

การสำรวจสรุปของการแปลงเชิงเรขาคณิต

28 ต.ค. 2539

ปริญญานิพนธ์
ของ
สินชัย จันทร์เสมอ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2539

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

๒ 51029

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอก
คณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.....ประธาน
(รศ.ดร. ณรงค์ ปิ่นนิยม)
.....กรรมการ
(รศ.ดร. สมพล เล็กสกุล)
.....กรรมการ
(รศ. พิชากร แปลงประสพโชค)

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน
(รศ.ดร. ณรงค์ ปิ่นนิยม)
.....กรรมการ
(รศ.ดร. สมพล เล็กสกุล)
.....กรรมการ
(รศ. พิชากร แปลงประสพโชค)
.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ดร. สุรพล วัฒนวิทย์กิจ)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ดร. ศิริยุภา พูลสุวรรณ)

วันที่.....เดือน มีนาคม พ.ศ. 2539

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาในการให้คำปรึกษา และคำแนะนำจาก
รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปิ่นนัม รองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล รองศาสตราจารย์
พิชากร แปลงประสพโชค และดร. สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้
 ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุเทพ ทองอยู่ รองศาสตราจารย์กมล
เอกไทยเจริญ และอาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน ในความกรุณาช่วยเหลือในทุก ๆ ด้าน

ขอขอบคุณ อาจารย์อัญชลี จิตต์โสภา โรงเรียนราชวินิตบางแก้ว และอาจารย์สาธิต
โสระโร ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ให้กำลังใจ และให้ความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบให้ดวงวิญญาณของน้องชายผู้
ล่วงลับ เมื่อ 28 ธันวาคม 2538

สินชัย จันทรเสม

สารบัญ

บทที่	หน้า
บทนำ	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	8
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	9
แนวทางการศึกษาค้นคว้า	9
1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงเชิงเรขาคณิต	10
ตัวอย่างรูปของการแปลง	12
2 การแปลงหลักในเรขาคณิตระบบยูคลิด	18
การเลื่อนทางขนาน	21
การหมุนรอบจุด	23
การสะท้อน	28
ไกลดร์เฟลกชัน	34
3 กรุปของการแปลงโพรเจกทิฟ	47
เรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์บนระนาบ.....	47
เรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์บนระนาบ.....	69
การแปลงโพรเจกทิฟ.....	81
4 สับกรุปของกรุปของการแปลงโพรเจกทิฟ	94
กรุปของการแปลงสัมพรรค	94
กรุปของการแปลงฮักวารีเยล	100
กรุปของการแปลงความคล้าย	106
กรุปของการแปลงยูคลิดีเยน	117

5 บทสรุป	128
บรรณานุกรม	134
ประวัติย่อของผู้วิจัย	137

บทนำ

เมื่อมีการกล่าวถึงเรขาคณิต คนส่วนใหญ่มักเข้าใจกันว่าหมายถึงเรขาคณิตที่เราเรียนกันในชั้นมัธยมศึกษา ซึ่งความเป็นจริงแล้ว เรขาคณิตที่เรียนกันในชั้นมัศึกษานั้นคือเรขาคณิตระบบยูคลิด (Euclidean geometry) ซึ่งเป็นสาขาหนึ่งในหลาย ๆ สาขาของเรขาคณิตที่มีมาจนถึงปัจจุบัน

คำว่าเรขาคณิต (geometry) มีรากศัพท์มาจากภาษากรีก 2 คำ คือ geo ซึ่งแปลว่าพื้นดิน และ metri ซึ่งแปลว่าการวัด ดังนั้น geometry ตามรากศัพท์เดิมจึงหมายถึงการวัดพื้นที่หรือพื้นดิน (earth measurement) ซึ่งตรงตามลักษณะการนำเรขาคณิตไปใช้ประโยชน์ในสมัยโบราณ ต่อมา มีการค้นพบกฎเกณฑ์ใหม่ ๆ เพิ่มขึ้น มีการประยุกต์กฎเกณฑ์เหล่านี้เพื่อนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ได้อีกมากมาย ตลอดจนมีการพัฒนาในรูปแบบของระบบคณิตศาสตร์ ทำให้วิชาเรขาคณิตเจริญงอกงามแตกสาขาออกไป และมีการพัฒนาต่อไปอย่างไม่หยุดยั้ง ทำให้ความหมายของคำว่าเรขาคณิตเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากจะพบได้ว่ามีเรขาคณิตบางชนิดที่ไม่เกี่ยวข้องกับการวัดใด ๆ เลย จนทำให้ในปัจจุบันจะพบกับความยุ่งยากอย่างมากที่จะตอบคำถามว่า เรขาคณิตคืออะไร (โชติธานีรัตน์, 2526 : 10)

ประวัติที่สมบูรณ์ของเรขาคณิตในสมัยแรกไม่มีผู้ใดทราบแน่ชัด เพียงแต่สันนิษฐานจากหลักฐานที่มีอยู่ในปัจจุบันบนแผ่นจารึก ทำให้ทราบว่าราว ๆ 4,000 ปีก่อนคริสต์ศักราช ชาวบาบิโลเนียค้นพบวิธีการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ความยาวของด้านกว้างคูณความยาวของด้านยาว นอกจากนั้นความเจริญของอียิปต์และชาวบาบิโลเนียในสมัยโบราณมีพื้นฐานจากการใช้ความรู้ในวิชาเรขาคณิตไม่น้อย เป็นต้นว่าการสร้างมหาพีระมิดที่เมืองกิเซห์ (Gizeh) เมื่อประมาณ 2,900 ปีก่อนคริสต์ศักราช จะพบว่าวิศวกรต้องใช้ในการคำนวณในเรื่องความยาว พื้นที่ และปริมาตรเป็นอย่างมาก และในช่วงระหว่าง 2,000 ปีก่อนคริสต์ศักราชถึงประมาณ 1,600 ปีก่อนคริสต์ศักราชยังพบอีกว่า ชาวบาบิโลเนียรู้จักกฎการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รู้จักหาปริมาตรของปริซึม และรู้จักคำนวณหาความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมด้วย (Meserve, 1959 : 19 - 20)

ในราว ๆ 400 ปีก่อนคริสต์ศักราช ยูคลิด (Euclid ประมาณ 450 - 380 ปี

ก่อนคริสต์ศักราช) ซึ่งเป็นศาสตราจารย์วิชาคณิตศาสตร์และหัวหน้าแผนกวิชาคณิตศาสตร์คนแรกของมหาวิทยาลัยแห่งอเล็กซานเดรีย (University of Alexandria) ได้เขียนหนังสือเอลิเมนต์ (Elements) ขึ้นซึ่งถือว่าเป็นตำราเรขาคณิตที่สมบูรณ์ชุดแรกของโลก มีทั้งหมด 13 เล่ม นับทฤษฎีบทและบทสร้างได้ 465 บท โดยวิธีการเขียนหนังสือของยุคลิดนั้น เป็นการรวบรวมความรู้ทางเรขาคณิตเท่าที่มีมา และเขียนขึ้นใหม่บ้างรวมกันเข้า นับเป็นหนังสือเล่มแรกที่รวมวิทยาการของมนุษย์ในระบบการให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive system) ยุคลิดเริ่มต้นโดยให้บทนิยาม (definition) ตั้งพจน์ (postulate or axiom) แล้วจึงไปถึงทฤษฎีบท (proposition) วิธีการเขียนนั้นเป็นรูปแบบของการสังเคราะห์ (synthesis) คือเริ่มต้นจากสิ่งที่รู้และง่าย ๆ ไปสู่สิ่งที่ไม่รู้ และยุ่งยากซับซ้อน (เสริมศักดิ์ วิชาลาภรณ์. 2519 : 44 - 46)

เรขาคณิตจากหนังสือเอลิเมนต์ นับว่าเป็นบิดาของเรขาคณิตทุกสาขา แต่น่าเสียดายที่ปัจจุบันไม่มีหนังสือเอลิเมนต์ที่เป็นต้นฉบับจริง ๆ ของยุคลิดหลงเหลืออยู่เลย ส่วนฉบับที่แพร่หลายในปัจจุบันได้จากต้นฉบับที่เขียน โดยนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อทีออนแห่งอเล็กซานเดรีย (Theon of Alexandria. ประมาณ ค.ศ. 400) ซึ่งแก้ไขจากต้นฉบับเดิมของยุคลิดไปบางส่วนแล้ว ต้นฉบับของหนังสือเอลิเมนต์อีกเล่มหนึ่งค้นพบโดย ไพรอร์ด (F. Peyrord) ในปีค.ศ. 1808 สมัยที่พระเจ้า نابอลิโอนสั่งให้ย้ายหนังสือที่มีค่าจากอิตาลี ไปปารีส ต้นฉบับดังกล่าวมีอายุเก่าแก่กว่าฉบับที่แก้ไขโดยทีออน แต่เมื่อศึกษาอย่างละเอียดแล้วพบว่าต้นฉบับทั้งสองแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

หลังจากกรีกเสื่อมอำนาจลง หนังสือเอลิเมนต์ได้ตกทอดไปยังอาหรับก่อนที่จะเข้าไปยังยุโรป โดยมีหลักฐานยืนยันว่า ประมาณ ค.ศ. 750 - 800 กษัตริย์ของอาหรับพระองค์หนึ่งได้ต้นฉบับหนังสือเอลิเมนต์จากเมืองคอนสแตนติโนเปิล (Constantinople) ซึ่งเขียนเป็นภาษากรีก พระองค์ทรงโปรดให้นักคณิตศาสตร์ชาวอาหรับแปลจากภาษากรีกเป็นภาษาอาหรับ และในปี ค.ศ. 1100 อติลาร์ด แห่งเมืองบัธ (Adelard of Bath) ได้แปลต้นฉบับจากภาษากรีกเป็นภาษาละตินอีกฉบับหนึ่ง ต้นฉบับอื่น ๆ ที่แปลจากภาษาละตินเป็นภาษาอาหรับก็มี เช่นประมาณ ค.ศ. 1150 แปลโดย เกอราโด แห่งเมืองคลีโมนา (Ghorardo of Cremona) ในปีค.ศ. 1270 แปลโดยโจฮันส์ แคมปานัส (Johannes Campanus)

หนังสือเอลลิเมนต์ได้จัดพิมพ์ขึ้นเป็นครั้งแรกที่เมืองเวนิส (Venice) ในปี ค.ศ. 1482 ซึ่งพิมพ์จากต้นฉบับของโจฮันส์ แคมปานัส จากนั้นหนังสือเอลลิเมนต์ได้แปลเป็นภาษาอังกฤษครั้งแรกโดยบิลลิกส์เลย์ (Sir H. Billigley) ในปี ค.ศ. 1570 (โชติ ธานีรัตน์, 2526 : 22 - 23)

หลังจากหมดยุคของยุคลิคลแล้วโรมันเริ่มเรื่องอำนาจ แต่ก็ไม่ได้สร้างความเจริญให้กับวิชาเรขาคณิตมากนัก ส่วนใหญ่เป็นการศึกษาค้นคว้าของเก่าที่มีมาก่อนแล้ว แต่นั่นหนักไปทางพีชคณิต จากอาหรับไปสู่ยุคมืด (dark ages) เรขาคณิตอยู่ในสภาพคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง มารุ่งเรื่องอีกครั้งในศตวรรษที่ 14 ซึ่งอยู่ในรูปของ ดาราศาสตร์ และตรีโกณมิติเป็นส่วนใหญ่ ส่วนเรขาคณิตนั้นได้เริ่มรุ่งเรื่องขึ้นจริงจังอีกครั้งหนึ่งในศตวรรษที่ 17 จำแนกได้ 2 ทางคือ

(1) การนำเอาวิธีการทางพีชคณิต ที่เกี่ยวข้องกับระบบพิกัดฉากไปใช้เสริมเรขาคณิตซึ่งแนวความคิดนี้นำไปสู่วิธีเรขาคณิตวิเคราะห์ผู้ที่เริ่มคิดวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์คนแรกคือ เดสการ์ตส์ (Rene Descartes, 1596 - 1650) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส

(2) เพิ่มความสนใจในการศึกษาสมบัติที่ไม่เกี่ยวข้องกับระยะทาง (nonmetric properties) ซึ่งความเจริญนี้ไปสู่การพัฒนามหาเรขาคณิตที่ไม่เกี่ยวข้องกับระยะทาง ได้แก่ เรขาคณิตโปรเจกทิฟ (projective geometry) เรขาคณิตสัมพัทธ์ (affine geometry) และโทโพโลยี (topology) (Bell, 1945 : 321 - 360)

ในศตวรรษที่ 18 การพยายามพิสูจน์สัจพจน์ข้อที่ 5 ของยุคลิดของนักคณิตศาสตร์หลายท่าน เช่น แซคเคอรี (Geraldmo Saccheri, 1732 - 1833) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี ลัมแบร์ต (Johann Heinrich Lambert, 1728 - 1777) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน เลอจองด์ (Adrien Marie Legendre, 1752 - 1833) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ซึ่งไม่ประสบความสำเร็จ และมีนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านในรุ่นหลังได้พยายามพิสูจน์ต่อไปอีก จนถึงศตวรรษที่ 19 ก็ยังไม่มีนักคณิตศาสตร์ท่านใดพิสูจน์ได้ และจากการค้นคว้าของโจฮันน์ โบไลยี (Johann Bolyai, 1802 - 1860) ซึ่งได้ศึกษาผลงานทางเรขาคณิตของนักคณิตศาสตร์ท่านอื่นๆ และตัวเขาเองมุ่งศึกษาเกี่ยวกับปริภูมิสามมิติ และได้เปรียบเทียบเรขาคณิตของเขากับเรขาคณิตทรงกลม ทำให้เขาคัดค้านว่าสัจพจน์ข้อที่ 5 ของยุคลิดไม่สามารถพิสูจน์ได้ (ประเสริฐ ทองคอนบม, 2533 : 8 - 9)

ผลจากการพยายามพิสูจน์สัจพจน์ข้อที่ 5 ของยุคลิดนี้เองทำให้เกิดเรขาคณิตนอกกระบบยุคลิด (non - Euclidean geometry) ขึ้นซึ่งได้แก่เรขาคณิตแบบไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic geometry) ซึ่งค้นพบโดยเกาส์ (Carl Friedrich Gauss. 1777 - 1855) โจฮันน์ โบไลย และโลบาเชฟสกี (Nikolai Iwanowich Lobachevski. 1792 - 1856) เรขาคณิตเชิงวงรี (elliptic geometry) ค้นพบโดยรีมันน์ (George Friedrich Bernhard Riemann. 1826 - 1866) ซึ่งไคลน์ (Felix Klein. 1849 - 1925) ชี้ให้เห็นว่าเรขาคณิตของรีมันน์แบ่งออกเป็น 2 อย่าง โดยอย่างแรกเส้นทุกเส้นต้องตัดกันและตัดกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น เขาเรียกเรขาคณิตชนิดนี้ว่า เชิงวงรีหน้าเดียว (single - elliptic) อีกอย่างหนึ่งเส้นทุกเส้นตัดกันได้ 2 จุด เขาให้ชื่อว่าเชิงวงรีสองหน้า (double - elliptic) ซึ่งหมายถึงเรขาคณิตทรงกลม (spherical geometry) นั่นเอง (โชติ ธานีรัตน์. 2526 : 47)

นอกจากนั้นในศตวรรษที่ 19 ถึงศตวรรษที่ 20 นักคณิตศาสตร์หลายคนตระหนักถึงข้อบกพร่องเกี่ยวกับสมมติฐานของเรขาคณิตระบบยุคลิด จึงได้พยายามปรับปรุงให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นักคณิตศาสตร์ที่ได้รับการยกย่องว่าเป็นบุคคลที่ทำให้เรขาคณิตของยุคลิดสมบูรณ์มากขึ้นคือฮิลแบร์ต (David Hilbert. 1862 - 1943) (ประเสริฐ ทองคอนบม. 2533: 9)

ในช่วงศตวรรษที่ 18 ถึง 19 มีเรขาคณิตเกิดขึ้นหลายสาขา และผลจากการพัฒนาในศตวรรษที่ 18 คือการใช้วิธีการทางพีชคณิตกับเรขาคณิตแบบสังเคราะห์ ทำให้เรขาคณิตแบบโพรเจกทิฟมีการพัฒนาขึ้นมาอีกรูปแบบหนึ่งในศตวรรษนี้คือโพรเจกทิฟเมตริก (projective metric) ซึ่งหมายถึงเรขาคณิตโพรเจกทิฟที่เกี่ยวข้องกับการวัด นักคณิตศาสตร์ที่พัฒนาในด้านนี้มาก่อนคือ เคย์เลย์ (Arthur Cayley. 1821 - 1895) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และจากการที่เรขาคณิตโพรเจกทิฟพัฒนาให้เกี่ยวข้องกับการวัด จึงทำให้เคย์เลย์และลาเกอร์ (Edmond Nicolas Laquerre. 1837 - 1886) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เริ่มเห็นความเกี่ยวข้องกันของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ เนื่องจากสามารถพัฒนาเรขาคณิตเมตริกเข้าไปสู่เรขาคณิตในทุก ๆ สาขาได้

หลังจากการพิมพ์เผยแพร่ผลงานของเคย์เลย์ 13 ปี ไคลน์ซึ่งได้ศึกษาผลงานของเคย์เลย์ได้พบประเด็นสำคัญบางประการ จนทำให้เขาค้นพบบทนิยามใหม่ของเรขาคณิต และไคลน์ได้เสนอแนวคิดของเขาในปี ค.ศ. 1872 โดยในวันที่เขาได้รับตำแหน่งศาสตราจารย์แห่งมหาวิทยาลัยเออแลงเกน (Erlangen) ไคลน์ได้บรรยายถึงบท

นิยามใหม่ของเรขาคณิต ซึ่งทำให้เราทราบถึงความสัมพันธ์กันของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ โดยไคลน์ให้คำจำกัดความของเรขาคณิตว่า “เรขาคณิตคือการศึกษาสมบัติของรูปเรขาคณิต ในปริภูมิที่ยืนยงภายใต้กรุปของการแปลงในปริภูมิ และกรุปของการแปลงนี้จะสมนัยกับเรขาคณิตที่กำหนดขึ้นนั้น” (A geometry is the study of those properties of configurations in a space that are invariant under a particular group of transformations of the space. Each group of transformations corresponds a definite geometry.) คำบรรยายของไคลน์นี้นับได้ว่าเป็นคำบรรยายที่สำคัญและมีชื่อเสียงมาก ปัจจุบันรู้จักกันในนาม “เออแลงเกนโปรแกรม” (Erlangen Program) (Adler. 1966 : 349 - 351)

บทนิยามของคำว่าเรขาคณิตของไคลน์นี้ถือว่าเป็นสิ่งสำคัญมากในวิชาเรขาคณิตมาเกือบครึ่งศตวรรษ เพราะนอกจากจะทำให้เห็นลักษณะของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ ได้ชัดเจนขึ้นแล้วยังเป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตและพีชคณิตโดยอาศัยการแปลงอีกด้วย และถึงแม้ว่าจะมีแนวความคิดใหม่ ๆ เกิดขึ้นมาและเป็นที่นิยมภายหลัง ปีค.ศ. 1916 ซึ่งเป็นเรื่องเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) แต่เป็นที่ยอมรับกันว่าบทนิยามของไคลน์นี้มีประโยชน์และมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาเชิงวิทยาศาสตร์ และมโนทัศน์เรื่องกรุปของการแปลงก็เป็นสิ่งสำคัญในคณิตศาสตร์สมัยใหม่ (Yaglom. 1968 : 3 - 8)

เมื่อพิจารณาการกำหนดความหมายของเรขาคณิตตามแบบของไคลน์ ทำให้ทราบว่าข้อความต่าง ๆ ในทฤษฎีบทของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ นั้น เป็นการกล่าวถึงสมบัติที่ยืนยงภายใต้ กรุปของการแปลง และเราพบว่าสามารถกำหนดเรขาคณิตโดยกรุปของการแปลงเหล่านั้น และโดยการพิจารณาจากกรุปของการแปลงที่เป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ ยังจะทำให้ทราบถึงขอบเขตของการศึกษาเรขาคณิตสาขานั้น ๆ ด้วย กล่าวคือต้องตรวจสอบก่อนว่าสมบัติต่าง ๆ ที่จะศึกษาเป็นสมบัติที่ยืนยงภายใต้ กรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ นั้น นอกจากนี้ยังจะทำให้ทราบถึงความเกี่ยวข้องกันของเรขาคณิตแต่ละสาขา เพียงแต่มุ่งความสนใจไปที่ความเกี่ยวข้องกันของกรุปของการแปลงที่เป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขานั้น ๆ และยังทำให้ทราบอีกว่าในปริภูมิหนึ่งเราสามารถกำหนดเรขาคณิตได้มากมายหลายสาขา โดยการ กำหนดกรุปของการแปลงที่เหมาะสม (Yaglom. 1968 : 3-11)

ตัวอย่างเช่นในเรขาคณิตระบบยุคลิด เป็นการศึกษาลักษณะที่ขึ้นอยู่กับรูปของโมชัน (motion) เป็นหลัก ซึ่งโมชันคือการแปลงบนระนาบที่รักษาระยะระหว่างจุดสองจุด กล่าวคือระยะระหว่างจุดคู่หนึ่ง กับระยะของจุดคู่ที่สมนัยกับจุดคู่นี้จะมีขนาดเท่ากัน จึงทำให้ระยะระหว่างจุดเป็นสิ่งที่ขึ้นอยู่กับรูปของโมชัน และจะเห็นได้ว่าจะมีทฤษฎีบทในเรขาคณิตระบบยุคลิดที่กล่าวถึงสมบัติที่ไม่เปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตก่อน การแปลง และรูปเรขาคณิตซึ่งได้จากการแปลงของรูปเรขาคณิตรูปเดิมโดยใช้โมชันถึงแม้จะไม่เกี่ยวข้องกับระยะระหว่างจุดโดยตรง เช่นการศึกษาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม เราพบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สมนัยกันภายใต้โมชันจะเท่ากันทุกประการ จึงทำให้มีทฤษฎีบทหลายทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมเพราะความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมเป็นสมบัติที่ขึ้นอยู่กับรูปของโมชันนั่นเอง หรือแม้แต่ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนาน หรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเส้นตั้งฉาก ก็ไม่เกี่ยวข้องกับระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ โดยตรงแต่สมบัติเหล่านี้เป็นสิ่งที่ขึ้นอยู่กับรูปของโมชันเช่นกัน

โดยพิจารณาจากกรุปของการแปลง เราพบว่ากรุปของโมชันเป็นกรุปของการแปลงที่เป็นสับกรุป (subgroup) ของกรุปของการแปลงความคล้าย (similarity transformation) ซึ่งการแปลงความคล้ายเป็นการแปลงซึ่งทำให้อัตราส่วนของระยะระหว่างจุดไม่เปลี่ยนแปลง สิ่งที่เห็นได้จากการแปลงความคล้าย ก็คือจะพบว่าเกิดรูปคล้ายของรูปสามเหลี่ยมก่อนการแปลงและหลังการแปลง กล่าวคือรูปสามเหลี่ยมที่สมนัยกันภายใต้การแปลงความคล้ายจะเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย ซึ่งอาจจะไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ดังนั้นแสดงว่าความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไม่ใช่สมบัติที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงความคล้าย โดยที่ในเรขาคณิตความคล้าย (similarity geometry) กำหนดโดยกรุปของการแปลงความคล้าย จึงไม่มีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมอยู่แล้ว และจากการที่กรุปของโมชันเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้าย จึงสามารถกล่าวได้ว่าเรขาคณิตระบบยุคลิดซึ่งกำหนดโดยกรุปของโมชัน เป็นส่วนหนึ่งของเรขาคณิตความคล้าย ซึ่งกำหนดโดยกรุปของการแปลงความคล้าย (Yaglom, 1968 : 3-11)

เมื่อพิจารณาต่อไปอีกพบว่ากรุปของการแปลงความคล้ายเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงสัมพรรค (affine transformation) ซึ่งเป็นตัวกำหนดเรขาคณิต

สัมพรรคกรุปของการแปลงสัมพรรคเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟ (projective transformation) ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่าเรขาคณิตระบบยูคลิด เรขาคณิตความคล้าย เรขาคณิตสัมพรรค เป็นส่วนหนึ่งของเรขาคณิตโปรเจกทิฟ (Adler. 1966 : 349)

สำหรับเรขาคณิตแบบไฮเพอร์โบลิก และเรขาคณิตเชิงวงรีนั้นเป็นเรขาคณิตที่กำหนดโดยเซตของการแปลงโปรเจกทิฟ ซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟ แสดงให้เห็นมาก่อนโดยเคย์เลย์ในปีค.ศ. 1859 โดยใช้สมบัติของเรขาคณิตระยะทาง (metrical geometry) แสดงความเกี่ยวข้องกันของเรขาคณิตในทุก ๆ ระบบ แต่เคย์เลย์ยังมีได้แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนบนพื้นฐานของการให้เหตุผลในกรุปของการแปลงซึ่งผลจากความเกี่ยวข้องกันที่เขาค้นพบนี้ทำให้เคย์เลย์ประกาศว่า “เรขาคณิตโปรเจกทิฟ เป็นเรขาคณิตทั้งหมด” (Young. 1971 : 178)

หลังจากการค้นพบของเคย์เลย์ และเออแลงเกน โปรแกรมของไคลน์ ปัจจุบันนักคณิตศาสตร์พบว่ายังมีเรขาคณิตที่มีความเป็นพื้นฐานมากกว่าเรขาคณิตโปรเจกทิฟ และเป็นเรขาคณิตที่กำหนดได้โดยกรุปของการแปลง ซึ่งกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงนี้ เราเรียกการแปลงนี้ว่าการแปลงโทโพโลยี (topological transformation) ซึ่งเป็นการแปลงที่ตัวเองและตัวผกผัน (inverse) ของการแปลงนั้น มีสมบัติของความต่อเนื่อง (continuous) และเราเรียกเรขาคณิตที่ศึกษาสมบัติที่ยืนยงของรูปเรขาคณิตภายใต้กรุปของการแปลงโทโพโลยีว่า “โทโพโลยี” ดังนั้น จนถึงปัจจุบันนี้ถ้าจะกล่าวว่า โทโพโลยีเป็นเรขาคณิตทั้งหมดจึงเป็นเรื่องที่เป็นไปได้

จากแนวคิดของกรุปของการแปลงที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตนี้ ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาถึงลักษณะของกรุปของการแปลง ซึ่งเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ ในปัจจุบันตามความหมายของเรขาคณิตในแบบของไคลน์ ผู้วิจัยสนใจว่ากรุปของการแปลงนี้จะเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตใด โดยจะเน้นเฉพาะการแปลงบนระนาบ โดยที่ผู้วิจัยพบงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแปลงเรขาคณิตมีเพียงงานวิจัยของทิพย์วิภา พัฒนถานุตร (2521 : 1 - 145) ได้ทำการวิจัยเรื่องพัฒนาการของเรขาคณิตแปลงสภาพ (Development of Transformation Geometry) ซึ่งเน้นเฉพาะสมบัติที่สำคัญ ๆ ของการแปลงโปรเจกทิฟชนิดต่าง ๆ มิได้เน้นถึงกรุปของการแปลง อันเป็น

ตัวกำหนดเรขาคณิตในแต่ละสาขา โดยที่ผลจากการศึกษาของผู้วิจัย จะทำให้ทราบถึงความเกี่ยวข้องกันของเรขาคณิตในสาขาต่าง ๆ ได้ชัดเจนขึ้น โดยอาศัยกรุปของการแปลงซึ่งกำหนดการแปลงในรูปเมตริกซ์จัตุรัส และยังจะทำให้เข้าใจเออแลงเกนโปรแกรมของไคลน์ด้วย นอกจากนี้ยังจะได้รวบรวมความรู้พื้นฐานของเรขาคณิตบางประการ และสำรวจกรุปของการแปลง อันจะเป็นแหล่งที่สะดวกสำหรับผู้สนใจศึกษาค้นคว้าในวิชาเรขาคณิต และการแปลงในวิชาเรขาคณิตต่อไป

ความมุ่งหมายของการศึกษา

1. เพื่อสำรวจกรุปของการแปลงบนระนาบอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ เรขาคณิตโพเรเจทิฟ เรขาคณิตสัมพรรค เรขาคณิตอีควิอาเรียล (equiareal geometry) เรขาคณิตความคล้าย และเรขาคณิตระบบยูคลิด
2. เพื่อรวบรวมความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตที่เกี่ยวกับกรุปของการแปลงต่าง ๆ อันได้แก่ กรุปของการแปลงโพเรเจทิฟ กรุปของการแปลงสัมพรรค กรุปของการแปลงอีควิอาเรียล และกรุปของการแปลงยูคลิเดียน
3. เพื่ออธิบายเออแลงเกนโปรแกรมโดยวิธีวิเคราะห์ (analytic approach) และอธิบายบทนิยามเรขาคณิตของไคลน์ ให้ชัดเจนและเข้าใจง่ายขึ้นในบางส่วน

ความสำคัญของการศึกษา

1. เพื่อแสดงความสัมพันธ์บนระนาบของเรขาคณิตโพเรเจทิฟ เรขาคณิตสัมพรรค เรขาคณิตอีควิอาเรียล และเรขาคณิตระบบยูคลิด ให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยใช้กรุปของการแปลงซึ่งเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตเหล่านี้
2. เพื่อเป็นแหล่งค้นคว้าสำหรับผู้สนใจในเรื่องเรขาคณิตการแปลง (geometric transformation) และกรุปของการแปลงในวิชาเรขาคณิต
3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเรขาคณิตในระดับมหาวิทยาลัยในเรื่องของกรุปของการแปลง และสมบัติที่ยืนยงภายใต้กรุปของการแปลง

แนวทางการศึกษาค้นคว้า

บทที่ 1 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐาน และสมบัติบางประการของกลุ่มของการแปลง อันได้แก่บทนิยาม ทฤษฎีบทเบื้องต้น และตัวอย่างของกลุ่มของการแปลง

บทที่ 2 เป็นการกล่าวถึงการแปลงที่แสดงลักษณะเฉพาะของเรขาคณิตระบบยูคลิดเนื่องจากเป็นเรขาคณิตที่คุ้นเคยกันมากที่สุดอันได้แก่โมชัน ซึ่งจะกล่าวถึงโมชันบนระนาบในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry)

บทที่ 3 จะเริ่มจากการกำหนดสัจพจน์ในเรขาคณิตโพรเจกทิฟบนระนาบแบบสังเคราะห์ (synthetic plane projective geometry) เพื่อกำหนดระบบพิกัดเอกพันธ์ (homogenous coordinate) บนระนาบโพรเจกทิฟจริง (real projective plane) และนำไปสู่บทนิยามต่าง ๆ ในเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ (analytic projective geometry) พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่าเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์สมมูล (equivalent) กับเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ โดยต่อมาจะกำหนดการแปลงโพรเจกทิฟบนระนาบในเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ และจะแสดงให้เห็นว่า เซตของการแปลงโพรเจกทิฟเป็นกลุ่มของการแปลง และเป็นกลุ่มของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโพรเจกทิฟ

บทที่ 4 จะกล่าวถึงกลุ่มของการแปลงบนระนาบโพรเจกทิฟแบบอื่น ๆ ซึ่งเป็นสับกลุ่มของการแปลงโพรเจกทิฟ อันได้แก่ กลุ่มของการแปลงสัมผัส กรุปของการแปลงความคล้าย กรุปของการแปลงฮิวกวารีล และกรุปของการแปลงยูคลิดีเนียน โดยจะแสดงให้เห็นว่ากรุปของการแปลงเหล่านี้เป็นสับกรุปกันอย่างไร ซึ่งจะทำให้เห็นความสัมพันธ์ของเรขาคณิตที่มีกรุปของการแปลงเหล่านี้เป็นตัวกำหนดอีกด้วย

บทที่ 5 เป็นบทสรุปซึ่งจะแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของเรขาคณิตต่าง ๆ บนระนาบที่กล่าวมาแล้วโดยใช้ของกรุปของการแปลงและสมบัติที่ยินยอมภายใต้กรุปของการแปลงนั้น เป็นตัวแสดงความสัมพันธ์

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงเชิงเรขาคณิต

ในการศึกษาเรขาคณิตนั้นการแปลงเริ่มเข้ามามีบทบาทในช่วงศตวรรษที่ 18 และมีบทบาทมากยิ่งขึ้นเมื่อมีบทนิยามเรขาคณิตของไคลน์ซึ่งเกี่ยวข้องกับรูปของการแปลง ก่อนที่เราจะศึกษาถึงของรูปของการแปลงต่าง ๆ นั้น ในบทที่ 1 นี้จะขอกล่าวถึงความรู้พื้นฐานของการแปลงเชิงเรขาคณิต อันได้แก่บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นต่าง ๆ และจะแสดงตัวอย่างของรูปของการแปลงง่าย ๆ เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาถึงรูปของการแปลงในบทต่อ ๆ ไป

บทนิยาม 1.1 การแปลง (transformation) จากเซต A ไปทั่วถึง (onto) เซต B คือการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one correspondence) ระหว่างสมาชิกในเซต A กับสมาชิกในเซต B

ถ้ามี $a \in A$ ซึ่งสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับ $b, b \in B$ ภายใต้การแปลง f จะเขียนแทนด้วย $f(a) = b$ (หรือ $a \xrightarrow{f} b$) และอาจจะกล่าวโดยย่อว่า a สมนัยกับ b หรือ b สมนัยกับ a ภายใต้ f

บทนิยาม 1.2 ให้ f เป็นการแปลงจากเซต A ไปบนเซต B ตัวผกผันของการแปลง f ซึ่งเขียนแทนด้วย f^{-1} คือการแปลงจากเซต B ไปทั่วถึงเซต A โดยที่ $f(a) = b$ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(b) = a$ เมื่อ $a \in A$, และ $b \in B$

บทนิยาม 1.3 ให้ f เป็นการแปลงจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B และ g เป็นการแปลงจากเซต B ไปทั่วถึงเซต C จะเรียกการแปลง gf ว่าผลคูณของ g และ f และ gf จะเป็นการแปลงจากเซต A ไปบนเซต C โดยที่ ถ้า $f(a) = b$ และ $g(b) = c$ แล้ว $gf(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ เมื่อ $a \in A, b \in B$ และ $c \in C$

บทนิยาม 1.4 ให้ f เป็นการแปลงจากเซต S ไปทั่วถึงเซต S จะเรียก f ว่าเป็นการแปลงบน S

สำหรับ a ที่เป็นสมาชิกของ S และ $f(a) = a$ จะเรียก a ว่า จุดตรึง (fixed point) หรือจุดยืนยงภายใต้ f

จะเรียก f ว่าการแปลงเอกลักษณ์ (identity transformation) บนเซต S ก็ต่อเมื่อ $f(a) = a$ สำหรับทุก ๆ a ที่เป็นสมาชิกของ S

บทนิยาม 1.5 ให้ G เป็นเซตของการแปลงบน S G จะเป็นกรุปของการแปลง (group of transformations) ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $f \in G$ และ $g \in G$ แล้ว $fg \in G$ (สมบัติปิด)

2. ถ้า $f \in G$ แล้ว $f^{-1} \in G$ (สมบัติการมีตัวผกผัน)

จากบทนิยามของการแปลงทำให้ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ G เป็นกรุปของการแปลงบน S และ $f, f^{-1} \in G$ จะได้
ว่า $ff^{-1} = f^{-1}f = I$, เมื่อ I เป็นการแปลงเอกลักษณ์บน S

พิสูจน์ ให้ $a \in S$ โดยที่ $ff^{-1}(a) = b, f^{-1}f(a) = c$

$$\text{จาก } ff^{-1}(a) = f(f^{-1}(a))$$

$$\text{และ } ff^{-1}(a) = b$$

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$$

โดยที่ f^{-1} เป็นการแปลงบน S ดังนั้น $a = b$

นั่นคือ $ff^{-1}(a) = a = I(a)$ สำหรับทุก a ที่อยู่ใน S

$$\text{ทำให้ } ff^{-1} = I$$

$$\text{จาก } f^{-1}f(a) = f(f^{-1}(a))$$

$$\text{จะได้ } f^{-1}f(a) = c$$

$$f(a) = f(c)$$

โดยที่ f เป็นการแปลงบน S ดังนั้น $a = c$

นั่นคือ $f^{-1}f(a) = a = I(a)$ สำหรับทุก a ที่เป็นสมาชิกของ S

$$\text{ดังนั้น } f^{-1}f = I \quad \square$$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ G เป็นกรุปของการแปลงบน S f และ I เป็น
การแปลงซึ่งเป็นสมาชิกของ G , I เป็นการแปลงเอกลักษณ์ จะได้ว่า $fI = If = f$

พิสูจน์ ให้ $a \in S$

$$\text{จะได้ว่า } fI(a) = f(I(a))$$

$$= f(a)$$

$$If(a) = I(f(a))$$

$$= f(a)$$

ดังนั้น $fI(a) = If(a) = f(a)$ สำหรับทุก a ที่เป็นสมาชิกของ S

นั่นคือ $f \circ I = I \circ f = f$ □

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ G เป็นกรุปของการแปลงบน S f, g และ h เป็นสมาชิกของ G จะได้ว่า $(fg)h = f(gh)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)

พิสูจน์ ให้ $a \in S$

$$\begin{aligned}(fg)h(a) &= (fg)(h(a)) \\ &= f(g(h(a)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(gh)(a) &= f(gh(a)) \\ &= f(g(h(a)))\end{aligned}$$

ดังนั้น $(fg)h(a) = f(gh)(a)$ สำหรับทุก ๆ a ที่เป็นสมาชิกของ S

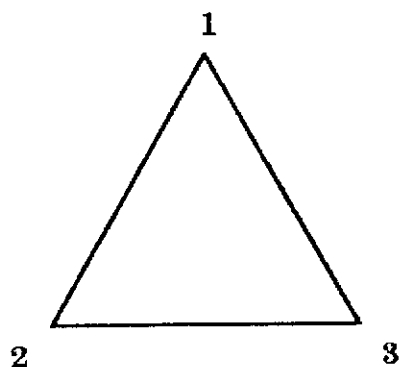
จะได้ว่า $(fg)h = f(gh)$ □

บทนิยาม 1.6 ให้ G เป็นกรุปของการแปลง และ H เป็นสับเซตของ G H จะเป็นสับกรุปของ G ก็ต่อเมื่อ H เป็นกรุป

