

การพัฒนานาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

ปริญญานิพนธ์
ของ
วรรณวิภา สุธกเกียรติ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา

มีนาคม 2542

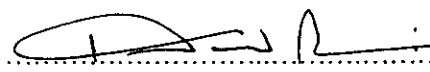
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

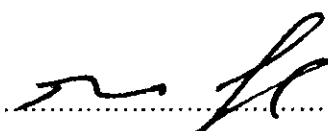
การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

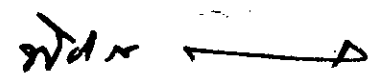
ของ
นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ

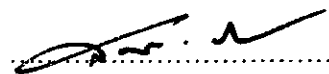
ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษาดุขบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

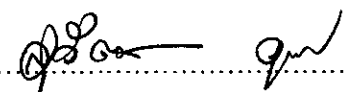
.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)
วันที่ 9 เดือน สิงหาคม พ.ศ. 2542

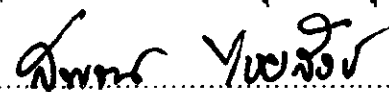
คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.....ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล)

.....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชค)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา อุทัยรัตน์)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

ประกาศขอบคุณการ

ผู้วิจัยขอโน้มระลึกพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิทยาการแก่ผู้วิจัย
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์และกำลังใจจากหลายท่าน จึงขอ
กล่าวนาม เพื่อเป็นการขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

รองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล ได้กรุณาเป็นประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ท่านได้ให้แนวคิด คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ตลอดจนสละเวลาอันมีค่าของท่านตรวจอ่านปริญญานิพนธ์อย่างละเอียดทุกขั้นตอน ทำให้งานวิจัยมีความชัดเจน สมบูรณ์ ก่อให้เกิดประโยชน์แก่ผู้วิจัยอย่างยิ่ง รองศาสตราจารย์ ดร. พิชากร แปลงประสพโชค และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมวงษ์ แปลงประสพโชค ทั้งสองท่านได้กรุณาเป็นกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ สละเวลาให้คำปรึกษา ตรวจสอบแก้เครื่องมือและแนะแนวทางแก้ไขปรับปรุงที่เป็นประโยชน์ในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ ได้กรุณาเป็นกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ และช่วยเสนอแนะสิ่งที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงงานวิจัย รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา อุทัยรัตน์ ได้กรุณาเป็นกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการนำเสนอผลงานวิจัยเป็นอย่างยิ่ง

ผู้เชี่ยวชาญที่ทรงคุณวุฒิหลายท่าน ได้แก่ อาจารย์สุวรรณ คล้ายกระแสด ดร.สมเดช บุญประจักษ์ ดร.โกมล ไพศาล ที่ได้สละเวลาตอบแบบสอบถาม ให้คำแนะนำ และตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ให้มีความสมบูรณ์ ถูกต้อง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อารีย์ สอาดอาวุธ นอกจากจะช่วยตรวจสอบคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ตรวจสอบทบทวนเนื้อหาและคู่มือครู ให้ความรู้ด้านสถิติแล้ว ยังเอื้อเฟื้อเครื่องคอมพิวเตอร์และบุตรชาย นายสุทธิจุ สอาดอาวุธ มาช่วยพิมพ์คู่มือซอฟต์แวร์และคู่มือครู ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปารมี เจริญกิตติวัฒน์ ที่ช่วยตรวจสอบคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ อาจารย์คันสนีย์ พรหมภมร ช่วยตรวจสอบคู่มือครูและเป็นผู้ตรวจแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบอาจารย์พิเศษ วัฒนถาวร เป็นผู้ตรวจแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบ อาจารย์อัจริยา ชมะนันท์ นอกจากจะช่วยตรวจสอบทบทวน คู่มือครู เป็นผู้ตรวจแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบ แล้วยังช่วยในการจัดเรียงเอกสารและอำนวยความสะดวกต่าง ๆ

ในด้านการทดลองเครื่องมือ ผู้วิจัยได้รับความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์อุไรวรรณ สุพรรณ ผู้อำนวยการโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย กรุณาอนุญาตให้ใช้ห้องคอมพิวเตอร์ และนักเรียนเข้าร่วมงานวิจัย รวมทั้งนักเรียนทุกคนที่ได้สละเวลาอาสาสมัครเป็นกลุ่มตัวอย่างในการทำวิจัย

ท่านอาจารย์เสรี ลาขโรจน์ อดีตผู้อำนวยการโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ที่กรุณาส่งเสริมและสนับสนุน ตลอดจนอนุญาตให้ลาศึกษาต่อ

ท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณย่าจันทร์ คุณะเกษม คุณอาทั้ง 3 ท่าน คุณวนิดา คุณะเกษม คุณจิราวรรณ คุณะเกษม และคุณวัฒนา คุณะเกษม ผู้ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู วางพื้นฐานทางการศึกษาและส่งเสริมให้เป็นผู้มีโลกทัศน์กว้างไกลตลอดจนได้ให้กำลังใจ อาจารย์ ไตรรัตน์ สุทธเกียรติ นอกจากจะช่วยพิมพ์เอกสาร แก้ไข ตรวจทาน ที่รวดเร็ว ทันต่อการนำไป ใช้ แล้วยังดูแลลูกเล็กทั้งสองคน และให้กำลังใจมาโดยตลอด ทำให้ผู้วิจัยมีความอดทน มีกำลังใจ สามารถต่อสู้อุปสรรคในการทำวิจัยจนประสบความสำเร็จ

วรรณวิภา สุทธเกียรติ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	5
ความสำคัญของการวิจัย.....	5
ขอบเขตของการวิจัย.....	6
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	7
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
สมมติฐานการวิจัย.....	8
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	9
เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษา.....	9
รายละเอียดเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย.....	9
สมรรถภาพของนักเรียนระดับมัศึกษาด้านเนื้อหาเรขาคณิต.....	18
การเรียนการสอนเรขาคณิตและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	21
การใช้คอมพิวเตอร์สำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิต และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	27
3 วิธีการดำเนินการวิจัย.....	35
การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง.....	35
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	35
การกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต.....	36
การสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู.....	38
การสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต.....	42
การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต.....	44
การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	47

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	49
ผลการศึกษาสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับ	
มัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์.....	49
ผลการตรวจสอบความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา	
และการสอนเรขาคณิต.....	51
ผลการสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู.....	54
ผลการทดลองเป็นรายบุคคล.....	60
ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์	
และคู่มือครูครั้งที่ 1.....	65
ผลการทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	67
ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์	
และคู่มือครูครั้งที่ 2.....	70
ผลการทดลองภาคสนาม.....	72
ข้อสังเกตเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	
กลุ่มตัวอย่าง.....	79
5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	81
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	81
กลุ่มตัวอย่าง.....	81
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	81
ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	82
สรุปผลการวิจัย.....	85
การอภิปรายผล.....	86
ข้อเสนอแนะ.....	89
บรรณานุกรม.....	92

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก.....	100
ภาคผนวก ก	101
รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ.....	102
ภาคผนวก ข	104
แบบสอบถามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอน	
เรขาคณิตเกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิต.....	105
ภาคผนวก ค	109
แบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้	110
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต	
พร้อมเกณฑ์การตรวจให้คะแนนและเฉลยแนวทางคำตอบ.....	125
ภาคผนวก ง	147
กำหนดคาบการสอนของการทดลองเป็นรายบุคคลและการทดสอบ.....	148
กำหนดคาบการสอนของการทดลองกลุ่มย่อยและการทดสอบ.....	150
กำหนดคาบการสอนของการทดลองภาคสนามและการทดสอบ.....	152
ภาคผนวก จ	154
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	155
ภาคผนวก ฉ	161
บทเรียนเรขาคณิต.....	162
คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์.....	374
คู่มือครู.....	438
ประวัติผู้วิจัย.....	523

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	สมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ได้จากการศึกษาหนังสือเรียนและเอกสารด้านเรขาคณิต.....	50
2	สมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ได้จากผลการประเมินของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ว่าจำเป็นสำหรับนักเรียนกลุ่มดังกล่าว.....	52
3	หน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อยตามที่วางแผน.....	55
4	หน่วยการเรียนรู้และจุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้ตามที่วางแผน.....	56
5	หัวข้อและขอบเขตของหัวข้อในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ตามที่วางแผน.....	59
6	ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์จากการทดลอง เป็นรายบุคคล.....	61
7	ค่า E_1 และ E_1/E_2 จากการทดลองเป็นรายบุคคล.....	64
8	ข้อคิดเห็นและการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู จากการทดลองรายบุคคล.....	65
9	ค่า E_1 และ E_1/E_2 จากการทดลองเป็นกลุ่มย่อย.....	70
10	ข้อคิดเห็นและการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู จากการทดลองกลุ่มย่อย.....	70
11	ค่า E_1 และ E_1/E_2 จากการทดลองภาคสนาม.....	74
12	หน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อยตามที่กำหนดครั้งสุดท้าย.....	75
13	รายละเอียดของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติในแต่ละหน่วยการเรียนรู้.....	76
14	หัวข้อและขอบเขตของหัวข้อในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ตามที่กำหนดครั้งสุดท้าย.....	78
15	ผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์.....	153
16	ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล.....	155
17	ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลอง เป็นรายบุคคล.....	155

บัญชีตาราง(ต่อ)

ตาราง		หน้า
18	ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คนจากการทดลองกลุ่มย่อย.....	156
19	ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลอง กลุ่มย่อย.....	156
20	ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คนจากการทดลองภาคสนาม.....	156
21	ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลอง ภาคสนาม.....	156
22	คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล.....	157
23	คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลองกลุ่มย่อย.....	157
24	คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม.....	158

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

เรขาคณิต เป็นวิชาหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาวิทยาการสาขาอื่น ๆ อย่างมาก อาทิ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ และศิลปกรรมศาสตร์ สิ่งที่ปรากฏอยู่รอบตัวเราทั้งที่เป็นธรรมชาติและสิ่งสร้างสรรค์ของมนุษย์ ส่วนใหญ่มีรูปแบบทางเรขาคณิตหรือใช้ความรู้ทางเรขาคณิตมาเกี่ยวข้องด้วย อีกหนึ่งที่สำคัญคือ เรขาคณิตยังเป็นวิชาที่มีการฝึกทักษะความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) (Usiskin. 1987 : 17-31) ทักษะการคิดหาเหตุผล และทักษะการแก้ปัญหา ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนและชีวิตประจำวัน (DeGuire. 1987 : 59-68 ; Milauskas. 1987 : 69-84) เป็นการช่วยพัฒนา นักเรียนให้เป็นผู้มีเหตุผล ทำงานเป็นระบบ มีขั้นตอน ลักษณะโจทย์บางรูปแบบยังช่วยพัฒนาความสามารถด้านการสำรวจเพื่อการค้นพบ การตั้งข้อคาดเดา การสืบเสาะหาเหตุผลสนับสนุนข้อคาดเดา ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่นำไปใช้แก้ปัญหาในที่สุด

ด้วยความสำคัญของเรขาคณิตดังกล่าว จึงมีการจัดให้เรขาคณิตเป็นเนื้อหาหนึ่งในหลักสูตรมัธยมศึกษา ตั้งแต่ในอดีตถึงปัจจุบัน ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ที่ใช้กันอยู่ปัจจุบัน พบว่า ส่วนที่เป็นเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ปรากฏอยู่ในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแกนและวิชาเลือกเสรีระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 วิชาเลือกเสรีระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในลักษณะรวมกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ และในลักษณะรายวิชาเฉพาะด้านเรขาคณิต (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 41-43) ส่วนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ปรากฏอยู่ในวิชาเลือกเสรีในลักษณะรายวิชาเฉพาะด้านเรขาคณิต (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 131-138) แต่ไม่มีโรงเรียนใดเปิดสอนรายวิชานี้

จากโครงสร้างของหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นที่กำหนดให้ วิชาคณิตศาสตร์มีทั้งวิชาบังคับแกนและวิชาเลือกเสรี ดังนั้นนักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จึงผ่านการเรียนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหลายรูปแบบ อาทิ นักเรียนบางคนเรียนเรขาคณิตครบทุกเนื้อหาที่มีปรากฏอยู่ในทุกรายวิชาระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือเรียนเรขาคณิตเฉพาะที่มีปรากฏอยู่ในวิชาบังคับแกน หรือเรียนเรขาคณิตเฉพาะที่มีปรากฏอยู่ในวิชาบังคับแกนและเนื้อหาที่ปรากฏในวิชาเลือกเสรีบางวิชา เป็นผลให้นักเรียนมีพื้นฐานความรู้ทางเรขาคณิตไม่เท่ากัน

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ มีพื้นฐานเรขาคณิตมาต่าง ๆ กัน แต่การเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ระดับ

มัธยมศึกษาตอนปลายมีความจำเป็นต้องใช้ความรู้ทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือที่สูงกว่าเป็นพื้นฐานการเรียนบางเนื้อหา เช่น การเคลื่อนที่แนวตรง การเคลื่อนที่แนว วงกลม การเคลื่อนที่แบบหมุน และโมเมนต์ของวิชาฟิสิกส์ ภาคตัดกรวย เวกเตอร์ ของวิชา คณิตศาสตร์ เป็นต้น แม้กระทั่งในระดับอุดมศึกษา เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานสำคัญของการ นำไปใช้ในคณิตศาสตร์แขนงต่างๆ เช่น แคลคูลัส และภินทคณิตศาสตร์ (Discrete Mathematics) ดังนั้นนักเรียนจำนวนหนึ่งที่ขาดความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐาน จึงมีปัญหา ในด้านการเรียนทั้งระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับอุดมศึกษา

จากการศึกษาหนังสือและคู่มือครูซึ่งจัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี (สสวท.) ส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิตและกิจกรรมเสนอแนะ ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้นในปัจจุบันยกเว้น วิชาเลือกเสรีในรายวิชาที่ศึกษาเฉพาะด้านเรขาคณิต พบว่า ลักษณะ ของกิจกรรมที่เสนอแนะให้นักเรียนปฏิบัติ ได้แก่ การสร้างรูป การวัด การตัดกระดาษ หรือการ ยกรูปทับแล้วสังเกตจนได้ข้อสรุป และเน้นการพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ มีแนวทางการเรียนรู้ เพื่อนำไปใช้ แต่โดยทั่วไปเป็นที่ทราบกันดีว่า กิจกรรมที่เสนอแนะอาจไม่ทำให้เกิดแรงจูงใจที่ จะปฏิบัติ ดังนั้นการเรียนการสอนเรขาคณิตในปัจจุบัน ทั้งครูและนักเรียนมักไม่ได้ปฏิบัติตาม กิจกรรมที่เสนอแนะ ด้วยเหตุที่ต้องการประหยัดเวลาหรือเกียจคร้านที่จะทำ ในส่วนนักเรียน ผู้ปฏิบัติตาม ก็เกิดกรณี เช่น มีความเบื่อหน่ายที่มักต้องสร้างรูปหลายๆ ครั้ง ในหลายรูปแบบ เพื่อหาข้อสรุป ในที่สุดนักเรียนต้องการให้ครูบอกข้อสรุปแทนการสำรวจ สืบเสาะหาด้วยตนเอง แล้วจำข้อสรุปนั้นไปใช้โดยไม่เข้าใจในเงื่อนไขหรือผลที่ได้มา นอกจากนี้ยังมีกรณีที่นักเรียน สร้างรูปคลาดเคลื่อน หรือสร้างตามความคุ้นเคยทำให้ได้ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง ข้อบกพร่องใน การเรียนการสอนเรขาคณิตเหล่านี้ส่งผลให้นักเรียนไม่สามารถพลิกแพลงใช้ประโยชน์ในสิ่งที่ เรียนรู้มาแก้ปัญหาโจทย์ทางเรขาคณิตทั้งในแง่การนำไปใช้โดยตรงและการพิสูจน์ได้ นักเรียน ส่วนมากมักไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิต คิดว่าเป็นวิชาที่ยาก น่าเบื่อหน่าย และ ต้องท่องจำ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุพจน์ ไชยสังข์ (ม.ป.ป. : 1-13) ที่พบว่าผลการ เรียนในวิชาเรขาคณิตอยู่ในระดับที่ไม่น่าพอใจ นักเรียนส่วนใหญ่ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความคิดทางเรขาคณิตต่ำ และมีประมาณร้อยละ 1 ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เข้าใจ ความหมายของบทนิยาม ทฤษฎีบทและโครงสร้างในการพิสูจน์ ในต่างประเทศ เช่น สหรัฐ อเมริกาก็ประสบปัญหาที่ผลการเรียนทางเรขาคณิตของนักเรียนไม่ดีเช่นเดียวกัน กล่าวคือ นักเรียนระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาประสบความสำเร็จน้อยในการเรียนรู้โน้มน้าวเกี่ยวกับ เรขาคณิตเบื้องต้นและการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต (Clements & Battista. 1992 : 421) ดังนั้น จึงส่งผลให้นักเรียนเพียงส่วนน้อยที่จบระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแล้วมีพื้นฐานความรู้ทาง เรขาคณิตเป็นที่น่าพอใจ (Usiskin. 1987 : 17-31)

จากสภาพปัญหาต่าง ๆ ของการเรียนการสอนเรขาคณิตดังกล่าวมาแต่ต้น ครูและ นักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านจึงได้พยายามศึกษาและค้นคว้าเพื่อแก้ปัญหา ที่สำคัญและ

ยอมรับกันในปัจจุบันคือรูปแบบของ แวน ฮีลี (Van Hiele) ที่กล่าวถึง พัฒนาการความคิดทางเรขาคณิตไว้ 5 ขั้น คือ การสร้างภาพนามธรรม (Visualization) การวิเคราะห์ (Analysis) การพิสูจน์แบบนिरนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) การพิสูจน์แบบนिरนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal Deduction) และขั้นสุดท้ายคือ ขั้นสุดยอด (Rigor) ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตจะต้องผ่านไปที่ละขั้นตอน โดยแต่ละขั้นตอนจะต้องเรียนรู้อย่างสมบูรณ์ จะข้ามขั้นตอนไม่ได้ (Crowley. 1987 : 3 ; Kantowski. 1991 : 587-590 ; Burger & Culpepper. 1993 : 140-142) ซึ่งจากการพิจารณาความล้มเหลวของการเรียนการสอนเรขาคณิต เนื่องมาจากการสอนส่วนใหญ่จะข้ามขั้นตอน ละเลยขั้นตอนแรกๆ แต่ริบมุงสู่การพิสูจน์เท่านั้น สมาคมครูคณิตศาสตร์สหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics : NCTM) ได้วางมาตรฐานของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน โดยเฉพาะในส่วนของเรียนการสอนเรขาคณิต มีจุดมุ่งหมายที่ควรเน้นให้นักเรียนค้นพบความสัมพันธ์และการพัฒนาความคิดด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Sense) โดยการสร้าง การวาด การวัด การมองเห็น การเปรียบเทียบ การแปลง และการจำแนกรูปเรขาคณิต ซึ่งการเรียนการสอนเรขาคณิตควรเน้นกิจกรรมในลักษณะการสำรวจ การตั้งข้อคาดเดา (Conjecturing) การสืบเสาะเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดา (NCTM. 1989 : 112-115) กิจกรรมเหล่านี้จะเป็นสิ่งที่ส่งเสริมในตัวนักเรียนซึ่งจะทำให้นักเรียนเป็นผู้มีความรอบรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematically Literate) คือเป็นผู้มีความสามารถในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา ให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล และเลือกใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในการดำเนินชีวิตต่อไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ยังส่งเสริมให้นักเรียนมีจินตนาการ เพื่อแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ เป็นการคิดเพิ่มพูนความรู้ และยังรวมถึงการพัฒนาความเชื่อมั่นในตนเอง ที่สืบเสาะและเลือกใช้วิธีการที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา ซึ่งในระยะยาวท้ายสุดจะส่งผลให้นักเรียนเป็นผู้มีพลังทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Power) (NCTM. 1989 : 112-115 ; 5-6 ; 1991 : 1) เป็นบุคลากรผู้มีคุณภาพในยุคปัจจุบัน โดยเพื่อให้บรรลุเป้าหมายต่างๆ ดังกล่าว NCTM ยังได้เสนอแนะว่าควรมีคอมพิวเตอร์ใช้ในทุกห้องเรียน และจะต้องเลือกใช้ซอฟต์แวร์ที่มีคุณภาพ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตรงกับจุดประสงค์ที่วางไว้

ด้วยความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีทางคอมพิวเตอร์และการพัฒนาทางด้านซอฟต์แวร์ในปัจจุบันนี้ ได้ส่งผลให้ประเทศต่างๆ มีการนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการเรียนการสอนเรขาคณิตมากขึ้น ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่ดีจะช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิต และวัดหาขนาดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง และมุมได้รวดเร็วถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้นักเรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วพลิก หมุน หรือ เลื่อนรูปในมุมมองต่าง ๆ ทำกิจกรรมการสำรวจด้วยการพลิก เลื่อน หมุน ยืด หด เพื่อเรียนรู้ในมิติต่าง ๆ ทางเรขาคณิตได้รวดเร็วเป็นนามธรรม การทดลองสร้างรูปเรขาคณิตด้วยการสร้างทำได้รวดเร็วในลักษณะต่าง ๆ ได้หลายครั้ง ซึ่งนำไปสู่การค้นหาลักษณะต่าง ๆ ทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะตรวจสอบค้นรูปต่าง ๆ ในหลายลักษณะเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียน

เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและการเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้นักเรียนมองสิ่งต่างๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น

ในสหรัฐอเมริกาได้มีการพัฒนาซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สำเร็จรูปสำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิตขึ้นมาหลายชุด ที่น่าสนใจคือ The Geometer's Sketchpad (GSP) ซอฟต์แวร์นี้มีคุณสมบัติ ใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษาการใช้ เคลื่อนไหวเปลี่ยนแปลงรูปได้หลายลักษณะตามความต้องการของผู้ใช้ ทำให้นักเรียนเรียนรู้สมบัติของรูปเรขาคณิตจากการสร้างภาพนามธรรม นักเรียนสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับบทเรียนได้ ทดลองสร้างปรับเปลี่ยนรูปได้อย่างรวดเร็วหลายครั้ง ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจอยากค้นคว้า ด้วยการตอบสนองทันทีของโปรแกรม และผู้สอนสามารถทำเป็นสคริปต์ใช้ในการสาธิตหรือสรุปให้นักเรียนได้ศึกษาตาม เพื่อเป็นการทบทวนเนื้อหาได้ (Finzer & Bennett. 1995 : 428-431 ; Giamati. 1995 : 456-458 ; Sanders. 1995 119-126 ; Scher. 1996 : 330-332 ; Zbiek. 1996 : 86-90 ; Wilson. 1997) ซอฟต์แวร์นี้ได้มีการพัฒนาตามลำดับจนเป็น GSP รุ่น 3.0 สำหรับใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบปฏิบัติการบน Windows เมื่อปี ค.ศ.1993 และยังไม่มีเอกสารเกี่ยวกับการใช้ GSP เผยแพร่ในประเทศไทย GSP มีรุ่นสาธิต (Demo Version) สำหรับให้นักเรียนใช้ได้ โดยมีข้อแตกต่างกับ GSP รุ่นเต็ม (Full Version) เพียงไม่มีคู่มือและไม่สามารถบันทึกเก็บไว้ได้เท่านั้น แต่นักเรียนยังสามารถใช้ประโยชน์ในการสร้างรูปทุกอย่างได้เช่นเดียวกับ GSP รุ่นเต็ม สามารถโหลด (load) ได้ทางอินเทอร์เน็ต ทำให้ประหยัด ค่าใช้จ่าย และเป็นซอฟต์แวร์ที่แพร่หลาย นอกจากนั้นได้มีผู้นำ GSP ไปใช้ในการวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ดังเช่นการวิจัยของ ชอย (Choi. 1997 : 406-A) ใช้ GSP ในการศึกษาการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา พบว่า การใช้ GSP ช่วยให้การสร้างมีประสิทธิภาพ กระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียนทำได้ง่าย ส่งเสริมความสนใจของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนเรียนในสิ่งที่ยากซับซ้อนได้ และประหยัดเวลาการเรียนรู้

จากสภาพปัญหาที่นักเรียนมีพื้นฐานความรู้ทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่ไม่เท่ากันหรือควรจะมีรูปร่างเรื่องเพิ่มมากขึ้น สภาพการเรียนการสอนเรขาคณิตที่ควรจะปรับเปลี่ยน และความก้าวหน้าทางเทคโนโลยี ดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจจะพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ให้ความรู้ทางเรขาคณิตเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โดยใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลที่เป็นไปได้ตามความเหมาะสมของนักเรียน ซึ่งเป็นการส่งเสริมให้เกิดจินตนาการเพื่อแก้ปัญหาในลักษณะที่แปลกใหม่ และเป็นการคิดเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตให้กว้างไกลมากขึ้นด้วย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตด้วยการลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเตา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเตาที่ตั้งไว้

ความสำคัญของการวิจัย

1. ผลการวิจัยครั้งนี้จะทำให้ได้บทเรียนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่บทเรียนและกิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะตามที่ระบุไว้ในความมุ่งหมายของการวิจัยข้างต้น ทั้งนี้โดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ใช้ความสามารถของซอฟต์แวร์ด้านกราฟิก เคลื่อนไหว ตลอดจนการวัดค่าต่างๆ ของรูปเรขาคณิต เพื่ออธิบายมโนคติทางเรขาคณิตให้น่าสนใจและยังเป็นการขยายมุมมองของนักเรียนให้หลากหลายขึ้น

2. บทเรียนเรขาคณิตที่ได้เป็นตัวอย่างของการจัดรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเตา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเตาที่ตั้งไว้ อันเป็นลักษณะสำคัญอย่างหนึ่งของการเสาะแสวงหาความรู้ของผู้ที่มีการศึกษาในปัจจุบัน

3. บทเรียนเรขาคณิตที่ได้สามารถนำไปดัดแปลงเพื่อใช้เป็นรายวิชาใดรายวิชาหนึ่งใน ค 021 – ค 026 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นรายวิชาในวิชาเลือกเสรี รายวิชาละ 0.5 หน่วยการเรียนรู้ หรือในกรณีที่ครูผู้สอนเห็นว่านักเรียนขาดความรู้ด้านเรขาคณิตก็สามารถนำบทเรียนนี้ไปใช้กับนักเรียนของตนโดยใช้ช่วงเวลาช่วงใดก็ได้ตามความเหมาะสม หรือในกรณีที่โรงเรียนใดเปิดสอนรายวิชา ค 031 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 2 คาบ/สัปดาห์/ภาค 1 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นรายวิชาเฉพาะด้านทางเรขาคณิต ก็สามารถนำบทเรียนนี้ไปดัดแปลงผนวกเป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา ค 031 นั้นได้

4. เนื้อหาและกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของบทเรียนเรขาคณิตนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้สอนหรือทบทวนเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในส่วนเนื้อหาและกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 และ 3 ก็อาจนำไปประยุกต์ใช้สอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อเป็นการเพิ่มพูนความรู้ได้อีกด้วย

5. ผลการวิจัยเป็นตัวอย่างของการพัฒนาบทเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

1. บทเรียนเรขาคณิตนี้ เป็นบทเรียนที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ครอบคลุมเนื้อหาความรู้ทางเรขาคณิตเฉพาะในส่วนสมบัติของรูปเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ คือ

1.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคลิด

1.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม

1.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน

2. กิจกรรมการเรียนรู้ตามบทเรียนเรขาคณิตนี้ ส่วนใหญ่จะเริ่มต้นที่ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติเองโดยทำการสำรวจตามแนวทางที่แนะไว้ เพื่อมองหาความสัมพันธ์ต่างๆ ที่นักเรียนคิดว่าเป็นความเป็นไปได้ในรูปเรขาคณิตที่มีเงื่อนไขตามกำหนด แล้วนักเรียนบันทึกไว้ในลักษณะการตั้งข้อคาดเดาต่างๆ ต่อจากนั้นก็ทำการสืบเสาะหาเหตุผล ที่มีการตรวจสอบข้อคาดเดาแต่ละข้อที่ตั้งไว้ โดยการตรวจสอบนั้นพิจารณาจากรูปเรขาคณิตที่สร้างขึ้นด้วยการใช้ GSP เป็นเครื่องมือ ทำการโยกกรุปไปมาในลักษณะต่าง ๆ ที่เงื่อนไขเกี่ยวกับรูปยังเป็นไปตามกำหนด เพื่อพิจารณาว่าผลตามข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นมามีความเป็นไปได้เพียงใด ถ้ามีตัวอย่างค้านที่แสดงผลไม่เป็นไปตามข้อคาดเดาปรากฏให้เห็น ก็แสดงว่าข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นมามีข้อนั้นๆ ไม่ถูกต้อง แต่ถ้าไม่พบตัวอย่างค้านก็แสดงว่า ข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นมามีข้อนั้นๆ น่าจะถูกต้อง ซึ่งนักเรียนอาจต้องหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อมาแสดงว่า ข้อคาดเดาตั้งกล่าวถูกต้องแน่นอน ทั้งนี้ครูยังมีความสำคัญในด้านการจัดเตรียมกิจกรรม การกระตุ้นให้นักเรียนปฏิบัติ ตอบข้อซักถาม และการช่วยให้นักเรียนสรุปเนื้อหา

3. กลุ่มตัวอย่าง ที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 จำนวน 42 คน ซึ่งได้จากการอาสาสมัคร และแบ่งออกตามระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เป็น 3 กลุ่ม คือกลุ่มที่อยู่ในระดับสูง ปานกลางและต่ำ โดยใช้นักเรียนในการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

3.1 การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้นักเรียน 3 คน ที่ได้จากการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนที่เป็นอาสาสมัคร และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 1 คน

3.2 การทดลองกลุ่มย่อย ใช้นักเรียน 9 คน ที่ได้จากการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนที่เป็นอาสาสมัคร โดยไม่เป็นนักเรียนในข้อ 3.1 และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 3 คน

3.3 การทดลองภาคสนาม ใช้นักเรียน 30 คน เป็นนักเรียนอาสาสมัครที่เหลือจากการทดลองสองครั้งแรก และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 10 คน

4. ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่กลุ่มตัวอย่างใช้เป็น GSP รุ่นสาริต เพื่อจัดปัญหาทางด้านลิขสิทธิ์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิต มีเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. บทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ พร้อมทั้งคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู
2. เครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ประกอบด้วย แบบฝึกปฏิบัติระคน และ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. สมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต หมายถึง ความรู้ความสามารถทางด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ แบ่งเป็นสมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยในแต่ละสมรรถภาพหลัก

2. บทเรียนเรขาคณิต หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามแบบหน่วยการเรียนรู้ โดยสอดคล้องกับสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่ต้องการให้นักเรียนได้รับ และใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ภายใต้การดูแลของครู บทเรียนมี 3 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่

- 2.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด
- 2.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม
- 2.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมกันบนวงกลมเดียวกัน

เนื่องจากบทเรียนนี้ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้สร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ เป็นส่วนของภาคผนวกของบทเรียน เพื่อแนะนำและฝึกการใช้ GSP สำหรับครูและนักเรียน บทเรียนที่ได้มาภายหลังการทดลองภาคสนามใช้เวลาเรียนและปฏิบัติการในส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิต 14 คาบ และในส่วนที่เป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ 4 คาบ คาบละ 50 นาที

3. แบบฝึกปฏิบัติระคน หมายถึง แบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อตรวจสอบความรู้ ทักษะการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลที่เป็นไปตามความเหมาะสมของนักเรียน มีลักษณะเป็นการวัดผลการเรียนรู้เนื้อหาของนักเรียนตามจุดประสงค์ปลายทางของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ตามกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน แบบฝึกปฏิบัติระคนมีประจำหน่วยการเรียนรู้ละ 1 ชุด รวมทั้งหมด 3 ชุด

4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต หมายถึง แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดผลการเรียนรู้เนื้อหาของนักเรียนตามจุดประสงค์ปลายทางของทุกหน่วยการเรียนรู้ในลักษณะผลลัพท์รวม

5. ประสิทธิภาพของบทเรียน หมายถึง คุณภาพของบทเรียนเรขาคณิตที่เมื่อนำไปใช้ในการเรียนของนักเรียน แล้วทำให้นักเรียนสามารถบรรลุจุดประสงค์และกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ในงานวิจัยนี้ใช้สูตร E_1/E_2 โดยคิดค่า E_1 เป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และ E_2 เป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ดังรายละเอียดในบทที่ 3 เกณฑ์การตัดสิน E_1/E_2 เป็น 70/70 สำหรับการพิจารณาตรวจสอบ

6. ระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ค่าระดับชั้นเฉลี่ยสะสมของนักเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแกน ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โดยอาศัยแนวทางการแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็นระดับสูงและระดับต่ำที่ระดับ 27 เปอร์เซนต์บนและล่างของนักเรียนทั้งหมดตามที่อนาสตาซีกล่าวไว้ (Anastasi. 1982 : 433) ทำให้ได้นักเรียน 3 ระดับ ตามค่าเปอร์เซนต์ไทล์ที่กำหนดจากฐานค่าระดับชั้นเฉลี่ยสะสมในรายวิชาคณิตศาสตร์ ที่เป็นวิชา บังคับแกนดังกล่าวของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 ผู้อาสาสมัครเป็นกลุ่มตัวอย่าง ดังนี้

6.1 ระดับสูง สำหรับผู้ที่มีตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์มากกว่าเปอร์เซนต์ไทล์ที่ 73

6.2 ระดับปานกลาง สำหรับผู้ที่มีตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ ตั้งแต่เปอร์เซนต์ไทล์ที่ 28

ถึง 73

6.3 ระดับต่ำ สำหรับผู้ที่มีตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ต่ำกว่า เปอร์เซนต์ไทล์ที่ 28

สมมติฐานการวิจัย

บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์การตัดสินที่กำหนด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการ เพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตด้วยการลงมือปฏิบัติเองโดย การสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ ผู้วิจัย จึงได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อต่อไปนี้

1. เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษา
2. การเรียนการสอนเรขาคณิตและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. การใช้คอมพิวเตอร์สำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิตและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษา

ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทยปัจจุบันยกเว้นวิชาเลือกเสรี ในส่วนรายวิชา ค 021 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และ ค 031 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแล้ว เรขาคณิตเป็นส่วนหนึ่งในหลายเนื้อหาที่ถูกนำมาจัดเป็นลักษณะบูรณาการอยู่ในวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งนี้จากหนังสือเรียนและคู่มือครูที่จัดทำโดย สสวท. พบว่า เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีปรากฏอยู่ในวิชาบังคับแกน ในส่วนรายวิชา ค 101 ค 203 และ ค 204 และยังมีปรากฏอยู่ในวิชาเลือกเสรี ในส่วนรายวิชา ค 011 ค 021 และ ค 031 ส่วนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีเนื้อหาเรขาคณิตปรากฏอยู่ในวิชาเลือกเสรี ในส่วนรายวิชา ค 031 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งไม่พบว่ามีโรงเรียนใดเปิดสอนวิชานี้ ในหัวข้อนี้จึงกล่าวถึงรายละเอียดเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย และสมรรถภาพของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาด้านเนื้อหาเรขาคณิต ดังต่อไปนี้

1.1 รายละเอียดเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทย ประกอบด้วย

1.1.1 รายละเอียดเนื้อหาทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โครงสร้างกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางเรขาคณิตตามหนังสือเรียนและคู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ที่จัดทำโดย สสวท. ปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031

ค 203 ค 204 ค 011 และ ค 021 ซึ่งสรุปแยกตามรายวิชา (สมพล เล็กสกุล และชูลีพร สุภธีระ. 2538:2-16) ได้ดังนี้

รายวิชา ค 101

เส้นตรงและมุม

1. ลักษณะ สมบัติและการใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม นอกจากนั้นยังมีการใช้สัญลักษณ์แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงและขนาดของมุม

2. สมบัติของจุดและเส้นตรงบางประการ ได้แก่

2.1 มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ลากผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้

2.2 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะได้จุดตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

3. การสร้าง (ใช้เพียงวงเวียนและสันตรง) โดยไม่ต้องเขียนคำอธิบายวิธีสร้าง แต่ต้องแสดงให้เห็นร่องรอยการสร้าง ได้แก่

3.1 สร้างส่วนของเส้นตรงและมุมให้มีขนาดเท่ากับที่กำหนดให้

3.2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงและการแบ่งครึ่งมุม

3.3 การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งมุมออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งมุม

3.4 สร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา 45 องศา และ 60 องศา

3.5 สร้างมุมขนาดต่าง ๆ โดยอาศัยการสร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ 60 องศา และการแบ่งครึ่งมุม เช่น สร้างมุมขนาดเท่ากับ 75 องศาหรือ 135 องศา

3.6 สร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

3.7 สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

3.8 สร้างรูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยมบางรูปให้มีความยาวของด้านหรือขนาดของมุมตามที่กำหนดให้

4. สมบัติที่ควรทราบหลังจากทำแบบฝึกหัด

4.1 เส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งมีเพียงเส้นเดียว

4.2 เส้นตั้งฉากที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกันที่

จุดจุดหนึ่ง

4.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

4.4 เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐานจะตัดกันที่

จุดจุดหนึ่ง

รายวิชา ค 031 เป็นการสร้างเพิ่มเติมจากในรายวิชา ค 101 โดยมีการให้นักเรียนเขียนวิธีสร้างพอสังเขป หรืออย่างละเอียดด้วยความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับการเพิ่มเติมมีดังนี้

การสร้าง

1. การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็น ส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการสร้างมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน
2. สร้างมุมขนาดต่าง ๆ ที่ยากขึ้น เช่น สร้างมุมขนาดเท่ากับ 82.5 องศา โดยใช้ความสัมพันธ์ $82.5 = \frac{120 + 45}{2}$ รวมทั้งสามารถหาขนาดของมุมบางมุมที่สร้างไว้แล้วโดยใช้การวัดด้วย
3. การสร้างรูปสามเหลี่ยมบางรูปที่กำหนดให้มีขนาดของมุมที่สร้างยากขึ้น
4. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและรูปสี่เหลี่ยมอื่น ๆ ในกลุ่มเดียวกัน เช่น รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไป
 - 4.1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ ด้วยการอาศัยสมบัติ "ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นและทำให้ขนาดของมุมแย้งเท่ากันแล้วเส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน"
 - 4.2 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่
 - 4.3 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่และให้ด้านคู่นี้ยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 203

ความเท่ากันทุกประการ

1. บทนิยามของความเท่ากันทุกประการ "รูปสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี"
2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน (สรุป : ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน)
3. มุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากันทุกประการและมุมสองมุมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน (สรุป : มุมสองมุมเท่ากันทุกประการเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน)
4. มุมตรงข้ามที่เกิดจากเส้นตรงตัดกันย่อมมีขนาดเท่ากัน
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อมีความสัมพันธ์แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

6.1 มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้นเท่ากัน (ค.ม.ค)

6.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันนั้นยาวเท่ากัน (ม.ค.ม.)

6.3 มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ (ค.ค.ค.)

7. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว "รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน"

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.1 มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

8.2 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

8.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

รายวิชา ค 204

เส้นขนาน

1. บทนิยามของเส้นขนาน "เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน"

2. สมบัติของเส้นขนาน ได้แก่ เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง

2.1 เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

2.2 เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

2.3 เส้นตรงคู่หนึ่งขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา หรือสองมุมฉาก

4. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว มุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย

5. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 360 องศาหรือสี่มุมฉาก

6. ถ้าต่อต้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป ขนาดของมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

7. สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ม.ม.ด. คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดมีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพิ่มเติมอีกคือ "ถ้าลากเส้นตรงจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐานจะแบ่งครึ่งฐาน"

ความคล้าย

1. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน "รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน"

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

รายวิชา ค 011

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังที่เคยเรียนมา ในระดับมัธยมศึกษาปีที่สองแล้วยังมีอีกแบบหนึ่งที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ของพื้นที่ คือ "ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก"

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส : ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a, b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

วงกลม

1. ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลมได้แก่ จุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลาง ส่วนโค้ง (ใหญ่หรือน้อย) ของวงกลม มุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม เส้นสัมผัสวงกลม

2. สมบัติเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่

- 2.1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก
- 2.2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมี ขนาดเป็นสองเท่า ของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
- 2.3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน
- 2.4 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งทีรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
- 2.5 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางทีรองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
- 2.6 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งทีรองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
- 2.7 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมในส่วนโค้งของวงกลมจะรองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
- 2.8 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือ ส่วนโค้งน้อยเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่เท่ากับส่วนโค้งใหญ่
- 2.9 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็น ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากัน
- 2.10 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น
- 2.11 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
- 2.12 จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย
- 2.13 เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
3. รู้จักวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าบางรูป โดยอาศัยวงกลมและความรู้เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งสามารถหาขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งเท่ากับ $180 \frac{(n-2)}{n}$ องศา
4. สมบัติที่ควรทราบหลังจากทำแบบฝึกหัด
 - 4.1 ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา
 - 4.2 จากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดนั้นมาสัมผัสวงกลม จะลากได้เพียงสองเส้น และส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 021 ที่เน้นการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาทั้งหมดในระดับมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ปีที่สอง และ ค 011 มีดังนี้

1. บทนิยาม : การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต คือการเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง
2. สัจพจน์ : เคลื่อนที่รูปเรขาคณิตได้
3. บทนิยาม : รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท
4. สัจพจน์ : เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกันก็ต่อเมื่อ ผลบวกของขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็น 180 องศา
5. ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต
 - 5.1 สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้ และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้
 - 5.2 ในบรรดาส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงเส้นนั้นจะมีส่วนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นเส้นตั้งฉากและเป็นเส้นที่สั้นที่สุด
 - 5.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปเท่ากันทุกประการ (จ.ด.ด.) คือ "ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ"
 - 5.4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 - 5.4.1 ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน
 - 5.4.2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้ว รูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 - 5.4.3 มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมมีขนาดเท่ากัน
 - 5.4.4 ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 - 5.5 สมบัติบางประการที่สรุปได้จากแบบฝึกหัด
 - 5.5.1 รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 - 5.5.2 เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน
 - 5.5.3 ส่วนของเส้นตรงที่ปิดกันหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากันจะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย

5.5.4 ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

5.5.5 เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมและขนานกับอีกด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกับด้านที่สามที่จุดกึ่งกลางของด้านที่สามนั้น

5.5.6 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

5.5.7 ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไปมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

5.6 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม

5.6.1 เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

5.6.2 คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่งจะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

5.7 สมบัติบางประการที่สรุปได้จากแบบฝึกหัด

มุมที่เกิดจากคอร์ดจรดกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

6. ใช้การพิสูจน์กับรูปที่สร้างขึ้นโดยใช้วงเวียนและสันตรง

6.1 การพิสูจน์กับรูปที่สร้างในตัวอย่าง

6.1.1 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง

6.1.2 การสร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

6.2 การพิสูจน์กับรูปที่สร้างในแบบฝึกหัด

6.2.1 การสร้างส่วนของเส้นตรงที่ลากจากมุมยอดมาตั้งฉากกับฐานในรูปสามเหลี่ยม

6.2.2 การแบ่งครึ่งมุม

6.2.3 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากัน

6.2.4 การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แนบในวงกลม

รายละเอียดเนื้อหาทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ตามหนังสือเรียนและคู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ซึ่งปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 และ ค 011 มีเนื้อหาทางเรขาคณิตในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ คือ เส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยม มุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และวงกลม โดยเนื้อหาเหล่านี้จะไม่เน้น

การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน แต่เป็นการเรียนในลักษณะของการทำกิจกรรมและการทดลองเพื่อให้ได้ข้อสรุป และสำหรับรายวิชา ค 021 นั้นเกี่ยวข้องกับการเรียนรู้สมบัติทางเรขาคณิตที่นักเรียนจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาแล้ว โดยเนื้อหาในส่วนนี้จะเน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน

1.1.2 รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) กลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ได้แบ่งวิชาเลือกเสรี เป็น 2 โครงสร้าง คือโครงสร้าง 1 และโครงสร้าง 2 โดยส่วนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางเรขาคณิตตามหนังสือหลักสูตรได้ปรากฏอยู่ในคำอธิบายรายวิชา ค 031 คณิตศาสตร์ ในโครงสร้างที่ 1 ตามรายละเอียดดังนี้ (กรมวิชาการ, 2535 : 43)

ศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปทางเรขาคณิตในเรื่องวงกลม คอร์ด เส้นสัมผัส รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในและแนบนอกวงกลม เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาและวิธีการให้เหตุผลและรู้จักนำความรู้ทางเรขาคณิตไปใช้ในการแก้ปัญหา

จากรายละเอียดของหลักสูตรและเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา พบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จะมีพื้นความรู้ทางเรขาคณิตที่ต่างกัน เนื่องจากจบระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมาด้วยการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน อาทิ ผู้ที่เรียนเฉพาะวิชาบังคับแกน ผู้ที่เรียนวิชาบังคับแกนและวิชาเลือกเสรี ในรายวิชา ค 031 ผู้ที่เรียนวิชาบังคับแกน รายวิชา ค 011 และ ค 012 ผู้เรียนวิชาบังคับแกน รายวิชา ค 011 ค 012 และ ค 021 เป็นต้น นอกจากนี้ในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ยกเว้นรายวิชา ค 031 เมื่อศึกษาจากหนังสือเรียน คู่มือครูที่จัดทำโดย สสวท. พบว่า ไม่มีส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิตโดยเฉพาะปรากฏอยู่ มีแต่เพียงการนำไปใช้ อาทิ การนำเรื่องสมบัติของเส้นขนานไปใช้ในความรู้อย่างอื่นทางเรขาคณิตวิเคราะห์ การใช้เวกเตอร์ พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต เรื่องวงกลม ไปใช้ในเรื่อง ภาคตัดกรวย เป็นต้น ส่วนวิชาวิทยาศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่า มีการนำเรขาคณิตไปใช้มากในวิชาฟิสิกส์. โดยครูผู้สอนวิชาฟิสิกส์หลายท่านระบุว่า ขณะสอนวิชาฟิสิกส์ผู้สอนต้องทบทวนหรือสอนเพิ่มเติมเนื้อหาเรขาคณิตบางเรื่อง อาทิ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สมบัติของเส้นขนาน สมบัติเกี่ยวกับเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สมบัติเกี่ยวกับวงกลม และการหาขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม

ดังนั้น เพื่อเป็นการเตรียมนักเรียนสำหรับเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และเป็นการปรับพื้นฐานทางเรขาคณิตให้มีเท่าเทียมกัน ผู้วิจัยจึงมีความเห็นว่า ควรจัดเนื้อหาเรขาคณิต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการ

เรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โดยนำลักษณะและโครงสร้างข้างต้นที่กล่าวมาแล้วมาเป็นส่วนหนึ่งในการพิจารณาด้วย

1.2 สมรรถภาพของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาด้านเนื้อหาเรขาคณิต

การกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตในการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ปัจจุบันของไทยไม่มีการกำหนดไว้ชัดเจน แต่จากการวิเคราะห์เนื้อหาเรขาคณิตที่มีการนำไปใช้ในวิชาฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและอุดมศึกษา พบว่า มีการนำเนื้อหาเรขาคณิตไปใช้หลายเนื้อหาด้วยกัน เช่น เรื่องเกี่ยวกับเส้นขนาน รูปหลายเหลี่ยม ความคล้าย ความเท่ากันทุกประการ การเขียนรูป การสมมาตร ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการเลื่อนทางขนาน เป็นต้น

ส่วนในต่างประเทศ ก็มีหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกับการส่งเสริมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน เพื่อให้มีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้น ตัวอย่าง เช่น ในสหรัฐอเมริกา เมื่อปี ค.ศ. 1989 NCTM ได้จัดทำหนังสือมาตรฐานหลักสูตรและการประเมินผลสำหรับคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน โดยกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาเรขาคณิตที่ควรเน้น แยกตามเกรตดังนี้

เกรต 5 - 8 ให้เพิ่มความรู้เรขาคณิต ทางด้านพัฒนาความเข้าใจและความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต การนำเรขาคณิตไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยลดความรู้ทางด้าน การจำศัพท์ทางเรขาคณิต การจำข้อเท็จจริงและความสัมพันธ์ต่าง ๆ (NCTM. 1989 : 70-71) เน้นให้นักเรียนค้นพบความสัมพันธ์และการพัฒนาความคิดทางมิติสัมพันธ์ โดยการสร้าง การวาด การวัด การสร้างภาพนามธรรม การเปรียบเทียบ การแปลง และการจำแนกรูปเรขาคณิต การเรียนการสอนเรขาคณิตเน้นกิจกรรมการสำรวจ การตั้งข้อคาดเดา การสืบเสาะหาเหตุผล อย่างไม่เป็นทางการ (NCTM. 1989 : 112-115) ทั้งนี้ การเรียนเรขาคณิต เกรต 5-8 นี้ ต้องเรียนเรขาคณิตในหลายสถานการณ์ ของมิติเดียว สองมิติ และสามมิติ ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถ

- จำแนก อธิบาย เปรียบเทียบ และจัดหมวดหมู่ของรูปเรขาคณิตได้
- พัฒนาความสามารถทางมิติสัมพันธ์ โดยใช้รูปเรขาคณิตเป็นตัวแทนของปัญหา
- สำรวจการแปลงของรูปเรขาคณิต
- เข้าใจและประยุกต์ใช้สมบัติและความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตได้
- พัฒนาความเข้าใจเพื่อใช้เรขาคณิตเป็นแนวทางในการอธิบายโลกทางกายภาพ

เกรต 9 - 12 ให้เพิ่มความรู้เรขาคณิตทางด้านบูรณาการระหว่างเนื้อหาเรขาคณิตของทุกระดับ เรขาคณิตระบบพิกัดฉากและการแปลง จัดลำดับทฤษฎีบทอย่างสั้น แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยโดยปากเปล่าและในรูปข้อความหรือบทความ สำรวจรูปสองมิติและสามมิติ โดยใช้คอมพิวเตอร์ เรขาคณิตสามมิติ การสร้างรูปแบบเพื่อประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง โดยลดความรู้ด้านเรขาคณิตระบบยูคลิดอย่างเป็นระบบ เรขาคณิตจากการสังเคราะห์ การพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ รูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลมและวงกลมแนบในรูปหลายเหลี่ยม ทฤษฎีบท

ของวงกลมที่เกี่ยวกับอัตราส่วนของเซกเมนต์ และเรขาคณิตวิเคราะห์ ที่เปิดสอนแยกเป็นอีกหนึ่งวิชา (NCTM. 1989 : 126-127) วิธีสอนควรเพิ่มการวิเคราะห์รูปสามมิติ การใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ช่วยในการเรียนเป็นสิ่งสำคัญที่ช่วยให้เข้าใจ และมองเห็นได้รวมถึงรูปบนระนาบได้เป็นอย่างดี เนื่องจากซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางด้านกราฟฟิกช่วยให้ นักเรียนมีความคิดริเริ่ม และใช้รูปร่างในการตั้งข้อคาดเดา และพยายามที่จะทดสอบข้อคาดเดาจากการมองเห็นรูปสองมิติ (NCTM. 1989 : 158-159 ; Burger & Culpepper. 1993 ; 151-152)

ทั้งนี้ในเกรด 9 -12 ยังเป็นการศึกษาต่อเนื่องของเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถ

- ตีความและวาดรูปวัตถุสามมิติ
- แก้ปัญหา โดยใช้แบบจำลองทางเรขาคณิตและประยุกต์ใช้สมบัติของรูป
- ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการและความคล้าย
- พัฒนาความเข้าใจระบบสัจพจน์ โดยผ่านการสืบสวนและเปรียบเทียบเรขาคณิต

ที่หลากหลาย (NCTM. 1989 : 112 - 115 ,126 , 157-162)

นอกจากนี้ เบล (Bell. 1981 : 18-80) กล่าวว่า เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลายควรมีเนื้อหาใน 2 ลักษณะ คือ

1. สัจพจน์และบทนิยามของยูคลิด ที่ปรับปรุงแล้ว เน้นการให้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและแบบนิรนัย รวมทั้งเรขาคณิตพิกัดฉาก วิธีสังเคราะห์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต

2. การศึกษาเรขาคณิตการแปลง ในหนังสือเรียนยังคงมีเรขาคณิตระบบยูคลิด แต่การแปลง อาทิ การสะท้อน และการหมุน ให้นำเข้ามาสอนเพื่อเรียนรู้สมบัติทางเรขาคณิต

ตัวอย่างของแบบเรียนเรขาคณิต สำหรับนักเรียนเกรด 9 -12 อาทิ

คลีเมนส์และคณะ (Clemens & others. 1994) ได้ร่วมกันเขียนหนังสือเรขาคณิต สำหรับนักเรียนเกรด 9-12 โดยเลือกเรียนเพียง 1 ปี ช่วงเวลาเรียนปกติ 180 วัน มีเนื้อหา 12 บทดังนี้

1. ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต
2. การพิสูจน์เบื้องต้น
3. การขนานกันของเส้นและระนาบ
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
5. การนำความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้กับรูปสี่เหลี่ยม
6. ความคล้าย
7. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
8. วงกลม
9. การสร้างเบื้องต้น และทางเดินของจุด

10. พื้นที่และปริมาตรของรูปหลายเหลี่ยม

11. พื้นที่ผิวและปริมาตร

12. เรขาคณิตระบบพิกัดฉาก

เซอรา (Serra. 1993) ได้เขียนหนังสือเรขาคณิต ชื่อ Discovering Geometry: An Inductive Approach สำหรับนักเรียนเกรด 9-12 เลือกเรียน 1 ปี ช่วงเวลาเรียนปกติ 180 วัน เช่นกัน ซึ่งกิจกรรมในหนังสือเรียนเน้นให้นักเรียนเรียนรู้โดยการปฏิบัติด้วยตนเอง ใช้การค้นพบแบบแนะแนวทางอย่างไม่เป็นทางการ (Informal Guided-Discovery Approach) สอดคล้องกับวิธีการเรียนการสอนเรขาคณิตของ แวน ฮีลี มีเนื้อหา 16 บท ดังนี้

1. เรขาคณิตกับศิลปะ
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย
3. แนะนำเรขาคณิต
4. การสร้างทางเรขาคณิต
5. การค้นพบในเรขาคณิต
6. ความเท่ากันทุกประการ
7. วงกลม
8. การแปลงและเทสเซลเลชัน
9. พื้นที่
10. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
11. ปริมาตร
12. ความคล้าย
13. ตรรกณิต
14. การให้เหตุผลแบบนิรนัย
15. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต 1
16. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต 2

จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาทั้งหมด ผู้วิจัยมีแนวคิดว่าควรกำหนดกรอบเนื้อหาเรขาคณิตเป็นสมรรถภาพที่ครอบคลุมส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแก่นระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
2. ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาเลือกเสรีระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
3. ความรู้เพิ่มเติมทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

นอกจากนี้แล้วควรมีการนำซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์มาช่วยในการเรียนการสอนเรขาคณิต กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเห็นเพื่อนำไปสู่การสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลต่อไป

2. การเรียนการสอนเรขาคณิต

เนื่องจากนักเรียนส่วนมากมีปัญหาไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยเฉพาะการพิสูจน์ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงมีครูและนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านได้พยายามศึกษาและค้นคว้าเพื่อแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนเรขาคณิต ในปี ค.ศ.1954 สามิและภรรยาชาวเนเธอร์แลนด์ เพียร์ แวนฮีลี (Pierre Van Hiele) และ ไดนา แวน ฮีลี (Dina Van Hiele) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการรับรู้ทางเรขาคณิตเป็นผลให้ได้ แวนฮีลีโมเดล หรือเป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่า ระดับชั้นของ แวน ฮีลี เกี่ยวกับพัฒนาการทางความคิดเรขาคณิต (The Van Hiele Levels of Geometric Thought) ซึ่งเป็นขั้นกระบวนการคิดในการเรียนเรขาคณิต โดยเริ่มจากง่ายไปหายาก ดังต่อไปนี้ (Serra. 1989 : 4 ; Thomas. 1992 : 71-86 ; Clements & Battista. 1992 : 421-428 ; Burger & Culpepper. 1993 : 140-142)

1. ขั้น 0 หรือขั้นพื้นฐาน : การสร้างภาพนามธรรม

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถเรียนรู้ศัพท์และจดจำ (Vocabulary and Recognizes) ได้ จากรูปร่าง ที่มองเห็น แต่ไม่สามารถบอกลักษณะย่อยที่มีความสัมพันธ์ระหว่างภายในรูปและระหว่างรูปที่มองเห็นได้

2. ขั้น 1: การวิเคราะห์

เป็นขั้นที่นักเรียนรับรู้และสามารถวิเคราะห์หมโนมติเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตได้ชัดเจนมากขึ้น จากการสังเกต การวัด การสร้างรูปและแบบจำลอง แต่ไม่สามารถเชื่อมโยงลักษณะของรูปหนึ่งกับอีกรูปหนึ่งได้

3. ขั้น 2 : การพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อยเกี่ยวกับสมบัติของรูปต่าง ๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันได้ รวมทั้งบอกลักษณะที่แตกต่างกันได้ แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจบทบาทของสัจพจน์และการเชื่อมโยงของข้อความต่าง ๆ โดยใช้ตรรกศาสตร์

4. ขั้น 3 : การพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ค้นเคยกับการพิสูจน์โดยทราบว่าจะอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ รู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล รู้ว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นได้อย่างไร อาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้มากกว่าหนึ่งวิธี

5. ขั้น 4 : ขั้นสุดยอด

เป็นขั้นที่นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่าง ๆ เช่น การเปรียบเทียบ สัจพจน์ ทฤษฎีบท และ เรขาคณิตนอกระบบยูคลิด จัดทฤษฎีบทต่าง ๆ เข้าเป็นระบบ ระเบียบและสร้างทฤษฎีบท

แวน ฮิลี ได้ระบุสมบัติของพัฒนาการทางความคิดเรขาคณิตดังกล่าว (Crowley. 1987 : 4) ไว้ดังนี้

1. นักเรียนจะต้องผ่านระดับขั้นของความคิดจากขั้นแรกไปสู่ขั้นที่สูงกว่า โดยไม่มีการข้ามระดับ
2. การที่นักเรียนจะผ่านแต่ละระดับขั้นขึ้นขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีสอนมากกว่าอายุ ไม่มีวิธีสอนใดที่จะทำให้นักเรียนข้ามระดับได้ เช่น ข้ามจากขั้น 0 ไปเป็นขั้น 3 ไม่ได้
3. ลักษณะของสิ่งที่อยู่ในระดับหนึ่งจะกลายเป็นสิ่งที่ต้องศึกษาในระดับถัดไป เช่น ในขั้น 0 เพียงรู้จักรูป ถึงแม้ว่าสามารถแยกรูปได้โดยสมบัติ แต่ก็ยังไม่ได้จนกว่าจะถึงขั้น 1 จึงจะวิเคราะห์รูปและองค์ประกอบของรูป และค้นพบสมบัติต่าง ๆ
4. ในแต่ละระดับจะมีลักษณะเฉพาะของภาษาที่ใช้ และมีลักษณะของการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับภาษาที่ใช้
5. ถ้าใช้การสอนของระดับที่สูงกว่า ไปสอนนักเรียนที่อยู่ระดับต่ำกว่าแล้ว ความก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียนจะไม่เกิดขึ้น

จะเห็นได้ว่าระดับขั้นของ แวน ฮิลี มีความสำคัญต่อการศึกษาและการนำไปใช้ในการเรียนการสอนเรขาคณิต และเป็นที่เชื่อกันว่าความล้มเหลวต่าง ๆ ในการเรียนการสอนเรขาคณิตปัจจุบันมีส่วนมาจากการจัดการเรียนการสอนที่ไม่คำนึงถึงระดับขั้นของ แวน ฮิลี

แวน ฮิลี ได้เสนอแนะลำดับขั้นวิธีสอนที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถยกระดับความคิดทางเรขาคณิตจากขั้นหนึ่งไปอีกขั้นหนึ่ง (Crowley. 1987 : 5-6 ; Burger & Culpepper. 1993: 142-147) ได้อย่างรวดเร็ว และราบรื่นไว้ 5 ลำดับ ดังนี้

1. การให้ข้อมูล (Information)

ครูสนทนากับนักเรียน มีการแนะนำคำศัพท์ แจกจุดประสงค์ ตั้งคำถาม แล้วสังเกตการตอบของนักเรียน ซึ่งจุดประสงค์ของขั้นนี้มี 2 ประการ คือ เพื่อให้ครูได้รู้พื้นความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อที่จะเรียนต่อไป และนักเรียนได้รู้แนวทางของหัวข้อที่จะเรียนต่อไป

2. การแนะนำโดยตรง (Directed Orientation)

ครูจัดสื่อหรืออุปกรณ์ให้นักเรียนได้สำรวจตามกิจกรรม ซึ่งเป็นลักษณะแนะนำแนวทางตามที่ครูกำหนดอย่างสั้น ๆ

3. การแสดงความคิดเห็น (Explication)

ครูส่งเสริมให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็น เพื่อสรุปและทำความเข้าใจในมโนทัศน์นั้น ๆ ในขั้นนี้ครูจะมีบทบาทน้อยที่สุดเป็นเพียงผู้ช่วยแก้คำศัพท์หรือช่วยให้นักเรียนใช้ศัพท์คณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง

4. การศึกษาอย่างอิสระ (Free Orientation)

ครูกำหนดปัญหาที่ท้าทาย สลับซับซ้อน เพื่อให้ให้นักเรียนนำความรู้ที่มีมาใช้แก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ ดังนั้นนักเรียนจึงต้องสืบเสาะ และค้นพบวิธีที่จะแก้ปัญหาด้วยวิธีของตนเอง

5. การบูรณาการ (Integration)

นักเรียนนำความรู้ที่ได้จากข้อ 1-4 มาผนวกเข้าด้วยกันเพื่อสร้างข้อสรุปโดยภาษาคณิตศาสตร์ ครูมีบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงออกถึงความรู้ทางเรขาคณิตที่นักเรียนเข้าใจเพื่อนำไปใช้ได้ง่าย

ทั้งนี้ได้มีงานวิจัยหลายชิ้นที่สนับสนุนว่า ระดับขั้นของ แวน ฮีลี เป็นรูปแบบความคิดทางเรขาคณิตที่ถูกต้อง และสามารถประเมินความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียนตามรูปแบบนี้ได้ นอกจากนี้ยังแสดงว่าสื่อและวิธีการสอนนั้นสามารถออกแบบให้เหมาะสมกับระดับขั้น ในลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนผ่านแต่ละระดับไปได้อย่างรวดเร็วและราบรื่น (Mayberry. 1981 ; Burger. 1985; Shaughnessy & Burger. 1985 ; Burger & Shaughnessy. 1986 ; Fuys, Geddes & Tischler. 1988 : 5)

จากการศึกษาเกี่ยวกับลำดับขั้นการสอนเพื่อยกระดับความคิดทางเรขาคณิตของ แวน ฮีลี จะพบว่า การเน้นให้นักเรียนมีโอกาสดำเนินการสำรวจด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความรู้ใหม่นั้น ตรงกับที่ เบล (Bell. 1981:241) ได้กล่าวว่า เป็นการเรียนการสอนแบบค้นพบ (Discovery Learning) ซึ่ง พรหมณี ข.เจนจิต (2538 : 386-388) ได้สรุปไว้ว่า การสอนแบบค้นพบ หมายถึง การสอนที่นักเรียนได้รับการแนะนำจากครูอย่างมีขอบเขตจำกัดหรือแทบไม่มีเลย ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนแก้ปัญหา และในการสอนให้นักเรียนแก้ปัญหาได้นั้น มีอยู่ 4 ลักษณะ คือ

1. การเรียนที่ครูให้ทั้งหลักเกณฑ์และผลลัพธ์โดยครูทำให้ดูเป็นตัวอย่างและให้นักเรียนทำตามตัวอย่าง ซึ่งเป็นการสอนแบบแสดงให้ดู (Expository Teaching)
2. ครูให้หลักเกณฑ์แนวทางที่จะแก้ปัญหาได้ แต่ไม่บอกผลลัพธ์ให้ นักเรียนเป็นผู้หาคำตอบเอง
3. ครูไม่ให้หลักเกณฑ์แต่บอกผลลัพธ์ให้ นักเรียนจะต้องเป็นผู้ค้นหาหรือสรุปกฎเกณฑ์ได้ด้วยตนเอง
- ลักษณะที่ 2 และ 3 เรียกว่า การค้นพบโดยแนะแนวทาง (Guided Discovery)
4. ครูไม่ให้ทั้งหลักเกณฑ์และผลลัพธ์ นักเรียนต้องเป็นผู้ค้นคว้าด้วยตนเองทั้งสิ้น เรียกว่า การค้นพบโดยไม่แนะแนวทาง (Unguided Discovery)

แนวคิดของการให้นักเรียนค้นพบสมบัติทางเรขาคณิตเองนี้ยังตรงกับที่ ยูพิน พิพิธกุล (2530 : 75-77) ได้กล่าวถึงวิธีการสอนเรขาคณิต ในส่วนของการสอนทฤษฎีบทว่าต้องมีขั้นตอนหนึ่งคือ ให้นักเรียนได้ค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป

นอกจากการเรียนแบบการค้นพบโดยแนะแนวทางแล้ว วิลสัน (Wilson, Jame W. 1997 : 14) กล่าวว่าวิธีเรียนหนึ่งที่เหมาะสมกับการเรียนในวิชาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ทุกระดับ คือการเรียนแบบร่วมมือ ในลักษณะการเรียนเป็นกลุ่มถกเถียงอภิปรายร่วมกันเพื่อหาข้อสรุป ซึ่งส่งผลให้นักเรียนจำเนื้อหาที่เรียนได้ในระยะยาว

นิเวน (Niven. 1987 : 37) ได้ให้ข้อเสนอแนะของการนำเรขาคณิตเข้ามาสอนในระดับมัธยมศึกษาไว้ 9 ประการ ดังต่อไปนี้

1. สอนเรขาคณิตเบื้องต้นในแบบเดียวกับการสอนพีชคณิตเบื้องต้นและแคลคูลัสเบื้องต้น โดยไม่เน้นในสิ่งที่เกินความจำเป็นหรือกฎเกณฑ์ที่เข้มงวดก่อน
2. ในการเขียนหนังสือหรือบทเรียนควรเขียนถึงแก่นของเรขาคณิตให้เร็วที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้
3. ใช้วิธีการของพีชคณิตและเรขาคณิตวิเคราะห์ เช่นเดียวกับวิธีการของยูคลิด
4. ใช้รูปหรือแผนผังในการอธิบายโดยเฉพาะอย่างยิ่งในการพิสูจน์
5. นำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และปรากฏการณ์ในชีวิตจริง
6. ลดการใช้คำที่เยิ่นเย้อหลีกเลี่ยงการให้รายละเอียดกับสิ่งที่เห็นได้ชัดว่าจริง
7. เลื่อนหรือเลื่อนการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ยากไปก่อน
8. หนังสือหรือบทเรียนควรมีปัญหาที่มีความยากปานกลางจำนวนมากให้นักเรียนได้ฝึก
9. บอกให้นักเรียนทราบถึงเรื่องราวทั้งหมดของการแบ่งมุมใดๆ ออกเป็นสามส่วน

เดรฟัสและฮาดาส (Dreyfus & Hadas. 1987 : 47-58) กล่าวว่า หลัก 6 ประการที่นักคณิตศาสตร์และครูผู้สอนเรขาคณิตเข้าใจอย่างชัดเจน แต่นักเรียนโดยทั่วไปไม่เข้าใจ ได้แก่

1. ทฤษฎีบทจะเป็นจริงเสมอ โดยไม่มีข้อยกเว้น
2. ข้อความที่เห็นได้ชัดว่าจริงหรือการรับรู้จากภาพเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอในการพิสูจน์ แต่การรับรู้จากภาพและการวัดยังเป็นยุทธวิธีที่สำคัญสำหรับการค้นพบสมบัติทางเรขาคณิต

3. การพิสูจน์ต้องครอบคลุมทุกกรณี แต่การยกตัวอย่างค้าน(Counter Example) จะช่วยนักเรียนให้เข้าใจได้ลึกซึ้ง
4. ในทฤษฎีบทอะไรเป็นสิ่งที่กำหนดให้ อะไรเป็นข้อสรุป
5. บทกลับของทฤษฎีบทไม่จำเป็นต้องถูกต้องเสมอไป
6. การวิเคราะห์องค์ประกอบพื้นฐานต่างๆ ของรูปที่ซับซ้อนได้หรือวางอยู่ในตำแหน่งต่างไปจากที่คุ้นเคย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการเรียนการสอนเรขาคณิตเท่าที่ค้นคว้าพบ ส่วนมากเป็นการวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบปกติกับวิธีสอนแบบต่างๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ลัดดา เต็มดุ่ม (2532) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบใช้สื่อประสมที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเส้นขนานและความคล้าย และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา ปีการศึกษา 2531 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนจากการสอนแบบใช้สื่อประสม ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังการสอนดีกว่าก่อนการสอนโดยใช้สื่อประสมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี (2535) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนปทุมเทพวิทยาคาร จังหวัดหนองคาย ปีการศึกษา 2535 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองได้รับการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01

อารีย์ คำปล้อง (2536) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบปฏิบัติการที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมบัติที่เกี่ยวกับวงกลมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนอิสลามวิทยาลัยแห่งประเทศไทย จังหวัดกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2535 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้การสอนแบบปฏิบัติการ ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01

คิปฟิงเกอร์ (Kipfinger. 1990 : 488-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบปฏิบัติการที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเรขาคณิต ของนักเรียนเกรด 6 รัฐแคลิฟอร์เนีย สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ. 1990 ผู้วิจัยใช้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้การสอนแบบปฏิบัติการ ส่วนกลุ่ม

ควบคุมเรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง แตกต่างกับกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ทอมสัน (Thompson. 1992 : 2724-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบร่วมมือในกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมตามระดับชั้นของ แวน ฮิลลี ที่ใช้กระดานและดินสอ และแบบร่วมมือในกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมตามระดับชั้นของ แวน ฮิลลี ที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ความคงทนและเจตคติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 5 โรงเรียน ในรัฐมอนทานา สหรัฐอเมริกา ผู้วิจัยแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็น 3 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 เรียนโดยใช้การสอนแบบร่วมมือในกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมตามลำดับชั้นของ แวน ฮิลลี ที่ใช้กระดานและดินสอ

กลุ่มที่ 2 เรียนโดยใช้การสอนแบบร่วมมือในกลุ่มขนาดเล็กพร้อมกิจกรรมตามลำดับชั้นของ แวน ฮิลลี ที่ใช้คอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์

กลุ่มที่ 3 เรียนโดยใช้การสอนแบบปกติในกลุ่มขนาดใหญ่พร้อมกิจกรรมตามลำดับชั้นของ แวน ฮิลลี ที่ใช้วิธีตามแบบเรียน

ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่ 1 และ 2 สูงกว่ากลุ่มที่ 3 เล็กน้อย ในด้านเจตคติพบว่า ทั้งสามกลุ่มไม่แตกต่างกัน ส่วนในด้านความคงทนพบว่ากลุ่มที่ 1 มีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มที่ 3

สแตนส์เบอร์รี่ (Stansberry. 1996 : 963-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้การสอนแบบผสมและการสอนแบบปกติที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจาก 5 โรงเรียน รัฐโคโลราโด สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ. 1996 ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มหนึ่งเรียนโดยใช้การสอนแบบผสมซึ่งประกอบด้วยการใช้เหตุผลแบบนิรนัย การประยุกต์ใช้ การใช้ซอฟต์แวร์ และการทำงานเป็นกลุ่ม ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งเรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า

1. คะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบผสม

2. คะแนนเฉลี่ยของการประยุกต์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบผสมสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

3. คะแนนเฉลี่ยเจตคติต่อการแก้ปัญหา ทักษะในเชิงสร้างสรรค์ การมีส่วนร่วม และความเข้าใจในเรขาคณิตของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบผสมสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ข้อสรุปว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการ ดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียนให้ชัดเจน
 2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานเดิมของสิ่งที่จะเรียนต่อไป
 3. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม เช่น กำหนดกิจกรรมโดยใช้สื่อที่นักเรียนได้ปฏิบัติจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ
 4. จัดกิจกรรมที่เหมาะสมให้กับนักเรียน เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปโนมตีหรือแก้ปัญหาโจทย์ รวมทั้งสนับสนุนให้นักเรียนมีกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ อภิปรายร่วมกันเพื่อหาข้อสรุปด้วย
 5. การสอนมีทั้งการแสดงให้เห็นและเน้นการศึกษาด้วยตนเอง เพื่อให้นักเรียนเกิดการค้นพบโดยแนะแนวทาง แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปกฎเกณฑ์และสิ่งที่เห็นว่าสำคัญ ซึ่งมีใบงานประกอบการเรียน
 6. พัฒนาจินตนาการทางเรขาคณิตและเพิ่มพูนความรู้ โดยการยกปัญหาที่ท้าทาย ปัญหาในสถานการณ์ที่เป็นจริงหรือปัญหาที่แปลกใหม่ ให้นักเรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหา
- ทั้งนี้ การเรียนการสอนเรขาคณิตยังต้องอาศัยบทบาทของครูในการกำหนดกิจกรรมการวางขั้นตอนที่เหมาะสม รวมทั้งบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการที่จะเรียนรู้สิ่งต่างๆ และให้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองเพื่อค้นพบสิ่งใหม่ๆ ซึ่งเป็นสิ่งท้าทายความสามารถ ความอยากรู้อยากเห็นตามลักษณะของวัยของนักเรียน เพื่อให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น และยังส่งผลให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีจินตนาการพร้อมที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ

3. การใช้คอมพิวเตอร์สำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิตและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากการพัฒนาด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าไปอย่างรวดเร็ว การเรียนการสอนหรือการฝึกอบรมทางวิชาการแทบทุกสาขาได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น โดยอาศัยความสามารถของคอมพิวเตอร์มาพัฒนาสื่อการสอนที่มีประสิทธิภาพ เพื่อเพิ่มผลสัมฤทธิ์ในการเรียนการสอนให้สูงขึ้น ทั้งนี้ประโยชน์ที่เห็นได้ชัด เช่น ช่วยสาธิตแทนผู้สอน ช่วยการฝึกทักษะ ช่วยจำลองสถานการณ์ (ผดุง อารยะวิญญู. 2527 : 44-47) สามารถสอนมโนมติและทักษะขั้นสูงที่ยากแก่การสอน คำนวณได้อย่างรวดเร็ว นักเรียนจึงเรียนได้เร็วและถูกต้อง สร้างแรงกระตุ้นและแรงจูงใจในการเรียน (ยุพิน พิพิธกุล และ อรพรรณ ตันบรรจง. 2535 : 160) ลดเวลาในการเรียนซึ่งเป็นประโยชน์ต่อผู้สอนที่จะทำให้ให้นักเรียนมีเวลาในการศึกษาเรื่องต่าง ๆ ได้หลากหลายขึ้น (Hall. 1982 : 362) นอกจากนี้ยังสามารถจดจำได้นานและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาที่เรียน (สุรางค์ โค้วตระกูล. 2536 : 240)

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้คอมพิวเตอร์เพื่อการเรียนการสอน การสังเคราะห์งานวิจัยทางด้านการสอนใช้คอมพิวเตอร์ช่วย (Computer Assisted Instruction: CAI) ในไทยในช่วงปี พ.ศ. 2528-2536 (สมบุรณ์ บุรศิริรักษ์. 2539) รวมทั้งบทความเกี่ยว

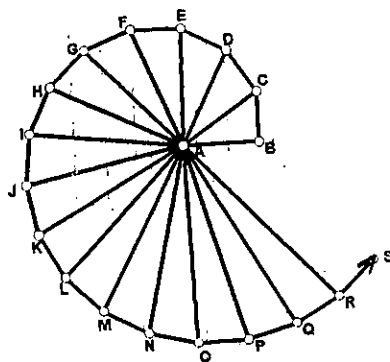
กับการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการเรียนการสอน พบว่า การพัฒนาบทเรียนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยมี 3 ลักษณะ คือ

1. พัฒนาบทเรียนโดยการสร้างด้วยโปรแกรมภาษาทางคอมพิวเตอร์ เช่น พัฒนาโดยใช้ภาษา Basic, Fortran, PASCAL, Visual C, Visual Basic เป็นต้น ปัญหาที่พบในกรณีนี้คือ ผู้พัฒนาต้องมีความรู้และประสบการณ์ทางคอมพิวเตอร์สูงและใช้เวลาในการพัฒนามาก

2. พัฒนาบทเรียนจากโปรแกรมบทเรียน (Authoring System) เช่น โปรแกรมไทยทัศน์ 2.0 โปรแกรม Authorware Professional ซึ่งโปรแกรมเหล่านี้มีความสามารถนำเสนอข้อความบนภาพกราฟฟิก มีรูปแบบตัวอักษรต่าง ๆ ที่มีภาพสามมิติ ลดความยุ่งยากในการใช้คำสั่งต่าง ๆ นำเสนอเนื้อหา ตัวอย่างการคำนวณ การตัดสินใจ การสร้างภาพและเสียงประกอบคำถาม และการฝึกปฏิบัติ แต่ปัญหาที่พบ คือ ผู้พัฒนาส่วนมากจะสร้างเป็นบทเรียนสั้น ๆ แต่การพัฒนารูปภาพทางเรขาคณิตประกอบการคำนวณต้องใช้เวลามากและต้องมีความรู้เชื่อมโยงโปรแกรมเข้าด้วยกัน

3. พัฒนาจากโปรแกรมสำเร็จรูป ที่มีจำหน่ายทั่วไป ที่เหมาะสมกับงานแต่ละงาน เช่น Microsoft Excel เหมาะกับการคำนวณในลักษณะแถวหรือหลัก Microsoft Word เหมาะสำหรับการทำเอกสาร Microsoft PowerPoint เหมาะสำหรับการแสดงผลงาน ทั้งนี้เหมาะสำหรับงานธุรการหรืองานทางธุรกิจ Mathematica Mathcad และ Matlab ทั้งสามโปรแกรมเหมาะกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ สามารถใช้ได้ในแง่ของสัญลักษณ์ การเขียนกราฟของฟังก์ชันและฟังก์ชันแฝง (Implicit Function) การคำนวณ ของแคลคูลัสและคณิตศาสตร์ชั้นสูง

สำหรับการเรียนการสอนเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สิริพร ทิพย์คง (2537 : 237) ได้กล่าวไว้ว่า ควรเป็นการเรียนการสอนที่เน้นการให้เหตุผลแบบนิรนัยและการพิสูจน์ ซึ่งเป็นขั้นที่ 3 ของระดับขั้น แวน ฮีลี ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอแนะของ NCTM. (1989 : 157) ที่ว่านักเรียนควรมีทักษะในการมองเห็น การนำเสนอ รูปภาพต่าง ๆ และการนำความรู้ทางเรขาคณิตไปอธิบายและตอบคำถามเกี่ยวกับปรากฏการณ์ธรรมชาติและสิ่งต่าง ๆ รวมทั้งการนำไปใช้แก้ปัญหา คอมพิวเตอร์กราฟิกจึงได้เข้ามามีบทบาทโดยมีซอฟต์แวร์หรือโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการเขียนรูปต่าง ๆ บนจอภาพของคอมพิวเตอร์ โดยในระยะแรก ๆ โปรแกรมภาษา Logo ซึ่งพัฒนาโดย โบลท์ (Bolt) เบราน์เนค (Beranek) นิวแมน (Newman) และสถาบันเทคโนโลยีปัญญาประดิษฐ์แห่งแมสซาชูเซต (Massachusetts Institute of Technology Artificial Intelligence Laboratory) สหรัฐอเมริกา เมื่อประมาณปี ค.ศ. 1960 เป็นการใช้ความสามารถของคอมพิวเตอร์กราฟิกแสดงภาพรูปร่างสามเหลี่ยมเล็ก ๆ ที่เรียกว่า เต่า เคลื่อนไหวเป็นรูปเรขาคณิต ซึ่งส่งเสริมการเรียนรู้โดยการค้นพบ พัฒนาความสามารถทางการแก้ปัญหา และสนับสนุนการสอนเรขาคณิต (Kenny. 1987 : 84) ทั้งนี้ผู้ใช้ภาษา Logo ต้องมีความรู้ทางภาษาและเขียนโปรแกรมอย่างง่าย ๆ การเคลื่อนไหวของรูปจะเกิดขึ้นเมื่อผู้ใช้เขียนโปรแกรม



ตัวอย่างถ้าต้องการให้ได้รูปดังข้างบน ผู้ใช้ต้องเขียนโปรแกรม (Kenny. 1987 : 90-91) ดังนี้

Main Driver Procedure

TO TWHEEL

MAKE "S1

RT 90

FD 20

LT 90

FD 20

BUILD:S

END

Sub Procedure

TO BUILD:S

IF:S>16 THEN STOP

SETH TOWARD 00

FD 20 * SQRT(:S + 1)

BK 20 * SQRT(:S + 1)

RT 20

FD 20

BUILD:S + 1

END

ด้วยความยุ่งยากดังกล่าว จึงได้มีผู้พัฒนาซอฟต์แวร์สำเร็จรูป ซึ่งผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องมีความรู้ทางภาษาคอมพิวเตอร์โดยมีลักษณะเป็นเครื่องมือที่อำนวยความสะดวกต่อการสร้างรูปและทรงเรขาคณิตต่าง ๆ มีค่าตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณที่ถูกต้องไม่ว่าจะอยู่ในลักษณะใด ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสามารถเกิดความรู้เข้าใจที่ง่ายและรวดเร็วขึ้น ซอฟต์แวร์ที่สามารถพบเห็นโดยทั่วไป ได้แก่ Geometry Supposers, GeoDraw, CABRI Geometry, และ GSP เป็นต้น (NCTM. 1992 : 537-538) ซึ่งแต่ละซอฟต์แวร์ต้องการให้นักเรียนผ่าน 3 ระดับแรกของ แวนฮิลลี ในการสนับสนุนการค้นพบสอดคล้องอย่างมากกับการค้นพบทางคณิตศาสตร์ นั่นคือนักคณิตศาสตร์เริ่มจากการมองเห็น วิเคราะห์ปัญหา สร้างข้อคาดเดาก่อนที่จะพยายามพิสูจน์หรือหาเหตุผลยืนยันการค้นพบ

รายละเอียดของซอฟต์แวร์ข้างต้นมีดังนี้

1. Geometry Supposers เป็นซอฟต์แวร์ที่พัฒนาขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1985 โดย ซวาทซ์ (Schwartz) และ เยรูซาลมี (Yerushalmy) เพื่อใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์รุ่น แอปเปิล ทู (Apple II) ทั้งนี้เป็นจุดเริ่มต้นของการเปลี่ยนแปลงการสอนเรขาคณิต โดยใช้ซอฟต์แวร์ที่มีลักษณะเป็น

ซอฟต์แวร์เคลื่อนไหวได้ ซึ่งใช้ความสามารถของคอมพิวเตอร์กราฟิกในการทำให้รูปต่าง ๆ เกิดการเคลื่อนไหวตามความต้องการของผู้ใช้

2. GeoDraw พัฒนาขึ้นเมื่อ ค.ศ. 1987 เหมาะกับการสร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้นบนกระดานเรขาคณิต (Geoboard)

3. CABRI Geometry พัฒนาขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1989 โดย เกรเบิล (Greable) ชาวฝรั่งเศส เหมาะที่จะใช้ในการสร้างรูปเรขาคณิตและง่ายต่อการใช้ ในปัจจุบันมีการนำซอฟต์แวร์นี้มาผนวกเข้ากับเครื่องคิดเลขของบางบริษัท

4. GSP พัฒนาขึ้นเป็นครั้งแรกเมื่อปี 1991 โดย นิโคลัส แจคคิว (Nicholas Jachiw) ทั้งนี้อยู่ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual Geometry Project) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Foundation: NSF) ซึ่งมี ดร. ยูจีน คลอทซ์ (Dr.Eugene Klotz) จากวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swarthmore College) และ ดร. ดอริส ซาท์ชไนเดอร์ (Dr.Doris Schatschneider) จากวิทยาลัย มอราเวียน (Moravian College) ของมหาวิทยาลัยเพนซิลวาเนีย (Pennsylvania University) แห่งสหรัฐอเมริกา เป็นหัวหน้าซอฟต์แวร์นี้ครั้งแรกพัฒนาขึ้นเป็นรุ่นเบต้า (Beta Version) ในลักษณะทดลองเพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช (Macintosh) และพัฒนาขึ้นเพื่อใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์พีซีที่ใช้ ระบบปฏิบัติการแบบวินโดวส์ (Windows) ในปี ค.ศ. 1993 ปัจจุบันได้พัฒนาขึ้นเป็น GSP ในปี ค.ศ.1995 และด้วยเงินทุนสนับสนุนของ NSF ในการพัฒนาซอฟต์แวร์และสำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม (Key Curriculum) ในการจัดพิมพ์สื่อสิ่งพิมพ์ที่สนับสนุนการใช้ GSP ทำให้ GSP มีการใช้แพร่หลายในโรงเรียนของสหรัฐอเมริกา และมีการเปิดเว็บไซต์ในอินเทอร์เน็ต เพื่อให้ผู้ใช้ GSP ส่งข่าวสารมาเผยแพร่และแลกเปลี่ยนข้อมูลต่าง ๆ ดร. เจมส์ ดับบลิว วิลสัน (James W. Wilson) ได้กำหนดให้ GSP เป็นซอฟต์แวร์หนึ่งที่ใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาโทและปริญญาเอกของมหาวิทยาลัยจอร์เจีย (Geogia University) สหรัฐอเมริกา ขณะนี้ได้มีนักศึกษาหลายคนกำลังใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการวิจัย ซึ่งทำให้การใช้ GSP แพร่หลายมากขึ้น

จากการที่ GSP เป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูป ที่นำมาใช้ในเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อให้ นักเรียนได้สำรวจความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต นักเรียนจะเห็นการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตด้วยการกระทำของตัวเอง ในลักษณะการสร้าง และมีความสามารถทางการแปลง (Transformation Capabilities) ที่ขยายขอบเขตของการทำได้กว้างขวางหลายรูปแบบ รวมถึงการเคลื่อนไหวของรูปเรขาคณิตเกือบทันทีที่ได้รับคำสั่ง ซึ่งไม่เคยปรากฏในซอฟต์แวร์อื่น ๆ ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำ GSP มาให้นักเรียนใช้เพื่อช่วยดึงดูดความสนใจ และเอื้อต่อการสร้างรูปเรขาคณิตได้ถูกต้องอย่างรวดเร็ว

งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ทั้งในและต่างประเทศที่มีเผยแพร่ส่วนใหญ่เป็นไปในลักษณะของ การสอนใช้คอมพิวเตอร์ช่วย หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า คอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งเป็นการเขียนซอฟต์แวร์เพื่อสอนเฉพาะเนื้อหาบางจุดประสงค์ การเคลื่อนไหวของรูปเรขาคณิตทำได้น้อย ส่วนมากมีลักษณะเป็นการทบทวนและฝึกทักษะ มีมากในวิชาคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ แต่ในวิชาเรขาคณิตมีค่อนข้างน้อย ในส่วนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำ GSP ซึ่งปัจจุบันได้พัฒนาเป็น GSP ที่พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ. 1993 ได้ค้นพบงานวิจัยที่นำ GSP มาใช้ในการเรียนการสอนเรขาคณิตดังนี้

ฟอเลททา (Foletta. 1995 : 2311-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการสอนโดยใช้ GSP ในการเรียนการสอนเรื่องการสำรวจพื้นที่โดยวิธีแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangulation) ของนักเรียนเกรด 9 และ 10 รัฐไอโอวา สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ.1944 ผลการวิจัยพบว่า

1. การวาด การวัด หรือการสำรวจของนักเรียนจะเกิดจากการผลักดันของครู
2. GSP เป็นเครื่องมือใหม่ของการเรียนรู้ทางเรขาคณิต นักเรียนใช้ GSP ในส่วนที่เพิ่มเติมจากใช้กระดาษและดินสอ
3. การสืบเสาะโดยใช้ GSP สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำจะต้องมีขั้นตอนมากกว่า

4. นักเรียนจะต้องตั้งข้อาคัดเตาได้ตั้งแต่เริ่มใช้ GSP ในการสืบเสาะ

เฟอริงกิง (Frerking. 1995 : 3772-A) ได้ศึกษาวิจัยความสัมพันธ์ระหว่างระดับชั้นของ แวน ฮิลลี ผลสัมฤทธิ์ทางการพิสูจน์และการตั้งข้อาคัดเตาในการเรียนโดยใช้ GSP ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา รัฐจอร์เจีย สหรัฐอเมริกา ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองซึ่งเป็นนักเรียนจำนวน 2 ห้อง 58 คน เรียนโดยใช้ GSP ช่วยในการตั้งข้อาคัดเตาสมบัติของรูปเรขาคณิต ส่วนกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียน 1 ห้อง 27 คน เรียนโดยการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถทางการตั้งข้อาคัดเตา และตรวจสอบข้อาคัดเตานั้นสัมพันธ์กับความสามารถทางการพิสูจน์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตสัมพันธ์กับระดับชั้นของ แวน ฮิลลี

โรบินสัน (Robinson. 1996 : 4309-A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ ความสามารถทางคณิตศาสตร์และยุทธวิธีในการแก้ปัญหาในการเรียนเรื่องการเดินทางของจุดของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแห่งหนึ่ง รัฐฟลอริดา สหรัฐอเมริกา โดยใช้ GSP เป็นเครื่องมือเมื่อปี ค.ศ.1994 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ GSP ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยใช้การสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความสามารถไม่แตกต่างกัน แต่จากการสังเกตพบว่า หลังจากการเรียนโดยใช้ GSP แล้วทำให้นักเรียนเรียนการสร้างโดยใช้กระดาษและดินสอได้ และจากการสัมภาษณ์พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองซึ่งเดิมไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์บางข้อได้ แต่หลังจากเรียนโดยใช้ GSP แล้วสามารถทำได้

เลสเตอร์ (Lester. 1996 : 2343-A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการสอนโดยใช้ GSP ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐแคลิฟอร์เนีย สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ.1996 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้ GSP ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนตามแบบปกติโดยไม่ใช้คอมพิวเตอร์ ดินสอ ไม้โปรแทรกเตอร์ และวงเวียน ผลการวิจัยพบว่า

1. ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับความรู้ทางเรขาคณิตและการสร้างของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05
2. ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับการตั้งข้อาคเตทางเรขาคณิตของกลุ่มทดลอง สูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

แมคดักกัล (McDougall. 1996) แห่งมหาวิทยาลัยโตรอนโต แคนาดา ได้ศึกษาเรื่องความต้องการการเรียนรู้ของครูคณิตศาสตร์ในการใช้คอมพิวเตอร์สอนเรขาคณิต โดยใช้ GSP มาให้ครูได้ทดลองใช้ พบว่า ครูต้องการที่จะมีความสามารถในการสำรวจคณิตศาสตร์ได้ มีกิจกรรมร่วมกัน การอภิปราย การศึกษารายกรณี การแลกเปลี่ยนข้อาคเต และการค้นพบ โดยใช้ซอฟต์แวร์ที่เคลื่อนไหวได้

โยเซฟ (Yousef. 1997 : 1631-A) ได้ศึกษาวิจัยผลการใช้ GSP มีผลต่อเจตคติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ลงทะเบียนเรียนวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น โรงเรียนเซาท์เวสเทิร์น รัฐโอไฮโอ สหรัฐอเมริกา ปี ค.ศ.1996-1997 ผู้วิจัยให้กลุ่มทดลองเรียนด้วยกิจกรรมสำรวจโดยใช้ GSP ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนด้วยกิจกรรมสำรวจโดยใช้กระดาษและดินสอ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ชอย (Choi. 1997 : 406-A) ได้ศึกษาเรื่อง การเรียนรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือ โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อ สืบเสาะ การพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตตามระดับชั้นของ แวน ฮิลลี ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา โดยใช้ GSP เป็นเครื่องมือ พบว่า

1. มีความสัมพันธ์กัน ระหว่างระดับชั้นของ แวน ฮิลลี กับ ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์
2. ระดับชั้นของแวนฮิลลี สามารถพัฒนาไปสู่การเรียนรู้แบบการสร้างภาพนามธรรมอย่างง่าย
3. การใช้ GSP ช่วยให้การสร้างมีประสิทธิภาพ ช่วยในกระบวนการแก้ปัญหา ส่งเสริมความสนใจของนักเรียน ช่วยให้เรียนเรื่องที่ยากซับซ้อนได้และประหยัดเวลาการเรียนรู้

นอกจากงานวิจัยดังกล่าวแล้ว ยังมีบทความที่เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิตโดยการใช้ซอฟต์แวร์ GSP จากข้อเขียนของบุคคลต่าง ๆ อาทิ

แมคกีฮี (McGehee. 1998 : 204-208) ได้สนับสนุนคำกล่าวของแบททิสตา และคลีเมนส์ (Battista & Clements. 1995 : 48-54) ที่ว่า "การใช้ซอฟต์แวร์ในหลักสูตรเรขาคณิต

ระดับมัธยมศึกษา ควรจะมีการแนะแนวทางให้นักเรียนได้เรียนรู้โมเดลที่สำคัญและน่าสนใจ" ด้วยการเขียนบทความเกี่ยวกับการใช้เทคโนโลยีในการสอน ปัญหาตั้งเดิมทางเรขาคณิต และ ยกตัวอย่างปัญหา วงกลมอะพอลโลเนียส (Apollonius' circle) แล้วใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการสอน โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนได้เพิ่มพูนประสบการณ์ของวิธีการที่จะหาความรู้

ชิลกาลิส (Shilgalis. 1998 : 162-165) ได้กล่าวถึงการนำ GSP มาประยุกต์ใช้ในการเพิ่มพูนความรู้ที่หลากหลายของการหาคำตอบ โดยการใช้การสืบเสาะด้วยการเคลื่อนไหวของรูป ทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่าการใช้กระดาษและดินสอ ส่งผลให้นักเรียนสนุกต่อการเรียนรู้และยังได้มาซึ่งความเข้าใจและการแก้ปัญหา

กาลินโด (Galindo. 1998 : 76-82) กล่าวว่า การใช้ GSP ช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตสำรวจความสัมพันธ์ของรูปเหล่านั้น ตั้งข้อาคตเดา สมบัติต่าง ๆ และทดสอบข้อาคตเดานั้น ๆ เป็นกิจกรรมที่ทำให้นักเรียนเรียนรู้การให้เหตุผลอย่างมีความหมาย ไม่ใช่การพิสูจน์แบบตั้งเดิมที่เขียนตามกันมา นักเรียนสามารถสร้างความเชื่อมโยงระหว่างการสร้างรูปโดยใช้ซอฟต์แวร์กับรูปทางเรขาคณิตตามความคิดที่ใช้ในการพิสูจน์ได้ จะเป็นผู้ที่เข้าใจเรขาคณิตได้อย่างลึกซึ้ง

ทั้งนี้ยังมีบทความอีกมากที่เขียนโดยยกตัวอย่างปัญหาทางเรขาคณิตแล้วใช้ GSP ในการสอนซึ่งสรุปได้สอดคล้องกันว่า GSP เป็นเครื่องมือที่ทำให้ผู้เรียนสามารถสำรวจและสร้างความสัมพันธ์ทางความคิดในทางเรขาคณิตจากการวิเคราะห์ สังเคราะห์ และการแปลง เป็นเครื่องมือที่ทำให้ผู้เรียนสามารถทดลองได้เอง วิเคราะห์มองเห็นภาพได้ชัดเจน ทดลองสร้างปรับเปลี่ยนได้อย่างรวดเร็วทำได้หลายครั้งจนกว่าจะพอใจ ซอฟต์แวร์นี้สามารถใช้แทนกระบวนการที่สร้างบนกระดาษได้อย่างสมบูรณ์ หรือการแก้ปัญหาในวิธีการที่ไม่สามารถสร้างด้วยดินสอและกระดาษได้ สามารถโต้ตอบระหว่างผู้เรียนกับซอฟต์แวร์ได้ มีการเคลื่อนไหวให้เห็นได้ชัดเจนและรวดเร็ว จากผลการสอนผู้เรียนส่วนใหญ่มีความพึงพอใจและมีความเข้าใจได้ดีและลึกซึ้ง มีความคงทนในความรู้ มีเจตคติที่ดี สามารถให้เหตุผลได้ สามารถสร้างข้อาคตเดาต่าง ๆ ก่อนการพิสูจน์ สามารถเห็นข้อแตกต่างของสิ่งที่คาดเดาระหว่างความมีเหตุผลและไม่มีเหตุผลในการพิสูจน์ (Stone. 1994 : 590-594 ; Finzer & Bennett. 1995 : 428-431 ; Giamati. 1995: 456-458 ; Sanders. 1995 : 119-126 ; Scher. 1996 : 330-332 ; Zbiek. 1996 : 86-90)

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการทำวิจัยครั้งนี้ สรุปได้ว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์มีพื้นฐานความรู้เรขาคณิตที่ต่างกัน แต่เรขาคณิตเป็นเนื้อหาหนึ่งที่มีความจำเป็นต้องนำมาใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ในการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และจากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับเนื้อหาเรขาคณิต ผู้วิจัยจึง

ได้แนวคิดว่าควรกำหนดกรอบเนื้อหาเรขาคณิตเป็นสมรรถภาพที่ครอบคลุมความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแก่นระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาเลือกเสรีระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ความรู้เพิ่มเติมทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ แล้วนำมาสร้างเป็นแบบสอบถามเพื่อตรวจสอบสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต นำผลที่ได้จากการตรวจสอบมากำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ ขอบเขตของเนื้อหาในบทเรียน จากนั้นในการสร้างบทเรียนผู้วิจัยเห็นว่าควรใช้ลำดับขั้นวิธีสอนของแวนฮิลล์ อันได้แก่ การให้ข้อมูล การแนะนำโดยตรง การแสดงความคิดเห็น การศึกษาอย่างอิสระ และการบูรณาการ ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะวิธีสอนแบบการค้นพบโดยแนะแนวทางผนวกกับการเรียนแบบร่วมมือ อันเป็นวิธีการเรียนการสอนเช่นเดียวกับที่ NCTM ได้เสนอแนะไว้ว่า การเรียนการสอนเรขาคณิตที่เหมาะสมควรให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ นอกจากนี้จากการที่ NCTM ได้กล่าวไว้ว่า ควรใช้ซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมมาช่วยในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังนั้นจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ผู้วิจัยจึงเห็นว่าควรนำ GSP ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้สำหรับการสร้างและการวัดขนาดของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ มาเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ตามกิจกรรมการเรียนรู้ดังกล่าวข้างต้น

ดังนั้น ในการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ครอบคลุมความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยจึงกำหนดให้บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิต ซึ่งสอดคล้องกับสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ และสร้างขึ้นตามแบบหน่วยการเรียนรู้ มีการกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียนอย่างชัดเจน ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานเดิมของสิ่งที่จะเรียนต่อไป กิจกรรมการเรียนรู้ที่มีปรากฏในบทเรียนเป็นแบบค้นพบโดยแนะแนวทาง เน้นให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมโดยลงมือปฏิบัติเอง ในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสม เพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับดังนี้

1. การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิต เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 จำนวน 42 คน ซึ่งได้จากการอาสาสมัคร และแบ่งออกตามระดับผลการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เป็น 3 กลุ่ม คือกลุ่มที่อยู่ในระดับสูง ปานกลางและต่ำ โดยใช้นักเรียนในการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

1.1 การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้นักเรียน 3 คน ที่ได้จากการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนที่เป็นอาสาสมัคร และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 1 คน

1.2 การทดลองกลุ่มย่อย ใช้นักเรียน 9 คน ที่ได้จากการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนที่เป็นอาสาสมัคร โดยไม่เป็นนักเรียนในข้อ 1.1 และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 3 คน

1.3 การทดลองภาคสนาม ใช้นักเรียน 30 คน เป็นนักเรียนอาสาสมัครที่เหลือจากการทดลองสองครั้งแรก และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 10 คน

การเลือกใช้นักเรียนข้างต้นเป็นกลุ่มตัวอย่าง เพราะโรงเรียนสามเสนวิทยาลัยเป็นโรงเรียนขนาดใหญ่พิเศษ มีนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ทั้งหมดประมาณ 1000 คน ประกอบด้วยนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลากหลายตั้งแต่ระดับสูงจนต่ำ มีอาสาสมัครตามลักษณะที่กำหนดและมีอุปกรณ์การเรียนเช่นคอมพิวเตอร์มากพอที่จะดำเนินการทดลองไปจนจบการทดลอง

2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

1. บทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ พร้อมทั้งคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

2. เครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ประกอบด้วย แบบฝึกปฏิบัติระคน และ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

ขั้นตอนของการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ผู้วิจัยดำเนินการ 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 4 การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

แต่ละขั้นตอนได้ดำเนินการภายใต้การควบคุมและให้คำปรึกษาของคณะกรรมการควบคุมการทำปฏิญานินพนธ์ ตามรายละเอียดดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต

ผู้วิจัยประสงค์ที่จะสร้างบทเรียนเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ในการสร้างบทเรียนดังกล่าว สิ่งแรกที่จะต้องพิจารณาคือสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต เพื่อนำมาเป็นแนวทางกำหนดจุดประสงค์ปลายทาง เนื้อหา และกิจกรรมการเรียนรู้ แต่สมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ในประเทศไทยยังไม่มีมีการระบุเป็นลายลักษณ์อักษรที่ชัดเจน ดังนั้นผู้วิจัยจึงศึกษาสังเคราะห์เอกสารเพื่อกำหนดกรอบแนวคิดของสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต และตรวจสอบกรอบแนวคิดของสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตดังกล่าว โดยการสำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการตามลำดับขั้น ดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาเรขาคณิต จากเอกสารต่างๆ ตามที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 หนังสือเรียนและเอกสารอื่น ๆ ได้แก่

1.1 หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์และคู่มือครูที่จัดทำโดย สสวท. ในรายวิชา ค 101 (สสวท. 2536ก) ค 203 (สสวท. 2537ก) ค 204 (สสวท. 2536ข) ค 031 (สสวท. 2536ค) ค 011 (สสวท. 2540) และ ค 021 (สสวท. 2537ข) ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

1.2 คำอธิบายรายวิชา ค 031 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จากหนังสือหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ที่จัดทำโดยกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535)

1.3 ตำราเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษาหลายเล่ม ที่สำคัญ ได้แก่

- 1.3.1 Geometry Revisited (Coxeter. & Greitzer. 1981)
- 1.3.2 Excursion in Advanced Euclidean Geometry (Posamentier. 1984)
- 1.3.3 Solving Problem in Geometry (Gusev. & Mordkovich. 1988)
- 1.3.4 Problems in Plane Geometry (Sharygin, I.F. 1988)
- 1.3.5 Discovering Geometry an Inductive Approach (Serra. 1993)
- 1.3.6 Geometry (Clemens. et al. 1994)
- 1.3.7 Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry (Hoss. 1995)

1.4 ตำราคณิตศาสตร์ ที่แสดงการนำเรขาคณิตไปใช้ในชีวิตประจำวัน ได้แก่ Career Mathematics (Lyng, Meconi & Zwick. 1989)

1.5 หนังสือเรียนและคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ ที่จัดทำโดย สสวท ที่นำเรขาคณิตไปใช้ เช่น หนังสือเรียนและคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม หนังสือเรียนและคู่มือครูวิชาฟิสิกส์ (สสวท. 2535 ; 2536ง)

1.6 ตำราฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษาหลายเล่ม ที่สำคัญ ได้แก่

- 1.6.1 ฟิสิกส์ 2 (อนันตสิน เตชะกำพุช, พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์ และ พรชัย พัทธินทรตะนกุล. 2538)
- 1.6.2 Classical Mechanics (Barger & Olsson. 1995)
- 1.6.3 Physics for Scientists and Engineers (Fishbane, Gasiorowicz & Thornton. 1993)
- 1.6.4 Basic Principles of Physics (Mohindroo. 1990)
- 1.6.5 Physics. (Resnick, Halli & Krane. 1992)
- 1.6.6 Modern Physics. (Rohlf. 1994)

จากผลการศึกษาหนังสือเรียนและเอกสารดังกล่าวข้างต้น ทำให้ได้ขอบเขตของเนื้อหาเรขาคณิตเพื่อกำหนดเป็นสมรรถภาพดังนี้

- ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแกน ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาเลือกเสรี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

-ความรู้เพิ่มเติมทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

2. สร้างแบบสอบถามในลักษณะเป็นหัวข้อเนื้อหาเรขาคณิต โดยกำหนดเป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ซึ่งได้จากการศึกษาเอกสารในข้อ 1.

