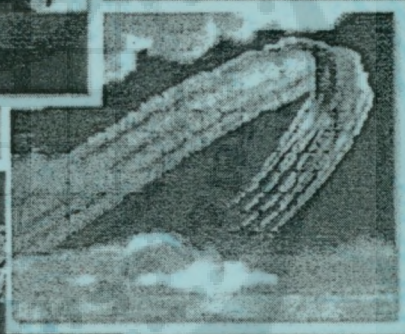
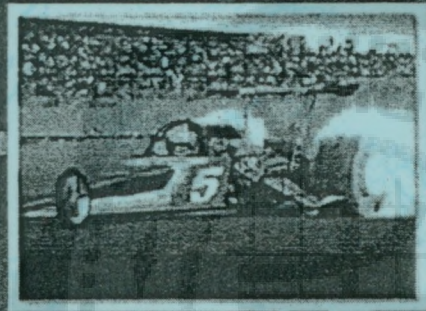


เอกสารประกอบการสอนรายวิชา

ME 292 Engineering Mechanics II



620.10711
ธ636อ
ร.2



อาจารย์ธีรภัทร หล้าบุญเรือง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

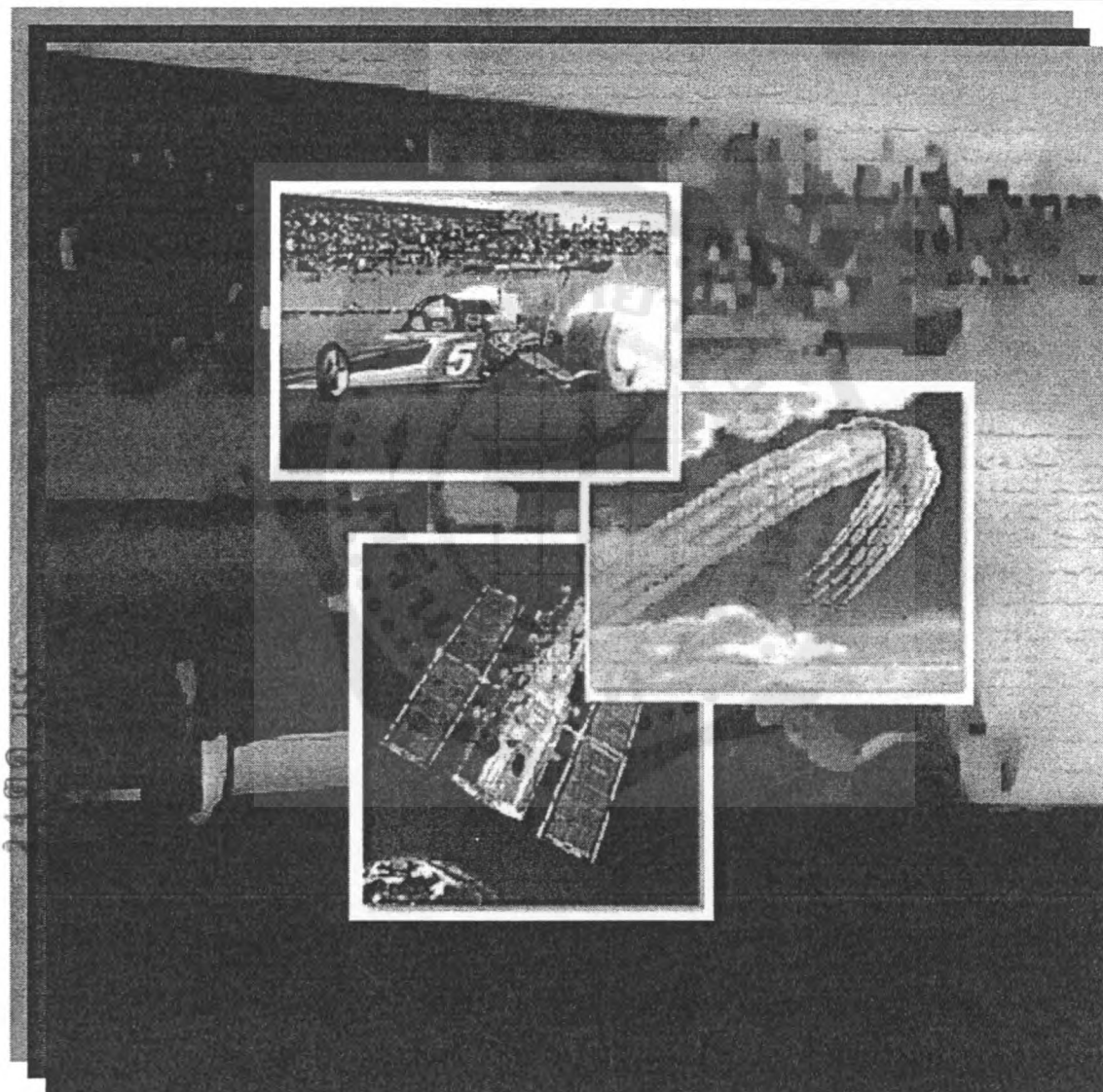
620.10711

ค6360

ร.2

เอกสารประกอบการสอนรายวิชา

ME 292 Engineering Mechanics II



อาจารย์ธีรภัทร หล้าบุญเรือง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

54/9/90 ร.2

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนในรายวิชากลศาสตร์วิศวกรรม 2 (Engineering Mechanics II) ของนิสิตคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยเป็นการกล่าวถึงการเรียนรู้ในส่วนพลศาสตร์คิเนมาติกของอนุภาค ชนิตการเคลื่อนที่ของอนุภาค จลศาสตร์ของอนุภาค กฎข้อสองของนิวตัน วิธีการพลังงานและโมเมนตัม ระบบอนุภาค คิเนมาติกของวัตถุแข็งเกร็ง การเคลื่อนที่ในระนาบของวัตถุแข็งเกร็ง จลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็งในสามมิติ การสั่นสะเทือนเชิงกลแบบมีตัวหน่วงและไม่มีตัวหน่วง เพื่อที่จะสามารถนำทฤษฎีและสมการไปประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทางด้านและจลนศาสตร์และพลศาสตร์ได้

อนึ่งผู้เรียบเรียงไม่ต้องการที่จะหากำไรใดๆ จากเอกสารเล่มนี้ เพียงแค่ต้องการเขียนเอกสารที่จะให้นิสิตและผู้สนใจทั่วไปได้เรียนรู้และสามารถนำไปประยุกต์ในการแก้ปัญหาได้ สุดท้ายเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้อาจมีข้อบกพร่องเกิดขึ้น หากท่านผู้ใดพบข้อบกพร่องขอได้โปรดให้คำแนะนำและแจ้งกลับไปยังผู้เรียบเรียง เพื่อจะได้นำไปพิจารณาแก้ไขปรับปรุงในโอกาสต่อไป จักขอบพระคุณอย่างยิ่งและขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

ด้วยความเคารพผู้อ่านทุกท่าน
ธีรภัทร หล่มบุญเรือง
ผู้เรียบเรียง

แผนการสอน (Course Syllabus)

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

คณะ วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ข้อมูลเกี่ยวกับรายวิชา

รหัสวิชา ME 292

ชื่อวิชาภาษาไทย กลศาสตร์วิศวกรรม 2

ชื่อวิชาภาษาอังกฤษ Engineering Mechanics II

บูรพวิชา ME 291 Engineering Mechanics I

จำนวนหน่วยกิต 3 หน่วยกิต

จำนวนชั่วโมง 3 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

ภาคการศึกษาที่ 2 / 2553

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตมีความรู้พื้นฐานในทฤษฎีและสมการต่างๆ ของพลศาสตร์
2. เพื่อให้นิสิตสามารถวิเคราะห์ปัญหาทางพลศาสตร์ในลักษณะต่างๆ ได้
3. เพื่อให้นิสิตมีนำทฤษฎีและสมการไปประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมได้

คำอธิบายรายวิชา

บทนำเกี่ยวกับพลศาสตร์คิเนมาติกของอนุภาค ชนิตการเคลื่อนที่ของอนุภาค จลศาสตร์ของอนุภาค กฎข้อสองของนิวตัน วิธีการพลังงานและโมเมนตัม ระบบอนุภาค คิเนมาติกของวัตถุแข็งเกร็ง การเคลื่อนที่ในระนาบของวัตถุแข็งเกร็ง จลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็งในสามมิติ การสั่นสะเทือนเชิงกลแบบมีตัวหน่วงและไม่มีตัวหน่วง

ผู้สอน อาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง

การติดต่อ

อาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์

ห้องพัก : ชั้น 3 ห้อง 301D

โทรศัพท์ติดต่อ : 02-649-5000 ต่อ 2055 โทรสาร 037-322-609

Email : teeerapath@swu.ac.th

วิธีการสอน

การเรียนการสอนของวิชากลศาสตร์วิศวกรรม 2 มีเวลาเรียนทั้งหมด 16 สัปดาห์ โดยแบ่งเป็นเวลาในการสอน 14 สัปดาห์ และเวลาในการสอบกลางภาคและสอบปลายภาค 2 สัปดาห์ ซึ่งใช้เวลาในการเรียนทั้งหมดประมาณ 42 ชั่วโมง โดยสอนสัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง เป็นลักษณะการบรรยายหน้าชั้น พร้อมกับใช้คอมพิวเตอร์ในการใช้โปรแกรมช่วยในการบรรยาย

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. แจกเอกสารประกอบคำสอน
2. ชี้แจงและบรรยายเนื้อหาของบทเรียน
3. สอบถามความหมายและความเข้าใจ
4. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท
5. สอบย่อย

เอกสารและสื่อที่ใช้ประกอบการสอน

เอกสารประกอบการเรียน :

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2) โดยอาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

เอกสารอ่านประกอบ :

1. R.C. Hibbeler, **Engineering Mechanics Dynamics**, Third Edition, Prentice Hall, Inc.
2. Ferdinand P. Beer, **Vector Mechanics for Engineering**, Eight Edition, Mc Graw Hill.
3. J. L. Meriam and L. G. Kraige, **Engineering Mechanics Dynamics**, Six Edition, Wiley.

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ ประเมินจากการเขียนภาพในขั้นตอนต่างๆ เพื่อให้ผู้เรียนได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการสอบวัดผล

การประเมินผลการเรียนรู้

1. การบ้าน	10 %
2. งาน	10 %
3. สอบกลางภาค	40 %
4. สอบปลายภาค	40 %
รวม	100 %

เกณฑ์การพิจารณาตัดเกรด

80 – 100	A	75 – 79	B+
70 – 74	B	65 – 69	C+
60 – 64	C	55 – 59	D+
50 – 54	D	0 – 49	E

เนื้อหาในการเรียน :

สัปดาห์ที่	หัวข้อ	วิธีการสอน	ผู้สอน
1	Introduction แนะนำรายละเอียดวิธีการเรียน การเตรียมตัวก่อนการเรียนและข้อกำหนดต่างๆ	1.บรรยาย 2.ทดสอบความรู้เบื้องต้น	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2	จลศาสตร์ของอนุภาค	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
3	จลศาสตร์ของอนุภาค : แรงและความเร่ง	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
4	จลศาสตร์ของอนุภาค : งานและพลังงาน	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
5	จลศาสตร์ของอนุภาค : การดลและโมเมนตัม 1	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
6	จลศาสตร์ของอนุภาค : การดลและโมเมนตัม 2	1.บรรยาย 2.สอบย่อย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
7	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป 1	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
8	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป 2	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
9	สอบกลางภาค		
10	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป : แรงและความเร่ง	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
11	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป : งานและพลังงาน	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
12	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป : การดลและโมเมนตัม 1	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง

สัปดาห์ที่	หัวข้อ	วิธีการสอน	ผู้สอน
13	จลนคณิตศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป : การดลและโมเมนตัม 2	1.บรรยาย 2.สอบย่อย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
14	ความรู้เบื้องต้นของการสั้นสะท้อนเชิงกล	1.บรรยาย 2.สอบย่อย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
15	ทบทวนหัวข้อการบรรยายทั้งหมดและส่งงาน	1.บรรยาย	อ.ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
16	สอบปลายภาค		



สารบัญ

บทที่	หน้า
12 จลศาสตร์ของอนุภาค.....	1
คำถามทบทวนท้ายบท	14
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	15
13 จลศาสตร์ของอนุภาค : แรงและความเร่ง.....	25
คำถามทบทวนท้ายบท	30
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	31
14 จลศาสตร์ของอนุภาค : งานและพลังงาน.....	35
คำถามทบทวนท้ายบท	43
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	44
15 จลศาสตร์ของอนุภาค : การดลและโมเมนตัม	51
คำถามทบทวนท้ายบท	62
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	63
16 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป	69
คำถามทบทวนท้ายบท	81
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	82
17 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป : แรงและความเร่ง.....	87
คำถามทบทวนท้ายบท	96
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	97
18 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป : งานและพลังงาน.....	105
คำถามทบทวนท้ายบท	110
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	111
19 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป : การดลและโมเมนตัม.....	117
คำถามทบทวนท้ายบท	123
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	124
20 การสั่นสะเทือน.....	131
คำถามทบทวนท้ายบท	138
ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบท	139
บรรณานุกรม.....	143

บทที่ 12 จลนศาสตร์ของอนุภาค

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อศึกษาแนวคิดของ ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง
- เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่วิถีตรงของอนุภาคและแสดงเป็นกราฟการเคลื่อนที่
- เพื่อใช้ระบบพิกัดที่แตกต่างสำรวจการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามส่วนประกอบของเส้นโค้ง
- เพื่อแสดงให้เห็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งขึ้นอยู่กับสองของอนุภาค
- การพิจารณาองค์ประกอบที่สำคัญของการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยการเปลี่ยนแกน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- แจกเอกสารประกอบการสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้บัณฑิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

12.1 บทนำ

กลศาสตร์เป็นสาขาวิชาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ที่พิจารณาถึงสภาพของวัตถุเมื่อมีแรงมากระทำ

วิชากลศาสตร์ของวัตถุคงรูปแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

- **Statics** ศึกษาสมดุลของวัตถุ (วัตถุอยู่กับที่หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่)
- **Dynamics** ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้การกระทำของแรง

วิชาพลศาสตร์จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

- **จลคณิตศาสตร์** ศึกษาสภาพเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ
- **จลศาสตร์** ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยพิจารณาแรงที่กระทำกับวัตถุ

ในบทนี้เราศึกษาปัญหาทางจลคณิตศาสตร์ของอนุภาค โดยการกำหนดให้วัตถุเป็นอนุภาค หมายถึงอนุภาค จะหมายถึงวัตถุ ใด ๆ ที่มีมวลแต่ไม่คำนึงถึงขนาด และรูปร่าง ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้น ไม่ว่าอนุภาคจะมีขนาดหรือมีมวลน้อยเพียงใด เราจะพิจารณาให้วัตถุนั้นเป็นจุด หรือพิจารณาที่จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุเท่านั้น

12.2 จลคณิตศาสตร์วิธีตรง: การเคลื่อนที่แบบต่อเนื่อง

จลคณิตศาสตร์วิธีตรงของวัตถุ การเคลื่อนที่ของอนุภาควิธีตรง จลคณิตศาสตร์จะอธิบายถึงสภาพการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เวลา ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งใดๆที่กำหนดหรือที่เริ่มสังเกต

- **ตำแหน่ง** ตำแหน่งของอนุภาคเป็นปริมาณ สเกลาร์ s (พิกัดตำแหน่ง)
- **การกระจัด** การกระจัดของอนุภาคเป็นปริมาณเวกเตอร์ $\Delta \mathbf{r}$ คือการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาค โดยมีเวกเตอร์ระบุตำแหน่งคือ $\mathbf{r}$
- **ความเร็ว** ความเร็วของอนุภาคเป็น เวกเตอร์
 - * ความเร็วเฉลี่ยคือการกระจัดหารด้วยเวลา $\mathbf{v}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$
 - * ความเร็วชั่วขณะคือ $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
 - * อัตราเร็วคือขนาดของความเร็วและสามารถเขียนได้เป็น $v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$
 - * อัตราเร็วเฉลี่ยคือระยะทางทั้งหมดหารด้วยช่วงเวลาที่พิจารณา (แตกต่างจากความเร็วเฉลี่ยซึ่งคือการกระจัดหารด้วยเวลา)

- ความเร่ง ความเร่งของอนุภาคคือเวกเตอร์ $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}$ และขนาดของความเร่งคือ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

* ในจลนศาสตร์ความเร่งมีค่าเป็นลบเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ช้าลงหรือความเร็วลดลง

* อนุภาคสามารถมีความเร่งและความเร็วเท่ากับศูนย์

* ความสัมพันธ์ระหว่าง $ads = vdv$ ได้มาจาก $a = \frac{dv}{dt}$ และ $v = \frac{ds}{dt}$

ความเร่งคงที่

ให้ $a = a_c$ ค่าคงที่, ที่ตำแหน่งเริ่มต้น $v = v_0$ และ $s = s_0$ ที่เวลา $t = 0$ ดังนั้น

$$v = v_0 + a_c t \quad (\text{ความเร็วเป็นฟังก์ชันของเวลา}) \quad (12.0)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \quad (\text{ตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลา}) \quad (12.1)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c (s - s_0) \quad (\text{ความเร็วเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง}) \quad (12.2)$$

วิธีการสำหรับวิเคราะห์

การประยุกต์ใช้สมการจลนศาสตร์สำหรับการเคลื่อนที่วิถีตรง ประกอบด้วยขั้นตอน ดังนี้

● ระบบพิกัด

- เขียนพิกัดตำแหน่ง s ไปทางเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่ โดยมีจุดเริ่มต้นอยู่กับที่และมีทิศเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่เป็นบวก
- เนื่องจากการเคลื่อนที่ไปตามเส้นตรง ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของอนุภาค สามารถเขียนแทนในรูปของปริมาณสเกลาร์ได้ การแก้ปัญหของ s , v และ a เราต้องสังเกตทิศทางและแทนค่าต่างๆพร้อมเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ด้วย
- ทิศทางบวกของสเกลาร์แต่ละเทอม สามารถเขียนแสดงด้วยลูกศรที่ด้านซ้ายของสมการจลนศาสตร์ขณะประยุกต์ใช้

● สมการจลนศาสตร์สำหรับการเคลื่อนที่

- ความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปรที่ทราบค่าใดๆ จาก 4 ตัวแปรของสมการ คือ s , v , a และ t ดังนั้นสามารถหาตัวแปรที่สามได้จากการเลือกใช้สมการจลนศาสตร์ $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ และ $a ds = v dv$

- เราสามารถอินทิเกรตสมการจลนศาสตร์ได้โดยกำหนดช่วงเวลา ตำแหน่ง และความเร็ว
ขณะที่พิจารณา
- สมการ (12.0)-(12.2) สามารถประยุกต์ใช้ได้ต่อเมื่อเป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่เท่านั้น

12.3 จลนศาสตร์วิธีตรง: การเคลื่อนที่แบบไม่ต่อเนื่อง

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไม่ต่อเนื่อง เป็นการยากที่จะอธิบายถึงฟังก์ชันการเคลื่อนที่แบบไม่ต่อเนื่องว่าจะมี ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง อย่างไรก็ดีการอธิบายการเคลื่อนที่แบบไม่ต่อเนื่องนั้นมักจะใช้กราฟที่ได้จากการเก็บข้อมูลของการเคลื่อนที่โดยคอมพิวเตอร์

- กำหนดกราฟ $s - t$ เพื่อเขียนกราฟ $v - t$ ถ้าตำแหน่งของอนุภาคสามารถนำมาเขียนกราฟ $(s - t)$ ความเร็วเป็นฟังก์ชันของเวลากราฟ $(v - t)$ เราสามารถวัดความเร็วได้จากความชันของกราฟ $(s - t)$

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (12.3)$$

ความชันของกราฟ $(s - t) =$ ความเร็ว

- กำหนดกราฟ $v - t$ เพื่อเขียนกราฟ $a - t$ เมื่อทราบความสัมพันธ์ของกราฟ $(v - t)$ ของอนุภาค ความเร่งของอนุภาคเป็นฟังก์ชันของเวลา $(a - t)$ สามารถสร้างได้จากความชันของกราฟ $(v - t)$

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (12.4)$$

ความชันของ $(v - t) =$ ความเร่ง

- กำหนดกราฟ $a - t$ เพื่อเขียนกราฟ $v - t$ เมื่อให้กราฟ $(a - t)$ สามารถสร้างกราฟ $(v - t)$ โดย

$$\Delta v = \int a dt \quad (12.5)$$

การเปลี่ยนแปลงความเร็ว = พื้นที่ใต้กราฟ $(a - t)$

- กำหนดกราฟ $v - t$ เพื่อเขียนกราฟ $s - t$ เมื่อให้กราฟ $(v - t)$ สามารถสร้างกราฟ $(s - t)$ โดย

$$\Delta s = \int v dt \quad (12.6)$$

การกระจัด = พื้นที่ใต้กราฟ $(v - t)$

- กำหนดกราฟ $a-s$ เพื่อเขียนกราฟ $v-s$ เมื่อสามารถสร้างกราฟ $(a-s)$ ของอนุภาคกราฟ $(v-s)$ สามารถสร้าง โดย

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_0^1 a ds \quad (12.7)$$

= พื้นที่ใต้กราฟ $(a-s)$

- กำหนดกราฟ $v-s$ เพื่อเขียนกราฟ $a-s$ เมื่อทราบความสัมพันธ์ของกราฟ $(v-s)$ ของอนุภาค ความเร่งแต่ละตำแหน่งสามารถหาได้ โดย

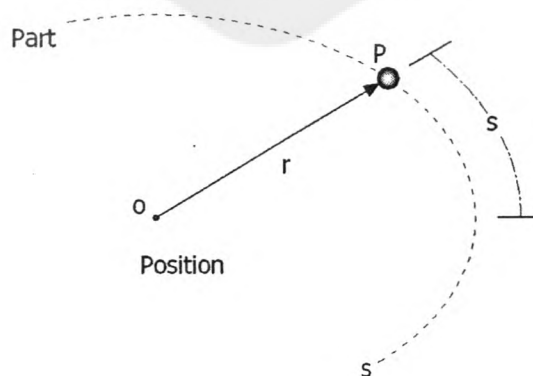
$$a = v \frac{dv}{ds} \quad (12.8)$$

ความเร่ง = ความเร็ว $\times$ ความชันของกราฟ $(v-s)$

12.4 การเคลื่อนที่วิถีโค้งของอนุภาค

การเคลื่อนที่วิถีโค้งเกิดขึ้นเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้น โค้งทางเดิน

- ตำแหน่ง กำหนดตำแหน่งของอนุภาคคือเวกเตอร์ระบุตำแหน่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา $r(t)$ โดยที่ขนาดและทิศทางของการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนแปลงไปตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นฟังก์ชันทางเดิน $s(t)$



รูปที่ 12.1 การเคลื่อนที่วิถีโค้งของอนุภาค

- ความเร็ว ความเร็วของอนุภาคคือ

$$\mathbf{v}(t) = d \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (12.9)$$

- อัตราเร็ว อัตราเร็ว v คือขนาดของ $\mathbf{v}$ และสามารถคำนวณได้โดยหาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันทางเดิน $s(t)$ เทียบกับเวลา $v = \frac{ds}{dt}$

- ความเร่ง ความเร่งของอนุภาคคือ

$$\mathbf{a} = (t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (12.10)$$

หลักการที่สำคัญ

- การเคลื่อนที่วิถีโค้งของอนุภาค ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง สามารถเกิดการเปลี่ยนแปลงได้ทั้งขนาดและทิศทาง
- เวกเตอร์ความเร็วจะมีทิศทางและสัมผัสเส้นทางการเคลื่อนที่เสมอ
- โดยปรกติเวกเตอร์ของความเร่งจะไม่สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่แต่จะสัมผัสกับเส้นโค้งไฮโดกราฟ

12.5 การเคลื่อนที่วิถีโค้ง: ระบบพิกัดฉาก

โดยใช้ระบบแกนพิกัดฉาก x-y-z ที่อยู่กับที่เป็นแกนอ้างอิงในการวิเคราะห์

- ตำแหน่ง

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (12.11)$$

$$\text{ขนาดของ } \mathbf{r} = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\text{โดย ทิศทางคือ } = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

- ความเร็ว

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}[y(t)\mathbf{j}] + \frac{d}{dt}[z(t)\mathbf{k}] \\ &= \frac{d}{dt}[x(t)\mathbf{i}] + \frac{d}{dt}[y(t)\mathbf{j}] + \frac{d}{dt}[z(t)\mathbf{k}] \\ &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (12.12)$$

$$\text{ขนาด } = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\text{ทิศทาง} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \text{ สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่เสมอ}$$

● ความเร่ง

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (12.13)$$

$$\text{เมื่อ } a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

$$\text{ขนาดของความเร่ง} = \mathbf{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\text{ทิศทาง} = \frac{\mathbf{a}}{a}$$

12.6 การเคลื่อนที่แบบ PROJECTILE

การเคลื่อนที่แบบอิสระของวิถีโค้งถูกศึกษาในลักษณะของการมีมุมฉากเป็นส่วนประกอบ ตั้งแต่การเพิ่มความเร็วของวิถีโค้งถูกแสดงในทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวระนาบ

กระบวนการสำหรับแก้ปัญหา

● Coordinate System (ระบบแกนอ้างอิง)

- กำหนดแกน x, y ให้พร้อมเพรียงกัน และ ร่างเส้นวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคระหว่างจุด 2 จุดที่อยู่ในส่วนของโจทย์ที่กำหนด และอีกส ตัวแปลที่ไม่ทราบค่า โจทย์เกือบทั้งหมดจะมีการแสดงค่าความเร่งของแรงดึงดูดของโลกมาให้ ความเร็วของอนุภาคจากเริ่มต้นและสุดท้ายจะแสดงในเทอมส่วนประกอบของแกน x และ y ร่วมกัน

- จำตำแหน่งที่เป็นบวกและลบ, ความเร็ว และความเร่งที่แสดงให้สอดคล้องกับทิศทางที่สัมพันธ์กัน อย่างพร้อมเพรียง

● Kinematic Equations (สมการกลศาสตร์)

ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ทราบ และ ถูกกำหนดไว้แล้ว ซึ่งเป็นตัวเลือกที่ควรทำเป็น 3 ของทั้ง 4 สมการ ที่ประยุกต์ระหว่างจุด 2 จุดบนส่วนของการแก้ปัญหาโจทย์โดยตรง

● Horizontal Motion (การเคลื่อนที่ในแนวนอน)

ความเร็วในแนวนอน หรือ แกน x เป็นค่าคงที่

$$(v_x) = (v_0)_x \quad \text{และ}$$

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

• **Vertical Motion (การเคลื่อนที่ในแนวตั้ง)**

ในแนวตั้ง หรือ แกน y มีเพียง 2 ใน 3 สมการที่แสดงข้างล่างที่ใช้สำหรับแก๊โจทย์

$$v_x = (v_0)_y - a_c t \quad (12.14)$$

$$y = y_0 + (v_0)_{yt} + \frac{1}{2} a_{ct}^2 \quad (12.15)$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0) \quad (12.16)$$

ยกตัวอย่าง : ถ้า ความเร็วเชิงการเคลื่อนที่สุดท้ายของอนุภาค v_y จะไม่ถูกนำมาคิด คือ สมการที่ 1 และ 3 ไม่มีประโยชน์ในการแก้ปัญหานี้

12.7 การเคลื่อนที่แบบโค้งประกอบด้วย: แบบปกติ และ แบบเส้นสัมผัสวงจุดที่สำคัญ

Coordinate System

- ภายใต้งานไขส่วนของอนุภาคที่ทราบ เราสามารถตั้งค่า n และ t ที่มีการกำหนดจุดกำเนิดที่แน่นอนที่สอดคล้องกับอนุภาคที่ถูกพิจารณาอย่างเฉพาะเจาะจง
- แกนเส้นสัมผัสวงที่เป็นบวกถูกแสดงในทิศทางการเคลื่อนที่ และ แกนปกติทิศทางที่อยู่ระหว่างส่วนของจุดศูนย์กลางของเส้นโค้ง
- แกน n และ t มีประโยชน์อย่างเฉพาะเจาะจง สำหรับการศึกษา ความเร็ว และ ความเร่งของอนุภาค เพราะความเร็ว (v) และความเร่ง (a) ถูกแสดงจากสมการดังนี้

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t, v = \dot{s} \quad (12.17)$$

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n \quad (12.18)$$

$$a_t = u \text{ หรือ } a_t ds = v dv \quad (12.19)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (12.20)$$

ความเร็ว

- ความเร็วของอนุภาค เป็นส่วนหนึ่งของเส้นสัมผัสวง
- ขนาดของความเร็วถูกพบจากเวลาต่างๆในส่วนของฟังก์ชัน $v=s$

ความเร่งซึ่งอยู่ในทิศทางของเส้นสัมผัส

- ความเร่งซึ่งเป็นส่วนประกอบของทิศทางของเส้นสัมผัสเป็นผลของการเปลี่ยนอัตราเวลาในขนาดของความเร็วการเคลื่อนที่ประกอบในทิศทางที่เป็นบวกของ s ถ้าความเร็วของอนุภาคเพิ่มขึ้น หรือ ในทิศทางตรงกันข้ามถ้าความเร็วลด

- ความสัมพันธ์ระหว่าง a_t , v และ s และ s เหมือนกันสำหรับการเคลื่อนที่แนวเส้นตรง

$$a_t = v, a_t ds = v dv \quad (12.21)$$

- ถ้า a_t เป็นค่าคงที่ $a_t = (a_t)_c$ จากสมการข้างบนได้ผลดังนี้

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_t)_c t^2 \quad (12.22)$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t \quad (12.23)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c(s - s_0) \quad (12.24)$$

ความเร่งปกติ

- ส่วนประกอบแบบปกติของความเร่ง เป็นผลจากอัตราของเวลาในการเปลี่ยนแปลงความเร็วอนุภาค ส่วนประกอบนี้มักมีทิศทางไปยังจุดศูนย์กลางของเส้นโค้ง นั่นคือ ระหว่างแกน n +

- ขนาดของส่วนประกอบนี้ ถูกกำหนดจาก $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (12.25)

- ถ้าส่วนที่ถูกแสดงเป็น $y=f(x)$ สูตรคือ $\rho = \frac{[1 - (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{[\frac{d^2y}{dx^2}]}$ (12.26)

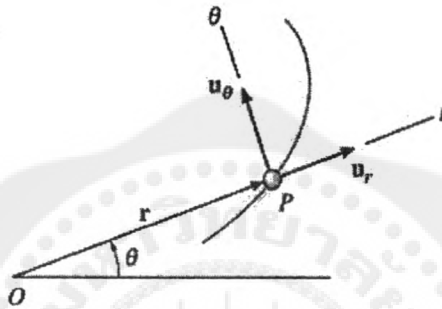
12.8 การเคลื่อนที่แบบเส้นโค้ง: ส่วนประกอบที่เป็นเกลิยว

บางปัญหาเป็นสิ่งที่ง่ายที่จะแสดงอยู่ในส่วนของการเคลื่อนที่ในเทอมของการทำให้ระดับเดียวกันของ r, θ, z ถ้าการเคลื่อนที่ที่กำหนดในการวางแผน Polar coordinate และ θ

จุดสำคัญ

Coordinate System

- Polar coordinate เป็นความเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับกาแก้ปัญหาที่มีข้อมูลที่อ้างอิงของมุมการเคลื่อนที่ของอนุภาค
- ใช้ Polar coordinates ซึ่งมีจุดกำเนิดที่ถูกกำหนดไว้ และ เส้นรัศมี (r) เป็นเส้นทางไปยังอนุภาค
- Transverse coordinate θ หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเส้นอ้างอิงไปยังเส้นรัศมี



รูปที่ 12.2 Position

ตำแหน่ง , ความเร็ว และ ความเร่ง

- ตำแหน่งของอนุภาคจะกำหนดจากเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $r = ru_r$
- ความเร็วและความเร่งของอนุภาคหาได้ดังต่อไปนี้

$$v = v_r u_r + v_\theta u_\theta \quad (12.27)$$

$$a = a_r u_r + a_\theta u_\theta \quad (12.28)$$

- เมื่อเราได้หาค่า และอนุพันธ์เทียบกับเวลาของทั้งสี่ปริมาณคือ ที่เวลาที่กำหนด มาเรียบร้อยแล้ว เราสามารถนำค่าทั้งหมดนี้ เข้าไปแทนค่าในสมการข้างต้น เพื่อหาค่าความเร็วและความเร่ง ต่อไป

$$v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, \quad (12.29)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (12.30)$$

- ถ้าจำเป็นที่จะต้องกำหนดอนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $r = f(\theta)$ ควรใช้กฎลูกโซ่
- การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในสามมิติ และรูปร่างของเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคเหมาะสม เราสามารถที่จะหา ดังต่อไปนี้

$$\text{ตำแหน่ง} \quad r = ru_r + zu_z, \quad (12.31)$$

$$\text{ความเร็ว} \quad v = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}u_z \quad (12.32)$$

$$\text{ความเร่ง} \quad a = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta + \ddot{z}u_z \quad (12.33)$$

- หมายเหตุ ; ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวิถีโค้ง $r = \text{คงที่}$ ดังนั้น $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ จะทำให้สมการที่ (12.7), (12.8) ง่ายขึ้น

12.9 การเคลื่อนที่สมบูรณของอนุภาคสองอนุภาคที่ขึ้นต่อกัน

ในการแก้ปัญหาบางประเภท การเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่ง จะขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่ง ซึ่งส่วนใหญ่แล้วการเคลื่อนที่ในลักษณะเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ เมื่ออนุภาคสองอนุภาคมีการคล้องติดกันด้วยเชือกที่ไม่สามารถยืดหยุ่นได้ โดยเชือกนั้นมีการคล้องผ่านรอก เมื่อแต่ละอนุภาคเกิดการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงของแต่ละอนุภาค ความเร็วและความเร่งของแต่ละอนุภาคจะเปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับการที่ทั้งสองสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ เนื่องจากการกระทำของอีกอนุภาคหนึ่งไม่ได้อยู่ในทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่ง การแก้ปัญหากลุ่มเช่นนี้เราจะต้องหาความสัมพันธ์ที่เชื่อมโยงการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองให้ได้ก่อน ยกตัวอย่างจากระบบต่อไปนี้

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

เราสามารถสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาได้เป็นข้อๆ ดังนี้

การตั้งระบบแกนเพื่อหาสมการ

- เลือกตำแหน่งเริ่มต้นของพิกัด โดยจุดกำเนิดอยู่ที่จุดคงที่หนึ่ง หรือกำหนด datum นั้นเอง
- แนวระบบพิกัดจะอยู่ในแนวการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาค
- จุดกำเนิดของระบบพิกัดของการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองไม่จำเป็นต้องอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน อย่างไรก็ตาม การวางแนวแกนพิกัดทั้งสองจะต้องอยู่ในแนวการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่แกนนั้นกำหนดพิกัด
- ใช้หลักพีชคณิต หรือตรีโกณมิติ เพื่อหาความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทั้งสองกับความยาวทั้งหมดของเชือก หรือความยาวบางส่วนของเชือก ซึ่งเราไม่จำเป็นต้องรวมความยาวที่คงที่ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง เช่น ความยาวของเชือกที่วางอยู่รอบรอก
- ถ้าปัญหาที่กล่าวถึงมีเชือกมากกว่าหนึ่งเส้น พันอยู่รอบรอกหลายตัว ดังนั้นตำแหน่งบนเส้นเชือกเส้นหนึ่ง จะต้องมีความสัมพันธ์กับจุดบนเส้นเชือกอีกเส้นหนึ่ง เราสามารถแยกสมการออกได้โดยการเขียนสมการแสดงความยาวรวมของเชือกแต่ละเส้นต้องคงที่ ซึ่งความสัมพันธ์ของตำแหน่งของมวลทั้งสองจะต้องเป็นไปตามสมการที่สร้างขึ้น

การหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

- การหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของพิกัดบอกตำแหน่ง สองลำดับแรกจะทำให้เราได้สมการที่ต้องการของความเร็วและความเร่ง ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอนุภาคทั้งสอง
- เครื่องหมายของแต่ละพจน์จากสมการที่กล่าวมาแล้ว จะเป็นตัวกำหนดทิศทางที่วัดตามแนวพิกัดบอกตำแหน่ง

12.10 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาคสองอนุภาค

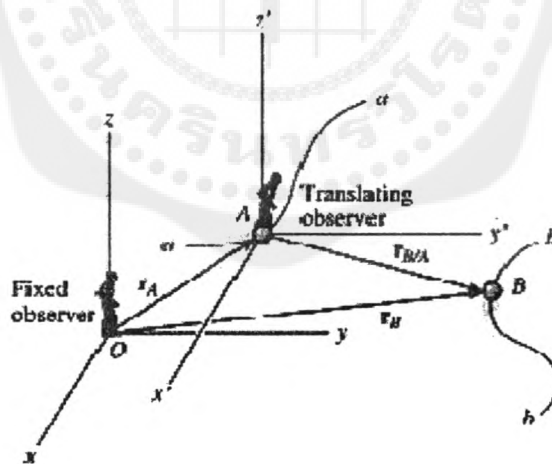
เมื่อเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีความซับซ้อนมาก อาจจะเหมาะสมกว่าหากเราใช้ระบบพิกัดตั้งแต่สองระบบพิกัดขึ้นไป เข้ามาช่วยอธิบายการเคลื่อนที่ โดยจะมีทั้งระบบพิกัดที่ติดคงที่อยู่ที่ตำแหน่งที่แน่นอน และระบบแกนพิกัดที่มีการเคลื่อนที่

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

- เมื่อมีการใช้ความสัมพันธ์ของตำแหน่งจากสองระบบแกนตามสมการ $r_B = r_A + r_{B/A}$

เราจำเป็นต้องมีการกำหนดตำแหน่งของระบบพิกัดคงที่ x, y, z และระบบพิกัดเคลื่อนที่ให้แน่ชัด

- โดยปกติตำแหน่งของจุดกำเนิดของระบบแกนเคลื่อนที่ A มักจะเป็นจุดที่เรารู้เวกเตอร์บอกตำแหน่ง r_A



รูปที่ 12.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาคสองอนุภาค

- เขียนรูปเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์ตามสมการ $r_B = r_A + r_{B/A}$ และเขียนปริมาณที่ทราบค่าและที่ไม่ทราบค่าลงในรูป
- เนื่องจากเวกเตอร์ทั้งสามจะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยม ดังนั้นสมการนี้จะสามารถแก้สมการหาค่าตัวแปรได้มากที่สุด 2 ค่าซึ่งอาจเป็นขนาด และ / หรือ ทิศทางของเวกเตอร์

- การหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่เหลืออาจใช้วิธีตรีโกณมิติ คือใช้มุม **sine** หรือ **cosine** เป็นต้น หรืออาจใช้วิธีแตกเวกเตอร์นี้ออกเป็นสองแนว ตามแนวแกน x และ y เพื่อให้สมการกลายเป็นสมการ **scalar**

- สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ $V_B = V_A + V_{B/A}$ และ $a_B = a_A + a_{B/A}$ สามารถที่จะใช้วิธีการเดียวกันกับการหาค่าแห่ง แต่ในกรณีนี้เราไม่จำเป็นต้องกำหนดจุดกำเนิดของระบบแกน x, y, z , ที่แน่นอนก็ได้

ข้อแนะนำและเทคนิคที่เป็นประโยชน์

- จะมีประสิทธิภาพมากถ้าเข้าใจถึงหลักการของพลศาสตร์เพื่อใช้แก้ปัญหา โดยมีเหตุผลและหลักการ (อนุภาคเป็นกฎเกณฑ์สำคัญ)
- จดจำวิธีการแก้ปัญหาจาก กลศาสตร์วิศวกรรม ผูกทดลองทำแบบฝึกหัด โดยทำบ่อยๆเพื่อจะได้เกิดความชำนาญและหมั่นศึกษาข้อคำแนะนำจากวิศวกรผู้เชี่ยวชาญและผู้ที่มีความรู้ในด้านต่างที่เกี่ยวข้องและมีประสบการณ์
- วิธีการที่จะศึกษาหลักการของวิชาไดนามิกส์ที่ได้ผลมากที่สุดคือการทำแบบฝึกหัด และกฎเกณฑ์สำคัญในการคือการทำแบบฝึกหัดอย่างมีระเบียบและทำตามขั้นตอน
- ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์วิศวกรรมนั้นคุณจะต้องพิจารณาถึงสภาพความเป็นจริงของปัญหานั้นที่ข้อมูลและแสดงผลทางฟิสิกส์ของข้อมูลนั้น ด้วยเหตุนี้ คุณจะต้องแน่ใจและมั่นใจในผลลัพธ์ที่ได้ว่ามีความถูกต้อง และเหมาะสมกับสภาพความเป็นจริงของปัญหานั้น ๆ ดังนั้นจึงควรเริ่มเรียนรู้และฝึกฝนตั้งแต่บัดนี้จนเป็นนิสัยเพราะเมื่อเวลาที่คุณเรียนจบในโลกของวิชาชีพวิศวกรรม คุณจะต้องมีความรับผิดชอบในวิชาชีพของคุณต่อบุคคลต่าง ๆ ที่จะใช้ผลิตภัณฑ์จากการออกแบบของคุณเอง

คำถามทบทวนท้ายบท

1. สามารถพิจารณาจลนศาสตร์ของอนุภาคเหมือนกับจลนศาสตร์ของจุดได้หรือไม่
2. ความเร็วของจุดนั้นจะสัมพันธ์กับเส้นทางการเคลื่อนที่เสมอหรือไม่
3. ความเร่งของจุดนั้นจะสัมพันธ์กับเส้นทางการเคลื่อนที่เสมอหรือไม่
4. ถ้าลูกบอลเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามเส้นแนวระดับด้วยอัตราเร็วคงที่จุดศูนย์กลางของบอลจะมีความเร่งเท่ากับศูนย์หรือไม่
5. ความเร็วของจุดที่เลือกในจุดอิสระบนกรอบอ้างอิงคืออะไร
6. เมื่อใดส่วนประกอบของความเร่งในแกนตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับศูนย์
7. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงมีอัตราเร็วเท่ากับศูนย์ในช่วงหนึ่งความเร่งจะต้องเท่ากับศูนย์หรือไม่
8. อนุภาคสามารถมี $r = 0$ แต่ยังมีความเร่งตามแกนรัศมีได้หรือไม่



ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12 จลนศาสตร์ของอนุภาค

ตัวอย่างที่ 12.1 บนถนนขนาบเส้นหนึ่ง มีการเดินทางโดยใช้ความเร็ว 70 km/h รถมีความเร่ง 6000 km/h² ถ้าใช้ความเร็วที่ 120 km/h จะใช้เวลาเดินทางกี่ชั่วโมง และเป็นระยะทางเท่าไร

$$v = v_1 + a_c t$$

$$120 = 70 + 6000(t)$$

$$\therefore t = 8.33(10^{-3}) \text{ hr} = 30 \text{ s}$$

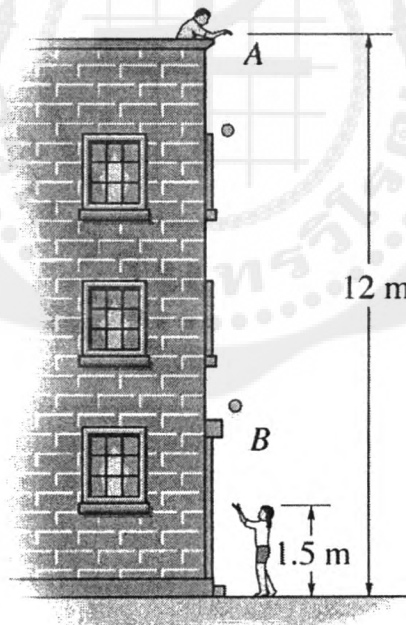
$$v^2 = v_1^2 + 2a_c(s - s_1)$$

$$(120)^2 = 70^2 + 2(6000)(s - 0)$$

$$\therefore s = 791.67 \text{ m}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.2 ลูกบอล A ถูกปล่อยลงมาจากตึกสูง 12 m ในเวลาเดียวกันก็มีลูกบอล B ถูกโยนขึ้นมาสูงจากพื้น 1.5 m ถ้าลูกบอลทั้งสองลูกเคลื่อนที่มาถึง 6 m จงหาความเร็วของ ลูกบอล B ที่เคลื่อนที่ขึ้น



