

กระแสน้ำไหลในกระบอกของตัวนำขดขึงแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร
/ตัวนำขดขึงแม่เหล็กเฟอร์โร

ปริมาตร
ของ
น้ำแข็ง สดชื่น

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2548

กระแสน้ำไหลในกระบอกของตัวนำเวดจ์แม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร
/ตัวนำเวดจ์แม่เหล็กเฟอร์โร

บทคัดย่อ
ของ
บำเหน็จ สุตชมนิคม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2548

บำเหน็จ สุตตมโณม. (2548). กระแสใจเซพสันในระบบรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์. ปรินญานิพนธ์ วท.ม. (ฟิลิปปินส์).
กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :
ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน, รองศาสตราจารย์ ดร. ณสรณ์ ผลโกค.

การวิจัยเรื่องกระแสใจเซพสันในระบบรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาสมการกระแสใจเซพสันของระบบรอยต่อใจเซพสันที่ครอบคลุมกรณีต่างๆที่ได้เคยมีการคำนวณมาแล้วและยังไม่ได้มีใครเคยคำนวณมาก่อน โดยใช้สมการบีดีจี และสูตรกระแสใจเซพสันจากงานวิจัยของ ฟุรุซากิ กับ ชูกาดะ
ผลการวิจัยกระแสใจเซพสันที่ได้ ยืนยันว่าถูกต้องเมื่อลดรูปได้ตรงกับงานวิจัยเดิมของรอยต่อกระแสใจเซพสันในระบบต่างๆที่เคยถูกคำนวณมาแล้ว อีกทั้งได้สมการกระแสใจเซพสันในระบบรอยต่อใจเซพสันใหม่ที่ยังไม่เคยมีใครคำนวณมาก่อนด้วย

JOSEPHSON CURRENT IN FERROMAGNETIC SUPERCONDUCTOR/
FERROMAGNETIC INSULATOR / FERROMAGNETIC SUPERCONDUCTOR

AN ABSTRACT
BY
BUMNED SOODCHOMSHOM

Presented in partial fulfillment of requirements
for the Master of Science degree in Physics
at Srinakharinwirot University
May 2005

Bumned Soodchomshom. (2005). *Josephson Current in Ferromagnetic Superconductor/ Ferromagnetic Insulator/ Ferromagnetic Superconductor*. Master thesis, M.S. (Physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Professor. Dr. Suthat Yoksan, Associate. Professor. Dr. Nason Phonphok.

The purpose of this research is to derive a formula for the direct Josephson current in a ferromagnetic superconductor/ ferromagnetic insulator/ ferromagnetic superconductor junctions by using the B-dG equations and the Josephson current formula of Furusaki and Tsukada. The resulting formula is found to be correct because it recovers all the formulas for various types of superconducting junctions as obtained by other investigations under suitable boundary conditions. Many new formulas, never obtained before, are also presented.

กระแสใจเซพสันในระบรรอยต่อของตัวนำวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร
/ตัวนำวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร

ปริญญานิพนธ์
ของ
บำเหณีจ สุตชมนอม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2548
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

กระแสใจเซพสันในระบบรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร
/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร

ของ
นายบำเหน็จ สุธชมโนม

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.....ประธาน
(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

.....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ณสรณ์ ผลโภค)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ ดร. ไชยพงศ์ จัตรภรณ์)

ประกาศคุณูปการ

เนื่องด้วยปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยฟิสิกส์ทฤษฎี ซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะและชี้นำการทำงานจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน จนทำให้งานวิจัยลุล่วงได้ และรวมทั้งความเมตตาและความใจกว้างของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของการทำวิจัยที่ผ่านมา ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ณสเรศ ผลโภาค ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย และอาจารย์ ดร. ไชยพงศ์ ฉัตรภรณ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่า รวมทั้งคำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆเพิ่มเติมเกี่ยวกับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ และต้องกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย อีกครั้งสำหรับคำแนะนำเกี่ยวกับโปรแกรมคำนวณคณิตศาสตร์

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาคฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ได้ให้ความรู้และคำปรึกษาแก่ผู้วิจัยตลอดการศึกษาที่ผ่านมา

ขอบคุณนิสิตปริญญาโทฟิสิกส์ และรวมทั้งพนักงานที่ทำงานในภาคฟิสิกส์ทุกคนที่ได้ให้ความช่วยเหลือในหลายๆเรื่องแก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ผ่านไป

และท้ายสุด ผู้วิจัยต้องขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และบุคคลภายในครอบครัวเป็นอย่างสูงที่ได้ให้การสนับสนุน ไว้เนื้อเชื่อใจ และให้ความสำคัญต่อการศึกษาจนยอมให้ผู้วิจัยศึกษาวิชาฟิสิกส์ต่อในระดับปริญญาโท ซึ่งเป็นแขนงวิชาเดียวที่ผู้วิจัยมุ่งที่จะศึกษาต่อ

บำเหน็จ สุตชมโนม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	14
สมการบีดีจี.....	14
ทฤษฎีของปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดตรงและ การสะท้อนแบบแอนเดรฟ.....	17
ทฤษฎีกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบบรอยด์ของ ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร...	26
3 วิธีคำนวณกระแสโจเซฟสัน.....	38
4 ผลการวิจัย.....	71
5 สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ.....	130
สรุปผลการวิจัย.....	130
อภิปรายผลการวิจัย.....	134
ข้อเสนอแนะ.....	135
บรรณานุกรม.....	137
ภาคผนวก.....	138
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	152

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในปรอทบริสุทธิ์ของ คาเมอร์ลิงห์ โอนเนส.....	1
2 กราฟแสดงเหตุการณ์ค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่สำคัญๆ.....	2
3 ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง.....	2
4 ปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์(Meissner effect)ในตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1.....	3
5 แสดงธรรมชาติของสนามแม่เหล็กทั้งภายนอกและภายในตัวนำยวดยิ่ง.....	4
6 แสดงการเกิดคู่คูเปอร์ในทฤษฎี บีซีเอส(BCS Theory).....	5
7 แสดงรอยต่อโจเซฟสัน $s/I/s$ ที่เกิดจากตัวนำยวดยิ่งสองตัวประกบกันโดยมีฉนวน บางๆคั่น.....	6
8 แสดงการกำหนดฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ในรอยต่อโจเซฟสัน $s/I/s$ เมื่อเกิด ปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดกระแสตรง.....	7
9 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง I_s/I_c กับ $\Delta\phi$ จากสมการ(1.18).....	9
10 การไบอัส(bias)รอยต่อโจเซฟสันโดยแหล่งจ่ายกระแสและวงแหวนที่ไบอัสโดย ฟลักซ์ภายนอก Φ_{ext} (external flux).....	10
11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง I_s/I_c กับ Φ/Φ_0 จากสมการ(1.20).....	10
12 กราฟความสัมพันธ์จากสมการ(1.22) แสดงให้เราเห็นว่าความถี่โจเซฟสันแปรตาม ค่าของแรงดันคร่อมรอยต่อโจเซฟสัน v	11
13 แสดงกราฟ I/v ของความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับแรงดัน v ที่ได้จากรอยต่อ โจเซฟสัน $s/I/s$).....	12
14 แสดงแผนภาพของฟายน์แมน(Feynman diagram) ของคู่คูเปอร์ตามทฤษฎีบีซีเอส.	14
15 แสดงภาพการกระเจิงของอนุภาคควอไซที่รอยต่อโจเซฟสัน.....	17
16 แสดงภาพของรอยต่อโจเซฟสันแบบ ตัวนำยวดยิ่ง ₁ /ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง ₂ เมื่อฉนวนอยู่ที่จุด $x=0$	18
17 แสดงรูปแบบการกระเจิงของคลื่นอนุภาคควอไซที่รอยต่อโจเซฟสันทั้ง 4 รูปแบบ.	19
18 แสดงภาพของรอยต่อโจเซฟสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ ตัวนำยวดยิ่ง ($s/Fi/s$).....	24
19 แสดงการกระเจิงของอนุภาคควอไซที่รอยต่อฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรโดยมีมุมตก กระทบของอนุภาคควอไซเท่ากับ θ	25

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
20 แสดงกราฟของระดับพลังงานยึดเหนี่ยว	25
21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของกระแส $i(p,0)$ กับเฟส φ ที่ได้จากสมการ(2.36).....	26
22 แสดงแนวคิดของเบอเกอร์ต(Bergeret),โวลโคป(Volkov) และเอฟเฟโตบ (Efetov)...	26
23 แสดงการแทนระบบรอยต่อโจเซฟสัน S/F/I/F/S ด้วย ระบบรอยต่อโจเซฟสันของ FS/I/FS	27
24 แสดงภาพโครงสร้างของระบบรอยต่อโจเซฟสัน [FS/I/FS] _p	28
25 แสดงกราฟของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสัน [FS/I/FS] _p เมื่อ h มีค่าน้อยที่อุณหภูมิใกล้ T_c	28
26 แสดงภาพโครงสร้างของระบบของรอยต่อโจเซฟสัน [FS/I/FS] _A	29
27 แสดงกราฟของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสัน [FS/I/FS] _A เมื่อ h มีค่าน้อยที่อุณหภูมิใกล้ T_c	29
28 แสดงฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควาไซในตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 เป็น $\psi_{1\sigma}(x)$ และ $\psi_{2\sigma}(x)$ ตามลำดับ แทนศักย์ของฉนวนด้วย $v\delta(x)$ ซึ่งเป็น เดลต้าฟังก์ชันที่มี v เป็นความสูงของกำแพงศักย์ฉนวน.....	30
29 แสดงภาพระบบรอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ /ฉนวน/ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ โดยที่ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ ทั้งสองเป็นชนิดเดียว กันนั่นคือ $h_{1,2} = h, E_{F1,2} = E_F$ และ $\Delta_{1,2}(T, h_{1,2}) = \Delta(T, h)$	32
30 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันที่สนามแม่เหล็กขนานเมื่อ $k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (เส้นทึบ), 0.1 (เส้นจุด), 0.2 (เส้นขีดสั้น) และ 0.3 (เส้นขีดยาว) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับ กราฟ (a) ใช้ $z=1$ และ (b) $z=5$	33
31 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กขนาน เมื่อ $h/\Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) โดย $\phi = \pi/2$ ในกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$.	33
32 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กขนานกับความต่างเฟสกำหนดค่า $h/\Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) เมื่อภาพ (a) $z=1$, $k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (b) $z=1, T/T_c = 0.2$ (c) $z=5, k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (d) $z=5, T/T_c = 0.2$	34
33 แสดงภาพระบบรอยต่อโจเซฟสันของตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์/ฉนวน /ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ โดยที่ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ทั้งสอง มีทิศของแมกนีไทเซชันสวนทางกันนั่นคือ $h_1 = -h_2 = h, E_{F1,2} = E_F$ และ $\Delta_{1,2}(T, h_{1,2}) = \Delta(T, h)$	34

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
34 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทาง เมื่อ $k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (เส้นทึบ), 0.1 (เส้นจุด), 0.2 (เส้นขีดสั้น) และ 0.3 (เส้นขีดยาว) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$	35
35 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทางกัน เมื่อ $h / \Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$	35
36 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทางกัน กับความต่างเฟส กำหนดค่าของ $h / \Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) เมื่อภาพ (a) $z=1, k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (b) $z=1, T/T_C = 0.2$ (c) $z=5, k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (d) $z=5, T/T_C = 0.2$	36
37 แสดงรอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบด้วย ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร / ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ซึ่งตัวนำวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกันโดยให้ความหนาของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางมาก.....	38
38 แสดงภาพรอยต่อแบบ $S/I/S$	55
39 แสดงภาพรอยต่อแบบ $S_1/I/S_2$	57
40 แสดงภาพรอยต่อแบบ $S/Fi/S$	58
41 แสดงภาพรอยต่อแบบ $S_1/Fi/S_2$	60
42 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/I/S_2$	61
43 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/Fi/S_2$	63
44 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/I/FS_2$	65
45 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_p$	66
46 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/Fi/FS]_p$	67
47 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$	68
48 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/Fi/FS]_{AP}$	69
49 (a) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta(0)$ กับ T/T_C โดย $\phi = \pi/2$ และ (b) กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta(0)$ กับ K_{SIS} เมื่อ $\phi = \pi/2$	72
50 (a) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta(0)$ กับ ϕ/π โดยมีพลังงานศักย์ฉนวนมีค่าน้อย $K_{SIS} = 2.05$ และ (b) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta(0)$ กับ ϕ/π โดยมีพลังงานศักย์ฉนวนมีค่ามาก $K_{SIS} = 50$	73

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
51 แสดงกราฟของพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยว ϵ ต่อค่าช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)$ กับค่าเฟส φ/π	74
52 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ T_{C2}/T_{C1} เมื่อ $\varphi=\pi/2$ ในช่วงของ T_{C2}/T_{C1} มีค่า 1-30 เท่า (a) $K=1$ และ(b) $K=5$	76
53 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ ค่า φ/π เมื่อ $K=1$ (a) $T/T_{C1}=0.01$ และ(b) $T/T_{C1}=0.2$	77
54 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ ค่า φ/π เมื่อ $K=5$ (a) $T/T_{C1}=0.01$ และ(b) $T/T_{C1}=0.2$	78
55 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ T/T_{C1} เมื่อ $\varphi=\pi/2$ (a) $T_{C2}/T_{C1}=1$ และ(b) $T_{C2}/T_{C1}=5$	79
56 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π (a) $z_0=0$ และ(b) $z_0=0.5$..	81
57 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π (a) $z_0=1$ และ(b) $z_0=2$...	82
58 แสดงสัมพันธ์ระหว่าง $E_b/\Delta(T)$ กับ φ/π (a) $z_0=0$ และ(b) $z_0=0.5$	83
59 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $E_b/\Delta(T)$ กับ φ/π (a) $z_0=1$ และ (b) $z_0=2$	84
60 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ T/T_C (a) $\varphi=\pi/2$ และ(b) $\varphi=\pi/4$	85
61 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ z_0 เมื่อ $\varphi=\pi/2$	86
62 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับความต่างเฟส φ เมื่อ $z=0.5$ และ $k_{F2}/k_{F1}=1$ (a) $T/T_{C1}=0.001$ และ(b) $T/T_{C1}=0.2$	88
63 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับความต่างเฟส φ เมื่อ $z=0.5$ และ $k_{F2}/k_{F1}=2$ (a) $T/T_{C1}=0.001$ และ(b) $T/T_{C1}=0.2$	89
64 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ T/T_{C1} เมื่อ $z=0.5$ และ $\varphi=\pi/2$ (a) $k_{F2}/k_{F1}=1$ และ(b) $k_{F2}/k_{F1}=2$	90
65 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ z เมื่อ $k_{F2}/k_{F1}=1$ และ $\varphi=\pi/2$ (a) $T/T_{C1}=0.001$ และ(b) $T/T_{C1}=0.2$	91
66 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=1$ (a) $T/\Delta(0,0)=0.01$ และ(b) $T/\Delta(0,0)=0.2$	93
67 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=5$ (a) $T/\Delta(0,0)=0.01$ และ(b) $T/\Delta(0,0)=0.2$	94
68 แสดงกราฟระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta(0,0)$ กับ $h/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi=\pi/2$ (a) $K=1$ และ(b) $K=5$	95

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
69 แสดงกราฟระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	96
70 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	97
71 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	98
72 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.01$ (a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$	100
73 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.01$ (a) $z=1$ และ (b) $z=2$	101
74 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$	102
75 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.2$ (a) $z=1$ และ (b) $z=2$	103
76 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=2$	104
77 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=2$	105
78 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระหว่าง $e_{pR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ z เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$	106
79 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{APR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=1$ (a) $T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$	108
80 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{APR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=5$ (a) $T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$	109
81 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{APR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	110
82 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{APR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	111
83 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{APR_N} / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	112

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

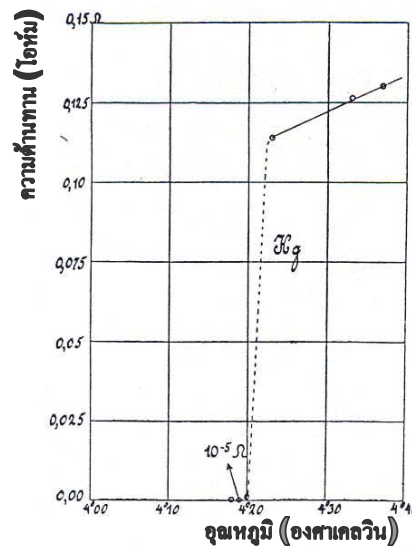
ภาพประกอบ	หน้า
84 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	113
85 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.01$ (a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$	114
86 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.01$ (a) $z=1$ และ (b) $z=2$	116
87 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$	117
88 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.2$ (a) $z=1$ และ (b) $z=2$	118
89 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=2$	119
90 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $z=0$ และ (b) $z=2$	120
91 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ z เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$	121
92 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $elR_N / \pi\Delta_0$ กับ h / Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$	123
93 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $elR_N / \pi\Delta_0$ กับ h / Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $T / \Delta_0 = 0.01$ และ (b) $T / \Delta_0 = 0.2$	125
94 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $elR_N / \pi\Delta_0$ กับ h / Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $T / \Delta_0 = 0.01$ และ (b) $T / \Delta_0 = 0.2$	126
95 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $elR_N / \pi\Delta_0$ กับ h_2 / h_1 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ และ $K=1$ (a) $h_1 / \Delta_0 = 0.05$ และ (b) $h_1 / \Delta_0 = 0.4$	128
96 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $elR_N / \pi\Delta_0$ กับ h_2 / h_1 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ และ $K=5$ (a) $h_1 / \Delta_0 = 0.05$ และ (b) $h_1 / \Delta_0 = 0.4$	129
97 แสดงภาพรอยต่อโจเซฟสันที่ฉนวนมีความหนา.....	135

บทที่ 1

บทนำ

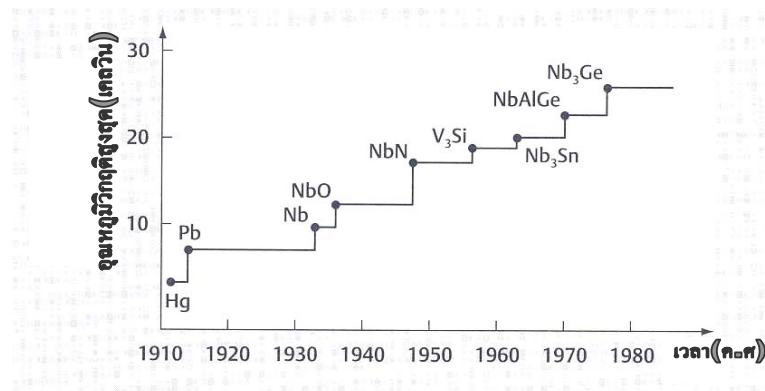
ภูมิหลัง

ปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งถูกค้นพบโดย คาเมอร์ลิงห์ โอนเนส (H. Kamerlingh Onnes)¹ ที่มหาวิทยาลัยไลเดน(Leiden)เมื่อปี ค.ศ.1911 จึงนับเป็นเวลานานเกือบ100ปีแล้วที่สภาพนำยวดยิ่งได้เป็นปรากฏการณ์หนึ่งของวิชาฟิสิกส์ของของแข็ง(Solid state physics)ที่มีความสำคัญทั้งในทางอุตสาหกรรมและวิชาการ และได้สร้างความประหลาดใจให้คนทั้งหลายประจักษ์อย่างต่อเนื่องตลอดมา ปรากฏการณ์นี้ถูกค้นพบครั้งแรกในปรอทบริสุทธิ์เมื่อถูกทำให้มีอุณหภูมิต่ำกว่า 4 องศาสัมบูรณ์อันเป็นอุณหภูมิวิกฤติของฮีเลียมเหลว(ภาพประกอบ 1)



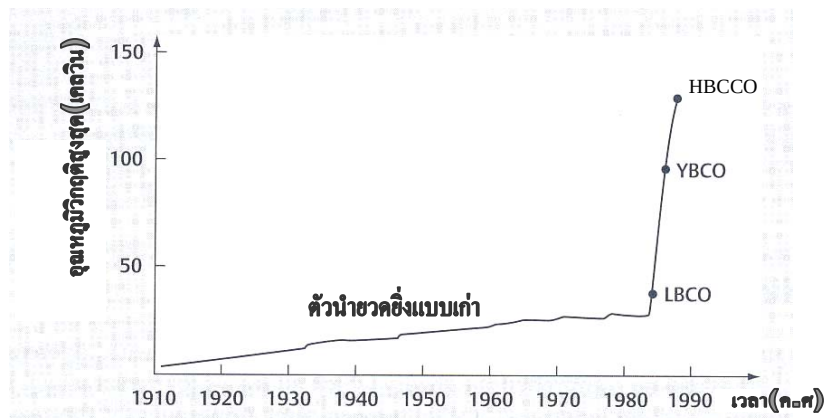
ภาพประกอบ 1 แสดงการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในปรอทบริสุทธิ์ของ คาเมอร์ลิงห์ โอนเนส (Kamerlingh Onnes)¹ ในปี ค.ศ. 1911 (Kittel. 1996 : 334)

การค้นพบคุณสมบัติที่สำคัญของตัวนำยวดยิ่งในเวลาต่อมาได้นำความก้าวหน้ามาสู่วิทยาการด้านวัสดุศาสตร์ เพราะมีการพบสภาพนำยวดยิ่งในโลหะบริสุทธิ์ และ โลหะผสมหลายชนิด² อย่างไรก็ตามสำหรับสารแม่เหล็กเฟอร์โร เช่น นิเกิล และเหล็ก ได้มีการพบว่าธาตุประเภทนี้ไม่แสดงสมบัติสภาพนำยวดยิ่ง ยกเว้นแต่เมื่ออยู่ภายใต้ความดันที่สูงมากเท่านั้นเช่น เหล็กมีค่า $T_c = 2$ องศาเคลวิน³ และต่อมาก็ได้มีความพยายามค้นหาสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤติสูงขึ้นอีก และได้พบว่าสารประกอบ A-15 ซึ่งมี Nb_3Ge เป็นสารตัวอย่างมีอุณหภูมิวิกฤติสูงที่สุดถึง 23 องศาเคลวิน (ภาพประกอบ 2) และตามปรกิตตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤติสูงมักพบเป็นโลหะผสม



ภาพประกอบ 2 กราฟแสดงเหตุการณ์ค้นพบตัวนำยวดยิ่งที่สำคัญในช่วง 70 ปีแรกหลังจากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งเมื่อปี ค.ศ. 1911 (Turton. 2000 : 270)

ในปี ค.ศ.1986 เบดเนอร์ซ กับ มุลเลอร์ (Bednorz and Müller)⁴ ได้พบตัวนำยวดยิ่งชนิดใหม่ที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่าปกติตัวนำยวดยิ่งชนิดใหม่นี้เป็นสารประกอบที่มีแลนทานัมและทองแดงออกไซด์เป็นองค์ประกอบหลัก(ภาพประกอบ 3) และเมื่อถูกโต้ด้วย Ba พบว่ามีอุณหภูมิวิกฤตสูงถึง 35 องศาเซลวิน หลังจากนั้นก็มีการพบว่าสารนี้มีคุณสมบัติที่แตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งแบบเก่า(Conventional superconductor) มากและมีคุณสมบัติใหม่ๆที่นักฟิสิกส์ยังไม่เข้าใจและอธิบายไม่ได้อีกมาก



ภาพประกอบ 3 ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ มี T_c ประมาณ 35 องศาเซลวิน, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ มี $T_c = 92$ องศาเซลวิน และ $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$ มี $T_c = 133$ องศาเซลวิน เป็นต้น (Turton. 2000 : 270)

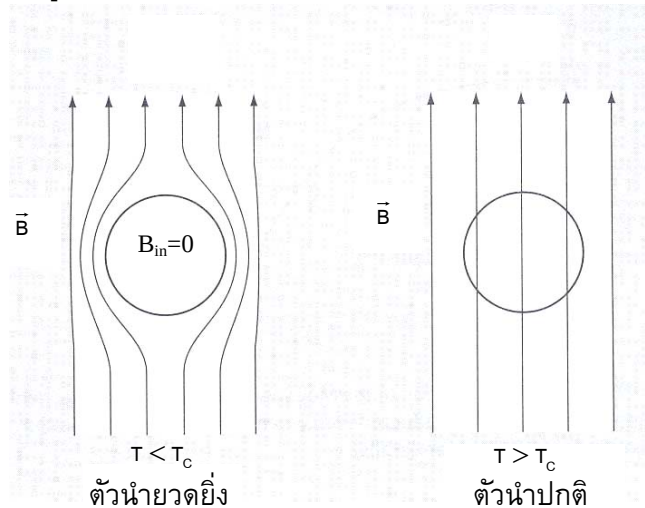
ในการอธิบายคุณสมบัติของสภาพนำยวดยิ่งโดยทั่วไปไม่ได้ใช้รูปแบบของฟิสิกส์แผนเดิม เพราะสภาพนำยวดยิ่งเป็นปรากฏการณ์ควอนตัมที่ต้องการความรู้ด้านทฤษฎี และข้อมูลการทดลองใหม่ๆรวมทั้งวิธีการของฟิสิกส์อนุภาคหลายตัว(Many-body physics) กับทฤษฎีสนามควอนตัม

(Quantum field theory) การผสมผสานอย่างสอดคล้องระหว่างการทดลองและทฤษฎีจะต้องเกิดขึ้น เพื่อหาสาเหตุที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งในสารประกอบเหล่านี้

ลำดับเหตุการณ์ค้นพบที่สำคัญของปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งมีดังนี้

1. ในปี ค.ศ. 1911 คาเมอร์ลิงห์ โอนเนส¹ ได้พบว่าสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์มีค่าเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ (T_c) และอุณหภูมิวิกฤติของปรอทบริสุทธิ์มีค่า 4.2 องศาเคลวิน

2. การค้นพบพฤติกรรมการเป็นสารแม่เหล็กแบบไดอา(Diamagnetism)ในสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1 (สารแม่เหล็กไดอาคือสารที่มีค่าสภาพซึมซับแม่เหล็ก χ เป็นลบ ทำให้ค่าแมกนีไทเซชัน $\vec{m}$ กับสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ในสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1 สวนทิศกัน เนื่องจาก $\vec{m} = -|\chi|\vec{H}$) โดยไมส์เนอร์ และ โอคห์เซนเฟลด์(Meissner and Ochsenfeld)⁵ เป็นผู้พบเหตุการณ์นี้ในปี ค.ศ.1933 ปรากฏการณ์นี้เปิดประตูให้เราเข้าใจธรรมชาติของสภาพนำยวดยิ่งได้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น



ภาพประกอบ 4 ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์(Meissner effect)ในตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสนามแม่เหล็ก B จากภายนอกไม่สามารถผ่านทะลุเข้าไปในตัวนำยวดยิ่งขณะมันมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติได้ โดยสนามแม่เหล็กสามารถทะลุเข้าไปในเนื้อสารตัวนำยวดยิ่งได้เป็นระยะทาง λ เมื่อวัดจากผิว แต่เมื่ออุณหภูมิของสารสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤติ สนามแม่เหล็กภายนอกจะสามารถทะลุผ่านเข้าไปในตัวนำได้ (Turton. 2000 : 253)

3. ในปี ค.ศ.1935 ลอนดอน(F.London)⁶ สามารถอธิบายคุณสมบัติที่สนามแม่เหล็กถูกผลักออกจากตัวนำยวดยิ่ง(Meissner-effect flux repulsion)ได้ โดยกำหนดให้ความหนาแน่นกระแสในตัวนำยวดยิ่งสัมพันธ์กับศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก $\vec{A}$ ดังสมการ

$$\vec{J} = -(c/4\pi\lambda_L^2)\vec{A} \quad \dots(1.1)$$

โดยที่ $\lambda_L = (mc^2 / 4\pi e^2 n_s)^{1/2}$ เมื่อ n_s คือความหนาแน่นของของเหลวยวดยิ่ง(Superfluid) , m แทนมวลของอิเล็กตรอน, c เป็นความเร็วแสงในสุญญากาศและ e เป็นประจุของอิเล็กตรอน การใช้สมการ(1.1)กับสมการของแมกซ์เวลล์ทำให้อันดอน สามารถอธิบายปรากฏการณ์ไมสเนอร์(Meissner effect) โดยใช้สมการแมกเวลล์ ได้ดังนี้

เพราะว่า
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

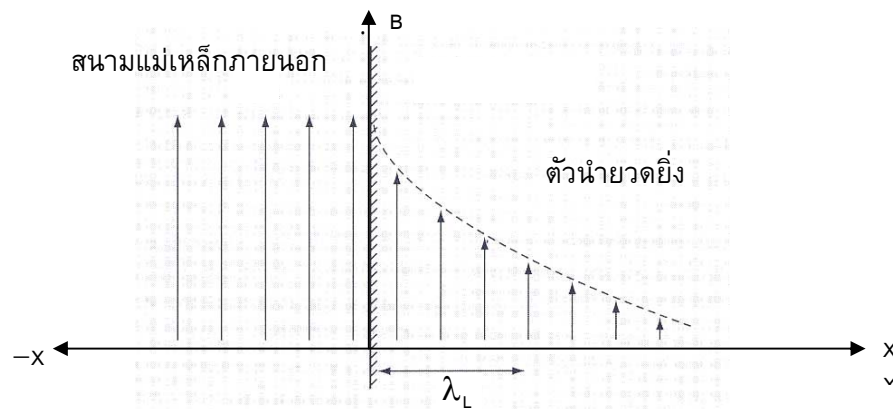
เมื่อทำการเคิร์ลสมการนี้ จะได้

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(-\frac{c}{4\pi \lambda_L^2} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \quad \text{แต่ } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ และเมื่อ } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

ดังนั้น
$$\nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad \dots(1.2)$$

ผลเฉลยของสมการ(1.2)คือ $\vec{B}(x) = \vec{B}_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$ สมการนี้แสดงธรรมชาติของสนามแม่เหล็กในแนวแกน x โดยมี λ_L เป็นค่าความยาวของการทะลุ(Penetration depth)



ภาพประกอบ 5 แสดงธรรมชาติของสนามแม่เหล็กทั้งภายนอกและภายในตัวนำยวดยิ่งที่สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการ(1.2)

4. ปรากฏการณ์ไอโซโทป(Isotope effect)คือการที่ค่าอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยวดยิ่งขึ้นกับมวลไอโซโทปตามสมการ $T_c \propto M^{-\alpha}$ และ $\alpha \cong 0.5$ สำหรับโลหะบริสุทธิ์ ปรากฏการณ์นี้พบโดย

แมกซ์เวลล์⁷ ในปี ค.ศ 1950 ซึ่งได้ชี้ว่าปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งเกิดจากการที่อิเล็กตรอนมีอันตรกิริยากับโฟนอน ความคิดนี้ได้รับการยอมรับสำหรับการอธิบายสาเหตุที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งในเวลาต่อมา

5. ทฤษฎีของกินซ์เบิร์ก-แลนดาว(Ginzburg-Landau Theory)⁸ ในปี ค.ศ.1950 กินซ์เบิร์ก และแลนดาว นักฟิสิกส์ทฤษฎีทั้งสองได้ขยายแนวคิดของลอนดอน(F.London) โดยได้นำเสนอแนวคิดใหม่เรื่องพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ(Order parameter) $\psi(x,t)$ ว่าเพราะสภาพนำยวดยิ่งเป็นปรากฏการณ์ควอนตัม ดังนั้นระบบจะมีฟังก์ชันคลื่น(Wave function)เป็น

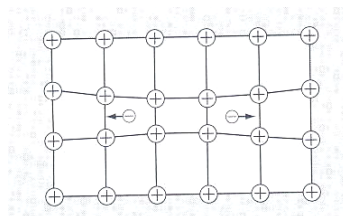
$$\psi(x,t) = |\psi| e^{i\phi(x)} \quad \dots(1.3)$$

โดยที่ $|\psi|$ คือแอมพลิจูด และ $\phi(x)$ เป็นเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ และ n_s แปรโดยตรงกับ $|\psi|^2$ กินซ์เบิร์ก และแลนดาวได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบกับพลังงานอิสระ F ที่อุณหภูมิใกล้ๆ T_c ดังนี้คือ

$$F = a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \dots \quad \dots(1.4)$$

เมื่อ a เป็นค่าที่ขึ้นกับอุณหภูมิและ b เป็นค่าคงที่ ทฤษฎีกินซ์เบิร์ก-แลนดาว สามารถอธิบายคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 ได้และอาบริโกซอฟ (Abrikosov) ได้ใช้ทฤษฎีนี้ทำนายการเกิดค่าควอนไทซ์ของฟลักซ์แม่เหล็ก(Flux quantization) เมื่อตัวนำยวดยิ่งถูกสนามแม่เหล็กกระทำ

6. ทฤษฎีที่มีชื่อเสียงที่สุดของสภาพนำยวดยิ่งคือทฤษฎีของ บาร์ดีน(Bardeen) คูเปอร์(Cooper) และ ชรีฟเฟอร์(Schrieffer)(BCS Theory)⁹ ซึ่งถือกำเนิดในปี ค.ศ.1957 หลังการพบปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งเกือบ 46 ปี ทฤษฎีนี้อธิบายปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งว่าเกิดจากการมีคูคูเปอร์(Cooper Pair)ในตัวนำยวดยิ่งและคูคูเปอร์ประกอบด้วยอิเล็กตรอน 2 ตัวที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ กับ $-\vec{k}$ และมีสปิน $\uparrow$ กับ $\downarrow$ ตามลำดับมาจับคู่กันโดยการถ่ายโอนโฟนอนระหว่างกัน (โฟนอนเป็นอนุภาคคลื่นแลตทิส)

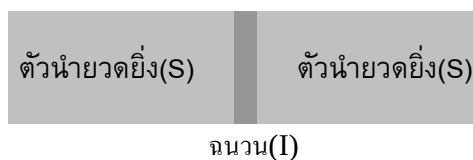


ภาพประกอบ 6 แสดงการเกิดคู่คูเปอร์ในทฤษฎี บีซีเอส(BCS Theory) ⁹ (Turton. 2000 : 259)

เมื่ออนุภาคอิเล็กตรอนที่มีประจุลบเคลื่อนที่เข้าไปในระหว่างเหล่าไอออนบวก แรงดึงดูดไฟฟ้าระหว่างประจุบวกกับประจุลบทำให้ไอออนบวกเคลื่อนที่เข้ามาหาประจุลบ จึงมีผลทำให้ความหนาแน่นของประจุบวกก่อนในบริเวณนั้นค่อนข้างสูง ส่งผลให้อิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้ๆจะเคลื่อนที่เข้าสู่บริเวณดังกล่าวนั้น ดังนั้นเราจึงอาจกล่าวได้ว่า อิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดอิเล็กตรอนตัวที่สอง และการคำนวณได้แสดงให้เห็นว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ กับ $-\vec{k}$ และมีสปิน $\uparrow$ กับ $\downarrow$ จะจับคู่กันได้ดีที่สุดโดยใช้โฟนอนเป็นอนุภาคนำสื่อ และตามปกติอนุภาคที่เกิดจากการสั่นของแลตทิซจะมีพลังงานแตกต่างจากพลังงานเฟอร์มีไม่เกิน $\hbar\omega_0$ (เมื่อ ω_0 เป็นความถี่ตัดทั้งเดอบาย และ $\hbar = h/2\pi$, เมื่อ h เป็นค่าคงที่ของพลังค์)

ณ วันที่ทฤษฎี BCS เป็นทฤษฎีที่สวยงามและได้รับการยอมรับว่าเป็นทฤษฎีที่สมบูรณ์มากที่สุดทฤษฎีหนึ่งของฟิสิกส์⁹ ในเวลาต่อมาทฤษฎีนี้ได้รับการปรับปรุงให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโดยกอร์กอป (Gorkov)¹⁰ อabrikosov (Abrikosov)¹¹ และเอเลียสแชนเบิร์ก (Eliashberg)¹² ซึ่งใช้ทฤษฎีควอนตัมของสนามคำนวณอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนอย่างละเอียด จนสามารถอธิบายสมบัติของตัวนำยวดยิ่งได้ดีกว่าทฤษฎี BCS

ในปี ค.ศ. 1962 โจเซฟสัน (B.D. Josephson) ได้พบปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson effect)¹³ โดยโจเซฟสันได้ทำนายว่าในระบบที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำตัวนำยวดยิ่งสองแผ่นประกบกันและคั่นระหว่างกันด้วยฉนวนบางๆ (ดังภาพประกอบ 7) จะมีกระแสยวดยิ่ง (Supercurrent) ชนิดตรงไหลผ่านรอยต่อทั้งคู่ที่รอยต่อไม่มีความต่างศักย์ เรียกกระแสยวดยิ่งชนิดตรงนี้ว่า กระแสโจเซฟสัน (Josephson current) และเรียกระบบที่มีรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสองว่าเป็นรอยต่อโจเซฟสัน (Josephson junction)



ภาพประกอบ 7 แสดงรอยต่อโจเซฟสัน S/I/S ที่เกิดจากตัวนำยวดยิ่งสองตัวประกบกันโดยมีฉนวนบางๆ คั่น

และเมื่อโจเซฟสันได้กำหนดให้เฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่ง (Superconducting order parameter) ตัวที่ 1 เป็น φ_1 และเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่งตัวที่ 2 เป็น φ_2 โจเซฟสันพบว่ากระแสโจเซฟสันชนิดตรงมีรูปแบบดังนี้คือ

$$I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \dots(1.5)$$

เมื่อ I_c เป็นค่ากระแสควมย้งสูงสุดที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันและ $(\phi_2 - \phi_1) = \Delta\phi$ เป็นความต่างเฟสของฟังก์ชันคลื่นมหภาค(Macroscopic wave function) ในรอยต่อโจเซฟสันความสัมพันธ์ในสมการ(1.5)เรียกว่าความสัมพันธ์ซี-โจเซฟสัน(dc-Josephson relation) หรือความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับเฟสแบบไซน์(Sinusoidal current-phase relationship) จากสมการ(1.5) เมื่อ $\phi_2 - \phi_1 > 0$ กระแสโจเซฟสันชนิดตรง I_s มีเครื่องหมายบวกและเมื่อ $\phi_2 - \phi_1 < 0$ กระแสโจเซฟสันชนิดตรง I_s มีเครื่องหมายลบแสดงว่ากระแสจะไหลในทิศทางข้ามกับกรณีแรกและเมื่อ $\phi_2 - \phi_1 = n\pi$, n เป็นจำนวนเต็มกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะเป็นศูนย์ สมการ(1.5)แสดงว่า $I_s < I_c$ เสมอ และถ้า $I_s > I_c$ กระแสโจเซฟสันไม่ไหล ต่อมาแอนเดอร์สันกับโรเวลล์ (Anderson and Rowell) ได้ทดลองยืนยันความถูกต้องของความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับเฟสในปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดตรง¹⁴

ในการอธิบายปรากฏการณ์นี้ ฟายน์แมน(Feynman)¹⁵ ได้ให้ความกระจ่างในการอธิบายสาเหตุการเกิดปรากฏการณ์นี้โดยใช้กลศาสตร์ควอนตัม(Quantum Mechanics) หาสูตรแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับเฟส โดยฟายน์แมนได้กำหนดฟังก์ชันคลื่นของคู่อุปเปอร์ในรอยต่อดังภาพประกอบ 8 เป็น $\psi_1(x,t)$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งด้านซ้ายและ $\psi_2(x,t)$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งด้านขวา เพราะฟังก์ชันคลื่นทั้งสองมีการเปลี่ยนแปลงตามสมการชโรดิงเงอร์(Schrödinger) คือ