3. นำแบบสอบถามที่ได้จากข้อ 2. ไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตจำนวน 3 ท่าน ตามรายชื่อในภาคผนวก ก ตรวจสอบความเที่ยงตรง ในการพิจารณาหาสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ซึ่งมีการกำหนดเป็นคะแนน ดังนี้

3.1 ถ้าแน่ใจว่าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตนั้นจำเป็นสำหรับนักเรียน ให้คะแนน 1

3.2 ถ้าไม่แน่ใจว่าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตนั้นจำเป็นสำหรับนักเรียน ให้คะแนน 0

3.3 ถ้าแน่ใจว่าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตนั้นไม่จำเป็นสำหรับนักเรียน ให้คะแนน -1

นำผลการประเมินของผู้เชี่ยวชาญแต่ละคนที่ให้คะแนนแต่ละข้อมาหาดัชนีความสอดคล้อง (Index of Objective Congruence: IOC) ในสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตแต่ละข้อ

ถ้าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตข้อใดได้ดัชนีความสอดคล้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0.60 ก็แสดงว่าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตนั้นจำเป็นสำหรับนักเรียน ถ้าสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตข้อใดได้ดัชนีความสอดคล้องต่ำกว่า 0.60 ก็จะกำจัดออกไปหรือนำไปปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้น สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นตามที่กำหนดไว้ในขั้นตอนนี้ได้นำเสนอไว้ในบทที่ 4

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

1. การสร้างบทเรียนเรขาคณิต มีรายละเอียดตามลำดับ ดังนี้

1.1 นำสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาเป็นพื้นฐานแนวทางในการสร้างเป็นบทเรียน โดยใช้สมรรถภาพหลักหนึ่งสมรรถภาพ เป็นแนวทางในการกำหนดเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ของหน่วยการเรียนรู้หนึ่งหน่วย ใช้สมรรถภาพย่อยเป็นแนวทางกำหนดจุดประสงค์ปลายทาง จุดประสงค์นำทางที่ใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ ตลอดจนการประเมินผลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

ในหน่วยการเรียนรู้แต่ละหน่วย จะประกอบด้วยหน่วยการเรียนรู้ย่อยเรียงลำดับจากง่ายไปยาก ทั้งนี้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่มีเนื้อหาสอดคล้องกับเนื้อหาเรขาคณิตในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแก่นและวิชาเลือกเสรี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จะมีลักษณะเป็น

การทบทวนหรือนำเสนอเนื้อหาส่วนใหญ่อย่างรวบรัด ทั้งยังเป็นการตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์และความหมายต่างๆ ให้เข้าใจตรงกัน มีใบงานแนะแนวทางให้นักเรียนฝึกการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเตา สืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเตานั้นโดยลงมือปฏิบัติเองตามกิจกรรมในใบงาน ในส่วนของการนำเสนอเนื้อหาใหม่อื่นๆ ผู้วิจัยได้กำหนดกิจกรรมของบทเรียนในลักษณะการสำรวจตามข้อความแนะแนวทาง ตั้งข้อาคัดเตา สืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเตาด้วยตนเอง อีกทั้งพยายามเสนอคำถามเพื่อให้นักเรียนเกิดจินตนาการและคิดเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิต และมีแบบฝึกปฏิบัติที่เป็นโจทย์ที่น่าสนใจให้นักเรียนฝึกฝนเอง ทั้งนี้ครูยังมีความสำคัญในด้านการจัดเตรียมกิจกรรม การกระตุ้นให้นักเรียนปฏิบัติ ตอบข้อซักถามและการช่วยให้นักเรียนสรุปเนื้อหา

1.2 กำหนดและเขียนโครงร่างของบทเรียนเรขาคณิต

บทเรียน แบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ประกอบด้วยรายการต่อไปนี้

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ เป็นชื่อที่ตั้งตามสมรรถภาพหลัก

หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย เป็นหัวข้อที่ตั้งขึ้นตามสมรรถภาพย่อยของแต่ละสมรรถภาพหลัก

ความรู้พื้นฐาน (ถ้ามี) เป็นความรู้ที่นักเรียนต้องมีความรู้มาก่อนที่จะเรียนหน่วยการเรียนรู้ นั้น ๆ

จุดประสงค์ปลายทาง เป็นจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดจากสมรรถภาพย่อยของแต่ละสมรรถภาพหลัก ซึ่งจะเป็นการกำหนดขอบเขตของเนื้อหาวิชาในหน่วยการเรียนรู้ทั้งใช้เป็นแนวทางในการวัดผลด้วยแบบปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

คำชี้แจง เป็นคำอธิบายรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้ นั้น ๆ

แต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อยประกอบด้วย รายการต่อไปนี้

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย เป็นชื่อที่ตั้งตามหัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

หัวข้อย่อยของเนื้อหา (ถ้ามี) เป็นหัวข้อย่อยของเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย

จุดประสงค์นำทาง เป็นจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดจากสมรรถภาพย่อย ซึ่งเมื่อนักเรียนผ่านจุดประสงค์นำทางแล้วจะนำให้นักเรียนไปสู่จุดประสงค์ปลายทางในที่สุด

ใบงาน เป็นการนำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้ ส่วนใหญ่เป็นกิจกรรมที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

แบบฝึกปฏิบัติ (ถ้ามี) เป็นแบบฝึกปฏิบัติที่ให้นักเรียนทบทวนความรู้ความเข้าใจ นำความรู้จากใบงานมาใช้แก้ปัญหาค้นหา และเป็นการฝึกทักษะ ซึ่งเปิดโอกาสให้

นักเรียนทำโดยอิสระ อาจทำที่บ้าน หรือในห้องเรียนที่มีคอมพิวเตอร์ หรือในคาบที่เปิดให้ใช้ห้องเรียนที่มีคอมพิวเตอร์

สาระสำคัญ ในลักษณะสรุปเนื้อหาที่นักเรียนควรต้องทราบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ไว้ตอนท้ายของหน่วย

1.3 จากโครงร่างที่ได้จากข้อ 1.2 นำมาสร้างเป็นร่างบทเรียนเรขาคณิต

1.4 นำร่างบทเรียนเรขาคณิตที่ปรับปรุงได้จากข้อ 1.3 ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิมเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสมและความสอดคล้องในการจัดกิจกรรมกับจุดมุ่งหมายและเนื้อหาของร่างทั้งหมด

1.5 ปรับปรุงร่างบทเรียนเรขาคณิตตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในข้อ 1.4 และเพิ่มเติมรายละเอียดในร่างบทเรียนเรขาคณิต รวบรวมเป็นบทเรียนเรขาคณิตที่พร้อมที่จะนำไปทดลองใช้เพื่อตรวจสอบหาประสิทธิภาพ

2. การสร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์สำหรับครูและนักเรียนเพื่อเป็นแนวทางในการใช้ซอฟต์แวร์อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพ มีรายละเอียดการสร้างตามลำดับ ดังนี้

2.1 ศึกษาและทดลองใช้ GSP ตามคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ซึ่งเป็นภาษาอังกฤษ ได้แก่

2.1.1. Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad. (Bennett. 1996)

2.1.2. Geometry Through the Circle with The Geometer's Sketchpad (King. 1996)

2.1.3. Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad (Key Curriculum. 1995)

2.1.4. Exploring Conic Sections with The Geometer's Sketchpad. (Scher. 1995)

2.1.5. User Guide and Reference (Key Curriculum. 1995)

ศึกษาจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนค้นคว้าบทความในหนังสือวารสารและบทความในเว็บเพจ (web page) ต่างๆ ที่มีแนะนำไว้ในเว็บเพจของ คีย์เพรสจุตคอม (<http://www.keypress.com>) ซึ่งเป็นเว็บเพจของสำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์รี่-คิวลัม นอกจากนี้ยังมีบทความในเว็บเพจต่าง ๆ ของมหาวิทยาลัยที่เปิดสอนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ศึกษา

2.2 นำผลการศึกษาจากข้อ 2.1 มาเป็นพื้นฐานแนวทางในการเขียนโครงร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ สำหรับครูและนักเรียนโดยมีรายละเอียดในคู่มือตามลำดับหัวข้อ ดังนี้

2.2.1 บทนำ

2.2.2 อุปกรณ์ที่จำเป็น

2.2.3 วิธีการใช้ซอฟต์แวร์

2.2.4 ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น

2.2.5 ปัญหาและอุปสรรคที่อาจเกิดขึ้น

2.3 จากโครงร่างที่ได้จากข้อ 2.2 มาสร้างเป็นร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

2.4 นำร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ที่ได้จากข้อ 2.3 ให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ด้านการใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 2 ท่าน ตามรายชื่อในภาคผนวก ก ตรวจสอบเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของร่างทั้งหมด

2.5 ปรับปรุงร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในข้อ 2.4 และเพิ่มเติมรายละเอียดรวบรวมเป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ที่พร้อมจะนำไปผนวกกับบทเรียนเรขาคณิตเพื่อนำไปทดลองใช้

3. การสร้างคู่มือครู สำหรับครูเพื่อเป็นแนวทางในการเตรียมการสอนและในการสอนให้ดำเนินไปอย่างราบรื่นและมีประสิทธิภาพ มีรายละเอียดของการสร้างคู่มือครู ดังนี้

3.1 กำหนดโครงร่างของคู่มือครู ในส่วนหน้าของเล่มประกอบด้วย คำชี้แจงการใช้คู่มือครูและบทเรียนเรขาคณิต กำหนดคาบการสอน ต่อจากนั้นเป็นรายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย จำนวนคาบที่ใช้สอน จำนวนหน่วยการเรียนรู้ย่อย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย พร้อมด้วยคำอธิบายที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา หรือแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนให้บรรลุผล แนวทางคำตอบของใบงาน และแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ กิจกรรมเสริมซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมเสนอแนะ หรือปัญหาชวนคิดต่างๆ ที่จะมีแทรกตามความเหมาะสม โดยจุดประสงค์ปลายทางและจุดประสงค์นำทางของแต่ละหน่วยเรียนนั้นได้มีปรากฏแล้วในบทเรียน สำหรับกิจกรรมที่มีปรากฏในใบงานของบทเรียน ได้จัดทำไว้เป็นการเสนอแนะให้ครูได้เลือกใช้ หรือดัดแปลงให้เหมาะสมกับนักเรียนและสภาพห้องเรียน ส่วนกิจกรรมเสริมที่มีปรากฏในคู่มือครูนี้ มีไว้ให้ครูได้เลือกให้นักเรียนทำ หรือเป็นแนวทางให้ครูได้สร้างกิจกรรมเพิ่มเติมในลักษณะเช่นนี้ เพื่อให้นักเรียนจะได้ฝึกคิดควบคู่ไปกับความสนุกสนาน ซึ่งอาจช่วยกระตุ้นให้นักเรียนชอบเรียนเรขาคณิตมากขึ้น

3.2 จากโครงร่างที่ได้จากข้อ 3.1 นำมาสร้างเป็นร่างคู่มือครู

3.3 นำร่างคู่มือครูที่ได้จากข้อ 3.2 ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิม ตรวจสอบเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของร่างทั้งหมด

3.4 ปรับปรุงร่างคู่มือครูตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในข้อ 3.3 และเพิ่มเติมรายละเอียดในร่างคู่มือครู

3.5 นำร่างคู่มือครูที่ได้จากข้อ 3.4 ให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ทางการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน ตามรายชื่อในภาคผนวก ก ตรวจสอบความถูกต้องของแนวคำตอบต่าง ๆ

3.6 ปรับปรุงแก้ไขร่างคู่มือครูตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในข้อ 3.5 แล้วรวบรวมเป็นคู่มือครูที่พร้อมจะนำไปทดลองใช้ร่วมกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

เนื่องจากจำเป็นต้องมีการวัดผล 2 ลักษณะ คือวัดหาค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียนเรขาคณิตโดยคิดจากค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้จากการทำกิจกรรมตามแบบฝึกปฏิบัติที่กำหนดในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งได้กำหนดเป็นคะแนนของแบบฝึกปฏิบัติระดับคน และวัดหาค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม โดยคิดจากค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ดังนั้นจึงกำหนดลักษณะและวิธีการสร้างตลอดจนกำหนดเกณฑ์การตรวจให้คะแนนแต่ละข้อ ตามลำดับขั้นต่อไปนี้

1. ขั้ววางแผนและร่างแบบฝึกปฏิบัติระดับคน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

ผู้วิจัยได้นำเนื้อหาและจุดประสงค์ปลายทางที่กำหนดไว้ มาเป็นแนวทางในการสร้างแบบฝึกปฏิบัติระดับคน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ให้มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา และสอดคล้องตามจุดประสงค์ปลายทาง ซึ่งทำให้ได้แบบฝึกปฏิบัติระดับคน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต มีลักษณะดังนี้

1.1 แบบฝึกปฏิบัติระดับคน เนื่องจากโจทย์ที่มีลักษณะเป็นแบบอัตนัยจะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความสามารถของตนเองตามกระบวนการเรียนอย่างเต็มที่ ต่างจากโจทย์ที่มีลักษณะเป็นแบบปรนัยซึ่งอาจจะสกัดกั้นความคิดที่หลากหลาย มีข้อจำกัดของการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเตา และสืบเสาะหาเหตุผล ดังนั้นจึงได้กำหนดให้โจทย์เป็นแบบอัตนัยทุกข้อในแบบฝึกปฏิบัติระดับคนแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ทั้งนี้โจทย์หนึ่งข้ออาจประกอบด้วยจุดประสงค์ปลายทางหลายจุดประสงค์ เพื่อให้ครอบคลุมเนื้อหาที่นักเรียนได้ศึกษาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งแบบฝึกปฏิบัติระดับคนนั้นผู้วิจัยได้กำหนดเวลาในการทำและให้ทำในคาบเรียนที่จัดไว้พร้อมกัน เพราะข้อจำกัดด้านเวลาของการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของโรงเรียน และไม่ต้องการให้นักเรียนนากลับไปทำที่บ้านหรือในคาบอิสระเพื่อขจัดปัญหากรณีที่มิบุคคลภายนอกมาช่วยนักเรียนทำ แต่เปิดโอกาสให้นักเรียนอภิปรายซักถามกันได้กับเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนปฏิบัติในการเรียนบทเรียนเรขาคณิตและไม่ทำให้นักเรียนเกิดความเครียดจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระดับคน

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เนื่องจากต้องการวัดหาค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวมในด้านความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาเรขาคณิตที่ต้องการให้ครอบคลุมทุกจุดประสงค์ปลายทางของทุกหน่วยการเรียนรู้ ในขณะเดียวกันก็ต้องการให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความสามารถของตนเองอย่างหลากหลายตามกระบวนการเรียนอย่างเต็มที่ ดังนั้น

จึงได้กำหนดให้โจทย์จึงมีลักษณะเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือกและแบบอัตนัยปนกัน การทดสอบนักเรียนโดยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตกระทำเหมือนการทดสอบปกติ คือมีการจำกัดเวลาและห้ามนักเรียนสื่อสารระหว่างกันในช่วงของการทดสอบ

2. ขั้นตอนคุณภาพของแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

เนื่องจากบทเรียนเรขาคณิตนี้ มีเนื้อหาบางส่วนที่ไม่เคยปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ไต่ระดับมัธยมศึกษามาก่อน ทั้งยังมุ่งส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ โดยพฤติกรรมเหล่านี้ควรจะเกิดจากการให้ผู้เรียนได้เรียนตามเนื้อหาและกิจกรรมที่กำหนดไว้ในบทเรียน อีกทั้งยังไม่มีนักเรียนกลุ่มอื่นที่ได้เรียนตามเนื้อหาของบทเรียนเรขาคณิตนี้มาก่อน ดังนั้นการวิเคราะห์คุณภาพของแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตดังกล่าว จึงทำได้เพียงขอให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิมทำการตรวจสอบความเที่ยงตรงตามเนื้อหาและความเหมาะสมของเครื่องมือเท่านั้น หลังการตรวจสอบของผู้เชี่ยวชาญ ผู้วิจัยเป็นผู้พิจารณาความคิดเห็นและข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ แล้วจึงทำการปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญดังกล่าว หลังจากปรับปรุงจนแล้วเสร็จในที่สุด ได้แบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ที่มีลักษณะดังนี้

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นโจทย์แบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ ใช้เวลาทำ 2 คาบ คาบละ 50 นาที

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เป็นโจทย์แบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ ใช้เวลาทำ 1 คาบ คาบละ 50 นาที

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เป็นโจทย์แบบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ ใช้เวลาทำ 2 คาบ คาบละ 50 นาที

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตแบ่งเป็น ข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 30 ข้อ และข้อสอบแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ ใช้เวลาทำ 2 คาบ คาบละ 50 นาที

3. ขั้นตอนการทำเฉลยแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต พร้อมทั้งกำหนดเกณฑ์การตรวจให้คะแนนและรูปแบบการตรวจให้คะแนน

ผู้วิจัยจัดทำเฉลยแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต พร้อมทั้งกำหนดเกณฑ์การตรวจให้คะแนน แล้วให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิม ตรวจสอบความถูกต้องของเฉลยแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต พร้อมทั้งความเหมาะสมของเกณฑ์การตรวจให้คะแนน แล้วปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตดังกล่าว

สำหรับรูปแบบการตรวจให้คะแนน เนื่องจากแบบฝึกปฏิบัติระคนและบางส่วนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตมีลักษณะเป็นแบบอัตนัย ดังนั้นผู้วิจัยจึงกำหนดรูปแบบการตรวจให้คะแนนสำหรับข้อสอบแบบอัตนัยแต่ละข้อไว้ดังนี้คือ การตรวจให้คะแนนและตัดสินคะแนนตามเกณฑ์ ทำโดยคณะผู้เชี่ยวชาญทางการสอนที่ปฏิบัติการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาไม่ต่ำกว่า 10 ปี จำนวน 3 ท่าน ตามรายชื่อในภาคผนวก ก ซึ่งผู้วิจัยได้อธิบายเนื้อหาทั้งหมดพร้อมทั้งให้เข้าสังเกตการสอนครบทุกหน่วยการเรียนรู้ คณะผู้ตรวจดำเนินการตรวจตามเฉลยแนวทางคำตอบและเกณฑ์การตรวจให้คะแนนโดยวิธีการตกลงเป็นเอกฉันท์ร่วมกันว่าจะให้นักเรียนได้คะแนนเท่าใด ในกรณีที่มีปัญหาเกี่ยวกับคำตอบที่นอกเหนือจากเฉลยแนวทางคำตอบ และคณะผู้ตรวจไม่แน่ใจในคำตอบ ผู้วิจัยจะเป็นผู้ให้คำปรึกษาและร่วมพิจารณา แล้วนำคะแนนที่ได้มาใช้ในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตต่อไป

รายละเอียดของคะแนนเต็มของแบบฝึกปฏิบัติระคน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เป็นดังนี้

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 มี 5 ข้อ ข้อที่ 1 คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อที่ 2 – 5 คะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน รวม 45 คะแนน

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 มี 2 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน รวม 20 คะแนน

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มี 4 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน รวม 40 คะแนน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตที่เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน ส่วนข้อสอบแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน รวม 50 คะแนน

เครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตพร้อมเฉลยแนวทางคำตอบและเกณฑ์การตรวจให้คะแนน ทั้งหมดอยู่ในภาคผนวก ค

ขั้นตอนที่ 4 การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียน

การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตมีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตจากสูตร E_1/E_2

เมื่อ E_1 หมายถึง ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

E_2 หมายถึง ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

เกณฑ์การตัดสิน E_1/E_2 ตั้งไว้ที่ 70/70 ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอแนะของ อธิพร ศรียมก (2529 : 247) ที่กล่าวว่า การกำหนดเกณฑ์ประสิทธิภาพของกระบวนการ/ประสิทธิภาพ

ของผลลัพธ์จะกำหนดให้มีค่าเท่าใดนั้น ให้ผู้สอนพิจารณาตามความพอใจ และปกติเนื้อหาที่เป็นทักษะหรือเจตคติศึกษาอาจตั้งไว้ที่ 70/70 หรือต่ำกว่า และจะถือตามแนวคิดของ จลองชัย สุรวัฒนาบุรณ์ (2528 : 215) ดังนี้

E_1/E_2 สูงกว่าเกณฑ์ 70/70 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้ มีค่าของ E_1 และ E_2 แต่ละตัวมากกว่า 72.50

E_1/E_2 เป็นไปตามเกณฑ์ 70/70 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้ มีค่าของ E_1 และ E_2 แต่ละตัวอยู่ในช่วงตั้งแต่ 67.50 ถึง 72.50 หรือ ตัวใดตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า 72.50 แต่ตัวที่เหลือมีค่าอยู่ในช่วง 67.50-72.50

E_1/E_2 ต่ำกว่าเกณฑ์ 70/70 ถ้า E_1/E_2 ที่คำนวณได้ มีค่าของ E_1 และ E_2 อยู่ในช่วงอื่น ๆ นอกเหนือจากที่กล่าวมานี้

ในงานวิจัยนี้ถือว่า บทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 เมื่อทุก E_1/E_2 เป็นไปตามเกณฑ์ หรือสูงกว่าเกณฑ์ 70/70

ผู้วิจัยนำบทเรียนเรขาคณิตไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เคยเรียนบทเรียนเรขาคณิตจำนวน 42 คน ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง โดยกำหนดขั้นตอนการตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียน 3 ครั้ง ตามข้อเสนอแนะของ จลองชัย สุรวัฒนาบุรณ์ (2528 : 214-215) ดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล เป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 เพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่าง ๆ ดังนี้คือ ความเหมาะสมของภาษา ความยากง่ายของ เนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติ เวลาที่ใช้ในการเรียน และอื่น ๆ ที่กลุ่มตัวอย่างจะให้ข้อคิดเห็นและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่างโดยการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนอาสามัครระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 1 คน

1.2 การทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยชี้แจงให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทราบถึง จุดมุ่งหมายในการเรียนและการทำกิจกรรมที่ปรากฏในบทเรียนเรขาคณิต ซึ่งต้องเรียนการใช้ GSP ตามที่ปรากฏในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และเนื้อหาของบทเรียนเรขาคณิตตามลำดับเนื้อหาที่ระบุไว้ในกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองเป็นรายบุคคล โดยผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูสอนด้วยตนเอง ซึ่งครูยังมีความสำคัญในด้านการจัดเตรียมกิจกรรม การกระตุ้นให้นักเรียนปฏิบัติ ตอบข้อซักถามและการช่วยให้นักเรียนสรุปเนื้อหา โดยอาศัยคู่มือครูและกิจกรรมที่ปรากฏในบทเรียนเรขาคณิตเป็นแนวทางในการสอน และเมื่อนักเรียนทำแบบฝึกปฏิบัติแล้วส่งให้ครูตรวจคำตอบ ทำให้นักเรียนทราบความก้าวหน้าในการเรียนของตนเอง และครูยังได้ช่วยอธิบายในกรณีที่นักเรียนเข้าใจผิด การทดลองกระทำในเฉพาะวันเสาร์และวันอาทิตย์ของช่วงวันที่ 5 สิงหาคม 2541 ถึงวันที่ 10 ตุลาคม 2541 จำนวนเวลาเรียนและการวัดผลทั้งหมด 20 คาบ ดังรายละเอียดในภาคผนวก ง

1.3 การเก็บข้อมูล ผู้วิจัยได้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชนิด คือ

1.3.1 ข้อมูลเชิงคุณภาพ ได้จากการสังเกต การสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนเป็นรายบุคคลเกี่ยวกับข้อบกพร่องต่าง ๆ ของบทเรียนเรขาคณิตตลอดจนคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ รวมทั้งตรวจสอบปัญหาจากการใช้คู่มือครูของครู แล้วใช้วิธีการตัดสินใจโดยอาศัยพิจารณาของของผู้วิจัยเพื่อระบุเป็นข้อบกพร่องที่จะต้องได้รับการปรับปรุงแก้ไข ซึ่งการปรับปรุงแก้ไขได้กระทำโดยอาศัยคำปรึกษาจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตและผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ด้านการใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ชุดเดิม

1.3.2 ข้อมูลเชิงปริมาณ ได้จากการตรวจแบบฝึกปฏิบัติระคนซึ่งให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำทันทีหลังจากเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำทันทีหลังจากเรียนจบทั้งสามหน่วยการเรียนรู้

2. การทดลองกลุ่มย่อย เป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 2 ซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อการตรวจสอบหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่าง ๆ และหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตเหมือนกับการทดลองในครั้งที่ 1 โดยมีขั้นตอนดังนี้

2.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง โดยการเลือกแบบสุ่มจากนักเรียนอาสาสมัครระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 ที่ไม่เป็นนักเรียนในการทดลองครั้งที่ 1 และระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 3 คน

2.2 การทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ปฏิบัติในทำนองเดียวกันกับการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 โดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างเรียนตามลำดับเนื้อหาที่ระบุไว้ในกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองกลุ่มย่อย การทดลองกระทำในช่วงวันที่ 20 ตุลาคม 2541 ถึงวันที่ 14 พฤศจิกายน 2541 ใช้เวลาในช่วงปิดภาคเรียนที่ 1 และวันเสาร์ จำนวนเวลาเรียนและการวัดผลทั้งหมด 20 คาบ ดังรายละเอียดในภาคผนวก ง

2.3 การเก็บข้อมูล ผู้วิจัยได้เก็บรวบรวมข้อมูลในลักษณะเดียวกันกับการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 แต่เป็นข้อมูลจากนักเรียนในลักษณะของกลุ่มและทำการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิตด้วยเงื่อนไขเหมือนกับการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1

3. การทดลองภาคสนาม เป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 3 มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต โดยดำเนินการดังนี้

3.1 การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนอาสาสมัครระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 ที่เหลือจากการทดลองสองครั้งแรก และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 10 คน

3.2 การทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ปฏิบัติในทำนองเดียวกันกับการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 โดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างเรียนตามลำดับเนื้อหาที่ระบุไว้

ในกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองภาคสนาม เนื่องจากปีการศึกษา 2541 นี้รัฐบาลไทยเป็นเจ้าภาพการจัดกีฬาเอเชียนเกมส์ระหว่างวันที่ 6 ถึงวันที่ 20 ธันวาคม 2541 ทางโรงเรียนได้จัดปิดภาคเรียนหลังการเรียนภาคเรียนที่ 1 เป็น 2 ช่วงเวลา คือ ช่วงที่ 1 ตั้งแต่วันที่ 11 ถึงวันที่ 25 ตุลาคม 2541 และช่วงที่ 2 ระหว่างวันที่ 5 ถึง 20 ธันวาคม 2541 ดังนั้นการทดลองจึงกระทำในช่วงวันที่ 1 ธันวาคม 2541 ถึงวันที่ 15 ธันวาคม 2541 จำนวนเวลาเรียนและการวัดผลทั้งหมด 25 คาบ โดย 4 คาบแรกใช้เวลาในตอนเช้าก่อนเข้าเรียน วันละ 1 คาบ และตั้งแต่คาบที่ 5 เป็นต้นไปใช้เวลาช่วงปิดภาคเรียนช่วงที่ 2 ดังรายละเอียดในภาคผนวก ง

3.3 การเก็บข้อมูล ผู้วิจัยเก็บคะแนนจากการตรวจแบบฝึกปฏิบัติระคนซึ่งให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำทันทีหลังจากเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำทันทีหลังจากเรียนจบทั้งสามหน่วยการเรียนรู้ เพื่อนำมาหาประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 โดยมีเงื่อนไขว่า E_1/E_2 ทุกหน่วยการเรียนรู้ได้ตามเกณฑ์หรือสูงกว่าเกณฑ์ก็จะยุติในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ในกรณีที่ได้น้อยกว่าเกณฑ์ ก็จะต้องหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตใหม่ โดยการสุ่มนักเรียนมาจำนวนหนึ่ง และทำการสัมภาษณ์เพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิต ในด้านภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติและเวลาที่ใช้ในการเรียน พร้อมทั้งปรึกษาผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตเพื่อปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวของบทเรียนเรขาคณิต แล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มใหม่ ทำดังนี้จนกระทั่งได้บทเรียนเรขาคณิตที่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70

3. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยแบ่งการวิเคราะห์ข้อมูลออกเป็น ตอน ๆ ดังนี้

1. การวิเคราะห์ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตด้วยดัชนีความสอดคล้อง (บุญเชิด ภิญโญนนตพงษ์. 2527 : 69)
2. การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 (อิทธิพร ศรียมก. 2529 : 247)

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

1. หาดัชนีความสอดคล้อง

$$\text{ใช้สูตร } IOC = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ค่าดัชนีความสอดคล้อง

$$\sum_{i=1}^N R_i \quad \text{แทน ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ}$$

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2. หาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตใช้สูตร E_1/E_2

$$E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$$

เมื่อ E_1 แทน ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

A แทน คะแนนเต็มของแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

$$E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$$

เมื่อ E_2 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

$\bar{F}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

P แทน คะแนนเต็มของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิต ด้วยการลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ โดยกระบวนการพัฒนาเป็นไปตามรายละเอียดในบทที่ 3 ด้วยเงื่อนไขที่ต้องการให้บทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ในบทนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยตามลำดับขั้นคือ

1. ผลการศึกษาสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์
2. ผลการตรวจสอบความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต
3. ผลการสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู
4. ผลการทดลองเป็นรายบุคคล
5. ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครูครั้งที่ 1
6. ผลการทดลองกลุ่มย่อย
7. ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครูครั้งที่ 2
8. ผลการทดลองภาคสนาม
9. ข้อสังเกตเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง รายละเอียดของแต่ละขั้นดังนี้

1. ผลการศึกษาสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

เนื่องจากมีความจำเป็นต้องหาสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ เพื่อมากำหนดเป็นพื้นฐานแนวทางในการสร้างบทเรียนเรขาคณิต ภายหลังจากการศึกษาหนังสือเรียนและเอกสารด้านเรขาคณิต ผู้วิจัยจึงได้กำหนดหัวข้อเนื้อหาต่างๆ เป็นสมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยสำหรับนักเรียน ซึ่งพอสรุปได้ดังตาราง 1

ตาราง 1 สมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ได้จากการศึกษาหนังสือเรียนและเอกสารด้านเรขาคณิต

สมรรถภาพหลัก	สมรรถภาพย่อย
ความรู้ความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตต่อไปนี้ 1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด	1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม 1.2 ความเท่ากันทุกประการ 1.3 เส้นขนาน 1.4 รูปหลายเหลี่ยม 1.5 ความคล้ายกัน 1.6 วงกลม 1.7 การสร้างพื้นฐาน
2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม	2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน (Product of Length of Segments of Intersecting Chords) 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม (Secant-Secant Segments Product) 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม (Tangent-Secant Segments Product) 2.4 แกนราก (Radical Axis)
3. การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	3.1 เซนทรอยด์ (Centroid) 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม (Circumcenter) 3.3 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน (Incenter) 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (Excenter) 3.5 จุดออร์โทเซนเตอร์ (Orthocenter) 3.6 ทฤษฎีบทมิเกิล (Miquel's Theorem) 3.7 เส้นซิมสัน (Simson Line) 3.8 ทฤษฎีบทโตเลมี (Ptolemy's Theorem) 3.9 ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem)

ตาราง 1 (ต่อ)

สมรรถภาพหลัก	สมรรถภาพย่อย
	3.10 จุดเกอกอนเน (Gergonne Point) 3.11 วงกลมเก้าจุด (Nine-point Circle) 3.12 เส้นออยเลอร์ (Euler Line) 3.13 ทฤษฎีบทเมนเนเลอัส (Menealus' Theorem) 3.14 ทฤษฎีบทมอร์เลย์ (Morley's Theorem)
4. เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของ ส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของ ด้าน ขนาดของมุม และอัตรา ส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง	4.1 การสะท้อน (Reflection) 4.2 การเลื่อนขนาน (Translation) 4.3 การหมุน (Rotation) 4.4 ฮอมอเทติก (Homothetic) 4.5 การฉาย (Projection)
5. บทกลับของทฤษฎีบทต่างๆ ที่ กล่าวข้างต้น	สมรรถภาพย่อยตามบทกลับที่เป็นจริงของทฤษฎีบท ต่าง ๆ ในสมรรถภาพหลักที่ 3

จากตาราง 1 จะเห็นว่า ผลจากการศึกษาหนังสือเรียนและเอกสารด้านเรขาคณิต ผู้วิจัยได้กำหนดหัวข้อเนื้อหาต่างๆ เป็น 5 สมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพหลักที่ 1 แบ่งเป็น 7 สมรรถภาพย่อย สมรรถภาพหลักที่ 2 แบ่งเป็น 4 สมรรถภาพย่อย สมรรถภาพหลักที่ 3 แบ่งเป็น 14 สมรรถภาพย่อย สมรรถภาพหลักที่ 4 แบ่งเป็น 5 สมรรถภาพย่อย และสมรรถภาพหลักที่ 5 นั้นแบ่งเป็นสมรรถภาพย่อยตามบทกลับที่เป็นจริงของทฤษฎีบทต่างๆ ในสมรรถภาพหลักที่ 3

2. ผลการตรวจสอบความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา และการสอนเรขาคณิต

ผู้วิจัยได้นำหัวข้อเนื้อหาต่างๆ ที่กำหนดเป็นสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ดังได้กล่าวไว้ข้างต้นไปสร้างเป็นแบบสอบถาม เพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตตรวจสอบว่าสมรรถภาพใดจำเป็นและสมรรถภาพใดไม่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โดยอาศัยการวิเคราะห์หาค่าดัชนีความสอดคล้องเป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ กล่าวคือ ถ้าสมรรถภาพข้อใดที่มีค่าดัชนีความสอดคล้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0.60 ตามรายละเอียดในภาคผนวก จ ถือว่าเป็นสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับนักเรียนกลุ่มดังกล่าว ปรากฏว่าได้สมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยเพื่อนำไปสร้างเป็นหน่วยการเรียนรู้ ในบทเรียนเรขาคณิต ดังตาราง 2

ตาราง 2 สมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ที่ได้จากผลการประเมินของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตว่าจำเป็นสำหรับนักเรียนกลุ่มดังกล่าว

สมรรถภาพหลัก	สมรรถภาพย่อย
ความรู้ความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตต่อไปนี้ 1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคลิด	1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม 1.2 ความเท่ากันทุกประการ 1.3 เส้นขนาน 1.4 รูปหลายเหลี่ยม 1.5 ความคล้ายกัน 1.6 วงกลม 1.7 การสร้างพื้นฐาน
2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม	2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม
3. การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	3.1 เซนทรอยด์ 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม 3.3 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก 3.5 จุดออร์โทเซนเตอร์ 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี 3.7 ทฤษฎีบทเชวา 3.8 จุดเกอกอนเน 3.9 เส้นออยเลอร์ 3.10 ทฤษฎีบทเมนเนเลส์
4. เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง	4.1 การสะท้อน 4.2 การเลื่อนขนาน 4.3 การหมุน 4.5 การฉาย

จากตาราง 2 จะเห็นว่า ผลจากการประเมินของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอน เรขาคณิตว่าสมรรถภาพหลัก และสมรรถภาพย่อยที่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ มี 4 สมรรถภาพหลัก โดยสมรรถภาพหลักที่ 1 แบ่งเป็น 7 สมรรถภาพย่อย สมรรถภาพหลักที่ 2 แบ่งเป็น 3 สมรรถภาพย่อย สมรรถภาพหลักที่ 3 แบ่งเป็น 10 สมรรถภาพย่อย และสมรรถภาพหลักที่ 4 แบ่งเป็น 4 สมรรถภาพย่อย

ส่วนสมรรถภาพย่อยสำหรับนักเรียน จากการประเมินของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ที่มีค่าดัชนีความสอดคล้องน้อยกว่า 0.60 ตามรายละเอียดในภาคผนวก จ มีดังนี้

1. แกนราก
2. ทฤษฎีบทพีเกส
3. เส้นซิมสัน
4. วงกลมเก้าจุด
5. ทฤษฎีบทมอร์เลย์
6. ฮอมอทetik
7. สมรรถภาพย่อยตามบทกลับที่เป็นจริงของทฤษฎีบทต่าง ๆ ในสมรรถภาพ

หลักที่ 3

นอกจากนี้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตบางท่านให้ความเห็นว่าสมรรถภาพย่อยที่ควรเพิ่มในสมรรถภาพหลักที่ 3 คือ จุดฮาร์โมนิก (Harmonic Point) และบางท่านยังให้ความเห็นว่าในสมรรถภาพหลักที่ 1 และสมรรถภาพหลักที่ 3 ควรมีการจัดเรียงลำดับสมรรถภาพย่อยใหม่ โดยในสมรรถภาพหลักที่ 1 ให้นำสมรรถภาพย่อยเรื่องการสร้างพื้นฐานไปเป็นสมรรถภาพย่อยที่ 1.2 และในสมรรถภาพหลักที่ 3 ให้เรียงลำดับสมรรถภาพย่อยดังนี้ เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม จุดออร์โทเซนเตอร์ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ทฤษฎีบทโตเลมี ทฤษฎีบทเมเนเลอัส ทฤษฎีบทเชวา จุดเกอกอนเน และเส้นออยเลอร์

แต่ด้วยปริมาณเนื้อหาที่มากและเวลาเรียนจำกัด ผู้วิจัยจึงได้ขอความเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิมอีกครั้งหนึ่ง ทำให้ได้ข้อสรุปว่าไม่ควรเพิ่มสมรรถภาพย่อยเรื่องจุดฮาร์โมนิก และควรตัดสมรรถภาพหลักที่ 4 เรื่อง เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนโค้งที่ความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง พร้อมทั้งสมรรถภาพย่อยที่เกี่ยวข้องออกไปทั้งหมด และในส่วนสมรรถภาพย่อยในสมรรถภาพหลักเกี่ยวกับบทกลับของทฤษฎีบทต่าง ๆ ก็ได้เลือกบางทฤษฎีบทซึ่งได้แก่ บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลอัส และบทกลับของทฤษฎีบทเชวามาใช้เป็นเนื้อหา

ในบทเรียนต่อเนื่องกับตัวทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกัน ทั้งนี้ด้วยเหตุผลที่ว่าโจทย์ปัญหาส่วนใหญ่ในเรื่องเหล่านี้จะเป็นการตรวจสอบว่าจุดสามจุดที่กำหนดให้เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่ เส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงทั้งสามเส้นที่กำหนดให้เป็นเส้นจวบกันหรือไม่ ซึ่งในกรณีดังกล่าวต้องใช้บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลอัส และบทกลับของทฤษฎีบทเชวมาช่วยในการให้เหตุผล ส่วนเนื้อหาในสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยอื่นที่คงไว้ล้วนเป็นความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ต่อไป ตัวอย่าง เช่น เรื่องรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และเซนทรอยด์ จะเป็นพื้นฐานที่มีประโยชน์อย่างยิ่งในการเรียนวิชาฟิสิกส์

ส่วนความเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตบางท่านเกี่ยวกับการจัดเรียงลำดับสมรรถภาพย่อยใหม่นั้น ผู้วิจัยได้จัดเรียงใหม่ตามความเห็นดังกล่าวโดยปรากฏในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ของบทเรียนเรขาคณิต

3. ผลการสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู

การสร้างบทเรียนเรขาคณิตที่มีคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ เป็นส่วนของภาคผนวก และมีคู่มือครูเพื่ออำนวยความสะดวกในการเตรียมการสอนและในการดำเนินกิจกรรมการสอนของครูให้เป็นไปอย่างราบรื่นและมีประสิทธิภาพ มีขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 ซึ่งผลการสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู มีรายละเอียดดังนี้

3.1 ผลการสร้างบทเรียนเรขาคณิต

ในส่วนของบทเรียนเรขาคณิตนั้น ได้นำสมรรถภาพหลักหนึ่งสมรรถภาพมาเป็นแนวทางกำหนดเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ของหน่วยการเรียนรู้หนึ่งหน่วย ใช้สมรรถภาพย่อยในสมรรถภาพหลักที่กำหนดมาเป็นแนวทางกำหนดจุดประสงค์ปลายทาง จุดประสงค์นำทางที่ใช้ตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน เนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ ตลอดจนการประเมินผลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ทำให้ได้ บทเรียนเรขาคณิต จำนวน 3 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งวางแผนให้ใช้เวลาเรียนเฉพาะส่วนที่เป็น เนื้อหาเรขาคณิต 11 คาบ ด้วยรายละเอียดหน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่เกี่ยวข้องตามลำดับปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 หน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อยตามที่วางแผน

หน่วยการเรียนรู้	หน่วยการเรียนรู้ย่อย
1.เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด	1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม 1.2 การสร้างพื้นฐาน 1.3 ความเท่ากันทุกประการ 1.4 เส้นขนาน 1.5 รูปหลายเหลี่ยม 1.6 ความคล้ายกัน 1.7 วงกลม
2.เรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม	2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม
3.เรื่อง การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	3.1 เซนทรอยด์ 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์ 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี 3.7 ทฤษฎีบทเมนเลาส์ และบทกลับ 3.8 ทฤษฎีบทเชวา และบทกลับ 3.9 จุดเกอกอนเน 3.10 เส้นออยเลอร์

จากตาราง 3 จะเห็นว่า หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 มี 7 หน่วยการเรียนรู้ย่อย หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 มี 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อย และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มี 10 หน่วยการเรียนรู้ย่อย นอกจากนี้ การเรียงลำดับหน่วยการเรียนรู้ย่อยได้เปลี่ยนแปลงไปจากการเรียงสมรรถภาพย่อยของแบบสอบถามที่นำไปสอบถามผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต ซึ่งเป็นผลจากการแก้ไขตามความเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

จุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้ มีดังตาราง 4

ตาราง 4 หน่วยการเรียนรู้และจุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้ตามที่วางแผน

หน่วยการเรียนรู้	จุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้
1.เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคลิด	1. นำสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุมไปใช้ 2. สร้างและบอกวิธีการสร้างพื้นฐาน 3. บอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ 4. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการและนำเงื่อนไขนี้ไปใช้ 5. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกัน 6. บอกได้ว่ามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศาหรือสองมุมฉาก และนำสมบัตินี้ไปใช้ 7. นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ 8. นำสมบัติของ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมยาว รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ไปใช้ 9. นำสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ 10. บอกได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน เท่ากันทั้งสามอัตราส่วน และนำสมบัตินี้ไปใช้ 11. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน และนำเงื่อนไขนี้ไปใช้ 12. บอกสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับวงกลม และนำสมบัติเหล่านี้ไปใช้ 13. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกัน เท่ากับ 180 องศา และบทกลับ พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้
2.เรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวง	1. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน และนำสมบัตินี้ไปใช้

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนรู้	จุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้
กลม	2. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้ 3. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
3.เรื่อง การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และ การอยู่ร่วมบน วง กลมเดียวกัน	1. บอกความหมายและสมบัติของเซนทรอยด์ พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้ 2. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้ 3. บอกความหมายและสมบัติของจุดออร์โทเซนเตอร์ พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้ 4. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้ 5. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้ 6. บอกทฤษฎีบทโตเลมี พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทนี้ไปใช้ 7. บอกทฤษฎีบทเมเนแลัสและบทกลับ พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทและบทกลับนี้ไปใช้ 8. บอกทฤษฎีบทเซวาและบทกลับ พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทและบทกลับนี้ไปใช้ 9. บอกความหมายและสมบัติของจุดเกอกอนเน 10. บอกความหมายและสมบัติของเส้นออยเลอร์

จากตาราง 4 จะเห็นว่าหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 มีจุดประสงค์ปลายทางจำนวน 12 จุดประสงค์ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 มีจุดประสงค์ปลายทางจำนวน 3 จุดประสงค์ และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มีจุดประสงค์ปลายทางจำนวน 10 จุดประสงค์

ผู้วิจัยได้นำจุดประสงค์ปลายทางดังกล่าวข้างต้นมาเป็นแนวกำหนดจุดประสงค์นำทาง และกำหนดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิต ด้วยการลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ ซึ่งกิจกรรมการเรียนรู้ปรากฏในใบงานของแต่ละ

หน่วยการเรียนรู้ย่อย ตลอดจนข้อคำถามในแบบฝึกปฏิบัติของบทเรียนเรขาคณิต ทำให้แต่ละหน่วยการเรียนรู้มีลักษณะของเนื้อหาและกิจกรรม ดังนี้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นการทบทวนความรู้ส่วนใหญ่หรือทั้งหมดที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ทั้งยังเป็นการตกลงเกี่ยวกับความหมายและสัญลักษณ์ต่างๆ ทางเรขาคณิตเพื่อให้เข้าใจตรงกัน รายละเอียดในใบงานเน้นการทบทวนเนื้อหา และฝึกกิจกรรมสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดานั้น ซึ่งเป็นรูปแบบของวิธีเรียนแบบใหม่ที่นักเรียนอาจจะยังไม่คุ้นเคย ดังนั้นในช่วงแรก ๆ จะมีคำสั่งให้นักเรียนปฏิบัติตามและมีคำถามนำ เมื่อนักเรียนตอบคำถามตามมาเป็นลำดับขั้น จะเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักการสำรวจอย่างมีความหมาย แล้วจึงตั้งข้อคาดเดาโดยเว้นช่องว่างไว้ให้เติม ซึ่งนักเรียนจะต้องพิจารณาจากกิจกรรมสำรวจในช่วงต้นก่อนมาถึงข้อคาดเดา เพื่อเป็นแนวทางในการฝึกการตั้งข้อคาดเดา ข้อคาดเดาบางข้อเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัดเมื่อผ่านกิจกรรมสำรวจ ไม่จำเป็นต้องสืบเสาะหาเหตุผลอีก แต่ในบางข้อก็จะมีคำถามนำเพื่อให้นักเรียนสืบเสาะหาเหตุผลมาตรวจสอบยืนยันหรือปฏิเสธข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้น

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2-3 เป็นความรู้ใหม่ที่ไม่มีปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ใบงานส่วนใหญ่ของหน่วยการเรียนรู้เหล่านี้ นักเรียนจะต้องทำการสำรวจและตั้งข้อคาดเดาเองจากแนวคิดของกิจกรรมสำรวจ แต่การสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบยืนยันหรือปฏิเสธข้อคาดเดาก็จะเริ่มมีปรากฏมากขึ้น โจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติบางข้อจะเป็นโจทย์ที่สลับซับซ้อนมากขึ้น มีการกำหนดสถานการณ์แล้วให้นักเรียนหาค่าหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ ทั้งนี้เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้วนักเรียนควรจะมีความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการเรียนทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนรู้วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และมีความสามารถในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดาและสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้น

ในใบงานส่วนใหญ่ จะเน้นให้นักเรียนใช้ GSP มาช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตต่างๆ แล้วสำรวจข้อมูลต่างๆ จากรูปที่สร้างขึ้นเพราะซอฟต์แวร์ดังกล่าวเป็นซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมกับการสร้าง รูปเคลื่อนไหว และตอบสนองต่อผู้ใช้อย่างรวดเร็ว ตัวอย่างเช่น เมื่อต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยมหลายๆ แบบ เพื่อหาข้อสรุปต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด ถ้าสร้างด้วยมือและดินสอบนกระดาษจะค่อนข้างช้า ทำให้ผู้สร้างเกิดความเบื่อหน่ายแต่เมื่อใช้ GSP ช่วยสร้าง เราสามารถโยกรูปได้หลากหลายอย่างรวดเร็วโดยยังคงเงื่อนไขที่กำหนดไว้และผลที่ได้จากการวัดค่าต่าง ๆ ก็จะเปลี่ยนไปตามรูปที่เปลี่ยนแปลงด้วย รูปที่สร้างมาได้มีความผิดพลาดจากการวัดต่างๆ น้อยมากเมื่อเทียบกับการสร้างด้วยมือและดินสอบนกระดาษที่เราเคยปฏิบัติกันมานักเรียนที่มาใช้บทเรียนเรขาคณิตนี้ต้องสามารถใช้ GSP ได้ และเมื่อเรียนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้ว นักเรียนต้องพัฒนาความสามารถในการใช้ GSP เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เพราะโจทย์ปัญหาหลายข้อ นักเรียนอาจต้องใช้การสำรวจโดย GSP เพื่อตั้งข้อคาดเดาที่ควรจะเป็น แล้วจึง

สืบเสาะหาเหตุผล ในระหว่างการปฏิบัติตามกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดตลอดจนการแก้ปัญหา โจทย์ ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่มเพื่อให้ได้วิธีที่เหมาะสม และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับเพื่อนในกลุ่ม ถ้ามีข้อแตกต่างควรอภิปรายร่วมกันเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่เห็นพ้องต้องกัน โจทย์บางข้อที่มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน อาจเลือกทำเป็นบางข้อ ซึ่งครูเป็นผู้กำหนดให้ตามความสามารถของนักเรียน

3.2 ผลการสร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

ผู้วิจัยได้สร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ซึ่งเป็นส่วนของภาคผนวกของบทเรียน เรขาคณิต ตามขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 ทำให้ได้คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ที่ประกอบด้วยหัวข้อต่าง ๆ จำนวน 5 หัวข้อ ซึ่งวางแผนให้ใช้เวลาเรียนเฉพาะส่วนที่เป็นการใช้ซอฟต์แวร์ 2 คาบ ตามรายละเอียดดังตาราง 5

ตาราง 5 หัวข้อและขอบเขตของหัวข้อในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ตามที่วางแผน

หัวข้อ	ขอบเขตของหัวข้อ
1.บทนำ	ที่มาของ GSP
2.อุปกรณ์ที่จำเป็น	อุปกรณ์ที่จำเป็นในการใช้ GSP
3.วิธีการใช้ซอฟต์แวร์	การใช้งาน GSP เบื้องต้น สรุปคำสั่งต่างๆ ของ GSP
4.ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น	การสร้างจุด เส้น และวงกลม การกำหนด Label ของออบเจกต์ และกล่องข้อความ การสร้างรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ การวัดและการคำนวณ การใช้สคริปต์
5.ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น	ปัญหาที่เกิดขึ้นเนื่องจาก GSP ที่นักเรียนใช้เป็นรุ่นสาริต'

จากตาราง 5 จะเห็นว่าคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ นี้มี 5 หัวข้อ ในส่วนของหัวข้อที่ 4 เป็นกิจกรรมที่นักเรียนต้องลงมือปฏิบัติเอง ตามรายละเอียดที่มีปรากฏในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

3.3 ผลการสร้างคู่มือครู

นอกจากการสร้างบทเรียนเรขาคณิต และคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์แล้ว ผู้วิจัยยังได้สร้างคู่มือครูตามขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 ทำให้ได้คู่มือครู ที่ในส่วนหน้าของเล่มประกอบด้วย คำชี้แจงการใช้คู่มือครู กำหนดคาบการสอน ต่อจากนั้นเป็นรายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. คำนำประจำหน่วยการเรียนรู้ บอกชื่อเรื่องของหน่วยการเรียนรู้ จำนวนคาบที่ใช้สอน จำนวนหน่วยเรียนย่อย ชื่อหน่วยเรียนย่อย พร้อมด้วยคำอธิบายที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาและข้อแนะในการสอนให้บรรลุตามจุดประสงค์การเรียนรู้ หรือคำอธิบายเนื้อหาเพิ่มเติม
2. รายละเอียดของแต่ละหน่วยเรียนย่อย ซึ่งประกอบด้วย
 - 2.1 แนวทางคำตอบของใบงาน
 - 2.2 แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ
3. กิจกรรมเสริม ประกอบด้วย กิจกรรมเสนอแนะหรือปัญหาชวนคิดต่าง ๆ ซึ่งจะแทรกตามความเหมาะสม

4. ผลการทดลองเป็นรายบุคคล

การทดลองเป็นรายบุคคลซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 มีความมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่าง ๆ ดังนี้คือ ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติ เวลาที่ใช้ในการเรียนและอื่นๆ พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ซึ่งได้ทำการทดลองกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 3 คน โดยมีขั้นตอนดำเนินการดังได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 และผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนเอง ใช้เวลาเรียนตามที่วางแผนไว้คือ ส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิต 11 คาบ และส่วนที่เป็นการใช้ซอฟต์แวร์ 2 คาบ ตามกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองเป็นรายบุคคล ดังปรากฏในภาคผนวก ง ซึ่งได้ผลในแง่ต่าง ๆ ดังนี้

4.1 ข้อคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

ข้อคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์จากการทดลองเป็นรายบุคคล

หัวข้อ	ข้อคิดเห็น	ผู้ออกความคิดเห็น*		
		สูง	ปานกลาง	ต่ำ
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด	- การสร้างพื้นฐาน มีบางส่วนซ้ำซ้อนกับช่วงแรกที่เรียนเกี่ยวกับการใช้ซอฟต์แวร์ ตัวอย่าง เช่น การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้	✓	✓	✓
	- การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่างๆ ในบทเรียนเรขาคณิตทำให้เสียเวลาในการเรียน ควรนำไปไว้ในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ GSP เพื่อฝึกปฏิบัติให้นักเรียนสร้างให้เป็นก่อนเรียนเนื้อหาของหน่วยการเรียนรู้	-	✓	✓
	- นักเรียนมีข้อสงสัยว่าการพิจารณาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั้น ถ้าเป็นพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมชนิดอื่น ตัวอย่างเช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปห้าเหลี่ยม จะยังมีสมบัติเช่นเดียวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสหรือไม่	✓	✓	-
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม	- ไม่มี	-	-	-

ตาราง 6 (ต่อ)

หัวข้อ	ข้อคิดเห็น	ผู้ออกความคิดเห็น*		
		สูง	ปานกลาง	ต่ำ
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3. การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	- หน่วยการเรียนรู้ย่อย 3.1 – 3.5 และ 3.9 เป็นการจวบกัน นักเรียนเกิดความสับสน ควรมีสรุปรายหน่วยการเรียนรู้ย่อย	-	✓	✓
	- หน่วยการเรียนรู้ย่อย 3.7 – 3.8 นักเรียนเข้าใจได้ยาก ควรใช้เวลามากกว่านี้	-	✓	✓
	- การสร้างรูปเรขาคณิตที่สอดคล้องกับเนื้อหาแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย ควรให้นักเรียนเป็นผู้ลงมือสร้างเอง ให้มีไฟล์สำเร็จรูปน้อยลง	✓	✓	-
คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์	- ควรมีข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางเรขาคณิต เช่น สัญลักษณ์ที่ใช้แทน มุม ABC ก่อนปฏิบัติการใช้ GSP เพื่อให้เข้าใจตรงกัน เนื่องจากเรียนปฏิบัติการใช้ GSP ก่อนบทเรียนเรขาคณิต	✓	✓	✓
	- ควรมีการฝึกใช้คำสั่งง่าย ๆ ของ GSP เช่นการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการสร้างเส้นขนาน ในปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเบื้องต้น	-	✓	✓
	- ควรนำการสร้างรูปหลายเหลี่ยมที่ปรากฏในบทเรียนมาฝึกสร้างก่อน	-	✓	✓

ผู้ออกความคิดเห็น* หมายถึงนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างโดยจำแนกเป็นนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 1 คน

นอกจากนี้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสามคนยังได้ให้ข้อคิดเห็นในภาพรวมตรงกัน ดังนี้

- ควรเพิ่มเวลาสำหรับการใช้ซอฟต์แวร์ในช่วงแรกให้มากขึ้นและควรมีชั่วโมงว่างนอกเหนือจากเวลาเรียนที่เปิดให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์เพื่อทำแบบฝึกปฏิบัติโดยอิสระ
- ควรเน้นเนื้อหาสำคัญบางจุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อาคัดเจาะต่าง ๆ
- แบบฝึกปฏิบัติมากเกินไป บางข้อมีลักษณะการถามที่คล้ายกัน
- ลักษณะของโจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติไม่สอดคล้องกับลักษณะของโจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติระคน

- ควรเพิ่มกิจกรรมเสริมที่น่าสนใจ เพื่อไม่ให้เครียดกับเนื้อหาหนัก
- ระยะเวลาที่ตัดในใบงานชนิดมากเกินไป

4.2 ข้อสังเกตเกี่ยวกับพฤติกรรมการเรียนบทเรียนเรขาคณิตและการใช้ซอฟต์แวร์

จากการสังเกตพฤติกรรมการเรียนบทเรียนเรขาคณิตและการใช้ซอฟต์แวร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 คน พบว่า นักเรียนให้ความร่วมมือในการเรียนอย่างดียิ่ง มีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ ลงมือสำรวจ ตั้งข้อาคตเตา และโยกรูปเพื่อหาตัวอย่างค้ำน ตลอดจนอภิปรายเพื่อหาเหตุผล ระหว่างการทดลองถ้ามีนักเรียนคนใดยังสร้างรูปไม่ได้ หรือเกิดการสงสัยการสร้าง จะมีนักเรียนคนอื่นที่สร้างได้แล้วช่วยกันอธิบาย ตลอดจนแนะนำเทคนิคต่างๆ ในระหว่างการเรียน นักเรียนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนสิ่งที่ตนเองสำรวจได้หรือข้อาคตเตาที่ตนเองตั้งขึ้น ความแตกต่างที่เห็นได้ชัดของพฤติกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามคน ได้แก่

1. นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลางเมื่อผ่านการทบทวนเพียงเล็กน้อยจะสามารถนำความรู้เดิมมาตั้งข้อาคตเตาในใบงานในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ได้ ในขณะที่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำต้องอภิปรายหรือถามจาก นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง

2. การเรียนการใช้ซอฟต์แวร์สร้างรูปเรขาคณิตต่างๆ นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง มีความสามารถในการสร้างได้ใกล้เคียงกัน และสามารถจดจำวิธีสร้างเพื่อนำไปใช้สร้างรูปเรขาคณิตตามเนื้อหาในบทเรียนเรขาคณิตได้ ในขณะที่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำต้องถามจากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง

3. การตั้งข้อาคตเตาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 และ 3 นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง ตั้งข้อาคตเตาได้ด้วยตนเองเฉพาะในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แต่หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ใช้เวลานานมากในการตั้งข้อาคตเตา และส่วนใหญ่ครูต้องถามนำเป็นการแนะแนวทาง ส่วนนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำไม่สามารถตั้งข้อาคตเตาได้ด้วยตนเองในทั้งสองหน่วยการเรียนรู้ดังกล่าวและหลังจากฟังครูอธิบายหรือถามนำแล้วยังต้องให้นักเรียนอีกสองคนในกลุ่มตัวอย่างนั้นช่วยอธิบาย

4. การสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคตเตาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง ส่วนใหญ่จะนำความรู้เดิมที่ตนจำได้มาใช้ในการให้เหตุผลแต่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำจะการใช้การสร้างรูปเพื่อหาตัวอย่างค้ำนหรือนักเรียนอีกสองคนนั้นช่วยอธิบาย ซึ่งนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงจะพยายามใช้การสร้างรูปเพื่อประกอบการอธิบายด้วย

นอกจากนี้จากการสอบถามถึงความพึงพอใจในการใช้บทเรียนเรขาคณิตนี้ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสามคน ระบุว่า มีความพอใจอย่างมาก ที่ชอบมากคือการตอบสนองที่รวดเร็วของซอฟต์แวร์ ไม่เครียดในการหาเหตุผลแบบการพิสูจน์สองคอลัมน์ที่เคยเรียนมาในวิชาเลือกเสรี ค 021 ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม แต่ได้ใช้ GSP สร้างรูป มีกิจกรรมการสำรวจ

การตั้งข้อาคัดเคา โยกรุปเพื่อสืบเสาะหาตัวอย่างค้ำและตัวอย่างสนับสนุน สนุกที่อภิปรายกับเพื่อนเวลาที่สร้างรูปที่แตกต่างกัน และถ้าได้ใช้ GSP ประกอบการเรียนตั้งแต่ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นแล้ว น่าจะทำให้ตนเองเรียนรู้เรขาคณิตได้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และน่าจะชอบเรียนวิชาเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ในส่วนของเนื้อหา กลุ่มตัวอย่างทั้งสามคนระบุว่า หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นการทบทวนความรู้เดิมซึ่งส่วนใหญ่ลืมไปแล้ว ส่วนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เป็นส่วนเพิ่มพูนความรู้เพิ่มขึ้น ตลอดจนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยเฉพาะวิชาฟิสิกส์บางเนื้อหาได้เข้าใจมากยิ่งขึ้น

4.3 ประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

ในการทดลองหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 คนข้างต้น โดยให้ทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้หลังจากศึกษาจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต หลังจากศึกษาครบทุกหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรขาคณิต แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเกณฑ์การตัดสินที่กำหนดไว้เป็น 70/70 ด้วยการคำนวณตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอในภาคผนวก จ ผลปรากฏว่า ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ ปรากฏดังตาราง 7 และค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เท่ากับ 80.67 ทำให้ได้ E_1 / E_2 ตามตาราง 7 ดังนี้

ตาราง 7 ค่า E_1 และ E_1 / E_2 จากการทดลองเป็นรายบุคคล

หน่วยการเรียนรู้ที่	E_1	E_1 / E_2
1	88.16	88.16/80.67
2	85.85	85.85/80.67
3	89.17	89.17/80.67

จากตาราง 7 เนื่องจากทุก E_1 / E_2 สูงกว่าเกณฑ์ 70/70 จึงกล่าวได้ว่าบทเรียนเรขาคณิตนี้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 แต่จากการสังเกตและสอบถามข้อคิดเห็นที่เกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตดังกล่าวข้างต้น พบว่า ยังมีข้อที่ต้องพิจารณาปรับปรุงแก้ไขเนื้อหาในบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู

5. ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู ครั้งที่ 1

การปรับปรุงบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู ครั้งที่ 1 มีความมุ่งหมายเพื่อนำข้อคิดเห็นจากการทดลองเป็นรายบุคคลซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต ครั้งที่ 1 มาเป็นแนวทางการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู ให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้น โดยผู้วิจัยได้ตรวจสอบรายละเอียดและแนวทางแก้ไขตามความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างของการทดลองเป็นรายบุคคล ก่อนการตัดสินใจปรับปรุงแก้ไข ผลปรากฏว่า ผู้วิจัยทำการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู ดังตาราง 8 ซึ่งการปรับปรุงแก้ไขนี้ปรากฏผลในบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

ตาราง 8 ข้อคิดเห็นและการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู จากการทดลองเป็นรายบุคคล

ข้อคิดเห็น	การปรับปรุงแก้ไข
1. การสร้างพื้นฐาน มีบางส่วนซ้ำซ้อนกับช่วงแรกที่เรียนเกี่ยวกับการใช้ซอฟต์แวร์ ตัวอย่าง เช่น การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้	นำเรื่องการสร้างพื้นฐานไปไว้ในส่วนภาคผนวกของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์
2. การสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ ในบทเรียนเรขาคณิตทำให้เสียเวลาในการเรียน ควรนำไปไว้ในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ เพื่อฝึกปฏิบัติให้นักเรียนสร้างให้เป็นก่อนเรียนเนื้อหาของหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	นำการสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ ไปไว้ในหัวข้อที่ 4 ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น ของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์
3. นักเรียนมีข้อสงสัยว่าการพิจารณาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสนั้น ถ้าเป็นพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมชนิดอื่น ตัวอย่างเช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปห้าเหลี่ยม จะยังมีสมบัติเช่นเดียวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสหรือไม่	เติมคำถามลงในใบงานให้นักเรียนไปตรวจสอบเอง และจัดทำตัวอย่างของรูปไว้ในคู่มือครู

ตาราง 8 (ต่อ)

ข้อคิดเห็น	การปรับปรุงแก้ไข
4. หน่วยการเรียนรู้ย่อย 3.1 – 3.5 และ 3.9 เป็นการจวบกัน นักเรียนเกิดความสับสน ควรมีสรุปรายหน่วยการเรียนรู้ย่อย	เพิ่มสรุปในทุกหน่วยการเรียนรู้ย่อยของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3
5. หน่วยการเรียนรู้ย่อย 3.7 – 3.8 นักเรียนเข้าใจได้ยาก ควรใช้เวลามากกว่านี้	เพิ่มเวลาเรียนหน่วยการเรียนรู้ย่อย 3.7 – 3.8 จากเดิม 1 คาบ เป็น 2 คาบ
6. การสร้างรูปที่สอดคล้องแต่ละหน่วยการเรียนรู้ควรให้นักเรียนเป็นผู้ลงมือสร้างเอง ให้มีไฟล์สำเร็จรูปน้อยลง	หน่วยการเรียนรู้ย่อยท้าย ๆ จะให้นักเรียนสร้างรูปเองเพื่อตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ
7. ควรมีข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางเรขาคณิต เช่น สัญลักษณ์ที่ใช้แทน มุม ABC ก่อนปฏิบัติการใช้ GSP เพื่อให้เข้าใจตรงกัน เนื่องจากเรียนปฏิบัติการใช้ GSP ก่อนบทเรียนเรขาคณิต	เพิ่มข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางเรขาคณิต เช่น สัญลักษณ์ที่ใช้แทน มุม ABC ในหัวข้อที่ 3 วิธีการใช้ซอฟต์แวร์ ของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์
8. ควรมีการฝึกใช้คำสั่งง่าย ๆ ของ GSP เช่น การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการสร้างเส้นขนาน ในปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น	ได้มีการให้ฝึกใช้คำสั่งเหล่านี้เช่นการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการสร้างเส้นขนาน ขณะที่สร้างรูปสามเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ รูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ และรูปห้าเหลี่ยม ในหัวข้อที่ 4 ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น
9. ควรนำการสร้างรูปหลายเหลี่ยมที่ปรากฏในบทเรียนมาฝึกสร้างก่อน	เพิ่มการสร้างรูปหลายเหลี่ยม ได้แก่รูปสามเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ รูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ และรูปห้าเหลี่ยม ในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ หัวข้อที่ 4 ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น
10. ควรเพิ่มเวลาสำหรับการใช้ซอฟต์แวร์ในช่วงแรกให้มากขึ้นและควรมีชั่วโมงว่างนอกเหนือจากเวลาเรียนที่เปิดให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์เพื่อทำแบบฝึกปฏิบัติโดยอิสระ	เพิ่มเวลาเรียนการใช้ซอฟต์แวร์จากเดิม 2 คาบ เป็น 3 คาบ หลังจากเรียนในแต่ละครั้งแล้วเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มาใช้คอมพิวเตอร์เพิ่มเติมได้ครั้งละ 1 คาบ
11. ควรเน้นเนื้อหาสำคัญบางจุด โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อาคัดเตาต่าง ๆ	ใช้เทคนิคการเน้นข้อความ เช่นพิมพ์ตัวหนา ส่วนข้อาคัดเตาได้ใส่ในกรอบข้อความ
12. แบบฝึกปฏิบัติมากเกินไป บางข้อมี	ตัดโจทย์ข้อที่ตามซ้ำซ้อนออกทำให้เหลือแบบ

ตาราง 8 (ต่อ)

ข้อคิดเห็น	การปรับปรุงแก้ไข
ลักษณะการถามที่คล้ายกัน	ฝึกปฏิบัติบ่อยลง
13. ลักษณะของโจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติไม่สอดคล้องกับลักษณะของโจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติระคน	ปรับลักษณะการเขียนโจทย์บางข้อของแบบฝึกปฏิบัติให้สอดคล้องกับลักษณะโจทย์ของแบบฝึกปฏิบัติระคน
14. ควรเพิ่มกิจกรรมเสริมที่น่าสนใจ เพื่อไม่ให้เครียดกับเนื้อหาหนัก	เพิ่มกิจกรรมเสริมไว้ในคู่มือครูให้มากขึ้นเพื่อให้ครูได้เลือกใช้เป็นแนวทางให้ครูในการสร้างกิจกรรมเสริมเพิ่มเติมตามความเหมาะสม พร้อมทั้งเขียนเตือนให้ครูพยายามนำกิจกรรมเสริมมาใช้ให้เกิดประโยชน์เพื่อผ่อนคลายความเครียดกับเนื้อหา
15. ระยะเวลาบรรทัดในใบงานชิดมากเกินไป	เพิ่มระยะห่างของบรรทัดในใบงาน จากเดิม 1 บรรทัด เป็น 1.5 บรรทัด

✕ นอกจากนี้จากการสังเกตของผู้วิจัยเกี่ยวกับการตั้งข้อคาตเดาซึ่งเดิมเปิดกว้างให้นักเรียนตั้งข้อคาตเดาเองโดยบอกเพียงหัวข้อที่เกี่ยวข้อง พบว่า บางข้อคาตเดา นักเรียนใช้เวลา นานมากและส่วนใหญ่ครูต้องถามนำเป็นการแนะแนวทาง ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้แก้ไขโดยเพิ่ม ข้อความขึ้นต้นของข้อคาตเดามาให้แล้วเว้นช่องว่างไว้ให้เดิมเป็นข้อคาตเดาที่สมบูรณ์ต่อไป

6. ผลการทดลองกลุ่มย่อย

การทดลองกลุ่มย่อยซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 2 มีความมุ่งหมาย เพื่อตรวจสอบหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่าง ๆ เช่นเดียวกับการทดลองเป็นรายบุคคลซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 ได้ทำการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 9 คน โดยมีขั้นตอนดำเนินการดังกล่าวแล้วในบทที่ 3 และผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนเอง ใช้เวลาเรียนตามที่ปรับใหม่ภายหลังการทดลองเป็นรายบุคคลเฉพาะส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิต 12 คาบ และส่วนที่เป็นการใช้ซอฟต์แวร์ 3 คาบ ตามกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองเป็นกลุ่มย่อย ดังปรากฏในภาคผนวก ง ซึ่งได้ผลในแง่ต่าง ๆ ดังนี้

6.1 ข้อคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ได้ให้ข้อคิดเห็นตรงกัน ดังนี้

1. ควรเรียนเนื้อหาหน่วยการเรียนรู้ที่ 1.1 ก่อนปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น เพื่อจะได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับ จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และ มุม แล้วนำไปใช้ในปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น

2. ควรเพิ่มเวลาสำหรับการเรียนในเรื่องต่อไปนี้

- ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.1 – 3.4 โดยเฉพาะเรื่องจุดออร์โทเซนเตอร์
- หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.7 และ 3.8 โดยเฉพาะเรื่องทฤษฎีบทเมเนแลสและ

บทกลับ

3. ควรมีการทำสำเนา GSP เพื่อให้นักเรียนที่สนใจนำไปใช้ที่บ้านได้

4. ควรเพิ่มเวลาของชั่วโมงว่างนอกเหนือเวลาเรียนที่เปิดให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ เพื่อทบทวนหรือทำแบบฝึกปฏิบัติโดยอิสระและมีครูอยู่ตอบข้อสงสัยด้วย

5. ควรระบุงปัญหาที่เกิดจากการใช้ GSP สร้างและวัดขนาดของรูปเรขาคณิต ให้นักเรียนได้ระวังในการใช้ GSP ไว้ในหัวข้อที่ 5 ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น ของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

6.2 ข้อสังเกตเกี่ยวกับพฤติกรรมกรเรียนบทเรียนเรขาคณิตและการใช้ซอฟต์แวร์

จากการสังเกตพฤติกรรมกรเรียนบทเรียนเรขาคณิตและการใช้ซอฟต์แวร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 9 คน พบว่า นักเรียนให้ความร่วมมือในการเรียนอย่างดียิ่ง มีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ เช่นเดียวกับกับกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 แต่ด้วยปริมาณของนักเรียนที่มากขึ้น ทำให้การตอบข้อสงสัยของนักเรียนในเวลาที่มึนักเรียนสงสัยเนื้อหาที่แตกต่างกันเสียเวลาค่อนข้างมาก ถึงแม้ว่าจะมีนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต ครั้งที่ 1 มาช่วยในการทดลองนี้ซึ่งช่วยได้มากเวลาที่นักเรียนมีปัญหในการสร้างรูปเรขาคณิตก็ตาม ความแตกต่างที่เห็นได้ชัดของพฤติกรรมกรเรียนของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 9 คนโดยแบ่งเป็นนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลาง และต่ำได้แก่

1. การเรียนการใช้ซอฟต์แวร์สร้างรูปเรขาคณิตต่าง ๆ นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง มีความสามารถในการสร้างได้ใกล้เคียงกัน และสามารถจดจำวิธีสร้างเพื่อนำไปใช้สร้างรูปเรขาคณิตตามเนื้อหาในบทเรียนเรขาคณิตได้ ในขณะที่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำต้องถามจากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลางหรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1

2. การตั้งข้อคาตเตา ที่ผู้วิจัยได้เพิ่มข้อความขึ้นต้นของข้อคาตเตามาให้แล้วเว้นช่องว่างไว้ให้เติมเป็นข้อคาตเตาที่สมบูรณ์ แต่นักเรียนบางคนในระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั้งสามระดับยังต้องใช้เวลานานในการตั้งข้อคาตเตาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 และบางข้อคาตเตาครูยังต้องถามนำเป็นการแนะแนวทาง หลังจากฟังครูอธิบายหรือถามนำแล้วนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำบางคนยังต้องถามจากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลางหรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1

3. การสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาตเตาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง ส่วนใหญ่จะนำความรู้เดิมที่ตนจำได้มาใช้ในการให้เหตุผล แต่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำจะใช้การสร้างรูปเพื่อหาตัวอย่างค้านหรือถามจากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลาง หรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1

นอกจากนี้จากการสอบถามความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างพบว่า เห็นตรงกันกับกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 และมีความเห็นเพิ่มเติมว่าเนื้อหาในบทเรียนเรขาคณิตและ GSP ที่ใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้นี้มีประโยชน์มาก ไม่เสียเวลาที่มาเป็นอาสาสมัครทดลองในครั้งนี้ และยินดีที่จะร่วมมือในการถ่ายทอดความรู้เหล่านี้ให้กับรุ่นน้องต่อไป

6.3 ประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

ในการทดลองหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 9 คนข้างต้น โดยให้ทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ หลังจากศึกษาจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังจากศึกษาครบทุกหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรขาคณิต แล้วนำข้อมูลที่ได้อธิบายเปรียบเทียบเกี่ยวกับเกณฑ์การตัดสินที่กำหนดเป็น 70/70 ด้วยการคำนวณตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอในภาคผนวก จ ผลปรากฏว่า ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ ปรากฏดังตาราง 9 และค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เท่ากับ 79.00 ทำให้ได้ E_1 / E_2 ตามตาราง 9 ดังนี้

ตาราง 9 ค่า E_1 และ E_1/E_2 จากการทดลองกลุ่มย่อย

หน่วยการเรียนรู้	E_1	E_1/E_2
1	89.27	89.27/79.00
2	87.50	87.50/79.00
3	80.00	80.00/79.00

จากตาราง 9 เนื่องจากทุก E_1/E_2 สูงกว่าเกณฑ์ 70/70 จึงกล่าวได้ว่าบทเรียนเรขาคณิตนี้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 อย่างไรก็ตามบทเรียนเรขาคณิตยังมีบางส่วนที่ผู้วิจัยเห็นว่าควรแก้ไข เช่น ลักษณะการนำเสนอเนื้อหาบางตอนน่าจะมีการปรับปรุงให้น่าสนใจ

7. ผลการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู ครั้งที่ 2

การปรับปรุงบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู ครั้งที่ 2 มีความมุ่งหมายเพื่อนำข้อคิดเห็นจากการทดลองกลุ่มย่อยซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 2 มาเป็นแนวทางการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครูให้มีความเหมาะสมยิ่งขึ้น โดยผู้วิจัยได้ตรวจสอบรายละเอียดและแนวทางแก้ไขตามความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างของการทดลองกลุ่มย่อย ก่อนการตัดสินใจปรับปรุงแก้ไข ผลปรากฏว่า ผู้วิจัยทำการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู ดังตาราง 10 ซึ่งการปรับปรุงแก้ไขนี้ปรากฏผลในบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

ตาราง 10 ข้อคิดเห็นและการปรับปรุงแก้ไขบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครูจากการทดลองกลุ่มย่อย

ข้อคิดเห็น	การปรับปรุงแก้ไข
1. ควรเรียนเนื้อหาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 ก่อนปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น เพื่อจะได้ทบทวนความรู้เกี่ยวกับ จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และ มุม แล้วนำไปใช้ในปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น	ในการใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งต่อมา ได้ปรับสลับเนื้อหาและกำหนดการสอนโดยให้เรียนเนื้อหาหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 ก่อนปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น ซึ่งได้ระบุไว้ในกำหนดคาบการสอนโดยประมาณ ที่ปรากฏในคู่มือครู
2. ควรเพิ่มเวลาสำหรับการเรียนในเรื่องต่อไป	

ตาราง 10 (ต่อ)

ข้อคิดเห็น	การปรับปรุงแก้ไข
นี้ - ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น - หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 – 3.4 โดยเฉพาะเรื่องจุดออร์โทเซนเตอร์ - หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7 และ 3.8 โดยเฉพาะเรื่องทฤษฎีบทเมเนแลสและบทกลับ	- เพิ่มเวลาเรียนการใช้ซอฟต์แวร์จากเดิม 3 คาบ เป็น 4 คาบ - เพิ่มเวลาเรียนหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 – 3.4 จากเดิม 2 คาบ เป็น 3 คาบ โดยในจำนวนนี้ได้รวมเวลาเรียนเรื่องจุดออร์โทเซนเตอร์ที่ปรับใหม่เป็นเรียนเต็ม 1 คาบไว้ด้วย - เพิ่มเวลาเรียนหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7 และ 3.8 จากเดิม 2 คาบ เป็น 3 คาบ โดยในจำนวนนี้ได้รวมเวลาเรียนเรื่องทฤษฎีบทเมเนแลสและบทกลับที่ปรับใหม่เป็นเรียนเต็ม 2 คาบไว้ด้วย
3. ควรมีการทำสำเนา GSP เพื่อให้นักเรียนที่สนใจนำไปใช้ที่บ้านได้	จัดทำสำเนา GSP ไว้ให้นักเรียนที่สนใจนำไปใช้ที่บ้าน
4. ควรเพิ่มเวลาของชั่วโมงว่างนอกเหนือเวลาเรียนที่เปิดให้นักเรียนใช้คอมพิวเตอร์ เพื่อทบทวนหรือทำแบบฝึกปฏิบัติโดยอิสระและมีครูอยู่ตอบข้อสงสัยด้วย	เพิ่มเวลาของชั่วโมงว่างนอกเหนือเวลาเรียนของแต่ละวัน จากเดิม 1 คาบ เป็นครึ่งละ 2 - 3 คาบ เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนที่สนใจใช้คอมพิวเตอร์ทบทวนหรือทำแบบฝึกปฏิบัติโดยอิสระและมีครูอยู่ตอบข้อสงสัยด้วย
5. ควรระบุปัญหาที่เกิดจากการใช้ GSP สร้างและวัดขนาดของรูปเรขาคณิต ให้นักเรียนได้ระวังในการใช้ GSP ไว้ในหัวข้อที่ 5 ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น ของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์	เพิ่มเติมปัญหาที่สังเกตพบจากการใช้ GSP สร้างและวัดขนาดของรูปเรขาคณิต ไว้ในหัวข้อที่ 5 ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้นของคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

นอกจากนี้จากการสังเกตของผู้วิจัยเกี่ยวกับการตั้งข้อคาตเตา พบว่า นักเรียนยังใช้เวลาและบางข้อคาตเตาครูยังต้องถามนำเป็นการแนะแนวทาง ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้แก้ไขโดยในใบงานเดิมส่วนของการตั้งข้อคาตเตาที่ได้เว้นช่องว่างไว้ให้เดิมโดยมีข้อความขึ้นต้นเป็นแนวทางในการตั้งข้อคาตเตา ก็มีการเพิ่มความในวงเล็บมาให้เลือก เพื่อเป็นแนวทางสำหรับการเติมข้อคาตเตาให้สมบูรณ์ แต่การตั้งข้อคาตเตาบางข้อที่เห็นว่านักเรียนควรทำได้เองในโจทย์บางข้อของแบบฝึกปฏิบัติก็ยังคงลักษณะเช่นเดิม

ทั้งนี้ ยังมีการปรับปรุงความเหมาะสมของการจัดวางข้อความของแต่ละหน้า ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เพิ่มการ์ตูน และกรอบข้อความเพื่อให้เป็นบทเรียนเรขาคณิตที่น่าสนใจมากขึ้น

8. ผลการทดลองภาคสนาม

การทดลองภาคสนามซึ่งเป็นการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 3 มีความมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ได้ทำการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน โดยมีขั้นตอนดำเนินการ ดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 3 และผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนเอง ใช้เวลาเรียนตามที่ปรับใหม่ภายหลังการทดลองกลุ่มย่อยคือ เฉพาะส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิต 14 คาบ และส่วนที่เป็นการใช้ซอฟต์แวร์ 4 คาบ ตามกำหนดคาบการสอนบทเรียนเรขาคณิตของการทดลองภาคสนาม ดังปรากฏในภาคผนวก ง ซึ่งได้ผลในแง่ต่าง ๆ ดังนี้

8.1 ข้อคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

ภายหลังการทดลอง นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงบางคนระบุว่า เนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ที่ไม่ใช่ส่วนของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 มีมาก ควรสรุปมาเพียงสั้นๆ ทำนองเดียวกับที่ปรากฏในใบงานของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 แต่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับปานกลางและต่ำระบุว่าเนื้อหาส่วนใหญ่ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ได้ลิ้มไปหมดแล้วการทบทวนดังที่ปรากฏในใบงานนั้นดีอยู่แล้ว ทั้งนี้จะช่วยให้จำได้นานขึ้นเพราะได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ระบุไว้ในคำชี้แจงของคู่มือครูว่า กิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรากฏในใบงานนั้นให้ครูเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับสภาพของนักเรียน นอกจากนี้เพื่อให้การเรียนการสอนเป็นไปอย่างราบรื่นผู้วิจัยยังได้เพิ่มรายชื่อไฟล์ที่สร้างโดย GSP ไว้ในส่วนท้ายของคู่มือครูเพื่อใช้ประกอบในกิจกรรมของบทเรียนเรขาคณิตด้วย

8.2 ข้อสังเกตเกี่ยวกับพฤติกรรมการเรียนบทเรียนเรขาคณิต

จากการสังเกตพฤติกรรมการเรียนบทเรียนเรขาคณิตและการใช้ซอฟต์แวร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 30 คน พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการเรียนอย่างดียิ่ง มีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ เช่นเดียวกันกับกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตสองครั้งแรก แต่ด้วยปริมาณของนักเรียนที่มากขึ้น ทำให้เสียเวลาค่อนข้างมากในการตอบข้อสงสัยของนักเรียนในเวลาที่นักเรียนมีข้อสงสัยในเรื่องที่แตกต่างกัน ถึงแม้ว่าจะมีนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 และบางคนจากครั้งที่ 2 มาช่วยในการทดลองครั้งนี้ ซึ่งช่วยได้มากเวลาที่นักเรียนมีปัญหาในการสร้างรูปเรขาคณิตก็ตาม ความแตกต่างที่เห็นได้ชัดของพฤติกรรมการเรียนของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 30 คนโดยแบ่งเป็นนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ได้แก่

1. การเรียนการใช้ซอฟต์แวร์สร้างรูปเรขาคณิตต่างๆ นักเรียนที่มีระดับผล การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลาง มีความสามารถในการสร้างได้ใกล้เคียงกัน และสามารถจดจำวิธีสร้างเพื่อนำไปใช้สร้างรูปเรขาคณิตตามเนื้อหาในบทเรียนเรขาคณิตได้ ในขณะที่นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำต้องถามจากนักเรียนที่มีระดับผล การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและปานกลางหรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้ บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 หรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 2

2. การตั้งข้อคาตเตา ที่ผู้วิจัยได้เพิ่มข้อความขึ้นต้นของข้อคาตเตามาให้แล้ว แล้วมีข้อความในวงเล็บไว้ให้เลือกสำหรับเป็นแนวทางในการเติมข้อคาตเตาให้สมบูรณ์นั้น นักเรียนส่วนใหญ่ที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับปานกลางและต่ำยังต้องใช้เวลานานในการตั้งข้อคาตเตาส่วนใหญ่ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 และบางข้อคาตเตาครูยังต้องถามนำ เป็นการแนะแนวทาง ซึ่งหลังจากฟังครูอธิบายหรือถามนำแล้วนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ระดับต่ำบางคนยังต้องถามจากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับ สูง ปานกลางหรือนักเรียนจากกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 หรือครั้งที่ 2

3. การสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาตเตาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 2 และส่วนแรกของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 นักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงและ ปานกลาง ส่วนใหญ่จะนำความรู้เดิมที่ตนจำได้มาใช้ในการให้เหตุผลแต่นักเรียนที่มีระดับผลการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับต่ำจะใช้การสร้างรูปเพื่อหาตัวอย่างสนับสนุน ตัวอย่างค้านหรือถาม จากนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลาง หรือนักเรียนจากกลุ่ม ตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตครั้งที่ 1 หรือครั้งที่ 2

นอกจากนี้จากการสอบถามความพึงพอใจของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างพบว่า เห็น ตรงกันกับกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิตสองครั้งแรก และส่วนใหญ่ยินดีที่จะ ร่วมมือในการถ่ายทอดความรู้เกี่ยวกับการใช้ GSP ให้กับรุ่นน้องต่อไป

8.3 ประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

ในการทดลองหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 30 คนข้างต้น โดยให้ทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ หลังจากศึกษาจบแต่ละ หน่วยการเรียนรู้ และทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังจากศึกษาครบทุก หน่วยของบทเรียนเรขาคณิต แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับเกณฑ์การตัดสินที่ กำหนดเป็น 70/70 ด้วยการคำนวณตามรายละเอียดที่ได้นำเสนอในภาคผนวก จ ผลปรากฏว่า ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่ นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ ปรากฏดังตาราง 11 และค่า

ประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เท่ากับ 72.46 ทำให้ได้ E_1 / E_2 ตามตาราง 11 ดังนี้

ตาราง 11 ค่า E_1 และ E_1 / E_2 จากการทดลองภาคสนาม

หน่วยการเรียนรู้ที่	E_1	E_1 / E_2
1	86.33	86.33/72.46
2	77.75	77.75/72.46
3	75.20	75.20/72.46

จาก ตาราง 11 เนื่องจากทุก E_1 / E_2 เป็นไปตามเกณฑ์ 70/70 จึงกล่าวได้ว่า บทเรียนเรขาคณิตนี้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 ทั้งนี้ บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์การตัดสินที่กำหนด ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานการวิจัย ดังนั้นจึงยุติการทดลอง

บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นและจากการทดลองพบว่า สามารถทำให้กลุ่มตัวอย่างเกิดพฤติกรรมการเรียนรู้ตามจุดประสงค์ที่กำหนดได้ มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. บทเรียนเรขาคณิต ประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งใช้เวลาเรียนเฉพาะส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิต 14 คาบ ด้วยรายละเอียดซึ่งปรากฏดังตาราง 12

ตาราง 12 หน่วยการเรียนรู้และหน่วยการเรียนรู้ย่อยตามที่กำหนดครั้งสุดท้าย

หน่วยการเรียนรู้	หน่วยการเรียนรู้ย่อย
1.เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคลิด	1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม 1.2 ความเท่ากันทุกประการ 1.3 เส้นขนาน 1.4 รูปหลายเหลี่ยม 1.5 ความคล้ายกัน 1.6 วงกลม
2.เรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม	2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม
3.เรื่อง การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	3.1 เซนทรอยด์ 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์ 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี 3.7 ทฤษฎีบทเมเนเลส์ และบทกลับ 3.8 ทฤษฎีบทเซวา และบทกลับ 3.9 จุดเกอกอนเน 3.10 เส้นออยเลอร์

แต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรขาคณิตประกอบด้วย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย ความรู้พื้นฐาน(ถ้ามี) จุดประสงค์ปลายทาง จุดประสงค์นำทาง แล้วนำเสนอกิจกรรมการเรียนรู้ในลักษณะของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติ สรุปมาตามตาราง 13

ตาราง 13 รายละเอียดของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

หน่วย การเรียนรู้ที่	จำนวน หน่วยการเรียนรู้ย่อย	ใบงาน		แบบฝึกปฏิบัติ		
		ที่	หัวข้อของเนื้อหา	จำนวน หน้า	ที่	จำนวน ข้อ
1	6	1.1	จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รัศมี และมุม	7	1.1	10
		1.2	ความเท่ากันทุกประการ	13	1.2	8
		1.3	เส้นขนาน	9	1.3	10
		1.4	รูปหลายเหลี่ยม	19	1.4	15
		1.5	ความคล้ายกัน	7	1.5	10
		1.6	วงกลม	11	1.6	10
2	3	2.1	ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน	2	2.1	2
		2.2	ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม	2	2.2	2
		2.3	ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม	2	2.3	7
3	10	3.1	เซนทรอยด์	4	3.1	6
		3.2	ศูนย์กลางวงล้อม	4	3.2	3
		3.3	จุดออร์โทเซนเตอร์	4	3.3	5
		3.4	ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	3	3.4	6
		3.5	ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก	3	3.5	5
		3.6	ทฤษฎีบทโตเลมี	2	3.6	1
		3.7	ทฤษฎีบทเมเนลัส และบทกลับ	7	3.7	4
		3.8	ทฤษฎีบทเซวา และบทกลับ	5	3.8	3
		3.9	จุดเกอกอนเน	2	-	-
		3.10	เส้นออยเลอร์	2	-	-

จากตาราง 13 จะเห็นว่า หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 มี 6 หน่วยการเรียนรู้ย่อย มีใบงาน 6 ชุด และแบบฝึกปฏิบัติ 6 ชุด หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 มี 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อย มีใบงาน 3 ชุด และแบบฝึกปฏิบัติ 3 ชุด หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 มี 10 หน่วยการเรียนรู้ย่อย มีใบงาน 10

ชุด แต่มีแบบฝึกปฏิบัติ 8 ชุด เนื่องจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.9 เป็นการนำความรู้จากหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.8 มาประยุกต์ใช้ และหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.10 เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของจุดที่ได้จากความรู้ของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.1 , 3.2 และ 3.3 ดังนั้นหน่วยการเรียนรู้ที่ 3.9 และ 3.10 จึงไม่มีแบบฝึกปฏิบัติ

แต่ละใบงานในบทเรียนเรขาคณิต เป็นการนำเสนอกิจกรรมในลักษณะให้นักเรียนทำการสำรวจตามข้อแนะแนวทาง ตั้งข้อคาดเดา สืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาด้วยตนเอง อีกทั้งพยายามนำเสนอคำถามเพื่อให้นักเรียนเกิดจินตนาการและคิดเพิ่มพูนทางเรขาคณิต ทั้งนี้กิจกรรมส่วนใหญ่เป็นกิจกรรมที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ โดยในบางกิจกรรมที่ต้องใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตที่ค่อนข้างซับซ้อน มีการหาความสัมพันธ์ของรูปด้วยการวัดค่าต่างๆ ซึ่งต้องใช้เวลาร่าง หรือหาความสัมพันธ์ดังกล่าวนานเกินความจำเป็น ผู้วิจัยได้จัดทำเป็นไฟล์สำเร็จรูปไว้ให้ มีจำนวนทั้งสิ้น 33 ไฟล์ ดังปรากฏในภาคผนวก จ ส่วนท้ายของคู่มือครู ในบางกิจกรรมที่ใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตซึ่งไม่ซับซ้อนมากนักหรือต้องการฝึกทักษะให้นักเรียนคล่องแคล่วในการหาสมบัติของรูปเรขาคณิตต่างๆ ผู้วิจัยจะกำหนดกิจกรรมในลักษณะให้นักเรียนลงมือปฏิบัติการสร้างรูปทุกขั้นตอนตามข้อแนะแนวทางด้วยตนเอง

แบบฝึกปฏิบัติ(ถ้ามี) เป็นแบบฝึกปฏิบัติที่ให้นักเรียนทบทวนความรู้ความเข้าใจตลอดจนนำความรู้จากใบงานมาใช้แก้ปัญหาโจทย์และเป็นการฝึกทักษะ ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนทำโดยอิสระ อาจทำที่บ้านหรือในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

นอกจากนี้ในตอนท้ายของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ยังมีสาระสำคัญเพื่อเป็นการสรุปเนื้อหาที่นักเรียนควรต้องทราบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้

บทเรียนเรขาคณิตทั้งหมดนี้อยู่ในภาคผนวก จ

2. คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ประกอบด้วย 6 หัวข้อ ซึ่งใช้เวลาเรียนเฉพาะส่วนที่เป็นการใช้ซอฟต์แวร์ 4 คาบ ด้วยรายละเอียดซึ่งปรากฏดังตาราง 14

ตาราง 14 หัวข้อและขอบเขตของหัวข้อในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ตามที่กำหนดครั้งสุดท้าย

หัวข้อที่	รายละเอียดของเนื้อหา
1.บทนำ	ที่มาของ GSP
2.อุปกรณ์ที่จำเป็น	อุปกรณ์ที่จำเป็นในการใช้ GSP
3.วิธีการใช้ซอฟต์แวร์	การใช้งาน GSP เบื้องต้น สรุปคำสั่งต่างๆ ของ GSP
4.ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น	การสร้างจุด เส้น และวงกลม การกำหนด Label ของออปเจก และกล่องข้อความ การสร้างรูปหลายเหลี่ยม การวัดและการคำนวณ การใช้สคริปต์
5.ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น	ปัญหาที่สังเกตพบจากการใช้ GSP สร้างและวัดขนาดของรูปเรขาคณิต ปัญหาที่เกิดขึ้นเนื่องจาก GSP ที่นักเรียนใช้เป็นรุ่นสาธิต
6.ภาคผนวก : เปรียบเทียบการสร้างพื้นฐานระหว่างการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงกับการสร้างโดย GSP	การสร้างส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ การสร้างเส้นตรงจากจุดภายนอกไปตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ การสร้างเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ทั้งหมดอยู่ในภาคผนวก จ

3. คู่มือครู โดยในส่วนหน้าของเล่มประกอบด้วย คำชี้แจงการใช้คู่มือครู กำหนดคาบการสอน ต่อจากนั้นเป็นรายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. คำนำประจำหน่วยการเรียนรู้ ชื่อเรื่องของหน่วยการเรียนรู้ จำนวนคาบที่ใช้สอน จำนวนหน่วยการเรียนรู้ย่อย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย พร้อมด้วยคำอธิบายที่เกี่ยวกับเนื้อหา และ ข้อเสนอแนะในการสอนให้บรรลุผลตามจุดประสงค์การเรียนรู้

2. รายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วย

2.1 แนวทางคำตอบของใบงาน

2.2 แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ

3. กิจกรรมเสริมประกอบด้วย กิจกรรมเสนอแนะหรือปัญหาชวนคิดต่างๆ ซึ่งจะแทรกตามความเหมาะสม

นอกจากนี้ในคู่มือครูยังมี รายชื่อไฟล์ที่สร้างโดย GSP อยู่ในส่วนท้ายของคู่มือครู เพื่อใช้ประกอบในกิจกรรมของบทเรียนเรขาคณิตด้วย

คู่มือครูทั้งหมดอยู่ในภาคผนวก ฉ

9. ข้อสังเกตเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

จากการทดลองใช้บทเรียนเรขาคณิต พร้อมทั้งคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์กับกลุ่มตัวอย่างในการทดลองเป็นรายบุคคล การทดลองกลุ่มย่อยและการทดลองภาคสนาม ทั้งหมดสามครั้ง มีข้อสังเกตอย่างไม่เป็นทางการเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างดังต่อไปนี้

9.1 พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่ ในระยะแรกของการเรียนพบว่า นักเรียนต้องปฏิบัติตามกิจกรรมตามขั้นตอนที่ปรากฏในใบงานโดยเริ่มจากสร้างรูปหรือเปิดไฟล์สำเร็จรูป(ถ้ามี) สืบหา ตั้งข้อาคัดเดา แล้วสืบเสาะหาเหตุผล ขั้นตอนการสืบเสาะนี้จะประกอบด้วย การตรวจสอบโดยการโยกกรอบในลักษณะต่างๆ ที่เงื่อนไขเกี่ยวกับรูปยังสอดคล้องกับโจทย์ ทำให้นักเรียนอาจตรวจพบตัวอย่างค้านว่า ข้อความที่ตนเองสรุปมาในข้อาคัดเดานั้นไม่ถูกต้อง ในกรณีที่นักเรียนตรวจสอบพบว่าข้อาคัดเดาที่ตั้งขึ้นน่าจะถูกต้อง แล้วส่วนใหญ่ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนหาเหตุผลตามความเหมาะสมมาอธิบายเพื่อสรุปเป็นกรณีทั่วไป เมื่อการเรียนผ่านไประยะหนึ่ง พบว่านักเรียนส่วนใหญ่จะข้ามขั้นตอนโดยลงมือสร้างรูปแล้วทำการโยกกรอบพร้อมทั้งตั้งข้อาคัดเดาแล้วบันทึกข้อาคัดเดาที่ตั้งขึ้น ทำให้ข้อาคัดเดาที่บันทึกส่วนมากจะเป็นข้อาคัดเดาที่น่าจะถูกต้อง เนื่องจากในขณะที่โยกกรอบนักเรียนจะเห็นตัวอย่างค้านของบางข้อาคัดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้นทันที ถ้าข้อาคัดเดาใดที่ตั้งขึ้นแล้วตรวจสอบพบว่าน่าจะถูกต้อง นักเรียนจะแสดงความคิดเห็นอภิปรายโต้เถียงกับเพื่อนร่วมกลุ่มตลอดจนซักถามหาเหตุผลเพื่อสรุปหาเหตุผลร่วมกับเพื่อนนักเรียนและครู ส่วนในคาบที่นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ พบว่าทันทีที่อ่านโจทย์นักเรียนจะลงมือสร้างรูปตามข้อกำหนดของโจทย์และพยายามตั้งข้อาคัดเดาที่น่าจะถูกต้องทันที ซึ่งการปฏิบัติดังกล่าวใช้เวลาปฏิบัติตามขั้น

ตอนน้อยลง แต่ถือนักเรียนผ่านขั้นตอนการสำรวจ ตั้งข้อคาตเตาและสืบเสาะหาเหตุผลอย่างครบถ้วน ซึ่งสังเกตได้ว่านักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังกล่าวได้อย่างอัตโนมัติ

9.2 เมื่อติดตามพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในรายวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ครูผู้สอนในรายวิชาเหล่านั้นต่างมีความเห็นตรงกันว่าพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนส่วนใหญ่ในกลุ่มตัวอย่างเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัด มีลักษณะกล้าแสดงออก มักออกมาแสดงวิธีทำโจทย์ต่างๆ บนกระดานดำ มีแนวทางในการซักถามและอภิปรายกับเพื่อนในชั้นเรียนถึงความถูกต้องของการทำโจทย์และเหตุผลของการแก้ปัญหาโจทย์ข้อนั้นๆ อย่างชัดเจน ต่างจากอดีตที่เคยผ่านมา

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ดังมีรายละเอียดพอสังเขปดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ในการวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตด้วยการลงมือปฏิบัติเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียนเป็นนักเรียนอาสาสมัคร ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541 จำนวน 42 คน แบ่งออกตามระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็น 3 กลุ่ม คือกลุ่มที่อยู่ในระดับสูง ปานกลางและต่ำ โดยใช้นักเรียนในการทดลอง 3 ครั้ง ดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล ใช้นักเรียน 3 คน ที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 1 คน
2. การทดลองกลุ่มย่อย ใช้นักเรียน 9 คน ที่ไม่เป็นนักเรียนในข้อ 1. และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 3 คน
3. การทดลองภาคสนาม ใช้นักเรียน 30 คน เป็นนักเรียนที่เหลือจากการทดลองสองครั้งแรก และมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับสูง ปานกลางและต่ำ ระดับละ 10 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยได้กำหนดเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไว้ดังนี้

1. บทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ พร้อมทั้งคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู

2. เครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ประกอบด้วย แบบฝึกปฏิบัติ
ระคน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยได้กำหนดขั้นตอนการวิจัยเป็น 4 ขั้นตอน คือ

1. การกำหนดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการ
ตามลำดับดังนี้

1.1 ศึกษาและวิเคราะห์หาสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อยของนักเรียนด้าน
เนื้อหาเรขาคณิตจากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์และคู่มือครูที่จัดทำโดย สสวท. และตำราอื่น
ๆ ที่นำเรขาคณิตไปใช้ในระดับมัธยมศึกษาและอุดมศึกษา เอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อจะนำ
มากำหนดเป็นกรอบสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

1.2 นำสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่ได้จากข้อ 1.1 มาสร้าง
แบบสอบถามผู้เชี่ยวชาญและการสอนเรขาคณิตในลักษณะเป็นหัวข้อตามเนื้อหาต่าง ๆ เพื่อ
กำหนดเป็นสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับนักเรียน

2. การสร้างบทเรียนเรขาคณิต คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครู ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนิน
การตามลำดับดังนี้

2.1 นำสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับนักเรียนซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 1 มาเป็นพื้นฐาน
ในการสร้างร่างบทเรียน ทำให้ได้ร่างบทเรียนจำนวน 3 หน่วยการเรียนรู้ คือ

2.1.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคลิด

2.1.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม

2.1.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วม
บนวงกลมเดียวกัน

ในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ประกอบด้วย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ หัวข้อหน่วยการ
เรียนย่อย ความรู้พื้นฐาน (ถ้ามี) จุดประสงค์ปลายทาง คำชี้แจง และแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย
ประกอบด้วย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย หัวข้อย่อยของเนื้อหา (ถ้ามี) จุดประสงค์นำทาง ใบบงาน
แบบฝึกปฏิบัติ (ถ้ามี) และสาระสำคัญ

นำร่างบทเรียนเรขาคณิตที่ได้ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอน
เรขาคณิตชุดเดิมเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสมและความสอดคล้องในการจัดกิจ
กรรมกับจุดมุ่งหมายและเนื้อหาของร่างทั้งหมด แล้วนำมาปรับปรุงตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ
และเพิ่มเติมรายละเอียดตามความเหมาะสม ต่อจากนั้นรวบรวมเป็นบทเรียนเรขาคณิตที่
พร้อมที่จะนำไปทดลองใช้เพื่อตรวจสอบหาประสิทธิภาพ

2.2 เนื่องจากบทเรียนเรขาคณิตใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้ GSP ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่เหมาะสมกับการเรียนการสอนเรขาคณิต และได้สร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ดังกล่าวเป็นส่วนของภาคผนวกของบทเรียนเรขาคณิตด้วย โดยมีลำดับขั้นการสร้าง ดังนี้

2.2.1 ศึกษาและทดลองใช้ GSP ตามคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ซึ่งเป็นภาษาอังกฤษ ตลอดจนเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

2.2.2 เรียบเรียงร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ทำให้ได้ร่างคู่มือที่ประกอบด้วย บทนำ อุปกรณ์ที่จำเป็นสำหรับการใช้ซอฟต์แวร์ วิธีการใช้ซอฟต์แวร์ ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น และปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น

2.2.3 นำร่างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ที่ได้จากข้อ 2.2.2 ให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ด้านการใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ ตรวจสอบเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของร่างทั้งหมด แล้วปรับปรุงตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และเพิ่มเติมรายละเอียดตามความเหมาะสม ต่อจากนั้นรวบรวมเป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ที่พร้อมจะนำไปผนวกกับบทเรียนเรขาคณิตเพื่อนำไปทดลองใช้

2.3 เนื่องจากต้องมีคู่มือครู สำหรับครูเพื่อเป็นแนวทางในการเตรียมการสอนและในการสอนให้สอดคล้องกับบทเรียนอย่างราบรื่นและมีประสิทธิภาพ การสร้างคู่มือครูมีลำดับขั้นการสร้าง ดังนี้

2.3.1 เรียบเรียงร่างคู่มือครู ซึ่งประกอบด้วย คำชี้แจงการใช้คู่มือครู คำนำของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ แนวคำตอบของใบงานของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ แนวคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และกิจกรรมเสริม

2.3.2 นำร่างคู่มือครูที่ได้จากข้อ 2.3.1 ให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตชุดเดิม ตรวจสอบเพื่อพิจารณาความเหมาะสมของร่างทั้งหมด

2.3.3 ปรับปรุงร่างคู่มือครูตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิตในข้อ 2.3.2 และเพิ่มเติมรายละเอียดในคู่มือครู

2.3.4 นำร่างคู่มือครูที่ได้จากข้อ 2.3.3 ให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ทางการสอนคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความถูกต้องของแนวคำตอบต่าง ๆ

2.3.5 ปรับปรุงแก้ไขร่างคู่มือครูตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในข้อ 2.3.4 แล้วรวบรวมเป็นคู่มือครูที่พร้อมจะนำไปทดลองใช้ร่วมกับบทเรียนเรขาคณิตและคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

3. การสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต โดยผู้วิจัยแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ

3.1 แบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ สร้างโดยอาศัยจุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้เป็นหลัก ลักษณะโจทย์เป็นแบบอัตนัย เพื่อนำค่าเฉลี่ยร้อยละของ

คะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้มาเป็นค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ให้นักเรียนต้องแสดงวิธีทำ เริ่มจากใช้ GSP ในการสร้างรูป สำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา ตรวจสอบข้อาคัดเดาซึ่งในกรณีที่นักเรียนพบว่าข้อาคัดเดานั้นน่าจะถูกต้อง นักเรียนจะต้องบอกเหตุผลหรือแนวทางของเหตุผลความเหมาะสมเพื่อยืนยันว่าข้อาคัดเดานั้นถูกต้อง แบบฝึกปฏิบัติระคน แบ่งเป็น 3 ชุด ดังนี้

3.1.1 แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวน 5 ข้อ ใช้เวลา 2 คาบ

3.1.2 แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จำนวน 2 ข้อ ใช้เวลา 1 คาบ

3.1.3 แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 จำนวน 4 ข้อ ใช้เวลา 2 คาบ

3.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต สร้างโดยอาศัยจุดประสงค์ปลายทางประจำหน่วยการเรียนรู้เป็นหลัก เพื่อนำค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตมาเป็นค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ซึ่งแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตชุดนี้มีจำนวนข้อสอบทั้งหมด 32 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน ตอนที่ 1 เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ตอนที่ 2 เป็นแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ ใช้เวลา 2 คาบ

4. การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้นำบทเรียนเรขาคณิต พร้อมทั้งคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครู ที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างซึ่งผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูสอนเอง โดยกำหนดการตรวจสอบหาข้อบกพร่องและหาประสิทธิภาพของบทเรียน 3 ครั้ง ดังนี้

4.1 การทดลองเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยนำบทเรียนเรขาคณิตไปใช้สอนนักเรียนจำนวน 3 คน ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 ที่ละหน่วยการเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยทันทีและสังเกตสอบถามความคิดเห็นเพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในด้านต่าง ๆ ดังนี้คือ ความเหมาะสมของภาษา ความยากง่ายของเนื้อหา กิจกรรมที่ให้ปฏิบัติเวลาที่ใช้ในการเรียน และอื่น ๆ ที่กลุ่มตัวอย่างจะให้ข้อคิดเห็น เมื่อนักเรียนเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้ก็ทำการทดสอบทันทีด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เพื่อนำข้อมูลไปหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

4.2 การทดลองกลุ่มย่อย ภายหลังการปรับปรุงแก้ไข ผู้วิจัยนำบทเรียนเรขาคณิตไปใช้สอนนักเรียนจำนวน 9 คน ในช่วงปิดภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 และวันเสาร์ที่ละหน่วยการเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้วให้ทำแบบฝึกปฏิบัติระคนทันทีและสังเกตสอบถามความคิดเห็นจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่าง ๆ ทำนองเดียวกันกับการทดลองเป็นรายบุคคล เมื่อนักเรียนเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้ก็ทำการทดสอบทันทีด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เพื่อนำข้อมูลไปหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

4.3 การทดลองภาคสนาม ภายหลังการปรับปรุงแก้ไข ผู้วิจัยนำบทเรียนเรขาคณิตไปใช้สอนนักเรียนจำนวน 30 คน ในช่วงภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2541 ที่ละหน่วยการเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้วให้ทำแบบฝึกปฏิบัติระคนทันทีและสังเกต สอบถามความคิดเห็นจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียนเรขาคณิตในด้านต่างๆ ทำนองเดียวกันกับการทดลองเป็นรายบุคคลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เมื่อนักเรียนเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้แล้วจึงทำการทดสอบทันทีด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เพื่อนำข้อมูลไปหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต

สรุปผลการวิจัย

จากการดำเนินการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ด้วยขั้นตอนดังได้กล่าวมาแล้ว ทำให้ได้บทเรียนเรขาคณิตที่ต้องการ โดยบทเรียนเรขาคณิตนี้ได้ผ่านการทดลองเพื่อตรวจสอบแก้ไขและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตทั้งหมด 3 ครั้ง ซึ่งปรากฏผลดังนี้

1. การทดลองเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยได้พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ในบางตอน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตพบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70
2. การทดลองเป็นกลุ่มย่อย ภายหลังจากการปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 1 ก็ยังคงพบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ในบางตอน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตพบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70
3. การทดลองภาคสนาม ภายหลังจากการปรับปรุงแก้ไขครั้งที่ 2 ในขั้นตอนนี้ไม่พบสิ่งที่เป็นข้อบกพร่องเกี่ยวกับบทเรียนเรขาคณิตมีปรากฏออกมาอย่างชัดเจน ส่วนในด้านประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตพบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70

จากการดำเนินการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตดังกล่าวข้างต้น สรุปผลได้ว่า บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นมีประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์การตัดสินที่กำหนด ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานการวิจัย

การอภิปรายผล

จากการพัฒนาจนได้บทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ โดยการทดลองครั้งสุดท้ายซึ่งเป็นการทดลองภาคสนามกับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน พบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70 กล่าวคือ ค่าเฉลี่ย

ร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างได้ต่ำสุดเพียง 75.20 แสดงว่าการนำเสนอเนื้อหาของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ตามกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียนน่าจะมีประสิทธิภาพที่สามารถพัฒนาผู้เรียนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดและค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดเป็น 72.46 แสดงว่าการนำเสนอเนื้อหาในภาพรวมของบทเรียนน่าจะมีประสิทธิภาพที่สามารถพัฒนานักเรียนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งอาจเป็นเพราะบทเรียนเรขาคณิตมีลักษณะและการดำเนินการต่าง ๆ ดังนี้

1. บทเรียนเรขาคณิตเป็นบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ การใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้โดยเฉพาะอย่างยิ่ง GSP ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์ทางเรขาคณิตถือเป็นสิ่งแปลกใหม่ ง่ายต่อการใช้งาน เหมาะสมกับการสร้างรูปเรขาคณิต สามารถวัดขนาดของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว สามารถกำหนดสีต่าง ๆ ให้กับรูปเรขาคณิตที่สร้างขึ้นเพื่อเน้นความสัมพันธ์หรือความแตกต่างให้เห็นได้อย่างชัดเจน สิ่งเหล่านี้ล้วนสร้างความสนใจ ทำให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นอยากที่จะเรียนรู้ การที่นักเรียนเห็นรูปเรขาคณิตในแง่มุมต่าง ๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ง่าย ซึ่งเป็นไปตามแนวคิดของ สุกฤษี รอดโพธิ์ทอง (2535 : 44-47) ที่ให้ข้อแนะนำไว้ว่า การเสนอภาพที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เป็นองค์ประกอบที่สำคัญของการเรียนการสอนด้วยคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาง่ายขึ้น และความคงทนในการจำดีกว่าการเรียนทั่วไป นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับไฮด์ และเบย์เลอร์ (Heid Baylor, 1993 : 206) ที่กล่าวว่า การใช้ซอฟต์แวร์ทางเรขาคณิตจะเปลี่ยนลักษณะของวิชาเรขาคณิต แต่เดิมเป็นเพียงการพิสูจน์ตามทฤษฎีบทในหนังสือเรียน หรือที่ครูยกมาให้พิสูจน์ เป็นการส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติเอง ฝึกการสำรวจ และสืบเสาะหาเหตุผล ซึ่งเป็นการสนับสนุนที่ NCTM ได้วางมาตรฐานของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน ที่ให้มีการนำซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมมาใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ และในส่วนของการเรียนการสอนเรขาคณิต มีจุดมุ่งหมายที่ควรเน้นให้นักเรียนค้นพบความสัมพันธ์และการพัฒนาความคิดด้านมิติสัมพันธ์ โดยการสร้าง การวาด การวัด การมองเห็น การเปรียบเทียบ การแปลง และการจำแนกรูปเรขาคณิต ซึ่งการเรียนการสอนเรขาคณิตควรเน้นกิจกรรมในลักษณะการสำรวจ การตั้งข้อคาดเดา การสืบเสาะเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดา (NCTM. 1989 : 112-115) และสอดคล้องกับ ดิวอี้ ผู้ที่ถือว่า "การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อผู้เรียนลงมือกระทำเอง" (สุรางค์ ไคว์ตระกูล, 2536 : 203) ที่สำคัญที่สุดคือคำกล่าวของเดรฟัสและฮาดาส (Dreyfus & Hadas. 1987 : 47-58) ที่กล่าวว่า มีหลักการทางเรขาคณิตที่นักเรียนโดยทั่วไปไม่เข้าใจ เช่น การรับรู้จากภาพเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอในการพิสูจน์ แต่การรับรู้จากภาพที่หลากหลายและการวัดยังเป็นยุทธวิธีที่สำคัญสำหรับการค้นพบสมบัติทางเรขาคณิต การยกตัวอย่าง คำนวณ การวิเคราะห์องค์ประกอบพื้นฐานต่าง ๆ ของรูปที่วางอยู่ในตำแหน่งต่างไปจากที่คุ้นเคย

ล้วนเป็นสิ่งสำคัญในการเรียนเรขาคณิต ซึ่งการเรียนตามบทเรียนเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้จะเน้นการสร้างรูปด้วยตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา สามารถโยกย้ายในตำแหน่งต่าง ๆ เพื่อสืบเสาะหาตัวอย่างค้านอันเป็นทางหนึ่งของการตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นเพื่อบอกว่าข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้นไม่ถูกต้อง แต่ถ้านักเรียนไม่พบตัวอย่างค้าน นั้นหมายถึงข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นน่าจะถูกต้อง เมื่อเป็นเช่นนั้นนักเรียนจะต้องพยายามสืบเสาะหาแนวทางการให้เหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อยืนยันความถูกต้องของข้อคาดเดาต่อไป นอกจากนี้ในบางกิจกรรมที่ต้องมีการสร้างรูปที่สลับซับซ้อน ผู้วิจัยได้จัดสร้างไว้เป็นไฟล์สำเร็จรูปให้นักเรียนได้เรียกใช้ได้เลย ไม่ต้องเสียเวลาในการสร้างทำให้นักเรียนพุ่งความสนใจไปยังเนื้อหาหรือโมเมนต์ที่ต้องการเรียนได้ตรงประเด็นทำให้กิจกรรมการเรียนไม่น่าเบื่อหน่าย

2. บทเรียนเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีการแบ่งเนื้อหาเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อยๆ เรียงลำดับต่อเนื่องกัน มีการกำหนดจุดประสงค์นำทางและจุดประสงค์ปลายทางให้นักเรียนได้ทราบ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ตรงตามเนื้อหาและทราบแนวทางวัดผลในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ยังสามารถตรวจสอบความเข้าใจในเนื้อหา จากการทำแบบฝึกปฏิบัติของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย ในขณะเดียวกันก็ยังยกให้ครุมีความสำคัญในด้านการจัดเตรียมกิจกรรม การกระตุ้นให้นักเรียนปฏิบัติ ตอบข้อซักถาม และการช่วยให้นักเรียนสรุป เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกปฏิบัติแล้วครูจะเป็นผู้ตรวจคำตอบคืนให้นักเรียน ทำให้นักเรียนทราบความก้าวหน้าในการเรียนของตนเอง และครูยังได้ช่วยอธิบายในกรณีที่นักเรียนเข้าใจผิด

3. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนอาสาสมัคร ทำให้ได้นักเรียนที่มีความสนใจกระตือรือร้นในการเรียน ขอชั่วโมงอิสระเพื่อทำแบบฝึกปฏิบัติ ผู้ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองเป็นรายบุคคลเมื่อทดลองเสร็จแล้วยังอาสาสมัครมาคอยช่วยเหลือตอบปัญหาของนักเรียนที่เข้าทดลองในการทดลองกลุ่มย่อย และภาคสนาม ระหว่างการทดลองถ้ามีนักเรียนคนใดยังสร้างรูปไม่ได้ หรือเกิดการสงสัยการสร้าง จะมีนักเรียนคนอื่นที่สร้างได้แล้วช่วยกันอธิบายตลอดจนแนะนำเทคนิคต่างๆ ในระหว่างการเรียนนักเรียนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนสิ่งที่ตนเองสำรวจได้หรือข้อคาดเดาที่ตนเองตั้งขึ้น ซึ่งจากการกระทำดังกล่าว ทำให้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหาหรือข้อสงสัยที่มีอยู่ได้อย่างหลากหลาย และจากการที่นักเรียนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนสิ่งที่ตนเองรู้ ก็จะทำให้นักเรียนเหล่านี้มีความเข้าใจที่ดีขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ยัง (Young, 1972 :630) ที่กล่าวว่า “ผู้เรียนสามารถเรียนรู้สิ่งต่างๆ จากกันและกันได้ดี เนื่องจากภาษาที่ใช้สื่อความหมายอยู่ในระดับเดียวกัน” และสอดคล้องกับคำกล่าวของเบนเนทท์ (Bennett, 1993 : 9) ที่กล่าวว่า “นักเรียนจะเรียนรู้ได้ดีที่สุดเมื่อพวกเขาได้สื่อสารกันเองในระหว่างกลุ่มถึงสิ่งที่กำลังเรียนอยู่ การที่นักเรียนเรียนและทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม เป็นสิ่งกระตุ้นที่ดีที่สุดทำให้เกิดแนวคิดที่หลากหลายและยังช่วยให้เพื่อนในกลุ่มเกิดการเรียนรู้มากขึ้น” นอกจากนี้จากการสังเกตและสอบถามนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้เรียนบทเรียนเรขาคณิตนี้พบว่านักเรียนส่วนมากมีความสนใจ พอใจ ที่ได้เรียนเรขาคณิตโดยลงมือสร้างรูปเอง ทำการ

สำรวจ ทั้งพยายามตั้งข้อคาถาเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาถาเดาที่ตั้งไว้ และนักเรียนต่างบอกตรงกันว่า ในตอนท้ายของบทเรียนเมื่อมีการสร้างรูปใดๆ เกิดขึ้นจะเกิดเป็นความเคยชินที่จะต้องสังเกต สำรวจ และพยายามตั้งข้อคาถาเดา แล้วอภิปรายกับเพื่อนในกลุ่ม พยายามตรวจสอบหากรณีที่เป็นตัวอย่างค้านหรือสนับสนุนข้อคาถาเดาที่ตนเองตั้งไว้ อันเป็นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติ จากการสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ และจากการสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง ส่วนใหญ่ต่างระบุตรงกันถึงความพอใจ และคิดว่ามีประโยชน์อย่างมากในการนำไปเป็นพื้นฐานของการศึกษาต่อไป ซึ่งน่าจะเป็นการแสดงให้เห็นถึงความสนใจในการเรียน อันจะส่งผลให้ผลการสอบมีคะแนนเฉลี่ยที่ดี โดยสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุนันทา ประไพตระกูล (2534 :139-140) ที่สรุปได้ว่า ตัวแปรหนึ่งที่มีอิทธิพลในรูปที่เป็นสาเหตุทั้งทางตรงและทางอ้อมต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คือ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ เจตคติ และความสนใจต่อวิชาคณิตศาสตร์

4. บทเรียนเรขาคณิตมีสาระสำคัญเป็นการสรุปเนื้อหาไว้ในตอนท้ายของหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย เพื่อให้ให้นักเรียนสามารถทบทวนเนื้อหาที่เรียนได้เร็วขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับความเห็นของ ณรุทธิ์ สุทธิจิตต์ (2521 : 179-183) เกี่ยวกับการเสนอเกณฑ์ในการวิเคราะห์คุณภาพทางวิชาการของบทเรียนที่ดี ว่าควรมีบทสรุปไว้ท้ายบทเรียนอย่างสม่ำเสมอ

5. ในคู่มือครู นอกจากมีแนวทางคำตอบของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติแล้ว ยังมีกิจกรรมเสริมซึ่งครูสามารถนำไปใช้เป็นคำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้เพิ่มเติมความรู้ทางเรขาคณิตทั่วไป

อย่างไรก็ตาม จากการที่พิจารณาถึงค่าประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตที่ได้จากการทดลองสามครั้ง พบว่าค่าที่ได้มีแนวโน้มลดลงในขณะที่จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างมีเพิ่มขึ้น ในฐานะที่ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูสอนเองได้พบว่าปัญหาที่ทำให้เป็นเช่นนั้นน่าจะ ได้แก่

1 ในการทดลองเป็นรายบุคคล มีกลุ่มตัวอย่างเพียง 3 คน ครูสามารถดูแลและตอบคำถามต่างๆ ของนักเรียนได้ทั่วถึง ลักษณะการเรียนรู้เป็นการเรียนแบบร่วมมืออย่างชัดเจน ส่วนการทดลองกลุ่มย่อย มีกลุ่มตัวอย่าง 9 คน ครูอาจจะดูแลและตอบคำถามต่างๆ ของนักเรียนได้ไม่ทั่วถึง แต่การทดลองภาคสนาม มีกลุ่มตัวอย่าง 30 คน ปริมาณนักเรียนที่มากขึ้น การตอบคำถามซึ่งมีหลากหลายอาจทำได้ไม่ทั่วถึง ลักษณะการเรียนรู้เป็นการเรียนแบบร่วมมือที่มีขนาดของกลุ่มที่ใหญ่ขึ้นอาจทำให้นักเรียนบางคนมีส่วนร่วมน้อยลง

2 เมื่อผู้วิจัยทำการสอบถามนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างถึงระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย พบว่า นักเรียนในกลุ่มที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับสูงส่วนใหญ่มีระดับผลการเรียนที่ลดลงมากหลายคน โดยบางคนมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 เป็น 1.00 ในขณะที่นักเรียนในกลุ่มที่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับปานกลางทุกคนมีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตั้งแต่ 2.00 ขึ้นไป

3 ผลการเรียนรู้บทเรียนเรขาคณิตนี้ไม่ได้มีผลต่อการเรียนวิชาอื่น ๆ ที่เรียนตามหลักสูตร ทำให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างบางคนโดยเฉพาะในการทดลองภาคสนามเมื่อผ่านการเรียนการใช้ซอฟต์แวร์ไปแล้วก็ไม่สนใจเรียนเท่าที่ควร

ซึ่งจากข้อมูลดังกล่าวข้างต้นอาจเป็นเหตุผลหนึ่งที่ทำให้ค่าประสิทธิภาพของบทเรียนที่ได้จากการทดลองมีลักษณะดังที่กล่าวมา

ข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยครั้งนี้ สรุปเป็นข้อเสนอแนะในการนำไปใช้และในการวิจัยครั้งต่อไป ดังนี้

1. ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

1.1 เนื่องจากบทเรียนเรขาคณิตนี้สามารถทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ได้ ดังนั้นจึงควรส่งเสริมให้มีการสร้างและการใช้บทเรียนเรขาคณิตในลักษณะเช่นนี้ ให้แพร่หลาย และนำ GSP ไปประยุกต์ใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตอื่น เช่น การแปลงทางเรขาคณิต

1.2 ผู้ที่จะนำบทเรียนเรขาคณิตนี้ไปใช้ควรดำเนินการตามลำดับดังนี้

1.2.1 ศึกษา ข้อแนะนำของบทเรียนเรขาคณิต คู่มือครู และคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ อย่างละเอียดก่อนนำไปใช้

1.2.2 เนื่องจากบทเรียนเรขาคณิตนี้ไม่ได้จำกัดเฉพาะนักเรียนที่อาสาสมัครมาเรียน ดังนั้นในการนำไปใช้ ครูจะต้องปรับวิธีสอนตลอดจนกิจกรรมให้ตรงกับพื้นฐานความรู้ของนักเรียน และนำกิจกรรมเสริม ตลอดจนปัญหาชวนคิดมาแทรกให้นักเรียนปฏิบัติเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

1.3 ถ้าจะให้บทเรียนเรขาคณิตนี้ได้ผลดียิ่งขึ้นควรปฏิบัติดังนี้

1.3.1 ถ้าเป็นไปได้ ควรใช้ GSP ที่เป็นรุ่นเต็ม ซึ่งจะเอื้อประโยชน์ให้นักเรียนได้บันทึกรูปที่ตนเองสร้าง ตลอดจนสคริปต์การสร้างต่าง ๆ ที่ซับซ้อนไว้ใช้ในคราวต่อไป และพิมพ์รูปที่เป็นผลจากการสร้างเพื่อนำไปเป็นหัวข้อในการอภิปรายกับเพื่อน หรือนำมาซักถามครูในกรณีที่เกิดข้อสงสัย

1.3.2 ควรมีเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มี GSP บันทึกในเครื่อง ประจำอยู่ในห้องเรียนเพื่อให้ให้นักเรียนได้ใช้เวลาว่างมาทำแบบฝึกปฏิบัติ หรือค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม

1.4 นอกจากจะนำบทเรียนเรขาคณิตนี้ไปใช้เพื่อการเรียนรู้โดยตรงทั้งบทเรียนแล้ว ยังสามารถนำส่วนที่เป็นหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ไปประกอบการสอนเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้ หรือนำเฉพาะส่วนที่เป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ไปปรับปรุงเพื่อใช้ทำกิจกรรมประกอบการสอนเนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับประถมศึกษาได้

1.5 จากการที่ GSP เป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูป ที่นำมาใช้ในเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อให้นักเรียนได้สำรวจความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต นักเรียนจะเห็นการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตด้วยการกระทำของตัวเองในลักษณะการสร้าง และมีความสามารถทางการแปลง ที่ขยายขอบเขตของการทำได้กว้างขวางหลายรูปแบบ รวมถึงการเคลื่อนไหวของรูปเรขาคณิตเกือบทันทีที่ได้รับคำสั่ง ดังนั้นจึงควรนำส่วนที่เป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ ไปปรับปรุงเพื่อใช้ประกอบการอบรมให้ครูประจำการ หรือผู้ที่กำลังจะไปเป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อให้ครูที่ผ่านการอบรมได้นำไปประยุกต์ใช้กับการสอนเนื้อหาคณิตศาสตร์ต่างๆ ตามความเหมาะสมต่อไป

1.6 บทเรียนเรขาคณิตนี้เป็นบทเรียนที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ซึ่งในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยเลือก GSP เป็นเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ดังนั้นถ้ามีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์อื่นที่มีสมรรถนะใกล้เคียงกับ GSP ก็สามารถนำบทเรียนเรขาคณิตนี้ไปใช้ได้ โดยปรับเพียงเล็กน้อยในบทเรียนเรขาคณิตและเปลี่ยนแปลงในส่วนที่เป็นคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์เพิ่มเติมเข้ามาเท่านั้น

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

2.1 ควรนำบทเรียนเรขาคณิตชุดนี้ไปทดลองใช้กับนักเรียนในห้องเรียนปกติ เพื่อดูผลที่เกิดขึ้นและปรับปรุงแก้ไขบทเรียน คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ และคู่มือครูให้ดียิ่งขึ้น

2.2 บทเรียนเรขาคณิตชุดนี้พัฒนาขึ้น และได้รับการทดสอบหาประสิทธิภาพกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเฉพาะในเรื่องความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาและความสามารถในการสำรวจตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ หลังการศึกษบทเรียนเรขาคณิตจบเท่านั้น ไม่ได้ศึกษาถึงประสิทธิภาพที่มีผลต่อเนื่องระยะยาวไปถึงพฤติกรรมการเรียนรู้และเจตคติต่อการเรียน ดังนั้นผู้สนใจอาจวิจัยให้ทราบถึงประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตในประเด็นดังกล่าว

2.3 ในการวิจัยครั้งนี้ บทเรียนเรขาคณิตได้สร้างขึ้นตามกรอบแนวคิดสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต เฉพาะในส่วนของสมบัติของรูปเรขาคณิต แต่ไม่ได้เกี่ยวกับการคำนวณหาความยาว พื้นที่ และปริมาตรของรูปเรขาคณิตโดยตรง จึงควรมีการศึกษสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาอื่น อาทิ ด้านเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์ เพื่อเป็นกรอบแนวคิดสำหรับสร้างบทเรียนที่ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ต่อไป

2.4 ควรทำการวิจัยเปรียบเทียบระหว่างการสอนเนื้อหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ในระดับมัธยมศึกษา หรือเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิตในระดับประถมศึกษา โดยใช้ GSP และการสอนแบบปกติ

2.5 เนื่องจากความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีทำให้มีการพัฒนาซอฟต์แวร์เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ดังนั้นควรมีการนำซอฟต์แวร์ทางเรขาคณิตอื่นมาเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และทำการ

ทดลองเปรียบเทียบกับการใช้ GSP เพื่อจะได้ซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมกับบทเรียน ซึ่งจะส่งผลต่อ
ประสิทธิภาพทางการเรียนของนักเรียนต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. กรมวิชาการ. (2534). หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2535). หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี. (2532). การสอนการพิสูจน์เรื่องการเท่ากันทุกประการ. ปรินญา นิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทร วิโรฒประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ฉลองชัย สุรวัฒนาบุรณ์. (2528). การเลือกและการใช้สื่อการสอน. ภาควิชาเทคโนโลยีการ ศึกษา: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อัดสำเนา.
- ณรุทธิ์ สุทธิจิตต์. (2521). การวิเคราะห์เนื้อหาและการประเมินแบบเรียนคณิตศาสตร์สำหรับ นักเรียนชาวเขา. วิทยานิพนธ์ คม. (ประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- บุญเชิด ภิญโญนันต์พงศ์. (2527). การทดสอบแบบอิงเกณฑ์: แนวคิดและวิธีการ. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- พรณี ช.เจนจิต. (2538). จิตวิทยาการเรียนการสอน. กรุงเทพฯ: อมรินทร์การพิมพ์.
- ผดุง อารยะวิญญู. (2527). ไมโครคอมพิวเตอร์เพื่อการศึกษา. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- ยุพิน พิพิธกุล และ อรพรรณ ต้นบรรจง. (2535). เทคโนโลยีในการผลิตสื่อการสอน คณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.
- ลัดดา เต็มตุ้ม. (2532). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง “เส้น ขนานและความคล้าย” โดยใช้วิธีสื่อประสมกับการสอนแบบปกติของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอยุธยาอนุสรณ์จังหวัดพระนครศรีอยุธยา. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย เกษตรศาสตร์. อัดสำเนา.
- สมพล เล็กสกุล และชุลีพร สุภธีระ. (2538). เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.
- สมบูรณ์ บุศิริรักษ์. (2539). การสังเคราะห์งานวิจัยคอมพิวเตอร์ช่วยสอนด้วยเทคนิคการ วิเคราะห์เนื้อหาและเทคนิคการวิเคราะห์เมตต้า. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยี การศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2536ก). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 101 คณิตศาสตร์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2537ก). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 203 คณิตศาสตร์ 3. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536ข). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 204 คณิตศาสตร์ 4. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ คุรุสภา.
- _____. (2540). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2537ข). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536ค). คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 031 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2535). คู่มือครูวิชาฟิสิกส์ เล่ม 3 ว 022 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536ง). คู่มือครูวิชาฟิสิกส์ เล่ม 6 ว 025 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- สุกรี รอดโพธิ์ทอง. (2535). "การออกแบบบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วย," วารสารรวมคำแห่ง. 15(3) : 40-49.
- สุนันทา ประไพตระกูล. (2534). การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงสาเหตุระหว่างตัวแปรคัดสรร กับผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยา นิพนธ์ คม. (มัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- สุพจน์ ไชยสังข์. (ม.ป.ป.). การสำรวจระดับความคิดเห็นและความสามารถในการพิสูจน์ใน วิชาเรขาคณิตของนักเรียนไทย. ม.ป.พ. อัดสำเนา.
- สุรางค์ โค้วตระกูล. (2536). จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สิริพร ทิพย์คง. (2537). "แนวโน้มการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์," ใน สารัตถะและ วิทยวิธีการทางวิชาคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 12-15. บุญิดา รัตนไธสง และ อังคณา นันท์ธิพาวรรณ. หน้า 223-291. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- อธิพร ศรียมก. (2529). "การประเมินผลสื่อประสม," ใน ชุดวิชาสื่อการสอนระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น เล่มที่ หน่วยที่ 11-15. บุญิดา รัตนไธสง และ อังคณา นันท์ธิพาวรรณ. หน้า 245-252. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- อนันตสิน เตชะกำพูน, พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์ และ พรชัย พัทธินทรรัตนกุล. (2538). ฟิสิกส์ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อารีย์ คำปล้อง. (2536). *การสอนแบบปฏิบัติการเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับวงกลม*. ปรินญา
นิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทร
วิโรฒประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

Anastasi, Anne. (1963). *Psychological Testing*. 2nd ed. New York: Macmillan.

