

537. 623

ว 2510

7. 3

ค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากและอนุหมัวิกฤตของระบบที่ประกอบด้วยชุด
ตัวนำยิ่งยวด-ชั้นกลาง-โลหะปกติซ้อนกันหลายชุด

ปริญญานิพนธ์

ของ

อภิชัย ตีระวัฒนากุล

171722 2534

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตรเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์

กุมภาพันธ์ 2533

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

171722

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปัญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตวิชาเอกฟิสิกส์ของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

..... สกัญจน์ ยุกล้าน ประธาน

(ศ. ดร. สกัญจน์ ยุกล้าน)

..... 11/2/50 กรรมการ

(ผ.ศ. ดร. เพ็ญกลดา วีระสัย)

คณะกรรมการสอบ

..... สกัญจน์ ยุกล้าน ประธาน

(ศ. ดร. สกัญจน์ ยุกล้าน)

..... 11/2/50 กรรมการ

(ผ.ศ. ดร. เพ็ญกลดา วีระสัย)

..... 11/2/50 กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผ.ศ. ดร. ณสรณ์ ผลโชค)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปัญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... สมพร บัวทอง คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศ. ดร. สมพร บัวทอง)

วันที่... 8 ... เดือน... ธันวาคม พ.ศ. ... 2533

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือจาก ศ. ดร. สุทัศน์ ยกส้านที่ได้ให้คำปรึกษา
ชี้แนะแนวทางรวมทั้งตรวจแก้ไขตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัยด้วยวิญญานของความเป็นครูอย่างแท้จริง
ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณ ผศ. ดร.เฟื่องลดา วีระสัย และ ผศ. ดร. ณสรณ์ ผลโกสที่ได้กรุณาให้ความ
อนุเคราะห์ให้คำปรึกษาแนะนำด้านวิชาการที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัยโดยตลอด

ขอขอบคุณ ดร.ปรีดีพร ลิ้มเจริญซึ่งกรุณาให้คำแนะนำแนวทางการแก้สมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชัน
ทางคณิตศาสตร์ ทั้งยังอนุเคราะห์คู่มือคณิตศาสตร์แก่ผู้วิจัย ทำให้การวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ขอขอบคุณคุณสมคิด สุตันตยาลีที่ให้ความช่วยเหลือในด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาโดยตลอด
ทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขสำเร็จในที่สุด

คุณประโยชน์ที่พึงมีจากปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ผู้วิจัยขอบอบแต่ คุณพ่อ คุณแม่ และ คุณอานนท์-
ศิริพร สันทัดวนิช ที่ได้ให้กำลังใจและความช่วยเหลือทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

อภิชัย ตีรณวัฒนากุล

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
	ปัญหาและจุดมุ่งหมายของการวิจัย	10
	ความสำคัญของงานวิจัย	11
	ขอบเขตของการวิจัย	11
	นิยามศัพท์เฉพาะ	12
3	วิธีการวิจัย	14
4	ผลการวิจัย	32
	กรณีที่ซูเปอร์แลตทิซ $n = 2$	32
	กรณีที่ซูเปอร์แลตทิซ $n = 3$	34
	ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต(T_C) กับคาบ (Λ) ของ	
	ซูเปอร์แลตทิซเมื่อไม่มีสนามภายนอก	39
	ก. ในกรณีที่เป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ	39
	ข. ในกรณีที่เป็น S-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสองชั้น	41
	ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_C) กับความหนาของตัวนำปกติ (d_n)	
	เมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวด (d_s) คงที่และไม่มีสนามภายนอก	42
	ก. ในกรณีที่เป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ	42
	ข. ในกรณีที่เป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น($n=3$)	43
	ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉาก(H_{C2}) กับ	
	อุณหภูมิวิกฤต (T_C) ของ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ	44

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	45
สรุปผลการวิจัย	45
อภิปรายผล	46
ความสำคัญของการวิจัย	49
ข้อเสนอแนะ	49
บรรณานุกรม	51
ภาคผนวก	54
ประวัติย่อของผู้วิจัย	91
บทคัดย่อ	92

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ภาพจำลองการเรียงสลับชั้นของซูเปอร์แลตทิซสองมิติและสามมิติ	2
2 ภาพจำลองซูเปอร์แลตทิซในอุดมคติและแบบจำลองของทริสโคนและคณะ	4
3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของชั้น เจอร์มาเนียม	5
4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤต ของชุดไนโอเบียมกับเจอร์มาเนียมซูเปอร์แลตทิซ	6
5 ภาพสองมิติของ S-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสองชั้น ($n=2$)	8
6 ภาพสองมิติของ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ($n=3$)	11
7 ภาพจำลองของ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซที่แสดงพิกัดตำแหน่ง	18
8 ภาพจำลองของ S-N ซูเปอร์แลตทิซที่ใช้ในการวิจัยของ เดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์	32
9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตกับค่าของ Nb/Ti ซูเปอร์แลตทิซ จากการทดลองของควอนและคณะ (a) กับผลที่ได้โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ในเชิงทฤษฎีเมื่อระบบเป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ (b)	40
10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าของซูเปอร์แลตทิซ ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในเชิงทฤษฎี เมื่อระบบเป็น S-N ซูเปอร์แลตทิซแบบสองชั้น ($n=2$)	41
11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติ โดยให้ชั้นของตัวนำยิ่งยวดคงที่ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในแง่ ทฤษฎี เมื่อระบบเป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ	42
12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติ โดยให้ชั้นของตัวนำยิ่งยวดคงที่ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในแง่ ทฤษฎี เมื่อระบบเป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซแบบสามชั้น ()	43

- 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าสูงของ
สนามวิกฤตในทิศตั้งฉาก (H_{c2}) ที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข
เมื่อระบบเป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ 44

ภูมิหลัง

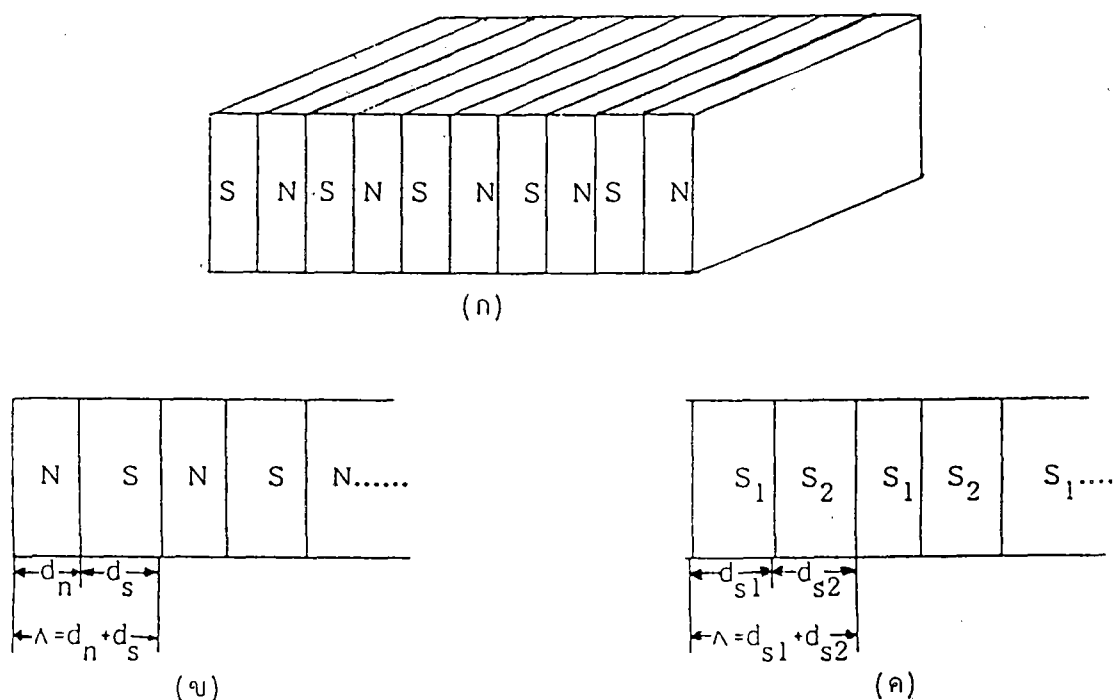
สารแสดงสภาพนำยิ่งยวดด้วยสมบัติหลายประการ ได้แก่สมบัติด้านความต้านทานไฟฟ้าเป็นศูนย์ที่ใกล้ศูนย์องศาสมบูรณ์ ออนเนส (Onnes. 1911 : 1206) พบปรากฏการณ์นี้จากการวัดความต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ที่ 4.2 องศาเคลวิน ต่อมาไมสส์เนอร์และออกเซนเฟลด์ (Meissner and Ochsenfeld. 1933 : 787) พบว่าตัวนำยิ่งยวดผลักสนามแม่เหล็ก ซึ่งหมายความว่าตัวนำยิ่งยวดมีสภาพเป็นสารไดอะแมกเนติกสมบูรณ์ (perfect diamagnetic) ในการอธิบายพฤติกรรมต่างๆของตัวนำยิ่งยวดเราต้องเข้าใจความแตกต่างด้านพฤติกรรมของอิเล็กตรอนเมื่อสารอยู่ในสภาวะนำยิ่งยวดและนำปกติ

พฤติกรรมของอิเล็กตรอนในสภาพนำยิ่งยวดนั้นได้รับการอธิบายโดยทฤษฎีของบาร์ดีน คูเปอร์ และชรีฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 : 1175) ซึ่งเรียกโดยย่อว่าทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ทฤษฎีนี้อธิบายว่าสภาพนำยิ่งยวดเกิดขึ้นจากการจับคู่ของอิเล็กตรอนโดยอาศัยการแลกเปลี่ยนโฟนอนกัน (electron-phonon coupling) แรงลัทธิของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองจะเป็นแรงดึงดูดอย่างอ่อน (weak attractive interaction) คู่อิเล็กตรอนนี้เรียกว่าคูคูเปอร์ (Cooper pair) และระยะระหว่างอิเล็กตรอนในคู่นี้เราเรียกว่าความยาวอาพันธ์ (coherent length)

ในบรรดางานวิจัยที่ผ่านมาบ้างก็ศึกษาสภาพนำยิ่งยวดของธาตุบริสุทธิ์ บ้างก็ศึกษาสภาพนำยิ่งยวดที่มีรูปทรงทางเรขาคณิตแตกต่างกัน ทั้งที่เป็นแท่ง เป็นรูปทรงกระบอก หรือเป็นทรงกลม บ้างก็ศึกษาพวกโลหะผสม (alloy) นอกจากนี้บางคนได้ทำการวิจัยหาสมบัติของระบบที่มีตัวนำประกบกัน (proximity effect) การประกบกันนั้นทำได้โดยใช้เทคนิคการทำฟิล์มบาง (thin film)

ในระยะเวลาสิบปีที่ผ่านมา เทคนิคการทำฟิล์มบางรุดหน้ามากซึ่งการควบคุมความหนาของฟิล์มให้คงที่ ความสม่ำเสมอั้นกระทำได้ง่ายไม่ว่าจะเป็นการใช้กระบวนการไอระเหย (evaporation process) หรือกระบวนการฉาบด้วยโลหะ (sputtering process) ก็ตาม มีนักวิทยาศาสตร์จำนวนมากที่สนใจระบบซึ่งประกอบด้วยตัวนำประกบกันตั้งแต่สองชั้นขึ้นไป ในระบบดังกล่าวอาจมีการเรียงสลับระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับฉนวน หรือกับโลหะปกติ หรือกับตัวนำยิ่งยวดต่างชนิดกันก็ได้ ดังแสดงใน

ภาพประกอบ 1 ระบบนี้เรียกว่า(superlattice)



ภาพประกอบ 1 ภาพ(ก)จำลองการเรียงสลับชั้นของระบบซูเปอร์แลตทิซ S-N ในสามมิติ เมื่อ S เป็นตัวนำยิ่งยวดและ N เป็นโลหะปกติ ภาพ(ข)และ(ค)เป็นซูเปอร์แลตทิซสองมิติ ภาพ(ข)เป็นการเรียงสลับระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติ ภาพ(ค)เป็นการเรียงสลับระหว่างตัวนำยิ่งยวดสองชนิดที่ต่างกัน ซูเปอร์แลตทิซแต่ละชุดมีคาบ(period, Λ) อย่างสมมาตร คือ $\Lambda = d_s + d_n$ หรือ $\Lambda = d_{s1} + d_{s2}$ ดังภาพ(ข)และ(ค)ตามลำดับ

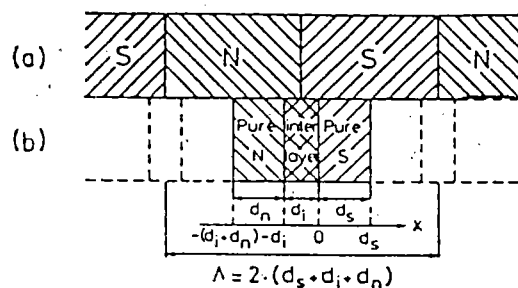
สมบัติของซูเปอร์แลตทิซแตกต่างจากตัวนำยิ่งยวดชนิดเป็นแท่งโลหะ(bulk metal) อันเห็นได้จากค่าอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature, T_c) ค่าสนามแม่เหล็กวิกฤต (critical field, H_c) หรือค่ากระแสวิกฤต (critical current, I_c) ของระบบเหล่านี้ขึ้นโดยตรงกับสมบัติการเป็นชั้นๆ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือสมบัติของซูเปอร์แลตทิซขึ้นกับคาบ (period, Λ) ของระบบ (Ruggiero, et al. 1982 : 4892) อย่างไรก็ตามในทางด้านทฤษฎีนั้นยังไม่สามารถทำนายพฤติกรรมของซูเปอร์แลตทิซได้แม่นยำเท่าที่ควร เมื่อแทนค่าเชิงตัวเลข (numerical) ลงในทฤษฎีก็จะได้ค่าเพียงประมาณโดยเทียบจากผลของการทดลอง ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้จึงมีจุดประสงค์เพื่อพัฒนาทฤษฎีที่จะทำความเข้าใจเกี่ยวกับกลไกของซูเปอร์แลตทิซให้มากขึ้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เดอเจนเนสและกียอน (de Gennes and Guyon. 1963 : 168) ได้สร้างทฤษฎีอธิบายปรากฏการณ์ที่ตัวนำยิ่งยวด(S) ประกบโลหะปกติ(N) พบว่าคู่คูเปอร์รั่วไหลจากตัวนำยิ่งยวดไปยังตัวนำปกติได้ ทฤษฎีนี้มีสมมุติฐานว่าบริเวณผิวสัมผัสของทั้งสองมีสมบัติทางไฟฟ้าที่ดี กล่าวคือจะต้องไม่มีฉนวนมาขวางกั้นหรืออะตอมของทั้งสองปนกัน เขาเรียกกระบวนการที่เกิดขึ้นนี้ว่าผลของพริกอกซิมิตี (proximity effect) ต่อมาเวอร์ทแฮมเมอร์ (Werthammer. 1963 : 2400) ได้ขยายทฤษฎีข้างต้นให้ครอบคลุมถึงกรณีที่แผ่นประกบหนาหลายๆและคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ(order parameter) ที่แปรเปลี่ยนในเชิงระยะ(spatial variation) เรียกโดยรวมว่าทฤษฎีเดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์(de Gennes-Werthammer Theory)

ทริสโคน อริโอซา คาร์คัทและฟิชเชอร์ (Triscone, Ariosa, Kakut and Fischer. 1987 : 3238) ได้ขยายทฤษฎีของเดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ออกไปอีก กล่าวคือทริสโคนและคณะได้ทดลองระบบซูเปอร์แลตทิซที่ประกอบด้วยโมลิบดีนัม(Mo) ประกบกับวานาเดียม(V) แล้วพบว่ามีการผลิตของธาตุทั้งสองตรงผิวสัมผัส ดังนั้นตรงบริเวณของรอยต่อจึงเกิดเป็นชั้นกลาง(interface) ดังแสดงในภาพประกอบ 2 เนื่องจากระบบมีความสมมาตร(symmetry) ทำให้ซูเปอร์แลตทิซซึ่งมีจำนวนชั้นไม่จำกัดถูกลดรูปเสมือนว่าเป็นระบบสามชั้น (trilayer system) จากรูปแบบจำลองที่ได้ก็นำสู่ทฤษฎีที่เรียกว่าซูเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ผลที่ได้จากทฤษฎีจะได้สมการแสดงเงื่อนไขบังคับที่สำคัญซึ่งเป็นฟังก์ชันกับความหนาของชั้นตัวนำยิ่งยวด ชั้นกลางและชั้นโลหะปกติ ในกรณีที่ไม่มีชั้นกลาง($d_1=0$) สมการเงื่อนไขบังคับสำคัญจะให้ผลลัพธ์ครอบคลุมทฤษฎีของเดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ แต่ทฤษฎีนี้ไม่สามารถหาค่าสูงของสนามวิกฤต $H_{c2}(T)$



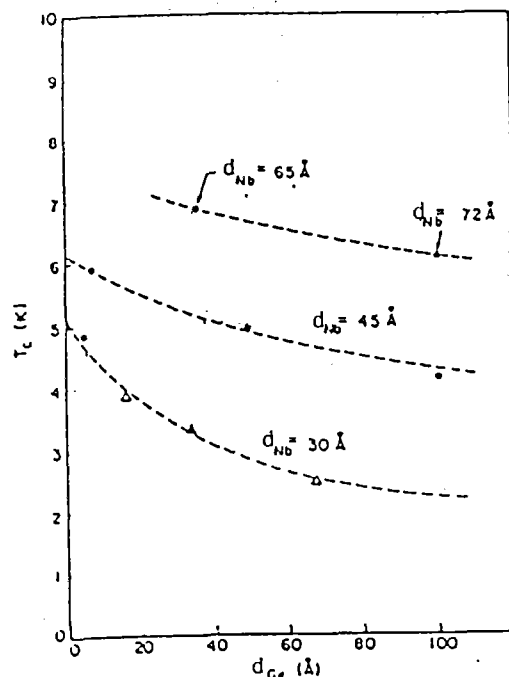
ภาพประกอบ 2. (a)แบบจำลองซูเปอร์แลตทิซอุดมคติ (b)แบบจำลองที่ทริสโคนและคณะใช้ในการวิจัยซึ่งมีความยาว $\Lambda = 2(d_s + d_i + d_n)$ โดย d_s , d_i , d_n เป็นความหนาของตัวนำยิ่งยวด ชั้นกลาง และโลหะปกติตามลำดับ

ทาซิกิและทากาฮาชิ (Tachiki and Takahashi. 1986 : 4620) ได้คำนวณค่าสูงของสนามวิกฤต $H_{c2}(T)$ จากทฤษฎีของเดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ เขาทั้งสองทำนายค่าสูงของสนามวิกฤตไว้ทั้งในแนวตั้งฉากและแนวขนานกับซูเปอร์แลตทิซ แต่ทฤษฎีดังกล่าวยังไม่มีผลการทดลองเพื่อพิสูจน์ถึงความถูกต้องว่ามีมากน้อยเพียงใด

แม้งานวิจัยส่วนมากจะตั้งอยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีของเดอเจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์แต่การอธิบายพฤติกรรมของซูเปอร์แลตทิซก็มีแง่มุมที่ต่างออกไปเช่น โดโบซาเจวิช (Dobrosajievis. 1973 : 773) ใช้สมการของกินส์และแลนเดา (Ginzberg-Landau's equations) หาค่าสูงของสนามวิกฤต $H_{c2}(T)$ โดยมีสมมุติฐานว่าระบบเกิดจากผลของพรีออคซิมีตีและขึ้นกับทิศทาง(anisotropic) งานวิจัยนี้อาจถือได้ว่าเป็นระบบผสม(composite superconductor) นานูโดฟสกีและเชฟปิโร (Nabutovskii and Shapiro. 1982 : 465) สนใจซูเปอร์แลตทิซกรณีของตัวนำยิ่งยวดไม่เป็นเนื้อเดียวกันตลอด (inhomogeneous) เช่นเดียวกับนีนอนและอาโนลด์ (Nenon and Arnold. 1985 : 451) ความไม่สอดคล้องของงานวิจัยทั้งสองอยู่ที่สมมุติฐานว่าในแต่ละชั้นของระบบมีค่าคงที่ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (electron-phonon coupling constant) ต่างกัน

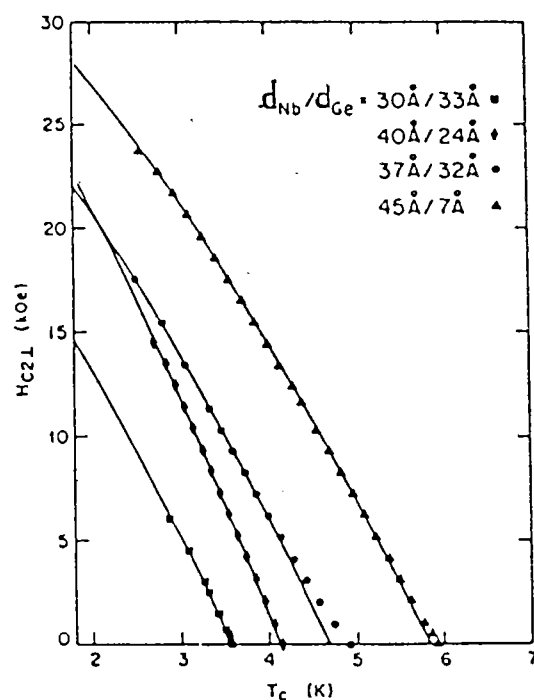
กลุ่มนักวิจัยซึ่งประกอบด้วยรักเกียร์โร บาร์บีและเบียร์สเลย์ (Ruggiero, Barbee and Beasley. 1982 : 4894) ได้ศึกษาระบบซูเปอร์แลตทิซที่ประกอบด้วยไนโอเบียม(Nb)และเจอร์มาเนียม(Ge)เรียงสลับกัน เขาใช้กระบวนการฉาบด้วยโลหะ(sputtering process) สร้างความหนาของฟิล์มแต่ละชั้นตั้งแต่ 5-100 Å โดยมีอัตราส่วนความหนาของไนโอเบียมต่อเจอร์มาเนียม(d_{Nb}/d_{Ge})คงที่

แล้วทำการวัดอุณหภูมิวิกฤต (T_C) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_C) กับความหนา
เจอร์มาเนียม (d_{Ge}) โดยที่ความหนาไนโอเบียม (d_{Nb}) คงที่เป็นดังเช่นที่แสดงในภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_C) กับความหนาของชั้นเจอร์มาเนียม (d_{Ge}) สำหรับชุดการทดลอง 3 ชุดที่ความหนาของชั้นไนโอเบียม (d_{Nb}) ต่างกัน

เราพบว่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบขึ้นกับความหนาของชั้นไนโอเบียมและเจอร์มาเนียม กล่าวคือถ้าความหนาของเจอร์มาเนียมคงที่อุณหภูมิวิกฤตจะเพิ่มขึ้นตามความหนาของตัวนำยิ่งยวดเจอร์มาเนียม ในทางตรงข้ามอุณหภูมิวิกฤตจะลดลง ถ้าชั้นตัวนำยิ่งยวดไนโอเบียมคงที่แต่ความหนาของชั้นตัวนำปกติเจอร์มาเนียมเพิ่มขึ้น ทฤษฎีของเดอเจเนนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ (de Gennes and Werthammer, 1963 : 168) ให้ผลสรุปสอดคล้องกับการทดลองนี้ในกรณีที่ชั้นเจอร์มาเนียมหนามาก แต่ความสอดคล้องเป็นเพียงโดยค่าประมาณ ทั้งนี้เพราะว่าจากทฤษฎีค่าสัมประสิทธิ์การกระเจิง ($\eta = \sigma_n / \sigma_s$) มีค่าประมาณ 0.1 แต่จากการวัดค่าโดยการทดลองได้ค่าเท่ากับ 0.28 โดย σ_s , σ_n เป็นความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติตามลำดับ



ภาพประกอบ 4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉาก (H_{c2}) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_c) ของชุดทดลอง d_{Nb}/d_{Ge} จำนวน 4 ชุด

รักเกียรติโรและคณะได้ทดลองใช้สนามแม่เหล็กภายนอกในทิศตั้งฉากกับระบบซูเปอร์แลตทิซ เขาพบว่าค่าสูงของสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตมีความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพประกอบ 4 โดยในโอเบียมมีความหนาตั้งแต่ $30-45 \text{ Å}$ ดูกราฟโดยเรียงจากซ้ายไปขวา เขาสรุปได้ว่าค่าอุณหภูมิวิกฤตและค่าสูงของสนามวิกฤตเพิ่มขึ้นเมื่อความหนาของแผ่นในโอเบียมเพิ่มขึ้น เส้นทึบได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของเวอร์ทแฮมเมอร์ เฮลฟันด์และโฮเฮนเบิร์ก (Werthammer, Helfand and Hohenberg. 1966 : 265) เรียกว่าทฤษฎี WHH ทฤษฎี WHH ประสบปัญหาเพราะระบบนี้ทำให้กราฟ H_{c2} กับ T_c เกิดความโค้งเชิงบวก (positive curvature) ความเบี่ยงเบนจะปรากฏชัดที่บริเวณใกล้อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งอนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) มีค่าเป็นบวก ทั้งนี้เป็นเพราะว่าทฤษฎี WHH ต้องใช้การประมาณค่าความยาวอาพันธ์ตามแบบกินส์เบิร์กและแลนเดา (Ginzberg-Landau coherent length) ดังนั้นค่าที่ได้โดยทฤษฎี WHH เป็นไปโดยประมาณด้วย

ไบอากิ โกแกนและเคลม (Biagi, Kogan and Clem. 1985 : 7168) ทำการวิจัยระบบซูเปอร์แลตทิซโดยอาศัยสมการของไอลินเบอร์เกอร์ (Eilenberger's equation) ชุดสมการ

ของไอเลนเบอร์เกอร์ที่ได้จากการประมาณการของอุสาดेल(Usadel. 1970 : 507) นั้นประกอบด้วยสมการต่อไปนี้

$$-\frac{D}{2} \nabla^2 (G \vec{\nabla} F - F \vec{\nabla} G) = \frac{\Delta}{\hbar} - wF \quad (2.1)$$

$$G^2 + |F|^2 = 1 \quad (2.2)$$

$$\Delta \ln \left[\frac{T_c}{T} \right] = 2\pi T \sum_{w>0} \left[\frac{\Delta}{\hbar w} - F \right] \quad (2.3)$$

เมื่อ D เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่ซึม(diffusion coefficient) $\vec{\nabla} = \vec{\nabla} - (2\pi i/\phi_0)\vec{A}$ เป็นเกจอินแวเรียนต์เกรเดียนต์(gauge-invariant gradient) ในพจน์ของศักย์เวกเตอร์(vector potential) A $\phi_0 = hc/2e$ เป็นปริมาณฟลักซ์ควอนตัม(flux quantum) $F(r, w)$ และ $G(r, w)$ เป็นกรีนฟังก์ชันของกอร์คอฟ(Gor'kov Green function) $\Delta(r)$ เป็นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ(order parameter) หรือศักย์การจับคู่(pair potential) ซึ่งขึ้นกับตำแหน่งระยะห่าง($\vec{r}$) ระหว่างคู่อิเล็กตรอนทั้งสองมีอันตรกิริยาอย่างอ่อน(weak coupling) ต่อกัน T เป็นอุณหภูมิมีหน่วยเป็นพลังงาน

ถ้าตัวนำยิ่งยวดอยู่ในสภาพตัวนำปกติแล้ว $F = 0$ และ $G \simeq 1$ แต่ในกรณีของสนามที่มีความเข้มใกล้สนามวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด [$H_{c2}(T)$] แล้วค่า $|F| \ll 1$ และ $G \sim 1$ โดยอาศัยการประมาณดังกล่าว เราสามารถเขียนสมการ (2.1) ได้เป็น

$$-\frac{D}{2} \nabla^2 F = \frac{\Delta}{\hbar} - wF \quad (2.4)$$

เพราะเหตุว่า $F(\vec{r}, w)$ และ $\Delta(\vec{r})$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ $H_{c2}(T)$ ดังนั้นโดยอาศัยการประมาณค่า $F(r)$ จากสมการ (2.3) และ (2.4) ทำให้เราได้ค่า $F(r) = \Delta(r) / [\hbar w + 2\pi T y(t)]$ เมื่อแทนค่า $\Delta(r)$ ลงในสมการ (2.4) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= -2F(r)\pi T y(t)/\hbar D \\ &= -k^2 F \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$k^2 = 2\pi T y(t)/\hbar D \quad (2.6)$$

แทนค่า $F(\vec{r})$ ลงในสมการ (3.3) และ $\chi_w = \mathcal{T}(2n+1)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ($n=0,1,2,\dots$) จะได้

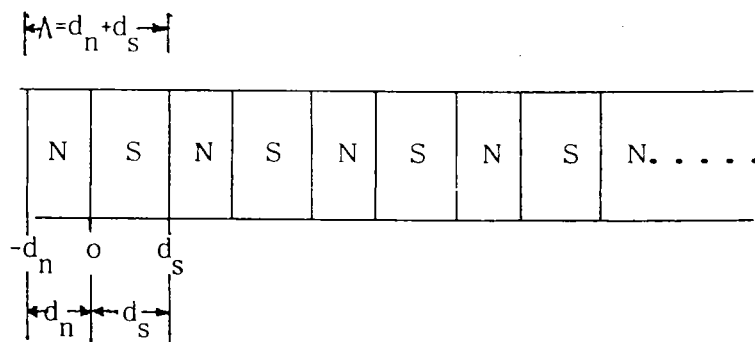
$$\ln \left[\frac{T_c}{T} \right] = - \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2} + y/2} \right] \quad (2.7)$$

ถ้าให้ $t = T/T_c$ เป็นอุณหภูมิลดทอน (reduced temperature) อนุกรมทางขวามือสามารถเขียนในรูปไดแกมมาฟังก์ชัน (digamma function) คือ

$$\ln t = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + y/2\right) \quad (2.8)$$

ค่าของ $y(t)$ จะเป็นบวกหรือลบนั้นขึ้นอยู่กับว่า t มากกว่าหรือน้อยกว่าหนึ่ง สำหรับตัวนำยิ่งยวดแล้วอุณหภูมิลดทอนของตัวนำยิ่งยวด $t_s = T/T_{cs} < 1$ ดังนั้นค่า $y(t)$ ในสมการ (2.8) เป็นบวกเสมอ [$y(t_s) > 0$] สำหรับตัวนำปกติอิทธิพลของปรากฏการณ์พริอกซิมีตี (proximity effect) จะเหนี่ยวนำให้ตัวนำปกติให้เป็นตัวนำยิ่งยวดได้เมื่อ $0 < T_{cn} < T_{cs}$ โดย T_{cn} และ T_{cs} เป็นอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำปกติและตัวนำยิ่งยวดที่เป็นแท่งตามลำดับ ด้วยเหตุนี้ค่า $y(t_n)$ จึงมีได้หลายกรณี เช่น กรณี $y(t_n) < 0$ ถ้า $t_n = T/T_{cn} > 1$ หรือ $y(t_n) > 0$ ถ้า $t_n < T_{cn}$ หรือค่า $y(t_n \rightarrow \infty) = -1$ ถ้า T_{cn} เข้าใกล้ศูนย์เป็นต้น

