

515.74

๓/๗๗

ร. 3

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ปริญญานิพนธ์

ของ

กวรรณิกา คล่องกิจกุล

23 เม.ย. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2527

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

177698

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

บทคัดย่อ

ของ

กรรณิกา คล่องกิจกุล

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
มีนาคม 2527

การศึกษาค้างนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์
กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

กลุ่มทดลองได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียน
ที่ 2 ปีการศึกษา 2526 จำนวน 20 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้แบบเรียน
ที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
ใช้เวลาสอน 11 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้มีประสิทธิภาพ โดยการทดสอบ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

A STUDY OF EFFICIENCY OF A LESSON ON DIFFERENTIABLE FUNCTIONS
EMPHASIZING ANALYTICAL PROCESS OF THOUGHT

AN ABSTRACT

BY

KANNIKA KLONGKIJKOL

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University

March 1984

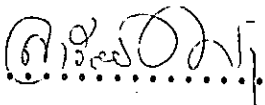
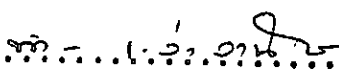
The purpose of this study was to study the efficiency of a lesson on Differentiable Functions emphasizing analytical process of thought.

The subjects were 20 undergraduate students at Srinakharinwirot University, Pitsanuloke, registered for Math. 411 Mathematical Analysis in the second semester of the academic year 1983. The researcher taught them by using lesson on Differentiable Functions emphasizing analytical process of thought for 11 periods. Each period was 50 minutes. The achievement test on Differentiable Functions was administered at the end of the experiment.

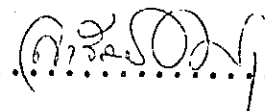
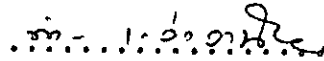
The result indicated that the lesson on Differentiable Functions emphasizing analytical process of thought was efficient with the statistical hypothesis test at 0.01 level of significance.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปัญหานี้จน
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.......... ประธาน
.......... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.......... ประธาน
.......... กรรมการ
.......... กรรมการ

ประกาศขอบคุณ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำอย่างดียิ่งจาก
รองศาสตราจารย์ ดร. ลาวัณย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และอาจารย์พัชรพร
เหล่านิชย์ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุเทพ ทองอยู่ ที่กรุณาช่วยเหลือแนะนำ
และให้คำปรึกษา และอาจารย์วิวรรณ วนิชชาติ ที่กรุณาให้ความร่วมมือในการ
ดำเนินการวิจัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา
ทางคานสถิติที่ใช้ในการวิจัย

ท้ายสุด ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณของมารดาและพี่ ที่ให้ความอุปการะ
ในคานกำลังใจ ในการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

กรณีกา คล่องกิจกล

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	3
	ขอบเขตของการวิจัย	4
	สมมติฐานในการวิจัย	4
2	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	5
	เอกสารเกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์	5
	แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	7
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"	10
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"	15
3	วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	19
	กลุ่มตัวอย่าง	19
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	19
	วิธีดำเนินการทดลอง	21
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	21
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	24
5	สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	26
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	26
	สมมติฐานของการวิจัย	26

บทที่

หน้า

กลุ่มตัวอย่าง 26

สรุปผลการวิจัย 27

อภิปรายผล 27

ข้อเสนอแนะ 28

บรรณานุกรม 30

ภาคผนวก 34

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

- | | | |
|---|---|----|
| 1 | จำนวนนิสิตในกลุ่มที่ได้คะแนนสูงและกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ | 24 |
| 2 | การคำนวณหาค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 | 25 |

ภูมิหลัง

นักการศึกษาจำนวนมากสนใจในการปรับปรุงการเรียนการสอน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เพราะคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์สาขาหนึ่งที่มีความสำคัญทำให้บุคคลรู้จักคิด คิดอย่างมีเหตุผล และคิดอย่างมีระเบียบเป็นขั้นตอน นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยส่งเสริมสมรรถภาพหลายอย่างในตัวบุคคล เช่น การมีสมาธิ การสังเกต ความประณีต ความแม่นยำ ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้มีความจำเป็นต่อการดำรงชีวิต โครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นเริ่มจากธรรมชาติมนุษย์จะต้องรู้จักวิธีการหาเหตุผลเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ตามธรรมชาติ โดยสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์อันประกอบด้วย อนิยาม นิยาม สัจพจน์หรือข้อตกลงเบื้องต้น และโดยอาศัยการพิสูจน์อย่างมีเหตุผล นำไปสู่การตั้งเป็นกฎหรือทฤษฎี แล้วนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติต่อไป กฎหรือทฤษฎีเป็นสิ่งที่จำเป็นที่นักคณิตศาสตร์จะต้องสร้างขึ้นเพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการแก้ปัญหา ตลอดจนเป็นการสร้างสรรค์คณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้ายิ่งขึ้น

นิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัย จะต้องศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์ ถ้าเป็นนิสิตที่เรียนหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตก็จะนำความรู้ความเข้าใจในการพิสูจน์เป็นพื้นฐานเพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ในระดับสูงต่อไป ส่วนนิสิตที่เรียนในหลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษาสามารถที่จะนำวิธีการพิสูจน์ไปใช้โดยการประยุกต์ เนื่องจากวิธีการพิสูจน์มีรูปแบบต่าง ๆ กัน เช่น การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การพิสูจน์โดยทางตรง การพิสูจน์โดยทางอ้อม เป็นต้น นิสิตส่วนมากจะประสบปัญหาในเรื่องการเลือกรูปแบบที่จะใช้ในการพิสูจน์ จากการสอบถามนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งในหลักสูตร

วิทยาศาสตร์บัณฑิต และการศึกษาบัณฑิต พบว่าสิ่งที่เป็นปัญหาสำหรับผู้เรียน คือ ผู้เรียนไม่สามารถพิสูจน์ได้ทั้งนี้เพราะไม่ทราบแนวทางในการพิสูจน์ คือผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มตนอย่างไรในการพิสูจน์ ไม่สามารถโยงสิ่งที่มียอยู่แล้วหรือสิ่งที่ทราบมาแล้ว ช่วยในการพิสูจน์ได้

การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเป็นวิธีที่จะทำให้ ผู้เรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ได้ดีขึ้นวิธีหนึ่ง โดยเริ่มวิเคราะห์จากปัญหาหรือสิ่งที่ ต้องการพิสูจน์ว่ามีอะไรบางอย่างที่เป็นสาเหตุทำให้เกิดผลเช่นนั้น และสาเหตุใดที่ผู้พิสูจน์ สามารถจะอ้างได้จากสมมติฐานหรือความรู้ต่าง ๆ ที่เคยเรียนมาแล้ว ถ้ายังหาข้อสรุป ไม่ได้ก็พิจารณาต่อไปอีก จากการศึกษาจากผู้เชี่ยวชาญหลายท่านพอจะสรุปลำดับขั้นของ การวิเคราะห์กระบวนการคิดได้ดังต่อไปนี้

1. วิเคราะห์โจทย์ปัญหา เพื่อหาข้อมูลที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. พิจารณาว่าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์นั้นมาจากสาเหตุใด
3. หาความสัมพันธ์จากข้อมูลที่กำหนดให้เกี่ยวข้องกับนิยามที่ยอมรับหรือ ทฤษฎีที่เคยพิสูจน์มาแล้ว อันเป็นแนวทางที่จะนำไปสู่เหตุนั้น ๆ
4. เลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด โดยยึดหลักที่ว่า ต้องเป็นวิธีที่ง่าย สั้น ชัดเจน และรัดกุม

การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดโดยมีขั้นตอน ดังกล่าวข้างต้นจะส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้จักการวิเคราะห์ ทำให้ผู้เรียนมองเห็นความสัมพันธ์ขององค์ประกอบพื้นฐานของโจทย์ปัญหา สามารถพิจารณาได้ว่าต้องใช้นิยาม หรือทฤษฎีใดที่เคยได้ศึกษามาแล้ว เพื่อที่จะนำไปสู่ข้อสรุปที่ต้องการ

เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (differentiable functions) ประกอบด้วยเนื้อหาที่เป็นนามธรรมและเน้นการพิสูจน์ ซึ่งจะตองใช้นิยามหรือทฤษฎีต่าง ๆ ที่เคยพิสูจน์มาแล้วหลายทฤษฎีมาช่วยในการพิสูจน์บางครั้งจำเป็นที่จะต้องสร้างประพจน์ที่เป็นจริงเพื่อช่วยในการพิสูจน์ การวิเคราะห์กระบวนการคิดจะ

ทำให้เห็นชัดเจนว่าขั้นตอนใดจะต้องใช้องค์ประกอบพื้นฐานใดหรือใช้ความรู้เดิมเรื่องใด และขั้นตอนใดต้องใช้การสร้างประพจน์ที่เป็นจริงแบบใดมาใช้ในการพิสูจน์ การวิเคราะห์กระบวนการคิดจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจกระบวนการพิสูจน์ และสามารถเรียบเรียงการพิสูจน์ได้

ในปัจจุบันตำราที่ใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ส่วนมากจะอยู่ในรูปที่พิสูจน์ให้สำเร็จแล้ว ผู้เรียนจึงไม่ทราบถึงสาเหตุของการเลือกรูปแบบในการพิสูจน์ว่าเหตุใดจึงต้องใช้การพิสูจน์แบบนั้น ๆ และจะมีทางพิสูจน์แนวอื่นอีกหรือไม่ เป็นเหตุให้ผู้เรียนไม่เข้าใจการพิสูจน์นั้นอย่างแท้จริง

เนื่องจากเหตุผลดังกล่าวมาแล้ว ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์ที่จะสร้างแบบเรียนที่เน้นรูปแบบการวิเคราะห์กระบวนการคิด ซึ่งแตกต่างไปจากตำราเรียนที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนทั่วไป เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้กับนิสิตปริญญาตรีที่เรียนคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแนะแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

2. เพื่อเป็นแนวทางในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น
3. เพื่อเสนอแนะแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ทำการทดลองกับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ และเนื้อหาที่ใช้ทดลอง คือฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ตามหลักสูตรคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526

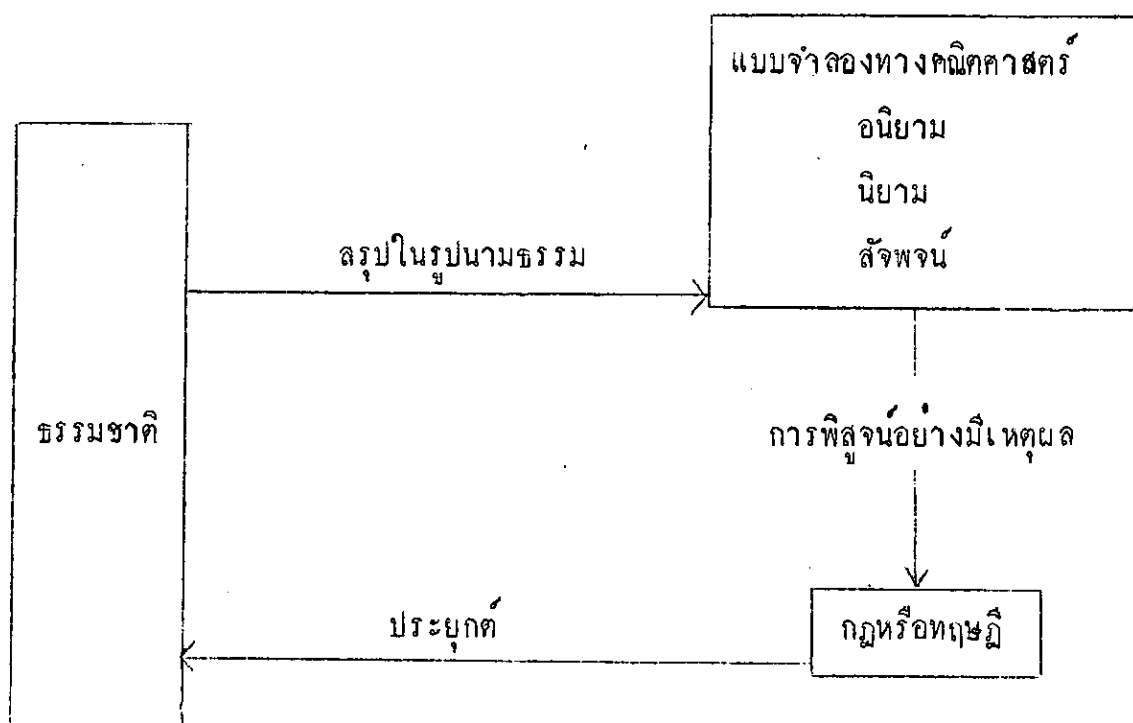
สมมติฐานการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ มีประสิทธิภาพ

