

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ปริญญานิพนธ์
ของ
พงศ์ศรัศมี เฟื่องฟู

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2545
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

บทคัดย่อ
ของ
พงศ์วิศม์ เฟื่องฟู

23 ก.ค. 2545

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2545

พงศ์รัตมี เฟื่องฟู. (2545). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ศรีเสงี่ยม จักรใจ, ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บวรกิตวงศ์.

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างบทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นใช้เวลาสอน 12 คาบ คาบละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แล้วนำคะแนนสอบมาวิเคราะห์และตัดสินผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโดยใช้สถิติทดสอบ Z

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้และประยุกต์เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

A STUDY OF ACHIEVEMENT IN LEARNING MATHEMATICAL INDUCTION OF
MATHAYOM SUKSA V STUDENTS

AN ABSTRACT
BY
PONGRUS PHUANGPHOO

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
May 2002

Pongrus Phuangphoo. (2002). *A Study of Achievement in Learning Mathematical Induction of Mathayom Suksa V Students*. Master Thesis, M.Ed.(Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Srisangiem Jugjai, Assist. Prof. Apichai Bowarnkitiwong.

The purpose of this research were to construct the mathematical induction lessons for Mathayom Suksa V students and to study the achievement of learning on mathematical induction of Mathayom Suksa V students.

A sample consisted of thirty – five junior high school students [Mathayom Suksa V] from the Secondary Demonstration School of Rajabhat Institute Bansomdejchaopraya in Bangkok. The experiment was executed during the second semester of the 2001 academic year. The students were taught, based on the lessons prepared by the researcher, by using twelve 50-minute periods. A final of the experiment, the achievement tests were given to them and their scores were later analyzed and judged for its effectiveness by the z – test.

The experiment indicated that the Mathayom Suksa V students were able to learn the concepts and applications of mathematical induction at the .01 significance level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ของ
นายพงศ์ศรีศมี เฟื่องฟู

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาพร หะวานนท์)
วันที่ 3 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2545

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ศรีเสงี่ยม จักรใจ)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิตติวงศ์)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนุกฤติ)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชุตินวรรณ เพ็ญเพียร)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เนื่องจากความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาที่ดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ศรีเสงี่ยม จักรใจ ประธานกรรมการควบคุม และผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บวรกิตติวงศ์ กรรมการควบคุม โดยท่านได้กรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ฐนุกฤติ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจบทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ฤทัย แฉงแสงส่ง ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจบทเรียนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ฐนุกฤติ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินวรรณ เพ็ญเพียร ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ และคณะครูหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่ อย่างสุดซึ้งที่ทำให้กำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

และสุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโท รุ่นปี พ.ศ. 2542 ทุกคนที่เป็นกำลังใจทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

พงศ์ศรีมี เฟื่องฟู

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ภูมิหลัง.....	1
	จุดมุ่งหมายของการวิจัย.....	5
	ความสำคัญของการวิจัย.....	5
	ขอบเขตของการวิจัย.....	5
	คำนิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการวิจัย.....	6
	สมมติฐานของการวิจัย.....	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
	ประวัติความเป็นมาของการพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	7
	ขอบเขตเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์ของ การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	7
	โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.....	10
	มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ของ นักเรียนในสหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ.2000 (พ.ศ.2543).....	12
	เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	13
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในเรื่องการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองในระดับที่ต่ำกว่า.....	16
3	วิธีดำเนินการวิจัย.....	19
	ประชากร.....	19
	กลุ่มตัวอย่าง.....	19
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	19
	วิธีดำเนินการวิจัย.....	21
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	21
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	22
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	23
	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบ ปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	23
	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบ อัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	24
	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบ ปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	24

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
คำร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจาก การทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัย เชิงคณิตศาสตร์.....	25
ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	25
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	27
สังเขปจุดมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย และวิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล.....	27
สรุปผลการวิจัย.....	28
อภิปรายผล.....	28
ข้อเสนอแนะ.....	29
บรรณานุกรม.....	30
ภาคผนวก.....	34
ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล.....	35
ภาคผนวก ข แบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	38
ภาคผนวก ค บทเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	48
ภาคผนวก ง แผนการสอนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	94
ภาคผนวก จ รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ.....	103
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	105

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัย วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	23
2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	24
3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัย วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	24
4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำ แบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	25
5 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	25
6 ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์.....	36

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์สำคัญศาสตร์หนึ่งของมนุษย์ที่ได้คิดค้นขึ้นมา วิชานี้มีประวัติความเป็นมาย้อนหลังไปถึงประมาณสี่หรือห้าพันปีก่อนคริสตศักราช และได้พัฒนาต่อมาเป็นลำดับโดยเฉพาะตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 17 เป็นต้นมา ซึ่งความก้าวหน้าในวิชานี้เป็นไปอย่างกว้างขวาง ลึกซึ้ง และรวดเร็วทั้งในด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์จนทำให้วิชาคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อโลกมากยิ่งขึ้นกว่าที่เป็นมาในอดีต และทวีความสำคัญขึ้นเป็นลำดับ ปัจจุบันวิชาคณิตศาสตร์นอกจากจะมีบทบาทสำคัญต่อวงการศึกษาด้านที่ช่วยพัฒนาความคิดของผู้เรียนให้เป็นคนที่คิดอย่างมีเหตุผลแล้ว คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทสำคัญต่อโลกปัจจุบันในวิทยาการทุกแขนง เช่น ด้านเทคโนโลยี เศรษฐกิจและสังคม ตลอดจนเป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยทุกประเภท และได้ชื่อว่าเป็นเครื่องนำทางไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ทั้งนี้เนื่องจากความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ต้องอาศัยหลักการใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์อย่างขาดไม่ได้ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งของโลก ได้กล่าวไว้ในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ 19 ว่า “คณิตศาสตร์เปรียบเสมือนราชินีของวิทยาศาสตร์” (Mathematics is the queen of the Sciences) (Eves, 1964 : 395) ต่อมาในสมัย คริสต์ศตวรรษที่ 20 นี้ เป็นที่ตระหนักกันโดยทั่วไปว่า ความเจริญของแขนงวิชาต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนสังคมวิทยา ต่างก็ขึ้นอยู่กับพัฒนาการของคณิตศาสตร์เป็นส่วนใหญ่ และในบางกรณีคณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนาวิทยาการสาขาต่าง ๆ จนเราไม่อาจจะขาดเครื่องมือนี้เสียได้ (สมชาย ชูชาติ, 2542 : 77)

เมื่อวิวัฒนาการเจริญก้าวหน้าขึ้น ก็ทำให้ประเทศต่าง ๆ มีการตื่นตัวที่จะปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรขึ้น ซึ่งความตื่นตัวนี้มีมานานกว่า 50 ปีแล้ว โดยได้รับอิทธิพลจากประเทศรัสเซีย ซึ่งรัสเซียได้ส่งยานสปุตนิก (sputnik) ขึ้นสู่อวกาศในปี ค.ศ. 1957 ทำให้ประเทศต่าง ๆ โดยเฉพาะประเทศแถบตะวันตก เช่น สหรัฐอเมริกา หันมาสนใจที่จะปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรและพิจารณากระบวนการศึกษาใหม่ (พิชากร แปลงประสพโชค, 2540 : 2) การปรับปรุงและการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรนั้นจะเริ่มที่ระดับอุดมศึกษาก่อน โดยมีการเพิ่มรายวิชาใหม่ ๆ และเน้นทฤษฎีมากขึ้น ซึ่งในปัจจุบันผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษามีความพึงพอใจค่อนข้างมากในการจัดโครงสร้างของหลักสูตรเพื่อตอบสนองต่อการศึกษาระดับอุดมศึกษา (กรมวิชาการ, 2539 : 122) อีกทั้งหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในปัจจุบันมีแนวโน้มในการนำเนื้อหาในระดับอุดมศึกษามารรจลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา จึงทำให้มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการนำเนื้อหาในระดับอุดมศึกษาลงมาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษา ดังตัวอย่างงานวิจัยในประเทศ ซึ่ง ผู้วิจัยคือ ธานีรินทร์ สิทธิวิรัชธรรม (2542 : 26) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และงานวิจัยต่างประเทศซึ่งผู้วิจัยคือ ไวท์ (White, 1974 : 1969 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และ 8 ในการเรียนแนวคิดเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนเกรด 7 และ 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนแนวคิดเบื้องต้นของความน่าจะเป็นได้ และไวท์ได้เสนอให้นำเนื้อหาเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นบรรจุลงในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และ 8 ซึ่งสอดคล้อง

กับงานวิจัยในประเทศของ รจนา รัตนนิคม (2544 : 29) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น สูงกว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการที่มีการนำเอาเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่าก่อให้เกิดผลดีหลายประการ ดังที่ ณรงค์ บัณฑิต ก้าวไวยว่า การนำเอาเนื้อหาในระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า หลังจากที่ได้ปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมแล้วนั้นมีผลดี คือ

1. เป็นพื้นฐานของนักเรียนที่จะได้เรียนในระดับสูงต่อไป และสามารถปรับตัวให้เข้ากับสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ เมื่อได้เรียนเรื่องใหม่ในชั้นสูง

2. ลดความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ทำให้สถาบันอุดมศึกษาต่าง ๆ สามารถยกมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นอุดมศึกษาให้สูงขึ้น

3. เป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตนักคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสูงขึ้นให้เพียงพอกับความต้องการของประเทศ

4. นักวิชาการแขนงอื่น ๆ ที่ต้องการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จะได้นำหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่าย และรวดเร็วขึ้น

5. สำหรับผู้ที่ไม่มีโอกาสได้เข้าเรียนในระดับอุดมศึกษา ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนในระดับมัธยมศึกษา จะช่วยให้เข้าใจความเคลื่อนไหวต่าง ๆ ของโลกปัจจุบันได้ดียิ่งขึ้น เนื่องจากว่า ผลงานการวิจัยต่าง ๆ และการให้ข่าวสารส่วนมากจะนำเสนอออกมาในรูปทางคณิตศาสตร์ (ณรงค์ บัณฑิต, 2519 : 1)

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) เป็นสมาคมที่มีบทบาทหน้าที่ในการจัดทำ มาตรฐาน (Standards) ของวิชาคณิตศาสตร์ขึ้น เพื่อเผยแพร่ให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศสหรัฐอเมริกาอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานเดียวกัน ซึ่ง สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้จัดพิมพ์เอกสาร Principles and Standards for School Mathematics ปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ.2543) เพื่อเป็นมาตรฐานหลักสูตรที่จะใช้ต่อไป สำหรับให้นักเรียนทุกคนได้มีโอกาสเรียนคณิตศาสตร์ และสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้ได้อย่างมีศักยภาพ และมีประสิทธิภาพ โดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้เสนอ หลักการ (Principles) และ มาตรฐาน (Standards) เพื่อให้ครูได้ใช้เป็นแนวทางในการจัดโปรแกรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ดังนี้

หลักการ (Principles) มีทั้งหมด 6 หลักการ ได้แก่

1. การเสมอภาค (The Equity)
2. หลักสูตร (The Curriculum)
3. การสอน (The Teaching)
4. การเรียนรู้ของนักเรียน (The Learning)
5. การประเมินผล (The Assessment)
6. เทคโนโลยี (The Technology)

มาตรฐาน (Standards) เนื้อหา และ กระบวนการทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน มีทั้งหมด

10 มาตรฐาน ดังนี้

1. จำนวน และ การดำเนินการ (Number and Operations)
2. พีชคณิต (Algebra)

3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูล และความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)
6. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
7. การให้เหตุผล และการพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
8. การสื่อสาร / การสื่อความหมาย (Communication)
9. การเชื่อมโยง (Connection)
10. การแสดง / การนำเสนอ (Representation) (Principles and Standards for School

Mathematics. 2000 : 10 – 360)

มาตรฐานข้อ 7 คือ มาตรฐานการให้เหตุผลและการพิสูจน์เป็นมาตรฐานที่เน้นกระบวนการให้เหตุผล และการสร้างความสามารถในการพิสูจน์ ซึ่ง ปานทอง กลุณาคศิริ กล่าวว่า มาตรฐานการให้เหตุผลและการพิสูจน์เป็นมาตรฐานเพื่อให้ นักเรียนทุกคนมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. สามารถเข้าใจและตระหนักในคุณค่าของการเรียนเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ว่าเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้ นักเรียนมีศักยภาพทางคณิตศาสตร์ต่อไป
2. สามารถที่จะคาดการณ์และสืบสวนการคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
3. สามารถพัฒนาและประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ และสามารถพัฒนาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น
4. สามารถเลือกและใช้วิธีการในการให้เหตุผลต่าง ๆ ที่มีความเหมาะสม (ปานทอง กลุณาคศิริ. 2543 : 4 – 17)

จากหลักการและมาตรฐานดังกล่าว จะเห็นได้ว่า สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้เล็งเห็นความสำคัญของกระบวนการให้เหตุผลและการพิสูจน์โดยจัดเป็นมาตรฐานข้อที่ 7 จากมาตรฐานทั้งหมด 10 ข้อ และได้นำเอาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์บรรจุลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 9 – 12 สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาชั้นนั้น Knuth และ Elliott กล่าวถึงเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นเรื่องยากทั้งครูและนักเรียน ซึ่งการฝึกให้นักเรียนได้รู้จักการใช้เหตุผลในการพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญที่จะต้องได้รับการฝึกฝน เพื่อให้นักเรียนได้เกิดความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหา การคาดคะเนถึงคำตอบที่เกิดขึ้น รวมทั้งความถูกต้องของคำตอบตามหลักฐานทางคณิตศาสตร์ (Knuth and Elliott. 1998 : 714 – 717)

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ในประเทศไทย มีเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์และการให้เหตุผลได้แก่ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 (ค 203 คณิตศาสตร์ 3) เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ค 021 คณิตศาสตร์) เรื่อง การพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (ค 011 คณิตศาสตร์) เรื่อง ระบบจำนวนจริง ในหัวข้อสมบัติความสมบูรณ์ และสมบัติของจำนวนเต็ม เรื่อง ตรรกศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ค 013 คณิตศาสตร์) เรื่อง การพิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ จากหลักสูตรดังกล่าว จะเห็นได้ว่า วิชาคณิตศาสตร์ในประเทศไทยยังมีเนื้อหาเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ค่อนข้างน้อย ผู้วิจัยเห็นว่า จึงควรเพิ่มเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ให้มากขึ้นกว่าเดิม เพื่อให้ นักเรียนได้รู้จักฝึกฝนและพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ให้สูงขึ้น เนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ คือ การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) ซึ่งน่าจะเป็นเนื้อหาที่เหมาะสมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่จะฝึกฝนและเพิ่มศักยภาพในการพิสูจน์

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นวิธีพิสูจน์แบบหนึ่งที่มีลักษณะเฉพาะตัว และเป็นเรื่องที่สำคัญของการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในแขนงต่าง ๆ เช่น หลักการคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์เต็มหน่วย ระบบจำนวน ทฤษฎีจำนวน การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ และในปัจจุบันวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยเรื่องทฤษฎีกราฟมีแนวโน้มเข้ามาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายแล้ว ซึ่งการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นหัวข้อหนึ่งที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย และ สมวงษ์ แปลงประสพโชค กล่าวว่า การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีหนึ่งของการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับซึ่งเป็นสมบัติที่สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยความรู้พื้นฐาน คือ “หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” (Principle of Mathematical Induction) (สมวงษ์ แปลงประสพโชค. 2537 : 5) ในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ บ่อยครั้งที่ต้องอาศัยการพิสูจน์โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เช่น การพิสูจน์ทฤษฎีบทในวิชาพีชคณิต ตรีโกณมิติ เรขาคณิต และทฤษฎีจำนวน ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ สุเทพ จันทรมงคลี ที่ว่า เนื้อหาทางคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ยังอาศัยการพิสูจน์โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทั้งนี้เนื่องจากความจำเป็น 2 ประการ คือ

1. คณิตศาสตร์หลายสาขาส่งขึ้นจากจำนวนธรรมชาติ (จำนวนนับ) เช่น ระบบจำนวนตรรกยะ และระบบจำนวนจริง ซึ่งจำนวนตรรกยะสร้างมาจากจำนวนนับ และจำนวนจริงสร้างมาจากจำนวนตรรกยะ
2. บางสาขาอาจสามารถตีความในรูปของจำนวน เช่น เนื้อหาในวิชาเรขาคณิตของยุคลิดสามารถกล่าวอยู่ในรูปพิภพของจำนวนจริง กล่าวคือ สมมติฐานเชิงเรขาคณิตบางข้อ อาจจะใช้การพิสูจน์ซึ่งอาศัยการตีความในเชิงจำนวนซึ่งใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แก้ปัญหาได้ อีกทั้งวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบท และ สูตรต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ (สุเทพ จันทรมงคลี. 2539 : 85)

ในปัจจุบันมีเนื้อหาในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายบางเรื่องสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ ดังตัวอย่างโจทย์ที่ว่า

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
2. 2 หาร $n(n+1)$ ลงตัว
3. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จากข้อความทั้ง 4 ข้อความนี้ สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความคิดที่จะนำการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เนื่องจากจะเป็นพื้นฐานในการนำความรู้เรื่องนี้ไปใช้ในการศึกษาระดับสูง เป็นการฝึกนักเรียนในเรื่องการเขียนการพิสูจน์และสรุปผลได้อย่างสมเหตุสมผล นอกจากนี้ยังมีประโยชน์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการสอบแข่งขัน เพราะบ่อยครั้งที่โจทย์แข่งขันโอลิมปิกทางคณิตศาสตร์ออกข้อสอบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยใช้การพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างโจทย์ที่ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ $f(0,y) = y+1$, $f(x+1,0) = f(x,1)$ และ $f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y))$ สำหรับ x, y ใด ๆ ที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ แล้ว จงหา $f(4,1999)$ (ศรีเสถียร จักไร. 2543 : 73)

จากเหตุผลและความสำคัญดังที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เหตุผลที่เลือกชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพราะว่า ผู้ที่จะเรียนวิธีพิสูจน์แบบนี้ได้ควรมีพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 (ค 011) เรื่อง เซต ระบบจำนวน ตรรกศาสตร์ (ค 012) เรื่อง เครื่องหมายรวมยอด (ค 013) เรื่อง เมตริกซ์ ทรีโกณมิติ และ (ค 014) เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน เนื่องจากเนื้อหาในบทประยুক্তจะเกี่ยวข้องกับเนื้อหาเรื่องเครื่องหมายรวมยอด , เมตริกซ์ , ทรีโกณมิติ และจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีพื้นฐานในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาแล้ว ดังนั้น ผู้วิจัยคิดว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นนักเรียนที่มีความเหมาะสมในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ นอกจากนี้ผลที่ได้จากงานวิจัยอาจนำไปใช้ในการพิจารณาเนื้อหาที่จะบรรจุลงในวิชาเลือกเสรีว่ามีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใด และเป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ต่อไปในอนาคต