งานวิจัยของไบอากิและคณะมุ่งพิจารณากรณี $T_{cn} < T_c < T_{cs}$ โดย T_c เป็นอุณหภูมิวิกฤตของระบบซูเปอร์แลตทิซ ระบบที่ใช้เป็นดังแสดงในภาพประกอบ 5 ซึ่งประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดเรียงสลับโลหะปกติ ให้แผ่นขนานของระบบอยู่ในแนวขนานกับระนาบ xy และมีคาบ (period, Λ) โดย $\Lambda = d_s + d_n$ เมื่อ d_s, d_n เป็นความหนาของ S และ N ตามลำดับ พิกัดของ $z = 0$ อยู่ที่ผิวสัมผัสระหว่าง S กับ N



ภาพประกอบ 5 ภาพสองมิติของซูเปอร์แลตทิซซึ่งประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติเรียงสลับกัน

พิจารณาระบบย่อยบริเวณ $-d_n < z < d_s$ ทิศทางสนามแม่เหล็กตั้งฉากกับระบบซึ่ง $\vec{H} = H_z \hat{z}$ สมการของเกจอินแวเรียนต์เกรเดียนต์ขึ้นกับศักย์เวกเตอร์ $\vec{A}_x = \vec{A}_z = 0$ และ $\vec{A}_y = H_x$ ดังนั้นเกจอินแวเรียนต์เกรเดียนต์จึงอยู่ในรูป

$$\vec{\nabla} = \left[\partial/\partial x, \partial/\partial y + 2\pi i H_x / \phi_0, \partial/\partial z \right]$$

เราแก้สมการ (2.5) โดยวิธีการแยกตัวแปร (separation method) โดยกำหนดให้ $F(\vec{r}) = f(\vec{x}, \vec{y}) g(\vec{z})$ จะได้ว่าในตัวยังยวด

$$-(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) f_s(x, y) = (k_s^2 - q_s^2) f_s(x, y) \quad (2.9a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g_s(z) = -q_s^2 g_s(z) \quad (2.9b)$$

ในด้านตัวยกปกติ

$$-(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) f_n(x, y) = (-k_n^2 - q_n^2) f_n(x, y) \quad (2.10a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g_n(z) = q_n^2 g_n(z) \quad (2.10b)$$

เมื่อ q_s, q_n เป็นค่าที่ได้จากการแยกตัวแปรในแต่ละตัวยก S และ N ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันความสัมพันธ์ของค่า k_s, k_n ในสมการ (2.6) จึงจำแนกได้ในแต่ละชนิดของตัวยก คือ

$$k_s^2 = 2\pi T y(t) / \hbar D_s \quad (2.11a)$$

$$k_n^2 = 2\pi T y(t) / \hbar D_n \quad (2.11b)$$

สมการ (2.9b) และ (2.10b) เป็นสมการคลื่นในแต่ละตัวยก กำหนดให้ระบบมีความสมมาตร (symmetry) เราจึงคิดเฉพาะครึ่งหนึ่งของความหนา ผลการแก้สมการได้ว่า

$$g_s(z) = c_s \cos[q_s(z - d_s/2)] \quad (2.12a)$$

$$g_n(z) = c_n \cosh[q_n(z - d_n/2)] \quad (2.12b)$$

ไบอากิและคณะได้ใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ว่าที่ผิวสัมผัสของตัวนำทั้งสองนั้น $g_s(0) = g_n(0)$ และ $dg_s(0)/dz = \eta dg_n(0)/dz$ เมื่อ η เป็นพารามิเตอร์แสดงการกระเจิงตรงผิวสัมผัสโดยที่ $\eta = \sigma_n/\sigma_s$ ค่า σ เป็นค่าสภาพการนำไฟฟ้าของโลหะ ดังนั้นถ้า c_s และ c_n ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันหมดแล้วเงื่อนไขบังคับสำคัญที่ได้ คือ

$$q_s \tan[q_s d_s/2] = \eta q_n \tanh[q_n d_n/2] \quad (2.13)$$

สมการ (2.9a) และ (2.11b) ก็คือรูปของสมการของชโรดิงเงอร์ (Schrodinger's equation) ของอนุภาคในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ สมการทั้งสองเป็นจริงเมื่อค่าไอเกนต่ำสุดคือ $2\mathcal{H}_{C2}/\phi_0$ เป็นค่าที่กำหนดค่าสูงของสนามวิกฤต (H_{C2}) สูงสุด ดังนั้น

$$q_s^2 = k_s^2 - 2\mathcal{H}_{C2}/\phi_0 \quad (2.14a)$$

$$q_n^2 = k_n^2 + 2\mathcal{H}_{C2}/\phi_0 \quad (2.14b)$$

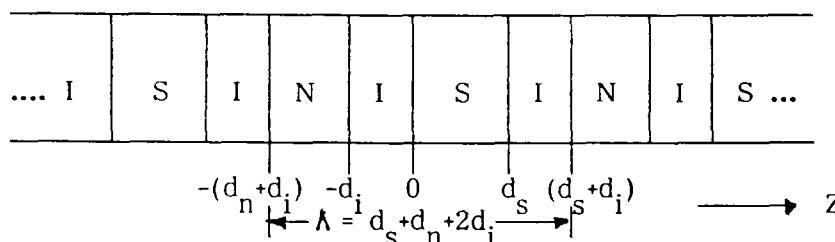
ไบอากิและคณะได้ใช้สมการ (2.13) (2.14) และ (2.8) ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) หาค่าอุณหภูมิวิกฤต (T_c) และค่าสูงของสนามวิกฤต [$H_{C2}(T)$] ได้

อนึ่งถ้าไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($H=0$) แล้วสมการ (2.14a) และ (2.14b) จะเป็นตัวกำหนด $q_{s,n}^2 = k_{s,n}^2$ ผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยของเดอเจเนนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ (de Gennes and Werthammer. 1963 : 168)

ปัญหาและจุดมุ่งหมายของการวิจัย

จากการวิจัยของไบอากิและคณะที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เขาเสนอแนะว่าทฤษฎีของเขาไม่เพียงพอที่จะใช้อธิบายระบบซูเปอร์แลตทิซได้ เพราะว่าค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางที่ได้เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้นและยังไม่สอดคล้องกับผลการทดลอง กล่าวคือทฤษฎีของเขาจะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อผิวสัมผัสระหว่างตัวนำทั้งสองดีมาก ในทางปฏิบัติแล้วบริเวณผิวสัมผัสระหว่างตัวนำทั้งสองมักมีอะตอมของตัวนำทั้งสองปะปนกันเสมอ เพราะว่าในกระบวนการผลิตฟิล์มบางนั้นอะตอมจะมีพลังงานจลน์สูง แม้ว่าการควบคุมจะดีเพียงใดก็ตาม ในบางครั้งอาจมีชั้นของฉนวนกั้นอยู่เนื่องจากมีออกซิเจนปนอยู่ในกระบวนการผลิต เขาได้เสนอแนะท้ายบทความว่าทฤษฎีที่ถูกต้องกับความเป็นจริงต้องคิดรวมชั้นใหม่ที่เกิดขึ้น เราเรียกชั้นใหม่ที่เกิดขึ้นจากการผสมบริเวณผิวสัมผัสว่าชั้นกลาง (interface, I)

ในการวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการขยายงานวิจัยของไมอากิและคณะออกไป โดยจะศึกษาระบบ
ซูเปอร์แลตทิซที่มีชั้นกลางระหว่างตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติ ดังแสดงในภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แสดงระบบซูเปอร์แลตทิซของตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติมีชั้นกลาง(interface)

ระหว่างตัวนำทั้งสอง ความหนา d_s, d_n และ d_i เป็นของตัวนำยิ่งยวด โลหะปกติและชั้นกลางตามลำดับ

งานวิจัยจะศึกษาประเด็นต่อไปนี้

1. หาสูตรค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากและอุณหภูมิวิกฤตของระบบ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซว่าขึ้นกับคาบ(period) ของระบบเพียงใด รวมทั้งอิทธิพลของชั้นความหนาต่างๆ d_s, d_n และ d_i
2. เพื่อเปรียบเทียบผลของการวิจัยนี้กับผลงานอื่นๆที่มีผู้วิจัยไว้ ได้แก่ กรณี S-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสองชั้น(bimetallic S-N superlattice) และกรณี S-I-N ซูเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น(S-I-N trilayer superlattice) ว่าครอบคลุมและแตกต่างกันเพียงใด ในแง่ใดบ้าง

ความสำคัญของงานวิจัย

เป็นการเพิ่มพูนความรู้ด้านพฤติกรรมของระบบซูเปอร์แลตทิซอันช่วยให้เข้าใจกระบวนการนำยิ่งยวดมากขึ้น ผลการคำนวณที่ได้จะช่วยอธิบายสมบัติต่างๆของระบบที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาด้านเทคโนโลยี

ขอบเขตของการวิจัย

1. การวิจัยครั้งนี้คำนึงถึงผลของค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากเท่านั้น จะไม่พิจารณาสนามในทิศทางอื่นๆ
2. ระบบซูเปอร์แลตทิซประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติมีชั้นกลางระหว่างตัวนำทั้งสอง

เท่านั้น

3. ความหนาของชั้นต่างๆมีความสม่ำเสมอและระบบมีคาบ (period) และมีความสมมาตร (symmetry)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สนามแม่เหล็กวิกฤต (critical field) คือสนามแม่เหล็กภายนอกที่มากจะทำกับระบบซึ่งอยู่ในสภานำยิ่งยวดและความเข้มของสนามนี้มีค่าสูงพอที่ทำให้ตัวนำยิ่งยวดกลายเป็นตัวนำปกติได้ หรือในทำนองตรงข้าม คือสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ทำให้ตัวนำปกติเปลี่ยนสถานะเป็นตัวนำยิ่งยวด
2. อุณหภูมิวิกฤต (critical temperature) คืออุณหภูมิสัมบูรณ์ที่ตัวนำปกติกลายเป็นตัวนำยิ่งยวด หรืออุณหภูมิที่ตัวนำยิ่งยวดเปลี่ยนเป็นตัวนำปกติ
3. ซุปเปอร์แลตทิซ (superlattice) เป็นระบบที่ประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดประกบกับโลหะปกติ หรือประกบกับโลหะที่เจือสารแม่เหล็ก หรือตัวนำยิ่งยวดต่างชนิดกันก็ได้ ในบางกรณีที่มีบริเวณผิวสัมผัสอาจมีชั้นกลางหรือไม่ก็ได้ ซึ่งจำนวนชั้นของการประกบมีมากกว่าหนึ่งคู่ขึ้นไปโดยเรียงซ้อนกันหลายๆคู่
4. ตัวนำยิ่งยวด (superconductor) คือตัวนำไฟฟ้าที่บริสุทธิ์หรือไม่บริสุทธิ์ก็ได้ซึ่งเมื่ออุณหภูมิลดต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตหรือสนามแม่เหล็กวิกฤตแล้วตัวนำไฟฟ้าเหล่านี้จะอยู่ในสภาพไร้ความต้านทานไฟฟ้าและมีพฤติกรรมเป็นสารไดอแมกเนติก
5. ตัวนำปกติ (normal metal) คือตัวนำไฟฟ้าที่บริสุทธิ์หรือไม่บริสุทธิ์ซึ่งที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะอยู่ในสภาพมีความต้านทานไฟฟ้า
6. ชั้นกลาง (interface) หมายถึงชั้นที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสของตัวนำสองชนิดที่ประกบกกันอยู่ ชั้นนี้อาจเกิดจากการผสมของอะตอมระหว่างตัวนำทั้งสองระหว่างกระบวนการผลิตทั้งกระบวนการผลิตแบบไอระเหย (evaporation) หรือแบบฉาบโลหะ (sputtering) บางครั้งอาจเป็นชั้นฉนวนซึ่งเกิดจากการออกซิไดซ์ (oxidization) ระหว่างกระบวนการผลิต
7. พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) คือพารามิเตอร์ที่บ่งบอกว่าเกิดสภานำยิ่งยวดแล้ว กล่าวคือถ้าค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีค่าเป็นศูนย์ตัวนำจะอยู่ในสภานำปกติ ถ้าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีค่าตัวนำจะอยู่ในสภานำยิ่งยวด การกำหนดค่าพารามิเตอร์ความ

เป็นระเบียบนี้อาจจะหาได้จากค่าความหนาแน่นของการควมแน่นของอิเล็กตรอนในสารตัวนำยิ่งยวด หรืออาจคำนวณได้จากค่าศักย์การจับคู่(pair potential) ที่อิเล็กตรอนในคู่อุปสรรคมีอันตรกริยากัน

8. ผลพริกซ์มิติ(proximity effect) คือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อโลหะปกติประกบกับ ตัวนำยิ่งยวดจะมีคู่อุปสรรคไหลจากตัวนำยิ่งยวดไปยังตัวนำปกติ ทำให้คู่อุปสรรคลดลงในด้านตัวนำยิ่งยวด และคู่อุปสรรคมีจำนวนเพิ่มในด้านตัวนำปกติและอิเล็กตรอนด้านตัวนำปกติไหลไปด้านตัวนำยิ่งยวดบ้าง

บทที่ 3

วิธีการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้แบบจำลองที่แสดงในภาพประกอบ 6 เราเรียกระบบนี้ว่า S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ ในการนี้สมมติให้มีจำนวนชั้นไม่จำกัดและความหนาแต่ละชั้นคงที่ ดังนั้นจึงพิจารณาว่าระบบมีการซ้ำแบบ เกิดคาบ (period, Λ) นั้น กำหนดให้แต่ละชั้นถูกวางในแนวขนานกับระนาบ x-y การวิจัยใช้สมการของไอลินเบอร์เกอร์ (Eilenberger's equation) เช่นเดียวกับงานวิจัยของไบอากิและคณะ คือ

$$-\frac{D}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{G}\vec{\nabla}F - F\vec{\nabla}G) = \frac{\Delta}{h}G - wF \quad (3.1)$$

$$G^2 + |F|^2 = 1 \quad (3.2)$$

$$\ln \left[\frac{T_c}{T} \right] = 2\pi T \sum_{n \geq 0} \left[\frac{\Delta}{\hbar w} - F \right] \quad (3.3)$$

D เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่ซึม(diffusion coefficient) $\vec{\nabla} = \vec{\nabla} - (2\pi i/\phi_0)\vec{A}$ เป็นเกจอินแวเรียนต์เกรเดียนต์(gauge invariant gradient) ในพจน์ของศักย์เวกเตอร์(vector potential) $\vec{A}$ ϕ_0 เป็นฟลักซ์ควอนตัม(flux quantum) $F(\vec{r}, w)$ และ $G(\vec{r}, w)$ เป็นฟังก์ชันกรีนของกอร์กอฟ(Gorkov's Green function) $\Delta(\vec{r})$ เป็นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ(order parameter) T_c เป็นอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเมื่อเป็นแท่ง โดยตัวห้อยล่าง s, i, n T เป็นอุณหภูมิใดๆของซุปเปอร์แลตทิซและมีหน่วยเป็นพลังงาน ความถี่มัตซุบารา(Matsubara's frequency) $w = \pi T(2n+1)/\hbar$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$

ในสถานะโลหะปกติ $|F|=0$ และ $G \approx 1$ เสมอ ในบริเวณใกล้กับการเปลี่ยนเฟส(phase transition) $|F|$ เริ่มมีค่าเล็กน้อย จึงประมาณว่า $|F| \ll 1$ และ $G \sim 1$ แทนค่า F และ G ในสมการ(3.1) จะได้ว่า

$$-\frac{D}{2}\nabla^2 F = \frac{\Delta}{h} - wF \quad (3.4)$$

ที่จุดวิกฤต(critical point) ค่า $|F|$ และ เป็นศูนย์ พิจารณาที่ต่ำกว่าจุดวิกฤตเล็กน้อย $|F|$ เริ่มมีค่า อาศัยการประมาณการจากสมการ(3.2) และ (3.3) จะได้

$$G(r,w) \simeq 1 \quad \text{และ} \quad F(r,w) = \Delta(r)/[\hbar w + 2\pi T_{CI} \rho(t_I)] \quad (3.5)$$

โดยที่ $t_I = T_C/T_{CI}$ เรียกว่าอุณหภูมิลดทอน (reduced temperature) T_C เป็นอุณหภูมิวิกฤตของซูเปอร์แลตทิซ T_{CI} เป็นอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำแต่ละชนิดเมื่อเป็นแท่ง (bulk) หมายถึง $T_{CI} = T_{CS}$, T_{CN} และ T_{CI} เมื่อ s เป็นตัวนำยิ่งยวด n เป็นตัวนำปกติและ i เป็นชั้นกลาง จากนั้นแทนค่า $\Delta(r)$ จากสมการ (3.5) ใน (3.4) ผลลัพธ์ คือ

$$\begin{aligned} \Pi^2 F &= -\frac{2}{D_I} \left[\frac{\hbar w F + 2\pi T_{CI} \rho(t_I) F - \hbar w F}{\hbar} \right] \\ &= -4\pi T_{CI} \rho(t_I) F / \hbar D_I \\ &= -k_I^2 F \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \quad k_I^2 &= 4\pi T_{CI} \rho(t_I) / \hbar D_I \\ &= 2\rho(t_I) / \xi_I^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

เมื่อกำหนดให้ $\xi_I^2 = \hbar D_I / 2\pi T_{CI}$ เป็นความยาวอาพันธ์ (coherent length) ในแต่ละตัวนำ แทนค่า $F(r)$ และ $\hbar w = \pi T(2n+1)$ ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{T_{CI}}{T} \right] &= 2\pi T_C \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{(2n+1)\pi T_C} - \frac{1}{(2n+1)\pi T_C + 2\pi T_{CI} \rho(t_I)} \right] \\ \ln \left[\frac{T_C}{T_{CI}} \right] &= - \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \rho(t_I) T_{CI} / T_C} \right] \end{aligned}$$

เขียนในพจน์ของอุณหภูมิลดทอน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ln t &= - \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2} + \rho(t_I)/t_I} \right] \\ &= \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left[\frac{1}{2} + \rho(t_I)/t_I\right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ψ เป็นไดแกมมาฟังก์ชัน (digamma function) t_I อยู่ในรูปอุณหภูมิลดทอน

ซูเปอร์แลตทิซมีสนามแม่เหล็กภายนอกกระทำในแนวตั้งได้ฉาก(perpendicular field) ในภาพประกอบ 6 ตามทิศทาง z ซึ่งหมายความว่า $\vec{H} = H\hat{z}$ หรือพิจารณาในพจน์ของศักย์เวกเตอร์ $\vec{A} = (0, H_x, 0)$ ใช้วิธีการแยกตัวแปร(separation variable method) โดยกำหนด $F(\vec{r}) = f(\vec{x}, \vec{y})g(\vec{z})$ แทนค่าลงในสมการ(3.6) ดังต่อไปนี้

$$\Pi^2 fg = -k_I^2 fg$$

$$[\nabla^2 - (2\pi i/\phi_0)\vec{A}\cdot\nabla - (2\pi i/\phi_0)\nabla\cdot\vec{A} + (2\pi i/\phi_0)^2 A^2]fg = -k_I^2 fg$$

$$g\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + g\frac{\partial^2}{\partial y^2}f + f\frac{\partial^2}{\partial z^2}g - \frac{2\pi i}{\phi_0}H_x g\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\phi_0}\frac{\partial}{\partial y}H_x fg + \left(\frac{2\pi i}{\phi_0}\right)^2 H_x^2 fg = -k_I^2 fg$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f - \frac{2\pi i}{\phi_0}H_x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\phi_0}\frac{\partial}{\partial y}H_x + \left(\frac{2\pi i}{\phi_0}\right)^2 H_x^2 + k_I^2 = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial z^2}g \quad (3.9)$$

สมการ(3.9) ทางซ้ายมือขึ้นกับตัวแปร x, y ทางขวามือขึ้นกับตัวแปร z กำหนดให้มีค่าเท่ากับ q^2 เขียนสมการ(3.9) ได้ว่า

สมการที่ขึ้นกับตัวแปร x, y

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f - \frac{2\pi i}{\phi_0}H_x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\phi_0}\frac{\partial}{\partial y}H_x + \left(\frac{2\pi i}{\phi_0}\right)^2 H_x^2 = q^2 - k_I^2$$

เพื่อความสะดวกเรานิยามว่า $\Pi_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ และ $\Pi_y^2 = \left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\phi_0}H_x\right]^2$ สมการข้างบนสามารถเขียนในรูปที่กระชับขึ้น ได้ว่า

$$-(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)f(\vec{x}, \vec{y}) = (k_I^2 - q^2)f(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.10)$$

สมการที่ขึ้นกับตัวแปร z

$$\frac{d^2}{dz^2}g(\vec{z}) = -q_I^2 g(\vec{z}) \quad (3.11)$$

สมการ(3.10) กับ (3.11) เป็นสมการทั่วไป เราจะแยกพิจารณาในบริเวณชั้นต่างๆของ ซูเปอร์แลตทิซซึ่งเกิดจากผลของพรีอักษมิติได้ดังต่อไปนี้คือ

ในตัวย่นำที่ยาวและชั้นกลางฟังก์ชันคลื่นขึ้นกับสมการ

$$-(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)f_{s,i}(x,y) = (k_{s,i}^2 - q_{s,i}^2)f_{s,i}(x,y) \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g_{s,i}(z) = -q_{s,i}^2 g_{s,i}(z) \quad (3.13)$$

ในดัวนำปกติฟังก์ชันคลื่นขึ้นกับสมการ

$$-(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)f_n(x,y) = -(k_n^2 - q_n^2)f_n(x,y) \quad (3.140)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g_n(z) = q_n^2 g_n(z) \quad (3.15)$$

ขณะเดียวกันความสัมพันธ์ตาม (3.7) ในที่นี้ได้แก่

เมื่อคิดที่ตัวนำยิ่งยวดและชั้นกลาง

$$k_{s,i}^2 = 2\rho(t_{s,i})/\xi_{s,i}^2 \quad (3.16)$$

เมื่อคิดที่ตัวนำปกติ

$$k_n^2 = -2\rho(t_n)/\xi_n^2 \quad (3.17)$$

ในที่นี้ค่าความยาวอาพันธ์จึกับสมบัติการแพร่ซึม D_s , D_n หรือ D_i โดยตัวห้อยล่าง

$I = s,n,i$ ซึ่งเขียนในรูปสมการทั่วไปได้ว่า

$$\xi_I^2 = \hbar D_I / 2\pi k_B T_{CI} \quad (3.18)$$

จากทฤษฎีของสมการอนุพันธ์ จากสมการ(3.13)และ(3.15)เราจะได้ว่า

$$g_s(z) = A_s \exp[iq_s z] + B_s \exp[-(iq_s z)] \quad (3.19a)$$

$$g_i(z) = A_i \exp[iq_i z] + B_i \exp[-(iq_i z)] \quad (3.19b)$$

$$g_n(z) = A_n \exp[q_n z] + B_n \exp[-(q_n z)] \quad (3.19c)$$

โดยที่ A_s , B_s , A_i , B_i , A_n และ B_n เป็นค่าคงที่ซึ่งจะหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้คือ

$$(1) \quad g_s = g_i \quad ; \quad \frac{d}{dz} g_s = \eta_s \frac{d}{dz} g_i$$

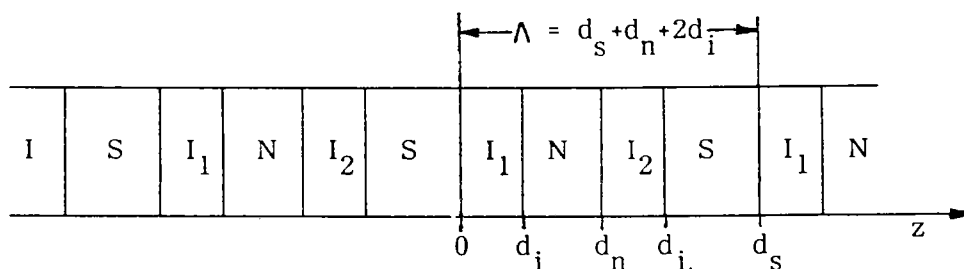
$$(2) \quad g_n = g_i \quad ; \quad \frac{d}{dz} g_n = \eta_n \frac{d}{dz} g_i$$

เงื่อนไขขอบเขต (1) และ (2) แสดงถึงความต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อ พารามิเตอร์ η_s และ η_n เป็นผลสืบเนื่องจากการกระเจิง โดยที่พารามิเตอร์นี้สัมพันธ์กับค่าสภาพการนำไฟฟ้าในสถานะปกติ (normal state conductivities, σ_i) กล่าวคือ $\eta_{s;n} = \sigma_i / \sigma_{s,n}$

$$(3) \quad f_s(x,y) = f_i(x,y) \quad ; \quad f_n(x,y) = f_i(x,y)$$

$$(4) \quad g(z) = e^{-iq_z \Lambda} g(z + \Lambda)$$

แบบจำลองได้กำหนดให้มีความสมมาตร ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขต (4) เป็นเงื่อนไขตามทฤษฎีบลอค (Bloch Theory) ค่า q_z เป็นค่าจำนวนจริง คาบของระบบคือ Λ ดังปรากฏในภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แบบจำลองซูเปอร์แลตทิซ S-I-N แสดงพิกัดตำแหน่งที่ใช้วิจัย

จากเงื่อนไขขอบเขตที่กล่าวมาข้างต้นเมื่อพิจารณาพิกัดตรงผิวรอยต่อที่แสดงในภาพประกอบ 7 เราสามารถแยกให้เห็นชัดเจนได้ดังนี้

ที่รอยต่อ $z=0$ ระหว่าง S กับ I_1

$$g_s(0) = g_{i_1}(0) \quad (a)$$

$$\frac{d}{dz} g_s(0) = \eta_s \frac{d}{dz} g_{i_1}(0) \quad (b)$$

ที่รอยต่อ $z = -(d_s + d_n + d_i)$ ระหว่าง I_1 กับ N

$$g_{i_1}[-(d_s + d_n + d_i)] = e^{-iq_z \Lambda} g_n(d_i) \quad (c)$$

$$\eta_n \frac{d}{dz} g_{i_1}[-(d_s + d_n + d_i)] = e^{-iq_z \Lambda} \frac{d}{dz} g_n(d_i) \quad (d)$$

ที่รอยต่อ $z = -(d_s + d_i)$ ระหว่าง N กับ I_2

$$g_n[-(d_s + d_i)] = e^{-iq_z \Lambda} g_{i_2}(d_n + d_i) \quad (e)$$

$$\frac{d}{dz} g_n [-(d_s + d_i)] = \eta_n e^{-iq_z z} \frac{d}{dz} g_{i2} (d_n + d_i) \quad (f)$$

ที่รอยต่อ $z = -d_s$ ระหว่าง I_2 กับ S

$$g_{i2} (-d_s) = e^{-iq_z \Lambda} g_s (d_n + 2d_i) \quad (g)$$

$$\eta_s \frac{d}{dz} g_{i2} (-d_s) = e^{-iq_z \Lambda} \frac{d}{dz} g_s (d_n + 2d_i) \quad (h)$$

แทนค่าสมการ (3.19a), (3.19b) และ (3.19c) ลงในสมการเงื่อนไขขอบเขตตั้งแต่ (a) ถึง

(h) เราจะได้

$$A_s + B_s - A_{i1} - B_{i1} = 0 \quad (3.20a)$$

$$A_s - B_s - [\eta_s q_i / q_s] [A_{i1} - B_{i1}] = 0 \quad (3.20b)$$

$$A_{i1} e^{-iq_i(d_s + d_n + d_i)} + B_{i1} e^{iq_i(d_s + d_n + d_i)} - e^{-iq_z \Lambda} [A_n e^{q_n d_i} - B_n e^{-q_n d_i}] = 0 \quad (3.20c)$$

$$A_{i1} e^{-iq_i(d_s + d_n + d_i)} - B_{i1} e^{iq_i(d_s + d_n + d_i)} - \frac{q_n}{i\eta_n q_i} e^{-iq_z \Lambda} [A_n e^{q_n d_i} - B_n e^{-q_n d_i}] = 0 \quad (3.20d)$$

$$A_n e^{-q_n(d_s + d_i)} + B_n e^{q_n(d_s + d_i)} - e^{-iq_z \Lambda} [A_{i2} e^{iq_i(d_n + d_i)} + B_{i2} e^{-iq_i(d_n + d_i)}] = 0 \quad (3.20e)$$

$$A_n e^{-q_n(d_s + d_i)} - B_n e^{q_n(d_s + d_i)} - \frac{i\eta_n q_i e^{-iq_z \Lambda}}{q_s} [A_{i2} e^{iq_i(d_n + d_i)} - B_{i2} e^{-iq_i(d_n + d_i)}] = 0 \quad (3.20f)$$

$$A_{i2} e^{-iq_i d_s} + B_{i2} e^{iq_i d_s} - e^{-iq_z \Lambda} [A_s e^{iq_s(d_n + 2d_i)} + B_s e^{-iq_s(d_n + 2d_i)}] = 0 \quad (3.20g)$$

$$A_{i2} e^{-iq_i d_s} - B_{i2} e^{iq_i d_s} - \frac{q_s}{i\eta_n q_i} e^{-iq_z \Lambda} [A_s e^{iq_s(d_n + 2d_i)} - B_s e^{-iq_s(d_n + 2d_i)}] = 0 \quad (3.20h)$$

เพื่อความกระชับง่ายต่อการพิจารณาจึงนิยามพจน์ต่างๆในสมการ (3.20) ดังต่อไปนี้ $\eta_s q_i / q_s = a$, $i\eta_n q_i / q_n = b$, $\exp(q_n d_i) = \alpha$, $\exp(q_i d_s) = \beta$, $\exp[q_n(d_s + d_i)] = \gamma$, $\exp[iq_s(d_n + 2d_i)] = \delta$,

$\exp[iq_i(d_n+d_i)] = \epsilon$, $\exp[iq_i(d_s+d_n+d_i)] = \phi = \beta\epsilon$, $\exp[iq_z\Delta] = k$ นำพจน์ที่นิยาม
ข้างนี้แทนลงในสมการ (3.20a) ถึง (3.20h) นำสมการที่ได้มาเขียนในรูปเมตริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta\epsilon & \beta\epsilon & -\alpha/k & -1/\alpha k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta\epsilon & -\beta\epsilon & -\alpha/bk & 1/\alpha bk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & r & -\epsilon/k & -1/\epsilon k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & -r & -\epsilon b/k & b/\epsilon k \\ -\delta/k & -1/k\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\beta & \beta \\ -\delta/ak & 1/ak\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\beta & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ B_s \\ A_{i1} \\ B_{i1} \\ A_n \\ B_n \\ A_{i2} \\ B_{i2} \end{bmatrix} = 0$$

เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์เสมอไป เราจะต้องให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์เป็นศูนย์

นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta\epsilon & \beta\epsilon & -\alpha/k & -1/\alpha k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta\epsilon & -\beta\epsilon & -\alpha/bk & 1/\alpha bk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & r & -\epsilon/k & -1/\epsilon k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r & -r & -\epsilon b/k & b/\epsilon k \\ -\delta/k & -1/k\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\beta & \beta \\ -\delta/ak & 1/ak\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\beta & -\beta \end{vmatrix} = 0$$

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยลดขนาดลงเป็นลำดับ นำแถวที่ 1 ลบแถวที่ 2 แถวที่ 3 ลบ
แถวที่ 4 แถวที่ 5 ลบแถวที่ 6 และ $1/a$ คูณแถวที่ 7 ไปลบออกจากแถวที่ 8 จะได้

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 1-a & 1+a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{\beta\epsilon} & \beta\epsilon & -\frac{\alpha}{k} & -\frac{1}{\alpha k} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2\beta\epsilon & \frac{\alpha}{k}(1-\frac{1}{b}) & \frac{1}{\alpha k}(1+\frac{1}{b}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & r & -\frac{\epsilon}{k} & -\frac{1}{\epsilon k} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2r & \frac{\epsilon}{k}(1-b) & \frac{1}{\epsilon k}(1+b) \\
 -\frac{\delta}{k} & -\frac{1}{\delta k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\
 0 & \frac{2}{\delta ak} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{a}) & -\beta(1+\frac{1}{a})
 \end{vmatrix} = 0$$

นำ k/δ คูณแถวที่ 7 โดยตลอดจากนั้นเอาแถวที่ 1 มาบวกทำให้ในสดมภ์ที่ 1 เป็นศูนย์ทุก
 ค่ายกเว้นเฉพาะแถวที่ 1 มีค่าเป็น 1 ดังนั้นดีเทอร์มิแนนต์ลดขนาดเหลือเป็น 7×7 คือ

$$\begin{vmatrix}
 -2 & 1-a & 1+a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{\beta\epsilon} & \beta\epsilon & -\frac{\alpha}{k} & -\frac{1}{\alpha k} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2\beta\epsilon & \frac{\alpha}{k}(1-\frac{1}{b}) & \frac{1}{\alpha k}(1+\frac{1}{b}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & r & -\frac{\epsilon}{k} & -\frac{1}{\epsilon k} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2r & \frac{\epsilon}{k}(1-b) & \frac{1}{\epsilon k}(1+b) \\
 1-\frac{1}{\delta^2} & -1 & -1 & 0 & 0 & \frac{k}{\beta\delta} & \frac{\beta k}{\delta} \\
 \frac{2}{\delta ak} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{a}) & -\beta(1+\frac{1}{a})
 \end{vmatrix} = 0$$

ในทำนองเดียวกันเราทำให้สดมภ์ที่ 1 เป็นศูนย์ยกเว้นในแถวที่ 1 คือ เอาตัวร่วม 2 ในแถว
 1 $(\delta^2-1)/\delta^2$ ในแถวที่ 6 และ $2/\delta ak$ ในแถวที่ 7 ออกมา จากนั้นนำแถวที่ 1 ขวกับแถวที่
 6 กับแถวที่ 7 จะทำให้ขนาดของดีเทอร์มิแนนต์เหลือเพียง 6×6 คือ

171722

$$\begin{vmatrix}
 \frac{1}{\beta\epsilon} & \beta\epsilon & -\frac{\alpha}{k} & -\frac{1}{\alpha k} & 0 & 0 \\
 0 & -2\beta\epsilon & \frac{\alpha(1-\frac{1}{b})}{k} & \frac{1}{\alpha k}(1+\frac{1}{b}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \gamma & -\frac{\epsilon}{k} & -\frac{1}{\epsilon k} \\
 0 & 0 & 0 & 2\gamma & \frac{\epsilon(1-b)}{k} & \frac{1}{\epsilon k}(1+b) \\
 -\frac{\delta^2}{(\delta^2-1)} + \frac{(1-a)}{2} & -\frac{\delta^2}{(\delta^2-1)} + \frac{(1+a)}{2} & 0 & 0 & \frac{k\delta}{\beta(\delta^2-1)} & \frac{\beta\delta k}{(\delta^2-1)} \\
 \frac{1-a}{2} & \frac{1+a}{2} & 0 & 0 & \frac{\delta k(a-1)}{2\beta} & -\frac{\beta\delta k(a+1)}{2}
 \end{vmatrix} = 0$$

เอา k/α คูณแถวที่ 1 $kb/\alpha(b-1)$ คูณแถวที่ 2 γ คูณแถวที่ 3 $2(\delta^2-1)$ คูณแถวที่ 5 เอา
2 คูณแถวที่ 6 จะได้

$$\begin{vmatrix}
 \frac{k}{2\beta\epsilon} & \frac{k\beta\epsilon}{\alpha} & -1 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-2bk\beta\epsilon}{\alpha(b-1)} & 1 & \frac{b+1}{\alpha^2(b-1)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \gamma^2 & -\frac{\epsilon\gamma}{k} & -\frac{\gamma}{k} \\
 0 & 0 & 0 & -2\gamma & \frac{\epsilon(1-b)}{k} & \frac{(1+b)}{\epsilon k} \\
 -(\delta^2+a\delta^2-a+1) & -(\delta^2-a\delta^2+a+1) & 0 & 0 & \frac{2k\delta}{\beta} & 2k\beta\delta \\
 1-a & 1+a & 0 & 0 & \frac{k\delta(a-1)}{\beta} & -k\beta\delta(a+1)
 \end{vmatrix} = 0$$

นำเอาแถวที่ 1 บวกกับแถวที่ 2 และแถวที่ 3 ทำให้สัณยต์ที่ 3 เป็นศูนย์ทุกแถวยกเว้นแถว
ที่ 3 มีค่าเป็น -1 ดีเทอร์มิแนนต์ลดขนาดเป็น 5×5 ดังนี้

$$\begin{vmatrix}
 \frac{k}{\alpha\beta\epsilon} & -\frac{k\beta\epsilon(b+1)}{\alpha} & \frac{2}{\alpha^2(b-1)} & 0 & 0 \\
 \frac{k}{\alpha\beta\epsilon} & \frac{k\beta\epsilon}{\alpha} & \frac{\alpha^2r^2-1}{\alpha^2} & -\frac{\epsilon r}{k} & -\frac{r}{k\epsilon} \\
 0 & 0 & -2r & \frac{\epsilon(1-b)}{k} & \frac{1(1+b)}{\epsilon k} \\
 -(\delta^2+a\delta^2-a+1) & -(\delta^2-a\delta^2+a+1) & 0 & \frac{2k\delta}{\beta} & 2k\beta\delta \\
 1-a & 1+a & 0 & \frac{k\delta(a-1)}{\beta} & -k\beta\delta(a+1)
 \end{vmatrix} = 0$$

นำเอา $\alpha^2(b-1)/2$ คูณแถวที่ 1 $\alpha^2/(\alpha^2r^2-1)$ คูณแถวที่ 2 $1/2r$ คูณแถวที่ 3 และ (-1) คูณแถวที่ 4 จะได้

$$\begin{vmatrix}
 \frac{k\alpha(b-1)}{2\beta\epsilon} & -\frac{k\beta\alpha\epsilon(b+1)}{2} & 1 & 0 & 0 \\
 \frac{k\alpha}{(\alpha^2r^2-1)\beta\epsilon} & \frac{k\alpha\beta\epsilon}{(\alpha^2r^2-1)} & 1 & -\frac{\epsilon r\alpha^2}{k(\alpha^2r^2-1)} & \frac{-r\alpha^2}{k\epsilon(\alpha^2r^2-1)} \\
 0 & 0 & -1 & \frac{\epsilon(1-b)}{2k\gamma} & \frac{1(1+b)}{2k\epsilon\gamma} \\
 \delta^2+a\delta^2-a+1 & \delta^2-a\delta^2+a+1 & 0 & \frac{-2k\delta}{\beta} & -2k\beta\delta \\
 1-a & 1+a & 0 & \frac{k\delta(a-1)}{\beta} & -k\beta\delta(a+1)
 \end{vmatrix} = 0$$

เอาแถวที่ 3 ไปบวกแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ทำให้สมการที่ 3 เป็นศูนย์ยกเว้นแถวที่ 3 เราจะได้ดีเทอร์มิแนนต์เหลือขนาด 4×4 คือ

$$\begin{vmatrix}
 \frac{k\alpha(b-1)}{\beta\epsilon} & -k\alpha\beta\epsilon(b+1) & \frac{\epsilon(1-b)}{k\gamma} & \frac{(1+b)}{k\gamma\epsilon} \\
 \frac{2k\alpha}{\beta\epsilon} & 2k\alpha\beta\epsilon & \frac{\epsilon}{k\gamma} [(b-1)-\alpha^2r^2(b+1)] & \frac{1}{k\gamma\epsilon} [\alpha^2r^2(b-1)-(b+1)] \\
 \delta^2+a\delta^2-a+1 & \delta^2-a\delta^2+a+1 & \frac{-2k\delta}{\beta} & -2k\beta\delta \\
 1-a & 1+a & \frac{k\delta(a-1)}{\beta} & -k\beta\delta(a+1)
 \end{vmatrix} = 0$$

(3.21)

เพื่อช่วยต่อการคูณดีเทอร์มิแนนท์ พิจารณาจากขนาด 4×4 โดยทั่วไปคือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43}) \\ & + (a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23})(a_{32}a_{44}-a_{34}a_{42}) \\ & + (a_{11}a_{24}-a_{21}a_{14})(a_{32}a_{43}-a_{33}a_{42}) \\ & + (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})(a_{31}a_{44}-a_{34}a_{41}) \\ & + (a_{22}a_{14}-a_{12}a_{24})(a_{31}a_{43}-a_{33}a_{41}) \\ & + (a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})(a_{31}a_{42}-a_{32}a_{41}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

เราพิจารณาสมการ (3.21) และ (3.22) ว่ามีสมนัยกัน โดยการเทียบเคียงจะแยกคิดแต่ละพจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43}) \\ & = \left[\frac{(k\alpha(b-1))(2k\alpha\beta\epsilon)}{\beta\epsilon} - \frac{(-k\alpha\beta\epsilon(b+1))(2k\alpha)}{\beta\epsilon} \right] \left[\frac{-2k\delta(-k\beta\delta(a+1))}{\epsilon} - \frac{(-2k\beta\delta)(\delta k(a-1))}{\beta} \right] \\ & = [2k^2\alpha^2(b-1)+2k^2\alpha^2(b+1)][2k^2\delta^2(a+1)+2k^2\delta^2(a-1)] \\ & = 2k^2\alpha^2(b-1+b+1)[2k^2\delta^2(a+1+a-1)] \\ & = 16ab\alpha^2\delta^2k^4 \end{aligned} \quad (3.23a)$$

$$\begin{aligned} & (a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23})(a_{32}a_{44}-a_{34}a_{42}) \\ & = \left[\frac{(2k\alpha)(\epsilon(1-b))}{\beta\epsilon} - \frac{(k\alpha(b-1))}{k\epsilon} \right] \left[\frac{\epsilon((b-1)-\alpha^2r^2(b+1))}{k\epsilon} \right] \\ & \quad \left[(\delta^2-a\delta^2+a+1)[-k\beta\delta(a+1)]-(-2k\beta\delta)(1+a) \right] \\ & = \left[\frac{2\alpha(1-b)}{\beta\epsilon} - \frac{\alpha[(b-1)^2-\alpha^2r^2(b^2-1)]}{\beta\epsilon} \right] \left[[k\beta\delta(a+1)][-\delta^2+a\delta^2-a-1+2] \right] \\ & = \left[(\alpha/\beta\epsilon)[2(1-b)-[(b-1)^2-\alpha^2r^2(b-1)(b+1)]] \right] \left[-k\beta\delta(a+1)(\delta^2-a\delta^2+a-1) \right] \\ & = \left[(\alpha/\beta\epsilon)[2-2b-b^2+2b-1+\alpha^2r^2(b-1)(b+1)] \right] \left[-k\beta\delta(a+1)(-a\delta^2+\delta^2+a-1) \right] \\ & = \left[(\alpha/\beta\epsilon)[-b^2+\alpha^2r^2(b^2-1)] \right] \left[k\beta\delta(a+1)[\delta^2(a-1)-(a-1)] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(\alpha/\beta\epsilon)(b^2-1)+\alpha^2\gamma^2(b^2-1)][k\beta\delta(a^2-1)(\delta^2-1)] \\
&= [(\alpha/\beta\epsilon)(b^2-1)(\alpha^2\gamma^2-1)][k\beta\delta(a^2-1)(\delta^2-1)] \\
&= (k\alpha\delta/\gamma)(b^2-1)(a^2-1)(\alpha^2\gamma^2-1)(\delta^2-1) \tag{3.23b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_{11}a_{24}-a_{21}a_{14})(a_{32}a_{42}-a_{33}a_{42}) \\
&= \left\{ [(k\alpha/\beta\epsilon)(b-1)] \left[(1/k\gamma\epsilon)[\alpha^2\gamma^2(b-1)-(b+1)] \right] - (2k\alpha/\beta\epsilon)[(1+b)/(k\epsilon\gamma)] \right\} \\
&\quad \left\{ [(k\delta/\beta)(a-1)](\delta^2-a\delta^2+a+1)-(-2k\delta/\beta)(1+a) \right\} \\
&= [(\alpha/\beta\gamma\epsilon^2)[(b-1)[\alpha^2\gamma^2(b-1)-(b+1)]-2(1+b)] [(k\delta/\beta)[(a-1)(\delta^2-a\delta^2+a+1)+2(1+a)]] \\
&= [(\alpha/\beta\gamma\epsilon^2)[\alpha^2\gamma^2(b-1)^2-(b^2-1)-2-2b]] [(k\delta/\beta)[a\delta^2-a^2\delta^2+a^2+a-\delta^2+a\delta^2-a-1+2+2a]] \\
&= [(\alpha/\beta\gamma\epsilon^2)[\alpha^2\gamma^2(b-1)^2-b^2+1-2-2b]] [(k\delta/\beta)[2a\delta^2-a^2\delta^2+a^2-\delta^2+1+2a]] \\
&= [(\alpha/\beta\gamma\epsilon^2)[\alpha^2\gamma^2(b-1)^2-b^2-2b-1]] [(k\delta/\beta)[- \delta^2(a^2-2a+1)+a^2+2a+1]] \\
&= [(\alpha/\beta\gamma\epsilon^2)[\alpha^2\gamma^2(b-1)^2-(b+1)^2]] [(k\delta/\beta)[(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2]] \\
&= (k\alpha\delta/\gamma\beta\epsilon^2)[\alpha^2\gamma^2(b-1)^2-(b+1)^2][(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2] \tag{3.23c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})(a_{31}a_{44}-a_{34}a_{41}) \\
&= [(-k\alpha\beta\epsilon(b+1))[(\epsilon/k\gamma)[(b-1)-\alpha^2\gamma^2(b+1)]-(2k\alpha\beta\gamma)[(\epsilon/k\gamma)(1-b)]] \times \\
&\quad [(-k\beta\delta(a+1))(\delta^2+a\delta^2-a+1)-(-2k\beta\delta)(1-a)] \\
&= [(\alpha\beta\epsilon^2/\gamma)[-(b+1)[(b-1)-\alpha^2\gamma^2(b+1)]-2(1-b)]] [-2k\beta\delta[(a+1)(\delta^2+a\delta^2-a+1)-2(1-a)]] \\
&= [(\alpha\beta\epsilon^2/\gamma)[-b^2+1-2+2b+\alpha^2\gamma^2(b+1)^2]] [-k\beta\delta(a\delta^2+a^2\delta^2-a^2+a+\delta^2+a\delta^2-a+1-2+2a)] \\
&= [(\alpha\beta\epsilon^2/\gamma)[\alpha^2\gamma^2(b+1)^2-(b-1)^2]] [-k\beta\delta[\delta^2(a+1)^2-(a-1)^2]]
\end{aligned}$$

$$= k \alpha \delta \beta^2 \epsilon^2 [\alpha^2 \gamma^2 (b+1)^2 - (b-1)^2] [(a-1)^2 - \delta^2 (a+1)^2] \quad (3.23d)$$

$$\begin{aligned} & (a_{22}a_{14} - a_{12}a_{24})(a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}) \\ &= [(2k\alpha\beta\epsilon)[(1+b)/k] - [-k\alpha\beta\epsilon(b+1)][(1/k\gamma\epsilon)[\alpha^2\gamma^2(b-1) - (b+1)][(k\delta/\beta)(a-1)] \\ & \quad (\delta^2 + a\delta^2 - a+1) - (-2k\delta/\beta)(1-a)] \\ &= [(\alpha\beta/\gamma)[2(1+b) + \alpha^2\gamma^2(b^2-1) - (b+1)^2]] [(k\delta/\beta)[(a-1)(\delta^2 + a\delta^2 - a+1) + 2(1-a)]] \\ &= (\alpha\beta/\gamma)[\alpha^2\gamma^2(b^2-1) + 2 + 2b - b^2 - 2b - 1][(k\delta/\beta)(a-1)(\delta^2 + a\delta^2 - a+1 - 2)] \\ &= (\alpha\beta/\gamma)[\alpha^2\gamma^2(b^2-1) - (b^2-1)][(k\delta/\beta)(a-1)[\delta^2(a+1) - (a+1)]] \\ &= (k\alpha\delta/\gamma)(b^2-1)(\alpha^2\gamma^2-1)(a^2-1)(\delta^2-1) \quad (3.23e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}) \\ &= [[(\epsilon/k\gamma)(1-b)][(1/k\gamma\epsilon)[\alpha^2\gamma^2(b-1) - (b+1)]] - [(1/k\epsilon\gamma)(1+b)] \\ & \quad [(\epsilon/k\gamma)[(b-1) - \alpha^2\gamma^2(b+1)]]] [(1+a)(\delta^2 + a\delta^2 - a+1) - (1-a)(\delta^2 - a\delta^2 + a+1)] \\ &= [1/k^2\gamma^2][(1-b)[\alpha^2\gamma^2(b-1) - (b+1)] - (1+b)[(b-1) - \alpha^2\gamma^2(b+1)]] [2a\delta^2 - 2a + a(2\delta^2 + 2)] \\ &= [1/k^2\gamma^2](\alpha^2\gamma^2)[(b^2 + 2b + 1) - (b^2 - 2b + 1)](2a\delta^2 + 2a\delta^2 - 2a + 2a) \\ &= 16ab\alpha^2\delta^2/k^2 \quad (3.23f) \end{aligned}$$

ผลคูณของดีเทอร์มิแนนต์ในสมการ (3.21) โดยการเทียบเคียงกับสมการ (3.22) ก็คือผลรวม
ของสมการ (3.23a) ถึง (3.23f) ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned}
0 &= 16ab\alpha^2\delta^2k^4 + (k\alpha\delta/r)(b^2-1)(a^2-1)(\alpha^2r^2-1)(\delta^2-1) \\
&\quad + (k\alpha\delta/r\beta^2\epsilon^2)[\alpha^2r^2(b-1)^2-(b+1)^2][(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2] + 16ab\alpha^2\delta^2/k^2 \\
&\quad + (k\alpha\delta/r)(b^2-1)(a^2-1)(\alpha^2r^2-1)(\delta^2-1) \\
&\quad + (k\alpha\delta\beta^2\epsilon^2/r)[\alpha^2r^2(b+1)^2-(b-1)^2][(a-1)^2-\delta^2(a+1)^2] \\
&= 16ab\alpha^2\delta^2(k^4+k^{-2}) + (2k\alpha\delta/r)(a^2-1)(b^2-1)(\alpha^2r^2-1)(\delta^2-1) \\
&\quad + (k\alpha\delta/r\beta^2\epsilon^2)[\alpha^2r^2(b-1)^2-(b+1)^2][(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2] \\
&\quad + (k\alpha\delta\beta^2\epsilon^2/r)[\alpha^2r^2(b+1)^2-(b-1)^2][(a-1)^2-\delta^2(a+1)^2]
\end{aligned}$$

เอา $(k\alpha\delta/r)$ หารสมการข้างบนตลอดจะได้

$$\begin{aligned}
0 &= 16ab\alpha\delta r(k^3+k^{-3}) + 2(a^2-1)(b^2-1)(\alpha^2r^2-1)(\delta^2-1) \\
&\quad + (1/\beta^2\epsilon^2)[\alpha^2r^2(b-1)^2-(b+1)^2][(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2] \\
&\quad + \beta^2\epsilon^2[\alpha^2r^2(b+1)^2-(b-1)^2][(a-1)^2-\delta^2(a+1)^2]
\end{aligned}$$

จากนิยาม $\beta\epsilon = \phi$ แทนลงในพจน์ที่ 3 และ 4 ทางด้านขวามือของสมการจะได้

$$\begin{aligned}
0 &= 16ab\alpha\delta r(k^3+k^{-3}) + 2(a^2-1)(b^2-1)(\alpha^2r^2-1)(\delta^2-1) \\
&\quad + \phi^{-2}[\alpha^2r^2(b-1)^2-(b+1)^2][(a+1)^2-\delta^2(a-1)^2] \\
&\quad + \phi^2[\alpha^2r^2(b+1)^2-(b-1)^2][(a-1)^2-\delta^2(a+1)^2] \\
&= 16ab\alpha\delta r(k^3+k^{-3}) + 2a^2b^2-a^2-b^2+1)(\alpha^2r^2\delta^2-\alpha^2r^2-\delta^2+1) \\
&\quad + \phi^{-2}[\alpha^2r^2(a+1)^2(b-1)^2-\alpha^2r^2\delta^2(a-1)^2(b-1)^2-(a+1)^2(b+1)^2+\delta^2(a-1)^2(b+1)^2] \\
&\quad + \phi^2[\alpha^2r^2(a-1)^2(b+1)^2-\alpha^2r^2\delta^2(a+1)^2(b+1)^2-(a-1)^2(b-1)^2+\delta^2(a+1)^2(b-1)^2] \\
&= 16ab\alpha\delta r(k^3+k^{-3}) + 2a^2b^2-a^2-b^2+1)(\alpha^2r^2\delta^2-\alpha^2r^2-\delta^2+1) \\
&\quad + \alpha^2r^2[\phi^2(a^2b^2-2a^2b+2ab^2+a^2+b^2-4ab+2a-2b+1) \\
&\quad \quad + \phi^2(a^2b^2+2a^2b-2ab^2+a^2+b^2-4ab-2a+2b+1)] \\
&\quad - \alpha^2r^2\delta^2[\phi^2(a^2b^2-2a^2b-2ab^2+a^2+b^2+4ab-2a-2b+1) \\
&\quad \quad + \phi^2(a^2b^2+2a^2b+2ab^2+a^2+b^2+4ab+2a+2b+1)] \\
&\quad - [\phi^{-2}(a^2b^2+2a^2b+2ab^2+a^2+b^2+4ab+2a+2b+1) \\
&\quad \quad + \phi^2(a^2b^2-2a^2b-2ab^2+a^2+b^2+4ab-2a-2b+1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta^2 [\phi^{-2} (a^2 b^2 + 2a^2 b - 2ab^2 + a^2 + b^2 - 4ab - 2a + 2b + 1) \\
& \quad + \phi^2 (a^2 b^2 - 2a^2 b + 2ab^2 + a^2 + b^2 - 4ab + 2a - 2b + 1)] \\
0 & = 16ab\alpha\gamma(k^3 + k^{-3}) + 2\alpha^2\gamma^2\delta^2(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) - 2\alpha^2\gamma^2(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) \\
& \quad - 2\delta^2(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) + 2(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) \\
& \quad + \alpha^2\gamma^2(a^2b^2 + a^2 + b^2 - 4ab + 1)(\phi^2 + \phi^{-2}) + \alpha^2\gamma^2(2a^2b - 2ab^2 - 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& \quad - \alpha^2\gamma^2\delta^2(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4ab + 1)(\phi^2 + \phi^{-2}) + \alpha^2\gamma^2\delta^2(2a^2b + 2ab^2 + 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& \quad - (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4ab + 1)(\phi^2 + \phi^{-2}) + (2a^2b + 2ab^2 + 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& \quad + \delta^2(a^2b^2 + a^2 + b^2 - 4ab + 1)(\phi^2 + \phi^{-2}) - \delta^2(2a^2b - 2ab^2 - 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& = 16ab\alpha\gamma(k^3 + k^{-3}) + \alpha^2\gamma^2(a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2) + \alpha^2\gamma^2(a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2) \\
& \quad + \alpha^2\gamma^2(2a^2b - 2ab^2 - 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) - \alpha^2\gamma^2\delta^2(a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2) \\
& \quad - \alpha^2\gamma^2\delta^2(a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2) - \alpha^2\gamma^2\delta^2(2a^2b + 2ab^2 + 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& \quad - (a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2) - (a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2) + (2a^2b + 2ab^2 + 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) \\
& \quad + \delta^2(a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2) + \delta^2(a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2) \\
& \quad - \delta^2(2a^2b - 2ab^2 - 2a + 2b)(\phi^2 - \phi^{-2}) - 4ab(\phi^2 + \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \delta^2 + 1) \\
& = 16ab\alpha\gamma\delta(k^3 + k^{-3}) + (a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2)(\alpha^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \delta^2 - 1) \\
& \quad + (a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2)(\alpha^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \delta^2 - 1) + 2(a^2b + b)(\phi^2 - \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \delta^2 + 1) \\
& \quad - 2(ab^2 + a)(\phi^2 - \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 - \delta^2 - 1) - 4ab(\phi^2 + \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2\delta^2 + \delta^2 + 1) \\
& = 16ab\alpha\gamma\delta(k^3 + k^{-3}) + (a^2b^2 + 1)(\phi^2 + \phi^{-2} - 2)(\alpha^2\gamma^2 - 1)(1 - \delta^2) \\
& \quad + (a^2 + b^2)(\phi^2 + \phi^{-2} + 2)(\alpha^2\gamma^2 - 1)(1 - \delta^2) + 2(a^2b + b)(\phi^2 - \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 + 1)(1 - \delta^2) \\
& \quad - 2(ab^2 + a)(\phi^2 - \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 - 1)(1 + \delta^2) - 4ab(\phi^2 + \phi^{-2})(\alpha^2\gamma^2 + 1)(\delta^2 + 1)
\end{aligned}$$

เอา $ab\alpha\gamma\delta$ หารสมการข้างบนโดยตลอดจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 = & 16(k^3+k^{-3})-(ab+1/ab)[(\alpha\gamma)-(\alpha\gamma)^{-1}](\delta-\delta^{-1})(\phi^2+\phi^{-2}-2) \\
& - (a/b+b/a)[(\alpha\gamma)-(\alpha\gamma)^{-1}](\delta-\delta^{-1})(\phi^2+\phi^{-2}+2) \\
& - 2(a+1/a)[(\alpha\gamma)+(\alpha\gamma)^{-1}](\delta-\delta^{-1})(\phi^2-\phi^{-2}) \\
& - 2(b+1/b)[(\alpha\gamma)-(\alpha\gamma)^{-1}](\delta+\delta^{-1})(\phi^2-\phi^{-2}) \\
& - 4[(\alpha\gamma)+(\alpha\gamma)^{-1}](\delta+\delta^{-1})(\phi^2+\phi^{-2})
\end{aligned} \tag{3.24}$$

พิจารณาพจน์ต่างๆในสมการ(3.24) เมื่อแทนค่าด้วยพจน์ที่นิยามไว้ในหน้า 18 ในการนี้จะแปลงรูปจากฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

$$\begin{aligned}
(k^3+k^{-3}) &= \frac{2[e^{\frac{3iq_z\Lambda}{2}}+e^{-\frac{3iq_z\Lambda}{2}}]}{2} = 2\cos(3q_z\Lambda) \\
[(\alpha\gamma)-(\alpha\gamma)^{-1}] &= \frac{2[e^{\frac{q_n(\Lambda-d_n)}{2}}-e^{-\frac{q_n(\Lambda-d_n)}{2}}]}{2} = 2\sinh[q_n(\Lambda-d_n)] \\
[(\alpha\gamma)+(\alpha\gamma)^{-1}] &= \frac{2[e^{\frac{q_n(\Lambda-d_n)}{2}}+e^{-\frac{q_n(\Lambda-d_n)}{2}}]}{2} = 2\cosh[q_n(\Lambda-d_n)] \\
(\delta-\delta^{-1}) &= \frac{2i[e^{\frac{iq_s(\Lambda-d_s)}{2}}-e^{-\frac{iq_s(\Lambda-d_s)}{2}}]}{2i} = 2i\sin[q_s(\Lambda-d_s)] \\
(\delta+\delta^{-1}) &= \frac{2[e^{\frac{iq_s(\Lambda-d_s)}{2}}+e^{-\frac{iq_s(\Lambda-d_s)}{2}}]}{2} = 2\cos[q_s(\Lambda-d_s)] \\
(\phi^2-\phi^{-2}) &= \frac{2i[e^{\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}-e^{-\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}]}{2i} = 2i\sin[2q_i(\Lambda-d_i)] \\
(\phi^2+\phi^{-2}) &= \frac{2[e^{\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}+e^{-\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}]}{2} = 2\cos[2q_i(\Lambda-d_i)] \\
(\phi^2+\phi^{-2}-2) &= \frac{2[e^{\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}+e^{-\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}]}{2} - 2 \\
&= 2[\cos[2q_i(\Lambda-d_i)] - 1] = -4\sin^2[q_i(\Lambda-d_i)] \\
(\phi^2+\phi^{-2}+2) &= \frac{2[e^{\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}+e^{-\frac{2iq_i(\Lambda-d_i)}{2}}]}{2} + 2 \\
&= 2\cos[2q_i(\Lambda-d_i)] + 2 = 4\cos^2[q_i(\Lambda-d_i)]
\end{aligned}$$

แทนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งหาไว้ข้างต้นลงในสมการ (3.24) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 32 \cos[2q_z \Lambda] = & (ab+1/ab)[2 \sinh[q_n(\Lambda-d_n)]][2i \sin[q_s(\Lambda-d_s)]][-4 \sin^2[q_i(\Lambda-d_i)]] \\
 & + (a/b+b/a)[2 \sinh[q_n(\Lambda-d_n)]][2i \sin[q_s(\Lambda-d_s)]][4 \cos^2[q_i(\Lambda-d_i)]] \\
 & + 2(a+1/a)[2 \cosh[q_n(\Lambda-d_n)]][2i \sin[q_s(\Lambda-d_s)]][2i \sin[2d_i(\Lambda-d_i)]] \\
 & + 2(b+1/b)[2 \sinh[q_n(\Lambda-d_n)]][2 \cos[q_s(\Lambda-d_s)]][2i \sin[2q_i(\Lambda-d_i)]] \\
 & + 4[2 \cosh[q_n(\Lambda-d_n)]][2 \cos[q_s(\Lambda-d_s)]][2 \cos[2q_i(\Lambda-d_i)]]
 \end{aligned}$$