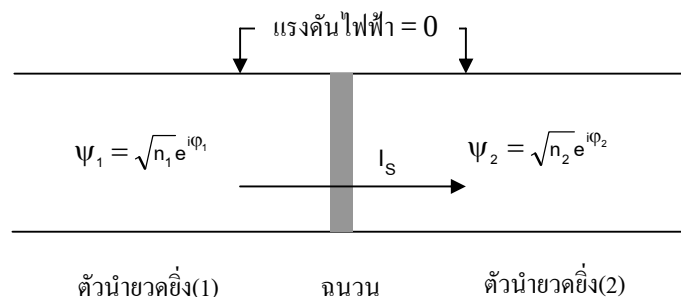
$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = E_1 \psi_1 + K \psi_2 \quad \dots(1.6)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = E_2 \psi_2 + K \psi_1 \quad \dots(1.7)$$

ในที่นี้ K คืออันตรกิริยาคู่ควมระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเพราะฉนวนบางมาก ψ_1 และ ψ_2 เป็นฟังก์ชันคลื่นของคู่อุปเปอร์ที่มีพลังงานเท่ากับ $E_{1,2}$ ตามลำดับ เมื่อฟังก์ชันคลื่นมีรูปแบบเป็น

$$\psi_1 = \sqrt{n_1} e^{i\phi_1} \quad \dots(1.8)$$

$$\psi_2 = \sqrt{n_2} e^{i\phi_2} \quad \dots(1.9)$$



$$X=0$$

ภาพประกอบ 8 แสดงการกำหนดฟังก์ชันคลื่นของคูคูเปอร์ในรอยต่อโจเซฟสัน s//s เมื่อเกิด

ปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดกระแสตรง

โดยที่ n_1 และ n_2 เป็นความหนาแน่นสถานะของคูคูเปอร์, และ φ_1 กับ φ_2 แทนเฟสของคูคูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 1 กับ 2 ตามลำดับ และเมื่อแทนสมการ(1.8)และสมการ(1.9) ลงในสมการ(1.6) จะได้ผลดังนี้

$$i\hbar \frac{\partial \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1}}{\partial t} = E_1 \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1} + K \sqrt{n_2} e^{i\varphi_2} \quad \dots(1.10)$$

และเมื่อกระจาย $e^{i\varphi_{1,2}} = \cos \varphi_{1,2} + i \sin \varphi_{1,2}$ จะได้ว่า

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\hbar \dot{n}_1 \sin \varphi_1 + 2\hbar n_1 \dot{\varphi} \cos \varphi_1 + 2E_1 n_1 \cos \varphi_1 + 2K \sqrt{n_1 n_2} \cos \varphi_2 \right) + \\ & -i \left(\hbar \dot{n}_1 \cos \varphi_1 - 2\hbar n_1 \dot{\varphi} \sin \varphi_1 - 2E_1 n_1 \sin \varphi_1 - 2K \sqrt{n_1 n_2} \sin \varphi_2 \right) \end{aligned} \right\} = 0 \quad \dots(1.11)$$

จากสมการ(1.11) โดยการพิจารณาให้ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของสมการมีค่าเป็นศูนย์ เพราะสมการเป็นจริงสำหรับค่าทุกค่าของ φ_1 และ φ_2 ดังนั้นในส่วนของค่าจินตภาพ จะได้สมการ

$$\hbar \dot{n}_1 \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} - 2\hbar n_1 \dot{\varphi} - 2E_1 n_1 - 2K \sqrt{n_1 n_2} \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = 0 \quad \dots(1.12)$$

และในส่วนของค่าจริง จะให้สมการ

$$\hbar \dot{n}_1 \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} + 2\hbar n_1 \dot{\varphi} + 2E_1 n_1 + 2K \sqrt{n_1 n_2} \cos \varphi_2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = 0 \quad \dots(1.13)$$

เมื่อนำสมการ(1.12) รวมกับสมการ(1.13) จะได้

$$\hbar \dot{n}_1 \left(\frac{\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1} \right) + 2K \sqrt{n_1 n_2} \left(\frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1} \right) = 0 \quad \dots(1.14)$$

และจากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1 \quad \dots(1.15)$$

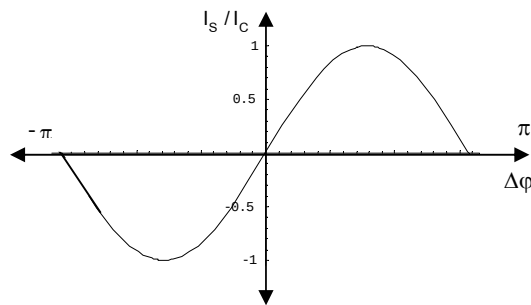
$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \dots(1.16)$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ(1.14) และเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติจะได้ค่าของ $\dot{n}_1$ คือ

$$\dot{n}_1 = \frac{2K\sqrt{n_1 n_2}}{\hbar} \sin[\varphi_2 - \varphi_1] \quad \dots(1.17)$$

ค่าความหนาแน่นกระแสที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันหาได้จาก $2en_1$ เพราะ $2e$ เป็นประจุรวมของคู่อุปเปอร์ ดังนั้นกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะแปรโดยตรงกับความหนาแน่นกระแส

$$I_s \propto (2en_1) = \frac{4eK\sqrt{n_1 n_2}}{\hbar} \sin[\varphi_2 - \varphi_1] \quad \dots(1.18)$$

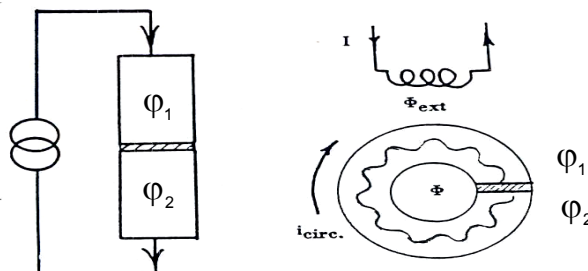


ภาพประกอบ 9 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง I_s / I_c กับ $\Delta\varphi$ จากสมการ(1.18)

ดังนั้นค่ากระแสวิกฤติโจเซฟสันของฟายน์แมน¹⁵ ที่หาได้จากสมการ(1.5) คือ

$$I_c = \frac{4eK\sqrt{n_1 n_2}}{\hbar} \quad \dots(1.19)$$

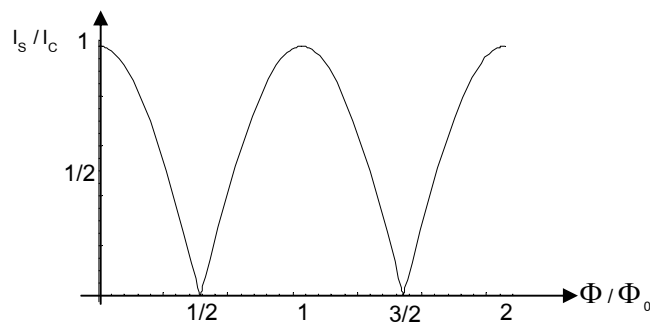
ในการศึกษากระแสโจเซฟสันของระบบรอยต่อโจเซฟสันที่เป็นวงแหวน (Superconducting loop) เมื่อเราไม่พิจารณาฟลักซ์ (Φ) ที่เกิดจากวงแหวนว่าสามารถทะลุเหนี่ยวนำตัวมันเองได้บ้างแล้ว (ภาพประกอบ 10)



ภาพประกอบ 10 การไบอัส(bias)รอยต่อโจเซฟสันโดยแหล่งจ่ายกระแสและวงแหวนที่ไบอัสโดยฟลักซ์ภายนอก Φ_{ext} (external flux)(Gough. 1992 : 2)

ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์แม่เหล็ก Φ กับความต่างเฟส $\Delta\varphi$ ที่เกิดจากระบบรอยต่อโจเซฟสันของ วงแหวนสภานำยวดยิ่ง(เมื่อความหนาของวงแหวนมีค่ามากกว่าความยาวทะลุทะลวง λ) สามารถหาได้จากสมการ

$$I_s = I_c \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \quad \dots(1.20)$$



ภาพประกอบ 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง I_s / I_c กับ Φ / Φ_0 จากสมการ(1.20)

กระแสโจเซฟสันที่ไหลด้วยค่าแรงดันตกคร่อมรอยต่อโจเซฟสันเป็นศูนย์มีลักษณะที่เป็นคาบเพราะฟลักซ์ Φ ในวงแหวนสภานำยวดยิ่งเป็นจำนวนเต็มของควอนตัมฟลักซ์(Flux quantum) ที่มีค่าควอนไทซ์เท่ากับ $\Phi_0 = h/2e$ (h เป็นค่าคงที่ของพลังค์ และ e เป็นประจุอิเล็กตรอน) นอกจากนี้โจเซฟสันได้พิจารณากรณีความต่างของแรงดันที่คร่อมรอยต่อโจเซฟสันเป็น v ด้วย โดยโจเซฟสันได้คำนวณความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์แม่เหล็ก Φ กับแรงดัน v ตามทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าว่า $v = -\frac{d\Phi}{dt}$ และเมื่อรวมความสัมพันธ์ตามสมการ(1.20) จะพบว่า

$$I_s = I_c \sin(\Delta\varphi) = I_c \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \quad \text{นั่นคือ} \quad \frac{1}{2} \Delta\varphi = \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{\pi}{2} \quad \text{ดังนั้นจะได้ว่า}$$

$$v = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d(\Delta\varphi)}{dt} \quad \dots(1.21)$$

$$\text{แสดงว่า} \quad \frac{v 2\pi}{\Phi_0} t = \Delta\varphi$$

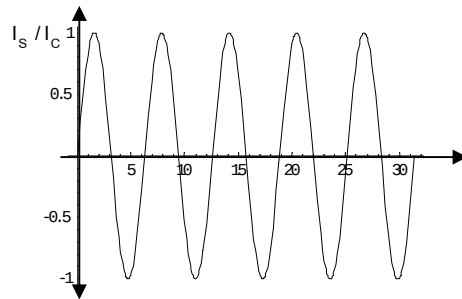
ถึงแม้ความสัมพันธ์ในสมการ(1.21) จะหาได้จากรอยต่อโจเซฟสันแบบวงแหวน แต่อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์นี้ก็ยังใช้ได้กับระบบรอยต่อโจเซฟสันทุกรูปแบบ กระแสวัดยิ่งยวดที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันที่ถูกไบอัสโดยค่าแรงดัน v ที่คงที่ สามารถคำนวณหาได้จากความต่างเฟสที่คร่อมรอยต่อ (สมการ 1.20) ว่ามีค่าเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นกับเวลา $(2\pi v t)/\Phi_0$ กระแสจึงมีการกวัดแกว่งตามสมการ

$$I_s = I_c \sin \left[\frac{2\pi v}{\Phi_0} t \right]$$

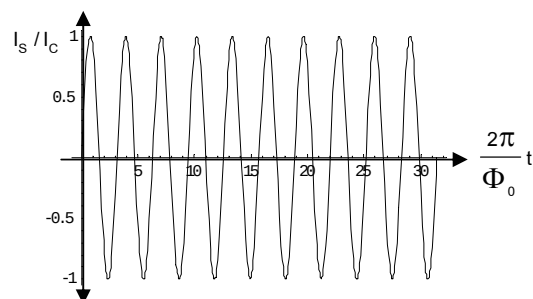
หรือ

$$I_s = I_c \sin \omega_J t$$

...(1.22)



(a) $v = 1$



(b) $v = 2$

ภาพประกอบ 12 กราฟความสัมพันธ์จากสมการ(1.22) แสดงให้เราเห็นว่าความถี่โจเซฟสันแปรตามค่าของแรงดันคร่อมรอยต่อโจเซฟสัน v

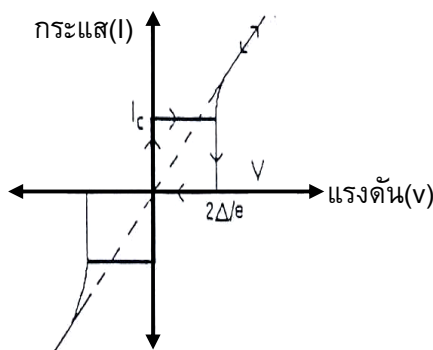
เมื่อ $\omega_J = (2\pi v)/\Phi_0$ คือความถี่โจเซฟสัน(Josephson frequency) ในกรณีนี้เราอาจให้ความหมายของการกวัดแกว่งของกระแสวัดยิ่งยวดที่ผ่านรอยต่อด้วยความถี่โจเซฟสันว่าเป็นการคายพลังงานควอนตัมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า $\hbar\omega_J = 2e v$ ซึ่งมีค่าความยาวคลื่น $\lambda = hc/2e v$

เวลาคู่คูเปอร์หนึ่งคู่เคลื่อนที่ผ่านรอยต่อโจเซฟสัน สำหรับรอยต่อโจเซฟสันอุดมคตินั้น แอมบีโคการ์(Ambegoakar)¹⁶ ได้คำนวณค่า $I_c(T)$ เป็นดังสมการ

$$I_c(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR} \tanh \frac{\Delta(T)}{2k_B T} \quad \dots(1.23)$$

เมื่อ $\Delta(T)$ เป็นค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ, R เป็นค่าความต้านทานของรอยต่อโจเซฟสันในสถานะปกติ ค่า $I_c(0)$ คือค่ากระแสที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์เมื่อ $T \rightarrow 0$, และถ้าเอากระแสคูณความต้านทานจะได้แรงดัน $I_c(0)R \rightarrow \frac{\pi \Delta(0)}{2e}$ เกียอีเวอร์(Giaever)¹⁷ ได้วัดค่าค่าแรงดันในการไบอัสอิเล็กตรอนเดียวในสถานะกระตุ้นผ่านช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์เป็นคนแรกและพบว่ามีความเท่ากับ $2\Delta(0)/e$ ข้อมูลนี้สามารถบอกค่า $\Delta(0)$ ได้ สำหรับที่อุณหภูมิศูนย์

องศาสมบูรณ์กระแสที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟจะมีการทะลุทะลวงของอนุภาคเดียวที่ค่าแรงดันจำกัด v ด้วย แสดงให้เห็นได้ดังภาพประกอบ 13 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในขณะที่เกิดปรากฏการณ์โจเซฟสัน แรงดันตกคร่อมรอยต่อโจเซฟสันมีค่าเป็นศูนย์โวลท์



ภาพประกอบ 13 แสดงกราฟ I/V ของความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับแรงดัน v ที่ได้จากรอยต่อโจเซฟสัน $s/I/s$ (Gough. 1992 : 2) โดยมีเส้นทางของลูกศรตามเข็มนาฬิกาเป็นปรากฏการณ์ของโจเซฟสันส่วนเส้น ทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นปรากฏการณ์ของการทะลุทะลวงของเกียอีเวอร์ (Giaever)¹⁶

ปรากฏการณ์โจเซฟสันกระแสตรงจึงเป็นปรากฏการณ์หนึ่งในธรรมชาติของสภาวะนำยวดยิ่งซึ่งได้มีการพบว่ากระแสนำยวดยิ่งสามารถไหลผ่านรอยต่อที่มีฉนวนบางๆ กันได้ทั้งๆ ที่รอยต่อไม่มีความต่างศักย์ไฟฟ้าตกคร่อมรอยต่อเลย จึงแตกต่างจากการไหลของกระแสไฟฟ้าของอนุภาคอิเล็กตรอนเดี่ยวในตัวนำธรรมดาที่จะต้องไปอัสแรงดัน กระแสจึงจะสามารถไหลผ่านรอยต่อได้ธรรมชาติที่น่าทึ่งเช่นนี้จึงนับเป็นสิ่งที่ท้าทายทั้งนักทฤษฎีและนักทดลองที่จะศึกษาธรรมชาติและทำการทดลองใหม่ๆ เพื่อให้เข้าใจธรรมชาติของปรากฏการณ์นี้อย่างกระจ่าง

¹ H. Kammerlingh Onnes, Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden, **120b**, **122b**, **124c**, (1911).

² R.D. Parks, In: *Superconductivity*, Vol. 1, 2 (Marcel Dekker Inc., New York, 1969; J. R.

Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Benjamin, New York, 1964).

³ K. Shimizu et al., Nature **412**, 316 (2001).

⁴ J. G. Bednorz and K. A. Müller, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).

⁵ W. Meissner, R. Ochsenfeld, Naturwissenschaften, **21**, 787 (1933)

⁶ F. London and H. London, Proc. Roy. Soc (London), A **149** , 71 (1935); Physica A **2**, 341 (1935).

- ⁷ E. Maxwell, Phys. Rev. B **78**, 477 (1950).
- ⁸ V. L. Ginzburg, L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1960).
- ⁹ J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. B **108**, 1175 (1957).
- ¹⁰ L. P. Gor'kov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **36**, 1918 (1958); Sov. Phys. JETP **9**, 1364 (1958).
- ¹¹ A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, I. E. Dzyaloshinskii, in: *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1963.
- ¹² G. M. Eliashberg, JETP **11**, 696 (1960).
- ¹³ B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
- ¹⁴ P. W. Anderson and J. M. Rowell, Phys. Rev. Lett. **10**, 230 (1963).
- ¹⁵ R. P. Feynman, Lectures on Physics Vol **3** Ch 21 (1965), Anderson-Wesley, New York.
- ¹⁶ V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 486 (1963).
- ¹⁷ I. Giaever, Phys. Rev. Lett. **5**, 147 (1960).

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

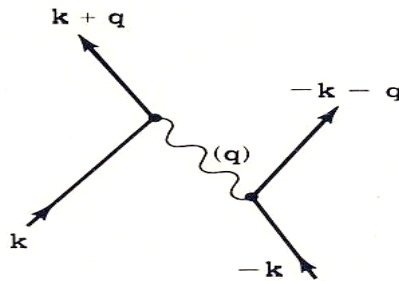
ในการหาสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ได้นำเสนอหัวข้อของเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. สมการบีดีจี (Bogoliubov de-Gennes equation)
2. ทฤษฎีของปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดตรง และการสะท้อนแบบแอนเดรฟ
3. ทฤษฎีกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็ก

เฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร

1.สมการบีดีจี

ในสารตัวนำยวดยิ่ง การเคลื่อนที่ของกระแสไฟฟ้ายวดยิ่ง(supercurrent) เกิดจากอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ สปิน $\uparrow$ กับอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $-\vec{k}$ สปิน $\downarrow$ จับคู่กันเป็นคู่อุปเปอร์ (Cooper pair) การรับและคายโฟนอน(ภาพประกอบ14) ทำให้โมเมนตัมลัพท์



ภาพประกอบ 14 แสดงแผนภาพของฟายน์แมน(Feynman diagram) ของคู่อุปเปอร์ตามทฤษฎีบีซีเอส อิเล็กตรอนโมเมนตัม $\vec{k}$ สปิน $\uparrow$ รับโฟนอนที่มีโมเมนตัม $\vec{q}$ จาก อิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $-\vec{k}$ สปิน $\downarrow$ ¹

มีค่าคงที่เท่ากับศูนย์ การมีคู่อุปเปอร์เป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง ทฤษฎีบีซีเอสได้กำหนดฮามิลโทเนียนของคู่อุปเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ ²

$$\hat{H} = \int dx \psi_{\alpha}^{\dagger}(x,t) H_0 \psi_{\alpha}(x,t) + \int dx dx' \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x',t) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x,t) V(x-x') \psi_{\uparrow}(x,t) \psi_{\downarrow}(x',t)$$

...(2.1)

เมื่อ $\psi(x, t)$ เป็นตัวดำเนินการทำลายของสนามเฟอร์มิออนที่ตำแหน่ง x เวลา t
 $\psi^+(x, t)$ เป็นตัวดำเนินการสร้างของสนามเฟอร์มิออน ที่ตำแหน่ง x เวลา t
 α เป็นสปินของเฟอร์มิออนซึ่งในที่นี้คืออิเล็กตรอนมีทิศ $\uparrow$ และ $\downarrow$
 $v(x-x')$ เป็นพลังงานของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนที่ตำแหน่ง x และ x' มีค่าเท่ากับ $-g\delta(x-x')$
 และ H_0 เป็นแฮมิลโทเนียนของอิเล็กตรอนเดี่ยว

คุณสมบัติของตัวดำเนินการของสนามเฟอร์มิออน(fermion field) เป็นดังนี้

$$[\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta(x', t)]_+ = 0, [\psi_\alpha^+(x, t), \psi_\beta^+(x', t)]_+ = 0$$

$$\text{และ } [\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^+(x', t)]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')$$

...(2.2)

เมื่อ α, β เป็นดัชนีสปิน $\uparrow$ และ $\downarrow$, $\delta_{\alpha\beta}$ เป็นฟังก์ชันโครเนกเกอร์เดลต้า, $\delta(x-x')$ เป็นเดลต้าฟังก์ชัน และสัญลักษณ์ $[\]_+$ คือ anti-commutation สำหรับวิธีการหาสมการของการเคลื่อนที่ของ $\psi_\uparrow(x, t)$ กับ $\psi_\downarrow^+(x, t)$ ทำได้โดยใช้วิธีการของไฮเซนเบิร์ก(Heisenberg ' s picture) ที่กำหนดรูปแบบของสมการของการเคลื่อนที่จากชุดของความสัมพันธ์³

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\uparrow(x, t)}{\partial t} = [\psi_\uparrow(x, t), \hat{H}] \quad \dots(2.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\downarrow^+(x, t)}{\partial t} = [\psi_\downarrow^+(x, t), \hat{H}] \quad \dots(2.4)$$

โดยที่ $\hat{H}$ เป็นแฮมิลโทเนียนยังผล(effective Hamiltonian) ของสมการ (2.1) ซึ่งในที่นี้คือ

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int dx \psi_\alpha^+(x, t) H_0 \psi_\alpha(x, t) \\ & + \int dx \{ \Delta^+(x) \psi_\uparrow(x, t) \psi_\downarrow(x, t) + \Delta(x) \psi_\downarrow^+(x, t) \psi_\uparrow^+(x, t) \} \end{aligned} \quad \dots(2.5)$$

$$\text{เมื่อ } \Delta(x) = -g \langle \psi_\uparrow(x, t) \psi_\downarrow(x, t) \rangle, \Delta^+(x) = -g \langle \psi_\downarrow^+(x, t) \psi_\uparrow^+(x, t) \rangle \quad \dots(2.6)$$

$\Delta(x)$ กับ $\Delta^+(x)$ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่ง (superconducting order parameter)

จากสมการ(2.3)และ(2.4) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของ $\hat{\psi}_\uparrow(x,t)$ และ $\hat{\psi}_\downarrow^+(x,t)$ ดังนี้

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_\uparrow(x,t)}{\partial t} = H_0 \hat{\psi}_\uparrow(x,t) - \Delta(x) \hat{\psi}_\downarrow^+(x,t) \quad \dots(2.7)$$

$$\text{และ } i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_\downarrow^+(x,t)}{\partial t} = -H_0^+ \hat{\psi}_\downarrow^+(x,t) - \Delta^+(x) \hat{\psi}_\uparrow(x,t) \quad \dots(2.8)$$

ในการแปลงแบบโบโกลิบอฟ(Bogoliubov 's transformation) กระจายสนามของเฟอร์มิออนหรืออิเล็กตรอนให้อยู่ในเทอมของสนามอนุภาคควาไซดังนี้⁴

$$\begin{bmatrix} \hat{\psi}_\uparrow(x,t) \\ \hat{\psi}_\downarrow^+(x,t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) & v_n(x) \\ -v_n^+(x) & u_n^+(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{n\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{n\downarrow}^+ \end{bmatrix} \quad \dots(2.9)$$

และเขียนสนามของอนุภาคควาไซในเทอมของตัวกระทำ $\hat{\gamma}_{n\uparrow}$ (annihilation operator) และ $\hat{\gamma}_{n\downarrow}^+$ (creation operator) เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{n\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{n\downarrow}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \quad \dots(2.10)$$

เมื่อให้ $c_2 = 0$ สมการ (2.9) จะกลายรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} \hat{\psi}_\uparrow(x,t) \\ \hat{\psi}_\downarrow^+(x,t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-i\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \quad \dots(2.11)$$

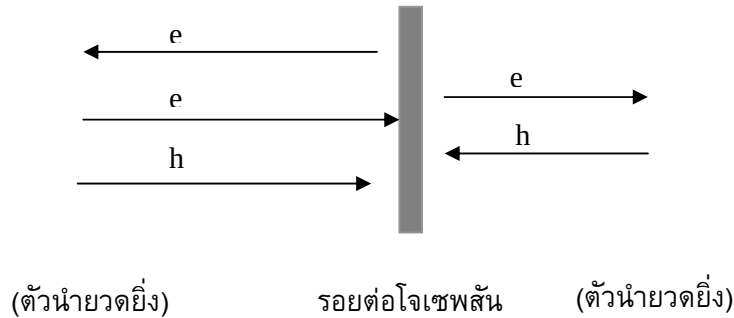
เมื่อแทนค่า $\hat{\psi}_\uparrow(x,t)$ กับ $\hat{\psi}_\downarrow^+(x,t)$ ในสมการ (2.11) ลงในสมการ (2.7) กับ (2.8) จะได้สมการเมตริกใหม่ที่เรียกว่าสมการบีดีจี (Bogoliubov de-Gennes equation) ดังนี้

$$\epsilon_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v_n^+(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & \Delta(x) \\ \Delta^+(x) & -H_0^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v_n^+(x) \end{bmatrix} \quad \dots(2.12)$$

ใช้สมการ(2.12)ในการศึกษาธรรมชาติของอนุภาคในระบบตัวนำยวดยิ่งที่ไม่เป็นเอกพันธ์ ดังนั้นสมการนี้จึงมีความสำคัญต่อการคำนวณกระแสโจเซฟสันเวลาพิจารณาปัญหาการกระเจิง (scattering problem) ของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนหรืออนุภาคควอไซโฮลที่บริเวณรอยต่อโจเซฟสัน (Josephson junction)

2.ทฤษฎีของปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดตรง และการสะท้อนแบบแอนเดรฟ

ในการพิจารณาปัญหาของการกระเจิงที่บริเวณรอยต่อโจเซฟสันเพื่อหาค่าแอมพลิจูดของคลื่นสะท้อนแบบแอนเดรฟ จากฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนที่ตกกระทบ สะท้อน และส่งผ่านจากผลเฉลยของสมการบีดีจี⁵



ภาพประกอบ 15 แสดงภาพการกระเจิงของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนที่รอยต่อโจเซฟสัน เมื่อด้านซ้ายแสดงอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน e พุ่งชนจนทำให้เกิดการกระเจิงกลับของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน e กับอนุภาคควอไซโฮล h ที่มีทิศสวนทางกับอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน e ที่กระเจิง และ ด้านขวามีอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน e กับอนุภาคควอไซโฮล h ที่ถูกส่งผ่านรอยต่อโจเซฟสัน แอมพลิจูดของฟังก์ชันคลื่นอนุภาคควอไซโฮลด้านขวามือเรียกว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟ(Andreev reflection coefficient)

การคำนวณกระแสโจเซฟสันโดย ฟุรุซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)⁵ ในระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบ ตัวนำยวดยิ่ง₁/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง₂ ในปี 1991 จัดเป็นงานวิจัยที่สำคัญซึ่งจะถูกอ้างอิงเพื่อประยุกต์หากระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบต่างๆเสมอ⁶⁻
⁸ในการคำนวณ ฟุรุซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)⁵ ได้นิยามให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคควอไซเป็นไปตามสมการ บีดีจี คือ

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad \dots(2.13)$$

เมื่อ

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + u(\vec{r}) - E_F(\vec{r}) \right) & \Delta(\vec{r}) \\ \Delta^*(\vec{r}) & -\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + u(\vec{r}) - E_F(\vec{r}) \right) \end{pmatrix}$$

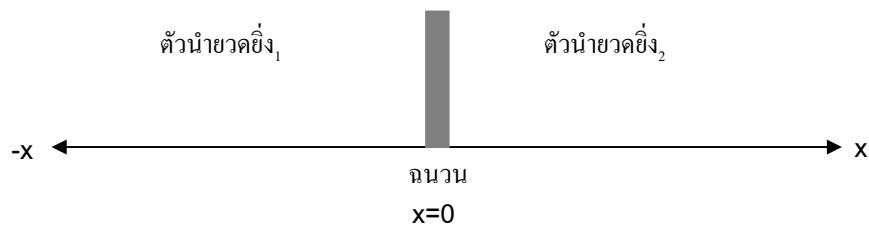
และเมื่อ $\Psi(\vec{r})$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควาไซที่ตำแหน่ง $\vec{r}$, m เป็นมวลอิเล็กตรอน, $\Delta(\vec{r})$ เป็นค่าช่องว่างพลังงานที่ตำแหน่ง $\vec{r}$, $u(\vec{r})$ เป็นพลังงานศักย์ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ และ $E_F(\vec{r})$ เป็นพลังงานเฟอร์มีที่ตำแหน่ง $\vec{r}$

เมื่อการคำนวณพิจารณาปัญหาการกระเจิงของอนุภาคควาไซในทิศทางแกน x (ภาพประกอบ 16) กำหนดให้พลังงานศักย์ของฉนวนเป็น $u(x) = v\delta(x)$, และให้ช่องว่างพลังงาน

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_1 e^{i\phi_1}, & x \leq 0 \\ \Delta_2 e^{i\phi_2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \dots(2.14)$$

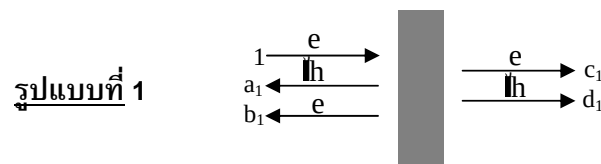
และพลังงานเฟอร์มี

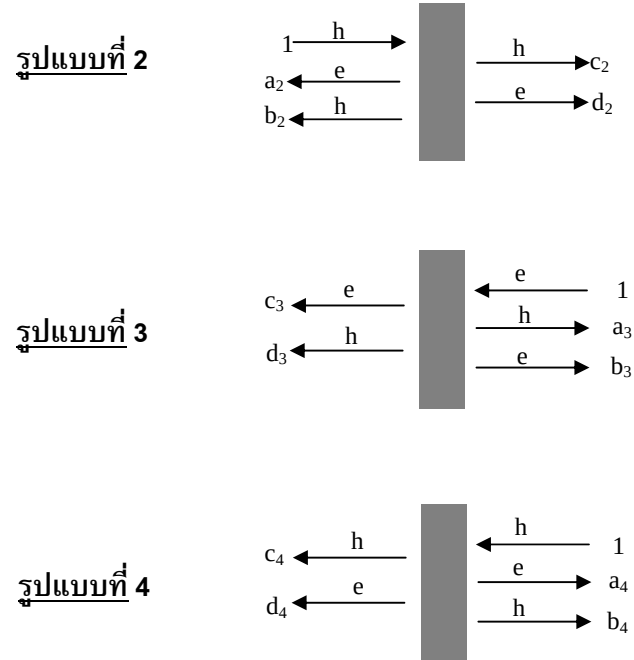
$$E_F(x) = \begin{cases} E_{F1}, & x \leq 0 \\ E_{F2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \dots(2.15)$$



ภาพประกอบ 16 แสดงภาพของรอยต่อโจเซฟสันแบบ ตัวนำยวดยิ่ง₁/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง₂ เมื่อฉนวนอยู่ที่จุด $x=0$

การกระเจิงที่รอยต่อโจเซฟสันสามารถกำหนดรูปแบบได้ถึง 4 รูปแบบดังนี้





ภาพประกอบ 17 แสดงรูปแบบการกระเจิงของคลื่นอนุภาคควาไซที่รอยต่อโจเซฟสันทั้ง 4 รูปแบบ⁵

ฟังก์ชันคลื่นในการกระเจิงที่รอยต่อโจเซฟสันทั้ง 4 รูปแบบสามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \exp(ik_1^+ x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + a_1 \exp(ik_1^- x) \begin{pmatrix} v_1 e^{i\phi_1/2} \\ u_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + b_1 \exp(-ik_1^+ x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \end{cases}, x \leq 0$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \exp(-ik_1^- x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + a_2 \exp(-ik_1^+ x) \begin{pmatrix} v_1 e^{i\phi_1/2} \\ u_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + b_2 \exp(ik_1^+ x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \end{cases}, x \leq 0$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} c_1 \exp(ik_2^+ x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + d_1 \exp(-ik_2^- x) \begin{pmatrix} v_2 e^{i\phi_2/2} \\ u_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \end{cases}, x \geq 0$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} c_2 \exp(-ik_2^- x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + d_2 \exp(ik_2^+ x) \begin{pmatrix} v_2 e^{i\phi_2/2} \\ u_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \end{cases}, x \geq 0$$

$$\Psi_3(x) = \begin{cases} c_3 \exp(-ik_1^+ x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + d_3 \exp(ik_1^- x) \begin{pmatrix} v_1 e^{i\phi_1/2} \\ u_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix}, x \leq 0 \\ \exp(-ik_2^+ x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + a_3 \exp(-ik_2^- x) \begin{pmatrix} v_2 e^{i\phi_2/2} \\ u_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + b_3 \exp(-ik_2^+ x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix}, x \leq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_4(x) = \begin{cases} c_4 \exp(ik_1^- x) \begin{pmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix} \\ + d_4 \exp(-ik_1^+ x) \begin{pmatrix} v_1 e^{i\phi_1/2} \\ u_1 e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix}, x \leq 0 \\ \exp(ik_2^- x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + a_4 \exp(ik_2^+ x) \begin{pmatrix} v_2 e^{i\phi_2/2} \\ u_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix} \\ + b_4 \exp(-ik_2^- x) \begin{pmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{pmatrix}, x \leq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

...(2.16)

เมื่อ

$$k_{1,2}^\pm = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E_{F1,2} \pm \Omega_{1,2})}$$

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Omega_{1,2}}{E} \right)}, \quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Omega_{1,2}}{E} \right)},$$

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{E^2 - \Delta_{1,2}^2} \text{ และกำหนดให้ } \varphi = (\phi_2 - \phi_1)$$

...(2.17)

และเมื่อความสัมพันธ์สมมูลของสัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i และ d_i ($i=1,2,3,4$) เป็น

$$k_1^- a_1(\varphi, E) = k_2^+ a_2(-\varphi, E)$$

$$b_i(\varphi, E) = b_i(-\varphi, E)$$

$$k_2^+ \Omega_2 c_1(\varphi, E) = k_1^- \Omega_1 c_3(-\varphi, E)$$

$$k_2^- \Omega_2 d_1(\varphi, E) = k_1^+ \Omega_1 d_4(-\varphi, E)$$

...(2.18)

เมื่อใช้วิธีหา retarded Green 's function ⁹ สำหรับปัญหาการกระเจิงที่รอยต่อโจเซฟสัน จะได้

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^+ \Omega_2} \left(\frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2} \right), & \beta_1 &= -\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^+ \Omega_2} \left(\frac{c_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2} \right) \\ \alpha_2 &= +\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^+ \Omega_2} \left(\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2} \right), & \beta_2 &= +\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^+ \Omega_2} \left(\frac{d_1}{c_1 c_2 - d_1 d_2} \right) \\ \alpha_3 &= +\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^- \Omega_2} \left(\frac{\tilde{d}_2}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2} \right), & \beta_3 &= +\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^- \Omega_2} \left(\frac{d_2}{c_1 c_2 - d_1 d_2} \right) \\ \alpha_4 &= -\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^- \Omega_2} \left(\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2} \right), & \beta_4 &= -\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_2^- \Omega_2} \left(\frac{c_1}{c_1 c_2 - d_1 d_2} \right)\end{aligned}$$

...(2.19)

$$G^r(x, x'; E) = \begin{cases} \alpha_1 \psi_3(x) \tilde{\psi}_1^\dagger(x') + \alpha_2 \psi_3(x) \tilde{\psi}_2^\dagger(x') + \alpha_3 \psi_4(x) \tilde{\psi}_1^\dagger(x') \\ + \alpha_4 \psi_4(x) \tilde{\psi}_2^\dagger(x'), x \leq x' \\ \beta_1 \psi_1(x) \tilde{\psi}_3^\dagger(x') + \beta_2 \psi_2(x) \tilde{\psi}_3^\dagger(x') + \beta_3 \psi_1(x) \tilde{\psi}_4^\dagger(x') \\ + \beta_4 \psi_2(x) \tilde{\psi}_4^\dagger(x'), x \geq x' \end{cases}$$

...(2.20)

เมื่อ $\tilde{a}_i(\varphi, E) = a_i(-\varphi, E)$, $\tilde{b}_i(\varphi, E) = b_i(-\varphi, E)$ และ $\psi_i^\dagger(x)$ เป็นการทรานสโพสของ $\psi_i(x)$ ดังนั้นนำสมการ(2.16) -(2.19) แทนลงในสมการ(2.20) จะได้ฟังก์ชันของกรีน คือ

$$\begin{aligned}G^r(x, x'; E) &= -\frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_1^+ \Omega_1} \left[\left\{ e^{ik_1^+ |x-x'|} + b_1 e^{-ik_1^+ (x+x')} \right\} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 v_1 e^{i\phi_1} \\ u_1 v_1 e^{-i\phi_1} & v_1^2 \end{pmatrix} + a_1 e^{i(k_1^+ x - k_1^+ x')} \begin{pmatrix} u_1 v_1 & v_1^2 e^{i\phi_1} \\ u_1^2 e^{-i\phi_1} & u_1 v_1 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \frac{\text{im}E}{\hbar^2 k_1^- \Omega_1} \left[\left\{ e^{-ik_1^- |x-x'|} + b_2 e^{ik_1^- (x+x')} \right\} \begin{pmatrix} v_1^2 & u_1 v_1 e^{i\phi_1} \\ u_1 v_1 e^{-i\phi_1} & u_1^2 \end{pmatrix} + a_2 e^{-i(k_1^+ x - k_1^- x')} \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1^2 e^{i\phi_1} \\ v_1^2 e^{-i\phi_1} & u_1 v_1 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

...(2.21)

ในการหากระแสโจเซฟสันจะอาศัยสมการของความต่อเนื่อง(equation of continuity)
ดังนี้คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \frac{\partial}{\partial x} I_e + s = 0 \quad \dots(2.22)$$

เมื่อ $\rho_e = -e \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{+}(x, t) \Psi_{\sigma}(x, t)$

$$I_e = -\frac{e\hbar}{m} \text{Im} \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{+}(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\sigma}(x, t)$$

และ $s = \frac{4e}{\hbar} \text{Im} [\Delta(x) \Psi_{\uparrow}^{+}(x, t) \Psi_{\downarrow}^{+}(x, t)]$

...(2.23)

เมื่อ $\Psi_{\sigma}(x, t)$ เป็นตัวดำเนินการทำลายสนามอิเล็กตรอนและ $\Psi_{\sigma}^{+}(x, t)$ เป็นตัวดำเนินการสร้างสนามอิเล็กตรอน จะได้กระแสโจเซฟสันที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันจากผลรวมของ

$$I_J = \langle I_e \rangle + \int_x^0 dx \langle s \rangle \quad \dots(2.24)$$

และในการหากระแสโจเซฟสันทำได้โดยการใช้ temperature Green function $G_{\omega_n}(x, x')$ ซึ่งหาได้จากการทำ analytic continuation ของ $E \rightarrow i\omega_n$ จาก retarded Green function

$$\begin{aligned} \langle I_e \rangle &= \frac{e\hbar}{2im} \lim_{x \rightarrow x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \text{Tr} \{ G_{\omega_n}(x, x') \} \\ &= \frac{e\Delta_1}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} (k_{1n}^{+} + k_{1n}^{-}) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^{+}} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^{-}} \right) \exp \{ -i(k_{1n}^{+} - k_{1n}^{-})x \} \end{aligned}$$

...(2.25)

และ

$$\int_x^0 dx \langle S \rangle = \frac{e\Delta_1}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} (k_{1n}^+ + k_{1n}^-) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^+} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^-} \right) (1 - \exp\{-i(k_{1n}^+ - k_{1n}^-)x\})$$