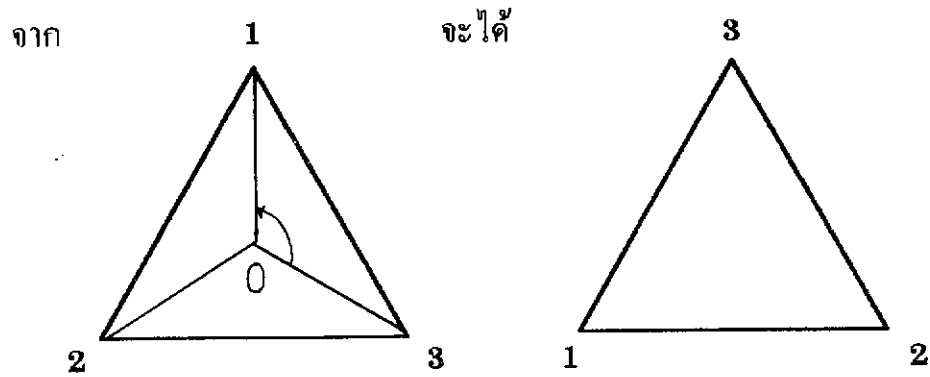
ตัวอย่างกรุปของการแปลง

1 กรุปของสมมาตรของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (group of symmetries of the equilateral triangle)

โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าบนระนาบ ที่มี 1, 2, และ 3 เป็นจุดยอด



ถ้าเราหมุนรูปสามเหลี่ยมนี้โดยใช้จุด O ซึ่งเป็นจุดรวมมวลเป็นจุดหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุมขนาด 120 องศา ดังนี้



และพิจารณาในแง่การย้ายที่ของจุดยอด 1, 2, และ 3 คือ

- 1 ย้ายไปที่ 2 เกยอยู่
- 2 ย้ายไปที่ 3 เกยอยู่
- 3 ย้ายไปที่ 1 เกยอยู่

เราสามารถกำหนดการแปลงบนเซตของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้คือ

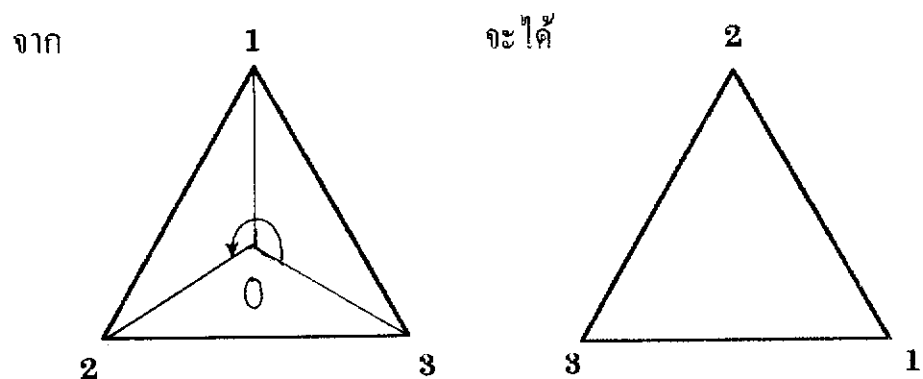
ให้ $S = \{ 1, 2, 3 \}$ และ R_1 เป็นการแปลงที่กำหนดโดย

$$R_1(1) = 2 \quad R_1(2) = 3 \quad \text{และ} \quad R_1(3) = 1$$

ในทำนองเดียวกันสามารถกำหนดการแปลงบน S ในลักษณะอื่น ๆ ได้อีก ดังนี้

R_2 เป็นการแปลงที่เกิดจากการพิจารณาการหมุนรูปสามเหลี่ยมรอบจุด O

ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุมขนาด 240 องศา

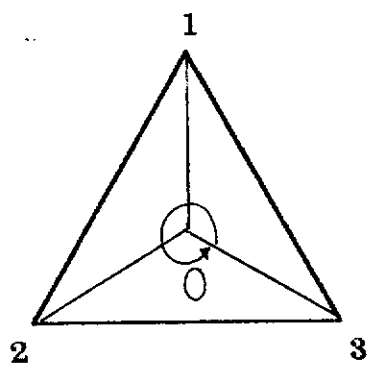


จะได้ $R_2(1) = 3$, $R_2(2) = 1$ และ $R_2(3) = 2$

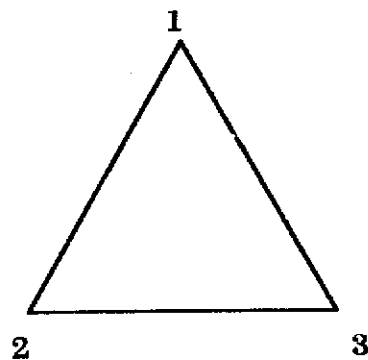
R_3 เป็นการแปลงที่เกิดจากการพิจารณาการหมุนรูปสามเหลี่ยมรอบจุด O

ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นมุมขนาด 360 องศา

จาก



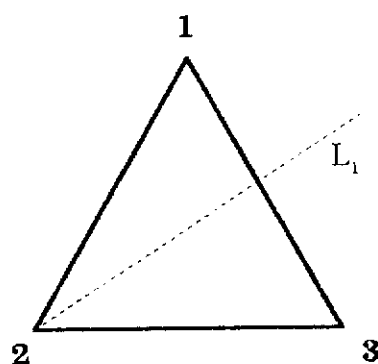
จะได้



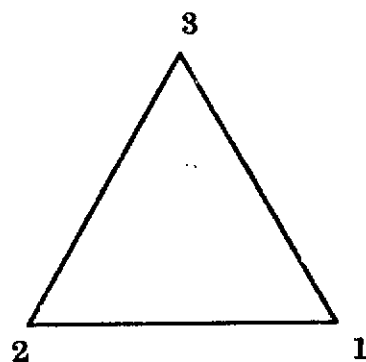
จะได้ $R_3(1) = 1$, $R_3(2) = 2$ และ $R_3(3) = 3$

r_1 เป็นการแปลงที่เกิดจากการพิจารณาการใช้เส้น L_1 ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด 2 และจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามกับจุดยอด 2 ของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสะท้อนดังนี้

จาก

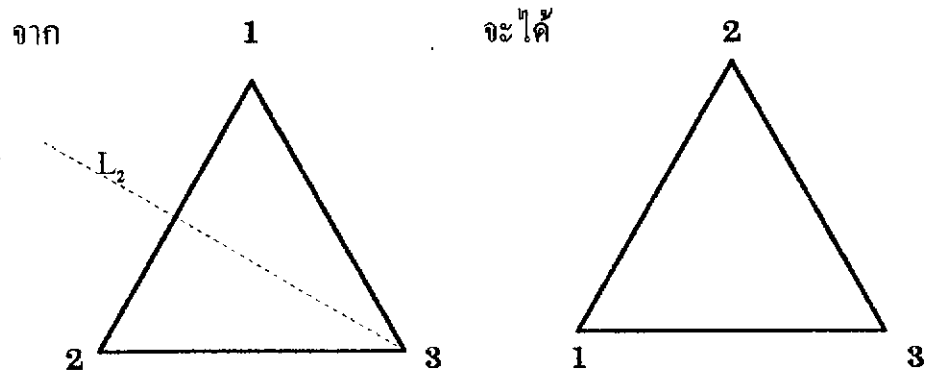


จะได้



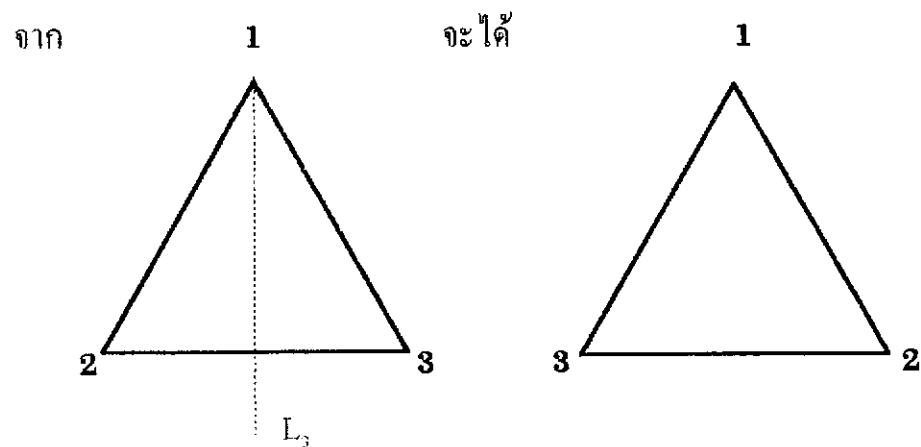
จะได้ $r_1(1) = 3$, $r_1(2) = 2$, และ $r_1(3) = 1$

r_2 เป็นการแปลงที่เกิดจากการพิจารณาการใช้เส้น L_2 ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด 3 และจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามกับจุดยอด 3 ของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสะท้อนดังนี้



จะได้ $r_2(1) = 2$, $r_2(2) = 1$, และ $r_2(3) = 3$

r_3 เป็นการแปลงที่เกิดจากการพิจารณาการใช้เส้น L_3 ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด 1 และจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามกับจุดยอด 1 ของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสะท้อนดังนี้



จะได้ $r_3(1) = 1$, $r_3(2) = 3$ และ $r_3(3) = 2$

ให้ G เป็นเซตของการแปลงบน S ที่กล่าวมาแล้ว จะได้ว่า

$$G = \{ R_1, R_2, R_3, r_1, r_2, r_3 \}$$

เราสามารถสร้างตารางผลคูณได้ดังนี้

	R_3	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
R_3	R_3	R_1	R_2	r_1	r_2	r_3
R_1	R_1	R_2	R_3	r_3	r_1	r_2
R_2	R_2	R_3	R_1	r_2	r_3	r_1
r_1	r_1	r_2	r_3	R_3	R_1	R_2
r_2	r_2	r_3	r_1	R_2	R_3	R_1
r_3	r_3	r_1	r_2	R_1	R_2	R_3

จากตารางจะได้ว่า G เป็นกรุปของการแปลงทั้งหมดบนเซต $\{1, 2, 3\}$ โดยจะพบว่า $R_3 = I$, $R_1^{-1} = R_2$, $R_2^{-1} = R_1$
 $r_1^{-1} = r_1$, $r_2^{-1} = r_2$, $r_3^{-1} = r_3$

จากตัวอย่างของกรุปของการแปลงข้างต้นนี้เป็นการแปลงบนเซตจำกัด เรียกกรุปของการแปลงในรูปของกรุปของสมมาตรของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ว่า S_3 ซึ่งเซตของการแปลงนี้เป็นเซตจำกัด

2. กรุปของการเลื่อนทางขนาน (translation)

สำหรับการแปลงเชิงเรขาคณิตที่เราจะศึกษาต่อไปนั้นจะเป็นการแปลงบนระนาบ และเป็นการแปลงบนเซตอนันต์ และเซตของการแปลงก็เป็นเซตอนันต์ ตัวอย่างง่าย ๆ ของการแปลงบนระนาบที่จะยกตัวอย่างได้แก่การเลื่อนทางขนานซึ่งกำหนดการแปลงดังนี้

ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบ f จะเป็นการเลื่อนทางขนานก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงคงที่ a, b ซึ่งสำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบ $A(x, y)$, $A'(x', y')$ และ $f(A) = A'$ โดยที่

$$\begin{aligned}x' &= x + a \\y' &= y + b\end{aligned}$$

จากการกำหนดการแปลง f จะเห็นได้ว่าเป็นการแปลงบนระนาบ เนื่องจากมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงบนระนาบ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเซตซึ่งมีสมาชิกเป็นการเลื่อนทางขนานทั้งหมดมีสมบัติเป็นกรุปของการแปลง

โดยจะเห็นได้จากสำหรับทุก ๆ f เมื่อกำหนดให้ $f(A) = A'(x',y')$ เมื่อ $A(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ

โดยที่
$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

จะมี f^{-1} ซึ่งกำหนดโดย $f^{-1}(A) = A'$ โดยที่

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

ถ้าให้ g เป็นการเลื่อนทางขนานที่กำหนดโดย $g(A) = A'$ โดยที่

$$x' = x + c$$

$$y' = y + d$$

จะได้ว่า ถ้า $fg((x,y)) = (x',y')$

แล้ว
$$x' = x + (a + c)$$

$$y' = y + (b + d)$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ f และ g ซึ่งเป็นการเลื่อนทางขนาน แล้ว fg เป็นการเลื่อนทางขนานโดยสมบัติการมีตัวผกผัน และสมบัติปิดจึงทำให้เซตของการเลื่อนทางขนานมีสมบัติเป็นกรุปของการแปลง

เราจะศึกษาการเลื่อนทางขนานโดยละเอียดอีกครั้งหนึ่งในบทต่อไป ซึ่งจะเป็นการศึกษาในเรื่องกรุปของการแปลงของเรขาคณิตระบบยูคลิดบนระนาบ และการเลื่อนทางขนานเป็นสมาชิกของกรุปของการแปลงนี้ เรียกกรุปของการแปลงนี้ว่ากรุปของโมชันซึ่งกรุปโมชันนี้จะเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยูคลิด

บทที่ 2

การแปลงหลักในเรขาคณิตระบบยูคลิด

จากที่ในปี ค.ศ. 1872 ไคลน์ได้ให้คำจำกัดความของเรขาคณิตว่า “เรขาคณิตคือการศึกษาสัมบัติของรูปเรขาคณิตในปริภูมิที่ยืนยงภายใต้กรุปของการแปลงในปริภูมิ และกรุปของการแปลงนี้จะสมนัยกับเรขาคณิตที่กำหนดขึ้นนั้น” และเนื่องจากเรขาคณิตระบบยูคลิดนับว่าเป็นเรขาคณิตที่เราคุ้นเคยมากกว่าเรขาคณิตสาขาอื่น ๆ จึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจว่า กรุปของการแปลงใดที่มีลักษณะอย่างไร อันจะเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยูคลิด

สำหรับการแปลงในเรขาคณิตระบบยูคลิดที่จะกล่าวถึงในบทนี้ ได้แก่การแปลงหลักบนระนาบ ซึ่งมีลักษณะเฉพาะคือเป็นการแปลงซึ่งรักษาระยะระหว่างจุด โดยที่การแปลงนี้ประกอบด้วย การเลื่อนทางขนาน การหมุนรอบจุด (rotation) การสะท้อน (reflection) และไกลด์รีเฟลกชัน (glide reflection) ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดต่อไปตามลำดับ และจะแสดงให้เห็นด้วยว่าเซตของการแปลงเหล่านี้มีสมบัติเป็นกรุปของการแปลง แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงการแปลงในเรขาคณิตระบบยูคลิดนั้นจะขอกล่าวถึงลักษณะสำคัญของเรขาคณิตระบบยูคลิดก่อนพอสังเขป

เรขาคณิตระบบยูคลิด

เรขาคณิตระบบยูคลิดนับว่าเป็นเรขาคณิตที่เราคุ้นเคยกันคืออยู่แล้ว เนื่องจากเป็นเรขาคณิตที่มีอิทธิพลต่อการศึกษาเรขาคณิตมาเป็นเวลากว่า 2,000 ปี ลักษณะที่สำคัญและเป็นที่ยอมรับกันของเรขาคณิตระบบยูคลิดคือเป็นการศึกษาเรขาคณิตในรูปแบบของสังเคราะห์ ซึ่งเริ่มต้นจากสิ่งที่รู้และง่าย ๆ ไปสู่สิ่งที่ยุ่งยากซับซ้อน โดยใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบนิรนัย

เรขาคณิตระบบยูคลิดจากหนังสือเอลลิเมนต์เริ่มต้นด้วยบทนิยาม 23 คำ กับสัจพจน์ 10 ข้อ โดยเรียกสัจพจน์ 5 ข้อแรกว่าพอสจูเลต (postulate) และอีก 5 ข้อหลังว่า สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (common notion) โดยสัจพจน์ทั้ง 10 ข้อมีดังนี้

พอสจูเลต

1. สามารถลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้
2. สามารถต่อเส้นตรงที่ยาวจำกัดออกไปได้เรื่อย ๆ

3. สามารถเขียนวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและระยะทาง

4. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน

5. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านไปบนเส้นตรงอีกสองเส้นทำให้มุมภายในบนข้างเดียวกันรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก เส้นตรงสองเส้นนั้นเมื่อต่อไปเรื่อย ๆ จะพบกันทางด้านที่ผลรวมของมุมภายในบนข้างเดียวกันน้อยกว่าสองมุมฉาก

สิ่งที่เห็นจริงแล้ว

1. สิ่งทั้งหลายที่เท่ากับสิ่งเดียวกันย่อมเท่ากัน
2. ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากันไปเพิ่มเข้ากับสิ่งที่เท่ากันผลที่ได้ย่อมเท่ากัน
3. ถ้าเอาสิ่งที่เท่ากัน หักออกจากสิ่งที่เท่ากันผลที่ได้ย่อมเท่ากัน
4. สิ่งทั้งหลายที่ซ้อนกันสนิทย่อมเท่ากัน
5. ส่วนรวมย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อย

จากสัจพจน์ทั้งสิบข้อ บทนิยามเบื้องต้นและบทนิยามอื่น ๆ ที่ตามมาทำให้ยุคลิดสามารถสร้างทฤษฎีบทได้ถึง 465 ทฤษฎีบท แต่ต่อมาภายหลังนักคณิตศาสตร์พบว่า สัจพจน์ทั้ง 2 ชุดที่ใช้ในหนังสือเอลิเมนต์ยังมีข้อบกพร่องหลายประการเช่น ใช้ข้อความที่ไม่ระบุไว้ในสัจพจน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลายทฤษฎีบท จึงมีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่พยายามกำหนดสัจพจน์ในเรขาคณิตระบบยุคลิดให้สมบูรณ์ขึ้น สัจพจน์ที่เป็นที่ยอมรับมากที่สุดคือสัจพจน์ของฮิลแบร์ต ซึ่งได้รวบรวมและเรียบเรียงสัจพจน์ในเรขาคณิตระบบยุคลิดไว้เป็นกลุ่ม ๆ โดยมีคำอธิบาย 6 คำ ได้แก่ จุด, เส้น, บน, ระนาบ, ระหว่าง และความเท่ากันทุกประการ (เขียนแทนด้วย $\cong$) สำหรับตัวอย่างสัจพจน์กลุ่มต่าง ๆ มีดังนี้

กลุ่มที่ 1 สัจพจน์ของการเชื่อมโยงกัน (postulate of connection) มีอยู่ 7 ข้อ เช่น

ข้อ 1 สามารถลากเส้นให้ผ่านจุดสองจุดที่แตกต่างกัน

ข้อ 3 ถ้ามีจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน แล้วจะทำให้เกิดระนาบหนึ่งระนาบ

ข้อ 6 ถ้าระนาบสองระนาบมีจุดร่วมกันหนึ่งจุดแล้ว ระนาบทั้งสองจะมีจุดร่วมกันอย่างน้อยอีกหนึ่งจุด

กลุ่มที่ 2 สัจพจน์ของอันดับ (postulate of order) มีอยู่ 5 ข้อ เช่น

ข้อ 1 ถ้าจุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C แล้ว A,B,C จะเป็นคนละจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกัน และ B อยู่ระหว่าง C และ A

ข้อ 3 ถ้า A,B,C เป็นจุดสามจุดบนเส้นเดียวกันแล้วจะมีเพียงจุดเดียวในสามจุดนี้ที่อยู่ระหว่างจุดทั้งสอง

ข้อ 5 ในระนาบเดียวกันเส้นที่ตัดด้าน ๆ หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมแต่ไม่ผ่านจุดยอดใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยม เส้นนี้จะต้องตัดกับด้านหนึ่งด้านใดที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม (Pasch's postulate)

กลุ่มที่ 3 สัจพจน์ของความเท่ากันทุกประการ (postulate of congruence) มี 5 ข้อ เช่น

ข้อ 2 ถ้าส่วนของเส้นสองเส้นต่างก็เท่ากันทุกประการกับส่วนของเส้นที่สาม แล้วส่วนของเส้นตรงทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ

ข้อ 5 ถ้าด้านสองด้าน และมุมที่อยู่ในระหว่างด้านคู่นั้นของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากันทุกประการกับด้านสองด้านและมุมในระหว่างด้านคู่นั้นของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งตามลำดับ จะทำให้มุมที่เหลือในรูปสามเหลี่ยมแรกจะเท่ากันทุกประการกับมุมที่สมนัยกันในรูปสามเหลี่ยมที่สอง

กลุ่มที่ 4 สัจพจน์ของการขนาน (postulate of parallel) มี 1 ข้อ ซึ่งเป็นสัจพจน์ของเพลแฟร์ (Playfair's postulate) ซึ่งกล่าวว่า

กำหนดจุดหนึ่งจุดและเส้นเส้นหนึ่งที่อยู่บนระนาบเดียวกันโดยที่จุดไม่อยู่บนเส้น จะสามารถลากเส้นให้ผ่านจุดนี้โดยไม่ตัดกับเส้นที่กำหนดให้ ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

กลุ่มที่ 5 สัจพจน์ของความต่อเนื่อง (postulate of continuity) มีอยู่ 2 ข้อ ข้อหนึ่งคือสัจพจน์ของอาร์คิมิดีส (postulate of measure of Archimedes)ซึ่งกล่าวว่า

กำหนดให้ A_1 เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงอยู่ระหว่าง A กับ B เลือจุด $A_2, A_3, A_4, \dots$ โดยทำให้ A_1 อยู่ระหว่าง A กับ A_2 A_2 อยู่ระหว่าง A_1 กับ A_3 A_3 อยู่ระหว่าง A_2 กับ A_4 และทำให้ $\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \overline{A_3A_4} \dots$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ B อยู่ระหว่าง A กับ A_n

ในช่วงศตวรรษที่ 17 เรขาคณิตระบบยูคลิดได้พัฒนาขึ้นมาอีกรูปแบบหนึ่งคือการนำเอาวิธีการทางพีชคณิต และระบบพิกัดฉากมาใช้ ทำให้เราศึกษาเรขาคณิต

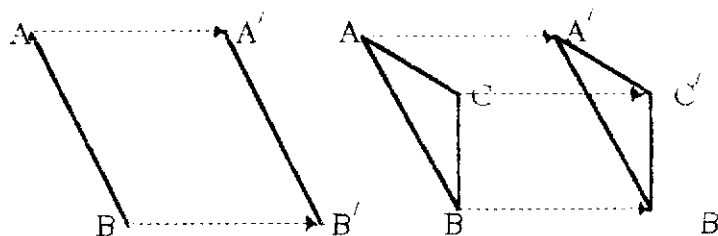
ระบบยุคลิดในแบบเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ โดยที่จะกำหนดจุดในระนาบในรูปของคู่
อันดับของจำนวนจริง (x,y) นอกจากนั้นในช่วงศตวรรษที่ 18 ยังเริ่มมีการพัฒนา
เรขาคณิตการแปลงซึ่งมีแนวคิดมาจากการพยายามเปลี่ยนปัญหาที่ยากให้เป็นปัญหาที่ง่าย
ขึ้นโดยอาศัยการแปลง ซึ่งการแปลงในเรขาคณิตนั้นมีลักษณะสำคัญคือการสมนัยแบบ
หนึ่งต่อหนึ่งของเซตของจุดนั่นเอง

จากบทนิยามเรขาคณิตของโคลน์ซึ่งเกี่ยวข้องกับกรุปของการแปลง และ การ
แปลงหลักที่เราจะศึกษาต่อไปในบทนี้ จะเป็นการแปลงซึ่งเซตของการแปลงนี้มีสมบัติ
เป็นกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยุคลิด และเป็นการแปลง
บนระนาบในเรขาคณิตระบบยุคลิดแบบวิเคราะห์ ซึ่งกำหนดจุดบนระนาบโดยใช้
คู่อันดับของจำนวนจริง โดยจะกำหนดการแปลงในรูปของเมตริกซ์ ซึ่งจะทำให้สะดวก
ในการพิจารณาลักษณะของการแปลงชนิดต่าง ๆ โดยเปรียบเทียบจากเมตริกซ์ของ
การแปลงเหล่านั้น

ชนิดของการแปลงหลักในระนาบยุคลิดเต็ม

1. การเลื่อนทางขนาน

เราได้กล่าวถึงการเลื่อนทางขนานมาบ้างแล้วในบทที่ 1 โดยลักษณะของ
การเลื่อนทางขนานนั้นทำให้จุด A,B ซึ่งเป็นจุดใด ๆ บนระนาบ และ A',B' เป็นภาพ
(image) ของ A,B ภายใต้การเลื่อนทางขนานตามลำดับ มีระยะ AA' เท่ากับระยะ BB'
(เขียนแทนด้วย $|AA'| = |BB'|$) และทิศทางของเวกเตอร์ AA' จะมีทิศทางเดียวกับ
เวกเตอร์ BB' ดังรูป

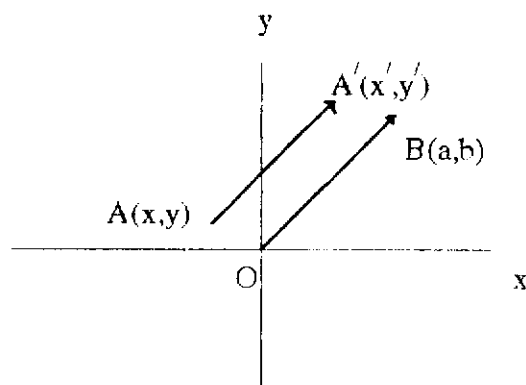


รูป (2.1)

รูป (2.2)

จากรูป (2.1) จะเห็นได้ว่าเป็นการเลื่อนทางขนานของ ส่วนของเส้นตรง AB

(เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$) จะอยู่ในทิศทางของเวกเตอร์ AA' โดยที่ $|AA'| = |BB'|$ และจากรูป (2.2) แสดงให้เห็นการเลื่อนทางขนาน ของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยผลของการเลื่อนทางขนานจะได้ รูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ โดยจะเห็นได้ว่าเวกเตอร์ AA' BB' และ CC' เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และมีขนาดเท่ากัน



รูป(2.3)

จากรูป(2.3) $A(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ OB เป็นทิศทางของการเลื่อนทางขนาน และ $A(x',y')$ เป็นจุดที่สมนัยกับ A ซึ่งจะได้ว่า $AA' = OB$ โดยการเขียนเวกเตอร์ในรูปส่วนประกอบ (component) จะได้

$$OB = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad AA' = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถกำหนดบทนิยามของการเลื่อนทางขนานในระนาบได้ดังนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบ $A(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ โดยที่ $f(A) = A'(x',y')$ f จะเป็นการเลื่อนทางขนานก็ต่อเมื่อ

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

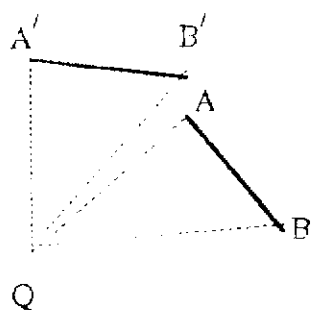
เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จากบทนิยาม 2.1 ถ้า T เป็นการเลื่อนทางขนาน และ $A(a,b)$ เป็นจุดในระนาบจะเรียก T_A ว่าการเลื่อนทางขนานในทิศทางของเวกเตอร์ OA เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด โดยที่ ถ้า $X(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ และ $T_A(X) = X'(x',y')$ จะได้

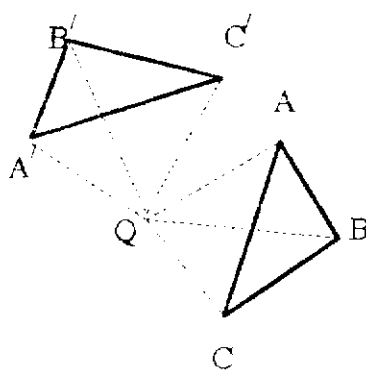
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

2. การหมุนรอบจุด (rotation)

ลักษณะการสมนัยของจุดที่เป็นผลของการหมุนรอบจุดคือที่สำหรับจุด A ใด ๆ ถ้าจุด A' สมนัยกับ จุด A ภายใต้การหมุนรอบจุด Q ใด ๆ แล้ว $|QA| = |QA'|$ และขนาดของมุม AQA' (เขียนแทนด้วย $\angle AQA'$) จะมีขนาดคงที่



รูป (2.4)



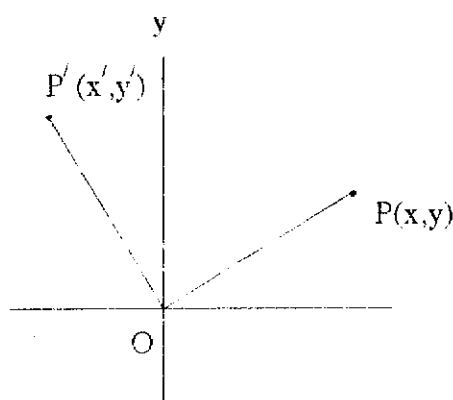
รูป (2.5)

จากรูป (2.4) เป็นการหมุนรอบจุด Q ของ AB โดยจะเห็นได้ว่า

$$|QA| = |QA'|, \quad \angle AQA' = \angle BQB'$$

และจากรูป (2.5) เป็นการหมุนรอบจุด Q ของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยจุด A, B และ C จะสมนัยกับจุด A', B' และ C' ตามลำดับซึ่ง $|QA| = |QA'|$ $|QB| = |QB'|$ และ $|QC| = |QC'|$ และ $\angle AQA' = \angle BQB' = \angle CQC'$

จะใช้สัญลักษณ์ $R_{(Q, \alpha)}$ แทนการหมุนรอบจุด Q และ α เป็นขนาดของมุมในการหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยให้ $\alpha \in [0, 2\pi)$



รูป (2.6)

พิจารณาการหมุนรอบจุดกำเนิดของจุด $P(x, y)$ ใด ๆ ในระนาบ ถ้า OP ทำมุม β ในทิศทวนเข็มนาฬิกากับแกน x และ $|OP| = r$ หน่วย จะสามารถแทนจุด $P(x, y)$ ในรูปพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ได้ด้วย $(r \cos \beta, r \sin \beta)$ จาก $R_{(O, \alpha)}$ เป็นการหมุนรอบจุดกำเนิดในทิศทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมในการหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาคือ α โดยให้ $R_{(O, \alpha)}(P) = P'(x', y')$ ดังนั้น OP' จะทำมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกากับแกน x ด้วยขนาด $\beta + \alpha$ ซึ่งจะได้ว่า

$$P'(x', y') = (r \cos(\beta + \alpha), r \sin(\beta + \alpha))$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } r \cos(\beta + \alpha) &= r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha \\ &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } r \sin(\beta + \alpha) &= r \sin \beta \cos \alpha + r \cos \beta \sin \alpha \\ &= y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

สามารถเขียนเป็นการแปลงในรูปสมการเมตริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสามารถกำหนดบทนิยามของการหมุนรอบจุดกำเนิดได้ดังนี้

บทนิยาม 2.2 ให้ $R_{(O,\alpha)}$ เป็นการหมุนรอบจุด $O(0,0)$ α เป็นขนาดมุมของการหมุน และ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ $P(x,y)$ สมัยกับ $P'(x',y')$ ภายใต้ $R_{(O,\alpha)}$ ก็คือเมื่อ

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$$

$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

สามารถเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } A_1 \text{ เป็นเมตริกซ์ } \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi)$$

และจะเรียก A_1 ว่าเมตริกซ์ของการหมุนรอบจุด O

จากบทนิยามเป็นการหมุนรอบจุดกำเนิด ถ้า $R_{(Q,\alpha)}$ เป็นการหมุนรอบจุด Q ใด ๆ บนระนาบและ $P(x,y)$ สมัยกับ $P'(x',y')$ ภายใต้การหมุนรอบจุด Q ขนาดของมุมในการหมุนคือ α โดยการย้ายแกนทางขนาน โดยให้จุดกำเนิดมาอยู่ที่จุด Q แล้วใช้บทนิยามของการหมุนรอบจุดกำเนิดจะทำให้ได้การหมุนรอบจุด Q ดังนี้

$$\text{จาก } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

เป็นการหมุนรอบจุดกำเนิดด้วยขนาดของมุมในการหมุนคือ α โดยการย้ายแกนทางขนานให้จุดกำเนิดจะอยู่ที่จุด Q และถ้าพิกัดของ Q คือ (h,k) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x' - h \\ y' - k \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะให้บทนิยามของการหมุนรอบจุด $Q(h,k)$ ใด ๆ ดังนี้คือ

บทนิยาม 2.3 ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ $R_{(Q,\alpha)}$ เป็นการหมุนรอบจุด $Q(h,k)$ ใด ๆ และ $R_{(Q,\alpha)}(P) = P'(x',y')$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_1 เป็นเมตริกซ์ของการหมุนรอบจุดกำเนิด ด้วยขนาดของมุมในการหมุนเท่ากับ $\alpha \in [0, 2\pi)$

จากบทนิยามของการหมุนรอบจุด (h,k) จะเห็นได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - A_1 \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (I_2 - A_1) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

เมื่อ I_2 คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ มีมิติ 2×2

จะได้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1 - \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h-h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ -h\sin\alpha + k-k\cos\alpha \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าเป็นการหมุนรอบจุด O ด้วยขนาดของมุมในการหมุน α แล้วตามด้วยการเลื่อนทางขนานในทิศทางของเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} h-h\cos\alpha + k\sin\alpha \\ k-h\sin\alpha - k\cos\alpha \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า T เป็นการแปลงบนระนาบโดยที่ $X(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ และ

$$T(X) = A_1 X + B \text{ เมื่อ}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } \alpha \in [0, 2\pi), B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

แล้ว T เป็นการหมุนรอบจุด หรือการเลื่อนทางขนาน

พิสูจน์

$$\text{จาก } \det(I_2 - A_1) = \begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\alpha$$

ถ้า $\alpha \neq 0$ จะได้ว่า $(I_2 - A_1)$ เป็นเมตริกซ์ที่มีอินเวอร์ส

ดังนั้นจะมี Q ซึ่ง $Q = (I_2 - A_1)^{-1}B$

$$\text{และ } B = (I_2 - A_1)Q$$

$$\text{ถ้า } Q = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } T(X) &= A_1 X + (I_2 - A_1)Q \\ &= A_1 X - A_1 Q + Q \\ &= A_1(X - Q) + Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \\
 &= A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

นั่นคือ T เป็นการหมุนรอบจุด $Q(h,k)$

ถ้า $\alpha = 0$ จะได้ว่า $A_1 = I_2$

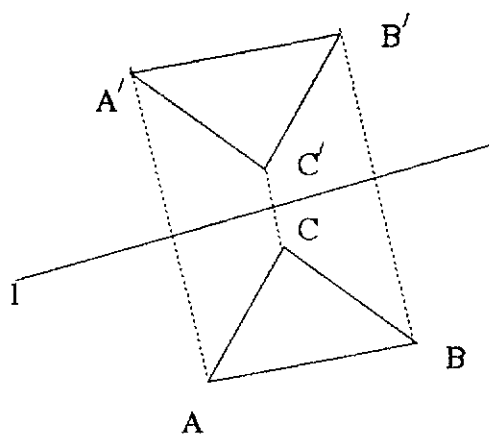
ดังนั้น $T(X) = I_2 X + B = X + B$

นั่นคือ T เป็นการเลื่อนทางขนาน T_B

□

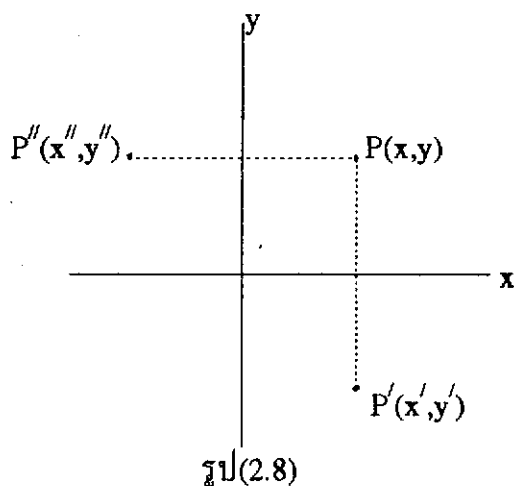
3. การสะท้อน (reflection)

ลักษณะการสะท้อนในระนาบยูคลิดจะเป็นแบบการสะท้อนเชิงตั้งฉาก (orthogonal line reflections) ซึ่งลักษณะของการสมนัยกันของจุด A ใดๆ และ A' ที่เป็นภาพของ A ภายใต้การสะท้อน AA' จะตั้งฉากกับเส้น l และจุดกึ่งกลางของ AA' จะอยู่บน l โดยที่จุดทุกจุดบนเส้น l จะสมนัยกับตัวเอง เรียก l ว่าแกนสะท้อน



รูป (2.7)

จากรูป (2.7) เป็นการสะท้อนของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมี l เป็นแกนสะท้อน จะเห็นได้ว่า l ตั้งฉากกับ $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ และ $\overline{CC'}$ ที่จุดกึ่งกลาง



จากรูป (2.8) $P'(x', y')$ สมัยกับ $P(x, y)$ ภายใต้การสะท้อนโดยให้แกน x เป็นแกนสะท้อน จะเห็นได้ชัดว่า