แทนค่า $a = \eta_s q_i / q_s$ และ $b = i \eta_n q_i / q_n$ ลงในสมการข้างบน จากนั้นหารด้วย 32
ตลอดพร้อมทั้งจัดพจน์ใหม่ สมการที่ได้คือ

$$\begin{aligned}
 \cos(2q_z \Lambda) = & \cos[q_s(\Lambda-d_s)] \cosh[q_n(\Lambda-d_n)] \cos[2q_i(\Lambda-d_i)] \\
 & + \frac{1}{2} [\eta_n \eta_s q_i^2 / q_s q_n - q_s q_n / \eta_s \eta_n q_i^2] \sin[q_s(\Lambda-d_s)] \sinh[q_n(\Lambda-d_n)] \sin^2[q_i(\Lambda-d_i)] \\
 & + \frac{1}{2} [q_n / \eta_n q_i - \eta_n q_i / q_n] \cos[q_s(\Lambda-d_s)] \sinh[q_n(\Lambda-d_n)] \sin[2q_i(\Lambda-d_i)] \\
 & + \frac{1}{2} [\eta_s q_n / \eta_n q_s - \eta_n q_s / \eta_s q_n] \sin[q_s(\Lambda-d_s)] \sinh[q_n(\Lambda-d_n)] \cos^2[q_i(\Lambda-d_i)] \\
 & - \frac{1}{2} [\eta_s q_i / q_s + q_s / \eta_s q_n] \sin[q_s(\Lambda-d_s)] \cosh[q_n(\Lambda-d_n)] \sin[2q_i(\Lambda-d_i)]
 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีของบลอค $g(z) = e^{-iq_z \Lambda} g(z+\Lambda)$ ไม่ว่า z จะเป็นเท่าใด เรากำหนดให้ $\Lambda = 0$

เราจะได้

$$\begin{aligned}
 1 = & \cos(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \cos(2q_i d_i) \\
 & + \frac{1}{2} [\eta_n \eta_s q_i^2 / q_s q_n - q_s q_n / \eta_s \eta_n q_i^2] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin^2(q_i d_i) \\
 & + \frac{1}{2} [q_n / \eta_n q_i - \eta_n q_i / q_n] \cos(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i) \\
 & + \frac{1}{2} [\eta_s q_n / \eta_n q_s - \eta_n q_s / \eta_s q_n] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \cos^2(q_i d_i) \\
 & - \frac{1}{2} [\eta_s q_i / q_s + q_s / \eta_s q_n] \sin(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

สมการ (3.25) เป็นผลบังคับอันสำคัญของระบบ S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซ

จากสมการ(3.12)และ (3.14) ฟังก์ชันคลื่นมีเงื่อนไขบังคับคือ $f_n = f_i$ และ $f_s = f_i$ ดังนั้นค่าไอเกน(eigen value) ของสมการเมื่อมีสนามแม่เหล็กจะแสดงได้จากสนามแม่เหล็กมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $2\pi H_{C2}/\phi_0$. ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$q_{s,i}^2 = k_{s,i}^2 - 2\pi H_{C2}/\phi_0. \quad (3.26a)$$

$$q_n^2 = k_n^2 + 2\pi H_{C2}/\phi_0. \quad (3.26b)$$

เมื่อเราอาศัยสมการ(3.8) , (3.18) , (3.25) และ (3.26) จึงทำให้สามารถคำนวณหาค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดประเภทโลหะปกติและมีชั้นกลางของซูเปอร์แลตทิซได้ในที่สุด

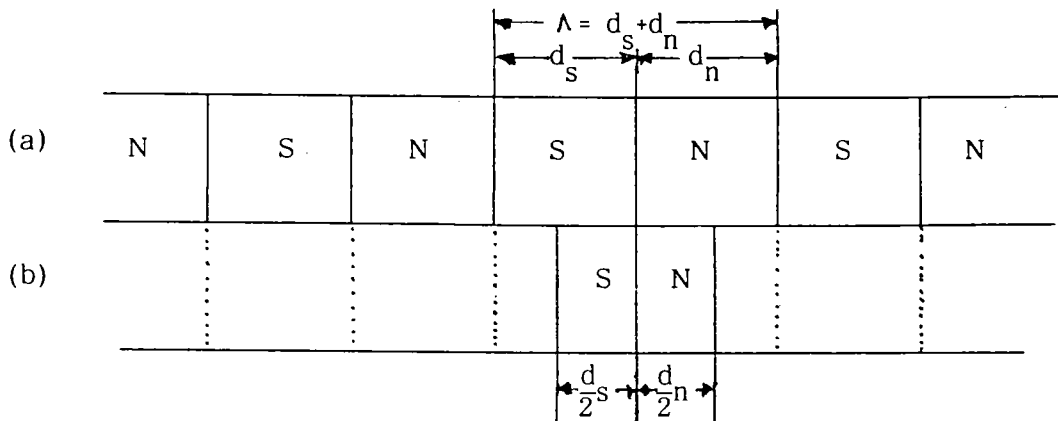
บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินการมาในบทก่อนแล้วนั้นตั้งบนสมมุติฐานว่าซูเปอร์แลตทิซมีจำนวนชั้นได้โดยไม่จำกัด กล่าวได้ว่าซูเปอร์แลตทิซสามารถสร้างได้ n ชั้นที่ซ้ำแบบ (periodic) โดย $n = 2, 3, 4, \dots$ จึงเห็นได้ว่าเราสามารถพิจารณาในกรณีที่ $n = 2$ หรือ 3 ได้ด้วย ลักษณะเช่นนี้ทำให้จำแนกได้ว่าเมื่อ $n = 2$ ซูเปอร์แลตทิซถูกจัดรูปกลายเป็นระบบสองชั้น (bilayers system) ในกรณีที่ $n = 3$ ก็เป็นระบบสามชั้น (trilayers system) ดังนั้นเราอาจพิจารณาเป็นกรณีต่างๆต่อไปนี้

กรณีที่ซูเปอร์แลตทิซ $n = 2$ (bimetallic S-N superlattice)

ซูเปอร์แลตทิซซึ่งมี $n = 2$ ในการนี้เห็นได้ง่ายว่าเกิดจากการไม่มีชั้นกลาง (interface) ชั้นตรงผิวรอยต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติ ซึ่งหมายความว่า $d_i = 0$ ในขณะเดียวกันนั้นระบบยังคงมีความสมมาตรทำให้ $d_s \rightarrow d_s/2$ และ $d_n \rightarrow d_n/2$ เราสามารถแสดงแบบจำลองของระบบได้ดังภาพประกอบ 8 ในระบบเช่นนี้กำหนดว่าตรงบริเวณขอบนอกของระบบสองชั้น $dg/dz = 0$ เสมอ



ภาพประกอบ 8 แบบจำลองซูเปอร์แลตทิซที่ $n=2$ (a) เป็นซูเปอร์แลตทิซไม่มีการผสมของตัวนำทั้งสองจึงไม่เกิดชั้นกลาง (b) เป็นแบบจำลองที่กำหนดให้บริเวณขอบนอก $dg/dz = 0$ เสมอ

สมการ (3.25) จะเป็นสมการแสดงผลสำคัญเมื่อซูเปอร์แลตทิซมีชั้นกลาง ในกรณีที่ $d_i = 0$ นั้นสมการ (3.25) จะได้ว่า

$$1 = \cos(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) + \frac{1}{2} [\eta_s q_n / \eta_n q_s - \eta_n q_s / \eta_s q_n] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \quad (4.1)$$

เรานิยาม $\eta = \epsilon_n / \epsilon_s$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนของสภาพการนำไฟฟ้าของอิเล็กตรอนที่ส่งผ่านระหว่างผิวของโลหะสองชนิด อันหมายความว่า $\eta = \eta_s / \eta_n$ ด้วย สมการ(4.1) เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการ(4.1) โดยใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$1 = \left[\cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \right] \left[1 + 2\sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\eta q_n}{q_s} - \frac{1 q_s}{\eta q_n} \right] \left[2\sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \right] \left[2\sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \right]$$

$$1 = \cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ + 2 \left[\frac{\eta q_n}{q_s} - \frac{q_s}{\eta q_n} \right] \left[\sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \right]$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} - \sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ + 2 \left[\frac{\eta q_n}{q_s} - \frac{1 q_s}{\eta q_n} \right] \left[\sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \right]$$

$$0 = -2\sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \left[1 + \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \right] + 2\cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ + 2 \frac{\eta q_n}{q_s} \sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ - \frac{2 q_s}{\eta q_n} \sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right)$$

$$0 = -2\sin^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ + 2 \frac{\eta q_n}{q_s} \sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\ - \frac{2 q_s}{\eta q_n} \sin\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \cos\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \sinh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \cosh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right)$$

เมื่อย้ายข้างสมการข้างต้นจัดรูปสมการใหม่พร้อมทั้งเอาตัวร่วมออก เราจะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\eta q_n} \sin\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \cosh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] [\eta q_n \sin\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \cosh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] + q_s \cos\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \sinh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right]] \\ & = \frac{2}{q_s} \cos\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \sinh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] [q_s \cos\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \sinh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] + \eta q_n \sin\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \cosh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right]] \end{aligned}$$

เอาพจน์ในวงเล็บใหญ่หารตลอดทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta q_n} \sin\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \cosh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] &= \frac{1}{q_s} \cos\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] \sinh\left[\frac{q_n d_n}{2}\right] \\ q_s \tan(q_s d_s/2) &= \eta q_n \tanh(q_n d_n/2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

สมการ (4.2) จะเป็นสมการแสดงเงื่อนไขบังคับสำคัญของซูเปอร์แลตทิซที่ไม่มีชั้นกลาง ผลลัพธ์ที่ได้ให้ความสอดคล้องเช่นเดียวกับงานที่เดอเจนเนส และ เวอร์ทแฮมเมอร์ทำไว้ (ภาคผนวก ก)

กรณีซูเปอร์แลตทิซ $n = 3$ (trilayers S-I-N superlattice)

จากงานวิจัยของทริสโคน อริโอสาและฟิชเชอร์ (Triscone. et al. 1987 : 3238) โดยมีแบบจำลองดังแสดงไว้แล้วในภาพประกอบ 2 เขาสามารถแสดงว่าเงื่อนไขบังคับสำคัญของ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซดังกล่าว คือ (ภาคผนวก ข)

$$q_s \tan\left[\frac{q_s d_s}{2}\right] = \eta_s q_i \frac{\alpha - \tan(q_i d_i)}{1 + \alpha \tan(q_i d_i)} \quad (4.3a)$$

$$\text{เมื่อกำหนดให้} \quad \alpha = [q_n / \eta_n q_i] \tanh(q_n d_n/2) \quad (4.3b)$$

ในงานวิจัยนี้เราจะขยายทฤษฎีให้ครอบคลุมงานวิจัยของทริสโคนและคณะ จากผลของสมการ (3.25) จะกำหนดตัวแปรให้ใหม่เพื่อความสะดวก คือ $a = \eta_s q_i / q_s$, $b = \eta_n q_i / q_n$, $2x = q_s d_s$, $2y = q_n d_n$ และ $z = q_i d_i$ ดังนั้นสมการ (3.25) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(2x) \cosh(2y) \cos(2z) + \frac{1}{2}(ab - 1/ab) \sin(2x) \sinh(2y) \sin^2(z) \\ &+ \frac{1}{2}(1/b - b) \cos(2x) \sinh(2y) \sin(2z) + \frac{1}{2}(a/b - b/a) \sin(2x) \sinh(2y) \cos^2(z) \\ &- \frac{1}{2}(a/b + a) \sin(2x) \cosh(2y) \sin(2z) \end{aligned}$$

กระจายให้อยู่ในรูปพหุนามหนึ่งเท่า จะได้

$$\begin{aligned}
 1 &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + 2\sinh^2 y)(\cos^2 z - \sin^2 z) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(ab - \frac{1}{ab})(2\sin x \cos x)(2\sinh y \cosh y) \sin^2 z \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{b} - b)(\cos^2 x - \sin^2 x)(2\sinh y \cosh y)(2\sin z \cos z) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})(2\sin x \cos x)(2\sinh y \cosh y) \cos^2 z \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + a)(2\sin x \cos x)(\cosh^2 y + \sinh^2 y)(2\sin z \cos z) \\
 0 &= -1 + \cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 x \sin^2 z - \sin^2 x \cos^2 z + \sin^2 x \sin^2 z \\
 &\quad + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &\quad + 2\sin^2 x \sinh^2 y \sin^2 z + 2(ab - \frac{1}{ab})\sin x \cos x \sinh y \cosh y \sin^2 z \\
 &\quad + 2(\frac{1}{b} - b)\cos^2 x \sinh y \cosh y \sin z \cos z - 2(\frac{1}{b} - b)\sin^2 x \sinh y \cosh y \sin z \cos z \\
 &\quad + 2(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})\sin x \cos x \sinh y \cosh y \cos^2 z - 2(\frac{1}{a} + a)\sin x \cos x \cosh^2 y \sin z \cos z \\
 &\quad - 2(\frac{1}{a} + a)\sin x \cos x \sinh^2 y \sin z \cos z \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

พิจารณา 8 พจน์แรกด้านขวามือของสมการ (4.4) คือ

$$\begin{aligned}
 &-1 + \cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 x \sin^2 z - \sin^2 x \cos^2 z + \sin^2 x \sin^2 z + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &\quad - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &= -1 + \cos^2 x (\cos^2 z - \sin^2 z) - \sin^2 x (\cos^2 z - \sin^2 z) + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &\quad - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &= -1 + (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 z - \sin^2 z) + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &\quad - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &= -1 + (1 - 2\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 z) + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
 &\quad - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 z + 4\sin^2 x \sin^2 z + 2\cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
&\quad - 2\cos^2 x \sinh^2 y \sin^2 z - 2\sin^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
&= 2[-\sin^2 x - \sin^2 z + 2\sin^2 x \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
&\quad - (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y \sin^2 z - \sin^2 x \sinh^2 y (1 - \sin^2 z)] \\
&= 2[-\sin^2 x - \sin^2 z + 2\sin^2 x \sin^2 z - \sinh^2 y \sin^2 z - \sin^2 x \sinh^2 y \\
&\quad + \sin^2 x \sinh^2 y \sin^2 z + \sin^2 x \sinh^2 y \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \\
&= 2[-\sin^2 x (1 + \sinh^2 y) - \sin^2 z (1 + \sinh^2 y) + 2\sin^2 x \sin^2 z \\
&\quad + 2\sin^2 x \sinh^2 y \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \\
&= 2[-\sin^2 x \cosh^2 y - \sin^2 z \cosh^2 y + 2\sin^2 x \sin^2 z + 2\sin^2 x \sin^2 z (\cosh^2 y - 1) \\
&\quad + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \\
&= 2[-\sin^2 x \cosh^2 y - \sin^2 z \cosh^2 y + \cancel{2\sin^2 x \sin^2 z} + 2\sin^2 x \cosh^2 y \sin^2 z \\
&\quad - \cancel{2\sin^2 x \sin^2 z} + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \\
&= 2[-\sin^2 x \cosh^2 y (1 - \sin^2 z) - (1 - \sin^2 x) \cosh^2 y \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \\
&= 2[-\sin^2 x \cosh^2 y \cos^2 z - \cos^2 x \cosh^2 y \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z] \quad (4.5)
\end{aligned}$$

แทนค่าสมการ(4.5)ลงในสมการ(4.4) จากนั้นเอา 2 หารตลอดจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 &= -\sin^2 x \cosh^2 y \cos^2 z - \cos^2 x \cosh^2 y \sin^2 z + \cos^2 x \sinh^2 y \cos^2 z \\
&\quad + \sin^2 x \sinh^2 y \sin^2 z + (ab - \frac{1}{ab}) \sin(x) \cos(x) \sinh(y) \cosh(y) \sin^2(z) \\
&\quad + (\frac{1}{b} - b) \cos^2(x) \sinh(y) \cosh(y) \sin(z) \cos(z) \\
&\quad - (\frac{1}{b} - b) \sin^2(x) \sinh(y) \cosh(y) \sin(z) \cos(z) \\
&\quad + (\frac{a}{b} - \frac{b}{a}) \sin(x) \cos(x) \sinh(y) \cosh(y) \cos^2(z) \\
&\quad - (\frac{1}{a} + a) \sin(x) \cos(x) \cosh^2(y) \sin(z) \cos(z) \\
&\quad - (\frac{1}{a} + a) \sin(x) \cos(x) \sinh^2(y) \sin(z) \cos(z) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

เนื่องจากระบบซูเปอร์แลตทิซที่พิจารณาใกล้เคียงหภูมิวิกฤตหรือสนามวิกฤต ดังนั้นจึงพิจารณา $\cos(q_s d_s/2)\cosh(q_n d_n/2)\cos(q_i d_i/2) \neq 0$ ดังนั้นเราเอา $\cos^2 x \cosh^2 y \cos^2 z$ หารสมการ (4.5) ตลอด ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned}
 0 = & -\tan^2(x) - \tan^2(z) + \tanh^2(y) + \tan^2(x)\tanh^2(y)\tan^2(z) \\
 & + (ab - \frac{1}{ab})\tan(x)\tanh(y)\tan^2(z) + (\frac{1}{b} - b)\tanh(y)\tan(z) \\
 & - (\frac{1}{b} - b)\tan^2(x)\tanh(y)\tan(z) + (\frac{a}{b} - \frac{b}{a})\tan(x)\tanh(y) \\
 & - (\frac{1}{a} + a)\tan(x)\tan(z) - (\frac{1}{a} + a)\tan(x)\tanh^2(y)\tan(z) \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

สมการ (4.7) ทางขวามือสามารถเขียนในรูป

$$\begin{aligned}
 0 = & [\frac{1}{a}\tan(x) + \tan(z) - \frac{1}{b}\tanh(y) + \frac{1}{ab}\tan(x)\tanh(y)\tan(z)] \\
 & [-a\tan(x) - \tan(z) - b\tanh(y) + ab\tan(x)\tanh(y)\tan(z)] \\
 = & Q_1 Q_2 \quad (4.8a)
 \end{aligned}$$

สมการ (4.8a) จึงเป็นรูปทั่วไปของสมการ (3.25) เมื่อแทนค่า a, b, x, y และ z กลับคืน จะได้ความสัมพันธ์ของ

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & [q_s/\eta_s q_i]\tan(q_s d_s/2) + \tan(q_i d_i) - [q_n/\eta_n q_i]\tan(q_n d_n/2) \\
 & + [q_s q_n/\eta_s \eta_n q_i^2]\tan(q_s d_s/2)\tanh(q_n d_n/2)\tan(q_i d_i) \quad (4.8b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & [-\eta_s q_i/q_s]\tan(q_s d_s/2) - \tan(q_i d_i) - [\eta_n q_i/q_n]\tanh(q_n d_n/2) \\
 & + [\eta_s \eta_n q_i^2/q_s q_n]\tan(q_s d_s/2)\tanh(q_n d_n/2)\tan(q_i d_i) \quad (4.8c)
 \end{aligned}$$

จากสมการ (4.8a) ให้ความหมายว่า $Q_1 = 0$ หรือ $Q_2 = 0$ ในที่นี้เราเลือกให้ $Q_1 = 0$ จะให้ผลลัพธ์ที่แสดงได้ว่าให้ผลครอบคลุมงานวิจัยของทริสโคนและคณะตามสมการ (4.3) โดยการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{q_s}{q_i} \frac{1}{\eta_s} \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) + \tan(q_i d_i) - \frac{q_n}{q_i} \frac{1}{\eta_n} \tan\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \\
&\quad + \frac{q_s q_n}{q_i^2} \frac{1}{\eta_s \eta_n} \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \tan(q_i d_i) \\
q_s \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) &+ \frac{q_s q_n}{q_i^2} \frac{1}{\eta_n} \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) \tan(q_i d_i) = q_n \frac{\eta_s}{\eta_n} \tan\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) - q_i \eta_s \tan(q_i d_i) \\
q_s \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) &\left[1 + \frac{q_n}{q_i} \frac{1}{\eta_n} \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \tan(q_i d_i) \right] \\
&= \eta_s q_i \left[\frac{q_n}{q_i} \frac{1}{\eta_n} \tan\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) - \tan(q_i d_i) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อกำหนดให้} \quad \alpha = \frac{q_n}{q_i} \frac{1}{\eta_n} \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \quad (4.9a)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad q_s \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) = \eta_s q_i \frac{\alpha - \tan(q_i d_i)}{1 + \alpha \tan(q_i d_i)} \quad (4.9b)$$

สมการ (4.9) ให้ผลลัพธ์ตรงกับการวิจัยของทริสโคนและคณะตามสมการ(4.3) อนึ่งทริสโคนและคณะพบว่าสมการ (4.3) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $q_s d_s/2 < \pi/2$ และ $q_i d_i \ll 1$ ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ ค่า Q_2 จะเป็นลบเสมอ ในกรณีนี้ $q_i^2 < 0$ แล้ว ซึ่งหมายความว่า $T_{CI} < T_C$ เมื่อวิเคราะห์เชิงตัวเลขก็พบว่าการเลือก $Q_2 = 0$ จะให้ค่าอุณหภูมิวิกฤต (T_C) และค่าสูงของสนามวิกฤต (H_{C2}) ต่ำกว่าการเลือกให้ $Q_1 = 0$ นอกจากนี้กรณีเฉพาะที่ $d_i = 0$ นั้นสมการ (4.8) จะได้ว่า

$$Q_1 = \frac{q_s}{q_i} \frac{1}{\eta_s} \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) - \frac{q_n}{q_i} \frac{1}{\eta_n} \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \quad (4.10a)$$

$$Q_2 = -\frac{q_i}{q_s} \eta_s \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) - \frac{q_i}{q_n} \eta_n \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \quad (4.10b)$$

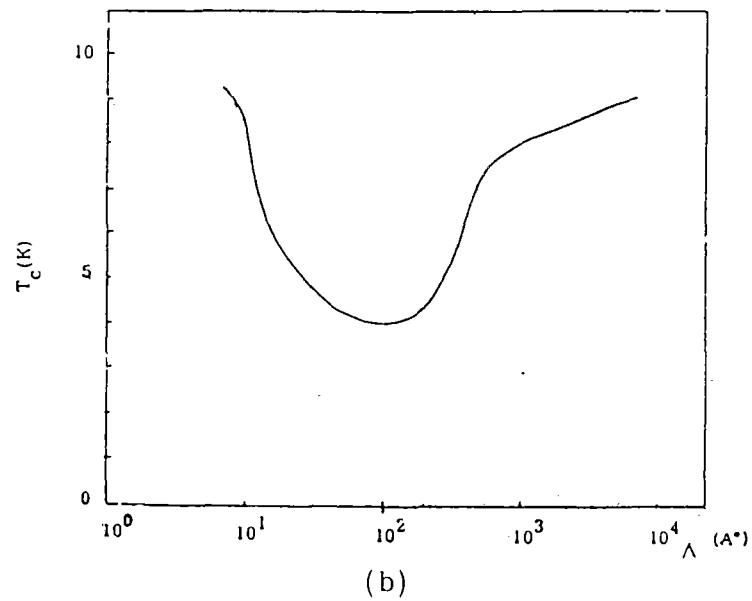
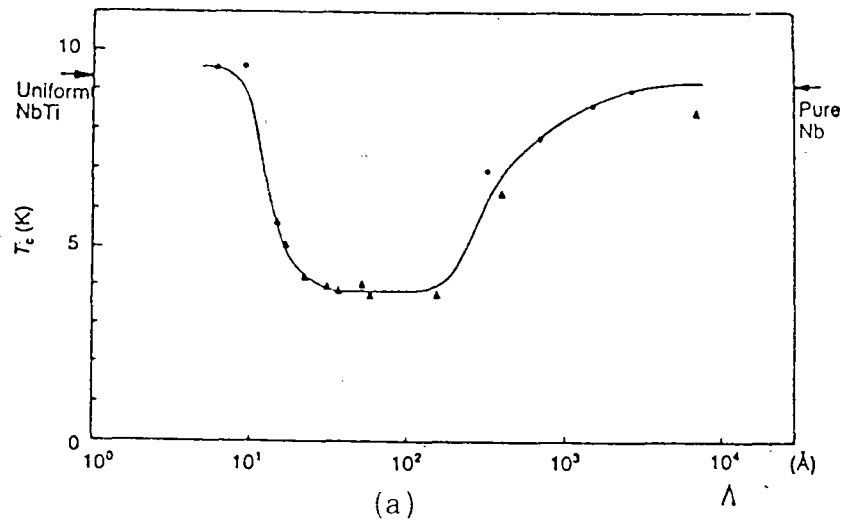
จากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อเราให้ $Q_1 = 0$ และ $\eta = \eta_s/\eta_n$ แล้วสมการ(4.10a) จะได้สมการที่ตรงกับสมการ (4.2) จึงเป็นข้อยืนยันว่าค่า $Q_1=0$ และค่า $Q_2 < 0$ เป็นพารามิเตอร์ที่ถูกต้อง

ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับคาบ (Λ) ของซูเปอร์แลตทิซเมื่อไม่มีสนามภายนอก

ก. ในกรณีที่เป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ

ควอนและคณะ (Qain et al. 1982 : 279) ได้สร้างซูเปอร์แลตทิซชั้นซึ่งใช้ในไนโอเบียม(Nb)เป็นชั้นของตัวนำยิ่งยวดประกบกับไททาเนียม(Ti) ซึ่งเป็นชั้นของโลหะปกติเรียงสลับกัน เขาใช้กระบวนการพ่น (sputtering process) ในการสร้างฟิล์มบาง วิธีนี้นับได้ว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุด เนื่องจากเราสามารถควบคุมความหนาของแต่ละชั้นได้อย่างสม่ำเสมอ ในการทดลองเขาสร้างให้ชั้นของไนโอเบียมกับของไททาเนียมหนาเท่ากัน ดังนั้นซูเปอร์แลตทิซมีระบบเป็นคาบ (periodic) จากการวัดค่าอุณหภูมิวิกฤตกับชุดทดลองที่มีคาบต่าง ๆ กัน จากนั้นนำมาเขียนกราฟระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบจะได้รับความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพประกอบ 9a การทดลองนี้ได้ให้ข้อสรุปว่า ที่คาบมีความหนาหลายๆอุณหภูมิวิกฤตจะเข้าสู่ค่าอุณหภูมิวิกฤตของไนโอเบียมบริสุทธิ์ ที่ความหนาของคาบในช่วง $30-200 \text{ \AA}$ อุณหภูมิวิกฤตจะคงที่ ซึ่งหมายความว่าความหนาในช่วงนี้ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิวิกฤต แต่ตรงบริเวณคาบมีค่าน้อย อุณหภูมิวิกฤตมีแนวโน้มสู่ค่าอุณหภูมิวิกฤตของสารผสมของไนโอเบียมกับไททาเนียม

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่ออธิบายผลการทดลองของควอนและคณะ ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์ดังแสดงไว้แล้วในบทที่ 3 กล่าวคือผู้วิจัยได้ตั้งสมมุติฐานว่าการประกบกันระหว่างไนโอเบียมกับไททาเนียมมีชั้นกลางเกิดขึ้น สมการที่เกี่ยวข้องในการวิเคราะห์คือ สมการ (3.8), (3.16), (3.17), (3.26) และสมการเงื่อนไขบังคับได้แก่สมการ (3.25) ในการวิเคราะห์จะกำหนดให้ชั้นกลางมีความหนาสม่ำเสมอ คือ $d_i = 4 \text{ \AA}$ อุณหภูมิวิกฤตของชั้นกลาง คือ T_{ci} มีค่า 9.5 K (Triscone et al. 1987 : 3238) สำหรับค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติ คือ $T_{cs} = 9.22 \text{ K}$, $T_{cn} = 0.4 \text{ K}$ ตามลำดับ ค่าความยาวอาพันธ์ของแต่ละตัวนำคือ $\xi_s = 30 \text{ \AA}$, $\xi_i = 35 \text{ \AA}$ และ $\xi_n = 178 \text{ \AA}$ ค่าสัมประสิทธิ์การกระเจิงตรงผิวย่อต่อระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับชั้นกลาง และ ตัวนำปกติกับชั้นกลาง คือ $\eta_s = \sigma_i/\sigma_s = 1.3$ และ $\eta_n = \sigma_i/\sigma_n = 0.75$ ตามลำดับ ผลของการแก้สมการรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ง. เมื่อนำมาเขียนกราฟระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบจะได้รับความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพประกอบ 9b



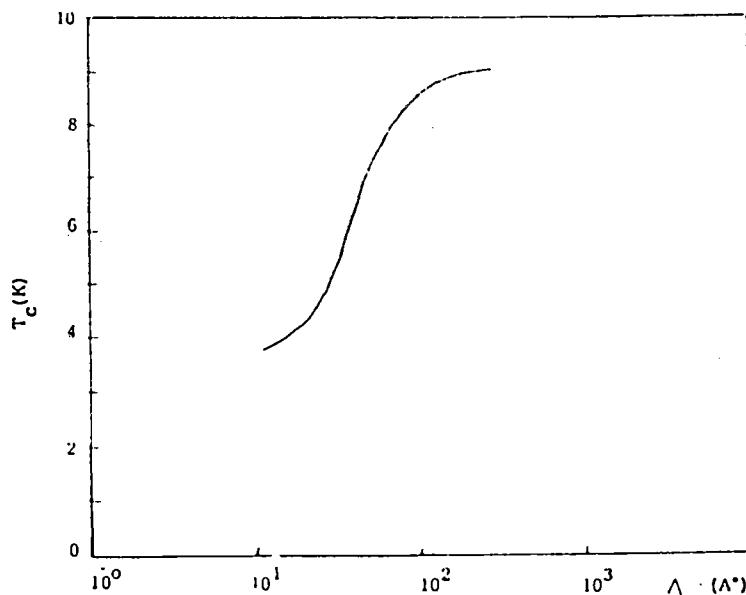
ภาพประกอบ 9 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่า Λ ของซูเปอร์แลตทิซ Nb/Ti

ภาพ (a) ได้จากการทดลองของควอนและคณะ ภาพ (b) ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ตามแบบจำลองที่กำหนดว่ามีชั้นกลางและมีจำนวนชั้นไม่จำกัด อนึ่งในการวิเคราะห์และการทดลองได้ให้ความหนาของตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติเท่ากัน คือ $d_s = d_n = d$ ดังนั้นค่า $\Lambda = 2(d + d_1)$

ข. ในกรณีที่เป็นซูเปอร์แลตทิซระบบสองชั้น (bimetallic S-N superlattice)

ผู้วิจัยวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบกับในกรณี ก ในการวิเคราะห์ใช้ทฤษฎีของไอเลนเบอร์เกอร์เช่นเดียวกับการวิเคราะห์ที่ผ่านมา ประเด็นที่แตกต่างกันคือ แบบจำลองที่ใช้อยู่บนสมมุติฐานที่ว่าไม่มีการผสมกันของตัวนำที่ผิวรอยต่อ ผลตามมาดังได้พิสูจน์ให้เห็นในบทที่ 4 แล้วจะทำให้สมการเงื่อนไขบังคับที่สำคัญต่างจากกรณีของซูเปอร์แลตทิซที่มีจำนวนชั้นไม่จำกัด กล่าวคือสมการเงื่อนไขบังคับในกรณีนี้เป็นไปตามสมการ (4.2) สมการที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ประกอบด้วยสมการ (3.8), (3.16), (3.17), (3.26) และ (4.2) โดยที่สมการจะลดลงจากเดิมอันเนื่องมาจากไม่มีชั้นกลาง ดังนั้นกรณีนี้เราใช้ค่าต่างๆต่อไปนี้ คือ $T_{CS} = 9.22 \text{ K}$, $T_{CN} = 0.4 \text{ K}$, $\xi_S = 30 \text{ \AA}$, $\xi_N = 178 \text{ \AA}$, $\eta = \eta_S/\eta_N = \xi_S/\xi_N = 1.3/0.75 = 1.73$ รายละเอียดการแก้สมการแสดงไว้ในภาคผนวก ง ข้อ ข ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบดังแสดงไว้ในภาพประกอบ

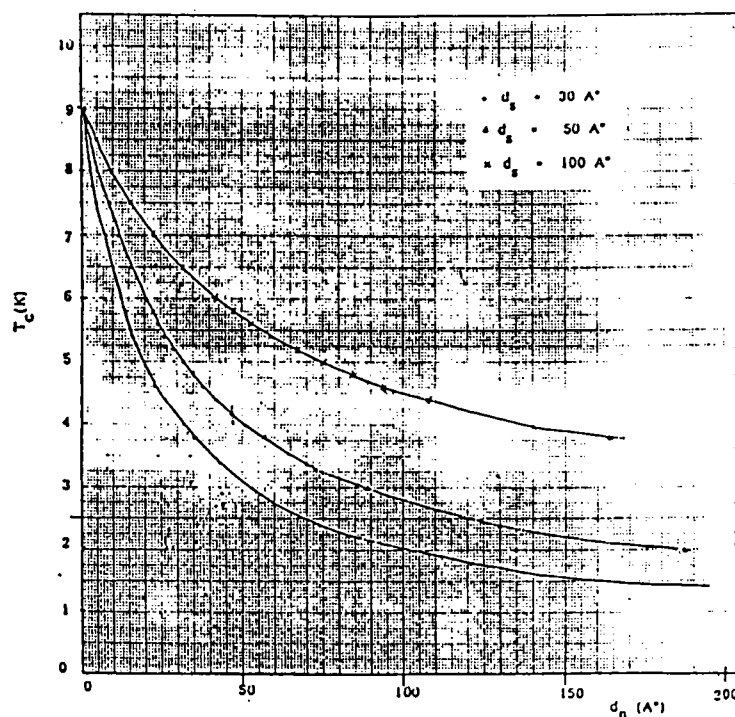
10



ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบของ Nb/Ti ซูเปอร์แลตทิซ ซึ่งได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข แบบจำลองที่ใช้เป็นกรณีที่ไม่มีชั้นกลางและไม่มีสนามภายนอก ในการวิเคราะห์ได้กำหนดให้ $d_S = d_N = d$ เช่นเดียวกับที่พิจารณาในกรณี ก.

