

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์
ระดั้ม ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์โดยใช้บทเรีเณโปรแกรมกับการชอนตามปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

เทอดศักดิ์ จันทรฉรุณ

เสนอทอมมหาวิทยาลัยศรีนครินทร วิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคามหลักสูตร

ปริญญากการศึกษาามหาบัณฑิต

22 พฤศจิกายน 2519

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปัญหาในขณะนั้นแล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปัญหาการทำความเข้าใจของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้.

ศาสตราจารย์ ดร. ประธาน

ศาสตราจารย์ ดร. กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความกรุณาของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์
ดร.ภาวกรี เมืองนาโคะ และ ศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ รัตนกุล ที่ให้คำแนะนำ
ช่วยเหลือในการหาวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณ อาจารย์พรทิพา เพ็ชรรัตน์ และนักศึกษา ป.ศ.สูง เอกคณิตศาสตร์
วิทยาลัยครูพิษณุโลก จังหวัดพิษณุโลก ที่ให้ความร่วมมือในการทดลอง ทำให้
การทดลองดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย และบรรลุผลตามความมุ่งหมาย

ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์กฤษดา จันทร์อรุณ ที่เป็นกำลังใจในการทำวิจัยมา
โดยตลอด ถ้าผลการวิจัยครั้งนี้จะเป็นประโยชน์ต่อวงการศึกษายิ่งนัก ผู้วิจัยขอขอบ
คุณความดีให้แก่ ปิตา มารดา และผู้ทีกล่าวนามข้างตนมา ณ ที่นี้ด้วย.

เทอดศักดิ์ จันทร์อรุณ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1	1
บทนำ	
ความมุ่งหมายในการศึกษาคนควา	6
ปัญหาในการศึกษาคนควา	6
ความสำคัญของการศึกษาคนควา	6
ขอบเขตของการศึกษาคนควา	7
ค่านิยมศัพท์เฉพาะ	7
ข้อตกลงเบื้องต้น	8
2	9
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	
พัฒนาการของบทเรียนโปรแกรม	9
หลักการพิจารณาการวิจัยบทเรียนโปรแกรม	10
ลักษณะบทเรียนโปรแกรม	11
ชนิดของบทเรียนโปรแกรม	11
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย	18
3	22
วิธีดำเนินการ	
กลุ่มตัวอย่าง	22
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	22
การดำเนินการทดลอง	25
การจัดกระทำข้อมูล	25

บทที่		หน้า
4	การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง	28
	การวิเคราะห์ข้อมูล	28
	ผลการทดลอง	32
5	บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	33
	บทย่อ	33
	อภิปรายผล	35
	ข้อเสนอแนะ	38
	บรรณานุกรม	39
	ภาคผนวก	

บัญชีการวาง

การวาง	หน้า
1 แสดงจำนวนนักกีฬาของกลุ่มตัวอย่างในการทดลอง จำแนกตามเพศ	22
2 แสดงคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดสมรรถนะทางการวิ่งของ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	28
3 แสดงความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดสมรรถนะ ทางการวิ่งของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	29
4 แสดงความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการวิ่ง ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	30
5 แสดงคะแนนเฉลี่ย ความแปรปรวน และอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	31

ปัจจุบันเรื่องการศึกษาเป็นเรื่องที่ได้รับความสนใจจากทุกแวดวงการทำงาน เป็นอย่างมาก ทั้งนี้เพราะการศึกษาเป็นกิจการทางสังคมที่เกี่ยวพันกับอนาคตของชาติพันธุ์ ในส่วนบุคคลและสังคมโดยรวม สำหรับประเทศไทยภายหลังจากวันที่ 14 ตุลาคม 2516 ประชาชนมีสิทธิเสรีภาพในการแสดงความคิดเห็นได้อย่างกว้างขวางทางรัฐธรรมนูญในเรื่อง การศึกษา มีเสียงวิพากษ์วิจารณ์เกี่ยวกับความล้มเหลวของการจัดการศึกษา เช่น การจัด การศึกษามากับกับให้เข้าถึงประชาชนและเป็นการให้ฟรี การสอนของครู อาจารย์ ไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้แสดงความคิดเห็นในการเรียน คำวิพากษ์วิจารณ์ทาง ๆ ของ ผู้ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาจะประชาชนที่สนใจพอสรุปได้สามด้าน คือ 1. หลักสูตร การบริหารการศึกษา และการเรียนการสอน 2. สภาพปัญหาและวิกฤตการณ์ทางการศึกษา ในปัจจุบันจะพบว่าการเรียนการสอนว่าเป็นปัญหาเนื่องจากสังคม / สิ่งแวดล้อม และ ปัญหาในตัวผู้เรียนเอง เช่น ความแตกต่างระหว่างบุคคล เป็นต้น ในการแก้ปัญหาทั้งกล่าว จะไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ถ้าแก้ไขโดยการจัดการศึกษาหรือการสอนแบบเก่า จำเป็นที่ต้องนำเอาความรู้ วิธีการ แนวความคิด ระเบียบวิธี ตลอดจนเครื่องมือ ทาง ๆ ทางวิทยาศาสตร์มาใช้อย่างมีระบบ ซึ่งรู้จักหรือเรียกกันว่า เทคโนโลยีทางการสอน (Instructional Technology) เพื่อแก้ไขและปรับปรุงการเรียนการสอน ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ดังที่ ก่อ สวัสดิพิทยานิธิย์ (ก่่อ สวัสดิพิทยานิธิย์, 2515 : 91) กล่าวว่าในประเทศที่เจริญแล้วได้นำเอาเทคโนโลยีมาใช้อย่างมากมาย เช่น การสอนโดยระบบ ที่เรียกว่าการสอนเป็นคณะ (Team teaching) ใช้บทเรียนโปรแกรมเพื่อการสอน เป็นต้น

การนำเทคโนโลยีทางการสอนเข้ามาใช้ในโรงเรียนสำหรับการจัดการศึกษาในประเทศไทยนั้นเริ่มจะแพร่หลาย และเป็นที่รู้จักกันกว้างขวางขึ้น ดังจะเห็นได้ในรายงาน ของคณะกรรมการปฏิรูปการศึกษาไทย พ.ศ. 2518 เทคโนโลยีได้เข้ามามีบทบาทสำคัญ

การนำเทคโนโลยีมาใช้เพื่อช่วยแก้ไขปัญหาวางการออกแบบ วิจิตร ศรีอำม
(วิจิตร ศรีอำม, 2512 : 9 - 35) กล่าวว่า เทคโนโลยีทางการศึกษาโดยทั่วไป
จะครอบคลุมเรื่องสำคัญ ๆ สามด้านคือ คือ

1. การใช้วัสดุอุปกรณ์ในการศึกษา ประเภท ฮาร์ดแวร์ (Hardware)
เช่น เครื่องฉายภาพนิ่ง วิทยุ โทรทัศน์ และเครื่องคำนวณอิเล็กทรอนิกส์ (Electronic
computer) เป็นต้น

2. การใช้เทคนิคและนวัตกรรมทางการสอน (Innovation in teaching)
เช่น การสอนเป็นคณะ (Team teaching) การจัดระบบการเรียนแบบไม่ขึ้น
(Non - Graded Plan)

3. การผลิตวัสดุการสอนแนวใหม่ (Instructional materials) ซึ่ง
หมายถึงการผลิตตำรา เอกสาร หัดคู่สูตร วัสดุ และสิ่งพิมพ์อื่น ๆ ในแนวใหม่
วัสดุการสอนแนวใหม่ที่กำลังได้รับความสนใจแพร่หลายก็คือ บทเรียนโปรแกรม
(Programmed Textbook)

ในประเทศที่กำลังพัฒนา เช่น ประเทศไทยซึ่งขาดแคลนครูที่มีความสามารถ เงิน
และปัจจัยอื่น ๆ นั้น เทคโนโลยีที่น่าสนใจ เหมาะสมกับฐานะทางเศรษฐกิจและการลงทุน
ทางการศึกษา คาดว่าจะได้ผลแพร่หลายในวงการศึกษาของไทยในอนาคต คือ บทเรียน
โปรแกรม มีนักการศึกษาจำนวนมากได้สนใจและสนใจ และขอเสนอแนะให้คอมพิวเตอร์เรียน
โปรแกรมอย่างกว้างขวาง อาทิเช่น

เลธ (Leath, 1966 : 85) กล่าวถึงทัศนคติของครูที่มีต่อการออกแบบโปรแกรม
ว่า ครูที่ช่วยการออกแบบโปรแกรมบางคนรู้สึกว่าการออกแบบนั้นเป็นเรื่องที่
เชื่อว่าใช้ได้ก็กับเด็กที่เรียนช้า บางคนคิดว่าบางวิชาจะให้เด็กเรียนจากการออกแบบโปรแกรม
ไม่ได้ และบางคนก็คิดว่ามันเป็นสิ่งที่สอนไปแล้ว จะให้เรียนจากการออกแบบโปรแกรมได้
ทั้งสิ้น อย่างไรก็ตาม ปัจจุบันนี้การสอนตามระบบนี้ประสบผลสำเร็จแล้ว ไม่ว่าจะใช้กับเด็ก
หรือผู้ใหญ่

แซลลีสบิวรี (Salisbury, 1966 : 712 - 4) ได้สำรวจความคิดเห็นของครูจำนวน 60 คน จากโรงเรียน 40 โรงเรียน และนักเรียน 1,375 คน ในรัฐไวโอมิง สหรัฐอเมริกา ซึ่งใช้แบบเรียนโปรแกรม "English 2000" และ "Remedial algebra" ผลการศึกษารูปได้ว่า ทั้งครูใหญ่ ครู และนักเรียน มีความเชื่อว่าการสอนแบบโปรแกรมโดยตลอด ๆ เป็นการลดความปกติ แต่ไม่คิดถึงระดับปัญญาถึง อย่างไรก็ตาม โปรแกรมนี้ถูกกล่าวหาสำหรับการลดระเบียบและการสอนแบบเสริม

คอร์ริแกน (Corrigan, 1964 : 36) กล่าวว่า การออกแบบโปรแกรมเป็นระบบการสอนที่แบบแผน เป็นการวางรูปแบบเพื่อให้ตรงจุดมุ่งหมายที่วางไว้ การเลือกวิธีสอนและอุปกรณ์ ได้คำนึงถึงความต้องการของนักเรียนเป็นรายบุคคลและกลุ่ม

บัทเลอร์ เวิล และ แบงค์ (Butler, Wren and Banks 1970 : 153) กล่าวว่า วิชาที่หาโปรแกรมจะไม่สามารถยกย่องหรือขยายเนื้อหาวิชาได้หาได้จำเป็นของสร้างกรอบใหม่ขึ้นเพิ่มเติม และการสอนโดยโปรแกรมไม่สามารถทำให้เกิดปฏิริยาโต้ตอบระหว่างครูกับนักเรียน หรือ นักเรียนกับนักเรียนได้

กองการวิจัย กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (กองการวิจัย, 2515 : 50) ได้วิจัยเรื่องประสิทธิภาพของการใช้บทเรียนโปรแกรมสอนนักเรียนไทย เพื่อหาว่านักเรียนโปรแกรมจะสามารถสอนวิชา พหุคณิตเบื้องต้นให้แก่เด็กนักเรียนได้หรือไม่ ทำการทดลองสองครั้ง ผลการทดลองปรากฏว่า บทเรียนโปรแกรมใช้ได้กับนักเรียนที่มีสติปัญญาปานกลางและแนะนำว่า การใช้บทเรียนโปรแกรมประกอบการสอนของครู จะช่วยทำให้ผลการเรียนของนักเรียนดีขึ้น "สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ รอเบิร์ต โอ บราวน์ (Robert O. Brown Jr, 1967 : 183) ซึ่งได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนของนักเรียนที่ใช้บทเรียนโปรแกรมประกอบกับนักเรียนที่ไม่ใช้บทเรียนโปรแกรม ผลปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากครูและมีบทเรียนโปรแกรมประกอบ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าที่เรียนจากครูและตำราธรรมดา

เบรื่อง กุญท์ (เบรื่อง กุญท์, 2516 : 61) กล่าวว่า บทเรียนโปรแกรมคือสิ่งที่มนุษย์กลั่นขึ้นมาเพื่อใช้เป็นเครื่องมือแรงทางการศึกษา บทเรียนโปรแกรมจะมาเป็นรูปของเครื่องสอน (Teaching machine) รูปเล่มหนังสือ (Programmed textbook) หรือหนังสือช่วยสอน (Tutor text) ซึ่งผ่านการสร้างเป็นแบบเรียนอย่างละเอียดรอบคอบ

ก่อน ทั้งใบงานเนื้อหาวิชา และหลักวิธีการของการเรียนรู้ที่ถูกต้อง โดยอาศัยพื้นฐาน
ของแบบแผนจากการศึกษาความรู้วิชา จิตวิทยา และสังคมวิทยา ตลอดจนลักษณะ
ทางสังคมและสิ่งแวดล้อมของลูกๆ อีกด้วย

เฮวส์ (Hewes) (เฮวส์, 2517 : 30) กล่าวว่า เขาเรียนโปรแกรม
เป็นวงจรแบบการศึกษาย่างหนึ่งซึ่งบอกไม่แจ้งของการพบเห็นทางระหว่างบุคคลให้ได้
เรียนรู้วิชาการต่าง ๆ ในช่วงเวลาที่เท่าเทียมกันตามความสามารถของแต่ละบุคคล

บทเรียนโปรแกรมกับวิชาคณิตศาสตร์

อีแวนส์ (Evan) (Glaser, 1965 : 372 - 375) กล่าวว่า เขาสร้าง
บทเรียนโปรแกรมเพื่อใช้กับเครื่องเล่นเทป มีผู้สนใจด้านวิชาคณิตศาสตร์มาก เพราะว่า
เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เป็นเทปเป็นบล็อกๆ สะดวกในการที่จะเขียนเป็นโปรแกรม นอกจากนี้
คำอธิบายของหน่วยการเรียนก็เป็นคำอธิบายเฉพาะ จึงทำให้ผู้เรียนเข้าใจเร็วไปทางวันได้

สกินเนอร์ (B.F. Skinner) ซึ่งได้รับการยกย่องว่าเป็นผู้ทำให้การรวมแบบโปรแกรม
เป็นที่สนใจและแพร่หลายมาก ก็ได้ออกสร้างโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ในการทดลอง
ครั้งแรกของเขา ในการที่จะนำวิชาต่าง ๆ มาสร้างเป็นบทเรียนโปรแกรมนี้

สุภา ภุมมกุล (สุภา ภุมมกุล, 2515 : 164) กล่าวว่า วิชาบางวิชาไม่สามารถ
สอนด้วยวิธีนี้ได้ เป็นที่น่าวิตกว่า วิชาเรียนภาษา ซึ่งก็ต้องท่องเขียนเอง และครูเป็นผู้แนะนำ
ทิศทาง เราไม่สามารถใช้เครื่องจักรเป็นผู้ชี้นำนักเรียน วิชาที่เหมาะสมสำหรับบทเรียน
โปรแกรม ก็วิชาที่มีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว เช่น วิชาคณิตศาสตร์

แฮมเมอร์ (Hammer, 1973 : 46) กล่าวว่า โรงเรียนส่วนมากใช้บทเรียน
โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยม จากการสำรวจของ C.P.I. (The Committee
of Programmed Instruction of Harvard University) พบว่าในระหว่างปี ค.ศ.
1961 - 1962 โรงเรียนในสหรัฐอเมริกาใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ถึง 61 %
ของการใช้บทเรียนโปรแกรมทั้งหมด

ฟราย (Fry, 1963 : 3 - 6) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับการที่มีผู้เขียนบทเรียน
โปรแกรมศึกษาศาสตร์กันมาก ว่าเป็นเพราะเนื้อหาวิชาจากตำราสารมีความซับซ้อนเกินไป
เหตุเป็นเช่นนี้ และก็มีบัณฑิตที่คอยจรรู้กันว่าตนเองของนักเรียนสามารถจะเข้าใจและแก้
คำตอบที่แน่นอน นอกจากนั้นยังง่ายต่อการพิจารณาข้อผิดพลาดของนักเรียน การสร้างบทเรียน
โปรแกรมวิชาการศึกษาสามารถทำได้ทุกแบบ ไม่ว่าจะเป็นแบบเดิมคำตอบ (Constructed
response) หรือแบบเลือกคำตอบ (Multiple choice)

ภายหลังผลดังกล่าว จะเห็นว่าการเขียนโปรแกรมเป็นส่วนสำคัญยิ่งของการออกแบบ
โปรแกรม ซึ่งเป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาที่จะช่วยแก้ปัญหาในการเรียนการสอนได้
ถึงกับ ดร. สวัสดิ์เกษม (ดร. วสทิณีเกษม, 2515 : 91) กล่าวว่า โปรแกรมที่
เจริญแล้วได้แก้เทคโนโลยีมาช่วยในการศึกษามากมาย เช่น ใช้สิ่งที่เป็นภาษาเขียน
ด้วยตนเอง หรือ Programmed books หรือ บทเรียนโปรแกรมเพื่อการสอน และนักเรียน
จะเข้าใจมากขึ้นกว่าเดิม จากการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน
ที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรม กับเรียนจากการสอนของครูโดยการบรรยายหรือวิธีอื่น
ผลปรากฏไม่แตกต่างกัน บทเรียนโปรแกรมมีบางสิ่งที่เป็นประโยชน์กับนักเรียน เป็นค้นว่า
ครูมีเวลาช่วยเหลือนักเรียนที่มีปัญหาในการเรียนเป็นการเฉพาะบุคคลมากขึ้น มีเวลา
ที่จะทำกิจกรรมอื่นที่จะช่วยในการช่วยเหลือประสิทธิผลของผลความสำเร็จและความแตกต่าง
ระหว่างบุคคล ช่วยได้แก่เด็กเรียนช้ามีเวลาเรียนมากขึ้น เด็กที่เรียนเร็วใช้เวลาช่วยทำ
ปัญหาเข้าใจไม่พอสอนให้มากขึ้นโดยใช้เวลาว่างกับ ทำปัญหาเรื่องความยาก
และสถานที่เรียนไม่เพียงพอกับจำนวนนักเรียน นอกจากนี้ยังเป็นการส่งเสริมการศึกษา
นอกโรงเรียนในสถานการที่เรียนด้วย
ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะสร้าง
บทเรียนโปรแกรมวิชาการศึกษาและนำไปทดลอง เพื่อศึกษาผลดีเสียของการเรียนของ
นักเรียนที่เรียนโดยโปรแกรมเปรียบเทียบกับวิธีการสอนปกติของครู

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระดัประเภศมัธยมศึกษาชั้นสูง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักศึกษาในระดับประเภศมัธยมศึกษาชั้นสูง ที่ได้จากวิธีสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนของครู

ปัญหาในการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จะตอบปัญหา ต่อไปนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักศึกษาที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการสอนของครู แตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ ด้าน ความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ ของนักศึกษาที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการสอนของครู แตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ทำให้ทราบว่าการเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น สามารถใช้เป็นวิธีสอนของครูได้หรือไม่ อย่างไร
2. ทำให้ทราบขอบเขตของบทเรียนโปรแกรม ปัญหาในการสร้างและการใช้บทเรียนโปรแกรม
3. เป็นการเสริมสร้างให้เกิดแนวความคิดในการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ของครู.

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. บทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง โดยยึดหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ 17 ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง พุทธศักราช 2510
2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทดลองกับนักศึกษาระดับชั้น ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพิษณุสงคราม จังหวัดพิษณุโลก จำนวน 70 คน แบ่งเลือกโดยการสุ่มจากนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งหมด 261 คน แล้วแบ่งเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 35 คน
3. การทดลองครั้งนี้กำหนดเวลาเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม ๆ ละ 12 ชั่วโมง ทำการทดลอง ในภาคเรียนฤดูร้อน ปี พ.ศ. 2519 โดยใช้เนื้อหาในการสอนอย่างเดียวกัน ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม ส่วนการสอนแบบปกติให้ให้อาจารย์คณิตศาสตร์ของวิทยาลัยครูพิษณุสงคราม พิษณุโลก เป็นผู้สอน ใช้เวลาหลังเรียนจบแล้วทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที.

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. บทเรียนโปรแกรม หมายถึงบทเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ระดับ ป.ศ.สูง (ค.ณ.17) ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามหลักการสร้างบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น
2. นักศึกษา หมายถึง นักศึกษา ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งภาคปกติและภาคนอกเวลา วิทยาลัยครูพิษณุสงคราม จังหวัดพิษณุโลก ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน แบ่งเป็นสองกลุ่มเท่า ๆ กัน เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
 - ก. กลุ่มทดลอง หมายถึง กลุ่มนักศึกษาที่เรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียน
 - ข. กลุ่มควบคุม หมายถึง กลุ่มนักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์คณิตศาสตร์วิทยาลัยครูพิษณุสงคราม จังหวัดพิษณุโลก.

3. การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนแบบครูเป็นผู้สอนภายในห้องเรียนโดยใช้เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับบทเรียนโปรแกรม

4. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม หมายถึง การสอนที่ให้นักศึกษาเรียนด้วยตนเองภายในห้องเรียนจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียนของนักศึกษา.

5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนของนักศึกษาที่ได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียน โดยใช้แบบทดสอบเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น และแบบทดสอบวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถูกต้องตามหลักวิชา มีประสิทธิภาพ และมีความเชื่อถือได้

2. กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มได้เรียนจากบทเรียนโปรแกรม และการสอนตามปกติ ได้มีความสามารถ และมีความสามารถในการเรียนพอ ๆ กัน.

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

พัฒนาการของบทเรียนโปรแกรม

แนวความคิดของการศึกษาเกี่ยวกับการสอนด้วยตัวเอง หรือเรียนด้วยตัวเองมีมานานแล้ว เช่น โสกราตีส (Socrates) ใช้แผนภาพต่าง ๆ สอนลูกหาสให้เข้าใจทฤษฎีเรขาคณิตของพีทาโกรัส (Pythagoras) โดยสอนไปที่ชั้นจุนในที่สุดก็เข้าใจหลักการใหญ่ ซึ่งวิธีการนับเป็นจุดเริ่มต้นของบทเรียนสำเร็จรูป

บุคคลที่ถือว่าเป็นผู้ทำเนิกรุ่นแบบโปรแกรม คือ ศาสตราจารย์เพรสเซย์ (Sydney L. Pressey) แห่งมหาวิทยาลัยโอไฮโอ สหรัฐอเมริกา เพรสเซย์ ได้ประดิษฐ์เครื่องสำหรับทดสอบความรู้นักเรียนในปี 1920 ลักษณะของเครื่องทดสอบจะให้ผู้เรียนอ่านคำถามในช่อง และจะมีคำตอบให้เลือก 4 คำตอบ ผู้เรียนต้องกดปุ่มเลือกคำตอบที่เขาคิดว่าถูก ถ้าตอบถูกจะไต่พบคำถามใหม่ต่อไป ถ้าตอบผิดของก็คิดหาคำตอบใหม่จนกว่าจะถูก เครื่องจะบันทึกจำนวนคำตอบที่เขาตอบถูกไวด้วย และในการตอบทุกแต่ละครั้งผู้เรียนจะได้รับลูกกวาดซึ่งออกมาจากเครื่องเป็นรางวัล (Thomas and Swartout, 1963 : 520) เครื่องสอนของเพรสเซย์ในระยะแรก ๆ ไม่ได้รับความสนใจในวงการศึกษ แต่ภายหลังที่เพรสเซย์ได้เขียนบทความเรื่อง "A COMING REVOLUTION IN EDUCATION" ทำให้นักการศึกษาและนักการศึกษาสนใจที่จะทดลองใช้เครื่องมือ และผลิตออกจำหน่ายเพื่อใช้ในการศึกษา (Hartley, 1972 : คำนำ) บุคคลที่ดำเนินการต่อมา ก็นักจิตวิทยาชื่อ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) ซึ่งเป็นผู้นำทางทฤษฎีการเรียนรู้แบบสิ่งเร้าและการตอบสนอง (Stimulus - Response) หรือ S-R Theory สกินเนอร์สร้างบทเรียนสำเร็จรูป โดยอาศัยทฤษฎีการเรียนรู้ว่า สภาพการเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้เมื่อปฏิบัติกรียาตอบสนองต่อสิ่งเร้าที่มายั่วภายนอก ซึ่งก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม สกินเนอร์ยังมีความเชื่ออีกว่าเครื่องสอนจะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงภายในตัวของผู้เรียนที่ปฏิบัติกรียาตอบทเรียน และเครื่องสอนยังเป็นผู้ช่วยสอนที่ดี

ในการทำให้ผู้เรียนเรียนไปทีละขั้น และเข้าใจอีก นอกจากนี้ยังทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึก
เชื่อมั่นว่า ครูสอนแบบตัวหนังสือ

เครื่องสอนของเรอเดเย ได้ใช้วิธีการการก้าวข้ามความกลัว ความกลัวกับ ความปัจจุบันกลายเป็น
บทเรียนที่ใช้กับเครื่องกลไก เครื่องที่ประสิทธิภาพยอดเยี่ยม สิ่งที่เขาเรียนได้มาเป็นรูป
หนังสือก็มีการจัดทำกันอย่างกว้างขวางในทุกสาขาวิชาที่ใช้สอนในทุกระดับชั้นการศึกษา
จนปัจจุบันนี้แบบแปลนจัดทำเป็นอุตสาหกรรมของการทำ (คณะศิลปวิทยาฯ แผนกวิชา
โสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2515 : 206 - 207)

หลักการพิจารณาการสร้างบทเรียนโปรแกรม

เอ็ดวาร์ด บี. ฟราย (Fry, 1963 : 38 - 41) ได้ให้หลักการพิจารณาการ
สร้างบทเรียนโปรแกรมไว้ว่า ผู้เขียนบทเรียนควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1. ผู้เรียน ผู้เขียนควรทราบว่าผู้เรียนนั้นเป็นบุคคลในระดับใด เช่น อายุ
พื้นฐานทางสังคม ความสามารถในการเรียน และประสบการณ์เดิม
2. ผลที่ต้องการ ต้องตั้งวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมขึ้นมาก่อนว่าต้องการให้
ผู้เรียนได้เรียนรู้อะไร และต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนเกี่ยวกับอะไรบ้าง เพื่อจะได้
สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ทั้งไว้
3. เนื้อหาวิชา การจัดเตรียมบทเรียนควรเขียนเป็นหัวข้อเรื่องใหญ่ ๆ แล้วจึง
แบ่งเป็นหัวข้อย่อย ๆ เนื้อหาจะได้นำมาจัดทำเป็นกรอบความสำคัญก่อนหลัง
4. วิธีการสอน ก่อนจะพิจารณาหาเรื่องใด ควรพิจารณาก่อนว่ามีวิธีสอนอื่น
ที่ดีกว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมหรือไม่ ถ้ามีก็ไม่จำเป็นต้องใช้บทเรียนโปรแกรม
และต้องพิจารณาว่าจะใช้บทเรียนเพื่อสอน ผู้เรียนที่มีความแตกต่างระหว่างบุคคล หรือใช้
บทเรียนเพื่อซ่อมเสริมกับผู้เรียนที่เรียนไม่ทัน หรือจุดประสงค์อย่างอื่น
5. ความถี่ในการฝึก เมื่อจะสร้างบทเรียนโปรแกรมควรพิจารณาว่าต้องฝึกบ่อย
เพียงใด การที่จะฝึกซ้ำไปจะคุ้มค่าหรือไม่

๘. ชนิดของบทเรียนโปรแกรม การสร้างบทเรียนควรดูได้เหมาะสมกับเนื้อหาวิชา ผู้เรียนและวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

ลักษณะบทเรียนโปรแกรม

เอ็ดวาร์ด บี ฟราย (Fry, 1963 : 2) ได้กล่าวถึงลักษณะบทเรียนโปรแกรม ดังนี้

1. แบ่งเนื้อหาออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ แต่ละหน่วยเรียกว่ากรอบ (Frame) แต่ละกรอบจะมีขนาดแตกต่างกัน
2. ในแต่ละกรอบจะคงให้นักเรียนตอบสนอง ซึ่งนักเรียนจะมีส่วนร่วมในการเรียน กิจกรรมต่าง ๆ ที่ให้นักเรียนทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหา
3. นักเรียนได้รับการเสริมแรงแบบตอบกลับทันทีถ้าตอบถูก แต่ถ้าตอบผิดก็จะเกิดความเข้าใจผิดทันที
4. กรอบต่าง ๆ เรียงต่อเนื่องกันไปตามเนื้อหาที่แบ่งย่อยเป็นหน่วยเล็ก ๆ ผู้เรียนจึงต้องระมัดระวังเกี่ยวกับลำดับขั้นของการเรียนรู้ ผลก็คือทำให้ลำดับขั้นของการนำเสนอายแก่การเข้าใจยิ่งขึ้น
5. บทเรียนโปรแกรมนี้นักเรียนเป็นศูนย์กลาง เพราะก่อนที่จะนำบทเรียนมาใช้ จะต้องนำไปทดลองกับกลุ่มนักเรียนเพื่อหาข้อบกพร่อง และนำมาปรับปรุงแก้ไขส่วนที่เป็นปัญหา จนกระทั่งนักเรียนได้แสดงพฤติกรรมต่าง ๆ ได้ตามที่ระบุไว้ในบทเรียน แล้วจึงนำออกใช้

ชนิดของบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปมีสองแบบคือ

- บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น (Linear program)
- บทเรียนโปรแกรมแตกกิ่ง (Branching program)

บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น (Linear program)

บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น เป็นโปรแกรมที่จัดให้ผู้เรียนได้อ่านข้อความเช่นเดียวกัน
ถามคำถาม และตอบคำถามเหมือนกันตั้งแต่กรอบต้นจนถึงกรอบสุดท้าย ผู้เรียนจะข้ามกรอบ
หนึ่งกรอบไปไม่ได้ เรื่องที่ได้อ่านจากกรอบแรกจะเป็นพื้นฐานของกรอบต่อไป วิธีเขียน
คำตอบของบทเรียนโปรแกรมนี้มักจะเป็นแบบเติมคำ หรือ แบบเลือกถูกผิด

เอ็ดวาร์ด บี ฟราย (Fry, 1963 : 4) สรุปลักษณะของบทเรียนโปรแกรม
เชิงเส้นดังนี้

1. ใช้กรอบเล็ก ๆ เฉลี่ยแล้วมีความยาวประมาณ 2 - 3 ประโยค
2. ให้นักเรียนตอบสนองโดยการเขียนคำตอบสั้น ๆ
3. เสนอความรู้ใหม่เป็นไปตามลำดับความยากง่าย

แนวการใช้กรอบ

กรอบเนื้อหา (Content Frame)

1. พบทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน
2. เสนอความรู้ใหม่
3. ทบทวน

ข้อดีของบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น

1. การเสนอความรู้ในกรอบไปทีละน้อยจากง่ายไปหายาก ช่วยให้ผู้เรียนได้ลำดับ
ความรู้ความเข้าใจโดยถูกต้องไม่สับสน
2. เนื้อหาที่บรรจุในกรอบจะช่วยลดความเบื่อหน่ายในการเรียน
3. การเสนอคำตอบให้เป็นการเสริมแรงให้ผู้เรียนมีความภูมิใจในผลของการทำ
ของเขาและทั้งยังเป็นสิ่งท้าทายผู้เรียนให้เกิดความสนใจที่จะเรียนต่อไป

ข้อบกพร่องของบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น

ทิตนา แชนมณี (เจดิม แสงเย็น, 2517 : 57) ได้กล่าวถึงข้อเสียของบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นไว้ดังนี้

1. นักเรียนที่เรียนเก่งจะเบื่อง่ายไม่สนใจ
2. ไม่มีการยืดหยุ่น
 - ไม่เหมาะกับการสอนในเชิงความคิดสร้างสรรค์เพราะไม่มีทางให้ผู้ตอบ

ได้คิด

- ไม่เปิดโอกาสให้ใช้สื่อความหมายและประสบการณ์อย่างอื่นเข้าช่วย
- การมีคำตอบให้เลือกหรือผู้ถูกถามให้ เป็นการรังความก้าวหน้าของ

เด็กฉลาด

บทเรียนโปรแกรมแตกกิ่ง (Branching program)

กรราวเดอร์ (Crowder) ได้ปรับปรุงหลักการต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนรู้ทำให้เกิดวิธีการเรียนด้วยตนเอง ซึ่งเรียกว่าโปรแกรมแบบแตกกิ่ง ขบวนการต่าง ๆ ในการจัดเนื้อหา และวัสดุการสอนคล้ายกับโปรแกรมเชิงเส้น แต่เนื้อหาที่บรรจุในรอบจะมากกว่า มีคำถามและคำตอบแบบเลือกตอบ เมื่อผู้เรียนเลือกตอบคำถามใดแล้วคำตอบนั้นจะบอกผู้เรียนว่าควรไปศึกษากรอบใดต่อไป ถ้าทำผิดจะได้รับการอธิบายเพิ่มเติม พร้อมทั้งเหตุผล จากนั้นจะมีคำสั่งให้กลับไปทำกรอบเดิมหรือกรอบอื่นต่อไป ดังนั้นตามทฤษฎีแล้ว การเตรียมโปรแกรมจะต้องวินิจฉัยข้อผิดพลาดและจัดการสนทนาระดับให้ถึงมาตรฐานที่พึงพอใจจะให้ศึกษากรอบต่อไป สิ่งที่ยูเขียนโปรแกรมควรคำนึงถึงคือก่อให้เกิดตัวเลือกที่มีความหมาย และให้คำตอบที่ถูกต้องชัดเจน พร้อมทั้งแน่ใจว่าไม่มีกรอบเลือกคำตอบถูกโดยบังเอิญ (Glaser, 1965 : 36 - 39)

กฤษนามูธี (Krishnamurthy, 1973 : 39 - 56) ได้กล่าวถึงโปรแกรมแตกกิ่งดังนี้

1. แต่ละกรอบให้ว่ากรอบของโปรแกรมเชิงเส้น เพราะจะมีสองถึงสามสิ่งกับ (Concepts) ที่สัมพันธ์กัน

2. ทดลองแบบจำลองโดยมากจะเพิ่มไว้ภายใต้การเลขนอความรู้อย่างในกรอบ

3. เมื่อคอมพิวเตอร์มีกรอบซ่อมเสริม (Remedial Frame) ได้ทำ

4. สำหรับตัวใดก็ตามที่เรียนคือคนนั้น ถ้าเป็นตัวใดก็ตามที่ถูกต้องแล้วผู้เรียนจะรู้สึกกับใหม่ที่เขาเป็นตัวเจ้า ได้เรียนรู้จะถูกกำหนดไว้ ปกติขั้วที่กรอบซ่อมเสริมนี้จะอธิบายให้ทราบสิ่งที่ผิดพลาด

ฉะนั้นในการเรียนโดยโปรแกรมเชิงเส้น โปรแกรมแตกต่างกัน ผู้เรียนจะมีปฏิสัมพันธ์ต่างกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับความสามารถของผู้เรียนแต่ละคน

แนวทางการเขียนกรอบ

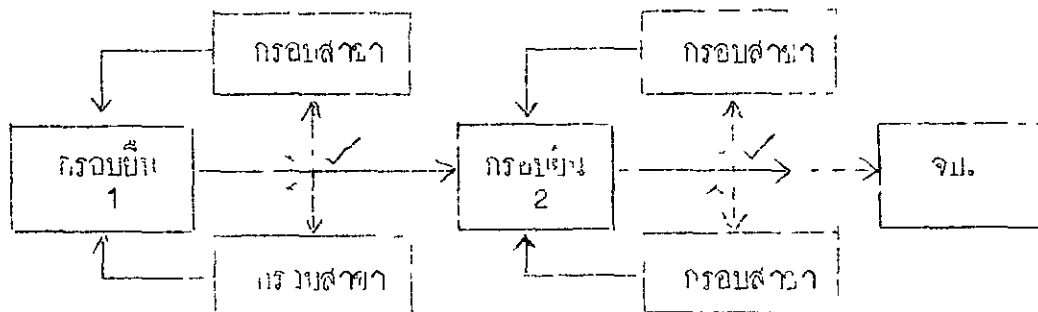
กรอบเนื้อหาวิชา (Content Frame)

1. ทบทวนเรื่องอธิบายกรอบที่ถูกต้องของกรอบที่พัฒนา
2. อธิบายเพิ่มเติมเสริมสนับสนุน
3. ให้ความรู้ใหม่
4. ทวน
5. ส่งไปศึกษากรอบต่อไปตามลักษณะของการตอบ

กรอบซ่อมเสริม (Remedial Frame)

1. ข้อความที่ตอบ
2. โทณง
3. แสดงเหตุผลแสดงว่าเป็นการตอบผิด
4. อธิบายเพิ่มเติมหรือขยายความรู้ให้ ให้กระจ่างขึ้นด้วยภาษาและเนื้อหาที่ง่าย
5. แนะนำกรอบที่จะศึกษาต่อไป

ลักษณะโปรแกรมแตกกิ่ง



ข้อดีของบทเรียนโปรแกรมแตกกิ่ง

1. เนื้อหาที่บรรจุในกรอบขึ้นและกรอบสาขา ช่วยลดการซ้ำ และการจบที่ไม่จำเป็น แสดงว่าช่วยลดเวลาเรียนและความเบื่อหน่าย
2. เมื่อผู้เรียนตอบผิด เหตุผลที่ผิดจะอธิบายไว้ในกรอบสาขา ดังนั้นในการเรียนแบบนี้ ผู้เรียนจะได้ทั้งคำตอบถูกและทราบเหตุผลเมื่อผู้เรียนตอบผิด

ข้อบกพร่องของบทเรียนโปรแกรมแตกกิ่ง

1. ทำให้ผู้เรียนยุ่งยากในการอ่าน เพราะต้องเปิดกลับไปกลับมาตามคำสั่งที่คำตอบทำให้เมื่อไร
2. บทเรียนโปรแกรมแตกกิ่งนี้เหมาะสำหรับผู้เรียนที่ฉลาด ส่วนผู้เรียนที่ช้าสติปัญญาปานกลาง และอ่อน จะไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนเท่าที่ควร
3. ในการเขียนคำตอบให้เลือกกองหาใจผู้เรียนได้ว่า เขาจะตอบในแนวไหนทั้งที่เป็นคำตอบถูกและผิด เพราะจะได้อธิบายเหตุผลในการตอบคำตอบของผู้เรียนที่ผิดให้ถูกต้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมมีทางประเทศ

อีสเตอร์เคย์ (Easterday, 1968 : 305 - 307) ได้ทดลองเปรียบเทียบผล การสอนวิชาพีชคณิตโดยใช้โปรแกรมเปรียบเทียบการสอนปกติกับนักเรียนเกรด 9 ในสหรัฐอเมริกา ปรากฏว่า กลุ่มที่สอนโดยโปรแกรมหาคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มที่สอนตามปกติ การเปรียบเทียบระหว่างเศษส่วนและวงกลมไม่แตกต่างกัน ส่วนการเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มเศษส่วนด้วยกัน ปรากฏว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยโปรแกรมดีกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติ

เบก (Peck, 1970 : 3385 - A) ได้เปรียบเทียบการสอนพีชคณิตระดับชั้น ปริญญาตรีทั้งสองด้วยวิธีสอน 3 วิธี คือ วิธีบรรยาย - อภิปราย (Traditional Lecture Discussion) วิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธี (Multi - methods) และวิธีใช้บทเรียน โปรแกรม ทดลองกับนักศึกษา 168 คน แบ่งเป็นหกกลุ่ม กลุ่มใหญ่สามกลุ่ม กลุ่มเล็กสามกลุ่ม โดยที่วิธีสอนหนึ่งวิธีใช้กับกลุ่มใหญ่และกลุ่มเล็ก จากการทดลองภายหลังการเรียนแล้วสรุปได้ว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีบรรยาย - อภิปราย และวิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธี สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมอย่างมีนัยสำคัญ คะแนนเฉลี่ย ของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีบรรยาย - อภิปราย กับวิธีสอนรวมหลาย ๆ วิธี ไม่แตกต่างกัน

โกเบล (Goebel, 1966 : 982 - A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนระหว่างครู กับนักเรียนโดยใช้รูปแบบการสอนแบบโปรแกรมโดยใช้การสังเกต พฤติกรรมในชั้นเรียนสองกลุ่ม กลุ่มทดลองเป็นกลุ่มที่ครูใช้โปรแกรมเรียนโปรแกรม กลุ่มควบคุมเป็นกลุ่มที่ครูสอนตามปกติ การสังเกตในเทคนิคสังเกตการ คือ Stop - action technique และเทคนิคเงา เฟลนเดอร์ (Flander) สังเกต 2 ระยะใช้เวลา 1 ปี เพื่อดูชั้นสังเกตของครู และมีแบบสอบถามประเมินคุณภาพของการสอนแบบโปรแกรมด้วย ผลการสังเกตปรากฏว่า ครูที่สอน โดยใช้โปรแกรมใช้เวลา 68 % ของเวลาทั้งหมด และนักเรียนเป็นรายบุคคล ครูที่สอน ไม่สอนตามปกติใช้เวลาเพียง 3 % และครูที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสอนการรวมแบบนั้น เพราะทำให้ครูมีโอกาสรู้จักนักเรียนรายบุคคล นอกจากการใช้เทคนิคของ เฟลนเดอร์ พบว่า เวลาสำหรับครูและนักเรียนมากกว่าการสอนแบบปกติ

เกรวี เกรทซิงเกอร์ (Cavin Gretsinger, 1966 : 2/42 - A) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการเรียนของนักเรียนเกรด 6 ที่จับเรียนโปรแกรมเรื่องอาหารกับส่วนที่เรียนจากการสอนปกติ โดยการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมกับที่เรียนจากการสอนปกติไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ และกลุ่มที่ใช้บทเรียนโปรแกรมใช้เวลาในการเรียนเพียง 49.1 % ของเวลาที่ใช้มาเรียนเนื้อหาวิชา

โรเบิร์ต โอ บราวน์ (Robert O. Brown Jr., 1967 : 182) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสอนเปรียบเทียบผลการเรียนของนักเรียนที่จับเรียนโปรแกรมกับนักเรียนที่ไม่จับเรียนโปรแกรม ทดลองกับนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 จากโรงเรียน 7 แห่ง แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 147 คน สอนโดยครูและใช้บทเรียนโปรแกรมประกอบ กลุ่มควบคุม 183 คน สอนโดยครูและใช้ตำราเรียนปกติ ผลปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากครูและมีบทเรียนโปรแกรมประกอบ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากครูและบทเรียนปกติ

บีเน โดแนล (Beane Donald, 1967 : 190) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาเรขาคณิต เรื่อง เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นกับบทเรียนโปรแกรมแท่งกิ่ง ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมทั้งสองชนิดไม่แตกต่างกัน นักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมแท่งกิ่งใช้เวลามากกว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น และนักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นมากกว่าบทเรียนโปรแกรมแท่งกิ่ง

ไวท์ (White, 1970 : 3373 - 4) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์กับนักศึกษาที่มีพื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์มาแล้วถึงเกณฑ์มัธยม โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติของครู กระทำกับกลุ่มตัวอย่าง 132 คน แบ่งเป็นกลุ่มควบคุม 56 คน ได้เรียนจากการสอนปกติของครู และกลุ่มทดลอง 74 คน ได้เรียนจากบทเรียนโปรแกรม ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนปกติของครูอย่างมีนัยสำคัญ

คอนรอย (Conroy, 1972 : 5102 - A) ได้ทดลองสอนวิชาพีชคณิตในระดับ
วิทยาลัยโดยใช้วิธีสอนแบบโปรแกรมเปรียบเทียบกับวิธีสอนปกติของครู ผลปรากฏว่าความ
ก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากการสอนทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน เมื่อเปรียบเทียบ
ระหว่างเวลา ผลยังใกล้เคียงกัน ผลการเปรียบเทียบระหว่างอายุปรากฏว่า
นักเรียนที่มีอายุมากมีความก้าวหน้าทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่มีอายุน้อยกว่า

ออร์ (Oor, 1968 : 11) ได้ทดลองเปรียบเทียบความทรงจำ (Retention)
ของนักเรียนที่เรียนจากแบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ การทดสอบนักเรียนกระทำ
ภายหลังเรียนเนื้อหาจบแล้ว 1 วัน 1 สัปดาห์ และ 2 สัปดาห์ ผลปรากฏว่า ความทรงจำ
ในการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากสองวิธีไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ออร์ ได้สรุปผล
การทดลองว่า การสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมนี้สมควรได้รับการพิจารณาปรับปรุงให้
เหมาะสมเพื่อใช้เป็นวิธีสอนที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง

คาร์น และ ซันด์ (Carn and Sund, 1974 : 366) ได้ศึกษาเกี่ยวกับ
โปรแกรมที่สนองความแตกต่างระหว่างบุคคลและได้สรุปข้อดีของการสอนที่ดีขึ้นเรียนเรียนด้วย
ตนเองดังนี้

1. นักเรียนประมวลความรู้ได้ดีขึ้นนักเรียนเรียนด้วยตนเอง
2. นักเรียนที่เก่งสามารถเรียนรู้ได้มากและมีความก้าวหน้าทางการเรียนกว่าการ
สอนแบบกลุ่ม
3. ลดปัญหาทางจากระยะเรียนการ
4. นักเรียนไม่ค่อยเกิดความท้อแท้
5. นักเรียนชอบการเรียนด้วยตนเองมากกว่าการสอนปกติของครู

งานวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย

ในปี พ.ศ. 2507 กองการวิจัย กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ได้ดำเนินการ
วิจัยเรื่องประสิทธิภาพของการใช้บทเรียนโปรแกรมสอนนักเรียนไทย โดยสร้างบทเรียนโปรแกรม

เป็นแผนกระดากใช้กับเครื่องวัดแบบต่าง ๆ ทำการทดลองสองครั้ง ครั้งแรกในปีการศึกษา 2507 ทำกับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง โรงเรียนวัดหลวง โรงเรียนสตรีมหาจุฬาราย และโรงเรียนมัธยมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน โรงเรียนละ 1 ห้องเรียน ภายใต้การทดลองนาน 4 เดือน ใช้ข้อบกพร่อง 1 ข้อ ในแต่ละครั้ง ที่สองกับนักเรียน ที่สำเร็จการศึกษาไปประมาณ 7 จากโรงเรียนต่าง ๆ จำนวน 60 คน กระทั่งระหว่าง ภาคฤดูร้อนปี พ.ศ. 2508 แล้วจากทดลองแล้วได้แก้ไขข้อบกพร่อง และวิธีปฏิบัติใน หนังสือ "วิธีสอนนักเรียนโดยใช้โปรแกรมที่ 1 A Programmed Text" ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนโปรแกรมวิชาชีวเคมีในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งได้ผลดีกว่านักเรียนที่ศึกษาด้วยวิธีแบบบรรยาย และแนะนำว่าควรใช้บทเรียนโปรแกรมประกอบการสอนชีวเคมี เพราะจะช่วยให้การเรียนรู้ของ นักเรียนก้าวหน้าขึ้น (ทองการวิจัย, 2513 : 50)

วรรณ เจริญพงษ์ (วรรณ เจริญพงษ์, 2515) ได้ทดลองเปรียบเทียบ ผลการสอนวิชาเลขคณิต เรื่อง เกมส่วนใน ระดับชั้น ป.5 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติของครู ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์และความตรงจำเพาะการเรียนรู้ของนักเรียนที่เรียน จากการสอนทั้งสองวิธี ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ วัยางไว้ก็ตาม วรรณ สรุปว่า การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมทำให้ผู้สอนมีเวลาว่างสำหรับทำกิจกรรมอย่างอื่นและช่วย การปกครองชั้นเรียน

สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ (สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ, 2516) ได้ทดลองเปรียบเทียบ ผล การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซตในระดับชั้น ม.ศ.1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอน ปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากการสอนทั้งสองวิธีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และพบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมใช้ เวลาในการเรียนน้อยกว่าเรียนจากการสอนปกติ นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ย 87 % ชอบบทเรียน โปรแกรม และ 92 % มีความเห็นว่าการนำบทเรียนโปรแกรมมาใช้ประกอบการสอนของครู

วนิดา กิริเสวีวรรณ (วนิดา กิริเสวีวรรณ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบ ผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นในระดับชั้น ม.ศ.3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรม

กับการสอนปกติของครู ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากวีซีคอนทั้งสองไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ปรีมดี ฉิมเจม (ปรีมดี ฉิมเจม, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ ในระดับชั้น ป.๓.๑ โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากวีซีคอนทั้งสองวิธีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เอื้อน ปิ่นเงิน (เอื้อน ปิ่นเงิน, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรีโกณมิติ และความน่าจะเป็น ในระดับชั้น ป.๓.๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนปกติของครูอย่างมีนัยสำคัญ

ทางสถิติ ($p < .05$)

ผลงานการวิจัยในทางประเทศ และในประเทศทำให้เชื่อได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติของครูเหมือนกัน หรืออาจจะดีกว่า และถ้าใช้แบบเรียนโปรแกรมควบคู่กับการสอนตามปกติของครู นักเรียนน่าจะมีผลการเรียนดีขึ้นกว่าเดิม นอกจากนี้แบบเรียนโปรแกรมยังให้ประโยชน์ต่อวงการศึกษานานาชาติ ทั้งนี้

ประโยชน์ที่มีต่อผู้บริหารการศึกษา

1. ช่วยแก้ปัญหาเรื่องการจัดสรรครูผู้ชำนาญในวิชาใดวิชาหนึ่ง
2. ช่วยแก้ปัญหาที่นักเรียนชั้นในเมื่อ ครูไม่สามารถจะให้ความสนใจ และเอาใจใส่ต่อเด็กนักเรียนได้ทั่วถึง
3. แก้ปัญหาการเรียน การสอนที่นักเรียนมีความเรียนบางวิชาอ่อนเกินไป

ประโยชน์ที่มีต่อการสอน

1. ภูมิเวลาวางพอที่จะสร้างสร้งงานสอน ปรับปรุงการสอน ทำให้การสอนมีประสิทธิภาพ และมีเวลาที่จะช่วยเหลือนักเรียนที่มีปัญหาทางการเรียนมากขึ้น
2. ใช้เป็นอุปกรณ์ประกอบการสอนวิธีอื่น ๆ ได้ เช่น การสอนเป็นคณะ การสอนตามความแตกต่างระหว่างบุคคล
3. ทำให้การปกครองชั้นเรียนสะดวกขึ้น เพราะนักเรียนต้องรับผิดชอบในการอ่านบทเรียนของแต่ละคน

ประโยชน์ที่มีต่อนักเรียน

1. ลดปัญหาในเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคล นักเรียนที่เรียนเร็วจะไม่ถูกทิ้งเวลาการเรียน ไม่ต้องพบปัญหาที่ตัวเองเข้าใจอยู่แล้ว นักเรียนที่เรียนช้าจะเรียนไปทีละชั้น ๆ ในที่สุดก็จะเข้าใจเนื้อหาบทเรียนเช่นเดียวกันโดยใช้เวลาต่างกัน
2. ผู้เรียนมีความรับผิดชอบในการเรียนมากขึ้น
3. ผู้เรียนมีโอกาสได้รับการเอาใจใส่จากครูเป็นรายบุคคลมากขึ้น
4. ผู้เรียนอาจใช้บทเรียนไปร่นโปรแกรมทบทวนความรู้ของตนที่เรียนจากห้องเรียนได้.

วิธีดำเนินการ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ผู้วิจัยใช้ในการทดลองเป็นนักศึกษาชั้น ม.ศ. ๑ วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยการอาชีพสงขลานครินทร์ จังหวัดนครศรีธรรมราช ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน ซึ่งเลือกมาจากนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์วาคยภักดิ์ และภาคนอกเวลา จำนวน 261 คน โดยการสุ่มจากนักศึกษาวาคยภักดิ์ 23 % จำนวน 16 คน และเลือกจากนักศึกษาภาคนอกเวลา 77 % จำนวน 54 คน แบ่งเป็นกลุ่ม ๆ ละ 35 คน กลุ่มแรกเรียนโปรแกรมเรียนโปรแกรมเรียนกว่ากลุ่มทดลอง กลุ่มที่ 2 เรียนโดยการสอนของครูเรียกว่ากลุ่มควบคุม

ตาราง 1 แสดงจำนวนนักศึกษาของทั้งสองกลุ่มในการทดลอง จำแนกตามเพศ

กลุ่มตัวอย่าง	ชาย	หญิง	รวม
กลุ่มทดลอง	10	25	35
กลุ่มควบคุม	19	16	35
รวม	29	41	70

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ก. การสร้างบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ก่อสร้างหาเรียนโปรแกรมเรขาคณิตวิเคราะห์แบบเชิงเส้นและมีวิธีดำเนินการดังนี้

1. ศึกษาหลักและวิธีการเขียนบทเรียนโปรแกรมจากตำรา บทความ และตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมที่ผู้สอนสร้างเอาไว้

2. ศึกษาเนื้อหาวิชาคณิตวิเคราะห์จาก: บัณฑิตการสอบวิชาคณิตศาสตร์ กรมการฝึกหัดครู เขตการศึกษา 2510 และกำหนดเนื้อหาเป็นบท ๆ ดังนี้

ก. ระบบพิกัดฉาก (Rectangular cartesian coordinates)

ข. ระยะทางระหว่างสองจุด และการหาจุดแบ่งเส้นตรง

ค. การหาพื้นที่รูปเหลี่ยม

ง. โกวัดและสมการ : เส้นตรง พาราโบลา วงกลม วงรี และ

ไฮเพอร์โบลา

จ. ความเอียง (Inclination) ความชัน (Slope) และมุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

ฉ. ความชันและกราฟของเส้นตรง วงกลม และพาราโบลา

3. วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการสอนเป็นบท ๆ ตามเนื้อหาข้างกล่าว

4. สร้างแบบทดสอบและข้อให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่วางไว้

5. เขียนบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นตามลำดับหัวข้อที่วางไว้

ข. การปรับปรุงบทเรียนโปรแกรม

ผู้วิจัยดำเนินการปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมส่วนครั้งดังนี้

ครั้งที่ 1 ทดลองบทเรียนโปรแกรมกับนิสิตชั้นปีที่ 2 ของมหาวิทยาลัย-

ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพฯ จำนวน 1 คน ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา

2518 การทดลองครั้งนี้กระทำเมื่อแก้ไขข้อบกพร่องจากผู้วิจัยคอยสังเกตเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง

ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น แล้วนำมาแก้ไขปรับปรุงบทเรียน

ครั้งที่ 2 ทดลองบทเรียนโปรแกรมกับนิสิตชั้นปีที่ 1 ของ

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 5 คน ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา

2518 การทดลองครั้งนี้กระทำเพื่อปรับปรุงกรอบที่นิสิตทำผิด กินสปีดเร็วเกินไปของจำนวนนิสิตทั้งหมด

ครั้งที่ 3 ทำทดลองบทเรียนโปรแกรมที่แก้ไขปรับปรุงจากครั้งที่สอง กับ นักศึกษา ป.ศ. สูงปีที่ 1 วิทยาลัยครูพิษณุโลก ในโอกาสที่ว่างโดยเรียนเนื้อหาตามก่อน จำนวน 30 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2518 การทดลองครั้งนี้กระทำในลักษณะเดี่ยว กับครั้งที่สอง เสร็จแล้วนำผลการทดลองครั้งนี้มาประมวลผล ซึ่งได้เกิดขึ้นมาตรวจวิเคราะห์ เพื่อปรับปรุงบางกรอบที่นักศึกษาคิดเห็นสมควรใช้ก่อนนำมาทดลองอีกครั้ง แล้วจึงนำมาเรียน ที่ได้รับการแก้ไขปรับปรุงทั้งสามครั้งนี้ไปทดลองจนเปรียบเทียบกันไป

การวิเคราะห์ผลปรับปรุงบทเรียนมีผลดีกว่า ผลการตอบของบทเรียนเดิมมีผู้ตอบ ถูกใบต่ำกว่าเกณฑ์เปอร์เซ็นต์ ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ค. การสร้างแบบทดสอบ

ผู้วิจัยได้ออกแบบทดสอบในปรนัยแบบเลือกตอบมี 5 ก้าวเลือก จำนวน 90 ข้อ โดยสร้างตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่วางไว้ และเป็นข้อสอบชนิดวัดด้าน Cognitive Domain 5 ระดับคือ ด้านความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การ วิเคราะห์และการสังเคราะห์ โดยศึกษาจากหนังสือเทคนิคการวัดผลของ ดร.ชวาล แพทย์กุล การปฏิบัติการศึกษาเรื่องการวัด และการประเมินผลการสอบของ สำเริง บุญเรืองรักษ์ แล้วนำข้อสอบไปทดลองทดสอบแล้วคิดเลือกข้อสอบที่ดีดังนี้

1. นำแบบทดสอบแบบสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 90 ข้อไปทดสอบกับนักศึกษา ป.ศ. สูง เอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพิษณุโลก จำนวน 30 คน ซึ่งเป็นกลุ่ม ที่ผู้วิจัยทดลองบทเรียนโปรแกรมครั้งที่สามมาแล้ว

2. นำแบบทดสอบแบบสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 90 ข้อไปทดสอบกับนักศึกษา ป.ศ. สูง เอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูสวนสุนันทา จำนวน 30 คน ซึ่งเคยเรียนเนื้อหา นั้นมาแล้วในภาคเรียนที่สอง

นำผลการสอบทั้งสองครั้งมาวิเคราะห์เป็นรายข้อโดยใช้หลักการตัด 27 เปอร์เซ็นต์ เป็นกลุ่มสูง กลุ่มต่ำ แล้วใช้การวางสำเร็จของ จง - เกฟาน (Jong - Keh Fan) เพื่อหาข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป และค่าความยากง่าย (p)

0.20 ถึง 0.80 ไว้จำนวน 50 ข้อ นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้มาตรวจให้ ค่าความหาความเชื่อมั่นของข้อสอบ (Reliability) ใช้สูตร กูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder - Richardson) ได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.74 จึงรายละเอียดในภาคผนวก

- ง. คู่มือครูที่ใช้สำหรับการสอนตามปกติ
 ผู้วิจัยได้จัดทำคู่มือสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุมโดยให้เนื้อหา ตัวอย่างแบบฝึกหัด และลำดับหัวข้อที่จะสอนเหมือนกันกับโมดเรียนโปรแกรม

การดำเนินการทดลอง

1. ให้นักศึกษากลุ่มทดลองศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียน และคอยให้ความช่วยเหลือแก่นักเรียนมีปัญหา หรือข้อสงสัย เป็นรายบุคคล ใช้เวลาในการเรียนการสอนสัปดาห์ละ 6 ชั่วโมง รวม 2 สัปดาห์
 ให้นักศึกษากลุ่มควบคุมศึกษาจากการสอนของอาจารย์คณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูพิบูลสงคราม พิษณุโลก โดยวิธีบรรยายในชั้นเรียนตามคู่มือครู ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอนสัปดาห์ละ 6 ชั่วโมง รวม 2 สัปดาห์
2. เมื่อนักศึกษาทั้งสองกลุ่มศึกษาจบแล้ว ทดสอบนักศึกษาทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นภายหลังที่คัดเลือกไว้ จำนวน 50 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที
3. การทดลองครั้งนี้กระทำในภาคเรียนฤดูร้อน (Summer) ปี พ.ศ. 2519

การจัดกระทำข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบทั้งสองกลุ่มมาคำนวณหาค่าทางสถิติดังนี้

1. คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$s = \sqrt{\frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}}$$

โดยที่

$\bar{x}$	แทนค่าเฉลี่ยของคะแนน
$\sum x$	แทนผลรวมของคะแนน
$\sum x^2$	แทนผลรวมกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
s	แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
N	แทนจำนวนคะแนนทั้งหมด

2. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยทั้งสองกลุ่ม

จากสูตร

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่

t	แทนค่าอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
$\bar{x}_1$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
$\bar{x}_2$	แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
s_1	แทนคะแนนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มทดลอง
s_2	แทนคะแนนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม
N_1	แทนจำนวนคะแนนในกลุ่มทดลอง
N_2	แทนจำนวนคะแนนในกลุ่มควบคุม

3. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{NS_t^2 - \bar{X} (N - \bar{X})}{(N - 1) S_t^2}$$

โดยที่

r_{tt}	แทนค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบ
$\bar{X}$	แทนคะแนนเฉลี่ยของข้อสอบ
S_t^2	แทนค่าความแปรปรวนของคะแนนจากข้อสอบ
N	แทนจำนวนข้อของแบบทดสอบ

หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน จากสูตร

$$S.E_{meas} = S_t \sqrt{1 - r_{tt}}$$

โดยที่

$S.E_{meas}$	แทนความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
S_t	แทนความแปรปรวนแบบมาตรฐานของคะแนนจากข้อสอบ
r_{tt}	แทนค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบ.

บทที่ 4

การวิเคราะห์ข้อมูล และ การทดสอบ

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์มาคำนวณค่าเฉลี่ยของกลุ่มแต่ละกลุ่ม จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มการสอบ

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนักศึกษา

การหาคะแนนเฉลี่ยจากคะแนนการสอบในแต่ละกลุ่มปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\sum X$	$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$
กลุ่มทดลอง	35	963	27.51
กลุ่มควบคุม	35	894	25.54

2. นำคะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาหาความแปรปรวนของแต่ละกลุ่ม จากสูตร

$$s^2 = \frac{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}{n(n-1)}$$

โดยที่

s^2	แทน	ค่าความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบ
$\sum x$	แทน	รวมของคะแนน
$\sum x^2$	แทน	ผลรวมกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
n	แทน	จำนวนนักศึกษา

ผลการหาความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบในแต่ละกลุ่มปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\sum x$	$\sum x^2$	s^2
กลุ่มทดลอง	35	963	27405	26.78
กลุ่มควบคุม	35	894	24320	43.67

3. เมื่อคำนวณหาค่าคะแนนเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบของแต่ละกลุ่มแล้วนำผลมาเปรียบเทียบความแตกต่างทางสถิติ โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

t	แทน อัตราความเสียหายทางสถิติ
$\bar{X}_1$	แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง
$\bar{X}_2$	แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม
S_1^2	แทน ค่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลอง
S_2^2	แทน ค่าความแปรปรวนของกลุ่มควบคุม
n_1	แทน จำนวนนักศึกษาในกลุ่มทดลอง
n_2	แทน จำนวนนักศึกษาในกลุ่มควบคุม

ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุมปรากฏดังตาราง 4

ตาราง 4 แสดงค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในแต่ละกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{X}$	S^2	t
กลุ่มทดลอง	35	27.51	26.78	1.32
กลุ่มควบคุม	35	25.54	43.67	

4. นำคะแนนค่าคะแนนทดสอบค่าเฉลี่ยทาง การเรียนในแต่ละคาบมาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานทางการเรียนในแต่ละคาบทางสถิติ โดยผู้กร เช่นเดียวกับข้อ 1, 2 และ 3

ผลการวิเคราะห์ผลดังตารางปรากฏดังตาราง 5

ตาราง 5 แสดงคะแนนเฉลี่ย ความแปรปรวน และอัตราความนัยสำคัญทางสถิติของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	N	$\bar{X}$	S^2	t
กลุ่มทดลอง	ความรู้	35	9.08	3.43	2.90 ^{***}
กลุ่มควบคุม		35	7.63	5.54	
กลุ่มทดลอง	ความเข้าใจ	35	5.80	3.64	0.65 o
กลุ่มควบคุม		35	4.48	4.14	
กลุ่มทดลอง	การแก้ปัญหา	35	6.29	2.92	1.96 ⁺
กลุ่มควบคุม		35	5.23	7.48	
กลุ่มทดลอง	การวิเคราะห์	35	2.80	1.15	0.67
กลุ่มควบคุม		35	2.54	1.90	
กลุ่มทดลอง	การสังเกต	35	1.68	0.75	7.83 ^{***}
กลุ่มควบคุม		35	4.05	2.49	

⁺ นัยสำคัญทางสถิติที่ .05

^{***} นัยสำคัญทางสถิติที่ .01

จากการวิเคราะห์ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของการทดสอบของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเชื่อมั่นว่าการทดสอบจากข้อสอบมา

วิเคราะห์เป็นด้าน ๆ ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของการทดสอบด้าน ความรู้ และการนำไปใช้ ของนักศึกษาที่เรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมแตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาที่เรียนจากการสอนของครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .01$) และ ($p < .05$) ตามลำดับ คะแนนเฉลี่ยของการทดสอบด้านการสังเกตของนักศึกษาที่เรียนจากการสอนของครู แตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาที่เรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .05$) และคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบด้าน ความเข้าใจ และการวิเคราะห์ ของนักศึกษาที่เรียนจากทั้งสองวิธี ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลการทดลอง

จากการวิเคราะห์ผลการทดลอง สรุปได้ว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ของนักศึกษาระดับ ป. กศ. สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมกับการสอนของครูไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ด้าน ความรู้ และการนำไปใช้ ของนักศึกษาระดับ ป. กศ. สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรม สูงกว่าของนักศึกษาที่เรียนจากการสอนของครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .01$) และ ($p < .05$) ตามลำดับ

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ด้านการสังเกตของนักศึกษาระดับ ป. กศ. สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่เรียนจากการสอนของครู สูงกว่าของนักศึกษาที่เรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .05$)

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ด้าน ความเข้าใจ และการวิเคราะห์ ของนักศึกษาระดับ ป. กศ. สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่เรียนจากการสอนทั้งสองวิธี ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอมะ

ความมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้

1. เพื่อศึกษารายละเอียดโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประกาศนียบัตร-
วิชาการศึกษาระดับสูง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตของนักศึกษา
ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงที่ได้อาจารย์สอนโดยวิธีเรียนโปรแกรม กับวิธีสอนปกติ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักศึกษาชั้น ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์
วิทยาลัยครูพิษณุโลก ปีการศึกษา 2518 จำนวน 70 คน ซึ่งเลือกจาก
นักศึกษาวិชาเอกคณิตศาสตร์ ภาคปกติและภาค แยกเวลา จำนวน 261 คน โดยการสุ่ม
แบบ เป็นสองกลุ่มเท่า ๆ กัน กลุ่มละ 35 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. บทเรียนโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน
512 กรณ อัตราการผิดพลาดของการทดลองของนักศึกษาคือ 13.35 %
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแบบข้อสมมติแบบเลือกคำตอบ วิชา
คณิตศาสตร์ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ จำนวน 50 ข้อ

เป็นรอบที่ความเชื่อมั่น 0.74 มีค่าความยาวอายุเฉลี่ย 0.55 และมีค่าความจำเพาะกลับ 0.42

3. คู่มือสำหรับใช้สอนกลุ่มความรู้พื้นฐาน กว้างขวาง แม่นยำ และจำเพาะ ที่จะสอนเพื่อนักกับในโรงเรียนโปรแกรม

วิธีดำเนินการทดลอง

1. อาจารย์คณิตศาสตร์วิทยาลัยครูพิษณุโลก วิทยาลัย กอนกลุ่มควบคุมความรู้ ปกติตามกฎข้อที่ ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลาสอน 12 ครั้ง ๆ ละ 1 ชั่วโมง

2. ผู้วิจัยสอนนักศึกษาในกลุ่มทดลองความรู้วิธีไรท์เรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 12 ครั้ง ๆ ละ 1 ชั่วโมง

3. ทดสอบเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม ด้วยแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 50 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หากคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบในแต่ละกลุ่ม
2. หากความแปรปรวนของการทดสอบในแต่ละกลุ่ม
3. หากคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบโดยแยกเป็น การควบคุม การเข้าใจ การวิเคราะ การวิเคราะ และการสังเคราะห์ในแต่ละกลุ่ม
4. หากความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบโดยแยกออกเป็น การควบคุม การเข้าใจ การวิเคราะ การวิเคราะ และการสังเคราะห์ในแต่ละกลุ่ม
5. หากความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ $t - test$
6. หากความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยในแต่ละด้านของกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ $t - test$.

ผลการทดลอง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเมื่อแยกวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในระดับ ความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ ปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความรู้ และการนำไปใช้สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .01$) และ ($p < .05$) ตามลำดับ กลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านการสังเคราะห์สูงกว่ากลุ่มทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < .05$) และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความเข้าใจ การวิเคราะห์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่า การเรียนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในระดับต้น สูงกว่าการสอนของครู การสอนของครูให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านสติปัญญาในระดับสูง สูงกว่าบทเรียนโปรแกรม ส่วนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในบางด้านและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยรวมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ จากผลดังกล่าวอาจเนื่องจากเหตุผลบางประการ เช่น

1. การอธิบายเนื้อหาในเรื่องหนึ่ง ๆ นั้น บทเรียนโปรแกรมมีวิธีอธิบายเพียงวิธีเดียวคือการเสนอกรอบความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนั้นอย่างกว้างขวางโดยลำดับ เชื่อมโยงไปสู่เนื้อหาของเรื่องที่ต้องการ หรือเสนอให้ทราบโดยตรง กระบวนการเช่นนี้นักศึกษาจะต้องอ่านเนื้อหาในแต่ละกรอบอย่างรอบคอบ และสรุปใจความหรือประเด็นสำคัญของเนื้อหาในแต่ละกรอบให้ได้ นอกจากนั้นการสอนโดยวิธีบทเรียนโปรแกรมไม่มีสื่อการสอนอย่างอื่นประกอบ และเมื่อผู้เรียนตอบคำถามในกรอบมีคำตอบกลับมาอ่านซ้ำในกรอบ

เก็บใหม่จนกระทั่งตกถูก ในขณะที่การสอนของครูสามารถจะอธิบายเนื้อหาในเรื่องนั้นได้หลายวิธี หรืออาจจะใช้สื่อการสอนเช่นอุปกรณ์มาประกอบการอธิบายได้ นั่นคือการสอนของครูสามารถจะยืดหยุ่นในการนำเทคนิค หรือวิธีการใหม่ทางการศึกษาอธิบายเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ เพิ่มเติมได้ในโอกาสที่นักศึกษาไม่เข้าใจ

2. การเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ผู้เรียนจะเรียนตามลำพังจากบทเรียนซึ่งต้องฝึกพิจารณา สรุปความ และตัดสินใจ ทำให้ผู้เรียนมีเหตุผลอยู่ในวงจำกัด ทั้งนี้ อาจจะเป็นเพราะว่า การเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมไม่มีปฏิริยาโต้ตอบระหว่างครูกับนักเรียน และนักเรียนกับนักเรียนทั้งชั้น แต่การสอนของครูเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ซักถาม มีการอธิบายเหตุผลในเนื้อหาที่เรียนกันทั้งชั้น จึงทำให้ผู้เรียนมีความคิดกว้างขวาง

3. บทเรียนโปรแกรมเสนอเนื้อหาในเรื่องหนึ่ง ๆ อย่างละเอียด และยังเสนอโจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับเรื่องนั้นอย่างกว้างขวาง รวมทั้งเสนอแนะวิธีแก้ปัญหาก็หรือเสนอวิธีการแก้ปัญหาก็เป็นตัวอย่าง ซึ่งเป็นการบังคับให้ผู้เรียนต้องทำแบบฝึกหัด หรือฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาไปโดยปริยายทุกคน แนววิธีการสอนของครูนั้นใช้การอธิบายและให้ตัวอย่างปัญหามาจากในเรื่องที่เรียน แล้วจึงให้โจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับเรื่องนั้นในการแก้ปัญหามาจากผู้เรียนจะคงไปค้นหาหาความรู้เพิ่มเติมเอง ซึ่งอาจจะเป็นปัญหากับผู้เรียนบางคน น่าจะเป็นเหตุหนึ่งที่ทำให้โอกาสในการฝึกทักษะของกลุ่มทดลองมีมากกว่ากลุ่มควบคุม

4. นักศึกษาที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมจะเรียนไปตามอัตราความสามารถของตนเอง ในที่สุดจะเข้าใจเนื้อหาอย่างเดียวกันแต่ใช้เวลาต่างกัน ทำให้ครูมีเวลาที่จะเอาใจใส่ช่วยเหลือให้นักศึกษาที่เรียนอ่อนไล่ทันตัวทั่วในชั้นเรียน ในขณะที่ผู้เรียนจากการสอนของครูได้รับการอธิบายเนื้อหาเหมือนกันทั้งชั้น แต่ผู้เรียนอาจจะเรียนรู้ได้ไวกว่ากัน จึงน่าจะเป็นเหตุหนึ่งที่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความรู้ของกลุ่มทดลอง สูงกว่ากลุ่มควบคุม

นอกจากเหตุผลทั้งกล่าวข้างต้นแล้ว ผู้วิจัยได้ตั้งข้อสังเกตบางประการ คือ

1. การสร้างบทเรียนโปรแกรมว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไม่น่าขงจะเป็นการประหยัดเวลาในการเรียนการสอน หากผู้ครูมีเวลาช่วยนักเรียนหาที่ปัญหาในการเรียน และครูมีเวลาที่จะเริ่มการสอนหรือฝึกค้นหาวิธีการใหม่ ๆ เพื่อปรับปรุงการสอนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

2. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นการฝึกนิสัยให้นักเรียนความรับผิดชอบ และรับผิดชอบตนเอง เพราะว่าการเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมนี้ ผู้เรียนต้องปฏิบัติตามคำสั่งของบทเรียน ด้วยสติปัญญาของตนเอง และรู้จักควบคุมตนเอง

3. นักศึกษากลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมมีความมั่นใจต่อการเรียน และเอาใจใส่ในการเรียนเป็นพิเศษ

4. บทเรียนโปรแกรมที่ถ้าจะสอนให้นักศึกษาใช้ความคิด และแสดงความคิดเห็นได้โดยการเขียนตอบ แต่การเขียนโปรแกรมเป็นงานที่ไม่กระวนกระวายหรือเบื่อ ผู้เรียนจะต้องเป็นผู้เขียนหาปัญหาในแนววิชาที่จะทำ จะต้องเป็นผู้ที่วิเคราะห์เขียนให้ชัดเจน และถูกต้อง รู้หลักการเขียน และต้องเป็นผู้เข้าใจจิตวิทยาการศึกษา ดังนั้นในการเขียนบทเรียนโปรแกรมบางกรณีจะต้องใช้ความรู้ทางจิตวิทยาการรวมกัน เช่น จะต้องทดสอบและตรวจสอบอย่างละเอียดถี่ถ้วน เปลี่ยนแปลงให้ใช้โปรแกรมที่ดี

ข้อแนะนำ

1. ในการใช้บทเรียนโปรแกรม ไม่ควรใช้บทเรียนโปรแกรมจนหมดครูตลอดทุกเรื่องในวิชาที่ศึกษาได้ ทั้งนี้เพราะว่าเนื้อหาบางเรื่องอาจจะเขียนเป็นบทเรียนโปรแกรมแล้วทำให้ผู้เรียนล้าช้ากว่าเข้าใจยาก นอกจากนั้นจะทำให้ผู้เรียนเกิดสับสนหรือความสับสนด้านสติปัญญาในระดับสูงไม่เท่าที่ควร และที่สำคัญคือ บทเรียนโปรแกรมไปมีปฏิริยาโต้ตอบระหว่างครูกับนักเรียน และนักเรียนกับนักเรียนซึ่งจะทำให้ความถนัดของผู้เรียนทางวิชาผู้วิจัยจึงขอเสนอแนะว่าน่าจะใช้บทเรียนโปรแกรมมาประกอบการสอนของครู หรือช่วยเสริมการสอนของครู

2. การศึกษาผลของการใช้บทเรียนโปรแกรมแก่นักศึกษาที่มีความสามารถต่าง ๆ กัน เพื่อหาว่านักศึกษาระดับใดจะได้รับผลจากการใช้บทเรียนโปรแกรมให้มากที่สุด

3. การศึกษาองค์ประกอบต่าง ๆ ที่จะช่วยให้การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมได้รับผลดี เช่น เทคนิคในการเสนอความรู้ ลักษณะวิชา ระยะเวลาที่ใช้ในแต่ละครั้ง และบทบาทของครูในขณะใช้บทเรียนโปรแกรม

4. การหาคัดวงนำเนื้อหาที่เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มาเขียนเป็นบทเรียนโปรแกรม แล้วศึกษาว่าเราจะใช้สอนนักศึกษาได้ผลดีกว่า ๆ กับการสอนของครูหรือไม่ อย่างไร

5. การเปรียบเทียบผลการสอน โดยใช้บทเรียนโปรแกรมแล้วสรุปด้วยครู กับการสอนของครูตามปกติแล้วใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นคู่มือการเรียน.

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

X กอ สวัสดิ์พาณิชย์ "แนวคิดใหม่ทางการศึกษา" ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับ วรรณกรรมและ
เทคโนโลยีทางการศึกษา โรงพิมพ์บุรุษสภา พระนคร 2515, หน้า 84 - 96.

กองการวิจัย กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ บทถ้อยความวิจัยการศึกษาวง
กระทรวงศึกษาธิการ, โรงพิมพ์บุรุษสภา พระนคร 2515, 50 หน้า.

คณะนิสิตปริญญาโท แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
"บทเรียนสำเร็จรูป" ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับวรรณกรรมและเทคโนโลยีทาง
การศึกษา โรงพิมพ์บุรุษสภา 2515, หน้า 204 - 208.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ แผนกคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ปีที่ 1 ตอนที่ 1
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2512, 278 หน้า.

เจดิม ผ่องยิม การสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง การคูณและการหารเศษส่วน
วิทยานิพนธ์ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2517, 263 หน้า.

ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล โรงพิมพ์วัฒนาพานิช พระนคร 2516, 434 หน้า.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ "ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเทคโนโลยีทางการสอน"
1 สารานุกรมทวีธาภิเศก 60 - 69 :- มกราคม - เมษายน 2518.

เกื้อนใจ ทองคำรัก บทเรียนสำเร็จรูป (Programmed instruction)

รายงานประกอบการศึกษาวิชา Individual study แผนกวิชาโสตทัศนศึกษา
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2515, 21 หน้า.