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

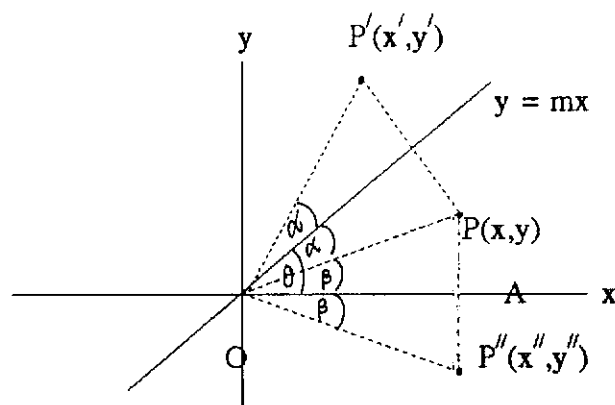
และ $P''(x'', y'')$ สมัยกับ $P(x, y)$ ภายใต้การสะท้อนโดยมีแกน y เป็นแกนสะท้อน จะได้ว่า

$$x'' = -x$$

$$y'' = y$$

ส่วนในกรณีที่แกนสะท้อนเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งจะมีสมการเป็น $y = mx$ เมื่อ $m = \tan \theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมที่เส้นตรงที่ทำกับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และ $\theta \neq \pi$ จะพิจารณา ดังนี้

2



รูป (2.9)

จากรูป(2.9) ให้ $P''(x'', y'')$ สมัยกับ $P(x, y)$ ภายใต้การสะท้อนโดยมีแกน x เป็นแกนสะท้อน จะได้ $P''(x'', y'')$ คือ $(x, -y)$ และจะทำให้ $\angle POA = \angle AOP'' = \beta$

$P'(x', y')$ สมัยกับ $P(x, y)$ ภายใต้การสะท้อนโดยมีเส้น $y = mx$ เป็นแกนสะท้อน ดังนั้น $\angle P'OP = \angle POA = \alpha$ จึงทำให้ $\angle P''OP' = 2\theta$

จาก $|OP'| = |OP|$ และ $\angle P''OP' = 2\theta$ ดังนั้น P' สมัยกับ P'' ภายใต้การหมุนรอบจุดกำเนิด มีขนาดของมุมในการหมุนเท่ากับ 2θ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta$$

$$y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

เป็นการสะท้อนของจุด P โดยมีแกนสะท้อนคือ $y = mx$ ซึ่งสามารถกำหนดคบนิยามของการสะท้อนได้ดังนี้

บทนิยาม 2.4 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ โดยที่ $f(P) = P'(x', y')$, f จะเป็นการสะท้อนโดยมีเส้นตรงที่ผ่านจุด O เป็นแกนสะท้อนก็ต่อเมื่อ

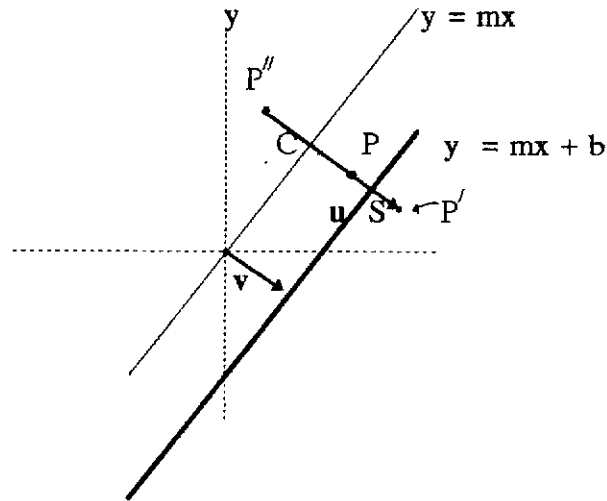
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}; \theta \in [0, 2\pi)$$

แกนสะท้อนคือเส้น $y = mx$, $m = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ เมื่อ $\theta \neq \pi$ และเส้น $x = 0$ (แกน y) เป็นแกนสะท้อน เมื่อ $\theta = \pi$ เรียก A_2 ว่าเมตริกซ์ของการสะท้อน

ในกรณีที่แกนสะท้อนคือเส้น $y = mx + b$ จะพบว่าเราสามารถใช้ในการสะท้อนโดยเส้น $y = mx$ แล้วตามด้วยการเลื่อนทางขนานในทิศทางที่ตั้งฉากกับแกนสะท้อนแทนได้ดังนี้



รูป (2.10)

จากรูป (2.10) P' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อน โดยแกนสะท้อนคือเส้น $y = mx + b$ แต่ถ้าพิจารณาโดยให้เส้น $y = mx$ เป็นแกนสะท้อนจะเห็นว่า P'' สมัยกับ P และใช้การเลื่อนทางขนานโดยเวกเตอร์ u ดังนั้น P' จะสมัยกับ P'' ภายใต้การเลื่อนทางขนานโดยเวกเตอร์ u ซึ่งถ้า T เป็นการสะท้อนโดยแกนสะท้อนคือ $y = mx + b$ แล้วจะได้ว่า $T(X) = A_2X + u$ เมื่อเขียนเวกเตอร์ u ในรูปส่วนประกอบ

การหาเวกเตอร์ u จะพิจารณาจากเวกเตอร์ v ซึ่งเวกเตอร์ v ขนานกับเวกเตอร์ u จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด และมีขนาดเท่ากับระยะระหว่างเส้นตรง $y = mx$ กับ $y = mx + b$ ซึ่งเท่ากับ d

จาก P'' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อนโดยแกนสะท้อนคือ $y = mx$ ทำให้ $|P''C| = |CP|$ และ P' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อนโดยแกนของการสะท้อนคือ $y = mx + b$ ทำให้ $|P'S| = |SP|$ แต่ $|CP| + |PS| = d$ ดังนั้น $|P'P'| = 2d$ จึงเห็นได้ว่า $u = 2v$ และเส้นที่ขนานกับ v ผ่านจุด O จะตั้งฉากกับเส้น $y = mx$ จะมีสมการเป็น $y = -\frac{1}{m}x$ โดยการหาจุดตัดของเส้น $y = -\frac{1}{m}x$ กับ $y = mx + b$

จะได้จุดตัดคือ $\left(\frac{-mb}{m^2+1}, \frac{b}{m^2+1}\right)$

$$\text{จะได้ } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{-mb}{m^2+1} \\ \frac{b}{m^2+1} \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{-2mb}{m^2+1} \\ \frac{2b}{m^2+1} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $m = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{-2mb}{m^2+1} &= \frac{-2b \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1} \\ &= -2b \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -b \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2b}{m^2+1} &= \frac{2b}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1} \\ &= 2b \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= b + b \cos\theta \end{aligned}$$

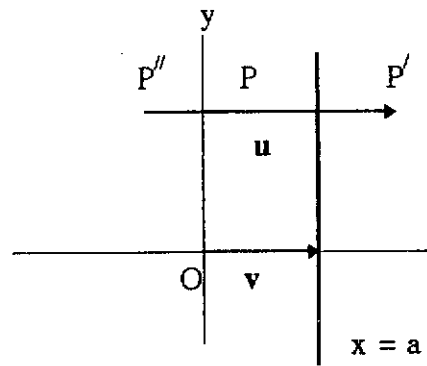
ดังนั้น

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -b \sin\theta \\ b + b \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ว่า } T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}_2 \mathbf{X} + \begin{bmatrix} -b \sin\theta \\ b + b \cos\theta \end{bmatrix}$$

เป็นการสะท้อนโดยมีแกนสะท้อน ซึ่งมีสมการอยู่ในรูปแบบ $y = mx + b$

ในกรณีที่แกนของการสะท้อนคือเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะพิจารณาดังนี้



รูป (2.11)

จากรูป (2.11) P' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อนโดยมีเส้นตรง $x = a$ เป็นแกนสะท้อน และ P'' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อนโดยมีแกน y เป็นแกนสะท้อน ในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาจากแกนสะท้อนในรูป $y = mx + b$ จะได้ว่า P' สมัยกับ P'' โดยการเลื่อนทางขนานในทิศทางของเวกเตอร์ u และจะพบว่า $u = 2v$ จาก v มีจุดเริ่มต้นคือจุด O จุดปลายอยู่บนเส้น $x = a$ จะได้

$$v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น} \quad u = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า P' สมัยกับ P ภายใต้การสะท้อนโดยแกน y แล้วตามด้วยการเลื่อนทางขนานในทิศทางของเวกเตอร์ u และการสะท้อนโดยมีเส้นตรงที่ขนานกับแกน y เป็นแกนสะท้อน จะอยู่ในรูป $T(X) = A_2X + u$ เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ของการสะท้อนในบทนิยาม 2.4 และ $\theta = \pi$ จะได้

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นถ้า $P'(x', y')$ สมัยกับ $P(x, y)$ ภายใต้การสะท้อนโดยแกนสะท้อนเป็นเส้นตรงที่ขนานแกน y ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากการสะท้อนโดยเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุดกำเนิดเป็นแกนสะท้อน สามารถกำหนดได้โดยใช้การสะท้อนโดยเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดแล้วตามด้วยการเลื่อนทางขนานในทิศทางของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับแกนสะท้อน จึงสามารถกำหนดบทนิยามของการสะท้อนที่มีเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุดกำเนิดได้ดังนี้

บทนิยาม 2.5 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ โดยที่ $f(P) = P'(x', y')$ f จะเป็นการสะท้อนโดยมีเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุด O เป็นแกนสะท้อน ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}; \theta \in [0, 2\pi)$$

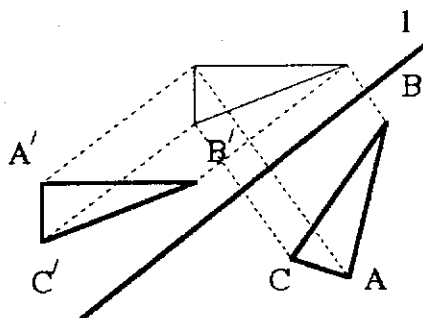
$$\frac{b}{a} = \frac{-1}{\tan\frac{\theta}{2}} \quad \text{เมื่อ } \theta \neq \pi$$

$$\text{หรือ } \frac{b}{a} = 0 \quad \text{เมื่อ } \theta = \pi$$

จากบทนิยาม จะเห็นได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะมีทิศทางที่ตั้งฉากกับแกนสะท้อนโดย A เป็น เมตริกซ์ของการสะท้อน

4. ไกลดรีเฟลกชัน (glide reflection)

บทนิยาม 2.6 ให้ f เป็นการสะท้อน g เป็นการเลื่อนทางขนานกับแกนสะท้อนของ f บนระนาบ จะได้ว่า gf เป็น ไกลดรีเฟลกชัน



รูป (2.12)

จากรูป (2.12) เป็นไกลด์รีเฟลกชันของรูปสามเหลี่ยม ABC โดยภาพที่ได้คือรูปสามเหลี่ยม A'B'C' ซึ่งเกิดจากการแปลงสองครั้งคือ การสะท้อนโดยมีเส้น l เป็นแกนสะท้อน แล้วตามด้วยการเลื่อนทางขนาน ซึ่งทิศทางของการเลื่อนอยู่ในแนวขนานกับกับเส้น l

ถ้าไกลด์รีเฟลกชัน เกิดจากแกนสะท้อน $y = mx$ และเมตริกซ์ของการสะท้อนคือ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} ; \theta \in [0, 2\pi)$$

จะได้ว่า การเลื่อนจะต้องอยู่ในแนวขนานกับแกนสะท้อนซึ่งเวกเตอร์ของการเลื่อนจะต้องขนานกับเส้นตรง $y = mx$ และเวกเตอร์ของการเลื่อนกำหนดเป็น

$$\begin{bmatrix} a \\ ma \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } m = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ และ } \theta \neq \pi$$

และจะกำหนดเป็นเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } \theta = \pi$$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $X(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ และ T เป็นการแปลงบนระนาบโดยที่

$$T(X) = A_2 X + B \quad \text{เมื่อ}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } \theta \in [0, 2\pi), B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

แล้ว T เป็นการสะท้อน หรือ ไกลด์รีเฟลกชัน

พิสูจน์ จาก A_2 เป็นเมตริกซ์ของการสะท้อน พิจารณา B ว่าเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปส่วนประกอบ

1. ถ้า B เป็นเวกเตอร์ 0 เห็นชัดว่า T เป็นการสะท้อน
2. ถ้า B เป็นเวกเตอร์ขนานกับแกนสะท้อน จะได้ว่า T เป็นไกลด์รีเฟลกชัน
3. ถ้า B เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับแกนสะท้อน

3.1 ถ้า $\theta \neq \pi$ จะได้ว่าแกนสะท้อนอยู่ในรูป $y = mx$

$$\text{และ } m = \tan \frac{\theta}{2}$$

โดยที่ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = mx$ ดังนั้น

$$\frac{b}{a} = \frac{-1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

จะได้ T เป็นการสะท้อนโดยแกนสะท้อนเป็นเส้นที่ไม่ผ่านจุด O

3.2 ถ้า $\theta = \pi$ จะได้ว่าแกนสะท้อนคือแกน y ดังนั้น B ต้องตั้งฉากกับแกน y ดังนั้น B จะอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น T เป็นการสะท้อน โดยมีแกนสะท้อนขนานกับแกน y

4. ถ้า B ไม่ตั้งฉากและไม่ขนานกับแกนสะท้อน

ให้ u และ v เป็นเวกเตอร์ในรูปส่วนประกอบที่ขนาน และตั้งฉากกับแกนสะท้อนตามลำดับ

ดังนั้นจะมีจำนวนจริง m, n ซึ่ง $B = nv + mu$

จะได้ว่า $T(X) = AX + (nv + mu) = (AX + nv) + mu$

จาก nv ตั้งฉากกับแกนสะท้อน $T(X) = AX + nv$ เป็นการสะท้อนโดยมีรูปแบบของแกนสะท้อนคือ $y = mx + b$

จาก mu ขนานกับแกนสะท้อน ดังนั้น $T(X) = (AX + nv) + mu$

เป็นไกลดร์เฟลกชัน □

จากเมทริกซ์ของการหมุนรอบจุดคือ $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi)$

และเมทริกซ์ของการสะท้อนคือ $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}; \theta \in [0, 2\pi)$

จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ทั้งสองเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix) ซึ่งมีสมบัติว่า

$A^{-1} = A'$ และจะพบว่าเมทริกซ์เชิงตั้งฉากที่มีมิติ 2×2 ทุกเมทริกซ์สามารถเขียน

ในรูปของเมทริกซ์ทั้งสองได้เสมอ ดังบทนิยาม และทฤษฎีบทต่อไปนี้

บทนิยาม 2.8 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส A จะเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากก็ต่อเมื่อ

$$A^{-1} = A^t$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ A เป็น 2×2 เมทริกซ์ A จะเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากก็ต่อเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

พิสูจน์ (1)
ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

$$\text{ดังนั้น} \quad A^{-1} = A^t$$

$$\text{และ} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{d}{ad - bc} = a \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ} \quad \frac{a}{ad - bc} = d \dots\dots\dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

และ $d \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $ad - bc = \pm 1$

$$\frac{-b}{ad - bc} = c \quad (3)$$

$$\text{และ } \frac{-c}{ad - bc} = b \quad (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $c = 0$ ก็ต่อเมื่อ $b = 0$

และ $c \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $ad - bc = \pm 1$

จาก $A^{-1} = A'$ ดังนั้น $\det A = ad - bc \neq 0$ จึงทำให้ c และ d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ดังนั้น $ad - bc = \pm 1$

ถ้า $ad - bc = 1$

$$\text{จาก } \frac{d}{ad - bc} = a \text{ จะได้ } d = a$$

$$\frac{-b}{ad - bc} = c \text{ จะได้ } -b = c$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $ad - bc = -1$ จะได้ $a = -d$ และ $b = c$

ดังนั้น A คือเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a^2 + b^2 = 1 \text{ หรือ } \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a^2 + b^2 = -1$$

จาก $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น A คือเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}$$

เมื่อ α เป็นจำนวนจริง

และสำหรับทุกจำนวนจริง α จะมี $\theta \in [0, 2\pi)$ ที่ทำให้

$$\sin \alpha = \sin \theta \quad \text{และ} \quad \cos \alpha = \cos \theta$$

$$\text{และจาก } \sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \text{และ} \quad \cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

ดังนั้น A จึงสามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

(2)

$$\text{จาก } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^t$$

$$\text{จาก } \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}^t$$

$$\text{ดังนั้น } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉากก็ต่อเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$ □

จากเมตริกซ์ที่สมนัยการหมุนรอบจุด O และเมตริกซ์ที่สมนัยกับการสะท้อน ซึ่งรูปแบบของแกนสะท้อนจะมีสมการคือ $y = mx$ จะได้ว่า การเลื่อนทางขนาน การหมุนรอบจุด การสะท้อน และไกลดรีเฟลกชัน เป็นการแปลงที่สามารถเขียนได้รูป

$$T(X) = AX + B$$

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก B เป็นเวกเตอร์ที่เขียนในรูปส่วนประกอบ

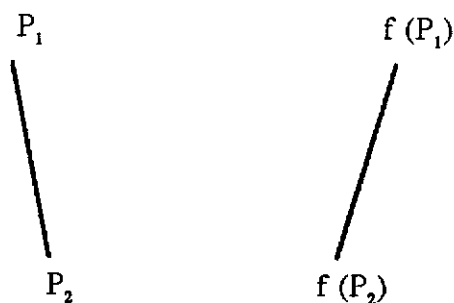
จากการแปลงทั้งสี่แบบที่ได้กล่าวมานี้เรียกรวมการเลื่อนทางขนานและการหมุนรอบจุดว่า คิสเพลสเมนต์(displacements) เรียกการสะท้อนและไคลด์รีเฟลกชัน ว่าสมมาตร (symmetry) โดยที่ลักษณะที่สำคัญของการแปลงเหล่านี้ก็คือการรักษาระยะระหว่างจุด (preserve distance) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการแปลงที่รักษาระยะระหว่างจุดจะเรียกว่า ไอโซเมตรี (isometry) โดยกำหนดคตินิยามดังนี้

บทนิยาม 2.9 ให้ f เป็นการแปลงจาก เซต A ไปทั่วถึง เซต B f จะเป็นไอโซเมตรี (isometry) ก็ต่อเมื่อ

$$|f(P_1) f(P_2)| = |P_1 P_2|$$

เมื่อ P_1, P_2 อยู่ในเซต A

ถ้า f เป็นการแปลงบนเซต S และ f เป็นไอโซเมตรี แล้วจะ เรียก f ว่าไอโซชัน



รูป (2.13)

จากรูป(2.13) เมื่อ f เป็นไอโซเมตรีจะได้ว่า $|P_1 P_2| = |f(P_1) f(P_2)|$ เนื่องจากการเลื่อนทางขนาน การหมุนรอบจุด การสะท้อน และไคลด์รีเฟลกชัน เป็นการแปลงบนระนาบเดียวกัน และจะแสดงให้เห็นต่อไปว่าเป็นการแปลงที่รักษาระยะระหว่างจุดจึงเรียกรวมการแปลงเหล่านี้ว่าไอโซชัน

สำหรับระยะระหว่างจุด $A(x_1, y_1)$ และ $C(x_2, y_2)$ ในระนาบคือ

$$|AC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ T เป็นการแปลงบนระนาบ ที่กำหนดโดย

$$T(X) = AX + B$$

เมื่อ A เป็น เมตริกซ์เชิงตั้งฉากมิติ 2×2 แล้ว T เป็นไอโซชัน

พิสูจน์ ให้ $A(x_1, y_1)$ และ $C(x_2, y_2)$

$$\text{จะได้ } |AC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{ให้ } T(A) = A'(x'_1, y'_1) \quad T(C) = C'(x'_2, y'_2)$$

ถ้า T เป็นการเลื่อนทางขนาน หรือการหมุนรอบจุดจะได้

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$x'_1 = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta + a$$

$$y'_1 = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta + b$$

และ

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$x'_2 = x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta + a$$

$$y'_2 = x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta + b$$

$$|A'C'| = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$$

$$= \sqrt{[(x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta + a) - (x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta + a)]^2 + [(x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta + b) - (x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta + b)]^2}$$

จาก

$$[(x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta + a) - (x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta + a)]^2 + [(x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta + b) - (x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta + b)]^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 \cos^2\theta + 2(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)\cos\theta\sin\theta + (y_2 - y_1)^2 \sin^2\theta$$

$$+ (x_1 - x_2)^2 \sin^2\theta + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta\sin\theta + (y_1 - y_2)^2 \sin^2\theta$$

$$= (x_1 - x_2)^2 \cos^2\theta - 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta\sin\theta + (y_1 - y_2)^2 \sin^2\theta$$

$$+ (x_1 - x_2)^2 \sin^2\theta + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta\sin\theta + (y_1 - y_2)^2 \sin^2\theta$$

$$= (x_1 - x_2)^2 \cos^2\theta + (y_1 - y_2)^2 \sin^2\theta + (x_1 - x_2)^2 \sin^2\theta + (y_1 - y_2)^2 \sin^2\theta$$

$$= [\cos^2\theta + \sin^2\theta][x_2 - x_1]^2 + [\cos^2\theta + \sin^2\theta][y_2 - y_1]^2$$

$$= [x_2 - x_1]^2 + [y_2 - y_1]^2$$

$$\text{จะได้ } |A'C'| = \sqrt{[x_2 - x_1]^2 + [y_2 - y_1]^2}$$

$$= |AC|$$

ถ้า T เป็นการสะท้อน หรือไกลดร์เฟลกชันจะได้

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $|A'C'| = |AC|$

ดังนั้นจะได้ว่า T เป็น โมชัน $\square$

จากทฤษฎีบทจะได้ว่าการแปลงพื้นฐานทั้งสี่ชนิดมีสมบัติในการรักษาระยะระหว่างจุด นอกจากนั้นแล้วยังจะพบว่าเซตของการแปลงที่ประกอบด้วยโมชันเหล่านี้มีสมบัติเป็นกรุปของการแปลงดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ T เป็นการแปลงบนระนาบ ที่กำหนดโดย

$$T(X) = AX + B$$

เมื่อ A เป็น เมตริกซ์เชิงตั้งฉากมิติ 2×2 และให้ G เป็นเซตของ T จะได้ว่า G เป็นกรุปของการแปลง

พิสูจน์ จาก $T(X) = AX + B$

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } T'(X) = A^{-1}X - A^{-1}B$$

ซึ่ง A^{-1} เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก เนื่องจาก

$$(A^{-1})^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

$$\text{ทำให้ } T' \in G$$

$$\begin{aligned} \text{และ } T' T(X) &= T'(AX + B) \\ &= A^{-1}(AX + B) - A^{-1}B \\ &= X + A^{-1}B - A^{-1}B \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T T'(X) &= T(A^{-1}X - A^{-1}B) \\ &= A(A^{-1}X - A^{-1}B) + B \\ &= X - B + B \\ &= X \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } T' = T^{-1}$$

$$\text{ให้ } T_1, T_2 \in G$$

$$\text{โดยที่ } T_1(X) = A_1X + B_1$$

$$\text{และ } T_2(X) = A_2X + B_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } T_1 T_2(X) &= T_1(A_2 X + B_2) \\
 &= A_1(A_2 X + B_2) + B_1 \\
 &= A_1 A_2 X + (A_1 B_2 + B_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } (A_1 A_2)^{-1} &= A_2^{-1} A_1^{-1} \\
 &= A_2^t A_1^t \\
 &= (A_1 A_2)^t
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_1 A_2$ เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

จะได้ว่า $T_1 T_2 \in G$

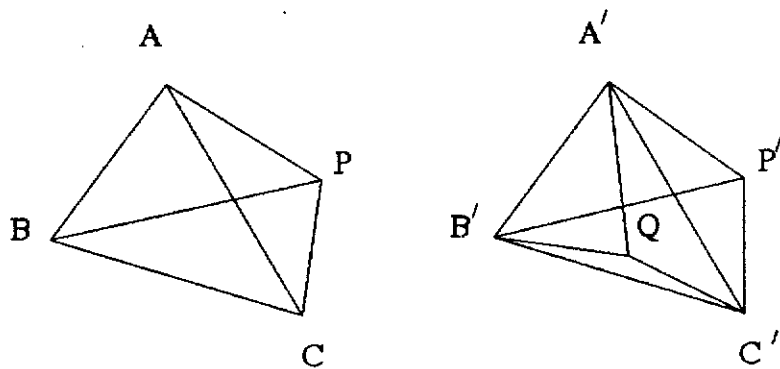
และจะได้ว่า G เป็นกรุปของการแปลง □

ลักษณะที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งของโมชันบนระนาบก็คือ จำนวนจุดครึ่งภายใต้โมชัน เราจะพบว่าภายใต้การเลื่อนทางขนานจะไม่มีจุดครึ่งเช่นเดียวกับไกล์ดรีเฟลกชัน การหมุนรอบจุดมีจุดครึ่งหนึ่งจุดคือจุดศูนย์กลางของการหมุน ส่วนการสะท้อนจุดบนแกนสะท้อนทั้งหมดจะเป็นจุดครึ่งภายใต้การสะท้อน

จะเห็นได้ว่าถึงแม้การสะท้อนจะทำให้มีจุดมากมายขึ้นยง แต่การสะท้อนก็ไม่ใช่การแปลงเอกลักษณ์ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นที่น่าสนใจว่าเราจะกำหนดจุดที่ยืนยงภายใต้โมชันในลักษณะใดจึงจะทำให้โมชันนั้นเป็นการแปลงเอกลักษณ์ และจะกำหนดจุดที่สมนัยกันก็ดูจึงจะสามารถกำหนดโมชันได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น ซึ่งเราจะได้คำตอบจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า T_1, T_2 เป็น โมชันบนระนาบ โดยที่จุด A, B และ C เป็นจุดที่ไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันบนระนาบ และ $T_1(A) = T_2(A) = A', T_1(B) = T_2(B) = B'$ และ $T_1(C) = T_2(C) = C'$ ตามลำดับ แล้ว $T_1 = T_2$

พิสูจน์



รูป (2.14)

ถ้า P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ โดยที่ $T_1(P) = P'$ และ $T_2(P) = Q$ ดังรูป (2.14)

เนื่องจาก T_1 และ T_2 เป็นไอซัน ดังนั้น

$$|AP| = |A'P'| = |A'Q|$$

$$|BP| = |B'P'| = |B'Q|$$

และ $|CP| = |C'P'| = |C'Q|$

ให้ C_1 เป็นวงกลมที่มี A' เป็นจุดศูนย์กลาง และมี $A'P'$ เป็นรัศมี

C_2 เป็นวงกลมที่มี B' เป็นจุดศูนย์กลาง และมี $B'P'$ เป็นรัศมี

C_3 เป็นวงกลมที่มี C' เป็นจุดศูนย์กลาง และมี $C'P'$ เป็นรัศมี

โดยที่วงกลมสามวงที่จุดศูนย์กลางไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันจะมีจุดร่วมกันได้
อย่างมากเพียงจุดเดียวเท่านั้น แต่ในกรณีนี้วงกลมทั้งสามมีจุดร่วมกันคือ P' และ Q

ดังนั้น $P' = Q$

□

จากทฤษฎีบทจะได้ว่าเป็นการเพียงพอที่จะกำหนดไอซันใด ๆ โดยกำหนด
การสมนัยของจุดเพียงสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันเท่านั้น นอกจากนี้ยังจะพบว่า
สำหรับไอซันใด ๆ ที่ทำให้จุดสามจุดใด ๆ บนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันเป็น
จุดตรึงภายใต้ไอซันนี้แล้ว ไอซันนี้จะเป็นการแปลงเอกลักษณ์

เราได้แสดงให้เห็นมาแล้วว่าเซตของไอซันทั้งหมดบนระนาบเป็นกรุปของ
การแปลงซึ่งเรียกว่ากรุปของไอซัน ตามบทนิยามเรขาคณิตของโคลน์เราพบว่าเรขาคณิต
ระบบยุคลิดเป็นการศึกษาสมบัติที่ยั่งยืนภายใต้กรุปของไอซัน หรือกล่าวว่กรุปของ
ไอซันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยุคลิด ซึ่งจะแสดงให้เห็นชัดเจนขึ้นในบทที่ 3
สำหรับกรุปของไอซันนั้นเป็นกรุปของการแปลงที่กำหนดได้โดยใช้เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

เป็นพื้นฐานซึ่งได้แก่มatric

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

การแทนการแปลงโดยพิจารณาจากเมตริกซ์ของการแปลงนั้นนับว่าทำให้เราศึกษาการแปลงแบบต่าง ๆ โดยวิธีพีชคณิตได้สะดวกขึ้น และสามารถพิจารณาความแตกต่างของการแปลงประเภทต่าง ๆ ได้ดี เนื่องจากสามารถสังเกตได้จากเมตริกซ์ของการแปลงนั้น และยังสามารถพิจารณาตัวผกผันของการแปลงนั้นโดยใช้ตัวผกผันของเมตริกซ์ได้ทันที นอกจากนี้ลักษณะของการแปลงจะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นซึ่งทำให้เห็นภาพของการสมนัยกันของจุดได้อย่างชัดเจน และยังสามารถหาผลคูณของการแปลงได้อย่างง่าย ๆ โดยใช้ผลคูณของเมตริกซ์ของการแปลงนั้น ๆ ทำให้สามารถศึกษาสิ่งประกอบต่าง ๆ ภายในกรุปของการแปลงที่เกิดขึ้นได้สะดวกและรวดเร็ว

แต่การเลื่อนทางขนานนับว่าเป็นปัญหาประการหนึ่งของการแทนการแปลงด้วย เมตริกซ์ เนื่องจากเราพบว่าในระนาบยูคลิดียนจะไม่สามารถแทนการเลื่อนทางขนานด้วยเมตริกซ์ของการแปลงได้ รวมทั้งการสะท้อนที่มีแกนสะท้อนเป็นเส้นที่ไม่ผ่านจุดกำเนิด และการหมุนรอบจุดที่จุดหมุนไม่ใช่จุดกำเนิดซึ่งไม่สามารถแทนการแปลงโดยใช้เมตริกซ์ได้โดยตรงเช่นเดียวกัน โดยจะเห็นได้ว่าเราแทนการแปลงเหล่านี้โดยจัดให้อยู่ในรูป $T(X) = AX + B$ เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ของการสะท้อนที่มีแกนสะท้อนผ่านจุดกำเนิด หรือเป็นเมตริกซ์ของการหมุนรอบจุดที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุน และ B เป็น เวกเตอร์ในรูปส่วนประกอบ

ในบทต่อไปนั้นเป็นการศึกษาถึงกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิต โพรเจกทิฟ และสับกรุปต่าง ๆ ของการแปลงโพรเจกทิฟ ซึ่งรวมกรุปของโมชันซึ่งเป็น กรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยูคลิดด้วย โดยจะเน้นที่การแปลงบนระนาบในเรขาคณิตแบบวิเคราะหฺ์ แต่โดยข้อขัดข้องที่ไม่สามารถแทนการแปลงในระบบพิกัดสองมิติด้วยเมตริกซ์ได้ทุกการแปลง ซึ่งเมตริกซ์ของการแปลงจะเป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ จึงได้คิดระบบพิกัดที่เรียกว่าระบบพิกัดเอกพันธ์ซึ่งจะแก้ปัญหการแปลงโดยใช้เมตริกซ์ของการแปลงที่กล่าวมาแล้วได้ทั้งหมด กล่าวคือเราสามารถแทนจุดในระนาบโพรเจกทิฟ

ด้วยพิกัดสามอันดับ และแทนการแปลงต่าง ๆ ด้วยเมตริกซ์จัตุรัส มิติ 3×3 โดยที่ ผลคูณของการแปลงคือผลคูณของเมตริกซ์ ตัวผกผันของการแปลงก็เป็นเมตริกซ์ เมื่อจะใช้แปลงก็นำเมตริกซ์ไปคูณได้เลยจึงเป็นไปได้ที่จะกล่าวถึงกรุปของการแปลงที่มีตัวแทนทางพีชคณิตคือการคูณด้วยเมตริกซ์

การกำหนดจุดบนระนาบโพรเจกทิฟโดยใช้ระบบพิกัดเอกพันธ์นั้นจุดจะอยู่ในรูปของพิกัดสามอันดับ (x_1, x_2, x_3) เมตริกซ์ของการแปลงจึงจำเป็นต้องอยู่ในรูปเมตริกซ์จัตุรัส มิติ 3×3 ดังกล่าว ซึ่งเราจะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับการใช้พิกัดเอกพันธ์ในบทต่อไปซึ่งจะเริ่มในหน้า 68 โดยการกำหนดพิกัดเอกพันธ์นี้จะอาศัยพื้นฐานความรู้ในเรื่องเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ ซึ่งผู้อ่านที่มีความรู้ในเรื่องนี้คืออยู่แล้วอาจจะข้ามไปได้เลย

บทที่ 3

กรุปของการแปลงโปรเจกทิฟ

ความเป็นมาของเรขาคณิตโปรเจกทิฟนั้นได้พัฒนาในลักษณะที่เป็นการขยายเพิ่มขึ้นมาจากเรขาคณิตระบบยูคลิด จนอาจกล่าวได้ว่าเรขาคณิตระบบยูคลิดเป็นกรณีเฉพาะของเรขาคณิตโปรเจกทิฟ สำหรับในบทนี้เราจะกล่าวถึงเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ ซึ่งเป็นเรขาคณิตที่ศึกษาภายใต้ระบบสังพจน์ อันประกอบด้วย คำอนิยาม สังพจน์ บทนิยาม และทฤษฎีบท โดยจะเน้นเฉพาะทฤษฎีบทที่สำคัญและบทนิยามต่าง ๆ เพื่อจะนำเข้าสู่การกำหนดจุดบนระนาบโปรเจกทิฟจริง โดยการกำหนดจุดในระบบพิกัดเอกพจน์ ทำให้สามารถการกำหนดจุดและเส้นในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบวิเคราะห์และสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ และเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์สมมูลกัน ส่วนการแปลงโปรเจกทิฟที่จะกล่าวถึงในบทนี้นั้นจะเน้นในการแปลงโปรเจกทิฟในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยเมตริกซ์ของการแปลง และจะชี้ให้เห็นว่ากรุปของการแปลงโปรเจกทิฟเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโปรเจกทิฟ

3.1 เรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์บนระนาบ

ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟบนระนาบจะกำหนดให้ จุด เส้น ระนาบ และการแยกจากกัน เป็นคำอนิยาม และจะเขียนแทนจุดโดยใช้ตัวอักษร A,B,C,... แทนเส้นโดยใช้อักษร a,b,c,... นอกจากนั้นยังมีคำอนิยามที่แสดงความสัมพันธ์ของจุดกับเส้นซึ่งเรียกว่าการพบกัน (incidence) โดยเมื่อจุดและเส้นพบกันจะเรียกว่าจุดอยู่บนเส้น หรือเส้นผ่านจุดนั้น จุดทั้งหลายที่พบบันกับเส้นเดียวกันจะเรียกว่าเป็นจุดร่วมเส้นเดียวกัน (collinear) เส้นทั้งหลายที่พบบันกับจุดเดียวกันจะเรียกว่าเส้นร่วมจุดเดียวกัน (concurrent)

สังพจน์ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟบนระนาบมีหลายชุดตามแนวความคิดของนักคณิตศาสตร์แต่ละคน ชุดที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ประกอบด้วยสังพจน์ 11 ข้อ (Tuller, 1967:34-61) โดยการกำหนดสังพจน์จะกำหนดตามเนื้อหาที่จะศึกษาต่อไปเป็นลำดับจนครบ 11 ข้อ

สังพจน์ของการพบกัน และหลักการทวิภาวะ (principle of duality)

สัจพจน์ 1 จะมีจุดจุดหนึ่งและเส้นเส้นหนึ่งที่ไม่พบกัน

สัจพจน์ 2 ทุกเส้นจะพบกันกับจุดอย่างน้อย 3 จุด

สัจพจน์ 3 ให้ A, B เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่แตกต่างกัน จะมีเส้นที่พบกันกับ A และ B ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

เรียกเส้นนี้ว่าเป็นเส้นเชื่อมจุด A, B และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ AB

สัจพจน์ 4 เส้นสองเส้นที่แตกต่างกันจะพบกันที่จุดอย่างน้อยหนึ่งจุด

จากสัจพจน์ทั้งสี่ข้อเราจะได้ทฤษฎีบทเบื้องต้นซึ่งพิสูจน์ได้โดยไม่ต้องยากดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ a, b เป็นเส้นสองเส้นใด ๆ ที่แตกต่างกันเส้นสองเส้นนี้จะพบกันที่จุดอย่างมากเพียงจุดเดียวเท่านั้น

เรียกจุดที่เส้น a และ b พบกันว่าจุดตัดของ a และ b และจะเขียนแทนจุดตัดนี้ด้วย $a \cdot b$

ทฤษฎีบท 3.1.2 ทุก ๆ จุดจะพบกันกับเส้นอย่างน้อย 3 เส้น

บทนิยาม 3.1.1 เซตของจุด และเส้น ซึ่งมีความสัมพันธ์ตามระบบสัจพจน์ที่กล่าวมาแล้วนี้จะเรียกว่าระนาบโพเรเจททิฟ และจะเรียกการศึกษาในระบบสัจพจน์นี้บนระนาบโพเรเจททิฟว่าเรขาคณิตโพเรเจททิฟ

หลักการทวิภาวะ (principle of duality)

บนระนาบโพเรเจททิฟมีลักษณะสำคัญประการหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกันของจุดกับเส้นเรียกว่าหลักการทวิภาวะซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 3.1.2 ข้อความที่สมเหตุสมผลซึ่งแสดงความเกี่ยวข้องกันระหว่างสมาชิกของระนาบโพเรเจททิฟ และจะยังสมเหตุสมผลเมื่อมีการเปลี่ยนที่ภายในระหว่างคำว่าจุดกับเส้น (และเปลี่ยนคำศัพท์อื่น ๆ ที่ตามมาซึ่งจะต้องสอดคล้องกันด้วยเช่นจุดร่วมเส้นเดียวกัน กับเส้นร่วมจุดเดียวกัน) จะเรียกข้อความทั้งสองว่าเป็นทวิภาวะกัน