Barger, Vernon., & Olsson, Martin. (1995). *Classical Mechanics: A Nodded Perspective*.
Singapore: McGraw Hill.

Battista, Michael T & Clements, Douglas H. (1995, January). "Connecting Research to
Teaching: Geometry and Proof," *The Mathematics Teacher*. 88(1): 48-54.

Bell, F.S. (1981). *Teaching and Learning Mathematics*. Iowa: Dubuque Wm.C.Brown.

Bennett, Dan. (1996). *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley,
Calif.: Key Curriculum Press.

Burger, William F & Culpepper, Barbara. (1993). "Restructuring Geometry," in
Research Ideas for the Classroom. P.140-154. New York: National Council of
Teachers of Mathematics.

Burger, William F & Shaughnessy, J. Michael. (1986, January). "Characterizing the
Van Hiele Level of Development in Geometry," *Journal for Research in* ✕
Mathematics Education. 17: 31-48.

Burger, William F. (1985, February). "Geometry," *Arithmetic Teacher*. (32) : 52-56.

Choi, Sang Sook. (1997, August). "Students' Learning of Geometry Using Computer
Software as a Tool: Three case Studies," *Dissertation Abstracts International*.
58(2): 406-A.

Clemens, Stanley R. and others. (1994). *Geometry*. New York: Addison-Wesley.

Clemens, Stanley R. et al. (1994). *Geometry*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley.

Clements H. Douglas & Battista, Michael T. (1992). "Geometry and Spatial
Reasoning," in *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.
p.420-464. New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Coxeter, H.S.M. & Greitzer. (1981). *Geometry Revisited*. Sixth Printing. Washington,
D.C.: The Mathematical Association of America.

Crowley, Mary L. (1987). "The Van Hiele Model of the Development of Geometric
Thought," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.1-17.
Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

- DeGuire, Linda J. (1987). "Geometry: An Avenue for Teaching Problem Solving in Grades K-9," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.59-68. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dreyfus, Tommy & Hadas, Nurit. (1987). "Euclid May Stay and Even Be Taught," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.47-58. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Finzer, William F. & Dan S Bennett. (1995, May). "Technology Tips: From Drawing to Construction with The Geometer's Sketchpad," *The Mathematics Teacher*. 88 (5): 428-431.
- Fishbane, Paul M., Gasiorowicz, Stephen & Thornton Stephen T. (1993). *Physics for Scientists and Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey: A Paramount.
- Foletta, Gina Marie. (1955, February). "Technology and Guided Inquiry Understanding of Students' Thinking While Using A Cognitive Computer Tool, The Geometer's Sketchpad, in a Geometry Class," *Dissertation Abstracts International*. 55(8): 2311-A.
- Frerking, Bonnie Giddens. (1995, June). "Conjecturing and Proof-Writing in Dynamic Geometry," *Dissertation Abstracts International*. 55(12): 3772-A.
- Fuys, David Dorothy Geddes & Tischler, Rosamond. (1988). "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents," in *Journal For Research in Mathematics Education*. Renton: National Council of Teachers of Mathematics.
- Galindo, Enrique. (1998, January). "Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software," *The Mathematics Teacher*. 91(1): 76-82.
- Giamati, Claudia. (1995, September). "Conjectures in Geometry and The Geometer's Sketchpad," *The Mathematics Teacher*. 88(6): 456-458.
- Gusev, V. Litvinenko, V. & Mordkovich, V. (1988). *Solving Problem in Geometry*. Moscow: Mir Publishers.
- Hall, K.A. (1982). *Compute-based Education in Encyclopedia of Education Research*. New York: Free Press.
- Heid, M. Kathleen & Baylor, Terry. (1993). "Computing Technology," *Research Ideas for the Classroom*. P.198-216. New York: National Council of Teachers of Mathematics.

- Hoss Honsberger. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Kantowski, Mary Grace. (1991). "Using the Computer to Teach Geometry," in *Developments in School Mathematics Education Around the World*. Second printing. P.587-603. Chicago, Illinois: The University of Chicago.
- Kenney, Margaret J. (1987). "Logo Adds A New Dimension to Geometry Programs at the Secondary Level," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.85-100. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Key Curriculum Press. (1995). *Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.
- King, James R. (1996). *Geometry Through the Circle with The Geometer's Sketchpad*, Calif.: Key Curriculum Press.
- Kipfinger, Mary Elizabeth. (1990, November). "A Comparison of Two Methods of Teaching Geometry at The Middle School Level as Influenced by The Van Hiele Model," *Dissertation Abstracts International*. 28(4): 488-A.
- Lester, Margaret Lynn. (1996, December). "The Effects of The Geometer's Sketchpad Software on Achievement of Geometric Knowledge of High School Geometry Students," *Dissertation Abstracts International*. 57(6): 2343-A.
- Lyng, Merwin J, Meconi, L.J. & Zwick, Earl J. (1989). *Career Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin.
- Mayberry, Joanne W. (1981, February). "An Investigation in the Van Hiele Levels of Geometry Though in Undergraduate Preserve Teachers," *Dissertation Abstracts International*. 42: 2008-A.
- McDougall, Douglas E. (1996, 20, July). "Mathematics Teacher's Learning Needs in a Computer-based Geometric Environment," *Paper presented at the 8th International Congress on the University of Toronto*.
- McGehee, Jean. (1998, March). "Interactive Technology and Classic Geometry Problems," *The Mathematics Teacher*. 91(3): 204-208.
- Milauskas, George A. (1987). "Creative Geometry Problems Can Lead to Creative Problem Solvers," *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.69-84. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mohindroo, K, K. (1990). *Basic Principles of Physics*. New Delhi: Pitambar.

- NCTM. (1995). *Assessment Standard for School Mathematics*. Renton, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- _____. (1991). *Developments in School Mathematics Education Around the World*. Second printing.. Chicago, Illinois: The University of Chicago.
- _____. (1992). *Professional Standard for Teaching Mathematics*. New York: National Council of Teachers of Mathematics. 1992.
- _____. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. New York: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niven, Ivan. (1987). "Can Geometry Survive in the Secondary Curriculum," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.37-46. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Posamentier, Alfred S. (1984). *Excursion in Advanced Euclidean Geometry*. Revised Edition. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley.
- Resnick, Robert., Halli, David & Krane, Kenneth S. (1992). *Physics*. 4th ed. Toronto: John Wiley & Sons.
- Robinson, Stephanie O. (1996, May). "The Effects of The Availability of Geometer's Sketchpad on Locus-Motion Problem-Solving Performance and Strategies," *Dissertation Abstracts International*. 56(11): 4309-A.
- Rohlf, James William. (1994). *Modern Physics*. Toronto: John Wiley & Sons.
- Sanders, Cathi. (1995, Summer). "Adventures with The Geometer's Sketchpad," *Kamehameha Journal of Education*. (8): 119-126.
- Schacht, John F. & McLennan, Roderick C. (1957). *Plane Geometry*. New York: Henry Holt.
- Scher, Daniel P. (1996, April). "Technology Tips: Theorems in Motion: Using Dynamic Geometry to Gain Fresh Insights," *The Mathematics Teacher*. 89(4): 330-332.
- Scher, Daniel. (1995). *Exploring Conic Sections with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.
- Serra, Michael. (1993). *Discovering Geometry an Inductive Approach*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.
- Serra, Michel. (1989). *Discovering Geometry: an Inductive Approach Content of Teacher's Guide and Answer Key*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.
- Sharygin, I.F. (1988). *Problems in Plane Geometry*. Moscow: Mir Publishers.

- Shaughnessy, J. Michael & Burger, William F. (1985, September). "Spadework Prior to Deduction in Geometry," *The Mathematics Teacher*. 78(8): 411-418.
- Shigalis, Thomas W. (1998, February). "Finding Buried Treasure An Application of The Geometer's Sketchpad," *The Mathematics Teacher*. 90(2): 162-165.
- Sobel, Max A. et al. (1986). *Harper & Row Geometry*. New York: Scriber Educational.
- Stansberry, Shirley Ruth P. (1996, September). "Students' Achievement and Attitudes in Traditional and Nontraditional Teaching of Geometry," *Dissertation Abstracts International*. 57(3): 57-A.
- Stone, Michael E. (1994, November.) "Teaching Relationships between Area and Perimeter with The Geometer's Sketchpad," *The Mathematics Teacher*. 87(8): 590-594.
- Thomas, David. V. (1992). *Teenagers, Teachers, and Mathematics*. Boston: Ally and Bacon
- Thompson, Edward Otis. (1997, February) "Three Methods of Instruction in High School Geometry and the Affection, They have on Achievement, Retention and Attitude," *Dissertation Abstracts International*. 53(8): 2724-A.
- User Guide and Reference*. (1995). Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.
- Usiskin, Zalman. (1987). "Resolving the Continuing Dilemmas in School Geometry," in *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Yearbook. P.17-31. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wilson, James W. (1997). *Technology in Mathematics Teaching and Learning*. n.p. Photocopied.
- Young, Carolyn. (1972, December). "Team Learning," *The Arithmetic Teacher*.
- Yousef, Adil Eltayeb. (1997, November). "The Effects of The Geometer's Sketchpad on The Attitude Toward Geometry of High School Students," *Dissertation Abstracts International*. 58(5): 1631-A.
- Zbiek, Rose Mary. (1996, February). "The Pentagon Problem: Geometric Reasoning with Technology," *The Mathematics Teacher*. 89(2): 86-90.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

รายชื่อ	สถานที่ทำงาน
1. อ.สุวรรณา คล้ายกระแสน	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. ดร.สมเดช บุญประจักษ์	สถาบันราชภัฏพระนคร
3. ดร.โกมล ไพศาล	สถาบันราชภัฏจอมบึง

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ทางการสอนคณิตศาสตร์

รายชื่อ	สถานที่ทำงาน
1. ผศ.อารีย์ สอาดอาวุธ	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
2. อ.คันสนีย์ พรหมภมร	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย
3. อ.อัจฉริยา ชมะนันทน์	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่ตรวจให้คะแนน
แบบฝึกปฏิบัติระคนและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

รายชื่อ	ประสบการณ์การสอน คณิตศาสตร์	สถานที่ทำงาน
1. อ.คันสนีย์ พรหมภมร	23 ปี	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย
2. อ.พิศิษฐ์ วัฒนถาวร	20 ปี	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย
3. อ.อัจฉริยา ชมะนันทน์	12 ปี	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ด้านการใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์

รายชื่อ	วุฒิการศึกษา	สถานที่ทำงาน
1. ผศ.อารีย์ สอาดอาวุธ	พศ.บ.(สถิติ) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย Msc.(Applied Statistics) Bath U. England Grad.Dip.(Computing Studies) CCAIE Australia	ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
2. ผศ.ปารมี เจริญกิตติวัฒน์	ศศ.บ.(คณิตศาสตร์) (เกียรตินิยมอันดับ 1) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ วท.ม.(คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยมหิดล	ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ภาคผนวก ข

แบบสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต
เกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิต

แบบสอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

คำชี้แจง

ด้วยผู้วิจัยจะพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนจะประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้จะเน้นการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเองโดยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา สืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ ส่งเสริมให้มีจินตนาการ และคิดเพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิต

ดังนั้นการสอบถามครั้งนี้ จะเป็นการหาข้อมูลไปใช้ในการกำหนดกรอบสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสร้างบทเรียนเรขาคณิตดังกล่าว

สมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต หมายถึง ความรู้ความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ เพื่อให้สมรรถภาพดังกล่าวได้รับการตรวจสอบให้มีความสอดคล้องและเหมาะสมกับจุดประสงค์ของงานวิจัย ผู้วิจัยจึงใคร่ขอความกรุณาจากท่านในฐานะผู้เชี่ยวชาญได้โปรดแสดงความคิดเห็นว่า สมรรถภาพใดมีความจำเป็น สมรรถภาพใดไม่มีความจำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โดยกาเครื่องหมาย (✓) ลงในช่องที่ตรงกับความเห็นของท่าน ในกรณีที่ท่านเห็นว่าควรมีสมรรถภาพอื่น ๆ เพิ่มเติมนอกจากที่นำเสนอมา ขอได้โปรดระบุในช่องว่างที่กำหนดให้ในแต่ละข้อสำหรับสมรรถภาพหลักและสมรรถภาพย่อย ตามรายละเอียดของแบบสอบถามที่แนบมาต่อท้ายนี้

ผู้วิจัย หวังว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี

ขอขอบพระคุณในความกรุณาของท่าน

(นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ)

หมายเหตุ ข้อมูลที่นำมาสร้างแบบสอบถามฉบับนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเนื้อหาเรขาคณิต จากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และคู่มือครูที่จัดทำโดย สสวท. รายวิชา ค 101 ค 203 ค 204 ค 031 ค 011 และ ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น คำอธิบายรายวิชา ค 031 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จากหนังสือหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ที่จัดทำโดยกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ และเนื้อหาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่นำเรขาคณิตไปใช้ จากหนังสือเรียนและคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ที่จัดทำโดย สสวท. นอกจากนั้นยังศึกษาจากตำราคณิตศาสตร์และเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา ระดับอุดมศึกษา เอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อวิเคราะห์หาสมรรถภาพหลัก สมรรถภาพย่อยที่จะนำมากำหนดเป็นกรอบสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต แล้วได้สรุปเป็นร่างสมรรถภาพของนักเรียนด้านเนื้อหาเรขาคณิต โดยมีบทสรุปของเนื้อหาตามสมรรถภาพดังกล่าวแนบท้ายแบบสอบถามนี้มาด้วย.

1. สมรรถภาพหลักเรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด

จุดประสงค์เพื่อทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม และขยายมุมมองของรูปเรขาคณิตในบทนิยามหรือทฤษฎีบทในกรณีต่าง ๆ

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น		
	แน่ใจว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจว่าจำเป็น	แน่ใจว่าไม่จำเป็น
1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด			
1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม			
1.2. ความเท่ากันทุกประการ			
1.3. เส้นขนาน			
1.4. รูปหลายเหลี่ยม			
1.5. ความคล้ายกัน			
1.6 วงกลม			
1.7. การสร้างพื้นฐาน			
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม ในสมรรถภาพหลักเรื่อง			
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด			
1.8.....			
1.9.....			
1.10.....			
1.11.....			

2. สมรรถภาพหลักเรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม

3. สมรรถภาพหลักเรื่อง การจwabกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน

จุดประสงค์เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ และฝึกฝนสมรรถภาพในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดาและสืบเสาะหาเหตุผล

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น		
	แน่ใจว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจว่าจำเป็น	แน่ใจว่าไม่จำเป็น
2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม			
2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน (Product of Lengths of Segments of Intersecting Chords)			
2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม(Secant -Secant Segments Product)			
2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม (Tangent- Secant Segments Product)			
2.4 แกนราก (Radical Axis)			

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น		
	แน่ใจว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจว่าจำเป็น	แน่ใจว่าไม่จำเป็น
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม ในสมรรถภาพหลักเรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม 2.5..... 2.6..... 2.7..... 2.8.....			
3. การจwabกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน			
3.1 เซนทรอยด์ (Centroid)			
3.2 ศูนย์กลางวงล้อม (Circumcenter)			
3.3 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน (Incenter)			
3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (Excenter)			
3.5 จุดออร์โทเซนเตอร์ (Orthocenter)			
3.6 ทฤษฎีบทมิเกิล (Miquel's Theorem)			
3.7 เส้นซิมสัน (Simson Line)			
3.8 ทฤษฎีบทโตเลมี (Ptolemy's Theorem)			
3.9 ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem)			
3.10 จุดเกอกอนเน (Gergonne Point)			
3.11 วงกลมเก้าจุด (Nine-point Circle)			
3.12 เส้นออยเลอร์ (Euler Line)			
3.13 ทฤษฎีบทเมนเลาส์ (Menelaus' Theorem)			
3.14 ทฤษฎีบทมอร์เลย์ (Morley's Theorem)			
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม ในสมรรถภาพหลักเรื่อง การจwabกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน 3.15..... 3.16..... 3.17..... 3.18.....			

- 4.สมรรถภาพหลักเรื่อง เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง
- 5.สมรรถภาพหลักเรื่อง บทกลับของทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้น
- จุดประสงค์ เพื่อฝึกฝนสมรรถภาพในการสำรวจ สืบเสาะ โดยไม่เน้นการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น		
	แน่ใจว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจว่าจำเป็น	แน่ใจว่าไม่จำเป็น
4. เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง			
4.1 การสะท้อน (Reflection)			
4.2 การเลื่อนขนาน (Translation)			
4.3 การหมุน (Rotation)			
4.4 สื่อมอเทติก (Homothetic)			
4.5 การฉาย (Projection)			
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม ในสมรรถภาพหลักเรื่องเนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง			
4.6.....			
4.7.....			
4.8.....			
4.9.....			
5.บทกลับของทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้น			
สมรรถภาพย่อยตามบทกลับที่เป็นจริงของทฤษฎีบทต่าง ๆ ในสมรรถภาพหลักที่ 3			
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลักเรื่องบทกลับของทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้น			
.....			
.....			
6. สมรรถภาพหลักอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติม			
.....			
.....			
สมรรถภาพย่อยอื่น ๆ ที่ควรเพิ่มเติมในสมรรถภาพหลักที่ระบุมา			
6.1.....			
6.2.....			
6.3.....			
6.4.....			

ข้อเสนอแนะ.....

ภาคผนวก ค

แบบฝึกปฏิบัติระคนประจำหน่วยการเรียนรู้
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต
พร้อมเกณฑ์การตรวจให้คะแนนและเฉลยแนวทางคำตอบ

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

คำชี้แจง

1. แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นแบบฝึกปฏิบัติระคนที่นักเรียนต้องแสดงวิธีทำ ประกอบด้วยโจทย์จำนวน 5 ข้อ ดังนี้

1.1. ข้อที่ 1 แบ่งเป็น 5 ข้อย่อย ข้อย่อยละ 1 คะแนน รวมเป็น 5 คะแนน

1.2. ข้อที่ 2-5 ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน ดังนี้

สำรวจ 2 คะแนน

ตั้งข้อคาดเดา 3 คะแนน

ตรวจสอบ 3 คะแนน

เหตุผล 2 คะแนน

2. ให้นักเรียนเขียนคำตอบลงในช่องว่างตามที่เว้นไว้ในแต่ละข้อ ดังนี้

2.1 ข้อ 1 เป็นการตอบคำถามที่ได้จากการสำรวจ

2.2. ข้อ 2-5 เป็นการสร้างรูปตามที่โจทย์กำหนดแล้วปฏิบัติดังนี้

2.2.1 ตอบคำถามที่ได้จากการสำรวจ

2.2.2 ตั้งข้อคาดเดาตามแนวทางที่โจทย์ต้องการ

2.2.3 ตรวจสอบว่าข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้องและข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

2.2.4 บอกเหตุผลในกรณีที่ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดานั้นน่าจะถูกต้อง นอกจากนี้ในบางข้อยังมีคำถามให้ตอบเพิ่มเติม

3. เวลาทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวน 2 คาบ (100 นาที)

กิจกรรมสำรวจ...ค้นคว้า

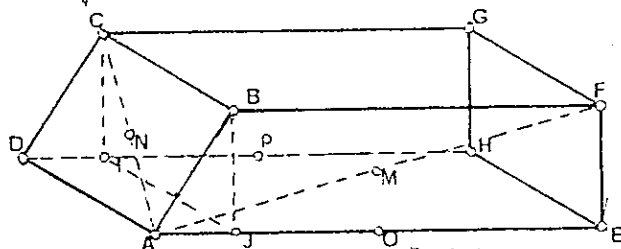
อ้อ... ถ้ามีปัญหา
ในการสร้างรูปข้อใด ละก็
เปิดไฟล์ Prac1-ข้อที่.gsp นะ

นักเรียนเคยทราบแล้วว่า ทรงสามมิติที่มีฐานทั้งสองเป็นรูปเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ฐานทั้งคู่
อยู่ในระนาบที่ขนานกันและด้านข้างแต่ละด้าน เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เรียกว่า ปริซึม

โจทย์

จากรูป ปริซึม ที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABFE มี $\overline{FE} \perp \overline{AE}$ $\overline{FE} \perp \overline{EH}$

จุด M, N, O และ P เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AF}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ และ $\overline{DH}$ ตามลำดับ



สำรวจ

1.1 ส่วนของเส้นตรงใดบ้าง ที่ยาวเท่ากัน (จงระบุโดยพิจารณาเฉพาะเส้นทึบ)

.....

1.2 มุมใดบ้างเป็นมุมฉาก (จงระบุโดยพิจารณาเฉพาะเส้นทึบ)

.....

.....

.....

1.3 ระนาบ APO และระนาบ CDG ตัดกันที่ใด.....

1.4 ระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีระนาบที่แตกต่างกันกี่ระนาบ
และโยงเส้นจับคู่ระนาบที่เป็นระนาบเดียวกัน

ระนาบ ABO ระนาบ PCG ระนาบ ABC ระนาบ AID

ระนาบ EMF ระนาบ GFH ระนาบ AJI ระนาบ DCI

ระนาบ NPG ระนาบ NAB ระนาบ HPE ระนาบ CIA

.....

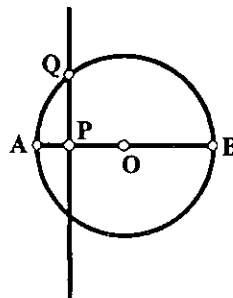
.....

1.5 รูปนี้ประกอบด้วยส่วนของระนาบกี่ระนาบ ระนาบใดบ้าง
(จงระบุโดยพิจารณาเฉพาะเส้นทึบและใช้สัญลักษณ์เท่าที่จำเป็น)

.....

โจทย์

2. ลาก $\overline{AB}$ สร้างวงกลม O โดยมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
กำหนดจุด P บน $\overline{AB}$ ลากเส้นตรงตั้งฉากกับจุด P
กำหนดจุดตัดจุดหนึ่งระหว่างเส้นตั้งฉากนั้นกับวงกลม O เป็นจุด
 Q ดังรูป
ลาก $\overline{AQ}$ และ $\overline{PQ}$



สำรวจ

2.1 มีมุมที่เป็นมุมฉากหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

ตั้งข้อคาดเดา

2.2 ข้อคาดเดาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ $\triangle AQB$ ได้แก่

ตรวจสอบ

2.3 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

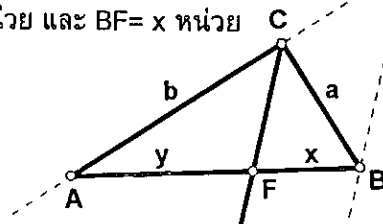
เหตุผล

2.4 เพราะเหตุใด

คำถาม

2.5 PQ^2 เท่ากับ $AP \cdot PB$ หรือไม่.....
เพราะเหตุใด.....

โจทย์

3. สร้าง $\triangle ABC$ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle ACB$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด F กำหนดให้ $AC = b$ หน่วย $BC = a$ หน่วย $AF = y$ หน่วย และ $BF = x$ หน่วย

ถ้าลาก(เส้นประ) $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{CF}$ และ $\overrightarrow{BG}$ ตัดส่วนของ $\overline{CA}$ ที่จุด G
ลาก $\overline{AG}$ และ $\overline{BG}$

สำรวจ

3.1 มีมุมที่มีขนาดเท่ากับ $m\angle ACF$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

3.2 มีส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

ตั้งข้อคาดเดา

3.3 $\triangle BCG$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด3.4 รูปสามเหลี่ยมใดที่คล้ายกับ $\triangle AFC$

3.5 อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่คาดว่าจะเท่ากัน ได้แก่

ตรวจสอบ

3.6 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

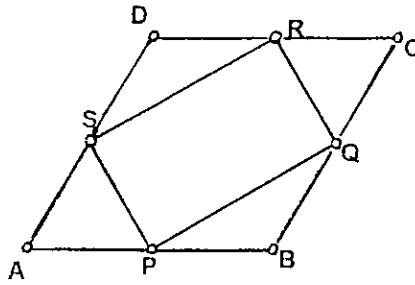
คำถาม

3.7 ลองตรวจสอบว่า $\frac{x}{y}$ มีค่าเท่ากับอัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงใด (พิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่ยาว a, b, x และ y หน่วย).

3.8 เพราะเหตุใด.....

โจทย์

4. จากรูป $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จุด P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ



สำรวจ

- 4.1 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

- 4.2 มีส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดยส่วนของเส้นตรงนั้นต้องไม่เป็นด้านของ $\square ABCD$).

- 4.3 มีรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่ ((ถ้ามีจงระบุ).....

ตั้งข้อคาดเดา

- 4.4 $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด.....

ตรวจสอบ

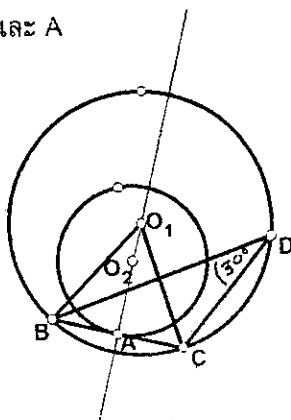
- 4.5 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

- 4.6 เพราะเหตุใด

โจทย์

5. จากรูป O_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงใหญ่ โดยที่ O_1 อยู่ภายในวงกลมเล็ก ซึ่งมี O_2 เป็นจุดศูนย์กลาง ระยะ $O_1 O_2$ เท่ากับ 1 หน่วย ถ้าอัตราส่วนของวงกลมวงใหญ่ ซึ่งสัมผัสกับวงกลมวงเล็กที่ A ยาว 4 หน่วย รองรับมุม 30° ที่เส้นรอบวงของวงกลมวงใหญ่และ O_1, O_2, A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดยที่ O_2 อยู่ระหว่าง O_1 และ A



สำรวจ

- 5.1 มีส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

- 5.2 มุมใดบ้างมีขนาดเท่ากัน (ถ้ามีจงระบุ).....

- 5.3 มีรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่

- 5.4 $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

ตั้งข้อาคัดเดา

ตรวจสอบ

- 5.5 ข้อาคัดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อาคัดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อาคัดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

- 5.6 เพราะเหตุใด

- 5.7 หาความยาวของรัศมีของวงกลมวงเล็กได้หรือไม่ (ถ้าได้จงแสดงวิธีหา).....

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

คำชี้แจง

1. แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เป็นแบบฝึกปฏิบัติระคนที่นักเรียนต้องแสดงวิธีทำ ประกอบด้วยโจทย์จำนวน 2 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน ดังนี้

สำรวจ 2 คะแนน

ตั้งข้อคาดเดา 3 คะแนน

ตรวจสอบ 3 คะแนน

เหตุผล 2 คะแนน

2. ให้นักเรียนเขียนคำตอบลงในช่องว่างตามที่เว้นไว้ในแต่ละข้อ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างรูปตามที่โจทย์กำหนดแล้วปฏิบัติดังนี้

2.1 ตอบคำถามที่ได้จากการสำรวจ

2.2 ตั้งข้อคาดเดาตามแนวทางที่โจทย์ต้องการ

2.3 ตรวจสอบว่าข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้องและข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

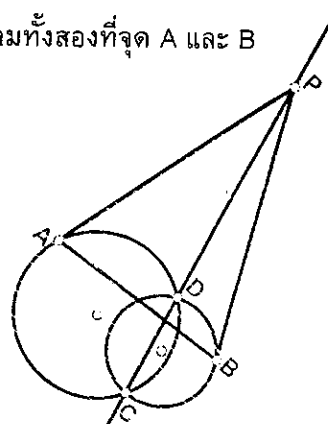
2.4 บอกเหตุผลในกรณีที่ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดานั้นน่าจะถูกต้อง

3. เวลาทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 จำนวน 1 คาบ (50 นาที)

อ้อ... ถ้ามีปัญหา
ในการสร้างรูปข้อใด ละก็
เปิดไฟล์ Prac2- ข้อ.gsp นะ

โจทย์

1. จากรูป วงกลมสองวงตัดกันที่จุด C และ D
จุด P อยู่บน $\overleftrightarrow{CD}$ โดยที่ $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ สัมผัสวงกลมทั้งสองที่จุด A และ B



สำรวจ

- 1.1. มีส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะเส้นทึบ)

- 1.2. $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ และ $\overline{PB}$ สัมพันธ์กันอย่างไร.....

- 1.3. $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ และ $\overline{PA}$ สัมพันธ์กันอย่างไร.....

ตั้งข้อคาดเดา

- 1.4. $\triangle APB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด.....

ตรวจสอบ

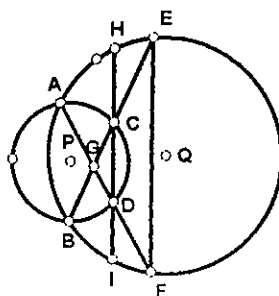
- 1.5. ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง.....

เหตุผล

- 1.6. เพราะเหตุใด.....

โจทย์

2. จากรูป วงกลม P และ Q ตัดกันที่จุด A และ B
 C และ D เป็นจุดบนวงกลม P
 ลาก $\overline{CD}$ ตัดวงกลม Q ที่จุด H และ I
 ลาก $\overline{AD}$ ตัดวงกลม Q ที่จุด A และ F
 ลาก $\overline{BC}$ ตัดวงกลม Q ที่จุด B และ E ตัด $\overline{AD}$ ที่จุด G
 ลาก $\overline{AB}$
 ลาก $\overline{EF}$



สำรวจ

2.1 มีมุมที่มีขนาดเท่ากับ $m\angle BAG$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

2.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากับ $m\angle ABG$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

2.3 มีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ $\triangle ABG$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

2.4 $AG \cdot GD$ เท่ากับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงใด.....

2.5 $AG \cdot GF$ เท่ากับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงใด.....

ตั้งข้อคาดเดา

2.6 $AD \cdot DF$ เท่ากับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงใด.....

2.7 มีอัตราส่วนที่เท่ากันที่เกี่ยวข้องกับ $\overline{BG}$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่มีปรากฏในรูป)

2.8 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{CD}$ และ $\overline{EF}$

ตรวจสอบ

2.9 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

2.10 เพราะเหตุใด.....

แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

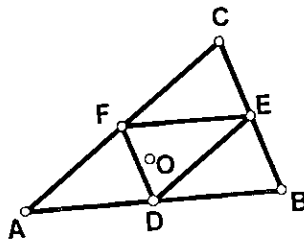
คำชี้แจง

1. แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เป็นแบบฝึกปฏิบัติระคนที่นักเรียนต้องแสดงวิธีทำประกอบด้วยโจทย์จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน ดังนี้
 - สำรวจ 2 คะแนน
 - ตั้งข้อาคตเตา 3 คะแนน
 - ตรวจสอบ 3 คะแนน
 - เหตุผล 2 คะแนน
2. ให้นักเรียนเขียนคำตอบลงในช่องว่างตามที่เว้นไว้ในแต่ละข้อ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างรูปตามที่โจทย์กำหนดแล้วปฏิบัติดังนี้
 - 2.1 ตอบคำถามที่ได้จากการสำรวจ
 - 2.2 ตั้งข้อาคตเตาตามแนวทางที่โจทย์ต้องการ
 - 2.3 ตรวจสอบว่าข้อาคตเตาใดบ้างที่น่าจะถูกตองและข้อาคตเตาใดบ้างที่ไม่ถูกตอง
 - 2.4 บอกเหตุผลในกรณีที่ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคตเตานั้นน่าจะถูกตอง
3. เวลาทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 จำนวน 2 คาบ (100 นาที)

อ้อ... ถ้ามีปัญหา
ในทฤษฎีบทรูปข้อใด ละก็
เปิดไฟล์ Prac3-เลขาio.gsp นะ

โจทย์

1. จากรูป $\triangle ABC$ มี DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมัธยะ
O เป็นศูนย์กลางวงล้อมของ $\triangle ABC$

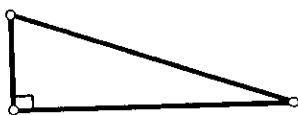


ถ้า G เป็นเซนทรอยด์ ของ $\triangle ABC$, ถ้า G_1 เป็นเซนทรอยด์ ของ $\triangle DEF$
ถ้า O_1 เป็นศูนย์กลางวงล้อมของ $\triangle DEF$
ถ้า I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
ถ้า I_1 เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle DEF$
ถ้า H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$
ถ้า H_1 เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle DEF$

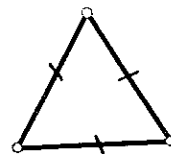
สำรวจ

- 1.1 จุดใดดังกล่าวข้างต้นอยู่ใน $\triangle ABC$ เสมอ.....
1.2 จุดใดดังกล่าวข้างต้นอยู่นอก $\triangle ABC$ เสมอ.....
จงพิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ เพื่อตอบคำถาม ข้อ 1.3 -1.6

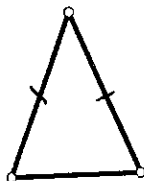
(ก)



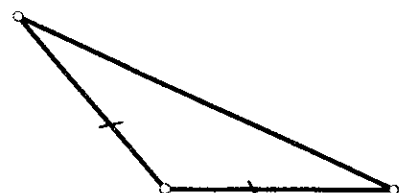
(ข)



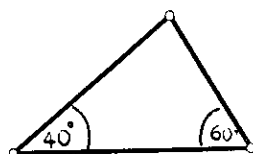
(ค)



(ง)



(จ)



1.3 จุด G อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม เมื่อ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด.....

1.4 จุด I อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม เมื่อ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด.....

1.5 จุด O อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม เมื่อ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด.....

1.6 จุด H อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม เมื่อ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด.....

1.7 มีส่วนของเส้นตรงใดที่ขนานกับ $\overline{CE}$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

1.8 มีส่วนของเส้นตรงใดที่ขนานกับ $\overline{FC}$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

ถ้า M เป็นจุดตัดของ $\overline{FE}$ และ $\overline{CD}$

ถ้า N เป็นจุดตัดของ $\overline{FD}$ และ $\overline{AE}$

แล้วตอบคำถามข้อ 1.9 – 1.11

1.9 มีส่วนของเส้นตรงที่เท่ากับ FM และ CM หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

1.10 มีส่วนของเส้นตรงที่เท่ากับ FN และ AN หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

1.11 ส่วนของเส้นตรงใดเป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle DEF$

ถ้าให้ $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{DO}$ และ $\overrightarrow{FO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก

กับ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ ลาก $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{FO}$

ไปตัด $\overline{FD}$, $\overline{FE}$ และ $\overline{DE}$ ที่จุด P, R และ Q ตามลำดับ

แล้วตอบคำถามข้อ 1.12 – 1.16

1.12 มุมใดที่มีขนาดเท่ากับ 90°

1.13 ส่วนของเส้นตรงใดตั้งฉากกับ $\overline{DF}$

1.14 ส่วนของเส้นตรงใดตั้งฉากกับ $\overline{FE}$

1.15 ส่วนของเส้นตรงใดตั้งฉากกับ $\overline{ED}$

1.16 ส่วนของเส้นตรงใดเป็นส่วนสูงของ $\triangle DEF$

ตั้งข้อาคัดเตา

1.17 จุด G และ G_1 สัมพันธ์กันอย่างไร.....

1.18 จุด O และ H_1 สัมพันธ์กันอย่างไร.....

1.19 จุด G, O และ H สัมพันธ์กันอย่างไร.....

1.20 จุด G_1 , O_1 และ H_1 สัมพันธ์กันอย่างไร.....

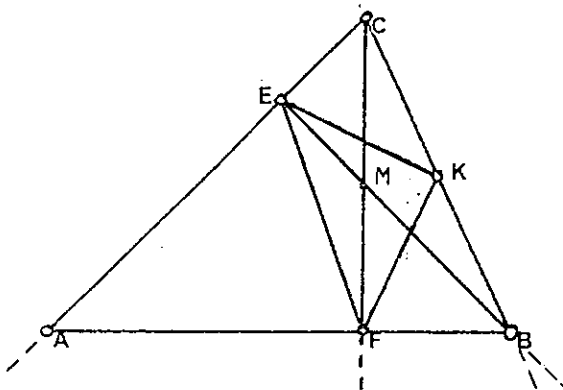
ตรวจสอบ

1.21 ข้อาคัดเตาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อาคัดเตาใดบ้างที่น่าจะ ถูกต้อง และข้อาคัดเตาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง.....

เหตุผล

1.12 เพราะเหตุใด.....

โจทย์

2. จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม K เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นส่วนของ $\triangle ABC$ โดย $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ ตัดกันที่จุด M
ลาก $\overline{EK}$, $\overline{FK}$ และ $\overline{EF}$ 

สำรวจ

- 2.1 มุมที่เป็นมุมฉากหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....
- 2.2 สร้างวงกลมผ่านจุด B, C, E และ F ได้หรือไม่.....
- 2.3 สร้างวงกลมผ่านจุด A, E, M และ F ได้หรือไม่.....
- 2.4 มุมที่มีขนาดเท่ากับ $m\angle B$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....
- 2.5 มุมที่มีขนาดเท่ากับ $m\angle C$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

ตั้งข้อคาดเดา

- 2.6 ส่วนของเส้นตรงใดที่ยาวเท่ากับ KB.....
- 2.7 $\triangle KEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด.....
- 2.8 รูปสามเหลี่ยมใดที่คล้ายกับ $\triangle ABC$

ตรวจสอบ

- 2.9 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง
-
-
-

เหตุผล

- 2.10 เพราะเหตุใด
-
-
-

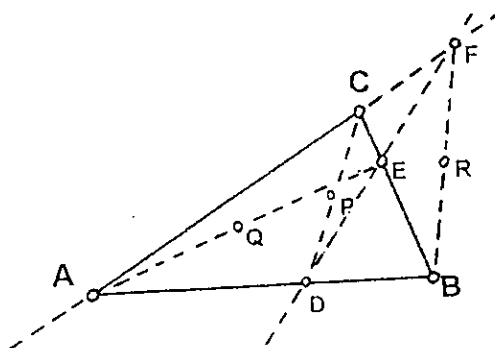
คำถาม

- 2.11 $\triangle EFK$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีคัลหรือไม่
- เพราะเหตุใด.....
-
-

โจทย์

3. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

มี $\overleftrightarrow{DF}$ ตัด $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และส่วนต่อของ $\overline{AC}$ ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ
 P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$, $\overline{AE}$ และ $\overline{BF}$



สำรวจ

3.1 มีจุดสองจุดที่เป็นจุดร่วมเส้นตรงกับจุด D หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....

3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน ที่สอดคล้องตามทฤษฎีบทเมนเนเลส์
 ได้แก่.....

ตั้งข้อคาดเดา

3.3 จุด Q, P และ R สัมพันธ์กันอย่างไร

.....

ตรวจสอบ

3.4 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้ว ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะ
 ถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

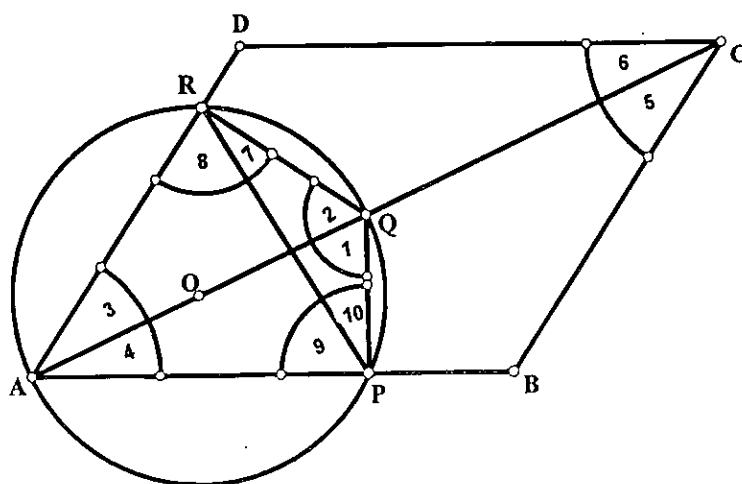
เหตุผล

ในการหาเหตุผลสำหรับข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้องควรใช้ความรู้เกี่ยวกับ
 เรื่องใด

.....

โจทย์

4. จากรูป วงกลม O ตัดด้านและเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ที่จุด P, R และ Q ลาก $\overline{RQ}, \overline{QP}$ และ $\overline{RP}$ ดังรูป



สำรวจ

4.1 มีส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากันบ้างหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดย

4.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันบ้างหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะมุมที่มีหมายเลขกำกับ)

ตั้งข้อคาดเดา

4.3 รูปสามเหลี่ยมใดที่คล้ายกันบ้าง

4.4 $AQ \cdot RP$ สัมพันธ์กับผลบวกของผลคูณระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงใด.....

ตรวจสอบ

4.5 ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

4.6 เพราะเหตุใด

คำถาม

4.7 $AQ \cdot AC$ และ $AP \cdot AB + AR \cdot AD$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนภาคคณิต

คำชี้แจง ข้อสอบชุดนี้แบ่งออกเป็น 2 ตอน

ตอนที่ 1 เป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน โดยแบ่งเป็น

สำรวจ 2 คะแนน ตั้งข้อคาดเดา 3 คะแนน

ตรวจสอบ 3 คะแนน เหตุผล 2 คะแนน

เวลา 2 คาบ

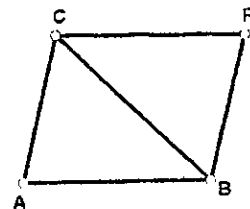
ตอนที่ 1. จงเลือกคำตอบของแต่ละข้อที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

1. จุดจุดหนึ่งจะสามารถลากเส้นตรงผ่านได้ เป็นจำนวนจำกัดเส้น
2. ระนาบที่ต่างกันสองระนาบตัดกันทำให้เกิดส่วนของเส้นตรง
3. $\overrightarrow{RS}$ และ $\overrightarrow{RT}$ เป็นรังสีเดียวกัน เมื่อจุด S และ T อยู่ข้างเดียวกันของจุด R
4. $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{BA}$ เป็นเส้นตรงเดียวกัน

2. กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle PCB$ ดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

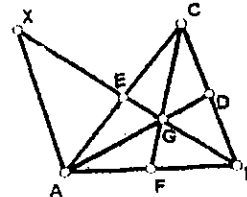
1. $AB = PC$
2. $CB = BC$
3. $m\angle CAB = m\angle BPC$
4. $m\angle ACB = m\angle PCB$



3. กำหนด $\triangle ABC$ มี $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐานตัดกันที่จุด G ต่อ $\overline{BE}$ ไปถึงจุด X

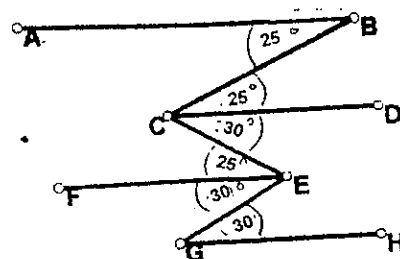
ทำให้ $BE = EX$ ดังรูป $\triangle AEX \cong \triangle CEB$ ด้วยความสัมพันธ์แบบใด

1. ด้าน - ด้าน - มุม
2. มุม - มุม - ด้าน
3. ด้าน - มุม - ด้าน
4. มุม - ด้าน - มุม



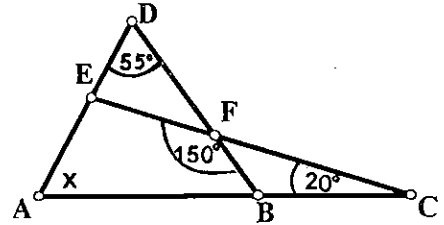
4. พิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $\overline{AB} \parallel \overline{FE}$
2. $\overline{CD} \parallel \overline{GH}$
3. $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$
4. $\overline{GE} \parallel \overline{CB}$



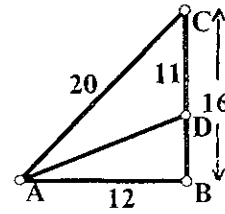
5. จากรูป $m\angle ADB = 55^\circ$, $m\angle ACE = 20^\circ$ และ $m\angle BFE = 150^\circ$ อยากทราบว่า x เท่ากับกี่องศา

1. 35
2. 75
3. 85
4. 105



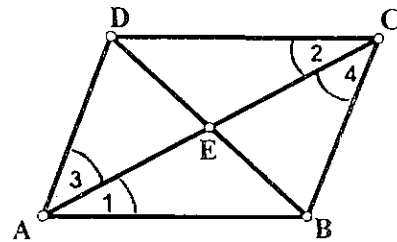
6. กำหนด $\triangle ABC$ $AC = 20$ หน่วย $AB = 12$ หน่วย $BC = 16$ หน่วย และ $CD = 11$ หน่วย แล้ว AD เท่ากับกี่หน่วย

1. 13
2. 12
3. 11
4. 5



7. กำหนด $\square ABCD$ มี $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด E ดังรูป ข้อใดกล่าว ไม่ถูกต้อง

1. ถ้า $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ และ $AB = DC$
แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. ถ้า $m\angle 1 = m\angle 2$ และ $AB = DC$
แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
3. ถ้า $AC = BD$ และ $m\angle DEC = 90^\circ$
แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
4. ถ้า $AB = AD$, $BC = CD$ และ $AB \neq BC$
แล้ว $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจั่ว

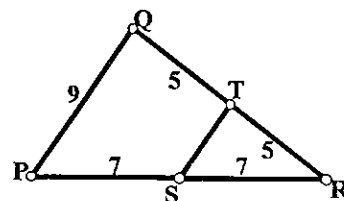


8. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. มุมที่ฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
2. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีความยาวเท่ากัน
3. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านคู่ที่ไม่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูจะตั้งฉากกับด้านคู่ขนานทั้งสอง
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านคู่ที่ไม่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างของความยาวของด้านคู่ขนานทั้งสอง

9. กำหนด $\triangle PQR$ มี $PS = SR = 7$ หน่วย $QT = TR = 5$ หน่วย และ $PQ = 9$ หน่วย ดังรูป
ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $\overline{ST} \perp \overline{QR}$
2. $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$
3. $ST = 6$ หน่วย
4. $ST = 2\sqrt{6}$ หน่วย

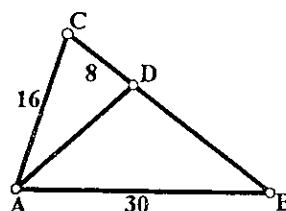


10. กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ซึ่งมี $AB = 8$ หน่วย, $AC = 10$ หน่วย และ $DE = 12$ หน่วย แล้ว DF เท่ากับกี่หน่วย

1. $6\frac{2}{3}$
2. 15
3. -18
4. 30

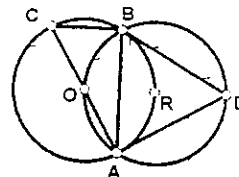
11. จากรูป $m\angle CAB = m\angle CDA$, $AB = 30$ หน่วย, $AC = 16$ หน่วย และ $CD = 8$ หน่วย แล้ว AD เท่ากับกี่หน่วย

1. 10
2. 12
3. 14.5
4. 15



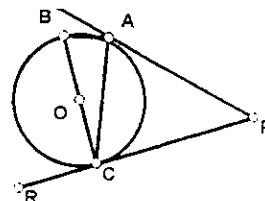
12. จากรูป O และ R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เท่ากัน จุด O อยู่บนวงกลมที่มี R เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $m\angle ADB = m\angle DAC$
2. $m\angle ADB = m\angle ACB$
3. $AC = AD$
4. $\triangle ABD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



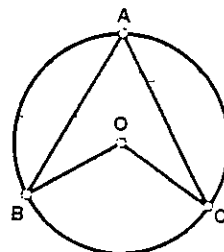
13. จากรูป $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด A และ C ตามลำดับ $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O $m\angle CBA = 65^\circ$ แล้ว $m\angle APC$ เท่ากับกี่องศา

1. 25
2. 30
3. 50
4. 65



14. จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี $m\angle BAC = 45^\circ$, $m\angle ACO = 20^\circ$ แล้ว $m\angle OBA$ เท่ากับกี่องศา

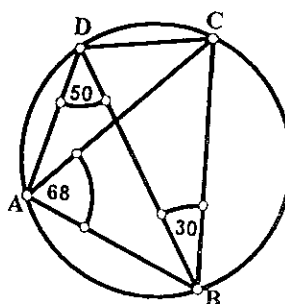
1. 25
2. 22.5
3. 20
4. 15



15. กำหนด $\square ABCD$ แนบในวงกลม $m\angle CBD = 30^\circ$, $m\angle ADB = 50^\circ$ และ $m\angle CAB = 68^\circ$

ดังรูป $m\angle ABD$ เท่ากับกี่องศา

1. 32
2. 50
3. 68
4. 80



สิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ใช้ตอบคำถามข้อ 16-18

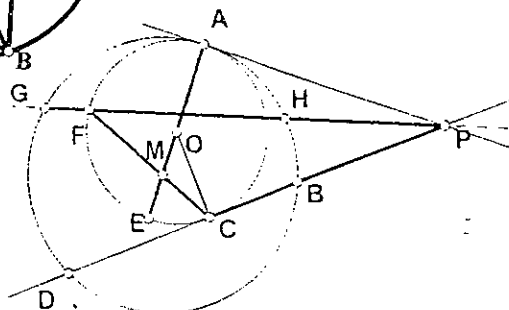
จากรูปวงกลม O สัมผัสกับวงกลม M ที่จุด A

$\overline{AE}$ ตัดกับ $\overline{CF}$ ที่จุด M

$\overleftrightarrow{PA}$ และ $\overleftrightarrow{PC}$ สัมผัสกับวงกลม O ที่จุด A และ C ตามลำดับ

$\overleftrightarrow{PG}$ ตัดวงกลม M ที่จุด G และ H

$\overleftrightarrow{PD}$ ตัดวงกลม M ที่จุด B และ D



16. ถ้า $AM = 6$ หน่วย $ME = 2$ หน่วย และ $CM = 3$ หน่วย แล้ว FM เท่ากับ กี่หน่วย

1. 2
2. 3
3. 4
4. 6

17. ถ้า $HG = 5$ หน่วย $PH = 4$ หน่วย $PD = 12$ หน่วย แล้ว PB เท่ากับกี่หน่วย

1. 2
2. 3
3. 4
4. 8

18. ถ้า $PB = 4$ หน่วย $PD = 25$ หน่วย แล้ว PA เท่ากับกี่หน่วย

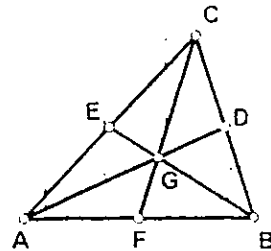
1. 10
2. 12
3. 14
4. 16

19. ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

1. เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า เซนทรอยด์
2. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจวบกันและจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงล้อม
3. ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบใน
4. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นตรงจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก

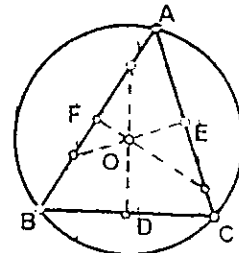
20. จากรูป $\triangle ABC$ มี G เป็นเซนทรอยด์ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $GA = GC$
2. $CG:GF = BF:FA$
3. พื้นที่ $\triangle AGE =$ พื้นที่ $\triangle BGC$
4. พื้นที่ $\triangle CGE =$ พื้นที่ $\triangle BGF$



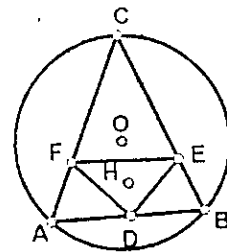
21. จากรูป จุด D , E และ F เป็นจุดแบ่งครึ่งด้านทั้งสามของ $\triangle ABC$ และ O เป็นศูนย์กลางวงล้อม ถ้า $BC = 24$ หน่วย และ $AC = 10$ หน่วย $OE = 2.4(OD)$ แล้วรัศมีของวงกลมล้อม $\triangle ABC$ ยาวกี่หน่วย

1. 11
2. 12
3. 13
4. 14



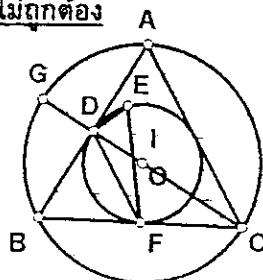
22. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีเดล ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $\triangle ABC \sim \triangle DBF$
2. $\triangle EFC \sim \triangle AEC$
3. $m\angle ADF = m\angle BDE$
4. $m\angle ACB = m\angle AHD$



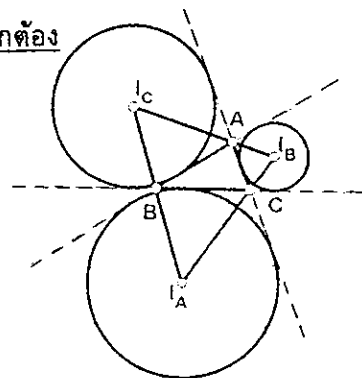
23. จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม O และเป็นรูปสามเหลี่ยมล้อมวงกลม I โดยวงกลมทั้งสองมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน จุด D และ F เป็นจุดที่วงกลม I สัมผัสกับ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ ถ้า $\overline{CG}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

1. $m\angle DFB = m\angle FDE$
2. $m\angle FED = m\angle FDB$
3. $CO = 2(ID)$
4. $BF = BD$



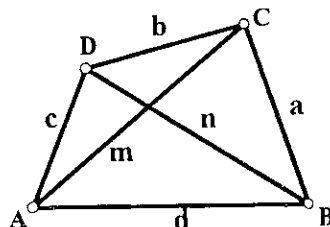
24. $\triangle ABC$ มี I_A, I_B และ I_C เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

1. $AI_C = BI_C$
2. $\overline{BI_B} \perp \overline{AI_A}$
3. $\overline{CI_C}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB
4. $m\angle I_C CB = m\angle I_B CA$



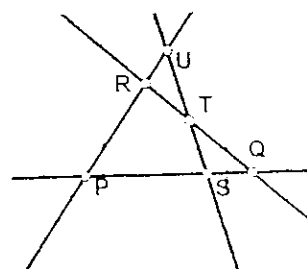
25. จากรูป $\square ABCD$ มี $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AB}, \overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เท่ากับ a, b, c, d, m และ n หน่วย ตามลำดับ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้ว $ab + cd = mn$
2. ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้ว $ac + bd < mn$
3. ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แล้ว $ac + bd \leq mn$
4. ถ้า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ แล้ว $ac + bd \geq mn$



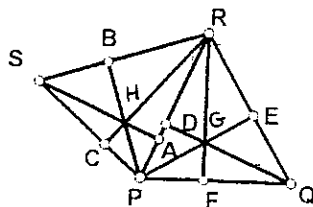
26. จากรูป PQR และ PSU เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{SU}$ ตัด $\overleftrightarrow{RQ}$ ที่จุด T ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. พิจารณา $\triangle PQR$ จะได้ $\frac{PS}{SQ} \cdot \frac{QT}{TR} \cdot \frac{RU}{UP} = 1$
2. พิจารณา $\triangle PSU$ จะได้ $\frac{PQ}{QS} \cdot \frac{ST}{TU} \cdot \frac{UR}{RP} = -1$
3. พิจารณา $\triangle RTU$ จะได้ $\frac{RQ}{QT} \cdot \frac{TS}{SU} \cdot \frac{UP}{PR} = 1$
4. พิจารณา $\triangle STQ$ จะได้ $\frac{SU}{UT} \cdot \frac{TR}{RQ} \cdot \frac{QS}{SP} = -1$



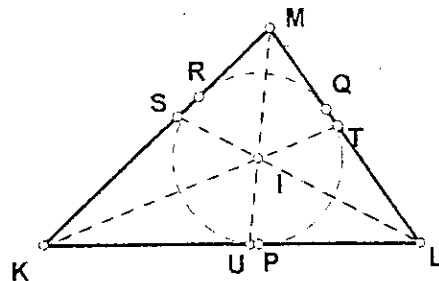
27. จากรูป PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ $\overline{PR}$ เป็นเส้นทแยงมุม มี $\overline{SA}$, $\overline{PB}$ และ $\overline{RC}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับ $\overline{PR}$, $\overline{RS}$ และ $\overline{SP}$ ตามลำดับ $\overline{PE}$, $\overline{QD}$ และ $\overline{RF}$ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle PQR$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $\frac{PA}{AR} \cdot \frac{RB}{BS} \cdot \frac{SC}{CP} = -1$
2. $\frac{PD}{DR} \cdot \frac{RB}{BS} \cdot \frac{SC}{CP} = 1$
3. $\frac{PF}{FQ} \cdot \frac{QE}{ER} \cdot \frac{RD}{DP} = 1$
4. $\frac{PG}{GE} \cdot \frac{EQ}{QR} \cdot \frac{RA}{AP} = -1$



28. จากรูป $\triangle KLM$ มี $\overline{KT}$, $\overline{LS}$ และ $\overline{MU}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle MKL$, $\angle KLM$, และ $\angle LMK$ ตามลำดับ โดยที่ $\overline{KT}$, $\overline{LS}$ และ $\overline{MU}$ ตัดกันที่จุด I จุด P, Q, และ R เป็นจุดสัมผัสของวงกลม I กับ $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ และ $\overline{MK}$ ตามลำดับ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $\frac{KP}{PL} \cdot \frac{LT}{TM} \cdot \frac{MR}{RK} = 1$
2. $\triangle RQP \cong \triangle STU$
3. จุดเอกโกนเน เป็นจุดเดียวกันกับจุด I
4. $\overline{KQ}$, $\overline{LR}$ และ $\overline{MP}$ เป็นส่วนของเส้นตรงจวบกัน

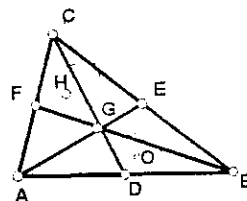


29. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $\overline{AB}$ เป็นฐาน แล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (ซึ่งเป็นวงกลมที่สัมผัสด้าน BC) และศูนย์กลางวงล้อม ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรง
2. ถ้า $\triangle ABC$ มี $\angle ABC$ เป็นมุมฉากแล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน และศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (ซึ่งเป็นวงกลมที่สัมผัสด้าน BC) ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรง
3. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน แล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรง
4. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ แล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรง

30. จากรูป $\triangle ABC$ มี จุด O เป็นศูนย์กลางวงล้อม จุด G เป็นเซนทรอยด์ และ จุด H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

1. $GH:OG = 1:2$
2. $OG:OH = 1:3$
3. $OE:OG = 2:1$
4. $OD:OG = 1:1$



ตอนที่ 2 ให้สร้างรูปตามที่โจทย์กำหนด แล้วสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา ตรวจสอบว่าข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ผิด พร้อมทั้งบอกเหตุผลที่ทำให้ข้อคาดเดาดังกล่าวถูกต้อง โดยเขียนลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้

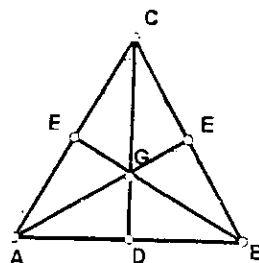
ข้อ 31

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

โจทย์

มี $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ และ $\overline{CD}$ เป็นเส้นมัธยฐาน

G เป็นเซนทรอยด์ และ $AB = 6$ หน่วย ดังรูป



สำรวจ

31.1 มีอัตราส่วนระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงคู่ใดเป็น $2 : 1$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่มีปรากฏในรูปเท่านั้น)

31.2 มีส่วนของเส้นตรงใดบ้างที่ยาวเท่ากัน

(ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่ไม่ใช่ด้านของ $\triangle ABC$)

31.3 มีส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

31.4 มีส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนของเส้นแบ่งครึ่งมุมหรือไม่

(ถ้ามีจงระบุพร้อมทั้งบอกด้วยว่า แบ่งครึ่งมุมใด)

31.5 มีรูปสามเหลี่ยมพีเซลล์หรือไม่

(ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการลากเชื่อมจุดที่มีปรากฏในรูปเท่านั้น)

31.6 มีรูปสามเหลี่ยมมัธยะหรือไม่

(ถ้ามีจงระบุโดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการลากเชื่อมจุดที่มีปรากฏในรูปเท่านั้น)

31.7 S_{ABC} เท่ากับกี่ตารางหน่วย

31.8 มีรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

ตั้งข้อคาดเดา

31.9 นักเรียนได้ข้อคาดเดาใดบ้างจากรูป และมีข้อคาดเดาใดที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของ $\triangle ABC$

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้นเมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ผิด

เหตุผล

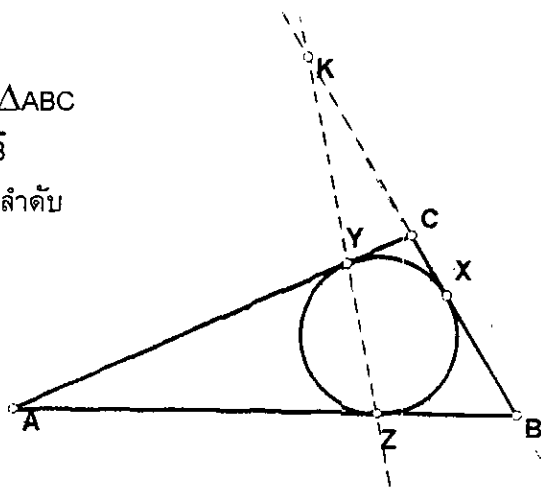
เพราะเหตุใด

ข้อ 32 โจทย์ สร้างวงกลม O แนบใน $\triangle ABC$

สัมผัส $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ และ $\overline{AB}$

ที่จุด X , Y และ Z ตามลำดับ

$\overleftrightarrow{YZ}$ ตัด $\overleftrightarrow{BC}$ ที่จุด K



สำรวจ

32.1

มีจุดอีก 2 จุด ที่เป็นจุดร่วมเส้นตรงกับจุด Y หรือไม่
(ถ้ามีจงระบุ โดยพิจารณาจากจุดที่ไม่เป็นจุดยอดของ $\triangle ABC$)

32.2

พิจารณาจากด้านหรือส่วนของด้านของ $\triangle ABC$ แล้วมีผลคูณของอัตราส่วนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทเมนเลาส์ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

32.3

มีส่วนของเส้นตรงอีก 2 เส้นที่จบกันกับ $\overline{AX}$ หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ โดยพิจารณาเฉพาะส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการลากเชื่อมจุดที่ปรากฏในรูปเท่านั้น และจุดจบที่ได้ไม่ใช่จุดยอดของ $\triangle ABC$)

32.4

พิจารณาจากด้านหรือส่วนของด้าน ของ $\triangle ABC$ แล้วมีผลคูณของอัตราส่วนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

ตั้งข้อคาดเดา

32.5

$\frac{BX}{XC}$ และ $\frac{BK}{KC}$ เท่ากันหรือไม่ ถ้าไม่เท่ากัน จะสัมพันธ์กันอย่างไร

ตรวจสอบ

32.6

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้นเมื่อสำรวจแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ผิด

เหตุผล

32.7

เพราะเหตุใด

เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ข้อที่ 1 เป็นการสำรวจ 5 ข้อย่อย ข้อย่อยละ 1 คะแนน

ข้อที่ 2 – 5 ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน ดังนี้

1. สำรวจ

ถ้าตอบได้มากกว่า 80% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 2 คะแนน

ถ้าตอบได้ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป แต่ไม่เกิน 80% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้

ได้ $1\frac{1}{2}$ คะแนน

ถ้าตอบได้น้อยกว่า 50% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 1 คะแนน

ถ้าตอบได้บ้างแต่ไม่ตรงประเด็นที่ต้องการ ได้ $\frac{1}{2}$ คะแนน

ถ้าไม่ตอบหรือตอบไม่ถูกต้อง ไม่ได้คะแนน

2. ตั้งข้อาคัดเคา

ถ้าตั้งข้อาคัดเคาได้มากกว่า 80% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 3 คะแนน

ถ้าตั้งข้อาคัดเคาได้ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป แต่ไม่เกิน 80% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 2 คะแนน

ถ้าตั้งข้อาคัดเคาได้น้อยกว่า 50% ของตัวอย่างแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 1 คะแนน

ถ้าตั้งข้อาคัดเคาได้บ้าง แต่ไม่ตรงประเด็นที่ต้องการ ได้ $\frac{1}{2}$ คะแนน

ถ้าไม่ตั้งข้อาคัดเคาเลย ไม่ได้คะแนน

3. ตรวจสอบ

ถ้าสามารถตรวจสอบได้ว่าข้อาคัดเคาที่ตั้งขึ้นน่าจะถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง ครบทุกข้อาคัดเคาที่ตั้งขึ้น ได้ 3 คะแนน

ถ้าสามารถตรวจสอบได้ว่าข้อาคัดเคาที่ตั้งขึ้นน่าจะถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง ได้ไม่ครบทุกข้อและตรวจสอบข้อาคัดเคาที่ถูกต้องได้ตั้งแต่ครึ่งหนึ่งขึ้นไปของแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ 2 คะแนน

ถ้าสามารถตรวจสอบได้ว่าข้อาคัดเคาที่ตั้งขึ้นน่าจะถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง ได้บ้างแต่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ได้ 1 คะแนน

ถ้าไม่ตอบหรือตรวจสอบไม่ได้เลย ไม่ได้คะแนน

4. เหตุผล

บอกแนวทางการให้เหตุผลได้ครบทุกข้อาคัดเคาที่ถูกต้องได้ 2 คะแนน

บอกแนวทางการให้เหตุผลได้บ้าง ได้ 1 คะแนน

ถ้าไม่ตอบหรือบอกแนวทางการให้เหตุผลที่ผิด ไม่ได้คะแนน

หมายเหตุ ทั้งนี้การตัดสินคะแนนอยู่ในดุลยพินิจของคณะผู้ตรวจ

เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบฝึกปฏิบัติระดับหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

ข้อที่ 1 – 2 ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน โดยมีเกณฑ์การตรวจเช่นเดียวกับข้อที่ 2 – 5 ในเกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบฝึกปฏิบัติระดับหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบฝึกปฏิบัติระดับหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

ข้อที่ 1 – 4 ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน โดยมีเกณฑ์การตรวจเช่นเดียวกับข้อที่ 2 – 5 ในเกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบฝึกปฏิบัติระดับหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

ข้อที่ 1 – 30 ถ้าตอบถูกต้องตามแนวทางคำตอบที่เฉลยไว้ ได้ข้อละ 1 คะแนน

ข้อที่ 31 – 32 ข้อละ 10 คะแนน แต่ละข้อแบ่งเป็น 4 ส่วน โดยมีเกณฑ์การตรวจเช่นเดียวกับข้อที่ 2 – 5 ในเกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบฝึกปฏิบัติระดับหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

เฉลยแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

1. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

1.1 $BF = CG$, $FE = GH$, $CD = BA$, $CB = DA$, $GF = HE$

1.2 $\angle FEA$, $\angle FEH$, $\angle AEH$, $\angle EFB$, $\angle EFG$, $\angle GFB$, $\angle GHE$

$\angle HGF$, $\angle HGC$, $\angle CGF$, $\angle GCB$, $\angle BCD$, $\angle CBA$, $\angle CBF$, $\angle BAD$, $\angle ADC$

1.3 $\overleftrightarrow{DH}$ (ถ้าคำตอบเป็น $\overline{DH}$ ก็อนุโลม)

1.4 มี 7 ระนาบ ดังนี้

(1.) ระนาบ ABO , ระนาบ EMF

(2.) ระนาบ GFH

(3.) ระนาบ NPG

(4.) ระนาบ PCG , ระนาบ DCI

(5.) ระนาบ NAB , ระนาบ ABC

(6.) ระนาบ AJI , ระนาบ HPE , ระนาบ AID

(7.) ระนาบ CIA

1.5 ส่วนของระนาบ 6 ระนาบ คือ ระนาบ ABC ระนาบ ABE ระนาบ ADE ระนาบ CGF

ระนาบ HGF และ ระนาบ HGC

2. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

2.1 $\angle APQ$, $\angle QPB$, $\angle AQB$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

2.2 $\triangle APQ$, $\triangle QPB$

2.3 ตรวจสอบได้ว่า $\triangle AQB \sim \triangle APQ$, $\triangle AQB \sim \triangle QPB$ และ $\triangle APQ \sim \triangle QPB \sim \triangle AQB$

2.4 แนวทางของเหตุผล

(1.) $\triangle AQB \sim \triangle APQ$ เพราะ $m\angle AQB = m\angle APQ$ และ $m\angle QAB \sim m\angle QAP$

(2.) $\triangle AQB \sim \triangle QPB$ เพราะ $m\angle AQB = m\angle QPB$ และ $m\angle QBA = m\angle QBP$

(3.) ดังนั้น $\triangle APQ \sim \triangle QPB \sim \triangle AQB$

2.5 แนวทางการตอบคำถาม $PQ^2 = AP \cdot PB$ เพราะ $\triangle APQ \sim \triangle QPB$ แล้ว $\frac{PQ}{PB} = \frac{AP}{QP}$

3. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

3.1 $m\angle ACF = m\angle FCB = m\angle AGB$ $m\angle CBG = m\angle ACF = m\angle AGB$

3.2 $BC = CG$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

3.3 $\triangle BCG$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3.4 $\triangle AFC \sim \triangle ABG$

3.5 $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AG} = \frac{FC}{BG}$,

$$\frac{y}{x+y} = \frac{b}{b+a} , \quad \frac{x}{x+y} = \frac{a}{b+a} , \quad \frac{x+y}{y} = \frac{b+a}{b} ,$$

$$\frac{x+y}{x} = \frac{b+a}{a}, \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

3.6 ตรวจสอบได้ว่าข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

$$3.7 \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

3.8 แนวทางของเหตุผล

(1.) $m\angle ACF = m\angle AGB$ เพราะเป็นมุมภายนอก และมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

(2.) $m\angle A = m\angle A$ เพราะเป็นมุมร่วม

(3.) $\triangle AFC \sim \triangle ABG$ เพราะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่

(4.) $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AG} = \frac{FC}{BG}$ เพราะเป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน

(5.) $\frac{y}{x+y} = \frac{b}{b+CG}$ เพราะ ให้ $AF = y$ หน่วย $BF = x$ หน่วย และ $AC = b$ หน่วย

(6.) $m\angle FCB = m\angle CBG$ เพราะเป็นมุมแย้ง

(7.) $m\angle ACF = m\angle FCB$ เพราะ CF เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB

(8.) $m\angle ACF = m\angle CBG$ เพราะแต่ละมุมมีขนาดเท่ากับ $m\angle FCB$

(9.) $m\angle CBG = m\angle CGB$ เพราะแต่ละมุมมีขนาดเท่ากับ $m\angle ACF$

(10) $\triangle BCG$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากันสองมุม

(11) $CG = BC = a$ เพราะเป็นด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(12.) $\frac{y}{x+y} = \frac{b}{b+a}$ เพราะจากข้อ 5 และข้อ 11

(13) $\frac{x+y}{y} - 1 = \frac{b+a}{b} - 1$ เพราะจากข้อ 12

(14.) $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ เพราะจากข้อ 13

4. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$4.1 \quad m\angle DSR = m\angle BPQ \quad m\angle DRS = m\angle BQP$$

$$m\angle DAB = m\angle DCB \quad m\angle ADC = m\angle CBA$$

$$4.2 \quad AS = SD = DR = RC = CQ = QB = BP = PA$$

$$SR = PQ ; SP = RQ$$

$$4.3 \quad \triangle ASP \cong \triangle CRQ \quad \triangle DSR \cong \triangle BPQ$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

4.4 $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หรือ $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือ $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

4.5 ตรวจสอบได้ว่าข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

4.6 แนวทางของเหตุผล

- (1.) $\triangle ASP \cong \triangle CQR$ เพราะ $m\angle SAP = m\angle QCR$, $AP = CQ$
และ $AS = CR$ (ด้าน-มุม-ด้าน)
- (2.) $SP = RQ$ เพราะเป็นด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่
เท่ากันทุกประการ
- (3.) $SR = PQ$ เพราะในทำนองเดียวกันกับข้อ 2
ดังนั้น $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- (4.) $m\angle 1 = m\angle 2$ เพราะ $\triangle ASP$ และ $\triangle DRS$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
และ $m\angle 3 = m\angle 4$
- (5.) $m\angle SAP + 2(m\angle 2) = 180^\circ$ เพราะเป็นผลบวกของขนาดของมุมภายในของ
และ $m\angle RDS + 2(m\angle 3) = 180^\circ$ รูปสามเหลี่ยม
- (6.) $m\angle SAP + 2(m\angle 2) + m\angle RDS + 2(m\angle 3) = 360^\circ$
เพราะ จากข้อ 5
- (7.) $2(m\angle 2) + 2(m\angle 3) = 180^\circ$ เพราะ $m\angle SAP + m\angle RDS = 180^\circ$ ($AB \parallel DC$)
- (8.) $m\angle 2 + m\angle 3 = 90^\circ$ เพราะจากข้อ 7
- (9.) $m\angle RSP = 90^\circ$ เพราะ $m\angle RSP + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$
- (10.) $m\angle SPQ = m\angle PQR = m\angle QRS = 90^\circ$
เพราะในทำนองเดียวกันกับข้อ 9
- (11.) $\square PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะจากข้อ 2, 3, 9, และ 10

5. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

5.1 $BO_1 = CO_1$, $BO_1 = BC = CO_1$, $BA = AC$

5.2 $m\angle BO_1C = m\angle CBO_1 = m\angle O_1CB$

$m\angle BAO_1 = m\angle CAO_1$, $m\angle BAO_1 = m\angle CAO_1 = 90^\circ$

$m\angle BO_1A = m\angle CO_1A$

5.3 $\triangle BO_1A \cong \triangle CO_1A$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

5.4 $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือ $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

5.5 $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือ $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

5.6 แนวทางของเหตุผล

(1.) $BO_1 = CO_1$ เพราะเป็นความยาวรัศมีของวงกลม O_1

(2.) $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

(3.) $m\angle O_1BC = m\angle O_1CB$ เพราะเป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(4.) $m\angle BO_1C = 2m\angle BDC = 60^\circ$ เพราะมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาด
เป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม
ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

(5.) $m\angle O_1BC + m\angle O_1CB + m\angle BO_1C = 180^\circ$ เพราะผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°

(6.) $m\angle O_1BC = 60^\circ$ เพราะ จากข้อ 4 และ 5

(7.) $\triangle BCO_1$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เพราะมีขนาดของมุมเท่ากันสามมุม

5.7 $\triangle O_1AC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะ $\overline{O_1A} \perp \overline{BC}$

$$O_1C^2 = O_1A^2 + AC^2$$

$$16 = O_1A^2 + 4$$

$$12 = O_1A^2$$

$$O_1A = 2\sqrt{3} \quad \text{ดังนั้นรัศมีวงกลมเล็กยาว } 2\sqrt{3} - 1 \text{ หน่วย หรือประมาณ 2.464}$$

เฉลยแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

1. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

1.1 $PA = PB$

1.2 $PB^2 = PD \cdot PC$

1.3 $PA^2 = PD \cdot PC$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

1.4 $\triangle APB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่ไม่ถูกต้อง เช่น $\triangle APB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1.5 ตรวจสอบได้ว่า $\triangle APB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1.6 แนวทางของเหตุผล

(1.) $PB^2 = PC \cdot PD$ เพราะเป็นสมบัติของเส้นสัมผัสและเส้นตัดวงกลม

(2.) $PA^2 = PC \cdot PD$ เพราะเป็นสมบัติของเส้นสัมผัสและเส้นตัดวงกลม

(3.) $PB^2 = PA^2$ เพราะต่างเท่ากับ $PC \cdot PD$

(4.) $PB = PA$ เพราะจากข้อ 3

ดังนั้น $\triangle APB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

2.1 $m\angle BAG = m\angle BCD = m\angle BEF$

2.2 $m\angle ABG = m\angle ADC = m\angle AFE$

2.3 $\triangle ABG \sim \triangle CDG$ และ $\triangle ABG \sim \triangle EFG$

2.4 $BG \cdot GC$

2.5 $BG \cdot GE$

2.6 $ID \cdot DH$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$2.7 \frac{BG}{AG} = \frac{GD}{GC} \quad , \quad \frac{BG}{AG} = \frac{GF}{GE}$$

$$2.8 \overline{CD} \parallel \overline{EF}$$

2.9 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

2.10 แนวทางของเหตุผล

$$(1.) AG \cdot GD = BG \cdot GC \quad \text{เพราะสมบัติของคอร์ดตัดกันภายในวงกลม P}$$

$$(2.) \frac{GD}{GC} = \frac{BG}{AG} \quad \text{เพราะจากข้อ 1}$$

$$(3.) AG \cdot GF = BG \cdot GE \quad \text{เพราะสมบัติของคอร์ดตัดกันภายในวงกลม Q}$$

$$(4.) \frac{GF}{GE} = \frac{BG}{AG} \quad \text{เพราะจากข้อ 3}$$

$$(5.) \frac{BG}{AG} = \frac{GD}{GC} = \frac{GF}{GE} \quad \text{เพราะจากข้อ 2 และ 3}$$

$$(6.) m\angle BAG = m\angle BCD \quad \text{เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่อยู่กับด้วยส่วนโค้ง BD เดียวกัน}$$

$$(7.) m\angle BAF = m\angle BEF \quad \text{เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่อยู่กับด้วยส่วนโค้ง BF เดียวกัน}$$

$$(8.) m\angle GCD = m\angle GEF \quad \text{เพราะต่างเท่ากับ } m\angle BAD$$

$$(9.) \overline{CD} \parallel \overline{EF} \quad \text{เพราะมุมภายในและมุมภายนอกบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน}$$

เฉลย แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

1. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

1.1 จุด G , G_1 , I , I_1

1.2 ไม่มี

1.3 จุด G อยู่ภายในรูป $ก$, $ข$, $ค$, $ง$ และ $จ$

1.4 จุด I อยู่ภายในรูป $ก$, $ข$, $ค$, $ง$ และ $จ$

1.5 จุด O อยู่ภายในรูป $ข$, $ค$ และ $จ$ แต่รูป $ก$ จุด O จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉาก

1.6 จุด H อยู่ภายในรูป $ข$, $ค$ และ $จ$ แต่รูป $ก$ จุด H จะอยู่ที่จุดยอดที่เป็นมุมฉาก

1.7 $\overline{FD}$

1.8 $\overline{DE}$

1.9 $FM = EM$, $CM = DM$

1.10 $FN = DN$, $AN = EN$

1.11 $\overline{DM}$ และ $\overline{EN}$

1.12 $\angle DRE$, $\angle DRF$, $\angle FQE$, $\angle FQD$, $\angle EPD$ และ $\angle EPF$

1.13 $\overline{EP}$

1.14 $\overline{DR}$

1.15 $\overline{FQ}$

1.16 $\overline{EP}$, $\overline{DR}$ และ $\overline{FG}$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

1.17 จุด G กับ G_1 เป็นจุดเดียวกัน

1.18 จุด O กับ H_1 เป็นจุดเดียวกัน

1.19 จุด G , O และ H เป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน

1.20 จุด G_1 , O_1 และ H_1 เป็นจุดร่วมเส้นตรงเดียวกัน

1.21 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

1.22 แนวทางของเหตุผล ที่ทำให้ จุด G กับ G_1 เป็นจุดเดียวกัน

จากรูป ให้ M เป็นจุดตัดของ $\overline{FE}$ และ $\overline{CD}$

ให้ N เป็นจุดตัดของ $\overline{FD}$ และ $\overline{AE}$

(1.) ลาก $\overline{FD}$ จะได้ว่า $\overline{FD} \parallel \overline{CE}$ เพราะส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมนั้น

(2.) ลาก $\overline{DE}$ จะได้ว่า $\overline{DE} \parallel \overline{FC}$ เพราะทำนองเดียวกับข้อ 1

(3.) $\square FCED$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะมีด้านขนานกัน 2 คู่

(4.) $FM = ME$ และ $CM = MD$ เพราะเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

(5.) $FN = ND$ และ $AN = NE$ เพราะทำนองเดียวกับข้อ 4

(6.) $\overline{DM}$ และ $\overline{EN}$ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle DEF$ เพราะ M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{FE}$ และ $\overline{FD}$ ตามลำดับ

(7.) จุด G เป็นเซนทรอยด์ของ $\triangle DEF$ เพราะเป็นจุดตัดของ $\overline{DM}$ และ $\overline{EN}$

(8.) จุด G_1 เป็นเซนทรอยด์ของ $\triangle DEF$ เพราะกำหนดให้

ดังนั้นจุด G และ G_1 เป็นจุดเดียวกัน

แนวทางของเหตุผล ที่ทำให้ จุด O กับ H_1 เป็นจุดเดียวกัน

ให้ $\overline{ED}$, $\overline{DO}$ และ $\overline{FO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ

ลาก $\overline{EO}$, $\overline{DO}$ และ $\overline{FO}$ ไปตัด $\overline{FD}$, $\overline{FE}$ และ $\overline{DE}$ ที่จุด P , R และ Q ตามลำดับ

- (1.) $m\angle OEC = m\angle OEB = 90^\circ$ เพราะเป็นมุมที่เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน
- (2.) $\overline{FD} \parallel \overline{CB}$ เพราะส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยม
- (3.) $m\angle DPE + m\angle PEB = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด
- (4.) $m\angle DPE = 90^\circ$ เพราะจากข้อ 1 และ 3
- (5.) $\overline{EP}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle DEF$ เพราะ จากข้อ 4 $\overline{EP} \perp \overline{DF}$
- (6.) $\overline{FQ}$ และ $\overline{DR}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle DEF$ เพราะ ทำนองเดียวกับข้อ 5
- (7.) จุด O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle DEF$ เพราะเป็นจุดตัด $\overline{EP}$, $\overline{FQ}$ และ $\overline{DR}$
- (8.) จุด H_1 เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle DEF$ เพราะกำหนดให้
ดังนั้น จุด O และ H_1 เป็นจุดเดียวกัน

2. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

2.1 $m\angle CFA$, $m\angle CFB$, $m\angle CEB$, $m\angle AEB$

2.2 สร้างได้

2.3 สร้างได้

2.4 $m\angle AEF$, $m\angle KFB$

2.5 $m\angle EFA$, $m\angle CEK$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

2.6 $KC = KE = KF = KB$

2.7 $\triangle KEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2.8 $\triangle ABC \sim \triangle AEF$

2.9 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

2.10 แนวทางของเหตุผล ที่ทำให้ $KC = KE = KF = KB$

(1.) $m\angle CFB = m\angle BEC = 90^\circ$ องศา เพราะ $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

(2.) จุด E , F , B และ C เป็นจุดบนวงกลมมี $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
เพราะมุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

(3.) $KC = KE = KF = KB$ เพราะเป็นความยาวรัศมีของวงกลม

แนวทางของเหตุผล ที่ทำให้ $\triangle KEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $KE = KF$

แนวทางของเหตุผล ที่ทำให้ $\triangle ABC \sim \triangle AEF$

ให้ $m\angle KEF = a^\circ$, $m\angle FBK = x^\circ$ และ $m\angle ECK = y^\circ$

(1.) $m\angle CAB = m\angle EAF$ เพราะเป็นมุมร่วม

(2.) $m\angle KEF = m\angle KFE = a^\circ$ เพราะเป็นมุมที่ฐานของ $\triangle KEF$

(3.) $m\angle ECK = m\angle KEC = y^\circ$ เพราะทำนองเดียวกับข้อ 2

- (4.) $m\angle FBK = m\angle BFK = x^\circ$ เพราะทำนองเดียวกับข้อ 2
- (5.) $180^\circ - 2a = 180^\circ - (180 - 2x + 180 - 2y)^\circ$ เพราะต่างก็มีขนาดเท่ากับ $m\angle EKF$
 $360^\circ = 2a + 2x + 2y$
 $180^\circ = a + x + y$
- (6.) $m\angle AEF + m\angle FEK + m\angle KEC = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมตรง
 ดังนั้น $m\angle AEF = (180 - a - y)^\circ = x^\circ$
- (7.) $m\angle FBK = m\angle AEF$ เพราะต่างเท่ากับ x°
- (8.) $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ เพราะจาก ข้อ 1 และ 7

2.11 ไม่ เพราะจุด K ไม่ใช่จุดที่สูงตัด $\overline{BC}$

3. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

3.1 มีจุด E และ F หรือจุด A และ B หรือจุด P และ C

$$3.2 \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

3.3 จุด Q, P และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง

3.4 ตรวจสอบได้ว่าข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

3.5 ทฤษฎีบทเมนเนลัส

4. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$4.1 AD = BC, AB = DC, OA = OQ$$

$$4.2 m\angle 1 = m\angle 8, m\angle 4 = m\angle 7, m\angle 3 = m\angle 10, m\angle 2 = m\angle 9, m\angle 4 = m\angle 6, \\ m\angle 3 = m\angle 5, m\angle 6 = m\angle 7, m\angle 5 = m\angle 10$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาอาจได้

$$4.3 \triangle CDA \sim \triangle ABC \quad \triangle RQP \sim \triangle ABC \text{ และ } \triangle RQP \sim \triangle CDA$$

$$4.4 AQ \cdot RP = (RQ)(AP) + (AR)(PQ)$$

4.5 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

$$4.6 \text{ แนวทางของเหตุผลที่ทำให้ } AQ \cdot RP = RQ \cdot AP + AR \cdot PQ$$

$$\triangle CDA \sim \triangle ABC \text{ เพราะ } m\angle 4 = m\angle 6, m\angle 5 = m\angle 3$$

$$\triangle RQP \sim \triangle ABC \text{ เพราะ } m\angle 6 = m\angle 7, m\angle 3 = m\angle 10$$

$$4.7 \text{ เท่ากัน } (RQ)(AP) + (AR)(PQ) \text{ เพราะทฤษฎีบทโตเลมี}$$

$$\text{แนวทางของเหตุผล ทำให้ } AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$$

$$(1.) AQ \cdot RP = (RQ)(AP) + (AR)(QP) \text{ เพราะเป็นทฤษฎีบทโตเลมี}$$

$$(2.) \triangle ABC \sim \triangle CDA \text{ เพราะเป็นสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน}$$

$$(3.) m\angle 3 = m\angle 5 \text{ เพราะเป็นมุมแย้ง}$$

$$(4.) m\angle 3 = m\angle 10 \text{ เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน}$$

$$(5.) m\angle 10 = m\angle 5 \text{ เพราะต่างมีขนาดเท่ากับ } m\angle 3$$

$$(6.) m\angle 4 = m\angle 7 \text{ เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน}$$

$$(7.) \triangle ABC \sim \triangle RQP \text{ เพราะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ 2 คู่}$$

$$(8.) \frac{AC}{RP} = \frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{PQ}$$

เพราะเป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่

สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่

คล้ายกัน

$$(9) (AQ)(RP)\left(\frac{AC}{RP}\right) = (RQ)(AP)\left(\frac{AB}{RQ}\right) + (AR)(PQ)\left(\frac{BC}{PQ}\right)$$

เพราะเป็นสมบัติของการคูณของจำนวนจริง

$$(10) AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot BC \quad \text{เพราะจากข้อ 9}$$

$$(11) AD = BC \quad \text{เพราะเป็นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน}$$

$$(12) AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD \quad \text{เพราะจากข้อ 10 และ 11}$$

เฉลยแนวทางคำตอบของแบบทดสอบ

ตอนที่ 1

ข้อ	คำตอบ	ข้อ	คำตอบ	ข้อ	คำตอบ
1	1	11	4	21	3
2	4	12	2	22	3
3	3	13	3	23	1
4	4	14	1	24	1
5	2	15	1	25	4
6	1	16	3	26	2
7	3	17	2	27	3
8	1	18	1	28	4
9	2	19	3	29	4
10	2	20	4	30	2

ตอนที่ 2

31 ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

31.1 มี $\frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GF} = \frac{CG}{GD}$

31.2 มี $AE = BF = CD$; $AG = BG = CG$; $DG = EG = FG$; $AF = FC = CE = EB = BD = DA$

31.3 มี : $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BF} \perp \overline{AC}$

31.4 มี : $\overline{AE}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ $\overline{BF}$ แบ่งครึ่ง $\angle ABC$ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่ง $\angle ACB$

31.5 มี $\triangle DEF$

31.6 มี $\triangle DEF$

31.7 $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

31.8 $\triangle AGD \cong \triangle AGF \cong \triangle CGF \cong \triangle BGE \cong \triangle BGD \cong \triangle CGE$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

31.9 ข้อคาดเดาที่สมควรเป็นเช่นเดียวกับข้อ 31.1-31.8 และที่เพิ่มเติมคือ เซนทรอยด์

ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$ เป็นจุดเดียวกัน

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผลของข้อคาดเดาข้างต้น

1. $\frac{CG}{GD} = \frac{BG}{GF} = \frac{AG}{GE} = \frac{2}{1}$ เพราะ เป็นสมบัติของเซนทรอยด์

2. $AE = BF = CD$ เพราะ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ส่วนสูง และเส้นมัธยฐาน เป็นเส้นเดียวกัน ส่วนสูงทั้งสามเส้นยาวเท่ากัน

$AG = BG = CG$; $DG = EG = FG$ เพราะ จากข้อ 1 และข้อ 2

$AF = FC = CE = EB = BD = DA$ เพราะ เป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านของ $\triangle ABC$

3. $\overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ เพราะ $\overline{AE}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{BF}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$
4. $\overline{AE}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAC$, $\overline{BF}$ แบ่งครึ่ง $\angle ABC$, $\overline{CD}$ แบ่งครึ่ง $\angle ACB$ เพราะ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เส้นมัธยฐาน และเส้นแบ่งครึ่งมุมเป็นเส้นเดียวกัน
5. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิมเรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีเดล
6. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิมเรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมัธยะ
7. $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ เมื่อ $p = \frac{a+b+c}{2}$
8. รูปสามเหลี่ยมหกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีพื้นที่เท่ากัน
9. ในกรณีที่ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะได้ว่า ส่วนสูง เส้นมัธยฐาน และเส้นแบ่งครึ่งมุมเป็นเส้นเดียวกัน และตัดกันที่จุดจุดเดียว เรียกจุดนั้นว่า เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อมและจุดออร์โทเซนเตอร์

32 ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

32.1 จุด K, Y และ Z

32.2 มี $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$

32.3 มี $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ และ $\overline{CZ}$

32.4 $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$\frac{BX}{XC} \text{ และ } \frac{BK}{KC} \text{ ไม่เท่ากัน โดย } \frac{BX}{XC} = -\frac{BK}{KC}$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผลของข้อคาดเดาข้างต้น

- (1.) $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$ เพราะ $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ และ $\overline{CZ}$ เป็นเส้นจwabกัน (ทฤษฎีบทเซวา)
- (2.) $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$ เพราะจุด X, Y และ Z เป็นจุดร่วมเส้นตรง (ทฤษฎีบทเมนเนเลส์)
- (3.) $\frac{BX}{XC} = \frac{YA}{CY} \cdot \frac{ZB}{AZ}$ เพราะจากข้อ (1)
- (4.) $\frac{BK}{KC} = -\frac{YA}{CY} \cdot \frac{ZB}{AZ}$ เพราะจากข้อ (2)
- (5.) $\frac{BX}{XC} = -\frac{BK}{KC}$ เพราะจากข้อ (3) , (4)

ภาคผนวก ง

กำหนดค่าการสอนของการทดลองเป็นรายบุคคลและการทดสอบ

กำหนดค่าการสอนของการทดลองกลุ่มย่อยและการทดสอบ

กำหนดค่าการสอนของการทดลองภาคสนามและการทดสอบ

กำหนดคาบการสอนของการทดลองเป็นรายบุคคลและการทดสอบ

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
เสาร์ 5 ก.ย.2541	1-2	การใช้ซอฟต์แวร์ GSP	2
	3-4	หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 ❖ เรื่อง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2 ❖ เรื่อง การสร้างพื้นฐาน	2
อาทิตย์ 6 ก.ย.2541	5-6	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.3 ❖ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4 ❖ เรื่อง เส้นขนาน	2
เสาร์ 12 ก.ย.2541	7-8	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5 ❖ เรื่อง รูปหลายเหลี่ยม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6 ❖ เรื่อง ความคล้ายกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.7 ❖ เรื่อง วงกลม	2
อาทิตย์ 13 ก.ย.2541	9-10	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	2
เสาร์ 19 ก.ย.2541	11	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม	1
	12	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2	1

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
อาทิตย์ 20 ก.ย.2541	13	หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 ❖ เรื่อง เซนทรอยด์ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงล้อม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3 ❖ เรื่อง จุดออร์โทเซนเตอร์	1
เสาร์ 26 ก.ย.2541	14	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบใน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.5 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทโตเลมี	1
อาทิตย์ 27 ก.ย.2541	15	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเมเนแลส และบทกลับ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเซวา และบทกลับ	1
เสาร์ 3 ต.ค.2541	16	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9 ❖ เรื่อง จุดเอกอนเน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10 ❖ เรื่อง เส้นออยเลอร์	1
อาทิตย์ 4 ต.ค.2541	17-18	แบบฝึกปฏิบัติระคน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	2
เสาร์ 10 ต.ค.2541	19-20	การทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรขาคณิต	2
รวม			20

กำหนดคาบการสอนของการทดลองกลุ่มย่อยและการทดสอบ

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวน คาบ
จันทร์ 19 ต.ค.2541	1-3	การใช้ซอฟต์แวร์ GSP	3
อังคาร 20 ต.ค.2541	4-5	หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 ❖ เรื่อง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของงเส้นตรง รังสี และ มุม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2 ❖ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ	2
พุธ 21 ต.ค.2541	6-8	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.3 ❖ เรื่อง เส้นขนาน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4 ❖ เรื่อง รูปหลายเหลี่ยม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5 ❖ เรื่อง ความคล้ายกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6 ❖ เรื่อง วงกลม	3
พฤหัสบดี 22 ต.ค.2541	9-10	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	2
ศุกร์ 23 ต.ค.2541	11	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิด จากคอร์ดตัดกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม	1
	12	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2	1

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวน คาบ
เสาร์ 24 ต.ค.2541	13-14	หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 ❖ เรื่อง เซนทรอยด์ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2 เรื่อง ศูนย์กลางวงล้อม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3 ❖ เรื่อง จุดออร์โทเซนเตอร์ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	2
เสาร์ 31 ต.ค.2541	15	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.5 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทโตเลมี	1
	16-17	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเมเนเลอัส และบทกลับ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเชวา และบทกลับ	2
เสาร์ 7 พ.ย.2541	18	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9 ❖ เรื่อง จุดเกอกอนเน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10 ❖ เรื่อง เส้นออยเลอร์	1
	19-20	แบบฝึกปฏิบัติระคน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	2
เสาร์ 14 พ.ย.2541	21-22	การทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรขาคณิต	2
รวม			22

กำหนดคาบการสอนของการทดลองภาคสนามและการทดสอบ

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
อังคาร 1 ธ.ค.2541	1	แนะนำบทเรียนเรขาคณิตและ GSP	1
พุธ 2 ธ.ค.2541	2	หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 ❖ เรื่อง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น สร้างจุด เส้น และวงกลม การกำหนด Label ของออบเจกต์และกล่องข้อความ	
พฤหัสบดี 3 ธ.ค.2541	3	ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น (ต่อ) การสร้างรูปหลายเหลี่ยม	1
ศุกร์ 4 ธ.ค.2541	4	ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น (ต่อ) การวัดและการคำนวณ	1
เสาร์ 5 ธ.ค.2541	5	ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น (ต่อ) การใช้ Script	1
	6	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2 ❖ ความเท่ากันทุกประการ	1
	7	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.3 ❖ เรื่อง เส้นขนาน	1
จันทร์ 7 ธ.ค.2541	8	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4 ❖ เรื่อง รูปหลายเหลี่ยม	1
	9	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5 ❖ เรื่อง ความคล้ายกัน	1
อังคาร 8 ธ.ค.2541	10-11	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6 ❖ เรื่อง วงกลม	1
	10-11	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	2
พุธ 9 ธ.ค.2541	12	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิด จากคอร์ดตัดกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2	1

วัน เดือน ปี	คาบที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
		❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้อง ข้อกับเส้นตัดของวงกลม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3	1
	13	❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้อง ข้อกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2	1
พฤหัสบดี 10 ธ.ค.2541	14	หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 ❖ เรื่อง เซนทรอยด์	1
	15	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงล้อม หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3 ❖ เรื่อง จุดออร์โทเซนเตอร์	1
	16	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	1
ศุกร์ 11 ธ.ค.2542	17	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.5 ❖ เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก	1
	18	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทโตเลมี	1
	19	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเมเนเลอัส และบทกลับ	1
เสาร์ 12 ธ.ค.2541	20	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 ❖ เรื่อง ทฤษฎีบทเชวา และบทกลับ	1
	21	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9 ❖ เรื่อง จุดเกอกอนเน หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10 ❖ เรื่อง เส้นออยเลอร์	1
จันทร์ 14 ธ.ค.2541	22-23	แบบฝึกปฏิบัติระคน หน่วยการเรียนรู้ที่ 3	2
อังคาร 15 ธ.ค.2541	24-25	การทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรขาคณิต	2
		รวม	25

ภาคผนวก จ
การวิเคราะห์ข้อมูล

- ตาราง 15 : ผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับ
นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์
- ตาราง 16 : ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการ
ทดลองเป็นรายบุคคล
- ตาราง 17 : ค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นราย
บุคคล
- ตาราง 18 : ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการ
ทดลองกลุ่มย่อย
- ตาราง 19 : ค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลองกลุ่มย่อย
- ตาราง 20 : ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จาก
การทดลองภาคสนาม
- ตาราง 21 : ค่าประสิทธิภาพของผลสัมฤทธิ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม
- ตาราง 22 : คะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนน
จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จาก
การทดลองเป็นรายบุคคล
- ตาราง 23 : คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และ
คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 9
คน จากการทดลองกลุ่มย่อย
- ตาราง 24 : คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และ
คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 30
คน จากการทดลองภาคสนาม

ตาราง 15 ผลการวิเคราะห์ค่าดัชนีความสอดคล้องเกี่ยวกับสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตสำหรับนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น			IOC
	แน่ใจ ว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจ ว่าจำเป็น	แน่ใจว่า ไม่จำเป็น	
1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด				
1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม	3	-	-	1
1.2. ความเท่ากันทุกประการ	3	-	-	1
1.3. เส้นขนาน	3	-	-	1
1.4. รูปหลายเหลี่ยม	3	-	-	1
1.5. ความคล้ายกัน	3	-	-	1
1.6 วงกลม	3	-	-	1
1.7. การสร้างพื้นฐาน	3	-	-	1
2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม				
2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน	2	1	-	0.67
2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม	2	1	-	0.67
2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม	2	1	-	0.67
2.4 แกนราก	1	2	-	0.33*
3.การจwabกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน				
3.1 เซนทรอยด์	3	-	-	1
3.2 ศูนย์กลางวงล้อม	3	-	-	1
3.3 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	3	-	-	1
3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก	3	-	-	1
3.5 จุดออร์โทเซนเตอร์	3	-	-	1
3.6 ทฤษฎีบททมิเกล	-	3	-	0*
3.7 เส้นซิมสัน	-	3	-	0*
3.8 ทฤษฎีบทโตเลมี	3	-	-	1
3.9 ทฤษฎีบทเชวา	3	-	-	1
3.10 จุดเกอกอนเน	3	-	-	1
3.11 วงกลมเก้าจุด	1	2	-	0.33*

สมรรถภาพหลัก/สมรรถภาพย่อย	ระดับความคิดเห็น			IOC
	แน่ใจว่าจำเป็น	ไม่แน่ใจว่าจำเป็น	แน่ใจว่าไม่จำเป็น	
3.12 เส้นออยเลอร์	2	1	-	0.67
3.13 ทฤษฎีบทเมเนเลส์	3	-	-	1
3.14 ทฤษฎีบทมอร์เลย์	1	2	-	0.33*
4. เนื้อหาที่เน้นความสัมพันธ์ของส่วนคงที่ในด้านความยาว อัตราส่วนของความยาวของด้าน ขนาดของมุม และอัตราส่วนไขว้กับชนิดของการแปลง				
4.1 การสะท้อน	3	-	-	1
4.2 การเลื่อนขนาน	3	-	-	1
4.3 การหมุน	3	-	-	1
4.4 ฮอโมเทติก	1	2	-	0.33*
4.5 การฉาย	3	-	-	1
5. บทกลับของทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่กล่าวข้างต้น				
สมรรถภาพย่อยตามบทกลับที่เป็นจริงของทฤษฎีบทต่าง ๆ ในสมรรถภาพหลักที่ 3				
	1	2	-	0.33*
หมายเหตุ * สมรรถภาพที่ตัดออก (IOC < 0.60)				

การคำนวณค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน

การคำนวณค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

คำนวณจากสูตร $E_1 = \frac{\bar{X}}{A} \times 100$

เมื่อ E_1 แทน ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

A แทน คะแนนเต็มของแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้

การคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม

การคำนวณค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

คำนวณจากสูตร $E_2 = \frac{\bar{F}}{P} \times 100$

เมื่อ E_2 แทน ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละของคะแนนที่นักเรียนได้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

$\bar{F}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

P แทน คะแนนเต็มของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต

ตาราง 16 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

หน่วยการเรียนรู้ที่	A	$\bar{X}$	E_1
1	45	39.67	88.16
2	20	17.17	85.85
3	40	35.67	89.17

ตาราง 17 ประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

P	$\bar{F}$	E_2
50	40.33	80.67

ตาราง 18 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลองกลุ่มย่อย

หน่วยการเรียนรู้ที่	A	$\bar{X}$	E_1
1	45	40.17	89.27
2	20	17.50	87.50
3	40	32.00	80.00

ตาราง 19 ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลองกลุ่มย่อย

P	$\bar{F}$	E_2
50	39.50	79.00

ตาราง 20 ค่าประสิทธิภาพของกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน (E_1) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

หน่วยการเรียนรู้ที่	A	$\bar{X}$	E_1
1	45	38.85	86.33
2	20	15.55	77.75
3	40	30.08	75.20

ตาราง 21 ค่าประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม (E_2) ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

P	$\bar{F}$	E_2
50	36.23	72.46

ตาราง 22 : คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 3 คน จากการทดลองเป็นรายบุคคล

เลขที่	คะแนนจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้			คะแนนจาก แบบทดสอบ (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)
	1	2	3	
	(คะแนนเต็ม 45 คะแนน)	(คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	(คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	
1	43.00	18.00	38.00	42.00
2	35.00	15.50	33.00	41.00
3	41.00	18.00	36.00	38.00
ค่าเฉลี่ย	39.67	17.17	35.67	40.33

ตาราง 23 : คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 9 คน จากการทดลองกลุ่มย่อย

เลขที่	คะแนนจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้			คะแนนจาก แบบทดสอบ (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)
	1	2	3	
	(คะแนนเต็ม 45 คะแนน)	(คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	(คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	
1	37.50	18.50	29.50	34.50
2	37.50	19.50	32.50	38.50
3	43.00	18.50	34.00	44.00
4	37.00	16.50	30.50	38.50
5	38.50	16.50	32.00	41.00
6	41.50	16.50	31.50	39.50
7	42.50	17.00	36.00	40.50
8	43.50	16.00	32.00	38.50
9	40.50	18.00	30.00	40.50
ค่าเฉลี่ย	40.17	17.50	32.00	39.50

ตาราง 24 : คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนประจำแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ของกลุ่มตัวอย่าง 30 คน จากการทดลองภาคสนาม

เลขที่	คะแนนจากการทำแบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่			คะแนนจาก แบบทดสอบ (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)
	1 (คะแนนเต็ม 45 คะแนน)	2 (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)	3 (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)	
1	40.50	16.50	32.50	43.00
2	39.50	18.00	32.00	39.50
3	38.00	18.00	29.00	28.00
4	43.00	18.50	32.00	40.50
5	41.00	17.00	30.50	48.00
6	40.00	13.00	18.00	37.00
7	36.50	15.50	32.50	29.50
8	35.00	18.00	30.00	35.50
9	39.00	16.50	36.00	41.50
10	34.50	9.50	30.50	37.00
11	37.50	15.00	27.00	35.50
12	35.50	18.50	29.50	36.50
13	38.50	15.50	33.75	41.00
14	36.00	17.50	31.00	42.50
15	42.50	18.50	26.00	43.50
16	41.00	18.00	31.00	41.00
17	42.50	18.00	29.00	40.50
18	41.00	18.00	35.00	42.50
19	40.50	17.50	33.00	42.00
20	40.50	16.00	37.00	31.00
21	37.50	9.50	23.00	26.50
22	40.50	13.50	28.00	31.00
23	41.50	18.00	34.00	42.00
24	40.50	9.50	28.00	27.50
25	39.00	8.00	30.50	25.50
26	40.00	13.00	34.00	26.50
27	24.00	16.00	28.00	32.50
28	40.50	9.50	16.00	25.50
29	38.50	18.50	32.50	39.50
30	41.00	18.00	33.00	35.00
ค่าเฉลี่ย	38.85	15.55	30.08	36.23

ภาคผนวก จ

บทเรียนเรขาคณิต
คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์
คู่มือครู

บทเรียนเรขาคณิต

ที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

สำหรับนักเรียน

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

จัดทำโดย

นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ

สารบัญ

	หน้า
ข้อแนะนำ.....	(1)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคคิด	(7)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม ..	(11)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.2 ความเท่ากันทุกประการ	(25)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.3 เส้นขนาน	(44)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.4 รูปหลายเหลี่ยม	(58)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.5 ความคล้ายกัน	(86)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.6 วงกลม	(98)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม.....	(123)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ เกิดจากคอร์ดตัดกัน	(125)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม	(128)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม	(131)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน	(137)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.1 เซนทรอยด์	(144)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม	(153)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์	(159)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	(166)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก	(173)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี	(179)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.7 ทฤษฎีบทเมเนเลาส์ และบทกลับ	(183)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.8 ทฤษฎีบทเซวา และบทกลับ	(194)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.9 จุดเกอกอนเน	(201)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.10 เส้นออยเลอร์	(204)

บทเรียนเรขาคณิต

ข้อแนะนำ

บทเรียนเรขาคณิตนี้ เป็นบทเรียนที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ ชื่อ The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ครอบคลุมเนื้อหาความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1. ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาบังคับแกน ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. ความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาเลือกเสรี ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

3. ความรู้เพิ่มเติมทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ โดยแบ่งเป็น 3 หน่วยการเรียนรู้ ดังนี้

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด
2. ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม
3. การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน

แต่ละหน่วยการเรียนนั้นแบ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ย่อย ซึ่งแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อยจะจัดทำในรูปแบบของใบงานและมีแบบฝึกปฏิบัติปรากฏต่อจากใบงาน โดยแต่ละใบงานจะมีกิจกรรมหลายลักษณะ ตามรายละเอียดที่ปรากฏอยู่ในคำชี้แจงของแต่ละหน่วยการเรียนรู้

องค์ประกอบของบทเรียนเรขาคณิต

แต่ละหน่วยการเรียนรู้ของบทเรียนเรขาคณิต มีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

1. ชื่อหน่วยการเรียนรู้

2. หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

3. ความรู้พื้นฐาน (ถ้ามี)

4. จุดประสงค์ปลายทาง มีไว้เป็นข้อกำหนดขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่ต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ และจะใช้ในการทดสอบเพื่อวัดผลการเรียน

5. คำชี้แจง มีไว้บอกลักษณะของใบงาน หัวข้อย่อยของเนื้อหา(ถ้ามี) คำอธิบายเพิ่มเติม หรือสิ่งที่น่าสนใจที่ควรรู้เพิ่มและลักษณะของแบบฝึกปฏิบัติ

6. ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

7. หัวข้อย่อยของเนื้อหา (ถ้ามี)

8. จุดประสงค์นำทาง มีไว้เป็นข้อกำหนดขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่ต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อย ในลักษณะเป็นขั้นตอนย่อยที่ละเอียดกว่าจุดประสงค์ปลายทาง ซึ่งเมื่อนักเรียนบรรลุจุดประสงค์นำทางแล้วก็จะนำไปสู่การบรรลุจุดประสงค์ปลายทางที่เกี่ยวข้องกันในลักษณะภาพรวมในที่สุด จุดประสงค์นำทางเป็นแนวทางในการวัดผลเบื้องต้น ซึ่งครูอาจใช้การสังเกตจากการตอบคำถาม การปฏิบัติตามกิจกรรมที่กำหนด และการทำแบบฝึกปฏิบัติของนักเรียน ทั้งนี้ นักเรียนอาจจะตรวจสอบตนเองว่าผ่านแต่ละจุดประสงค์หรือไม่ โดยพิจารณาว่าตนเองสามารถทำได้ตามจุดประสงค์ที่วางไว้หรือไม่

9. ใบงาน แยกตามหน่วยการเรียนรู้ย่อย โดยในใบงานจะมีรายละเอียดดังนี้

- ชื่อใบงาน

- ชื่อหัวข้อย่อยของเนื้อหา (ถ้ามี)

- ทบทวนความรู้เดิม ซึ่งจะมีเฉพาะเนื้อหาที่มีปรากฏแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ทั้งนี้อาจจะเป็นบทนิยาม หรือทศรูปต่าง ๆ หรือ รายละเอียดของกิจกรรม ที่นักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติตาม แล้วตอบคำถามที่ระบุไว้ เพื่อนำทางให้นักเรียนค้นหากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง

- สรุป จะมีในบางใบงานที่มีกิจกรรมค่อนข้างมาก เพื่อเป็นการรวบรวมความรู้ให้เป็นหมวดหมู่ ซึ่งนักเรียนจะต้องช่วยกันสรุป โดยมีครูช่วยเสริมแต่ง

10. แบบฝึกปฏิบัติ จะแยกตามหน่วยการเรียนรู้ มีไว้ให้นักเรียนทำเพื่อฝึกทักษะ ทำให้เกิดความแม่นยำและรวดเร็ว ทั้งนี้แบบฝึกได้เรียงลำดับจากง่ายไปยาก หรือเรียงตามลำดับเนื้อหาขึ้นอยู่กับความเหมาะสม ส่วนข้อที่ใส่เครื่องหมายดอกจัน(*) เป็นข้อที่ใช้ฝึกกิจกรรมสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดา โดยใช้ GSP ช่วยในการตรวจสอบหาข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้อง ซึ่งข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นนั้นบางข้ออาจจะผิดและเมื่อตรวจสอบแล้วนักเรียนสามารถบอกได้ว่าข้อคาดเดานั้นผิด ข้อคาดเดาบางข้อที่สามารถหาเหตุผลได้ไม่ซับซ้อนนัก จะกำหนดให้นักเรียนแสดงการหาเหตุผลด้วย

11. สำคัญ มีไว้เพื่อเป็นการสรุปความรู้ของหน่วยเรียนนั้นทั้งหมด และเพื่อเตือนความทรงจำ

วิธีเรียน

ในงานส่วนใหญ่เน้นให้นักเรียนลงมือปฏิบัติเอง ฝึกฝนการสำรวจหาข้อมูลต่าง ๆ ทางเรขาคณิตและนำมาตั้งเป็นข้อคาดเดาแล้วสืบเสาะหาเหตุผล ตัวอย่างเช่น ในเรื่องของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ เราทราบมาว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อมีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ และมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ แต่เราอาจจะเกิดข้อสงสัยว่าจำเป็นด้วยหรือที่จะต้องพิจารณาครบทั้งหกคู่ ดังนั้น เราอาจจะสมมติสถานการณ์ขึ้นโดยทดลองสร้างรูปสามเหลี่ยมมากมายเพื่อเป็นการสำรวจ ผลจากการสำรวจที่หลากหลายอาจทำให้ได้ว่า ในกรณีรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการนี้ จะพิจารณาเพียงด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้าน ได้หรือไม่ ซึ่งเป็นการตั้งข้อคาดเดาขึ้น จากนั้นเราจึงสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดานั้นมีได้หลายวิธี อาทิ การเขียนรูปให้ครบทุกสถานการณ์เพื่อสำรวจทุกกรณีที่เป็นไปได้ ซึ่งวิธีนี้ค่อนข้างทำได้ยาก เหมาะสำหรับกรณีที่พบตัวอย่างที่ไม่เป็นไปตามข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ นั่นคือสรุปได้ทันทีว่าข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นนั้นผิด ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่า การหาตัวอย่างค้าน หรือตรวจสอบโดยอาศัยบทนิยามและการพิสูจน์ ทั้งนี้บทเรียนเรขาคณิตนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนรู้จักตั้งข้อคาดเดาที่เป็นไปได้ ฝึกฝนให้เป็นคนช่างสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างส่วน

ต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตเดียวกันและต่างรูปกัน แล้วรวบรวมมาตั้งเป็นข้อาคัดเดา ซึ่งเป็นพฤติกรรมที่จำเป็นมากที่มนุษย์มักจะใช้ในชีวิตประจำวันเสมอ เพราะการทำงานสิ่งใดเราจะต้องรู้จักการสำรวจเพื่อเก็บข้อมูลต่าง ๆ จากนั้นนำมาตั้งเป็นข้อาคัดเดาว่า จะทำสิ่งนั้น สิ่งนี้ ได้หรือไม่ แล้วลงมือปฏิบัติสืบเสาะ หาเหตุผลมาตรวจสอบ เพื่อพิสูจน์หรือแสดงว่า ข้อาคัดเดานั้นจะเป็นไปได้หรือไม่

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นการทบทวนความรู้ส่วนใหญ่หรือทั้งหมดที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และเป็นการตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ต่าง ๆ เพื่อให้เข้าใจตรงกัน (ในส่วนของเนื้อหาเกี่ยวกับการสร้างที่เป็นพื้นฐานของการสร้างในเรขาคณิต ได้นำไปให้นักเรียนได้ศึกษามาก่อนแล้วในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP)) แต่เนื่องจากเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เป็นเนื้อหาส่วนใหญ่หรือทั้งหมดที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว รายละเอียดในใบงานจึงเน้นการทบทวนเนื้อหา และฝึกกิจกรรมสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดานั้น ซึ่งเป็นรูปแบบของวิธีเรียนแบบใหม่ที่นักเรียนอาจจะยังไม่คุ้นเคย ดังนั้นในช่วงแรก ๆ จะมีคำสั่งให้นักเรียนปฏิบัติตามและมีคำถามนำ เมื่อนักเรียนตอบคำถามตามมาเป็นลำดับขั้น จะเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักการสำรวจอย่างมีความหมาย ส่วนการตั้งข้อาคัดเดาก็จะมีข้อความขึ้นต้นมาให้แล้วมีข้อความในวงเล็บมาให้เลือก โดยนักเรียนจะต้องพิจารณาจากกิจกรรมสำรวจในช่วงต้นก่อนมาถึงข้อาคัดเดา เพื่อเป็นแนวทางในการเติมข้อความและฝึกการตั้งข้อาคัดเดา ข้อาคัดเดาบางข้อเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัดเมื่อผ่านกิจกรรมสำรวจ ไม่จำเป็นต้องสืบเสาะหาเหตุผลอีก แต่ในบางข้อก็จะมีคำถามนำเพื่อให้นักเรียนสืบเสาะหาเหตุผลมาตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งขึ้น

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2-3 เป็นความรู้ใหม่ที่ไม่ปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ใบงานส่วนใหญ่ของหน่วยการเรียนรู้เหล่านี้ นักเรียนจะต้องทำการสำรวจและตั้งข้อาคัดเดาโดยมีข้อความในวงเล็บมาให้เลือก แต่การสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อการตรวจสอบข้อาคัดเดาก็จะเริ่มมีปรากฏมากขึ้น โจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติบางข้อจะเป็นโจทย์ที่สลับซับซ้อนมากขึ้น มีการกำหนดสถานการณ์แล้วให้นักเรียนหาค่าหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ

ในใบงานส่วนใหญ่ จะเน้นให้นักเรียนใช้ GSP มาช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตต่าง ๆ แล้วสำรวจข้อมูลต่าง ๆ จากรูปที่สร้างขึ้นเพราะ GSP เป็นซอฟต์แวร์ที่เหมาะสมกับการสร้างรูปเคลื่อนไหว และตอบสนองต่อผู้ใช้อย่างรวดเร็ว ตัวอย่างเช่น เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมแล้วเราต้องการรูปสามเหลี่ยมหลายๆแบบ ถ้าสร้างด้วยมือและดินสอจะค่อนข้างช้า ทำให้ผู้สร้างเกิดความเบื่อหน่ายแต่เมื่อใช้ GSP ช่วยสร้าง เราสามารถโยกรูปได้หลากหลายอย่างรวดเร็วและผลที่ได้จากการวัดค่าต่าง ๆ ก็จะเปลี่ยนไปตามรูปที่เปลี่ยนแปลงด้วย และรูปที่ได้มีความผิดพลาดจากการวัดต่าง ๆ น้อยมากเมื่อเทียบกับการสร้างด้วยมือและดินสอบนกระดาษที่เราเคยปฏิบัติกันมา ดังนั้นนักเรียนที่มาใช้บทเรียนนี้จะต้องสามารถใช้ GSP ได้ และเมื่อเรียนจบในแต่ละหน่วยการเรียนรู้แล้ว นักเรียนจะต้องพัฒนาความสามารถในการใช้ GSP เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เพราะ โจทย์บางข้อ นักเรียนอาจต้องใช้การสำรวจโดย GSP เพื่อตั้งข้อคาดเดาที่ควรจะเป็น แล้วจึงสืบเสาะหาเหตุผล โจทย์บางข้อที่มีปัญหาซับซ้อน นักเรียนควรอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่มเพื่อให้ได้วิธีที่เหมาะสม และเมื่อทำโจทย์เสร็จแล้วควรสังเกต หรือเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับเพื่อนในกลุ่ม ถ้ามีข้อแตกต่างควรอภิปรายร่วมกันเพื่อให้ได้ข้อสรุป โจทย์บางข้อที่มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน อาจจะเลือกทำเป็นบางข้อ ซึ่งผู้สอนจะเป็นผู้กำหนดให้ตามความสามารถของนักเรียน และหากมีปัญหาสงสัยประการใดเกี่ยวกับใบงานหรือโจทย์ต่าง ๆ ให้ปรึกษาผู้สอนทันที

ทั้งนี้เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้วนักเรียนควรมีความรู้ทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการเรียนทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ และมีความสามารถในการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดาและ สืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้น

ข้อตกลง

ข้อตกลงเกี่ยวกับโจทย์ในแบบฝึกปฏิบัติ มีดังนี้

1. ในการบอกความยาวที่ปรากฏในแบบฝึกปฏิบัตินั้น ตัวเลขที่กำกับระยะมีหน่วยเป็น หน่วยความยาว ยกเว้นแต่จะกำหนดเป็นอย่างอื่น สำหรับตัวอักษรที่กำกับระยะมีหน่วยเป็นหน่วย ความยาว ยกเว้นแต่จะกำหนดเป็นอย่างอื่น