For ball A:

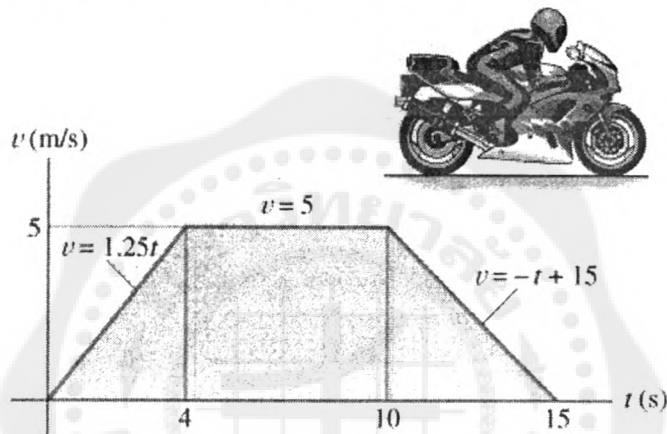
$$\begin{aligned}
 + \downarrow \quad s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \\
 6 &= 0 + 0 + \frac{1}{2} (9.81) t^2 \\
 t &= 1.106 \text{ s}
 \end{aligned}$$

For ball B:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \quad s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \\
 4.5 &= 0 + v_B (1.106) + \frac{1}{2} (-9.81) (1.106)^2 \\
 v_B &= 8.974
 \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.3 มีมอเตอร์ไซด์คันหนึ่งสตาร์ทที่จุดเริ่มต้น $s = 0$ และขี่ไปบนถนนที่ยาวมาก จากกราฟ $v-t$ จงหาความเร็วของมอเตอร์ไซด์เมื่อเวลาผ่านไป 8 วินาที



At $t = 8$ s

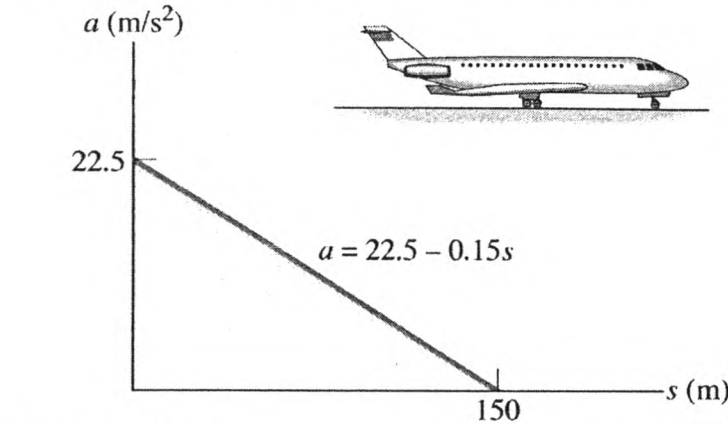
$$\begin{aligned}
 a &= \frac{dv}{ds} = 0 \\
 s - 0 &= \frac{1}{2} (4)(5) + (8-5)(5) = 30 \\
 s &= 30 \text{ m}
 \end{aligned}$$

At $t = 12$ s

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{dv}{dt} = \frac{-5}{5} = -1 \text{ m/s}^2 \\
 \Delta s &= \int v \, dt \\
 s - 0 &= \frac{1}{2} (4)(5) + (10-4)(5) + \frac{1}{2} (15-10)(5) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right) (5) \left(\frac{3}{5}\right) (5) \\
 s &= 48 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.4 เครื่องบินเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นที่ $s = 0$ 60 m. จากกราฟ $a-s$ จงหาความเร็วเมื่อเครื่องบินเคลื่อนที่ได้ 60 m และใช้เวลาเท่าไรในการเคลื่อนที่ไป 60 m



$$a = 22.5 - 0.15s$$

$$\int_0^v v \, dv = \int_0^s (22.5 - 0.15s) \, ds$$

$$v = \sqrt{45s - 0.15s^2}$$

At $s = 60$ m

$$v = \sqrt{45(60) - 0.15(60)^2} = 46.5 \text{ m/s}$$

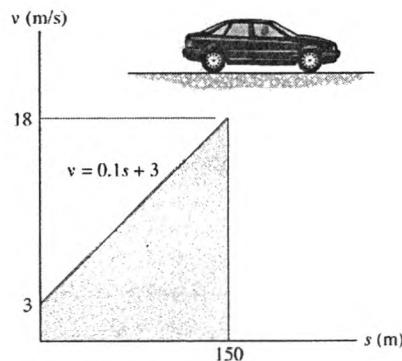
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^{60} \frac{ds}{\sqrt{45s - 0.15s^2}}$$

$$t = 2.582 \sin^{-1} \left(\frac{0.3s - 45}{45} \right) \Big|_0^{60} = 2.39 \text{ s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.5 รถยนต์เคลื่อนที่ไประยะทาง 150 m จากกราฟ $a-s$ $0 \leq s \leq 150$ m. อยากทราบว่าจะใช้ระยะทางเท่าไรในการเดินทาง เมื่อถึง 150 m โดยที่รถยนต์เริ่มต้นที่ $s = 0$ และ $t = 0$



a – s Graph : $vdv = ads$

$$a = v \frac{dv}{ds} = (0.1s + 3)(0.1) = (0.01s + 0.3) \text{ m/s}^2$$

$$\text{At } s = 0 \text{ and } s = 150, a = 0.01(0) + 0.3 = 0.3 \text{ m/s}^2 \text{ and}$$

$$a = 0.01(150) + 0.3 = 1.8 \text{ m/s}^2, \text{ respectively}$$

+ ให้ $v = \frac{ds}{dt}$

$$ds = \frac{ds}{v}$$

เมื่อ $s = 150$ $\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.1s + 3}$ $v_c = 16 \text{ m/s}$

$$t = 10 \ln[0.01(150) + 0.3] + 12.04 = 17.9 \text{ s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.6 อนุภาคหนึ่งที่จุดเริ่มต้น (3 m, 2 m, 5 m) ให้ความเร็ว $a = \{6ti + 12t^2k\} \text{ m/s}$, จงหาว่า อนุภาคเคลื่อนที่ไปตำแหน่งใดบ้าง (x, y, z,) at $t = 1 \text{ s}$

Velocity

$$\int_0^v dv = \int_0^t (6ti + 12t^2k) dt$$

$$v = \{3t^2i + 4t^3k\} \text{ m/s}$$

Position

$$dr = v dt$$

$$\int_0^r dr = \int_0^t (3t^2i + 4t^3k) dt$$

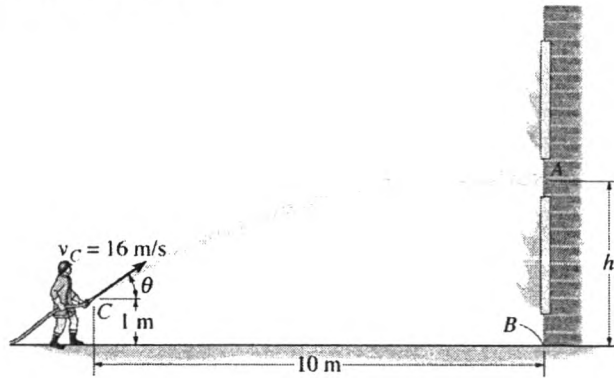
$$r - (3i + 2j + 5k) = t^3i + t^4k$$

$$r = \{(t^3 + 3)i + 2j + (t^4 + 5)k\} \text{ m}$$

when $t = 1 \text{ s}$, $r = (1^3 + 3)i + 2j + (1^4 + 5)k = \{4i + 2j + 6k\} \text{ m}$
 $(4, 2, 6) \text{ m}$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.7 นักดับเพลิงฉีดน้ำออกไป จงหา θ ที่น้ำพุ่งออกไปโดยน้ำพุ่งชนกำแพง ณ จุด A โดยที่ความเร็วของน้ำ $dv = a dt$



$+\rightarrow$

$$s = s_0 + v_0 t$$

$$10 = 0 + 16(\cos \theta)(t)$$

$$t = \frac{10}{16 \cos \theta}$$

$+\uparrow$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$0 = 1 + 16(\sin \theta)t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$$

$$0 = 1 + \frac{16(\sin \theta)(10)}{16 \cos \theta} - 4.905 \left(\frac{10}{16 \cos \theta} \right)^2$$

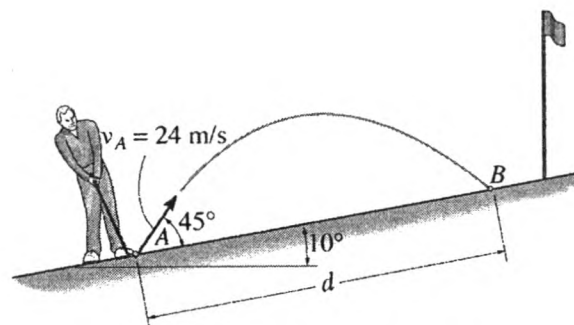
$$0 = 1 \cos^2 \theta + 10 \sin \theta - 1.916$$

$$1 \cos^2 \theta + 5 \sin 2\theta = 1.916$$

$$\theta = 5.33^\circ$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.8 นักกอล์ฟตีลูกกอล์ฟด้วยความเร็ว 24 m/s จงหาระยะทาง d ที่ลูกกอล์ฟเคลื่อนที่ไปยัง จุด B



แนวนอน

$$(v_0)_x = 24 \cos 55^\circ = 13.766 \text{ m/s}$$

$$(s_0)_x = 0 \text{ and } s_x = d \cos 10^\circ$$

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \quad s_x &= (s_0)_x + (v_0)_x t \\
 d \cos 10^\circ &= 0 + 13.766t
 \end{aligned} \tag{1}$$

แนวตั้งฉาก

$$(v_0)_y = 24 \sin 55^\circ = 19.66 \text{ m/s}$$

$$(s_0)_y = 0 \text{ and } s_y = d \sin 10^\circ$$

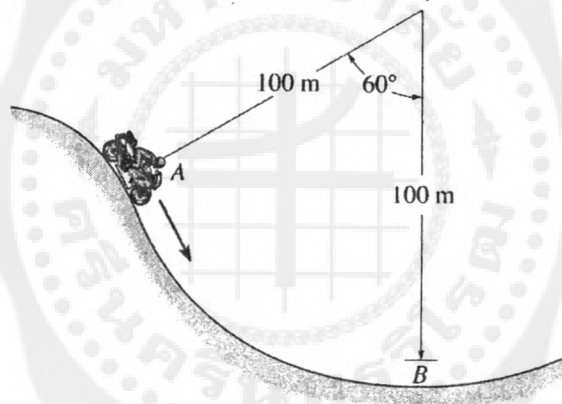
$$\begin{aligned}
 + \uparrow \quad s_y &= (s_0)_y + (v_0)_y t + \frac{1}{2}(a_c)_y t^2 \\
 d \sin 10^\circ &= 0 + 19.66t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$d = 49.11 \text{ m}$$

$$t = 3.513 \text{ s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.9 มอเตอร์ไซด์เคลื่อนที่ลงจากจุด A โดยมีความเร่ง $\dot{v} = (0.1t) \text{ m/s}^2$ ถ้ารถเริ่มต้น ณ จุด A จงหาขนาดของความเร็วและความเร่ง เมื่อมาถึงจุด B



$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.1t \, dt$$

$$v = 0.05t^2$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t 0.05t^2 \, dt$$

$$s = 0.0167t^3$$

$$s = \frac{\pi}{3}(100) \text{ m}, \quad \frac{\pi}{3}(100) = 0.0167t^3 \quad t = 18.453 \text{ s}$$

$$v = 0.05(18.453)^2 = 17.03 \text{ m/s} = 17.0 \text{ m/s}$$

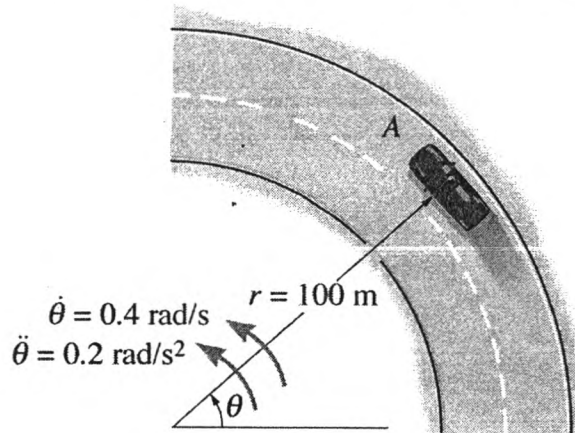
$$a_t = \dot{v} = 0.1t \big|_{t=18.453 \text{ s}} = 1.845 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{17.03^2}{100} = 2.900 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1.845)^2 + (2.900)^2} = 3.44 \text{ m/s}^2$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.10 รถยนต์เดินทางโดยมีรัศมีความโค้ง $r = 100 \text{ m}$ ที่จุดหยุดนิ่งมีมุม $\dot{\theta} = 0.4 \text{ rad/s}$,
และ $\ddot{\theta} = 0.2 \text{ rad/s}^2$ จงหาขนาดของความเร็วและความเร่งที่จุดหยุดนิ่ง



ความเร็ว

$$v_r = \dot{r} = 0 \quad v_\theta = r\dot{\theta} = 100(0.4) = 40 \text{ m/s}$$

จะได้ขนาดของความเร็ว คือ

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{0^2 + (40)^2} = 40 \text{ m/s}$$

ความเร่ง

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 100(0.4^2) = -16.0 \text{ m/s}^2$$

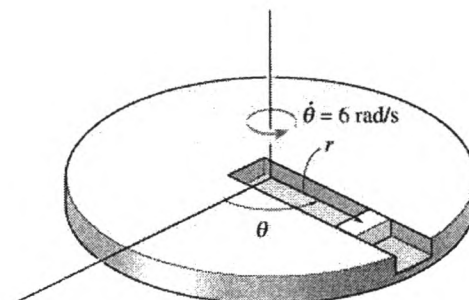
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 100(0.2) + 2(0)(0.4) = 20.0 \text{ m/s}^2$$

จะได้ขนาดของความเร่ง คือ

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-16.0)^2 + (20.0)^2} = 25.6 \text{ m/s}^2$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.11 บล็อก A เคลื่อนที่ออกจาก slot โดยมีความเร็ว $\dot{r} = (4t) \text{ m/s}$ เมื่อแผ่นหมุนเป็นมุม 6 rad/s . ถ้าบล็อก A เริ่มต้นหมุนจากจุดศูนย์กลาง จงหาขนาดของความเร็วและความเร่งที่เวลา $t = 1 \text{ s}$.



S 419190 ช.2

$$\dot{r} = 4t \big|_{t=1} = 4 \quad \dot{r} = 4$$

$$\theta = 6 \quad \ddot{\theta} = 0$$

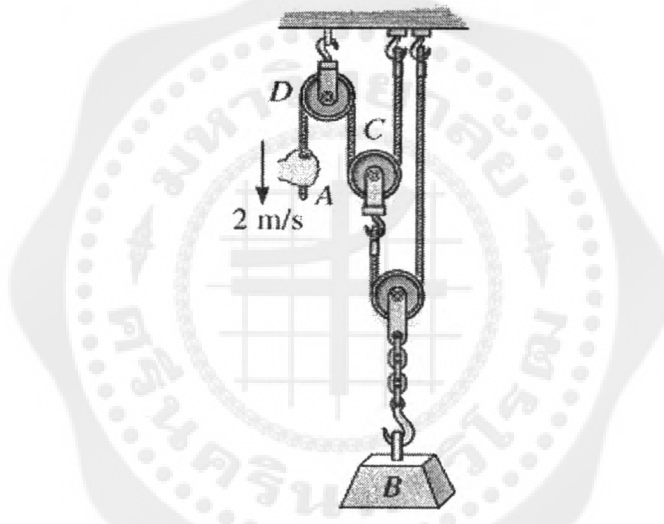
$$\int_0^r dr = \int_0^1 4t \, dt$$

$$r = 2t^2 \big|_0^1 = 2 \, \text{m}$$

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{(4)^2 + [2(6)]^2} = 12.6 \, \text{m/s}$$

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} = \sqrt{[4 - 2(6)^2]^2 + [0 + 2(4)(6)]^2} = 83.2 \, \text{m/s}^2 \quad \text{Ans}$$

ตัวอย่างที่ 12.12 ถ้าเชือกที่จุด A โดยรอกเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร็ว 2 m/s จงหาความเร็วของแท่งเหล็ก B



Datum ที่จุด D จะได้ s_A, s_B, s_C สมการคือ

$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_1 \quad (1)$$

$$s_B + s_C = l_2 \quad (2)$$

$$s_A + 4s_B = l_1 + 2l_2$$

Time Derivative

$$v_A + 4v_B = 0 \quad (3)$$

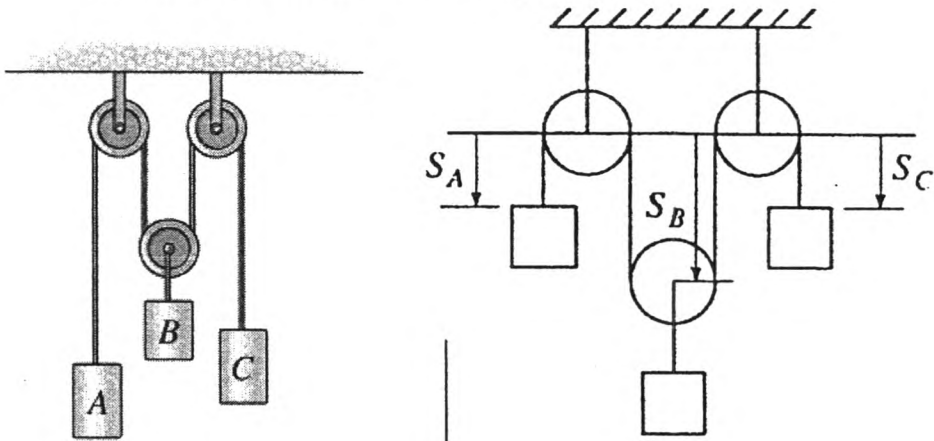
จะได้ $v_A = 2 \, \text{m/s}$

$$(+\downarrow) \quad 2 + 4v_B = 0$$

$$v_B = -0.5 \, \text{m/s} = 0.5 \, \text{m/s} \uparrow$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.13 ถ้าแท่งเหล็ก A เคลื่อนที่ลงมา 2 m/s และทำให้แท่งเหล็ก C เคลื่อนที่ลง 6 m/s จงหาความเร็วของแท่งเหล็ก B เมื่อเทียบกับจุด C



$$s_A + 2s_B + s_C = l$$

$$v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2 + 2v_B + 6 = 0$$

$$v_B = -4 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s} \uparrow$$

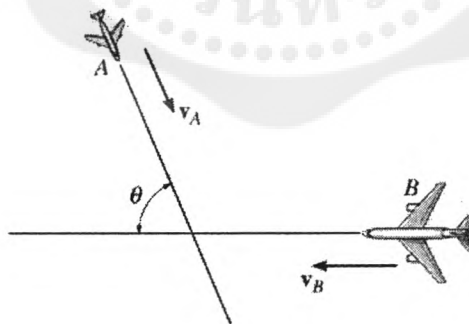
$$v_B = v_C + v_{B/C}$$

$$[4 \uparrow] = [6 \downarrow] + [v_{B/C} \uparrow]$$

$$v_{B/C} = 10 \text{ m/s} \uparrow$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.14 เครื่องบิน A และ B เครื่องบิน A มีความเร็ว $v_A = 600 \text{ km/h}$ และ $v_B = 500 \text{ km/h}$ มีมุมที่เครื่องบินทั้งสองบินสวนกัน $\theta = 75^\circ$ จงหาความเร็วของเครื่องบิน B เมื่อเทียบกับเครื่องบิน A



$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$[500 \leftarrow] = [600 \angle 75^\circ] + v_{B/A}$$

$$\left(\begin{matrix} + \\ \leftarrow \end{matrix} \right) \quad 500 = -600 \cos 75^\circ + (v_{B/A})_x$$

$$(v_{B/A})_x = 655.29 \leftarrow$$

$$\left(\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \right) \quad 0 = -600 \sin 75^\circ + (v_{B/A})_y$$

$$(v_{B/A})_y = 579.56 \uparrow$$

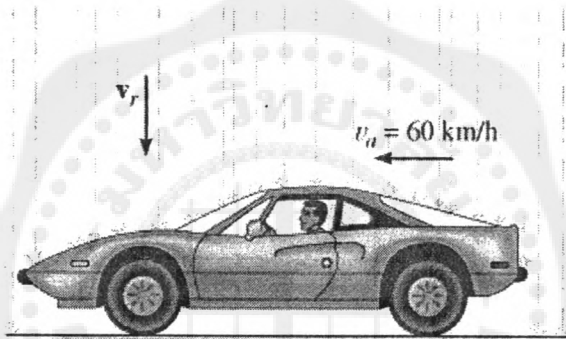
$$(v_{B/A}) = \sqrt{(655.29)^2 + (579.56)^2}$$

$$v_{B/A} = 875 \text{ km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{579.56}{655.29}\right) = 41.5^\circ$$

Ans

ตัวอย่างที่ 12.15 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ไป โดยมีฝนตกลงมา ทำให้เกิดมุม 30 องศา เมื่อรถยนต์เคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร็ว 60 km/h. V_r จงคำนวณหาที่ฝนตกลงมา โดยสมมติให้ตกลงมาในแนวตั้ง



$$v_r = v_a + v_{r/a}$$

$$-v_r j = -60i + v_{r/a} \cos 30^\circ j - v_{r/a} \sin 30^\circ j$$

$$\left(\begin{matrix} + \\ \rightarrow \end{matrix} \right)$$

$$0 = -60 + v_{r/a} \cos 30^\circ$$

$$\left(\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \right)$$

$$-v_r = 0 - v_{r/a} \sin 30^\circ$$

$$v_{r/a} = 69.3 \text{ km/h}$$

$$v_r = 34.6 \text{ km/h}$$

Ans

บทที่ 13 จลนศาสตร์ของอนุภาค : แรงและความเร่ง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อศึกษากฎการเคลื่อนที่ของนิวตันและกฎของความโน้มถ่วงเพื่ออธิบายถึงมวลและน้ำหนัก
- เพื่อวิเคราะห์ความเร่งเนื่องจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคและการใช้สมการการเคลื่อนที่กับระบบพิกัดแบบต่างๆ
- เพื่อหาจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ของแรงและประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางเครื่องกล

กิจกรรมการเรียนการสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

13.1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

- กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันนั้น อนุภาคจะถูกกระทำโดยแรงที่ไม่สมดุล และเคลื่อนที่ไปทิศทางเดียวกับแรงลัพธ์ ถ้ามวลของอนุภาคคือ m และความเร็วคือ v กฎข้อที่สองสามารถเขียนได้เป็น

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = ma \quad (13.1)$$

สมการข้างต้นคือสมการของการเคลื่อนที่และเป็นสมการหนึ่งที่สำคัญมากทางกลศาสตร์

- กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน : อธิบายถึงแรงดึงดูดระหว่างกันของสองอนุภาค คือ

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (13.2)$$

เมื่อ F คือ แรงดึงดูดระหว่างกันของสองอนุภาค

G คือ ค่าคงที่ของความโน้มถ่วง ($G = 66.73(10^{-12}) \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$)

m_1, m_2 คือ มวลของแต่ละอนุภาค

r คือ ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของสองอนุภาค

- มวลและน้ำหนัก

มวลเป็นคุณสมบัติของวัตถุซึ่งเป็นปริมาณที่ใช้วัดความสามารถในการต้านทานหรือเปลี่ยนความเร็วของวัตถุ (สมการ 13.0) และมวลเป็นปริมาณสัมบูรณ์

น้ำหนัก คือ คุณสมบัติของวัตถุที่เกิดขึ้นภายใต้สนามแรงดึงดูดของโลก น้ำหนักไม่ใช่ปริมาณสัมบูรณ์ น้ำหนักขึ้นอยู่กับความสูงของมวลจากพื้นโลก

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและมวลของอนุภาค คือ $w = mg$ และ g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

หน่วยของระบบ SI ในระบบ SI มวลของวัตถุใดๆ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg) และหน่วยของน้ำหนักจะแสดงเป็นนิวตัน (N)

$$W = mg \text{ (N) เมื่อ } (g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \quad (13.3)$$

13.2 สมการการเคลื่อนที่

- เมื่อมีการรวมแรงมากกว่าหนึ่งแรงมากระทำต่อวัตถุ แรงลัพธ์สามารถคำนวณได้โดยการรวมแรง

เวกเตอร์ของแรงทั้งหมดเช่น $F_r = \Sigma F$ ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่เขียนได้ดังนี้

$$\Sigma F = ma$$

ขนาดและทิศทางของแรงแต่ละแรงที่กระทำบนวัตถุถูกแสดงในฟรีบอดีไดอะแกรม [Free-body diagram] และฟังก์ชันไดอะแกรม [kinetic diagram] แสดงถึงขนาดและทิศทางปริมาณเวกเตอร์ ma

กรอบอ้างอิงเฉื่อย ถึงแม้ว่าสมการการเคลื่อนที่ที่ถูกประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาความเร่งต้องใช้กรอบอ้างอิงของนิวตัน หรือ กรอบอ้างอิงเฉื่อย

กรอบอ้างอิงของนิวตัน เป็นระบบแกนพิกัดฉากที่ไม่หมุน และ อยู่กับที่ หรือเคลื่อนไปตามทิศทางที่กำหนด ด้วยความเร็วคงที่ (ความเร่งเท่ากับศูนย์)

13.3 สมการการเคลื่อนที่สำหรับอนุภาค

- ผลรวมของแรงที่กระทำภายนอกบนระบบอนุภาค จะเท่ากับมวลทั้งหมดของระบบอนุภาคคูณด้วยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล g เช่น

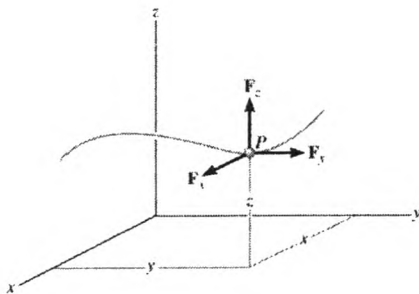
$$\Sigma F = ma_g \quad (13.4)$$

สรุป

สมการการเคลื่อนที่(13.1) – (13.4) เป็นพื้นฐานบนการทดสอบที่ชัดเจน และมีเหตุผลใช้สำหรับประยุกต์จากกรอบอ้างอิงเฉื่อย

13.4 สมการการเคลื่อนที่: ระบบแกนพิกัดฉาก

- เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่โดยเทียบกับกรอบอ้างอิงความเฉื่อย $x-y-z$ (ทิศทาง) สมการการเคลื่อนที่ (13.1) เท่ากับสมการย่อยของการเคลื่อนที่ใน ปริมาณ สเกลาร์



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x, \\ \Sigma F_y &= ma_y, \\ \Sigma F_z &= ma_z, \end{aligned} \quad (13.5)$$

โดยสมการที่อยู่ 2 อันแรกใช้ในการนิยามที่อนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ $x-y$ ในการวิเคราะห์ปัญหา

การใช้สมการการเคลื่อนที่ในการแก้ปัญหา

ผังวัตถุอิสระ

- เลือกระบบพิกัดเฉื่อย เป็นระบบแกนพิกัดฉาก x, y, z ในการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่แบบวิถีตรง

- เขียนผังวัตถุอิสระ เป็นความสำคัญในการแก้ปัญหาเพราะผังจะแสดงแรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคตามแกน x, y, z ใช้สำหรับสมการ s (13.5)

- กำหนดความเร่งย่อยของอนุภาค ถ้าไม่ทราบทิศของความเร่งย่อย ควรสมมติเป็นทิศทางเดียวกับทิศบวกของแกนอ้างอิง

สมการการเคลื่อนที่

- จาผังวัตถุอิสระแทนค่าสมการย่อยในสมการที่ (13.5)
- ถ้าการเคลื่อนที่แบบสามมิตินั้นยุ่งยากและซับซ้อน ควรใช้การวิเคราะห์แบบพิกัดฉาก
- แรงเสียดทาน ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวที่หยาบจะเกิดแรงเสียดทานจะใช้สมการแรงเสียดทาน $F_f = \mu_k N$ โดยทิศแรงเสียดทาน F_f จะต้องตรงข้ามกับทิศทางที่อนุภาคเคลื่อนที่เสมอ
- สปริง ถ้าอนุภาคยึดติดด้วยสปริงที่มีมวลน้อยมาก แรงดึงกลับสปริง F_s จะคำนวณได้จากความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงรูปตามสมการ $F = ks$

จลนศาสตร์

- ความเร็ว หรือตำแหน่งของอนุภาคจำเป็นต้องใช้สมการจลนศาสตร์ช่วยในการคำนวณ เพราะสมการการเคลื่อนที่ (13.3) สามารถทำได้เฉพาะความเร่งของอนุภาค
- ความเร่งของอนุภาคเป็นฟังก์ชันของเวลาใช้สมการ $a = \frac{dv}{dt}$ และ $v = \frac{ds}{dt}$ เมื่ออินทิเกรตแล้วจะได้ความเร็วและตำแหน่งอนุภาค
- ความเร่งของอนุภาคเป็นฟังก์ชันของการกระจัด โดยอินทิเกรตสมการ $ads = u dv$ จะได้สมการความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง
- ถ้าความเร่งคงที่ใช้

$$\text{สมการ } v = v_0 + a_c t, s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2, v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

เพื่อคำนวณหาความเร็วหรือตำแหน่งของอนุภาค

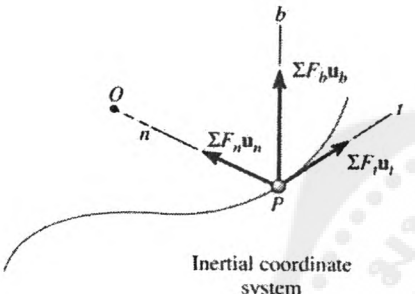
- ในกรณีที่เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ยึดติดกันแบบถูกบังคับ ต้องใช้หลักการดังหัวข้อที่ 12.9 เพื่อหาความสัมพันธ์ของความเร่งของแต่ละอนุภาค

- สำหรับทุกกรณีที่เกิดข้อขัดแย้ง ต้องแน่ใจว่าทิศทางของกรอบอ้างอิงเฉื่อยของเทอมต่างๆ ในสมการจลน์คณิตศาสตร์กับทิศบวกในสมการของการเคลื่อนที่ตรงเหมือนกัน
- ถ้าตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นเวกเตอร์ย่อย เครื่องหมายลบของตัวแปรที่ได้จากการวิเคราะห์ จะเป็นเครื่องหมายตรงกันข้ามกับทิศที่สมมติไว้ในตอนแรก

13.5 สมการการเคลื่อนที่: ระบบแกนตั้งฉากและสัมผัส

- เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่โดยเทียบกับกรอบอ้างอิงความเฉื่อย $n-t$ (ทิศทาง) สมการการเคลื่อนที่ (13.1)

เท่ากับสมการย่อยของการเคลื่อนที่ใน ปริมาณ สเกลาร์

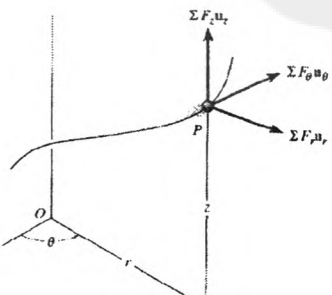


$$\begin{aligned}\sum F_t &= ma_t \\ \sum F_n &= ma_n \\ \sum F_b &= 0\end{aligned}\quad (13.6)$$

13.6 สมการการเคลื่อนที่: ระบบแกนทรงกระบอก

- เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่โดยเทียบกับกรอบอ้างอิงความเฉื่อย r, θ, z (ทิศทาง) สมการการเคลื่อนที่ (13.1)

เท่ากับสมการย่อยของการเคลื่อนที่ใน ปริมาณ สเกลาร์



$$\begin{aligned}\sum F_r &= ma_r \\ \sum F_\theta &= ma_\theta \\ \sum F_z &= ma_z\end{aligned}\quad (13.7)$$

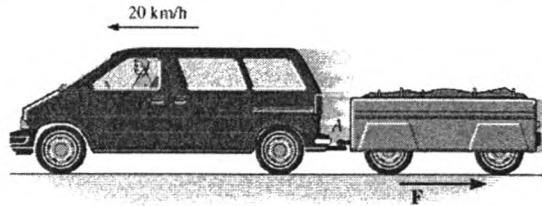
คำถามทบทวนท้ายบท

1. จริงหรือไม่จริง
 - a. สมการการเคลื่อนที่ที่จะสันนิษฐานอยู่บนกรอบอ้างอิงความเฉื่อย
 - b. สมการการเคลื่อนที่มีพื้นฐานมาจากการแก้ไขทางคณิตศาสตร์
2. จากสมการเคลื่อนที่ (สเกลาร์) อะไรของอนุภาคที่ถูกผลักดันเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x-y
3. ในกรณีอะไรที่จะต้องใช้สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกนตั้งฉากและสัมผัส
4. จากสมการ (13.6) สาเหตุอะไรที่ทำให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคมีทิศทางที่ผิดปกติ
5. ในกรณีใดที่จะใช้สมการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยการเขียนระบบแกนทรงกระบอก
6. จากปัญหาของแรงดึงดูดศูนย์กลางค่าอะไรที่กำหนดชนิดของของรูปกรวยและบอกเส้นทาง

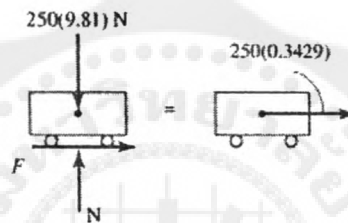


ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 13 จลนศาสตร์ของอนุภาค : แรงและความเร่ง

ตัวอย่างที่ 13.1 รถตู้วิ่งด้วยความเร็ว 20 km/h เมื่อตัวยึดรพ่วงที่จุด A ขาดลง ถักรพ่วงมีมวล 250 kg และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 45 m ก่อนที่จะหยุดจงหาแรงเสียดทาน F ที่ทำให้รถหยุดเคลื่อนที่



Solution:



$$20 \text{ km/h} = 20(10^3)/3600 = 5.556 \text{ m/s}$$

$$\leftarrow^+ \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s-s_0)$$

$$0 = 5.556^2 + 2(a)(45-0)$$

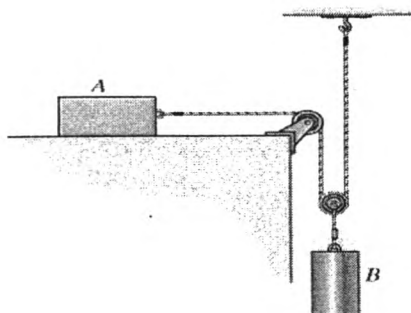
$$a = -0.3429 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

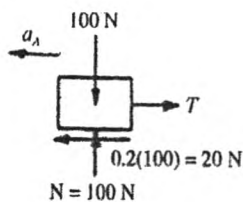
$$\rightarrow^+ \sum F_x = ma_x$$

$$F = 250(0.3429) = 85.7 \text{ N}$$

Ans

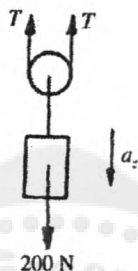
ตัวอย่างที่ 13.2 ก้อน A น้ำหนัก 100 N เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว $v_a = 1 \text{ m/s}$ ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ $\mu_k = 0.2$ จงหาความเร็วของก้อน A เมื่อเคลื่อนที่ไปได้ 2 m เมื่อ ก้อน B น้ำหนัก 200 N



Solution:

Block A :

$$+\leftarrow \sum F_x = 0; -T + 20 = \left(\frac{100}{9.81}\right)a_A \quad (1)$$



$$\text{Weight B : } +\leftarrow \sum F_x = 0; -T + 20 = \left(\frac{100}{9.81}\right)a_A$$

$$\text{Kinematics : } s_A + 2s_B = l$$

$$a_A = -2a_B \quad [3]$$

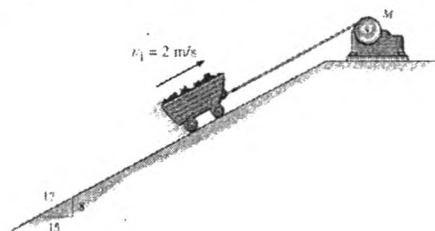
$$\text{แก้สมการ [1] - [3] : } v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$v^2 = (1)^2 + 2(5.232)(2 - 0)$$

$$v = 4.68 \text{ m/s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 13.3 รถขนถ่านหินมีน้ำหนัก 400 kg ถึงคังขึ้นบนพื้นเอียงด้วยมอเตอร์ ถ้ำแรงในเคเบิล $F = (3200t^2) \text{ N}$ เมื่อรถมีความเร็วต้น $v_1 = 2 \text{ m/s}^2$ จงหาความเร็วเมื่อ $t = 2$ วินาที

**Solution:**

EOM

$$+\sum F_x = ma_x = F - mg(\sin\theta) = ma_x$$

$$3200t^2 - (400)(9.81)(\sin 28.07^\circ) = 400a$$

$$a = (8t^2 - 4.616) \text{ m/s}^2$$

Kinematics

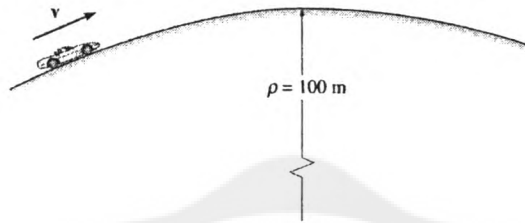
$$a = dv/dt = dv = a dt$$

$$\int dv = \int (8t^2 - 4.616) dt, \quad v_1 = 2 \text{ m/s}, t = 2 \text{ s}$$

$$v - 2 = (8/3t^3 - 4.616t) \Big| = 12.10 = v = 14.1 \text{ m/s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 13.4 ถ้ายอดเขามีสรีระมีความโค้ง = 100 m จงหาความเร็วสูงสุดโดยที่รถสามารถเดินทางผ่านยอดเขาโดยไม่หลุดออกจากผิวถนนถ้ารถมีน้ำหนัก 17.5 kN

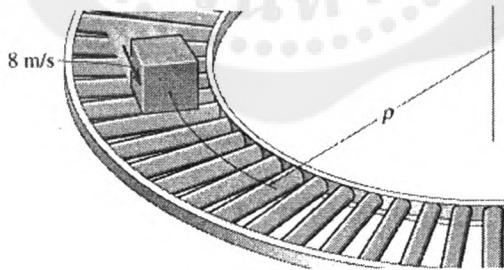


Solution:

$$+\downarrow \sum F_n = ma_n; 17500 = \frac{17500}{9.81} \left(\frac{v^2}{100} \right)$$

$$v = 31.3 \text{ m/s} \quad \text{Ans}$$

ตัวอย่างที่ 13.5 ก่อรถบรรทุกสินค้ามีมวล 5 kg เคลื่อนที่ไปตามรางด้วยความเร็วคงที่เท่ากับ 8 m/s จงคำนวณหาสรีระความโค้งน้อยที่สุดที่ไม่ทำให้ก่รถบรรทุกสินค้าไถลออกจากสายพาน ถ้าเลียงกำหนดให้แรงเสียดทานสถิตและแรงเสียดทานจลน์ $\mu_s = 0.7 \mu_k = 0.5$



Solution:

$$+\uparrow \sum F_b = ma_b; N - W = 0$$

$$N = W$$

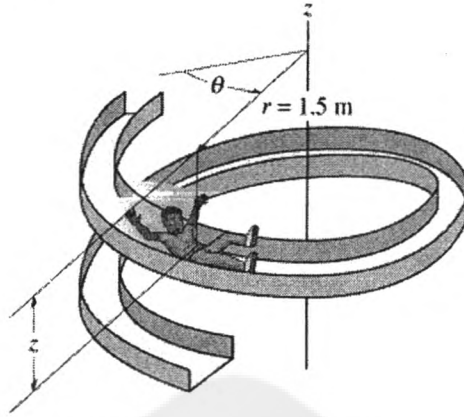
$$F_s = 0.7W$$

$$+\leftarrow \sum F_n = ma_n; 0.7W = \frac{W}{9.81} \left(\frac{8^2}{\rho} \right)$$

$$\rho = 9.32 \text{ m}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 13.6 เด็กชายมวล 40 kg กำลังสไลด์ลงมาจากสไลด์รูปก้นหอยซึ่งมีค่า $r = 1.5 \text{ m}$ $\theta = (0.7)t \text{ rad}$ และ $z = (-0.5t) \text{ m}$ ซึ่ง t มีหน่วยเป็นวินาที จงหา F_r, F_θ, F_z เมื่อเด็กชายเคลื่อนที่ไปเป็นระยะเวลา $t = 2 \text{ s}$



Solution:



$$\begin{aligned} r &= 1.5 & \theta &= 0.7t \\ \dot{r} &= \ddot{r} = 0 & \dot{\theta} &= 0.7 \\ & & \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = 0 - 1.5(0.7)^2 = -0.735$$

$$a_\theta = \ddot{r}\dot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta} = 0$$

$$a_z = \ddot{z} = 0$$

$$\sum F_r = ma_r; F_r = 40(-0.735) = -29.4 \text{ N}$$

Ans

$$\sum F_\theta = ma_\theta; F_\theta = 0$$

Ans

$$\sum F_z = ma_z; F_z - 40(9.81) = 0$$

$$F_z = 392 \text{ N}$$

Ans

บทที่ 14 จลนศาสตร์ของอนุภาค : งานและพลังงาน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อพัฒนาหลักการของงานและพลังงานเพื่อประยุกต์ใช้แก้ปัญหาของแรง ความเร็ว และการกระจัด
- เพื่อศึกษาปัญหาเกี่ยวกับกำลังและประสิทธิภาพ
- เพื่อทราบถึงแนวคิดของแรงอนุรักษ์และประยุกต์ทฤษฎีของการอนุรักษ์พลังงานเพื่อแก้ปัญหาจลนศาสตร์

กิจกรรมการเรียนรู้

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หล่มบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้มั่นใจได้ที่มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

14.1 งานเนื่องจากแรง

ในทางกลศาสตร์แรง F ทำให้เกิดงานได้ต่อเมื่ออนุภาคที่ถูกกระทำนั้น เคลื่อนที่แล้วการกระจัดมีทิศทางเดียวกับแรง

- งาน dU กระทำโดยแรง F เคลื่อนที่โดยระยะกระจัดของอนุภาค $d\mathbf{r}$ เป็นปริมาณสเกลาร์ คือ

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \theta \quad (14.1)$$

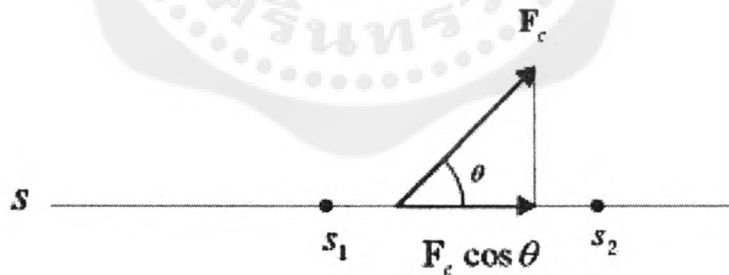
เมื่อ $ds = |d\mathbf{r}|$ และ θ คือมุมระหว่าง $d\mathbf{r}$ และ F

