

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิต (Limits)
และความต่อเนื่อง (Continuity) ในระดับชั้น ป.กศ.สูงวิชาเอกคณิตศาสตร์
โดยไชยทวิชญ์โปรแกรมกับการสอนตามปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

เออน ปิ่นเงิน

THE LIBRARY
COLLEGE OF EDUCATION
BANGKOK, THAILAND

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

๗ มีนาคม ๒๕๖๔

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยได้

.....(ดิเรก.....)..... ประธาน

.....(.....)..... กรรมการ
๙ มีนาคม ๒๕๖๔

ประกาศนุญการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ เพราะผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก
อาจารย์ ดร.ดาวิทย์ พลกล่า และรองศาสตราจารย์ สุพจน์ ธรรมะมา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ
เป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์มณู พงศ์ณี และอาจารย์บังอร ภูวภิรมย์ขวัญ อาจารย์แผนก
คณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพระนคร ที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกทุกประการเกี่ยวกับการ
ทดลองบทเรียน.

เอื้อน ปิ่นเงิน

สารบัญ

บทที่		หน้า
๑	บทนำ	๑
	ภูมิหลัง	๑
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	๔
	สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า	๕
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	๕
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	๕
	นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	๕
	ขอบเขตของเบื่องตน	๖
	เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	๗
	ความหมายของบทเรียนโปรแกรม	๗
	หลักการทางจิตวิทยาที่นำมาใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรม	๘
	ชนิดของบทเรียนโปรแกรม	๘
	การสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา	๙
	วิธีสร้าง	๙
	ขอบทประกอบของบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา	๑๑
	เทคนิคของการปรับบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา	๑๒
	การประเมินคุณภาพของบทเรียนโปรแกรม	๑๒
	การวิจัยการใ้บทเรียนโปรแกรม	๑๒
	เปรียบเทียบการสอนโดยใ้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ	๑๔
	การวิจัยการสอนโดยใ้บทเรียนโปรแกรมในประเทศไทย	๑๖

บทที่		หน้า
๓	วิธีดำเนินการทดลอง	๑๘
	กลุ่มตัวอย่าง	๑๘
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	๑๘
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	๑๘
	วิธีดำเนินการทดลอง	๒๐
๔	การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง	๒๑
	การวิเคราะห์ข้อมูล	๒๑
	ผลการทดลอง	๒๒
	สรุปผลการทดลอง	๒๒
๕	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	๒๓
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	๒๓
	สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า	๒๓
	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	๒๓
	ผลการทดลอง	๒๔
	อภิปรายผล	๒๔
	ข้อเสนอแนะ	๒๖
	บรรณานุกรม	๒๘
	ภาคผนวก	๓๑

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

- | | | |
|---|---|----|
| ๑ | แสดงจำนวนนักเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จำแนกตามเพศ | ๑๘ |
| ๒ | แสดงความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม | ๒๒ |

บทที่ ๑

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันนี้ประเทศต่าง ๆ เกือบทั่วโลกประสบปัญหามากมายทั้งในด้านเศรษฐกิจ สังคม โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาทางการศึกษา รัฐบาลของแต่ละประเทศโดยเฉพาะประเทศที่กำลังพัฒนามีงบประมาณสำหรับการศึกษาไม่เพียงพอที่จะขยายสถานศึกษา เพิ่มปริมาณครู และจัดหาวัสดุอุปกรณ์การสอนให้ทันกับความต้องการของผู้เรียนได้ ประเทศไทยก็ประสบปัญหาอย่างหนักทางการศึกษานี้เช่นกัน นักการศึกษาของไทยพยายามแก้ไขปัญหาด้านนี้โดยคิดหาวิธีปรับปรุงหลักสูตรและวิธีสอน เพื่อให้การสอนของครูมีประสิทธิภาพ

สาเหตุที่ห้องมีการปรับปรุงหลักสูตรและวิธีสอน

๑. ปัญหาการเพิ่มของประชากร จะเห็นว่าเมื่อประชากรในวัยเรียนมีจำนวนเพิ่มขึ้นใน ขณะที่ครูและห้องเรียนเพิ่มในอัตราที่ไม่พอก็ค้น ครูคนหนึ่งต้องรับผิดชอบนักเรียนเป็นจำนวนมาก ภาวะการงานนี้ย่อมทำให้คุณภาพของการศึกษาลดหย่อนลงได้ จึงจำเป็นต้องมีการปรับปรุงการสอนเสียใหม่ โดยพยายามหาวิธีการสอนที่สามารถสอนนักเรียนได้คราวละมาก ๆ และใช้ครูสอนน้อยที่สุด แต่ให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด

๒. ความก้าวหน้าทางวิชาการ เนื่องจากความรู้ที่ขยายกว้างขวางขึ้นอย่างมากมาย กล่าวกันว่าความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริงต่าง ๆ ของทุกวันนี้ ถ้าเทียบกับเมื่อ ๕๐ ปีที่แล้วจะต่างกันอย่างมาก ผลของความเจริญทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมีความสำคัญต่อพฤติกรรมของสังคม ทำให้พฤติกรรม ขนบธรรมเนียม ประเพณีและความเชื่อถือในสังคมเปลี่ยนแปลงไป นอกจากนี้ยังกระทบกระเทือนถึงภาวะทางเศรษฐกิจด้วย มนุษย์มีความต้องการที่จะศึกษามากความรู้เพิ่มเกินมากขึ้นเพื่อให้สามารถดำรงชีวิตอยู่ในสังคมที่กำลังเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้นหลักสูตรจึงต้องเปลี่ยนแปลงโดยการจัดเนื้อหาวิชาเฉพาะส่วนที่เป็นแกนสำคัญอันจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาหาความรู้ต่อไปได้ ดังที่ สุกใจ เหล่าสุนทร (สุกใจ เหล่าสุนทร, ๒๕๐๕ : ๓. ๑๓ - ๕) มีความเห็นว่า "สมควรที่จะเปลี่ยนแปลงแนวคิดในการสอนและหลักสูตรใหม่ ๆ ประโยชน์มากกว่าความรู้ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำไปใช้"

ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ"

๓. ความต้องการศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมของประชากร เนื่องจากความบีบรัดทางเศรษฐกิจและความผันแปรทางสังคม มนุษย์ต่างค้นหาความรู้เพื่อให้ตนเองอยู่ได้อย่างดีในสังคม ดังนั้นการได้การศึกษาจะต้องมีการปรับปรุงระบบเสียใหม่โดยพยายามจัดทำรา วัสดุอุปกรณ์ ตลอดจนเครื่องมือต่าง ๆ เพื่อสนองความต้องการของผู้เรียน

ประเทศไทยกำลังประสบปัญหาดังกล่าวมาแล้วนี้ รัฐบาลได้แก้ปัญหาโดยการเปิดสอนภาคค่ำ และภาคค่ำก็เอื้อรอบหนึ่งสามสถาบันต่าง ๆ เพื่อช่วยให้นักเรียนที่มีที่เรียนเพิ่มขึ้น ส่วนการปรับปรุงหลักสูตรและวิธีสอนวิชาต่าง ๆ นั้น รัฐบาลได้แต่งตั้งคณะกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิชาต่าง ๆ ในทุกระดับการศึกษา นับตั้งแต่ประถมศึกษา มัธยมศึกษา อาชีวศึกษา และอุดมศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ จึงได้ตั้งสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีขึ้น เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา นอกจากนี้ประเทศไทยยังเข้าเป็นสมาชิกของศูนย์เพื่อการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ส่วนภูมิภาค

(Regional Centre for Education in Science and Mathematics: RECSAM) ซึ่งตั้งอยู่ที่เมืองปัว ประเทศมาเลเซีย โครงการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะพัฒนาหลักสูตร ค้นคว้าหาวิธีสอนแบบใหม่ ตลอดจนเทคนิคใหม่ ๆ ของการใช้อุปกรณ์ต่าง ๆ ในการสอนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แก่โรงเรียนในระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา ในกลุ่มประเทศสมาชิกขององค์การซีมีโอ

(SEAMEO)

การสร้างหลักสูตรควรคำนึงถึงสิ่งที่เป็นประโยชน์แก่นักเรียนและเป็นพื้นฐานในการดำรงชีวิตของผู้เรียน ดังที่แฟร์ (Fehr, 2515 : 5) กล่าวว่า "สิ่งที่จะนำมาสอนนักเรียนควรเป็นสิ่งที่จะทำให้นักเรียนเรียนต่อไปได้หลังจากออกจากโรงเรียนไปแล้ว"

ในด้านการสอน นักการศึกษาพยายามค้นคว้าวิจัยเพื่อหาวิธีสอนแบบใหม่ซึ่งจะช่วยแก้ปัญหา ดังกล่าว วิธีสอนแบบหนึ่งที่นักการศึกษาคิดขึ้นคือการสอนแบบโปรแกรม (Programmed Instruction) ซึ่งไฟน์ (Fine, 1962 : 19) กล่าวว่า "เป็นความก้าวหน้าแบบใหม่ที่สำคัญที่สุดในวงการการศึกษา"

การสอนแบบโปรแกรมเป็นวิธีการสอนแบบหนึ่งที่ใช้เครื่องมือ วัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ เป็นสิ่งช่วยสอน เช่น เครื่องช่วยสอน (Teaching machines) เครื่องบันทึกเสียง (Tape recorder) สไลด์ (Slides) ภาพยนตร์ (Pictures) เครื่องฉายเทป (Vedio Tape)

บทเรียนโปรแกรม (Programmed Text) คำว่า (Texts) ฯลฯ

วิธีสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมเป็นวิธีสอนชนิดหนึ่งซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนเรียนจากบทเรียนโปรแกรมด้วยตนเองตามความสามารถ ในบทเรียนโปรแกรมจะมีข้อความและคำถามเป็นสิ่งที่เราเพื่อให้ผู้เรียนทบทวน ผู้เรียนสามารถตรวจสอบตนเองของตนได้ทันทีว่าถูกหรือผิด

แชรรม (Shram, 1966 : 2) ได้สรุปลักษณะของบทเรียนโปรแกรมไว้ดังนี้

๑. เป็นข้อความรู้อย่าง ๆ ซึ่งเรียงลำดับไว้สำหรับสร้างความสนใจของผู้เรียน
๒. ผู้เรียนตอบข้อความและข้อความที่กำหนดให้
๓. การตอบของนักเรียนจะได้รับการเสริมแรงโดยการให้ทราบผลทันที
๔. ผู้เรียนค่อย ๆ เรียนไปทีละขั้นตามลำดับของบทเรียน
๕. ผู้เรียนตอบข้อสอบใดถูกเป็นส่วนมาก
๖. ผู้เรียนจะท่องจำจากสิ่งทูลแล้วไปสู่ความรู้ใหม่ที่จัดไว้

บทเรียนโปรแกรมยึดหลักจิตวิทยาตามทฤษฎีการเรียนรู้เกี่ยวกับการตอบสนองหรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า S-R theory ประทีป สยามชัย (ประทีป สยามชัย, ๒๕๑๐ : ๒๒๔) กล่าวว่า "เมื่อมีสิ่งเร้ามากกระทำต่อนักเรียน (S) นักเรียนจะตอบสนอง (R) แล้วตามด้วยการเสริมแรง (Reinforcement) โดยให้เข้าทราบผลของการตอบสนองของตนทันที ขบวนการเช่นนี้จะทำให้เกิดการเรียนรู้ขึ้น"

ผู้วิจัยคิดว่าบทเรียนแบบโปรแกรมจะช่วยลดปัญหาการขาดแคลนครูและปัญหาเกี่ยวกับสถานที่เรียนของนักเรียนได้ เพราะบทเรียนแบบนี้มีประโยชน์ทั้งต่อผู้เรียน ผู้สอน และผู้บริหารการศึกษา ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

ก. ประโยชน์ต่อผู้เรียน

- ๑) ทำหน้าที่คล้ายครูพิเศษสอนให้ก้าวไปทีละขั้นตามความสามารถของผู้เรียนซึ่งสอดคล้องตามหลักความแตกต่างระหว่างบุคคล
- ๒) เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักเรียนด้วยตนเอง มีความรับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเองมากขึ้น
- ๓) บุคคลที่ไม่มีโอกาสเรียนในโรงเรียนสามารถหาความรู้ได้ด้วยตนเอง

ข. ประโยชน์ต่อผู้สอน

- ๑) ควบคุมแรงผู้สอน ทำให้ผู้สอนมีเวลาที่จะสร้างสรรค์งานสอน ปรับปรุงการสอนมากขึ้น
- ๒) ช่วยลดวินัยในห้องเรียน ควบคุมชั้นได้ง่าย

ฯลฯ

ค. ประโยชน์ต่อผู้บริหารการศึกษา

- ๑) ช่วยลดปัญหาการขาดแคลนผู้สอน เพราะบทเรียนจะทำให้ผู้สอนนักเรียนได้ครวญละมาก ๆ
- ๒) ช่วยลดปัญหาการขาดแคลนสถานที่เรียน เพราะบทเรียนแบบนี้ผู้เรียนสามารถเรียนได้ทุกแห่งไม่จำเป็นต้องเรียนในห้องเรียน

ฯลฯ

เนื่องจากความรู้ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง เป็นสิ่งจำเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง ดังที่ เฟื่องลดา ฤทธาคนี จัง (เฟื่องลดา ฤทธาคนี จัง, ๒๕๑๒ : ๗๖) กล่าวว่า "ความรู้เรื่องลิมิตเป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาวิชาแคลคูลัส" และสุเทพ จันทรสมบัติ (สุเทพ จันทรสมบัติ, ๒๕๑๕ : ๑) กล่าวว่า "มโนภาพของลิมิตเป็นสิ่งสำคัญที่สุดในวิชาแคลคูลัส และเป็นมโนภาพที่ยากมากประการหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์" ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้สร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขาเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องขึ้นแล้วนำไปสอนนักเรียน เปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เพื่อจะได้นำมาว่าวิธีสอนแบบใดจะให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีกว่ากัน อันจะเป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในโอกาสต่อไป

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

๑. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง สำหรับนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครู
๒. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง ของนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ

สมมุติฐานของการศึกษาก่อน

๑. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนตามปกติ

ความสำคัญของการศึกษาก่อน

๑. เป็นแนวทางในการสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา
๒. เป็นการส่งเสริมให้ผู้สอนใช้บทเรียนโปรแกรมในการสอนวิชาคณิตศาสตร์
๓. เป็นการเสริมสร้างแนวคิดในการปรับปรุงการสอนวิชาคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการศึกษาก่อน

๑. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครู จันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร จำนวน ๒๔ คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่ม (Random)
๒. การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ โดยใช้เวลาในการทดลองสอน ๑๐ ชั่วโมง และทดสอบ ๑ ชั่วโมง ๓๐ นาที
๓. บทเรียนโปรแกรมเรื่องสมิตและความต่อเนื่องที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามเนื้อหาที่ปรากฏในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ๑๔ (ภาคอุตสาหกรรม ๑) และอื่น ๆ ที่ผู้วิจัยเห็นว่าเหมาะสมสำหรับนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์
๔. ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยเป็นผู้สอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม อาจารย์คณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูจันทระเกษมเป็นผู้สอนแบบปกติ

นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาก่อน

๑. นักเรียน หมายถึงนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง ปีที่ ๑ วิทยาลัยครูจันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗
๒. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม หมายถึงการสอนโดยให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยเป็นผู้สร้างขึ้น โดยผู้วิจัยเป็นผู้ให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนมีปัญหา
๓. การสอนตามปกติ หมายถึงการสอนโดยอาจารย์เป็นผู้บรรยายในห้องเรียน ซึ่งใช้เนื้อหาเหมือนกับในบทเรียนโปรแกรม

๘. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึงคะแนนของนักเรียนที่ได้จากการสอบ

ข้อทดลองเบื้องต้น

บทเรียนโปรแกรมแบบสาขาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามหลักวิชาการ ถือว่าเป็นบทเรียนที่มีประสิทธิภาพนำไปใช้ในการทดลองได้

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

๑. ความหมายของบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมเป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งของการสอนแบบโปรแกรม (Programmed Instruction) ที่จัดลำดับประสบการณ์ไว้สำหรับนำผู้เรียนไปสู่ความสามารถโดยอาศัยความสัมพันธ์ของสิ่งเร้ากับการตอบสนอง

ฟราย (Fry, 1963 : 2) ได้กล่าวถึงลักษณะของบทเรียนโปรแกรดังนี้

ก. เนื้อหาถูกแบ่งย่อยออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ แต่ละหน่วยเรียกว่า "กรอบ" (frame) ซึ่งกรอบเหล่านี้มีขนาดแตกต่างกัน

ข. ในแต่ละกรอบจะทรงแสดงให้นักเรียนตอบสนอง ซึ่งนักเรียนแต่ละคนจะได้มีส่วนร่วมในการเรียน กิจกรรมต่าง ๆ ที่ให้นักเรียนทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหา

ค. นักเรียนได้รับการเสริมแรงแบบตอบกลับทันที คือจะได้ทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที ซึ่งถ้าตอบถูกต้องจะเป็นการให้รางวัลหรือเป็นการเสริมแรง แต่ถ้าตอบผิดก็จะได้แก่ความเข้าใจผิดทันที

ง. กรอบต่าง ๆ ได้เรียงลำดับต่อเนื่องกันไป เนื่องจากเนื้อหาถูกแบ่งย่อยเป็นหน่วยเล็ก ๆ ผู้เขียนบทเรียนโปรแกรมจึงต้องระมัดระวังเกี่ยวกับลำดับขั้นของการเรียนรู้ ผลักดันให้ลำดับขั้นของการนำเสนอแยกการเข้าใจยิ่งขึ้น

จ. บทเรียนโปรแกรมนักเรียนเป็นศูนย์กลาง คือบทเรียนแต่ละเรื่องที่จะเขียนขึ้นจะต้องนำไปทดลองกับนักเรียนจำนวนหนึ่ง เพื่อหาข้อบกพร่องและปรับปรุงส่วนที่เป็นปัญหา ทั้งนี้เพื่อให้แน่ใจว่าเมื่อนักเรียนศึกษาบทเรียนนั้นแล้วนักเรียนจะกระทำพฤติกรรมต่าง ๆ ได้ตามที่ระบุไว้ในบทเรียนนั้น แล้วจึงนำออกใช้

ฉ. นักเรียนสามารถที่จะเรียนไปได้ตามความสามารถในการเรียนของตนเอง

จากที่กล่าวมานี้ อาจสรุปได้ว่า บทเรียนโปรแกรมคือเครื่องมือทางการศึกษาอย่างหนึ่ง ซึ่งสามารถทำให้นักเรียนคนหนึ่งรับรู้ประสบการณ์ที่จัดไว้เป็นอนุกรมไปตามลำดับขั้นตามที่ผู้จัดทำบทเรียนเชื่อว่าจำเป็นที่นักเรียนไปสู่ขีดความสามารถที่ต้องการให้เกิดขึ้น

๒. หลักการทางจิตวิทยาที่นำมาใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรม

การสร้างบทเรียนโปรแกรมได้น่าสนใจพื้นฐานทางจิตวิทยามาใช้ที่สำคัญมี ๒ ประการ คือ

ก. การวางเงื่อนไข (Conditioning) บทเรียนโปรแกรมใช้หลักการวางเงื่อนไขเป็นพื้นฐานในการสร้าง ขบวนการวางเงื่อนไขคือเอาความสัมพันธ์ของสิ่งเร้ากับการตอบสนองเป็นหลัก สิ่งเร้า (Stimulus) คือสิ่งที่ก่อให้เกิดหรือยังผลให้ปฏิบัติกรจากอินทรีย์ การสนองตอบ (Response) คือปฏิบัติกรที่อินทรีย์กระทำกับสิ่งเร้า เขียนความสัมพันธ์ของสิ่งเร้ากับการตอบสนองเป็นแบบง่าย ๆ ดังนี้

R $\longrightarrow$ S

ข. การเสริมแรง (Reinforcement) คือสิ่งซึ่งมาเพิ่มให้การสนองตอบของนักเรียนเป็นไปตามที่เราปรารถนาทุกครั้งที่เราพบสิ่งเร้าที่กำหนดให้ การเสริมแรงนี้เป็นสิ่งที่ทำให้ผู้เรียนมีกำลังใจทำสิ่งที่เราทำอยู่นั้นต่อไป การเขียนบทเรียนโปรแกรมต้องยึดหลักการเสริมแรงโดยพยายามให้ผู้เรียนตอบถูกมากที่สุด

๓. ชนิดของบทเรียนโปรแกรม

การแบ่งประเภทของบทเรียนโปรแกรมนั้นจะแยกพิจารณาเป็น ๒ ประเด็น คือ

ก. ถ้ายึดชนิดของการตอบสนอง บทเรียนโปรแกรมจะแบ่งได้เป็น ๒ ประเภท คือ แบบที่ผู้เรียนสร้างคำตอบเอง (Constructed-response) กับแบบที่มีคำตอบไว้ให้เลือก (Multiple-choice) ซึ่งแบบแรกนั้นขึ้นอยู่ความสามารถของนักเรียนที่จะนึกได้ (Recall) ส่วนแบบหลังขึ้นอยู่กับการจะจำได้ (Recognition)

ข. ถ้ายึดตามเทคนิคการเรียน บทเรียนโปรแกรมจะแบ่งออกเป็น ๒ ประเภทเช่นกัน คือ แบบเส้นตรง (Linear) กับแบบสาขา (Branching) ซึ่งรายละเอียดของแต่ละแบบพอสรุปได้ดังนี้

๑) แบบเส้นตรง บทเรียนโปรแกรมแบบนี้จัดลำดับของกรอบปัญหาให้นักเรียนเป็นแบบตายตัว นักเรียนจะต้องทำตั้งแต่กรอบแรกไปจนถึงกรอบสุดท้ายตามลำดับโดยไม่ข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเลย ทุกคนต้องเรียนตามลำดับเช่นนี้เหมือนกันหมดไม่ว่าจะมีระดับสติปัญญาแตกต่างกันหรือไม่ก็ตาม เพราะผู้สร้างบทเรียนชนิดนี้ถือว่า ผู้ที่เรียนจากบทเรียนแล้วจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทัดเทียมกัน

ส่วนความแตกต่างที่จะปรากฏออกมาจะเฉพาะในเรื่องช่วงเวลาของการเรียนเท่านั้น

ฟราย (Fry, 1963 : 4) ได้สรุปลักษณะของบทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรงไว้ดังนี้

- ก) วัฏจักรย่อยเล็ก ๆ เฉลี่ยแล้วมีความยาวประมาณสองถึงสามประโยค
- ข) ต้องการให้นักเรียนตอบสนองโดยการเขียนคำตอบสั้น ๆ
- ค) การเสนอความรู้ใหม่เป็นไปตามลำดับความง่าย

๒) แบบสาขา บทเรียนโปรแกรมแบบนี้เรียกว่า Intrinsic Programme หรือ Crowderian Programme ซึ่งพัฒนามาจากผลงานของโครว์เคอร์ บทเรียนแบบนี้คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลเป็นสำคัญ การตอบสนองของผู้เรียนมีบทเรียนเป็นแบบเลือกคำตอบ ผู้เรียนแต่ละคนจะเรียนรู้ใคร่ครวญเร็วในลักษณะที่แตกต่างกัน ผู้ที่เลือกคำตอบได้ถูกแสดงว่ามีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนแล้วก็จะข้ามบางกรอบที่ไม่จำเป็นสำหรับเขาไปได้ ทำให้ทุนเวลาในการเรียนได้มากยิ่งขึ้น ส่วนผู้ที่ตอบไม่ถูก บทเรียนก็จะบอกให้เขาศึกษากรอบซึ่งจัดไว้เพื่อชี้แจงถึงเหตุผลในการตอบผิด พร้อมทั้งให้แนวคิดหรือข้อเสนอแนะบางประการแล้วจึงให้กลับไปยังกรอบปัญหาเดิมที่ตอบผิด เพื่อเลือกคำตอบที่ถูกต้องก่อนที่จะก้าวไปสู่ปัญหาใหม่ในกรอบต่อไป

กรอบปัญหาในบทเรียนโปรแกรมแบบสาขามีสองชนิดคือ กรอบยืนยันซึ่งเป็นกรอบที่เสนอเนื้อหา นั้น ๆ และกรอบสาขาซึ่งเป็นกรอบที่มุ่งแก้ไขความเข้าใจของผู้เรียนให้ถูกต้องโดยเสนอคำอธิบายเพิ่มเติมเพื่อให้เข้าใจเนื้อหาในกรอบยืนยันสำหรับผู้ตอบผิด

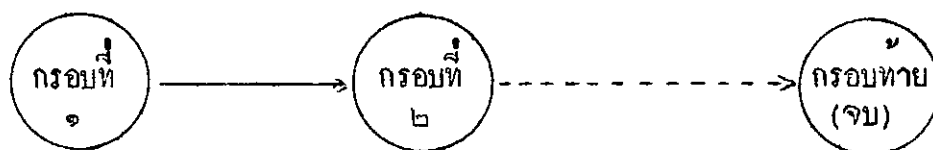
๔. การสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา

ในปัจจุบันนี้บทเรียนโปรแกรมแบบสาขาเป็นที่นิยมใช้กันมากที่สุด เป็นบทเรียนที่ทำหายและน่าสนใจกว่าแบบเส้นตรง เพราะแบบสาขาเป็นบทเรียนที่ให้นักเรียนเรียนตามความแตกต่างของความสามารถของแต่ละบุคคลได้อย่างกว้างขวางกว่าแบบเส้นตรง นักเรียนที่เก่งไม่ต้องเสียเวลามาก เพราะไม่ต้องผ่านทุกกรอบ นักเรียนอ่อนอาจต้องผ่านขึ้นมากว่าถึงสอง เท่ากว่าจะเรียนจบเนื้อหาที่จัดไว้ จึงไม่ทำให้นักเรียนเบื่อ

ก. วิธีสร้าง เป็รื่อง ญุฑ (เป็รื่อง ญุฑ, ๒๕๑๕ : ๒๕) กล่าวไว้ว่า "บทเรียนโปรแกรมแบบสาขามีประโยชน์ที่สุดสำหรับใ้รสอนแก้ปัญหาหรือการสอนให้มีความสามารถทางการวิเคราะห์ โดยทั่วไปวิธีนี้ในสถานการณ์ซึ่งเราคาดคะเนว่านักเรียนจะทำผิดพลาดได้ง่าย ผู้เขียน

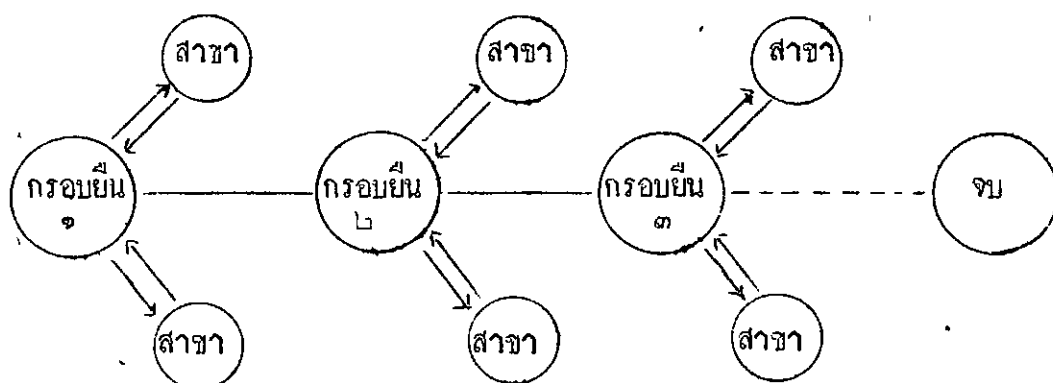
จะต้องเถาคูว่านักเรียนจะทำผิดข้อใด และอะไรในเนื้อหาที่สอนเป็นต้นเหตุที่ทำให้นักเรียนคิดเช่นนั้น เราต้องยอมให้นักเรียนทำผิดพลาดใคอบ้างมีเหตุผล แต่จะต้องแจ้งให้เขาทราบว่าเหตุใดการตอบของเขาจึงผิด พอไปถึงเสนอสถานการณ์ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาให้เขาอีกครั้งหนึ่ง แล้วขอให้เขาลองพยายามอีก โดยวิธีการนี้ความผิดพลาดอย่างสมเหตุสมผลที่เกิดขึ้นก็จะถูกนำมาตีแผ่แก่นักเรียน ซึ่งเท่ากับเป็นการลดความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นรายลงไปได้อีกมาก

ลักษณะของบทเรียนที่เขียนด้วยวิธีนี้ประกอบด้วยชั้นหลัก ๆ หลายชั้น ซึ่งนักเรียน "ทุกคน" จะต้องเดินไปมาถึงกันชั้นเหล่านี้



กรอบเหล่านี้เรียกว่า "กรอบเย็น" (home pages) ซึ่งหมายถึงกรอบที่เป็นลำดับที่แท้จริงของบทเรียน แต่ละกรอบที่นักเรียนตอบถูกต้อง นักเรียนก็จะเรียนไปตามกรอบเย็นโดยไม่ต้องผ่านกรอบสาขา ในกรอบเย็นแต่ละกรอบจะบรรจุเนื้อหาที่เป็นหลักของเรื่องที่สอนอย่างสั้น ๆ ราวหนึ่งหรือสองย่อหน้า แล้วต่อด้วยปัญหาที่ให้นักเรียนแก้พร้อมกับคำตอบที่เป็นไปได้ราว ๓ คำตอบ นักเรียนจะต้องเลือกคำตอบ ๆ หนึ่งแล้วพลิกไปยังหน้าที่ยังว่าง ๆ คำตอบนั้น ถ้านักเรียนตอบผิดนักเรียนต้องก็กลับมากรอบสาขาที่คำอธิบายเพื่อแก้ความเข้าใจผิดของตน ด้วยเหตุนี้ถ้านักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกทุกครั้ง การเรียนของเขาจะดำเนินจากกรอบเย็นหนึ่งไปยังกรอบเย็นถัดไป และถัดไปตลอดบทเรียน และสามารถเรียนจบบทเรียนได้โดยเรียนน้อยกรอบที่สุด

กรอบเย็นแต่ละกรอบมีสอง สาขา" แต่ละสาขามีไว้สำหรับเวลาที่นักเรียนเลือกคำตอบไม่ถูกต้อง ไว้สำหรับบอกให้นักเรียนทราบว่าเขาคิดผิดพร้อมทั้งให้คำแนะนำจนเขาเข้าใจว่าตนคิดผิดอย่างไร จากนั้นจึงสั่งให้เขาพลิกกลับไปยังกรอบเย็นที่ตอบผิดมาอีกครั้งหนึ่ง เพื่อเลือกคำตอบอื่น บทเรียนแบบสาขาซึ่งประกอบด้วยกรอบเย็นกับสาขาอาจแสดงให้เห็นได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพข้างบนนี้จะเห็นว่าเป็นไปได้เหมือนกันที่การเรียนรู้แบบนี้นักเรียนอาจเรียนกรอบขึ้นทุกกรอบและผ่านสาขาหมดทุกสาขาไม่มียกเว้นเลย อย่างไรก็ตาม มีบางส่วนที่นักเรียนอาจเรียนจนจบโดยเรียนกรอบขึ้นทุกกรอบและเรียนกรอบสาขาเพียงกรอบเดียวหรือสองกรอบเท่านั้น บรรดากรอบทั้งหลายที่นักเรียนอ่าน ย่อมเป็นไปตามความเข้าใจที่เขาทำต่อเนื้อหาและ เป็นไปตามความสามารถที่เขาจะทำความเข้าใจที่เรียนรู้แล้วในทันทีทันใด

เนื่องจากไม่แน่ว่านักเรียนคนหนึ่งจะอ่านกรอบหนึ่งกรอบใดอีกนอกเหนือไปจากกรอบขึ้น ดังนั้นข้อสำคัญจึงมีอยู่ว่า "ในกรอบที่ใดสำหรับคำตอบหรือกรอบสาขานั้นอย่าใส่ความรู้อันใหม่ลงไปเป็นอันขาด" กรอบขึ้นทุกกรอบเป็นกรอบที่นักเรียนทุกคนต้องอ่าน ดังนั้นเนื้อหาที่ไรสอนจะอยู่แต่ในกรอบขึ้นนี้เท่านั้น กรอบสาขาเป็นกรอบสำหรับแก้ไขและนักเรียนจะต้องผ่านกรอบแก้ไขเหล่านั้นแล้วจึงวกกลับไปศึกษากรอบขึ้น เมื่อตอบคำถามในกรอบขึ้นถูกแล้วจึงผ่านไปศึกษากรอบขึ้นถัดไป

๖. ขอบเขตของบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา ข้อเสียของบทเรียนแบบนี้มีอยู่ในระบบของมันเอง (เปรื่อง กุมุท, ๒๕๑๖ : ๒๔) ซึ่งพอจะแยกกล่าวได้ดังนี้

๑) ปัญหาเกิดขึ้นว่าควรจะให้ให้นักเรียนตอบเองหรือไม่ เพราะเท่าที่เป็นอยู่แต่ละครั้งบทเรียนเสนอคำถามหลาย ๆ คำถามให้เขาเลือกเพียงคำถามเดียว ผลที่ตามมาคือทำให้เกิดความสงสัยว่า การกระทำเช่นนี้ความสามารถของนักเรียนจะก้าวหน้าไปเกินระดับการเรียนรู้ชั้นความจำ (recognition) ได้หรือไม่

๒) เทคนิคของการเรียนแบบนี้เป็นแบบกำจัดข้อผิดพลาดให้หมดไปจนเหลือแต่คำถามที่กำหนดความถูกต้อง การทำเช่นนี้จะทำให้นักเรียนทั้งหลายค่อย ๆ เรียนไปได้จนหมดบทเรียนในที่สุด แต่เราไม่มีทางรู้ได้โดยดูจากบทเรียนว่านักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อเรื่องที่เรียนหรือไม่

การที่เขาเรียนมาถึงกรอบสุดท้าย ไม่จำเป็นจะต้องหมายความว่าเราได้เรียนรู้ทุกสิ่งทุกอย่างตามที่บทเรียนต้องการสอนแล้ว

ก. เทคนิคของการปรับบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา "บทเรียนโปรแกรมแบบสาขาไม่ว่าชนิดใดถือว่าเป็นบทเรียนที่มีการปรับอยู่ในตัวแล้ว" (เปรื่อง กุมุท, ๒๕๑๖ : ๔๔) ทั้งนี้เพราะจุดประสงค์ที่ให้มีการแยกสาขาก็เพราะต้องการแก้ไขนักเรียนที่อ่อนอยู่แล้ว นักเรียนเก่งจะเรียนตรงไปตามกรอบขึ้นโดยไม่ต้องเรียนกรอบสาขา แต่สำหรับนักเรียนอ่อนจะต้องได้รับการสอนเพิ่มเติมจากกรอบสาขาต่าง ๆ ของบทเรียนที่แยกออกไป กว่าจะเริ่มรู้เรื่องเท่าคนที่เก่ง ๆ ก็อาจต้องเรียนราว ๓ เท่าของจำนวนกรอบที่คนเก่งเรียนก็ได้ เท่ากับว่าบทเรียนมีความสามารถให้การสอนตามที่เขาต้องการแล้ว

ง. การประเมินคุณค่าของบทเรียนโปรแกรม การตัดสินหรือการประเมินผลเพื่อนบอกว่าบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาใช้ได้หรือไม่เป็นงานที่ยากและซับซ้อน ผู้เขียนจะต้องพิจารณาหลาย ๆ ด้าน ประการสำคัญก็คือของรูวบทเรียนสามารถช่วยให้เด็กเรียนเกิดการเรียนรู้ตามที่เรากต้องการหรือไม่ ดังที่เปรื่อง กุมุท (เปรื่อง กุมุท, ๒๕๑๕ : ๑๒๓) กล่าวว่า "สิ่งสำคัญสิ่งหนึ่งของการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมคือ บทเรียนที่สร้างขึ้นมานั้นสร้างควมมุ่งหมายที่เฉพาะเจาะจง ดังนั้นคงควมมุ่งหมายต่าง ๆ ดังกล่าว บทเรียนสามารถทำให้บรรลุไปได้เพียงใดหรือไม่ จึงต้องมีการทดสอบกันซึ่งทำได้โดยการนำข้อสอบที่สมารถวัดนักเรียนความมุ่งหมายไปทดสอบนักเรียนหลังจากที่เรียนจบแล้ว นำผลการทดสอบมาวิเคราะห์เพื่อไว้เป็นเกณฑ์ในการตัดสิน"

การวิจัยการใ้บทเรียนโปรแกรม

ประทีป สยามชัย (ประทีป สยามชัย : ๒๒๔) ได้กล่าวเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมไว้ว่า "วิธีสอนโดยการใ้บทเรียนโปรแกรมนับว่าเป็นของใหม่สำหรับวงการศึกษของประเทศไทย แต่ถ้าหากได้นำเอาวิธีสอนแบบนี้มาใช้ในโรงเรียนก็จะช่วยให้การศึกษาของไทยเจริญก้าวหน้ายิ่งขึ้น" ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของฟราย (Fry : 23-24) ที่กล่าวในคำนำปรัชญาการศึกษาว่า "วิธีสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสอดคล้องกับปรัชญาการศึกษาแบบก้าวหน้า (Progressive Education) เพราะนอกจากจะใช้หลักการให้รางวัลเป็นสิ่งล่อใจแล้วยังทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างสำคัญอีกด้วย"

ฟินน์ (Finn : 19-21) ได้กล่าวถึงผลดีของการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมว่า "การ

สอนแบบนี้ใหม่กับการสอนนักเรียนเป็นรายบุคคล ซึ่งสามารถแก้ปัญหาเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนได้"

บลีธ (Blyth : 7-9) ได้กล่าวสนับสนุนการใช้บทเรียนโปรแกรมว่า "สามารถทำให้บรรดาคณะกนิในการจัดการศึกษาแบบประชาธิปไตยได้มากขึ้นกว่าเดิม เพราะบทเรียนจะปฏิบัติต่อนักเรียนทุกคนเท่าเทียมกันหมด ทั้งยังเปิดโอกาสให้ผู้ที่ไม่ได้มาโรงเรียนสามารถศึกษาด้วยตนเองที่บ้านได้ด้วย"

คาร์นและซันด์ (Carin and Sund, 1974 : 366) ได้ศึกษาเกี่ยวกับโปรแกรมการวิจัยที่หาความแตกต่างระหว่างบุคคล และได้สรุปข้อดีของการสอนที่ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง (Individualized Instruction) ว่า

๑. นักเรียนประสบผลสำเร็จได้ในขั้นที่นักเรียนเรียนด้วยตนเอง
๒. นักเรียนเก่งสามารถเรียนรู้ได้มากและไปได้ไกลกว่าการสอนแบบกลุ่ม
๓. ลดปัญหาทางด้านการเบี่ยงเบน
๔. นักเรียนได้อ่านเพิ่มเติมมากขึ้น
๕. นักเรียนชอบการเรียนด้วยตนเองมากกว่าการสอนตามปกติ

เทเลอร์ (Taylor, 1970 : 3843-A) ได้เปรียบเทียบผลการสอน ๓ วิธี คือ วิธีสอนที่

๑. โปรแกรมสื่อความหมายหลายอย่าง (Programmed Multimedia)
๒. บทเรียนโปรแกรม
๓. การบรรยายกับเครื่องสื่อความหมายหลายอย่าง

แล้วนำผลจากการทดสอบครั้งแรก การทดสอบครั้งหลัง และการทดสอบความทรงจำ (Retention) เปรียบเทียบกันโดยใช้การวิเคราะห์แบบ Analysis of Variance ผลปรากฏว่าการสอนโดยวิธีที่ ๑ กับวิธีที่ ๒ ให้ผลดีกว่าวิธีที่ ๓ แต่วิธีที่ ๒ นักเรียนลืมน้อยกว่าวิธีที่ ๑ เทเลอร์จึงสรุปว่าถ้าจะให้การเรียนการสอนได้ผลดี จะต้องจัดการสอนแบบโปรแกรมสื่อความหมายหลายอย่าง

ออร์ (ORR, 1968 : 11) ได้ศึกษาเปรียบเทียบความทรงจำของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น ๒ กลุ่ม ให้กลุ่มหนึ่งเรียนจาก

บทเรียนโปรแกรม อีกกลุ่มหนึ่งเรียนจากการสอนตามปกติของครู การทดสอบแบ่งตามเวลาดังนี้ คือ ๑ วัน ๑ สัปดาห์ และ ๒ สัปดาห์หลังจากเรียนเนื้อหาจบ ผลปรากฏว่าไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างทั้งสองกลุ่มในทุกช่วงเวลาทดสอบ ออร์สรุปว่า "การสอนโดยบทเรียนโปรแกรมนี้สมควรที่จะได้รับการพิจารณาปรับปรุงให้เหมาะสมเพื่อเป็นวิธีสอนที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่งได้"

กลอส และ ดีเทอร์ไลน์ (Klaus and Deterline, 1963 : 55) พบว่าถ้าให้นักเรียนเลือกกระหว่างการเรียนจากครู การดูตำราด้วยตนเอง และการเรียนจากบทเรียนโปรแกรม นักเรียนมักจะเลือกครูและบทเรียนโปรแกรมรวมกัน หรือถ้าเลือกครูและตำราก็จะต้องรวมบทเรียนโปรแกรมเข้าด้วยเสมอ ใ้มีนักเรียนคนใดในกลุ่มตัวอย่างที่เลือกเฉพาะครู ตำรา หรือบทเรียนโปรแกรมเพียงอย่างเดียว ซึ่งแสดงว่านักเรียนทุกคนต้องการทั้งครูและบทเรียนโปรแกรม และประมาณ ๘๐ % ของกลุ่มตัวอย่างบอกว่า "แม้จะมีครูและบทเรียนโปรแกรมอยู่แล้ว เขาก็ยังต้องการตำราอีกเล่มหนึ่งด้วย"

เปรียบเทียบการสอนโดยบทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ

การวิจัยเปรียบเทียบวิธีสอนโดยบทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกตินั้น มีนักการศึกษาและนักวิจัยหลายท่านได้กระทำไว้ในหลายสาขาวิชา แต่ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการศึกษาวิจัยในสาขาวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น

เบก (BECK, 1970 : 3385-A) แห่งมหาวิทยาลัย Auburn ได้เปรียบเทียบการสอนพีธกณิธระดับชั้นปริญญาตรีปีที่ ๒ ด้วยวิธีสอน ๓ วิธี คือ

๑. วิธีบรรยาย - อภิปราย (Traditional lecture discussion)
๒. วิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธี (Multi - methods)
๓. วิธีที่บทเรียนโปรแกรม

โดยเลือกนักเรียน ๑๒๔ คนเป็นกลุ่มตัวอย่าง และแบ่งนักเรียนทั้งหมดออกเป็น ๒ กลุ่ม คือกลุ่มใหญ่ ๓ กลุ่ม กับกลุ่มเล็ก ๓ กลุ่ม แล้วใช้วิธีสอน ๑ วิธีกับนักเรียนกลุ่มใหญ่ ๑ กลุ่มและกลุ่มเล็ก ๑ กลุ่ม จากการทดสอบภายหลังการเรียนเขาสรุปผลว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีบรรยาย - อภิปราย และวิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธีสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมอย่างมีนัยสำคัญ แต่ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนจากแบบบรรยายกับวิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธีไม่แตกต่างกัน

โร (Roe : 89) ได้ทดลองสอนนิภาพเกี่ยวกับความน่าจะเป็น (Probability) แก่นักชั้นปีที่ ๑ สาขาวิศวกรรมศาสตร์จำนวน ๑๔๘ คน เพื่อศึกษาเปรียบเทียบระหว่างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขากับบทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรง ผลปรากฏว่านักเรียนสามารถเรียนจากบทเรียนโปรแกรมได้และเมื่อใช้ปริมาณการเรียนรู้เป็นเกณฑ์แล้ว จะไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างการเรียนจากบทเรียนโปรแกรมทั้งสองแบบนี้

คอลลาแกน (Collagan, 1969 : 1070 - 1071-A) ได้สร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และเนื้อหาบางตอนของวิชาวิทยาศาสตร์กายภาพ แล้วทดลองกับนักศึกษาระดับปีที่ ๑ ของมหาวิทยาลัยคาลิฟอร์เนีย โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น ๒ กลุ่ม ๆ ละ ๗๗ คน และให้เรียนเนื้อหาเดียวกัน กลุ่มหนึ่งเรียนจากบทเรียนโปรแกรม ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งเรียนจากการสอนแบบธรรมดา เวลาที่ใช้เรียนทั้งหมดคือคณิตศาสตร์ใช้เวลา ๑๐ สัปดาห์ วิทยาศาสตร์กายภาพใช้เวลา ๑๔ ชั่วโมง เสร็จแล้วสอบวัดผลสัมฤทธิ์นำผลมาเปรียบเทียบกัน ปรากฏว่าทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์กายภาพ กลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมให้ผลสัมฤทธิ์สูงกว่าอย่างมีนัยสำคัญ

ไวท์ (White, 1970 : 3373-A) ได้ศึกษาการใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ในระดับวิทยาลัย โดยทดลองกับนักศึกษามหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียตะวันตกชั้นมัธยมศึกษา ๑๗๒ คน แบ่งเป็นกลุ่มควบคุม ๘๘ คนสอนตามแบบธรรมดา กับกลุ่มทดลอง ๘๓ คนสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ทั้งสองกลุ่มสอนบทเรียนเนื้อหาเดียวกัน นำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาเปรียบเทียบกัน ปรากฏว่า กลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีความสามารถสูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบธรรมดาอย่างมีนัยสำคัญ แต่ทางด้านการแก้ปัญหาไม่แตกต่างกัน

มอส (Moses, 1965 : 5793-A) ได้ศึกษาการใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อเปรียบเทียบกับการสอนแบบธรรมดาในวิชาพีชคณิตระดับชั้นเตรียมอุดมศึกษาปีที่ ๑ ณ มหาวิทยาลัยยูสตัน เมื่อปี ค.ศ. ๑๙๖๒ มอสได้แบ่งนักเรียนออกเป็น ๒ กลุ่ม คือ กลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนแบบธรรมดา กลุ่มทดลองเรียนจากบทเรียนโปรแกรม ทั้งสองกลุ่มเรียนในเนื้อหาเดียวกัน เมื่อเรียนจบก็นำเอาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มมาเปรียบเทียบกัน ปรากฏว่ากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบธรรมดา ยิ่งไปกว่านั้นการวิจัยครั้งนี้ยังผลตอบโต้นักเรียนที่เรียนอ่อนไม่สามารถใช้บทเรียนโปรแกรมได้ก็เท่าที่ควร

การวิจัยการสอนโดยบทเรียนโปรแกรมในประเทศไทย

ในประเทศไทยได้เริ่มมีผู้เขียนบทความและตำราที่กล่าวถึงการเรียนการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมกันเป็นจำนวนมาก แสดงให้เห็นว่าวงการศึกษไทยกำลังตื่นตัวกับนวัตกรรมที่ใหม่นี้จริงจัง ส่วนงานด้านการวิจัยเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมนั้นได้เริ่มมีจำนวนมากขึ้น ที่ทำไปแล้วมีดังนี้

อุดม มุงเกษม (อุดม มุงเกษม : ๒๕๑๓) ได้ทดลองสอนวิชาภาษาอังกฤษในชั้นประถมศึกษาปีที่ ๗ โดยบทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนตามแบบธรรมดา ผลปรากฏว่า ทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการเรียนรู้วิชาภาษาอังกฤษไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนที่มีความสามารถสูงจะใช้เวลาเรียนน้อยกว่านักเรียนที่มีความสามารถต่ำ

นิกร วรวิทย์ (นิกร วรวิทย์ : ๒๕๑๕) ได้ทดลองสอนการสะกดคำภาษาอังกฤษชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ โดยเปรียบเทียบระหว่างการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมแบบบอกคำตอบทันที กับการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมแบบบอกคำตอบล่าช้า ผลปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน

ปรีชา คุณวลดี (ปรีชา คุณวลดี : ๒๕๑๕) ได้ทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ ๕ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น ๒ กลุ่ม กลุ่มทดลองเรียนจากบทเรียนโปรแกรม ส่วนกลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบธรรมดา ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความทรงจำของทั้งสองกลุ่มปรากฏว่าไม่แตกต่างกัน

วรรณา เจียมทะวงษ์ (วรรณา เจียมทะวงษ์ : ๒๕๑๕) ได้ทดลองสอนวิชาเลขคณิตเรื่องเศษส่วนในชั้นประถมศึกษาปีที่ ๕ โดยบทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนแบบธรรมดา ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์และความทรงจำของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่ผู้วิจัยพบว่า การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมทำให้ผู้สอนมีเวลาว่างสำหรับทำงานอย่างอื่นและง่ายต่อการควบคุมชั้น

บรรดา รัตนวิทย์ (บรรดา รัตนวิทย์ : ๒๕๑๖) ได้ทดลองสอนวิชาเคมีในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ แผนกวิทยาศาสตร์ โดยบทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนแบบธรรมดา ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า บทเรียนโปรแกรมในประเทศไทยยังไม่แพร่หลายเท่าที่ควร แต่มีแนวโน้มไปในทางที่จะแพร่หลายและเป็นที่สนใจแก่บุคคลทั่วไปในไม่ช้า จากการวิจัยทั้ง ๕ เรื่อง

ที่กล่าวมาแล้วจะเห็นว่าบทเรียนโปรแกรมที่ได้เป็นแบบเส้นตรงทั้งสิ้น และผลก็ออกมาในลักษณะที่การ
เรียนรู้ของนักเรียนไม่แตกต่างกัน ผู้วิจัยจึงคิดว่าควรจะได้มีการสร้างและเผยแพร่วิธีการสร้าง
บทเรียนโปรแกรมแบบสาขางาน เพื่อนำผลการวิจัยที่ได้ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในโอกาสต่อไป.

บทที่ ๓

วิธีดำเนินการทดลอง

๐

๑. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้น ป.กศ. สูงปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูจันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ จำนวน ๖๕ คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่ม (Random) แล้วแบ่งนักเรียนทั้ง ๖๕ คนนี้ออกเป็น ๒ กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง

ตาราง ๑ แสดงจำนวนนักเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมจำแนกตามเพศ

เพศ \ กลุ่มตัวอย่าง	ชาย	หญิง	รวม
กลุ่มทดลอง	๒๐	๑๕	๓๕
กลุ่มควบคุม	๑๖	๑๔	๓๐
รวม	๓๖	๒๙	๖๕

๒. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ก. บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างเป็นแบบสาขาและใช้ดำเนินการ
ดังนี้

๑) ผู้วิจัยได้ศึกษาหลักและวิธีการเขียนบทเรียนโปรแกรมแบบสาขาจากตำรา บทความ และตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขาที่บุคคลอื่น ๆ สร้างไว้

๒) ศึกษาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ๑๕ (แคลคูลัส ๑) โดยเน้นนักเรียนเรื่อง "ลิมิตและความต่อเนื่อง" จากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง พุทธศักราช ๒๕๐๘

๓) สร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขานิคที่ผู้เรียนเลือกคำตอบเอง เมื่อเขียนเสร็จแล้ว ผู้วิจัยได้นำบทเรียนไปให้ผู้ว่าราชการการตรวจทั้งในด้านความถูกต้องของเนื้อหา ภาษา และวิธีการเขียน แล้วจึงนำมาปรับปรุงขอบกรอบต่าง ๆ ก่อนที่จะนำไปทดลองสอนนักเรียนเพื่อการวิจัย

๔) การปรับปรุงบทเรียน

ก) นำบทเรียนโปรแกรมแบบสาขานี้ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้น ป.กค. สูงปีที่ ๑ ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๑๓ วิทยาลัยครูจันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร จำนวน ๑ คน ขณะนั้นนักเรียนกำลังศึกษาบทเรียน ผู้วิจัยคอยสังเกตเพื่อบันทึกปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นแล้วนำมาปรับปรุงบทเรียนเพื่อแก้ปัญหานั้น

ข) นำบทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแล้วจากข้อ ก. ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้น ป.กค. สูงปีที่ ๑ ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๑๓ วิทยาลัยครูจันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร จำนวน ๔ คน แล้วดำเนินการเช่นเดียวกับข้อ ก.

ค) นำบทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแล้วจากข้อ ข. ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้น ป.กค. สูงปีที่ ๑ วิทยาลัยครูพระนคร เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร จำนวน ๓๐ คน แล้วดำเนินการเช่นเดียวกับข้อ ข.

๕) การทิ้งเกณฑ์

ผู้วิจัยได้ทิ้งเกณฑ์ของการวิเคราะห์รอบเป็นแบบ ๙๕ % หมายความว่าแต่ละรอบขึ้นต้องมีผู้ตอบถูกจากการเลือกครั้งแรกไม่ต่ำกว่า ๙๕ % และนักเรียนแต่ละคนต้องตอบรอบขึ้นถูกจากการเลือกครั้งแรกไม่ต่ำกว่า ๙๕ %

๖. การสร้างแบบทดสอบ

ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องเป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด ๕ ตัวเลือก จำนวนทั้งหมด ๑๐๐ ข้อ แล้วนำไปทดสอบเพื่อทำการวิเคราะห์เป็นรายข้อกับนักเรียนที่เคยเรียนเนื้อหาเหล่านี้มาแล้วด้วยวิธีการสอนแบบธรรมดา ๔๔ คน แล้วนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชุดเดียวกันนี้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มที่ไปทดลองเพื่อปรับปรุงบทเรียนจำนวน

๓๐ คน การวิเคราะห์ใช้หลักการหักกลุ่ม ๒๗ % เป็นกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ เปิดตารางสำเร็จรูปของ จุง-เตฟาน (Chung-Teh Fan; 1952) เพื่อหาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบทุกข้อ แล้วเลือกเอาเฉพาะข้อที่มีค่า r ตั้งแต่ .๒๐ ขึ้นไป และค่า p ระหว่าง .๒๐ ถึง .๘๐ ไว้เป็นจำนวน ๔๕ ข้อ นำแบบทดสอบที่ได้คัดเลือกไว้ไปสอบอีกครั้งหนึ่งเพื่อหาความเชื่อมั่นโดยวิธี Split-half ของ Spearman-Brown ได้ค่าความเชื่อมั่น .๘๐

๓. วิธีดำเนินการทดลอง

ก. ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนในกลุ่มทดลองจำนวน ๓๕ คน ด้วยตนเองโดยใช้บทเรียน โปรแกรมแบบสาขา ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น ๑๐ ชั่วโมง แล้วจึงทำการทดสอบด้วยข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกแล้วจำนวน ๔๕ ข้อ นำผลที่ได้จากการทดสอบไปวิเคราะห์

ข. ให้อาจารย์นักศึกษาศาสตร์ของวิทยาลัยครูจันทบุรี เหนอมทำการสอนแบบธรรมชาติกับกลุ่มควบคุมจำนวน ๓๕ คน โดยเริ่มพร้อมกันกับกลุ่มทดลองในข้อ ก. ใช้เวลาสอน ๑๐ ชั่วโมง เมื่อสอนเสร็จแล้วจึงทำการทดสอบด้วยข้อทดสอบฉบับเดียวกันกับที่ใช้กับกลุ่มทดลอง ใช้เวลาสอบ ๑.๓๐ ชั่วโมง นำผลที่ได้จากการทดสอบไปวิเคราะห์

บทที่ ๔

การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาคำนวณหาค่าสถิติดังต่อไปนี้

๑. หาคะแนนเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

๒. หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

โดยที่ s แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

๓. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มจากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่	$\bar{X}_1$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
	$\bar{X}_2$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
	S_1	แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มทดลอง
	S_2	แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม
	N_1	แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง
	N_2	แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุม

๔. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบจากสูตร

$$r_{tt} = \frac{2r}{1+r}$$

โดยที่	r_{tt}	แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	r	แทนค่าสหสัมพันธ์ระหว่างคะแนนข้อถูกและข้อผิดของแบบทดสอบซึ่งคำนวณจากสูตร

$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\} \{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

ผลการทดลอง

ผู้วิจัยได้นำคะแนนที่ได้จากการสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของแต่ละกลุ่มมาหาคะแนนเฉลี่ยและค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองได้คะแนนเฉลี่ย ๒๔.๙๕ คะแนน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ๕.๒๒ ส่วนกลุ่มควบคุมได้คะแนนเฉลี่ย ๒๔.๓๒ คะแนน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ๖.๑๒ จากการเปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มได้ค่า $t = 3.22$ ดังรายละเอียดที่ได้นำแสดงไว้ในตาราง ๒

ตาราง ๒ แสดงความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	๓๕	๒๔.๙๕	๒๗.๒๕	๓.๒๒	.๐๕
กลุ่มควบคุม	๓๕	๒๔.๓๒	๓๗.๔๕		

จากตาราง ๒ จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .๐๕ นี่คือการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมให้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ

สรุปผลการทดลอง

นักเรียนที่เรียนจากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติ

บทที่ ๕

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความหมายของการศึกษาค้นคว้า

๑. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องสำหรับนักเรียนชั้น ป. กศ. สูงปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของวิทยาลัยครู
๒. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของนักเรียนชั้น ป. กศ. สูงปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่ได้จากการสอนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนตามปกติ

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

๑. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้น ป. กศ. สูงปีที่ ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูจันทระเกษม เขตบางเขน กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ จำนวน ๒๕ คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่ม แล้วนำมาแบ่งเป็น ๒ กลุ่ม โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง ๑๕ คน กลุ่มควบคุม ๑๐ คน

๒. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ก. บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยได้สร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาธิตเรื่อง "ลิมิตและความต่อเนื่อง" ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง พุทธศักราช ๒๕๐๔ มีจำนวนกรอบขึ้น ๗๕ กรอบ กรอบสาขา ๑๐๖ กรอบ อัตราผลิตผลเฉลี่ยของกรอบขึ้น ๑๖.๔๗ % และอัตราผลิตผลเฉลี่ยของนักเรียนแต่ละคนเป็น ๑๐.๗๖ %

ข. แบบทดสอบ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบปรนัย ชนิด ๕ ตัวเลือกจำนวน ๔๕ ข้อ มีความยากง่ายเฉลี่ย .๖๔ มีอำนาจจำแนกเฉลี่ย .๕๕ และมี

ค่าความเชื่อมั่น .๘๐

๓. การดำเนินการทดลอง

ก. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มทดลองโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอน ๑๐ ชั่วโมง

ข. อาจารย์คณิตศาสตร์วิทยาลัยครูจันทบุรี เก่งสอนกลุ่มควบคุมด้วยวิธีบรรยายตามปกติ โดยใช้เนื้อหาเหมือนกับบทเรียนโปรแกรมและใช้เวลาสอน ๑๐ ชั่วโมง

ค. สอนนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยข้อทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการทดลอง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญระดับความเชื่อมั่น .๐๕ ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้เพราะการทดลองกระทำกับนักเรียนที่เรียนในระดับสูงซึ่งมีความรับผิดชอบและมีสติพอที่จะศึกษาหาความรู้ได้ด้วยตนเอง โดยครูเป็นเพียงผู้แนะให้ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการใช้บทเรียนโปรแกรมในเนื้อหาอื่น ๆ สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ระดับนี้ เพราะนอกจากจะเป็นการให้นักเรียนเรียนตามความสามารถของแต่ละบุคคลแล้วยังเป็นการสร้างนิสัยรักการอ่านและรักการศึกษากันทั่วให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียนอีกด้วย

จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสังเกตเห็นว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีข้อดีหลายประการ ดังนี้

๑. นักเรียนมีความตื่นตัวต่อการเรียนตลอดเวลา และเอาใจใส่การเรียนเป็นพิเศษ การกระทำดังนี้เป็นการสร้างบรรยากาศแห่งการเรียนรู้ ผู้เรียนไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน

๒. ผู้สอนมีเวลาว่างสำหรับทำกิจกรรมอื่นเพื่อให้การสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

๓. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสามารถสนองตอบเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคล

ได้เป็นอย่างดี นักเรียนที่เรียนเก่งไม่ต้องเสียเวลาคอยนักเรียนที่เรียนอ่อนอันอาจทำให้เกิดความเบื่อหน่ายได้

๔. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม เป็นการฝึกนิสัยให้นักเรียนมีความซื่อสัตย์และรับผิดชอบ
 ต่อตนเอง ทั้งนี้เพราะการเรียนจากบทเรียนโปรแกรมฝึกให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งของบทเรียน
 รู้จักศึกษาด้วยตนเอง และรู้จักควบคุมตนเอง

ข้อเสนอแนะ

ก. ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากผลการทดลองพบว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมให้ผลดีกว่าการสอนตาม
 ปกติ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการส่งเสริมการผลิต การวิจัย และการใช้บทเรียนโปรแกรมให้แพร่
 หลาย เพื่อจะได้เกิดประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุงการสอนและช่วยแก้ปัญหาการศึกษาแคลงครวญ
 ในส่วนที่เกี่ยวกับการใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อให้มีประสิทธิภาพนั้น ผู้วิจัยเห็นว่าขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่สำคัญ ๒ ประการ คือ

๑) บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนที่นำมาใช้จะต้องเป็นบทเรียนที่ดี ซึ่งมีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

- ก) ต้องผ่านการวิเคราะห์ตามหลักวิชาการ มีความเชื่อมั่นได้
- ข) คำอธิบายต้องชัดเจน ไม่คลุมเครือ
- ค) เหมาะสมกับวัยและความรู้พื้นฐานของผู้เรียน

๒) ผู้สอน

- ก) รู้จักเลือกบทเรียนให้เหมาะสมกับวัยและความสามารถของผู้เรียน
- ข) ห่วงใยให้ผู้เรียนเกิดความสนใจที่จะเรียนรู้อยู่ด้วยตนเอง
- ค) ทำหน้าที่เป็นผู้นำเมื่อนักเรียนเกิดปัญหา

ข. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

- ๑) การวิจัยเพื่อศึกษาผลการใช้บทเรียนโปรแกรมกับนักเรียนที่มีระดับความสามารถ
 ต่าง ๆ กัน เพื่อดูว่านักเรียนประเภทใดได้รับผลจากการสอนแบบนี้มากที่สุด
- ๒) การวิจัยเพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลของการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอน

วิธีอื่น ๆ เช่น การสอนแบบสืบสวนสอบสวน แบบค้นพบด้วยตนเอง แบบใช้ภาพยนตร์ โทรทัศน์ ฯลฯ ในวิชาต่าง ๆ เพื่อให้ทราบว่าวิธีสอนแบบใดให้ผลดีกว่ากัน

๓) การวิจัยเพื่อศึกษาว่าเมื่อองค์ประกอบอะไรบางอย่างช่วยให้นักเรียน โปรแกรมใดได้ดี เช่น เทคนิคการสร้างบทเรียน ลักษณะของวิชา ระยะเวลาที่สอน เป็นต้น

๔) ควรจะได้นำการสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขาให้มากขึ้นในทุกสาขาวิชา แล้วนำไปสอนเปรียบเทียบกับแบบเส้นตรงเพื่อดูว่าแบบใดจะให้ผลดีกว่ากัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ประทีป สยามชัย "บทเรียนสำเร็จรูป" ชุมนุมทางวิชาการ รายงานการประชุมทางวิชาการ ครั้งที่
ที่หนึ่ง ๑ - ๕ สิงหาคม ๒๕๑๐ กรมสามัญศึกษา สหกรณ์ชายฝั่ง, ๒๕๑๐, ๓๐๖ หน้า

เป็รื่อง ภูมิ การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป พิมพ์รใหม่ ๒๕๑๕, ๑๓๑ หน้า

เพ็องลดา ฤทธาณีนี แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ แพร่พิทยา, ๒๕๑๖, ๒๖๖ หน้า

ศึกษานิการ, กระทรวง กรมการฝึกหัดครู หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาศนสูง พุทธศักราช
๒๕๐๘, ร.พ.การกาศนฯ ๒๕๐๘, ๗๖ หน้า

ศึกษานิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
๑๔ เมษายน - ๖ พฤษภาคม ๒๕๐๘ แผนกการพิมพ์ วิทยาลัยครูสวนสุนันทา ๒๕๐๘,
๑๑๒ หน้า

ศึกษานิการ, กระทรวง กรมวิสามัญศึกษา คณะอนุกรรมการการวิชาการ โรงเรียนมัธยมแบบ
ประสม สายวิชาคณิตศาสตร์ หนังสือประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ๓๓ ๒๕๑๕,
๘๒ หน้า

สุเทพ จันทรสมักดี แคลคูลัสตอน ๑ พิมพ์ครั้งที่ ๑ อักษรเจริญทัศน์ ๒๕๑๕, ๔๕ หน้า

BECK, Marilyn Clark, "A Comparative Analysis of Three Methods of
Teaching Ronsedial Algebra on the Junior College Level"
Dissertation Abstracts, 3385-A, 1970.

Baum, John D., A Programmed Instruction : The Structure of the Real
Number System, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc.,
1967, 553 pp.

Blyth, J.W., Educational Studies and Documents, No.52 p.7-9.

Carin and Sun, "Individualized Instruction - a Positive Experience?"
School Sciences & Mathematics, May - June, 1974 : Vol.LXXIV,
No.5, 366 pp.

- Collagan, Robert B., "The Construction and Evaluation of a Programmed Course in Mathematics Necessary for Success in Collegiate Physical Science", Dissertation Abstracts, 30 : 1070-1071 A, 1969
- Crones, Richard and Shuttloworth, Jan, "Plays with Numerals" The Arithmetic Teacher, May 1974, Vol. 21, No.5, 417 pp.
- Deterline, William A., An Introduction to Programmed Instruction, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963, 131 pp.
- Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, 1952, 32 pp.
- Fine, Benjamin, Teaching Machines, Sterling Publishing Co. Inc., New York, 1962, 176 pp.
- Finn, J.D., "Teaching Machines : Auto Instructional Devices for the Teacher", Educational Technology, Volume XIV, Number 4, April, 1974, 65 pp.
- Fry, Edward B., Teaching Machines and Programmed Instruction, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 244 pp.
- Moses, John Irvin, "A Comparison of the Results of Achievement with Programmed Learning and Traditional Classroom Techniques in First Year Algebra at Spring Branch Junior High School", Dissertation Abstracts, April, 1965, 25 : 5793-A
- GOR, William C., "Retension as a variable in Comparing Programmed and Conventional Instructional Methods", The Journal of Education Research, Vol.62, No.1, September 1968, p.11
- Roe, Arnold, "A Comparison of Branching Method for Programmed learning" in The Research on Programmed Instruction : An Annotated Bibliography, p.39
- Schramm, Wilbur, The Research on Programmed Instruction : An Annotated Bibliography, U.S. Department of Health Education and Welfare, Washington D.C., 1964, 114 pp.
- Taylor, Gary R., "A Comparative Evaluation of Teaching Effectiveness and Efficiency for 3 Representation Modes-Programmed Multimedia for Groups, Programmed Textbook, and Multimedia Lecture-Discussion-As adopted from an Original Unit of Instruction" Dissertation Abstracts, 30 : 4843-A, 1970
- White, Charles Colven, "The Use of Programmed Texts of Remedial Mathematics Instruction in College", Dissertation Abstracts, 30 : 3373-A, 1970

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์แบบทดสอบ

การความยากง่าย (p) และการอ่านจาวาแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	P _H	P _L	p	r	ข้อที่	P _H	P _L	p	r
๑	.๗๑	.๔๔	.๖๐	.๖๔	๒๔	.๘๑	.๖๔	.๕๖	.๕๒
๒	.๕๕	.๗๖	.๘๗	.๓๖	๒๕	.๕๕	.๗๑	.๘๕	.๔๑
๓	.๘๖	.๕๗	.๗๒	.๓๔	๒๖	.๗๖	.๔๘	.๖๒	.๓๐
๔	.๕๕	.๖๒	.๘๑	.๔๙	๒๗	.๕๕	.๔๘	.๗๕	.๕๙
๕	.๘๖	.๕๒	.๗๐	.๓๙	๒๘	.๕๕	.๑๙	.๖๑	.๗๖
๖	.๔๘	.๖๔	.๓๖	.๖๖	๒๙	.๕๐	.๗๑	.๘๑	.๖๙
๗	.๕๒	.๖๙	.๔๐	.๖๔	๓๐	.๗๖	.๑๔	.๔๔	.๖๒
๘	.๓๘	.๑๔	.๖๔	.๓๑	๓๑	.๗๑	.๓๓	.๕๒	.๓๘
๙	.๙๕	.๗๑	.๘๕	.๔๑	๓๒	.๙๐	.๕๗	.๗๕	.๕๒
๑๐	.๗๖	.๕๒	.๖๕	.๖๖	๓๓	.๕๕	.๗๑	.๘๕	.๔๑
๑๑	.๕๕	.๕๗	.๗๙	.๔๓	๓๔	.๕๕	.๘๖	.๕๑	.๖๒
๑๒	.๕๕	.๘๑	.๘๙	.๓๐	๓๕	.๕๕	.๔๓	.๗๓	.๖๒
๑๓	.๕๕	.๔๘	.๗๕	.๔๙	๓๖	.๕๕	.๘๑	.๘๙	.๓๐
๑๔	.๕๕	.๔๘	.๗๕	.๕๙	๓๗	.๙๔	.๔๙	.๗๓	.๖๒
๑๕	.๘๖	.๔๘	.๖๘	.๔๓	๓๘	.๘๔	.๖๘	.๕๗	.๕๖
๑๖	.๗๑	.๖๙	.๕๐	.๕๖	๓๙	.๗๑	.๐๘	.๓๕	.๗๐
๑๗	.๙๕	.๗๖	.๘๗	.๓๖	๔๐	.๗๖	.๔๘	.๖๒	.๓๐
๑๘	.๗๑	.๖๙	.๔๐	.๕๖	๔๑	.๕๕	.๕๗	.๗๙	.๔๓
๑๙	.๘๖	.๕๖	.๗๒	.๓๔	๔๒	.๕๕	.๗๖	.๘๙	.๓๖
๒๐	.๕๕	.๖๒	.๘๑	.๔๙	๔๓	.๙๕	.๖๗	.๘๓	.๕๕
๒๑	.๘๑	.๔๔	.๖๓	.๔๐	๔๔	.๕๐	.๖๒	.๗๗	.๓๘
๒๒	.๗๑	.๐๕	.๓๔	.๗๐	๔๕	.๕๕	.๗๑	.๘๕	.๔๑
๒๓	.๙๐	.๓๘	.๖๖	.๕๗					

การหาความสัมพันธ์ของแบบทดสอบ

การหาความสัมพันธ์จากสูตร

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{2r}{1+r} \\
 \text{เมื่อ } r &= \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\} \{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}} \\
 &= \frac{874051 - 842324}{\sqrt{(925842 - 879844) (857532 - 806404)}} \\
 &= \frac{32527}{\sqrt{(45998) (51128)}} \\
 &= \frac{32527}{\sqrt{2351785744}} \\
 &= .67 \\
 \therefore r_{tt} &= \frac{2 \times .67}{1 + .67} \\
 &= \frac{1.34}{1.67} \\
 &= .80
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข.