สำหรับข้อความใดที่กล่าวโดยการสลับที่กันระหว่างจุดกับเส้น (และเปลี่ยนคำศัพท์ซึ่งจะต้องสอดคล้องกันตามไปด้วย) จะเรียกว่าเป็นข้อความที่ควบคู่กัน เช่น จุดสามจุดไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ควบคู่กันกับ เส้นสามเส้นไม่อยู่ร่วมจุดเดียวกัน

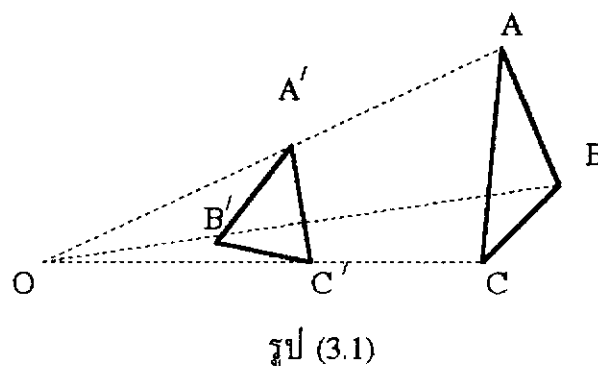
ลักษณะที่สำคัญมากของหลักการทวิภาวะนั้นก็คือเมื่อสัจพจน์ที่เกี่ยวข้องกับจุดและเส้นเป็นทวิภาวะกันทั้งหมดโดยมีบทนิยามต่าง ๆ ซึ่งควบคู่กันด้วยแล้ว จะทำให้เราสามารถสรุปได้ว่าถ้าข้อความใดเป็นจริงแล้วโดยการให้เหตุผลโดยตรงหรือสืบเนื่อง

มาจากสัจพจน์ต่าง ๆ เหล่านั้น การสลับที่ของจุดและเส้นในข้อความนั้นจะเป็นจริงด้วยเสมอ ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าผลของทฤษฎีบท 3.1.1 และสัจพจน์ 4 จะได้ข้อความที่เป็นจริงซึ่งเป็นทวิภาวะกันกับสัจพจน์ 3 ทฤษฎีบท 3.1.2 เป็นทวิภาวะกันกับสัจพจน์ 2 ส่วนสัจพจน์ 1 เป็นทวิภาวะกันกับของตัวเอง ดังนั้นเมื่อเราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทใดโดยอาศัยสัจพจน์ทั้งสี่ข้อนี้ ข้อความที่ควบคู่กันกับทฤษฎีบทนั้น ๆ จะเป็นจริงโดยที่เราไม่ต้องพิสูจน์อีก

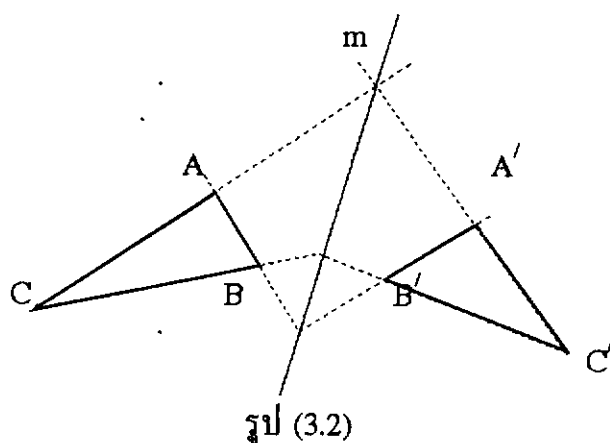
ในส่วนที่จะกล่าวถึงต่อไป เมื่อมีกล่าวถึงการควบคู่กันและทวิภาวะกันก็จะเข้าไปในทำนองเดียวกันกับที่ได้อธิบายมาแล้วข้างต้น

บทนิยาม 3.1.3 A, B และ C เป็นจุดสามจุดที่ไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน เส้น AB, BC และ AC จะประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม ABC ในรูปสามเหลี่ยม ABC จะเรียกจุด A, B และ C ว่าจุดยอด เส้น AB, BC และ AC จะเรียกว่าด้านของรูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม 3.1.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเรียกว่าเป็นเพอร์สเปกทิฟ (perspective) กันจากจุด O ก็ต่อเมื่อมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองและเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่ที่สมนัยกันจะต้องผ่านจุด O ด้วย ดังรูป (3.1)



และโดยการควบคู่จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเรียกว่าเป็นเพอร์สเปกทิฟกันบนเส้น m ก็ต่อเมื่อมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยมและจุดตัดของด้านคู่ที่สมนัยกันจะต้องอยู่บนเส้น m ด้วย ดังรูป (3.2)

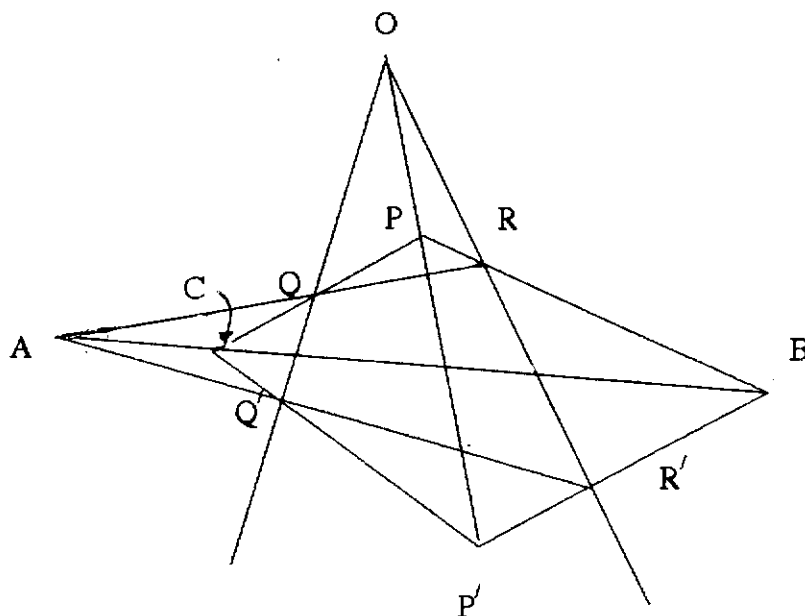


สัจพจน์ 5 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทิฟจากจุดแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นเพอร์สเปกทิฟบนเส้น

สำหรับสัจพจน์ 5 นี้ รู้จักกันโดยทั่วไปว่าเป็น ทฤษฎีบทของเดซาร์กส์ (Desargues' Theorem) เนื่องจากสามารถพิสูจน์ได้ถ้าเรามีสัจพจน์อื่น ๆ ที่ทำให้สามารถกำหนดจุดซึ่งไม่อยู่บนระนาบได้ แต่โดยสัจพจน์เบื้องต้น 4 ข้อแรกที่กำหนดไว้นั้นไม่สามารถทำได้ โดยลักษณะของระนาบที่เกิดจากสัจพจน์ 4 ข้อแรกนี้จึงเรียกว่าระนาบโพเรเจกทิฟซึ่งไม่มีสมบัติของทฤษฎีบทเดซาร์กส์

สำหรับข้อความที่ควบคู่กันกับสัจพจน์ 5 สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทิฟบนเส้นแล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นเพอร์สเปกทิฟจากจุด

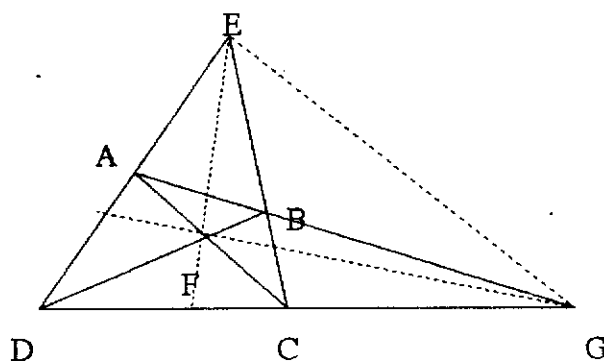


รูป(3.3)

ให้รูปสามเหลี่ยม PQR และรูปสามเหลี่ยม $P'Q'R'$ เป็นเพอร์สเพกทิฟกันบนเส้น ABC ให้เส้น QQ' พับกันกับเส้น PP' ที่จุด O (อ้างพจน์ 4) จะต้องแสดงว่า จุด O อยู่ร่วมเส้นเดียวกับ RR' โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยม AQQ' และรูปสามเหลี่ยม BPP' ซึ่งเป็นเพอร์สเพกทิฟจากจุด C ตามอ้างพจน์ 5 รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้จะต้องเป็นเพอร์สเพกทิฟบนเส้น โดยที่ O, R, R' เป็นจุดตัดของด้านคู่ที่สมนัยกันโดยการเพอร์สเพกทิฟจาก O จะได้ว่า O, R, R' อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน จะได้ว่าทฤษฎีบท 3.1.3 เป็นจริง ดังนั้นอ้างพจน์ 5 กับทฤษฎีบท 3.1.3 เป็นทวิภาวะกัน

รูปสี่เหลี่ยม (quadrangle)

บทนิยาม 3.1.5 A, B, C และ D เป็นจุดสี่จุดที่อยู่บนระนาบเดียวกัน และไม่มีสามจุดใดอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน รูปที่ประกอบด้วยจุดสี่จุดดังกล่าวรวมกับเส้นหกเส้นที่แต่ละเส้นกำหนดขึ้นโดยจุดสองจุดในสี่จุดนี้เรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ (complete quadrangle) ดังรูป (3.4)



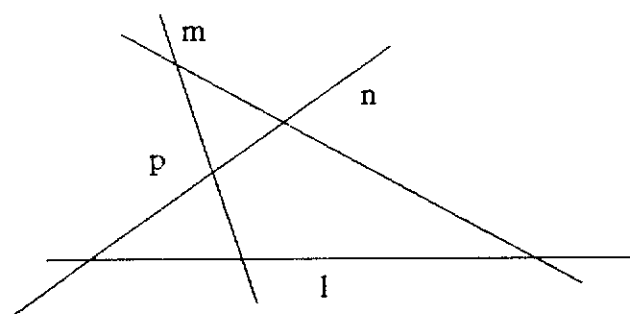
รูป (3.4)

จุด A, B, C และ D ดังกล่าวเรียกว่าจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ เส้น AB, BC, CD, DA, AC และ BD เรียกว่าด้านของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์

จะเรียกด้านที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันว่าด้านตรงข้ามกัน และจุดที่ด้านตรงข้ามตัดกันว่าจุดทแยงมุม (diagonal point) จากรูป (3.4) ด้าน AD ตรงข้ามกับด้าน BC ด้าน AB ตรงข้ามกับด้าน DC และด้าน AC ตรงข้ามกับ BD จุด E, F และ G เรียกว่าจุดทแยงมุม

โดยการควบคู่กันกับบทนิยาม 3.1.5 จะได้บทนิยาม 3.1.6 ดังนี้

บทนิยาม 3.1.6 l, m, n และ p เป็นเส้นสี่เส้นบนระนาบเดียวกันและไม่มีสามเส้นใดอยู่ร่วมจุดเดียวกัน รูปที่ประกอบด้วยสี่เส้นดังกล่าว รวมกับจุดทั้งหกจุดที่แต่ละจุดกำหนดขึ้นโดยเส้นสองเส้นในสี่เส้นนี้เรียกว่ารูปสี่ด้านสมบูรณ์ (complete quadrilateral) ดังรูป (3.5)



รูป (3.5)

เส้น l, m, n และ p ดังกล่าวเรียกว่าด้านของรูปสี่ด้านสมบูรณ์ จุด $l \cdot m, l \cdot n, l \cdot p, m \cdot n, m \cdot p$ และ $n \cdot p$ จะเรียกว่าจุดยอดของรูปสี่ด้านสมบูรณ์

จะเรียกจุดยอดที่ไม่อยู่บนด้านร่วมกันว่าจุดตรงข้ามกัน และเส้นเชื่อมจุดตรงข้ามกันว่าเส้นทแยงมุม (diagonal lines)

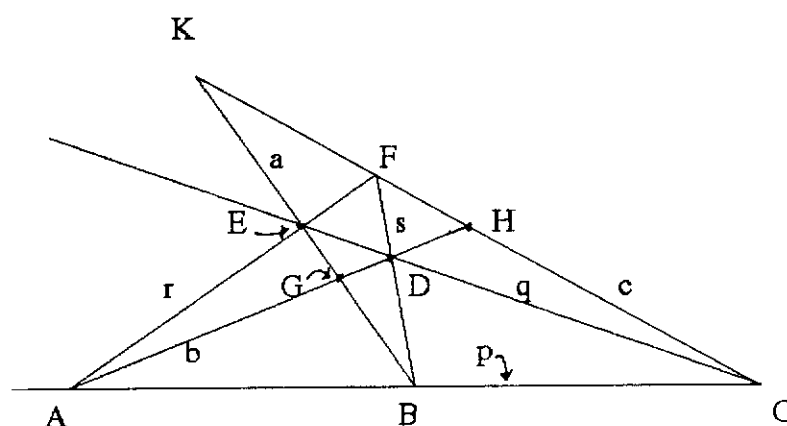
จุดประสงค์ในการศึกษาเรื่องเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์นั้นเป็นการศึกษาเพื่อนำไปสู่สังพจน์ข้อต่อไป เนื่องจากระบบสังพจน์ 1 - 5 อาจทำให้เกิดเรขาคณิตจำกัด (finite geometry) ซึ่งเป็นเรขาคณิตที่มีจำนวนจุดและเส้นเป็นจำนวนเต็มบวก การกำหนดสังพจน์ 6 จะทำให้เรขาคณิตโพเรกทิวแตกต่างจากเรขาคณิตจำกัด (สำหรับผู้สนใจเกี่ยวกับเรขาคณิตจำกัดสามารถศึกษาได้จากหนังสือเรขาคณิตโดยทั่วไปเช่น Modern Geometries โดย James R. Smart)

สังพจน์ 6 จุดทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์จะไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน

จากสังพจน์ 6 เนื่องจากจุดทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์มีสามจุดและไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันดังนั้นเส้นที่เชื่อมจุดทแยงมุมทั้งสามจะประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมเรียกว่ารูปสามเหลี่ยมอิงเส้นทแยงมุม (diagonal triangle)

เรายังสามารถแสดงได้ว่ามีทวิภาวะของสังพจน์ 6 โดยทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 3.14 เส้นทแยงมุมของรูปสี่ด้านสมบูรณ์ ไม่อยู่ร่วมจุดเดียวกัน



รูป(3.6)

จากรูป(3.6) $a \cdot b = G, a \cdot c = K, b \cdot c = H$ จะแสดงว่า G, H, K ไม่ใช่จุดเดียวกัน ถ้าเส้นทแยงมุม c ผ่านจุด G พิจารณาจากรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ $AEDB$ มีจุดทแยงมุม

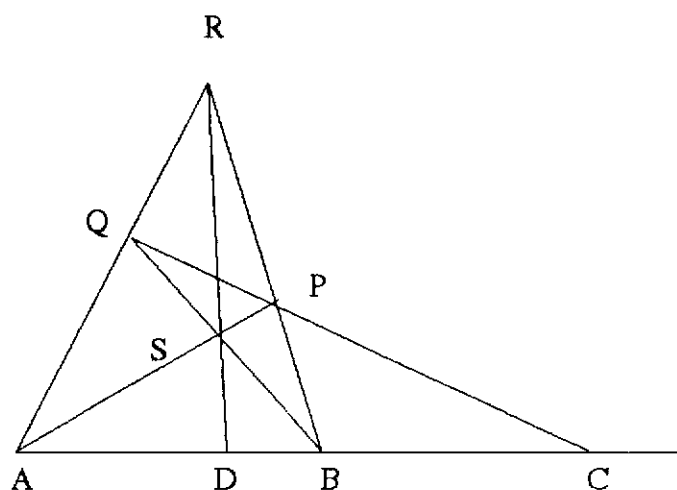
คือ G, C, F เนื่องจากเส้น c ผ่านจุด C และจุด F จะทำให้จุด G, C, F อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ซึ่งจะขัดแย้งกับสัจพจน์ 6 จึงทำให้จุด G, H, K ไม่ใช่จุดเดียวกัน

เซตฮาร์โมนิก (harmonic set)

สำหรับบทนิยามของเซตฮาร์โมนิกที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะกำหนดบทนิยามโดยใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ ดังนี้

บทนิยาม 3.1.7 ให้ A, B, C และ D เป็นจุดสี่จุดซึ่งอยู่ร่วมเส้นเดียวและจะเรียกว่าเป็นเซตฮาร์โมนิก ถ้ามีรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์รูปหนึ่งเกิดขึ้นคือด้านตรงข้ามสองด้านตัดกันที่จุด A ด้านตรงข้ามอีกสองด้านตัดกันที่จุด B ในขณะที่ด้านสองด้านที่เหลือผ่านจุด C และ D ตามลำดับ เรากล่าวว่า C, D เป็นสังยุคฮาร์โมนิก (harmonic conjugate) ซึ่งกันและกันเมื่ออ้างถึงจุด A, B เขียนสัญลักษณ์ดังนี้ $H(A, B, C, D)$ หรือ $H(B, A, C, D)$ หรือ $H(A, B, D, C)$ หรือ $H(B, A, D, C)$

ถ้ากำหนดจุด A, B และ C เรียงกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกันเราสามารถสร้างจุด D ที่ทำให้เกิด $H(A, B, C, D)$ ตามบทนิยามได้ดังนี้



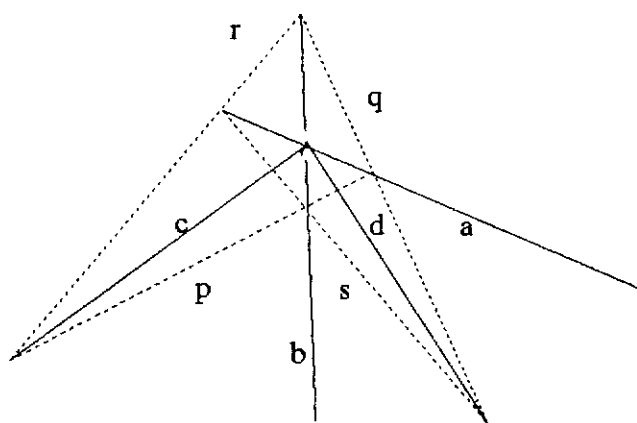
รูป(3.7)

ลากเส้นสองเส้นใด ๆ ให้ตัดกันที่จุด A เลือกจุด P (ที่ไม่ใช่จุด A) บนเส้น ๆ หนึ่งเชื่อม PC ไปตัดกับเส้นอีกเส้นหนึ่งที่จุด Q ให้เชื่อม BP ไปตัดกับ AQ ที่ R เชื่อม BQ ตัดกับ AP ที่ S จะได้จุด $D = AB \cdot RS$ โดยรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ $PRQS$ จะได้ $H(A, B, C, D)$ จากการสร้างเนื่องจากเราเริ่มจากเส้นสองเส้นใด ๆ ที่ผ่านจุด A และ

บทนิยาม 3.1.8 กำหนด $H(A,B,C,D)$ จุดคู่ A,B และจุดคู่ C,D จะเรียกว่า จุดคู่สังยุค (conjugate pairs of point) ของเซตฮาร์โมนิก $H(A,B,C,D)$

เพื่อให้บรรลุถึงหลักการทวิภาวะกัน เราสามารถกำหนดบทนิยามของเส้นฮาร์โมนิก ซึ่งเป็นการควบคู่กันกับจุดฮาร์โมนิกได้คือ

บทนิยาม 3.1.9 ให้ a,b,c และ d เป็นเส้นที่เส้นซึ่งอยู่ร่วมจุดเดียวกันและจะเรียกว่าเป็นเซตฮาร์โมนิกถ้ามีรูปสี่ด้านสมบูรณ์เกิดขึ้นรูปหนึ่งคือจุดตรงข้ามสองจุดอยู่บนเส้น a จุดตรงข้ามอีกสองจุดอยู่บนเส้น b ในขณะที่จุดสองจุดที่เหลืออยู่บนเส้น c และ d ตามลำดับ เรากล่าวว่า c,d เป็นสังยุคฮาร์โมนิกซึ่งกันและกันเมื่ออ้างอิงถึงเส้น a,b เขียนสัญลักษณ์ดังนี้ $H(a,b,c,d)$ หรือ $H(b,a,c,d)$ หรือ $H(a,b,d,c)$ หรือ $H(b,a,d,c)$



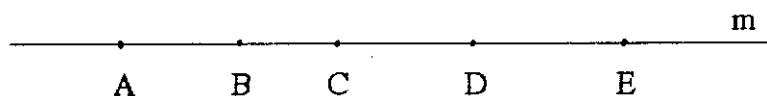
รูป (3.9)

จากรูป (3.9) แสดงให้เห็นว่าเส้น a, b, c และ d เป็นเซตฮาร์โมนิกของเส้น โดยที่ เส้น a และ b เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่ด้านสมบูรณ์ เส้น c และ d เป็นเส้นที่เชื่อมจุดตัดของ c และ d กับจุดยอดที่เหลือ

ภาวะเพอร์สเปกทิฟ และ ภาวะโปรเจกทิฟ (perspectivity and projectivity)

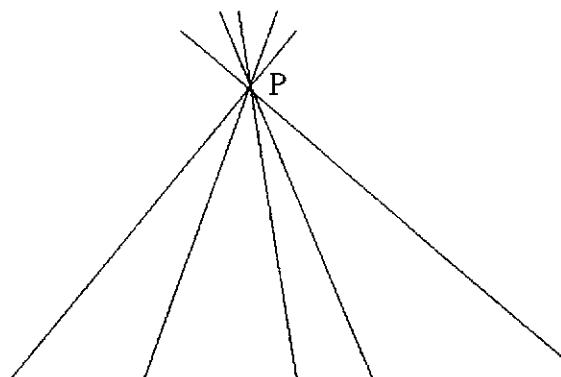
โดยสังพจน์ 4 ได้กล่าวถึงการเพอร์สเปกทิฟของรูปสามเหลี่ยมมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเพอร์สเปกทิฟในรูปแบบอื่น ๆ และกำหนดบทนิยามของภาวะโปรเจกทิฟหรือการแปลงโปรเจกทิฟซึ่งเป็นผลมาจากการเพอร์สเปกทิฟนั่นเอง

บทนิยาม 3.1.10 เซตของจุดที่อยู่ร่วมเส้น m เดียวกันและอยู่บนระนาบเดียวกัน จะเรียกว่าระบบจุดอิงสองจุด (pencil of points) ซึ่งมี m เป็นแกน ดังรูป (3.10)



รูป(3.10)

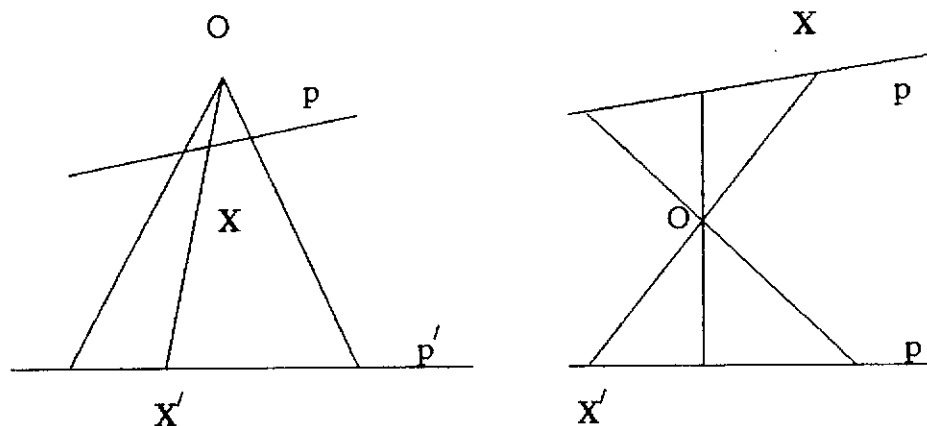
บทนิยาม 3.1.11 เซตของเส้นทั้งหลายที่อยู่ร่วมจุด P เดียวกันและอยู่บนระนาบเดียวกันจะเรียกว่าระบบเส้นอิงสองเส้น (pencil of lines) ซึ่งมี P เป็นจุดศูนย์กลาง ดังรูป(3.11)



รูป (3.11)

จะใช้สัญลักษณ์ $[P]$ แทนระบบเส้นอิงสองเส้นที่มีจุด P เป็นจุดศูนย์กลาง

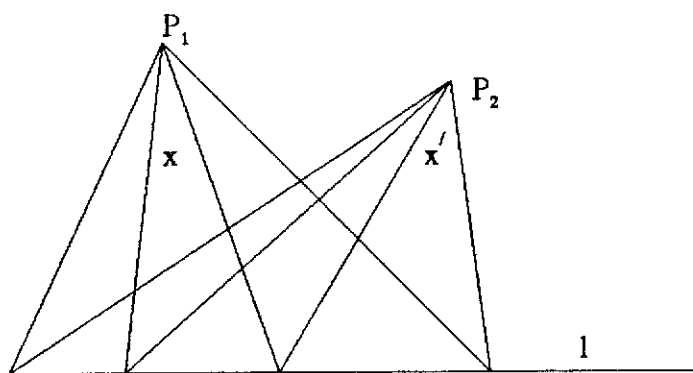
บทนิยาม 3.1.12 การสมนัยกันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ของจุด X บนระบบจุดอิงสองจุด p กับจุด X' บนระบบจุดอิงสองจุด p' จะเรียกว่าเพอร์สเพกทิฟกันด้วยจุดศูนย์กลาง O (perspective with center at O) ก็ต่อเมื่อเส้น XX' ต่างก็ผ่านจุด O ดังรูป (3.12)



รูป (3.12)

โดยการควบคู่กันกับบทนิยาม 3.1.12 จะได้บทนิยาม 3.1.13 ดังนี้

บทนิยาม 3.1.13 การสมนัยกับแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเส้น x ในระบบเส้นอิงสองเส้น $[P]$ กับเส้น x' ในระบบเส้นอิงสองเส้น $[P']$ จะเรียกว่าเพอร์สเพกทิฟกันบนแกน 1 (perspective with axis 1) ก็ต่อเมื่อจุด $x \cdot x'$ อยู่ร่วมเส้น 1 เดียวกัน ดังรูป (3.13)



รูป (3.13)

ถ้าให้ F, F' แทนรูปเรขาคณิต 2 รูปบนระนาบโปรเจกทิฟ จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนการเพอร์สเพกทิฟแบบต่าง ๆ คือ

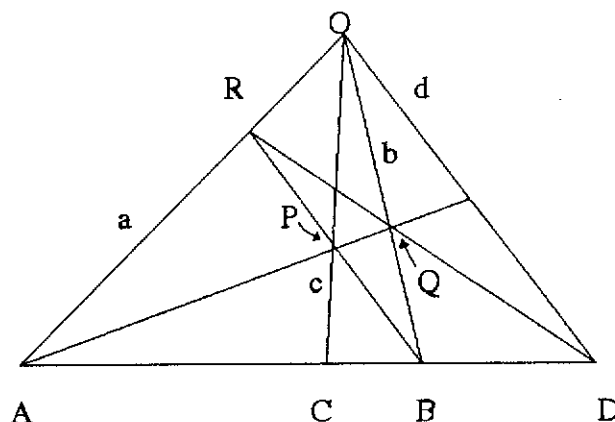
- ก. $F \overset{\sim}{\sim} F'$ แทน F และ F' เพอร์สเพกทิฟซึ่งกันและกัน
- ข. $F \overset{O}{\sim} F'$ แทน F และ F' เป็นเพอร์สเพกทิฟจากจุด O
- ค. $F \overset{m}{\sim} F'$ แทน F และ F' เป็นเพอร์สเพกทิฟบนแกน m

บทนิยาม 3.1.14 รูป F และ F' จะมีภาวะโพเรเจกทิฟกันก็ต่อเมื่อมีรูป $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ โดยที่ n เป็นจำนวนจำกัด และ $F \preceq F_1, F_1 \preceq F_2, \dots, F_{n-1} \preceq F_n, F_n \preceq F'$ และจะเรียก F และ F' ว่าเป็นโพเรเจกทิฟกัน และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $F \preceq F'$

จากบทนิยามของภาวะโพเรเจกทิฟ และบทนิยามเกี่ยวกับเซตฮาร์มอนิกเราจะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.7 ความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกเป็นสิ่งที่ขึ้นยงภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟ และเป็นสิ่งที่ขึ้นยงภายใต้ภาวะโพเรเจกทิฟ

จากบทนิยามของภาวะโพเรเจกทิฟจะได้ว่าเราเพียงแต่แสดงสมบัตินี้ภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟเท่านั้น ซึ่งจะเป็นจริงในภาวะโพเรเจกทิฟด้วย



รูป (3.14)

จากรูป (3.14) ให้ $H(A, B, C, D)$ จากการเลือกจุด O ที่ไม่อยู่บนเส้น AB เชื่อม OA, OB, OC, OD จะได้เส้น a, b, c, d ตามลำดับ จากจุด A ลากเส้นอีกเส้นหนึ่งให้พบบนกับเส้น c ที่จุด P และพบบนกับเส้น b ที่จุด Q ให้ $PB \cdot OA = R$ จากรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ $OQPR$ จะได้เส้น RQ จะผ่านจุด D แต่ AD, AQ, RD, RB ทำให้เกิดรูปสี่ด้านสมบูรณ์ซึ่งทำให้เกิด $H(a, b, c, d)$

บทกลับของข้อความในย่อหน้าข้างต้นจะเป็นทวิภาวะกันกับข้อความข้างต้น ดังนั้นทำให้ได้ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 3.1.7 เราจะได้ว่าถ้าจุด A, B, C, D มีความสัมพันธ์ฮาร์มอนิก และสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับจุด A', B', C', D' ภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟตามลำดับ

แล้วจะได้ว่า $A'B', C'D'$ มีความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกและสมบัตินี้จะยังเป็นจริงภายใต้ภาวะโพเรเจกทิฟ

เราสามารถแสดงได้ว่าเมื่อกำหนดสมาชิกของระบบจุดอิงสองจุด หรือระบบเส้นอิงสองเส้นมาสองชุด ชุดละสามสมาชิกจะสามารถกำหนดภาวะโพเรเจกทิฟให้สมาชิกทั้งสองชุดนั้นสมนัยกันแบบหนึ่งต่อหนึ่งภายใต้ภาวะโพเรเจกทิฟนี้ได้เสมอ และโดยสมบัติของเซตฮาร์มอนิกในทฤษฎีบท 3.1.5 และความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกเป็นสิ่งที่ยืนยันภายใต้ภาวะโพเรเจกทิฟจะทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.8 ถ้า $H(A,B,C,D)$ และ $H(A',B',C',D')$ แล้ว

$$ABCD \prec A'B'C'D'$$

สัจพจน์ของอันดับ (postulate of order)

ในเรขาคณิตระบบยุคลิด จุดสามารถแบ่งเส้นออกเป็นสองส่วน ระบายจะถูกแยกจากกันโดยเส้น ในขณะที่ปริภูมิจะถูกแยกโดยระนาบ คำว่าการแบ่งแยก (separation) ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟ ถูกจัดไว้เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นคำอธิบาย โดยที่ถ้าคู่ของจุด A,B และ C,D แบ่งแยกซึ่งกันและกัน (หรือเส้น a,b และ c,d แบ่งแยกซึ่งกันและกัน) จะเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ $AB \parallel CD$ (หรือ $ab \parallel cd$)

สัจพจน์ 7 ถ้า $AB \parallel CD$ แล้ว A,B,C,D จะแตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน อีกทั้ง $BA \parallel CD$, $AB \parallel DC$, $BA \parallel DC$, $CD \parallel AB$, $CD \parallel BA$, $DC \parallel AB$, $DC \parallel BA$

สัจพจน์ 8 สำหรับจุด A, B, C, D 4 จุดใด ๆ ที่แตกต่างกัน และอยู่ร่วมเส้นเดียวกันจะมีอย่างน้อยสองคู่จะต้องแบ่งแยกซึ่งกันและกัน นั่นคือจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกรณีต่อไปนี้เกิดขึ้นได้แก่ $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$, หรือ $AD \parallel BC$

สัจพจน์ 9 ถ้า $AB \parallel CD$ และ $AC \parallel BE$ แล้ว $AB \parallel DE$

สัจพจน์ 10 ความสัมพันธ์ แบ่งแยกซึ่งกันและกัน เป็นสิ่งที่ยืนยันภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟ

จากสัจพจน์ 7 แสดงให้เห็นว่าการเกิดความสัมพันธ์การแบ่งแยกซึ่งกันและกันของจุดสองคู่จะทำให้เกิดความสัมพันธ์นี้กับการสลับที่ของจุดภายในคู่ นั้น ๆ หรือการสลับคู่กันก็ตาม

สัจพจน์ 10 เป็นทวิภาวะกันกับตัวเองและจะได้ว่ากำหนดเส้นร่วมจุดเดียวกัน

สี่เส้นคือ a, b, c, d ตัดกับเส้นที่ห้าสี่จุดคือ A, B, C, D แล้ว $AB \parallel CD$ ก็ต่อเมื่อ $ab \parallel cd$ ซึ่งจะทำให้เกิดทวิภาวะกันสำหรับของตั้งพจน์ 7, 8 และ 9 ด้วย

ต่อไปเราจะชี้ให้เห็นว่าในโครงสร้างของเซตฮาร์มอนิก คู่ของเซตฮาร์มอนิก แบ่งแยกซึ่งกันและกันโดยพิจารณาจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.9 ให้ A, B, C, D เป็นจุดสี่จุดใด ๆ ที่แตกต่างกัน และอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน จะต้องมีความสัมพันธ์แบบใดแบบหนึ่ง แบบเดียวเท่านั้นคือ $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$, $AD \parallel BC$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เป็นผลมาจากตั้งพจน์ 8 และตั้งพจน์ 9 และตั้งพจน์ 7

ทฤษฎีบท 3.1.10 คู่ของจุดของฮาร์มอนิกเซตแบ่งแยกซึ่งกันและกัน นั่นคือ ถ้า $H(A, B, C, D)$ แล้ว $AB \parallel CD$

จาก $H(A, B, C, D)$ แล้ว $H(A, B, D, C)$ ดังนั้น $ABCD \not\sim ABDC$ โดยตั้งพจน์ 8 จะได้ $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ หรือ $AD \parallel BC$ แต่ถ้า $AC \parallel BD$ โดยตั้งพจน์ 10 จะได้ว่า $AD \parallel BC$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3.1.9 ในทำนองเดียวกันจะขัดแย้งเมื่อ $AD \parallel BC$ ดังนั้น $AB \parallel CD$

สำหรับทวิภาวะกันกับทฤษฎีบท 3.1.10 จะได้ว่า $H(a, b, c, d)$ แล้ว $ab \parallel cd$

จากตั้งพจน์ของอันดับทำให้เราสามารถกำหนดบทบาทของส่วนของเส้นได้ดังนี้

บทนิยาม 3.1.15 ถ้า A, B, C เป็นจุดสามจุดที่แตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ส่วนของเส้น AB/C (อ่านว่า AB ที่ไม่รวม C) คือเซตของจุด X ซึ่ง $AB \parallel CX$ เรียก A และ B ว่า จุดปลายของ AB/C

จากบทนิยามนี้สามารถแสดงให้เห็นได้ว่าถ้า $AB \parallel CD$ แล้ว จุด A และ B จะแบ่งเส้น AB ออกเป็นสองส่วนคือ AB/C กับ AB/D

เนตของแรทชันแนลลิที (net of rationality)

ในเรขาคณิตระบบยุคลิดนั้นการกำหนดพิกัดของจุดบนระนาบจะเริ่มจากการกำหนดจุดบนเส้นโดยใช้มีโนทัศน์เกี่ยวกับระยะทาง และอาศัยจุดอ้างอิง 2 จุด ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด (origin point) และจุดหนึ่งหน่วย (unit point) สำหรับในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟไม่ได้ใช้การวัดเป็นพื้นฐานของการศึกษา แต่เราจะใช้สมบัติของเนตของแรทชันแนลลิทีเพื่อจะแสดงให้เห็นว่าจำนวนจุดในเส้นโพเรเจกทิฟนั้นมีจำนวน

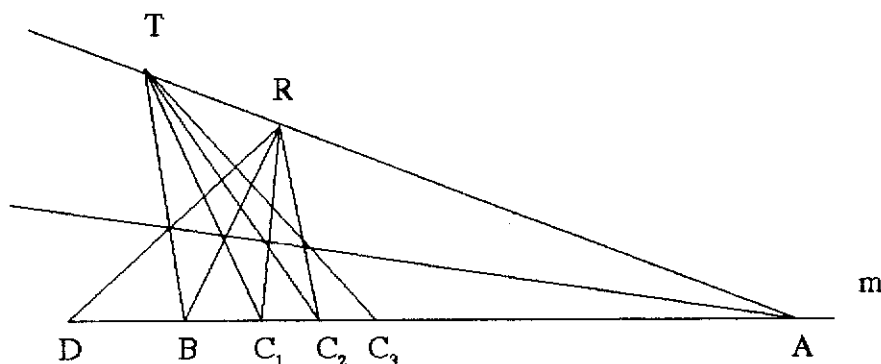
ไม่จำกัดและยังจะเป็นการนำไปสู่กำหนดสัจพจน์ของการต่อเนื่อง ซึ่งจะทำได้โดย
แทนจุดบนเส้นได้ด้วยเซตของจำนวนจริงและกำหนดพิสัยของจุดบนระนาบโพรงเจกทิฟ
ต่อไป โดยที่เนทของแรทชันแนลที่มีพื้นฐานจากบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.16 A, B และ D เป็นจุดสามจุดซึ่งอยู่ร่วมเส้น m จุด P จะเรียก
ว่ามีความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกกับจุดสามจุด A, B, D ดังกล่าว ก็ต่อเมื่อ