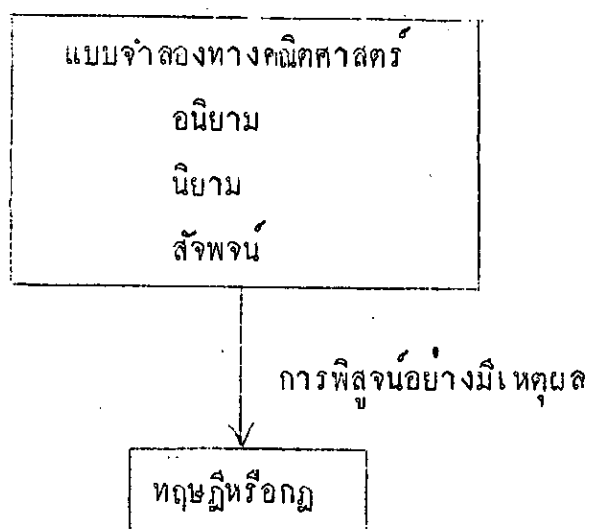
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เอกสาร เกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์

สุเทพ จันทรสมบัติ (สุเทพ จันทรสมบัติ 2521 : 151) กล่าวว่า โครงสร้างคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นเริ่มจากธรรมชาติ ศึกษาประสบการณ์ต่าง ๆ แล้วสรุป ในรูปนามธรรมเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย อxiom นิยาม และ สัจพจน์ จากนั้นใช้การพิสูจน์อย่างมีเหตุผลสรุปเป็นกฎหรือทฤษฎีแล้วนำไปประยุกต์ใช้ กับธรรมชาติ เมื่อเกิดปัญหาก็อาจเปลี่ยนแปลงแก้ไขกฎเกณฑ์บางอย่างเพื่อปรับปรุงให้ ถูกต้อง และนำไปใช้เป็นประโยชน์ได้ดียิ่งขึ้น



และเรียกโครงสร้างเฉพาะส่วนในแผนภาพข้างล่างนี้ว่าระบบนิติศาสตร์



ภาพประกอบ 1 แสดงโครงสร้างของนิติศาสตร์

แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

บุหงา วัธนะ (บุหงา วัธนะ 2515 : 2) กล่าวว่า คณิตศาสตร์แนวใหม่ เน้นความเข้าใจมากกว่าความจำ เน้นความสำคัญของหลักการทางคณิตศาสตร์และความคิดรวบยอดต่าง ๆ วิธีคิดตามลำดับเหตุผลตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่างเรื่องต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ส่งเสริมให้ผู้เรียนศึกษาค้นหาหลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง

คณีย บังค (คณีย บังค 2521 : 2) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ที่จะทำให้เกิดประโยชน์จะต้องสอนให้เป็นแบบต่อเนื่องและสัมพันธ์กัน ให้ผู้เรียนเกิดแนวความคิดซึ่งถือเป็นเรื่องจำเป็น อีกประการหนึ่งก็คือ การแสดงให้เห็นแนวทางในการพิสูจน์หลาย ๆ แนวทาง จะเป็นการเร้า สร้างความสนใจ และให้ประสบการณ์หลายด้าน ที่สำคัญก็คือ การที่ผู้เรียนรู้จักเลือกวิธีการพิสูจน์ หรือวิธีการแก้ปัญหาที่ง่ายที่สุด และเหมาะสมที่สุด ซึ่งมีข้อยืนยันว่าผู้เรียนจะเข้าใจสภาพของปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง

คินเซลลา (คินเซลลา อ้างอิงมาจาก ทบวงมหาวิทยาลัย 2524 : 32) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการผลิตครูคณิตศาสตร์ ว่าด้วยการผลิตครูให้บรรลุคุณลักษณะของครูคณิตศาสตร์ที่ดี ซึ่งเกณฑ์ในการเป็นครูคณิตศาสตร์ที่ดีนั้นคือ

1. รอบรู้ในคุณลักษณะของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
2. เตรียมตัวในเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง
3. มีประสบการณ์ในการเรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ โดยการเรียนด้วยตนเอง
4. มีประสบการณ์ในการสร้างงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหา
5. มีประสบการณ์ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และนำไปใช้แก้ปัญหาได้
6. มีประสบการณ์ในการรวม การย่อยส่วนต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์
7. มีประสบการณ์ในการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในสาขาที่เกี่ยวข้องได้

อารี สันหนวี และคนอื่น ๆ (อารี สันหนวี และคนอื่น ๆ อ้างอิงมาจาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2519 : 13 - 14) กล่าวว่า การสอนของครูโดยทั่วไป

จะให้สาระแก่ผู้เรียน 2 ประการ ประการแรกคือ ความรู้หรือเนื้อหาสาระที่เป็นข้อเท็จจริง ซึ่งถ้าผู้เรียนเรียนรู้แล้วแต่ไม่นำไปใช้ก็จะไม่เกิดประโยชน์แต่อย่างใด สาระอีกประการหนึ่งก็คือ ความคิดหรือขบวนการที่ช่วยให้คิดเป็นแก้ปัญหาเป็น เสาะแสวงหาความรู้เป็น และมีแรงจูงใจใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้ยังได้แสดงความคิดเห็นว่า การเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษาแตกต่างจากระดับมัธยมศึกษา และประถมศึกษาอย่างมากก็คือ ในระดับอุดมศึกษาผู้เรียนจะต้องสามารถพัฒนาศักยภาพของตนให้สูงสุด และพร้อมกันนั้นก็ต้องพัฒนาบุคลิกภาพไปด้วย เพื่อให้เป็นคนที่มีคุณภาพและสามารถใช้คุณสมบัตินี้ไปพัฒนาสังคมได้ ดังนั้นผู้สอนในระดับนี้จึงต้องมุ่งให้สาระในประการหลังให้มากเป็นพิเศษ เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้จักคิดและคิดเป็น นั่นคือ การใช้ความคิดโดยอาศัยข้อมูลและเหตุผลเป็นเครื่องมือ

ชมเพลิน จันทรเรืองเพ็ญ (ชมเพลิน จันทรเรืองเพ็ญ 2519 : 42 - 43) กล่าวว่า การสอนแบบอภิปรายเป็นการสอนที่สำคัญมาก เพราะทำให้ผู้เรียนรู้จักคิดและร่วมในการอภิปราย ซึ่งเป็นจุดมุ่งหมายอย่างหนึ่งของการเรียนในมหาวิทยาลัย การสอนแบบอภิปรายเป็นการสอนซึ่งให้โอกาสแก่ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น และช่วยในการสร้างสัมพันธ์ภาพระหว่างผู้สอนและผู้เรียนให้ดีขึ้น ประโยชน์ที่ผู้เรียนผู้สอนได้รับก็คือ

1. ทั้งผู้เรียนและผู้สอนมีสิทธิ์ในการอภิปรายเท่ากัน
2. ผู้เรียนมีโอกาสดแสดงความคิดเห็น ซึ่งสอดคล้องกับปรัชญาการศึกษาในมหาวิทยาลัยที่มุ่งให้ผู้เรียนรู้จักคิดวิเคราะห์ วิจาร์ณ และพิจารณาปัญหาด้วยความรอบคอบ มีเหตุผล
3. ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้จากกันและกัน
4. ผู้สอนไม่ผูกขาดการสอนในฐานะผู้รู้แต่ผู้เดียว แต่มีบทบาทช่วยเหลืออธิบาย แนะนำ
5. ผู้สอนมีโอกาสดได้รับการสะท้อนกลับว่า การสอนของตนเองและการเรียนของนักศึกษาเป็นอย่างไร ทำให้เข้าใจปัญหาการเรียนของผู้เรียนได้ดีขึ้น

กรุลิก (Kruilik. 1977 : 650) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูจะต้องสร้างสถานการณ์เพื่อให้ผู้เรียนได้เผชิญกับปัญหา เพื่อให้เขาได้ค้นหาและพินิจพิเคราะห์ให้ได้มาซึ่งคำตอบ บางครั้งอาจจะไม่ได้คำตอบตามที่เขาวางใจได้ แต่นั่นไม่ใช่สิ่งสำคัญเท่ากับการที่ผู้เรียนได้ฝึกทักษะในวิธีการค้นหาหรือการพินิจพิเคราะห์ (อาจเป็นการพิสูจน์) หมายความว่า วิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบในการแก้ปัญหา ดังนั้น การเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรหาวิธีการที่จะแก้ปัญหา และทำให้นักเรียนสามารถรู้จนถึงขั้นแก้ปัญหาได้

คิลก คิลกานนท์ (คิลก คิลกานนท์ 2525 : 65) กล่าวว่า จุดมุ่งหมายของการศึกษาในปัจจุบันคือ การสอนให้ผู้เรียนคิดเป็น ทำเป็น และแก้ปัญหาเป็น ซึ่งผู้เรียนจะแก้ปัญหาเป็นได้นั้นต้องมีความสามารถคิดเป็นมาก่อน และการจะสอนให้ผู้เรียนคิดเป็นนั้นควรให้เขาได้มีโอกาสคิดวิเคราะห์ตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

1. วิเคราะห์ว่าอะไรคือปัญหา ขั้นนี้ผู้เรียนจะต้องรวบรวมปัญหาและหาข้อมูลพร้อมสาเหตุของปัญหาจากการคิด การถาม การอ่าน หรือพิจารณาจากข้อเท็จจริงนั้น ๆ
2. กำหนดทางเลือก เมื่อหาสาเหตุของปัญหาได้แล้วผู้เรียนจะต้องหาทางเลือกที่จะแก้ปัญหานั้น โดยพิจารณาความเป็นไปได้และข้อจำกัดต่าง ๆ ทางเลือกที่จะแก้ปัญหานั้นไม่จำเป็นจะต้องมีทางเลือกเดียว อาจมีหลายทางเลือกก็ได้
3. เลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด เป็นการพิจารณาเลือกทางเลือกที่จะแก้ปัญห โดยมิเกณฑ์ในการตัดสินใจที่สำคัญคือ ผลดี ผลเสีย ที่จะเกิดขึ้นจากทางเลือกนั้น
4. ตัดสินใจเพื่อพิจารณาเลือกอย่างรอบคอบในขั้นตอนที่ 3 แล้วจึงตัดสินใจเลือกทางเลือกที่คิดว่าดีที่สุด

ทบวงมหาวิทยาลัย (ทบวงมหาวิทยาลัย 2524 : 140) กล่าวว่า ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ทุกระดับจะมีจุดประสงค์ข้อหนึ่งระบุว่า ให้นักเรียนมีความสามารถในการคิดแก้ปัญหา ครูคณิตศาสตร์ที่ตระหนักถึงภารกิจสำคัญนี้ต้องพยายามหาวิธีการเพื่อพัฒนาความสามารถในการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน ปัญหาที่จะนำมาฝึกให้นักเรียนคิดนั้นอาจจะจัดแบ่งเป็นหลายประเภทดังต่อไปนี้

1. ปัญหาที่เป็นการค้นหาข้อความจริง หรือข้อสรุปใหม่ที่นักเรียนยังไม่เคยรู้มาก่อน
2. ปัญหาซึ่งมาจากการอภิปรายในชั้นเกี่ยวกับเนื้อหา
3. ปัญหาที่เกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือข้อสรุปที่มีผู้อื่นตั้งไว้
4. ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ มาใช้
5. ปัญหาที่ไม่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ แต่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการแก้ปัญหา

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความสำเร็จของ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"

ยุพิน พิพิธกุล (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 102 - 106) กล่าวว่า การวิเคราะห์ หมายถึง การแยกแยะปัญหาออกจากสิ่งที่ไม่รู้ไปสู่สิ่งที่รู้ หรือการแยกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รวมกัน ออกจากกัน ผู้ที่วิเคราะห์จะต้องพยายามคิดอยู่เสมอว่าต้องการค้นพบอะไร เป็นครั้งแรก และคิดต่อไปว่าอะไรที่จะค้นพบต่อไป การสอนแบบวิเคราะห์เป็นการสอนที่มีลักษณะ ดังนี้

