการใช้บทเรียน

เรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1. หลักการและเหตุผล

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าว จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องให้ความสำคัญต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพสังคมในปัจจุบัน

เป็นที่ทราบกันดีว่าความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีส่วนเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์เราอย่างมาก เราใช้เรขาคณิตในชีวิตจริงเพื่อทำความเข้าใจหรืออธิบายสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เรขาคณิตช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ ได้แก่ การคิด การให้เหตุผล การคิดสร้างสรรค์ การแก้ปัญหา และทักษะเชิงมิติสัมพันธ์หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial sense) ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับความรู้แขนงอื่น ๆ อีกด้วย ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดเรขาคณิตการแปลงเป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระการเรียนรู้เรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) โดยได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นเกี่ยวกับเรขาคณิตการแปลงไว้ว่าผู้เรียนควรมีความสามารถเข้าใจเกี่ยวกับการแปลง (Transformation) ทางเรขาคณิตในเรื่อง การเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้ โดยในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) สาระที่ 3 นั้นได้กล่าวถึงเฉพาะการแปลงทางเรขาคณิตที่ขนาดยังคงเหมือนเดิมหรือการแปลงเฉพาะตำแหน่ง ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน ซึ่งการแปลงทั้ง 3 ประเภทนี้เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีสมบัติสมมิติ (Isometry) ครบถ้วน กล่าวคือ สมบัติสมมิติเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่ภาพ (Image) และบุพภาพ (Pre-image) เท่ากันทุกประการ

ดังนั้นหากสามารถนำเนื้อหาในเรื่องเรขาคณิตการแปลงมาเชื่อมโยงเข้ากับความเท่ากันทุกประการได้ก็จะเป็นอีกแนวทางหนึ่งในการศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการซึ่งต่างไปจากวิธีการที่ศึกษาอยู่เดิม ทั้งยังเป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาทางคณิตศาสตร์สองเนื้อหาเข้าด้วยกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

2. วัตถุประสงค์

เพื่อให้ครูใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิต
การแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

3. เนื้อหาของบทเรียน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่
2 ประกอบด้วย 4 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

1. ทบทวนเรขาคณิตการแปลง
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต
3. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
 - 3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
 - 3.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
 - 3.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน
4. การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผลและ
แก้ปัญหา

4. แนวทางการใช้บทเรียน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่
2 ประกอบด้วย คู่มือการใช้บทเรียน แผนการจัดการเรียนรู้ บทเรียนที่ประกอบด้วยเนื้อหาและใบ
งาน สื่อการเรียนรู้ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้
เรขาคณิตการแปลง ในการใช้บทเรียนให้ปฏิบัติตามคู่มือการใช้บทเรียน กิจกรรมต่าง ๆ ให้ปฏิบัติ
ตามแผนการจัดการเรียนรู้ และฝึกทักษะด้วยใบงานในบทเรียนที่สร้างขึ้น เมื่อเสร็จสิ้นการสอนในทุก
หน่วยการเรียนรู้แล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุก
ประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง

5. ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ประกอบด้วยกิจกรรม 3 ลักษณะ
คือ

1. กิจกรรมที่ครูเป็นผู้ดำเนินการสอน เป็นชั้นการสอนเพื่อให้เกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาต่าง ๆ
2. กิจกรรมที่ให้นักเรียนร่วมกันปฏิบัติเป็นกลุ่มย่อย เพื่อร่วมกันอภิปรายแสดงความคิดเห็น ภายใน
กลุ่มและภายในชั้นเรียน
3. กิจกรรมการเรียนรู้เป็นรายบุคคล ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบฝึกทักษะรายบุคคล

6. ข้อเสนอแนะในการใช้บทเรียน

ในการใช้บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ครูควรศึกษา
กิจกรรมการเรียนการสอนทุกขั้นตอนก่อนดำเนินการสอน จัดเตรียมสื่อการเรียนรู้ในแต่ละครั้งให้
พร้อม นอกจากนี้ในขณะดำเนินการสอนครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมแสดงความคิดเห็นและ
แสดงเหตุผลต่าง ๆ และควรให้คำแนะนำสำหรับการพิสูจน์และวิธีการเขียนที่นักเรียนไม่คุ้นเคย

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32101

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง ทบทวนเรขาคณิตการแปลง

จำนวน 3 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน ของรูปต้นแบบได้
2. บอกขั้นตอนการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนได้
3. บอกได้ว่าการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน มีสมบัติสมมติครบถ้วน

ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. สื่อสารและการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้น
2. กล้าแสดงความคิดเห็น
3. รอบคอบ

สาระการเรียนรู้

1. การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานของรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบ หมายถึง การแปลงซึ่งจุดทุกจุดในรูปต้นแบบเลื่อนไปบนระนาบเป็นระยะทางที่เท่ากันและในทิศทางเดียวกัน

ส่วนของเส้นตรงที่มีขนาดและทิศทาง MN อาจเขียนแทนด้วย $\overline{MN}$ ซึ่ง $\overline{MN}$ จะมีทิศทางจากจุดเริ่มต้น M ไปยังจุดสิ้นสุด N และมีขนาดเท่ากับความยาวของ $\overline{MN}$

2. การสะท้อน

การสะท้อนของรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบที่มีเส้นตรง L เป็นเส้นสะท้อน หมายถึง การแปลงซึ่งแต่ละจุด P บนรูปต้นแบบจะมีคู่ของจุด P หรือภาพของจุด P สมมติว่าชื่อจุด P_1 เป็นภาพที่ได้จากการแปลงจุด P โดยที่เส้นตรง L จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง PP_1

3. การหมุน

การหมุนรูปต้นแบบใด ๆ บนระนาบที่มีจุด O เป็นจุดหมุน ด้วยมุมที่มีขนาด θ ซึ่งระบุทิศทาง (ทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา) หมายถึง แต่ละจุด P บนรูปต้นแบบจะมีจุด P_1 บนภาพซึ่ง $OP = OP_1$ และมุม POP_1 มีขนาดเท่ากับ θ โดยมีทิศทางตามที่ระบุ