บุญถิ่น อัครดากกร เทคโนโลยีทางการศึกษา, มีกรกฎ 38 : ตุลาคม 2518.

ปรีปรี จิมแจบ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณด้วยตัวคูณเป็นอันดับในระดัชั้น บ.ศ.1 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
ปริญญาโท ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัย มหาวิทาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 32 หน้า.

Xเฟื่อง กุฑม การสร้างแบบเรียนสำเร็จรูป พิมพ์ครั้งที่ 2 วิทยาลัยวิชาการศึกษา
ประสานมิตร พระนคร 2516, 131 หน้า.

มาลี งามทิพย์ การสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง การใช้สูตรหาพื้นที่ในจันฉำหับ
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 วิทยานิพนธ์ บ.ศ.1. มหาวิทยาลัย พุทธวงกรเพดาศาศาสตร์
2516, 137 หน้า.

รัตน กิริพานิช จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม โรงพิมพ์กรุงสยาม พระนคร 2518,
80 หน้า.

วนิกา ศิริเวสุวรรณ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น
(Probability) ในระดัชั้น บ.ศ.3 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
ปริญญาโท ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 40 หน้า.

วรรณก เจียมทองบ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed textbook)
กับการสอนปกติ วิทยานิพนธ์ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2515,
71 หน้า.

วิจิตร ศรีสอ้าน สถิติวิทยาทางการศึกษา ศึกษาศาสตร์ 19 - 36 : 9 - 10
กันยายน - ตุลาคม 2512.

วิชาการ, กรม ประมวลบทความเกี่ยวกับวิศวกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา
โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์ฯ พระนคร 2515, 247 หน้า.

สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ การปฏิรูปการศึกษาเรื่อง การวัดและการประเมินผลการสอน
สำนักงานทดสอบทางการศึกษาและวิจัยฯ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประจวบคีรีขันธ์
พระนคร 2517, 102 หน้า.

สุนทร แสงผล, สุกยง โตประเสริฐ เรขาคณิตวิเคราะห์ โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์ฯ พระนคร
2515, 250 หน้า.

สมวงษ์ พริพย์เจริญ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต
และความสัมพันธ์ในระดับชั้น บศ.1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ
ปริญญาโท บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 42 หน้า.

X สวัสดิ์ ภูษาคณ วิศวกรรมและเทคโนโลยีในการศึกษา, อุตรดิตถ์พิมพ์ พระนคร
2517, 116 หน้า.

สุภา อึ้งกุด "Programmed instruction" ในประมวลบทความเกี่ยวกับวิศวกรรม
และเทคโนโลยีทางการศึกษา, โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์ฯ พระนคร 2515, หน้า
161 - 165.

อนันต์ ศรีโสภณ การพัฒนาการสอน ขุขันธ์การพิมพ์ พระนคร 2515, 159 หน้า.

เชื่อน ปิ่นเงิน การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิต (Limit)
และความต่อเนื่อง (Continuity) ระดับ ป.ท.สูง วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้
บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปริญญาโท บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย-
ศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 30 หน้า.

- Baum, John D., A Programmed Instruction The Structure of the Real Number System, .. Prantice-Hall, Englewood-Cliffs, 1967, 553 pp.
- Beck, Marilyn Clark, "A Comparative Analysis of Three Methods of Teaching Remedial Algebra on The Junior College Level" Dissertation Abstracts, 3385 - A, 1970.
- Brown, Robert O. Jr., "A Comparison Test of Test Scores of Students Using Programmed Instruction Materials With those of Students Not Using Programmed Instruction Materials", A V Communication Review, 15:133, Summer, 1967.
- Butler, Charles H., Wren, F. Lynwood, and Banks, J. Houston, The Teaching of Secondary Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970, 597 pp.
- Calvin, Alen D., Programmed Instruction: Bold New Venture, Indiana University Press, Bloomington, 1969, 250 pp.
- Carin and Sund "Individualized Instruction - a Positive Experience ?" School Science & Mathematics, Vol. LXXIV, No. 5 : 366, May-June, 1974.
- Conroy, David E., "The Effects of Age and Sex upon a Comparison between Achievement Gains in Programmed Instruction and Conventional Instruction in Remedial Algebra I at Northern Virginia Community College", Dissertation Abstracts, 32(9): 5102 - A, March, 1972.
- Corrigan, Robert E., "Programmed Instruction as a System Approach to the Education," Trends in Programmed Instruction, Washington, D.C., 1964, p. 36.
- Devine, Donald F., "Student Attitudes and Achievement : A Comparison between the Effects of Programmed Instruction and Conventional Classroom Approach in Teaching Algebra I" The Mathematics Teacher, 61(3) : 296 - 301, March, 1968.
- Donald, Beane, "A Comparison of Linear and Branching Techniques of Programmed Instruction in Plane Geometry", A V Communication Review, 15 : 190, Summer, 1967.
- Easterday, Kenneth and Easterday, Helen, "Ninth - Grade Algebra, Programmed Instruction, and Sex Differences : An Experiment", The Mathematics Teacher, 51(3) : 302 - 307, March, 1968.
- Fan, Chung - Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, New York, 1952, 32 pp.

- Fine, Benjamin, Teaching Machines, Stering Publishing Co. Inc., New York, 1962, 176 pp.
- X Fry, Edward B., Teaching Machines and Programmed Instruction, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 244 pp.
- Glaser, Robert, Teaching Machines and Programmed Learning II, Washington, D.C., Association for Educational Communications and Technology, 1965, p. 36 - 39, 372 - 378.
- Goebel, Laurence Gayheart, "An Analysis of Teacher Pupil Interaction When Programmed Instruction Materials are Used", Dissertation Abstracts, 27(4) : 982 - A, October, 1966.
- Greetsinger, Gavin, "An Experimental Study of Programmed Instruction in Division of Fractions", Dissertation Abstracts A, 27, 7 - 8 : 2442 - A, 1966.
- X Hamor, J.W., Programmed Learning Practice with Particular Reference to the Developed Countries, Enfield College of Technology, 1973, p. 46.
- Hartley, James., Strategies for Programmed Instruction : An Educational Technology, Butterworth, England, 1972, 231 pp.
- Krishnamurthy, V., "Styles in Programming", Handbook of Programmed Learning, Anand Press, India, 1973, p. 39 - 55.
- Leith, G.O.M., A Handbook of Programmed Learning, 2nd. ed., University of Birmingham, 1966, p. 36 - 30, 85.
- Middlewiss, R. Ross and Others, Analytic Geometry, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1945, 434 pp.
- Oor, William C., "Retension as a Variable in Comparing Programmed and Conventional Instructional Methods", The Journal of Educational Research, Vol. 62, No.1 : 11, September 1968.
- Robson, Allen Maynard, "A Comparative Study of The Teaching of First Year Algebra", Dissertation Abstracts, 27(1) : 85-A, July, 1966.
- Salisbury, Robert Gardner, "A Study of Programmed Instruction in Selected Secondary Schools of Ohio", Dissertation Abstracts, 27(3) : 712 - A, September, 1966.

- X Schramm, Wilbur, The Research on Programmed Instruction: An Annotated Bibliography, U.S. Department of Health Education and Welfare, Washington D.C., 1964, 114 pp.
- Thomas, Robert Murray, and Swartout, Sherwin G., Integrated Teaching Materials, David McKay Company, Inc., New York, 1963, 559 pp.
- Walpole, Ronald E., Introduction to Statistics, 4 th. ed., Wing Tai Cheung Printing Co., Ltd., Hong Kong, 1972, 365 pp.
- Nexler, Charles., Analytic Geometry : A Vector Approach, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London ; 1961 , 291 pp.
- White, Charles Colven, "The Use of Programmed Texts for Remedial Mathematics Instruction in College," Dissertation Abstracts, 30(8) : 3373 - A, February 1970.
- Wiebe, Arthur John, "The Comparative Effects of Three Methods of Utilizing Programmed Mathematics Materials with Low - Achievers", Dissertation Abstracts 27(4) : 1002 - A, October, 1966.

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์แบบทดสอบ

แสดงค่าความยากง่ายและอำนาจจำแนกแบบทดสอบแต่ละข้อ

ข้อที่	P _H	P _L	p	r	ข้อที่	P _H	P _L	p	r	ข้อที่	P _H	P _L	p	r
1	.86	.58	.73	.34	21	.76	.48	.62	.30	41	.81	.52	.67	.32
2	.81	.05	.39	.76	22	.86	.48	.68	.43	42	.86	.43	.66	.47
3	.67	.09	.35	.61	23	.52	.20	.35	.35	43	.86	.43	.66	.47
4	.76	.05	.36	.73	24	.91	.52	.74	.48	44	.76	.29	.53	.47
5	.62	.15	.37	.50	25	.48	.09	.26	.48	45	.67	.43	.55	.25
6	.86	.48	.68	.43	26	.91	.38	.67	.58	46	.81	.29	.56	.52
7	.71	.38	.55	.34	27	.91	.33	.65	.61	47	.52	.19	.35	.36
8	.86	.48	.68	.43	28	.76	.29	.53	.47	48	.81	.29	.56	.52
9	.48	.19	.33	.32	29	.58	.27	.43	.30	49	.58	.33	.45	.26
10	.76	.33	.55	.44	30	.86	.62	.75	.31	50	.91	.67	.80	.35
11	.62	.38	.50	.24	31	.58	.15	.35	.46	ค่า p เฉลี่ย .55 ค่า r เฉลี่ย .42				
12	.71	.19	.44	.52	32	.67	.20	.43	.48					
13	.91	.31	.64	.63	33	.95	.56	.78	.54					
14	.86	.58	.73	.34	34	.52	.13	.31	.44					
15	.76	.29	.53	.47	35	.91	.62	.78	.40					
16	.95	.38	.71	.65	36	.95	.33	.68	.68					
17	.62	.38	.50	.24	37	.58	.29	.42	.30					
18	.43	.15	.28	.34	38	.91	.62	.62	.40					
19	.67	.38	.58	.29	39	.95	.58	.79	.52					
20	.82	.36	.60	.48	40	.76	.29	.53	.47					

แสดงคะแนนเฉลี่ย และความแปรปรวนของแบบทดสอบ

x	x ²	x	x ²	x	x ²	x	x ²	x	x ²	x	x ²
40	1600	32	1024	29	841	27	729	25	625	22	484
39	1521	31	961	29	841	27	729	25	625	22	484
37	1369	31	961	28	784	27	729	25	625	21	441
35	1225	31	961	28	784	27	729	24	576	21	441
35	1225	31	961	28	784	27	729	24	576	20	400
34	1156	30	900	28	784	26	676	24	576	20	400
34	1156	30	900	28	784	26	676	24	576	19	361
34	1156	30	900	28	784	26	676	24	576	18	324
33	1089	30	900	28	784	26	676	23	529	17	289
33	1089	29	841	28	784	25	625	23	529	16	256
33	1089	29	841	28	784	25	625	23	529		
32	1024	29	841	27	729	25	625	22	484	1915	55,287

$$\bar{X} = \frac{1915}{70}$$

$$= 27.36$$

$$s_t^2 = \frac{70(55287) - (1915)^2}{69 \times 70}$$

$$= \frac{3870090 - 3667225}{4830}$$

$$= \frac{202865}{4830}$$

$$= 42.001$$

แสดงการหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{NS_t^2 - \bar{X}(N - \bar{X})}{(N - 1) S_t^2} \\
 &= \frac{50(42.001) - 27.36(50 - 27.36)}{49(42.001)} \\
 &= \frac{2100.05 - 619.43}{2058.0} \\
 &= \frac{1480.62}{2058.04} \\
 &= 0.74
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$$\begin{aligned}
 S.E_{neas} &= S_t \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= 6.48 \sqrt{1 - 0.74} \\
 &= 6.48 \times 0.26 \\
 &= 1.6848
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข.

ผลจากการสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

แผนแจกการทดแทนของกรวดอย่าง

คุณสมบัติ

กมที่	กะแน	กมที่	กะแน
1	40	19	28
2	40	20	27
3	37	21	27
4	34	22	26
5	33	23	25
6	33	24	25
7	31	25	25
8	30	26	25
9	30	27	24
10	29	28	25
11	29	29	22
12	28	30	21
13	28	31	21
14	28	32	21
15	28	33	21
16	28	34	20
17	28	35	20
18	28		

คุณสมบัติ

กมที่	กะแน	กมที่	กะแน
1	40	19	23
2	39	20	23
3	37	21	23
4	34	22	23
5	33	23	22
6	32	24	22
7	32	25	21
8	31	26	21
9	31	27	20
10	31	28	20
11	30	29	19
12	29	30	18
13	28	31	18
14	27	32	17
15	26	33	17
16	25	34	17
17	25	35	16
18	24		

ภาคผนวก ก.

การเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาภาควิชาการเองและกลุ่มควบคุม

แสดงการคำนวณค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของกลุ่มทดลอง

1) กลุ่มทดลอง

X	X ²	X	X ²
40	1600	28	784
40	1600	27	729
37	1369	27	729
34	1156	26	676
33	1089	25	625
33	1089	25	625
31	961	25	625
30	900	25	625
30	900	24	576
29	841	23	529
29	841	22	484
28	784	21	441
28	784	21	441
28	784	21	441
28	784	21	441
28	784	20	400
28	784	20	400
28	784	963	27405

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{963}{70}$$

$$= 27.51$$

$$S_1^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{35(27405) - (963)^2}{35(34)}$$

$$= \frac{959175 - 927369}{1190}$$

$$= \frac{31806}{1190}$$

$$= 26.78$$

แสดงการกำหนดคะแนนเฉลี่ย และความแปรปรวนของกลุ่มความถนัด

2) กลุ่มความถนัด

X	X ²	X	X ²
40	1600	23	529
39	1521	23	529
37	1369	23	529
34	1156	23	529
33	1089	22	484
32	1024	22	484
32	1024	21	441
31	961	21	441
31	961	20	400
31	961	20	400
30	900	19	361
29	841	18	324
28	784	18	324
27	729	17	289
26	676	17	289
25	625	17	289
25	625	16	256
24	576	894	24,320

$$\begin{aligned}\bar{X}_2 &= \frac{\sum X}{N} \\ &= \frac{894}{35} \\ &= 25.54\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2_2 &= \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{35(24320) - (894)^2}{35(34)} \\ &= \frac{851200 - 799236}{1190} \\ &= \frac{51964}{1190} \\ &= 43.67\end{aligned}$$

การคำนวณอัตราส่วนนี้สำคัญของความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของเกรดภาคของบุคคลในวิทยาลัย

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{27.51 - 25.54}{\sqrt{\frac{26.78}{35} + \frac{43.67}{35}}} \\
 &= \frac{1.97}{\sqrt{2.0126}} \\
 &= \frac{1.97}{1.42} \\
 &= 1.32 < t_{.05}
 \end{aligned}$$

แสดงผลลัพธ์จากการเรียนผ่านความรู้ และอภิปรายแนวทางการปฏิบัติ

1. กลุ่มควบคุม

กาที่	คะแนน	คนที่	คะแนน
1	12	19	9
2	12	20	7
3	11	21	8
4	10	22	8
5	8	23	6
6	10	24	7
7	10	25	8
8	8	26	6
9	9	27	3
10	9	28	8
11	8	29	4
12	11	30	6
13	10	31	6
14	6	32	7
15	7	33	5
16	8	34	2
17	6	35	7
18	5		

2. กลุ่มทดลอง

กาที่	คะแนน	กาที่	คะแนน
1	13	19	8
2	13	20	9
3	11	21	8
4	10	22	10
5	11	23	10
6	11	24	10
7	8	25	8
8	10	26	9
9	12	27	7
10	9	28	8
11	8	29	6
12	9	30	9
13	9	31	7
14	10	32	6
15	12	33	7
16	10	34	7
17	7	35	7
18	9		

$\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ย
กลุ่มควบคุม
 $\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ย
กลุ่มทดลอง

$$\bar{X}_1 = 7.63$$

$$\bar{X}_2 = 9.08$$

$$s_1^2 = 5.54$$

$$s_2^2 = 3.43$$

$$t = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1}}}$$

$$= \frac{9.08 - 7.63}{\sqrt{\frac{5.54}{35} + \frac{3.43}{35}}}$$

$$= \frac{1.45}{\sqrt{.09 + .16}}$$

$$= \frac{1.45}{.5}$$

$$= 2.90 > t_{.01}$$

แสดงคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้านความเข้าใจและอัตราร้อยสําคัญทางสถิติ

1) กลุ่มควบคุม

2) กลุ่มทดลอง

คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน
1	7	19	6	1	8	19	8
2	8	20	2	2	8	20	7
3	7	21	3	3	9	21	8
4	7	22	4	4	8	22	7
5	9	23	5	5	6	23	7
6	4	24	4	6	6	24	5
7	7	25	2	7	5	25	4
8	8	26	3	8	8	26	2
9	6	27	6	9	4	27	5
10	5	28	1	10	7	28	2
11	5	29	4	11	6	29	8
12	5	30	3	12	7	30	5
13	5	31	2	13	3	31	6
14	4	32	2	14	3	32	5
15	3	33	3	15	4	33	4
16	5	34	2	16	7	34	3
17	4	35	2	17	5	35	6
18	4			18	7		

$$\bar{X}_1 = 4.48,$$

$$\bar{X}_2 = 5.80$$

$$S_1^2 = 4.14$$

$$S_2^2 = 3.64$$

$$t = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{S_2^2}{N_2} + \frac{S_1^2}{N_1}}}$$

$$= \frac{5.80 - 4.48}{\sqrt{\frac{3.64}{35} + \frac{4.14}{35}}}$$

$$= \frac{0.32}{\sqrt{0.14 + 0.12}}$$

$$= \frac{0.32}{0.51}$$

$$= 0.63 < t_{.05}$$

ผลคงคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากวิชาเกราะและอัตราส่วนภัยสำคัญทางสถิติ

1) กลุ่มควบคุม

2) กลุ่มทดลอง

กนที่	คะแนน	กนที่	คะแนน	กนที่	คะแนน	กนที่	คะแนน
1	5	19	2	1	5	19	2
2	5	20	2	2	3	20	1
3	4	21	2	3	2	21	3
4	5	22	3	4	2	22	3
5	4	23	2	5	4	23	4
6	4	24	2	6	4	24	3
7	3	25	2	7	5	25	4
8	1	26	2	8	3	26	4
9	3	27	0	9	2	27	2
10	3	28	2	10	3	28	4
11	4	29	0	11	4	29	2
12	3	30	2	12	2	30	0
13	4	31	3	13	4	31	2
14	2	32	1	14	2	32	2
15	4	33	1	15	2	33	1
16	3	34	0	16	3	34	1
17	2	35	3	17	4	35	2
18	1			18	4		

$$\bar{X}_1 = 2.54$$

$$\bar{X}_2 = 2.80$$

$$S_1^2 = 1.90$$

$$S_2^2 = 1.45$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{S_2^2}{N_2} + \frac{S_1^2}{N_1}}} \\
 &= \frac{2.80 - 2.54}{\sqrt{\frac{1.45}{35} + \frac{1.90}{35}}} \\
 &= \frac{0.26}{\sqrt{.04 + .05}} \\
 &= \frac{0.26}{0.3} \\
 &= 0.87 < t_{.05}
 \end{aligned}$$

แสดงคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนภาษาอังกฤษและวัฒนธรรมสำหรับนักศึกษา

1) กลุ่มควบคุม

2) กลุ่มทดลอง

คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน
1	8	19	2	1	3	19	1
2	7	20	5	2	2	20	1
3	5	21	2	3	2	21	0
4	4	22	4	4	2	22	0
5	4	23	5	5	3	23	1
6	6	24	4	6	3	24	2
7	5	25	3	7	3	25	2
8	4	26	4	8	2	26	2
9	4	27	1	9	2	27	1
10	4	28	5	10	2	28	2
11	6	29	3	11	2	29	1
12	3	30	5	12	2	30	2
13	3	31	3	13	2	31	0
14	5	32	4	14	3	32	1
15	4	33	1	15	2	33	2
16	2	34	4	16	1	34	2
17	6	35	1	17	2	35	0
18	5			18	1		

$$\bar{X}_1 = 4.03$$

$$\bar{X}_2 = 1.68$$

$$S_1^2 = 2.49$$

$$S_2^2 = 0.75$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{4.03 - 1.68}{\sqrt{\frac{2.49}{35} + \frac{0.75}{35}}} \\
 &= \frac{2.35}{\sqrt{.09}} \\
 &= \frac{2.35}{0.30} \\
 &= 7.83 > t_{.01}
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ง.

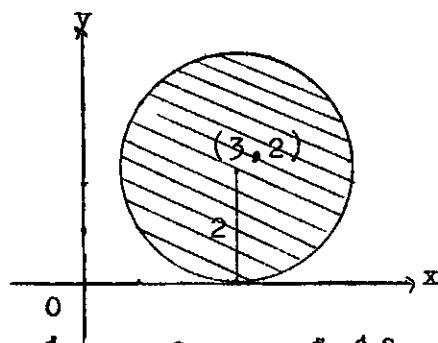
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์วิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

• $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > -1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x < 0 \wedge y > 0\}$

เป็นเซตของจุดในระนาบพิกัดใด

- ก 1
- ข 2
- ค 3
- ง 4
- จ 2 และ 3

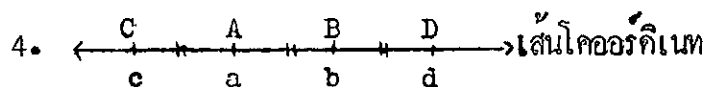


เซตของจุดพิกัดบนระนาบพิกัดใด

- ก $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$
- ข $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 2\}$
- ค $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4\}$
- ง $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 4\}$
- จ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 4\}$

3. จากข้อ 2 เซตของจุดภายนอกวงกลมคือเซตใด

- ก $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 4\}$
- ข $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 > 4\}$
- ค $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-3)^2 + (y-2)^2 > 4\}$
- ง $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+3)^2 + (y-2)^2 < 4\}$
- จ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-3)^2 + (y-2)^2 > 4\}$



จากรูปค่าของ c ในเทอมของ a, b คือข้อใด

- ก $\frac{a + 2b}{2}$
- ข $\frac{2a + b}{2}$
- ค $2a - b$
- ง $2b - a$
- จ $a + 2b$

จากข้อ 4 ค่าของ d ในเทอมของ a, b คือข้อใด

ก $\frac{a + 2b}{2}$

ข $\frac{2a + b}{2}$

ค $2a - b$

ง $2b - a$

จ $a + 2b$

ถ้า $(-5, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด (a, b)

บนแกน x และ $(0, 8)$ เป็นโปรเจกชันของจุด

(a, b) บนแกน y แล้ว (a, b) คือข้อใด

ก $(0, 0)$

ข $(8, -5)$

ค $(-5, 8)$

ง $(5, 8)$

จ $(-8, 5)$

จุดที่เป็นโปรเจกชันของจุด $(-7, 6)$ บนเส้นตรง

$y = 2$ คือข้อใด

ก $(-7, 0)$

ข $(0, 6)$

ค $(4, -7)$

ง $(2, 6)$

จ $(-7, 2)$

8 โปรเจกชันของจุด $(3, 5)$ บนแกน y คือข้อใด

ก $(0, 5)$

ข $(5, 0)$

ค $(3, 0)$

ง $(0, 3)$

จ $(-3, -5)$

9 ถ้าแกน x แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับเส้นเชื่อม

$A(-4, -8)B(x, y)$ แล้ว (x, y) เท่ากับข้อใด

ก $(4, -8)$

ข $(-4, 8)$

ค $(-8, 4)$

ง $(8, 4)$

จ $(-4, -8)$

10 พื้นที่รูปห้าเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(-5, -2), (-2, 5),$

$(5, 1), (2, 7)$ และ $(2, -4)$ เท่ากับข้อใด

ก 11.50 ตารางหน่วย

ข 26.50 ตารางหน่วย

ค 34.50 ตารางหน่วย

ง 66.00 ตารางหน่วย

จ 132.00 ตารางหน่วย

ถ้า D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของ
สามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีจุดมุมเป็น (1,6), (9,2)
และ (-5,-4) สามเหลี่ยม DEF มีพื้นที่เท่ากับ

- ก - 13.00 ตารางหน่วย
- ข 16.75 ตารางหน่วย
- ค 33.50 ตารางหน่วย
- ง 47.00 ตารางหน่วย
- จ 67.00 ตารางหน่วย

ถ้า A เป็นจุดใดโบนแกน x และจุด B มี
โคออร์ดิเนต (c,d) ระยะทางกำลังสองระหว่าง

A และ B เท่ากับข้อใด

- ก $\sqrt{x^2 + (y+d)^2}$
- ข $x^2 + (y-d)^2$
- ค $(x-c)^2 + (y-d)^2$
- ง $(x-c)^2 + d^2$
- จ $\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$

3 ระยะทางระหว่างจุด (2,3) และจุด (5,7) เท่ากับ

- ก $\sqrt{149}$
- ข $5\sqrt{5}$
- ค 25
- ง 5
- จ 1

14 A(3,-2), B(-2,-4) และ C(-7,5) เป็นจุด
มุมของสามเหลี่ยม ABC ด้านยาวที่สุดคือ

- ก AB
- ข AC
- ค BC
- ง AB , BC
- จ สรุบนั่นเองไม่ได้

15 (7,5), (2,3) และ (6,-7) เป็นจุดมุมของ
สามเหลี่ยมอะไร

- ก สามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- ข สามเหลี่ยมด้านเท่า
- ค สามเหลี่ยมมุมฉาก
- ง สามเหลี่ยมด้านขนาน
- จ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

16 (-4,8) และ (8,-6) เป็นจุดปลายของเส้นผ่า
ศูนย์กลางวงกลมวงหนึ่ง จุดศูนย์กลางวงกลมวงนี้คือ

- ก (0,0)
- ข (2,1)
- ค (4,2)
- ง (6,7)
- จ สรุบนั่นเองไม่ได้

7 ถ้า M เป็นจุดแบ่งเส้นเชื่อม $P_1(-5, 2)$ $P_2(1, 4)$ ในอัตราส่วน $-\frac{5}{3}$ แล้ว M มีโคออร์ดิเนตตรงกับข้อใด

- ก (10, 7)
- ข $(-\frac{5}{4}, \frac{13}{4})$
- ค (-14, -1)
- ง $(-\frac{22}{4}, \frac{41}{4})$
- จ (20, 14)

8 ถ้าจุด $(9, 2)$ แบ่งเส้นเชื่อม $P_1(6, 8)P_2(x, y)$ ในอัตราส่วน $\frac{3}{7}$ แล้ว (x, y) เท่ากับ

- ก $(\frac{72}{7}, -\frac{4}{7})$
- ข (16, -12)
- ค (2, 16)
- ง $(\frac{54}{7}, \frac{32}{7})$
- จ (-16, 12)

9 ถ้า $(12, 3), (-1, -3)$ และ $(-12, 8)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จุดที่เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมรูปนี้พบกันคือ

- ก $(-\frac{1}{2}, 4)$
- ข $(\frac{25}{2}, 7)$
- ค $(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$
- ง (0, 4)
- จ (2, 3)

20 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $P(-4, 1)$ จุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางข้างหนึ่งเป็น $P_2(2, 6)$ และ $\overrightarrow{PP_1} : \overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{1}{2}$ แล้วปลายอีกด้านหนึ่งของเส้นผ่าศูนย์กลางมีโคออร์ดิเนตคือ

- ก $(-1, \frac{7}{2})$
- ข (8, 11)
- ค (-10, -4)
- ง (-12, 1)
- จ (-12, 5)

21 สมการโลกลัสของจุด (x, y) ที่อยู่ระยะห่างจากจุด $(0, -4)$ เท่ากับ 2 หน่วย คือ

- ก $x^2 + y^2 = 4$
- ข $x + y - 6 = 0$
- ค $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$
- ง $x^2 + 8x + 12 = 0$
- จ $x^2 + y^2 + 8x + 20 = 0$

22 สมการเส้นของจุดในระนาบที่อยู่ระยะห่างจากจุด $(4, 0)$ และห่างจากเส้นตรง $x + 4 = 0$ เท่ากันคือข้อใด

- ก $x^2 + 6x + 6y = 0$
- ข $x^2 - 16y = 0$
- ค $y^2 - 12x - 2y + 13 = 0$
- ง $y^2 - 16x = 0$
- จ $2x - 3y = 0$

3) สมการเส้นตรงของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะทาง
กำลังสองจากจุด P ถึงจุด $(1,5)$ และจุด
 P ถึงจุด $(-2,3)$ เท่ากัน คือ

ก $6x + 4y - 13 = 0$

ข $2x^2 + y^2 - 10 = 0$

ค $y^2 - 12x - 2y + 13 = 0$

ง $4x + 2y - 13 = 0$

จ $x^2 + 4x + 6y + 7 = 0$

สมการโลกซ์ของจุด $(ก,ข)$ ที่มีระยะทางห่าง
จากจุดกำเนิด 3 หน่วยคือ

ก $ก + ข = 3$

ข $ก^2 + ข^2 = 3$

ค $ก^2 - ข = 3$

ง $ก^2 - ข^2 = 9$

จ $ก^2 + ข^2 = 9$

สมการโลกซ์ของจุด $P(x,y)$ ที่มีผลต่าง

ของระยะระหว่างจุด P ไปยังจุด $(-2,0)$
และจุด $(2,0)$ เท่ากับ 1 หน่วยคือ

ก $9x^2 + 5y^2 = 45$

ข $60x^2 - 4y^2 = 15$

ค $9x + 5y = 90$

ง $5x^2 + 9y^2 = 1$

จ $4x - 3y + 41 = 0$

26) ถ้า $(x,y), (-2,1), (1,5)$ เป็นจุดมุมของ
สามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่ 30 ตารางหน่วย
แล้ว สมการโลกซ์ของจุด (x,y) คือ

ก $9x + 5y - 49 = 0$

ข $7x - 2y - 34 = 0$

ค $5x - 2y - 2 = 0$

ง $x^2 - 12y = 0$

จ $4x - 3y + 71 = 0$

27) ถ้า ก , ข เป็นสโลปของเส้นตรง T_1 ,
 T_2 ตามลำดับและถ้า T_1 ตั้งฉากกับ T_2
จะได้ความสัมพันธ์ของสโลปคือ

ก $ก - ข = 0$

ข $กข = 1$

ค $ก + ข = 1$

ง $กข = -1$

จ $\frac{ก}{ข} = 1$

28) ถ้า $P(-3,-10), Q(1,2), R(5,4)$

และ $S(4,1)$ เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยม

คางหมแล้วคานกษานของสี่เหลี่ยมคางหม
รูปนี้คือ

ก PQ กับ QS

ข PS กับ QR

ค PQ กับ RS

ง PR กับ QS

จ สรุปแน่นอนไม่ได้

มุมภายในมุมหนึ่งของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(3,4)$, $(-2,-1)$, และ $(4,1)$ คือ

- ก 30 องศา
- ข 45 องศา
- ค 60 องศา
- ง 120 องศา
- จ รูปแน่นอนไม่ได้

ถ้า $(a,b), (x,y)$ เป็นจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรงเส้นหนึ่งที่มีโคไซน์เท่ากับ m แล้วความสัมพันธ์ของ x และ y ในเทอมของ a, b และ m คือ

- ก $y - b = m(x - a)$
- ข $x - my + mb - a = 0$
- ค $mx - y + a - mb = 0$
- ง $x - my + ma - b = 0$
- จ $ax + by + m = 0$

เส้นตรงที่สมการเป็น $2x - y - 18 = 0$ จะมีโคไซน์เท่ากับ

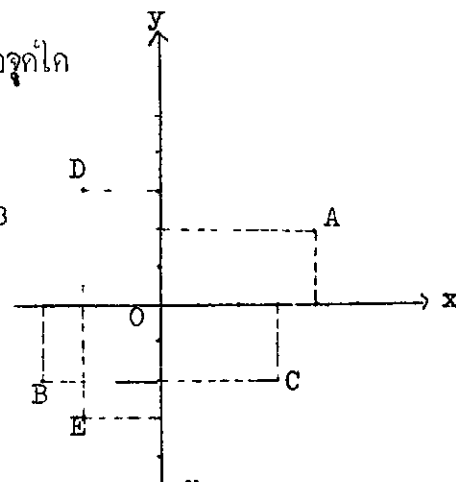
- ก -1
- ข 1
- ค 2
- ง 3
- จ 4

32 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 - y^2 + 12y - 36 = 0\}$ เป็นเซตความสัมพันธ์ที่กราฟเป็น

- ก เส้นตรง 2 เส้น
- ข วงกลม
- ค พาราโบลา
- ง วงรี
- จ ไฮเพอร์โบลา

33 จุด $(-2,3)$ คือจุดใด

- ก A
- ข B
- ค C
- ง D
- จ E



34 โปรเจกชันของจุด (n, y) บนเส้นตรง $x = 4$ คือ

- ก (n, y)
- ข (y, n)
- ค (y, y)
- ง (y, y)
- จ (y, y)

- (A) $(4,2), (0,1), (6,1)$
- (B) $(3,4), (-2,-1), (4,1)$
- (C) $(5,-2), (1,2), (-2,5)$

ข้อใดที่ทุกทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

- ก A
- ข B
- ค C
- ง A และ B
- จ B และ C

สามเหลี่ยมมุมฉากมีจุดมุมเป็น $(0,4), (-8,0), (x,-4)$ และพื้นที่ 30 ตารางหน่วยแล้ว x มีค่าเท่ากับ

- ก -1
- ข -2
- ค -3
- ง -4
- จ -5

เส้นเชื่อมระหว่างจุด $P(a,b)$ และ $Q(c,d)$ จะให้ระยะทางระหว่าง PQ เท่ากับ

- ก $\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$
- ข $\sqrt{(a-d)^2 + (b-d)^2}$
- ค $\sqrt{(a-d)^2 + (b-c)^2}$
- ง $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$
- จ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd}$

38 ถ้า $P(6,1), Q(k,-3)$ อยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่งและระยะทางระหว่าง PQ เท่ากับ $4\sqrt{5}$ แล้ว k เท่ากับ

- ก -2
- ข -1
- ค 14
- ง 20
- จ -2 หรือ 14

39 จุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อมเมื่อกำลังเชื่อมระหว่างจุด $(5,6)$ และ $(15,-4)$ คือ

- ก $(0,-\frac{23}{4})$
- ข $(16,-5)$
- ค $(5,5)$
- ง $(-5,16)$
- จ $(10,1)$

40 เส้นเชื่อมเมื่อกำลังเชื่อมระหว่างจุด $(8,2)$ กับจุดกึ่งกลางของเส้นเชื่อม $(2,1) (6,5)$ ยาวเท่ากับ

- ก $\sqrt{37}$
- ข $4\sqrt{2}$
- ค $\sqrt{17}$
- ง 17
- จ $\sqrt{13}$

ถ้าจุด T เป็นจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ $P(a,b)Q(c,d)$

ในอัตราส่วน n แล้วโคออร์ดิเนตของจุด T คือ

ก $(\frac{x_1+nx_2}{1+n}, \frac{y_1+ny_2}{1+n})$

ข $(\frac{x_1+ny_1}{1+n}, \frac{x_2+ny_2}{1+n})$

ค (x_1+nx_2, y_1+ny_2)

ง $(\frac{a+nb}{1+n}, \frac{c+nd}{1+n})$

จ $(\frac{a+nc}{1+n}, \frac{b+nd}{1+n})$

มุมระหว่างเส้นตรง T ตัดกับเส้นตรง K เมื่อ

$m_T = -\frac{1}{2}, m_K = -3$ เท่ากับ

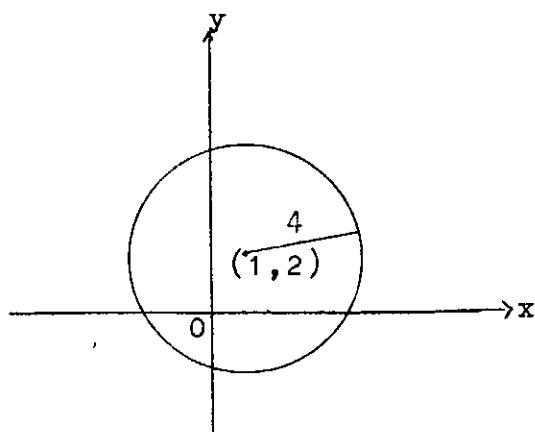
ก 15 องศา

ข 30 องศา

ค 45 องศา

ง 60 องศา

จ 135 องศา



ใช้ความยาวรัศมีในรูปทศนิยม

ก $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y-2 = 4(x-1)\}$

ข $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+1)^2 + (y+2)^2 = 16\}$

ค $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 4\}$

ง $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\}$

จ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16\}$

44 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0\}$

เป็นเซตความสัมพัทธ์ที่กราฟเป็นวงกลม และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ใด

ก $(0,0)$

ข $(1,2)$

ค $(-2,1)$

ง $(-1,-2)$

จ $(-1,3)$

45 จากข้อ 44 วงกลมนี้รัศมียาวเท่ากับ

ก 1

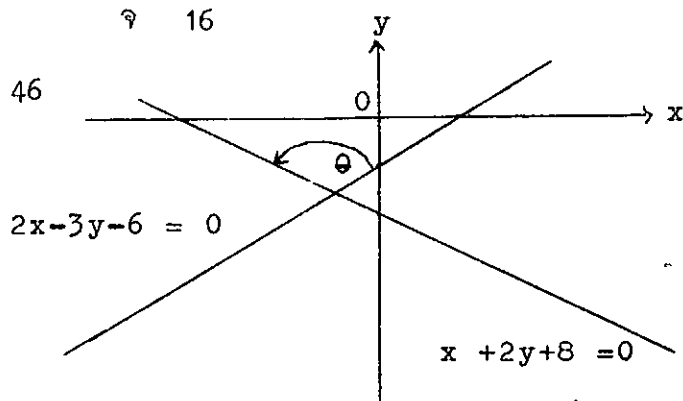
ข 2

ค 3

ง 4

จ 16

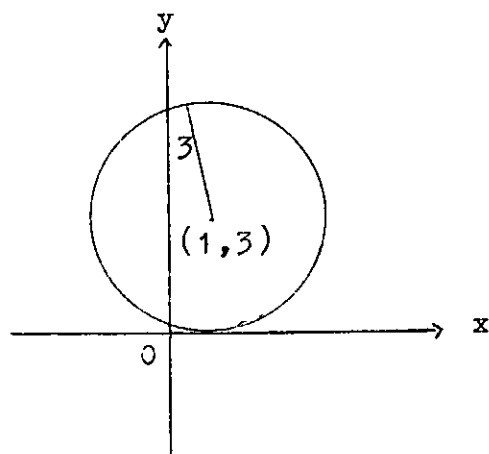
46



จากรูป Tangent ของมุม θ เท่ากับ

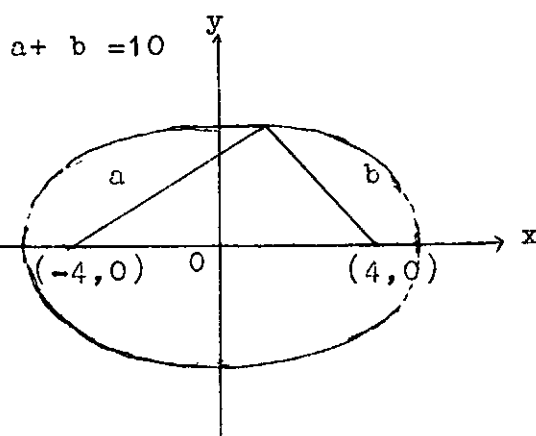
- ก $\frac{1}{2}$
 ข $\arctan \frac{1}{4}$
 ค $\frac{1}{8}$
 ง 1
 จ รูปแน่นอนไม่ได้

ค



ข้อ 47-50 ใช้ตัวเลือกข้างล่างนี้ตอบคำถามข้อที่ 47-50

ง



ก

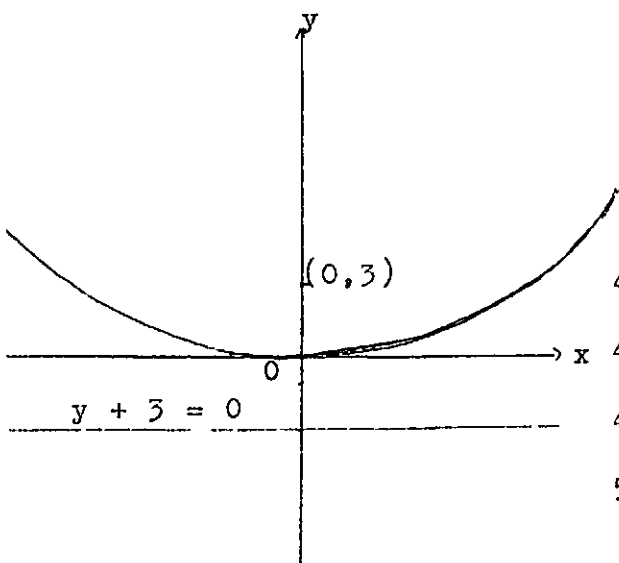
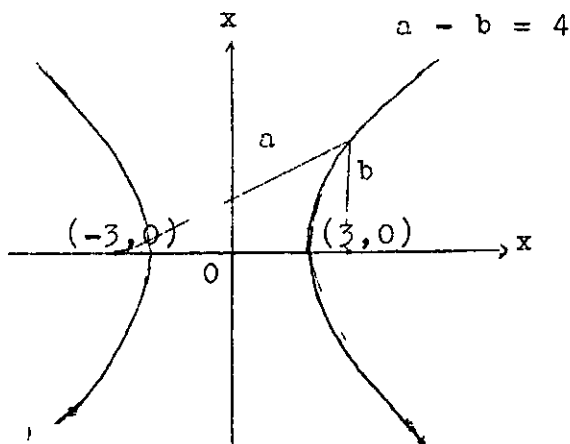
, x

ข =

(2, -3)

ข

จ



47 กราฟที่มีสมการเป็น $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$ คือ

48 กราฟที่มีสมการเป็น $\sqrt{(y-3)^2 + x^2} = y+3$ คือ

49 กราฟที่มีสมการเป็น $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ คือ

50 กราฟที่มีสมการเป็น $13x + 15y = 3x - 25$ คือ

ภาคผนวก จ.

บทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

บทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตวิเคราะห์

คำแนะนำสำหรับผู้เรียน

- 1 ข้อความที่ท่านจะอ่านต่อไปนี้ไม่ใช่แบบทดสอบ แต่เป็นบทเรียนที่ท่านสามารถศึกษาหาความรู้ด้วยตัวของท่านเองได้
- 2 บทเรียนที่ท่านจะได้อ่านนี้เรียกว่าบทเรียนโปรแกรม หรือบทเรียนจำไว้ว่ารูป (Programmed Instruction) มีลักษณะเป็นคำอธิบาย และให้ท่านตอบคำถามเป็นตอน ๆ ไปเรียกว่ากรอบ(Frame) โดยจะเริ่มจากง่ายไปหายากจึงให้ความรู้ต่อเนื่องกันไปในจนจบกรอบสุดท้าย
- 3 ท่านจะต้องอ่านทีละกรอบโดยเริ่มจากกรอบแรกไปตามลำดับไม่ข้ามกรอบใดกรอบหนึ่ง ทั้งนี้จะทำให้ท่านได้รับความรู้ต่อเนื่องกันไป
- 4 เมื่อท่านอ่านข้อความในกรอบเข้าใจแล้วจึงตอบคำถามในกรอบโดยการเติมคำตอบในช่องว่างที่ให้ไว้ แล้วจึงตรวจสอบคำตอบของท่านด้านขวามือของหน้าถัดไป โดยเรียงตามลำดับ
- 5 ถ้าท่านตอบคำถามในกรอบใดผิด ให้ท่านกลับมาอ่านข้อความในกรอบเดิมซ้ำอีกครั้งหรือหลาย ๆ ครั้งแล้วจึงตอบใหม่หากยังไม่ถูกอีก หรือข้อเท็จจริงเกี่ยวกับข้อความในกรอบท่านควรจะถามผู้สอน
- 6 ท่านไม่ควรจะดูคำตอบก่อนเพราะนั่นเป็นการป้องกันตัวเองว่าท่านไม่มีศักยภาพตนเองผลที่ท่านจะได้รับคือขาดความเชื่อมั่นในตัวเอง และจะไม่ได้รับความรู้เท่าที่ควร
- 7 การทำบทเรียนท่านต้องทำไปตามความสามารถของท่าน โดยไม่รีบร้อนหาเพื่อนทำใจให้สบาย หากรู้สึกเหนื่อย หรือเบื่อก็พักสักครู่แล้วค่อยทำต่อไปใหม่
- 8 ถ้าท่านเข้าใจการใช้บทเรียนนี้แล้ว เรามาเริ่มอ่านบทเรียนกันเลย

ขอให้ท่านโชคดี และสมหวังในการเรียน

ตัวอย่างบทเรียนโปรแกรม

บทเรียน

คำตอบ

- 0.1 นิยาม ยูเนียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$
หมายถึง เซตที่มีสมาชิกเป็นของเซต A หรือของเซต B (รวมทั้งสองด้วย)

นั่นคือ
$$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$$

ตัวอย่าง $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ a, b \}$

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, a, b \}$$

ทำนองเดียวกันว่า ถ้า $A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ d \}$

เพราะฉะนั้น $A \cup B = \underline{\{ a, b, c, d \}}$

0.2

ถ้า $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ 2, 4, 6 \}$, $D = \phi$
 $C = \{ 2, 3, 5, 7, 11 \}$

∴ $D \cup A = \underline{\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}}$, $(A \cup B) \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11 \}$

ในบทนี้จะกล่าวถึง

- เส้นโคออร์ดิเนต (Coordinates for a line)
- ระยะทางระหว่างจุดบนเส้นโคออร์ดิเนต
- จุดแบ่งเซกเมนต์บนเส้นโคออร์ดิเนต
- ระยะกำหนดทิศทาง
- ระบบแกนวิถึฉาก (Rectangular Coordinate System)
- โปรเจกชัน (Projection)

บทเรียน

กำหนด

$\bar{0.3}$

(0.1)

$\{a, b, c, d\}$

0.4

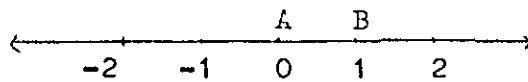
(0.2)

$\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

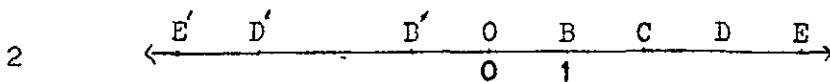
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$

บทบทเรียน

- 1 จากเอกนิยมของเรขาคณิตทำให้เราทราบว่ามีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ 1 - 1 Correspondence ระหว่างจำนวนจริงและจุดบนเส้นตรง ให้ A, B เป็นจุดบนเส้นตรงจับคู่กับจำนวนจริง 0 และ 1 ตามลำดับ ดังรูป

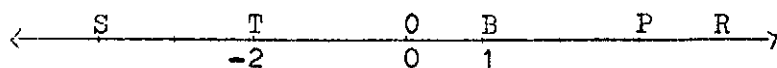


ถ้า x เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้ไปทางด้าน B เราจะให้จำนวนที่จับคู่กับจุดทางด้านนี้เป็นจำนวนจริงบวก นั่นคือเป็นความยาวของระยะ AX ในพหุของ AB เรียก AB ว่า Unit segment ถ้า Y เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงนี้ตรงข้ามกับ B จะจับคู่กับจำนวนจริงลบ นั่นคือความยาวในพหุของ AX ดังนั้นจุด ๆ หนึ่งจะจับคู่กับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียกการจับคู่ หรือการแทน (Correspondence) ลักษณะนี้ว่า Coordinate System สำหรับเส้น เรียกจุด A ว่าจุดกำเนิด (Origin) และเรียกจุด B ว่า Unit point จำนวนจริงที่จับคู่กับจุด เรียกว่า โคออร์ดิเนต (Coordinate หรือพิกัดของจุดนั้น ๆ) และเรียกเส้นนี้ว่า เส้นโคออร์ดิเนต AB เป็น Unit Segment ข้อตกลง จะใช้ตัวอักษร $a, b, c, \dots$ แทนโคออร์ดิเนตของจุด A, B, C, ... ตามลำดับ



ถ้าให้ x เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L และระยะ Ox เท่ากับจำนวนเท่าของ Unit segment หรือเท่ากับ $k(OB)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงแล้ว x จะจับคู่กับจำนวน k จากรูป $OC = 2(OB)$ เพราะฉะนั้นจุด C จับคู่กับจำนวน 2 จุด D จับคู่กับจำนวน 3 จงพิจารณาจุดต่อไปนี้ จุด E จับคู่กับจำนวน _____ จุด D' จับคู่กับจำนวน _____ จุด E' จับคู่กับจำนวน _____

- 3 นิยาม ถ้าจำนวนจริง a จับคู่กับจุด A หรือสมมูลกับจุด A บนเส้นโคออร์ดิเนตเรียก a ว่าเป็นโคออร์ดิเนต หรือพิกัดของจุด A หรือจุด A มีโคออร์ดิเนต a



จากรูป จุด S มีโคออร์ดิเนต -4 จุด T มี -2
 4 เป็น โคออร์ดิเนต ของจุด R และจุด P มีโคออร์ดิเนต 3

- 4 ไบเรขาคณิตของยูคลิดเราทราบว่า ถ้ามีจุด 2 จุดเราสามารถจะเขียนเส้นตรงผ่านจุดนี้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น และถ้า A, B เป็น 2 จุดบนเส้นตรงเราจะเรียกช่วง AB บนเส้นตรงว่าเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง หรือเซกเมนต์ของเส้นตรง หรือไลนเซกเมนต์ AB

4
-3
-4

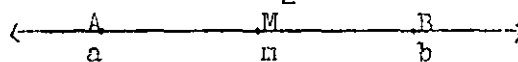
- 5 นิยาม ความยาวของไลนเซกเมนต์ AB ก็คือระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B เขียนแทนด้วย $d(A, B)$ มีค่าเท่ากับ ค่าสัมบูรณ์ของ $b - a$ เมื่อ a, b เป็นโคออร์ดิเนตของจุด A, B ตามลำดับ

$$\text{นั่นคือ} \quad d(A, B) = |b - a|$$

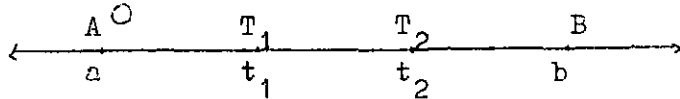
จากนิยามข้างกล่าวทวนจึงพิจารณาว่า $d(B, A) = \frac{|a-b|}{|m|}$
 และ $d(A, B)$ เท่ากับ $d(B, A)$ หรือไม่

6 ถ้า P, Q เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนต และมีโคออร์ดิเนต $2, 5$ ตามลำดับ ระยะทางระหว่างจุด P และ Q คือ $d(P, Q)$ เท่ากับ $q - p = 5 - 2 = 3$ และถ้า a, b เป็นโคออร์ดิเนตของจุด A, B บนเส้นโคออร์ดิเนตตามลำดับ จงพิจารณา ก. $a = 4, b = 10$ จะได้ $d(A, B) = \underline{6}$ ข. $a = 4, b = -10$ จะได้ $d(A, B) = \underline{14}$ ค. $a = -3, b = -16$ จะได้ $d(A, B) = \underline{13}$	-4 โคออร์ดิเนต โคออร์ดิเนต 3
7 r, s เป็นโคออร์ดิเนตของจุด R, S บนเส้นโคออร์ดิเนตตามลำดับ $d(R, S) = 12$ หน่วยจงแสดงว่า ก ถ้า $r = 3$ จะได้ $s = \underline{-9}$ หรือ ถ้า $s = -6$ จะได้ $r = \underline{6}$	
8 ถ้าจุด A, B และ C เป็น 3 จุดที่แตกต่างกันบนเส้นโคออร์ดิเนต และมีโคออร์ดิเนต a, b และ c ตามลำดับและถ้า $a < b$ ข้อใดกล่าวถึงจุดที่มีโคออร์ดิเนตอยู่ระหว่าง a, b ก $b < c$ ข $c < a$ ค $c > a$ และ $c < b$	ด บ
9 ถ้า X และ A เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนตมีโคออร์ดิเนต x และ 5 ตามลำดับและถ้าจุด X อยู่ทางขวาจุด A, Inequality โคออร์ดิเนตของ x และ 5 เป็นอย่างไร _____ และถ้า X อยู่ทางซ้ายจุด A, Inequality โคออร์ดิเนตของ x และ 5 จะเป็นอย่างไร _____	$a - b$ เท่าใด

10 นิยาม ระยะกำหนดทิศทาง (Directed distance) จากจุด A ถึงจุด B บนเส้นโคออร์ดิเนตเขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ มีค่าเท่ากับ $b - a$ เมื่อ a, b เป็นโคออร์ดิเนตของ A, B ตามลำดับ ได้แก่ $\overrightarrow{AB} = b - a$ จากนิยาม $\overrightarrow{BA} = -10 - (-1) = -9$, $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\overrightarrow{BA}$ หรือไม่? <u>ไม่</u> $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ จะมีความสัมพันธ์กันดังนี้ <u>คือ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$</u>	6 11 13
11 ให้ x และ y เป็นโคออร์ดิเนตของจุด x และ y ตามลำดับ ถ้าจุด Y อยู่ทางขวาของจุด X จะได้ $d(X, Y) = \frac{y - x}{1}$ $\overrightarrow{XY} = \frac{y - x}{1}$, $\overrightarrow{YX} = \frac{x - y}{1}$ และถ้า $x = 2$, $y = 10$ จะได้ $d(X, Y) = \frac{10 - 2}{1} = 8$, $\overrightarrow{XY} = \frac{10 - 2}{1} = 8$, $\overrightarrow{YX} = \frac{2 - 10}{1} = -8$	-9 หรือ 15 $+6$ หรือ -18
12 จากรูป $\overrightarrow{AB} = b - a$, $\overrightarrow{BQ} = q - b$, $\overrightarrow{QP} = p - q$ และ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP}$	ก
13 จากกรณี 12 $\overrightarrow{QB} = \frac{b - 1}{1}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{q - 1}{1}$, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} =$	$x > 5$ $x < 5$

14 <u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า A และ B มีโคออร์ดิเนต a และ b บน เส้นโคออร์ดิเนตตามลำดับ จุดกึ่งกลาง (midpoint) ของเส้นเซกเมนต์ AB จะมีโคออร์ดิเนต $\frac{a + b}{2}$  วิธีนี้ ให้จุด M เป็นจุดกึ่งกลางเส้นเซกเมนต์ AB และมีโคออร์ดิเนต เพราะว่า $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ดังนั้นจึงได้จากการพิสูจน์ต่อไปนี้ _____ = _____ _____ = _____ _____ = _____ _____ = _____ _____ = _____	a - b ไม่เท่ากัน $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ $y - x$ y - x x - y 8 , 8 , -8
15 P , Q , R เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนตที่มีโคออร์ดิเนตเป็น p , q , r ตามลำดับ ถ้า Q เป็นจุดกึ่งกลางของ P จงหา ถ้า p = -3 , r = 4 จะได้ q = _____ p = -20 , r = -2 จะได้ q = _____ p = 18 , q = -6 จะได้ r = _____ q = 10 , r = -5 จะได้ p = _____	b - a q - b p - q p - a
16 ถ้า M เป็นจุดแบ่งครึ่งเส้นเซกเมนต์ XY บนเส้นโคออร์ดิเนต และมี โคออร์ดิเนต m , x และ y ตามลำดับ ถ้า m = 5 จะได้ ค่าของ x และ y กันนี้ _____	b - q q - a b - a

17



$$n - a = b - n$$

จากรูป T_1, T_2 เป็นจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ AB ออกเป็น 3 ส่วน

$$2n = a + b$$

เท่า ๆ กัน T_1 เป็นจุดแบ่งครึ่ง AT_2 ดังนั้น $t_1 = \frac{a + 2}{2}$

$$n = \frac{a + b}{2}$$

และ T_2 เป็นจุดแบ่งครึ่ง T_1B ดังนั้น $t_2 = \frac{t_1 + b}{2}$

18

จากกรวยที่ 17 ถ้าแทนค่า t_1 หรือ t_2 เพื่อหาค่า t_1 หรือ t_2 ให้อยู่ในเทอมของ a, b จะได้อะไรขึ้น

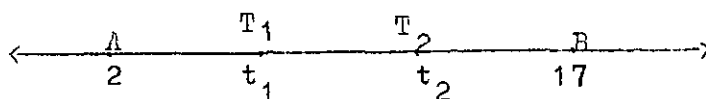
$$\frac{1}{2}$$

$$-11$$

$$t_1 = \frac{20}{3}, t_2 = \frac{17}{3}$$

$$-30$$

19



$$\frac{1}{2}$$

$$\text{จากรูป } t_1 = \frac{17}{3}, t_2 = \frac{17}{3}$$

20

จากกรวยที่ 18 ถ้า $a = -6, b = -15$ จะได้ $t_1 = \frac{11}{3}$

$$x + y = 10$$

$t_2 = \frac{17}{3}$ ถ้า $a = 3, t_1 = 5$ จะได้ $b = -11$

และถ้า $b = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{10}{3}$ จะได้ $a = -11$

21

ให้ a, b, c เป็นโคออร์ดิเนตของจุด A, B, C บนเส้นโคออร์ดิเนต

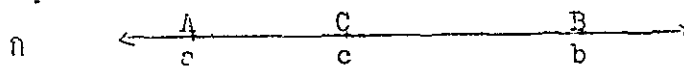
ถ้า $a = -3$ และ $b = 7$

ก ถ้า B เป็นจุดกึ่งกลางของ AC จะได้ $c = 13$

ข ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของ BA จะได้ $c = -1$

ค ถ้า A เป็นจุดกึ่งกลางของ BC จะได้ $c = -13$

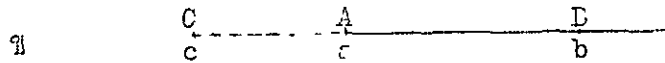
22



$$\frac{a + t_2}{2}$$

จากรูป ก $\vec{AC} : \vec{CB} =$

$$\frac{t_1 + b}{2}$$



จากรูป ข $\vec{AC} : \vec{CB} =$

23

จากกรณีที่ 22 รูป ก จุด C เป็นจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ AB ภายใน

ด้วยอัตราส่วน $\vec{AC} : \vec{CB} = r$ และรูป ข จุด C เป็นจุด

$$\frac{2a + b}{3}$$

แบ่งเส้นเซกเมนต์ AB ภายนอกด้วยอัตราส่วน $\vec{AC} : \vec{CB}$

$$\frac{a + 2b}{3}$$

จากกรณีที่ 22 รูป ก ถ้า $a = 3, c = 6, b = 12$

$r = \vec{AC} : \vec{CB} = \frac{1}{2}, \vec{CA} : \vec{CB} =$

7

24

ข้อ 1 A, B, C เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนตและมีโคออร์ดิเนต

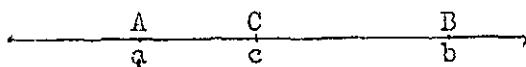
12

a, b, c ตามลำดับ ถ้าจุด C แบ่งเส้นเซกเมนต์ AB ด้วย

อัตราส่วน $\vec{AC} : \vec{CB} = r$ แล้ว $c = \frac{a + rb}{1 + r}$

-9

-12



ใช้ว่า เพราะวา $\vec{AC} = r \vec{CB}$

9

หาวงเล็บหารพิสูจน์ต่อ

7

$$\frac{c - a}{r} = \frac{b}{1 + r}$$

$$\frac{c - a}{r} = \frac{b}{1 + r}$$

$$\frac{c - a}{r} = \frac{b}{1 + r}$$

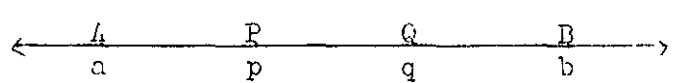
$$\frac{c - a}{r} = \frac{b}{1 + r}$$

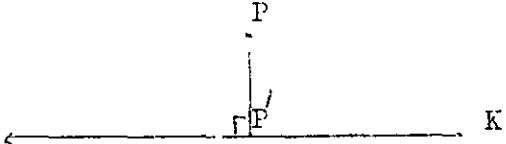
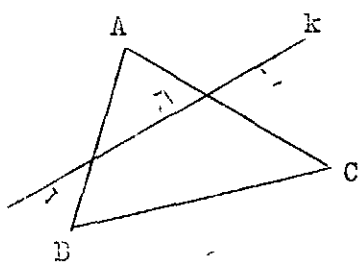
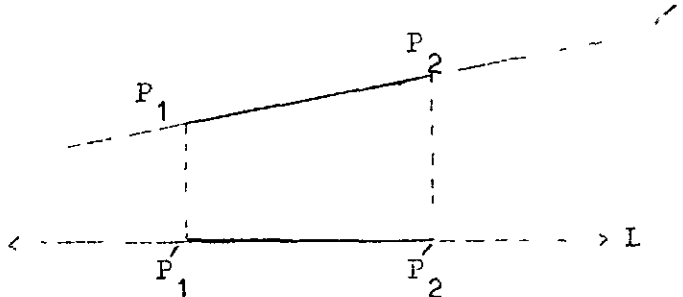
$$\frac{c - a}{r} = \frac{b}{1 + r}$$

17

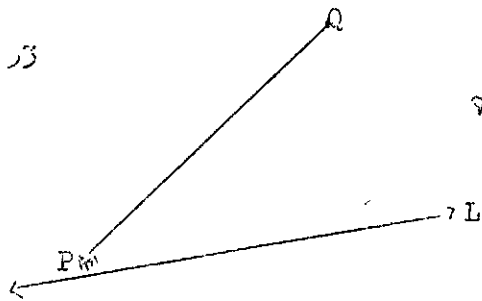
2

-13

25 จากทฤษฎี 24 ตัวอย่าง ถ้า $a = 2$, $b = 5$ และ $\vec{AC} : \vec{CB} = r = \frac{1}{5}$ จะได้ $c = \frac{2 + \frac{1}{5}(5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2 + 1}{\frac{6}{5}} = \frac{15}{6}$ ก ถ้า $a = -1$, $b = 4$, $r = \frac{5}{2}$ แล้ว $c =$ _____ ข ถ้า $a = -5$, $b = 10$, $r = -\frac{1}{2}$ แล้ว $c =$ _____	$c - a : b - c$ $-(c - a) : b - c$
26  จากรูปได้ $AP = PQ = QB$, $r_1 = \vec{AP} : \vec{PB}$ เพราะฉะนั้น $r_1 =$ _____ และ $p =$ _____ ถ้า $r_2 = \vec{AQ} : \vec{QB}$ จะได้ $r_2 =$ _____ และ $q =$ _____	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$
27 ถ้า A, B และ D เป็นจุดอยู่บนเส้นโคออร์ดิเนต และมีโคออร์ดิเนต 4 , 2 และ -5 ตามลำดับ ถ้า A เป็นจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ LD ในอัตราส่วน $p = \vec{AD} : \vec{LD}$ จะได้ $p =$ _____	$c - a = r(b - c)$ $c - c = rb - rc$ $c + rc = a + rb$
28 ถ้า 7 , - , เป็นโคออร์ดิเนตของจุด P, Q บนเส้นโคออร์ดิเนตตาม ลำดับ และถ้าจุด S อยู่บนเส้นโคออร์ดิเนตที่ $\vec{PS} : \vec{SQ} = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่าจุด S มีโคออร์ดิเนต _____	$c = \frac{a + rb}{1 + r}$

29 ถ้าขึงไฉกเชกเม้นท์ $A_1 A_5$ ออกเป็น + ส่วนเท่า ๆ กันที่จุด A_2, A_3, A_4 ตามลำดับและถ้า $-6, 20$ เป็นโคออร์ดิเนตของจุด A_1, A_5 ตามลำดับแล้วจุด A_3 มีโคออร์ดิเนต <u>1</u> จุด A_4 มีโคออร์ดิเนต <u>27</u> <u>7</u>	$\frac{18}{7}$ -20
30 นิยาม ถ้าจุด P เป็นจุดไม่อยู่บนเส้นตรง K ลากเส้นตรงจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง K ที่จุด P' เรียกจุด P' เป็นโปรเจกชัน (projection) ของจุด P บนเส้นตรง K ดังรูป 	$\frac{1}{2}, \frac{2a+b}{3}$ $2, \frac{a+2b}{3}$
31  จงแสดงจุดที่เป็นโปรเจกชันของจุดมุมของสามเหลี่ยม ABC บนเส้นตรง k	$\frac{2}{9}$
32 ให้ $P_1 P_2$ เป็นเส้นเชกเม้นท์ และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง โปรเจกชันของเส้นเชกเม้นท์ $P_1 P_2$ ไปบนเส้นตรง L จะได้เส้นเชกเม้นท์ $P'_1 P'_2$ บนเส้นตรง L ซึ่งจุด P'_1, P'_2 เป็นโปรเจกชันของจุด P_1, P_2 บนเส้นตรง L ตามลำดับ ดังรูป 	18

33



จงแสดงการโปรเจกชันได้ฉากบนเส้น

PQ บนเส้นตรง L

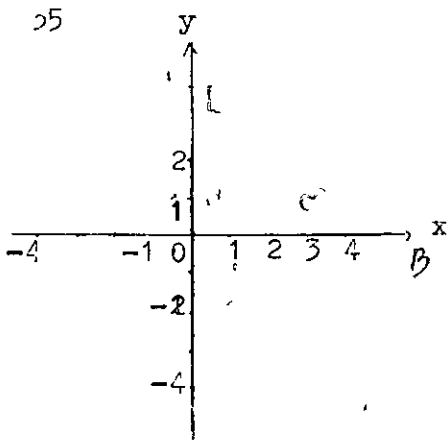
7

27
2

34

จงพิจารณาว่า ถ้า b เป็นความยาวได้ฉากบนเส้นที่เป็นโปรเจกชัน
ของได้ฉากบนเส้นที่มีความยาว a บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง a, b
จะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร $a^2 = b^2$

35

ถ้าได้เส้นโคออร์ดิเนต M อยู่ในแนวระ

ดับ (Horizontal line) มีจุด

O เป็นจุดกำเนิด (Origin) มีทิศ

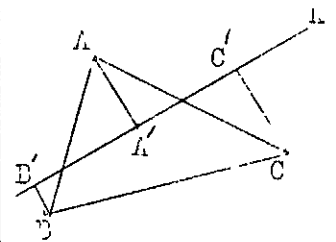
ทางไปทางขวาเป็นทิศทางบวกมี OB

เป็น Unit segment บนเส้น M ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง M ที่จุด O เส้น L จะเป็นเส้นแนวตั้ง (Vertical line) ถ้า A เป็นจุดบนเส้นตรง L อยู่บนเส้นตรงกำเนิด และ $OA = OB$ ฉะนั้นจุด A จะมีโคออร์ดิเนต 1ถึงจุด A OA เป็น Unit segment บนเส้นตรง L ก็จะได้เส้นตรง L เป็นเส้นโคออร์ดิเนต และมีทิศทางไปทางบนเป็นทิศทางบวกทิศทางทั้งสองเป็นทิศทางลบ โดยทั่วไปจะเรียกแนวระดับว่าแกน x (x - axis) เส้นแนวตั้งว่าแกน y (y - axis) เรียก

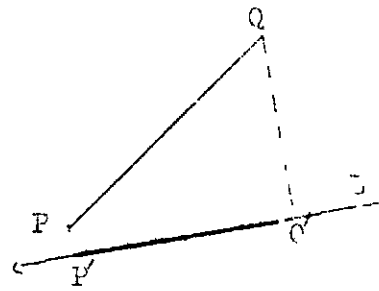
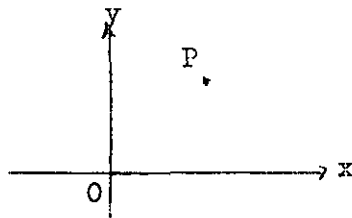
แกนทั้งสองว่าแกนโคออร์ดิเนต (Coordinate axes) และเรียก

Space ที่กำหนดแกนพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate

System) ก็เป็นเพียงระบบหนึ่งเท่านั้น

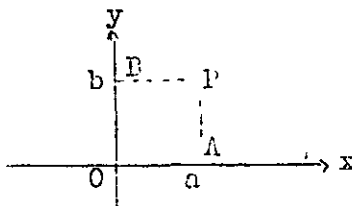


- 36 จากกรณีที่ 35 ระนาบถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเรียกแต่ละส่วนว่า
 ทวอแคว้น (quadrant) และตกลงว่าส่วนในระนาบที่มีค่าโคออร์ดิเนต
 ของทุกสิ่งอย่างเป็นค่าบวกเป็นทวอแคว้นที่ 1 และนับทวนเข็มนาฬิกาเป็น
 ทวอแคว้นที่ 2, 3, 4 ตามลำดับ ถ้าจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบหาค่า
 วงโคจรโปรเจกชันของจุด P ไปบนแกน x และไปบนแกน y



- 37 จากกรณีที่ 36 ถ้า A เป็นโปรเจกชันของจุด P บนแกน x และ
 จุด B เป็นโปรเจกชันของจุด P บนแกน y เนื่องจากแกน
 x และแกน y เป็นเส้นโคออร์ดิเนตดังนั้นเราสามารถทราบ
 โคออร์ดิเนตของจุด A และจุด B นั่นคือเราสามารถทราบระยะ OA, OB

$$a \geq b$$

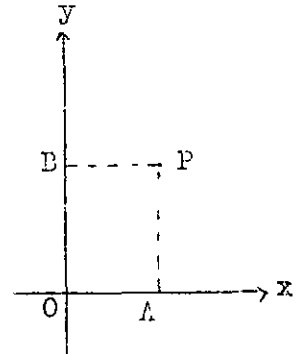


จากรูป $d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d(O, A) = a$

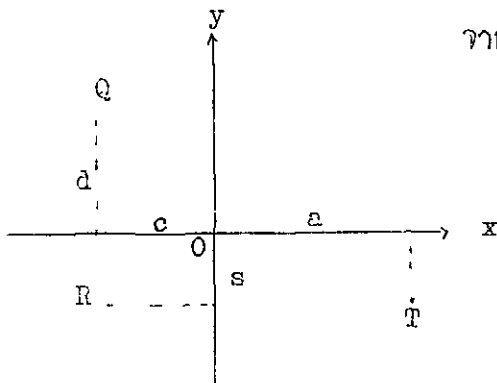
$d(A, P) = b$

- 38 จากกรณีที่ 37 จุด A, B ซึ่งเป็นโปรเจกชันของจุด P บนแกน
 x และแกน y และมีโคออร์ดิเนต a, b ตามลำดับแล้ว a,
 b จะเป็นโคออร์ดิเนตของจุด P ในระนาบเรียก a ว่า
 x-coordinate เรียก b ว่า y-coordinate
 ของจุด P จะเขียนแทนจุด P ด้วยคู่ลำดับ (a, b) เนื่องจาก
 $a = \overrightarrow{OA}$ และ $b = \overrightarrow{OB}$ ฉะนั้นโคออร์ดิเนตของจุด P
 ใด ๆ ในระนาบคือค่าลำดับ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ในการเขียนชื่อจุด P

จะเขียนเป็น $P(a,b)$ หรือ (a,b) อ่านว่าจุด P มี
 โคออร์ดิเนต (a,b) เพราะฉะนั้น $P(-2,1)$ อ่านว่า _____
 _____ และถ้า $P(x,y) = P(3,5)$ จะได้ $x = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $y = \underline{\hspace{2cm}}$



39



จากรูปจุด Q มีโคออร์ดิเนต $(-a, c)$
 จุด R มีโคออร์ดิเนต $(-c, -s)$
 จุด T มีโคออร์ดิเนต $(c, -s)$
 จุดกำเนิดมีโคออร์ดิเนต $(0,0)$

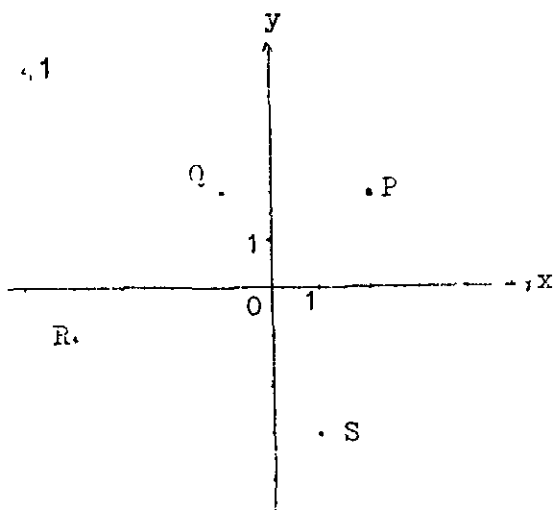
40 โดยทั่วไปนิยามใช้สัญลักษณ์ x แทนระยะจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่เป็นโปร-
 เจกชันของจุดใด ๆ ในระนาบบนแกน x และ y แทนระยะจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่เป็นโปร-
 เจกชันของจุดใด ๆ ในระนาบบนแกน y (ทั้งสอง
 ทิศทาง) ท่านลองพิจารณาว่าสำหรับจุดใด ๆ ที่อยู่บนแกน x จะมี
 โคออร์ดิเนต _____ และจุดที่อยู่บนแกน y จะมีโคออร์ดิเนต _____

b

a

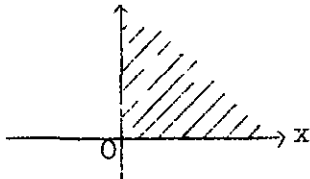
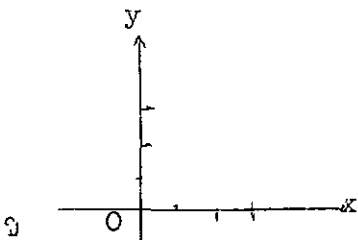
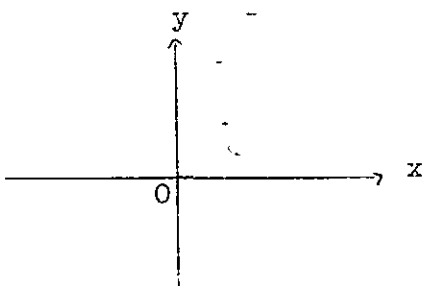
b

41



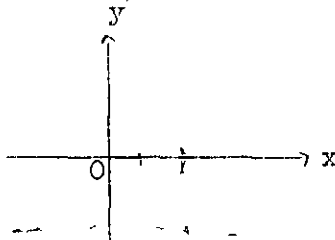
จากรูป

จุด P มีโคออร์ดิเนต _____
 จุด Q มีโคออร์ดิเนต _____
 จุด R มีโคออร์ดิเนต _____
 จุด S มีโคออร์ดิเนต _____

42 ทำบางตัวการหาจุดต่อไปนี้ $(2,6), (2,-3), (-1,5)$ และ $(-4,-7)$ อยู่ใน กรวยแตร _____ , _____ , _____ , _____ ตามลำดับ และถ้า $P(5,3)$ หมายความว่าระยะจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เป็นโปรเจกชัน ของจุด P บนแกน $x =$ _____ บนแกน $y =$ _____	จุด P มีโคออร์ดิเนต $(-2, 1)$ 5 5
43 ถ้าจุด (x,y) เป็นจุดใด ๆ ในระนาบท่านจงบอกค่าของ x,y ว่า มีค่านะเท่าใดบ้างไร เมื่อ (x,y) อยู่ในควอดแตรนต์ 1 _____ (x,y) อยู่ในควอดแตรนต์ 4 _____ (x,y) อยู่ในควอด- แตรนต์ 2 _____ (x,y) อยู่ในควอดแตรนต์ 3 _____	(c, d) (c, s) (s, s) $(0, 0)$
44 จงใช้ไคไลในระบบแกนมุมฉากเรียกว่า region (บริเวณ) <u>เขียน</u> Region ของ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ จงแสดง Region ของ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 1 \leq x < 3$ $\wedge 1 \leq y < 3\}$ ในรูป ข  ก  ง	$(x, 0)$ $(0, y)$
45 จงแสดง Region ของ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq 1\}$ 	$(2, 2)$ $(-1, 2)$ $(-1, -1)$ $(1, -3)$

46 จงหา Region ของ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq 2 \wedge y \leq -2\}$

1, 4, 2, 3



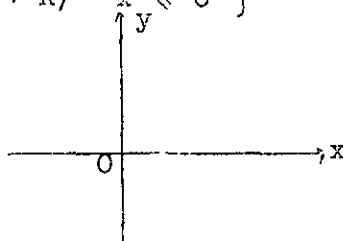
47 จงหา Region ของ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq -1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \leq 0\}$

$x > 0$ และ $y < 0$

$x > 0$ และ $y < 0$

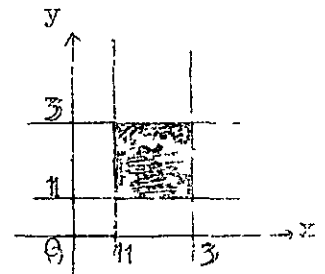
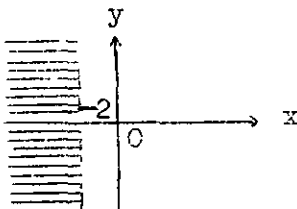
$x < 0$ และ $y > 0$

$x < 0$ และ $y < 0$

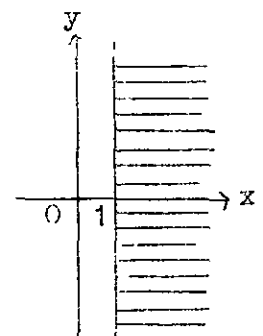
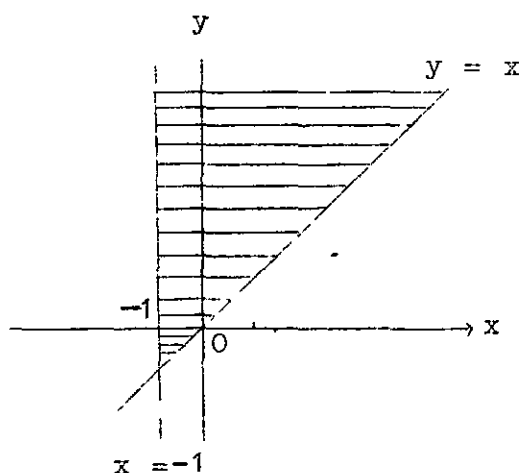


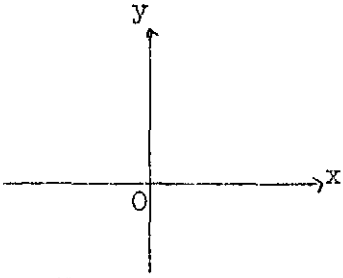
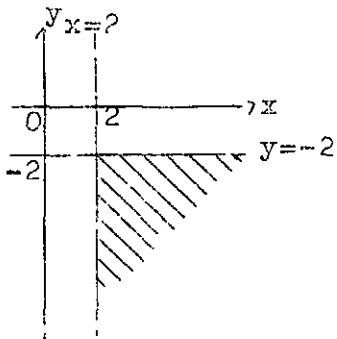
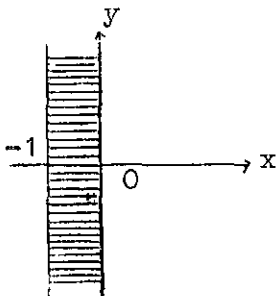
48 ภาพเงาของ Region ของเส้น

~~เส้น~~ - ?