1. เริ่มต้นจากสิ่งที่ไม่รู้ไปหาสิ่งที่รู้แล้ว
2. เริ่มต้นจากข้อสรุปไปหาสมมติฐาน
3. เป็นกระบวนการคิดอย่างสำรวจ
4. เป็นการวิเคราะห์ข้อความในการแก้ปัญหา
5. เป็นการพัฒนาความคิดอย่างแท้จริง

บอร์น เอสแตรนด์ และโดมิโนสกี (Bourne Estrand and Dominoski. 1971 : 9) ให้ความเห็นว่า การแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสวงหาความรู้ ความคิด จากประสบการณ์ก่อน ๆ และส่วนประกอบของสถานการณ์ที่เป็นปัญหายุ่งยากในปัจจุบัน โดย นำมาจัดเรียงลำดับใหม่เพื่อผลของความสำเร็จในความมุ่งหมายเฉพาะอย่าง

ซาลิวสกี (Zalewski. 1978 : 2804 - A) ได้ศึกษาองค์ประกอบในการ แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า สิ่งที่เป็นองค์ประกอบมีดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์
2. ความสามารถในการจัดกระทำ
3. ความสามารถในการอ่านและตีความ
4. มโนคติทางคณิตศาสตร์
5. ทักษะในการคำนวณ

ทบวงมหาวิทยาลัย (ทบวงมหาวิทยาลัย 2524 : 147) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากประสบการณ์ในการแก้ปัญหา และการสอนนักเรียนแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจกับปัญหา โดยพิจารณาแยกแยะระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. จากสิ่งที่กำหนดให้แปลงให้อยู่ในรูปที่ชัดเจน โดยใช้แผนภาพและรูปภาพประกอบ
3. จากแผนภาพที่สร้างขึ้น พิจารณาหาเงื่อนไขอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยอาศัยนิยาม คุณสมบัติ ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เคยเรียนมาแล้ว
4. ในบรรดาสิ่งที่กำหนดให้กับเงื่อนไขที่ได้เพิ่มเติมมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร หรือมีเงื่อนไขอะไรเพิ่มเติมอีกหรือไม่
5. คิดหาวิธีแก้ปัญหา โดยพิจารณาถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกันและทดลองเลียนแบบวิธีแก้ปัญหา หรืออาจวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์ต้องการพิจารณาว่าต้องมีเงื่อนไขใดอีกจึงจะได้สิ่งที่ต้องการ และเงื่อนไขนั้นจะหามาได้อย่างไร
6. เรียบเรียงลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา
7. ทดสอบคำตอบว่าสมเหตุสมผลหรือไม่
8. ถ้าการแก้ปัญหทำได้หลายวิธี เลือกวิธีที่ง่ายและสั้นที่สุด และในการแก้ปัญหามองอย่าง รูปภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้ข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาเป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น ซึ่งสะดวกต่อการแก้ปัญหา

จอห์นสัน (จอห์นสัน อ้างอิงมาจาก ทบวงมหาวิทยาลัย 2524 : 141) กล่าวว่า การแก้ปัญหาต้องใช้กระบวนการซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้พื้นฐาน ความคิดรวบยอดและทักษะที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ การที่นักเรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้นั้น นักเรียนควรได้รับการฝึกฝนให้มีความรู้พื้นฐานดังต่อไปนี้

1. มีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจ มีความคิดรวบยอดและเนื้อหาเกี่ยวกับปัญหา
2. มีความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความและการขยายความ
3. มีความสามารถในการแปลงข้อความให้เป็นสัญลักษณ์หรือแผนภาพ
4. มีความสามารถในการวิเคราะห์หาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่มีอยู่กับประสบการณ์เก่า
5. มีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน การวิเคราะห์หาตัวแบบและการหาข้อสรุป

โพลยา (Polya. 1977 : 5 - 36) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์อาจแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ ปัญหาให้ค้นหาและปัญหาให้พิสูจน์

ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาซึ่งให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ส่วนที่สำคัญของปัญหาให้ค้นหาแบ่งได้เป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดและเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนด

ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาซึ่งให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่า "ข้อความที่กำหนดเป็นจริง" หรือ "ข้อความที่กำหนดเป็นเท็จ" ส่วนสำคัญของปัญหาให้พิสูจน์แบ่งได้เป็น 2 ส่วนคือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

โพลยา ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยระบุว่า วิธีการแก้ปัญหาของคณิตศาสตร์มีขั้นตอนดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา
2. วางแผนการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน
4. ตรวจสอบขบวนการแก้ปัญหา

1. ทำความเข้าใจปัญหา การทำความเข้าใจปัญหาในขั้นแรกต้องทำความเข้าใจกับคำ วลีหรือประโยคย่อย ๆ ในตัวปัญหา และจะถือว่ามีความเข้าใจปัญหา ก็ต่อเมื่อ สามารถแยกแยะส่วนสำคัญของปัญหาแต่ละส่วน เช่น ปัญหาให้ค้นหาต้องสามารถระบุสิ่งต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดและเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนด

2. วางแผนการแก้ปัญหา หลังจากทำความเข้าใจปัญหาจนสามารถแยกแยะส่วนสำคัญของปัญหาแล้วก็ถึงขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ยากที่สุดในการแก้ปัญหาต้องฝึกฝนมาก ในขั้นนี้ต้องใช้ทั้งขบวนการที่เรียกว่า การสังเคราะห์และการวิเคราะห์ เราจะต้องพิจารณาว่า จากข้อมูลที่กำหนดหรือสมมติฐานจะนำไปสู่ผลใดบ้าง และมีข้อมูลใดบ้างที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการหาหรือผลลัพธ์ ซึ่งอาจจะไม่ใช่ข้อมูลที่กำหนดในตัวปัญหา การพิจารณาดังกล่าวอาจใช้บทนิยาม คุณสมบัติ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้ศึกษาก่อนแล้ว รวมทั้งอาจพิจารณาปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว ซึ่งมีความคล้ายกัน ถ้าเป็นปัญหาให้ค้นหาต้องพิจารณาเงื่อนไขให้ถี่ถ้วน

ในขั้นการวางแผนแก้ปัญหานี้ ผู้ที่จะแก้ปัญหาต้องมีความรู้ที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ต้องได้รับการฝึกสมองในการคิดและการให้เหตุผลมาอย่างดี ต้องมีความสนใจและความตั้งใจในการแก้ปัญหา และส่วนประกอบอีกส่วนหนึ่งคือ "ความมีโชค" ในการแก้ปัญหาบางครั้งแม้ว่าจะมีความรู้พื้นฐานดี ฝึกคิดและให้เหตุผลมาอย่างดี มีความสนใจและความตั้งใจในการที่จะแก้ปัญหา แต่ถ้าไม่มีโชคก็อาจจะประสบความลำบากในการแก้ปัญหาหรืออาจไม่สามารถแก้ปัญหา

3. คำแนะนำการตามแผน ในขั้นตอนนี้สิ่งที่เราต้องทำคือ เรียบเรียงและเติมรายละเอียดตามแผนที่วางไว้ให้สมบูรณ์ ชัดเจน พิจารณารายละเอียด ตรวจสอบความถูกต้องแต่ละขั้นไปตามลำดับ การใช้ภาษาที่ชัดเจน เข้าใจง่ายและสมเหตุสมผล เป็นสิ่งที่ช่วยให้เข้าใจวิธีการแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้นทั้งสำหรับตนเองและผู้อื่น โดยปกติแล้วขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่จะแสดงให้เห็นวิธีการแก้ปัญหา

4. ตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา การตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหเป็นขั้นตอนที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง เมื่อเราได้คิดและแสดงวิธีการแก้ปัญหาแต่ละขั้นโดยละเอียดแล้ว เราสมควรตรวจสอบขั้นตอนการที่สมบูรณ์ เพราะจะช่วยให้เราเข้าใจปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาโดยส่วนรวมทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาอื่น ๆ ขั้นตอนนี้จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ถ้ามีข้อบกพร่องตรงส่วนใดเราอาจพบและแก้ไขหรือแม้กระทั่งอาจเกิดความคิดที่จะคิดแปลงวิธีการแก้ปัญหาให้ง่าย สั้น และชัดเจนยิ่งขึ้น รวมทั้งอาจเกิดความคิดที่จะแก้ปัญหาคิม ซึ่งคิดแปลงข้อมูลไปบ้างอันอาจนำไปสู่การแก้ปัญหาใหม่

จรรยา ฤๅกม (จรรยา ฤๅกม 2524 : 20) ได้สรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ คือ

ขั้นที่ 1 เป็นขั้นตีความและทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งประกอบด้วยวิธีการแก้ปัญหาคงตัวอย่าง เช่น

1. การทำความเข้าใจความหมายของคำ และสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา
2. การมองปัญหาในหลาย ๆ แง่มุม เพื่อดูความเป็นไปได้ของปัญหา
3. การวาดรูปประกอบปัญหถ้าเป็นไปได้
4. การหาส่วนที่สำคัญของปัญหา เช่น สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่ให้มา และเงื่อนไขต่าง ๆ

5. การค้นหาความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ของปัญหา

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นการวางแผนในการแก้ปัญหา ซึ่งประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ ดังนี้

1. การทบทวนความรู้ที่มี ซึ่งจะท้องใช้ในการแก้ปัญหา
2. การคิดถึงวิธีการให้เหตุผลเพื่อจะสรุปสิ่งที่ต้องการ
3. การแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาว่าอะไร เป็นขั้นใหญ่ อะไร เป็นขั้นย่อย จะท้องหาอะไรก่อน อะไรหลัง

4. การพิจารณาปัญหาที่ใกล้เคียงกัน เพื่อจะดูว่ามีอะไรร่วมหรือคล้ายกันบ้าง จะได้แก้ปัญหาลักษณะที่คล้าย ๆ กัน

5. การพิจารณาว่าขอมูลที่ใหม่นั้นเพียงพอหรือไม่

6. การเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสม

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นที่หาคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่สุดของปัญหา ประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ เช่น

1. การลงมือคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2

2. การคาดคะเนคำตอบที่ใกล้เคียง

3. การตรวจสอบความเป็นไปได้จากคำตอบ รวมถึงการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ

4. การตรวจสอบว่าคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ให้มาหรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบกระบวนการต่าง ๆ ในการหาคำตอบ

5. การปรับปรุงคำตอบให้เป็นคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"

จรรยา ภูอกม (จรรยา ภูอกม 2524 : 51). ได้ทำการวิจัยเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นรายวิชาระหว่างนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับค่า และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 6 โรงเรียน ในกรุงเทพมหานคร จำนวน 425 คน เป็นนักเรียนชาย 235 คน และนักเรียนหญิง 190 คน แล้วทำการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 3 ฉบับ และคัดลอกคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่างจากโรงเรียน แล้วนำข้อมูลมาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับค่า และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายกับนักเรียนหญิง

ผลการวิจัยปรากฏว่า ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยทุกวิชา แต่เมื่อแยกเป็นรายวิชา มีบางวิชาที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่สัมพันธ์กันกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับได้ต่ำ มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และพบว่า นักเรียนชายกับนักเรียนหญิงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

เสนอ คุณประเสริฐ (เสนอ คุณประเสริฐ 2526 : 17) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ กลุ่มทดลอง ได้แก่ นิสิตปริญญาตรี ปีที่ 2 ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ในภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2525 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 44 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลาสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะสรุปว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้มีประสิทธิภาพสูงโดยการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

เมเยอร์ (Mayer. 1983 : 2584 - A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการสอนการแก้ปัญหามีขั้นตอน ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาลักษณะคิของนักศึกษาระดับวิทยาลัย ปีที่ 1 ซึ่งเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองได้รับการสอนแก้ปัญหาเป็นรูปแบบซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ 1. ทำความเข้าใจปัญหา 2. กำหนดทางเลือกที่จะแก้ปัญห 3. ดำเนินการแก้ปัญห 4. ตรวจสอบผลที่ได้ ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยวิธีปกติและไม่อ้างอิงถึงรูปแบบ

การแก้ปัญหาทั้ง 4 ขึ้นนั้น ทั้ง 2 กลุ่มจะทำแบบฝึกหัด แบบสำรวจทัศนคติ และแบบทดสอบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเหมือนกัน ผลปรากฏว่า

1. คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบของทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

2. ทัศนคติของนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

นอกจากนี้ เมเยอร์ ยังพบว่า การสอนแก้ปัญหาแบบมีขั้นตอนทำให้ทัศนคติของนักศึกษาที่มีต่อการแก้ปัญหาใจหัดขึ้น และมีนักศึกษาเป็นส่วนน้อยที่ใช้ขั้นตอนที่ 4 คือ ตรวจสอบผลที่ได้ในการแก้ปัญหา