สมบัติสมมติของการแปลง

1) ระยะห่างระหว่างจุด (Distance)

ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใด ๆ บนรูปต้นแบบจะเท่ากับระยะห่างระหว่างภาพของจุดสองจุดนั้น

2) ภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity)

ถ้าจุดสามจุดบนรูปต้นแบบอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วภาพของจุดทั้งสามนั้นจะต้องอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน

3) การอยู่ระหว่างจุด (Betweenness)

ถ้า A , B และ C เป็นจุดบนรูปต้นแบบโดยที่จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C แล้วภาพของจุด B จะต้องอยู่ระหว่างภาพของจุด A และภาพของจุด C ด้วย

4) ขนาดของมุม (Angle Measure)

ขนาดของมุมใด ๆ บนรูปต้นแบบจะต้องเท่ากับขนาดของภาพของมุมนั้น ๆ

สื่อการเรียนรู้

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. ไม้บรรทัด วงเวียนและเครื่องวงกลม
3. กระดานแม่เหล็ก
4. ใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูแจกบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง แล้วครูอธิบายความหมายของการเลื่อนขนานและให้นักเรียนดูในบทเรียนประกอบไปพร้อมกัน
2. ครูยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุดที่เป็นรูปต้นแบบแล้วครูให้นักเรียนช่วยกันบอกแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบและช่วยกันสรุปแนวคิดและภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบอีกครั้ง
3. ครูยกตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาแล้วครูให้นักเรียนช่วยกันตอบว่านักเรียนจะมีแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของส่วนของเส้นตรงที่เป็นรูปต้นแบบอย่างไร โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 1 แล้วครูช่วยอธิบายและสรุปอีกครั้ง

4. ครูยกตัวอย่างที่ 3 ครูและนักเรียนช่วยกันพิจารณาการเลื่อนขนานของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นรูปต้นแบบ ครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงทั้งหมดกี่เส้น แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบ โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 2 แล้วครูนำนักเรียนหาภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานของรูปต้นแบบอย่างเป็นขั้นตอนอีกครั้ง โดยครูเป็นผู้ถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ และสรุปร่วมกันอีกครั้ง
5. ครูแจกใบงานเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง ครูให้นักเรียนทำใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ข้อ 1 และ 2 ทั้งหมด จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันทำข้อ 3.1 โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำ จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอีกครั้ง
6. ครูให้นักเรียนทำข้อ 3.2 - 3.5 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นการบ้าน แล้วให้นำมาส่ง
7. ครูอธิบายความหมายของการสะท้อนและให้นักเรียนดูใบทเรียนประกอบไปพร้อมกัน
8. ครูยกตัวอย่างที่ 4 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของจุดที่เป็นรูปต้นแบบ แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันบอกแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบและช่วยกันสรุปแนวคิดและภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบอีกครั้ง
9. ครูยกตัวอย่างที่ 5 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาแล้วครูให้นักเรียนช่วยกันตอบว่านักเรียนจะมีแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของส่วนของเส้นตรงที่เป็นรูปต้นแบบอย่างไร โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 4 แล้วครูช่วยอธิบายและสรุปอีกครั้ง
10. ครูยกตัวอย่างที่ 6 ครูและนักเรียนช่วยกันพิจารณาการสะท้อนของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นรูปต้นแบบ ครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงทั้งหมดกี่เส้น แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบ โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 5 แล้วครูนำนักเรียนหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบอย่างเป็นขั้นตอนอีกครั้ง โดยครูเป็นผู้ถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ และสรุปร่วมกันอีกครั้ง
11. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 7 แล้วครูให้นักเรียนบอกแนวคิดและขั้นตอนในการหาภาพที่เกิดจากการสะท้อนของรูปต้นแบบ เป็นรายบุคคล แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอีกครั้ง
12. ให้นักเรียนทำใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ข้อ 4 และ 5 ทั้งหมด จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันทำข้อ 6.1 โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำ จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอีกครั้ง
13. ครูให้นักเรียนทำข้อ 6.2 - 6.5 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นการบ้าน แล้วให้นำมาส่ง
14. ครูอธิบายความหมายของการหมุนและให้นักเรียนดูใบทเรียนประกอบไปพร้อมกัน
15. ครูยกตัวอย่างที่ 8 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการหมุนของจุดที่เป็นรูปต้นแบบ แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันบอกแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบและช่วยกันสรุปแนวคิดและภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบอีกครั้ง
16. ครูยกตัวอย่างที่ 9 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาแล้วครูให้นักเรียนช่วยกันตอบว่านักเรียนจะมีแนวคิดในการหาภาพที่เกิดจากการหมุนของส่วนของเส้นตรงที่เป็นรูปต้นแบบอย่างไร โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 8 แล้วครูช่วยอธิบายและสรุปอีกครั้ง