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มาสอนนักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. ทำให้ได้ต้นแบบบทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่สำหรับใช้สอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
3. ผลการวิจัยครั้งนี้อาจเป็นแนวทางในการพัฒนาเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากร ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร
2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน
3. เนื้อหาของเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย
 - 3.1) ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น (2 คาบ)
 - 3.2) หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ (6 คาบ)
 - 3.3) หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ (1 คาบ)
 - 3.4) บทประยুক্তของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (3 คาบ)
4. ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองสอนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะเป็นช่วง ภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2544 จำนวน 6 วัน วันละ 2 คาบ รวม 12 คาบ (คาบละ 50 นาที) และระยะเวลาที่ใช้ในการทดสอบเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ใช้เวลาทั้งหมด 2 ชั่วโมง

5. ตัวแปรที่ศึกษา

- 5.1) ตัวแปรต้น ได้แก่ บทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
- 5.2) ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

คำนิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการวิจัย

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมศึกษา สานิตสถานบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 ที่ผ่านการเรียนวิชา ค 011 (คณิตศาสตร์) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ หมายถึง คะแนนของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. เกณฑ์ หมายถึง คะแนนในการทำแบบทดสอบซึ่งคิดเป็นร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งแบ่งได้ดังนี้

- ตอนที่ 1 ประวัติความเป็นมาของการพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- ตอนที่ 2 ขอบเขตเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- ตอนที่ 3 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)
- ตอนที่ 4 มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ของนักเรียนในสหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543)
- ตอนที่ 5 เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 5.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 5.2 การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 5.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
- ตอนที่ 6 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในเรื่องการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า
 - 6.1 งานวิจัยภายในประเทศ
 - 6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

ตอนที่ 1 ประวัติความเป็นมาของการพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by Principle of Mathematical Induction) เป็นการพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนธรรมชาติ (Natural Number) หรือจำนวนเต็มบวก (Positive Number) หรือจำนวนนับ (Counting Number) ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก โดยคนแรกที่พิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ คือ ฟรานซิสคัส มัวโรลัส (Franciscus Maurolycus , 1494 – 1575) เสมียนชาวอิตาลี ซึ่งเขาได้พิสูจน์ข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n แต่การพิสูจน์ของเขานั้นเป็นเพียงฉบับร่างยากที่จะติดตามหลักฐาน แต่ต่อมาคนที่พิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน คือ แบลส์ ปาสกาล (Blaise Pascal , 1623 – 1662) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส โดยเขาได้พิสูจน์ทฤษฎีบทของเขาโดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งทฤษฎีบทของเขาเป็นสูตรที่ใช้สำหรับการหาสัมประสิทธิ์ทวินามที่เราใช้กันอยู่ในปัจจุบันซึ่งเป็นที่รู้จักกันในนาม “สามเหลี่ยมปาสกาล” (Pascal Triangle) (ฤทัย แดงแสงส่ง. 2542 : 113)

ตอนที่ 2 ขอบเขตเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

ให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ S เป็นสับเซตใด ๆ ของ N และ S มีสมบัติต่อไปนี้

- 1) $1 \in S$ และ
 - 2) $\forall k [k \in S \rightarrow k+1 \in S]$
- แล้ว $S = N$

ทฤษฎีบท หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความ $P(n)$ ว่าเป็นจริงสำหรับทุกค่า n ที่เป็นจำนวนนับ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะกระทำได้นี้

สำหรับ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n

- ถ้า
- 1) $P(1)$ และ
 - 2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

แล้ว $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง

ทฤษฎีบท หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n และ a เป็นจำนวนนับ

- ถ้า
- 1) $P(a)$ และ
 - 2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \geq a$

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq a$

บทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เราสามารถนำประโยชน์จากการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันได้จากปัญหาต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1 สมมติว่า มีแสตมป์ 2 ชนิด ชนิดราคา 3 บาท และ 5 บาท เราจะแสดงว่าสามารถใช้แสตมป์ 2 ชนิดนี้รวมกันเพื่อให้ได้ไปรษณียากรมูลค่า 8 บาท หรือมากกว่านั้น

วิธีทำ

เป็นที่แน่นอนว่า ในการทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า 8 บาท , 9 บาท , 10 บาท ไปเรื่อย ๆ โดยแสดงให้เห็นเป็นกรณี ๆ ไป คงเป็นวิธีที่ไม่มีประสิทธิภาพมากนัก เพราะมีกรณีมากมายที่ต้องการตรวจสอบลองมาพิจารณาวิธีต่อไปนี้

เราจะต้องแสดงว่า ถ้าเป็นไปได้ที่ทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า k บาท โดยใช้แสตมป์ชนิด 3 บาท และ 5 บาท จะได้ว่า การทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k+1$ บาท โดยใช้แสตมป์ทั้งสองชนิดนี้ ก็จะเป็นไปได้เช่นกัน โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 สมมติว่า เราทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า k บาท โดยใช้แสตมป์ชนิด 5 บาทอย่างน้อย 1 ดวง เราจะแทนแสตมป์ชนิด 5 บาท 1 ดวง ด้วยแสตมป์ 3 บาท 2 ดวง พบว่า เราได้วิธีที่ทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k+1$ บาท

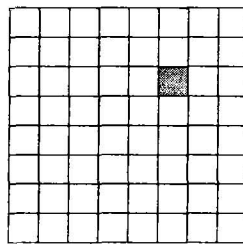
กรณีที่ 2 สมมติว่า เราทำให้เกิดประโยชน์การมูลค่า k บาท โดยใช้แสตมป์ชนิด 3 บาทเพียงอย่างเดียว เพราะว่า $k \geq 8$ เราต้องใช้แสตมป์ชนิด 3 บาทอย่างน้อย 3 ดวง ถ้าใช้แสตมป์ ชนิด 5 บาท 2 ดวง แทนแสตมป์ชนิด 3 บาท 3 ดวงนั้น เราจะได้วิธีที่ทำให้เกิดประโยชน์การมูลค่า $k + 1$ บาท

เนื่องจากเห็นได้ชัดว่า เราจะทำให้เกิดประโยชน์การมูลค่า $k + 1$ บาท ได้อย่างไร (จากแสตมป์ชนิด 3 บาท กับ แสตมป์ชนิด 5 บาท)

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เราสามารถทำให้เกิดประโยชน์การมูลค่า 8 บาท , 9 บาท , 10 บาท , 11 บาท ... เป็นไปเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป

นั่นคือ เราสามารถใช้แสตมป์ 2 ชนิดนี้รวมกันเพื่อให้ได้ประโยชน์การมูลค่า n บาท สำหรับ n ที่เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 8

ปัญหาที่ 2 สมมติว่าเรามีกระดานหมากรุกมาตรฐานขนาด 8×8 และเอาช่องหนึ่งออกไป ดังรูปที่ 1 (แสดงด้วยช่องที่แรเงา) กระดานหมากรุกที่มีการเอาช่องหนึ่งออกไปจะเรียกว่า “กระดานหมากรุกมีตำหนิ”



รูปที่ 1

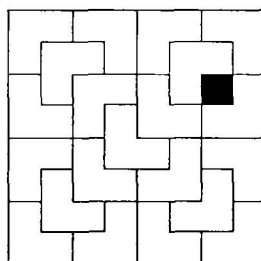
กำหนด ตัวปิด 3 ชิ้น รูปตัว L ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

เราต้องการทราบว่า มีทางเป็นไปได้หรือไม่ที่จะปิดช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เหลือ 63 ช่อง ของกระดานหมากรุกนี้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L (การปิดช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เหลือของกระดานหมากรุกนี้ เราหมายถึง การปิดแต่ละช่องสี่เหลี่ยมเพียงครั้งเดียว โดยไม่ให้ตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L เกินไปทับบนช่องที่เอาออก หรือออกนอกกระดาน)

วิธีทำ คำตอบที่เป็นไปได้ คือ รูปที่ 3

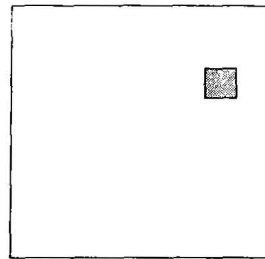


รูปที่ 3

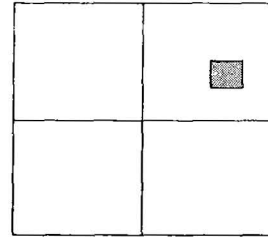
เราสามารถจะแสดงการพิสูจน์ผลลัพธ์ในกรณีทั่วไป ดังนี้

เราต้องการแสดงว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^n \times 2^n$ จะสามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L เสมอ เห็นได้ชัดเลยว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^1 \times 2^1$ นั้น สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L ตัวหนึ่งเสมอ คราวนี้เรามาสมมติว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ ใด ๆ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L จะแสดงให้เห็นว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L เช่นกัน

พิจารณากระดานหมากรุกมีด้าน $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ดังรูปที่ 4

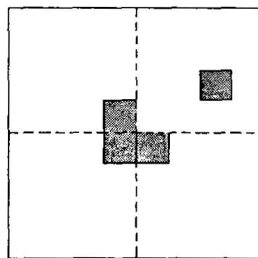


รูปที่ 4



รูปที่ 5

แบ่งกระดานหมากรุกนี้เป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนจะเป็นกระดานหมากรุกขนาด $2^k \times 2^k$ ดังรูปที่ 5 หนึ่งในสี่ส่วนนี้จะเป็กระดานหมากรุกมีด้าน โดยการปิดด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L ที่กึ่งกลางของกระดานหมากรุกขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ เราจะได้ 3 ส่วนที่เหลือก็มีลักษณะเป็นกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ (ดังรูปที่ 6) เพราะเราสมมติไว้ก่อนว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ ใด ๆ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L เราจึงสามารถปิดแต่ละส่วนด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L และสรุปว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L



รูปที่ 6

นั่นคือ เริ่มต้นด้วยการปิดกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^1 \times 2^1$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ปิดกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^n \times 2^n$ ใด ๆ ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L ได้เสมอ (เมื่อ n เป็นจำนวนนับใด ๆ)

ตอนที่ 3 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533)

กระทรวงศึกษาธิการได้มีการเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตรทุกระดับชั้น เพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการของสังคม ซึ่งในปี พ.ศ. 2520 ได้มีการประกาศใช้หลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีชื่อว่า หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ซึ่งประกาศใช้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2521 เพื่อให้การศึกษาเป็นระบบที่ต่อเนื่องกันโดยตลอด สำหรับบุคคลที่จะเรียนในระดับสูงขึ้นไป กระทรวงศึกษาธิการจึงได้เปลี่ยนแปลงหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายเสียใหม่เพื่อให้สอดคล้องกับหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ซึ่งมีชื่อว่า หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 และได้ประกาศใช้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2524

เป็นต้นมา หลังจากหลักสูตรใช้มาระยะหนึ่งจนถึงปี พ.ศ. 2533 ได้มีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรทั้ง 2 ฉบับ อีกครั้งหนึ่ง โดยเฉพาะหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ในปีการศึกษา 2534 โดยวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จัดอยู่ในประเภทวิชาเลือกเสรี โดยแบ่งเป็น 2 โครงสร้าง ดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 215 – 217)

โครงสร้างที่ 1 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ (สายวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์) หรือ (สายอังกฤษ – คณิตศาสตร์) ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 011 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 012 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 013 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 014 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 015 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 016 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011 – ค 016 ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 021 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 022 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 023 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 024 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 025 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 026 คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะด้านเพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011 – ค 016 อาจเลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 031 คณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.0 หน่วยการเรียนรู้
------------------	-----------------------	----------------------

รายวิชา ค 011 – ค 016 รายวิชาละ 2.5 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางด้านคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับสูง หรือมุ่งศึกษาต่อในแขนงที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ หรือ วิทยาศาสตร์ เป็นต้น ผู้เรียนในกลุ่มนี้ หากต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมอาจเลือกเรียนรายวิชา ค 021 – ค 026 รายวิชาละ 0.5 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นชุดที่เน้นการศึกษาด้วยตนเอง และเรื่องที่เลือกให้เรียนเป็นการตกลงระหว่างผู้สอนและผู้เรียนเป็นรายบุคคล โดยความเห็นชอบของโรงเรียน และใช้รหัสวิชา ค 021 เป็นรายวิชาแรกที่เริ่มเรียนของแต่ละคน นอกจากนี้หากผู้เรียนต้องการเลือกเรียนรายวิชาที่เป็นเนื้อหาเฉพาะด้านเพิ่มเติมอีกอาจเลือกเรียนรายวิชา ค 031 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเน้นการศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปทางวิชาเรขาคณิต

โครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐาน ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 041 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 042 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 043 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 044 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 045 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 046 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

หมายเหตุ

สำหรับผู้เลือกเรียนวิชาชีพและประสงค์จะเลือกเรียนคณิตศาสตร์ อาจจะเลือกเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์จากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ

รายวิชา ค 041 – ค 046 รายวิชาละ 1.5 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐาน เหมาะสำหรับผู้ที่ต้องการมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่มากนัก เช่น รัฐศาสตร์ นิติศาสตร์ อักษรศาสตร์ เป็นต้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 131 – 138)

จากความสำคัญของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 ประกอบกับ หลักสูตรคณิตศาสตร์โครงสร้างที่ 1 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสำหรับผู้เรียนที่ต้องการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมอาจเลือกเรียนจากวิชา ค 021 – ค 026 ซึ่งเป็นชุดที่เน้นการศึกษาด้วยตนเอง และเรื่องที่เลือกให้เรียนเป็นการตกลงระหว่างผู้สอนและผู้เรียน ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาทดลองสอนนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และผลที่ได้จากการวิจัยอาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตร ซึ่งอาจจะบรรจุลงในวิชาเลือกเสรี รายวิชา ค 023 และ ค 024 เพื่อให้ให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เลือกเพิ่มจากรายวิชา ค 013 และ ค 014 ที่เรียนอยู่

ตอนที่ 4 มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ของนักเรียนในสหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543)

ในปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543) สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้กำหนดหลักสูตรมาตรฐานที่เรียกว่า (Standard) ซึ่งระบุเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ระดับเกรด 9 – 12 ของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา ว่าควรจะเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. จำนวน และ การดำเนินการ (Number and Operations)
2. พีชคณิต (Algebra)
3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูล และ ความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)
6. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
7. การให้เหตุผล และ การพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
8. การสื่อสาร / การสื่อความหมาย (Communication)
9. การเชื่อมโยง (Connection)
10. การแสดง / การนำเสนอ (Representation) (Principles and Standards for School

Mathematics. 2000 : 10 – 360)

จากมาตรฐานทั้งหมด 10 ข้อนี้ จะเห็นว่า สมาคมครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาให้ความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์จึงจัดให้เป็นมาตรฐานข้อที่ 7 จากทั้งหมด 10 ข้อ ซึ่งการให้เหตุผลและการพิสูจน์มีความจำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สมาคมครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาจึงบรรจุเนื้อหาที่เกี่ยวข้องการให้เหตุผลและการพิสูจน์ลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 9 – 12 และจากความสำคัญของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ และสอดคล้องกับมาตรฐานข้อที่ 7 ดังที่ผู้วิจัยกล่าวมาแล้วข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำเนื้อหาการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์แบบหนึ่งมาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย

ตอนที่ 5 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

5.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ไพศาล หวังพานิช ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ (Achievement) หรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (Academic Achievement) หมายถึงคุณลักษณะและความสามารถของบุคคลอันเกิดจากการเรียนการสอน เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมและประสบการณ์การเรียนรู้ที่เกิดจากการอบรม หรือจากการสอน การวัดผลสัมฤทธิ์เป็นการตรวจสอบระดับความสามารถ (Level Accomplishment) ของบุคคลหลังจากได้รับการอบรม (ไพศาล หวังพานิช. 2526 : 76)

อัฉรา สุขารมณ และอรพินท์ ชูชม ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ หมายถึง ขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการทำงานที่ต้องอาศัยความพยายามจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากการกระทำที่อาศัยความสามารถทางร่างกายหรือสมอง ดังนั้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจึงเป็นขนาดของความสำเร็จที่ได้จากการเรียน โดยอาศัยความสามารถเฉพาะตัวของบุคคล ตัวที่บ่งชี้ถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาจได้มาจากการประเมินที่ไม่ต้องอาศัยการทดสอบที่เรียกว่า (Nontesting Procedures) เช่น การสังเกต หรือตรวจการบ้าน หรืออาจอยู่ในรูปของเกรดที่ได้มาจากโรงเรียน ซึ่งต้องอาศัยกรรมวิธีที่ซับซ้อนและช่วงเวลาในการประเมินอันยาวนาน หรืออีกวิธีหนึ่งอาจวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั่วไป (Published Achievement Test) จะพบว่า การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่นิยมใช้กันทั่วไป มักอยู่ในรูปของเกรดที่ได้จากโรงเรียนเนื่องจากให้ผลที่เชื่อถือได้มากกว่า อย่างน้อยก่อนที่จะทำการประเมินผลการเรียนของนักเรียน ครูจะต้องพิจารณาองค์ประกอบอื่น ๆ อีกหลาย ๆ ด้าน จึงย่อมดีกว่าการแสดงความล้มเหลว หรือความสำเร็จทางการเรียน จากการทดสอบนักเรียนด้วยแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั่ว ๆ ไปเพียงครั้งเดียว (อัฉรา สุขารมณ และ อรพินท์ ชูชม. 2530 : 10)

วิลสัน (Wilson) ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้จำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาออกเป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด แบ่งออกเป็น 3 ขั้นดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่จะระลึกถึงข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้ว คำถามวัดความสามารถในระดับนี้จะเกี่ยวกับ ข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นเวลานานแล้ว

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และบทนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และบทนิยามต่าง ๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรง หรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability of Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริง หรือบทนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มา

1.4 ความสามารถทางด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณแต่ซับซ้อนกว่า แบ่งออกเป็น 6 ขั้นตอนดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concepts) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำที่เกี่ยวกับข้อเท็จจริงเพราะมโนคติเป็นนามธรรมที่ประมวลข้อเท็จจริงต่าง ๆ ซึ่งต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างของมโนคตินั้น โดยใช้คำพูดของตนหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนในรูปใหม่ หรือยกตัวอย่างที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นการวัดความจำ

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์ และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles, Rules and Generalization) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ, กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญหา ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการ และกฎที่นักเรียนพบเป็นครั้งแรก อาจจัดเป็นพฤติกรรม

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบของปัญหาจากแบบหนึ่งไปอีกแบบหนึ่ง (Ability of Transform Problem from One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นสมการที่มีความหมายคงเดิม โดยไม่รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหาหลังจากแปลแล้ว อาจกล่าวได้ว่าพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่ว ๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่าน และตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problems) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่น ๆ โดยนักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหา ซึ่งอาจอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนเคยพบในระหว่างเรียน นักเรียนจึงต้องเลือกกระบวนการแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาจนได้คำตอบ พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งเป็น 4 ขั้น คือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routing Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบของปัญหานั้น