...(2.26)

$$I_j = \frac{e\Delta_1}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} (k_{1n}^+ + k_{1n}^-) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^+} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^-} \right) \quad \dots(2.27)$$

จากสมการ(2.18) ค่า $a_2(\varphi, E)/k_{1n}^-$ มีค่าเท่ากับ $a_1(-\varphi, E)/k_{1n}^+$ ดังนั้นกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจากสมการ(2.27) จะมีค่า

$$I_j = \frac{e\Delta_1}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} (k_{1n}^+ + k_{1n}^-) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^+} - \frac{a_1(-\varphi, i\omega_n)}{k_{1n}^+} \right) \quad \dots(2.28)$$

เมื่อกำหนดให้ $\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad k_{1n}^\pm = \sqrt{2m(E_{F1} \pm i\Omega_{1n})}$

$$\Omega_{1n} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \text{ และ } \omega_n = \pi k_B T(2n+1)$$

...(2.29)

ในการคำนวณค่าแอมพลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรอฟ(Andreev reflection amplitudes) หาได้จากสมการของเงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \psi_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_1(x) \quad \dots(2.30)$$

และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} = \frac{2mV}{\hbar^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) \quad \dots(2.31)$

ค่าแอมพลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรอฟจากรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1//s_2$ คือ

$$a_1(\varphi, E) = \frac{E(\Delta_2 \cos \varphi - \Delta_1) - i\Delta_2 \Omega_1 \sin \varphi}{E^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + P\Omega_1 \Omega_2} \quad \dots(2.32)$$

นิยามให้

$$P = \frac{k_{F1}^2 + k_{F2}^2 + \left(\frac{2mV}{\hbar^2}\right)^2}{2k_{F1}k_{F2}} \quad \dots(2.33)$$

ฟูรูซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)⁵ คำนวณกระแสโจเซฟสันได้ค่าดังนี้

$$I_J R_N = \frac{\pi}{e} (1+P) \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{\Delta_1 \Delta_2 \sin \varphi}{\omega_n^2 + \Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + P \Omega_{n1} \Omega_{n2}} \quad \dots(2.34)$$

ในที่นี้ความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อคือ $R_N = 2\pi\hbar(1+P)/4e^2$

นอกจากจะคำนวณกระแสโจเซฟสันที่ไหลผ่านรอยต่อของฉนวนแบบปกติแล้ว ทานากะ กับ คาชิวายา (Tanaka and Kashiwaya)¹⁰ ยังได้คำนวณกระแสโจเซฟสันที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันแบบ ตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง (S/Fi/S)



ภาพประกอบ 18 แสดงภาพของรอยต่อโจเซฟสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง (S/Fi/S)

เนื่องจากภายในสารแม่เหล็กเฟอร์โรมีสนามแลกเปลี่ยนซึ่งจะมีอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนแตกต่างกันสำหรับสปินที่สวนทิศกัน ทานากะ กับ คาชิวายา จึงได้กำหนดให้ฟังก์ชันศักย์ของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร เป็นดังนี้

$$v(x) = (H_i - \eta_\sigma H_m) \delta(x) \quad \dots(2.35)$$

เมื่อ H_i เป็นสนามศักย์ของฉนวนปกติ และ H_m เป็นสนามแลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร $\eta_\sigma = 1, \sigma = \uparrow; \eta_\sigma = -1, \sigma = \downarrow$ ในการคำนวณ ทานากะ กับ คาชิวายา ได้พิจารณาเพียงสนามแลกเปลี่ยนเป็นฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเท่านั้นโดยกำหนดค่าของ H_i เท่ากับศูนย์ และได้กำหนดมุมกระทบของอนุภาคควาไซที่รอยต่อโจเซฟสัน(ภาพประกอบ 19)เป็น 0 ผลการคำนวณกระแสโจเซฟสันในรอยต่อโจเซฟสันแบบ S/Fi/S เป็นดังนี้คือ

$$I(\varphi, \theta) = \frac{e\Delta(T) \sin(\varphi/2)}{2\hbar(1+Z_0^2)} \times$$

$$\left\{ \left[\tanh\left(\frac{\epsilon_A(\theta)}{2k_B T}\right) + \tanh\left(\frac{\epsilon_B(\theta)}{2k_B T}\right) \right] - \frac{Z_0 \cos(\varphi/2)}{\sqrt{Z_0^2 + \sin^2(\varphi/2)}} \left[\tanh\left(\frac{\epsilon_A(\theta)}{2k_B T}\right) - \tanh\left(\frac{\epsilon_B(\theta)}{2k_B T}\right) \right] \right\}$$

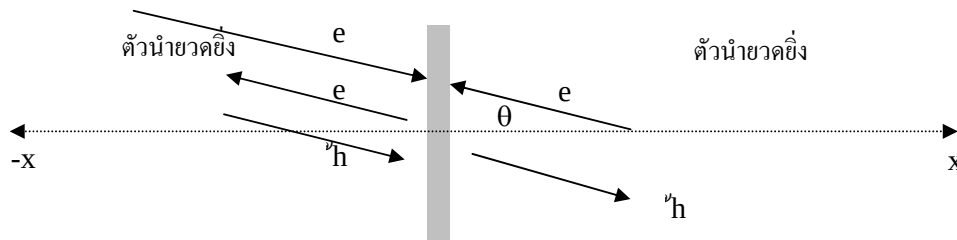
...(2.36)

เมื่อค่า $\epsilon_B = \Delta(T) \frac{\cos(\varphi/2) \pm Z_0 \sqrt{Z_0^2 + \sin^2(\varphi/2)}}{1+Z_0^2}$ เป็นพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยวของ

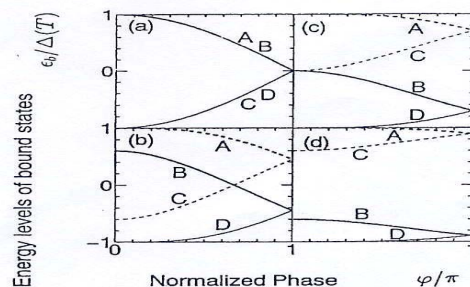
อนุภาคควาไซ (energy levels of bound state) ในฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรของระบบรอยต่อโจเซฟสัน

และ $Z_0 = \frac{mH_m}{\hbar^2 k_F \cos \theta} = \frac{Z_0}{\cos \theta}$ และกระแสโจเซฟสันที่ผ่านรอยต่อที่จากมุม θ หาได้จาก

$$J(\varphi) = \frac{Sk_F^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta I(\varphi, \theta) \cos \theta \sin \theta \quad \dots(2.37)$$

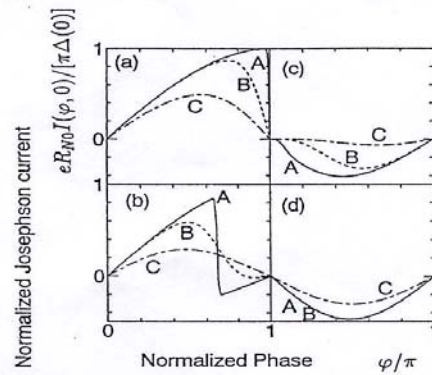


ภาพประกอบ 19 แสดงการกระเจิงของอนุภาคควาไซที่รอยต่อฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรโดยมีมุมตกกระทบของอนุภาคควาไซเท่ากับ θ โดยที่รอยต่อมีผิวหน้าตัด s



ภาพประกอบ 20 แสดงกราฟของระดับพลังงานยึดเหนี่ยว $\epsilon_b = \epsilon_-$ เมื่อ $\theta = 0$ (A) $\epsilon_A(0)$ (down spin) (B) $\epsilon_B(0)$ (up spin) (C) $-\epsilon_B(0)$ (down spin) (D) $-\epsilon_A(0)$ (up spin) และ

(a) $Z_0 = 0$ (b) $Z_0 = 0.5$ (c) $Z_0 = 1$ (d) $Z_0 = 2$

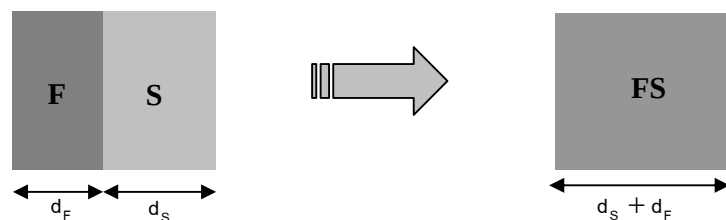


ภาพประกอบ 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของกระแส $I(\varphi, 0)$ กับเฟส φ ที่ได้จากสมการ(2.36) เมื่อ
 (A) $T/T_c = 0.001$, (B) $T/T_c = 0.2$ (C) $T/T_c = 0.6$ และ (a) $Z_0 = 0$ (b) $Z_0 = 0.5$ (c) $Z_0 = 1$ (d)
 $Z_0 = 2, R_{NO}^{-1} = e^2 / [\pi \hbar (1 + Z_0^2)]$

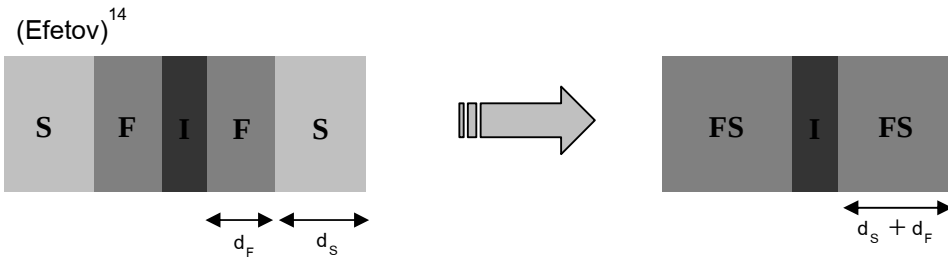
3.ทฤษฎีกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร

ในสารตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร(ferromagnetic superconductor)เมื่ออยู่ในสถานะนำยวดยิ่ง(superconducting state) อิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ สปิน $\uparrow$ กับอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $-\vec{k}$ สปิน $\downarrow$ ยังสามารถจับคู่กันได้ทั้งคู่ที่ตัวนำยวดยิ่งแสดงอำนาจแม่เหล็กเฟอร์โร ปรากฏการณ์การมีสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรร่วมกัน (coexistence of the superconductivity and ferromagnetism) จึงเป็นปรากฏการณ์ที่แปลก เนื่องจากโดยปกติ สนามแม่เหล็กเฟอร์โรจะทำลายคู่คูเปอร์ ดังนั้น ณ.วันนี้ ปรากฏการณ์ของการที่สารมีสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรร่วมกันจึงได้รับความสนใจมาก¹¹⁻¹³ เซนงานคำนวณกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรของ

3.1 เบอเกรต(Bergeret),โวลโคป(Volkov) และเอฟเฟโตบ(Efetov)¹⁴ ซึ่งได้ศึกษาระบบรอยต่อที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำแม่เหล็กเฟอร์โร F ที่หนา d_F ประกบกับแผ่นตัวนำยวดยิ่ง S ที่หนา d_S เป็นระบบรอยต่อแบบ F/S (ภาพประกอบ 22)โดยที่ d_F และ d_S มีค่าน้อยกว่าความยาวอาพันธ์



ภาพประกอบ 22 แสดงแนวคิดของเบอเกรต(Bergeret),โวลโคป(Volkov) และเอฟเฟโตบ



ภาพประกอบ 23 แสดงการแทนระบบรอยต่อโจเซฟสัน S/F/I/F/S ด้วย ระบบรอยต่อโจเซฟสันของ FS/I/FS ของ เบอเกอร์ต (Bergeret), โวลโคป (Volkov) และอีเฟโตบ (Efetov)¹⁴

ของสภานำยวดยิ่ง(superconductor coherence length) และความลึกของการทะลุเข้าไปในแม่เหล็กเฟอร์โร นักวิจัยทั้งสามได้อธิบายว่าระบบ F/s ที่เกิดจากรอยต่อดังกล่าวนี้สามารถแสดงปรากฏการณ์ของการเกิดร่วมกันของสภานำยวดยิ่งกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรได้ นั่นคือเราสามารถแทนระบบรอยต่อ F/s ด้วยแผ่นตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร FS แผ่นเดียวได้ ดังนั้นเมื่อเราคำนวณกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจากระบบของรอยต่อโจเซฟสัน S/F/I/F/S (ดังภาพประกอบ 23) โดยที่ S มีความหนา d_S ส่วน F มีความหนา d_F และเป็นจำนวนบางเขาจึงแทนระบบของรอยต่อโจเซฟสัน S/F/I/F/S ด้วยระบบรอยต่อโจเซฟสัน FS/I/FS แต่การคำนวณกระแสโจเซฟสันในระบบรอยต่อ FS/I/FS ของ เบอเกอร์ต (Bergeret), โวลโคป (Volkov) และ เอฟเฟโตบ (Efetov)¹⁴ ไม่ได้พิจารณากำแพงศักย์กั้น และในการคำนวณนั้น นักวิจัยทั้งสามใช้สมการกอร์คอฟ (Gor'kov equation) ดังนี้

$$(i\varepsilon_n + \xi - p_3 h_{1,2}) \hat{G}_{\varepsilon_{1,2}} + \hat{\Delta} \hat{F}_{\varepsilon_{1,2}}^+ = 1 \quad \dots(2.38)$$

$$(-i\varepsilon_n + \xi - p_3 h_{1,2}) \hat{F}_{\varepsilon_{1,2}}^+ + \hat{\Delta} \hat{G}_{\varepsilon_{1,2}} = 0 \quad \dots(2.39)$$

เมื่อ p_i เป็นเมตริกเพาลี(Pauli matrices), $h_{1,2}$ เป็นสนามแลกเปลี่ยนในตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1 และ 2 ตามลำดับ, $\xi = \frac{p^2}{2m} - E_F$, $\varepsilon_n = \pi k_B T (2n + 1)$ เป็นความถี่มีสซุบารา(Mutsubara frequencies), $\hat{G}_{\varepsilon_{1,2}}$ เป็นฟังก์ชันกรีนปกติ(normal Green function) และ $\hat{F}_{\varepsilon_{1,2}}$ เป็นฟังก์ชันกรีนผิดปกติ(anomalous Green function) ของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1 และ 2 ตามลำดับ
คำนวณกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจาก

$$I_J = (2\pi k_B T / eR) \text{Tr} \sum_n \hat{f}_\varepsilon(h_1) \hat{f}_\varepsilon(h_2) \sin \varphi \quad \dots(2.40)$$

เมื่อ r เป็นค่าความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อโจเซฟสัน, h_1 กับ h_2 เป็นสนามแลกเปลี่ยนใน
ตัวนำยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ, φ เป็นความต่างเฟสของพารามิเตอร์
ความเป็นระเบียบของสภาพนำยิ่งยวดระหว่างตัวนำยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 กับ 2 และ
กำหนดให้ $\hat{f}_\varepsilon(h_{1,2}) = \frac{1}{\pi} \int \hat{f}_{\varepsilon_{1,2}} d\xi$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

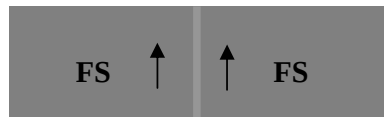
$$\hat{f}_\varepsilon(h_{1,2}) = \hat{\Delta} [(\varepsilon_n + i\varphi h_{1,2})^2 + \Delta^2]^{-\frac{1}{2}} \quad \dots(2.41)$$

กำหนดเมตริก $\hat{\Delta} = i\varphi_2 \Delta$ และ Δ เป็นขนาดของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยิ่งยวดใน
ตัวนำยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ทั้งสอง

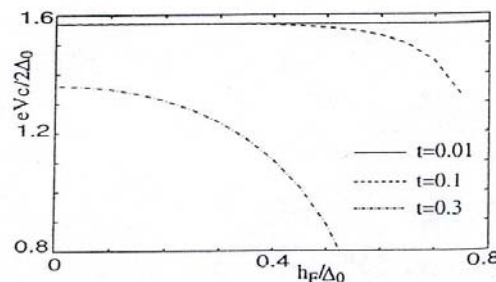
ผลการคำนวณของเบอเกรต(Bergeret), โวลโคป (Volkov) และ เอฟเฟโตบ (Efetov)¹⁴
แบ่งได้เป็น 2 กรณี

1) กรณีที่ทิศของแมกนีไทเซชันในตัวนำยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ทั้งสองขนานกัน
กระแสโจเซฟสันชนิดตรงที่คำนวณได้คือได้คือ

$$I_J^p = \frac{4\pi\Delta^2(T,h)K_B T}{eR} \sum_n \frac{\sin \varphi [\Delta^2(T,h) + \varepsilon_n^2 - h^2]}{[\{\Delta^2(T,h) + \varepsilon_n^2 - h^2\}^2 + (2h\varepsilon_n)^2]} \quad \dots(2.42)$$



ภาพประกอบ 24 แสดงภาพโครงสร้างของระบบรอยต่อโจเซฟสัน $[FS // FS]_p$



ภาพประกอบ 25 แสดงกราฟของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสัน $[FS // FS]_p$

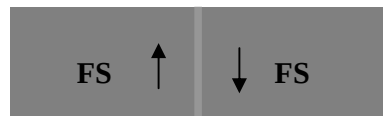
เมื่อ h มีค่าน้อยที่อุณหภูมิใกล้ T_c กระแสโจเซฟสันมีค่าเท่ากับ

$I_c^p = (k_B \pi / 2)(eR)^{-1} (\Delta^2 / T_c) \cosh^{-2}(h / 2T_c)$ กำหนดให้ $eV_c = eRI_c^p$, h_F เป็นสนามแลกเปลี่ยนยังผล

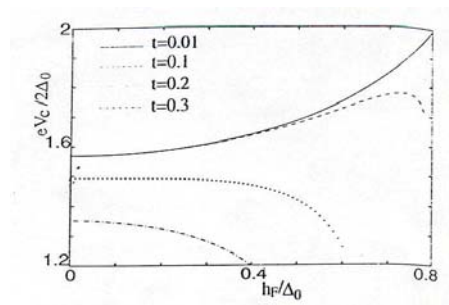
, $t = \tau / \Delta_0$ และ Δ_0 เป็นค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภานำยวดยิ่งเมื่อ $T=0$ และ $h=0$

2) กรณีที่ทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนในตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองส่วนกัน กระแสโจเซฟสันชนิดตรงที่คำนวณได้คือ

$$I_J^a = \frac{4\pi\Delta^2(T,h)k_B T}{eR} \sum_{\varepsilon_n} \left[\frac{\sin \varphi}{\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \varepsilon_n^2 + h^2 + \sqrt{(\varepsilon_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2)^2 + 4(\varepsilon_n h)^2}} \right] \dots (2.43)$$



ภาพประกอบ 26 แสดงภาพโครงสร้างของระบบของรอยต่อโจเซฟสัน $[FS/I/FS]_A$

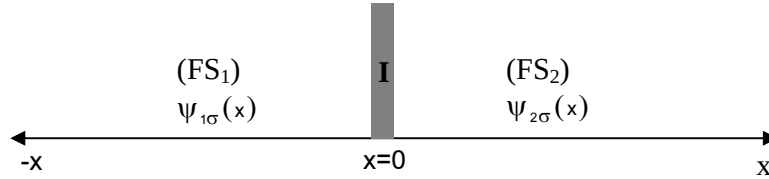


ภาพประกอบ 27 แสดงกราฟของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสัน $[FS/I/FS]_A$

เมื่อ h มีค่าน้อยที่อุณหภูมิใกล้ T_c กระแสโจเซฟสันมีค่าเท่ากับ $I_c^a = k_B \pi (eR)^{-1} (\Delta^2 / h) \tanh(h / 2T_c)$ กำหนดให้ $eV_c = eRI_c^a$, h_F เป็นสนามแลกเปลี่ยนยังผล, $t = \tau / \Delta_0$ และ Δ_0 เป็นค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภานำยวดยิ่งเมื่อ $T=0$ และ $h=0$

3.2 ลี (Li) เซง (Zheng) ชิง (Xing) ซัน (Sun) ด็อง (Dong)¹⁵ ได้คำนวณกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อ $FS/I/FS$ โดยใช้สมการบีดีจี และในการคำนวณ ได้พิจารณาผลกระทบของกำแพงศักย์ฉนวนต่อค่ากระแสโจเซฟสันที่เกิดขึ้นหรือก็คือได้ขยายขอบเขตงานวิจัยของ เบอเกอร์เรต (Bergeret), โวลโคป (Volkov) และ เอฟเฟโตบ (Efetov)¹⁴ ในการคำนวณนั้นได้ใช้ระเบียบวิธีดังต่อไปนี้

กำหนดบริเวณทั้งสามของรอยต่อโจเซฟสัน FS_1 / I / FS_2 ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 28 แสดงฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควาไซในตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 เป็น $\psi_{1\sigma}(x)$ และ $\psi_{2\sigma}(x)$ ตามลำดับ แทนศักย์ของฉนวนด้วย $v\delta(x)$ ซึ่งเป็นเดลต้าฟังก์ชันที่มี v เป็นความสูงของกำแพงศักย์ฉนวน

แก้สมการคลื่นของอนุภาคควาไซ จากสมการบีดีจีได้ดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{\hbar^2 d^2}{2m dx^2} + E_{F1,2} + v\delta(x) \right) - \eta_\sigma h_{1,2} & \Delta_{1,2}(\tau, h_{1,2}) \\ \Delta_{1,2}^+(\tau, h_{1,2}) & -\left(-\frac{\hbar^2 d^2}{2m dx^2} + E_{F1,2} + v\delta(x) \right) - \eta_\sigma h_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2\sigma} \\ v_{1,2\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_{1,2\sigma} \\ v_{1,2\bar{\sigma}} \end{bmatrix} \quad \dots(2.44)$$

เมื่อ E เป็นพลังงานของอนุภาคควาไซ, m เป็นมวลของอิเล็กตรอนเดี่ยว

$E_{F1,2}$ เป็นพลังงานเฟอร์มีของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$h_{1,2}$ เป็นสนามแลกเปลี่ยน(exchange field) ภายในตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$\Delta_{1,2}(\tau, h_{1,2})$ เป็นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$\eta_\sigma = 1$ เมื่อ $\sigma = \uparrow$ และ $\eta_\sigma = -1$ เมื่อ $\sigma = \downarrow$ และ $\bar{\sigma}$ มีทิศสวนกับ σ

จากสมการของบีดีจี เราจะได้

$$u_{1,2\sigma}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \Delta_{1,2}^2 / (E + \eta_\sigma h_{1,2})^2} \right] \quad \dots(2.45)$$

$$v_{1,2\sigma}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \Delta_{1,2}^2 / (E - n_{\sigma} h_{1,2})^2} \right] \quad \dots(2.46)$$

และ เวกเตอร์คลื่นของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน $k_{1,2\sigma}^e$ กับอนุภาคควอไซโฮล $k_{1,2\sigma}^h$ คือ

$$k_{1,2\sigma}^e = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \left[E_{F1,2} + \sqrt{(E + n_{\sigma} h_{1,2})^2 - \Delta_{1,2}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(2.47)$$

$$k_{1,2\sigma}^h = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \left[E_{F1,2} - \sqrt{(E - n_{\sigma} h_{1,2})^2 - \Delta_{1,2}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(2.48)$$

เขียนฟังก์ชันคลื่นในบริเวณทั้งสาม ดังนี้

$$\Psi_{1\sigma}(x < 0) = e^{ik_{1\sigma}^e x} \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + a_{\sigma} e^{ik_{1\sigma}^h x} \begin{bmatrix} v_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ u_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b_{\sigma} e^{-ik_{1\sigma}^e x} \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad \dots(2.49)$$

ในที่นี้ a_{σ} คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟของอนุภาคควอไซโฮล, b_{σ} คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนและ ϕ_1 เป็นเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบใน FS แรก

$$\Psi_{2\sigma}(x > 0) = c_{\sigma} e^{ik_{2\sigma}^e x} \begin{bmatrix} u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} \\ v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d_{\sigma} e^{-ik_{2\sigma}^h x} \begin{bmatrix} v_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} \\ u_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \quad \dots(2.50)$$

ในที่นี้ c_{σ} คือสัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน, d_{σ} คือสัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอนุภาคควอไซโฮล, ϕ_2 เป็นเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบใน FS สอง และ $\phi = \phi_2 - \phi_1$ เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการกระเจิงที่รอยต่อโจเซฟสัน FS₁ / FS₂

$$\Psi_{2\sigma}(x = 0^+) = \Psi_{1\sigma}(x = 0^-) \quad \dots(2.51)$$

$$\left[\frac{d\Psi_{2\sigma}}{dx} \right]_{x=0^+} - \left[\frac{d\Psi_{1\sigma}}{dx} \right]_{x=0^-} = \frac{2mV}{\hbar^2} \Psi_{2\sigma}(x = 0^+) \quad \dots(2.52)$$

ในการคำนวณกระแสโจเซฟสัน ลี (Li) เซง (Zheng) ซิง(Xing) ซัน (Sun) ตี๋อง (Dong)¹⁵

ใช้สูตร

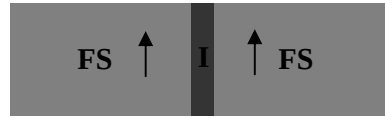
$$I_j = \frac{ek_B T \Delta_1(T, h_1)}{2\hbar} \sum_{\omega_n, \sigma} \frac{1}{2\Omega_{n1\sigma}} (k_{n1\sigma}^e + k_{n1\sigma}^h) \left(\frac{a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n)}{k_{n1\sigma}^e} \right) \dots (2.53)$$

$$\text{เมื่อ } \Omega_{n1,2\sigma} = \sqrt{(\omega_n - \eta_{\sigma} h_1)^2 + \Delta_1^2(T, h_1)} \dots (2.54)$$

$$k_{n1,2\sigma}^h \equiv k_{n1,2\sigma}^\pm = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} [E_{F1,2} \pm \Omega_{n1,2\sigma}]^{\frac{1}{2}} \dots (2.55)$$

และ $a_\sigma(\phi, i\omega_n)$ ได้จากการทำ Analytic continuation คือ แทนค่า E ด้วย $i\omega_n$ ใน $a_\sigma(\phi, E)$ ลี (Li) เซง (Zheng) ซิง (Xing) ชัน (Sun) ต๋อง (Dong)¹⁵ ได้คำนวณกระแสโจเซฟสัน กรณีที่คสมามขนานและกรณีที่คสวนทางกัน (parallel and anti-parallel) และในการคำนวณได้ประมาณเวกเตอร์คลื่นของอนุภาคควอไซ $\approx k_F$ เนื่องจากโดยปกติอนุภาคควอไซในสถานะนำยวดยิ่งจะมีพลังงานใกล้เคียงเฟอร์มีคือ

(1) กรณีแผ่นตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองเป็นชนิดเดียวกันสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนมีทิศทางกัน (parallel) แทนกระแสโจเซฟสันนี้ด้วย I_p ดังสมการ (2.56)

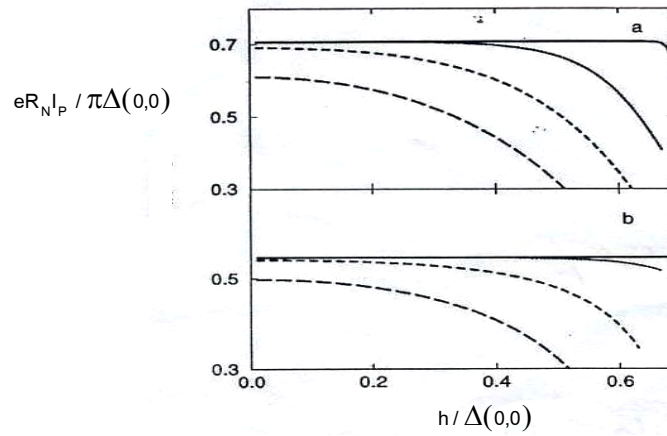


ภาพประกอบ 29 แสดงภาพระบบบรอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร โดยที่ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองเป็นชนิดเดียวกันนั่นคือ $\hbar_{1,2} = \hbar$, $E_{F1,2} = E_F$ และ $\Delta_{1,2}(T, \hbar_{1,2}) = \Delta(T, \hbar)$

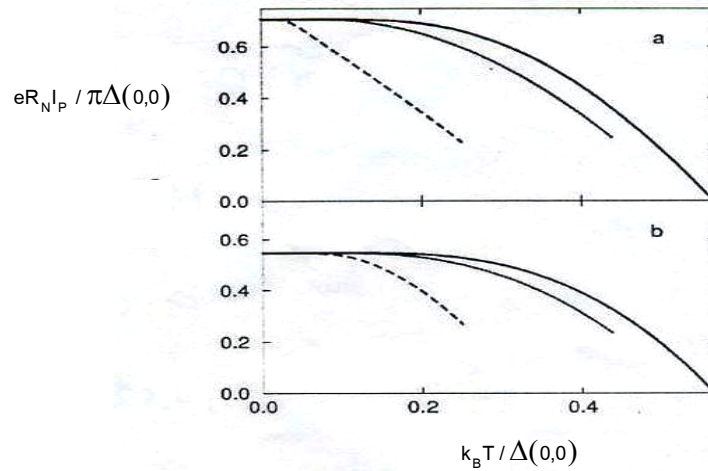
$$I_p R_N = \frac{\pi \Delta^2(T, \hbar) K_B T}{e} \sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \phi [\Delta^2(T, \hbar) \alpha + \omega_n^2 - \hbar^2]}{[\Delta^2(T, \hbar) \alpha + \omega_n^2 - \hbar^2]^2 + (2\hbar \omega_n)^2} \right] \dots (2.56)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \frac{\cos \phi + Z}{1 + Z}, \quad Z = 1 + 2 \left(\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right)^2 \text{ และ } R_N = \frac{\pi \hbar}{2e^2} (1 + Z)$$

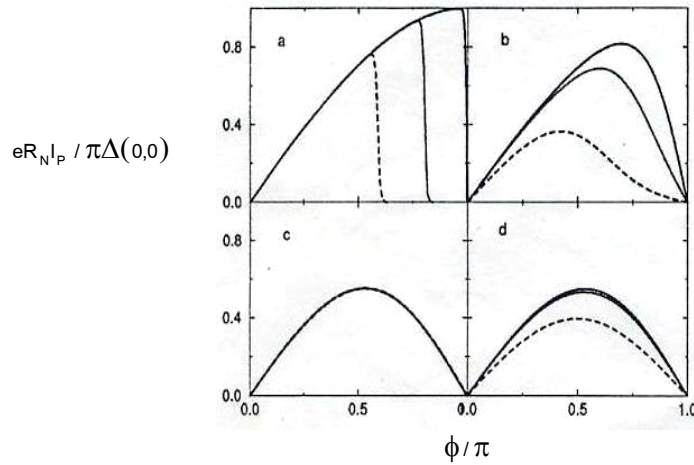
กราฟที่ได้กรณีคสมามแมกนิตเซชันของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรขนานกันเป็นดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 30 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันที่สนามแม่เหล็กขนานเมื่อ $k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (เส้นทึบ), 0.1 (เส้นจุด), 0.2 (เส้นขีดสั้น) และ 0.3 (เส้นขีดยาว) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับกราฟ (a) ใช้ $z=1$ และ (b) $z=5$



ภาพประกอบ 31 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กขนาน เมื่อ $h/\Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) โดย $\phi = \pi/2$ ในกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$



ภาพประกอบ 32 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กขนานกับความต่างเฟสกำหนดค่า $h/\Delta(0,0)=0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) เมื่อภาพ (a) $Z=1$, $k_B T/\Delta(0,0)=0.01$ (b) $Z=1$, $T/T_C=0.2$ (c) $Z=5$, $k_B T/\Delta(0,0)=0.01$ และ (d) $Z=5$, $T/T_C=0.2$

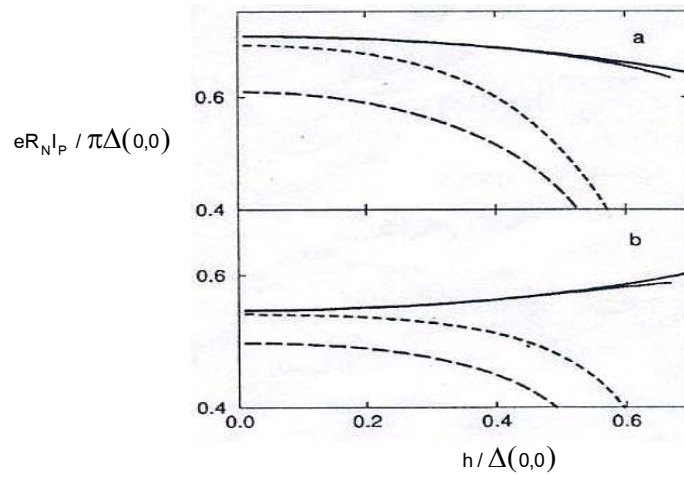
(2) กรณีแผ่นตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองเป็นชนิดเดียวกันและสนามแมกนีไทเซชันมีทิศสวนกัน(anti-parallel) แทนกระแสโจเซฟสันนี้ด้วย I_{AP} จะมีค่าดังสมการ (2.57)



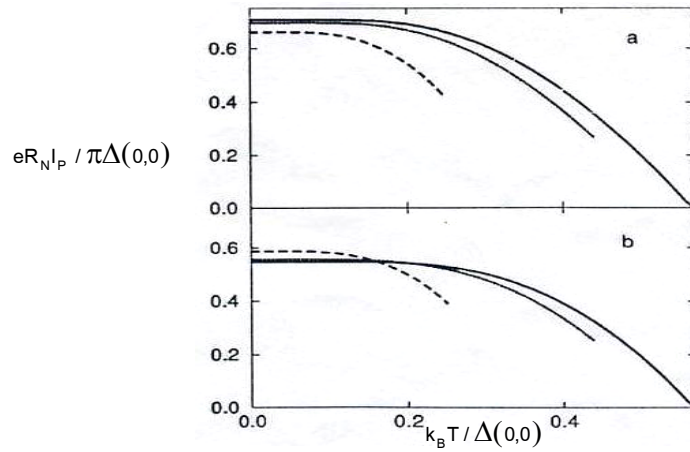
ภาพประกอบ 33 แสดงภาพระบบบรอยต่อโจเซฟสันของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร โดยที่ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองมีทิศของแมกนีไทเซชันสวนทางกันนั่นคือ $h_1 = -h_2 = h$, $E_{F1,2} = E_F$ และ $\Delta_{1,2}(T, h_{1,2}) = \Delta(T, h)$

$$I_{AP} R_N = \frac{\pi \Delta^2(T, h) K_B T}{e} (1 + Z) \times \sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \phi}{\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 + h^2 + Z \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2}} \right] \dots (2.57)$$

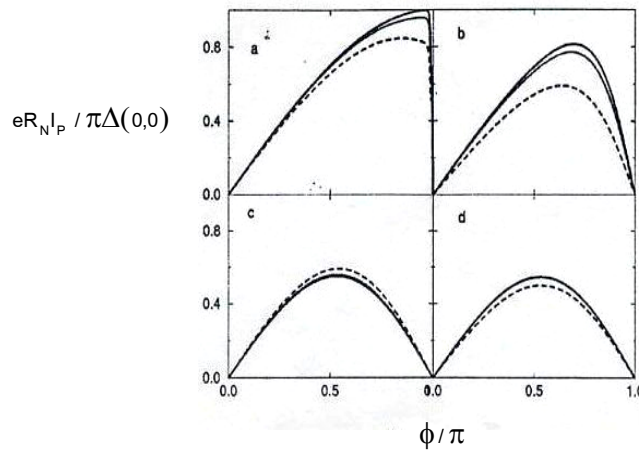
กราฟที่ได้จากกรณีแมกนีไทเซชันของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรสวนทิศทางกันเป็นดังภาพประกอบ 34



ภาพประกอบ 34 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทาง เมื่อ $k_B T / \Delta(0,0) = 0.01$ (เส้นทึบ), 0.1 (เส้นจุด), 0.2 (เส้นขีดสั้น) และ 0.3 (เส้นขีดยาว) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$



ภาพประกอบ 35 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทางกัน เมื่อ $h / \Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) โดย $\phi = \pi/2$ และสำหรับกราฟ (a) $z=1$ และ (b) $z=5$



ภาพประกอบ 36 แสดงกราฟกระแสโจเซฟสันกรณีสนามแม่เหล็กสวนทางกัน กับความต่างเฟส กำหนดค่าของ $h/\Delta(0,0) = 0$ (เส้นทึบ), 0.3 (เส้นจุด) และ 0.6 (เส้นขีด) เมื่อภาพ (a) $z=1$, $k_B T/\Delta(0,0) = 0.01$ (b) $z=1$, $T/T_c = 0.2$ (c) $z=5$, $k_B T/\Delta(0,0) = 0.01$ และ (d) $z=5$, $T/T_c = 0.2$

งานวิจัยที่จะทำต่อไปนี้จะขยายงานวิจัยของลี(Li) เซง(Zheng) ชิง(Xing) ซัน(Sun) และ ตี๋อง (Dong)¹⁵ โดยจะหาสูตรของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โรต่างชนิดกัน และฉนวนที่คั่นรอยต่ออาจเป็นแบบฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรและหรือฉนวนปกติ สูตรกระแสโจเซฟสันที่ได้จะครอบคลุมกรณีสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบต่างๆในงานวิจัยที่ผ่านมาทั้งหมดโดยคาดหวังจะหากระแสในระบบรอยต่อโจเซฟสัน($FS_1/FI/FS_2$)ที่ยังไม่มีใครเคยคำนวณมาก่อนด้วย

¹ P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1996) pp.142.

² A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).

³ S. Raimes, *Many Electron Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1972).

⁴ P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1996) pp.116.

⁵ A. Furusaki and M. Tsukada, *Solid State Commun.* **78** (1991) 299.

⁶ Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. B* **53**, 11957 (1996).

⁷ Z. Radovic, N. Lazarides and N. Flytfnis. *Phys. Rev. B* **68**, 014501 (2003).

⁸ Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 3485 (1999).

- ⁹ W. L. McMillan, Phys. Rev. **175**, 559 (1968).
- ¹⁰ Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Physica C **274**, 357, (1997).
- ¹¹ K. Yang and D. F. Agterberg, Phys. Rev. Lett. **84**, 4970, (2000).
- ¹² T. Kontos, M. Aprili, J. Lesuer, and X. Gison, Phys. Rev. Lett. **86**, 304 (2001).
- ¹³ V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennicov, A. A. Golubov, and J. Aarts, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001).
- ¹⁴ F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **86**, 3140 (2001).
- ¹⁵ Z. M. Zheng, D. Y. Xing, G. Y. Sun, and J. M. Dong, Phys. Rev. **B 65**, 134507 (2002).