ผลจากการสำรวจทัศนคติเกี่ยวกับการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

คะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน

เลขที่	กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
๑	๓๑	๑๘
๒	๒๔	๒๒
๓	๒๐	๒๓
๔	๓๑	๒๑
๕	๓๒	๒๗
๖	๓๗	๒๔
๗	๓๓	๒๕
๘	๓๓	๑๔
๙	๓๑	๒๓
๑๐	๒๓	๒๔
๑๑	๓๔	๒๖
๑๒	๔๐	๒๕
๑๓	๓๒	๒๒
๑๔	๒๔	๒๓
๑๕	๑๖	๓๓
๑๖	๓๘	๒๑
๑๗	๓๑	๒๕
๑๘	๓๑	๒๒
๑๙	๓๐	๓๔
๒๐	๓๒	๒๓
๒๑	๓๑	๒๒

ເລກລຳດັບ	ຄຸນສົມບັດ	ຄຸນສົມບັດ
໒໒	໒໔	໑໕
໒໓	໓໐	໒໐
໒໔	໒໓	໒໐
໒໕	໒໒	໒໕
໒໖	໒໔	໑໕
໒໗	໓໐	໓໐
໒໘	໒໒	໔໐
໒໙	໒໔	໓໐
໓໐	໓໐	໑໕
໓໑	໒໓	໒໒
໓໒	໒໔	໑໕
໓໓	໒໕	໒໐
໓໔	໒໒	໔໐
໓໕	໓໑	—
Σ	໑,໐໐໖	໔໒໕
$\bar{x}$	໒໔.໑໕	໒໔.໑໖
s^2	໒໓.໒໔	໓໑.໔໕

ภาคผนวก ค.

การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยอันดับที่ทางการวิ่งของนักวิ่งชายสองกลุ่มด้วยกลุ่มควบคุม

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

$$= \frac{28.74 - 24.32}{\sqrt{\frac{27.25}{35} + \frac{37.49}{34}}}$$

$$= \frac{4.42}{\sqrt{1.87}}$$

$$= \frac{4.42}{1.37}$$

$$= 3.22$$

ถ้า t มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .๐๕

ภาคผนวก ง.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้

เรื่องฟังก์ชันและกราฟต่อเนื่อง

๑. ถ้าให้ $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 4}$ แล้ว $g(2)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. - 2

ค. 4

ง. 8

จ. หาค่าไม่ได้

๒. ถ้าให้ $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 10 & ; x = 2 \end{cases}$ แล้ว $h(2)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. 4

ค. 16

ง. 10

จ. หาค่าไม่ได้

๓. จากฟังก์ชันในข้อ ๒. $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. 4

ค. 16

ง. 10

จ. หาค่าไม่ได้

๔. กำหนดให้ $F(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$, $F(0)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. - 1

ค. 1

ง. 2

จ. หาค่าไม่ได้

๘. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. -3

ค. -1

ง. -5

จ. ค่าลิมิตไม่ได้

๙. จากสัญลักษณ์ " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ " นี้ a จำเป็นต้องอยู่ในโดเมนของ f หรือไม่

ก. ต้องอยู่

ข. ไม่อยู่

ค. อยู่หรือไม่ก็ได้

ง. ต้องอยู่เพราะ x อาจเท่ากับ a

จ. ไม่อยู่เพราะ $x \neq a$

๑๐. ข้อใดมีความหมายเหมือนกับ " $x \in (a - \delta, a + \delta)$ "

ก. $|x - a| < \delta$

ข. $a - \delta < x < a + \delta$

ค. $|x - \delta| < a$

ง. $a + \delta < x < a - \delta$

จ. ขด ก. และขด ข.

๑๑. การนิยามตรรกะโดยใช้นิยามของอีปัสซัส สำหรับ ϵ ค่าหนึ่ง ๆ จะมี δ ได้กี่ค่า

ก. ค่าเดียวเท่านั้น

ข. ไม่เกิน ๒ ค่า

ค. หลายค่า

ง. เท่ากับ ϵ

จ. ขึ้นอยู่กับ ϵ

๑๒. การพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8$ เป็นจริง จะตองเลือก δ เท่ากับเท่าไร

ก. $\frac{\epsilon}{3}$

ข. $\frac{\epsilon}{2}$

ค. ϵ

ง. 2ϵ

จ. 3ϵ

๑๘. ถ้าต้องการให้ $2 + \frac{1}{x}$ ห่างจาก ๒ น้อยกว่า ε ; x จะต้องเป็นค่าเท่าไร

ก. $x > \varepsilon$

ข. $x > \frac{\varepsilon}{2}$

ค. $x > \varepsilon^2$

ง. $x > \sqrt{\varepsilon}$

จ. $x > \frac{1}{\varepsilon}$

คำชี้แจง : จากสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ จงตอบคำถามข้อ ๑๘ - ๒๑

๑๙. สัญลักษณ์ข้างบนนี้ หมายความว่าอย่างไร

ก. $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ $-a$

ข. $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา

ค. $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

ง. $f(x)$ เข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

จ. $f(x)$ เท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

๒๐. x มีค่าเป็นอย่างไร

ก. $x = 0$

ข. $x \neq a$

ค. $x > a$

ง. $x < a$

จ. x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

๒๑. ถ้าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหา $\delta > 0$ จึงทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ

ก. $a < x < a + \delta$

ข. $a \leq x \leq a + \delta$

ค. $a - \delta < x < a + \delta$

ง. $a - \delta < x < a$

จ. $a < x < a + \delta$

๒๒. $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x + 1]$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. -1

— ก. 1

ง. 2

จ. หาขีดจำกัดไม่ได้

๒๓. $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] + x$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

— ข. 5

ก. 6

ง. 9

จ. หาขีดจำกัดไม่ได้

๒๔. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

— ข. 1

ก. -1

ง. 2

จ. หาขีดจำกัดไม่ได้

๒๕. จากฟังก์ชันในข้อ ๒๔, $f(0)$ มีค่าเท่าไร

ก. a

— ข. 1

ก. -1

ง. 2

จ. หาค่าไม่ได้

๒๖. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x \sqrt{x^2 - 1})$ มีค่าเท่าไร

ก. -1

ข. 0

— ก. 1

ง. 2

จ. หาขีดจำกัดไม่ได้

๒๗. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{x}{x} \right|$ มีค่าเท่าไร

ก. -1

ข. 0

— ก. 1

ง. ∞

จ. หาขีดจำกัดไม่ได้

๓๑ ข้อความที่ว่า "ถ้าให้ M เป็นเลขบวกที่กำหนดมาให้จะหา δ เพียงใดก็ตาม เราสามารถหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > M$ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ " แทนด้วยสัญลักษณ์ในข้อใด

ก. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$

ข. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

ค. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

ง. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = M$

จ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \delta$

๓๒. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = x^2$ จงหาว่า

$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ มีค่าเท่าไร

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. -1

จ. ไม่มีขีดจำกัด

๓๓. ข้อความในข้อใดที่แสดงว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

ก. หาค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ ได้

ข. หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ ได้

— ก. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ง. $f(x) = f(a)$

จ. ขก. และ ขค. ถูก

๓๔. ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด a แล้ว จุด a อยู่ภายในโดเมนของ f หรือไม่

— ก. ต้องอยู่ใน D_f

ข. อยู่หรือไม่ก็ได้

ค. ต้องไม่อยู่ใน D_f

ง. อยู่เฉพาะฟังก์ชันที่คงที่

จ. ยังสรุปไม่ได้

๓๕. ความหมายทางเรขาคณิต ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หมายความว่ากราฟของฟังก์ชัน f จะเป็นเส้นลากติดกันไปขาดตอนเป็นฉากหน้าทุกจุด

ก. (a, x)

ข. (x, a)

ค. $(x, f(x))$

ง. $(a, f(a))$

จ. $(f(a), a)$

๓๖. $f(x) = 2 : x$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดใด

ก. $x = -2$

ข. $x = -1$

ค. $x = 0$

ง. $x = 2$

— จ. ทุกเมืองทุกจุด

๓๗. กำหนดให้
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 5 & ; x = 2 \end{cases}$$

ฟังก์ชัน g ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ เพราะเหตุใด

ก. เพราะว่า $g(2)$ หาไม่ได้

ข. เพราะว่าจุด $x = 2$ ไม่ได้อยู่ใน D_f

ค. เพราะว่าจุด $x = 2$ อยู่ใน D_f

ง. เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ หาไม่ได้

— จ. เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq g(2)$

๓๘. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; x < 2 \\ \frac{x}{2} - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดใด

- ก. $x = 2$
- ข. $x > 2$
- ค. $x < 2$
- ง. $x = 0$
- จ. ถูกต้องทุกข้อ

๓๙. กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & ; x \in [-3, 3] \\ 3 - x & ; x \notin [-3, 3] \end{cases}$

ฟังก์ชัน h ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดใด

- ก. $x = -3$ $x = 3$
- ข. $x = -3$
- ค. $x = 3$
- ง. $x = 9$
- จ. $x = -9$

๔๐. ฟังก์ชันในข้อใดที่มีความต่อเนื่องทุกจุดใน xy - plane

- ก. $f(x) = \sqrt{4 + x}$
- ข. $h(x) = \sqrt{16 + x^3}$
- ค. $k(x) = \sqrt{25 + x^5}$
- ง. $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$
- จ. ถูกทุกข้อ

๔๑. ฟังก์ชันในข้อใดที่ค่าของฟังก์ชันเท่ากับค่าของลิมิต ณ จุดที่กำหนดให้

- ก. $f_1(x) = \frac{2x}{x+1}$ ที่จุด $x = 3$
- ข. $f_2(x) = 3 + x$ ที่จุด $x = 5$
- ค. $f_3(x) = 2x^2$ ที่จุด $x = 2$
- ง. $f_4(x) = 2x^2 + x + 1$ ที่จุด $x = 1$
- จ. ถูกทุกข้อ

"กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ "

จงตอบคำถามข้อ ๔๑ - ๔๔

๔๑. $f + g$ ต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ หรือไม่

- ก. ต่อเนื่องบางจุด
- ข. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$
- ค. ไม่ต่อเนื่องเมื่อ $f = g$
- ง. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = b$
- จ. ต่อเนื่องทุกจุด

๔๓. $f \cdot g$ ต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ หรือไม่

- ก. ต่อเนื่องทุกจุด
- ข. ต่อเนื่องบางจุด
- ค. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$
- ง. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = b$
- จ. ไม่ต่อเนื่องเมื่อ $f = g$

๔๔. $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ หรือไม่

- ก. ต่อเนื่องทุกจุด
- ข. ต่อเนื่องเมื่อ $g \neq 0$
- ค. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$
- ง. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = b$
- จ. ไม่ต่อเนื่องเมื่อ $f = g$

๔๕. ถ้ากล่าวต่อไปนี้ข้อใดที่เป็นจริง

- ก. ลิมิตของ ฟังก์ชันคงที่เท่ากับค่าของ ฟังก์ชันที่จุด ๆ หนึ่งเสมอ
- ข. ฟังก์ชันที่หาลิมิตได้ที่จุดใด ค่าของ ฟังก์ชันที่จุดนั้นจะต้องหาได้
- ค. ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเท่ากับลิมิตทางขวาของ ฟังก์ชันเสมอ
- ง. ฟังก์ชันต่อเนื่องต้องมีค่าของลิมิตเท่ากับค่าของ ฟังก์ชัน ณ จุดนั้น
- จ. ฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง อาจมีบางจุดในช่วงนี้ที่หาค่าไม่ได้

ภาคผนวก จ.

บทเรียนโปรแกรมแบบสาขาเรื่องจิตและความคิด

บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องลิมิต

ตอนที่ 1

นิยามของลิมิต

จำนวนกรอบ 53 กรอบ

คำชี้แจง : ในตอนที่ 1 นี้เป็นนิยามของลิมิตซึ่งจะกล่าวถึงมโนภาพพื้นฐานเพื่อให้ท่านเข้าใจความหมายของลิมิต ขอให้ท่านอ่านทุกกรอบที่ท่านเปิดศึกษาด้วยความตั้งใจ ในขณะที่ศึกษาพยายามรวบรวมความคิดและรายละเอียดต่าง ๆ ไว้แล้วพยายามทำความเข้าใจนิยามซึ่งเป็นผลสรุปของตอนที่ 1 ตั้งใจให้ถี่ ๆ แล้วเริ่มเปิดศึกษาได้

ตอนที่ 1

นิยามของลิมิต

.....

1. ท่านเคยหาค่าของฟังก์ชันมาแล้ว โดยการแทนค่าจุดที่ต้องการหาลงในฟังก์ชัน เช่น

ถ้าให้ $f(x) = 2 + x$ ค่าของฟังก์ชันที่ $x = 3$ เป็นเท่าไร

<u>ตอบ</u>	2	เปิดไปกรอบ	17	หน้า	9
	3	"	33	"	17
	5	"	15	"	8

คำคม + คำขวัญ

2. ท่านตอบว่า : 5

ถูกต้องที่สุด เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ค่าของฟังก์ชัน f ก็ต้องเข้าใกล้ 5

เพราะเราแทนค่าที่ใกล้ ๆ 3 ค่าของ $2 + x$ จึงเข้าใกล้ 5

ข้อความที่ว่า " เมื่อ x เข้าใกล้ 3 แล้วฟังก์ชัน f เข้าใกล้ 5 " นั้นเรา

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ " อ่านว่า " ลิมิตของฟังก์ชัน f

เมื่อ x เข้าใกล้ 3 มีค่าเท่ากับ 5 " ฉะนั้นถ้าจะเขียนแทนข้อความที่ว่า " ลิมิต

ของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 4 " จะเขียนได้อย่างไร

ตอบ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ เปิดไปกรอบ 48 หน้า 25

$\lim_{2 \rightarrow x} f(x) = 4$ " 52 " 27

$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 4$ " 42 " 22

3. ท่านตอบว่า : เพราะค่าสมบูรณ์ของมากกว่าศูนย์เสมอ

ท่านกำลังเข้าใจผิดเกี่ยวกับค่าสมบูรณ์แล้ว เพราะความจริงค่าสมบูรณ์อาจเท่ากับศูนย์ได้ เช่น $|3 - 3| = |0| = 0$ ฉะนั้นการที่ท่านตอบว่าค่าสมบูรณ์ย่อมมากกว่าศูนย์เสมอนั้นย่อมไม่ถูกต้องนัก อย่าลืมว่าขณะนี้เรากำลังพูดถึงลิมิตที่ x เข้าใกล้ 3 ฉะนั้นถ้าพอจะนึกได้ว่าทำไมจึงต้องเน้นว่าให้ผลต่างมากกว่าศูนย์แล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 26 หน้า 14 ใหม่ แล้วลองพิจารณาทั้ง 3 คำตอบพร้อม ๆ กัน คำตอบไหนน่าจะถูกมากที่สุดก็เลือกคำตอบนั้น

4. ท่านตอบว่า : 3

ถูกต้องแล้ว จำไว้เลยว่า ไม่ว่า x จะเข้าใกล้ค่าใดก็ตาม จะให้ x เท่ากับค่านั้นไม่ได้เด็ดขาด ขอยกตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ถ้าให้ $f(x) = 2 + x$; $(x \neq 3)$ เป็นฟังก์ชันอันหนึ่ง ฟังก์ชันนี้ไม่เหมือนกับฟังก์ชัน $f(x) = 2 + x$ เพราะว่า ถ้า $x = 3$, ค่า $f(x) = 5$ แต่ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = 2 + x$; $(x \neq 3)$ เมื่อ $x = 3$ เรหาค่าของ $f(x)$ ได้หรือไม่

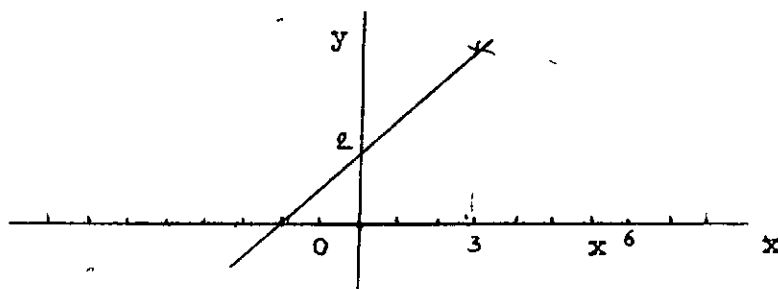
<u>ตอบ</u>	ได้	เปิดไปกรอบ	41	หน้า	21
	ไม่ได้	"	21	"	11
	ไม่ทราบ	"	6	"	3

5. ท่านตอบว่า : 5

ถูกต้องที่สุด $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ ทั้งนี้เพราะ x เข้าใกล้ 3 แต่ x ไม่เท่า

กับ 3 ดังนั้น $f(x)$ จึงเข้าใกล้ 5 แต่มีโอกาสเท่ากับ 5

จะเห็นว่าฟังก์ชัน ที่กำหนดว่า $f(x) = \begin{cases} 2+x & ; x \neq 3 \\ 4 & ; x = 3 \end{cases}$ นี้ค่าของ
 ลิมิตและค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = 3$ ไม่เท่ากัน ดูกราฟข้างล่างนี้ประกอบ



ท่านได้เห็นฟังก์ชันชนิดที่ค่าลิมิตกับค่าของฟังก์ชันไม่เท่ากันแล้ว ต่อไปนี้ลองดูฟังก์ชันชนิดพิเศษบ้าง อย่างคุณใหม่ละ เอะละ เปิดไปกรอบ 37 หน้า 19 ซิแล้วจะพบ

6. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

ก่อนอื่นต้องทราบก่อนว่า การหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใด ๆ คือการแทนค่าตัวแปรในฟังก์ชันด้วยค่านั้น เช่นต้องการหาค่าฟังก์ชัน f ที่จุด $x = 3$ เราต้องแทนค่าตัว x ในฟังก์ชัน f ด้วย 3 จึงจะถูกต้อง แต่ในที่นี้ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันชนิดพิเศษที่มีเงื่อนไขตามมาควบ ดังนั้นจะหาค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = 3$ ได้หรือไม่ ลองคิดดูอีกครั้งหนึ่งเมื่อแน่ใจว่าพอจะตอบได้ขอให้เปิดไปยังกรอบ 4 หน้า 2 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง ขอให้โชคก็เลือกคำตอบถูก

7. สมมติว่า ϵ (epsilon) เป็นเลขบวกที่เรากำหนดให้ เราต้องการที่จะให้ $f(x)$ กับ L ต่างกันน้อยกว่า ϵ ไม่ว่า ϵ จะเป็นเลขบวกตัวใดก็ตาม เราสามารถบอกลงไปให้ชัดได้ว่า x กับ a จะต้องต่างกันน้อยกว่า เท่านั้นเท่านี้ จึงจะพอทำให้ $f(x)$ กับ L ต่างกันน้อยกว่า ϵ ได้ กล่าวคือพอเราบอกเราว่า คุณหาได้ $f(x)$ กับ L น้อยกว่าเลขบวกตัวหนึ่ง สมมติว่าเป็น ϵ เราจะต้องมีทางเอาเลข ϵ มา บวก ลบ คูณ หาร หรือด้วยวิธีใดก็ตามจนได้เลขอีกตัวหนึ่ง สมมติว่าให้เป็น δ (อ่านว่า delta) แล้วยืนยันกับเราว่า " ค่าของฟังก์ชัน f กับค่าลิมิต L จะต่างกันน้อยกว่า ϵ อย่างแน่นอน ขอแค่เพียงให้ใช้ค่าของ x ต่างจาก a น้อยกว่า δ เท่านั้น "

ขอให้ท่านอ่านบทวนข้อความข้างบนอีก 1 - 2 ครั้งจนกว่าท่านจะเข้าใจที่สุด เพราะเป็นตอนที่สำคัญมาก เมื่อท่านอ่านเข้าใจแล้วขอให้เปิดไปยังกรอบ 22 หน้า 12 เพื่อพบกับนิยามที่เป็นสากล ทุกท่านใช้นิยามนี้สื่อความหมายในเรื่องลิมิต ขอให้ศึกษาอย่างละเอียดและให้เข้าใจลึกซึ้ง เอาละ เปิดไปกรอบ 22 หน้า 12 ได้แล้ว

อภินันท์ + ศักดิ์

8. ท่านตอบว่า : $x \in (a - \delta, a + \delta)$

ดีมาก ท่านตอบได้ถูกต้องที่สุด $x \in (a - \delta, a + \delta)$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $a - \delta < x < a + \delta$ คือ x มีค่าอยู่ระหว่าง $a - \delta$ กับ $a + \delta$ ท่านคงพอจะเข้าใจนิยามคร่าว ๆ ของลิมิตแล้ว คราวนี้อนุญาตให้ท่านพักมือได้อีก 3 นาที ค้างใจให้คิด ๆ แล้วเปิดไปยังกรอบ 27 หน้า 14/ 1 จะรู้ได้ว่าตนเองมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่เรียนมาแล้วเพียงใด เร็ว ๆ ซิ

9. ท่านตอบว่า : หาค่าไม่ได้

ถูกต้อง ท่านมีความเข้าใจเกี่ยวกับระบบจำนวนดีมาก จะเห็นว่าฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ นั้น เมื่อแทน x ด้วย 4 แล้ว จะได้ผลลัพธ์ดังนี้ คือ

$$f(4) = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{0}$$

ซึ่งไม่มีความหมาย (meaningless) หรือหาค่าไม่ได้นั่นเอง

ท่านคงจะพอเข้าใจการหาค่าของฟังก์ชันบ้างแล้ว ต่อไปนี้จะเรียนเรื่องใหม่ที่คล้ายกับเรื่องการหาค่าของฟังก์ชันที่ท่านเรียนมากแล้ว เรื่องนี้มีประโยชน์มากสำหรับท่านที่ต้องการจะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป ขอให้ท่านตั้งใจตั้งแต่ต้น เมื่อพร้อมแล้วขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 13 หน้า 7 เพื่อพบกับของใหม่ที่ท่านยังไม่เคยพบ

10. ท่านตอบว่า : 1

ท่านคงคิดว่า เอา 0 หารด้วย 0 ได้ผลลัพธ์เป็น 1 ใช่ไหมละ ทดลองให้ผลลัพธ์เป็นอย่างอื่นดูบ้างจะได้ไหม เช่นให้ $\frac{0}{0} = 2$, $\frac{0}{0} = 3$, ซึ่งจะพบว่า เป็นจริงทั้งนั้นเพราะ $0 = 0 \times 2$, $0 = 0 \times 3$, ตามนิยามของการหาร ฉะนั้นจะเห็นว่า ไม่ว่าท่านจะให้คำตอบเป็นอะไรย่อมถูกทั้งนั้น เมื่อเป็นดังนี้ท่านจะสรุปได้ว่าอย่างไร เป็นไปกรอบ 35 หน้า 18 อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบที่ท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุด เปิดเร็ว ๆ เข้าเถิด

11. ท่านตอบว่า : $x \in (a + \delta, a - \delta)$

เอาแล้วซี ท่านคิดกลับกับความเป็นจริงอีกแล้ว การที่เราจะเขียนว่า $x \in (a, b)$ นั้นหมายความว่า ค่าของ x จะต้องอยู่ระหว่าง a กับ b นั่นคือ $a < x < b$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $b > a$ แต่ตามที่ท่านตอบ $a + \delta$ กับ $a - \delta$ พิจารณาว่าจำนวนไหนมากกว่ากัน (อย่าลืม $\delta > 0$) ฉะนั้นเมื่อท่านพอจะคิดได้แล้วว่าสิ่งที่ควรเป็นนั้นคืออะไร ขอให้เปิดกลับไปกรอบ 22 หน้า 12 แล้วเลือกคำตอบใหม่อีกครั้ง

12. ท่านตอบว่า : 3

ถูกต้องแล้ว x จะต้องเข้าใกล้ 3 มากยิ่งขึ้นจึงจะทำให้ค่าของ $2 + x$ ใกล้กับ 5 ดังที่ต้องการ แต่มีปัญหามาอีกว่า " ถ้าไม่ใช่ค่า x ที่เท่ากับ 3 เราสามารถจะทำให้ค่าของ $2 + x$ กับ 5 ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ ได้หรือไม่ " คำว่า " $2 + x$ กับ 5 ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ " นั้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ในข้อใดจึงจะถูกต้องที่สุด

ตอบ $(2 + x) - 5 < \frac{1}{100}$ เปิดไปกรอบ 28 หน้า 15

$5 - (2 + x) < \frac{1}{100}$ " 31 " 16

$|(2 + x) - 5| < \frac{1}{100}$ " 18 " 10

13. | ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการหาลิมิตของฟังก์ชันบ้าง ตามที่ท่านเรียนมาแล้วเป็นการหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง เช่นที่จุด $x = 3$ ท่านก็แทน x ด้วย 3 ตลอด ผลที่ได้ก็คือค่าของฟังก์ชัน แต่ถ้าหากเราไม่สนใจค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = 3$ ละ เรากลับมาสนใจเฉพาะค่าที่อยู่ใกล้เคียงกับจุด $x = 3$ (คือ รอบ ๆ จุด $x = 3$ แต่ $x \neq 3$) ว่าค่าของฟังก์ชัน f จะเป็นอย่างไร

ในการพิจารณานั้นเราพูดว่า " เมื่อ x เข้าใกล้ 3 (แต่ไม่เท่ากับ 3) ค่าของฟังก์ชัน f จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด " ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = 2 + x$$

เมื่อ x เข้าใกล้ 3 มาก ๆ (แต่ไม่เท่ากับ 3)

สมมติให้ $x = 2.9$	จะได้ค่าของฟังก์ชัน	$f = 2 + 2.9 = 4.9$
$x = 2.99$	"	$f = 2 + 2.99 = 4.99$
$x = 3.01$	"	$f = 2 + 3.01 = 5.01$
$x = 3.001$	"	$f = 2 + 3.001 = 5.001$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

จากตัวอย่างสรุปได้ว่า " ถ้า x เข้าใกล้ 3 มาก ๆ (แต่ไม่เท่ากับ 3) ฟังก์ชัน f จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด "

<u>ตอบ</u>	4	เปิดไปรอบ	53	หน้า	27
	5	"	2	"	1
	3	"	51	"	26

14. ท่านตอบว่า : $x \in (a, b)$

ท่านเข้าใจความหมายของ Open interval ผิดนัก การที่จะเขียนว่า $x \in (a, b)$ หมายความว่า x จะต้องมียู่ระหว่าง a กับ b แต่ไม่รวม a และ b นั่นคือ $a < x < b$ ฉะนั้น ในกรณีนี้ $a - \epsilon < x < a + \epsilon$ ควรจะเขียนในรูปของ Open interval ได้อย่างไร เมื่อท่านพอจะคิดได้แล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบ 22 หน้า 12 แล้วเลือกคำตอบใหม่

15. ท่านตอบว่า : 5

ดีมาก ท่านเข้าใจถูกต้องทีเดียว คำตอบ 5 ได้มาจากการแทน x ด้วย 3 ในฟังก์ชัน

นั่นคือ $f(3) = 2 + 3 = 5$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

จะเห็นว่า การหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใด ๆ นั้น หาได้โดยการแทนค่าตัวแปรในฟังก์ชันด้วยจุดที่กำหนดให้นั่นเอง

คราวนี้ลองดูซิว่า ถ้ากำหนดให้ $f(x) = \frac{2}{x-4}$ ค่าของฟังก์ชันที่จุด $x = 4$ จะเป็นเท่าไร

ตอบ 0 เปิดไปกรอบ 50 หน้า 26

2 " 34 " 18

หาค่าไม่ได้ " 9 " 5

16. ✓ ข้อสังเกต 1. " ที่กล่าวว่า การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันโดยเลือกค่า x หลาย ๆ ค่าให้ใกล้ 3 เข้าไปทุกทีนั้น จะเริ่มจากจำนวนจริง ๆ ใด ๆ ก็ได้ เช่น อาจเลือกค่าของ $x = 20, 7, 3.5, 3.1, 3.01, 3.0001, \dots$ ค่าของ $2 + x$ ที่กำหนดไว้จะเป็น $22, 9, 5.5, 5.1, 5.01, 5.0001, \dots$ ตามลำดับ หรืออาจเลือก $x = 0, 1, 2, 2.5, 2.9, 2.999, \dots$ ค่าของ $2^x + x$ ที่คำนวณได้จะเป็น $2, 3, 4, 4.5, 4.9, 4.999, \dots$ ตามลำดับ ผลลัพธ์สุดท้ายก็เหมือนเดิม คือลิมิตของฟังก์ชันยังคงเป็น 5 เพราะเห็นได้ว่า x ยิ่งใกล้ 3 ค่า $2 + x$ ยิ่งใกล้ 5 ทุกที "

เป็นอย่างไบบ้างข้อสังเกตที่ 1 คิดว่าท่านคงเข้าใจดี ถ้ายังไม่เข้าใจขอให้อ่านอีกครั้งหนึ่ง เพื่อเข้าใจแล้วเปิดไปกรอบ 32 หน้า 17

17. ท่านตอบว่า : 2

ท่านยังเข้าใจการหาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ผิดอีกนิด การหาค่าของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ นั้น ให้แทนค่าด้วยจุดที่เราต้องการจะหาลงในฟังก์ชันที่กำหนดมา เช่น เมื่อกำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันอะไรก็ตาม ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ คือ $f(a)$ ซึ่งสามารถหาได้โดยแทน x ทุกตัวที่มีอยู่ด้วย a ก็จะได้อัตราตามที่ต้องการ

ขอให้ท่านอ่านคำอธิบายข้างบนนี้อีกครั้งหนึ่ง จนท่านแน่ใจว่าท่านเข้าใจอย่างแท้จริงแล้วจึงค่อยเปิดไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 แล้วพยายามเลือกคำตอบที่ถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง ขอให้ท่านโชคดีเลือกคำตอบที่ถูก

18. ท่านตอบว่า : $\left| (2 + x) - 5 \right| < \frac{1}{100}$

ดีมาก ท่านตอบได้ตรงที่สุดเลย " ค่าความแตกต่างระหว่างจำนวนสองจำนวน " เราคิดค่าสมบูรณ์ (Absolute value) เสมอ เพราะระหว่างสองจำนวนนั้น จำนวนใดจำนวนหนึ่งอาจจะมากกว่ากันก็ได้

มีปัญหาคือไปอีกว่า " ถ้าเราสามารถทำให้ค่าของ $2 + x$ กับ 5 ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ แล้ว ค่าของ x จะต้องต่างจาก 3 แค่ไหน " ข้อความที่ขีดเส้นใต้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $|x - 3|$ "

วิธีแก้ปัญหาคือ ลองคิดในแถบกระดาษว่า $| (2 + x) - 5 |$ มีค่าเท่าไร เราพบว่า $| (2 + x) - 5 | = | 2 + x - 5 | = | x - 3 |$ นั้นเอง จากนั้นเราสรุปได้ทันทีว่า " ต้องเลือก x ให้ต่างจาก 3 น้อยกว่า $\frac{1}{100}$ "

จึงจะทำให้ $2 + x$ กับ 5 ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{100}$ " หรือเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า

" ถ้า $|x - 3| < \frac{1}{100}$ แล้วเราจะได้ $| (2 + x) - 5 | < \frac{1}{100}$ "

มาถึงตอนนี้รู้สึกว่เหนื่อย ใหญ่คพิักได้ 2 นาที เสร็จแล้วเปิดไปกรอบ

26 หน้า 14

19. ท่านตอบว่า : เพราะค่าสมบูรณ์อาจจะน้อยกว่าศูนย์ก็ได้

หยุดก่อน ท่านเข้าใจเกี่ยวกับค่าสมบูรณ์ยังอีกอยู่อีกนิด ไม่มีนิยามที่ไหนเลยที่บอกว่า " ค่าสมบูรณ์อาจน้อยกว่าศูนย์ได้ " อย่างน้อยที่สุดก็เป็นได้แค่ศูนย์ คินนี้ลองกลับไปทวนเรื่องค่าสมบูรณ์ใหม่ แต่ตอนนี้ขอให้เปิดไปกรอบ 26 หน้า 14 ก่อนแล้วพิจารณาว่าทั้งสามคำตอบนั้น คำตอบใดที่ถูกต้องที่สุดให้เลือกว่าคำตอบนั้น