- (1) P อยู่บน m
- (2) มีชุดของจุดซึ่งเป็นผลติดตามกันมาบน m (sequence of points) เป็น
เซต S ซึ่ง

$$S = \{A, B, D, C_1, C_2, C_3, \dots, C_k, \dots\}$$
 และ $P = C_k$ ซึ่ง k เป็นจำนวนเต็มบวก
- (3) มีฮาร์มอนิก $H(A, B, D, C_1)$ เกิดขึ้น
- (4) สำหรับแต่ละจุด C_j ใน S จะต้องมีฮาร์มอนิก $H(R, T, V, C_j)$ เกิดขึ้น
โดยที่ R, T, V เป็นจุดอยู่ในเซต S

บทนิยาม 3.1.17 ให้ A, B และ D เป็นจุดบนเส้น m เซตของจุดทั้งหมดบน
 m ที่มีความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกกับ A, B และ D จะเรียกว่า เนทของแรทชันแนลที่บน
เส้น (linear net of rationality) ซึ่งกำหนดโดยจุด A, B, D โดยใช้สัญลักษณ์ $R(ABD)$



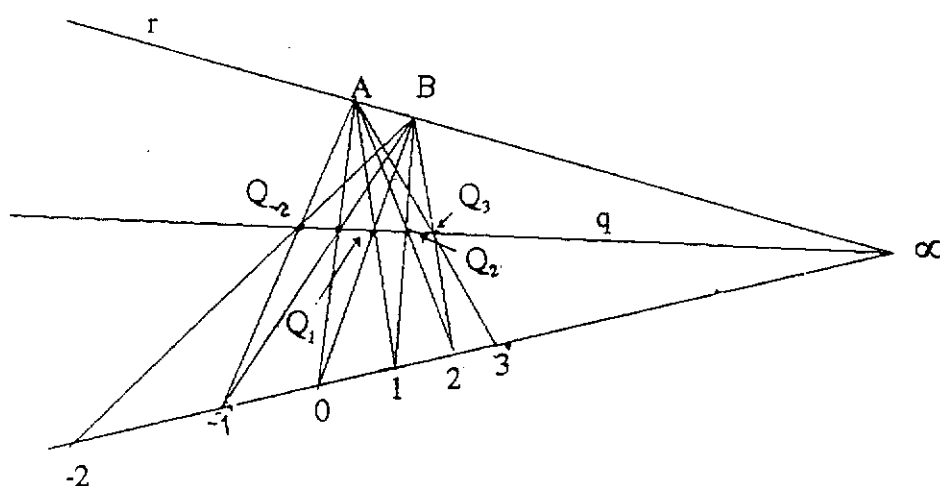
รูป (3.15)

จากรูป (3.15) กำหนดจุด A, B, D อยู่บนเส้น m จะเห็นได้ว่าเกิดความ
สัมพันธ์ $H(A, B, D, C_1)$, $H(A, C_1, B, C_2)$, $H(A, C_2, C_1, C_3)$, ..., $H(A, C_{j-1}, C_j, C_{j+1})$, ... สำหรับ
จำนวนเต็มบวก $j > 1$ โดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า การกำหนด C_j ในแต่ละจุดจะ

กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

จากสมบัติของเนทของเรทซ์แนลลิตี เราสามารถกำหนดระบบพิกัดของจุดบนเส้นโปรเจกทิฟได้ ดังที่เคยกล่าวมาแล้วว่าในเรขาคณิตโปรเจกทิฟไม่มีโมโนทัศน์เกี่ยวกับระยะทาง แต่โดยสัญพจน์ที่กล่าวมาแล้ว สมบัติของเซตฮาร์มอ์นิก และสัญพจน์ของการต่อเนื่องที่จะกล่าวต่อไป เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งของเซตของจำนวนจริงกับจุดบนเส้นโปรเจกทิฟโดยยกเว้นจุดไว้หนึ่งจุดเรียกว่าจุดอุดมคติ (ideal point)

การกำหนดระบบพิกัดของเส้นสามารถกระทำได้ดังนี้คือ ให้ p เป็นเส้นใด ๆ กำหนดจุดสามจุดบน p เป็นจุดอ้างอิง โดยสองจุดแรกแทนด้วยจำนวนจริงคือ 0 และ 1 ส่วนจุดที่สามจะใช้ ∞ โดยจะเรียกจุดทั้งสามนี้ว่า จุดศูนย์ จุดหนึ่งหน่วย และจุดอุดมคติตามลำดับ เราจะกำหนดกระบวนการการกำหนดจำนวนจริงที่ใช้แทนจุดบนเส้นได้ดังนี้



รูป (3.16)

ให้ q และ r เป็นเส้นสองเส้นที่ผ่านจุด ∞ และเป็นเส้นที่แตกต่างจาก p A เป็นจุดบน r ที่ไม่ใช่ ∞ ให้เส้นที่เชื่อมจุด A และ 1 ตัดกับเส้น q ที่จุด Q_1 เชื่อม Q_1 กับจุด 0 โดยกำหนดให้เส้นเชื่อมนี้ตัดกับ r ที่จุด B เชื่อมจุด B กับจุด 1 โดยกำหนดให้เส้นเชื่อมนี้ตัดกับ q ที่ Q_2 และให้จุด 2 คือจุด $p \cdot AQ_2$ จะเห็นได้ว่าเกิด $H(\infty, 1, 0, 2)$ โดยรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ ABQ_1Q_2 และโดยทฤษฎีบท 3.1.5 จุด 2 จะ

กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น โดยการเชื่อมจุด 2 กับ B ให้ Q_3 เป็นจุดที่เส้นเชื่อมนี้ตัดกับ q และให้จุด 3 คือ pAQ_3 จะเห็นได้ว่าเกิด $H(\infty, 2, 1, 3)$ โดยรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ ABQ_2Q_3 โดยวิธีการเช่นนี้เราสามารถกำหนดจุดบน p ซึ่งสมนัยกับเซตของจำนวนเต็มบวกโดยที่จุด n ($n > 2$) เป็นจุดซึ่ง $H(\infty, n-1, n-2, n)$

สำหรับจำนวนเต็มลบ เริ่มจากการเชื่อมจุด A กับจุด 0 และให้เส้นเชื่อมนี้ตัดกับเส้น q ที่ Q_1 เราจะกำหนดให้จุด -1 บน p คือจุด pBQ_1 โดยจะเห็นได้ว่ามี $H(\infty, 0, -1, 1)$ เราจะกำหนดจุด -2 บน p โดยการเชื่อม -1 กับ A และให้เส้นเชื่อมนี้ตัดกับเส้น q ที่จุด Q_2 โดยจะเห็นว่าจุด -2 คือ pBQ_2 และมี $H(\infty, -1, -2, 0)$ จากกระบวนการนี้เราสามารถกำหนดจุดที่เป็นจำนวนเต็มลบบน p ได้ และจากสัญพจน์ของอันดับสามารถแสดงได้ว่าจุดทุกจุดที่เกิดขึ้นจากกระบวนการนี้บน p แตกต่างกันและยังแสดงได้อีกว่าจำนวนจุดบนเส้นโปรเจกทิฟมีจำนวนไม่จำกัด

ในการแทนจุดบน p ด้วยจำนวนตรรกยะ $\frac{c}{d}$ เมื่อ c, d เป็นจำนวนเต็ม ก่อนอื่นเรากำหนดให้ $\frac{1}{d}$ เป็นจุดซึ่ง $H(1, -1, d, \frac{1}{d})$ และโดยการใช้กระบวนการเดิมซึ่งกำหนดจุดอ้างอิงคือ $0, 1, \infty$ เราจะใช้จุดอ้างอิงเป็น $0, \frac{1}{d}, \infty$ เราจะสามารถแทนจุด $\frac{c}{d}$ บน p ได้ โดยที่ $\frac{c}{d}$ เป็นจุดซึ่ง $H(\infty, \frac{c-1}{d}, \frac{c-2}{d}, \frac{c}{d})$

สำหรับจุดที่เป็นจำนวนอตรรกยะบน p เราสามารถพิจารณาในรูปของลิมิตของลำดับของจำนวนตรรกยะ โดยพิจารณาว่าจำนวนอตรรกยะจะสมนัยกับลิมิตของลำดับของจำนวนตรรกยะซึ่งมีจุดลิมิตอยู่บน p

จากลักษณะของการกำหนดจำนวนจริงแทนจุดบนเส้นโปรเจกทิฟทำให้สามารถกำหนดสัญพจน์ของความต่อเนื่องได้ดังนี้

สัญพจน์ 11 การสมนัยระหว่างเซตของจำนวนตรรกยะ และเนตของแรทชันแนลลิทีที่กำหนดโดยจุดอ้างอิง $0, 1, \infty$ บนเส้นโปรเจกทิฟสามารถขยายให้เป็นการถอดแบบกัน(isomorphic) ระหว่างเซตของจำนวนจริงกับจุดบนเส้นโปรเจกทิฟที่ไม่รวมจุด ∞

เนตของแรทชันแนลลิทีที่กำหนดโดยจุดสามจุดที่ร่วมเส้นเดียวกันจะควบคู่กันกับเนตของแรทชันแนลลิทีที่กำหนดโดยเส้นสามเส้นที่ร่วมจุดเดียวกัน ทวิภาวะของสัญพจน์ 11 จะได้ว่าการสมนัยที่เกิดขึ้นจะได้ออกจากการสมนัยกันของเส้นในระบบเส้นอิงสองเส้นกับจุดตัดของเส้นในระบบเส้นอิงสองเส้นนี้กับเส้นอีกเส้นหนึ่งที่ไม่อยู่ในระบบ

เส้นอิงสองเส้น

จากสัจพจน์ทั้ง 11 ข้อที่กล่าวมาแล้วนับว่าเป็นการกำหนดสัจพจน์ที่สมบูรณ์สำหรับเรขาคณิตโพรเจกทิฟบนระนาบ ซึ่งต่อไปเราจะกำหนดระบบพิกัดสำหรับจุดในจุดบนระนาบโพรเจกทิฟและนำเข้าสู่เรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ต่อไป

ทฤษฎีบทเบื้องต้นของเรขาคณิตโพรเจกทิฟ

สำหรับทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับภาวะโพรเจกทิฟได้แก่ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.11 ถ้าภาวะโพรเจกทิฟอันหนึ่ง ทำให้จุดสามจุดที่แตกต่างกัน และอยู่ร่วมเส้นเดียวกันเป็นจุดตรึงภายใต้ภาวะโพรเจกทิฟนี้ แล้วจุดทุกจุดบนเส้นนั้นจะเป็นจุดตรึงภายใต้ภาวะโพรเจกทิฟนี้

โดยสมบัติของการมีจุดเดียวของจุดที่สี่ของเซตฮาร์มอนิก (ทฤษฎีบท 3.1.5) และสมบัติที่หนึ่งของความสัมพันธ์ฮาร์มอนิกภายใต้ภาวะโพรเจกทิฟ (ทฤษฎีบท 3.1.7) ถ้ามีสามจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันเป็นจุดตรึงแล้วทุกจุดของเนตของแรทชันแนลลิทีที่กำหนดโดยสามจุดนี้จะเป็นจุดตรึงด้วย โดยสัจพจน์ 11 ทุกจุดจริงบนเส้นจะเป็นจุดตรึงด้วย ทำให้โพรเจกทิฟซึ่งกำหนดให้มีจุดร่วมเส้นเดียวกันสามจุดเป็นจุดตรึงแล้วจะเป็นภาวะโพรเจกทิฟเอกลักษณ์

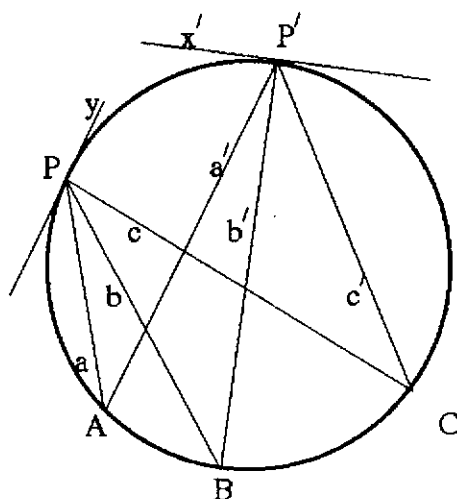
ทฤษฎีบท 3.1.12 จะกำหนดภาวะโพรเจกทิฟได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น เมื่อกำหนดสมาชิกคู่ที่สมนัยกันสามคู่ ระหว่างจุดในระบบอิงสองจุดสองชุด หรือเส้นในระบบอิงสองเส้นสองชุด นั่นคือ(สำหรับการกำหนดสมาชิกคู่ที่สมนัยกันสามคู่ระหว่างระบบอิงสองจุดสองชุด) ถ้า $ABCD \propto A'B'C'D'$ และ $ABCD \propto A'B'C'D''$ แล้ว $D' = D''$

จากบทนิยามของภาวะโพรเจกทิฟเรามี $A'B'C'D' \propto ABCD \propto A'B'C'D''$ ดังนั้น $A'B'C'D' \propto A'B'C'D''$ โดยทฤษฎีบท 3.1.11 จะได้ว่า $D' = D''$ โดยหลักการทวิภาวะจะได้ทฤษฎีบทสำหรับระบบเส้นอิงสองเส้น

โคนิกในระนาบโพรเจกทิฟ

บทนิยาม 3.1.18 เซตของจุดทั้งหมดที่เป็นจุดร่วมกันของเส้นคู่ที่สมนัยกันของสองโพรเจกทิฟ ที่ไม่เพอร์สเพกทิฟกันบนเส้นใด ๆ ของระบบเส้นอิงสองเส้นที่มีจุดศูนย์กลางแตกต่างกัน จะเรียกว่าจุดโคนิก (point conic)

การควบคู่ของบทนิยามนี้จะได้เส้นโคนิก (line conic)



รูป (3.17)

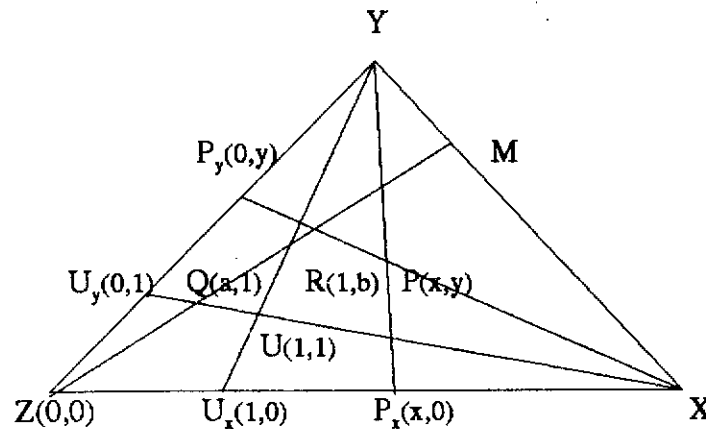
จากรูป 3.16 เส้น a, b, c เป็นสมาชิกของ $[P]$ และเส้น a', b', c' เป็นสมาชิกของ $[P']$ โดยที่ $P \neq P'$ $A = a \cdot a'$ $B = b \cdot b'$, $C = c \cdot c'$ ซึ่งไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ดังนั้น $[p]$ และ $[P']$ ไม่เป็นเพอร์สเพกทิฟกันบนเส้น จะได้ว่า A, B, C เป็นจุดโคนิก พิจารณาเส้น PP' ในฐานะที่เป็นสมาชิกของ $[P]$ x' เป็นสมาชิกของ $[P']$ จะเห็นได้ว่า $PP' \cdot x = P'$ ดังนั้น P' เป็นจุดบนโคนิก นอกจากนั้นจะเห็นได้ว่า x' จะไม่ผ่านจุดอื่น ๆ บนโคนิกอีกนอกจาก P' เรียกเส้นที่ผ่านจุดบนโคนิกเพียงจุดเดียวว่าเส้นสัมผัสโคนิก และในทำนองเดียวกันกับ P P จะเป็นจุดบนโคนิก y จะเป็นเส้นสัมผัสโคนิก

ดังนั้นจุด A, B, C, P, P' เป็นจุดห้าจุดที่ไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน จะเป็นจุดบนโคนิก ที่มีกำเนิดมาจากภาวะโพรเจกทิฟระหว่าง $[P]$ และ $[P']$ ที่ซึ่ง PA, PB, PC สมนัยกับ $P'A, P'B, P'C$ ตามลำดับ

ระบบพิกัดในระนาบโพรเจกทิฟจริง

ในหัวข้อนี้จะเป็นการกำหนดระบบพิกัดในระนาบ ซึ่งเราได้กำหนดจุดบนเส้นมาก่อนแล้วโดยใช้จำนวนจริง ในระนาบเราสามารถกำหนดระบบพิกัดของจุดโดยใช้ระบบพิกัดเอกพันธ์ซึ่งมีแนวคิดดังนี้

ให้ X, Y, Z และ U เป็นจุดสี่จุดใด ๆ บนระนาบที่ไม่มีสามจุดใดอยู่บนเส้นเดียวกันดังรูป 3.18



รูป(3.18)

ให้ U_x และ U_y เป็นจุดบนเส้น ZX และ ZY ถ้า $U_x = YU \cdot ZX$ และ $U_y = XU \cdot ZY$ ให้พิกต์บนเส้น ZX และ ZY กำหนดโดยจุด Z, U_x, X และ Y ดังนี้ บนเส้น ZX จะกำหนดให้ Z, U_x, X คือจุด $0, 1, \infty$ ตามลำดับ สำหรับเส้น ZY เรากำหนดให้ $0, 1, \infty$ แทน Z, U_y, Y ดังนั้นเราสามารถกำหนดจุดบนเส้นได้โดยสมบัติของเนทของแรทชันแนลลิทีที่ได้กล่าวมาแล้ว และเพื่อปรับให้เป็นพิกต์ที่เป็นคู่ลำดับในระนาบ โดยบนเส้น ZY จะเติม 0 ข้างหน้าพิกต์ที่ได้มาจากวิธีของเนทของแรทชันแนลลิที โดยที่บนเส้น ZX จะเติม 0 ข้างหลังพิกต์ จะทำให้ได้ว่าสำหรับจุด P ใด ๆ บนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้น XY เราจะแทนโดยใช้พิกต์ (x, y) เมื่อ x เป็นพิกต์ของ $P_x = YP \cdot ZX$ และ y เป็นพิกต์ของ $P_y = XP \cdot ZY$ เราจะเขียนพิกต์ของ U เป็น $(1, 1)$ และจุด R เป็นจุดบนเส้น YU_x โดยที่ R ไม่เป็นจุดเดียวกับ Y และพิกต์ของ R มีคู่อันดับตัวแรกเป็น 1 และให้จุด Q เป็นจุดที่แตกต่างจาก X และอยู่บนเส้น XU_y จะมีพิกต์ตัวที่สองเป็น 1 ดังนั้นทุกจุดบนระนาบโพเรกทิฟจะกำหนดได้โดยคู่อันดับของจำนวนจริงเพียงคู่อันดับเดียวเท่านั้นยกเว้นจุดบนเส้น XY จะเห็นได้ว่าจุด M เป็นจุดที่ไม่สามารถกำหนดจุดโดยวิธีการข้างต้นได้จึงนับได้ว่าการกำหนดจุดโดยใช้คู่อันดับของจำนวนจริงตามวิธีการนี้ไม่ประสบความสำเร็จ แต่จะเรียกการกำหนดจุดในลักษณะนี้ว่าระบบพิกต์ที่มีไข่อกพจน์ จากปัญหาดังกล่าวเราจึงต้องกำหนดวิธีการเพื่อกำหนดจุดบนระนาบโพเรกทิฟโดยใช้จำนวนจริงดังนี้

บทนิยาม 3.1.19 ระบบพิกต์เอกพจน์ จุดบนเส้นเราจะเขียนแทนจุด x ด้วยคู่อันดับคู่อันดับ (x_1, x_2) โดยที่ $x = \frac{x_1}{x_2}$

และ (1) $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

(2) $(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$ เมื่อ $k \neq 0$

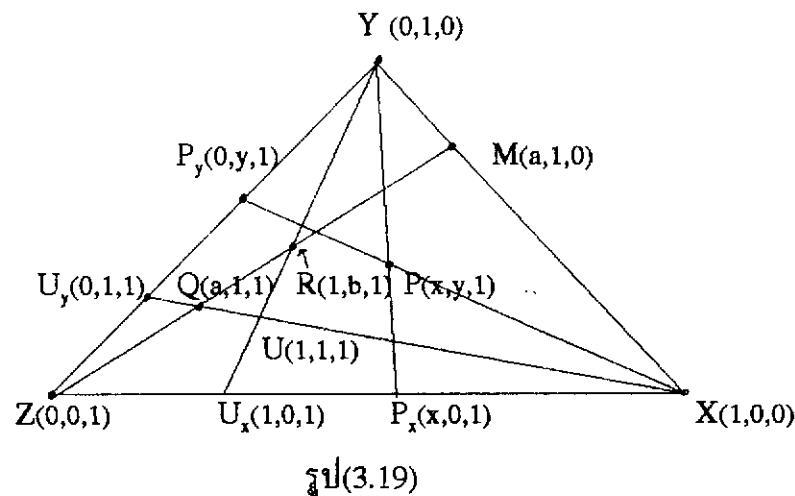
เราจะกล่าวว่าอัตราส่วน $a/b = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $b/a = 0$ จุด ∞ จะเขียนแทนด้วย $(1, 0)$ จุด 1 จะเขียนแทนด้วย $(1, 1)$ และจุด 0 จะเขียนแทนด้วย $(0, 1)$ สำหรับจุด (x, y) ในระนาบจะเขียนแทนโดย พิกัด (x_1, x_2, x_3) โดยที่

(1) $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ และ

(2) $(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$ เมื่อ $k \neq 0$

ให้ $x = \frac{x_1}{x_3}$ และ $y = \frac{x_2}{x_3}$ เมื่อ $x_3 \neq 0$

ระบบพิกัดใหม่นี้จะเรียกว่าระบบพิกัดเอกพันธ์



โดยรูป (3.19) P เป็นจุดใด ๆ บนระนาบที่ไม่อยู่บนเส้น XY ถ้า P มีพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์คือ (x, y) เราสามารถเลือก $(x, y, 1)$ เป็นพิกัดเอกพันธ์ของ P ดังนั้นจุด U จะมีพิกัดเป็น $(1, 1, 1)$ และ Z มีพิกัดเป็น $(0, 0, 1)$ สำหรับจุด M ซึ่งอยู่บนเส้น XY เราสามารถกำหนดพิกัดได้โดยพิจารณาจาก ให้ $Q = ZM \cdot XU = (a, 1, 1)$ และจะให้ M มีพิกัดเป็น $(a, 1, 0)$ และจะได้ $Y = (0, 1, 0)$ โดยที่ $Z = (0, 0, 1)$ จากการกำหนดพิกัดของจุดในระนาบโปรเจกทีฟในระบบพิกัดเอกพันธ์จะทำให้ทุกจุดสามารถแทนได้ด้วยพิกัดของจำนวนจริงในรูป (x_1, x_2, x_3) ซึ่ง $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ และ $(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3)$ เมื่อ $k \neq 0$ โดยจะเรียกรูปสามเหลี่ยม XYZ จากรูป (3.19) ว่ารูปสามเหลี่ยมอ้างอิง โดยมีจุด U เป็นจุดหนึ่งหน่วย

การกำหนดระบบพิกัดของจุดในระนาบเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรขาคณิตในแบบสังเคราะห์ ซึ่งเราได้พัฒนาระบบพิกัดของจุดจากระบบสัจพจน์ สำหรับเรขาคณิตโพเรเจททิฟแบบวิเคราะห์บนระนาบที่เราจะศึกษาในหัวข้อต่อไปนั้นจะใช้ทฤษฎีของระบบพิกัดเอกพันธ์ และกระบวนการทางพีชคณิตของสมบัติของจำนวนจริงเป็นโครงสร้างหลัก ซึ่งจะพบว่าเราจะศึกษาเรขาคณิตโพเรเจททิฟโดยวิธีการใดก็ได้ ทั้งสองวิธีการจะสอดคล้องกันเสมอซึ่งจะให้เห็นชัดเจนขึ้นในหัวข้อต่อไป

3.2 เรขาคณิตโพเรเจททิฟแบบวิเคราะห์บนระนาบ

ในเรขาคณิตโพเรเจททิฟแบบสังเคราะห์ให้ จุด เส้น และระนาบ เป็นคำนิยามแต่สำหรับเรขาคณิตโพเรเจททิฟแบบวิเคราะห์ เราสามารถให้บทนิยามของจุด เส้น และระนาบได้ โดยใช้สมบัติของจำนวนจริง และวิธีการทางพีชคณิต การกำหนดจุดจะใช้ระบบพิกัดเอกพันธ์ ซึ่งทำให้สามารถให้บทนิยามของเส้น และระนาบได้ด้วยความสัมพันธ์ของจำนวนจริงที่ใช้กำหนดนี้ สำหรับบทนิยามเบื้องต้นของเรขาคณิตโพเรเจททิฟแบบวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.2.1 กลุ่มของจำนวนจริง n อันดับ (class of n -tuples of real number) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ จำนวนจริง n อันดับทั้งสองจะอยู่ในกลุ่มเดียวกันก็ต่อเมื่อมีค่า k ซึ่งเป็นจำนวนจริง และ $k \neq 0$ ที่ทำให้ $a_j = kb_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

บทนิยาม 3.2.2 สมการเอกพันธ์เชิงเส้น (homogeneous linear equation) $\sum a_j x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) และ $\sum b_j x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) จะเรียกว่าเป็นสมการไม่อิสระ (dependent equation) หรือเป็นสมการเดียวกัน ก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ a_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) และ b_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) มาจากกลุ่มเดียวกัน

บทนิยาม 3.2.3 สมการเอกพันธ์เชิงเส้น $\sum a_j x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) และ $\sum b_j x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) จะเรียกว่าสมการที่อิสระ (independent equation) หรือสมการที่ต่างกันก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ a_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) และ b_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) ไม่มาจากกลุ่มเดียวกัน

บทนิยาม 3.2.4 จุดคือกลุ่มของจำนวนจริงสามอันดับ เขียนแทนด้วย (x_1, x_2, x_3) โดยที่ x_1, x_2 และ x_3 เป็นจำนวนจริง ที่ไม่เป็น 0 พร้อมกัน และ

(a_1, a_2, a_3) จะเป็นจุดเดียวกับ (b_1, b_2, b_3) ก็ต่อเมื่อ a_1, a_2, a_3 และ b_1, b_2, b_3 เป็นอันดับที่อยู่กลุ่มเดียวกัน

จุด (x_1, x_2, x_3) ซึ่ง $x_3 \neq 0$ จะเรียกว่าจุดสามัญ (ordinary point) และถ้า $x_3 = 0$ จะเรียกจุด (x_1, x_2, x_3) ว่าจุดอุดมคติ

บทนิยาม 3.2.5 เส้นคือเซตของจุด (x_1, x_2, x_3) ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงเส้น

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

เขียนแทนด้วย $[a_1, a_2, a_3]$ โดยที่ $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$

จากบทนิยาม 3.2. 4 และบทนิยาม 3.2.5 จะพบว่าเส้น $[a_1, a_2, a_3]$ และเส้น $[b_1, b_2, b_3]$ จะเป็นเส้นเดียวกันก็ต่อเมื่อ a_1, a_2, a_3 และ b_1, b_2, b_3 เป็นลำดับที่อยู่กลุ่มเดียวกัน

บทนิยาม 3.2.6 จุด (x_1, x_2, x_3) จะพบกัณกับเส้น $[a_1, a_2, a_3]$ ก็ต่อเมื่อสมการเชิงเส้นต่อไปนี้เป็นจริง

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

จากบทนิยาม 3.2.5 และ บทนิยาม 3.2.6 จะเห็นได้ว่าการควบคู่กันระหว่างบทนิยามของจุดพบกัณกับเส้น กับเส้นพบกัณกับจุด โดยพิจารณาจาก ถ้าจุด (x_1, x_2, x_3) พบกัณกับเส้น (หรือจุดอยู่บนเส้น) $[a_1, a_2, a_3]$ จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์นี้คือ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

โดยกฎการสลับที่การคูณจะได้

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

โดยที่ x_1, x_2, x_3 และ a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริงคงที่ เราอาจมองว่า $[x_1, x_2, x_3]$ เป็นเส้น ในขณะที่ (a_1, a_2, a_3) เป็นจุด ดังนั้นโดยสมการ(2) เรากล่าวได้ว่า เส้น $[x_1, x_2, x_3]$ พบกัณกับจุด (a_1, a_2, a_3)

ถ้าจุด $A(x_1, x_2, x_3)$ จุด $B(y_1, y_2, y_3)$ และจุด $C(z_1, z_2, z_3)$ เป็นจุดที่ร่วมเส้น $[a_1, a_2, a_3]$ เดียวกันแล้วเราจะได้ว่าสมการต่อไปนี้เป็นจริงคือ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$$

และ

$$a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0$$

จากสมการที่ได้เราจะกล่าวได้ว่า เส้น $[x_1, x_2, x_3]$, $[y_1, y_2, y_3]$ และ $[z_1, z_2, z_3]$ พบกันที่จุด (a_1, a_2, a_3) เดียวกัน ดังนั้นถ้ากล่าวว่ามีจุดสามจุดร่วมเส้นเดียวกันเป็นจริงแล้ว การกล่าวว่ามีเส้นสามเส้นร่วมจุดเดียวกันก็จะเป็นจริงด้วย

จากลักษณะดังกล่าวเราจึงอาจแทนวลี “จุดพบกันกับเส้น” ด้วย “เส้นพบกันกับจุด” ได้ และสามารถแทนวลี “เส้นพบกันกับจุด” ด้วย “จุดพบกันกับเส้น” ได้เช่นกัน ดังนั้นทฤษฎีบทในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ที่กล่าวถึงจุดพบกันกับเส้น และเส้นพบกันกับจุดจึงเป็นทวิภาวะกันเสมอ ดังตัวอย่างทฤษฎีบทเช่น

ถ้าเส้นสองเส้นพบกันกับจุดร่วมกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น จะได้ทฤษฎีบทที่เป็นทวิภาวะกันคือ

จุดสองจุดจะอยู่ร่วมเส้นเดียวกันเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 3.2.7 เซตของจุดบนระนาบโพเรเจกทิฟคือเซตของจุดในบทนิยาม

3.2.4

บทนิยาม 3.2.8 จุด $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$ จะเรียกว่าจุดยอดของสามเหลี่ยมอ้างอิง จุด $U(1,1,1)$ จเรียกว่าจุดหนึ่งหน่วย

ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทโดยใช้สัจพจน์ที่กำหนดไว้ แต่สำหรับเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ไม่มีการกำหนดสัจพจน์ เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อความต่าง ๆ โดยใช้สมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริงและวิธีการทางพีชคณิต นอกจากนั้นยังพบว่าสัจพจน์ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์สามารถพิสูจน์ได้ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ซึ่งจะได้แสดงให้เห็นดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 จะมีจุดหนึ่งจุด และเส้นหนึ่งเส้นที่ไม่พบกัน (สัจพจน์ 1)

พิสูจน์ เนื่องจากถ้าให้ $[a_1, a_2, a_3]$ เป็นเส้น ๆ หนึ่ง

จะพบว่า จุด (a_1, a_2, a_3) จะไม่พบกับเส้นเนื่องจาก $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$

ดังนั้นสัจพจน์ 1 เป็นจริง

ทฤษฎีบท 3.2.2 ทุกเส้นจะพบกันกับจุดอย่างน้อยสามจุด (สัจพจน์ 2)

พิสูจน์ จะต้องแสดงให้เห็นว่าทุกสมการเอกพันธ์

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ซึ่งมีคำตอบอย่างน้อย 3 จุด

1) ในกรณีที่เส้นคือ $[a_1, a_2, a_3]$ เมื่อ $a_j \neq 0$ ($j = 1, 2, 3$)

จะได้คำตอบของสมการเอกพันธ์ เช่นจุด $(-a_3, 0, a_1)$

$(0, a_3, -a_2)$ และ $(-a_2, a_1, 0)$

2) ในกรณีที่เส้นคือ $[0, 0, a]$ จะได้คำตอบของสมการเอกพันธ์

คือ $(m, n, 0)$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนที่ไม่เป็น 0 พร้อมกัน

3) ในกรณีที่เส้นคือ $[a_1, a_2, 0]$ จะมีคำตอบของสมการเอกพันธ์

เช่น $(0, 0, a)$, $(0, 0, b)$ หรือ $(0, 0, c)$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวน

จริงใด ๆ

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า ทุกเส้นมีอย่างน้อย 3 จุด □

จากลักษณะของการเป็นทวิภาวะกันของจุดบนเส้นกับเส้นพบจุดที่ได้กล่าวมาแล้ว จะได้ทวิภาวะของทฤษฎีบท 3.2.2 คือทุกจุดจะพบบนเส้นอย่างน้อยสามเส้น

ทฤษฎีบท 3.2.3 ถ้า $R(r_1, r_2, r_3)$ และ $S(s_1, s_2, s_3)$ เป็นจุดใด ๆ ที่แตกต่างกันแล้ว จะมีเส้นที่พบบนกับจุด R และ S เพียงเส้นเดียวเท่านั้น (สัจพจน์ 3)

พิสูจน์ ให้เส้นที่พบบนกับ R และ S คือ $[a_1, a_2, a_3]$

จะได้ $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 0$

และ $a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = 0$

โดยที่ (r_1, r_2, r_3) และ (s_1, s_2, s_3) ไม่อยู่กลุ่มเดียวกัน

จะได้

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} -r_1 & r_3 \\ -s_1 & s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}} (a_1), \quad a_3 = \frac{\begin{vmatrix} r_2 & -r_1 \\ s_2 & -s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}} (a_1)$$

ทำให้

$$\frac{a_1}{\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}} = \frac{-a_2}{\begin{vmatrix} r_1 & r_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}} = \frac{-a_3}{\begin{vmatrix} r_1 & r_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}} = k$$

จะได้

$$a_1 = k \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, a_2 = k \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, a_3 = k \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $k \neq 0$

และ

$$\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ พร้อมกัน}$$

ดังนั้นเส้นที่ผ่านจุด R และ S คือ

$$\left[\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \right]$$

ให้ $[b_1, b_2, b_3]$ เป็นอีกเส้นหนึ่งผ่านจุด R และ S

จะได้ว่า $b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 = 0$

และ $b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 = 0$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$[b_1, b_2, b_3] = \left[\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \right]$$

นั่นคือ $[b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3]$

จะได้ว่ามีเพียงเส้นเดียวที่พบกักับจุด R และ S □

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.3 นี้ เราเรียกเส้นที่พบกักับจุด R และ S ว่าเส้น RS จาก $R(r_1, r_2, r_3)$ และ $S(s_1, s_2, s_3)$ เราได้เส้น RS คือ

$$\left[\begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \right]$$

สำหรับทวิภาวะของทฤษฎีบท 3.2.3 คือ สำหรับเส้นสองเส้นที่แตกต่างกัน จะพบกักับจุดร่วมกันเพียงจุดเดียวเท่านั้น ซึ่งเท่ากับแสดงว่าสัจพจน์ 4 ซึ่งกล่าวว่า เส้นสองเส้นที่แตกต่างกันจะพบกักับจุดอย่างน้อยหนึ่งจุด เป็นจริงด้วย และจะพบว่าถ้า $R[r_1, r_2, r_3]$ และ $S[s_1, s_2, s_3]$ เป็นเส้นที่แตกต่างกันสองเส้นจะพบกักับจุดร่วมกันคือ

$$\left(\left| \begin{array}{cc} r_2 & r_3 \\ s_2 & s_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} r_3 & r_1 \\ s_3 & s_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{array} \right| \right)$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นเราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สัจพจน์ในเรขาคณิตโพรงเจกทีฟแบบสังเคราะห์สามารถพิสูจน์ได้ในเรขาคณิตโพรงเจกทีฟแบบวิเคราะห์ ซึ่งจะแสดงให้เห็นต่อไปว่าสามารถพิสูจน์สัจพจน์ได้ทุกข้อ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับจุดและเส้นในบทนิยามของเรขาคณิตโพรงเจกทีฟแบบสังเคราะห์ได้อีกด้วย

ทฤษฎีบท 3.2.4 จุด $X(x_1, x_2, x_3)$ จะอยู่ร่วมเส้นเดียวกับ $A(a_1, a_2, a_3)$ และ $B(b_1, b_2, b_3)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้เส้น AB คือ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เนื่องจากจุด X เป็นจุดบนเส้น AB จะได้

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

□

ทวิภาวะของทฤษฎีบทนี้คือ เส้น $x[x_1, x_2, x_3]$ เส้น $a[a_1, a_2, a_3]$ และ เส้น $b[b_1, b_2, b_3]$ จะเป็นเส้นที่ร่วมจุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ระบบอิงสองจุด

ระบบอิงสองจุดในเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์หมายถึงจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ในเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์เราสามารถแสดงสมการความสัมพันธ์ของจุดในระบบอิงสองจุดได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ $A(a_1, a_2, a_3)$ และ $B(b_1, b_2, b_3)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่แตกต่างกัน จุด P ซึ่งเป็นจุดในระบบอิงสองจุดที่กำหนดโดย A และ B โดยที่ $P(p_1, p_2, p_3)$ ก็ต่อเมื่อมี λ_1, λ_2 ซึ่ง

$$p_j = \lambda_2 a_j + \lambda_1 b_j, \quad j = 1, 2, 3$$

และ λ_2, λ_1 เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0

พิสูจน์ จากจุด P เป็นสมาชิกของระบบอิงสองจุดที่กำหนดโดยจุด A และ B ดังนั้น A, B, P อยู่ร่วมเส้นเดียวกันจะได้

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$p_1 = k \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad p_2 = k \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_3 = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $k \neq 0$

$$\text{และ} \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ พร้อมกัน}$$

$$\text{ถ้า} \quad p_j = \lambda_2 a_j + \lambda_1 b_j, \quad j = 1, 2, 3$$

จะได้ว่า

$$\lambda_2 a_1 + \lambda_1 b_1 = k \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_2 = k \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 a_3 + \lambda_1 b_3 = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

และจะพบว่า λ_2, λ_1 จะหาค่าได้เมื่อ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