17. ครูยกตัวอย่างที่ 10 ครูและนักเรียนช่วยกันพิจารณาการหมุนของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นรูปต้นแบบ ครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงทั้งหมดกี่เส้น แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบ โดยให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างที่ 9 แล้วครูนำนักเรียนหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบอย่างเป็นขั้นตอนอีกครั้ง โดยครูเป็นผู้ถามนำให้นักเรียนช่วยกันตอบ และสรุปร่วมกันอีกครั้ง
18. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 11 , 12 และ 13 แล้วครูให้นักเรียนบอกแนวคิดและขั้นตอนในการหาภาพที่เกิดจากการหมุนของรูปต้นแบบ เป็นรายบุคคล แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอีกครั้ง
19. ให้นักเรียนทำใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ข้อ 7 – 10 ทั้งหมด จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันทำข้อ 11.1 และ 12.2 โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำ จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปอีกครั้ง
20. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่เหลือในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ทั้งหมดเป็นการบ้าน แล้วให้นำมาส่ง
21. ครูนำนักเรียนศึกษาสมบัติสมมติของการแปลง และครูอธิบายสมบัติสมมติของการแปลงทีละข้อ ให้นักเรียนดูตามไปพร้อมกันในบทเรียนและให้นักเรียนช่วยกันตอบว่าลักษณะใดที่สอดคล้องกับสมบัติสมมติ
22. ครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่าการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนมีสมบัติสมมติครบถ้วนหรือไม่ จากนั้นครูช่วยสรุปให้นักเรียนอีกครั้ง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม การให้เหตุผลในการตอบคำถาม และการนำเสนอในชั้นเรียน	
2. สังเกตจากการทำใบงาน	

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32101

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูป

จำนวน 2 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของความเท่ากันทุกประการได้
 2. บอกได้ว่าภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตเป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน หรือการหมุน
 3. บอกนิยามของความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรงได้
 4. บอกนิยามของความเท่ากันทุกประการของมุมได้
 5. บอกได้ว่าภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนเท่ากันทุกประการ
- ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. สื่อสารและการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้น
2. กล้าแสดงความคิดเห็น
3. รอบคอบ

สาระการเรียนรู้

1. ความเท่ากันทุกประการ

บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของอีกรูปหนึ่ง

ใช้สัญลักษณ์ $\cong$ แทน ความเท่ากันทุกประการ

เช่น เมื่อรูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B เขียนแทนด้วย รูป $A \cong B$ อ่านว่า รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B

2. ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

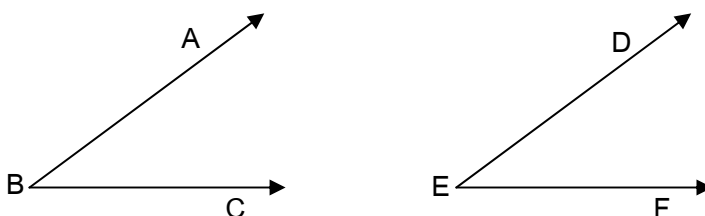
นิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการเมื่อส่วนของเส้นตรงทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน



จากรูป $\overline{CD}$ เท่ากันทุกประการกับ $\overline{EF}$ เขียนแทนด้วย $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

3. ความเท่ากันทุกประการของมุม

นิยาม มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน



จากรูป $\angle ABC$ เท่ากันทุกประการกับ $\angle DEF$ เขียนแทนด้วย $\angle ABC \cong \angle DEF$

สื่อการเรียนรู้

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. ไม้บรรทัด วงเวียนและครึ่งวงกลม
3. ใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูอธิบายนิยามของความเท่ากันทุกประการ พร้อมแนะนำสัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า “เท่ากันทุกประการกับ” แล้วยกตัวอย่างการเขียนสัญลักษณ์ให้นักเรียนดูตามไปพร้อมกันในบทเรียน
2. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปต้นแบบ M , N , X และ Y ในหน้า 1 แล้วครูยกตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนดูตามไปพร้อมกัน โดยครูให้นักเรียนช่วยกันตอบว่ารูปใดเป็นรูปต้นแบบ จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันพิจารณาการแปลงทางเรขาคณิตของรูปต้นแบบและนำนักเรียนอภิปรายว่ารูป M_1 , M_2 และ M_3 เป็นภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตแบบใดและจากรูปใดเป็นรูปต้นแบบบ้าง
3. ครูให้นักเรียนช่วยกันตอบว่ารูป M_3 เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปใดและเป็นจำนวนกี่ครั้ง และเท่ากันทุกประการกับรูปใดบ้าง แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง

4. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 2-4 แล้วเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคลว่ารูปใดเป็นรูปต้นแบบ และภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตได้แก่รูปใดและจากการแปลงทางเรขาคณิตแบบใด มีรูปใดเป็นรูปต้นแบบ และรูปใดเท่ากันทุกประการบ้าง แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง
5. ครูให้นักเรียนทำข้อ 1-2 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วเรียกให้นักเรียนตอบเป็นรายบุคคล และให้นักเรียนทำข้อ 3-6 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เป็นการบ้าน แล้วให้นำมาส่ง
6. ครูอธิบายนิยามความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาส่วนของเส้นตรง AB ที่เป็นรูปต้นแบบในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน้า 6 ครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน ของส่วนของเส้นตรง AB ว่ามีความยาวเท่ากันกับรูปต้นแบบหรือไม่ โดยครูแนะนำให้นักเรียนพิจารณาว่า การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน มีสมบัติสมมติอย่างไรบ้าง
7. ครูให้นักเรียนพิจารณาการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนของส่วนของเส้นตรง AB แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันบอกว่าภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุนของส่วนของเส้นตรง AB มีขนาดเป็นอย่างไรกับรูปต้นแบบ และเท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบหรือไม่ ครูช่วยสรุปอีกครั้ง
8. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 5-6 แล้วเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคลว่ารูปต้นแบบในแต่ละข้อ มีการแปลงทางเรขาคณิตกี่ครั้ง และได้ภาพที่เกิดจากการแปลงแต่ละครั้งเป็นภาพใด และภาพที่ได้เท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบหรือไม่ แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง
9. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกนิยามของความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรงอีกครั้งแล้วให้เขียนลงในข้อ 9 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วครูให้นักเรียนทำข้อ 10 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำตอบข้อสงสัย เสร็จแล้วให้นักเรียนนำเสนอและช่วยกันสรุป แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง
10. ครูให้นักเรียนทำข้อ 7-8 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เป็นการบ้านแล้วนำมาส่ง
11. ครูให้นักเรียนทบทวนนิยามของมุมแล้วครูอธิบายนิยามความเท่ากันทุกประการของมุม จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันพิจารณามุม ABC ที่เป็นรูปต้นแบบในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน้า 10 ครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน ของมุม ABC ว่ามีขนาดเท่ากันกับรูปต้นแบบหรือไม่ โดยครูแนะนำให้นักเรียนพิจารณาว่า การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน มีสมบัติสมมติอย่างไรบ้างเกี่ยวกับมุม
12. ครูให้นักเรียนพิจารณาการเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุนมุม ABC แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันบอกว่าภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุนของมุม ABC มีขนาดเป็นอย่างไรกับรูปต้นแบบ และเท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบหรือไม่ ครูช่วยสรุปอีกครั้ง
13. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 7-8 แล้วเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคลว่ารูปต้นแบบในแต่ละข้อมีการแปลงทางเรขาคณิตกี่ครั้ง และได้ภาพที่เกิดจากการแปลงแต่ละครั้งเป็นภาพใด และภาพที่ได้เท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบหรือไม่ แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง

14. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกนิยามของความเท่ากันทุกประการของมุมอีกครั้งแล้วให้เขียนลงในข้อ 13 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แล้วครูให้นักเรียนทำข้อ 11-12 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำตอบข้อสงสัย เสร็จแล้วให้นักเรียนนำเสนอและช่วยกันสรุป แล้วครูช่วยสรุปอีกครั้ง
15. ครูให้นักเรียนทำข้อ 14 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เป็นการบ้านแล้วนำมาส่ง จากนั้นครูเปิดโอกาสให้นักเรียนถามข้อสงสัยในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2
16. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสาระการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 อีกครั้ง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม การให้เหตุผลในการตอบคำถาม และการนำเสนอในชั้นเรียน	
2. สังเกตจากการทำใบงาน	

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32101

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

จำนวน 9 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้
2. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมคู่ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
นั้นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของอีกรูปหนึ่ง
4. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

เท่ากันทุกประการ

5. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมคู่ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
6. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
นั้นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของอีกรูปหนึ่ง
7. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

เท่ากันทุกประการ

8. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมคู่ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน
9. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน
นั้นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของอีกรูปหนึ่ง
10. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

เท่ากันทุกประการ

ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. สื่อสารและการนำเสนอ
3. ในการให้ความร่วมมือและรับผิดชอบ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้น
2. กล้าแสดงความคิดเห็น
3. รอบคอบ

สาระการเรียนรู้

1. รูปสามเหลี่ยม

นิยาม รูปสามเหลี่ยม ABC คือรูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A, B และ C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เรียกจุด A, B และ C ว่า “จุดยอด” ของรูปสามเหลี่ยม ABC

เรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า “ด้าน” ของรูปสามเหลี่ยม ABC

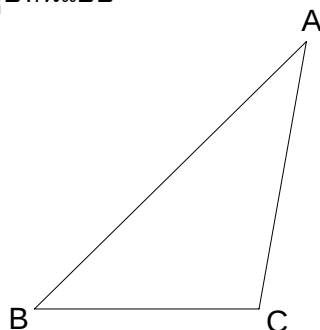
และเขียน $\triangle ABC$ แทนรูปสามเหลี่ยม ABC

2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

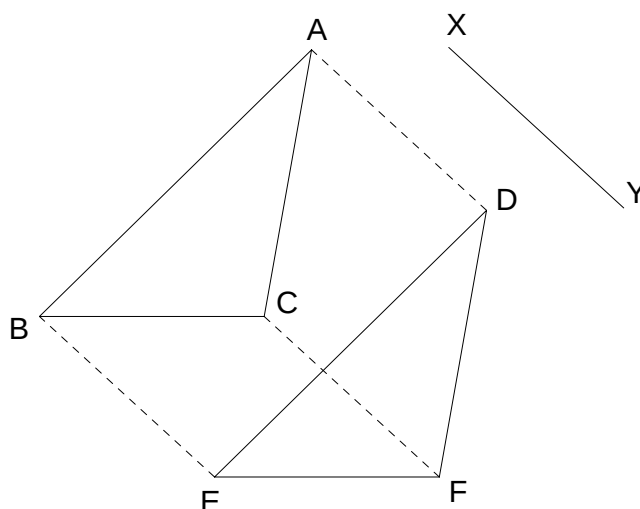
นิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ เท่ากันทุกประการเมื่อรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง

3. ภาพและคู่สมนัยที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปต้นแบบ

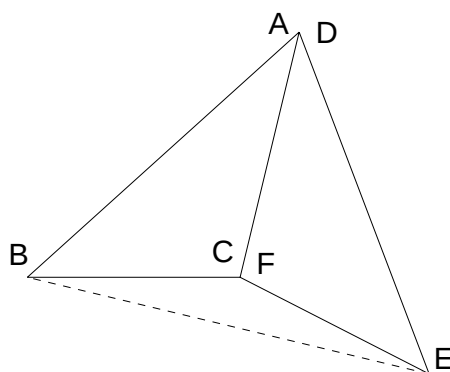


3.1 รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปสามเหลี่ยม ABC ตาม $\overline{XY}$



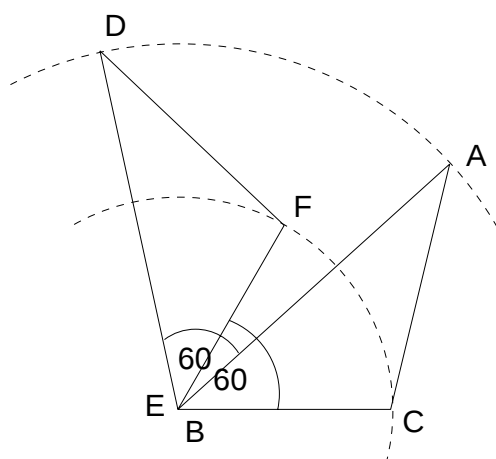
ภาพของจุด A คือ จุด D ภาพของจุด B คือ จุด E ภาพของจุด C คือ จุด F	ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD	ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE
จุด A สมัยกับจุด D จุด B สมัยกับจุด E จุด C สมัยกับจุด F	ด้าน AB สมัยกับด้าน DE ด้าน BC สมัยกับด้าน EF ด้าน CA สมัยกับด้าน FD	มุม ABC สมัยกับมุม DEF มุม BCA สมัยกับมุม EFD มุม CAB สมัยกับมุม FDE