พุท (Putt. 1979 : 5382 - 5383 - A) ได้ศึกษาผลการสอน 2 วิธี ที่มีต่อพฤติกรรมการแก้ปัญหานักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ คือ นักเรียนระดับ 5 จำนวน 2 ห้องเรียน ผู้วิจัยสอนห้องที่ 1 โดยการสอนตามรูปแบบซึ่งมีพื้นฐานมาจากขบวนการให้การเรียนรู้ของกาเย และสอนแก้ปัญหาโดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา ซึ่งจะใช้วิธีสอนแบบอิวริสติกในการสอนนักเรียนกลุ่มนี้ ส่วนห้องที่ 2 สอนโดยการสร้างประสบการณ์แก่นักเรียนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาและไม่ใช้วิธีสอนแบบอิวริสติก ในการสอนนักเรียนกลุ่มที่ 2 ส่วนกลุ่มควบคุมสอนโดยวิธีสอนแบบปกติ

ผลการทดลองปรากฏว่า มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างวิธีสอน 2 วิธี กับวิธีสอนแบบปกติ และมีความแตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญเกี่ยวกับการแก้ปัญหานักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่ม สิ่งที่พัฒนาขึ้นซึ่งเห็นได้ชัดในการแก้ปัญหานักเรียนในกลุ่มทดลองก็คือ วิธีสอนวิธีแรกจะทำให้เห็นความแตกต่างในด้านทัศนคติที่มีต่อการแก้ปัญหานักเรียน คำถามซึ่งนักเรียนใฝ่ถามเพื่อที่จะทำให้เข้าใจปัญหา การใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาและการตั้งชื่อยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ส่วนในด้านทัศนคติที่มีต่อการแก้ปัญหานักเรียนนั้น พบว่า มีความแตกต่างกันไม่มากนักระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม และมีความแตกต่างกันน้อยมากระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่ม จะเห็นได้ว่าวิธีสอนทั้ง 2 วิธีช่วยทำให้นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการแก้ปัญหา และได้ส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหามากยิ่งขึ้น

จากการประมวลและการวิเคราะห์เอกสารเกี่ยวกับวิธีสอน การเรียน การสอนคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหา ตลอดจนงานวิจัยที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา ทำให้ ผู้วิจัยเกิดแนวความคิดที่เป็นระบบขึ้น ซึ่งนำไปสู่กระบวนการสอนที่เรียกว่าการวิเคราะห์ กระบวนการคิด โดยที่ผู้วิจัยมีความเชื่อว่าเป็นกระบวนการสอนที่สามารถทำให้ผู้เรียน มีความเข้าใจในการพิสูจน์ และสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงทำ การวิจัยเพื่อหาประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่นิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 จำนวน 20 คน เป็นกลุ่มทดลองที่เรียนด้วย แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง เป็นแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์ กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามเนื้อหาในหลักสูตรคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.1 พิจารณาขอบข่ายเนื้อหาของเรื่อง ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ที่สอน ในมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

1.2 สอบถามอาจารย์ที่สอนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ เพื่อพิจารณาเนื้อหา ความสำคัญในแต่ละหัวข้อปัญหา

1.3 สร้างแบบเรียนโดยมีองค์ประกอบดังนี้

1.3.1 การวิเคราะห์กระบวนการคิดให้เห็นหลักการและ โครงสร้างต่าง ๆ ของการแก้ปัญหา

1.3.2 คำถามสอดแทรกในเนื้อหา เพื่อที่จะนำไปสู่ข้อสรุป ตลอดจนโมเมนต์ที่สำคัญ

1.3.3 ตัวอย่าง ทั้งตัวอย่างที่เป็นจริง และตัวอย่างคำ

1.3.4 แบบฝึกหัด

1.4 เมื่อสร้างแบบเรียนเสร็จแล้วนำไปปรึกษาอาจารย์ผู้สอนและกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์ เพื่อปรับปรุงแก้ไข

1.5 นำแบบเรียนที่แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตปริญาตรี เอกคณิตศาสตร์ จำนวน 5 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์มาก่อน เพื่อปรับปรุงการใช้ภาษา ความเหมาะสมของเนื้อหา และระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน

1.6 นำแบบเรียนที่ทดลองแล้วให้อาจารย์ผู้สอนและกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข แบบเรียนที่ไ้จะเป็นแบบเรียนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มทดลอง

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 10 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา โดยปรึกษากับอาจารย์ผู้สอน และกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์ และทำการวิเคราะห์ข้อสอบดังขั้นตอนดังนี้

2.1 นำแบบทดสอบไปทดสอบกับนิสิตที่เรียนคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์มาแล้ว ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตบางเขน จำนวน 20 คน เพื่อนำผลมาวิเคราะห์หาค่าอำนาจจำแนก ค่าความยากง่าย ค่าความเชื่อมั่น และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ

2.2 วิเคราะห์ข้อสอบโดยนำข้อมูลที่ไ้จากการทดสอบในข้อ 2.1 มาวิเคราะห์ตามหลักการวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัย

2.2.1 วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อตามหลักการคัต 25% กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ เลือกข้อสอบที่มีความยากง่ายระหว่าง .20 - .80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไปเป็นข้อสอบสำหรับการทดลองครั้งนี้ คัดเลือกข้อสอบจำนวน 7 ข้อ

2.2.2 หากค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร
สัมประสิทธิ์อัลฟา ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.73 และค่าความคลาดเคลื่อน
มาตรฐานในการวัดเท่ากับ 9.15

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์
กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน
11 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526

2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว ทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 120 นาที การให้คะแนน ให้
ตามลำดับขั้นตอนในการพิสูจน์ โดยผู้สอนกำหนดไว้ล่วงหน้า

3. นำคะแนนจากการทดสอบของกลุ่มทดลองมาวิเคราะห์โดยใช้การทดสอบ
ไค-สแควร์

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 คะแนนเฉลี่ยของคะแนน

1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนน

2. หากค่าความยากง่ายของข้อสอบ คำนวณจากสูตร

$$\text{ค่าความยากง่าย} = \frac{S_H + S_L - (N_T)(X_{\min})}{(N_T)(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	S_H	แทน ผลรวมของความถี่สะสมของคะแนนกลุ่มสูง
	S_L	แทน ผลรวมของความถี่สะสมของคะแนนกลุ่มต่ำ
	X_{max}	แทน คะแนนสูงสุดที่เป็นไปได้
	X_{min}	แทน คะแนนต่ำสุดที่เป็นไปได้
	N_T	แทน จำนวนนักเรียนทั้งกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ
	N_H	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูง

3. หาค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ จำนวนจากสูตร

$$\text{ค่าอำนาจจำแนก} = \frac{S_H - S_L}{N_H(X_{max} - X_{min})}$$

4. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวนจากสูตร

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{S_i^2}{S_t^2} \right)$$

เมื่อ	α	แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	S_i^2	แทน ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ
	S_t^2	แทน ความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ
	n	แทน จำนวนข้อในแบบทดสอบ

5. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด จำนวนจากสูตร

$$\sigma_e = \sigma_0 \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ ϕ_e	แทน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
ϕ_0	แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลการสอบ
r_{tt}	แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

6. ใช้ไค-สแควร์ ในการทดสอบสมมติฐาน คำนวณจากสูตร

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

เมื่อ χ^2	แทน ค่าไค-สแควร์
O	แทน ค่าความถี่ที่ได้จากการสังเกต
E	แทน ค่าความถี่ที่คาดหวังไว้

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลอง 20 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จำนวน 7 ข้อ และดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. นำคะแนนของกลุ่มทดลองมาแบ่งกลุ่มเป็น 2 กลุ่ม นิสิตที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับ 50% เป็นกลุ่มที่ได้คะแนนสูง นิสิตที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนต่ำกว่า 50% เป็นกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ ซึ่งปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 จำนวนนิสิตในกลุ่มที่ได้คะแนนสูงและกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิต
กลุ่มที่ได้คะแนนสูง	18
กลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ	2

2. ทดสอบประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ผลปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 การคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2

กลุ่มตัวอย่าง	O	E	χ^2
กลุ่มที่ได้คะแนนสูง	18	10	12.8
กลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ	2	10	

$$\chi^2_{(0.01 : 1)} = 6.635$$

จากตาราง 2 เพราะว่า $6.635 < 12.8$ เพราะฉะนั้น การทดสอบมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และจำนวนนิสิต จากกลุ่มที่ได้คะแนนสูงมากกว่าจำนวนนิสิตจากกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ นั่นคือ จากกลุ่ม ตัวอย่างนี้สามารถกล่าวได้ว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้มีประสิทธิภาพ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

สมมติฐานของการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ มีประสิทธิภาพ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชา คณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 จำนวน 20 คน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1.1 แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง เป็นแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการสอน 11 คาบ คาบละ 50 นาที

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เป็นข้อสอบอัตนัย จำนวน 7 ข้อที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.73

2. วิธีดำเนินการทดลอง

2.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 11 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้เวลาในการทดสอบ 120 นาที

สรุปผลการวิจัย

จากการทดลองสามารถสรุปได้ว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้มีประสิทธิภาพ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

อภิปรายผล

จากการทดลองสอนเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นผลปรากฏว่า จำนวนนิสิตส่วนใหญ่ในกลุ่มทดลองได้คะแนนไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้คือ 50% ของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ จากการสังเกตของผู้วิจัย การที่นิสิตส่วนใหญ่ได้คะแนนเช่นนั้น อาจเนื่องมาจาก

1. แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดแสดงลำดับขั้นการคิดทุกขั้นตอน ทำให้นิสิตมองเห็นแนวทางในการพิสูจน์ว่าจะเริ่มต้นอย่างไร และจะดำเนินการในการพิสูจน์อย่างไร นิสิตจึงมีความกระตือรือร้นและสนใจในการเรียน และสามารถนำวิธีการวิเคราะห์ไปใช้ในการแก้ปัญหาลูกอื่น ๆ ได้

2. ผู้วิจัยแจกแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดให้นิสิตอ่านมาก่อนล่วงหน้าทุกครั้ง นิสิตได้อ่าน และทำความเข้าใจในเนื้อหามาแล้วและในห้องเรียนยังได้มีการอภิปรายร่วมกันในปัญหาที่นิสิตยังสงสัยทำให้นิสิตมีความเข้าใจในเนื้อหายิ่งขึ้น

3. นิสิตที่เลือกเรียนรายวิชา คณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ เป็นนิสิตที่มีความสนใจและชอบการพิสูจน์ จึงทำให้สามารถพิสูจน์เนื้อหาที่เรียนได้เป็นอย่างดี

4. นิสิตคุ้นเคยกับระบบการเรียนโดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด ซึ่งประกอบด้วย การศึกษาด้วยตนเอง การวิเคราะห์ การอภิปราย การซักถาม ปัญหา การตอบคำถามมาแล้วจากการเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่อง ทำให้นิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาและพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเรื่องฟังก์ชันที่หาอุปนัยได้ไ้ได้อย่างรวดเร็ว

ในระหว่างทำการสอน ผู้วิจัยสังเกตพบว่า

1. นิสิตไม่กล้าซักถามปัญหา ผู้วิจัยต้องเป็นผู้ตั้งปัญหามาถามนิสิตจึงกล้าตอบ
2. เมื่อผู้วิจัยนำแบบฝึกหัดที่ตรวจแล้วมาอภิปรายในชั้นเรียน นิสิตสนใจและมีความกระตือรือร้นมากขึ้น ทำให้นิสิตส่งแบบฝึกหัดส่งมาเสมอทุกครั้ง
3. นิสิตส่วนมากรวมอภิปรายในห้องเรียน นิสิตบางคนชอบอภิปรายกันเอง อาจเป็นเพราะนิสิตไม่กล้าซักถามผู้วิจัย
4. เมื่อผู้วิจัยให้นิสิตทำแบบฝึกหัดในห้องเรียน นิสิตให้ความสนใจและตั้งใจทำเป็นอย่างดี มีความกล้าในการซักถามมากขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ควรให้มีการแสวงหาวิธีสอนที่ส่งเสริมให้นิสิตมีความสามารถในการหาวิธีการและแนวทางในการพิสูจน์ได้

1.2 ผู้สอนคณิตศาสตร์ควรใช้จิตวิทยาในการสร้างแรงจูงใจให้นิสิตศึกษาแบบเรียนมาก่อนการเรียนในชั้นเรียน