2. ตัวเลขที่ปรากฏในระหว่างมุมและมีเครื่องหมายองศา ($^{\circ}$) กำกับ เป็นขนาดของมุม มี หน่วยเป็นองศา ในขณะที่ตัวเลขที่ปรากฏในระหว่างมุมโดยไม่มีเครื่องหมายองศากำกับจะแทนชื่อมุม สำหรับตัวอักษรที่ปรากฏในระหว่างมุม เป็นขนาดของมุม มีหน่วยเป็นองศา

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด

หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

- 1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม
- 1.2 ความเท่ากันทุกประการ
- 1.3 เส้นขนาน
- 1.4 รูปหลายเหลี่ยม
- 1.5 ความคล้ายกัน
- 1.6 วงกลม

ความรู้พื้นฐาน

จุดประสงค์ปลายทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. นำสมบัติของจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม ไปใช้
2. บอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
3. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการและนำเงื่อนไขนี้ไปใช้
4. บอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกัน
5. บอกได้ว่ามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศาหรือสองมุมฉาก และนำสมบัตินี้ไปใช้
6. นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับไปใช้

7. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมยาว รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ไปใช้
8. นำสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้
9. บอกได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน และนำสมบัตินี้ไปใช้
10. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน และนำเงื่อนไขนี้ไปใช้
11. บอกสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับวงกลม และนำสมบัติเหล่านี้ไปใช้
12. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากับ 180 องศาและบทกลับ พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้

คำชี้แจง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบยยุคคิด ประกอบด้วย 6 หน่วยการเรียนรู้ย่อย ตามหัวข้อข้างต้นในหน่วยการเรียนรู้นี้ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย นำเสนอเนื้อหาในรูปแบบของใบงาน และแบบฝึกปฏิบัติ ดังนี้

ใบงาน 1.1 เป็นการสรุปความรู้เกี่ยวกับ จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม และเป็น การตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ต่าง ๆ เพื่อให้เข้าใจและใช้ตรงกัน ประกอบด้วย 4 หัวข้อย่อย ดังนี้

- 1.1.1 จุด เส้นตรง และระนาบ
- 1.1.2 ส่วนของเส้นตรงและรังสี
- 1.1.3 มุมและการวัดมุม
- 1.1.4 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรงและมุม

แบบฝึกปฏิบัติ 1.1 เป็นโจทย์ให้นักเรียนทำเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

ใบงาน 1.2 เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการ ซึ่งกิจกรรมในแต่ละใบงานจะประกอบด้วย การสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาข้อสรุป โดยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งและตอบคำถามในใบงาน ใบงานนี้ประกอบด้วย 5 หัวข้อย่อย ดังนี้

- 1.2.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
- 1.2.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
- 1.2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
- 1.2.4 สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- 1.2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

แบบฝึกปฏิบัติ 1.2 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้

ใบงาน 1.3 เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับเส้นขนาน ซึ่งกิจกรรมในใบงานประกอบด้วย การสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ตามความเหมาะสม โดยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งและตอบคำถามตามใบงาน ใบงานนี้ประกอบด้วย 7 หัวข้อย่อย ดังนี้

- 1.3.1 เส้นขนาน
- 1.3.2 เส้นขนานและมุมภายใน
- 1.3.3 เส้นขนานและมุมแย้ง
- 1.3.4 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน
- 1.3.5 ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
- 1.3.6 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน
- 1.3.7 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

แบบฝึกปฏิบัติ 1.3 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้

ใบงาน 1.4 เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับรูปหลายเหลี่ยม ซึ่งกิจกรรมในใบงานประกอบด้วย การสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ตามความเหมาะสม โดยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งและตอบคำถามตามใบงาน ใบงานนี้ประกอบด้วย 9 หัวข้อย่อย ดังนี้

- 1.4.1 รูปหลายเหลี่ยมและการจำแนกรูปหลายเหลี่ยม
- 1.4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- 1.4.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- 1.4.4 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 1.4.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
- 1.4.6 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- 1.4.7 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- 1.4.8 รูปสี่เหลี่ยมยาว
- 1.4.9 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

แบบฝึกปฏิบัติ 1.4 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

ใบงาน 1.5 เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับความคล้ายกัน ซึ่งกิจกรรมในใบงานประกอบด้วย การสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ตามความเหมาะสม โดยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งและตอบคำถามตามใบงาน ใบงานนี้ประกอบด้วย 2 หัวข้อย่อย ดังนี้

- 1.5.1 รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน
- 1.5.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

แบบฝึกปฏิบัติ 1.5 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

ใบงาน 1.6 เป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับวงกลม ซึ่งกิจกรรมในใบงานประกอบด้วย การสำรวจ
ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้ตามความเหมาะสม โดยให้
นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งและตอบคำถามตามใบงาน ใบงานนี้ประกอบด้วย 2 หัวข้อย่อย ดังนี้

1.6.1 ความหมายของวงกลม สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม และวงกลมที่เท่ากัน

1.6.2 สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

แบบฝึกปฏิบัติ 1.6 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1

เรื่อง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสีและมุม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

- 1.1.1 จุด เส้นตรง และระนาบ
- 1.1.2 ส่วนของเส้นตรงและรังสี
- 1.1.3 มุมและการวัดมุม
- 1.1.4 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรงและมุม

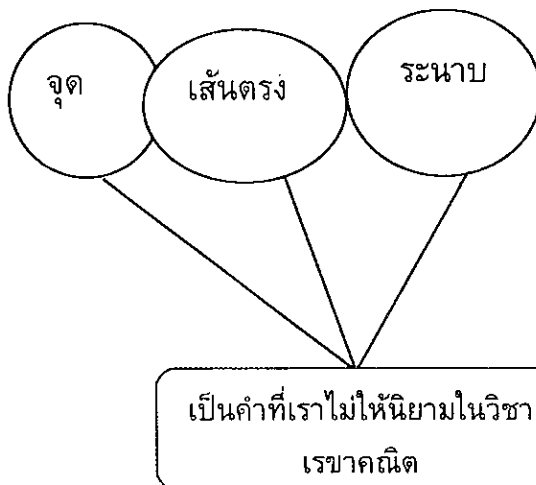
จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกสมบัติของจุด เส้นตรง และระนาบ
2. ใช้จุดและเส้นตรงในการให้บทนิยาม รูปเรขาคณิตพื้นฐาน เช่น ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม
3. เขียนสัญลักษณ์แทนจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม
4. จำแนกมุมโดยอาศัยขนาดของมุม และการวัดมุม
5. บอกได้ว่ารูปสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด
6. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการเมื่อใด
7. บอกได้ว่ามุมสองมุมเท่ากันทุกประการเมื่อใด

ใบงาน 1.1

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม ซึ่งประกอบด้วย 4 หัวข้อย่อย

1.1.1 จุด เส้นตรง และระนาบ



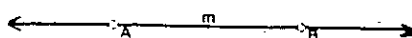
สมบัติเกี่ยวกับจุด เราใช้จุด สำหรับบอกตำแหน่ง โดยไม่คำนึงถึง ความยาว ความกว้าง และความหนาของจุด



สมบัติเกี่ยวกับเส้นตรง เรากล่าวถึงเส้นตรงโดยไม่คำนึงถึงความกว้างและความหนาของเส้นตรง เส้นตรงสามารถต่อออกไปได้ทั้งสองทิศทางโดยไม่มีที่สิ้นสุด

รูปหรือสัญลักษณ์แทนเส้นตรง

มีลักษณะเป็นเส้นมีลักษณะตรงมีหัวลูกศรทั้งสองข้าง กำหนดชื่อโดยใช้ ตัวอักษรเป็นตัวเขียนเล็กในภาษาอังกฤษ เช่น l, m, n, แทน ดังตัวอย่างข้างล่างนี้ เรียกว่าเส้นตรง m



ถ้าเรารู้ว่าเส้นตรง m ผ่านจุด 2 จุด คือ จุด A และ B

เราจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เส้นตรง AB หรือ เส้นตรง BA อาจเขียนแทนด้วย $\overleftrightarrow{AB}$ หรือ $\overleftrightarrow{BA}$

สมบัติเกี่ยวกับระนาบ

เราใช้ระนาบสำหรับบอกริเวณโดยไม่คำนึงถึงความหนาของระนาบ และระนาบสามารถต่อออกไปได้ทุกทิศทางอย่างไม่สิ้นสุด ตัวอย่างที่เป็นส่วนหนึ่งของระนาบ เช่น พื้นห้อง ฝาผนัง แผ่นกระดาษ

รูปหรือสัญลักษณ์แทนระนาบ

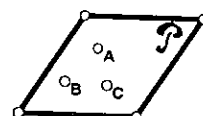
เรานิยมใช้รูปสี่เหลี่ยมแทนระนาบ

กำหนดชื่อโดยใช้ตัวอักษรเป็นตัวเขียนใหญ่ในภาษาอังกฤษ

เช่น $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, ... แทน

ดังตัวอย่างข้างขวานี้ เรียกว่า ระนาบ $\mathcal{P}$

ถ้าเรารู้ว่าระนาบผ่านจุด 3 จุด ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน คือ จุด A จุด B และจุด C เราจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ระนาบ ABC



เราใช้คำทั้งสามคำข้างต้น เพื่อใช้นิยามคำอื่น ๆ ต่อไป

บทนิยาม

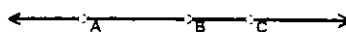
ตัวอย่าง

จุดร่วมเส้นตรง

(Collinear Points)

คือ จุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



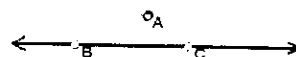
ดังนั้น จุด A, B และ C เป็นจุดร่วมเส้นตรง

จุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง

(Noncollinear Points)

คือ จุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จุด A, B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



ดังนั้น จุด A, B และ C เป็นจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง

รูปเรขาคณิตสองรูปตัดกัน

- เส้นตรงสองเส้นตัดกัน

(Intersecting Lines)

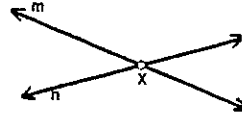
คือ เส้นตรงสองเส้นที่มีจุดร่วมกัน

- ระนาบสองระนาบตัดกัน

(Intersecting Planes)

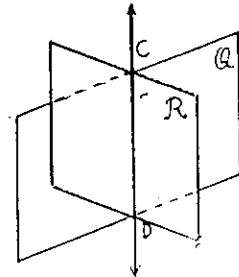
คือ ระนาบสองระนาบที่มีเส้นตรงร่วมกัน

เส้นตรง m และ n มีจุด X ร่วมกัน



ดังนั้น เส้นตรง m และ n ตัดกัน

ระนาบ $\mathcal{Q}$ และ $\mathcal{R}$ มี เส้นตรง CD ร่วมกัน



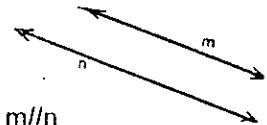
ดังนั้น ระนาบ $\mathcal{Q}$ และ $\mathcal{R}$ ตัดกัน

เส้นตรงสองเส้นขนานกัน

(Parallel Lines)

คือ เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกันและไม่ตัดกัน

เส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n



อาจเขียนแทนด้วย $m \parallel n$

หมายเหตุ ลูกศร ไม่ใช่ส่วนหนึ่งของเส้นตรง หรือ รังสี เราเขียนประกอบเพื่อบอกให้รู้ว่ามีส่วนต่อไปในทางใด เช่นเดียวกับการใช้เครื่องหมายจากรบอทาง (ทั้งนี้ใน GSP หัวลูกศรจะไม่มีปรากฏให้เห็นบนหน้าจอ)

สมบัติ

1. จุดจุดหนึ่งสามารถลากเส้นตรงผ่านได้มากมายนับไม่ถ้วน
2. เส้นตรงเส้นหนึ่งประกอบด้วยจุดที่ต่างกันอย่างน้อยสองจุด
3. ระนาบระนาบหนึ่ง ประกอบด้วยจุดที่ต่างกันอย่างน้อยสามจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง
4. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้น ที่ลากผ่านจุดที่ต่างกันสองจุดที่กำหนดให้
5. มีระนาบ เพียงระนาบเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดที่ต่างกันสามจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง

1.1.2 ส่วนของเส้นตรง และรังสี

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรง (Segment)
คือ ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด



ส่วนของเส้นตรง AB อาจเขียนแทนด้วย $\overline{AB}$
หรือ ส่วนของเส้นตรง BA อาจเขียนแทนด้วย $\overline{BA}$
($\overline{AB}$ และ $\overline{BA}$ เป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน)

ข้อตกลง

ความยาวของส่วนของเส้นตรง PQ อาจเขียนแทนด้วย $m\overline{PQ}$ หรือ PQ
ทั้งนี้ $\overline{PQ}$ ไม่ใช่จำนวน

แต่ $m\overline{PQ}$ หรือ PQ เป็นจำนวนซึ่งนำมาบวกลบ คูณและหารกันได้

(ทั้งนี้ใน GSP เมื่อต้องการวัดระยะความยาว $\overline{PQ}$ สามารถทำได้ 2 กรณี

1. เลือกจุด P และ Q แล้วจะได้ความยาวของ $\overline{PQ}$ เขียนแทนด้วย PQ
2. เลือก $\overline{PQ}$ แล้วจะได้ความยาวของ $\overline{PQ}$ เขียนแทนด้วย $m\overline{PQ}$)

บทนิยาม รังสี (Ray)
คือ ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายเพียงจุดเดียว



รังสี AB อาจเขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$
แต่เขียนด้วย $\overrightarrow{BA}$ ไม่ได้
เพราะ $\overrightarrow{AB}$ มี A เป็นจุดปลาย
แต่ $\overrightarrow{BA}$ มี B เป็นจุดปลาย
นั่นคือ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{BA}$ ไม่ใช่รังสีเดียวกัน
เราเรียกว่า $\overrightarrow{BA}$ ว่าเป็นรังสีตรงข้ามของ $\overrightarrow{AB}$

1.1.3 มุมและการวัดมุม

บทนิยาม มุม (Angle) คือ รั้งสี่สองเส้นที่มีจุดปลายร่วมกัน
เรียกรั้งสี่สองเส้นนี้ว่า แขนของมุม เรียกจุดปลายร่วมกันว่า จุดยอดมุม

ข้อตกลง

1. มุม BAC อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\angle BAC$ โดยมี $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ เป็นแขนของ $\angle BAC$
มุม BAC อาจเรียกว่ามุม CAB อาจเขียนแทนด้วย $\angle CAB$
ทั้งนี้การเขียนชื่อมุมจะต้องเขียนจุดยอดมุมไว้ตรงกลางเสมอ
ดังเช่น A เป็นจุดยอดมุมของ $\angle CAB$ หรือ $\angle BAC$

2. ปกติเรามักเขียนชื่อมุมโดยใช้ตัวอักษรสามตัวเพื่อป้องกันความสับสน
เช่น ตามรูป ถ้าถามว่ามุม A คือมุมใดจะตอบไม่ได้แน่ชัดว่าคือมุมใด
อาจเป็น $\angle BAC$, $\angle CAD$ หรือ $\angle BAD$

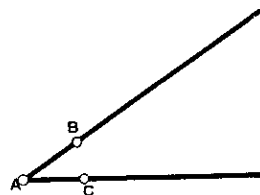
อย่างไรก็ตาม เมื่อแน่ใจว่าไม่มีความสับสนในการเขียนแสดงว่าเป็นมุมใด
เช่น ตามรูป $\angle DEF$ ก็อาจเขียนเพียง $\angle E$ ก็ได้

ในบางกรณีเพื่อความสะดวกมีการสมมติตัวเลขแทนชื่อมุม
เช่น ตามรูป $\angle BAC$ ก็อาจเขียนเพียง $\angle 1$

ในทางปฏิบัติอาจเขียนรูปแทนมุม
โดยใช้ส่วนของเส้นตรงแทนแขนของมุมได้
เช่น ตามรูป



ซึ่งหมายถึงรูป

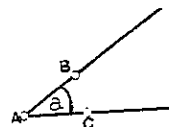


3. ขนาดของมุม ABC อาจเขียนแทนด้วย $m\angle ABC$

ขนาดของมุม E อาจเขียนแทนด้วย $m\angle E$

ขนาดของมุม 1 อาจเขียนแทนด้วย $m\angle 1$

ในบางกรณีเพื่อความสะดวก มีการสมมติตัวอักษรแทนขนาดของมุม
เช่น ตามรูป $m\angle BAC = a$ องศา



การวัดมุม

ปกติเราจะวัดขนาดของมุม โดยใช้หน่วยที่เรียกว่า องศา (degree) เขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย "°"
ตามรูป แสดงถึง มุมที่มีขนาดเท่ากับ 1 องศา

$$m\angle RST = 1 \text{ องศา}$$

S

T
R

โปรแทรกเตอร์ ที่มีรอยขีดแสดงหน่วยองศา สามารถใช้ในการหาขนาดของมุมได้

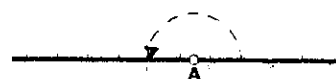
การจำแนกมุม

เราสามารถจำแนกมุม โดยอาศัยขนาดของมุมดังนี้

มุมรอบจุด เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับ 360 องศา



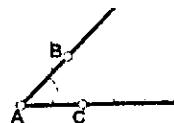
มุมตรง เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับ 180 องศา



มุมฉาก เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากับ 90 องศา



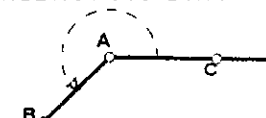
มุมแหลม เป็นมุมที่มีขนาดมากกว่า 0 องศา แต่น้อยกว่า 90 องศา



มุมป้าน เป็นมุมที่มีขนาดมากกว่า 90 องศา แต่น้อยกว่า 180 องศา



มุมกลับ เป็นมุมที่มีขนาดมากกว่า 180 องศา แต่น้อยกว่า 360 องศา



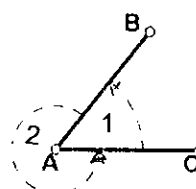
ข้อตกลงเพิ่มเติมเกี่ยวกับมุม

รูปมุมแต่ละรูปจะแสดงมุมสองมุม

คือ $\angle 1$ และ $\angle 2$ ดังนี้

โดยทั่วไปมุม BAC หมายถึง $\angle 1$

และมุมกลับ BAC หมายถึง $\angle 2$



สมบัติของมุมตรงข้าม

เปิดไฟล์ Less1-3.gsp

จากรูป เส้นตรง m และ n ตัดกัน

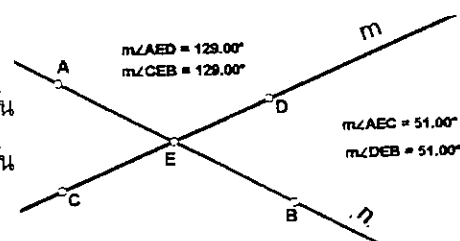
$\angle AED$ และ $\angle CEB$ เรียกว่า เป็นมุมตรงข้ามกัน

$\angle AEC$ และ $\angle DEB$ เรียกว่า เป็นมุมตรงข้ามกัน

คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C หรือ D โยกรูป

จะได้ว่า $m\angle AED = m\angle CEB$ และ $m\angle AEC = m\angle DEB$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้ว มุมตรงข้ามจะมีขนาด (เท่ากันหรือไม่)



1.1.4 ความเท่ากันทุกประการของ ส่วนของเส้นตรง และ มุม

บทนิยาม

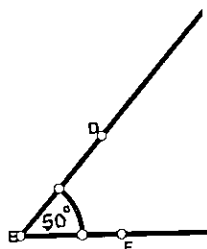
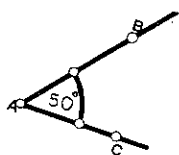
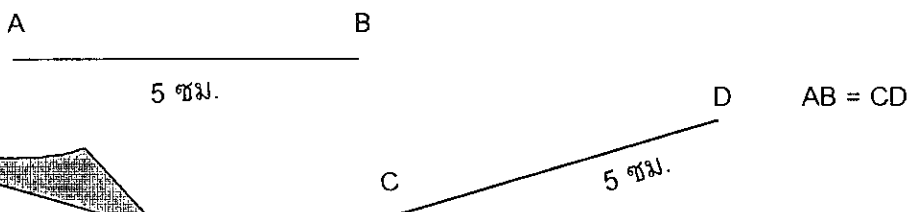
รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

สัญลักษณ์แทนรูป A และ รูป B เท่ากันทุกประการ

อาจเขียนแทนด้วย รูป $A \cong$ รูป B

(อ่านว่า รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B)

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นมีความยาวเท่ากัน



$$m\angle A = m\angle E$$

มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน โดยไม่คำนึงถึงความยาวของแขนของมุม

แบบฝึกปฏิบัติ 1.1 จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และ มุม

1. จากเส้นตรงตามรูป 1 ให้ออกชื่อที่ต่างกันของเส้นตรง มา 5 ชื่อ

.....



รูป 1

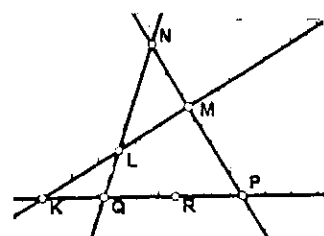
2. จากรูป 2 จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 2.1 ให้ออกชื่อของจุด 3 จุด ที่เป็นจุดร่วมเส้นตรงมา 2 ชุด

.....

- 2.2 ให้ออกชื่อของจุด 3 จุด ที่เป็นจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงมา 2 ชุด

.....



รูป 2

3. จากรูป 3 จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 3.1 ให้ออกชื่อของจุด 4 จุดที่อยู่บนระนาบเดียวกัน มา 2 ชุด

.....

- 3.2 ให้ออกชื่อของจุด 4 จุดที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน มา 2 ชุด

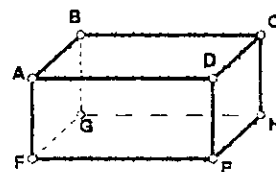
.....

- 3.3 ให้ออกชื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน มา 2 ชุด

.....

- 3.4 ให้ออกชื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน มา 2 ชุด

.....



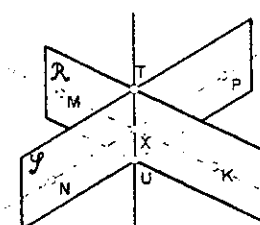
รูป 3

4. จากรูป 4 จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 4.1 $\overrightarrow{MK}$ และ $\overrightarrow{NP}$ ตัดกันที่จุดใด.....

- 4.2 ระนาบ $\mathcal{Y}$ และระนาบ $\mathcal{R}$ ตัดกันที่เส้นตรงใด.....

- 4.3 เส้นตรงใดที่ตัดระนาบ $\mathcal{Y}$ เพียงจุดเดียว.....



รูป 4

5. เมื่อกำหนดเส้นตรง 4 เส้น ที่อยู่บนระนาบเดียวกันมาให้ สามารถเขียนให้ตัดกันเพื่อให้ได้จำนวนของจุดตัดดังที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ได้หรือไม่ ถ้าได้ จงเขียนรูปแสดงตามลักษณะดังกล่าว

5.1 1 จุด

5.4 4 จุด

5.2 2 จุด

5.5 5 จุด

5.3 3 จุด

5.6 6 จุด

6. ให้ $AB = 7$ หน่วย $CD = 7$ หน่วย และ $EF = 5$ หน่วย แล้วข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

6.1 $AB = CD$

6.2 $\overline{AB} = \overline{CD}$

6.3 $AB = BA$

6.4 $\overline{AB} = \overline{BA}$

6.5 $AB = EF$

7. จากรูป 5 จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 ให้บอกชื่อจุดปลายของ $\overrightarrow{QD}$

7.2 ให้บอกชื่อจุดยอดมุมของ $\angle BQC$

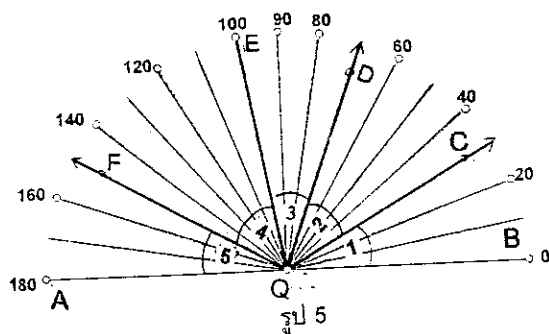
7.3 ให้บอกชื่อมุมที่เป็นมุมเดียวกับ $\angle BQC$ มาอีก 2 ชื่อ

7.4 $m\angle BQD =$

7.5 $m\angle 1 + m\angle 2 =$

7.6 ให้บอกชื่อมุมแหลม มา 4 มุม

7.7 ให้บอกชื่อมุมป้าน มา 4 มุม

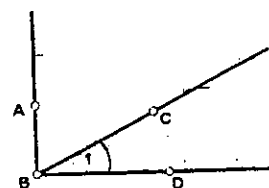


8. จงหาขนาดของมุม ABC ของรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 จากรูป 6

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BD}$$

$$\text{และ } m\angle 1 = 27^\circ$$

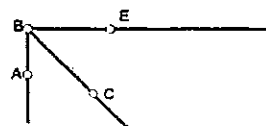


รูป 6

8.2 จากรูป 7

$$\overrightarrow{BC} \text{ แบ่งครึ่ง } \angle ABE$$

$$\text{และ } \overline{AB} \perp \overline{BE}$$



รูป 7

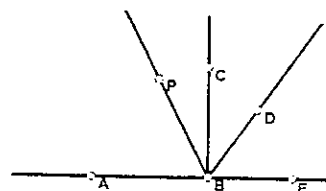
8.3 จากรูป 8

$$\text{ถ้า } m\angle PBD = m\angle DBE$$

$$m\angle PBC = 3x \text{ องศา}$$

$$m\angle CBD = 3x + 9 \text{ องศา}$$

$$\text{และ } m\angle PBD = 7x \text{ องศา}$$



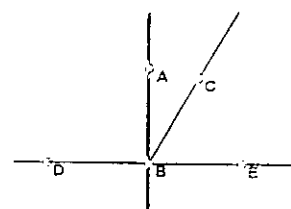
รูป 8

8.4 จากรูป 9

$$\overline{AB} \perp \overline{DE}$$

$$m\angle ABC = x \text{ องศา}$$

$$\text{และ } m\angle ABD = 5(x-12) \text{ องศา}$$



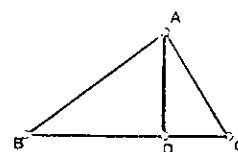
รูป 9

8.5 จากรูป 10

$$\overline{AD} \perp \overline{BC}$$

$$m\angle ABD = 12n \text{ องศา}$$

$$\text{และ } m\angle ADB = n^2 + 81 \text{ องศา}$$



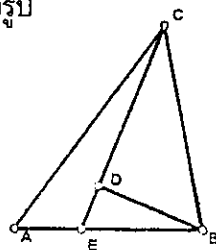
รูป 10

โจทย์

* 9. สร้าง $\triangle ABC$ กำหนดจุด E บน $\overline{AB}$ ลาก $\overline{CE}$

สถานการณ์

9.1 ถ้า $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ ที่จุด D ดังรูป



ตั้งข้อคาดเดา

หนูพิมพ์ ตั้งข้อคาดเดาว่า " $BD > DE$ "

ตรวจสอบ

นักเรียนช่วยหนูพิมพ์ตรวจสอบด้วยว่า ข้อคาดเดาดังกล่าวน่าจะถูกต้องหรือไม่

.....

สถานการณ์

9.2 ถ้า $AC > AB$

ตั้งข้อคาดเดา

หนูพิมพ์ตั้งข้อคาดเดาว่า " $m\angle BCA > m\angle CBA$ "

ตรวจสอบ

นักเรียนช่วยหนูพิมพ์ตรวจสอบด้วยว่า ข้อคาดเดาดังกล่าวน่าจะถูกต้องหรือไม่

.....

สถานการณ์

9.3 ถ้าจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

และ $m\angle CEA > m\angle CEB$

ตั้งข้อคาดเดา

หนูพิมพ์ตั้งข้อคาดเดาว่า " $AC > BC$ "

ตรวจสอบ

นักเรียนช่วยหนูพิมพ์ตรวจสอบด้วยว่า ข้อคาดเดาดังกล่าวน่าจะถูกต้องหรือไม่

.....

โจทย์

*10. สร้าง $\angle ABC$

กำหนดจุด X บน $\overline{AB}$ สร้าง $\overline{DX} \perp \overline{AB}$

กำหนดจุด Y บน $\overline{BC}$ สร้าง $\overline{FY} \perp \overline{BC}$

กำหนดจุด E เป็นจุดตัดระหว่าง $\overline{DX}$ และ $\overline{FY}$

สำรวจ

มีมุมคูใดที่มีขนาดเท่ากัน

.....

.....

.....

.....

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\angle ABC$ และ $\angle DEF$

.....

.....

.....

.....

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า
ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้าง
ที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....

.....

.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2

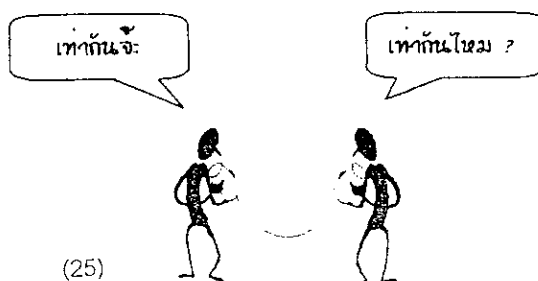
เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

- 1.2.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
- 1.2.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
- 1.2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
- 1.2.4 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- 1.2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
2. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ และนำสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม จะเท่ากันทุกประการ และนำสมบัตินี้ไปใช้
4. บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้
 - 4.1 มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
 - 4.2 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดย่อมาตั้งฉากกับฐานและแบ่งครึ่งฐาน
 - 4.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด เส้นมัธยฐาน และส่วนสูงเป็นเส้นเดียวกัน
 - 4.4 เส้นมัธยฐาน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด และส่วนสูงย่อมาแบ่งครึ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
5. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ และนำสมบัตินี้ไปใช้



ใบงาน 1.2

เนื้อหาในใบงานนี้กล่าวถึง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป ซึ่งประกอบด้วย 5 หัวข้อย่อย

1.2.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

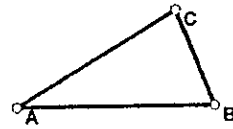
ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง และ ความเท่ากันทุกประการของมุมสองมุม

ได้กล่าวไว้แล้วในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1.1 ดังนี้
ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นมีความยาวเท่ากัน
มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

เราให้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมดังนี้

บทนิยาม

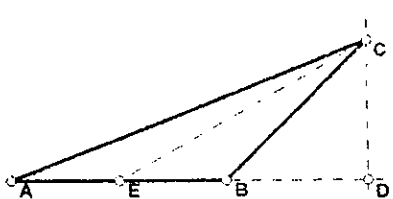
รูปสามเหลี่ยม ABC คือรูปที่ประกอบด้วย ส่วนของเส้นตรงสามเส้นคือ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A, B และ C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A, B และ C ว่า จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และเรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า ด้านของรูปสามเหลี่ยม



ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่ง มาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามหรือฐานของรูปสามเหลี่ยม (หรือส่วนที่ต่อออกไปของด้านตรงข้าม) จะเรียกว่า ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่ง มาแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม จะเรียกว่า เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม

จากรูป



$\overline{CD}$ เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC
 ที่ลากจากจุดยอด C มาตั้งฉากกับส่วนที่ต่อออกไปของฐาน AB
 $\overline{CE}$ เป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC
 ที่ลากจากจุดยอด C มาแบ่งครึ่งฐาน AB

รูปสามเหลี่ยม ABC อาจเขียนแทนด้วย $\triangle ABC$

จากบทนิยามของรูปสองรูปเท่ากันทุกประการ

รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

ดังนั้น

เรากล่าวว่า ถ้า รูปสามเหลี่ยมสองรูปทับกันได้สนิท

แล้ว รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นจะเท่ากันทุกประการ

และ ถ้า รูปสามเหลี่ยมสองรูป เท่ากันทุกประการ

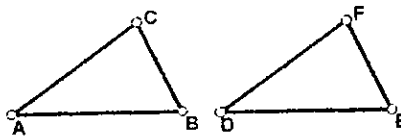
แล้ว รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้น จะทับกันได้สนิท

พิจารณา ถ้า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ เมื่อ นักเรียนใช้กระดาษลอกลาย ลอก $\triangle ABC$ แล้วเลื่อนรูป พลิกรูป หรือหมุนรูป จะพบว่าสามารถนำรูปดังกล่าวไปวางทับ $\triangle DEF$ ได้สนิท

โดยที่ จุดยอด A ทับจุดยอด D

จุดยอด B ทับจุดยอด E

และ จุดยอด C ทับจุดยอด F



เรากล่าวว่า จุดยอดแต่ละคู่สมนัยกัน เขียนเป็นสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

$A \leftrightarrow D$

$B \leftrightarrow E$

และ $C \leftrightarrow F$

สัญลักษณ์

$\leftrightarrow$ แทนการสมนัย

$A \leftrightarrow D$ อ่านว่า A สมนัยกับ D

ส่วนด้านที่ทับกันได้สนิท ได้แก่ $\overline{AB}$ กับ $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ กับ $\overline{EF}$ และ $\overline{AC}$ กับ $\overline{DF}$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$AB = DE$ หรือ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$BC = EF$ หรือ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

และ $AC = DF$ หรือ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

หรือกล่าวได้ว่า $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$

$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$

$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$

และมุมที่ทับกันได้สนิท ได้แก่

$\angle A$ กับ $\angle D$, $\angle B$ กับ $\angle E$ และ $\angle C$ กับ $\angle F$

ซึ่ง ทำให้ได้ว่า $\angle A \cong \angle D$

$\angle B \cong \angle E$

และ $\angle C \cong \angle F$

หรือกล่าวได้ว่า $\angle A \leftrightarrow \angle D$

$\angle B \leftrightarrow \angle E$

$\angle C \leftrightarrow \angle F$

นั่นคือ

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน เป็นคู่ ๆ กล่าวคือมีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

ในทางกลับกัน

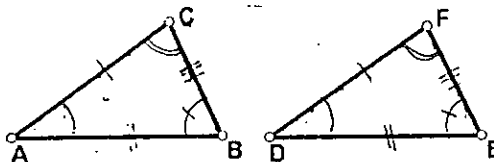
เมื่อมีรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม นักเรียนคิดว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด

ข้อควรสังเกต

การเขียนสัญลักษณ์ แทนรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ มักนิยมเขียนตัวอักษร ตามลำดับของมุม และด้านที่สมนัยกัน

ดังนั้น จากรูป จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

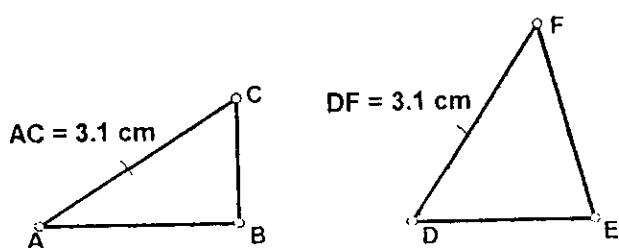
โดยที่ $\angle A \cong \angle D$ และ $BC = EF$
 $\angle B \cong \angle E$ $CA = FD$
 $\angle C \cong \angle F$ $AB = DE$



การพิจารณาความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป เมื่อโจทย์ไม่ได้กำหนดความยาวของด้านเท่ากันครบสามคู่ และขนาดของมุมเท่ากันครบสามคู่ ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปพิจารณาได้จากหลายกรณี ดังนี้

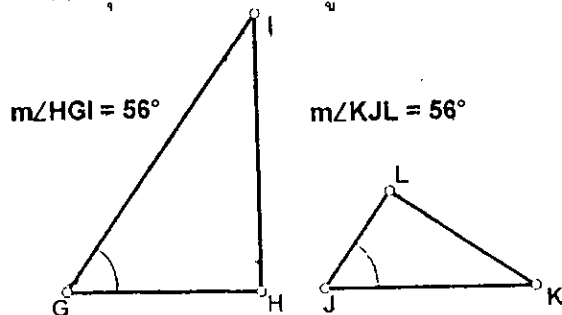
1. พิจารณาเพียง 1 อย่าง มี 2 แบบ ดังนี้

1.1 ด้านยาวเท่ากัน 1 คู่ เช่น



จากรูป $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการหรือไม่

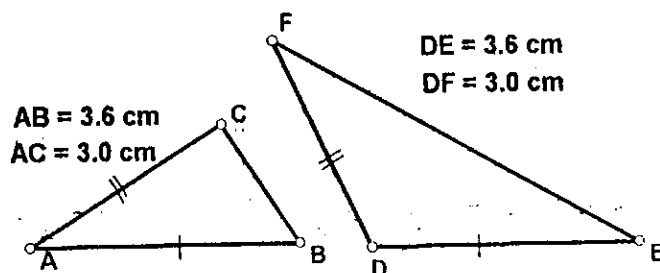
1.2 มุมมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เช่น



จากรูป $\triangle GHI$ และ $\triangle JKL$ เท่ากันทุกประการหรือไม่

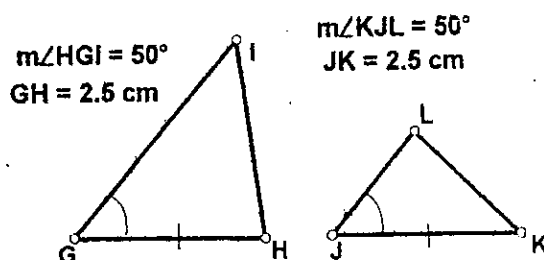
2. พิจารณา 2 อย่างมี 3 แบบ ดังนี้

2.1 ด้านยาวเท่ากันสองคู่ เช่น



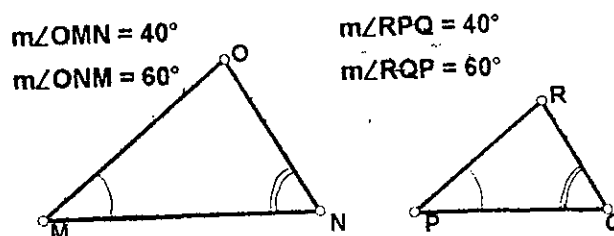
จากรูป $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการหรือไม่.....

2.2 ด้านยาวเท่ากันหนึ่งคู่และมุมมีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่ เช่น



จากรูป $\triangle GHI$ และ $\triangle KJL$ เท่ากันทุกประการหรือไม่.....

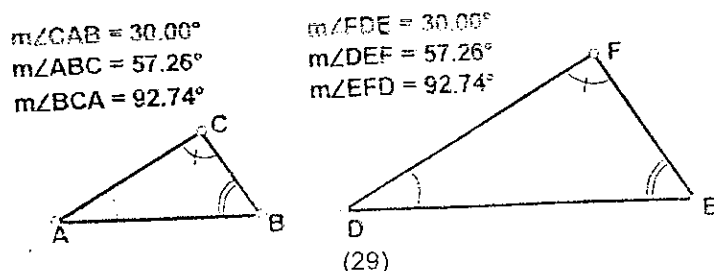
2.3 มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ เช่น



จากรูป $\triangle MND$ และ $\triangle PQR$ เท่ากันทุกประการหรือไม่.....

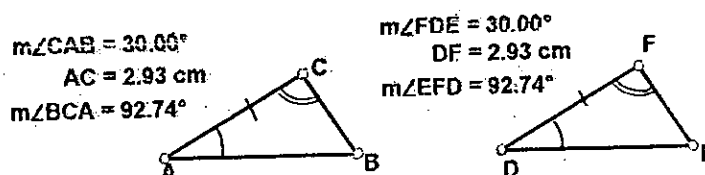
3. พิจารณา 3 อย่าง มี 4 แบบ ดังนี้

3.1 มุมมีขนาดเท่ากันสามคู่ เช่น

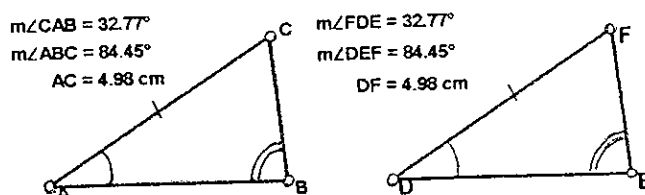


3.2 มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านยาวเท่ากันหนึ่งคู่ซึ่งมีได้หลายกรณี เช่น

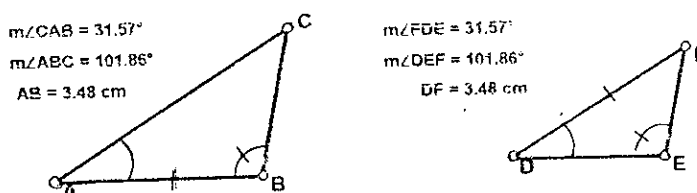
3.2.1 มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน เช่น



3.2.2 มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ เช่น

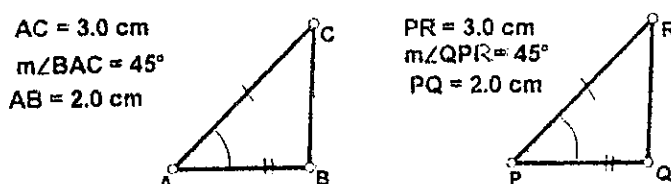


3.2.3 มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่ไม่ได้อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ เช่น



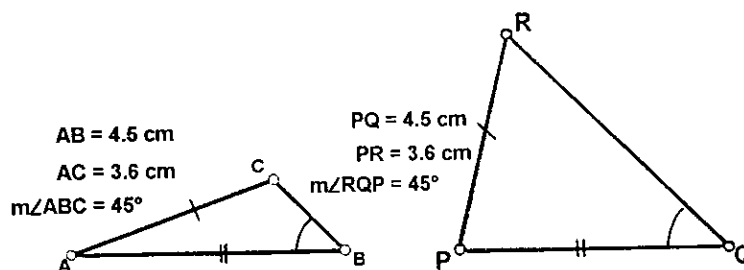
3.3 มุมมีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่ และด้านยาวเท่ากันสองคู่ ซึ่งมีหลายกรณี เช่น

3.3.1 ด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน เช่น



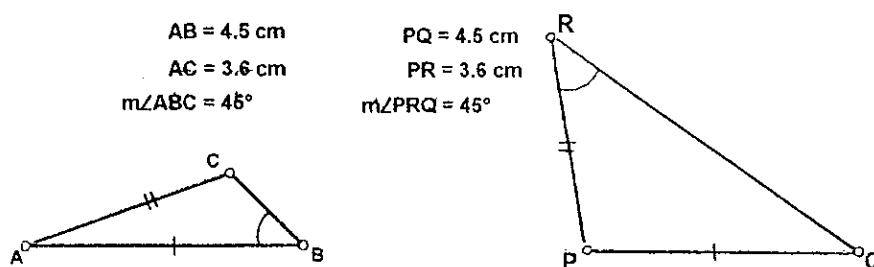
3.3.2 ด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่

เช่น

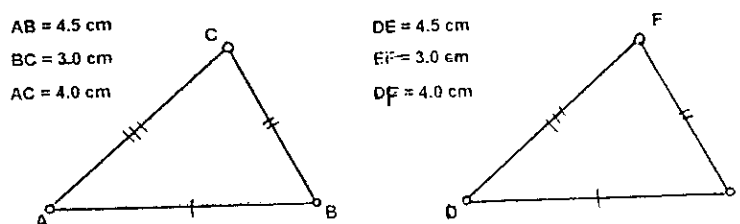


3.3.3 ด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่ไม่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่

เช่น



3.4 ด้านยาวเท่ากันสามคู่ เช่น



จากการพิจารณาความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปข้างต้น จะเห็นได้ชัดเจนว่า

เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ (3.1) หรือ

มุมมีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่ไม่ได้อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ (3.2.3) หรือ

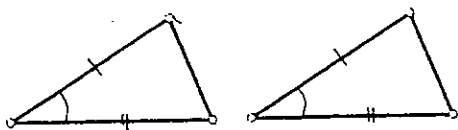
ด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่ (3.3.2) หรือ ด้าน

ยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่ไม่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่ (3.3.3) แล้วรูป

สามเหลี่ยมสองรูปนั้นไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ

ส่วนในรูปแบบอื่นจะพิจารณาในหัวข้อย่อยของเนื้อหาต่อ ๆ ไป

1.2.2 รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)



รูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

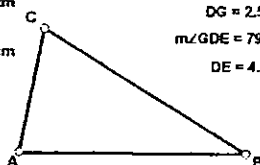
คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน

ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมข้อความลงในช่องว่าง

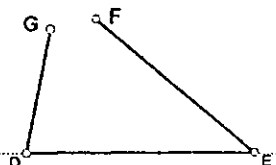
1. เปิดไฟล์ Trisas01.gsp

2. จะได้รูป

AC = 2.5 cm
m∠CAB = 79°
AB = 4.5 cm



DG = 2.5 cm
m∠GDE = 79°
DE = 4.5 cm



AB = ...

DE = ...

AC = ...

DG = ...

m∠A = ...

m∠D = ...

ดังนั้น มีด้านยาวเท่ากัน (กี่).....คู่

มุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาด (เท่ากันหรือไม่).....

3. จากรูป คลิกจุด F หรือ G แล้วเลื่อนให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

4. ตรวจสอบ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ว่าทับกันสนิทหรือไม่

คลิกที่จุด D, E และ F (หรือ G) เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Polygon Interior

คลิกที่ภายใน $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) แล้วเลือกรูปไปทับกับ $\triangle ABC$ จะได้ว่า.....

5. วิธีตรวจสอบว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) เท่ากันทุกประการ หรือไม่ ทำอย่างไร.....

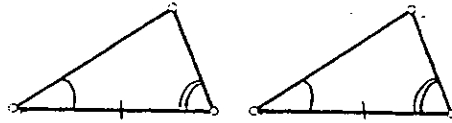
6. ผลการตรวจสอบได้ว่า.....

7. จากรูป สามารถเลื่อนจุด F หรือ G ให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) และ $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการ ได้หรือไม่ ถ้าได้ แสดงด้วยรูปได้อย่างไร

8. ข้อความ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน จะ (เท่ากันทุกประการหรือไม่).....

1.2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.น.)



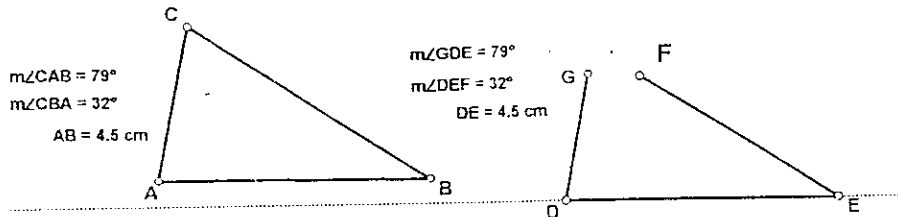
รูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

คือ รูปสามเหลี่ยมที่มุมมีขนาดเท่ากับสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน

ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมข้อความลงในช่องว่าง

1. เปิดไฟล์ Triasa01.gsp

2. จะได้รูป



$m\angle A = \dots\dots\dots$

$m\angle D = \dots\dots\dots$

$m\angle B = \dots\dots\dots$

$m\angle E = \dots\dots\dots$

$AB = \dots\dots\dots$

$DE = \dots\dots\dots$

ดังนั้น มีขนาดของมุมเท่ากัน(ก็) $\dots\dots\dots$ คู่

ด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้น มีความยาว (เท่ากันหรือไม่) $\dots\dots\dots$

3. จากรูป คลิกจุด F หรือ G แล้วเลื่อนจุดให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

4. ตรวจสอบ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ว่าทับกันสนิทหรือไม่ $\dots\dots\dots$

5. วิธีตรวจสอบว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ว่าทับกันสนิทหรือไม่ ทำได้อย่างไร $\dots\dots\dots$

6. ผลการตรวจสอบได้ว่า $\dots\dots\dots$

7. จากรูป สามารถเลื่อนจุด F หรือ G ให้มาทับกัน เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) และ $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการได้หรือไม่ $\dots\dots\dots$ ถ้าได้ แสดงด้วยรูปได้อย่างไร

8. ข้อคิดเตา

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม จะ (เท่ากันทุกประการหรือไม่) $\dots\dots\dots$

1.2.4 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

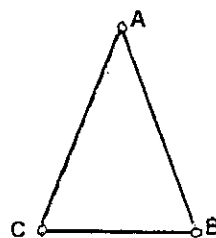
จากรูป

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$

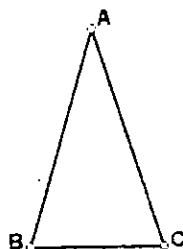
เรียกด้าน BC ว่าฐาน

เรียก $\angle A$ ว่ามุมยอด

เรียก $\angle B$ และ $\angle C$ ว่ามุมที่ฐาน



1. สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ดังรูป



2. สำรวจมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2.1 วัด $m\angle ABC$ และ $m\angle ACB$

2.2 จะได้ว่า $m\angle ABC$ และ $m\angle ACB$ เท่ากันหรือไม่.....

2.3 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 2.2

จะได้ว่า $m\angle ABC$ $m\angle ACB$

2.4 ข้อคาดเดา

ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $AB = AC$ ขนาดของมุมที่ฐาน (เท่ากันหรือไม่).....

2.5 ลบหน้าจ่อ

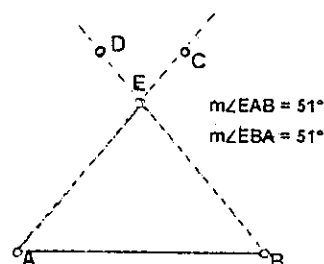
2.6 ลาก $\overline{AB}$

2.7 ที่จุด A สร้าง $\angle CAB$ มีขนาดพอสมควร

2.8 ที่จุด B สร้าง ให้ $\angle DBA$ ให้ $m\angle DBA = m\angle CAB$

2.9 กำหนดจุดตัดของ $\overline{AC}$ และ $\overline{DB}$ เป็นจุด E

2.10 วัด EA และ EB จะได้ว่า EA และ EB เท่ากันหรือไม่



- 2.11 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 2.10 จะได้ว่า EA และ EB ยังคงเท่ากันหรือไม่.....

2.12 ข้อคาดเดา

ถ้า $\triangle ABE$ มี $m\angle A = m\angle B$ แล้ว EA และ EB (เท่ากันหรือไม่).....

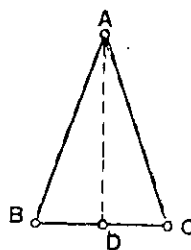
- 2.13 รูปสามเหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มุมภายในทุกมุมมีขนาดเท่ากันจริงหรือไม่.....มีวิธีตรวจสอบอย่างไร.....
- 2.14 รูปสามเหลี่ยมที่มุมภายในทุกมุม มีขนาดเท่ากันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากันจริงหรือไม่.....มีวิธีตรวจสอบอย่างไร.....

3. สำรวจ เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด

3.1 เปิด New Sketch

3.2 สร้าง $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AB = AC$

3.3 แบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ให้เส้นแบ่งครึ่งมุมตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D



3.4 วัด $m\angle BDA$ และ $m\angle CDA$ จะได้ว่า $m\angle BDA$ และ $m\angle CDA$ เท่ากันหรือไม่.....

3.5 วัด BD และ CD จะได้ว่า BD และ CD เท่ากันหรือไม่.....

3.6 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูปแล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 3.4 และ 3.5 ว่ายังคงเท่ากันหรือไม่.....

3.7 ข้อคาดเดา

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มี $AB = AC$ และ $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด $\overline{AD}$ จะ (ตั้งฉากหรือไม่).....กับ $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ (แบ่งครึ่งหรือไม่)..... $\overline{BC}$

4. สำรวจเส้นมัธยฐาน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด และส่วนสูง

4.1 จากข้อ 3 จะได้ $\triangle ABC$ และ $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด

4.2 ลาก $\overline{AE}$ เป็นเส้นมัธยฐาน(ด้วยเส้นสีแดง)

4.3 จากจุด A ลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม(ด้วยเส้นสีฟ้า)

4.4 จะได้ว่า เส้นทั้งสามทับกันหรือไม่

แสดงว่า เส้นทั้งสามเป็นเส้นเดียวกันหรือไม่.....

4.5 ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เท่ากันทุกประการ เพราะเหตุใด

- 1) $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ เพราะ.....
- 2) $\angle BAD$ $\angle CAD$ เพราะ.....
- 3) $\overline{AD}$ $\overline{AD}$ เพราะ.....
- 4) $\triangle BAD$ $\triangle CAD$ เพราะ.....

4.6 ข้อคาดเดา

เส้นมัธยฐาน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด และส่วนสูง ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (เป็นหรือไม่เป็น) เส้นเดียวกัน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (เป็นหรือไม่เป็น) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

สรุป

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

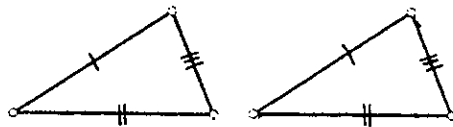
.....

.....

.....

.....

1.2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)



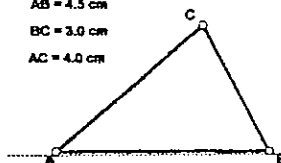
รูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน
คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากับสามคู่

ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมข้อความลงในช่องว่าง

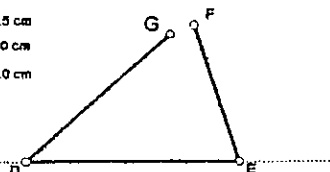
1. เปิดไฟล์ triss01.gsp

2. จะได้รูป

AB = 4.5 cm
BC = 3.0 cm
AC = 4.0 cm



DE = 4.5 cm
EF = 3.0 cm
DG = 4.0 cm



AB = ... DE = ...

BC = ... EF = ...

AC = ... DG = ...

ดังนั้น มีด้านยาวเท่ากัน(ก็).....คู่

3. จากรูป คลิกจุด F หรือ G แล้วเลื่อนจุดให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

4. ตรวจสอบ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ว่าทับกันสนิทหรือไม่

คลิกที่จุด D, E, F และ G เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Polygon Interior

คลิกที่ภายใน $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) แล้วเลือกรูปไปทับกับ $\triangle ABC$ จะได้ว่า.....

5. วิธีตรวจสอบว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) เท่ากันทุกประการ หรือไม่ ทำอย่างไร.....

.....

6. ผลการตรวจสอบได้ว่า.....

7. จากรูปสามารถ เลื่อนจุด F หรือ G ให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$)

และ $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการ ได้หรือไม่ ถ้าได้แสดงด้วยรูปได้อย่างไร

8. ข้อคิดเห็น

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน จะ (เท่ากันทุกประการหรือไม่).....

จากความรู้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ จะได้ว่า
เงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ได้แก่

1.

.....

หรือ 2.

.....

หรือ 3.

.....



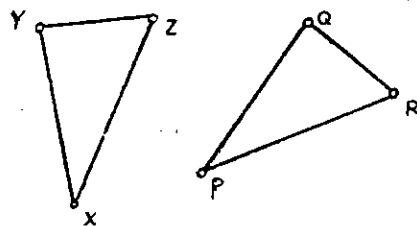
แบบฝึกปฏิบัติ 1.2 ความเท่ากันทุกประการ

1. ถ้า $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$

จงบอกข้อมูลที่มีขนาดเท่ากัน และด้านที่ยาวเท่ากัน

1.1.....

1.2.....



2. ถ้า $\triangle XYZ \cong \triangle UVW$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

2.1 $\triangle YZX \cong \triangle VWU$

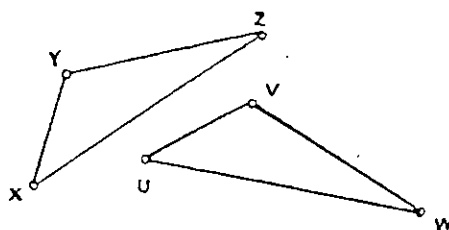
2.2 $\triangle XZY \cong \triangle UVW$

2.3 $\overline{XY} \cong \overline{VW}$

2.4 $\angle Y \cong \angle V$

2.5 $\overline{XZ} \cong \overline{UW}$

2.6 $\overline{XZ} \cong \overline{UV}$



3. ถ้า $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ จงเติมคำตอบต่อไปนี้

3.1 $\overline{AD} \cong$

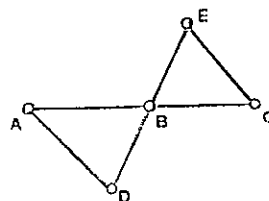
3.2 $\overline{BE} \cong$

3.3 $\angle ABD \cong$

3.4 $\overline{BC} \cong$

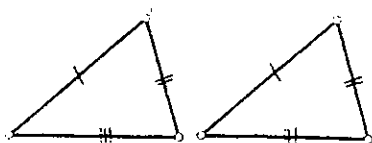
3.5 $\triangle BDA \cong$

3.6 $\triangle CEB \cong$

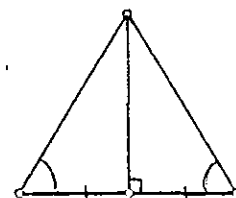


4. จงพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อ มีความสัมพันธ์กันแบบใดต่อไปนี้ ด.ม.ด., ม.ด.ม. ด.ด.ด. หรือไม่มีความสัมพันธ์กันตามแบบดังกล่าวข้างต้น

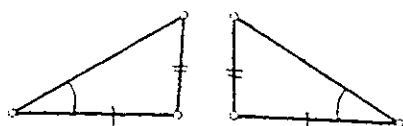
4.1



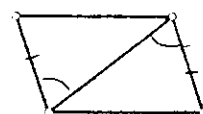
4.4



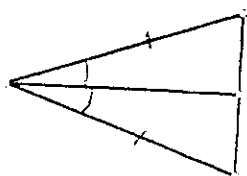
4.2



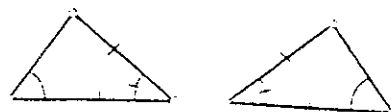
4.5



4.3



4.6

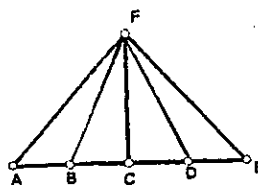


5. จากรูป $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE}$

$$\overline{AF} \cong \overline{EF}$$

และ $\angle A \cong \angle E$

จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ที่เท่ากันทุกประการ



6. จงพิจารณาแผนผังการคิดในข้อ 6.1 แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างข้อ 6.2 - 6.6

6.1 กำหนดให้ $\overline{AR} \cong \overline{ER}$

$$\overline{EC} \cong \overline{AC}$$

จะแสดงว่า

$$\angle E \cong \angle A$$

ด

$$\overline{AR} \cong \overline{ER}$$

ค

$$\overline{EC} \cong \overline{AC}$$

ค

$$\overline{RC} \cong \overline{RC}$$

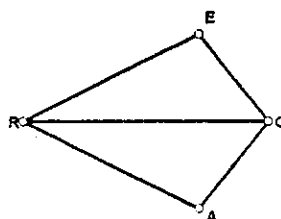
ด้านร่วม

$$\triangle RCE \cong \triangle RCA$$

.....ค.ด.ค.

$$\angle E \cong \angle A$$

มุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยม
สองรูปที่เท่ากันทุกประการ



6.2 กำหนดให้ $\overline{SE} \cong \overline{SU}$

$$\angle E \cong \angle U$$

จะแสดงว่า

$$\overline{MS} \cong \overline{OS}$$

ม

$$\angle E \cong \angle U$$

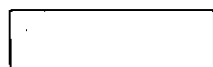
ค

$$\overline{SE} \cong \overline{SU}$$

$$\triangle \dots \cong \triangle \dots$$



...



6.3 กำหนดให้ $\angle E \cong \angle W$ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{WE}$

$$\overline{MO} \cong \overline{MN}$$

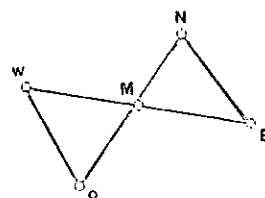
จะแสดงว่า

ม

$$\angle W \cong \angle E$$

ค

$$\overline{WM} \cong \overline{EM}$$



...

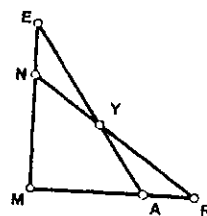


6.4 กำหนดให้ $\overline{MN} \cong \overline{MA}$

$\overline{ME} \cong \overline{MR}$

จะแสดงว่า

$\angle E \cong \angle R$



ด

$\overline{ME} \cong \overline{MR}$

...

ค

$\overline{MA} \cong \overline{MN}$

$\triangle MEA \cong \triangle MRN$

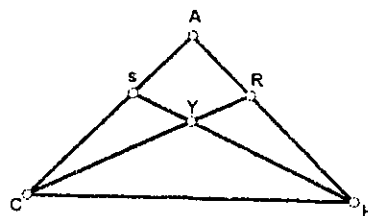
6.5 กำหนดให้

$\overline{CS} \cong \overline{HR}$

$\angle SCH \cong \angle RHC$

จะแสดงว่า

$\overline{HS} \cong \overline{CR}$



...

...

...

$\triangle SCH \cong \triangle RHC$

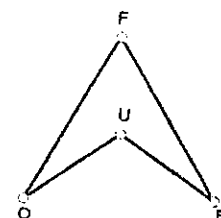
6.6 กำหนดให้

$\overline{FO} \cong \overline{FR}$

$\overline{OU} \cong \overline{RU}$

จะแสดงว่า

$\angle O \cong \angle R$



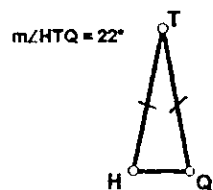
...

...

...

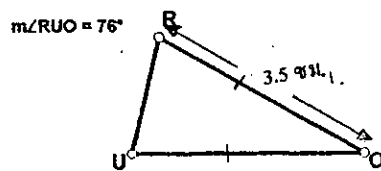
7. จากรูป จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

7.1



$$m\angle H =$$

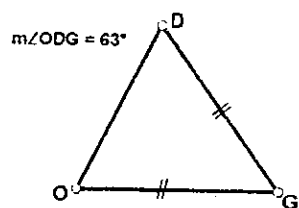
7.4



$$m\angle R =$$

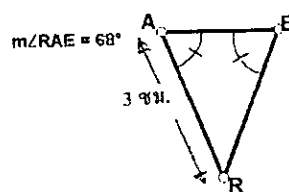
$$UO =$$

7.2



$$m\angle G =$$

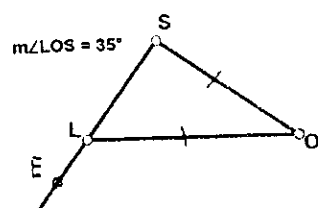
7.5



$$m\angle R =$$

$$RE =$$

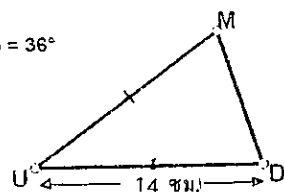
7.3



$$m\angle OLE =$$

7.6 ความยาวของด้านทุกด้านของ $\triangle MDU$ รวมกันเท่ากับ 38 เซนติเมตร

$$m\angle MUD = 36^\circ$$

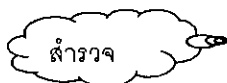
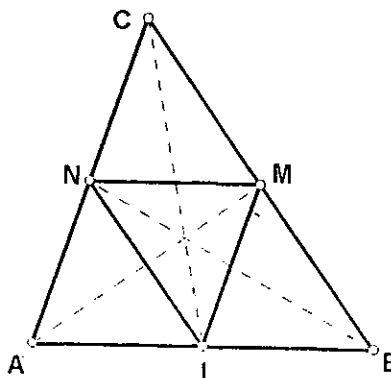


$$m\angle D =$$

$$MD =$$



*8. สร้าง $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ $AB = AC$ และ L, M, N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ



มีส่วนของเส้นตรงคู่ที่ยาวเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....

มีส่วนของเส้นตรงคู่ที่ขนานกันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....



ข้อคาดเดาเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ LM

.....

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ CL

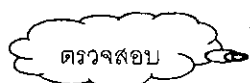
.....

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับมุมที่มีขนาดเท่ากับ $\angle ANM$

.....

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\square ANML$

.....



ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.3

เรื่อง เส้นขนาน

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

- 1.3.1 เส้นขนาน
- 1.3.2 เส้นขนานและมุมภายใน
- 1.3.3 เส้นขนานและมุมแย้ง
- 1.3.4 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน
- 1.3.5 ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
- 1.3.6 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน
- 1.3.7 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของเส้นขนาน
2. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา และนำสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกได้ว่าถ้าเส้นตรงสองเส้นมีเส้นตัดแล้วมุมคู่ใดเป็นมุมแย้ง
4. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อขนาดของมุมแย้งเท่ากัน และนำสมบัตินี้ไปใช้
5. บอกได้ว่าถ้าเส้นตรงสองเส้นมีเส้นตัดแล้วมุมใดเป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด
6. บอกได้ว่าเส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และนำสมบัตินี้ไปใช้
7. บอกได้ว่ามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศาหรือสองมุมฉากและนำสมบัตินี้ไปใช้
8. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ และนำสมบัตินี้ไปใช้
9. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ และนำสมบัตินี้ไปใช้

ใบงาน 1.3

เนื้อหาใบงานนี้กล่าวถึง เส้นขนาน ซึ่งประกอบด้วย 7 หัวข้อย่อย

1.3.1 เส้นขนาน

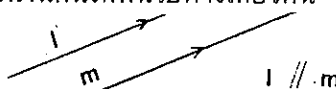
เราให้นิยามเกี่ยวกับการขนานกัน ดังนี้

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน เมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

สัญลักษณ์ เมื่อเส้นตรง l และ m ขนานกัน อาจเขียนแทนด้วย $l \parallel m$ อ่านว่า l ขนานกับ m
หรือ

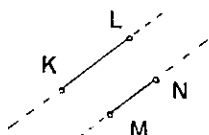
หมายเหตุ เมื่อเส้นตรง AB และเส้นตรง CD ขนานกัน อาจเขียนแทนด้วย $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

เรานิยมเขียนหัวลูกศรในเส้นตรงที่ขนานกันให้หันไปทางเดียวกัน เพื่อให้เป็นที่สังเกตว่าเส้นตรงคู่ นั้น ขนานกัน เช่น

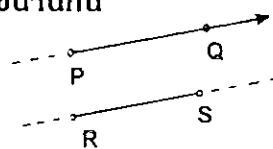


บทนิยาม

ส่วนของเส้นตรงหรือรังสีเส้นหนึ่งขนานกับ ส่วนของเส้นตรงหรือรังสีอีกเส้นหนึ่ง เมื่อเส้นดังกล่าวเป็นส่วนประกอบของเส้นตรงที่ขนานกัน



ส่วนของเส้นตรงที่ขนานกัน



รังสีและส่วนของเส้นตรงขนานกัน

จากรูป

เส้นตรง l และ m มีเส้นตรง t เป็นเส้นตัด

จะเกิดมุม 8 มุม ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะดังนี้

$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ และ $\angle 4$ เป็นมุมภายใน เพราะอยู่ระหว่างเส้นสองเส้น

$\angle 1$ และ $\angle 3$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด t

$\angle 2$ และ $\angle 4$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด t

$\angle 1$ และ $\angle 4$ เป็นมุมภายในที่อยู่คนละข้างของเส้นตัด t เรียกว่ามุมแย้ง

$\angle 2$ และ $\angle 3$ เป็นมุมภายในที่อยู่คนละข้างของเส้นตัด t เรียกว่ามุมแย้ง

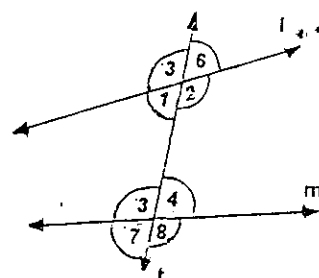
$\angle 5, \angle 6, \angle 7$ และ $\angle 8$ เป็นมุมภายนอก เพราะอยู่ภายนอกเส้นสองเส้น

$\angle 7$ และ $\angle 1$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด t

$\angle 8$ และ $\angle 2$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด t

$\angle 5$ และ $\angle 3$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด t

$\angle 6$ และ $\angle 4$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด t



1.3.2 เส้นขนานและมุมภายใน

จากบทนิยามที่กล่าวว่า

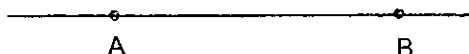
“เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน เมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน”
 การตรวจสอบการขนานกันโดยบทนิยามนั้น เป็นการยาก
 เนื่องจากเส้นตรงสามารถต่อออกไปได้เรื่อย ๆ
 ดังนั้น ในกรณีที่เส้นตรงสองเส้นดูเหมือนจะขนานกัน
 จึงยากมากที่จะบอกว่า เส้นตรงทั้งสองตัดกันหรือไม่

ด้วยเหตุดังกล่าว

การตรวจสอบการขนานกัน ของเส้นตรงสองเส้นจึงต้องอาศัยเส้นตัด โดยพิจารณาดังนี้

1. เปิดไฟล์ Parall01.gsp

P



2. สร้างเส้นตรงผ่าน จุด P และขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ โดยวิธีดังนี้
 คลิกที่เส้นตรง AB และจุด P เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Parallel Line กำหนดชื่อ $\overleftrightarrow{MN}$
3. ลากเส้นตัดเส้นขนานทั้งสองโดยวิธีดังนี้
 คลิกที่เส้นขนานทั้งสอง เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point On Object
 กำหนดชื่อจุด Y บนเส้นตรง AB กำหนดชื่อจุด X บนเส้นตรงที่ผ่านจุด P
 คลิกที่จุด X และ Y เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Line
4. วัดขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด
 จะได้ว่า $m\angle MXY = \dots\dots\dots$ และ $m\angle AYX = \dots\dots\dots$
 $m\angle NXY = \dots\dots\dots$ และ $m\angle BYX = \dots\dots\dots$
5. คำนวณค่า $m\angle MXY + m\angle AYX = \dots\dots\dots$
 คำนวณค่า $m\angle NXY + m\angle BYX = \dots\dots\dots$
6. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูป แล้วจะได้ความสัมพันธ์ของขนาดของมุมแต่ละคู่ยังคงเดิมหรือไม่

7. ข้อคาดเดา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
 รวมกันได้ (ก็).....องศา

8. เปิดไฟล์ Parall01.gsp

9. กำหนดจุด Q บนเส้นตรง AB

10. ลากเส้นตรง PQ

11. สร้างเส้นตรง MN ผ่านจุด P และ $m\angle NPQ + m\angle BQP = 180$ องศา

(นักเรียนมีวิธีสร้างอย่างไร.....)

.....)

12. นักเรียนมีวิธีตรวจสอบอย่างไรว่า $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่

และให้ตรวจสอบด้วยวิธีที่น่าเสนอมา

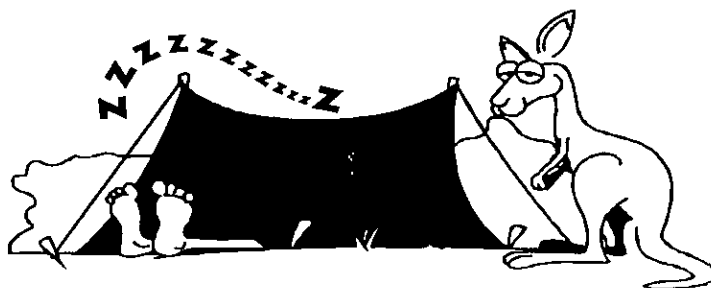
.....

.....

13. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปจะยังได้ $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่.....

14. ข้อคิดเตือน

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง และขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา แล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะ(ขนานกันหรือไม่).....



1.3.3 เส้นขนานและมุมแย้ง

1. ปฏิบัติเช่นเดียวกับหัวข้อย่อย 1.3.2 ข้อ 1-3
2. วัด $m\angle MXY$, $m\angle BYX$ ซึ่งเป็นมุมแย้ง
3. จะได้ว่า $m\angle MXY =$ องศา, $m\angle BYX =$ องศา
4. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปแล้วสังเกตความสัมพันธ์ จะได้ว่า $m\angle MXY$ (= หรือ $\neq$) $m\angle BYX$

5. ข้อคาดเดา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้วขนาดของมุมแย้ง (เท่ากันหรือไม่).....

6. เปิดไฟล์ Parall01.gsp
7. กำหนดจุด Q บน $\overleftrightarrow{AB}$
8. ลากเส้นตัด PQ
9. สร้างเส้นตรง MN ผ่านจุด P โดยที่ขนาดของมุมแย้งเท่ากัน
(นักเรียนมีวิธีสร้างอย่างไร.....
.....)
.....)
10. นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบอย่างไรว่า $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่ และให้ตรวจสอบด้วยวิธีที่นำเสนอมา
.....
.....
11. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปแล้วจะยังได้ $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่.....

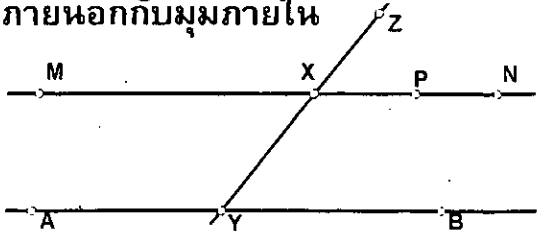
12. ข้อคาดเดา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งและขนาดของมุมแย้งเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่ นั้นจะ (ขนานกันหรือไม่).....

1.3.4 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

1. ปฏิบัติเช่นเดียวกับหัวข้อย่อย 1.3.2 ข้อ 1-3

2. กำหนดจุด Z บน $\overrightarrow{XY}$ ดังรูป



3. วัด $m\angle ZXM$ และ $m\angle XYA$ จะได้ว่า $m\angle ZXM$ ($=$ หรือ $\neq$) $m\angle XYA$

4. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปแล้วสังเกตความสัมพันธ์ จะได้ว่า.....

5. ข้อคาดเดา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้วขนาดมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด (เท่ากันหรือไม่).....

6. เปิดไฟล์ Parall01.gsp

7. กำหนดจุด Q บน $\overrightarrow{AB}$

8. ลากเส้นตัด PQ

9. สร้างเส้นตรง MN ผ่านจุด P โดยที่ขนาดของมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่หนึ่งเท่ากัน
(นักเรียนมีวิธีสร้างอย่างไร.....)

10. ตรวจสอบว่า $\overrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AB}$ หรือไม่

11. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปแล้วยังจะได้ $\overrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AB}$ หรือไม่.....

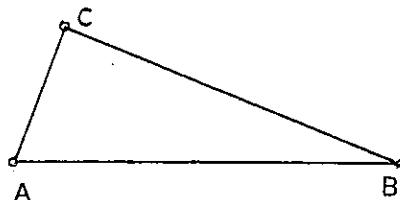
12. ข้อคาดเดา

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งและขนาดของมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่หนึ่งเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะ (ขนานกันหรือไม่).....

1.3.5 ผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม

1. เปิด New Sketch

2. สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC



3. วัดขนาดของมุมภายในทั้งสามและหาผลบวกของขนาดของมุมทั้งสาม

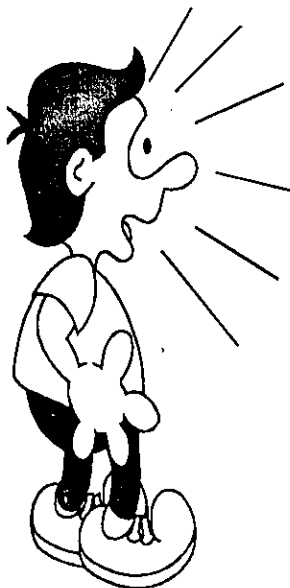
จะได้ว่า $m\angle A = \dots\dots\dots$ องศา $m\angle B = \dots\dots\dots$ องศา $m\angle C = \dots\dots\dots$ องศา

และ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \dots\dots\dots$ องศา

4. คลิกที่จุด A , B หรือ C โยกรูปแล้วสังเกตผลบวกของขนาดของมุมทั้งสามจะได้ว่า.....

5. ข้อคาดเดา

ผลบวกของขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะ (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ) 180°



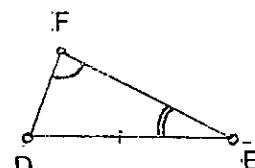
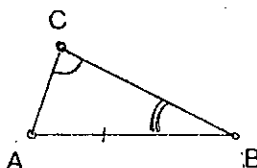
1.3.6 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

$$\text{มี } m\angle C = m\angle F,$$

$$m\angle B = m\angle E$$

$$\text{และ } AB = DE$$



จงพิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. $m\angle A$ และ $m\angle D$ จะเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

2. จากที่กำหนดให้ $m\angle ABC = m\angle DEF$

$$AB = DE$$

และผลจากข้อ 1 ทำให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีความสัมพันธ์กันแบบใด.....

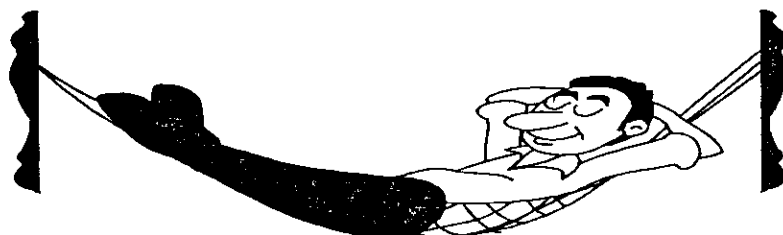
3. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการหรือไม่..... เพราะเหตุใด.....

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันหนึ่งคู่ จะเรียกว่า

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

4. ข้อคิดเตือน

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน จะ (เท่ากันทุกประการหรือไม่).....

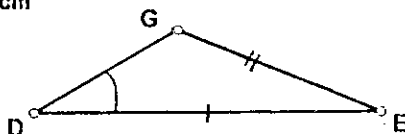


1.3.7 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด)

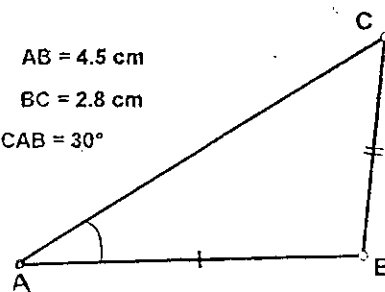
รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน คือ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะกรณีหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่

ทั้งนี้ โดยทั่วไปแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบดังกล่าว ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ ดังรูป

$$\begin{aligned} DE &= 4.5 \text{ cm} \\ EG &= 2.8 \text{ cm} \\ m\angle GDE &= 30^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= 4.5 \text{ cm} \\ BC &= 2.8 \text{ cm} \\ m\angle CAB &= 30^\circ \end{aligned}$$



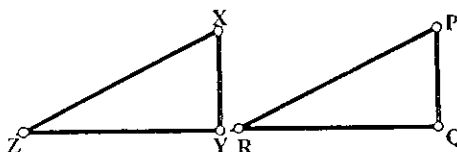
พิจารณากรณีที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

กำหนดให้ $\triangle XYZ$ และ $\triangle PQR$

$$\text{มี } m\angle Y = m\angle Q = 90 \text{ องศา}$$

$$XZ = PR$$

$$XY = PQ$$

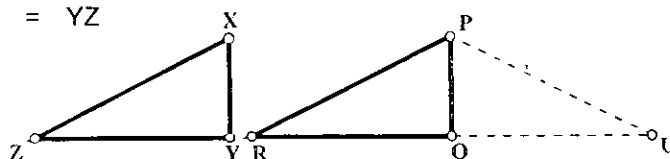


จงพิจารณา $\triangle XYZ$ และ $\triangle PQR$ แล้วปฏิบัติตามกิจกรรมและตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนต่อ $\overline{RQ}$ ถึงจุด U ทำให้ $QU = YZ$

2. ลาก $\overline{PU}$

3. $m\angle PQU = \dots\dots\dots$



4. $\triangle XYZ$ และ $\triangle PQU$ เท่ากันทุกประการหรือไม่.....เพราะเหตุใด.....

5. ดังนั้น จะได้ PR เท่ากับ PU หรือไม่.....

6. $\triangle PRU$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่.....

7. $\angle R$ และ $\angle U$ มีขนาดเท่ากันหรือไม่.....

8. $\overline{PQ}$ เป็นด้านร่วมของ $\triangle PQR$ และ $\triangle PQU$ แล้วขนาดของมุมคู่ต่อไปนี้จะเท่ากันหรือไม่

$$m\angle PQR \dots\dots\dots m\angle PQU, \quad m\angle PRQ \dots\dots\dots m\angle PUQ$$

9. $\triangle PQR$ และ $\triangle PQU$ เท่ากันทุกประการหรือไม่.....เพราะเหตุใด.....

10. รูปสามเหลี่ยมคู่ต่อไปนี้จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

$$\triangle XYZ \dots\dots\dots \triangle PQU, \quad \triangle PQR \dots\dots\dots \triangle PQU, \quad \triangle XYZ \dots\dots\dots \triangle PQR$$

จากสิ่งที่กำหนดให้ จะสังเกตได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปจะมีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน ซึ่งเราเรียกว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

11. ข้อคาดเดา

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน จะ (เท่ากันทุกประการหรือไม่).....

สรุป

เงื่อนไขที่เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า

รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากับทุกประการ ได้แก่

1.
2.
3.
4.
5.

แบบฝึกปฏิบัติ 1.3 เส้นขนาน

1. จากรูป 1 เส้นตรง q และ r มีเส้นตรง p เป็นเส้นตัด ให้บอกชื่อมุมต่อไปนี้

1.1 มุมแย้ง 2 คู่

.....

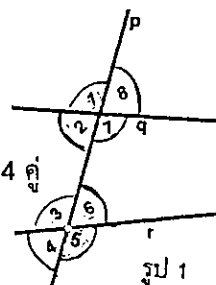
1.2 มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด 2 คู่

.....

1.3 มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด 4 คู่

.....

.....



รูป 1

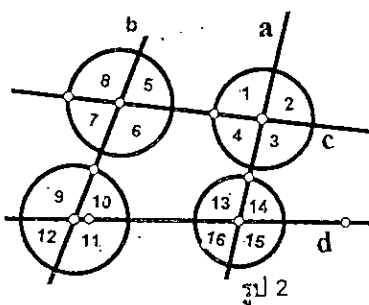
2. จากรูป 2 ให้บอกว่า มุมแต่ละคู่ต่อไปนี้ สัมพันธ์กันแบบใดต่อไปนี้

A มุมแย้ง,

B มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

C มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

หรือ D ไม่สัมพันธ์กันตามแบบดังกล่าวข้างต้น



รูป 2

2.1 $\angle 1$ และ $\angle 13$ 2.5 $\angle 11$ และ $\angle 13$

2.2 $\angle 6$ และ $\angle 10$ 2.6 $\angle 8$ และ $\angle 15$

2.3 $\angle 12$ และ $\angle 14$ 2.7 $\angle 1$ และ $\angle 15$

2.4 $\angle 4$ และ $\angle 10$ 2.8 $\angle 5$ และ $\angle 2$

3. จากรูป 2 จงบอกชื่อของมุมแย้งที่เกิดจากเส้นตรง c เป็นเส้นตัดเส้นตรง a และ b

.....

4. จากรูป 2 จงบอกชื่อของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด a ซึ่งตัดเส้นตรง c และ d

.....

.....

5. จากรูป 3 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $m\angle ADC = 110^\circ$, $m\angle ACD = 28^\circ$ จงหาค่าของ

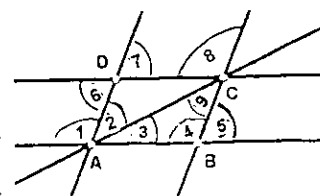
$m\angle 1 =$ $m\angle 2 =$

$m\angle 3 =$ $m\angle 4 =$

$m\angle 5 =$ $m\angle 6 =$

$m\angle 7 =$ $m\angle 8 =$

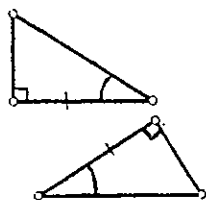
$m\angle 9 =$



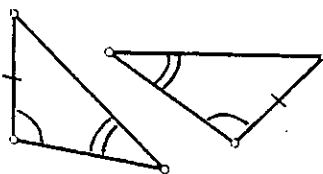
รูป 3

6. จงพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อ มีความสัมพันธ์กันแบบใดต่อไปนี้ ด.ม.ด., ด.ด.ด., ม.ด.ม., ม.ม.ด., ฉ.ด.ด. หรือไม่มีความสัมพันธ์กันตามแบบดังกล่าวข้างต้น

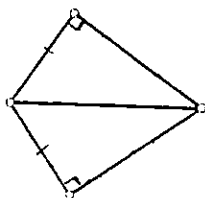
6.1



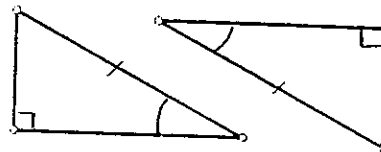
6.4



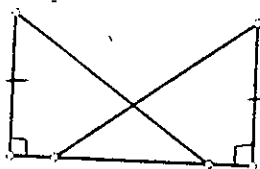
6.2



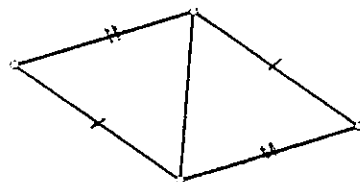
6.5



6.3



6.6



7. จากรูป ถ้า $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ และ $m\angle A = m\angle B = 90$ องศา

ให้เติมข้อมูลที่ทำให้ $\triangle ACD \cong \triangle BEC$ โดยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

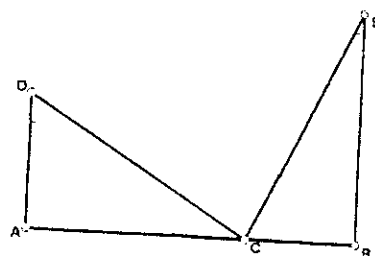
7.1 ม.ม.ด.

7.2 ฉ.ด.ด.

7.3 ด.ด.ด.

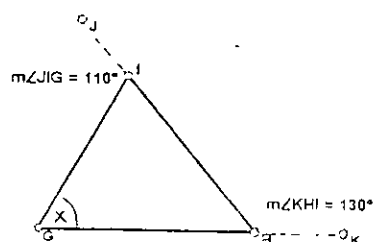
7.4 ม.ด.ม.

7.5 ด.ม.ด.

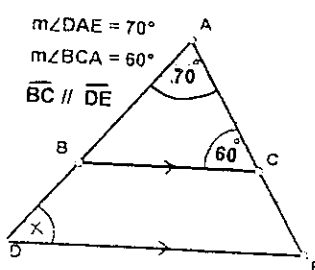


8. จากรูป จงหาค่าของ x

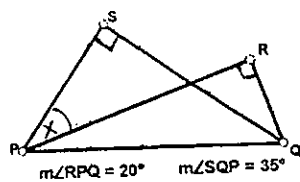
8.1



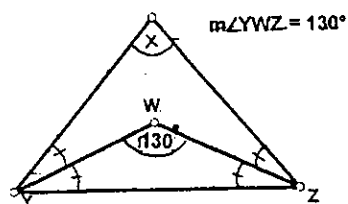
8.4



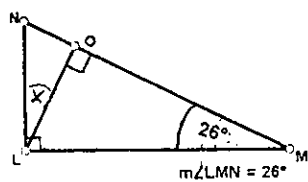
8.2



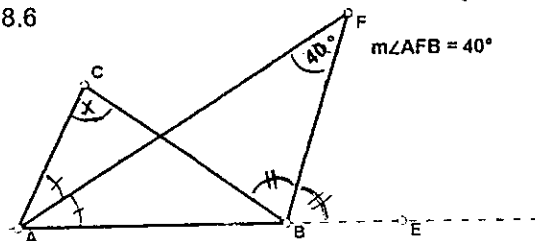
8.5



8.3

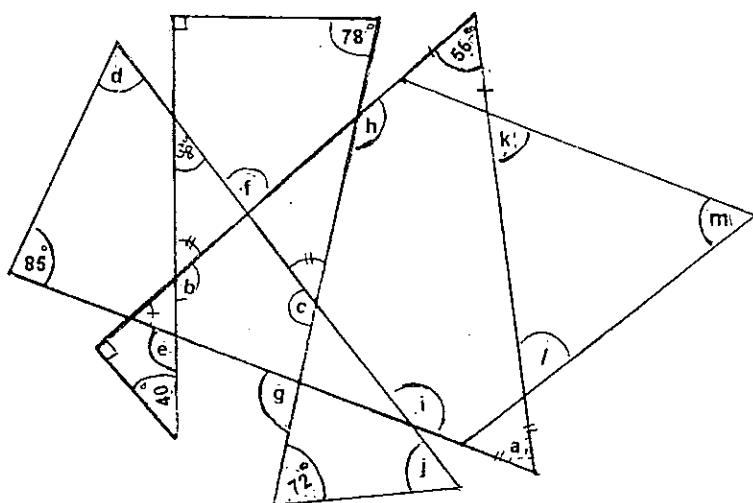


8.6



9.. จากรูป จงหาค่าของ

- a = ...
- b = ...
- c = ...
- d = ...
- e = ...
- f = ...
- g = ...
- h = ...
- i = ...
- j = ...
- k = ...
- l = ...
- m = ...



โจทย์

*10. สร้าง $\vec{AB}$

กำหนดจุด P และ Q อยู่บนด้านเดียวกันของ $\vec{AB}$ ดังรูป

○ P

○ Q



ตั้งข้อคาดเดา

หลังจากที่หนูเล็กพยายามสำรวจอยู่นาน เธอก็ตั้งข้อคาดเดาว่า "ตำแหน่งของจุด T บน $\vec{AB}$ ที่ทำให้ $PT+QT$ เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดนั้นสามารถหาได้"

นักเรียนช่วยหนูเล็กตรวจสอบด้วยว่า ข้อคาดเดาดังกล่าวน่าจะถูกต้องหรือไม่.....

ตรวจสอบ

ถ้านักเรียนตรวจสอบได้ว่า น่าจะถูกต้อง จงเขียนแสดงด้วยรูปว่าหาได้อย่างไร

เหตุผล

นักเรียนบอกเหตุผลได้หรือไม่ ว่าเพราะเหตุใด จึงเป็นเช่นนั้น

.....

.....

.....

.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4

เรื่อง รูปหลายเหลี่ยม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

- 1.4.1 รูปหลายเหลี่ยมและการจำแนกรูปหลายเหลี่ยม
- 1.4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
- 1.4.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- 1.4.4 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 1.4.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
- 1.4.6 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- 1.4.7 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- 1.4.8 รูปสี่เหลี่ยมยาว
- 1.4.9 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. จำแนกรูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้
3. นำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้
4. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปใช้
5. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่
6. นำสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมยาว รูปสี่เหลี่ยมคางหมู และรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ไปใช้
7. นำสมบัติที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรง ซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสามเหลี่ยมไปใช้

ใบงาน 1.4

เนื้อหาในใบงานนี้กล่าวถึง รูปหลายเหลี่ยม ซึ่งประกอบด้วย 9 หัวข้อย่อย

1.4.1 รูปหลายเหลี่ยมและการจำแนกรูปหลายเหลี่ยม

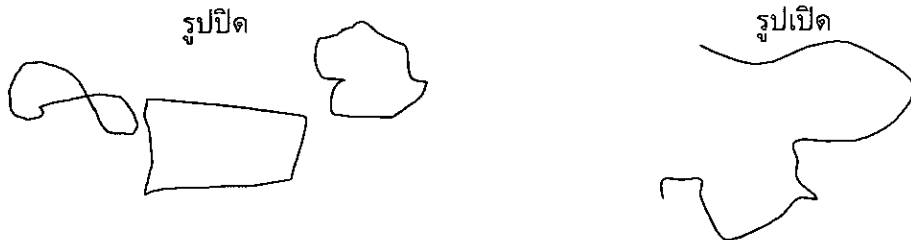
ก่อนจะกล่าวถึงบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยม จะแนะนำเกี่ยวกับ รูปปิด และรูปเปิดดังนี้

เมื่อเราใช้ดินสอหรือปากกาจุดลงบนส่วนใดส่วนหนึ่งของกระดาษ แล้วลากไปในลักษณะใดก็ได้

ถ้าปลายดินสอหรือปากกาวนกลับมาสิ้นสุดที่จุดเดิม สิ่งที่เกิดขึ้น เรียกว่า รูปปิด

ถ้าหากไม่วนกลับมาสิ้นสุดที่จุดเดิม สิ่งที่เกิดขึ้น เรียกว่า รูปเปิด

ตัวอย่าง



บทนิยาม รูปหลายเหลี่ยม คือ รูปเรขาคณิตในระบบที่เกิดจากการต่อจุดปลายของส่วนของเส้นตรงกับจุดปลายของส่วนของเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง

โดยส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นตัดกับส่วนของเส้นตรงอื่น ได้เพียงสองเส้นเท่านั้น

ตัวอย่าง

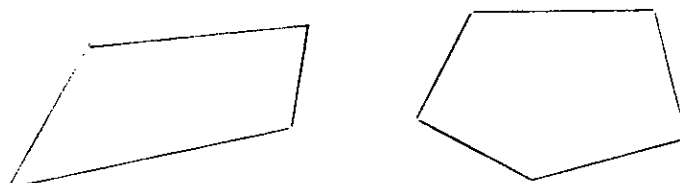
รูปหลายเหลี่ยม

ไม่เป็นรูปหลายเหลี่ยม



ข้อถกเถียง

รูปหลายเหลี่ยมที่จะกล่าวต่อไปจะเน้นเฉพาะ รูปหลายเหลี่ยมมุม ซึ่งเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมภายใน แต่ละมุมน้อยกว่า 180 องศา เช่น



ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้น เรียกว่า ด้านของรูปหลายเหลี่ยม

จุดปลายของส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นที่มาต่อกัน เรียกว่า จุดยอดของรูปหลายเหลี่ยม

ขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม

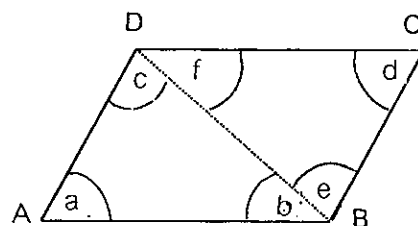
เราทราบมาแล้วว่า

ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา

ให้นักเรียนพิจารณารูปสี่เหลี่ยม ABCD ลาก $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม ABCD จากรูป

$a + b + c = 180$ องศา เพราะเหตุใด

$d + e + f = 180$ องศา เพราะเหตุใด



ดังนั้น ขนาดของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม รวมกันได้.....องศา

ให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างของตารางต่อไปนี้

(โดยให้ทดลองสร้างรูปแต่ละชนิด นับจำนวนด้านและลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งแล้วนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น และวัดขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูป ต่อจากนั้นหาผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูป)

รูปหลายเหลี่ยม	จำนวนด้าน	จำนวนรูปสามเหลี่ยมเดิมหรือจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง	ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูป
รูปสามเหลี่ยม			
รูปสี่เหลี่ยม			
รูปห้าเหลี่ยม			
รูปหกเหลี่ยม			
รูปเจ็ดเหลี่ยม			
รูปแปดเหลี่ยม			
รูปเก้าเหลี่ยม			
รูป n เหลี่ยม			

นั่นคือ ขนาดของมุมภายในของรูป n เหลี่ยมรวมกันได้.....องศา

ข้อตกลง

รูปสี่เหลี่ยม ABCD อาจเขียนแทนด้วย □ABCD

การจำแนกรูปหลายเหลี่ยม

เราจำแนกตามจำนวนด้านดังตัวอย่างต่อไปนี้

จำนวนด้าน	ชื่อของรูปหลายเหลี่ยม
3	รูปสามเหลี่ยม (Triangle)
4	รูปสี่เหลี่ยม (Quadrilateral)
5	รูปห้าเหลี่ยม (Pentagon)
6	รูปหกเหลี่ยม (Hexagon)
7	รูปเจ็ดเหลี่ยม (Heptagon)
8	รูปแปดเหลี่ยม (Octagon)
9	รูปเก้าเหลี่ยม (Nonagon)
10	รูปสิบเหลี่ยม (Decagon)

รูปหลายเหลี่ยมที่มีขนาดของด้านทุกด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน จะเรียกว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ข้อตกลง

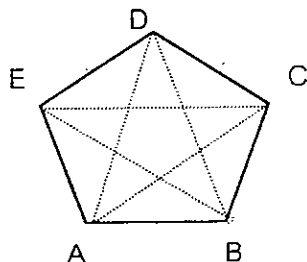
ด้านสองด้าน ถ้าไม่อยู่ติดกัน จะถือว่า ด้านสองด้านนั้นอยู่ตรงข้ามกัน

มุมสองมุม ถ้าไม่อยู่ติดกัน จะถือว่า มุมสองมุมนั้นอยู่ตรงข้ามกัน

จุดยอดสองจุด ถ้าไม่อยู่ติดกัน จะถือว่า จุดยอดสองจุดนั้นอยู่ตรงข้ามกัน

บทนิยาม

เส้นทแยงมุม (Diagonal) ของรูปหลายเหลี่ยม คือ ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากต่อระหว่างมุมตรงข้ามของรูปหลายเหลี่ยม



จากรูป

$\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CE}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูปห้าเหลี่ยม ABCDE

ให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างของตารางต่อไปนี้ (โดยการทดลองสร้างรูปแต่ละชนิดแล้วนับจำนวนจุดยอดและจำนวนเส้นทแยงมุมแล้วอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่มเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับรูป n เหลี่ยม)

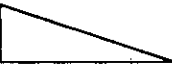
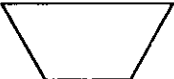
รูปหลายเหลี่ยม	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นทแยงมุม
รูปสามเหลี่ยม		
รูปสี่เหลี่ยม		
รูปห้าเหลี่ยม		
รูปหกเหลี่ยม		
รูปเจ็ดเหลี่ยม		
รูปแปดเหลี่ยม		
รูปเก้าเหลี่ยม		
รูป n เหลี่ยม		

บทนิยาม**เส้นรอบรูป** (Perimeter) ของรูปหลายเหลี่ยม

คือ ผลบวกของความยาวของด้านแต่ละด้าน ของรูปหลายเหลี่ยม

รูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านน้อยที่สุด คือ รูปสามเหลี่ยม สำหรับรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ จะสามารถลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง เพื่อแบ่งรูปหลายเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมได้

ให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้ (โดยการทดลองสร้างรูปแต่ละชนิด นับจำนวนด้านและลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งแล้วนับจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น ต่อจากนั้นอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่มเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับรูป n เหลี่ยม)

รูปหลายเหลี่ยม	รูป	จำนวนด้าน	จำนวนรูปสามเหลี่ยมเดิมหรือจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง
รูปสามเหลี่ยม		3	1
รูปสี่เหลี่ยม		4	2
รูปห้าเหลี่ยม			
รูปหกเหลี่ยม			
รูปเจ็ดเหลี่ยม			
รูปแปดเหลี่ยม			
รูปเก้าเหลี่ยม			
รูปสิบเหลี่ยม			
รูป n เหลี่ยม			

นั่นคือ

จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นมีความสัมพันธ์กับจำนวนด้านอย่างไร.....

1.4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก

- สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC (หรือ เปิดไฟล์ Pyta00.gsp

ดับเบิลคลิกกรอบ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก)

- กำหนดให้ a แทน BC

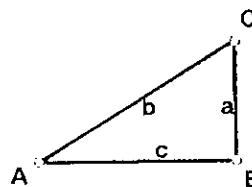
▲ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

b แทน AC

▲ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

c แทน AB

▲ ทึบทั้งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



- ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

- สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

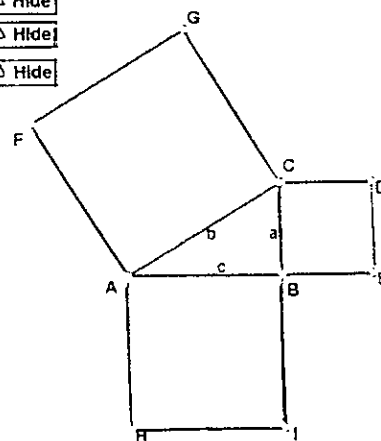
(หรือ จากไฟล์ Pyta00.gsp

▲ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

▲ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

▲ ทึบทั้งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดับเบิลคลิกกรอบ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)



- หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามรูป

(หรือ จากไฟล์ Pyta00.gsp

ดับเบิลคลิกกรอบ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

จะได้ว่า $b^2 = \dots\dots\dots$

$a^2 = \dots\dots\dots c^2 = \dots\dots\dots$

และคำนวณ $a^2 + c^2 = \dots\dots\dots$

- $a^2 + c^2$ และ b^2 สัมพันธ์กันอย่างไร

$a^2 + c^2 \dots\dots\dots b^2$

▲ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

▲ สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

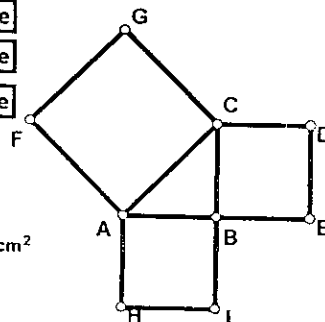
▲ ทึบทั้งของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

Area ACGF = 6.3 cm²

Area ABIH = 3.1 cm²

Area BCDE = 3.1 cm²

(Area BCDE) + (Area ABIH) = 6.3 cm²



3.4 คลิกที่จุด A, B หรือ C โยกรูปของ $\triangle ABC$ จะได้ความสัมพันธ์ในข้อ 3.3 คงเดิมหรือไม่.....

3.5 ข้อคาดเดา

ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\angle B$ เป็นมุมฉาก โดยที่ a แทน BC
b แทน AB และ c แทน AC แล้ว b^2 (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ) $a^2 + c^2$
หรือ เขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\angle B$ เป็นมุมฉาก แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบน
ด้านตรงข้ามมุมฉาก (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ) ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก (ข้อคาดเดาที่ได้นี้ เราเรียกว่า ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

สงสัย

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส บนด้านตรงข้ามมุมฉาก (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ).....ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
จัตุรัสบนด้านอีกสองด้านประกอบมุมฉาก แล้วถ้าเปลี่ยนเป็น
รูปอื่น เช่น รูปครึ่งวงกลม รูปห้าเหลี่ยม จะได้ความสัมพันธ์
เช่นเดียวกันหรือไม่

ลองตรวจสอบให้อ้างอิง:

4. บทกลับของ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

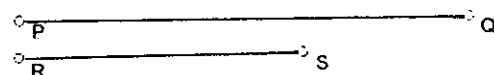
4.1 กิจกรรมสำรวจ 1

1. เปิดไฟล์ Repyta01.gsp
2. ดับเบิลคลิกกรอบ วัด PQ, RS คำนวณ

จะได้ PQ = ...

RS = ...

$\sqrt{PQ^2 + RS^2} = \dots\dots\dots$



PQ = 6.00 cm

RS = 3.80 cm

$(PQ^2 + RS^2)^{0.5} = 7.10$

▲ วัด PQ, RS คำนวณ ▢ Hide

3. ให้ $a = PQ$, $c = RS$ และ $b = \sqrt{PQ^2 + RS^2}$

4. กำหนดจุด A

5. สร้าง $\overline{AC}$ โดย $AC = b$ หน่วย

6. (คลิกที่จุด A เลือกเมนู Transform

เลือกคำสั่ง Mark Center "A"

เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Translate

กำหนด Magnitude เท่ากับ b จะได้จุด A' เปลี่ยนเป็นจุด C

ลาก $\overline{AC}$ วัด AC จะได้.....ซึ่งเท่ากับ $\sqrt{a^2 + c^2}$ หรือไม่

7. ที่จุด A รัศมียาว เท่ากับ c หน่วย สร้างวงกลม

8. ที่จุด C รัศมียาว เท่ากับ a หน่วย สร้างวงกลม

9. กำหนดจุดตัดเป็น B

10. ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$

$$\text{จะได้ } AB = c \text{ หน่วย, } BC = a \text{ หน่วย และ } AC = \sqrt{a^2 + c^2}$$

11. วัด $m\angle ABC$ จะได้ $m\angle ABC = \dots\dots\dots$ องศา

ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

12. ตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมอื่นที่ $b^2 = a^2 + c^2$ ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ โดยปฏิบัติดังนี้

- ลบอบเจกต์ที่สร้างตั้งแต่ ข้อ 4 - 10
- คลิกที่จุด P หรือ Q หรือ R หรือ S เพื่อเปลี่ยนขนาดของ $\overline{PQ}$ และ $\overline{RS}$
- ทำกิจกรรมเช่นเดียวกับข้อ 4 - 11

4.2 กิจกรรมสำรวจ 2

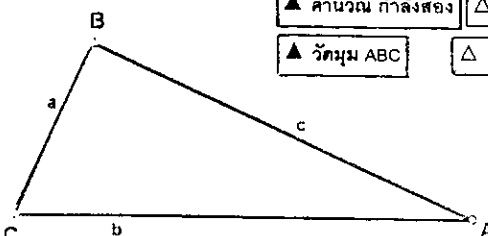
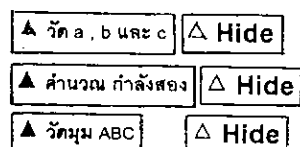
1. เปิดไฟล์ Repyta02.gsp
2. ดับเบิลคลิกกรอบ วัด a , b , และ c

คำนวณกำลังสอง

3. คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูป จนได้ $b^2 = a^2 + c^2$
4. ดับเบิลคลิกกรอบ วัดมุม ABC

จะได้ว่า $m\angle ABC = \dots\dots\dots$

5. คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูป สังเกตว่าเมื่อ $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงและ b^2 ต้องเท่ากับ $a^2 + c^2$ แล้ว $m\angle ABC$ ยังเท่ากับ 90° หรือไม่.....



4.3 ข้อคาดเดา

ถ้า $\triangle ABC$ มี $BC = a$; $AC = b$, $AB = c$ และ $b^2 = a^2 + c^2$

แล้ว $\triangle ABC$ (เป็นหรือไม่เป็น).....รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(ข้อคาดเดาที่ได้นี้ เราเรียกว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

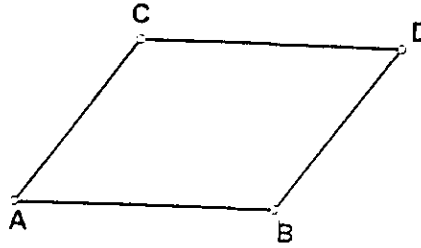
1.4.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

บทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABDC

(หรือเปิด Poly01.gsp)



2. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2.1 ขนาดของมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

- 1) วัดขนาดของมุมภายในทั้งสองของ $\square ABDC$
- 2) สังเกตความสัมพันธ์ของขนาดของมุมตรงข้ามของ $\square ABDC$ จะได้ว่า
และโยก $\square ABDC$ แล้ว ความสัมพันธ์ยังคงเดิมหรือไม่.....
- 3) ผลบวกของขนาดของมุมภายในที่อยู่ติดกัน จะได้เท่ากับ องศา
และโยก $\square ABDC$ แล้ว ผลบวกของขนาดของมุมภายในที่อยู่ติดกันจะได้เท่าเดิมหรือไม่.....

4) ข้อคาดเดา

ถ้า ABDC เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้ว

- มุมตรงข้ามมีขนาด(เท่ากันหรือไม่).....
- มุมที่อยู่ติดกันมีขนาดรวมกันเท่ากับ (กี่).....องศา

2.2 ด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

- 1) วัดความยาวด้านทั้งสี่

- 2) สังเกตความสัมพันธ์ของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมและโยกรูปสี่เหลี่ยมแล้วความสัมพันธ์ยังคงเดิมหรือไม่.....

3) ข้อคาดเดา

ถ้า $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้วด้านตรงข้ามมีความยาว (เท่ากันหรือไม่) ...

2.3 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

- 1) จากรูปสี่เหลี่ยม $ABDC$ ลากเส้นทแยงมุม

ลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$

กำหนดจุดตัดเป็นจุด E

- 2) วัดความยาวของ $\overline{AE}$, $\overline{ED}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{EC}$

จะได้ว่า ความยาวของส่วนของเส้นตรงคู่ใดเท่ากัน.....

- 3) โยกรูปสี่เหลี่ยมแล้วความสัมพันธ์ในข้อ 2 ยังเป็นเช่นเดิมหรือไม่

4) ข้อคาดเดา

ถ้า $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้วเส้นทแยงมุม (แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันหรือไม่)...

- 5) ลบเส้นทแยงมุม AD

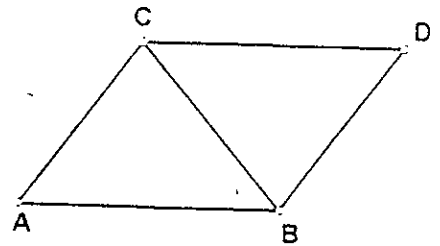
- 6) ความสัมพันธ์คู่ต่อไปนี้จะเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $\overline{AC}$ $\overline{BD}$ เพราะ

2. $\overline{AB}$ $\overline{DC}$ เพราะ

3. $\overline{BC}$ $\overline{BC}$ เพราะ

4. $\triangle BAC$ $\triangle CDB$ เพราะ



7) ข้อคาดเดา

ถ้า $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้วเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปแบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่ (เท่ากันทุกประการหรือไม่).....

3. ถ้ากำหนดความยาวของด้านสองด้านที่ไม่ขนานกันให้ แล้วจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ที่รูป

.....

4. ถ้ากำหนดความยาวของด้านสองด้านที่ไม่ขนานกันให้ แล้วรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่สร้างขึ้น จะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีขนาดของมุมภายในทั้งสี่เป็นเท่าใด.....

5. จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมขนาดเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

5.2 ถ้ามุมที่อยู่ติดกันของรูปสี่เหลี่ยมมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

5.3 ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่ากันแล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

5.4 ถ้าด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่ากันและขนานกันแล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

5.5 ถ้าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันแล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

5.6 ถ้าเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปสี่เหลี่ยมแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการแล้ว รูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่.....

6. เขียนข้อที่เพียงพอสำหรับการเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

.....

.....

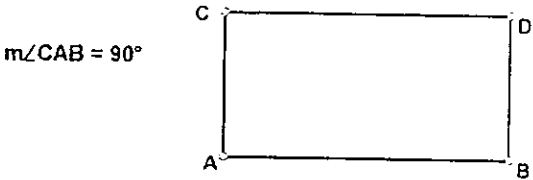
.....

1.4.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABDC
(หรือ เปิดไฟล์ Poly03.gsp)



2. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีเพิ่มขึ้นจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- 2.1 ลากเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้น
- 2.2 วัดความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสอง ได้เท่ากันหรือไม่
- 2.3 โยกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแล้วสังเกตค่าที่วัดได้ ยังคงมีความสัมพันธ์เป็นเช่นเดิมหรือไม่

2.4 ข้อคาดเดา

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นยาว (เท่ากันหรือไม่).....

3. สรุป สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
-
4. เขียนข้อที่เพียงพอสำหรับการเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
-

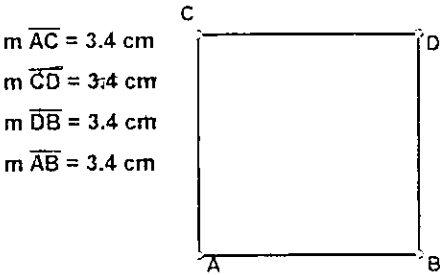
1.4.6 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

บทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

1. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABDC

หรือ เปิดไฟล์ Poly04.gsp



2. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

2.1 ลากเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้น กำหนดจุดตัดเป็นจุด E

2.2 วัด $m\angle AEC$ และ $m\angle DEC$

2.3 โยกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วสังเกตค่าที่วัดได้ยังคงเป็นเช่นเดิมหรือไม่

2.4 ข้อคาดเดา

เส้นทแยงมุมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเส้น (ตั้งฉากกันหรือไม่).....

3. สรุป สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

.....

.....

1.4.7 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

1. นักเรียนมีวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างไร

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามวิธีที่นำเสนอมา

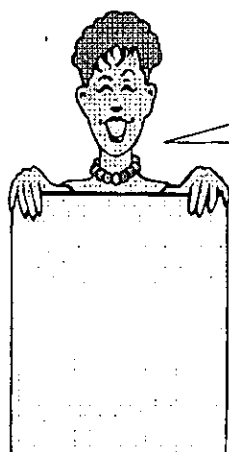
จากรูปที่ได้ วัดความยาวด้านต่าง ๆ ความยาวของเส้นทแยงมุม ขนาดของมุม และโยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ต่าง ๆ เปรียบเทียบกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

3. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (เป็นเช่นเดียวกับหรือไม่).....กับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

4. สรุป สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

.....

.....



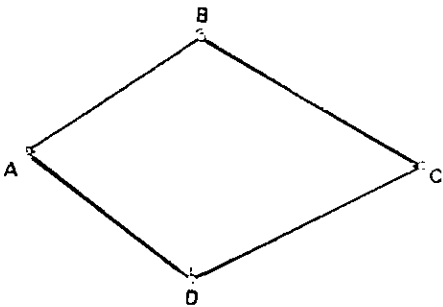
แบบนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไหมคะ

1.4.8 รูปสี่เหลี่ยมว่าว

บทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมว่าว คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันเพียงสองคู่

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมว่าว ABCD หรือ เปิดไฟล์ Poly05.gsp



2. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมว่าว

2.1 ลาก $\overline{AC}$

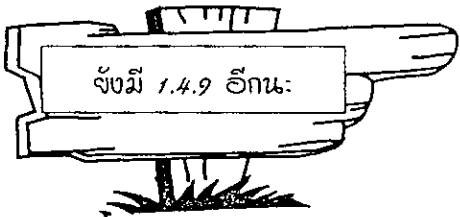
2.2 ลาก $\overline{BD}$ ตัด $\overline{AC}$ ที่จุด E

2.3 วัด $m\angle AEB$ และ $m\angle CEB$ จะได้ $m\angle AEB = \dots\dots\dots$ องศา , $m\angle CEB = \dots\dots\dots$ องศา

2.4 คลิกที่จุด A หรือ C โยกรูปแล้ว สังเกตค่าที่วัดได้ในข้อ 2.2 เป็นเช่นเดิมหรือไม่

2.5 ข้อคาดเดา

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมว่าวทั้งสองเส้น (ตั้งฉากกันหรือไม่).....



1.4.9 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

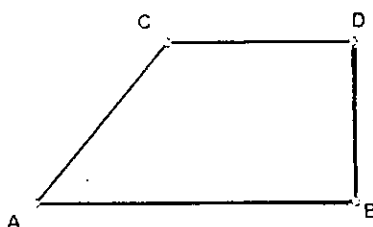
บทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันคู่เดียว

รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว คือ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านคู่ที่ไม่ขนานกับยาวเท่ากัน

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABDC

(หรือ เปิดไฟล์ Poly06.gsp)



2. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

- 2.1 กำหนดจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC

กำหนดจุด F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BD

ลาก $\overline{EF}$

- 2.2 นักเรียนจะมีวิธีตรวจสอบว่า $\overline{EF}$ ขนานกับด้านคู่ขนานอย่างไร และให้ตรวจสอบด้วยวิธีที่

นักเรียนนำเสนอมา

.....

.....

- 2.3 วัด EF และคำนวณค่าครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน

จะได้ว่า EF และ $\frac{1}{2}(AB + CD)$ สัมพันธ์กันอย่างไร.....

- 2.4 คลิกที่จุด A หรือจุด B หรือจุด D หรือจุด C โยกรูป แล้วสังเกตความยาวที่วัดไว้

2.5 ข้อคาดเดา

1. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านคู่ที่ไม่ขนานกันจะ (ขนานหรือไม่).....กับด้านคู่ขนาน
2. ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านคู่ที่ไม่ขนานกัน (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ).....ครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน

2.6 สรุป สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

3. นักเรียนคิดว่า มีวิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วอย่างไร

4. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

- 4.1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว แล้วสังเกตว่ามีความสัมพันธ์เช่นเดียวกับข้อ 2.6 หรือไม่...
- 4.2 วัดขนาดของมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว
- 4.3 วัดความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสอง
- 4.4 โยกรูปสังเกตความยาวและขนาดของมุมที่วัดไว้

4.5 ข้อคาดเดา

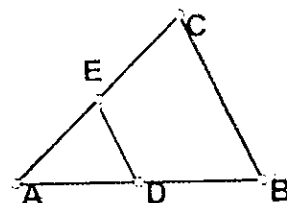
- 1) มุมที่ฐานเดียวกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วแต่ละคู่มิขนาด (เท่ากับหรือไม่).....
 - 2) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีความยาว (เท่ากับหรือไม่).....
5. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม

- 5.1 เปิด New Sketch

- 5.2 สร้าง $\triangle ABC$ ดังรูป

- 5.3 กำหนดจุด D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB

กำหนดจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC ลาก $\overline{DE}$



5.4 นักเรียนมีวิธีตรวจสอบอย่างไรว่า $\overline{DE}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ หรือไม่ และให้ตรวจสอบด้วยวิธีที่

นักเรียนเสนอมา.....
.....
.....

5.5 วัด DE และ BC สังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง DE และ BC จะได้ว่า.....

5.6 โยกรูปสามเหลี่ยม ABC สังเกตความสัมพันธ์ที่ได้ยังคงเป็นเช่นเดิมหรือไม่.....

5.7 ข้อคาดเดา

- 1) ส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะ (ขนานหรือไม่).....กับด้านที่สาม
- 2) ส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะยาว (เท่ากับหรือไม่เท่ากับ).....ครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม

5.8 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมขนานกับด้านอีกด้านหนึ่งแล้วจุดตัดของส่วนของเส้นตรงกับด้านที่สามจะเป็นจุดกึ่งกลางของด้านนั้นหรือไม่...

สรุป

1. รูปสี่เหลี่ยมที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมวาว และไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า
2. จำแนกรูปสี่เหลี่ยมได้ดังภาพประกอบในหน้าที่ (78)
3. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 1.
 2.
 3.
 4.
 5.

4. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ที่เพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

.....

.....

5. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่เพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

.....

.....

6. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่เพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

.....

.....

7. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่เพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

.....

.....

8. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมว่าว

.....

.....

9. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

.....