20. ท่านตอบว่า : 0

ขอโทษ 0 หารควย 0 มีค่าเป็น 0 อย่างนั้นหรือ ผิดคนใด ท่านคง
จำได้ว่าในทางคณิตศาสตร์ $\frac{0}{0}$ เขานิยามไว้ว่าอย่างไร ท่านลองให้ผลลัพธ์เลข
อะไรก็ได้สัก 2 - 3 ตัว แล้วสังเกตผลจริงๆ ว่าเป็นอย่างไร เช่นสมมติว่าให้ $\frac{0}{0} = 1$
ฉะนั้น $0 = 0 \times 1 = 0$ ซึ่งเป็นจริงตามนิยามของการหาร

ต่อไปนี้ $\frac{0}{0} = 2$ ฉะนั้น $0 = 0 \times 2 = 0$ ซึ่งก็เป็นจริงอีก และเมื่อ
ท่านทดลองต่อ ๆ ไปก็จะให้ผลเช่นนี้อีก

ฉะนั้นท่านจะสรุปว่าอย่างไร เมื่อ $x = 0$ เปิดไปกรอบ 35 หน้า 18
ก่อนแล้วจึงเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง พิจารณาให้คือนะ

21. ท่านตอบว่า : ไม่ได้

ดีมาก ท่านตอบได้ถูกต้องแล้ว เพราะที่กำหนด $f(x) = 2 + x$;
($x \neq 3$) แสดงว่าที่จุด $x = 3$ ฟังก์ชัน f ของเราหาค่าไม่ได้หรือไม่นิยาม
นั่นเอง ต่อไปถ้ากำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & ; \quad x \neq 3 \\ 4 & ; \quad x = 3 \end{cases}$$

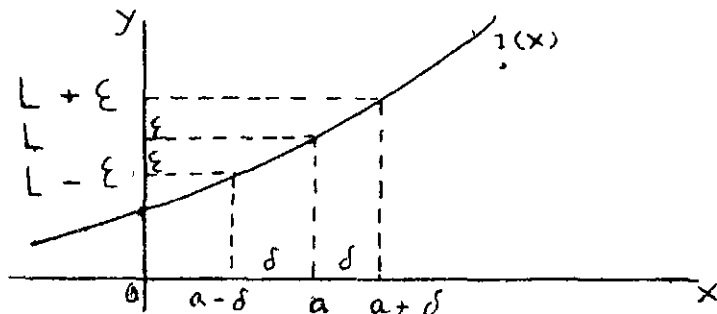
ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = 3$ เป็นเท่าไร

ตอบ 5 เปิดไปกรอบ 25 หน้า 14

3 " 45 " 23

4 " 29 " 15

22. นิยาม " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หมายถึงค่าของ $\epsilon > 0$ ที่กำหนดให้ เราจะ
มีเลข $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \epsilon$ ถ้าเมื่อว่า $0 < |x - a| < \delta$ "
ขอให้พิจารณาประกอบ



ข้อสังเกต : ข้อความที่ว่า " $|f(x) - L| < \epsilon$ ถ้าเมื่อว่า $0 < |x - a| < \delta$ "
มีความหมายเช่นเดียวกับ " $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ ถ้าเมื่อว่า $a - \delta < x < a + \delta$ "
และ " $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ ถ้าเมื่อว่า $x \in \dots\dots$ "

<u>ตอบ</u>	$x \in (a, \delta)$	เปิดไปกรอบ	14	หน้า	8
	$x \in (a - \delta, a + \delta)$	"	8	"	4
	$x \in (a + \delta, a - \delta)$	"	11	"	5

23. ท่านตอบว่า : 0

พิจารณาก่อนชื่อว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 3 นั้น ค่าทุกค่าที่ต่างไปจาก 3
เรานำมาพิจารณาได้ซึ่งเลขตัวนั้นอาจจะมากหรือน้อยกว่า 3 ก็ได้ เอาละ พอจะนึก
ออกแล้วสินะว่าเลขอะไรที่แตะต้องไม่ได้ ถ้านึกได้แล้วเปิดไปกรอบ 38 หน้า 20
แล้วพิจารณาเลือกคำตอบใหม่

๒

(24) กล่าวโดยทั่วไป ถ้าเราพูดว่า " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ " เราย่อมหมายถึง

1. สำหรับ $x = a$ ค่าของ $f(x)$ จะหาได้หรือไม่เราไม่สนใจ
2. เราต้องสามารถทำให้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ กับค่าลิมิตใกล้เคียงกันเพียงใดก็ได้ โดยมีข้อแม้ว่า เรามีสิทธิ์ที่จะเลือกค่า x ให้ใกล้ a มากพอ