1.3 ในด้านแบบเรียน ควรสร้างแบบเรียนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้ศึกษาสามารถทำความเข้าใจเนื้อหา นั้น ๆ ได้ด้วยตนเอง

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

- 2.1 ควรมีการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยให้มีขอบเขตกว้างขวางยิ่งขึ้น
- 2.2 ควรทำการวิจัยหาประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดกับเนื้อหาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์
- 2.3 ควรทำการวิจัยถึงองค์ประกอบที่จะส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
- 2.4 ควรทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยวิธีสอนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดกับวิธีสอนปกติ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ คณิตศาสตร์วิเคราะห์ กราฟิเคอาร์ท 2524, 167 หน้า
จรรยา ภูอกม ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนตามการประเมินของครู ปรินิพนธ์
ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2521, 67 หน้า อักสำเนา
ชมเพลิน จันทรเรืองเพ็ญ "การสอนแบบต่าง ๆ ในระดับมัธยมศึกษา" ครุศาสตร์
1 : 41 - 43 พฤษภาคม - มิถุนายน 2519
คณีย ยังคง การสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น"
สำหรับระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ปรินิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2521, 67 หน้า อักสำเนา
กิลก กิลกานนท์ "คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น" การวัดผลการศึกษา 1 : 63 -
66 พฤษภาคม - สิงหาคม 2525
บุหงา วัชนะ ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษา
ปีที่ 3 ที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ ปรินิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2515, 39 หน้า อักสำเนา
พัทพรณ เหล่าวานิชย์ แคลคูลัสเบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2526, 157 หน้า
มหาวิทยาลัย, ทบวง ชุดเสริมประสบการณ์สำหรับครุคณิตศาสตร์ 2524, 180 หน้า
รายงานการวิจัยเพื่อจัดทำโครงร่างหลักสูตรปริญญาตรีในสาขาคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษา 2525, 212 หน้า
บุพิน พิพิชกุล การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523, 507 หน้า
ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย รายงานสรุปการสัมมนาเพื่อพัฒนาการเรียนการสอน
2519, 209 หน้า

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ แคลคูลัส คุรุสภาลาดพร้าว 2519, 171 หน้า

คณิตศาสตร์เบื้องต้น 2521, 162 หน้า

เสนอ คุณประเสริฐ การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการ

การคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ปริชญานีพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประสานมิตร 2526, นับจำนวนหน้าไม่ได้ อัดสำเนา

สมศักดิ์ ดินธุระเวช และโกวิทย์ ประवालพฤษ์ การประเมินในชั้นเรียน

วัฒนาพานิช 2523, 280 หน้า

อรพินท์ เจียรพงษ์ วิธีทางสถิติ : การทดสอบสมมติฐาน ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 187 หน้า

Apostol, Tom M. Calculus. Volume I, New York, Bloisdell Publishing Company, 1965. 515 p.

Mathematical Analysis. Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1975. 492 p.

Bourne, Lyle E., Estrand, Bruce R. and Dominowski, Roger L. The Psychology of Thinking. New Jersey, Prentice - Hall, 1971. p. 9.

Giles, J.R. Real Analysis. Sydney, John Wiley and Sons Australasia Pty Ltd., 1972, 171 p.

Krulik, Stephen. "Problem, Problem Solving and Stragetegy Games," The Mathematics Teacher. 8 : p. 649 - 651, November, 1977.

Mayer, Lavern James. "Teaching Problem Solving in A College Level General Education Mathematics Class," Dissertation Abstracts International, February, 1983, p. 2584 - A.

Miller, Kenneth S. Advanced Real Calculus. New York, Harper and Brothers, 1957. 185 p.

Polya, George. How to Solve it. p. 5 - 36. New Jersey, Princeton University Press, 1977.

Putt, John Ian. "An Exploratory Investigation of Two Methods of Instruction in Mathematical Problem Solving at the Fifth Grade Level," Dissertation Abstracts International, March, 1979, p. 5382 - 5383 - A.

✓ Rudin, Walter. Principle of Mathematical Analysis. Tokyo,
McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1976, 342 p.

✓ Zalewski, Clarie Jean. "An Investigation of Selected Factors
Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem,"
Dissertation Abstracts International, July, 1978, p. 2804 - A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

รายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้
เวลา 120 นาที คะแนนเต็ม 70 คะแนน

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำลงในกระดาษคำตอบ

1. กำหนด $f(x) = x|x|$

จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่

2. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases}$

จงหา 2.1 $f'_+(1)$

2.2 $f'_-(1)$

2.3 f หาอนุพันธ์ได้ที่ 1 หรือไม่

3. 3.1 กำหนด $f(x) = \cos(x^3 + 3x^2)^{21}$ จงหา $f'(x)$

3.2 กำหนด $f(x) = \frac{4x + 2}{3x - 5}$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ f

4. 4.1 กำหนด $y = \frac{1-z}{z}$ และ $z = \frac{1-x}{1+x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

4.2 กำหนด $f(x) = x^3 + x - 2$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ f ที่ 0

5. กำหนด $f(x) = x^3 - 7x^2 + 5x$ สำหรับ $x \in [1, 5]$
 จงแสดงว่ามี $c \in (1, 5)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{4}$
 หรือไม่ ถ้ามีจงหาค่า c

6. กำหนด $6y = 12 - 24x - 15x^2 - 2x^3$
 จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

7. จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = -2$

ค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	.75	.30
2	.52	.72
3	.67	.38
4	.42	.62
5	.50	.60
6	.38	.36
7	.45	.70

ภาคผนวก ข.

โครงการสอน
เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้และการสอน	หมายเหตุ
5 มกราคม 2527 2 คาบ	1. แนะนำวิธีการเรียนด้วยแบบเรียนที่ เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด 2. บทนำเรื่อง สัมผัสและความต่อเนื่อง 3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน บทนิยาม 1.1 ตัวอย่าง 1.1 — 1.2 บทนิยาม 1.2 ตัวอย่าง 1.3 — 1.6 บทนิยาม 1.3 ตัวอย่าง 1.7 ทฤษฎีบท 1.1 บทนิยาม 1.4 ตัวอย่าง 1.8 ทฤษฎีบท 1.2 แบบฝึกหัดชุดที่ 1 — 2	1. ผู้สอนแนะนำวิธีการเรียนตลอดจนสัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในแบบ เรียน รวมทั้งการทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ 2. ผู้สอนจะอธิบายเกี่ยวกับบทนำเรื่อง สัมผัสและความต่อเนื่องเพื่อ ทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันที่หา อนุพันธ์ได้ 3. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับบทนิยาม 1.1 ตลอดจนลำดับ ขั้นตอนหาอนุพันธ์ของ f ที่ a และตัวอย่าง 1.1 — 1.2 4. นิสิตศึกษาคำตอบของคำถามชุดที่ 1 ในเวลาประมาณ 5 นาที แล้ว อภิปรายข้อสรุปร่วมกัน 5. ผู้สอนและนิสิต รวมนิบัติอภิปรายบทนิยาม 1.2 และตัวอย่าง 1.3— 1.4 6. นิสิตศึกษาคำตอบของคำถามชุดที่ 2 ในเวลาประมาณ 5 นาที แล้ว อภิปรายข้อสรุปร่วมกันแล้วอภิปรายตัวอย่าง 1.5 — 1.6 ต่อ 7. นิสิตศึกษาคำตอบของคำถามชุดที่ 3 ในเวลาประมาณ 10 นาทีแล้ว อภิปรายข้อสรุปร่วมกัน 8. ทบทวนเรื่อง สัมผัสและความต่อเนื่อง และนิสิตอาจ แล้วอภิปรายร่วมกันในสิ่งที่ สงสัยในบทนิยาม 1.3 และตัวอย่าง 1.7	

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	หมายเหตุ
9 มกราคม 2527	ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์	9. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับทฤษฎีบท 1.1, บทนิยาม 1.4, ตัวอย่าง 1.8 และทฤษฎีบท 1.2 โดยผู้สอนเป็นผู้นำการอภิปราย 10. นิสิตศึกษาค่าขอบของค่าถามชุดที่ 4 ในช่วงเวลาประมาณ 5 นาทีแล้วร่วมกันอภิปรายขอสรุป 11. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1 และชุดที่ 2 นอกเวลาเรียน 12. แจกแบบเรียนหน้า 20 - 45 ให้นิสิตอ่านหาจุดสว่างหน้าก่อนเรียนครั้งต่อไป	
1 คาบ	ทฤษฎีบท 2.1 ตัวอย่าง 2.1 ทฤษฎีบท 2.2 - 2.3 ตัวอย่าง 2.2 ทฤษฎีบท 2.4 ตัวอย่าง 2.3 ทฤษฎีบท 2.5	1. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับทฤษฎีบท 2.2 - 2.6 โดยผู้สอนเป็นผู้นำการอภิปราย พร้อมอภิปรายตัวอย่าง 2.1 - 2.8 หลังพิสูจน์ทฤษฎีบทแต่ละทฤษฎี 2. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 3 นอกเวลาเรียน 3. แจกแบบเรียนหน้า 46 - 76 ให้นิสิตอ่านหาจุดสว่างหน้าครั้งต่อไป	

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้และการสอน	หมายเหตุ
	ตัวอย่าง 2.4 ทฤษฎีบท 2.6 ตัวอย่าง 2.5 – 2.8 แบบฝึกหัดชุดที่ 3		
12 มกราคม 2527 2 คาบ	1. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์ (ต่อ) Lemma 2.7 ทฤษฎีบท 2.8 ตัวอย่าง 2.8 – 2.13 ทฤษฎีบท 2.9 ตัวอย่าง 2.14 ทฤษฎีบท 2.10 ตัวอย่าง 2.15 – 2.16 2. ฟังก์ชันผกผันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน นิยาม 2.1 – 2.3 ตัวอย่าง 2.17 ทฤษฎีบท 2.11	1. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับสิ่งที่พบก่อนหน้านี้ในรูปแบบฝึกหัดทบทวนสิ่งที่ แล้วอภิปรายร่วมกันในสิ่งที่ยังสงสัย 2. อภิปรายร่วมกันในการพิสูจน์ (Lemma 2.7) และ ทฤษฎีบท 2.8 (The Chain Rule) โดยผู้สอนเป็น ผู้นำการอภิปรายและอภิปรายตัวอย่าง 2.8 – 2.13 3. พบความทฤษฎีบท 2.5 – 2.6 แล้วผู้สอนนำการอภิปราย การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.9 และตัวอย่าง 2.14 4. นิยามค่าของของค่าตามชุดที่ 4 ระยะเวลาประมาณ 5 นาที แล้วร่วมกันอภิปรายข้อสรุป 5. ผู้สอนนำการอภิปรายการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.10 และ ตัวอย่าง 2.15 – 2.16 6. พบความฟังก์ชันผกผันตามนิยาม 2.1 – 2.3 และ ตัวอย่าง 2.17	

เรื่อง	เรื่อง	กิจกรรมการเรียงการสอน	หมายเหตุ
		7. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.11 โดยผู้สอนเป็นผู้สอนเป็นผู้กล่าวอภิปรายและตัวอย่าง 2.18 8. นิสิตคิดหาคำตอบของคำถามชุดที่ 6 ใ้ใช้เวลาประมาณ 5 นาทีแล้วรวบรวมกับอภิปรายขอสรุป 9. ผู้สอนนำการอภิปรายการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.12 และตัวอย่าง 2.19 - 2.21 10. นิสิตช่วยแบบฝึกหัดชุดที่ 4 - 6 นอกเวลาเรียน	
16 มกราคม 2527 1 คาบ	การประยุกต์ทฤษฎีบทออยเลอร์ บทนิยาม 3.1 ตัวอย่าง 3.1 ทฤษฎีบท 3.1 ทฤษฎีบท 3.2 บทนิยาม 3.2 ทฤษฎีบท 3.3 ทฤษฎีบท 3.4 บทนิยาม 3.5 แะฝึกหัดชุดที่ 7	1. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับสิ่งที่บทพิสูจน์แบบฝึกหัดทฤษฎีบททั้งสองแล้วอภิปรายรวมกันในสิ่งที่สงสัย 2. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 77 - 88 ใ้ นิสิตใช้เวลาอ่านประมาณ 30 นาที แล้วจึงอภิปรายรวมกันโดยผู้สอนเป็นผู้กล่าวอภิปรายทั้งบทนิยาม 3.1 จนถึงบทนิยาม 3.5 3. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 7 4. แจกแบบเรียนหน้า 89 - 103 ใ้ นิสิตอ่านมาล่วงหน้าก่อนเรียนครั้งต่อไป	วิทยาสاتหะพิชญ์ เจริญกุล มีการแข่งขันกันทำ ทางสถิติ ตั้งแต่ 14 มกราคม 2527 ถึง 2 กุมภาพันธ์ 2527 จึงต้องเลื่อน ไปทำการสอนในวัน ที่ 6 กุมภาพันธ์ 2527