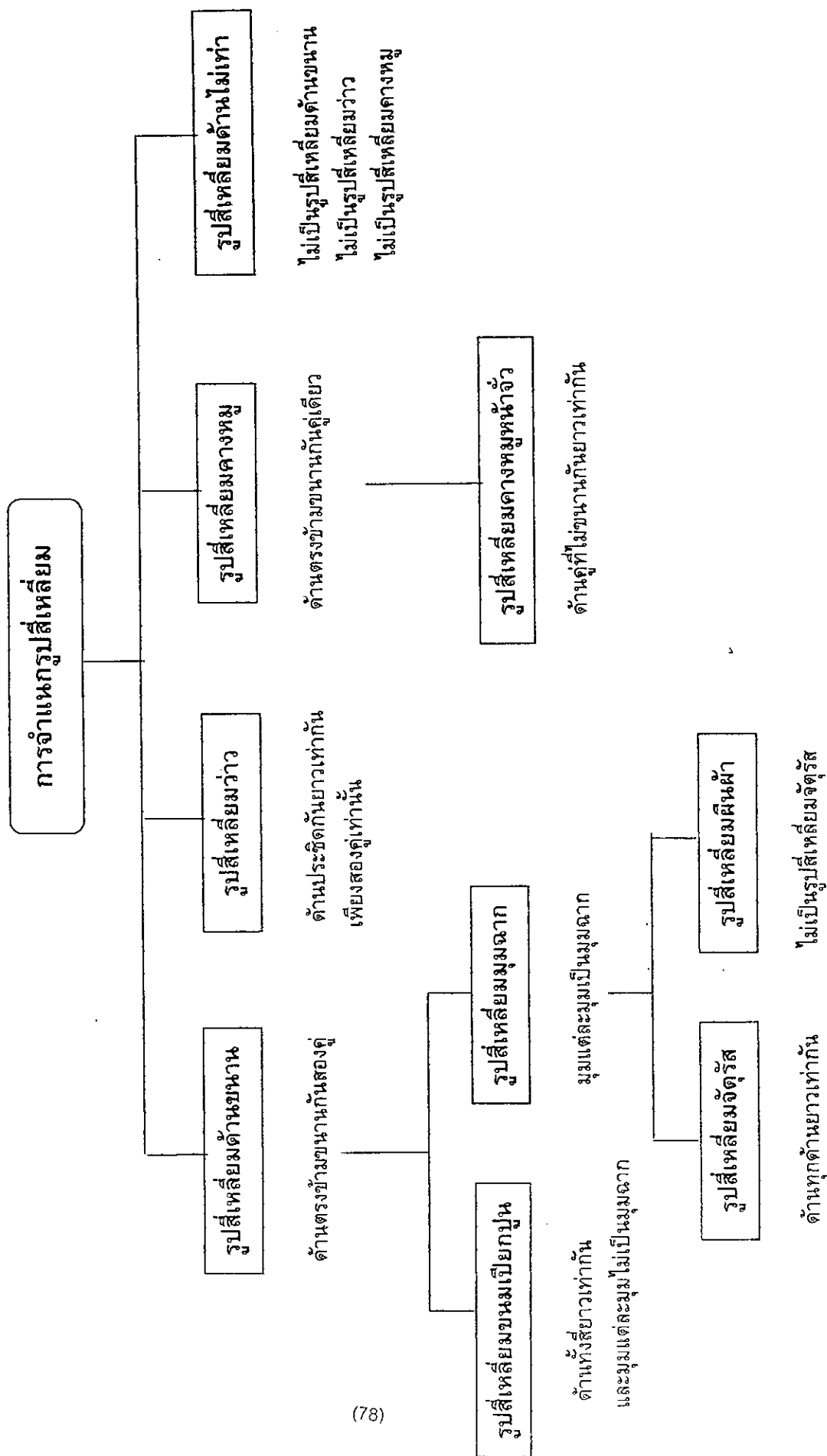
.....

10. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ที่เพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

.....

.....

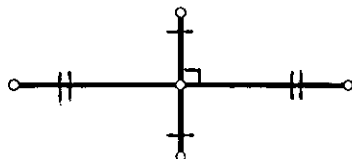
11. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูป
สามเหลี่ยม.....



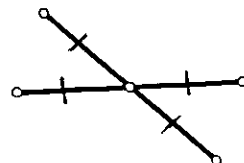
แบบฝึกปฏิบัติ 1.4 รูปหลายเหลี่ยม

1. ให้ออกชื่อของรูปสี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุม ดังรูป

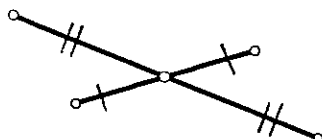
1.1



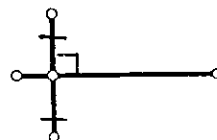
1.4



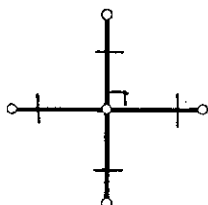
1.2



1.5



1.3



2. ให้เขียนรูปสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้ และบอกชนิดของรูปสี่เหลี่ยมด้วย

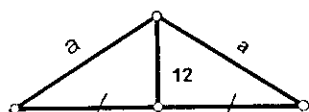
- 2.1 มีมุมฉากสองมุมเท่านั้น
- 2.2 มีด้านขนานคู่หนึ่งและคู่เดียวเท่านั้น
- 2.3 มีมุมฉากสามมุมเท่านั้น
- 2.4 มีด้านขนานกันสองคู่ และยาวไม่เท่ากัน
- 2.5 มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันและมุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก

3. ให้เขียนรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

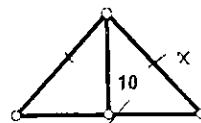
- 3.1 มีมุมฉากสองมุม
- 3.2 มีมุมฉากสามมุม
- 3.3 มีด้านยาวเท่ากันสามด้าน
- 3.4 มีด้านยาวเท่ากันสี่ด้าน
- 3.5 มีด้านคู่ขนานยาวเท่ากัน

4. จงหาค่าของตัวแปรในแต่ละข้อ

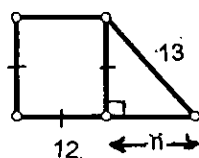
4.1 $a =$



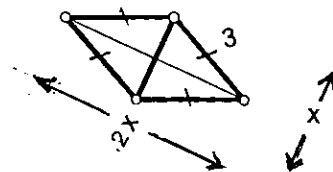
4.6 $x =$



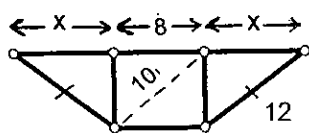
4.2 $n =$



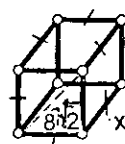
4.7 $x =$



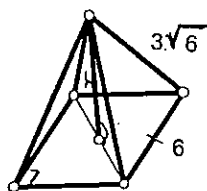
4.3 $x =$



4.8 $x =$

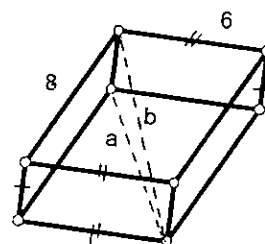


4.4 $h =$

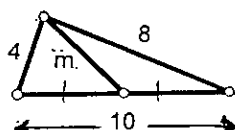


4.9 $a =$

$b =$



4.5 $m =$



(ข้อแนะ ลากเส้นส่วนสูง)

5. กำหนดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่า รูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ในกรณีที่ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จงบอกด้วยว่า ความยาวใด เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

5.1 7, 4, 8

5.2 12, 15, 19

5.3 $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$

5.4 1, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

5.5 $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

5.6 1, 1, $\sqrt{2}$

5.7 $n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1

5.8 $2n, n^2-1, n^2+1$

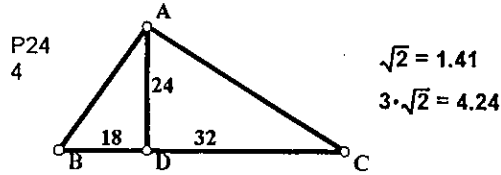
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

5.9 $2mn, m^2-n^2, m^2+n^2$

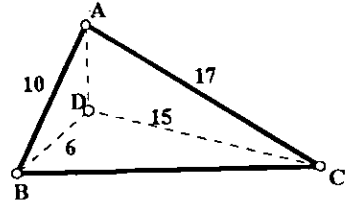
เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ
ที่ $m > n$

6. $\triangle ABC$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

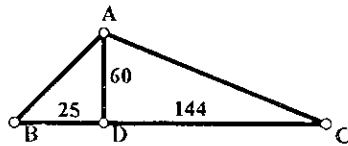
6.1



6.3

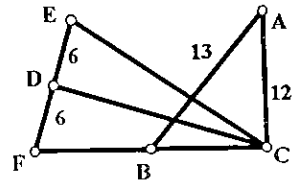


6.2



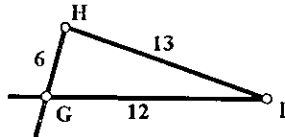
6.4

FC = EC
FB = BC
DC = 8
AB = 13

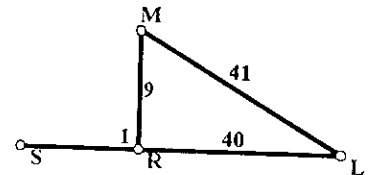


7. $\angle 1$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นมุมฉากหรือไม่

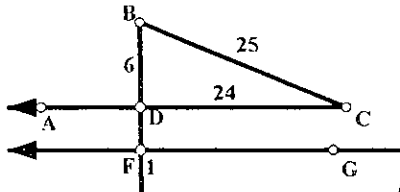
7.1



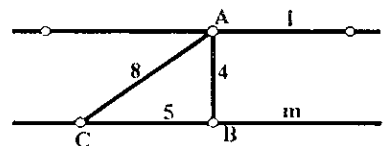
7.4



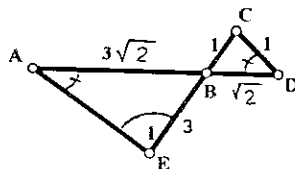
7.2



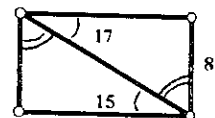
7.5



7.3



7.6



8. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $AE = ED$ และ $BF = FC$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 ถ้า $AB = 24$ หน่วย และ $CD = 43$ หน่วย

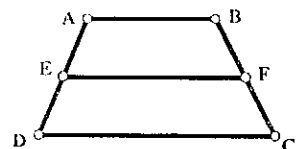
แล้ว $EF = \dots\dots\dots$

8.2 ถ้า $AB = X + 1$ หน่วย, $EF = 5X$ หน่วย และ $CD = 35$ หน่วย

แล้ว $AB = \dots\dots\dots$

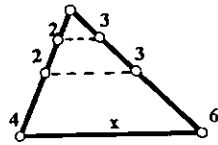
8.3 ถ้า $CD = 32$ หน่วย และ $EF = 23$ หน่วย

แล้ว $AB = \dots\dots\dots$

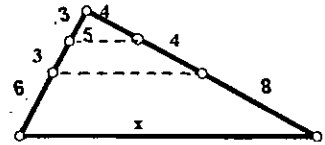


9. จากรูป จงหาค่าของ X

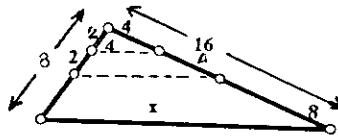
9.1 $x =$



9.3 $x =$

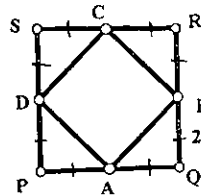


9.2 $x =$

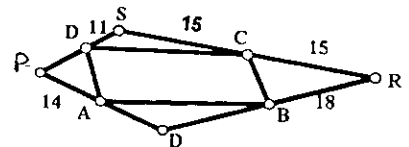


10. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่ เพราะเหตุใด

10.1



10.2

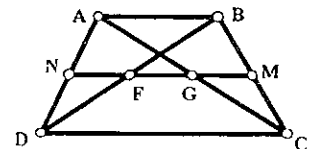


11. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

มี N และ M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ BC ตามลำดับ

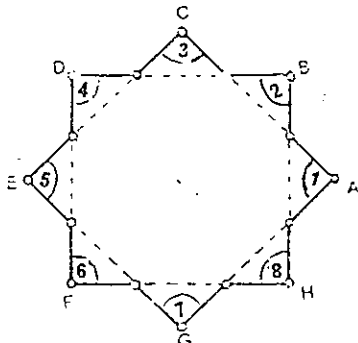
ถ้า $MN = 27$ หน่วย , $AB = 7x$ หน่วย

และ $CD = 4x - x$ แล้ว $FG = \dots\dots\dots$

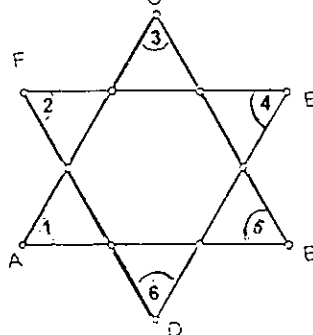


12. จงหาผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ระบุไว้ ของรูปหลายเหลี่ยมต่อไปนี้

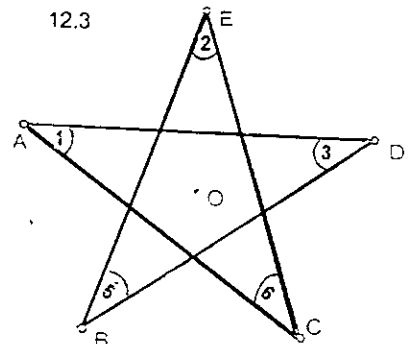
12.1



12.2

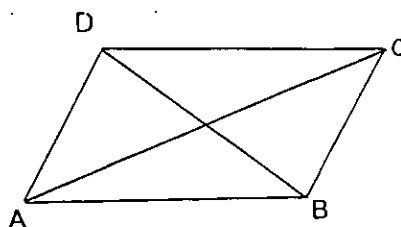


12.3



โจทย์

*13 สร้าง ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$



สำรวจ

$AC + BD$ เท่ากับอะไรบ้าง.....

.....

$AC - BD$ เท่ากับอะไรบ้าง.....

.....

$AC^2 + BD^2$ เท่ากับอะไรบ้าง.....

.....

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของเส้นทแยงมุมและความยาวของด้าน ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ได้แก่

.....

.....

.....

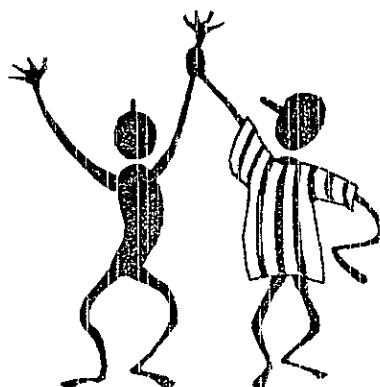
ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

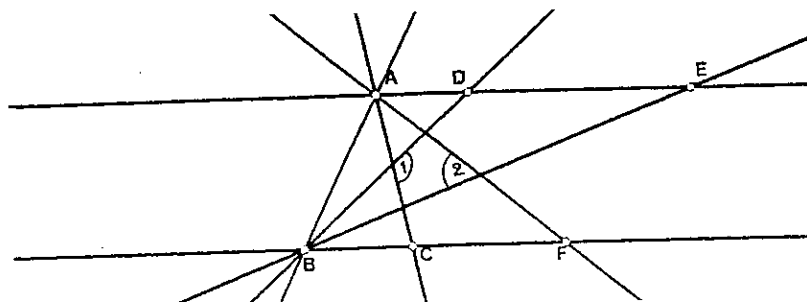
.....

.....





โจทย์

*14 สร้าง $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ สร้าง $\overline{BD}$ และ $\overline{BE}$ แบ่ง $\angle ABF$ เป็นสามส่วนเท่า ๆ กันสร้าง $\overline{AC}$ และ $\overline{AF}$ แบ่ง $\angle BAE$ เป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

ตั้งข้อคาดเดา

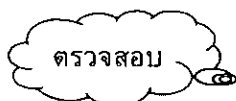
หนูนาตั้งข้อคาดเดาว่า $m < 1$ และ $m < 2$ สามารถหาค่าได้เป็นจำนวนเต็ม โดยมีหน่วยเป็นองศา

.....

.....

นักเรียนช่วยหนูนาตรวจสอบด้วยว่า ข้อคาดเดาตั้งกล่าวน่าจะถูกต้องหรือไม่

.....

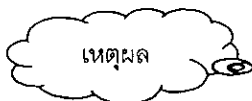


ตรวจสอบ

ถ้าข้อคาดเดาตั้งกล่าวน่าจะถูกต้อง แล้ว $m\angle 1 = \dots$ องศา และ $m\angle 2 = \dots$ องศา

.....

.....



เหตุผล

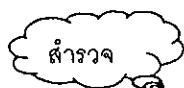
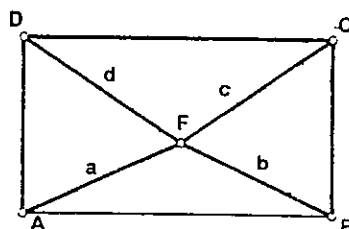
เพราะเหตุใด.....

.....





*15 ให้เมือง A, B, C และ D อยู่ที่จุดยอดมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ถ้ามีโรงงานอยู่ที่จุด F โดยที่จุด F อยู่ห่างจากเมือง A, B, C และ D เป็น
ระยะทาง a, b, c และ d หน่วยตามลำดับ



ความเป็นไปได้ที่ $a^2 + b^2$ และ $c^2 + d^2$ จะเท่ากัน มีหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

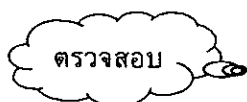
.....
ความเป็นไปได้ที่ $a^2 + c^2$ และ $b^2 + d^2$ จะเท่ากันมีหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....
ความเป็นไปได้ที่ $a^2 + d^2$ และ $b^2 + c^2$ จะเท่ากันมีหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)



ข้อคาดเดาเกี่ยวกับตำแหน่งของจุด F ในกรณีที่ข้อความที่ได้จากการสำรวจ
เป็นจริง.....

.....
.....



ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่า
จะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....
.....
.....



เพราะเหตุใด

.....
.....
.....

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.5

เรื่อง ความคล้ายกัน

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

1.5.1 รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน

1.5.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่ารูป n เหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่
2. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่
3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันจะมีอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันย่อมาเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน
4. นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันตามข้อ 3 ไปใช้



ใบงาน 1.5

เนื้อหาในใบงานนี้กล่าวถึง ความคล้าย ซึ่งประกอบด้วย 2 หัวข้อย่อย

1.5.1 รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน

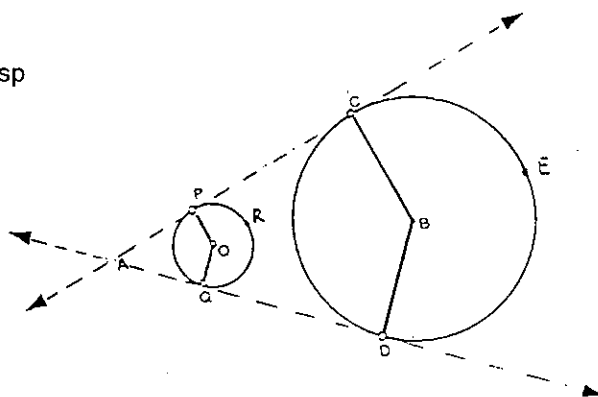
การขยายหรือย่อขนาดของรูปต่าง ๆ โดยใช้เครื่องถ่ายเอกสาร หรือการอัดภาพหรือขยายภาพของ
 ร้านถ่ายรูป วิธีการ คือ ต้องมีจุดกำเนิดแสง มีฉากรับเงาของภาพโดยฉากรับเงานั้นต้องขนานกับภาพ
 ดังนั้นเราจะเห็นว่าทุกสำเนาจะมีรูปร่างเหมือนกัน หรือรูปร่างแบบเดียวกันแต่ขนาดต่างกัน

ในวิชาเรขาคณิต

รูปที่มีรูปร่างเหมือนกัน แต่ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากัน เรากล่าวว่า เป็นรูปที่คล้ายกัน

ตัวอย่าง 1

1.1 เปิดไฟล์ Simcir01.gsp



1.2 จะได้ วงกลมสองวง มีรูปร่างแบบเดียวกัน แต่ขนาดต่างกัน

1.3 รัศมีของวงกลมทั้งสองได้แก่ $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ และ $\overline{OR}$

จะได้ว่า $BC = BD = BE$ และ $OP = OQ = OR$

1.4 ดังนั้นอัตราส่วนของความยาวของรัศมีของวงกลมทั้งสอง

$$\frac{BC}{OP}, \frac{BD}{OQ} \text{ และ } \frac{BE}{OR} \text{ จึงเท่ากัน}$$

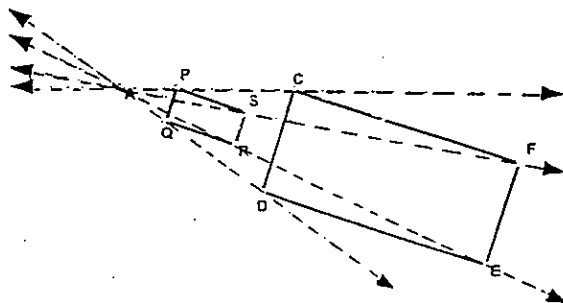
1.5 คลิกที่จุด A หรือ P หรือ C โยกรูปให้มีขนาดของรูปต่าง ๆ กันแล้ว $\frac{BC}{OP}, \frac{BD}{OQ}$

และ $\frac{BE}{OR}$ ยังคงมีค่าเท่ากันหรือไม่.....

1.6 ปิดไฟล์ Simcir01.gsp

ตัวอย่าง 2

2.1 เปิดไฟล์ Simqua02.gsp



2.2 วัด $m\angle QPS$, $m\angle PSR$, $m\angle SRQ$, $m\angle RQP$, $m\angle DCF$, $m\angle CFE$, $m\angle FED$
และ $m\angle EDC$

2.3 วัด PQ, QR, RS, SP, CD, DE, EF และ FC

2.4 คำนวณค่าอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมสองรูป

$$\frac{PQ}{CD} = \dots\dots\dots, \frac{QR}{DE} = \dots\dots\dots, \frac{RS}{EF} = \dots\dots\dots, \frac{SP}{FC} = \dots\dots\dots$$

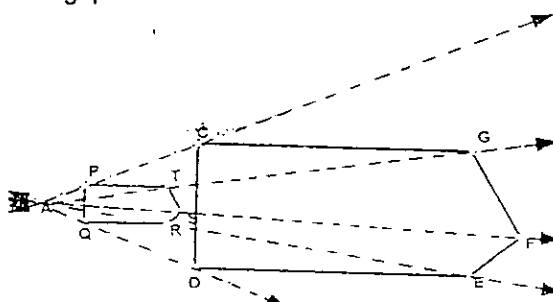
2.5 สังเกตค่าที่ได้ พบว่า 1 ขนาดของมุมของรูปทั้งสอง.....
2. อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปทั้งสอง.....

2.6 คลิกที่จุด A หรือ P หรือ C โยกรูปให้มีขนาดต่าง ๆ กันแล้วสังเกตค่าที่ได้ จากข้อ 2.6
พบว่า.....

2.8 ปิดไฟล์ Simqua02.gsp

ตัวอย่าง 3

3.1 เปิดไฟล์ Simpol01.gsp



3.2 จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมสองรูปมีรูปร่างแบบเดียวกัน แต่มีขนาดต่างกัน

3.3 วัด $m\angle TPQ$, $m\angle PQR$, $m\angle QRS$, $m\angle RST$, $m\angle STP$, $m\angle GCD$, $m\angle CDE$, $m\angle EFG$ และ $m\angle FGC$ เปรียบเทียบขนาดของมุมของรูปทั้งสอง จะได้มุมมีขนาดเท่ากัน (ก็).....คู่

3.4 วัดความยาวของด้านทั้งห้าของแต่ละรูป

3.5 คำนวณค่าอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปทั้งสอง จะได้ว่า

$$\frac{PQ}{CD} = \dots\dots\dots, \frac{QR}{DE} = \dots\dots\dots, \frac{RS}{EF} = \dots\dots\dots, \frac{ST}{FC} = \dots\dots\dots \text{และ } \frac{TP}{GC} = \dots\dots\dots$$

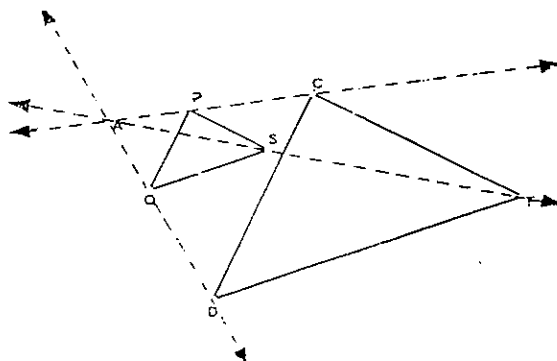
3.6 สังเกตค่าที่ได้จากข้อ 3.4 พบว่า.....

3.7 คลิกที่จุด A หรือ P หรือ C โยกรูปให้มีขนาดต่าง ๆ กัน แล้วสังเกตค่าที่ได้จากข้อ 3.4 พบว่า.....

3.8 ปิดไฟล์ Simpol01.gsp

ตัวอย่าง 4

4.1 เปิดไฟล์ Simtri01.gsp



4.2 จะได้รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีรูปร่างแบบเดียวกัน แต่มีขนาดต่างกัน

4.3 วัด $m\angle SPQ$, $m\angle PQS$, $m\angle QSPF$, $m\angle FCD$, $m\angle CDF$ และ $m\angle DFC$

สังเกตว่ามีขนาดของมุมเท่ากัน (ก็).....คู่

4.4 วัด CD , DF , CF , PQ , QS และ PS

4.5 คำนวณค่าอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากันของรูป

สามเหลี่ยมสองรูป $\frac{CD}{PQ} = \dots$, $\frac{DF}{QS} = \dots$, $\frac{CF}{PS} = \dots$ จะได้อัตราส่วนทั้งสามค่า (เท่ากันหรือไม่)

4.6 ปิดไฟล์ Simtri01.gsp

บทนิยาม

รูป n เหลี่ยมสองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อ รูป n เหลี่ยมทั้งสองนั้นมีขนาดของมุมเท่ากัน เป็นตัว ๆ จำนวน n ตัว และอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมบัยกันจะเท่ากับทุก อัตราส่วน (ด้านคู่ที่สมบัยกันเป็นด้านซึ่งอยู่ระหว่างมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน)

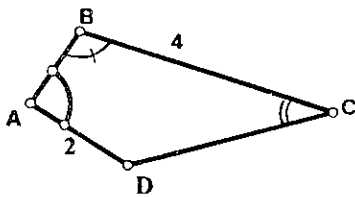
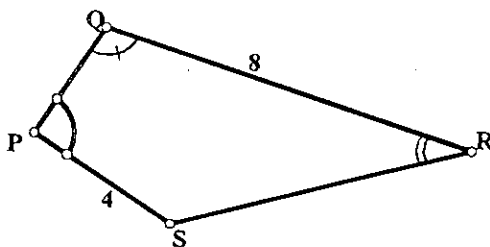
สัญลักษณ์

สัญลักษณ์ " $\sim$ " แทนคำว่า "คล้ายกัน"

การใช้สัญลักษณ์ " $\sim$ " นิยมเขียนตัวอักษรตามลำดับของมุมที่มีขนาดเท่ากัน และ ด้านคู่ที่สมบัยกัน

ตัวอย่าง

จากรูป



จะได้ว่า $\square ABCD \sim \square PQRS$ เพราะว่า

$$m\angle ABC = m\angle PQR, m\angle BCD = m\angle QRS$$

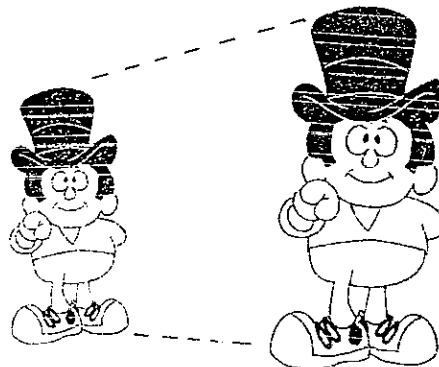
$$m\angle CDB = m\angle RSP, m\angle DAB = m\angle SPQ$$

ด้านคู่ที่สมบัยกัน มี

$$\overline{AB} \text{ กับ } \overline{PQ}, \overline{BC} \text{ กับ } \overline{QR}$$

$$\overline{CD} \text{ กับ } \overline{RS}, \overline{DA} \text{ กับ } \overline{SP}$$

$$\text{และ } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$



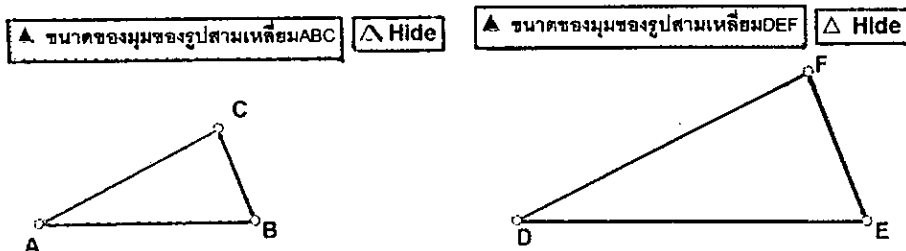
1.5.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมเป็นรูป n เหลี่ยม เราจึงสามารถกล่าวได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูป คล้ายกันเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้สอดคล้องกับบทนิยามของรูป n เหลี่ยมสองรูป คล้ายกัน กล่าวคือ รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ และอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากับทุกอัตราส่วน ทั้งนี้จากข้อความข้างต้นจะเห็นว่า การตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน จะต้องพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีสมบัติครบ 2 ประการดังนี้

1. ขนาดของมุมเท่ากันสามคู่
2. อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน เท่ากันสามอัตราส่วน

ให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมต่อไปนี้ และเติมข้อความลงในช่องว่าง

1. เปิดไฟล์ Trisim33.gsp



2. วัด $m\angle CAB$, $m\angle ABC$, $m\angle BCA$, $m\angle FDE$, $m\angle DEF$ และ $m\angle EFD$

(หรือดับเบิลคลิกกรอบ ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC

ดับเบิลคลิกกรอบ ขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม DEF)

3. วัด AB, BC, CA, DE, EF และ FD

4. คำนวณอัตราส่วน $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$

จะได้ $\frac{AB}{DE} = \dots\dots\dots$, $\frac{BC}{EF} = \dots\dots\dots$ และ $\frac{CA}{FD} = \dots\dots\dots$

และอัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสามอัตราส่วน สัมพันธ์กันอย่างไร.....

5. คลิกที่จุด A, หรือ B, หรือ C, หรือ D หรือ E และ F โยกรูป

จะได้ $m\angle CAB = m\angle \dots\dots\dots m\angle ABC = m\angle \dots\dots\dots m\angle BCA = m\angle \dots\dots\dots$

อัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสามอัตราส่วนสัมพันธ์กันอย่างไร.....

6. จากกิจกรรมข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ แล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสาม อัตราส่วนจะเท่ากันหรือไม่.....

7. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ จะคล้ายกันหรือไม่.....

8. ดังนั้นสรุปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากับสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูป (คล้ายกันหรือไม่)

9. จากสิ่งที่ทำมา ทำให้เกิดแนวคิดในการกำหนดบทนิยามที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมสองรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังนี้

บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน เมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นมีขนาดของมุมเท่ากับเป็นคู่ ๆ สามคู่

ในขณะนี้เมื่อต้องการตรวจสอบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันหรือไม่ ก็ตรวจสอบเพียงขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ ซึ่งเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันโดยเงื่อนไขนี้แล้ว ก็จะได้ว่า อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน เท่ากันทั้งสามอัตราส่วน

10. ถ้า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $m\angle A = m\angle D$ และ $m\angle B = m\angle E$

แล้ว $m\angle C$ และ $m\angle F$ จะเท่ากันหรือไม่.....เพราะเหตุใด.....

11. ดังนั้น ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูป มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ แล้ว ขนาดของมุมที่เหลือจะต้อง (เท่ากันหรือไม่) ซึ่งทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น (คล้ายกันหรือไม่).....

12. จากความรู้ข้างต้นจะได้ว่า เรามีวิธีตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน 3 วิธี อย่างไรบ้าง

12.1

12.2

12.3

แต่นักเรียนคิดว่าวิธีใดง่ายที่สุด.....เพราะเหตุใด.....

13. ในทางปฏิบัติเป็นการเพียงพอที่จะตรวจสอบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันหรือไม่ โดยตรวจสอบว่า ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ เพียงสองคู่ เท่านั้น

ถ้านักเรียนสนใจจะสืบเสาะ จะพบว่า มีวิธีตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันได้อีกหลายวิธี เช่น

- 13.1 อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน เท่ากันสองอัตราส่วน และมุมในระหว่างด้านคู่ที่สมนัยกันนั้นมีขนาดเท่ากัน
- 13.2 อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน เท่ากันสามอัตราส่วน



แบบฝึกปฏิบัติ 1.5 ความคล้าย

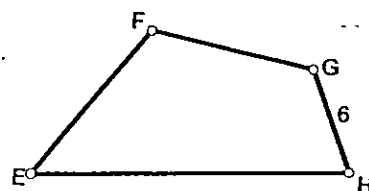
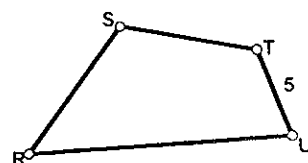
1. จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริง และข้อใดเป็นเท็จ

- 1.1 ถ้ารูปหลายเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน แล้ว ขนาดของมุมภายในของรูปทั้งสองเท่ากัน มุมต่อมุม
- 1.2 ถ้ารูปหลายเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน แล้ว อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน
- 1.3 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นคล้ายกัน
- 1.4 ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
- 1.5 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส PQRS คล้ายกัน
- 1.6 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC และ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว XYZ คล้ายกัน
- 1.7 ถ้าอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปเท่ากัน แล้ว รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองรูปนั้นคล้ายกัน

2. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

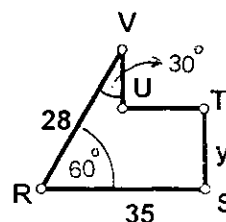
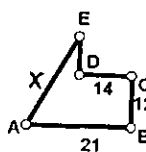
2.1 กำหนดให้ $\square RSTU \sim \square EFGH$ ดังรูป

1. $m\angle R \cong m\angle \dots\dots$	5. $\frac{HG}{UT} = \dots\dots\dots$
2. $m\angle S \cong m\angle \dots\dots$	6. $\frac{RU}{EH} = \dots\dots\dots$
3. $m\angle H \cong m\angle \dots\dots$	7. $\frac{ST}{FG} = \dots\dots\dots$
4. $m\angle G \cong m\angle \dots\dots$	8. $\frac{RS}{EF} = \dots\dots\dots$



2.2 กำหนดให้ $ABCDE \sim RSTUV$ ดังรูป

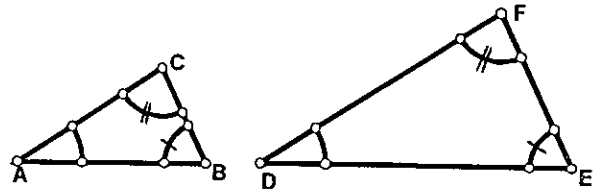
1. $m\angle E = m\angle \dots\dots$
2. $m\angle A = m\angle \dots\dots$
3. $m\angle B = m\angle \dots\dots$
4. $m\angle T = m\angle \dots\dots$
5. $x = \dots\dots\dots$
6. $y = \dots\dots\dots$
7. $UT = \dots\dots\dots$
8. ถ้า $UV = 20$ หน่วย แล้ว $DE = \dots\dots\dots$
9. $\frac{RS}{AB} = \dots\dots\dots$
10. $\frac{UV}{DE} = \dots\dots\dots$



3. กำหนดให้ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ดังรูป

จะเขียนอัตราส่วนของความยาวของด้านที่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันให้ครบทั้งสามคู่

$$\underline{AB} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



4. กำหนดให้ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ และอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน เท่ากับ 3 : 7

จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

4.1 ถ้า $AB = 15$ หน่วย แล้ว $DE = \dots\dots\dots$

4.2 ถ้า $EF = 42$ หน่วย แล้ว $BC = \dots\dots\dots$

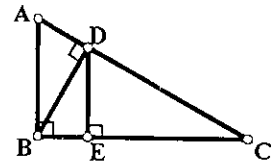
4.3 ถ้า $DF = 56$ หน่วย แล้ว $AC = \dots\dots\dots$

4.4 $\frac{AB}{DE} = \dots\dots\dots$

5. จากรูป กำหนดให้ $m\angle ABC = m\angle BDC = m\angle DEC = 90$ องศา

จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมคู่ที่คล้ายกันมา 4 คู่

.....



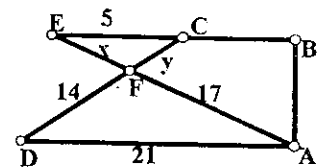
6. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มี AD และ BC เป็นด้านคู่ขนาน

จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมคู่ที่คล้ายกันและหาค่าของ x และ y

6.1 $\triangle \dots\dots\dots \sim \triangle \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

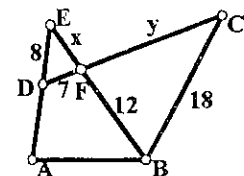
$y = \dots\dots\dots$



6.2 $\triangle \dots\dots\dots \sim \triangle \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

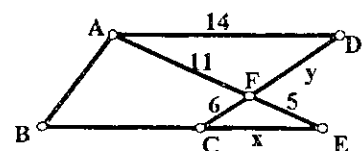
$y = \dots\dots\dots$



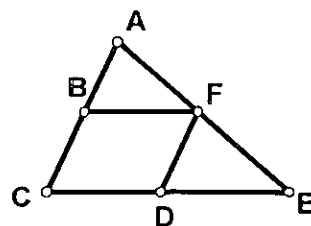
6.3 $\triangle \dots\dots\dots \sim \triangle \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$



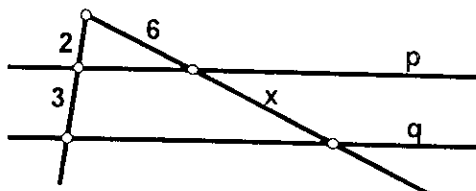
7. จากรูป กำหนด ความยาวด้านของแต่ละข้อตามตาราง
จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมคู่ที่คล้ายกัน ของแต่ละข้อ



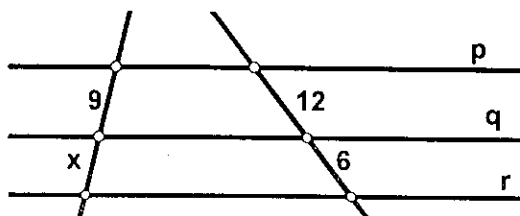
ข้อ	AB	BC	CD	DE	FE	AF	BF	FD	รูปสามเหลี่ยมคู่ที่คล้ายกัน
7.1	1	1	1	1	1	1	1	1	
7.2	3	6	6	3	6	3	3	5.2	
7.3	1	2	2	4	4	2	2	2	
7.4	1	2	2	1	1	2	1.7	1	
7.5	4	10	10	2	4	8	6.5	4	

8. จงหาค่าของ x ของแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 กำหนดให้ $p \parallel q$



8.2 กำหนดให้ $p \parallel q \parallel r$



9. จากรูป กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มี $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นด้านคู่ขนาน และ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

9.1 ถ้า $AE = \frac{1}{4}$ หน่วย และ $BC = 30$ หน่วย

แล้ว $BF = \dots\dots\dots$ และ $FC = \dots\dots\dots$

9.2 ถ้า $BG = \frac{3}{4}$ หน่วย, $AD = 8$ หน่วย และ $BC = 14$ หน่วย

แล้ว $AE = \dots\dots\dots$, $ED = \dots\dots\dots$

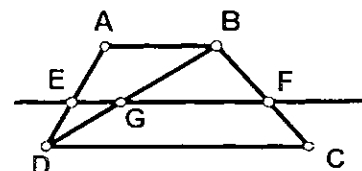
$BF = \dots\dots\dots$ และ $FC = \dots\dots\dots$

9.3 ถ้า $BG = 3$ หน่วย $GD = 5$ หน่วย

และ $GF = 4$ หน่วย แล้ว $CD = \dots\dots\dots$

9.4 ถ้า $AE = 2$ หน่วย $ED = 3$ หน่วย

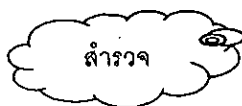
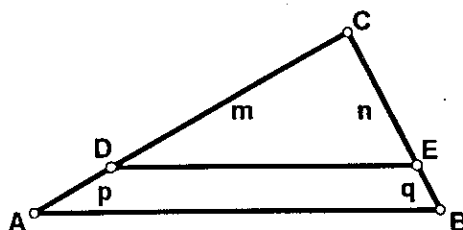
และ $GF = 4$ หน่วย แล้ว $CD = \dots\dots\dots$





โจทย์

*10 สร้าง $\triangle ABC$ ลาก $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ กำหนดให้ $CD = m$ หน่วย $AD = p$ หน่วย
 $CE = n$ หน่วยและ $BE = q$ หน่วย



สำรวจ

มีรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

มีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ).....

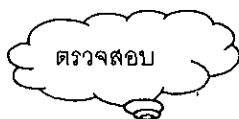
$\frac{CD}{CA}$ เท่ากับอัตราส่วนใดบ้าง.....

$\frac{m}{p}$ เท่ากับอัตราส่วนใดบ้าง.....



ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนสังเกตเห็นได้แก่.....



ตรวจสอบ

จากข้อคาดเดา ที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่าข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง.....



เหตุผล

เพราะเหตุใด.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6

เรื่อง วงกลม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

- 1.6.1 ความหมายของวงกลม สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม และวงกลมที่เท่ากัน
- 1.6.2 สมบัติเกี่ยวกับวงกลม
 1. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
 2. ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม
 3. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
 4. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและส่วนโค้งของวงกลม
 5. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม
 6. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางมายังคอร์ด
 7. ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีและเส้นสัมผัสวงกลม
 8. สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม
 9. สมบัติเกี่ยวกับมุมที่สัมผัสกับคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม
 10. รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายและลักษณะของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา และนำสมบัตินี้ไปใช้

4. บอกสมบัติเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน และนำสมบัตินี้ไปใช้
5. บอกสมบัติเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมุมและส่วนโค้งของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
6. บอกสมบัติเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
7. บอกสมบัติเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางมายังคอร์ด และนำสมบัตินี้ไปใช้
8. บอกสมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
9. บอกสมบัติเกี่ยวกับมุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
10. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมจะมีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันเท่ากับ 180 องศา และนำสมบัตินี้ไปใช้
11. บอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามเท่ากับ 180 องศา จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้

ใบงาน 1.6

เนื้อหาในใบงานนี้กล่าวถึง วงกลม และสมบัติเกี่ยวกับวงกลม ซึ่งประกอบด้วย 2 หัวข้อย่อย

1.6.1 วงกลม

บทนิยาม

วงกลม คือ รูปซึ่งประกอบด้วยจุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกัน เป็นระยะทางเท่ากัน

สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม

จากรูป

O เป็นจุดคงที่

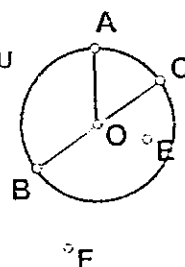
เรียกจุด O ว่า จุดศูนย์กลาง ของวงกลม หรือ ศูนย์กลาง ของวงกลม

A เป็นจุดอยู่บนวงกลม เรียก $\overline{OA}$ ว่า รัศมี ของวงกลม

B และ C เป็นจุดอยู่บนวงกลม และ BC ผ่านจุดศูนย์กลาง O

เรียก $\overline{BC}$ ว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง ของวงกลม

E เป็นจุดภายในวงกลม F เป็นจุดภายนอกวงกลม

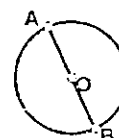


ถ้าลากเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมแล้ว

เส้นผ่านศูนย์กลางเส้นนั้นจะแบ่งวงกลมออกเป็น

ส่วนโค้งสองส่วนที่เท่ากันทุกประการ

เรียกส่วนโค้งแต่ละส่วนว่า ครึ่งวงกลม



ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกันเรียกว่า คอร์ด

คอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน

ถ้าคอร์ด AB ไม่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางและตัดวงกลม ดังรูป

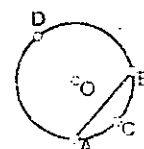
เรียก $\overline{AB}$ ว่าคอร์ด AB

เรียกส่วนโค้ง ADB ว่า ส่วนโค้งใหญ่ AB

อาจเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $\widehat{ADB}$

เรียกส่วนโค้ง ACB ว่า ส่วนโค้งน้อย AB

อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\widehat{ACB}$ หรือ $\widehat{AB}$



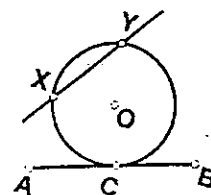
เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงซึ่งตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น

เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงซึ่งตัดวงกลมสองจุด

$\overline{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

C เป็นจุดสัมผัสวงกลม

$\widehat{XY}$ เป็นเส้นตัดวงกลม เมื่อมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุดสัมผัส C ก็อาจกล่าวว่า $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุดสัมผัส C ด้วย

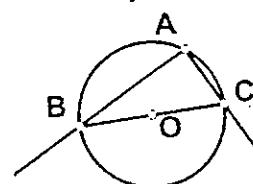


มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดอยู่บนวงกลม และ

แขนของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\angle BAC$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม

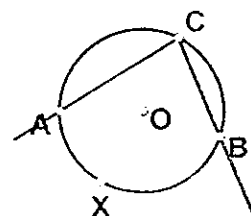


มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดอยู่บนวงกลมและ

แขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

$\angle ACB$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

$\widehat{AXB}$ อยู่ตรงข้าม $\angle ACB$ เรากล่าวว่า $\widehat{AXB}$ รองรับ $\angle ACB$

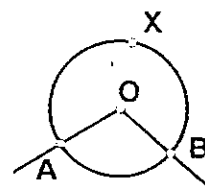


มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดยอด และมีรัศมีเป็นแขนของมุม

มุม AOB และมุมกลับ AOB เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มี $\widehat{AB}$ รองรับ $\angle AOB$

และมี $\widehat{AXB}$ รองรับมุมกลับ AOB



การเรียกชื่อวงกลม

在这里我们用圆心点作为圆的名称，例如圆O

จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง เรียกว่า วงกลม O หรือ $\odot O$

วงกลมที่เท่ากัน

เนื่องจากวงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน ทับกันได้สนิท

ดังนั้น วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากันจึงเท่ากันทุกประการ และเรียกว่า วงกลมที่เท่ากัน

ข้อตกลง เกี่ยวกับการวัดขนาดของส่วนโค้งของวงกลม

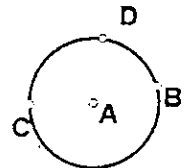
ขนาดของส่วนโค้ง มีการวัด 2 แบบ ดังนี้

1. วัดตามขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม (ใน GSP ใช้คำสั่ง Arc Angle) ผลของการวัดจะมีหน่วยเป็นองศา
2. วัดตามความยาวของส่วนโค้ง (ใน GSP ใช้คำสั่ง Arc Length) ผลของการวัดมีหน่วยเป็นหน่วยของความยาว

วัดมีหน่วยเป็นหน่วยของความยาว $m\angle \widehat{DC} \text{ on } \odot AB = 100.03^\circ$

Length $\widehat{DC} \text{ on } \odot AB = 1.76 \text{ cm}$

ตัวอย่าง การวัดขนาดของส่วนโค้งด้วย GSP จากรูป



วัดโดยใช้คำสั่ง Arc Angle จะได้ว่า $m\angle \widehat{DC} \text{ on } \odot AB = 100.03$ องศา

ซึ่งหมายความว่า ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งน้อย DC

บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง A รัศมียาวเท่ากับ AB มีค่าเท่ากับ 100.03 องศา

วัดโดยใช้คำสั่ง Arc Length จะได้ว่า Length $\widehat{DC} \text{ on } \odot AB = 1.76$

เซนติเมตร

ซึ่งหมายความว่า ความยาวของส่วนโค้งน้อย DC บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง

A รัศมียาวเท่ากับ AB มีค่าเท่ากับ 1.76 เซนติเมตร

การวัดขนาดของส่วนโค้ง DC ตามขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

อาจเขียนแทนด้วย $m\angle \widehat{DC}$

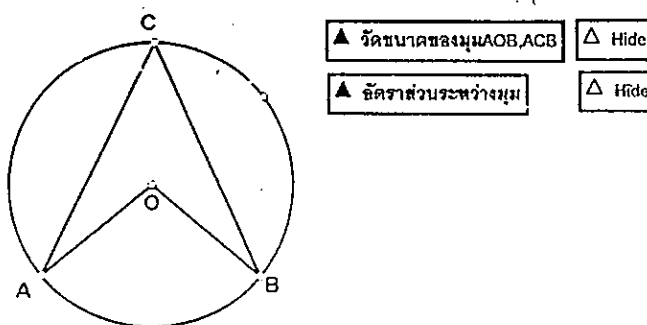
การวัดขนาดของส่วนโค้งน้อย DC ตามความยาวของส่วนโค้ง อาจเขียนแทน

ด้วย Length $\widehat{DC}$

1.6.2 สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

1. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

1.1 เปิดไฟล์ cir21.gsp



จะได้ $\angle AOB$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O

และ $\angle ACB$ เป็นมุมในส่วนโค้งที่รองรับส่วนโค้งเดียวกับมุม AOB ของวงกลม O

1.2 วัด $m\angle AOB$ และ $m\angle ACB$ และหาค่าอัตราส่วนระหว่าง $m\angle AOB$ และ $m\angle ACB$

จะได้ว่า.....

1.3 คลิกที่จุด A หรือจุด O หรือจุด B หรือจุด C หรือ วงกลม O โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 1.2

1.4 ข้อคาดเดา

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็น (กี่) เท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

2. ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม

2.1 จากข้อ 1.3 ในหัวข้อที่ 1

ถ้าโยกรูปแล้วได้ขนาดของมุม AOB เท่ากับ 180 องศา แสดงว่า ส่วนของเส้นตรง AB เป็น (เส้นผ่านศูนย์กลางหรือไม่)... $\angle ACB$ เป็นมุม(แหลม/ฉาก/ป้าน)... เพราะ $m\angle ACB =$

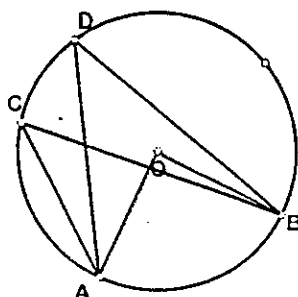
2.2 คลิกที่จุด C หรือวงกลม O เพื่อโยกรูป สังเกตความสัมพันธ์ในข้อ

2.3 ข้อคาดเดา

มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด (กี่).....องศา

3. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

3.1 เปิดไฟล์ cir22.gsp



▲ วัดขนาดของมุม AOB, ACB	△ Hide
▲ วัดขนาดของมุม ADB	△ Hide
▲ อัตราส่วนระหว่างมุม	△ Hide

จะได้ $\angle AOB$ เป็นมุม (ในส่วนโค้ง/ที่จุดศูนย์กลาง).....ของวงกลม.

และ $\angle ACB, \angle ADB$ เป็นมุม (ในส่วนโค้ง/ที่จุดศูนย์กลาง).....ของวงกลม

3.2 วัด $m\angle AOB, m\angle ACB$ และ $m\angle ADB$ สังเกตความสัมพันธ์จะได้ว่า (มุมคู่ใดมีขนาดเท่ากันบ้าง).....

3.3 หาค่าอัตราส่วนระหว่าง $m\angle AOB$ และ $m\angle ACB$ จะได้ว่า.....

3.4 หาค่าอัตราส่วนระหว่าง $m\angle AOB$ และ $m\angle ADB$ จะได้ว่า.....

3.5 คลิกที่จุด A หรือจุด O หรือจุด B หรือจุด C หรือจุด D หรือ วงกลม O โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 3.2 - 3.4

3.6 ข้อคาดเดา

มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาด (เท่ากับหรือไม่).....

4. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมและส่วนโค้งของวงกลม

4.1 เปิดไฟล์ New Sketch .

4.2 สร้างวงกลม P และ Q ให้เป็นวงกลมเท่ากัน

4.3 สร้างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม P และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม Q ให้มีขนาดเท่ากัน

4.4 วัดความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสอง สังเกตความสัมพันธ์จะได้ว่า (ความยาวเท่ากันหรือไม่)....

4.5 คลิกที่จุดบนวงกลมทั้งสอง หรือวงกลม P หรือวงกลม Q โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ใน

ข้อ 4.4

4.6 สร้างวงกลม R และสร้างมุมที่จุดศูนย์กลาง $m\angle MRN$ และ $m\angle SRT$ โดยที่ขนาดของมุมทั้งสองเท่ากัน วัดความยาวของ $\widehat{MN}$ และความยาวของ $\widehat{ST}$ จะได้ว่า

คลิกที่จุดบนวงกลม R โยกรูป สังเกตว่าความยาวของ $\widehat{MN}$ เท่ากับความยาวของ $\widehat{ST}$ หรือไม่

4.7 ข้อคาดเดา

ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะ (ยาวเท่ากับหรือไม่).....

4.8 ลบจอภาพ

4.9 สร้างวงกลม P และวงกลม Q ให้เป็นวงกลมที่เท่ากัน

4.10 สร้าง $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ บนวงกลม P และส่วนโค้ง EF บนวงกลม Q ให้มีขนาดเท่ากัน

4.11 ลาก $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, $\overline{QE}$ และ $\overline{QF}$

4.12 วัด $m\angle APB$, $m\angle CPD$ และ $m\angle EQF$ สังเกตความสัมพันธ์จะได้ว่า (มุมมีขนาดเท่ากันหรือไม่)

4.13 คลิกที่จุดบนวงกลมทั้งสอง หรือวงกลม P หรือวงกลม Q โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 4.12

4.14 ข้อคาดเดา

ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมี (ขนาดเท่ากันหรือไม่)

4.15 นักเรียนคาดว่า ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน หรือไม่.....

4.16 จากข้อ 4.15 นักเรียนมีวิธีตรวจสอบอย่างไร.....

4.17 นักเรียนคาดว่า ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่.....

4.18 จากข้อ 4.17 นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบอย่างไร.....

4.19 จากข้อ 4.18 นักเรียนให้เหตุผลได้อย่างไร.....

5. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม

5.1 นักเรียนคาดว่า ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากันหรือไม่ (คือส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากับส่วนโค้งน้อย และ ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่).....

5.2 จากข้อ 5.1 นักเรียนมีวิธีตรวจสอบอย่างไร.....

5.3 นักเรียนคาดว่า ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากันหรือไม่.....

5.4 จากข้อ 5.3 นักเรียนมีวิธีตรวจสอบอย่างไร.....

5.5 จากข้อ 5.3 นักเรียนให้เหตุผลได้อย่างไร.....

6. ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดและเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางมายังคอร์ด

6.1 เปิด New Sketch

6.2 สร้างวงกลม O

6.3 สร้างคอร์ด CD ตัดเส้นรอบวงของวงกลม O ที่จุด C และจุด D

6.4 จากจุด O สร้างเส้นตรง OF ให้ ตั้งฉากกับคอร์ด CD ที่จุด F

6.5 วัด CF และ DF สังเกตความสัมพันธ์ของความยาวทั้งสองจะได้ว่า

6.6 คลิกที่จุด C หรือจุด D หรือวงกลม O โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 6.5

6.7 ข้อคาดเดา

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะ (แบ่งครึ่งคอร์ดบับหรือไม่)....

6.8 เปิด New Sketch

6.9 สร้างวงกลม O

6.10 สร้างคอร์ด CD ตัดเส้นรอบวงของวงกลม O ที่จุด C และจุด D

6.11 แบ่งครึ่งคอร์ด CD ที่ F และสร้างส่วนของเส้นตรง OF

6.12 วัด $m\angle OFC$ และ $m\angle OFD$ สังเกตความสัมพันธ์ของขนาดของมุมทั้งสอง จะได้ว่า

6.13 คลิกที่จุด C หรือจุด D หรือวงกลม O โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 6.12

6.14 ข้อคาดเดา

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง
(จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้นหรือไม่).....

6.15 เปิด New Sketch

6.16 สร้างวงกลม O

6.17 สร้างเส้นตรง AB ตัดวงกลมที่จุด C และจุด D

6.18 แบ่งครึ่ง $\overline{CD}$ ที่จุด F

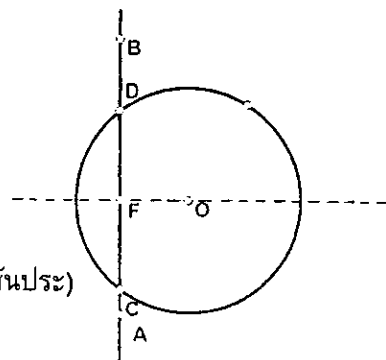
6.19 สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ ที่จุด F (โดยให้เส้นตั้งฉากเป็นเส้นประ)

6.20 ใช้คำสั่ง Trace (กำหนดสีเป็นสีแดง)

6.21 คลิกที่เส้นตรง AB ลากในแนวนอน สังเกตทางเดินของจุด F สัมพันธ์กับเส้นตรง AB

อย่างไร.....

และ $\triangle COD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด.....เพราะเหตุใด.....



6.22 ข้อคาดเดา

ทางเดินของจุดกึ่งกลางของคอร์ดในแนวขนานกับคอร์ดนั้นจะ (ผ่านหรือไม่ผ่าน).....จุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

6.23 ตรวจสอบข้อคาดเดาโดยสร้างรูปวงกลมอื่น พบว่า.....

6.24 เปิด New Sketch

6.25 สร้างวงกลม O

6.26 สร้างคอร์ด CD ตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่จุด C และ D

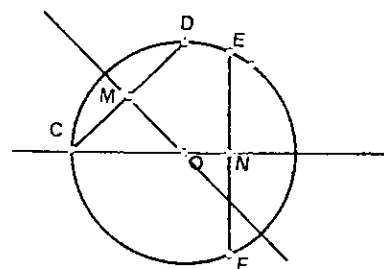
6.27 สร้างคอร์ด EF ตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่จุด E และ F

6.28 สร้างเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{CD}$ และ $\overline{EF}$

6.29 สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจุด O และสร้างจุดตัดของเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดทั้งสอง
จะได้ว่า.....

6.30 คลิกที่จุด C หรือ D หรือ E หรือ F โยกรูป แล้วสังเกตความสัมพันธ์ในข้อ 6.29

6.31 สรุป.....



6.32 ในวงกลมวงหนึ่งถ้ามีคอร์ดสองเส้นที่ไม่ขนานกัน แล้วนักเรียนมีวิธีหาจุดศูนย์กลางอย่างไร

.....

7. ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมี และเส้นสัมผัสวงกลม

7.1 เปิด New Sketch

7.2 สร้างวงกลม C

7.3 ลากเส้นตรง AB จะได้ว่า มี 3 กรณี คือ

- 1) เส้นตรงไม่ตัดวงกลม
- 2) เส้นตรงตัดวงกลม 1 จุด
- 3) เส้นตรงตัดวงกลม 2 จุด

7.4 ในกรณีที่เส้นตรงตัดวงกลม 1 จุด

กำหนดจุดตัดนั้นเป็นจุด F และ $\overleftrightarrow{AE}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม ที่จุด F ซึ่งเป็นจุดสัมผัส
สร้าง $\overline{CF}$ จะได้ $\overline{CF}$ เป็นรัศมีของวงกลม C ใช่หรือไม่.....

วัด $m\angle CFA$ และ $m\angle CFB$

สังเกตขนาดของมุมทั้งสอง จะได้ว่า.....

7.5 คลิกที่เส้นตรง AB โยกรูป เพื่อเปลี่ยนตำแหน่งของจุดสัมผัส แล้วสังเกตขนาดของมุมทั้งสอง

7.6 ข้อคาดเดา

เส้นสัมผัสวงกลมจะ (ตั้งฉากหรือไม่) กับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

8. สมบัติเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม

8.1 เปิด New Sketch

8.2 สร้างวงกลม O

8.3 กำหนดจุด P เป็นจุดภายนอกวงกลม

8.4 สร้าง $\overleftrightarrow{PE}$ และ $\overleftrightarrow{PF}$ สัมผัสวงกลมที่จุด E และจุด F

10. รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทุกจุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน

10.1 เปิด Quad31.gsp

10.2 จากรูป จุด A, B, C หรือ D (อยู่หรือไม่อยู่).....บนวงกลม

ดับเบิลคลิกกรอบ "ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้าม" จะได้ว่าเท่ากับ.....

10.3 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C หรือ D โยกรูป สังเกตค่าในข้อ 10.2 ยังเท่าเดิมหรือไม่.....

10.4 ข้อความ

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมแล้ว ผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมจะเท่ากับ (กี่).....องศา

10.5 ปิดไฟล์ Quad31.gsp

10.6 เปิดไฟล์ Quad32.gsp

10.7 ดับเบิลคลิกที่กรอบ "วัด $m\angle ABC$ และ $m\angle ADC$

จะได้ว่า $m\angle ABC + m\angle ADC$

10.8 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C หรือ D โยกรูป สังเกตค่าในข้อ 10.7 ยังเท่าเดิมหรือไม่.....

10.9 ดับเบิลคลิกกรอบ "สร้างวงกลมผ่านจุด A, B, C, D จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมหรือไม่.....

10.10 คลิกที่จุดต่าง ๆ ที่ปรากฏบนรูป โยกรูป จะสังเกตได้ว่า ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามยังคงเท่ากับ 180° และรูปสี่เหลี่ยม (แนบในวงกลมหรือไม่).....

10.11 ข้อความ

ถ้าผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา แล้วรูปสี่เหลี่ยม (แนบใน/ไม่แนบใน)..... วงกลม

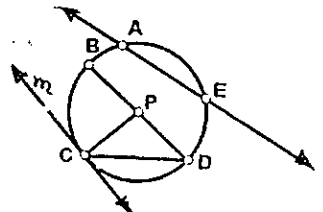
สรุป สมบัติของวงกลม

.....

แบบฝึกปฏิบัติ 1.6 วงกลม

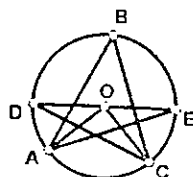
1. จากรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1.1 บอกชื่อของรัศมี.....
- 1.2 บอกชื่อของคอร์ดของวงกลม P ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง.....
- 1.3 บอกชื่อของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม P.....
- 1.4 บอกชื่อของเส้นตัดวงกลม P.....
- 1.5 บอกชื่อของเส้นสัมผัสวงกลม P.....
- 1.6 บอกชื่อจุดสัมผัส.....



2. จากรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 2.1 บอกชื่อมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O มา 3 มุม.....
- 2.2 บอกชื่อมุมในส่วนโค้งของวงกลม O มา 2 มุม.....
- 2.3 บอกชื่อส่วนโค้งน้อยมา 3 เส้น.....
- 2.4 บอกชื่อส่วนโค้งซึ่งเป็นครึ่งวงกลมมา 2 เส้น.....
- 2.5 บอกชื่อส่วนโค้งใหญ่มา 2 เส้น.....

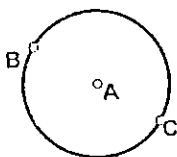


3. สร้างและบอกวิธีสร้างอย่างคร่าว ๆ โดยใช้ GSP ตามข้อกำหนดต่อไปนี้ (ทั้งนี้ในการสร้างทุกข้อ เมื่อมีการโยกจุดแล้วยังมีลักษณะตามที่โจทย์ต้องการ

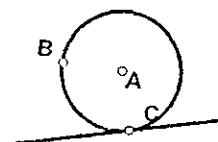
- 3.1 กำหนดวงกลม A และจุด C เป็นจุดบนวงกลม A จงสร้างเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด C

รูปที่กำหนดให้

วิธีสร้าง



รูปที่ต้องการ



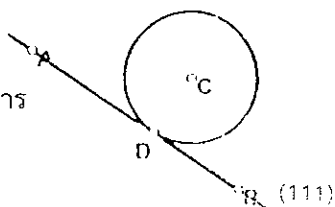
- 3.2 กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ และจุด C เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรง AB จงสร้างวงกลมให้สัมผัส $\overleftrightarrow{AB}$ และมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง

รูปที่กำหนดให้

วิธีสร้าง



รูปที่ต้องการ



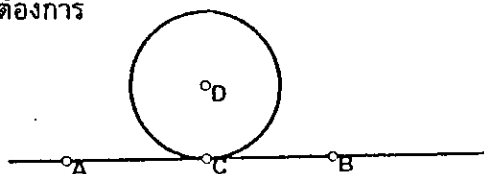
3.3 กำหนด AB และจุด C เป็นจุดร่วมเส้นตรง AB จงสร้างวงกลมสัมผัส $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด C

รูปที่กำหนดให้

วิธีสร้าง



รูปที่ต้องการ

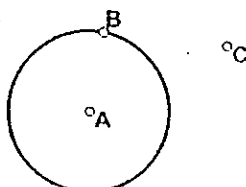


3.4 กำหนดวงกลม A และจุด C เป็นจุดภายนอกวงกลม A จงสร้างวงกลมสัมผัสวงกลม A โดยมี

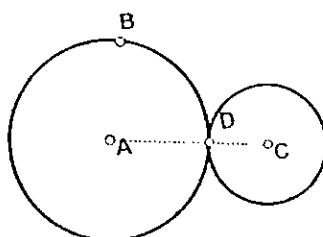
จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง

รูปที่กำหนดให้

วิธีสร้าง



รูปที่ต้องการ



4. จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 กำหนดจุด P อยู่ภายนอกวงกลม O

แล้ว เส้นตรงที่ผ่านจุด P และเส้นสัมผัสกับวงกลม O มีกี่เส้น.....

และ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และเป็นเส้นตัดวงกลม O มีกี่เส้น.....

4.2 กำหนดจุด Q อยู่ภายในวงกลม O

แล้ว เส้นตรงที่ผ่านจุด Q และสัมผัสกับวงกลม O มีกี่เส้น.....

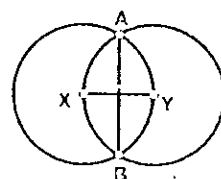
และ เส้นตรงที่ผ่านจุด Q และเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O มีกี่เส้น.....

4.3 กำหนดจุด X และ Y เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังรูป

แล้ว $\overline{AB}$ และ $\overline{XY}$ สัมพันธ์กันอย่างไร.....

และรูปสี่เหลี่ยม $AXBY$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไร.....

เพราะเหตุใด.....



4.4 กำหนด $\overleftrightarrow{PA}$ และ $\overleftrightarrow{PB}$ สัมผัสของวงกลม O

ดังรูป

$$OP = 17 \text{ หน่วย}$$

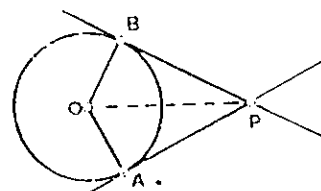
$$OA = 8 \text{ หน่วย}$$

$$m\angle APO = 28 \text{ องศา}$$

แล้ว $\angle OPB$ มีขนาดกี่องศา.....

$\angle AOP$ มีขนาดกี่องศา.....

แล้ว $\overline{BP}$ ยาวกี่หน่วย.....



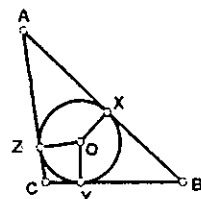
4.5 กำหนด $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด X, Y และ Z ตามลำดับ

ดังรูป $AX = 16$ หน่วย

$CZ = 8$ หน่วย

$BY = 26$ หน่วย

แล้ว $AB + BC + AC$ ยาวกี่หน่วย.....



4.6 กำหนด $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{AD}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด Q, R, S และ T ตามลำดับ

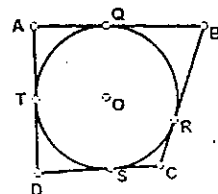
ดังรูป $AQ = 3$ หน่วย

$BR = 4$ หน่วย

$CS = 2$ หน่วย

$AD = 6$ หน่วย

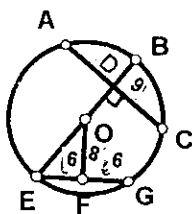
แล้ว เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ยาวกี่หน่วย.....



5. จงพิจารณารูปของแต่ละข้อแล้วเติมคำตอบในช่องว่าง

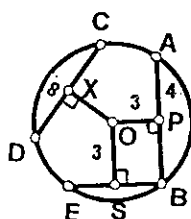
5.1 $AD = \dots\dots\dots$

$OE = \dots\dots\dots$

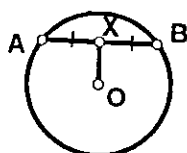


5.2 $AB = \dots\dots\dots$

$X = \dots\dots\dots$



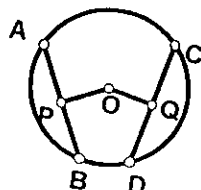
5.3 $m\angle OXB = \dots\dots\dots$



5.4 ถ้า $AB = CD$

และ $OP = 8$ หน่วย

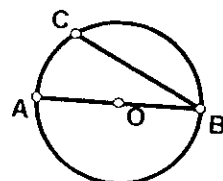
แล้ว $OQ = \dots\dots\dots$



5.5 ถ้า $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$AB = 8$ หน่วย และ $m\angle ABC = 45$ องศา

แล้ว $\overline{BC}$ อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง $\dots\dots\dots$ หน่วย



6 จงพิจารณารูปแต่ละข้อ แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่าง

6.1 ถ้า $m\angle SOT = 60$ องศา

$m\angle SOR = 40$ องศา

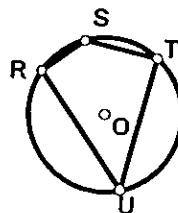
และ $m\angle ROU = 100$ องศา

แล้ว $m\angle R = \dots\dots\dots$

$m\angle S = \dots\dots\dots$

$m\angle T = \dots\dots\dots$

และ $m\angle U = \dots\dots\dots$



6.2 ถ้า $\overleftrightarrow{CD}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด C

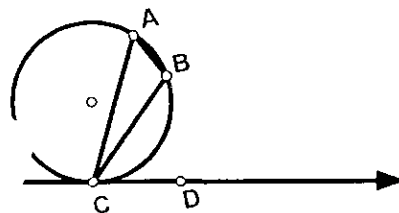
$m\angle BCD = 48$ องศา

$m\angle AOC = 150$ องศา

แล้ว $m\angle CAB = \dots\dots\dots$

$m\angle ABC = \dots\dots\dots$

และ $m\angle ACB = \dots\dots\dots$



6.3 ถ้า $\overline{AC}$ แบ่งครึ่งมุม BAD

$m\angle COD = 80$ องศา

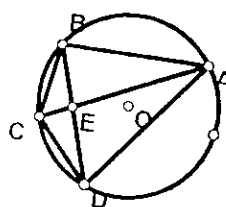
$m\angle AOD = 160$ องศา

แล้ว $m\angle BAC = \dots\dots\dots$

$m\angle BDC = \dots\dots\dots$

$m\angle AEB = \dots\dots\dots$

และ $m\angle ADB = \dots\dots\dots$



7 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{BE}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B

$m\angle AB = 62$ องศา

$m\angle AD = 74$ องศา

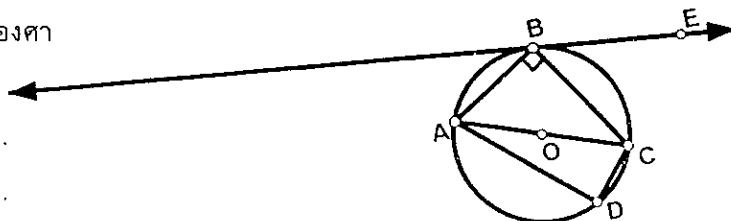
จงหาค่าของ

$m\angle ADC = \dots\dots\dots$

$m\angle BCD = \dots\dots\dots$

$m\angle CBE = \dots\dots\dots$

$m\angle DAB = \dots\dots\dots$



8 จากรูป กำหนดให้ $AB = CD$ จงพิจารณาข้อสรุปต่อไปนี้ ว่าข้อสรุปใดเป็นจริง

8.1 $m\angle\widehat{AB} = m\angle\widehat{CD}$

8.2 $m\angle DAC = m\angle ACB$

8.3 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

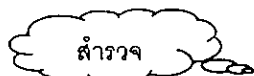
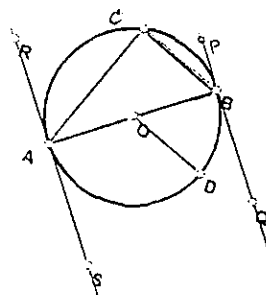


*9. สร้าง $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

กำหนด C เป็นจุดบนวงกลม $\overline{OD} \parallel \overline{BC}$

สร้าง $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B

สร้าง $\overleftrightarrow{RS}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด A

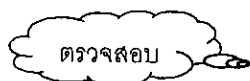


มีมุมที่มีขนาดของมุมเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

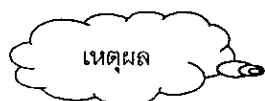


ข้อคาดเดาเกี่ยวกับขนาดของ $m\angle ADO$ ได้แก่.....

ถ้าต้องการทราบขนาดของมุมหนึ่งมุมเพิ่มเติม เพื่อหาค่าของ $m\angle CAB$ แล้วนักเรียนคิดว่า โจทย์ควรบอกขนาดของมุมใด



ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

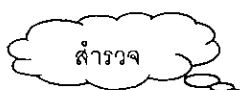
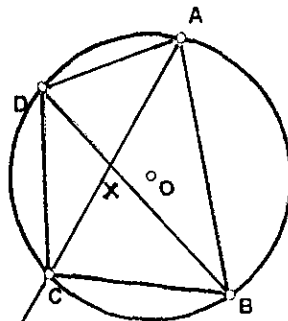


เพราะเหตุใด



*10. สร้างวงกลม O กำหนดจุด A, B, C และ D บนวงกลม

สร้าง $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $\angle BAD$ และ $m\angle ACB = 67^\circ$



มีมุมที่มีขนาดของมุมเท่ากันหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....

.....

.....

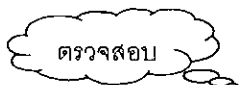


ข้อคาดเดาเกี่ยวกับขนาดของมุมในวงกลม O ได้แก่.....

.....

.....

.....

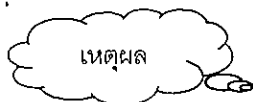


ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....

.....



เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

.....

สาระสำคัญ

ในหน่วยการเรียนรู้นี้เป็นการทบทวนความรู้เดิมทางเรขาคณิตที่ปรากฏในรายวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่นักเรียนคุ้นเคย และเป็นการตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ต่าง ๆ เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจและใช้ตรงกัน โดยมีสาระสำคัญ ดังนี้

- 1. จุด เส้นตรงและระนาบ เป็นคำที่เราไปให้นิยามในเรขาคณิตระบบยูคลิด
- 2. ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด เรียกว่าส่วนของเส้นตรง
- 3. ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายเพียงจุดเดียว เรียกว่า รังสี
- 4. รังสีสองเส้นที่มีจุดปลายเดียวกัน เรียกว่ามุม
- 5. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน คือ เส้นตรงสองเส้นที่มีจุดร่วมเส้นตรง
- 6. เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน คือ เส้นตรงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉากที่จุดตัด

เราใช้สัญลักษณ์ เช่น

$\overleftrightarrow{AB}$	แทนเส้นตรง AB
$\overline{AB}$	แทนส่วนของเส้นตรง AB
$m\overline{AB}$ หรือ AB	แทนความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
$\overrightarrow{AB}$	แทนรังสี AB
$\angle ABC$	แทนมุม ABC
$m\angle ABC$	แทน ขนาดของมุม ABC

- 7. รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท
- 8. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นมีความยาวเท่ากัน
- 9. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน
- 10. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กัน

แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้ คือ ด้าน-มุม-ด้าน, มุม-ด้าน-มุม, หรือ ด้าน-ด้าน-ด้าน

11. รูปสามเหลี่ยมที่ด้านสองด้านยาวเท่ากัน เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสมบัติของ

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วคือ ขนาดของมุมที่ฐานเท่ากัน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด เส้นมัธยฐานและส่วนสูงเป็นเส้นเดียวกัน และเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

12. เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกันขนานกันเมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

13. เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนด้านเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา ขนาดของมุมแย้งเท่ากัน หรือขนาดของมุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเท่ากัน

14. ผลบวกของขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับ 180 องศา

15. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

16. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

17. รูปหลายเหลี่ยมคือรูปเรขาคณิตในระนาบที่เกิดจากการต่อจุดปลายของส่วนของเส้นตรงกับจุดปลายของส่วนของเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง โดยส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นตัดกับส่วนของเส้นตรงอื่นได้เพียงสองเส้นเท่านั้น

18. ขนาดของมุมภายในของรูป n เหลี่ยมรวมกันได้ $180(n-2)$ องศา

19. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก สมบัติเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีดังนี้

19.1 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

19.2 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส : ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a, b

และ c หน่วย และ $b^2 = a^2 + c^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว b หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

20. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ และสมบัติเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีดังนี้

20.1 มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน

20.2 มุมที่อยู่ติดกันของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

20.3 ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

20.4 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

20.5 เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

21. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเพิ่มขึ้นจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน

22. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีเพิ่มขึ้นจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน

23. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเพิ่มขึ้นจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน

24. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นเช่นเดียวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

25. รูปสี่เหลี่ยมวาว คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันเพียงสองคู่ และสมบัติเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมวาว คือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมวาวทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน

26. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันคู่เดียว และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านคู่ที่ไม่ขนานกันจะขนานกับด้านคู่ขนาน และมีความยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน
27. รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านคู่ที่ไม่ขนานกันยาวเท่ากัน และสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว ที่มีเพิ่มจากสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีดังนี้
- 27.1 มุมที่ฐานเดียวกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วแต่ละคู่มีขนาดเท่ากัน
- 27.2 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีความยาวเท่ากัน
28. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สาม และยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม
29. รูป n เหลี่ยมสองรูปคล้ายกันเมื่อรูป n เหลี่ยมทั้งสองนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ จำนวน n คู่ หรืออัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากันทุกอัตราส่วน
30. รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันเมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แต่ในทางปฏิบัติก็เป็นการเพียงพอที่จะตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน โดยตรวจสอบว่าขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ เพียงสองคู่เท่านั้น
31. วงกลมเป็นรูปซึ่งประกอบด้วยจุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน จุดคงที่เรียกว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดบนวงกลม เรียกว่า รัศมีของวงกลม
32. สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม เช่น
- 32.1 คอร์ดของวงกลม คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน
- 32.2 เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมคือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม
- 32.3 เส้นสัมผัสวงกลมคือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น
- 32.4 เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงซึ่งตัดวงกลมสองจุด

32.5 มุมในครึ่งวงกลมคือ มุมที่จุดยอดอยู่บนวงกลมและแขนของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง

32.6 มุมในส่วนโค้งของวงกลมคือ มุมที่มีจุดยอดอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

32.7 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดยอดและมีรัศมีเป็นแขนของมุม

33. วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และเรียกว่า วงกลมที่เท่ากัน

34. สมบัติเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่

34.1 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่า ของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

34.2 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา

34.3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

34.4 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

34.5 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

34.6 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

34.7 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

34.8 ในวงกลมที่เท่ากัน หรือในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือ ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่

34.9 ในวงกลมที่เท่ากัน หรือในวงกลมเดียวกัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นส่วนโค้งที่

ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

34.10 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

34.11 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

34.12 เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

34.13 คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

34.14 เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

34.15 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกัน จะลากได้เพียงสองเส้น และส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน

34.16 มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

34.17 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมจะเท่ากับ 180 องศา

34.18 ถ้าผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม

หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน (Products of Lengths of Segments of Intersecting Chords)

2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม (Secant - Secant Segments Products)

2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม (Tangent- Secant Segments Products)

ความรู้พื้นฐาน

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

จุดประสงค์ปลายทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน และนำสมบัตินี้ไปใช้
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้

คำชี้แจง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลมประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อยตามหัวข้อข้างต้น ในหน่วยการเรียนรู้นี้เป็นการนำเสนอความรู้ที่ไม่ปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น แต่มีความสัมพันธ์กับความรู้เรื่องวงกลมของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6 และเน้นเกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม แต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อยนำเสนอเนื้อหาในรูปแบบของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติ ดังนี้

ใบงาน 2.1 เป็นความรู้เกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน กิจกรรมในใบงานจะประกอบด้วยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา ตรวจสอบและสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งไว้

แบบฝึกปฏิบัติ 2.1 เป็นการนำความรู้จากใบงาน 2.1 มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

ใบงาน 2.2 เป็นความรู้เกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม ซึ่งกิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 2.1

แบบฝึกปฏิบัติ 2.2 เป็นการนำความรู้จากใบงาน 2.2 มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

ใบงาน 2.3 เป็นความรู้เกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม ซึ่งกิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 2.1

แบบฝึกปฏิบัติ 2.3 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1

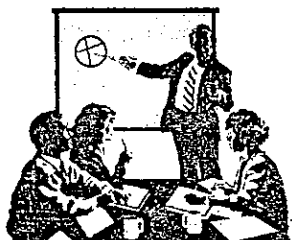
เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

-

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงใดที่เกิดจากคอร์ดที่ตัดกัน
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน และนำสมบัตินี้ไปใช้

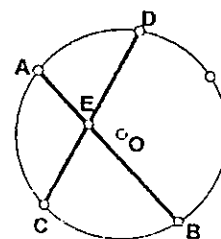


เรามาศึกษาผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน กันเถอะ

ใบงาน 2.1

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง สมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน

1. สร้างวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. ลากคอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันภายในวงกลมที่จุด E
3. นักเรียนสังเกตเห็นส่วนของเส้นตรงใดที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน



4. นักเรียนสามารถหาผลคูณระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่ ได้กี่คู่ อะไรบ้าง
5. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน และหาผลคูณระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่ แล้วพิจารณาว่าผลคูณคู่ใดเท่ากัน
6. คลิกที่จุด A หรือจุด B หรือจุด C หรือจุด D และเลื่อนจุดดังกล่าว โดยคอร์ด AB และคอร์ด CD ยังตัดกันที่จุด E แล้ว พิจารณาผลคูณในข้อ 5 ว่ามีคู่ใดเท่ากัน

7. ข้อคาดเดา

ถ้าคอร์ด AB และคอร์ด CD ของวงกลมวงหนึ่งตัดกันภายในวงกลมที่จุด E แล้ว
(ผลคูณของ AE และ EB กับผลคูณของ CE และ ED เท่ากันหรือไม่).....

8. นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบข้อความดังกล่าวอย่างไร
9. ถ้าวางกลมดังกล่าวเพิ่มหรือลดขนาด แล้วข้อความดังกล่าวยังเป็นจริงหรือไม่
10. คลิกที่จุด A หรือจุด B หรือจุด C หรือจุด D และเลื่อนจุดดังกล่าว โดยคอร์ด AB และคอร์ด CD ยังตัดกันที่จุด E แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณของ AE และ EB กับผลคูณของ CE และ ED เป็นอย่างไร

11. จากรูปที่สร้างขึ้น ถ้าลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ แล้วขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $m\angle AED$ $m\angle CEB$ เพราะ.....

(2) $m\angle DAE$ $m\angle BCE$ เพราะ.....

12. จากข้อ 11 $\triangle AED$ และ $\triangle CEB$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

$\triangle AED$ $\triangle CEB$ เพราะ.....

13. จากข้อ 12 อัตราส่วนของความยาวของด้านที่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันมีหรือไม่ ถ้ามี มีอัตราส่วนใดบ้าง.....

14. จากข้อ 13 $\frac{AE}{CE}$ และ $\frac{ED}{EB}$ เท่ากันหรือไม่

15. จากข้อ 14 $AE \cdot EB$ และ $CE \cdot ED$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

สรุป

.....

.....

.....

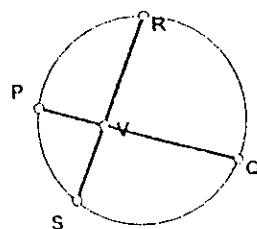
.....

แบบฝึกปฏิบัติ 2.1

จากรูป จงตอบคำถาม ข้อ 1 - 2

1. ถ้า $PV = 3$ หน่วย, $RV = 7$ หน่วย
 $QV = 8$ หน่วย และ $SV = x$ หน่วย
 แล้ว x เท่ากับกี่หน่วย.....

2. ถ้า $SV = 8$ หน่วย, $RV = 15$ หน่วย
 $PV = 6$ หน่วย และ $QV = y$ หน่วย
 แล้ว y เท่ากับกี่หน่วย.....



หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2

เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

-

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงใดที่เกิดจากเส้นตัดของวงกลม
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้

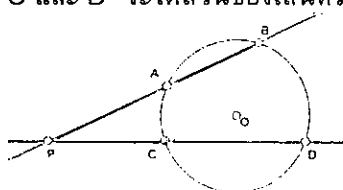
การหาผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม เขาทำอย่างไร:



ใบงาน 2.2

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง สมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม

1. สร้างวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ให้จุด P เป็นจุดภายนอกวงกลม
2. ลากเส้นตรง PB ตัดวงกลมที่จุด A และ B จะได้ส่วนของเส้นตรงใดบ้าง.....
3. ลากเส้นตรง PD ตัดวงกลมที่จุด C และ D จะได้ส่วนของเส้นตรงใดบ้าง.....



4. นักเรียนสามารถหาผลคูณระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่ ในข้อ 2 และ 3 ได้กี่คู่ อะไรบ้าง
5. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากเส้นตัดของวงกลม ตัดวงกลมในข้อ 2 และ 3 และหาผลคูณระหว่างความยาวของส่วนของเส้นตรงแต่ละคู่ ในแต่ละข้อ แล้วพิจารณาว่าผลคูณคู่ใดเท่ากัน
6. คลิกที่จุด P และเลื่อนจุดดังกล่าว โดย P ยังเป็นจุดภายนอกวงกลม แล้วพิจารณาผลคูณในข้อ 5 ว่าคู่ใดเท่ากัน

7. ข้อคาดเดา

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตัด PB ตัดวงกลมที่จุด A และจุด B เส้นตัด PD ตัดวงกลมที่จุด C และจุด D แล้ว(ผลคูณของ PB และ PA กับผลคูณของ PD และ PC เท่ากันหรือไม่).....

8. นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบข้อความดังกล่าวอย่างไร
9. ถ้าววงกลมดังกล่าวเพิ่มหรือลดขนาด แล้วข้อความดังกล่าวยังเป็นจริงหรือไม่.....
10. คลิกที่จุด P และเลื่อนจุดดังกล่าว โดย จุด P ยังเป็นจุดภายนอกวงกลม แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณของ PB และ PA กับผลคูณของ PD และ PC เป็นอย่างไร.....

11. จากรูปที่สร้างขึ้น ถ้าลาก $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ แล้วขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $m\angle BPC$ $m\angle DPA$ เพราะ.....

(2) $m\angle PBC$ $m\angle PDA$ เพราะ.....

12. จากข้อ 11 $\triangle BPC$ และ $\triangle DPA$ คล้ายกันหรือไม่

$\triangle BPC$ $\triangle DPA$ เพราะ.....

13. จากข้อ 12 อัตราส่วนของความยาวด้านที่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันมีหรือไม่ ถ้ามี มีอัตราส่วนใดบ้าง.....

14. จากข้อ 13 $\frac{PB}{PD}$ และ $\frac{PC}{PA}$ เท่ากันหรือไม่.....

15. จากข้อ 14 $PB \cdot PA$ และ $PD \cdot PC$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

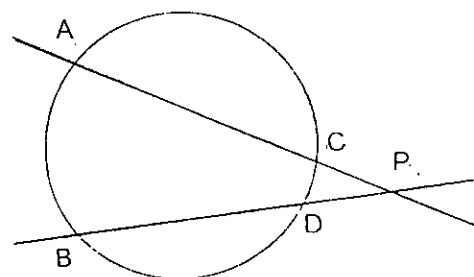
สรุป

แบบฝึกปฏิบัติ 2.2

จากรูป จงตอบคำถามข้อ 1 - 2

1. ถ้า $PC = 3$ หน่วย $CA = 8$ หน่วย
 $PD = 4$ หน่วย และ $DB = x$ หน่วย
 แล้ว x เท่ากับกี่หน่วย.....

2. ถ้า $PC = 7$ หน่วย $PD = 4$ หน่วย
 และ $DB = 15$ หน่วย
 แล้ว AC มีความยาวกี่หน่วย.....



หน่วยการเรียนรู้ที่ 2.3

เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและ เส้นตัดของวงกลม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

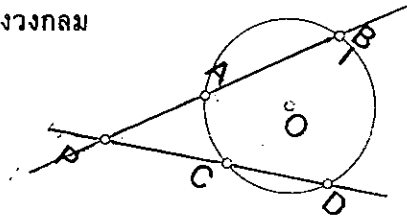
1. บอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงใดเป็นเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม
2. บอกสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม และนำสมบัตินี้ไปใช้



ใบงาน 2.3

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง สมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม

1. จากรูปในใบงาน 2.2



2. คลิที่จุด P ลากจุด B มาที่จุด A

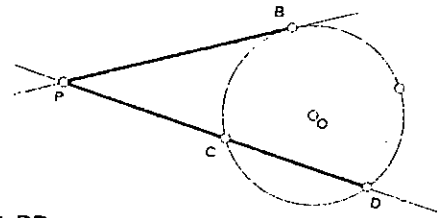
จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

- 2.1 $\overleftrightarrow{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

- 2.2 $PB = PA$

- 2.3 ผลสรุปจากใบงาน 2.2 ได้ว่า $PB \cdot PA = PC \cdot PD$

- 2.4 จากข้อ 2.2 $PB = PA$ ดังนั้น $PB^2 = PC \cdot PD$



3. ข้อคาดเดา

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นสัมผัส PB สัมผัสวงกลมที่จุด B เส้นตัด PD ตัดวงกลมที่จุด C และ D แล้ว $(PB^2 \text{ และ } PC \cdot PD \text{ เท่ากันหรือไม่})$

4. ทดลองสร้างรูปเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาในข้อ 3 ดังนี้
- 4.1 สร้างวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
 - 4.2 ให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลม
 - 4.3 ลากเส้นตรง PB สัมผัสวงกลมที่จุด B
 - 4.4 ลากเส้นตรง PD ตัดวงกลมที่จุด C และจุด D
 - 4.5 วัดหา PB, PC และ PD
 - 4.6 คำนวณค่า PB^2 และ $PC \cdot PD$ จะได้ว่า ค่าทั้งสองเท่ากันหรือไม่.....
 - 4.7 คลิที่จุด P และเลื่อนจุด P โดย P ยังเป็นจุดภายนอกวงกลม แล้วสังเกตความสัมพันธ์ตามข้อคาดเดา พบว่า ข้อคาดเดา (เป็นจริงหรือไม่).....

5. จากรูปที่นักเรียนสร้างขึ้น ถ้าลาก $\overline{BD}$ และ $\overline{BC}$ แล้วขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $m\angle PBC$ $m\angle PDB$ เพราะ.....

(2) $m\angle BPC$ $m\angle BPD$ เพราะ.....

6. จากข้อ 5 $\triangle BPC$ และ $\triangle DPB$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

$\triangle BPC$ $\triangle DPB$ เพราะ.....

7. จากข้อ 6 อัตราส่วนของความยาวด้านที่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันมีหรือไม่ ถ้ามี มีอัตราส่วนใดบ้าง.....

8. จากข้อ 7 $\frac{PB}{PD}$ และ $\frac{PC}{PB}$ เท่ากันหรือไม่

9. จากข้อ 8 PB^2 และ $PC \cdot PD$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด.....

สรุป

.....

.....

แบบฝึกปฏิบัติ 2.3

จากรูป จงตอบคำถามข้อ 1 - 2

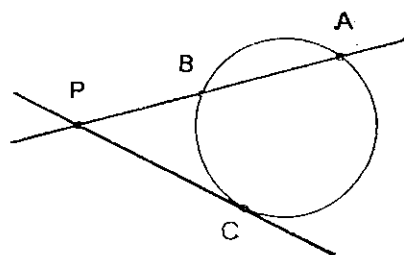
1. ถ้า $PB = 4$ หน่วย $BA = 5$ หน่วย

และ $PC = x$ หน่วย

แล้ว x มีความยาวกี่หน่วย

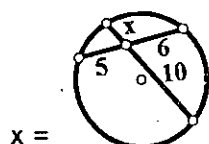
2. ถ้า $PC = 10$ หน่วย และ $PA = 15$ หน่วย

แล้ว PB มีความยาวกี่หน่วย.....

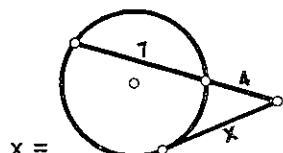


3. จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

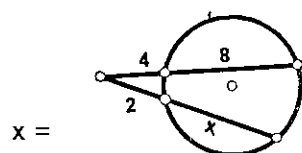
3.1

 $x =$

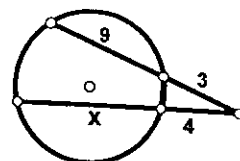
3.2

 $x =$

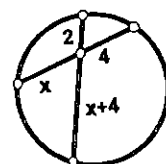
3.3

 $x =$

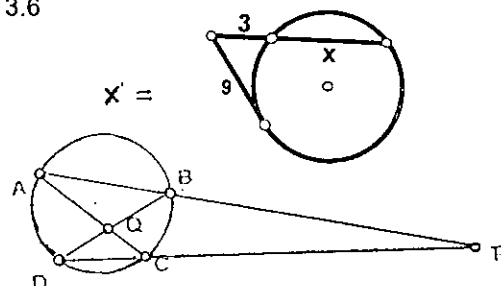
3.4

 $x =$

3.5

 $x =$

3.6

 $x =$

4. จากรูป เติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้

4.1 ถ้า $AP = 12$ หน่วย, $PB = 7$ หน่วย, $PD = 11$ หน่วย แล้ว $PC =$

4.2 ถ้า $AQ = 8$ หน่วย, $QC = 3$ หน่วย, $BQ = 5$ หน่วย แล้ว $QD =$

4.3 ถ้า $AB = 9$ หน่วย, $BP = 10$ หน่วย, $PD = 18$ หน่วย แล้ว $CD =$

4.4 ถ้า $AC = 12$ หน่วย, $AQ = 8$ หน่วย, $BQ = 5$ หน่วย แล้ว $BD =$

4.5 ถ้า $AB = 8$ หน่วย, $AP = 17$ หน่วย, $CD = 7$ หน่วย แล้ว $DP =$

4.6 ถ้า $BD = 18$ หน่วย, $AC = 14$ หน่วย, $CQ = 5$ หน่วย แล้ว $BQ =$

5. จากรูป วงกลมสองวงมีจุด W เป็นจุดศูนย์กลางร่วมกัน

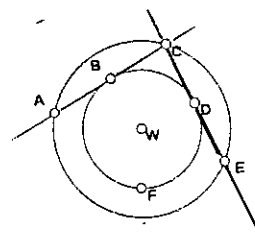
$\vec{AC}$ และ $\vec{CD}$ เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมวงเล็ก และ $m\angle C = 80^\circ$

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างของแต่ละข้อต่อไปนี้

5.1 $m\angle WDE =$

5.2 $m\angle BWD =$

5.3 $m\angle WBD =$

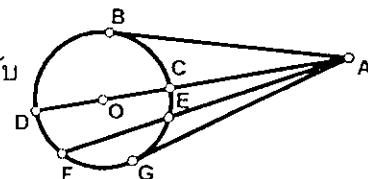


6. จากรูปวงกลม O มี $\vec{AB}$ และ $\vec{AG}$ สัมผัสวงกลมที่จุด B และ G ตามลำดับ

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างของแต่ละข้อต่อไปนี้

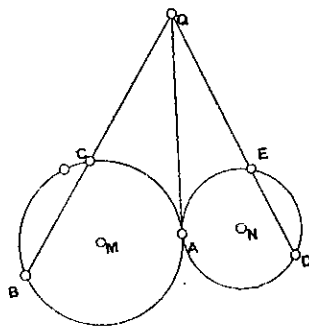
6.1 ถ้า $AB = 6$ หน่วย และ $AC = 4$ หน่วย แล้ว $AD =$

6.2 ถ้า $AC = 4$ หน่วย และ $AD = 20$ หน่วย และ $AE = 8$ หน่วย แล้ว $AF =$



โจทย์

*7. จากรูป $\overline{QA}$ สัมผัสวงกลม M และ N ที่จุด A เดียวกัน
 $\overrightarrow{QB}$ และ $\overrightarrow{QD}$ เป็นเส้นตัดของวงกลม M และ N ตามลำดับ



สำรวจ

มีส่วนของเส้นตรงใดบ้างที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสของวงกลม

.....

มีส่วนของเส้นตรงใดบ้างที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม

.....

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับ
 QC , QB , QE และ QD ได้แก่

.....

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะ
 ถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

เหตุผล

เพราะเหตุใด

.....

สาระสำคัญ

ในหน่วยการเรียนรู้นี้ได้กล่าวถึงส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม โดยมีสาระสำคัญ ดังนี้

1. ถ้าคอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันภายในวงกลม O ที่จุด E แล้ว $AE \cdot EB = CE \cdot ED$
2. กำหนดให้ จุด P เป็นจุดภายนอกวงกลม O ถ้า เส้นตัด PB ตัดวงกลม O ที่จุด A และจุด B
เส้นตัด PD ตัดวงกลม O ที่จุด C และจุด D แล้ว $PB \cdot PA = PD \cdot PC$
3. กำหนดให้ จุด P เป็นจุดภายนอกวงกลม O ถ้า เส้นสัมผัส PB สัมผัสวงกลม O ที่จุด B
เส้นตัด PD ตัดวงกลม O ที่จุด C และจุด D แล้ว $PB^2 = PC \cdot PD$

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง การจwabกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน

หัวข้อหน่วยการเรียนรู้ย่อย

- 3.1 เซนทรอยด์ (Centroid)
- 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม (Circumcenter)
- 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์ (Orthocenter)
- 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน (Incenter)
- 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (Excenter)
- 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี (Ptolemy's Theorem)
- 3.7 ทฤษฎีบทเมนเลาส์ (Menelaus' Theorem) และ บทกลับ
- 3.8 ทฤษฎีบทเซวา (Ceva's Theorem) และ บทกลับ
- 3.9 จุดเกอกอนเน (Gergonne Point)
- 3.10 เส้นออยเลอร์ (Euler Line)

ความรู้พื้นฐาน หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 และ 2

จุดประสงค์ปลายทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายและสมบัติของเซนทรอยด์ พร้อมทั้งนำเสนอสมบัตินี้ไปใช้
2. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำเสนอสมบัตินี้ไปใช้
3. บอกความหมายและสมบัติของจุดออร์โทเซนเตอร์ พร้อมทั้งนำเสนอสมบัตินี้ไปใช้
4. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำเสนอสมบัตินี้ไปใช้

5. บอกความหมายและสมบัติของศูนย์กลางวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยม พร้อมทั้งนำสมบัตินี้ไปใช้
6. บอกทฤษฎีบทโตเลมี พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทนี้ไปใช้
7. บอกทฤษฎีบทเมเนเลาส์และบทกลับ พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทและบทกลับนี้ไปใช้
8. บอกทฤษฎีบทเซวาและบทกลับ พร้อมทั้งนำทฤษฎีบทและบทกลับนี้ไปใช้
9. บอกความหมายและสมบัติของจุดเกอกอนเน
10. บอกความหมายและสมบัติของเส้นออยเลอร์

คำชี้แจง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่รวมบนวงกลมเดียวกัน ประกอบด้วย 10 หน่วยการเรียนรู้ย่อย ตามหัวข้อข้างต้น ในหน่วยการเรียนรู้นี้เป็นความรู้ใหม่ที่ไม่ปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และเพื่อความเข้าใจที่ตรงกัน ช่วงท้ายของคำชี้แจงจะมีข้อตกลงเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนเคยรู้เพื่อเป็นการทบทวนให้มีความเข้าใจตรงกันและสิ่งที่นักเรียนควรรู้เพิ่มขึ้นพร้อมทั้งตัวอย่างรูปประกอบ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อยนำเสนอเนื้อหาในรูปแบบของใบงานและแบบฝึกปฏิบัติ ดังนี้

ใบงาน 3.1 เป็นความรู้เกี่ยวกับ เซนทรอยด์ ซึ่งได้จากการจวบกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม กิจกรรมในใบงานจะประกอบด้วยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาข้อสรุป

แบบฝึกปฏิบัติ 3.1 เป็นการนำความรู้จากใบงาน 3.1 มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.2 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ศูนย์กลางวงล้อม ซึ่งได้จากการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.1

แบบฝึกปฏิบัติ 3.2 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.3 เป็นความรู้เกี่ยวกับ จุดออร์โทเซนเตอร์ ซึ่งได้จากการจวบกันของส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.1

แบบฝึกปฏิบัติ 3.3 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.4 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน ซึ่งได้จากการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.1

แบบฝึกปฏิบัติ 3.4 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.5 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งได้จากการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.1

แบบฝึกปฏิบัติ 3.5 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.6 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ทฤษฎีบทโตเลมี ซึ่งกล่าวถึงผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม และผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนั้น กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.1

แบบฝึกปฏิบัติ 3.6 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.7 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ทฤษฎีบทเมเนเลอส์ และบทกลับ ซึ่งกล่าวถึงกรณีที่จุดสามจุดเป็นจุดร่วมเส้นตรง กิจกรรมในใบงานประกอบด้วย การสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา ตรวจสอบ และสืบเสาะหาเหตุผล เพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ตามความเหมาะสม

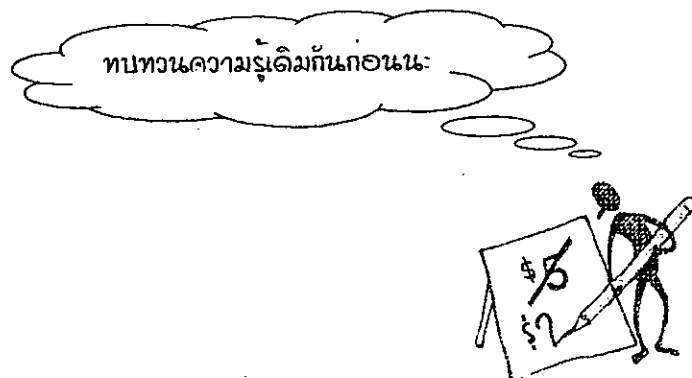
แบบฝึกปฏิบัติ 3.7 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

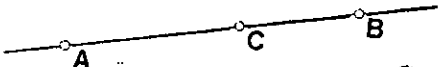
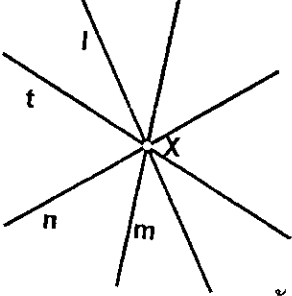
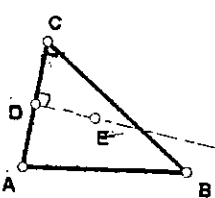
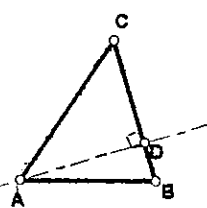
ใบงาน 3.8 เป็นความรู้เกี่ยวกับ ทฤษฎีบทเชวา และบทกลับ ซึ่งกล่าวถึงกรณีที่เส้นตรงสามเส้นเป็นเส้นจวนกัน กิจกรรมในใบงานเป็นเช่นเดียวกับใบงาน 3.7

แบบฝึกปฏิบัติ 3.8 เป็นการนำความรู้จากใบงานที่ผ่านมา มาใช้แก้ปัญหาโจทย์

ใบงาน 3.9 เป็นความรู้เกี่ยวกับ จุดเกอกอนเน ซึ่งการจวนกันของเส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้น กิจกรรมในใบงานจะประกอบด้วยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาข้อสรุป ทั้งนี้จุดเกอกอนเน เป็นการนำทฤษฎีบทเชวามาใช้ช่วยในการหาเหตุผล หน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ไม่มีแบบฝึกปฏิบัติ

ใบงาน 3.10 เป็นความรู้เกี่ยวกับ เส้นออยเลอร์ ซึ่งเป็นการแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ กิจกรรมในใบงานประกอบด้วยการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะหาข้อสรุป หน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ไม่มีแบบฝึกปฏิบัติ



คำศัพท์	ตัวอย่างรูปประกอบ
1. <u>จุดร่วมเส้นตรง</u> คือ จุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน	 จุด A, B และ C เป็นจุดร่วมเส้นตรง
2. <u>การจวบกัน (Concurrency)</u> คือการที่รูปเรขาคณิตตั้งแต่สองรูปขึ้นไป มาตัดกัน เช่น <u>เส้นจวบกัน (Concurrent Lines)</u> เป็นเส้นตรงตั้งแต่สองเส้นขึ้นไป ที่ตัดกันเพียงจุดเดียว <u>จุดจวบ</u> เป็นจุดที่เส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงตั้งแต่สองเส้นขึ้นไป ตัดกัน	 เส้นตรง m, n, t และ l เป็นเส้นจวบกันที่จุด X จุด X เป็นจุดจวบ
3. สิ่งที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม <u>3.1 เส้นมัธยฐาน</u> เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่งมาแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม <u>3.2 เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน</u> เป็นเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งและตั้งฉากกับด้านนั้นของรูปสามเหลี่ยม <u>3.3 ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม</u> เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่งมาตั้งฉากกับด้านตรงข้าม (หรือส่วนที่ต่อออกไปของด้านตรงข้าม) ของรูปสามเหลี่ยม	 $BD = CD$ $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$  $AD = CD$ และ $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\overleftrightarrow{DE}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน AC ของ $\triangle ABC$  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ $\overline{AD}$ เป็นส่วนสูง และเรียก $\overline{BC}$ ว่าฐานของ $\triangle ABC$

3.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน

เป็นรังสีหรือเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดจุดหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดยอดมุม

3.5 เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก

เป็นรังสีหรือเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดจุดหนึ่งและแบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นจุดยอดมุม

3.6 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

3.6.1 กรณีที่สัมพันธ์กับฐานและส่วนสูง

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

$$= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ให้ S_{ABC} แทนพื้นที่ของ $\triangle ABC$

ด้านทั้งสามยาว a , b และ c หน่วย

h_a , h_b และ h_c แทน ความยาวของส่วนสูงที่ลาก

จากจุดยอด A , B และ C ตามลำดับ

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times a \times h_a$$

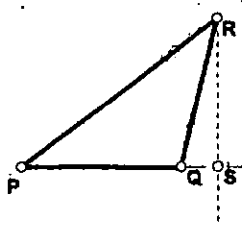
$$\text{หรือ } S_{ABC} = \frac{1}{2} \times b \times h_b$$

$$\text{หรือ } S_{ABC} = \frac{1}{2} \times c \times h_c$$

$\overline{RS}$ ตั้งฉากกับส่วนที่ต่อออกไปของด้าน PQ

$\overline{RS}$ เป็นส่วนสูง และเรียก

$\overline{PQ}$ ว่าฐานของ $\triangle PQR$

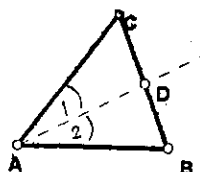


$$m\angle 1 = m\angle 2$$

$\overrightarrow{AD}$ หรือ $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง

มุมภายในของ $\triangle ABC$

ที่ลากจากจุดยอด A

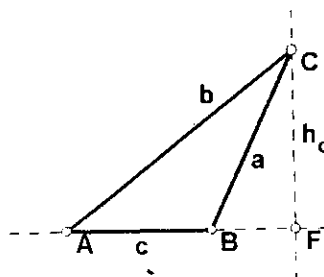
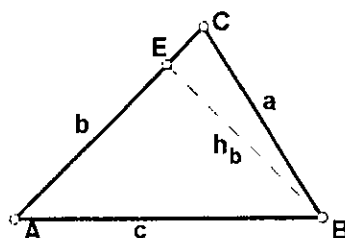
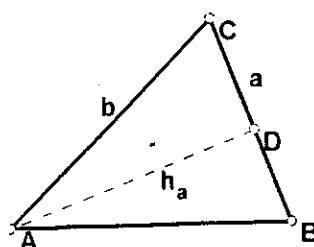
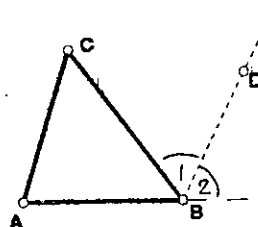


$$m\angle 1 = m\angle 2$$

$\overleftrightarrow{BD}$ หรือ $\overline{BD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง

มุมภายนอกของ $\triangle ABC$

ที่ลากจากจุดยอด B



3.6.2 กรณีที่สัมพันธ์กับความยาวของด้าน ทั้งสาม

ให้ $\triangle ABC$ มีด้านทั้งสามยาว a, b และ c หน่วย

$$\text{และ } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ หน่วย}$$

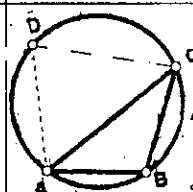
$$\text{แล้ว } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ ตารางหน่วย}$$

4. สิ่งที่เกี่ยวข้องกับรูปหลายเหลี่ยม

4.1 รูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลม

หรือ วงกลมล้อมรูปหลายเหลี่ยม

เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดยอดทุกจุดอยู่บนวง
กลมเดียวกัน



$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม

หรือ วงกลมล้อม $\triangle ABC$

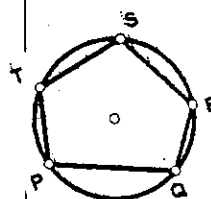
$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

หรือ วงกลมล้อม $\square ABCD$

4.2 รูปหลายเหลี่ยมล้อม

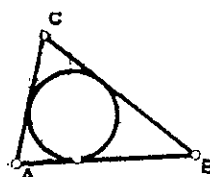
หรือ วงกลมแนบในรูปหลายเหลี่ยม

เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เขียนล้อมวงกลมโดย
แต่ละด้าน เป็นส่วนหนึ่งของเส้นสัมผัส
วงกลม



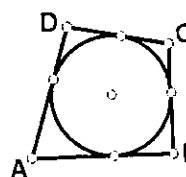
PQRST เป็นรูปห้าเหลี่ยมแนบในวงกลม

หรือ วงกลมล้อมรูปห้าเหลี่ยม PQRST



$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมล้อม

หรือ วงกลมแนบใน $\triangle ABC$

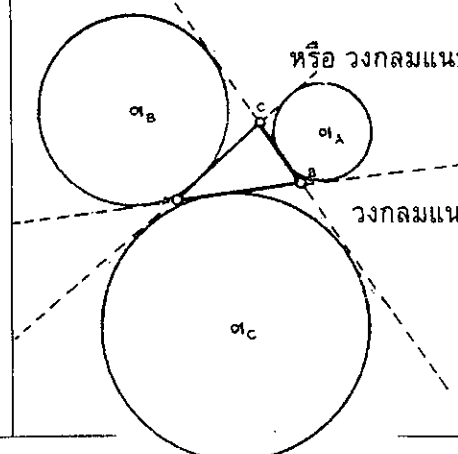


$\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมล้อม

หรือ วงกลมแนบใน $\square ABCD$

-4.3 วงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม

เป็นวงกลมที่สัมผัสกับด้านด้านหนึ่งภายนอก
รูปสามเหลี่ยมและส่วนของด้านอีกสองด้านของรูป
สามเหลี่ยม



วงกลมแนบนอก $\triangle ABC$

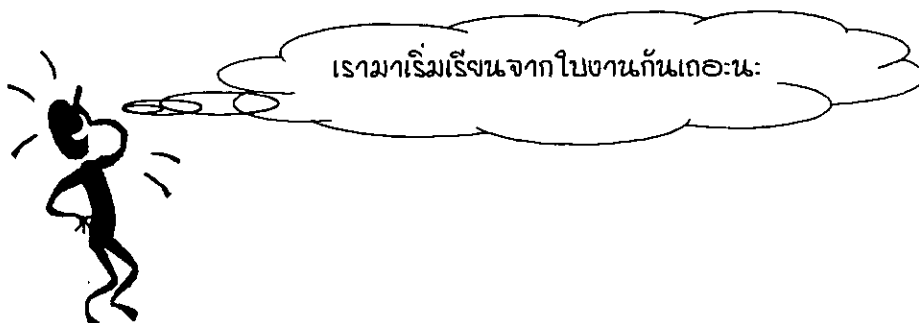
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1

เรื่อง เซนทรอยด์

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. หาเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. บอกได้ว่าเส้นมัธยฐานทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยม เป็นส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่า เซนทรอยด์
3. หาเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. บอกได้ว่า รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมัธยะ
5. บอกได้ว่าในรูปสามเหลี่ยม อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลางด้านตรงข้ามเป็น 2:1 และนำเสนอบัตินี้ไปใช้
6. หารูปสามเหลี่ยมหกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมเหล่านี้มีพื้นที่เท่ากัน



ใบงาน 3.1

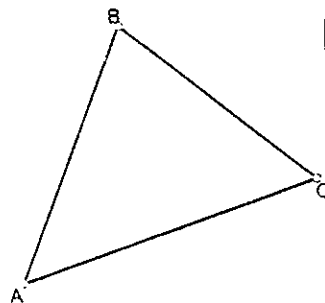
เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง การจวบกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และสมบัติที่ได้จากการจวบกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามนั้น

1. การจวบกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

1.1 เปิดไฟล์ Tmed001.gsp

เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม

▲ คำอธิบาย △ ซ่อนคำอธิบาย



▲ กำหนดจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC	△ ซ่อนจุด E
▲ กำหนดจุด D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC	△ ซ่อนจุด D
▲ กำหนดจุด F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB	△ ซ่อนจุด F
▲ ลากเส้นมัธยฐาน AE	△ ซ่อน AE
▲ ลากเส้นมัธยฐาน BD	△ ซ่อน BD
▲ ลากเส้นมัธยฐาน CF	△ ซ่อน CF
▲ แสดงจุดตัด G	△ Hide

1.2 ดับเบิลคลิกกรอบ คำอธิบาย จะได้ว่า.....

1.3 ดับเบิลคลิกกรอบ ซ่อนคำอธิบาย

1.4 พิจารณาการจวบกันของเส้นมัธยฐานโดย

- 1.4.1 ดับเบิลคลิกกรอบ กำหนดจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC
 กำหนดจุด D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC
 ลากเส้นมัธยฐาน AE
 ลากเส้นมัธยฐาน BD
 และ แสดงจุดตัด G

1.4.2 ดังนั้น จะได้ว่า

จุดกึ่งกลางด้าน BC คือ.....
 จุดกึ่งกลางด้าน AC คือ
 จุดตัดระหว่าง $\overline{AE}$ และ $\overline{BD}$ คือ.....

1.4.3 จากจุด C ลากเส้นตรงผ่านจุดตัดระหว่าง $\overline{AE}$ และ $\overline{BD}$ ให้ตัดด้าน AB ที่ F

1.4.4 วัด AF และ BF จะได้ว่า AF และ BF จะเท่ากันหรือไม่.....

1.4.5 นั่นคือ $\overline{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมหรือไม่ เพราะเหตุใด...

- 1.4.6 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C แล้วโยกรูปจะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว $\overline{CF}$ ยังเป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมหรือไม่.....

1.5 ข้อคาดเดา

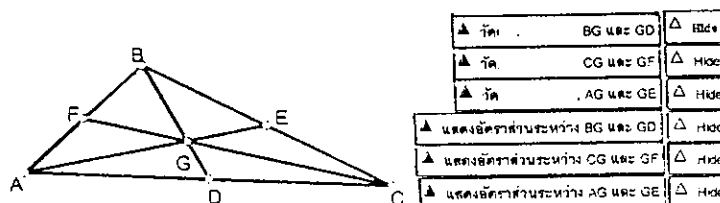
เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม(เป็นหรือไม่เป็น).....ส่วนของเส้นตรงจวบกับ

- 1.6 จุดที่เส้นมัธยฐานทั้งสามจวบกัน เรียกว่า เซนทรอยด์ (นิยมใช้จุด G แทนเซนทรอยด์)
และรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลาก:เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมัธยะ (Medial Triangle)
- 1.7 ปิดไฟล์ Tmed001.gsp
2. อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์ และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม

- 2.1 เปิดไฟล์ Tmed002.gsp

เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม

▲ คำอธิบาย △ ระยะค่าอธิบาย



- 2.2 ดับเบิลคลิกกรอบ คำอธิบาย จะได้ว่า.....
- 2.3 ดับเบิลคลิกกรอบ วัด BG และ GD
วัด CG และ GF
วัด AG และ GE
- 2.4 ดับเบิลคลิกกรอบ แสดงอัตราส่วนระหว่าง BG และ GD
แสดงอัตราส่วนระหว่าง CG และ GF
แสดงอัตราส่วนระหว่าง AG และ GE
- 2.5 ดังนั้น จะได้ว่า
- | | |
|----------------------------|--------|
| อัตราส่วนระหว่าง BG และ GD | =..... |
| อัตราส่วนระหว่าง CG และ GF | =..... |
| อัตราส่วนระหว่าง AG และ GE | =..... |
- 2.6 จากอัตราส่วนที่ได้ นักเรียนสังเกตได้ว่า.....

- 2.7 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C แล้วโยกรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยมมีการเปลี่ยนแปลงแล้ว จะได้....
อัตราส่วนเช่นเดิมหรือไม่.....

2.8 ข้อความ

อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์ และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลาง
ของด้านตรงข้าม เป็นเท่าใด.....

3. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการแบ่งของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

- 3.1 จากรูป $\triangle ABC$ จะถูกแบ่งโดยเส้นมัธยฐานทั้งสาม คือ $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ และ $\overline{CF}$ ออกเป็น (กี่) ...รูป
อะไรบ้าง.....

- 3.2 วัดพื้นที่ของ $\triangle ABC$ และรูปสามเหลี่ยมที่แบ่งออกมา จะได้พื้นที่เป็นเท่าใดบ้าง

$S_{ABC} =$	ตารางหน่วย
.....	
.....	
.....	

- 3.3 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่วัดได้ เท่ากันหรือไม่..... ถ้าไม่เท่าจะเป็นอย่างไร

- 3.4 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C แล้วโยกรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยมมีการเปลี่ยนแปลงแล้ว จะได้
ความสัมพันธ์ เช่นเดียวกับข้อ 3.3 หรือไม่.....

3.5 ข้อความ

รูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มี
พื้นที่.....

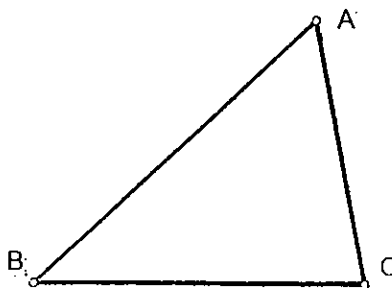
- 3.6 ปิดไฟล์ Tmed002.gsp

4. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

4.1 เปิดไฟล์ Median01.gsp

รูปสามเหลี่ยม เส้นมัธยฐาน (Medians)

▲ Show ▽ Hide



☞ พหุรูปสามเหลี่ยม
→ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
→ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
→ รูปสามเหลี่ยมดัดแปลง

4.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่างๆ ซึ่งนักเรียนอาจดับเบิลคลิกกรอบที่มีปรากฏ เพื่อช่วยในการสำรวจ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง

.....