บทที่ 3

วิธีคำนวณกระแสโจเซฟสัน

ในการคำนวณกระแสโจเซฟสันที่ไหลผ่านรอยต่อตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร /
ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ($FS_1 / Fi / FS_2$) มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควาไซที่ตกกระทบ, ที่สะท้อน และส่งผ่าน และเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวนำทั้งสาม
2. คำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรอฟ (Coefficient of the Andreev reflection) ที่รอยต่อ
3. คำนวณหากระแสโจเซฟสันชนิดตรงจากสูตรของ ฟุรุซากิ กับซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)¹

ขั้นตอนที่ 1

ในการกำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควาไซในบริเวณทั้งสามและเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวนำทั้งสาม



ภาพประกอบ 37 แสดงรอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบด้วย ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร / ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ซึ่งตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกันโดยให้ความหนาของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางมาก

ในที่นี้เพื่อกำหนดฮามิลโทเนียนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรให้ครอบคลุมกรณีฉนวนปกติด้วย จึงกำหนดให้

$$u(x) = (v - \eta_\sigma H) \delta(x) \quad \dots(3.1)$$

เมื่อ H แทนความรุนแรงของสนามศักย์ในฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร v เป็นความเข้มของสนามศักย์ในฉนวนปกติ, $\delta(x)$ เป็นฟังก์ชันศักย์แบบเดลต้า เพราะในที่นี้ให้ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรอยู่ที่ตำแหน่ง $x=0$, η_σ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\sigma=\uparrow$ และมีค่าเท่ากับ -1 เมื่อ $\sigma=\downarrow$ เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นในตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทางซ้ายเป็น

$$\Psi_{1\sigma}(x < 0) = e^{ik_{1\sigma}^0 x} \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + a_{\bar{\sigma}} e^{ik_{1\bar{\sigma}}^0 x} \begin{bmatrix} v_{1\bar{\sigma}} e^{i\phi_1/2} \\ u_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b_{\sigma} e^{-ik_{1\sigma}^0 x} \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.2)$$

$a_{\bar{\sigma}}$ คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนติเฟอร์โรของอนุภาคโฮลที่มีสปิน $\bar{\sigma}$

b_{σ} คือสัมประสิทธิ์การสะท้อนของอนุภาคอิเล็กตรอนที่มีสปิน σ

และฟังก์ชันคลื่นในตัวนำวยอดยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรทางขวามือเป็น

$$\Psi_{2\sigma}(x > 0) = c_{\sigma} e^{ik_{2\sigma}^0 x} \begin{bmatrix} u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} \\ v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d_{\bar{\sigma}} e^{-ik_{2\bar{\sigma}}^0 x} \begin{bmatrix} v_{2\bar{\sigma}} e^{i\phi_2/2} \\ u_{2\bar{\sigma}} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.3)$$

c_{σ} คือสัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอิเล็กตรอนที่มีสปิน σ

และ $d_{\bar{\sigma}}$ คือสัมประสิทธิ์การส่งผ่านของโฮลที่มีสปิน $\bar{\sigma}$

เมื่อ
$$u_{1,2\sigma}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Omega_{1,2\sigma}}{\epsilon + \eta_{\sigma} h_{1,2}} \right), \quad v_{1,2\bar{\sigma}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Omega_{1,2\sigma}}{\epsilon - \eta_{\bar{\sigma}} h_{1,2}} \right)$$

และ
$$k_{1,2\sigma}^{\pm} \equiv k_{1,2\sigma}^{\pm} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} [E_{F1,2} \pm \Omega_{1,2}]^{\frac{1}{2}}, \text{ กำหนดให้มวลในตัวนำทั้งสามเท่ากัน}$$

โดยที่
$$\Omega_{1,2} = \sqrt{(\epsilon + \eta_{\sigma} h_{1,2})^2 - \Delta_{1,2}^2(\tau, h_{1,2})}$$

...(3.4)

เมื่อค่า $\Delta_{1,2}(\tau, h_{1,2})$ เป็นช่องว่างพลังงานของตัวนำวยอดยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1,2 ตามลำดับ

$E_{F1,2}$ เป็นพลังงานเฟอร์มีของตัวนำวยอดยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1,2 ตามลำดับ

$h_{1,2}$ เป็นค่าสนามแลกเปลี่ยนในตัวนำวยอดยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1,2 ตามลำดับ

$E, k_{1,2}^{\pm}$ เป็นพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคควาซีอิเล็กตรอนและโฮล ในตัวนำวยอด

ยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1,2 ตามลำดับ

และ ϕ_1 กับ ϕ_2 เป็นเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำวยอดยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โรตัวที่ 1,2

หากให้เงื่อนไขค่าขอบเขตที่บริเวณรอยต่อกำหนดว่า

$$\Psi_{2\sigma}(x = 0^+) = \Psi_{1\sigma}(x = 0^-) \quad \dots(3.5)$$

$$\text{และ} \left[\frac{d\Psi_{2\sigma}}{dx} \right]_{x=0^+} - \left[\frac{d\Psi_{1\sigma}}{dx} \right]_{x=0^-} = \frac{2m}{\hbar^2} \begin{bmatrix} V - \eta_{\sigma H} & 0 \\ 0 & V + \eta_{\sigma H} \end{bmatrix} \Psi_{2\sigma}(x=0^+) \quad \dots(3.6)$$

จากสมการ(3.2) , (3.3) เมื่อใช้เงื่อนไข (3.5) จะได้

$$a_{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} v_{1\bar{\sigma}} e^{i\phi_1/2} \\ u_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b_{\sigma} \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + c_{\sigma} \begin{bmatrix} -u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} \\ -v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d_{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} -v_{2\bar{\sigma}} e^{i\phi_2/2} \\ -u_{2\bar{\sigma}} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ -v_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.7)$$

และจากสมการ(3.2),(3.3)เมื่อใช้เงื่อนไข(3.6) จะได้สมการอีกชุดหนึ่งคือ

$$a_{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} ik_{1\bar{\sigma}}^h v_{1\bar{\sigma}} e^{i\phi_1/2} \\ ik_{1\bar{\sigma}}^h u_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} - b_{\sigma} \begin{bmatrix} ik_{1\sigma}^e u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ ik_{1\sigma}^e v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + c_{\sigma} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V - \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\} u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V + \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\} v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} + d_{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V - \eta_{\sigma H}) + ik_{2\bar{\sigma}}^h \right\} v_{2\bar{\sigma}} e^{i\phi_2/2} + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V + \eta_{\sigma H}) + ik_{2\bar{\sigma}}^h \right\} u_{2\bar{\sigma}} e^{-i\phi_2/2} = \begin{bmatrix} -ik_{1\sigma}^e u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ -ik_{1\sigma}^e v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.8)$$

สมการ(3.7) และ (3.8) สามารถเขียนรวมเป็นสมการเมตริกได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_{1\bar{\sigma}} e^{i\phi_1/2} & u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} & -u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} & -v_{2\bar{\sigma}} e^{i\phi_2/2} \\ u_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} & v_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} & -v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} & -u_{2\bar{\sigma}} e^{-i\phi_2/2} \\ ik_{1\bar{\sigma}}^h v_{1\bar{\sigma}} e^{i\phi_1/2} & -ik_{1\sigma}^e u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} & \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V - \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\} u_{2\sigma} e^{i\phi_2/2} & \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V - \eta_{\sigma H}) + ik_{2\bar{\sigma}}^h \right\} v_{2\bar{\sigma}} e^{i\phi_2/2} \\ ik_{1\bar{\sigma}}^h u_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} & -ik_{1\sigma}^e v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} & \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V + \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\} v_{2\sigma} e^{-i\phi_2/2} & \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V + \eta_{\sigma H}) + ik_{2\bar{\sigma}}^h \right\} u_{2\bar{\sigma}} e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{\bar{\sigma}} \\ b_{\sigma} \\ c_{\sigma} \\ d_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{1\sigma} e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\bar{\sigma}} e^{-i\phi_1/2} \\ ik_{1\sigma}^e u_{1\sigma} e^{i\phi_2/2} \\ ik_{1\sigma}^e v_{1\sigma} e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.9)$$

เมื่อกำหนดตัวแปร

$$A_{1,2} = u_{1,2\sigma} e^{i\phi_{1,2}/2}, \quad B_{1,2} = v_{1,2\bar{\sigma}} e^{i\phi_{1,2}/2}$$

$$\Pi_{e\pm} = \frac{1}{ik_{1\bar{\sigma}}^h} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\}, \quad \Pi_{h\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^h} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) + ik_{2\sigma}^h \right\}$$

$$\tilde{\Pi}_{e\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^e} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\}, \quad \tilde{\Pi}_{h\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^e} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) + ik_{2\sigma}^h \right\}$$

$$\text{และ} \quad \alpha = \frac{k_{1\sigma}^e}{k_{1\sigma}^h}$$

...(3.10)

นำตัวแปรต่างๆในสมการ (3.10) แทนลงในสมการเมตริก (3.9) จะได้

$$\begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ ik_{1\bar{\sigma}}^h B_1 & -ik_{1\bar{\sigma}}^h \alpha A_1 & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{e-} A_2 & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{h-} B_2 \\ k_{1\bar{\sigma}}^h A_1^* & -ik_{1\bar{\sigma}}^h \alpha B_1^* & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{e+} B_2^* & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\bar{\sigma}} \\ b_{\sigma} \\ c_{\sigma} \\ d_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -B_1^* \\ -ik_{1\sigma}^e A_1 \\ -ik_{1\sigma}^e B_1^* \end{bmatrix}$$

...(3.11)

ขั้นตอนที่ 2

คำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟที่รอยต่อ (ค่า $a_{\bar{\sigma}}(\varphi, E)$) จากสมการเมตริก (3.11) โดยใช้กฎของคราเมอร์ดังนี้

$$a_{\bar{\sigma}}(\varphi, E) = \frac{\begin{vmatrix} -A_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ -ik_{1\sigma}^e A_1 & -ik_{1\sigma}^e A_1 & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{e-} A_2 & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{h-} B_2 \\ -k_{1\sigma}^e B_1^* & -ik_{1\sigma}^e B_1^* & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ ik_{1\bar{\sigma}}^h B_1 & -ik_{1\bar{\sigma}}^h \alpha A_1 & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{e-} A_2 & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{h-} B_2 \\ k_{1\bar{\sigma}}^h A_1^* & -ik_{1\bar{\sigma}}^h \alpha B_1^* & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{e+} B_2^* & ik_{1\bar{\sigma}}^h \Pi_{h+} A_2^* \end{vmatrix}}$$

...(3.12)

เมื่อกำหนดให้เมตริกหลักคือ

$$[M] = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ ik_{1\sigma}^h B_1 & -ik_{1\sigma}^h \alpha A_1 & ik_{1\sigma}^h \Pi_{e-} A_2 & ik_{1\sigma}^h \Pi_{h-} B_2 \\ k_{1\sigma}^h A_1^* & -ik_{1\sigma}^h \alpha B_1^* & ik_{1\sigma}^h \Pi_{e+} B_2^* & ik_{1\sigma}^h \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \quad \dots(3.13)$$

คำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของ $[M]$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Det}[M] &= -[k_{1\sigma}^h]^2 \text{Det} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ B_1 & -\alpha A_1 & \Pi_{e-} A_2 & \Pi_{h-} B_2 \\ A_1^* & -\alpha B_1^* & \Pi_{e+} B_2^* & \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ &= -[k_{1\sigma}^h]^2 \text{Det}[M'] \quad \dots(3.14) \end{aligned}$$

ดังนั้นในการหาค่า $\text{Det}[M]$ ด้วยวิธีง่ายจึงต้องคำนวณเมตริก $[M']$ เมื่อให้สัญลักษณ์ R_i แทนแถวที่ i ของเมตริก $[M']$ ดังนี้

$$\begin{aligned} R_1 - R_3 &\sim \begin{bmatrix} 0 & (1+\alpha)A_1 & -(\Pi_{e-} + 1)A_2 & -(\Pi_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & (1+\alpha)B_1^* & -(\Pi_{e+} + 1)B_2^* & -(\Pi_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & \alpha(B_1 B_1^* - A_1 A_1^*) & (\Pi_{e-} A_2 A_1^* - \Pi_{e+} B_1 B_2^*) & (\Pi_{h-} B_2 A_1^* - \Pi_{h+} B_1 A_2^*) \\ A_1^* & -\alpha B_1^* & \Pi_{e+} B_2^* & \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ R_2 - R_4 &\sim \begin{bmatrix} 0 & (1+\alpha)A_1 & -(\Pi_{e-} + 1)A_2 & -(\Pi_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & (1+\alpha)B_1^* & -(\Pi_{e+} + 1)B_2^* & -(\Pi_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & \alpha(B_1 B_1^* - A_1 A_1^*) & (\Pi_{e-} A_2 A_1^* - \Pi_{e+} B_1 B_2^*) & (\Pi_{h-} B_2 A_1^* - \Pi_{h+} B_1 A_2^*) \\ A_1^* & -\alpha B_1^* & \Pi_{e+} B_2^* & \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ A_1^* R_3 - B_1^* R_4 &\sim \begin{bmatrix} 0 & (1+\alpha)A_1 & -(\Pi_{e-} + 1)A_2 & -(\Pi_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & (1+\alpha)B_1^* & -(\Pi_{e+} + 1)B_2^* & -(\Pi_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & \alpha(B_1 B_1^* - A_1 A_1^*) & (\Pi_{e-} A_2 A_1^* - \Pi_{e+} B_1 B_2^*) & (\Pi_{h-} B_2 A_1^* - \Pi_{h+} B_1 A_2^*) \\ A_1^* & -\alpha B_1^* & \Pi_{e+} B_2^* & \Pi_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots(3.15)$$

เมตริกที่ได้จากการคำนวณในสมการ (3.15) เป็นเมตริกคล้ายของ $[M']$ เมื่อใช้สูตรการกระจายโคแฟกเตอร์หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกคล้ายของ $[M']$ แล้วหารดีเทอร์มิแนนท์ที่ได้ด้วย A_1^* จะได้ค่า $\text{Det}[M']$ (เนื่องจากการดำเนินการแถวที่ 3 ของเมตริก $[M']$ เมื่อคูณด้วย A_1^*) จะทำให้ได้ $\text{Det}[M]$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Det}[M] &= [k_{1\sigma}^h]^2 \text{Det} \begin{bmatrix} (1+\alpha)A_1 & -(\Pi_{e-} + 1)A_2 & -(\Pi_{h-} + 1)B_2 \\ (1+\alpha)B_1^* & -(\Pi_{e+} + 1)B_2^* & -(\Pi_{h+} + 1)A_2^* \\ \alpha(B_1 B_1^* - A_1 A_1^*) & (\Pi_{e-} A_2 A_1^* - \Pi_{e+} B_1 B_2^*) & (\Pi_{h-} B_2 A_1^* - \Pi_{h+} B_1 A_2^*) \end{bmatrix} \\ &= [k_{1\sigma}^h]^2 \{ [\Pi_{e+} \alpha - \Pi_{e+} \Pi_{h-} - \Pi_{h-} + \alpha] A_1 B_2 B_2^* A_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\Pi_{h+} \alpha - \Pi_{e+} \alpha + \Pi_{h+} - \Pi_{e+}] A_1 B_1 A_2^* B_2^* \\
& + [\Pi_{e-} \alpha - \Pi_{e-} \Pi_{h+} - \Pi_{h+} + \alpha] A_2 B_1 A_2^* B_1^* \\
& + [\Pi_{h+} \Pi_{e-} - \Pi_{h+} \alpha + \Pi_{e-} - \alpha] A_1 A_2 A_2^* A_1^* \\
& + [\Pi_{h-} \alpha - \Pi_{e-} \alpha + \Pi_{h-} - \Pi_{e-}] B_2 A_2 A_1^* B_1^* \\
& + [\Pi_{h-} \Pi_{e+} - \Pi_{h-} \alpha + \Pi_{e+} - \alpha] B_1 B_2 B_1^* B_2^* \} \\
& \dots(3.16)
\end{aligned}$$

นำค่าต่างๆในสมการ(3.10) แทนลงในสมการ(3.16) และเมื่อใช้เครื่องหมาย * แทนสังยุคของปริมาณจะได้

$$\begin{aligned}
\text{Det}[M] &= [k_{1\sigma}^h]^2 \{ [\Pi_{e+} \alpha - \Pi_{e+} \Pi_{h-} - \Pi_{h-} + \alpha] u_1^2 v_2^2 \\
& + [\Pi_{h+} \alpha - \Pi_{e+} \alpha + \Pi_{h+} - \Pi_{e+}] u_1 v_1 u_2 v_2 e^{i\phi} \\
& + [\Pi_{e-} \alpha - \Pi_{e-} \Pi_{h+} - \Pi_{h+} + \alpha] u_2^2 v_1^2 \\
& + [\Pi_{h+} \Pi_{e-} - \Pi_{h+} \alpha + \Pi_{e-} - \alpha] u_1^2 u_2^2 \\
& + [\Pi_{h-} \alpha - \Pi_{e-} \alpha + \Pi_{h-} - \Pi_{e-}] u_1 v_1 u_2 v_2 e^{-i\phi} \\
& + [\Pi_{h-} \Pi_{e+} - \Pi_{h-} \alpha + \Pi_{e+} - \alpha] v_1^2 v_2^2 \} \\
& \dots(3.17)
\end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $\phi = \phi_1 - \phi_2$ และกำหนดตัวแปรเพิ่มเติมดังนี้

$$\text{คือให้} \quad \Pi_{e\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^h} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\}$$

$$= -\{\gamma_e + i \in (v \pm \eta_{\sigma} H)\} \quad \dots(3.18)$$

$$\Pi_{h\pm} = \frac{1}{ik_{i\bar{\sigma}}^h} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma} H) + ik_{2\sigma}^h \right\}$$

$$= \{\gamma_h - i \in (v \pm \eta_{\sigma} H)\} \quad \dots(3.19)$$

เมื่อ $\epsilon = \frac{2m}{\hbar^2 k_{i\bar{\sigma}}^h}$ และ $\gamma_{e,h} = \frac{k_{2\sigma}^{e,h}}{k_{i\bar{\sigma}}^h}$ ทำให้หาค่าในวงเล็บต่างๆของสมการ(3.17)ได้ดังนี้

$$\therefore [\Pi_{e+} \alpha - \Pi_{e+} \Pi_{h-} - \Pi_{h-} + \alpha]$$

$$= (\epsilon^2 (v^2 - H^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha - \alpha \gamma_e - \gamma_h) + i \in v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha) + \eta_{\sigma} i \in H(\gamma_e + \gamma_h) - \eta_{\sigma} i \in H(1 + \alpha)$$

$$\dots(3.20)$$

$$\therefore [\Pi_{h+} \alpha - \Pi_{e+} \alpha + \Pi_{h+} - \Pi_{e+}]$$

$$= (\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1) \quad \dots(3.21)$$

$$\therefore [\Pi_{e-} \alpha - \Pi_{e-} \Pi_{h+} - \Pi_{h+} + \alpha]$$

$$= (\epsilon^2 (v^2 - H^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha - \alpha \gamma_e - \gamma_h) + i \in v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha) - \eta_{\sigma} i \in H(\gamma_e + \gamma_h) + \eta_{\sigma} i \in H(1 + \alpha)$$

$$\dots(3.22)$$

$$\therefore [\Pi_{h+} \Pi_{e-} - \Pi_{h+} \alpha + \Pi_{e-} - \alpha]$$

$$= -(\epsilon^2 (v^2 - H^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha + \alpha \gamma_h + \gamma_e) - i \in v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha) + \eta_{\sigma} i \in H(\gamma_e + \gamma_h) + \eta_{\sigma} i \in H(1 + \alpha)$$

$$\dots(3.23)$$

$$\therefore [\Pi_{h-} \alpha - \Pi_{e-} \alpha + \Pi_{h-} - \Pi_{e-}]$$

$$= (\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1) \quad \dots(3.24)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore [\Pi_{h-} \Pi_{e+} - \Pi_{h-} \alpha + \Pi_{e+} - \alpha] \\
& = -(\epsilon^2 (v^2 - h^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha + \alpha \gamma_h + \gamma_e) - i \in v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha) - \eta_{\sigma} i \in H(\gamma_e + \gamma_h) - \eta_{\sigma} i \in H(1 + \alpha) \\
& \dots(3.25)
\end{aligned}$$

และถ้ากำหนดให้

$$\begin{aligned}
c_1 &= (\epsilon^2 (v^2 - h^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha - \alpha \gamma_e - \gamma_h), c_2 = \epsilon v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha) \\
c_3 &= \epsilon H(\gamma_e + \gamma_h), c_4 = \epsilon H(1 + \alpha) \text{ และ } c_5 = -(\epsilon^2 (v^2 - h^2) + \gamma_e \gamma_h + \alpha + \alpha \gamma_h + \gamma_e) \\
& \dots(3.26)
\end{aligned}$$

นำค่าต่างๆสมการ(3.17) ถึงสมการ(3.26)แทนลงในสมการ(3.17) จะได้

$$\begin{aligned}
\text{Det}[M] &= \left[\kappa_{\frac{h}{\sigma}} \right]^2 \left\{ [c_1 + i c_2] (u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2) + [c_5 - i c_2] (u_1^2 u_2^2 + v_1^2 v_2^2) \right. \\
&+ \eta_{\sigma} i c_3 ([u_1^2 v_2^2 - u_2^2 v_1^2] + [u_1^2 u_2^2 - v_1^2 v_2^2]) + \eta_{\sigma} i c_4 ([u_1^2 u_2^2 - v_1^2 v_2^2] - [u_1^2 v_2^2 - u_2^2 v_1^2]) \\
&+ 2[(\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1)] u_1 v_1 u_2 v_2 \cos \phi \Big\} \\
& \dots(3.27)
\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาค่าต่างๆในสมการ(3.27) เราจะได้ว่า

$$u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)} \right\} \quad \dots(3.28)$$

$$u_1^2 u_2^2 + v_1^2 v_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)} \right\} \quad \dots(3.29)$$

$$u_1^2 v_2^2 - u_2^2 v_1^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Omega_1}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)} - \frac{\Omega_2}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)} \right\} \quad \dots(3.30)$$

$$u_1^2 u_2^2 - v_1^2 v_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Omega_1}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)} + \frac{\Omega_2}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)} \right\} \quad \dots(3.31)$$

$$u_1 u_2 v_1 v_2 = \frac{1}{4} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)} \quad \dots(3.32)$$

แทนค่าต่างๆจากสมการ(3.28) - (3.32) ลงในสมการ(3.27)จะได้

$$\begin{aligned} \text{Det}[M] = & \frac{1}{2} \frac{[k_{1\bar{\sigma}}^h]^2}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)} \{[(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)][c_1 + c_5] + [c_5 - c_1 - 2ic_2]\Omega_1 \Omega_2 \\ & + \eta_{\sigma} i 2c_3 (\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_{12}) \Omega_1 + \eta_{\sigma} i 2c_4 (\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1) \Omega_2 + [(\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1)] \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi\} \\ & \dots(3.33) \end{aligned}$$

เพราะ

$$c_1 + c_5 = -(\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1) \quad \dots(3.34)$$

$$\text{และ } c_5 - c_1 = -(2\epsilon^2 (v^2 - H^2) + 2\gamma_e \gamma_h + 2\alpha + \alpha \gamma_h + \gamma_e - \alpha \gamma_e - \gamma_h) \quad \dots(3.35)$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.34)-(3.26) ลงในสมการ (3.33) ในที่สุดจะได้ค่าของ Det[M] เป็น

$$\begin{aligned} \text{Det}[M] = & \left[\frac{1}{2} \frac{[k_{1\bar{\sigma}}^h]^2}{(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)} \right] \{[(\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1)] \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi - (\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)\} + \\ & - [2\epsilon^2 (v^2 - H^2)] + 2\gamma_e \gamma_h + \alpha [2 + \gamma_h - \gamma_e] + \gamma_e - \gamma_h + i[\epsilon v(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha)] \Omega_1 \Omega_2 \\ & + \eta_{\sigma} i [2\epsilon H(\gamma_e + \gamma_h)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_2)] \Omega_1 + \eta_{\sigma} i [2\epsilon H(1 + \alpha)(\mathbb{E} + \eta_{\sigma} h_1)] \Omega_2 \} \\ & \dots(3.36) \end{aligned}$$

เมื่อได้ค่าของ $\text{Det}[M]$ แล้วจากนั้นก็หาค่าของ $\text{Det}[a_{\bar{\sigma}}]$ โดยที่ $[a_{\bar{\sigma}}]$ หาได้จากสมการ (3.12) ดังนี้

$$[a_{\bar{\sigma}}] = \begin{bmatrix} -A_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ -ik_{1\sigma}^e A_1 & -ik_{1\sigma}^e A_1 & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{e-} A_2 & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{h-} B_2 \\ -k_{1\sigma}^e B_1^* & -ik_{1\sigma}^e B_1^* & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & ik_{1\sigma}^e \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \quad \dots(3.37)$$

ในทำนองเดียวกับเมื่อหา $\text{Det}[M]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{Det}[a_{\bar{\sigma}}] &= -[k_{1\sigma}^e]^2 \text{Det} \begin{bmatrix} -A_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ -A_1 & -A_1 & \tilde{\Pi}_{e-} A_2 & \tilde{\Pi}_{h-} B_2 \\ -B_1^* & -B_1^* & \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ &= -[k_{1\sigma}^e]^2 \text{Det}[a'_{\bar{\sigma}}] \quad \dots(3.38) \end{aligned}$$

หาค่า $\text{det}[a'_{\bar{\sigma}}]$ ต่อดังนี้

$$\begin{aligned} R_1 - R_3 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 2A_1 & -(\tilde{\Pi}_{e-} + 1)A_2 & -(\tilde{\Pi}_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & 2B_1^* & -(\tilde{\Pi}_{e+} + 1)B_2^* & -(\tilde{\Pi}_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & 0 & (\tilde{\Pi}_{e-} A_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{e+} A_1 B_2^*) & (\tilde{\Pi}_{h-} B_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{h+} A_1 A_2^*) \\ -B_1^* & -B_1^* & \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ R_2 - R_4 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 2A_1 & -(\tilde{\Pi}_{e-} + 1)A_2 & -(\tilde{\Pi}_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & 2B_1^* & -(\tilde{\Pi}_{e+} + 1)B_2^* & -(\tilde{\Pi}_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & 0 & (\tilde{\Pi}_{e-} A_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{e+} A_1 B_2^*) & (\tilde{\Pi}_{h-} B_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{h+} A_1 A_2^*) \\ -B_1^* & -B_1^* & \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \\ B_1^* R_3 - A_1 R_4 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 2A_1 & -(\tilde{\Pi}_{e-} + 1)A_2 & -(\tilde{\Pi}_{h-} + 1)B_2 \\ 0 & 2B_1^* & -(\tilde{\Pi}_{e+} + 1)B_2^* & -(\tilde{\Pi}_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & 0 & (\tilde{\Pi}_{e-} A_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{e+} A_1 B_2^*) & (\tilde{\Pi}_{h-} B_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{h+} A_1 A_2^*) \\ -B_1^* & -B_1^* & \tilde{\Pi}_{e+} B_2^* & \tilde{\Pi}_{h+} A_2^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

...(3.39)

จากสมการ(3.38) และ(3.39)กระจายโคแฟกเตอร์เพื่อหาค่า $\text{Det}[a'_{\bar{\sigma}}]$ ได้โดยวิธีเดียวกันกับเมื่อครั้งหาค่า $\text{Det}[M]$ คือ

$$\begin{aligned} \text{Det}[a_{\bar{\sigma}}] &= -[k_{1\sigma}^e]^2 \text{Det} \begin{bmatrix} 2A_1 & -(\tilde{\Pi}_{e-} + 1)A_2 & -(\tilde{\Pi}_{h-} + 1)B_2 \\ 2B_1^* & -(\tilde{\Pi}_{e+} + 1)B_2^* & -(\tilde{\Pi}_{h+} + 1)A_2^* \\ 0 & (\tilde{\Pi}_{e-} A_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{e+} A_1 B_2^*) & (\tilde{\Pi}_{h-} B_2 B_1^* - \tilde{\Pi}_{h+} A_1 A_2^*) \end{bmatrix} \\ &= -[k_{1\sigma}^e]^2 \{ 2[\tilde{\Pi}_{e+} - \tilde{\Pi}_{h-}] \mu_1 v_1 v_2^2 + 2[\tilde{\Pi}_{h+} - \tilde{\Pi}_{e+}] \mu_1^2 u_2 v_2 e^{i\phi} \} \end{aligned}$$

$$+ 2 \left[\tilde{\Pi}_{h-} - \tilde{\Pi}_{e-} \right] v_2 v_1^2 e^{-\phi} + 2 \left[\tilde{\Pi}_{e-} - \tilde{\Pi}_{h+} \right] v_1 v_1^2 u_2^2 \} \\ \dots(3.40)$$

เมื่อกำหนดตัวแปรเพิ่มเติม

$$\tilde{\Pi}_{e\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^e} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) - ik_{2\sigma}^e \right\} = -\{\tilde{\gamma}_e + i\tilde{\epsilon} (v \pm \eta_{\sigma H})\} \\ \dots(3.41)$$

$$\tilde{\Pi}_{h\pm} = \frac{1}{ik_{1\sigma}^e} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (v \pm \eta_{\sigma H}) + ik_{2\sigma}^h \right\} = \{\tilde{\gamma}_h - i\tilde{\epsilon} (v \pm \eta_{\sigma H})\} \\ \dots(3.42)$$

โดยที่ $\tilde{\gamma}_{e,h} = \frac{k_{2\sigma}^{e,h}}{k_{1\sigma}^e}, \tilde{\epsilon} = \frac{2m}{\hbar^2 k_{1\sigma}^e}$

พิจารณาปริมาณในวงเล็บต่างๆของสมการ(3.40) ได้ค่าดังต่อไปนี้คือ

$$\tilde{\Pi}_{e+} - \tilde{\Pi}_{h-} = [-\tilde{\gamma}_e - i\tilde{\epsilon} (v + \eta_{\sigma H})] - [\tilde{\gamma}_h - i\tilde{\epsilon} (v - \eta_{\sigma H})] \\ = -[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h] - \eta_{\sigma} i [2\tilde{\epsilon} H] \\ \dots(3.43)$$

$$\tilde{\Pi}_{h+} - \tilde{\Pi}_{e+} = [\tilde{\gamma}_h - i\tilde{\epsilon} (v + \eta_{\sigma H})] - [-\tilde{\gamma}_e - i\tilde{\epsilon} (v + \eta_{\sigma H})] \\ = [\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h] \\ \dots(3.44)$$

$$\tilde{\Pi}_{h-} - \tilde{\Pi}_{e-} = [\tilde{\gamma}_h - i\tilde{\epsilon} (v - \eta_{\sigma H})] - [-\tilde{\gamma}_e - i\tilde{\epsilon} (v - \eta_{\sigma H})] \\ = [\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h] \\ \dots(3.45)$$

และ $\tilde{\Pi}_{e-} - \tilde{\Pi}_{h+} = [-\tilde{\gamma}_e - i\tilde{\epsilon} (v - \eta_{\sigma H})] - [\tilde{\gamma}_h - i\tilde{\epsilon} (v + \eta_{\sigma H})] \\ = -[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h] + \eta_{\sigma} i [2\tilde{\epsilon} H] \\ \dots(3.46)$

นำสมการ(3.43) - (3.46) แทนลงใน สมการ(3.40) ได้

$$\begin{aligned} \text{Det}[a_{\bar{\sigma}}] = & [k_1^e]^2 \{2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h][u_1 v_1 (u_2^2 + v_2^2)] - \eta_{\sigma} i 4 \tilde{\epsilon} H[u_1 v_1 (u_2^2 - v_2^2)] \\ & - 2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h][u_2 v_2 (u_1^2 + v_1^2)] \cos \phi - i 2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h][u_2 v_2 (u_1^2 - v_1^2)] \sin \phi \} \\ & \dots(3.47) \end{aligned}$$

จากสมการ(3.47) คำนวณหาค่าต่างๆได้ดังต่อไปนี้

$$u_1 v_1 (u_2^2 + v_2^2) = \frac{\Delta_1}{[2(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)]} \quad \dots(3.48)$$

$$u_1 v_1 (u_2^2 - v_2^2) = \frac{\Delta_1 \Omega_2}{[2(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)]} \quad \dots(3.49)$$

$$u_2 v_2 (u_1^2 + v_1^2) = \frac{\Delta_2}{[2(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)]} \quad \dots(3.50)$$

$$u_2 v_2 (u_1^2 - v_1^2) = \frac{\Delta_2 \Omega_1}{[2(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)]} \quad \dots(3.51)$$

แทนสมการ(3.48) - (3.51) กลับลงในสมการ(3.47)ได้

$$\begin{aligned} \text{Det}[a_{\bar{\sigma}}] = & \left[\frac{1}{2} \frac{[k_1^e]^2}{(\epsilon + \eta_{\sigma} h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma} h_2)} \right] \{2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h](\epsilon + \eta_{\sigma} h_2) \Delta_1 - \eta_{\sigma} i 4 \tilde{\epsilon} H \Delta_1 \Omega_2 \\ & - 2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h](\epsilon + \eta_{\sigma} h_1) \Delta_2 \cos \phi - i 2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h] \Delta_2 \Omega_1 \sin \phi \} \quad \dots(3.52) \end{aligned}$$

จากสมการ(3.12) จะได้ค่าของ $a_{\bar{\sigma}}(\epsilon, \phi)$ คือ

$$a_{\bar{\sigma}}(\epsilon, \phi) = \frac{\text{Det}[a_{\bar{\sigma}}]}{\text{Det}[M]} \quad \dots(3.53)$$

เมื่อนำสมการ(3.36)และ(3.52) แทนในสมการ(3.53) ในที่สุดจะได้

$$a_{\bar{\sigma}}(E, \phi) = \frac{[k_1^e]^2 \left\{ 2[\tilde{\gamma}_e + \tilde{\gamma}_h](E + \eta_{\sigma} h_2) \Delta_1 - \eta_{\sigma} i 4 \tilde{E} H \Delta_1 \Omega_2 + \right.}{[k_1^h]^2 \left\{ [(\gamma_h + \gamma_e)(\alpha + 1)][\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi - (E + \eta_{\sigma} h_1)(E + \eta_{\sigma} h_2)] + \right.} \\ \left. - [2 \in^2 (V^2 - H^2)] + 2\gamma_e \gamma_h + \alpha[2 + \gamma_h - \gamma_e] + \gamma_e - \gamma_h \right) \Omega_1 \Omega_2 + \\ \left. + \eta_{\sigma} i [2 \in H(\gamma_e + \gamma_h)(E + \eta_{\sigma} h_2)] \Omega_1 + \eta_{\sigma} i [2 \in H(1 + \alpha)(E + \eta_{\sigma} h_1)] \Omega_2 \right. \\ \left. - i[2 \in V(1 + \gamma_h - \gamma_e - \alpha)] \Omega_1 \Omega_2 \right\}} \quad \dots(3.54)$$

ขั้นตอนที่ 3

ในการคำนวณหากระแสโจเซฟสันที่ไหลผ่านรอยต่อ ที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ใช้สูตร¹

$$I_{FS_1 / F1 / FS_2} = \frac{e \Delta_1 K_B T}{2 \hbar} \sum_{\omega_n, \sigma} \frac{1}{2 \Omega_{1n\sigma}} (k_{1n\sigma}^+ + k_{1n\sigma}^-) \left[\frac{a_{\bar{\sigma}}(\phi, i\omega_n) - a_{\bar{\sigma}}(-\phi, i\omega_n)}{k_{1n\sigma}^+} \right] \quad \dots(3.55)$$

เมื่อ $a_{\bar{\sigma}}(\phi, i\omega_n)$ คือปริมาณที่ได้จากการทำ analytic continuation ของ $a_{\sigma}(\phi, E)$ ในสมการ(3.54) โดยการ แทนค่า E ในสมการ(3.54) ด้วย $i\omega_n$

$$\text{ถ้าให้} \quad k_{1,2n\sigma}^{\pm} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \left[E_{F1,2} \pm ([i\omega_n + \eta_{\sigma} h_{1,2}]^2 - \Delta_{1,2}^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{และ} \quad i\Omega_{1,2n\sigma} = i\sqrt{[\omega_n - \eta_{\sigma} h_{1,2}]^2 + \Delta_{1,2}^2} = \Omega_{1,2}$$

...(3.56)

เพราะอนุภาคควาไซคือทั้งอิเล็กตรอนและโฮลในตัวนำยวดยิ่ง ต่างก็มีพลังงานใกล้เคียง

พลังงานเฟอร์มี ดังนั้นอัตราส่วน $\frac{\sqrt{(E + \eta_{\sigma} h_{1,2})^2 - \Delta_{1,2}^2}}{E_{F1,2}}$ จะ $\ll 1$ ส่งผลให้ $k_{1,2}^{\pm} \cong k_{F1,2}$

$$\text{ทำให้} \quad \tilde{\gamma}_{e,h} = \gamma_{e,h} = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon = \frac{2m}{\hbar^2 k_{F1}} \quad \text{และ} \quad \alpha = 1 \quad \dots(3.57)$$

นำค่าประมาณที่ได้จากสมการ(3.57) นี้แทนลงในสมการ(3.54)จะได้

$$a_{\sigma}(\epsilon, \phi) = \frac{[2\gamma(\epsilon + \eta_{\sigma}h_2)\Delta_1 - \eta_{\sigma}i2Z_H\Delta_1\Omega_2 - 2\gamma(\epsilon + \eta_{\sigma}h_1)\Delta_2 \cos \phi] - i2\gamma\Delta_2\Omega_1 \sin \phi}{\left\{ 2\gamma[\Delta_1\Delta_2 \cos \phi - (\epsilon + \eta_{\sigma}h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma}h_2)] - K\Omega_1\Omega_2 + \eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\epsilon + \eta_{\sigma}h_2)\Omega_1 + \right. \\ \left. + \eta_{\sigma}i2Z_H(\epsilon + \eta_{\sigma}h_1)\Omega_2 \right\}}$$

...(3.58)

$$\text{เมื่อ} \quad K = [\epsilon^2 (v^2 - H^2)] + \gamma^2 + 1, \text{ และ } Z_H = \frac{2mH}{\hbar^2 K_{F1}} \quad \dots(3.59)$$

เมื่อใช้เงื่อนไขตั้งสมการ(3.57) จะได้สมการกระแสโจเซฟสันตั้งในสมการ(3.55) ได้ดังนี้

$$I_{FS_1 / F1 / FS_2} = \frac{e\Delta_1 k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n, \sigma} \left[\frac{a_{\sigma}(\phi, i\omega_n) - a_{\sigma}(-\phi, i\omega_n)}{2\Omega_{1n\sigma}} \right] \quad \dots(3.60)$$

$$\because a_{\sigma}(\phi, \epsilon) - a_{\sigma}(-\phi, \epsilon)$$

$$= \frac{-i4\gamma\Delta_2\Omega_1 \sin \phi}{\left\{ 2\gamma[\Delta_1\Delta_2 \cos \phi - (\epsilon + \eta_{\sigma}h_1)(\epsilon + \eta_{\sigma}h_2)] - K\Omega_1\Omega_2 + \eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\epsilon + \eta_{\sigma}h_2)\Omega_1 + \right. \\ \left. + \eta_{\sigma}i2Z_H(\epsilon + \eta_{\sigma}h_1)\Omega_2 \right\}}$$

...(3.61)

ทำ analytic continuation คือแทนค่าของ ϵ ด้วย $i\omega_n$ ทำให้ $a_{\sigma}(\phi, \epsilon) \rightarrow a_{\sigma}(\phi, i\omega_n)$
สมการ(3.61) จึงกลายรูปเป็น

$$\because a_{\sigma}(\phi, i\omega_n) - a_{\sigma}(-\phi, i\omega_n)$$

$$= \frac{-i4\gamma\Delta_2 i\Omega_{1n\sigma} \sin \phi}{\left\{ 2\gamma[\Delta_1\Delta_2 \cos \phi - (i\omega_n + \eta_{\sigma}h_1)(i\omega_n + \eta_{\sigma}h_2)] - Ki\Omega_{1n\sigma}i\Omega_{2n\sigma} + \eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(i\omega_n + \eta_{\sigma}h_2)\Omega_{1n\sigma} + \right. \\ \left. + \eta_{\sigma}i2Z_H(i\omega_n + \eta_{\sigma}h_1)\Omega_{2n\sigma} \right\}}$$

...(3.62)

พิจารณาค่าของ

$$\begin{aligned}
 \Omega_{1,2n\sigma} &= \sqrt{[\omega_n - i\eta_\sigma h_{1,2}]^2 + \Delta_{1,2}^2} \\
 &= \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2) - i\eta_\sigma 2\omega_n h_{1,2}} \\
 &= \sqrt{R_{1,2} e^{-i\eta_\sigma X_{1,2}}} = \sqrt{R_{1,2}} \left(\cos \frac{X_{1,2}}{2} - i\eta_\sigma \sin \frac{X_{1,2}}{2} \right) \\
 &= N_{1,2} - i\eta_\sigma M_{1,2}
 \end{aligned}$$

...(3.63)