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparision) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหานี้อาจต้องใช้วิธีการคิดคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องพิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่ประสออยู่หรือต้องแยกโจทย์ปัญหาเป็นส่วน ๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบ , ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns , Isomorphisms and Symetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่องตั้งแต่การระลึกได้ ข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาให้พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลงแต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

4.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ที่ไม่เคยประสอมาก่อน (Ability to solve Nonroutine Problems) คำถามในขั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อนไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจโมติ บทนิยามตลอดจนทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์ให้แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาแทนการจำความสัมพันธ์เดิมที่เคยพบมาแล้ว

4.3 ความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ (Ability to Citicize Proofs) เป็นความสามารถในการสร้างภาษาเพื่อยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล โดยอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้ว ไปพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน

4.4 ความสามารถในการสร้างสูตร และทดสอบความถูกต้องให้มีเหตุผลใช้ได้เป็นกรณีทั่วไป (Ability to formulate and Validate Generalizations) เป็นความสามารถในการค้นพบสูตร หรือกระบวนการแก้ปัญหา และพิสูจน์ว่าใช้ได้เป็นกรณีทั่วไปได้ (Wilson. 1971 : 643 – 696)

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ระดับความสามารถ หรือระดับของผลสัมฤทธิ์ของบุคคล หลังจากการเรียนรู้หรือจากการฝึกอบรม

5.2 การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ไพศาล หวังพานิช ได้กล่าวว่า การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสามารถวัดได้ 2 แบบ ตามจุดมุ่งหมายและลักษณะวิชาที่สอนคือ

1. การวัดด้านปฏิบัติ เป็นการตรวจสอบระดับความสามารถในการปฏิบัติ หรือทักษะของผู้เรียน โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้แสดงความสามารถออกมาในรูปการกระทำจริง เช่น วิชาศิลปะ พละ งานช่าง เป็นต้น
2. การวัดด้านเนื้อหา เป็นการตรวจสอบความสามารถเกี่ยวกับเนื้อหาวิชาอันเป็นประสบการณ์การเรียนรู้ของผู้เรียนสามารถวัดได้โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ (Achievement test) (ไพศาล หวังพานิช. 2526 : 79)

5.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ประกิจ รัตนสุวรรณ ได้กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เป็นแบบทดสอบที่มุ่งวัดพฤติกรรม และ ประสิทธิภาพทางการเรียนรู้ของผู้เรียน แบบทดสอบประเภทนี้จึงมุ่งวัดคุณลักษณะด้านความรู้ ความคิดในเรื่อง ที่เรียน ลักษณะการวัดผลสัมฤทธิ์จะขึ้นอยู่กับลักษณะและธรรมชาติของรายวิชาที่มีการจัดกิจกรรมการเรียน การสอนนั้น ๆ โดยอาจจะเป็นการวัดผลสัมฤทธิ์ในแง่เนื้อหาวิชาโดยตรง หรืออาจจะวัดผลสัมฤทธิ์ในเชิงลงมือปฏิบัติ หน้าที่สำคัญของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก็คือมุ่งตรวจสอบความสามารถในการเรียนของบุคคล ทั้งในส่วนที่ เกี่ยวกับระดับความสามารถในการเรียน ความก้าวหน้า หรือพัฒนาการในการเรียน (ประกิจ รัตนสุวรรณ. 2525 : 55)

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ ได้กล่าวว่า แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบที่ วัดความรู้ของนักเรียนที่ได้เรียนไปแล้ว ซึ่งมักเป็นข้อคำถามให้นักเรียนตอบด้วยกระดาษและดินสอกับให้นักเรียน ปฏิบัติ (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2536 : 146 – 147)

ประเภทและรูปแบบของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

สมเกียรติ ปติฐพร ได้กล่าวว่า ประเภทของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเอง (Teacher Made Test) หมายถึง ข้อสอบที่ใช้ทั่วไปในโรงเรียน โดยครูเป็นผู้สร้างขึ้นเอง สอบแล้วทิ้งไป จะสอบใหม่ก็สร้างขึ้นใหม่
2. แบบทดสอบมาตรฐาน (Standardized Test) หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นแล้วนำไปใช้ ทดสอบ แล้ววิเคราะห์ผลการสอบตามวิธีทางสถิติหลายครั้งเพื่อปรับปรุงข้อสอบให้มีคุณภาพดีขึ้น (สมเกียรติ ปติฐพร. 2525 : 7)

รูปแบบของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างง่ายและนิยมใช้มี 2 แบบ คือ

1. แบบอัตนัย หรือ ความเรียง (Subjective or Essay Type) หมายถึง แบบทดสอบที่กำหนด ปัญหา หรือข้อคำถามให้ผู้ตอบเขียนตอบยาว ๆ เหมาะสำหรับต้องการวัดหลาย ๆ ด้านในแต่ละข้อ เช่น วัด ความคิด วัดภาษา วัดอารมณ์
2. แบบปรนัยหรือแบบใช้ตอบสั้น ๆ (Objective or Short Answer Type) หมายถึงแบบทดสอบ ที่ให้ตอบสั้น ๆ หรือกำหนดคำตอบให้เลือก อาจเป็นคำตอบถูก – ผิด จับคู่ แบบเติมคำ หรือแบบเลือกตอบ ภาษา

ในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้เครื่องมือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยสร้างเป็นข้อสอบปรนัยแบบ เลือกตอบ 4 ตัวเลือก และข้อสอบอัตนัยแบบแสดงวิธีทำ

ตอนที่ 6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในเรื่องการนำเนื้อหาาระดับ สูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า

6.1 งานวิจัยภายในประเทศ

จากความพยายามของนักคณิตศาสตร์ศึกษา ได้พยายามที่จะปรับปรุงหลักสูตรการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้น จึงมีงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์มากมาย ซึ่งงานวิจัยที่ผู้วิจัยรวบรวมมานี้เกี่ยวกับการนำเนื้อหาาระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่าซึ่งได้แก่

วิรัตน์ ชาญศิริรัตน (2524 : 19 – 24) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการใช้บทนิยามและทฤษฎีบทในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยมีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาความสามารถในการใช้

บทนิยามและทฤษฎีบทในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์ สาย 1 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์ สาย 1 ของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดมหาสารคาม ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนมีความสามารถในการใช้บทนิยามและใช้ทฤษฎีบทในวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ บุญเกิด ชำนาญการคำ (2526 : 34 – 35) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของนักเรียนโรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา จังหวัดนครปฐม ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ได้ ต่อมาอีก 1 ปี สุขชัย ทองศิริ (2527 : 36 – 37) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง กรุปเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของโรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้ และอีก 2 ปีถัดมา วันชัย ทัพพะประณะ (2529 : 29 – 31) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ของโรงเรียนติบุกพังงาวิทยายน จังหวัดพังงา ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 สามารถเรียนเรื่อง เวกเตอร์ ได้ และอีกหลายปีถัดมา ดี บางกระ (2538 : 18) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดเป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 และในปีเดียวกัน สิริสินธุ์ นุชนาด (2538 : 52) ได้ทำการศึกษาการเรียนเรื่อง การลรรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคงคาราม อำเภอเมือง จังหวัดเพชรบุรี จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องการลรรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 ต่อมาอีก 1 ปี ปรีชา จั่นกล้า (2539 : 21) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนหัตถสารเกษตรวิทยาการ อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี จำนวน 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้นมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 และในปีเดียวกัน อำพล โต้ตอบ (2539 : 29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามได้ และอีก 3 ปีถัดมา ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม (2542 : 26) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 45 คน ผลปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไป ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 และอีก 2 ปีถัดมา รจนา รัตนานิคม (2544 : 29) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

กัปรัด (Gubrud. 1971 : 6468 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8 – 10 ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 และ 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับที่สูงกว่ามีความสามารถในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่านักเรียนในระดับที่ต่ำกว่า ต่อมาอีก 3 ปี ไวท์ (White. 1974 : 1969 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และ 8 ในการเรียนมโนคติเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนเกรด 7 และ 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องมโนคติเบื้องต้นของความน่าจะเป็นได้ และไวท์ได้เสนอให้นำเนื้อหาเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นบรรจุในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และ 8 และอีกหลายปีถัดมา ไวนิง (Vining. 1989 : 380 – A อ้างมาจาก ดี บางกระ. 2538 : 11) ได้ทำการศึกษาหัวข้อเรื่อง และแนวความคิดของคณิตศาสตร์เติมหน่วยในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาซึ่งกำหนดโดยสมาคม NCTM ไวนิงได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่สอนคณิตศาสตร์เติมหน่วยในหัวข้อที่สัมพันธ์กับวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วยในหลักสูตรของชั้นมัธยมศึกษาปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญเห็นพ้องต้องกันว่าวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วยที่มีในระดับสูงซึ่งแยกมาสอนในระดับมัศึกษามีความเหมาะสม และในปีเดียวกัน ดรัมมอนด์ (Drummond.1989 : 641 – A) ทำการวิจัยออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วย (Discrete Mathematics) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วยสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา และเพื่อกำหนดความเหมาะสมของการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ ซึ่งเสนอโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ. 1987 ซึ่งหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วยประกอบด้วยเรื่อง เมตริกซ์ การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับความน่าจะเป็น กราฟ และความสัมพันธ์เวียนบังเกิด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ผ่านการเรียนรายวิชาเรขาคณิต พีชคณิต 1 และพีชคณิต 2 จำนวน 203 คน ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เติมหน่วย จากหลักสูตรคณิตศาสตร์ซึ่งเสนอโดย สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ. 1987 มีความเหมาะสม

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่า ในประเทศไทยและต่างประเทศมีการตื่นตัวในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องโดยการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีการสอนให้เหมาะสมกับระดับสติปัญญาของผู้เรียน จากความสำคัญดังกล่าวจึงทำให้ผู้วิจัยสนใจในการนำเนื้อหาเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา มาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ว่ามีความสามารถที่จะเรียนเรื่องดังกล่าวได้หรือไม่

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง “การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยจับสลากเลือก 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน เหตุผลที่ใช้วิธีสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม เพราะทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำละกันในแต่ละห้อง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนเรื่อง “การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

1.1.1 ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวน (2 คาบ)

1.1.2 การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (รวม 7 คาบ)

1.1.2.1 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ (รวม 6 คาบ)

1.1.2.1.1 เรื่องอนุกรม (4 คาบ)

1.1.2.1.2 เรื่องการหารลงตัว (1 คาบ)

1.1.2.1.3 เรื่องอสมการ (1 คาบ)

1.1.2.2 หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ (รวม 1 คาบ)

1.1.2.2.1 เรื่องอสมการ (1 คาบ)

1.1.3 บทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (รวม 3 คาบ)

1.1.3.1 เรื่องเครื่องหมายรวมยอด และเลขยกกำลัง (1 คาบ)

1.1.3.2 เรื่องเมตริกซ์ และจำนวนเชิงซ้อน (1 คาบ)

1.1.3.3 เรื่องตรีโกณมิติ และเรื่องที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน (1 คาบ)

1.2 แผนการสอน จำนวน 12 คาบ

1.3 แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือกที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามเนื้อหาที่กำหนด จำนวน 25 ข้อ

1.4 แบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ

2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่อง “การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” เพื่อสร้างบทเรียน และ แผนการสอน โดยศึกษาจากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

- 2.1.1 ทฤษฎีจำนวน (สมวงศ์ แปลงประสพโชค)
- 2.1.2 ระบบจำนวน (สุเทพ จันทรมศักดิ์)
- 2.1.3 หลักการคณิตศาสตร์ (ฤทัย แดงแสงสง)
- 2.1.4 หลักคณิตศาสตร์ (พัฒน์ อุดมกะวานิช)
- 2.1.5 หลักคณิตศาสตร์ (กรรณิกา กวักเพ็ญฤทธิ์)
- 2.1.6 คณิตศาสตร์ดิสครีต (วนิดา เหมะกุล)
- 2.1.7 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ (ศรีเสริยม เสวตสมบุรณ์)
- 2.1.8 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (สุเทพ จันทรมศักดิ์)
- 2.1.9 รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (ดำรงค์ ทิพย์โยธา)
- 2.1.10 Elementary Number Theory (David M. Burton)
- 2.1.11 Elementary Number Theory (J.V. Uspensky and M.A. Heaslet)

2.2 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง “การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” โดยมุ่งให้นักเรียนสามารถ

- 2.2.1 บอกค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณได้
- 2.2.2 บอกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หรือไม่
- 2.2.3 บอกขั้นตอนการพิสูจน์โดยใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
- 2.2.4 บอกขั้นตอนการพิสูจน์โดยใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
- 2.2.5 ใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้
- 2.2.6 ใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้

2.3 สร้างบทเรียนและแผนการสอน ตามลำดับขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียน เนื้อหาเรื่อง “การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์” เพื่อใช้สอน จำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งในบทเรียนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา แบบฝึกหัด และจัดทำแผนการสอน ซึ่งแผนการสอนประกอบด้วย หัวเรื่อง จำนวนคาบที่สอน สารการเรียนรู้ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการสอน การวัดผลและการประเมินผล

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน ตรวจสอบแก้ไขเพื่อวิจารณ์ และ ชี้แนะข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและแผนการสอนที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 10 คน โดยใช้เวลาสอนรวม 12 คาบ คาบละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้ว ผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องในด้านความเหมาะสมของเนื้อหา ความยากง่ายของภาษา และเวลาที่ใช้ในการสอนแต่ละเนื้อหาของบทเรียน และกิจกรรมในแผนการสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 สร้างแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ และนำแบบทดสอบ

ชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไข เพื่อให้ได้ข้อทดสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว จำนวน 10 คน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2.5 วิเคราะห์แบบทดสอบปรนัยโดยการหาค่าความยากง่าย (p) และ หาค่าอำนาจจำแนก (r)

2.6 คัดเลือกแบบทดสอบปรนัยที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 25 ข้อ จากทั้งหมด 35 ข้อ และหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตรของ คูเดอร์ – ริชาร์ดสัน มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.90625 แล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.7 สร้างแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวน 6 ข้อ ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไข แล้วนำไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว จำนวน 10 คน ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง จากนั้นคัดเลือกข้อสอบ 3 ข้อจาก 6 ข้อที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหาแล้วให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาตรวจแก้ไขอีกครั้ง เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา แล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 ประมาณ 40 คน โดยใช้บทเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น การสอนกลุ่มตัวอย่างดังกล่าวจะสอนนอกเวลาเรียนปกติ วันละ 2 คาบ คาบละ 50 นาที ตั้งแต่เวลา 15.30 – 17.10 น. จำนวน 6 วัน รวม 12 คาบ

2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนครบ 12 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง

3. วิเคราะห์ผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน โดยการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบปรนัย ข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน และข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ให้ 0 คะแนน ส่วนแบบทดสอบอัตนัย 3 ข้อ นำมาตรวจให้คะแนนเป็นรายข้อ ข้อละ 10 คะแนน โดยมีเกณฑ์ในการตรวจแบบทดสอบอัตนัยดังนี้

1. เขียนรูปแบบขั้นตอนครบถ้วน กล่าวคือ กำหนด $P(n)$ และเขียนขั้นที่ 1 ขั้นฐาน ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย บอกสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่จะต้องพิสูจน์ และเขียนสมมติฐานของการอุปนัยได้ถูก ให้คะแนน 5 คะแนน
2. พิสูจน์ข้อความในขั้นตอนที่ 1 ขั้นฐาน ได้ถูกต้อง ให้คะแนน 1 คะแนน
3. พิสูจน์ข้อความในขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย และ พิสูจน์ $P(k+1)$ เป็นจริงได้ถูกต้องตลอดจน เขียนสรุปได้ถูกต้อง ให้คะแนน 4 คะแนน

จากนั้นนำคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยมาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรด้วยสถิติทดสอบ Z (Z - Test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติหาค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้การคำนวณจากสูตรของคูเดอร์ – ริชาร์ดสัน (KR-20)
3. สถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ สถิติทดสอบ Z (Z – Test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 35 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบปรนัยและอัตนัย ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 5 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่ผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบปรนัย 25 ข้อ และแบบอัตนัย 3 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

ตอนที่ 1 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	35	25	14.657	58.628	2.96

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนน เป็น 14.657 คิดเป็นร้อยละ 58.628 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.96

ตอนที่ 2 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	35	30	21.686	72.287	6.517

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 21.686 คิดเป็นร้อยละ 72.287 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 6.517

ตอนที่ 3 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	35	55	36.343	66.078	8.083

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 36.343 คิดเป็นร้อยละ 66.078 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 8.083

ตอนที่ 4 : ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	35	29	82.857

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม หรือตั้งแต่ 27.5 คะแนนขึ้นไป จากคะแนนเต็ม 55 คะแนน มีจำนวน 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.857 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ตอนที่ 5 : ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	สถิติทดสอบ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	35	29	3.882 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียน เรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปจุดมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล
จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
- 5 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สอน 12 คาบ
2. แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวน 25 ข้อ
3. แบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน โดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 12 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 12 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัย จำนวน 25 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับ ดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัย วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบ ปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

5. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปรากฏผลดังนี้

1. คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 14.657 คิดเป็นร้อยละ 58.628 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.96

2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 21.686 คิดเป็นร้อยละ 72.287 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 6.517

3. คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 36.343 คิดเป็นร้อยละ 66.078 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 8.083

4. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม หรือตั้งแต่ 27.5 คะแนนขึ้นไป จากคะแนนเต็ม 55 คะแนน มีจำนวน 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.857 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด 35 คน

5. จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 มีจำนวนถึงร้อยละ 82.857 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด 35 คน ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้และประยุกต์ เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อภิปรายผล

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้เนื่องจาก

1.1 ผู้วิจัยเรียบเรียงเนื้อหาค่อนข้างเป็นรูปธรรมที่เข้าใจง่าย มีการยกตัวอย่างหลายตัวอย่างประกอบ อย่างชัดเจน โดยเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานอย่างง่าย ปานกลาง และยาก ตามลำดับ

1.2 เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นการนำความรู้เดิมเข้ามาใช้ในการเรียน เช่น การแยกตัวประกอบ การหารลงตัว สมบัติการเท่ากัน และสมบัติการไม่เท่ากัน เป็นต้น และการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการพิสูจน์ที่มีรูปแบบเฉพาะตัว ไม่ซับซ้อน จึงทำให้เข้าใจได้ง่าย

1.3 นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจ และสนใจเรียนดีมาก ซึ่งจะเห็นได้จากการซักถามในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นเนื้อหาวิชาใหม่ที่มีลักษณะท้าทายความสามารถของผู้เรียน