.....

.....

สรุป

1. เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้ เรียกว่า.....
2. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม เรียกว่า.....
3. อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์ และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามเป็น.....
4. รูปสามเหลี่ยมหกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีพื้นที่.....

แบบฝึกปฏิบัติ 3.1 เซนทรอยด์

ข้อตกลง $\triangle ABC$ มีจุด G เป็นเซนทรอยด์ $BC = a$ หน่วย , $AC = b$ หน่วย และ $AB = c$ หน่วย

ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด $A = m_a$ หน่วย

ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด $B = m_b$ หน่วย

ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด $C = m_c$ หน่วย

S_{ABC} แทน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

1. จงสร้าง $\triangle ABC$ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมมัธยะ
2. จงสร้าง $\triangle ABC$ แล้วหาเซนทรอยด์ กำหนดเป็นจุด G

3. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

3.1 จากรูป 1 M เป็น เซนทรอยด์

$$CM = 16 \text{ หน่วย}$$

$$MO = 10 \text{ หน่วย}$$

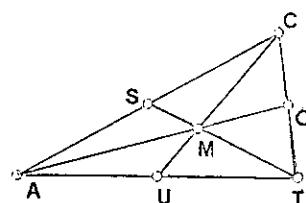
$$TS = 21 \text{ หน่วย}$$

แล้ว $AM = \dots\dots\dots$

$$SM = \dots\dots\dots$$

$$TM = \dots\dots\dots$$

และ $UM = \dots\dots\dots$



รูป 1

3.2 จากรูป 2. Y เป็นเซนทรอยด์

$$PY = 8 \text{ หน่วย}$$

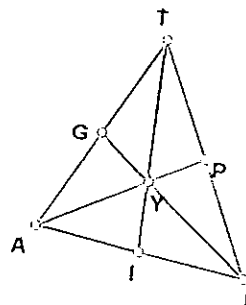
$$TY = 18 \text{ หน่วย}$$

$$FY = AY + 4$$

แล้ว $AY = \dots\dots\dots$

$$GY = \dots\dots\dots$$

และ $IY = \dots\dots\dots$



รูป 2

3.3 จากรูป 3 Z เป็นเซนทรอยด์

$$CZ = 14 \text{ หน่วย}$$

$$TZ = 30 \text{ หน่วย}$$

$$RZ = AZ$$

แล้ว $RH = \dots\dots\dots$

$$TE = \dots\dots\dots$$

เส้นมัธยฐานยาวเท่ากัน (กี่).....เส้น

$\triangle RAT$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด.....

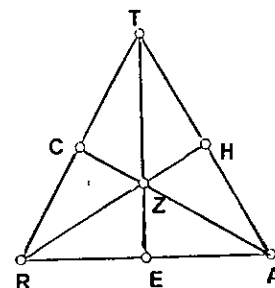
$$m\angle TEA = \dots\dots\dots \text{องศา}$$

$$RA = \dots\dots\dots \text{หน่วย}$$

$$S_{RAT} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$$

$$S_{ZEA} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$$

และพื้นที่ $\triangle ZEA$ เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดบ้าง.....



รูป 3

3.4 จากรูป 4 G เป็นเซนทรอยด์

$$GI = GR = GN$$

$$PR = 36 \text{ หน่วย}$$

แล้ว $DG = \dots\dots\dots$

$$IG = \dots\dots\dots$$

เส้นมัธยฐานยาวเท่ากัน (กี่).....เส้น

$\triangle DOP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด.....

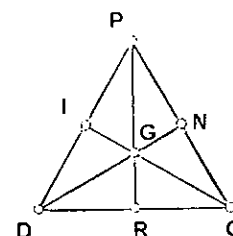
$$m\angle PRO = \dots\dots\dots \text{องศา}$$

$$DO = \dots\dots\dots \text{หน่วย}$$

$$S_{DOP} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$$

$$S_{DGR} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$$

และพื้นที่ $\triangle DGR$ เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดบ้าง.....



รูป 4

3.5 จากรูป 5. G เป็นเซนทรอยด์

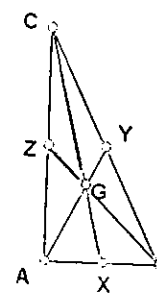
$$AB = 5 \text{ หน่วย}$$

$$AC = 12 \text{ หน่วย}$$

แล้ว $\triangle S_{ABC} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$

$$\triangle S_{AGX} = \dots\dots\dots \text{ตารางหน่วย}$$

และ พื้นที่ $\triangle AGX$ เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดบ้าง.....



รูป 5



* 4. สร้าง $\triangle ABC$

$\overline{AF}$ เป็นเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด A

$\overline{DE}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลาง D บน $\overline{AB}$ และจุดกึ่งกลาง E บน $\overline{AC}$

M เป็นจุดตัดระหว่าง $\overline{AF}$ และ $\overline{DE}$



มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ยาวเท่ากัน.....

.....

มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ขนานกัน.....

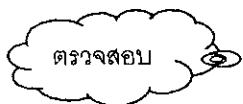
.....



ข้อคาดเดาเกี่ยวกับจุด M ได้แก่

.....

.....



ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....



เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

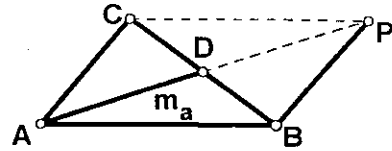
.....

โจทย์

* 5. สร้าง $\triangle ABC$ ลากเส้นมัธยฐาน AD

ให้ m_a เป็นความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอด A

ต่อ $\overline{AD}$ ไปถึง P โดยที่ $AD = DP$



สำรวจ

มีส่วนของเส้นตรงใดบ้างที่ยาวเท่ากัน.....
มีส่วนของเส้นตรงใดบ้างที่ขนานกัน.....

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\square ABPC$ ได้แก่.....

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

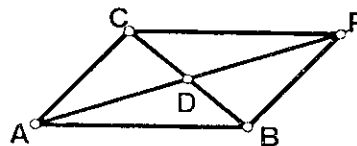
เหตุผล

เพราะเหตุใด

โจทย์

* 6. สร้าง $ABPC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ ดังรูป

ให้ $AD = m_a$ หน่วย, $BC = a$ หน่วย, $AC = b$ หน่วย และ $AB = c$ หน่วย



ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ m_a ที่สัมพันธ์กับ a, b และ c ได้แก่

(ข้อแนะ) โดยสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของเส้นทแยงมุม และความยาวของด้านอย่างไร

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

ดังนั้น $m_a =$

เหตุผล

เพราะเหตุใด

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2

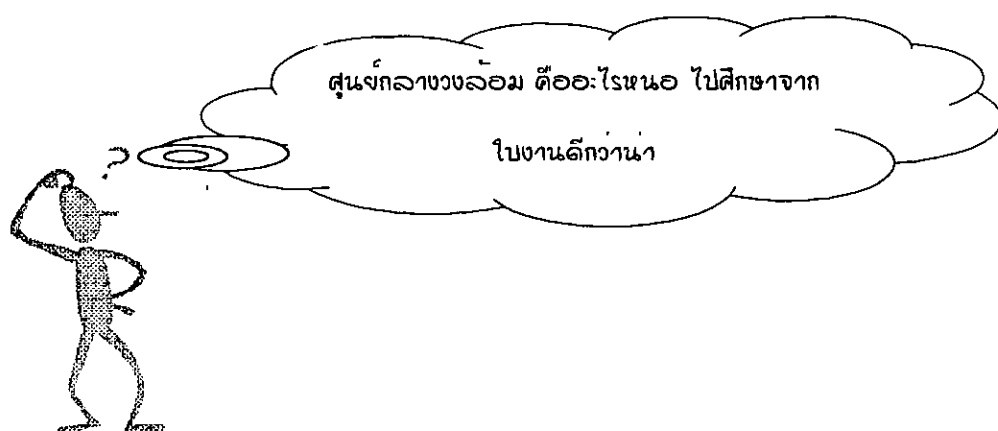
เรื่อง ศูนย์กลางวงล้อม

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. หาเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. บอกได้ว่า เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงล้อม
3. หาศูนย์กลางวงล้อมของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. บอกได้ว่าระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน และเป็นความยาวของรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น
5. สร้างวงกลมผ่านจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้หรือผ่านจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงสาม

จุด



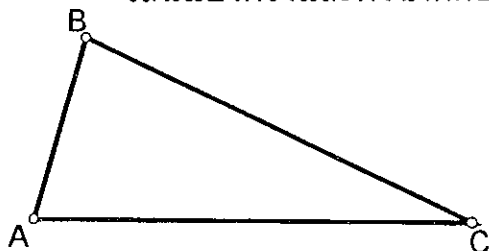
ใบงาน 3.2

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และสมบัติที่ได้จากการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามนั้น

1. การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

1.1 เปิดไฟล์ Tcir001.gsp

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม



▲ ลากเส้นแบ่งครึ่ง,ตั้งฉากด้านAB	△ Hide
▲ ลากเส้นแบ่งครึ่ง,ตั้งฉากด้านBC	△ Hide
▲ ลากเส้นแบ่งครึ่ง,ตั้งฉากด้านAC	△ Hide
▲ แสดงจุดตัด O	△ Hide

1.2 พิจารณาการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมโดย

1.2.1 ดับเบิลคลิกกรอบ ลากเส้นแบ่งครึ่ง,ตั้งฉากด้าน AB

ลากเส้นแบ่งครึ่ง,ตั้งฉากด้าน BC

1.2.2 ดับเบิลคลิกกรอบ แสดงจุดตัด O

1.2.3 ลากเส้นตรงผ่านจุดตัด O ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด F

1.2.4 วัด AF และ CF จะได้ AFเท่ากับ CF หรือไม่.....

1.2.5 คลิกจุด F และเส้นตรงที่สร้างขึ้น ในข้อ 1.2.3 แล้วลบทิ้ง

1.2.6 หาจุดกึ่งกลางของด้าน AC กำหนดชื่อเป็นจุด F

1.2.7 ลากเส้นตรงผ่านจุดตัด O และ F วัด $\angle OFC$ พบว่าเป็นมุม.....

1.2.8 จะได้ว่า $\overleftrightarrow{OF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ หรือไม่.....

1.2.9 นั่นคือ $\overleftrightarrow{OF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยมหรือไม่.....

1.2.10 คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C แล้วโยกรูป จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว

$\overleftrightarrow{OF}$ ยังเป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านของรูปสามเหลี่ยมหรือไม่.....

1.3 ข้อคาเดา

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม (เป็นหรือไม่เป็น) เส้นจวบกับ

1.4 จุดที่เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจวบกับ

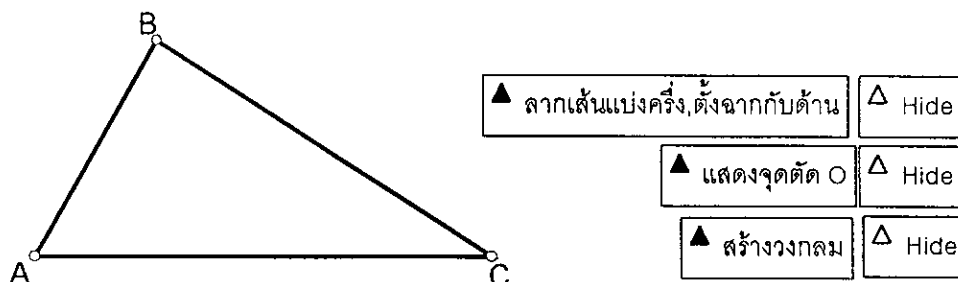
เรียกว่า ศูนย์กลางวงล้อม (นิยมใช้จุด O แทนศูนย์กลางวงล้อม)

1.5 ปิดไฟล์ Tcir001.gsp

2. ระยะจากศูนย์กลางวงล้อม ถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

2.1 เปิดไฟล์ Tcir002.gsp

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม



2.2 ดับเบิลคลิกกรอบ ลากเส้นแบ่งครึ่ง, ตั้งฉากกับด้าน

2.3 ดับเบิลคลิกกรอบ แสดงจุดตัด O

2.4 วัดความยาวจากจุดยอด A, B หรือ C ไปยังจุด O จะได้

AO = ..., BO = ... และ CO = ...

2.5 ดังนั้นระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เท่ากันหรือไม่.....

2.6 ถ้าให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง แล้วนักเรียนสามารถสร้างวงกลมผ่านจุด A, B และ C ได้หรือไม่
เพราะเหตุใด.....

2.7 ดับเบิลคลิกกรอบ สร้างวงกลม

2.8 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกกรุปเพื่อสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจุด A, B หรือ C กับ
วงกลมที่ได้ พบว่า จุดทั้งสามอยู่บนวงกลมหรือไม่

2.9 ข้อคาดเดา

ระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีขนาด.....
และเป็นความยาวของ.....ของวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยมนั้น

2.10 ปิดไฟล์ Tcir002.gsp

3. สร้างวงกลมผ่านจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง 3 จุด

3.1 เปิด New Sketch

3.2 กำหนดจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง 3 จุด ได้แก่ จุด A, B และ C

3.3 นักเรียนมีวิธีสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามอย่างไร และให้สร้างตามวิธีที่นักเรียนนำเสนอมา

.....

.....

.....

.....

.....

4. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

4.1 เปิดไฟล์ Circum32.gsp

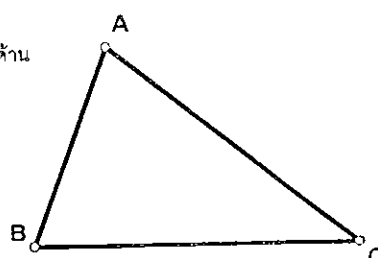
รูปสามเหลี่ยม

เส้นมัธยฐาน

▲ Show G △ Hide

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน

▲ Show O △ Hide



- ⇒ หมุนรูปสามเหลี่ยม
- รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

4.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่าง ๆ ซึ่งนักเรียนอาจดับเบิลคลิกกรอบที่มีปรากฏ เพื่อช่วยในการ
สำรวจ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง

.....

.....

.....

.....

สรุป

1. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม.....เส้นจวบกัน
และจุดจวบนี้เรียกว่า.....
 2. ระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีขนาด.....
และเป็นความยาวของ.....ของวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยมนั้น
 3. ถ้ามีจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงสามจุด สามารถสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามได้โดย.....
-



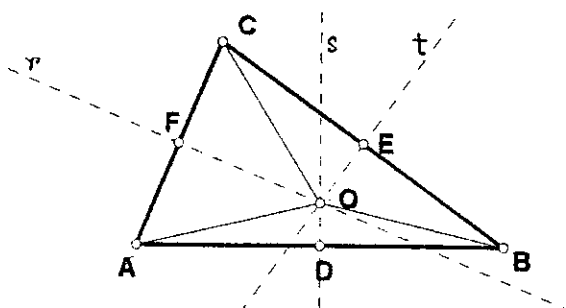
แบบฝึกปฏิบัติ 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม

1. จงสร้าง $\triangle ABC$ แล้วหาศูนย์กลางวงล้อม กำหนดเป็นจุด O

2. ถ้ามีจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง 3 จุด แล้วนักเรียนมีวิธีสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามได้อย่างไร และให้นักเรียนสร้างด้วยวิธีที่นำเสนอมา

* 3. จากรูป

กำหนดให้ เส้นตรง r, s และ t เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามด้านของ $\triangle ABC$ พบกันที่จุด O



สำรวจ

มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ยาวเท่ากัน.....

ตั้งข้อคาดเดา

มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ขนานกัน.....

ข้อคาดเดาที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ OA ได้แก่

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

เพราะเหตุใด

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.3

เรื่อง จุดออร์โทเซนเตอร์

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. หาส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. บอกได้ว่า ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่า จุดออร์โทเซนเตอร์
3. หาจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีเดล
5. บอกมุมที่มีขนาดเท่ากัน ที่เกิดจากด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลคู่หนึ่งที่ประชิดกัน ทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม
6. บอกได้ว่าส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิมจะแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมพีเดล
7. บอกได้ว่าด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลทำให้มีรูปสามเหลี่ยมภายในรูปสามเหลี่ยมเดิมสามรูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม



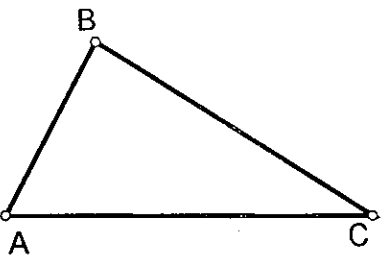
ใบงาน 3.3

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง การจวบกันของส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และสมบัติที่ได้จากการจวบกันของส่วนสูงทั้งสามนั้น

1. การจวบกันของส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

1.1 เปิดไฟล์ Tortho01.gsp

ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม



▲ คำอธิบาย	△ ซ่อนคำอธิบาย

▲ ส่วนสูง CD	△ Hide
▲ ส่วนสูง AE	△ Hide
▲ ส่วนสูง BF	△ Hide
▲ แสดงจุดตัด H	△ Hide

1.2 ดับเบิลคลิกกรอบ คำอธิบาย จะได้ว่า

1.3 ดับเบิลคลิกกรอบ ซ่อนคำอธิบาย

1.4 พิจารณาการจวบกันของส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม โดย

1.4.1 ดับเบิลคลิกกรอบ ส่วนสูง CD
ส่วนสูง AE
และ แสดงจุดตัด H

จะได้ว่า จุดตัดระหว่างส่วนสูง CD และ ส่วนสูง AE คือ

1.4.2 จากจุด B ลากเส้นตรงผ่านจุดตัด H ให้ตัดด้าน AC ที่ F

1.4.3 นักเรียนจะแสดงได้อย่างไรว่า $\overline{BF}$ เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม.....

1.4.4 $\overline{BF}$ เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม หรือไม่

1.4.5 คลิกที่จุด A , B หรือ C แล้วโยกจุด จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว $\overline{BF}$ ยังเป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมหรือไม่.....

1.5 ข้อคาดเดา

ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม (เป็นหรือไม่เป็น).....ส่วนของเส้นตรงจวบกับ

1.6 จุดที่ส่วนสูงทั้งสามจวบกัน เรียกว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ (นิยมใช้จุด H แทนจุดออร์โทเซนเตอร์)

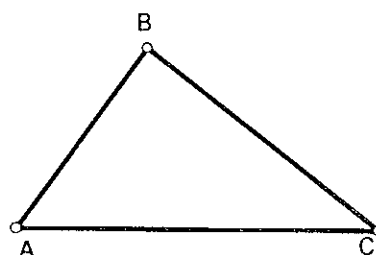
รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของ

รูปสามเหลี่ยมเดิม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีแดล (Pedal Triangle)

1.7. ปิดไฟล์ Tortho01.gsp

2. รูปสามเหลี่ยมพีแดล

รูปสามเหลี่ยมพีแดล (Pedal Triangle)



▲ คำอธิบาย	△ ซ่อนคำอธิบาย
▲ ส่วนสูง CD	△ Hide
▲ ส่วนสูง AE	△ Hide
▲ ส่วนสูง BF	△ Hide
▲ แสดงจุดตัด H	△ Hide
▲ รูปสามเหลี่ยมพีแดล	△ Hide

2.2 ดับเบิลคลิกกรอบ คำอธิบาย จะได้ว่า

2.3 ดับเบิลคลิกกรอบ ซ่อนคำอธิบาย

2.4. ดับเบิลคลิกกรอบ ส่วนสูง CD

ส่วนสูง AE

ส่วนสูง BF

และ รูปสามเหลี่ยมพีแดล

2.5 ดับเบิลคลิกกรอบ Hide หลังกรอบ ส่วนสูงทั้งสาม

2.6. นักเรียนสังเกตเห็นมุมที่เกิดจากด้านของรูปสามเหลี่ยมพีแดลคู่หนึ่งที่ประชิดกัน ทำมุมกับ

ด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม (ก็) มุม มุมใดบ้าง

2.7. วัด $m\angle AFD$ และ $m\angle CFE$, $m\angle FEC$ และ $m\angle DEB$, $m\angle EDB$ และ $m\angle FDA$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m\angle AFD &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle CFE = \dots\dots\dots \\ m\angle FEC &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle DEB = \dots\dots\dots \\ m\angle EDB &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle FDA = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2.8 มุมแต่ละคูมีขนาดเท่ากันหรือไม่.....

2.9 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกรูป ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว ขนาดของมุมที่วัดได้

ในข้อ 2.7 ยังมีความสัมพันธ์เช่นเดิมหรือไม่.....

2.10 ข้อคาดเดา

ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลคู่หนึ่งที่ประชิดกัน ทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม เป็นมุมที่มีขนาด.....

2.11. วัด $m\angle AED$ และ $m\angle AEF$, $m\angle BFD$ และ $m\angle BFE$, $m\angle CDE$ และ $m\angle CDF$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m\angle AED &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle AEF = \dots\dots\dots \\ m\angle BFD &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle BFE = \dots\dots\dots \\ m\angle CDE &= \dots\dots\dots \text{และ } m\angle CDF = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2.12 มุมแต่ละคูมีขนาดเท่ากันหรือไม่.....

2.13 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกรูป ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว ขนาดของมุมที่วัดได้

ในข้อ 2.11 ยังมีความสัมพันธ์เช่นเดิมหรือไม่.....

2.14 ข้อคาดเดา

ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม จะ (แบ่งครึ่งหรือไม่).....มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมพีเดล

2.15 พิจารณาว่า $\triangle ABC$ คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมใดบ้าง

เพราะเหตุใด.....

2.16 ข้อคาดเดา

ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลทำให้มีรูปสามเหลี่ยมภายในรูปสามเหลี่ยมเดิม(ก่).....รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม

2.17. ปิดไฟล์ Tortho02.gsp

3. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

3.1 เปิดไฟล์ ortho32.gsp

รูปสามเหลี่ยม

เส้นมัธยฐาน

Show G Hide

ส่วนสูง

Show H Hide

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน

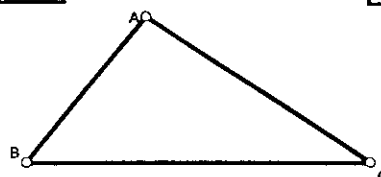
Show O Hide

≠ หมุนรูปสามเหลี่ยม

→ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

→ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

→ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



3.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่าง ๆ ซึ่งนักเรียนอาจดับเบิลคลิกกรอบที่มีปรากฏ เพื่อช่วยในการสำรวจ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง.....

.....

.....

.....

สรุป

1. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม.....ส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้ เรียกว่า.....
2. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม เรียกว่า
3. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลคู่หนึ่ง ที่ประชิดกัน จะทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม เป็นมุมที่มีขนาด.....
4. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม จะ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมพีเดล
5. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดล ทำให้มีรูปสามเหลี่ยมภายในรูปสามเหลี่ยม เดิม.....รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม

แบบฝึกปฏิบัติ 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์

1. จงสร้าง $\triangle DEF$ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมพีคัล XYZ

2. จงสร้าง $\triangle DEF$ แล้วหาจุดออร์โทเซนเตอร์

3. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

3.1 จากรูป 1 จุด M เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์

$$m\angle TUQ = 50 \text{ องศา}$$

$$m\angle UQT = 73 \text{ องศา}$$

$$m\angle SRU = 57 \text{ องศา}$$

$$\text{แล้ว } m\angle QPR = \dots\dots\dots$$

$$m\angle RUS = \dots\dots\dots$$

$$m\angle PST = \dots\dots\dots$$

$$m\angle QTU = \dots\dots\dots$$

$$m\angle SUP = \dots\dots\dots$$

$$m\angle PUT = \dots\dots\dots$$

$$m\angle TSQ = \dots\dots\dots$$

$$m\angle QSU = \dots\dots\dots$$

$$m\angle UTR = \dots\dots\dots$$

$$m\angle RTS = \dots\dots\dots$$

3.2 จากรูป 2 จุด S เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์

$$m\angle ACB = 60 \text{ องศา}$$

$$m\angle CDE = 35 \text{ องศา}$$

$$m\angle CBA = 85 \text{ องศา}$$

$$\text{แล้ว } m\angle BAC = \dots\dots\dots$$

$$m\angle EFA = \dots\dots\dots$$

$$m\angle AEF = \dots\dots\dots$$

$$m\angle DEC = \dots\dots\dots$$

$$m\angle BED = \dots\dots\dots$$

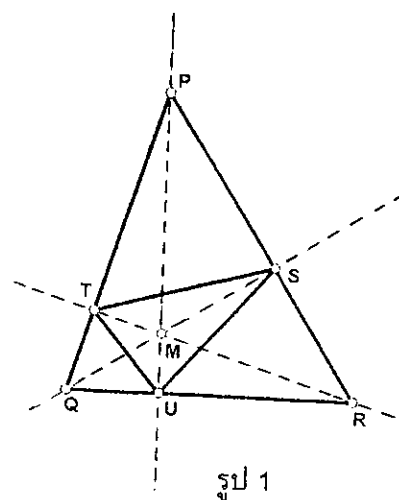
$$m\angle FEB = \dots\dots\dots$$

$$m\angle CFE = \dots\dots\dots$$

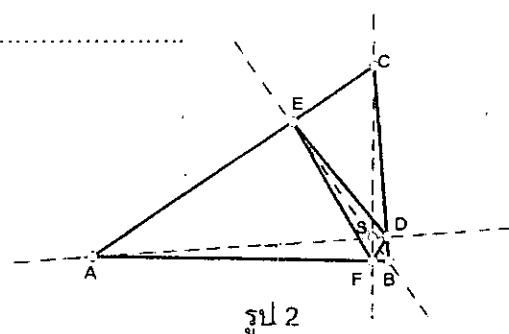
$$m\angle DFC = \dots\dots\dots$$

$$m\angle EDA = \dots\dots\dots$$

$$m\angle ADF = \dots\dots\dots$$



รูป 1



รูป 2

3.3 จากรูป 3 จุด H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ $\triangle PDQ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีเดล

$$m\angle BAC = 120 \text{ องศา}$$

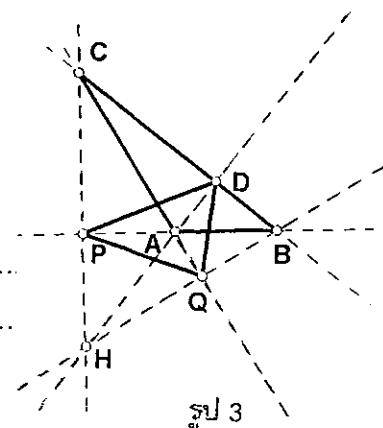
$$m\angle CBA = 40 \text{ องศา}$$

$$m\angle CDP = 60 \text{ องศา}$$

$$m\angle CQP = 40 \text{ องศา}$$

$$\text{แล้ว } m\angle ACB = \dots\dots\dots m\angle QDB = \dots\dots\dots$$

$$m\angle BQD = \dots\dots\dots m\angle PQH = \dots\dots\dots$$



รูป 3

4. จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 จากข้อ 3.1 จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ $\triangle PQR$ มา 3 ชื่อ

.....

4.2 จากข้อ 3.2 จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ $\triangle ABC$ มา 3 ชื่อ

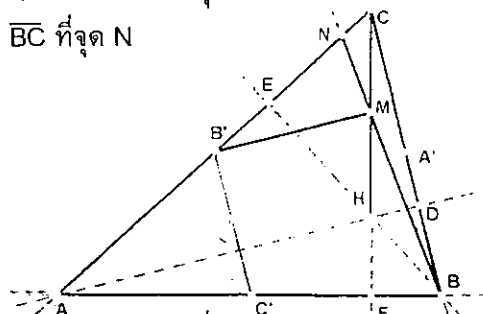
.....

4.3 จากข้อ 3.3 จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกับ $\triangle HBC$ มา 3 ชื่อ

.....

โจทย์

* 5 $\triangle ABC$ มี $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นส่วนสูง จุด H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ จุด A' , B' , C' และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{CH}$ ตามลำดับ $\overline{BM}$ ตัด $\overline{BC}$ ที่จุด N



สำรวจ

มีส่วนของเส้นตรงใดที่ขนานกับ $\overline{B'M}$

มีส่วนของเส้นตรงใดที่ขนานกับ $\overline{B'C'}$

ขนาดของมุม ADC และ $\angle MB'C'$

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $\square MB'C'F$

ข้อแนะ $\square MB'C'F$ แนบในวงกลมหรือไม่.....

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

เพราะเหตุใด.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4

เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

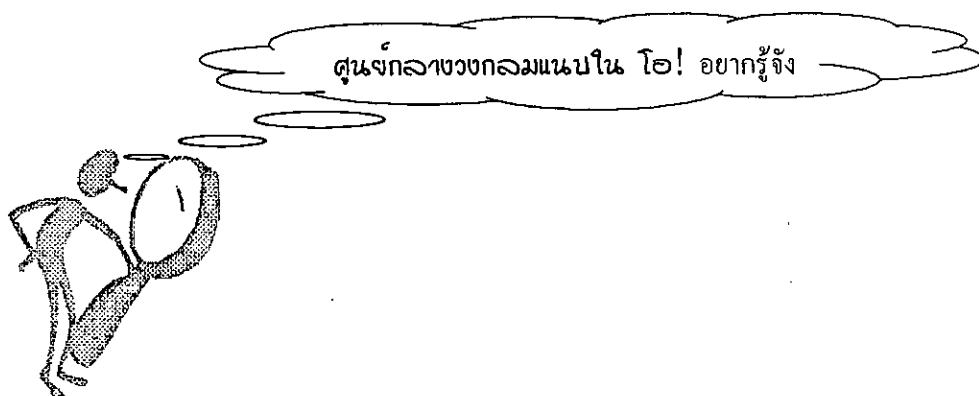
หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. หาเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเส้นของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. บอกได้ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเส้นของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้

เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

3. หาศูนย์กลางวงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. สร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



ใบงาน 3.4

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมและสมบัติที่ได้จากการจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามนั้น

1. การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
- 1.1 เปิด New Sketch

1.2 สร้าง $\triangle ABC$ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน A และ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน B

1.3 ให้จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเป็นจุด I

1.4 จากจุด C ลากเส้นตรงผ่านจุดตัด I

1.5 นักเรียนจะแสดงได้อย่างไรว่า เส้นตรง CI เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C หรือไม่

1.6 $\vec{CI}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C หรือไม่.....

1.7 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกจุด จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว $\vec{CI}$ ยังเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C หรือไม่.....
- 1.8 ข้อความ

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเส้นของรูปสามเหลี่ยม (เป็นหรือไม่เป็น).....เส้นจวบกัน
- 1.9 จุดที่เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามจวบกันเรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

(นิยมใช้จุด I แทนศูนย์กลางวงกลมแนบใน).
- 2 วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม
- 2.1 นักเรียนสามารถสร้างวงกลมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลาง และด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัส ได้หรือไม่

2.2 ถ้าได้ นักเรียนมีวิธีทำอย่างไร

2.3 ถ้าไม่ได้ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

2.3.1 จากจุด I ลากเส้นตั้งฉาก กับด้าน AB, BC, AC ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ

2.3.2 วัด ID, IE และ IF จะได้ว่า ID, IE และ IF เท่ากันหรือไม่.....เพราะเหตุใด.....

2.3.3 คลิจุด A, B หรือ C แล้วโยกรูป จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว ID, IE และ IF ยังเท่ากันหรือไม่.....

2.3.4 ข้อคาดเดา

ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบในถึงด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด(เท่ากับหรือไม่).....

2.3.5 ให้นักเรียนย้อนไปตอบคำถามข้อ 2.1 และ ข้อ 2.2 อีกครั้ง

3 ตรวจสอบสมบัติที่ได้

3.1 เปิดไฟล์ Incen32.gsp

รูปสามเหลี่ยม

เส้นมีอยู่ฐาน

Show G Hide

ส่วนสูง

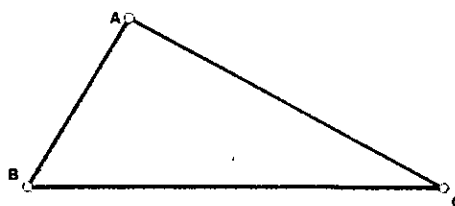
Show H Hide

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน

Show O Hide

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน

Show I Hide



≠ หมูปรูปสามเหลี่ยม

→ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

→ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

→ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

3.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่าง ๆ ซึ่งนักเรียนอาจดับเบิลคลิกกรอบที่มีปรากฏ เพื่อช่วยในการสำรวจ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง.....

สรุป

- 1. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม.....เส้นจوابกัน
และจุดจwabนี้ เรียกว่า.....
- 2. ระยะจากศูนย์กกลางวงกลมแนบในถึงด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด.....
- 3. สร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC มีวิธีสร้าง ดังนี้
.....
.....

แบบฝึกปฏิบัติ 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

1. จงสร้าง $\triangle ABC$ สร้าง เซนทรอยด์ (จุด G) ศูนย์กลางวงล้อม (จุด O) จุดออร์โทเซนเตอร์ (จุด H) และ

ศูนย์กลางวงกลมแนบใน (I) โยก $\triangle ABC$ ให้มีขนาดต่าง ๆ สังเกตจุดที่สร้างขึ้น

- 1.1 จงบอกว่า เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม จุดออร์โทเซนเตอร์ และศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดใดเป็นจุดที่อยู่นอก หรือใน หรือบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน และรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยเติมคำตอบลงในตารางข้างล่างนี้

	รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม	รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
เซนทรอยด์			
ศูนย์กลางวงล้อม			
จุดออร์โทเซนเตอร์			
ศูนย์กลางวงกลมแนบใน			

- 1.2 ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว

เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม จุดออร์โทเซนเตอร์ และ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกันหรือไม่.....

- 1.3 ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม จุดออร์โทเซนเตอร์ และศูนย์กลางวงกลมแนบใน เป็นจุดเดียวกันหรือไม่

.....

- 2 จงจับคู่ ความสัมพันธ์ระหว่างรูปตามตัวอักษรจาก a ถึง f กับข้อความทางซ้ายมือ

- 2.1 การสร้างเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก

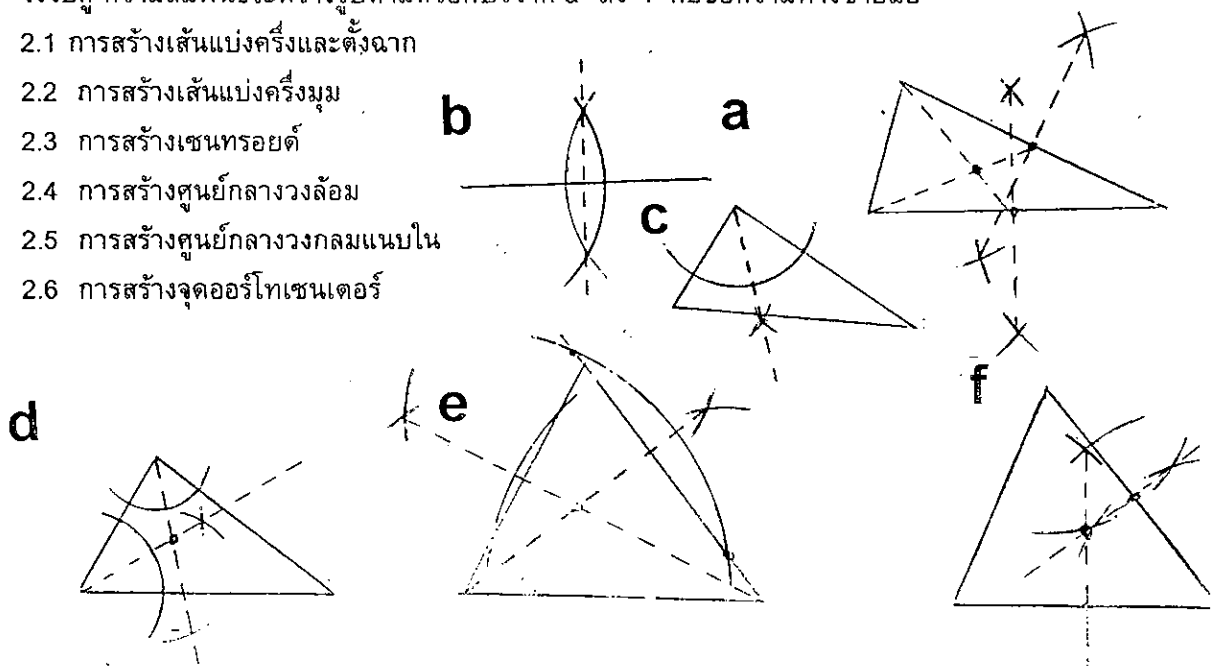
- 2.2 การสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม

- 2.3 การสร้างเซนทรอยด์

- 2.4 การสร้างศูนย์กลางวงล้อม

- 2.5 การสร้างศูนย์กลางวงกลมแนบใน

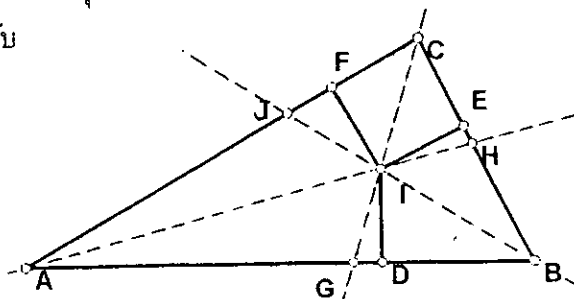
- 2.6 การสร้างจุดออร์โทเซนเตอร์



- 3 จงสร้างวงกลมที่มีด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม PQR เป็นเส้นสัมผัส และบอกวิธีสร้างอย่างคร่าว ๆ

โจทย์

- * 4. กำหนดให้ เส้นตรง r, s และ t เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B , และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC พบกันที่จุด I และ ID, IE, IF ตั้งฉากกับ AB, BC, CA ที่จุด D, E, F ตามลำดับ



สำรวจ

มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ยาวเท่ากัน.....
.....
มีส่วนเส้นตรงใดบ้างที่ขนานกัน.....

ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาที่เกี่ยวกับส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ ID ได้แก่

ตรวจสอบ

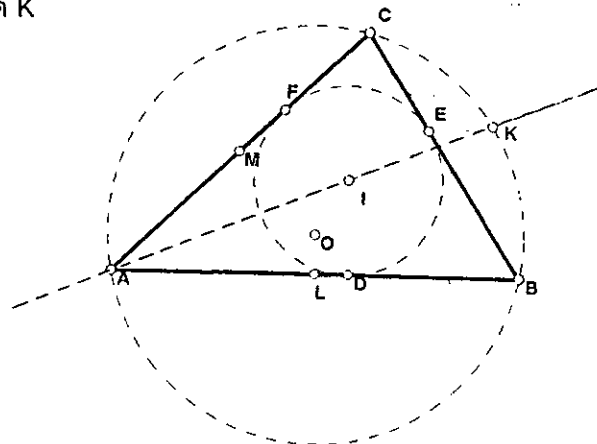
ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

เหตุผล

เพราะเหตุใด

โจทย์

- * 5. $\triangle ABC$ มี จุด I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน
 $\triangle ABC$ ตัดวงกลมล้อม $\triangle ABC$ ที่จุด K



ตั้งข้อคาดเดา

ถ้าหนูออฟ ตั้งข้อคาดเดาว่า
 "จุด K เป็นศูนย์กลางวงล้อมของวงกลมล้อม $\triangle BIC$ "

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่หนูออฟตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดานี้น่าจะถูก
 ต้องหรือไม่

โจทย์

- * 6. สร้างวงกลม A, B และ C สัมผัสกันแบบภายนอกที่จุด D, E และ F

ตั้งข้อคาดเดา

ถ้าหนูตั้งข้อคาดเดาว่า "วงกลมแนบใน $\triangle ABC$ เป็นวงกลมล้อม $\triangle DEF$ "

ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่หนูตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดานี้น่าจะถูก
 ต้องหรือไม่

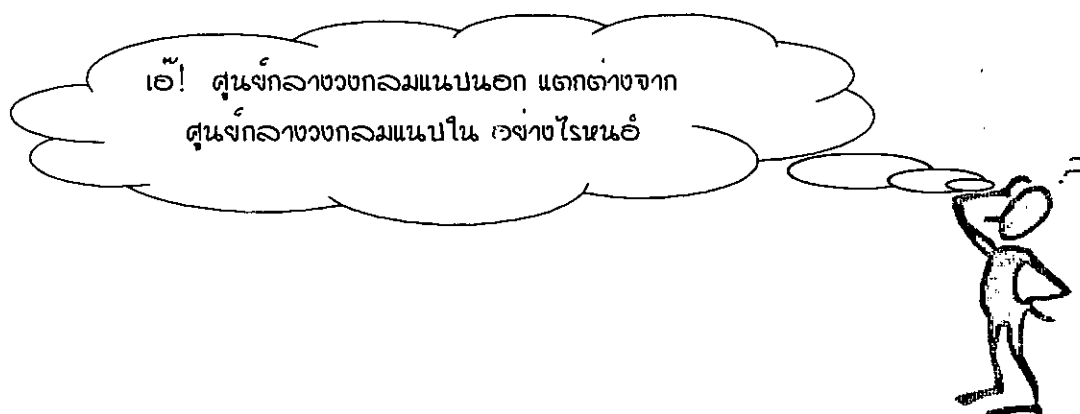
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.5

เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. หาเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
2. บอกได้ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยม และเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามเป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก
3. หาศูนย์กลางวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. สร้างวงกลมแนบนออกรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
5. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมเดิมเป็นรูปสามเหลี่ยมพีคัลของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมศูนย์กลางวงกลมแนบนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม



ใบงาน 3.5

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมสองมุมกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม และสมบัติที่ได้จากการจวบกันของเส้นทั้งสามนั้น

1. การจวบกันของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมสองมุมกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม

1.1 เปิด New Sketch

1.2 สร้าง $\triangle ABC$ ลาก (เส้นประ) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{AC}$

1.3 สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุม A และ B

1.4 ให้จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเป็นจุด I

1.5 จากจุด C ลากเส้นตรงผ่านจุดตัด I

1.6 เส้นตรง CI เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C หรือไม่

1.7 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกรูป จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว CI ยังเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม C หรือไม่.....

1.8 ข้อคาดเดา

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม (เปิดหรือไม่เป็น).....เส้นจวบกัน

1.9 จุดที่เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยมจวบกัน เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (นิยมใช้จุด I_A แทนศูนย์กลางวงกลมแนบนอกที่อยู่ตรงข้าม $\angle A$)

2. วงกลมแบบนอกรูปสามเหลี่ยม

2.1 นักเรียนสามารถสร้างวงกลมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลาง และด้านด้านหนึ่งและส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัส ได้หรือไม่

2.2 ถ้าได้ นักเรียนมีวิธีสร้างอย่างไร

2.3 ถ้าไม่ได้ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

2.3.1 จากจุด I ลากเส้นตั้งฉาก กับด้าน AB , ส่วนต่อของด้าน BC และส่วนต่อของด้าน AC

ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ

2.3.2 วัด ID, IE และ IF จะได้ว่า ID, IE และ IF เท่ากันหรือไม่.....เพราะเหตุใด.....

2.3.3 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกgrup จะได้ว่า ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว ID, IE และ IF ยังเท่ากันหรือไม่

2.3.4 ข้อความ

ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบนอกถึงด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และส่วนต่อของด้านอีกสองด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมนั้นมีขนาด (เท่ากันหรือไม่).....

2.3.5 ให้นักเรียนย้อนไปตอบคำถามข้อ 2.1 และ ข้อ 2.2 อีกครั้ง

3. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

3.1 เปิดไฟล์ Excen32.gsp

รูปสามเหลี่ยม

เส้นมัธยฐาน

Show G Hide

ส่วนสูง

Show H Hide

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน

Show I Hide

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้าน

Show O Hide

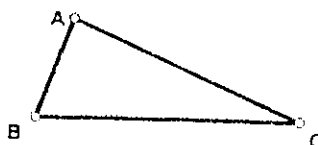
Show Excenter Hide

หมุนรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



3.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่าง ๆ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง

.....

.....

สังเกตได้อย่างนี้บ้างไหม เอง ?

สร้างวงกลมแนบนอกทั้งสามด้านของ $\triangle ABC$ และลากเส้นเชื่อมศูนย์กลางวงกลมแนบนอกทั้งสามจุด พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $\triangle I_A I_B I_C$ และ $\triangle ABC$ ว่า $\triangle ABC$ (เป็นหรือไม่เป็น) รูปสามเหลี่ยมพีเดล ของ $\triangle I_A I_B I_C$

สรุป

1. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม
เส้นจบกัน และจุดจบนี้เรียกว่า
2. ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบนอกถึงด้าน และส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมีขนาด.....และเป็นความยาวของ.....ของวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านนั้นและส่วนต่อของด้านอีกสองด้านดังกล่าวเป็นเส้นสัมผัส
3. สร้างวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม มีวิธีสร้างดังนี้
.....
.....
.....
4. สืบเนื่องจากข้อ 1 ข้างต้น รูปสามเหลี่ยมเดิมเป็น ของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมศูนย์กลางวงกลมแนบนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

แบบฝึกปฏิบัติ 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก

1. จงสร้างวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$

2. $\triangle ABC$ มีจุด I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน
จุด I_A เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งสัมผัสด้าน BC
แล้ว $\square IBI_A C$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมหรือไม่

3. $\triangle ABC$

ให้ $AB = c$ หน่วย $AC = b$ หน่วย $BC = a$ หน่วย และ $p = \frac{a+b+c}{2}$

มีจุด I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน รัศมีของวงกลม I ยาว r หน่วย

จุด I_A เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งสัมผัสด้าน BC

และรัศมีของวงกลม I_A ยาว R หน่วย ดังรูป

ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริง

3.1 ถ้า จุด E จุด F และจุด D เป็นจุดสัมผัสที่วงกลม I

สัมผัส $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ

แล้ว $AE = AF = p - a$

$BD = BF = p - b$

$CD = CE = p - c$

3.2 ถ้าจุด D_1 เป็นจุดสัมผัสที่วงกลม I_A สัมผัส $\overline{BC}$

จุด E_1 และจุด F_1 เป็นจุดสัมผัสที่วงกลม I_A สัมผัส $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

แล้ว $AE_1 = AF_1 = p$

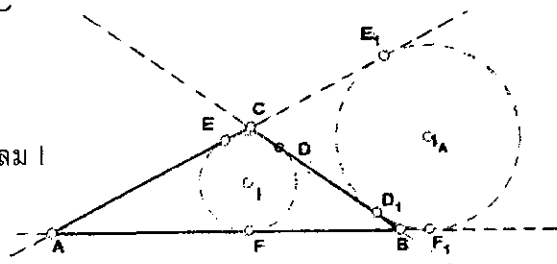
3.3 $CD_1 = CE_1 = p - b$ และ $BD_1 = BF_1 = p - c$

3.4 $CD = BD_1$ และ $BD = CD_1$

3.5 $EE_1 = EF_1 = a$

3.6 $S_{ABC} = rp = R(p - a)$

3.7 ถ้า $\triangle ABC$ มี $\angle c$ เป็นมุมฉาก แล้ว $r = p - c$ และ $R = p - b$





โจทย์

* 4. $\triangle ABC$ มี จุด I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน

มี จุด I_A เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งสัมผัส BC

มี จุด I_B เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งสัมผัส AC

มี จุด I_C เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบนอก ซึ่งสัมผัส AB



สำรวจ

สร้างส่วนสูงของ $\triangle I_A I_B I_C$ พบว่า

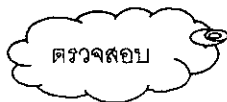
.....



ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับจุด I และ $\triangle I_A I_B I_C$

.....



ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

5. จุด I , I_A , I_B และ I_C แต่ละจุดเป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็นสามจุดที่เหลือจริงหรือไม่

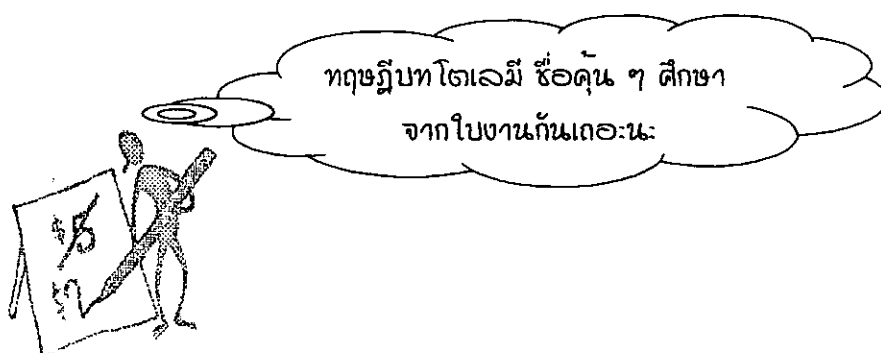
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6

เรื่อง ทฤษฎีบทโตเลมี

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกทฤษฎีบทโตเลมีที่ว่า ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้วผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามจะเท่ากับผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม และนำสมบัตินี้ไปใช้
2. บอกได้ว่า ผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้าม จะมากกว่าหรือเท่ากับผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม ของรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และนำสมบัตินี้ไปใช้



ใบงาน 3.6

เนื้อหาในใบงานนี้กล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้าม กับผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมใน 2 กรณี คือ รูปสี่เหลี่ยมที่จุดยอดทั้งสี่จุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน และจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมไม่อยู่บนวงกลมเดียวกัน

1. รูปสี่เหลี่ยมที่จุดยอดทั้งสี่จุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน

1.1 เปิด New Sketch

1.2 สร้างวงกลม O

กำหนดจุด A, B, C และ D อยู่ บนเส้นรอบวงของวงกลม O เรียงตามหรือทวนเข็มนาฬิกา สร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD และให้ด้าน AB, BC, CD และ AD เท่ากับ a, b, c และ d หน่วยตามลำดับ

ลากเส้นทแยงมุมได้แก่ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ ให้ยาว m และ n หน่วย

1.3 วัด a, b, c, d, m และ n

1.4 คำนวณค่า $ac + bd$ และ mn จะได้ว่า $ac + bd$ และ mn เท่ากันหรือไม่.....

1.5 คลิกที่จุด A, B, C หรือ D แล้วโยกรูปจะได้ว่า ถ้า $\square ABCD$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว $ac + bd$ และ mn เท่ากันหรือไม่.....

1.6 ข้อคิดเตา

ถ้าจุดยอดทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD อยู่บนวงกลมเดียวกัน และให้ AB, BC, CD , AD , AC และ BD เท่ากับ a, b, c d , m และ n หน่วยตามลำดับ แล้ว $ac + bd$ ($<$, $>$, $=$) mn

2. รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสี่ไม่อยู่บนวงกลมเดียวกัน

2.1 เปิด New Sketch

2.2 สร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ให้ด้าน AB, BC, CD และ AD เท่ากับ a, b, c และ d หน่วยตามลำดับ

2.3 ลากเส้นทแยงมุมได้แก่ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ ให้ยาว m และ n หน่วย

2.4 วัด a, b, c, d, m และ n

2.5 คำนวณค่า $ac + bd$ และ mn จะได้ว่า $ac + bd$ และ mn เท่ากันหรือไม่ ถ้าไม่เท่า ค่าใดมากกว่ากัน.....

- 2.6 คลิกที่จุด A, B, C หรือ D แล้วโยกรูป จะได้ว่า $\square ABCD$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้วยังได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $ac + bd$ และ mn เช่นเดียวกับข้อ 2.5 หรือไม่.....

2.7 ข้อคาดเดา

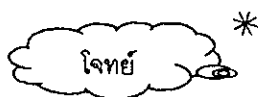
ถ้าจุด A, B, C หรือ D เป็นจุดยอดทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD และให้ AB, BC, CD, AD, AC และ BD เท่ากับ a, b, c, d, m และ n หน่วยตามลำดับ แล้ว $ac + bd$ ($<$, $>$, $=$, $\leq$, $\geq$) mn

- 2.8 ให้นักเรียนสร้างวงกลมผ่านจุด A, B และ C แล้ว จุด D อยู่บนวงกลมที่สร้างขึ้นหรือไม่
- 2.9 คลิกที่จุด D แล้วลากจุด D เพื่อสังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง $ac + bd$ และ mn จะได้ว่า
ถ้า จุด D อยู่บนวงกลมแล้ว $ac + bd$ ($<$, $>$, $=$) mn และ
ถ้า จุด D ไม่อยู่บนวงกลมแล้ว $ac + bd$ ($<$, $>$, $=$) mn
- 2.10 นักเรียนสร้างรูปสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีขนาดต่าง ๆ เพื่อสำรวจสมบัติที่นักเรียนพบ

สรุป

- ทฤษฎีบทโตเลมี : ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้วผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามจะ.....ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม
- ผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมจะ
ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม

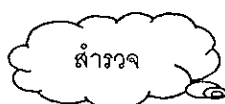
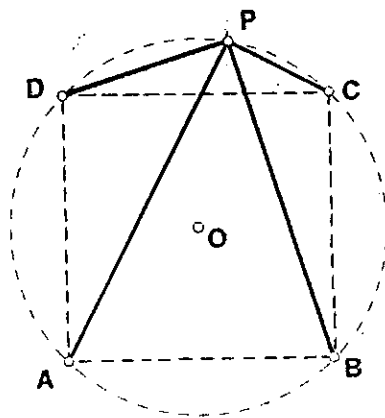
แบบฝึกปฏิบัติ 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี



โจทย์

*

จุด P เป็นจุดบน $\widehat{CD}$ ของวงกลมล้อม $\square ABCD$ ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป



สำรวจ

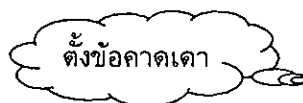
จากความรู้เรื่องทฤษฎีบทโตเลมี

พิจารณา $\square ABCP$ จะได้ว่า.....

.....

พิจารณา $\square ABPD$ จะได้ว่า.....

.....

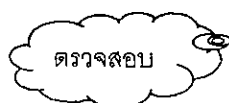


ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับ $PA(PA + PC)$ และ $PB(PB + PD)$ ได้แก่

.....

.....



ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....

.....

.....



เหตุผล

เพราะเหตุใด

.....

.....

.....

.....

.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7

เรื่อง ทฤษฎีบทเมเนเลส์ และบทกลับ

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

3.7.1 การวัดความยาวที่แสดงทิศทางในเส้นตรง

3.7.2 ทฤษฎีบทเมเนเลส์

3.7.3 บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลส์

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่า เมื่อกำหนดทิศทางของส่วนของเส้นตรง แล้วอัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรงมีค่าเป็นบวกหรือลบ
2. หาอัตราส่วนระหว่างความยาวของส่วนแบ่งของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยถือว่า อัตราส่วนของความยาวของส่วนแบ่งที่เกิดจากจุดแบ่งภายในเป็นบวก และอัตราส่วนของความยาวของส่วนแบ่งที่เกิดจากจุดแบ่งภายนอกเป็นลบ
3. บอกทฤษฎีบทเมเนเลส์ ที่ว่า เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้า จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง แล้ว $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$
4. บอกบทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลส์ ที่ว่า เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ แล้ว จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง
5. นำทฤษฎีบทเมเนเลส์ และบทกลับไปใช้



เวลาฉันนั่ง รับผิดชอบในงานเถอะนะ

ใบงาน 3.7

ก่อนจะกล่าวถึงเนื้อหาของทฤษฎีบทเมนเลาส์นั้น เราจะต้องกล่าวถึง การวัดความยาวที่แสดงทิศทางในเส้นตรง อัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรง และการพิจารณาจุดร่วมเส้นตรง ก่อน เพื่อนำไปใช้ในทฤษฎีบทต่อไป

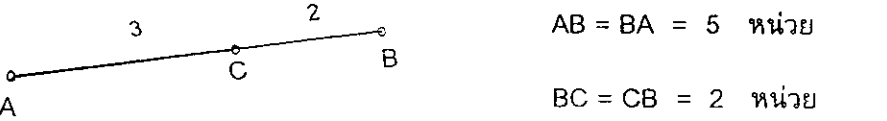
ทฤษฎีบทเมนเลาส์ เป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึงจุดร่วมเส้นตรง กล่าวคือ เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้าจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงแล้ว เราจะพิจารณาอัตราส่วน $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$ ว่ามีค่าเท่าใด โดยในการพิจารณาให้คำนึงถึงทิศทางของส่วนของเส้นตรงด้วย

บทกลับของทฤษฎีบทเมนเลาส์ จะกล่าวถึงกรณีที่ กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ แล้ว จุด P, Q และ R จะเป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่

3.7.1 การวัดความยาวที่แสดงทิศทางในเส้นตรง

การวัดความยาวที่แสดงทิศทางในเส้นตรง

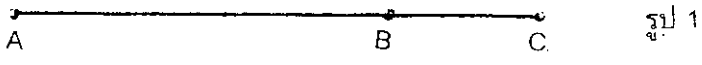
ในเนื้อหาก่อนหน้านี้ เมื่อวัดความยาวของส่วนของเส้นตรงใด ๆ เราจะไม่กล่าวถึงทิศทางของการวัด เช่น จากรูป จะได้



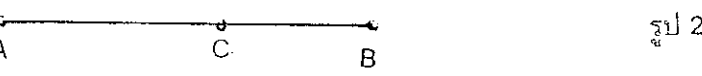
ดังนั้น ถ้าไม่มีรูปประกอบ เมื่อเรากล่าวถึง AB = 5 หน่วย และ = 2 หน่วย

อาจจะได้จากรูปได้หลายลักษณะเช่น

จากรูป 1. จะได้ AC = 7 หน่วย



จากรูป 2. จะได้ AC = 3 หน่วย

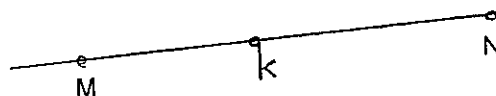


ด้วยเหตุดังกล่าว จึงได้มีการกำหนดทิศทางของการวัดความยาวของส่วนของเส้นตรงที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันสองทิศทาง โดยเป็นบวกและลบดังนี้

1. ถ้ากำหนดให้ $\overline{AB}$ มีทิศทางเป็นบวก หมายถึง ส่วนของเส้นตรงอื่นที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{AB}$ คือ จากจุด A ไปยังจุด B จะมีทิศทางเป็นบวกด้วย แต่ส่วนของเส้นตรงอื่นที่มีทิศทางตรงข้ามคือ จากจุด B ไปยังจุด A จะมีทิศทางเป็นลบ
2. ถ้ากำหนดให้ $\overline{AB}$ มีทิศทางเป็นลบ หมายถึง ส่วนของเส้นตรงอื่นที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{AB}$ คือ จากจุด A ไปยังจุด B จะมีทิศทางเป็นลบด้วย แต่ส่วนของเส้นตรงอื่นที่มีทิศทางตรงข้ามคือจากจุด B ไปจุด A จะมีทิศทางเป็นบวก

ดังนั้น จากรูป ถ้า $\overline{KN}$ มีทิศทางเป็นบวกแล้ว $\overline{MK}$ และ $\overline{MN}$ มีทิศทางเป็นบวกด้วย

ส่วน $\overline{KM}$ และ $\overline{NK}$ มีทิศทางเป็นลบ



ทั้งนี้ผลของการวัดความยาวที่แสดงทิศทางในเส้นตรง ทำให้ได้ประโยชน์ ดังตัวอย่างนี้

1. กรณีไม่กำหนดทิศทางให้ส่วนของเส้นตรง

ถ้า $AB = 5$ หน่วย และ $BC = 2$ หน่วย

แล้ว $AB + AB = 5 + 5 = 10$

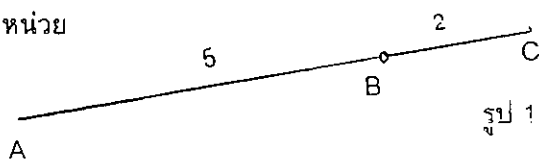
$AB + BA = 10$

$AB + BC = AC$

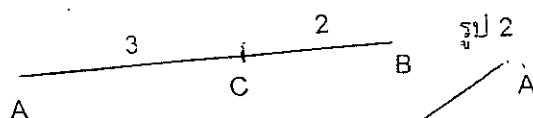
ซึ่ง $AC = 7$ หน่วย (รูป 1)

หรือ $AC = 3$ หน่วย (รูป 2)

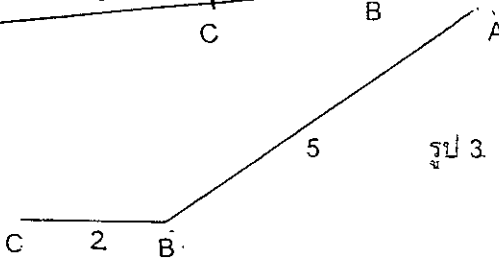
หรือ $AC < 7$ หน่วย (รูป 3)



รูป 1



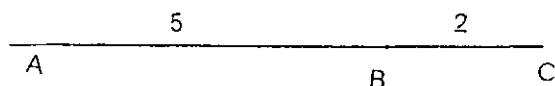
รูป 2



รูป 3

2. กรณีที่กำหนดทิศทางให้ส่วนของเส้นตรง

ถ้า $AB = 5$ หน่วย และ $BC = 2$ หน่วย



แล้ว $AB + AB = 2AB = 10$, $AB + BA = 0$

และ $AB + BC = AC$ ซึ่ง $AC = 7$ หน่วย เพียงกรณีเดียว

อัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรง

เมื่อมีการกำหนดทิศทางให้ส่วนของเส้นตรงแล้ว เมื่อจุด P แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น 2 ส่วนคือ $\overline{AP}$ และ $\overline{PB}$ อัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่ง คือ $\frac{AP}{PB}$ ค่าที่ได้จะมีสองลักษณะดังนี้

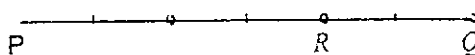
1. เป็นบวก เมื่อ P เป็นจุดแบ่งภายใน เนื่องจาก ถ้ากำหนดให้ $\overline{AB}$ มีทิศทางเป็นบวก จะได้

$\overline{AP}$ และ $\overline{PB}$ มีทิศทางเป็นบวกด้วย ดังนั้น $\frac{AP}{PB}$ จึงมีค่าเป็นบวก

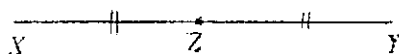
2. เป็นลบ เมื่อ P เป็นจุดแบ่งภายนอก เนื่องจาก ถ้ากำหนดให้ $\overline{AB}$ มีทิศทางเป็นบวก จะได้

$\overline{AP}$ มีทิศทางเป็นบวก แต่ $\overline{PB}$ มีทิศทางเป็นลบ ดังนั้น $\frac{AP}{PB}$ จึงมีค่าเป็นลบ

เช่น



$$\frac{PR}{RQ} = \frac{2}{1}$$



$$\frac{XY}{YZ} = -\frac{2}{1}$$

3.7.2 ทฤษฎีบทเมนเลาส์

1. สร้าง $\triangle ABC$ และ กำหนดจุด P, และ Q บนด้าน(หรือส่วนต่อของด้าน) ของ AB และ BC ตามลำดับ
2. พิจารณากรณีที่จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง โดย

ลาก (เส้นหนาสีแดง) $\overleftrightarrow{PD}$ ตัด $\overline{AC}$ ที่จุด R จะได้ว่า จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่.

3. คลิกที่จุด P หรือ Q เลื่อนจุดดังกล่าว

3.1 ให้นักเรียนสังเกตว่าเมื่อจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง และจุด P, Q หรือ R ไม่ใช่จุดยอดของ $\triangle ABC$ แล้ว กรณีต่อไปนี้ กรณีใดเป็นจริง

...1) จุด P, Q และ R อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ ทั้งสามจุด

...2) จุด P, Q และ R อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ เพียง 1 จุด อีก 2 จุด อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$

...3) จุด P, Q และ R อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ เพียง 2 จุด อีก 1 จุด อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$

...4) จุด P, Q และ R ไม่อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ แต่อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$ ทั้ง 3 จุด

3.2 จากความรู้เรื่องอัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรงและจากรูปที่ได้จากการสร้าง ข้อ 2

ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = k$ แล้วค่าของ k เป็นค่าบวกหรือค่าลบ.....

เพราะเหตุใด.....

(หมายเหตุ ผลคูณที่คำนวณได้โดย GSP เป็นค่าสัมบูรณ์ เนื่องจาก GSP ไม่สามารถคำนวณทิศทางของการแบ่งส่วนของเส้นตรงได้ ดังนั้น ค่า k ที่ได้นักเรียนจะต้องพิจารณาประกอบกับข้อ 3.2 ก่อนแล้วจึงตอบ)

ดังนั้น $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$ เท่ากับ(เท่าใด).....

4. คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูปสามเหลี่ยม ABC แล้วทำตามข้อ 3 - 4 จะได้ผลเช่นเดียวกันหรือไม่...

5. ข้อคิดเรา

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA

ตามลำดับ ถ้า จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง แล้ว $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$ เท่ากับ (เท่าใด).....

การหาเหตุผล

นักเรียนบอกเหตุผลที่ทำให้ได้ตั้งข้อคาดเดาได้ไหม

ถ้าได้ เหตุผลจะเป็นอย่างไร ให้นักเรียนแสดงเหตุผลนั้นด้วย

ถ้าไม่ได้ ให้พิจารณาตามข้อแนะต่อไปนี้

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้าน หรือ ส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้าจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง

ข้อแนะ 1

ลาก AX, BY และ CZ ตั้งฉากกับ PR แล้ว รูปสามเหลี่ยมที่ได้แต่ละคู่ต่อไปนี้จะคล้ายกัน เพราะเหตุใด

$\triangle XAP \sim \triangle YBP$ เพราะ

$\triangle BQY \sim \triangle CQZ$ เพราะ

$\triangle CZR \sim \triangle AXR$ เพราะ

ข้อแนะ 2

จงพิจารณาว่า อัตราส่วนของด้านที่กำหนดให้เป็นอัตราส่วนที่เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1) $\frac{AP}{BP} \dots \frac{AX}{BY}$ เพราะ

2) $\frac{BQ}{CQ} \dots \frac{BY}{CZ}$ เพราะ

3) $\frac{CR}{AR} \dots \frac{CZ}{AX}$ เพราะ

1) x2) x3) $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} = \frac{AX}{BY} \cdot \frac{BY}{CZ} \cdot \frac{CZ}{AX} = \dots$

จากความรู้เรื่องอัตราส่วนของการแบ่งส่วนของเส้นตรง นำมาพิจารณารูป

จะได้ $\frac{AP}{PB}$ มีค่าเป็นลบ แต่ $\frac{BQ}{QC}$ และ $\frac{CR}{RA}$ มีค่าเป็นบวก ดังนั้น $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \dots$

สรุป

ทฤษฎีบทเมนเลาส์ : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้าน หรือ ส่วนต่อของ

ด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้าจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง แล้ว $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} =$

3.7.3 บทกลับของทฤษฎีบทเมนเลาส์

1. สร้าง $\triangle ABC$ กำหนดจุด P และ Q บนด้าน(หรือส่วนต่อของด้าน) ของ AB, BC ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overline{CA}$ ที่จุด R
2. คำนวณค่า k. เมื่อ $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = k$ จะได้ $k = \dots\dots\dots$
3. กำหนดจุด R' บน $\overline{CA}$
4. คำนวณค่า u เมื่อ $u = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR'}{R'A}$
5. คลิกที่จุด R' เลื่อนไปมาจนได้ค่า $u = -1$
6. จะได้ว่า จุด R และ จุด R' ทับกันหรือไม่.....
7. ลาก (เส้นหนาสีแดง) $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overline{AC}$ ที่ จุด R' ดังนั้น จุด P, Q และ R' เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่.....
8. คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูปสามเหลี่ยม ABC โดยค่า k และ u ยังเท่ากับ -1 แล้วจะได้ผลเช่นเดียวกับข้อ 6หรือไม่.....
9. จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่.....

10. ข้อคาดเดา

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ

ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RC} = -1$ แล้ว จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่

11. การหาเหตุผล

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ

CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$

นักเรียนหาเหตุผลได้ไหมว่า จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่

ข้อเสนอนี้:

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

จากรูป ถ้า $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AC}$ ที่จุด R' จะได้ว่า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR'}{R'A} = -1 \dots \dots \dots (1)$

แต่สิ่งที่กำหนดให้ $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1 \dots \dots \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR'}{R'A} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$

ตอบเองอีกสักนิดนะ:

นั่นคือ จุด P , Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง

สรุป

บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลอัส : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P , Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วน

ต่อของด้าน AB , BC และ CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ แล้ว จุด P , Q และ R เป็น.....

แบบฝึกปฏิบัติ 3.7 ทฤษฎีบทเมเนเลอส์ และ บทกลับ

1. จากรูป จงพิจารณาว่า ค่าของอัตราส่วนต่อไปนี้ มีค่าเป็นบวกหรือลบ

1.1 $\frac{AM}{ME}$

1.2 $\frac{CM}{MD}$

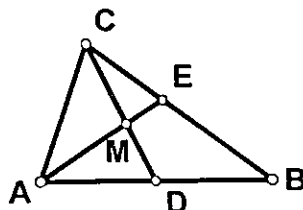
1.3 $\frac{AD}{DB}$

1.4 $\frac{BE}{CE}$

1.5 $\frac{AB}{BD}$

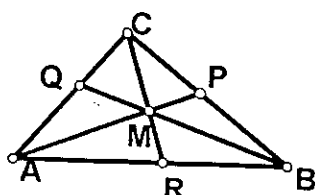
1.6 $\frac{AB}{BD} \cdot \frac{BE}{EC}$

1.7 $\frac{AB}{BD} \cdot \frac{BC}{CE}$

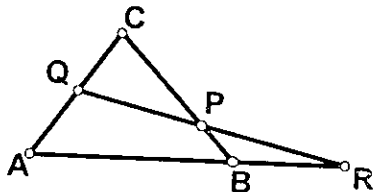


2. จงพิจารณาว่า ค่าของอัตราส่วน $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA}$ ของแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าเป็นบวก หรือ ลบ

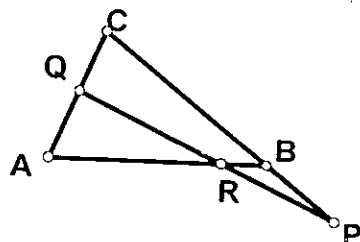
2.1



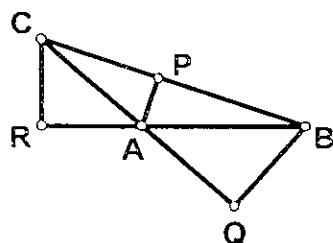
2.2



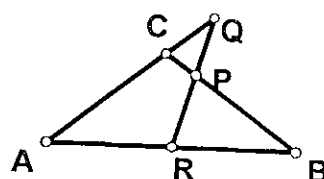
2.3



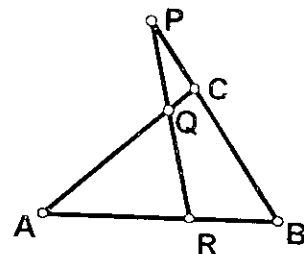
2.4



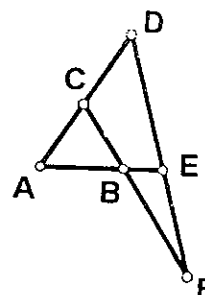
2.5



2.6



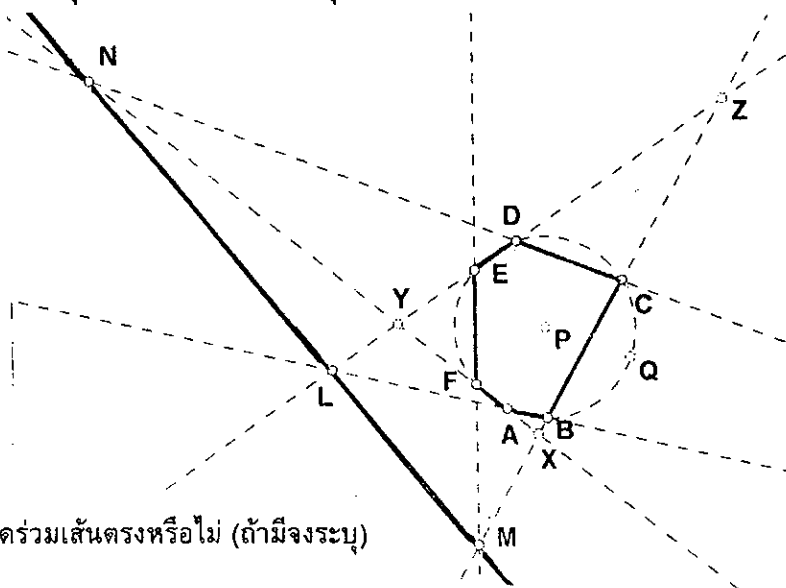
2.7





โจทย์

- * 3. ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมแนบในวงกลม โดยไม่มีด้านคู่ใดขนานกัน
 เส้น $\overleftrightarrow{AB}$ ตัด $\overleftrightarrow{DE}$ ที่จุด L, $\overleftrightarrow{BC}$ ตัด $\overleftrightarrow{EF}$ ที่จุด M, $\overleftrightarrow{CD}$ ตัด $\overleftrightarrow{FA}$
 ที่จุด N



สำรวจ

มีจุดสามจุดที่เป็นจุดร่วมเส้นตรงหรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)

.....

.....

.....



ตั้งข้อคาดเดา

ข้อคาดเดาเกี่ยวกับจุด L, M และ N

.....

.....

.....



ตรวจสอบ

ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....

.....



เหตุผล

เพราะเหตุใด

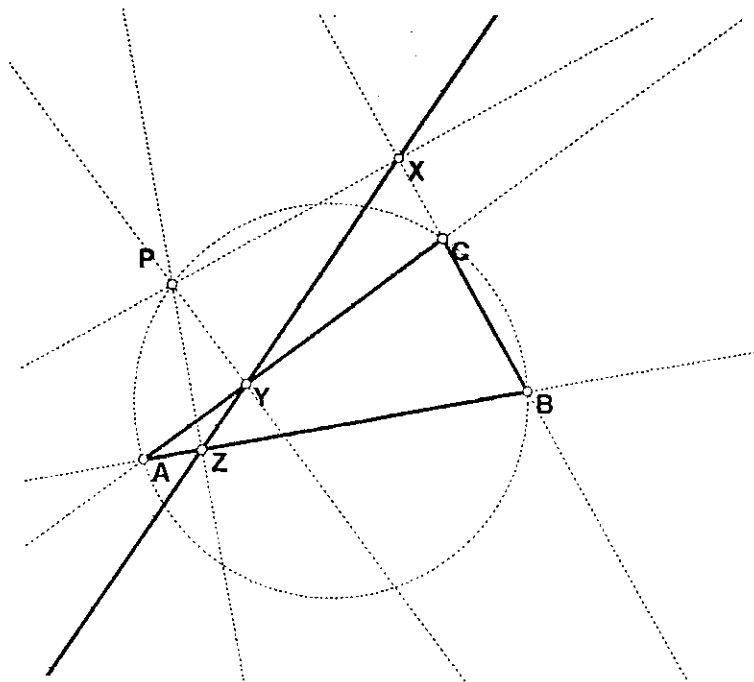
.....

.....

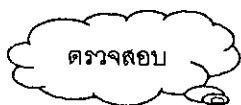
.....



- * 4. $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม P เป็นจุดจุดหนึ่งในวงกลม $\vec{PX}$, $\vec{PY}$ และ $\vec{PZ}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับด้าน (หรือส่วนต่อของด้าน) BC , CA และ AB ที่จุด X , Y และ Z ตามลำดับ

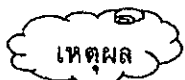


หนูพลอยตั้งข้อคาดเดาว่า " จุด X , Y และ Z เป็นจุดร่วมเส้นตรง "



ข้อคาดเดาที่หนูพลอยตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดานี้ น่าจะถูกต้องหรือไม่ และข้อคาดเดาใดบ้างที่ ไม่ถูกต้อง

.....



ในการหาเหตุผลสำหรับข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้องควรใช้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องใด

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8

เรื่อง ทฤษฎีบทเซวาและบทกลับ

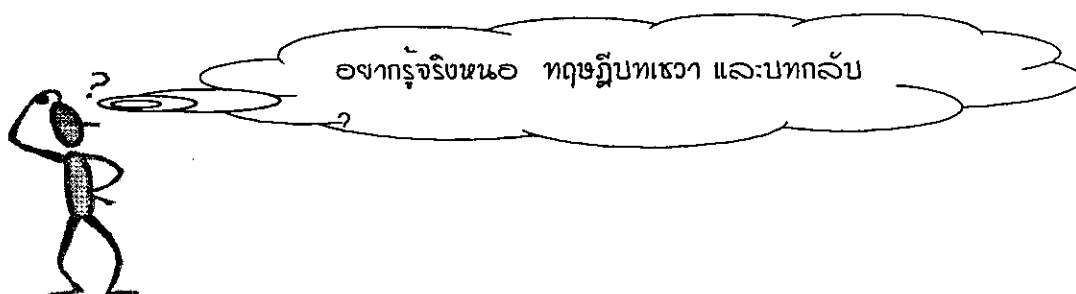
หัวข้อย่อยของเนื้อหา

3.8.1 ทฤษฎีบทเซวา

3.8.2 บทกลับของทฤษฎีบทเซวา

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกทฤษฎีบทเซวาที่ว่า เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอด A, B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกัน แล้ว $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$
2. บอกบทกลับของทฤษฎีบทเซวาที่ว่า เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอด A, B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ แล้วเส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกัน
3. นำทฤษฎีบทเซวา และบทกลับไปใช้



ใบงาน 3.8

ทฤษฎีบทเชวา เป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึงเส้นจวบกัน กล่าวคือ เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A , B และ C กับ จุด L , M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ ถ้าเส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกันแล้ว เราจะพิจารณาอัตราส่วน $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$ ว่ามีค่าเท่าใด โดยในการพิจารณาให้คำนึงถึงทิศทางของส่วนของเส้นตรงด้วย

บทกลับของทฤษฎีบทเชวา จะกล่าวถึงกรณีที่ กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A , B และ C กับ จุด L , M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ แล้ว เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกัน หรือไม่

3.8.1 ทฤษฎีบทเชวา

- สร้าง $\triangle ABC$ กำหนดจุด L และ M บนด้าน(หรือส่วนต่อของด้าน) ของ BC และ CA ตามลำดับ
- พิจารณากรณีที่ เส้นจวบกัน

ลาก (เส้นบางสีแดง) $\overleftrightarrow{AL}$ และ $\overleftrightarrow{BM}$ ตัดกันที่จุด X ลาก (เส้นบางสีแดง) $\overleftrightarrow{CX}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด N

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวบกัน หรือไม่.....

- คลิกที่จุด L หรือ M เลื่อนจุดดังกล่าว

3.1 ให้นักเรียนสังเกตว่าเมื่อ $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวบกัน แล้ว กรณีต่อไปนี้ กรณีใดเป็นจริง

...1) จุด L , M และ N อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ ทั้งสามจุด

...2) จุด L , M และ N อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ เพียง 1 จุด อีก 2 จุด อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$

...3) จุด L , M และ N อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ เพียง 2 จุด อีก 1 จุด อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$

...4) จุด L , M และ N ไม่อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ แต่อยู่บนส่วนต่อของด้านของ $\triangle ABC$ ทั้ง 3 จุด

3.2 จากความรู้เรื่องอัตราส่วนของการแบ่งส่วนของเส้นตรงและจากรูปที่ได้จากการสร้าง ข้อ 2

ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = k$ แล้วค่าของ k เป็นค่าบวกหรือค่าลบ.....

เพราะเหตุใด.....

4. คำนวณค่า k

หมายเหตุ ผลคูณที่คำนวณได้โดย GSP เป็นค่าสัมบูรณ์ เนื่องจาก GSP ไม่สามารถคำนวณทิศทางของการแบ่งส่วนของเส้นตรงได้ ดังนั้น ค่า k ที่ได้นักเรียนจะต้องพิจารณาประกอบกับข้อ 3.2 ก่อนแล้วจึงตอบ

ดังนั้น $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$ เท่ากับ(เท่าใด).....

5. คลิกที่จุด A หรือ B หรือ C โดยกรุปสามเหลี่ยม ABC แล้วทำตามข้อ 3 - 4 จะได้ผลเช่นเดียวกันหรือไม่

6. ข้อคาดเดา

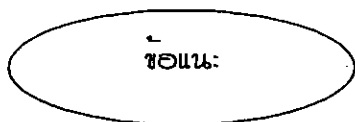
กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอด A , B และ C กับ จุด L , M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า เส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกับ แล้ว $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$ เท่ากับ (เท่าใด).....

7. การหาเหตุผล

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นเชื่อมจุดยอด A , B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ ถ้าเส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกัน

$$\text{แล้ว } \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \text{ หรือไม่}$$

ขอเหตุผลดังนี้:



จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$\overleftrightarrow{AL}$ และ $\overleftrightarrow{BM}$ ตัดด้าน (หรือส่วนต่อของด้าน) ของ $\triangle ACN$ และ $\triangle BCN$ ตามลำดับ

ดังนั้น จากทฤษฎีบทเมเนเลส์ จะได้ว่า $\frac{AB}{BN} \cdot \frac{NX}{XC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$(1)

$$\frac{NA}{AB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CX}{XN} = -1$$
.....(2)

(1) x (2) :

$$\frac{AB}{BN} \cdot \frac{NX}{XC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{NA}{AB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CX}{XN} = 1$$

นั่นคือ

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

สรุป

ทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A , B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ ถ้าเส้นตรงทั้ง

สามเป็นเส้นจวบกัน แล้ว $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \dots\dots\dots$

3.8.2 บทกลับของทฤษฎีบทเซวา

1. สร้าง $\triangle ABC$ กำหนดจุด L และ M บนด้าน(หรือส่วนต่อของด้าน) ของ BC และ CA ตามลำดับ
2. ลาก $\overleftrightarrow{AL}$ และ $\overleftrightarrow{BM}$ ตัดกันที่จุด X ลาก $\overleftrightarrow{CX}$ ทั้ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด N
3. คำนวณ k เมื่อ $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = k$ จะได้ $k = \dots\dots\dots$
4. กำหนดจุด N' บน $\overleftrightarrow{AB}$
5. คำนวณ u เมื่อ $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = u$
6. คลิที่จุด N' เลื่อนไปมาจนได้ค่า $u = 1$
7. จะได้ว่า จุด N และ N' ทับกันหรือไม่.....
8. คลิที่จุด A หรือ B หรือ C โยกรูป $\triangle ABC$ โดยค่า u ยังเท่ากับ 1 แล้วจะได้ผลเช่นเดียวกับข้อ 7 หรือไม่
9. $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวบกัน หรือไม่ เพราะเหตุใด.....

10. ข้อคาดเดา

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A, B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ แล้วเส้นตรงทั้งสามนี้ (เป็นหรือไม่เป็น) เส้นจวบกัน

11. การหาเหตุผล

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A, B และ C กับ จุด L,

M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

นักเรียนหาเหตุผลได้ใหม่ว่า $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวบกัน หรือไม่

หาเหตุผลให้อว่งน:

นั่นคือ $\leftrightarrow AL$, $\leftrightarrow BM$ และ $\leftrightarrow CN$ เป็นเส้นจwabกัน

สรุป

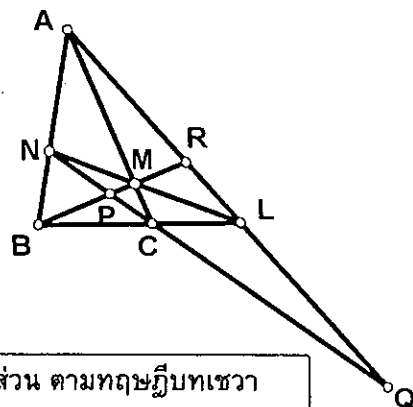
บทกลับของทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\leftrightarrow AL$, $\leftrightarrow BM$ และ $\leftrightarrow CN$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด

A , B และ C กับ จุด L , M และ N บนด้านหรือส่วนของด้าน BC , CA และ AB ตามลำดับ

ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ แล้วเส้นตรงทั้งสามนี้ (เป็นหรือไม่เป็น) เส้นจwabกัน

แบบฝึกปฏิบัติ 3.8 ทฤษฎีบทเชวา และ บทกลับ

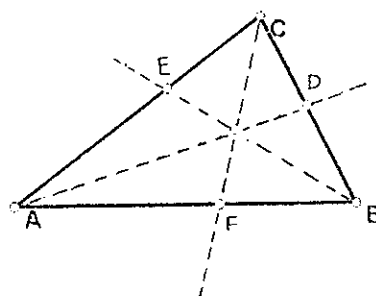
1. จากรูป จงเติมอัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่คู่กันแล้วได้ 1 ที่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบทเชวา ลงในช่องว่าง



รูปสามเหลี่ยม	เส้นจวบกัน	จุดตัด	อัตราส่วน ตามทฤษฎีบทเชวา
1. $\triangle LAB$	$\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BR}$	M	
2. $\triangle MBC$	$\overrightarrow{ML}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CP}$	N	
3. $\triangle NCA$	$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AQ}$	L	
4. $\triangle LMA$	$\overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MR}, \overrightarrow{AN}$	B	
5. $\triangle MNB$	$\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BL}$	C	
6. $\triangle NLC$	$\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{LQ}, \overrightarrow{CM}$	A	

2. $\triangle ABC$ มี $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นมัธยฐาน
จงแสดงว่า $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นจวบกัน

3. $\triangle ABC$ มี $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของ $\triangle ABC$ ตัดด้าน BC, CA และ AB ที่จุด D, E และ F
แสดงว่า $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นจวบกันหรือไม่



หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9

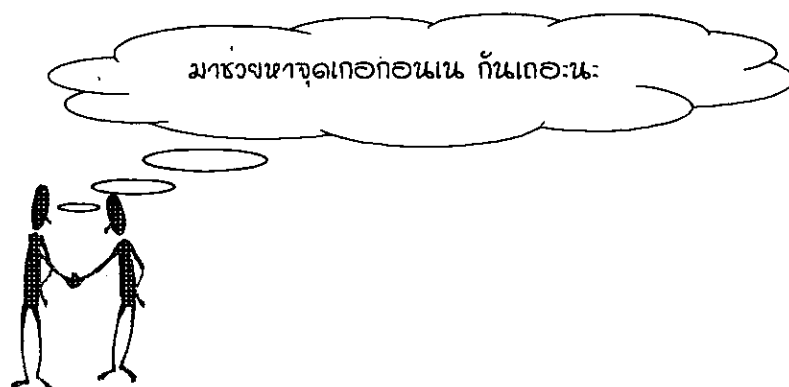
เรื่อง จุดเกือกอนเน

หัวข้อย่อยของเนื้อหา

-

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอด ทั้งสามเส้นเป็นเส้นจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่าจุดเกือกอนเน
2. บอกได้ว่า รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดสัมผัสทั้งสามของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมเกือกอนเน
3. หาจุดเกือกอนเนและรูปสามเหลี่ยมเกือกอนเนของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้
4. บอกได้ว่า ถ้าลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดเกือกอนเน และขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเกือกอนเนแล้วจะตัดรูปสามเหลี่ยมเดิม หกจุด และบอกได้ว่าทั้งหกจุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน



ใบงาน 3.9

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึงการจwabกันของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้น และสมบัติที่ได้จากการจwabกันของเส้นตรงทั้งสามนั้น

1. การจwabกันของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอด
 - 1.1 เปิด New Sketch
 - 1.2 สร้าง $\triangle ABC$
 - 1.3 สร้างวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
 - 1.4 ให้ จุด D , E และ F เป็นจุดสัมผัสของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ บนด้าน AC , BC และ AB ตามลำดับ
 - 1.5 ลากส่วนของเส้นตรง BD และ AE ให้ G เป็นจุดตัดระหว่าง $\overline{BD}$ และ $\overline{AE}$
 - 1.6 ลากเส้นตรง CF สังเกตว่าผ่านจุด G หรือไม่.....
 - 1.7 คลิกที่จุด A, B หรือ C แล้วโยกรูป ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว $\overleftrightarrow{CF}$ ยังผ่านจุด G หรือไม่ ...
 - 1.8 วัด AF, FB, BE, EC, CD และ DA แล้วคำนวณ $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = \dots\dots\dots$

1.9 ข้อคิดดาเดา

เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้น (เป็นหรือไม่เป็น).....เส้นจwabกัน

- 1.10 บทกลับของทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BD}$ และ $\overleftrightarrow{CF}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A, B และ C กับจุด E, D และ F บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$ แล้วเส้นตรงทั้งสามนี้พบกันที่จุดจุดหนึ่ง (พิจารณารูปประกอบ)
- จากข้อ 1.8 จะได้ว่า $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = \dots$ ดังนั้น $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BD}$ และ $\overleftrightarrow{CF}$ เป็นเส้นจwabกันหรือไม่...
- 1.11 จุดที่เส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้นจwabกัน เรียกว่า จุดเกอกอนเน และรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อม จะได้รูปสามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมเกอกอนเน

2. วงกลมกับรูปสามเหลี่ยมเกอคอนเน

2.1 เปิด New Sketch

2.2 สร้าง $\triangle ABC$ และวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ โดยจุด D, E และ F เป็นจุดสัมผัสบนด้าน AC, BC และ AB ตามลำดับ

2.3 หาจุดเกอคอนเน กำหนดเป็นจุด G และ ศูนย์กลางวงกลมแนบในกำหนดเป็นจุด I

2.4 สร้าง $\triangle DEF$ ซึ่งเรียกว่า รูปสามเหลี่ยม

2.5 ลากเส้นขนานกับด้านทั้งสามของ $\triangle DEF$ ผ่านจุด G จะตัดด้านของ $\triangle ABC$ ทั้งหมด (กี่).....จุด

2.6 วัดระยะจากจุด I ถึงจุดตัดแต่ละจุดที่ได้ในข้อ 2.5 จะได้ว่าระยะที่วัดได้ทั้งหมดเท่ากันหรือไม่.....

2.7 นักเรียนคิดว่า จุดตัดทุกจุดที่ได้ในข้อ 2.5 อยู่บนวงกลมเดียวกันหรือไม่.....

เพราะเหตุใด.....

2.8 คลิกที่จุด A, B และ C แล้วโยกรูป ถ้า $\triangle ABC$ มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว จุดตัดทุกจุดที่ได้ในข้อ 2.5

ยังอยู่บนวงกลมเดียวกันหรือไม่.....

2.9 ข้อความ

ถ้าลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดเกอคอนเนและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเกอคอนเน แล้วตัดรูปสามเหลี่ยมเดิม (กี่) จุด และทุกจุดนั้น (อยู่หรือไม่อยู่).....บนวงกลมเดียวกัน

2.10 วงกลมที่ได้ เรียกว่า วงกลมอาดัม (Adam's Circle)

3. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

3.1 เปิดไฟล์ Geogon31.gsp

3.2 ตรวจสอบความสัมพันธ์ต่าง ๆ แล้วนักเรียนสังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง

สรุป

1. เส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้น.....เส้นจวบจน และจุดจวบนี้เรียกว่า.....
2. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดสัมผัสทั้งสามของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม จะได้รูป ...เรียกว่า.....
3. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดเกอคอนเนและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเกอคอนเน แล้วจะตัดรูปสามเหลี่ยมเดิม ...จุด และทุกจุดที่ได้จะอยู่.....เดียวกัน เรียกววงกลมนี้ว่า.....

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10

เรื่อง เส้นออยเลอร์

หัวข้อย่อยของเนื้อหา -

จุดประสงค์นำทาง ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่า ศูนย์กลางวงล้อม เซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมจะอยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน เส้นตรงนี้ เรียกว่า เส้นออยเลอร์
2. บอกได้ว่าในรูปสามเหลี่ยม อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ เป็น 1 : 3
2. หาเส้นออยเลอร์ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้

ใบงาน 3.10

เนื้อหาในใบงานนี้ กล่าวถึง ศูนย์กลางวงล้อมเซนทรอยด์และจุดออร์โทเซนเตอร์สัมพันธ์กันอย่างไร

1. ความสัมพันธ์ระหว่างศูนย์กลางวงล้อม เซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์

1.1 เปิดไฟล์ Teuler01.gsp

1.2 ดับเบิลคลิกกรอบ แสดงเซนทรอยด์ G,

แสดงศูนย์กลางวงล้อม O,

แสดงจุดออร์โทเซนเตอร์ H

และ แสดงศูนย์กลางวงกลมแนบใน I

1.3 ลาก (เส้นสีฟ้า) $\overleftrightarrow{OG}$ ลาก (เส้นสีเขียว) $\overleftrightarrow{GH}$

แล้วจะได้ว่า $\overleftrightarrow{OG}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$ เป็นเส้นตรงเดียวกันหรือไม่.....

1.4 ดับเบิลคลิกกรอบ หมุนรูปสามเหลี่ยม

แล้วจะได้ว่า $\overleftrightarrow{OG}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$ เป็นเส้นตรงเดียวกันหรือไม่.....

1.5 ข้อคาดเดา

ศูนย์กลางวงล้อม เซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุด (ร่วมหรือไม่ร่วม).....เส้นตรง

1.6 เส้นตรงที่ได้นี้ เรียกว่า เส้นออยเลอร์

2. อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์

2.1 วัด OG และ OH

2.2 คำนวณ $\frac{OG}{OH} =$

2.3 ดับเบิลคลิกกรอบ หมุนรูปสามเหลี่ยม สังเกตค่าของ $\frac{OG}{OH}$ จะได้ว่า.....

2.4 ข้อคาดเดา

อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์ เท่ากับ.....

3. ตรวจสอบสมบัติที่ได้

3.1 ดัชนีเบิลคลิกกรอบ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำนวจสมบัติต่าง ๆ

3.2 ดัชนีเบิลคลิกกรอบ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำนวจสมบัติต่าง ๆ

3.3 ดัชนีเบิลคลิกกรอบ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า สำนวจสมบัติต่าง ๆ

3.4 จากการสำวจดังกล่าว สังเกตได้สิ่งใดเพิ่มเติมบ้าง.....

.....

.....

สรุป

1. ศูนย์กลางวงล้อม เซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุด.....เส้นตรง

เรียกเส้นตรงนี้ว่า.....

2. อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึง

จุดออร์โทเซนเตอร์ เท่ากับ.....

สาระสำคัญ

1. เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่า เซนทรอยด์ (นิยมใช้จุด G แทนเซนทรอยด์)
2. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมัธยะ (Medial triangle)
3. อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์ และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามเป็น 2:1
4. รูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีพื้นที่เท่ากัน
5. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม เป็นเส้นจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงล้อม (นิยมใช้จุด O แทนศูนย์กลางวงล้อม)
6. ระยะจากจุดศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีขนาดเท่ากัน และเป็นความยาวของรัศมีของวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยมนั้น
7. ถ้ามีจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงสามจุด สามารถสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามได้โดย
 - 7.1 ให้จุดทั้งสามเป็นจุด A, B และ C ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
 - 7.2 กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ
 - 7.3 สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ
 - 7.4 กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากทั้งสามเป็นจุด O
 - 7.5 ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ OA (หรือ OB หรือ OC) สร้างวงกลมจะได้ วงกลม O ผ่านจุด A, B และ C
8. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้ เรียกว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ (นิยมใช้จุด H แทนจุดออร์โทเซนเตอร์)
9. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของ

รูปสามเหลี่ยมเดิม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีเดล (Pedal Triangle)

10. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลคู่หนึ่งที่ประชิดกัน จะทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากัน
11. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม จะแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมพีเดล
12. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดล ทำให้มีรูปสามเหลี่ยมภายในรูปสามเหลี่ยมเดิมสามรูป ที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม
13. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้ เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบใน (นิยมใช้จุด I แทนจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน)
14. ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบในถึงด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน.
15. สร้างวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC มีวิธีสร้าง ดังนี้
 - 15.1 แบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
 - 15.2 กำหนดจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเป็นจุด I
 - 15.3 กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉาก กับด้านใดด้านหนึ่งผ่านจุด I
 - 15.4 กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉาก กับด้านเป็นจุด D
 - 15.5 ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ ID สร้างวงกลมจะได้วงกลมแนบใน

รูปสามเหลี่ยม ABC

16. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยม เป็นเส้นจวบกันและจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (นิยมใช้จุด I_A แทนจุดศูนย์กลางวงกลมแนบนอกที่อยู่ตรงข้าม $\angle A$)
17. ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบนอกถึงด้าน และส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากันและเป็นความยาวของรัศมีของวงกลมแนบนออกรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านนั้นและส่วนต่อของด้านอีกสองด้านดังกล่าวเป็นเส้นสัมผัส
18. สร้างวงกลมแนบนออกรูปสามเหลี่ยม มีวิธีสร้างดังนี้

- 18.1 ให้ $\triangle ABC$ สร้าง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
- 18.2 กำหนดจุด D และ E เป็นจุดบน $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ ดังรูป
- 18.3 สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม DBC และมุม BCE
- 18.4 กำหนดจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองเป็นจุด I_A
- 18.5 สร้างเส้นตั้งฉากกับด้าน BC ผ่านจุด I_A
- 18.6 กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ เป็นจุด X
- 18.7 ให้ I_A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ I_A สร้างวงกลมจะได้ วงกลมแนบนอก ด้าน BC
- 19 สืบเนื่องจากข้อ 1 ข้างต้น รูปสามเหลี่ยมเดิมเป็น รูปสามเหลี่ยมพีเดล ของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมศูนย์กลางวงกลมแนบนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
20. ทฤษฎีบทโตเลมี : ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้วผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามจะเท่ากับผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม
21. ผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมจะ มากกว่า หรือ เท่า กับ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม
22. ทฤษฎีบทเมเนเลาส์ : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้าน หรือ ส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้าจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง
- แล้ว $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$
- บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลาส์ : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$ แล้ว จุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรง
23. ทฤษฎีบทเชวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A, B และ C

กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้าเส้นตรงทั้ง

สามเป็นเส้นจวบกัน แล้ว $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

24. บทกลับของทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ และ $\leftrightarrow$ เป็นเส้นตรง

เชื่อมจุดยอด A, B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB

ตามลำดับ ถ้า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ แล้วเส้นตรงทั้งสามนี้ เป็นเส้นจวบกัน

26. เส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้าม

จุดยอดทั้งสามเส้น เป็น เส้นจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า จุดเกอกอนเน

27. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดสัมผัสทั้งสามของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม จะได้รูป

สามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมเกอกอนเน

28. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดเกอกอนเนและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเกอกอนเน

แล้วจะตัดรูปสามเหลี่ยมเดิม 6 จุด และทุกจุดที่ได้จะอยู่บนวงกลม เดียวกัน เรียกววงกลมนี้ว่า

วงกลมอาดัม (Adam's Circle)

29. เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรง เรียก

เส้นตรงนี้ว่า เส้นออยเลอร์

30. อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์

โทเซนเตอร์ เท่ากับ 1:3

คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์

THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP)

(ใช้เฉพาะเพื่อการศึกษาและวิจัย)



เรียบเรียงโดย

นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำชี้แจง.....	(1)
1 บทนำ.....	(2)
2 อุปกรณ์ที่จำเป็น.....	(3)
3. วิธีการใช้ซอฟต์แวร์	(4)
4. ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น.....	(24)
5. ปัญหาและอุปสรรคที่อาจเกิดขึ้น.....	(52)
หนังสืออ้างอิง	(53)
ภาคผนวก	
การเปรียบเทียบการสร้างพื้นฐานระหว่างการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง กับการสร้างโดยใช้ GSP.....	(54)

คำชี้แจง

คู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ GSP นี้ประกอบด้วยข้อมูลต่าง ๆ สำหรับผู้เริ่มใช้ GSP โดยมี 6 หัวข้อ ดังนี้

1. บทนำ เป็นเรื่องเกี่ยวกับ ที่มาของ GSP
2. อุปกรณ์ที่จำเป็น เป็นเรื่องเกี่ยวกับอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการปฏิบัติงาน
3. วิธี การใช้ซอฟต์แวร์ เป็นเรื่องเกี่ยวกับข้อตกลง การใช้งานเบื้องต้น สรุปคำสั่ง

ต่าง ๆ ซึ่งกล่าวถึงรายละเอียดของ Toolbox และ Menu Bar

4. ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น
5. ปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้น
6. ภาคผนวก เป็นเรื่องการเปรียบเทียบการสร้างพื้นฐานระหว่างการสร้างด้วยวงเวียน

และสันตรง กับการสร้างโดยใช้ GSP

ข้อมูลต่าง ๆ ที่ปรากฏในคู่มือเล่มนี้ มีเจตนาเพื่อใช้เฉพาะในการศึกษาและวิจัยเท่านั้น และเป็นเพียงคู่มือประกอบการใช้ซอฟต์แวร์ GSP รุ่นสาธิต

1. บทนำ

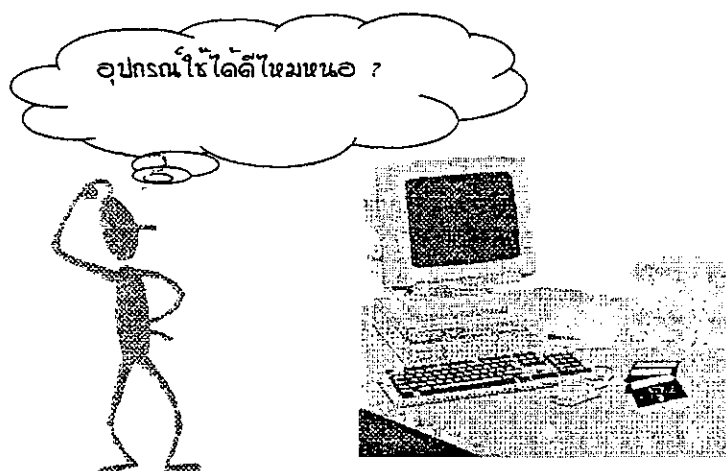
GSP พัฒนาขึ้นเป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ. 1991 โดย นิโคลัส แจคคิว (Nicholas Jachiw) อยู่ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual Geometry Project) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Foundation: NSF) แห่งสหรัฐอเมริกา ซึ่งมี ดร.ยูจีน คลอทซ์ (Dr.Eugene Klotz) จากวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swarthmore College) และ ดร.ดอริส ซาทซ์ไนเดอร์ (Dr.Doris Schatschneider) จากวิทยาลัยมอราเวียน (Moravian College) ของมหาวิทยาลัยเพนซิลวาเนีย (Pennsylvania University) แห่งสหรัฐอเมริกาเป็นหัวหน้า ซอฟต์แวร์นี้ครั้งแรกพัฒนาขึ้นเป็นรุ่นเบต้า (Beta Version) ในลักษณะทดลองเพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช (Macintosh) และพัฒนาขึ้นเป็นรุ่นที่นำออกจำหน่ายเพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช และเครื่องคอมพิวเตอร์พีซีที่ใช้ระบบปฏิบัติการแบบวินโดวส์ (Windows) ในปี ค.ศ. 1993 ปัจจุบันได้พัฒนาขึ้นเป็น GSP รุ่น 3.0 ในปี ค.ศ.1995 และด้วยเงินทุนสนับสนุนของ NSF ในการพัฒนาซอฟต์แวร์และสำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม (Key Curriculum) ในการจัดพิมพ์สื่อสิ่งพิมพ์ที่สนับสนุนการใช้ซอฟต์แวร์ GSP ทำให้ GSP มีการใช้แพร่หลายในโรงเรียนของสหรัฐอเมริกา และมีการเปิดเว็บไซต์ในอินเทอร์เน็ต เพื่อให้ผู้ใช้ GSP ส่งข่าวสารมาเผยแพร่และแลกเปลี่ยนข้อมูลต่าง ๆ

2. อุปกรณ์ที่จำเป็น

อุปกรณ์คอมพิวเตอร์ที่จำเป็นสำหรับการใช้ GSP ประกอบการเรียนเรขาคณิตตามบทเรียน มีดังนี้

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ใช้ไมโครโปรเซสเซอร์ 80486 หรือที่มีสมรรถนะสูงกว่า พร้อมทั้งเป็นพิมพ์ เม้าส์ และจอภาพสี
2. แรม (Ram) อย่างน้อย 4 เมกาไบต์
3. - หน่วยขับเคลื่อนบันทึก 3.5 นิ้ว (3.5" Floppy Disk Drive)
4. ระบบปฏิบัติการ MS-DOS และ Microsoft Windows 3.1 หรือ Microsoft Windows 95 หรือสูงกว่า
5. จานบันทึกแบบแข็ง (Hard disk)
6. แผ่นบันทึก 3.5 นิ้ว ที่มีซอฟต์แวร์ GSP3 รุ่นสาริต และไฟล์ที่ใช้ตามที่ระบุในใบงาน

เนื่องจากปัจจุบันเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลส่วนใหญ่ในประเทศไทย ใช้ Microsoft Windows95 หรือ สูงกว่า ดังนั้น การใช้งาน GSP ในคู่มือเล่มนี้ จึงอธิบายบนพื้นฐานของการใช้ Microsoft Windows95 พร้อมอุปกรณ์ที่จำเป็นดังกล่าวมาแล้วข้างต้น



3. วิธีการใช้ซอฟต์แวร์

ก่อนการใช้ซอฟต์แวร์ GSP ผู้ใช้ควรมีความรู้ความเข้าใจตรงกันในคำศัพท์ที่ใช้ วิธีการใช้ คำสั่งต่าง ๆ ที่ใช้ในการปฏิบัติงานบนซอฟต์แวร์ รวมถึงการฝึกปฏิบัติเพื่อเกิดทักษะในการใช้งาน

ข้อตกลง

ในที่นี้จะมีข้อตกลง 2 กรณี คือ

1. ข้อตกลงเกี่ยวกับศัพท์บางคำ
2. ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางเรขาคณิต

1. ข้อตกลงเกี่ยวกับศัพท์บางคำ

เพื่อให้ได้เข้าใจตรงกันในศัพท์บางคำที่เกี่ยวกับการใช้ GSP จะเขียนเป็นภาษาอังกฤษ โดยไม่แปลเป็นภาษาไทย เนื่องจากขณะที่นักเรียนใช้ GSP อยู่ นั้น จะปรากฏคำสั่งต่าง ๆ เป็นภาษาอังกฤษบนจอภาพ โดยมีคำศัพท์ ดังนี้

❖ Directory	เป็นส่วนแบ่งพื้นที่ที่ใช้เก็บข้อมูลในแผ่นบันทึกหรือ จานบันทึกแบบแข็ง
❖ Pointer	เป็นตัวชี้ตำแหน่งบนวินโดว์ ซึ่งเคลื่อนที่โดยใช้การเคลื่อนที่ของเมาส์
❖ คลิก	เป็นการกดปุ่มของเมาส์ แล้วปล่อยทันที โดยทั่วไป หมายถึง การกดปุ่มซ้ายของเมาส์ ถ้ากดปุ่มขวาจะใช้คำว่าคลิกขวา
❖ คลิกขวา	หมายถึง การกดปุ่มขวาของเมาส์
❖ ดับเบิลคลิก	เป็นการกดปุ่มซ้ายของเมาส์ติดต่อกัน 2 ครั้งอย่างรวดเร็ว
❖ ออบเจกต์ (Object)	หมายถึง รูปที่สร้างขึ้น เช่น จุด ส่วนของเส้นตรง วงกลม

- ❖ คลิกค้าง เป็นการกดปุ่มซ้ายของเมาส์บนจอค้างไว้ขณะเคลื่อนที่เมาส์เพื่อให้จอเลื่อนไปยังตำแหน่งที่ต้องการ แล้วปล่อย
- ❖ Ctrl + (ตัวอักษร) เป็นการใช้คำสั่งลัด (Shortcut) เช่น Ctrl + A เป็นการกดปุ่ม Ctrl และปุ่มตัวอักษร A บนแป้นพิมพ์พร้อมกัน แล้วปล่อย
- ❖ Shift + คลิก หมายถึง เส้นตรง หรือรังสีหรือส่วนของเส้นตรง หรือเส้นรอบวง หรือส่วนโค้งของวงกลม

2. ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางเรขาคณิต

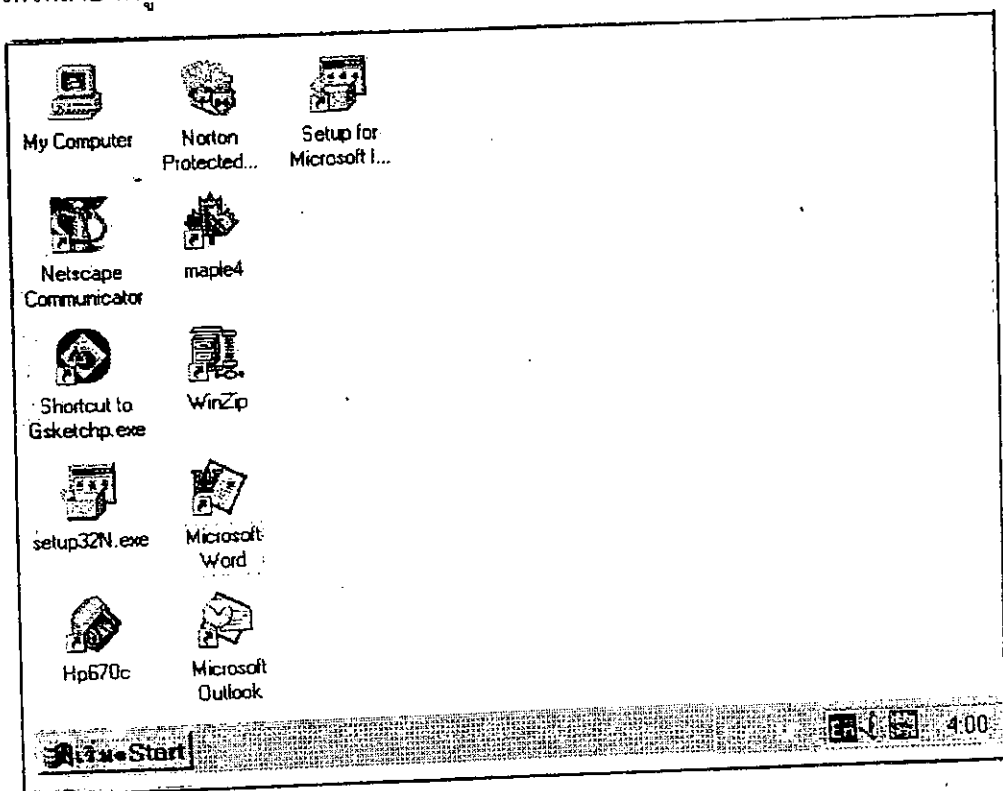
สัญลักษณ์ทางเรขาคณิตที่ใช้ในคู่มือเล่มนี้ มีดังต่อไปนี้

เส้นตรง AB	อาจเขียนแทนด้วย	$\overleftrightarrow{AB}$
รังสี AB	อาจเขียนแทนด้วย	$\overrightarrow{AB}$
ส่วนของเส้นตรง AB	อาจเขียนแทนด้วย	$\overline{AB}$
ความยาวของ $\overline{AB}$	อาจเขียนแทนด้วย	AB หรือ $m\overline{AB}$
มุม ABC	อาจเขียนแทนด้วย	$\angle ABC$
	โดยมีจุด B เป็นจุดยอดมุม	
ขนาดของมุม ABC	อาจเขียนแทนด้วย	$m\angle ABC$
รูปสามเหลี่ยม ABC	อาจเขียนแทนด้วย	$\triangle ABC$
รูปสี่เหลี่ยม ABCD	อาจเขียนแทนด้วย	$\square ABCD$

การใช้งานเบื้องต้น

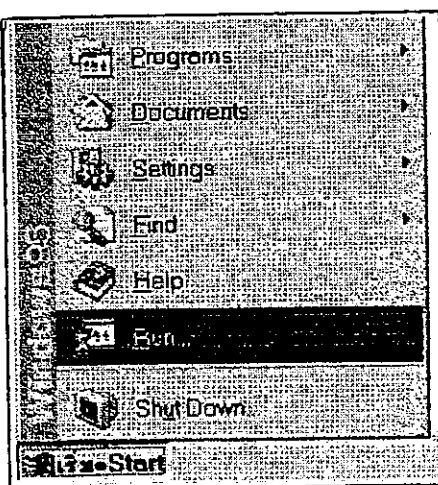
สำหรับซอฟต์แวร์ GSP ที่นักเรียนจะได้ใช้ต่อไปนี้เป็นรุ่นสาริต การใช้งานซอฟต์แวร์ GSP รุ่นสาริตนี้มีขั้นตอนการปฏิบัติตามลำดับ ดังนี้

1. เปิดเครื่องคอมพิวเตอร์พีซีและโปรแกรม Microsoft Windows95 จะปรากฏจอภาพเป็นวินโดว์คล้าย ดังรูป 1



รูป 1

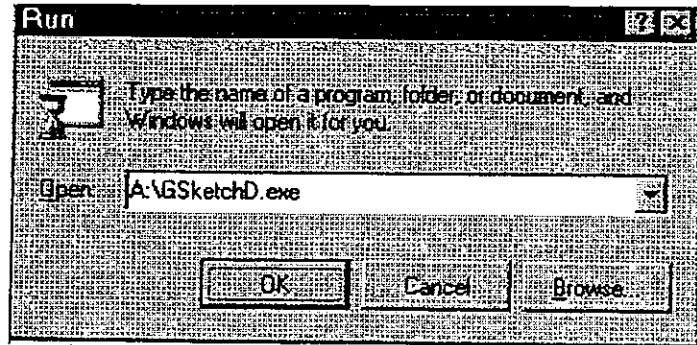
2. ใส่แผ่นบันทึก 3.5 นิ้วที่มีซอฟต์แวร์ GSP. ในหน่วยขับเคลื่อนบันทึก 3.5 นิ้ว
3. คลิกที่ปุ่ม Start ดังรูป 2



รูป 2

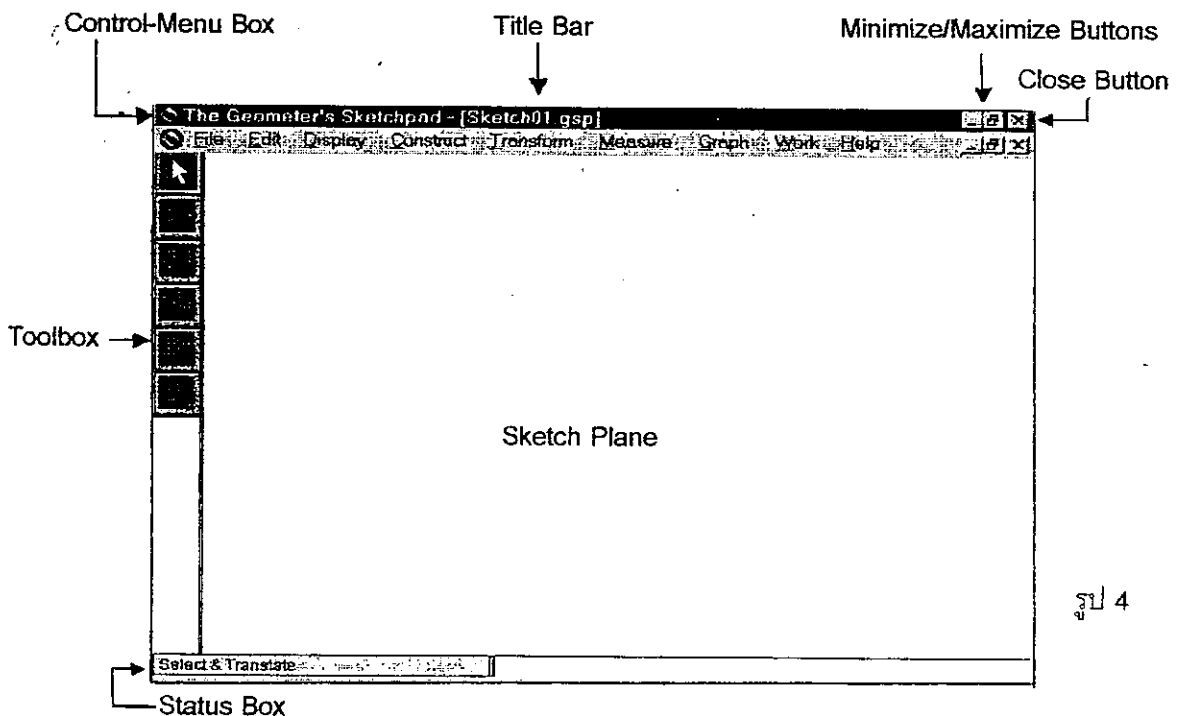
4. แล้วเลือกคำสั่ง Run

5. พิมพ์ A:\GSketchD.exe ลงในกรอบ Open ดังรูป 3 แล้วคลิกที่ปุ่ม OK



รูป 3

6. จะปรากฏจอภาพที่มีส่วนประกอบ ดังรูป 4



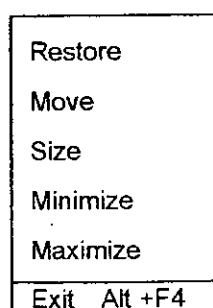
รูป 4

ส่วนประกอบของหน้าจอ ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

Control-Menu Box เป็นที่รวมคำสั่งเกี่ยวกับการจัดการลักษณะของวินโดว์ เช่นขยาย

(Maximize) หรือลดขนาด (Minimize) หรือย้าย (Move) วินโดว์รวมทั้งปิดวินโดว์เพื่อออกจาก GSP

เมื่อคลิกแล้วจะเกิดเมนูต่อเรียง ดังรูป 5 แต่ถ้าดับเบิลคลิกจะเป็นการปิดวินโดว์เพื่อออกจาก GSP



รูป 5

Toolbox	ประกอบด้วยเครื่องมือในการวาดภาพ ที่ใช้เป็นคำสั่งสำหรับการปฏิบัติงาน
Title Bar	ปรากฏชื่อซอฟต์แวร์ และ ไฟล์ที่กำลังทำงาน ขณะที่วินโดว์กำลังใช้งาน (Active window) Title Bar จะมีสีเข้ม แต่ถ้าวินโดว์ไม่ได้ใช้งาน โดยการไปใช้ วินโดว์อื่น วินโดว์นั้นจะปรากฏเป็นสีเทา
Minimize / Maximize Button	ใช้สำหรับเปลี่ยนขนาดวินโดว์ ปุ่ม Minimize เป็นการยุบ ขนาดกรอบของวินโดว์ให้เล็กลงเป็น icon ปุ่ม Maximize เป็นการขยายขนาด กรอบของวินโดว์ให้เต็มจอภาพ
Close Button	ปิดวินโดว์ เพื่อออกจาก GSP
Sketch Plane	เป็นพื้นที่ว่างที่เราใช้สร้างหรือจัดการกับรูปเรขาคณิต
Status Box	เป็นการบอกว่าขณะนี้กำลังทำอะไรหรือ กำลังเลือกอะไรอยู่

สรุปคำสั่ง

ในที่นี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของ Toolbox และรายละเอียดของ Menu Bar

รายละเอียด Toolbox

ประกอบด้วยเครื่องมือในการวาดภาพ ที่ใช้เป็นคำสั่งสำหรับการปฏิบัติงาน ดังนี้

สัญลักษณ์	ชื่อ	รูป Pointer ที่ปรากฏบน Sketch Plane
	Select Arrow Tools	
	Point tool	
	Compass tool	
	Straightedge tools	
	Text tool	
	Object Information	

1. Select Arrow Tools

เมื่อกดปุ่ม  ค้างไว้ แล้วลากไปทางขวาจะได้ปุ่มเพิ่ม ดังรูป    

 เรียกว่า Translate tool ใช้สำหรับเลือกออฟเจก แล้วเลื่อนไปตำแหน่งที่ต้องการ

 เรียกว่า Relate tool ใช้สำหรับโยกออฟเจก รอบจุดที่กำหนด

 เรียกว่า Dilate tool ใช้สำหรับขยายหรือลดออฟเจก

2. Point tool

 ใช้กำหนดจุด

3. Compass tool

 ใช้สำหรับวาดวงกลม

4. Straightedge tools

เมื่อกดปุ่ม  ค้างไว้ แล้วลากไปทางขวา จะได้ปุ่มเพิ่ม ดังรูป    

 เรียกว่า Segment Tool ใช้สำหรับสร้างส่วนของเส้นตรง

 เรียกว่า Ray Tool ใช้สำหรับสร้างรังสี

 เรียกว่า Line Tool ใช้สำหรับสร้างเส้นตรง

5. Text tool

 ใช้ลากบนพื้นที่ว่าง สำหรับสร้างกล่องข้อความเพื่อบรรจุข้อความต่าง ๆ หรือ คลิกบนออฟเจก เพื่อแสดงหรือซ่อน Label หรือ ลาก Label เพื่อปรับตำแหน่ง หรือ ดับเบิลคลิกที่ Label, ผลการวัด, กล่องข้อความเพื่อแก้ไข

6. Object Information tool

 คลิกบนออฟเจก เพื่อดูคำอธิบายของออฟเจกนั้น

รายละเอียด Menu Bar

ขณะที่วินโดว์ของ Sketch ใช้งานอยู่ เราจะเห็นรายการของ Menu Bar ประกอบด้วยชื่อของ Menu ต่าง ๆ ดังนี้



เมื่อใช้งาน Script บางคำสั่งที่ปรากฏจะเป็นเพียงเงา แสดงว่าไม่สามารถใช้คำสั่งนั้นได้

1. File Menu เมื่อเลื่อน Pointer ไปยัง File Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 6

File	
New Sketch	Ctrl+N
New Script	
Open...	Ctrl+O
Save	Ctrl+S
Save As...	
Close	Ctrl+F4
Print Preview...	
Print	
Exit	Alt+F4

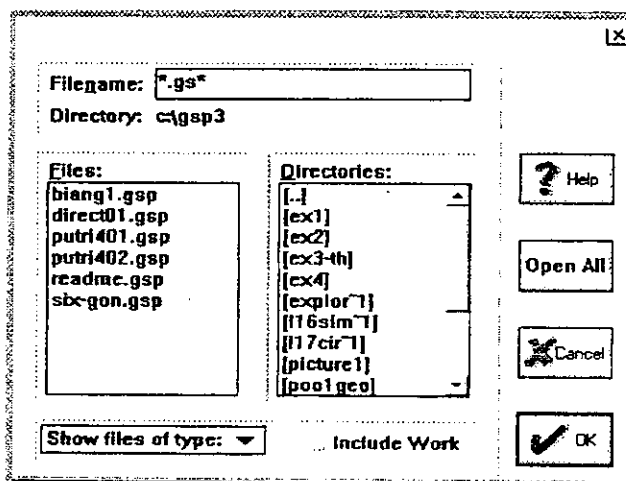
รูป 6

- New Sketch เปิด Sketch ว่างใหม่ Sketch ใหม่ที่เปิดขึ้นนี้จะยังไม่มีชื่อจนกว่าจะมีการบันทึก คำสั่งลัด Ctrl +N
- New Script เปิด Script ว่างใหม่ Script ใหม่ที่เกิดขึ้นนี้จะยังไม่มีชื่อจนกว่าจะบันทึก
- Open... เปิด Sketch หรือ Script ที่มีการบันทึกไว้ ซึ่งสามารถใช้ปุ่ม Open All เพื่อเปิดทุกไฟล์ที่ปรากฏอยู่ใน Directory นั้น คำสั่งลัด Ctrl +O

ขั้นตอนการปฏิบัติในการใช้คำสั่ง Open

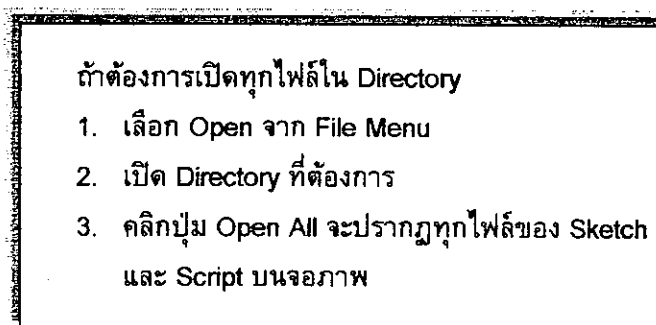
1. เลือก Open จาก File Menu จะปรากฏ File Open Dialog box ดังรูป 7

ซึ่งไฟล์ของ Sketch จะมีส่วนขยายเป็น .gsp และไฟล์ของ Script จะมีส่วนขยายเป็น .gss



รูป 7

2. คลิกชื่อของไฟล์ Sketch หรือ Script ที่ต้องการใช้
3. คลิก OK. จะปรากฏไฟล์ที่ต้องการบนจอภาพ



<u>S</u> ave	ใช้สำหรับบันทึก Sketch หรือ Script ที่กำลังปฏิบัติงานอยู่ คำสั่งลัด Ctrl + S
Save <u>A</u> s...	ใช้สำหรับบันทึก Sketch หรือ Script ที่กำลังปฏิบัติงานอยู่ในชื่อใหม่ใน Directory ที่ต้องการ
<u>C</u> lose	ใช้สำหรับปิดไฟล์ที่กำลังปฏิบัติงานอยู่ คำสั่งลัด Ctrl + F4
<u>P</u> rint Preview...	ใช้สำหรับดูภาพตัวอย่างก่อนที่จะพิมพ์ เพื่อการแก้ไข
<u>P</u> rint	ใช้สำหรับพิมพ์ภาพที่ปรากฏใน Sketch Plane หรือ Script ที่กำลังปฏิบัติงานอยู่
<u>E</u> xit	ใช้สำหรับออกจาก GSP คำสั่งลัด Alt + F4

หมายเหตุ GSP รุ่นสาริตไม่อนุญาตให้มีการ Save หรือ Print ดังนั้นคำสั่ง Save, Save As และ Print

จึงใช้ไม่ได้

2. Edit Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Edit Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 8

Edit	
Undo	Ctrl+Z
Redo	Ctrl+R
Cut	Ctrl+X
Copy	Ctrl+C
Paste	Ctrl+V
Paste Link	
Clear	Ctrl+Del
Action Button	▶
Select All	Ctrl+A
Select Parents	Ctrl+U
Select Children	Ctrl+D
Links...	
Insert Object...	
Hide Toolbox	
Show Clipboard	

รูป 8

- Undo** ใช้สำหรับยกเลิกการทำงานครั้งล่าสุดย้อนกลับขึ้นไป คำสั่งลัด Ctrl+Z และยกเลิกการทำงานทั้งหมด ใช้คำสั่ง Shift+Ctrl+Z
- Redo** ใช้สำหรับขอผลงานที่ถูกยกเลิกไปกลับคืนมา คำสั่งลัด Ctrl+R และขอผลงานทั้งหมดที่ถูกยกเลิกคืน ใช้คำสั่ง Shift +Ctrl+R
- Cut** ใช้สำหรับลบออกเจก ที่เลือกแล้วเอาไปไว้ใน Clipboard คำสั่งลัด Ctrl+X
- Copy** ใช้สำหรับคัดลอกออกเจก ที่เลือกแล้วเอาไปไว้ใน Clipboard คำสั่งลัด Ctrl+C
- Paste** ใช้สำหรับวางออกเจก ที่ Cut หรือ Copy ไว้ ลงในตำแหน่งที่ต้องการ คำสั่งลัด Ctrl+V
- Paste Link** คล้าย Paste ต่างกันที่ ถ้าออกเจก ที่ Copy มา มีการเปลี่ยนแปลง ออกเจกที่นำมาวางไว้จะเปลี่ยนแปลงด้วย
- Clear** ใช้สำหรับ ลบออกเจก คำสั่งลัด Ctrl+Del
- Action Button** ใช้สำหรับการเคลื่อนไหวในรูปแบบต่าง ๆ ตามเมนูย่อย ดังรูป 9

Action Button ▶	
Movement...	
Animation...	
Hide/Show	
Sequence	
Do Button	Ctrl+B

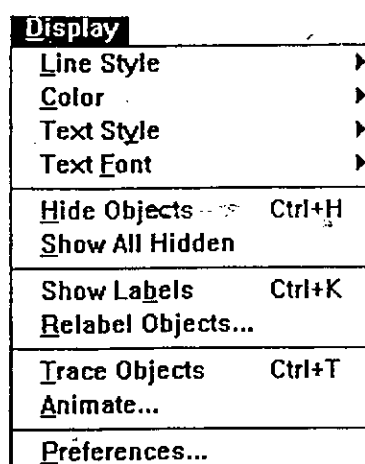
รูป 9

<u>M</u> ovement...	ใช้สำหรับสร้าง Action Button เพื่อเคลื่อนที่จากจุดแรก que เลือกไปจุดที่สองที่เลือก
<u>A</u> nimation...	ใช้สำหรับสร้างกรอบเพื่อแสดงการเคลื่อนไหวของจุดที่เลือกไปตามส่วนของเส้นตรงหรือวงกลม
<u>H</u> ide/Show	ใช้สำหรับสร้างกรอบสองกรอบเพื่อกรอบหนึ่งเป็นการซ่อนออบเจกต์และอีกกรอบเป็นการแสดงออบเจกต์นั้นให้เห็น
<u>S</u> equence	ใช้สำหรับสร้างกรอบเพื่อแสดงลำดับขั้นของกรอบที่สร้างขึ้น
<u>D</u> o Button	แสดงการเคลื่อนไหวของกรอบที่เลือก คำสั่งลัด Ctrl+B

Select <u>A</u> ll	ใช้สำหรับเลือกออบเจกต์ทั้งหมดบน Sketch Plane คำสั่งลัด Ctrl+A
Select <u>P</u> arents	ใช้สำหรับเลือกออบเจกต์เริ่มต้นที่ทำให้เกิดออบเจกต์อื่น คำสั่งลัด Ctrl+U
Select <u>C</u> hildren	ใช้สำหรับเลือกออบเจกต์ที่สร้างต่อเนื่องจากออบเจกต์อื่น คำสั่งลัด Ctrl+D
<u>L</u> inks...	ใช้สำหรับเชื่อมระหว่างออบเจกต์
Insert <u>O</u> bject...	ใช้สำหรับเพิ่มออบเจกต์
Hide <u>T</u> oolbox	ใช้สำหรับซ่อน Toolbox
Show <u>C</u> lipboard	ใช้สำหรับแสดงว่าใน Clipboard นั้นมีอะไร

3. Display Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Display Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 10



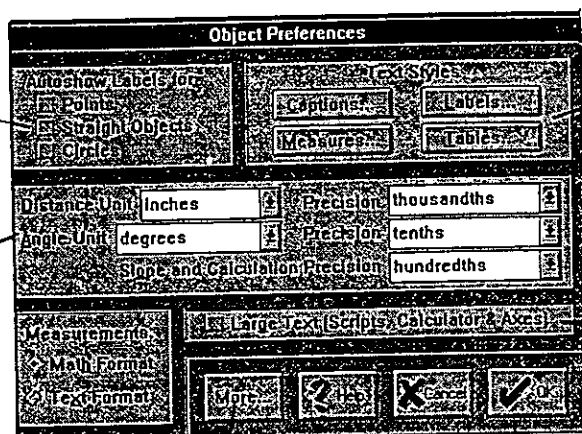
รูป 10

<u>L</u> ine Style	ใช้สำหรับกำหนดลักษณะของเส้นซึ่งจะใช้กับออปเจกที่ได้จาก คำสั่ง Segment, Ray, Line, Circle, Arc และ Locus ของจุด โดยมี 3 ลักษณะ คือ เส้นหนา (Thick) เส้นบาง (Thin) และเส้นประ (Dashed)
<u>C</u> olor	ใช้สำหรับกำหนดสีของออปเจก ซึ่งใช้กับออปเจกที่ได้จากคำสั่ง Segment, Ray, Line, Circle, Arc, Locus และพื้น Interior โดยมี สีดำ, แดง, ม่วงแดง, น้ำเงิน, น้ำเงินแกมเขียว, เขียว และเหลือง ถ้าใช้กับคำสั่ง Interior จะเลือกสีเข้มหรือ สว่างได้อีกด้วย
<u>T</u> ext Style	ใช้สำหรับกำหนดขนาดหรือรูปแบบของข้อความ ซึ่งจะใช้กับข้อความที่ได้จาก Caption, Measure, Table, Action Button และ Label
<u>T</u> ext <u>F</u> ont	ใช้สำหรับเปลี่ยน Font ของข้อความ ใช้กับข้อความที่ได้จาก Caption, Measure, Table, Action Button และ Label
<u>H</u> ide Objects	ใช้สำหรับซ่อนออปเจกที่ไม่ต้องการเห็นหรือไม่จำเป็น คำสั่งลัด Ctrl+H
<u>S</u> how All Hidden	ใช้สำหรับแสดงออปเจกที่ซ่อนไว้
<u>S</u> how <u>L</u> abels	ใช้สำหรับแสดง Label ของออปเจก คำสั่งลัด Ctrl+K
<u>R</u> elabel Objects...	ใช้สำหรับเปลี่ยน Label ของออปเจก

- Trace Objects ใช้สำหรับแสดงรอยการเคลื่อนที่ของออปเจกต์ที่เลือก คำสั่งลัด Ctrl+t
- Animate... ใช้สำหรับแสดงการเคลื่อนที่ของจุดบนส่วนของเส้นตรงหรือวงกลม
- Preferences... ใช้สำหรับกำหนดค่าต่าง ๆ เมื่อเลือกคำสั่ง Preferences... จะปรากฏดังรูป 11.