เมื่อ $R_{1,2} = \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2)^2 + 4(\omega_n h_{1,2})^2}$

$$\cos \frac{X_{1,2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2}{R_{1,2}} \right)}$$

และ $\sin \frac{X_{1,2}}{2} = \operatorname{sgn}(h_{1,2}) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2}{R_{1,2}} \right)}$

...(3.64)

นั่นคือ $N_{1,2} = \sqrt{R_{1,2}} \cos \frac{X_{1,2}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2)^2 + 4(\omega_n h_{1,2})^2} + [\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots(3.65)$$

และ $M_{1,2} = \sqrt{R_{1,2}} \sin \frac{X_{1,2}}{2}$

$$= \operatorname{sgn}(h_{1,2}) \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2)^2 + 4(\omega_n h_{1,2})^2} - [\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2 - h_{1,2}^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots(3.66)$$

พิจารณาจากสมการ(3.62) เมื่อกำหนดให้

$$\begin{aligned}\Lambda_{\sigma} = & 2\gamma[\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2 - i\eta_{\sigma}\omega_n(h_1 + h_2)] + K\Omega_{1n\sigma}\Omega_{2n\sigma} - \eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\omega_n - i\eta_{\sigma}h_2)\Omega_{1n\sigma} + \\ & - \eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\omega_n - i\eta_{\sigma}h_1)\Omega_{2n\sigma}\end{aligned}\quad \dots(3.67)$$

และหาค่าแต่ละเทอมซึ่งคูณกับ $\Omega_{1,2n\sigma}$ ในสมการ(3.67)จะได้

$$K\Omega_{1n\sigma}\Omega_{2n\sigma} = K(N_1N_2 - M_1M_2) - i\eta_{\sigma}K(N_2M_1 + N_1M_2) \quad \dots(3.68)$$

$$\begin{aligned}-\eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\omega_n - i\eta_{\sigma}h_2)\Omega_{1n\sigma} = & -2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_nM_1) - i\eta_{\sigma}2\gamma Z_H(\omega_nN_1 - h_2M_1) \\ & \dots(3.69)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } -\eta_{\sigma}i2\gamma Z_H(\omega_n - i\eta_{\sigma}h_1)\Omega_{2n\sigma} = & -2\gamma Z_H(h_1N_2 + \omega_nM_2) - i\eta_{\sigma}2\gamma Z_H(\omega_nN_2 - h_1M_2) \\ & \dots(3.70)\end{aligned}$$

แทนค่าที่ได้เหล่านี้ในสมการ(3.68) - (3.70) ลงในสมการ (3.67) จะได้

$$\begin{aligned}\Lambda_{\sigma} = & \left\{ 2\gamma[\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2] + K(N_1N_2 - M_1M_2) - 2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_nM_1) + \right. \\ & \left. - 2\gamma Z_H(h_1N_2 + \omega_nM_2) \right\} + \\ & - i\eta_{\sigma} \left\{ 2\gamma\omega_n(h_1 + h_2) + K(N_2M_1 + N_1M_2) + 2\gamma Z_H(\omega_nN_1 - h_2M_1) + \right. \\ & \left. + 2\gamma Z_H(\omega_nN_2 - h_1M_2) \right\} \\ & \dots(3.71)\end{aligned}$$

เมื่อรวมสมการ(3.60),(3.62) และ สมการ(3.71)จะได้กระแสโจเซฟสันชนิดตรงคือ

$$\therefore I_{FS_1/FS_2} = \frac{e\Delta_1k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n, \sigma} \left[\frac{2\gamma\Delta_2 \sin \phi}{\Lambda_{\sigma}} \right]$$

$$I_{FS_1/FI/FS_2} = \frac{e\Delta_1\Delta_2k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n} \frac{4\gamma \sin \phi \left\{ 2\gamma [\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2] + K(N_1N_2 - M_1M_2) - 2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_n M_1) + \right.}{\left. - 2Z_H(h_1N_2 + \omega_n M_2) \right\}} \left[\frac{\left\{ 2\gamma [\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2] + K(N_1N_2 - M_1M_2) - 2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_n M_1) + \right\}^2}{\left\{ - 2Z_H(h_1N_2 + \omega_n M_2) \right\}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left\{ 2\gamma \omega_n(h_1 + h_2) + K(N_2M_1 + N_1M_2) + 2\gamma Z_H(\omega_n N_1 - h_2M_1) + \right\}^2}{\left\{ + 2Z_H(\omega_n N_2 - h_1M_2) \right\}^2} \right] \quad \dots(3.72)$$

ถ้าให้ความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร เป็น R_N งานวิจัยของ ฟุรุซากิ กับ ชูกาตะ¹ และ ทานากะ กับ คาซิวา² ได้คำนวณพบว่า

$$R_N = \frac{\pi\hbar}{2e^2} \left(1 + \frac{k_{F1}^2 + k_{F2}^2 + \left[\frac{2mV}{\hbar^2} \right]^2 + \left[\frac{2mH}{\hbar^2} \right]^2}{2k_{F1}k_{F2}} \right) \\ = \frac{\pi\hbar}{2e^2} \left(1 + \frac{K + 2Z_H^2}{2\gamma} \right) \quad \dots(3.73)$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ(3.73)จะได้สูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรตามสมการ (3.72) ใหม่เป็นดังนี้

$$\therefore I_{FS_1/FI/FS_2} R_N = \frac{\pi\Delta_1\Delta_2k_B T}{e} \left(1 + \frac{K + 2Z_H^2}{2\gamma} \right) \times \sum_{\omega_n} \frac{2\gamma \sin \phi \left\{ 2\gamma [\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2] + K(N_1N_2 - M_1M_2) + \right\}}{\left\{ - 2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_n M_1) - 2Z_H(h_1N_2 + \omega_n M_2) \right\}} \left[\frac{\left\{ 2\gamma [\Delta_1\Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1h_2] + K(N_1N_2 - M_1M_2) - 2\gamma Z_H(h_2N_1 + \omega_n M_1) + \right\}^2}{\left\{ - 2Z_H(h_1N_2 + \omega_n M_2) \right\}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left\{ 2\gamma \omega_n(h_1 + h_2) + K(N_2M_1 + N_1M_2) + 2\gamma Z_H(\omega_n N_1 - h_2M_1) + \right\}^2}{\left\{ + 2Z_H(\omega_n N_2 - h_1M_2) \right\}^2} \right] \quad \dots(3.74)$$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $FS_1/Fi/FS_2$ ดังสมการ(3.74) เป็นสมการกระแสที่ครอบคลุมสมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อโจเซฟสันรูปแบบต่างๆดังต่อไปนี้

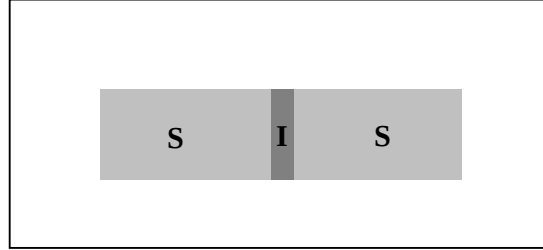
(1) **กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ S/I/S** เป็นกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน มีฉนวนปกติเท่านั้นคั่นรอยต่อ เงื่อนไขของรอยต่อแบบ S/I/S คือ

$$(1.1) \Delta_{1,2} = \Delta(T)$$

$$(1.2) E_{F1,2} = E_F$$

$$(1.3) H = 0, V \neq 0$$

$$(1.4) h_{1,2} = 0$$



ภาพประกอบ 38 แสดงภาพรอยต่อแบบ S/I/S

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ S/I/S คำนวณหาได้ดังนี้

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}} = 1, K_{SIS} = 2 \left[1 + 2 \left(\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right)^2 \right] \text{ และ } z_H = \frac{2mH}{\hbar^2 K_{F1}} = 0 \quad \dots(3.75)$$

$$R_{N(SIS)} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} \left(1 + \frac{K_{SIS}}{2} \right) \quad \dots(3.76)$$

$$N_{1,2(SIS)} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(T)} \quad \dots(3.77)$$

$$M_{1,2(SIS)} = 0 \quad \dots(3.78)$$

นำสมการ(3.75) - (3.78) แทนลงในสมการ (3.74) ก็จะได้สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ S/I/S คือ

$$\therefore I_{S/I/S} R_{N(SIS)} = \frac{\pi \Delta^2(T) K_B T}{e} \left(1 + \frac{K_{SIS}}{2} \right) \sum_{\omega_n} \frac{\sin \phi}{\left[\Delta^2(T) \cos \phi + \omega_n^2 \right] + \frac{K_{SIS}}{2} (\omega_n^2 + \Delta^2(T))}$$

$$= \frac{\pi \Delta^2(\tau) K_B T}{e} \sum_{\omega_n} \frac{\sin \phi}{\omega_n^2 + \left[\frac{\frac{K_{SIS} + \cos \phi}{2}}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}} \right] \Delta^2(\tau)} \quad \dots(3.79)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์

$$\frac{\tanh \frac{X}{2K_B T}}{2K_B T X} = \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + X^2} \quad \dots(3.80)$$

ในสมการ(3.80) แทนลงในสมการ(3.79) จะได้ค่ากระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ S/I/S ดังนี้คือ

$$\therefore I_{S/I/S} R_{N(SIS)} = \frac{\pi \Delta(\tau) \sin \phi}{2e \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS} + \cos \phi}{2}}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}}} \tanh \left(\frac{\Delta(\tau)}{2K_B T} \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS} + \cos \phi}{2}}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}} \right) \quad \dots(3.81)$$

นี่คือสมการนี้ได้เช่นเดียวกับกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของ ฟรุซากิ และซูกาดะ³ และ

$\Delta(\tau) \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS} + \cos \phi}{2}}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}}$ ในสมการ(3.81)คือพลังงานของสถานะที่ถูกยึดเหนี่ยว (energy of bound state) ในรอยต่อโจเซฟสันของอนุภาคควาไซ³

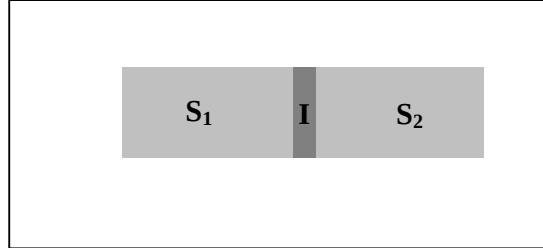
(2) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1 // s_2$ เป็นกรณีที่รอยต่อเกิดจาก ตัวนำยวดยิ่ง ประกบกับตัวนำยวดยิ่งที่ต่างชนิดกันโดยมีฉนวนแบบธรรมดาบางๆ คั่น เงื่อนไขของรอยต่อถูก กำหนดโดย

$$(2.1) \Delta_1 = \Delta_1(T), \Delta_2 = \Delta_2(T)$$

$$(2.2) E_{F1} \neq E_{F2}$$

$$(2.3) H = 0, V \neq 0$$

$$(2.4) h_1 = 0, h_2 = 0$$



ภาพประกอบ 39 แสดงภาพรอยต่อแบบ $s_1 // s_2$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $FS_1 // s_2$ คำนวณหาได้ดังนี้

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, K_{s_1 s_2} = \left(\left[\frac{2mV}{\hbar^2 k_{F1}} \right]^2 + \left[\frac{k_{F2}}{k_{F1}} \right]^2 + 1 \right) \text{ และ } Z_H = 0 \quad \dots(3.82)$$

$$R_{N(s_1 s_2)} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} \left(1 + \frac{K_{s_1 s_2}}{2\gamma} \right) \quad \dots(3.83)$$

$$N_{1,2(s_1 s_2)} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2(T)} \quad \dots(3.84) \text{ และ } M_{1,2(s_1 s_2)} = 0 \quad \dots(3.85)$$

แทนสมการ(3.82) - (3.85) ลงในสมการ(3.74) ก็จะได้กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $s_1 // s_2$ ดังนี้คือ

$$\therefore I_{s_1 // s_2} R_{N(s_1 s_2)} = \frac{\Delta_1(T) \Delta_2(T) K_B T}{e} (1 + \tilde{K}) \times$$

$$\sum \frac{\sin \phi}{\omega_n \Delta_1(T) \Delta_2(T) \cos \phi + \omega_n^2 + \tilde{K} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2(T)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(T)}} \quad \dots(3.86)$$

$$\tilde{K} = \frac{K_{s_1 s_2}}{2\gamma} = \frac{\left(\frac{2mV}{\hbar^2} \right)^2 + k_{F1}^2 + k_{F2}^2}{2k_{F1} k_{F2}} \quad \dots(3.87)$$

สมการ(3.87) กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $s_1 // s_2$ ที่ได้นี้คือสมการเดียวกันกับ งานวิจัยของ ฟุรุซากิ และ ทาซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)¹

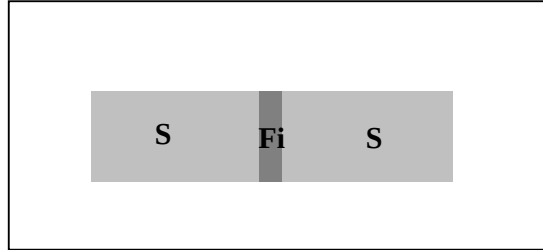
(3) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ S/Fi/S นั้นคือตัวนำวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน มีจำนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่รอยต่อ เงื่อนไขของรอยต่อแบบ S/Fi/S นี้คือ

$$(3.1) \Delta_{1,2} = \Delta(T)$$

$$(3.2) E_{F1,2} = E_F$$

$$(3.3) V = 0, H \neq 0$$

$$(3.4) h_{1,2} = 0$$



ภาพประกอบ 40 แสดงภาพรอยต่อแบบ S/Fi/S

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ S/Fi/S สามารถคำนวณหาได้จากเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

$$\gamma = 1, z_H = \left(\frac{2mH}{\hbar^2 k_F} \right) = 2\tilde{z}, K_{(SFIS)} = 2 - 4\tilde{z}^2 \quad \dots(3.88)$$

$$R_{N(SFIS)} = \frac{\hbar\pi}{e^2} (1 + \tilde{z}^2) \quad \dots(3.89)$$

ความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อแบบ S/Fi/S คือสมการ (3.89) เช่นเดียวกันกับความต้านทานที่ ทานากะ กับ คาชิwaya (Tanaka and Kashiwaya) ² ใช้

$$N_{1,2} = N = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}, M_{1,2} = 0 \quad \dots(3.90)$$

นำสมการ(3.88) - (3.90) แทนลงในสมการ (3.74) จะได้กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ S/Fi/S เท่ากับ

$$I_{S/Fi/S} R_{N(SFIS)} = \frac{\pi \Delta^2(T) k_B T}{e} (1 + \tilde{z}^2) \times \sum_{\omega_n} \left[\frac{2 \sin \phi \left\{ \Delta^2 (\cos \phi + 1 - 2\tilde{z}^2) + 2(1 - \tilde{z}^2) \omega_n^2 \right\}}{\left[\Delta^2 (\cos \phi + 1 - 2\tilde{z}^2) + 2(1 - \tilde{z}^2) \omega_n^2 \right]^2 + \left\{ 4\tilde{z} \omega_n \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2} \right\}^2} \right] \quad \dots(3.91)$$

และเมื่อใช้เอกลักษณ์ $2 \cos^2(\phi/2) - 1 = \cos \phi$ และความสัมพันธ์ $\frac{\tanh \frac{X}{2K_B T}}{2K_B T X} = \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + X^2}$

แทนลงในสมการ(3.91) จะพบว่าสมการ (3.91) สามารถจัดรูปแบบให้แสดงค่าพลังงานยึดเหนี่ยวสถานะที่รอยต่อโจเซฟสัน ได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{S/FI/S} R_{N(SFIS)} &= \frac{\pi \Delta^2 \sin(\phi/2)}{2e} (1 + \tilde{z}^2) \times \\ &\left\{ \left(\tanh \left[\frac{\epsilon_A}{2K_B T} \right] + \tanh \left[\frac{\epsilon_B}{2K_B T} \right] \right) - \frac{\tilde{z} \cos(\phi/2)}{\sqrt{\tilde{z}^2 + \sin^2(\phi/2)}} \left(\tanh \left[\frac{\epsilon_A}{2K_B T} \right] - \tanh \left[\frac{\epsilon_B}{2K_B T} \right] \right) \right\} \\ &\dots(3.92) \end{aligned}$$

เมื่อ $\epsilon_{A,B} = \Delta(T) \frac{\cos(\phi/2) + \tilde{z} \sqrt{\tilde{z}^2 + \sin^2(\phi/2)}}{1 + \tilde{z}^2}$ เป็นพลังงานของสถานะที่ยึดเหนี่ยวใน

รอยต่อโจเซฟสันแบบ S/FI/S ซึ่งเป็นผลที่ได้เดียวกันกับงานวิจัยของ ทานากะ กับ คาชิวายา (Tanaka and Kashiwaya)²

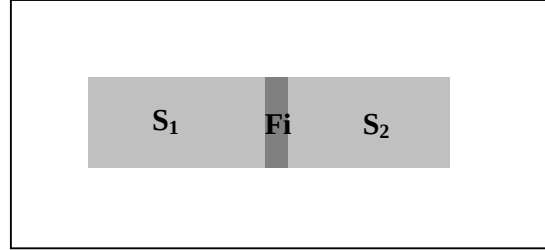
(4) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $S_1/Fi/S_2$ เป็นกรณีประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งชนิดหนึ่งประกบกับตัวนำวดยิ่งที่ต่างชนิดกันโดยมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางคั่น เงื่อนไขของรอยต่อเป็นดังนี้

$$(4.1) \Delta_1 = \Delta_1(T), \Delta_2 = \Delta_2(T)$$

$$(4.2) E_{F1} \neq E_{F2}$$

$$(4.3) v = 0, H \neq 0$$

$$(4.4) h_1 = 0, h_2 = 0$$



ภาพประกอบ 41 แสดงภาพรอยต่อแบบ $S_1/Fi/S_2$

พารามิเตอร์ต่างๆในสมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $S_1/Fi/S_2$ เป็นดังนี้

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, K_{(S_1 Fi S_2)} = K_{(F S_1 F i S_2)}, R_{N(S_1 Fi S_2)} = R_{N(F S_1 F i S_2)} \quad \dots(3.93)$$

$$N_{1,2} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_{1,2}^2}, M_{1,2} = 0 \quad \dots(3.94)$$

นำสมการ(3.93) และ (3.94) แทนลงในสมการ(3.74) จะได้กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $S_1/Fi/S_2$ ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{S_1/Fi/S_2} R_{N(S_1 Fi S_2)} &= \frac{\pi \Delta_1 \Delta_2 k_B T}{e} (1 + \tilde{H}) 2\gamma \sin \phi \times \\ &\sum_{\omega_n} \left[\frac{\left[2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right]}{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2} \right] \\ &\left[\frac{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2}{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2} \right] \\ &\left[\frac{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2}{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(S_1 Fi S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2} \right] \end{aligned} \quad \dots(3.95)$$

$$\text{เมื่อกำหนดให้ } \tilde{H} = \frac{k_{F1}^2 + k_{F2}^2 + \left(\frac{2mH}{\hbar^2} \right)^2}{2k_{F1} k_{F2}} \quad \text{สมการ(3.95)เป็นผลงานใหม่ที่ยังไม่มีใคร}$$

คำนวณมาก่อน

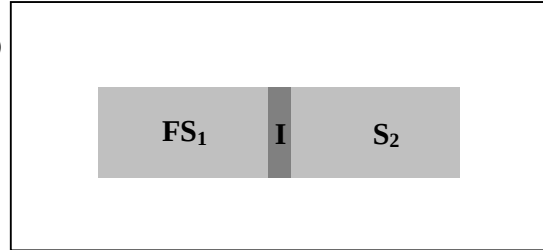
(5) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/I/S_2$ นี้เป็นกรณีประกอบด้วย ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรประกอบกับตัวนำยวดยิ่งธรรมดาโดยมีฉนวนบางคั่น เจื่อนไขของรอยต่อเป็นดังนี้

$$(5.1) \Delta_1 = \Delta_1(\tau, h), \Delta_2 = \Delta_2(\tau)$$

$$(5.2) E_{F1} \neq E_{F2}$$

$$(5.3) H = 0, V \neq 0$$

$$(5.4) h_1 = h, h_2 = 0$$



ภาพประกอบ 42 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/I/S_2$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $FS_1/I/S_2$ คำนวณหาได้ดังนี้คือ

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, K_{FS,I/S_2} = \left(\left[\frac{2mV}{\hbar^2 k_{F1}} \right]^2 + \left[\frac{k_{F2}}{k_{F1}} \right]^2 + 1 \right), Z_H = 0 \quad \dots(3.96)$$

$$R_{N(FS_1/S_2)} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} \left(1 + \frac{K_{FS,I/S_2}}{2\gamma} \right) \quad \dots(3.97)$$

$$N_{1(FS_1/S_2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2 \right)^2 + 4(\omega_n h)^2 + \left[\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2 \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.98)$$

$$N_{2(FS_1/S_2)} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \quad \dots(3.99)$$

$$M_{1(FS_1/S_2)} = \text{sign}(h) \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2 \right)^2 + 4(\omega_n h)^2 - \left[\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2 \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.100)$$

$$M_{2(FS_1/S_2)} = 0 \quad \dots(3.101)$$

เมื่อแทนสมการ(3.96) - (3.101) ลงในสมการ(3.74) จะได้ค่ากระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $FS_1/I/S_2$ ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{FS_1/1/S_2} R_{N(FS_1/S_2)} &= \frac{\pi \Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) K_B T}{e} \left(1 + \frac{K_{FS_1/S_2}}{2\gamma} \right) \times \\ &\sum_{\omega_n} \frac{2\gamma \sin \phi \left\{ 2\gamma [\Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) \cos \phi + \omega_n^2] + K_{FS_1/S_2} \left(N_{1(FS_1/S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}}{\left[\left\{ 2\gamma [\Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) \cos \phi + \omega_n^2] + K_{FS_1/S_2} \left(N_{1(FS_1/S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}^2 + \right.} \\ &\quad \left. + \left\{ 2\gamma \omega_n h + K_{FS_1/S_2} \left(M_{1(FS_1/S_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}^2 \right]} \\ &\dots(3.102) \end{aligned}$$

สมการ(3.102)เป็นสมการของกระแสที่ยังไม่มีใครคำนวณมาก่อน

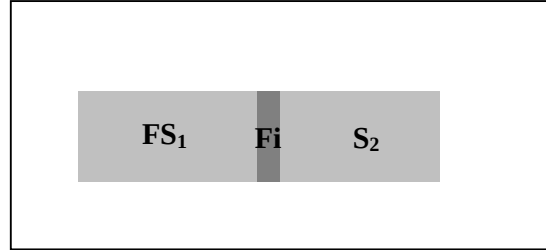
(6) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/Fi/S_2$ นี้เป็นกรณีประกอบด้วยตัวนำยิ่งยวดแม่เหล็กเฟอร์โร กับตัวนำยิ่งยวดธรรมดาและมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเท่านั้นคั่น เจื่อนไขของรอยต่อแบบ $FS_1/Fi/S_2$ คือ

$$(6.1) \quad \Delta_1 = \Delta_1(\tau, h), \Delta_2 = \Delta_2(\tau)$$

$$(6.2) \quad E_{F1} \neq E_{F2}$$

$$(6.3) \quad v = 0, h \neq 0$$

$$(6.4) \quad h_1 = h, h_2 = 0$$



ภาพประกอบ 43 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/Fi/S_2$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $FS_1/Fi/S_2$ สามารถคำนวณหาได้จากเจื่อนไข

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, \quad K_{(FS_1, Fi, S_2)} = 1 + \gamma^2 - Z_H^2 \quad \dots(3.103)$$

$$R_{N[FS_1, Fi, S_2]} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} (1 + \tilde{H}) \quad \dots(3.104)$$

$$N_{1(FS_1, Fi, S_2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + [\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2] \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.105)$$

$$N_{2(FS_1, Fi, S_2)} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \quad \dots(3.106)$$

$$M_{1(FS_1, Fi, S_2)} = \text{sign}(h) \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} - [\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau, h) - h^2] \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.107)$$

$$M_{2(FS_1, Fi, S_2)} = 0 \quad \dots(3.108)$$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $FS_1 / FI / S_2$ สามารถหาได้จากการแทน
สมการ (3.103) - (3.108) ลงในสมการ (3.74) ซึ่งจะได้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} \therefore I_{FS_1 / FI / S_2} R_{N_{(FS_1, FIS_2)}} &= \frac{\pi \Delta_1 \Delta_2 k_B T}{e} (1 + \tilde{H}) 2\gamma \sin \phi \times \\ &\sum_{\omega_n} \left[\frac{\left[2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(FS_1, FIS_2)} N_{1(FS_1, FIS_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} - 2\gamma \omega_n Z_H M_{1(FS_1, FIS_2)} - 2Z_H h \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right]}{\left\{ 2\gamma (\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2) + K_{(FS_1, FIS_2)} N_{1(FS_1, FIS_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} - 2\gamma \omega_n Z_H M_{1(FS_1, FIS_2)} - 2Z_H h \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2 +} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\gamma \omega_n h + K_{(FS_1, FIS_2)} M_{1(FS_1, FIS_2)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} + 2\gamma \omega_n Z_H N_{1(FS_1, FIS_2)} + 2Z_H \omega_n \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2 \right] \\ &\dots (3.109) \end{aligned}$$

สมการ(3.109)เป็นสมการที่ยังไม่มีใครคำนวณมาก่อน

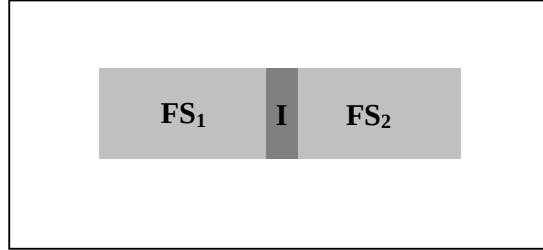
(7) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/I/FS_2$ นี้คือรอยต่อระหว่างตัวนำเวดจ์ชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ต่างชนิดกันประกบกันโดยมีฉนวนบางคั่น เงื่อนไขของรอยต่อเป็นดังนี้

$$(7.1) \Delta_1(T, h_1) \neq \Delta_2(T, h_2)$$

$$(7.2) E_{F1} \neq E_{F2}$$

$$(7.3) H = 0, V \neq 0$$

$$(7.4) h_1 \neq h_2$$



ภาพประกอบ 44 แสดงภาพรอยต่อแบบ $FS_1/I/FS_2$

สามารถคำนวณหาสมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $FS_1/I/FS_2$ ได้ดังนี้

$$\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}, K = K_{S_1 S_2}, z_H = 0 \quad \dots(3.110)$$

$$R_{N(FS_1/FS_2)} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} (1 + \tilde{K}) \quad \dots(3.111)$$

$$N_{1,2(FS_1/FS_2)} = N_{1,2}, M_{1,2(FS_1/FS_2)} = M_{1,2} \quad \dots(3.112)$$

นำสมการ(3.110) - (3.112) แทนลงสมการ(3.74) จะได้สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงคือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{FS_1/I/FS_2} R_{N(FS_1/FS_2)} &= \frac{\pi \Delta_1 \Delta_2 K_B T}{e} (1 + \tilde{K}) \times \\ &\sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \phi [\Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1 h_2 + \tilde{K} (N_1 N_2 - M_1 M_2)]}{\left\{ \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi + \omega_n^2 - h_1 h_2 + \tilde{K} (N_1 N_2 - M_1 M_2) \right\}^2 + \left\{ \omega_n (h_1 + h_2) + \tilde{K} (N_2 M_1 + N_1 M_2) \right\}^2} \right] \end{aligned} \quad \dots(3.113)$$

นี่เป็นสมการกระแสโจเซฟสันที่ยังไม่มีใครคำนวณมาก่อนเช่นกัน

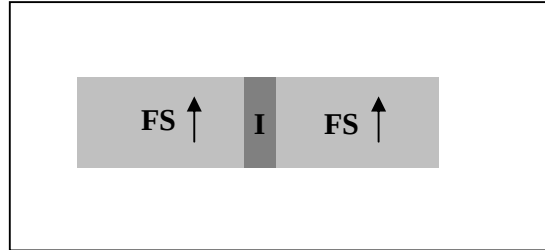
(8) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/I/FS]_p$ เป็นรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โรประกอบกับตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โรที่มีทิศสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน (h) ขนานกันและมีฉนวนบางคั่น โดยเงื่อนไขของรอยต่อเป็นดังนี้

$$(8.1) \quad \Delta_{1,2} = \Delta(T, h)$$

$$(8.2) \quad E_{F1,2} = E_F$$

$$(8.3) \quad H = 0, V \neq 0$$

$$(8.4) \quad h_{1,2} = h$$



ภาพประกอบ 45 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_p$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $[FS/I/FS]_p$ คำนวณหาได้ดังนี้

$$\gamma = 1, \quad \frac{K}{2\gamma} = \tilde{K}' = 1 + 2 \left(\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right)^2, \quad z_H = 0 \quad \dots(3.114)$$

$$R_{N[FSIFS]_p} = \frac{\pi \hbar}{2e^2} (1 + \tilde{K}') \quad \dots(3.115)$$

$$N_{1,2[FSIFS]_p} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}}} = N \quad \dots(3.116)$$

$$M_{1,2[FSIFS]_p} = \text{sign}(h) \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} - (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}}} = M \quad \dots(3.117)$$

นำสมการ(3.114) - (3.117) แทนลงในสมการ(3.74) จะได้สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงของรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_p$ คือ

$$\therefore I_{[FSIFS]_p} R_{N[FSIFS]_p} = \frac{\pi \Delta^2(T, h) K_B T}{e} \sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \phi [\Delta^2(T, h) \alpha + \omega_n^2 - h^2]}{\{\Delta^2(T, h) \alpha + \omega_n^2 - h^2\}^2 + (2h\omega_n)^2} \right] \quad \dots(3.118)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \alpha = \frac{\cos \phi + \tilde{K}'}{1 + \tilde{K}'} \quad \dots(3.119)$$

สมการ(3.119) เป็นสมการเดียวกันกับสมการที่ได้จากงานวิจัยของ ลี(Li) เซง (Zheng) ซิง(Xing) ซัน(Sun) และ ด็อง(Dong) ⁴ สำหรับกรณีแมกนีไทเซชันของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โรมีทิศทางขนานกัน

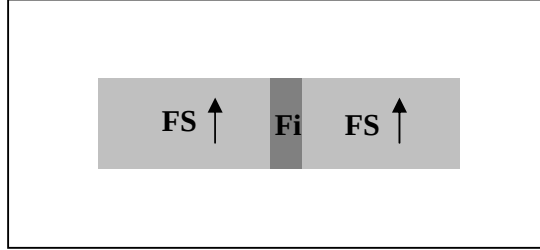
(9) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/Fi/FS]_p$ เป็นรอยต่อของตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรประกอบกับตัวนำวดยิ่งแม่เหล็กชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรที่มีทิศสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน(h) ขนานกันและมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางคั่น เงื่อนไขของรอยต่อคือ

$$(9.1) \Delta_{1,2} = \Delta(T, h)$$

$$(9.2) E_{F1,2} = E_F$$

$$(9.3) v = 0, H \neq 0$$

$$(9.4) h_{1,2} = h$$



ภาพประกอบ 46 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/Fi/FS]_p$

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $[FS/Fi/FS]_p$ สามารถคำนวณหาได้ดังนี้คือ

$$\gamma = 1, K_{[FSFIFS]_p} = K_{(SFIS)} = K_{[FSFIFS]}, R_{N[FSFIFS]_p} = R_{N(SFIS)} = R_{N[FSFIFS]}$$

...(3.120)

$$N_{1,2[FSFIFS]_p} = N = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.121)$$

$$M_{1,2[FSFIFS]_p} = M = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} - (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.122)$$

นำสมการ(3.120) - (3.122) แทนลงในสมการ(3.74) จะได้กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $[FS/Fi/FS]_p$ คือ

$$\therefore I_{[FS/Fi/FS]_p} R_{N[FS/Fi/FS]} = \frac{\pi \Delta^2(T, h) K_B T}{e} (1 + \tilde{Z}^2) \times$$

$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{4 \sin \phi \left\{ 2(\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 - h^2) + K_{[FSFIFS]} (\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2) + \right.}{\left. - 4Z_H (hN + \omega_n M) \right\}} \right] \left[\frac{\left\{ 2(\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 - h^2) + K_{[FSFIFS]} (\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2) - 4Z_H (hN + \omega_n M) \right\}^2}{+ \left\{ 4h\omega_n + 2K_{[FSFIFS]} \omega_n h + 4Z_H (\omega_n N - hM) \right\}^2} \right]$$

...(3.123)

นี้เป็นสมการกระแสที่ยังไม่มีใครคำนวณมาก่อนอีกเช่นกัน

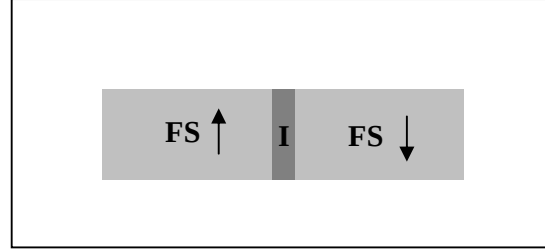
(10) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$ ที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรประกอบกับตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรที่มีสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน (h) ส่วนทางและมีฉนวนบางคั่น เงื่อนไขของรอยต่อกำหนดโดย

$$(10.1) \quad \Delta_{1,2} = \Delta(T, h)$$

$$(10.2) \quad E_{F1,2} = E_F$$

$$(10.3) \quad H = 0, V \neq 0$$

$$(10.4) \quad h_1 = -h_2 = h$$



ภาพประกอบ 47 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$ สามารถคำนวณได้ดังนี้คือ

$$\gamma = 1, \frac{K}{2\gamma} = \tilde{K}', \quad z_H = 0 \quad \text{และ} \quad R_{N[FSIFS]_{AP}} = R_{N[FSIFS]_p} \quad \dots(3.124)$$

$$N_{1,2[FSIFS]_{AP}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = N \quad \dots(3.125)$$

$$M_{1[FSIFS]_{AP}} = -M_{2[FSIFS]_{AP}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} - (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = M \quad \dots(3.126)$$

แทนสมการ (3.124) - (3.126) ลงในสมการ(3.74) จะได้สมการกระแสโจเซฟสันในรอยต่อแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$ ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{[FS/I/FS]_{AP}} R_{N[FSIFS]_{AP}} &= \frac{\pi \Delta^2(T, h) K_B T}{e} (1 + \tilde{K}) \times \\ &\sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \phi}{\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 + h^2 + \tilde{K} \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2}} \right] \end{aligned}$$

...(3.127)

สมการ (3.127) เป็นสมการกระแสโจเซฟสันในรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ที่มีสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของสองตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรมีทิศสวนกัน และเป็นสมการเดียวกันกับงานสมการที่ได้จากวิจัยของ ลี(Li) เซง (Zheng) ชิง(Xing) ซัน(Sun) และ ด็อง (Dong) ⁴

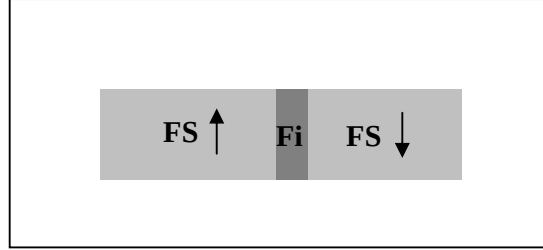
(11) **กรณีรอยต่อแบบ $[FS / Fi / FS]_{AP}$** เป็นรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรประกอบกับตัวนำวดยิ่งแม่เหล็กชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรที่มีทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน(h) สวนกันและมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางๆคั่น เงื่อนไขของรอยต่อกำหนดโดย

$$(11.1) \quad \Delta_{1,2} = \Delta(T, h)$$

$$(11.2) \quad E_{F1,2} = E_F$$

$$(11.3) \quad v = 0, H \neq 0$$

$$(11.4) \quad h_1 = -h_2 = h$$



ภาพประกอบ 48 แสดงภาพรอยต่อแบบ $[FS / Fi / FS]_{AP}$

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อแบบ $[FS / Fi / FS]_{AP}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\gamma = 1, K_{[FSFiFS]_{AP}} = K_{[FSFiFS]}, R_{N[FSFiFS]_{AP}} = R_{N[FSFiFS]} \quad \dots(3.128)$$

$$N_{1,2[FSFiFS]_{AP}} = N = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \dots(3.129)$$

$$M_{1[FSFiFS]_{AP}} = -M_{2[FSFiFS]_{AP}} = M \quad \dots(3.130)$$

นำสมการ(3.128) - (3.130) แทนลงในสมการ(3.74) กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อ $[FS / Fi / FS]_{AP}$ คือ

$$\begin{aligned} \therefore I_{[FS / Fi / FS]_{AP}} R_{N[FS / Fi / FS]} &= \frac{\pi \Delta^2(T, h) K_B T}{e} (1 + \tilde{z}^2) \times \\ &\sum_{\omega_n} \left[\frac{4 \sin \phi \left\{ 2(\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 + h^2) + K_{[FSFiFS]} \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} \right\}}{\left\{ 2(\Delta^2(T, h) \cos \phi + \omega_n^2 + h^2) + K_{[FSFiFS]} \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2(T, h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} \right\}^2 + \left\{ 4Z_H(\omega_n N + hM) \right\}^2} \right] \end{aligned}$$

...(3.131)

ในการจัดรูปสมการ (3.74) กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อของ ตัวนำวดยิ่ง ชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร เป็น 11 กรณี แสดงให้เห็นสมการกระแสโจเซฟสันในกรณีย่อยของรอยต่อโจเซฟสันแต่ละรูปแบบ ซึ่งตรงกับงานวิจัยต่างๆ ที่ได้ทำมาแล้วในอดีตนั้นแสดงให้เห็นว่าสมการกระแสโจเซฟสันที่คำนวณมาได้ถูกต้อง

¹ A. Furusaki and M. Tsukada, Solid State Commun. **78** (1991) 299.

² Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Physica C **274**, 357, (1997).

³ A. Furusaki and M. Tsukada, Phys. Rev. **B 43**, 10164 (1991).

⁴ Z. M. Zheng, D. Y. Xing, G. Y. Sun, and J. M. Dong, Phys. Rev. **B 65**, 134507 (2002).

บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการวิจัยเพื่อหากระแสโจเซฟสันในระบบของรอยต่อโจเซฟสันแบบ ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ในบทที่ 3 ได้แสดงให้เห็นว่าสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงที่ได้เมื่อลดตัวแปรให้เหมาะสมกับรอยต่อโจเซฟสันในกรณีต่างๆ สูตรที่ลดรูปเหล่านี้ครอบคลุมสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงทุกกรณี ซึ่งได้นำเสนอสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบ 11 ระบบ สำหรับในบทที่ 4 นี้จะนำสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในแต่ละระบบมาแสดงให้เห็นเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันที่ได้กับค่าตัวแปรต่างๆ เช่น อุณหภูมิ T , เฟสความแตกต่างระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง, ความรุนแรงของสนามศักย์ที่บริเวณรอยต่อ เป็นต้น โดยในที่นี้จะกำหนดให้ μ เป็นกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อโจเซฟสันทุกระบบ R_N เป็นความต้านทานของรอยต่อโจเซฟสันในสถานะปกติ φ เป็นความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบระหว่างสองตัวนำยวดยิ่งในรอยต่อโจเซฟสัน และ ให้ $k_B, \hbar \equiv 1$

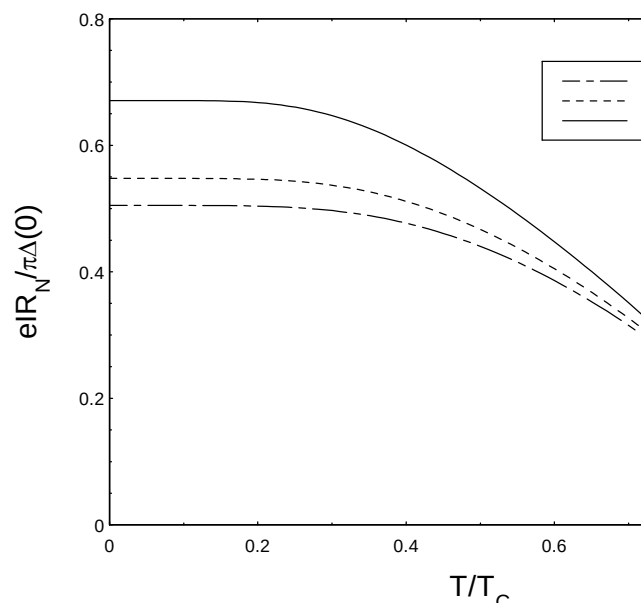
(1) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ S/I/S จากสมการ(3.81) จะได้

$$eIR_N / \pi\Delta(0) = \frac{\Delta(T) \sin \varphi}{2\Delta(0) \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS}}{2} + \cos \varphi}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}}} \tanh \left(\frac{\Delta(T)}{2T} \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS}}{2} + \cos \varphi}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}} \right) \quad \dots(4.1)$$

พลังงานของยิดเหนียว $\epsilon = \Delta(T) \sqrt{\frac{\frac{K_{SIS}}{2} + \cos \varphi}{1 + \frac{K_{SIS}}{2}}}$ พบว่าขึ้นอยู่กับค่าพลังงานศักย์ของฉนวนและ

ความต่างเฟส φ กราฟต่างๆที่ได้แสดงให้เห็นในภาพประกอบ 49 - 51 ซึ่งเห็นได้ชัดว่ากระแสโจเซฟสันในระบบรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง จะมีค่าน้อยลงเมื่อฉนวนมีพลังงานศักย์สูงขึ้นและอุณหภูมิมีค่ามากขึ้นและกระแสจะลดลงสู่ศูนย์แอมแปร์ที่ $T \rightarrow T_c$ และ

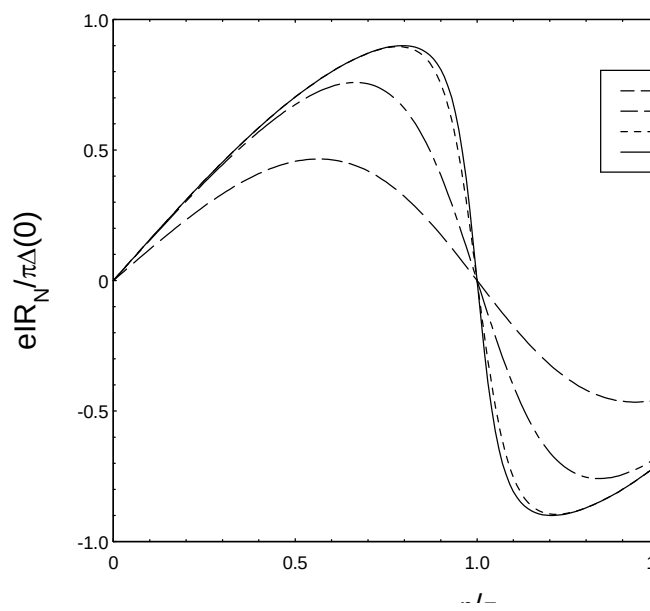
$$K_{SIS} \rightarrow \infty$$



(a)

(b)

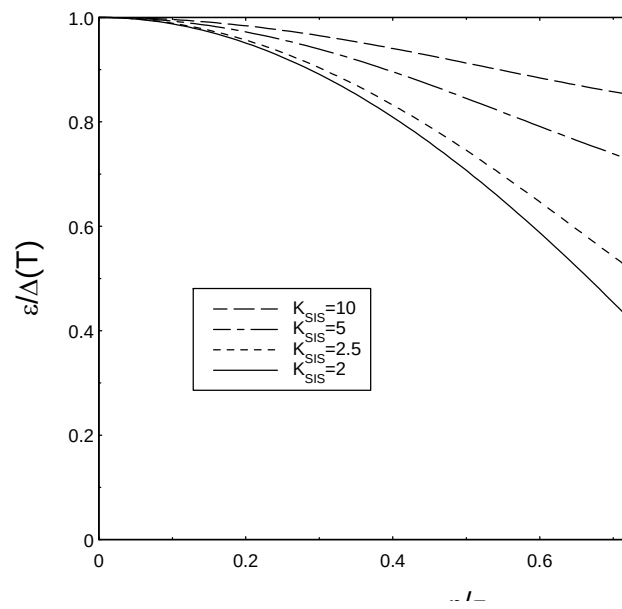
ภาพประกอบ 49 (a) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ T/T_c โดย $\varphi = \pi/2$
 และ(b) กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ K_{SIS} เมื่อ $\varphi = \pi/2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 50 (a) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ ω / π โดยมีพลังงาน
 ศักย์ฉนวนมีค่าน้อย $K_{\text{sis}} = 2.05$ และ (b) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$
 กับ ω / π โดยพลังงานศักย์ฉนวนมีค่ามาก $K_{\text{sis}} = 50$



ภาพประกอบ 51 แสดงกราฟของพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยว ε ต่อค่าช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)$ กับค่าเฟส q/π

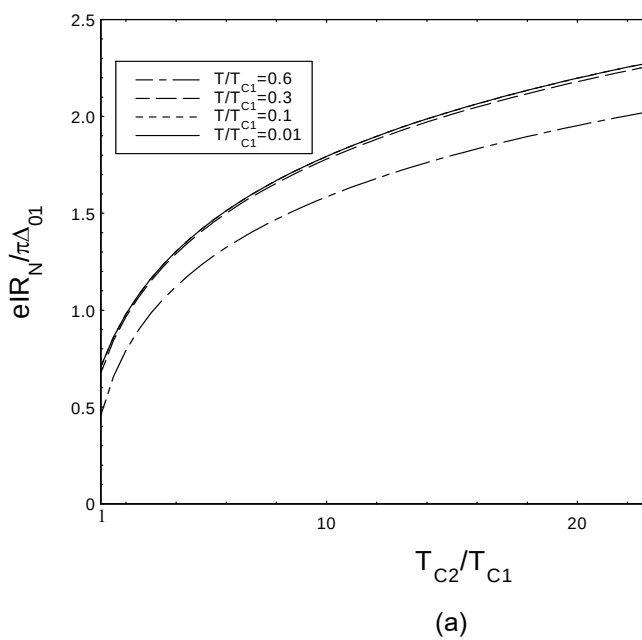
(2) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1 // s_2$ จากสมการ (3.86) จะได้กระแสโจเซฟสัน

$$eIR_N / \pi \Delta_{01} = \frac{\Delta_1(\tau) \Delta_2(\tau) \tau}{\Delta_{01}} (1 + K) \times \sum_{\omega_n} \frac{\sin \varphi}{\Delta_1(\tau) \Delta_2(\tau) \cos \varphi + \omega_n^2 + K \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2(\tau)} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)}} \quad \dots(4.2)$$

$$K = \frac{\left(\frac{2mV}{\hbar^2} \right)^2 + k_{F1}^2 + k_{F2}^2}{2k_{F1}k_{F2}} \quad \dots(4.3)$$

เมื่อ $\Delta_{01} = \Delta_1(0)$ และ $\Delta_{02} = \Delta_2(0)$ เป็นค่าช่องว่างของพลังงานตัวนำยวดยิ่งตัวที่หนึ่งและสองตามลำดับที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

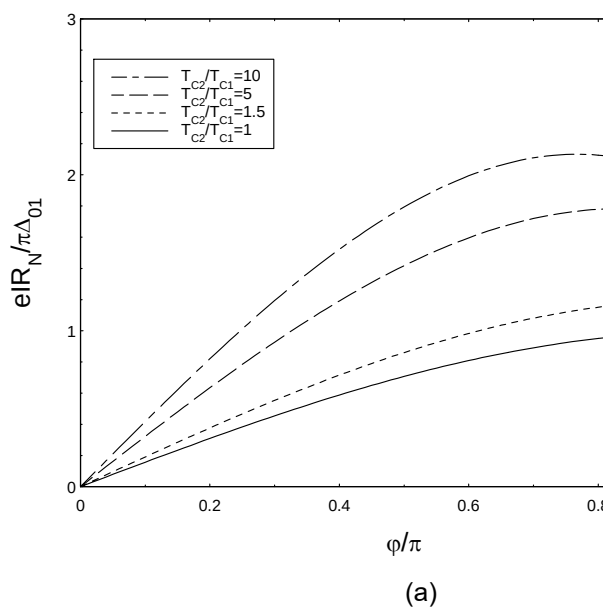
เนื่องจากระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1 // s_2$ ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดและเมื่อกำหนดให้ $\Delta_{01} \leq \Delta_{02}$ ดังนั้นเฉพาะเวลา $\tau \leq \tau_{c1}$ เท่านั้นกระแสโจเซฟสันจึงจะไหล กราฟระหว่างค่ากระแสโจเซฟสันกับปริมาณต่างๆดังแสดงในภาพประกอบ 52-55 ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าค่ากระแสโจเซฟสันจะเพิ่มมากขึ้นตามอัตราส่วนระหว่าง Δ_{02} ต่อ Δ_{01} ที่เพิ่ม



1

(b)

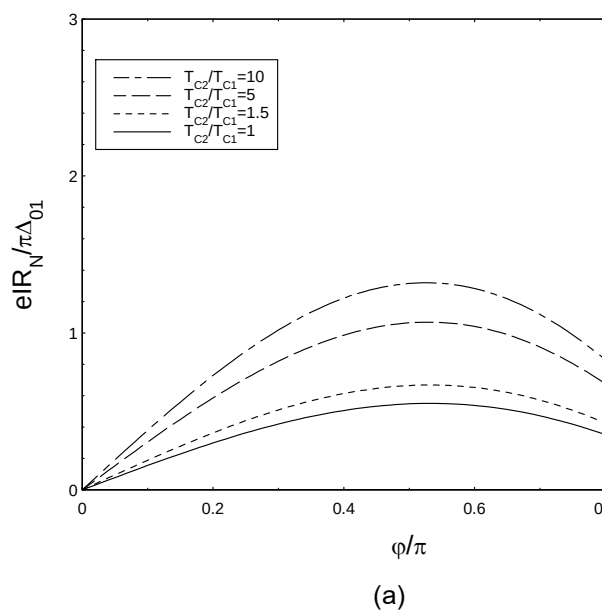
ภาพประกอบ 52 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ T_{C2} / T_{C1} เมื่อ $\varphi = \pi/2$ ในช่วงของ T_{C2} / T_{C1} มีค่า 1-30 เท่า (a) $K=1$ และ (b) $K=5$



(b)

ภาพประกอบ 53 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ ค่า ϕ / π เมื่อ $K = 1$ (a)

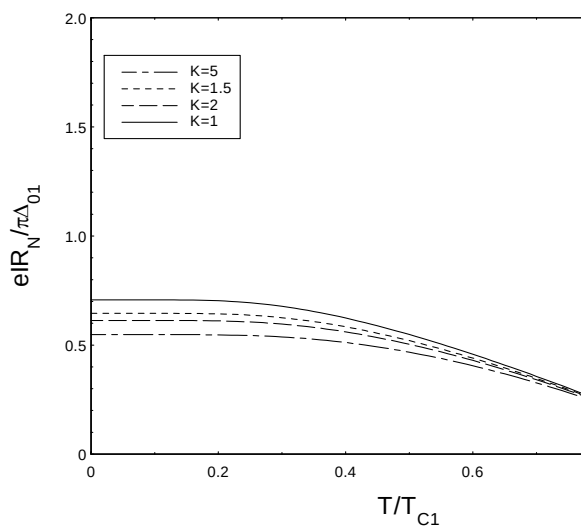
$T/T_{c1} = 0.01$ และ (b) $T/T_{c1} = 0.2$



(b)

ภาพประกอบ 54 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ ค่า ϕ / π เมื่อ $K=5$ (a)

$T/T_{c1} = 0.01$ และ (b) $T/T_{c1} = 0.2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 55 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ T/T_{C1} เมื่อ $\varphi = \pi/2$ (a) $T_{C2}/T_{C1} = 1$
 และ (b) $T_{C2}/T_{C1} = 5$

(3) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ S/FI/S จากสมการ(3.92) กระแสโจเซฟสันคือ

$$eR_{N0}I(\varphi,0)/\pi\Delta(0)=\frac{e\Delta(T)T\sin(\varphi/2)}{2\Delta(0)}\times$$

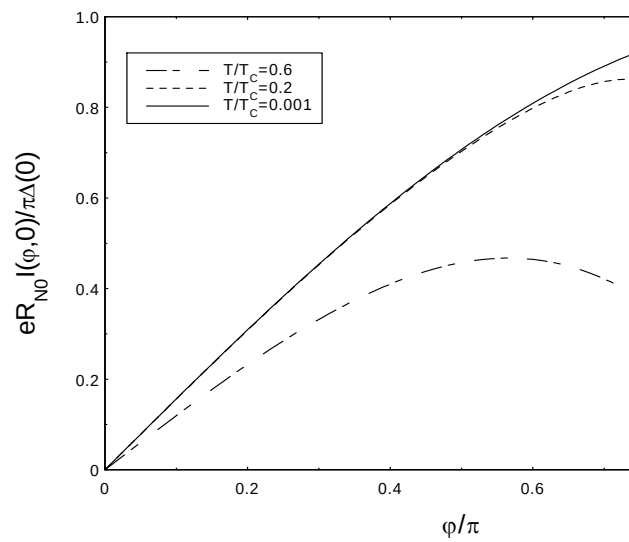
$$\left\{\left[\tanh\left(\frac{\epsilon_A}{2T}\right)+\tanh\left(\frac{\epsilon_B}{2T}\right)\right]-\frac{Z_0\cos(\varphi/2)}{\sqrt{Z_0^2+\sin^2(\varphi/2)}}\left[\tanh\left(\frac{\epsilon_A}{2T}\right)-\tanh\left(\frac{\epsilon_B}{2T}\right)\right]\right\}$$

...(4.4)

$$\epsilon_{A,B}=\Delta(T)\frac{\cos(\varphi/2)+,-Z_0\sqrt{Z_0^2+\sin^2(\varphi/2)}}{1+Z_0^2}\quad\quad\quad\text{...(4.5)}$$

$$\text{กำหนดให้ } \epsilon_A=\epsilon_A=-\epsilon_D, \quad \epsilon_B=\epsilon_B=-\epsilon_C, \quad z_0=\tilde{z}=\frac{mH}{\hbar^2k_F} \quad \text{และ} \quad R_{N0}=\frac{\pi\hbar(1+Z_0^2)}{e^2}$$

เป็นความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อโจเซฟสันประกอบด้วย ตัวนำวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำวดยิ่ง

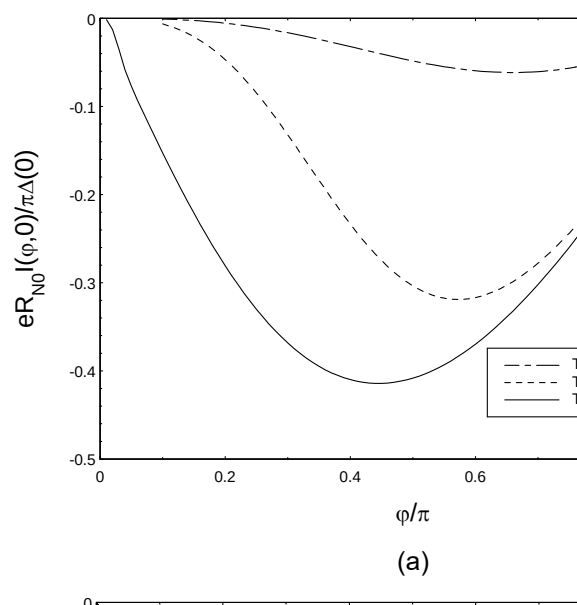


(a)

(b)

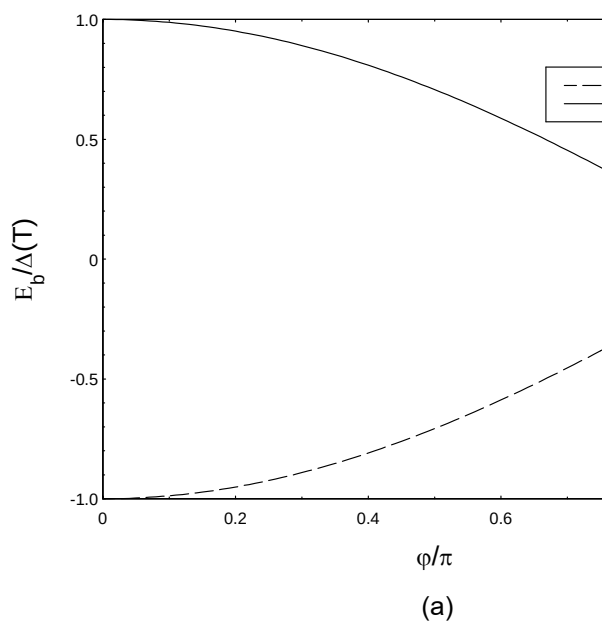
ภาพประกอบ 56 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi, 0)R_{N0} / \pi \Delta(0)$ กับ φ / π (a) $z_0 = 0$ และ (b)

$$z_0 = 0.5$$



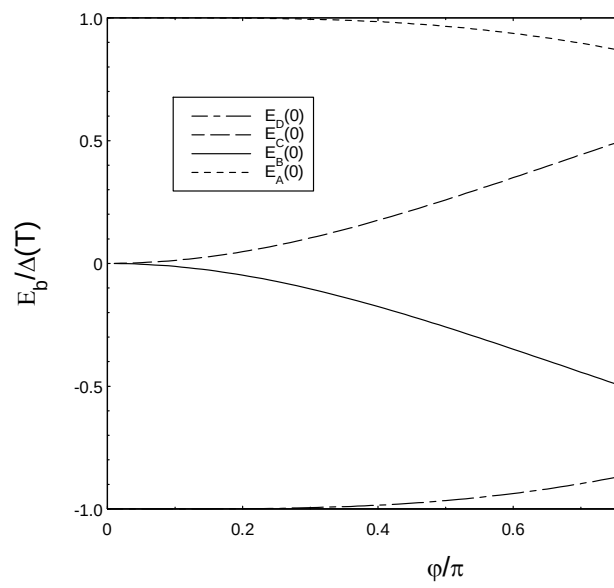
(b)

ภาพประกอบ 57 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi, 0)R_{N0} / \pi \Delta(0)$ กับ φ / π (a) $z_0 = 1$
และ (b) $z_0 = 2$



(b)

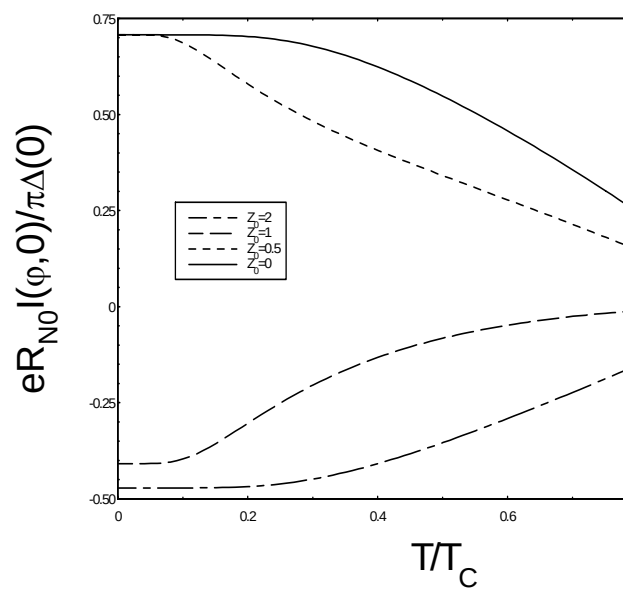
ภาพประกอบ 58 แสดงสัมพันธ์ระหว่าง $E_b/\Delta(T)$ กับ φ/π (a) $z_0 = 0$ และ (b) $z_0 = 0.5$



(a)

(b)

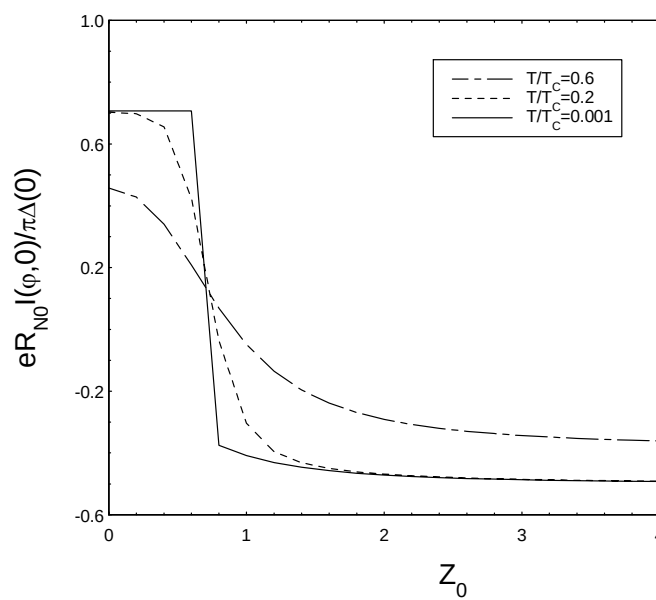
ภาพประกอบ 59 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $E_b / \Delta(T)$ กับ ϕ/π (a) $z_0 = 1$ และ (b) $z_0 = 2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 60 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi, 0)R_{N0} / \pi \Delta(0)$ กับ T/T_C (a) $\varphi = \pi/2$
และ (b) $\varphi = \pi/4$



ภาพประกอบ 61 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI(\varphi, 0)R_{N0} / \pi\Delta(0)$ กับ z_0 เมื่อ $\varphi = \pi/2$

(4) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $S_1/Fi/S_2$ จากสมการ (3.95) กระแสโจเซฟสันที่ได้คือ

$$eIR_N / \pi \Delta_{01} = \frac{\Delta_1 \Delta_2 T}{\Delta_{01}} \left(1 + \left(\frac{1 + \gamma^2 + 4z^2}{2\gamma} \right) \right) 2\gamma \sin \varphi \times$$

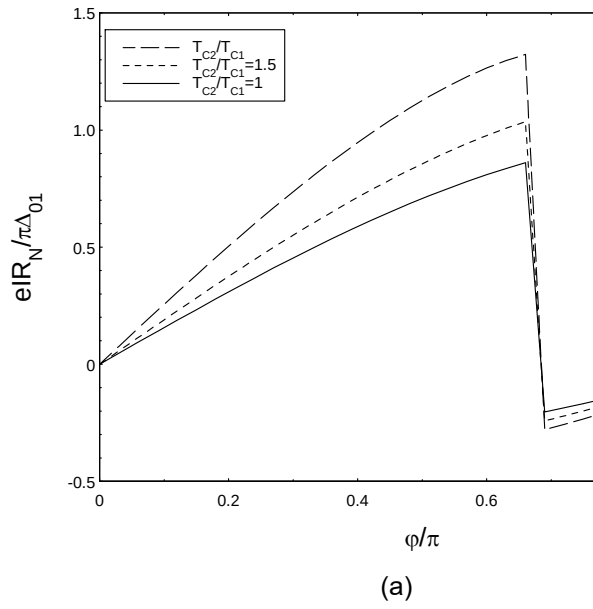
$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{2\gamma(\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2) + (1 + \gamma^2 - 4z^2) \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2}}{\left\{ 2\gamma(\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2) + (1 + \gamma^2 - 4z^2) \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2} \right]$$

$$\left[+ (4z_0 \omega_n)^2 \left\{ \gamma \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2} + \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2 \right]$$

...(4.6)

เมื่อกำหนดให้ $z = \frac{mH}{\hbar^2 k_{F1}}$ และ $\gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}}$ กราฟที่ได้ แสดงให้เห็นถึงผลกระทบจากค่า

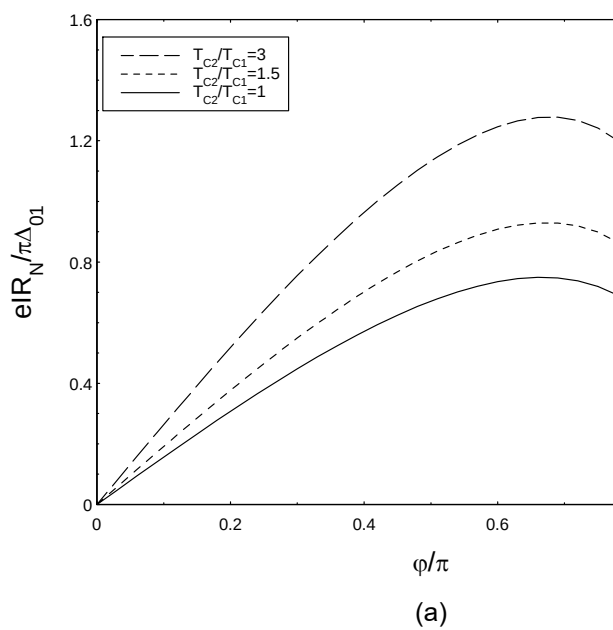
ช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งและค่าพลังงานเฟอร์มีที่ต่างกันของสองตัวนำยวดยิ่งต่อ
กระแสโจเซฟสันดังภาพประกอบ 62-65



(b)

ภาพประกอบ 62 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_N / \pi \Delta_{01}$ กับความต่างเฟส ϕ เมื่อ $z = 0.5$ และ

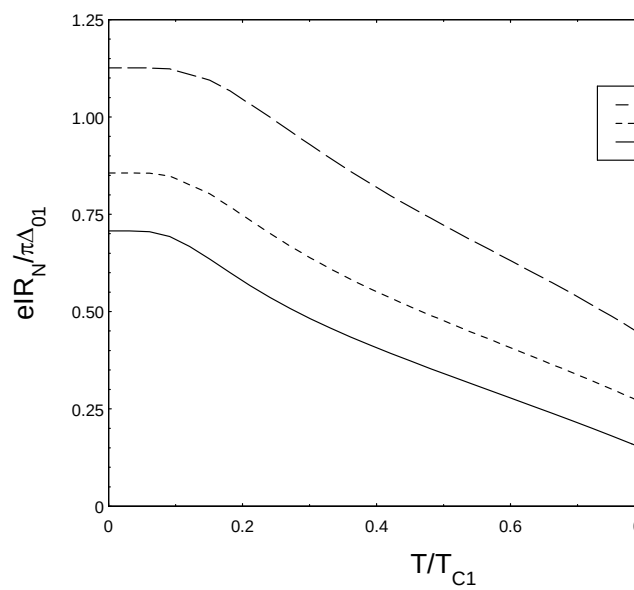
$k_{F2}/k_{F1} = 1$ (a) $T/T_{C1} = 0.001$ และ (b) $T/T_{C1} = 0.2$



(b)

ภาพประกอบ 63 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับความต่างเฟส φ เมื่อ $z = 0.5$ และ

$k_{F2}/k_{F1} = 2$ (a) $T/T_{C1} = 0.001$ และ (b) $T/T_{C1} = 0.2$

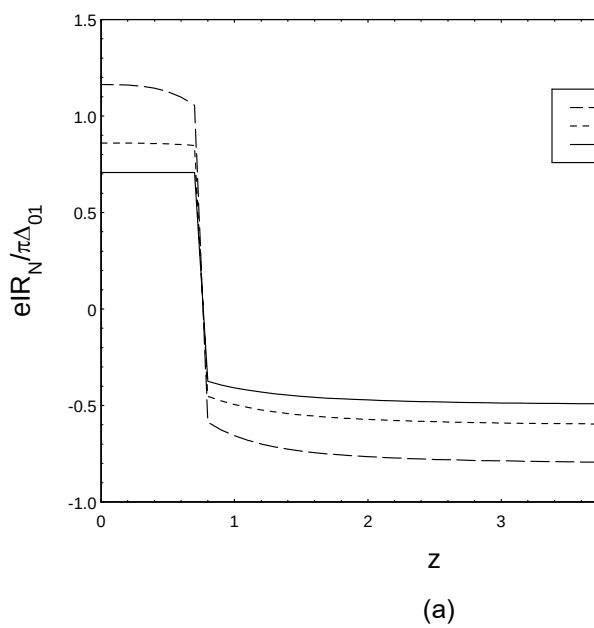


(a)

(b)

ภาพประกอบ 64 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ T/T_{C1} เมื่อ $z=0.5$ และ $\varphi = \pi/2$ (a)

$k_{F2}/k_{F1} = 1$ และ (b) $k_{F2}/k_{F1} = 2$



(b)

ภาพประกอบ 65 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_{01}$ กับ z เมื่อ $k_{F2}/k_{F1} = 1$ และ $\varphi = \pi/2$ (a)

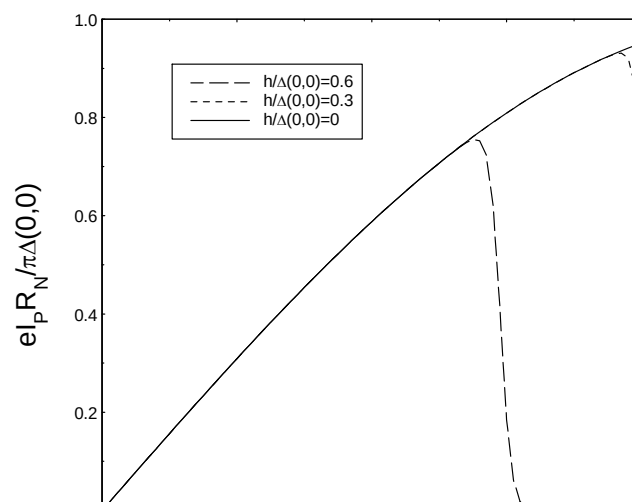
$T/T_{C1} = 0.001$ และ (b) $T/T_{C1} = 0.2$

(5) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/I/FS]_p$ จากสมการ (3.118) กระแสโจเซฟสันที่ได้มีค่า

$$eI_p R_N / \pi \Delta(0,0) = \frac{\Delta^2(T,h)T}{\Delta(0,0)} \sum_{\omega_n} \frac{\sin \varphi [\Delta^2(T,h)\alpha + \omega_n^2 - h^2]}{[\{\Delta^2(T,h)\alpha + \omega_n^2 - h^2\}^2 + (2h\omega_n)^2]}$$

...(4.7)

เมื่อ $\alpha = \frac{\cos \varphi + K}{1 + K}$ และในที่นี้ $K = 1 + 2 \left[\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right]^2$ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง กระแสโจเซฟสันกับ สนามแลกเปลี่ยน อุณหภูมิ และความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ แสดงให้เห็นจากภาพประกอบ 66-71



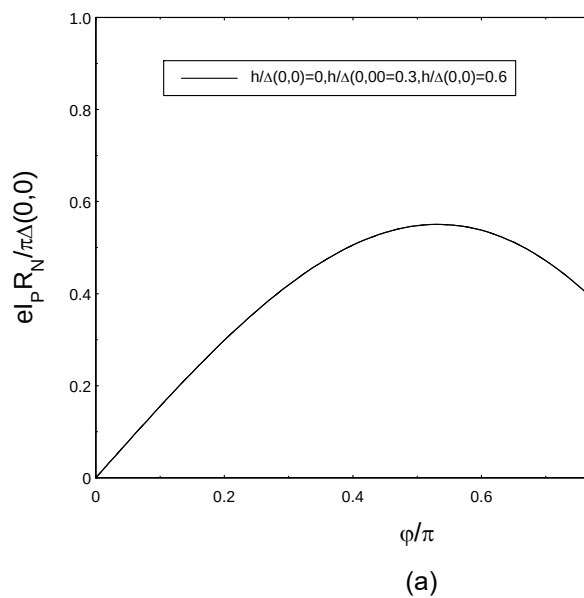
(a)

=0.6

(b)

ภาพประกอบ 66 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_P R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=1$ (a)

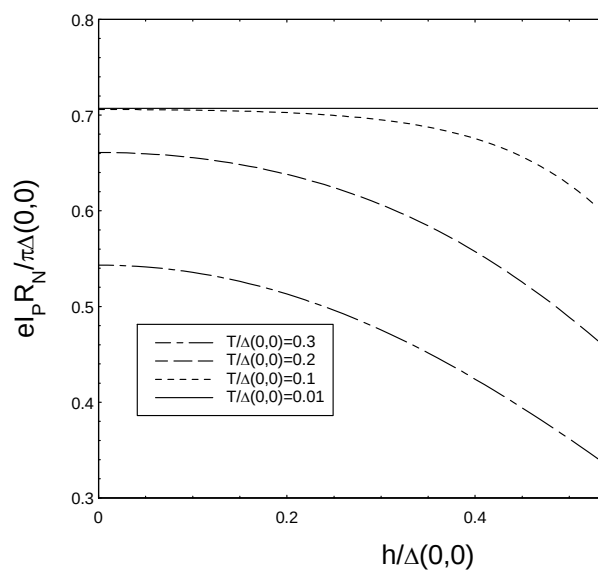
$\tau / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $\tau / \Delta(0,0) = 0.2$



(b)

ภาพประกอบ 67 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|R_N|/\pi\Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=5$ (a)

$T/\Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T/\Delta(0,0) = 0.2$

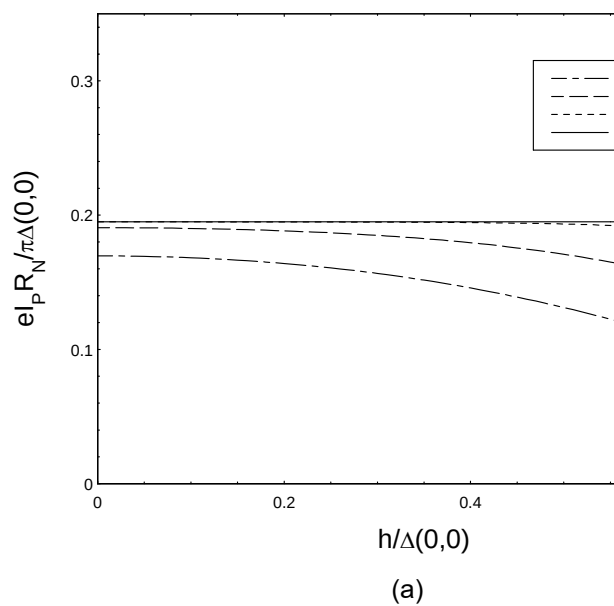


(a)

(b)

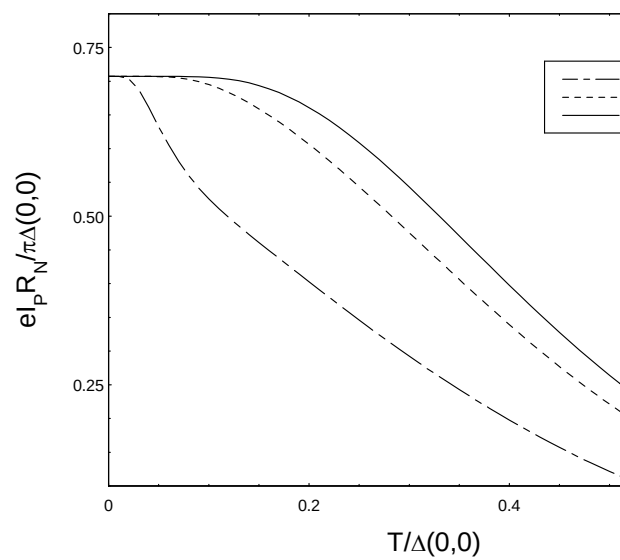
ภาพประกอบ 68 แสดงกราฟระหว่าง $e|P_N|/\pi\Delta(0,0)$ กับ $h/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a)

$K = 1$ และ (b) $K = 5$



(b)

ภาพประกอบ 69 แสดงกราฟระหว่าง $e|R_P|/\pi\Delta(0,0)$ กับ $h/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K = 1$ และ (b) $K = 5$

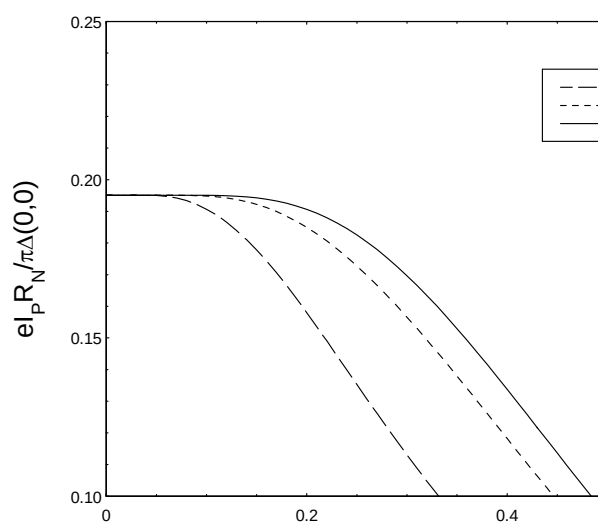


(a)

= 0

(b)

ภาพประกอบ 70 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|P_N/\pi\Delta(0,0)$ กับ $T/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 71 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|P R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $\tau / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$ (a) $K=1$ และ (b) $K=5$

(6) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[F_S/F_i/F_S]_p$ จากสมการ (3.123) กระแสโจเซฟสัน
จะได้

$$eI_p R_N / \pi \Delta(0,0) = \frac{\Delta^2(T,h)T}{\Delta(0,0)} (1+z^2) \times$$

$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{4 \sin \varphi \left\{ 2(\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \omega_n^2 - h^2) + 2(1-2Z^2)(\omega_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2) + \right.}{\left. - 4Z_H(hN + \omega_n M) \right\}} \right]$$

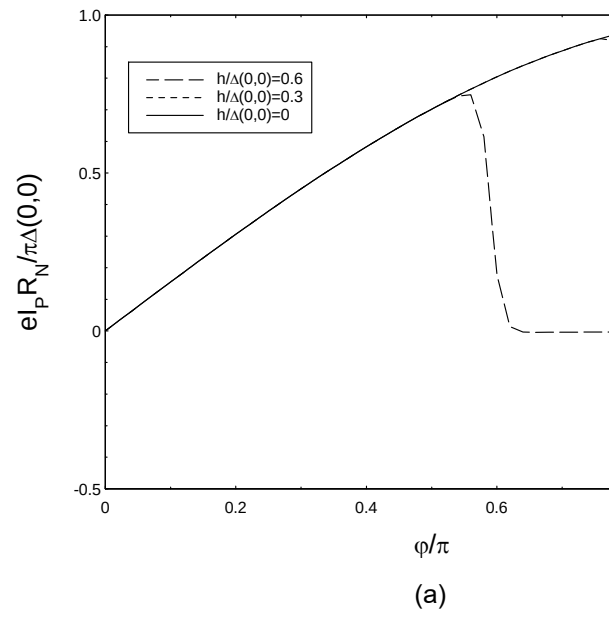
$$\left[\frac{\left\{ 2(\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \omega_n^2 - h^2) + 2(1-2Z^2)(\omega_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2) - 4Z_H(hN + \omega_n M) \right\}^2 + \right.}{\left. + \left\{ 4h\omega_n + 4(1-2Z^2)\omega_n h + 8Z(\omega_n N - hM) \right\}^2 \right]}$$

...(4.8)

$$N = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} + (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4.9)$$

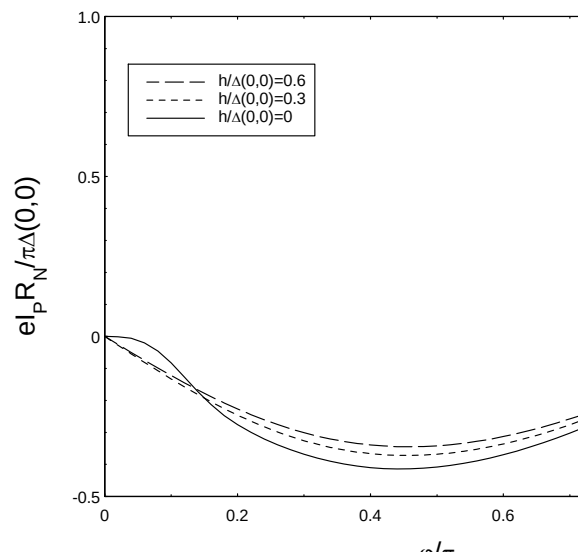
$$M = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2} - (\omega_n^2 + \Delta^2 - h^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots(4.10)$$