- งานเนื่องจากแรงไม่คงที่ ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่จาก r_1 ไปยัง r_2 หรือ s_1 ไปยัง s_2 คือ

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta ds \quad (14.2)$$

- งานเนื่องจากแรงคงที่และทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง เนื่องจากทั้งแรง F และ θ คงที่ (ทางเดิน เส้นตรง)

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= F \cos \theta \int_{s_1}^{s_2} ds \\ &= F \cos \theta (s_2 - s_1) \end{aligned} \quad (14.3)$$



รูปที่ 14.1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง

- งานเนื่องจากน้ำหนัก

$$U_{1-2} = -W_y \quad (14.4)$$

เนื่องจากการกระจัดในแนวตั้ง y มีค่าเป็นบวกในทิศทางขึ้น (ดังนั้นงานเนื่องจากน้ำหนัก มีค่าเป็นบวกถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ลงและมีค่าเป็นลบเมื่อเคลื่อนที่ขึ้น)

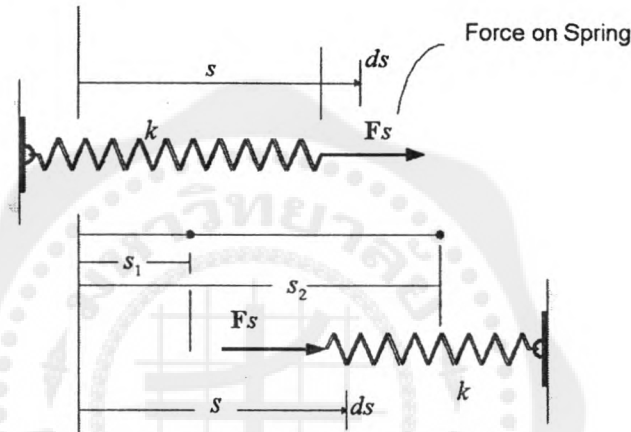
● งานเนื่องจากแรงสปริง

(a) งานของสปริง งานของสปริงคือ $U_s = \frac{1}{2} k s^2$ เมื่อ k คือค่าความแข็งของสปริงและ s คือ ระยะยืดหรือหดของสปริง

(b) งานที่กระทำต่อสปริง ถ้าสปริงยืดหรือหดจากตำแหน่ง s_1 ไปยังตำแหน่ง s_2 งานที่กระทำต่อสปริงโดยแรง F_s ในสปริงยืดหยุ่นเชิงเส้นจะมีค่าเป็นบวกเนื่องจากไม่ว่าสปริงจะยืดหรือหดแรงและการกระจัดมีทิศทางเดียวกัน

$$U_{1-2} = \frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2) \quad (14.5)$$

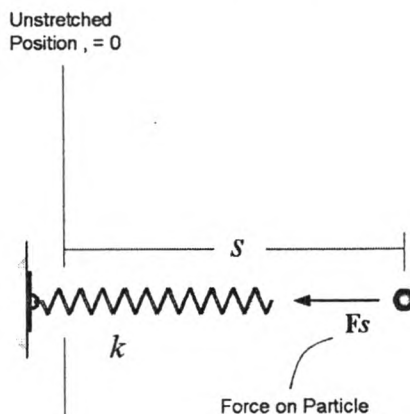
Unstretched position, $s = 0$



รูปที่ 14.2 งานของสปริงและงานที่กระทำต่อสปริง

(c) งานในกรณีที่วัตถุหรืออนุภาคยึดติดกับสปริง แรง F_s ที่กระทำต่ออนุภาคจะมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง F_s ที่กระทำต่อสปริง แรง F_s จะให้งานที่กระทำต่อวัตถุ (อนุภาค) มีเครื่องหมายเป็นลบ

$$U_{1-2} = -\frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2) \quad (14.6)$$



รูปที่ 14.3 วัตถุหรืออนุภาคยึดติดกับสปริง

14.2 หลักการของงานและพลังงาน

- หลักการของงานและพลังงานสำหรับอนุภาค คือ

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2 \quad (14.7)$$

เมื่อ $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ คือพลังงานจลน์ของอนุภาคที่จุด 1 และจุด 2 ตามลำดับ, $\sum U_{1-2}$ คือ งานทั้งหมดที่กระทำเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากจุด 1 ไปยังจุด 2

- หลักการของงานและพลังงานที่ใช้แก้ปัญหากลศาสตร์เคลื่อนที่นั้นจะช่วยทำให้การวิเคราะห์ปัญหาในเทอมของความเร็ว แรง การกระทำทำได้สะดวกยิ่งขึ้น

การแก้ปัญหาโดยหลักการของงานและพลังงาน

- งาน (ผั้วัตถุอิสระ)

— กำหนดแกนอ้างอิงอยู่กับที่ พร้อมทั้งเขียนผั้วัตถุอิสระซึ่งแสดงแรงทั้งหมดที่ให้งานกับอนุภาค และทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่

- หลักการของงานและพลังงาน

- ประยุกต์ใช้หลักการของงานและพลังงาน $T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$
- พลังงานจลน์ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายจะมีเครื่องหมายเป็นบวกเสมอ เพราะว่าประกอบด้วยความเร็วกำลังสอง ($T = \frac{1}{2}mv^2$)
- แรงที่ทำให้เกิดงานได้นั้นจะต้องเป็นแรงที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ และมีการกระจัดทิศทางเดียวกับแรงนั้น
- งานที่ได้จะมีเครื่องหมายเป็นบวก เมื่อแรงย่อยและการกระจัดมีทิศไปทางเดียวกัน และงานที่ได้มีเครื่องหมายเป็นลบ เมื่อแรงย่อยและการกระจัดมีทิศทางไปตรงกันข้าม
- งานเป็นฟังก์ชันของการกระจัด เราต้องอินทิเกรตสมการ (14.0) ก่อนจึงคำนวณหางานได้ หรือคำนวณจากกราฟระหว่างการกระจัดกับแรง ซึ่งงานที่ได้จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ แรง-การกระจัด
- งานเนื่องจากน้ำหนัก จะเป็นผลคูณของขนาดของน้ำหนักกับระยะทางตามแนวคิ่งนั้นคือ $U_w = \pm Wy$ (สมการ 14.1) ซึ่ง U_w จะเป็นบวกเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ลง และเป็นลบเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ขึ้น
- งานเนื่องจากสปริงคำนวณได้จาก $U_s = \frac{1}{2}ks^2$ เมื่อ k ค่าความแข็งของสปริงและ s คือ ระยะยืดหรือหดของสปริง (สมการ 14.2 และ 14.3)

14.3 หลักการของงานและพลังงานสำหรับระบบอนุภาค

- เราสามารถใช้หลักการของงานและพลังงานวิเคราะห์ระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคที่แยกอิสระอยู่ภาคในเนื้อที่ขอบเขตเดียวกันได้และสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2 \quad (14.8)$$

จากสมการ กล่าวได้ว่า

“พลังงานจลน์เริ่มต้นของระบบอนุภาค ($\sum T_1$) บวกกับงานทั้งหมดที่เกิดจากแรงภายนอกลัพธ์กระทำต่อระบบอนุภาค ($\sum U_{1-2}$) มีค่าเท่ากับ ($\sum T_2$) พลังงานจลน์สุดท้ายของระบบ

Note: ถึงแม้ว่าแรงภายในจะเป็นแรงที่อนุภาคอนุภาคที่อยู่ติดกัน กระทำต่อกันมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน โดยทั่วไปงานที่เกิดจากแรงภายในแต่ละคู่ยังต้องนำมาพิจารณา เนื่องจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคแตกต่างกัน ซึ่งมี 2 กรณีที่มักจะเกิดขึ้นในอนุภาค คือ

- เมื่อระบบของอนุภาคอยู่ภายในขอบเขตของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนของวัตถุคงรูป
- เมื่อระบบของอนุภาคที่เชื่อมต่อกันด้วยเคเบิลที่ไม่ยืดหรือหด ในกรณีนี้แรงภายในแต่ละคู่เท่ากันทิศตรงข้ามมีการกระทำเท่ากัน ดังนั้นงานเนื่องจากแรงภายในจะมีค่าเป็นศูนย์

- ปัญหาเนื่องงานเนื่องจากแรงเสียดทานเมื่อมีการลื่นไถล เราสามารถประยุกต์ใช้สมการ (14.5) สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่เมื่อมีการลื่นไถล อย่างไรก็ตามงานจากแรงเสียดทานลัพธ์จะไม่แทนด้วย $\mu_k Ns$ แต่แทนค่าด้วยงานภายนอกเนื่องจากแรงเสียดทาน (external work) $\mu_k Ns'$ กับพลังงานภายใน (internal work) $\mu_k N(s - s')$ ของแรงเสียดทาน ซึ่งงานภายในสามารถเปลี่ยนเป็นพลังงานภายในรูปแบบต่าง ๆ เช่นเปลี่ยนเป็นความร้อน

14.4 กำลังประสิทธิภาพ

- กำลัง คือ พลังงานหรืองานที่ได้ต่อหน่วยเวลา ซึ่งใช้แสดงถึงความสามารถของเครื่องจักรกลหรือเครื่องยนต์ พิจารณาเครื่องจักรกลที่ผลิตงานได้ dU ในช่วงเวลา dt ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการของพลังงานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P &= \frac{dU}{dt} \\ &= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (14.9)$$

เมื่อ v คือ ความเร็วของอนุภาค ณ ตำแหน่งใดๆ ที่ถูกแรง F กระทำ

- เนื่องจากกำลังเป็นปริมาณสเกลาร์ หน่วยพื้นฐานในระบบ SI คือ $1\text{W} = 1\text{J/s} = 1\text{N}\cdot\text{m/s}$

- ประสิทธิภาพ ประสิทธิภาพเชิงกลของเครื่องจักร คือ

$$\varepsilon = \frac{\text{power}_{\text{output}}}{\text{power}_{\text{input}}}$$

หรือ

$$\varepsilon = \frac{\text{energy}_{\text{output}}}{\text{energy}_{\text{input}}} \quad (14.10)$$

เนื่องจากเครื่องจักรประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นที่มีการเคลื่อนที่ ซึ่งจะเกิดแรงเสียดทานขึ้นภายในเครื่องจักรเป็นผลให้เครื่องจักรต้องการพลังงานหรือกำลังมากขึ้น ดังนั้น ประสิทธิภาพของเครื่องจักรกลจะต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเสมอ

การคำนวณกำลังงานที่ให้แก่วัตถุ

- คำนวณแรงภายนอก F ที่กระทำต่อวัตถุและทำให้วัตถุเคลื่อนที่ แรงนี้ได้จากเครื่องจักรกลหรือเครื่องชนิดที่เชื่อมต่ออยู่กับวัตถุภายในหรือภายนอกวัตถุ
- ถ้าวัตถุเคลื่อนที่แบบมีความเร่ง จะต้องเขียนผังวัตถุอิสระและประยุกต์ใช้กับสมการการเคลื่อนที่ ($\Sigma F = ma$) เพื่อคำนวณหาแรง F
- ถ้าทราบ F และความเร็ว v ณ ตำแหน่งที่แรงกระทำกำลังจะคำนวณหาได้จากผลคูณระหว่างขนาดของแรงกับความเร็วที่มีทิศทางเดียวกับแรง ตามสมการ $P = F \cdot v = Fv \cos\theta$
- ในบางปัญหากำลังคำนวณหาได้จากการคำนวณหางานที่ได้จากแรง F ต่อหนึ่งหน่วยเวลา ดังนี้

$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad \text{หรือ} \quad P = \frac{dU}{dt}$$

14.5 แรงอนุรักษ์และพลังงานศักย์

- **แรงอนุรักษ์** เมื่อแรงที่กระทำต่ออนุภาคและเกิดงานขึ้น โดยที่อนุภาคนั้นเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังจุดอื่น ได้อย่างอิสระกับเส้นทางการเคลื่อนที่ (independent of the path) ของอนุภาค เราเรียกแรงนี้ว่าแรงอนุรักษ์ (conservative force) เช่น
 - งานเนื่องจากน้ำหนักของอนุภาค เป็นอิสระกับเส้นทางการเคลื่อนที่ งานเนื่องจากน้ำหนักจะขึ้นอยู่กับกระจัดแนวตั้งเท่านั้น
 - งานที่แรงสปริงที่กระทำกับอนุภาค เป็นอิสระกับเส้นทางการเคลื่อนที่ งานประเภทนี้จะขึ้นอยู่กับระยะยืดหรือระยะกดของสปริง

➤ เพื่อให้เห็นข้อแตกต่าง พิจารณาแรงที่เกิดจากความเสียดทานที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุเลื่อนไถลไปตามพื้น งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงเสียดทานจะขึ้นอยู่กับเส้นทางการเคลื่อนที่ ถ้าเส้นทางการเคลื่อนที่มีระยะทางยาวมากก็จะเกิดงานขึ้นมากด้วย ดังนั้นแรงเสียดทานจึงเป็นงานไม่อนุรักษ์ เกิดงานสูญเสียจากวัตถุ ในรูปแบบของความร้อน

- **พลังงานศักย์** พลังงานศักย์จะเป็นพลังงานที่เกิดจากงานที่ได้จากแรงอนุรักษ์ เมื่ออนุภาคเคลื่อนย้ายจากตำแหน่งที่กำหนดไปยังระดับอ้างอิง

— พลังงานศักย์โน้มถ่วง พลังงานศักย์โน้มถ่วงของอนุภาคของน้ำหนัก W คือ

$$V_g = Wy, \quad (14.11)$$

เมื่อ y คือตำแหน่งของอนุภาค โดยกำหนดให้มีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่สูงกว่าระดับอ้างอิง

- พลังงานศักย์ยืดหยุ่น พลังงานศักย์ยืดหยุ่นจะขึ้นอยู่กับสปริงถูกยืดหรือกดเป็นระยะ s จากความยาวอิสระ สามารถเขียนได้เป็น

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \quad (14.12)$$

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น V_e จะเป็นบวกเสมอเมื่อสปริงเกิดการเปลี่ยนรูป เนื่องจากแรงที่สปริงกระทำต่ออนุภาคทำให้เกิดงานที่เป็นบวกเสมอเมื่อสปริงยืดตัวหรือหดตัวกลับสู่ตำแหน่งเดิมหรือระยะสมดุล

- **ฟังก์ชันพลังงานศักย์** ในกรณีที่อนุภาคถูกกระทำโดยแรงโน้มถ่วงและแรงยืดหยุ่นหรือแรงสปริง พลังงานศักย์ของอนุภาค จะเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันพลังงานศักย์ หรือผลรวมของพลังงานศักย์ดังสมการ

$$V = V_e + V_g \quad (14.13)$$

- **การพิสูจน์แรง F คือแรงอนุรักษ์** แสดงความสัมพันธ์ของแรง F กับฟังก์ชันพลังงานศักย์ V_e สำหรับพิสูจน์ให้เห็นว่าแรง F เป็นแรงอนุรักษ์ โดยสมการ

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (14.14)$$

14.6 การอนุรักษ์พลังงาน

- ในกรณีที่แรงอนุรักษ์กระทำกับวัตถุหรืออนุภาค หลักการและพลังงานจะเขียนได้เป็นการอนุรักษ์พลังงานเชิงเครื่องกล (conservation of mechanical energy) คือ

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (14.15)$$

ในระหว่างการเคลื่อนที่ของอนุภาค ผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ของอนุภาค จะคงที่เสมอ

- ระบบของอนุภาค ในกรณีที่ระบบของอนุภาคถูกกระทำโดยแรงอนุรักษ์ จะได้สมการของการอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2 \quad (14.16)$$

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้สมการของการอนุรักษ์พลังงาน

สมการของการอนุรักษ์พลังงาน จะใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ประกอบด้วย ความเร็ว การกระจัด การวิเคราะห์จะง่ายกว่าการใช้หลักการของงานและพลังงาน เพราะว่าสมการพลังงานต้องการทราบเฉพาะพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของอนุภาค ณ ตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายบนเส้นทางการเคลื่อนที่เท่านั้น ในการคำนวณงานจะต้องพิจารณาการกระจัดของอนุภาคที่เคลื่อนที่ตามเส้นทางการเคลื่อนที่ หากประยุกต์ใช้สมการของการอนุรักษ์พลังงานประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

- พลังงานศักย์
 - เขียนผังภาพที่แสดงอนุภาคที่ตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายตามเส้นทางการเคลื่อนที่
 - พิจารณาการกระจัดของอนุภาคตามแนวตั้งเทียบกับเส้นระดับที่อ้างอิงอยู่กับที่ เพื่อคำนวณหาพลังงานศักย์โน้มถ่วง V_g
 - ข้อมูลเกี่ยวกับระดับความสูง y ของอนุภาคจากเส้นระดับอ้างอิง รวมทั้งระยะยัดหรือหดตัว s ของสปริงที่ยึดอยู่กับอนุภาค สามารถคำนวณหาได้จากความรู้ทางคณิตศาสตร์จากผังภาพที่แสดงตำแหน่งทั้งสองของอนุภาค
 - พิจารณาสมการ โดยที่ y เป็นบวกเมื่อมีทิศทางขึ้นจากเส้นระดับอ้างอิงและเป็นลบเมื่อมีทิศทางลงจากเส้นระดับอ้างอิงแต่ พลังงานศักย์ยืดหยุ่นเชิงเส้น $V_e = \frac{1}{2}ks^2$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

• การอนุรักษ์พลังงาน

- ประยุกต์ใช้สมการพลังงาน $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
- เมื่อคำนวณหาพลังงานจลน์ $T = \frac{1}{2}mv^2$ ความเร็วของอนุภาค v จะต้องวัดจากแกนอ้างอิงเฉื่อย

ข้อแนะนำ

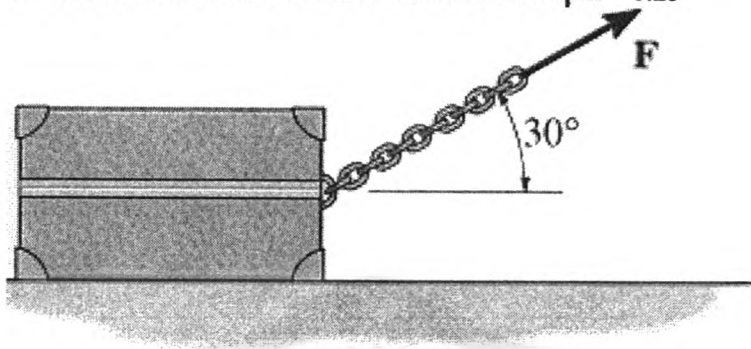
เฉพาะปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแรงอนุรักษ์ (น้ำหนักและสปริง) จะต้องคำนวณโดยใช้การอนุรักษ์พลังงาน (สมการ 14.7 หรือ 14.8) แรงเสียดทานหรือแรงจุดด้านอื่น ๆ ซึ่งขึ้นอยู่กับความเร็วและความเร่ง จะเป็นแรงไม่อนุรักษ์ (งานที่เกิดจากแรงดังกล่าวจะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนและถ่ายเทให้แก่สิ่งแวดล้อมและไม่อาจจะนำกลับคืนมาได้) ในกรณีที่มีแรงมากกระทำจะใช้สมการของหลักการของงานและพลังงาน

คำถามทบทวนท้ายบท

1. คุณจะคำนวณงานจากแรง F อย่างไร
2. เมื่อใดจึงใช้หลักการของงานและพลังงานในการแก้ปัญหาจลน์ศาสตร์
3. กำลังคืออะไรและสามารถคำนวณหาได้อย่างไร
4. เหตุใดประสิทธิภาพของเครื่องจักรจะต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเสมอ
5. แรงอนุรักษ์คืออะไรจงยกตัวอย่างของแรงอนุรักษ์
6. เหตุใดน้ำหนักของวัตถุจึงเป็นแรงอนุรักษ์
7. ยกตัวอย่างของแรงที่แรงไม่อนุรักษ์และอธิบายว่าเหตุใดแรงนั้นจึงไม่เป็นการอนุรักษ์
8. อธิบายความหมายและยกตัวอย่างของพลังงานศักย์
9. คุณสามารถพิสูจน์ได้อย่างไรว่าแรงคือการอนุรักษ์
10. เมื่อใดจึงใช้สมการของการอนุรักษ์พลังงานในการแก้ปัญหาทางจลนศาสตร์

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 14 จลนศาสตร์ของอนุภาคและพลังงาน

ตัวอย่างที่ 14.1 บล็อกมวล 20 kg ถูกดึงด้วยแรงที่มีทิศทางและขนาดคงที่ 100 N กำหนดให้ s มีหน่วยเป็นเมตร เมื่อ $s = 15$ m บล็อกเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 8 m/s จงหาความเร็ว เมื่อ $s = 25$ m เมื่อสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ระหว่างบล็อกกับพื้น $\mu_k = 0.25$



จากโจทย์กำหนด

$$M = 20 \text{ kg}$$

$$\mu_k = 0.25$$

$$s_1 = 4 \text{ m}$$

$$F = 100 \text{ N}$$

$$v_1 = 8 \text{ m/s}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$s_2 = 25 \text{ m}$$

สมการการเคลื่อนที่ (EoM) เมื่อกล่องเลื่อนไถล แรงเสียดทานจะเกิดขึ้นระหว่างกล่องกับพื้นผิว หรือ $F_f = \mu_k N$ ดังนั้น

$$N + F \sin \theta - Mg = 0$$

$$N = Mg - F \sin \theta$$

หลักการของงานและพลังงาน แรงที่กระทำในแนวราบก่อให้เกิดแรงที่เป็นบวก และแรงที่ต้านการเคลื่อนที่หรือแรงเสียดทานเป็นลบ พิจารณาที่แรงปฏิกิริยาดังกล่าวก็ไม่ก่อให้เกิดงานเนื่องจากตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ ดังนั้น

$$F \cos \theta - \mu_k N = Ma$$

$$F \cos \theta - \mu_k (Mg - F \sin \theta) = ma$$

$$a = \frac{F \cos \theta - \mu_k (Mg - F \sin \theta)}{M}$$

$$a = 2.503 \text{ m/s}^2$$

$$v dv = a ds$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} + a(s_2 - s_1)$$

$$v = \sqrt{2 \left[\frac{v_1^2}{2} + a(s_2 - s_1) \right]}$$

$$v = 13.006 \text{ m/s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.2 พิจารณาออกแบบเป็นกระแทก B

สำหรับรถรางมวล 5-Mg จำเป็นต้อง

ใช้กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง

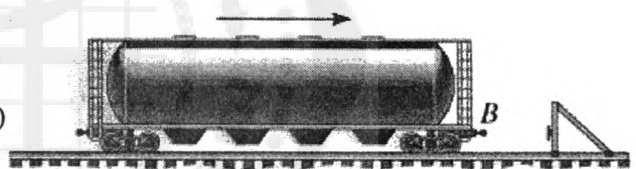
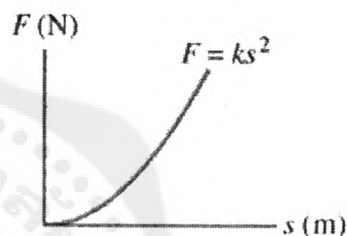
Load-deflection ของสปริงดังรูป จง

เลือกค่า K โดยกำหนดให้ maximum

Deflection ของสปริงจำกัดที่ 0.2 m

เมื่อรถรางมีความเร็ว 4 m/s และชน

จนหยุดนิ่ง(ไม่คิดน้ำหนักของล้อรถ)



จากโจทย์กำหนดให้

$$M = 5 \text{ Mg}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

$$d = 0.2$$

หลักการของงานและพลังงาน

$$\frac{1}{2} M v^2 - \int_0^d k x^2 dx = 0$$

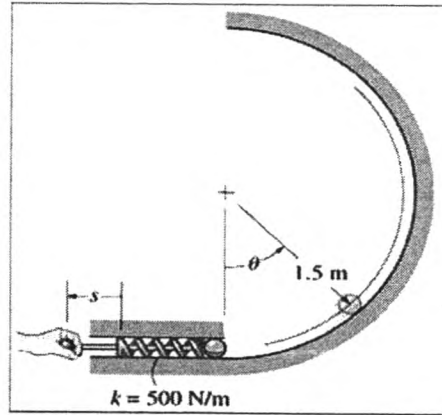
$$\frac{1}{2} M v^2 - \frac{k d^3}{3} = 0$$

$$k = \frac{3 M v^2}{2 d^3}$$

$$k = 15.00 \text{ MN/m}^2$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.3 ลูกบอลมวล 0.5 kg ถูกยิงไปยังรางรูปวงกลมแนวตั้งโดยเครื่องยิงสปริง เครื่องยิงสปริงถูกอัดไว้ก่อนแล้ว 0.08 m เมื่อ $s = 0$ จงหาค่า s ของสปริงที่เมื่อถึงแล้วปล่อยจะทำให้ลูกบอลเริ่มหลุดออกจากรางเมื่อ $\theta = 135^\circ$



จากโจทย์กำหนด

$$M = 0.5 \text{ kg}$$

$$r = 1.5 \text{ m}$$

$$\delta = 0.08 \text{ m}$$

$$k = 500 \text{ N/m}$$

$$\theta_1 = 135^\circ$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

สมการการเคลื่อนที่ (EoM)

สามารถหาความเร็วจากสมการการเคลื่อนที่

$$N = 0 \quad \theta = \theta_1$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$N - Mg \cos \theta = M \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

$$v = \sqrt{-gr \cos \theta}$$

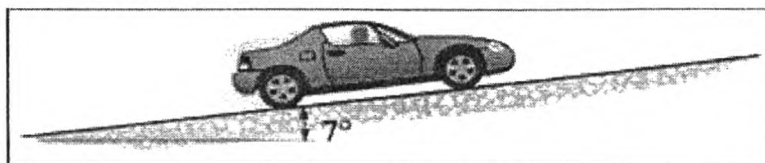
$$v = 3.23 \text{ m/s}$$

$$\int_{s+\delta}^{\delta} -kx dx - Mgr(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} Mv^2$$

$$s = 178.9 \text{ mm}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.4 รถยนต์มีมวล 2 Mg เคลื่อนที่ไปบนทางลาดมุม 7° ด้วยความเร็วคงที่ $v = 100 \text{ km/h}$ ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานและแรงต้านอากาศ จงคำนวณหาค่า ϵ ที่เกิดจากเครื่องยนต์ของรถยนต์คันนี้ กำหนดให้ $\epsilon = 0.65$



จากโจทย์กำหนด

$$M = 2Mg$$

$$v = 100 \text{ km/hr}$$

$$\theta = 7^\circ$$

$$\mathcal{E} = 0.65$$

สมการการเคลื่อนที่(EOM) โดยพิจารณาถ่วงบนพื้นเอียง งานที่เกิดคือแรงที่เกิดจากน้ำหนักรถเองคูณกับความเร็วในแกนที่รูด

$$P = Mg \sin \theta$$

$$P = 66.40 \text{ kW}$$

$$P_{\text{eng}} = \frac{P}{\mathcal{E}}$$

$$P_{\text{eng}} = 102.1 \text{ kW}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.5 กำลังที่ให้กับมอเตอร์เมื่อ $t = 2$ วินาที เมื่อมอเตอร์มี $\mathcal{E} = 0.76$ ไม่คิดมวลของรอกและเส้นเชือกบล็อกรวม 250 N (25 kg) มีความเร็ว 3 m/s ที่เวลา $t = 4$ วินาทีจากหยุดนิ่ง ถ้าความเร่งคงที่ จงคำนวณหา กำลังของมอเตอร์

จากโจทย์กำหนด

$$W = 250 \text{ N}$$

$$t_2 = 2 \text{ s}$$

$$v = 3 \text{ m/s}$$

$$\mathcal{E} = 0.76$$

$$t_1 = 4 \text{ s}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

จากสมการการเคลื่อนที่(EoM)

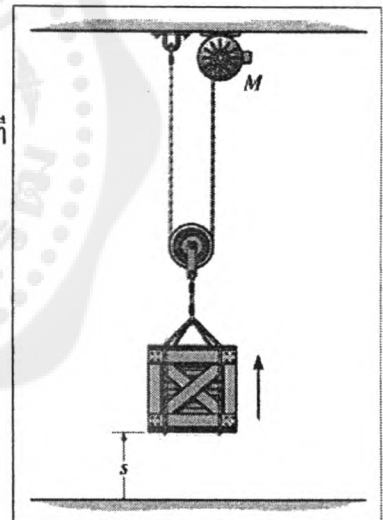
$$a = \frac{v}{t_1} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ m/s}^2$$

$$v_2 = at_2 = (0.75 \times 2) = 1.50 \text{ m/s}$$

$$F - W = \left(\frac{M}{g} \right) a$$

$$F = W + \left(\frac{W}{g} \right) a$$

$$F = 269.1 \text{ N}$$



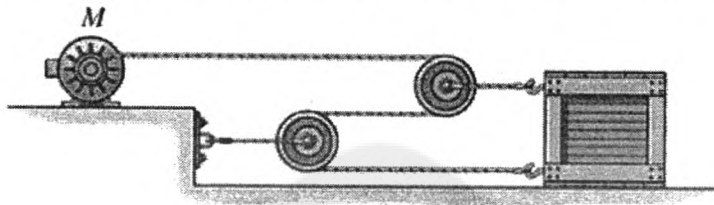
สามารถหาค่ากำลังของมอเตอร์ได้จาก

$$P = Fv_2 = 0.404 \text{ kW}$$

$$P_{\text{motor}} = \frac{P}{\mathcal{E}} = 0.531 \text{ kW}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.6 บล็อกมวล 150 kg และหยุดนิ่งอยู่บนผิวที่มีแรงเสียดทาน $\mu_s = 0.3$ และ $\mu_k = 0.2$ มอเตอร์ M ให้แรงดึงเชือก เมื่อ t อยู่ในหน่วยวินาที จงคำนวณหาค่ากำลังที่ได้จากมอเตอร์เมื่อ $t = 5 \text{ s}$



จากโจทย์กำหนด

$$m_c = 150 \text{ kg}$$

$$a = 8 \text{ N/s}^2$$

$$\mu_s = 0.3$$

$$b = 20 \text{ N}$$

$$\mu_k = 0.2$$

$$t_1 = 5 \text{ s}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

หาเวลาที่เริ่มการเคลื่อนที่จาก

$$3(at^2 + b) = \mu_s m_c g \quad t = \sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{\mu_s m_c g}{3} - b \right)} \quad t = 3.99 \text{ s}$$

นำเวลาที่ได้ออกมาหาความเร็ว ที่เวลา t_1

$$3(at^2 + b) - \mu_k m_c g = m_c a = m_c \frac{dv}{dx}$$

$$v = \int_{t_1}^t \frac{3}{m_c} (at^2 + b) - \mu_k g dt$$

$$v = 1.70 \text{ m/s}$$

นำความเร็วที่คำนวณได้จากเวลา t_1 มาคำนวณหาค่ากำลังที่ได้จากมอเตอร์

$$P = 1.12 \text{ kW}$$

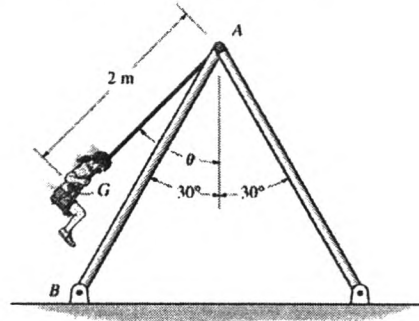
$$P = 3(at^2 + b)v$$

Ans

ตัวอย่างที่ 14.7 เด็กผู้หญิงมีมวล M และมีจุดศูนย์กลางมวลที่จุด G ถ้าเด็กผู้หญิงคนนี้แกว่งชิงช้าที่จุดสูงสุด โดยกำหนดให้มุม $\Theta = \Theta_1$ จงคำนวณหาแรงที่กระทำกับจุดรองรับบริเวณเสาทั้งที่ เช่น เสา AB ที่ตำแหน่ง $\Theta = 0^\circ$ ซึ่งช้านี้กระทำที่จุดศูนย์กลางระหว่างเสา

กำหนดให้

$$\begin{aligned} M &= 40 \text{ kg} \\ \Theta_1 &= 60^\circ \\ L &= 2 \text{ m} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



การอนุรักษ์พลังงาน

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 - MgL \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} Mv^2 - MgL$$

$$v = \sqrt{2gL[1 - \cos(60^\circ)]}$$

$$v = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})[1 - \cos 60^\circ]}$$

$$v = 4.43 \text{ m/s}$$

แรงดึงในเส้นเชือก

$$\sum F_y = ma_y$$

$$T - Mg = M\left(\frac{v^2}{L}\right)$$

$$T = Mg + M\left(\frac{v^2}{L}\right)$$

$$T = (40 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2) + (40 \text{ kg} \times \left(\frac{4.43 \text{ m/s}^2}{2 \text{ m}}\right))$$

$$T = 785 \text{ N}$$

สามารถคำนวณหาแรงที่กระทำในจุดรองรับของแต่ละเสาได้จาก

$$4F_{AB} \cos(30^\circ) - T = 0$$

$$F_{AB} = \frac{T}{4 \cos 30^\circ}$$

$$F_{AB} = \frac{785}{4 \cos 30^\circ}$$

$$T = 227 \text{ N}$$

Ans



บทที่ 15 จลนศาสตร์ของอนุภาค: การคลและโมเมนตัม

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อนำหลักการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค
- เพื่อศึกษาการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค
- เพื่อวิเคราะห์กลศาสตร์ของการกระทบ
- เพื่อทำความเข้าใจถึงแนวคิดเบื้องต้นของการคลเชิงมุมและ โมเมนตัมเชิงมุม
- เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับของไหลและการขับเคลื่อนด้วยมวลไม่คงที่

กิจกรรมการเรียนการสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หลัมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้มั่นใจได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

15.1 หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้น

- หลักการของการคลและโมเมนตัมมีที่มาจากอินทิเกรตสมการของการเคลื่อนที่เทียบกับเวลา สามารถเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$mv_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2 \quad (15.0)$$

- โมเมนตัมเชิงเส้น (Linear Momentum) ทำให้เวกเตอร์ทั้งสองเป็น $L = mv$ เรียกว่า โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค มีขนาดคือ mV และมีทิศทางเดียวกับความเร็ว v
- การคลเชิงเส้น (Linear Impulse) เทอมอินทิกรัล กำหนดให้ $I = \int F dt$ เรียกว่าการคลเชิงเส้น เป็นปริมาณเวกเตอร์และเป็นผลที่เกิดจากการกระทบในช่วงเวลาที่แรงกระทำต่ออนุภาค ดังนั้นการคลที่กระทำต่ออนุภาคจะมีทิศทางเช่นเดียวกับทิศของแรงกระทำ ขนาดของการคลจะมีหน่วยเป็นหน่วยของแรง คือ $N \cdot s$
- หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้น จากสมการ (15.0) กล่าวได้ว่าโมเมนตัมของอนุภาคที่ตำแหน่งเริ่มต้นบวกกับผลบวกของการคลทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคจะเท่ากับ โมเมนตัมของอนุภาคที่ตำแหน่งสุดท้าย ใช้ในการหาความเร็วสุดท้ายในช่วงเวลาที่กำหนดได้โดยตรงเมื่อทราบความเร็วเริ่มต้นและแรงที่มากระทำกับอนุภาค โดยแรงที่กระทำเป็นแรงคงที่หรือเป็นฟังก์ชันกับเวลาก็ได้
- หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้น

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m(v_y)_2 \\ m(v_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_z dt &= m(v_z)_2 \end{aligned} \quad (15.1)$$

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้นมีหลักการวิเคราะห์ ดังนี้

- พังวัตถุอิสระ
 - กำหนดกรอบอ้างอิงเป็นแกนพิกัดจาก x, y, z และเขียนผังวัตถุอิสระของอนุภาคที่ประกอบด้วยแรงทุกแรงที่ก่อให้เกิดการคลบนอนุภาค
 - กำหนดทิศทางและเครื่องหมายความเร็วต้นและสุดท้าย ตามเหตุผลที่ควรจะเป็น
 - ถ้าเป็นเวกเตอร์ไม่ทราบทิศทางควรสมมุติให้เป็นเวกเตอร์ย่อยมีทิศบวกตามแกนอ้างอิง
 - สำหรับวิธีการวิเคราะห์ทางเลือกอื่น คือเขียนผังการคลและ โมเมนตัมของอนุภาค

- หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้น

- เขียนสมการหลักการคลและโมเมนตัม $mv_1 = \sum \int_1^2 F dt = mv_2$ ในรูป สมการสเกลาร์ตามระบบแกนอ้างอิงที่กำหนด ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ในระนาบ x-y จะได้สมการในรูปสมการสเกลาร์ย่อยตามแกน x-y ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาได้ โดยแทนค่าแรง F ตามแกนต่าง ๆ จากผังวัตถุอิสระ หรือจากข้อมูลในผังการคลและโมเมนตัม
- จากผังวัตถุอิสระ แรงทุกแรงที่กระทำต่ออนุภาคจะทำให้เกิดการคล แม้ว่าจะมีบางแรงไม่ทำให้เกิดงานก็ตาม
- แรงที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะต้องอินทิเกรตเทอมของแรงก่อนจึงจะได้การคล
- ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ยึดติดกันแบบถูกบังคับ จะต้องหาสมการความสัมพันธ์ของความเร็วโดยใช้หลักการจากหัวข้อที่ 12.9 และแกนอ้างอิงแสดงทิศบวกของสมการจลนคณิตศาสตร์และสมการการคลและโมเมนตัม จะต้องมีทิศเหมือนกัน

15.2 หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้นสำหรับระบบอนุภาค

- หลักของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นสำหรับระบบอนุภาคที่เคลื่อนที่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยมีที่มาจากการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่โดยเทียบกับเวลา ดังนี้

$$\sum m_i(v_i)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_i dt = \sum m_i(v_i)_2 \quad (15.2)$$

สมการนี้กล่าวได้ว่า โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคเริ่มต้น บวก การคลของแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบของอนุภาค จาก t_1 t_2 จะมีค่าเท่ากับ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคสุดท้าย

$$m(v_G)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F dt = m(v_G)_2 \quad (15.3)$$

15.3 การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้นสำหรับระบบอนุภาค

- เมื่อผลบวกของการคลภายนอกที่กระทำต่อระบบอนุภาคเท่ากับศูนย์ สมการ (15.2) สามารถเขียนได้เป็น

$$\sum m_i(v_i)_1 = \sum m_i(v_i)_2 \quad (15.4)$$

สมการดังกล่าวคือ การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ซึ่งกล่าวว่า โมเมนตัมเชิงเส้นทั้งหมดของอนุภาค จะมีค่าคงที่ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2

- ในเทอมของจุดศูนย์กลางมวล G จะได้

$$(v_G)_1 = (v_G)_2 \quad (15.5)$$

แสดงว่าความเร็ว ของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค จะมีค่าคงที่เมื่อ ไม่มีการคลภายนอกมากระทบต่อระบบ

- ในการประยุกต์ควรรวมกระวังเกี่ยวกับการเขียนแรงที่ทำให้เกิดการคลภายนอกและภายในบนผนังวัตถุอิสระสำหรับระบบของอนุภาคที่ทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
 - ถ้าการเคลื่อนที่ขณะที่พิจารณาเกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นมาก ๆ ดังนั้นการคลภายนอกอาจจะตัดทิ้งหรือให้เท่ากับศูนย์จะเรียกว่า แรงไม่เกิดการคล โดยแรงไม่เกิดการคลอาจประกอบด้วยน้ำหนักของวัตถุมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับกับแรงคลอื่น ๆ ที่มีค่ามาก เมื่อทราบความแตกต่างระหว่างแรงไม่เกิดการคลแล้ว สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งก็คือแรงเหล่านี้จะต้องกระทำในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

โดยทั่วไปแล้วหลักการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้น หรือการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น นำมาประยุกต์ใช้กับระบบอนุภาค เพื่อช่วยในการคำนวณหาความเร็วสุดท้ายในช่วงเวลาที่กำหนด โดยต้องพิจารณาทั้งระบบ และการคลภายในที่กระทำในระบบอาจจะตัดทิ้งได้ วิธีการสำหรับวิเคราะห์ประกอบด้วย

• ผังวัตถุอิสระ

- กำหนดกรอบอ้างอิงเฉื่อยเป็นระบบพิกัดฉาก x, y, z เขียนผังวัตถุอิสระของแต่ละอนุภาคของระบบพร้อมทั้งแรงภายนอกและภายใน
- ถ้าไม่มีแรงภายนอกมากระทำ หรือมีเฉพาะแรงไม่เกิดการคลมากระทำต่อระบบตามทิศทางหรือแกนที่กำหนดให้ ประยุกต์ใช้สมการของการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบตามแกนหรือทิศทางเดียวกัน
- การกำหนดแกนหรือทิศทางของความเร็วเริ่มต้นและความเร็วสุดท้ายของอนุภาคที่ควรจะเป็น ถ้าไม่ทราบควรกำหนดทิศทางของความเร็วให้มีทิศทางไปตามทิศบวกของแกนอ้างอิงเฉื่อย
- สำหรับวิธีวิเคราะห์อีกวิธีคือ วิเคราะห์โดยเขียนผังการคลและ โมเมนตัมสำหรับแต่ละอนุภาคของระบบ

• สมการโมเมนตัม

- ประยุกต์ใช้สมการหลักการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้น หรือการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น พร้อมทั้งแสดงทิศทางหรือเครื่องหมายบวกหรือลบ
- ถ้าจำเป็นต้องคำนวณหาการคลภายใน $\int F_{di} dt$ ที่กระทำต่ออนุภาคเดียวของระบบให้แยกเขียนผังวัตถุอิสระของอนุภาคนั้นแล้วประยุกต์สมการของหลักการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นสำหรับอนุภาคนั้น

— เมื่อคำนวณหาการคลได้แล้ว และทราบช่วงเวลา Δt ที่ การคลกระทำ ดังนั้นแรงคลเฉลี่ย F_{avg}

$$\text{คำนวณได้จาก } F_{avg} = \frac{\int F dt}{\Delta t}$$

- ดูตัวอย่าง 15.4 ถึง 15.8 ใน text

15.4 การกระทบ

การกระทบเกิดขึ้นเมื่อวัตถุ 2 ชิ้น เคลื่อนที่มาปะทะกันและเกิดแรงปฏิกิริยากระทำซึ่งกันและกันในช่วงเวลาสั้น ๆ โดยทั่วไปการกระทบแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

- **การกระทบแนวตรง** ทิศของการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคทั้งสองจะอยู่บนเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาค คือ เส้นของการกระทบ (line of impact)
- **การกระทบแนวเฉียง** การเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือทั้งสองอนุภาคจะทำมุมกับเส้นของการกระทบ

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ คือ อัตราส่วนระหว่างความเร็วสัมพัทธ์ของอนุภาคขณะแยกจากกันกับความเร็วสัมพัทธ์ของอนุภาคขณะเคลื่อนที่เข้าหากัน

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \quad (15.6)$$

- **การกระทบแบบยืดหยุ่น (Elastic Impact)** : $e = 1$ การคลช่วงขุดตัวจะเท่ากับการคลช่วงคืนตัว
- **การกระทบแบบไม่ยืดหยุ่น (Plastic Impact)** : $e = 0$ ไม่มีการคลในช่วงคืนตัว วัตถุจะติดกันและเคลื่อนที่ไปพร้อมกันด้วยความเร็วเดียวกัน

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา (การกระทบแนวตรง)

โดยปรกติแล้วความเร็วสุดท้ายของทั้งสองอนุภาคจะคำนวณได้หลังจากการกระทบ เมื่อทราบสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ , มวลของทั้งสองอนุภาค, ความเร็วต้นของแต่ละอนุภาค ความเร็วสุดท้ายจะสามารถหาได้จากการประยุกต์ใช้ 2 สมการ ดังนี้