เลือกเพื่อให้แสดง Label
สำหรับจุด เส้น และวงกลม
ทันทีเมื่อสร้างออปเจกต์นั้น

เลือกหน่วยของความยาว
เป็นนิ้วหรือเซนติเมตรและ
ขนาดของมุมเป็นองศาหรือ
เรเดียนหรือการวัดตามทิศทาง



เลือก Font, รูปแบบและ
ขนาดของตัวอักษร

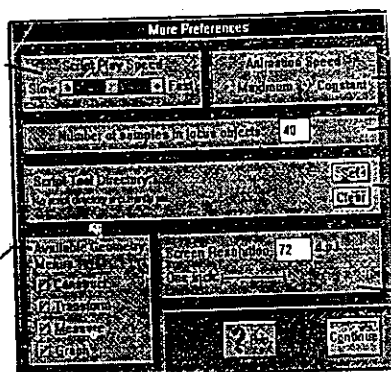
เลือกเพื่อให้แสดงว่าการวัดนั้น
เป็นจำนวนเต็มหรือทศนิยมที่
ตำแหน่ง

เลือกตัวอักษรที่จะปรากฏใน
Scripts การคำนวณและชื่อ
แกนเป็นตัวย่อขนาดใหญ่

รูป 11

เมื่อคลิกปุ่ม More จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ดังรูป 12

ความเร็วในการใช้ Script



แสดงเมนู

ใช้กำหนดความเร็วของการเคลื่อนที่
จำนวนสูงสุดของการแสดงทางเดินของออปเจกต์
ใช้กำหนด Directory ในการเก็บ Script

แสดงความละเอียดของจอภาพ

รูป 12

4. Construct Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Construct Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 13

Construct	
Point On <u>O</u> bject	
Point At <u>I</u> ntersection	Ctrl+I
Point At <u>M</u> idpoint	Ctrl+M
<u>S</u> egment	Ctrl+L
Perpendicular Line	
<u>P</u> arallel Line	
Angle <u>B</u> isector	
Circle By Center And Point	
Circle By Center And <u>R</u> adius	
Arc On Circle	
<u>A</u> rc By Three Points	
<u>I</u> nterior	Ctrl+P
Locus	
Construction <u>H</u> elp...	

รูป 13

Point On <u>O</u> bject	ใช้สำหรับกำหนดจุดบนออบเจก
Point At <u>I</u> ntersection	ใช้สำหรับกำหนดจุดตัดระหว่างสองออบเจก คำสั่งลัด Ctrl+I
Point At <u>M</u> idpoint	ใช้สำหรับกำหนดจุดกึ่งกลางของเส้นตรง คำสั่งลัด Ctrl+M
<u>S</u> egment	ใช้สำหรับการสร้างเส้นตรง รังสี หรือส่วนของเส้นตรง คำสั่งลัด Ctrl+L
Perpendicular Line	ใช้สำหรับสร้างเส้นตั้งฉาก
<u>P</u> arallel Line	ใช้สำหรับสร้างเส้นขนาน
Angle <u>B</u> isector	ใช้สำหรับสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม
Circle By Center And Point	ใช้สำหรับสร้างวงกลม เมื่อกำหนดจุดสองจุด
Circle By Center And <u>R</u> adius	ใช้สำหรับสร้างวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมี
Arc On Circle	ใช้สำหรับสร้างส่วนโค้งของวงกลม
<u>A</u> rc By Three Points	ใช้สำหรับสร้างส่วนโค้งของวงกลมเมื่อกำหนดจุดสามจุด
<u>I</u> nterior	ใช้สำหรับสร้างพื้นที่ที่แรเงาภายในวงกลมหรือรูปหลายเหลี่ยม คำสั่งลัด Ctrl+P
Locus	ใช้สำหรับแสดงทางเดินของออบเจก

Construction Help...

ใช้สำหรับแสดงคำอธิบายเกี่ยวกับการสร้าง (GSP รุ่นสถิติจะไม่มีคำอธิบายนี้)

5. Transform Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Transform Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 14

Transform	
Translate...	
Rotate...	
Dilate...	
Reflect	
Mark Center "G"	Ctrl+F
Mark Mirror "k"	Ctrl+G
Mark Vector	
Mark Distance	
Mark Angle	
Mark Ratio	
Define Transform...	

รูป 14

Translate...	ใช้สำหรับการเลื่อนออกไปเจก
Rotate...	ใช้สำหรับการหมุนออกไปเจก
Dilate...	ใช้สำหรับการย่อหรือขยายออกไปเจก
Reflect	ใช้สำหรับการสะท้อนออกไปเจก
Mark Center "G"	ใช้สำหรับการกำหนดจุดหมุน คำสั่งลัด Ctrl+F
Mark Mirror "k"	ใช้สำหรับการกำหนดเส้นของการสะท้อน คำสั่งลัด Ctrl+G
Mark Vector	ใช้สำหรับการกำหนดทิศทางและขนาดของการเลื่อน
Mark Distance	ใช้สำหรับการกำหนดระยะทาง
Mark Angle	ใช้สำหรับการกำหนดมุม
Mark Ratio	ใช้สำหรับการกำหนดอัตราส่วนการย่อขยาย
Define Transform ...	ใช้ในกรณีที่มีการ Transform หลายขั้นตอน

6. Measure Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Measure Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 15

Measure
<u>D</u> istance
<u>L</u> ength
<u>S</u> lope
<u>R</u> adius
<u>C</u> ircumference
<u>A</u> rea
<u>P</u> erimeter
<u>A</u> ngle
<u>A</u> rcAngle
<u>A</u> rcLength
<u>R</u> atio
<u>C</u> oordinates
<u>E</u> quation
<u>C</u> alculate...
<u>T</u> abulate
<u>A</u> dd <u>E</u> ntry

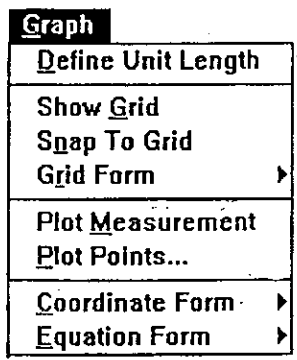
รูป 15

<u>D</u> istance	ใช้วัดระยะทางระหว่างจุดสองจุด
<u>L</u> ength	ใช้วัดความยาวของส่วนของเส้นตรง
<u>S</u> lope	ใช้วัดความชันของเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง
<u>R</u> adius	ใช้วัดความยาวของรัศมีของวงกลม
<u>C</u> ircumference	ใช้วัดความยาวของเส้นรอบวง
<u>A</u> rea	ใช้วัดพื้นที่ของวงกลมหรือรูปหลายเหลี่ยม
<u>P</u> erimeter	ใช้หาผลรวมของความยาวของด้านทุกด้าน
<u>A</u> ngle	ใช้วัดขนาดของมุม
<u>A</u> rcAngle	ใช้วัดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของส่วนโค้งนี้
<u>A</u> rcLength	ใช้วัดความยาวของส่วนโค้ง
<u>R</u> atio	ใช้วัดหาคะอัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงสองเส้น
<u>C</u> oordinates	ใช้หาพิกัดจุด
<u>E</u> quation	ใช้หาสมการของเส้นตรงหรือวงกลม
<u>C</u> alculate...	ใช้คำนวณค่าต่าง ๆ

<u>T</u> abulate	ใช้สำหรับนำค่าที่วัดได้มาใส่ไว้เป็นตาราง
A <u>d</u> d <u>E</u> ntry	ใช้สำหรับเพิ่มค่าที่วัดได้ไปไว้ในตาราง

7. Graph Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Graph Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 16



รูป 16

<u>D</u> efine Unit Length	ใช้สำหรับสร้างระบบแกนมุมฉากและบอกหน่วยของมาตราส่วน
S <u>h</u> ow <u>G</u> rid	ใช้สำหรับแสดงกระดานกราฟ
S <u>n</u> ap To Grid	ใช้สำหรับปรับขนาดของตาราง
G <u>r</u> id Form	ใช้สำหรับเลือกรูปแบบกราฟเป็นเชิงตั้งฉาก (Rectangle) หรือ เชิงขั้ว (Polar)
P <u>l</u> ot <u>M</u> easurement	ใช้สำหรับกำหนดค่าของการลงจุดเป็นรูปแบบเชิงตั้งฉากหรือเชิงขั้ว
P <u>l</u> ot P <u>o</u> ints...	ใช้สำหรับลงจุด
<u>C</u> oordinate Form	ใช้สำหรับเลือกรูปแบบเชิงตั้งฉากหรือเชิงขั้ว
<u>E</u> quation Form	ใช้สำหรับเลือกรูปแบบของสมการเส้นตรง และวงกลม

8. Work Menu

เมื่อเลื่อน Pointer ไปที่ Work Menu จะปรากฏเมนูย่อย ดังรูป 17

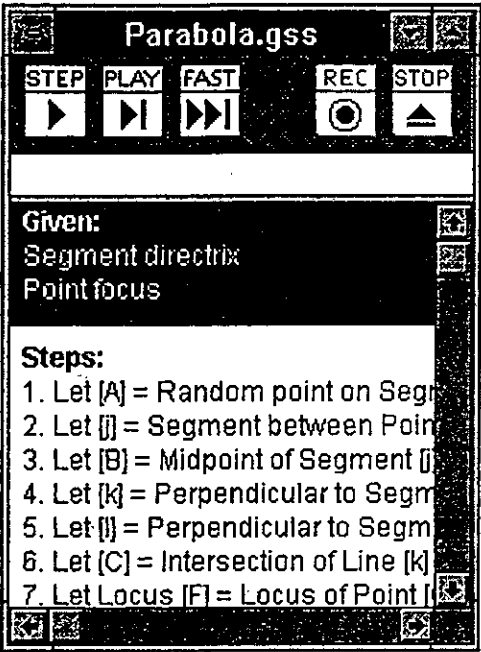
Work	
Make Script	
<u>T</u> ile	Shift+F5
<u>C</u> ascade	Shift+F4
Arrange Icons	
Close <u>A</u> ll	
1 Script01.gss	
✓ 2 Sketch01.gsp	

รูป 17

Mark <u>S</u> cript	ใช้สำหรับสร้าง Script ใหม่
<u>T</u> ile	ใช้สำหรับแสดงหลายวินโดวส์ในลักษณะต่อเป็นส่วน ๆ บนหน้าจอ คำสั่งลัด Shift+F5
<u>C</u> ascade	ใช้สำหรับแสดงหลายวินโดวส์ในลักษณะเรียงกันบนหน้าจอ คำสั่งลัด Shift+F4
Arrange <u>I</u> cons	ใช้ปรับขนาดของวินโดว์
Close <u>A</u> ll	ใช้ปิดทุกวินโดว์
1 <u>S</u> cript01.gss	ใช้สำหรับบอกว่าขณะนี้ใช้งานไฟล์ใดบ้าง เช่นเปิดไฟล์ Script01.gsp เพื่อใช้กับไฟล์ Sketch01.gsp
2 <u>S</u> kech01.gsp	ใช้สำหรับบอกว่าขณะนี้ใช้งานไฟล์ใดบ้าง เช่นเปิดไฟล์ Script01.gsp เพื่อใช้กับไฟล์ Sketch01.gsp

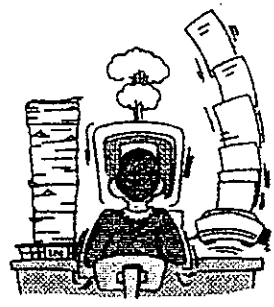
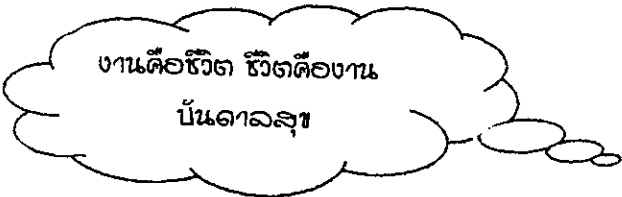
9. Script Window

เปิดไฟล์ที่เป็น Script เช่นเปิดไฟล์ Parabola.gss จะปรากฏลักษณะ ดังรูป 18



รูป 18

- STEP ใช้สำหรับแสดงการทำงานที่ละขั้น
- PLAY ใช้สำหรับแสดงการทำงานที่ละขั้นต่อเนื่องกันจนเสร็จ
- FAST ใช้สำหรับแสดงการทำงานที่ละขั้นอย่างรวดเร็ว
- REC ใช้สำหรับการบันทึก Script ที่สร้างขึ้น
- STOP ใช้สำหรับหยุดการบันทึก
- Given: ใช้สำหรับบอกออบเจกต์ที่ต้องกำหนดให้สำหรับการสร้างตาม Script นี้
- Steps: ใช้สำหรับแสดงขั้นตอนของการสร้าง



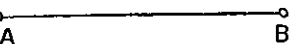
การเลือกออปเจก

ในการใช้คำสั่งของการสร้างต่าง ๆ จะต้องมีการเลือกออปเจกสำหรับใช้ในแต่ละคำสั่ง วิธีการเลือกมี ดังนี้

1. เลือกหนึ่งออปเจก ทำโดย ใช้ Select Arrow tool ใน Toolbox แล้วคลิกที่ออปเจก. ถ้าออปเจก

เป็นจุด A จะปรากฏรูป  A เรียกว่า Highlighted point หรือจุดที่ถูกเลือก จุดที่ไม่ถูกเลือกจะมีลักษณะ .

ถ้าออปเจกเป็นเส้น เช่น AB จะปรากฏรูป  เรียกว่า Highlighted Segment

หรือส่วนของเส้นตรงที่ถูกเลือก ส่วนเส้นตรงที่ไม่ถูกเลือกจะมีลักษณะ 

2. เลือกมากกว่าหนึ่งออปเจก ทำโดย ใช้ Select Arrow tool ใน Toolbox คลิกที่ออปเจกแรก และ

Shift +คลิก ที่ออปเจกอื่นที่ต้องการ

3. ไม่เลือกหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งออปเจกจากกลุ่มที่เลือกไว้ ทำโดย ใช้ Select Arrow tool ใน Toolbox

คลิกค้างแล้วลากล้อมรอบกลุ่มของออปเจก เพื่อเลือกออปเจกทั้งกลุ่ม แล้ว Shift +คลิก ที่ออปเจกที่ไม่ต้องการ

การเลือกออปเจกเพื่อใช้คำสั่งในเมนู Construct และเมนู Measure

ในการใช้คำสั่งในเมนู Construct และเมนู Measure เช่น การสร้างส่วนของเส้นตรงต้องคลิก

ที่จุดสองจุด แล้วเลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Segment การคลิกจุดสองจุดนั้นเป็นการเลือกออปเจกเพื่อให้ใช้

คำสั่ง Segment ในเมนู Construct ได้ ต่อไปนี้จะเป็นการสรุปว่าการใช้คำสั่งแต่ละคำสั่งต้องเลือกออปเจกอย่างไร

จึงจะใช้คำสั่งเหล่านั้นได้

Construct	การเลือกออปเจก
Point On <u>O</u> bject	หนึ่งออปเจก หรือมากกว่า
Point At <u>I</u> ntersection Ctrl+I	เส้นสองเส้น
Point At <u>M</u> idpoint Ctrl+M	ส่วนของเส้นตรงหนึ่งเส้นหรือมากกว่า
<u>S</u> egment Ctrl+L	จุดสองจุดหรือมากกว่า
Perpend <u>i</u> cular Line	เส้นหนึ่งเส้นและจุดหนึ่งจุดหรือมากกว่า
<u>P</u> arallel Line	เส้นหนึ่งเส้นและจุดหนึ่งจุดหรือมากกว่า
Angle <u>B</u> isector	จุดสามจุด (จุด จุดยอดมุม จุด) เรียงตามลำดับ
Circle By Center And Point	จุดสองจุด (จุดศูนย์กลาง และจุดปลายของรัศมี) เรียงตามลำดับ

Construct		การเลือกออปเจก
Circle By Center And Radius		จุดหนึ่งจุด ส่วนของเส้นตรงหนึ่งเส้น
Arc On Circle		จุดสามจุด (จุดศูนย์กลาง และจุดสองจุดบนวงกลม)
Arc By Three Point		จุดสามจุด
Interior	Ctrl+P	จุดสามจุด หรือมากกว่า (ขึ้นอยู่กับจำนวนเหลี่ยม) หรือวงกลม
Locus		ออปเจกและจุดบนทางเดิน
Construction Help		รายละเอียดคู่มือการสร้างโดยใช้ เมนู Construct

Measure		การเลือกออปเจก
Distance		จุดสองจุด หรือจุดหนึ่งจุดและเส้นหนึ่งเส้น
Length		ส่วนของเส้นตรงหนึ่งเส้นหรือมากกว่า
Slope		เส้นหนึ่งเส้นหรือมากกว่า
Radius		วงกลมหนึ่งวงหรือพื้นที่ของวงกลม หรือส่วนโค้งของวงกลม
Circumference		วงกลมหนึ่งวงหรือมากกว่าภายในหรือพื้นที่ภายในวงกลม
Area		ใช้วัดพื้นที่ของวงกลมหรือรูปหลายเหลี่ยม
Perimeter		พื้นที่ภายในรูปหลายเหลี่ยม หรือส่วนโค้ง
Angle		จุดสามจุด
ArcAngle	}	ส่วนโค้งของวงกลม
ArcLength		ส่วนโค้งของวงกลม
Ratio		ส่วนของเส้นตรงสองเส้น
Coordinates		จุด
Equation		เส้นตรงหรือวงกลม
Calculate		ใช้คำนวณค่าต่าง ๆ
Tabulate		ค่าที่วัดได้หรือคำนวณได้ตั้งแต่ 2 ค่าขึ้นไป
Add Entry		ค่าที่วัดได้หรือคำนวณได้

4. ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น

ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิต เป็นการฝึกให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้ GSP ซึ่งคู่มือนี้จะเน้นส่วนที่นักเรียนจะนำไปใช้เป็นเครื่องมือช่วยการเรียนรู้บทเรียนเรขาคณิต ดังนั้นนักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติตามวิธีปฏิบัติที่ละขั้นตอนที่กำหนดไว้ในแต่ละหัวข้อต่อไปนี้

การสร้างจุด เส้น และวงกลม

การสร้างจุด เส้น และวงกลม เป็นการฝึกปฏิบัติเพื่อให้นักเรียนสามารถใช้ GSP ตาม

จุดประสงค์ดังนี้

จุดประสงค์

- 1 สร้างจุด
- 2 สร้างเส้นตรง
- 3 สร้างรังสี
- 4 สร้างส่วนของเส้นตรง
- 5 สร้างวงกลม

วิธีปฏิบัติที่ละขั้นตอน

1. การสร้างจุด

ถ้าต้องการสร้างจุดสองจุด มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ เลือก Point Tool ใน Toolbox
- ❖ เลื่อน Pointer ไปบน Sketch Plane ซึ่ง Pointer เปลี่ยนเป็นรูป 
- ❖ คลิกจะได้จุด ลักษณะดังนี้ 
- ❖ เลื่อน Pointer ไปคลิกจุดที่สอง จะได้จุดลักษณะดังนี้



2. การสร้างเส้นตรง

การสร้างเส้นตรง ปฏิบัติได้ 3 วิธี แต่ละวิธีปฏิบัติ ดังนี้

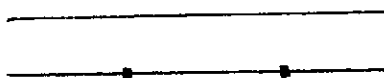
2.1 ใช้ Toolbox ตัวอย่างของการสร้างเส้นตรงสองเส้น

- ❖ เลือก Line tool ใน Toolbox (คลิกค้างไว้ที่ Straightedge tools ลากไปทางขวา คลิกบน Line tool)
- ❖ เลื่อน Pointer ไปบน Sketch Plane ซึ่ง Pointer เปลี่ยนเป็นรูป  คลิกค้าง ลากออกไป แล้วปล่อย

จะได้เส้นตรงลักษณะดังนี้



- ❖ ให้นักเรียนทดลองเลื่อน Pointer ไปสร้างเส้นตรงเส้นที่สอง



2.2 ใช้คำสั่งจากเมนู ปฏิบัติได้ 2 วิธี แต่ละวิธีปฏิบัติ ดังนี้

2.2.1. - คลิกที่จุด 2 จุด

- เลือก Line tool ใน Toolbox
- เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Line

2.2.2 - คลิกที่จุด 2 จุด

- เลือก Line tool ใน Toolbox
- คลิกขวาซึ่งปรากฏเฉพาะคำสั่งที่ใช้ได้ เลือกเมนู Construct
- เลือกคำสั่ง Line

2.3 ใช้คำสั่งลัด

- ❖ คลิกที่จุด 2 จุด
- ❖ กด Ctrl + L

3. การสร้างรังสี

การสร้างรังสี ปฏิบัติคล้ายกับการสร้างเส้นตรง แต่ใน Toolbox ต้องเปลี่ยนจาก Line tool

() เป็น Ray tool ()

4. การสร้างส่วนของเส้นตรง

การสร้างส่วนของเส้นตรง ปฏิบัติคล้ายกับการสร้างเส้นตรง แต่ใน Toolbox ต้องเปลี่ยนจาก Line tool () เป็น Segment tool ()

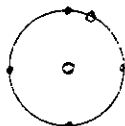
การเปลี่ยนขนาดของส่วนของเส้นตรง ปฏิบัติโดยการคลิกค้างที่จุดปลายจุดใดจุดหนึ่ง และลากออกไปให้ได้ขนาดตามที่ต้องการแล้วปล่อย

5. การสร้างวงกลม

การสร้างวงกลม ปฏิบัติได้ 3 วิธี แต่ละวิธีปฏิบัติ ดังนี้

5.1 ใช้ Compass tool

- ❖ เลือก Compass tool ใน Toolbox
- ❖ เลื่อน Pointer ไปบน Sketch Plane ซึ่ง Pointer เปลี่ยนเป็นรูป 
- ❖ คลิกค้าง แล้วลากออกไปจนได้ขนาดตามต้องการ ซึ่งตำแหน่งแรกที่คลิกจะเป็นจุดศูนย์กลาง และระยะที่ลากห่างออกไปจะเป็นความยาวของรัศมีจะได้วงกลม ลักษณะ



- ❖ การเปลี่ยนขนาดของวงกลม ปฏิบัติโดยคลิกค้างที่จุดศูนย์กลางหรือจุดที่ปรากฏบนเส้นรอบวงที่ได้จากการสร้างวงกลม และลากออกไปให้ได้ขนาดตามที่ต้องการ แล้วปล่อย

5.2 สร้างวงกลมจากจุด 2 จุด

- ❖ คลิกที่จุด 2 จุด

- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Point (หรือสร้างโดยใช้คลิกขวาเมนู จะปรากฏขึ้นให้ปฏิบัติได้เช่นเดียวกัน)

5.3 สร้างวงกลมจากจุดศูนย์กลาง และความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดเป็นความยาวของรัศมี

- ❖ เลือก 2 ออบเจกต์ คือจุดที่ต้องการให้เป็นจุดศูนย์กลาง และความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดเป็นความยาวของรัศมี
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Radius (หรือสร้างโดยใช้คลิกขวาเมนู จะปรากฏขึ้นให้ปฏิบัติได้เช่นเดียวกัน)

การกำหนด Label ของออปเจก และกล่องข้อความ

การกำหนด Label ของออปเจกนี้ให้นักเรียนฝึกปฏิบัติในการแสดง Label สำหรับจุดและส่วนของเส้นตรง การเปลี่ยนตำแหน่งของ Label การเปลี่ยน Label ของออปเจก การสร้างกล่องข้อความ การเคลื่อนย้ายหรือเปลี่ยนขนาดของกล่องข้อความ และการเปลี่ยนรูปแบบตัวอักษรของข้อความ

จุดประสงค์

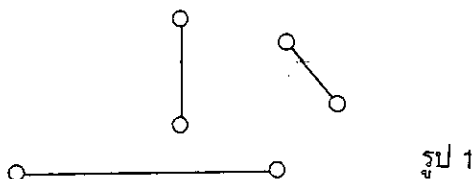
1. แสดง Label สำหรับจุดและส่วนของเส้นตรง
2. เปลี่ยนตำแหน่งของ Label
3. เปลี่ยน Label ของออปเจก
4. สร้างกล่องข้อความ
5. การเคลื่อนย้ายหรือเปลี่ยนขนาดของกล่องข้อความ
6. เปลี่ยนรูปแบบตัวอักษรในกล่องข้อความ

วิธีปฏิบัติทีละขั้นตอน

1. การแสดง Label

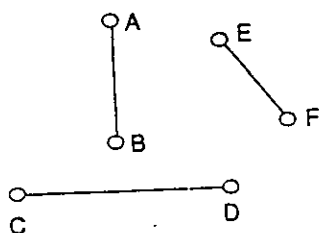
สำหรับจุดและส่วนของเส้น มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ เปิด New Sketch จากเมนู File
- ❖ สร้างส่วนของเส้นตรง 3 เส้น โดยเริ่มจากแนวตั้ง แนวนอน แนวเฉียง ดังรูป 1



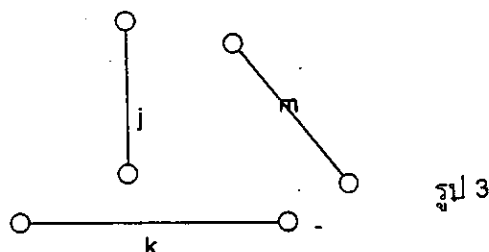
รูป 1

- ❖ เลือก Text tool (หรือ กด F8)
- ❖ เลื่อน Pointer ซึ่งเป็นรูปมือไปยังจุดที่ต้องการใส่ชื่อ จนกระทั่ง Pointer เปลี่ยนเป็นสีดำคลิกที่จุดนั้น Label ซึ่งในที่นี้หมายถึงชื่อของจุดนั้นจะปรากฏขึ้น คลิกจนครบทุกจุด ดังรูป 2



รูป 2

- ❖ คลิกแต่ละจุดอีกครั้งเพื่อให้ Label หายไป
- ❖ คลิกส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นจะได้ Label ซึ่งในที่นี้ หมายถึงชื่อของส่วนเส้นตรง ดังรูป 3

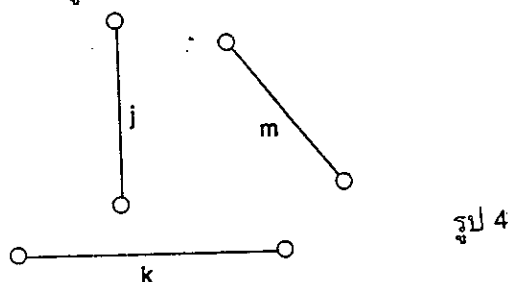


รูป 3

2. เปลี่ยนตำแหน่งของ Label

บางครั้งตำแหน่งของ Label ไม่อยู่ในตำแหน่งที่ต้องการ เราสามารถเปลี่ยนตำแหน่งได้ เช่น จากรูป 3 ตำแหน่ง Label ของ m ไม่เหมาะสม เราต้องการเปลี่ยนตำแหน่ง มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ เลื่อน Pointer รูปมือ จนกระทั่งตัวอักษร A ปรากฏในมือ
- ❖ ลาก m ไปยังตำแหน่งใหม่ที่ต้องการ ดังรูป 4

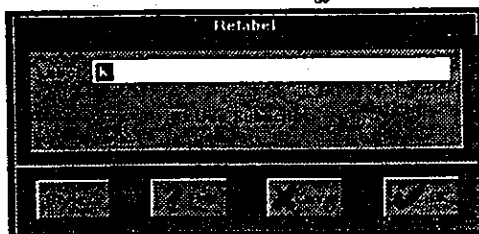


รูป 4

3. เปลี่ยน Label ของออปเจก

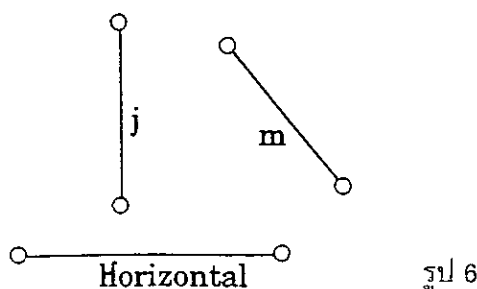
บางครั้ง Label ที่ปรากฏไม่ตรงกับความต้องการ เช่น จากรูป 4 ต้องการเปลี่ยน Label ของ k เป็นคำว่า Horizontal มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ เลื่อน Pointer จนกระทั่งเป็นรูปมือ ดับเบิลคลิกที่ k จะปรากฏกล่องโต้ตอบ ดังรูป 5



รูป 5

- ❖ พิมพ์ Horizontal แทนที่ k ในช่อง Label
- ❖ คลิกปุ่ม OK กล่องโต้ตอบจะหายไปและ Label ของส่วนของเส้นตรง k จะเปลี่ยนไป ดังรูป 6

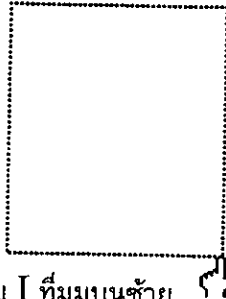


รูป 6

4. สร้างกล่องข้อความบน Sketch Plane

การสร้างกล่องข้อความบน Sketch Plane มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ ทำให้ Pointer เป็นรูปมือ คลิกลาก แล้วลากออกไปจนได้ขนาดตามต้องการ ดังรูป 7



รูป 7

- ❖ ในพื้นที่นั้นจะปรากฏเครื่องหมาย I ที่มุมบนซ้าย
- ❖ พิมพ์ข้อความที่ต้องการลงในพื้นที่นั้น ตัวอย่าง ดังรูป 8

It seems that there are a variety of ways to create a given object! Objects can be created by using the Toolbox, commands in the different menus, or with a combination of the two.

รูป 8

- ❖ เมื่อพิมพ์เสร็จแล้วให้เลือก Selection Arrow tool แล้วคลิกบนที่ว่างของ Sketch Plane

5. การเคลื่อนย้ายหรือเปลี่ยนขนาดของกล่องข้อความ

ในบางครั้งต้องการเคลื่อนย้ายที่ หรือต้องการปรับขนาดของกล่องข้อความให้มีความเหมาะสม มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ การเคลื่อนย้ายกล่องข้อความ ให้ใช้ Selection Arrow tool คลิกลากที่กล่องข้อความแล้วลากไปยังตำแหน่งที่ต้องการ
- ❖ การเปลี่ยนขนาดของกล่องข้อความให้ลากที่มุมของกล่องข้อความซึ่งเป็นสีขาวแล้วปรับให้ได้ขนาดตามที่ต้องการ

It seems that there are a variety of ways to create a given object! Objects can be created by using the Toolbox, commands in the different menus, or with a combination of the two.

6. การเปลี่ยนรูปแบบตัวอักษรของข้อความ

เมื่อต้องการเปลี่ยนรูปแบบตัวอักษรให้มีรูปแบบที่ต่างไปจากที่ใช้อยู่เดิม มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ ใช้ Selection Arrow tool คลิกที่กล่องข้อความ
- ❖ เลือกเมนู Display เลือกคำสั่ง Text Style เพื่อเปลี่ยนขนาดของตัวอักษร หรือ ลักษณะตัวอักษรให้มีลักษณะ หนา หรือเอียง หรือขีดเส้นใต้
- ❖ เลือกเมนู Display เลือกคำสั่ง Text Font เพื่อเปลี่ยนรูปแบบตัวอักษร เช่น เปลี่ยนจาก Arial เป็น Cordia UPC ซึ่งสามารถพิมพ์ภาษาไทยได้

หมายเหตุ นอกจากนี้ยังสามารถให้ GSP แสดง Label ของออบเจกต์อัตโนมัติ ปฏิบัติได้ ดังนี้

- ❖ เลือกเมนู Display เลือกคำสั่ง Preference จะปรากฏกล่องโต้ตอบ
- ❖ คลิกที่ปุ่ม Points ซึ่งเมื่อสร้างจุดจะปรากฏชื่อโดยอัตโนมัติ
- ❖ คลิกที่ปุ่ม OK

การสร้างรูปหลายเหลี่ยม

เราสามารถให้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตได้ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม เป็นต้น ทั้งนี้รูปทุกรูปเมื่อเสร็จแล้ว คลิกที่จุดหรือเส้นต่างๆ แล้วโยกรูป จะสามารถสังเกตลักษณะของรูปได้ว่ามีความสอดคล้องกับที่กำหนดไว้หรือไม่

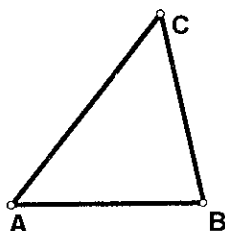
จุดประสงค์

1. สร้างรูปสามเหลี่ยม
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยม
3. สร้างรูปหลายเหลี่ยม

วิธีปฏิบัติที่ละขั้นตอน

1. สร้างรูปสามเหลี่ยม

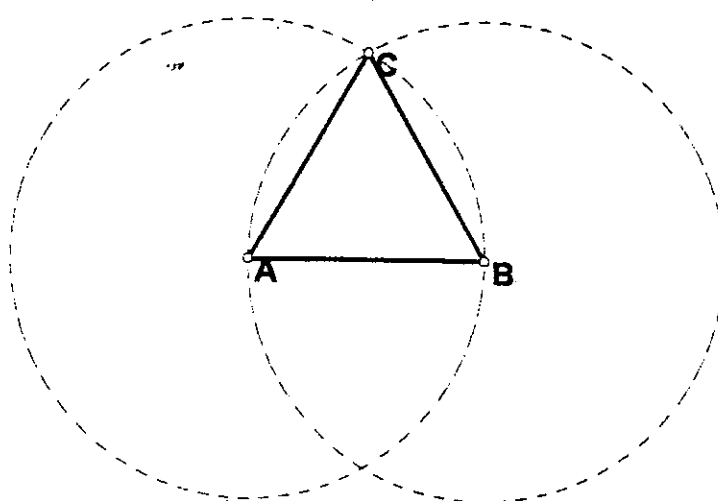
1.1 รูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้



- ❖ กำหนดจุด A, B และ C โดยที่จุดทั้งสามต้องไม่อยู่บนแนวของเส้นตรงเดียวกัน
- ❖ คลิกที่จุด A, B และ C
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Segment (หรือ Ctrl + L) จะได้ $\triangle ABC$

1.2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวเท่ากัน เรียกว่า รูปสามเหลี่ยม

ด้านเท่า) มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้



- ❖ กำหนดส่วนของเส้นตรง AB
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม A มีรัศมียาว AB
- ❖ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม B มีรัศมียาว AB
- ❖ กำหนดจุดตัดจุดหนึ่งของวงกลมทั้ง 2 เป็นจุด C
- ❖ ลากส่วนของเส้นตรง AC และ BC
- ❖ ซ่อนวงกลมทั้ง 2 วง (คลิกที่วงกลมทั้งสอง กด Ctrl+H)

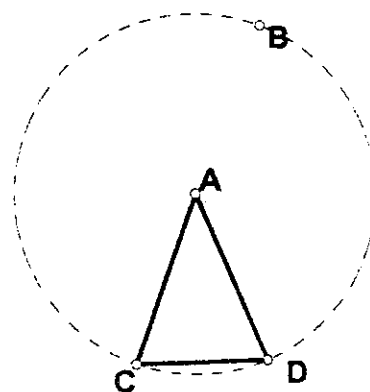
จะได้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1.3 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ACD

รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้นการสร้าง $\triangle ACD$ มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ กำหนดจุด A สร้างวงกลม A รัศมียาวพอสมควร
- ❖ กำหนดจุด C และ D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม A
- ❖ ลาก $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{AD}$
- ❖ ซ่อนวงกลม A

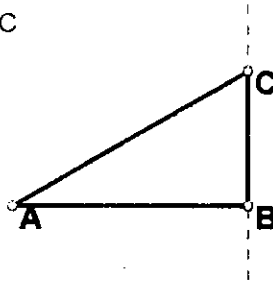
จะได้ $\triangle ACD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



1.4 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม B เป็นมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นการสร้าง $\triangle ABC$ ที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ สร้างส่วนของเส้นตรง AB
- ❖ คลิกที่จุด B และส่วนของเส้นตรง AB
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Perpendicular Line (ควรทำเป็นเส้นประ)
- ❖ คลิกบนเส้นตั้งฉากกำหนดจุด C



- ❖ ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
- ❖ ซ่อนเส้นตั้งฉาก

จะได้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก

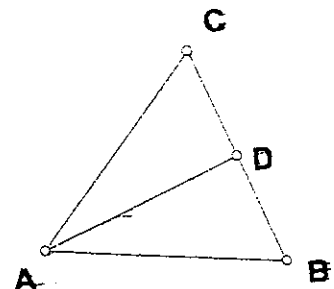
1.5 $\triangle ABC$ ที่มี $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐาน

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่งมาแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยมจะเรียกว่า เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ดังนั้น การสร้าง $\triangle ABC$ ที่มี $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐาน มีวิธีปฏิบัติดังนี้

สร้างเส้นมัธยฐาน โดยปฏิบัติดังนี้

- ❖ คลิกที่ $\overline{BC}$
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Midpoint จะได้จุด D
- ❖ ลาก $\overline{AD}$

จะได้ $\triangle ABC$ มี $\overline{AD}$ เป็นเส้นมัธยฐาน



1.6 $\triangle ABC$ ที่มี $\overline{BE}$ เป็นส่วนสูง

ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่ง มาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม หรือฐานของรูปสามเหลี่ยม (หรือส่วนที่ต่อออกไปของด้านตรงข้าม) จะเรียกว่า ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ดังนั้นการสร้าง $\triangle ABC$ ที่มี $\overline{BE}$ เป็นส่วนสูงมีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

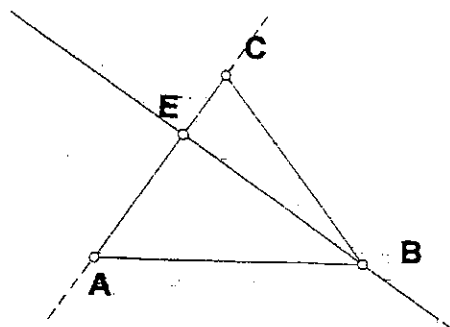
ลาก (เส้นประ) $\overleftrightarrow{AC}$ โดยปฏิบัติดังนี้

- ❖ คลิกที่จุด A และ C
- ❖ เปลี่ยน Segment tool ใน Toolbox เป็น Line tool
- ❖ เลือกเมนู Display เลือกคำสั่ง Line Style เลือก Dashed
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Line
- ❖ เปลี่ยน Line tool ใน Toolbox เป็น Segment tool
- ❖ เปลี่ยน Line Style เป็นเส้นหนา หรือเส้นบางดังเดิม

สร้างส่วนสูง โดยปฏิบัติดังนี้

- ❖ คลิกที่ $\overleftrightarrow{AC}$ และจุด B
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Perpendicular Line
- ❖ กำหนดจุดตัดระหว่างเส้นตั้งฉากที่ได้กับ $\overleftrightarrow{AC}$ เป็นจุด E
- ❖ ลาก $\overline{BE}$

จะได้ $\triangle ABC$ ที่มี $\overline{BE}$ เป็นส่วนสูง



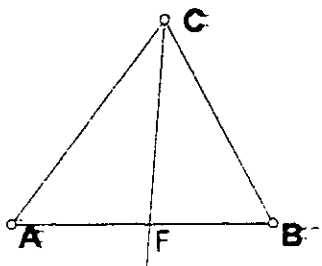
1.7 $\triangle ABC$ ที่มี $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB

รังสี ที่มีจุดปลาย อยู่บนจุดยอดมุม และแบ่งออกเป็นสองมุมที่มีขนาดเท่ากัน เรียกว่าเส้นแบ่งครึ่งมุม ดังนั้น การสร้าง $\triangle ABC$ ที่มี $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB มีวิธีปฏิบัติดังนี้

สร้าง $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB โดยปฏิบัติดังนี้

- ❖ คลิกที่จุด A, C และ B หรือ B, C และ A (ต้องเรียงตามลำดับโดยให้จุด C อยู่ตรงกลางเสมอ)
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Angle Bisector
- ❖ กำหนดจุดตัดระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมที่ได้กับ $\overline{AB}$ เป็นจุด F

จะได้ $\triangle ABC$ ที่มี $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม ACB

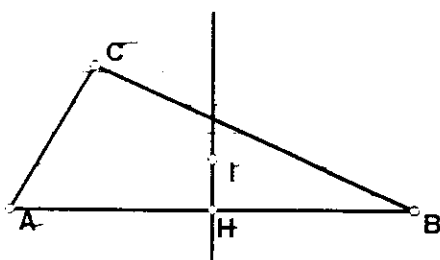


1.8 $\triangle ABC$ ที่มี $\overleftrightarrow{HI}$ เป็นเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน AB

มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ สร้าง $\overleftrightarrow{HI}$ เป็นเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน AB โดยปฏิบัติดังนี้
- ❖ สร้างจุดกึ่งกลางบน $\overline{AB}$ โดยกำหนดเป็นจุด H
- ❖ สร้างเส้นตั้งฉาก กับ $\overline{AB}$ โดยผ่านจุด H
- ❖ กำหนดจุด I เป็นจุดบนเส้นตั้งฉากที่ได้

จะได้ $\triangle ABC$ ที่มี $\overleftrightarrow{HI}$ เป็นเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน AB



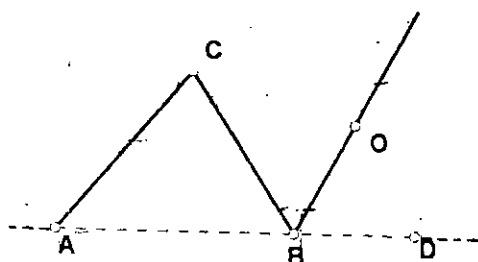
1.9 $\triangle ABC$ ที่มี $\overrightarrow{BO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก ที่มี B เป็นจุดยอดมุม

มีวิธีปฏิบัติดังนี้

สร้าง $\overrightarrow{BO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก ที่มี B เป็นจุดยอดมุมโดยปฏิบัติดังนี้

- ❖ สร้าง (เส้นประ) $\overleftrightarrow{AB}$
- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ โดยอยู่นอก $\triangle ABC$ ทางจุด B
- ❖ คลิปที่จุด D, B และ C หรือ C, B และ D
- ❖ สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม
- ❖ กำหนดจุด O เป็นจุดบนเส้นแบ่งครึ่งมุม

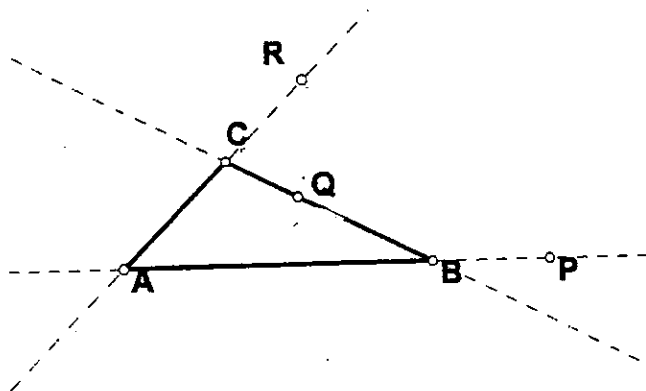
จะได้ $\triangle ABC$ ที่มี $\overrightarrow{BO}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก ที่มี B เป็นจุดยอดมุม



1.11 $\triangle ABC$ ที่มีจุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA

มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

❖ ลาก (เส้นประ) $\overleftrightarrow{AB}$ ตัด $\overleftrightarrow{BC}$ ที่จุด B ;



❖ ลาก (เส้นประ) $\overleftrightarrow{CA}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{BC}$ ที่จุด A และ C ตามลำดับ

❖ กำหนดจุด P, Q และ R บน $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{CA}$ ตามลำดับ

❖ ลาก (เส้นหนา) $\overline{AB}, \overline{BC}$ และ $\overline{CA}$

จะได้ $\triangle ABC$ มีจุด P, Q และ R บนด้าน (หรือส่วนต่อของด้าน) AB, BC และ CA ตามลำดับ

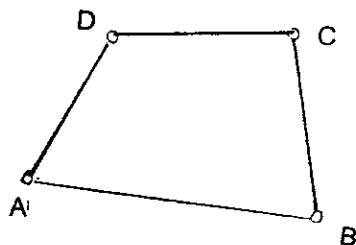
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยม

2.1 รูปสี่เหลี่ยมใดๆ มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

❖ กำหนดจุด A, B, C และ D โดยที่จุดทั้งสี่ไม่อยู่บนแนวของเส้นตรงเดียวกัน

❖ ลาก $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$

จะได้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม

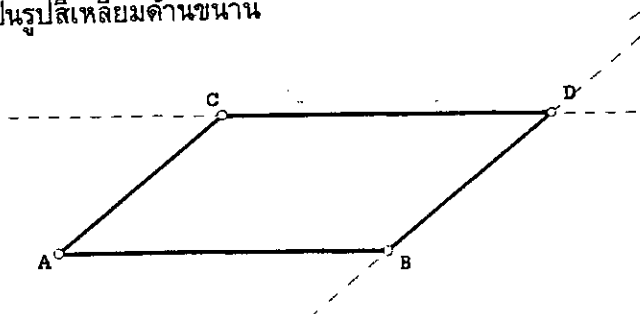


2.2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABDC$ มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ สร้าง $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$
- ❖ สร้างเส้นขนานกับ $\overline{AB}$ ผ่านจุด C (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ สร้างเส้นขนานกับ $\overline{AC}$ ผ่านจุด B (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดตัดของเส้นขนานทั้งสองเส้น
- ❖ ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BD}$ (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ ช้อน เส้นขนานทั้งสองเส้น

จะได้ $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



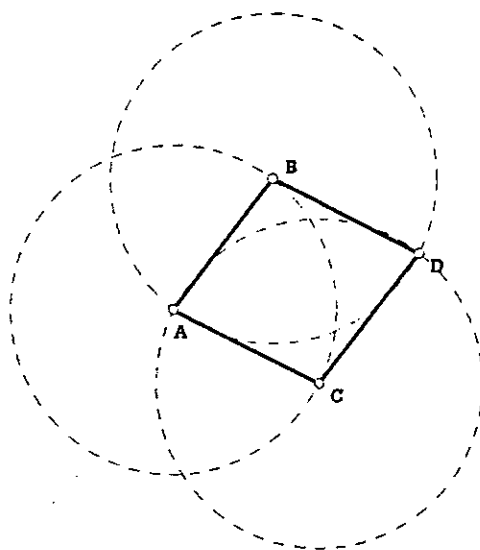
2.3 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันและมีมุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $ABDC$ มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ กำหนดจุด A
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง
- ❖ สร้างวงกลม A รัศมียาวพอสมควร จะปรากฏจุด B เป็นจุดบนเส้นรอบวง ลาก $\overline{AB}$
- ❖ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม B รัศมียาว AB
- ❖ กำหนดจุด C อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม A
- ❖ ลาก $\overline{AC}$
- ❖ ให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม C รัศมียาว AB

- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดตัดของวงกลม B และ C
- ❖ ลาก $\overline{BD}$ และ $\overline{CD}$
- ❖ ซ่อนวงกลมทั้ง 3 วง

จะได้ ABDC เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



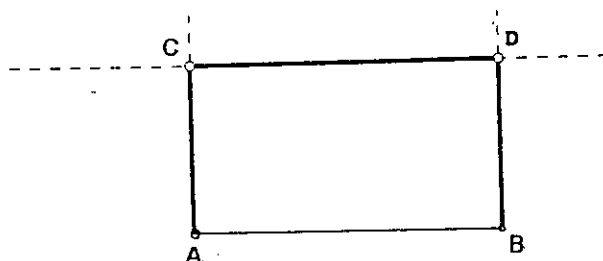
2.4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABDC มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ ลาก $\overline{AB}$
- ❖ สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด A และที่ผ่านจุด B (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ กำหนดจุด C บนเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด A
- ❖ สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่ผ่านจุด C (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่ผ่านจุด C และเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด B
- ❖ ลาก $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{BD}$ (ควรเป็นเส้นหนา)

❖ ช้อนเส้นตรงทุกเส้น

จะได้ $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



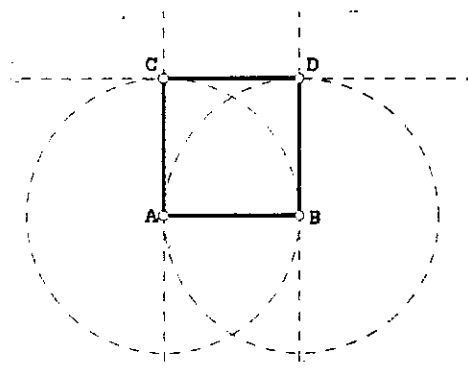
2.5 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$ABDC$ มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ ลาก $\overline{AB}$
- ❖ สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด A และผ่านจุด B (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางสร้างวงกลม A รัศมียาว AB
- ❖ กำหนดจุด C เป็นจุดตัดระหว่างวงกลม A และเส้นตั้งฉากกับ AB ที่ผ่านจุด A
- ❖ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางสร้างวงกลม B รัศมียาว AB
- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดตัดระหว่างวงกลม B และเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด B
- ❖ ลาก $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{BD}$ (ควรเป็นเส้นหนา)
- ❖ ช้อนเส้นตรง (ที่เป็นเส้นประ) ทุกเส้น และวงกลมทั้งสองวง

จะได้ $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

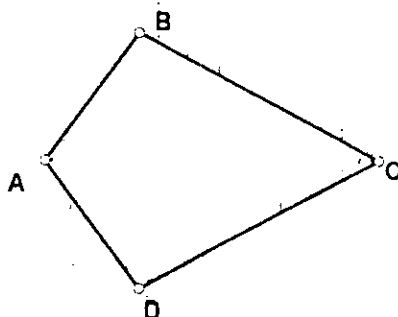


2.6 รูปสี่เหลี่ยมว่าว

รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันเพียงสองคู่ เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมว่าว ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมว่าว ABCD มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ ลาก $\overline{XY}$ และ $\overline{PQ}$ ให้มีความยาวตามขนาดที่ต้องการ เพื่อเป็นความยาวของด้านประชิดที่ไม่ได้ยาวเท่ากันของรูปสี่เหลี่ยม
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม A รัศมียาวเท่ากับ XY
- ❖ กำหนดจุด B และ D เป็นจุดบนวงกลม A
- ❖ ให้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ PQ สร้างวงกลม B
- ❖ ให้ D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ PQ สร้างวงกลม D ตัดวงกลม B ที่จุด C ดังรูป
- ❖ ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ (ควรเป็นเส้นหนา)
- ❖ เชื่อมวงกลมทั้งหมด

จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมว่าว (ที่มี $AB = AD$ และ $CB = CD$)

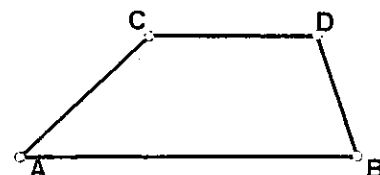


2.7 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันหนึ่งคู่ เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ดังนั้นการสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABDC$ มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ สร้าง $\overline{AB}$ และจุด C ไม่อยู่บน $\overline{AB}$
- ❖ สร้างเส้นขนาน กับ $\overline{AB}$ ผ่านจุด C (ควรเป็นเส้นประ)
- ❖ ลาก $\overline{AC}$ (ควรเป็นเส้นหนา)
- ❖ กำหนดจุด D เป็นจุดบนเส้นขนานกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด C
- ❖ ลาก $\overline{CD}$ และ $\overline{BD}$ (ควรเป็นเส้นหนา)
- ❖ ซ่อนเส้นขนาน



จะได้ $ABDC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

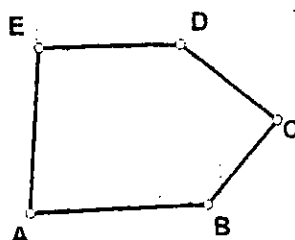
3. การสร้างรูปหลายเหลี่ยมอื่น ในที่นี้ขอยกตัวอย่างการสร้างรูปห้าเหลี่ยม ซึ่งมี 3 ลักษณะ

คือ รูปห้าเหลี่ยมใด ๆ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

3.1 รูปห้าเหลี่ยมใด ๆ มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ ใช้ Segment Tool ใน Toolbox
- ❖ ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ และ $\overline{AE}$ โดยส่วนของเส้นตรงทั้งห้าไม่มีสองส่วนของเส้นตรง

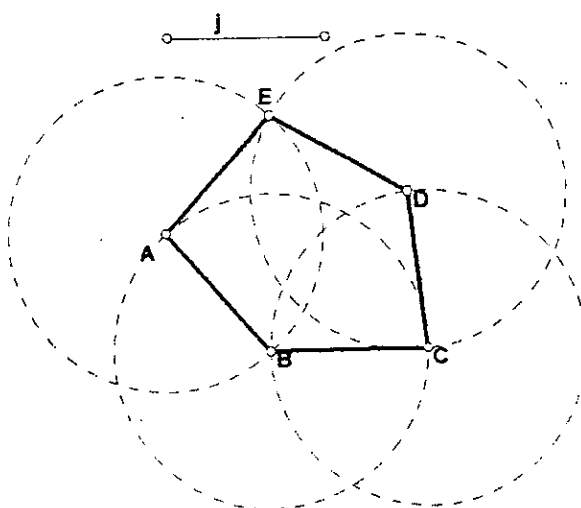
ใด ๆ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เช่น



3.2 รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ สร้างส่วนของเส้นตรง j ยาวเท่ากับความยาวของด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่ต้องการ
- ❖ กำหนดจุด A
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม A มีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง j
- ❖ กำหนดจุด B บนวงกลม A
- ❖ ลาก $\overline{AB}$
- ❖ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม B มีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง j
- ❖ กำหนดจุด C บนวงกลม A
- ❖ ลาก $\overline{BC}$
- ❖ ให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม C มีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง j
- ❖ กำหนดจุด D บนวงกลม A
- ❖ ลาก $\overline{CD}$
- ❖ ให้จุด D เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม D มีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง j
- ❖ เลื่อนจุด C หรือ D จนกว่าวงกลม D และวงกลม A ตัดกัน
- ❖ กำหนดจุดตัดจุดหนึ่ง ระหว่าง วงกลม D และวงกลม A เป็นจุด E
- ❖ ลาก $\overline{DE}$ และ $\overline{AE}$

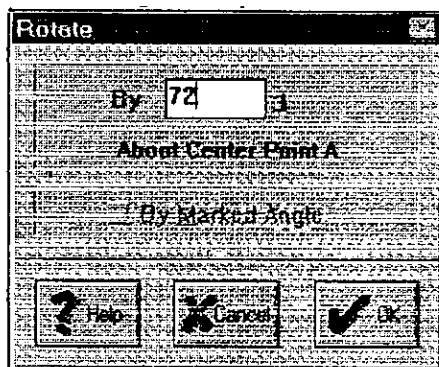
จะได้ $ABCDE$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป



3.3 รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีวิธีสร้างหลายวิธี สำหรับวิธีที่น่าเสนอในที่นี้มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ คำนวณหาขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง $= \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72^\circ$
- ❖ ลาก $\overline{AB}$
- ❖ คลิกที่จุด A
- ❖ เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Mark Center "A"
- ❖ คลิกที่ จุด A จุด B และ $\overline{AB}$
- ❖ เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Rotate จะปรากฏกล่องโต้ตอบดังรูป



- ❖ ใส่ ตัวเลข 72 กดปุ่ม OK
- ❖ เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Rotate . ใส่ ตัวเลข 72 กดปุ่ม OK ปฏิบัติเช่นนี้
ทั้งหมด 4 ครั้ง จะได้จุด B', B'', B''' และ B''''

- ❖ ลาก $\overline{BB'}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{B''B'''}$, $\overline{B'''B''''}$ และ $\overline{B''''B}$

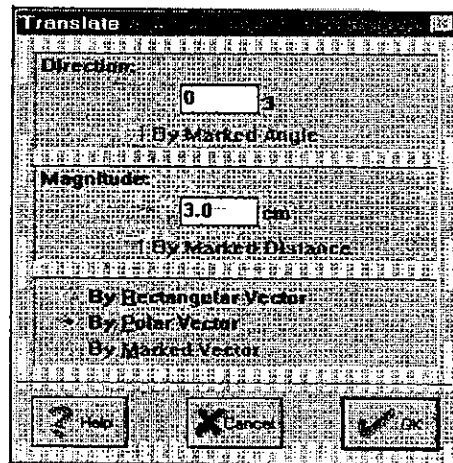
จะได้ดังรูป

1.10 $\triangle ABC$ ที่มี $AB = 3$ ซม. $BC = 4$ ซม. และ $CA = 2$ ซม.

มีวิธีปฏิบัติดังนี้

สร้างเส้นตรง j ยาว 3 ซม. ปฏิบัติดังนี้

- ❖ กำหนด จุด A
- ❖ เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Mark Center " A "
- ❖ เลือกเมนู Transform เลือกคำสั่ง Translate จะปรากฏกล่องโต้ตอบ Transform ดังรูป
- ❖ ในกรอบ Magnitude พิมพ์ 3.0
- ❖ คลิกปุ่ม OK
- ❖ จะปรากฏจุด A'
- ❖ ลาก AA'
- ❖ กำหนด Label ให้ AA' เป็น j
- ❖ ซ่อน Label A และ A'



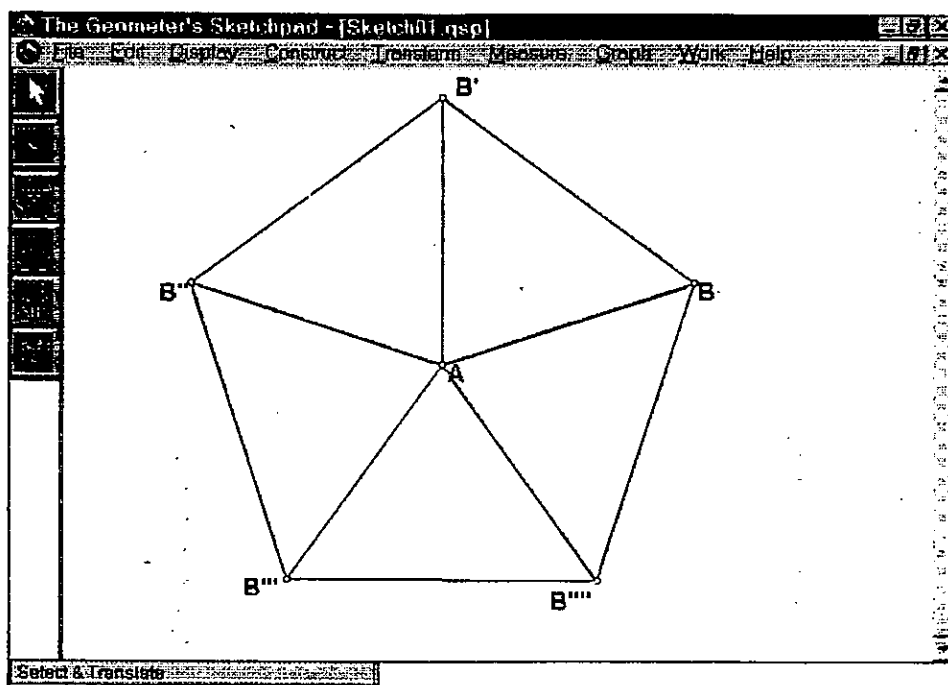
จะได้ ส่วนของเส้นตรง j ยาว 3 ซม.

สร้างส่วนของเส้นตรง k และ l ยาว 4 และ 2 ซม. ตามลำดับโดยใช้วิธีทำนองเดียวกัน การสร้าง

ส่วนของเส้นตรง j

- ❖ สร้าง $\triangle ABC$
- ❖ กำหนดจุด A
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม A มีรัศมียาวเท่ากับ ส่วนของเส้นตรง j กำหนดจุด B บนวงกลม A
- ❖ ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม B มีรัศมียาวเท่ากับ ส่วนของเส้นตรง k
- ❖ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม A มีรัศมียาวเท่ากับ ส่วนของเส้นตรง l
- ❖ กำหนดจุดตัดระหว่างวงกลม A ที่สร้างใหม่กับวงกลม B เป็นจุด C
- ❖ ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$

จะได้ $\triangle ABC$ ที่มี $AB = 3$ ซม. $BC = 4$ ซม. และ $CA = 2$ ซม.



- ❖ เปลี่ยนชื่อจุด B' เป็น จุด C จุด B'' เป็น จุด D จุด B''' เป็น จุด E และ จุด B'''' เป็น จุด F
- ❖ จะได้ BCDEF เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

หมายเหตุ การสร้างวิธีนี้ใช้ได้กับรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่คำนวณแล้วได้ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นจำนวนเต็ม เนื่องจากกรณีที่ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางไม่เป็นจำนวนเต็มแล้วการสร้างจะมีการตลาดเคลื่อน

การวัดและการคำนวณ

จุดประสงค์

1. ทหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด
2. หาคความยาวของส่วนของเส้นตรง
3. หาคความยาวของรัศมีและเส้นรอบวงของวงกลม
4. หาพื้นที่และความยาวเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยม
5. หาขนาดของมุม

วิธีปฏิบัติที่ละขั้นตอน

1. ทหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด มีวิธีการปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ กำหนดจุด A และ B
- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Distance
- ❖ จะได้ระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เช่น $AB = 4.2 \text{ cm}$

2. หาคความยาวของส่วนของเส้นตรง มีวิธีปฏิบัติดังนี้

- ❖ กำหนดจุด A และ B
- ❖ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Segment (หรือ Ctrl+L)
- ❖ คลิกที่ส่วนของเส้นตรง AB เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Length
- ❖ จะได้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เช่น $m \overline{AB} = 4.7 \text{ cm}$

3. หาคความยาวของรัศมีและเส้นรอบวงของวงกลม มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ สร้างวงกลม ที่มีจุด A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอสมควร
- ❖ คลิกที่เส้นรอบวงของวงกลม
- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Radius จะได้ความยาวของรัศมีของวงกลม เช่น

$$\text{Radius } \odot AB = 1.4 \text{ cm}$$

- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Circumference จะได้ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมนั้น เช่น

$$\text{Circumference } \odot AB = 8.9 \text{ cm}$$

4. หาพื้นที่และความยาวเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยม มีวิธีปฏิบัติ ดังนี้

- ❖ สร้าง $\triangle ABC$
- ❖ คลิกที่จุด A, B และ C
- ❖ เลือก เมนู Construct เลือกคำสั่ง Polygon Interior
- ❖ คลิกที่บริเวณภายในรูปสามเหลี่ยม
- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Area จะได้พื้นที่ของ $\triangle ABC$ เช่น

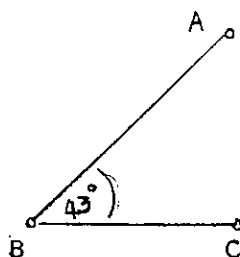
$$\text{Area } ABC = 5.4 \text{ cm}^2$$
- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Perimeter จะได้ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC
 เช่น $\text{Perimeter } ABC = 10.6 \text{ cm}$

ในการทำงานเดียวกันเราสามารถหาพื้นที่และความยาวของเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ

ได้เช่นเดียวกัน

5. หาขนาดของมุม

- ❖ สร้างมุม ABC
- ❖ คลิก ที่จุด A, B, และ C ตามลำดับ
- ❖ เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Angle จะได้ขนาดของมุม ABC เช่น $m\angle ABC = 43^\circ$



การใช้ Script

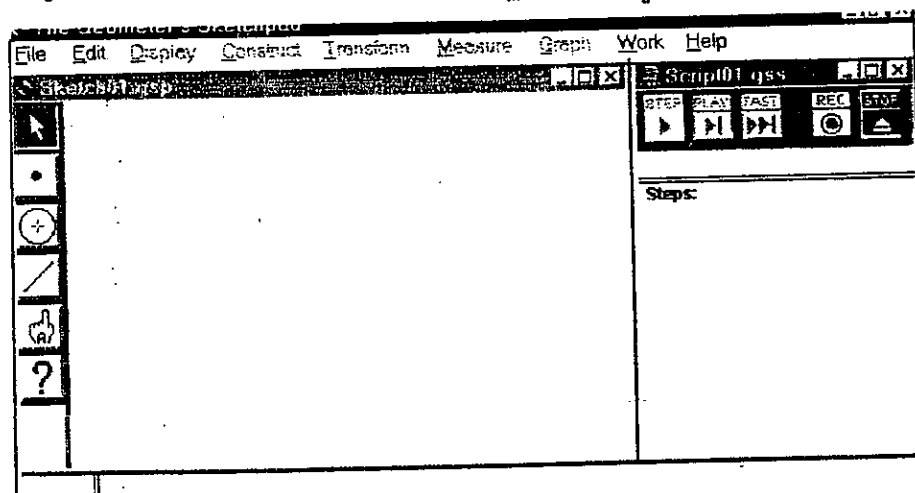
จุดประสงค์

1. สร้าง Script
2. ใช้ Script ช่วยในการสร้าง

วิธีปฏิบัติที่ละขั้น

1. การสร้าง Script

❖ เปิด New Script ใน File Menu จะปรากฏหน้าต่างดังรูป

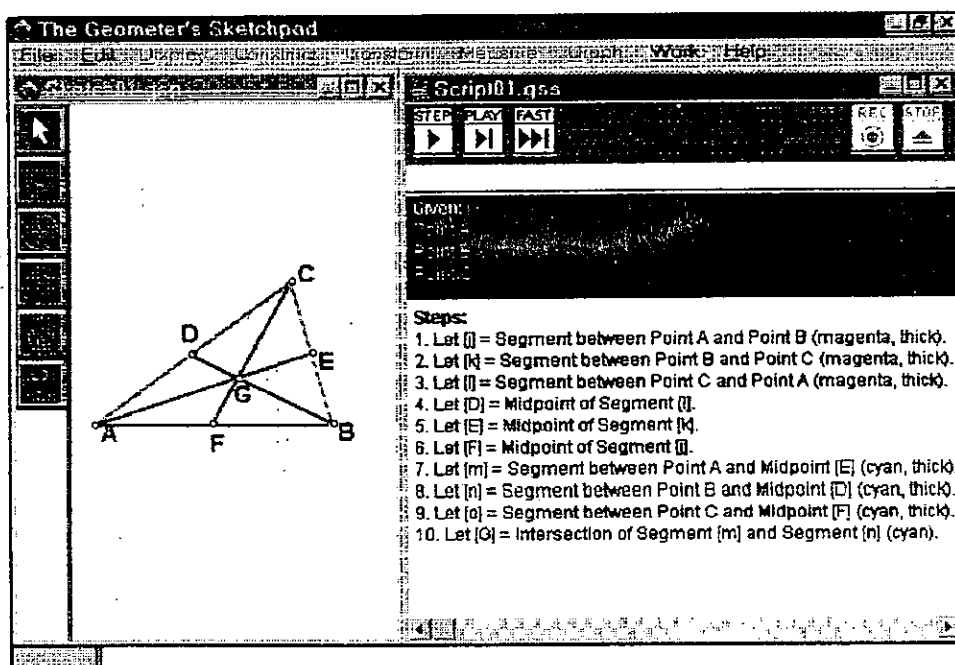


ตัวอย่าง จะสร้าง Script ของการหาเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

- ❖ คลิกที่ปุ่ม REC บน Script Window
- ❖ กำหนดจุด A, B และ C บน Sketch Plane
- ❖ ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
- ❖ คลิกที่ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
- ❖ กำหนดจุดกึ่งกลางบนด้านทั้งสามด้าน โดยเลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Midpoint หรือ Ctrl+M
- ❖ จะได้ จุด D, E และ F
- ❖ ลาก $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ และ $\overline{CF}$
- ❖ กำหนดจุดตัดเป็นจุด G
- ❖ คลิกที่ปุ่ม STOP

2. การใช้ Script

- ❖ เปิด New Sketch ใน File Menu
- ❖ กำหนดจุด A, B และ C บน Sketch Plan
- ❖ คลิกที่ปุ่ม PLAY บน Script Window จะปรากฏวิธีสร้างทีละขั้นตามที่บันทึกไว้ใน Script ดังรูป



5. ปัญหาและอุปสรรคที่อาจเกิดขึ้น

ปัญหาและอุปสรรคที่จะพบน้อยที่สุด มีดังนี้

1. เรื่องของการสร้างและการวัดโดยนักเรียนเลือกออกแบบไม่ตรงตามที่การสร้างหรือการวัดนั้น ๆ ระบุไว้ เช่นต้องการสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมปัญหาที่พบมี 2 ลักษณะ คือ

1.1 จะต้องเลือกจุดสามจุด แต่บางคนเลือกแขนของมุมทั้งสอง เมื่อเลือกเมนู Construct แล้วจะเลือกคำสั่ง Angle Bisector ไม่ได้ โดยคำสั่ง Angle Bisector จะปรากฏเป็นเงา

1.2 จะต้องเลือกจุดสามจุดโดยจุดยอดมุมจะต้องเป็นลำดับที่สองของการคลิก แต่ถ้าเลือกผิดลำดับ เส้นแบ่งครึ่งมุมจะไปแบ่งมุมที่มุมอื่น ไม่ตรงกับความต้องการ ดังนั้นเมื่อนักเรียนต้องการสร้างรูปโดยใช้คำสั่งใด นักเรียนจะต้องเลือกออกแบบตามที่คำสั่งนั้นระบุไว้

2. การคัดลอกรูป (คำสั่ง Copy ใน เมนู Edit) จะทำไม่ได้ เนื่องจาก GSP ที่นักเรียนใช้เป็นรุ่นสาธิต

3. การทำ Script ไว้ใช้งานคราวต่อไป (คำสั่ง Save หรือ Save As... ในเมนู File) จะทำไม่ได้เช่นกัน เมื่อนักเรียนปิดเครื่องคอมพิวเตอร์ หรือปิด GSP แล้ว Script ที่ทำไว้จะหายไป ไม่สามารถนำมาใช้ได้อีกในคราวต่อไป

หนังสืออ้างอิง

Bennett, Dan. (1996). *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.

Key Curriculum Press. (1995). *Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.

King, James R. (1996). *Geometry Through the Circle with The Geometer's Sketchpad*, Calif.: Key Curriculum Press.

Scher, Daniel. (1995). *Exploring Conic Sections with The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.

User Guide and Reference. (1995). Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.

6. ภาคผนวก

การเปรียบเทียบการสร้างพื้นฐานระหว่างการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงกับการสร้างโดยใช้ GSP

การสร้างในเรขาคณิตที่มีมาแต่เดิมเป็นการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง โดยมีรายละเอียด ดังนี้

การสร้างในเรขาคณิต

หมายถึง การเขียนรูปเรขาคณิตให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยใช้เพียงวงเวียนและสันตรง เป็นเครื่องมือเท่านั้น

วงเวียน

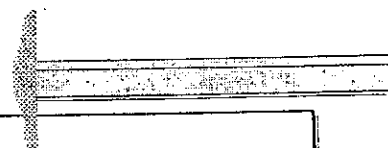
ใช้สำหรับเขียนส่วนโค้งหรือวงกลม



สันตรง

ใช้สำหรับเขียนส่วนของเส้นตรงระหว่างจุดสองจุด

สันตรง แตกต่างจากไม้บรรทัด คือไม่มีรอยขีดเป็นหน่วยสำหรับการวัด



การสร้างพื้นฐานมี 6 แบบ คือ

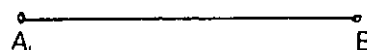
- ❖ การสร้างที่ 1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- ❖ การสร้างที่ 2 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้
- ❖ การสร้างที่ 3 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- ❖ การสร้างที่ 4 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
- ❖ การสร้างที่ 5 การสร้างเส้นตรงจากจุดภายนอกไปตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้
- ❖ การสร้างที่ 6 การสร้างเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

ในภาคผนวกนี้ จะเป็นการเปรียบเทียบการสร้างพื้นฐานทั้ง 6 แบบ ระหว่างการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงกับการสร้างโดยใช้ GSP ทั้งนี้นักเรียนควรลงมือปฏิบัติตามที่ระบุไว้ในแต่ละการสร้าง เพื่อเป็นการทบทวนและฝึกทักษะเกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานต่าง ๆ

การสร้างที่ 1 การสร้างส่วนของเส้นตรงให้มีความยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\overline{AB}$ ดังรูป

ต้องการสร้าง $\overline{PQ}$ ให้ได้ $PQ = AB$



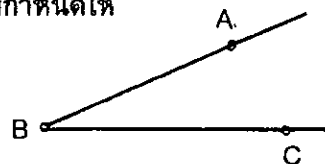
การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
1. ใช้สันตรงลาก $\overrightarrow{PS}$ 2. กางวงเวียนให้มีรัศมียาวเท่ากับ AB 3. ใช้จุด P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{PS}$ ที่จุด Q	1. ลาก $\overline{AB}$ 2. ลาก $\overrightarrow{PS}$ 3. คลิกที่จุด P และส่วนของเส้นตรง AB เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Radius 4. คลิกที่ $\overrightarrow{PS}$ และ วงกลมที่ได้ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Intersection กำหนดชื่อจุดตัดดังกล่าวเป็นจุด Q คลิกที่เส้นรอบวง กด Ctrl+H เพื่อซ่อนวงกลม 5. คลิกที่จุด A และ B เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Distance จะได้ว่า $AB = \dots\dots\dots$ 6. คลิกที่จุด P และ Q เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Distance จะได้ว่า $PQ = \dots\dots\dots$ 7. สังเกตว่า AB เท่ากับ PQ หรือไม่.....
4. จะได้ $PQ = AB$	

การสร้างที่ 2 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้

กำหนดให้

 $\angle ABC$

ต้องการสร้าง

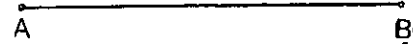
 $\angle PQR$ ให้ได้ $m\angle PQR = m\angle ABC$ 

การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
1. ใช้สันตรง ลาก $\overleftrightarrow{QR}$ 2. ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{BA}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ 3. ใช้จุด Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ BM เขียน ส่วนโค้ง EF ตัด $\overleftrightarrow{QR}$ ที่จุด S 4. ใช้ S เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ MN เขียน ส่วนโค้ง ตัดส่วนโค้ง EF ที่จุด P ลาก $\overleftrightarrow{QP}$	1. สร้าง ABC 2. กำหนดจุด M บนรังสี BC 3. คลิกที่จุด B และ M เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Radius 4. คลิกที่ $\overleftrightarrow{BA}$ และวงกลม เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Intersection กำหนดชื่อจุด N ลาก $\overline{MN}$ 5. ลากรังสี QR 6. คลิกที่จุด Q และ $\overline{BM}$ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Radius 7. คลิกที่ $\overleftrightarrow{QR}$ และวงกลม เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Intersection กำหนดชื่อจุด S 8. คลิกที่จุด S และ $\overline{MN}$ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Circle By Center And Radius 9. คลิกที่วงกลมซึ่ง S และ Q เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Intersection กำหนดชื่อจุด P คลิกที่เส้นรอบวง กด Ctrl+H เพื่อซ่อนวงกลม 10. คลิกที่จุด Q และ P เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Ray 11. คลิกที่จุด P, Q และ R เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Angle จะได้ว่า $m\angle PQR = \dots\dots\dots$ 12. คลิกที่จุด A, B และ C เลือกเมนู Measure เลือกคำสั่ง Angle จะได้ว่า $m\angle ABC = \dots\dots\dots$ 13. สังเกตว่า $m\angle PQR$ เท่ากับ $m\angle ABC$ หรือไม่ $\dots\dots\dots$

การสร้างที่ 3 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\overline{AB}$ ดังรูป

ต้องการสร้าง แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

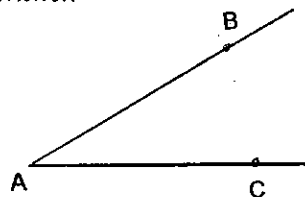


การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ สามารถทำได้โดยการสร้างเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ - ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางวงรีศมี ยาวมากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของ $\overline{AB}$ เขียนส่วนโค้งทั้งบนและล่างของ $\overline{AB}$ - ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งแรกที่จุด C และ D - ลาก $\overleftrightarrow{CD}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด O จะได้ $\overleftrightarrow{CD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ตามต้องการ โดยจุด O เป็นจุดที่แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$	การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ด้วย GSP สามารถทำได้โดยไม่ต้องสร้างเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ - ลาก $\overline{AB}$ - คลิกที่ $\overline{AB}$ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Midpoint กำหนดชื่อเป็นจุด O - วัด AO และ BO จะได้ AO = ... BO = ... - จะได้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ แบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็นสองส่วน ที่เท่ากัน

การสร้างที่ 4 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\angle BAC$ ดังรูป

ต้องการสร้าง แบ่งครึ่ง $\angle BAC$

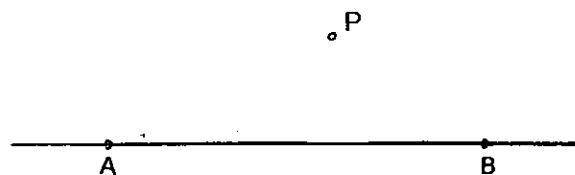


การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
1. ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอสมควรเขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ 2. ใช้ D และ E เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากันและมากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของ $\overline{DE}$ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด F ลาก $\overrightarrow{AF}$	1. สร้าง $\angle BAC$ 2. คลิกที่จุด B, A และ C 3. เลือกเมนู Construct 4. เลือกคำสั่ง Angle Bisector 5. กำหนดจุด D บนเส้นแบ่งครึ่งมุมโดยให้อยู่ระหว่าง $\angle BAC$ 6. วัด $m\angle BAD$ และ $m\angle DAC$ 7. โยก $\angle BAC$ 8. สังเกตว่า $m\angle BAD$ เท่ากับ $m\angle DAC$ หรือไม่
จะได้ $\overrightarrow{AF}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle BAC$ ตามต้องการ	

การสร้างที่ 5 การสร้างเส้นตรงจากจุดภายนอกไปตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่งภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป

ต้องการสร้าง เส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และผ่านจุด P

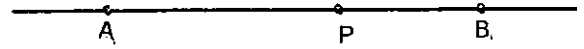


การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงสองบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
1. ใช้ P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด C และ D 2. ใช้ C และ D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากัน และมากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของ $\overline{CD}$ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด E 3. ลาก $\overline{PE}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q จะได้ $\overline{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q ตามต้องการ	1. ลาก $\overleftrightarrow{AB}$ และกำหนดจุด P เป็นจุด ๆ หนึ่งภายนอก $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป 2. คลิก $\overleftrightarrow{AB}$ และจุด P เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Perpendicular Line 3. คลิก $\overleftrightarrow{AB}$ และ เส้นตั้งฉากที่สร้างขึ้น เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Point At Intersection (Ctrl +I) กำหนดชื่อจุด Q 4. นักเรียนจะตรวจสอบอย่างไรว่า จะได้ $\overline{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด Q ตามต้องการ 5. ให้นักเรียนตรวจสอบด้วยวิธีที่นักเรียนนำเสนอมา จะได้ว่า $\overline{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่

การสร้างที่ 6 การสร้างเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

กำหนดให้ P เป็นจุด ๆ หนึ่งบน $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป

ต้องการสร้าง เส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และผ่านจุด P



การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงลงบนกระดาษ	การสร้างโดยใช้ GSP
1. ใช้ P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้ง ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ ทั้งทางซ้ายและขวาของจุด P ที่จุด C และ D ตามลำดับ 2. ให้ C และ D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวมากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของ $\overline{CD}$ เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด E 3. ลาก $\overleftrightarrow{PE}$	1. ลาก $\overleftrightarrow{AB}$ กำหนดจุด P บน $\overleftrightarrow{AB}$ ดังรูป 2. คลิก $\overleftrightarrow{AB}$ และจุด P เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Perpendicular Line กำหนดชื่อเส้นตั้งฉากว่า n 3. จะได้ n ตั้งฉาก $\overleftrightarrow{AB}$ หรือไม่.....
จะได้ $\overleftrightarrow{PE}$ เป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P ตามต้องการ	

แบบฝึกปฏิบัติ
การสร้างพื้นฐาน

1. จงสร้างมุมขนาดต่าง ๆ ต่อไปนี้ โดยใช้ GSP
 - 1.1 90 องศา
 - 1.2 45 องศา
 - 1.3 60 องศา
 - 1.4 30 องศา
 - 1.5 75 องศา
 - 1.6 82.5 องศา
 - 1.7 52.5 องศา

2. กำหนดส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง จงแบ่งส่วนของเส้นตรงดังกล่าว ตามเงื่อนไขต่อไปนี้ โดยใช้ GSP
 - 2.1 แบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.2 แบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.3 แบ่งออกเป็น 8 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.4 แบ่งออกเป็น 16 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.5 แบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน (ข้อแนะ เปิดไฟล์ ex3line.gss ซึ่งเป็น script เพื่อศึกษาวิธีสร้างทีละขั้นแล้วจึงลงมือสร้าง)
 - 2.6 แบ่งออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.7 แบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.8 แบ่งออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน (ข้อแนะ เปิดไฟล์ ex5line.gss ซึ่งเป็น script เพื่อศึกษาวิธีสร้างทีละขั้นแล้วจึงลงมือสร้าง)
 - 2.9 แบ่งออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กัน
 - 2.10 แบ่งออกเป็น 7 ส่วนเท่า ๆ กัน (ข้อแนะ เปิดไฟล์ ex7line.gss ซึ่งเป็น script เพื่อศึกษาวิธีสร้างทีละขั้นแล้วจึงลงมือสร้าง)

คู่มือครู

ประกอบบทเรียนเรขาคณิต
ที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

สำหรับนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์

จัดทำโดย

นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ

สารบัญ

	หน้า
คำชี้แจงการใช้คู่มือครู.....	(1)
กำหนดคาบการสอน.....	
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยุคลิด	(10)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1.....	(11)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2	(13)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.3	(20)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4	(25)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5	(35)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6	(40)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม.....	(47)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.1	(48)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2	(49)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3	(50)
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การจวบกัน ภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน.	(52)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1	(53)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2	(57)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.3	(60)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4	(64)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.5	(67)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6	(70)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.7	(72)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8	(75)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9	(78)
หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10	(79)
รายชื่อไฟล์ที่สร้างโดย GSP เพื่อใช้ประกอบในกิจกรรมของบทเรียนเรขาคณิต.....	(80)
หนังสืออ้างอิง.....	(82)

คำชี้แจงการใช้คู่มือครู

คู่มือครูประกอบบทเรียนเรขาคณิตเล่มนี้ เป็นเอกสารสำหรับครูเพื่อเป็นแนวทางในการเตรียมการสอนและในการสอนให้ดำเนินไปอย่างราบรื่นและมีประสิทธิภาพ ประกอบด้วยรายละเอียดนอกเหนือจากคำชี้แจงการใช้คู่มือครู ดังต่อไปนี้

1. คำนำประจำหน่วยการเรียนรู้ เป็นส่วนที่บอกชื่อเรื่องของหน่วยการเรียนรู้ จำนวนคาบที่ใช้สอน จำนวนหน่วยการเรียนรู้ย่อย ชื่อหน่วยการเรียนรู้ย่อย พร้อมด้วยคำอธิบายที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา หรือแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนให้บรรลุผล

2. รายละเอียดของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย ซึ่งประกอบด้วย

2.1 แนวทางคำตอบของใบงาน

2.2 แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ

สำหรับแนวทางคำตอบของใบงานและแนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติที่ให้ไว้นี้เป็นเพียงแนวทางในการตอบและให้เหตุผลแนวทางหนึ่ง นักเรียนอาจมีลำดับการตอบคำถามหรือการให้เหตุผลของใบงานหรือแบบฝึกปฏิบัติที่แตกต่างไปจากที่เฉลยไว้ก็ได้ ทั้งนี้ครูควรซักถามนักเรียนถึงรายละเอียดปลีกย่อยที่ทำให้นักเรียนตอบเช่นนั้น เพราะถ้าผิดพลาดจะได้แก้ไขเพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้อง

3. กิจกรรมเสริมซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมเสนอแนะ หรือปัญหาชวนคิดต่างๆ ที่จะ มีแทรกตามความเหมาะสม โดยกิจกรรมเสริมที่มีปรากฏในคู่มือครูนี้ มีไว้ให้ครูได้เลือกให้นักเรียนทำ หรือเป็นแนวทางให้ครูได้สร้างกิจกรรมเพิ่มเติมในลักษณะเช่นนี้ เพื่อให้นักเรียนจะได้ฝึกคิดควบคู่ไปด้วยความสนุกสนาน ซึ่งอาจช่วยกระตุ้นให้นักเรียนชอบเรียนเรขาคณิตมากขึ้น

วิธีใช้บทเรียน

ในการใช้บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นเพื่อเป็นสื่อการเรียนการสอนโดยใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้นั้น ครูควรปฏิบัติดังต่อไปนี้

1. ควรสอนตามลำดับเนื้อหาและใช้เวลาในการสอนตามจำนวนคาบที่กำหนดไว้ในกำหนดคาบการสอนซึ่งเป็นเวลาโดยประมาณ ที่ครูอาจเพิ่มหรือลดเวลาได้ตามความเหมาะสม ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสามารถของนักเรียน

2. จากกำหนดคาบการสอนจะเห็นได้ว่า ควรต้องสอนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1.1 ก่อน แล้วจึงให้นักเรียนเรียนเรื่องปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้นตามเนื้อหาและกิจกรรมที่ปรากฏในคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์ เนื่องจากในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1 เป็นเนื้อหาทบทวนและตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ของจุด เส้นตรง รัศมีและมุม เพื่อให้เข้าใจตรงกันและนำไปใช้ในการเรียนเนื้อหาอื่น ๆ ของนักเรียน ต่อไป

3. การดำเนินการสอน ครูอาจดำเนินการสอนตามขั้นตอนต่อไปนี้ ในบางขั้นตอนหรือทุกขั้นตอนประกอบกันตามความเหมาะสม

3.1 ครูบอกหรือให้นักเรียนทำความเข้าใจในจุดประสงค์ปลายทางของหน่วยการเรียนรู้ และจุดประสงค์นำทางของหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่จะเรียนในคาบนั้นๆ ซึ่งมีปรากฏอยู่แล้วในบทเรียนเรขาคณิต

3.2 ครูนำเสนอปัญหาหรือหัวข้อที่จะสอน

3.3 ให้นักเรียนอ่านคำอธิบายเองหรือครูอธิบาย แล้วให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามกิจกรรมที่ระบุไว้ในใบงาน ซึ่งกิจกรรมในใบงานนั้นส่วนใหญ่ ประกอบด้วย

3.3.1 การสำรวจ โดยอาศัยความรู้เดิมและสังเกตความสัมพันธ์จากรูปที่นักเรียนสร้างขึ้นและเปรียบเทียบกับเพื่อน แล้วอภิปรายหาความสัมพันธ์ต่างๆ ที่น่าจะเป็นไปได้ในรูปเรขาคณิตที่มีเงื่อนไขตามกำหนด

3.3.2 การตั้งข้อคาดเดา นักเรียนบันทึกข้อคาดเดาที่ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องก็ได้ ซึ่งเป็นไปตามความคิดเห็นของนักเรียนแต่ละคน

3.3.3 การสืบเสาะหาเหตุผล เป็นการตรวจสอบโดยอาศัย GSP ช่วยโยกย้ายในลักษณะต่างๆ ซึ่งมักจะตรวจสอบได้ชัดเจนว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่ไม่ถูกต้อง ส่วนข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้องนั้น จะไม่มีตัวอย่างค้านปรากฏให้เห็นไม่ว่าจะทำการโยกย้ายไปในลักษณะใดก็ตามที่เงื่อนไขเกี่ยวกับรูปยังเป็นไปตามกำหนด ต่อจากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายหาเหตุผลมายืนยันความถูกต้องของข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้อง โดยมีครูช่วยเสริมแต่ง สำหรับเหตุผลในบางข้อที่ยากเกินไปหรือสลับซับซ้อน ครูอาจใช้คำถามนำเพื่อให้ได้แนวทางของการให้เหตุผลที่เหมาะสม

การศึกษาเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ ครูควรดำเนินกิจกรรมให้ครบทุกกิจกรรมตามใบงาน เพื่อให้นักเรียนได้บรรลุครบทุกจุดประสงค์ของการเรียนรู้ แต่ครูอาจดัดแปลงขั้นตอนของกิจกรรมให้เหมาะสมกับสภาพของนักเรียนได้ นอกจากนี้ครูควรดัดแปลงวิธีสอนให้สอดคล้องกับเนื้อหา สติปัญญา สภาพแวดล้อม และพื้นฐานความรู้ของนักเรียนอยู่เสมอ และควรกระตุ้นให้นักเรียนได้ร่วมอภิปรายแลกเปลี่ยน ตลอดจนเปรียบเทียบผลของการปฏิบัติของตนเองและเพื่อนๆ เพื่อให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่หลากหลายมากขึ้น

4. แบบฝึกปฏิบัติ ที่ปรากฏในบทเรียนนี้ได้สร้างขึ้นและจัดเรียงตามลำดับของเนื้อหาข้อที่มีเครื่องหมายดอกจัน (*) นั้นจะเป็นข้อที่นักเรียนจะต้องใช้การสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา แล้วสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นในลักษณะเช่นเดียวกับการทำกิจกรรมตามทีระบุไว้ในใบงาน

การทำแบบฝึกปฏิบัติให้ครูกำหนดปริมาณเองตามความสามารถของนักเรียนในชั้น โดยไม่จำเป็นต้องให้ทำหมดทุกข้อ และครูควรตรวจคำตอบแบบฝึกปฏิบัติของนักเรียนทุกคน เพื่อจะได้ทราบความก้าวหน้าในการเรียนของนักเรียนแต่ละคน

5. บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นได้ใช้ GSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ และเตรียมพร้อมรับการเปลี่ยนแปลงเพื่อใช้ซอฟต์แวร์อื่นที่มีสมรรถนะใกล้เคียงกันหรือสูงกว่าแทนได้ ดังนั้นถ้ามีซอฟต์แวร์อื่นที่มีลักษณะดังกล่าวอาจดัดแปลงนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้แทน GSP ได้

6. ครูสามารถนำเนื้อหาและกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ของบทเรียนเรขาคณิตนี้ไปประยุกต์ใช้สอนเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือนำเนื้อหาและกิจกรรมในใบงานของหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 และ 3 ไปประยุกต์ใช้สอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อเพิ่มพูนความรู้ (enrichment) ได้อีกด้วย

อุปกรณ์ สื่อการเรียนการสอน

เนื่องจากบทเรียนเรขาคณิตใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ซอฟต์แวร์ที่ใช้คือ GSP ดังนั้น อุปกรณ์ที่จำเป็นในการใช้ GSP จึงประกอบด้วย

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ใช้ไมโครโปรเซสเซอร์ 80486 หรือที่มีสมรรถนะสูงกว่า พร้อมทั้งแป้นพิมพ์ เมาส์ และจอภาพสี
2. แรม (Ram) อย่างน้อย 4 เมกาไบต์
3. หน่วยขับเคลื่อนบันทึก 3.5 นิ้ว (3.5" Floppy Disk Drive)
4. ระบบปฏิบัติการ MS-DOS และ Microsoft Windows 3.1 หรือ Microsoft Windows 95 หรือสูงกว่า
5. จานบันทึกแบบแข็ง (Hard disk)
6. แผ่นบันทึก 3.5 นิ้ว ที่มีซอฟต์แวร์ GSP รุ่นสาริต และไฟล์ที่ใช้ตามที่ระบุในใบงาน

การวัดผล

การวัดผลในบทเรียนเรขาคณิตสามารถใช้วิธีการวัดผลได้ 3 รูปแบบ ดังนี้

1. การวัดผลระหว่างเรียน จะเป็นการวัดว่านักเรียนผ่านจุดประสงค์นำทางที่มีในแต่ละหน่วยการเรียนรู้หรือไม่ ครูอาจใช้วิธีการสังเกต การตอบคำถาม การทำกิจกรรมตามที่ระบุไว้ในใบงาน การให้นักเรียนทำแบบฝึกปฏิบัติ ถ้าหากครูพบว่าจุดประสงค์ใดที่นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่ผ่าน ครูควรนำเนื้อหาและกิจกรรมในหน่วยการเรียนรู้ย่อนั้นมาทบทวนใหม่
2. การวัดผลกระบวนการที่จัดไว้ในบทเรียน จะเป็นการวัดว่านักเรียนมีความรู้ตามจุดประสงค์ปลายทางของแต่ละหน่วยการเรียนรู้และนักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามกระบวนการที่จัด

ไว้ในบทเรียนซึ่งประกอบด้วยกิจกรรม การสำรวจ การตั้งข้อาคัดเดา และการสืบเสาะหาเหตุผล เพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้หรือไม่ ครูอาจใช้แบบฝึกปฏิบัติระคนซึ่งได้จัดทำไว้เป็นตัวอย่างโดยปรากฏอยู่ในภาคผนวก ค ของปฏิญานิพนธ์เป็นเครื่องมือทดสอบ ที่มีลักษณะเป็นแบบอัตโนมัติทุกข้อในทุกหน่วยการเรียนรู้ ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ความสามารถของตนเองตามกระบวนการเรียนอย่างเต็มที่ หากผลออกมาพบว่านักเรียนไม่ผ่านในหน่วยการเรียนรู้ใด ครูควรเรียกนักเรียนมาสอบถามเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนไม่เข้าใจในเรื่องใดแล้วสอนเพิ่มเติม

3. การวัดผลสัมฤทธิ์ของบทเรียนเรขาคณิต จะเป็นการวัดโดยการทดสอบเมื่อนักเรียนได้เรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้ซึ่งตัวอย่างของแบบทดสอบนี้ ได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ในภาคผนวก ค ของปฏิญานิพนธ์ มีลักษณะเป็นแบบปรนัยและอัตนัยปนกัน เพื่อประเมินผลลัพธ์รวมของบทเรียนทั้งสามหน่วยการเรียนรู้ และในขณะเดียวกันก็วัดความสามารถในการสำรวจ ตั้งข้อาคัดเดา และการสืบเสาะหาเหตุผลเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้

ตัวอย่างการแก้ปัญหาโจทย์

รายละเอียดของการแก้ปัญหาโจทย์ที่สอดคล้องกับลักษณะกิจกรรมในบทเรียน ได้แก่

1. สร้างรูป ให้นักเรียนสร้างรูปให้สอดคล้องกับโจทย์ที่กำหนด แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีสร้างเพื่อเป็นแนวทางให้เข้าใจลักษณะสำคัญของรูปที่สร้างขึ้นให้ตรงกัน
2. สืบสาว โดยอาศัยความรู้เดิม และสังเกตความสัมพันธ์จากรูปที่สร้างขึ้น
3. ตั้งข้อคาดเดา โดยนำผลจากการสำรวจมาประกอบกับเงื่อนไขในข้อความที่โจทย์ให้ เพื่อตั้งข้อคาดเดา แสดงความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ของรูป โดยครูอาจสุ่มเลือกนักเรียนหลายคนเพื่อเสนอข้อคาดเดาที่นักเรียนแต่ละคนตั้งขึ้นมา แล้วอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่ม ในบางข้อคาดเดาครูอาจต้องช่วยด้วยการถามนำ
4. สืบเสาะหาเหตุผล ขั้นตอนนี้จะประกอบด้วย การตรวจสอบและหาเหตุผล โดยการตรวจสอบนั้นพิจารณาจากรูปที่นักเรียนสร้างขึ้น โยกรูปไปในลักษณะต่าง ๆ ที่เงื่อนไขเกี่ยวกับรูปยังสอดคล้องกับโจทย์ แล้วสังเกตความสัมพันธ์ที่ได้ว่า ยังเป็นเช่นเดียวกันกับที่กล่าวไว้ในข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นมาแต่ละข้อหรือไม่ ทั้งนี้จากการตรวจสอบ นักเรียนอาจตรวจพบกรณีบางกรณีที่ทำให้ข้อคาดเดานั้นไม่ถูกต้อง ซึ่งถือว่าเป็นการให้เหตุผลโดยแสดงให้เห็นตัวอย่างค้านว่า ข้อความที่ตนเองสรุปมาในข้อคาดเดานั้นไม่ถูกต้อง ในกรณีที่นักเรียนตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาที่ตั้งขึ้นมานั้นน่าจะถูกต้อง ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนหาเหตุผลตามความเหมาะสมมาอธิบายเพื่อสรุปเป็นกรณีทั่วไป

ตัวอย่าง

โจทย์ วงกลม O แนบใน $\triangle ABC$ สัมผัส $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ และ $\overline{AB}$ ที่จุด L , M และ N ตามลำดับ

- สืบสาว
1. มีส่วนของเส้นตรงใดยาวเท่ากับ AN หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)
.....
 2. มีส่วนของเส้นตรงใดยาวเท่ากับ NB หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)
.....
 3. มีส่วนของเส้นตรงใดยาวเท่ากับ CM หรือไม่ (ถ้ามีจงระบุ)
.....

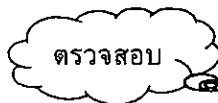
4. $\frac{AN}{AM}$ มีค่าเท่าใด.....
5. $\frac{BL}{NB}$ มีค่าเท่าใด.....
6. $\frac{CM}{LC}$ มีค่าเท่าใด.....



7. $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ สัมพันธ์กันอย่างไร

.....

.....



8. ข้อคาดเดาที่นักเรียนตั้งขึ้น เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่า ข้อคาดเดาใดบ้างที่น่าจะถูกต้อง และข้อคาดเดาบ้างที่ไม่ถูกต้อง

.....

.....



9. เพราะเหตุใด

.....

.....

ขั้นตอนการทำ

1. สร้างรูป ให้นักเรียนสร้างรูปให้สอดคล้องกับโจทย์ที่กำหนดให้ แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปวิธีสร้าง เพื่อเป็นแนวทางให้เข้าใจลักษณะสำคัญของรูปที่สร้างขึ้นให้ตรงกัน

1.1 สร้าง $\triangle ABC$

1.2 หาศูนย์กลางวงกลมแนบใน กำหนดเป็นจุด O ช้อนออปเจกที่ไม่ใช่ แล้วสร้างวงกลม O

1.3 กำหนดจุดที่วงกลม O สัมผัส $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ และ $\overline{AB}$ เป็นจุด L, M และ N ตามลำดับ

1.4 ลาก $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$

2. สำรวจ ให้นักเรียนสำรวจตามข้อความที่โจทย์ให้จากรูปที่ได้ ซึ่งจะได้ว่า

$$AN = MA, NB = BL, CM = LC; \frac{AN}{MA} = 1, \frac{BL}{NB} = 1, \frac{CM}{LC} = 1$$

3. ตั้งข้อคาดเดา ให้นักเรียนนำผลจากการสำรวจมาประกอบกับข้อความที่โจทย์ให้ เพื่อตั้งข้อคาดเดา ครูอาจสุ่มเลือกนักเรียนหลายคน เพื่อนำเสนอข้อคาดเดาที่นักเรียนแต่ละคนตั้งขึ้น แล้วอภิปรายร่วมกับเพื่อนในกลุ่ม ในบางข้อครูอาจต้องช่วยด้วยการถามนำ ตัวอย่างข้อคาดเดาที่อาจได้ของโจทย์ข้อนี้ เช่น $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจwabกัน

$\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$

$\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$

4. สืบเสาะหาเหตุผล ตรวจสอบจากข้อคาดเดาที่ได้ว่า $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวนกันนั้น เป็นข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้อง โดยพิจารณาเช่น

(1.) เห็นได้ชัดเจนเมื่อพิจารณาจากรูป

(2.) ถ้าใช้บทกลับของทฤษฎีบทเซวา มาช่วยวิเคราะห์ ดังนี้

วัดและคำนวณหา $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$ ถ้าได้เท่ากับ 1

โดยบทกลับของทฤษฎีบทเซวา จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวนกัน

(3.) เปลี่ยนวิธีสร้างในข้อ 1.3 โดยไม่กำหนดจุด N

ลาก $\overleftrightarrow{AL}$ และ $\overleftrightarrow{BM}$ ให้ตัดกันที่จุด X ลาก $\overleftrightarrow{CX}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด N

วัดขนาดของมุม ONB ถ้าได้เท่ากับ 90 องศา

จะได้ว่า N เป็นจุดสัมผัสระหว่างวงกลม O และ $\overline{AB}$

จากข้อคาดเดาที่ได้ว่า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$ นั้น เป็นข้อ

คาดเดาที่ไม่ถูกต้อง เพราะ ถ้าวัดหา AN และ NB

เมื่อโยกรูปแล้วจะพบว่า AN และ NB ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

ซึ่งในทำนองเดียวกัน BL และ LB ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

CM และ MA ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

ดังนั้น $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ไม่เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle ABC$

จากข้อคาดเดาที่ได้ว่า $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ นั้น

เป็นข้อคาดเดาที่ไม่ถูกต้อง เพราะ ถ้าวัดหา $m\angle ALB$ เพื่อโยกรูปแล้วจะพบว่า

$m\angle ALB$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 90° ซึ่งในทำนองเดียวกันกับ $m\angle BMC$ และ $m\angle CAN$

ก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 90° ดังนั้น $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ และ $\overline{CN}$ ไม่เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$

เหตุผล สำหรับข้อคาดเดาที่ได้ว่า $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวนกันนั้นเป็นข้อคาดเดาที่น่าจะถูกต้อง จึงหาเหตุผลประกอบ ซึ่งมีแนวทางการพิจารณาดังนี้

1. $AN = MA$, $NB = BL$, เพราะ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอก และ $CM = LC$ วงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน

2. $\frac{AN}{MA} = 1$, $\frac{BL}{NB} = 1$, $\frac{CM}{LC} = 1$ เพราะ จากข้อ 1

3. $\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = 1$ เพราะ จากข้อ 2

4. $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ เพราะ จากข้อ 3 จัดรูป

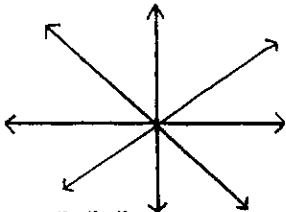
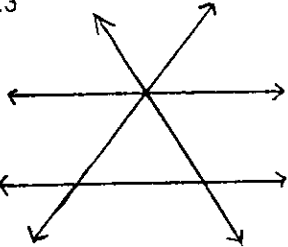
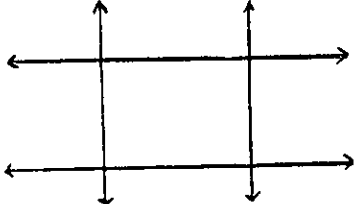
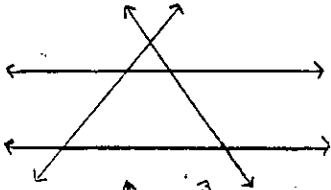
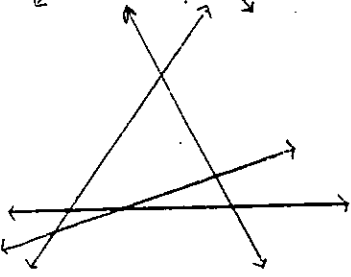
5. $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวนกัน เพราะ สอดคล้องกับบทกลับของทฤษฎีบทเซวา

กำหนดคาบการสอน

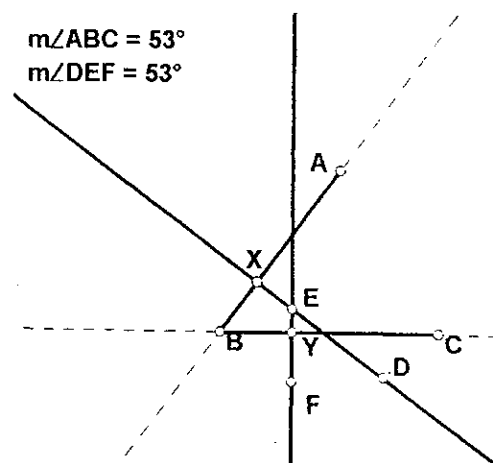
คาบที่	เนื้อหา	จำนวนคาบ
1	แนะนำบทเรียนเรขาคณิตและ GSP	1 คาบ
2	หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 หน่วยการเรียนรู้ย่อย 1.1 ❖ เรืองจุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น ❖ การสร้างจุด เส้นและวงกลม ❖ การกำหนด Label ของออบเจกต์และกล่องข้อความ	1 คาบ
3-5	ปฏิบัติการใช้ GSP สร้างรูปเรขาคณิตเบื้องต้น (ต่อ) ❖ การสร้างรูปหลายเหลี่ยม ❖ การวัดและการคำนวณ ❖ การใช้ Script	3 คาบ
6	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.2 ❖ เรื่องความเท่ากันทุกประการ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.3 ❖ เส้นขนาน	1 คาบ
7	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4 ❖ เรื่องรูปหลายเหลี่ยม	1 คาบ
8	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.5 ❖ เรื่องความคล้ายกัน	1 คาบ
9	หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6 ❖ เรื่อง วงกลม	1 คาบ
10-11	แบบฝึกปฏิบัติระคนหน่วยการเรียนรู้ที่ 1	2 คาบ
12	หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน่วยการเรียนรู้ย่อย 2.1 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิด คอร์ตัดกัน หน่วยการเรียนรู้ย่อย 2.2 ❖ เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้อง กับเส้นตัดของวงกลม หน่วยการเรียนรู้ย่อย 2.3	1 คาบ

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.1
เรื่อง จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 1.1

1. เช่น $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{QR}$, $\overleftrightarrow{RQ}$, และ $\overleftrightarrow{RP}$
2. 2.1 เช่น จุด K, L และ M; จุด P, M และ N
3. 3.1 เช่น จุด A, B, F และ G; จุด A, D, F และ E
- 3.2 เช่น จุด A, B, C และ G; จุด A, D, H และ G
- 2.2 เช่น จุด K, Q และ M; จุด P, M และ L
- 3.3 เช่น $\overleftrightarrow{AF}$ และ $\overleftrightarrow{DE}$; $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$
- 3.4 เช่น $\overleftrightarrow{AF}$ และ $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{BG}$ และ $\overleftrightarrow{EH}$
4. 4.1 จุด X
- 4.2 $\overleftrightarrow{TU}$
- 4.3 $\overleftrightarrow{MK}$
5. 5.1 
- 5.2 เป็นไปไม่ได้
- 5.3 
- 5.4 
- 5.5 
- 5.6 
6. 6.1 จริง
- 6.2 เท็จ
- 6.3 จริง
- 6.4 เท็จ
- 6.5 เท็จ
7. 7.1 จุด Q
- 7.2 จุด Q
- 7.3 $\angle CQB$, $\angle 1$
- 7.4 70°
- 7.5 70°
- 7.6 เช่น $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ และ $\angle 4$
- 7.7 $\angle BQE$, $\angle CQF$, $\angle BQF$ และ $\angle AQC$

8. 8.1 $m\angle ABC = 63^\circ$
 8.2 $m\angle ABC = 45^\circ$
 8.3 $m\angle ABC = 81^\circ$
 8.4 $m\angle ABC = 30^\circ$
 8.5 $m\angle ABC = 36^\circ$
9. 9.1 $BD > DE$ น่าจะถูกต้อง
 9.2 $m\angle BCA > m\angle CBA$ ไม่ถูกต้อง
 9.3 $AC > BC$ น่าจะถูกต้อง
10. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ
 $m\angle ABC = m\angle DEF$
 $m\angle XEY = m\angle DEF$
 $m\angle XEF = m\angle DEY$
 ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้
 $m\angle ABC = m\angle DEF$
 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง



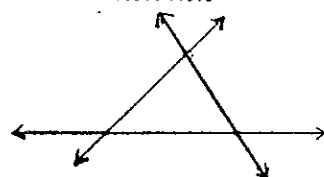
ช่วงพิมพ์วง /

กำหนดจุดสองจุดให้ จะลากเส้นตรงผ่านได้หนึ่งเส้นเท่านั้น

ถ้าพิมพ์กำหนดจุดสามจุด

แล้วลากเส้นตรงตามเงื่อนไขข้างต้น

ได้มากที่สุดสามเส้น ดังรูป 1

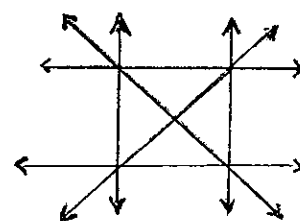


รูป 1

ถ้าพิมพ์กำหนดจุดสี่จุด

แล้วลากเส้นตรงตามเงื่อนไขข้างต้น

ได้มากที่สุดหกเส้น ดังรูป 2



รูป 2

ขอช่วงพิมพ์ว่า ถ้ากำหนดจุด n จุด แล้วจะลากเส้นตรงตามเงื่อนไขได้มากที่สุดกี่เส้น
 เฉลย : หน้า (16)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

แนวทางคำตอบของใบงาน 1.2

1.2.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

❖ หน้า (28)

รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เพราะสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

1.1 ไม่สามารถสรุปได้

1.2 ไม่สามารถสรุปได้

❖ หน้า (29)

2.1 ไม่สามารถสรุปได้

2.2 ไม่สามารถสรุปได้

2.3 ไม่สามารถสรุปได้

1.2.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.)