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	หมายเหตุ
19 มกราคม 2527	การประยุกต์ใช้วิทยานิพนธ์ (ทอ)	1. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกัน เกี่ยวกับการพิสูจนทฤษฎีบท 3.5 - 3.7 พร้อมอภิปรายตัวอย่าง 3.3 โดยผู้สอนเป็นผู้นำการอภิปราย 2. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 8 นอกเวลาเรียน 3. แบ่งแบบเรียนหน้า 104 - 112 ให้ผู้สืบทอดมาลงหน้าก่อนเรียนครึ่งจอไป	ผู้สอนไปทำการสอนในวันที่ 9 กุมภาพันธ์ 2527 เนื่องจากวิทยานิพนธ์ของนิสิตโลกปีการศึกษา 2527 ซึ่งกำลังดำเนินการแข่งขันงานแห่งชาติ
20 มกราคม 2527	การประยุกต์ใช้วิทยานิพนธ์ (ทอ)	1. ผู้สอนอธิบายเกี่ยวกับส่วนประกอบของแบบฝึกหัดที่นิสิตทำส่ง 2. อภิปรายร่วมกันแบบทวิภาค 3.3 - บทนิยาม 3.6 และตัวอย่าง 3.4 3. ผู้สอนนำการอภิปรายการพิสูจนทฤษฎีบท 3.8 4. นิสิตศึกษาคำตอบของคำถามชุดที่ 8 ซึ่งเวลาประมาณ 5 นาทีแล้วรวบรวมกันอภิปรายข้อสรุป 5. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปรายตัวอย่าง 3.5 และ 3.6 6. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 9 ข้อ 1 (1,3,5) และ ข้อ 2 ในห้องเรียนแล้วอภิปรายร่วมกัน 7. แบ่งแบบเรียนหน้า 113 - 133 ให้ผู้สืบทอดมาลงหน้าก่อนเรียนครึ่งจอไป	ผู้สอนไปสอนในวันที่ 12 กุมภาพันธ์ 2527 เนื่องจากวิทยาเขตพิษณุโลกปิดในการแข่งขันกีฬานานาชาติของจังหวัดพิจิตร

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	หมายเหตุ
26 มกราคม 2527 2 คาบ	กฏของโกลิถาล ทฤษฎีบท 4.1 ตัวอย่าง 4.1 - 4.2 ทฤษฎีบท 4.2 ตัวอย่าง 4.3 รูปแบบไม่จำกัด $0.00, 0^0, \infty - \infty$ 1 และ ∞^0 ตัวอย่าง 4.4 - 4.7	1. ผู้สอนอภิปรายร่วมกันนิสิตในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1 และทฤษฎีบท 4.2 พร้อมทบทวนทฤษฎีบท 4.1 - 4.3 2. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 10 ข้อ 1, 3, 5 ในห้องเรียนแล้วอภิปรายร่วมกัน 3. ผู้สอนอภิปรายเกี่ยวกับรูปแบบไม่จำกัดในรูป $0.00, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty$ และ ∞^0 นิสิตซักถามถึงสังสัยพร้อมอภิปรายร่วมกัน ในตัวอย่าง 4.4 - ตัวอย่าง 4.7 4. นิสิตทำแบบฝึกหัดชุดที่ 11 ข้อ 1, 4, 6, 7, 9 ในห้องเรียนแล้วอภิปรายร่วมกัน	ผู้สอนไปสอนในวิชา 12 กุมภาพันธ์ 2527 เนื่องจากวิทยานิพนธ์ พิชญ์โสภณกิจในการ แดงต้นกัทธแห่งศ

ภาคผนวก ค.
แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง

บทที่ ๑

บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง

บทนิยาม ๐.๑

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$
ซึ่ง $\forall x \in D_f ; 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท ๐.๑

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

ทฤษฎีบท ๐.๒

กำหนด $f(x) = c$, $g(x) = x$ และ $c \in \mathbb{R}$
จะได้ว่า

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad \left[\text{อาจเขียน } \lim_{x \rightarrow a} c = c \right]$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \quad \left[\text{อาจเขียน } \lim_{x \rightarrow a} x = a \right]$$

ทฤษฎีบท ๐.๓

กำหนดฟังก์ชัน f และ g และ $k \in \mathbb{R}$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ จะได้ว่า

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot l \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kl$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = l + m = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ทฤษฎีบท 0.4 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m, m \neq 0$
 จะได้ว่า
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

ทฤษฎีบท 0.5 กำหนดฟังก์ชัน f และ $a \in D_f$ ถ้า a เป็นจุดลิมิตของ D_f
 จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ทฤษฎีบท 0.6 ถ้า p เป็นโพลีโนเมียลฟังก์ชัน จะได้ p ต่อเนื่องที่ a
 สำหรับทุกๆ จำนวนจริง a

ทฤษฎีบท 0.7 กำหนด f และ g ต่อเนื่องที่ a จะได้ว่า

(1)	kf	ต่อเนื่องที่ a
(2)	$f + g$	ต่อเนื่องที่ a
(3)	$f \cdot g$	ต่อเนื่องที่ a
(4)	$\frac{f}{g}$	ต่อเนื่องที่ a ถ้า $g(a) \neq 0$
(5)	$\frac{f}{g}$	ต่อเนื่องที่ a ถ้า $g(a) \neq 0$

บทนิยาม 0.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ a
 สำหรับทุกๆ $a \in D_f$

ทฤษฎีบท 0.8 กำหนดฟังก์ชัน f และ $a \in D_f$ ถ้า a เป็นจุดลิมิตของ D_f จะได้ว่า

- (1) f ต่อเนื่องทางขวาที่ a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- (2) f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

ทฤษฎีบท 0.9 f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทางขวาและทางซ้ายที่ a

บทนิยาม 0.3 กำหนดฟังก์ชัน f และช่วงปิด $[a, b] \subset D_f$

(1) f ต่อเนื่องบน (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ c สำหรับทุกๆ $c \in (a, b)$

(2) f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ c สำหรับทุกๆ $c \in (a, b)$ และ f ต่อเนื่องทางขวาที่ a และ f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ b

ทฤษฎีบท 0.10 ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะได้ว่า f มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$

ทฤษฎีบท 0.11 ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะได้ว่ามี $\alpha, \beta \in [a, b]$ ซึ่ง $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$
(นั่นคือ f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $[a, b]$)

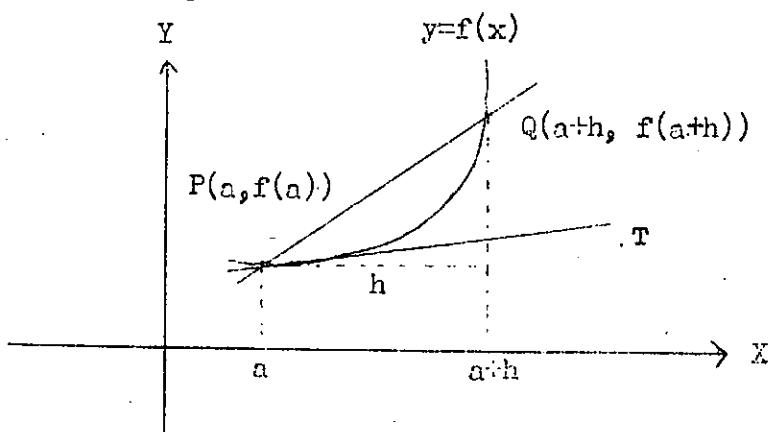
สัญลักษณ์พื้นฐานที่ใช้มีดังนี้

$\mathbb{C}$	แทน	เป็นสมาชิกของ
$\mathbb{C}$	แทน	เป็นสับเซตของ
D_f	แทน	โดเมนของฟังก์ชัน
$\mathbb{Z}$	แทน	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Z}^+$	แทน	เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{R}$	แทน	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{Q}$	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะ
ลิมิตหาค่าใด	หมายถึง	limit exist
จำนวนคงที่	หมายถึง	จำนวนจริงคงที่

บทที่ 1

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ถ้า $h \neq 0$ และ $a, a+h \in D_f$
 ให้จุด $P(a, f(a))$ และจุด $Q(a+h, f(a+h))$ เป็นจุดที่อยู่บนกราฟ
 ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูป



จากรูปจะเห็นได้ว่า $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ คือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P
 และจุด Q
 เมื่อ $h \rightarrow 0$ จุด Q จะเข้าใกล้จุด P และเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้
 เส้นตรง PT ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสของกราฟที่จุด P
 นั่นคือ ถ้า h เข้าใกล้ 0 แล้วค่าของ $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ มีค่าเข้าใกล้ความชัน
 ของเส้นสัมผัสที่จุด $P(a, f(a))$
 ดังนั้น $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ คือความชันของเส้นสัมผัสของกราฟของ
 ฟังก์ชัน f ที่จุด P

บทนิยาม 1.1

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ หาค่าได้}$$

เขียนสัญลักษณ์แทนค่าที่หาได้โดย $f'(a)$ เรียก $f'(a)$ ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ a หรืออาจเขียนสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์ของ f ที่ a ด้วย $y'(a)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$ ตัวอย่าง $f'(3)$ หมายถึงอนุพันธ์ของ f ที่ 3 $y'(1)$ หมายถึงอนุพันธ์ของ f ที่ 1 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=5}$ หมายถึงอนุพันธ์ของ f ที่ 5ลำดับขั้นตอนการหาอนุพันธ์ของ f ที่ a

ขั้นที่ 1 เขียนฟังก์ชันที่กำหนด

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการหา คือ $f'(a)$

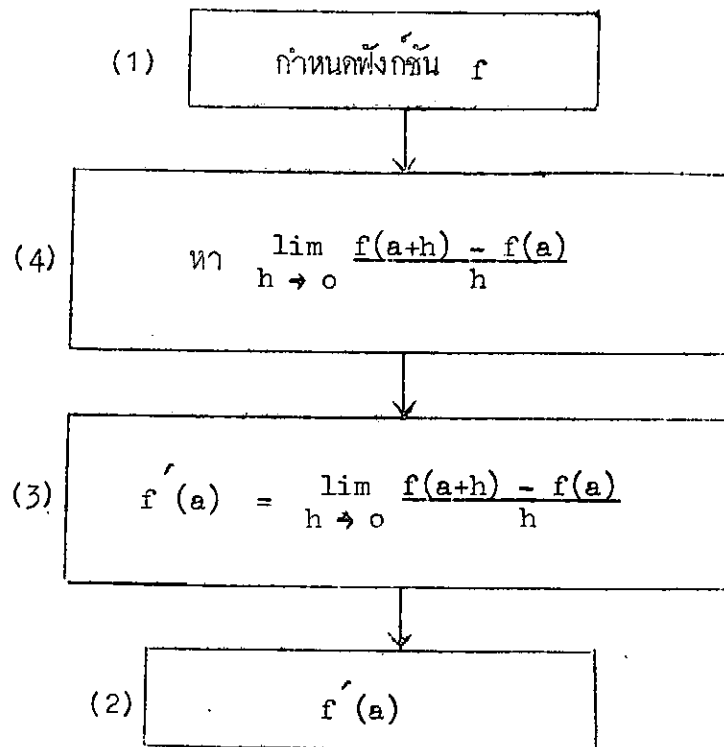
ขั้นที่ 3 โดยบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ขั้นที่ 4 จากฟังก์ชันที่กำหนดในขั้นที่ 1

หา $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ถ้าหาค่าได้ก็จะได้ $f'(a)$ ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการหา



ตัวอย่าง 1.1 ให้ $f(x) = x^2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ 3

วิธีทำ กำหนด $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} [6+h] \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(3) = 6$



ตัวอย่าง 1.2 ให้ $f(x) = 4x^2 + 3$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ 2

วิธีทำ กำหนด $f(x) = 4x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(2+h)^2 + 3 - 4(2)^2 - 3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{19 + 16h + 4h^2 - 19}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} [16 + 4h] \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(2) = 16$ □