ที่กล่าวมานี้จะถือว่าเป็นนิยาม (definition) ของลิมิตยังไม่ได้ เพราะยังมีถ้อยคำที่มีความหมายคลุมเครืออยู่บางบางประโยค กล่าวคืออย่างไรที่ว่า " $f(x)$ กับ L มีค่าใกล้เคียงกันเพียงใดก็ได้ " คนฟังก็คงจะสงสัยถามว่า ถ้าเช่นนั้นให้ต่างกันน้อยกว่า 1 ได้ไหม เราก็ตอบว่าได้ เขาก็ถามต่อไปว่าถ้าเช่นนั้นให้ต่างกันน้อยกว่า $\frac{1}{4}$ ได้ไหม น้อยกว่า $\frac{1}{100}$ ได้ไหม น้อยกว่า $\frac{1}{5,000}$ ได้ไหม ฯลฯ เรา ก็ตอบว่าได้ทั้งนั้น การถามตอบเช่นนี้อาจจะดำเนินไปหลายสิบหลายร้อยครั้ง เราก็ตอบว่าได้ทุกครั้ง แต่ก็มีใ้ทำให้ผู้ถามเกิดความเข้าใจดีขึ้นกว่าเก่า แล้วเขาก็จะถามขึ้นมาอีกที จนกว่าเราเหลือทนที่จะตอบ จึงบอกเขาไปว่า " ถ้าเขากำหนดเลขมาตัวหนึ่งขอให้เป็นบวก เราก็จะสามารถทำให้ผลต่างของ $f(x)$ กับ L น้อยกว่าเลขตัวนั้นได้ ขอแค่เพียงให้เรามีสิทธิ์ที่จะเลือก x ให้ใกล้ a มากพออีกแล้วกัน "

~~~~~

มาถึงตอนนี้เป็นอย่างไรบ้าง พอจะเข้าใจขึ้นบ้างไหม ถ้ายังไม่เข้าใจขอให้อ่านคำอธิบายข้างบนอีกครั้ง ตั้งใจให้ดี เมื่อเข้าใจแล้วขอให้เปิดต่อไปยังกรอบ  
7 หน้า 4 อย่างรวดเร็ว .....



25. ท่านตอบว่า : 5

ท่านยังเข้าใจผิดอยู่อีกนิดหนึ่ง การที่ท่านตอบ 5 แสดงว่าท่านแทน  $x = 3$  ลงในฟังก์ชัน  $f$  ใหม่นะ แต่ว่าเรากำหนดฟังก์ชันสองตอนนะ ตอนแรกกำหนด  $x \neq 3$  ตอนที่สอง กำหนด  $x = 3$  ฉะนั้นค่าของฟังก์ชันที่จุด  $x = 3$  ต้องเป็นเท่าไร เมื่อคิดได้แล้วขอให้รีบเปิดกลับไปยังกรอบ 21 หน้า 11 แล้วพยายามอย่างเต็มที่ในการเลือกคำตอบใหม่

26. ถ้าให้  $\epsilon$  อ่านว่า " เอพซิดอน " (epsilon) เป็นจำนวนจริงบวก ปัญหาของเราอาจพูดได้ว่า "  $x$  กับ 3 จะต้องต่างกันสักแค่ไหน จึงจะทำให้  $2 + x$  กับ 5 ต่างกันน้อยกว่า  $\epsilon$  " หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า

$$0 < |x - 3| < \epsilon \text{ ; ว่าจะหาว่าอะไรจึงจะทำให้ } |(2 + x) - 5| < \epsilon \text{ นั้นเอง}$$

ขอให้ดูข้อความที่ขีดเส้นใต้ ถามว่าทำไมจึงต้องเขียนว่า " $|x - 3|$  ต้องมากกว่า 0 "

ตอบ

เพราะค่าสมบูรณ์ต้องมากกว่าศูนย์เสมอ

เปิดไปกรอบ 3 หน้า 2

เพราะค่าสมบูรณ์อาจจะน้อยกว่าศูนย์ได้

เปิดไปกรอบ 19 หน้า 10

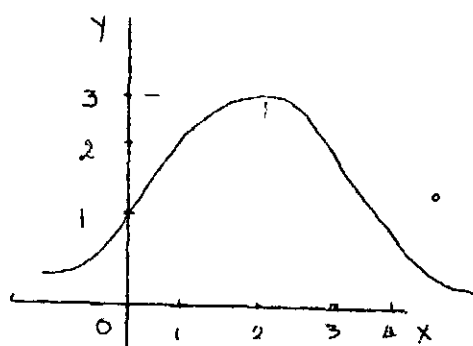
เพราะป้องกันไม่ได้  $x = 3$

เปิดไปกรอบ 36 หน้า 19

27. เอาละ ท่านเป็นคนเก่งมากที่เรียนไวกวเร็วดังกรอบนี้ ต่อไปนี้จะเป็นการทบทวนความเข้าใจที่ท่านมีอยู่ โดยการทําแบบฝึกหัด ขอให้ตั้งใจทําให้ถูกมากที่สุดเพื่อจะได้เป็นพื้นฐานในโอกาสต่อไป

### แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. จงนิยาม " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ "
2. เมื่อเราพบช่วง  $(a - \delta, a + \delta)$  บนแกน  $x$  เวลาที่จะพิสูจน์ว่าลิมิตเป็นจริง เราจะเห็นว่า  $\delta$  ขึ้นอยู่กับค่า  $(L, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
3. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังต่อไปนี้ จงเติมค่าลงในช่องว่าง



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0.5$$

$$x \rightarrow 4$$

4. จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$$

$$2 \times 2 - 5 = -1$$

$$4 - 5 = -1$$

28. ท่านตอบว่า :  $(2 + x) - 5 < \frac{1}{100}$

ความจริงคำตอบนี้ถูก แต่ไม่ถูกที่สุด ขอทำความเข้าใจอีกนิดหนึ่งคือ คำว่า " $2 + x$  ต่างจาก 5 น้อยกว่า  $\frac{1}{100}$ " นั้นมีความหมายว่า จำนวนไหนจะมากกว่าได้  $2 + x$  อาจจะมีมากกว่า 5 หรือไม่ 5 ก็อาจจะมีมากกว่า พูดอีกอย่างหนึ่งคือว่า  $2 + x$  อยู่ห่างจาก 5 เท่าไรนั่นเอง พอจะเข้าใจแล้วใช่ไหม ถ้ายังไม่เข้าใจขอให้ท่านข้อความข้างบนนี้อีกครั้งหนึ่ง แต่ถ้าเข้าใจแล้วขอให้กลับไปยังกรอบที่ 12 หน้า 6 แล้วพยายามเลือกคำตอบใหม่อีกครั้งหนึ่ง

29. ท่านตอบว่า : 4

ดีมาก ท่านตอบตรงกับที่โจทย์ต้องการ จากฟังก์ชันที่กำหนดมานั้น จะเห็นว่า เมื่อ  $x = 3$  ฟังก์ชันของเรานิยามไว้ให้เท่ากับ 4 ซึ่งตรงกับที่ท่านตอบพอดี คราวนี้ลองพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ เข้าใกล้ 3 ซ้ำๆ ค่าของ  $f$  จะเป็นเท่าไร นั่นคือจงหาว่า  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  เป็นเท่าไร เมื่อกำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & ; x \neq 3 \\ 4 & ; x = 3 \end{cases}$$

|            |   |            |    |      |    |
|------------|---|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | 4 | เปิดไปกรอบ | 46 | หน้า | 24 |
|            | 5 | "          | 5  | "    | 3  |
|            | 3 | "          | 39 | "    | 20 |

30. ท่านตอบว่า : หาค่าได้ไม่แน่นอน

ถูกแล้ว ก็มาก ทั้งนี้เพราะ  $\frac{0}{0}$  หาค่าได้ไม่แน่นอน จะให้เป็นอะไรก็ได้เช่น  
ให้  $\frac{0}{0} = 1$  ,  $\frac{0}{0} = 2$  ,  $\frac{0}{0} = 3$  , ..... ก็เป็นจริงทั้งนั้น เพราะว่า  $0 = 0 \times 1$  ,  
 $0 = 0 \times 2$  ,  $0 = 0 \times 3$  , ..... ตามนิยามของการหาร ฉะนั้นค่าตอบที่แน่นอน  
จึงไม่มี เมื่อเข้าใจได้แล้ว ขอให้เปิดไปดูข้อสรุปบางประการของลิมิตที่จะให้นิยาม ต้อง  
อ่านให้เข้าใจนะ เพราะถึงตอนที่สำคัญที่สุดของเรื่องแล้ว เร็วซี เปิดไปกรอบ 24  
หน้า 13

31. ท่านตอบว่า :  $5 - (2 + x) < \frac{1}{100}$

ความจริงคำตอบนี้ถูก แต่ไม่ถูกต้องที่สุด ขอทำความเข้าใจอีกนิดหนึ่ง คือคำว่า  
"  $2 + x$  ต่างจาก 5 น้อยกว่า  $\frac{1}{100}$  " นั้นมีความหมายว่า ตัวไหนจะมากกว่าก็ได้  
คือ  $2 + x$  อาจมากกว่า 5 หรือไม่ 5 ก็อาจจะมากกว่า พูดอีกอย่างหนึ่งก็คือว่า  
 $2 + x$  กับ 5 อยู่ห่างกันเท่าไรนั่นเอง พอจะเข้าใจแล้วใช่ไหม ถ้ายังไม่เข้าใจ  
ขอให้อ่านข้อความข้างบนนี้อีกครั้งหนึ่ง ถ้าพอจะเข้าใจแล้วให้เปิดกลับไปยังกรอบ 12  
หน้า 6 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง

32. ข้อสังเกต 2. ในตัวอย่างที่แล้วคือ  $f(x) = 2 + x$  บังเอิญค่าของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เป็น 3 มีค่าเท่ากับ 5 และค่าลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ก็เป็น 5 ซึ่งเท่ากันพอดี แต่บางครั้งค่าลิมิตของฟังก์ชันกับค่าของฟังก์ชัน ณ จุดใดจุดหนึ่งก็อาจไม่เท่ากัน รอไว้อีกหน่อยแล้วท่านจะพบด้วยตนเอง ตอนนี้ถ้าเข้าใจข้อสังเกตที่ 2 นี้แล้ว ขอให้เปิดไปยังกรอบ 38 หน้า 20 แต่ถ้ายังไม่เข้าใจให้อ่านอีกจนกว่าจะเข้าใจ

33. ท่านตอบว่า : 3

คำตอบของท่านเกือบถูก แต่ยังมีข้อบกพร่องอีกเล็กน้อยที่จะต้องแก้ไข คือว่า ค่าของฟังก์ชันที่จุด  $x = 3$  มิได้หมายความว่า ค่าของฟังก์ชันจะต้องเป็น 3 การหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดๆ นั้น ให้แทนตัวแปรในฟังก์ชันด้วยจุดที่เราต้องการหา เช่น ถ้ากำหนด  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันใดก็ตาม ค่าของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $x = a$  คือ  $f(a)$  ซึ่งเป็นการแทนค่า  $x$  ทุกตัวในฟังก์ชันด้วย  $a$  เมื่อพอจะเข้าใจแล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 ใหม่ พยายามเลือกคำตอบอีกครั้ง

34. ท่านตอบว่า : 2

คำตอบของท่านถูกหรือเปล่าหนอ จะยังไม่บอกว่าถูกหรือไม่ การที่ท่านตอบว่า 2 ก็หมายความว่า เมื่อท่านแทน  $x$  ด้วย 4 ในฟังก์ชัน  $f$  แล้วผลลัพธ์ออกมาเป็น 2 นั่นคือ

$$f(4) = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{0}$$

ตามที่ท่านสรุปว่า  $\frac{2}{0} = 2$  นั้นเป็นความเข้าใจผิดอย่างยิ่ง เพราะตามนิยาม การหารในระบบจำนวน  $\frac{2}{0} = 2$  หมายความว่า  $2 = 0 \times 2$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ฉะนั้น ขอให้ท่านพิจารณาอย่างละเอียดว่าค่าที่สมควรเป็นเท่าใด เสร็จแล้วให้เปิดกลับไปยังกรอบ 15 หน้า 8 อีกครั้ง แล้วพยายามเลือกคำตอบที่ถูก

35. ท่านตอบว่า : 1

ใช่แล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ เข้าใกล้ 0 เป็น 1 ทั้งนี้เพราะ เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 แต่  $x \neq 0$  ดังนั้น  $\frac{x}{x}$  จึงเท่ากับ 1 ลิมิตจึงเป็น 1 ถึงแม้ท่านตอบมานั้นเอง คราวนี้พิจารณาว่าค่าของฟังก์ชันที่จุด 0 ว่ามีค่าเท่าไร

|            |                   |               |    |      |    |
|------------|-------------------|---------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | 0                 | เปิดไปยังกรอบ | 20 | หน้า | 11 |
|            | 1                 | "             | 10 | "    | 5  |
|            | หาค่าได้ไม่แน่นอน | "             | 30 | "    | 16 |

36. ท่านตอบว่า : เพราะป้องกันไม่ให้  $x = 3$

คำตอบของท่านถูกแล้ว จำได้ไหมว่าในเรื่องของลิมิต ถ้า  $x$  เข้าใกล้ 3 แสดงว่า  $x$  จะเท่ากับ 3 ไม่ได้ เมื่อเป็นเช่นนี้ ผลต่างระหว่าง  $x$  กับ 3 จะต้องมียุ่หนึ่งละซึ่งค่าสมบูรณ์ของผลต่างนี้จะคงมากกว่า 0 แน่แน่นอน

ต่อไปนี้เป็นข้อสังเกต 3 ข้อ ซึ่งสำคัญมาก ท่านจะต้องศึกษาให้เข้าใจอย่างยิ่ง เอาละ เริ่มศึกษาเลย อ้อ เดี่ยวก่อน เปิดไปยังกรอบ 16 หน้า 9 ดูกว่า เร็วๆ จี

37. กำหนดให้ฟังก์ชัน นิยามโดย

$$f(x) = \frac{x}{x} \quad ; \quad x \neq 0$$

ลองกำหนดดูซิว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

|            |          |            |    |      |    |
|------------|----------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | 0        | เปิดไปกรอบ | 49 | หน้า | 25 |
|            | 1        | "          | 35 | "    | 18 |
|            | $\infty$ | "          | 47 | "    | 24 |

38. ข้อสังเกต 3. ค่าของ  $x$  ที่ใช้ในการหาค่าฟังก์ชัน และการหาลิมิตของฟังก์ชันต่างกัน เพราะถ้าจะหาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ  $x$  เป็น 3 ( ตามตัวอย่างที่แล้ว ) เราใช้ค่า  $x$  เป็น 3 ค่าเดียวเท่านั้น แต่การหาลิมิต ค่า  $x$  ใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 3 นำมาใช้ในการพิจารณาหาลิมิต มีค่าของ  $x$  ค่าเดียวเท่านั้นที่แต่ละครั้งไม่ได้คือค่า  $x = \dots\dots\dots$  .

|            |     |            |    |      |    |
|------------|-----|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | 0   | เปิดไปกรอบ | 23 | หน้า | 12 |
|            | 3   | "          | 4  | "    | 2  |
|            | - 3 | "          | 43 | "    | 22 |

39. ท่านตอบว่า : 3

ท่านเข้าใจเกือบถูก แต่ยังผิดพลาดอีกนิด โจทย์ถามหาลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 คำตอบที่ท่านต้องตอบคือค่าของฟังก์ชัน  $f$  เข้าใกล้จำนวนอะไร เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ต่างหาก คำตอบนี้ได้จากการพิจารณาค่า  $x$  ที่ใกล้ๆ 3 ( แต่  $x \neq 3$  ) ว่าคุณเป็นอย่างไร ฟังก์ชัน  $f$  เข้าใกล้เลขจำนวนใดหรือไม่ ถ้าพอคิดออกแล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 29 หน้า 15 ใหม่ ลองเลือกคำตอบอีกครั้ง คราวนี้คงถูกแน่



40. ท่านตอบว่า : 2

ท่านยังเข้าใจผิดพลาดอยู่ ลองพิจารณาให้ดีกว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 แล้ว ค่าของฟังก์ชัน  $f$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด จะเห็นชัดว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของฟังก์ชัน  $f$  จะเข้าใกล้ 4 ซึ่งมีได้เป็น 5 ดังที่โจทย์ต้องการ ดังนั้น  $x$  จะต้องเข้าใกล้เลขจำนวนใดจึงจะทำให้ค่าของฟังก์ชัน  $f$  เข้าใกล้ 5 ฉะนั้นจึงเปิดกลับไปยังกรอบ หน้า 22 แล้วเลือกคำตอบใหม่ เลือกชนิดที่ถูกต้อง

41. ท่านตอบว่า : ใต้

เอ ไม่แน่ใจ ขอให้ดูฟังก์ชันที่นิยามอีกครั้งหนึ่ง คือเรากำหนดว่า

$$f(x) = 2 + x ; x \neq 3$$

จะเห็นว่าในคอนท้ายของฟังก์ชัน โจทย์กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า  $x$  ต้องไม่เท่ากับ 3 แสดงว่าหตุ  $x = 3$  เราไม่รู้เหมือนกันว่าค่าของฟังก์ชันเป็นเท่าไร คือโจทย์ไม่ได้นิยามไว้นั่นเอง ท่านพอจะบอกได้หรือไม่ว่าค่าของฟังก์ชันที่หตุ  $x = 3$  หาได้หรือไม่ เมื่อแน่ใจแล้วขอให้เปิดไปที่กรอบ 4 หน้า 2 ใหม่เพื่อเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง

42. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

ดีมาก คำตอบของท่านถูกต้องแล้ว ขอให้ท่านจำการเขียนสัญลักษณ์ไว้ให้ดี เพราะมีความสำคัญมากและจะคงใช้เกี่ยวข้องกับสัญลักษณ์ตลอดเวลาที่เรียนคณิตศาสตร์

จากข้อความที่ว่า " ถ้า  $x$  เข้าใกล้ 3 แล้วค่าของ  $2 + x$  จะเข้าใกล้ 5 " นั้นหมายความว่า " เราอาจทำให้ค่าของ  $2 + x$  กับ 5 ใกล้เคียงกันเพียงใดก็ได้ ถ้าเลือก  $x$  ให้ใกล้ ..... มากยิ่งขึ้น "

| ตอบ | 3 | เปิดไปกรอบ | 12 | หน้า | 6  |
|-----|---|------------|----|------|----|
|     | 5 | "          | 44 | "    | 23 |
|     | 2 | "          | 40 | "    | 21 |

43. ท่านตอบว่า :  $-3$

พิจารณาก่อนซิว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 นั้น ค่าทุกค่าที่ต่างไปจาก 3 เรานำมาพิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  ได้ เลขจำนวนนั้นอาจจะมากหรือน้อยกว่า 3 ก็ได้ ยกเว้นอยู่ตัวเดียวคือตัวที่  $x$  เข้าใกล้ เอาละ คงพอจะนึกออกแล้วว่าเลขจำนวนนั้นคือเลขอะไร ถ้านึกได้แล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 38 หน้า 20 แล้วพยายามเลือกคำตอบที่ถูกให้ได้

44. ท่านตอบว่า : 5

หมุ่ก่อกวน ท่านเข้าใจยังไม่ถูกต้องนัก ค่าของฟังก์ชัน  $x$  ต่างหากที่เข้าใกล้ 5 แต่ในที่นี้โจทย์ถามว่า "  $x$  เข้าใกล้เลขจำนวนใด จึงจะทำให้ค่าของฟังก์ชัน  $x$  เข้าใกล้ 5 " มิได้หมายความว่า  $x$  เข้าใกล้ 5 ดังนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ลองเปิดไปพิจารณาคำตอบใหม่ให้ดีกว่า โจทย์ถามอะไร แล้วพยายามเลือกคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ เร็วซี เปิดไปกรอบ 42 หน้า 22 ได้แล้ว

45. ท่านตอบว่า : 3

เกือบถูกนะ ค่าของฟังก์ชัน  $x$  ไม่เท่ากับ 3 แต่โจทย์ให้หาค่าของฟังก์ชัน  $x$  ที่จุด  $x = 3$  ต่างหาก ลองพิจารณาฟังก์ชันให้ดีกว่า โจทย์กำหนดไว้ 2 ตอน คือ ตอนที่หนึ่ง และตอนที่สอง แต่ละตอนเป็นเงื่อนไขของมันเองโดยเฉพาะ จะต้องศึกษาแต่ละตอนให้ดี ไม่ต้องรีบร้อน ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบ 21 หน้า 11 ใหม่ แล้วเลือกคำตอบที่ท่านคิดว่าถูกต้องที่สุด ขอให้โชคดี

46. ท่านตอบว่า : 4

เอาละ คราวนี้ตอบผิดแน่ คำตอบ 4 นั้นเป็นค่าของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x = 3$  แต่ในที่นี้เราพูดถึงลิมิตเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ซึ่งเราก็อทราบมาแล้วว่า  $x$  ไม่มีโอกาสที่จะเท่ากับ 3 ได้ ดังนั้นค่าของลิมิตจึงเป็น 4 ไม่ได้แน่นอน ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 29 หน้า 15 ใหม่ คิดให้ลึกๆ หน่อย ฟังก์ชันที่เราเลือกไว้เสมอว่า  $x \neq 3$  แล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

47. ท่านตอบว่า :  $\infty$

นั่นแน่ ผิดอีกแล้ว ท่านคงแทน  $x$  ด้วย 0 ใช่ไหมละ อย่าลืมชื่อว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 นั้น  $x$  จะเท่ากับ 0 ไม่ได้ ฉะนั้นการที่ท่านเอา 0 ไปแทนย่อมผิดแน่ๆ คิดให้ถี่เสียก่อนว่า เมื่อ  $x \neq 0$  แล้ว  $\frac{x}{x}$  จะเป็นเท่าไร เมื่อนึกออกแล้ว ขอให้เปิดกลับไปกรอบที่ 37 หน้า 19 แล้วเลือกคำตอบใหม่ให้ถูก

48. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$

ท่านยังไม่คุ้นกับสัญลักษณ์นี้จึงคอมเม้นท์พลากไป ขอให้เปิดกลับไปอ่านตัวอย่างของสัญลักษณ์ในกรอบที่ 2 หน้า 1 ใหม่ พยายามสังเกตสัญลักษณ์แต่ละตัวว่าก็ได้ คุให้ถี่ถ้วนและรอบคอบที่สุด เพราะสัญลักษณ์นี้สำคัญยิ่งในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ เราจะ เปิดไปกรอบที่ 2 หน้า 1 ได้ พยายามใช้ความสังเกตแล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

---

49. ท่านตอบว่า : 0

ท่านยังเข้าใจไม่ถูกต้องนัก เคยย้ำเสมอว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้เลขจำนวนใดก็ตาม  $x$  จะเท่ากับเลขจำนวนนั้นไม่ได้ ท่านคงให้  $x$  เป็น 0 กระมัง แต่ก็อย่าลืมว่า  $\frac{0}{0}$  นั้นหาค่าที่แน่นอนไม่ได้ และอีกสิ่งหนึ่งที่ควรพิจารณาอย่างยิ่งคือ เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 นั้น  $x$  ไม่มีโอกาสจะเป็น 0 ได้เลย เมื่อเป็นเช่นนี้  $\frac{x}{x}$  ควรจะเป็นอย่างไร ฉะนั้นขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 27 หน้า 19 ใหม่ แล้วจึงเลือกคำตอบใหม่อีกครั้งหนึ่ง

50. ท่านตอบว่า : 0

ท่านเข้าใจนิพจน์ที่เดียว การที่ท่านแทน  $x$  ด้วย 4 ในฟังก์ชัน นั้น ท่านจะได้  $f(4) = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{0}$  ซึ่งจะเห็นว่าเศษส่วนจำนวนนี้มีส่วนเป็น 0 ขอให้ท่านนึกไปถึงนิยามของการหารในเรื่องระบบจำนวนจริงว่า การหารด้วย 0 โดยที่ตัวเศษไม่เท่ากับ 0 นั้น ผลลัพธ์จะเป็นอย่างไร เมื่อท่านคิดได้แล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 15 หน้า 8 แล้วเลือกคำตอบใหม่

---

51. ท่านตอบว่า : 3

ยังไม่ถูกต้องนัก การที่  $x$  เข้าใกล้ 3 มิได้หมายความว่าลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  จะต้องเป็น 3 เสมอไป ในกรณีนี้เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ( แต่ไม่เท่ากับ 3 ) เราต้องเอาค่าของ  $x$  ที่ใกล้ 3 ไปแทนในฟังก์ชัน  $f$  ยิ่งเลือก  $x$  ให้ใกล้ 3 ได้มากเท่าไร ค่าของฟังก์ชัน  $f$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนหนึ่ง เลขจำนวนนั้นแหละคือสิ่งที่ต้องการละ ลองเปิดกลับไปยังกรอบที่ 13 หน้า 7 อีกครั้งซิ แล้วจึงเลือกคำตอบ

52. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

คำตอบของท่านเกือบจะถูกอยู่แล้ว เชียว เพียงแต่ท่านยังกลับตัวอักษรบ้างตัวเท่านั้น ลองนึกดูให้ดีๆ ว่า การที่เราพูดว่า "  $x$  เข้าใกล้ 2 นั้น " เราเขียนอย่างไร เมื่อนึกได้แล้ว ขอจงเปิดกลับไปยังกรอบที่ 2 หน้า 1 อีกครั้งแล้วจึงเลือกคำตอบใหม่ ขอให้โชคคินะ ขอเอาใจช่วย

---

53. ท่านตอบว่า : 4

คำตอบของท่านยังคงคลาดเคลื่อนอยู่ เพราะว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 หมายความว่า  $x$  เกือบจะเท่ากับ 3 ฉะนั้น เมื่อเราแทน  $x$  ด้วยเลขที่เกือบจะเท่ากับ 3 ( แต่ไม่เท่ากับ 3 ) ค่าของฟังก์ชัน  $x$  จึงเกือบจะเท่ากับเลขจำนวนเต็ม ถ้านึกได้หรือยังไม่เข้าใจแจ่มแจ้ง ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 13 หน้า 7 พิจารณาอย่างละเอียดแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

๘3  
11  
A2  
/

บทเรียนโปรแกรม เรื่อง ลิมิต

ตอนที่ 2

การหาค่าของลิมิต

จำนวนกรอบ 34 กรอบ

คำชี้แจง : ในตอนที่ 2 นี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับการหาค่าของลิมิต ขอให้ท่าน  
ศึกษาด้วยความรอบคอบ เรื่องนี้จะต้องใช้ความรู้พื้นฐานจากตอนที่ 1 ซึ่งท่าน  
ได้เรียนมาแล้ว ขอให้ปฏิบัติตามคำสั่งอย่างเคร่งครัดและอ่านทุกตัวอักษรใน  
กรอบที่ท่านเปิดศึกษา เอาละ เมื่อพร้อมแล้วขอให้เปิดไปกรอบที่ 32  
หน้า 17 ขอให้โชคดีนะ



1. ท่านทนาย : 6

ดีมาก ท่านทนายใครตรงที่เกี่ยว ท่านทนายพอเข้าใจเรื่องลิมิตข้างแล้ว ต้อง -  
พยายามเข้าใจให้ถี่ เพราะเรื่องนี้เป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนแคลคูลัสและคณิต -  
ศาสตร์ทุกสาขา

กราวนี้ดูตัวอย่างที่เขียนขึ้นอีกนิก ถ้าให้  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x}$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

| ทนาย | 0 | เปิดไปกรณ | 17 | หน้า | 9  |
|------|---|-----------|----|------|----|
|      | 1 | "         | 21 | "    | 11 |
|      | 3 | "         | 13 | "    | 7  |

$$\frac{x(x+3)}{x(2x^2+1)}$$

$$\frac{0+3}{1}$$

2. ท่านทนาย : 6

กำหนดของทนายยังไม่ถูกต้องนัก ขอให้ทนายพิจารณาอีกครั้งว่า

เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าเท่า 1 ค่าของ  $2 + x$  มีค่าเข้าเท่าเลขจำนวนใด

"  $x$  " 1 "  $x + 3$  " " " " " " " "

ฉะนั้นเมื่อ  $x$  มีค่าเข้าเท่า 1 ค่าของ  $(x + 2)(x + 3)$  จะมีค่าเข้าเท่าเลข  
จำนวนใด ถ้าทนายคิดโดยลวขอให้เปิดคณไปยังกรณที่ 32 หน้า 17 ในใหม่แล้ว -  
พยายามเงือกกำหนดที่ถูกตองให้ถี่

3. ทานตอบว่า : - 5

ถูกต้องแล้ว  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = -5$  ทั้งนี้เพราะ

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1} = 2x - 3 ; x \neq -1$$

ฉะนั้นเมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $-1$  ค่าของ  $2x - 3$  จึงเข้าใกล้  $-5$   
 ปัญหาต่อไปนี้ต้องใช้ความรู้ทางพีชคณิตเขารวช่วยอย่างมาก ถ้าให้

$$f(x) = \left( \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} \right) ; x \geq -1$$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

|     |               |           |    |      |    |
|-----|---------------|-----------|----|------|----|
| ตอบ | $\frac{1}{4}$ | เปิดไปกรณ | 22 | หน้า | 12 |
|     | $\frac{2}{3}$ | "         | 24 | "    | 13 |
|     | 0             | "         | 27 | "    | 14 |

$$\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

4. ทานตอบว่า : ✕ ๒

ดีมากที่สุด ทานเลือกคำตอบนี้เป็นคำตอบแรกหรือเปล่า ถ้าท่านเลือกเป็นครั้งแรก แสดงว่าท่านเข้าใจเรื่องลิมิตอย่างละเอียดเยี่ยม แต่ท่านไม่ได้เลือกเป็นครั้งแรกก็ไม่ใช่ไร เพราะเคยบอกแล้วว่าปัญหาข้อนี้ค่อนข้างยาก มาถึงตอนนี้ให้หยุดพัก 2 นาที แล้วเปิดไปกรณที่ 33 หน้า 18

5. ทานพบว่า : 2

ที่มาก ค่าคง 2 เป็นค่าคงที่ต่ำที่สุด เพราะว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ค่าของ  $\sqrt{x+1}$  จึงเกือบเท่า  $\sqrt{4} = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

ต่อไปขอให้ออกให้ กำหนด  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} ; x \neq 2$

จะเห็นว่า เมื่อ  $x \neq 2$ ,  $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

ฉะนั้นสำหรับค่า  $x$  ทุกตัวที่ต่างไปจาก 2 ;  $f(x) = x+2$

จงหาว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

( ก่อนเลือกคำตอบ ขอให้ท่านอ่านข้อความตั้งแต่บรรทัดที่ 5 ลงมาอีกครั้งหนึ่ง )

ตอบ 0 เปิดไปกรณ 31 หน้า 16

4 " 11 " 6

หากไม่ได้ " 15 " 8

6. ทานพบว่า : หากได้ไม่แน่นอน

นั่นแน่ ทานแทน  $x = -1$  ใน  $f(x)$  เข้าแล้ว เพราะว่าท่านพบว่า " หากได้ไม่แน่นอน นั่นคงมาจาก  $\frac{0}{0}$  กรณีเดียวเท่านั้น ท่านคงยังไม่เข้าใจเรื่องลิมิตที่พอ เคยเข้าเสมอว่า  $x$  จะเท่ากับตัวที่เข้าใกล้ไม่ได้ แนวคิดข้อนี้คล้ายกับข้อที่นานๆมาทีไรก็แปลกๆ ประเด็นนี้ออกหรือยัง เมื่อฝึกได้แล้วจงเปิดดูไปยังกรณที่ 13 หน้า 7 ก็ได้ให้ถ่วงก่อนแล้วจึงเลือกคำตอบ

7. ท่านคิดว่า : หากทำได้ไม่แน่นอน

เอาอีกแล้วซี ท่านคงแทน  $x$  ด้วย 3 ใจใหม่ละ เกือบออกแล้วว่าเราไม่สามารถแทนเช่นนั้นได้ เพราะขณะนี้เรากำลังพูดถึงเรื่องของลิมิต ไม่ได้พูดถึงการหาค่าของฟังก์ชัน ตอนนี้ขอให้ลืมเรื่องการหาค่าของฟังก์ชันเสียก่อน นึกถึงเรื่องของลิมิตเพียงอย่างเดียว

ในกรณีนี้  $\frac{x^2-9}{x-3}$  เมื่อ  $x \neq 3$  ท่านสามารถแยกตัวประกอบของเศษได้ แต่เนื่องจาก  $x \neq 3$  ฉะนั้น  $x-3 \neq 0$  แล้วอะไรจะเกิดขึ้น ขอให้ท่านนึกไปถึงเมื่อครั้งที่  $\frac{x^2-4}{x-2}$  ;  $x \neq 2$  ที่ท่านเคยถามมาเลยว่ามีส่วนคล้ายคลึงกันในลักษณะใด

เอาละ เปิดไปยังกรณ 11 หน้า 6 แล้วเลือกคำตอบใหม่ ไม่ต้องรีบนะ กึกให้ดีๆ

8. ท่านคิดว่า : 1

ก่อนอื่นขอถามว่า ท่านเลือกคำตอบ 1 มาได้อย่างไร คงไม่ใช่การแทน  $x = -1$  ใน  $f(x)$  นะ ถ้าท่านแทนอย่างนั้นแสดงว่าท่านยังไม่เข้าใจเรื่องของลิมิตเลย ถ้าอย่างนั้นท่านไปหาอย่างไร ขอให้พบทวนวิธีคิดของท่านอีกครั้งหนึ่งว่าถูกหรือผิดแน่นอนที่สุดท่านจะต้องพบข้อผิดพลาดประการหนึ่งอย่างแน่นอน เพราะคำตอบ 1 ที่ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง ขอให้ท่านกลับมาทวนถึงการแยกตัวประกอบข้างนี้ เพื่อจะมีประโยชน์สักทีนะคะ เอาละ เปิดไปยังกรณที่ 13 หน้า 7 ใหม่แล้วเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง ขอให้โชคดีนะ

9. ท่านคิดว่า : ไปทราบ

ไม่เป็นไร อย่าเพิ่งต่อใจ พยายามต่อไปอีก ไม่มีอะไรยากเกินกว่าความสามารถของมนุษย์ไปไกล ขอให้พิจารณา เพื่อกำหนด  $f(x) = x^2 + 1$

ลองหาว่า  $f(2 + h)$  และ  $f(2)$  มีค่าเท่าไร และ  $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$

จะมีค่าเท่าไร ทำให้เป็นผลสำเร็จออกมาแล้วให้  $h$  เข้าใกล้ 0 ถ้าที่คำนวณได้จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด พอดีกับวิธีทำได้อีก ขอให้ท่านตั้งใจอ่านข้อความข้างบนนี้อีกครั้งหนึ่ง แล้วทำตามลำดับขั้นที่แนะนำไว้ โดยลงอย่างใดแล้ว เปิดกลับไปยังกรณที่ 14 หน้า 8 และเลือกคำตอบใหม่

10. ท่านคิดว่า : 3

อู๋ ทำใบละ ฎีให้คิดว่าเป็นอย่างใดกันแน่ เราทราบว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $x + 1$  และ  $2x + 1$  เข้าใกล้ 3 และ 5 ตามลำดับ เมื่อเป็น

เช่นนี้  $\frac{x + 1}{2x + 1}$  ควรจะเข้าใกล้เลขจำนวนใด ไม่ใช่ 3 แน่ๆเลย พอดีกับออกใหม่ ถ้านึกได้แล้วรีบเปิดกลับไปยังกรณที่ 16 หน้า 9 เสียใหม่ เลือกคำตอบให้คึ้นะ ขอให้โชคดี เลือกคำตอบที่ถูก

11. ท่านคิดว่า : 4

ถูกที่สุด ปัญหาข้อนี้สำคัญมาก จะต้องอาศัยการฝึกที่ระมัดระวังและลึกซึ้ง เพราะเป็นโจทย์ที่แปลกกว่าที่ท่านเคยผ่านมา ท่านจะแทน  $x = 2$  ไม่ได้ เพราะเป็นเงื่อนไขของลิมิต เมื่อ  $x \neq 2$  ;  $f(x) = x + 2$  ดังนั้น เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $x + 2$  จึงเข้าใกล้ 4

เพื่อประกันความมั่นใจว่าท่านเข้าใจอย่างแท้จริงแล้ว จงหา

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

| ตอบ | หากำไ้ไม่แน่นอน | เปิดไปกรณ | 7  | หน้า | 4  |
|-----|-----------------|-----------|----|------|----|
|     | 0               | "         | 30 | "    | 16 |
|     | 6               | "         | 1  | "    | 1  |

12. ท่านคิดว่า : 4

เยี่ยมถูกนะ ขอให้ใจความระมัดระวังมากกว่านี้อีกนึ้ ไม่ต้องรีบร้อน กิ่ให้ถี่ถ้วนกว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 นั้น  $\sqrt{x+1}$  เข้าใกล้เลขจำนวนใด และเลขจำนวนนั้นสามารถทำให้เป็นรูปอื่นอีกได้หรือไม่ พยายามไตร่ตรองให้ดี ขอให้เปิดกลับไปยังกรณ 20 หน้า 11 แล้วเลือกคำตอบใหม่

13. หมายความว่า : 3

เก่งมากที่เกี่ยว ท่านก็ลองอย่างไรจึงตอบเป็น 3 หรือว่าคงไม่ใช่การเกา นะ  
อย่าใช้วิธีการเกาเป็นอันขาด เพราะการทำเช่นนั้นจะไม่ทำให้ท่านรู้อะไรอย่างแน่  
จริงเลย จะแสดงวิธีทำให้ดูดังนี้

$$\therefore \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x} = \frac{x(x+3)}{x(2x^2+1)} = \frac{x+3}{2x^2+1} ; x \neq 0 \text{ เราตัดกันได้}$$

ฉะนั้นจะเห็นว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ค่าของ  $x+3$  จะเข้าใกล้ 3

และเมื่อ  $x \rightarrow 0 \Rightarrow 2x^2+1 \rightarrow 1$

สรุปว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ค่าของ  $\frac{x+3}{2x^2+1}$  จึงเข้าใกล้  $\frac{3}{1} = 3$

$$\therefore \text{จึงได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x} = 3$$

ต่อไปถ้ากำหนดให้  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

$(x \neq -1)$

$$\text{จงหา } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

กฎ 1 เปิดไปกรณ 8 หน้า 4

- 5 " 3 " 2

หากเบบนอนไม่ได้ " 6 " 3

14. ท่านตอบว่า : 6

ถูกต้อง กาลิมิตเป็น 6 วิธีคิดปัญหานี้เราใช้ความรู้เกี่ยวกับ Conjugate  
เขาช่วยให้เหมือนกับปัญหาที่ผ่านมาแล้ว ต่อไปนี้เป็นปัญหาสุดท้ายของการหาลิมิต  
ปัญหานี้ค่อนข้างยาก แต่ไม่เกินความสามารถของท่านจะคิดได้ ใช้ความรู้ทั้งหมด  
ที่ท่านเรียนมาแก้ปัญหานี้ คิดให้แน่ใจเสียก่อนจึงค่อยเลือกคำตอบ

ถ้ากำหนดให้  $f(x) = x^2 + 1$

จงหา  $\frac{4+4h+h^2}{h^2} - 5$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$(2+h)^2 + 1 - (4+2)$

ตอบ

$2x + 1$

เปิดไปกรณ

28

หน้า

15

5

"

26

"

14

~~2~~ 2

"

4

"

2

ไม่ทราบ

"

9

"

5

$\frac{1}{h} + \frac{h}{h^2}$

15. ท่านตอบว่า : หากไม่ได้

ท่านคงเข้าใจอะไรบางอย่างประการ ขอให้ท่านเปิดกลับไปที่กรณ 5  
หน้า 3 ใหม่ แต่ก่อนที่จะเลือกคำตอบ ขอให้ท่านอ่านคำอธิบายในตอนต้นของกรณ 5  
ก่อน พยายามคิดว่า เมื่อ  $x \neq 2$ ;  $f(x)$  จะนิยามเป็นอย่างไร และถ้า  $x$  เข้า  
ใกล้ 2 (แต่ไม่เท่ากับ 2),  $f(x)$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด เอาละ เปิดไปกรณ  
5 หน้า 3 ได้ คิดให้ดีๆนะ



16. ทานพบว่า : 12

ถูกต้องแล้ว ทั้งนี้เพราะเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1 ค่าของ  $x+2$  จะเข้าใกล้ 3 และค่าของ  $x+3$  จะเข้าใกล้ 4 ฉะนั้นค่าของ  $(x+2)(x+3)$  จึงเข้าใกล้  $3 \times 4 = 12$

$$\text{ดังนั้นสรุปว่า } \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(x+3) = 12$$

คราวนี้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้อีกว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x+1}$  จะมีค่าเท่าไร

วิธีทำ เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ;  $x+1$  เข้าใกล้ 3  
 "  $x$  " 2 ;  $2x+1$  " 5

$$\text{ฉะนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x+1} = \dots\dots\dots$$

|     |               |           |    |      |    |
|-----|---------------|-----------|----|------|----|
| ตอบ | 3             | เปิดไปกรณ | 10 | หน้า | 5  |
|     | 5             | "         | 29 | "    | 15 |
|     | $\frac{3}{5}$ | "         | 20 | "    | 11 |

17. ทานพบว่า : 0

เอ สงสัยว่าทานได้คำตอบนี้มาอย่างไร ทานแทน  $x$  แต่ละตัวด้วย 0 ?  
 คงไม่ใช่แน่เพราะ  $x \neq 0$  หรือทานก็ว่าเมื่อ 0 เข้าใกล้ 0 ;  $x^2 + 3x$  และ  $2x^3 + x$  ต่างก็เข้าใกล้ 0 ถ้าทานก็คอย่างนี้ก็ผิดหมด อย่าลืมนะว่า  $x \neq 0$   
 แนะนำให้ทีกหนึ่งก็ไควาใช้การแยกตัวประกอบ ขอให้เปิดดูไปยังกรณ 1 หน้า 1  
 แล้วเลือกคำตอบใหม่ให้ที่ ต้องให้ถูกนะ

18. ท่านคิดว่า : ไม่ทราบ

ไม่เป็นไร อย่าเพิ่งท้อใจ กราฟนี้คงถูกแน่ ขอให้ดูคำอธิบายต่อไปสิได้  
และให้เข้าใจ เรามีปัญหาว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(x + 3) \quad \text{มีค่าเท่าไร}$$

พิจารณา เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1 ค่าของ  $x + 2$  เข้าใกล้เลขจำนวนใด

และ "  $x$  " 1 "  $x + 3$  " "

ฉะนั้น เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1 ค่าของ  $(x + 2)(x + 3)$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด

ถ้าท่านยังไม่เข้าใจ ขอให้ฉันทบทวนอีกครั้งหนึ่ง แต่ถ้าเข้าใจแล้วให้เปิด  
ไปกรณที่ 32 หน้า 17 แล้วเลือกคำตอบ ขอให้โชคดีเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

19. ท่านคิดว่า : 1

ท่านเลือกคำตอบ 1 มากกว่าวิธีใด คำตอบนี้ผิดนะ แนวคิดของข้อนี้คล้ายๆ  
กับปัญหาที่ท่านเพิ่งผ่านมา เมื่อสักครู่ ลองทบทวนความถูกต้องใหม่ว่า ความรู้เดิม  
อะไรบางที่พอจะนำมาประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้ได้อย่างไร เมื่อพอจะมองเห็น  
แนวทางแล้ว ขอให้เปิดไปกรณ 22 หน้า 12 แล้วพิจารณาคำตอบอีกครั้งหนึ่ง

20. ทานคณว :  $\frac{3}{5}$

ใช้แล้ว ทานเก่งมากทีเดียว  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3}{5}$

กราวนี้ลองพิจารณาเมื่อมีเครื่องหมายลบ (root) เข้ามาเกี่ยวข้องบ้าง

จงหาว่า  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$  มีค่าเท่าไร

|    |     |           |    |      |    |
|----|-----|-----------|----|------|----|
| คณ | 4   | เปิดไปกรณ | 12 | หน้า | 6  |
|    | 2   | "         | 5  | "    | 3  |
|    | + 2 | "         | 23 | "    | 12 |

21. ทานคณว : 1

ก่อน ทานค่าคณ 1 มาด้วยวิธีใด หรือทานก็ว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0  
 ค่าของ  $x^2 + 3x$  และ  $2x^3 + x$  ต่างก็เข้าใกล้ 0 แล้วตัดกันได้ 1 อย่างนั้น  
 หรือ ถ้าทานก็เช่นนั้นก็ยังไม่ถูกต้องนัก อย่างลึบมะว่า  $x \neq 0$  แนวคิดเป็นดังนี้

$$\therefore \frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x} = \frac{x(x+3)}{x(2x^2+1)}$$

แต่เนื่องจาก  $x \neq 0$  จึงได้  $\frac{x(x+3)}{x(2x^2+1)} = \frac{x+3}{2x^2+1}$

กราวนี้พิจารณาโดยลัวว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0,  $\frac{x^2 + 3x}{2x^3 + x}$  จะเข้าใกล้

เลขจำนวนใด ขอให้เปิดกลับไปยังกรณที่ 1 หน้า 1 แล้วเลือกค่าคณใหม่

22. หาคำว่า :  $\frac{1}{4}$

ก็มาก ค่าของข้อนี้เป็น  $\frac{1}{4}$  หาคำว่าด้วยวิธีใด จะแสดงวิธีทำให้ถูกต้อง

วิธีทำ ใช้หลักการทางพีชคณิตเบื้องต้นคือ Conjugate กันทั้งเศษและส่วน  
จะได้

$$\frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{(x+1) - 4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} ; \therefore x \neq 0$$

ฉะนั้นเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ,  $\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$  จึงเข้าใกล้  $\frac{1}{\sqrt{4+2}} = \frac{1}{4}$

$\therefore$  จึงสรุปว่า  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)}{x - 3} = \frac{1}{4}$  Ans.

เพื่อความแน่ใจ ถ้ากำหนด  $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} ; x \geq 0$  จงหา  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

|     |   |           |    |      |    |
|-----|---|-----------|----|------|----|
| ตอบ | 1 | เปิดไปกรณ | 19 | หน้า | 10 |
|     | 3 | "         | 25 | "    | 13 |
|     | 6 | "         | 14 | "    | 8  |

23. หาคำว่า :  $\pm 2$

ท่านยังเข้าใจผิดเกี่ยวกับการถอดรากที่สองอยู่ โดยทั่วไปแล้วการถอด -  
รากที่สองจะต้องมีเครื่องหมาย  $\pm$  เฉพาะในกรณีที่หน้าเครื่องหมายรากที่มีเครื่องหมาย  $\pm$  อยู่เท่านั้น เช่น

$$\text{ถ้า } x^2 = 4 \text{ แล้ว } x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