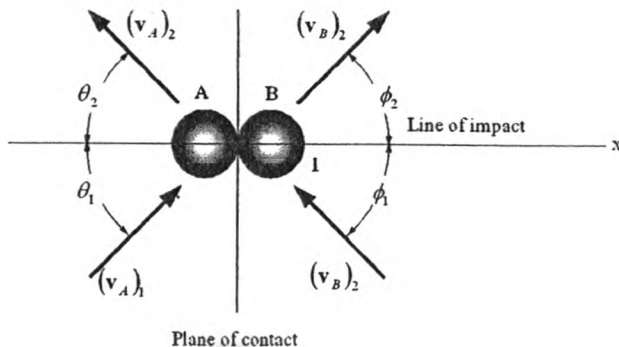
- ประยุกต์ใช้สมการของการอนุรักษ์ของโมเมนตัม ที่ระบบอนุภาค

$$\sum mv_1 = \sum mv_2 \quad (15.7)$$

- สมการสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ของความเร็วสัมพัทธ์ของอนุภาคหลังการกระทบและก่อนกระทบทิศตามเส้นของการกระทบ

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา (การกระทบแนวเฉียง)

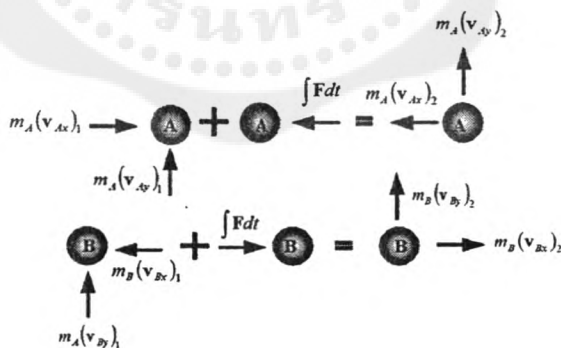
สำหรับการกระทบแนวเฉียงของอนุภาคที่มีผิวลื่นทั้งสอง ขนาดและทิศของความเร็วของอนุภาค ขณะที่เคลื่อนที่แยกออกจากกันจะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จากปัญหาที่เกี่ยวกับการกระทบ เรา



รูปที่ 15.1 ภาพแสดงขนาดและทิศทางการกระทบแนวเฉียงของอนุภาค

จะทราบความเร็วก่อนกระทบของอนุภาคทั้งสอง ดังนั้นสำหรับการกระทบแนวเฉียงจะประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัวแปรคือ $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, θ และ ϕ หรือความเร็วหลังกระทบตามแกน x และ y

เมื่อแกน y เป็นแกนตามแนวผิวสัมผัสของอนุภาคทั้งสอง และแกน x เป็นแกนตามแนวเส้นของการกระทบแรงดลของการกระทบช่วงขุดตัวและช่วงคืนตัวจะกระทำตามแนวแกน x เท่านั้น แทนค่าความเร็วหรือโมเมนตัมตามแนวแกน x และ y จะได้สมการในรูปแบบสเกลาร์ 4 สมการเพื่อใช้สำหรับคำนวณหา $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_{Bx})_2$ และ $(v_{By})_2$ ดังนี้



รูปที่ 15.2 ภาพแสดงการรวมของ 2 อนุภาค

- การอนุรักษ์ของโมเมนตัมที่ระบบของอนุภาคตามแกน x หรือเส้นของการกระทบ ดังนั้น

$$\sum m(v_x)_1 = \sum m(v_x)_2 \quad (15.8)$$

- สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_2 - (v_B)_1}$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของความเร็วสัมผัสของอนุภาคตามแกนของการกระทบ (x - axis)
- โมเมนตัมของอนุภาค A ตามเส้นสัมผัสหรือแกน y ซึ่งตั้งฉากกับเส้นของการกระทบ เนื่องจากการคลตามแกน y กระทำต่ออนุภาค A
- โมเมนตัมของอนุภาค B ตามแกนเส้นสัมผัสหรือแกน y ซึ่งตั้งฉากกับแกนกระทบ เนื่องจากการคลตามแกน y กระทำต่ออนุภาค B

Note : หลักการของงานและพลังงานไม่สามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระทบได้ เนื่องจากเป็นไปไม่ได้ที่จะทราบแรงภายในขณะที่กระทบกันของการเปลี่ยนรูปในช่วงยวบตัวและช่วงคืนตัว

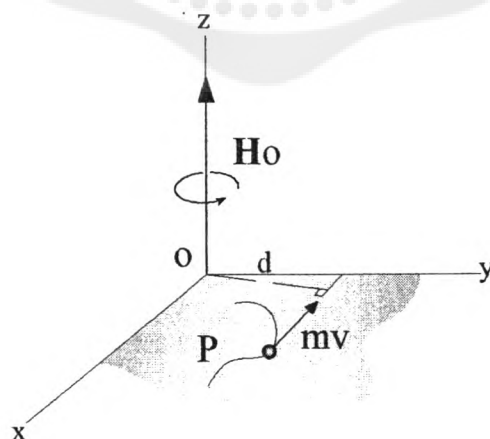
15.5 โมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุม H_O ของอนุภาครอบจุด O หมายถึงโมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาครอบจุด O

- สมการในรูปของปริมาณสเกลาร์ ขนาดของ H_O คือ

$$(H_O)_z = (d)(mv) \quad (15.9)$$

- d คือแขนของโมเมน (ระยะตั้งฉากจากจุด O ถึงเส้นการกระทำของ mv)
- ทิศทางของ H_O กำหนดได้โดยกฎมือขวา
- หน่วยของ H_O คือ $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

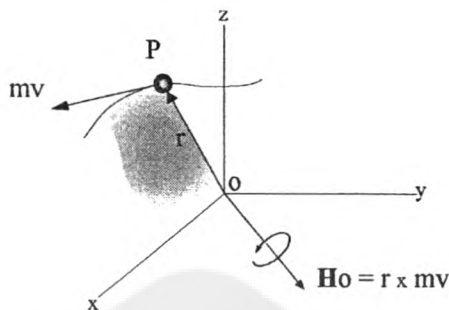


รูปที่ 15.3 ภาพแสดงโมเมนตัมเชิงมุม H_O ของอนุภาครอบจุด O

- สมการในรูปของปริมาณเวกเตอร์ ถ้าอนุภาค P เคลื่อนที่ตามเส้นโค้งทางเดินและ $\mathbf{r}$ คือเวกเตอร์ระบุตำแหน่งที่ลากจากจุด O ไปยังอนุภาค P

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (15.10)$$

เวกเตอร์ $\mathbf{H}_O$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่แลเงาของ $\mathbf{r}$ และ $m\mathbf{v}$



รูปที่ 15.4 ภาพแสดงเวกเตอร์ที่มีทิศตั้งฉากกัน

15.6 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของแรงและโมเมนตัมเชิงมุม

- โมเมนตัมของแรงกระทำต่ออนุภาคทั้งหมดรอบจุด O จะมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมเทียบกับเวลาของอนุภาครอบจุด O สมการ คือ

$$\sum \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (15.11)$$

สมการดังกล่าวคือ กฎการเคลื่อนที่ของที่สองของนิวตันสำหรับโมเมนตัม

- ระบบของอนุภาค ผลบวกของโมเมนตัมของแรงภายนอกทั้งหมดรอบจุด O ที่กระทำต่อระบบของอนุภาคจะมีค่าเท่ากับ อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมเทียบกับเวลาของระบบของอนุภาครอบจุด O เราสามารถใช้สมการนี้โดยกำหนดจุด O เป็นจุดอยู่กับที่ใด ๆ ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยได้

$$\sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum (\dot{\mathbf{H}}_i)_O \quad (15.12)$$

15.7 หลักของการคลและโมเมนตัม

- หลักของการคลและโมเมนตัมเชิงมุม

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_1^2 \mathbf{M}_O dt = \sum (\mathbf{H}_O)_2 \quad (15.13)$$

เมื่อการคลเชิงมุม คือ

$$\int_1^2 \mathbf{M}_O dt = \int_1^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt \quad (15.14)$$

เมื่อ $\mathbf{r}$ คือเวกเตอร์ระบุตำแหน่งที่ลากจากจุด O ไปยังจุดใด ๆ บนเส้นการกระทำของแรงภายนอก $\mathbf{F}$ ที่กระทำต่ออนุภาค

- หลักการคลและโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค

$$\sum (\mathbf{H}_o)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_o dt = \sum (\mathbf{H}_o)_2 \quad (15.15)$$

เมื่อการคลเชิงมุมคือผลจากโมเมนตัมของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ

หลักของการคลและโมเมนตัม

- หลักการคลและโมเมนตัม นำมาแสดงเป็นสมการเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้ 2 สมการ คือ

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2$$

$$(\mathbf{H}_o)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_o dt = (\mathbf{H}_o)_2 \quad (15.16)$$

- ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่บนระนาบ $x-y$ สามารถนำสมการเวกเตอร์ 2 สมการดังกล่าวมาเขียนเป็นสมการในรูปของสมการสเกลาร์ที่เป็นอิสระต่อกันได้ 3 สมการ คือ

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2 \quad (15.17)$$

$$m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_y)_2 \quad (15.18)$$

$$(\mathbf{H}_o)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_o dt = (\mathbf{H}_o)_2 \quad (15.19)$$

สองสมการแรกหลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้นในทิศทาง x และ y

สมการที่สามจะเป็นหลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงมุมเส้นในทิศทางของแกน z

การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุม

- เมื่อไม่มีการคลเชิงมุมกระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลา t_1 t_2 สมการที่ (15.5) จะกลายเป็น

$$(\mathbf{H}_o)_1 = (\mathbf{H}_o)_2 \quad (15.20)$$

สมการนี้ คือ การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

- ในกรณีที่ไม่มีมีการคลเชิงมุมภายนอกกระทำต่ออนุภาค โมเมนตัมเชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงมุมจะมีค่าคงที่ ในบางกรณีโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคมีค่าคงที่แต่โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคอาจมีค่าไม่คงที่ เช่น เมื่อมีแรงกระทำต่ออนุภาคเฉพาะแรงศูนย์กลาง
- สมการของการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค ดังนี้

$$\sum (\mathbf{H}_o)_1 = \sum (\mathbf{H}_o)_2 \quad (15.21)$$

สมการนี้ คือ ผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมของทุกอนุภาคในระบบอนุภาค

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

การประยุกต์ใช้หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงมุม หรือการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมในการวิเคราะห์ปัญหา ประกอบด้วยวิธีการ ดังนี้

- **ผังวัตถุอิสระ**

- เขียนผังวัตถุอิสระของอนุภาคเพื่อช่วยคำนวณหาสมการโมเมนตัมเชิงมุมรอบแกนใด ๆ ซึ่งอาจคงที่หรือไม่คงที่ก็ได้ (การคล) ที่ขนานหรือผ่านแกนที่กำหนดจะมีค่าโมเมนตัมของแรงเท่ากับศูนย์ที่เวลา t_1 ถึง t_2
- อาศัยสิ่งที่โจทย์กำหนดเพื่อกำหนดทิศทางของความเร็วเริ่มต้นและความเร็วสุดท้ายของอนุภาค
- วิธีการวิเคราะห์วิธีอื่น คือการเขียนผังการคลและโมเมนตัมของอนุภาค

- **สมการของโมเมนตัม**

- ประยุกต์หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงมุม (15.6) หรือ การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุม (15.7)

- ศึกษาจากตัวอย่าง 15.13 ถึง 15.15 ใน text

15.8 การไหลแบบมวลของไหลคงที่

ปัญหาเกี่ยวกับการไหลที่คงที่สามารถวิเคราะห์ได้โดยวิธีดังนี้

- **ผังจลนคณิตศาสตร์**

- ถ้าอุปกรณ์ที่ของไหลไหลผ่านมีการเคลื่อนที่ ควรจะเขียนผังจลนคณิตศาสตร์เพื่อช่วยในการคำนวณหาค่าความเร็วของของไหลที่ไหลเข้าหน้าตัดทางเข้าและทางออกของอุปกรณ์ เนื่องจากการไหลลักษณะนี้เป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์
- สำหรับความเร็ว และ จะเป็นความเร็วสัมบูรณ์หรือเป็นความเร็วที่ผู้สังเกตอยู่กับที่บนแกนอ้างอิงเฉื่อย
- จากความเร็วของของไหลที่ไหลเข้าไปในอุปกรณ์ที่คำนวณได้ จะทำให้เราคำนวณหาอัตราการไหลมวล dm/dt ได้จากสมการ

$$\frac{dm}{dt} = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B = \rho_A Q_A = \rho_B Q_B \quad (15.22)$$

- **ผังวัตถุอิสระ**

- เขียนผังวัตถุอิสระของอุปกรณ์ที่ของไหลขณะไหลผ่าน และมีแรง $\sum F$ กระทำต่อของไหล ซึ่งเป็นแรงภายนอกที่ประกอบด้วย แรงกระทำของฐานรองรับ น้ำหนักของท่อหรืออุปกรณ์ น้ำหนักของของไหลภายในท่อ และแรงดันสถิตของของไหลที่ทางเข้าและทางออกของท่ออุปกรณ์

- สมการของการไหลคงที่

- การประยุกต์สมการของการไหลคงที่

$$\sum F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Ax} - v_{Bx}) \quad (15.23)$$

$$\sum F_y = \frac{dm}{dt}(v_{Ay} - v_{By}) \quad (15.24)$$

$$\sum M_o = \frac{dm}{dt}(d_{oB}v_B - d_{oA}v_A) \quad (15.25)$$

เขียนส่วนประกอบของความเร็วและแรงย่อยบนแกนที่เหมาะสม บนผังจลคณิตศาสตร์และผังวัตถุอิสระ

- ศึกษาจากตัวอย่าง 15-16 ถึง 15-17 ใน text

15.9 การขับเคลื่อนด้วยมวลไม่คงที่

ในหัวข้อที่ 15.8 เราได้พิจารณากระบอกที่มีมวลคงที่ไหลผ่านอุปกรณ์ ในกรณีนี้เราพิจารณาการไหลของมวลอีก 2 กรณีคือซึ่งได้แก่การไหลของมวลในระบบที่มีมวลเพิ่มหรือสูญเสียมวล

1.ระบบที่สูญเสียมวล พิจารณาอุปกรณ์มวล m ที่เวลาใดที่เคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร็ว v ในขณะที่เคียวระบบกันพื้นมวล m_e ออกมาด้วยความเร็ว v_e สมการที่ใช้คือ

$$\sum F_s = m \frac{dv}{dt} - v_{D/e} \frac{dm_e}{dt} \quad (15.26)$$

เมื่อ $\sum F_s$ คือผลรวมของแรงกระทำภายนอกที่กระทำกับระบบในทิศทางของการเคลื่อนที่ โดยแรงลัพธ์ นี้ไม่รวมแรงขับเคลื่อนที่ไปข้างหน้า เพราะว่าแรงขับเคลื่อนเป็นปฏิกิริยาภายในระบบ $v_{D/e}$ คือขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ถูกพ่นออกมา และ dm_e/dt คืออัตราการไหลของมวลของไหลที่ถูกพ่นออกมาจากอุปกรณ์

2.ระบบที่ได้รับมวลเพิ่ม สำหรับอุปกรณ์ที่ใช้ในการตกจะมีมวลเพิ่มขึ้นขณะเคลื่อนที่ไปข้างหน้า พิจารณาที่เวลาใด ๆ อุปกรณ์มวล m เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว v มีมวลไหลเข้าเพิ่มขึ้น m_i ด้วยความเร็วคงที่ v_i และเป็นอิสระไม่ขึ้นกับความเร็ว v ของอุปกรณ์ ดังนั้นความเร็ว $v > v_i$ สมการที่ใช้คือ

$$\sum F_s = m \frac{dv}{dt} - v_{D/i} \frac{dm_i}{dt} \quad (15.27)$$

เมื่อ $\sum F_s$ คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบและมีทิศทางเดียวกับการเคลื่อนที่ แต่แรงลัพธ์นี้ไม่รวมแรงต้านของมวลของไหลเข้ากระทำต่ออุปกรณ์, $v_{D/i}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของอุปกรณ์ที่เทียบกับมวลที่ถูกพ่นออกมา และ dm_i/dt คืออัตราการไหลมวลที่ไหลเข้าสู่อุปกรณ์

Note: การแก้ปัญหาโดยใช้สมการ 15.8 และ 15.9 จะต้องเขียนผังวัตถุอิสระให้ถูกต้อง และผังวัตถุอิสระนี้จะสามารถคำนวณหา $\sum F_s$ ของระบบและแรงจากการไหลของระบบ

ข้อแนะนำ

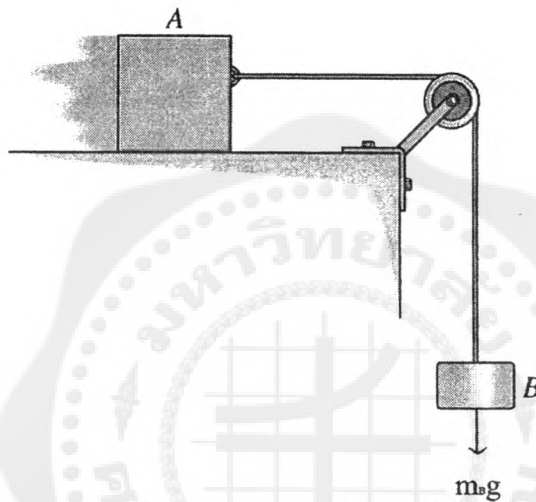
- โมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์มีขนาดและทิศทางผกผันการคลและ โมเมนตัมจะช่วยให้ทราบถึง โมเมนตัมเริ่มต้นและสุดท้ายในทางเดินของอนุภาคเพื่อใช้ในหลักการของการคลและ โมเมนตัม
- ควรจำความแตกต่างระหว่างแรงที่มีการคลและ ไม่มีการคลซึ่งมีความสำคัญในการประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในช่วงเวลา t_1 t_2 ที่มีการคลกระทำ

คำถามทบทวนท้ายบทที่ 15

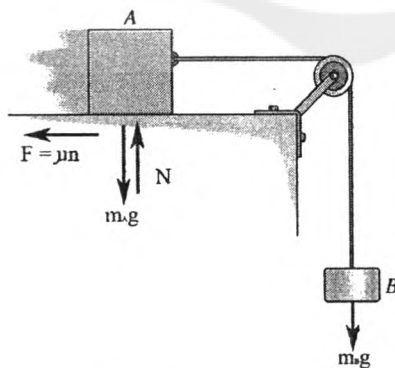
1. อะไรคือ โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค
2. เมื่อใดจึงจะใช้หลักการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคในการแก้ปัญหา
3. เมื่อใดที่หลักการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นจะกลายเป็นการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
4. อะไรคือแรงที่ไม่ใช่แรงคล
5. ความเร็วสุดท้ายของสองอนุภาคหลังจากการกระทบผ่านจุดศูนย์กลางจะเป็นอย่างไร ถ้าทราบถึง สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ มวลของแต่ละอนุภาค และความเร็วก่อนชนของแต่ละอนุภาค
6. อธิบายถึง โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุด O
7. การอนุรักษ์ของ โมเมนตัมเชิงมุมมีความหมายว่าอย่างไร
8. จริงหรือไม่ ถ้า โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคเป็นการอนุรักษ์แล้ว โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคจะต้อง เป็นการอนุรักษ์ด้วย
9. จงเขียนสมการเชิงสเกลาร์สามสมการที่อธิบายถึงการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคสำหรับ อนุภาคที่เคลื่อนที่ในระนาบ $x - y$
10. ในสมการที่ 15.9 สำหรับระบบที่ได้รับมวลเพิ่ม เหตุใด $\sum \mathbf{F}_i$ จึงไม่รวมแรงต้านของมวลที่ไหลเข้า กระทำต่ออุปกรณ์

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 15 จลนศาสตร์ของอนุภาค : การคลและโมเมนตัม

ตัวอย่างที่ 15.1 วัตถุ A และ B ซึ่งมีมวล 20 kg และ 15 kg ตามลำดับ เชื่อมโยงถึงกันด้วยเคเบิลที่ไม่มีการยืดหด เคเบิลพาดผ่านรอกซึ่งเบาและคล่องโดยวัตถุ A วางอยู่บนโต๊ะ ส่วนวัตถุ B ห้อยอยู่ข้างโต๊ะ ดังแสดงในรูป สปส. ความเสียดทานระหว่างวัตถุ A กับพื้นโต๊ะเป็น 0.25 ถ้าปล่อยให้วัตถุทั้งสองเริ่มต้นเคลื่อนที่จากสภาวะหยุดนิ่ง จงหาความเร็วของวัตถุทั้งสองเมื่อเคลื่อนที่ได้เป็นระยะทาง 250 mm.



ในที่นี้ระบบประกอบด้วยวัตถุ A และ B เชื่อมโยงถึงกันด้วยเคเบิลซึ่งไม่มีการยืดหด ดังนั้นขนาดของการขจัดและความเร็วของวัตถุทั้งสองเท่ากัน รูปทางขวามือแสดงแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ



$$mAg - N = 0$$

$$N = 20 \text{ g}$$

$$F = 0.25 (20)$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจากแรงเสียดทาน } F &= -0.25 \times 20 \times 0.25 \\ &= -12.27 \text{ J} \end{aligned}$$

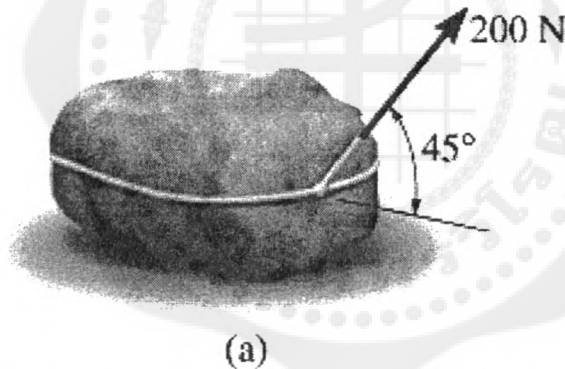
$$\begin{aligned}\text{งานจากแรงโน้มถ่วง } mg &= 15 \times 0.25 \\ &= 36.79 \text{ J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_2 - T_1 \\ &= \left(\frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 \right) - (0 + 0) \\ &= \frac{1}{2} v^2 (20 + 15) \\ &= 17.5 v^2\end{aligned}$$

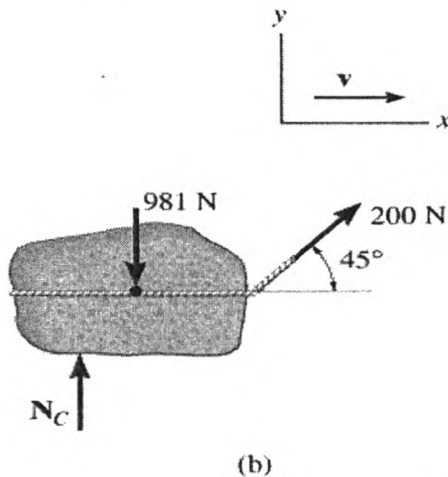
$$\begin{aligned}[U = \Delta T] \quad -12.27 + 36.79 &= 17.5 v^2 \\ v &= 1.18 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 15.2 ก้อนหินมวล 100 kg ดังรูป (a) วางนิ่งบนพื้นราบลื่น เริ่มต้นออกแรง 200 N ลากทำมุม 45 องศา เป็นเวลา 10 วินาที จงคำนวณหาความเร็วสุดท้ายและแรงปฏิกิริยาดังฉาก ที่พื้นกระทำต่อก้อนหินในช่วงเวลาดังกล่าว

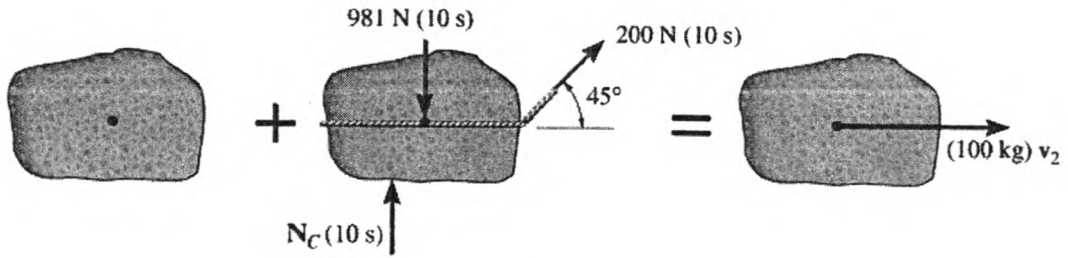


ผังวัตถุอิสระ จากรูป (b) แรงทุกแรงที่กระทำต่ออนุภาคคงที่ ดังนั้นการคลจะคำนวณหาได้โดยหาผลคูณระหว่างขนาดของแรงกับเวลา 10 s [$I = Fc(t_2 - t_1)$]



หลักการของการคลและ โมเมนตัม

เขียนสมการของการคลและ โมเมนตัมเชิงเส้นในรูปสมการเคลาร์ตามแกน x - y ได้ดังนี้

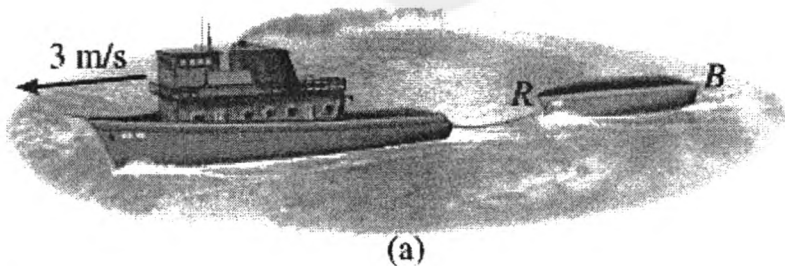


$$\begin{aligned} & (\rightarrow +) \quad m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2 \\ & 0 + 200(10) \cos 45^\circ = (100)v_2 \\ & v_2 = 14.14 \text{ m/s} \end{aligned}$$

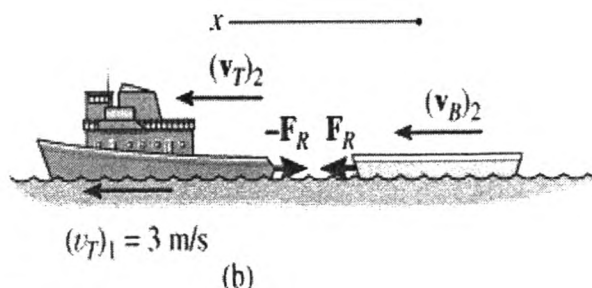
$$\begin{aligned} & (\uparrow +) \quad m(v_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_y)_2 \\ & 0 + N_c(10) - 9.81(10) = 200(10) \sin 45^\circ = 0 \\ & N_c = 839.59 \text{ N} \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 15.3 เรือลากจูง T มวล 350 Mg ลากเรือบรรทุก B มวล 50 Mg ด้วยเชือก R ดังรูป (a) เริ่มต้นเรือบรรทุก B อยู่นิ่ง เชือก R หย่อนไม่ถึง และเรือลากจูงเคลื่อนที่อย่างอิสระด้วยความเร็ว $(v_T)_1 = 3 \text{ m/s}$ จงคำนวณหาความเร็วของเรือลากจูงเมื่อเชือกตึง สมมติให้เชือกไม่ยืดและไม่ต้องพิจารณาผลกระทบของความเสียดทานของน้ำกับท้องเรือ



ผังวัตถุอิสระ ดังรูป (b)

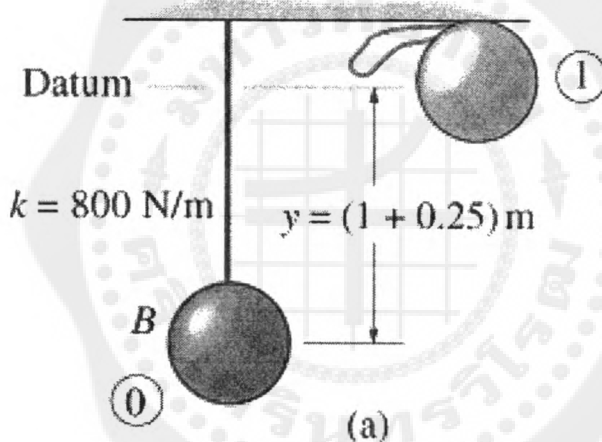


การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น ขณะที่เชือกตึงและความเร็วของเรือทั้งสองเท่ากันนั่นคือ $(v_B)_2 = (v_T)_2$ จะได้

$$\begin{aligned} m_T(v_T)_1 + m_B(v_B)_1 &= m_T(v_T)_2 + m_B(v_B)_2 \\ 350(10^3)(3) + 0 &= 350(10^3)(v_T)_2 + 50(10^3)(v_T)_2 \\ (v_T)_2 &= 2.63 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 15.4 บอล B มวล 1.5 kg ดังรูป (a) แขนงห้อยกับเพดานด้วยเชือกยางยืดยาว 1 m ถ้าดึงเชือกยางให้ยืดลงมา 0.25 m แล้วจึงปล่อยลูกบอล B จากหยุดนิ่ง จงคำนวณหาความยาวของเชือกยางที่ยืดหลังจากลูกบอลกระดอนจากเพดาน กำหนดให้ค่าความแข็งของเชือกยาง $k = 800 \text{ N/m}$ และสัมประสิทธิ์การคืนสภาพระหว่างลูกบอลกับเพดาน $e = 0.8$ สมมติให้ลูกบอลกระทบกับเพดานเป็นแบบกระทบแนวตรง



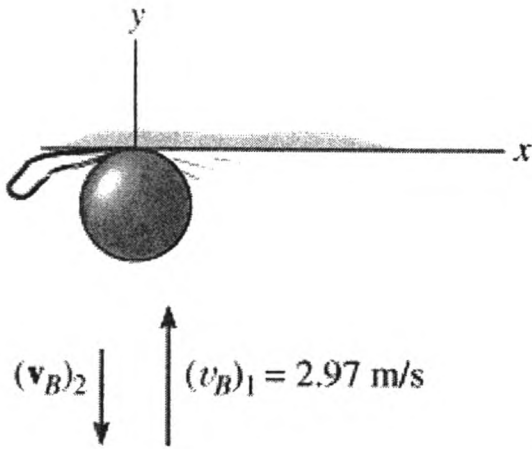
หลักการของการอนุรักษ์พลังงาน กำหนดให้เส้นระดับอ้างอิงอยู่ที่ตำแหน่งดังรูป (a) จากโจทย์ และรูป $y = y_0 = (1 + 0.25) \text{ m} = 1.25 \text{ m}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} T_0 + V_0 &= T_1 + V_1 \\ \frac{1}{2} m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \frac{1}{2} k s^2 &= \frac{1}{2} m(v_B)_1^2 + 0 \\ 0 - 1.5(9.81)(1.25) + \frac{1}{2} (800)(0.25)^2 &= \frac{1}{2} (1.5)(v_B)_1^2 \\ (v_B)_1 &= 2.97 \text{ m/s} \uparrow \end{aligned}$$

ในการกระทบกันระหว่างลูกบอล B กับเพดานจะไม่นำการอนุรักษ์ของโมเมนตัมมาพิจารณา จะพิจารณาโดยอาศัยหลักการของการคล พบว่า

1. น้ำหนักของลูกบอลเป็นแรงไม่เกิดการคล
2. ไม่ทราบมวลของเพดานส่วนที่กระทบกับลูกบอล
3. ความเร็วก่อนและหลังการกระทบของเพดานเป็น ศูนย์ เสมอ

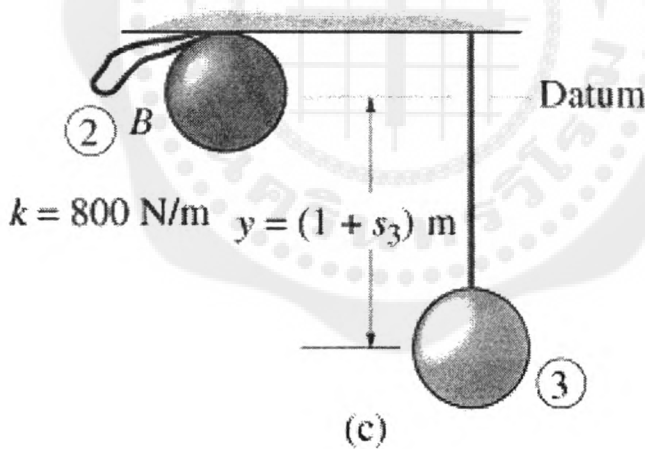
สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ จากรูป (b) จะได้



$$\begin{aligned}
 (+ \uparrow) \quad e &= \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \\
 0.8 &= \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.97} \\
 (v_B)_2 &= -2.38 = 2.38 \text{ m/s} \downarrow
 \end{aligned}$$

(b)

หลักการของการอนุรักษ์พลังงาน ระยะยืดมากที่สุด s ของเชือกยางสามารถคำนวณได้จากการอนุรักษ์พลังงานของลูกบอลหลังกระทบ กำหนดให้ $y = y_3 = (1 + s_3) \text{ m}$ ดังรูป (c)



(c)

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{2} m (v_B)_2^2 + 0 = \frac{1}{2} m (v_B)_3^2 - W_B y_3 + \frac{1}{2} k s_3^2$$

$$\frac{1}{2} (1.5) (2.38)^2 = 0 - 9.81 (1.5) (1 + s_3) + \frac{1}{2} (800) s_3^2$$

$$400 s_3^2 - 14.715 s_3 - 18.92768 = 0$$

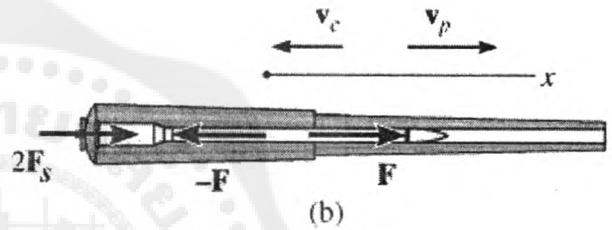
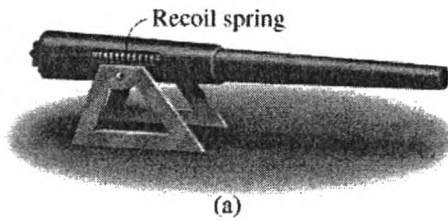
$$s_3 = 0.237 \text{ m} = 237 \text{ mm}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 15.5 ปืนใหญ่มวล 600 kg ดังรูป (a) ยิงกระสุนปืนมวล 4 kg พุ่งออกไปในอากาศด้วยความเร็ว 450 m/s เทียบกับพื้นดิน ถ้าช่วงเวลาของการยิงเป็น 0.03 วินาที จงคำนวณหา

(ก) ความเร็วของปืนใหญ่ที่สะท้อนกลับหลังการกระแทก

(ข) แรงเฉลี่ยที่กระทำต่อกระสุนปืน กำหนดให้กระบอกปืนใหญ่ยึดติดกับฐานยิงบนพื้นดิน และมีสปริงรับแรงสะท้อนถอยหลังที่ข้างกระบอกปืนทั้งสองด้าน

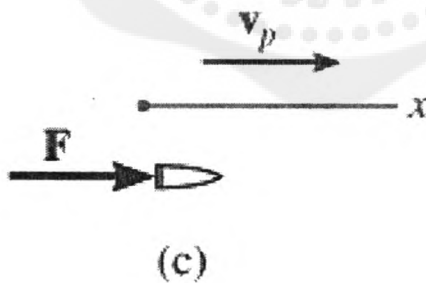


การอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น

$$m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -(600)(v_c)_2 + (4)(450)$$

หลักการของการคลและโมเมนตัม ดังรูป (c)



$$m(v_p)_1 + \sum \int F dt = m(v_p)_2$$

$$0 + F_{avg}(0.03) = (4)(450)$$

$$F_{avg} = 60(1000) \text{ N} = 60.0 \text{ kN}$$

Ans

บทที่ 16 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อแบ่งประเภทของการเคลื่อนที่ในระนาบของวัตถุคงรูป
- เพื่อวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบเลื่อนและแบบหมุนรอบแกนคงที่
- เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ในระนาบโดยการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมบูรณ์
- เพื่อคำนวณหาความเร็วของจุดบนวัตถุคงรูปโดยวิธีใช้จุดหมุนชั่วขณะ
- เพื่อใช้การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์โดยใช้ระบบแกนหมุนคำนวณหา ความเร็ว และความเร่ง

กิจกรรมการเรียนการสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

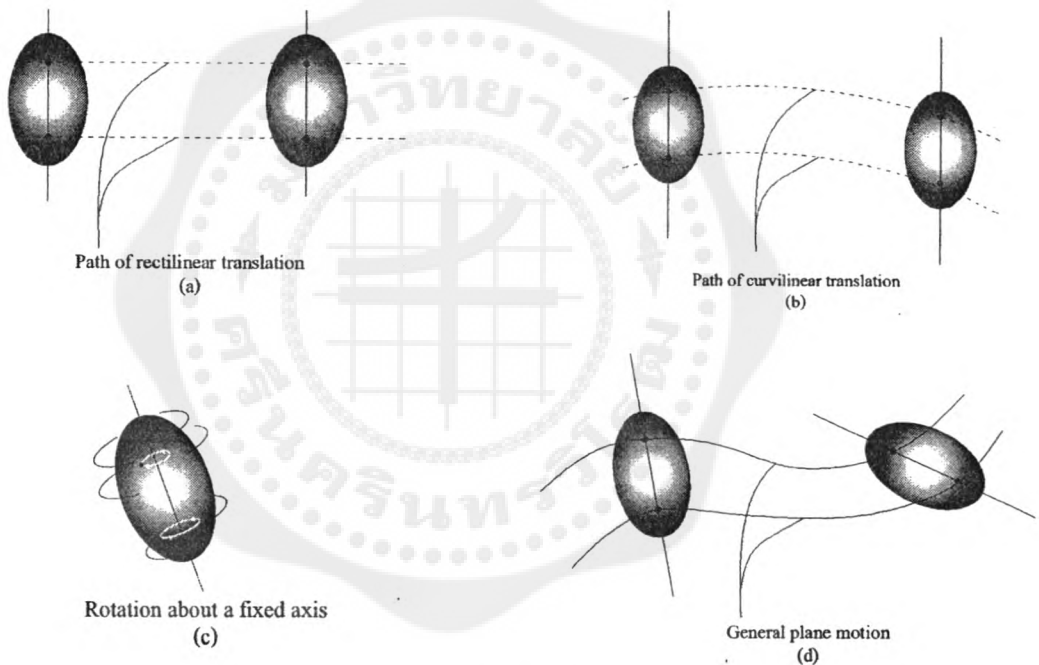
การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

16.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุคงรูป

- เมื่ออนุภาคของวัตถุคงรูปเคลื่อนที่ผ่านเส้นทางการเคลื่อนที่ซึ่งขนานกับระนาบคงที่ กล่าวได้ว่าเคลื่อนที่ผ่านระนาบ การเคลื่อนที่ของวัตถุคงรูปแบ่งออกเป็น 3 ลักษณะ คือ

1. การเคลื่อนที่เส้นตรงทุก ๆ เส้นบนวัตถุคงรูปจะขนานกับตำแหน่งเดิมเสมอ โดยไม่มีการหมุน การเคลื่อนที่ของวัตถุคงรูปสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ดังนี้
 - I. การเคลื่อนที่วิถีตรง ทุกจุดบนวัตถุคงรูปจะมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง
 - II. การเคลื่อนที่วิถีโค้ง ทุกจุดบนวัตถุคงรูปจะมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งที่ขนานกัน
2. การหมุนรอบแกนคงที่ ทุกอนุภาคบนวัตถุมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งวงกลมรอบแกนหมุน
3. การเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ เป็นการเคลื่อนที่ที่ผสมระหว่างการเคลื่อนที่และการหมุนรอบแกนคงที่



รูปที่ 16.1 การเคลื่อนที่ทั่วไปในแนวระนาบ

16.2 การเคลื่อน

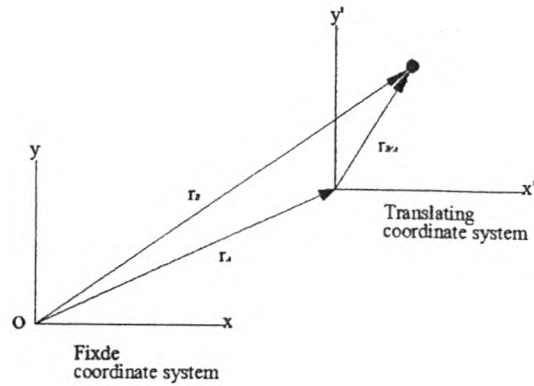
ให้ตำแหน่งของจุด A และ B ระบุโดยเวกเตอร์ $\mathbf{r}_A$ และ $\mathbf{r}_B$ โดยลำดับที่วัดเทียบกับแกนอ้างอิงอยู่ที่ x-y จลนคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ สามารถอธิบายได้โดย

- ตำแหน่ง

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

(16.1)

เมื่อ $\mathbf{r}_{B/A}$ คือ เวกเตอร์ระบุตำแหน่งสัมพัทธ์ (เวกเตอร์ระบุตำแหน่งของจุด B เทียบกับจุด A)



รูปที่ 16.2 การเลื่อน

- ความเร็ว เมื่อวัตถุเป็นวัตถุเกร็งขนาดของ $r_{B/A}$ คงที่ เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่แบบเลื่อน ดังนั้นทิศทางของ $r_{B/A}$ จะคงที่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \quad (16.2)$$

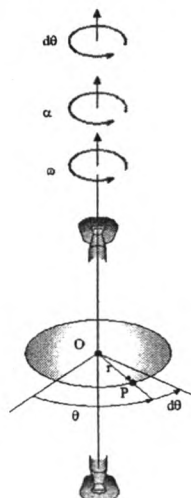
- ความเร่ง

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \quad (16.3)$$

จากสมการความเร็วและความเร่งแสดงว่าทุกจุดของวัตถุที่เคลื่อนที่ จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วและความเร่งเดียวกัน

16.3 การหมุนรอบแกนคงที่

เมื่อวัตถุหมุนรอบแกนที่อยู่กับที่ จุด P เป็นจุดใด ๆ บนวัตถุจะมีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งวงกลม การเคลื่อนที่ของวัตถุดังกล่าวคือ การเคลื่อนที่เชิงมุม ซึ่งจะมีปริมาณพื้นฐานสามอย่าง คือ ตำแหน่งเชิงมุม (θ) ความเร็วเชิงมุม (ω) ความเร่งเชิงมุม (α) ดังต่อไปนี้



รูปที่ 16.3 การหมุนของวัตถุรอบแกนที่อยู่กับที่

• การเคลื่อนที่เชิงมุม

- ความเร็วเชิงมุม ถ้า θ คือตำแหน่งเชิงมุมของรัศมี r บนระนาบของวัตถุซึ่งวัดเทียบกับเส้นอ้างอิงอยู่กับที่ ความเร็วเชิงมุม ω มีขนาด $\omega = d\theta/dt$ มีทิศทางไปตามแกนหมุน โดยกำหนดให้การหมุนทวนเข็มนาฬิกามีเครื่องหมายเป็นบวก
- ความเร่งเชิงมุม คืออัตราการเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา ขนาดของความเร่งเชิงมุม คือ $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ เส้นแสดงทิศทางของ α จะเหมือนกับ ω อย่างไรก็ตามทิศทางของ α จะขึ้นอยู่กับว่า ω จะเพิ่มขึ้นหรือลดลง (ถ้า ω มีค่าลดลงจะเรียกว่าความหน่วงเชิงมุม และมีทิศทางตรงข้ามกับทิศของ ω)
- ใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง ω , α และ θ โดยการแทนค่า dt จะได้สมการอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม และการกระจัดเชิงมุม จะได้สมการดังนี้