คำถามข้อที่ 1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a
 ให้ $h = x - a$ แล้ว $f'(a)$ เท่ากับเท่าใด

บทนิยาม 1.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน D_f ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a สำหรับทุก ๆ $a \in D_f$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนด $f(x) = c$, c เป็นจำนวนคงที่ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน R

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนใด ๆ ใน R

กำหนด $f(x) = c, c \in R$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(a) = 0$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ □

ตัวอย่าง 1.4 กำหนด $f(x) = mx+b$ เมื่อ m, b เป็นจำนวนคงที่

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนใด ๆ ใน $\mathbb{R}$

กำหนด $f(x) = mx+b, m, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx+b - ma - b}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x-a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} m \\ &= m \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(a) = m$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ □

คำถามชุดที่ 2

1. กำหนดฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ของ f ที่ a สำหรับทุก ๆ $a \in D_f$ ได้เสมอหรือไม่

2. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน f ที่หาอนุพันธ์ได้บน D_f มาอีก 1 - 2 ตัวอย่าง

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. จงหาความชันของเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ $x = 1$

1.1 $f(x) = x^2 + 1$

1.2 $f(x) = 8 - 5x^2$

1.3 $f(x) = x^3 - 2x$

2. จงหาความชันของกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ที่ $x = 0$
- 2.1 $f(x) = x^2 + 2x$
- 2.2 $f(x) = 2x^3 - 6x$
- 2.3 $f(x) = x^2 + 2$
3. กำหนดให้ $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ 2
4. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$
5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.5 ให้ $f(x) = |x|$ จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = |x|$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการคือต้องแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่ ซึ่งแยกได้เป็น 2 กรณีคือ

2.1 f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0

2.2 f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0

ขั้นที่ 3 จากสิ่งที่กำหนดให้คือ $f(x) = |x|$ สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ขั้นที่ 4 การที่จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 เราต้องแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

ถ้าไม่เท่ากัน แสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0

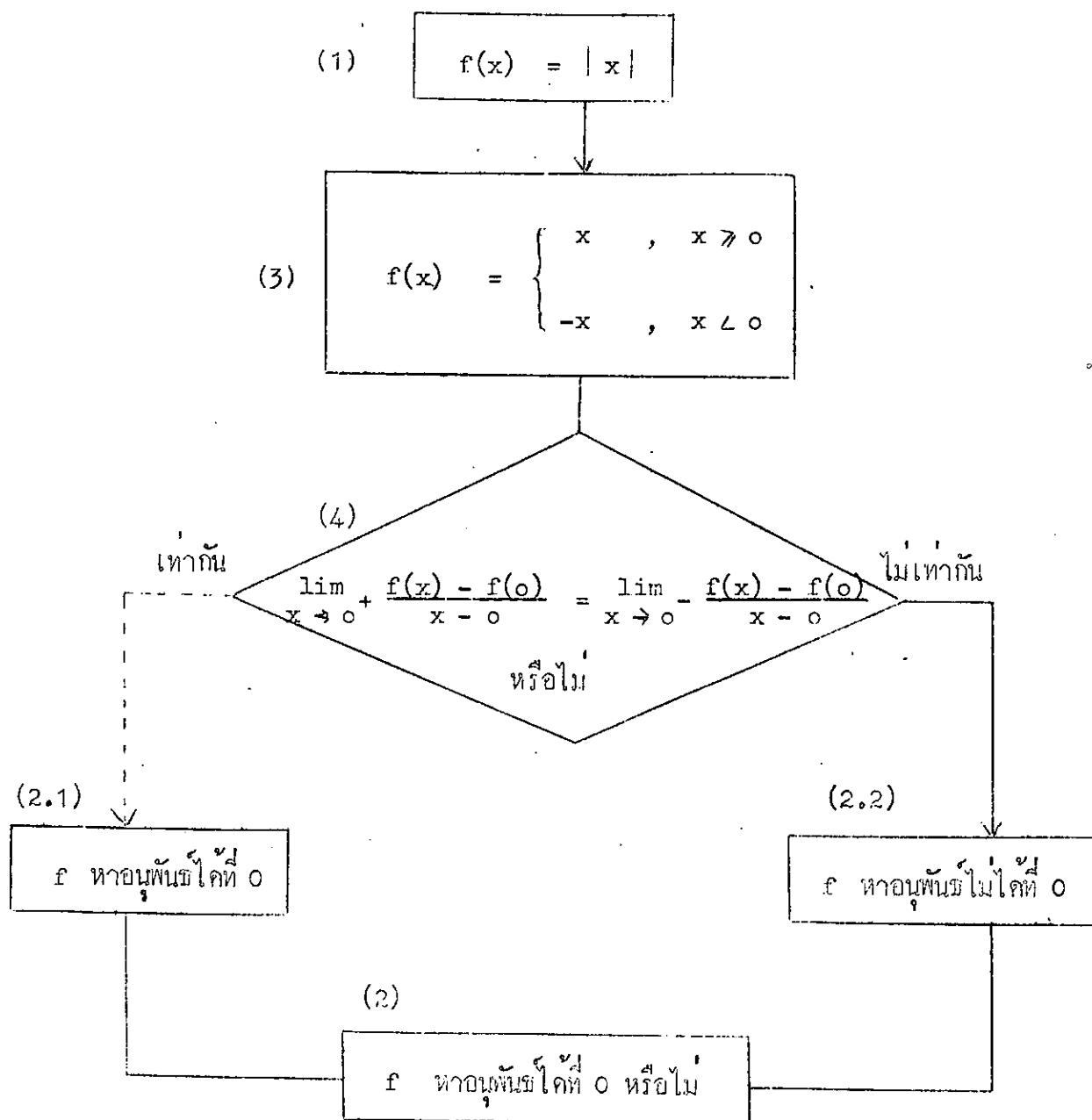
$$\begin{aligned} \text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

สรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



วิธีทำ ให้ $f(x) = |x|$

ดังนั้น

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{หา} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ ไม่มี}$$

ดังนั้น

f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0



ตัวอย่าง 1.6

$$\text{ให้ } f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 1 หรือไม่

สำคัญวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

$$\text{ขั้นที่ 1} \quad \text{กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการคือ ต้องแสดงว่า f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ 1 หรือไม่ ซึ่งแยกได้เป็น

2 กรณีคือ 2.1 f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ 1

2.2 f หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 1

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ 1 หรือไม่ เราต้องแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

ถ้าไม่เท่ากัน แสดงว่า f หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 1

$$\begin{aligned} \text{หา } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[1 - \frac{1}{x-1} \right] \end{aligned}$$

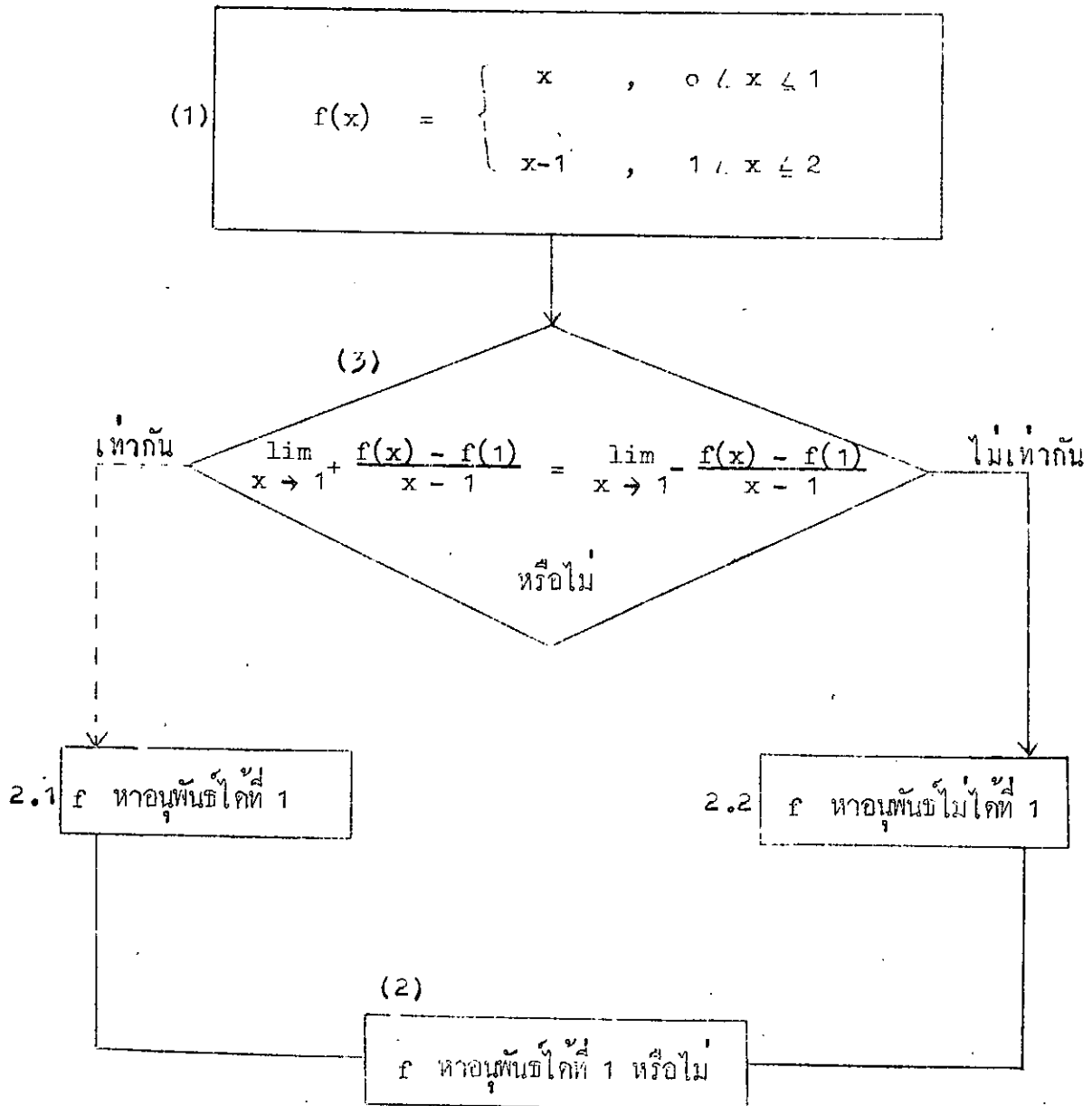
จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ไม่มี

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

สรุปได้ว่า f หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 1

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



วิธีทำ

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ x-1 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[1 - \frac{1}{x-1} \right] \\ &= \text{ไม่มี} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{ไม่มี}$$

เพราะฉะนั้น

f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 1



คำถามชุดที่ 3

1. จากตัวอย่าง 1.5 และ 1.6 ลักษณะกราฟที่ $x = 0$ และ $x = 1$ ตามลำดับเป็นอย่างไร

2. จากตัวอย่าง 1.5 ให้ $a \in D_f$ และ $a \neq 0$ จงหา $f'(a)$

3. จากตัวอย่าง 1.6 ให้ $a \in D_f$ และ $a \neq 1$ จงหา $f'(a)$

จากตัวอย่าง 1.5 และ 1.6 เราอาจกล่าวถึงมีโนภาพของอนุพันธ์ทางซ้ายและอนุพันธ์ทางขวาได้ดังนี้

บทนิยาม 1.3 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทางขวาที่ a

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ มี

และฟังก์ชัน f จะเรียกว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายที่ a ก็ต่อเมื่อ

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ มี

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

เขียนแทนอนุพันธ์ทางขวาของ f ที่ a ด้วย $f'_+(a)$

ดังนั้น $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ทำนองเดียวกัน

เขียนแทนอนุพันธ์ทางซ้ายของ f ที่ a ด้วย $f'_-(a)$

ดังนั้น $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ตัวอย่าง 1.7 จากตัวอย่าง 1.5

จะได้ว่า $f'_+(a) = 1$ และ $f'_-(a) = -1$

จากตัวอย่าง 1.6

จะได้ว่า $f'_+(a)$ ไม่มี และ $f'_-(a) = 1$

ทฤษฎีบท 1.1

$$f'(a) = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } f'_+(a) = f'_-(a) = 1$$

เนื่องจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ พิสูจน์ในพาดัง เกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่อง ซึ่งพิสูจน์ไปแล้ว และสามารถสรุปในแนวทางการพิสูจน์โดยใช่ " ก็ต่อเมื่อ " ได้ ดังนั้นในทฤษฎีบทข้อพิสูจน์โดยการใช่ " ก็ต่อเมื่อ "