มีจำนวนหนึ่งไม่เท่ากับ 0

โดยสมบัติของตัวกำหนดเรขาคณิตว่า

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 a_1 + \lambda_1 b_1 & \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_2 & \lambda_2 a_3 + \lambda_1 b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ดังนั้น P จะอยู่บนเส้น AB ก็ต่อเมื่อ

$$p_j = \lambda_2 a_j + \lambda_1 b_j, \quad j = 1, 2, 3$$

และ λ_2, λ_1 เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน □

ระบบเส้นอิงสองเส้น

ทวิภาวะของระบบจุดอิงสองจุดคือระบบเส้นอิงสองเส้นซึ่งจะทำให้ได้สมบัติว่า ถ้า $m [m_1, m_2, m_3]$ และ $n [n_1, n_2, n_3]$ เป็นเส้นสองเส้นที่แตกต่างกัน $p = [p_1, p_2, p_3]$ จะเป็นเส้นในระบบจุดอิงสองเส้นที่กำหนดโดย m และ n ก็ต่อเมื่อมี μ_2, μ_1 โดยที่

$$p_j = \mu_2 m_j + \mu_1 n_j, \quad j = 1, 2, 3$$

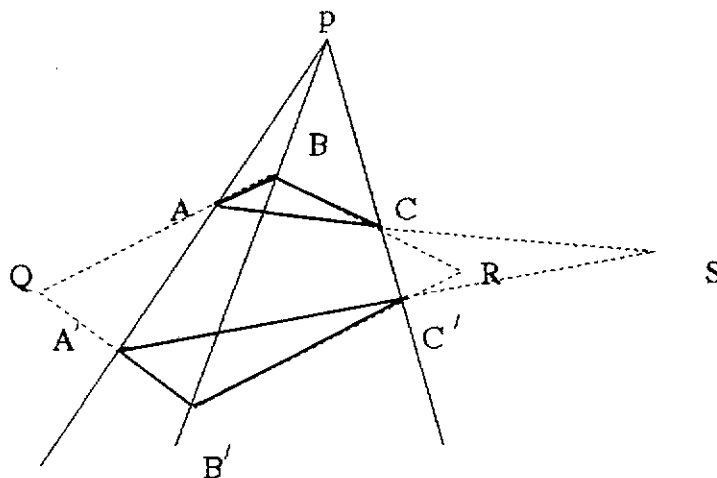
โดยที่ μ_2, μ_1 เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

จากลักษณะของจุด P ซึ่งเป็นสมาชิกของจุดอิงสองจุดที่กำหนดโดยจุด A และ B ในทฤษฎีบท 3.2.7 เราจะพบว่าเนื่องจากจุด (p_1, p_2, p_3) เป็นจุดเดียวกับจุด (kp_1, kp_2, kp_3) ค่าของ λ_2, λ_1 ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน ถ้าให้ $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ จะได้จุด P เขียนได้ในรูป $p_j = a_j + \lambda b_j, j = 1, 2, 3$ ซึ่งจะกำหนดจุด P บนเส้น AB จุดเดียวเสมอสำหรับทุกค่าของ $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ เราจึงสามารถเขียนแทนจุด P บนเส้น AB ได้ด้วยคู่อันดับ (λ_1, λ_2) จะเรียกการเขียนแทนจุด P บนเส้น AB ในลักษณะนี้ว่าพิกัดพารามิเตอร์เอกพันธ์ของ P เทียบกับจุดฐาน A และ B (homogenous parameters of P respect to the base points A and B) หรืออาจใช้ λ แทนจุด P โดยจะเรียก λ ว่าพิกัดพารามิเตอร์ที่ไม่ใช่เอกพันธ์ของ P เทียบกับจุดฐาน A และ B และจะให้ $\lambda = \infty$ เมื่อ $\lambda_2 = 0$ โดยเราจะกำหนดให้จุด A และ B ซึ่งเป็นจุดฐานมีพิกัดพารามิเตอร์เอกพันธ์เป็น $(0,1)$ และ $(1, 0)$ ตามลำดับ ซึ่งจะทำให้ $A = 0$ และ $B = \infty$ เมื่อเขียนในรูปพิกัดพารามิเตอร์ที่ไม่ใช่เอกพันธ์

จากการกำหนดพิกัดพารามิเตอร์เอกพันธ์ และสมบัติของทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันเพียงพอที่เราจะพิสูจน์ถึงทฤษฎีบท 5 ซึ่งเกี่ยวข้องกับภาวะเพอร์สเปกทิฟ และภาวะโปรเจกทิฟ โดยที่เราจะยังคงใช้บทนิยามของการเพอร์สเปกทิฟในเรขาคณิตแบบวิเคราะห์ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ด้วย

ทฤษฎีบท 3.2.6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นเพอร์สเปกทิฟจากจุดแล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นเพอร์สเปกทิฟบนเส้น (อ้างทฤษฎีบท 5)

พิสูจน์ ให้ $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่เพอร์สเปกทิฟกันกับรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด $A'(a'_1, a'_2, a'_3), B'(b'_1, b'_2, b'_3)$ และ $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ จากจุด $P(p_1, p_2, p_3)$ ให้ $AB \cdot A'B' = Q, BC \cdot B'C' = R$ และ $AC \cdot C'A' = S$ ดังรูป (3.19)



รูป (3.19)

จะเห็นว่าจุด P เป็นจุดที่อยู่บนเส้น AA' , BB' , CC' เราสามารถกำหนดพิกัดพารามิเตอร์เอกพจน์ของ P ได้โดยมี AA' , BB' , CC' เป็นจุดฐานตามลำดับดังนี้ คือ (α_1, α_2) , (β_1, β_2) และ (λ_1, λ_2) โดยที่ $p_j = \alpha_2 a_j + \alpha_1 a'_j = \beta_2 b_j + \beta_1 b'_j = \lambda_2 c_j + \lambda_1 c'_j$ เมื่อ $j = 1, 2, 3$ ดังนั้น $\alpha_2 a_j - \beta_2 b_j = \beta_1 b'_j - \alpha_1 a'_j$, $j = 1, 2, 3$ แต่ $\alpha_2 a_j - \beta_2 b_j$ เมื่อ $j = 1, 2, 3$ เป็นพิกัดของจุดบนเส้น AB และ $\beta_1 b'_j - \alpha_1 a'_j$, $j = 1, 2, 3$ เป็นพิกัดของจุดบนเส้น $A'B'$ จาก $AB \cdot A'B' = Q$ เราสามารถเลือกให้ $\beta_1 b'_j - \alpha_1 a'_j$, $j = 1, 2, 3$ เป็นพิกัดของ Q ในทำนองเดียวกันกับเลือกให้ $\beta_2 b_j - \lambda_2 c_j$, $j = 1, 2, 3$ เป็นพิกัดของจุด R และ $\lambda_2 c_j - \alpha_2 a_j$, $j = 1, 2, 3$ เป็นพิกัดของจุด S โดยการหาค่าตัวกำหนดของพิกัดของ Q, R, S จะได้ว่ามีค่าเท่ากับ 0 ทำให้จุด Q, R , และ S อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ซึ่งจะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ เป็นเพอร์สเพกทิฟบนเส้น

สำหรับทวิภาวะของทฤษฎีบท 3.2.6 ซึ่งเป็นทวิภาวะกับสัจพจน์ 5 ในเรขาคณิต โพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.3 ซึ่งใช้สัจพจน์ 4 และสัจพจน์ 5 ในการพิสูจน์ สำหรับในเรขาคณิต โพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ทวิภาวะของทฤษฎีบท 3.2.6 จะใช้ทฤษฎีบท 3.2.3 และ 3.2.6

อัตราส่วนไขว้ (cross-ratio)

เราจะกำหนดบทนิยามของการแบ่งแยกซึ่งกันและกันในเรขาคณิตโพรเจกทิฟ

แบบวิเคราะห์โดยอาศัยลักษณะของระบบจุดอิงสองจุด ใช้สมาชิกสี่จุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันมาเป็นตัวกำหนดบทนิยาม โดยเรียกความสัมพันธ์ของสมาชิกทั้งสี่จุดนี้ว่าอัตราส่วนไขว้ โดยมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.2.9 ถ้า A, B, C, D เป็นจุดที่แตกต่างกัน และอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน โดยมีพิกัดพารามิเตอร์เอกพันธุ์เป็น (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) และ (d_1, d_2) ตามลำดับ แล้วอัตราส่วนไขว้ของสี่จุดนี้คือ

$$R(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ถ้า a, b, c, d เป็นพิกัดพารามิเตอร์ที่มีไขว้เอกพันธุ์ของจุด A, B, C และ D ตามลำดับแล้วจะได้

$$R(A,B,C,D) = \frac{(c - a)}{(c - b)} \div \frac{(d - a)}{(d - b)}$$

จากบทนิยามของอัตราส่วนไขว้จะได้ว่าอัตราส่วนไขว้มีสมบัติดังต่อไปนี้

$$1) R(A,B,C,D) = R(B,A,D,C) = R(C,D,A,B) = R(D,C,B,A)$$

$$2) \text{ ถ้า } R(A,B,C,D) = k \text{ แล้ว}$$

$$2.1 R(B,A,C,D) = R(A,B,D,C) = R(C,D,B,A) = R(D,C,A,B) = 1/k$$

$$2.2 R(A,C,B,D) = R(C,A,D,B) = R(B,D,A,C) = R(D,B,C,A) = 1-k$$

$$2.3 R(A,D,B,C) = R(D,A,C,B) = R(B,C,A,D) = R(C,B,D,A)$$

$$= (k-1)/k$$

$$2.4 R(C,A,B,D) = R(A,C,D,B) = R(B,D,C,A) = R(D,B,A,C)$$

$$= 1/(1-k)$$

$$2.5 R(D,A,B,C) = R(A,D,C,B) = R(B,C,D,A) = R(C,B,A,D)$$

$$= k/(k-1)$$

$$3) \text{ ถ้า } A,B,C,D,E \text{ เป็นจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันแล้ว}$$

$$R(A,B,C,D) \cdot R(A,B,D,E) = R(A,B,C,E)$$

4) อัตราส่วนไขว้ของจุดที่แตกต่างกันบนเส้นสี่จุดจะไม่เท่ากับ $0,1,\infty$ แต่จะกำหนดนิยามของอัตราส่วนไขว้ของจุดสี่จุดที่มีจุดซ้ำกันหนึ่งจุดดังนี้

$$R(A,B,C,C) = 1$$

$$R(A,B,C,B) = 0$$

$$R(A,B,C,A) = \infty$$

5) ให้ A,B,C เป็นจุดสามจุดร่วมเส้นเดียวกัน และกำหนดค่า k ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 และ 1 จะมีจุด D เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $R(A,B,C,D) = k$

จากสมบัติของอัตราส่วนไขว้ที่กล่าวมาแล้วนี้เราจะให้บทนิยามของการแบ่งแยกซึ่งกันและกันโดยใช้อัตราส่วนไขว้ และจะแสดงว่าสามารถพิสูจน์ัจพจน์ของอันดับในเรขาคณิตโพเรเจทิกแบบสังเคราะห์ได้

บทนิยาม 3.2.10 ถ้า A,B,C,D เป็นจุดที่แตกต่างกันบนเส้นแล้วคู่ของ A,B แบ่งแยกซึ่งกันและกันกับคู่ของ C,D ($AB//CD$) ก็ต่อเมื่อ $R(A,B,C,D)$ เป็นจำนวนลบ

ทฤษฎีบท 3.2.7 ถ้า $AB // CD$ แล้ว A,B,C,D จะแตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน และ $BA // CD, AB // DC, BA // DC, CD // AB, CD // BA, DC // AB, DC // BA$ (สัจพจน์ 7)

พิสูจน์ จาก $AB // CD$ จะได้ว่า $R(A,B,C,D) < 0$ ตามบทนิยามของอัตราส่วนไขว้ A,B,C,D จะเป็นจุดที่แตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน และโดยสมบัติของอัตราส่วนไขว้จะได้

$$R(A,B,C,D) = R(B,A,D,C) = R(C,D,A,B) = R(D,C,B,A)$$

ดังนั้น $BA // DC, CD // AB, DC // BA$

และจาก $R(B,A,C,D) = 1 / R(A,B,C,D)$ ดังนั้น $R(B,A,C,D) < 0$ แต่

$$R(B,A,C,D) = R(A,B,D,C) = R(C,D,B,A) = R(D,C,A,B)$$

จะได้ $BA // CD, AB // DC, CD // BA, DC // AB$ □

ทฤษฎีบท 3.2.8 สำหรับจุด A,B,C,D 4 จุดใด ๆ ที่แตกต่างกัน และอยู่ร่วมเส้นเดียวกันจะมีอย่างน้อยสองคู่จะต้องแบ่งแยกซึ่งกันและกัน นั่นคือจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกรณีต่อไปนี้เกิดขึ้นคือ $AB // CD, AC // BD$, หรือ $AD // BC$ (สัจพจน์ 8)

พิสูจน์ จาก A,B,C,D เป็นจุดที่แตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน ดังนั้นสามารถกำหนดให้ $R(A,B,C,D) = k$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 1 และ 0 เราจะพิจารณา

จากค่าของ k ดังนี้

- 1) ถ้า $k < 0$ จะได้ $AB \parallel CD$
- 2) ถ้า $0 < k < 1$ จะได้ $R(A,D,B,C) = (k-1)/k < 0$ ดังนั้น $AD \parallel BC$
- 3) ถ้า $k > 1$ จะได้ $R(A,C,B,D) = 1-k < 0$ ดังนั้น $AC \parallel BD$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.2.11 ถ้า $AB \parallel CD$ และ $AC \parallel BE$ แล้ว $AB \parallel DE$

(สัจพจน์ 9)

พิสูจน์ จาก $AB \parallel CD$ จะได้ว่า $R(A,B,C,D) < 0$ ทำให้ $R(A,B,D,C) < 0$
 และจาก $AC \parallel BE$ จะได้ว่า $R(A,C,B,E) < 0$ ทำให้ $R(A,B,C,E) > 0$
 จาก $R(A,B,C,D) \cdot R(A,B,C,E) = R(A,B,D,E)$
 ทำให้ $R(A,B,D,E) < 0$ ดังนั้น $AB \parallel DE$ $\square$

เราพิสูจน์สัจพจน์ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ โดยใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์วิเคราะห์มาแล้วจากข้อ 1 - 5 และ 7- 9 มีสัจพจน์ 6,10 และสัจพจน์ 11 ที่ยังไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ สำหรับสัจพจน์ 11 ซึ่งกล่าวว่า มีการถอดแบบกันระหว่างเซตของจำนวนจริงกับจุดบนเส้นโพเรเจกทิฟที่ไม่รวมจุด ∞ นั้นเราได้แสดงให้เห็นแล้วจากทฤษฎีบท 3.2.5 เนื่องจากในทฤษฎีบทนี้ถ้ากำหนดค่าพารามิเตอร์ λ มา 1 ค่า จะมีจุดบนเส้น AB จุดเดียวเท่านั้นกำหนดโดยค่าพารามิเตอร์นี้ ซึ่งเท่ากับมีการถอดแบบกันระหว่างเซตของจำนวนจริงกับจุดบน AB ซึ่งไม่รวม ∞

ในกรณีของสัจพจน์ 6,10 เราจะแสดงให้เห็นต่อไปเมื่อศึกษาเรื่องการแปลงโพเรเจกทิฟแล้ว ซึ่งจะได้กล่าวถึงการแปลงโพเรเจกทิฟในหัวข้อต่อไปนี้

3.3 การแปลงโพเรเจกทิฟ

ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ ได้กล่าวถึงการแปลงโพเรเจกทิฟมาแล้วในลักษณะของภาวะโพเรเจกทิฟโดยที่ภาวะโพเรเจกทิฟเกิดจากการเพอร์สเพกทิฟที่มีจำนวนครั้งจำกัด สำหรับการแปลงโพเรเจกทิฟในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์จะกำหนดบทนิยามใหม่ในระบบสมการเชิงเส้นเนื่องจากจุดและเส้นกำหนดอยู่ในระบบพิกัดเอกพันธ์ซึ่งตั้งอยู่บนพื้นฐานของระบบจำนวนดังนี้

บทนิยาม 3.3.1 ให้ $A(x_1, x_2)$ เป็นจุดที่กำหนดโดยพิกัดเอกพันธ์บนเส้น

โปรเจกทิฟ 1 f เป็นการแปลงบนเส้น 1 โดยที่ $f(A) = A'(x_1', x_2')$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของจำนวนจริง

และ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

เรียก $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ ว่าเป็นเมตริกซ์ของการแปลง f

บทนิยาม 3.3.2 ให้ $A(x_1, x_2, x_3)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบโปรเจกทิฟ และ f เป็นการแปลงบนระนาบ โดยที่ $f(A) = A'(x_1', x_2', x_3')$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงและ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

จะเรียก f ว่า การแปลงโปรเจกทิฟ และเรียกเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ว่าเมตริกซ์ของการแปลง f

บทนิยาม 3.3.1 เป็นการแปลงโปรเจกทิฟบนเส้น ส่วนบทนิยาม 3.3.2 เป็นการแปลงโปรเจกทิฟบนระนาบ

จากบทนิยามของภาวะโปรเจกทิฟ (การแปลงโปรเจกทิฟ) ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ซึ่งเป็นผลมาจากภาวะเพอร์สเพกทิฟ จึงกล่าวได้ว่าภาวะ

เพอร์สเพกทีฟเป็นกรณีเฉพาะของภาวะโพรเจกทีฟ เมื่อพิจารณาจากภาวะเพอร์สเพกทีฟจะเห็นได้ว่าจุดทั้งหลายที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน จะสมนัยกับจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันด้วย ซึ่งจะทำให้ภาวะโพรเจกทีฟมีสมบัตินี้ด้วยเช่นกัน และจะกล่าวว่าภาวะโพรเจกทีฟมีสมบัติรักษาความเป็นเส้นซึ่งเราจะแสดงให้เห็นว่าการแปลงโพรเจกทีฟจากทฤษฎีบท 3.3.2 มีสมบัติรักษาความเป็นเส้นดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้า A_1, A_2, A_3 เป็นจุดในระนาบโพรเจกทีฟ และ A_1, A_2, A_3 อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน แล้ว $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$ อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน เมื่อ f เป็นการแปลงโพรเจกทีฟบนระนาบ

พิสูจน์ ให้ $A_1(x_1, x_2, x_3)$, $A_2(y_1, y_2, y_3)$ และ $A_3(z_1, z_2, z_3)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นเดียวกัน

$$\text{และ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \text{ เป็นเมตริกซ์ของการแปลง } f$$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{ให้ } f(A_1) = f(x_1, x_2, x_3) = A_1'(x_1', x_2', x_3')$$

$$f(A_2) = f(y_1, y_2, y_3) = A_2'(y_1', y_2', y_3')$$

$$\text{และ } f(A_3) = f(z_1, z_2, z_3) = A_3'(z_1', z_2', z_3')$$

$$\text{จะได้ } x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad y_1' = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$$

$$x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad y_2' = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$x_3' = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad y_3' = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

$$z_1' = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3$$

$$z_2' = b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3$$

$$z_3' = c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3$$

$$\text{และให้ } A_1' \text{ และ } A_2' \text{ อยู่บนเส้น } l' [u_1', u_2', u_3']$$

$$(\text{จะแสดงว่า } (z_1', z_2', z_3') \text{ เป็นจุดที่อยู่บน } l')$$

$$\text{จาก } A_1' \text{ เป็นจุดที่อยู่บน } l' [u_1', u_2', u_3']$$

$$\text{จะได้ว่า } x_1' u_1' + x_2' u_2' + x_3' u_3' = 0$$

$$\text{ดังนั้น } (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) u_1' + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) u_2' + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) u_3' = 0$$

$$(a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3') x_1 + (a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3') x_2 + (a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3') x_3 = 0$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ x_1 , x_2 และ x_3 จะพบว่าไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

$$\text{เนื่องจาก ถ้า } a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3' = 0$$

$$a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3' = 0$$

$$a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3' = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งขัดแย้งกับบทนิยามของเส้น $[u_1', u_2', u_3'] \neq [0, 0, 0]$

$$\text{จาก } (a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3') x_1 + (a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3') x_2 + (a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3') x_3 = 0$$

จะได้ว่าจุด A_1 อยู่บนเส้น

$$[a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3', a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3', a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3']$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า จุด A_2 อยู่บนเส้น

$$[a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3', a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3', a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3']$$

เนื่องจาก A_3 เป็นจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกับ A_1 และ A_2

ดังนั้น A_3 จะอยู่บนเส้น

$$[a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3', a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3', a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3']$$

จะได้ว่า

$$(a_1 u_1' + b_1 u_2' + c_1 u_3') z_1 + (a_2 u_1' + b_2 u_2' + c_2 u_3') z_2 + (a_3 u_1' + b_3 u_2' + c_3 u_3') z_3 = 0$$

$$(a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3)u_1'+(b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3)u_2'+(c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3)u_3' = 0$$

$$z_1'u_1' + z_2'u_2' + z_3'u_3' = 0$$

ดังนั้น A_3' อยู่บนเส้น $[u_1', u_2', u_3']$ □

รูปของการแปลงโปรเจกทิฟ

จากบทนิยามเรขาคณิตของโคลน์ทำให้เราทราบว่าเรขาคณิตเป็นการศึกษาสมบัติที่ยืนยงภายใต้รูปของการแปลง สำหรับเรขาคณิตโปรเจกทิฟนั้นตามบทนิยามเรขาคณิตของโคลน์นั้นเป็นการศึกษาสมบัติที่ยืนยงภายใต้รูปของการแปลงโปรเจกทิฟ ซึ่งจะแสดงให้เห็นในทฤษฎีบทต่อไปว่าเซตของการแปลงโปรเจกทิฟมีสมบัติเป็นรูปของการแปลง สมบัติต่าง ๆ ที่เราศึกษาเป็นสมบัติที่ยืนยงภายใต้รูปของการแปลงโปรเจกทิฟนี้เอง

ทฤษฎีบท 3.3.2 เซตของการแปลงโปรเจกทิฟ เป็นรูปของการแปลง

พิสูจน์ ให้ P เป็นเซตของการแปลงโปรเจกทิฟบนระนาบโปรเจกทิฟ P

และ $f \in P$ โดยที่ A เป็นเมตริกซ์ของการแปลง f โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

พิจารณา A^{-1} เราจะพบว่า $\det A^{-1} \neq 0$

ให้ A^{-1} เป็นเมตริกซ์ของการแปลง g

ดังนั้น $g \in P$

ให้ (x_1, x_2, x_3) เป็นจุดที่อยู่ในระนาบ P และ

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$$

$$\text{และ } g(x_1', x_2', x_3') = (x_1'', x_2'', x_3'')$$

จะเห็นได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $g = f^{-1}$

จะได้ว่า $f^{-1} \in P$

ให้ f และ h เป็นสมาชิกของ P โดยที่ A และ B เป็นเมตริกซ์ของการแปลง f และ h ตามลำดับ และให้

$$hf(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= B \left(A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= (BA) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จาก $\det A \neq 0$ และ $\det B \neq 0$ ดังนั้น $\det AB \neq 0$

และจะได้ว่า BA เป็นเมตริกซ์ของ hf และ $hf \in P$

ดังนั้น P เป็นกรุปของการแปลง □

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทที่สำคัญของการแปลงโปรเจกทิฟดังนี้คือ

ทฤษฎีบท 3.3.3 ให้ R, S, P, Q เป็นจุดสี่จุด ซึ่งไม่มีสามจุดใดอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน และ R', S', P', Q' เป็นจุดอีกสี่จุดที่ไม่มีสามจุดใดอยู่ร่วมเส้นเดียวกันจะมีการแปลงโปรเจกทิฟอันเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $RSPQ \sim R'S'P'Q'$

สำหรับการพิสูจน์จะแสดงว่ามีโปรเจกทิฟแบบเดียวเท่านั้นที่ทำให้จุด $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$ และ $U(1,1,1)$ สมัยกับจุด R, S, P, Q ใด ๆ ตามลำดับ และเนื่องจากทุก ๆ การแปลงโปรเจกทิฟมีตัวผกผันของการแปลง ดังนั้น ถ้า f เป็นการแปลงโปรเจกทิฟที่ทำให้ $f(X) = R$, $f(Y) = S$, $f(Z) = P$, $f(U) = Q$ g เป็นการแปลงที่ทำให้ $g(X) = R'$, $g(Y) = S'$, $g(Z) = P'$, $g(U) = Q'$

ดังนั้นจะได้ว่า gf^{-1} เป็นการแปลงแบบเดียวที่ทำให้ $RSPQ \sim R'S'P'Q'$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.4 จะมีการแปลงโปรเจกทิฟเพียงแบบเดียวเท่านั้นที่ทำให้จุดตามจุดใด ๆ ที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน สมัยกับสามจุดใด ๆ บนเส้นนั้น ภายใต้การแปลงโปรเจกทิฟนี้

ทฤษฎีบท 3.3.5 จะกำหนดการแปลงโปรเจกทิฟระหว่างเส้นสองเส้นใด ๆ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้นเมื่อกำหนดจุดคู่ที่สมัยกันระหว่างเส้นคู่นี้มาตามคู่

จากการรักษาความเป็นเส้นของการแปลงโปรเจกทิฟ และเราได้ศึกษาถึงอัตราส่วนไขว้ ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวข้องกับจุด 4 จุดที่ร่วมเส้นเดียวกัน จึงทำให้น่าสนใจว่าการแปลงโปรเจกทิฟจะรักษาอัตราส่วนไขว้หรือไม่

ทฤษฎีบท 3.3.6 ค่าของอัตราส่วนไขว้เป็นสิ่งที่นิยมภายใต้การแปลงโปรเจกทิฟ

พิสูจน์ ให้ $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2), D(d_1, d_2)$, เป็นจุดบนเส้น l ที่กำหนดโดยพิกัดพารามิเตอร์เอกพันธ์ f เป็นการแปลงโปรเจกทิฟบน l โดยที่ $f(A) = A'(a'_1, a'_2)$, $f(B) = B'(b'_1, b'_2)$, $f(C) = C'(c'_1, c'_2)$ และ $f(D) = D'(d'_1, d'_2)$

โดยที่เมตริกซ์ของการแปลง f

$$\text{คือ} \quad \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามของอัตราส่วนไขว้จะได้ว่า

$$R(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$R(A',B',C',D') = \frac{\begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}} \div \frac{\begin{vmatrix} d'_1 & d'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d'_1 & d'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}}$$

จาก $f(C) = C'(c'_1, c'_2)$ จะได้

$$\begin{vmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$$

$$c'_1 = p_1 c_1 + p_2 c_2$$

$$c'_2 = q_1 c_1 + q_2 c_2$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$a'_1 = p_1 a_1 + p_2 a_2$$

$$a'_2 = q_1 a_1 + q_2 a_2$$

จะได้

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} p_1 c_1 + p_2 c_2 & q_1 c_1 + q_2 c_2 \\ p_1 a_1 + p_2 a_2 & q_1 a_1 + q_2 a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

โดยวิธีการเดียวกันจะได้

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} d'_1 & d'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c'_1 & c'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} d_1' & d_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

$$R(A',B',C',D) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = R(A,B,C,D)$$

ดังนั้นค่าของอัตราส่วนไขว้ยืนยันภายใต้การแปลงโปรเจกทิฟ

นอกจากนี้เรายังสามารถพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบท 3.3.2 ได้ด้วยคือ

ทฤษฎีบท 3.3.7 ถ้า $R(A,B,C,D) = R(P,Q,R,S)$ แล้วจะมีภาวะโปรเจกทิฟที่ทำให้ A,B,C,D สมนัยกับ P,Q,R,S ตามลำดับ

จากสมบัติต่าง ๆ และทฤษฎีบทที่ผ่านมาเราสามารถพิสูจน์สัจพจน์ 10 ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.8 ความสัมพันธ์ แบ่งแยกซึ่งกันและกัน เป็นสิ่งที่ยืนยันภายใต้ภาวะ เพอร์สเพกทิฟ (สัจพจน์ 10)

พิสูจน์ ให้ A,B,C,D เป็นจุดที่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน และ $AB \parallel CD$ จะได้ว่า $R(A,B,C,D) < 0$ ถ้าภาวะเพอร์สเพกทิฟทำให้จุด A,B,C,D สมนัยกับจุด A',B',C',D' ตามลำดับ จากสมบัติของอัตราส่วนไขว้เราพบว่าอัตราส่วนไขว้ยืนยันภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟ ดังนั้น $R(A,B,C,D) = R(A',B',C',D') < 0$ จะได้ว่า $A'B' \parallel C'D'$ นั่นคือการแบ่งแยกซึ่งกันและกันเป็นสมบัติที่ยืนยันภายใต้ภาวะเพอร์สเพกทิฟ

เราจะใช้สมบัติของการแปลงโปรเจกทิฟนี้เพื่อแสดงการพิสูจน์สัจพจน์ 6 ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.9 จุดทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์จะไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน (สัจพจน์ 6)

พิสูจน์ จากจุด $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$ เรียกว่าจุดยอดของสามเหลี่ยมอ้างอิง จุด $U(1,1,1)$ เรียกว่าจุดหนึ่งหน่วย จะเห็นได้ว่าจุดสี่จุดนี้ไม่มีสามจุดใดอยู่ร่วมเส้นเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $UZ \cdot YX = (-1, -1, 0)$, $UX \cdot YZ = (0, -1, -1)$

และ $UY.XZ = (1,0,1)$ ซึ่งไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกัน และจุดทั้งสามเป็นจุดทแยงของรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ $UXYZ$ และโดยสมบัติของการแปลงโปรเจกทิฟจะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์อื่น ๆ จะสมนัยภายใต้การแปลงโปรเจกทิฟกับรูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ $UXYZ$ นี้ และจากการแปลงโปรเจกทิฟเป็นการแปลงซึ่งรักษาความเป็นเส้นจึงทำให้รูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์ทุกรูปมี จุดทแยงซึ่งไม่อยู่ร่วมเส้นเดียวกันด้วย

นอกจากเราจะใช้อัตราส่วนไขว้ช่วยในการพิสูจน์สิ่งพจน์ในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์แล้ว ในเรื่อง เซตฮาร์มอนิกซึ่งจะใช้บทนิยามเดียวกับเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ แต่เราสามารถแสดงการเป็นเซตฮาร์มอนิกของจุดสี่จุดได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.10 ถ้า A,B,C,D เป็นจุดสี่จุดที่แตกต่างกันและอยู่ร่วมเส้นเดียวกันแล้ว $R(A,B,C,D) = -1$ ก็ต่อเมื่อ $H(A,B,C,D)$

เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมสมบูรณ์สมบัติของการแปลงโปรเจกทิฟ และสมบัติของอัตราส่วนไขว้

จากลักษณะของเซตฮาร์มอนิกโดยทฤษฎีบท 3.3.10 และกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟรักษาค่าของอัตราส่วนไขว้จึงทำให้กรุปของการแปลงโปรเจกทิฟรักษาเซตฮาร์มอนิกด้วย

สำหรับบทนิยามของโคนิคในเรขาคณิตโปรเจกทิฟแบบวิเคราะห์จะกำหนดบทนิยามโดยใช้การแปลงโปรเจกทิฟซึ่งเรียกว่าภาวะเชิงขั้ว (polarity) โดยมีลักษณะดังนี้

บทนิยาม 3.3.3 ให้ f เป็นการแปลงโปรเจกทิฟบนระนาบ โดยที่

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อ เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของการแปลง f

(x_1, x_2, x_3) เป็นจุดบนระนาบ และ $[u_1, u_2, u_3]$ เป็นเส้นบนระนาบ

จะเรียกการแปลงโปรเจกทิฟนี้ว่าสหสัมพันธ์ (correlation)

จากบทนิยาม ถ้าสหสัมพันธ์ส่งจุด (x_1, x_2, x_3) ไปยังเส้น $l[u_1, u_2, u_3]$ ซึ่งมีจุด (y_1, y_2, y_3) อยู่บน l ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

โดยบทนิยามจะได้ว่า

$$u_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$u_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

$$u_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

ดังนั้น $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) y_1 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) y_2 + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) y_3 = 0$

ซึ่งหมายความว่าจุด (y_1, y_2, y_3) อยู่บนเส้นที่สมนัยกับจุด (x_1, x_2, x_3) ภายใต้สหสัมพันธ์และถ้าภายใต้สหสัมพันธ์นี้ทำให้

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) x_1 + (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3) x_2 + (c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3) x_3 = 0$$

ซึ่งจะทำให้จุด (x_1, x_2, x_3) อยู่บนเส้นที่สมนัยกับจุด (y_1, y_2, y_3) เราจะเรียกสหสัมพันธ์นี้ว่าภาวะเชิงขั้ว โดยกำหนดบทนิยามภาวะเชิงขั้วดังนี้

บทนิยาม 3.3.4 ให้ f เป็นสหสัมพันธ์บนระนาบโปรเจกทิฟ และ f จะเป็นภาวะเชิงขั้วเมื่อ จุด Y ใด ๆ จะอยู่บนเส้นที่สมนัยกับจุด X ภายใต้สหสัมพันธ์ก็ต่อเมื่อ X อยู่บนเส้นที่สมนัยกับ Y ภายใต้สหสัมพันธ์นี้

นอกจากนั้นเราสามารถกำหนดเมตริกซ์ของภาวะเชิงขั้วได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 3.3.5 ถ้า $[u_1, u_2, u_3]$ เป็นเส้นที่สมนัยกับจุด (x_1, x_2, x_3) ภายใต้ภาวะเชิงขั้วจะเรียก $[u_1, u_2, u_3]$ ว่าเส้นเชิงขั้ว (polar) ของจุด (x_1, x_2, x_3) และเรียก (x_1, x_2, x_3) ว่าเป็นขั้ว (pole) ของเส้น $[u_1, u_2, u_3]$

บทนิยาม 3.3.6 ขั้วซึ่งอยู่บนเส้นเชิงขั้วของมันเองจะเรียกว่าจุดตั้งขั้วในตัวของภาวะเชิงขั้ว (self-conjugate point of the polarity)

จากบทนิยามต่าง ๆ เหล่านี้เราสามารถกำหนดสมการของจุดตั้งขั้วในตัวได้โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.11 ให้เมตริกซ์ของภาวะเชิงขั้วคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

จุด (x_1, x_2, x_3) จะเป็นสังยุคในตัวเองก็ต่อเมื่อ

$$a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + 2a_3x_1x_3 + b_2x_2^2 + 2b_3x_2x_3 + c_3x_3^2 = 0$$

พิสูจน์ ถ้าภายใต้ภาวะเชิงขั้วเส้น $[u_1, u_2, u_3]$ สมนัยกับจุด (x_1, x_2, x_3)

เพราะว่า (x_1, x_2, x_3) เป็นสังยุคในตัวเองจะได้

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

และจะได้

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)x_1 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)x_2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)x_3 = 0$$

นั่นคือ

$$a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + 2a_3x_1x_3 + b_2x_2^2 + 2b_3x_2x_3 + c_3x_3^2 = 0 \quad \square$$

บทนิยาม 3.3.7 จะเรียกภาวะเชิงขั้วว่าเป็นภาวะเชิงขั้ววงรีเมื่อไม่มีจุดจริง สอดคล้องกับสมการในทฤษฎีบท 4.1.2 และจะเรียกว่าเป็นภาวะเชิงขั้วไฮเพอร์โบลิก เมื่อมีจุดจริงที่สอดคล้องกับสมการนี้

บทนิยาม 3.3.8 โคนิก คือเซตของจุดสังยุคในตัวเองของภาวะเชิงขั้ว จะเรียกว่า โคนิกเชิงจุด เมื่อเป็นเซตของจุดที่เป็นสังยุคในตัวเองของภาวะเชิงขั้วไฮเพอร์โบลิก และจะเรียกว่าเป็นโคนิกจินตภาพ (imaginary conic) เมื่อเป็นเซตของจุดของภาวะเชิงขั้ววงรี

เราได้แสดงแล้วว่าเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์สามารถพิสูจน์ตั้งพจน์ ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ได้ทุกข้อคั้งนั้นทุกทฤษฎีบทซึ่งเป็นจริงในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ย่อมจะเป็นจริงในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ และในทางกลับกัน จะเห็นได้ว่าการกำหนดบทนิยามของจุดและเส้น หรือสมาชิกต่าง ๆ ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ซึ่งพิจารณาในกระบวนการทางพีชคณิตมีพื้นฐาน มาจากลักษณะของจุด เส้น หรือสมาชิกต่าง ๆ โดยเริ่มจากระบบตั้งพจน์ในเรขาคณิต โพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ จึงทำให้สมบัติต่าง ๆ ในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ เป็นสมบัติของเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ด้วย ด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถกล่าว ได้ว่าเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์สมมูลกับเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ และถ้าเราคิดว่าการศึกษาเรขาคณิต โพเรเจกทิฟเป็นการศึกษาเรขาคณิตในระบบตั้งพจน์

ก็อาจจะกล่าวได้ว่าเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์เป็นเรขาคณิตที่ตั้งอยู่บนระบบ
 สัจพจน์ของความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต ส่วนเรขาคณิตโพเรเจกทิฟแบบสังเคราะห์เป็น
 เรขาคณิตที่ตั้งอยู่บนระบบสัจพจน์ของความสัมพันธ์ของจำนวน

นอกจากนั้นเราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า การแปลงโพเรเจกทิฟมีสมบัติเป็นกรุป
 ของการแปลงและได้แสดงมาแล้วว่าสมบัติต่าง ๆ ที่ศึกษาในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟเป็น
 สมบัติที่อื่นยังภายใต้การแปลงโพเรเจกทิฟจึงกล่าวได้ว่ากรุปของการแปลงโพเรเจกทิฟ
 เป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโพเรเจกทิฟตามบทนิยามเรขาคณิตของไคลน์ สำหรับในบทต่อ
 ไปเราจะศึกษาถึงกรุปของการแปลงซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปการแปลงโพเรเจกทิฟและ
 เป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ เหล่านั้น