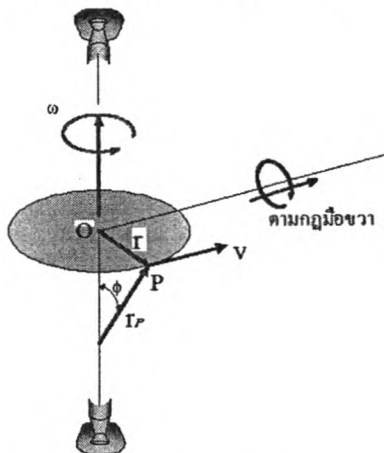
$$\alpha d\theta = \omega d\omega \quad (16.4)$$

- ความเร่งเชิงมุมคงที่ ถ้าความเร่งเชิงมุมคงที่ เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของวัตถุกับความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม และเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha_c t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha_c (\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (16.5)$$

เมื่อ θ_0 และ ω_0 เป็นตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุม ณ จุดเริ่มต้นของวัตถุตามลำดับและมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก

- การเคลื่อนที่ของจุด P พิจารณาการหมุนของวัตถุคงรูป จุด P มีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งวงกลมรัศมี r มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O การเคลื่อนที่ของจุด P อธิบายได้โดย ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง ดังนี้



รูปที่ 16.4 การเคลื่อนที่ของจุด P

- ตำแหน่ง ตำแหน่งของจุด P กำหนดโดยเวกเตอร์รัศมีตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ซึ่งลากจากจุด O ถึงจุด P
- ความเร็ว ขนาดของความเร็ว V ของจุด P คือ $V = r\omega$ และทิศทางจะสัมผัสกับเส้นโค้งทางเดินและทิศทางการเคลื่อนที่เสมอ สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}_P \quad (16.6)$$

เมื่อ $\mathbf{r}$ คือเป็นเวกเตอร์รัศมีตำแหน่งที่ลากจากจุดใด ๆ บนแกนหมุนไปยังจุด P โดยทั่วไปสามารถใช้เวกเตอร์รัศมีตำแหน่ง $\mathbf{r}$ แทน $\mathbf{r}_P$ เมื่อ $\mathbf{r}$ อยู่ในระนาบของการเคลื่อนที่ที่จะได้ความเร็วของจุด P คือ

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (16.7)$$

- ความเร่ง มีส่วนประกอบย่อยสองส่วน ส่วนประกอบตามแกนสัมผัสของความเร่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงขนาดของความเร็วย่อยเทียบกับเวลา คือ $a_t = \alpha r$ และ ส่วนประกอบของความเร่งตามแกนตั้งฉาก เป็นอัตราการเปลี่ยนทิศเทียบกับเวลา คือ $a_n = \omega^2 r$ และในเทอมของเวกเตอร์

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \times r \\ a_n &= \omega \times (\omega \times r) = -\omega^2 r \\ a &= a_n + a_t = \alpha \times r - \omega^2 r \end{aligned} \quad (16.8)$$

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

ความเร็วและความเร่งของจุดที่อยู่บนวัตถุทรงรูปที่หมุนรอบแกนคงที่ สามารถที่จะคำนวณหาได้โดยขั้นตอนดังนี้

• การเคลื่อนที่เชิงมุม (Angular Motion)

- กำหนดทิศทางบวกของแกนไปตามทิศทางการหมุน และเขียนแสดงที่ด้านของสมการจลนคณิตศาสตร์
- ในกรณีที่ทราบความสัมพันธ์ตัวแปรที่ทราบค่า 2 ใน 4 ของตัว α, θ, ω และ t ดังนั้นตัวแปรตัวที่ 3 จะคำนวณหาได้จากสมการจลนคณิตศาสตร์ที่เป็นสมการความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสาม

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \alpha = \frac{d\omega}{dt}, \alpha d\theta = \omega d\omega \quad (16.9)$$

- ถ้าความเร่งสูงสุดของวัตถุมีค่าคงที่ ดังนั้นจะได้

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t \quad (16.10)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2 \quad (16.11)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \quad (16.12)$$

- ค่าและเครื่องหมาย $\pm$ ที่ได้จากการคำนวณของ θ, ω, α และ t จะแสดงถึงขนาดและทิศของปริมาณเหล่านั้น

- การเคลื่อนที่ของจุด P (Motion of P)

- โดยทั่วไปแล้วความเร็วของจุด P และความเร่งย่อยตามแกนทั้งสอง จะต้องคำนวณได้จากสมการสเกลาร์

$$v = r\omega, a_t = r\alpha, a_n = \omega^2 r \quad (16.13)$$

- ในกรณีที่รูปร่างทางเรขาคณิตหาหรือความยาวด้านต่าง ๆ ได้ยาก ควรวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางเวกเตอร์ จากสมการเวกเตอร์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega \times \mathbf{r}_P = \omega \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_t &= \alpha \times \mathbf{r}_P = \alpha \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_n &= \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (16.14)$$

เมื่อ $\mathbf{r}_P$ เป็นรัศมีจากจุดใด ๆ บนแกนหมุนไปยังจุด P และ $\mathbf{r}$ เป็นรัศมีบนระนาบของการหมุนของจุด P ส่วนเวกเตอร์ ω และ α สามารถเขียนในเทอมย่อยของยูนิตเวกเตอร์ i, j, k

16.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สมบูรณ์

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

ความเร็วและความเร่งของจุด P ที่มีการเคลื่อนที่เชิงเส้นซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของเส้น (รัศมี) โดยทั้งจุด P และเส้นจะต้องอยู่บนวัตถุคงรูป

- สมการพิกัดตำแหน่ง (Position coordinate equation)

- กำหนดตำแหน่งของจุด P โดยใช้พิกัดตำแหน่ง s ซึ่งวัดได้จากจุดเริ่มต้นอยู่กับที่ไปตามเส้นตรงทางเดินของการเคลื่อนที่ของจุด P
- ตำแหน่งเชิงมุม θ ของเส้นบนวัตถุ จะวัดเทียบกับเส้นอ้างอิงอยู่กับที่
- จากข้อมูลของขนาดหรือระยะความยาวของวัตถุ เขียนรูปแบบจากวิชาตรีโกณมิติ-เรขาคณิต จะได้สมการความสัมพันธ์ของ s และ θ หรือ $s = f(\theta)$

- อนุพันธ์เทียบเวลา (Time derivatives)

- หาอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ของเวลา $s = f(\theta)$ จะได้สมการความสัมพันธ์ของ v (อัตราเร็ว) และ ω
- หาอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ของเวลา $s = f(\theta)$ จะได้สมการความสัมพันธ์ของ a (ขนาดของความเร่ง) และ α
- ในบางกรณีอาจจะต้องใช้กฎลูกโซ่จากวิชาแคลคูลัสช่วยในการหาอนุพันธ์ของสมการพิกัดตำแหน่ง

16.5 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์: ความเร็ว

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

- สมการความเร็วสัมพัทธ์

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ &= \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A}\end{aligned}\quad (16.15)$$

การประยุกต์ใช้สมการความเร็วสัมพัทธ์ สามารถแก้สมการนี้ได้โดยการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ระบบพิกัดฉากหรือการเขียนในรูปของสมการสเกลาร์ตามแกนพิกัดฉาก $x - y$

การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ (Vector analysis)

- **ผังจลนคณิตศาสตร์ (Kinematic diagram)**

- กำหนดทิศทางของระบบพิกัด $x - y$ ที่อยู่กับที่และเขียนผังจลนคณิตศาสตร์ของวัตถุคงรูป โดยแสดงความเร็ว v_A และ v_B ของจุด A และ B ความเร็วเชิงมุม ω และเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\mathbf{r}_{B/A}$
- ในกรณีที่ขนาดของ v_A , v_B หรือ ω เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ให้สมมุติทิศทางของเวกเตอร์เหล่านั้นตามความน่าจะเป็นของการเคลื่อนที่

- **สมการความเร็ว (Velocity equation)**

- การประยุกต์ใช้สมการ $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A}$ ให้เขียนเวกเตอร์ความเร็วในเทอมเวกเตอร์ย่อยตามระบบพิกัดฉาก i, j และผลคูณเชิงเวกเตอร์จะได้จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม i, j จะได้รูปสมการเชิงสเกลาร์ 2 สมการ
- ในกรณีที่ขนาดของตัวแปรไม่ทราบค่าจากการคำนวณ มีเครื่องหมายเป็นลบแสดงว่าตัวแปรนั้นมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศที่สมมุติในตอนแรกหรือที่แสดงในผังจลนคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์เชิงสเกลาร์ (Scalar analysis)

- **ผังจลนคณิตศาสตร์ (Kinematic diagram)**

- ในกรณีที่ประยุกต์ใช้สมการความเร็วในรูปของสเกลาร์ จะต้องกำหนดทิศและขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ $v_{B/A}$ เขียนผังจลนคณิตศาสตร์แสดงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ เนื่องจากวัตถุที่พิจารณาจะถูกตรึงชั่วขณะที่จุดหลัก A ดังนั้นขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ $v_{B/A}$ จะเป็น $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ ซึ่งตั้งฉากกับ $r_{B/A}$ ทำให้วัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω

- **สมการความเร็ว (Velocity equation)**

- เขียนสมการ $v_B = v_A + v_{B/A}$ โดยสร้างหรือเขียนรูปแทนเวกเตอร์ ทั้งขนาดและทิศทางทั้งสาม ดังนั้นสมการสเกลาร์จะคำนวณหาได้จากการแยกหรือเขียนเวกเตอร์ไปตามแกน x และ y

16.6 จุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ (Instantaneous center of zero velocity)

- เมื่อใช้สมการ $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ ความเร็วของจุด B ใด ๆ บนวัตถุ สามารถหาได้ โดยเลือกจุดหลัก A ซึ่งเป็นจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์ จุดดังกล่าวจะเรียกว่า จุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ (instantaneous center of zero velocity ;IC) ซึ่งอยู่บนแกนชั่วขณะของความเร็วเป็นศูนย์ (instantaneous axis of zero velocity) ซึ่งจะตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนที่เสมอ ถ้าจุด A ที่เลือกทับกับจุด IC ดังนั้น $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{IC} = 0$ และ

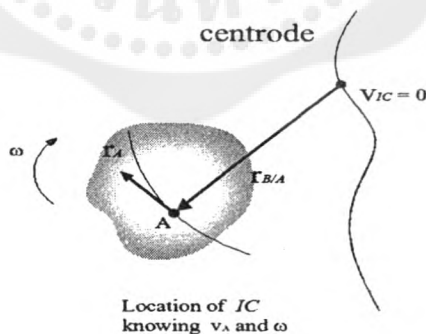
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{IC} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/IC} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/IC}\end{aligned}\quad (16.16)$$

ดังนั้น จุด B จะหมุนรอบจุด IC เป็นเส้นโค้งวงกลม หรือวัตถุจะหมุนรอบแกนชั่วคราว ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของวงล้อโดยไม่มีการลื่นไถล ดังนั้นจุดที่สัมผัสกับพื้นดินคือจุด IC

ตำแหน่งของจุดหมุนชั่วขณะ (Location of IC)

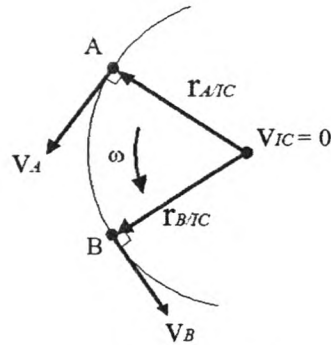
ตำแหน่งของจุด IC หาได้จากหลักความจริงที่ว่าความเร็วของจุดต่าง ๆ บนวัตถุ มีทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์ระยะตำแหน่งสัมผัสที่ลากจากจุด IC ไปยังจุดนั้นเสมอ ซึ่งแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

- เมื่อทราบความเร็ว $\mathbf{v}_A$ ของจุด A บนวัตถุ และความเร็วเชิงมุมของวัตถุ ในกรณีนี้ IC จะหาได้โดยลากเส้นตั้งฉากกับ $\mathbf{v}_A$ จากจุด A ไปยัง IC และระยะจากจุด A ไปยัง IC เป็น $r_{A/IC} = v_A / \omega$ ซึ่งจุด IC จะอยู่ทางขวาของ A เพราะว่าความเร็ว $\mathbf{v}_A$ จะทำให้เกิดความเร็วเชิงมุม ทิศตามเข็มนาฬิกา รอบจุด IC



รูปที่ 16.5 ตำแหน่งของ IC เมื่อทราบ $\mathbf{v}_A$ และ ω

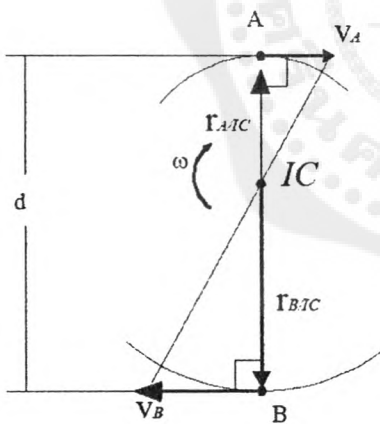
- เมื่อทิศทางของความเร็ว v_A และ v_B ไม่ขนานกัน ให้ลากเส้นตั้งฉากจากความเร็ว v_A v_B และที่จุดทั้งสองตัดกันจะเป็นจุด IC ขณะที่พิจารณา



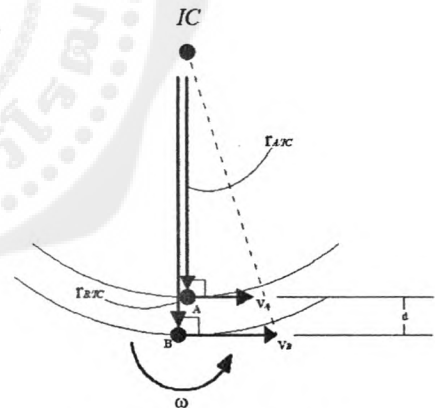
Location of IC
knowing the line of action of v_A and v_B

รูปที่ 16.6 ตำแหน่งของ IC เมื่อทราบว่าทิศทางของ v_A และ v_B ไม่ขนานกัน

- เมื่อทราบขนาดและทิศทางของความเร็ว v_A และ v_B ที่ขนานกัน ตำแหน่งของจุด IC คำนวณหาได้โดยใช้ตรีโกณมิติ



(a)



Location of IC knowing v_A and v_B

(b)

รูปที่ 16.7 ตำแหน่งของ IC เมื่อทราบว่าทิศทางของ v_A และ v_B ขนานกัน

Note:

- จุด IC ที่เลือกนั้นเป็นจุดชั่วคราวสำหรับเวลาที่พิจารณาเท่านั้น เนื่องจากวัตถุจะมีการเปลี่ยนตำแหน่งเมื่อเวลาเปลี่ยนไป
- จุด IC จะช่วยในการหาความเร็วของวัตถุที่จุดใด ๆ แต่โดยทั่วไปแล้วไม่มีจุดที่มีความเร่งเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณหาความเร่งของวัตถุได้โดยวิธีนี้

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้จุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ

- หาคำแหน่งของจุด ก่อน IC โดยใช้สมการดังกล่าวข้างต้น
- วัตถุในจินตภาพที่ถูกยึดและตรึงที่จุด IC ดังนั้น ณ ขณะเวลาใด ๆ ที่พิจารณา วัตถุในจินตภาพจะหมุนรอบจุด IC ด้วยความเร็วเชิงมุม
- ขนาดของความเร็วสำหรับจุด A , B และ C ใด ๆ บนวัตถุ สามารถคำนวณได้จากสมการ $V = \omega r$ เมื่อ เป็นระยะรัศมีจากจุด IC ไปยังแต่ละจุด
- ทิศทางของความเร็ว V จะต้องตั้งฉากกับเส้นรัศมี r และเส้นรัศมีของจุดต่าง ๆ มีความเร็วเชิงมุม ω เดียวกัน

16.7 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์: ความเร่ง

สมการแสดงความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างความเร่งของจุด 2 จุด บนวัตถุทรงรูปแบบทั่วไปในระนาบ สามารถคำนวณได้จาก

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \quad (16.17)$$

เมื่อ

$\mathbf{a}_B$ = ความเร่งสัมบูรณ์ของจุด B

$\mathbf{a}_A$ = ความเร่งสัมบูรณ์ของจุดหลัก A

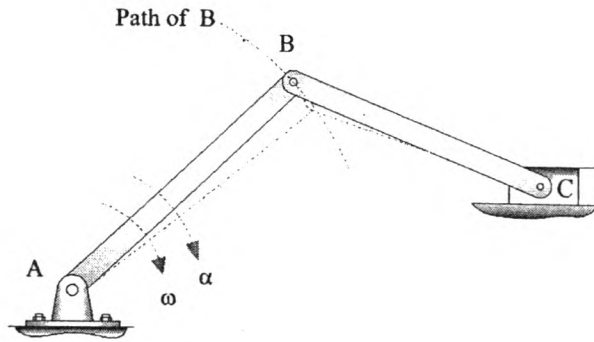
$\boldsymbol{\alpha}$ = ความเร่งเชิงมุมของวัตถุทรงรูป

ω = ความเร็วเชิงมุมของวัตถุทรงรูป

$\mathbf{r}_{B/A}$ = เวกเตอร์ระบุตำแหน่งสัมพัทธ์ที่เขียนจาก A ไป B

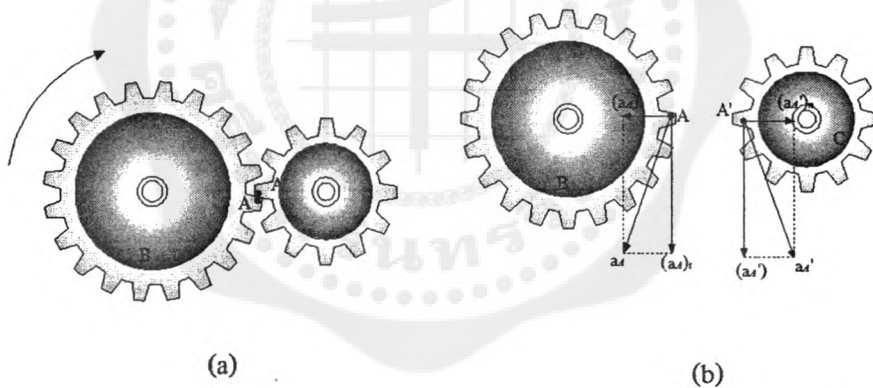
หลักสำคัญ

1. ในการประยุกต์ใช้สมการ (16.17) จะต้องคำนวณหาความเร็วเชิงมุม ω ของวัตถุโดยการวิเคราะห์ความเร็วก่อน
2. ถ้าประยุกต์ใช้สมการ (16.17) ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งของวัตถุทรงรูปที่มีข้อต่อยึดติดกัน จุดที่ข้อต่อของวัตถุทั้งสองจะมีความเร่งเดียวกัน เนื่องจากจุดนั้นมีเส้นทางการเคลื่อนที่เช่นเดียวกัน ดังตัวอย่าง จุด B เป็นจุดที่อยู่บนแกน AB และ BC ซึ่งเป็นแกนของข้อเหวี่ยง



รูปที่ 16.8 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งของวัตถุคงรูปที่มีข้อต่อยึดติดกัน

- ถ้าวัตถุสัมผัสกัน โดยไม่มีการลื่นไถล และจุดที่สัมผัสกันของวัตถุทั้งสองมีเส้นโค้งการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกัน ความเร่งตามแกนสัมผัสของจุดทั้งสองนั้นจะเป็นความเร่งเดียวกัน แต่มีความเร่งตามแกนตั้งฉากต่างกัน พิจารณาจุด A อยู่บนเฟือง B ซึ่งทับกับจุด A' ที่อยู่บนเฟือง C เนื่องจากการเป็น



รูปที่ 16.9 วัตถุสัมผัสกันโดยไม่มีการลื่นไถล และจุดที่สัมผัสกันของวัตถุทั้งสองมีเส้นโค้งการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกัน

เคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่ ดังนั้น $(a_A)_t = (a_{A'})_t$ และเนื่องจากจุดทั้งสองมีเส้นโค้งการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกัน ดังนั้น $(a_A)_n \neq (a_{A'})_n$ และ $(a_A) \neq (a_{A'})$

16.8 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์โดยใช้ระบบแกนหมุน

- พิจารณาแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ซึ่งเคลื่อนที่และหมุนเทียบกับแกนอ้างอิงอยู่กับที่ จะได้สมการความเร็วและความเร่งของจุด B คือ

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \quad (16.18)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \quad (16.19)$$

เมื่อ

$\mathbf{v}_B, \mathbf{a}_B$ = ความเร็วและความเร่งของ B ที่วัดกับแกนอ้างอิงอยู่กับที่ X,Y,Z

$\mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A$ = ความเร็วและความเร่งของจุดกำเนิด A บนแกนเคลื่อนที่ x-y-z วัดจากแกนอ้างอิงอยู่กับที่ X-Y-Z

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ = ความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ของ B เทียบกับ A ซึ่งสังเกตที่ผู้สังเกตที่อยู่บนแกนหมุน x-y-z

$\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ = ความเร็วและความเร่งเชิงมุมของแกน x-y-z โดยวัดจากแกนอ้างอิงอยู่กับที่ X-Y-Z

$\mathbf{r}_{B/A}$ = เวกเตอร์ระบุตำแหน่งสัมพัทธ์ของ B เทียบกับ A

- เทอม $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ เรียกว่า ความเร่งโครีโอลิส (Coriolis acceleration)

วิธีการวิเคราะห์ปัญหาโดยสมการ 16.18 และ 16.19

- แกนพิกัด (Coordinate axes)

- เลือกตำแหน่งสำหรับจุดกำเนิดและทิศทางของแกนอ้างอิงอยู่กับที่ X - Y - Z และแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ x - y - z
- ในการพิจารณา เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการแก้ปัญหา ควรกำหนดดังนี้
 1. ให้จุดกำเนิดของแกนอ้างอิงทั้งสองจุดเป็นจุดเดียวกัน
 2. ให้แกนที่สอดคล้องกันอยู่ในแนวเดียวกัน
 3. ให้แกนที่สอดคล้องกันขนานกัน
- กรอบหรือแกนเคลื่อนที่ที่จะอยู่กับที่บนวัตถุหรืออุปกรณ์ที่เกิดการเคลื่อนที่สัมพัทธ์

- สมการจลนคณิตศาสตร์ (Kinematic equation)

- เมื่อกำหนดจุด A ของแกนเคลื่อนที่และจุดเคลื่อนที่ B แล้วให้เขียนเทอมต่าง ๆ ในรูปของสมการที่ 16.18 และ 16.19
- เขียนปริมาณเวกเตอร์ย่อยตามแกนพิกัดจากอ้างอิงอยู่กับที่ X - Y - Z และแกนอ้างอิงเคลื่อนที่

x - y - z ในเทอมย่อยของแต่ละยูนิตเวกเตอร์
- การเคลื่อนที่ของแกนเคลื่อนที่ซึ่งแทนด้วยเทอม $\mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A, \boldsymbol{\Omega}$ และ $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ส่วนการเคลื่อนที่ของจุด B จะเทียบกับแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ ซึ่งแทนด้วยเทอม $\mathbf{r}_{B/A}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ และ $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

ข้อแนะนำ

- เมื่อใช้สมการความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (16.20)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \quad (16.21)$$

จุด A ที่เลือกเป็นจุดหลักนั้นควรจะเป็นจุดซึ่งทราบความเร็วและความเร่งหรือง่ายที่จะคำนวณหา

- โดยทั่วไปจุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ IC จะไม่มีความเร็วเท่ากับศูนย์แม้ว่า $v_{IC} = 0$, $a_{IC} \neq 0$

คำถามทบทวนท้ายบท

1. การเคลื่อนที่ในระนาบของวัตถุคงรูปทั้งสามประเภทคืออะไร อธิบายโดยย่อถึงแต่ละประเภท
2. จุดสามารถมีความเร็วเชิงมุมได้หรือไม่
3. ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมบูรณ์ กำหนดสมการพิกัดตำแหน่ง $s = f(\theta)$ เราสามารถหาความเร็วและขนาดของความเร่งได้อย่างไร
4. ถ้ากำหนดสมการพิกัดตำแหน่งคือ $s = f(\theta) = \sin^2 \theta$ เมื่อ $\theta(t)$ และ t คือ เวลาจงหาอัตราเร็ว ds/dt
5. ในกรณีที่วัตถุคงรูปเคลื่อนที่ในระนาบ จุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ IC จะตั้งขึ้นเสมอบนวัตถุหรือมีปริมาณที่แน่นอนจากวัตถุหรือไม่
6. ถ้า IC มีความเร็วเป็นศูนย์เราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้หรือไม่

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{IC} + \omega \times \mathbf{r}_{B/IC} \\ &= \omega \times \mathbf{r}_{B/IC} \end{aligned}$$

เช่นนั้น เราสามารถเขียนได้หรือไม่ว่า

$$\mathbf{a}_B = \alpha \times \mathbf{r}_{B/IC} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/IC}$$

7. เมื่อเทอม $(v_{B/A})_{xyz}$ มีค่าเป็นศูนย์มีความหมายว่าอย่างไร

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 16 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป

ตัวอย่างที่ 16.1 ล้อหมุนด้วยทิสตามเข็มนาฬิกาโดยมีความเร็วเชิงมุม 10 rad/s และมีอัตราเร่งเชิงมุม 3 rad/s^2 จงหาจำนวนรอบของล้อที่จะหมุนด้วยทิสตามเข็มนาฬิกาโดยให้มีความเร็วเชิงมุม 15 rad/s และต้องใช้เวลาเท่าไร

วิธีทำ

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$(15)^2 = (10)^2 + 2(3)(\theta - 0)$$

$$\theta = 20.83 \text{ rad} = 20.83 \left(\frac{1}{2\pi} \right) = 3.32 \text{ rev.}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

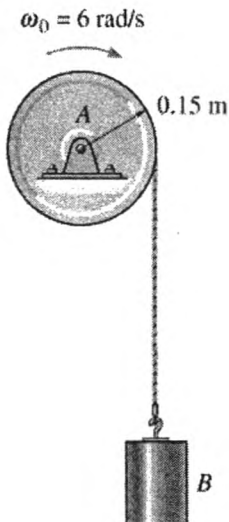
$$15 = 10 + 3t$$

$$t = 1.67 \text{ s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.2 มอเตอร์ทำให้จาน A มีอัตราเร่งเชิงมุม $\alpha_A = (6t^2 + 0.75) \text{ rad/s}^2$ โดย t เทียบในหน่วยวินาที ถ้าให้จานหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม 6 rad/s จงหาขนาดของความเร็วและความเร่งของบล็อก B เมื่อกำหนด $t = 2 \text{ s}$

วิธีทำ



$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int_6^\omega d\omega = \int_0^2 (0.6t^2 + 0.75) dt$$

$$\omega - 6 = (0.2t^2 + 0.75t) \Big|_0^2$$

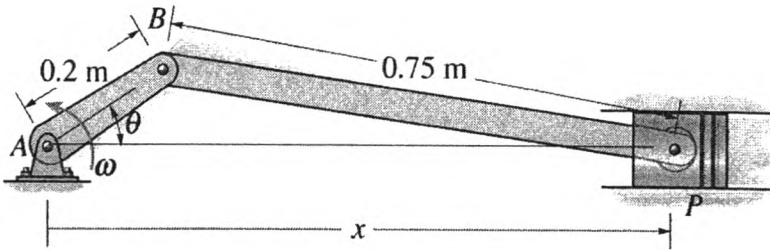
$$\omega = 9.10 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \omega r = 9.10(0.15) = 1.37 \text{ m/s}$$

$$a_B = a_t = \alpha r = [0.6(2)^2 + 0.75](0.15) = 0.472 \text{ m/s}^2$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.3 เฟลาข้อเหวี่ยง AB กำลังหมุนโดยมีความเร็วเชิงมุม $\omega = 150 \text{ rad/s}$ จงหาความเร็วที่จุด P โดยกำหนด $\theta = 30^\circ$



วิธีทำ

$$x = 0.2 \cos \theta + \sqrt{(0.75)^2 - (0.2 \sin \theta)^2}$$

$$\dot{x} = -0.2 \sin \theta \dot{\theta} + \frac{1}{2} \left[(0.75)^2 - (0.2 \sin \theta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} (-2)(0.2 \sin \theta)(0.2 \cos \theta) \dot{\theta}$$

$$v_p = -0.2 \omega \sin \theta - \left(\frac{1}{2} \right) \frac{(0.2)^2 \omega \sin 2\theta}{\sqrt{(0.75)^2 - (0.2 \sin \theta)^2}}$$

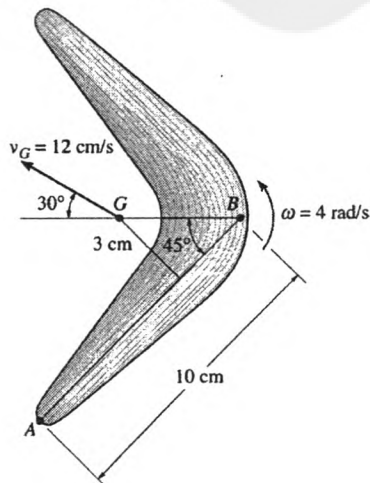
$$\text{At } \theta = 30^\circ, \omega = 150 \text{ rad/s}$$

$$v_p = -0.2(150) \sin 30^\circ - \left(\frac{1}{2} \right) \frac{(0.2)^2 (150) \sin 60^\circ}{\sqrt{(0.75)^2 - (0.2 \sin 30^\circ)^2}}$$

$$v_p = -18.5 \text{ m/s} = 18.5 \text{ m/s} \leftarrow$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.4 ดังรูปที่แสดงไม้รูปโค้ง(boomerang)มีความเร็วเชิงมุม 4 rad/s และมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุด G โดยมีความเร็ว $v_G = 12 \text{ cm/s}$ จงหาความเร็วที่จุด B ดังแสดงในรูป



วิธีทำ

$$v_B = v_G + v_{B/G}$$

$$v_B = 6 + \left[4(3 / \sin 45^\circ) = 16.9706 \right]$$

$$\pm (v_B)_x = 12 \cos 30^\circ + 0 = 10.392 \text{ cm / s}$$

$$+ \uparrow (v_B)_y = 12 \sin 30^\circ + 16.9706 = 22.9706 \text{ cm / s}$$

$$v_B = \sqrt{(10.392)^2 + (22.9706)^2} = 25.2 \text{ cm / s}$$

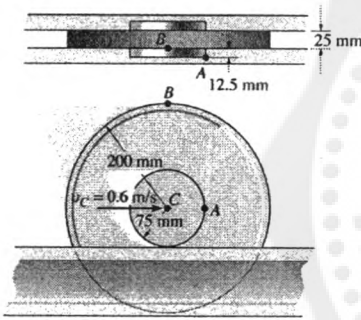
$$\theta = \tan^{-1} \frac{22.9706}{10.392} = 65.7^\circ$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.5 แกนล้อหมุนในขณะที่ไม่มีสลิปบนผิวด้านขนานถ้าล้อมีความเร็ว ณ จุดศูนย์กลางล้อ

$v_C = 0.6 \text{ m/s}$ ไปทางขวา, จงหาความเร็วของจุด A และ B ดังแสดงรูป

วิธีทำ



$$v_C = \omega r_{C/IC}$$

$$0.6 = \omega(0.075)$$

$$\omega = 8 \text{ rad / s}$$

$$v_B = \omega r_{B/IC} = 8(0.275) = 2.2 \text{ m / s} \rightarrow$$

$$v_A = \omega r_{A/IC} = 8(0.075\sqrt{2}) = 0.849 \text{ m / s}$$

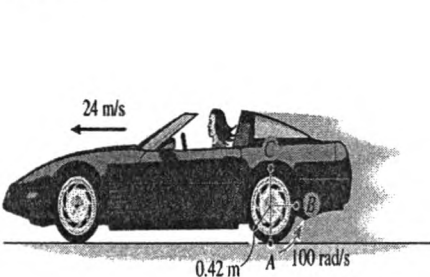
$$\theta_A = \tan^{-1} \left(\frac{75}{75} \right) = 45^\circ$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.6 ในขณะที่รถกำลังเคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร็ว 24 m/s โดยวิ่งบนถนนที่เปียกโดยล้อ

หลังมีความเร็วเชิงมุม 100 rad/s จงหาความเร็ว ณ จุด A, B, C โดยมีการเคลื่อนไหวย

วิธีทำ



$$r = \frac{24}{100} = 0.24 \text{ m}$$

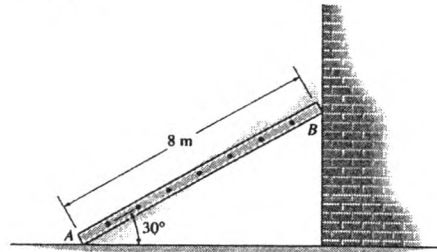
$$v_A = 0.18(100) = 18 \text{ m / s} \rightarrow$$

$$v_C = 0.66(100) = 66 \text{ m / s} \leftarrow$$

$$v_B = 0.4837(100) = 48.37 \text{ m / s}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.7 ดังรูปที่ให้มาด้านบนของบันไดที่จุด B มีความเร่ง $a_B = 1 \text{ m/s}^2$ และมีความเร็ว $v_B = 2 \text{ m/s}$ ทั้งคู่กำลังเคลื่อนที่ลง. จงหาความเร่งได้จุด A ของบันได และหาอัตราเร่งเชิงมุมของบันไดดังแสดงในรูป.



วิธีทำ

$$a_A = a_B + \alpha \times r_{A/B} - \omega^2 r_{A/B}$$

$$-a_A i = -1j + (\alpha k) \times (-8 \cos 30^\circ i - 8 \sin 30^\circ j) - (0.288675)^2 (-8 \cos 30^\circ i - 8 \sin 30^\circ j)$$

$$-a_A = 4\alpha + 0.5774$$

$$0 = -1 - 6.928\alpha + 0.3333$$

$$\alpha = -0.0962 \text{ rad/s}^2 = 0.0962 \text{ rad/s}^2$$

$$a_A = -0.193 \text{ m/s}^2 = 0.193 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

Ans

ตัวอย่างที่ 16.8 ล้อกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาโดยมีความเร็วเชิงมุม 2 rad/s และมีความเร่งเชิงมุม 4 rad/s^2 ดังแสดงในรูปถ้าล้อไม่มีสลักที่จุด A จงหาความเร่งที่จุด B

วิธีทำ

Since no slipping

$$a_C = \alpha r = 4(0.4) = 1.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = a_C + a_{B/C}$$

$$a_B = 1.6 + (2)^2(0.4) + 4(0.4)$$

$$\rightarrow \square 30^\circ$$

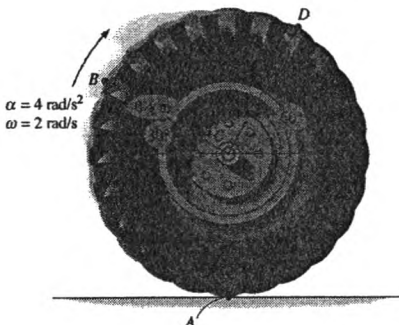
$$\rightarrow (a_B)_x = 1.6 + 1.39 + 0.8 = 3.79$$

$$+ \uparrow (a_B)_y = 0 - 0.8 + 1.39 = 0.59$$

$$a_B = \sqrt{(3.79)^2 + (0.59)^2} = 3.84 \text{ m/s}^2$$

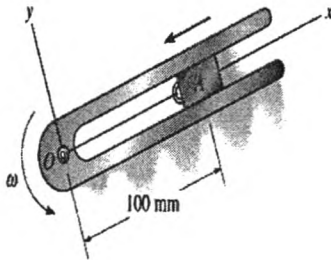
$$\theta = \tan^{-1} \frac{0.59}{3.79} = 8.80^\circ$$

Ans



ตัวอย่างที่ 16.9 เส้นเชือกถูกคล้องผ่านบล็อก A โดยเคลื่อนที่ผ่านเข้ามาในช่องตามแนวนานกับเดือย ดังแสดงในรูป เส้นเชือกถูกดึงลงทะลุผ่านรูที่จุด O มีความเร่ง 4 m/s^2 และมีความเร็ว 2 m/s จงหาความเร่งของบล็อกดังแสดงในรูป โดยการหมุนของเดือยรอบจุด O มีค่าความเร็วเชิงมุม 4 rad/s

วิธีทำ



Thus,

การเคลื่อนที่จากแกนอ้างอิง

การเคลื่อนที่รอบแกน A

$$V_o = 0$$

$$a_o = 0$$

$$\Omega = 4 \text{ k}$$

$$\dot{\Omega} = 0$$

$$V_{A/O} = -2i$$

$$a_{A/O} = -4i$$

$$r_{A/O} = 0.1i$$

$$a_A = a_o + \dot{\Omega} \times r_{A/O} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/O}) + 2\Omega \times (v_{A/O})_{xyz} + (a_{A/O})_{xyz}$$

$$a_A = 0 + 0 + (4k) \times (4k \times 0.1i) + 2(4k \times (-2i) - 4i)$$

$$a_A = \{-5.60i - 16j\} \text{ m/s}^2$$

Ans

บทที่ 17 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุคงรูป : แรงและความเร่ง

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เพื่อศึกษาวิธีการคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของวัตถุ
- เพื่อประยุกต์ใช้สมการจลนศาสตร์ในระนาบของการเคลื่อนที่กับวัตถุที่มีรูปทรงสมมาตร
- เพื่อใช้ประโยชน์จากสมการในการพิจารณาการเคลื่อนที่แบบเลื่อน หมุนรอบแกนคงที่ และการเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หล่มบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

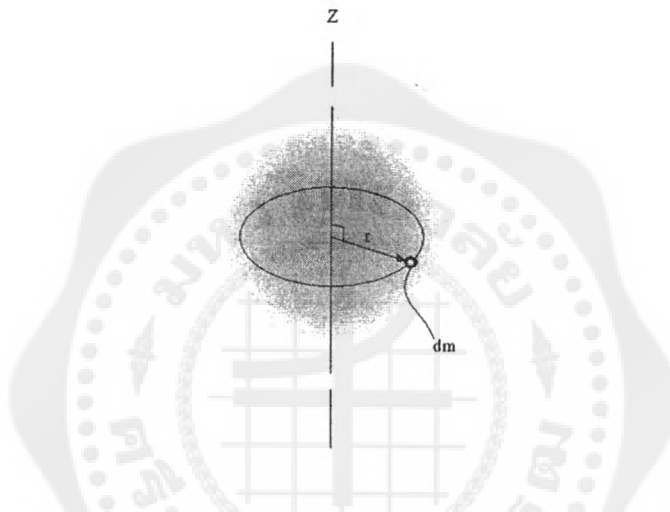
วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการสอบวัดผล

17.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

- โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล หมายถึงความสามารถวัตถุ ในการต้านทานการเกิดความเร็วเชิงมุม ในขณะที่มวลหมายถึงความสามารถของวัตถุในการต้านทานการเกิด ความเร่งเชิงเส้น
- โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

$$I = \int r^2 dm \quad (17.1)$$

เมื่อแกนของโมเมนต์ r เป็นระยะตั้งฉากจากแกน z ไปยังชิ้นส่วน dm ที่ประกอบเป็นวัตถุใด ๆ และ I มีหน่วยเป็น $\text{kg}\cdot\text{m}^2$



รูปที่ 17.1 แสดงโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

- ถ้าวัตถุมีความหนาแน่นไม่คงที่ $\rho = \rho(x, y, z)$ และมวล dm ในเทอมของความหนาแน่น $dm = \rho dV$ และ โมเมนต์ความเฉื่อย I ในเทอมของปริมาตร ได้เป็น

$$I = \int r^2 \rho dV \quad (17.2)$$

ในกรณีที่วัตถุมีความหนาแน่น ρ คงที่ (วัตถุเนื้อเดียวกัน) ดังนั้น

$$I = \rho \int r^2 dV \quad (17.3)$$

- เมื่อปริมาตรชิ้นส่วนที่เลือกในการอินทิเกรตมีขนาดเล็กมาก ตามแนวแกน x - y - z ทั้งสาม คือ $dV = dx dy dz$ ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุจะหาได้โดยการอินทิเกรตสามครั้ง เราสามารถอินทิเกรตครั้งเดียวได้โดยการเลือกชิ้นส่วนที่มีขนาดของปริมาตรหรือมีความหนาแน่นน้อย ๆ และคงที่ในทิศทางเดียวชิ้นส่วนที่นิยมเลือกใช้คือชิ้นส่วนที่มีลักษณะเป็นเปลือกบางโค้งหรือแผ่นกลม
- ทฤษฎีแกนคู่ขนาน (Parallel-axis theorem) ถ้าทราบโมเมนต์ความเฉื่อย I_G ของวัตถุที่ผ่านจุดแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่ขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล จะเขียนได้ว่า

$$I = I_G + md^2 \quad (17.4)$$

เมื่อ m = มวลของวัตถุ

d = ระยะตั้งฉากระหว่างแกนคู่ขนาน

- **รัศมีไจเรชั่น (Radius Gyration)** รัศมีไจเรชั่น k สามารถคำนวณหาได้โดย

$$I = mk^2, k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (17.5)$$

- **วัตถุประกอบหลายชิ้น (Composite Bodies)**

ถ้าวัตถุสร้างจากรูปทรงอย่างง่ายหลาย ๆ ชิ้นมาประกอบกัน เช่น แผ่นกลม ทรงกลม และท่อนกลม ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z สามารถคำนวณหาได้โดยการบวกกันทางพีชคณิตของโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปทรงที่ประกอบกันทั้งหมดที่หมุนรอบแกน z เมื่อ I_G เป็นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละชิ้นส่วนสามารถได้โดยการคำนวณหรือใช้ค่าจากตารางที่แสดงไว้ในตารางท้ายหนังสือ

17.2 สมการจลนศาสตร์ในระนาบของการเคลื่อนที่

- **สมการของการเคลื่อนที่แบบเลื่อน (Equation of translational motion)** กำหนดระบบพิกัดอ้างอิงเฉื่อยเป็นแกน x, y, z สมการของการเคลื่อนที่แบบเลื่อน คือ

$$\sum F = ma_G \quad (17.6)$$

หรือในรูปของสมการสเกลาร์ :

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad (17.7)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad (17.8)$$

เมื่อ $\sum F$ คือผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ และ a_G คือความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

- **สมการของการเคลื่อนที่แบบหมุน (Equation of rotational motion)** สมการของการเคลื่อนที่แบบหมุนแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบ คือ

I. เมื่อคำนวณโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางมวล G :

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (17.9)$$

เมื่อ $\sum M_G$ คือ ผลรวมของโมเมนต์ทั้งหมดจากแรงภายนอกและโมเมนต์จากแรงคู่ควบที่กระทำรอบจุด G , I_G คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่ผ่านจุด G และ คือ α ความเร่งเชิงมุมของวัตถุ

II. เมื่อคำนวณโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางมวล $P \neq G$:

$$\sum M_P = \sum (M_k)_P \quad (17.10)$$

หรือ

$$\sum M_P = I_G \alpha + \text{โมเมนต์จลนศาสตร์ของส่วนประกอบย่อยของ } m a_G \text{ รอบจุด } P \quad (17.11)$$

เมื่อ $\sum M_G$ คือ ผลรวมของโมเมนต์ทั้งหมดจากแรงภายนอกและโมเมนต์จากแรงคู่ควบที่กระทำรอบจุด P

- **ผังวัตถุอิสระ** การเขียนผังวัตถุอิสระที่ดีจะช่วยให้การแสดงเทอมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน $\sum F$ $\sum M_G$ หรือ $\sum M_P$ ผังโดยเฉพาะจลนศาสตร์จะทำให้เกิดความสะดวกในการคำนวณหาเทอมของโมเมนต์ในรูปของ $\sum (M_k)_P$

17.3 สมการของการเคลื่อนที่: การเคลื่อนที่แบบเลื่อน

- **การเคลื่อนที่แบบเลื่อนวิถีตรง (Rectilinear translation)**

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad (17.12)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad (17.13)$$

$$\sum M_G = 0 \quad (17.14)$$

ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด $A \neq G$

$$\sum M_A = \sum (M_k)_A \quad (17.15)$$

เมื่อ $\sum (M_k)_A$ คือ ผลรวมของโมเมนต์ของสองส่วนประกอบของ $m a_G$ รอบจุด A (เนื่องจากในการเคลื่อนที่ $I_G \alpha = 0$)