1.4 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้สอนโจทย์การพิสูจน์โดยแบ่งขั้นตอนของการพิสูจน์ออกเป็น 2 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 (ขั้นฐาน) และ ขั้นที่ 2 (ขั้นตอนของการอุปนัย) เมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจในตอนใด ผู้วิจัยก็เปิดโอกาสให้ซักถามได้เต็มที่ทั้งภายในห้องเรียนและนอกห้องเรียน

2. ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่านักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นปรนัย ประกอบกับแบบฝึกหัดที่ใช้ฝึกฝนเป็นแบบอัตนัยทั้งหมด และเมื่อวิเคราะห์ความยากง่ายของแบบทดสอบปรนัย พบว่ามีจำนวนข้อที่ค่อนข้างยากถึง 14 ข้อ จากทั้งหมด 25 ข้อ (ดูตาราง 6 ภาคผนวก ก หน้า 36)

3. คะแนนของกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่จะทำได้ในส่วนที่เป็นอัตนัยได้ดีกว่าในส่วนที่เป็นปรนัยทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนได้รับการฝึกฝนให้ทำโจทย์จากแบบฝึกหัดที่เป็นอัตนัยเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งมีจำนวนแบบฝึกหัดค่อนข้างมากและหลากหลายที่นักเรียนสามารถฝึกฝนจนเกิดความชำนาญ

4. นักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนรูปแบบการพิสูจน์ได้ถูกต้อง กล่าวคือ สามารถกำหนด $P(n)$ และบอกขั้นตอนทั้งสองขั้นตอนของการพิสูจน์ได้ ตลอดจนเขียนสมมติฐานของการอุปนัยได้ถูกต้อง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนได้เขียนขั้นตอนในการพิสูจน์แต่ละขั้นในทุก ๆ ข้อ ของโจทย์ในแบบฝึกหัดหลาย ๆ ครั้ง ย่อมทำให้นักเรียนจดจำรูปแบบขั้นตอนของการพิสูจน์ได้

5. นักเรียนบางคนไม่สามารถพิสูจน์ในขั้นที่ 2 (ขั้นตอนของการอุปนัย) ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนขาดความรู้พื้นฐานเดิมอันได้แก่ การแยกตัวประกอบ การหารลงตัว สมบัติต่าง ๆ ของจำนวน จึงทำให้ไม่สามารถสรุปข้อความ $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ ให้เป็นจริงได้

6. นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจการพิสูจน์ข้อความ $\forall n [P(n)]$ โดยใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มากกว่า การพิสูจน์ข้อความ $\forall n [P(n)]$ โดยใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ เนื้อหาในหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีจำนวนคาบเรียน 6 คาบ และมีตัวอย่างโจทย์ฝึกฝนมากกว่า เนื้อหาในหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีจำนวนคาบเรียนเพียง 1 คาบ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีความสามารถในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนั้น ผลการวิจัยนี้จะเป็นแนวทางให้ผู้จัดทำหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย พิจารณาเลือกบรรจุเนื้อหาเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในรายวิชาเลือกเสรี โครงสร้างที่ 2 ของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

1.2 ควรนำหลักการที่ 1 และหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาให้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้เรียน และควรมีการเพิ่มจำนวนคาบเรียนในการเรียนเรื่องหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรทำการวิจัยเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างให้มีขนาดใหญ่ขึ้น และมีขอบเขตกว้างขึ้น เพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนชัดเจนยิ่งขึ้น

2.2 ควรนำวิธีการพิสูจน์รูปแบบอื่น ๆ มาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เช่น การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม การพิสูจน์โดยการแจงกรณี การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- , (2535). หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กรมวิชาการ. (2539). การศึกษาการใช้หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2541). หลักคณิตศาสตร์. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ณรงค์ ปั่นนิ่ม. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการและค่าสัมบูรณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ดี บางกระ. (2538). การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน ก่อกำเนิด. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธานินทร์ สิทธิวัชรธรรม. (2542). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- นิตตยา ปภาพจน์. (2540). การพัฒนาหลักสูตรทฤษฎีจำนวนเสริมสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- บุญเกิด ชำนาญคำ. (2526). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- ประกิจ รัตนสุวรรณ. (2525). การวัดและการประเมินผลทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ปานทอง กุลนาถศิริ. (2543, สิงหาคม – ตุลาคม). "ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM," วารสารสสวท. 503 : 16.
- ปรีชา จั่นกล้า. (2539). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- พัฒน์ อุดมกะวานิช. (2540). หลักคณิตศาสตร์. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิชากร แปลงประสพโชค. (2540). การพัฒนาหลักสูตรพิเศษทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์. ปรินญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

- ไพศาล หวังพานิช. (2526). *การวัดผลการศึกษา*. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.
- รจนา รัตนนิคม. (2544). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ฤทัย แดงแสงส่ง. (2540). *หลักการคณิตศาสตร์*. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา.
- ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2536). *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ : สุริยาสานส์.
- วนิดา เหมะกุล. *คณิตศาสตร์ดิสคริต*. (2535). กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- วันชัย ทัพพะปุระ. (2529). *การทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- วิรัตน์ ชาญศิริวัฒนา. (2524). *การศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ศรีเสงี่ยม จักรใจ. (2542 - 2543, พฤศจิกายน - มกราคม). "มุมโอลิมปิก," *วารสารคณิตศาสตร์*. สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย. 494 – 496 : 73.
- ศรีเสงี่ยม เสวตสมบุรณ์. (2526). *คณิตศาสตร์วิเคราะห์*. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน.
- ศุภชัย ทองศิริ. (2527). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- สิริสินธุ์ นุชนาถ. (2538). *การศึกษาการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- สุเทพ จันทสมศักดิ์. (2536). *ระบบจำนวน*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- . (2539). "อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์," *หนังสือแปลสาขาคณิตศาสตร์ อันดับที่ 125*. ศูนย์พัฒนาหนังสือกรมวิชาการ.
- สมเกียรติ ปติฐพร. (2525). *การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์*. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2537). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพฯ : ชมรมคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏพระนคร.
- สมชาย ชูชาติ. (2542, กันยายน). "ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์," *วารสารบัณฑิตศึกษา*. 3(3) : 76 – 78.
- อัจฉรา สุขารมณ์ และอรพินทร์ ชูชม. (2530). *การศึกษาเปรียบเทียบนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่าระดับความสามารถกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปกติ*. รายงานวิจัยฉบับที่ 39. กรุงเทพฯ : สถาบันวิจัยพฤติกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- อำพล โตตอบ. (2539). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

- Burton, David M. (1980). *Elementary Number Theory*. Revised ed. Boston : Allyn and Bacon Inc.
- Drummond, Pamela Johnson. (1989). *The design implementation and evaluation of a course in discrete mathematics for high school students*. Dissertation Thesis, Ph.D. Photocopied.
- Eves, Howard. (1964). *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rineher and Winston. New York.
- Knuth, Eric J. and Rebekah L. Elliott. (1998, November). "Characterizing Students Understanding of Mathematical Proof," *The Mathematics Teacher*. 91 : 714 – 717.
- Gubrud, Allarm Roy. (1971). *The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School*. Dissertation Thesis, Ph.D. Photocopied.
- The National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. United States of America : Inc.
- Uspensky, J.V. and M.A. Heaslet. *Elementary Number Theory*. New York : McGraw – Hill Book Company.
- White, Charles William. (1974). *A study of Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn Basic Concept of Probability and the Relationship between Achievement in Probability and Selected Factors*. Dissertation Thesis, Ph.D. Photocopied.
- Willson, James W. (1971). *Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics in Handbook On Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. McGraw – Hill Book Company.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 6 ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ข้อที่	ค่า p	ค่า r	ข้อที่	ค่า p	ค่า r
1	0.6	0.81	14	0.5	0.58
2	0.2	0.63	15	0.4	0.61
3	0.5	0.80	16	0.7	0.59
4	0.5	0.32	17	0.5	0.48
5	0.3	0.77	18	0.8	0.49
6	0.4	0.28	19	0.6	0.40
7	0.7	0.66	20	0.8	0.57
8	0.8	0.33	21	0.8	0.49
9	0.2	0.67	22	0.4	0.93
10	0.5	0.86	23	0.5	0.86
11	0.4	0.93	24	0.8	0.49
12	0.7	0.48	25	0.2	0.47
13	0.8	0.41			

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR – 20)

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right] \\
 &= \frac{25}{24} \left[1 - \frac{5.22}{39.04} \right] \\
 &= \frac{25}{24} [1 - 0.13] \\
 &= \frac{25}{24} (0.87) \\
 &= 0.90625
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ s คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งใช้ สถิติทดสอบ Z (Z – test)

สมมติฐาน คือ $H_0 : P \leq 0.50$

$H_1 : P > 0.50$

$$\text{สถิติทดสอบ } Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนตั้งแต่

ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ซึ่ง $\hat{P} = \frac{29}{35} = 0.83$

$P_0 = 0.50$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{0.83 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1 - 0.50)}{35}}} \\ &= \frac{0.33}{0.085} \end{aligned}$$

ดังนั้น $Z = 3.882$

แต่ $Z_{.01} = 2.33$

เพราะว่า $3.882 > 2.33$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
เรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับนี้ แบ่งเป็น 2 ตอน ได้แก่
 ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบปรนัย จำนวน 25 ข้อ คะแนนเต็ม 25 คะแนน
 ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน
2. ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง
3. แบบทดสอบชุดนี้วัดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมดังนี้
 จุดประสงค์ที่ 1 นักเรียนสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณได้ (ข้อ 1 – 5)
 จุดประสงค์ที่ 2 นักเรียนสามารถบอกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ (ข้อ 6)
 จุดประสงค์ที่ 3 นักเรียนสามารถแทนค่า $P(n)$ ได้และบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อกำหนดจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ (ข้อ 7 – 11)
 จุดประสงค์ที่ 4 นักเรียนสามารถอธิบายหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ (ข้อ 12)
 จุดประสงค์ที่ 5 นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 13 – 15)
 จุดประสงค์ที่ 6 นักเรียนสามารถอธิบายหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ (ข้อ 16)
 จุดประสงค์ที่ 7 นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้ (ข้อ 17 – 19)
 จุดประสงค์ที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนการพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง และสามารถระบุหรือบอกได้ว่าการพิสูจน์ส่วนใดที่ไม่ถูกต้อง (ข้อ 20 – 25)

แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ $U = N$ จงตอบคำถามในข้อ 1-5

1. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall n[P(n)]$ เป็นจริง

ก. $(a + b)^n = a^n + b^n$

ข. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > \frac{n}{3}$

ค. $3^n > 3n$

ง. $n^2 \leq 2^n$

2. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall n[P(n)]$ เป็นเท็จ

ก. 2 ทหาร $n^2 + n$ ลงตัว

ข. $n < 2^n$

ค. $n^2 - n + 5$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ง. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

3. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall n[P(n)]$ เป็นเท็จ

ก. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$

ข. 3 ทหาร $n^3 - n$ ลงตัว

ค. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

ง. $3^n \geq 1 + 2n$

4. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall n[P(n)]$ เป็นเท็จ

ก. $n^2 \geq n$

ข. $2^n > 2n + 1$

ค. $2^n \geq 2n$

ง. $2^n > n$

5. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall n[P(n)]$ เป็นเท็จ

ก. 2 ทหาร $n^2 + n + 1$ ลงตัว

ข. 3 ทหาร $7^n + 2$ ลงตัว

ค. 4 ทหาร $5^n - 1$ ลงตัว

ง. 5 ทหาร $n^5 - n$ ลงตัว

6. ข้อความใดต่อไปนี้ที่ไม่สามารถใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ได้

ก. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n แล้ว $1^n = 1$

ข. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n แล้ว $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

ค. สำหรับ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ที่เป็นจำนวนจริง แล้ว $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

ง. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง n แล้ว $|n| \geq 0$

7. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง เมื่อกำหนดให้

$$P(n) \text{ แทนข้อความ } (1)(2)(3) + (2)(3)(4) + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ก. $P(1)$ แทนข้อความ $(1)(1+1)(1+2) = \frac{(1)(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

ข. $P(3)$ แทนข้อความ $(3)(3+1)(3+2) = \frac{(3)(3+1)(3+2)(3+3)}{4}$

ค. $P(k)$ แทนข้อความ $(k)(k+1)(k+2) = \frac{(k)(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

ง. $P(k+1)$ แทนข้อความ $(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3]}{4}$

8. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ และ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^n < 3^n - 20$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. $P(1)$ เป็นจริง
- ข. $P(2)$ เป็นจริง
- ค. $P(3)$ เป็นจริง
- ง. $P(4)$ เป็นจริง

9. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ และ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. $P(1)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + [2(1) - 1] = 1^2$
- ข. $P(10)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + 17 + [2(10) - 1] = 10^2$
- ค. $P(k)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + k + (2k - 1) = k^2$
- ง. $P(k+1)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + (k - 1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2$

10. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ และ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ แล้ว $P(k - 1)$ แทนข้อความใด

- ก. $3(k - 1) - 2 = \frac{(k - 1)}{2}[3(k - 1) - 1]$
- ข. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 1) = \frac{(k - 1)}{2}[3(k - 1) - 1]$
- ค. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 3) = \frac{(k - 1)}{2}[3(k - 1) - 1]$
- ง. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 5) = \frac{(k - 1)}{2}[3(k - 1) - 1]$

11. จากข้อความ $P(n)$ ในข้อ 10 อยากทราบว่า $P(k+1)$ แทนข้อความใด

- ก. $3(k + 1) - 2 = \frac{(k + 1)}{2}[3(k + 1) - 1]$
- ข. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k + 1) = \frac{(k + 1)}{2}[3(k + 1) - 1]$
- ค. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 1) = \frac{(k + 1)}{2}[3(k + 1) - 1]$
- ง. $1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 3) = \frac{(k + 1)}{2}[3(k + 1) - 1]$

12. ข้อความใดต่อไปนี้ทำให้เราสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

12.1) 1) $P(1)$ เป็นจริง และ

2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

12.2) 1) $P(1)$ เป็นจริง และ

2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

ก. ถูกทั้ง 2 ข้อ

ข. ผิดทั้ง 2 ข้อ

ค. ข้อ 12.1) ถูกเพียงข้อเดียว

ง. ข้อ 12.2) ถูกเพียงข้อเดียว

จงพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 13–15

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่า $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน เราจะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $4(1) = 2(1)(1+1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะทั้งสองข้างของสมการข้างต้นต่างก็เท่ากับ 4

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ (ข้อ 13)

จะได้ว่า $4 + 8 + 12 + \dots + 4k = 2k(k+1)$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$4 + 8 + 12 + \dots + 4k + 4(k+1) = 2(k+1)[(k+1)+1]$$

นำ (ข้อ 14) บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 4 + 8 + 12 + \dots + 4k + 4(k+1) &= 2k(k+1) + 4(k+1) \\ &= (k+1)(2k+4) \\ &= 2(k+1)(k+2) \\ &= 2(k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

13. จากช่องว่างที่เว้นไว้ ควรเติมข้อความใด

- ก. ให้ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k
- ข. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k ให้ $P(k)$ เป็นจริง
- ค. ให้ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
- ง. ถูกทั้งข้อ ก และ ข

14. จากช่องว่างที่เว้นไว้ ควรเติมข้อความใด

- ก. นำ $4k + 1$ บวกเข้าทั้งสองข้าง
- ข. นำ $4k + 2$ บวกเข้าทั้งสองข้าง
- ค. นำ $4k + 3$ บวกเข้าทั้งสองข้าง
- ง. นำ $4k + 4$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

15. เหตุผลข้อใดจึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

- ก. เพราะ $P(1)$ เป็นจริง
- ข. เพราะ $P(k+1)$ เป็นจริง
- ค. เพราะหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- ง. เพราะหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

16. ข้อความใดต่อไปนี้อธิบายถึงหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ก. ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $P(1)$ เป็นจริง

2) ถ้า $P(k)$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ข. ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n และ $m \geq 1$

ถ้า 1) $P(m)$ เป็นจริง

2) สำหรับทุก ๆ $k \geq m$ ถ้า $P(k)$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n = m, m+1, m+2, \dots$

ค. ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $P(1)$ เป็นจริง

2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ $k \leq n$ แล้ว $P(n+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ง. ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $P(1)$ เป็นจริง

2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ $k < n$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

17. จาก $P(n)$ แทนข้อความ $4^n > n^4$ ถ้า $\forall n[P(n)]$ เป็นจริง แล้ว ขั้นฐานเราจะต้องพิสูจน์ข้อความใดว่าเป็นจริง

ก. $P(1)$

ข. $P(2)$

ค. $P(5)$

ง. $P(6)$

18. กำหนดให้ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $n^3 < n!$ ถ้า $\forall n[P(n)]$ เป็นจริง แล้ว ขั้นฐานเราจะต้องพิสูจน์ข้อความใดว่าเป็นจริง

ก. $P(1)$

ข. $P(4)$

ค. $P(6)$

ง. $P(8)$

19. $P(n)$ ในข้อใดต่อไปนี้จะต้องใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์

ก. $3^n > n$

ข. $2^n > n^2$

ค. $4n \leq 4^n$

ง. $1 + n \leq 2^n$

20. กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\sum_{i=1}^n (i+1) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n)$ ดังนั้น $P(3)$ แทนข้อความใด

ก. $3 + 1 = \frac{1}{2}[3^2 + 3(3)]$

ข. $1 + 2 + 3 = \frac{1}{2}[3^2 + 3(3)]$

ค. $3 = \frac{1}{2}[3^2 + 3(3)]$

ง. $2 + 3 + 4 = \frac{1}{2}[3^2 + 3(3)]$

21. มีคูปองอาหาร 2 ชนิดราคา 4 บาท และ 5 บาท จงหาว่าคณะกรรมการในโรงอาหารของโรงเรียนจะต้องตั้งราคาอาหารตั้งแต่ราคากี่บาทขึ้นไป เพื่อจะได้ใช้คูปองทั้ง 2 ชนิดซื้อได้โดยไม่ต้องทอนคูปอง

ก. 5 บาท

ข. 9 บาท

ค. 11 บาท

ง. 12 บาท

22. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ แล้วพิจารณาข้อความ $P(n)$ ต่อไปนี้ว่า $P(n)$ ในข้อใดที่เป็นจริง เฉพาะ $n = 1$ เท่านั้น

ก. $P(n)$ แทนข้อความ $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n+1)$

ข. $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

ค. $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 + n - 1$

ง. $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 8 + 14 + \dots + 6n - 4 = 3n^2 - n$

จงพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 23

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่า $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3n(n+1)}{2}$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3n(n+1)}{2}$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน เราจะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $3(1) = \frac{3(1)(1+1)}{2}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\frac{3(1)(1+1)}{2} = 3 = 3(1)$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k