กราฟความสัมพันธ์ที่ได้แสดงจากภาพประกอบ 72-78



(b)

ภาพประกอบ 72 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_p R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ ϕ เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.01$
 (a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$

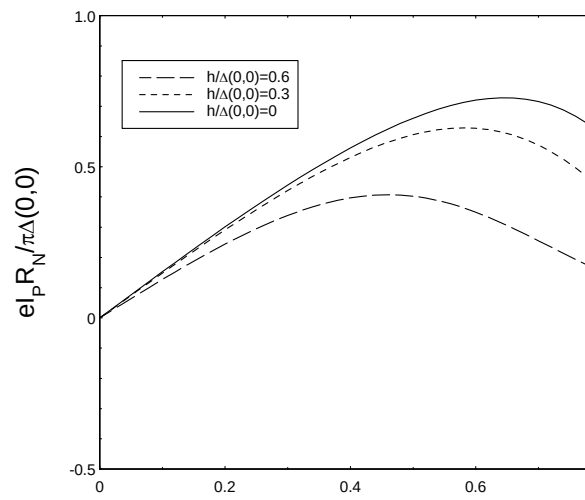


(a)

(b)

ภาพประกอบ 73 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_P R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ η เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.01$

(a) $z=1$ และ (b) $z=2$

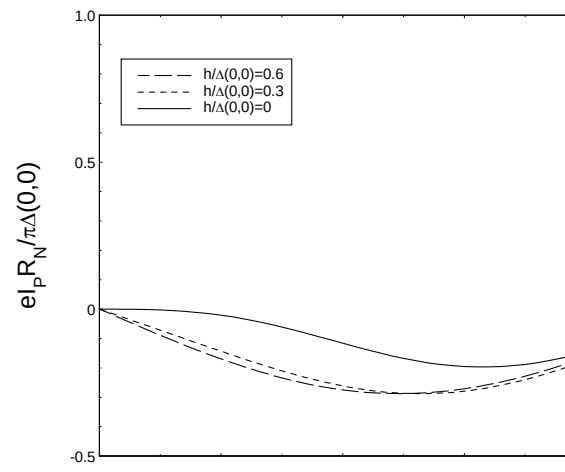


(a)

(b)

ภาพประกอบ 74 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_p R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ η เมื่อกำหนด $\tau/\Delta(0,0)=0.2$

(a) $z=0$ และ (b) $z=0.5$

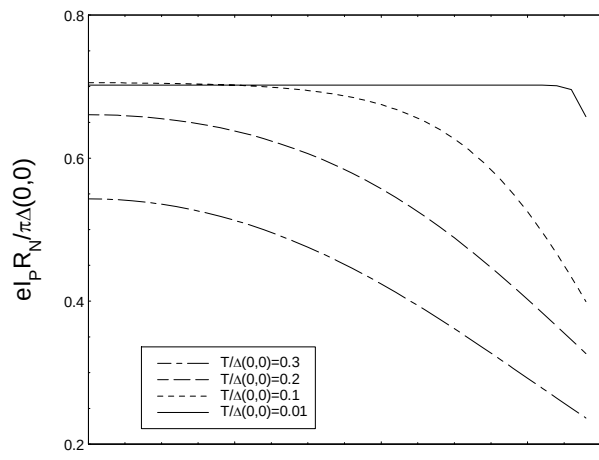


(a)

(b)

ภาพประกอบ 75 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_P R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ q เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.2$

(a) $z = 1$ และ (b) $z = 2$

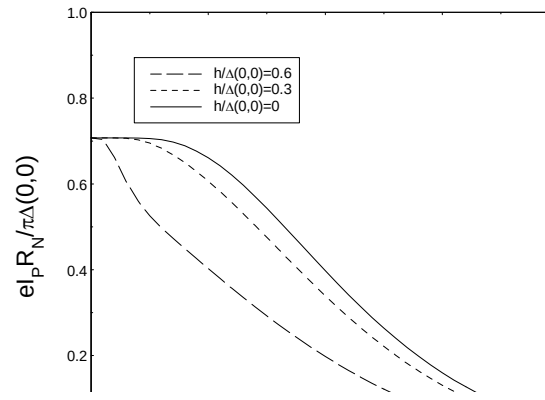


(a)

(b)

ภาพประกอบ 76 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|P_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$

(a) $z = 0$ และ (b) $z = 2$

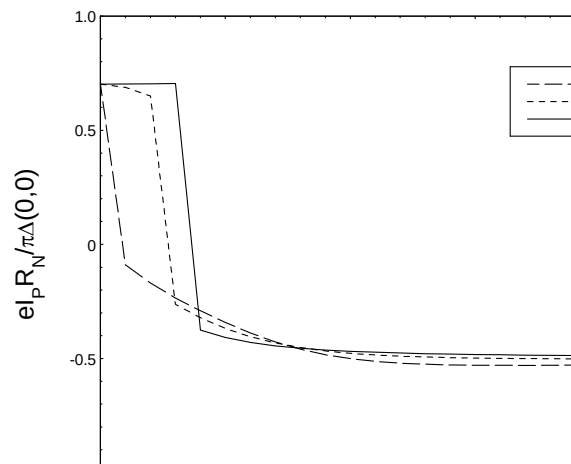


(a)

(b)

ภาพประกอบ 77 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_p R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $\tau / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$

(a) $z=0$ และ (b) $z=2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 78 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_P R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ z เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a) $T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$

(7) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/I/FS]_{AP}$ จากสมการ (3.127) กระแสโจเซฟสัน
จะได้

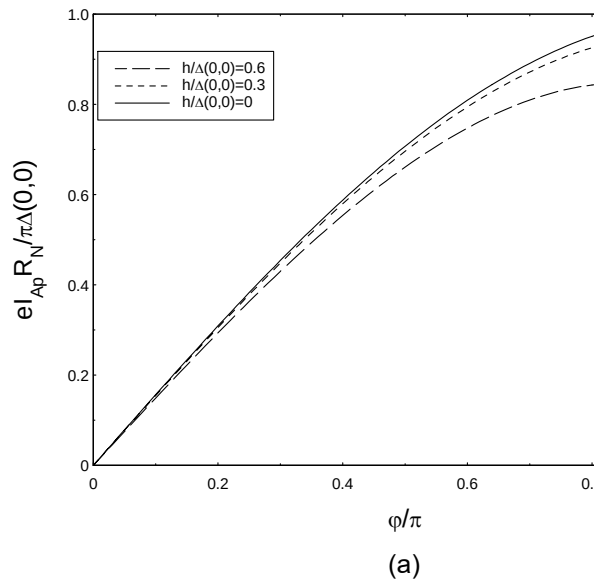
$$eI_{AP}R_N / \pi \Delta(0,0) = \frac{\Delta^2(T,h)T}{\Delta(0,0)} (1+K) \times$$

$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{\sin \varphi}{\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \omega_n^2 + h^2 + K \sqrt{(\omega_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2)^2 + 4(\omega_n h)^2}} \right]$$

...(4.11)

เมื่อ $K = 1 + 2 \left[\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right]^2$ กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสัน $[FS/I/FS]_{AP}$ กับ

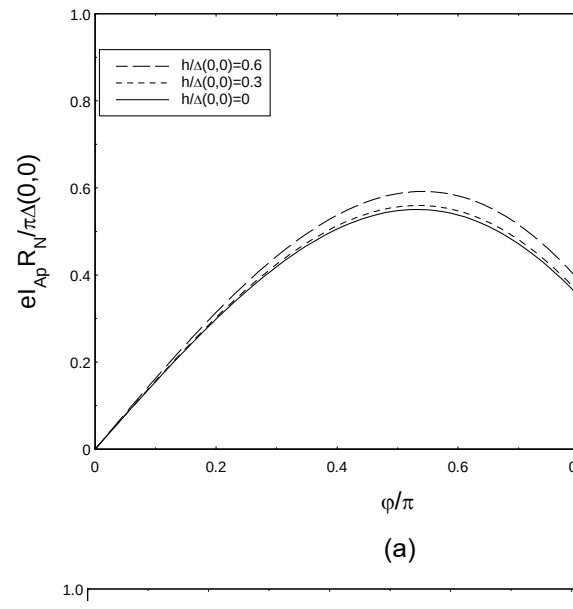
สนามแลกเปลี่ยน อุณหภูมิ และความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ แสดงให้เห็นจากภาพประกอบ 79-84



(b)

ภาพประกอบ 79 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $K=1$ (a)

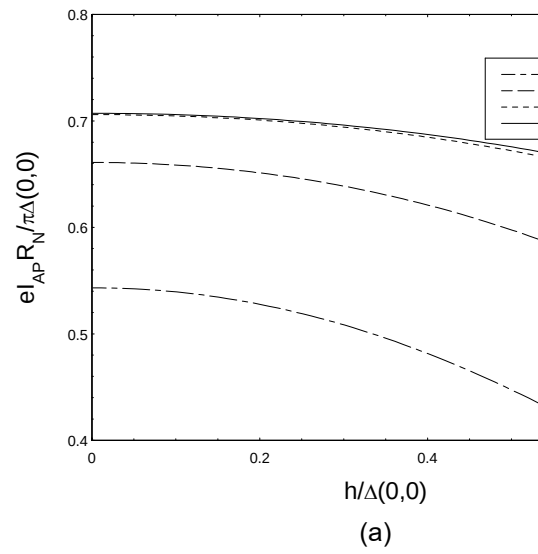
$T/\Delta(0,0)=0.01$ และ (b) $T/\Delta(0,0)=0.2$



(b)

ภาพประกอบ 80 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|_{Ap} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ ϕ เมื่อกำหนด $K = 5$ (a)

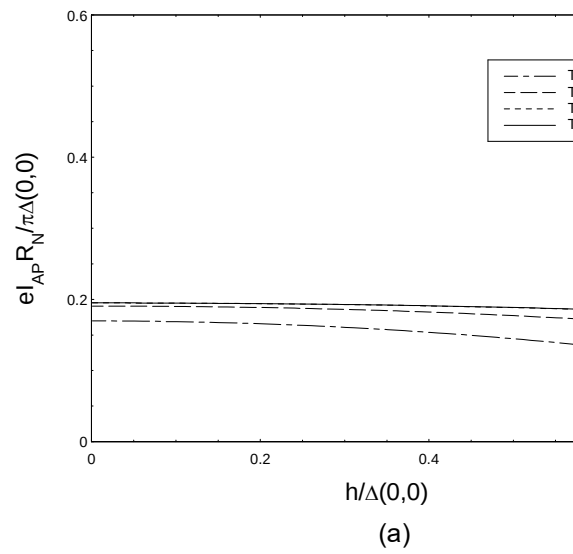
$T / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $T / \Delta(0,0) = 0.2$



(b)

ภาพประกอบ 81 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi / 2$

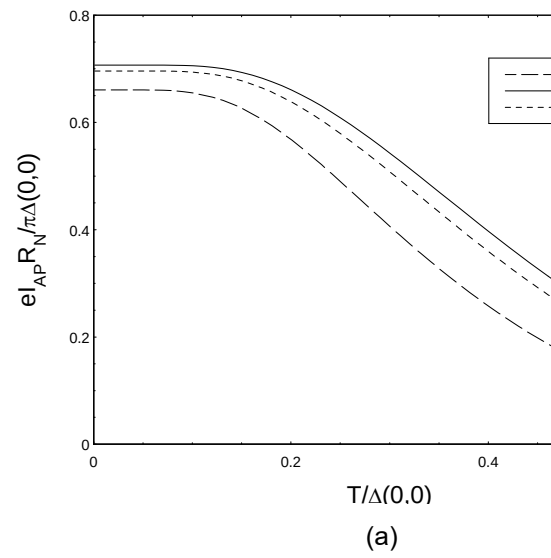
(a) $K = 1$ และ (b) $K = 5$



(b)

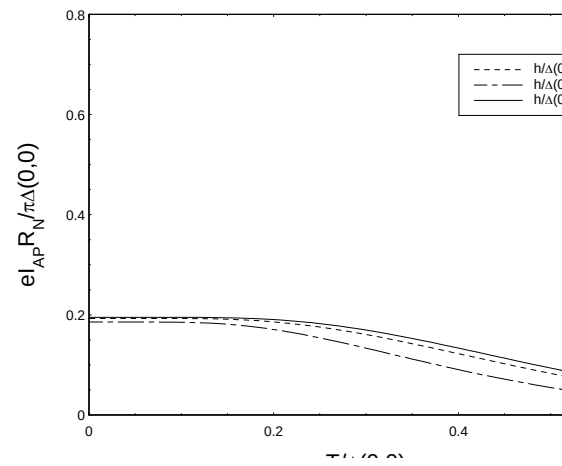
ภาพประกอบ 82 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $h / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $p = \pi / 8$

(a) $K = 1$ และ (b) $K = 5$



(b)

ภาพประกอบ 83 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $T / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$
 (a) $K = 1$ และ (b) $K = 5$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 84 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0)$ กับ $\tau / \Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/8$

(a) $K = 1$ และ (b) $K = 5$

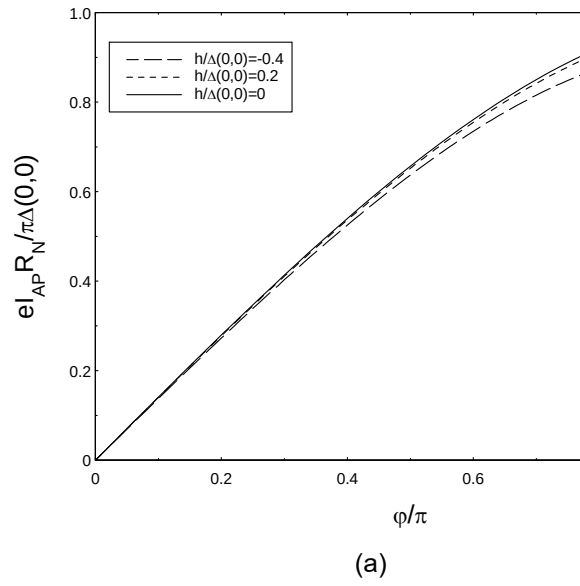
(8) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[F_S/F_i/F_S]_{AP}$ จากสมการ (3.131) กระแสโจเซฟสันที่ได้คือ

$$eI_{AP}R_N / \pi\Delta(0,0) = \frac{\Delta^2(T,h)\tau}{\Delta(0,0)} (1+z^2) \times$$

$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{4 \sin \varphi \left\{ 2 \left(\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \omega_n^2 + h^2 \right) + 2(1-z^2) \sqrt{\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2 \right)^2 + 4(\omega_n h)^2} \right\}}{\left\{ 2 \left(\Delta^2(T,h) \cos \varphi + \omega_n^2 + h^2 \right) + 2(1-z^2) \sqrt{\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T,h) - h^2 \right)^2 + 4(\omega_n h)^2} \right\}^2 + \{8Z(\omega_n N + hM)\}^2} \right]$$

...(4.12)

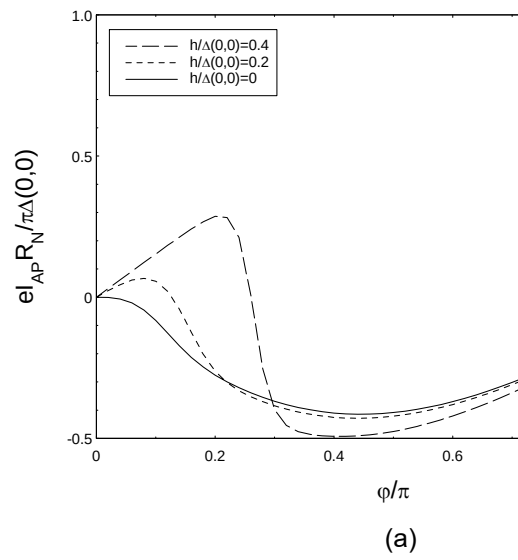
กราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับ สนามแลกเปลี่ยน อุณหภูมิ ความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ และ ค่ากำแพงศักย์ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร แสดงในภาพประกอบ 85-91



(b)

ภาพประกอบ 85 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $e|_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ ϕ เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.01$

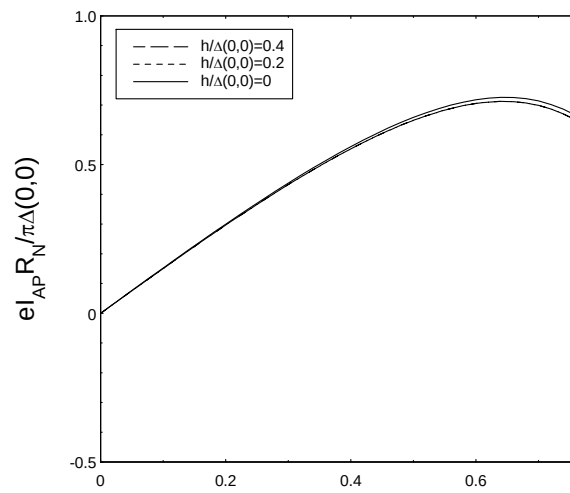
(a) $z = 0$ และ (b) $z = 0.5$



(b)

ภาพประกอบ 86 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ ϕ เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.01$

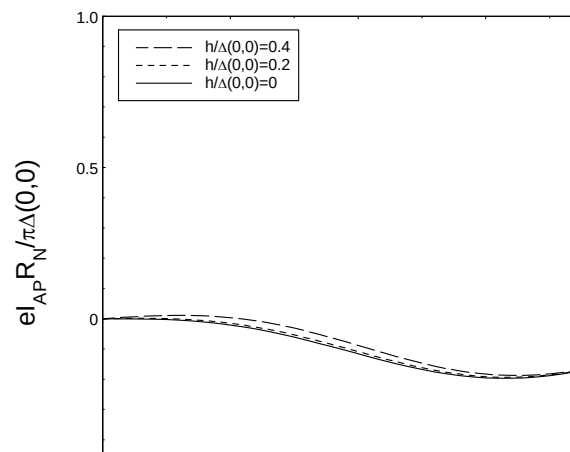
(a) $z=1$ และ (b) $z=2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 87 แสดงสัมพันธ์ระหว่าง $e|_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $\tau / \Delta(0,0) = 0.2$ (a) $z = 0$ และ (b) $z = 0.5$

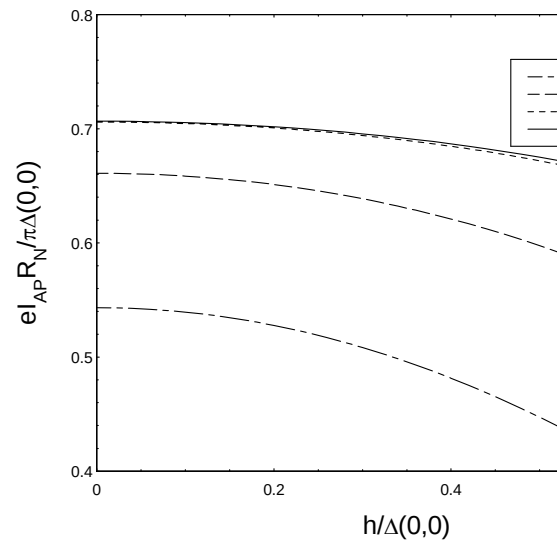


(a)

(b)

ภาพประกอบ 88 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $el_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ φ เมื่อกำหนด $T / \Delta(0,0) = 0.2$

(a) $z=1$ และ (b) $z=2$

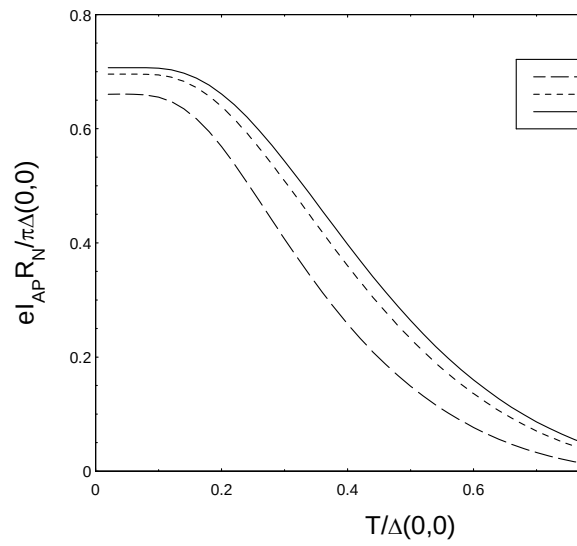


(a)

(b)

ภาพประกอบ 89 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $h/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$

(a) $z=0$ และ (b) $z=2$

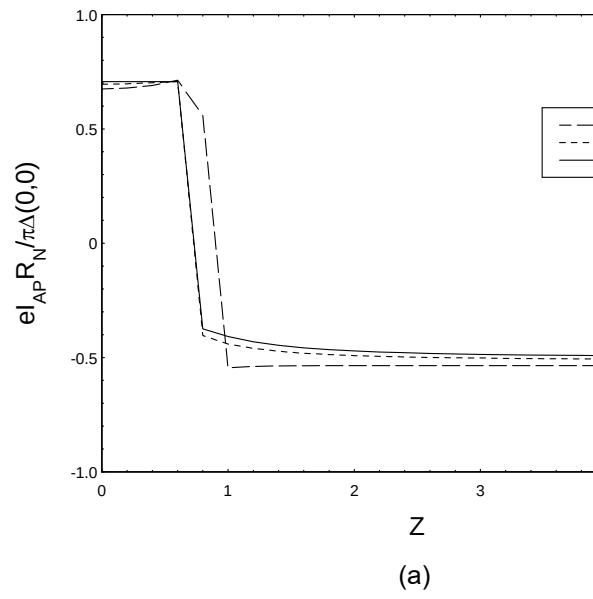


(a)

(b)

ภาพประกอบ 90 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ $T/\Delta(0,0)$ เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$

(a) $z=0$ และ (b) $z=2$



(b)

ภาพประกอบ 91 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eI_{AP} R_N / \pi \Delta(0,0)$ กับ z เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a)
 $\tau / \Delta(0,0) = 0.01$ และ (b) $\tau / \Delta(0,0) = 0.2$

(9) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/I/S_2$ จากสมการ (3.102) จะได้กระแสโจเซฟสันคือ

$$eIR_N / \pi \Delta_0 = \frac{\Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) \tau}{\Delta_0} (1 + K) \times$$

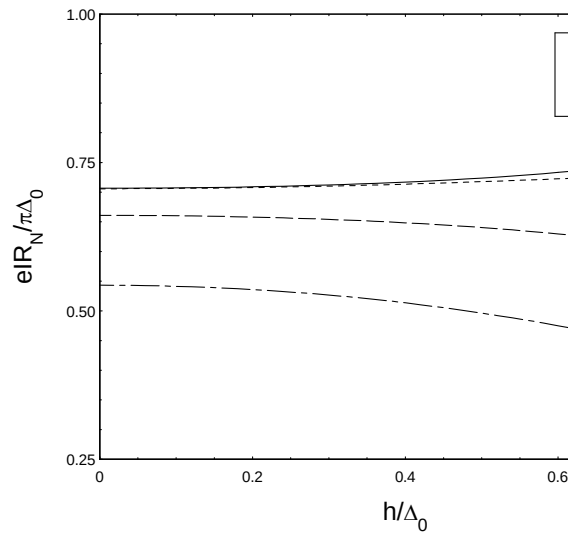
$$\sum_{\omega_n} \frac{\sin \varphi \left\{ \left[\Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) \cos \varphi + \omega_n^2 \right] + K \left(N \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}}{\left\{ \left[\Delta_1(\tau, h) \Delta_2(\tau) \cos \varphi + \omega_n^2 \right] + K \left(N \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}^2 + \left\{ \omega_n h + K \left(M \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(\tau)} \right) \right\}^2}$$

...(4.13)

เมื่อเรากำหนดให้ตัวนำวดยิ่งทั้งสองมีค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta_1(0,0) = \Delta_2(0) = \Delta_0$

และ พลังงานเฟอร์มีมีขนาดที่เท่ากันในที่นี้ $K = 1 + 2 \left[\frac{mV}{\hbar^2 k_F} \right]^2$

N และ M กำหนดจากสมการ(4.9)กับสมการ(4.10) กราฟที่ได้แสดงให้เห็นว่าค่าสนามแล็กเปลี่ยนในตัวนำวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรจะทำให้กระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นที่อุณหภูมิต่ำๆใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ส่วนกรณีอุณหภูมิสูงกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์มากขึ้น กระแสจะลดลงเมื่อค่าสนามแล็กเปลี่ยนเพิ่มขึ้นดังแสดงในภาพประกอบ 92



(a)

(b)

ภาพประกอบ 92 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_0$ กับ h/Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a)

$K = 1$ และ (b) $K = 5$

(10) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/FI/S_2$ จากสมการ (3.109) จะได้กระแสโจเซฟสันคือ

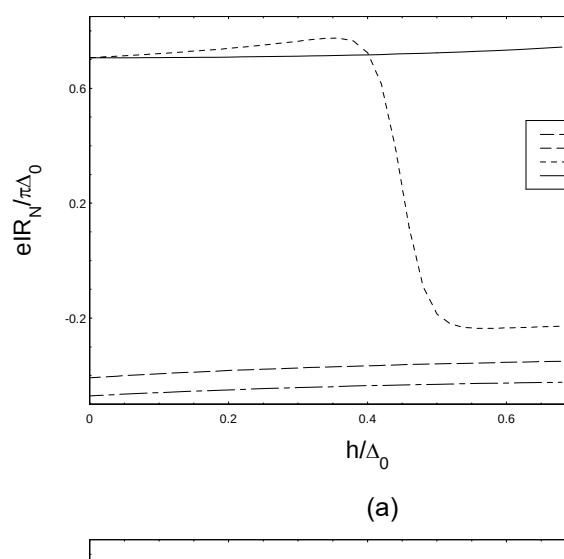
$$eIR_N / \pi \Delta_0 = \frac{\Delta_1 \Delta_2 T}{\Delta_0} (1 + Z^2) 4 \sin \varphi \times$$

$$\sum_{\omega_n} \left[\frac{\left[2(\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2) + 2(1 - 2Z^2)N\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} - 4\omega_n ZM - 4Zh\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right]}{\left\{ 2(\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2) + 2(1 - 2Z^2)N\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} - 4\omega_n ZM - 4Zh\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2 + \left\{ 2\omega_n h + 2(1 - 2Z^2)M\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} + 4\omega_n ZN + 4Z\omega_n \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2} \right\}^2} \right]$$

...(4.14)

เมื่อ $\Delta_1(0,0) = \Delta_2(0) = \Delta_0$, $z = \frac{mH}{\hbar^2 k_F}$, N และ M กำหนดจากสมการ(4.9)กับสมการ(

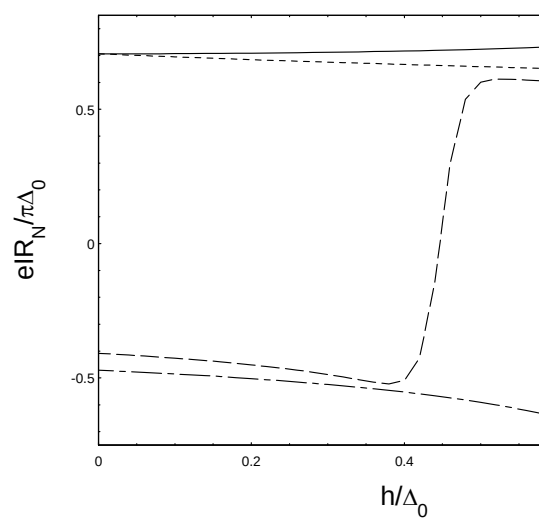
4.10) กราฟดังภาพประกอบ 93 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับสนามแลกเปลี่ยนของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรกับทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรขนานกัน ส่วนภาพประกอบ 94 ทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนทั้งสองสวนทางกัน



(b)

ภาพประกอบ 93 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_0$ กับ h / Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ (a)

$\tau / \Delta_0 = 0.01$ และ (b) $\tau / \Delta_0 = 0.2$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 94 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_0$ กับ h / Δ_0 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi / 2$ (a)

$\tau / \Delta_0 = 0.01$ และ (b) $\tau / \Delta_0 = 0.2$

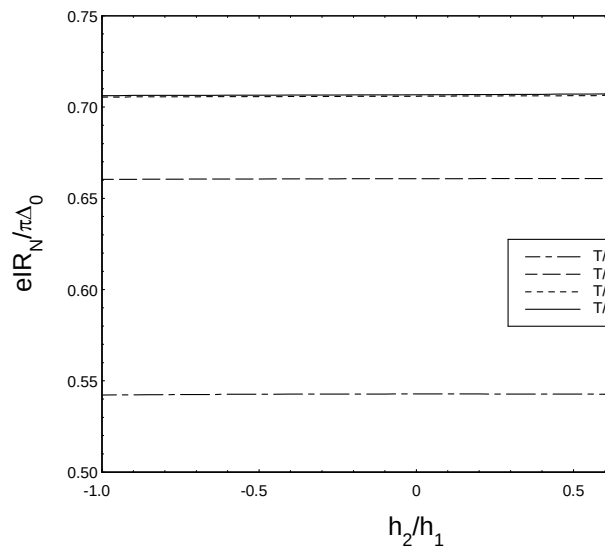
(11) กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/I/FS_2$ จากสมการ (3.113) กระแสโจเซฟสันที่ได้คือ

$$eIR_N / \pi \Delta_0 = \frac{\Delta_1 \Delta_2 T}{\Delta_0} (1 + K) \times$$

$$\sum_{\omega_n} \frac{\sin \varphi [\Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2 - h_1 h_2 + K(N_1 N_2 - M_1 M_2)]}{\left[\left\{ \Delta_1 \Delta_2 \cos \varphi + \omega_n^2 - h_1 h_2 + K(N_1 N_2 - M_1 M_2) \right\}^2 + \left\{ \omega_n (h_1 + h_2) + K(N_2 M_1 + N_1 M_2) \right\}^2 \right]}$$

...(4.15)

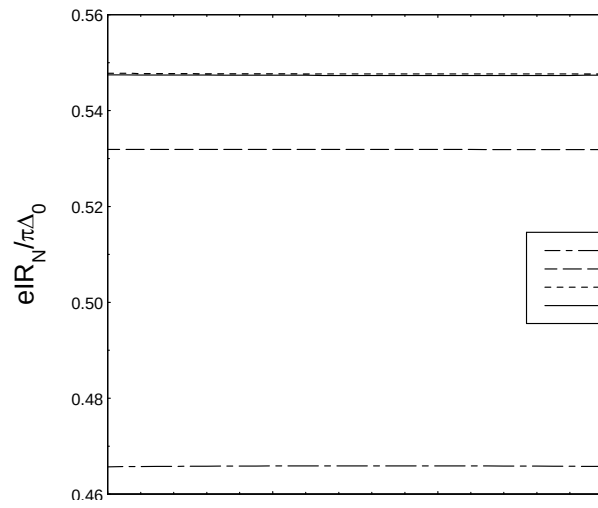
เมื่อกำหนดให้ $\Delta_1(0,0) = \Delta_2(0,0) = \Delta_0$ และพลังงานเฟอร์มีมีค่าเท่ากัน นั่นก็คือตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองทำจากตัวนำยวดยิ่งชนิดเดียวกันแต่มีขนาดและทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนต่างกัน กราฟความสัมพันธ์แสดงดังภาพประกอบ 95-96



(a)

(b)

ภาพประกอบ 95 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_0$ กับ h_2/h_1 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi/2$ และ $K = 1$ (a) $h_1/\Delta_0 = 0.05$ และ (b) $h_1/\Delta_0 = 0.4$



(a)

(b)

ภาพประกอบ 96 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi \Delta_0$ กับ h_2 / h_1 เมื่อกำหนด $\varphi = \pi / 2$ และ

$K = 5$ (a) $h_1 / \Delta_0 = 0.05$ และ (b) $h_1 / \Delta_0 = 0.4$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลการวิจัย และขอเสนอแนะ

การคำนวณกระแสไอเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร ผลของการคำนวณได้สมการกระแสไอเซพสันชนิดตรงดังสมการ(3.74)ซึ่งเป็นสมการที่ครอบคลุมสูตรกระแสไอเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อต่างๆทุกระบบ โดยจัดรูปสมการกระแสไอเซพสันชนิดตรงจากระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โร ($FS_1/FI/FS_2$) เป็นสมการกระแสไอเซพสันชนิดตรงในรอยต่อไอเซพสันกรณีพิเศษ 11 ระบบ ดังแสดงไว้ในบทที่ 3 ซึ่งเป็นทั้งสมการกระแสไอเซพสันชนิดตรงที่เคยมีคนคำนวณมาแล้ว และสมการกระแสไอเซพสันชนิดตรงที่ยังไม่เคยมีใครคำนวณมาก่อน รวมทั้งได้แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไอเซพสันชนิดตรงกับพารามิเตอร์ต่างๆดังเช่น อุณหภูมิ ช่องว่างพลังงาน ความต่างเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่ง ค่าความรุนแรงของศักย์ฉนวน และสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน ที่เป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของรอยต่อไอเซพสันแต่ละระบบโดยนำเสนอเป็นกราฟความสัมพันธ์ดังแสดงไว้ในบทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

1. กรณีรอยต่อไอเซพสันแบบ $s//s$ กระแสไอเซพสันชนิดตรงจะลดลงเมื่ออุณหภูมิและค่าศักย์ฉนวนปกติของระบบรอยต่อไอเซพสันเพิ่มขึ้นและเป็นศูนย์ในที่สุดเมื่อ $T \rightarrow T_c$ โดยกระแสไอเซพสันจะมีค่ามากที่สุดที่ $T=0$ ดังภาพประกอบ 49 และเมื่อพิจารณาค่ากระแสไอเซพสันกับความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ ($\varphi \equiv \phi$) พบว่ามีค่าเป็นศูนย์ที่ $\varphi = \pi$ ดังภาพประกอบ 50 และสำหรับภาพประกอบ 51 อัตราส่วนของพลังงานที่ยึดเหนี่ยวสถานะบริเวณรอยต่อไอเซพสันต่อช่องว่างพลังงานจะเพิ่มมากขึ้นเมื่อค่าศักย์ของฉนวนปกติเพิ่มขึ้น(กรณีที่พิจารณาค่า φ เท่าๆกัน)

2. กรณีรอยต่อไอเซพสันแบบ $s_1//s_2$ ภาพประกอบ 52 กระแสไอเซพสันเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนของ Δ_{02}/Δ_{01} ที่มากขึ้น เมื่อกำหนดให้ $\Delta_{01} \leq \Delta_{02}$ ซึ่งกระแสไอเซพสันจะไหลเมื่ออุณหภูมิของระบบรอยต่อไอเซพสัน $T < T_{c1}$ ดังภาพประกอบ 55 ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไอเซพสันกับอุณหภูมิ ศักย์ฉนวน และมุม φ เป็นลักษณะเดียวกันกับ รอยต่อไอเซพสันแบบ $s//s$ ดังภาพประกอบ 53,54

3. กรณีรอยต่อไอเซพสันแบบ $s/FI/s$ จากภาพประกอบ 56,57 กระแสไอเซพสันในรอยต่อแบบ $s/FI/s$ มีการไหลย้อนกลับทิศที่มุม $\varphi < \pi$ เมื่อมีการใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไป ($z_0 > 0$) และจากภาพประกอบ 61 กระแสไอเซพสันไหลย้อนกลับทิศที่ $z_0 \cong 0.8$ เมื่อ $\varphi = \pi/2$ ขณะที่อุณหภูมิส่งผลให้อำนาจของกระแสไอเซพสันน้อยลง

พลังงานที่ยึดเหนี่ยวสถานะบริเวณรอยต่อไอเซพสัน (ดังภาพประกอบ 58,59) จากภาพประกอบ 58a เมื่อศักย์ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร $z_0 = 0$ พลังงานที่ยึดเหนี่ยวสถานะมีสองค่า เส้น

ที่บเป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮอิเล็กตรอนสปิน $\uparrow, \downarrow$ และเส้นประเป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮไฮล $\downarrow, \uparrow$ แสดงให้เห็นว่าการซ้อนทับของพลังงานขณะ $z_0 = 0$ เมื่อใส่จำนวนแม่เหล็กเฟอร์โร $z_0 \neq 0$ ดังภาพประกอบ 58b พลังงานที่ยึดเหนี่ยวสถานะมี 4 ค่า เส้นที่บเป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮอิเล็กตรอนสปิน $\uparrow$ กับเส้นขีดรวมยาวสั้น เป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮไฮลสปิน $\downarrow$ และ เส้นขีดสั้นเป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮอิเล็กตรอนสปิน $\downarrow$ กับเส้นขีดสั้น เป็นพลังงานของอนุภาคควาไฮไฮลสปิน $\uparrow$ และพลังงานของอนุภาคควาไฮจะมีการแยกระดับพลังงานแตกต่างกันมากขึ้นเมื่อ z_0 มีค่ามากขึ้น(ภาพประกอบ59a,b) ภาพประกอบ 60 กระแสโจเซฟสันมีขนาดเป็นบวกเมื่อ $z_0 = 0, 0.5$ กับ $\varphi = \pi/2, \pi/4$ และ มีทิศเป็นลบเมื่อ $z_0 = 1, 2$ กับ $\varphi = \pi/2, \pi/4$

4. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1/Fi/s_2$ ภาพประกอบ 62-63 เมื่อ $k_{F2}/k_{F1} = 1$ ค่าของ $z = 0.5$ กระแสโจเซฟสันมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลที่ $\varphi/\pi \cong 0.7$ โดยที่ความเร็วของการเปลี่ยนเฟสมีค่ามากเมื่อ $T/T_{C1} = 0.001$ และจะน้อยลงเมื่อ $T/T_{C1} = 0.2$ แต่ที่ $k_{F2}/k_{F1} = 2$ ไม่พบว่ากระแสโจเซฟสันไหลในทิศทางลบ และอัตราส่วนของ T_{C2}/T_{C1} น้อยลงแอมพลิจูดของกระแสโจเซฟสันลดลง เช่นเดียวกันกับรอยต่อโจเซฟสันแบบ $s_1/I/s_2$

ภาพประกอบ 64 เมื่อ $\varphi = \pi/2$ และ $z = 0.5$ กระแสโจเซฟสันลดลงเล็กน้อยเมื่อค่าของ k_{F2}/k_{F1} เพิ่มขึ้นจาก 1 เท่า เป็น 2 เท่า และภาพประกอบ 65 เมื่อ $k_{F2}/k_{F1} = 1$ กับ $\varphi = \pi/2$ แสดงการกลับทิศการไหลของกระแสโจเซฟสันอย่างทันทีทันใดเมื่อ $T/T_{C1} = 0.001$ และค่อยๆลดลงเมื่อ $T/T_{C1} = 0.2$

5. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/I/FS]_p$ ภาพประกอบ 66-67 เมื่อ $K = 1$ กระแสโจเซฟสันลดลงเร็วเมื่อค่าสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน h มีค่ามากขึ้น แต่เมื่อ $K = 5$ (พลังงานศักย์ของฉนวนมากขึ้น) กระแสโจเซฟสันลดลงจากเดิมน้อยมากที่ $T/\Delta_0 = 0.01$ แต่เมื่อ $T/\Delta_0 = 0.2$ มีการลดลงมากขึ้นเมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนที่รอยต่อโจเซฟสัน