- **การเคลื่อนที่แบบเลื่อนวิถีโค้ง (Curvilinear translation)**

$$\sum F_n = m(a_G)_n \quad (17.16)$$

$$\sum F_t = m(a_G)_t \quad (17.17)$$

$$\sum M_G = 0 \quad (17.18)$$

ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด $B \neq G$

$$\sum M_B = \sum (M_k)_B \quad (17.19)$$

เมื่อ $\sum (M_k)_B$ คือ ผลรวมของโมเมนต์ของส่วนประกอบของ $m(a_G)_n$ และ $m(a_G)_t$ รอบจุด B (เนื่องจากในการเคลื่อนที่ $I_G \alpha = 0$)

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

การแก้ปัญหาสำหรับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนของวัตถุคงรูป สามารถคำนวณหาได้โดยวิธีการวิเคราะห์ ดังนี้

● ฟังวัตถุอิสระ

- กำหนดระบบแกนพิกัดอ้างอิงเฉื่อยเป็นแกน x-y หรือ n-t และเขียนผังวัตถุอิสระที่แสดงแรงภายนอกทั้งหมดและโมเมนต์คู่ควบที่กระทำต่อวัตถุ
- แสดงทิศความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล a_G ที่เป็นไปได้
- กำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา
- ในกรณีที่จำเป็นต้องใช้สมการของการเคลื่อนที่แบบหมุน $\sum M_P = \sum (M_k)_P$ สำหรับการแก้ปัญหาให้พิจารณาผังจลนศาสตร์ เพราะผังภาพนี้จะแสดงเทอมย่อยต่าง ๆ $m(a_G)_x, m(a_G)_y$ หรือ $m(a_G)_n, m(a_G)_t$ เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลบวกของโมเมนต์ $\sum (M_k)_P$

● สมการของการเคลื่อนที่

- ประยุกต์ใช้สมการของการเคลื่อนที่รูปสมการสเกลาร์ทั้งสามตามระบบพิกัดที่กำหนดพร้อมทั้งแสดงเครื่องหมายทิศทาง
- เพื่อความสะดวกรวดเร็วในการวิเคราะห์สมการโมเมนต์ $\sum M_G = 0$ เราสามารถใช้สมการโมเมนต์ทั่วไป $\sum M_P = \sum (M_k)_P$ แทนได้โดยจุด P จะเป็นจุดตัดของเส้นการกระทำของแรงที่ไม่ทราบค่าหลาย ๆ แรง
- ในกรณีที่วัตถุเลื่อนและสัมผัสกับพื้นหยาบ จะเกิดแรงเสียดทาน $F = \mu_k N$ โดยแรงเสียดทาน F จะกระทำทิศตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ของวัตถุเสมอ

● จลนคณิตศาสตร์

- ในกรณีที่ต้องการหาความเร็ว และตำแหน่งของวัตถุ จะต้องใช้สมการจลนคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์
- ในกรณีที่เป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนวิถีตรง ที่มีความเร่งไม่คงที่ จะใช้สมการ

$$a_G = \frac{dv_G}{dt}, a_G ds_G = v_G dv_G, v_G = \frac{ds_G}{dt} \quad (17.20)$$

- ในกรณีที่เป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนวิถีตรง ที่มีความเร่งคงที่ จะใช้สมการ

$$v_G = (v_G)_0 + a_G t, v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G [s_G + (s_G)_0] \quad (17.21)$$

$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \frac{1}{2} a_G t^2 \quad (17.22)$$

— ในกรณีที่เป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนวิถีโค้ง จะใช้สมการ

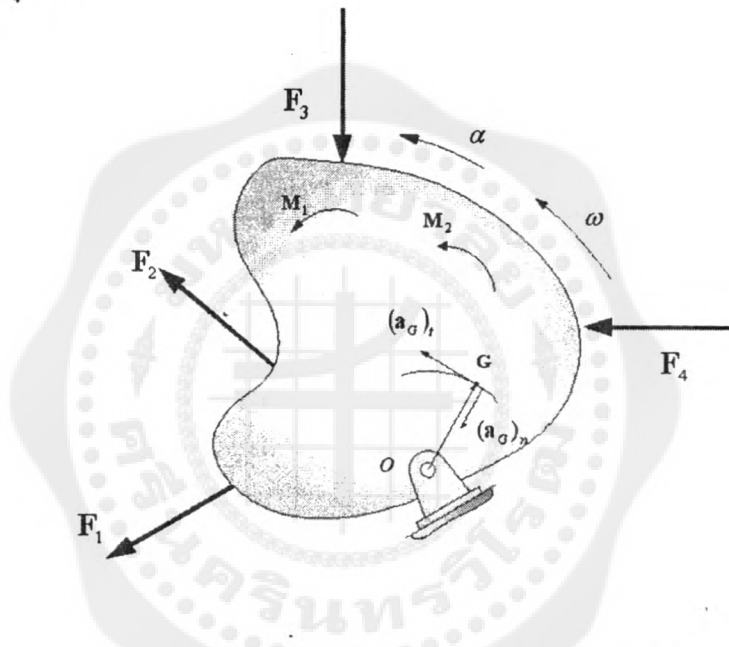
$$(a_G)_n = \frac{v_G^2}{\rho} = \omega^2 \rho, (a_G)_t = \frac{dv_G}{dt}, (a_G) ds_G = v_G dv_G, \quad (17.23)$$

$$(a_G)_t = \alpha \rho \quad (17.24)$$

17.4 สมการของการเคลื่อนที่: การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่

(Equations of motion: Rotation about a fixed axis)

- พิจารณาวัตถุคงรูปซึ่งเคลื่อนที่แบบหมุนในระนาบแนวตั้งรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบและผ่านจุดหมุนที่สลักที่จุด O



รูปที่ 17.2 การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่

สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\sum F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \quad (17.25)$$

$$\sum F_t = m(a_G)_t = m\omega r_G \quad (17.26)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (17.27)$$

หรือ สำหรับจุด $O \neq G$

$$\sum M_o = \sum (M_k)_o = I_o \alpha \quad (17.28)$$

Note: I_o เป็นปริมาณโมเมนต์ของ $m(a_G)_t$ และ $I_G \alpha$ รอบจุด O (โมเมนต์ของ $m(a_G)_n$ ไม่ต้องนำมาพิจารณาเนื่องแนวของการกระทำผ่านจุด O)

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

การแก้ปัญหาสำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่ของวัตถุคงรูป สามารถคำนวณหาได้โดยวิธีการวิเคราะห์ ดังนี้

● พังวัตถุอิสระ

- กำหนดระบบแกนพิกัดอ้างอิงเฉื่อยเป็นแกน x-y หรือ n-t และกำหนดทิศทางของความเร่ง $(a_G)_n$ และ $(a_G)_t$ รวมทั้งทิศทางการหมุนของความเร่งเชิงมุม α ของวัตถุ โดย $(a_G)_t$ จะต้องมิติศสอดคล้องกับทิศหมุนของความเร่งเชิงมุม α ในขณะที่ $(a_G)_n$ จะมีทิศพุ่งเข้าสู่จุด O ของแกนหมุนเสมอ
- เขียนผังวัตถุอิสระที่แสดงแรงภายนอกทั้งหมดและโมเมนต์คู่ควบที่กระทำต่อวัตถุ
- คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_G หรือ I_O
- กำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา
- ในกรณีที่จำเป็นต้องใช้สมการของการเคลื่อนที่แบบหมุน $\sum M_P = \sum (M_k)_P$ สำหรับการโดยจุด P เป็นจุดใด ๆ นอกเหนือจากจุด G หรือ O ดังนั้นในการแก้ปัญหาก็พิจารณาผังจลนศาสตร์ เพราะผังภาพนี้จะแสดงเทอมย่อยต่าง ๆ $m(a_G)_n, m(a_G)_t$ และ $I_G \alpha$ เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลบวกของโมเมนต์ $\sum (M_k)_P$

● สมการของการเคลื่อนที่

- ประยุกต์ใช้สมการของการเคลื่อนที่รูปสมการสเกลาร์ทั้งสามตามระบบพิกัดที่กำหนดพร้อมทั้งแสดงเครื่องหมายทิศทาง
- ในกรณีที่คำนวณหาผลบวกโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลาง G ของวัตถุ ดังนั้น $\sum M_G = I_G \alpha$ เพราะว่า $m(a_G)_t, m(a_G)_n$ ไม่เกิดโมเมนต์รอบจุด G
- ในกรณีที่คำนวณหาผลบวกโมเมนต์รอบรับ O บนแกนหมุน ดังนั้น $m(a_G)_n$ ไม่เกิดโมเมนต์รอบจุด G และเขียนสมการได้เป็น $\sum M_O = I_O \alpha$

● จลนศาสตร์

- ในกรณีที่ใช้สมการของการเคลื่อนที่แล้วยังไม่ได้คำตอบที่ต้องการ จะต้องใช้สมการจลนศาสตร์ช่วยในการหาคำตอบ
- ถ้าความเร่งเชิงมุมไม่คงที่จะใช้สมการ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \alpha d\theta = \omega d\theta, \omega \frac{d\theta}{dt} \quad (17.29)$$

— ถ้าความเร่งเชิงมุมคงที่จะใช้สมการ

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t, \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c [\theta - \theta_0] \quad (17.30)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_c t^2 \quad (17.31)$$

17.5 สมการของการเคลื่อนที่: การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

- ถ้าเลือกพิจารณาบนระบบอ้างอิงเฉื่อย $x - y$ จะเขียนสมการการเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบสามสมการ คือ

$$\sum F_x = m(a_G)_x \quad (17.32)$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \quad (17.33)$$

$$\sum M_G = I_G \alpha \quad (17.34)$$

หรือ ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด $P \neq G$

$$\sum M_P = \sum (M_k)_P \quad (17.35)$$

เมื่อ $\sum (M_k)_P$ คือผลบวกของโมเมนต์ของ $I_G \alpha$ และ ma_G (หรือองค์ประกอบของ ma_G) รอบจุด P ซึ่งคำนวณได้จากข้อมูลบนผังจลนศาสตร์

- ปัญหาเกี่ยวกับความเสียดทานในการกลิ้ง (Frictional rolling problems) จากสามสมการของการเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ ในปัญหาเกี่ยวกับความเสียดทานในการกลิ้ง (ปัญหาการเคลื่อนที่ของล้อ, จาน, ทรงกระบอก หรือ ลูกบอล) จะประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า คือ F , N , a_G และ α จึงต้องใช้สมการพิเศษช่วยในการแก้สมการนี้ ซึ่งจะพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ

— การกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถล (No slipping) ในกรณีนี้เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร่ง a_G และความเร่งเชิงมุมของ α คือ

$$a_G = r\alpha \quad (17.36)$$

Note: เมื่อ คำนวณหาตัวแปรไม่ทราบค่าได้แล้ว สมมุติว่าวัตถุกลิ้งโดยไม่ลื่นไถลและทดสอบโดยถ้า $F \leq \mu_s N$ แสดงว่าข้อสมมุติเป็นจริง แต่ถ้าผลที่ได้แสดงว่า $F > \mu_s N$ วัตถุเคลื่อนที่แบบลื่นไถล

— การกลิ้งโดยมีการลื่นไถล (slipping) เมื่อ α และ a_G ไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นจึงต้องใช้สมการของแรงเสียดทาน F ที่มีความสัมพันธ์กับแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก N และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ μ_k คือ

$$F = \mu_k N \quad (17.37)$$

วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

การแก้ปัญหาสำหรับการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบของวัตถุคงรูป สามารถคำนวณหาได้โดยวิธีการวิเคราะห์ ดังนี้

• ผังวัตถุอิสระ

- กำหนดระบบแกนพิกัดอ้างอิงเฉื่อยเป็นแกน x-y หรือ n-t และเขียนผังวัตถุอิสระที่แสดงแรงภายนอกทั้งหมดและโมเมนต์คู่ควบที่กระทำต่อวัตถุ
- กำหนดทิศความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล a_G และทิศทางการหมุนของความเร่งเชิงมุมของ α วัตถุ
- คำนวณหาโมเมนตัมความเฉื่อย I_G
- กำหนดตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหา
- ในกรณีที่จำเป็นต้องใช้สมการของการเคลื่อนที่แบบหมุน $\sum M_P = \sum (M_k)_P$ สำหรับการแก้ปัญหา ให้พิจารณาผังจลนศาสตร์ เพราะผังภาพนี้จะแสดงเทอมย่อยต่าง ๆ $m(a_G)_n, m(a_G)_t$ และ $I_G \alpha$ เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลบวกของโมเมนต์ $\sum (M_k)_P$

• สมการของการเคลื่อนที่

- ประยุกต์ใช้สมการของการเคลื่อนที่รูปสมการสเกลาร์ทั้งสามตามระบบพิกัดที่กำหนดพร้อมทั้งแสดงเครื่องหมายทิศทาง
- ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่บนวัตถุที่มีพื้นหยาบ จะทำให้เกิดแรงเสียดทาน ดังนั้นในการคำนวณจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือวัตถุเคลื่อนที่แบบกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถล และการกลิ้งแบบลื่นไถล โดยจะตั้งสมมติฐานให้วัตถุกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถล แล้วตรวจสอบผลที่ได้ ถ้าสมมติฐานผิดก็แสดงว่าเป็นการกลิ้งแบบลื่นไถล

• จลนคณิตศาสตร์

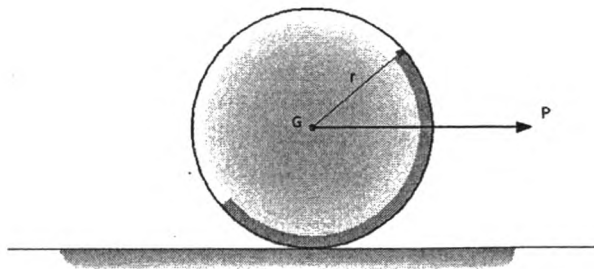
- ในกรณีที่ต้องการหาความเร็ว และตำแหน่งของวัตถุ จะต้องใช้สมการจลนคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์
- ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุถูกบังคับโดยหมุนรอบรับ จะใช้สมการความเร่งสัมผัส $a_B = a_A + a_{B/A}$ ของจุด B เทียบกับจุด A ใด ๆ บนวัตถุ
- ถ้าวางล้อ แผ่นกลม ทรงกระบอก หรือลูกบอล เคลื่อนที่แบบกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถล จะได้สมการ $a_G = \alpha r$

ข้อแนะนำ

- จำไว้เสมอว่า จะต้องเขียนผังวัตถุอิสระเพื่ออธิบายแรงกระทำภายนอกและโมเมนต์จากแรงคู่ควบทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุ ผังจลนศาสตร์ที่ดีจะช่วยให้เห็นถึง “โมเมนต์” เมื่อเขียนเทอมผลรวมของโมเมนต์ $\sum (M_k)_P$
- ก่อนที่จะลองแก้ปัญหาต่าง ๆ ให้ศึกษาจากตัวอย่าง 17-5 ถึง 17-17 ใน text และทดลองทำซ้ำด้วยตนเอง วิธีนี้เป็นวิธีที่ดีมากที่จะเสริมความคิดและความเข้าใจให้ตรงกับปัญหา

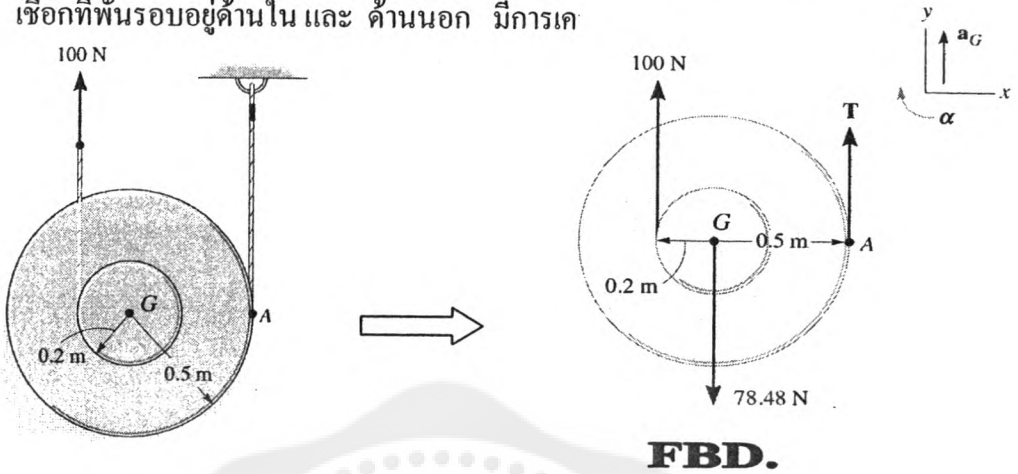
คำถามทบทวนท้ายบท

1. โมเมนต์ความเฉื่อยคืออะไร
2. วัตถุคงรูปที่มีเนื้อเดียวกัน (homogeneous solids) คืออะไร
3. วิธีที่ง่ายที่สุดที่จะคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของ
4. ในสมการการเคลื่อนที่แบบหมุน เทอม $\sum (M_k)_P$ คืออะไร
5. จริงหรือไม่ที่ในปัญหาการเคลื่อนที่ที่ผลรวมโมเมนต์จากแรงกระทำจากภายนอกและแรงคู่ควบรอบจุดใด ๆ มีค่าเท่ากับศูนย์
6. ในปัญหาเกี่ยวกับการหมุนรอบแกนคงที่ ที่จุด P ใดๆ เราสามารถเขียนเทอม $\sum M_P = I_P \alpha$ ได้หรือไม่
7. จริงหรือไม่ที่ $\sum M_{IC} = I_{IC} \alpha$ เมื่อ IC คือจุดศูนย์กลางการหมุนชั่วขณะ
8. พิจารณางานที่ทำจากวัตถุเนื้อเดียวกัน เมื่องานมีมวล m และทราบแรงในแนวระนาบ P เขียนผังวัตถุอิสระและเขียนสมการการเคลื่อนที่ของงานทั้งสามสมการ สมมติว่างานเคลื่อนที่โดยไม่มีการลื่นไถล เขียนสมการอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงาน ข้อมูลเหล่านี้เพียงพอที่จะแก้ปัญหาลักษณะการหาความเร่งของจุด G หรือไม่



ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 17 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป : แรงและความเร่ง

ตัวอย่างที่ 17.1 spool มีมวล 8 kg และมี radius of gyration (k_G) เท่ากับ 0.35 m. ไม่คำนึงถึงน้ำหนักของเชือกที่พันรอบอยู่ด้านใน และ ด้านนอก มีการเค



วิธีทำ

สิ่งที่ต้องการหา : ความเร่งเชิงมุม (α) ของ spool.

การวิเคราะห์ : พิจารณาที่ spool. ตามตัวอย่างที่ผ่านมาเราต้องวาด FBD หรือ kinetic diagram และหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

หาโมเมนต์ความเฉื่อยของ spool ได้เป็น

$$I_G = m (k_G)^2 = 8 (0.35)^2 = 0.980 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Method I

สมการการเคลื่อนที่:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m (a_G)_y \\ T + 100 - 78.48 &= 8 a_G \\ \sum M_G &= I_G \alpha \\ 100 (0.2) - T(0.5) &= 0.98 \alpha \end{aligned}$$

เห็นว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ T, a_G, α เราต้องการสมการที่มากกว่านี้เพื่อจะคำนวณหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ทั้ง 3 ตัว เมื่อ spool เคลื่อนที่จุดหมุนจะอยู่ที่ จุด A และไม่มีการslipping, $a_G = \alpha r$. เราจะได้สมการช่วยจากตรงนี้: $a_G = 0.5\alpha$

หลังจากคำนวณทั้ง 3 สมการ เราจะได้ว่า:

$$\alpha = 10.3 \text{ rad/s}^2, \quad a_G = 5.16 \text{ m/s}^2, \quad T = 19.8 \text{ N}$$

Method II

เราจะใช้วิธีคำนวณจากโมเมนต์รอบจุด G เพื่อนำไปหาโมเมนต์รอบจุด A เราจำเป็นต้องทราบแรงดึงเชือก (T).

$$\sum M_A = \sum (M_k)_A: 100(0.7) - 78.48(0.5) = 0.98\alpha + (8 a_G)(0.5)$$

ใช้สมมติฐานว่า non-slipping

เราจะได้ว่า $a_G = 0.5 \alpha$

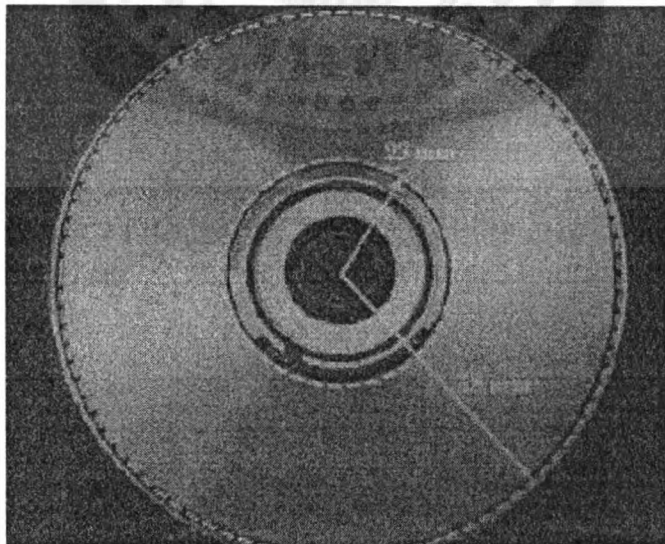
แก้ 2 สมการข้างต้นเราจะได้ : $\alpha = 10.3 \text{ rad/s}^2$, $a_G = 5.16 \text{ m/s}^2$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.2 ในเครื่องเล่น CD ใช้ลำแสงเลเซอร์ในการอ่านข้อมูลจากแผ่น CD โดยแผ่นจะหมุนไปเรื่อยๆ ถ้าลำแสงเลเซอร์อ่านจากวงในไปยังวงนอกของแผ่น CD ด้วยอัตราความเร็วเชิงเส้นคงตัวเท่ากับ 1.3 m/s จงหา

- ก. อัตราเร็วเชิงมุมเริ่มต้น (ω_i)
- ข. อัตราเร็วเชิงมุมปลาย (ω_f)
- ค. มุม (θ)
- ง. ระยะทางที่ลำแสงเลเซอร์หมุนรอบแผ่น CD
- จ. อัตราเร่งเชิงมุม (α)

กำหนดให้ รัศมีวงใน = 23 mm . รัศมีวงนอก = 58 mm .

วิธีทำ

เนื่องจากลำแสงเลเซอร์ที่ใช้ในการอ่านข้อมูลจากแผ่น CD อ่านข้อมูลจากวงในไปยังวงนอกด้วยอัตราเร็วเชิงเส้นคงตัว ดังนั้นอัตราเร็วเชิงมุมในการหมุนแต่ละรอบจึงไม่เท่ากัน

ก. จาก $\omega_i = \frac{v}{r_i}$

$$\omega_i = \frac{1.3 \text{ m/s}}{23 \times 10^{-3} \text{ m}} = 56.5 \text{ rad/s}$$

อัตราเร็วเชิงมุมเริ่มต้น (ω_i) = 56.5 rad/s

ทำให้เป็นรอบ/วินาที ได้

$$\omega_i = \frac{56.5}{2\pi} = 8.99 \text{ รอบ/วินาที}$$

ข. จาก $\omega_f = \frac{v}{r_f}$

$$\omega_f = \frac{1.3 \text{ m/s}}{58 \times 10^{-3} \text{ m}} = 22.4 \text{ rad/s}$$

อัตราเร็วเชิงมุมปลาย $\omega_f = \frac{22.4}{2\pi} = 3.56 \text{ รอบ/วินาที}$

ค. จาก

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

$$\theta_f = 0 + \frac{1}{2}(8.99 \text{ rev/sec} + 3.56 \text{ rev/sec})(4473 \text{ sec})$$

$$\theta_f = 2.8 \times 10^4 \text{ rad}$$

ดังนั้น แผ่น CD หมุนไปทั้งหมด 2.8×10^4 รอบ

ง. ระยะทางที่แสงเลเซอร์เคลื่อนที่วนรอบแผ่น CD

$$x_f = v_i t$$

$$x_f = (1.3 \text{ m/s})(4473 \text{ s})$$

$$x_f = 5.8 \times 10^3 \text{ m}$$

ดังนั้น ระยะทางในการเคลื่อนที่ของแสงเลเซอร์ เท่ากับ $5.8 \times 10^3 \text{ m}$

จ. จาก

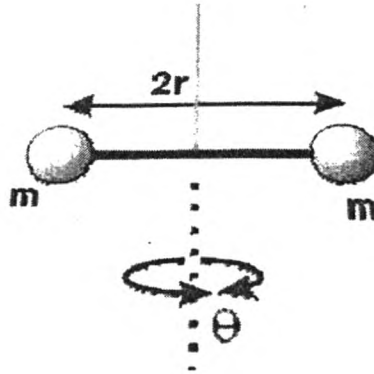
$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

$$\alpha = \frac{22.4 \text{ rad/s} - 56.5 \text{ rad/s}}{4473 \text{ s}}$$

$$\alpha = -7.6 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.3 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของมวล 2 ก้อนที่เชื่อมต่อกันด้วยแท่งโลหะเบาดังรูป



วิธีทำ จาก

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

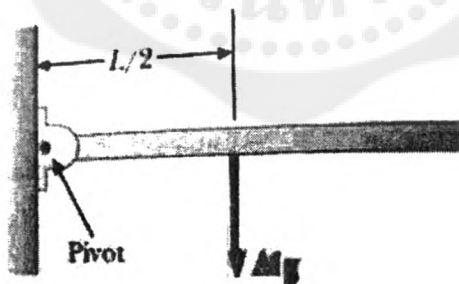
$$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อย $I = 2mr^2$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.4 แท่งวัตถุยาว L มวล M หมุนได้อย่างอิสระในแนวตั้งรอบจุดหมุนที่ตรึงอยู่ที่ผนังดังรูป ถ้าปล่อยแท่งวัตถุให้ตกลงมาในแนวดิ่ง จงหา

- ก. ความเร่งเชิงมุม (α) ของแท่งวัตถุนี้
ข. ความเร่งเชิงเส้น (a) ที่ปลายของแท่งวัตถุนี้



วิธีทำ

ก. จาก

$$\alpha = \frac{\tau}{I} \quad (1)$$

เมื่อ

$$\tau = r \times F$$

จะได้

$$\tau = \frac{L}{2} \times mg$$

$$\tau = \frac{1}{2} Lmg \sin \theta$$

$$\tau = \frac{mgL}{2} \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 \quad (3)$$

แทนสมการ (2) และสมการ (3) ในสมการ (1) ได้

$$\alpha = \frac{Mg(\frac{L}{2})}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \quad (4)$$

ดังนั้นความเร่งเชิงมุมของวัตถุแท่งนี้ $\alpha = \frac{3g}{2L}$

ข. ความเร่งเชิงเส้นที่ปลายแท่งวัตถุ (a_t) นี้หาได้จากสมการ

$$a_t = \alpha r$$

จะได้

$$a_t = \alpha L \quad (5)$$

แทนสมการ (4) ในสมการ (5) ได้

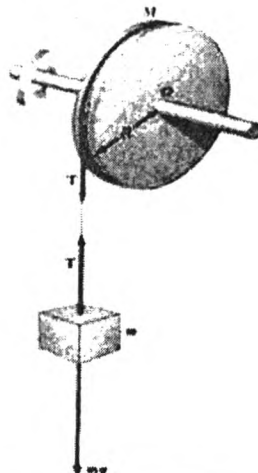
$$a_t = \left(\frac{3g}{2L}\right)L = \frac{3}{2}g$$

ดังนั้นความเร่งเชิงเส้นที่ปลายขวามือสุด (a_t) = $\frac{3}{2}g$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.5 รอกมวล M รัศมี และมีโมเมนต์ความเฉื่อย I ติดตั้งกับแกนหมุนในแนวราบ ดังรูป มีเชือกคล้องผ่านรอก ปลายด้านหนึ่งของเชือกมีมวล m ผู้กคิคืออยู่จงหา

- แรงดึงเชือก (T)
- ความเร่งเชิงเส้น (a) ของมวล m
- อัตราเร่งเชิงมุม (α) ในการหมุนของรอก



วิธีทำ ก. พิจารณาที่รอก

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha \\ TR &= I\alpha \\ \alpha &= \frac{TR}{I}\end{aligned}\quad (1)$$

จะได้ความเร่งเชิงมุมของรอก

พิจารณาที่มวล m

จาก

$$\begin{aligned}\sum F_y &= ma \\ mg - T &= ma \\ a &= \frac{mg - T}{m}\end{aligned}\quad (2)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งเชิงเส้น (a) กับความเร่งเชิงมุม (α) คือ

$$a = \alpha R \quad (3)$$

แทนค่าต่างๆในสมการ(3) ได้

$$\begin{aligned}\frac{mg - T}{m} &= \left(\frac{TR}{I}\right)R \\ \frac{mg - T}{m} &= \frac{TR^2}{I} \\ mgI - TI &= TR^2m \\ TR^2m + TI &= mgI \\ T(mR^2 + I) &= mgI \\ T &= \frac{mgI}{(I + mR^2)} \\ T &= \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}\end{aligned}$$

ดังนั้น แรงดึงในเส้นเชือก

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

ข. เมื่อแทนค่าสมการ (4) ในสมการ (3) จะได้

$$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$$

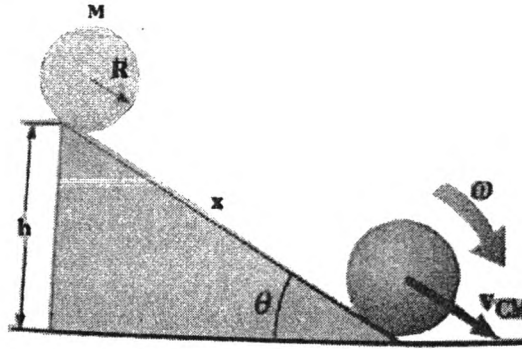
ค. อัตราเร่งเชิงมุม

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a}{R} \\ \alpha &= \frac{g}{R + I/mR}\end{aligned}$$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.6 วัตถุรูปทรงกลมตันมวล M รัศมี R กลิ้งลงมาตามพื้นเอียง ซึ่งมีความสูง h จงหา

- อัตราเร็วเชิงเส้น (v_{CM}) ของวัตถุที่ปลายพื้นเอียง
- อัตราเร่งเชิงเส้น (a_{CM}) ของการเคลื่อนที่



วิธีทำ

- สามารถหาอัตราเร็วเชิงเส้น (v_{CM}) ของวัตถุที่กลิ้งได้ จากสมการ

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}} \right]^{1/2}$$

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2}} \right]^{1/2}$$

จะได้ว่า

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad (1)$$

จาก

$$h = x \sin \theta \quad (2)$$

แทนสมการ (2) ใน สมการ (1) จะได้

$$\text{ดังนั้น อัตราเร็วเชิงเส้นของวัตถุ } (v_{CM}) \text{ เท่ากับ } \sqrt{\frac{10gx \sin \theta}{7}}$$

- หาความเร่ง (a_{CM}) ได้จากสมการ

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad (3)$$

เมื่อความเร็วเริ่มต้น = 0 จะได้

$$v^2 = 2as$$

$$v_{CM}^2 = 2a_{CM}x$$

ดังนั้น
$$a_{CM} = \frac{v_{CM}^2}{2x} \quad (4)$$

แทนค่า v_{CM} ในสมการ (4) ได้

$$a_{CM} = \frac{10gx \sin \theta}{7}$$

$$a_{CM} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

อัตราเร่งเชิงเส้นเท่ากับ $\frac{5}{7} g \sin \theta$

Ans

ตัวอย่างที่ 17.7 ถ้าช่วงแรกของการโยนลูกโบว์ลิ่งออกไป ลูกโบว์ลิ่งไถลไปอัตราเร็วต้น v_0 โดยการไม่มีการกลิ้งจงแสดงว่าลูกโบว์ลิ่งจะเริ่มกลิ้งโดยไม่มีไถลเมื่ออัตราเร็วลดลงเป็น $\frac{5}{7} v_0$

วิธีทำ

ให้ F เป็นแรงเสียดทานที่พื้นกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง
การคลที่แรงเสียดทานกระทำต่อลูกโบว์ลิ่ง คือ

$$Ft = m(v_0 - v) \quad (1)$$

ลูกโบว์ลิ่งจะกลิ้งโดยไม่มีไถลเมื่อ

$$\tau = I\alpha$$

$$Fr = \left[\frac{2}{5} mr^2 \right] \left[\frac{\omega}{t} \right]$$

$$Fr = \left[\frac{2}{5} mr^2 \right] \left[\frac{v}{r} \right] \left[\frac{1}{t} \right]$$

$$F = \frac{2}{5} \frac{mv}{t} \quad (2)$$

ดังนั้น ลูกโบว์ลิ่งจะเริ่มกลิ้งเมื่อแรงเสียดทานของพื้น

$$= \frac{2}{5} \frac{mv}{t}$$

แทนสมการ (2) ในสมการ (1) ได้

$$\left[\frac{2}{5} \frac{mv}{t} \right] [t] = m(v_0 - v)$$

$$\frac{2}{5} v = v_0$$

ได้

$$v = \frac{5}{7} v_0$$

Ans

บทที่18 จลศาสตร์ในระบบของวัตถุทรงรูป : งานและพลังงาน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้ :

- ใช้ทฤษฎีพลังงานจลน์ของวัตถุทรงรูปและกำหนดทิศทางการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำที่เกิดขึ้นได้
- ประยุกต์ใช้หลักการงานและพลังงานมาแก้ไขปัญหาจลศาสตร์ในระบบของวัตถุทรงรูป ที่ก่อให้เกิดแรงความเร็ว และการเปลี่ยนแปลง
- แสดงการอนุรักษ์พลังงานโดยการแก้ปัญหাজลศาสตร์ในระบบของวัตถุทรงรูป

กิจกรรมการเรียนการสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หลิมบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

18.1 พลังงานจลน์

- การเคลื่อน เมื่อวัตถุทรงรูปมวล m เคลื่อนที่ในแนววิถีตรงหรือวิถีโค้ง ดังนั้นพลังงานจลน์ที่นั้นเกิดขึ้นคือ

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 \quad (18.1)$$

โดยที่ v_G คือ ขนาดความเร็ว ในการเคลื่อนของวัตถุ * v กรณีความเร็วที่เกิดขึ้นทันทีทันใด T คือ การเคลื่อนที่ของพลังงานจลน์

- การหมุนรอบแกนคงที่ เมื่อวัตถุทรงรูปหมุนรอบแกนคงที่ที่กวาดผ่านจุด O , พลังงานจลน์และวัตถุหาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (18.2)$$

เมื่อ ω คือความเร็วเชิงมุมของวัตถุและ I_G โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z ที่ตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ผ่านจุด O กรณีนี้ T คือ ผลบวกของพลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนของวัตถุ

$\frac{1}{2} I_G \omega^2$ กับพลังงานจลน์ที่เกิดจากการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น $\frac{1}{2} I_G \omega^2$ อย่างไรก็ตาม เมื่อการเคลื่อนที่รอบจุด O ในแต่ละครั้ง v_G ที่หาได้ ($v_G = r_G \omega$) ซึ่งใช้กฎของ แกนขนาน, $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$

- การเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ พลังงานจลน์ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ จะเขียนได้เป็น .

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (18.3)$$

ในกรณีที่ T คือ ผลรวมของพลังงานจลน์ที่เกิดจากการเคลื่อนของวัตถุ $\frac{1}{2} m v_G^2$ และพลังงานจลน์ ที่เกิดจากการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ $\frac{1}{2} I_G \omega^2$

- วัตถุที่เป็นระบบเชื่อมต่อ เนื่องจากพลังงานเป็นสเกลาร์ ดังนั้นพลังงานจลน์ทั้งหมดของวัตถุที่เป็นระบบเชื่อมต่อกัน จะมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์ของวัตถุทุกชิ้น ที่มีการเคลื่อนที่โดยพลังงานจลน์ของวัตถุแต่ละชิ้นขึ้นอยู่กับชนิดการเคลื่อนที่

18.2 งานเนื่องจากแรง

- งานเนื่องจากแรงไม่คงที่ ถ้ามีแรงภายนอก F กระทำต่อวัตถุทรงรูป งานที่กระทำโดยแรงดังกล่าวที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ ระยะทาง s หาได้จาก

$$U_F = \int_s F \cos \theta ds \quad (18.4)$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ด้านปลายของแรง และเวกเตอร์ของการกระจัด

- งานเนื่องจากแรงคงที่ ถ้ามีแรงภายนอก F_C ที่กระทำต่อวัตถุทรงรูป เป็นแรงที่มีขนาดคงที่ F_C และมีทิศทางในการกระทำคงที่เป็น θ ได้สมการของงานเนื่องจากแรงคงที่เป็น

$$U_{F_C} = (\int_S F \cos \theta) s \quad (18.5)$$

เมื่อ $F_C \cos \theta$ เป็นขนาดของแรงย่อยที่มีทิศทางเช่นเดียวกับทิศทางของการกระจัด

- งานเนื่องจากน้ำหนัก น้ำหนักของวัตถุจะทำให้เกิดงานได้ก็ต่อเมื่อ จุดศูนย์กลางมวล G ของวัตถุที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือการกระจัดตามแนวตั้ง Δy . ถ้าการกระจัดของวัตถุมีทิศทางขึ้นจะมีงานเนื่องจากน้ำหนักมีเครื่องหมายเป็นลบ

$$U_w = -W\Delta y \quad (18.6)$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าการกระจัดมีทิศทางลง ($-\Delta y$) , จะมีงานเนื่องจากน้ำหนักมีเครื่องหมายเป็นบวก

$$U_w = W\Delta y \quad (18.7)$$

- งานเนื่องจากแรงสปริง ในกรณีที่วัตถุทรงรูปทำด้วยสปริงเชิงเส้น ดังนั้นแรงสปริง $F = ks$ ที่กระทำต่อวัตถุจะทำให้เกิดงาน ไม่ว่าสปริงนั้นจะถูกดึงให้ยืด หรือกดให้หดจากตำแหน่ง S_1 ไปเป็นตำแหน่ง S_2 ทั้งสองกรณีงานเนื่องจากแรงสปริงจะมีเครื่องหมายเป็นลบ (เพราะว่าการกระจัดของวัตถุจะมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของแรงสปริงเสมอ) :

$$U_s = -\frac{1}{2} k (s_2^2 - s_1^2) \quad , \quad |S_2| > |S_1| \quad (18.8)$$

- แรงที่ไม่เกิดงาน แรงภายนอกที่มาจากวัตถุทรงรูป ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ เราพบว่าบางแรงทำให้เกิดงาน และบางแรงไม่ทำให้เกิดงาน ซึ่งแรงที่ไม่ทำให้เกิดงานนี้ จะเป็นแรงที่กระทำต่อจุดที่อยู่กับที่บนวัตถุ หรือเป็นแรงที่มีทิศทางกระทำตั้งฉากกับทิศทางของการกระจัด ตัวอย่างเช่น แรงปฏิกิริยาดังฉากที่พื้นกระทำต่อวัตถุนั้นจะเคลื่อนไปตามพื้นผิวที่อยู่กับที่และน้ำหนักของวัตถุเมื่อจุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนไปตามระนาบแนวระดับ

18.3 งานเนื่องจากแรงคู่ควบ

เมื่อวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงคู่ควบ เกิดการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ ซึ่งแรงคู่ควบจะทำให้เกิดงานเมื่อวัตถุหมุนเคลื่อนที่ในระนาบแบบหมุนกวาดเป็นมุมจำกัด θ ใดๆ มีหน่วยเป็น เรเดียน (radius) จาก θ_1 ไป θ_2 ดังนั้นงานเนื่องจากโมเมนต์คู่ควบ คือ

$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (18.9)$$

ถ้าโมเมนต์คู่ควบ M มีขนาดคงที่ดังนั้น

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \quad (18.10)$$

ซึ่งงานที่เกิดขึ้นจะเป็นบวกเมื่อ M และ $(\theta_2 - \theta_1)$ มีทิศทางเดียวกัน

18.4 หลักการของงานและพลังงาน

หลักการของงานและพลังงานของวัตถุคงรูปจะได้

$$\sum T_i + U_{1-2} = T_2 \quad (18.11)$$

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ปัญหา

หลักการของงานและพลังงานเหมาะสำหรับประยุกต์ใช้กับปัญหาจลนศาสตร์ที่ประกอบด้วยความเร็ว แรงและการกระจัด เนื่องจากเทอมต่างๆ เหล่านั้นเป็นเทอมในสมการของหลักการของงานและพลังงาน เราสามารถวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้

• งาน(ผ้งวัตถุอิสระ)

- เขียนผ้งวัตถุอิสระของวัตถุที่กึ่งกลางของเส้นทางเดิน ที่แสดงแรงทุกแรงและโมเมนต์คู่ควบที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่และเกิดงาน
- สำหรับแรงที่ไม่เกิดงานจะเป็นแรงที่มีทิศตั้งฉากกับทิศของการกระจัดของวัตถุ
- แรงที่กระทำต่อวัตถุเป็นฟังก์ชันของการกระจัด จะได้งานโดยการอินทิเกรต
- ผลรวมของงานเนื่องจากแรงต่างๆ เป็นการบวกทางพีชคณิต จึงจำเป็นต้องคำนึงถึงเครื่องหมายบวกหรือลบของแต่ละงานด้วย โดยงานจะมีเครื่องหมายบวกเมื่อแรงหรือโมเมนต์คู่ควบ มีทิศทางของการกระจัดหรือการหมุนของวัตถุและมีเครื่องหมายเป็นลบมีทิศทางตรงกันข้าม

• หลักการของงานและพลังงาน

- ประยุกต์ให้หลักการของงานและพลังงาน $\sum T_i + U_{1-2} = T_2$ ซึ่งเป็นสมการสเกลาร์ที่เหมาะสมสำหรับคำนวณเอาตัวแปรไม่ทราบค่าเพียงค่าเดียว เมื่อนำไปประยุกต์ใช้หลักการนี้กับวัตถุคงรูปชนิดเดียว

18.5 การอนุรักษ์พลังงาน

สำหรับระบบของแรงที่กระทำ ต่อวัตถุคงรูปมีเฉพาะแรงอนุรักษ์ที่กระทำหลักการของการอนุรักษ์พลังงาน ($T_1 + V_1 = T_2 + V_2$) นิยมนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหา แทนการแก้ปัญหาโดยหลักการของงาน และพลังงาน เนื่องจากแรงอนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่หรือฟังก์ชันจุด ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นกับตำแหน่งสุดท้ายของวัตถุ

วิธีการสำหรับการวิเคราะห์ปัญหา

สมการของการอนุรักษ์พลังงาน เหมาะสำหรับการประยุกต์ใช้กับปัญหาจลศาสตร์ที่ประกอบด้วยความเร็วการกระจัด และระบบแรงอนุรักษ์ โดยมีวิธีวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

• พลังงานศักย์

- เขียนแผนภาพที่แสดงที่วัตถุที่ตำแหน่งเริ่มต้นและสุดท้ายบนเส้นทางการเคลื่อนที่
- ถ้าจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ G มีการกระจัดตามแนวตั้ง ให้กำหนดแนวระดับอ้างอิงเพื่อใช้วัดค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุ V_g
- ระดับแนวตั้ง y_G ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุจากแนวระดับอ้างอิง และระยะที่ยึดหรือถูกทอดของสปริง สามารถคำนวณหาได้จาก รูปทรงของเลขาคณิต และระยะที่โจทย์กำหนดให้อื่นๆบนผังภาพทั้งสอง
- พลังงานศักย์ของวัตถุ $V = V_g + V_e$. โดยที่ $V_g = W y_G$, ซึ่งอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ แต่ $V_e = \frac{1}{2} k s^2$ จะเป็นบวกเสมอ