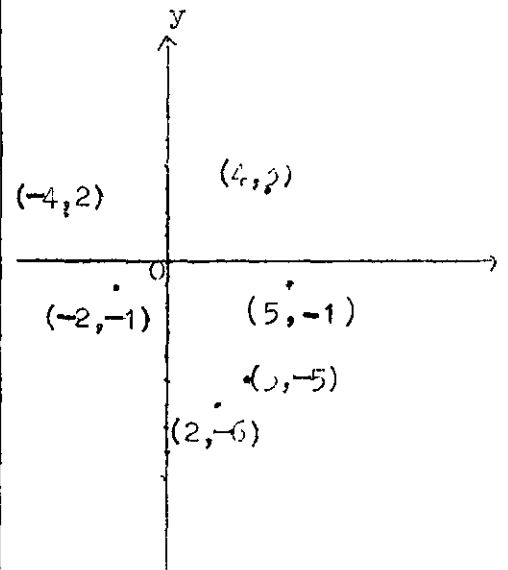


49 ภาพเงาของ Region ของเส้นที่เกิดจาก อินเตอร์เซกชันของเส้น
กับเส้น



50 จงไปจุด $(4,3), (-2,-1), (3,-5), (-1,2), (5,-1)$ และ $(2,-6)$ ไบรมาคม 	
51 ทำแบบสำรวจว่าเรื่องราวกการไป เจกชั่นได้นะจงพิจารณาว่า โปรเจกชันของจุด $(-3,7)$ บนแกน x คือ _____ บนแกน y คือจุด _____ และโปรเจกชันของจุด $(-6,-2)$ บนแกน x คือจุด _____ บนแกน y คือจุด _____	
52 ถ้าจุด $(-1,-2), (2,-2), (0,1)$ เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมคานหนาชนิดหนึ่ง จุดมุมที่เหลือ คือ _____	$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \leq -2\}$
53 ถ้าเส้นแขนแกน $p(2,3)$ $q(6,6)$ ยาว 5 หน่วยและถ้า โปรเจกชันเส้นแขนแกนนี้ไปบนแกน x เส้นแขนแกนที่เป็นโปรเจกชัน ยาวเท่ากับ _____ หน่วยและถ้าเส้นแขนแกน $A(-10,-1)$ $B(2,4)$ ยาว 13 หน่วยแล้วเส้นแขนแกนที่เป็นโปรเจกชันของ เส้นแขนแกนนี้ดังกล่าวบนแกน y ยาวเท่ากับ _____ หน่วย	
54 ถ้า $(-1,0)$ และ $(0,-13)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $P(a,b)$ บนแกน x และแกน y ตามลำดับแล้วจุด P จะมีโคออร์ดิเนต _____	$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq -1\}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y \geq -13\}$

จงหาเวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่



$(-3, 0)$

$(0, 7)$

$(-6, 0)$

$(0, -2)$

$(5, 1)$ หรือ $(-5, 1)$

4

5

$(-4, -13)$

แบบฝึกหัดที่ 1

- 1 จงเขียนเซตของจุดในระนาบต่อไปนี้
 - ก เซตของจุด $(x, y), y = 2x, x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 - ข เซตของจุด $(x, y), x = \frac{1}{2}x^2, x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 - 2 จงหาบริเวณ (region) ของระนาบของเซตต่อไปนี้
 - ก $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \geq 1 \wedge y \leq 3\}$
 - ข $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$
 - 3 จงหาจุดต่อไปนี้ $(2, 6), (-2, 6), (-3, -5)$ และ $(-1, 7)$ จงหา
 - ก โปรงก์ของจุดถึงกล่าวบนแกน x
 - ข โปรงก์ของจุดถึงกล่าวบนแกน y
 - 4 ถ้า Q' เป็นโปรงก์ของเส้นเชื่อมแก่ PQ บนเส้นตรง L แล้ว

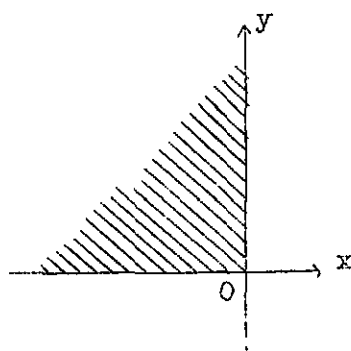
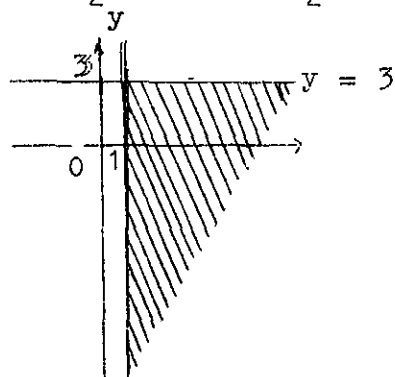
$$c(P', Q') = c(P, Q)$$
 หรือไม่ ถ้าใช่เท่าเมื่อไรจึงจะเท่ากัน
 - 5 PQ เป็นเส้นเชื่อมแก่เส้นโคออร์ดิเนต ถ้า $r \sin^2 \theta$,
 $r \cos^2 \theta$ เป็นโคออร์ดิเนตของจุด P และ Q ตามลำดับ
 จงหา
 - ก $d(P, Q)$
 - ข โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งครึ่งเส้นเชื่อมแก่ PQ
 - ค โคออร์ดิเนตของแต่ละจุดเมื่อแบ่งเส้นเชื่อมแก่ PQ
- ข้อกเมื่อ 5 ส่วนเท่า ๆ กัน

กำหนด

1 ก $\{(-1,-2), (-2,-4), (-3,-6), (-4,-8), (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$

ข $\{(-8,9), (-3,\frac{9}{2}), (-2,2), (-1,\frac{1}{2}), (0,0), (1,\frac{1}{2}), (2,2), (3,\frac{9}{2}), (4,8)\}$

2



3 ภาวี่ใ้ปปรเจกัณณเกณ x ตามค่าคั้กัอ $(2,0), (-2,0), (-3,0), (-4,0)$

ภาวี่ใ้ปปรเจกัณณเกณ y ตามค่าคั้กัอ $(0,6), (0,6), (0,-5), (0,7)$

รูลั้ปปรเจกัณณเกณ x แต่ $d(P',Q') \leq d(P,Q)$

ถ้า PQ ขณณกับ L แล้ว $d(P',Q') = d(P,Q)$

5 ก $|r \cos 2\theta|$ ข $|r|$

ก $\frac{r}{5} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$, $\frac{r}{5} (3\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta)$,

$\frac{r}{5} (2\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta)$, $\frac{r}{5} (\sin^2 \theta + 4\cos^2 \theta)$

บทที่ 2

ใบทนี่จะกล่าวถึง

- การหาระยะทางระหว่างจุดโคออร์ดิเนต 2 จุด
- การหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ตามอัตราส่วนที่กำหนดให้

55	ท่านยังจำได้ว่ากันว่า ถ้า A, B เป็นจุดบนเส้นโคออร์ดิเนต มี a, b เป็นโคออร์ดิเนตของจุดตามลำดับ จะได้ว่า $d(A, B) =$ _____	
56	ท่านลองเขียนจุดต่อไปนี้ลงในระนาบ และโปรเจกชันไลน์เซกเมนต์ที่เชื่อมจุดดังกล่าวไปบนแกนที่ขนานกับไลน์เซกเมนต์นี้แล้วพิจารณาว่า ถ้า $P(2, 0)$ และ $Q(5, 0)$ จะได้ $d(P, Q) =$ _____ ถ้า $A(-7, 0)$ และ $B(5, 0)$ จะได้ $d(A, B) =$ _____	
57	ท่านจงเขียนจุดต่อไปนี้ในระนาบ (ก) $E(0, 5), F(0, 10)$ (ข) $R(0, -6), S(0, -15)$ ถ้ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด E, F หรือ R, S อันใดอันหนึ่ง เส้นตรงนี้จะมีคุณสมบัติอย่างไรกับแกน x และแกน y _____	
58	จากกรอบที่ 57 ระยะทางระหว่าง EF คือ $d(E, F) =$ _____ ระยะทางระหว่าง RS คือ $d(R, S) =$ _____	
59	ถ้าจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตั้งขนานกับแกน x จะได้ว่าความสัมพันธ์ของ x_1, x_2 และ y_1, y_2 กันนี้ $x_1 \neq x_2$ และ _____ จุดที่เป็นโปรเจกชันของทั้งสองจุดบนแกน x คือ _____, _____	
60	จากกรอบที่ 59 $d(P_1, P_2) =$ _____	

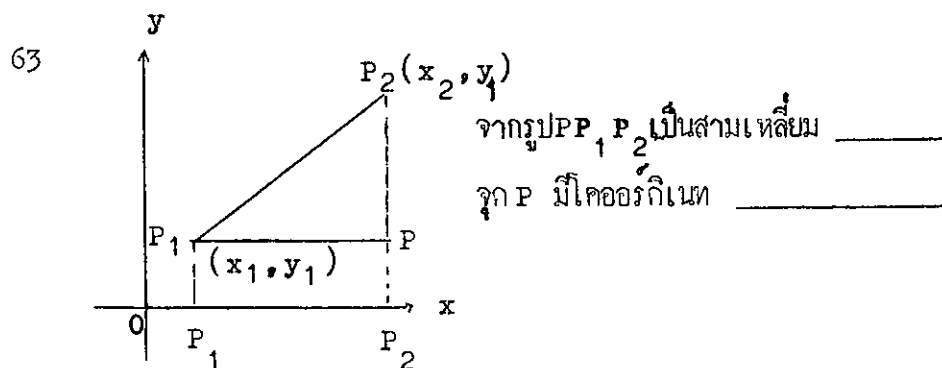
61 ถ้า $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะได้ว่าความสัมพันธ์ของ x_1, x_2 และ y_1, y_2 ดังนี้ $y_1 \neq y_2$ และ _____ จุดที่เป็นโปรเจกชันของจุดทั้งสองบนแกน y ก็คือ _____, _____

$$|b-a|$$

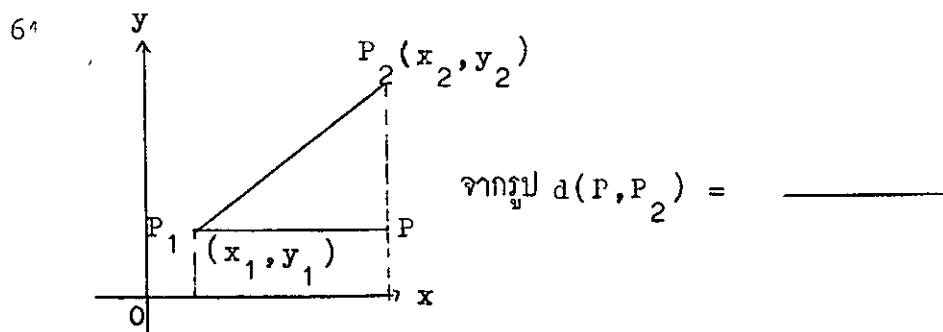
62 จากกรวยที่ 61 $d(A, B) =$ _____

3

12



ตั้งฉากกับแกน x
กับแกน y

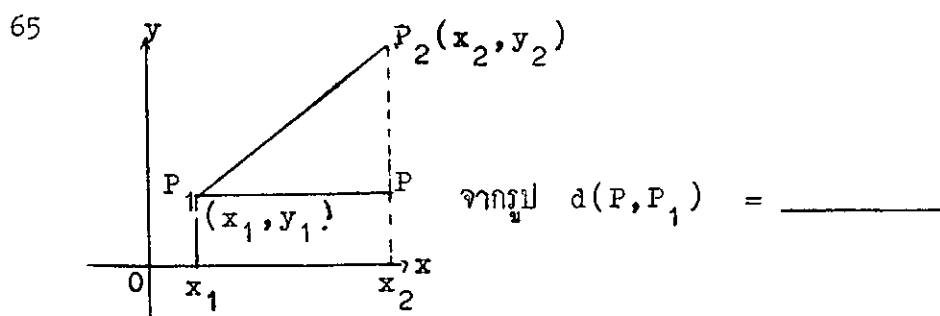


5

9

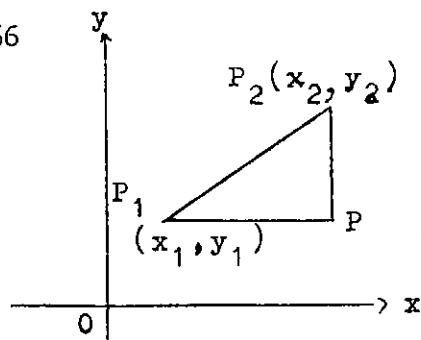
$$y_1 = y_2$$

$$(x_1, 0), (x_2, 0)$$



$$|x_2 - x_1|$$

66

จากรูป $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

เป็น 2 จุดใด ๆ ในระนาบ

เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยทฤษฎีของ

พีทาโกรัส จะได้ว่า

$$d(P_1, P_2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_1 = x_2$$

$$(0, y), (0, y)$$

67 จากคำตอบกรอบที่ 66 เราสรุปเป็นสูตรได้ว่า ถ้า $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ในระนาบ ระยะทางระหว่าง P_1 และ P_2 คือ $d(P_1, P_2)$ ซึ่ง

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ตัวอย่าง ระยะทางระหว่างจุด A (2,3) และ B (5,7) คือ

$$d(A, B) = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

หาค้นสองค่าระยะทางระหว่างจุด (-4,2) และ (-6,-9) เท่ากับ

$$|y_2 - y_1|$$

มุมฉาก

$$(x_2, y_1)$$

68 ถ้า A(0,0) และ B(6,9) จะได้ $d(A, B) = \underline{\hspace{2cm}}$

P(-5,5) และ Q(-5,-12) จะได้ $d(P, Q) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$|y_2 - y_1|$$

69 เส้นแนวนอนที่เชื่อมจุด S (0,0) และ T(x,y) จะได้ว่า
 $d(S, T) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$|x_2 - x_1|$$

70 ถ้า P (6,1), Q(x,-3) และ $d(P, Q) = 4\sqrt{5}$
 จะได้ x = _____

71	ได้เลขเบสที่เชื่อมจุด $A(3,-2)$, $B(-2,t)$ และ $d(A,B)$ $= \sqrt{29}$ จะได้ $t = \underline{\hspace{2cm}}$	$\sqrt{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}$
72	จงตรวจสอบว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-1,3)$, $(5,1)$ และ $(0,-4)$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า หรือหน้าจั่ว หรือมุมฉาก หรือด้านไม่เท่า $\underline{\hspace{2cm}}$	$5\sqrt{5}$
73	ถ้า $(5,5)$, $(5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$ และ (x,y) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ด้านเท่าแล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$	$\sqrt{117}$
74	ถ้า $A(x,y)$, $B(2,-5)$, $C(-3,4)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมหน้า จั่ว ABC ซึ่งด้าน $AB = AC$ จะได้ความสัมพันธ์ของ x,y คือ $\underline{\hspace{2cm}}$	17
75	โกออร์ดิเนตของจุด P ซึ่งอยู่บนแกน x คือ $(x,0)$ และอยู่ห่าง จากจุด $(-2,3)$ กับจุด $(5,1)$ เท่ากันคือ $\underline{\hspace{2cm}}$	$\sqrt{x^2+y^2}$
76	$A(5,8)$, $B(-11,3)$ และ $C(-8,-2)$ เป็นจุดยอดของสาม- เหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่ $\underline{\hspace{2cm}}$ ถ้าเป็นด้านที่ยาวเท่ากันคือ $\underline{\hspace{2cm}}$	-2 หรือ 14

77 โคออร์ดิเนตของจุด A ซึ่งอยู่บนแกน y คือ $(0, y)$ และอยู่
ห่างจากจุด $(2, 5)$ และจุด $(3, -7)$ เท่ากันคือ _____

-4 หรือ 0

78 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, -3)$ รัศมียาว 3 หน่วยและ
มีแกน x เป็นเส้นสัมผัส จุดสัมผัสคือ _____

หน้าจั่ว

79 วงกลมวงหนึ่งมีศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, 4)$ และผ่านจุด $(6, 8)$ จะป็นเส้น
ผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ _____ หน่วยรัศมียาว _____ หน่วย

$10\sqrt{2}$

80 A, B, C เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับที่ค่าเมื่อ

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

ค่าของพิจารณาจุดต่อไปนี้ (ก) $(7, 0), (-3, -6), (22, 9)$

(ข) $(5, -2), (1, 2), (-2, 5)$ ข้อใดที่จุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรง
เดียวกัน _____

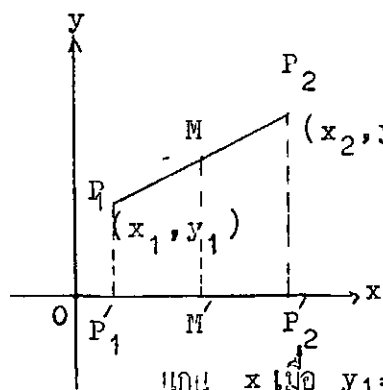
$$5x - 9y - 2 = 0$$

81 ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเซกเมนต์ P_1P_2 ถ้า $P'_1P'_2$ เป็น

เส้นเซกเมนต์โปรเจกชันของเซกเมนต์ P_1P_2

และ M' เป็นโปรเจกชันของจุด M บนแกน x
เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าจุด M' เป็นจุดกึ่งกลาง
เส้นเซกเมนต์ $P'_1P'_2$ และเราทราบว่าเส้นตรง
ที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ขนานกับ

$(\frac{13}{14}, 0)$



แกน x เมื่อ $y_1 = y_2$ ท่านจงใช้ความรู้ดังกล่าวและการเขียนรูป

ประกอบหาโคออร์ดิเนตของจุดแบ่งครึ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(-2, 9)$

ใจ , $\sqrt{22}$

กับ $(10,9)$ คือ _____

$(0, -\frac{29}{24})$

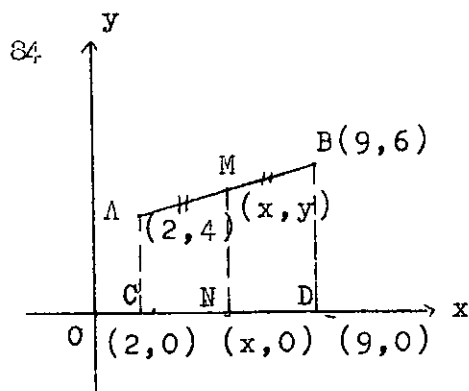
82 โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งครึ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(-7,-5)$ และ $(9,-5)$ คือ _____

$(4,0)$

83 ไวกัดยะเซนเกี่ยวกับกรอบที่ 81 เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ขนานกับแกน y เมื่อ $x_1 = x_2$ ท่านจงหาจุดแบ่งครึ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(3,-10)$ กับ $(3,12)$ คือ _____

10

5



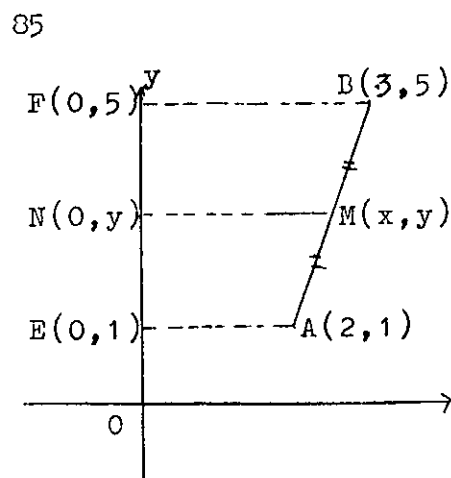
จากรูป $d(A,M) = d(M,B)$

และ $d(C,N) = \frac{1}{2} d(C,D)$

เพราะฉะนั้น $d(C,N) =$ _____

$x =$ _____

๗



จากรูป $d(A,M) = d(M,B)$

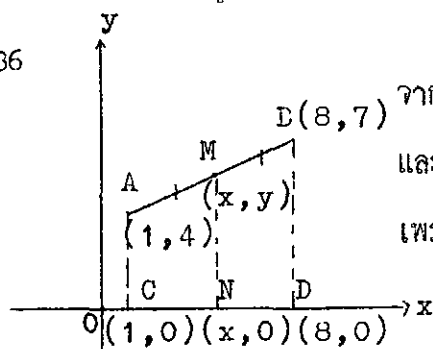
และ $d(E,N) = \frac{1}{2} d(E,F)$

เพราะฉะนั้น $d(E,N) =$ _____

$y =$ _____

$(-,9)$

86



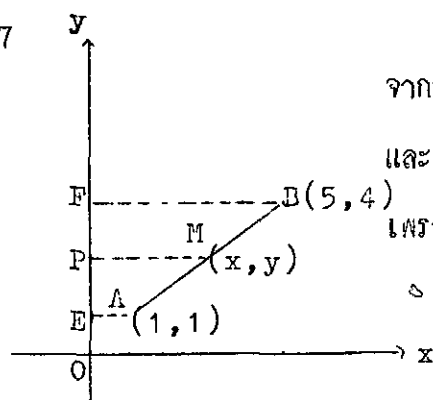
จากรูป $d(O, N) = d(O, C) + d(C, N)$ $(1, -5)$

และ $d(C, N) = \frac{1}{2}d(C, D) = \underline{\hspace{2cm}}$

เพราะฉะนั้น $d(O, N) = \underline{\hspace{2cm}}$

x

87



จากรูป $d(O, P) = d(O, E) + d(E, P)$

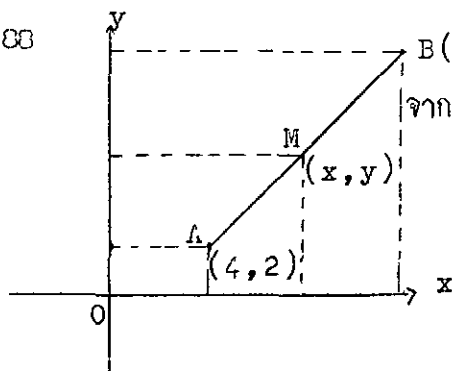
และ $d(E, P) = \frac{1}{2}d(E, F) = \underline{\hspace{2cm}}$

เพราะฉะนั้น $d(O, P) = \underline{\hspace{2cm}}$

y

(3, 1)

88



จากรูป $AM = MB$ จะได้

x = $\underline{\hspace{2cm}}$

y = $\underline{\hspace{2cm}}$

(x, y) = $\underline{\hspace{2cm}}$

 $\frac{7}{2}$ $\frac{11}{2}$

89

ใช้การกำหนดจุดตามความพอใจ ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งครึ่ง

เส้นเชื่อมแน้ $P_1(0, y_1)P_2(x_2, y_1)$ แล้ว $P(x, y) =$

$\underline{\hspace{2cm}}$

2

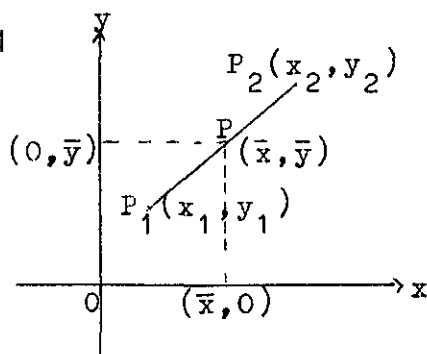
3

90

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งครึ่งเส้นเชื่อมแน้ $P_1(x_1, 0)P_2(x_1, y_2)$

จะได้ $P(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

91



ถ้า $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของ
เส้นเซกเมนต์ $P_1(x_1, y_1)P_2(x_2, y_2)$

แล้ว $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$

92 จากกรณีที่ 91 สรุปได้ว่าจุดกึ่งกลางของเส้นเซกเมนต์ $P_1(x_1, y_1)$

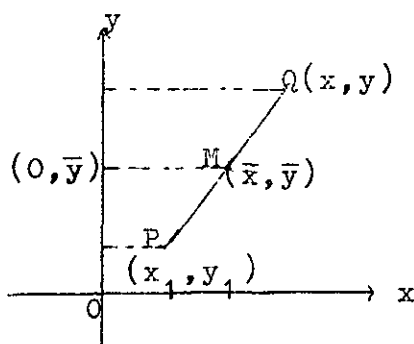
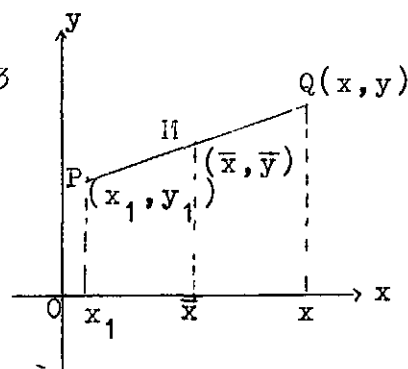
$P_2(x_2, y_2)$ จะมีโคออร์ดิเนต $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

ตัวอย่าง จุดกึ่งกลางของเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(3, -\frac{5}{2})$, $(-3, -9)$

คือ $(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{-\frac{5}{2} - 9}{2})$ เท่ากับ $(0, -\frac{23}{4})$

หาจงหาจุดกึ่งกลางของเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(3\sec^2 c, -2)$ และ $(-3\tan^2 a, 8)$ คือ _____

93



จากรูป $x = \bar{x} + (\frac{\bar{x} - x_1}{2}) = \frac{3\bar{x} - x_1}{2}$ และ

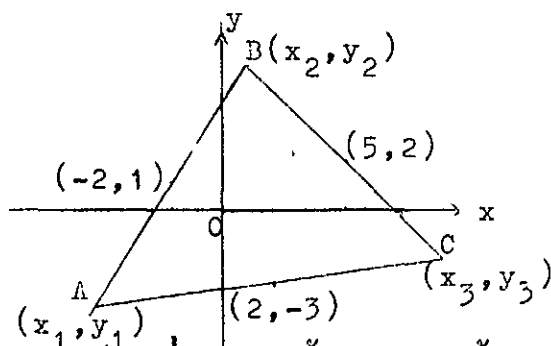
$y = \bar{y} + (\frac{\bar{y} - y_1}{2}) = \frac{3\bar{y} - y_1}{2}$ $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$

ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นเซกเมนต์ PQ และ M มีโคออร์ดิเนต

$(5, 6)$ จุด P มีโคออร์ดิเนต $(15, -4)$ จะได้ว่าจุด Q มีโคออร์-

ดิเนต _____ $(x_1, \frac{y}{2})$

94



จากรูป จุด $(-2, 1)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB จะได้ว่า

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \quad \text{หรือ} \quad x_1 + x_2 = -4$$

$$\text{และ} \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \quad \text{หรือ} \quad y_1 + y_2 = 2$$

จุด $(5, 2)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จะได้ว่า

$$-2 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{และ} \quad y_2 + y_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

จุด $(2, -3)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC จะได้ว่า

$$x_1 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{และ} \quad y_1 + y_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

95 จากกรณที่ 94

$$x_1 + x_2 = -4, \quad x_2 + x_3 = 10, \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$\text{ถ้าแก้สมการจะได้} \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 9$$

$$\text{ใส่ค่าของข้างบนนี้} \quad y_1 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{3}{2}, 3 \right)$$

96 ถ้าจุด $(3, 2)$, $(5, 9)$ และ $(5, 5)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาจุดหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปนี้ที่โคออร์ดิเนต _____

$$(0, 14)$$

97 จากบทที่ 1 เราทราบมาแล้วเกี่ยวกับการแบ่งเส้นเซกเมนต์ตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ ซึ่งเราพิจารณาการแบ่ง 2 แบบ คือ แบ่งภายนอก กับแบ่งภายใน และเรายังทราบอีกว่าจุดแบ่งของเส้นเซกเมนต์เมื่อโปรเจกชันไปบนแกนตั้งฉากกับการเป็นจุดแบ่ง นั้นคืออัตราส่วนของจุดแบ่งไม่เปลี่ยน นั่นคือถ้าจุด C เป็นจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ AB ด้วยอัตราส่วน $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB}$ และถ้า A', B', C' เป็นโปรเจกชันของจุด A, B, C ตามลำดับบนแกนหนึ่ง จะได้ $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A'C'} : \overrightarrow{C'B'}$

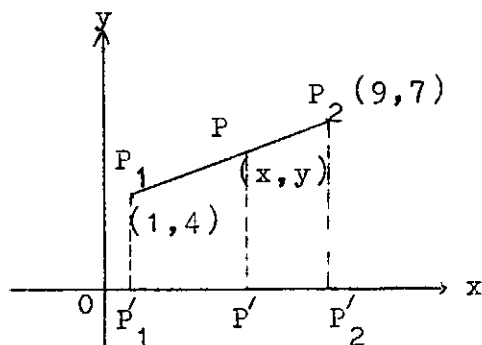
10

4

4

-6

98



จากรูป $\overrightarrow{P_1P'} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{PP'_2} = \underline{\hspace{2cm}}$

-4 , +6 , -2

99 จากกรอบที่ 98 ถ้าให้ $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = r$ ดังนั้น $\overrightarrow{P'_1P'} : \overrightarrow{P'P'_2} = r$ ด้วยจะได้ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

(3,8)

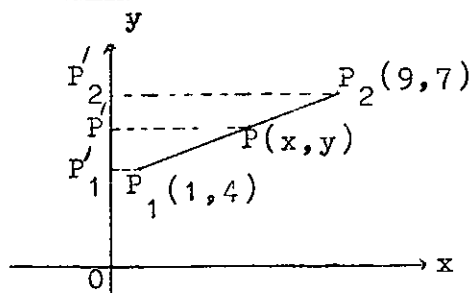
หรือ

(3,0)

หรือ

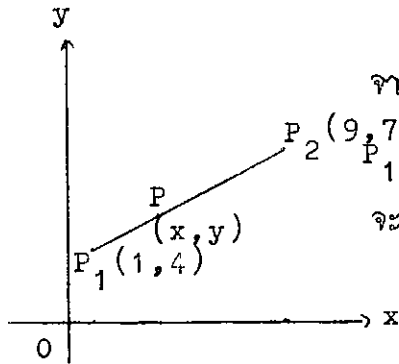
(7,10)

100



จากกรอบที่ 99 และรูป จะได้ $y = \underline{\hspace{2cm}}$

101



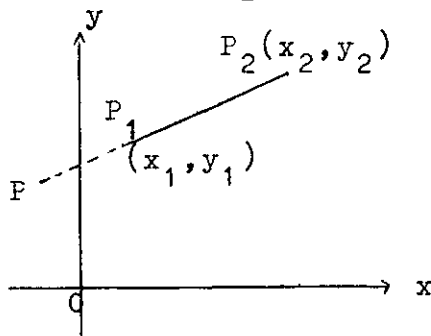
จากรูป ถ้าจุด $P(x, y)$ แบ่งเส้นเซกเมนต์

P_1P_2 ในอัตราส่วน $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = r$

จะได้ $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

102 จากกรณที่ 98 แสดงให้เห็นว่าจุด P เป็นจุดแบ่งภายในของเส้น

เซกเมนต์ P_1P_2 ในอัตราส่วน $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = r$



จากรูป จุด P เป็นจุดแบ่งเส้นเซก-

เมนต์ P_1P_2 ภายในในอัตราส่วน

เดียวกัน ดังนั้น $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2}$

เท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

$x - 1$

$9 - x$

103 ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งภายในของเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด

$P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ด้วยอัตราส่วน $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} =$

r แล้วโคออร์ดิเนตของจุดแบ่ง คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{1 + 9r}{1 + r}$

104 ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งภายนอกเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด

$P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ในอัตราส่วน $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2}$

เท่ากับ $-r$ จุดแบ่งจะมีโคออร์ดิเนต $\underline{\hspace{2cm}}$

$\frac{4 + 7r}{1 + r}$

105 หากทราบว่าจุด P แบ่งเส้นเซกเมนต์ภายนอกด้วยอัตราส่วน $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = -r$ ถ้าเรากลับอัตราส่วนให้อยู่ในลักษณะเดียวกับการแบ่งภายใน นั่นคือ $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = -\overrightarrow{PP_1} : \overrightarrow{PP_2} = r$ แล้วจุดแบ่งจะมีโคออร์ดิเนต _____ โดยทั่วไปจะใช้เป็นหลักการหาจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ทั้งภายในและภายนอกเพราะว่าโจทย์จะบอกเองว่าแบ่งภายในหรือแบ่งภายนอกโดยดูที่อัตราส่วน ถ้าอัตราส่วนมีค่าเป็นบวกก็แบ่งภายใน เป็นลบก็แบ่งภายนอก

$(\frac{1+9r}{1+r}, \frac{4+7r}{1+r})$

106 โคออร์ดิเนตของจุด $P(x, y)$ ซึ่งแบ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $P_1(1, 7)$ และจุด $P_2(6, -3)$ ในอัตราส่วน $\frac{2}{3}$ คือ _____

$-r$

107 วงกลมหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $P(-4, 1)$ มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางข้างหนึ่งเป็น $P_2(2, 6)$ และถ้า $r = \overrightarrow{PP_1} : \overrightarrow{PP_2} = -\frac{1}{2}$ จุดแบ่งจะมีโคออร์ดิเนต _____

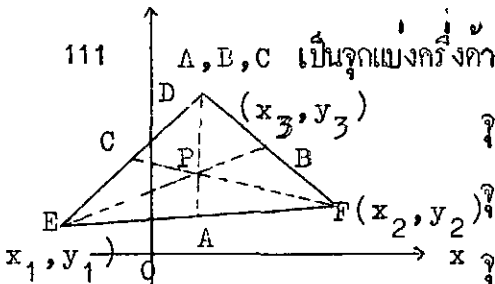
$(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r})$

108 โคออร์ดิเนตของจุดแบ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(5, 1)$ กับ $(-3, 6)$ ในอัตราส่วน $\frac{3}{4}$ คือ _____

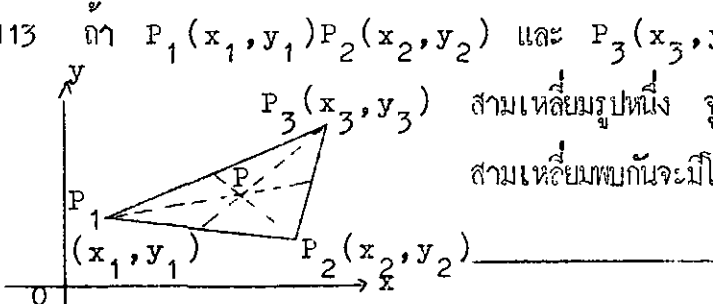
$(\frac{x_1-rx_2}{1-r}, \frac{y_1+ry_2}{1-r})$

109 ถ้าจุด $(2, 0)$ แบ่งเส้นเซกเมนต์ที่เชื่อมจุด $(-1, -2)$ และ $(5, 2)$ ในอัตราส่วน r จะได้ $r =$ _____

- 110 ถ้าจุด $(9,2)$ แบ่งเส้นเซกเมนต์ $P_1(6,8)P_2(x_2,y_2)$ ในอัตราส่วน $\frac{2}{7}$ แล้วจุด P_2 จะมีโคออร์ดิเนต $(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r})$

- 111 A, B, C เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน EF, DF, DE สามเหลี่ยม DEF ตามลำดับ

 จุด A มีโคออร์ดิเนต $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ (3,3)
 จุด B มีโคออร์ดิเนต _____
 จุด C มีโคออร์ดิเนต _____

- 112 จากรูปประกอบที่ 111 $\overrightarrow{DP} : \overrightarrow{PA} = 2 : 1$
 เพราะฉะนั้น $x =$ _____ และ $y =$ _____ $(-1, \frac{7}{2})$

- 113 ถ้า $P_1(x_1,y_1)P_2(x_2,y_2)$ และ $P_3(x_3,y_3)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จุดที่เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมพบกันจะมีโคออร์ดิเนต $(\frac{11}{7}, \frac{22}{7})$


- 114 ถ้าจุดยอดของสามเหลี่ยมเป็น $(12,3), (-1,-3)$ และ $(-12,8)$ จุดที่เป็นมัธยฐานพบกัน คือ _____

- 115 เส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด $(k,0)$ ของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปยังด้านที่เชื่อมจุดยอด $(-4,2)$ และ $(6,8)$ ของสามเหลี่ยมรูปนี้ยาว $\sqrt{45}$ หน่วย
 แล้ว _____

$$(16, -12)$$

พบทเรียนตอนที่ 2

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

แบบฝึกหัดที่ 2

- 1 จงหาระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดให้
ก $(8,3), (2,-5)$ ข $(at_1, 2at_1), (at_2, 2at_2)$
- 2 จงแสดงว่าจุดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
ก $(-2,-4), (3, \frac{7}{2})$ และ $(1, \frac{1}{2})$
ข $(a,b), (c,d)$ และ $(\frac{ra+nc}{r+n}, \frac{nb+nd}{n+n})$
- 3 จงหาเงื่อนไขที่จุด $P(x,y)$ อยู่ทางจากจุด $(2,3)$ และ $(-4,-7)$ เท่ากัน
- 4 จงหาระยะระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ถูกแบ่งออก n ส่วนเท่า ๆ กัน
จงแสดงว่าโคออร์ดิเนตของจุดที่ r ส่วนของการแบ่งจาก (x_1, y_1) คือ
 $(\frac{(n-r)x_1+rx_2}{n}, \frac{(n-r)y_1+ry_2}{n})$
- 5 จงหาโคออร์ดิเนตของจุด Centroid ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ (x_1, y_1)
 (x_2, y_2) และ (x_3, y_3)
- 6 จงแสดงว่า $(2a, 4a), (2a, 6a)$ และ $(2a+3a, 5a)$ เป็นจุดยอดของ
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว และหาความยาวของด้าน

คำตอบ

- 1 ก $\sqrt{10}$ ข $\sqrt{5} a(t_2 - t_1)$
- 3 $3x + 5y + 13 = 0$
- 5 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$
- 6 $\sqrt{10} a$

บทที่ 3

ใบพัดนี้จะกล่าวถึง

- การหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยม
- การนำเรื่องราวการหาพื้นที่ไปแก้ปัญหาดังเรขาคณิตอย่าง