จะได้ว่า $3 + 6 + 9 + \dots + 3k = \frac{3k(k+1)}{2}$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$3 + 6 + 9 + \dots + 3k + 3(k+1) = \frac{3(k+1)[(k+1)+1]}{2}$

นำ $3(k+1)$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3 + 6 + 9 + \dots + 3k + 3(k+1) &= \frac{3k(k+1)}{2} + 3(k+1) \\ &= (k+1) \left(\frac{3k}{2} + 3 \right) \\ &= (k+1) \left(\frac{3k+6}{2} \right) \\ &= (k+1) \left(\frac{3(k+2)}{2} \right) \\ &= \frac{3(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{3(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

จะได้ว่า $3 + 4 + 6 + \dots + 3n = \frac{3n(n+1)}{2}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

23. จากการพิสูจน์ต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ $P(1)$ ไม่เป็นจริง
- ข. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ $P(k+1)$ ไม่เป็นจริง
- ค. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ เขียนสมมติฐานของการอุปนัยผิด
- ง. การพิสูจน์นี้ถูกต้องสมบูรณ์แล้ว เพราะตรงตามหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จงพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 24

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq 4$ จงพิสูจน์ว่า $3^n > n^3$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3^n > n^3$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะต้องพิสูจน์ว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $3^1 > 1^3$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $3 > 1$ ดังนั้น $3^1 > 1^3$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $3^k > k^3$ เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $3^{k+1} > (k+1)^3$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } 3^{k+1} &= (3^k)(3) \\ &= 3^k + 3^k + 3^k \\ &> k^3 + k^3 + k^3 \\ &> k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \quad [\text{จาก } k \geq 4 \text{ ดังนั้น } k^3 > 3k^2 \text{ และ } k^3 > 3k + 1] \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $3^{k+1} > (k+1)^3$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $3^n > n^3$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq 4$

24. จากการพิสูจน์ต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. การพิสูจน์นี้ผิดที่ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน
- ข. การพิสูจน์นี้ผิดที่ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย
- ค. การพิสูจน์นี้ถูกต้องสมบูรณ์แล้ว เพราะตรงตามหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- ง. การพิสูจน์นี้ถูกต้องสมบูรณ์แล้ว เพราะตรงตามหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จงพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ แล้วตอบคำถามข้อ 25

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่า 13 หาร $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ลงตัว

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 13 หาร $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ลงตัว

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะต้องพิสูจน์ว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ 13 หาร $4^{2(1)+1} + 3^{1+2}$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า จาก 13 หาร $4^{2(1)+1} + 3^{1+2}$ ลงตัว

13 หาร $4^3 + 3^3$ ลงตัว

13 หาร $64 + 27$ ลงตัว

13 หาร 91 ลงตัว ซึ่งเป็นจริง

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น 13 หาร $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ ลงตัว

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า 13 หาร $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ ลงตัว

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } 4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} &= 4^{2k+2+1} + 3^{k+2+1} \\ &= (4^{2k+1})(4^2) + (3^{k+2})(3^1) \\ &= 16(4^{2k+1}) + 3(3^{k+2}) \\ &= 16(4^{2k+1}) + 16(3^{k+2}) - 13(3^{k+2}) \\ &= 16(4^{2k+1} + 3^{k+2}) - 13(3^{k+2}) \end{aligned}$$

เพราะว่า $P(k)$ เป็นจริง ดังนั้น 13 หาร $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ ลงตัว

เราจะได้ว่า 13 หาร $16(4^{2k+1} + 3^{k+2})$ ลงตัว และ 13 หาร $13(3^{k+2})$ ลงตัว

ดังนั้น 13 หาร $16(4^{2k+1} + 3^{k+2}) - 13(3^{k+2})$ ลงตัว

นั่นคือ 13 หาร $4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$ ลงตัว เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ 13 หาร $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

25. จากการพิสูจน์ต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ $P(1)$ ไม่เป็นจริง

ข. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ $P(1)$ เป็นจริง แต่เขียนการพิสูจน์ไม่สมเหตุสมผล

ค. การพิสูจน์นี้ผิด เพราะ เขียนสมมติฐานของการอุปนัยผิด

ง. การพิสูจน์นี้ถูกต้องสมบูรณ์แล้ว เพราะตรงตามหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

แบบทดสอบอัตรัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. จงพิสูจน์ว่า 3 หาร $4^n + 2$ ลงตัว เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
2. จงพิสูจน์ว่า $n^2 > 2n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq 3$
3. จงพิสูจน์ว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ภาคผนวก ค
บทเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

บทเรียนฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นต้นแบบบทเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เนื้อหาการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

1. บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวน
 - 1.1) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์
 - 1.2) ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน
2. บทที่ 2 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
 - 2.1) การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอนุกรม
 - 2.2) การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องการหารลงตัว
 - 2.3) การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอสมการ
 - 2.4) บทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. บอกค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณได้
2. บอกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หรือไม่
3. บอกขั้นตอนการพิสูจน์โดยใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
4. บอกขั้นตอนการพิสูจน์โดยใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
5. ใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้
6. ใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวน

1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์

ประโยคเปิด (Open Sentence) คือ ประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และยังไม่ทราบค่าความจริงจนกว่าจะทราบว่าตัวแปรนั้นคืออะไร แต่สามารถทำให้เป็นประพจน์ได้โดยการแทนค่าตัวแปรนั้นด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ เช่น

เขาเป็นนักแสดง เป็นประโยคเปิด เพราะ "เขา" เป็นตัวแปร ถ้าแทนค่าเขาด้วย ศรธรรม เทพพิทักษ์ ก็จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าแทนค่าเขาด้วย สุนทรภู่ ก็จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$3x - 1 = 5$ เป็นประโยคเปิด เพราะ x เป็นตัวแปร ถ้าแทนค่า x ด้วย 2 ก็จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าแทนค่า x ด้วย 1 ก็จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า ประโยคเปิด คือ ประโยคที่มีตัวแปรและไม่ใช้ประพจน์ เช่น

" $x - 5 > 0$ " เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

จากประโยคดังกล่าว เราสามารถทำให้เป็นประพจน์ได้โดยการเติมข้อความบางข้อความลงหน้าประโยคเปิด ดังนี้

1. สำหรับ x ทุกตัว $x - 5 > 0$
2. สำหรับ x แต่ละตัว $x - 5 > 0$
3. สำหรับ x ใด ๆ $x - 5 > 0$

ข้อความที่เติมลงไปหน้าประโยคเปิดในข้อ 1-3 ต่างมีความหมายเดียวกัน ซึ่งบ่งบอกถึงจำนวนสมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ U

4. สำหรับ x บางตัว $x - 5 > 0$
5. มี x บางตัว $x - 5 > 0$
6. มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ $x - 5 > 0$

ข้อความที่เติมลงไปหน้าประโยคเปิดในข้อ 4-6 ต่างมีความหมายเดียวกัน ซึ่งบ่งบอกถึงจำนวนสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ U ซึ่งเราจะเรียกข้อความที่บ่งบอกถึงจำนวนสมาชิกที่เขียนไว้หน้าประโยคเปิดนี้ว่า "ตัวบ่งปริมาณ" (Quantifier)

ตัวบ่งปริมาณจึงแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ตัวบ่งปริมาณทุกตัว หมายถึง ข้อความ "สำหรับ.....ทุกตัว" หรืออาจเขียนในลักษณะอื่น ๆ เช่น สำหรับ x ทุกตัว, สำหรับ x แต่ละตัว, สำหรับ x ใด ๆ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวบ่งปริมาณทุกตัว คือ $\forall$ ซึ่งจะใช้ $\forall x$ แทนข้อความ สำหรับ x ทุกตัว

ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปร x เช่น $P(x)$ แทนข้อความ $x^2 - x > 1$ ดังนั้น สำหรับ x ทุกตัว $x^2 - x > 1$ จะเขียนแทนด้วย $\forall x [P(x)]$

2. ตัวบ่งปริมาณบางตัว หมายถึง ข้อความ "สำหรับ.....บางตัว" หรืออาจเขียนในลักษณะอื่น ๆ เช่น สำหรับ x บางตัว, มี x บางตัว, มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว สัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวบ่งปริมาณบางตัว คือ $\exists$ ซึ่งจะใช้ $\exists x$ แทนข้อความ สำหรับ x บางตัว

ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปร x เช่น $P(x)$ แทนข้อความ $x^2 - x > 1$ ดังนั้น สำหรับ x บางตัว $x^2 - x > 1$ จะเขียนแทนด้วย $\exists x [P(x)]$

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 1.1 ประพจน์ $\forall x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก a ทุกตัว ในเอกภพสัมพัทธ์ U แล้ว $P(a)$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

บทนิยาม 1.2 ประพจน์ $\forall x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก a อย่างน้อยหนึ่งตัว ในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่ทำให้ $P(a)$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

บทนิยาม 1.3 ประพจน์ $\exists x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก a อย่างน้อยหนึ่งตัว ในเอกภพสัมพัทธ์ U ที่ทำให้ $P(a)$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

บทนิยาม 1.4 ประพจน์ $\exists x [P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก a ทุกตัว ในเอกภพสัมพัทธ์ U แล้ว $P(a)$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเชื่อมประพจน์

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์

ประพจน์ "p และ q" เขียนแทนด้วย $p \wedge q$

ประพจน์ "p หรือ q" เขียนแทนด้วย $p \vee q$

ประพจน์ "ถ้า p แล้ว q" เขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$

ประพจน์ "p ก็ต่อเมื่อ q" เขียนแทนด้วย $p \leftrightarrow q$

ค่าความจริงของตัวเชื่อมประพจน์

$p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง

$p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ หรือ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง หรือ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ

$p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง หรือ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ หรือ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

$p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ

$p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง หรือ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง หรือ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ

$p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

$p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง หรือ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ

$p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ หรือ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้

1) $\forall x [x + 1 = 5]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) $\exists x [x + 1 = 5]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3) $\forall x [x + x = 2x]$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$

4) $\exists x [x + 1 < x]$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$

วิธีทำ ข้อ 1 ให้ $P(x)$ แทนข้อความ $x + 1 = 5$
 $P(1)$ แทนข้อความ $1 + 1 = 5$ ซึ่งเป็นเท็จ
 ดังนั้น $\forall x [x + 1 = 5]$ เป็นเท็จ เพราะ มี $x = 1$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $P(1)$ เป็นเท็จ
 ข้อ 2 ให้ $P(x)$ แทนข้อความ $x + 1 = 5$
 $P(4)$ แทนข้อความ $4 + 1 = 5$ ซึ่งเป็นจริง
 ดังนั้น $\exists x [x + 1 = 5]$ เป็นจริง เพราะ มี $x = 4$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $P(4)$ เป็นจริง
 ข้อ 3 ให้ $Q(x)$ แทนข้อความ $x + x = 2x$
 $Q(-1)$ แทนข้อความ $(-1) + (-1) = 2(-1)$ ซึ่งเป็นจริง
 $Q(0)$ แทนข้อความ $0 + 0 = 2(0)$ ซึ่งเป็นจริง
 $Q(1)$ แทนข้อความ $1 + 1 = 2(1)$ ซึ่งเป็นจริง
 ดังนั้น $\forall x [x + x = 2x]$ เป็นจริง เพราะ สำหรับ x ทุกตัวใน U แล้ว $P(x)$ เป็นจริง
 ข้อ 4 ให้ $R(x)$ แทนข้อความ $x + 1 < x$
 $R(-1)$ แทนข้อความ $(-1) + 1 < -1$ ซึ่งเป็นเท็จ
 $R(0)$ แทนข้อความ $0 + 1 < 0$ ซึ่งเป็นเท็จ
 $R(1)$ แทนข้อความ $1 + 1 < 1$ ซึ่งเป็นเท็จ
 ดังนั้น $\exists x [x + 1 = x]$ เป็นเท็จ เพราะ สำหรับ x ทุกตัวใน U แล้ว $P(x)$ เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้

- 1) $\exists x [x > 0 \wedge x^2 + x \geq 0]$ เมื่อ $U = R$
- 2) $\forall x [x^2 > 9 \rightarrow x > 3]$ เมื่อ $U = R$
- 3) $\exists x [x \in Q \wedge x \in Q']$ เมื่อ $U = R$
- 4) $\forall x [x \in N \rightarrow x \in I]$ เมื่อ $U = R$

วิธีทำ ข้อ 1 $\exists x [x > 0 \wedge x^2 + x \geq 0]$ อ่านว่า มี $x \in R$ อย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ $x > 0$ และ $x^2 + x \geq 0$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง เราจะต้องหา $x \in R$ มาอย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ $x > 0$ และ $x^2 + x \geq 0$ เป็นจริง และถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นเท็จ เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความ $x > 0$ และ $x^2 + x \geq 0$ เป็นเท็จ
 เนื่องจาก เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ฉะนั้นเมื่อเราเลือก $x = 1$ ทำให้ข้อความ $1 > 0$ และ $1^2 + 1 \geq 0$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x [x > 0 \wedge x^2 + x \geq 0]$ เป็นจริง เพราะมี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

ข้อ 2 $\forall x [x^2 > 9 \rightarrow x > 3]$ อ่านว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ ถ้า $x^2 > 9$ แล้ว $x > 3$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความถ้า $x^2 > 9$ แล้ว $x > 3$ เป็นจริง และถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นเท็จ เราจะต้องหา $x \in R$ มาอย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ ถ้า $x^2 > 9$ แล้ว $x > 3$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ฉะนั้นเมื่อเราเลือก $x = -4$ ซึ่งทำให้ข้อความถ้า $(-4)^2 > 9$ แล้ว $-4 > 3$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x [x^2 > 9 \rightarrow x > 3]$ เป็นเท็จ เพราะมี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

ข้อ 3 $\exists x [x \in Q \wedge x \in Q']$ อ่านว่า มี $x \in R$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $x \in Q$ และ $x \in Q'$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง เราจะต้องหา $x \in R$ มาอย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ $x \in Q$ และ $x \in Q'$ เป็นจริง และถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นเท็จ เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความ $x \in Q$ และ $x \in Q'$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ซึ่ง Q และ Q' ต่างก็เป็นเซตย่อยของ R และจาก $Q \cap Q' = \emptyset$ ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริง x ใด ๆ ซึ่ง x เป็นจำนวนตรรกยะ และ x เป็นจำนวนอตรรกยะ นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความ $x \in Q$ และ $x \in Q'$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\exists x [x \in Q \wedge x \in Q']$ เป็นเท็จ เพราะ สำหรับทุก ๆ x แล้ว $P(x)$ เป็นเท็จ

ข้อ 4 $\forall x [x \in N \rightarrow x \in I]$ อ่านว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ ถ้า $x \in N$ แล้ว $x \in I$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความ ถ้า $x \in N$ แล้ว $x \in I$ เป็นจริง และถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นเท็จ เราจะต้องหา $x \in R$ มาอย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ ถ้า $x \in N$ แล้ว $x \in I$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ซึ่ง N เป็นเซตย่อยของ I ดังนั้น สมาชิกของ N ทุกตัวจะต้องเป็นสมาชิกของ I นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้วข้อความ ถ้า $x \in N$ แล้ว $x \in I$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x [x \in N \rightarrow x \in I]$ เป็นจริง เพราะ สำหรับทุก ๆ $x \in R$ แล้ว $P(x)$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 4n - 2$ เมื่อ $U = N$

- 1) จงหาค่าความจริงของ $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ และ $P(4)$
- 2) จงหาค่าความจริงของ $P(1) \rightarrow P(2)$
- 3) จงหาค่าความจริงของ $P(2) \rightarrow P(3)$
- 4) จงหาค่าความจริงของ $P(3) \rightarrow P(4)$
- 5) จงหาค่าความจริงของ $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \in N$
- 6) จงหาค่าความจริงของ $\forall n [P(n)]$

วิธีทำ ข้อ 1 จาก $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 4n - 2$

$P(1)$ แทนข้อความ $2 = 4(1) - 2$ ซึ่งเป็นจริง ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

$P(2)$ แทนข้อความ $2 + 4 = 4(2) - 2$ ซึ่งเป็นจริง ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง

$P(3)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 = 4(3) - 2$ ซึ่งเป็นเท็จ ดังนั้น $P(3)$ เป็นเท็จ

$P(4)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + 8 = 4(4) - 2$ ซึ่งเป็นเท็จ ดังนั้น $P(4)$ เป็นเท็จ

ข้อ 2 จากข้อ 1 $P(1)$ เป็นจริง และ $P(2)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(1) \rightarrow P(2)$ เป็นจริง

ข้อ 3 จากข้อ 1 $P(2)$ เป็นจริง และ $P(3)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $P(2) \rightarrow P(3)$ เป็นเท็จ

ข้อ 4 จากข้อ 1 $P(3)$ เป็นเท็จ และ $P(4)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $P(3) \rightarrow P(4)$ เป็นจริง

ข้อ 5 $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ อ่านว่า สำหรับทุก ๆ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า $P(k)$ แล้ว $P(k+1)$

ถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นจริง เราจะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $k \in \mathbb{N}$ แล้วข้อความ
ถ้า $P(k)$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง และถ้าเราจะพิสูจน์ข้อความข้างต้นว่าเป็นเท็จ เราจะต้องหา $k \in \mathbb{N}$ มาอย่าง
น้อยหนึ่งตัว ที่ทำให้ข้อความ ถ้า $P(k)$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก ข้อ 2 เมื่อ $k = 2$ แล้ว $P(2)$ เป็นจริง และ $P(2+1) = P(3)$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $P(2) \rightarrow P(3)$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นเท็จ เมื่อ $k = 2$

ข้อ 6 จาก $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 4n - 2$

จากข้อ 1 $P(2)$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ เมื่อ $n = 2$

1.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน

สมบัติการเท่ากัน

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

1. $a = a$
2. ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
4. ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
5. ถ้า $a = b$ แล้ว $a - c = b - c$
6. ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
7. ถ้า $a = b$ และ $c \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

สมบัติการไม่เท่ากัน

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

1. ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a > b$ หรือ $a < b$
2. ถ้า $a < b$ จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $a + c = b$
3. ถ้า $a > b$ จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $a = b + c$
4. ถ้า $a - b > 0$ แล้ว $a > b$ หรือ $b < a$
5. ถ้า $a - b < 0$ แล้ว $a < b$ หรือ $b > a$
6. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
7. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
8. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
9. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
10. ถ้า $a < b$ แล้ว $a - c < b - c$
11. ถ้า $a > b$ แล้ว $a - c > b - c$
12. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
13. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
14. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
15. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
16. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$

การหารลงตัว (Divisibility)