• พลังงานจลน์

- พลังงานจลน์เกิดจากของวัตถุ 2 ชิ้น บอกถึงการเคลื่อนของพลังงานจลน์, $\frac{1}{2} T = \frac{2}{g} m v$ และพลังงานจลน์ของการหมุน, $T = \frac{1}{2} I_G \omega^2$
- ผังของพลังงานจลน์สำหรับความเร็วอาจใช้หา v_G และ ω หรือความสัมพันธ์ของปริมาณ

• การอนุรักษ์พลังงาน

- ประยุกต์ใช้การอนุรักษ์พลังงาน $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

ข้อเสนอแนะและคำแนะนำ

- พิจารณาสรุป 16.5 ถึง 16.7 อาจช่วยในการแก้ปัญหาของพลังงานจลน์เพื่อวิเคราะห์จลศาสตร์ ของความเร็ว
- ปัญหาที่มีการอนุรักษ์แรง (น้ำหนักและสปริง) อาจแก้ปัญหาโดยการพลังงานเสียดทานหรือแรงโน้มถ่วงซึ่งขึ้นอยู่กับความเร็วหรือความเร่ง (ในส่วนของงานที่กระทำโดยแรงที่ไม่มีการเปลี่ยนรูปของพลังงานภายในที่กระจายออกไปรอบๆ) ดังนั้นจึงใช้กฎการแก้ปัญหาของงานและพลังงาน

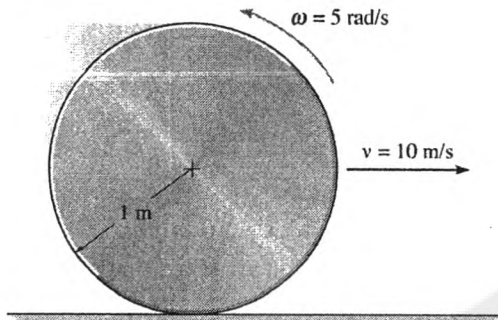
คำถามทบทวนท้ายบท

1. แสดงถึงความแตกต่างของงานและพลังงาน เมื่อนำไปใช้กับปัญหาของวัตถุคงรูปที่เกิดปัญหาของอนุภาค (บทที่ 14)
2. วิธีใช้ในการคำนวณงานการเปลี่ยนแปลงภายนอกของแรง F กระทำต่อวัตถุคงรูปเคลื่อนที่เป็นความยาว S
3. วิธีใช้คำนวณหาโมเมนต์แรงคู่ควบ M ของวัตถุคงรูปหมุนผ่านเป็นมุม θ จาก θ_1 ถึง θ_2
4. เมื่อใดจะใช้กฎของงานและพลังงานจะใช้ในการแก้ปัญหา
5. อะไรคือการอนุรักษ์แรง ยกตัวอย่างของการอนุรักษ์แรง
6. อธิบายน้ำหนักของวัตถุในการอนุรักษ์แรง
7. ยกตัวอย่างแรงไม่อนุรักษ์และอธิบาย
8. อะไรคือพลังงานกลพร้อมยกตัวอย่าง
9. เมื่อเกิดแรงอนุรักษ์พลังงานสมการใดที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางจลนศาสตร์

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 18 จลศาสตร์ในระบบของวัตถุทรงรูป : งานและพลังงาน

ตัวอย่างที่ 18.1 แผ่นดิสก์มีมวล 30 kg เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วเชิงมุม 5 rad/s เมื่อความเร็วจุดศูนย์กลางมวล เท่ากับ 10 m/s จงคำนวณหาพลังงานจลน์ของแผ่นดิสก์ในขณะนี้

วิธีทำ



$$T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m v_G^2$$

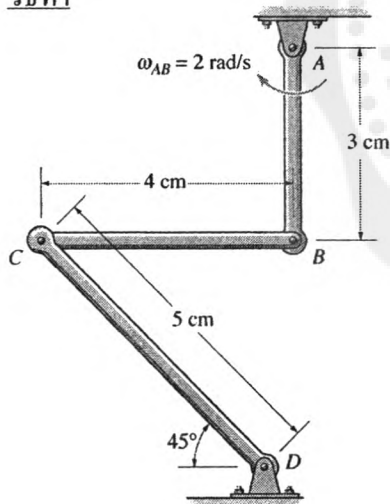
$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (30 \text{ kg}) (1 \text{ m})^2 \right] (5 \text{ rad/s})^2 + \frac{1}{2} (30 \text{ kg}) (10 \text{ m/s})^2$$

$$= 1687.5 \text{ J}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.2 แขน AB เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_{AB} = 2 \text{ rad/s}$ ถ้าแขนแต่ละแขนมีมวลต่อความยาวเท่ากับ 0.5 kg/cm จงคำนวณหาพลังงานจลน์ของระบบ

วิธีทำ



คำนวณหา $\omega_{BC}, \omega_{DC}, v_G$

เมื่อ $v_B = (3 \text{ cm})(2 \text{ rad/s}) = 6 \text{ cm/s}$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{BC}} = \frac{6 \text{ cm/s}}{4 \text{ cm}} = 1.5 \text{ rad/s}$$

$$v_C = r_{C/IC} \omega_{BC} = (4\sqrt{2} \text{ cm})(1.5 \text{ rad/s}) = 8.4853 \text{ cm/s}$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_C}{r_{DC}} = \frac{8.4853 \text{ cm/s}}{5 \text{ cm}} = 1.697 \text{ rad/s}$$

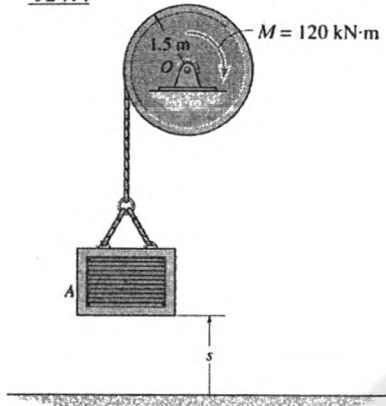
$$v_G = r_{G/IC} \omega_{BC} = (\sqrt{2^2 + 4^2}) (1.5 \text{ rad/s}) = 6.7082 \text{ cm/s}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (3 \text{ cm}) (0.5 \text{ kg/cm}) \left(\frac{3}{100} \text{ m} \right)^2 \right] (2 \text{ rad/s})^2 + \frac{1}{2} (4 \text{ cm}) (0.5 \text{ kg}) \left(\frac{6.7082}{100} \text{ m} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} (4 \text{ cm}) (0.5 \text{ kg}) \left(\frac{4}{100} \text{ m} \right)^2 \right] (1.5 \text{ rad/s})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (5 \text{ cm}) (0.5 \text{ kg}) \left(\frac{5}{100} \text{ m} \right)^2 \right] (1.697)^2 \\ &= 0.0087 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.3 มอเตอร์จากแหล่งจ่ายมีแรงบิดให้ดรัม $M = 120 \text{ kNm}$ ถ้าดรัมมีน้ำหนัก 30 kN (ประมาณ 3 tonnes) และรัศมีไจเรชันจากจุด O เป็น $k_O = 0.8 \text{ m}$ จงคำนวณหาความเร็วของลึงไม้ A ที่มีน้ำหนัก 15 kN (ประมาณ 1500 kg) หลังจากเคลื่อนที่ไป $s = 4 \text{ m}$ จากจุดเริ่มต้น ไม่คิดมวลของเชือก

วิธีทำ



พลังงานจลน์

เนื่องจากดรัมหมุนรอบจุดศูนย์กลาง O ดังนั้นความเร็วเชิงมุมของดรัมและความเร็วในการเคลื่อนที่ของลึงไม้

สามารถหาได้ โดย $\omega_D = \frac{v_A}{r_D} = \frac{v_A}{1.5 \text{ m}} = (0.6667 \text{ m})v_A$

เมื่อลึงไม้เคลื่อนขึ้น $s = 4 \text{ m}$ มุมการกระจัดของดรัมหาได้

$$\text{โดย } \omega_D = \frac{s}{r_D} = \frac{4 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = 2.667 \text{ rad}$$

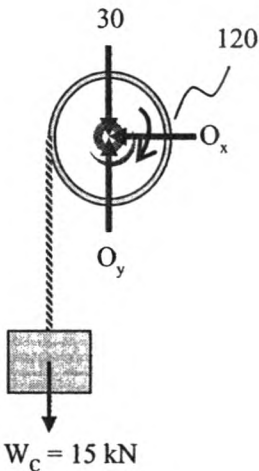
โมเมนต์ความเฉื่อยของดรัมที่จุดศูนย์กลาง O คือ

$$\omega_D = mk_O^2 = \left(\frac{30000 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} \right) (0.8)^2 = 1957 \text{ kg-m}^2$$

ดังนั้น

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} (1957 \text{ kg-m}^2) [(0.6667 \text{ m})v_A]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{15000 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} \right) v_A^2$$



งานเนื่องจากน้ำหนักของลึงไม้จะเป็นลบ เนื่องจากกระทำในทิศตรงข้ามกับการกระจัด sW ในขณะที่เดียวกัน งานเนื่องจากโมเมนต์ดรัมจะเป็นบวก เนื่องจากมีทิศเดียวกับมุมกระจัด

ที่จุดศูนย์กลาง O ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา O_x, O_y และงานเนื่องจากน้ำหนักของดรัม ไม่ทำให้เกิดงาน เพราะว่าแรงทั้งสามนี้ไม่ได้ทำให้งานกลมเคลื่อนที่หรือมีการกระจัด

$$\text{ดังนั้น } \sum U_{1-2} = M\theta - W_C s_C$$

$$= (120000 \text{ Nm})(2.667 \text{ rad}) - (15000 \text{ N})(4 \text{ m})$$

$$= 260040 \text{ J}$$

หลักการของงานและพลังงาน

$$\{T_1\} + \{\sum U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

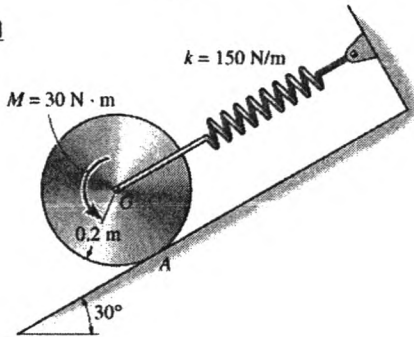
$$\{0\} + \{260040 \text{ J}\} = \left\{ \frac{1}{2} (1957 \text{ kg-m}^2) [(0.6667 \text{ m})v_A]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{15000 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} \right) v_A^2 \right\}$$

$$v_A = 13.5 \text{ m/s}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.4 ดิสก์มวล 20 kg ถูกยึดด้วยสปริงในลักษณะสมดุล เกิดโมเมนต์คู่ควบ $M = 30 \text{ Nm}$ ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาระยะทางที่ดิสก์เคลื่อนไปได้ไกลที่สุดบนทางลาด โดยวัดจากตำแหน่งสมดุล ก่อนที่จะหยุด กำหนดให้ดิสก์หมุนโดยปราศจากการลื่น

วิธีทำ



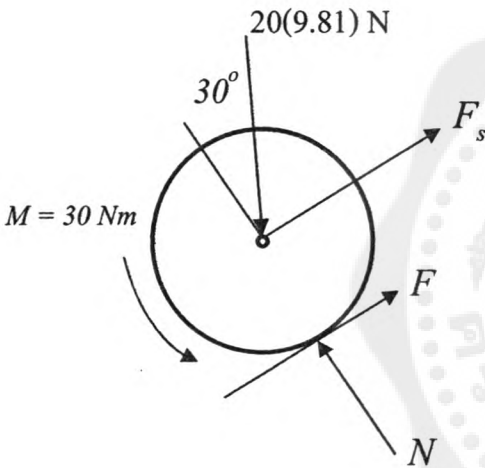
พลังงานจลน์

$$T_1 = 0 \quad \text{และ} \quad T_2 = 0$$

งานและพลังงานศักย์

$$\sum M_A = 0;$$

$$-F_s(0.2 \text{ m}) + (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ (0.2 \text{ m}) = 0$$



$$F_s = 98.1 \text{ N}$$

$$s_1 = \frac{98.1 \text{ N}}{150 \text{ N/m}} = 0.654 \text{ m}$$

$$\text{เมื่อ} \quad \theta = \frac{s}{0.2 \text{ m}}$$

$$\sum U_{1-2} = (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(s) \sin 30^\circ + (30 \text{ Nm}) \left(\frac{s}{0.2 \text{ m}} \right) - \left[\frac{1}{2} (150 \text{ N/m})(s + 0.654 \text{ m})^2 \right]$$

หลักการของงานและพลังงาน

$$\{T_1\} + \{\sum U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(s) \sin 30^\circ + (30 \text{ Nm}) \left(\frac{s}{0.2 \text{ m}} \right) - \left[\frac{1}{2} (150 \text{ N/m})(s + 0.654 \text{ m})^2 \right] = \{0\}$$

$$(248.1)s = 7.5[s^2 + (1.308)s + 0.4277] - 32.08$$

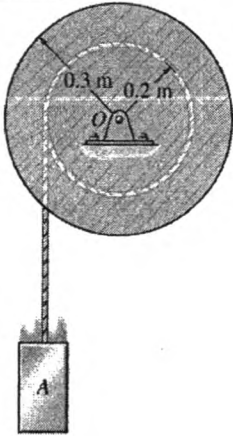
$$248.1 = (75)s + 98.1$$

$$s = 2.00 \text{ m}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.5 Spool มีมวล 50 kg และรัศมีไจเรชันรอบจุด O เป็น $k_O = 0.280$ m ถ้าบล็อก A มีมวล 20 kg ถูกปล่อยลง จงคำนวณหาระยะทางที่บล็อก A เคลื่อนที่ลงเพื่อให้ความเร็วเชิงมุมของ Spool เป็น $\omega = 5 \text{ rad/s}$. และความตึงของเส้นเชือกในขณะที่บล็อกเคลื่อนที่ โดยไม่คำนึงถึงมวลของเชือก

วิธีทำ



พลังงานศักย์

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.280 \text{ m})^2(5 \text{ rad/s})^2 - (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)s$$

พลังงานจลน์

$$v_C = (0.2 \text{ m})\omega = (0.2 \text{ m})(5 \text{ rad/s}) = 1 \text{ m/s}$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(20 \text{ kg})(1 \text{ m/s})^2$$

การอนุรักษ์ของพลังงาน

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}(20 \text{ kg})(1 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.280 \text{ m})^2(5 \text{ rad/s})^2 - (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)s$$

$$s = 0.30071 \text{ m}$$

หลักการของงานและพลังงาน

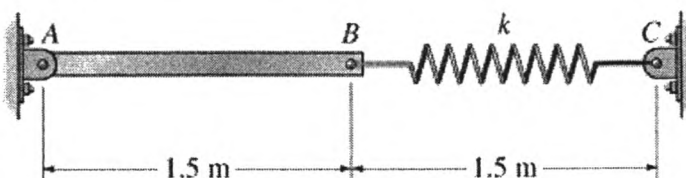
$$\{T_1\} + \{\sum U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$0 + (20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.30071 \text{ m}) - T(0.30071 \text{ m}) = \frac{1}{2}(20 \text{ kg})(1 \text{ m/s})^2$$

$$T = 163 \text{ N}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.6 เมื่อ slender มวล 10 kg ตามแนวนอน AB ตำแหน่งหยุดนิ่งและสปริงไม่ขยาย จงคำนวณหาค่าความแข็งของสปริง k จาก เมื่อ slender เคลื่อนที่ลงเป็นมุม 90°



วิธีทำ

พลังงานศักย์

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = \frac{1}{2}k(s_2 - s_1)^2 - Wy_1$$

$$V_2 = \frac{1}{2}k(3.3541 - 1.5 \text{ m})^2 - (98.1 \text{ N})\left(\frac{1.5 \text{ m}}{2}\right)$$

พลังงานจลน์

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = 0$$

การอนุรักษ์ของพลังงาน

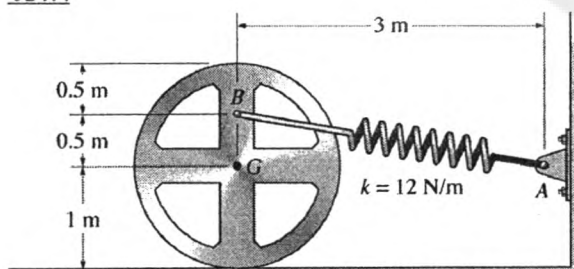
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(3.3541 - 1.5 \text{ m})^2 - (98.1 \text{ N})\left(\frac{1.5 \text{ m}}{2}\right)$$

$$k = 43.8 \text{ N/m}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.7 ล้อมีมวล 50 kg มีรัศมีไจเรชันเนื่องจากจุดศูนย์กลาง G คือ $k_G = 0.7 \text{ m}$ ถ้าหมุนโดยไม่มีการลื่นไถล จงคำนวณหาความเร็วเชิงมุมเมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° จากตำแหน่งที่แสดงในรูป สปริงมีค่าความแข็งของสปริง $k = 12 \text{ N/m}$ และมีความยาว 0.5 mm

วิธีทำ

พลังงานศักย์

$$V_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = \frac{1}{2}(12 \text{ N/m})(\sqrt{3^2 + 0.5^2} - 0.5 \text{ m})^2$$

$$V_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(12 \text{ N/m})(0.9292 - 0.5 \text{ m})^2$$

พลังงานจลน์

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}I_G\omega_2^2 + \frac{1}{2}m(v_G)_2^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.7 \text{ m})^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(1\omega)^2$$

การอนุรักษ์ของพลังงาน

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

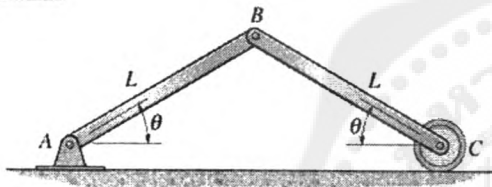
$$0 + \frac{1}{2}(12 \text{ N/m})(\sqrt{3^2 + 0.5^2} - 0.5 \text{ m})^2 = \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(0.7 \text{ m})^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2}(50 \text{ kg})(1\omega)^2 + \frac{1}{2}(12 \text{ N/m})(0.9292 - 0.5 \text{ m})^2$$

$$\omega = 1.01 \text{ rad/s}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 18.8 แท่ง 2 แท่งถูกปล่อยจากจุดยึดที่ตำแหน่ง θ จงคำนวณหาความเร็วเชิงมุมขณะที่แท่งทั้ง 2 อยู่ในแนวนอน ไม่คำนึงถึงมวลของลูกกลิ้ง C เมื่อแท่งแต่ละแท่งมีมวล m และความยาว L

วิธีทำ



พลังงานศักย์

$$V_1 = 2 \left(\frac{mgL}{2} \sin \theta \right) = mgL \sin \theta$$

$$V_2 = 0$$

พลังงานจลน์

$$(I_{AB})_A = (I_{BC})_C = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(I_{AB})_A \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}(I_{BC})_C \omega_{BC}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 = \frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

การอนุรักษ์ของพลังงาน

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + mgL \sin \theta = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 + 0$$

$$\omega_{AB} = \omega_{BC} = \omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \sin \theta}$$

Ans.

บทที่ 19 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป : การคลและโมเมนต์

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- พัฒนาสูตร โมเมนต์เชิงเส้นและโมเมนต์เชิงมุม
- ประยุกต์ใช้หลักการของการคลและโมเมนต์เชิงเส้นและเชิงมุมในการแก้ปัญหาจลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุทรงรูป ที่ประกอบด้วย แรง ความเร็ว และเวลา
- พิจารณาการประยุกต์อนุรักษ์โมเมนต์

กิจกรรมการเรียนการสอน

- แจกเอกสารประกอบการสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2)
โดยอาจารย์ธีรภัทร หล่มบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้นิสิตได้มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการ
สอบวัดผล

19.1 โมเมนตัมเชิงเส้นและเชิงมุม

- โมเมนตัมเชิงเส้น ปริมาณเวกเตอร์ของโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุคงรูป คือ

$$L = mv_G \quad (19.1)$$

ปริมาณเวกเตอร์ที่มีขนาด mv_G (หน่วย $\text{kg} \cdot \text{m/s}$) และมีทิศทางเดียวกับทิศทางของ ความเร็ว v_G

- โมเมนตัมเชิงมุม ปริมาณเวกเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุคงรูป คือ

$$H_G = I_G \omega \quad (19.2)$$

ปริมาณเวกเตอร์มีขนาดเป็น $I_G \omega$ (หน่วย $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$) และทิศทางจะถูกกำหนดโดยความเร็วเชิงมุม ซึ่งจะมีทิศตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนที่เสมอ

Note . โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุ สามารถคำนวณ $P \neq G$ ในกรณี :

$$H_P = I_G \omega + \text{โมเมนตัมของโมเมนตัมเชิงเส้น } mv_G \text{ รอบจุด } P \quad (19.3)$$

ผลการวิเคราะห์นำมาพิจารณากับการเคลื่อนที่ทั้ง 3 ลักษณะดังนี้

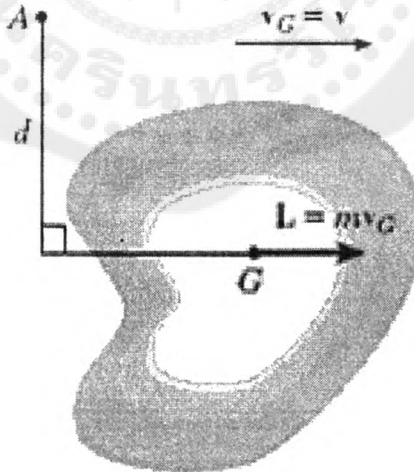
- การเลื่อน เมื่อวัตถุคงรูปเคลื่อนที่ ($\omega = 0$) เราคำนวณหาได้

$$L = mv_G \quad (19.4)$$

$$H_G = 0 \quad (19.5)$$

หรือโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด $A \neq G$

$$H_A = (d)(mv_G) \quad (19.6)$$

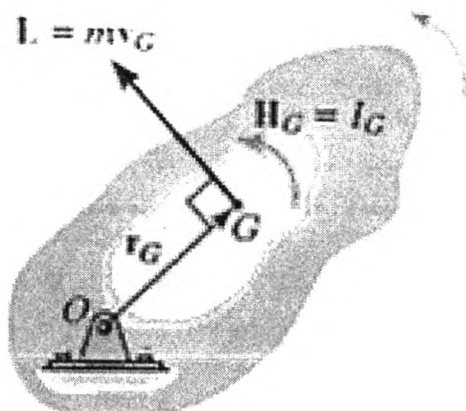


รูปที่ 19.1 Translation

- การหมุนรอบแกนคงที่ เมื่อวัตถุคงรูปหมุนรอบแกนคงที่ผ่านจุด O นั่นคือ

$$L = mv_G$$

$$H_O = I_O \omega \quad \text{หรือ} \quad H_O = I_O \omega \quad (19.7)$$



รูปที่ 19.2 การหมุนรอบแกนคงที่

- การเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ เมื่อวัตถุคงรูปเคลื่อนที่ในแนวระนาบ ($\omega = 0$) นั่นคือ

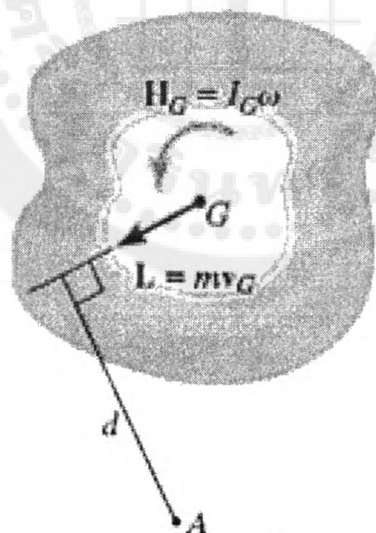
$$L = mv_G$$

$$H_G = I_G \omega$$

หรือรอบจุด $A \neq G$

$$H_A = I_G \omega + (d)(mv_G)$$

(19.8)



รูปที่ 19.3 การเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ

19.2 หลักของการคลและโมเมนตัม

- หลักของการคลและโมเมนตัม ผลบวกของการคลทั้งหมดที่เกิดจากการกระทำของระบบแรงภายนอก ที่กระทำต่อวัตถุในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 จะมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุในช่วงเวลาเดียวกัน นั่นคือ

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} F dt = m(v_G)_2 - m(v_G)_1 \quad (19.9)$$

• หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงเส้น ผลบวกของการคลเชิงมุมที่กระทำต่อวัตถุในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 จะมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุ ในช่วงเวลาเดียวกันนั้นคือ

- วัตถุเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G dt = I_G \omega_2 - I_G \omega_1 \quad (19.10)$$

- การหมุนรอบแกนคงที่ผ่านจุด O

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \dot{M}_O dt = I_O \omega_2 - I_O \omega_1 \quad (19.11)$$

• วัตถุเคลื่อนที่ในระนาบ $x-y$ เราสามารถเขียนหลักการของการคลและโมเมนตัมในรูปสมการสเกลาร์ ได้ 3 สมการ ดังนี้

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} m(v + Gx)_1 + F_x dt = m(v_{Gx})_2 \quad (19.12)$$

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} m(v_{Gy})_1 + F_y dt = m(v_{Gy})_2 \quad (19.13)$$

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} I_G \omega_1 + M_G dt = I_G \omega_2 \quad (19.14)$$

สมการแรกและสมการที่สอง เป็นหลักการของการคล และ โมเมนตัมเชิงเส้นในระนาบ $x-y$ และสมการที่สามเป็นหลักของการคลและโมเมนตัมเชิงมุมรอบแกน z ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล G

• ระบบวัตถุที่เชื่อมต่อของวัตถุ สมการ (19.0) สามารถประยุกต์ใช้กับระบบวัตถุที่เชื่อมต่อกันได้ เพื่อจัดการคลที่จุดเชื่อมต่อ เพราะเป็นการคลภายในระบบ

วิธีการสำหรับวิเคราะห์ปัญหา

หลักการของการคล และโมเมนตัมใช้ในการแก้ปัญหากลศาสตร์ ที่ประกอบด้วย ความเร็ว แรงและเวลาเนื่องจากเทอมเหล่านี้เป็นเทอมในสมการของหลักการดังกล่าว

• ผังวัตถุอิสระ

- กำหนดกรอบอ้างอิงเฉื่อย $x-y-z$ และเขียนผังวัตถุอิสระที่ประกอบด้วยแรงทั้งหมด และโมเมนต์คู่ควบที่ทำให้เกิดการคลต่อวัตถุ

- จากสภาพการเคลื่อนที่ที่กำหนดทิศความเร็วเริ่มต้นและสุดท้ายของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ V_G และความเร็วเชิงมุม ω ในกรณีที่ไม่นทราบสภาพการเคลื่อนที่ควรกำหนดให้ความเร็วย่อยมีทิศเช่นเดียวกับทิศบวกของแกนพิกัดอ้างอิง
- คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_G หรือ I_O
- สำหรับวิธีการวิเคราะห์วิธีอื่นสามารถทำได้โดยการเขียนผังภาพการคลและโมเมนตัมของวัตถุหรือวัตถุหลายชิ้นที่เชื่อมต่อเป็นระบบแต่ละภาพจะแสดงโครงร่างของวัตถุที่ประกอบด้วยข้อมูลที่ต้องการสำหรับเทอมทั้งสามในสมการ (19.0) ในกรณีพิจารณารอบจุดอื่นที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวล G หรือ O การเขียนผังการคลของโมเมนตัมจะช่วยในการหาเทอมของโมเมนตัมในหลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงมุม

หลักการคลและโมเมนตัม

- ประยุกต์ใช้สมการสเกลาร์ ทั้งสามของหลักการคลและโมเมนตัม
- แรงทุกแรงที่กระทำต่อวัตถุบนผังวัตถุอิสระจะทำให้เกิดการคล อย่างไรก็ตามจะมีบางแรงที่ไม่ทำให้เกิดงาน
- แรงคลที่เป็นฟังก์ชันของเวลา สามารถหาการคลได้โดยการอินทิเกรต
- ประยุกต์หลักการของการคลและโมเมนตัมเชิงมุม เพื่อขจัดแรงคลที่ไม่นทราบค่าที่กระทำทิศทางขนานหรือผ่านแกนร่วมกัน เพราะว่าโมเมนตัมของแรงเหล่านี้ มีค่าเป็นศูนย์รอบแกนดังกล่าว

จดคณิตศาสตร์

- ในบางปัญหาจำเป็นต้องการสมการมากกว่า 3 สมการ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ จึงจำเป็นต้องการหาสมการ ความสัมพันธ์ของความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลกับความเร็วเชิงมุมของวัตถุโดยอาศัยความรู้ด้านจลนศาสตร์

19.3 การอนุรักษ์โมเมนตัม

- การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ผลบวกของการคลเชิงเส้นทั้งหมดที่กระทำต่อระบบวัตถุทรงรูปเชื่อมต่อกันเป็นศูนย์ แสดงว่าโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบคงที่หรือระบบอนุรักษ์ จะได้สมการ

$$(\sum \text{system linear momentum})_1 = (\sum \text{system linear momentum})_2 \quad (19.15)$$

Note การคลเชิงเส้นจะต้องมีค่าน้อยมากหรือไม่เกิดการคล โดยแรงไม่เกิดการคลจะเกิดขึ้นเมื่อขนาดของแรงมีค่าน้อยมากแรงน้อยกระทำในช่วงเวลาสั้นๆ

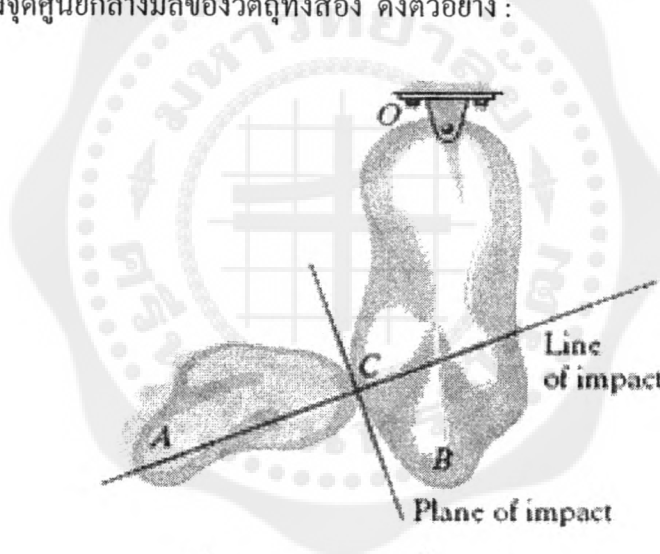
- การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุเชิงรูปที่เชื่อมต่อกันจะอนุรักษ์รอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ G หรือจุดคงที่ O เมื่อผลบวกของการคลเชิงมุมทั้งหมดที่เกิดจากแรงภายนอก ที่กระทำต่อระบบที่มีค่าเป็นศูนย์หรือมีค่าน้อยมากจนไม่เกิดการคลเพื่อพิจารณาจุดดังกล่าว ดังนั้นสมการ

$$(\sum \text{system angular momentum}) = (\sum \text{system angular momentum}) \quad (19.16)$$

Note โมเมนตัมเชิงมุมสามารถทำให้เกิดการอนุรักษ์ได้ แต่ไม่เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น กรณีเช่นนี้เกิดขึ้นเมื่อแรงภายนอกที่ทำให้เกิดแรงคลเชิงเส้น ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุหรือจุดคงที่ของการหมุน

19.4 การกระทบเยื้องศูนย์กลาง

- การกระทบเยื้องศูนย์กลาง เป็นการกระทบที่เส้นของการกระทบ ไม่ซ้อนหรือทับกันเส้นที่ลากเชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสอง ดังตัวอย่าง :



รูปที่ 19.4 การกระทบเยื้องศูนย์กลาง

วิธีสำหรับการวิเคราะห์ปัญหา

- โดยปกติแล้วปัญหาการกระทบกันของ 2 วัตถุ จะประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวคือ $(v_A)_2$ และ $(v_B)_2$, โดยกำหนดความเร็ว $(v_A)_1$ และ $(v_B)_1$ ให้ (หรือสามารถคำนวณหาได้โดยอาศัยความรู้ทางด้านจลนคณิตศาสตร์ หลักการของงานและพลังงาน และสมการของการเคลื่อนที่เป็นต้น) ในการแก้ปัญหาการกระทบจะประกอบด้วย 2 สมการ
 - สมการแรกจะเป็นการประยุกต์ของสมการอนุรักษ์ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งสอง สำหรับการกระทบของวัตถุ A และ B ทั้งสองเรากล่าวได้ว่า โมเมนตัมเชิงมุมอนุรักษ์รอบจุด O เพราะว่าการคลที่จุด C เกิดขึ้นภายในระบบและโมเมนตัมของการคลรอบจุด O มีค่าเป็นศูนย์(หรือการคลเชิงมุมเป็นศูนย์) ที่จุด O

- สมการที่ใช้ในการคำนวณจะเป็นสมการของสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e —

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \quad (19.17)$$

ข้อเสนอแนะและการแก้ปัญหา

- โมเมนตัม คือเวกเตอร์ขนาดและทิศทาง
- ขั้นตอนแรกในการประยุกต์ ใช้สมการคลและ โมเมนตัม, เขียนผังอิสระเส้นตรงของแรงและความคลเชิงมุมของวัตถุ
- ถ้าแรงที่เกิดการคล หรือ ไม่มีการคลของแรงกระทำต่อวัตถุในอนุภาคของทิศทางหรือปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนั้นการอนุรักษ์การคลจะเป็นเส้นตรง หรือผลเฉลยของโมเมนตัมเชิงมุมสืบเนื่องจากผังอิสระ(หรือผังของการคล) จะกำหนดทิศทางการคลของแรงหรือรอบแกน โมเมนตัมเชิงมุมของการคลเป็น

คำถามทบทวนท้ายบท

1. หลักการของโมเมนตัมเชิงเส้นคืออะไร
2. หลักการของโมเมนตัมเชิงมุมคืออะไร
3. ถูกหรือผิดเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปเคลื่อนเป็น โมเมนตัมเชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงมุมหาโดย

$$L = mv_G$$

$$H_A = 0$$

4. ถูกหรือผิดเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปตามระนาบทั่วไปเป็น โมเมนตัมเชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงมุมโดย

$$L = mv_G$$

$$H_A = I_A \omega$$

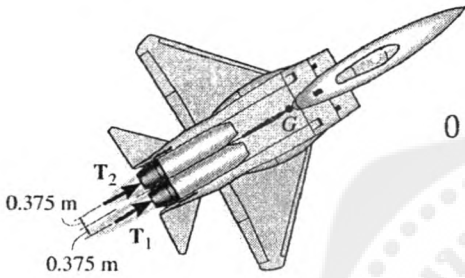
เมื่อ A คือจุดต่างๆบนวัตถุ

5. ในกรณีที่เชื่อมต่อของวัตถุ อะไรเป็นผลในการประยุกต์สมการของการคลและโมเมนตัมของวัตถุแยกจากกัน
6. อธิบายถึงหลักการแรงที่ไม่มีการคล
7. พิจารณานักว่ายน้ำหลังจากกระโดดจากกระดาน นักว่ายน้ำมีแขนและขาไว้ที่หน้าอกก่อนที่จะบิดตรงสู่ผิวน้ำ อธิบายการเกิดการคลและโมเมนตัม

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 19 จลนศาสตร์ในระนาบของวัตถุ : การคลและโมเมนตัม

ตัวอย่างที่ 19.1 นักบินขับเครื่องบิน F-15 ทำการควบคุมเครื่องบินโดยการบังคับคันที่ควบคุมน้ำมันในเครื่องยนต์ทั้งสองเครื่องซึ่งเครื่องบินมีน้ำหนัก 8500 N และรัศมีไจเรชันของ $k_G = 1.4 \text{ m}$ จุดศูนย์กลางมวลที่ G จงหาความเร็วที่วัตถุเคลื่อนที่ และความเร็วที่ไปยังจุดศูนย์กลาง G ที่ $t = 5 \text{ s}$ ซึ่งแรงดันที่ $T_1 = 25000 \text{ N}$ และ $T_2 = 4000 \text{ N}$ เครื่องบินบินด้วยอัตราความเร็วที่ 360 m/s โดยไม่คิดผลของการบินและการสูญเสียของเชื้อเพลิง

วิธีทำ



$$(+\curvearrowright) \quad (H_G)_1 + \sum \int M_G dt = (H_G)_2$$

$$0 + 25000(5)(0.375) - 4000(5)(0.375) = \left[\left(\frac{85000}{9.81} \right) (1.4) \right] \omega$$

$$\omega = 2.32 \text{ rad/s} \quad \text{Ans.}$$

$$(+\rightarrow) \quad m(V_{Gx})_1 + \sum \int F_x dt = m(V_{Gx})_2$$

$$\left[\frac{85000}{9.81} \right] (360) + 29000(5) = \left[\frac{85000}{9.81} \right] (V_G)_2$$

$$(V_G)_2 = 377 \text{ m/s} \quad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 19.2 แผ่นกลมสม่ำเสมอหนัก 30 kg และรัศมีไจเรชันของ $k_O = 0.25 \text{ m}$, บล็อก A น้ำหนัก 25 kg . และบล็อก B หนัก 10 kg . บล็อกทั้งสองถูกปล่อยลงมาจากจุดหยุดนิ่ง จงหาเวลาของบล็อก A ที่ปล่อยลงมาด้วยความเร็ว 2 m/s โดยกำหนดให้เชือกเป็นมวลเบา

วิธีทำ

จากโจทย์กำหนดให้

$$V_A = 2 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{2}{0.3} = 6.667 \text{ rad/s}$$

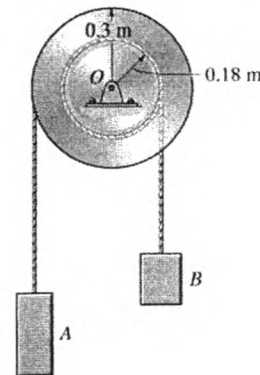
$$V_B = 6.667(0.18) = 1.20 \text{ m/s}$$

แทนค่าในสมการ

$$(+\curvearrowright) \quad (H_O)_1 + \sum \int M dt = (H_O)_2$$

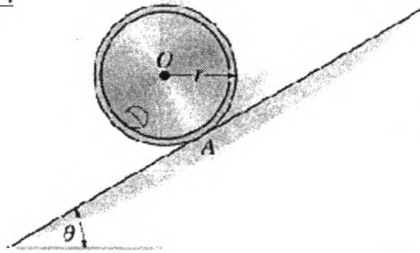
$$0 + 25(9.81)(0.3)t - 10(9.81)(0.18)(t) = 25(2)(0.3) + 30(0.25)^2(6.667) + 10(1.20)(0.18)$$

$$t = 0.530 \text{ s} \quad \text{Ans.}$$



ตัวอย่างที่ 19.3 ถังกลมมีมวลหนัก 70 kg. รัศมีที่ 300 mm. และรัศมีใจเรชันของ $k_o = 125$ mm. ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ที่และค่าความหนืดที่จุด A คือ $\mu = 0.4$ และ $\nu = 0.3$ จงอัตราความเร็วเชิงมุมที่วัตถุเคลื่อนไหวที่ 2 s หลังจากจุดเริ่มต้นที่ $\theta = 30$ องศา

วิธีทำ



$$(+\curvearrowright) \quad (H_A)_1 + \sum \int M_A dt = (H_A)_2$$

$$0 + 70(9.81)(\sin 30)(0.3)(2) = (70(0.125)^2 + 70(0.3)^2) \omega$$

$$\omega = 27.863 \text{ rad/s} = 27.9 \text{ rad/s}$$

$$(+\curvearrowleft) \quad m(v_x)_1 + \sum \int F_x dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 70(9.81)(\sin 30)(0.3)(2) - F(2) = 70(27.863)(0.3)$$

$$F = 50.79 \text{ N}$$

$$(+\curvearrowright) \quad m(v_x)_1 + \sum \int F_x dt = m(v_x)_2$$

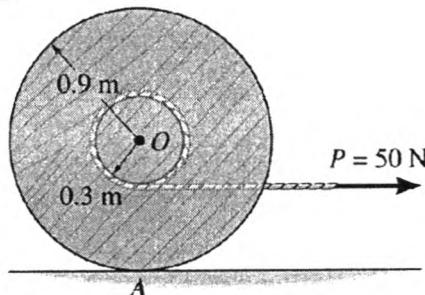
$$0 + M_D(2) - 70(9.81)(\cos 30)(2) = 0$$

$$N_D = 594.7 \text{ N}$$

$$F_{\max} = 0.4(594.7) = 237.87 \text{ N} > 50.79 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 19.4 แผ่นกลมสม่ำเสมอหนัก 300 N และรัศมีใจเรชันที่ $k_o = 0.45$ m. มีเคเบิลพันรอบแกนกลางของจานกลม และมีแรงดึงตามระดับขนาด $P = 50$ N ถ้าเริ่มจากจุดหยุดนิ่ง จงหาความเร็วเชิงมุมของจานกลมเมื่อเวลาผ่านไป 4 s โดยแผ่นกลมไม่ลื่นไถล

วิธีทำ



$$(+\uparrow) \quad m(v_y)_1 + \sum \int F_y dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_A(4) - 300(4) = 0$$

$$N_A = 300 \text{ N}$$

$$(+\rightarrow) \quad m(v_x)_1 + \sum \int F_x dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 50(4) - F_A(4) = \frac{300}{9.81} v_G$$

$$(+\curvearrowright) \quad (H_G)_1 + \sum \int M_G dt = (H_G)_2$$

$$0 + F_A(4)(0.9) - 50(4)(0.3) = \frac{300}{9.81} (0.45)^2 \omega$$

slipping occurs set

$$v_G = 0.9\omega$$

$$F_A = 23.3 \text{ N}$$

$$\omega = 3.88 \text{ rad/s}$$

Also,

$$\begin{aligned} (+\curvearrowright) \quad (H_A)_1 + \sum \int M_A dt &= (H_A)_2 \\ 0 + 50(4)(0.6) &= \left[\frac{300}{9.81}(0.45)^2 + \frac{300}{9.81}(0.9)^2 \right] \omega \\ \omega &= 3.88 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 19.5 แท่งกลมขนาด 500 N และบอลโลหะขนาด 200 N ถ้าวถูกปล่อยจากจุดเริ่มต้นเมื่อ $\theta_1 = 0$ จงหามุม θ ของมวลเมื่อกระทบกับกำแพงจนถึงจุดสูงสุดหลังการกระทบ กำหนดให้สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.4$

วิธีทำ

$$I_A = \frac{1}{3} \left(\frac{200}{9.81} \right) (2)^2 + \frac{2}{5} \left(\frac{500}{9.81} \right) (2.3)^2 + \frac{500}{9.81} (2.3)^2 = 298.64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

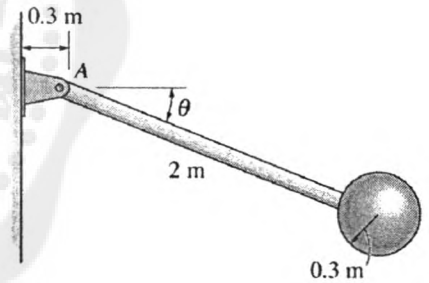
Just before impact :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} [298.64] \omega^2 - 200(1) - 500(2.3)$$

$$\omega = 3.0068 \text{ rad/s}$$

$$v_P = 2.3(3.0068) = 6.916 \text{ m/s}$$



Since wall does not move :

$$e = 0.6 = \frac{\dot{v}_P}{6.916}$$

$$\dot{v}_P = 4.150 \text{ m/s}$$

$$\dot{\omega} = \frac{4.150}{2.3} = 1.804 \text{ rad/s}$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

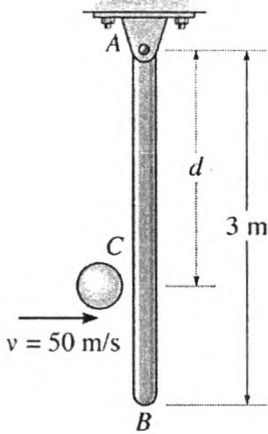
$$\frac{1}{2} (298.64) (1.804)^2 = 200(1)(1 - \sin \theta) + 500(2.3)(1 - \sin \theta)$$

$$\theta = 39.8'$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 19.6 แท่งกลมสม่ำเสมอมวลหนัก 6 kg. อยู่ในตำแหน่งเริ่มต้น ซึ่งมีบอลขนาด 1 kg. ถูกขว้างใส่แท่งกลมด้วยความเร็ว $V = 50 \text{ m/s}$ ไปที่แท่งกลมยังจุด C จงหาอัตราความเร็วและความเร็วเชิงมุมหลังการกระทบ กำหนดให้ $e = 0.7$ และ $d = 2 \text{ m}$.