116 หาสูตรการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมใดก็ได้ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

พิจารณารูปและบอกหาพื้นที่สามเหลี่ยม OPQ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

117 จากระบบพิกัดสามเหลี่ยม OPQ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

118 จากระบบพิกัดสามเหลี่ยม OPQ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

ข้อสังเกต ถ้าพื้นที่เครื่องหมายเป็นบวกเท่านั้น

119 ลองใช้การเขียนจุดในระนาบเพื่อแสดงว่าถ้า $P_1(0,0)$, $P_2(x_2,0)$ และ $P_3(x_3,y_3)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ มีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

120 ใช้การเขียนจุดในระนาบถ้า $A(0,0)$, $B(0,y_1)$ และ $C(x_2,y_2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

121	ถ้า $(0,0)$, $(x,0)$ และ $(0,y)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้า x,y เป็นได้ทั้ง บวก หรือ ลบ ท่านจงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มี จุดมุมเป็นจุดมุม มีค่าเท่ากับ _____ ตารางหน่วย	10
122	ถ้าวงใช้การเขียนรูปประกอบ ถ้าจุด $(4,0)$, $(12,0)$ และ $(7,11)$ เป็น จุดมุมของสามเหลี่ยมแล้วจะมีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	6
123	ใช้การเขียนรูปประกอบเพื่อแสดงว่า สามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(0,6)$, $(-6,-12)$, $(0,8)$ มีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	10
124	ถ้า $R(-3,10)$, $S(-2,0)$ และ $T(12,0)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม RST จงหาสามเหลี่ยม RST มีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	
125	ถ้า $P_1(x_1,0)$, $P_2(x_2,0)$ และ $P_3(x_3,y_3)$ เป็นจุดมุมของ สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ ถ้า $x_1, x_2 > 0$ แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	$\frac{1}{2} x_2 y_3 $
126	จากกรณที่ 125 ถ้า $x_1 > 0, x_2 < 0$ แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย ถ้า $x_1, x_2 < 0$ แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	$\frac{1}{2} x_2 y_1 $

127 ถ้า $D(7,0)$, $E(-2,0)$ และ $F(9,10)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม DEF แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม DEF เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

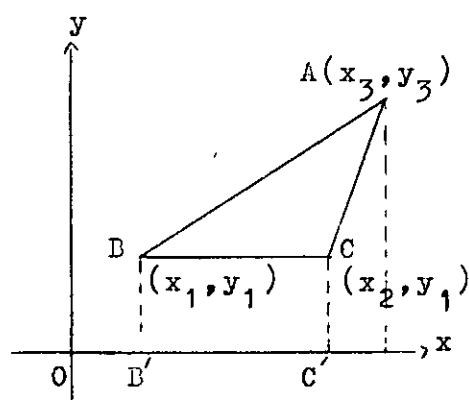
$$\frac{1}{2} |x||y|$$

128 ถ้า $R(0,-5)$, $S(12,1)$ และ $T(0,-20)$ เป็นจุดมุมสามเหลี่ยม RTS แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม RTS เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

44

129 ถ้าไปป์เราจะหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมกรณีที่มีด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมขนานกับแกนโคออร์ดิเนต ใช้การโปรเจกชันด้านที่ขนานกับแกนโคออร์ดิเนตไปบนแกนนั้นแล้วจะทราบความยาวของด้านที่ขนานกับแกนดังกล่าว

6

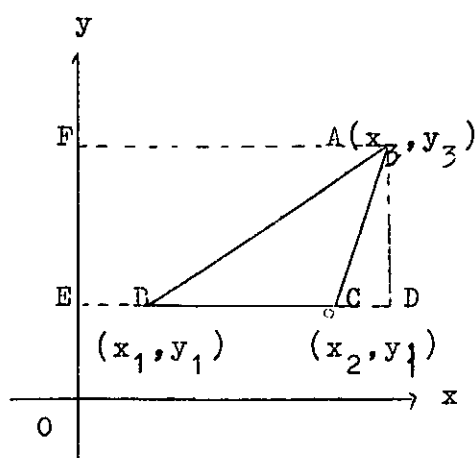


จากรูป โปรเจกชันของจุด B คือจุด B' ซึ่งมีโคออร์ดิเนตเป็น $(x_1, 0)$
 โปรเจกชันของจุด C คือจุด C' มีโคออร์ดิเนตเป็น _____ และ
 $d(B, C) = d(B', C')$
 _____ = _____

70

$$\frac{1}{2} |x_2 - x_1| |y_3|$$

130



จากรูปโปรเจกชันของจุด B คือจุด E มีโคออร์ดิเนต $(0, y_1)$ โปรเจกชันของจุด A คือจุด F มีโคออร์ดิเนต _____ และ $d(D, A)$ ซึ่งเป็น
 ความสูงของสามเหลี่ยม เท่ากับ

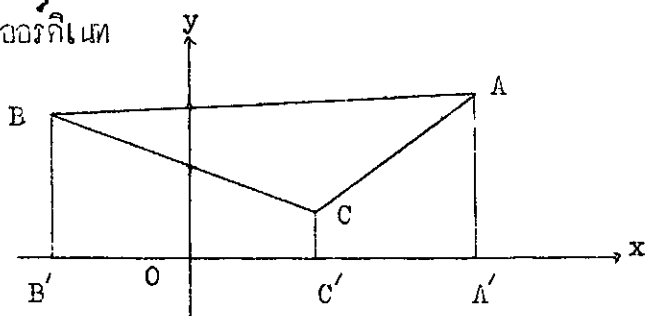
$$\frac{1}{2} |x_2 - x_1| |y_3|$$

$$\frac{1}{2} |x_2 - x_1| |y_3|$$

131	ใช้การเขียนรูปเครวี่ ๆ พิจรณาสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(-7,3), (3,3)$ และ $(6,10)$ มีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	45
132	ถ้า $A(12,0), B(-6,0)$ และ $C(7,13)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม ABC แล้วจะมีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	90
133	ให้กรอบที่ผ่าขาด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมขนานกับแกน x ถ้าด้านหนึ่งของความเลี่ยนขนานกับแกน y บ้างก็จะได้หลักการเดียวกันกับที่ทำมา แล้วให้เดาเองดูว่าท่านจะเข้าใจถูกต้องหรือไม่ ถ้าจุดมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น $(-5,10), (-5,-6)$ และ $(2,12)$ จะมีพื้นที่ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	$(x_2, 0)$ $ x_2 - x_1 $
134	ถ้า $(-1,-2), (7,-2)$ และ $(7,-12)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม จะมีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย	$(0, y_3)$ $ y_3 - y_1 $
135	ถ้า $P(x_1, y_1), Q(x_1, y_2)$ และ $R(x_3, y_3)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม PQR ถ้า $y_1, y_2 > 0$ พื้นที่สามเหลี่ยม PQR เท่ากับ _____ ถ้า $y_1 > 0, y_2 < 0$ พื้นที่สามเหลี่ยม PQR เท่ากับ _____ ถ้า $y_1, y_2 < 0$ พื้นที่สามเหลี่ยม PQR เท่ากับ _____	

136

ถ้าให้หาพื้นที่สามเหลี่ยมในกรณีไม่มีด้านใดเลยของสามเหลี่ยมขนานกับ แกนโคออร์ดิเนต



จากรูป พ.ท $\triangle A'AB'B$ - พ.ท $\triangle A'CC'C$ - พ.ท $\triangle BB'C'C$ เท่ากับ
พ.ท _____ $\triangle$: สี่เหลี่ยมผืนผ้า

35

117

137

ในการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเรามีสูตรการหาดังนี้

พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน $\times$ สูง

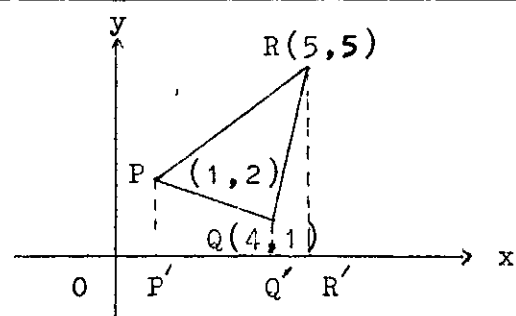
จากกรณี 136 พ.ท $\triangle A'AB'B$ = $\frac{1}{2} |A'B| |AA' + BB'|$

พ.ท $\triangle A'CC'C$ = _____ พ.ท $\triangle BB'C'C$ = _____

56

40

138



จากรูป พ.ท $\triangle RR'P'P$ = $\frac{1}{2}(5-1)(2+5) = 14$ ตารางหน่วย
พ.ท $\triangle RR'Q'Q$ = _____ ตารางหน่วย
พ.ท $\triangle PP'Q'Q$ = _____ ตารางหน่วย
พ.ท $\triangle PQR$ = _____ ตารางหน่วย

$\frac{1}{2} |x_3 - x_1| |y_2 - y_1|$

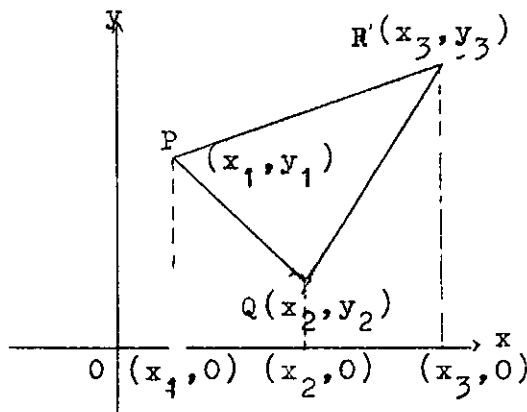
$\frac{1}{2} |x_3 - x_1| |y_2 - y_1|$

$\frac{1}{2} |x_3 - x_1| |y_2 - y_1|$

139 หาเวกเตอร์จากจุดเริ่มต้น ๆ หาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(-8, -2)$, $(-4, -6)$ และ $(-1, 5)$ มีค่าเท่ากับ _____ ตารางหน่วย

ΔABC

140



จากรูป พื้นที่สามเหลี่ยม PQR เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

$$\frac{1}{2} |\Delta C'| |AA' + CC'|$$

$$\frac{1}{2} |BC'| |BB' + CC'|$$

141 จากกรณที่ 140 ถ้า (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม PQR สามเหลี่ยม PQR มีพื้นที่เท่ากับ

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1)$$

ซึ่งเขียนในรูป determinant ได้ดังนี้

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

or

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง วงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(6, 5)$, $(1, 3)$ และ $(5, -7)$

แก้ของสามเหลี่ยมรูปนี้

=

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(18 - 7 + 25 + 42 - 15 - 5) = 29 \quad \text{ตารางหน่วย}$$

หาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(3, 2)$, $(5, -4)$, $(1, -2)$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

3

4.5

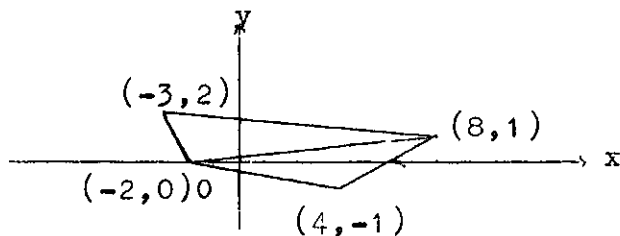
6.5

- 142 สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดข้างล่างนี้ ข้อใดที่มีพื้นที่เท่ากับ 30 ตารางหน่วย
(ก) $(-7,5), (1,1), (-3,3)$ (ข) $(0,4), (-8,0), (-1,-4)$

28

- 143 สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดข้างล่างนี้ ข้อใดมีพื้นที่มากที่สุด _____
(ก) $(0,0), (4,6), (2,6)$ (ข) $(8,2), (-5,1), (-1,-1)$

- 144 เราสามารถขยายสูตรการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมไปยังสี่เหลี่ยม ทำได้หรือไม่
หรืออาจ ำเหลี่ยมได้ เช่นรูปสี่เหลี่ยมถ้ลากเส้นทแยงมุม 1 เส้น เรา
จะได้สามเหลี่ยม 2 รูป ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมจะเท่ากับผลบวกของพื้นที่สาม-
เหลี่ยม 2 รูปที่ถูกแบ่งโดยเส้นทแยงมุมทั้งกล่าว

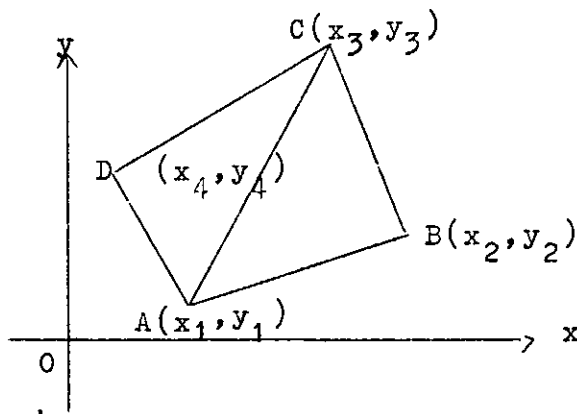


จากรูป พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-2,0), (4,-1)$ และ $(8,1)$ จะมี
พื้นที่เท่ากับ 8 ตารางหน่วย พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-2,0),$
 $(8,1)$ และ $(-3,2)$ จะมีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย
เราจะหาค่าพื้นที่สี่เหลี่ยมทั้งรูปที่มีพื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)$$

10

- 145 จ्ञี่เหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีจุดยอดเป็น $(-1,6), (-3,-9), (5,-8)$ และ $(3,9)$ จะมี
พื้นที่เท่ากับ _____ ตารางหน่วย



๗

หาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$

พื้นที่สามเหลี่ยม ACD = _____

พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = พื้นที่สามเหลี่ยม ABC + พื้นที่สามเหลี่ยม ACD

= _____

๘

147 จากทศกรกฎที่ 146 เขียนในรูป determinant ใ้ดังนี้

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

10.5

18.5

ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ เป็นจุดมุมสี่เหลี่ยม

แล้วค่าของ determinant ข้างบน แทน พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีจุด

105

มุมเป็น $(-2, 0), (4, -1), (8, 1)$ และ $(-3, 2)$ เท่ากับ

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (2 + 4 + 16 - 0 + 4 + 3 + 8 - 0) = \frac{37}{2} = 18.50 \text{ ตารางหน่วย}$$

หาจุดมุมสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(-4, -2), (-2, 3), (3, 1), (6, 0)$

เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

148 พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(0,1), (1,2), (-3,10), (-5,-3)$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

$$\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_1y_4 - x_4y_3 - x_3y_1)$$

149 การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งเขียนอยู่ในรูป determinant นั้นเราสามารถขยายได้กับรูป 5 หรือ 6 เหลี่ยมเพียงแต่เราเพิ่มโคออร์ดิเนตอีก 1 หรือ 2 จุดเท่านั้น ท่านลองหาพื้นที่รูป 5 เหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $(-5,-2), (-2,5), (5,1), (2,7)$ และ $(2,-4)$ เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_1y_4 - x_4y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$$

150 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดมุมเป็น $(0,4), (-8,0), (x,-4)$ และมีพื้นที่เท่ากับ 30 ตารางหน่วย แล้ว x มีค่าเท่ากับ _____

151 ถ้าจุด A, B, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะได้ว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับศูนย์หรือคล้ายกัน ท่านจงแสดงว่าจุด $(-\frac{1}{2}, 3), (-5, 6), (-8, 8)$ อยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกันหรือไม่ _____

22.5

152 (ก) $(-1, 2), (0, 1), (6, -1)$ (ข) $(3, 4), (-2, -1), (4, 1)$
(ก) $(5, -2), (1, 2), (-2, 5)$ ข้อใดที่จุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน _____

153 ถ้า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $A(2,5), B(7,1), C(3,-4)$ และ $D(-2,3)$ และถ้า E เป็นจุดแบ่งครึ่งก้าน CD แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ADE เท่ากับ _____ ตารางหน่วย

34.50

รวมทเรียนทวเี 3

34.50

-1

1
0.5

0

33.50

แบบฝึกหัดที่ 3

1 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมดังต่อไปนี้

ก $(6,5), (1,3), (5,-7)$

ข $(0,2), (-4,-1), (3,2)$

ค $(-3,0), (2,5), (5,1)$

2 จงหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดมุมดังต่อไปนี้

ก $(-3,-4), (2,1), (6,7), (-5,4)$

ข $(4,-6), (-3,4), (7,3), (2,-9), (-3,-6)$

3 ถ้า A, B, C เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม ABC

ก A $(3,1)$, B $(3,5)$, C $(k,-1)$ และพื้นที่ $\triangle ABC$ เท่ากับ 40 ตารางหน่วย จงหา k

ข A $(-3,-3)$, B $(-2,x)$, C $(-6,-5)$ และพื้นที่ $\triangle ABC$ เท่ากับ 12 ตารางหน่วย

จงหา x

4 ถ้า D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC มีจุดมุมเป็น

$(1,6), (9,-2), (-5,-4)$ ตามลำดับ จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม DEF ซึ่งเกิดจากการ

ลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสามเหลี่ยมรูปนี้

คำตอบ

-

1 ก 29 ข 4.5 ค 17.5

2 ก 52 ข 52.5

3 ก -17 ข -21

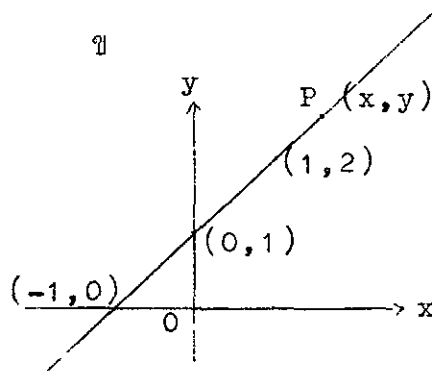
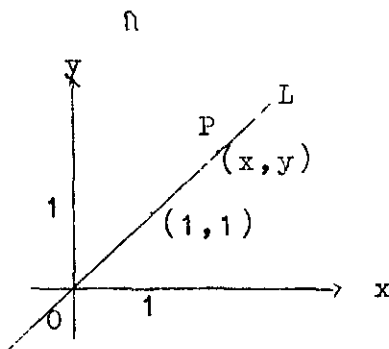
4 16.75

ในบทนี้จะกล่าวถึง

- โดิกส์ของจุด
- สมการโดิกส์ของจุดที่มีลักษณะกราฟเป็น
 - วงกลม
 - เส้นตรง
 - พาราโบลา
 - อิลิปส์
 - ไฮเพอร์โบลา

154

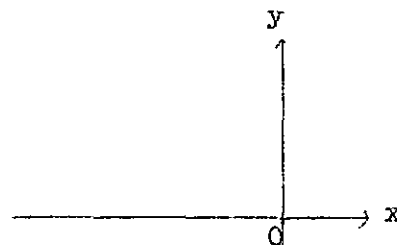
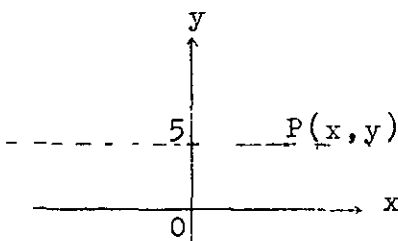
นิยาม โลกั หมายถึงทางเดินของจุดตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในระนาบ
 ตัวอย่าง ทางเดินของจุดที่ทำให้ระยะห่างจากแกน x เท่ากับระยะห่างจาก
 แกน y (แสดงดังกราฟ ก) นั่นคือจะเดินตามเส้นตรง L



จากรูป ข โลกัของจุด $P(x,y)$ เป็นอย่างไร _____

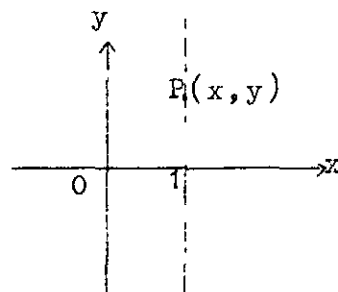
155

ทางเดินของจุด $P(x,y)$ ในระนาบทำให้ระยะห่างจากแกน x
 เท่ากับ 5 หน่วย จะมีลักษณะกราฟดังรูป ก

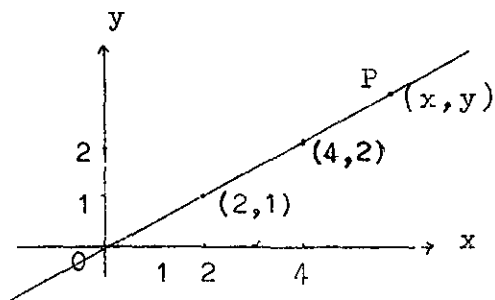


โลกัของจุด $P(x,y)$ ในระนาบห่างจากแกน y เท่ากับ -2
 หน่วยลักษณะกราฟจะเป็นอย่างไร (แสดงที่รูป ข)

156



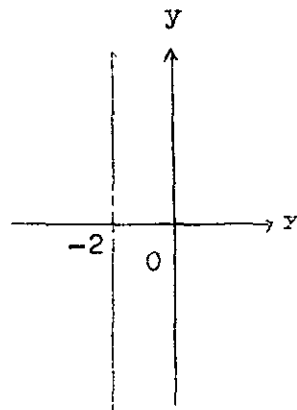
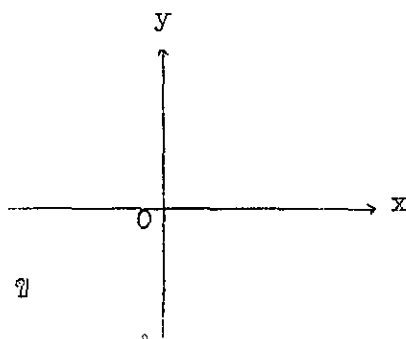
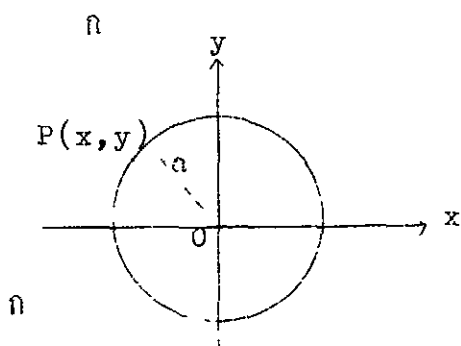
จากรูป ลักษณะโลกัของจุด $P(x,y)$ คือ _____



โลโก้ของจุด $P(x,y)$
 ที่ค่าใดระยะห่างจาก
 แกน x มากกว่า
 ห่างจากแกน y
 เท่ากับ 1 หน่วย

จากรูป! ลักษณะโลโก้ของจุด $P(x,y)$ คือ _____

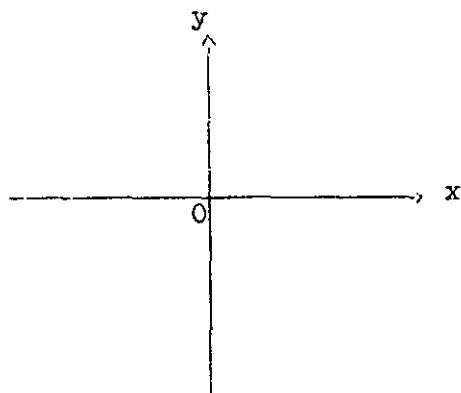
158 โลโก้ของจุด (x,y) ที่มีระยะห่างจากจุดกำเนิดคงที่ จะมีลักษณะกราฟอย่างไร



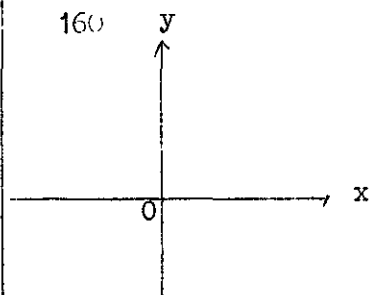
ทั้งนี้โลโก้ของจุด $P(x,y)$ ที่ห่างจากจุดกำเนิด 5 หน่วยจะมีลักษณะกราฟอย่างไร

159 ค่าวงแสดงกราฟทางเดินของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากจุด $(2,1)$ เท่ากับ 4 หน่วย

โลโก้ของจุด $P(x,y)$
 ที่ค่าใดระยะห่างจาก
 แกน y เท่ากับ 1
 หน่วย



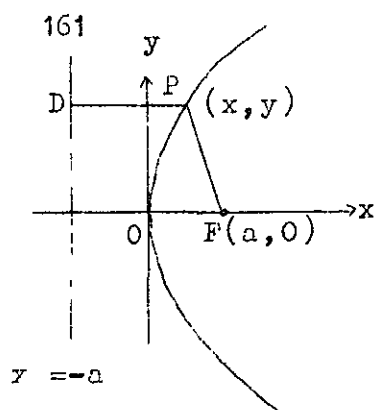
160



ท่านจงแสดงกราฟทางเดินของจุด $P(x, y)$ ที่มีระยะห่างจากจุด $(-2, -2)$ เท่ากับ 6 หน่วย

โลโก้ของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ระยะห่างจากแกน y เป็น 2 เท่าของระยะห่างจากแกน x

161

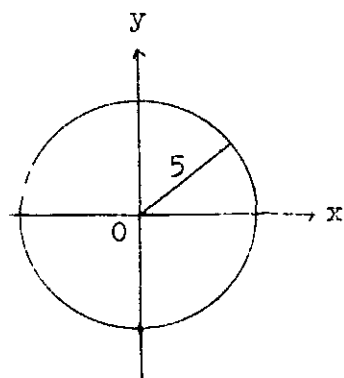


โลโก้ของจุด $P(x, y)$ ที่มีระยะห่างจากเส้นตรง g ที่เส้นหนึ่ง และห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เท่ากันเสมอจะมีลักษณะกราฟเป็นรูปพาราโบลา ดังรูป

$F(a, 0)$ เป็นจุดคงที่

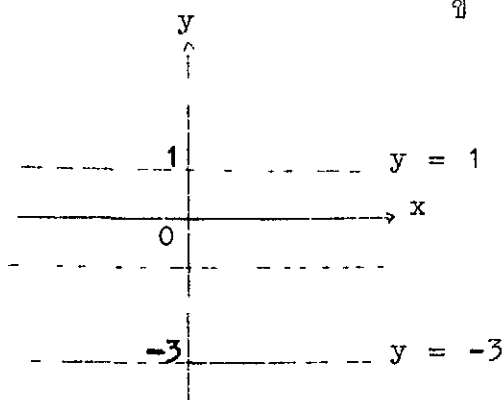
$x = -a$ เป็นเส้นตรง g ที่

และ $c(F, P) = d(P, D)$

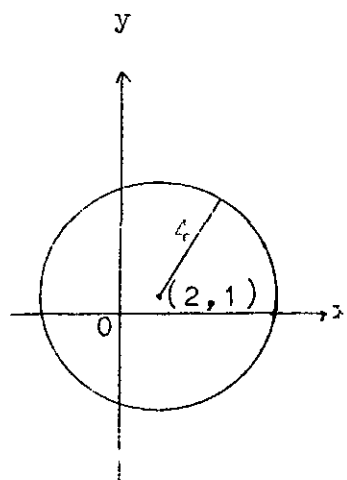
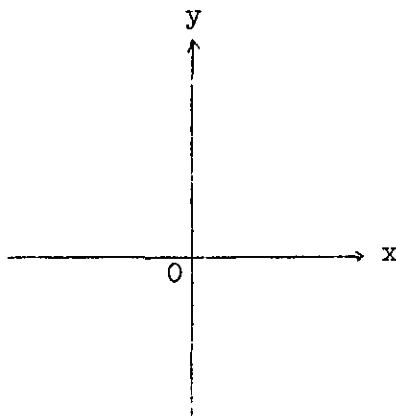


162 โลโก้ของจุด $P(x, y)$ ที่มีระยะห่างจากเส้นตรง $y = 1$ และ $y = -3$ เท่ากันจะมีลักษณะกราฟดังนี้ รูป ก

ก



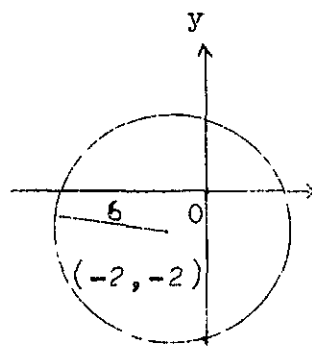
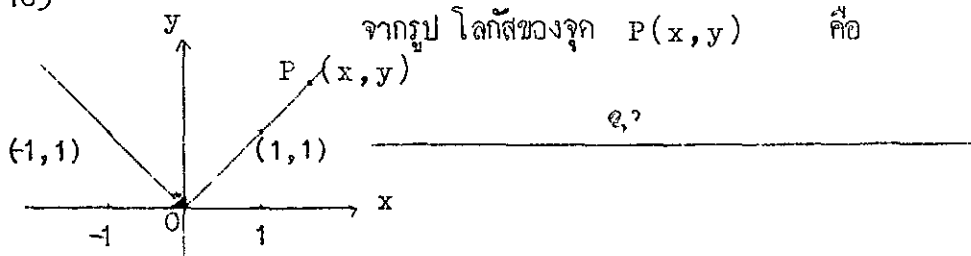
ข



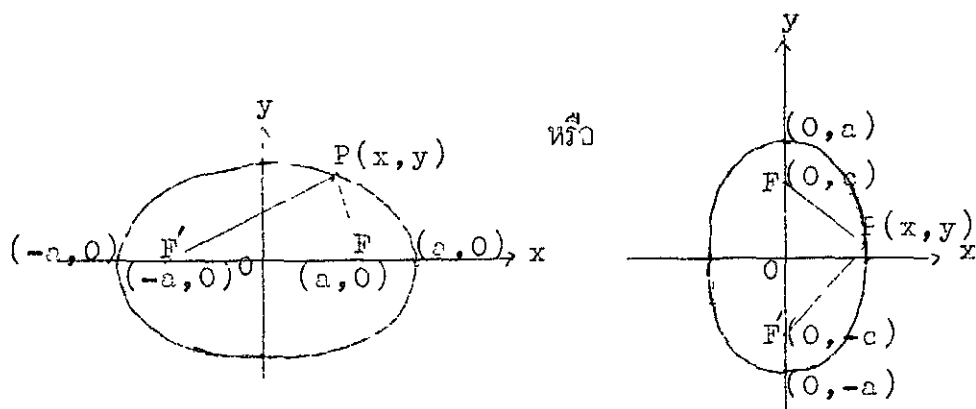
จะเห็นโลโก้ของจุด $P(x, y)$ ที่มีระยะห่างจากเส้นตรง

$x = 2$ และ $x = 5$ เท่ากันจะมีกราฟดังนี้

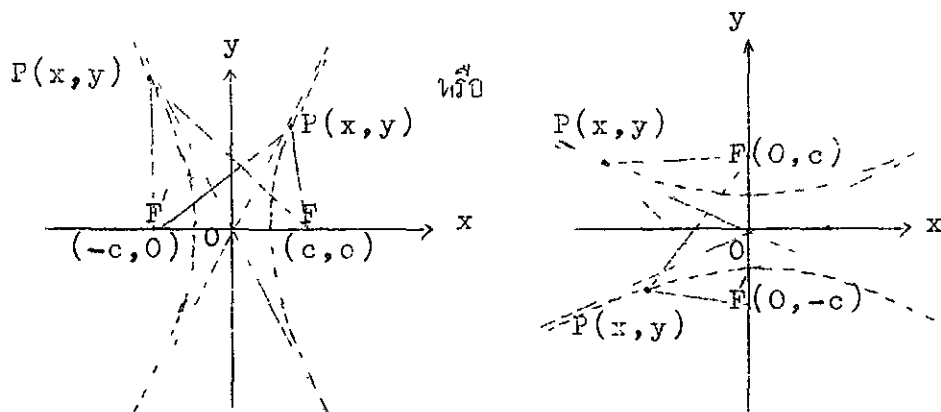
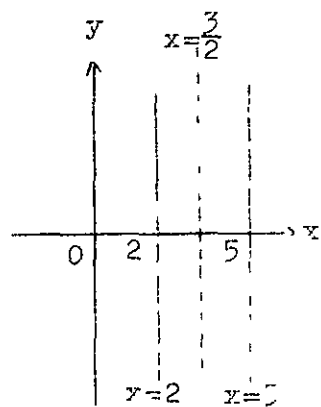
163



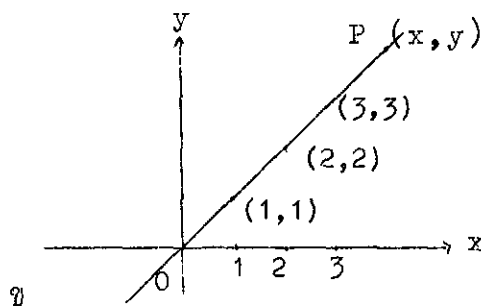
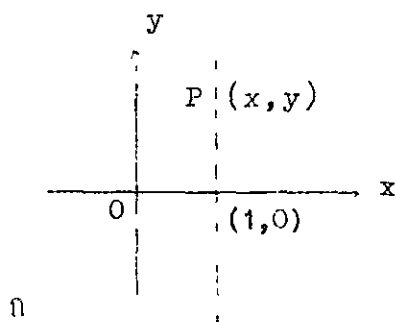
164. โฟกัสของจุด $P(x, y)$ ที่มีผลบวกของระยะจากจุด P ไปยังจุดคงที่ 2 จุดที่กำหนดที่เสมอ จะมีลักษณะกราฟเป็น วงรี (Ellipse) เรียกจุดคงที่ 2 จุดนี้ว่า โฟกัสของวงรี ดังรูป



165. โฟกัสของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ผลต่างของระยะจากจุด P ไปยังจุดคงที่ 2 จุดที่กำหนดที่เสมอ จะมีลักษณะกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) เรียกจุดคงที่ 2 จุดนี้ว่าโฟกัสของไฮเพอร์โบลา ดังรูป



166 นิยาม เบนการไลต์ คือสมการเชิงพีโลสของจุดที่กำหนดให้เป็นกราฟ



ตัวอย่าง เบนการไลต์ของจุด $P(x, y)$ ตามรูป ก คือ

$x = 1$ หรือ $x - 1 = 0$ สมการไลต์ของจุด

$P(x, y)$ ตามรูป ข คือ $y = x$

ทางเส้นของจุด $P(x, y)$ ที่
ทำให้ระยะห่างจากแกน x
เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของระยะ
ห่างจากแกน y
นั่นคือ $y = |x|$

167 เบนการไลต์ของจุด $P(x, y)$ ที่มีระยะห่างจากแกน x มากกว่า
ห่างจากแกน y เท่ากับ 5 หน่วย คือ $x - y + 5 = 0$
และเบนการไลต์ของจุด (x, y) ที่มีระยะห่างจากแกน y มากกว่า
แกน x เท่ากับ 12 หน่วย คือ $y - x + 12 = 0$

168 เบนการไลต์ของจุด (x, y) ที่มีระยะห่างจากแกน x ด้านบน
1 หน่วย คือ $y - 1 = 0$ และ สมการไลต์ของจุด
 (x, y) ที่มีระยะห่างจากแกน y ทางซ้าย 3 หน่วย คือ
 $x + 3 = 0$

169 สมการโลตัสของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากแกน y เท่ากับ a หน่วย คือ _____ และ สมการโลตัสของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากแกน x เท่ากับ b หน่วยคือ _____

$$y = x$$

หรือ

$$x - y = 0$$

170 โลตัสของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากจุด $A(1,3)$ เท่ากับ 3 หน่วย เราจะหาสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \therefore d(P,A) &= 3 \\ \therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} &= 3 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการโลตัสของจุด P ตามเงื่อนไขดังกล่าว คือ

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$$

หาสมการของการโลตัสของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากจุด $(0,-4)$ เท่ากับ 2 หน่วย คือ _____

$$x = y + 12$$

หรือ

$$x - y - 12 = 0$$

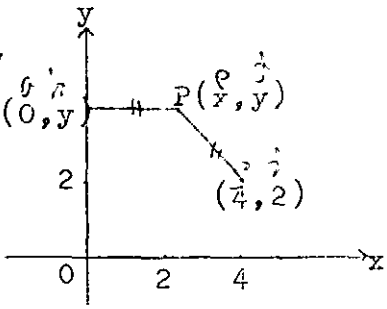
171 ถ้าทางเคียงของจุด $P(x,y)$ ในระนาบมีระยะห่างจากจุด $(0,0)$ เท่ากับ 5 หน่วย จะมีสมการเป็น _____

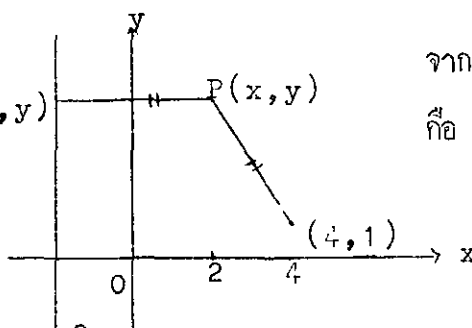
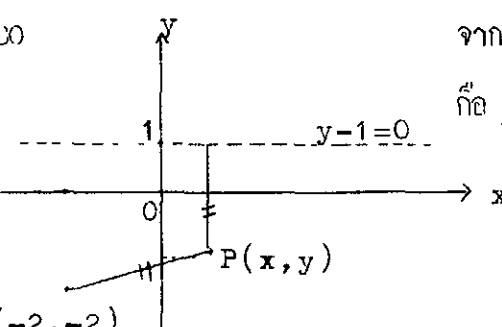
$$y - 1 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

172 สมการโลตัสของจุด $P(x,y)$ ที่มีระยะห่างจากจุด $(-1,-3)$ เท่ากับ 2 หน่วย คือ _____

173 ถ้าจุด $P(x,y)$ มีทางเคียงที่ทำให้ระยะห่างจากจุดกึ่งที่ (h,k) เท่ากับ a หน่วย จะมีสมการเป็น _____

174 สมการไลต์ของจุดที่อยู่ห่างจากจุด (a, b) และ (c, d) เป็นระยะ เท่ากัน คือ $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}$ $(2a - 2c)x + (2b - 2d)y - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 0$ หาสมการไลต์ของจุด $P(x, y)$ ที่อยู่ห่างจากจุด $(0, 2)$ และ $(5, 1)$ เป็นระยะทางเท่ากัน คือ _____	$x \pm a = 0$ $y \pm b = 0$
175 สมการไลต์ของจุดที่อยู่ห่างจากจุด $(-4, -2)$ และ $(-1, -3)$ เป็น ระยะเท่ากัน คือ _____	$x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$
176 สมการไลต์ของจุดที่อยู่ห่างจากจุด $(3, 2)$ เป็นครึ่งหนึ่งของระยะห่าง จากจุด $(-1, 3)$ คือ _____	$x^2 + y^2 = 25$
177  จากรูป สมการไลต์ของจุด $P(x, y)$ คือ _____	$x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$
178 ถ้าจุด $P(x, y)$ มีทางเดินในระนาบห่างจากจุด $(6, 5)$ และแกน x เป็นระยะทางเท่ากัน จะได้สมการไลต์ของจุด $P(x, y)$ คือ _____	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c^2$