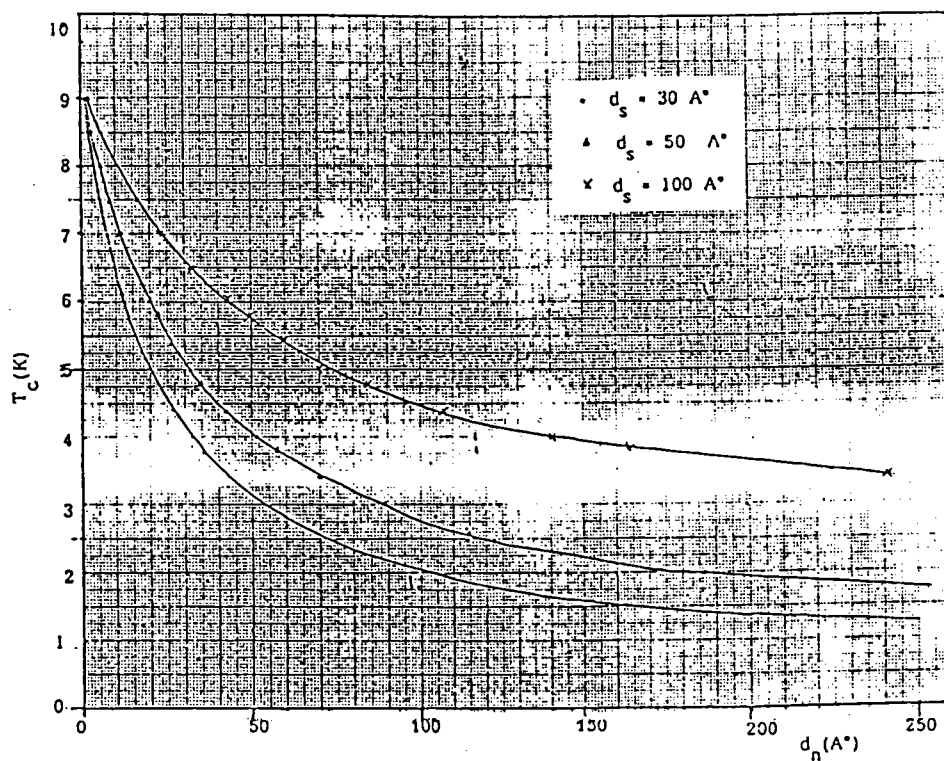
ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับความหนาของตัวนำปกติ (d_n) เมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวด (d_s) คงที่และไม่มีสนามภายนอก

ก. ในกรณีที่เป็น S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อทำนายในทางทฤษฎีถึงการเปลี่ยนแปลงของความหนาของตัวนำปกติกับอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวดคงที่ ในการวิเคราะห์ผู้วิจัยกำหนดให้ความหนาของตัวนำยิ่งยวดเป็น $30, 50$ และ $100 \text{ \AA}$ เพื่อความต่อเนื่องในการวิจัยซุปเปอร์แลตทิซที่ใช้จึงเป็น Nb/Ti เช่นเดียวกับที่ได้วิเคราะห์ผ่านมา คือ สมการที่เกี่ยวข้องประกอบด้วยสมการ (3.8), (3.16), (3.17), (3.26) และ (3.25) ค่าของพารามิเตอร์ที่ใช้คือ $d_i = 4 \text{ \AA}$, $T_{cs} = 9.5 \text{ K}$, $T_{cn} = 0.4 \text{ K}$, $T_{ci} = 9.5 \text{ K}$, $\xi_s = 30 \text{ \AA}$, $\xi_i = 35 \text{ \AA}$, $\xi_n = 178 \text{ \AA}$, $\eta_s = 1.3$ และ $\eta_n = 0.75$ ผลการแก้สมการรายละเอียดดังแสดงในภาคผนวก จ เมื่อนำผลที่ได้มาเขียนกราฟระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของโลหะปกติ จะได้ความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติ เมื่อกำหนดชั้นของตัวนำยิ่งยวดคงที่ ระบบเป็น S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซและไม่มีสนามภายนอก

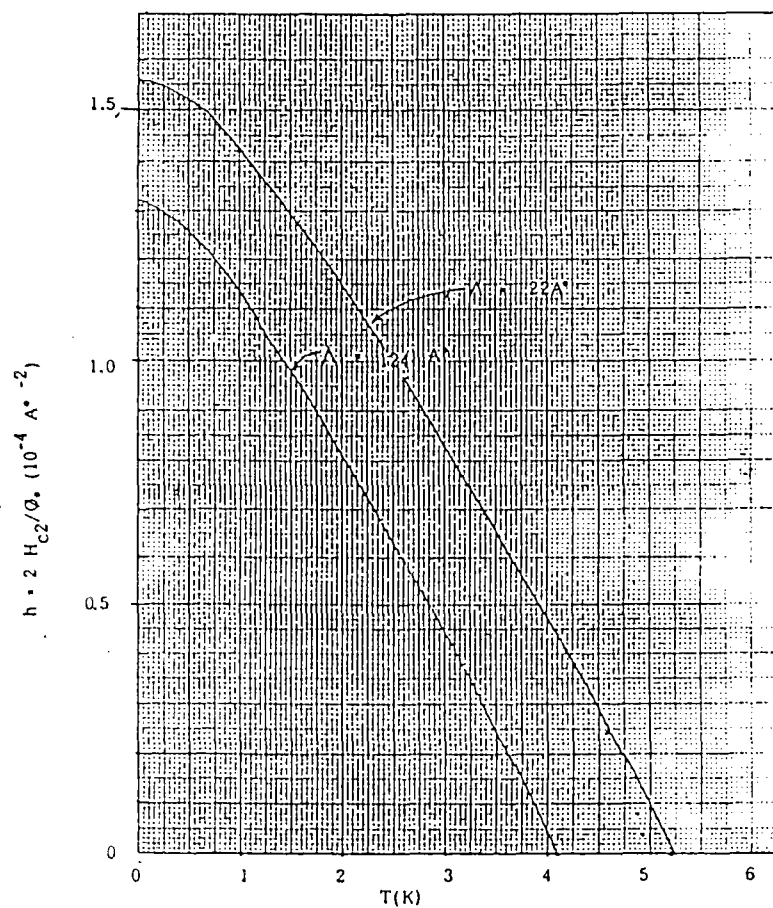
ข. ในกรณีเป็น S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ($n = 3$) วิธีดำเนินการวิเคราะห์เชิงตัวเลขในกรณีนี้ผู้วิจัยใช้พารามิเตอร์ชุดเดียวกับในกรณี ก ผลการแก้สมการ (3.8), (3.16), (3.17) และ (3.26) จะให้ค่า q_s , q_i , q_n ชุดเดียวกับที่คำนวณไว้ในตาราง 5 ภาคผนวก จ ข้อแตกต่างในกรณีนี้คือสมการเงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (4.3) แทนสมการ (3.25) ดังนั้นเราสามารถหาค่าความหนาของชั้นตัวนำปกติเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิได้จากการกำหนดค่าความหนาของชั้นตัวนำยิ่งยวดลงในสมการ (4.2) รายละเอียดของการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก จ ข้อ ข ผลที่ได้แสดงในภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับชั้นความหนาของตัวนำปกติของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ($n = 3$) โดยแต่ละเส้นความหนาของตัวนำยิ่งยวดคงที่เป็น 30, 50 และ 100 Å ระบบไม่มีสนามภายนอก ($H_{c2} = 0$)

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากกับอุณหภูมิวิกฤตของ S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซ

ในการหาค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากสามารถคำนวณค่าด้วยวิธีการเดียวกับการหาค่าอุณหภูมิวิกฤต ประเด็นที่ต่างกันคือสมการ(3.26)จะถูกนำมาพิจารณา ในกรณีเช่นนี้ค่า $k_s^2 \neq q_s^2$, $k_i^2 \neq q_i^2$ และ $k_n^2 \neq q_n^2$ อีกต่อไป เราจะเริ่มการคำนวณค่า ρ_s, ρ_i, ρ_n โดยการแก้สมการ(3.8) (วิธีการคำนวณดูรายละเอียดในภาคผนวก ง) นำค่า ρ_s, ρ_i, ρ_n แทนในสมการ(3.17)แก้สมการจะได้ค่า k_s^2, k_i^2, k_n^2 ดังแสดงไว้ในตาราง 8 ภาคผนวก จ แล้วใช้คอมพิวเตอร์แก้สมการ(3.26) พร้อมกันกับสมการ(3.25)เพื่อหาค่าสูงของสนามวิกฤต($H_{c2\perp}$) ผลการแก้สมการแสดงไว้ในภาคผนวก จ เมื่อนำมาเขียนกราฟระหว่างค่าสูงของสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตจะแสดงความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากของ S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซที่มีค่า 124 A° กับ 22 A°

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายจะศึกษาระบบตัวนำยิ่งยวด(S)ที่ประกบกับโลหะปกติ(N) ซ้อนกันหลายชั้นและมีชั้นกลาง(I) ซึ่งเกิดจากการผสมของตัวนำทั้งสองตรงบริเวณผิวรอยต่อ ระบบนี้เรียกว่า S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ การวิจัยทางด้านทฤษฎีนี้เพื่อการเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยอื่นๆที่มีผู้วิจัยไว้ในกรณีของระบบ S-N ซุปเปอร์แลตทิซสองชั้น(bimetallic S-N superlattice)และ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซสามชั้น (S-I-N trilayer superlattice) ว่าครอบคลุมหรือแตกต่างกันเพียงใด ในแง่ใดบ้าง ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบผลทำนายทางทฤษฎีกับการทดลองโดยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขซึ่งคำนวณค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทาง(H_{C2})กับระบบและอุณหภูมิวิกฤต(T_C)เป็นฟังก์ชันของความหนาแน่นต่างๆ

ในการคำนวณค่าสูงของสนามวิกฤต(H_{C2})และอุณหภูมิวิกฤตของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซนั้นได้กระทำโดยการแก้สมการของไอน์สไตน์-เบอร์เกอร์(Eilenberger's equation)เมื่อตัวนำอยู่ในสภาพไม่บริสุทธิ์(dirty limit, $\xi < 1$) จากการพิจารณาที่อุณหภูมิใกล้กับอุณหภูมิวิกฤต สมการสามารถลดรูปให้ง่ายขึ้นโดยมีลักษณะคล้ายกับการของชโรดิงเงอร์(Schrodinger's equation)และเมื่อกำหนดให้ระบบมีเงื่อนไขขอบเขต(boundary condition) ที่เหมาะสมและประยุกต์ทฤษฎีของบลอค(Bloch's Theory)เข้ากับระบบแล้ว เราจะแก้สมการหาฟังก์ชันคลื่นของระบบตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้ได้ ผลลัพธ์ที่ได้จะให้สมการเงื่อนไขบังคับที่สำคัญของระบบเป็นฟังก์ชันของคาบหรือชั้นความหนาแน่นของตัวนำ

การวิจัยครั้งนี้ได้วิเคราะห์ผลในสองแนวทางใหญ่ๆคือ

1. ได้วิเคราะห์ผลในเชิงทฤษฎีจากสมการเงื่อนไขบังคับที่สำคัญของระบบ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับสำคัญของระบบ S-N ซุปเปอร์แลตทิซสองชั้น(bimetallic S-N superlattice)และเงื่อนไขบังคับสำคัญของระบบ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซสามชั้น(S-I-N trilayer superlattice) หรือไม่อย่างไร

2. วิเคราะห์ผลในเชิงตัวเลขเพื่อคำนวณค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางและอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันกับคาบหรือความหนาแน่นของระบบ และได้ทำการเปรียบเทียบกับผลของการทดลอง

สรุปผลการวิจัย

ในการคำนวณค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางและอุณหภูมิวิกฤตของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ

จากการแก้สมการของไอเลนเบอร์เกอร์เมื่อใช้แบบจำลองดังแสดงในภาพประกอบ 7 จะได้สมการดังนี้

$$\ln t_I = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho_I}{t_I}\right) \quad (5.1)$$

โดยที่ $t_I = T_C/T_{CI}$ เป็นอุณหภูมิลดทอน(reduce temperature)ซึ่ง T_C เป็นอุณหภูมิวิกฤตของระบบ และ T_{CI} เป็นอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำใดๆเมื่อเป็นแท่ง (bulk) โดย $I = s, i, n$ ψ เป็นไดแกมมาฟังก์ชัน (digamma function)

$$\text{ในที่นี้} \quad k_{s,i}^2 = 2\rho(t_{s,i}) / \xi_{s,i}^2 \quad (5.2a)$$

$$k_n^2 = -2\rho(t_n) / \xi_n^2 \quad (5.2b)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \xi_I^2 = \hbar D_I / 2\pi k_B T_{CI} \quad (I=s, i, n) \quad (5.3)$$

โดยที่ความยาวอาพันธ์(ξ)ของแต่ละตัวนำเป็นสัดส่วนกับสัมประสิทธิ์การแพร่ซึม D_s, D_i และ D_n สมการเงื่อนไขบังคับสำคัญของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซเป็นไปตามสมการ(5.3) คือ

$$\begin{aligned} 1 = & \cos(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \cos(2q_i d_i) \\ & + \frac{1}{2} [q_i^2 \eta_s \eta_n / q_s q_n - q_s q_n / q_i^2 \eta_s \eta_n] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin^2(q_i d_i) \\ & + \frac{1}{2} [q_n / q_i \eta_n - q_i \eta_n / q_n] \cos(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i) \\ & + \frac{1}{2} [q_n \eta_s / q_s \eta_n - q_s \eta_n / q_n \eta_s] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \cos^2(q_i d_i) \\ & - \frac{1}{2} [q_i \eta_s / q_s + q_s / q_n \eta_s] \sin(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\text{ในเมื่อ} \quad q_{s,i}^2 = k_{s,i}^2 - 2\pi H_{C2} / \phi_0 \quad (5.5a)$$

$$q_n^2 = k_n^2 + 2\pi H_{C2} / \phi_0 \quad (5.5b)$$

ค่า H_{C2} เป็นค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากกับระบบ ϕ_0 เป็นฟลักซ์ควอนตัม (flux quantum)

อภิปรายผล

จากการศึกษา S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซในครั้งนี้เมื่อวิเคราะห์ผลดังแนวทางที่ได้วางไว้ 2 แนวทางข้างต้น เราสามารถสรุปได้ดังนี้ คือ

1. จากการวิเคราะห์ผลในเชิงทฤษฎี สมการเงื่อนไขบังคับสำคัญของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ ตามสมการ(5.4) ให้ความสอดคล้องกับทฤษฎีของเดอ เจนเนสและเวอร์แฮมเมอร์(de Gennes and Werthammer. 1963:168.) ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวได้ตั้งสมมุติฐานว่าซุปเปอร์แลตทิซไม่มีชั้นกลางตรงผิวรอยต่อของตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติ กล่าวคือ $d_i = 0$ ซึ่งเราเรียกว่าเป็น S-N ซุปเปอร์แลตทิซสองชั้น (bimetallic S-N superlattice) ดังแสดงไว้ในสมการ(4.2)ที่ว่า

$$q_s \tan(q_s d_s/2) = \eta q_n \tanh(q_n d_n/2)$$

เมื่อ η เป็นสัมประสิทธิ์การกระเจิงตรงผิวรอยต่อของตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติ

เมื่อวิเคราะห์สมการ(5.4) โดยเขียนในรูป Q_1, Q_2 ดังแสดงในสมการ(4.8) ถ้าเลือกให้ $Q_1 = 0$ และ $Q_2 < 0$ แล้ว ผลลัพธ์ที่ได้ให้ความสอดคล้องกับทฤษฎีของทริสโคนและคณะ (Triscone et al. 1987:3238.) ดังแสดงผลไว้ในสมการ(4.9)ที่ว่า

$$q_s \tan(q_s d_s/2) = \eta_s q_i \frac{\alpha - \tan(q_i d_i)}{1 + \alpha \tan(q_i d_i)}$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = [q_n / \eta_n q_i] \tanh(q_n d_n/2)$$

งานวิจัยนี้จึงนับว่าเป็นงานวิจัยที่ครอบคลุมทฤษฎีของเดอ เจนเนสและเวอร์แฮมเมอร์กับทฤษฎีของทริสโคนและคณะ จึงเป็นการพัฒนาทฤษฎีทางฟิสิกส์ของระบบซุปเปอร์แลตทิซให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

2. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ในประเด็นต่างๆดังนี้

2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่า (Λ) ของซุปเปอร์แลตทิซเมื่อไม่มีสนามภายนอก ($H_{c2} = 0$) ผลการวิเคราะห์เมื่อใช้ทฤษฎี S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซพบว่าให้ความสอดคล้องกับการทดลองของควีนและคณะ (Qain et al. 1982 : 279) ที่วัดค่าอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของค่า b ของ Nb/Ti ซุปเปอร์แลตทิซดังภาพประกอบ 9 b เราจะพบว่าการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นสามบริเวณได้แก่ ที่ค่า b นานมาก ค่าอุณหภูมิวิกฤตแสดงแนวโน้มของ $T_c = 9.33K$ ซึ่งเป็นอุณหภูมิวิกฤตของ Nb ที่เป็นแท่ง ที่ค่า b มีความหนาแน่นน้อยอันหมายความว่าชั้นของ S และ N บางมาก อุณหภูมิวิกฤตแสดงแนวโน้ม $T_c = 9.8K$ ซึ่งเป็นอุณหภูมิวิกฤตของโลหะผสมระหว่าง Nb กับ Ti ที่เป็นแท่ง บริเวณสุดท้ายที่ค่า b นานา 30-180A°

แสดงความเบี่ยงเบนแตกต่างจากผลการทดลอง จากการทดลองบริเวณดังกล่าวมีค่าเกือบคงที่ที่ 4K อนึ่ง ในการคำนวณครั้งนี้มีข้อสังเกตว่าความยาวอาพันธ์ที่ใช้ในการคำนวณมีค่าน้อย เช่น $\xi_S = 170 \text{ \AA}$ เมื่อเป็น แท่ง แต่ค่า $\xi_S = 30 \text{ \AA}$ เป็นค่าที่เหมาะสมกับกรณีของ Nb/Ti ซุปเปอร์แลตทิซตามสมการ $\xi_S = \hbar D_S / 2\pi k_B T_{CS}$ ทั้งนี้อธิบายได้ว่าสมบัติการแพร่ซึมของตัวนำยิ่งยวดมีค่าน้อยเมื่อพิจารณา จากนิยามที่ว่า $D_S = v_F l_S / 3$ ซึ่งสรุปได้ว่าความเร็วเฟอร์มิ (v_F) และระยะอิสระเฉลี่ยของอิเล็กตรอน (l_S) ในกรณีนี้มีค่าน้อยกว่ากรณีที่ระบบเป็นแท่งใหญ่ ข้อสรุปที่กล่าวมาข้างต้นให้ผลคล้ายกับผลงานวิจัยของ ไบอากิและคณะ (Biagi et al. 1985 : 7165) และงานวิจัยของแบนเนอร์จีและคณะ (Banerjee et al. 1982 : 805) ซึ่งพบในการทดลองกรณี Nb/Cu ซุปเปอร์แลตทิซ คำอธิบายของข้อสรุปที่น่า เป็นได้คือ ระยะอิสระเฉลี่ยของอิเล็กตรอนจะลดลงเพราะเกิดการกระเจิงที่บริเวณผิวชั้นบางๆ ซึ่งเป็นแบบ ที่ขึ้นกับทิศทางเป็นอย่างยิ่ง (highly anisotropic)

ผลการวิเคราะห์เมื่อใช้ทฤษฎี S-N ซุปเปอร์แลตทิซสองชั้น (bimetallic S-N superlattice) จากภาพประกอบ 10 พบว่าให้ความสอดคล้องกับเมื่อใช้ทฤษฎี S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซเฉพาะบริเวณ ความหนาของคาบประมาณตั้งแต่ $100 \text{ \AA}$ ขึ้นไปจนถึงที่ประมาณ $600 \text{ \AA}$ ที่ความหนาของคาบบางๆ และที่ความหนาของคาบหนาๆ แสดงแนวโน้มที่เบี่ยงเบนจากผลของการทดลองอย่างมาก จึงแสดงให้เห็นได้ว่าทฤษฎี S-N ซุปเปอร์แลตทิซมีข้อจำกัดในการใช้

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_C) กับความหนาของตัวนำปกติ (d_N) เมื่อความหนา ของตัวนำยิ่งยวด (d_S) คงที่และไม่มีสนามภายนอก ($H_{C2} = 0$) ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขครั้งนี้ผู้วิจัย กำหนดให้ความหนาของตัวนำยิ่งยวดมีค่าเป็น 30 50 และ $100 \text{ \AA}$ ทำการวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎี S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซเปรียบเทียบกับ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซสามชั้น (S-I-N trilayer superlattice) ดังแสดงในภาพประกอบ 11 และ 12 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงเมื่อความหนาของโลหะปกติเพิ่มขึ้นและ ความหนาของตัวนำยิ่งยวดคงที่ ผลที่ได้ให้ข้อสรุปตรงกันกับงานวิจัยของไบอากิและคณะ นอกจากนี้ ผลที่ได้จากทฤษฎีทั้งสองไม่มีความแตกต่างกัน ทั้งนี้เพราะว่าผู้วิจัยได้วิเคราะห์กรณีที่ความหนาของ ระบบไม่มาก คืออยู่ในช่วงประมาณ 30 ถึง $600 \text{ \AA}$ ความแตกต่างของทฤษฎีทั้งสองจึงยังเห็นไม่ ชัดเจนเช่นเดียวกับที่ปรากฏในหัวข้อ 2.1 ที่กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้เป็น เพียงการทำนายทางทฤษฎีซึ่งยังไม่มีผลการทดลองที่จะสนับสนุน

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉาก (H_{C2}) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_C) ของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซที่มีความหนาตาบ 22 และ $124 \text{ \AA}$ ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์เป็นเพียงการทำนายทางทฤษฎีได้พบว่าที่ระบบมีความหนาตาบ = $22 \text{ \AA}$ จะมีค่าสูงของสนามวิกฤตและอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่าระบบที่มีความหนาตาบ = $124 \text{ \AA}$ ดังแสดงในภาพประกอบ 13 ความโค้งเชิงบวก (positive curvature) ไม่ปรากฏให้เห็นในการวิเคราะห์ครั้งนี้สืบเนื่องมาจากระบบที่ใช้ในการทดสอบมีอุณหภูมิวิกฤตต่ำกว่า 8 K ซึ่งจากการวิจัยของไบอากิ โกแกนและเคลม (Biagi, Kogan and Clem. 1986: 3100) ซึ่งให้เห็นว่า $T_C \gg 8 \text{ K}$, $H_{C2,S}(T)$ และ $H_{C2,I}(T)$ จะตัดกันจึงจะแสดงผลความโค้งเชิงบวกให้เห็น การอภิปรายผลของทฤษฎียังมีข้อจำกัดเนื่องจากขาดการทดลอง จึงเป็นที่น่าคิดว่าการทดลองเพื่อยืนยันทฤษฎีนี้จะเป็นเรื่องที่น่าสนใจมากทีเดียว

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยนี้ทำให้ได้สมการที่ใช้ในการคำนวณค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากและอุณหภูมิวิกฤตของระบบ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซซึ่งครอบคลุมทฤษฎีเก่าที่เคยมีผู้วิจัยไว้คือ

1. ทฤษฎีของเดอ เจนเนสและเวอร์ทแฮมเมอร์ซึ่งใช้แบบจำลองระบบ S-N ซุปเปอร์แลตทิซสองชั้น (bimetallic S-N superlattice)
2. ทฤษฎีของไบอากิและคณะซึ่งใช้แบบจำลอง S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น (S-I-N trilayer superlattice)
3. การคำนวณค่าอุณหภูมิวิกฤตกับคาบโดยใช้ทฤษฎี S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซให้ผลสอดคล้องกับการทดลองของเคเวนและคณะที่ทดลองกับระบบ Nb/Ti ซุปเปอร์แลตทิซ
4. ได้ทำนายผลของค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากกับอุณหภูมิวิกฤตของระบบว่าเป็นฟังก์ชันกับคาบไว้ซึ่งเป็นแนวทางที่ทำให้มีการทดสอบทางด้านการทดลองต่อไป

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการพัฒนาทฤษฎีของซุปเปอร์แลตทิซให้กว้างขวางมากขึ้น อย่างไรก็ตามยังมีประเด็นที่ควรทำการวิจัยต่อในเรื่องต่อไปนี้

1. คำนวณค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศต่างๆ เช่นในแนวนอนกับระบบ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ เป็นต้น

2. คำนวณหาค่ากระแสวิกฤตของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซตลอดจนสมบัติทางฟิสิกส์อื่นๆ เช่น ความร้อนจำเพาะ เป็นต้น
3. ศึกษาคุณสมบัติของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซซึ่งมีรูปทรงทางเรขาคณิตต่างๆ เช่น รูปทรงกลม หรือ ทรงกระบอก เป็นต้น
4. ในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาตัวนำยิ่งยวดประเภทโลหะปกติ ซึ่งจะเป็นที่น่าสนใจยิ่งถ้าทำการเปลี่ยนโลหะปกติไปเป็นตัวนำยิ่งยวดต่างชนิด หรือเปลี่ยนให้เป็นสารแม่เหล็ก หรือเปลี่ยนเป็นสารกึ่งตัวนำอันจะเอื้อประโยชน์ในแง่การประยุกต์ใช้กว้างขวางยิ่งขึ้น
5. การวิจัยเชิงตัวเลขครั้งนี้ผู้วิจัยมีความจำกัดในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาก ซึ่งเห็นได้จากการคำนวณที่แสดงไว้ในภาคผนวก ง, จ และ ฉ ต้องใช้เครื่องคิดเลขในการคำนวณค่าของไดแกมมา แนวทางการพัฒนาซอฟต์แวร์ (soft-ware) ในการหาไดแกมมาและอินเวอร์สไดแกมมา (inverse digamma) จะทำให้การประมาณค่าได้แม่นยำมากขึ้นอีกทั้งทำได้สะดวกและประหยัดเวลาอีกด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Abramowitz. M. and I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Function with Formular. p. 267 - 270. New York : Dover Publication, Inc., 1965.
- Bardeen, J., L.N. Cooper and J.R. Schrieffer. Physical Review. 108 : 1175, 1957.
- Biagi, K.R., V.G. Kogan and J.R. Clem. Physical Review. B 32 :7165, 1985.
_____. Physical Review. B 33 :3100, 1986.
- Deutcher, G. and P.G. de Gennes. " proximity effect ", Superconductivity. Vol. 1., edited by R.D. Park, New York : Marcel Dekker. 1969.
- Dobrosavljevic, L. Physical Status Solidi. B 55 : 773, 1973.
- Eilenberger, G. Zeotchrift Fur Physik. 214 : 195, 1968.
- Gennes, P.G. and E. Guyon. Physical Letter. 3 : 168, 1963.
- Gennes, P.G. Superconductivity of Metal and Alloy. Translated by P.A. Pincus. New York : Benjamin, 1966.
- Meissner, W. and R. Ochsenfeld. Naturwissenschaften. 21 : 787, 1933.
- Menon. M and G.B. Arnold. Superlattice Microstructure. 1 : 451, 1985.
- Nabutovskii, V.M. and B. Ya Shapiro. J. Low Temperature Physics. 40 :465, 1982.
- Onnes, K.H. Comm. Lab. Leiden. 119 : 1226 -1266, 1911.
- Qain, Y.J. and others. J. Low Temperature Physics. 49 : 379, 1982.
- Ruggiero, S.T., T.W. Barbee and M.R. Beasley. Physical Review. B 26 : 4894, 1982.
- Takahashi, S. and M. Tachiki. Physical Review. B 33 : 4620, 1986.
- Triscone, J.M. and others. Physical Review. B 48 : 3238, 1987.
- Usadel, K. Physical Review Letter. 25 : 507, 1970.
- Werthammer, N.R. Physical Review. 132 : 2440, 1963.
- Werthammer, N.R., E.H. Helfand and P.C. Hohenberg. Physical Review. 147 : 295, 1966.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