วิธีทำ



(+ $\curvearrowright$)

$$(H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$(1)(20)(2) = \left[\frac{1}{3} (6)(3)^2 \right] \omega_2 + 1(v_{BL})(2)$$

$$e = 0.7 = \frac{v_C - v_{BL}}{50 - 0}$$

$$v_C = 2\omega_2$$

Thus,

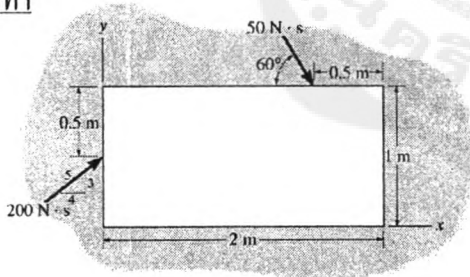
$$\omega_2 = 7.73 \text{ rad/s}$$

$$v_{BL} = -19.5 \text{ m/s}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 19.7 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนัก 10 kg. เคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งไปตามแนวระนาบ ซึ่งถูกแรงเคาะกระทำต่อแผ่นสี่เหลี่ยมตามแนวระนาบดังรูป จงหาความเร็วเชิงมุมและองค์ประกอบที่กระทำต่อจุดศูนย์กลางของมวล

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \quad m(v_{Gx})_1 + \sum \int F_x dt &= m(v_{Gx})_2 \\
 0 + 200\left(\frac{4}{5}\right) + 50 \cos 60^\circ &= 10m(v_G)_x \\
 (v_G)_x &= 18.5 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$+\uparrow \quad m(v_{Gy})_1 + \sum \int F_y dt = m(v_{Gy})_2$$

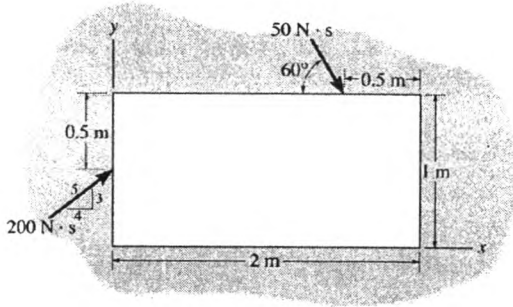
$$0 + 200\left(\frac{3}{5}\right) - 50 \sin 60^\circ = 10(v_G)_y$$

$$(v_G)_y = 7.67 \text{ m/s}$$

$$+\curvearrowright \quad I_G \omega_1 + \sum \int M dt = I_G \omega_2$$

$$0 + 200\left(\frac{3}{5}\right)(1) + 50 \sin 60^\circ(0.5) + 50 \cos 60^\circ(0.5) = \frac{1}{12}(10)(1)^2 + (2)^2 \omega$$

$$\omega = 119 \text{ rad/s}$$



$$v_G = \sqrt{((v_G)_x)^2 + ((v_G)_y)^2}$$

$$= \sqrt{(18.5)^2 + (7.67)^2}$$

$$= 20.2 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(v_G)_y}{(v_G)_x}$$

$$= \tan^{-1} \frac{7.67}{18.5}$$

$$= 22.5^\circ$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 19.8 แผ่นกลมให้มวล m และรัศมี r ถ้าถูกผลักให้ลื่นไถลไปยังสิ่งกีดขวางมีความสูงที่ $1/8 r$ จงคำนวณหาความเร็วเชิงมุมของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ไปกระทบ w_1 สมมติให้วงล้อไม่ลื่นไถลเพื่อวิ่งผ่านสิ่งกีดขวาง

วิธีทำ

$$(H_A)_1 = \frac{1}{2}mr^2(\omega_1) + m(\omega_1 r)(r - h)$$

$$(H_A)_1 = \frac{1}{2}mr^2(\omega_2) + m(\omega_2 r)(r)$$

$$(H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$\text{แทนค่าในสมการ } \left[\frac{1}{2}mr^2 + mr(r - h) \right] \omega_1 = \frac{3}{2}mr^2 \omega_2$$

$$\left(\frac{3}{2}r - h \right) \omega_1 = \frac{3}{2}r \omega_2$$

$$(+\curvearrowleft) \quad \sum F_n = ma_n: \quad W \cos \theta - F = m(\omega_2^2 r)$$

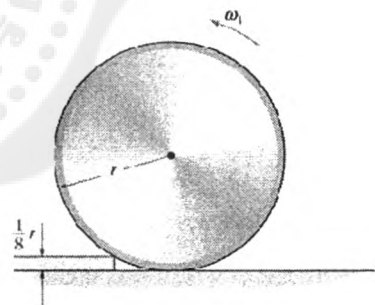
$$F = mg \left(\frac{r - h}{r} \right) - m(\omega_2^2 r)$$

$$\text{แทนค่าที่ } h \text{ จากโจทย์ในสมการ} \quad F - mg \left(\frac{r - h}{r} \right) - mr \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{r - h}{r} \right)^2 \omega_1^2$$

$$mg \left(\frac{r - \frac{1}{8}r}{r} \right) - mr \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{r - \frac{1}{8}r}{r} \right)^2 \omega_1^2 = 0$$

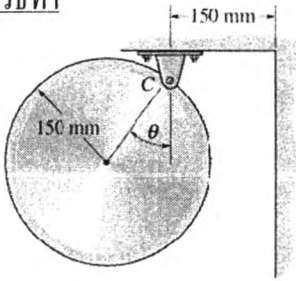
$$\omega_1 = 1.02 \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Ans.



ตัวอย่างที่ 19.9 แผ่นกลมมีมวลขนาด 15 kg. ถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งทำมุม $\theta = 30^\circ$ จงหาจุดสูงสุดของ θ ที่สะท้อนกลับหลังจากปะทะกำแพง กำหนดให้สัมประสิทธิ์การคืนสภาพระหว่างแผ่นกลมและกำแพงที่ $e = 0.6$ เมื่อ $\theta = 0$ จนกระทั่งสัมผัสกับกำแพงที่จุด C

วิธีทำ



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + (15)(9.81)(0.15)(1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} (15)(0.15)^2 \right] \omega^2 + 0$$

$$\omega = 3.418 \text{ rad/s}$$

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ พิจารณาจากรูป จะได้

$$e = \frac{(v_D)_{B_2} - (v_D)_{A_2}}{(v_D)_{A_1} - (v_D)_{B_1}}$$

$$e = 0.6 = \frac{0 - 0.15\omega}{3.418 - (0.15) - 0}$$

$$\omega = 2.0508 \text{ rad/s}$$

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} (15)(0.15)^2 \right] (2.0508)^2 + 0 = 0 + (15)(9.81)(0.15)(1 - \cos \theta)$$

$$\theta = 17.9^\circ$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 19.10 แผ่นกลมสองแผ่นแต่ละข้างหนัก 10 kN (1000 kg.) ทั้งสองถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งที่มุม $\theta = 30^\circ$ จงคำนวณหา θ หลังจากเข้าปะทะและทำให้สะท้อนกลับ กำหนดให้สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.75$ เมื่อ $\theta = 0$ เมื่อทั้งสองสัมผัสกัน

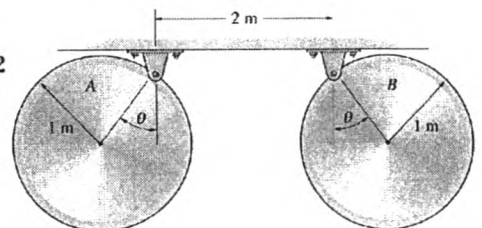
วิธีทำ

$$I_C = \frac{1}{2} \left(\frac{10000}{9.81} \right) (1)^2 + \frac{10000}{9.81} (1)^2 = 1529.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 10000(1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2} (1529.1) \omega_1^2 + 0$$

$$\omega_1 = 1.324 \text{ rad/s}$$



สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ พิจารณาจากรูป จะได้

$$e = \frac{(v_D)_{B_2} - (v_D)_{A_2}}{(v_D)_{A_1} - (v_D)_{B_1}}$$

$$0.75 = \frac{\omega_2 - (-\omega_2)}{1.324 - 1.324} \quad (1)$$

ที่จุด v_D มีความเร็วที่กระทำที่จุด D บนแผ่นกลม A หรือ B จะ

ได้ว่า $(v_D)_B - (v_D)_A$ และ $(v_D)_B = r\omega = (v_D)_A$

แทนค่าในสมการที่ (1) $\omega_2 = 0.993 \text{ rad/s}$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}(1529.1)\omega_1^2 + 0 = 0 + 10000(1 - \cos \theta)$$

$$\theta = 22.4^\circ$$

Ans.

บทที่ 20 การสั่นสะเทือน

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

- เมื่อพิจารณาถึงการสั่นสะเทือนที่เป็นลำดับโดยอิสระเพียงหนึ่งที่ไม่หน่วงของวัตถุแข็งแกร่งใช้สมการการเคลื่อนที่และหลักของพลังงาน
- เพื่อรู้และวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของแรงไม่มีการหน่วงและแรงหน่วงของการสั่นสะเทือน
- เพื่อเสนอหลักของวงจรไฟฟ้าอนาล็อกเพื่อรู้การเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- แจกเอกสารประกอบคำสอน
- ชี้แจงเนื้อหาของบทเรียน
- สอบถามความหมายและความเข้าใจ
- ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบท

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา ME292 Engineering Mechanics II (กลศาสตร์วิศวกรรม 2) โดยอาจารย์ธีรภัทร หล่มบุญเรือง
2. แผ่นใส, Power Point, White board

การวัดผลและประเมินผล

วัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาด้วยวิธีถามตอบ เพื่อให้มั่นใจได้ที่มีการแลกเปลี่ยนความคิด และมีการสอบวัดผล

20.1 การสั่นสะเทือนโดยอิสระที่ไม่หน่วง (Undamped Free Vibration)

การสั่นสะเทือนที่เป็นการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบของวัตถุหรือระบบของการต่อกับวัตถุที่สูญเสียตำแหน่งเดิม

- การสั่นโดยอิสระเมื่อการเคลื่อนที่ที่เป็นตัวหลักโดยที่แรงโน้มถ่วงหรือแรงยืดหยุ่นได้
- การสั่นโดยแรงโดยสั่นจากระยะด้านนอกหรือแรงกระทำเป็นพักๆและบอกถึงระบบ

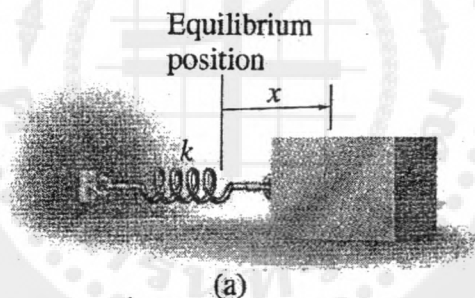
การสั่นแบบไม่มีการหน่วงสามารถที่จะเริ่มต่อได้โดยไม่มีกำหนดตั้งแต่ผลของการเสียคทานโดยไม่นำมาวิเคราะห์

การสั่นแบบราบรื่นเป็นการสั่นที่สูญเสียกับเวลาระหว่างผลภายในและแรงภายนอกของแรงเสียคทานจริงๆแล้วการเคลื่อนที่แบบสั่นของวัตถุแข็งเกร็งทั้งหมดเป็นการสั่นแท้จริง

สมการการสั่นอิสระแบบไม่มีการหน่วงของอิสระลำดับหนึ่ง

ถ้าระบบการสั่นเป็นลำดับอิสระแบบเดียวกันมันต้องการหนึ่งจุดร่วมที่จำเพาะของตำแหน่งที่ระบบของเวลา

สมการสำหรับการสั่นแบบไม่หน่วงของระบบ Simple Block-spring หนึ่งของตัวอย่างง่ายๆของระบบเดียวอิสระสำหรับการสั่นแบบไม่หน่วงคือระบบ Block-spring ดังแสดง



รูปที่ 20.1 ระบบ Block-spring

จากรูป การเคลื่อนที่ของกล่องจะแสดงโดยสมการของการเคลื่อนที่บนกล่องเมื่อสูญเสียตำแหน่ง X เราจะใส่สมการของการสั่นของกล่อง การเคลื่อนที่แบบ simple harmonic อัตราการเร่งเป็นสัดส่วนของการเคลื่อนที่ของกล่อง

$$\ddot{x} + p^2 x = 0, p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20.1)$$

P เป็นความถี่แบบวงกลม (rad/s)

X คือการเคลื่อนที่จากตำแหน่งที่เสียไป

m คือมวลของกล่องที่สั่นที่ผูกติดกับสปริงแน่น K การทั่วไปที่ใช้แก้ปัญหา

$$x(t) = A \sin pt + B \cos pt \quad (20.2)$$

ที่ A และ B คือค่าคงที่ของการอินทิเกรตจากตอนแรกของโจทย์สมการอื่นของการแก้ปัญหาคือ

$$x(t) = C \sin(pt + \phi) \quad (20.3)$$

ที่ C และ ϕ เป็นค่าคงที่ที่ตัดออกใหม่ที่เราได้ สิ่งสำคัญของการสั่นของกลองที่ได้—

ช่วงกว้าง $c = \sqrt{A^2 + B^2}$ คือการเคลื่อนที่สูงสุดของวัตถุ

คาบ $\tau = \frac{2\pi}{p}$ คือเวลาที่ครบรอบในหนึ่งรอบ

ความถี่ f คือจำนวนรอบต่อหน่วยเวลาซึ่งเป็นทางเดียวกันของคาบ

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20.4)$$

ความถี่ที่แสดงในรอบ $\text{Hz} = 1 \text{ cycle/s}$ $2\pi \text{ rad/s}$

Natural Frequency and Other Single Degree – of – Freedom Systems

ความถี่ธรรมชาติและระบบอิสระเดี่ยวแบบอื่นๆ เมื่อวัตถุหรือระบบสั่นเชื่อมต่อกันคือให้การเคลื่อนที่เป็นอันดับแรกจากจุดที่สูงเสียดตำแหน่งและถูกปล่อยออกมา มันจะสั่นกับกำหนดความถี่ออกมาเป็นความถี่ธรรมชาติข้อกำหนดของวัตถุเป็นอิสระแบบเดี่ยว นั่นคือต้องการเพียงจุดร่วมกันที่มีการระบุชัดเจนที่ตำแหน่งของระบบที่เวลาต่าง ๆ นั้นจะทำให้การสั่นของวัตถุมีความสำคัญเหมือนกันดังเช่นกาเคลื่อนที่แบบ Simple harmonic ของกลองและสปริงตามรูปเนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจะอธิบายเป็นสมการเหมือนกับสมการแรก

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad (20.5)$$

นั่นถ้าความถี่รอบ p ของวัตถุรู้แล้ว คาบของการสั่น τ ความถี่ธรรมชาติ f และการสั่นแบบอื่นๆ ของวัตถุสามารถใช้สร้างเหมือนกับสมการนั้น เขียนสมการกลองและสปริงได้

$$x(t) = A \sin pt + B \cos pt \quad (20.6)$$

$$x(t) = C \sin(pt + \phi) \quad (20.7)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (20.8)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \quad (20.9)$$

$$f = \frac{1}{\tau} \quad (20.10)$$

วิธีแก้ปัญหา

ดังเช่นรูปแบบของกลองและสปริง ความถี่รอบ p ของวัตถุแข็งเกร็งหรือระบบเชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็งมี single degree of freedom สามารถหาได้ดังนี้

Free – Body Diagram

- เขียน FBD ของวัตถุเมื่อวัตถุเคลื่อนที่โดย การรวมเล็กๆ จากการสูญเสียในตำแหน่ง
- ตั้งวัตถุกับการเกี่ยวข้อที่สูงเสียดตำแหน่งโดยใช้จุดร่วมความเฉื่อย e.g. , q ความเร่งของมวลของวัตถุ ศูนย์กลาง a_G หรือมุมเร่งวัตถุ α ควรจะมีเหตุที่เป็น + ของตำแหน่งร่วมกัน

- ถ้าสมการหมุนของการเคลื่อนที่ $\sum M_p = \sum (M_k)_p$ ได้ใช้ไป นั้นจะเป็นประโยชน์ที่จะเขียน kinetic diagram ดังแต่รูปกราฟสำหรับยกกำลัง $m(a_G)_x, m(a_G)_y$ and $I_G \alpha$ และมีการทำขึ้นเพื่อให้สะดวกในการเห็นภาพเทอมที่ต้องการในโมเมนต์บวก $\sum (M_k)_p$

สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion)

- บอกสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวกับการยืดหยุ่นหรือแรงโน้มถ่วงแรงกลับคืนและ โมเมนต์คู่ควบแสดงบนวัตถุถึงอัตราเร่งการเคลื่อนที่ของวัตถุ

จลนพลศาสตร์ (Kinematics)

ใช้ Kinetics โดยเฉพาะอัตราเร่งการเคลื่อนที่ของวัตถุในเทอมของช่วงเวลาที่สองตำแหน่งร่วม จากนั้นนำมาแทนในสมการการเคลื่อนที่และใส่ p โดยกลับมาจัดในเทอม

ดังนั้นที่สมการนั้นเป็นรูป มาตรฐาน (2.20) $\ddot{q} + p^2 q = 0$

20.2 พลังงาน (Energy Methods)

การเคลื่อนที่แบบ Simple harmonic ของวัตถุคือเฉพาะแรงโน้มถ่วงและความยืดหยุ่นกลับคืนของแรงแสดงบนวัตถุตั้งแต่ชนิดของแรงเป็นการยับยั้ง มันจะเป็นไปได้ที่ใช้การรักษาของสมการพลังงานใส่กับความถี่ธรรมชาติของวัตถุหรือคาบของการสั่นเราใช้ออกมาได้ดังนี้

วิธีแก้ปัญหา

สมการพลังงาน (Energy Equation)

- เขียนวัตถุเมื่อเคลื่อนออกโดยการรวมเล็กๆที่เสียตำแหน่งและกำหนดที่ตั้งของวัตถุจากที่สูญเสียตำแหน่งโดยที่สมควรกับตำแหน่งร่วม q
- กำหนดสมการของพลังงานสำหรับวัตถุ T+V เท่ากับ ค่าคงที่ในเทอมของตำแหน่งร่วม
- ในปกติ พลังงานจลนศาสตร์ต้องนับทั้งสองของการเคลื่อนที่วัตถุและกรณีเคลื่อนที่แบบหมุน

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (20.11)$$

- พลังงานภายในคือผลบวกของแรงโน้มถ่วงและพลังงานยืดหยุ่นภายในของวัตถุ

$$V = V_g + V_e \quad (20.12)$$

โดยเฉพาะ V_g ควรจะเป็นตัววัดจากตัวเลขสำหรับค่า

q=0 (สูญเสียตำแหน่ง)

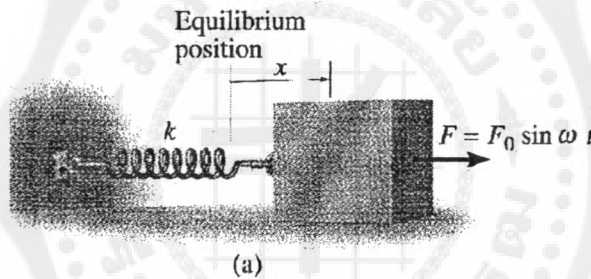
เวลาที่แยกออกมา (Time Derivative)

- ให้เวลาที่แยกออกมาของสมการพลังงานใช้กับกฎลูกโซ่ของแคลคูลัสและ 2 แฟกเตอร์ ออกจากเทอมเดิม สมการ differential ที่ได้เป็นตัวอย่างสมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ ค่าของ p ถูกใส่หลังจากกลับมาในเทอมมาตรฐาน $\ddot{q} + p^2 q = 0$

การใส่ค่าของรูปแบบมาตรฐาน $\ddot{q} + p^2 q = 0$ จะจำเป็นทำให้ใกล้เคียง e.g., $\sin q$ โดยเทอมแรกในเพาเวอร์ซีรีส์ $\sin q \sim q$ และ $\cos q$ โดยสองเทอมแรกของเพาเวอร์ซีรีส์ $\cos q \sim 1 \sim -\frac{q^2}{2}$ เช่นความใกล้เคียงเป็นความจำเป็นที่เราสนใจเฉพาะ การสั่นสะเทือนเล็กๆเท่านั้น

22.3 แรงสั่นสะเทือนแบบไม่หน่วง (Undamped forced Vibration)

แรงสั่นสะเทือนแบบไม่หน่วงพิจารณาเป็นหนึ่งชนิดที่สำคัญที่สุดของการเคลื่อนที่แบบสั่นในการทำงานวิศวกรรม **Periodic force** ของคาบ ω และสปริงถูกกำหนดตำแหน่งในรูปอย่างง่ายสำหรับแสดงการสั่นของระบบโดยกล่าวถึง แรงคาบ $F = F_0 \sin \omega t$ แรงนี้มีแอมพลิจูดของ F_0 และความถี่ของแรง ω



รูปที่ 20.2 แรงสั่นสะเทือนแบบไม่หน่วง

สมการลักษณะเดียวกันจะอธิบายการสั่นสะเทือนของกล่องสามารถใส่สมการของการเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{f_0}{m} \sin \omega t, p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20.13)$$

วิธีโดยทั่วไปของสมการนี้จะได้

$$x(t) = x_c + x_p \quad (20.14)$$

$$= A \sin pt + B \cos pt + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \sin \omega t \quad (20.15)$$

ถ้าแรงได้บอกกับความถี่ถึงความถี่ของธรรมชาติของระบบ $\omega \sim p$ แอมพลิจูดของการสั่นของกล่องมาเป็นระดับใหญ่สุด สถานะนี้เรียกว่า เรโซแนนซ์ และกระทำการสั่นสามารถเกิดความเค้นมหาศาลและผิดพลาดอย่างรวดเร็วของส่วนต่างคาบที่สนับสนุนการแทนที่

Periodic Support Displacement

แรงสั่นสามารถเกิดจากการกระตุ้นของการสั่นของระบบ รูปแบบนี้สมการครอบคลุมเหมือนกับ (20.1) กับ F_0 โดยแทน $k\delta_0$ ที่ δ_0 กำหนดโดยสั่นของการแทนที่ $\delta = \delta_0 \sin \omega t$

20.4 การสั่นสะเทือนอิสระที่มีการหน่วงยืด (Viscous damped free vibration)

ตั้งแต่การสั่นสะเทือนจริงที่เสียไปกับเวลาการแสดงของแรงที่หน่วงจะรวมทั้งการจำแนกการสั่นออกมา ในหลายรูปแบบ ความหน่วงคือเหตุผลที่ความต้านทานสร้างโดยสสาร (e.g. น้ำ น้ำมัน หรือ อากาศ) ในระบบสั่น

แรงหน่วงยืด กำหนดวัตถุเคลื่อนที่อย่างช้าๆผ่านสสารในการสั่นของวัตถุขนาดของ F ของแรงหน่วงยืดจะได้เป็นที่

$$F = c\dot{x} \quad (20.16)$$

ค่าคงที่ C คือค่าสัมประสิทธิ์ของการยืดและมีหน่วยเป็น N.s/m.

- สมการของการสั่นสะเทือนที่มีการหน่วงยืด การเคลื่อนที่แบบสั่นสะเทือนของวัตถุหรือระบบที่มีการหน่วงยืดจะสำคัญอีกครั้งโดยระบบ Block-spring ในผลของการหน่วง (เครื่องผ่อนคันเร่งน้ำมันในรถยนต์) รวมด้วย สมการจะอธิบายการสั่นภายหลังของกล่องได้
- วิธีทั่วไป วิธีทั่วไปของสมการ differential ให้แบบความต่างโดยขึ้นอยู่กับค่า 2 ค่า

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (20.17)$$

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (20.18)$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (20.19)$$

ธรรมชาติของ λ_1 และ λ_2 จะขึ้นอยู่กับค่าของ C ที่รากสมการเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$c = c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2mp \quad \text{นี่เรียกว่าการหน่วงวิกฤตของสัมประสิทธิ์ } C_c$$

ระบบเกินของการหน่วงที่ $c > c_c$, λ_1 และ λ_2 ทั้งคู่จริง 2 วิธีทั่วไป (20.2) ได้แบบมา

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (20.20)$$

ที่ A, B เป็นค่าคงที่ที่ได้จากสมการสถานะแรกการเคลื่อนที่ที่ตรงกันกับวิธีนี้คือ ไม่มีการสั่นการหน่วงที่แข็งแกร่งนั้นทำให้กล่องง่ายต่อการเข้ากลับมาที่ตำแหน่งเดิมโดยไม่มีการสั่นเรียกว่าการหน่วงเกิน

ระบบวิกฤตของการหน่วง ถ้า $c = c_c$ นั้น $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c_c}{2m} = -p$

นี่คือ การหน่วงวิกฤต ตั้งแต่การแสดงสถานะที่ C มีค่าน้อยสุดจำเป็นในระบบเป็น ไม่มีการสั่นสะเทือนวิธีโดยทั่วไปของ (20.2) แบบนี้ได้เป็น

$$x(t) = (A + Bt)e^{-pt} \quad (20.21)$$

ระบบการหน่วงภายใต้ระบบ ที่ใช้มากที่สุด $c > c_c$ ของระบบนี้คือ ระบบหน่วงภายใต้ λ_1 and λ_2

- ทั้งคู่ขึ้นกับวิธี (20.2) รูปแบบนี้หาได้จาก

$$x(t) = D \left[e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \sin(p_d t + \phi) \right] \quad (20.22)$$

ที่ D และ ϕ คือค่าคงที่อย่างปกติที่มาจากสถานะแรก ค่าคงที่ p_d เรียกว่า ความถี่ธรรมชาติของการหน่วงของระบบ

$$p_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (20.23)$$

$$= p \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (20.24)$$

ที่ $\frac{c}{c_c}$ เรียกว่า แฟคเตอร์หน่วง

คาบของการหน่วงของการสั่นสะเทือนสามารถเขียนได้เป็น

$$\tau_d = \frac{2\pi}{p_d} \quad (20.25)$$

ตั้งแต่ $p_d < p$, $\tau = \frac{2\pi}{p}$ คาบของการสั่นอิสระ

แรงสั่นสะเทือนที่มีการหน่วงยืด (Viscous damped Forced Vibration)

แบบโดยทั่วไปที่ใช้มากที่สุด Single degree of freedom การเคลื่อนที่ของการสั่นจะเห็นเมื่อระบบรวมผลของแรงเคลื่อนที่และการหน่วงด้วย สมการ differential ที่หามาได้จากการเคลื่อนที่ของระบบกล้องและสปริงที่รวมกันกับผลของการเคลื่อนที่ของแรงและความหน่วงได้เป็น

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (20.26)$$

สมการเดียวกันที่ใช้สำหรับบล็อกและสปริงมีการสนับสนุนคาบการสูญเสียตำแหน่งไป นี้รวมทั้งผลของความหน่วงในรูปนี้ F_0 ใน 20.8 ในรูปอย่างง่ายแทนที่โดย $k\delta_0$ สมการการแก้ปัญหาทั่วไป 20.5 จะอยู่ในรูป

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (20.27)$$

ที่ $x_c(t)$ คือ สมการการแก้ปัญหาทั่วไป 20.2 ที่ขึ้นอยู่กับค่า λ_1 และ λ_2 (20.3) และ (20.4)–ดู (20.5)–(20.7) และ

$$x_p(t) = C' \sin(\omega t - \phi') \quad (20.28)$$

ที่ค่าคงที่ C' และ ϕ' เป็นดังนี้

$$C' = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]^2}}, \quad (20.29)$$

$$\phi' = \tan^{-1} \left[\frac{2\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \right] \quad (20.30)$$

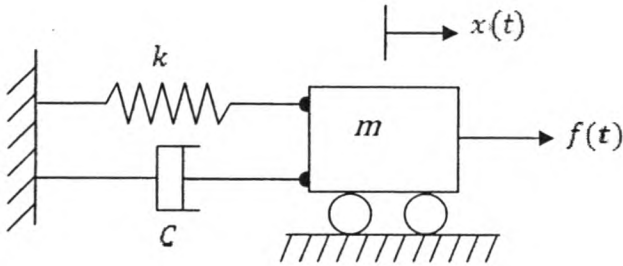
มุม ϕ' แสดงความแตกต่างเฟสระหว่างแรงและการสั่น Steady-state ของระบบหน่วง

คำถามทบทวนท้ายบท

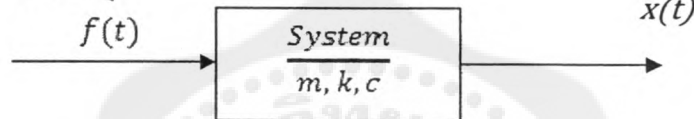
1. การสั่นสะเทือนอิสระจะเกิดขึ้นเมื่อใด
2. จงเขียนสมการ differential อธิบายการสั่นสะเทือนอิสระโดยไม่หน่วงวิธีโดยทั่วไปและนิยามของแอมพลิจูด คาบและความถี่
3. ความถี่ธรรมชาติของระบบการสั่นสะเทือนคืออะไร
4. การเคลื่อนที่ simple harmonic คืออะไร
5. ทำไมถึงต้องใช้การอนุรักษ์พลังงานหาความถี่ธรรมชาติของวัตถุกระทำการสั่นอิสระแบบไม่หน่วง
6. เรโซแนนซ์ คืออะไรและเกิดขึ้นได้อย่างไร
7. ในระบบการสั่นอิสระแบบหน่วง เมื่อใดการสั่นสะเทือนจะหยุดในเวลา
8. จงเขียนสมการเพื่อบอกแรงต้านที่มีการหน่วงของระบบของ block spring จงแสดงวิธีทำ

ตัวอย่างแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 20 การสั่นสะเทือน

ระบบการสั่นสะเทือน: ระบบเชิงกล.

 $m =$ มวล (kg) $c =$ ค่าคงที่ของตัวหน่วง $\frac{(N - sec)}{m}$ $k =$ ค่าคงที่สปริง (N/m) $F =$ แรง (N) $t =$ เวลา (s)

"การกระตุ้น"

 $f(t) = ???$ ← ได้จากการวัด (เทียบกับเวลา)

หา

Equation of Motion

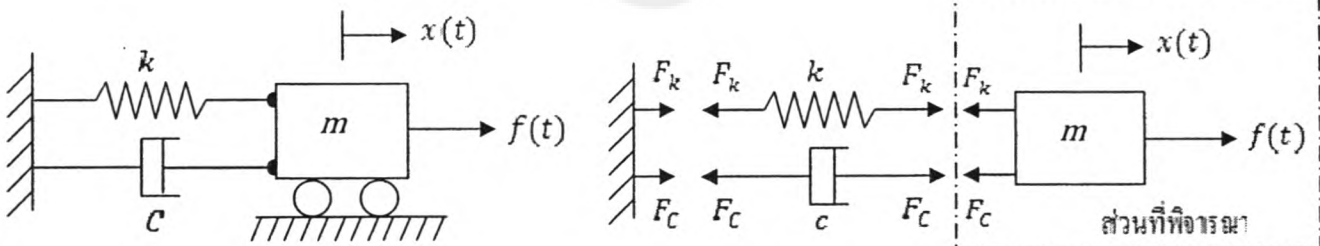
ของระบบว่าเป็นอย่างไร ???

หา Equation of Motion โดยใช้ Newton's Second Law of Motion

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$\sum T = J\ddot{\theta}$$

ตัวอย่าง



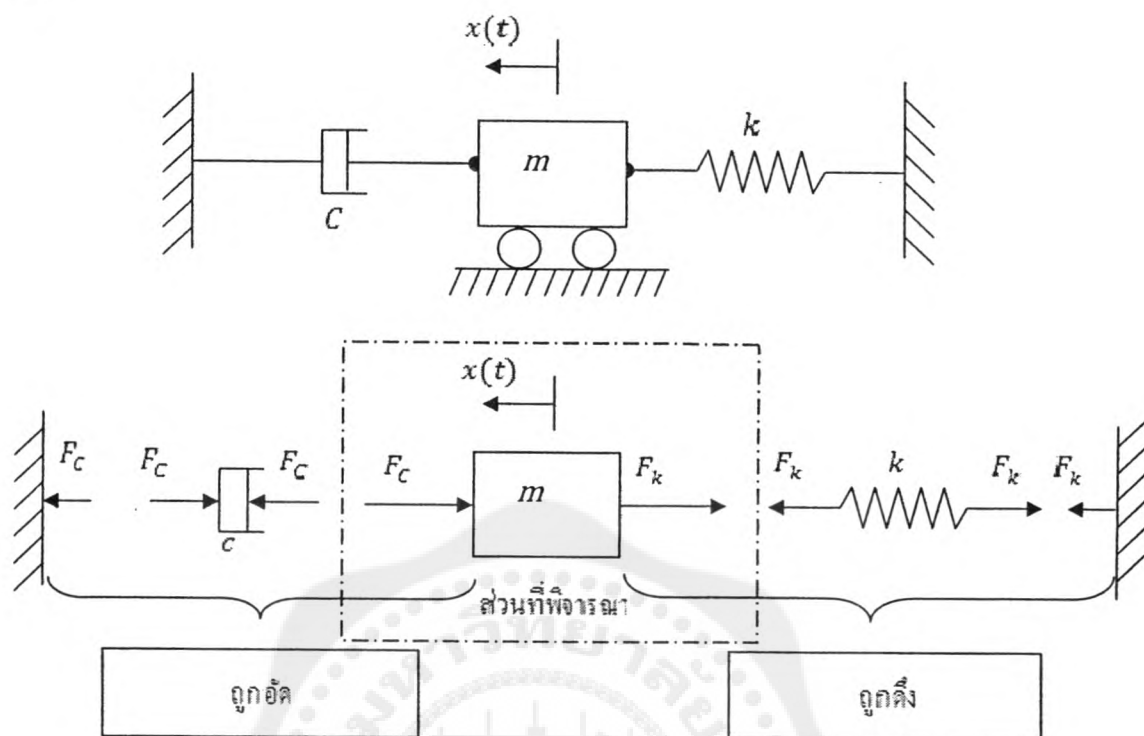
$$\begin{aligned} \therefore \sum F &= m\ddot{x} \\ -f_x - f_c + f(t) &= m\ddot{x} \\ -kx - c\dot{x} + f(t) &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_k &= kx \\ F_c &= c\dot{x} \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$$

← EOM (Force Vibration)

ตัวอย่าง



$$\begin{aligned} \therefore \sum F &= m \ddot{x} \\ -f_x - f_c &= m \ddot{x} \\ -kx - c\dot{x} &= m \ddot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_k &= kx \\ F_c &= c\dot{x} \end{aligned}$$

$$\therefore m \ddot{x} + C \dot{x} + k x = 0$$

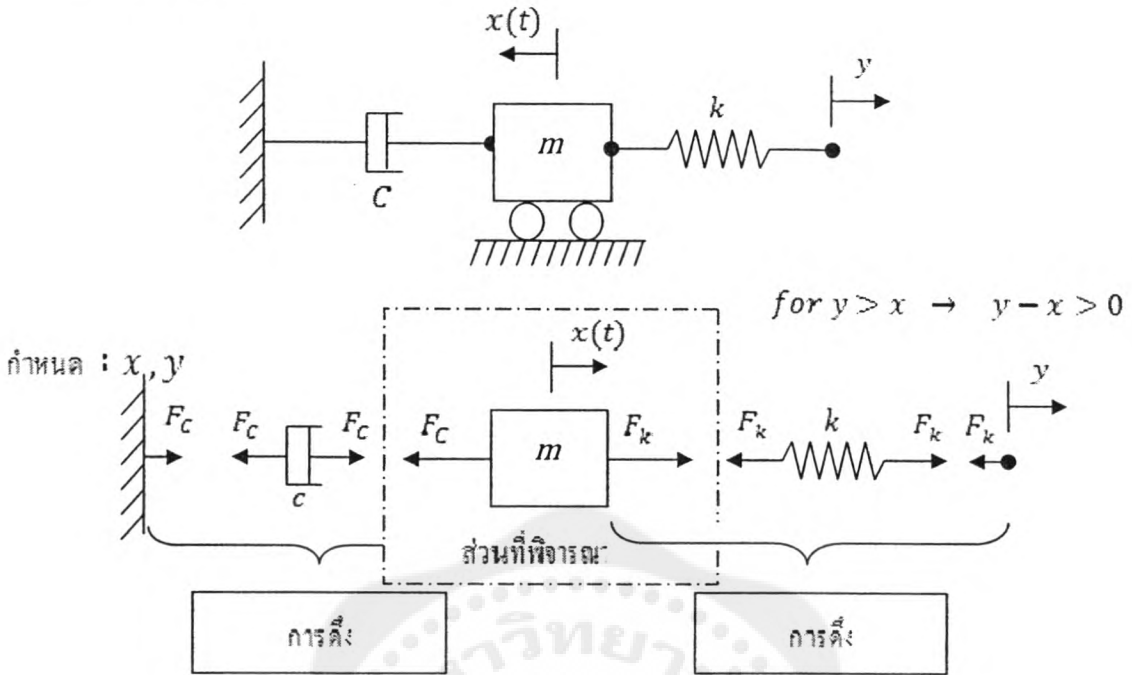
← EOM (Free Vibration)

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= 0 \rightarrow \text{Free Vibration} \\ \therefore f(t) &\neq 0 \rightarrow \text{Force Vibration} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต : สมการการเคลื่อนที่จะเป็น

} 2^{nd} Order Differential Equation
} 2^{nd} Order System

ตัวอย่าง Mass less System



The free-body diagram shows the mass m with forces F_c and F_k acting on it. The displacement x is indicated. The equations are:

$$\begin{aligned} F_k &= k(y - x) \\ F_c &= c\dot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum F &= m\ddot{x} \\ +f_x - f_c &= m\ddot{x} \\ +k(y - x) - c\dot{x} &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky$$

→ 1st Order Differential Equation = 1st Order System

หาค่า C

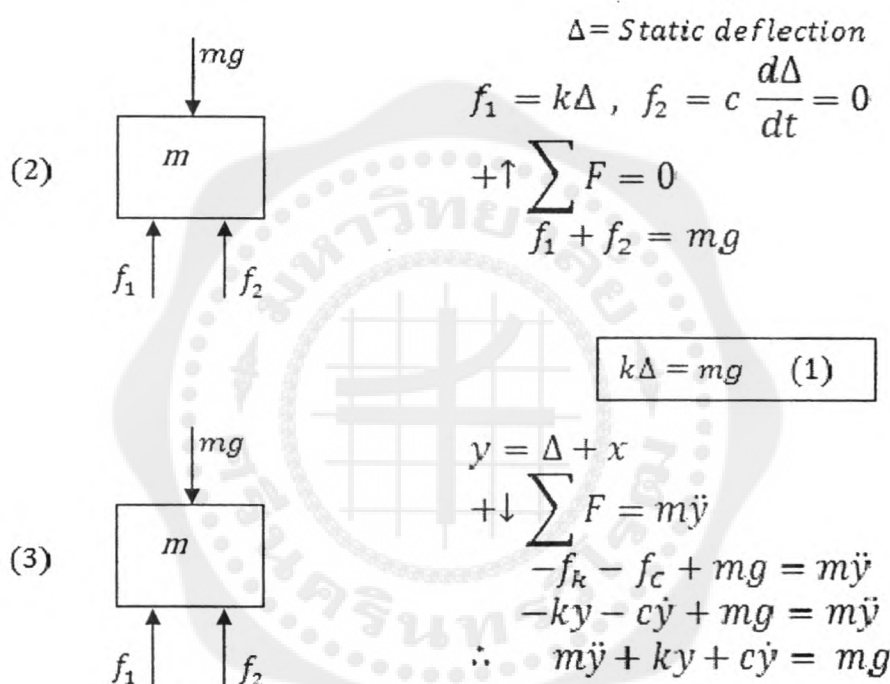
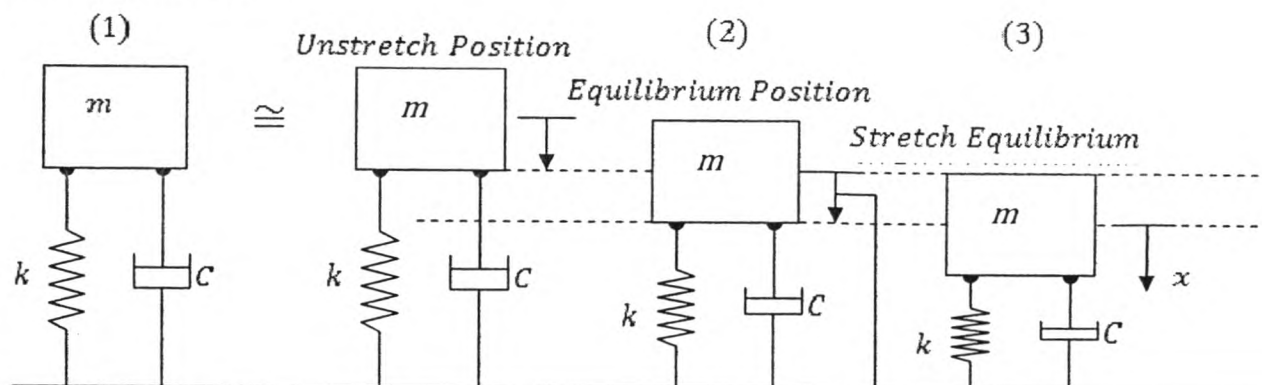
$$\dot{x} + \frac{k}{c}x = \frac{k}{c}y \quad m/s$$

Standard form of 1st Order System

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{y}{\tau}$$

$$\tau = \frac{C}{k}, \text{ "ค่าคงที่ของเวลา" (sec)}$$

— Static Equilibrium



$$y = \Delta + x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(\Delta + x)}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2(\Delta + x)}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$-ky - c\dot{y} + mg = m\ddot{y}$$

$$\therefore m\ddot{x} + k(\Delta + x) + c\dot{x} = mg$$

$$\therefore m\ddot{x} + k\Delta + kx + c\dot{x} = mg$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Free Vibration

บรรณานุกรม

(Bibliography)

1. กนต์ธร ชำนิประศาสน์, การสั่นสะเทือนทางกล, กรุงเทพฯ: เพียร์สันเอดดูเคชั่น อินโดไชน่า, 2545
2. อินทรชิต หอวิจิตร, กลศาสตร์วิศวกรรมภาคพลศาสตร์, กรุงเทพฯ : บริษัท สำนักพิมพ์ท็อป จำกัด, 2548.
3. เอกสารประกอบการสอน, การสั่นสะเทือนเชิงกล, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2545.
4. R.C. Hibbeler, **Engineering Mechanics Dynamics**, Third Edition, Prentice Hall, Inc, 2004.
5. Ferdinand P. Beer, **Vector Mechanics for Engineering**, Eight Edition, Mc Graw Hill, 2006.
6. J. L. Meriam and L. G. Kraige, **Engineering Mechanics Dynamics**, Six Editions, Wiley, 2004.
7. <http://e-learning.tu.ac.th>, 2008.