179  จากรูป สมการโลโก้ของจุด $P(x, y)$ คือ _____	$3x - y - 3 = 0$
180  จากรูป สมการโลโก้ของจุด $P(x, y)$ คือ _____	$3x - y + 5 = 0$
181 ถ้าจุด $P(x, y)$ มีทางเดินที่ทำให้ระยะทางจากจุด $(4, 0)$ และห่างจากเส้นตรง $x + 4 = 0$ เท่ากันแล้วสมการโลโก้ของจุด P คือ _____	$3x^2 + 3y^2 - 26x - 10y + 42 = 0$
182 สมการโลโก้ของจุดที่มีระยะทางจากจุด $(0, -3)$ และห่างจากเส้นตรง $y - 3 = 0$ เท่ากัน คือ _____	$y^2 - 8x - y + 20 = 0$
183 ถ้าทางเดินของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ระยะทางกำลังสองจากจุด P ถึงจุด $(1, 5)$ กับจุด P ถึงจุด $(-2, 3)$ เท่ากันแล้ว สมการโลโก้ของจุด P คือ _____	$x^2 - 12x - 10y + 61 = 0$

- 184 ถ้าโลกลังของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของระยะทางจากจุด P ถึงจุด $(0, 3)$ และจากจุด P ถึงจุด $(4, 0)$ เท่ากับ 25
 หน่วยแล้ว สมการโลกลังของจุด P คือ $y^2 - 12x - 2y + 13 = 0$

- 185 ถ้าโลกลังของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุดคงที่ $A(-4, 0)$ และ $E(4, 0)$ เท่ากับ 10 หน่วย
 เราพบการโลกลังนี้

$$\therefore d(P, A) + d(P, E) = 10$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \quad y^2 = 16x$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างแล้วจัดเทอมใหม่ ยกกำลังสองอีกครั้งจะได้สมการ

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \quad \text{หรือ} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

จากประโยคเดียวกันทำให้ A มีพิกัด หรือโคออร์ดิเนต $(0, 5)$, E

มีพิกัด $(4, -5)$ และ $d(P, A) + d(P, E) = 12$ จะได้สมการโลกลัง $x^2 = -12y$
 ดังนี้ _____

- 186 สมการโลกลังของจุด $P(x, y)$ ที่ทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุดคงที่ $(-3, 1)$ และ $(3, 1)$ เท่ากับ 10 หน่วย
 คือ $6x + 4y - 13 = 0$

137 ถ้าทางเส้นของจุด $P(x,y)$ ที่ทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุดถึงจุด $(-c,0)$ และ $(c,0)$ เท่ากับ $2c$ แล้วสมการโลกลีของจุด $P(x,y)$ คือ _____	$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$
138 สมการโลกลีของจุด $P(x,y)$ ที่ทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุด P ถึงจุดกึ่งที่ $(0,2)$ และ $(0,-2)$ เท่ากับ 6 หน่วย คือ _____	
139 ถ้าโลกลีของจุด $P(x,y)$ ที่ทำให้ผลต่างของระยะทางจากจุด P ถึงจุด $A(-3,0)$ และ $B(3,0)$ เท่ากับ 4 หน่วยเราหาสมการโลกลีของจุดได้ดังนี้ $\therefore d(P,A) - d(P,B) = 4$ $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4$ $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 4 + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้างแล้วจัดเทอมใหม่ในลักษณะนี้ยกกำลังสองอีกครั้งจะได้เป็นการเป็น $5x^2 - 4y^2 = 20$ หรือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$	$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$
โน้ตหาสมการโลกลีของจุด $P(x,y)$ ที่ทำให้ผลต่างระหว่างระยะทางจากจุด P ไปยังจุดกึ่งที่ $(0,5)$ และ $(0,-5)$ เท่ากับ 1 หน่วย คือ _____	$16x^2 + 25y^2 - 50y - 375 = 0$
190 ถ้า $(2,0)$ และ $(-2,0)$ เป็นจุดกึ่งที่ 2 จุด สมการโลกลีของจุด $P(x,y)$ ซึ่งผลต่างระหว่างระยะทางจากจุด P ไปยังจุดกึ่งที่ทั้งสองนั้นเท่ากับ 1 หน่วย คือ _____	

191

ถ้า $P(x, y)$, $A(-c, 0)$ และ $B(c, 0)$ เป็น 3
จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และถ้า $d(P, A) = d(P, B)$ $(c^2 - a^2)x^2 + a^2y^2$
 $= 2a$ แล้วสมการโลตัสของจุดทั้งสามคือ $= a^2(c^2 - a^2)$

192

ถ้าจุด (x, y) , $(-2, 1)$ และ $(1, 5)$ เป็นจุดมุมของ
สามเหลี่ยมรูปหนึ่งตามลำดับ และมีพื้นที่ 30 ตารางหน่วย แล้ว
สมการโลตัสของจุด (x, y) คือ _____

$$9x^2 + 5y^2 = 45$$

$$396y^2 - 4x^2 = 99$$

$$60x^2 - 4y^2 = 15$$

จบบทเรียนตอนที่ 4

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$4x - 3y + 71 = 0$$

แบบฝึกหัดที่ 4

- 1 จงหาสมการโลกลัของจุดที่มีเงื่อนไขดังนี้
 - ก ห่างจากจุด $(-5, 1)$ และ $(5, -1)$ เท่ากัน
 - ข ห่างจากจุดกำเนิด 3 หน่วย
 - ค ห่างจากจุด $(0, 3)$ และเส้นตรง $y + 3 = 0$ เท่ากัน
 - ง ห่างจากจุดกึ่งที่ $(2, 3)$ เป็นระยะ 4 หน่วย
- 2 จงหาสมการโลกลัของจุด $P(x, y)$ ซึ่งทำให้ผลต่างของระยะจากจุด P ไปยังจุดกึ่งที่ $A(-c, 0)$ และ $B(c, 0)$ เท่ากับ $2a$
- 3 จงหาสมการโลกลัของจุด $P(x, y)$ ซึ่งทำให้ผลบวกของระยะจากจุด P ไปยังจุดกึ่งที่ $C(c, 0)$ และ $D(-c, 0)$ เท่ากับ $2a$
 จงหาสมการโลกลัของจุดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง $x + a = 0$ และจุด $F(a, 0)$ เป็นระยะทางเท่ากัน
- 5 จงหาสมการโลกลัของจุด $P_1(x, y)$ ซึ่งเป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดที่เท่ากัน 50 การวางหน่วยและจุดมุมอีก 2 จุดคือ $P_2(-2, 1)$ และ $P_3(1, 5)$

คำตอบ

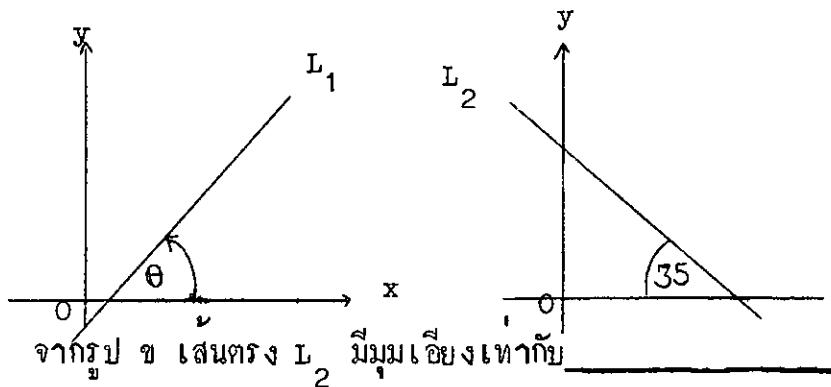
- 1 ก $5x - 2y - 2 = 0$ ข $x^2 + y^2 = 9$
 ค $x^2 = 12y$ ง $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
- 2 $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$
- 3 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
- 4 $y^2 = 4ax$ 5 $4x - 3y + 71 = 0$

โน้ตนี้จะกล่าวถึง

- ความเอียงของเส้นตรง
- สโลปของเส้นตรง
- เวกเตอร์เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน
- เวกเตอร์เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน
- มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นอีกด้วย

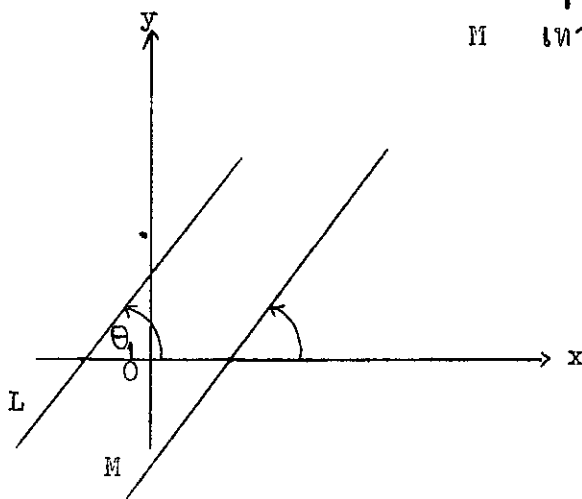
195

นิยาม ในเรขาคณิตของยูคลิดเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x จะตัดแกน x เรียกมุมซึ่งวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ไปจนถึงเส้นตรงนั้นมุมเอียง (Inclination) ของเส้นตรงนั้น ดังรูป ก เส้นตรง L มีมุมเอียง เป็น θ

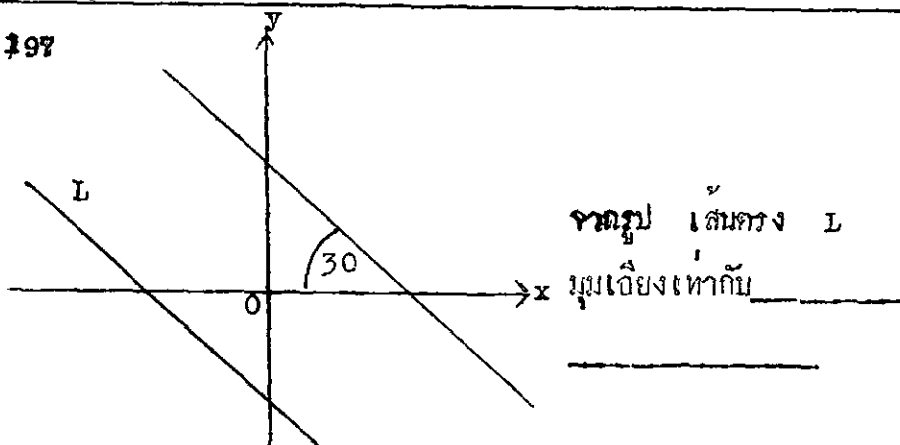


196

จากรูป เส้นตรง L มีมุมเอียง เป็น θ_1 และขนานกับเส้นตรง M มุมเอียงของเส้นตรง M เท่ากับ _____



197

 145°

198

ท่านลองพิจารณาว่าเส้นตรงที่ห้กับแกน x หรือขนานกับ
 แกน x จะมีมุมเอียงเท่ากับ _____ และเส้น-
 ตรงที่ห้กับแกน y หรือขนานกับแกน y จะมีมุมเอียงเท่ากับ _____

 θ_1

199

เส้นตรงที่สมการโลกัศเป็น $x - 3 = 0$ หรือ $x = 3$
 จะมีมุมเอียงเท่ากับ _____ องศา หรือ _____
 เรเดียน

200

เส้นตรงที่สมการโลกัศเป็น $2y + 10 = 0$ หรือ
 $y = -5$ จะมีมุมเอียงเท่ากับ _____ องศา
 หรือ _____ เรเดียน

201

เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x+20 = 5x-7$ จะมีมุม
เฉียงเท่ากับ _____ องศา หรือ _____ เรเดียน

150

202

เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x - 3 = \frac{1}{2}(y + 5)$
จะมีมุมเฉียงเท่ากับ _____ องศา หรือ _____
เรเดียน

0

90

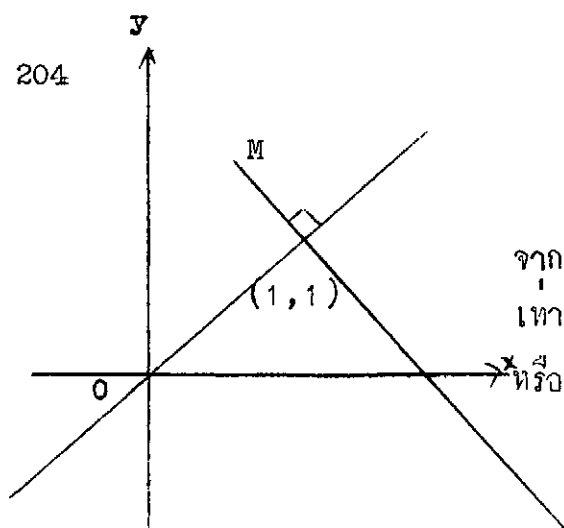
203

เส้นตรงที่มีสมการโลโก้เป็น $x - y = 0$ จะมีมุมเฉียง
เท่ากับ _____ องศา หรือ _____ เรเดียน

90

 $\frac{\pi}{2}$

204



จากรูป เส้นตรง M มีมุมเฉียง
เท่ากับ _____ องศา
หรือ _____ เรเดียน

0

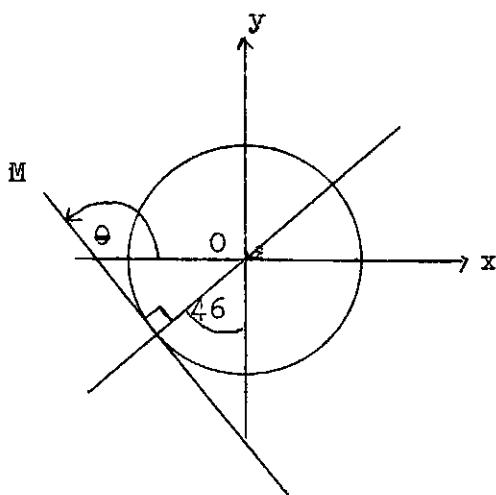
0

205

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสมการโลกัศเป็น $y + x = 0$
จะมีมุมเอียงเท่ากับ _____ เรเดียน

 $0^\circ, 0$

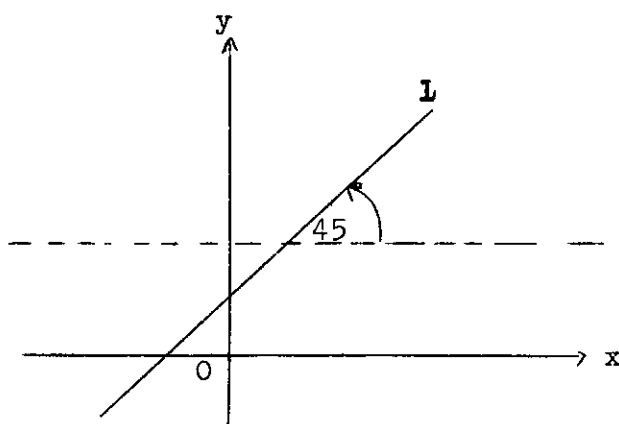
206



จากรูป เส้นตรง L มีมุมเอียง
เป็น θ เท่ากับ _____ องศา

 $90^\circ, \frac{\pi}{2}$

207


 $45^\circ, \frac{\pi}{4}$

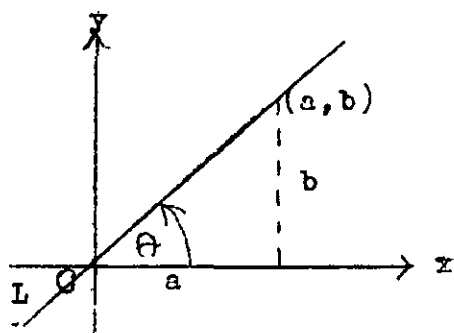
จากรูปเส้นตรง M มีมุมเอียงเท่ากับ _____ องศา

 $135^\circ, \frac{3\pi}{4}$

208

นิยาม ความชัน (Slope) ของเส้นตรงซึ่งมีมุมเอียงเป็น θ
คือ $\tan \theta$ ถ้าให้ m แทนความชันของเส้นตรงจะได้ว่า

$$m = \tan \theta$$



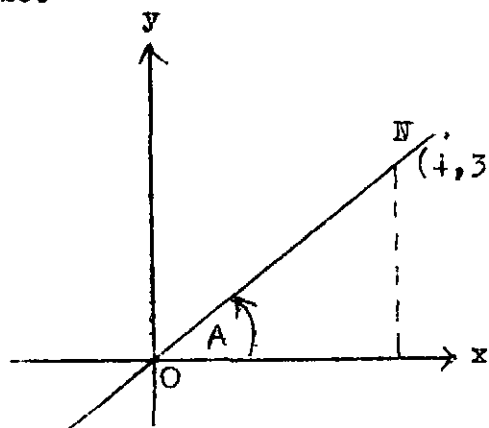
จากรูป

เส้นตรง L มีสโลปหรือความชัน m

เท่ากับ _____

$$\frac{3\pi}{4}$$

209



จากรูป

เส้นตรง N มีสโลป (m)

เท่ากับ _____

และค่าสโลปของเส้นตรงมีหน่วย

หรือไม่ _____

134

210

เส้นตรงที่ขนานกับแกน x จะมีความชันเท่ากับ _____
และเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะมีความชันเท่ากับ _____

45

211

เส้นตรงที่มีสมการโล้ดเป็น $x - y = 0$ จะมีสโลป
เท่ากับ _____

 $\frac{b}{a}$

212

เส้นตรงหนึ่งมีมุมเอียงเป็น θ จะมีสโลปหรือความชัน
เท่ากับ _____

ถ้า $\theta = 30^\circ$ เส้นตรงนี้จะมีสโลปเท่ากับ _____

ถ้า $\theta = 60^\circ$ เส้นตรงนี้จะมีสโลปเท่ากับ _____

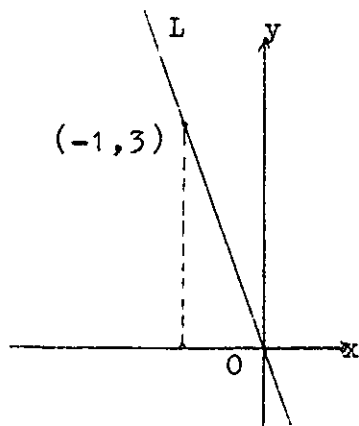
 $\frac{3}{4}$, ไม่มี

213

ท่านลองพิจารณาว่าเส้นตรงมีมุมเอียงมากกว่า 0° องศา
และน้อยกว่า 90° องศา หรือเป็นมุมแหลม ค่าของความชันจะมี
เครื่องหมายเป็น _____ และถ้าเส้นตรงมีมุมเอียงเป็น
มุมป้านค่าของความชันจะมีเครื่องหมายเป็น _____

0 ไม่นิยาม

214

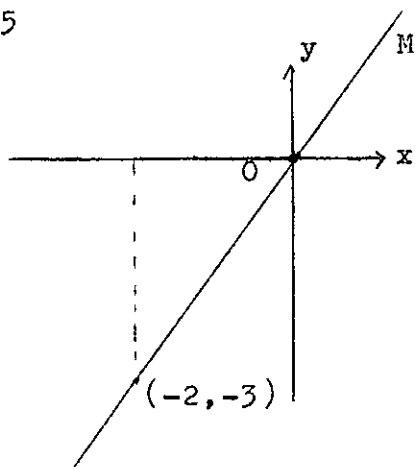


จากรูป

เส้นตรง L จะมีสโลป (m)

เท่ากับ _____

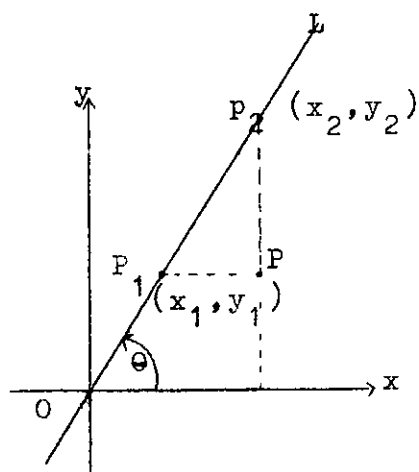
215



จากรูป เส้นตรง M จะมี
สโลป (m) เท่ากับ _____

1

216



จากรูป

จุด P มีโคออร์ดิเนตเป็น _____

มุม $\angle P_1 P_2$ เท่ากับ _____ $d(P, P_2)$ เท่ากับ _____ $d(P, P_1)$ เท่ากับ _____ $\tan \theta$

3

3

+ , -

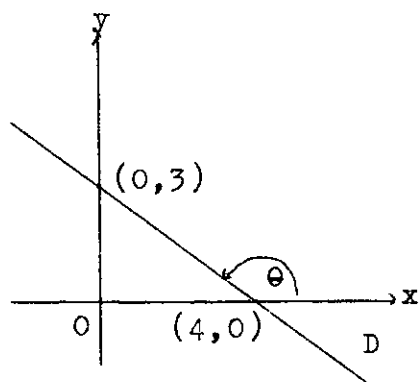
217

จากกรวย 216

สโลปของเส้นตรง L = $\frac{d(P, P_2)}{d(P, P_1)}$ = _____

-3

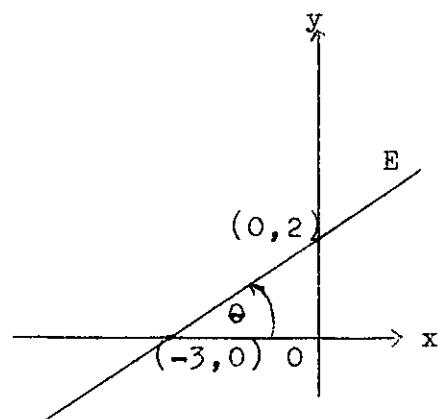
218



จากรูป เส้นตรง D ผ่านจุด (4, 0) และ (3, 0) จะมีสโลป หรือความชัน เท่ากับ _____

$$\frac{3}{2}$$

219



จากรูป เส้นตรง E ผ่านจุด (-3, 0) และ (0, 2) จะมีสโลปเท่ากับ _____

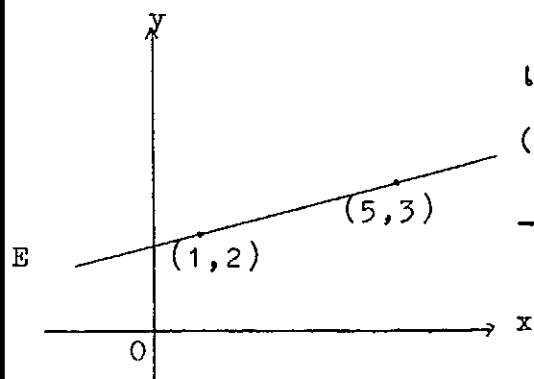
$$(x_2, y_1)$$

$$\theta$$

$$y_2 - y_1$$

$$x_2 - x_1$$

220



เส้นตรง E ผ่านจุด (1, 2) และ (5, 3) จะมีสโลป (m) เท่ากับ _____

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

221

จากกรณ 216, 217 เราสรุปได้ว่าถ้าเส้นตรงผ่าน
จุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) แล้วเส้นตรงเส้นนี้จะมีค่าสโลป
เท่ากับ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{นั่นคือ } \tan \theta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- $\frac{3}{4}$

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1)$ และ $(6, 7)$ จะมีสโลปหรือ
ความชันเท่ากับ _____

222

ความชันหรือสโลปของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-7, -2)$ และ
 $(4, -2)$ เท่ากับ _____

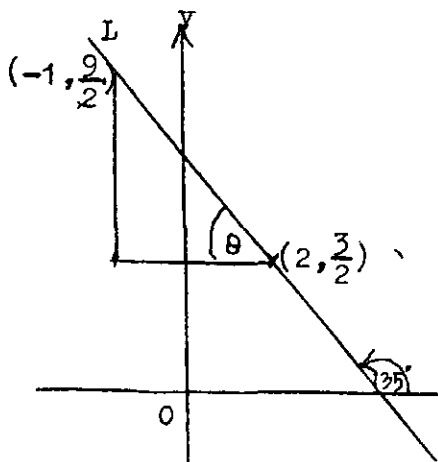
 $\frac{2}{3}$

223

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-6, 5)$ และ $(-6, -8)$
เท่ากับ _____

 $\frac{1}{4}$

224



จากรูป

มุม θ กางเท่ากับ _____ $\tan \theta$ มีค่าเท่ากับ _____สโลปของ $L = \tan 135^\circ$

มีค่าเท่ากับ _____

225 สโลปของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,3)$ และ $(-4,9)$ จะป้ค่าเท่ากับ _____	$\frac{3}{2}$
226 เส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด $(-3,-5)$ และ $(4,-10)$ จะมีสโลปหรือความชันเท่ากับ _____	0
227 สโลปหรือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$ และ $(-7, \frac{16}{5})$ มีค่าเท่ากับ _____	ไม่นิยาม
228 ความชันหรือสโลปของก้านทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีจุดมุมเป็น $(-1,2)$, $(3,-4)$ และ $(1,6)$ มีค่าเท่ากับ _____ และ _____	45 1 -1

229

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด $(2, -3)$ และ $(k, 2)$
และมีค่าสโลปเท่า $\frac{5}{2}$ แล้ว k มีค่าเท่ากับ _____

-1

230

y จะมีค่าเท่ากับ _____ จึงจะทำให้เส้นตรง
ผ่านจุด $(-6, -7)$ และ $(1, y)$ และมีสโลปเท่ากับ 3

- $\frac{5}{7}$

231

เส้นตรงที่ผ่านจุดหลายจุดไม่ว่าเราจะหยิบจุดบนเส้น
ตรงคู่ใดมาหาความชันจะได้อาความชันเท่ากันเสมอ ท่านจงใช้
ความจริงนี้พิจารณาว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด $(-3, -4)$,
 $(2, 6)$, $(-5, -8)$ และ (h, k) แล้ว h, k มีความ
สัมพันธ์กันดังนี้ _____

- $\frac{24}{65}$

232

จากนิยามความชันของเส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็น θ เรา
จะได้อาความชันของเส้นตรงนี้เท่ากับ $\tan \theta$

หรือ $\tan \theta = m$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} m$$

นั่นคือ เราสามารถจะทราบมุมเอียงของเส้นตรงได้
เมื่อทราบค่าความชัน เช่น เส้นตรงเส้นหนึ่งมีสโลปหรือความชัน
เท่ากับ 1 เส้นตรง เส้นนี้จะมีมุมเอียงเท่ากับ 45° นั่นคือ
 $\tan \theta = 1, \therefore \theta = 45^\circ$ หรือ $\frac{\pi}{4}$ ท่านลองหามุมเอียง
ของเส้นตรงที่มีค่าความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ มีค่าเท่ากับ _____

- $\frac{3}{2}$

2

-5

233

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(5, 1 + \sqrt{3})$ และ $(2, 1)$
 จะมีความเอียง (Inclination) เท่ากับ _____ องศา

4

234

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(2\sqrt{3}, -2)$ และ $(\sqrt{3}, -5)$
 จะมีความเอียงเท่ากับ _____ องศา

14

235

ถ้าจุด $(6, -9)$ และ $(-7, 4)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรง
 เส้นหนึ่งเส้นตรงเส้นนี้ จะมีความเอียงเท่ากับ _____ องศา

$$2h - k + 2 = 0$$

236

เส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(-3, 7)$ และ $(10, 4)$ และ
 ขนานกับเส้นตรง L_2 แล้ว เส้นตรง L_2 จะมีความชัน (Slope)
 เท่ากับ _____

 30° หรือ $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน

237

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด (x,y) , $(6,7)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$ แล้ว สมการความสัมพันธ์ของ x และ y คือ _____

30

238

ถ้าจุด (a,b) , (x,y) เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง และเส้นตรงเส้นนี้มีสโลปเท่ากับ m แล้วจะได้อะไรความสัมพันธ์ของ x และ y ในเทอมของ a,b และ m คือ _____

30°

239

ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูซึ่งมีโกอร์คินเทของจุดมุมเป็น $(-4, 1)$ $(-5, -4)$, (x,y) และ $(1,-2)$ ตามลำดับแล้วจะได้อะไรความสัมพันธ์ของ x และ y กันนี้ _____

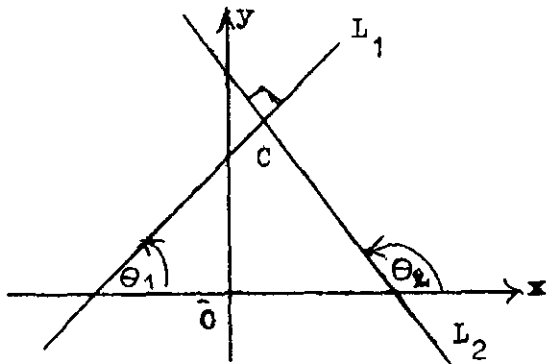
135°

240

ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีจุดยอดเป็น A $(5,2)$, B $(-3,11)$ และ C $(-7,1)$ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้าน AC และ AB มีสโลปเท่ากับ _____

- $\frac{3}{13}$

241



ถ้าเส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด C จะได้ว่า
มุม θ_2 ในพหุคูณ θ_1 เท่ากับ _____

$$2x - 3y + 9 = 0$$

242

จากกรอบที่ 241 ถ้าเติม Tangent ทั้ง 2 ข้างจะได้
 $\tan \theta_2 = \tan(90 + \theta_1) = -\cot \theta_1 = \frac{-1}{\tan \theta_1}$
 ถ้าให้ m_1 เป็นสโลปของเส้นตรง L_1 มีมุมเอียง θ_1 และ m_2
 เป็นสโลปของเส้นตรง L_2 มีมุมเอียง θ_2 จะได้ว่าความสัมพันธ์ของ m_1
 และ m_2 เมื่อ L_1 และ L_2 ตั้งฉากกันดังนี้ _____

$$y - b = m(x - a)$$

243

ถ้า m_1 เป็นสโลปของเส้นตรง L_1 และ m_2 เป็น
 สโลปของเส้นตรง L_2 จะได้ว่าความสัมพันธ์ของสโลปของเส้นตรง
 ทั้ง 2 คือ

- ก. เส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2 เมื่อ $m_1 = m_2$
 ข. เส้นตรง L_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง L_2 เมื่อ $m_1 m_2 = -1$
 ถ้าความชันของเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{3}{5}$ แล้ว เส้นตรงซึ่ง
 ตั้งฉากกับเส้นตรง L จะมีความชันเท่ากับ _____

$$5x - y - 7 = 0$$

$$\frac{5}{2}$$

244

ท่านจงใช้ความรู้เรื่องเส้นตรงทั้งฉากซึ่งกันและกันพิจารณาว่า
 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด $(-3, -5)$, $(x, 4)$ และตั้งฉากกับ
 เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งมีสโลปเท่ากับ $-\frac{1}{2}$ แล้วจะได้
 x มีค่าเท่ากับ _____

$$\theta_2 = 90 + \theta_1$$

245

เส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, y)$ และตั้งฉาก
 กับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งมีสโลปเท่ากับ $\frac{2}{3}$ แล้ว y มีค่าเท่ากับ

$$\pi_1 \pi_2 = -1$$

246

ถ้าเส้นตรง T_1 ผ่านจุด $(6, 7)$, $(k, -1)$ และ T_2
 ผ่านจุด $(-4, -2)$, $(3, 5)$ ถ้า T_1 ตั้งฉากกับ T_2 แล้ว
 จะได้ว่า k เท่ากับ _____

$$-\frac{5}{3}$$

247

ถ้าให้ $A(7, 5)$, $B(-1, 2)$ และ $C(k, 0)$
 เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งที่มีมุมฉากที่จุด B จะได้ว่า k
 เท่ากับ _____

248 ท่านจงใช้ความรู้เกี่ยวกับสโลปของเส้นตรงที่ตัดฉากกันพิจารณา ฎว่าจุด $(1, -6)$, $(8, 8)$ และ $(-7, 2)$ เป็นจุดยอดของ สามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ _____	$\frac{3}{2}$
249 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 3)$ และ $(-3, -5)$ ตั้งฉากกับ เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, -3)$ และ $(-8, 2)$ หรือไม่ _____	$\frac{5}{12}$
250 ถ้าเส้นตรงผ่านจุดต่าง ๆ ที่แตกต่างกันไม่ว่าเราจะหยิบคู่ใด มาหาความชันหรือไม่ว่าเราจะหาความชันส่วนใดของเส้นตรงนี้ ภาของความชันหรือสโลปที่ได้จะเท่ากันและในทางกลับกันท่านลอง พิจารณาว่า $(4, 1)$, $(5, -2)$ และ $(6, -5)$ อยู่บน เส้นตรงเส้นเดียวกันหรือไม่ _____	14
251 ให้ p, q และ r เป็นจำนวนจริงจงแสดงว่าจุด $(p, q+r)$ $(q, r+p)$ และ $(r, p+q)$ อยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกัน หรือไม่ _____	$-\frac{1}{4}$

252

กำหนดจุด $A (-5, 4)$, $B (4, 9)$, $C (9, 0)$
 และ $D (0, -5)$ ตามลำดับ ท่านจงใช้คุณสมบัติความชัน หรือ
 สโลปเกี่ยวกับการขนานและการตั้งฉากกันของเส้นตรงจงตรวจ
 คว้า ก. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคานหนาหรือไม่ _____
 ข. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ _____

ไม่

253

กำหนดจุดยอดของสี่เหลี่ยมจัตุรัสมาให้ ถ้าให้ท่านแสดงว่า
 เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมรูปนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ท่านจะแสดง
 โดยวิธีใด _____

ไม่

254

วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 1)$ ถ้าเส้นตรงเส้น
 หนึ่งสัมผัสวงกลมที่จุด $(7, 8)$ เส้นสัมผัสนั้นจะมีสโลปหรือความชัน
 เท่ากับ _____

อยู่

255

ถ้า $A (-3, -10)$, $B (1, 2)$, $C (5, 4)$ และ
 $D (4, 1)$ เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมคางหมู แล้วด้านขนาน
 สี่เหลี่ยมรูปนี้คือ _____ และ _____

อยู่

ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-3, 5)$ และมีความชันหรือสโลปเท่ากับ $\frac{2}{5}$ เงื่อนไขสำหรับค่า x และ y คือ _____

มี เป็น

เป็น

แสดงว่าผลคูณสโลปของ
เส้นที่แบ่งมุมเท่ากับ -1

ความชันหรือสโลปของเส้นที่แสดงถึงความสูง (เส้นตั้งฉากกับฐาน) ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจุดมุมเป็น $A(2, -3), B(4, 2)$ และ $C(-5, -2)$

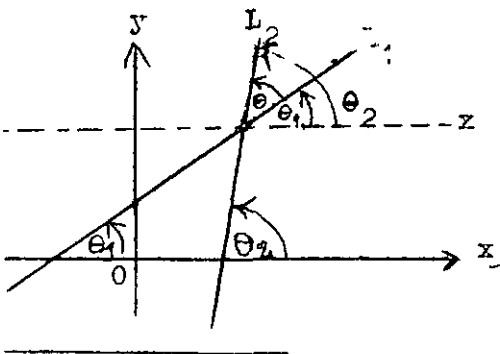
- ก. ถ้า AB เป็นฐานความชันของเส้นแสดงถึงความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ _____
- ข. ถ้า BC เป็นฐานความชันของเส้นแสดงถึงความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ _____
- ค. ถ้า AC เป็นฐานความชันของเส้นแสดงถึงความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ _____

 $-\frac{5}{7}$ $AB \perp CD$

ต่อไปนี้จะเป็นการแสดงการหามุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นตัดกันในระนาบ ขอให้ท่านอ่านและทำความเข้าใจไปที่ละกรอบแล้วท่านจะทราบวามุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นพบกันที่ต้องการ

นิยาม เส้นตรง L_1 มีมุมเอียงเท่ากับ θ_1 , L_2 มีมุมเอียงเท่ากับ θ_2 ถ้าเส้นตรง L_1 ตัดกับเส้นตรง L_2 เป็นมุม θ (จาก L_1 ไปยัง L_2) เรียก θ ว่าเป็นมุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน ดังรูป

$$2x - 3y + 21 = 0$$



จากรูปท่านสามารถบอกได้ว่า

มุม θ มีค่าเท่าไรในเทอม

ของ θ_1 และ θ_2 นั่นคือ

$$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(ก) \ 0^\circ < \theta_1 < \theta_2 < 90^\circ$$

จากกรอบ 259 ถ้า $0^\circ < \theta_1 < \theta_2 < 90^\circ$ - $\frac{2}{5}$

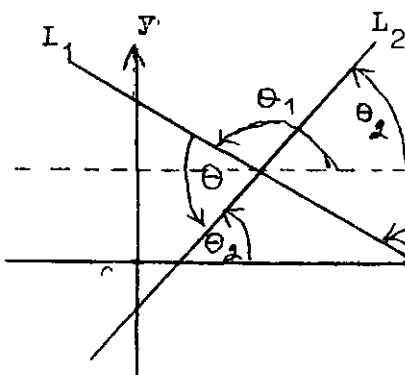
เราได้ $\theta = \theta_2 - \theta_1$

ถ้า $0^\circ < \theta_2 < 90^\circ$ และ - $\frac{2}{4}$

$90^\circ < \theta_1 < 180^\circ$ เราจะได้มุม θ

ในเทอมของ θ_1 และ θ_2 นั่นคือ

$$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$$



จากกรอบ 258, 259 ถ้าเราได้ tangent ทั้งสอง
ข้าง นั่นคือ $\tan \theta = \tan (\theta_2 - \theta_1)$

หรือ $\tan \theta = \tan (180 + (\theta_2 - \theta_1))$

หรือ $\tan \theta = \tan (\theta_2 - \theta_1)$

ทั้งสองกรณีจะได้ความสัมพันธ์ $\theta, \theta_1, \theta_2$ เหมือนกันคือ

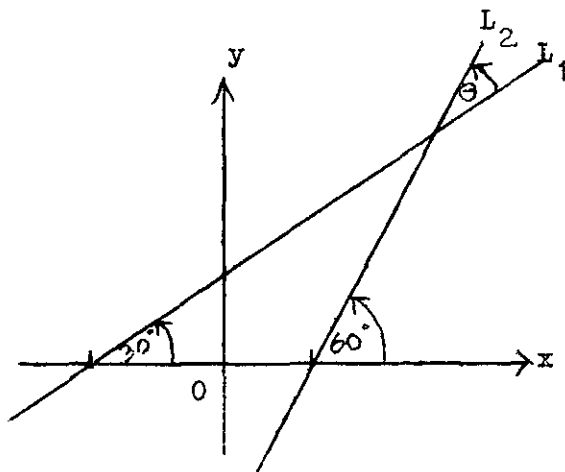
$$\tan \theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1}$$

ถ้าให้ m_1 เป็น slope ของเส้น L_1 จะได้ $m_1 = \tan \theta_1$
และ m_2 เป็น slope ของเส้น L_2 จะได้ $m_2 = \tan \theta_2$

$$\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

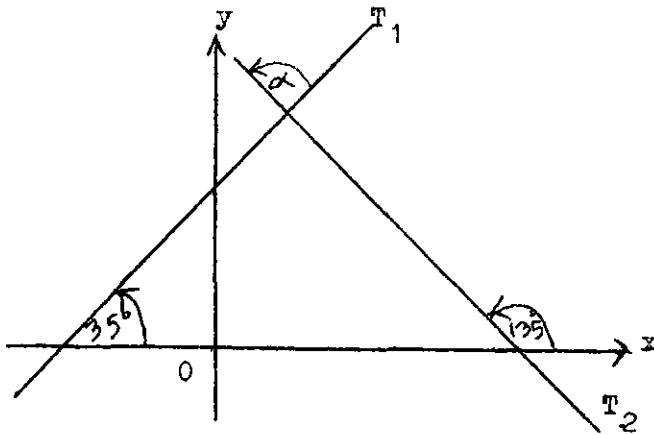
$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$