สมการเงื่อนไขบังคับตามการวิจัยของไบอาที โกแกนและเคลม

สมการเงื่อนไขบังคับตามงานวิจัยของไบอากิ โกแกนและเคลม

ไบอากิและคณะได้แก้สมการของไอเลนเบอร์เกอร์ดังแสดงไว้ในบทที่ 2 ผลของการแก้สมการอนุพันธ์สมการ (2.9b) และ (2.10b) แล้วได้ผลลัพธ์เป็นสมการ (2.12a) และ (2.12b) คือ

$$g_s(z) = c_s \cos[q_s(z - \frac{d}{2s})] \quad (n.1)$$

$$g_n(z) = c_n \cosh[q_n(z - \frac{d}{2n})] \quad (n.2)$$

เงื่อนไขขอบเขตตรงบริเวณผิวสัมผัสของตัวนำทั้งสองนั้น $g_s(0) = g_n(0)$ และ $\frac{d}{dz} g_s(0) = n \frac{d}{dz} g_n(0)$ จะได้ว่า

$$c_s \cos(\frac{q_s d}{2}) - c_n \cosh(\frac{q_n d}{2}) = 0 \quad (n.3)$$

$$c_s q_s \sin(\frac{q_s d}{2}) - c_n \eta q_n \sinh(\frac{q_n d}{2}) = 0 \quad (n.4)$$

ถ้า c_s และ c_n ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันหมด ผลแก้ของสมการ (n.3) และ (n.4) จะสามารถเขียนในรูปดีเทอร์มิแนนท์ คือ

$$\begin{vmatrix} \cos(\frac{q_s d}{2}) & -\cosh(\frac{q_n d}{2}) \\ q_s \sin(\frac{q_s d}{2}) & -\eta q_n \sinh(\frac{q_n d}{2}) \end{vmatrix} = 0$$

จะได้
$$q_s \tan(\frac{q_s d}{2}) = \eta q_n \tanh(\frac{q_n d}{2}) \quad (n.5)$$

สมการ (n.5) เป็นการได้มาของสมการ (2.13) ที่กล่าวไว้ในบท 2 และให้ความสอดคล้องกับสมการ (4.2) ในบทที่ 4

ภาคผนวก ข

สมการเงื่อนไขบังคับตามงานวิจัยของทริสโคน อริโอสา คาร์คัทและฟิชเชอร์

สมการเงื่อนไขบังคับตามงานวิจัยของทริสโคนและคณะ

ทริสโคนและคณะได้แก้สมการของไอเลนเบอร์เกอร์เช่นเดียวกับงานวิจัยของไบอากิและคณะ ประเด็นที่แตกต่างนั้นอยู่ที่การพิจารณาให้มีชั้นกลางระหว่างตัวนำทั้งสองตรงผิวรอยต่อของซูเปอร์แลตทิซ และการตั้งสมมุติฐานว่าจำนวนชั้นของระบบสามารถปลงมาให้เหลือเพียงสามชั้น ดังได้แสดงไว้ใน ภาพประกอบ 2 ซึ่งผลจากการแก้สมการ (3.13) และ (3.15) จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับ สมการ(3.19) คือ

$$g_s(z) = A_s e^{iq_s z} + B_s e^{-iq_s z} ; 0 \leq z \leq d_s \quad (\text{ข.1})$$

$$g_i(z) = A_i e^{iq_i z} + B_i e^{-iq_i z} ; -d_i \leq z \leq 0 \quad (\text{ข.2})$$

$$g_n(z) = A_n e^{iq_n z} + B_n e^{-iq_n z} ; -(d_i + d_n) \leq z \leq -d_i \quad (\text{ข.3})$$

เงื่อนไขขอบเขตตรงบริเวณรอยต่อของแต่ละตัวนำคือ $g_{s,n}(z) = g_i(z)$,
 $\frac{d}{dz} g_{s,n}(z) = n_{s,n} \frac{d}{dz} g_i(z)$ และสมการเงื่อนไขตรงบริเวณขอบนอก $\frac{d}{dz} g_{s,n}(z) = 0$ จึง

พิจารณาตามเงื่อนไขข้างต้นและตามตำแหน่งพิกัดที่แสดงไว้ในภาพประกอบ 2(b)จะได้ว่า

ที่ $z = d_s$, อันเป็นบริเวณขอบนอก $\frac{d}{dz} g_s(d_s) = 0$ จะได้

$$A_s e^{iq_s d_s} - B_s e^{-iq_s d_s} = 0 \quad (\text{ข.4})$$

ที่ $z = 0$, $g_s(0) = g_i(0)$ และ $\frac{d}{dz} g_s(0) = \eta_s \frac{d}{dz} g_i(0)$ จะได้

$$A_s + B_s - A_i - B_i = 0 \quad (\text{ข.5})$$

$$A_s - B_s - \eta_s \frac{q_i}{q_s} (A_i - B_i) = 0 \quad (\text{ข.6})$$

ที่ $z = -d_i$, $g_n(-d_i) = g_i(-d_i)$ และ $\frac{d}{dz} g_n(-d_i) = \eta_n \frac{d}{dz} g_i(-d_i)$

$$A_n e^{-iq_n d_i} + B_n e^{iq_n d_i} - A_i e^{-iq_i d_i} - B_i e^{iq_i d_i} = 0 \quad (\text{ข.7})$$

$$A_n e^{-iq_n d_i} - B_n e^{q_n d_i} - i\eta_n \frac{q_i}{q_n} (A_i e^{-iq_i d_i} - B_i e^{iq_i d_i}) = 0 \quad (\text{ข.8})$$

ที่ $z = -(d_n + d_i)$, $\frac{d}{dz} g_n[-(d_i + d_n)] = 0$ จะได้

$$A_n e^{-q_n(d_n + d_i)} - B_n e^{q_n(d_n + d_i)} = 0 \quad (\text{ข.9})$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงสมมติให้ $a = \eta_s q_i / q_s$, $b = i\eta_n q_i / q_n$, $\alpha = \exp(iq_s d_s)$, $\beta = \exp(q_n d_i)$, $\gamma = \exp(iq_i d_i)$ และ $\delta = \exp(q_n d_n)$ แทนค่าลงในสมการ (ข.4) ถึง (ข.9) ทำให้สมการง่ายขึ้นเขียนในรูปเมตริกซ์เพื่อแก้สมการคือ

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \gamma & -\frac{1}{\beta} & -\beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & -\gamma & -\frac{1}{\beta b} & \frac{\beta}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta \delta} & -\beta \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ B_s \\ A_i \\ B_i \\ A_n \\ B_n \end{bmatrix} = 0$$

แต่ค่า A_s , B_s , A_i , B_i , A_n และ B_n เป็นค่าคงที่และไม่ใช่ศูนย์พร้อมกันหมด ดังนั้นค่าของดีเทอร์มิแนนต์จึงต้องเท่ากับศูนย์เสมอคือ

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & \gamma & -\frac{1}{\beta} & -\beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & -\gamma & -\frac{1}{\beta b} & \frac{\beta}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta \delta} & -\beta \delta \end{vmatrix} = 0$$

อาศัยคุณสมบัติการปฏิบัติการเบื้องต้นของดีเทอร์มิแนนต์ เราทำการลดขนาดจาก 6×6 ให้เหลือเป็นขนาด 4×4 ซึ่งดีเทอร์มิแนนต์ดังกล่าวคือ

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \right] & -a & 2a & 0 & 0 \\ 1 & \gamma^2-1 & -\frac{\gamma}{\beta} & -\beta\gamma & \\ 0 & -2\gamma & \frac{1}{\beta b}(b-1) & \frac{\beta}{b}(b+1) & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta\delta} & -\beta\delta & \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\alpha^2)(1-\gamma^2)(1-\delta^2) + a(1+\alpha^2)(1+\gamma^2)(1-\delta^2) + b(1-\alpha^2)(1+\gamma^2)(1+\delta^2) + ab(1+\alpha^2)(1-\gamma^2)(1+\delta^2) = 0 \quad (\text{ข.10})$$

แทนค่า $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ และ δ ลงในสมการ (ข.10) จากนั้นเปลี่ยนรูปเอกโปเนนเชียลให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\begin{aligned} & [\sin(q_s d_s) \sin(q_i d_i) \sinh(q_n d_n)] - \eta_{nq_s}^{q_i} [\cos(q_s d_s) \cos(q_i d_i) \sinh(q_n d_n)] \\ & + \eta_{nq_n}^{q_i} [\sin(q_s d_s) \cos(q_i d_i) \cosh(q_n d_n)] + \eta_{sq_n} \frac{q_i^2}{q_s d_n} [\cos(q_s d_s) \sin(q_i d_i) \cosh(q_n d_n)] \\ & = 0 \quad (\text{ข.11}) \end{aligned}$$

ที่จุดใดสักจุดจะมีวิกฤต $\cos(q_s d_s) \cos(q_i d_i) \cosh(q_n d_n) \neq 0$ นำมาหารสมการ (ข.11) ตลอดแล้วจัดพจน์ใหม่จะได้

$$q_s \tan(q_s d_s) \left[1 + \frac{q_n}{\eta_{nq_i}} \tanh(q_n d_n) \tan(q_i d_i) \right] = \eta_{sq_i} \left[\frac{q_n}{\eta_{nq_i}} \tanh(q_n d_n) - \tan(q_i d_i) \right]$$

$$\text{หรือ} \quad q_s \tan(q_s d_s) = \eta_{sq_i} \left[\frac{\alpha - \tan(q_i d_i)}{1 + \alpha \tan(q_i d_i)} \right] \quad (\text{ข.12})$$

$$\text{เมื่อให้} \quad \alpha = \frac{q_n \tanh(q_n d_n)}{\eta_{nq_i}}$$

สมการที่ (ข.12) จึงเป็นสมการเงื่อนไขบังคับที่สำคัญของงานวิจัยของทริสโคนและคณะ

ภาคผนวก ค

ตารางแสดงค่า แกมมา ไคแกมมา และไตรแกมมาฟังก์ชัน

ตาราง 1 แสดงค่าแกมมา ไดแกมมา และไตรแกมมาฟังก์ชัน

x	$\Gamma(x)$	$\ln \Gamma(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.000	1.00000 00000	0.00000 00000	-0.57721 56649	1.64493 40668	0.000
1.005	0.99713 85354	-0.00286 55666	-0.56902 09113	1.63299 41557	0.005
1.010	0.99432 58512	-0.00569 03079	-0.56088 54579	1.62121 35283	0.010
1.015	0.99156 12888	-0.00847 45187	-0.55280 65156	1.60958 91824	0.015
1.020	0.98884 42033	-0.01121 84893	-0.54478 93105	1.59811 81919	0.020
1.025	0.98617 39633	-0.01392 25067	-0.53682 70828	1.58679 76993	0.025
1.030	0.98354 99506	-0.01658 68539	-0.52892 10873	1.57562 49154	0.030
1.035	0.98097 15606	-0.01921 18101	-0.52107 05921	1.56459 71163	0.035
1.040	0.97843 82009	-0.02179 76511	-0.51327 48789	1.55371 16426	0.040
1.045	0.97594 92919	-0.02434 46490	-0.50553 32428	1.54296 58968	0.045
1.050	0.97350 42656	-0.02685 30725	-0.49784 49913	1.53235 73421	0.050
1.055	0.97110 25663	-0.02932 31868	-0.49020 94448	1.52188 35001	0.055
1.060	0.96874 36495	-0.03175 52537	-0.48262 59358	1.51154 19500	0.060
1.065	0.96642 69823	-0.03414 95318	-0.47509 38088	1.50133 03259	0.065
1.070	0.96415 20425	-0.03650 62763	-0.46761 24199	1.49124 63164	0.070
1.075	0.96191 83189	-0.03882 57395	-0.46018 11367	1.48128 76622	0.075
1.080	0.95972 53107	-0.04110 81702	-0.45279 93360	1.47145 21556	0.080
1.085	0.95757 25273	-0.04335 38143	-0.44546 64135	1.46173 76377	0.085
1.090	0.95545 94882	-0.04556 29148	-0.43818 17635	1.45214 19988	0.090
1.095	0.95338 57227	-0.04773 57114	-0.43094 47988	1.44266 31755	0.095
1.100	0.95135 07699	-0.04987 24413	-0.42375 49404	1.43329 91508	0.100
1.105	0.94935 41778	-0.05197 33384	-0.41661 16193	1.42404 79514	0.105
1.110	0.94739 55040	-0.05403 86341	-0.40951 42761	1.41490 76482	0.110
1.115	0.94547 43149	-0.05606 85568	-0.40246 23611	1.40587 63535	0.115
1.120	0.94359 01856	-0.05806 33325	-0.39545 53339	1.39695 22213	0.120
1.125	0.94174 26997	-0.06002 31841	-0.38849 26633	1.38813 34449	0.125
1.130	0.93993 14497	-0.06194 83322	-0.38157 38268	1.37941 82573	0.130
1.135	0.93815 60356	-0.06383 69746	-0.37469 83110	1.37080 49288	0.135
1.140	0.93641 60657	-0.06569 53867	-0.36786 56106	1.36229 17670	0.140
1.145	0.93471 11562	-0.06751 77212	-0.36107 52291	1.35387 71152	0.145
1.150	0.93304 09311	-0.06930 62087	-0.35432 66780	1.34555 93520	0.150
1.155	0.93140 50217	-0.07106 10569	-0.34761 94768	1.33733 68900	0.155
1.160	0.92980 30666	-0.07278 24716	-0.34095 31528	1.32920 81752	0.160
1.165	0.92823 47120	-0.07447 06558	-0.33432 72413	1.32117 16859	0.165
1.170	0.92669 96106	-0.07612 58106	-0.32774 12847	1.31322 59322	0.170
1.175	0.92519 74225	-0.07774 81345	-0.32119 48332	1.30536 94548	0.175
1.180	0.92372 78143	-0.07933 78240	-0.31468 74438	1.29760 08248	0.180
1.185	0.92229 04591	-0.08089 50733	-0.30821 86809	1.28991 86421	0.185
1.190	0.92088 50371	-0.08242 00745	-0.30178 81156	1.28232 15358	0.190
1.195	0.91951 12341	-0.08391 30174	-0.29539 53259	1.27480 81622	0.195
1.200	0.91816 87424	-0.08537 40900	-0.28903 98966	1.26737 72054	0.200
1.205	0.91685 72606	-0.08680 34780	-0.28272 14187	1.26002 73755	0.205
1.210	0.91557 64930	-0.08820 13651	-0.27643 94897	1.25275 74090	0.210
1.215	0.91432 61500	-0.08956 79331	-0.27019 37135	1.24556 60671	0.215
1.220	0.91310 59475	-0.09090 33619	-0.26398 37000	1.23845 21360	0.220
1.225	0.91191 56071	-0.09220 78291	-0.25780 90652	1.23141 44258	0.225
1.230	0.91075 48564	-0.09348 15108	-0.25166 94307	1.22445 17702	0.230
1.235	0.90962 34274	-0.09472 45811	-0.24556 44243	1.21756 30254	0.235
1.240	0.90852 10583	-0.09593 72122	-0.23949 36791	1.21074 70707	0.240
1.245	0.90744 74922	-0.09711 95744	-0.23345 68341	1.20400 28063	0.245
1.250	0.90640 24771	-0.09827 18364	-0.22745 35334	1.19732 91545	0.250
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy} \ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2} \ln y!$	y
	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)6 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)5 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)7 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-5)2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	

For $x > 2$ see Examples 1-4. $\log_{10} e = 0.43429 44819$

Compiled from H. T. Davis, Tables of the higher mathematical functions, 2 vols. (Principia Press, Bloomington, Ind., 1933, 1935) (with permission). Known error has been corrected.

Abramowitz, M and I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas. New York : Dover Publication, Inc., 1965.

ตาราง 1 (ต่อ)

x	$r(x)$	$\ln r(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.250	0.90640 24771	-0.09827 18364	-0.22745 35334	1.19732 91545	0.250
1.255	0.90538 57663	-0.09939 41651	-0.22148 34266	1.19072 50579	0.255
1.260	0.90439 71178	-0.10048 67254	-0.21554 61686	1.18418 94799	0.260
1.265	0.90343 62946	-0.10154 96809	-0.20964 14193	1.17772 14030	0.265
1.270	0.90250 30645	-0.10258 31932	-0.20376 88437	1.17131 98301	0.270
1.275	0.90159 71994	-0.10358 74224	-0.19792 81118	1.16498 37821	0.275
1.280	0.90071 84765	-0.10456 25269	-0.19211 88983	1.15871 22990	0.280
1.285	0.89986 66769	-0.10550 86634	-0.18634 08828	1.15250 44385	0.285
1.290	0.89904 15863	-0.10642 59872	-0.18059 37494	1.14635 92764	0.290
1.295	0.89824 29947	-0.10731 46519	-0.17487 71870	1.14027 59053	0.295
1.300	0.89747 06963	-0.10817 48095	-0.16919 08889	1.13425 34350	0.300
1.305	0.89672 44895	-0.10900 66107	-0.16353 45526	1.12829 09915	0.305
1.310	0.89600 41767	-0.10981 02045	-0.15790 78803	1.12238 77175	0.310
1.315	0.89530 95644	-0.11058 57384	-0.15231 05782	1.11654 27706	0.315
1.320	0.89464 04630	-0.11133 33587	-0.14674 23568	1.11075 53246	0.320
1.325	0.89399 66866	-0.11205 32100	-0.14120 29305	1.10502 45678	0.325
1.330	0.89337 80535	-0.11274 54356	-0.13569 20180	1.09934 97037	0.330
1.335	0.89278 43850	-0.11341 01772	-0.13020 93416	1.09372 99497	0.335
1.340	0.89221 55072	-0.11404 75756	-0.12475 46279	1.08816 45379	0.340
1.345	0.89167 12485	-0.11465 77697	-0.11932 76069	1.08265 27136	0.345
1.350	0.89115 14420	-0.11524 08974	-0.11392 80127	1.07719 37361	0.350
1.355	0.89065 59235	-0.11579 70951	-0.10855 55827	1.07178 68773	0.355
1.360	0.89018 45324	-0.11632 64980	-0.10321 00582	1.06643 14226	0.360
1.365	0.88973 71116	-0.11682 92401	-0.09789 11840	1.06112 66696	0.365
1.370	0.88931 35074	-0.11730 54539	-0.09259 87082	1.05587 19286	0.370
1.375	0.88891 35692	-0.11775 52707	-0.08733 23825	1.05066 65216	0.375
1.380	0.88853 71494	-0.11817 88209	-0.08209 19619	1.04550 97829	0.380
1.385	0.88818 41041	-0.11857 62331	-0.07687 72046	1.04040 10578	0.385
1.390	0.88785 42918	-0.11894 76353	-0.07168 78723	1.03533 97036	0.390
1.395	0.88754 75748	-0.11929 31538	-0.06652 37297	1.03032 50881	0.395
1.400	0.88726 38175	-0.11961 29142	-0.06138 45446	1.02535 65905	0.400
1.405	0.88700 28884	-0.11990 70405	-0.05627 00879	1.02043 36002	0.405
1.410	0.88676 46576	-0.12017 56559	-0.05118 01337	1.01555 55173	0.410
1.415	0.88654 89993	-0.12041 88823	-0.04611 44589	1.01072 17518	0.415
1.420	0.88635 57896	-0.12063 68406	-0.04107 28433	1.00593 17241	0.420
1.425	0.88618 49081	-0.12082 96505	-0.03605 50697	1.00118 46640	0.425
1.430	0.88603 62361	-0.12099 74307	-0.03106 09237	0.99648 06113	0.430
1.435	0.88590 96587	-0.12114 02987	-0.02609 01935	0.99181 84147	0.435
1.440	0.88580 50635	-0.12125 83713	-0.02114 26703	0.98719 77326	0.440
1.445	0.88572 23397	-0.12135 17638	-0.01621 81479	0.98261 80318	0.445
1.450	0.88566 13803	-0.12142 05907	-0.01131 64226	0.97807 87886	0.450
1.455	0.88562 20800	-0.12146 49657	-0.00643 72934	0.97357 94874	0.455
1.460	0.88560 43364	-0.12148 50010	-0.00158 05620	0.96911 96215	0.460
1.465	0.88560 80495	-0.12148 08083	+0.00325 39677	0.96469 86921	0.465
1.470	0.88563 31217	-0.12145 24980	0.00806 64890	0.96031 62091	0.470
1.475	0.88567 94575	-0.12140 01797	0.01285 71930	0.95597 16396	0.475
1.480	0.88574 69646	-0.12132 39621	0.01762 62684	0.95166 46592	0.480
1.485	0.88583 55520	-0.12122 39528	0.02237 39013	0.94739 46509	0.485
1.490	0.88594 51316	-0.12110 02585	0.02710 02758	0.94316 12052	0.490
1.495	0.88607 56174	-0.12095 29852	0.03180 55736	0.93896 38700	0.495
1.500	0.88622 69255	-0.12078 22376	0.03648 99740	0.93480 22705	0.500
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy} \ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2} \ln y!$	y
	$\begin{bmatrix} (-6)4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (-6)4 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (-6)4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (-6)9 \\ 5 \end{bmatrix}$	

 $\log_{10} e = 0.43429 44819$

ตาราง 1 (ต่อ)

x	$r(x)$	$\ln r(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.500	0.88622 69255	-0.12078 22376	0.03648 99740	0.93480 22005	0.500
1.505	0.88639 89744	-0.12058 81200	0.04115 36543	0.93067 57588	0.505
1.510	0.88659 16850	-0.12037 07353	0.04579 67896	0.92658 41142	0.510
1.515	0.88680 49797	-0.12013 01860	0.05041 95527	0.92252 68425	0.515
1.520	0.88703 87833	-0.11986 65735	0.05502 21146	0.91850 35265	0.520
1.525	0.88729 30231	-0.11957 99983	0.05960 46439	0.91451 37552	0.525
1.530	0.88756 76278	-0.11927 05601	0.06416 73074	0.91055 71245	0.530
1.535	0.88786 25287	-0.11893 83580	0.06871 02697	0.90663 32361	0.535
1.540	0.88817 76586	-0.11858 34900	0.07323 36936	0.90274 16984	0.540
1.545	0.88851 29527	-0.11820 60534	0.07773 77400	0.89888 21253	0.545
1.550	0.88886 83478	-0.11780 61446	0.08222 25675	0.89505 41371	0.550
1.555	0.88924 37830	-0.11738 38595	0.08668 83334	0.89125 73596	0.555
1.560	0.88963 91990	-0.11693 92928	0.09113 51925	0.88749 14249	0.560
1.565	0.89005 45387	-0.11647 25388	0.09556 32984	0.88375 59699	0.565
1.570	0.89048 97463	-0.11598 36908	0.09997 28024	0.88005 06378	0.570
1.575	0.89094 47686	-0.11547 28415	0.10436 38544	0.87637 50766	0.575
1.580	0.89141 95537	-0.11494 00828	0.10873 66023	0.87272 89402	0.580
1.585	0.89191 40515	-0.11438 55058	0.11309 11923	0.86911 18871	0.585
1.590	0.89242 82141	-0.11380 92009	0.11742 77690	0.86552 35815	0.590
1.595	0.89296 19949	-0.11321 12579	0.12174 64754	0.86196 36921	0.595
1.600	0.89351 53493	-0.11259 17657	0.12604 74528	0.85843 18931	0.600
1.605	0.89408 82342	-0.11195 08127	0.13033 08407	0.85492 78630	0.605
1.610	0.89468 06085	-0.11128 84864	0.13459 67772	0.85145 12856	0.610
1.615	0.89529 24327	-0.11060 48737	0.13884 53988	0.84800 18488	0.615
1.620	0.89592 36685	-0.10990 00610	0.14307 68404	0.84457 92455	0.620
1.625	0.89657 42800	-0.10917 41338	0.14729 12354	0.84118 31730	0.625
1.630	0.89724 42326	-0.10842 71769	0.15148 87158	0.83781 33330	0.630
1.635	0.89793 34930	-0.10765 92746	0.15566 94120	0.83446 94315	0.635
1.640	0.89864 20302	-0.10687 05105	0.15983 34529	0.83115 11790	0.640
1.645	0.89936 98138	-0.10606 09676	0.16398 09660	0.82785 82897	0.645
1.650	0.90011 68163	-0.10523 07282	0.16811 20776	0.82459 04826	0.650
1.655	0.90088 30104	-0.10437 98739	0.17222 69122	0.82134 74802	0.655
1.660	0.90166 83712	-0.10350 84860	0.17632 55933	0.81812 90092	0.660
1.665	0.90247 28748	-0.10261 66447	0.18040 82427	0.81493 48001	0.665
1.670	0.90329 64995	-0.10170 44301	0.18447 49813	0.81176 45875	0.670
1.675	0.90413 92243	-0.10077 19212	0.18852 59282	0.80861 81094	0.675
1.680	0.90500 10302	-0.09981 91969	0.19256 12015	0.80549 51079	0.680
1.685	0.90588 18996	-0.09884 63351	0.19658 09180	0.80239 53282	0.685
1.690	0.90678 18160	-0.09785 34135	0.20058 51931	0.79931 85198	0.690
1.695	0.90770 07650	-0.09684 05088	0.20457 41410	0.79626 44350	0.695
1.700	0.90863 87329	-0.09580 76974	0.20854 78749	0.79323 28302	0.700
1.705	0.90959 57079	-0.09475 50552	0.21250 65064	0.79022 34645	0.705
1.710	0.91057 16796	-0.09368 26573	0.21645 01462	0.78723 61012	0.710
1.715	0.91156 66390	-0.09259 05785	0.22037 89037	0.78427 05060	0.715
1.720	0.91258 05779	-0.09147 88929	0.22429 28271	0.78132 64486	0.720
1.725	0.91361 34904	-0.09034 76741	0.22819 22037	0.77840 37011	0.725
1.730	0.91466 53712	-0.08919 69951	0.23207 69593	0.77550 20396	0.730
1.735	0.91573 62171	-0.08802 69286	0.23594 72589	0.77262 12424	0.735
1.740	0.91682 60252	-0.08683 75466	0.23980 32061	0.76976 10915	0.740
1.745	0.91793 47950	-0.08562 89203	0.24364 49038	0.76692 13714	0.745
1.750	0.91906 25268	-0.08440 11210	0.24747 24535	0.76410 18699	0.750
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy} \ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2} \ln y!$	y
	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]$	
		$\log_{10} e = 0.43429 44819$			

ตาราง 1 (ต่อ)

x	$r(x)$	$\ln r(x)$	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	
1.750	0.91906 25268	-0.08440 11210	0.24747 24535	0.76410 18699	0.750
1.755	0.92020 92224	-0.08315 42192	0.25128 59559	0.76130 23773	0.755
1.760	0.92137 48846	-0.08188 82847	0.25508 55103	0.75852 26870	0.760
1.765	0.92255 95178	-0.08060 33871	0.25887 12154	0.75576 25950	0.765
1.770	0.92376 31277	-0.07929 95955	0.26264 31686	0.75302 19003	0.770
1.775	0.92498 57211	-0.07797 69782	0.26640 14664	0.75030 04040	0.775
1.780	0.92622 73062	-0.07663 56034	0.27014 62043	0.74759 79107	0.780
1.785	0.92748 78926	-0.07527 55386	0.27387 74769	0.74491 42268	0.785
1.790	0.92876 74904	-0.07389 68509	0.27759 53776	0.74224 91617	0.790
1.795	0.93006 61123	-0.07249 96070	0.28129 99992	0.73960 25271	0.795
1.800	0.93138 37710	-0.07108 38729	0.28499 14333	0.73697 41375	0.800
1.805	0.93272 04811	-0.06964 97145	0.28866 97707	0.73436 38093	0.805
1.810	0.93407 62585	-0.06819 71969	0.29233 51012	0.73177 13620	0.810
1.815	0.93545 11198	-0.06672 63850	0.29598 75138	0.72919 66166	0.815
1.820	0.93684 50832	-0.06523 73431	0.29962 70966	0.72663 93972	0.820
1.825	0.93825 81682	-0.06373 01353	0.30325 39367	0.72409 95297	0.825
1.830	0.93969 03951	-0.06220 48248	0.30686 81205	0.72157 68426	0.830
1.835	0.94114 17859	-0.06066 14750	0.31046 97335	0.71907 11662	0.835
1.840	0.94261 23634	-0.05910 01483	0.31405 88602	0.71658 23333	0.840
1.845	0.94410 21519	-0.05752 09071	0.31763 55846	0.71411 01788	0.845
1.850	0.94561 11764	-0.05592 38130	0.32119 99895	0.71165 45396	0.850
1.855	0.94713 94637	-0.05430 89276	0.32475 21572	0.70921 52546	0.855
1.860	0.94868 70417	-0.05267 63117	0.32829 21691	0.70679 21650	0.860
1.865	0.95025 39389	-0.05102 60260	0.33182 01056	0.70438 51138	0.865
1.870	0.95184 01855	-0.04935 81307	0.33533 60467	0.70199 39461	0.870
1.875	0.95344 58127	-0.04767 26854	0.33884 00713	0.69961 85089	0.875
1.880	0.95507 08530	-0.04596 97497	0.34233 22577	0.69725 86512	0.880
1.885	0.95671 53398	-0.04424 93824	0.34581 26835	0.69491 42236	0.885
1.890	0.95837 93077	-0.04251 16423	0.34928 14255	0.69258 50790	0.890
1.895	0.96006 27927	-0.04075 65875	0.35273 85596	0.69027 10717	0.895
1.900	0.96176 58319	-0.03898 42759	0.35618 41612	0.68797 20582	0.900
1.905	0.96348 84632	-0.03719 47650	0.35961 83049	0.68568 78965	0.905
1.910	0.96523 07261	-0.03538 81118	0.36304 10646	0.68341 84465	0.910
1.915	0.96699 26608	-0.03356 43732	0.36645 25136	0.68116 35696	0.915
1.920	0.96877 43090	-0.03172 36054	0.36985 27244	0.67892 31293	0.920
1.925	0.97057 57134	-0.02986 58646	0.37324 17688	0.67669 69903	0.925
1.930	0.97239 69178	-0.02799 12062	0.37661 97179	0.67448 50194	0.930
1.935	0.97423 79672	-0.02609 96858	0.37998 66424	0.67228 70846	0.935
1.940	0.97609 89075	-0.02419 13581	0.38334 26119	0.67010 30559	0.940
1.945	0.97797 97861	-0.02226 62778	0.38668 76959	0.66793 28044	0.945
1.950	0.97988 06513	-0.02032 44991	0.39002 19627	0.66577 62034	0.950
1.955	0.98180 15524	-0.01836 60761	0.39334 54805	0.66363 31270	0.955
1.960	0.98374 25404	-0.01639 10621	0.39665 83163	0.66150 34514	0.960
1.965	0.98570 36664	-0.01439 95106	0.39996 05371	0.65938 70538	0.965
1.970	0.98768 49838	-0.01239 14744	0.40325 22088	0.65728 38134	0.970
1.975	0.98968 65462	-0.01036 70060	0.40653 33970	0.65519 36104	0.975
1.980	0.99170 84087	-0.00832 61578	0.40980 41664	0.65311 63266	0.980
1.985	0.99375 06274	-0.00626 89816	0.41306 45816	0.65105 18450	0.985
1.990	0.99581 32598	-0.00419 55291	0.41631 47060	0.64900 00505	0.990
1.995	0.99789 63643	-0.00210 58516	0.41955 46030	0.64696 08286	0.995
2.000	1.00000 00000	0.00000 00000	0.42278 43351	0.64493 40668	1.000
	$y!$	$\ln y!$	$\frac{d}{dy} \ln y!$	$\frac{d^2}{dy^2} \ln y!$	y
	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	$\left[\begin{smallmatrix} (-6)2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$	
		$\log_{10} e = -0.43429 44819$			