บทนิยาม 1.5 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$

b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $a = bc$

สัญลักษณ์ "b หาร a ลงตัว" เขียนแทนด้วย $b \mid a$

สัญลักษณ์ "b หาร a ไม่ลงตัว" เขียนแทนด้วย $b \nmid a$

เราเรียก b ว่า ตัวหาร หรือ ตัวประกอบ ของ a และ เรียก a ว่า พหุคูณของ b

ตัวอย่างที่ 1.5

$2 \mid 6$ เพราะ มีจำนวนเต็ม 3 ที่ทำให้ $6 = 2 \times 3$

$-5 \mid 20$ เพราะ มีจำนวนเต็ม -4 ที่ทำให้ $20 = (-5) \times (-4)$

$3 \mid 0$ เพราะ มีจำนวนเต็ม 0 ที่ทำให้ $0 = 3 \times 0$

$2 \nmid 5$ เพราะ ไม่มีจำนวนเต็ม n ใด ๆ ที่ทำให้ $5 = 2n$

สมบัติการหารลงตัว

กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์

1. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
2. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$
3. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b + c$
4. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b - c$
5. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $ma \mid mb$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0
6. ถ้า $ma \mid mb$ แล้ว $a \mid b$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0
7. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$
8. ถ้า $ab \mid c$ แล้ว $a \mid c$ และ $b \mid c$
9. ถ้า $a \mid b$ และ $a > 0, b > 0$ แล้ว $a \leq b$
10. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$ หรือ $a = -b$
11. ถ้า $b \mid a$ และ $b \mid c$ แล้ว $b \mid (am + cn)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม m และ n

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง N แทนเซตของจำนวนนับ I แทนเซตของจำนวนเต็ม
 E แทนเซตของจำนวนคู่ O แทนเซตของจำนวนคี่ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ Q' แทน
 เซตของจำนวนอตรรกยะ และ P แทนเซตของจำนวนเฉพาะบวก

1.1) $\forall x [x + 1 > 3]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3\}$

1.2) $\exists x [x + 1 > 3]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3\}$

1.3) $\forall x [x^2 - 1 = 0]$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$

1.4) $\exists x [x^2 - 1 = 0]$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 1\}$

1.5) $\forall x [x > x - 1]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, 4\}$

1.6) $\exists x [x > x - 1]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, 4\}$

1.7) $\forall x [x > 0 \rightarrow x^2 > 0]$ เมื่อ $U = R$

1.8) $\forall x [x \in N \rightarrow x \in Q]$ เมื่อ $U = R$

1.9) $\forall x [x \in E \rightarrow x \in N]$ เมื่อ $U = R$

1.10) $\forall x [x \in O \rightarrow x \in Q]$ เมื่อ $U = R$

1.11) $\forall x [x \in N \rightarrow x \in Q']$ เมื่อ $U = R$

1.12) $\forall x [x \in Q' \rightarrow x \in R]$ เมื่อ $U = R$

1.13) $\forall x [x \in P \rightarrow x \in O]$ เมื่อ $U = R$

1.14) $\exists x [x \in E \wedge x \in O]$ เมื่อ $U = I$

1.15) $\exists x [x \in N \wedge x \in Q]$ เมื่อ $U = R$

1.16) $\exists x [x \in N \wedge x \in Q']$ เมื่อ $U = R$

1.17) $\exists x [x \in R \wedge x \in I]$ เมื่อ $U = R$

1.18) $\exists x [x \in Q \wedge x \in I]$ เมื่อ $U = R$

1.19) $\exists x [x \in I \wedge x \in Q']$ เมื่อ $U = R$

2. กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $4 + 6 + 8 + 10 + \dots + (2n + 2) = 6n - 2$ และ $U = N$

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

2.1) $P(1), P(2), P(3), P(4)$ และ $P(5)$

2.2) $P(1) \rightarrow P(2)$

2.3) $P(2) \rightarrow P(3)$

2.4) $P(3) \rightarrow P(4)$

2.5) $P(4) \rightarrow P(5)$

2.6) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \in N$

2.7) $\forall n [P(n)]$

3. กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)\dots(n - 50)$
และ $U = \mathbb{N}$ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
- 3.1) $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), \dots, P(49), P(50)$
- 3.2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}$
- 3.3) $\forall n [P(n)]$
4. จงยกตัวอย่างจำนวนเต็มที้อยอดคล้องตามสมบัติการเท่ากันในแต่ละข้อ
5. จงยกตัวอย่างจำนวนเต็มที้อยอดคล้องตามสมบัติการไม่เท่ากันในแต่ละข้อ
6. จงยกตัวอย่างจำนวนเต็มที้อยอดคล้องตามสมบัติการหารลงตัวในแต่ละข้อ

บทที่ 2

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Mathematical Induction

ทฤษฎีบทที่ 2.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction)

ให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ S เป็นสับเซตใด ๆ ของ N และ S มีสมบัติต่อไปนี้

1) $1 \in S$ และ

2) $\forall k [k \in S \rightarrow k+1 \in S]$

แล้ว $S = N$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความ $P(n)$ ว่าเป็นจริงสำหรับทุกค่า n ที่เป็นจำนวนนับ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะกระทำดังนี้

สำหรับ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n

ถ้า 1) $P(1)$ และ

2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

แล้ว $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง

จากทฤษฎีบทที่ 2.2 จะเห็นได้ว่าการพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n จะต้องกระทำ 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เราจะต้องแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับ $n = 1$ เรียกขั้นนี้ว่า “ขั้นฐาน” (basis Step)

ขั้นที่ 2 สมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับ $n = k$ แล้วจะต้องพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับ $n = k + 1$ เรียกขั้นที่ 2 นี้ว่า “ขั้นตอนของการอุปนัย” (Induction Step) และเรียกข้อความตอนแรกของขั้นที่ 2 ว่า “สมมติฐานของการอุปนัย” (Hypothesis of Induction)

การที่เราพิสูจน์เพียงสองขั้นนี้ ตามทฤษฎีบทที่ 2.2 ก็เป็นการเพียงพอแล้ว เพื่อให้เข้าใจวิธีการนี้ดียิ่งขึ้นก็อาจจะอธิบายให้เข้าใจได้โดยใช้หลักการทางตรรกศาสตร์ ดังนี้

ถ้า $P(1)$ เป็นจริง

และ ถ้า $P(1)$ เป็นจริง แล้ว $P(1+1) = P(2)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง ตามกฎการแจงผลตามเหตุ (Modus Ponens) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

และ ถ้า $P(2)$ เป็นจริง แล้ว $P(2+1) = P(3)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(3)$ เป็นจริง ตามกฎการแจงผลตามเหตุ

และ ถ้า $P(3)$ เป็นจริง แล้ว $P(3+1) = P(4)$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(4)$ เป็นจริง ตามกฎการแจงผลตามเหตุ

•
•
•

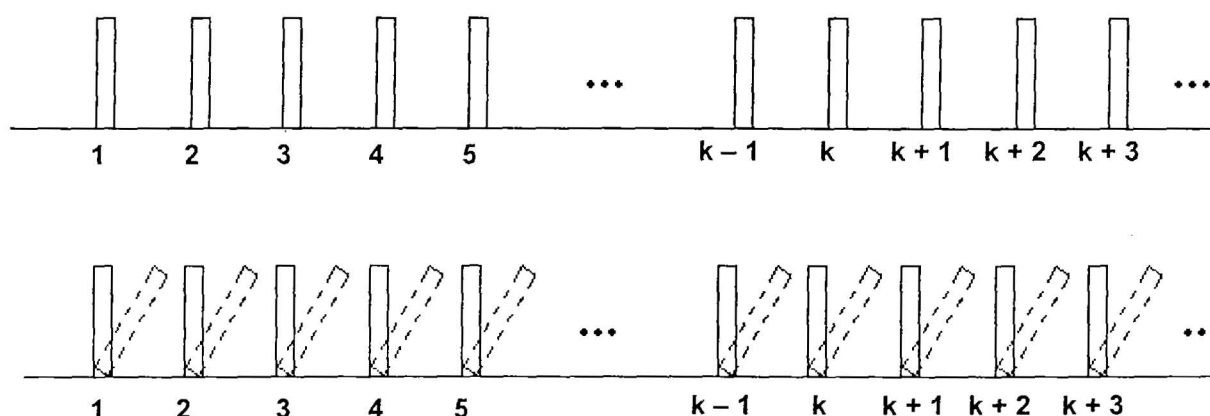
และ ถ้า $P(n-1)$ เป็นจริง แล้ว $P((n-1)+1) = P(n)$ เป็นจริง
 ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริง ตามกฎการแจงผลตามเหตุ

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจเรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น

ปัญหา : ถ้าเราหาแท่งไม้จำนวนหนึ่งเท่าใดก็ได้ มาตั้งไว้ให้ห่างกันระยะพอเหมาะ โดยมีเงื่อนไขว่า
 ถ้าแท่งไม้แท่งใดแท่งหนึ่งล้มจะไปกระทบแท่งถัดไปให้ล้มลงด้วย

คำถาม : เราจะต้องผลักแท่งไม้แท่งใดล้มจึงจะทำให้แท่งไม้ทุกแท่งล้มหมด

คำตอบ : เราจะต้องผลักแท่งไม้แท่งที่ 1 เพราะว่า ถ้าเราผลักแท่งไม้แท่งที่หนึ่งล้มลงเพียงแท่งเดียว แล้วจะทำให้
 ไม้แท่งที่สองล้มลงด้วย เมื่อแท่งไม้แท่งที่สองล้มลงก็เป็นผลทำให้แท่งไม้แท่งที่สามล้มลงด้วย เป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป
 จนในที่สุดแท่งไม้ทุกแท่งล้มหมด ดังรูป



จะเห็นได้ว่า แท่งไม้แท่งที่หนึ่งล้ม จะสอดคล้องกับ ข้อความที่ 1 ในทฤษฎีบทที่ 2.2 และ ถ้าแท่งไม้
 แท่งที่ k ล้ม แล้วแท่งไม้แท่งที่ $k+1$ ล้มด้วย จะสอดคล้องกับ ข้อความที่ 2 ในทฤษฎีบทที่ 2.2 ดังนั้น โดย
 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า แท่งไม้ทุกแท่งล้มหมด

2.1 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอนุกรม

ตัวอย่างที่ 2.1.1 จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $1 = \frac{1}{2}(1)(1+1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\frac{1}{2}(1)(1+1) = 1$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$

นำ $(k+1)$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1) \left[\frac{1}{2}k + 1 \right] \\ &= (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จงพิสูจน์ว่า $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $2(1) = 1(1+1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $2(1) = 2 = 1(1+1)$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1)$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)[(k+1)+1]$$

นำ $2(k+1)$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.3 จงพิสูจน์ว่า $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2 - n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2 - n$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $4(1) - 3 = 2(1)^2 - 1$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $4(1) - 3 = 1 = 2(1)^2 - 1$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) = 2k^2 - k$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) + [4(k+1)-3] = 2(k+1)^2 - (k+1)$$

นำ $[4(k+1)-3]$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) + [4(k+1)-3] &= 2k^2 - k + [4(k+1)-3] \\ &= 2k^2 - k + 4k + 4 - 3 \\ &= 2k^2 + 3k + 1 \\ &= 2k^2 + (4k - k) + (2 - 1) \\ &= 2k^2 + 4k + 2 - k - 1 \\ &= 2(k^2 + 2k + 1) - (k+1) \\ &= 2(k+1)^2 - (k+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = 2n^2 - n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.4 จงพิสูจน์ว่า $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $2^1 = 2^{1+1} - 2$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $2^{1+1} - 2 = 2 = 2^1$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $2 + 4 + 8 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 2$$

นำ 2^{k+1} บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 2 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.5 จงพิสูจน์ว่า $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $(1)(1+1) = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $(1)(1+1) = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

นำ $(k+1)[(k+1)+1]$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1] = \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)[(k+1)+1] \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.6 จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $\frac{1}{[3(1)-2][3(1)+1]} = \frac{1}{3(1)+1}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\frac{1}{[3(1)-2][3(1)+1]} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3(1)+1}$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง
จะได้ว่า

$$\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} \text{ เป็นจริง } \text{-----} \star$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} = \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

นำ $\frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} = \\
&= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} \\
&= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{[3k+3-2][3k+3+1]} \\
&= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{k+1}{(3k+4)} \\
&= \frac{k+1}{[3(k+1)+1]}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $\frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \frac{1}{(7)(10)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.7 จงพิสูจน์ว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $1^2 = \frac{(1)(1+1)[2(1)+1]}{6}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $1^2 = 1 = \frac{(1)(1+1)[2(1)+1]}{6}$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ เป็นจริง $\star$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

นำ $(k+1)^2$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริง สำหรับทุกๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.8 จงพิสูจน์ว่า $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$ เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $(-1)^{1-1} 1^2 = (-1)^{1-1} \left(\frac{(1)(1+1)}{2} \right)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $(-1)^{1-1} 1^2 = 1 = (-1)^{1-1} \left(\frac{(1)(1+1)}{2} \right)$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{k-1} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)$ เป็นจริง ----- $\star$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^{(k+1)-1} (k+1)^2 = (-1)^{(k+1)-1} \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \right)$$

นำ $(-1)^{(k+1)-1} (k+1)^2$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^{(k+1)-1} (k+1)^2 &= \\ &= (-1)^{k-1} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) + (-1)^{(k+1)-1} (k+1)^2 \\ &= (-1)^{k-1} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) + (-1)^k (k+1)^2 \\ &= (-1)^k (k+1) \left((-1)^{-1} \frac{k}{2} + (k+1) \right) \\ &= (-1)^k (k+1) \left(-\frac{k}{2} + (k+1) \right) \\ &= (-1)^k (k+1) \left(\frac{2k+2-k}{2} \right) \\ &= (-1)^k (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) \\ &= (-1)^{(k+1)-1} \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right) \\ &= (-1)^{(k+1)-1} \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.1.9 จงพิสูจน์ว่า $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2[n(n+1)]^2$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2[n(n+1)]^2$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $[(2)(1)]^3 = 2[(1)(1+1)]^2$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $[(2)(1)]^3 = 8 = 2[(1)(1+1)]^2$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2k)^3 = 2[k(k+1)]^2$ เป็นจริง ----- $\star$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2k)^3 + [2(k+1)]^3 = 2[(k+1)((k+1)+1)]^2$$

นำ $[2(k+1)]^3$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2k)^3 + [2(k+1)]^3 &= 2[k(k+1)]^2 + [2(k+1)]^3 \\
&= (k+1)^2 [2k^2 + 2^3(k+1)] \\
&= (k+1)^2 [2k^2 + 8k + 8] \\
&= 2(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4) \\
&= 2(k+1)^2 (k+2)^2 \\
&= 2[(k+1)(k+2)]^2 \\
&= 2[(k+1)((k+1)+1)]^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2[n(n+1)]^2$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

จากตัวอย่างการพิสูจน์ข้างต้น จะเห็นว่า การพิสูจน์นั้นมี 2 ขั้น ขั้นแรก คือ ขั้นฐาน เป็นการพิสูจน์ว่า $P(1)$ เป็นจริง และ ขั้นที่สอง คือ ขั้นตอนของการอุปนัย เป็นการพิสูจน์ว่า ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง จะต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ซึ่งทั้งสองขั้นตอนนี้เป็นสิ่งจำเป็นจะขาดขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งไม่ได้ ถ้าขาดขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งแล้ว ข้อความ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n $P(n)$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง ตัวอย่าง 2.1.10 และ 2.1.11 เป็นตัวอย่างของข้อความ $P(n)$ ที่มีสมบัติไม่ครบ 2 ข้อของหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงส่งผลให้ข้อความ $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างที่ 2.1.10 สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n+1}{2}$

จงพิสูจน์ว่า

- 1) $P(1)$ เป็นจริง
- 2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นเท็จ
- 3) $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

การพิสูจน์

- 1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ } 1 = \frac{1+1}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

- 2) จะแสดงว่า $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นเท็จ

เลือก $k = 1$ ต่อไปจะแสดงว่า $P(1) \rightarrow P(1+1)$ เป็นเท็จ

$P(1)$ เป็นจริง จากข้อ 1)

$$P(2) \text{ แทนข้อความ } 1 + 2 = \frac{2+1}{2} \text{ เป็นเท็จ เพราะว่า } \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \neq 1 + 2$$

ดังนั้น ข้อความ $P(1) \rightarrow P(2)$ จึงเป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นเท็จ

หมายเหตุ ในการเลือกค่า k เราพิจารณาจาก $P(k+1)$ ดังนี้

$$P(k) \text{ แทนข้อความ } 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k+1}{2} \quad \text{-----} \star$$

$$P(k+1) \text{ แทนข้อความ } 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)+1}{2}$$

นำ $k+1$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k+1}{2} + k+1 \\ &= \frac{k+1+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+1+2k+2}{2} \\ &= \frac{3k+3}{2} \\ &= \frac{3(k+1)}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{3(k+1)}{2} = \frac{(k+1)+1}{2}$ เป็นจริงสำหรับ k บางตัวเท่านั้น

เพราะว่า $3(k+1) = (k+1) + 1 \iff 3k+3 = k+2$

$$\iff 3k - k = 2 - 3$$

$$\iff 2k = -1$$

$$\iff k = -\frac{1}{2}$$

1) จะแสดงว่า $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก $n=2$ ทำให้ $P(2)$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

จากตัวอย่างนี้จะพบว่า $P(n)$ ไม่สอดคล้องกับข้อ 2 ของทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 2.1.11 สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n + 4$ จงพิสูจน์ว่า

1) $P(1)$ เป็นเท็จ

2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นจริง

3) $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

การพิสูจน์

1) จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นเท็จ

$$P(1) \text{ แทน } 2 = 1^2 + 1 + 4$$

$$\text{เนื่องจาก } 1^2 + 1 + 4 = 6 \neq 2$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นเท็จ

2) จะแสดงว่า $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k^2 + k + 4$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) = (k+1)^2 + (k+1) + 4$$

นำ $2(k+1)$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) &= k^2 + k + 4 + 2(k+1) \\ &= k^2 + k + 4 + 2k + 2 \\ &= k^2 + 2k + 2 + k + 4 \\ &= k^2 + 2k + 1 + 1 + k + 4 \\ &= (k^2 + 2k + 1) + (k + 1) + 4 \\ &= (k+1)^2 + (k+1) + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เป็นจริง สำหรับ $k \in \mathbb{N}$

3) จะแสดงว่า $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

เนื่องจาก $P(1)$ เป็นเท็จ ทำให้สรุปได้ว่า $\forall n [P(n)]$ เป็นเท็จ

จากตัวอย่างนี้จะพบว่า $P(n)$ ดังกล่าวสอดคล้องกับข้อ 2 ของทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพียงข้อเดียว จึงไม่เป็นการเพียงพอที่จะสรุปว่า $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงแสดงหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาพอสังเขป
2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$2.1) \quad 3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$2.2) \quad 4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$$

$$2.3) \quad 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$2.4) \quad 3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$$

$$2.5) \quad 5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$$

$$2.6) \quad 4 + 9 + 14 + \dots + (5n-1) = \frac{n}{2}(5n+3)$$

$$2.7) \quad 7 + 13 + 19 + \dots + (6n+1) = n(3n+4)$$

$$2.8) \quad 2 + 10 + 18 + \dots + (8n-6) = n(4n-2)$$

$$2.9) \quad 2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2$$

$$2.10) \quad 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$2.11) \quad 1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

$$2.12) \quad 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

$$2.13) \quad 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4)$$

$$2.14) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$2.15) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$2.16) \quad (1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$2.17) \quad (3)(6) + (6)(9) + (9)(12) + \dots + (3n)(3n+3) = 3n(n+1)(n+2)$$

$$2.18) \quad (1)(3) + (2)(4) + (3)(5) + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

$$2.19) \quad 1(2) + 2(2)^2 + 3(2)^3 + \dots + n(2)^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$2.20) \quad 1(3) + 2(3)^2 + 3(3)^3 + \dots + n(3)^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

$$2.21) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$2.22) \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$2.23) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$2.24) \quad -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \dots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$2.25) \quad (1)(2)(3) + (2)(3)(4) + (3)(4)(5) + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