ภาพประกอบ 68-69 เมื่อ $\varphi = \pi/2, T/\Delta_0 = 0.01$ กระแสโจเซฟสันลดลงน้อยมากแต่จะลดลงมากขึ้นเมื่อ T/T_c มากขึ้น เมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนเข้าไป และเมื่อ $\varphi = \pi/8$ อิทธิพลของศักย์ฉนวน $K = 1$ และ $K = 5$ ต่อกระแสโจเซฟสันมีค่าน้อยมาก สำหรับภาพประกอบ70-71 กระแสโจเซฟสันลดลงอย่างต่อเนื่องเมื่ออุณหภูมิและสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนสูงขึ้น

6. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[FS/Fi/FS]_p$ ภาพประกอบ 72-75 เมื่อ $T/\Delta_0 = 0.01$ และ $z = 0$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวกและลดลงตามค่าสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนที่สูงขึ้นแต่จะเริ่มมีทั้งค่าเป็นบวกและลบที่ $\varphi \cong 0.7\pi$ เมื่อ $z = 0.5$ แต่เมื่อ $z = 1$ และ $z = 2$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบทั้งหมด และเมื่อ $T/\Delta_0 = 0.2$ ที่ $z = 0$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวก แต่เมื่อ $z = 0.5$ พบว่ากระแสโจเซฟสันเริ่มเป็นลบด้วยที่ $h/\Delta_0 = 0.3$ และ $h/\Delta_0 = 0.6$ แต่เมื่อ $z = 1$ และ $z = 2$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบทั้งหมด

ภาพประกอบ 76 เมื่อ $\varphi = \pi/2$ และ $z = 0$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวกและลดลงเมื่อ h/Δ_0 มากขึ้น แต่เมื่อ $z = 2$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบและลดลงเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น เมื่อ $T/\Delta_0 = 0.01$ กับ $T/\Delta_0 = 0.1$ แต่เมื่อ $T/\Delta_0 = 0.2$ กับ $T/\Delta_0 = 0.3$ กระแสโจเซฟสันลดลงที่ค่า h/Δ_0 น้อยๆ แต่จะเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 มากขึ้น

ภาพประกอบ 77 เมื่อ $\varphi = \pi/2$ แสดงให้เห็นว่า กระแสโจเซฟสันเป็นบวกเมื่อ $z=0$ และลดลงเมื่อ h/Δ_0 กับ τ/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่เป็นลบเมื่อ $z=2$ ภาพประกอบ 78 ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับ z ดังภาพประกอบ 78a และ 78b แสดงให้เห็นว่าที่ค่า $\varphi = \pi/2$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.01$ กับ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ เมื่อค่าของ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น กระแสโจเซฟสันจะกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบที่ z มีค่าน้อยลง

7. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[F_S/I/F_S]_{AP}$ ภาพประกอบ 79 กรณีที่ศักย์ของฉนวนเป็นศูนย์ ($K=1$) เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.1$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กระแสโจเซฟสันจะลดลงเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0 ภาพประกอบ 80 $K=5$ เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.1$ กระแสโจเซฟสันกลับเพิ่มขึ้นเมื่อค่า h/Δ_0 เพิ่มมากขึ้น แต่ที่ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กระแสโจเซฟสันกลับลดลงเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0

ภาพประกอบ 81a แสดงให้เห็นว่าเมื่อ $\varphi = \pi/2$, $K=1$ และเมื่ออุณหภูมิต่อช่องว่างพลังงานมีค่าน้อย ($\tau/\Delta_0 = 0.01$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.1$) การเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิมีผลต่อกระแสโจเซฟสันลดลงตามสัดส่วนอุณหภูมิที่เพิ่มไม่มาก แต่ที่อุณหภูมิสูง ($\tau/\Delta_0 = 0.2$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.3$) ค่ากระแสโจเซฟสันลดลงตามการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิอย่างรวดเร็ว แต่กระแสโจเซฟสันจะลดลงเสมอเมื่อค่า h/Δ_0 เพิ่มขึ้นไม่ว่าอุณหภูมิใด ภาพประกอบ 81b เมื่อ $\varphi = \pi/2$, $K=5$ (ศักย์ฉนวนมีค่ามาก) ที่ค่าของ $\tau/\Delta_0 = 0.01$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.1$ กระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่ที่ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ และ $\tau/\Delta_0 = 0.3$ กระแสโจเซฟสันลดลงเมื่อ h/Δ_0 มีค่าลดลง สำหรับภาพประกอบ 82 เมื่อ $\varphi = \pi/8$ ค่ากระแสโจเซฟสันลดลงน้อยกว่าที่ค่า $\varphi = \pi/2$ แต่รูปแบบของกราฟเป็นยังคงมีลักษณะเดียวกันกับกราฟจากภาพประกอบ 81 เมื่อทำการเปลี่ยนพารามิเตอร์อย่างเดียวกัน

ภาพประกอบ 83-84 เมื่อ $\varphi = \pi/2$ กระแสโจเซฟสันลดลงอย่างต่อเนื่องเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น และเมื่อค่าศักย์ฉนวนเป็นศูนย์ ($K=1$) กระแสโจเซฟสันลดลงเมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน แต่เมื่อศักย์ฉนวนมีค่ามากขึ้น ($K=5$) กระแสโจเซฟสันกลับเพิ่มขึ้นเมื่อเพิ่ม h/Δ_0 ในช่วงประมาณ $\tau/\Delta_0 < 0.8$ แต่จะกลับลดลงเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0 อีกครั้งที่ประมาณ $\tau/\Delta_0 > 0.8$ ต่อมาเมื่อลดค่า $\varphi = \pi/8$ แอมพลิจูดของกระแสโจเซฟสันลดลงแต่ลักษณะของกราฟเป็นดังเช่นเดียวกันกับเมื่อ $\varphi = \pi/2$

8. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $[F_S/F_I/F_S]_{AP}$ ภาพประกอบ 85 แสดงให้เห็นว่าผลของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีผลต่อกระแสโจเซฟสันเช่นเดียวกันกับรอยต่อโจเซฟสันแบบ $S/F_I/S$ แต่เมื่อเราเพิ่มพารามิเตอร์ h/Δ_0 เข้าไป เราพบว่าที่อุณหภูมิ $\tau/\Delta_0 = 0.01$ เมื่อ $z=0.5$ กระแสโจเซฟสันมีการกลับทิศทางเช่นเดียวกันกับ $S/F_I/S$ และ กระแสโจเซฟสันแทบเป็นเส้นเดียวกันเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้นขณะที่ $0 \leq \varphi < 0.6\pi$ แต่จะกลับเพิ่มขึ้นอย่างเห็นได้ชัดเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0 ที่ประมาณ $0.6\pi \leq \varphi < 0.7\pi$ แต่พอ $0.7\pi \leq \varphi < \pi$ กระแสโจเซฟสันลดลงเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0 จุดที่มีการกลับทิศของกระแสโจเซฟสันอยู่ที่ $\varphi \approx 0.7\pi$ ส่วนภาพประกอบ 86a ที่ $z=1$ ได้แสดงให้เห็นชัดว่าการกลับทิศการไหลจากบวกเป็นลบของกระแสโจเซฟสันค่าของ h/Δ_0 ที่มากขึ้นทำให้ค่า φ ที่เป็นจุดกลับทิศทางการไหลของกระแสมีค่ามากขึ้นตาม แต่ค่าของ z ที่เพิ่มกลับทำให้กระแสโจเซฟสันกลับทิศทางการไหลที่มุม φ คำน้อยลง และสำหรับภาพประกอบ 86b เมื่อ $z=2$ กระแสโจเซฟสันไหลในทิศทางลบในช่วง $0 \leq \varphi \leq \pi$ ต่อมาเมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ เราไม่พบการกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบของกระแสโจเซฟสัน ที่ $z=0.5$

(ภาพประกอบ 87b) แต่จะกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบเมื่อ $z=1$ (ภาพประกอบ 88a) และเป็นกระแสลบทั้งหมดในช่วง $0 \leq \varphi \leq \pi$ เมื่อ $z=2$ (ภาพประกอบ 88b) แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิสูงขึ้น กระแสโจเซฟสันจะกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบที่ z ค่ามากขึ้น

ภาพประกอบ 89 แสดงผลของกระแสโจเซฟสันเมื่อไม่มีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (ภาพประกอบ 89a) กระแสโจเซฟสันเป็นบวกและจะลดลงเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่เมื่อฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ ($z=2$) กระแสโจเซฟสันเป็นลบและจะเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น ส่วนภาพประกอบ 90 แสดงกระแสโจเซฟสันเมื่อ $\varphi = \pi/2$ เมื่อ $z=0$ กระแสโจเซฟสันลดลงเมื่อ h/Δ_0 แต่เมื่อ $z=2$ กลับพบว่า กระแสโจเซฟสันเป็นลบ และ ลดลงในช่วง $0 \leq \tau/\Delta_0 \leq 0.25$ เมื่อค่า h/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่จะกลับเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้นในช่วง $\tau/\Delta_0 \geq 0.25$

ภาพประกอบ 91 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับ z เมื่อ $\varphi = \pi/2$ กระแสโจเซฟสันกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบเมื่อค่า $z \cong 0.65$

9. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/I/S_2$ เป็นระบบของรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ที่มีสนามแลกเปลี่ยน h ประกบกับตัวนำยวดยิ่งโดยมีฉนวนบาง ๆ คั่น และในที่นี้ ภาพประกอบ 92 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับสนามแลกเปลี่ยน เมื่อแผ่นตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน ผลที่ได้พบว่าเมื่อ $\varphi = \pi/2$ และ $K=1$ กระแสโจเซฟสันที่ค่า $\tau/\Delta_0 = 0.01$ มีค่ามากกว่ากระแสโจเซฟสันที่ $\tau/\Delta_0 = 0.1$ ไม่มากนักเช่นเดียวกันกับเมื่อ $K=5$ และกระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กับ $\tau/\Delta_0 = 0.3$ กระแสโจเซฟสันกลับลดลงเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น

10. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1/FI/S_2$ เมื่อแผ่นตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกันโดยตัวนำยวดยิ่งด้านซ้ายมีแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์สนามแลกเปลี่ยน h แต่ตัวนำยวดยิ่งด้านขวาไม่มีแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ ภาพประกอบ 93 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสันกับสนามแลกเปลี่ยน h เมื่อ $\varphi = \pi/2$ เมื่อ ทิศของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์กับสนามแลกเปลี่ยนของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ขนานกัน เมื่อ $z=0$, $\tau/\Delta_0 = 0.01$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวกและเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น แต่เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กลับลดลงอย่างช้าๆเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น ,เมื่อ $z=0.5$, $\tau/\Delta_0 = 0.01$ กระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้นแต่กลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบเมื่อ $h/\Delta_0 \cong 0.4$ แต่เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กระแสโจเซฟสันลดลงอย่างเชิงเส้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น ส่วนเมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.01$, $z=1$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบและเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆเมื่อเพิ่มค่า h/Δ_0 แต่เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบและลดลงเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น ส่วนกระแสโจเซฟสันกรณี $z=2$ เป็นลบและเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น

ภาพประกอบ 94a เมื่อกลับทิศสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ตรงข้ามกับสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนของตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ เมื่อ $\varphi = \pi/2$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวกเมื่อ $z=0.5$, $\tau/\Delta_0 = 0.01$ และลดลงเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้นแต่เมื่อ $z=0.5$, $\tau/\Delta_0 = 0.2$ กระแสโจเซฟสันเป็นบวกและเพิ่มขึ้นเมื่อ h/Δ_0 เพิ่มขึ้น ,เมื่อ $\tau/\Delta_0 = 0.01$, $z=1$ กระแสโจเซฟสันกระแสโจเซฟสันเป็นลบอย่างคงที่เมื่อ $h/\Delta_0 \leq 0.4$ และเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่อค่า h/Δ_0 เพิ่มขึ้น จนมีค่าเป็น

บวกอย่างคงที่เมื่อ $h/\Delta_0 \geq 0.5$ และเมื่อ $z=2, \tau/\Delta_0=0.01$ กระแสโจเซฟสันเป็นลบและลดลงเมื่อ h/Δ_0 มากขึ้น

และภาพประกอบ 92b เมื่อ $\varphi=\pi/2, \tau/\Delta_0=0.2$ กระแสโจเซฟสันมีการกลับทิศการไหลจากลบเป็นบวกเมื่อ $z=1$ ส่วนที่ค่า $z=0, z=1$ กระแสเป็นบวกทั้งคู่ ยกเว้น $z=2$ กระแสเป็นลบ

11. กรณีรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS_1//FS_2$ เมื่อตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน แต่มีค่าสนามแม่เหล็กเปลี่ยนต่างกัน ภาพประกอบ 95 เมื่อ $\varphi=\pi/2$ และ $K=1$ กรณี $h_1/\Delta_0=0.05$ กระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆจาก $h_2/h_1=-1$ เมื่อ h_2/h_1 มากขึ้น และกระแสโจเซฟสันที่ $h_2/h_1=1$ มีค่ามากกว่าที่ $h_2/h_1=-1$ เล็กน้อย ทุกๆค่าอุณหภูมิ แต่เมื่อ $h_1/\Delta_0=0.4, \tau/\Delta_0=0.01, 0.1$ และ 0.2 กระแสโจเซฟสันเพิ่มขึ้นเมื่อ h_2/h_1 มากขึ้น แต่กระแสโจเซฟสันจะเพิ่มขึ้นแล้วลดลงเป็นเส้นโค้งคว่ำ เมื่อ $\tau/\Delta_0=0.3$ เมื่อ h_2/h_1 มากขึ้น ส่วนกรณี $K=5$ (ภาพประกอบ 96) กราฟกระแสโจเซฟสันเป็นเส้นโค้งหงาย เมื่อ $h_1/\Delta_0=0.4, \tau/\Delta_0=0.01, 0.1$ แต่จะเป็นเส้นโค้งคว่ำเมื่อ $\tau/\Delta_0=0.3$ และ 0.2

อภิปรายผลการวิจัย

จากกราฟความสัมพันธ์ที่ได้ กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อที่มีฉนวนธรรมดา บางๆกัน เราไม่พบว่ากระแสโจเซฟสันไหลกลับทิศจากบวกเป็นลบในช่วง $\varphi \leq \pi$ แต่เมื่อ รอยต่อโจเซฟสันมีฉนวนเป็นแม่เหล็กเฟอร์โร เรากลับพบว่ากระแสโจเซฟสันมีการกลับทิศทางการไหลของกระแสได้เมื่อค่า z มีค่าๆหนึ่ง ซึ่งนับว่าคุณสมบัติของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรต่างจากฉนวนปกติ คุณสมบัติในข้อนี้ของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเป็นผลจากสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนภายในฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร มีอิทธิพลต่อระดับพลังงานที่ยึดเหนี่ยวสถานะของอนุภาคควอไซที่มีสปินต่างกันนั่นเอง ดังภาพประกอบ 58-60 ที่แสดงให้เห็นว่าอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนสปิน $\uparrow, \downarrow$ มีพลังงานเดียวกัน $\in$ และอนุภาคควอไซโฮลสปิน $\uparrow, \downarrow$ มีพลังงานเดียวกัน $-\in$ ขณะไม่มีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร แต่เมื่อมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรพลังงานของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน $\uparrow$ จะมีค่ามากขึ้นจากเดิม $\in + \Delta \in$ ขณะที่พลังงานของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน $\downarrow$ จะมีค่าลดลง $\in - \Delta \in$ ส่วนอนุภาคควอไซโฮล $\downarrow$ พลังงานลดลง $-\in - \Delta \in$ และอนุภาคควอไซโฮล $\uparrow$ พลังงานเพิ่มขึ้น $-\in + \Delta \in$ โดยค่า $\Delta \in$ เป็นพลังงานที่ขึ้นกับ z , ช่องว่างพลังงาน และ φ และจากภาพประกอบ 61 กระแสโจเซฟสันจะค่อยลดลงจากระดับบวกจนถึงศูนย์เมื่อ z เพิ่มขึ้นถึงค่าหนึ่งและกระแสจะเป็นลบมากขึ้นเรื่อยๆเมื่อ z มากขึ้นโดยไม่มีการกลับทิศการไหลของกระแสโจเซฟสันอีกเลย ในกรณีของกระแสโจเซฟสัน $s/Fi/s$ กระแสโจเซฟสันจะกลับทิศทางการไหลจากบวกเป็นลบที่ z ค่าหนึ่งโดยไม่เปลี่ยนแปลงค่าตามอุณหภูมิแต่เมื่อเป็นระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบ $FS/Fi/FS$ พบว่าจุดกลับทิศทางการไหลของกระแสโจเซฟสันกลับขึ้นกับค่า h ดังภาพประกอบ 78

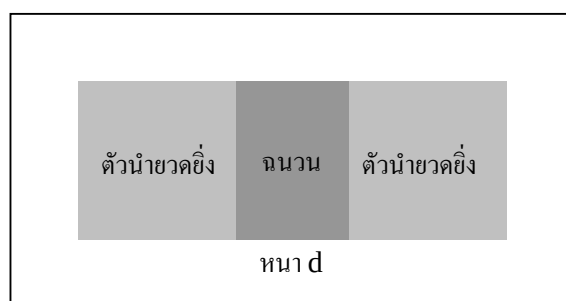
ถึงแม้สนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนภายในตัวนำยวดยิ่งแม่เหล็กเฟอร์โรจะเป็นตัวที่รบกวนสภาพนำยวดยิ่งของตัวมันเอง ซึ่งค่ากระแสโจเซฟสันควรที่ลดลงเมื่อค่า h เพิ่มขึ้นแต่กลับพบว่า

กระแสโจเซฟสันอาจจะลดลงหรือเพิ่มขึ้นก็ได้ถึงแม้ h จะเพิ่มขึ้น ดังเช่นภาพประกอบ 83 และภาพประกอบ 90 เป็นต้น

จากสมการกระแสโจเซฟสันที่คำนวณได้เมื่อนำมาแสดงเป็นกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับพารามิเตอร์ต่างๆของระบบรอยต่อโจเซฟสันแต่ละระบบ กราฟที่ได้เช่น $S/F/I/S$ และ $FS/I/FS$ สอดคล้องกับงานวิจัย ของ ทานากะ(Tanaka) กับคาชิwaya (Kashiwaya) และงานวิจัยของลี (Li) เซง (Zheng) ซิง(Xing) ซัน (Sun) ตี๋อง (Dong) ตามลำดับเป็นอย่างดี จึงแสดงให้เห็นว่าสมการกระแสโจเซฟสันของระบบรอยต่อโจเซฟสันตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ครอบคลุมงานวิจัยกระแสโจเซฟสันที่เคยมีคนทำมาแล้วอย่างแม่นยำ

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยชิ้นนี้การคำนวณกระแสโจเซฟสันด้วยวิธีการประมาณฟังก์ชันศักย์ฉนวนด้วยฟังก์ชันดิแรกเดลต้า จะมีข้อบกพร่องเมื่อ ความหนาของฉนวนมีค่ามากขึ้น หรือเมื่อศักย์ฉนวนมีค่าไม่สูงมากพอการประมาณเป็นดิแรกเดลต้าก็ไม่เหมาะสม ดังนั้นสมการกระแสโจเซฟสันที่คำนวณมาได้จะสอดคล้อง กับระบบรอยต่อโจเซฟสันที่มีศักย์ฉนวนสูงมาก และความหนาของฉนวนน้อยมาก แต่อย่างไรก็ดีถ้าเราต้องการสมการกระแสโจเซฟสันที่ฉนวนมีความหนาและค่าศักย์จำกัด เราต้องพิจารณาปัญหาการกระเจิงที่เป็นผลจากคลื่นของอิเล็กตรอน และ โฮลในบริเวณของฉนวนด้วย แต่สำหรับการแก้ปัญหาการกระเจิงของอนุภาคควาไซจะต้องแก้สมการเมตริกที่มีมิติเพิ่มขึ้นจาก 4 มิติ เป็น 8 มิติ ซึ่งจะยากต่อการคำนวณมากขึ้น



ภาพประกอบ 97 แสดงภาพรอยต่อโจเซฟสันที่ฉนวนมีความหนา

และข้อจำกัดอีกข้อหนึ่งของสมการกระแสโจเซฟสันที่ได้คือ เป็นสมการกระแสโจเซฟสันที่ใช้ได้กับตัวนำยวดยิ่งที่มีสมมาตรแบบคลื่นเอส(s-wave) และ เป็นแบบ singlet pairing เท่านั้น แต่ในปัจจุบันเราพบว่าสภาพนำยวดยิ่งมีสมมาตร แบบคลื่นพี (p-wave) ,คลื่นดี (d-wave) และคลื่นเอฟ (f-wave) และมีเป็นทั้งแบบ singlet pairing และ triplet pairing ดังนั้นการทำวิจัยในอนาคตเรา

ควรตามความก้าวหน้าของสภาพนำเวดยั้งให้ทันโดยขยายงานวิจัยกระแสโจเซฟสันเข้าสู่ระบบ
รอยต่อโจเซฟสันที่ประกอบจากตัวนำเวดยั้งแผ่นใหม่เหล่านี้ด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Ambegaokar, V & Baratoff, A. (1963, January 15). "Tunneling between Superconductors," *Physical Review Letters*. 11(2) : 104-105.
- Bergaret, F. S. Volkov, A. F & Efetov, K. B. (2001, April 2). "Enhancement of the Josephson Current by an Exchange Field in Superconductor-Ferromagnet Structures," *Physical Review Letters*. 86(14) :3140-3143.
- De Gennes, P. G. (1966). *Superconductivity of Metals and Alloys* : France : Benjamin.
- Fetter, A. L & Walecka, J. D. (1971). *Quantum Theory of Many-Particle Systems* : America : McGraw-Hill.
- Furusaki, A & Tsukada, M. (1991). "Dc Josephson Effect And Andreev Reflection," *Solid State Communications*. 78(4) : 299-302.
- Furusaki, A & Tsukada, M. (1991, January 23). " Current-Carrying State in Josephson Junction," *Physical Review B*. 43(13) : 10164-10169.
- Gough, C. D. (1992). *Spring College in Condensed Matter on Superconductivity : Background information for the course of lectures on Josephson and related Phenomena* : Birmingham.
- Kittel, C. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. 7th ed. Newyork : John Wiley & Sons.
- Landau, R. H. (1990). *Quantum Mechanics II A Second Course in Quantum Theory* : Canada : John Wiley & Sons.
- Li, X, et al. (2002, March 19). " Josephson Current in Ferromagnet-Superconductor Tunnel Junctions," *Physical Review B*. 65 : 134507-134513.
- Raimes, S. (1972). *Many-Electron Theory* : Holland : North-Holland Publishing Company.
- Tanaka, Y & Kashiwaya, S. (1997). " Theory of Josephson Effect in Superconductor-Ferromagnetic-Insulator-Superconductor Junctions," *Physica C*. 274 : 357-363.
- Turton, R. (2000). *The Physics of Solid* : Newyork : Oxford University Press.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

สมการ บีดีจี

การคำนวณหากระแสไฟฟ้า จำเป็นต้องหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคประจุ ในกรณีที่ประจุเคลื่อนที่ในสารตัวนำปกติ การหาสมการการเคลื่อนที่ของประจุสามารถหาได้โดยใช้สมการคลื่นของชโรดิงเงอร์(Schrodinger) แต่สภาวะที่ประจุขยับยังเป็นพาหะของกระแสไฟฟ้าในสารตัวนำขยับยั้งนั้นเป็นผลจากการจับคู่กันของสองอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ การหาสมการการเคลื่อนที่ที่จะเริ่มจากฮามิลโทเนียนของคูคูเปอร์ ซึ่งทฤษฎี บีซีเอส(BCS Theory) กำหนดฮามิลโทเนียนของคูคูเปอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \int dx \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(x,t)[H_0 + U(x)]\hat{\psi}_{\alpha}(x,t) \\ & + \int dx dx' \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x',t)\hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x,t)V(x-x')\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x',t) \\ & \dots(1)\end{aligned}$$

เมื่อ $\hat{\psi}(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการทำลายของสนามเฟอร์มิออน
 $\hat{\psi}^{\dagger}(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการสร้างของสนามเฟอร์มิออน
 α เป็นสปินของเฟอร์มิออนซึ่งในที่นี้คืออิเล็กตรอน
 $v(x-x')$ เป็นพลังงานของอันตรกิริยาระหว่างคูคูเปอร์
 H_0 เป็นฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอนเดี่ยว
 $U(x)$ เป็นฮามิลโทเนียนของสารเจือ

เราประมาณพลังงานศักย์ของอันตรกิริยาเป็นเดลต้าฟังก์ชัน โดยมี $-g$ เป็นค่าความแรงของศักย์อันตรกิริยา

$$v(x-x') = -g\delta(x-x') \quad \dots(2)$$

ดังนั้นจากสมการ (1) และ (2) เราจะได้

$$\begin{aligned}\therefore & \int dx dx' \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x',t)\hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x,t)V(x-x')\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x',t) \\ & = -g \int dx dx' \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x',t)\hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x,t)\delta(x-x')\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x',t)\end{aligned}$$

$$= -g \int dx \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \quad \dots(3)$$

กำหนดให้ตัวดำเนินการ $\hat{a}(x, t)$ สอดคล้องกับสมการ

$$\hat{a}(x, t) = \langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle - \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t)$$

$$\hat{a}^{\dagger}(x, t) = \langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle - \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t)$$

...(4)

จากสมการ (3) และ (4)

$$\begin{aligned} & \therefore -g \{ \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \} \\ &= -g \left(\langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle - \hat{a}^{\dagger}(x, t) \right) \left(\langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle - \hat{a}(x, t) \right) \\ &= -g \left(\langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle \langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle - \hat{a}^{\dagger}(x, t) \langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle \right. \\ & \quad \left. - \langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle \hat{a}(x, t) + \hat{a}^{\dagger}(x, t) \hat{a}(x, t) \right) \end{aligned}$$

...(5)

จากสมการ (5) ตัดเทอมความแปรปรวน $\hat{a}^{\dagger}(x, t) \hat{a}(x, t)$ ทิ้ง เพราะ $\hat{a}(x, t)$ มีค่าน้อย และ นิยามช่องว่าง $\Delta(x, t)$ ดังนี้

$$\Delta(x) = -g \langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle, \Delta^{\dagger}(x) = -g \langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle$$

...(6)

แทนตัวแปรจากสมการ (6) ลงในสมการ (5)

$$\begin{aligned} & \therefore -g \{ \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \} \\ & \cong \Delta^{\dagger}(x) \langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x, t) \rangle - \hat{a}^{\dagger}(x, t) \Delta(x) - \Delta^{\dagger}(x) \hat{a}(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^+(x) \langle \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \rangle - \left(\langle \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) \rangle - \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) \right) \Delta(x) + \\
&\quad - \Delta^+(x) \left(\langle \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \rangle - \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \right) \\
&= \Delta^+(x) \langle \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \rangle - \langle \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) \rangle \Delta(x) + \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) \Delta(x) + \\
&\quad - \Delta^+(x) \langle \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \rangle + \Delta^+(x) \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) \\
&= \Delta^+(x) \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) + \Delta(x) \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) + \text{constant} \\
&\quad \dots(7)
\end{aligned}$$

จากฮามิลโทเนียนในสมการ (1) เมื่อประมาณโดยตัดทอนความแปรปรวนทั้งจะได้

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int dx \hat{\psi}_\alpha^+(x, t) [H_0 + U(x)] \hat{\psi}_\alpha(x, t) \\
&\quad + \int dx \left\{ \Delta^+(x) \hat{\psi}_\uparrow(x, t) \hat{\psi}_\downarrow(x, t) + \Delta(x) \hat{\psi}_\downarrow^+(x, t) \hat{\psi}_\uparrow^+(x, t) \right\} \\
&\quad \dots(8)
\end{aligned}$$

เพราะตัวดำเนินการของสนามเฟอร์มิออนมีสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned}
[\hat{\psi}_\alpha(x, t), \hat{\psi}_\beta(x', t)]_+ &= 0 \\
[\hat{\psi}_\alpha^+(x, t), \hat{\psi}_\beta^+(x', t)]_+ &= 0 \\
[\hat{\psi}_\alpha(x, t), \hat{\psi}_\beta^+(x', t)]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \\
&\quad \dots(9)
\end{aligned}$$

จากการที่ $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ เป็นตัวดำเนินการใดๆจะได้

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

...(10)

ในการหาสมการการเคลื่อนที่ของ $\psi_{\uparrow}(x, t)$ และ $\psi_{\downarrow}^+(x, t)$ ใช้ความสัมพันธ์ตามรูปแบบของไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg's picture) ได้

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\uparrow}(x, t)}{\partial t} = [\psi_{\uparrow}(x, t), \hat{H}] \quad \dots(11)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\downarrow}^+(x, t)}{\partial t} = [\psi_{\downarrow}^+(x, t), \hat{H}] \quad \dots(12)$$

จากสมการ (8) และ (11) เราจะได้

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_{\uparrow}(x, t)}{\partial t} = & \int dx' [\psi_{\uparrow}(x, t), (\psi_{\alpha}^+(x', t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t))] \\ & + \int dx' [\psi_{\uparrow}(x, t), (\Delta^+(x')\psi_{\uparrow}(x', t)\psi_{\downarrow}(x', t) + \Delta(x')\psi_{\downarrow}^+(x', t)\psi_{\uparrow}^+(x', t))] \end{aligned}$$

...(13)

จากสมการ(13) ในการพิจารณาแต่ละเทอมจะได้

$$\begin{aligned} & \therefore \int dx' [\psi_{\uparrow}(x, t), (\psi_{\alpha}^+(x', t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t))] \\ & = \int dx' \{ \psi_{\uparrow}(x, t)\psi_{\alpha}^+(x', t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t) - \psi_{\alpha}^+(x', t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t)\psi_{\uparrow}(x, t) \} \\ & = \int dx' \{ \psi_{\uparrow}(x, t)\psi_{\alpha}^+(x', t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t) + \psi_{\alpha}^+(x', t)\psi_{\uparrow}(x, t)(H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t) \} \\ & = \int dx' \{ \psi_{\uparrow}(x, t)\psi_{\alpha}^+(x', t) + \psi_{\alpha}^+(x', t)\psi_{\uparrow}(x, t) \} (H'_0 + U(x'))\psi_{\alpha}(x', t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dx' \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(x', t) \right]_{+} (H'_0 + U(x')) \hat{\psi}_{\alpha}(x', t) \\
&= \int dx' \delta'_{\uparrow\alpha} \delta(x - x') (H'_0 + U(x')) \hat{\psi}_{\alpha}(x', t) \\
&= (H_0 + U(x)) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \\
&\quad \dots(14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int dx' \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \left(\Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \right) \right] \\
&= \int dx' \left\{ \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \right] + \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \right] \right\} \\
&= \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) - \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&\quad + \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) - \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&= - \int dx' \left\{ \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&\quad - \int dx' \left\{ \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) + \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&= - \int dx' \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \left\{ \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&\quad - \int dx' \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \left\{ \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) + \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \right\} \\
&= - \int dx' \Delta^{+}(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \right]_{+} - \int dx' \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \left[\hat{\psi}_{\uparrow}(x, t), \hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x', t) \right]_{+} \\
&= - \int dx' \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x', t) \delta'_{\uparrow\uparrow} \delta(x - x') \\
&= - \Delta(x) \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x, t)
\end{aligned}$$

...(15)

จากสมการ (13) ,(14) และ (15)

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)}{\partial t} = (H_0 + u(x))\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t) - \Delta(x)\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t) \quad \dots(16)$$

ในทำนองเดียวกันจากสมการ (8) และ (12)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t)}{\partial t} &= \int dx' [\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t), (\hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\alpha}(x',t))] \\ &+ \int dx' [\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t), (\Delta^+(x')\hat{\psi}_{\uparrow}(x',t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x',t) + \Delta(x')\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x',t)\hat{\psi}_{\uparrow}^+(x',t))] \end{aligned}$$

...(17)

หาคำแต่ละเทอมในสมการ (17)

$$\begin{aligned} &\therefore \int dx' [\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t), (\hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\alpha}(x',t))] \\ &= \int dx' \{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t)\hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\alpha}(x',t) - \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\alpha}(x',t)\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t) \} \\ &= -\int dx' \{ \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t)\hat{\psi}_{\alpha}(x',t) + \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x'))\hat{\psi}_{\alpha}(x',t)\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t) \} \\ &= -\int dx' \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x')) \{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t)\hat{\psi}_{\alpha}(x',t) + \hat{\psi}_{\alpha}(x',t)\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t) \} \\ &= -\int dx' \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x')) [\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t), \hat{\psi}_{\alpha}(x',t)]_+ \\ &= -\int dx' \hat{\psi}_{\alpha}^+(x',t)(H'_0 + u(x')) \delta_{\downarrow\alpha} \delta(x-x') \\ &= -\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t)(H_0 + u(x)) \\ &= -\langle \hat{\psi}_{\downarrow}(x,t) | (H_0 + u(x)) \\ &= -(H_0^+ + u(x))\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x,t) \end{aligned}$$

...(18)

$$\begin{aligned}
& \therefore \int dx' \left[\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t), \left(\Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \right) \right] \\
&= \int dx' \left\{ \left[\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t), \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \right] + \left[\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t), \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \right] \right\} \\
&= \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) - \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \right\} \\
&\quad + \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) - \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \right\} \\
&= - \int dx' \left\{ \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \right\} \\
&\quad + \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) + \Delta(x') \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \right\} \\
&= - \int dx' \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \left\{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) + \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \right\} \\
&\quad + \int dx' \left\{ \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) + \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) \right\} \Delta(x') \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \\
&= - \int dx' \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \left[\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t), \hat{\psi}_{\downarrow}(x', t) \right]_{+} + \int dx' \left[\hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t), \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x', t) \right]_{+} \Delta(x') \hat{\psi}_{\uparrow}^+(x', t) \\
&= - \int dx' \Delta^+(x') \hat{\psi}_{\uparrow}(x', t) \delta_{\downarrow\downarrow} \delta(x - x') \\
&= - \Delta^+(x) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t)
\end{aligned}$$

...(19)

จากสมการ (17) ,(18) และ(19)

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t)}{\partial t} = - (H_0^+ + u(x)) \hat{\psi}_{\downarrow}^+(x, t) - \Delta^+(x) \hat{\psi}_{\uparrow}(x, t) \quad \dots(20)$$

แทนสมการ (16) และ (20) ด้วยสมการเมตริกได้ดังนี้

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\uparrow}(x,t) \\ \hat{\Psi}_{\downarrow}^+(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{H_0 + u(x)\} & -\Delta(x) \\ -\Delta^+(x) & -\{H_0^+ + u(x)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\uparrow}(x,t) \\ \hat{\Psi}_{\downarrow}^+(x,t) \end{bmatrix} \quad \dots(21)$$

โดยการแปลงของโบโกลิวบอฟ (Bogoliubov 's transformation) สนามของอิเล็กตรอนสามารถกระจายอยู่ในเทอมของสนามของอนุภาคควาไซดังนี้

$$\begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\uparrow}(x,t) \\ \hat{\Psi}_{\downarrow}^+(x,t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) & v_n(x) \\ -v_n^+(x) & u_n^+(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{n\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{n\downarrow}^+ \end{bmatrix} \quad \dots(22)$$

ในสนามของอนุภาคควาไซหากให้ $\hat{\gamma}_{n\uparrow}$ (annihilation operator) และ $\hat{\gamma}_{n\downarrow}^+$ (creation operator) เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{n\uparrow} \\ \hat{\gamma}_{n\downarrow}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \quad \dots(23)$$

พิจารณากรณีที่ $c_2 = 0$ สมการ (22) คือ

$$\begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{\uparrow}(x,t) \\ \hat{\Psi}_{\downarrow}^+(x,t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-i\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \quad \dots(24)$$

แทนสมการ (24) ลงในสมการ (22) ได้

$$\begin{aligned}
\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} &= \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} & -\Delta(x) \\ -\Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} \end{bmatrix} \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \\
\epsilon_n \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} &= \sum_n \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} & -\Delta(x) \\ -\Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} c_1 e^{-\frac{\epsilon_n t}{\hbar}} \\
\epsilon_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} & -\Delta(x) \\ -\Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} - \epsilon_n & -\Delta(x) \\ -\Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} - \epsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v_n^+(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\{H_0 + U(x)\} - \epsilon_n] u_n(x) & \Delta(x) v_n^+(x) \\ -\Delta^+(x) u_n(x) & [\{H_0^+ + U(x)\} + \epsilon_n] v_n^+(x) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} - \epsilon_n & \Delta(x) \\ \Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} - \epsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v_n^+(x) \end{bmatrix} \\
\epsilon_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v_n^+(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{H_0 + U(x)\} & \Delta(x) \\ \Delta^+(x) & -\{H_0^+ + U(x)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v_n^+(x) \end{bmatrix} \\
&\dots(25)
\end{aligned}$$

สมการ (25) นี้มีชื่อเรียก สมการ บิโอดีจี (Bogoliubov-de Gennes Equation) เป็นสมการที่ใช้ในการศึกษาธรรมชาติประจุในตัวนำยวดยิ่ง

ดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริก 4×4

งานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการหาค่าของดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริก 4×4 จากการกระจายผลคูณของโคแฟกเตอร์ดังนี้

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \dots(26)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}[A] &= a_{11} \text{Det} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{21} \text{Det} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} + \\ &+ a_{31} \text{Det} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{41} \text{Det} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots(27)$$

ในการดำเนินการเชิงแถวต่อเมตริก ดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริกเดิมจะเท่ากับดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริกที่ได้จากการดำเนินการหารด้วยตัวคูณของแถวที่ถูกดำเนินการ ดังตัวอย่าง

เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad \dots(28)$$

และเมตริกคล้ายที่ได้จากการดำเนินการคือ

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \beta R_1 + \alpha R_2 \\ R_2 \\ \chi R_3 \\ R_4 + \lambda R_2 \end{bmatrix} \quad \dots(29)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างดิเทอร์มิแนนท์ของเมตริก A กับ $\tilde{A}$ คือ

$$\text{Det}A = \frac{\text{Det}\tilde{A}}{\beta\chi} \quad \dots(30)$$

ภาคผนวก ข

โปรแกรม Mathematica

$-S_1/F_i/S_2$ เมื่อกำหนดให้ $T \sim T/T_{C1}$, $\alpha = \Delta_{02}/\Delta_{01}$, $\gamma = k_{F2}/k_{F1}$, $Z = mH/\hbar^2 k_{F1}$, $\varphi \sim \varphi/\pi$ และ $eR_N/\pi\Delta_{01} = f[T, \alpha, \gamma, Z, \varphi]$

โปรแกรมนี้เป็นการออกคำสั่งให้แสดงค่ากรณี $f[0.001, 1, 1, 0.5, \varphi]$ กับค่า φ/π

$-FS_1/I/FS_2$ เมื่อกำหนดให้ $T \sim T/\Delta_{01}$, $h \sim h_1/\Delta_{01}$, $\alpha = \Delta_{02}/\Delta_{01}$, $\beta = h_2/h_1$, $\gamma = k_{F2}/k_{F1}$, $Z = mV/\hbar^2 k_{F1}$, $\varphi \sim \varphi/\pi$ และ $eR_N/\pi\Delta_{01} = f[T, h, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, Z]$

โปรแกรมนี้เป็นการออกคำสั่งให้แสดงค่ากรณี $f[0.01, 0.05, 1, \beta, 1, 1/2, 0]$ กับค่า β

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล นาย บำเหน็จ สุดชมโนม
 วันเดือนปีเกิด 11 ตุลาคม 2521
 สถานที่เกิด อ.ปราสาท จ. สุรินทร์
 สถานที่อยู่ปัจจุบัน 4 หมู่ 4 ต. กันตวจระมวล อ. ปราสาท จ. สุรินทร์ 32140

ประวัติย่อการศึกษา

พ.ศ. 2540 ปวช. (ช่างอิเล็กทรอนิกส์) จากวิทยาลัยเทคนิคสุรินทร์
 พ.ศ. 2545 วท.บ. (ฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
 พ.ศ. 2548 วท.ม. (ฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