ภาคผนวก ง

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบ
ในกรณีที่เป็น S-I-N ซูเปอร์แลตทิซและกรณีที่เป็น S-N
ซูเปอร์แลตทิซระบบสองชั้นเมื่อไม่มีสนามภายนอก

ก. การหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับคาบของซูเปอร์แลตทิซ S-I-N ตามแบบจำลองที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 ซึ่งแสดงด้วยภาพประกอบ 7 ผลการวิจัยพบว่าสามารถหาค่าได้จากสมการ (3.8) , (3.16) , (3.17) , (3.26) สมการเงื่อนไขบังคับ (3.25) เพื่อให้การวิเคราะห์เห็นได้ง่ายขึ้นจึงแยกสมการต่างๆดังนี้

สมการ (3.8) เขียนแยกในแต่ละตัวนำได้ว่า

$$\text{ในตัวนำยิ่งยวด : } \ln \left[\frac{T_c}{T_{cs}} \right] = \psi \left(\frac{1}{2} \right) - \psi \left[\frac{1}{2} + \rho_s \left(\frac{T_{cs}}{T_c} \right) \right] \quad (ง.1)$$

$$\text{ในตัวนำชั้นกลาง } \ln \left[\frac{T_c}{T_{cs}} \right] = \psi \left(\frac{1}{2} \right) - \psi \left[\frac{1}{2} + \rho_i \left(\frac{T_{ci}}{T_c} \right) \right] \quad (ง.2)$$

$$\text{ในตัวนำปกติ } \ln \left[\frac{T_c}{T_{cn}} \right] = \psi \left(\frac{1}{2} \right) - \psi \left[\frac{1}{2} + \rho_n \left(\frac{T_{cn}}{T_c} \right) \right] \quad (ง.3)$$

สมการ (3.16) และ (3.17) แยกได้ว่า

$$\text{ในตัวนำยิ่งยวด } k_s^2 = 2 \rho_s / \xi_s^2 \quad (ง.4)$$

$$\text{ในตัวนำชั้นกลาง } k_i^2 = 2 \rho_i / \xi_i^2 \quad (ง.5)$$

$$\text{ในตัวนำปกติ } k_n^2 = - 2 \rho_n / \xi_n^2 \quad (ง.6)$$

สมการ (3.26) ก็สามารถเขียนได้เป็น

$$\text{ในตัวนำยิ่งยวด } q_s^2 = k_s^2 - 2H_{c2}/\phi_0 \quad (ง.7)$$

$$\text{ในตัวนำชั้นกลาง } q_i^2 = k_i^2 - 2H_{c2}/\phi_0 \quad (ง.8)$$

$$\text{ในตัวนำปกติ } q_n^2 = k_n^2 + 2H_{c2}/\phi_0 \quad (ง.9)$$

สมการ (3.25) อันเป็นสมการเงื่อนไขบังคับที่สำคัญของระบบซูเปอร์แลตทิซ คือ

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \cos(2q_i d_i) \\ &+ \frac{1}{2} [q_i^2 \eta_n / q_s q_n - q_s q_n / q_i^2 \eta_n] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin^2(q_i d_i) \\ &+ \frac{1}{2} [q_n / q_i \eta_n - q_i \eta_n / q_n] \cos(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i) \\ &+ \frac{1}{2} [q_n \eta_s / q_s \eta_n - q_s \eta_n / q_n \eta_s] \sin(q_s d_s) \sinh(q_n d_n) \cos^2(q_i d_i) \\ &- \frac{1}{2} [q_i \eta_s / q_s + q_s / q_n \eta_s] \sin(q_s d_s) \cosh(q_n d_n) \sin(2q_i d_i) \end{aligned} \quad (ง.10)$$

วิธีการแก้สมการมีขั้นตอนดังต่อไปนี้คือ

ขั้นตอนที่ 1

จากสมการ(ง.1)ถึง(ง.3)เราทราบค่าของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเมื่อเป็นแท่งคือ

$$T_{cs} = 9.22 \text{ K}, T_{ci} = 9.55 \text{ K}, T_{cn} = 0.4 \text{ K} \quad \text{และค่าของอุณหภูมิวิกฤตของซูเปอร์แลต}$$

ทึช T_c จะอยู่ในช่วง $T_{cs} > T_c > T_{cn}$ ดังนั้นเราสามารถแปลค่าของ T_c ตั้งแต่

0.4-9.22 K แล้วใช้ค่าใดแกมมาในตาราง 1ภาคผนวก ค.ทำการหาค่าของ p_s, p_i, p_n ได้

แต่ค่าของ $\xi_s = 30 \text{ Å}$, $\xi_i = 35 \text{ Å}$, $\xi_n = 178 \text{ Å}$ ทำให้หาค่าของ k_s^2, k_i^2, k_n^2 จาก

สมการ(ง.4) ถึง(ง.6)ได้ด้วย อนึ่งเนื่องจากเราทำการพิจารณากรณีที่ไม่มีสนามภายนอก

$H_{c2}=0$ เป็นผลให้สมการ(ง.7)ถึง(ง.9)ให้ผลลัพธ์ว่า $k_s = q_s, k_i = q_i$ และ $k_n = q_n$

จากขั้นตอน 1 ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ของ q_s, q_i, q_n เป็นฟังก์ชันกับ T_c ดังที่สรุป

ผลไว้ในตาราง 2 (ตัวอย่างของการคำนวณผู้วิจัยได้แสดงไว้ต่อจากตาราง 2)

ขั้นตอนที่ 2

ในขั้นตอนนี้เราทำการคำนวณค่าคาบได้จากสมการ(ง.10) จากภาพประกอบ 7 ความ

ยาวคาบคือ $\Lambda = d_s + d_n + 2d_i$ ในการวิจัยครั้งนี้เรากำหนดให้ชั้นกลางมีความหนาสม่ำเสมอ

$d_i = 4 \text{ Å}$ และความหนาของชั้นตัวนำยิ่งยวดกับชั้นตัวนำปกติเท่ากันซึ่งหมายความว่า $d_s = d_n = d$

จากชุดของ q_s, q_i, q_n ที่ได้มาโดยการคำนวณในขั้นตอนที่ 1 แทนค่าลงในสมการ(ง.10)แล้ว

แปลค่าของ d ที่สามารถให้คำตอบสอดคล้องกับสมการ ค่า d ที่ได้ก็คือค่าที่เป็นฟังก์ชันกับ T_c

ด้วย แต่ค่าคาบในตอนนี้คือ $\Lambda = 2(d+d_i)$ ดังนั้นคาบก็จะเป็นฟังก์ชันกับ T_c ด้วยเช่นกัน

วิธีการที่แปลค่า d จำต้องอาศัยคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณซึ่งตัวอย่างของโปรแกรมดังแสดงไว้

ท้ายของตาราง 3 (ตาราง 3 แสดงผลของคาบเป็นฟังก์ชันกับอุณหภูมิวิกฤต)

ขั้นตอนที่ 3

นำผลการคำนวณในตารางที่ 3 เขียนเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ

วิกฤตกับคาบ ดังภาพประกอบ 9b ในที่สุด

ตาราง 2 แสดงผลการคำนวณ q_s , q_i และ q_n ที่อุณหภูมิวิกฤต (T_c) ใดๆ

T_c	q_s	q_i	q_n
4.05	0.01494608	0.01293100	0.01271446
4.10	0.01450517	0.01288253	0.01261803
4.20	0.01476529	0.01278413	0.01300020
4.40	0.01451590	0.01258175	0.01337323
4.60	0.01425676	0.01237158	0.01373779
4.80	0.01398757	0.01215346	0.01409443
5.00	0.01370800	0.01192716	0.01444366
5.20	0.01342762	0.01169240	0.01478594
5.40	0.013111594	0.01144881	0.01512168
5.60	0.01280234	0.01119600	0.01545125
5.80	0.01247614	0.01093349	0.01577497
6.00	0.01213652	0.01066071	0.01609317
6.50	0.01122179	0.00992921	0.01686626
7.00	0.01019512	0.00911501	0.01761029
7.50	0.00902118	0.00815961	0.01833837
8.00	0.00763531	0.00713272	0.01902309
8.50	0.00589309	0.00585102	0.01969665
9.00	0.00327187	0.00415557	0.02035089

ตัวอย่างการคำนวณ q_s , q_i และ q_n ที่อุณหภูมิวิกฤต (T_c) $T_c = 4$ K ในตัวนำยิ่งยวด

เริ่มด้วยการแก้สมการ (ง.1) โดยแทนค่า $T_c = 4.2$ และ $T_{cs} = 9.22$ จะได้ว่า

$$\ln(4.2/9.22) = \psi(\frac{1}{2}) - \psi[\frac{1}{2} + o_s(9.22/4.2)]$$

$$\therefore \psi[\frac{1}{2} + o_s(9.22/4.2)] = 0.786290512 - 1.063510026$$

$$= -1.177219514 \quad (\text{ง.11})$$

จากตาราง 1 ในภาคผนวก ค เราจะหาค่าไคแกมมาโดยใช้ recurrence formular

$$\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$$

ค่าไคแกมมาที่เท่ากับสมการ(ง.11)คือ

$$\psi(0.715366336) = -1.177219515 \quad (\text{ง.12})$$

ดังนั้นจากสมการ(ง.11)และ(ง.12)ค่าอินเวอร์สไคแกมมาย่อมมีค่าเท่ากัน คือ

$$\begin{aligned} 0.5 + \rho_s(9.22/4.2) &= 0.715366336 \\ \rho_s &= 0.098106140 \end{aligned} \quad (\text{ง.13})$$

แก้สมการ(ง.4)เพื่อหาค่า k_s^2 ด้วยการแทนค่า $\rho_s = 0.098106140$ และ $\zeta_s = 30$ จะได้

$$\begin{aligned} k_s^2 &= 2(0.098106140)/(30)^3 \\ &= 2.1801364 \times 10^{-4} \\ k_s &= 0.014765285 \end{aligned} \quad (\text{ง.14})$$

พิจารณาสมการ(ง.7)เมื่อ $H_{c2} = 0$ จะได้ว่า $k_s^2 = q_s^2$ ดังนั้น

$$q_s = 0.014765285$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถคำนวณค่า q_i , q_n ที่ $T_c = 4.2K$ ได้ว่า

$$q_i = 0.01278413$$

$$q_n = 0.01300020$$

ด้วยวิธีการที่แสดงไว้ตามตัวอย่างข้างต้น เมื่อแปรค่าอุณหภูมิวิกฤตที่ค่าต่างๆ เราจะหาค่า

q_s , q_i , q_n ได้ดังปรากฏในตาราง 2

ผู้วิจัยได้แทนค่า q_s , q_i , q_n จากตาราง 2 ลงในสมการ(ง.10)และอาศัยโปรแกรม

คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณหาค่า ผลของการคำนวณนำมาเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ
วิกฤตกับค่าที่ได้ดังแสดงในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงผลการคำนวณคาบสัมพันธ์กับอุณหภูมิวิกฤต

T_c (K)	Λ_1 (Å°)	Λ_2 (Å°)
4.05	95.0	— *
4.10	78.0	124
4.20	60.0	154
4.40	42.0	192
4.60	34.0	220
4.80	30.0	244
5.00	26.0	266
5.20	22.0	286
5.40	20.0	306
5.60	18.0	324
5.80	16.0	344
6.00	15.0	363
6.50	14.0	418
7.00	12.2	480
7.50	11.2	568
8.00	10.4	878
8.50	9.8	2112
9.00	8.2	5196

หมายเหตุ *แสดงว่าจุดวิกฤตมีเพียงตำแหน่งเดียว ที่อุณหภูมิสูงกว่า 4.05 K ปรากฏจุดวิกฤตสองตำแหน่งเสมอ อนึ่งที่อุณหภูมิต่ำกว่า 4.05 K จะไม่มีค่าที่สอดคล้องกับสมการ(ง.10) ซึ่งหมายความว่าซูเปอร์แลตทิซมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดเสมอ เพราะว่ายู่ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบ

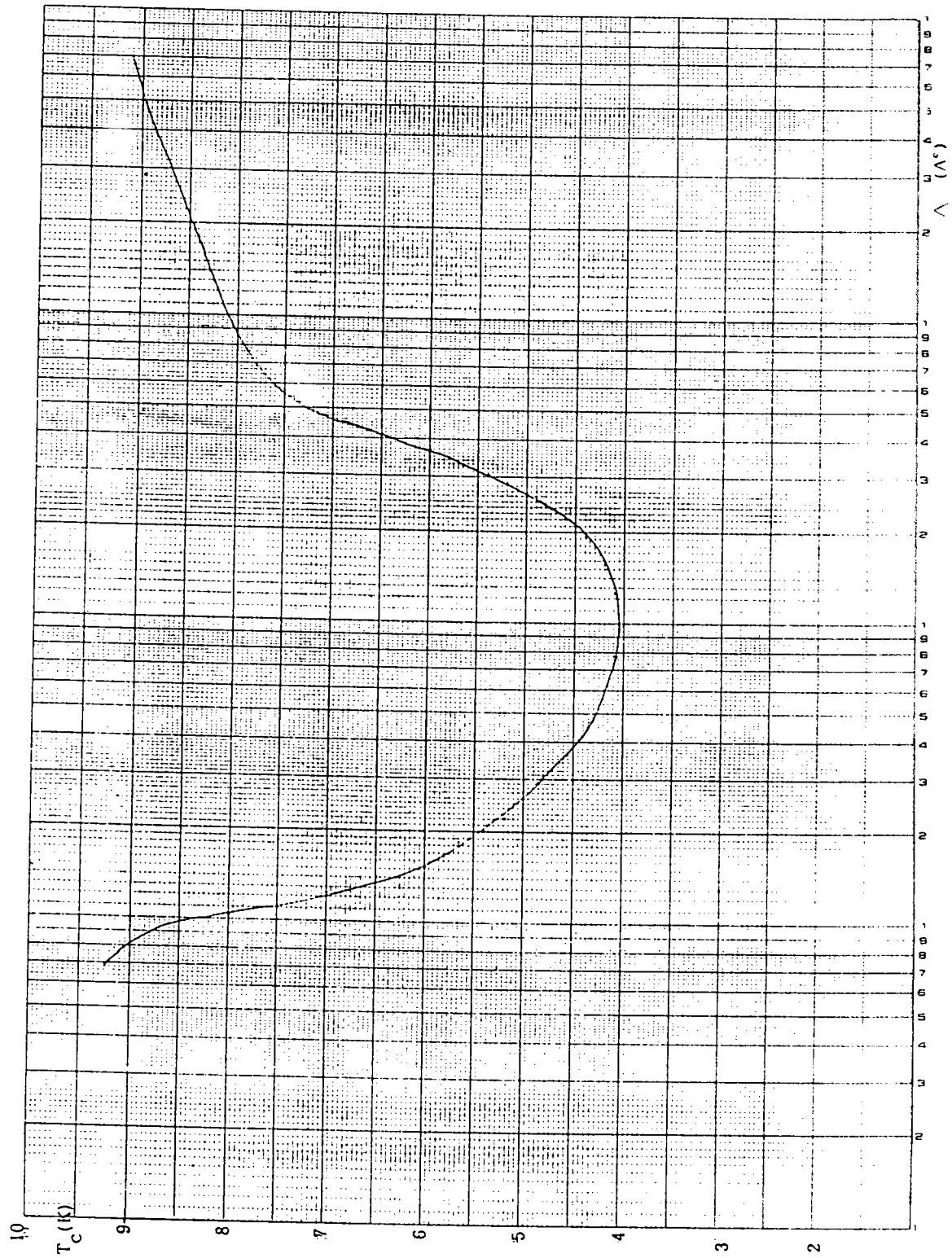
ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่า เพื่อหาความสัมพันธ์กับอุณหภูมิวิกฤต

```

FILE 6 = "REPORT3", UNIT = PRINT, BD
A = 1.001
II = 3
QI = 0.0071323049
QN = 0.0133105
QS = 0.0076353379
QI8 = 8 * QI
QI4 = 4 * QI
WRITE (6,2) II,QI,QN,QS
SPG11 = (QI**2 * 1.3 * 0.75) / (QS*QN)
SPG12 = 1. / SPG11
SPG21 = QN / (0.75 * QI)
SPG22 = 1. / SPG21
SPG31 = (1.3 * QN) / (0.75 * QS)
SPG32 = 1. / SPG31
SPG41 = QS / (1.3 * QI)
SPG42 = 1. / SPG41
SP51 = (1./2.) * (SPG11 - SPG12)
SP52 = (1./2.) * (SPG21 - SPG22)
SP53 = (1./2.) * (SPG31 - SPG32)
SP54 = (1./2.) * (SPG41 + SPG42)
DO 10 LAM = 1, 20000
QSLAM = QS * ((LAM-1)/10)
QNLAM = QN * ((LAM-1)/10)
SUMCOS = COS(QSLAM) * COSH(QNLAM) * COS(QI8)
SUMSSS = SIN(QSLAM) * SINH(QNLAM) * (SIN(QI4)**3)
SUMCSS = COS(QSLAM) * SINH(QNLAM) * SIN(QI8)
SUMSSC = SIN(QSLAM) * SINH(QNLAM) * (COS(QI4)**3)
SUMSCS = SIN(QSLAM) * COSH(QNLAM) * SIN(QI8)
VALUE1 = SP51 * SUMSSS
VALUE2 = SP52 * SUMCSS
VALUE3 = SP53 * SUMSSC
VALUE4 = SP54 * SUMSCS
VALUE = SUMCOS + VALUE1 + VALUE2 + VALUE3 - VALUE4
IF (VALUE .LE. A) WRITE (6,1) LAM, VALUE
1  FORMAT (2X,I4,2X,F15.8)
10 CONTINUE
2  FORMAT (2X,I4,3(2X,F15.8))
STOP
END

```

- หมายเหตุ
1. II=8 คือ $T_c = 8 \text{ K}$ ในสมการ (ง.10)
 2. Q_s, Q_n, Q_i คือ q_s, q_n, q_i ในสมการ (ง.10)
 3. LAM คือ d ในสมการ (ง.10)



ภาพประกอบ 9b แสดงผลการคำนวณที่ได้จากตาราง 3 แสดงความสัมพันธ์ของ S-I-N แบบออสซิลเลต

ข. การหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าของ S-N ซุปเปอร์แลตทิซเช่นเดียวกับการวิเคราะห์ในกรณีข้อ ก. แต่เนื่องจากการลดชั้นกลางจึงทำให้สมการที่ใช้ประกอบด้วยสมการ (ง.1) , (ง.3) , (ง.4) , (ง.6) , (ง.7) , (ง.9) และสมการเงื่อนไขบังคับ (4.2) คือ

$$q_s \tan(q_s d_s / 2) = \eta q_n \tanh(q_n d_n / 2) \quad (ง.15)$$

วิธีการวิเคราะห์หาค่า q_s , q_n ดำเนินการเช่นเดียวกับขั้นตอนที่วิเคราะห์ในกรณีข้อ ก. จะได้ค่าดังปรากฏในตาราง 2 นำค่า q_s และ q_n แทนค่าลงในสมการ (ง.15) ซึ่งเรากำหนดให้ $d_s = d_n = \Lambda / 2$ การแปรค่า Λ เพื่อให้ได้คำตอบที่สอดคล้องกับสมการ (ง.15) ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ซึ่งค่า Λ ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิวิกฤตตามต้องการ ผลการคำนวณผู้วิจัยได้แสดงไว้ในตาราง 4 (ตัวอย่างของโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงไว้ดังข้างล่าง) เมื่อนำค่าจากตาราง 4 มาเขียนกราฟจะแสดงความสัมพันธ์ของ T_c กับ Λ ดังภาพประกอบ 10

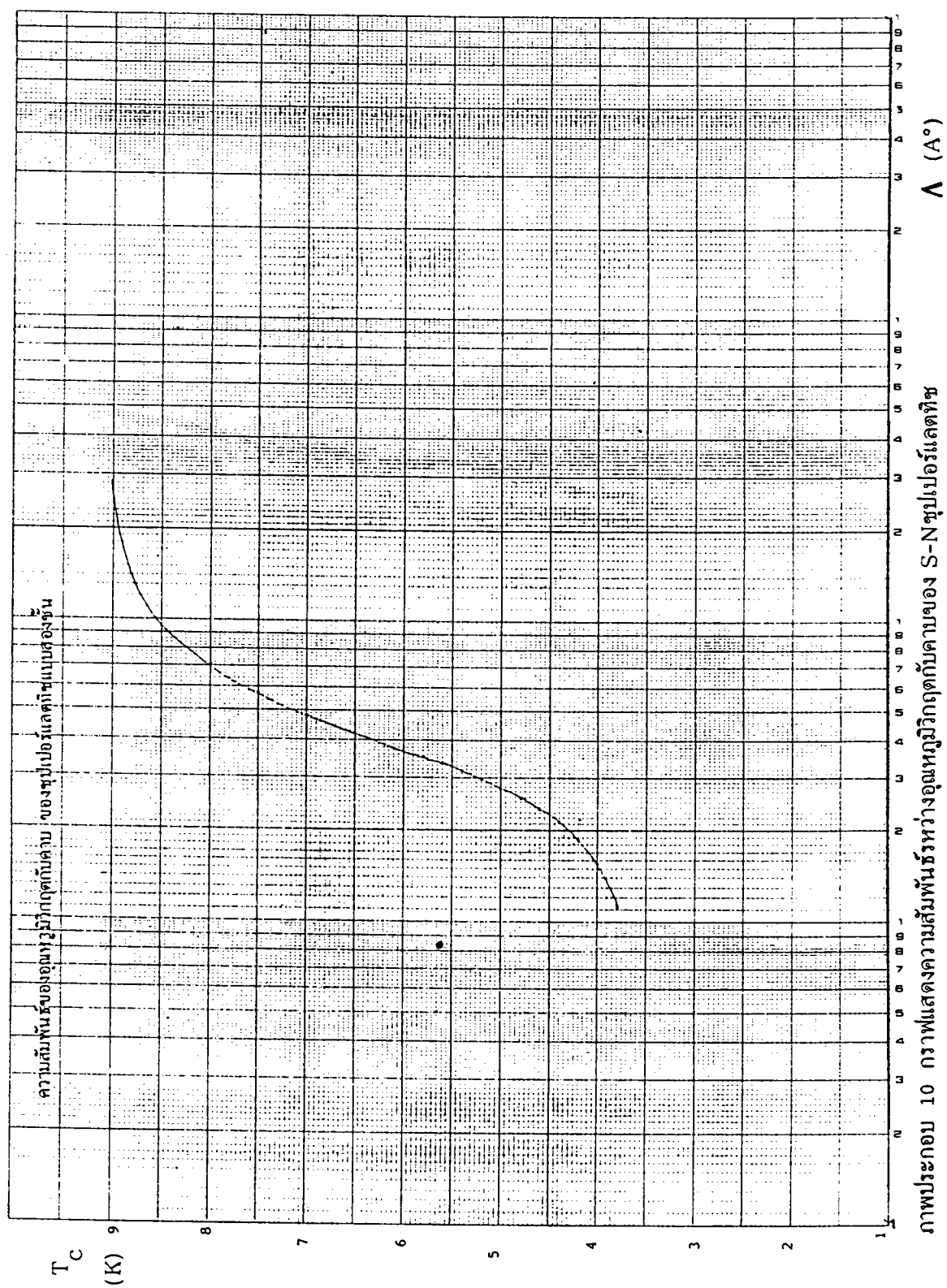
ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้คำนวณหาค่า (Λ) ซึ่งสัมพันธ์กับอุณหภูมิวิกฤตที่ $T_c = 4.0$ K

```
FILE 6 = "REPORT/NOI", UNIT= PRINT, GD
DOUBLE PRECISION TQSLAM, TQNLAM, DIFLAM, QSLAM, QNLAM, A1, A2
A1 = 1.700+0
A2 = 1.300+0
TC = 4.00
QN = 0.012618029
QS = 0.015005171
WRITE (6,2)
WRITE (6,3) QS,QN,TC
WRITE (6,4)
DO 50 I = 1, 200
  QSLAM = (QS * I) / 4
  QNLAM = (QN * I) / 4
  TQSLAM = QS * DTAN(QSLAM)
  TQNLAM = QN * DTANH(QNLAM)
  DIFLAM = TQSLAM / TQNLAM
  IF ((DIFLAM .LT. A1) .OR. (DIFLAM .GT. A2)) GO TO 50
  WRITE (6,5) I,TQSLAM,TQNLAM,DIFLAM
50 CONTINUE
FORMAT(2X,I4,2(D30.20,2X),D20.10/)
FORMAT(2X,"LAMDA",15X,"QS-TAN",20X,"QN-TANH"25X,"ETA-VALUE"/)
FORMAT(2X,2(F20.10,5X),F5.2/)
FORMAT(10X,"QS-VALUE",10X,"QN-VALUE",15X,"TC-VALUE"/)
STOP
END
```

ตาราง 4 แสดงผลการคำนวณความเป็นฟังก์ชันกับอุณหภูมิวิกฤต

T_c (K)	q_s	q_n	(A°)
3.8	0.015236930	0.012226016	116
4.0	0.015005171	0.012618029	157
4.2	0.014765285	0.013000198	188
4.4	0.014515901	0.013373231	214
4.6	0.014256759	0.013737792	236
4.8	0.013987568	0.014094426	257
5.0	0.013707998	0.014443662	277
5.2	0.013420934	0.014785940	295
5.4	0.013115940	0.015121676	313
5.6	0.012802341	0.015451245	332
5.8	0.012476145	0.015774969	350
6.0	0.012136515	0.016093170	370
6.5	0.011221786	0.016866262	422
7.0	0.010195119	0.017610291	486
7.5	0.009021177	0.018328373	573
8.0	0.007635306	0.019023095	703
8.5	0.005893086	0.019696650	950
9.0	0.003271871	0.020350890	1807

เมื่อนำค่าจากตาราง 4 เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบกับอุณหภูมิวิกฤตจะได้ภาพประกอบ 10 คือ



ภาคผนวก จ

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนา

ของตัวนำปกติของระบบ S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

และ S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ($n = 3$)

เมื่อไม่มีสนามภายนอก

ก. การหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติเมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวดคงที่และไม่มีสนามภายนอกของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซ ($n = 2, 3, 4, \dots$)

การวิเคราะห์ซุปเปอร์แลตทิซ S-I-N มีวิธีดำเนินการทำนองเดียวกับที่วิเคราะห์ในภาคผนวก ง ในขั้นตอนที่ 1 ทุกประการ กล่าวคือเราทำการแก้สมการ (ง.1) ถึง (ง.9) หาค่าของ q_s , q_i และ q_n ตั้งแต่อุณหภูมิ 1.0 ถึง 9.0 K จะได้ค่าดังแสดงในตาราง 5 คือ

ตาราง 5 แสดงผลของการคำนวณ q_s, q_i, q_n ที่อุณหภูมิวิกฤต T_c ตั้งแต่ 1.0 ถึง 9.0 K

T_c (K)	q_s	q_i	q_n
1.0	0.01745200	0.01496888	0.00469807
1.4	0.01726460	0.01481684	0.00621487
1.6	0.01715212	0.01477207	0.00687200
2.0	0.01689294	0.01451476	0.00805651
2.2	0.01674727	0.01439626	0.00859920
2.4	0.01659151	0.01426943	0.00911576
2.6	0.01642577	0.01413462	0.00960973
3.0	0.01606597	0.01384177	0.01054072
3.4	0.01566911	0.01351885	0.01140897
3.8	0.01523569	0.01316635	0.01222602
4.0	0.01500517	0.01297899	0.01261803
4.4	0.01451590	0.01258175	0.01337323
4.6	0.01425676	0.01237158	0.01373779
4.8	0.01398757	0.01215346	0.01409443
5.0	0.01370800	0.01192716	0.01444366
5.2	0.01342762	0.01169240	0.01478594
5.4	0.01311594	0.01144881	0.01512168
5.8	0.01247614	0.01093349	0.01577497
6.0	0.01213652	0.01066071	0.01609317
6.5	0.01122179	0.00992921	0.01686626
7.0	0.01019512	0.00911501	0.01761029
7.5	0.00902118	0.00815961	0.01843837
8.0	0.00763531	0.00713272	0.01902309
8.5	0.00589309	0.00585102	0.01969665
9.0	0.00327187	0.00415557	0.2035089

นำค่า q_s , q_i , q_n แทนค่าลงในสมการ (ง.10) แก่หาค่าความหนาของตัวนำปกติ (d_n)
 การแก้สมการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการวิเคราะห์ (ตัวอย่างของโปรแกรมแสดงไว้ด้านล่าง) อนึ่งเรา
 ทำการแก้สมการโดยให้ความหนาของตัวนำยิ่งยวด (d_s) 30, 50, 100 Å ดังนั้นผลการคำนวณที่
 ได้จะมีจำนวน 3 ชุด เราได้ทำการสรุปไว้ในตาราง 6