❖ หน้า (32)

2. คำตอบของ AB , DE , AC , DG , $m\angle A$ และ $m\angle D$ มีได้หลากหลายขึ้นอยู่กับรูปที่ปรากฏบนหน้าจอนักเรียน

ดังนั้น มีด้านยาวเท่ากัน 2 คู่

มุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาด เท่ากัน

4. $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ทับ $\triangle ABC$ ได้สนิท

5. เลื่อน $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ทับ $\triangle ABC$ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปทับกันได้สนิท แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

6. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$)

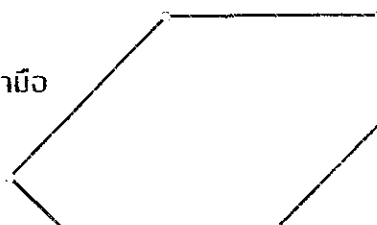
7. ไม่ได้

8. ข้อคาดเดา เท่ากันทุกประการ

แบ่งจำแบ่ง...

ใช้ส่วนของเส้นตรงเพียงสองเส้นแบ่งรูปทางขวามือ
ออกเป็น 3 รูปที่เท่ากันทุกประการ

เฉลย : หน้า (16)



1.2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.)

❖ หน้า (33)

2. คำตอบของ $m\angle A$, $m\angle D$, $m\angle B$, $m\angle E$, AB และ DE มีได้หลากหลายขึ้นอยู่กับรูปที่ปรากฏบนหน้าจอนักเรียน
 ดังนั้น มีขนาดของมุมเท่ากัน 2 คู่
 ด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้น มีความยาว เท่ากัน
4. ตรวจสอบ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ทับกันสนิท
5. วิธีตรวจสอบทำได้โดย เลื่อน $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ทับ $\triangle ABC$ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปทับกันได้สนิทแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
6. ผลการตรวจสอบได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$)
7. เลื่อนจุด F หรือ G ให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) และ $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการ ไม่ได้
8. ข้อคาดเดา เท่ากันทุกประการ

1.2.4 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

❖ หน้า (34)

- 2.2 เท่ากัน
- 2.3 $m\angle ABC = m\angle ACB$
- 2.4 ข้อคาดเดา เท่ากัน
- 2.10 เท่ากัน

❖ หน้า (35)

- 2.11 EA และ EB ยังคงเท่ากัน
- 2.12 ข้อคาดเดา เท่ากัน
- 2.13 จริง มีวิธีตรวจสอบโดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองครั้ง
- 2.14 จริง มีวิธีตรวจสอบโดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองครั้ง
- 3.4 เท่ากัน
- 3.5 เท่ากัน
- 3.6 ยังคงเท่ากัน
- 3.7 ข้อคาดเดา $\overline{AD}$ จะ ตั้งฉาก กับ $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$

4.4 ทับกัน แสดงว่า เส้นทั้งสามเป็นเส้นเดียวกัน

❖ หน้า (36)

- 1) $AB \cong AC$ เพราะ เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- 2) $\angle BAD \cong \angle CAD$ เพราะ AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด
- 3) $AD \cong AD$ เพราะ เป็นด้านร่วม
- 4) $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ เพราะ สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

4.6 ข้อคาดเดา เป็น
เป็น

สรุป

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $AB = AC$ แล้วขนาดของมุมที่ฐาน เท่ากัน
2. ถ้า $\triangle ABE$ มี $m\angle A = m\angle B$ แล้ว EA และ EB เท่ากัน
3. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มี $AB = AC$ และ $\overline{AD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอด $\overline{AD}$ จะ ตั้งฉาก กับ $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$
4. เส้นมัธยฐาน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด และส่วนสูง ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น เส้นเดียวกัน เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เป็น รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

1.2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.)

❖ หน้า (37)

1. คำตอบของ AB, DE, BC, EF, AC และ DG มีได้หลากหลาย
2. 3 คู่
4. ทับกันสนิท
5. วิธีตรวจสอบทำได้โดย เลื่อน $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) ทับ $\triangle ABC$ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปทับกันได้สนิทแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
6. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$)
7. เลื่อนจุด F หรือ G ให้มาทับกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทำให้ $\triangle DEF$ (หรือ $\triangle DEG$) และ $\triangle ABC$ ไม่เท่ากันทุกประการ ไม่ได้

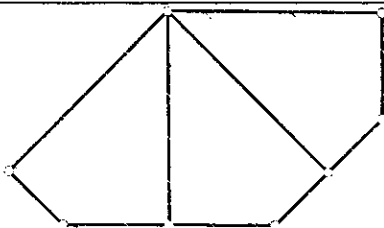
❖ หน้า (38)

8. ข้อคาดเดาจะ เท่ากันทุกประการ

จากความรู้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้ จะได้ว่า
เงื่อนไขที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ได้แก่

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
- หรือ 2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
- หรือ 3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

เฉลย : แบ่งเจ้าแบ่ง...



ลากให้หน่อยนะ:

ลากเส้นตรงสองเส้นที่แตกต่างกัน โดยแต่ละเส้นต้องสอดคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. มีจุดร่วมเส้นตรง 5 จุด คือ จุด A, B, C, D และ E
2. $CA = AD$
3. $AB = BC$
4. $AD = DE$
5. จุด E ไม่อยู่ระหว่างจุด C และ D

เฉลย : หน้า (18)

เฉลย : ช่วยพิมพ์

กำหนดให้ n แทนจำนวนจุด

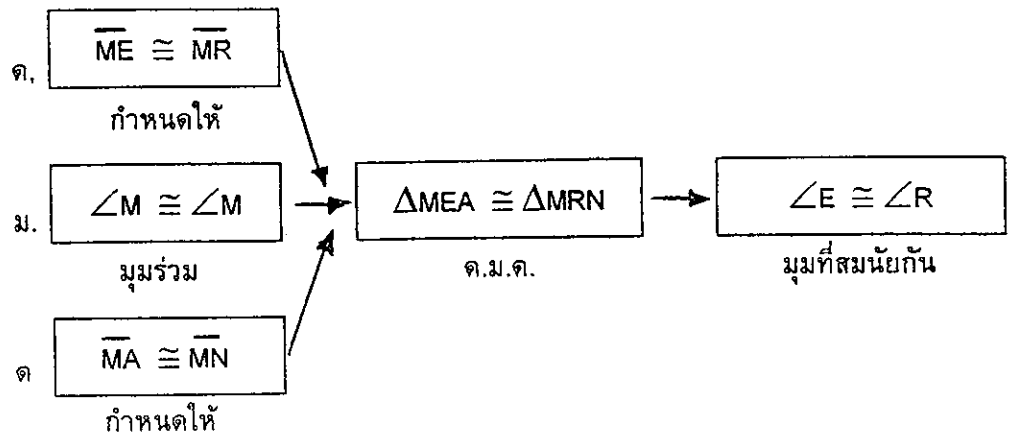
จะได้ว่า $n = 2$ แล้วได้จำนวนเส้นตรง 1 เส้น

$n = 3$ แล้วได้จำนวนเส้นตรง 3 เส้น

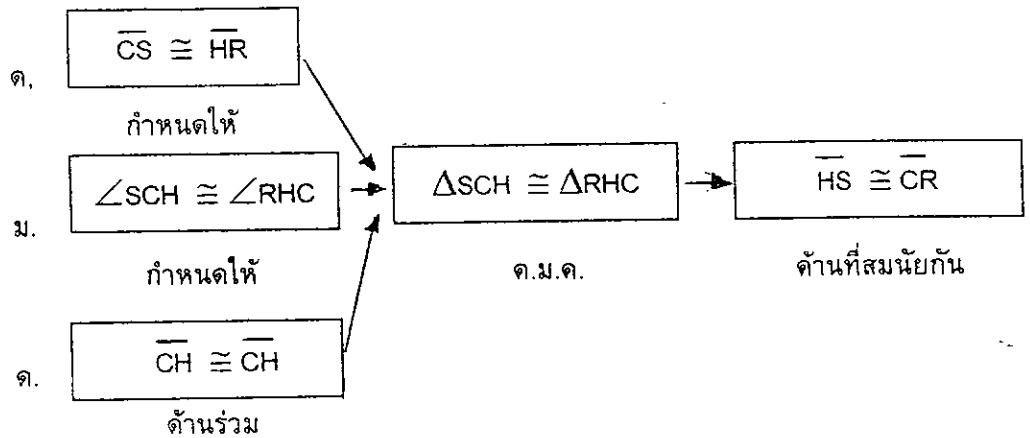
$n = 4$ แล้วได้จำนวนเส้นตรง 6 เส้น

ดังนั้น ถ้ากำหนดจุด n จุดแล้ว จะลากเส้นตรงได้มากที่สุด $\frac{n(n-1)}{2}$

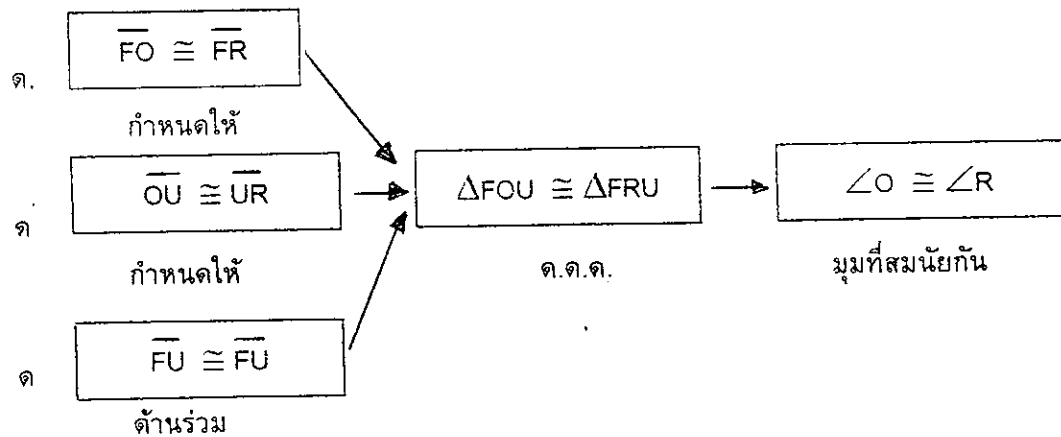
6.4



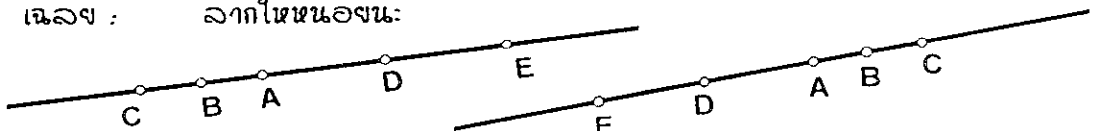
6.5



6.6



เฉลย : ลากให้ชนกัน:



7. 7.1 79 องศา 7.4 76 องศา, 3.5 ซม.
 7.2 54 องศา 7.5 44 องศา, 3 ซม.
 7.3 107.5 องศา 7.6 72 องศา, 10 ซม.

8 ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$AB = AC, AL = LB = AN = NC = LM = NM$$

$$\overline{AC} // \overline{LM}, \overline{AB} // \overline{NM}, \overline{BC} // \overline{LN}$$

ตัวอย่างของข้อาคดเคาที่อาจได้

$$AL = LB = AN = NC = LM = NM$$

$$BN = CL$$

$$m\angle ALM = m\angle ANM$$

□ANML เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคดเคาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

จับความผิด

หนูพิมพ์บอกว่า "รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วด้านที่เหลือจะเป็นด้านคู่ขนาน"



โดยหนูพิมพ์สร้างรูป พร้อมทั้งให้เหตุผล ดังนี้

□ ABCD มี $AD = BC$

แบ่งครึ่ง $\overline{DC}$ ที่จุด P แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด Q

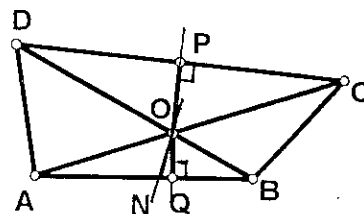
ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{DC}$ ที่จุด P

ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด Q

เส้นตั้งฉากทั้งสองเส้นพบกันที่จุด O

ลาก $\overline{PO}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด N

ลาก $\overline{DO}, \overline{OC}, \overline{AO}$ และ $\overline{OB}$



จะได้ $\triangle DPO \cong \triangle CPO$ (ด.ม.ด.) ดังนั้น $DO = CO$ และ $m\angle DOP = m\angle COP$(1)

$\triangle AQO \cong \triangle BQO$ (ด.ม.ด.) ดังนั้น $AO = BO$ และ $m\angle AOQ = m\angle BOQ$(2)

$\triangle ADO \cong \triangle BCO$ (ด.ด.ด.) ดังนั้น $m\angle AOD = m\angle BOC$(3)

จาก (1)+(3) จะได้ว่า $m\angle DOP + m\angle AOD = m\angle COP + m\angle BOC$

ดังนั้น $m\angle AOP = m\angle BOP$

แต่ $m\angle AON + m\angle AOP = m\angle BON + m\angle BOP = 180^\circ$

ดังนั้น $m\angle AON = m\angle BON$(4)

จาก(2),(4) และความรู้ที่ว่าเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ต้องมีเพียงเส้นเดียว

ดังนั้น $\overline{ON}$ และ $\overline{OQ}$ ต้องเป็นเส้นเดียวกัน

จะได้ $m\angle OPC + m\angle OQB = 180^\circ$ นั่นคือ $\overline{AB} // \overline{CD}$

นักเรียน ตรวจสอบได้ใหม่ว่า สิ่งที่หนูพิมพ์เขียนนี้ น่าจะถูกตองหรือไม่

เฉลย : หน้า (23)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.3

เรื่อง เส้นขนาน

แนวทางคำตอบของใบงาน 1.3

1.3.2 เส้นขนานและมุมภายใน

❖ หน้า (46)

4. คำตอบของ $m\angle MXY$, $m\angle AYX$, $m\angle NXY$ และ $m\angle BYX$ มีได้หลากหลาย
5. $m\angle MXY + m\angle AYX = 180^\circ$
 $m\angle NXY + m\angle BYX = 180^\circ$
6. ความสัมพันธ์ของขนาดของมุมแต่ละคู่ยังคงเดิม
7. ข้อคาดเดา 180 องศา

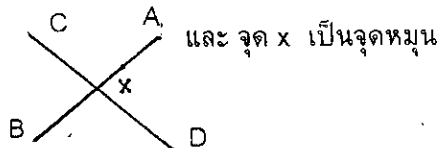
❖ หน้า (47)

11. วิธีสร้าง มีแนวทางการตอบดังนี้
 1. วัด $m\angle BQP$
 2. คำนวณค่า $180 - m\angle BQP$
 3. คลิกที่จุด P เลือกเมนู Construct คำสั่ง Make Center "P"
 4. คลิก PQ เลือกเมนู Construct เลือกคำสั่ง Rotate เท่ากับค่าที่คำนวณได้
 5. กำหนดเส้นตรงที่ได้จากการ Rotate เป็น MN
12. วิธีตรวจสอบว่า $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ มีแนวทางการตอบดังนี้
 ใช้คำสั่งลาก $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ผ่านจุด P จะพบว่า เส้นขนานที่ได้กับ $\overleftrightarrow{MN}$ ทับกัน
13. คลิกจุดต่าง ๆ โยกรูปจะยังได้ $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$
14. ข้อคาดเดา ขนานกัน

ช่วงทดลองจริง

พลอยกางโต๊ะรีดผ้า แล้วสงสัยว่า ทำไม สันโต๊ะ จึงขนานกับพื้นห้องเสมอ
 พลอยจึงไปวัดขาโต๊ะ โดยกำหนดตำแหน่งที่ปลายขาโต๊ะ

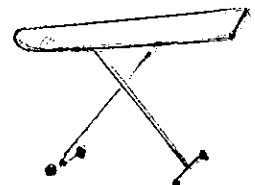
จัดเป็นจุด ดังรูป



พบว่า $CX : XA = XD : BX$

จงอธิบายเหตุผลให้พลอยด้วย

เฉลย : หน้า (21)



1.3.3 เส้นขนานและมุมแย้ง

❖ หน้า (48)

3. คำตอบของ $m\angle MXY$ และ $m\angle BYX$ มีได้หลากหลาย
4. $\underline{m\angle MXY = m\angle BYX}$
5. ข้อคาดเดา เท่ากัน
9. วิธีสร้าง มีแนวทางการตอบดังนี้
 1. วัด $m\angle BQP$
 2. สร้าง $\angle QPN$ ให้มีเท่ากับ $m\angle BQP$ โดยใช้คำสั่ง Mark Center และ Rotate
10. วิธีตรวจสอบว่า $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ มีแนวทางการตอบดังนี้
วิธีการเช่นเดียวกับข้อ 12 ในหัวข้อย่อย 1.3.3
11. ยังได้ MN ขนานกับ AB
12. ข้อคาดเดา ขนานกัน

1.3.4 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

❖ หน้า (49)

3. $\underline{m\angle ZXM = m\angle XYA}$
4. $\underline{m\angle ZXM = m\angle XYA}$
5. ข้อคาดเดา เท่ากัน
9. วิธีสร้างมีแนวทางการตอบดังนี้
 1. วัด $m\angle PQA$
 2. สร้าง $\angle MPZ$ ให้มีขนาดเท่ากับ $m\angle PQA$ โดยใช้คำสั่ง Mark Center และ Rotate
10. $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$
11. $\overleftrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$
12. ข้อคาดเดา ขนานกัน

เฉลย : " ช่องทดลองดวง"

เมื่อลาก $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ และ $\overline{DA}$ จะได้ ACBD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
เพราะ สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานข้อหนึ่งมีว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้าน
ขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

1.3.5 ผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม

❖ หน้า (50)

3. คำตอบ $m\angle A$, $m\angle B$ และ $m\angle C$ มีได้หลากหลาย
และ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ องศา
4. ผลบวกของขนาดของมุมทั้งสาม = 180 องศา
5. ข้อคาดเดา เท่ากับ 180 องศา

1.3.6 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

❖ หน้า (51)

1. $m\angle A$ และ $m\angle D$ จะเท่ากัน เพราะ $m\angle A = 180 - (m\angle C + m\angle B)$
และ $m\angle D = 180 - (m\angle F + m\angle E)$ แต่ $m\angle C = m\angle F$ และ $m\angle B = m\angle E$
2. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ด.ม
3. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ เพราะมีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ด.ม
4. ข้อคาดเดา เท่ากันทุกประการ

1.3.7 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (จ.ด.ด)

❖ หน้า (52)

3. $m\angle PQU = 90$ องศา
4. $\triangle XYZ$ และ $\triangle PQU$ เท่ากันทุกประการ เพราะมีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด
5. $PR = PU$
6. $\triangle PRU$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
7. เท่ากัน
8. $m\angle PQR = m\angle PQU$, $m\angle PRQ = m\angle PUQ$
9. $\triangle PQR$ และ $\triangle PQU$ เท่ากันทุกประการ เพราะ มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด

❖ หน้า (53)

10. $\triangle XYZ = \triangle PQU$, $\triangle PQR = \triangle PQU$, $\triangle XYZ = \triangle PQR$
11. ข้อคาดเดา เท่ากันทุกประการ

สรุป เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับรูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการได้แก่

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน
2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 1.3

1. 1.1 $\angle 2$ และ $\angle 6$, $\angle 3$ และ $\angle 7$
 1.2 $\angle 2$ และ $\angle 3$, $\angle 6$ และ $\angle 7$
 1.3 $\angle 1$ และ $\angle 3$, $\angle 2$ และ $\angle 4$, $\angle 8$ และ $\angle 6$, $\angle 7$ และ $\angle 5$

2. 2.1 C 2.5 A
 2.2 B 2.6 D
 2.3 D 2.7 D
 2.4 D 2.8 C

3. $\angle 4$ และ $\angle 5$, $\angle 1$ และ $\angle 6$
 4. $\angle 1$ และ $\angle 13$, $\angle 2$ และ $\angle 14$, $\angle 3$ และ $\angle 15$, $\angle 4$ และ $\angle 16$
 5. $m\angle 1 = 110^\circ$ $m\angle 2 = 42^\circ$ $m\angle 3 = 28^\circ$ $m\angle 4 = 110^\circ$
 $m\angle 5 = 70^\circ$ $m\angle 6 = 70^\circ$ $m\angle 7 = 70^\circ$ $m\angle 8 = 110^\circ$
 $m\angle 9 = 42^\circ$

6. 6.1 ม.ด.ม. 6.4 ม.ม.ด.
 6.2 จ.ด.ด 6.5 ม.ม.ด.
 6.3 ไม่มีความสัมพันธ์กันแบบที่ระบุ 6.6 ด.ด.ด.

7. 7.1 $m\angle D = m\angle BCE$ หรือ $m\angle DCA = m\angle E$
 7.2 $AC = BE$ หรือ $AD = BC$
 7.3 $AD = BC$ และ $AC = BE$
 7.4 เช่น $AC = BE$ และ $m\angle ACD = m\angle BEC$
 7.5 เช่น $m\angle DCA = m\angle CEB$ และ $AC = BE$

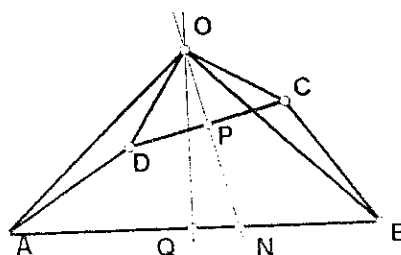
8. 8.1 $X = 60^\circ$ 8.4 $X = 50^\circ$
 8.2 $X = 35^\circ$ 8.5 $X = 80^\circ$
 8.3 $X = 26^\circ$ 8.6 $X = 80^\circ$

เฉลย : จับความผิด

ไม่ถูกต้อง ผิดที่การสร้างรูป รูปที่ถูกต้องอาจเป็นดังนี้

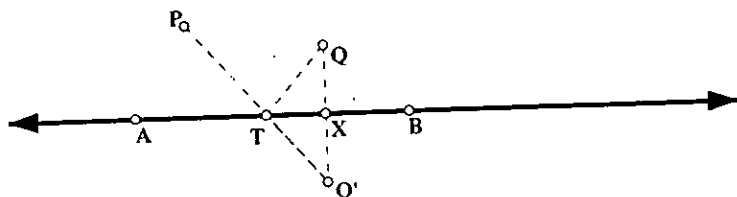
$m\angle AON + m\angle AOP$ อาจไม่เท่ากับ 180°

$m\angle BON + m\angle BOP$ อาจไม่เท่ากับ 180°



9. $a = 62^\circ$ $b = 130^\circ$ $c = 130^\circ$ $d = 65^\circ$
 $e = 112^\circ$ $f = 88^\circ$ $g = 100^\circ$ $h = 142^\circ$
 $i = 150^\circ$ $j = 58^\circ$ $k = 62^\circ$ $l = 59^\circ$
 $m = 59^\circ$

10. ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง



เหตุผล

ลาก $\overline{QQ'} \perp \overline{AB}$

กำหนดจุดตัดของ $\overline{QQ'}$ และ $\overline{AB}$ เป็นจุด X โดย $QX = Q'X$

ลาก $\overline{PQ}$ กำหนดจุดตัดของ $\overline{PQ'}$ และ $\overline{AB}$ เป็นจุด T

จากรูป $\triangle TQX \cong \triangle TQ'X$ เพราะมีความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.

$$QT = Q'T$$

$\overline{PQ'}$ เป็นส่วนของเส้นตรง แสดงว่า เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด Q' ไปจุด P

จับความผิดอีกที



หนูพลอยบอกว่า " รูปสามเหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว "

โดยหนูพลอยสร้างรูป พร้อมทั้งให้เหตุผล ดังนี้

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม

แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด D

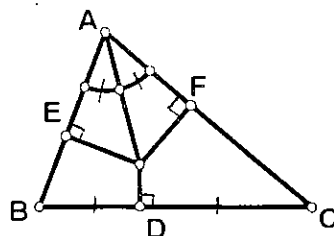
ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D

พบกับเส้นแบ่งครึ่งมุม A ที่จุด X

ลาก $\overline{XB} \perp \overline{AB}$ ที่จุด E

ลาก $\overline{XF} \perp \overline{AC}$ ที่จุด F

ลาก $\overline{BX}$ และ $\overline{CX}$



จะได้ $\triangle AXE \cong \triangle AXF$ (ม.ม.ด.) ดังนั้น $AE = AF$ และ $XE = XF$(1)

$\triangle BXD \cong \triangle CXD$ (ด.ม.ด.) ดังนั้น $BX = CX$(2)

$\triangle BXE \cong \triangle CXF$ (อ.ด.ด.) ดังนั้น $BE = CF$(3)

จาก (1)+(3) จะได้ว่า $AE + BE = AF + CF$ ดังนั้น $AB = AC$

นั่นคือ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นักเรียน ตรวจสอบได้ไหมว่า สิ่งที่หนูพลอยเจืงนนี้ น่าจะถูกต้งหรือไม

เฉลย : หน้า (43)

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.4
เรื่อง รูปหลายเหลี่ยม

แนวทางคำตอบของใบงาน 1.4

1.4.1 รูปหลายเหลี่ยมและการจำแนกรูปหลายเหลี่ยม

❖ หน้า (60)

$a + b + c = 180$ องศา เพราะ ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABD รวมกัน
 $d + e + f = 180$ องศา เพราะ ขนาดของมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม BCD รวมกัน
ขนาดของมุมภายในทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม รวมกันได้ 360 องศา

รูปหลายเหลี่ยม	จำนวนด้าน	จำนวนรูปสามเหลี่ยมเดิมหรือจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง	ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยมแต่ละรูป
รูปสามเหลี่ยม	3	1 รูป	180°
รูปสี่เหลี่ยม	4	2 รูป	360°
รูปห้าเหลี่ยม	5	3 รูป	540°
รูปหกเหลี่ยม	6	4 รูป	720°
รูปเจ็ดเหลี่ยม	7	5 รูป	900°
รูปแปดเหลี่ยม	8	6 รูป	1080°
รูปเก้าเหลี่ยม	9	7 รูป	1260°
รูป n เหลี่ยม	n	n-2 รูป	$(180(n-2))^\circ$

ขนาดของมุมภายในของรูป n เหลี่ยมรวมกันได้ $(n-2)180$ องศา

❖ หน้า (61)

รูปหลายเหลี่ยม	จำนวนจุดยอด	จำนวนเส้นทแยงมุม
รูปสามเหลี่ยม	3	0
รูปสี่เหลี่ยม	4	2
รูปห้าเหลี่ยม	5	5
รูปหกเหลี่ยม	6	9
รูปเจ็ดเหลี่ยม	7	14
รูปแปดเหลี่ยม	8	20
รูปเก้าเหลี่ยม	9	27
รูป n เหลี่ยม	n	$\frac{n(n-3)}{2}$

❖ หน้า (62)

รูปหลายเหลี่ยม	จำนวน ด้าน	จำนวนรูปสามเหลี่ยมเดิมหรือจำนวนรูปสามเหลี่ยม ที่เกิดจากการลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง
รูปสามเหลี่ยม	3	1
รูปสี่เหลี่ยม	4	2
รูปห้าเหลี่ยม	5	3
รูปหกเหลี่ยม	6	4
รูปเจ็ดเหลี่ยม	7	5
รูปแปดเหลี่ยม	8	6
รูปเก้าเหลี่ยม	9	7
รูปสิบเหลี่ยม	10	8
รูป n เหลี่ยม	n	$n - 2$

นั่นคือจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นน้อยกว่าจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมอยู่ 2

1.4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

❖ หน้า (63)

3.2 คำตอบของ b^2 , a^2 , c^2 และ $a^2 + c^2$ มีได้หลากหลาย

3.3 $a^2 + c^2 = b^2$

❖ หน้า (64)

3.4 คงเดิม

3.5 ข้อคาดเดา $b^2 = a^2 + c^2$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านอีกสองด้านประกอบมุมฉาก แล้วถ้าเปลี่ยนเป็นรูปอื่น เช่น รูปครึ่งวงกลม รูปห้าเหลี่ยม โดยมีข้อแม้ว่า รูปเรขาคณิตบนด้านทั้งสามต้องเป็นรูปที่คล้ายกัน (ให้ศึกษา เรื่องรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันในหน่วยการเรียนรู้ย่อย 1.5) จะได้ความสัมพันธ์ เช่นเดียวกัน

คิด

รูป n เหลี่ยม ลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งได้ $n-3$ เส้น

แล้ว เหตุใด อัตราส่วนระหว่าง $n - 3$ และ 360 จึงเท่ากับ $2 : 7$ ไม่ได้

เฉลย : หน้า (31)

4. บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

4.1 กิจกรรมสำรวจ 1

2. $PQ = 6.00$ เซนติเมตร

$RS = 3.80$ เซนติเมตร

$\sqrt{PQ^2 + RS^2} = 7.10$ เซนติเมตร

6. คำตอบมีหลากหลายซึ่งเท่ากับ $\sqrt{a^2 + c^2}$

❖ หน้า (65)

11. $m\angle ABC = 90$ องศา เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4.2 กิจกรรมสำรวจ 2

4. $m\angle ABC = 90$ องศา

5. เท่า

4.3 ข้อคาดเดา เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.4.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

❖ หน้า (66)

2 สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2.1 ขนาดของมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2) มีขนาดเท่ากันและเมื่อโยกแล้วความสัมพันธ์ยังคงเดิม

3) 180 องศา และเมื่อโยกแล้วผลบวกขนาดมุมภายในที่อยู่ติดกันเท่าเดิม

4) ข้อคาดเดา มุมตรงข้ามขนาดเท่ากัน

มุมอยู่ติดกันมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

❖ หน้า (67)

2.2 ด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2) มีความยาวเท่ากันและเมื่อโยกรูปสี่เหลี่ยมแล้วความสัมพันธ์ยังคงเดิม

3. ข้อคาดเดา เท่ากัน

2.3

2) $AE = ED, BE = EC$

3) เป็นเส้นเดิม

4) ข้อคาดเดา แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

แบ่งจำแบ่ง...อีกที...

ใช้ส่วนของเส้นตรงเพียงสี่เส้นแบ่งรูปทางขวามือ
ออกเป็น 4 รูปที่เท่ากันทุกประการ

เฉลย : หน้า (38)



6.

1. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ เพราะ เป็นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ เพราะ เป็นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
3. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ เพราะ เป็นด้านร่วม
4. $\triangle BAC \cong \triangle CDB$ เพราะ มีความสัมพันธ์แบบ ด.ด.ด.

7. ข้อคาดเดา เท่ากันทุกประการ

❖ หน้า (68)

3. มากมาย

4. 90 องศา

5.1 เป็น

5.2 เป็น

5.3 เป็น

5.4 เป็น

5.5 เป็น

5.6 เป็น

6. เส้นไขที่เพียงพอสำหรับการเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

1. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
2. มุมที่อยู่ติดกันมีขนาดรวมกันได้ 180 องศา
3. ด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน
4. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
5. เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่เท่ากันทุกประการ

1.4.4 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

❖ หน้า (69)

2.3 เป็น2.4 ข้อคาดเดา ตั้งฉากกัน

1.4.5 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

❖ หน้า (70)

2.2 เท่ากัน2.4 ข้อคาดเดา เท่ากัน

3. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน
4. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน

1.4.6 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

- ❖ หน้า (71)
 - 2.3 เป็นเช่นเดิม
 - 2.4 ข้อคาดเดา ตั้งฉากกัน
 - 3. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน

1.4.7 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

- ❖ หน้า (72)
 - วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
 1. ลาก $\overline{AB}$
 2. สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด A และที่ผ่านจุด B (ควรเป็นเส้นประ)
 3. กำหนดจุด C บนเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด A
 4. สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่ผ่านจุด C (ควรเป็นเส้นประ)
 5. กำหนดจุด D เป็นจุดตัดระหว่างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่ผ่านจุด C และเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่ผ่านจุด B
 6. ลาก $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ และ $\overline{BD}$ (ควรเป็นเส้นหนา)
 7. ช้อนเส้นตรงทุกเส้น
 - 3. เป็นเช่นเดียวกัน
 - 4. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน

1.4.8 รูปสี่เหลี่ยมว่าว

- ❖ หน้า (73)
 - 2.2 $m\angle AEB = 90$ องศา, $m\angle CEB = 90$ องศา
 - 2.3 เป็นเช่นเดิม
 - 2.4 ข้อคาดเดา ตั้งฉากกัน

1.4.9 รูปสี่เหลี่ยมดางหมู

- ❖ หน้า (74)
 - 2.2 เช่น
 1. ใช้สร้างเส้นขนานโดยใช้ GSP ตรวจสอบว่าเป็นเส้นเดียวกับ $\overline{EF}$ หรือไม่
 2. ใช้สมบัติของเส้นขนานตรวจสอบขนาดของมุม
 - 2.3 $EF = \frac{1}{2} (AB+CD)$

❖ หน้า (75)

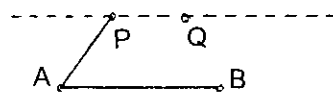
- 2.5 ข้อคาดเดา 1. ขนาน
2. เท่ากัน

2.6 สรุป

1. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่คู่ขนานจะขนานกับด้านคู่ขนาน
2. ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่คู่ขนานเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน
3. วิธีสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว
 1. ลาก $\overline{AB}$
 2. กำหนดจุด P ไม่อยู่บน $\overline{AB}$
 3. สร้างเส้นขนานกับ $\overline{AB}$ ผ่านจุด P
 4. ลาก $\overline{AP}$
 5. ให้จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว AP สร้างวงกลมตัดเส้นขนานกับ $\overline{AB}$ ที่จุด Q

ตั้งรูป

6. ลาก $\overline{PQ}$ และ $\overline{QB}$
7. ขอนเส้นขนานกับ $\overline{AB}$ จะได้ $ABQP$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว



4.

- 4.1 มีความสัมพันธ์เช่นเดียวกัน
- 4.5 ข้อคาดเดา 1. เท่ากัน
2. เท่ากัน

❖ หน้า (76)

- 5.4 เช่น 1. ใช้สร้างเส้นขนานโดยใช้ GSP ตรวจสอบว่าเป็นเส้นเดียวกับ $\overline{DE}$ หรือไม่
2. ใช้สมบัติของเส้นขนานตรวจสอบขนาดของมุม

$$5.5 \quad DE = \frac{1}{2} BC$$

5.6 เป็นเช่นเดิม

- 5.7 ข้อคาดเดา 1. ขนาน
2. เท่ากัน

สรุป

3. สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 1. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
 2. มุมที่อยู่ติดกันมีขนาดรวมกันเท่ากับ 180 องศา
 3. ด้านตรงข้ามมีความยาวเท่ากัน
 4. เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
 5. เส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

❖ หน้า (77)

4. เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน
5. เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน
6. เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน
7. ไม่มี
8. เส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน
9. ส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านที่ไม่คู่ขนานจะขนานกับด้านคู่ขนาน และมีความยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน
10. มุมที่ฐานเดียวกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วแต่ละคู่มิขนาดเท่ากัน
เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีความยาวเท่ากัน
11. ส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สามและยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม

เฉลย “คิด”

$$\text{ถ้า } \frac{n-3}{360} = \frac{2}{7}$$

$$7n - 21 = 720$$

$$n = \frac{720 + 21}{7} = \frac{741}{7} \text{ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม}$$

แต่ n เป็นจำนวนด้านของรูป n เหลี่ยม ดังนั้น n ต้องเป็นจำนวนเต็ม

ทำไม ?

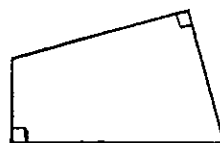
สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABX และ BCY ด้านนอกของรูปสี่เหลี่ยม $\triangle XDY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด

เฉลย : หน้า (39)

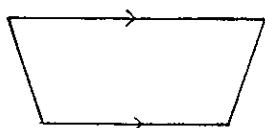
1. 1.1 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 1.2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- 1.3 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

- 1.4 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
- 1.5 รูปสี่เหลี่ยมวาว

2. 2.1 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู หรือ รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า



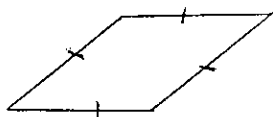
- 2.2 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



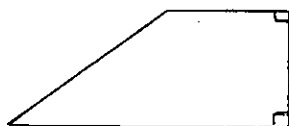
- 2.3 เป็นไปไม่ได้

- 2.4 เป็นไปไม่ได้

- 2.5 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



3. 3.1

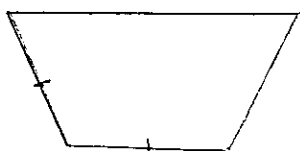


- 3.4 เป็นไปไม่ได้ เพราะจะทำให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

- 3.2 เป็นไปไม่ได้ เพราะจะทำให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

- 3.5 เป็นไปไม่ได้ เพราะจะทำให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

- 3.3



13. สำรจ ไม่มี

ไม่มี

$$AC^2 + BD^2 = AB \cdot CD + AD \cdot BC \text{ หรือ } AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

ตัวอย่างของข้อาคดเตาที่ควรจะได้

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคดเตาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

14. ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคดเตาข้างต้นถูกต้อง

$$m\angle 1 = 120^\circ ; m\angle 2 = 60^\circ$$

ให้ $m\angle ABF = 3a$ องศา

$m\angle BAE = 3b$ องศา

$$3a + 3b = 180^\circ \text{ สมบัติของเส้นขนาน}$$

$$a + b = 60^\circ$$

$$m\angle 1 = 180^\circ - (a + b)^\circ = 120^\circ$$

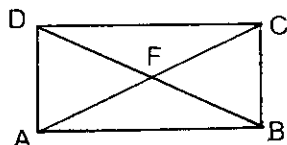
$$m\angle 2 = 180^\circ - 2(a + b)^\circ = 60^\circ$$

15. $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ มี

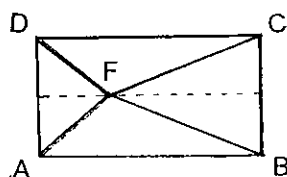
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ มี

$a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ มี

ตั้งข้อาคดเตา $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ เมื่อจุด F เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม AC และ BD

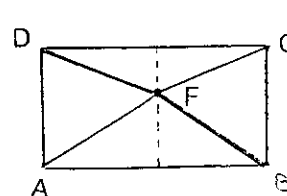


$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ เมื่อจุด F เป็นจุดอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อม



จุดกึ่งกลางของด้าน AD และ BC

$a^2 + d^2 = b^2 + c^2$ เมื่อจุด F เป็นจุดอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อม



จุดกึ่งกลางของด้าน AB และ DC

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1.5

เรื่อง ความคล้ายกัน

แนวทางคำตอบของใบงาน 1.5

1.5.1 รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน

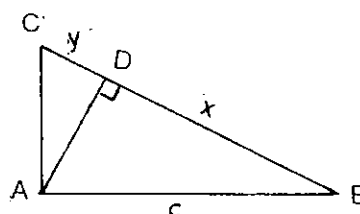
- ❖ หน้า (87)
- 1.5 เท่ากัน
- ❖ หน้า (88)
- 2.5 คำตอบมีได้หลากหลาย
- 2.6
1. เท่ากัน
2. เท่ากัน
- 2.7 ขนาดของมุมของรูปทั้งสองเท่ากันและอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปทั้งสองมีค่าเท่ากัน
- ❖ หน้า (89)
- 3.3 5 คู่
- 3.5 คำตอบมีได้หลากหลาย
- 3.6 มีค่าเท่ากัน
- 3.7 ยังมีค่าเท่ากัน
- 4.3 3 คู่
- 4.5 คำตอบมีได้หลากหลาย และจะได้อัตราส่วนทั้งสามมีค่าเท่ากัน

ลองหาเหตุผลเอง

$\triangle ABC$ มี $\angle A$ เป็นมุมฉาก AD เป็นส่วนสูง

ถ้า BC, CA, AB, AD, BD และ DC

เท่ากับ a, b, c, h, x และ y หน่วย ตามลำดับ



- แล้ว เหตุใด
1. $\frac{x}{h} = \frac{h}{a-x}$ หรือ $h^2 = x(a-x)$
 2. $\frac{y}{b} = \frac{b}{x+y}$ หรือ $b^2 = y(x+y)$
 3. $\frac{x}{c} = \frac{c}{x+y}$ หรือ $c^2 = x(x+y)$

เฉลย : หน้า (36)

1.5.2 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

- ❖ หน้า (91)
4. คำตอบมีได้หลากหลาย และอัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสามอัตราส่วนมีค่าเท่ากัน
- ❖ หน้า (92)
5. $m\angle CAB = m\angle FDE$, $m\angle ABC = m\angle DEF$, $m\angle BCA = m\angle EFD$
อัตราส่วนของความยาวของด้านทั้งสามอัตราส่วนเท่ากัน
6. เท่ากัน
7. คล้ายกัน
8. คล้ายกัน
10. เท่ากัน เพราะขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา เมื่อมีขนาดของมุมสองมุมเท่ากันแล้วขนาดของมุมที่เหลือย่อมเท่ากัน
11. เท่ากันซึ่งทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น คล้ายกัน
- ❖ หน้า (93)
- 12.1 ตรวจสอบขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ 3 คู่
- 12.2 ตรวจสอบขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ 2 คู่
- 12.3 ตรวจสอบอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน
ตรวจสอบขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ 2 คู่ เพราะเป็นเงื่อนไขที่น้อยที่สุด

เฉลย : ลองหาเหตุผลน้อง

$$\begin{aligned}
 1. \triangle DBA \sim \triangle DAC \text{ จะได้ } \frac{DB}{DA} &= \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{AC} \\
 \frac{x}{h} &= \frac{h}{a-x} \text{ ดังนั้น } h^2 = x(a-x) \\
 2. \triangle DAC \sim \triangle ABC \text{ จะได้ } \frac{CD}{CA} &= \frac{AC}{BC} = \frac{DA}{AB} \\
 \frac{y}{b} &= \frac{b}{x+y} \text{ ดังนั้น } b^2 = y(x+y) \\
 3. \triangle DBA \sim \triangle ABC \text{ จะได้ } \frac{DB}{AB} &= \frac{BA}{BC} = \frac{AD}{CA} \\
 \frac{x}{c} &= \frac{c}{x+y} \text{ ดังนั้น } c^2 = x(x+y)
 \end{aligned}$$

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 1.5

1.	1.1	จริง	1.5	จริง
	1.2	จริง	1.6	เท็จ
	1.3	จริง	1.7	จริง
	1.4	เท็จ		

2.	2.1	1. $m\angle E$	5.	$\frac{6}{5}$
		2. $m\angle F$	6.	$\frac{5}{6}$
		3. $m\angle U$	7.	$\frac{5}{6}$
		4. $m\angle T$	8.	$\frac{5}{6}$

2.2	1.	30°	6.	20
	2.	60°	7.	$\frac{70}{3}$
	3.	90°	8.	12
	4.	90°	9.	$\frac{5}{3}$
	5.	16.8	10.	$\frac{5}{3}$

3. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

4. 4.1 35 หน่วย
 4.2 18 หน่วย
 4.3 24 หน่วย
 4.3 $\frac{3}{7}$ หน่วย

5. เช่น $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, $\triangle BDC \sim \triangle DEC$, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$, $\triangle ADB \sim \triangle DEC$

6. 6.1 $\triangle DFA \sim \triangle CFE, x = \frac{85}{21}$ หน่วย, $y = \frac{10}{3}$ หน่วย
 6.2 $\triangle DFE \sim \triangle CFB, x = \frac{16}{3}$ หน่วย, $y = \frac{63}{4}$ หน่วย
 6.3 $\triangle DFA \sim \triangle CFE, x = \frac{70}{11}$ หน่วย, $y = \frac{66}{5}$ หน่วย
7. 7.1 $\triangle ABF \sim \triangle ACE \sim \triangle FDE$
 7.2 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$
 7.3 $\triangle ABF \sim \triangle FDE, \triangle ABF \sim \triangle ACE, \triangle FDE \sim \triangle ACE$
 7.4 $\triangle ACE \sim \triangle FDE$
 7.5 ไม่มี
8. 8.1 $x = 9$ หน่วย
 8.2 $x = 12$ หน่วย
9. 9.1 $BF = 6$ หน่วย $FC = 24$ หน่วย
 9.2 $AE = 6$ หน่วย $ED = 2$ หน่วย $BF = 10.5$ หน่วย, $FC = 3.5$ หน่วย
 9.3 $CD = \frac{32}{3}$ หน่วย
 9.4 $CD = 10$ หน่วย
10. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ ไม่มีรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ
 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

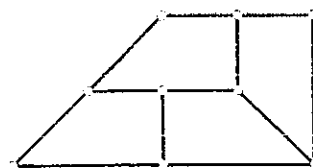
 ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

 ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เฉลย : แบ่งจำแบ่ง...อีกที...



เหตุผล $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$$

เพราะ $m\angle CDE = m\angle CAB$, $m\angle CED = m\angle CBA$

เพราะ อัตราส่วนของความยาวด้านที่สมนัยกันของ
รูปสามเหลี่ยมคล้าย

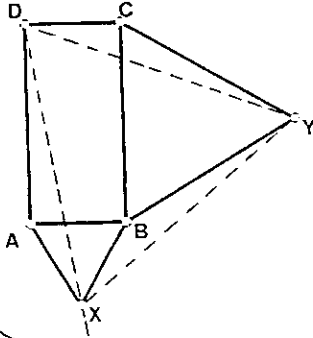
$$\frac{n+q}{n} = \frac{m+p}{m}$$

เพราะ $CD = m$ หน่วย, $CE = n$ หน่วย, $CA = n+q$ หน่วย

$$1 + \frac{q}{n} = 1 + \frac{p}{m}$$

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

เฉลย : ทำไม?



1. $\triangle DAX \cong \triangle YCD$ เพราะ $DA = YC$,

$m\angle DAX = m\angle YCD$, $AX = CD$

(ด้าน-มุม-ด้าน)

2. $DX = YD$

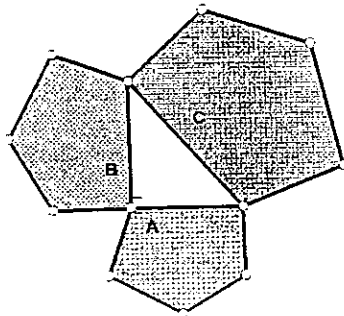
เพราะ เป็นด้านที่สมนัยกันของ

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

ดังนั้น $\triangle XDY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

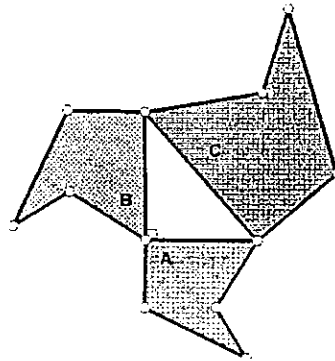
ตัวอย่างรูป ที่สอดคล้องกับตัวอย่างหน้า 64 (ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

Area(Poly A) = 3.938 square cm
Area(Poly B) = 3.077 square cm
Area(Poly B + Poly A) = 7.014
Area(Poly C) = 7.014 square cm



N. Jackiw
File: Unsquare.gsp

Area(Poly A) = 2.863 square cm
Area(Poly B) = 2.237 square cm
Area(Poly B + Poly A) = 5.100
Area(Poly C) = 5.100 square cm



N. Jackiw
File: Unsquare.gsp

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 1.6

เรื่อง วงกลม

แนวทางคำตอบของใบงาน 1.6

1.6.2 สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

❖ หน้า (103)

1.2 $m\angle AOB = 2(m\angle ACB)$

1.4 ข้อคาดเดา 2 เท่า

2.1 เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\angle ACB$ เป็นมุมฉาก เพราะ $m\angle ACB = 90$ องศา

2.3 ข้อคาดเดา 90 องศา

❖ หน้า (104)

3.1 $\angle AOB$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

$\angle ACB$, $\angle ADB$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

3.2 $m\angle ACB = m\angle ADB$

3.3 $m\angle AOB = 2(m\angle ACB)$

3.4 $m\angle AOB = 2(m\angle ADB)$

3.6 ข้อคาดเดา เท่ากัน

4.4 เท่ากัน

❖ หน้า (105)

4.6 มีความยาวเท่ากัน

ความยาวของ $\widehat{MN}$ เท่ากับความยาวของ $\widehat{ST}$

4.7 ข้อคาดเดา ยาวเท่ากัน

4.12 เท่ากัน

4.14 ข้อคาดเดา เท่ากัน

4.15 ยาวเท่ากัน

4.16 สร้างรูป วัดความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นแล้วลองโยกรูป

4.17 มีขนาดเท่ากัน

4.18 สร้างรูป วัดขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นแล้วลองโยกรูป

4.19 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน

❖ หน้า (106)

- 5.2 สร้างรูป แล้ววัดความยาวของส่วนโค้งน้อยและส่วนโค้งใหญ่ (ใน GSP ใช้คำสั่ง Arc Length)
- 5.3 เท่ากัน
- 5.4 สร้างรูป แล้ววัดความยาวของคอร์ด
- 5.5 เพราะในวงกลมเดียวกันหรือในวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็น ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน
- 6.5 มีความยาวเท่ากัน
- 6.7 ข้อคาดเดา แบ่งครึ่งคอร์ด
- 6.12 มีขนาดเท่ากันและเท่ากับ 90 องศา

❖ หน้า (107)

- 6.14 ข้อคาดเดา จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
- 6.21 ในแนวเส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และผ่านจุด O
และ $\triangle COD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพราะ $OC = OD$ (ความยาวของรัศมีของวงกลม)
- 6.22 ข้อคาดเดา ผ่าน
- 6.23 เป็นเส้นเดียวกัน
- 6.29 จุด O และจุดตัดของเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดทั้งสองเป็นจุดที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน
- 6.31 สรุป
เส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดที่ไม่ขนานกันจะตัดกันที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

❖ หน้า (108)

- 6.32 ลากเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดทั้งสอง จะได้จุดตัดระหว่างเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งทั้งสองเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
- 7.4 ใช่
มุมทั้งสองมีขนาดเท่ากันและเท่ากับ 90 องศา
- 7.6 ข้อคาดเดา ตั้งฉาก

❖ หน้า (109)

- 8.5 มีความยาวเท่ากัน
- 8.7 ไม่ได้
- 8.8 ข้อคาดเดา 2 เส้น เท่ากัน

9. สมบัติเกี่ยวกับมุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม

- 9.2 $\overleftrightarrow{FC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม
- 9.3 $\overline{CD}$ เป็นคอร์ด และมุม $\angle FCD$ เป็นมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส
- 9.4 $\angle CED$
- 9.6 เท่ากัน
- 9.8 ข้อคาดเดา เท่ากับ

10 รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

- ❖ หน้า (110)
- 10.2 อยู่บนวงกลม จะได้ว่าเท่ากับ 180 องศา
- 10.3 เท่าเดิม
- 10.4 ข้อคาดเดา 180
- 10.8 เท่าเดิม
- 10.9 แนบในวงกลม
- 10.10 แนบในวงกลม
- 10.11 ข้อคาดเดา แนบใน

สรุป

สมบัติเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่

1. มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
2. มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก
3. มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งทีรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน
4. มุมในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
5. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
6. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน
7. ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
8. ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ยาวเท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือ ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากับส่วนโค้งใหญ่
9. ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดวงกลมออกเป็นสองส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน จะยาวเท่ากัน

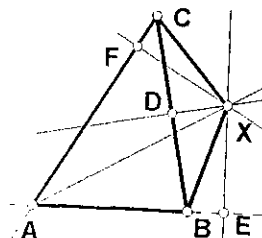
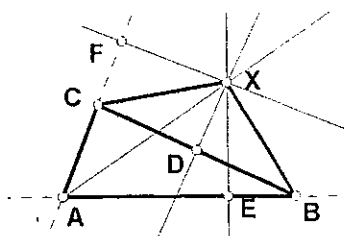
10. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น
11. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมาแบ่งครึ่งคอร์ด (ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น
12. เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น
13. คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน
14. เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
15. ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกัน จะลากได้เพียงสองเส้น และส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน
16. มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของ วงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น
17. ผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมจะเท่ากับ 180 องศา
18. ถ้าผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลม

เฉลย : จัปความผิดอีกที

ไม่ถูกต้อง ผิดที่การสร้างรูป รูปที่ถูกต้องเป็นดังนี้

จากรูป จะเห็นว่า $AF + CF \neq AC$ หรือ $AE + BE \neq AB$

ดังนั้น $AB \neq AC$



5. 5.1 $AD = 9$ หน่วย $OE = 10$ หน่วย

5.2 $AB = 8$ หน่วย $x = 3$ หน่วย

5.3 $m\angle OXB = 90^\circ$

5.4 $OQ = 8$ หน่วย

$BC = 4$ หน่วย

6. 6.1 $m\angle R = 110^\circ$, $m\angle S = 130^\circ$, $m\angle T = 70^\circ$ และ $m\angle U = 50^\circ$

6.2 $m\angle CAB = 48^\circ$, $m\angle ABC = 15^\circ$ และ $m\angle ACB = 40^\circ$

6.3 $m\angle BAC = 40^\circ$, $m\angle BDC = 40^\circ$, $m\angle AEB = 60^\circ$ และ $m\angle ADB = 20^\circ$

7. $m\angle ADC = 90^\circ$, $m\angle BCD = 68^\circ$, $m\angle CBE = 59^\circ$ และ $m\angle DAB = 112^\circ$

8. 8.1 จริง

8.2 จริง

8.3 จริง

9. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$m\angle RAC = m\angle ABC$$

$$m\angle SAB = m\angle BCA$$

$$m\angle PBC = m\angle BAC$$

$$m\angle QBA = m\angle BCA$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$m\angle ADO = m\angle DAO$$

$$m\angle PBC \text{ หรือ } m\angle QBA$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล ที่ทำให้ $m\angle ADO = m\angle DAO$

$AO = DO$ เพราะเป็นความยาวของรัศมีของวงกลม O

$\triangle AOD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $AO = DO$

$m\angle ADO = m\angle DAO$ เพราะเป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

10. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$m\angle CDB = m\angle BAC, m\angle ACB = m\angle BDA, m\angle ACD = m\angle DBA$$

$$m\angle DAC = m\angle DBC, m\angle AXD = m\angle CXB, m\angle AXB = m\angle CXD$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้ ข้อคาดเดาได้เช่นเดียวกับการสำรวจ และที่เพิ่มขึ้นได้แก่

$$m\angle DAB + m\angle DCB = 180^\circ, m\angle ADC + m\angle ABC = 180^\circ$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

$m\angle CDB = m\angle BAC, m\angle ACB = m\angle BDA, m\angle ACD = m\angle DBA, m\angle DAC = m\angle DBC,$
เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่อยู่ตรงข้ามด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

$$m\angle AXD = m\angle CXB, m\angle AXB = m\angle CXD$$

เพราะเป็นมุมตรงข้าม

$$m\angle DAB + m\angle DCB = 180^\circ, m\angle ADC + m\angle ABC = 180^\circ$$

เพราะเป็นผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกันของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมจะเท่ากับ 180°

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

เรื่องส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม (2 คาบ)

หน่วยการเรียนรู้นี้มี 3 หน่วยการเรียนรู้ย่อย ดังนี้

- 2.1 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน
- 2.2 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม
- 2.3 ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัด

ของวงกลม

การสอนหน่วยการเรียนรู้นี้ เป็นการเพิ่มเติมความรู้เกี่ยวกับวงกลม ครูควรสอนโดยให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมที่ระบุไว้ในใบงาน แล้วช่วยกันหาข้อสรุป ในส่วนของแบบฝึกปฏิบัตินั้นจะแยกตามหน่วยการเรียนรู้ย่อย และท้ายสุดของหน่วยการเรียนรู้จะมีแบบฝึกปฏิบัติระคนของหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา สืบเสาะ และให้เหตุผล ในการให้เหตุผลใดที่ซับซ้อนหลายขั้นตอน ครูอาจให้นักเรียนบอกเพียงแต่จะใช้ความรู้เรื่องใดในการให้เหตุผล ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของครูที่จะพิจารณาว่าการให้เหตุผลแบบใดที่เหมาะสมกับนักเรียน

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2.1
เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากคอร์ดตัดกัน

แนวทางคำตอบของใบงาน 2.1

- ❖ หน้า (126)
3. AE, EB, CE, ED
 4. 6 คู่ ได้แก่ AE·EB, AE·CE, AE·ED, EB·CE, EB·ED, CE·ED
 6. $AE \cdot EB = CE \cdot ED$
 7. ข้อคาดเดา $AE \cdot EB = CE \cdot ED$
 8. สร้างรูปหลายขนาด เปลี่ยนตำแหน่งจุด A หรือ B หรือ C หรือ D โดยรูปตรวจสอบ AE, EB, EC และ ED หาค่าของ $AE \cdot EB$, $CE \cdot ED$
 9. เป็นจริง
 10. เท่ากัน
- ❖ หน้า (127)
11. $m\angle AED = m\angle CEB$ เพราะ เป็นมุมตรงข้าม
 $m\angle DAE = m\angle BCE$ เพราะ เป็นมุมในส่วนโค้ง BD เดียวกัน
 12. $\triangle AED \sim \triangle CEB$ เพราะ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่
 13. มี $\frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB} = \frac{AD}{CB}$
 14. เท่ากัน
 15. $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ เพราะจากข้อ 14 และสมบัติการคูณ
สรุป
 ถ้าคอร์ด AB และ CD ของวงกลมวงหนึ่ง ตัดกันภายในวงกลมที่จุด E แล้ว $AE \cdot EB = CE \cdot ED$

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 2.1

1. $x = \frac{24}{7} \approx 3.43$ หน่วย
2. $y = 20$ หน่วย

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.2

เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นตัดของวงกลม

แนวทางคำตอบของใบงาน 2.2

❖ หน้า (129)

2. $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ และ $\overline{AB}$

3. $\overline{PD}$, $\overline{PC}$ และ $\overline{CD}$

4. 9 คู่ ได้แก่ $\overline{PA \cdot PB}$, $\overline{PA \cdot PC}$, $\overline{PA \cdot PD}$, $\overline{PB \cdot PD}$, $\overline{PB \cdot PC}$, $\overline{PB \cdot AD}$, $\overline{AB \cdot PD}$, $\overline{AB \cdot PC}$ และ $\overline{AB \cdot AD}$

6. $\overline{PB \cdot PA} = \overline{PD \cdot PC}$

7. ข้อคาดเดา $\overline{PB \cdot PA} = \overline{PD \cdot PC}$

8. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรงดังกล่าวแล้วหาผลคูณ

9. เป็นจริง

10. เท่ากัน

❖ หน้า (130)

11. $m\angle BPC = m\angle DPA$ เพราะ เป็นมุมร่วม

$m\angle PBC = m\angle PDA$ เพราะ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AC เดียวกัน

12. $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ เพราะ มีมุมที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่

13. มี $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} = \frac{BC}{DA}$

14. เท่ากัน

15. เท่ากัน เพราะ จากข้อ 14 และสมบัติการคูณ

สรุป

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตัด PB ตัดวงกลมที่จุด A และจุด B
เส้นตัด PD ตัดวงกลมที่จุด C และจุด D แล้ว $\overline{PB \cdot PA} = \overline{PD \cdot PC}$

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 2.2

1. $x = \frac{17}{4} \approx 4.25$ หน่วย

2. $AC = \frac{27}{7} \approx 3.86$ หน่วย

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 2.3

เรื่อง ผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม

แนวทางคำตอบของใบงาน 2.3

❖ หน้า (132)

3. ข้อคาดเดา $PB^2 = PC \cdot PD$

4. 4.6 เท่ากัน

4.7 เป็นจริง

❖ หน้า (133)

5. $m\angle PBC = m\angle PDB$ เพราะ มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

$m\angle BPC = m\angle BPD$ เพราะ เป็นมุมร่วม

6. $\triangle BPC \sim \triangle DPB$ เพราะ มีมุมที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่

7. มี $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PB} = \frac{BP}{DP}$

8. เท่ากัน

9. เท่ากัน เพราะ จากข้อ 8 และสมบัติการคูณ

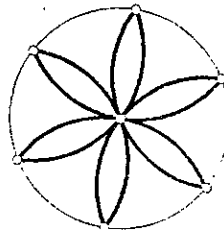
สรุป

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นสัมผัส PB สัมผัสวงกลมที่จุด B เส้นตัด PD ตัดวงกลมที่จุด C และ D แล้ว $PB^2 = PC \cdot PD$

คณิตกับศิลปะ:



หนูพลอยบอกว่า "หนูใช้ความรู้เรื่องวงกลมสร้างดอกไม้ที่หกแฉกได้นะ"
เพื่อนๆ สร้างได้ไหมเอ่ย ?



แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 2.3

1. $x = 6$ หน่วย
2. $PB = \frac{20}{3} \approx 6.67$ หน่วย
3.
 - 3.1 $x = 3$ หน่วย
 - 3.2 $x = 2\sqrt{11} \approx 6.63$ หน่วย
 - 3.3 $x = 22$ หน่วย
 - 3.4 $x = 5$ หน่วย
 - 3.5 $x = 4$ หน่วย
 - 3.6 $x = 24$ หน่วย
4.
 - 4.1 $PC = \frac{84}{11} \approx 6.63$ หน่วย
 - 4.2 $QD = \frac{24}{5} \approx 4.8$ หน่วย
 - 4.3 $CD = \frac{67}{9}$
 - 4.4 $BD = \frac{57}{5} \approx 11.4$ หน่วย
 - 4.5 $DP = \frac{7 + \sqrt{661}}{2}$ หน่วย
 - 4.6 $BQ = 3$ หน่วย
5.
 - 5.1 $m\angle WDE = 90^\circ$
 - 5.2 $m\angle BWD = 100^\circ$
 - 5.3 $m\angle WBD = 40^\circ$
6.
 - 6.1 $AD = 9$ หน่วย
 - 6.2 $AF = 10$ หน่วย
7. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

QA

QB, QC, QD และ QE

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$QA^2 = (QB)(QC)$$

$$QA^2 = (QD)(QE)$$

$$\text{และ } (QB)(QC) = (QD)(QE)$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล

1. $QA^2 = (QB)(QC)$ เพราะ เป็นสมบัติเกี่ยวกับผลคูณของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสและเส้นตัดของวงกลม

2. $QA^2 = (QD)(QE)$ เพราะ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

3. $(QB)(QC) = (QD)(QE)$ เพราะ ต่างเท่ากับ QA^2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

เรื่องการจوابกัน ภาวะร่วมเส้นตรงและการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน(12คาบ)

หน่วยการเรียนรู้นี้มี 10 หน่วยการเรียนรู้ย่อย ดังนี้

- 3.1 เซนทรอยด์
- 3.2 ศูนย์กลางวงล้อม
- 3.3 จุดออร์โทเซนเตอร์
- 3.4 ศูนย์กลางวงกลมแนบใน
- 3.5 ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก
- 3.6 ทฤษฎีบทโตเลมี
- 3.7 ทฤษฎีบทเมเนเลอัส และบทกลับ
- 3.8 ทฤษฎีบทเชวา และบทกลับ
- 3.9 จุดเอกอนเน
- 3.10 เส้นออยเลอร์

การสอนหน่วยการเรียนรู้นี้ เป็นการให้ความรู้ใหม่ที่ไม่เคยปรากฏในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครูควรสอนโดยการให้นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมที่ระบุไว้ในใบงานโดยครูอาจจะช่วยโดยการตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนสำรวจรูปเรขาคณิตต่าง ๆ ตามที่ระบุไว้บททวนเป็นระยะๆ ในส่วนของแบบฝึกปฏิบัตินี้จะแยกตามหน่วยการเรียนรู้ย่อยตั้งแต่หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 ถึง หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 โดยหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9 เป็นเนื้อหาที่เป็นการนำความรู้ในหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 มาใช้ หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.10 เป็นเนื้อหาที่ต่อเนื่องจากหน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.1 –3.3 ดังนั้น ทั้งสองหน่วยการเรียนรู้ย่อยนี้จึงไม่มีแบบฝึกปฏิบัติ และท้ายสุดของหน่วยการเรียนรู้จะมีแบบฝึกปฏิบัติระคนของหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา สืบเสาะ และให้เหตุผล ในการให้เหตุผลใดที่ซับซ้อนหลายขั้นตอน ครูอาจให้นักเรียนบอกเพียงแต่จะใช้ความรู้เรื่องใดในการให้เหตุผล ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของครูที่จะพิจารณาว่าการให้เหตุผลแบบใดที่เหมาะสมกับนักเรียน

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.1

เรื่อง เซนทรอยด์

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.1

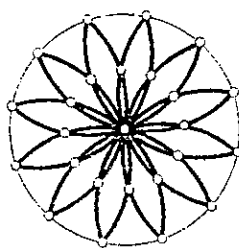
- ❖ หน้า (145)
- 1.2 เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่งมาแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม
- 1.4.2 จุด E
จุด D
จุด G
- 1.4.4 เท่ากัน
- 1.4.5 เป็น เพราะ F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB
- 1.4.6 เป็น
- ❖ หน้า (146)
2. 1.5 ข้อคาดเดา เป็น
- 2.2 เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า เซนทรอยด์
- 2.5 อัตราส่วนระหว่าง BG และ GD = 2 : 1
อัตราส่วนระหว่าง CG และ GF = 2 : 1
อัตราส่วนระหว่าง AG และ GE = 2 : 1
- 2.6 ทั้งสามอัตราส่วนเท่ากัน
- ❖ หน้า (147)
- 2.7 ได้อัตราส่วนเช่นเดิม
- 2.8 ข้อคาดเดา 2 : 1
3. 3.1 6 รูปคือ $\triangle AGD, \triangle DGC, \triangle CGE, \triangle EGB, \triangle BGF$ และ $\triangle FGA$
- 3.2 คำตอบมีได้หลากหลาย
- 3.3 ไม่เท่า โดย S_{ABC} เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่แบ่งออกมา และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่แบ่งออกมาเท่ากัน
- 3.4 ได้ความสัมพันธ์เช่นเดียวกับข้อ 3.3
- 3.5 ข้อคาดเดา มีพื้นที่เท่ากัน
- ❖ หน้า (148)
4. 4.2 เซนทรอยด์ อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมเสมอ

สรุป

1. เส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนของเส้นตรงจwabกัน และจุดจwabนี้เรียกว่า เซนทรอยด์
2. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมัธยะ
3. อัตราส่วนของระยะจากจุดยอดถึงเซนทรอยด์ และระยะจากเซนทรอยด์ถึงจุดกึ่งกลางของด้าน ตรงข้ามเป็น 2 : 1
4. รูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่ได้จากการตัดกันของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีพื้นที่เท่ากัน

คณิตกับศิลปะอีกที

หนูพิมพ์บอกว่า" หนูใช้ความรู้เรื่องวงกลมสร้างดอกเดซี่สิบสองแฉกได้ด้วย"
เพื่อนๆ สร้างได้ไหมเอ๋ย?



แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.1

1. วิธีสร้าง สร้าง $\triangle ABC$

- ❖ กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ
- ❖ ลาก $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ จะได้ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมัธยะ

2. วิธีสร้าง สร้าง $\triangle ABC$

- ❖ กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ
- ❖ ลาก $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันที่จุด G จะได้ จุด G เป็นเซนทรอยด์ของ $\triangle ABC$

3. 3.1 AM = 20 หน่วย SM = 7 หน่วย
 TM = 14 หน่วย และ UM = 8 หน่วย
- 3.2 AY = 16 หน่วย GY = 10 หน่วย และ IY = 9 หน่วย
- 3.3 RH = 42 หน่วย TE = 45 หน่วย

เส้นมัธยฐานยาวเท่ากัน 2 เส้น

$\triangle RAT$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $m\angle TEA = 90$ องศา

$$RA = 2 RE = 2\sqrt{28^2 - 15^2} = 2\sqrt{559} \approx 47.29 \text{ หน่วย}$$

$$S_{RAT} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{559} \cdot 45 = 45\sqrt{559} \approx 1063.94 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$S_{ZEA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{559} \cdot 15 = \frac{15\sqrt{559}}{2} \approx 177.32 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$\text{หรือ } S_{ZEA} = \frac{1}{6} \cdot S_{RAT} = \frac{1}{6} \cdot 45\sqrt{559} = \frac{15\sqrt{559}}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

$$S_{ZEA} = S_{ZAH} = S_{ZHT} = S_{ZTC} = S_{ZCR} = S_{ZRE}$$

- 3.4 DG = 24 หน่วย IG = 12 หน่วย

เส้นมัธยฐานยาวเท่ากัน 3 เส้น

$\triangle DOP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $m\angle PRO = 90$ องศา

$$DO = 2RO = 2\sqrt{24^2 - 12^2} = 2\sqrt{432} = 24\sqrt{3} \approx 41.57 \text{ หน่วย}$$

$$S_{DOP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 36 = 432\sqrt{3} \approx 748.25 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$S_{DGR} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 12 = \frac{1}{6} S_{DOP} = 72\sqrt{3} \approx 124.71 \text{ ตารางหน่วย}$$

$$S_{DGR} = S_{RGO} = S_{OGN} = S_{NGP} = S_{PIG} = S_{IGD}$$

- 3.5 $S_{ABC} = 30$ ตารางหน่วย, $S_{AGX} = 5$ ตารางหน่วย

$$S_{AGX} = S_{BGX} = S_{BGY} = S_{YGC} = S_{CGZ} = S_{ZGA}$$

4. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$ED = CF = BF; \quad DM = EM; \quad AM = FM$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DE}$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

- เหตุผล 1. $\overline{DF} \parallel \overline{AE}$ เพราะส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมจะขนานกับด้านที่สามและยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม
2. $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ เพราะ เช่นเดียวกับข้อที่ 1
3. $\square ADFE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะจากข้อ 1 และ 2
4. $\overline{AF}$ และ $\overline{DE}$ แบ่งครึ่งมุมซึ่งกันและกัน เพราะสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
5. M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DE}$ เพราะ จากข้อ 4

5. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$AD = DP, \quad BD = DC, \quad AC = BP, \quad AB = CP$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CP}, \quad \overline{AC} \parallel \overline{BP}$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$\square ABPC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ตรวจสอบได้ว่าข้อคาดเดาข้างต้นถูกต้อง

- เหตุผล 1. $AD = DP$ เพราะ จากการสร้าง
2. $BD = DC$ เพราะ D เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{BC}$
3. $\square ABPC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

6. ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\text{ข้อแนะ } AP^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

$$\text{ดังนั้น } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

เหตุผล จากความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.2

เรื่อง ศูนย์กลางวงล้อม

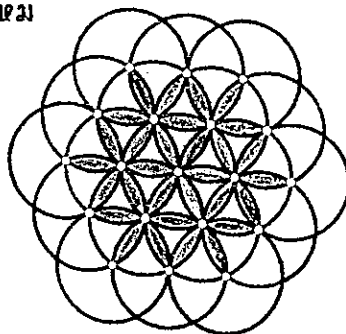
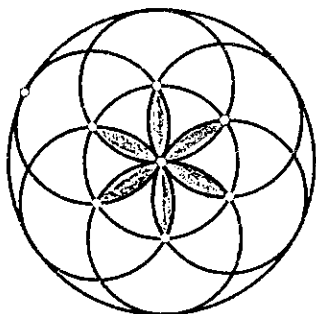
แนวทางคำตอบของใบงาน 3.2

- ❖ หน้า (154)
1. 1.2 1.2.4 เท่ากัน
 - 1.2.7 มุมฉาก
 - 1.2.8 ตั้งฉาก
 - 1.2.9 เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก
 - 1.2.10 เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก
- ❖ หน้า (155)
- 1.3 ข้อคาดเดา เป็น
 2. 2.4 คำตอบมีได้หลากหลาย
 - 2.5 เท่ากัน
 - 2.6 สร้างได้ เพราะ $AO = BO = CO$ นั่นคือ AO เป็นความยาวของรัศมีวงกลม
 - 2.8 จุดทั้งสามอยู่บนวงกลม
- ❖ หน้า (156)
- 2.9 ข้อคาดเดา เท่ากันและเป็นความยาวของรัศมี
 3. 3.3 วิธีสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสาม
 1. ลาก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$
 2. กำหนดจุด D , E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ
 3. สร้างเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ที่จุด D , E และ F ตามลำดับ
 4. กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากทั้งสามเป็นจุด O
 5. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ OA (หรือ OB หรือ OC) สร้างวงกลมจะได้วงกลม O ผ่านจุด A , B และ C
- ❖ หน้า (157)
4. 4.2 ให้จุด G เป็นเซนทรอยด์ และจุด O เป็นศูนย์กลางวงล้อม
จะได้จุด G อยู่ในรูปสามเหลี่ยมเสมอ
 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จุด O เป็นจุดกึ่งกลางบนด้านตรงข้ามมุมฉาก
 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมุมยอดเป็นมุมแหลม จุด O จะอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม
 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมุมยอดเป็นมุมป้าน จุด O จะอยู่นอกรูปสามเหลี่ยม
 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จุด G และ O จะอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

สรุป

1. เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจوابกัน และจุดจوابนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงล้อม
2. ระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน และเป็นความยาวของรัศมี ของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น
3. ถ้ามีจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรงสามจุด สามารถสร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามได้โดย วิธีสร้างเช่นเดียวกับ ข้อ 3.3

นักเรียนสร้างรูปอื่นเช่นเดียวกันกับรูปนี้ได้อีกไหม



แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.2

1. $\triangle ABC$ มี O เป็นศูนย์กลางวงล้อม
2. วิธีสร้าง กำหนดจุดที่ไม่ร่วมเส้นตรง 3 จุด ได้แก่ จุด A, B และ C
 - ❖ สร้าง $\triangle ABC$
 - ❖ กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}, \overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ
 - ❖ ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}, \overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D, E และ F ตามลำดับ
 - ❖ กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากทั้งสามเส้นเป็นจุด O
 - ❖ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ OA หน่วย
 - ❖ สร้างวงกลมจะได้วงกลม O ผ่านจุด A, B และ C

3. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$OA = OB = OC ; AF = FC ; AD = DB ; BE = EC$$

ไม่มีส่วนของเส้นตรงใดที่ขนานกัน

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$OA = OB = OC$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล

$FC = FA$ และ $DA = DB$ เพราะจุด F และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

$m\angle OFC = m\angle OFA$ และ $m\angle ODA = m\angle ODB$ เพราะ $\overline{OF} \perp \overline{AC}$ และ $\overline{OD} \perp \overline{AB}$

$OF = OF$ และ $OD = OD$ เพราะ เป็นด้านร่วม

$\triangle OFC \cong \triangle OFA$ และ $\triangle ODA \cong \triangle ODB$ เพราะ สัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด

$OC = OA$ และ $OA = OB$ เพราะ เป็นด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยม

สองรูปที่เท่ากันทุกประการ

ดังนั้น $OA = OB = OC$

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.3 เรื่อง จุดออร์โทเซนเตอร์

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.3

- ❖ หน้า (160)
1. 1.2 ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดจุดหนึ่งมาตั้งฉาก กับด้านตรงข้าม (หรือส่วนต่อออกไปของด้านตรงข้าม) ของรูปสามเหลี่ยม
 - 1.4 1.4.1 จุด H
 - 1.4.3 วัดขนาดของมุม BFC ว่า $m\angle BFC = 90^\circ$ หรือไม่
 - 1.4.4 เป็น
 - 1.4.5 เป็น
- ❖ หน้า (161)
- 1.5 ข้อคาดเดา เป็น
 2. 2.2 รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีเดล
 - 2.6 6 มุม ได้แก่ $\angle AFD, \angle CFE, \angle CEF, \angle BED, \angle BDE$ และ $\angle ADF$
- ❖ หน้า (162)
- 2.7 คำตอบมีได้หลากหลาย
 - 2.8 เท่ากัน
 - 2.9 ยังมีความสัมพันธ์เช่นเดิม
 - 2.10 ข้อคาดเดา เท่ากัน
 - 2.11 คำตอบมีได้หลากหลาย
 - 2.12 เท่ากัน
 - 2.13 เช่นเดิม
 - 2.14 ข้อคาดเดา แบ่งครึ่ง
 - 2.15 $\triangle AFD, \triangle EBD$ และ $\triangle EFC$ เพราะ มีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 คู่
 - 2.16 ข้อคาดเดา 3 รูป
- ❖ หน้า (163)
3. 3.2 ให้จุด G เป็นเซนทรอยด์, จุด H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์, จุด O เป็นศูนย์กลางวงล้อม จะได้ว่า
 1. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แล้วจุด H จะอยู่ที่ตำแหน่งจุดยอดมุมที่เป็นมุมฉาก
 2. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วจุด G, O และ H เป็นจุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน
 3. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วจุด G, O และ H จะอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนสูงที่ลากจากจุดยอดที่เป็นจุดยอดมุมของมุมยอด
 - 3.1 ถ้ามุมยอดเป็นมุมแหลม แล้ว จุด H อยู่ภายใน $\triangle ABC$

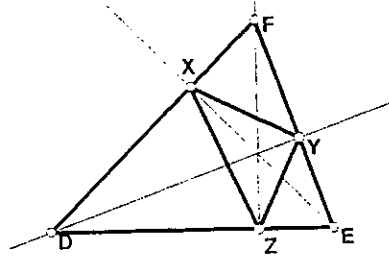
3.2 ถ้ามุมยอดเป็นมุมป้าน แล้ว จุด H อยู่ภายนอก $\triangle ABC$

สรุป

1. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนของเส้นตรงจวบกัน และจุดจวบนี้ เรียกว่า จุดออร์โทเซนเตอร์
2. รูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดตัดระหว่างส่วนสูงกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมพีเดล
3. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดลคู่หนึ่ง ที่ประชิดกัน จะทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมเดิม เป็นมุมที่มีขนาดเท่ากัน
4. ส่วนสูงทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเดิม จะแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมพีเดล
5. ด้านของรูปสามเหลี่ยมพีเดล ทำให้มีรูปสามเหลี่ยมภายในรูปสามเหลี่ยมเดิม 3 รูป ที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมเดิม

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.3

1. สร้าง $\triangle DEF$ แล้วสร้างรูปสามเหลี่ยมพีเดล XYZ ตัวอย่างรูป $\triangle XYZ$



2. สร้าง $\triangle DEF$ แล้วหาจุดออร์โทเซนเตอร์

1. $\triangle DEF$ มี $\triangle XYZ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีเดล
2. $\triangle DEF$ มีจุด H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์

3.

3.1 $m\angle QPR = 50^\circ$	$m\angle RUS = 50^\circ$
$m\angle PST = 73^\circ$	$m\angle QTU = 57^\circ$
$m\angle SUP = 40^\circ$	$m\angle PUT = 40^\circ$
$m\angle TSQ = 17^\circ$	$m\angle QSU = 17^\circ$
$m\angle UTR = 33^\circ$	$m\angle RTS = 33^\circ$

3.2

$m\angle BAC = 35^\circ$	$m\angle EFA = 60^\circ$
$m\angle AEF = 85^\circ$	$m\angle DEC = 85^\circ$
$m\angle BED = 5^\circ$	$m\angle FEB = 5^\circ$
$m\angle CFE = 30^\circ$	$m\angle DFC = 30^\circ$
$m\angle EDA = 55^\circ$	$m\angle ADF = 55^\circ$

3.3

$m\angle ACB = 20^\circ$	$m\angle QDB = 60^\circ$
$m\angle BQD = 50^\circ$	$m\angle PQH = 50^\circ$

4.

4.1 $\triangle PQR \sim \triangle PST \sim \triangle USR \sim \triangle UQT$

4.2 $\triangle ABC \sim \triangle DEC \sim \triangle DBF \sim \triangle AEF$

4.3 $\triangle HBC \sim \triangle DPC \sim \triangle DBQ \sim \triangle AEF$

เน้นให้นักเรียนเห็นว่าไม่คล้ายกับ $\triangle ABC$ ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

5. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$\overline{B'M} \parallel \overline{AD}$$

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{CB}$$

$$m\angle ADC = m\angle MB'C' = 90^\circ$$

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$\square MB'CF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล ให้ $\overline{B'C'}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด X

1. $m\angle ADB = 90^\circ$ เพราะ $\overline{AD} \perp \overline{CB}$
2. $m\angle B'XC = 90^\circ$ เพราะ $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ และ $m\angle B'XC = m\angle ADB$
3. $m\angle MB'C' = 90^\circ$ เพราะ $m\angle MB'C' + m\angle B'XC = 180^\circ$
4. $m\angle AFC = 90^\circ$ เพราะ $\overline{CF} \perp \overline{AB}$
5. $\square MA'C'F$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เพราะ ผลรวมของขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม เท่ากับ 180°

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.4
เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.4

- ❖ หน้า (167)
1. 1.5 วัด $m\angle BCI$ และ $m\angle ACI$ ว่ามีขนาดเท่ากันหรือไม่
 - 1.6 เป็น
 - 1.7 เป็น
 - 1.8 ข้อคาดเดา เป็น
 2. 2.1 ได้
 - 2.2 วิธีสร้างวงกลมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลาง และด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัส
 1. สร้าง $\triangle ABC$
 2. แบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
 3. กำหนดจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามเป็นจุด I
 4. กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับด้านใดด้านหนึ่งผ่านจุด I
 5. กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับด้านเป็นจุด D
 6. ให้ I เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวเท่ากับ ID สร้างวงกลม

จะได้วงกลมที่มี I เป็นจุดศูนย์กลาง และด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัส หรือ เรียกว่า วงกลมแนบใน $\triangle ABC$
- ❖ หน้า (168)
- 2.3.2 เท่ากันเพราะ $\overline{ID} \perp \overline{AB}$, $\overline{IE} \perp \overline{BC}$ และ $\overline{IF} \perp \overline{AC}$ (เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)
 - 2.3.3 เท่ากัน
 - 2.3.4 ข้อคาดเดา เท่ากัน
 3. 3.2 ให้จุด G เป็นเซนทรอยด์ O เป็นศูนย์กลางวงล้อม H เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ และ I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบใน

ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว จุด G, O, H และ I เป็นจุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้ว จุด G, O, H และ I จะอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เป็นส่วนสูงที่ลากจากจุดยอดที่เป็นจุดยอดมุมของมุมยอด
- ❖ หน้า (169)
- สรุป
1. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบใน
 2. ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบในถึงด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน
 3. วิธีสร้างวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ เช่นเดียวกับวิธีสร้างในข้อ 2.2

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.4

1.

1.1

	รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม	รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
เซนทรอยด์	ใน	ใน	ใน
ศูนย์กลางวงล้อม	ใน	นอก	บนด้านตรงข้ามมุมฉาก
จุดออร์โทเซนเตอร์	ใน	นอก	บนจุดยอดมุมฉาก
ศูนย์กลางวงกลมแนบใน	ใน	ใน	ใน

1.2 อยู่ร่วมบนเส้นตรงเดียวกัน

1.3 เป็นจุดเดียวกัน

2. 2.1 b 2.2 c 2.3 a 2.4 f 2.5 d 2.6 e

3.

1. แบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของ $\triangle PQR$

2. กำหนดจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งทั้งสามเส้นเป็นจุด I

3. ลาก $\overline{IX} \perp \overline{PQ}$ ที่จุด X

4. ให้ I เป็นจุดศูนย์กลาง สร้างวงกลมรัศมียาวเท่ากับ IX

ดังนั้น จะได้วงกลม I ที่มีด้านทั้งสามของ $\triangle PQR$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม

หมายเหตุ : ครูแนะนำให้นักเรียนสังเกตว่าสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในเพียงสองเส้นก็ได้จุด I แล้ว

4.

ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$IF = IE = ID$$

ไม่มีส่วนของเส้นตรงขนานกัน

ตัวอย่างของข้อคาดเดาที่อาจได้

$$IF = IE = ID$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล

1. $m\angle IDB = m\angle IEB = 90^\circ$ และ $m\angle ICE = m\angle IFC = 90^\circ$ เพราะ $ID \perp \overline{AB}$, $IE \perp \overline{BC}$ และ $IF \perp \overline{AC}$ 2. $m\angle DBI = m\angle EBI$ และ $m\angle ECI = m\angle FCI$ เพราะ I เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน $\angle ABC$ และ $\angle BCA$ ตามลำดับ3. $ID = IB$ และ $IC = IF$ 4. $\triangle IDB \cong \triangle IEB$ และ $\triangle ICE \cong \triangle ICF$ เพราะมีความสัมพันธ์แบบ ม.ม.ด.

5. $ID = IE$ และ $IE = IF$ เพราะเป็นด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

$$ID = IE = IF$$

5. ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

6. ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.5

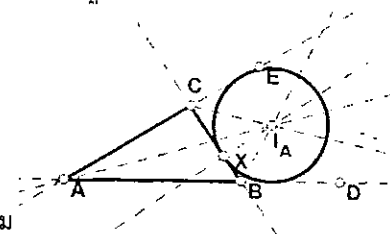
เรื่อง ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.5

❖ หน้า (174)

1. 1.6 เป็น
- 1.7 เป็น
- 1.8 ข้อคาดเดา เป็น
2. 2.1 ได้
- 2.2 วิธีสร้างวงกลมที่มี I_A เป็นจุดศูนย์กลาง และด้าน BC และส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของ $\triangle ABC$ เป็นเส้นสัมผัส

1. สร้าง $\triangle ABC$
3. ลาก $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ และ $\overleftrightarrow{CA}$
4. กำหนดจุด D และ E เป็นจุดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{AC}$ ตามลำดับ ดังรูป
5. สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม DBC และมุม BCE
6. กำหนดจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสองเป็นจุด I_A
7. สร้างเส้นตั้งฉากกับด้าน BC ผ่านจุด I_A
8. กำหนดจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{BC}$ เป็นจุด X
9. ให้ I_A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ $I_A X$ สร้างวงกลม
จะได้วงกลมที่มี I_A เป็นจุดศูนย์กลาง และด้าน BC และส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของ $\triangle ABC$ เป็นเส้นสัมผัส
หรือเรียกว่า วงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ ที่สัมผัสด้าน BC



❖ หน้า (175)

- 2.3 2.3.2 เท่ากัน เพราะ $\overline{ID} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{IE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ และ $\overline{IF} \perp \overleftrightarrow{AC}$ (เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส)
- 2.3.3 เท่ากัน
- 2.3.4 ข้อคาดเดา เท่ากัน

❖ หน้า (176)

3. 3.2 $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีเดลของ $\triangle I_a I_b I_c$

สรุป

1. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกสองมุมและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นจวนกันและจุดจวนนี้เรียกว่า ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก

2. ระยะจากศูนย์กลางวงกลมแนบนอกถึงด้านและส่วนต่อของด้านอีกสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน และเป็นความยาวของรัศมีของวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านนั้นและส่วนต่อของด้านอีกสองด้านดังกล่าวเป็นเส้นสัมผัส
3. สร้างวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม มีวิธีสร้างเช่นเดียวกับข้อ 2.2
4. สืบเนื่องจากข้อ 1 ข้างต้น รูปสามเหลี่ยมเดิมเป็น รูปสามเหลี่ยมพีเดล ของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการลากเส้นเชื่อมศูนย์กลางวงกลมแนบนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.6
เรื่อง ทฤษฎีบทโตเลมี

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.6

- ❖ หน้า (180)
 - 1. 1.4 เท่ากัน
 - 1.5 เท่ากัน
 - 1.6 ข้อคาดเดา $ac + bd = mn$
 - 2. 2.5 ไม่เท่า โดย $ac + bd > mn$

- ❖ หน้า (181)
 - 2.6 มีบางกรณีที่ $ac + bd = mn$
 - 2.7 ข้อคาดเดา $ac + bd \geq mn$
 - 2.8 ไม่เสมอไป
 - 2.9 ถ้า D อยู่บนวงกลม $ac + bd = mn$
 - ถ้า D ไม่อยู่บนวงกลมแล้ว $ac + bd > mn$

สรุป

1. ทฤษฎีโตเลมี : ถ้าจุดยอดทั้งสี่จุดของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนวงกลมเดียวกัน แล้วผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามจะ เท่ากับ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม
2. ผลบวกระหว่างผลคูณของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมจะมากกว่าหรือเท่ากับผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.6

ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

$$\text{จาก } \square ABCP \text{ ได้ว่า } (BC)(PA) + (AB)(PC) = (AC)(PB)$$

$$\text{จาก } \square ABPD \text{ ได้ว่า } (AD)(PB) + (AB)(PD) = (BD)(PA)$$

ตัวอย่างข้อคาดเดาที่อาจได้

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

ตรวจสอบได้ว่า ข้อคาดเดาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล

$$(BC)(PA) + (AB)(PC) = (AC)(PB) \quad \text{----- (1)}$$

$$(AD)(PB) + (AB)(PD) = (BD)(PA) \quad \text{----- (2)}$$

ให้ $AD = AB = BC = CD = x$ หน่วย

$$\text{จาก (1) ; } x(PA) + x(PC) = \sqrt{2} x \cdot (PB)$$

$$PA + PC = \sqrt{2}(PB)$$

$$PA(PA + PC) = \sqrt{2}(PA)(PB) \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{จาก (2) ; } x(PB) + x(PD) = \sqrt{2} x \cdot (PA)$$

$$PB + PD = \sqrt{2}(PA)$$

$$PB(PB + PD) = \sqrt{2}(PA)(PB) \quad \text{----- (4)}$$

$$(3) = (4); PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.7

เรื่อง ทฤษฎีบทเมเนเลส์ และบทกลับ

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.7

3.7.2 ทฤษฎีบทเมเนเลส์

❖ หน้า (187)

2. เป็น

- 3.1 1) เท็จ
2) เท็จ
3) จริง
4) จริง

3.2 ค่า k เป็นลบ เพราะจุดแบ่งอยู่บนส่วนของด้านทำให้อัตราส่วนของความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ได้จากการแบ่งส่วนของเส้นตรงเป็นลบ

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

4. เช่นเดียวกับข้อ 3

5. ข้อคาดเดา $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$

❖ หน้า (188)

ข้อแนะ 1

เพราะ $m\angle XPA = m\angle YPB$ และ $m\angle AXP = m\angle BYP$

เพราะ $m\angle BQY = m\angle CQZ$ และ $m\angle BYQ = m\angle CZQ$

เพราะ $m\angle CZR = m\angle AXR$ และ $m\angle ZRC = m\angle XRA$

ข้อแนะ 2

1. เพราะ เป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

2. เพราะ เป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

3. เพราะ เป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

$$1 \times 2 \times 3, \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} = \frac{AX}{BY} \cdot \frac{BY}{CZ} \cdot \frac{CZ}{AX} = 1$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

สรุป

ทฤษฎีบทเมเนเลส์ : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้าจุด P, Q และ R เป็นจุดร่วมเส้นตรงแล้ว

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

3.7.3 บทกลับทฤษฎีบทเมเนเลอส์

❖ หน้า (189)

2. $k = -1$
6. ทับกัน
7. เป็น
8. เช่นเดียวกัน
9. เป็น
10. ข้อคาดเดา เป็นจุดร่วมเส้นตรง

❖ หน้า (190)

$$\begin{aligned}\frac{CR'}{R'A} &= \frac{CR}{RA} \\ \frac{CR'}{R'A} + 1 &= \frac{CR}{RA} + 1 \\ \frac{CR' + R'A}{R'A} &= \frac{CR + RA}{RA}\end{aligned}$$

โดยความรู้เรื่องการกำหนดทิศทางของเส้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{CA}{R'A} &= \frac{CA}{RA} \\ RA &= R'A\end{aligned}$$

เนื่องจาก R และ R' เป็นจุดบนด้าน (หรือส่วนต่อของด้าน) AC เดียวกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าจุด R และ R' ต้องเป็นจุดเดียวกัน

สรุป

บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลอส์ : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม จุด P, Q และ R อยู่บนด้านหรือ

ส่วนต่อของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ ถ้า $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$

แล้ว จุด P, Q และ R เป็น จุดร่วมเส้นตรง

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.7

1. 1.1 บวก 1.5 ลบ
 1.2 บวก 1.6 ลบ
 1.3 บวก 1.7 บวก
 1.4 ลบ

2. 2.1 บวก 2.5 ลบ
 2.2 ลบ 2.6 ลบ
 2.3 ลบ 2.7 ลบ
 2.4 บวก

3. ตัวอย่างที่อาจได้จากการสำรวจ

จุด M, L และ N

จุด L, E และ D

จุด L, A และ B

จุด M, B และ C

จุด N, F และ A

จุด M, F และ E

จุด N, D และ C

ตัวอย่างของข้อาคัดเตาที่อาจได้

จุด L, M และ N เป็นจุดร่วมเส้นตรง

ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคัดเตาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล พิจารณา AB และ $\triangle XYZ$ โดยใช้ทฤษฎีบทเมเนเลอส์จะได้ว่า $\frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XA}{AY} \cdot \frac{YL}{LZ} = -1$ (1)

พิจารณา CD และ $\triangle XYZ$ โดยใช้ทฤษฎีบทเมเนเลอส์จะได้ว่า $\frac{ZC}{CX} \cdot \frac{XV}{VF} \cdot \frac{YD}{DZ} = -1$ (2)

พิจารณา FE และ $\triangle XYZ$ โดยใช้ทฤษฎีบทเมเนเลอส์จะได้ว่า $\frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YE}{EZ} = -1$ (3)

(1)•(2)•(3) จะได้ว่า $\frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XV}{VF} \cdot \frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZC}{CX} \cdot \frac{XV}{VF} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YE}{EZ} = -1$ (4)

แต่ $ZB \cdot ZC = EZ \cdot DZ$

$XF \cdot XA = CX \cdot BX$

$YD \cdot YE = AY \cdot FY$

นั่นคือ จาก (4) จะได้ $\frac{ZM}{MX} \cdot \frac{XV}{VF} \cdot \frac{YL}{LZ} = -1$

ดังนั้น จุด L, M และ N เป็นจุดร่วมเส้นตรง

4. ตรวจสอบได้ว่า ข้อาคัดเตาข้างต้นน่าจะถูกต้อง

เหตุผล บทกลับของทฤษฎีบทเมเนเลอส์

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.8 เรื่อง ทฤษฎีบทเซวา และบทกลับ

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.8

3.8.1 ทฤษฎีบทเซวา

❖ หน้า (195)

2. เป็นเส้นจวบกัน

3. 3.1 1) จริง
2) จริง
3) เท็จ
4) เท็จ

3.2 ค่าของ k เป็นบวก เพราะ

ถ้าจุด L, M และ N อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ ทั้งสามจุด

แล้ว $\frac{AN}{NB}$, $\frac{BL}{LC}$ และ $\frac{CM}{MA}$ มีค่าเป็นบวกทั้งสามจำนวน

ถ้าจุด L, M และ N อยู่บนด้านของ $\triangle ABC$ เพียง 1 จุด อีก 2 จุดอยู่บนส่วนต่อของด้าน

ของ $\triangle ABC$ แล้ว $\frac{AN}{NB}$, $\frac{BL}{LC}$ และ $\frac{CM}{MA}$ มีค่าเป็นบวกหนึ่งจำนวนอีกสองจำนวนมีค่า

เป็นลบ

❖ หน้า (196)

4.
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

5. ข้อคาดเดา
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

ส่วนต่อข้อแนะ

$$\frac{(AB)(XN)(CM)(AN)(BL)(XC)}{(BN)(XC)(MA)(AB)(LC)(XN)} = 1$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

❖ หน้า (197)

สรุป

ทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\leftrightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow$ และ CN เป็นเส้นตรงเชื่อม

จุดยอด A, B และ C กับ จุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ

ถ้าเส้นตรงทั้งสามเป็นเส้นจวบกัน แล้ว
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

3.8.2 บทกลับของทฤษฎีบทเซวา

❖ หน้า (198)

3. $k = 1$

7. ทับกัน

8. ได้

9. เป็น เพราะตัดกันที่จุด X

10. ข้อคาดเดา เป็น เส้นจวบกัน

11. ถ้า $\overleftrightarrow{AL}$ และ $\overleftrightarrow{BM}$ ตัดกันที่จุด X ลาก $\overleftrightarrow{CX}$ ตัดด้าน AB ที่จุด N'

จากทฤษฎีบทเซวา จะได้ $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

แต่จากสิ่งที่กำหนดให้ว่า $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

ดังนั้นจะได้ $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}$$

$$\frac{AN'}{N'B} + 1 = \frac{AN}{NB} + 1$$

$$\frac{AN' + N'B}{N'B} = \frac{AN + NB}{NB}$$

$$\frac{AB}{N'B} = \frac{AB}{NB}$$

$$NB = N'B$$

เนื่องจาก N และ N' เป็นจุดบนด้าน (หรือส่วนต่อของด้าน) AC เดียวกัน จึงสามารถสรุปได้ว่า จุด N

และ N' ต้องเป็นจุดเดียวกัน

นั่นคือ $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นจวบกัน

❖ หน้า (199)

สรุป

บทกลับของทฤษฎีบทเซวา : กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ และ $\overleftrightarrow{CN}$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุดยอด A, B และ C กับจุด L, M และ N บนด้านหรือส่วนต่อของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับถ้า

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \text{ แล้วเส้นตรงทั้งสามนี้เป็นเส้นจวบกัน}$$

แนวทางคำตอบของแบบฝึกปฏิบัติ 3.8

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{AN}{NP} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LR}{RA} = 1 \\
 & \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{MP}{PB} = 1 \\
 & \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AB}{BN} \cdot \frac{NQ}{QC} = 1 \\
 & \frac{MC}{CA} \cdot \frac{AR}{RL} \cdot \frac{LN}{NM} = 1 \\
 & \frac{NA}{AB} \cdot \frac{BP}{PM} \cdot \frac{ML}{LN} = 1 \\
 & \frac{LB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QN} \cdot \frac{NM}{ML} = 1
 \end{aligned}$$

2. จากรูป จุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ และ $\overline{AB}$

จะได้ $BD = DC$, $CE = EA$ และ $AF = FB$

$$\frac{BD}{DC} = 1, \frac{CE}{EA} = 1 \text{ และ } \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

นั่นคือ $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นจwabกัน

$$3. \text{ จากรูป } \overrightarrow{AD} \text{ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม } \angle CAB \text{ แล้ว } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{จากรูป } \overrightarrow{BE} \text{ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม } \angle ABC \text{ แล้ว } \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{จากรูป } \overrightarrow{CF} \text{ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม } \angle BCA \text{ แล้ว } \frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} \\
 &= \frac{AB}{BA} \cdot \frac{BC}{BC} \cdot \frac{AC}{AC} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

โดยบทกลับของทฤษฎีบทเซวาจะได้ว่า

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{CF}$ เป็นเส้นจwabกัน

หน่วยการเรียนรู้ย่อยที่ 3.9 เรื่อง จุดเกือกอนเน

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.9

❖ หน้า (202)

1. 1.6 ผ่านจุด G
- 1.7 ยังผ่านจุด G
- 1.8 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$
- 1.9 ข้อคาดเดา เป็นเส้นจวบกัน
- 1.10 $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$ ดังนั้น $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ เป็นเส้นจวบกัน

❖ หน้า (203)

2. 2.4 รูปสามเหลี่ยมเกือกอนเน
- 2.5 6 จุด
- 2.6 เท่ากัน
- 2.7 ได้ เพราะ ระยะจากจุด I ถึงจุดตัดแต่ละจุดเท่ากัน ซึ่งเป็นความยาวของรัศมีของวงกลม
- 2.8 ยังอยู่บนวงกลมเดียวกัน
- 2.9 ข้อคาดเดา 6 จุด และทุกจุดนั้นอยู่บนวงกลมเดียวกัน
3. 3.2 ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว เซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม
ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จูออธรีโทเซนเตอร์ และจุดเกือกอนเน เป็นจุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน

สรุป

1. เส้นที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดที่วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมสัมผัสด้านตรงข้ามจุดยอดทั้งสามเส้นเป็นเส้นจวบกัน และจุดจวบนี้เรียกว่า จุดเกือกอนเน
2. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดสัมผัสทั้งสามของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม จะได้รูปสามเหลี่ยม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมเกือกอนเน
3. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุดเกือกอนเนและขนานกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเกือกอนเน แล้วจะตัดรูปสามเหลี่ยมเดิม 6 จุด และทุกจุดที่ได้จะอยู่บนวงกลมเดียวกัน เรียกววงกลมนี้ว่าวงกลมอาดัม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3.10

เรื่อง เส้นออยเลอร์

แนวทางคำตอบของใบงาน 3.10

❖ หน้า (205)

1. 1.3 เป็นเส้นตรงเดียวกัน
- 1.4 เป็นเส้นตรงเดียวกัน
- 1.5 ข้อคาดเดา เป็นจุดร่วมเส้นตรง
2. 2.2 $\frac{OG}{OH} = \frac{2}{1}$
- 2.3 $\frac{OG}{OH} = \frac{2}{1}$
- 2.4 ข้อคาดเดา 2 : 1

❖ หน้า (206)

3. 3.4 1. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เส้นออยเลอร์ เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด ส่วนสูงและเส้นมัธยฐาน เป็นเส้นเดียวกัน และเซนทรอยด์ ศูนย์กลางวงล้อม จุดออร์โทเซนเตอร์ และศูนย์กลางวงกลมแนบใน เป็นจุดที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน
2. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เส้นออยเลอร์ เส้นแบ่งครึ่งมุมยอด ส่วนสูง และ เส้นมัธยฐาน ที่ลากจากจุดยอด ที่เป็นจุดยอดมุมของ $\triangle ABC$ เป็นเส้นเดียวกัน
3. ถ้า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ศูนย์กลางวงกลมแนบในไม่อยู่บน เส้นออยเลอร์ ยกเว้นกรณีที่ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

สรุป

1. ศูนย์กลางวงล้อม เซนทรอยด์ และจุดออร์โทเซนเตอร์ ของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดร่วมเส้นตรงเรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นออยเลอร์
2. อัตราส่วนของระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงเซนทรอยด์ และระยะจากศูนย์กลางวงล้อมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์เท่ากับ 2 : 1

รายชื่อ ไฟล์ที่สร้างโดย GSP เพื่อใช้ประกอบในกิจกรรมของบทเรียนเรขาคณิต

หน่วยการเรียนรู้ที่	ใบงาน	เนื้อหาเรื่อง	ชื่อไฟล์
1	1.1	จุด เส้นตรง และระนาบ	Less1-3.gsp
	1.2(1.2.2)	รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน	Trisas01.gsp
	1.2(1.2.3)	รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม	Triasa01.gsp
	1.2(1.2.5)	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน	Trisss01.gsp
	1.3(1.3.2)	เส้นขนานและมุมภายใน	Parrall01.gsp
	1.4(1.4.2)	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	Pyta00.gsp
	1.4(1.4.2)	บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส (กิจกรรมสำรวจ 1)	Repyta01.gsp
	1.4(1.4.2)	กิจกรรม 2	Repyta02.gsp
	1.4(1.4.3)	รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	Poly01.gsp
	1.4(1.4.4)	รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	Poly02.gsp
	1.4(1.4.5)	รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	Poly03.gsp
	1.4(1.4.6)	รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	Poly04.gsp
	1.4(1.4.8)	รูปสี่เหลี่ยมว่าว	Poly05.gsp
	1.4(1.4.9)	รูปสี่เหลี่ยมคางหมู	Poly06.gsp
	1.5(1.5.1)	รูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน (ตัวอย่าง 1)	Simcir01.gsp
		(ตัวอย่าง 2)	Simqua02.gsp
		(ตัวอย่าง 3)	Simpol01.gsp
		(ตัวอย่าง 4)	Simtri01.gsp
	1.5(1.5.2)	รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน	Trisim33.gsp
	1.6(1.6.2)	ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน	Cir21.gsp
		ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน	Cir22.gsp
		สมบัติเกี่ยวกับมุมที่สัมพันธ์กับคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม	CirJ01.gsp
		รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม	Quad31.gsp
		รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม	Quad32.gsp
3	3.1	เซนทรอยด์	Tmed001.gsp
	3.1	เซนทรอยด์	Tmed002.gsp

หน่วยการเรียนรู้ที่	ใบงาน	เนื้อหาเรื่อง	ชื่อไฟล์
3	3.1	เซนทรอยด์	Median01.gsp
	3.2	ศูนย์กลางวงล้อม	Tcir001.gsp
		ศูนย์กลางวงล้อม	Tcir002.gsp
		ศูนย์กลางวงล้อม (ตรวจสอบสมบัติที่ได้)	Circum32.gsp
	3.3	จุดออร์โทเซนเตอร์	Tortho01.gsp
		จุดออร์โทเซนเตอร์ (รูปสามเหลี่ยมพีแดล)	Tortho02.gsp
	3.4	ศูนย์กลางวงล้อมแนบใน (ตรวจสอบสมบัติที่ได้)	Incen32.gsp
	3.5	ศูนย์กลางวงกลมแนบนอก (ตรวจสอบสมบัติที่ได้)	Excen32.gsp

หนังสืออ้างอิง

- กระทรวงศึกษาธิการ. กรมวิชาการ. (2516). *แบบเรียนคณิตศาสตร์ ข. ตอนที่ 3 (เรขาคณิต)*
ประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย. พิมพ์ครั้งที่ 11. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2536). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 101*
คณิตศาสตร์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 102 คณิตศาสตร์ 2*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2537). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 203 คณิตศาสตร์ 3*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ:
 โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 204 คณิตศาสตร์ 4*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2540). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. พิมพ์ครั้งที่ 2
 กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2536). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์
 คุรุสภา.
- _____. (2537). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์
 คุรุสภา.
- _____. (2537). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 022 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์
 คุรุสภา.
- _____. (2536). *คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย*. กรุงเทพฯ:
 โรงพิมพ์คุรุสภา.
- Barbeau, Edward J. (1995?). *A Taste Of Mathematics*. Toronto: The Canadian Mathematical
 Society (CMS).
- Clemens, Stanley R. et al. (1994). *Geometry*. Menlo Park, California: Addison-Wesley.
- Coxeter, H.S.M. & Greitzer. (1981). *Geometry Revisited*. Sixth Printing. Washington, D.C.:
 The Mathematical Association of America.
- Coust, Nothan. (1952). *College Geometry*. New York: Hentry Holt.
- Gay, David. (1998). *Geometry by Discovery*. New York: John Wiley & Sons.
- Goodwin, A. Wilson, Vannatta, Gleen D. & Crosswhite, F. Joe, Consultant. (1970).
Geometry. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill.
- Gusev, V. Litvinenko, V. & Mordkovich, V. (1988). *Solving Problem in Geometry*. Moscow:
 Mir Publishers.
- Hall, H.S. & Stevens, F.H. (1960). *A School Geometry Part I-VI*. London: Mcmillan.

- Hoss Honsberger. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Moise, Edwin E. & Downs, Floyd L. (1967). *Geometry*. Menlo Park, California: Addison-Wesley.
- Posamentier, Alfred S. & Sheridan. (1982). *Investigations in Geometry*. Menlo Park, California: Addison-Wesley.
- Posamentier, Alfred S. (1984). *Excursion in Advanced Euclidean Geometry*. Revised Edition. Menlo Park, California: Addison-Wesley.
- Schacht, John F. & McLennan, Roderick C. (1957). *Plane Geometry*. New York: Hentry Holt.
- Serra, Michael. (1993). *Discovering Geometry An Inductive Approach*. Berkeley, California: Key Curriculum Press.
- Sharygin, I.F. (1988). *Problems in Plane Geometry*. Moscow: Mir Publishers.
- Smart, James R. (1973). *Modern Geometry*. Monterey, California: Wadsworth.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-ชื่อสกุล	นางวรรณวิภา สุทธเกียรติ
เกิดวันที่	19 กรกฎาคม พุทธศักราช 2503
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	73/6 ซอยอารีย์สัมพันธ์ 1 แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพมหานคร
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 2 ระดับ 6
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย เขตพญาไท กรุงเทพมหานคร รหัสไปรษณีย์ 10400
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2521	จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนศรีวิกรม์ กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2525	จบการศึกษาระดับปริญญาตรี วท.บ.(ศึกษาศาสตร์) วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
พ.ศ. 2527	จบการศึกษาระดับปริญญาโท คม. (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2536	จบการศึกษาระดับปริญญาตรี ศษ.บ.(บริหารการศึกษา) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช
พ.ศ. 2542	จบการศึกษาระดับปริญญาเอก กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

516.00285

1259ก.

8.3

การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

บทคัดย่อ

ของ

วรรณวิภา สุทธิเกียรติ

1 - ก.ก. 2542

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุริยบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา

มีนาคม 2542

121356

h 23083

วรรณวิภา สุททเกียรติ. (2542). การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้. ปรินญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร. สมพล เล็กสกุล, รองศาสตราจารย์ ดร. พิชากร แปลงประสพโชค, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมวงษ์ แปลงประสพโชค.

การวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมาย เพื่อพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ บทเรียนประกอบด้วยเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ กิจกรรมการเรียนรู้มีลักษณะส่งเสริมให้นักเรียนคิดจินตนาการ เพิ่มพูนความรู้ทางเรขาคณิตด้วยการลงมือปฏิบัติเอง โดยการสำรวจตั้งข้อาคัดเดา และสืบเสาะหาเหตุผลตามความเหมาะสมเพื่อตรวจสอบข้อาคัดเดาที่ตั้งไว้ด้วยเป้าหมายที่ให้นักเรียนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์เกณฑ์การตัดสิน 70/70

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองตามขั้นตอนการพัฒนาบทเรียนเรขาคณิต ได้แก่ นักเรียนอาสาสมัครจำนวน 42 คน ซึ่งเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย ปีการศึกษา 2541

ผู้วิจัยได้กำหนดเครื่องมือและขั้นตอนการวิจัย 4 ขั้นตอนคือ

1. กำหนดสมรรถภาพด้านเนื้อหาเรขาคณิตที่จำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยทำการวิเคราะห์เนื้อหาจากหนังสือเรียนและเอกสารที่เกี่ยวข้อง แล้วสอบถามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและการสอนเรขาคณิต

2. การสร้างบทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยนำสมรรถภาพที่จำเป็นสำหรับนักเรียนที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างในลักษณะหน่วยการเรียนรู้จำนวน 3 หน่วย ครอบคลุมเนื้อหาในเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตระบบยูคลิด ส่วนของเส้นตรงที่สัมพันธ์กับวงกลม การจwabกันภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ร่วมบนวงกลมเดียวกัน ที่ใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ พร้อมทั้งได้สร้างคู่มือการใช้ซอฟต์แวร์และคู่มือครูเพื่อใช้ในการเรียนการสอน เวลาเรียนและปฏิบัติการทั้งส่วนที่เป็นเนื้อหาเรขาคณิตและเกี่ยวกับซอฟต์แวร์จำนวน 18 คาบ คาบละ 50 นาที

3. การสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือหาประสิทธิภาพ 2 ชุด ได้แก่ แบบฝึกปฏิบัติระคน เป็นแบบฝึกที่ให้นักเรียนทำหลังเรียนจบแต่ละหน่วยการเรียนรู้ เพื่อนำคะแนนมาหาประสิทธิภาพของกระบวนการเรียน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต เป็นแบบทดสอบรวมที่ใช้ทดสอบกลุ่มตัวอย่างหลังเรียนจบทุกหน่วยการเรียนรู้ เพื่อนำคะแนนมาหาประสิทธิภาพของผลลัพธ์รวม

4. การตรวจสอบและหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิต ผู้วิจัยได้นำบทเรียนเรขาคณิตที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยในการทดลองสองครั้งแรกเพื่อตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่อง ได้ทำการทดลองเป็นรายบุคคลกับนักเรียน 3 คน และทำการทดลองเป็นกลุ่มย่อยกับนักเรียน 9 คน พบว่าส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องเกี่ยวกับการนำเสนอเนื้อหาและกิจกรรมในบางตอน ในการทดลองครั้งที่สาม ซึ่งเป็นการตรวจสอบหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรขาคณิตได้ทำการทดลองภาคสนามกับนักเรียน 30 คน พบว่าบทเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์การตัดสิน 70/70

ดังนั้น บทเรียนเรขาคณิตที่พัฒนาขึ้นสามารถทำให้นักเรียน เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้และมีลักษณะตามที่กำหนดในความมุ่งหมายข้างต้น

DEVELOPMENT OF COMPUTER-BASED GEOMETRY LESSON

AN ABSTRACT

BY

WANWIPA SUTHTAKEIT

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Doctor of Education degree in Mathematics Education

At Srinakharinwirot University

March 1999

Wanwipa Suthtakeit. (1999). Development of Computer-Based Geometry Lesson. Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok : Graduate School, Srinakarinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Sompon Lekskul, Assoc. Prof. Dr. Pichakorn Plaengprasopshoke, Asst. Prof. Dr. Somwong Plaengprasopshoke

The objective of this research was to develop a computer-based geometry lesson for science-mathematics students in high schools. The lesson consisted of basic knowledge of geometry essential for further study in the field of science and mathematics. The learning activities were designed to encourage students to use their imagination and creativity for increasing their knowledge of geometry through their own practice by exploration, making conjectures, investigation and reasoning to verify their own conjectures. The researcher aimed at meeting an efficiency criterion of 70/70.

The experimental group for this research was a group of forty-two volunteers high-school science-mathematics students from Samsenwittayalai School, Bangkok, in the academic year 1998.

The researcher followed the following steps:

1. Identifying content competency through analysis of textbooks and related literature and through interviews and discussions with experts.
2. Designing the lesson comprising of three units based on the content competency found in first step. The lesson covered the following contents: fundamental concepts of Euclidean geometry; circles and related segments; and concurrency, collinearity, and concyclic points. The lesson was completed with the Geometer's Sketchpad (GSP), a software manual and a teacher's handbook. The teaching learning process involved 18 periods, each of which lasting 50 minutes.
3. Designing two instruments to measure the efficiency of the lesson: the first instrument took the form of unit practice exercises, which were intended to evaluate the efficiency of the learning process, the other instrument came in the form of an achievement test to be taken after the three units have been completed. The test sought to identify the efficiency as a whole of the learning results.
4. Test-using the lesson three times: the first two times were to identify and thus corrected any shortcomings. Those two times were taught individually to three students and to a group of nine students. It was found out that the lesson had certain

problems concerning content presentation and learning activities. The third time which was to measure the efficiency of the lesson showed an efficiency criterion of 70/70

Therefore, this geometry developed lesson was able to help the students to increase their learning achievement and to meet the expected criteria.