บทที่ 4

สับกรุปของกรุปของการแปลงโพรเจกทิฟ

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาเรขาคณิตโพรเจกทิฟมาแล้วทั้งเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบสังเคราะห์ และเรขาคณิตโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์ สำหรับกรุปของการแปลงโพรเจกทิฟซึ่งเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโพรเจกทิฟนั้นเราได้กำหนดการแปลงโพรเจกทิฟแบบวิเคราะห์โดยใช้เมตริกของการแปลง สำหรับในบทที่ 4 นี้เราจะศึกษากรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ และเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโพรเจกทิฟ ซึ่งประกอบด้วยกรุปของการแปลงสัมพรรค กรุปของการแปลงอีควิวาเลียล กรุปของการแปลงความคล้าย และกรุปของการแปลงยูคลิดีียน โดยจะกำหนดกรุปของการแปลงเหล่านี้บนระนาบโพรเจกทิฟ การที่เราได้กล่าวถึงการแปลงหลักในเรขาคณิตระบวยูคลิดีมาแล้วในบทที่ 2 นั้นในบทที่ 4 นี้จะชี้ให้เห็นว่ากรุปของการแปลงยูคลิดีียนคือกรุปของโมชัน

4.1 กรุปของการแปลงสัมพรรค

ในเรขาคณิตโพรเจกทิฟเส้นทุกคู่จะต้องตัดกันหนึ่งจุดเสมอ ถ้าคำนึงถึงบทนิยามของเส้นขนานว่าเส้นขนานคือเส้นที่ไม่ตัดกัน จะเห็นได้ว่าไม่มีเส้นขนานในเรขาคณิตโพรเจกทิฟ ในเรขาคณิตสัมพรรคถึงแม้จะศึกษาบนพื้นฐานของจุดและเส้นบนระนาบโพรเจกทิฟ แต่เราจะสามารถกำหนดบทนิยามการขนานกันของเส้นได้ว่าการขนานกันของเส้นหมายถึงเส้นคู่ที่ตัดกันที่จุดอุดมคติ ในหัวข้อต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าการแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงที่รักษาการขนานกันของเส้น และเซตของการแปลงสัมพรรคมีสมบัติเป็นกรุปของการแปลงซึ่งจะทำให้การขนานกันของเส้นเป็นสิ่งที่ยืนยันภายใต้กรุปของการแปลงสัมพรรค ซึ่งเรากำหนดบทนิยามของการแปลงสัมพรรคดังนี้

บทนิยาม 4.1.1 การแปลงโพรเจกทิฟบนระนาบโพรเจกทิฟ P ที่ทำให้จุดอุดมคติสมนัยกับจุดอุดมคติ จุดสามัญสมนัยกับจุดสามัญจะเรียกว่าการแปลงสัมพรรค

จากบทนิยามถ้า l_∞ เป็นเส้นที่ผ่านจุดอุดมคติทุกจุด (เรียก l_∞ ว่าเส้นอุดมคติ) จะได้ว่า l_∞ ยืนยันภายใต้การแปลงสัมพรรค และเรายังสามารถกำหนด

เมตริกซ์ของการแปลงสัมพรรคบนระนาบได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบโพรงเจกทิฟ P f จะเป็นการแปลงสัมพรรคก็ต่อเมื่อ

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{และจาก} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

จะได้ว่า $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

พิสูจน์ เนื่องจากการแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงโพรงเจกทิฟซึ่งทำให้จุดอุดมคติสมนัยกับจุดอุดมคติ พิจารณาจากการแปลงโพรงเจกทิฟซึ่งจุด $A(x_1, x_2, 0)$ เป็นจุดอุดมคติใด ๆ บนระนาบโพรงเจกทิฟ สมนัยกับ $A'(x'_1, x'_2, 0)$ โดยที่

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ แต่ x_1 และ x_2 จะต้องไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน เนื่องจากจุด $(x_1, x_2, 0)$ เป็นจุดบนระนาบโพรงเจกทิฟ จึงทำให้ $c_1 = 0$ และ $c_2 = 0$ ดังนั้นเมตริกซ์ของการแปลงนี้คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

และให้ $A(x_1, x_2, x_3)$ สมนัยกับ $A'(x'_1, x'_2, x'_3)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง

$$x'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$x'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

$$x_3' = c_3$$

เนื่องจากจุดสามัญ (x_1', x_2', x_3') ใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูป $(x, y, 1)$ จึงสามารถให้ $c_3 = 1$ จะเห็นได้ว่าเมตริกซ์ของการแปลงที่ทำให้จุดอุดมคติสมนัยกับจุดอุดมคติคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเป็นเมตริกซ์ของการแปลงสลับพหุ

ถ้าให้ $A(x_1, x_2, 0)$ เป็นจุดอุดมคติในบนระนาบโปรเจกทีฟ และ $f(A) = A'$ โดยที่ $A'(x_1', x_2', x_3')$ เมื่อ

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ จะได้ว่า } (a_1 \neq 0 \text{ และ } b_1 \neq 0) \text{ หรือ } (a_2 \neq 0 \text{ และ } b_2 \neq 0)$$

และจาก $(x_1, x_2, 0) \in P$ ดังนั้น $x_1 \neq 0$ หรือ $x_2 \neq 0$

ดังนั้น $a_1x_1 + a_2x_2 \neq 0$ หรือ $b_1x_1 + b_2x_2 \neq 0$

จึงได้ว่า $(a_1x_1 + a_2x_2, b_1x_1 + b_2x_2, 0)$ เป็นจุดอุดมคติบน P

นั่นคือ (x_1', x_2', x_3') เป็นจุดอุดมคติบน P

และถ้า $A(x_1, x_2, x_3)$ เป็นจุดใด ๆ บน P โดยที่ $f(A) = (x_1', x_2', 0)$ เป็นจุดอุดมคติบน P

$$\text{ดังนั้น } \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ 0 + 0 + x_3 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $x_3 = 0$

นั่นคือ (x_1, x_2, x_3) เป็นจุดอุดมคติบน P

จึงเห็นได้ว่า A เป็นจุดอุดมคติก็ต่อเมื่อ $f(A)$ เป็นจุดอุดมคติ จึงทำให้ได้ว่า A เป็นจุดสามัญบน P ก็ต่อเมื่อ $f(A)$ เป็นจุดสามัญบน P ดังนั้น f เป็นการแปลงสัมพรรค $\square$

นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงได้ว่าเซตของการแปลงสัมพรรค เป็นกรุปของการแปลง และเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโพรงเจกทิฟดังทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปและกล่าวว่ากรุปของการแปลงสัมพรรคเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสัมพรรค

ทฤษฎีบท 4.1.2 เซตของการแปลงสัมพรรค เป็นกรุปของการแปลง และเป็นสับกรุปของการแปลงโพรงเจกทิฟ

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตของการแปลงสัมพรรค

เห็นได้ชัดว่า A เป็นสับเซตของ P

$$\text{และให้ } f \in A \text{ โดยที่ เมทริกซ์ของ } f \text{ คือ } M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ -b_1 & a_1 & b_1a_3 - a_1b_3 \\ 0 & 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \det M^{-1} \neq 0$$

จึงเห็นได้ว่า M^{-1} ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของ f^{-1} จะเป็นเมทริกซ์

ในเซตของเมทริกซ์ของการแปลงใน A

ดังนั้น $f^{-1} \in A$

$$\text{ให้ } g \in A \text{ และเมทริกซ์ของ } g \text{ คือ } N = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จาก เมทริกซ์ M เป็นเมทริกซ์ของ g

ถ้า A เป็นจุดใด ๆ บน P โดยที่ $fg(A) = A'$

จะพบว่าเมทริกซ์ของการแปลง fg คือเมทริกซ์ MN ซึ่ง

$$\begin{aligned}
 MN &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1a'_1 + a_2b'_2 & a_1a'_2 + a_2b'_2 & a_1a'_3 + a_2b'_3 + a_3 \\ b_1a'_1 + b_2b'_2 & b_1a'_2 + b_2b'_2 & b_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จาก $\det M \neq 0$, $\det N \neq 0$ จะได้ $\det MN \neq 0$

ดังนั้น $fg \in A$

จะได้ว่า A เป็นกรุปของการแปลง และเป็นสับกรุปของ P $\square$

เราได้กล่าวมาแล้วว่ากรุปของการแปลงสัมพรรคเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสัมพรรคและการแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงซึ่งรักษาจุดอุดมคติ ซึ่งถ้าตัดจุดอุดมคติออกจากระนาบโปรเจกทิฟจะเรียกว่าระนาบสัมพรรค โดยจะเห็นได้ว่ามีจุดสามัญของระนาบโปรเจกทิฟเท่านั้นอยู่เป็นสมาชิกของระนาบสัมพรรค และเส้นบนระนาบสัมพรรคจะเป็นเส้นโปรเจกทิฟซึ่งตัดจุดอุดมคติออกไป จากความหมายของระนาบสัมพรรคในลักษณะนี้จะได้ว่าจุดทุกจุดบนระนาบสัมพรรคสามารถเขียนได้ในรูปของพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์ (x,y) ได้

จากเมตริกซ์ของการแปลงสัมพรรคคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

และ (x,y) เป็นจุดใด ๆ ในระนาบสัมพรรค เราสามารถกำหนดการแปลงสัมพรรคบนระนาบสัมพรรคได้ดังนี้คือ

จากพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์ของจุด $A(x,y)$ ถ้าเขียนจุด A ในรูปพิกัดเอกพันธ์จะได้พิกัด A สามารถเขียนได้ในรูป $A(x,y,1)$ ถ้า A สมัยกับ $A'(x',y',z')$ ภายใต้การแปลงสัมพรรคจะได้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

$$\begin{aligned}\text{ซึ่ง} \quad x' &= a_1x + a_2y + a_3 \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3 \\ z' &= 1\end{aligned}$$

และสามารถเขียน A' ในพิกัดที่ไม่ใช่เอกพจน์คือ (x', y') และให้ $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$
 $b_1 = d$, $b_2 = e$ และ $b_3 = f$ เราสามารถเขียนการแปลงสัมพรรคได้ในรูปพิกัดที่ไม่ใช่
 เอกพจน์คือ

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f, \text{ เมื่อ } ac - bd \neq 0\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าโดยรูปของการแปลงสัมพรรคเส้นบนระนาบโปรเจกทิฟที่
 ตัดกันที่จุดอุดมคติ จะต้องสมนัยกับเส้นที่ตัดกันที่จุดอุดมคติซึ่งเส้นคู่นี้จะไม่ตัดกันบน
 ระนาบสัมพรรค เราจึงสามารถกล่าวได้ว่าเส้นคู่ขนานกัน และรูปของการแปลงสัม
 พรรคจะรักษาสมบัติของการขนานกันของเส้น ดังนั้นจึงมีการศึกษาสมบัติของเส้น
 ขนานในเรขาคณิตสัมพรรคซึ่งในการกำหนดสัจพจน์ในเรขาคณิตสัมพรรคแบบ
 สักเกราะห่นั้นสัจพจน์ที่สำคัญและเป็นสัจพจน์บ่งลักษณะของเรขาคณิตสัมพรรคคือ
 สัจพจน์ของเพลแฟร์ซึ่งกล่าวว่า

กำหนดจุดหนึ่งจุดและเส้นเส้นหนึ่งที่อยู่บนระนาบเดียวกันโดยที่จุดไม่อยู่บน
 เส้น จะสามารถลากเส้นให้ผ่านจุดนี้โดยไม่ตัดกับเส้นที่กำหนดให้ ได้เพียงเส้นเดียว
 เท่านั้น

สำหรับคำว่าเส้นไม่ตัดกันจะหมายถึงเส้นที่ขนานกัน ซึ่งในเรขาคณิตสัม
 พรรคแบบวิเคราะห์ที่กำหนดจากระนาบโปรเจกทิฟจะหมายถึงเส้นโปรเจกทิฟที่ตัดกัน
 ที่จุดอุดมคตินั้นเอง และเราสามารถแสดงได้ว่าสามารถพิสูจน์สัจพจน์นี้ได้ในเรขาคณิต
 สัมพรรคแบบวิเคราะห์ดังนี้

ให้ $l [u_1, u_2, u_3]$ เป็นเส้นใด ๆ บนระนาบโปรเจกทิฟซึ่งไม่รวมเส้นอุดมคติ
 เนื่องจากเส้นอุดมคติไม่ใช่เส้นในเรขาคณิตสัมพรรค จุด $X(x_1, x_2, x_3)$ เป็นจุดบน
 ระนาบเดียวกับ l และไม่อยู่บน l เนื่องจากจะต้องมีจุดอุดมคติอยู่บน l เช่นจุด
 $(u_2, -u_1, 0)$ ให้ $A(a_1, a_2, 0)$ เป็นจุดอุดมคติบน l ดังนั้นเส้น XA จะเป็นเส้นที่ขนานกับ
 l และผ่าน X ถ้าให้ $B(b_1, b_2, 0)$ เป็นจุดอุดมคติอีกจุดหนึ่งบน l ซึ่งจะได้ว่า XB จะ
 เป็นเส้นที่ผ่าน X และขนานกับ l แต่เราสามารถแสดงได้ว่าจุด $A = B$ กล่าวคือบนเส้น

ที่ไม่ใช่เส้นอุดมคติทุกเส้นจะมีจุดอุดมคติจุดเดียวเท่านั้นดังนี้

จาก A และ B เป็นจุดบน l จะได้

$$a_1u_1 + a_2u_2 = 0$$

และ

$$b_1u_1 + b_2u_2 = 0$$

จะได้

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $k \neq 0$ ซึ่งทำให้ $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$ ทำให้พิกัดของจุด A เขียนได้ในรูป $(kb_1, kb_2, 0)$ จะได้ว่า $A = B$ ซึ่งทำให้ได้ว่าจะมีเส้นเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด X และขนานกับ l

นอกจากนี้ยังมีสมบัติที่ขึ้นยงภายใต้กรุปของการแปลงสัมพรรค ซึ่งเราสามารถศึกษาสมบัติเหล่านี้ในเรขาคณิตสัมพรรคเช่นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้น การเท่ากันของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เป็นต้น

4.2 กรุปของการแปลงอีควิวาเลนต์

การแปลงโปรเจกทิฟเป็นการแปลงที่รักษาความเป็นเส้น การแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงโปรเจกทิฟที่รักษาการขนานกันของเส้น สำหรับการแปลงอีควิวาเลนต์จะเป็นการแปลงสัมพรรคที่รักษาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม โดยจะกำหนดบทนิยามของรูปสามเหลี่ยม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบโปรเจกทิฟดังนี้

บทนิยาม 4.2.1 ให้ A,B และ C เป็นจุดสามัญสามจุดบนระนาบซึ่งไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน จะเรียก A, B และ C ว่าจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และส่วนของเส้น AB, BC และ AC ว่าด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

และเมื่อเขียนพิกัดของจุด A,B และ C ในรูป $A(a_1, a_2, 1)$ $B(b_1, b_2, 1)$ และ $C(c_1, c_2, 1)$ จะเรียก $m(ABC)$ ว่า เมเชอร์ (measure) ของรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\text{โดยที่ } m(ABC) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

จากบทนิยามค่าเมเชอร์ของสามเหลี่ยม จะพบว่าการเรียงจุดเพื่อหาค่าเมเชอร์ของสามเหลี่ยม การสลับจุด 1 คู่ในการหาค่าตัวกำหนดจะทำให้ค่าที่ได้เป็นจำนวนตรงข้ามกัน แต่ถึงอย่างไรค่าสัมบูรณ์ของ $m(ABC)$ จะเท่ากันเสมอไม่ว่าจะ

เรียงลำดับจุดในการหาค่าเมเชอร์อย่างไร และจะกำหนดบทนิยามของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมจาก เมเชอร์ของสามเหลี่ยมดังนี้

บทนิยาม 3.5.2 ให้ A, B, C เป็นจุดสามัญสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2} |m(ABC)|$

จากสมบัติของการแปลงสัมพรรคจุดอุดมคติจะสมนัยกับจุดอุดมคติ จุดสามัญจะสมนัยกับจุดสามัญ และยังเป็นการแปลงโพรเจกทิฟซึ่งเส้นจะสมนัยกับเส้น จึงทำให้จุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันสมนัยกับจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกันด้วย ดังนั้นภายใต้การแปลงสัมพรรครูปสามเหลี่ยมจะสมนัยกับรูปสามเหลี่ยม และจะพบว่าค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ของการแปลงสัมพรรคมีความสัมพันธ์กันกับค่าเมเชอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่สมนัยกันภายใต้การแปลงสัมพรรคดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ f เป็นการแปลงสัมพรรคบนระนาบ P ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมบน P แล้ว $m(ABC) = D m(A'B'C')$ เมื่อ A', B' และ C' สมนัยกับ A, B , และ C ภายใต้การแปลง f และ D เป็นค่าตัวกำหนดที่สมนัยกับการแปลง f

พิสูจน์ ให้ f เป็นการแปลงสัมพรรคบนระนาบโพรเจกทิฟ และ

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยที่ $A(x_1, x_2, 1)$ $B(y_1, y_2, 1)$ และ

$C(z_1, z_2, 1)$ และ $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$

จะได้ A' คือ $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3, 1)$

B' คือ $(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3, b_1y_1 + b_2y_2 + b_3, 1)$

และ C' คือ $(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3, b_1z_1 + b_2z_2 + b_3, 1)$

พิจารณา

$$m(ABC) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1-x_1 & y_2-x_2 & 0 \\ z_1-x_1 & z_2-x_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1-x_1 & y_2-x_2 \\ z_1-x_1 & z_2-x_2 \end{vmatrix} \\
&= (y_1-x_1)(z_2-x_2) - (y_2-x_2)(z_1-x_1) \\
m(AB'C') &= \begin{vmatrix} a_1x_1+a_2x_2+a_3 & b_1x_1+b_2x_2+b_3 & 1 \\ a_1y_1+a_2y_2+a_3 & b_1y_1+b_2y_2+b_3 & 1 \\ a_1z_1+a_2z_2+a_3 & b_1z_1+b_2z_2+b_3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1x_1+a_2x_2+a_3 & b_1x_1+b_2x_2+b_3 & 1 \\ a_1(y_1-x_1)+a_2(y_2-x_2) & b_1(y_1-x_1)+b_2(y_2-x_2) & 0 \\ a_1(z_1-x_1)+a_2(z_2-x_2) & b_1(z_1-x_1)+b_2(z_2-x_2) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1(y_1-x_1)+a_2(y_2-x_2) & b_1(y_1-x_1)+b_2(y_2-x_2) \\ a_1(z_1-x_1)+a_2(z_2-x_2) & b_1(z_1-x_1)+b_2(z_2-x_2) \end{vmatrix} \\
&= [a_1(y_1-x_1)+a_2(y_2-x_2)][b_1(z_1-x_1)+b_2(z_2-x_2)] \\
&\quad - [a_1(z_1-x_1)+a_2(z_2-x_2)][b_1(y_1-x_1)+b_2(y_2-x_2)] \\
&= a_1b_1(y_1-x_1)(z_1-x_1)+a_1b_2(y_1-x_1)(z_2-x_2) \\
&\quad +a_2b_1(y_2-x_2)(z_1-x_1)+a_2b_2(y_2-x_2)(z_2-x_2) \\
&\quad -a_1b_1(z_1-x_1)(y_1-x_1)-a_1b_2(z_1-x_1)(y_2-x_2) \\
&\quad -a_2b_1(z_2-x_2)(y_1-x_1)-a_2b_2(z_2-x_2)(y_2-x_2) \\
&= a_1b_2[(y_1-x_1)(z_2-x_2) - (y_2-x_2)(z_1-x_1)] \\
&\quad - a_2b_1[(y_1-x_1)(z_2-x_2) - (y_2-x_2)(z_1-x_1)] \\
&= [a_1b_2 - a_2b_1][(y_1-x_1)(z_2-x_2) - (y_2-x_2)(z_1-x_1)] \\
&= D m(ABC) \quad \square
\end{aligned}$$

จากบทนิยามของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเราสามารถกำหนดบทนิยามของ
การแปลงอีควิวาเลนต์ได้ดังนี้

บทนิยาม 4.3.3 การแปลงสัมพรรคบนระนาบโปรเจกทิฟที่รักษาค่าสัมบูรณ์

ของเมเชอร์ของรูปสามเหลี่ยมจะเรียกว่าการแปลงอีควิอาเรียล

โดยบทนิยามของการแปลงอีควิอาเรียลนี้อาจกล่าวได้ว่าการแปลงอีควิอาเรียลเป็นการแปลงซึ่งรักษาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และโดยทฤษฎีบท 4.2.2 การแปลงสัมพรรคที่จะทำให้ $|m(ABC)| = |m(A'B'C')|$ จะต้องมีค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ของการแปลงนี้เท่ากับ ± 1 ซึ่งเราสามารถกำหนดของการแปลงอีควิอาเรียลได้ว่าเป็นการแปลงสัมพรรคที่มีค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ของการแปลงเท่ากับ ± 1 ซึ่งจะทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบโพรเจกทิฟ f จะเป็นการแปลงอีควิอาเรียลก็ต่อเมื่อ

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$$

นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงได้ว่าเซตของการแปลงอีควิอาเรียลเป็นกรุปของการแปลง ซึ่งเป็นสับกรุปของการแปลงสัมพรรคดังทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไป ซึ่งกรุปของการแปลงอีควิอาเรียลนี้จะเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตอีควิอาเรียลนั่นเอง

ทฤษฎีบท 4.2.4 เซตของการแปลงอีควิอาเรียลบนระนาบ P เป็นสับกรุปของการแปลงสัมพรรคบนระนาบ P

พิสูจน์ ให้ E เป็นเซตของการแปลงอีควิอาเรียล และ $f \in E$

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$$

ดังนั้น $f \in A$ จะได้ว่า เซต E เป็นสับเซตของ เซต A

เนื่องจาก f^{-1} สมนัยกับเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ เมื่อ } a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$$

พิจารณา
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$$

ดังนั้น
$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \pm 1$$

และ
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \pm \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -b_1 & a_1 & a_1 b_3 - a_1 a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ เมตริกซ์ของ f^{-1} คือ
$$\pm \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -b_1 & a_1 & a_1 b_3 - a_1 a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $f^{-1} \in E$

ให้ เมตริกซ์ของ g คือ
$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = \pm 1$$

จะได้ว่าเมตริกซ์ของ gf คือ
$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง
$$\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 a_1 + a'_2 b_1 & a'_1 a_2 + a'_2 b_2 & a'_1 a_3 + a'_2 b_3 + a'_3 \\ b'_1 a_1 + b'_2 b_1 & b'_1 a_2 + b'_2 b_2 & b'_1 a_3 + b'_2 b_3 + b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{และ } \begin{vmatrix} a'_1 a_1 + a'_2 b_1 & a'_1 a_2 + a'_2 b_2 & a'_1 a_3 + a'_2 b_3 + a'_3 \\ b'_1 a_1 + b'_2 b_1 & b'_1 a_2 + b'_2 b_2 & b'_1 a_3 + b'_2 b_3 + b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a'_1 a_1 + a'_2 b_1)(b'_1 a_2 + b'_2 b_2) - (b'_1 a_1 + b'_2 b_1)(a'_1 a_2 + a'_2 b_2) \\
&= \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a'_1 b'_3 - a'_2 b'_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= \pm 1
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $gf \in E$

ดังนั้น E เป็นกรุปของการแปลงและเป็นสับกรุปของ A $\square$

เนื่องจากการแปลงอิกัวเรียลเป็นการแปลงสัมพรรค ดังนั้น จึงมีสมบัติการรักษาจุดอุดมคติ เราจึงสามารถพิจารณาการแปลงอิกัวเรียลในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธุ์ได้ โดยจะกำหนดการแปลงอิกัวเรียลในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธุ์ในทำนองเดียวกับการกำหนดการแปลงสัมพรรคในระบบที่ไม่ใช่เอกพันธุ์ดังนี้

จากพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธุ์ของจุด $A(x,y)$ ถ้าเขียนจุด A ในรูปพิกัดเอกพันธุ์จะได้พิกัดของ A สามารถเขียนได้ในรูป $A(x,y,1)$ ถ้า A สมพันธ์กับ $A'(x', y', z')$ ภายใต้การแปลงอิกัวเรียลจะได้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned}
x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 \\
y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 \\
z' &= 1
\end{aligned}$$

และสามารถเขียน A' ในพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธุ์คือ (x',y') และให้ $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $b_1 = d$, $b_2 = e$ และ $b_3 = f$ เราสามารถเขียนการแปลงสัมพรรคได้ในรูปพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธุ์คือ

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + c \\y' &= dx + ey + f \quad , \text{เมื่อ } ac - bd = \pm 1\end{aligned}$$

4.3 กรุปของการแปลงความคล้าย

ในเรขาคณิตระบบขุคลิการแปลงที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมที่สมนัยกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันจะเรียกว่าการแปลงความคล้ายโดยใช้ระยะระหว่างจุดในการกำหนดบทนิยามดังนี้

ถ้า A และ B เป็นจุดใด ๆ บนระนาบขุคลิเดียน f จะเป็นการแปลงความคล้ายบนระนาบขุคลิเดียนก็ต่อเมื่อ

$$|f(A)f(B)| = r |AB|$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

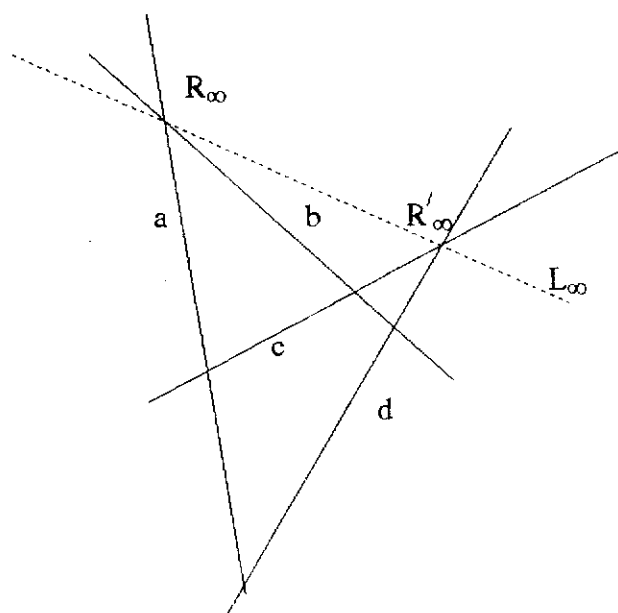
สำหรับการแปลงความคล้ายที่มีพื้นฐานอยู่บนระนาบโพเรเจทิฟจะกำหนดบทนิยามซึ่งเกี่ยวข้องกับเส้นตั้งฉากบนระนาบโพเรเจทิฟดังนี้

เส้นตั้งฉาก

การกำหนดบทนิยามของเส้นตั้งฉากบนระนาบโพเรเจทิฟจะใช้จุดบนเส้นอุดมคติสองจุดเป็นตัวกำหนดเส้นสองเส้นที่ผ่านสองจุดนี้โดยจะทำให้เส้นคู่นี้ไม่ตัดกันที่จุดอุดมคติ เรียกจุดคู่นี้ว่าจุดคู่ส่วนกลับ (reciprocal pairs) ซึ่งมีลักษณะดังนี้

ให้การแปลง I_∞ เป็นการแปลงบนเส้นอุดมคติ l_∞ บนระนาบโพเรเจทิฟ โดยที่ $I_\infty^2 = I$ เมื่อ I เป็นการแปลงเอกลักษณ์ และถ้า $R_\infty(x_1, x_2, 0)$ เป็นจุดใด ๆ บน l_∞ แล้ว $R_\infty(x_1, x_2, 0)$ สมนัยกับ $R'_\infty(x_2, -x_1, 0)$ เรียกการแปลง I_∞ ว่าการอาวัตสัมบูรณ์ (absolute involution) เรียก R_∞ และ R'_∞ ว่าคู่ส่วนกลับ ของ I_∞ และจะกำหนดบทนิยามของเส้นตั้งฉากดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3.1 เส้นบนระนาบโพเรเจทิฟคู่หนึ่งจะเป็นเส้นคู่ที่ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อเส้นคู่นี้ไม่ใช่เส้นอุดมคติ โดยที่เส้นหนึ่งผ่านจุด R_∞ และอีกเส้นหนึ่งผ่านจุด R'_∞ เมื่อ R_∞ และ R'_∞ เป็นคู่ส่วนกลับของการอาวัตสัมบูรณ์



รูป (4.1)

จากรูป (4.1) เนื่องจากเส้น a และเส้น b ผ่านจุด R_∞ ในขณะที่เส้น c และเส้น d ผ่านจุด R'_∞ จะได้ว่า a ตั้งฉากกับ c และ d โดยที่ b จะเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับ c และ d เช่นเดียวกัน ซึ่งในเรขาคณิตสัมพัทธ์ a จะขนานกับ b และ c จะขนานกับ d เนื่องจากเป็นเส้นที่ตัดกันที่จุดอุดมคติ ทำให้ได้ว่า ถ้า a ขนานกับ b และ a ตั้งฉากกับ c แล้ว b จะตั้งฉากกับ c

สำหรับการแปลงความคล้ายจะกำหนดโดยให้เป็นการแปลงที่รักษาการตั้งฉาก โดยถ้าเส้น a และ b ตั้งฉากกัน และ a สมัยกับ a' b สมัยกับ b' ภายใต้การแปลงความคล้ายแล้ว a' จะตั้งฉากกับ b' จะเห็นได้ว่าการแปลงความคล้ายเป็นการแปลงสัมพัทธ์เนื่องจากยังคงเป็นการแปลงที่รักษาการขนานกันของเส้น

โดยจะพิจารณาจากการกำหนดให้เส้น a ขนานกับ b และตั้งฉากกับ c จากการแปลงความคล้าย ถ้าเส้น a, b, c สมัยกับเส้น a', b', c' ตามลำดับ จะได้ว่า a' จะตั้งฉากกับ c' และ b' จะตั้งฉากกับ c' ด้วย จึงทำให้ a' และ b' ผ่านจุดคู่กลับบน L_∞ ของจุดที่ c' ผ่านบน L_∞ จุดเดียวกัน จึงทำให้ a' และ b' เป็นเส้นที่ขนานกัน ดังนั้นเราสามารถกำหนดบทนิยามของการแปลงความคล้ายดังนี้

บทนิยาม 4.3.2 การแปลงสัมพัทธ์บนระนาบโพรเจกทีฟซึ่งทำให้จุดคู่กลับของอวัตต์สมมูลสัมพันธ์กันจะเรียกว่าการแปลงความคล้าย

เราสามารถกำหนดเมตริกซ์ของเมตริกซ์ของการแปลงความคล้ายจากเมตริกซ์ของการแปลงสัมพรรคดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบโพรงเททิล $P f$ จะเป็นการแปลงความคล้ายก็ต่อเมื่อ

$$\text{เมตริกซ์ของการแปลง } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

พิสูจน์ จากการแปลงสัมพรรค

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

ให้ $R_\infty(x_1, x_2, 0)$ และ $R'_\infty(x_2, -x_1, 0)$ เป็นจุดคู่ส่วนกลับของการอาวัตสัมบูรณ์ โดยการแปลงความคล้าย ให้ $R_\infty(x_1, x_2, 0)$ สมพันธ์กับ Q_∞ และ $R'_\infty(x_2, -x_1, 0)$ สมพันธ์กับ Q'_∞ และจะทำให้ Q_∞ กับ Q'_∞ เป็นคู่ส่วนกลับกันด้วย โดยการแปลงสัมพรรคจะได้ว่า Q_∞ มีพิกัดเป็น $(a_1 x_1 + a_2 x_2, b_1 x_1 + b_2 x_2, 0)$ และ Q'_∞ มีพิกัดเป็น $(a_1 x_2 - a_2 x_1, b_1 x_2 - b_2 x_1, 0)$ ดังนั้นจะต้องมีจำนวนจริง $k \neq 0$ ที่ทำให้

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = k(b_1 x_2 - b_2 x_1) \dots\dots\dots(1)$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = -k(a_1 x_2 - a_2 x_1) \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{จาก (1)} \quad (a_1 + k b_2) x_1 + (a_2 - k b_1) x_2 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{จาก (2)} \quad (b_1 - k a_2) x_1 + (b_2 + k a_1) x_2 = 0 \dots\dots\dots(4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$a_1 + k b_2 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$b_2 + k a_1 = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$a_2 - k b_1 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$b_1 - ka_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

จาก (5) และ (6) เนื่องจาก $k \neq 0$ จะได้ว่า $a_1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $b_2 = 0$
 และถ้า $a_1 \neq 0$ แล้ว $k = \frac{-b_2}{a_1}$ เมื่อแทน k ใน (5) จะได้

$$a_1^2 = b_2^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{และจะได้ } k^2 = 1$$

ในทำนองเดียวกันจาก (7) และ (8) จะได้

$$a_2^2 = b_1^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

จาก (9) จะได้ $a_1 = b_2$ หรือ $a_1 = -b_2$

ถ้าให้ $a_1 = b_2 \neq 0$ จาก (5) จะได้ $k = -1$ โดย (7) จะได้ $a_2 = -b_1$

ถ้าให้ $a_1 = -b_2 \neq 0$ จาก (5) จะได้ $k = 1$ โดย (7) จะได้ $a_2 = b_1$

ถ้าให้ $a_1 = b_2 = 0$ จาก (10) จะได้ $a_2 = b_1$ หรือ $a_2 = -b_1$

จะได้เมตริกซ์ของการแปลงความคล้ายคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

ในทำนองเดียวกันกับการแปลงอีคิวาเรียลเราสามารถกำหนดการแปลงความคล้ายในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์ได้คือ ถ้า จุด $A(x,y)$ สมนัยกับจุด $A'(x',y')$ ภายใต้การแปลงความคล้ายแล้ว

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = bex + aey + d \quad \text{เมื่อ } a^2 + b^2 \neq 0, e^2 = 1$$

สำหรับการแปลงความคล้ายนอกจากการรักษาการตั้งฉากของเส้นแล้ว เรายังสามารถแสดงได้ว่า การแปลงความคล้ายโดยเมตริกซ์ของการแปลงนี้ยังรักษาอัตราส่วนของระยะระหว่างจุด(จุดสามัญ) ซึ่งเป็นบทนิยามของการแปลงความคล้ายในเรขาคณิต

ระบบยุคลิด โดยบนระนาบโพรเจกทิฟเราสามารถกำหนดระยะระหว่างจุดสามัญใด ๆ ได้ โดยเขียนจุดสามัญใด ๆ บนระนาบโดยใช้ระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพจน์และใช้บทนิยามของระยะระหว่างจุดเหมือนกับระยะระหว่างจุดในเรขาคณิตระบบยุคลิดบนระนาบยูคลิดีเยน ซึ่งเราสามารถแสดงได้ว่าการแปลงความคล้ายที่นิยามบนระนาบโพรเจกทิฟมีสมบัติในการรักษายัตราส่วนของระยะระหว่างจุดดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3.2 ให้ f เป็นการแปลงความคล้ายบนระนาบโพรเจกทิฟ และ A, B เป็นจุดสามัญใด ๆ ที่แตกต่างกัน แล้วจะมีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้

$$|f(A)f(B)| = r |AB|$$

พิสูจน์ ให้ $A(x_1, x_2, 1)$ และ $B(y_1, y_2, 1)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบโพรเจกทิฟ

$$\text{จะได้ } |AB| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\text{และ เมทริกซ์ของ } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

$$\text{ให้ } f(A) = (x'_1, x'_2, x'_3), \quad f(B) = (y'_1, y'_2, y'_3)$$

จะได้ว่า

$$1) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 \\ -a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 \\ -a_2 y_1 + a_1 y_2 + b_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } 2) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 + b_3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 \\ a_2 y_1 - a_1 y_2 + b_3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก 1) } |f(A)f(B)| &= \sqrt{[(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3) - (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3)]^2 + [(-a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_3) - (-a_2 y_1 + a_1 y_2 + b_3)]^2} \\ &= \sqrt{[a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2)]^2 + [-a_2(x_1 - y_1) + a_1(x_2 - y_2)]^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_1 - y_1)^2 + (a_1^2 + a_2^2)(x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} \quad |AB| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก 2) } |f(A)f(B)| &= \sqrt{[(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3) - (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3)]^2 + [(a_2 x_1 - a_1 x_2 + b_3) - (a_2 y_1 - a_1 y_2 + b_3)]^2} \\ &= \sqrt{[a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2)]^2 + [a_2(x_1 - y_1) - a_1(x_2 - y_2)]^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_1 - y_1)^2 + (a_1^2 + a_2^2)(x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)} |AB|$$

$$\text{จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า } r = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$$

$$\text{ดังนั้นจะมีจำนวนจริงบวก } r \text{ ซึ่งทำให้ } |f(A)f(B)| = r |AB| \quad \square$$

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าเรขาคณิตความคล้ายเป็นการศึกษาสมบัติที่ยืนยงภายใต้
 กรุปของการแปลงความคล้าย เราสามารถแสดงได้ว่าเซตของการแปลงความคล้ายเป็น
 กรุปของการแปลง และเป็นสับกรุปของการแปลงสัมพรรคดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6.1 เซตของการแปลงความคล้ายเป็นกรุปของการแปลง และ
 เป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงสัมพรรค

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตของการแปลงความคล้าย

และให้ $f \in S$ ดังนั้น เมตริกซ์ของการแปลง f คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{พิจารณา} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

$$\text{และ} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1^2 + a_2^2) \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

ดังนั้น $f \in A$

$$\text{พิจารณา} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_2 b_3 - a_1 a_3 \\ a_2 & a_1 & -a_1 b_3 - a_2 a_3 \\ 0 & 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_2 b_3 - a_1 a_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{-a_1 b_3 - a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & a_2 b_3 + a_1 a_3 \\ -a_2 & a_1 & a_2 a_3 - a_1 b_3 \\ 0 & 0 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_2 b_3 + a_1 a_3}{-(a_1^2 + a_2^2)} \\ \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{-a_1}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_1 a_3 - a_1 b_3}{-(a_1^2 + a_2^2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{เนื่องจากเมตริกซ์ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