แต่ในกรณีที่หน้ารากไม่มีเครื่องหมายอะไรเลย ท่านไปเอาเครื่องหมายมาจาก  
ที่ไหนล่ะ ฉะนั้นจึงเปิดดูไปยังกรณ 20 หน้า 11 แล้วเลือกคำตอบ

24. ท่านตอบว่า :  $\frac{2}{3}$

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้องนัก อย่าเพิ่งท้อใจ มันหาข้อนี้ค่อนข้างยาก  
ท่านจะคงใช้ความรู้เดิมเกี่ยวกับพีชคณิตเขาช่วย และให้มันหนึ่งว่าใช้ Conjugate  
เขาช่วยเพื่อแก้ปัญหานี้ เริ่มคิดใหม่อีกครั้งหนึ่งโดยอาศัยแนวจากการแนะนำที่ให้ไว้  
ขอให้เปิดกลับไปยังกรณที่ 3 หน้า 2 ศึกษาๆ ให้ถี่ถ้วนแล้วค่อยเลือกคำตอบ  
ขอให้ประสบความสำเร็จ เลือกคำตอบที่ถูกต้อง

---

25. ท่านตอบว่า : 3

ท่านได้คำตอบ 3 มาควยวิธีใด คำตอบนี้ยังไม่ถูกต้อง แนวคิดของข้อ  
นี้คล้ายกับข้อที่ท่านเพิ่งผ่านมา เมื่อรู้วิธี ลองทบทวนความถี่คิดใหม่อีกว่า ความรู้เดิม  
อะไรบางอย่างที่พอจะนำมาประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหานี้ได้บ้าง เมื่อพอจะมองเห็น  
เห็นทางแล้ว ขอให้เปิดกลับไปพิจารณาคำตอบในกรณที่ 22 หน้า 12 อีก  
ครั้งหนึ่ง ขอให้เลือกคำตอบที่ถูกต้อง

26. ท่านคิดว่า : 5

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง อย่าเพิ่งท้อใจ ไขว่คว้าหาว่าข้อนี้ก่อนข้าง-  
 ยาก แต่ก็ไม่ยากมาก ขอให้พิจารณาดังนี้ดีกว่า เมื่อ  $f(x) = x^2 + 1$  แล้ว

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \quad \text{จะมีค่าเท่าไร และเมื่อให้ } h$$

เข้าใกล้ 0 แล้วค่าของ  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  ที่หาได้-เข้าใกล้เลขจำนวนใด

ขอให้เปิดสลับไปยังกรณที่ 14 หน้า 8 แล้วคิดตามที่แนะไว้นี้ ท่านก็จะได้  
 คำตอบที่ต้องการ

27. ท่านคิดว่า : 0

คำตอบของท่านก็ถูกต้อง แต่ยังมีข้อผิดพลาดอีกเล็กน้อย อย่าเพิ่งท้อใจ  
 ปัญหาข้อนี้ก่อนข้างยาก ท่านจะคงไขความรุ่มร่ามเกี่ยวกับพีชคณิตเขาช่วย แนะนำ  
 ให้นึกถึงว่าใช้ conjugate เขาช่วย เริ่มคิดใหม่อีกครั้งหนึ่งโดยอาศัยแนวทางการ  
 การแนะนำที่ได้ไว้ ขอให้เปิดสลับไปยังกรณที่ 3 หน้า 2 คิดให้ถี่ถ้วนแล้ว  
 จึงค่อยเลือกคำตอบ

28. ท่านคิดว่า :

กำหนดของท่านเกิดถูก พยายามต่อไปอีก ขอให้พิจารณาดังนี้

เมื่อ  $f(x) = x^2 + 1$  แล้วลองหาว่า  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  เป็นเท่า

ไร สมมติว่าท่านได้ออกมาแล้ว ต่อไปให้  $h$  เข้าใกล้ 0 ดูซิว่าค่าของ

$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  ที่หาได้จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด ขอให้เปิดกลับไปยัง

กรณที่ 14 หน้า 8 อีกครั้งหนึ่ง พยายามเลือกคำตอบให้ได้ อย่าเกะกะ

29. ท่านคิดว่า :

กำหนด 5 เป็นคำตอบที่เกิดจะถูก แต่มีคำตอบอื่นที่ถูกต้องกว่า  
ดูให้ดีๆ เป็นอะไรกันแน่ เราทราบว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $x+1$   
และ  $2x+1$  จะเข้าใกล้ 3 และ 5 ตามลำดับ เมื่อเป็นดังนี้  $\frac{x+1}{2x+1}$

ควรจะเข้าใกล้เลขจำนวนใด คงไม่ใช่ 5 แน่ พอนึกได้หรือยัง เมื่อใกล้  
ใกล้แล้วรีบเปิดกลับไปยังกรณ 16 หน้า 9 ในเมื่อแล้วเลือกคำตอบให้ได้

30. ท่านคิดว่า : 0

สงสัยว่าแทนด้วย 0 ใดอย่างไร อย่าลืมว่า  $x \neq 3$  ขอให้ท่านย้อน

นึกไปถึง  $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$  และ  $x \neq 2$  ที่ท่านนำมาบวกลบคูณหารกันอย่างไร

บ้าง ให้เวลานึก 2 นาที เสร็จแล้วขอให้เปิดสไลด์ไปยังกรณที่ 11 หน้า 6 แล้วเลือกคำตอบให้มีความหมายมากที่สุด

31. ท่านคิดว่า : 0

นั่นแน่ ท่านคงแทน  $x$  ด้วย 2 แล้วใช้ไหมละ เคยบอกแล้วใช้ไหมว่า  
เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2,  $x$  จะเท่ากับ 2 ไม่ใกล้ เมื่อ  $x \neq 2$  เรายานิยาม  $f(x)$   
ไว้อย่างไร และเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $f(x)$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด  
ก็บอกให้สิ เปิดสไลด์ไปยังกรณ 5 หน้า 3 แล้วอ่านคำอธิบายอีกครึ่งหนึ่ง  
แล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ



32. "การหาลิมิต" ที่จริงก็หมายถึงการหาค่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้จุดนั้น ค่าของ  $f(x)$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนอะไร ตัวอย่างเช่นเราต้องการหาค่าของ

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 9)$$

วิธีคิด สัญกรณ์  $x \rightarrow 2$  หมายความว่า  $x$  มีค่าเข้าใกล้ (เกือบเท่า) 2 แต่ไม่เท่ากับ 2

∴ เมื่อ  $x$  มีค่าเกือบเท่า 2 ค่าของ  $x^2$  จึงเกือบเท่า 4  
                   "  $x$                    "                   2                   "  $5x$                    "                   10

∴ เมื่อ  $x$  มีค่าเกือบเท่า 2,  $x^2 - 5x + 9$  จึงมีค่าเกือบเท่า

$$4 - 10 + 9 = 3$$

Ans.

สรุปว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 9) = 3$

คราวนี้ถึงเวลาที่ท่านจะต้องฝึกเองบ้างละ ตั้งใจให้ดีๆ ขอให้ท่านผ่านอุปสรรคความว้าวุ่น เอาละ เริ่มได้

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(x+3)$  ว่าเป็นเท่าไร

ตอบ                   6                   เปิดไปคูณ                   2                   หน้า 1

                  12                   "                   16                   "                   9

②

                  ไม่ทราบ                   "                   18                   "                   10

53. เอาละ พบคนที่ 2 แล้ว พบพจน์ที่ว่าทานไ้รับความรู้อะไรเพิ่มเติมบ้าง ถ้าไปทีี่จะเป็นการร้ว่าทานเข้าใจเรื่องลิมิตเท่าที่นานมาากน้อยเพียงใด เมื่อทานทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ขอให้เปิดไปตรวจคำตอบในกรณที่ 34 หน้า 19

### แบบฝึกหัดที่ 2

จากขอ 1 - 5 จงหา  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

1.  $f(x) = x^3 - 2x + 5$  ;  $a = -1$  .....  $6$

2.  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$  ;  $a = 3$  .....  $5$

3.  $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$  ;  $a = 4$  .....  $4$

4.  $f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - 1}{x + 2}$  ;  $a = -2$  .....  $2$

5.  $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 16} - 5}$  ;  $a = -3$  .....

6. ถ้า  $f(x) = x^2$  จงหา  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

\*\*\*\*\*

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

34. จงจัดสําคัญของคนเองนะ ทำให้เสร็จเสียก่อนแล้วจึงค่อยถูกกว่าคนอื่น

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. 6

2. 5

3. 4

4.  $\frac{1}{2}$

5.  $-\frac{5}{3}$

6.  $2x$

บทเรียนโปรแกรม เรื่องลิมิต

ตอนที่ 3

ทฤษฎีของลิมิต

จำนวนกรอบ 32 กรอบ

### ทฤษฎีขีดจำกัด

ในการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน เมื่อใดที่ขีดจำกัดแล้ว เราจะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่าค่าที่ได้นั้นเป็นค่าจริงของขีดจำกัดของฟังก์ชัน การพิสูจน์มี 2 แบบคือพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีของขีดจำกัดกับพิสูจน์โดยใช้นิยามของขีดจำกัด ในตอนแรกนี้เราจะเรียนรู้เกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆก่อนเพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ หลังจากนั้นก็จะพิสูจน์โดยใช้นิยามของขีดจำกัดซึ่งค่อนข้างยาก แต่อย่าเพิ่งตกใจ คงไม่ยากเกินความสามารถของท่าน ขอให้ตั้งใจศึกษาอย่างละเอียด อย่าข้ามตอนหนึ่งตอนใดโดยที่ท่านไม่เข้าใจ เมื่อท่านพร้อมแล้วขอให้เปิดไปยังกรวดที่ 15 หน้า 9 แล้วจึงเริ่มศึกษา

ท่านทราบบ้างว่า : 7

ใช่แล้ว แสดงว่าท่านเข้าใจทฤษฎีที่ 3 เป็นอย่างดี ในส่วนที่เกี่ยวกับการสรุป การคูณ และการหารของขีดจำกัดที่กล่าวมาข้างต้นนี้จะไม่ขอยกตัวอย่างในที่นี้ แต่จะให้ศึกษาทฤษฎีเพิ่มเติมต่อไปอีก

ทฤษฎีที่ 4 ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  และ  $c$  เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

ตัวอย่าง

ถ้า  $f(x) = 3x^2 + 1$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)]$

ทบทวน

13

เปิดไปกรวด

19

หน้า

11

- 13

"

5

"

3

- 11

"

14

"

8

ท่านตอบว่า :  $f(4)$

ก็มาก ค่าที่ถูกต้อง ความจริงแล้วค่าที่ถูกต้อง 4 ซึ่งก็คือ  $f(4)$  นั่นเอง  
 เพราะว่า  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 4$

บทสรุปที่ 3 ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  และ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  จะได้ว่า

|     |                                                                                    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.1 | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$                                     |
| 3.2 | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$                                     |
| 3.3 | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = LM$                                    |
| 3.4 | $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} ; M \neq 0$ |

ตัวอย่าง กำหนดให้  $f(x) = 2x^2 - x + 1$  และ  $g(x) = 3$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) + g(x)]$   $2 + 1 + 1$   
 $-4 + 0$   $4 + 3$

ตอบ 74      เปิดไปกรณ 2 หน้า 1

5      "      28      "      16

- 1      "      17      "      10

2A/101

4 x 7

ท่านตอบว่า :  $\delta = \epsilon$

เองมาก ท่านเลือกค่าที่นี้เป็นอันท้ายแรกหรือเปล่า ท่านคงพอจะเข้าใจ

การพิสูจน์ลิมิตโดยใช้นิยามของลิมิตข้างแล้ว จะหยุดไว้เพียงแค่นี้ เรื่องนี้เป็น  
 มโนภาพที่สำคัญมาก เอาไว้ให้ท่านเรียนในคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป คณนี้ขอให้  
 เปิดต่อไปยังกรณที่ 32 หน้า 18 ขอให้โชคดีนะ

ท่านพบว่า :  $-13$

ถ้าคุณของท่านถูกต้องแล้ว ตามทฤษฎีที่ 4 ในกรณ 2 หน้า 1 จะเห็นว่า

c การตัวอย่างนี้มีค่าเท่ากับ  $-1$  และจะได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)] = -13$  ตาม

ถ้าคุณของท่าน

ทฤษฎีที่ 5 ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  และ  $f(x) \leq g(x)$

จะได้ว่า

$$L \leq M$$

ทฤษฎีนี้หมายความว่า ถ้าฟังก์ชัน  $f$  น้อยกว่าหรือเท่ากับฟังก์ชัน  $g$  แล้วจะได้ว่า " ค่าของลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  จะคือน้อยกว่าหรือเท่ากับฟังก์ชัน  $g$  ตาม "

ขอให้ท่านทำความเข้าใจกับทฤษฎีต่างๆ ที่กล่าวมาแล้วให้ถี่ถ้วนต่อไปนี้เป็น-  
การพิสูจน์ลิมิตโดยใช้ทฤษฎีของลิมิตที่ท่านเรียนมาแล้ว

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$

| คุณ | 6 | เปิดไปกรณ | 9  | หน้า | 5  |
|-----|---|-----------|----|------|----|
|     | 5 | "         | 24 | "    | 14 |
|     | 8 | "         | 21 | "    | 12 |

6. ท่านพบว่า :  $\delta$  และ  $\epsilon$

ท่านยังเข้าใจผิดเกี่ยวกับลำดับของคำถามหรือเปล่า เรากำหนดว่า  
" กรังหนึ่งของช่วง B ยาวเท่ากับ  $\epsilon$  และกรังหนึ่งของช่วง A ยาวเท่ากับ  $\delta$  "  
แล้วถามว่า " ช่วง B และช่วง A ยาวเท่าไร " หมายถึงความยาวทั้งช่วง  
ขอให้เปิดกลับไปยังกรณที่ 8 หน้า 5 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง

ท่านบอกว่า :  $\delta = \epsilon$

เก่งมาก ท่านคงได้ถูกต้องแล้ว ในข้อนี้เราต้องเลือก  $\delta = \epsilon$  เพราะ  
 ว่าเรามี  $0 < |x - 2| < \delta$  แต่เราต้องการให้  $|x - 2| < \epsilon$  ( $\epsilon$  กำหนด  
 มาให้) ฉะนั้นเราเลือก  $\delta = \epsilon$  จึงทำให้  $|x - 2| < \epsilon$  ตามที่ต้องการ  
 ค่อยไปขอให้พิจารณาการพิสูจน์ที่มากขึ้นกว่าเกมอีกนิด

จงพิสูจน์ว่า  $\lim_{x \rightarrow 3} 5x - 8 = 7$

พิสูจน์ เราต้องการแสดงให้เห็นจริงๆว่า "ทุกค่า  $\epsilon > 0$  ที่กำหนดมาให้ จะมี  
 $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $0 < |x - 3| < \delta$  แล้วจะทำให้  $|(5x - 8) - 7| < \epsilon$ "

ในที่นี้เราต้องการ  $|(5x - 8) - 7| < \epsilon$  โดยที่เรามี

$$0 < |x - 3| < \delta$$

$$\text{พิจารณา } |(5x - 8) - 7| = |5x - 8 - 7| = |5x - 15| = 5|x - 3|$$

$$\text{ฉะนั้นเราต้องการให้ } 5|x - 3| < \epsilon$$

$$\text{แต่เรามี } |x - 3| < \delta$$

$$\therefore 5|x - 3| < 5\delta$$

$$\therefore \text{เราจึงให้ } 5\delta = \epsilon$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{5}$$

$$\text{ฉะนั้นเลือก } \delta = \frac{\epsilon}{5} \text{ จะทำให้ } |(5x - 8) - 7| < \epsilon$$

□

ท. ค. พ.

ถ้าจะพิสูจน์  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$  โดยใช้ นิยามของลิมิต จะต้องเลือก  
 $\delta$  เท่ากับเท่าไร

ท. ค. พ.  $\delta = \epsilon$  เปิดไปกรณ 4 หน้า 2

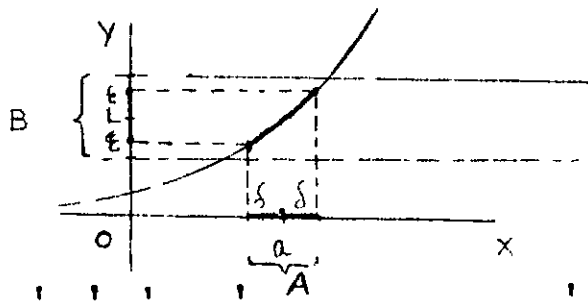
$\delta = 2\epsilon$  " 27 " 15

$\delta = 3\epsilon$  " 31 " 17



ท่านคงเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องลิมิตบางพอสมควร ต่อไปนี้จะขอกล่าวถึง  
สมบัติของลิมิตเพิ่มเติมอีกเล็กน้อย หวังว่าท่านคงยังไม่ลืมของเก่าที่ท่านผ่านมา  
แล้วตั้งแต่ตอนที่ 1

จากนิยามของลิมิตที่ว่า "ฟังก์ชัน  $f$  จะเข้าใกล้ลิมิต  $L$  ที่  $a$  ก็ต่อเมื่อถ้าให้  
ช่วง  $B$  บนแกน  $Y$  ที่มี  $L$  อยู่ในช่วงนั้น เราสามารถหาช่วง  $A$  บนแกน  $X$  ที่มี  $a$   
อยู่ ซึ่งกราฟของ  $f$  บนช่วง  $A$  นี้เมื่อโปรเจก (project) ไปบนแกน  $Y$  จะอยู่  
ในช่วง  $B$  ก็สรุป



$$\frac{1}{2} B = \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} A = \delta$$

ถ้ากำหนดค่าไปว่าครึ่งหนึ่งของช่วง  $B$  บนแกน  $Y$  ยาวเท่ากับ  $\varepsilon$  และให้  
ครึ่งหนึ่งของช่วง  $A$  บนแกน  $X$  ยาวเท่ากับ  $\delta$  ฉะนั้นช่วง  $B$  และช่วง  $A$  จะยาว  
เท่าไร

| คูณ | $\delta$                | และ $\varepsilon$    | เปิดไปกรณ | 6  | หน้า 3 |
|-----|-------------------------|----------------------|-----------|----|--------|
|     | $2\varepsilon$          | " $2\delta$          | "         | 10 | " 6    |
|     | $\frac{\varepsilon}{2}$ | " $\frac{\delta}{2}$ | "         | 16 | " 9    |

ท่านคิดว่า : 6

ท่านยังเข้าใจไม่ถูกต้อง  $x^3$  หมายความว่า  $x$  คูณกัน 3 ครั้งคือ  $x \cdot x \cdot x$   
ในที่นี้เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $x^3$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด เมื่อท่านพอจะ  
เข้าใจแล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรณที่ 5 หน้า 3 ก็ให้ดูทุกอันที่จะเลือกคำตอบ

0. ท่านตอบว่า :  $2\varepsilon$  และ  $2\delta$

ดีมาก ท่านตอบได้ถูกต้อง ต่อไปนี้ขอได้ตั้งใจศึกษาให้ดีที่สุด ท่านอาจจะยังไม่ค่อยเข้าใจ แรกก็อย่าเพิ่งเปิดหมายเสียก่อน ให้พยายามอย่างถึงจนกว่าจะเข้าใจ เชื่อแน่ว่าไม่เกินความสามารถของท่าน

ต่อไปนี้จะพิสูจน์ลิมิตโดยใช้นิยามของลิมิตซึ่งต่างไปจากการพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีที่ท่านเรียนมานานมาแล้ว แตกกันที่จะเริ่มพิสูจน์ขอบเขตของลิมิตสักขบ่างตัวก่อน

$\varepsilon$  อ่านว่า epsilon เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 ( $\varepsilon > 0$ )

$\delta$  " delta " 0 ( $\delta > 0$ )

ในการพิสูจน์เราจะกำหนด  $\varepsilon$  มาให้ (ช่วงบนแกน  $y$ ) หน้าที่ของเราคือต้องพยายามหาว่า  $\delta$  (ช่วงบนแกน  $x$ ) ซึ่งปกติจะขึ้นอยู่กับ  $\varepsilon$  กันนิยามต่อไปนี้

นิยาม "  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  " หมายความว่า เมื่อกำหนด  $\varepsilon > 0$

มาได้ไม่ว่าจะเป็นเท่าไรก็ตาม เราสามารถหา  $\delta > 0$  ได้ซึ่ง

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{แล้วจะได้ } |f(x) - L| < \varepsilon$$

อยากดูตัวอย่างการพิสูจน์ไหมละ เปิดไปกรณที่ 20 หน้า 11 ซิแล้ว  
ท่านจะพบ

1. ท่านบอกว่า :  $\delta = 2\varepsilon$

อย่าเพิ่งท้อใจ ถ้าคำตอบของท่านยังไม่ถูกต้องนัก ขอให้ท่านกลับไป  
ก่อน ปัญหาที่เราต้องการพิสูจน์ว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$  โดยใช้นิยามของลิมิต

นั่นก็หมายความว่า " ถ้ากำหนดให้  $\varepsilon > 0$  มาได้ เราจะคงหา  $\delta > 0$

ซึ่งถ้า  $0 < |x - 2| < \delta$  แล้วเราจะได้  $|x - 2| < \varepsilon$

พิจารณาว่าเราต้องการให้  $|x - 2| < \varepsilon$  โดยที่เรามีว่า  $0 < |x - 2| < \delta$

ขอให้ท่านเปิดเข้าไปยังกรณที่ 20 หน้า 11 แล้วศึกษาวิธีการพิสูจน์  
อย่างละเอียด ลองทำเลียนแบบตัวอย่างนั้นดูบ้างก็ได้อ

2. ท่านบอกว่า : 5

ท่านตอบถูกต้อง เพราะว่า  $f(x) = 5$  ซึ่ง 5 เป็นค่าคงที่  
จะได้ลิมิตของ  $f(x)$  ไม่ว่า  $x$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนอะไรยกเว้นเป็น 5 เสมอ

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

$$\text{บทแทรกที่ 2} \quad \text{ถ้า } f(x) = x \quad \text{จะได้ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \text{ถ้าให้ } f(x) = x \quad \text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

| หาค่า | $f(4)$ | เปิดไปกรณ | 3  | หน้า | 2  |
|-------|--------|-----------|----|------|----|
|       | $4x$   | "         | 25 | "    | 14 |
|       | $x$    | "         | 30 | "    | 17 |

หาคณพว่า : 37

ถูกต้องแล้ว เพราะว่า  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^5 + 3x + 1) = -37$  และเมื่อใส่

เครื่องพหุคูณตามทฤษฎีที่ 2 ค่าทางขวาจะเป็น  $|-37|$  ซึ่งเท่ากับ 37

บทแทรกที่ 1 ถ้า  $f(x) = c$  โดยที่  $c$  เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

ตัวอย่าง ถ้า  $f(x) = 5$  จงหา  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

|           |    |           |    |      |    |
|-----------|----|-----------|----|------|----|
| <u>คณ</u> | 15 | เปิดไปกรณ | 29 | หน้า | 16 |
|           | 5  | "         | 12 | "    | 7  |
|           | 3  | "         | 22 | "    | 13 |

4. หาคณพว่า : -11

เกี่ยวข้อง หาคณพอย่างไรจึงได้ค่าคณพเป็น -11 ลองถกกันทวนดูให้ดี  
จะคงมีข้อผิดพลาดอยู่ ณ ที่ใดที่หนึ่งแน่ ขอให้เปิดกลับไปยังกรณ 2 หน้า 1 แล้ว  
กำหนดหาว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  มีค่าเท่าไร เมื่อใดแล้วจึงหา  $\lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)]$

ว่าเป็นเท่าไร แล้วรีบเปิดกลับไปกรณ 2 หน้า 1 แล้วเลือกคำตอบให้

5. ทฤษฎีที่ 1 " ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชัน  $a$  เป็นจำนวนจริง และถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  มีลิมิต ลิมิตจะมีค่าตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้น " นั่นคือ

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \text{ แล้ว } L_1 = L_2$$

ทฤษฎีที่ 2 " ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  จะได้  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$  "

ตัวอย่าง  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x - 5) = -7$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} |x^3 - 3x - 5| = |-7| = 7$  ตามทฤษฎีที่ 2

จงหา  $\lim_{x \rightarrow -2} |x^5 + 3x + 1|$

|            |    |           |    |     |           |
|------------|----|-----------|----|-----|-----------|
| <u>ตอบ</u> | 15 | เปิดไปกรณ | 18 | หนา | $10^{43}$ |
|            | 28 | "         | 26 | "   | 15        |
|            | 37 | "         | 13 | "   | 8         |

16. ทานทราบว่า :  $\frac{\epsilon}{2}$  และ  $\frac{\delta}{2}$

ทานยังเข้าใจสับสนอยู่ อย่าลืมว่ากรังหนึ่งของ B และ A ยาวเท่ากับ  $\epsilon$  และ  $\delta$  ความสำคัญ ฉะนั้นถ้าทั้งช่วงจะยาวเท่าไร จะมากหรือน้อยกว่ากรังช่วงของหลักก็ได้แล้วพลิกไปยังกรณที่ 8 หนา 5 แล้วเลือกคำตอบใหม่

7. ท่านคิดว่า : -1

เก็บถูกนะ แต่ท่านยังเข้าใจอะไรผิดอีกนิดหน่อย ขอให้ท่านเปิด  
กลับไปยังกรณที่ 3 หน้า 2 แล้วดูตัวอย่าง พิจารณาว่า  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

เป็นเท่าไร และ  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  เป็นเท่าไร แล้วใช้ทฤษฎีที่ 3 ตอน 3.1

สรุปผลของ  $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) + g(x)]$  ว่าเป็นเท่าไร เอาละ ขอให้เปิด

กลับไปยังกรณที่ 3 หน้า 2 ใหม่ ปฏิบัติตามคำสั่งก่อนแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

8. ท่านคิดว่า : 15

แหม คำตอบของท่านเก็บถูก แต่ท่านยังบกพร่องอีกนิด ท่านลองคิด  
ให้ดีกว่า  $x^5$  หมายความว่าอย่างไร และเมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $-2$  ค่าของ  $x^5$  จะ  
เป็นเท่าไร ในขณะเดียวกัน เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $-2$  ค่าของ  $3x$  จะเข้าใกล้  
เลขจำนวนใด ฉะนั้นจะสรุปได้ว่าอย่างไร เมื่อท่านนึกได้แล้วขอให้เปิดกลับไป  
ยังกรณ 15 หน้า 9 อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบใหม่

19. ทานตอบว่า : 13

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง ขอให้พิจารณาว่าเมื่อ  $f(x) = 3x^2 + 1$  ;

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  เป็นเท่าไร ต่อไปดูทฤษฎีที่ 4 ในกรอบที่ 2 หน้า 1 ซึ่งกล่าวว่า  
" ถ้า  $c$  เป็นค่าคงที่ และ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  แล้วจะได้  $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$

นำมาเปรียบเทียบกับการหา  $\lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)]$  ซึ่งถ้า  $c$  คืออะไร ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่  
กรอบที่ 2 หน้า 1 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้ง

20. เอาละ เริ่มพิสูจน์ จงพิสูจน์ว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$  โดยใช้นิยามของลิมิต

พิสูจน์ เราจะต้องแสดงว่า "ทุกค่า  $\epsilon > 0$  ที่กำหนดให้ จะมี  $\delta > 0$  ซึ่ง  
ถ้า  $0 < |x - 1| < \delta$  แล้วจะทำให้  $|2x - 2| < \epsilon$  ( ต้องการหา  $\delta$  ในเทอมของ  $\epsilon$ )

ในพื้นที่เราต้องการให้  $|2x - 2| < \epsilon$

พิจารณา  $|2x - 2| = 2|x - 1|$

แต่เรามีในตอนแรกว่า  $|x - 1| < \delta$  อยู่แล้ว

เราจึงให้  $2|x - 1| < 2\delta$

เลือก  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  จึงทำให้  $|2x - 2| < \epsilon$

ถ้าจะพิสูจน์ว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$  โดยใช้นิยามของลิมิต ท่านจะเลือก  $\delta$  เท่ากับเท่าไร

|     |                      |            |    |      |    |                    |
|-----|----------------------|------------|----|------|----|--------------------|
| ตอบ | $\delta = 2\epsilon$ | เปิดไปกรอบ | 11 | หน้า | 7  | $x - 2 < \epsilon$ |
|     | $\delta = \epsilon$  | "          | 7  | "    | 4  |                    |
|     | $\delta = 3\epsilon$ | "          | 23 | "    | 13 |                    |

1. ทานตอบว่า : 8

ก็มาก คำตอบของท่านถูกต้อง  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$  หากไปจะพิสูจน์ว่า

การลิมิตนี้เป็นจริง โดยใช้ทฤษฎีที่ท่านผ่านมาแล้ว (ทฤษฎีลิมิตของผลคูณ)

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} x^3 &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot x \cdot x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

บ.ก.พ.

ดูอีกตัวอย่างหนึ่งก็ได้อีก สังเกตให้ดังนี้ เป็นตัวอย่างสุดท้ายแล้ว

ตัวอย่าง " จงพิสูจน์ว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 9) = 3$  "

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 9) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 5x + \lim_{x \rightarrow 2} 9 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot x - \lim_{x \rightarrow 2} 5 \cdot x + \lim_{x \rightarrow 2} 9 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 9 \\
 &= 2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 9 \\
 &= 4 - 10 + 9 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

ขอเรียนเปิดไปยังกรมที่ 8 หน้า 5 เพื่อศึกษาการพิสูจน์ลิมิตอีกแบบหนึ่ง



ท่านทราบดีว่า : 3

จะยังไปบอกท่านว่าค่าของ  $f(x)$  ของท่านถูกหรือผิด ขอได้พิจารณาถึงต่อไปนี้

$f(x) = 5$  เป็น Constant function (5 คงที่)

ฉะนั้นเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 3 ลิมิตของ  $f(x)$  จะเป็นเท่าไร ขอได้ท่านเปิด  
 กลับไปศึกษาบทแรกที่ 1 ในกรณีที่ 13 หน้า 8 อีกครั้งหนึ่ง แล้วค่อยเลือก  
 คำตอบใหม่

---

3. ท่านทราบดีว่า :  $\delta = 3\varepsilon$

อย่าเพิ่งพอใจเลยที่คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง เรื่องนี้เราใจคอกันข้าง  
 ยาก ขอให้ท่านค่อยๆพิจารณาไปก่อน ปัญหาข้อนี้เราต้องการพิสูจน์ว่า  
 $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$  โดยใช้นิยามของลิมิต นั่นก็หมายความว่าเราจะทดลองพยายามหาค่า  $\delta$

ในเทอมของ  $\varepsilon$  เพื่อให้สอดคล้องกับประโยคที่ว่า

" ถ้า  $0 < |x - 2| < 2\delta$  แล้วจะได้  $|x - 2| < \varepsilon$  "

ขอได้เปิดกลับไปยังกรณีที่ 20 หน้า 11 แล้วก็พยายามอย่างให้ละเอียด  
 อีกครั้งหนึ่ง ลองเทียบกับปัญหาในข้อนี้ดู ค่อยๆคิดให้คืบหน้า อย่าใจร้อน

4. ท่านคิดว่า : 5

ท่านใดกำลังคิดว่าอย่างไร คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง กลับข้อ  
ให้ว่า  $x^3$  หมายถึงความว่าอย่างไร และเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ค่าของ  $x^3$  จะ  
เข้าใกล้เลขจำนวนใด ท่านอาจใช้ทฤษฎีของลิมิตก็ได้

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot x \cdot x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x$$

มีค่าเท่ากับเท่าไร ขอให้ท่านเปิดสไลด์ไปยังกรณที่ 5 หน้า 3  
แล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

\*

5. ท่านคิดว่า :  $4x$

คำตอบของท่านถูกต้อง ท่านยังไม่เข้าใจบทแทรกที่ 2 ในกรณที่ 12  
หน้า 7 ขอให้ท่านเปิดสไลด์ไปศึกษาบทแทรกที่ 2 ให้ถี่ สักเถิดว่า เมื่อ  $x$  เข้า-  
ใกล้ 4 ค่าของฟังก์ชัน  $f$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด แล้วจึงตอบเลือกคำตอบ

• ทานตอบว่า : 28

    "เกิดถูกแะ แคว่ท่านยังเข้าใจผิดเกี่ยวกับเศษยกกำลังอีกนิดหน่อย  
อย่าลืมว่า  $x^5$  หมายความว่าอย่างไร และเมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $-2$  ค่าของ  $x^5$   
เข้าใกล้เลขจำนวนใด ขอให้สังเกตสักนิดว่า 5 เป็นเลขคี่ เหมือนอันใดเช่นเดียวกัน  
ขอให้ท่านพิจารณาให้ดี นี่ถึงเรื่องการหาลิมิตที่ท่านเรียนมาแล้ว ขอให้เปิดตำรา  
ไปยังกรณที่ 15 หน้า 9 แล้วเลือกคำตอบอีกรั้งหนึ่ง

• ทานตอบว่า :  $\delta = 2\varepsilon$

    "เกิดถูก แต่ยังไม่ถูก ขอให้ท่านทบทวนการนิยามโคบีไซนิยาบของลิมิต  
อีกรั้งหนึ่งจากตัวอย่างในกรณที่ 7 หน้า 4 ศึกษาอย่างละเอียดแล้วลอง—  
เขียนแบบโคบีไซปัญหา  $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$  อย่างเป็นรูปพิจารณาขอแตกต่างที่มี

เล็กน้อย ขอให้เลือก  $\delta$  ในเทอมของ  $\varepsilon$  ภายความรับผิดชอบ"ละดีถ้วนที่สุด  
เราจะ เปิดไปกรณที่ 7 หน้า 4 ได้ ตั้งใจให้ท่านะ

ท่านตอบว่า : 5

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่านพิจารณาว่า

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  มีค่าเท่าไรและ  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$  มีค่าเท่าไร

เสร็จแล้วให้เปิดกลับไปศึกษากรณที่ 3 หน้า 2 คู่มือว่าทฤษฎีนั้นกล่าวไว่ว่า-  
อย่างไร ขอให้เข้าใจแจ่มแจ้งแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

---

ท่านตอบว่า : 15

นั่นแน่ ท่านลืมบทแทรกที่ 1 เสียแล้วสิ อย่าลืมว่า 5 เป็นค่าคงที่  
ฟังก์ชัน  $f$  เป็น Constant function ขอให้ท่านเปิดกลับไปดูบทแทรกที่ 1  
ในกรณที่ 13 หน้า 8 พิจารณาให้ดีแล้วจึงเลือกคำตอบ

ท่านทราบว่า :  $x$

การที่ท่านทราบว่า  $x$  แสดงว่าท่านยังไปเข้าใจบทแทรกที่ 2 อย่างเพียงพอหรือไม่ ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรณีที่ 12 หน้า 7 แล้วศึกษาบทแทรกที่ 2 ให้เข้าใจให้ถี่ถ้วนว่าจะต้องทำอะไรให้ถี่ถ้วนแล้วจึงค่อยเวียนกลับมาตรวจ

ท่านทราบว่า :  $\delta = 3\varepsilon$

ค่าของ  $\delta$  ที่ได้นี้ถูกต้อง แต่ยังไม่พอควรอีกนักน้อย ขอให้ท่านทบทวนการพิสูจน์โดยใช้นิยามของลิมิตอีกครั้งหนึ่งจากตัวอย่างในกรณีที่ 7 หน้า 4 ศึกษาอย่างละเอียดแล้วลองเขียนแบบโดยใช้สัญลักษณ์  $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$  ภายหลังแล้วพิจารณาข้อแตกต่างที่เกิดขึ้น แล้วเลือก  $\delta$  ในเทอมของ  $\varepsilon$  ภายความรับผิดชอบที่สุด เปิดไปยังกรณีที่ 7 หน้า 4 ใต้

ต่อไปนี้เป็นแบบฝึกหัดที่จะวัดความเข้าใจของท่าน ขอให้ท่านตั้งใจทำ  
อย่างดีที่สุด

### แบบฝึกหัดชุดที่ 3

ทั้งแถว 1 - 5 จงพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีของ ลิมิตว่าลิมิตเป็นจริง

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x - 1) = 17$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 4} = 2$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 + 3x + 4}{x} = 20$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = 2$$

6. จงพิสูจน์โดยใช้นิยามของลิมิตว่าลิมิตเป็นจริง

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$$

7. จงพิสูจน์โดยใช้นิยามของลิมิตว่าลิมิตเป็นจริง

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

## บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องลิมิต

ตอนที่ 4

### ลิมิตข้างเดียว

การที่เราพูดว่า " เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เท่ากับ  $L$  "

คำว่า "  $x$  เข้าใกล้  $a$  " นั้น  $x$  สามารถเข้าใกล้  $a$  ได้ 2 ทางคือจากทางซ้ายของ  $a$  และจากทางขวาของ  $a$  ต่อไปนี้จะพิจารณาเฉพาะลิมิตเพียงข้างใดข้างหนึ่งเท่านั้น ซึ่งเราเรียกว่า " ลิมิตข้างเดียว " ขอให้ท่านศึกษาด้วยความตั้งใจ อย่าข้ามตอนหนึ่งตอนใดโดยที่ท่านไม่เข้าใจ เมื่อพร้อมแล้วขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 12 หน้า 7

1. ท่านตอบว่า : มี<sup>๑</sup>

ดีมาก ท่านเก่งที่สุดคนหนึ่งที่เคย จากฟังก์ชันที่กำหนดให้จะเห็นว่า ลิมิต  
ทางขวาคือ  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$  ส่วนลิมิตทางซ้าย คือ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2$

เช่นเดียวกัน จะเห็นว่าลิมิตทางซ้าย เท่ากับ ลิมิตทางขวา นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

ซึ่งแสดงว่า ลิมิตของ  $g(x)$  ที่จุด  $x \neq 1$  หาได้ เมื่อเป็นเช่นนี้จึงหา

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

ตอบ 1 เปิดไปกรอบ 9 หน้า 5

2 " 11 " 6

4 " 4 " 2

2. ท่านตอบว่า :  $x - a > 0$

$x - a > 0$  หรือเขียนอีกแบบหนึ่งได้เป็น  $x > a$  เมื่อเป็นเช่นนี้จาก  
นิยามของลิมิตทางขวา ท่านคงจำได้ว่า  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางขวาหมายความว่า  
 $x > a$  แต่ในที่นี้เราพูดว่า  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้ายซึ่งเป็นคนละด้านกับทางขวา  
ฉะนั้นค่าของ  $x$  ควรจะเป็นเช่นไร คำตอบที่ท่านตอบมานี้ยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่าน  
เปิดกลับไปพิจารณากรอบที่ 10 หน้า 6 อีกครั้ง คิดให้ถี่ถ้วนจึงเลือกคำตอบใหม่



3. ท่านตอบว่า : 1

จะยังไม่บอกว่าท่านตอบถูกหรือผิด คำถามข้อนี้หมายความว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา แต่  $x \neq 0$  - ดังนั้น  $x$  จึงต้องมากกว่า 0 เสมอ เมื่อ  $x > 0$  ค่าของ  $f(x)$  จึงเป็น 1 ฉะนั้นคำตอบของท่านจึงถูกต้องแล้ว ต่อไปขอให้พิจารณาอีกครั้งหนึ่งว่า

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  เป็นเท่าไร

|            |               |            |    |      |    |
|------------|---------------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | -1            | เปิดไปกรอบ | 29 | หน้า | 18 |
|            | 0             | "          | 19 | "    | 12 |
|            | หาจำกัดไม่ได้ | "          | 8  | "    | 5  |

4. ท่านตอบว่า : 4

อู๋ ทำไมท่านจึงตอบ 4 ละ ท่านคงเอา  $2 + 2$  แน่เลย ไม่ใช่อย่างนั้นแน่ " การที่ลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวาก็แสดงว่า ลิมิตที่จุดนั้นสามารถหาได้ และมีค่าเท่ากับลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาที่หาได้นั้น "

เอาละ คิดว่าคงพอจะเข้าใจขึ้นบ้าง ถ้าเข้าใจแล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 อีกครั้งหนึ่ง คิดให้ดีแล้วจึงเลือกคำตอบใหม่

5. ท่านตอบว่า : 3

ท่านตอบได้ถูกต้องแล้ว คำตอบของท่านเป็นไปตามทฤษฎีที่ให้ไว้ ซึ่งพอจะสรุปสั้น ๆ ได้ว่า " ลิมิตของฟังก์ชันที่จุดใดก็จะมีค่าเท่ากับลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวา ณ จุดนั้น แต่ถ้าลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา เราพูดได้ว่าลิมิตที่จุดนั้นไม่มี "

ตัวอย่าง เช่น กำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

เราทราบว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$  และ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

ซึ่งจะเห็นว่า ลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $x = 0$  ไม่มี นั่นคือ

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ไม่มี ( does not exist )

ต่อไปขอให้พิจารณาฟังก์ชันที่นิยามด้วย

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x & ; x \geq 1 \\ 3 - x & ; x < 1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  มีหรือไม่