ตัวอย่าง ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าความหนาของตัวนำปกติที่อุณหภูมิวิกฤต $T_c = 1.0$ K
 ในกรณีที่ $d_s = 30, 50, 100$ Å

```

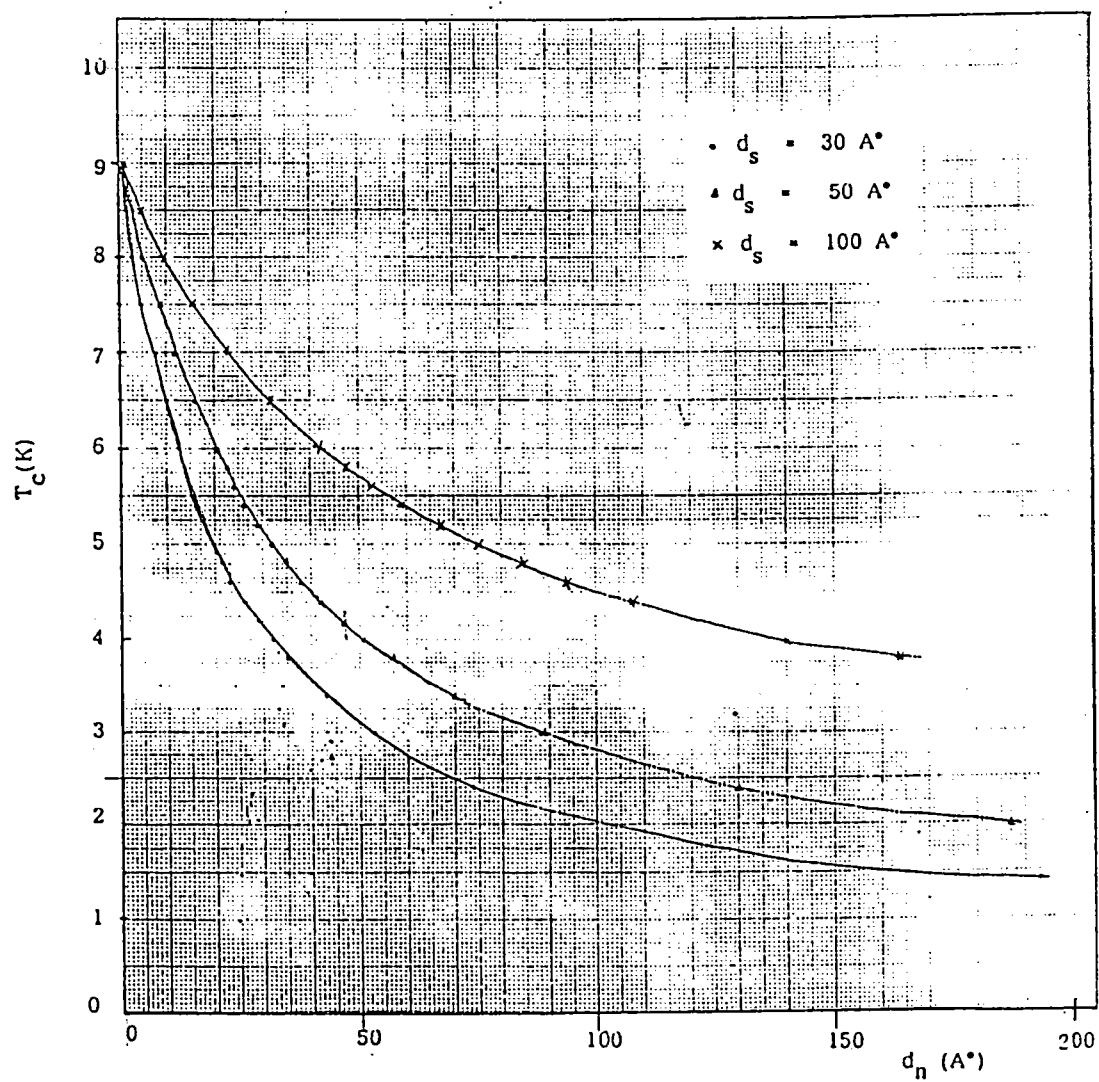
FILE 6 = "REPORT/NDI", UNIT= PRINT, BD
A      = 1.001
B      = -1.001
TC     = 1.00
QI     = 0.01496885
QN     = 0.004698069
QS     = 0.017452003
QI8    = 8 * QI
QI4    = 4 * QI
DO 20 I = 1, 3
  IF (I .EQ. 1) DS = 30.0
  IF (I .EQ. 2) DS = 50.0
  IF (I .EQ. 3) DS = 100.0
  WRITE (6,2) TC,DS,QI,QN,QS
  SPG11 = (QI**2 * 1.3 * 0.75)/(QS*QN)
  SPG12 = 1. / SPG11
  SPG21 = QN / (0.75 * QI)
  SPG22 = 1. / SPG21
  SPG31 = (1.3 * QN) / (0.75 * QS)
  SPG32 = 1. / SPG31
  SPG41 = QS / (1.3 * QI)
  SPG42 = 1. / SPG41
  SPS1 = (1./2.) * (SPG11 - SPG12)
  SPS2 = (1./2.) * (SPG21 - SPG22)
  SPS3 = (1./2.) * (SPG31 - SPG32)
  SPS4 = (1./2.) * (SPG41 + SPG42)
  DO 10 LAM = 1, 200
    QSLAM = QS * DS
    QNLAM = QN * (LAM - 1)
    SUMCOS = COS(QSLAM) * COSH(QNLAM) * COS(QI8)
    SUMSSS = SIN(QSLAM) * SINH(QNLAM) * (SIN(QI4)**2)
    SUMCSS = COS(QSLAM) * SINH(QNLAM) * SIN(QI8)
    SUMSSC = SIN(QSLAM) * SINH(QNLAM) * (COS(QI4)**2)
    SUMSSS = SIN(QSLAM) * COSH(QNLAM) * SIN(QI8)
    VALUE1 = SPS1 * SUMSSS
    VALUE2 = SPS2 * SUMCSS
    VALUE3 = SPS3 * SUMSSC
    VALUE4 = SPS4 * SUMSCS
    VALUE = SUMCOS + VALUE1 + VALUE2 + VALUE3 - VALUE4
    IF ((VALUE .LE. A) .AND. (VALUE .GE. B)) WRITE (6,1) LAM, VALUE
  10 CONTINUE
  20 CONTINUE
  1  FORMAT (2X,I4,2X,F10.8/)
  2  FORMAT (2X,F5.2,1X,F5.1,3(1X,F17.8)/)
  STOP
  END

```

ตาราง 6 แสดงผลการคำนวณความหนาของตัวนำปกติต่ออุณหภูมิวิกฤตที่ความหนาของตัวนำยั่ววด
มีค่า 30, 50, และ 100 Å° ในกรณีที่ระบบเป็น S-I-N ชุปเปอร์แลตทิซ

T_c (K)	$d_s = 30 \text{ Å}^\circ$ $d_n (\text{Å}^\circ)$	$d_s = 50 \text{ Å}^\circ$ $d_n (\text{Å}^\circ)$	$d_s = 100 \text{ Å}^\circ$ $d_n (\text{Å}^\circ)$
1.4	193	∞	∞
2.0	104	∞	∞
2.4	74	130	∞
3.0	53	89	∞
3.4	43	70	∞
3.8	35	57	164
4.0	32	51	140
4.2	29	47	122
4.4	26	42	107
4.6	23	38	94
4.8	22	35	84
5.0	20	32	75
5.2	18	29	67
5.4	16	26	59
5.6	15	24	53
5.8	14	23	47
6.0	13	21	42
6.5	10	16	32
7.0	8	12	23
7.5	5	9	16
8.0	3	5	10
8.5	2	3	5
9.0	1	1	1

นำค่าในตาราง 6 มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของตัวนำปกติกับ
อุณหภูมิวิกฤตจะได้ภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับชั้นความหนาของตัวนำปกติของ S-I-N ชุปเปอร์แลคทิกซ์ โดยแต่ละเส้นมีชั้นความหนาของตัวนำยิ่งยวดต่างกันเป็น 30, 50, 100 Å

ข. การหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติเมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวดคงที่และไม่มีสนามภายนอกของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น ($n = 3$)

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของระบบนี้เริ่มจากสมการ (จ.1) ถึง (จ.9) ทำนองเดียวกับการวิเคราะห์ในข้อ ก. ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตาราง 5 สมการที่ต้องดำเนินการแก้คือสมการเงื่อนไขบังคับ (4.2) เพื่อให้เกิดความชัดเจนเราเขียนสมการ (4.2) ใหม่เป็น

$$q_s \tan\left(\frac{q_s d_s}{2}\right) = \eta_s q_i \frac{\alpha - \tan(q_i d_i)}{1 + \alpha \tan(q_i d_i)} \quad (\text{จ.1})$$

$$\text{เมื่อ} \quad \alpha = [q_n / \eta_n q_i] \tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) \quad (\text{จ.2})$$

จากสมการ (จ.1) และ (จ.2) สามารถรวมเข้าด้วยกันเมื่อจัดพจน์ใหม่จะได้รูปสมการเป็น

$$\tanh\left(\frac{q_n d_n}{2}\right) = [\eta_n q_i / q_n] \frac{[q_s / \eta_s q_i] \tan(q_s d_s / 2) + \tan(q_i d_i)}{1 - [q_s / \eta_s q_i] \tan(q_s d_s / 2) \tan(q_i d_i)} \quad (\text{จ.3})$$

สมการ (จ.3) เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆจะมีเพียงค่า d_n ที่เป็นพารามิเตอร์ที่แท้จริง ผู้วิจัยใช้โปรแกรมตามตัวอย่างข้างล่างคำนวณค่าด้านซ้ายมือของสมการ (จ.3) เราสมมุติว่ามีค่าเท่ากับ z ดังนั้นสมการ (จ.3) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \tanh(q_n d_n / 2) &= z \\ d_n &= [2 / q_n] \tanh^{-1} z \end{aligned} \quad (\text{จ.4})$$

อนึ่งการใช้โปรแกรมที่กล่าวมาแล้วนั้นผู้วิจัยทำการคำนวณค่า d_n โดยประมาณ การแก้สมการ (จ.4) โดยเครื่องคิดเลขทำให้ค่าที่ได้ละเอียดยิ่งขึ้น ผลการคำนวณดังแสดงในตาราง 7

ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาค่าชั้นความหนาของตัวนำปกติที่อุณหภูมิวิกฤต $T_c = 9.0$ K

โดยมีชั้นความหนาของตัวนำยิ่งยวดเป็น 30, 50 และ 100 Å

```

FILE 6 = "REPORT/NO1", UNIT= PRINT, DD
DOUBLE PRECISION QSL,Q14, A2
A1 = 0.71
A2 = 1.80D+0
TC = 9.00
QI = 0.0041555716
QN = 0.02035089
QS = 0.7032718711
WRITE (6,2)
WRITE (6,3) QI,QN,QS,TC
DO 10 I = 1, 3
  IF (I .EQ. 1) DS = 30.0
  IF (I .EQ. 2) DS = 50.0
  IF (I .EQ. 3) DS = 100.0
  Q14 = 4 * QI
  QSL = QS * DS / 2
  QSTAN = QTAN(QSL)
  Q4TAN = QTAN(Q14)
  UPPART = QS * QSTAN / (1.3 * QI) + Q4TAN
  TLCHPT = 1 - (QS / (1.3 * QI) * QSTAN * Q4TAN)
  TANHRS = (0.75 * QI / QN) * UPPART / TLCHPT
  WRITE (6,4) DS, TANHRS
  DO 20 J = 1, 2000
    A3 = QN * J / 2
    TANHCL = TANH(A3)
    DIFF = TANHRS - TANHCL
    DIFABS = ABS(DIFF)
    IF (DIFABS .GT. A1) GO TO 20
    N = J
    WRITE (6,5) N, TANHRS, TANHCL
20  CONTINUE
10  CONTINUE

2  FORMAT (5X,"QI-VALUE",9X,"QN-VALUE",10X,"QS-VALUE",7X,
"TC-VALUE"/)
3  FORMAT (2X,3(F15.10,2X),2X,F5.2/)
4  FORMAT (2X,"DS = ",F6.1,5X,"TANH(QNDN/2) = ",F20.10/)
5  FORMAT (2X,"DN = ",I4,2X,"TANRS = ",F18.10,2X,
"TANCL = ",F18.10/)
STOP
END

```

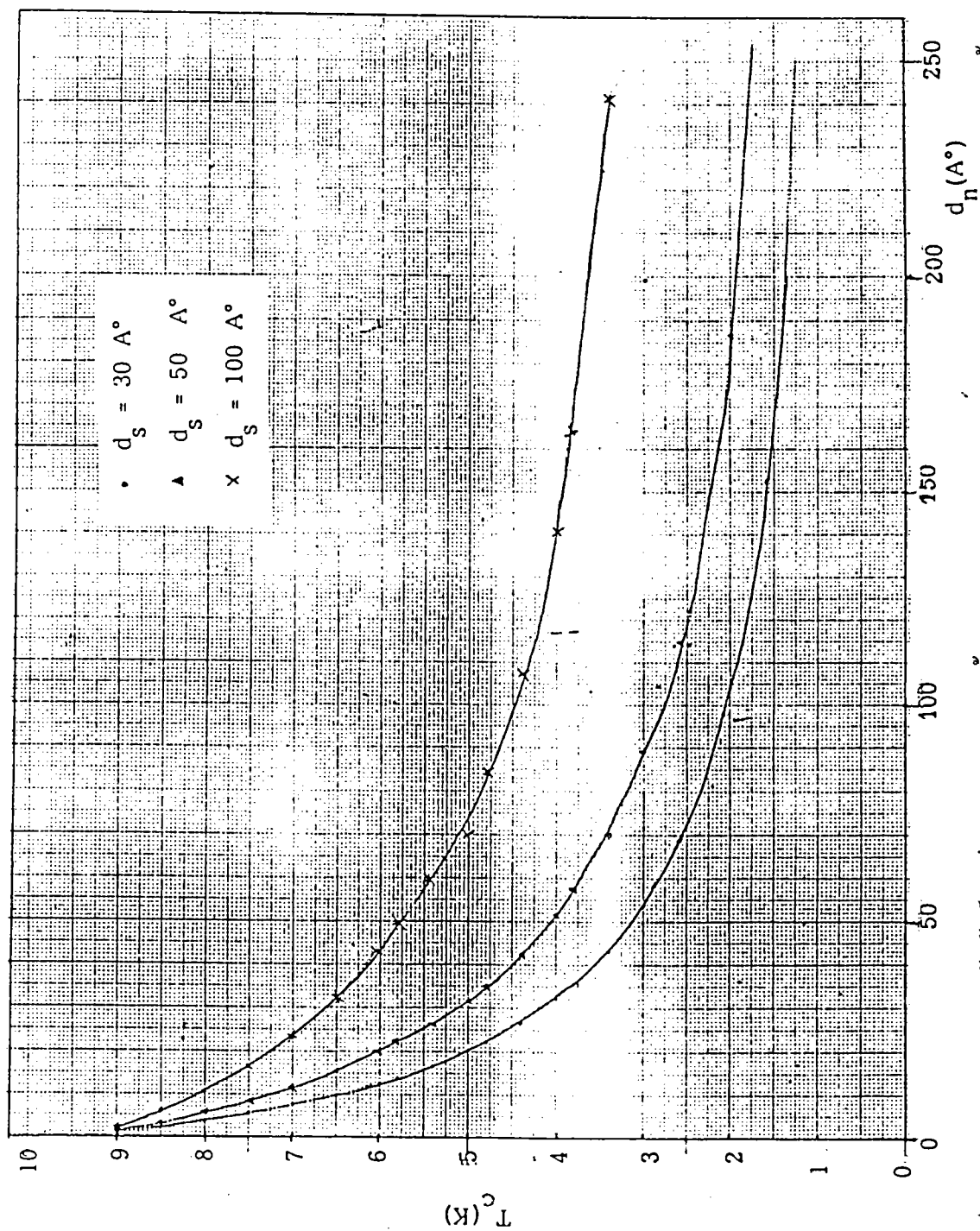
หมายเหตุ J ในที่นี้คือความหนาของตัวนำปกติซึ่งกำหนดไว้ในโปรแกรมเป็นเลขจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจากการคำนวณจะได้ค่า d_n โดยประมาณ การคำนวณค่าโดยละเอียดใช้ค่าของ "TANH(QNDN/2)" หมายถึง z ในสมการ(จ.4) ดังได้กล่าวมาแล้ว

ผลของการคำนวณจะได้ค่าความหนาของตัวนำปกติที่อุณหภูมิวิกฤตและความหนาของตัวนำยิ่งยวดต่างๆดังตาราง 7

ตาราง 7 แสดงผลการคำนวณความหนาของตัวนำปกติต่ออุณหภูมิวิกฤตและความหนาของตัวนำยิ่งยวดที่ 30, 50 และ 100 A° ของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซระบบสามชั้น (n= 3) เมื่อระบบไม่มีสนามภายนอก ($H_{c2}=0$)

T_c (K)	$d_s = 30 \text{ A}^\circ$ $d_n (\text{A}^\circ)$	$d_s = 50 \text{ A}^\circ$ $d_n (\text{A}^\circ)$	$d_s = 100 \text{ A}^\circ$ $d_n (\text{A}^\circ)$
1.4	193.63	321.81	$\propto$
1.6	152.56	298.64	$\propto$
2.0	104.33	186.97	$\propto$
2.6	67.74	115.12	$\propto$
3.0	53.56	88.96	$\propto$
4.4	43.02	70.75	204.92
4.0	32.01	82.86	140.67
4.4	26.57	42.71	107.37
4.8	22.14	35.35	84.22
5.0	20.23	32.19	75.02
5.4	16.86	26.67	59.89
5.8	14.00	22.02	49.94
6.0	12.72	19.96	42.86
6.5	9.90	15.44	32.13
7.0	7.50	11.63	34.55
7.5	5.44	8.38	16.56
8.0	3.66	5.58	10.76
8.5	2.09	3.14	5.89
9.0	0.07	1.00	1.76

นำค่าจากตาราง 7 มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของตัวนำปกติจะได้ภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับชั้นความหนาของตัวนำปกติของ S-I-N จังก์ชันแลตทิซระบบสามชั้น

($n=3$) โดยแต่ละเส้นมีความหนาของตัวนำยิ่งยวดเป็น 30, 50, 100 Å และระบบไม่มีสนามภายนอก ($H_{c2}=0$)

ภาคผนวก ฉ

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต

กับค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางของ

S-I-N ซูเปอร์แลตทิซ

การหาค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากของ S-I-N ซูเปอร์แลตทิซเริ่มด้วยการแก้สมการ (ง.1) ถึง (ง.3) และ (ง.4) ถึง (ง.6) ทำนองเดียวกับที่กล่าวมาแล้วในภาคผนวก ง ผลของการคำนวณเราจะได้ค่า k_s^2 , k_i^2 และ k_n^2 ดังแสดงในตาราง 8 ดังต่อไปนี้

ตาราง 8 แสดงผลการคำนวณ k_s^2 , k_i^2 และ k_n^2 ที่อุณหภูมิวิกฤต T_c ใดๆ

T_c (K)	k_s^2 (10^{-4})	k_i^2 (10^{-4})	k_n^2 (10^{-4})
0.6	3.0918991	2.2727410	0.0680952
0.8	3.0713783	2.2585007	0.1423110
1.0	3.0457243	2.2406752	0.2207183
1.4	2.8906645	2.1953826	0.3862460
1.8	2.8995430	2.1387935	0.5599334
2.0	2.8537157	2.1067812	0.6490729
2.2	2.8047112	2.0725243	0.7394626
2.4	2.7527818	2.0361664	0.8309699
2.6	2.6980607	1.9978757	0.9234697
2.8	2.6408088	1.9577639	1.1016863
3.0	2.5811552	1.9159455	1.1110690
3.2	2.5192460	1.8725217	1.2060163
3.4	3.4552126	1.8275925	1.3016462
3.6	2.3891816	1.7812353	1.3979078
3.8	2.3212637	1.7335273	1.4947547
4.0	2.2515516	1.6845360	1.5921467
4.2	2.1801364	1.6343523	1.6900517
4.6	2.0325518	1.5305593	1.8872693
5.0	2.8790923	1.4225705	2.0861937
5.2	1.8003263	1.3671227	2.1862402

แทนค่า k_s^2 , k_i^2 และ k_n^2 ลงในสมการ(ง.7) (ง.8)และ(ง.9)เพื่อหาค่ารากของ q_s , q_i และ q_n ที่เหมาะสมอันทำให้สมการ(ง.10)เป็นจริง ขบวนการดังกล่าวนี้ทำได้ด้วยการเขียนโปรแกรมขึ้นแล้วให้คอมพิวเตอร์ช่วยในการทดสอบดังตัวอย่างโปรแกรมที่ผู้วิจัยใช้ในการวิจัยต่อไปนี้

ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้คำนวณค่าสูงของสนามวิกฤต(H_{c2})ที่กำหนดให้ซูเปอร์แลตทิซมีคาบ(Λ)22Å°

```

                                PROGRAM TEST
DATA TC,AKS,AKI,AKN,h / 0.,0.,0.,0.,0./
READ (*,3) TC,AKS,AKI,AKN,h
3  FORMAT (F3.1,3(2X,F9.7),2X,F6.4)
WRITE (3,2) TC,AKS,AKI,AKN
2  FORMAT (2X,F3.1,3(2X,F9.7))
DO 10 LOOPH = 1,2000
h = h + .0001
QI = SQRT(AKI-h)/100.
QN = SQRT(AKN+h)/100.
QS = SQRT(AKS-h)/100.
QI8 = 8 * QI
QI4 = 4 * QI
SPG11 = (QI**2 * 1.3 * 0.75)/(QS*QN)
SPG12 = 1./SPG11
SPG21 = QN/(0.75*QI)
SPG22 = 1./SPG21
SPG31 = (1.3*QN)/(0.75*QS)
SPG32 = 1./SPG31
SPG41 = QS/(1.3*QI)
SPG42 = 1./SPG41
SPS1 = (1./2.)*(SPG11-SPG12)
SPS2 = (1./2.)*(SPG21-SPG22)
SPS3 = (1./2.)*(SPG31-SPG32)
SPS4 = (1./2.)*(SPG41+SPG42)
QSLAM = QS*7
QNLAM = QN*7
SUMCOS = COS(QSLAM)*COSH(QNLAM)*COS(QI8)
SUMSSS = SIN(QSLAM)*SINH(QNLAM)*(SIN(QI4)**2)
SUMCSS = COS(QSLAM)*SINH(QNLAM)*SIN(QI8)
SUMSSC = SIN(QSLAM)*SINH(QNLAM)*(COS(QI4)**2)
SUMSCS = SIN(QSLAM)*COSH(QNLAM)*SIN(QI8)
VALUE1 = SPS1*SUMSSS
VALUE2 = SPS2*SUMCSS
VALUE3 = SPS3*SUMSSC
VALUE4 = SPS4*SUMSCS
VALUE = SUMCOS+VALUE1+VALUE2+VALUE3-VALUE4
IF (VALUE .LE. 1.0001) THEN
1  WRITE (3,1) h,VALUE
   FORMAT (2X,F6.4,2X,F15.8)
   ELSE
   STOP
   ENDIF
10 CONTINUE
END

```

ผลการหาค่าสูงของสนามวิกฤตที่ความยาวคาบ(Λ) 124 และ 224° ดังแสดงในตาราง 9

และ 10 ตามลำดับ

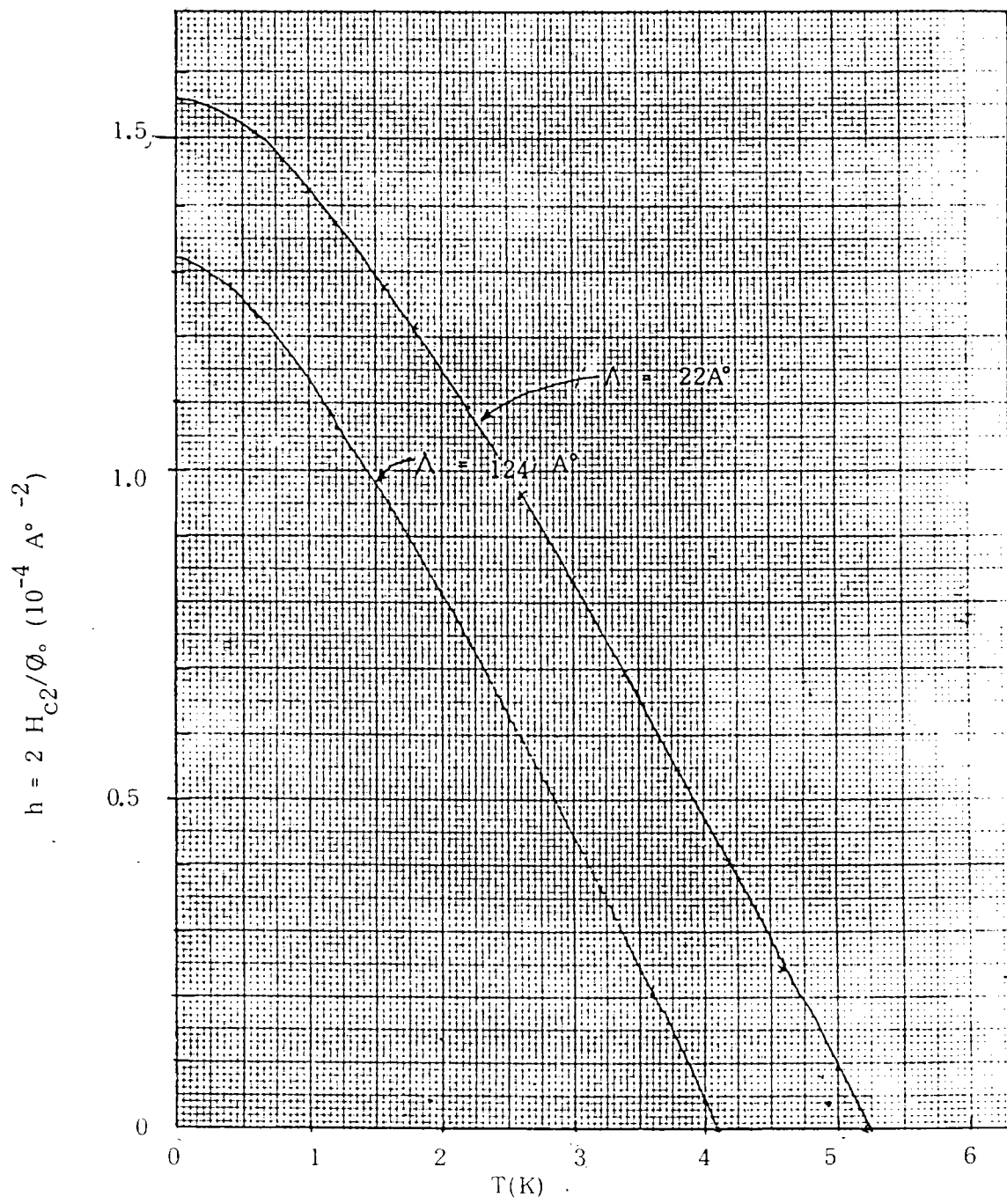
ตาราง 9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าสูงของสนามวิกฤตที่ความยาวคาบ(Λ) 124°

T_c (K)	$h = 2\pi H_{c2}/\phi_0$ ($\times 10^{-4} \text{ A}^\circ^{-2}$)
0.4	1.2805
0.6	1.2367
0.8	1.1872
1.0	1.1333
1.2	1.0756
1.6	0.9520
2.0	0.8165
2.2	0.7460
2.6	0.5996
3.0	0.4468
3.2	0.3683
3.6	0.2074
4.0	0.0420
4.1	0.0000

ตาราง 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าสูงของสนามวิกฤตที่ความยาวคาบ (λ) $22\text{\AA}$

T_c (K)	$h = 2\pi H_{c2}/\phi_0$ ($\times 10^{-4} \text{ A}^\circ^{-2}$)
0.6	1.5070
0.8	1.4667
1.0	1.4222
1.2	1.3742
1.6	1.2740
1.8	1.2126
2.2	1.0932
2.6	0.9661
3.0	0.8326
3.4	0.6935
3.8	0.5494
4.2	0.4009
4.6	0.2485
5.0	0.0925
5.2	0.0000

เมื่อนำค่าจากตาราง 6 และ 7 มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตกับค่าสูงของสนามวิกฤตดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทาง
ของ S-I-N ซุปเปอร์แลตทิซที่มีค่า Λ 124 A° กับ 22 A°

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายอภิชัย ชื่อสกุล ตีรณวัฒนากุล

เกิดวันที่ 1 เดือน มิถุนายน พุทธศักราช 2499

สถานที่เกิด อำเภอเมือง จังหวัดลำปาง

สถานที่อยู่ปัจจุบัน บ้านเลขที่ 370 ถนนเม็งราย ตำบลสบตุ๋ย

อำเภอเมือง จังหวัดลำปาง 54000

ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน อาจารย์ 1

สถานที่ทำงานปัจจุบัน สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตน่าน

อำเภอเมือง จังหวัดน่าน 55000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.2518 เติร์มอุดมศึกษา (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย

พ.ศ.2522 วท.บ. (วิชาเอกฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยเชียงใหม่

พ.ศ.2533 กศ.ม. (วิชาเอกฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

ค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศตั้งฉากและอนุหภูมิวิกฤตของระบบที่ประกอบด้วยชุด
ตัวนำยิ่งยวด-ชั้นกลาง-โลหะปกติซ้อนกันหลายชุด

บทคัดย่อ

ของ

อภิชาติ ตีระวัฒนากุล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตรเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอก ฟิสิกส์

กุมภาพันธ์ 2533

การวิจัยครั้งนี้มีจุดประสงค์ที่จะศึกษาระบบซูเปอร์แลตทิซที่ประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวด (S) ประกบกับโลหะปกติ (N) และมีชั้นกลาง (I) ซึ่งเกิดขึ้นบริเวณผิวรอยต่อของตัวนำทั้งสอง เราได้ใช้สมการของไอเลนเบอร์เกอร์คำนวณหาค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางและอุณหภูมิวิกฤตของระบบนี้ ทฤษฎีที่ได้พัฒนาใหม่นี้ครอบคลุมทฤษฎีของระบบซูเปอร์แลตทิซอื่นๆอันได้แก่ ระบบ S-N ซูเปอร์แลตทิซที่ประกอบด้วยสองชั้น (bimetallic S-N superlattice) และกรณีระบบ S-I-N ระบบสามชั้น (S-I-N trilayer) การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของทฤษฎีนี้ให้ผลสอดคล้องกับการทดลองกรณีของ Nb/Ti ซูเปอร์แลตทิซ กล่าวคือค่าอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับคาบของระบบ เมื่อค่าระยะอิสระเฉลี่ยของอิเล็กตรอน (l) ในระบบน้อยกว่ากรณีที่เป็นแท่งใหญ่ ทั้งนี้เราอาจอธิบายได้ว่าอาจสืบเนื่องจากการที่เราไม่ได้คำนึงถึงการขึ้นกับทิศทาง (anisotropy) ของระยะอิสระเฉลี่ยของอิเล็กตรอน ซึ่งส่งผลกระทบต่อความยาวอาพันธ์ด้วย ทฤษฎีนี้ยังได้ทำนายค่าสูงของสนามวิกฤตในทิศทางที่ขึ้นกับคาบของระบบเช่นเดียวกับการณ์ของอุณหภูมิวิกฤต กล่าวคือค่าดังกล่าวจะเพิ่มเมื่อระยะคาบลดลง และชั้นกลางระหว่างตัวนำทั้งสองมีบทบาทมากขึ้น

PERPENDICULAR UPPER CRITICAL FIELD AND CRITICAL TEMPERATURE
OF SUPERCONDUCTOR-INTERFACE-NORMAL METAL MULTILAYER

AN ABSTRACT

BY

APICHAJ TRERANAWATTANAKUL

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Physics
at Srinakharinwirot University
February 1990

The purpose of this research was to study the properties of superlattice system which was composed of superconductor and normal-metal with an interface between them. We used the Eilenberger's equation to calculate the perpendicular upper critical field and the critical temperature. Our theory recovers the other superlattice results such as the S-N superlattice and S-I-N trilayer. The numerical results correspond to experimental data for a Nb/Ti superlattice. The critical temperature is found to depend on the period of the system, by having taken a much smaller mean free-path (l) than the bulk values. These discrepancies may be due to our neglect of anisotropy of l and, thereby, of the coherence length. The theory predicts a periodic dependence of the perpendicular upper critical field similar to that of the critical temperature, with a characteristic increase at small period, where the interface is significant.