3. กำหนดให้ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$

จงพิสูจน์ว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

4. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทน $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

4.1) $P(1)$

4.2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

4.3) $\forall n [P(n)]$

5. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทน $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 8n - 4$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

5.1) $P(1)$ และ $P(2)$

5.2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

5.3) $\forall n [P(n)]$

6. สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทน $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 + 1$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

6.1) $P(1)$

6.2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

6.3) $\forall n [P(n)]$

2.2 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องการหารลงตัว

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงพิสูจน์ว่า 3 หาร $n(n^2 + 2)$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 3 หาร $n(n^2 + 2)$ ลงตัว

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ 3 หาร $1(1^2 + 2)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $1(1^2 + 2) = 3$ ซึ่ง 3 หาร 3 ลงตัว

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า 3 หาร $k(k^2 + 2)$ ลงตัว

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า 3 หาร $(k+1)[(k+1)^2 + 2]$ ลงตัว

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (k+1)[(k+1)^2 + 2] &= (k+1)(k+1)^2 + 2(k+1) \\ &= k(k+1)^2 + 1(k+1)^2 + 2k + 2 \\ &= k(k^2 + 2k + 1) + (k^2 + 2k + 1) + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 2k) + (2k^2 + k^2) + (k + 2k) + (1+2) \\ &= k(k^2 + 2) + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= k(k^2 + 2) + 3(k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

เนื่องจาก 3 หาร $k(k^2 + 2)$ ลงตัว และ 3 หาร $3(k^2 + k + 1)$ ลงตัว

ดังนั้น 3 หาร $k(k^2 + 2) + 3(k^2 + k + 1)$ ลงตัว

จะได้ว่า 3 หาร $(k+1)[(k+1)^2 + 2]$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ 3 หาร $n(n^2 + 2)$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.2.2 จงพิสูจน์ว่า 4 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 4 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัว

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ 4 หาร $1(1+1)(1+2)(1+3)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $1(1+1)(1+2)(1+3) = (1)(2)(3)(4) = 24$ ซึ่ง 4 หาร 24 ลงตัว

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า 4 หาร $k(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือจะแสดงว่า 4 หาร $(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3]$ ลงตัว

พิจารณา

$$\begin{aligned}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3] &= (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \\ &= (k+4)[(k+1)(k+2)(k+3)] \\ &= k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

เนื่องจาก 4 ทหาร $k(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว และ 4 ทหาร $4(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

ดังนั้น 4 ทหาร $k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

จะได้ว่า 4 ทหาร $(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2][(k+1)+3]$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ 4 ทหาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.2.3 จงพิสูจน์ว่า 7 ทหาร $n^7 - n$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ

$$[ข้อแนะ : (k+1)^7 = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1]$$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 7 ทหาร $n^7 - n$ ลงตัว

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ 7 ทหาร $1^7 - 1$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $1^7 - 1 = 0$ ซึ่ง 7 ทหาร 0 ลงตัว

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า 7 ทหาร $k^7 - k$ ลงตัว

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า 7 ทหาร $(k+1)^7 - (k+1)$ ลงตัว

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } (k+1)^7 - (k+1) &= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1 \\ &= (k^7 - k) + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k \\ &= (k^7 - k) + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)\end{aligned}$$

เนื่องจาก 7 ทหาร $(k^7 - k)$ ลงตัว และ 7 ทหาร $7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$ ลงตัว

ดังนั้น 7 ทหาร $(k^7 - k) + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$ ลงตัว

จะได้ว่า 7 ทหาร $(k+1)^7 - (k+1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ 7 ทหาร $n^7 - n$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.2.4 จงพิสูจน์ว่า 2304 ทหาร $7^{2n} - 48n - 1$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 2304 ทหาร $7^{2n} - 48n - 1$ ลงตัว

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ 2304 ทหาร $7^{2(1)} - 48(1) - 1$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $7^{2(1)} - 48(1) - 1 = 49 - 48 - 1 = 0$ ซึ่ง 2304 ทหาร 0 ลงตัว

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า 2304 หาร $7^{2k} - 48k - 1$ ลงตัว

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า 2304 หาร $7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$ ลงตัว

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad 7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1 &= 7^{2k+2} - 48k - 48 - 1 \\
 &= (7^{2k})(7^2) - 48k - 49 \\
 &= 49(7^{2k}) - 48k - 49 \\
 &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 49(48k) - 48k \\
 &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + (48k)[49 - 1] \\
 &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + (48k)(48) \\
 &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 2304k
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก 2304 หาร $(7^{2k} - 48k - 1)$ ลงตัว ทำให้ 2304 หาร $49(7^{2k} - 48k - 1)$ ลงตัว

และ 2304 หาร $2304k$ ลงตัว

ดังนั้น 2304 หาร $49(7^{2k} - 48k - 1) + 2304k$

จะได้ว่า 2304 หาร $7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ 2304 หาร $7^{2n} - 48n - 1$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก n จำนวนนับ
 - 1.1) 2 หาร $n^2 - n$ ลงตัว
 - 1.2) 2 หาร $n(n+1)$ ลงตัว
 - 1.3) 3 หาร $n(n+1)(n+2)$ ลงตัว
 - 1.4) 5 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ ลงตัว
 - 1.5) 6 หาร $n(n+1)(2n+1)$ ลงตัว
 - 1.6) 8 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัว
 - 1.7) 8 หาร $(n-1)n(n+1)(n+2)$ ลงตัว
 - 1.8) 3 หาร $n^3 - n$ ลงตัว
 - 1.9) 5 หาร $n^5 - n$ ลงตัว [ข้อแนะ : $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$]
 - 1.10) 6 หาร $n^3 - n$ ลงตัว
 - 1.11) 6 หาร $n(n^2 + 5)$ ลงตัว
 - 1.12) 64 หาร $9^n - 8n - 1$ ลงตัว
 - 1.13) 64 หาร $3^{2n+2} - 8n - 9$ ลงตัว
 - 1.14) 6400 หาร $9^{2n} - 80n - 1$ ลงตัว
 - 1.15) 9 หาร $2(10^n) + 3(10^{n-1}) + 4$
 - 1.16) 5 หาร $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ ลงตัว
 - 1.17) 7 หาร $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ลงตัว
 - 1.18) 24 หาร $2(7^n) + 3(5^n) - 5$ ลงตัว
 - 1.19) 2 หาร $3^n - 1$ ลงตัว
 - 1.20) 3 หาร $7^n + 2$ ลงตัว
 - 1.21) 4 หาร $5^n + 3$ ลงตัว
 - 1.22) 7 หาร $3^{2n} - 1$ ลงตัว
 - 1.23) 30 หาร $2^{4n+1} - 2$ ลงตัว
 - 1.24) 120 หาร $n^5 - 5n^3 + 4n$ ลงตัว
 - 1.25) 2^n หาร $(2n)!$ ลงตัว

2.3 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอสมการ

ตัวอย่างที่ 2.3.1 จงพิสูจน์ว่า $2^n > n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^n > n$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $2^1 > 1$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $2^1 = 2$ ซึ่ง $2 > 1$ ดังนั้น $2^1 > 1$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $2^k > k$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $2^{k+1} > k+1$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad 2^{k+1} &= 2^k \times 2^1 \\ &> k \times 2 \\ &= k + k \\ &\geq k + 1 \quad (\text{เพราะว่า } k \geq 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{k+1} > k + 1$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ $2^n > n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.3.2 จงพิสูจน์ว่า $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\frac{1}{1^2} = 1$ และ $2 - \frac{1}{1} = 1$ ดังนั้น $\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

นำ $\frac{1}{(k+1)^2}$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$

นั่นคือจะแสดงว่า $(2 - \frac{1}{k+1}) - (2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}) \geq 0$

พิจารณา $(2 - \frac{1}{k+1}) - (2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}) = 2 - \frac{1}{k+1} - 2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k+1)^2 - k(k+1) - k}{k(k+1)^2}$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1 - k^2 - k - k}{k(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2}$$

$$\geq 0 \quad (\text{เพราะว่า } k \geq 1)$$

ดังนั้น $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$

$$\leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.3.3 จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ

จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ } \frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2\sqrt{1}-1$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ และ $2\sqrt{1}-1 = 1$ ดังนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2\sqrt{1}-1$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{จะได้ว่า } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k}-1 \text{ เป็นจริง } \text{-----} \star$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}-1$$

นำ $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k}-1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\text{ต่อไปจะแสดงว่า } 2\sqrt{k}-1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}-1$$

$$\text{นั่นคือจะแสดงว่า } (2\sqrt{k+1}-1) - (2\sqrt{k}-1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}) \geq 0$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (2\sqrt{k+1}-1) - (2\sqrt{k}-1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}) &= 2\sqrt{k+1}-1-2\sqrt{k}+1-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= 2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{2(k+1)-2\sqrt{k(k+1)}-1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{2k+2-2\sqrt{k(k+1)}-1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{2k+1-2\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{k+1-2\sqrt{k(k+1)}+k}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{k+1})^2-2\sqrt{k(k+1)}+(\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}}$$

$$\geq 0 \quad (\text{ดูหมายเหตุ ข้อ 1 และ ข้อ 2})$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &\leq 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\leq 2\sqrt{k+1} - 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$\text{นั่นคือ } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \quad \text{เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

หมายเหตุ

$$1) (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2 \geq 0 \quad \text{เสมอ}$$

$$2) \text{ เนื่องจาก } k \geq 1 \text{ ทำให้ } k+1 > 0 \text{ และ } \sqrt{k+1} > 0$$

ตัวอย่างที่ 2.3.4 จงพิสูจน์ว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$[\text{ข้อแนะ : } (k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1]$$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ } 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ } (1-1)^4 < \frac{1^5}{5}$$

$$\text{ดังนั้น } P(1) \text{ เป็นจริง เพราะว่า } (1-1)^4 = 0 \text{ และ } \frac{1^5}{5} = \frac{1}{5} \text{ ดังนั้น } (1-1)^4 < \frac{1^5}{5}$$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{จะได้ว่า } 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (k-1)^4 < \frac{k^5}{5} \quad \text{เป็นจริง} \quad \star$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (k-1)^4 + k^4 < \frac{(k+1)^5}{5}$$

นำ k^4 บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ $\star$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (k-1)^4 + k^4 &< \frac{k^5}{5} + k^4 \\ &= \frac{k^5 + 5k^4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{k^5 + 5k^4}{5} + \frac{10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} \\
 &= \frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}{5} \\
 &= \frac{(k+1)^5}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (k-1)^4 + k^4 < \frac{(k+1)^5}{5}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$\text{นั่นคือ } 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5} \text{ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

การพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์นี้อาจนำไปใช้กับข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n ที่ $n \geq a$ เมื่อ a เป็นจำนวนนับ โดยปรับทฤษฎีบทที่ 2.3 ใหม่ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.3 หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n และ a เป็นจำนวนนับ

ถ้า 1) $P(a)$ และ

2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \geq a$

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq a$

ตัวอย่างที่ 2.3.5 จงพิสูจน์ว่า $4^n > n^4$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 5$

$$[\text{ข้อแนะ} : (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1]$$

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $4^n > n^4$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(5)$ เป็นจริง

$P(5)$ แทนข้อความ $4^5 > 5^4$

ดังนั้น $P(5)$ เป็นจริง เพราะว่า $4^5 = 1024$ และ $5^4 = 625$ ดังนั้น $4^5 > 5^4$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $4^k > k^4$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $4^{k+1} > (k+1)^4$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } 4^{k+1} &= 4^k \times 4^1 \\
 &= 4^k + 4^k + 4^k + 4^k \\
 &> k^4 + k^4 + k^4 + k^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \quad (\text{ดูหมายเหตุ ข้อ 1 - 3}) \\
 &= (k+1)^4
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $4^{k+1} > (k+1)^4$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq 5$

นั่นคือ $4^n > n^4$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 5$

หมายเหตุ เนื่องจาก $k \geq 5$ ดังนั้น

1) $k^4 \geq 4k^3$

2) $k^4 \geq 6k^2$

3) $k^4 \geq 4k + 1$

ตัวอย่างที่ 2.3.6 จงพิสูจน์ว่า $n^4 \leq 2^n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 16$

[ข้อแนะ : $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$]

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^4 \leq 2^n$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(16)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $16^4 \leq 2^{16}$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $16^4 = (2^4)^4 = 2^{16}$ ดังนั้น $16^4 \leq 2^{16}$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $k^4 \leq 2^k$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $(k+1)^4 \leq 2^{k+1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad (k+1)^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
 &\leq 2^k + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
 &\leq 2^k + 4k^3 + 6k^3 + 4k^3 + k^3 \\
 &= 2^k + 15k^3 \\
 &\leq 2^k + k^4 \quad (\text{เพราะ } k \geq 16) \\
 &\leq 2^k + 2^k \\
 &= 2(2^k) \\
 &= 2^{k+1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(k+1)^4 \leq 2^{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $n^4 \leq 2^n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 16$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
 - 1.1) $2^n < 2^{n+1}$
 - 1.2) $2^n \geq 2n$
 - 1.3) $2^n \geq n + 1$
 - 1.4) $3^n \geq 1 + 2n$
 - 1.5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$
 - 1.6) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$
 - 1.7) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
 - 1.8) $(1+y)^n \geq 1 + ny$ เมื่อ $y \geq -1$
2. จงพิสูจน์ว่า $1 + n < 2^n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 2$
3. จงพิสูจน์ว่า $3^n > 3n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 2$
4. จงพิสูจน์ว่า $n^2 > 2n + 1$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 3$
5. จงพิสูจน์ว่า $3^n > 2^n + 20$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 3$
6. จงพิสูจน์ว่า $n^2 \leq 2^n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 4$
7. จงพิสูจน์ว่า $3^n > n^3$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 4$
8. จงพิสูจน์ว่า $n^3 \leq 2^n$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n โดยที่ $n \geq 10$

2.4 บทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

นอกจากเรื่องอนุกรม , การหารลงตัว และ อสมการ แล้วเราสามารถนำหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ พิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้อีก เช่น ข้อความคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปผลรวม (Summation) หรือ เครื่องหมาย Σ (Sigma) , ข้อความคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเลขยกกำลัง , ข้อความคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเมตริกซ์ , ข้อความคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ข้อความคณิตศาสตร์เกี่ยวกับตรีโกณมิติ และข้อความคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวัน

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

- 1) $a^1 = a$
- 2) $a^{k+1} = a^k \times a$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

สมบัติของ Summation

- 1) $\sum_{i=1}^1 a_i = a_1$
- 2) $\sum_{i=1}^1 i = 1$
- 3) $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1}$
- 4) $\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + k + 1$
- 5) $\sum_{i=1}^k (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^k a_i \pm \sum_{i=1}^k b_i$
- 6) $\sum_{i=1}^k c = ck$
- 7) $\sum_{i=1}^k ca_i = c \sum_{i=1}^k a_i$
- 8) $\sum_{i=1}^k (a_{i+1} - a_i) = a_{k+1} - a_1$

ตัวอย่างที่ 2.4.1 จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ } \sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } P(1) \text{ เป็นจริง เพราะว่า } \sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{จะได้ว่า } \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \text{ เป็นจริง } \text{-----} \star$$

$$\text{ต่อไปจะแสดงว่า } P(k+1) \text{ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า } \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + k+1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \quad (\text{จากสมการ } \star) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$\text{นั่นคือ } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

ตัวอย่างที่ 2.4.2 ให้ a, r เป็นจำนวนจริง โดยที่ $r \neq 1$ จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{ar^n - a}{r-1}$ เป็นจริง

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ } \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{ar^n - a}{r-1}$$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ } \sum_{i=1}^1 ar^{1-1} = \frac{ar^1 - a}{r-1}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $\sum_{i=1}^1 ar^{i-1} = ar^0 = a$ และ $\frac{ar^1 - a}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^k ar^{i-1} = \frac{ar^k - a}{r-1}$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $\sum_{i=1}^{k+1} ar^{i-1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \sum_{i=1}^{k+1} ar^{i-1} &= \sum_{i=1}^k ar^{i-1} + ar^{(k+1)-1} \\
 &= \sum_{i=1}^k ar^{i-1} + ar^k \\
 &= \frac{ar^k - a}{r-1} + ar^k \quad (\text{จากสมการ } \star) \\
 &= \frac{ar^k - a + (r-1)ar^k}{r-1} \\
 &= \frac{ar^k - a + ar^{k+1} - ar^k}{r-1} \\
 &= \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $\sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{ar^n - a}{r-1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.4.3 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนิยามต่อไปนี้

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{จำนวน } n \text{ ตัว}}, \quad a^1 = a \quad \text{และ} \quad a^{n+1} = a^n \times a$$

จงพิสูจน์ว่า $1^n = 1$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1^n = 1$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $1^1 = 1$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $1^k = 1$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า $1^{k+1} = 1$

$$\text{พิจารณา} \quad 1^{k+1} = 1^k \times 1$$

$$= 1 \times 1 \quad (\text{เพราะว่า } 1^k = 1 \text{ จาก } P(k) \text{ เป็นจริง ----- } \star)$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $1^n = 1$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงพิสูจน์ว่า $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$P(1) \text{ แทนข้อความ} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งเป็นจริง}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{จะได้ว่า} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นจริง ----- } \star$$

$$\text{ต่อไปจะแสดงว่า } P(k+1) \text{ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{จาก } P(k) \text{ เป็นจริง ----- } \star) \\ &= \begin{bmatrix} (1)(1) + (-k)(0) & (1)(-1) + (-k)(1) \\ (0)(1) + (1)(0) & (0)(-1) + (1)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

ตัวอย่างที่ 2.4.5 จงพิสูจน์ว่า $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n
การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

ขั้นที่ 1 ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$P(1)$ แทนข้อความ $(\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos 1\theta + i \sin 1\theta$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนของการอุปนัย

สมมติฐานของการอุปนัย คือ ให้ k เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือจะแสดงว่า $(\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} = \cos (k+1)\theta + i \sin (k+1)\theta$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta)^1 \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{จาก } P(k) \text{ เป็นจริง } \text{---} \star) \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta) \\ &= \cos (k\theta + \theta) + i \sin (k\theta + \theta) \\ &= \cos (k+1)\theta + i \sin (k+1)\theta \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ตัวอย่างที่ 2.4.6 สมมติว่า เรามีแสดมปี 2 ชนิด ชนิดราคา 3 บาท และ 5 บาท เราจะแสดงว่า เราสามารถใช้แสดมปี 2 ชนิดนี้รวมกันเพื่อให้ได้ไปรษณียากรมูลค่า 8 บาท หรือมากกว่านั้น
การพิสูจน์

เป็นที่แน่นอนว่า ในการทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า 8 บาท , 9 บาท , 10 บาท ไปเรื่อย ๆ โดยแสดงให้เห็นเป็นกรณี ๆ ไป คงเป็นวิธีที่ไม่มีประสิทธิภาพมากนัก เพราะมีกรณีมากมายที่ต้องการตรวจสอบ ลงมาพิจารณาวิธีต่อไปนี้

เราจะต้องแสดงว่า ถ้าเป็นไปได้ที่ทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า k บาท โดยใช้แสดมปีชนิด 3 บาท และ 5 บาท จะได้ว่า การทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k+1$ บาท โดยใช้แสดมปีทั้งสองชนิดนี้ ก็จะเป็นไปได้เช่นกัน โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 สมมติว่า เราทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า k บาท โดยใช้แสตมป์ชนิด 5 บาทอย่างน้อย 1 ดวง เราจะแทน แสตมป์ชนิด 5 บาท 1 ดวง ด้วยแสตมป์ 3 บาท 2 ดวง พบว่า เราได้วิธีที่ทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k + 1$ บาท

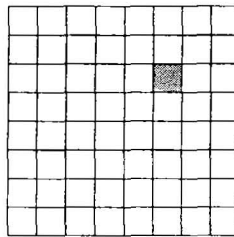
กรณีที่ 2 สมมติว่า เราทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า k บาท โดยใช้แสตมป์ชนิด 3 บาทเพียงอย่างเดียว เพราะว่า $k \geq 8$ เราต้องใช้แสตมป์ชนิด 3 บาทอย่างน้อย 3 ดวง ถ้าใช้แสตมป์ ชนิด 5 บาท 2 ดวง แทนแสตมป์ชนิด 3 บาท 3 ดวงนั้น เราจะได้วิธีที่ทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k + 1$ บาท

เนื่องจากเห็นได้ชัดว่า เราจะทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า $k + 1$ บาท ได้อย่างไร (จากแสตมป์ชนิด 3 บาท กับ แสตมป์ชนิด 5 บาท)

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เราสามารถทำให้เกิดไปรษณียากรมูลค่า 8 บาท , 9 บาท , 10 บาท , 11 บาท ... เป็นไปเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป

นั่นคือ เราสามารถใช้แสตมป์ 2 ชนิดนี้รวมกันเพื่อให้ได้ไปรษณียากรมูลค่า n บาท สำหรับ n ที่เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 8

ตัวอย่างที่ 2.4.7 สมมติว่าเรามีกระดานหมากรุกมาตรฐานขนาด 8×8 และเอาช่องหนึ่งออกไป ดังรูปที่ 1 (แสดงด้วยช่องที่แรเงา) กระดานหมากรุกที่มีการเอาช่องหนึ่งออกไปจะเรียกว่า “กระดานหมากรุกมีตำหนิ”



รูปที่ 1

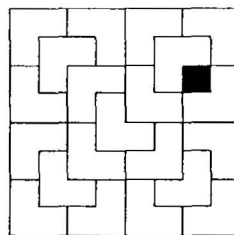
กำหนด ตัวปิด 3 ชิ้น รูปตัว L ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

เราต้องการทราบว่า มีทางเป็นไปได้หรือไม่ที่จะปิดช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เหลือ 63 ช่อง ของกระดานหมากรุกนี้ด้วยตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L (การปิดช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เหลือของกระดานหมากรุกนี้ เราหมายถึง การปิดแต่ละช่องสี่เหลี่ยมเพียงครั้งเดียว โดยไม่ให้ตัวปิด 3 ชิ้นรูปตัว L เกินไปทับบนช่องที่เอาออก หรือออกนอกกระดาน)

การพิสูจน์ คำตอบที่เป็นไปได้ คือ รูปที่ 3

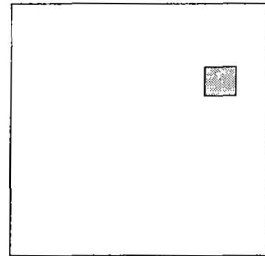


รูปที่ 3

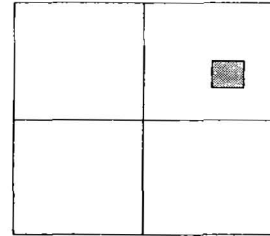
เราสามารถจะแสดงการพิสูจน์ผลลัพธ์ในกรณีทั่วไป ดังนี้

เราต้องการแสดงว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^n \times 2^n$ จะสามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L เสมอ เห็นได้ชัดเจนว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^1 \times 2^1$ นั้น สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L ตัวหนึ่งเสมอ คราวนี้เรามาสสมมติว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ ใด ๆ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L จะแสดงให้เห็นว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L เช่นกัน

พิจารณากระดานหมากรุกมีด้าน $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ ดังรูปที่ 4

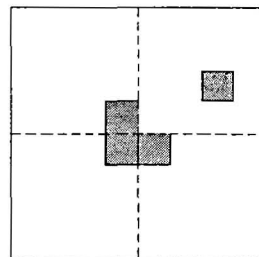


รูปที่ 4



รูปที่ 5

แบ่งกระดานหมากรุกนี้เป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนจะเป็นกระดานหมากรุกขนาด $2^k \times 2^k$ ดังรูปที่ 5 หนึ่งในสี่ส่วนนี้จะเป็นกระดานหมากรุกมีด้าน โดยการปิดด้วยตัวปิด 3 ชั้น (รูปตัว L) ที่กึ่งกลางของกระดานหมากรุกขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ เราจะได้ 3 ส่วนที่เหลือก็มีลักษณะเป็นกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ (ดังรูปที่ 6) เพราะเราสมมติไว้ก่อนว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^k \times 2^k$ ใด ๆ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L เราจึงสามารถปิดแต่ละส่วนด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L และสรุปว่า กระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ สามารถปิดได้ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L



รูปที่ 6

นั่นคือ เริ่มต้นด้วยการปิดกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^1 \times 2^1$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ปิดกระดานหมากรุกมีด้านขนาด $2^n \times 2^n$ ใด ๆ ด้วยตัวปิด 3 ชั้นรูปตัว L ได้เสมอ (เมื่อ n เป็นจำนวนนับใด ๆ)

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$1.1) \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

$$1.2) \sum_{i=1}^n (6i+2) = 3n^2 + 5n$$

$$1.3) \sum_{i=1}^n (3i)^2 = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$1.4) \sum_{i=1}^n (i^2 - 1) = \frac{n(2n+5)(n-1)}{6}$$

$$1.5) \sum_{i=1}^n 6^i = \frac{1}{5}(6^{n+1} - 1)$$

$$1.6) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$1.7) \sum_{i=1}^n i < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

$$1.8) \sum_{i=1}^n (i-1)^3 < \frac{n^4}{4}$$

$$1.9) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \right) > \sqrt{n} \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq 2$$

$$1.10) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2} \right) < 2 - \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq 2$$

2. จงเดาฏต่อไปนี้ในกรณีทั่วไป และจงพิสูจน์ผลที่ได้โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\begin{aligned} 2.1) \quad & 1 = 1 \\ & 1 + 3 = 4 = 2^2 \\ & 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \\ & 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \\ & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2) \quad & 1 = 1 \\ & 1 - 4 = -(1 + 2) \\ & 1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3 \\ & 1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4) \\ & 1 - 4 + 9 - 16 + 25 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \end{aligned}$$

3. จงพิสูจน์ข้อความ $(ab)^n = a^n b^n$ ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

4. จงพิสูจน์เมตริกซ์ต่อไปนี้ว่าเป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

$$4.1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.2) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$4.3) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.5) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.6) \cos n\pi = (-1)^n$$

$$4.7) \sin n\pi = 0$$

$$4.8) \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^n$$

5. จงพิสูจน์ว่า $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

6. จงพิสูจน์ว่า $(1 + i)^n = (2)^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

7. เพื่อจะได้ไม่ต้องพิมพ์คูปองหลายราคา คณะกรรมการในโรงอาหารแห่งหนึ่งขายอาหารในโรงเรียน ซึ่งจะพิมพ์เฉพาะคูปองราคา 3 บาท และ 8 บาท อยากทราบว่า คณะกรรมการจะต้องตั้งราคาอาหารราคาใดได้บ้าง ผู้ซื้ออาหารจึงจะใช้คูปองในการซื้ออาหารโดยไม่มีการทอน พร้อมพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ด้วย

8. เพื่อจะได้ไม่ต้องพิมพ์คูปองหลายราคา คณะกรรมการในโรงอาหารแห่งหนึ่งขายอาหารในโรงเรียน ซึ่งจะพิมพ์เฉพาะคูปองราคา 2 บาท และ 5 บาท อยากทราบว่า คณะกรรมการจะต้องตั้งราคาอาหารราคาใดได้บ้าง ผู้ซื้ออาหารจึงจะใช้คูปองในการซื้ออาหารโดยไม่มีการทอน พร้อมพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ด้วย

9. จงพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

“จำนวนนับใด ๆ จะเท่ากับจำนวนนับตัวถัดไป”

การพิสูจน์ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n = n + 1$

ให้ k ที่เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $k = k + 1$ เป็นจริง -----★

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะแสดงว่า

$$k + 1 = (k+1) + 1$$

นำ 1 บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ ★ ดังนั้น

$$k + 1 = (k+1) + 1$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n นั่นคือ "จำนวนนับทุกจำนวนจะเท่ากับจำนวนนับตัวถัดไป"

ภาคผนวก ง
แผนการสอนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

แผนการสอนเรื่องที่ 1

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวน

จำนวน 1 คาบ

หัวเรื่อง 1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์

สาระการเรียนรู้

1. ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่า หรือ ประโยคปฏิเสธที่บอกค่าความจริงได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง
2. ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่า หรือ ประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และยังไม่ทราบค่าความจริง จนกว่าจะทราบว่าตัวแปรนั้นคืออะไร
3. ตัวบ่งปริมาณทุกตัว หมายถึง ข้อความ "สำหรับ.....ทุกตัว"
4. ตัวบ่งปริมาณบางตัว หมายถึง ข้อความ "สำหรับ.....บางตัว"

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณได้
2. นักเรียนสามารถแทนค่า $P(n)$ ได้และบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เมื่อกำหนดจำนวนนับ n ใด ๆ ให้

เนื้อหา

1. ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และยังไม่ทราบค่าความจริง จนกว่าจะทราบว่าตัวแปรนั้นคืออะไร
2. ตัวบ่งปริมาณ มี 2 ประเภท ได้แก่
 - 2.1) ตัวบ่งปริมาณทุกตัว (for all)
 - 2.2) ตัวบ่งปริมาณบางตัว (for some)
3. การหาค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดให้
4. การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนความหมายของประพจน์ และตัวเชื่อมประพจน์

ขั้นสอน 1. ครูอธิบายเรื่องประโยคเปิด

2. ครูอธิบายเรื่องตัวบ่งปริมาณทั้ง 2 ชนิด และยกตัวอย่างโจทย์ (ตัวอย่างที่ 1.1 , 1.2 และ 1.3)

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเรื่องประโยคเปิด และ ตัวบ่งปริมาณ

สื่อการสอน -

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1.1

การประเมินผล การตรวจแบบฝึกหัด

แผนการสอนเรื่องที่ 2

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์และทฤษฎีจำนวน จำนวน 1 คาบ

หัวเรื่อง 1.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน

สาระการเรียนรู้

1. สมบัติการเท่ากัน กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม
 - 1.1) $a = a$
 - 1.2) ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
 - 1.3) ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
 - 1.4) ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
 - 1.5) ถ้า $a = b$ แล้ว $a - c = b - c$
 - 1.6) ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
 - 1.7) ถ้า $a = b$ และ $c \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
2. สมบัติการไม่เท่ากัน กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม
 - 2.1) ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a > b$ หรือ $a < b$
 - 2.2) ถ้า $a < b$ จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $a + c = b$
 - 2.3) ถ้า $a > b$ จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $a = b + c$
 - 2.4) ถ้า $a - b > 0$ แล้ว $a > b$ หรือ $b < a$
 - 2.5) ถ้า $a - b < 0$ แล้ว $a < b$ หรือ $b > a$
 - 2.6) ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
 - 2.7) ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
 - 2.8) ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
 - 2.9) ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
 - 2.10) ถ้า $a < b$ แล้ว $a - c < b - c$
 - 2.11) ถ้า $a > b$ แล้ว $a - c > b - c$
 - 2.12) ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
 - 2.13) ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
 - 2.14) ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
 - 2.15) ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
 - 2.16) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
3. สมบัติการหารลงตัว กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์
 - 3.1) ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
 - 3.2) ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$
 - 3.3) ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b + c$

- 3.4) ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b - c$
 3.5) ถ้า $a \mid b$ แล้ว $ma \mid mb$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0
 3.6) ถ้า $ma \mid mb$ แล้ว $a \mid b$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0
 3.7) ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$
 3.8) ถ้า $ab \mid c$ แล้ว $a \mid c$ และ $b \mid c$
 3.9) ถ้า $a \mid b$ และ $a > 0, b > 0$ แล้ว $a \leq b$
 3.10) ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$ หรือ $a = -b$
 3.11) ถ้า $b \mid a$ และ $b \mid c$ แล้ว $b \mid (am + cn)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม m และ n

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถนำสมบัติการเท่ากัน , สมบัติการไม่เท่ากัน สมบัติการหารลงตัวไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ได้

เนื้อหา

1. สมบัติการเท่ากัน
2. สมบัติการไม่เท่ากัน
3. สมบัติการหารลงตัว

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนเรื่องโครงสร้างของระบบจำนวน

- ขั้นสอน 1. ครูอธิบายสมบัติการเท่ากัน และให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัติแต่ละข้อ
 2. ครูอธิบายสมบัติการไม่เท่ากัน และให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัติแต่ละข้อ
 3. ครูอธิบายสมบัติการหารลงตัว และให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับสมบัติแต่ละข้อ

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติการเท่ากัน , สมบัติการไม่เท่ากัน และ สมบัติการหารลงตัว

สื่อการสอน -

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1.1

การประเมินผล การตรวจแบบฝึกหัด

แผนการสอนเรื่องที่ 3

บทที่ 2 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จำนวน 4 คาบ

หัวเรื่อง 2.1 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอนุกรม

สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่ 2.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
ให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ
กำหนดให้ S เป็นสับเซตใด ๆ ของ N และ S มีสมบัติต่อไปนี้
ถ้า 1) $1 \in S$ และ
2) $\forall k [k \in S \rightarrow k+1 \in S]$
แล้ว $S = N$
2. ทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n
ถ้า 1) $P(1)$ และ
2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$
แล้ว $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถอธิบายหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าข้อความที่กำหนดให้สามารถพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หรือไม่
3. นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้

เนื้อหา

1. ทฤษฎีบทที่ 2.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. ทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมที่ใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
4. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมที่ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งของหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ 1. ครูยกตัวอย่างปัญหาต่าง ๆ

ขั้นสอน 1. ครูอธิบายทฤษฎีบทที่ 2.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2. ครูอธิบายทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. ครูยกตัวอย่างที่ 2.1.1 – 2.1.11

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สื่อการสอน ปัญหาแห่งไม้

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.1

การประเมินผล การตรวจแบบฝึกหัด

แผนการสอนเรื่องที่ 4

บทที่ 2 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จำนวน 1 คาบ

หัวเรื่อง 2.2 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องการหารลงตัว

สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n
ถ้า 1) $P(1)$ และ
2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$
แล้ว $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้

เนื้อหา

1. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหารลงตัวที่ใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ สมบัติการหารลงตัว

ขั้นสอน 1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.2.1 – 2.2.4

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สื่อการสอน

-

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.2

การประเมินผล การตรวจแบบฝึกหัด

แผนการสอนเรื่องที่ 5

บทที่ 2 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จำนวน 2 คาบ

หัวเรื่อง 2.3 การใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับเรื่องอสมการ

สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่ 2.3 หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n และ a เป็นจำนวนนับ
ถ้า 1) $P(a)$ และ
2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \geq a$
แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq a$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถอธิบายหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้
3. นักเรียนสามารถนำหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ได้

เนื้อหา

1. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการที่ใช้หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
2. ทฤษฎีบทที่ 2.3 หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอสมการที่ใช้หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ สมบัติการไม่เท่ากัน

ขั้นสอน 1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.3.1 – 2.3.6

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สื่อการสอน

-

การวัดผล

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.3

การประเมินผล

การตรวจแบบฝึกหัด

แผนการสอนเรื่องที่ 6

บทที่ 2 การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จำนวน 3 คาบ

หัวเรื่อง 2.4 บทประยุกต์ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทที่ 2.2 หลักการที่ 1 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนนับ ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n
ถ้า 1) $P(1)$ และ
2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$

แล้ว $\forall n [P(n)]$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

2. ทฤษฎีบทที่ 2.3 หลักการที่ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนนับ n และ a เป็นจำนวนนับ
ถ้า 1) $P(a)$ และ
2) $\forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)]$ เมื่อ $k \geq a$
แล้ว $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq a$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถนำหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ในลักษณะอื่นได้

เนื้อหา

1. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเครื่องหมายรวมยอด
2. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเลขยกกำลัง
3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเมตริกซ์
4. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน
5. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับตรีโกณมิติ
6. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับชีวิตประจำวัน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนหลักการที่ 1 และ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นสอน 1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.4.1 – 2.4.7

ขั้นสรุป 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการที่ 1 และ 2 ของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สื่อการสอน -

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2.4

การประเมินผล การตรวจแบบฝึกหัด

ภาคผนวก จ
รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบเครื่องมือในการวิจัย

1. รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ฐานฤทธิ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ฤทัย แดงแสงส่ง
โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นาย พงศ์รัศม์ เฟื่องฟู
วันเดือนปีเกิด	26 มกราคม 2521
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลหัวเฉียว กรุงเทพฯ
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	218 / 25 หมู่ 4 หมู่บ้านทรัพย์สมบูรณ์ ซอยประชาอุทิศ 74/1 ถนนประชาอุทิศ แขวงทุ่งครุ เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140 โทร. 02 – 8738535 หรือ 09 – 9223595
สถานที่ทำงาน	สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2533	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวัดกระเจบัพนิฉ
พ.ศ. 2536	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดราชโอรส
พ.ศ. 2538	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ศูนย์การศึกษานอกโรงเรียน กรุงเทพฯ
พ.ศ. 2541	ค.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา
พ.ศ. 2545	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