ตอบ      มี      เปิดไปกรอบ      1      หน้า      1

ไม่มี      "      13      "      8

ไม่ทราบว่าไม่มีหรือไม่      "      16      "      10

6. ท่านตอบว่า : ถ้า  $a + \delta < x < a$  แล้วเราจะได้  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

ซักก่อน ขอให้ท่านดูให้ดีๆ ว่า เมื่อ  $\delta > 0$  ;  $a + \delta$  กับ  $a$  จำนวนไหนจะมีค่ามากกว่ากัน เมื่อท่านทราบแล้วว่าจะไรมากกว่า การเขียน  $a + \delta < x < a$  เป็นไปได้หรือไม่ แนนอนที่สัวย่อมเป็นไปไม่ได้ ฉะนั้นขอให้เปิดกลับไปพิจารณาถึงกรอบที่ 24 หน้า 15 ใหม่ พยายามเลือกคำตอบที่ถูกต้องให้ได้

7. ท่านตอบว่า : 6

ท่านคงเลือกคำตอบนี้โดยการนำเอา  $3 + 3 = 6$  นั้นเลย ทำได้ทีไหนละนึกแล้วเชื่อว่าจะต้องทำแบบนี้ ท่านยังไม่เข้าใจทฤษฎีอย่างแจ่มแจ้ง ตามทฤษฎีนั้นพูดง่าย ๆ ก็คือว่า " ลิมิตของฟังก์ชันที่จุดใด ๆ จะหาได้เท่ากับจำนวนจริงจำนวนหนึ่งก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน เท่ากับ ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น และลิมิตนี้จะต้องเท่ากับจำนวนจริงจำนวนนั้นด้วย "

ถึงตอนนี้ท่านเข้าใจมาบ้างหรือยัง ถ้ายังไม่เข้าใจขอให้อ่านข้อความในเครื่องหมายคำพูดข้างบนอีกครั้งหนึ่ง แล้วเปิดกลับไปยังกรอบที่ 29 หน้า 18 ศึกษาทฤษฎีให้เข้าใจก่อนจึงค่อยเลือกคำตอบ

8. ท่านตอบว่า : หาขีดจำกัดไม่ได้

คำตอบของท่านเกือบถูกต้องแล้ว แต่ยังมีข้อผิดพลาดอีกนิด การที่เราจะบอกฟังก์ชันใดหาค่าไม่ได้ที่จุด ๆ หนึ่งนั้นไม่ได้หมายความว่า ณ จุดที่อยู่ใกล้ ๆ จุดนั้น ฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้ แต่ในที่นี้ฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งกำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{สามารถหาค่า}$$

ได้ทุกค่ายกเว้นที่จุด  $x = 0$

ตามที่โจทย์ถาม โจทย์ถามว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  มีค่าเท่าไรนั้นหมายความว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย (คือ  $x < 0$  นั้นเอง) ลิมิตของ  $f(x)$  จะเป็นเท่าไร

ท่านคงพอจะเข้าใจบ้างแล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 3 หน้า 2 ใหม่ ถ้าท่านยังไม่เข้าใจขอให้อ่านข้อความข้างบนนี้อีกครั้งหนึ่ง

9. ท่านตอบว่า : 1

เอ๊ะ ความจริงท่านผ่านกรอบที่ 29 หน้า 18 มาแล้ว ท่านน่าจะทราบนะว่าคำตอบที่ถูกต้องเป็นเท่าไร ขอให้ตั้งใจและรวบรวมสมาธิให้ดี ถ้าท่านยังไม่เข้าใจแจ่มแจ้งขอให้รีบปรึกษาผู้รู้โดยด่วนเพราะเป็นเรื่องที่สำคัญมากที่ทุกคนจะต้องเข้าใจให้ดี แล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 แล้วเลือกคำตอบ

10. ท่านตอบว่า : ถ้า  $a < x < a + \delta$  แล้วเราจะได้  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

ถูกต้องทีเดียว เพราะว่า  $x$  อยู่ใน open interval  $(a, a + \delta)$  ส่วน  $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$  นั้นเป็นไปตามกฎของค่าสมมูลซึ่งท่านเรียนมาแล้ว คราวนี้ลองมาพิจารณาทางซ้ายบ้าง ขอให้สังเกตความแตกต่างระหว่างลิมิตทางขวาซึ่งท่านเรียนมาแล้วกับลิมิตทางซ้ายซึ่งท่านกำลังจะศึกษาต่อไปนี้

นิยาม เราพูดว่า  $M$  เป็นลิมิตทางซ้าย (Left-hand limit) ของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  ที่จุด  $a$  และเขียน

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

$$x \rightarrow a^-$$

จากนิยามนี้ ความสัมพันธ์ระหว่าง  $x$  กับ  $a$  เป็นอย่างไร

|            |             |            |    |      |    |
|------------|-------------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | $x - a = 0$ | เปิดไปกรอบ | 23 | หน้า | 14 |
|            | $x - a > 0$ | "          | 2  | "    | 1  |
|            | $x - a < 0$ | "          | 21 | "    | 13 |

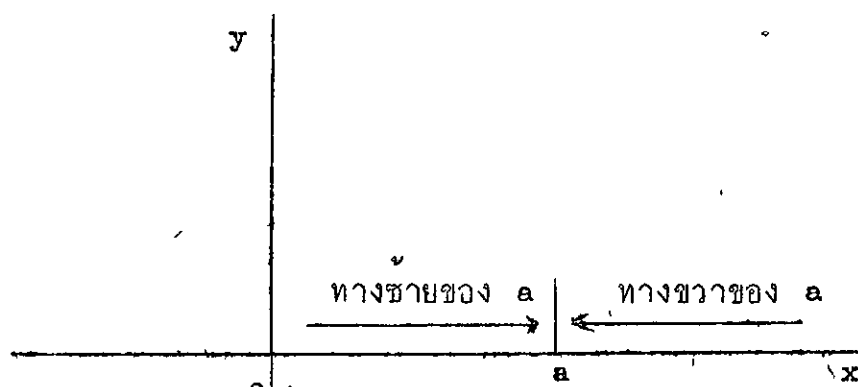
11. ท่านตอบว่า : 2

เก่งมาก ท่านเลือกคำตอบได้ถูกต้องแล้ว แสดงว่าท่านเข้าใจลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาคือพอสมควร ถึงเวลาแล้วที่ท่านจะได้รับการแสดงความชื่นชมด้วย อยากทราบไหมว่าจะแสดงความชื่นชมอย่างไร ถ้าอยากทราบเปิดไปยังกรอบที่ 32 หน้า 20 แล้วท่านจะพบ ขอให้โชคดี

12.

ลิมิตข้างเดียว

ถ้า  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งและ  $a$  เป็นจำนวนจริง ในบางครั้ง เราต้องการทราบว่า ค่าของ  $f(x)$  เข้าใกล้จำนวนจริงเมื่อใด เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  การที่  $x$  เข้าใกล้  $a$  นี้สามารถเข้าได้ 2 ทางคือ ทางซ้ายของ  $a$  กับทางขวาของ  $a$  ต่อไปนี้จะนิยาม ขอให้ท่านศึกษาอย่างละเอียดและพยายามทำความเข้าใจให้แจ่มแจ้ง ก่อนถึงนิยาม ขอให้ดูรูปต่อไปนี้ก่อน



นิยาม เราพูดว่า  $L$  เป็นลิมิตทางขวา (Right - hand limit )

ของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  ที่จุด  $a$  และเขียน

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

จากนิยามนี้สรุปได้ว่า  $x$  กับ  $a$  มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ตอบ  $x = a$  เปิดกรอบ 22 หน้า 24

$x < a$  " 14 " 8

$x > a$  " 24 " 15

13. ท่านตอบว่า : ไม่มี

ยังไม่ถูกต้องนัก เมื่อท่านตอบว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  ไม่มี ตามทฤษฎีก็

หมายความว่าลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา นั่นคือ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

ท่านลองพิจารณาใหม่ชื่อว่า  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$  มีค่าเท่าไร ถ้าพิจารณาอย่าง

ละเอียดจะพบว่า  $x$  เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย (คือ  $x < 1$ ) เมื่อเป็นเช่นนี้ตามนิยามของ  $g(x)$  เราจะได้ค่าลิมิตเท่าไร เช่นเดียวกันจงคำนวณหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

แล้วเอาลิมิตที่หาได้จากทั้งสองตอนมาเปรียบเทียบกันดูว่าเท่ากันหรือไม่ เมื่อท่านเปรียบเทียบแล้วผลเป็นอย่างไรขอให้ท่านลองไปตอบปัญหาในกรอบที่ 5 หน้า 3 ที่ท่านตอบผิดเมื่อครั้ง นี้ เปิดได้แล้ว ขอให้โชคดี

14. ท่านตอบว่า :  $x < a$

แหม เกือบถูกทีเดียว ท่านยังเข้าใจผิดอยู่อีกนิดเดียว ขอให้ดูรูปภาพประกอบชื่อว่า ทางขวาของ  $a$  นั้นอยู่ด้านไหน และค่า  $x$  ในส่วนนั้นเมื่อเปรียบเทียบกับ  $a$  แล้วจะเป็นอย่างไร ดังนั้นลองเปิดกลับไปยังกรอบที่ 12 หน้า 7 อีกครั้ง คิดให้ดี ๆ แล้วเลือกคำตอบใหม่

15. ท่านตอบว่า : ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ที่จุด  $a$  ไม่มี

ใช่แล้วท่านตอบถูกต้องทีเดียว ในเมื่อไม่มีตัว  $h$  ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว

ค่าลิมิตทางซ้ายจึงไม่มีซึ่งก็เหมือนกับลิมิตทางขวาที่ท่านผ่านมาแล้วนั้นแหละ คราวนี้ลองดูตัวอย่างบาง เพื่อจะได้เข้าใจยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$  มีค่าเท่ากับ 0 เพราะว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา แต่  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$  ไม่มี เพราะว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย แสดงว่า

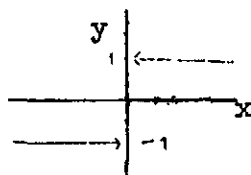
$x$  จะต้องน้อยกว่า 0 เมื่อ  $x < 0$  ;  $\sqrt{x}$  จึงไม่มีความหมาย (เป็นจำนวนจินตภาพ)

เมื่อท่านเข้าใจตัวอย่างแล้ว ขอให้ศึกษาปัญหาต่อไปนี้

กราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$  มีลักษณะเป็นอย่างไร

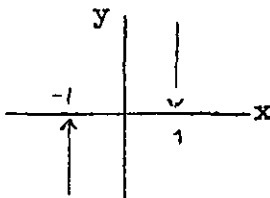
ตอบ

รูป ก.



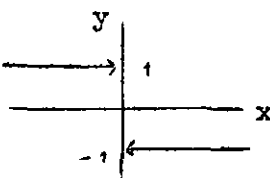
เปิดไปกรอบ 27 หน้า 17

รูป ข.



" 31 " 19

รูป ค.



" 26 " 16



# 16. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบว่ามีหรือไม่

ขอให้ท่านลองนึกถึงความรู้เก่าที่ท่านเคยผ่านมาแล้วชื่อว่า การที่จะบอกว่า  
 ลิมิตของฟังก์ชันใดที่จุด ๆ หนึ่งนั้นหมายความว่าอย่างไร ถ้าท่านยังนึกไม่ออกจะ  
 บอกให้ก็ได้ แต่ต้องสัญญาว่าจะจำให้ได้ตลอดไป ถ้าสัญญาแล้วจะบอกให้ดังต่อ-  
 ไปนี้

"การที่จะบอกว่าฟังก์ชัน หาสมิตใดที่จุด ๆ หนึ่งนั้น เราต้องแสดงให้เห็นว่า  
 ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเท่ากับลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน ณ ที่จุดนั้น " ซึ่งเขียนแทนด้วย  
 สัญลักษณ์ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ถึงตอนนี้คิดว่าท่านคงพอจะทราบวิธีหาว่า ฟังก์ชันหาสมิตใดหรือไม่โดยทดสอบ  
 ทั้งที่กล่าวมาแล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 5 หน้า 3 แล้วหาดูว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \quad \text{มีค่าเท่าไร แล้วเปรียบเทียบ}$$

เทียบดูว่าเท่ากันหรือไม่ นำผลที่ได้ไปพิจารณาเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง เอาละ  
 เปิดไปที่กรอบที่ 5 หน้า 3 ได้

17. ท่านตอบว่า : หาค่าไม่ได้

ก่อนอื่นขอทำความเข้าใจว่า  $x \rightarrow 0^+$  หมายความว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา แต่ตามความหมายที่แท้จริงของลิมิต  $x$  จะไม่มีโอกาสเท่ากับ 0 ได้เลย เพียงแต่ใกล้เท่านั้น ฉะนั้น  $x$  จะต้องมากกว่า 0 เมื่อ  $x >$  ค่าของ  $f(x)$  จึงเท่ากับ 1 ตามนิยาม ดังนั้นเราขอมหาลิมิตได้เสมอ แต่จะได้เท่าไรขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 27 หน้า 17 แล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

---

18. ท่านตอบว่า : 0

ขอแสดงความเสียใจด้วยที่ท่านเลือกคำตอบนี้ ท่านอาจยังไม่ค่อยเข้าใจ-  
ทฤษฎีก็ได้ ตามทฤษฎีอาจกล่าวสั้น ๆ ได้ว่า "ลิมิตของฟังก์ชันใด ๆ ที่จุด ๆ หนึ่งจะ  
หาได้เท่ากับจำนวนจริงของจำนวนหนึ่งก็ต่อเมื่อลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเท่ากับลิมิต  
ทางขวาของฟังก์ชัน และลิมิตนี้จะต้องเท่ากับจำนวนจริงจำนวนนั้นด้วย "

ถึงตอนนี้ถ้าท่านยังไม่เข้าใจขอให้ท่านอ่านข้อความในเครื่องหมายคำพูดข้างบน  
อีกครั้งแล้วจึงเปิดไปยังกรอบที่ 29 หน้า 18 เพื่อเลือกคำตอบอีกครั้งหนึ่ง

19. ท่านตอบว่า : 0

คำตอบของท่านยังผิดพลาดอยู่ พิจารณาจากฟังก์ชันที่กำหนดให้อีกครั้งหนึ่ง ฟังก์ชันที่กำหนดให้มานั้นนิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

จากฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ี้ หมายความว่า ถ้า  $x$  มากกว่า 0 แล้ว  $f(x)$  ก็จะมีค่าเป็น 1 แต่ถ้าเมื่อไรที่  $x$  น้อยกว่า 0,  $f(x)$  จะมีค่าเป็น -1 แต่ตามโจทย์ถามว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  มีค่าเท่าไร หมายความว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ( $x < 0$ ) นั้น ลิมิตจะมีค่าเท่าไรนั่นเอง ถ้ายังไม่ค่อยเข้าใจขอให้อ่านกรอบนี้อีกครั้งหนึ่งแล้วจึงค่อยเปิดไปยังกรอบที่ 3 หน้า 2 เพื่อเลือกคำตอบ

o

20. ท่านตอบว่า : ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ที่จุด  $a$  เป็นศูนย์

ท่านยังเข้าใจผิดพลาดไปนิด ในเมื่อไม่มี  $M$  ตัวใดซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว ไม่ได้หมายความว่าลิมิตเป็น 0 การที่ลิมิตเป็น 0 หมายความว่า  $M = 0$  นั่นเอง ฉะนั้นขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 21 หน้า 13 ใหม่ พยายามเลือกคำตอบให้

21. ท่านตอบว่า :  $x - a < 0$

ถูกต้องแล้ว  $x - a < 0$  หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งว่า  $x < a$   
 เพราะ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้ายและค่าทางคานซ้ายของ  $a$  จะต้องน้อยกว่า  $a$

เสมอ

ฉะนั้น  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$  จึงหมายถึง

" สำหรับ  $\varepsilon > 0$  ทุกตัว เราสามารถ  $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $x \in (a - \delta, a)$   
 แล้ว จะได้  $|f(x) - M| < \varepsilon$  " นั่นคือพูดอีกอย่างหนึ่งว่า " ถ้า  $a - \delta < x < a$   
 แล้วจะได้  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$  " ถ้าไม่มีจำนวน  $M$  ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว  
 แล้วเราสรุปได้ว่าอย่างไร

ตอบ

ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ที่จุด  $a$  คงที่

เปิดไปกรอบ 25 หน้า 16

ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ที่จุด  $a$  ไม่มี

เปิดไปกรอบ 15 หน้า 9

ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  มีค่าเป็นศูนย์

เปิดไปกรอบ 20 หน้า 12

22. ท่านตอบว่า :  $x = a$

หยุดก่อน ท่านกำลังเข้าใจผิดอย่างมาก ในตอนเริ่มแรกเคยบอกเสมอว่าเรื่องของลิมิต ถ้า  $x$  เข้าใกล้  $a$  แล้ว  $x$  จะต้องไม่เท่ากับ  $a$  ฉะนั้นขอให้ท่านคิดให้ถี่เสียก่อน นึกทบทวนถึงเรื่องที่ท่านเรียนมาแล้วอย่างละเอียด เมื่อท่านมั่นใจแล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 12 หน้า 7 ใหม่ ดูภาพประกอบเสียก่อนจึงค่อยเลือกคำตอบ

---

23. ท่านตอบว่า :  $x - a = 0$

คำตอบของท่านถูกต้องยิ่งหนึ่งก็คือ  $x = a$  เมื่อเป็นเช่นนี้คำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง เพราะว่าในเรื่องลิมิต เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  แล้ว  $x$  จะเท่ากับ  $a$  ไม่ได้ ฉะนั้นขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 10 หน้า 6 ตั้งใจให้ดียายามนำความรู้ที่ผ่านมาแล้วมาใช้ให้เป็นประโยชน์

24. ท่านตอบว่า :  $x > a$

ดีมาก ท่านตอบถูกแล้ว เนื่องจาก  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางขวา ซึ่งบริเวณทางขวาของ  $a$  นั้นเป็นบริเวณที่มีความมากกว่า  $a$  ทั้งสิ้น ท่านเป็นคนเก่งมากที่สุด ขอให้พิจารณาต่อไปชื่อว่า นิยามที่จะเอื้อมเป็นอย่างไร

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

หมายความว่า "สำหรับ  $\varepsilon > 0$  ทุกตัว จะมี  $\delta > 0$  ซึ่งถ้า  $x \in (a, a + \delta)$  แล้วจะได้ผลว่า  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ "

ถ้าไม่มีจำนวน  $L$  ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว เราพูดว่าลิมิตทางขวาของ  $f$  ที่จุด  $a$  ไม่มี

จากข้อความที่ขีดเส้นใต้ข้างบนนั้น สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งว่าอย่างไร

ตอบ  $a < x < a + \delta$  แล้วจะได้ผลว่า  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

เปิดไปกรอบ 10 หน้า 6

$a + \delta < x < a$  แล้วจะได้ผลว่า  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

เปิดไปกรอบ 6 หน้า 4

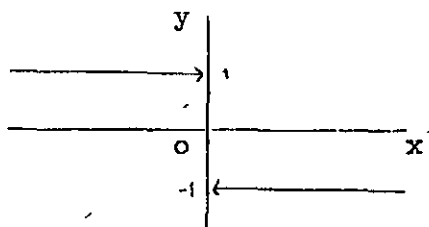
$a < x < a + \delta$  แล้วจะได้ผลว่า  $-L < f(x) < L$

เปิดไปกรอบ 30 หน้า 19

25. ท่านตอบว่า : ลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ที่จุด  $a$  คงที่

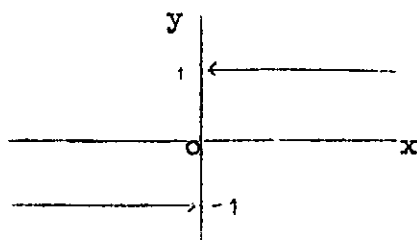
ท่านยังเข้าใจไม่ถูกต้องนัก การที่ไม่มีจำนวน คือไม่มีเลขใดที่จะแทนลิมิตนั้น เราจะเรียกว่าลิมิตคงที่ได้อย่างไร ลิมิตคงที่หมายความว่าค่าของลิมิตไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่า  $x$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใด เช่นลิมิตของฟังก์ชันคงที่เป็นต้น แต่ในที่นี้เราพูดถึงฟังก์ชันทั่ว ๆ ไป ไม่เฉพาะเจาะจงว่าเป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งชนิดใด ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 21 หน้า 13 เพื่อศึกษาให้เข้าใจถ่องแท้ แล้วเลือกคำตอบ

26. ท่านตอบว่า :



ถ้าท่านสังเกตให้ดีจะพบว่า กราฟที่ท่านเลือกกว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องนี้จะตรงข้ามกับความเป็นจริงที่นิยามไว้ เพราะฟังก์ชัน  $f$  ที่นิยามไว้ในกรอบที่ 15 หน้า 9 นั้นนิยามว่า  $f(x) = 1$  ถ้า  $x > 0$  และ  $f(x) = -1$  ถ้า  $x < 0$  ดังนั้นกราฟนี้จึงไม่ถูกต้องตามที่นิยามไว้ ขอให้เปิดไปพิจารณากรอบที่ 15 หน้า 9 และเลือกคำตอบที่เหมาะสมใหม่

27. ท่านตอบว่า :



ถูกต้องที่สุด ท่านเข้าใจถูกต้องแล้ว คราวนี้กลับมาพิจารณาว่า

$$\text{เมื่อ } f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{แล้ว } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

มีค่าเท่ากับเท่าไร (พิจารณาจากรูปประกอบ)

| ตอบ | 0           | เปิดไปกรอบ | 28 | หน้า | 17 |
|-----|-------------|------------|----|------|----|
|     | 1           | "          | 3  | "    | 2  |
|     | หาค่าไม่ได้ | "          | 17 | "    | 11 |

28. ท่านตอบว่า : 0

ยังจะไม่บอกว่าถูกต้องหรือไม่ แต่ขอให้พิจารณานิยามของ  $f(x)$  อีกครั้งหนึ่งว่า ได้นิยามไว้อย่างไรบ้าง จะเห็นว่า

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

ฉะนั้น  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  จึงหมายความว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา แต่

การเข้าใกล้นี้จะไปเท่ากับ 0 ไม่ได้ ดังนั้นการที่ท่านตอบว่าเป็น 0 จึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 27 หน้า 17 แล้วเลือกคำตอบใหม่



29. ท่านตอบว่า : -1

ถูกต้องทีเดียว เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $0^-$  หมายความว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ดังนั้น  $x$  จึงเข้าใกล้ 0 ทางด้านที่มีค่าน้อยกว่า แต่ตามคำนิยาม ถ้า  $x < 0$  แล้ว  $f(x) = -1$  จึงเป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

ต่อไปนี้ขอให้ศึกษาทฤษฎีบทให้เข้าใจอย่างถ่องแท้

ทฤษฎีบท " ให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน เราได้  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L "$$

ทฤษฎีบทนี้หมายความว่า ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  จะเท่ากับ  $L$  ได้เมื่อลิมิตทางซ้ายของ  $f$  ต้องเท่ากับลิมิตทางขวาของ  $f$  ที่จุด  $a$  เหมือนกัน นั่นคือการที่จะสรุปว่าลิมิตของฟังก์ชันใดมีได้ก็จะต้องแสดงว่าลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวา เช่น ถ้าให้

$$f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

จึงสรุปว่า  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots\dots\dots$

ตอบ 0 เปิดไปกรอ 18 หน้า 11

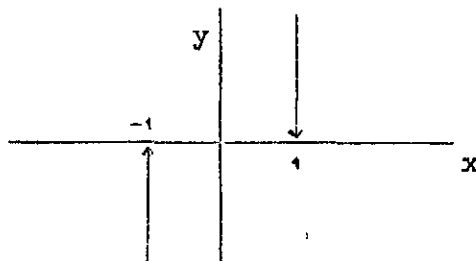
3 " 5 " 3

6 " 7 " 4

30. ท่านตอบว่า : ถ้า  $a < x < a + \delta$  แล้วเราจะได้  $-L < f(x) < L$

เกือบถูกทีเดียว ยังผิดอยู่นิด คือตอนสุดท้ายตรงที่  $-L < f(x) < L$   
 ขอให้ท่านลองนึกย้อนไปถึงเรื่องค่าสมบูรณ์ที่ว่า  $|x|$  หมายความว่าอย่างไร  
 แล้วลองเปรียบเทียบกันที่ว่า  $|f(x) - L| < \epsilon$  ควรจะเป็นอย่างไร เมื่อ  
 คิดได้แล้วขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 24 หน้า 15 คิดหาคำตอบใหม่

31. ท่านตอบว่า :



หยุดก่อน ท่านเข้าใจผิดอยู่มาก เพราะว่าค่า  $f(x)$  เป็นค่าของ  $y$   
 มิใช่ค่าของ  $x$  แต่ตามรูปนี้เป็นรูปภาพของ  $x = 1$  และ  $x = -1$  ต่างหาก  
 ฉะนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้เปิดกลับไปพิจารณากรอบที่ 20  
 หน้า 12 แล้วจึงเลือกคำตอบที่ถูกต้องอีกครั้งหนึ่ง

32. ขอแสดงความยินดีด้วย ท่านเป็นคนที่เก่งมากทีเดียวที่สามารถเรียนมาได้จนถึง  
 กรอบนี้ ขอให้ท่านจงตั้งใจศึกษาต่อไปแล้วท่านจะประสบผลสำเร็จในที่สุด แต่ก่อน  
 ที่จะเรียนต่อไป ลองทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้ดูว่ามีปัญหาอะไรหรือไม่ ถ้ามีปัญหาจง  
 พยายามแก้ปัญหาเหล่านั้นด้วยตนเองก่อนโดยใช้ความรู้ที่ท่านเรียนมาแล้วทั้งหมด ขออย่า  
 ได้ข้ามตอนหนึ่งตอนใดเป็นอันขาด

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

1.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$        $= 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1}$        $=$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x+3]$        $=$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x+3]$        $=$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x+2]$        $= 2$

6. ✓  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x+2]$        $= 2$  ✓

7.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{x}{x} \right|$        $=$

เฉลย

- |      |                   |       |      |
|------|-------------------|-------|------|
| 1. 0 | 2. does not exist | 3. 6  | 4. 7 |
| 5. 0 | 6. 1              | 7. -1 |      |

## บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องลิมิต

ตอนที่ 5

ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

จำนวนกรอบ 30 กรอบ

คำชี้แจง : ในกรอบที่ 5 นี้เป็นเรื่องลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ ( infinity )  
ก่อนอื่นขอทำความเข้าใจก่อนว่า  $\infty$  ไม่ใช่จำนวนเลขหรือไม่ได้แทนเลขจำนวนใด  
จำนวนหนึ่ง แต่  $\infty$  เป็นสัญลักษณ์ที่นักคณิตศาสตร์คิดขึ้นแทนค่าอะไรก็ตามที่มีมาก ๆ  
ซึ่งเราไม่สามารถบอกได้ว่ามากเท่าไร ฉะนั้นขอให้ท่านระลึกเสมอว่า  $\infty$  ไม่ใช่ตัวเลข  
เมื่อท่านเข้าใจแล้วขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 3 หน้า 2 ตั้งใจศึกษาให้ดี

1. ท่านตอบว่า :  $+\infty$

ถูกต้องแล้ว ท่านสามารถนำเอาทฤษฎีมาประยุกต์ได้ดีมาก ขอให้ท่านจงจำ ทฤษฎีที่กล่าวแล้วนี้ไปใช้ให้ถูกต้อง เพราะทฤษฎีนี้มีประโยชน์ต่อการคำนวณมาก ขอให้ศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้ อีกตัวอย่างหนึ่งเพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ จงหา  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x}$

วิธีทำ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x(x-2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-\infty)$$

$$= \dots\dots\dots \text{Ans.}$$

|            |                |            |    |      |    |
|------------|----------------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | $-\infty$      | เปิดไปกรอบ | 26 | หน้า | 16 |
|            | $-\frac{1}{2}$ | "          | 22 | "    | 14 |
|            | $-\frac{1}{2}$ | "          | 11 | "    | 7  |

2. ท่านตอบว่า :  $x > N$

ใช่แล้ว ท่านตอบได้ถูกต้องทีเดียว กำลังเอาใจช่วยอยู่ว่าขอให้ตอบถูก แล้วท่านก็ตอบถูกจริง ๆ เก่งมาก ขอให้พยายามต่อไปอีก

ขอให้ดูตัวอย่างต่อไปนี้ สำหรับ  $f(x) = \frac{1}{x}$  ถ้าเราให้ค่า  $x$  น้อยลง ๆ ค่าของ  $f(x)$  จะเป็นลบและเข้าใกล้ 0 เช่นถ้าให้  $x$  เป็น  $-100, -1,000,$  และ  $-100,000, \dots\dots$  ค่าของ  $f(x)$  จะเป็น  $-0.01, -0.00001, \dots\dots$  ตามลำดับ ในกรณีนี้เรามีนิยามดังนี้ อ้อ เกียวก่อน เปิดไปกรอบที่ 5 หน้า 3 ก่อน แล้วค่อยพบกับนิยาม

### 3. ลิมิตซึ่งเกี่ยวข้องกับอนันต์ ( Limits Involving Infinity )

พิจารณาฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{1}{x}$  ;  $x \neq 0$  จงสังเกตว่าเมื่อ  $x > 0$  และ  
มีค่าใกล้ 0,  $f(x)$  จะมีค่ามากขึ้น ๆ เช่น

|     |     |          |     |        |         |           |
|-----|-----|----------|-----|--------|---------|-----------|
| ถ้า | $x$ | 0.1      | ถ้า | $f(x)$ | เท่ากับ | 10        |
|     | $x$ | 0.01     | "   | $f(x)$ | "       | 100       |
|     | $x$ | 0.001    | "   | $f(x)$ | "       | 1,000     |
|     | $x$ | 0.000001 | "   | $f(x)$ | "       | 1,000,000 |
|     | :   |          | :   |        | :       |           |

จะเห็นว่าเมื่อค่า  $x$  น้อยลง ๆ (แต่มากกว่า 0) ค่าของ  $f(x)$  จะมากขึ้น ๆ  
อย่างไม่มีขอบเขตจำกัด

ต่อไปถ้าให้  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  สำหรับ  $x \neq -1$

ถ้า  $x > 0$  และ  $x$  มีค่าเข้าใกล้ 0,  $f(x)$  จะมีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต  
จำกัดหรือไม่?

|            |         |            |    |      |    |
|------------|---------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | ใช่     | เปิดไปกรอบ | 13 | หน้า | 8  |
|            | ไม่ใช่  | "          | 14 | "    | 9  |
|            | ไม่ทราบ | "          | 21 | "    | 13 |

### 4. ท่านตอบว่า : $+\infty$

ยังจะไม่บอกเลยทันทีว่าคำตอบของท่านถูกต้องหรือไม่ แต่ขอให้พิจารณาว่า  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$  นั้น  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ซึ่งแสดงว่าไม่ว่า  $x$  จะเข้าใกล้ 0  
มากสักเพียงใดก็ตาม  $x$  ก็ยังน้อยกว่า 0 อยู่ดี เมื่อ  $x$  น้อยกว่า 0,  $x$   
จะต้องเป็นเลขติดลบ แต่เศษเท่ากับ 1 นั้นเป็นเลขบวก เมื่อเลขบวกหารด้วย  
เลขลบ ผลออกมาจะเป็นเลขอะไร ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 8 หน้า 5  
แล้วเลือกคำตอบใหม่

5. นิยาม : เราพูดว่า " ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้อนันต์เป็นจำนวนจริง  $L$  " และเขียนว่า " $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ " หมายความว่า " ถ้ากำหนด  $\varepsilon > 0$  ทุกตัวมาให้ จะมีจำนวนจริง  $N > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  เมื่อ  $x < -N$  "

ตัวอย่าง : จงหา  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}$

วิธีทำ เรามีหลักการว่า " ถ้า  $x$  เข้าใกล้  $+\infty$  หรือ  $-\infty$  ก็ตาม ให้เอา  $x$  ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน แล้วจึงพิจารณาค่าของลิมิต " จากตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2 - 0}{1 + 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}$

ตอบ

|          |            |    |      |    |
|----------|------------|----|------|----|
| -2       | เปิดไปกรอบ | 20 | หน้า | 13 |
| 2        | "          | 28 | "    | 17 |
| $\infty$ | "          | 25 | "    | 15 |

$$\frac{2 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

6. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

ถูกต้องแล้ว จะสังเกตว่านิยามนี้คล้ายกับนิยามที่ 1 ของกรอบที่ 14 หน้า 9 ผิดกันแค่เพียงค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนไปคนละค่าเท่านั้น จากสัญลักษณ์ข้างบนนี้หมายความว่า " ถ้ากำหนดจำนวนจริง  $N > 0$  มาให้ไม่ว่าจะมากสักเพียงใด จะสามารถหา  $\delta > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) < -N$  เมื่อ  $x \in (a, a + \delta)$ "

นิยามที่ 3 เราพูดว่า ลิมิตทางซ้าย ของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $a$  เป็นบวก อนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ " หมายความว่า " ถ้ากำหนดจำนวนจริง  $N > 0$  ไม่ว่าจะมากสักเท่าไรก็ตาม จะมี  $\delta > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) > N$  เมื่อ  $x$  มีคุณสมบัติตามข้อใด

|     |                         |            |    |      |    |
|-----|-------------------------|------------|----|------|----|
| ตอบ | $x \in (a - \delta, a)$ | เปิดไปกรอบ | 8  | หน้า | 5  |
|     | $x \in (a, a + \delta)$ | "          | 24 | "    | 16 |
|     | $x \in (a + \delta, a)$ | "          | 10 | "    | 6  |

7. ท่านตอบว่า :  $x < N$

เอ๊ะ ท่านยังเข้าใจผิดอยู่อีกหรือนี่ เราทราบแล้วว่า  $x \in (N, \infty)$  สัญลักษณ์นี้หมายความว่าอย่างไร ฉะนั้นการที่ท่านตอบว่า  $x < N$  ควรจะเป็นไปได้หรือไม่ แนนอนที่สุดย่อมเป็นไปได้ ขอให้นึกถึงความหมายของ  $x \in (N, \infty)$  เมื่อพอจะเข้าใจแล้วขอให้เปิดไปยังกรอบที่ 29 หน้า 18 อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบใหม่



8. ท่านตอบว่า :  $x \in (a - \delta, a)$

ดีมาก ท่านตอบได้ตรงทีเดียว เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้าย  $x$  จะ  
 ต่ำกว่า  $a$  แต่  $a$  จะต้องมากกว่า  $a - \delta$  ซึ่งตรงกับคำตอบของท่าน

คราวนี้ถึงนิยามสุดท้าย ขอให้พิจารณาอย่างละเอียดและรอบคอบ

นิยามที่ 4 เราพูดว่า "ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $a$  เป็นลบอนันต์ "  
 และเขียน " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ " มีความหมายว่า " ถ้ากำหนดจำนวนจริง

$$N > 0$$

จะมี  $\delta > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) < -N$  เมื่อ  $x \in (a - \delta, a)$  "

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \quad \text{มีค่าเท่าไร}$$

ตอบ  $-\infty$  ไปเปิดกรอบ 4 หน้า 2

$-\infty$  " 19 " 12

ไม่ทราบ " 15 " 10

9. ท่านตอบว่า : 0

การที่ท่านตอบว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0$  ก็หมายความว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = 0$$

ขอให้พิจารณาว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  มีค่าเท่าไร จะเห็นว่าในขณะที่  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ค่าของ  $x < 0$  แต่  $x > 0$  เสมอ เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 มากเพียงใด  $x^2$  ก็จะเข้าใกล้ 0 มากขึ้นอีก จากความรู้เรื่องระบบจำนวน เมื่อส่วนเข้าใกล้ 0 เศษส่วนจำนวนนั้นจะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ซึ่งจะเกิน 0 ดังที่ท่านตอบไม่ได้แน่ ดังนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 26 หน้า 16 แล้วพิจารณาว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$  มีค่าเท่าไร เสร็จแล้วนำมาเปรียบเทียบกับ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  แล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

ใหม่อีกครั้ง

10. ท่านตอบว่า :  $x \in (a + \delta, a)$

ท่านเข้าใจผิดอย่างมาก พิจารณาดูซิว่า  $x \in (a + \delta, a)$  เป็นไปได้หรือไม่ การที่จะเขียน  $x \in (a, b)$  นั้นแสดงว่า  $b$  จะต้องมากกว่า  $a$  จึงจะเขียนได้ แต่ในที่นี้  $a + \delta > a$  ฉะนั้นจึงไม่สามารถเขียน  $x \in (a + \delta, a)$  ได้ ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 8 หน้า 5 คิดให้รอบคอบแล้วจึงเลือกคำตอบใหม่

11. ท่านตอบว่า :  $-\frac{1}{2}$

การที่ท่านตอบ  $-\frac{1}{2}$  ท่านคงคิดว่า  $\frac{1}{2}(-\infty) = -\frac{1}{2}$  ซึ่งจะยังไม่บอกว่าผิดหรือถูก ให้ท่านพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

เราทราบว่า  $\frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$  ตามทฤษฎีในเรื่องระบบจำนวน ดังนั้นถ้าคำตอบของท่านถูกเราจะได้ว่า

$$\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}(-\infty)$$

(เพราะต่างก็เท่ากับ  $-\frac{1}{2}$ )

สรุปว่า  $(-1) = (-\infty)$  ตามกฎการตัดออกของการคูณ ซึ่งจะเห็นว่าเป็นไปได้ ดังนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง อย่าลืมว่า  $\infty$  หรือ  $-\infty$  ไม่ใช่จำนวนเลข ฉะนั้นการบวก ลบ คูณ และหารที่เกี่ยวกับ  $\infty$ ,  $-\infty$  จึงเป็นสิ่งที่ต้องคิดให้รอบคอบ เอาละ ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 แล้วเลือกคำตอบใหม่

12. ท่านตอบว่า :  $\frac{1}{2}$

ท่านคงยังไม่เข้าใจทฤษฎีแน่ ๆ เลยจึงได้ตอบผิด ตามทฤษฎีที่ 1 ตอนที่ 2 บอกไว้อย่างแจ่มชัดมาก L ในที่นี้คือ  $\frac{1}{2}$  ฉะนั้นขอให้ท่านพลิกกลับไปดูทฤษฎีในกรอบที่ 19 หน้า 12 อย่างละเอียดอีกครั้งหนึ่ง เมื่อเข้าใจแล้วจงพยายามเลือกคำตอบที่ถูกให้ได้

13. ท่านตอบว่า : ใช่

พิจารณาคูขีวว่า ค่าตอบของท่านถูกต้องหรือไม่

เมื่อ  $x > 0$  และ  $x$  เข้าใกล้ 0 แสดงว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา  
ฉะนั้นในกรณีที่  $x$  เข้าใกล้ 0 ,  $x + 1$  จึงมีค่าเข้าใกล้ 1

เมื่อ  $x + 1$  เข้าใกล้ 1 ค่าของ  $\frac{1}{x+1}$  จะมีค่าเข้าใกล้เลขจำนวนใด  
ถ้าท่านสามารถหาได้ว่าเลขจำนวนนั้นคืออะไรแล้วขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบ  
ที่ 3 หน้า 2 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้ง

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 5

1.  $\frac{1}{2}$

2.  $-x$

3. 0

o

4.  $\infty$

5.  $-\infty$

6. 1

14. ท่านตอบว่า : ไม่ใช่

ถูกแล้ว ค่า  $g(x)$  ไม่ได้เพิ่มมากขึ้นแต่อย่างใดในขณะที่  $x$  เข้าใกล้ 0 แต่  $\frac{1}{x+1}$  มีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้นค่าของ  $g(x)$  จึงมีได้เพิ่มขึ้นแต่อย่างใด

$$\text{พิจารณา } f(x) = \frac{3}{x-2} ; x \neq 2$$

จะเห็นว่า เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 ทางขวา ยิ่งเข้าใกล้มากเท่าไร ตัวส่วน คือ  $x-2$  ก็จะเข้าใกล้ 0 มากเท่านั้น เมื่อส่วนเข้าใกล้ 0 ค่าของเศษส่วน จะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ในกรณีนี้เรามีนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 1 เราพูดว่า "ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $a$  เป็นบวกอนันต์" และเขียนแทนด้วย " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ " หมายความว่า "  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางขวา ยิ่งเข้าใกล้มากเท่าไร ค่าของ  $f(x)$  ยิ่งเพิ่มมากขึ้นเท่านั้น " ถ้าพูดเป็นภาษาคณิตศาสตร์จะหมายถึง " ถ้ากำหนดจำนวนจริง  $N > 0$  ใด ๆ มาให้จะมี  $\delta > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) > N$  เมื่อ  $x \in (a, a + \delta)$  "

เช่น  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  เป็นต้น

จากนิยามข้างบน เราสามารถสร้างนิยามได้อีกดังนี้

นิยามที่ 2 เราพูดว่า "ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $a$  เป็นลบอนันต์" และเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า " ....." "

ตอบ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  เปิดไปกรอบ 27 หน้า 17

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  " 17 " 11

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  " 6 " 4

15. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

ตามที่เราทราบแล้วว่า  $f(x) = \frac{1}{x}$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต  
จำกัด เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา นั่นคือ  $f(x)$  เข้าใกล้  $+\infty$  เมื่อ  $x \rightarrow 0^+$   