3.2 รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีส่วนของเส้นตรง AC เป็นเส้นสะท้อน



ภาพของจุด A คือ จุด D (A) ภาพของจุด B คือ จุด E ภาพของจุด C คือ จุด F (C)	ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD	ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE
จุด A สมัยกับจุด D (A) จุด B สมัยกับจุด E จุด C สมัยกับจุด F (C)	ด้าน AB สมัยกับด้าน DE ด้าน BC สมัยกับด้าน EF ด้าน CA สมัยกับด้าน FD	มุม ABC สมัยกับมุม DEF มุม BCA สมัยกับมุม EFD มุม CAB สมัยกับมุม FDE

3.3 รูปสามเหลี่ยม DEF เป็นภาพที่เกิดจากการหมุน รูปสามเหลี่ยม ABC ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ด้วยขนาดมุม 60 องศา โดยมีจุด B เป็นจุดหมุน



ภาพของจุด A คือ จุด D ภาพของจุด B คือ จุด E (B) ภาพของจุด C คือ จุด F	ภาพของด้าน AB คือ ด้าน DE ภาพของด้าน BC คือ ด้าน EF ภาพของด้าน CA คือ ด้าน FD	ภาพของมุม ABC คือ มุม DEF ภาพของมุม BCA คือ มุม EFD ภาพของมุม CAB คือ มุม FDE
จุด A สมัยกับจุด D จุด B สมัยกับจุด E (B) จุด C สมัยกับจุด F	ด้าน AB สมัยกับด้าน DE ด้าน BC สมัยกับด้าน EF ด้าน CA สมัยกับด้าน FD	มุม ABC สมัยกับมุม DEF มุม BCA สมัยกับมุม EFD มุม CAB สมัยกับมุม FDE

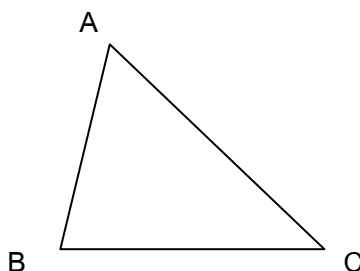
สรุป

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีภาพที่เกิดจากการแปลงจำนวนจำกัดครั้งเป็นคู่ ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

มุมในระหว่างด้าน

จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

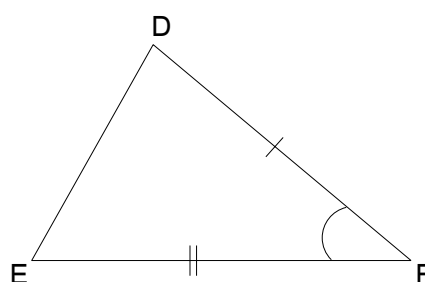
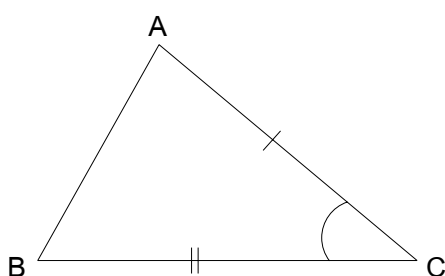


เราเรียกมุม ABC ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AB กับด้าน BC”

เราเรียกมุม BAC ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AB กับด้าน AC”

และเราเรียกมุม ACB ว่าเป็น “มุมในระหว่างด้าน AC กับด้าน BC”

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $AC = DF$, $BC = EF$ และ $\hat{ACB} = \hat{DFE}$

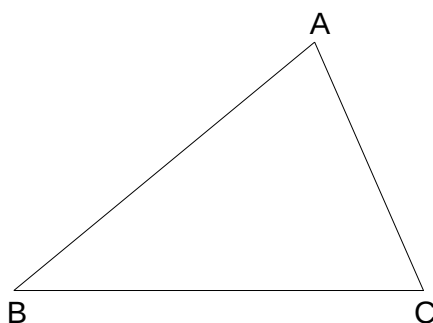


เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน” และเขียน ด.ม.ด. แทน ด้าน-มุม-ด้าน

ทฤษฎีบท 1 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (ด้าน-มุม-ด้าน)

5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

แขนร่วมของมุม



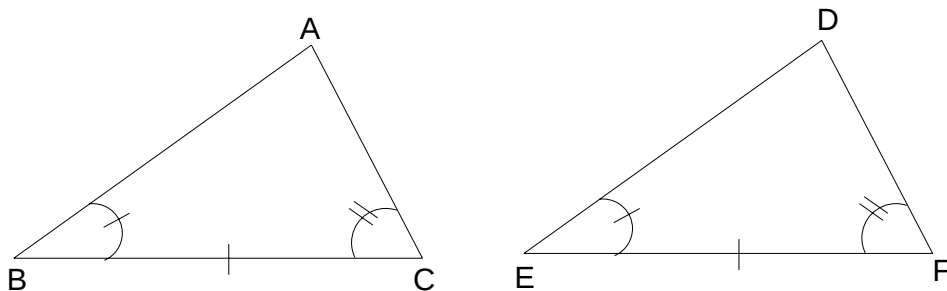
จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เรียกด้าน BC ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม ABC และมุม ACB”

เรียกด้าน AC ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม BAC และมุม ACB”

เรียกด้าน AB ว่าเป็น “แขนร่วมของมุม ABC และมุม BAC”