เป็นเมตริกซ์ของ f^{-1} และมีค่าตัวกำหนดซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $f^{-1} \in S$

และให้ $g \in S$ และ เมตริกซ์ของ g คือ

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } c_1^2 + c_2^2 \neq 0$$

ให้ $(x_1, x_2, x_3) \in P$ และ $gf(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$

จะได้

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_2 + c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_2 a_1 - c_1 a_2 & c_1 a_1 + c_2 a_2 & -c_2 a_3 + c_1 b_1 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 + c_2 a_2 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_1 a_2 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 + c_2 a_2) & -c_2 b_3 - c_2 a_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_2 + c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_1 a_2 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 - c_2 a_2) & c_1 b_3 + c_2 a_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 + c_2 a_2 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ c_2 a_1 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 + c_2 a_2) & c_2 a_3 - c_1 b_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จาก (1) - (4) จะเห็นได้ว่าเมตริกซ์ของ gf จะสามารถเขียน

ได้ในรูป
$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง
$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 มาจาก

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \pm(-c_2) & \pm c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ
$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \pm(-c_2) & \pm c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

นั่นคือ $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$

ดังนั้น $gf \in S$

จะได้ว่า S เป็นรูปของการแปลง และเป็นสับกรุป

ของกรุปของการแปลงสัมพรรค □

ภายใต้กรุปของการแปลงความคล้ายนอกจากรักษาการตั้งฉากของเส้น รักษาอัตราส่วนของระยะระหว่างจุด ยังสามารถแสดงได้ว่าขนาดของมุมเป็นสิ่งยืนยันภายใต้กรุปของการแปลงความคล้ายด้วยโดยกำหนดบทนิยามขนาดของมุมระหว่างเส้นดังนี้

บทนิยาม 4.3.3 สำหรับทุก ๆ คู่ของเส้นที่ไม่ใช่เส้นอุดมคติ ซึ่งกำหนดโดย $[u_1, u_2, u_3]$ และ $[v_1, v_2, v_3]$ จะมี $\cos \theta$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดยที่

$$\cos \theta = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{(u_1^2 + u_2^2)^{1/2} (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}}$$

เรียก θ ว่า มุมแหลมระหว่างเส้นทั้งสอง

บทนิยาม 4.3.4 มุมแหลม θ_1 กับมุมแหลม θ_2 จะเท่ากันทุกประการเมื่อ

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2$$

ถ้าให้ การแปลงความคล้ายคือ

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = bx + ay + d \quad \text{เมื่อ } a^2 + b^2 \neq 0$$

โดยที่เส้น $[u_1, u_2, u_3]$ และ $[v_1, v_2, v_3]$ สมนัยกับ $[u'_1, u'_2, u'_3]$ และ $[v'_1, v'_2, v'_3]$ ตามลำดับจะได้

$$u'_1 x' + u'_2 y' + u'_3 = 0$$

$$v'_1 x' + v'_2 y' + v'_3 = 0$$

จะได้ว่า

$$u'_1 (ax - by + c) + u'_2 (bx + ay + d) + u'_3 = 0$$

$$v'_1 (ax - by + c) + v'_2 (bx + ay + d) + v'_3 = 0$$

เราสามารถเขียนได้ว่า

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0$$

$$v_1 x + v_2 y + v_3 = 0$$

$$\text{ซึ่ง} \quad u_1 = u'_1 a + u'_2 b, \quad u_2 = u'_2 a - u'_1 b$$

$$v_1 = v'_1 a + v'_2 b, \quad v_2 = v'_2 a - v'_1 b$$

และเราสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{(u_1^2 + u_2^2)^{1/2} (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} = \frac{|u'_1 v'_1 + u'_2 v'_2|}{(u_1'^2 + u_2'^2)^{1/2} (v_1'^2 + v_2'^2)^{1/2}}$$

ซึ่งจะได้ว่ามุมแหลมระหว่าง เส้น $[u_1, u_2, u_3]$ และ $[v_1, v_2, v_3]$ เท่ากับมุมแหลมระหว่างเส้น $[u'_1, u'_2, u'_3]$ และ $[v'_1, v'_2, v'_3]$ ดังนั้นจะได้ว่ามุมแหลมระหว่างเส้นยื่นยังภายใต้การแปลงความคล้าย

4.4 กรุปของการแปลงยูคลิดีเนียน

ถึงแม้ว่าในบทที่ 2 ได้กล่าวถึงกรุปของการแปลงยูคลิดีเนียนมาแล้ว อันได้แก่กรุปของโมชันแต่เป็นการกล่าวถึงกรุปของโมชันบนระนาบยูคลิดีเนียน สำหรับการกำหนดบทนิยามของการแปลงยูคลิดีเนียนบนระนาบโพรเจกทิฟสามารถพิจารณาจาก

การแปลงความคล้ายดังนี้

โดยที่เมตริกซ์ของการแปลงความคล้ายคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 = 0$$

และการแปลงความคล้ายเป็นการแปลงที่รักษายัตราส่วนของระยะระหว่างจุด โดยจากทฤษฎีบท 4.3.2 ถ้า A และ B เป็นจุดสามัญใด ๆ บนระนาบ โดยการแปลงความคล้ายจะได้ $|f(A)f(B)| = r |AB|$ โดยที่ $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ แต่สำหรับการแปลงขุคลิเดียนหรือโมชันซึ่งเป็นการแปลงที่รักษาระยะระหว่างจุดจะได้ $|f(A)f(B)| = |AB|$ ทำให้ได้ว่าการแปลงขุคลิเดียนคือการแปลงความคล้ายที่ $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$ เราจึงสามารถกำหนดการแปลงขุคลิเดียนใน บนระนาบโพเรเจกทิฟได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.4.1 ให้ f เป็นการแปลงบนระนาบโพเรเจกทิฟ f จะเป็นการแปลงขุคลิเดียนก็ต่อเมื่อ

$$\text{เมตริกซ์ของ } f \text{ คือ } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 = 1$$

เมื่อพิจารณาจากเมตริกซ์ของการแปลงขุคลิเดียนนี้นอกจากจะเป็นเมตริกซ์ของการแปลงความคล้ายแล้ว จะเห็นได้ว่าเป็นเมตริกซ์ของการแปลงอีควิอาเรียลอีกด้วย เราจึงจะสามารถแสดงได้ว่าเซตของการแปลงขุคลิเดียนเป็นกรุปซึ่งสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้ายและเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงอีควิอาเรียลได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.4.2 เซตของการแปลงขุคลิเดียนเป็นกรุปของการแปลงซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้าย และเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงอีควิอาเรียล

พิสูจน์ ให้ μ เป็นเซตของการแปลงขุคลิเดียน

และให้ $f \in \mu$ ดังนั้น เมตริกซ์ของ f คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{พิจารณา } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

$$\text{และ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -(a_1^2 + a_2^2) \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

$$\text{พิจารณา } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{จะได้ว่า } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & a_2 b_3 - a_1 a_3 \\ a_2 & a_1 & -a_1 b_3 - a_2 a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & a_2 b_3 + a_1 a_3 \\ -a_2 & a_1 & a_2 a_3 - a_1 b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{เนื่องจากเมตริกซ์} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

เป็นเมตริกซ์ของ f^{-1} และมีตัวกำหนดเท่ากับ $a_1^2 + a_2^2 = 1$

ดังนั้น $f^{-1} \in \mu$

และให้ $g \in \mu$ และ เมตริกซ์ของ g คือ

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } c_1^2 + c_2^2 = 1$$

ให้ (x_1, x_2, x_3) เป็นจุดบนระนาบ μ

$$\text{และ } gf(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$$

จะได้

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_2 + c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_2 a_1 - c_1 a_2 & c_1 a_1 + c_2 a_2 & -c_2 a_3 + c_1 b_1 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 + c_2 a_2 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_1 a_2 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 + c_2 a_2) & -c_2 b_3 - c_2 a_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_2 & a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_2 + c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ -c_1 a_2 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 - c_2 a_2) & c_1 b_3 + c_2 a_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_1 a_1 + c_2 a_2 & c_1 a_2 - c_2 a_1 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3 \\ c_2 a_1 - c_1 a_2 & -(c_1 a_1 + c_2 a_2) & c_2 a_3 - c_1 b_3 + d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จาก (1) - (4) จะเห็นได้ว่าเมตริกซ์ของ gf จะสามารถเขียน

$$\text{ได้ในรูป } \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ซึ่ง } \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ มาจาก}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \pm(-c_2) & \pm c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ \pm(-p_2) & \pm p_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \pm(-c_2) & \pm c_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{นั่นคือ } p_1^2 + p_2^2 = 1$$

$$\text{ดังนั้น } gf \in \mu$$

จะได้ว่า μ เป็นกรุปของการแปลง

เมื่อ μ เป็นกรุปของการแปลง และเห็นได้ชัดว่า μ เป็นสับเซตของเซตของการแปลงความคล้ายและเป็นสับเซตของเซตของการแปลงอิกวารีล ดังนั้นกรุปของการแปลงยูคลิดีเนียนจึงเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้าย และเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงอิกวารีล $\square$

สำหรับการกำหนดการแปลงยูคลิดีเนียนในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์จะกำหนด

ดังนี้ ถ้าจุด $A(x,y)$ สมัยกับจุด $A'(x',y')$ ภายใต้การแปลงยูคลิดิเดียนแล้ว

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = bex + aey + d \text{ เมื่อ } a^2 + b^2 = 1, e^2 = 1$$

จากบทที่ 2 เราได้กล่าวถึงโมชันว่าเป็นการแปลงบนระนาบซึ่งรักษาระยะระหว่างจุดอันประกอบด้วย การเลื่อนทางขนาน การสะท้อน และการหมุนรอบจุดและไกลดรีเฟลกชัน สำหรับเมตริกซ์ของการแปลงยูคลิดิเดียนจากทฤษฎีบท 4.4.1 นั้นเป็นเมตริกซ์ของการแปลงของจุดในระบบพิกัดเอกพันธ์ ซึ่งเราสามารถแทนการเลื่อนทางขนาน การสะท้อน การหมุนรอบจุดดังนี้

บทนิยาม 4.4.2 การเลื่อนทางขนาน คือ การแปลงยูคลิดิเดียน มีเมตริกซ์ของการแปลงคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมัยกับ $A(x'_1, x'_2, x'_3)$ ภายใต้การเลื่อนทางขนานจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$x'_1 = x_1 + a_3$$

$$x'_2 = x_2 + b_3$$

$$x'_3 = 1$$

ซึ่งถ้าเขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์โดยให้ $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $a_3 = a$, $b_3 = b$ จะได้

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

บทนิยาม 4.4.3 การหมุนรอบจุด $O(0,0,1)$ คือการแปลงยูคลิเดียน ซึ่งมีเมตริกซ์ของการหมุน คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_1^2 + a_2^2 = 1$

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมนัยกับ $A(x_1', x_2', x_3')$ ภายใต้การหมุนรอบจุด $(0,0,1)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$x_1' = a_1 x_1 - a_2 x_2$$

$$x_2' = a_2 x_1 + a_1 x_2$$

$$x_3' = 1$$

เขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพจน์โดยให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ จะได้

$$x' = ax - by$$

$$y' = bx + ay$$

เมื่อ $a^2 + b^2 = 1$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนได้ในรูป

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

เมื่อ $\alpha \in [0, 2\pi)$

บทนิยาม 4.4.3 การหมุนรอบจุด $O(h,k,1)$ คือการแปลงยูคลิเดียน ซึ่งมีเมตริกซ์ของการหมุน คือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & h-ha_1+ka_2 \\ a_2 & a_1 & k-ha_2-ka_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ} \quad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

จากบทนิยามการหมุนรอบจุด $(h,k,1)$ เมตริกซ์ของการหมุนจะได้จากผลคูณของเมตริกซ์ของ การเลื่อนทางขนาน การหมุนรอบจุด และการเลื่อนทางขนานดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมนัยกับ $A(x_1', x_2', x_3')$ ภายใต้การหมุนรอบจุด $(h,k,1)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & h-ha_1+ka_2 \\ a_2 & a_1 & k-ha_2-ka_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_1' = a_1x_1 - a_2x_2 + h-ha_1+ka_2$$

$$x_2' = a_2x_1 + a_1x_2 + k-ha_2-ka_1$$

$$x_3' = 1$$

เขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์โดยให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ จะได้

$$x' = ax - by + h-ha+kb$$

$$y' = bx + ay + k-hb-ka$$

เมื่อ $a^2 + b^2 = 1$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนได้ในรูป

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha + h-h\cos\alpha + k\sin\alpha$$

$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha + k-h\sin\alpha -k\cos\alpha$$

เมื่อ $\alpha \in [0, 2\pi)$

ซึ่งจะได้

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

ตามบทนิยาม 2.3

บทนิยาม 4.4.4 การสะท้อนที่มีแกนสะท้อนผ่านจุด $O(0,0,1)$ คือการแปลง
ยูคลิเดียน ซึ่งมีเมตริกซ์ของการสะท้อนคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_1^2 + a_2^2 = 1$

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมัยกับ $A(x_1', x_2', x_3')$ ภายใต้การสะท้อนนี้
จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$x_2' = a_2 x_1 - a_1 x_2$$

$$x_3' = 1$$

เขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์โดยให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $a_1 = a$,
 $a_2 = b$ จะได้

$$x' = ax - by$$

$$y' = bx + ay$$

เมื่อ $a^2 + b^2 = 1$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนได้ในรูป

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

เมื่อ $\alpha \in [0, 2\pi)$

บทนิยาม 4.4.5 การสะท้อนที่มีแกนของการสะท้อนไม่ผ่านจุด $O(0,0,1)$ คือ
การแปลงยูคลิเดียน ซึ่งมีเมตริกซ์ของการแปลงคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $a_1^2 + a_2^2 = 1$ และ $(1-a_1)b_3 + a_2a_3 = 0$ และ a_3, b_3 ไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมนัยกับ $A(x_1', x_2', x_3')$ ภายใต้การสะท้อนนี้
จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$$

$$x_2' = a_2x_1 - a_1x_2 + b_3$$

$$x_3' = 1$$

เขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์โดยให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $a_1 = a$,
 $a_2 = b$, $a_3 = c$, $b_3 = d$, จะได้

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = bx - ay + d$$

เมื่อ $a^2 + b^2 = 1$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนได้ในรูป

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c$$

$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha + d$$

เมื่อ $\alpha \in [0, 2\pi)$ และ $(1 - \cos \alpha)d + c \sin \alpha = 0$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{c} &= \frac{-\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \\ &= \frac{-1}{\tan(\frac{\alpha}{2})} \quad \text{เมื่อ } \alpha \neq \pi \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นการสะท้อนตามบทนิยาม 2.5

ในกรณีเมตริกซ์ของไคลดรีเฟลกชันจะได้จากเมตริกซ์ของการสะท้อนและตามด้วยการเลื่อนทางขนานในทิศทางขนานกับแกนสะท้อน ซึ่งจะทำให้การแปลงที่มีเมตริกซ์ของการแปลงคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 = 1$$

เป็นการสะท้อน หรือเป็นไกลค์รีเฟลกชันซึ่งแสดงได้ดังนี้

จากบทนิยามถ้า $A(x_1, x_2, 1)$ สมัยกับ $A(x'_1, x'_2, x'_3)$ ภายใต้การแปลงนี้ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$

$$x'_2 = a_2 x_1 - a_1 x_2 + b_3$$

$$x'_3 = 1$$

เขียนการแปลงในระบบพิกัดที่ไม่ใช่เอกพันธ์โดยให้ $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $b_3 = d$, จะได้

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = bx - ay + d$$

เมื่อ $a^2 + b^2 = 1$ ซึ่งทำให้สามารถเขียนได้ในรูป

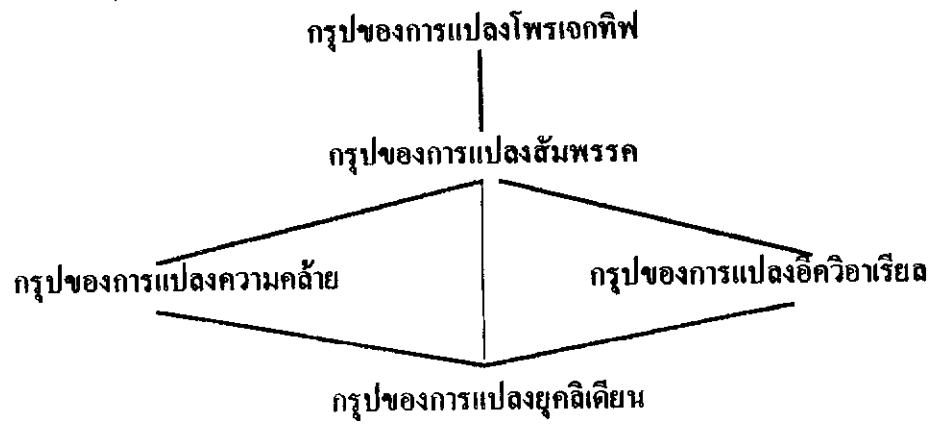
$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c$$

$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha + d$$

เมื่อ $\alpha \in [0, 2\pi)$

โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่าเป็นการสะท้อนหรือไกลค์รีเฟลกชัน

จากรูปของการแปลงที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมดสามารถแสดงแผนภาพลักษณะการเป็นสับกรุปของการแปลงได้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 แสดงสับกรุปของกลุ่มของการแปลงโครงเจกทิฟ

บทที่ 5

สรุป

เราได้ศึกษาถึงกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ มาแล้ว เริ่มจากกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโปรเจกทิฟ กรุปของการแปลงสัมพรรคซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟและเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสัมพรรค กรุปของการแปลงอีควาเรียลซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลง สัมพรรคทำให้เป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟด้วย เป็นตัวกำหนดเรขาคณิตอีควาเรียล ซึ่งมีลักษณะเดียวกับกรุปของการแปลงความคล้ายคือเป็นสับกรุปของ กรุปของการแปลงสัมพรรคและเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟจะเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตความคล้าย

สำหรับกรุปของการแปลงยูคลิเดียนหรือโมชันอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตระบบยูคลิดจะเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้ายและเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงอีควาเรียล ซึ่งจะทำให้กรุปของการแปลงยูคลิเดียนเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงสัมพรรคและเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโปรเจกทิฟอีกด้วย ในบทสรุปนี้จะกล่าวถึงสมบัติที่เกี่ยวเนื่องกันของเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ โดยพิจารณาจากกรุปของการแปลงและสมบัติที่อื่นยังภายใต้กรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ เหล่านั้น

1. เรขาคณิตโปรเจกทิฟ

เรากำหนดการแปลงโปรเจกทิฟบนระนาบโปรเจกทิฟซึ่งเป็นเซตของจุดในระบบพิกัดเอกพันธ์ โดยเมตริกซ์ของการแปลงโปรเจกทิฟคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

เมื่อเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงและ

และ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

โดยที่เซตของการแปลงโพรเจกทิฟนี้เป็นกรุปของการแปลง และเรขาคณิตโพรเจกทิฟเป็นการศึกษาสมบัติที่ยืนยงภายใต้กรุปการแปลงโพรเจกทิฟนี้ ซึ่งเป็นการแปลงที่รักษาความเป็นเส้นกล่าวคือจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกันจะสมนัยกับจุดที่อยู่บนเส้นเดียวกันด้วย ซึ่งผลของการรักษาความเป็นเส้นจะได้สมบัติอื่นตามมาเช่นการรักษาเค้าโครงเดิมของรูป เป็นต้น

2. เรขาคณิตสัมพรรค

สำหรับการแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงโพรเจกทิฟที่นอกจากจะรักษาความเป็นเส้นแล้วยังเป็นการแปลงที่ทำให้จุดอุดมคติสมนัยกับจุดอุดมคติ จุดสามัญสมนัยกับจุดสามัญ โดยที่กำหนดให้การแปลงสัมพรรคเป็นการแปลงบนระนาบโพรเจกทิฟซึ่งกรุปของการแปลงสัมพรรคเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโพรเจกทิฟ โดยที่เมตริกซ์ของการแปลงสัมพรรคคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{และจาก} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

จะได้ว่า $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

ถ้า L_∞ เป็นเส้นของจุดอุดมคติบนระนาบโพรเจกทิฟ การแปลงสัมพรรคจะทำให้จุดบน L_∞ สมนัยกับจุดบน L_∞ จึงกล่าวได้ว่า L_∞ เป็นเส้นที่ยืนยงภายใต้การแปลงสัมพรรคซึ่งถ้าไม่สนใจจุดอุดมคติหรือตัดจุดอุดมคติออกจากระนาบโพรเจกทิฟจะเรียกระนาบที่ได้นี้ว่าระนาบสัมพรรค

บนระนาบสัมพรรคเส้นซึ่งเป็นเส้นบนระนาบโพรเจกทิฟจะเป็นเส้นที่ถูกตัดจุดอุดมคติออกไป ดังนั้นเส้นบนระนาบโพรเจกทิฟซึ่งตัดกันที่จุดอุดมคติจะเป็นเส้นที่ไม่ตัดกันบนระนาบสัมพรรค เราจึงสามารถกำหนดบทนิยามของเส้นขนานบนระนาบ

สัมพรรคได้ ซึ่งหมายถึงเส้นที่ตัดกันที่จุดอุดมคตินั้นเอง โดยที่สมบัติของการขนานกันของเส้นเป็นสิ่งที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงสัมพรรค

สำหรับมโนคติเกี่ยวกับเรื่องการวัดส่วนของเส้น และการวัดมุมจะยังไม่มีในเรขาคณิตสัมพรรคเนื่องจากความยาวของส่วนของเส้น และขนาดของมุมมิใช่สิ่งที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงสัมพรรค แต่ถึงแม้เราไม่สามารถกล่าวถึงความยาวของเส้นในเรขาคณิตสัมพรรคได้เกี่ยวกับจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นสามารถกำหนดคณิยามได้โดยใช้สมบัติของสังยุคฮาร์โมนิกในเรขาคณิตโพเรเจทิฟ โดยที่ถ้า P_∞ เป็นจุดอุดมคติบนเส้น m A และ B เป็นจุดบนเส้น m เราจะเรียกจุด M ว่าเป็นจุดกึ่งกลางของ A และ B เมื่อ M เป็นสังยุคฮาร์โมนิกของ P_∞ เมื่ออ้างถึง AB โดยที่การแปลงสัมพรรคจะทำให้จุด A' , B' และ M' ซึ่งเป็นจุดที่สมนัยกับ A, B และ M ตามลำดับ โดยที่ จุด M' ยังคงเป็นจุดกึ่งกลางของ A' และ B'

3. เรขาคณิตความคล้าย

ถ้าเราพิจารณารูปของการแปลงสัมพรรค และรูปของการแปลงโพเรเจทิฟ จะพบว่าเมื่อเราลดขนาดของรูปของการแปลงโพเรเจทิฟลงเป็นรูปของการแปลงสัมพรรค สมบัติที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงสัมพรรคจะมีมากกว่าสมบัติที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงโพเรเจทิฟ เช่นสมบัติเกี่ยวกับเส้นขนาน เป็นต้น เรขาคณิตความคล้ายเป็นเรขาคณิตที่กำหนดโดยรูปของการแปลงความคล้ายซึ่งเป็นสับกรุปของรูปของการแปลงสัมพรรคโดยเมตริกซ์ของการแปลงความคล้ายจะอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

โดยเราจะพบว่าภายใต้การแปลงความคล้าย การขนานจะเป็นสมบัติที่ขึ้นอยู่กับรูปของการแปลงความคล้ายเป็นการแปลงสัมพรรค และนอกจากการขนานกันของเส้นแล้วการแปลงความคล้ายเป็นการแปลงซึ่งรักษาการตั้งฉากของเส้นซึ่งไม่เป็นสมบัติของการแปลงสัมพรรค

โดยสมบัติของการรักษาการตั้งฉากทำให้การแปลงความคล้ายเป็นการแปลงซึ่งรักษานาฬิกาของมุมด้วย ทำให้สามารถนำเสนอเรื่องของการวัดมุมและการเท่ากันของมุมในเรขาคณิตความคล้ายได้ แต่การแปลงความคล้ายจะเป็นการแปลงที่ไม่มีสมบัติ

ในการรักษาระยะระหว่างจุดจึงทำให้เรื่องของการวัดระยะยังไม่มีในเรขาคณิตความคล้าย โดยสมบัติของการแปลงความคล้ายดังกล่าวรูปที่สมนัยกันภายใต้การแปลงความคล้ายจะเรียกว่ารูปคล้าย เนื่องจากจะเป็นรูปที่มีรูปร่างเหมือนกันแต่ขนาดอาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้

4. เรขาคณิตอีควิอาเรียล

เรขาคณิตอีควิอาเรียลเป็นเรขาคณิตที่ถูกกำหนดโดยกรุปของการแปลงอีควิอาเรียลซึ่งเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงสัมพรรคแต่ไม่เป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงความคล้าย โดยเมตริกซ์ของกรุปของการแปลงอีควิอาเรียลคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$$

เนื่องจากการแปลงอีควิอาเรียลเป็นการแปลงสัมพรรคดังนั้นจึงมีสมบัติของการรักษาการขนาน นอกจากนั้นยังเป็นการแปลงที่รักษาเค้าโครงของรูปด้วยซึ่งทำให้รูปสามเหลี่ยมจะสมนัยกับรูปสามเหลี่ยม และการแปลงอีควิอาเรียลจะเป็นการแปลงซึ่งรักษาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมโดยให้บทนิยามของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุด $A(x_1, y_1, 1), B(x_2, y_2, 1)$ และ $C(x_3, y_3, 1)$ เป็นจุดยอดคือ

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \cdot \text{ค่าสัมบูรณ์ของ } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาพื้นที่ของรูปต่าง ๆ ได้โดยใช้มนโคติของการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม เราจึงสามารถกล่าวได้ว่าการแปลงอีควิอาเรียลเป็นการแปลงที่รักษาพื้นที่ ดังนั้นมนโคติเกี่ยวกับพื้นที่ของรูปจึงสามารถศึกษาได้ในเรขาคณิตอีควิอาเรียลซึ่งไม่มีในเรขาคณิตสัมพรรคและเรขาคณิตความคล้าย

5. เรขาคณิตระบบยุคลิด

เนื่องจากกรุปของการแปลงความคล้ายและกรุปของการแปลงอีควิอาเรียลไม่เป็นสับกรุปกัน เพราะว่ามีกรุปการแปลงความคล้ายที่ไม่เป็นการแปลงอีควิอาเรียลและมีการแปลงอีควิอาเรียลที่ไม่เป็นการแปลงความคล้าย แต่จะมีการแปลงซึ่งเป็นการแปลงความคล้ายและเป็นการแปลงอีควิอาเรียลด้วย การแปลงนี้ก็คือการแปลงยูคลิดียนซึ่ง

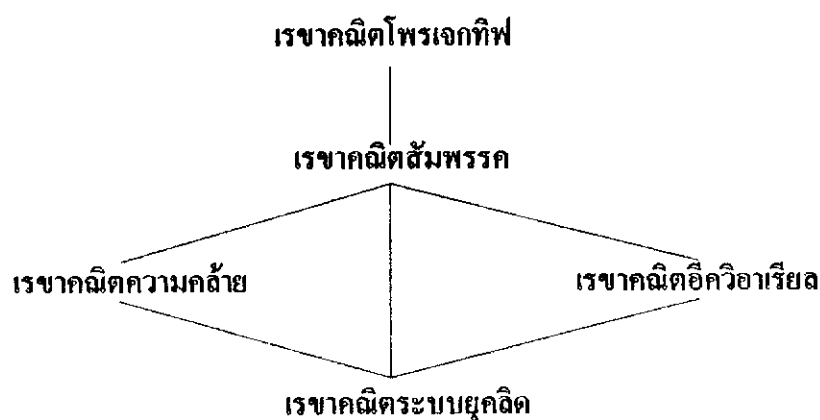
เมตริกซ์ของการแปลงยูคลิเดียนคือ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \pm(-a_2) & \pm a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } a_1^2 + a_2^2 = 1$$

และเซตของการแปลงยูคลิเดียนมีสมบัติเป็นกรุปของการแปลง ซึ่งเรขาคณิตระบบยูคลิดเป็นเรขาคณิตที่กำหนดโดยกรุปของการแปลงยูคลิเดียน

โดยที่การแปลงยูคลิเดียนเป็นการแปลงซึ่งเป็นการแปลงความคล้ายดั่งนั้นจึงเป็นการแปลงที่รักษานาของมุม และการแปลงยูคลิเดียนเป็นการแปลงอีควิอาเรียล จึงเป็นการแปลงที่รักษาพื้นที่ด้วย นอกจากนั้นสมบัติที่สำคัญของการแปลงยูคลิเดียนคือเป็นการแปลงซึ่งรักษาระยะระหว่างจุดซึ่งจะเรียกการแปลงบนระนาบที่รักษาระยะระหว่างจุดว่าไอโซเมตริ และรูปที่สมนัยกันภายใต้ไอโซเมตริจะเป็นรูปที่เท่ากันทุกประการ ดังนั้นโนคติเกี่ยวกับการเท่ากันทุกประการของรูปจึงศึกษาได้ในเรขาคณิตระบบยูคลิด

จากความสัมพันธ์ของกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตทั้ง 5 สาขาที่กล่าวมาแล้วเราจะเห็นความสัมพันธ์ของเรขาคณิตดังกล่าวดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ของเรขาคณิต

เนื่องจากเรขาคณิตระบบยูคลิดอยู่ในลำดับล่างสุดของเรขาคณิตทั้ง 5 สาขา จึงมีทฤษฎีบทต่าง ๆ มากมายซึ่งบางทฤษฎีบทจะเป็นสมบัติเฉพาะของเรขาคณิตระบบยูคลิด แต่จะไม่ใช่สมบัติของเรขาคณิตสาขาอื่น ในทำนองเดียวกันในเรขาคณิตความคล้ายจะมีทฤษฎีบทที่ไม่มีในเรขาคณิตสัมพรรค หรือทฤษฎีบทบางทฤษฎีในเรขาคณิตอีควิอาเรียลที่ไม่มีในเรขาคณิตสัมพรรค

คณิตสัพพรจะไม่มีในเรขาคณิตโพเรเจทิฟ แต่เราจะพบว่าในเรขาคณิตอยู่ในลำดับชั้นบนสุดนั้นนับได้ว่าเป็นเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานมากที่สุดเพราะทฤษฎีบททุกทฤษฎีบทจะเป็นจริงในเรขาคณิตสาขาอื่นด้วย

จากการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับกรุปของการแปลงทั้งหมดนี้ ยังมีสิ่งที่น่าสนใจและควรจะศึกษาต่อไป คือการศึกษาเกี่ยวกับกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด อันได้แก่เรขาคณิตแบบไฮเพอร์โบลิกและเรขาคณิตเชิงวงรี ซึ่งเราทราบว่าเป็นเรขาคณิตซึ่งศึกษาได้ในระนาบโพเรเจทิฟจริงที่เกี่ยวข้องกับการวัด อันได้แก่เรขาคณิตโพเรเจทิฟเมตริก และกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตเหล่านี้ยังเป็นสับกรุปของกรุปของการแปลงโพเรเจทิฟเช่นกัน และเป็นสิ่งน่าสนใจต่อไปว่าเราจะสามารถแทนกรุปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตเหล่านี้ด้วยเมตริกซ์ของจำนวนจริงได้หรือไม่ สำหรับผู้สนใจที่จะศึกษาต่อไปสามารถศึกษารายละเอียดบางส่วนได้จากหนังสือเรขาคณิตดังต่อไปนี้คือ

Fundamental Concepts of Geometry. โดย Bruce E. Meserve บทที่ 8

A Modern Introduction to Geometry. โดย Tuller, Annita. บทที่ 7

Projective Geometry volume II โดย Oswald Veblen และ John Wesley Young บทที่ 8

Linear Geometry โดย Rafael Artzy บทที่ 3

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- โชติ ธานีรัตน์. พัฒนาการเรขาคณิตอิลิปติก. การวิจัยวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2526. อัดสำเนา.
- ทิพย์วิภา พัฒนถาบุตร. พัฒนาการเรขาคณิตแปลงสภาพ. การวิจัยวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2526. อัดสำเนา.
- ประเสริฐ ทองคอนบม. การเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย ในระนาบของเรขาคณิตยูคลิดไฮเพอโบลิก และอิลิปติก. การวิจัยวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2533. อัดสำเนา.
- พรหมทิพย์ ม้ามณี. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพฯ : การศึกษาการพิมพ์, 2520.
- ภาวนา เผ่าน้อย. พัฒนาการเรขาคณิต. การวิจัยวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2521. อัดสำเนา.
- สมพร เรืองโชติวิทย์. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทร-วิโรฒ บางเขน, 2520.
- เสริมศักดิ์ วิชาลาภรณ์. รากฐานเรขาคณิต. พิษณุโลก : โครงการตำรามหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก, 2530.
- Adler, Claire F. Modern Geometry. New York : McGraw - Hill, 1976.
- Adler, Irving. A new Look at Geometry. New York : The John Day Company, 1966.
- Artzy, Rafael. Linear Geometry. Massachusetts : Addison - Wesley Publishing Company, 1970.
- Bell, Eric T. The Development of Mathematics. New York : McGraw - Hill, 1945.
- Granstein, William C. Introduction to Higher Geometry. New York : The Macmillan Company, 1963.

- Hilbert, David. Geometry and the Imagination. New York : Chelsea Publishing Company, 1952.
- Meserve, Bruce E. Fundamental Concepts of Geometry. London : Addison - Wesley Company, 1959.
- Smart, Jones R. Modern Geometries. California : A Division of Wadsworth Publishing Company Inc., 1973.
- Springer, C.E. Geometry and Analysis of Projective Spaces. San Francisco : W.H. Freeman Company, 1964.
- Tuller, Annita. A Modern Introduction to Geometry. London : D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.
- Veblen, Oswald. and J.W. Yong. Projective Geometry Volume II. New York : Blaisdell Publishing Company, 1917.
- Yaglom, I.M. Geometric Transformation I. Washington D.C. : Random House The L.W. Singoer Company, 1968.
- _____. Geometric Transformation II. Washington D.C. : Random House The L.W. Singoer Company, 1968.
- _____. Geometric Transformation III. Washington D.C. : Random House The L.W. Singoer Company, 1968.
- Young, John Wesley. Projective Geometry. Illinois : The Open Court Publishing Company, 1971.

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ	นายสินชัย ชื้อสกุล จันทร์เสม
เกิดวันที่	8 เดือนพฤศจิกายน พุทธศักราช 2506
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสาคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 38/25 หมู่บ้านเมืองแก้ว ตำบลบางแก้ว อำเภอบางพลี จังหวัดสมุทรปราการ 10540
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสารวิทยา เขตจตุจักร กรุงเทพฯ
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2520	จบชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 จากโรงเรียน วัดศรีวนาราม จังหวัดสมุทรสาคร
พ.ศ. 2523	จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากโรงเรียน สมุทรสาครวิทยาลัย จังหวัดสมุทรสาคร
พ.ศ. 2525	จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากโรงเรียน วัดราชบพิธ กรุงเทพฯ
พ.ศ. 2529	ได้รับการศึกษามหาบัณฑิต (กศ.บ) วิชาเอก วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน
พ.ศ. 2539	ได้รับการศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

การสำรวจรูปของการแปลงเชิงเรขาคณิต

บทคัดย่อ
ของ
สินชัย จันทรเสม

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2539

การศึกษาค้นคว้านี้มุ่งจะสำรวจรูปของการแปลงอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตสาขาต่าง ๆ ตามบทนิยามเรขาคณิตของไคลน์ ซึ่งประกอบด้วยรูปของการแปลงโพเรเจกทิฟ รูปของการแปลงสัมพรรค รูปของการแปลงความคล้าย รูปของการแปลงอีควิอาเรียลและรูปของการแปลงยูคลิเดียนอันเป็นตัวกำหนดเรขาคณิตโพเรเจกทิฟ เรขาคณิตสัมพรรค เรขาคณิตความคล้าย เรขาคณิตอีควิอาเรียล และเรขาคณิตระบบยูคลิดตามลำดับ นอกจากนั้นยังรวบรวมความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับรูปของการแปลง เช่น การแปลงในเรขาคณิตระบบยูคลิด และความรู้พื้นฐานในเรขาคณิตโพเรเจกทิฟ ทั้งแบบสังเคราะห์และแบบวิเคราะห์

จากการศึกษาแสดงให้เห็นได้ว่า รูปของการแปลงสัมพรรคเป็นสับกรุปของรูปของการแปลงโพเรเจกทิฟ รูปของการแปลงความคล้าย และรูปของการแปลงอีควิอาเรียลเป็นสับกรุปของรูปของการแปลงสัมพรรค และรูปของการแปลงยูคลิเดียนเป็นสับกรุปของรูปของการแปลงความคล้ายและเป็นสับกรุปของรูปของการแปลงอีควิอาเรียลด้วย และยังพบว่าการแปลงต่าง ๆ ดังกล่าวสามารถแทนได้ด้วยเมตริกซ์ของจำนวนจริง

A SURVEY OF GROUP OF GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

AN ABSTRACT

BY

SINCHAI JANSEM

Presented in partial fulfillment of the requirements for the

Master of Education degree in Mathematics

at Srinakharinwirot University

March 1996

The purpose of this study is to survey groups of transformations that correspond to the types of geometries according to Klein's geometric definition. They are groups of projective, affine, similarity, equiareal, and Euclidean transformations, which correspond to projective geometry, affine geometry, similarity geometry, equiareal geometry, and Euclidean geometry respectively. It also gathers basic knowledges of groups of transformations, e.g. all transformations in the Euclidean geometry and basic knowledges of projective geometry both viewing in synthetic and analytic concepts.

According to the study, it is shown that group of affine transformations is a subgroup of projective transformations, groups of similarity transformations and of equiareal transformations are subgroups of affine geometry. Furthermore, the group of Euclidean transformations is a subgroup of both similarity transformations and equiareal transformations. In addition, it is also found out that all types of transformations above can be replaced by matrices of real numbers.