จากรูปมุมระหว่างเส้นตรง L_1 ตัดกับเส้นตรง L_2 (θ)
เท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

$$\theta = 180 + (\theta_2 - \theta_1)$$

262

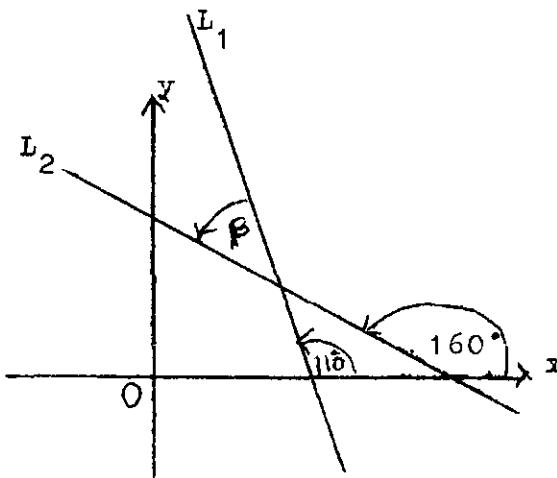


$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right)$$

จากรูป มุมระหว่างเส้นตรง T_1 ตัดกับ T_2 เป็นมุม α
 $\therefore \alpha$ เท่ากับ _____

263



30

จากรูป เส้นตรง L_1 ตัดกับเส้นตรง L_2 เป็นมุม β
 $\therefore \beta$ เท่ากับ _____

จากกรอบที่กล่าวมาแล้วเราพอสรุปได้ว่า

ถ้า m_1 เป็นสโลปของเส้นตรง L_1 และ m_2 เป็นสโลปของเส้นตรง L_2 จะได้ว่ามุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2

100

(L_1 ไปยัง L_2) ตัดกันคือ

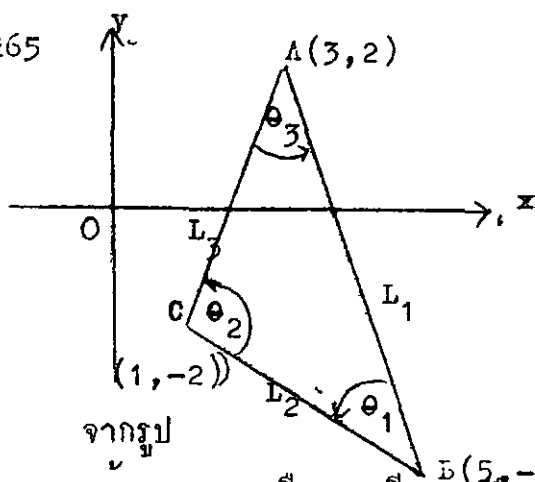
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right) \quad \text{or} \quad \tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

เช่น ถ้า $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m_2 = \sqrt{3}$ $\tan \theta = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}$

หรือ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ฉะนั้น $\theta = 30^\circ$ ($\frac{\pi}{6}$ เรเดียน)

หาค่ามุมระหว่างเส้นตรง T_1 ตัดกับเส้นตรง T_2 เมื่อความชันของเส้นตรง $T_1 = -\frac{1}{2}$ และความชันของเส้นตรง T_2 เท่ากับ -3 จะได้ว่ามุมระหว่าง T_1 กับ T_2

เท่ากับ _____



50

จากรูป

เส้นตรง AB หรือ L_1 มีความชัน $m_1 = \frac{2 - (-4)}{3 - 5} = -3$

เส้นตรง BC หรือ L_2 มีความชัน $m_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

เส้นตรง CA หรือ L_3 มีความชัน $m_3 = \underline{\hspace{2cm}}$

266

จากกรณ 265 มุม θ_1 , θ_2 , θ_3 เป็นมุมแหลมทั้งสิ้น

θ_1 เป็นมุมที่จุดยอด B คือมุมจาก L_1 ไปยัง L_2

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{1}{2} - (-3)}{1 + (-\frac{1}{2})(-3)} = 1 \therefore \theta = 45^\circ$$

ถ้า θ_2 เป็นมุมที่จุดยอด C คือมุมจาก L_2 ไปยัง L_3 แล้ว

$$\theta_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

และ θ_3 เป็นมุมที่จุดยอด A คือมุมจาก L_3 ไปยัง L_1 แล้ว

$$\theta_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

135°

267

ถ้า ρ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง L_1 ตัดกับเส้นตรง L_2

เมื่อ L_1 มีความชัน $2 + \sqrt{3}$ และ L_2 มีความชันเท่ากับ

$2 - \sqrt{3}$ จะได้ว่า ρ เท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

 $-\frac{1}{2}$

2

268

Tangent ของมุมตัดกันระหว่างเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง

จุด $(0,2)$ และ $(1,5)$ กับ $(0,-3)$ และ $(2,7)$

มีค่าเท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

269

ถ้าเส้นตรง T_1 ผ่านจุด $(0,4)$ กับ $(4,0)$ และเส้นตรง T_2

ผ่านจุด $(0,5)$ กับ $(-1, 4)$ และถ้า x เป็นมุมระหว่าง

เส้นตรง T_1 ไปยังเส้นตรง T_2 แล้วจะได้ว่า x

มีค่าเท่ากับ $\underline{\hspace{2cm}}$

270

ถ้า $A(3,4)$, $B(-2,-1)$ และ $C(4,1)$
เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยม ABC แล้วจะโคมุมภายในมุมหนึ่ง
ของสามเหลี่ยม ABC ดังนี้ _____

90 , 45

271

หาจนวนค่า k เพื่อเป็นเหตุจำเป็นระหว่าง
เส้นตรงสองเส้นที่ k ผ่านจุด $(-2, 4)$
และ $(5, -1)$ แล้วความชันของเส้นตรง t ที่มาจาก t
ไปยัง k เป็น 45° มีค่าเท่ากับ _____

120

272

จากปัญหาเช่นเดียวกับกรอบ 271 ถ้ามาจาก t ไปยัง
 k เป็น 135° แล้ว ความชันของ t จะเท่ากับ _____

 $\frac{1}{8}$

273

เส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุด (x,y) และ $(1,-2)$ และ
เส้นตรงอีกเส้นหนึ่งผ่านจุด $(1,-2), (4,6)$ ถ้าเส้นตรง
สองเส้นนี้มีสโลปเท่ากันจะโคความสัมพันธ์ของ x กับ y
เป็น _____

90

จุดตัดแกน

90°

$$\arctan \frac{1}{2}$$

$$\arctan 2$$

-6

$$\frac{1}{6}$$

$$8x - 3y - 14 = 0$$

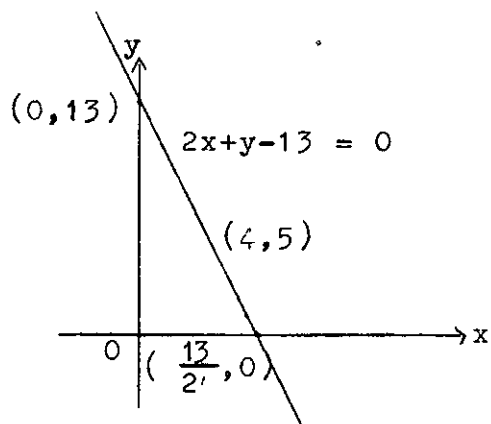
แบบฝึกหัดที่ 5

- 1 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้
 ก $(3,3), (-5,2)$ ข $(-4,1), (3,-5)$ ค $(\frac{5}{2}, -6), (-\frac{2}{2}, 4)$
- 2 ถ้ามุมเอียงของเส้นตรง L_1 เป็น 2 เท่าของมุมเอียงของเส้นตรง L_2 และถ้าเส้นตรง L_1 มีสโลปเท่ากับ -4 จงหาสโลปของเส้นตรง L_2
- 3 จงเขียนกราฟของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(4,5)$ และมีสโลปเท่ากับ $\frac{3}{4}$, -2 ตามลำดับ
- 4 จงแสดงว่าเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-2,-4), (3,3)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2)$ และ $(6,5)$
- 5 ถ้าจุด $P_1(5,1)$ และ $P_2(8,y_2)$ เส้นตรงที่ผ่านจุดทั้งสองนี้ไปให้เท่ากับ $\frac{4}{3}$ จงหา y_2
- 6 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,7)$ และ $(-3,-2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$, $(1,-4)$ จงหาค่า k
- 7 จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสโลปเท่ากับ $\frac{k}{n}$
- 8 ถ้าจุด $(2,5), (2,9), (6,9)$ และ $(6,5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองตั้งฉากซึ่งกันและกัน
- 9 ให้ $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ และ $P_3(x_3, y_3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมใด ๆ จงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้าน P_1P_2 และ P_2P_3 จะขนานกับด้าน P_1P_3 และยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน
- 10 จงหาสมการภายในของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $A(-3,0)$, $B(2,5)$ และ $C(3,-6)$
- 11 ให้เส้นตรง L ผ่านจุด $(1,2), (7,10)$ และเส้นตรง T ผ่านจุด $(x,0)$ $(7,10)$ จงหาค่า x เมื่อมุมจากเส้นตรง L ไปยังเส้นตรง T เท่ากับ 135°

คำตอบ

1 ก $\frac{1}{8}$ ข $-\frac{6}{77}$ ค $-\frac{5}{2}$

3



2 $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

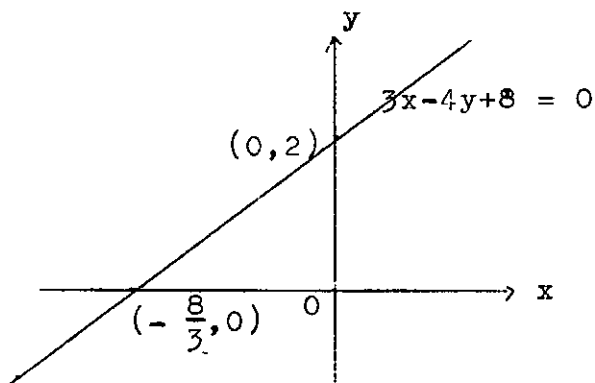
5 5

6 0

7 $-\frac{1}{k}$

10 $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$

11 -63



บทที่ 6

เนื้อหาที่จะกล่าวถึง

- สมการ และกราฟของสมการ
- ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม เส้นตรง และพาราโบลา

274 นิยาม กราฟของความสัมพันธ์ x และ y คือเซตของจุด $P(x,y)$ ที่แบ่งระนาบพิกัดฉากซึ่งมีโคออร์ดิเนตสอดคล้องตามความสัมพันธ์
ตัวอย่าง ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}$
 เซตที่ให้ความสัมพันธ์ $y = x$ หรือ $x - y = 0$
 พิจารณาว่า $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2y = 4x - 6\}$
 เซตที่ให้ความสัมพันธ์ ดังนี้ _____

275 ลักษณะของความสัมพันธ์ x และ y หรือสมการ x และ y อาจจะเป็นการเส้นตรง วงกลม วงรี พาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลาถ้าใดทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของ x และ y เช่นถ้าสมการอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ A, B, C เป็นค่าคงที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ลักษณะสมการนี้จะเป็นสมการเส้นตรง เรียกว่าสมการลิเนียร์ (Linear Equation)
 (ก) $x^2 + y^2 = 2$ (ข) $y = 5$
 (ก) $y^3 = 4x$ ข้อใดเป็นสมการลิเนียร์ _____

276 ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{2x-6}{4} = \frac{5y-x}{3}\}$
 เป็นเซตที่ให้ความสัมพันธ์เป็นเส้นตรงใช่หรือไม่ _____ ถ้าใช่เรา
 สามารถจัดอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ได้ดังนี้ _____

277 ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y - 8 = \frac{4x-1}{5}\}$

เป็นเงื่อนไขของความสัมพันธ์เส้นตรงจัดอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$

ได้ดังนี้ _____ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$A = \underline{\hspace{2cm}}, B = \underline{\hspace{2cm}}, C = \underline{\hspace{2cm}}$

$4x - 2y - 6 = 0$

278 จากความสัมพันธ์เส้นตรง $Ax + By + C = 0$ ถ้า $x = 0$

จะได้ $y = -\frac{C}{B}$ เส้นตรงจะตัดแกน y ที่จุด $(0, -\frac{C}{B})$

ถ้า $y = 0$ จะได้ $x = -\frac{C}{A}$ เส้นตรงจะตัดแกน x

ที่จุด $(-\frac{C}{A}, 0)$ นั่นคือเส้นตรง $Ax + By + C = 0$

จะผ่านจุด $(-\frac{C}{A}, 0)$ และ $(0, -\frac{C}{B})$

จากเส้นตรง $\frac{3x-5}{2} = y + 4$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = \underline{\hspace{2cm}}$ และถ้า $y = 0$ จะได้

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

๗

279 ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 8x - 10 = 2y + 6\}$

มีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง คือ $8x - 10 = 2y + 6$

2 จุดที่อยู่บนเส้นตรงเส้นนี้ _____ และ _____

๙

280 ความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = a^2, a \in \mathbb{R}\}$

ที่ความสัมพันธ์เป็น $x^2 + y^2 = a^2$ ซึ่งมีลักษณะกราฟเป็น

วงกลมศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมียาวเท่ากับ a หน่วย

$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 4 - x^2\}$ เป็นเซตที่มีความสัมพันธ์

เป็นวงกลมหรือไม่ _____ ถ้าใช่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ _____

และรัศมียาว _____ หน่วย

$5x - 10y - 9 = 0$

281 การแก้มัธ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{y-7}{x} + \frac{5+x}{y} = \frac{5x-7y+9}{xy}\}$ โดยการวัดขอบเสียใหม่ทำให้ทราบว่าความสัมพันธ์นี้จะป็นลักษณะกราฟ ให้: _____	$4x-5y+39 = 0$ $4, -5, 39$
282 การแก้มัธ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2\}$ เป็นการแก้มัธเป็น $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ ซึ่งมีกราฟเป็น วงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) รัศมียาว a หน่วย ให้มอง $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 2y + 15\}$ เป็นสมการแก้มัธที่มีกราฟเป็นวงกลม ถ้าเรานำเงื่อนไขในความ ด้วนี้มากระทำดังนี้ $x^2 + y^2 = 2y + 15$ $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 1$ $\Rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 16 = 4^2$ เราจะได้ทราบว่าวงกลมวงนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,1)$ รัศมียาว 4 หน่วยหาแนวทางจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีจากความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 - 4x + y^2 = 21\}$ _____ _____ หน่วย	$-\frac{13}{2}$ $\frac{1}{3}$
283 การแก้มัธ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0\}$ เป็นการแก้มัธเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ _____ รัศมียาว _____ หน่วย	$(-3, 1), (2, 0)$
284 การแก้มัธ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 10x + 12y + 25 = 0\}$ เป็นการแก้มัธเป็น _____ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ _____ รัศมียาว _____ หน่วย	ให้ $(0,0)$ 2

235 ความสัมพันธ์ $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = \frac{y}{3} - 1\}$

จะได้ว่า $(0, 3) \in T$, $(7, \underline{\hspace{1cm}}) \in T$, $(\underline{\hspace{1cm}}, 6) \in T$ และ $(2, \underline{\hspace{1cm}}) \in T$ วงกลม

236 ความสัมพันธ์ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 4x\}$

จะได้ว่า $(0, 2) \in S$, $(1, \underline{\hspace{1cm}}) \in S$, $(\underline{\hspace{1cm}}, 2) \in S$ (2, 0)
และ $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) \in S$ 5

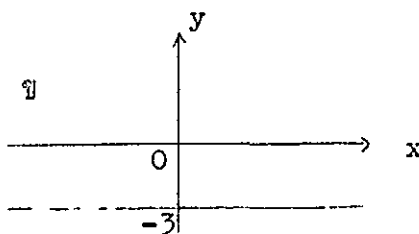
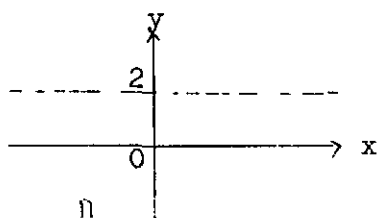
237 ความสัมพันธ์ $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$

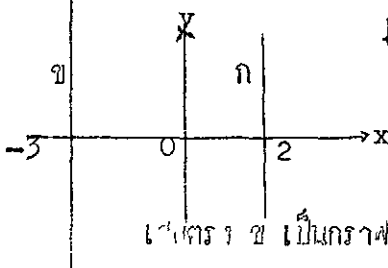
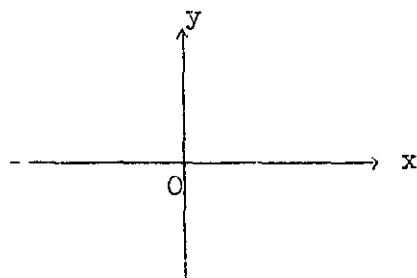
จะได้ว่า $(\underline{\hspace{1cm}}, 1) \in P$, $(-1, \underline{\hspace{1cm}}) \in P$, $(\frac{1}{2}, \underline{\hspace{1cm}}) \in P$ (-5, 1)
และ $(\underline{\hspace{1cm}}, \frac{1}{3}) \in P$ 2

238 เส้นตรงในระนาบกับแกน x หรือแกน y

เส้นตรงในระนาบกับแกน x ย่อมาจากกับแกน y และตัดแกน y วงกลม
ที่จุด $(0, b)$ ถ้า b เป็นจำนวนจริงบวกเส้นตรงจะอยู่เหนือแกน x (-5, -6)
ถ้า b เป็นจำนวนจริงลบเส้นตรงจะอยู่ใต้แกน x ดังนั้นความสัมพันธ์
จึงได้กราฟเป็นเส้นตรงชนิดนี้คือ 6

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = b, b \in \mathbb{R}\}$
เขียนว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2\}$
จะได้ลักษณะกราฟดังรูป ก รูป ข เป็นกราฟของความสัมพันธ์



289 ได้ตรงไปขนานกับแกน x และอยู่เหนือแกน x เป็นระยะ 5 หน่วย ความชันที่ตรงกับกราฟเป็นเส้นตรงนี้ คือ _____	24 1 9
290 ได้ตรงไปขนานกับแกน y ขอบข้างฉากกับแกน x และกับแกน x ที่จุด $(a, 0)$ ถ้า $a > 0$ เส้นตรงจะอยู่ทางขวาแกน y ถ้า $a < 0$ ได้ตรงจะอยู่ทางซ้ายแกน y ดังนั้นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงวงนี้คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = a, a \in \mathbb{R}\}$ ถ้าอย่าง ได้ตรง ก เป็นกราฟความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2\}$  ได้ตรง ข เป็นกราฟความสัมพันธ์ _____	± 2 1 ± 4
291 จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2x + 3 = -5\}$ โดยละเอียด 	0 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\pm \frac{2\sqrt{2}}{5}$
292 ได้ตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน x หรือแกน y เราทราบถึงค่าหาคะความชัน หรือสโลป และจุด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงนั้นให้ ได้ m เป็นสโลปของเส้นตรง L และจุด (x_1, y_1) อยู่บน L ถ้า (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงนี้เราจะได้ว่า $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ หรือ $y - y_1 = m(x - x_1)$	$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y + 3 = c\}$

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดนี้ ก็คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y - y_1 = m(x - x_1)\}$$

ค่าของใช้ในความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 5)$ และมี
ค่า m เป็น 2 คือ _____

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y - 5 = 0\}$$

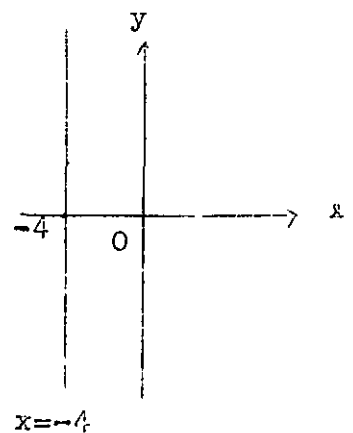
293 จงหาสมการเส้นตรงที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -1)$ และมีค่า m เท่ากับ 2 ก็คือ _____

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x + 3 = 0\}$$

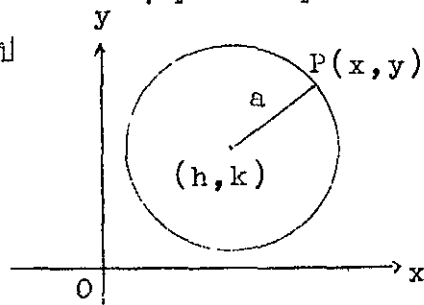
294 จงหาสมการเส้นตรงที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -5)$ และ $(2, 3)$
ก็คือ _____

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

295 จงหาสมการเส้นตรงที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ตัดกับแกน x ที่จุด $(-1, 0)$
และแกน y ที่จุด $(0, 8)$ ก็คือ _____



296 ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว a หน่วยดังรูป



$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y-5 = 2(x-1)\}$$

จากสูตรการหาระยะทางระหว่าง 2 จุดเราจะได้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

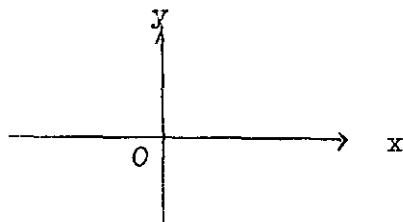
ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว a หน่วยก็คือ

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2\}$$

ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมียาว 3 หน่วย ก็คือ _____

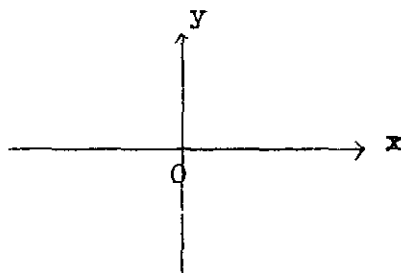
$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2x-y-10=0$$

297 การหาเส้นสัมผัสของวงกลม $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8\}$ จะได้ว่าเส้นสัมผัสใด ๆ ดังนี้



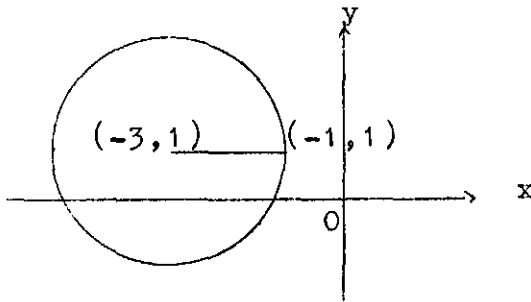
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 8x-y+3=0\}$$

298 การหาเส้นสัมผัสของวงกลม $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2+y^2-2x-4y-11=0\}$ จะได้ว่าเส้นสัมผัสใด ๆ ดังนี้



$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 8x-y+8=0\}$$

299

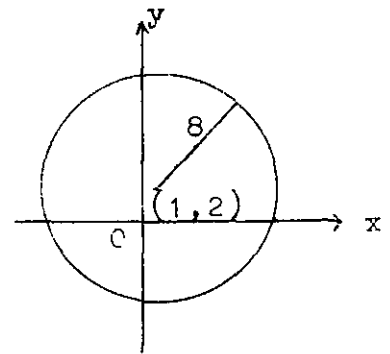


จากรูปเป็นกราฟของความสัมพันธ์ _____

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 9\}$$

300

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, -2)$ และผ่านจุด $(0, 2)$ ก็คือ _____



301

พาราโบลา

นิยาม พาราโบลาเป็นเส้นโค้งของจุดที่อยู่ห่างจากเส้นตรงกึ่งที่เส้นหนึ่งและจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

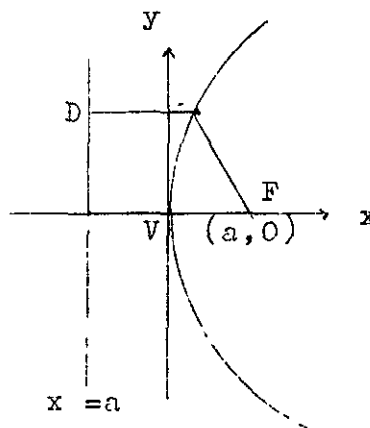
จากรูป $F(a, 0)$ เป็นจุดคงที่เรียกว่า

โฟกัส $x = -a$ เป็นเส้นตรง

กึ่งที่เรียกว่า ไดเรกตริกซ์ และ

$V(0, 0)$ เป็นจุดยอด (Vertex)

ของพาราโบลา ถ้าจุด $P(x, y)$

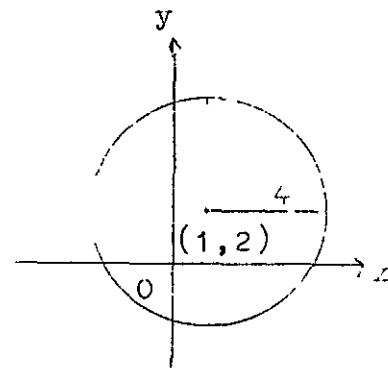


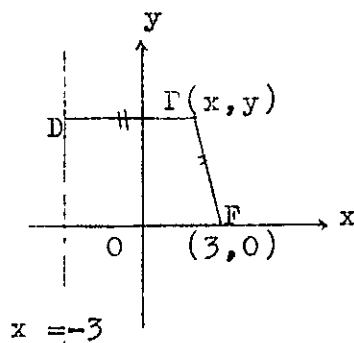
เป็นจุดบนพาราโบลานี้ จะได้ว่า $d(P, F) = d(P, D)$

ก็จะได้ว่า โกลความสัมพันธ์เป็น $y^2 = 4ax$

ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x = -3$

เป็นไดเรกตริกซ์ จุด $(3, 0)$ เป็นโฟกัส ดังรูปหน้าถัดไป





$$\begin{aligned} \therefore d(F, P) &= d(P, D) \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} &= x - (-3) \\ (x-3)^2 + y^2 &= (x+3)^2 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= x^2 + 6x + 9 \\ y^2 &= 12x \end{aligned}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4\}$$

สมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $(3, 0)$ และเส้นตรง $x = -3$ เขียนเป็น

การเก็บไว้ได้ดังนี้ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 12x\}$

ข้อสังเกต พาราโบลาที่มีแกน x เป็นแกนสมมาตร (Symmetry)

เพราะว่า $(-y)^2 = y^2 = 12x$

302 พาราโบลาที่มีโฟกัสคือเส้นตรง $x = -2$ และ

ไ้ก้คอยู่ $(2, 0)$ คือ _____ ดังนั้นความสัมพันธ์ของ

พาราโบลาเป็นคือ _____

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} / (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25\}$$

303 พาราโบลาที่สมการเป็น $y^2 = 4ax$ จะมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

จุด $(a, 0)$ เป็นโฟกัส และเส้นตรง $x = -a$ เป็นไ้เรกติกัล

ถ้าให้สมการพาราโบลา $y^2 = 20x$ โดยการเทียบจำนวนการ

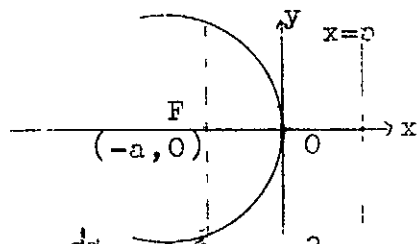
$y^2 = 4ax$ จะได้ว่า $a = 5$ ฉะนั้นพาราโบนานี้จะมี

ไ้ก้คอยู่ $(5, 0)$ และ $x = -5$ เป็นไ้เรกติกัล

การของพาราโบลาโฟกัสและสมการไ้เรกติกัลของพาราโบลา $y^2 = 4x$

คือ _____ และ _____

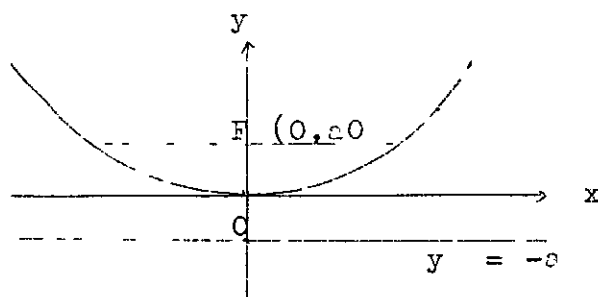
304. พาราโบลาที่โฟกัสอยู่ที่ $(-a, 0)$ และ $x = a$ เป็น
ไฮเพอร์โบลา จะมีสมการเป็น $y^2 = -4ax$ มีกราฟดังนี้



ถ้า พาราโบลาที่มีสมการเป็น $y^2 = -8x$ จะมีจุดโฟกัส
อยู่ที่ _____ และ _____ เป็นไฮเพอร์โบลา

305 พาราโบลาที่จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, a)$ และมีสมการไฮเพอร์โบลาเป็น
 $y = -a$ จะมีสมการเป็น $x^2 = 4ay$

มีกราฟ ดังนี้



ถ้า พาราโบลาที่มี $(0, 3)$ เป็นโฟกัส และ $y = -3$ เป็นไฮเพอร์โบลา
จะมีสมการเป็น _____ ความสัมพันธ์ของพาราโบลา
โฟกัส _____

$$y^2 = 8x$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 8x\}$$

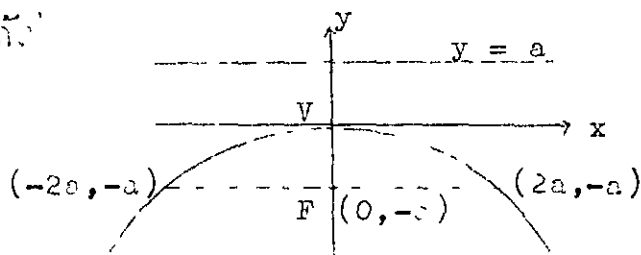
306 พาราโบลาที่มีสมการเป็น $x^2 = 32y$ จุดโฟกัสอยู่ที่
_____ และ _____ เป็นไฮเพอร์โบลา

$$(1, 0)$$

$$x = -1$$

307 พาราโบลาที่จุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -a)$ และสมการโคเรคทีฟ คือ

$y = a$ จะมีสมการเป็น $x^2 = -4ay$ เป็น
กราฟให้



$(-2, 0)$

$x = 2$

ถ้าพาราโบลาที่มี $(0, -2)$ เป็นโฟกัส และ $x = 2$ เป็น
โคเรคทีฟ จะมีสมการเป็น _____ ความชัน
พาราโบลาที่คือ _____

308 การแก้ปัญหานี้คือการเป็นพาราโบลาจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -5)$ และสมการ
โคเรคทีฟคือ $x = 5$ โคเรคทีฟ _____

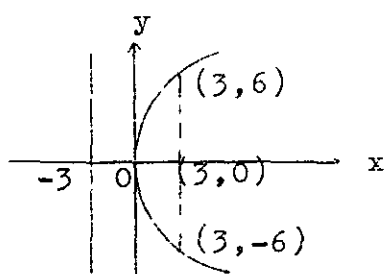
$$x^2 = 12y$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = 12y\}$$

309 โยธาทเป็นพาราโบลามากๆ สำหรับพาราโบลา ก่อนอื่นเราต้องดูว่า
พาราโบลาที่ให้มาสมมาตรบนแกนใด มีจุดยอด และจุดโฟกัสอยู่ที่ใด
จากนี้เราก็จะดูว่าตรงจุดโฟกัสพาราโบลามีความกว้างเท่าใด เราก็
ดูว่าอะไรเป็นรูปพาราโบลามากๆ โยธาท
ก็เลยจะเขียนกราฟพาราโบลา $y^2 = 12x$ อย่างง่ายๆ
จากที่เราทราบว่า แกน x เป็นแกนสมมาตร มี $(3, 0)$ เป็นโฟกัส
 $x = -3$ เป็นโคเรคทีฟ และที่จุด $x = 3$ พาราโบลาจะ
มีความกว้าง 12 นั่นคือจุด $(3, 6), (3, -6)$ จะอยู่บนกราฟ
ถ้าจะกราฟเป็น

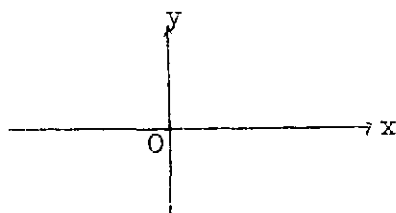
$(0, 8)$

$$y + 8 = 0$$



310 วาดกราฟเส้นโค้ง ๆ ของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 4x\}$$

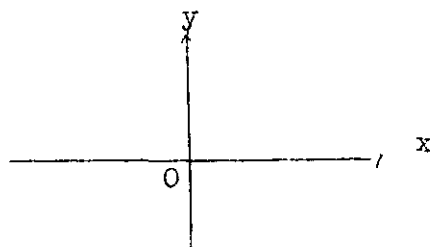


$$x^2 = -8y$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = -8y\}$$

311 วาดกราฟเส้นโค้ง ๆ ของความสัมพันธ์

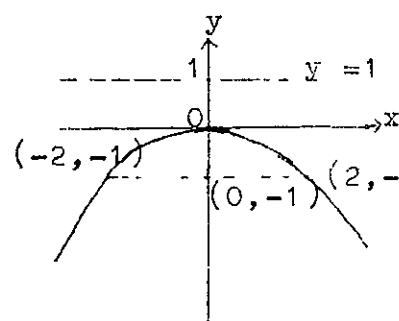
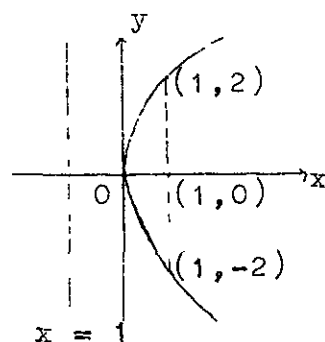
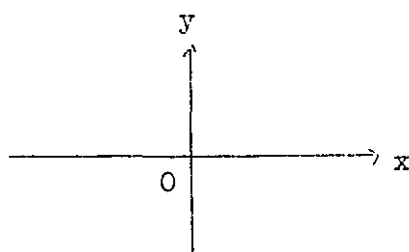
$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = -4y\}$$



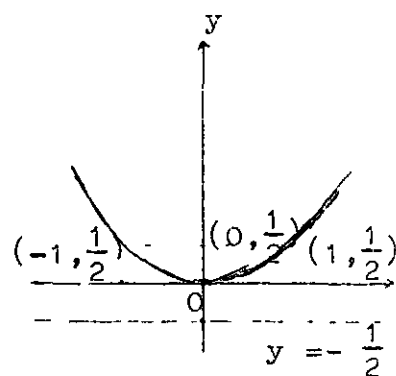
$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = -20y\}$$

312 วาดกราฟเส้นโค้ง ๆ ของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = 2y\}$$



พบที่เรียนหน้า 6



แบบฝึกหัดที่ 6

- 1 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,6)$ และ $(-1,1)$ และเขียนกราฟ
- 2 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-3,-5)$ มีค่าโคหะเท่ากับ $\frac{2}{3}$ และเขียนกราฟ
- 3 วาดเขียนกราฟเซตของจุด (x,y) ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสกับแกน y และผ่านจุด $(4,0)$

- 4 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมดังต่อไปนี้
 - ก จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,3)$ รัศมียาว 3 หน่วย
 - ข จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1,-2)$ รัศมียาว 5 หน่วย

- 5 วาดเขียนกราฟความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 25\}$

ข $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0\}$

- 6 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(5,0)$ และ $x = -5$ เป็นไดเรกตริกซ์พร้อมทั้งวาดกราฟเอาไว้

- 7 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(0,10)$ และ $y = -10$ เป็นไดเรกตริกซ์พร้อมทั้งวาดกราฟเอาไว้

- 8 วาดเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ก $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 16x\}$

จ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2y^2 = 7x\}$

ข $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = 9 - y^2\}$

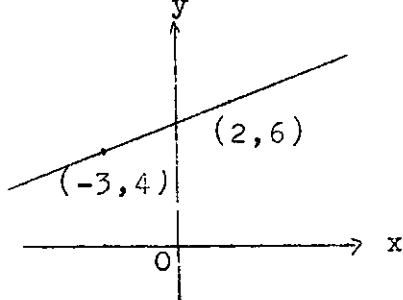
ฉ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 5x^2 + 5y^2 = 8\}$

ค $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 5x + 4\}$

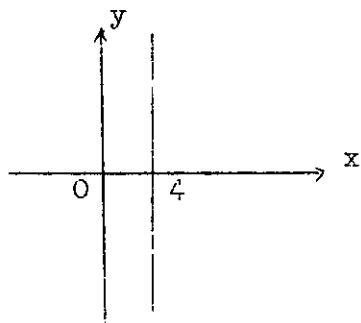
ช $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{y^2}{3} = x\}$

ง $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 - 2x + y^2 = 7\}$

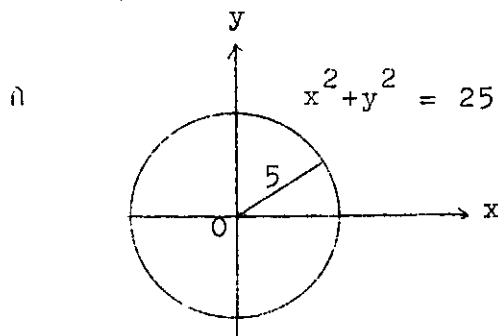
ช $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$



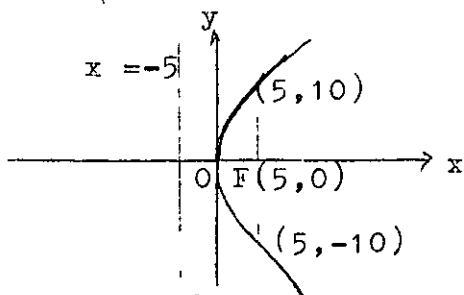
3



5



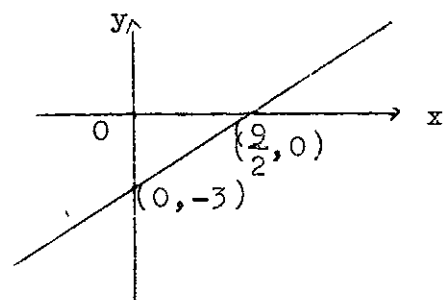
6 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 20x\}$



8

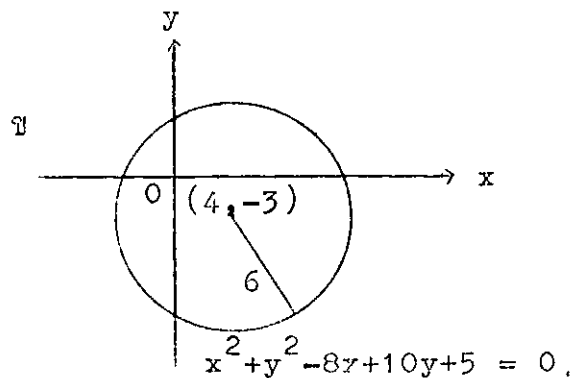
ก พาราโบลา ข วงกลม ก เส้นตรง ง วงกลม จ พาราโบลา

ฉ วงกลม ช พาราโบลา น เส้นตรง 2 เส้น



4 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0\}$

๗ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0\}$



7 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = 40x\}$