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $\hat{A}BC = \hat{D}EF$, $BC = EF$ และ $\hat{A}CB = \hat{D}FE$



เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม”

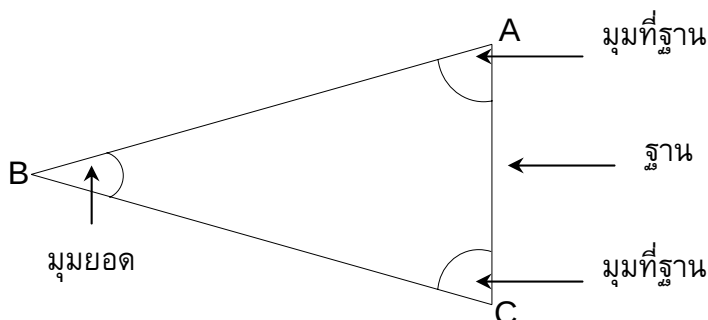
และเขียน ม.ด.ม. แทน มุม-ด้าน-มุม

ทฤษฎีบท 2 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ (มุม-ด้าน-มุม)

6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

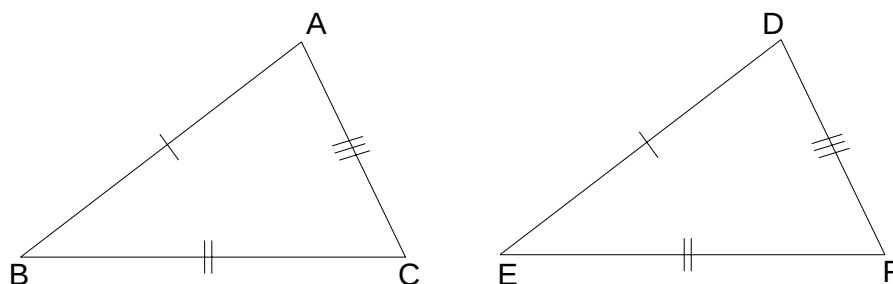
บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี $BA = BC$ เรียกด้าน AC ว่า ฐาน
เรียก $\angle CAB$ และ $\angle ACB$ ว่า มุมที่ฐาน เรียก $\angle ABC$ ว่า มุมยอด

ทฤษฎีบท 3 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ซึ่งมี $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$



เราจะกล่าวว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน” และเขียน ด.ด.ด. แทน ด้าน-ด้าน-ด้าน

ทฤษฎีบท 4 : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสามคู่แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)

สื่อการเรียนรู้

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. ไม้บรรทัด วงเวียนและเครื่องวงกลม
3. กระดานแม่เหล็ก
4. ใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนทบทวนนิยามของรูปสามเหลี่ยมแล้วครูแนะนำและอธิบายนิยามความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จากนั้นครูยกตัวอย่างที่ 1 และอธิบายให้นักเรียนดูในบทเรียนประกอบตามไปพร้อมกันและครูแสดงการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมให้นักเรียนดูโดยใช้กระดานแม่เหล็กให้นักเรียนได้เห็นภาพประกอบไปพร้อมกัน จากนั้นครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ถามข้อสงสัย
2. ครูให้นักเรียนจับคู่กันศึกษาตัวอย่างที่ 2 และให้นักเรียนถามครูได้เมื่อมีข้อสงสัยแล้วครูเรียกนักเรียนตอบคำถามเป็นรายบุคคล
3. ครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 3 แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง โดยครูเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคล แล้วครูช่วยสรุปคำตอบอีกครั้ง
4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมอีกครั้งและให้นักเรียนเขียนลงในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 และให้นักเรียนทำข้อ 1 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แล้วครูเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคล ครูช่วยสรุปคำตอบให้ถูกต้องอีกครั้ง
5. ครูให้นักเรียนทำข้อ 2-3 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เป็นการบ้าน แล้วนำมาส่ง
6. ครูให้นักเรียนศึกษาหัวข้อ ภาพที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและแนะนำการเขียนลำดับสัญลักษณ์ที่ถูกต้อง และครูให้นักเรียนสรุปอีกครั้ง
7. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 4 และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ถามเมื่อมีข้อสงสัย
8. ครูให้นักเรียนศึกษาหัวข้อ คู่สมนัยที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมและแนะนำการเขียนลำดับสัญลักษณ์ที่ถูกต้อง และครูให้นักเรียนสรุปอีกครั้ง

9. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 5 และเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามข้อสงสัย
10. ครูให้นักเรียนทำข้อ 4 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 โดยครูคอยแนะนำและตอบคำถามเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกคำตอบที่ได้โดยเรียกนักเรียนตอบเป็นรายบุคคล
11. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปภาพและคู่สมนัยที่เกิดจากการแปลงทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมอีกครั้ง
12. ครูให้นักเรียนขึ้นหัวข้อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน โดยครูให้นักเรียนทบทวนมุมในระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยม แล้วครูอธิบายลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน โดยให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน อีกครั้ง
13. ครูให้นักเรียนศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 ให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กแสดงการแปลงทางเรขาคณิตช่วยให้นักเรียนเห็นภาพตามไปพร้อมกัน แล้วให้นักเรียนสรุปลงสมุดอีกครั้ง
14. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 6 แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกว่ารูปสามเหลี่ยมในข้อใดที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน ครูช่วยสรุปอีกครั้ง
15. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 7 โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กช่วยแสดงการแปลงทางเรขาคณิตประกอบ แล้วให้นักเรียนเขียนสรุปลงในสมุดอีกครั้ง จากนั้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป หลักการการพิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงมีขั้นตอนดำเนินการอย่างไรบ้าง
16. ครูให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันทำข้อ 6 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แล้วนำเสนอโดยครูจะเรียกให้ตอบเป็นรายคู่ ครูช่วยสรุปคำตอบอีกครั้ง
17. ครูให้นักเรียนทำข้อ 5 , 7 และ 8 เป็นการบ้านแล้วให้นำมาส่ง
18. ครูให้นักเรียนขึ้นหัวข้อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม โดยครูให้นักเรียนทบทวนแขนร่วมของมุมของรูปสามเหลี่ยม แล้วครูอธิบายลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม โดยให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม อีกครั้ง
19. ครูให้นักเรียนศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎีบท 2 ให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กแสดงการแปลงทางเรขาคณิตช่วยให้นักเรียนเห็นภาพตามไปพร้อมกัน แล้วให้นักเรียนสรุปลงสมุดอีกครั้ง
20. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 8 แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกว่ารูปสามเหลี่ยมในข้อใดที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม ครูช่วยสรุปอีกครั้ง
21. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 9 โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กช่วยแสดงการแปลงทางเรขาคณิตประกอบ แล้วให้นักเรียนเขียนสรุปลงในสมุดอีกครั้ง จากนั้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป หลักการการ

พิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงมีขั้นตอนดำเนินการอย่างไรบ้าง

22. ครูให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันทำข้อ 10 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แล้วนำเสนอโดยครูจะเรียกให้ตอบเป็นรายคู่ ครูช่วยสรุปคำตอบอีกครั้ง

23. ครูให้นักเรียนทำข้อ 9 , 11 และ 12 เป็นการบ้านแล้วให้นำมาส่ง

24. ครูให้นักเรียนขึ้นหัวข้อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน ครูให้นักเรียนทบทวนนิยามรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วให้นักเรียนศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎี 3 โดยให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกันและครูใช้กระดานแม่เหล็กแสดงการแปลงทางเรขาคณิตประกอบให้นักเรียนเห็นภาพตามไปพร้อมกัน จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทฤษฎีบท 3 อีกครั้ง

25. ครูอธิบายลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน โดยให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน

26. ครูให้นักเรียนศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 ให้นักเรียนดูในบทเรียนตามไปพร้อมกัน โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กแสดงการแปลงทางเรขาคณิตช่วยให้นักเรียนเห็นภาพตามไปพร้อมกัน แล้วให้นักเรียนสรุปลงสมุดอีกครั้ง

27. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 10 แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกว่ารูปสามเหลี่ยมในข้อใดที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน ครูช่วยสรุปอีกครั้ง

28. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 11 โดยครูใช้กระดานแม่เหล็กช่วยแสดงการแปลงทางเรขาคณิตประกอบ แล้วให้นักเรียนเขียนสรุปลงในสมุดอีกครั้ง จากนั้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป หลักการการพิจารณาและดำเนินการในการให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลงมีขั้นตอนดำเนินการอย่างไรบ้าง

29. ครูให้นักเรียนจับคู่ช่วยกันทำข้อ 14 ในใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แล้วนำเสนอโดยครูจะเรียกให้ตอบเป็นรายคู่ ครูช่วยสรุปคำตอบอีกครั้ง

30. ครูให้นักเรียนทำข้อ 13 , 15 และ 16 เป็นการบ้านแล้วให้นำมาส่ง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม การให้เหตุผลในการตอบคำถาม และการนำเสนอในชั้นเรียน	
2. สังเกตจากการทำใบงาน	

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32101

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง การนำเสนอของความสัมพันธ์ทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
ไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา

จำนวน 4 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. พิสูจน์รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการโดยใช้ความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน , มุม-ด้าน-มุม และ ด้าน-ด้าน-ด้าน
 2. นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหา
- ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนมีความสามารถ

1. ในการให้เหตุผล
2. สื่อสารและการนำเสนอ
3. ในการให้ความร่วมมือและรับผิดชอบ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความสนใจและกระตือรือร้น
2. กล้าแสดงความคิดเห็น
3. รอบคอบ

สาระการเรียนรู้

การพิสูจน์โดยใช้ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ
ขั้นตอนในการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 : วิเคราะห์โจทย์

- หาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
- วาดรูปโดยใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (ในกรณีที่โจทย์ให้วาดรูปประกอบ)
- หาสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ขั้นที่ 2 : วางแผนการพิสูจน์

- พิจารณาว่าจากด้านและมุมที่ได้ส่งผลให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบใด

ขั้นที่ 3 : ดำเนินการพิสูจน์

- ดำเนินการพิสูจน์เพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ขั้นที่ 4 : สรุปผล

สื่อการเรียนรู้

1. บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้เรขาคณิตการแปลง
2. ใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 4

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนทบทวนลักษณะของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน , มุม-ด้าน-มุม และด้าน-ด้าน-ด้าน
2. ครูให้นักเรียนอภิปรายว่าจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หากเราสามารถแสดงได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน , มุม-ด้าน-มุม และด้าน-ด้าน-ด้าน เราสามารถสรุปได้หรือไม่ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
3. ครูทบทวนเกี่ยวกับด้านร่วม มุมร่วม และมุมตรงข้ามให้กับนักเรียน
4. ครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันถึงขั้นตอนการพิสูจน์โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม พร้อมยกตัวอย่างที่ 1 โดยครูให้นักเรียนช่วยกันบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการแล้วให้นักเรียนพิจารณารูปที่โจทย์กำหนดว่า ด้านและมุมที่ทราบจะส่งผลให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบใด
5. ครูให้นักเรียนดำเนินการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลประกอบเพื่อแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบใด เมื่อแสดงเหตุผลได้ครบ ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการมีความสัมพันธ์กันแบบใด
6. ครูให้นักเรียนจับคู่ศึกษาตัวอย่างที่ 2 และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ซักถามข้อสงสัย แล้วครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเหตุผลและขั้นตอนการพิสูจน์อีกครั้ง
7. ครูให้นักเรียนแบ่งเป็น 5 กลุ่ม โดยครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาตัวอย่างดังนี้
กลุ่มที่ 1 ให้ช่วยกันศึกษาตัวอย่างที่ 3
กลุ่มที่ 2 ให้ช่วยกันศึกษาตัวอย่างที่ 4
กลุ่มที่ 3 ให้ช่วยกันศึกษาตัวอย่างที่ 5
กลุ่มที่ 4 ให้ช่วยกันศึกษาตัวอย่างที่ 6
กลุ่มที่ 5 ให้ช่วยกันศึกษาตัวอย่างที่ 7
แล้วให้แต่ละกลุ่มนำเสนอพร้อมอธิบายหน้าชั้นเรียนที่ละกลุ่ม และครูช่วยสรุปอีกครั้ง
8. ครูยกตัวอย่างที่ 8 ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา โดยให้นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการ จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า $\overline{CS}$ มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงใด และส่วนของเส้นตรงนั้นอยู่ในรูปสามเหลี่ยมใด