แต่ในที่นี้โจทย์ถามว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  มีค่าเท่าไร ก็หมายความว่าถ้า  $x$   
เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย  $f(x)$  จะเป็นเท่าไรนั่นเอง

คราวนี้ดูซิว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย แสดงว่า  $x$  ต้องมีค่าเป็นอย่าง-  
ไร ตามนิยามแสดงว่า  $x$  ต้องน้อยกว่า 0 เมื่อ  $x < 0$ ,  $x$  จะต้องเป็น  
เลขลบ ดังนั้น  $1 \div x$  หรือ  $\frac{1}{x}$  จะมีค่าเป็นอย่างไร ( 1 เป็นเลขบวก แต่  $x$   
เป็นเลขลบ) เมื่อท่านพอจะหาคำตอบได้แล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 8  
หน้า 5 แล้วพยายามเลือกคำตอบใหม่

16. ท่านตอบว่า :  $x = N$

ท่านเข้าใจผิดเสียแล้ว ท่านว่าได้หรือไม่ว่า  $x \in (N, \infty)$  นั้นหมาย-  
ความว่าอย่างไร  $(N, \infty)$  แสดงถึงช่วงเปิดซึ่งมีความหมายว่า  $N < x < \infty$   
ดังนั้นการที่  $x$  จะเท่ากับ  $N$  จึงเป็นไปได้ไม่ได้ ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่  
29 หน้า 18 ใหม่ แล้วจึงเลือกคำตอบอีกครั้ง

17. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

คำตอบของท่านเกือบถูก แต่ยังมีข้อผิดพลาดอีกเล็กน้อย ท่านจะต้องอ่าน  
 นิยามให้เข้าใจอีกครั้งหนึ่ง โดยดูนิยามที่ 1 ในกรอบที่ 14 หน้า 9 ท่าน  
 ต้องดูว่า  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางไหน และค่าของ  $f(x)$  เป็นอย่างไร เมื่อท่านมี  
 ความมั่นใจแล้วขอให้เปิดกลับไปกรอบ 14 หน้า 9 ใหม่แล้วพยายามเลือก  
 คำตอบอีกครั้ง

18. ท่านตอบว่า :  $-\infty$

การที่ท่านตอบว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$  ย่อมหมายความว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = -\infty$$

จะยังไม่บอกว่าคำตอบของท่านถูกหรือไม่ ขอให้พิจารณาจากคำอธิบายต่อไปนี้

ตอนแรกขอให้พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$  ว่ามีค่าเท่าไร จะเห็นว่า  $x$

เข้าใกล้ 0 ทางขวา แสดงว่า  $x > 0$  ฉะนั้น  $x > 0$  มากยิ่งขึ้น

เมื่อเป็นดังนี้  $\frac{1}{x^2}$  จึงมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่สิ้นสุด

เพียงพิจารณาแค่นี้ก็พอจะบอกได้ว่าคำตอบที่ท่านเลือกมานั้นยังไม่ถูกต้อง

เพราะ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \neq -\infty$  แล้วก็คงไม่ต้องพิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  อีก บอกได้

ทันทีว่าคำตอบของท่านผิด ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 26 หน้า 16 ใหม่

แต่ก่อนที่จะเปิดไป ขอแนะนำว่าให้พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$  เปรียบเทียบกับ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  ว่าเท่ากันหรือไม่ แล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ เอาละ เปิดไป  
 กรอบที่ 26 หน้า 16 ได้

19. ท่านตอบว่า :  $-\infty$

ถูกต้องที่เคียว  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  แสดงว่า  $x$  เข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย  
นั่นคือ  $x$  น้อยกว่า 0 เมื่อ  $x < 0$  ค่าของ  $x$  ต้องติดลบ ผลหารจึงเข้าใกล้  $-\infty$

เมื่อท่านเข้าใจพอสมควรแล้ว ขอให้ศึกษาทฤษฎีต่อไปนี้อย่างละเอียด  
เราจะนำทฤษฎีบางทฤษฎีที่เกี่ยวกับลิมิตอนันต์มาใช้โดยไม่ต้องพิสูจน์

ทฤษฎีที่ 1 ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  หรือ  $-\infty$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$

แล้วเราจะได้ว่า

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & ; L > 0 \\ +\infty & ; L < 0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \\ -\infty & ; L < 0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

ขอให้ท่านศึกษาทฤษฎีนี้ให้เข้าใจแจ่มแจ้งจนกว่าจะแน่ใจว่ารู้เรื่องแล้วจึงค่อยอ่านต่อไป

ตัวอย่าง จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x}$

วิธีทำ  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$   
 $= \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = \dots\dots\dots$

|            |               |      |        |    |      |    |
|------------|---------------|------|--------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | $\frac{1}{2}$ | เปิด | ปิดรอบ | 12 | หน้า | 7  |
|            | $+\infty$     | "    | "      | 23 | "    | 14 |
|            | $+\infty$     | "    | "      | 1  | "    | 1  |



20. . ท่านตอบว่า : -2

คำตอบของท่านยังผิดอยู่อีกนึ่ก ท่านลองเอา  $x$  หารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

แล้วใช้ทฤษฎีลิมิตที่เกี่ยวกับการบวกก็จะได้ตามที่ต้องการ ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบ

ที่ 5 หน้า 3 ศึกษาตัวอย่างให้เข้าใจก่อนที่จะเลือกคำตอบ

21. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

ทำไมละ เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 จากทางขวา ( $x > 0$ ) ค่าของ  $x + 1$  ก็ย่อมเข้าใกล้ 1 เมื่อเป็นดังนี้  $\frac{1}{x+1}$  จะเข้าใกล้เลขจำนวนใดหรือไม่นั้น

เมื่อท่านได้คำตอบแล้ว ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบ 3 หน้า 2 ใหม่ แล้วเลือกคำตอบที่ถูกให้ได้

22. ท่านตอบว่า :  $-\frac{\infty}{2}$

ท่านแน่ใจหรือไม่ว่าคำตอบของท่านถูกหรือผิด ใช้ความรู้เดิมนึกดูซิว่า  $-\infty$  เป็นจำนวนเลขหรือไม่  $-\infty$  แทนเลขตัวใดตัวหนึ่งหรือไม่ ท่านจะพบว่า  $-\infty$  ไม่ได้เป็นตัวเลขหรือจำนวนแต่อย่างใด ดังนั้นการที่จะเอา 2 ไปหาร  $-\infty$  จึง เป็นเรื่องที่เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่าน เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบใหม่

---

23. ท่านตอบว่า :  $+\frac{\infty}{2}$

ขอให้ท่านตั้งใจคิดให้ถี่ว่า ในทางคณิตศาสตร์เราเคยเขียนสัญลักษณ์  $+\frac{\infty}{2}$  บ้างหรือไม่ ขอทำความเข้าใจอีกครั้งหนึ่งว่า  $\infty$  ไม่ใช่ตัวเลขหรือจำนวนอะไร ทั้งสิ้น เป็นแค่เพียงสัญลักษณ์ที่เราใช้ในความหมายที่มาก ๆ ซึ่งเราเองก็รู้ว่า เท่าไรเหมือนกัน ฉะนั้นเมื่อ  $\infty$  ไม่ใช่จำนวน ท่านจะเอา 2 ไปหารได้หรือไม่แน่นอนที่สุดย่อมเอาไปหารไม่ได้ เมื่อเป็นดังนี้คำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้พลิกกลับไปยังกรอบที่ 19 หน้า 12 แล้วจึงเลือกคำตอบที่ท่านเห็นว่าถูกต้อง

24. ท่านตอบว่า :  $x \in (a, a + \delta)$

ข้อความที่ท่านตอบนี้แสดงว่า  $a < x < a + \delta$  นั่นคือแสดงว่า  $x > a$  แต่ตามที่โจทย์ถามนั้นโจทย์ถามว่า  $x \rightarrow a^-$  ซึ่งหมายความว่า  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้าย ค่าของ  $x$  จะต้องเป็นอย่างไร คงนึกถึงความรู้เดิมที่ท่านได้แล้วขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 6 หน้า 4 แล้วเลือกคำตอบใหม่

---

25. ท่านตอบว่า :  $\infty$

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง ท่านลองเอา  $x$  หารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

แล้วใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับการบวกก็จะได้ผลตามที่ต้องการ แต่ไม่ใช่  $\infty$  ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 5 หน้า 3 ศึกษาตัวอย่างให้เข้าใจก่อนที่จะเลือกคำตอบ

26. ท่านตอบว่า :  $-\infty$

คำตอบของท่านถูกแล้ว จงภูมิใจเถิดว่าท่านเรียนได้แน่ไม่แพ้คนอื่น ๆ  
ต่อไปนี้ขอให้ศึกษาทฤษฎีที่ 2 พยายามอย่าให้ผิด ถ้าไม่เข้าใจก็อย่าผ่านไป

ทฤษฎีที่ 2 ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$   
แล้วเราเขียน

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$   
เราเขียน

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

ทฤษฎีนี้สรุปสั้น ๆ ได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $a$  จะเท่ากับ  $+\infty$   
หรือ  $-\infty$  ได้ก็ต่อเมื่อลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวาเหมือนที่ท่านเคยผ่านมาแล้ว

ตัวอย่าง : จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(ให้พิจารณาว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  และ  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$  มีค่าเท่าไร)

ตอบ 0 เปิดไปกรอบ 9 หน้า 6

$-\infty$  " 18 " 11

$+\infty$  " 29 " 18

27. ท่านตอบว่า : ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

เกือบถูกนะ แต่ยังไม่ถูก ขอให้ท่านอ่านคำนิยามอย่างละเอียดว่า  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางด้านใดและค่าของ  $f$  เป็นเท่าไร (โดยดูนิยามที่ 1 ในกรอบ 14 หน้า 9 ประกอบ) ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 14 หน้า 9 พยายามอ่านนิยามให้เข้าใจก่อนแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

28. ท่านตอบว่า 2

คำตอบของท่านถูกต้อง แสดงว่าท่านเข้าใจเรื่องนี้พอสมควร คราวนี้ถึงนิยามอีกอันหนึ่งซึ่งเป็นนิยามสุดท้ายของเรื่องลิมิตที่ท่านจะเรียน ขอให้ท่านศึกษามาให้ดี

นิยาม เราพูดว่า " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ " หมายความว่า "ถ้า

กำหนดจำนวนจริง  $N > 0$  มาให้ จะมีจำนวนจริง  $K > 0$  ซึ่งถ้า  $x > K$  แล้วจะได้ว่า  $f(x) > N$ "

พูดให้เข้าใจง่าย ๆ ก็คือ เมื่อ  $x$  มีค่าเพิ่มขึ้น ๆ นั้น ค่าของฟังก์ชัน  $f$  ก็เพิ่มขึ้นตามไปด้วย

ตัวอย่าง จงหา  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

วิธีทำ เราใช้กฎเกณท์ คือเอา  $x$  ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + 0}{0 + 0} = +\infty$$

ถ้าท่านศึกษาตัวอย่างเข้าใจแล้ว ขอให้เปิดไปยังกรอบ 30 หน้า 19 โชคดีนะ

29. ท่านตอบว่า :  $+\infty$

ท่านเก่งมาก ท่านตอบได้ถูกต้อง ทั้งนี้เพราะว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

ดังนั้นเราจึงสรุปว่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  ซึ่งตรงตามที่ท่านตอบพอดี

คราวนี้ลองมาพิจารณานิยามที่แปลกออกไปบ้าง ตั้งใจศึกษาให้ดีๆ เพราะเป็นเรื่องใหม่อีกเรื่องหนึ่งสำหรับท่าน

นิยาม เราพูดว่า " ลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้บวกอนันต์ ( $+\infty$ ) เป็นจำนวนจริง  $L$  " และเขียนว่า

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

ซึ่งหมายความว่า " ถ้ากำหนด  $\varepsilon > 0$  มาให้ไม่ว่าจะมากหรือน้อยเพียงไรก็ตาม เราสามารถหาจำนวนจริง  $N > 0$  ซึ่งทำให้  $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  เมื่อ  $x \in (N, \infty)$  " หรือพูดอีกอย่างหนึ่ง คือ  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$  เมื่อ .....

ตอบ  $x = N$  เปิดไปกรอบ 16 หน้า 10

$x < N$  " 7 " 4

$x > N$  " 2 " 1 °

บทเรียนแบบโปรแกรมเรื่องความต่อเนื่อง

ตอนที่ 6

จำนวนกรอบ 32 กรอบ

1. เมื่อเราพูดถึงลิมิตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$ ,  $a$  จำเป็นต้องอยู่ใน  $D_f$  หรือไม่

|            |                  |            |    |      |   |
|------------|------------------|------------|----|------|---|
| <u>ตอบ</u> | อยู่             | เปิดไปกรอบ | 17 | หน้า | 9 |
|            | ไม่อยู่          | "          | 11 | "    | 6 |
|            | อยู่หรือไม่ก็ได้ | "          | 8  | "    | 4 |

2. ท่านตอบว่า :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

ถูกแล้ว จะเห็นว่า  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  แต่  $f(2) = 5$  ดังนั้นฟังก์ชัน

นี้จึงขาดคุณสมบัติข้อ 3 ฟังก์ชัน  $f$  จึงไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  ส่วนที่  $x \neq 2$

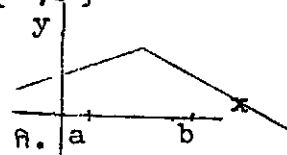
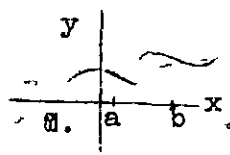
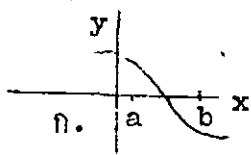
เราได้  $f(x) = x + 2$  ดังนั้นถ้า  $a \neq 2$  แล้ว  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a + 2$

เพราะฉะนั้น  $f$  มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดยกเว้นที่จุด  $x = 2$

นิยาม " ถ้า  $A \subseteq D_f$  และถ้า  $f$  มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด  $x$  ใน  $A$  เราพูดว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน  $A$  หรือ  $f$  มีความต่อเนื่องบน  $A$  "

" ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  เราพูดว่ากราฟของ  $f$  ระหว่างจุด  $x = a$  และจุด  $x = b$  จะไม่มีช่องโหว่หรือขาดตอน "

กราฟของฟังก์ชันในข้อใดที่ไม่ต่อเนื่องในช่วง  $[a, b]$



|            |        |            |    |      |    |
|------------|--------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | รูป ก. | เปิดไปกรอบ | 21 | หน้า | 11 |
|            | รูป ข. | "          | 16 | "    | 8  |
|            | รูป ค. | "          | 10 | "    | 5  |



3. ท่านตอบว่า : เพราะว่า  $f(2)$  หาค่าไม่ได้

ท่านยังเข้าใจไม่ถูกต้องนัก พยายามศึกษาด้วยความรอบคอบที่สุด ขอให้พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดอีกครั้งหนึ่ง จากฟังก์ชันที่กำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 5 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

จะเห็นว่า  $5 \in D_f$  ซึ่งแสดงว่าที่จุด  $x = 2$  เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันได้  $f$  ฉะนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้กลับไปพิจารณากรอบที่ 13 หน้า 7 อย่างถี่ถ้วนแล้วจึงเลือกคำตอบ

4. ท่านตอบว่า : ไม่ต่อเนื่อง

ถูกต้องที่สุด ฟังก์ชัน  $f$  ที่กำหนดให้ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  เพราะที่จุด  $x = 2$  ฟังก์ชัน  $f$  ไม่นิยาม แสดงว่าขาดคุณสมบัติข้อ 1 และเมื่อวาดกราฟของ  $f$  เสนกกราฟจะมีช่องโหว่หรือขาดตอนที่จุด  $x = 2$

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันใดไม่มีความต่อเนื่องในช่วง  $[-2, 2]$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + x}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad h(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 16}$$

|            |        |            |    |      |    |
|------------|--------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | $f(x)$ | เปิดไปกรอบ | 12 | หน้า | 6  |
|            | $g(x)$ | "          | 29 | "    | 15 |
|            | $h(x)$ | "          | 19 | "    | 10 |

5. ท่านตอบว่า : มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$

การที่ท่านตอบเช่นนี้ย่อมแสดงว่า ฟังก์ชัน  $f$  สอดคล้องตามนิยามทั้งสามข้อ  
ลองพิจารณาทีละข้อชื่อว่าสอดคล้องหรือไม่

ก.  $f(2) = 5$  แสดงว่าฟังก์ชัน  $f$  หาค่าได้ที่จุด  $x = 2$  จึงสอดคล้องข้อ 1

ข.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  แสดงว่าลิมิตหาได้จึงสอดคล้องข้อ 2

ค. แต่  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

ดังนั้นแหละท่านคงทราบว่าที่ท่านตอบมานั้นถูกหรือผิด ฟังก์ชัน  $f$  ไม่สอดคล้องตามนิยาม  
ทั้งสามข้อ แสดงว่าฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความต่อเนื่อง เมื่อเป็นดังนี้คำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง  
ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 15 หน้า 8 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้ง

6. ท่านตอบว่า :  $g(x)$

ใช้แล้ว  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$  หาค่าได้ทุกจุดในช่วง  $(-\infty, \infty)$  และจาก-

การทดสอบตามนิยามของความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน  $f$  สอดคล้องทั้ง 3 กรณี จึงสรุป  
ได้ว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องในช่วง  $(-\infty, \infty)$

$$\text{ถ้าให้ } F(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

จึงพิจารณาว่า  $F$  มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  หรือไม่

|     |              |            |    |      |   |
|-----|--------------|------------|----|------|---|
| ถาม | ต่อเนื่อง    | เปิดไปกรอบ | 9  | หน้า | 5 |
|     | ไม่ต่อเนื่อง | "          | 14 | "    | 7 |
|     | ไม่ทราบ      | "          | 7  | "    | 4 |

7. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

ไม่เป็นไร จงพยายามตั้งใจศึกษาให้ดี ขอให้ท่านทดสอบฟังก์ชัน  $F$  ตามหัวข้อต่อไปนี้

1)  $F(2)$  หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้มีค่าเท่าไร

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} F(x)$  หาค่าได้หรือไม่? ถ้าหาค่าได้มีค่าเท่าไร

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = F(2)$  หรือไม?

ถ้าฟังก์ชัน  $F$  สอดคล้องทั้ง 3 ข้อข้างต้น ท่านสรุปได้ทันทีว่าฟังก์ชัน  $F$  มีความต่อเนื่อง แต่ถ้ามีข้อหนึ่งข้อใดที่ไม่เป็นไปตามนิยาม ฟังก์ชัน  $F$  ก็ไม่มีความต่อเนื่อง

เมื่อท่านพอจะเข้าใจวิธีหาแล้ว ขอให้ท่านเปิดไปยังกรอบที่ 6 หน้า 3 แล้วเลือกคำตอบด้วยความรอบคอบอีกครั้งหนึ่ง

8. ท่านตอบว่า : อยู่หรือไม่ก็ได้

ดีมาก  $a$  ไม่จำเป็นต้องอยู่ใน  $D_f$  ดังตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดว่า

$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  จะได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$  แต่  $3 \notin D_f$  อย่างไร

ก็ ในกรณีที่  $a \in D_f$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  อาจจะไม่เท่ากับ  $f(a)$  ก็ได้ แต่เราได้

เห็นตัวอย่างมากมายที่  $a \in D_f$  และ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ต่อไปนี้เป็นคำนิยามของความต่อเนื่อง ขอให้ท่านตั้งใจศึกษาให้ดีที่สุด  
 ออ เกือบจบ เปิดหน้าถัดไปดีกว่า เร็ว ๆ ธิ

นิยาม ฟังก์ชัน  $f$  จะมีความต่อเนื่องที่จุด  $x = a$  ก็ต่อเมื่อคุณสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้เป็นจริง

- 1)  $f(a)$  ต้องหาค่าได้
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  จะต้องหาได้
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  จะต้องเท่ากับ  $f(a)$

ถ้าฟังก์ชันใดมีคุณสมบัติครบ 3 ประการข้างบนแล้ว เราพูดว่าฟังก์ชันนั้นมีความต่อเนื่องที่จุด  $a$  แต่ถ้าฟังก์ชันใดขาดคุณสมบัติข้อหนึ่งข้อใดแล้วเราพูดว่าฟังก์ชันนั้นไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $a$

ตัวอย่าง ถ้ากำหนดว่า  $f(x) = \frac{1}{x}$

ฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 0$  หรือไม่?

|            |              |            |    |      |    |
|------------|--------------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | ต่อเนื่อง    | เปิดไปกรอบ | 23 | หน้า | 12 |
|            | ไม่ต่อเนื่อง | "          | 22 | "    | 11 |
|            | ไม่ทราบ      | "          | 28 | "    | 14 |

9. ท่านตอบว่า : ต่อเนื่อง

ท่านตอบได้ถูกต้อง เก่งมากที่สุด ขอให้ดูการทดสอบว่า  $F$  มีความต่อเนื่องหรือไม่อีกครั้งแล้วจำไว้เป็นตัวอย่าง

$$1) \quad F(2) \quad \text{ค่าได้} \quad \frac{2}{2} + 2 = 3$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = 3$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} F(x) = F(2) = 3$$

$\therefore$  สอดคล้องตามคุณสมบัติทั้งสามข้อของความต่อเนื่อง จึงสรุปได้ว่า  $F$  มีความต่อเนื่องที่  $x = 2$

อนุญาตให้ท่านพักผ่อนได้ 2 นาทีแล้วเปิดไปยังกรอบที่ 32 หน้า 16 เพื่อสร้างความมั่นใจให้กับตัวท่านเองอีกครั้งหนึ่ง

10. ท่านตอบว่า : รูป ก.

การที่ท่านตอบว่ารูป ก. ไม่ต่อเนื่องก็แสดงว่ากราฟในรูป ก. จะต้องมีส่วนโหว่ในช่วง  $[a, b]$  แต่ขอให้ท่านเปิดกลับไปดูกราฟในรูป ก ในกรอบที่ 2 หน้า 1 ตามที่ท่านตอบว่ามีช่องโหว่ในช่วง  $[a, b]$  หรือไม่ เมื่อท่านพิจารณาจนเห็นแจ่มชัดแล้วขอให้เลือกคำตอบใหม่

11. ท่านตอบว่า : ไม่อยู่

แต่หรือเปล่าที่ท่านตอบว่าไม่อยู่ ท่านก็กรอตอบคี่แล้วหรือ รองดูตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งท่านตอบถูกหรือผิด

$$\text{ให้ } f(x) = 2x + 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \quad \text{และ} \quad f(2) = 5$$

ซึ่งแสดงว่า  $x = 2$  ค่าของฟังก์ชัน  $f$  เท่ากับ 5 นั่นคือ  $2 \in D_f$   
ฉะนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้เปิดกลับไปยังกรวยที่ 1 หน้า 1  
อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

12. ท่านตอบว่า :  $f(x)$

ถูกต้องแล้ว เพราะ  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + x}$  ไม่นิยามที่จุด  $x = 0$  และ  $x = -1$   
เพราะจะทำให้ส่วนเป็น 0 ซึ่ง 0 และ -1 ต่างก็อยู่ในช่วง  $[-2, 2]$  ดังนั้น  
ฟังก์ชัน  $f$  จึงไม่มีความต่อเนื่องในช่วง  $[-2, 2]$

คราวนี้ถ้าเราบอกว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องในช่วง  $(-\infty, \infty)$  หมายความว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องตลอดสำหรับว่าจำนวนจริง  $x$  ทุกตัว

ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดที่มีความต่อเนื่องในช่วง  $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$h(x) = \frac{1}{x} + 2$$

ตอบ

|        |            |    |      |    |
|--------|------------|----|------|----|
| $f(x)$ | เปิดไปกรวย | 26 | หน้า | 13 |
| $g(x)$ | "          | 6  | "    | 3  |
| $h(x)$ | "          | 24 | "    | 12 |

13. ท่านตอบว่า : ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$

ใช่แล้ว ฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  เอ๊ะ! ท่านตอบถูก แต่สงสัยว่าท่านทราบได้อย่างไรว่า  $f$  ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$

ตอบ เพราะ  $f(2)$  หาค่าไม่ได้ เปิดไปกรอบ 3 หน้า 2  
 "  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าไม่ได้ " 30 " 15  
 "  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$  " 2 " 1

---

14. ท่านตอบว่า : ไม่มีความต่อเนื่อง

จะยังไม่บอกว่าคุณคำตอบของท่านถูกหรือผิด ขอให้ท่านทดสอบนิยามของความต่อเนื่องทั้งสามข้อที่เคยกล่าวแล้วคือ

- 1)  $F(x)$  ต้องหาค่าได้
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 2} F(x)$  ต้องหาได้
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = F(x)$

เพื่อท่านทดสอบแล้ว ท่านจะพบว่าคำตอบของท่านผิด ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 6 หน้า 3 แล้วเลือกคำตอบใหม่

15. ท่านตอบว่า : ไม่อยู่

ถูกต้อง จุด  $x = 0$  ไม่อยู่ใน  $D_f$  ทั้งนี้เพราะ  $f(0) = \frac{1}{0}$  ซึ่งไม่มีความหมายแต่อย่างใด กราฟนี้ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปชื่อว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  หรือไม่ โดยกำหนดว่า

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 5 & ; x = 2 \end{cases}$$

ตอบ  $f$  มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  เปิดไปกรอบ 5 หน้า 3  
 $f$  ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  " 13 " 7  
 ไม่ทราบ " 25 " 13

16. ท่านตอบว่า : รูป ข.

ท่านตอบได้ถูกต้องแล้ว เพราะว่าในรูป ข. กราฟในช่วง  $[a, b]$  ซึ่งมีช่องโหว่ กราฟไม่ได้เป็นเส้นเดียวกันตลอด แสดงว่าฟังก์ชันในข้อนี้ไม่มีความต่อเนื่องในช่วง  $[a, b]$  การที่เราพูดว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องในช่วง  $[a, b]$  หมายความว่า  $f$  มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดในช่วง  $[a, b]$

หลักง่าย ๆ ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องในช่วงใดหรือไม่ นั่นก็คือว่าฟังก์ชันดังกล่าวนิยามตลอดช่วงนั้นหรือไม่ แล้วจึงพิจารณาคูณสมบัติข้อ 3 ที่หลัง เช่น  $f(x) = \frac{1}{x}$  ไม่มีความต่อเนื่องในช่วง  $[-1, 1]$  เพราะว่าที่จุด  $x = 0$  ฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความหมาย

กำหนดให้  $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 4}$  ฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องในช่วง  $[0, 5]$

ตอบ ต่อเนื่อง เปิดไปกรอบ 27 หน้า 11  
 ไม่ต่อเนื่อง " 4 " 2  
 ไม่ทราบ " 18 " 9



17. ท่านตอบว่า : อยู่

นั่นแน่ ท่านตอบโดยไม่คิดให้รอบคอบเสียก่อน ตัวอย่างเช่น ถ้าให้

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

เราได้  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  แต่  $f(2)$  หาค่าไม่ได้ แสดงว่า  $2 \notin D_f$

ขอให้ท่านคิดอย่างรอบคอบแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ เพราะเป็นเรื่องที่ลึกซึ้งยากแก่การเข้าใจ ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 1 หน้า 1 ใหม่แล้วเลือกคำตอบ

18. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

อย่าเพิ่งท้อใจเลยนะ พยายามอีกหน่อย การที่เราจะพิจารณาว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องในช่วง  $[0, 5]$  หรือไม่นั้นก็ให้ดูว่าทุกจุดที่อยู่ในช่วง  $[0, 5]$  นั้นฟังก์ชัน  $f$  หาค่าได้ทั้งหมดหรือไม่ ถ้ามีจุดใดที่ฟังก์ชัน  $f$  ไม่นิยามหรือหาขีดจำกัดไม่ได้ก็แสดงว่าฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความต่อเนื่อง ถ้าสามารถหาค่าและหาขีดจำกัดได้ทุกจุดก็ให้พิจารณาว่านิยามข้อที่ 3 คือ " ค่าขีดจำกัดเท่ากับค่าของฟังก์ชัน " สอดคล้องหรือไม่ แล้วจึงค่อยสรุป

คงพอจะเข้าใจแล้วนะ ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 16 หน้า 8 แล้วเลือกคำตอบใหม่ ขอให้โชคดี

19. ท่านตอบว่า :  $h(x)$

จากการสำรวจจะพบว่า  $h(x) = \frac{x+1}{x^2-16}$  ไม่นิยามที่จุด  $x = 4$  และ

$x = -4$  เท่านั้น แต่จุดดังกล่าวไม่ได้อยู่ในช่วง  $[-2, 2]$  ฉะนั้นในช่วง  $[-2, 2]$ ,  $h(x)$  จึงหาค่าได้ทุกจุด และจากการทดสอบนิยามของความต่อเนื่องแล้ว จะพบว่า  $h(x)$  สอดคล้องทุกกรณี จึงสรุปว่า  $h(x)$  ต่อเนื่องในช่วง  $[-2, 2]$  ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 4 หน้า 2 ใหม่ อีกครั้งแล้วพิจารณาเลือกคำตอบ

20. ท่านตอบว่า : อยู่หรือไม่ก็ได้

คำตอบของท่านเกือบจะถูกตองแล้ว จุดใด ๆ ก็ตามจะเป็นไปได้ 2 กรณี คืออยู่ใน  $D_f$  หรือไม่อยู่ใน  $D_f$  แต่ตามที่ท่านตอบมานั้นหมายความว่า จะอยู่ก็ได้หรือไม่อยู่ก็ได้ ซึ่งยังไม่ถูกตอง ขอให้ท่านคิดให้ถี่ถ้วนเปิดกลับไปเลือกคำตอบในกรอบที่ 22 หน้า 11 ใหม่

21. ท่านตอบว่า : รูป ก.

แสดงว่าท่านยังไม่เข้าใจความหมายของกราฟของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง  
จะขอกล่าวซ้ำ ณ ที่นี้อีกครั้ง ขอให้ท่านให้เข้าใจ

" ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  เราพูดได้ว่ากราฟของ  $f$   
ระหว่างจุด  $x = a$  และ  $x = b$  จะไม่มีช่องโหว่หรือไม่ขาดตอน "

แต่ในรูป ก. กราฟไม่มีช่องโหว่ตรงไหนเลย แสดงว่ากราฟในรูป ก.  
นี้มีความต่อเนื่องในช่วง  $[a, b]$  เพื่อเป็นดังนี้คำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง  
ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 2 หน้า 1 อีกครั้งแล้วเลือกคำตอบใหม่

๐

22. ท่านตอบว่า :  $f$  ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 0$

ดีมาก ท่านตอบได้ถูกต้องแล้ว  $f(x) = \frac{1}{x}$  ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 0$   
ขอให้ท่านพิจารณาต่อไปว่าจุด  $x = 0$  อยู่ใน  $D_f$  หรือไม่

|            |                  |            |    |      |    |
|------------|------------------|------------|----|------|----|
| <u>ตอบ</u> | ไม่อยู่          | เปิดไปกรอบ | 15 | หน้า | 8  |
|            | อยู่             | "          | 31 | "    | 16 |
|            | อยู่หรือไม่ก็ได้ | "          | 20 | "    | 10 |

23. ท่านตอบว่า : ,  $f$  ต่อเนื่องที่จุด  $x = 0$

การที่ท่านตอบเช่นนี้ย่อมแสดงว่าฟังก์ชัน  $f$  สอดคล้องตามคุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ คราวนี้ท่านลองตรวจสอบข้อ 1 ก่อน คือ  $f(0)$  หาค่าได้หรือไม่ ระบุว่าที่จุด  $x = 0$  , ฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความหมาย (เพราะว่าหารด้วย 0)

เพียงข้อเดียวเท่านั้นที่ไม่สอดคล้องแล้ว ฉะนั้นข้ออื่นๆ ก็ไม่จำเป็นต้องพิจารณาต่อไปอีก เมื่อท่านพอจะเข้าใจแล้วขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 8 หน้า 4 แล้วเลือกคำตอบใหม่

24. ท่านตอบว่า :  $h(x)$

การที่ท่านตอบว่า  $h(x)$  ก็แสดงว่า  $h(x) = \frac{1}{x} + 2$  นิยามตลอด ช่วง  $(-\infty, \infty)$  ท่านคงลืมไว้ที่จุด  $x = 0$  ,  $h(x)$  หาค่าไม่ได้

เพียงแค่นี้ก็ไม่ต้องพิจารณากรณีอื่นอีก ดังนั้นคำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 12 หน้า 6 คิดให้รอบคอบก่อนแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบ

25. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

หน้าที่ของท่านคือจะต้องตรวจดูว่าฟังก์ชัน  $f$  ที่กำหนดให้มานั้นสอดคล้องตาม  
นิยามทั้ง 3 ข้อหรือไม่ ค่อย ๆ พิจารณาไปที่ละข้อจนกว่าจะหมด ถ้าพบว่าข้อหนึ่ง  
ข้อใดไม่เป็นจริง ท่านก็สรุปได้ทันทีว่าฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนด  
ให้ เมื่อท่านพอใจแล้ว ขอให้ท่านเปิดไปยังกรอบที่ 15 หน้า 8 ทำตามลำดับ  
ชั้นที่บอกมาแล้วจึงค่อยเลือกคำตอบใหม่

26. ท่านตอบว่า :  $f(x)$

คำตอบของท่านยังไม่ถูกต้องนัก เพราะ  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  จะไม่  
นิยามถ้า  $x > 1$  หรือ  $x < -1$  (หรือ  $|x| > 1$ ) เช่นที่จุด  $x = 2$   
เราจะได้  $x^2 = 4$  ซึ่งทำให้เลขภายในเครื่องหมายกรณฑ์ (root) เป็นเลข  
ลบซึ่งหาค่าที่แท้จริงไม่ได้ ดังนั้น ฟังก์ชัน  $f$  จึงไม่มีความต่อเนื่องในช่วง  $(-\infty, \infty)$   
ขอให้ท่านเปิดกลับไปพิจารณาเลือกคำตอบในกรอบที่ 12 หน้า 6 อีกครั้ง

27. ท่านตอบว่า : ต่อเนื่อง

ยังไม่บอกว่าถูกหรือผิด ขอให้ท่านพิจารณาว่าในช่วง  $[0, 5]$  ฟังก์ชัน  
สามารถหาค่าได้ทุกจุดตลอดช่วงหรือไม่ ท่านจะพบว่าที่จุด  $x = 2$  ฟังก์ชัน  $f$   
ไม่นิยาม  $2 \in [0, 5]$  แสดงว่าที่จุด  $x = 2$  กราฟของฟังก์ชัน  $f$  มีช่องโหว่หรือขาดตอน  
(เพราะหาค่าไม่ได้) ฉะนั้นท่านจะสรุปว่าอย่างไร ขอให้ท่านเปิดไปยังกรอบที่ 16  
หน้า 8 แล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้องอีกกรังหนึ่ง

28. ท่านตอบว่า : ไม่ทราบ

อย่าเพิ่งท้อใจ ขอให้ท่านอ่านนิยามของความต่อเนื่องในกรอบที่ 8  
หน้า 4 ให้เข้าใจที่สุดแล้วพิจารณาว่าแต่ละข้อมีความหมายอย่างไร และเมื่อ  
ท่านเข้าใจนิยามแล้วขอให้ท่านพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ คือ  $f(x) = \frac{1}{x}$  ว่า  
สอดคล้องตามนิยามทั้งสามข้อหรือไม่ โดยเริ่มพิจารณาตั้งแต่นิยามข้อ 1 เป็นต้นไป  
ถ้ามีข้อหนึ่งข้อใดที่ฟังก์ชัน  $f$  ไม่สอดคล้องก็สรุปว่าฟังก์ชัน  $f$  ไม่มีความต่อเนื่อง แต่  
ถ้าสอดคล้องทั้งสามข้อก็สรุปว่าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่อง เอาละ ท่านคงจะพอเข้าใจ  
แล้ว ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 8 หน้า 4 แล้วเลือกคำตอบใหม่

29. ท่านตอบว่า :  $g(x)$

ตามนิยามที่ให้ไว้ คือ  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  จะเห็นว่าในช่วง  $[-2, 2]$  นี้

$g(x)$  หาค่าได้ตลอดช่วง เพราะส่วนคือ  $x^2 + 1$  ไม่มีโอกาสเป็นศูนย์ได้เลย  
และเมื่อพิจารณาตามนิยามของความต่อเนื่องแล้วจะเห็นว่าสอดคล้องทุกกรณี ฉะนั้น  
 $g(x)$  จึงมีความต่อเนื่องในช่วง  $[-2, 2]$  คำตอบของท่านจึงยังไม่ถูกต้อง  
ขอให้ท่านเปิดกลับไปยังกรอบที่ 4 หน้า 2 แล้วเลือกคำตอบใหม่

30. ท่านตอบว่า : เพราะ  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  หาค่าไม่ได้

ท่านลองดูซิว่า เมื่อ  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 5 & ; x = 2 \end{cases}$

การที่  $x$  เข้าใกล้ 2 แสดงว่า  $x \neq 2$  เมื่อเป็นเช่นนั้น

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

ซึ่งแสดงว่าหาลิมิตได้ นั่นคือคำตอบของท่านยังไม่ถูกต้อง ขอให้ท่านเปิด  
กลับไปพิจารณากรอบที่ 13 หน้า 7 แล้วเลือกคำตอบอีกครั้ง

31. ท่านตอบว่า : อยู่

ท่านยังเข้าใจไม่ถูกต้องนัก  $0 \in D_f$  หรือไม่ การที่ท่านตอบว่า "อยู่ก็แสดงว่าที่จุด  $x=0$  ฟังก์ชัน  $f$  หาค่าได้ แต่ที่จุด  $x=0$  ฟังก์ชัน  $f$  ที่นิยามไว้จะเป็น  $f(0) = \frac{1}{0}$  ซึ่งถือว่าไม่มีความหมายในทางคณิตศาสตร์ ฉะนั้นท่านจะตอบว่าอย่างไร ขอให้เปิดกลับไปยังกรอบที่ 22 หน้า 11 แล้วเลือกคำตอบใหม่

32.

แบบฝึกหัดชุดที่ 6

จงตรวจว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องในโดเมนที่กำหนดหรือไม่ บอกเหตุผลประกอบคำตอบของท่านด้วย

1.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  ;  $[-5, 5]$

2.  $g(x) = \sqrt{4x + 2}$  ;  $(-1, 1)$

3.  $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; -1 \leq x < 1 \\ 2x - 4 & ; 1 \leq x < 2 \\ 4 - 3x & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

4.  $k(x) = \begin{cases} -2 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 2 & ; x > 0 \end{cases}$

5.  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 3 & ; x = 1 \end{cases}$

$(x+2)(x-1)$



เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 6

- |                                                                             |                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. <u>ค</u> อ <u>เ</u> น <u>อ</u> ง <u>ท</u> ุ <u>ก</u> <u>ร</u> ุ <u>ก</u> | 2. <u>ม</u> ิ <u>อ</u> <u>ค</u> อ <u>เ</u> น <u>อ</u> ง |
| 2. <u>ม</u> ิ <u>อ</u> <u>ค</u> อ <u>เ</u> น <u>อ</u> ง                     | 4. <u>ม</u> ิ <u>อ</u> <u>ค</u> อ <u>เ</u> น <u>อ</u> ง |
| 5. <u>ค</u> อ <u>เ</u> น <u>อ</u> ง                                         |                                                         |