9. ครูให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยม SBR สัมพันธ์กับรูปสามเหลี่ยม PAR อย่างไร โดยให้นักเรียนพิจารณาด้านและมุมว่าจะส่งผลให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปสัมพันธ์กันแบบใดแล้วให้นักเรียนช่วยกันพิสูจน์โดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะและสุดท้ายครูและนักเรียนช่วยกันสรุปคำตอบอีกครั้ง
10. ครูยกตัวอย่างที่ 9 ให้นักเรียนศึกษาโจทย์แล้วถามนักเรียนว่าจะมีวิธีหาความยาวของ $\overline{AD}$ ได้อย่างไร และเพราะเหตุใด ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายโดยครูเป็นผู้คอยให้คำแนะนำและช่วยสรุปคำตอบและวิธีการอีกครั้ง
11. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการพิสูจน์โดยใช้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการอีกครั้ง แล้วให้นักเรียนทำใบงานหน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ถ้าไม่เสร็จให้นักเรียนทำต่อเป็นบ้านแล้วนำมาส่ง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม การให้เหตุผลในการตอบคำถาม และการนำเสนอในชั้นเรียน	
2. สังเกตจากการทำใบงาน	

ภาคผนวก จ
แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. แบบวัดฉบับนี้ต้องการให้นักเรียนแสดงความคิด ความรู้สึก หรือความเห็น ที่มีต่อวิชา คณิตศาสตร์ ความคิดเห็นดังกล่าวของนักเรียนเป็นความคิดเห็นเฉพาะบุคคลไม่มีถูกหรือผิด ฉะนั้นขอให้ตอบตรงกับความรู้สึกของนักเรียนที่สุด
2. ในแต่ละข้อจะมีข้อความกำหนดให้ ขอให้นักเรียนอ่านข้อความให้เข้าใจ แล้วแสดงความคิดเห็นที่มีต่อข้อความนั้นด้วยการกาเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องใดช่องหนึ่งที่ตรงกับความคิดเห็นของนักเรียน ดังตัวอย่างการตอบ ดังนี้

ตัวอย่าง

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
0	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จำเป็น สำหรับการเรียนต่อ		✓			

แสดงว่าผู้ตอบเห็นด้วยกับข้อความที่กล่าวว่า “ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จำเป็นสำหรับการเรียนต่อ ”

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
1.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบ					
2.	การเรียนรู้คณิตศาสตร์เข้าใจง่ายเพราะมีขั้นตอน					
3.	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชาอื่น ๆ โดยเฉพาะวิชาที่ต้องท่องจำ					
4.	คณิตศาสตร์น่าเบื่อหน่าย					
5.	ฉันสามารถเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้รวดเร็วกว่าวิชาอื่น					
6.	คณิตศาสตร์ช่วยให้การทำงานมีขั้นตอนดีขึ้น					
7.	ฉันไม่สนุกกับการพิสูจน์เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน					
8.	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์					
9.	ฉันไม่ชอบทำการบ้านคณิตศาสตร์					
10.	ฉันสบายใจเมื่อได้ทำกิจกรรมหรืองานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
11.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนสนุก					
12.	ฉันชอบทำแบบฝึกหัดวิชาอื่นมากกว่าวิชาคณิตศาสตร์					
13.	ฉันรู้สึกมั่นใจในการทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์					
14.	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนตัดสินใจ					

	อย่างมีเหตุผล					
--	---------------	--	--	--	--	--

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
15.	ฉันมีความมั่นใจเวลาเขียน พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์					
16.	ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชา คณิตศาสตร์					
17.	ฉันรู้สึกประหม่าหรือกลัว เมื่อ ครูให้ออกไปทำกิจกรรม คณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน					
18.	ฉันชอบตอบปัญหาทาง คณิตศาสตร์					
19.	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยาก ถ้าใช้ความพยายาม					
20.	ฉันรู้สึกรำคาญเมื่อพ่อแม่หรือ ครูถามปัญหาเกี่ยวกับ คณิตศาสตร์					

ภาคผนวก จ
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้อง
ด้านเนื้อหาและความเหมาะสมของบทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง
ความเที่ยงตรงของเนื้อหาและความเหมาะสมของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความ
เท่ากันทุกประการโดยใช้เรขาคณิตการแปลง มีดังนี้

1. รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ฐานฤติ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุลนายธีรศักดิ์ ฉลาดการณ์

วันเดือนปีเกิด 9 มิถุนายน 2522

สถานที่เกิด อำเภอคอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ

สถานที่อยู่ปัจจุบัน 128 หมู่ 1 ตำบลโคกมั่งงอย อำเภอคอนสวรรค์

จังหวัดชัยภูมิ 36140

ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน-

สถานที่ทำงานปัจจุบัน-

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.2535 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนชุมชนบ้านจอก

จังหวัดชัยภูมิ

พ.ศ.2538 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนคอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ

พ.ศ.2541 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนคอนสวรรค์ จังหวัดชัยภูมิ

พ.ศ.2545 กศ.บ.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

พ.ศ.2548 กศ.ม.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