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f'(a) = 1$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $f'_+(a) = f'_-(a) = 1$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) = 1$ นั้นต้องแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$$

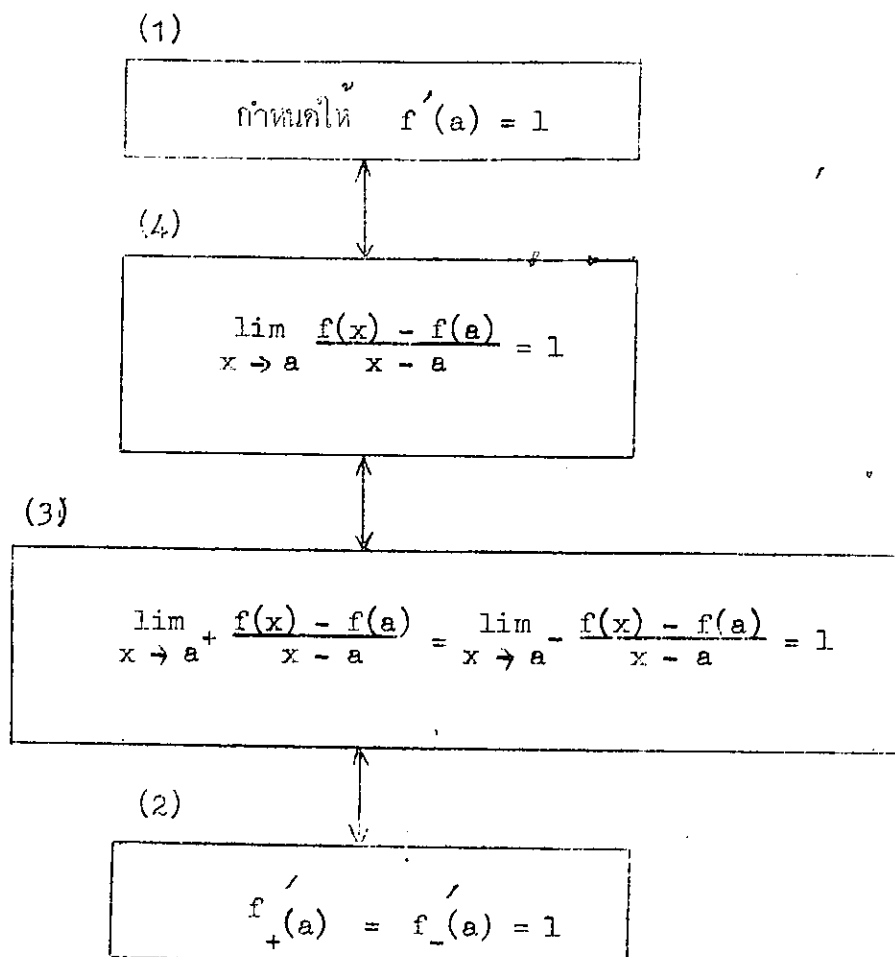
ขั้นที่ 4 จากสิ่งที่กำหนดให้ $f'(a) = 1$ ใช้นิยาม 1.1 จะได้ว่า

$$f'(a) = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$$

และโดยทฤษฎีบทลิมิตจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 \end{aligned}$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์



พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 f'(a) = 1 &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 \\
 &\iff \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 \\
 &\iff f'_+(a) = f'_-(a) = 1
 \end{aligned}$$

□

บทนิยาม 1.4 f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

1) $f'(c)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ c ซึ่ง $a < c < b$

2) $f'_+(a)$ และ $f'_-(b)$ หาค่าได้

ในที่นี้
$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

และ
$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

จากบทนิยาม 1.4 ข้อ 1) หมายความว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ตัวอย่าง 1.8 กำหนด $f(x) = |x|$ เมื่อ $x \in [-2, 2]$

จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้บนช่วง $[-2, 2]$

พิสูจน์ กำหนด $f(x) = |x|$ บนช่วง $[-2, 2]$

เนื่องจาก $0 \in (-2, 2)$

จากตัวอย่าง 1.5 จะได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น มี $0 \in (-2, 2)$ ซึ่งทำให้ $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

โดยบทนิยาม 1.4 จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้บนช่วง $[-2, 2]$

□

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f จะต่อเนื่องที่ a

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ a

ขั้นที่ 3 ถ้าต้องการจะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ a จะต้องแสดงให้เห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

หรือ

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ a โดยบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

ขั้นที่ 5 จาก $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)]$ จัด $f(x) - f(a)$ ให้อยู่ในรูปแบบ

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{เพื่อจะใช้แทนค่าของ} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(1) f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

(4)
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(5)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(3)
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

(2) f ต่อเนื่องที่ a

พิสูจน์ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ดังนั้น
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \end{aligned}$$

$$= f'(a) \cdot 0$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ a

□

คำถามชุดที่ 4

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ a แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ที่ a เสมอไปหรือไม่

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{|x|}$ จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

จงพิสูจน์ว่า 2.1 f หาอนุพันธ์ได้ที่ $a \neq 0$

2.2 f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $a = 0$

3. กำหนดให้ $f(x) = |x|^3$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ หรือไม่

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ หรือไม่

5. จงพิสูจน์ว่า ทุก ๆ ฟังก์ชันในเมเยอร์บน $\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$

6. กำหนดให้ 6.1 $f(x) = \sin x$

6.2 $f(x) = \cos x$

จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ a สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

7. กำหนดให้ $f(x) = |x - 1|$ จงแสดงว่า

7.1 f ต่อเนื่องที่ 1 หรือไม่

7.2 f หาอนุพันธ์ได้ที่ 1 หรือไม่

8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงแสดงว่า

8.1 f ต่อเนื่องที่ 0 หรือไม่

8.2 f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่

บทที่ 2

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันคงตัว (Constant function) ; $f(x) = C$
 จะได้ $f'(a) = 0$ ทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 1.3

ตัวอย่าง 2.1

$$\text{ถ้า } f(x) = 4 \text{ จะได้ } f'(x) = 0$$

$$\text{ถ้า } f(x) = -3 \text{ จะได้ } f'(x) = 0$$

$$\text{ถ้า } f(x) = \frac{1}{4} \text{ จะได้ } f'(x) = 0$$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function) ; $f(x) = x$
 จะได้ $f'(a) = 1$ ทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

ลำดับขั้นตอนวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $f'(a) = 1$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

ขั้นที่ 3 โดยนิยาม 1.1

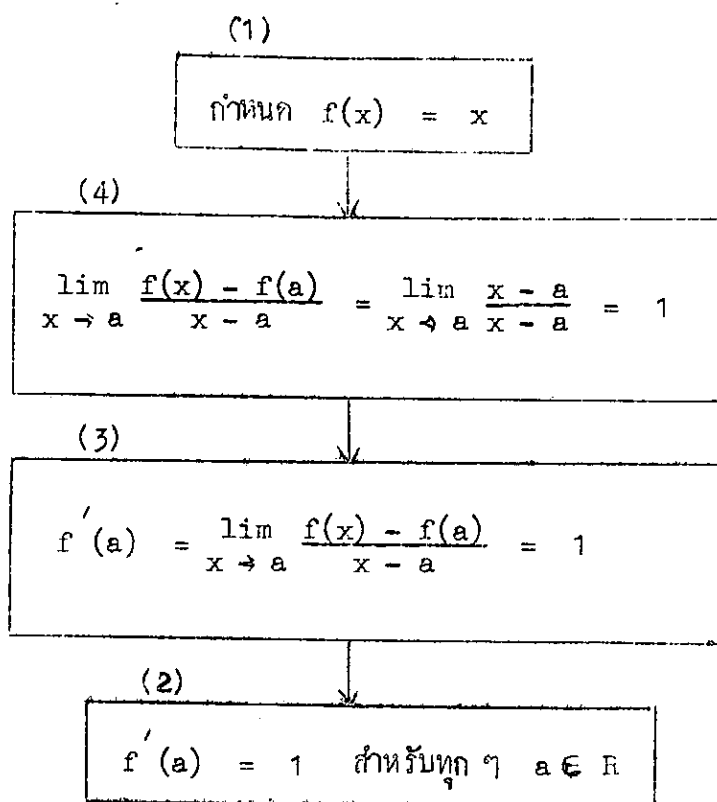
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = 1$$

ขั้นที่ 4 หาก

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(a) = 1$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

ให้ a เป็นจำนวนใด ๆ ใน $\mathbb{R}$

กำหนด $f(x) = x$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(a) = 1$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$



ทฤษฎีบท 2.3 กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a จะได้ว่า

$$1) \quad f + g \text{ หาอนุพันธ์ได้ที่ } a$$

$$\text{และ } (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$2) \quad kf \text{ หาอนุพันธ์ได้ที่ } a \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{และ } (kf)'(a) = k f'(a)$$

$$3) \quad fg \text{ หาอนุพันธ์ได้ที่ } a$$

$$\text{และ } (fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

$$4) \quad \text{ถ้า } g(a) \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{g} \text{ หาอนุพันธ์ได้ที่ } a$$

$$\text{และ } \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

ลำดับขั้นตอนวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $f + g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า $f + g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a จะต้องหา

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a}$$

ซึ่ง

$$(f + g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a}$$

ข้อ 4 เนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a โดยบทนิยาม 1.1
จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$$\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

ข้อ 5 หาก $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a}$ โดยจัดให้อยู่ในรูปของ
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$

เพื่อจะได้นำแทนค่า $f'(a)$ และ $g'(a)$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a}$ มีและเท่ากับ $(f+g)'(a)$

นั่นคือ $f+g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

(1)

f, g หาอนุพันธ์ได้ที่ a

(4)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

(5)

หา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a}$ โดยจัดในรูปของ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ เพื่อแทนค่าด้วย $f'(a)$ และ $g'(a)$ ตามลำดับ

(3)

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a}$$

(2)

$f+g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

พิสูจน์ 1) ให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a

โดยบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a}$ มี และ เท่ากับ $(f+g)'(a)$

นั่นคือ $f+g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

พิสูจน์ 2) (แบบฝึกหัด)

คำถามชุดที่ 1

กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว $f-g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a หรือไม่

ลำดับขั้นตอนการพิสูจน์ 3)

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า fg หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า fg หาอนุพันธ์ได้ที่ a จะต้องหา

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$$

$$\text{ซึ่ง } (fg)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$$

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a โดยบทนิยาม 1.1

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

ขั้นที่ 5 หา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$ โดยจัดให้อยู่ในรูปของ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ เพื่อจะได้แทนค่าด้วย } f'(a) \text{ และ } g'(a)$$

ตามลำดับ

ขั้นที่ 6 พิจารณา
$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

$$\text{จะเห็นว่าไม่สามารถจัดอยู่ในรูป } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ และ } \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

ได้ จึงต้องบวก $f(x)g(a)$ เข้าและลบ $f(x)g(a)$ ออก

$$\begin{aligned}
\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) + f(x)g(a) - f(x)g(a)}{x - a} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g'(a) + g(a)f'(a)
\end{aligned}$$

ขั้นที่ 7 เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ a โดยทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่า
 f ต่อเนื่องที่ a ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ขั้นที่ 8 นำ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ไปแทนในขั้นที่ 6 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$ มี และ เท่ากับ $(fg)'(a)$

นั่นคือ fg หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์ 3)

(1) f, g หาอนุพันธ์ได้ที่ a

(4)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

(5)

หา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$ ให้อยู่ในรูปของ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$
เพื่อแทนค่าด้วย $f'(a)$ และ $g'(a)$ ตามลำดับ

(6)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

(7)

f หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f ต่อเนื่องที่ a
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

(3)

$$(fg)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$$

(2)

fg หาอนุพันธ์ได้ที่ a
ดังนั้น $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$

พิสูจน์ 3) f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) + f(x)g(a) - f(x)g(a)}{x - a} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\
 &= f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g'(a) + g(a) f'(a)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ a ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ a [ทฤษฎีบท 1.2]

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = f(a) g'(a) + g(a) f'(a)$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{fg(x) - fg(a)}{x - a}$ มีและเท่ากับ $(fg)'(a)$

เพราะฉะนั้น fg หาอนุพันธ์ได้ที่ a

และ $(fg)'(a) = f(a) g'(a) + g(a) f'(a)$

□

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 4)

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $g(a) \neq 0$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } \left(\frac{1}{g} \right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a จะต้องหา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a}$

$$\text{ซึ่ง } \left(\frac{1}{g} \right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a}$$

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ a โดยบทนิยาม 1.1 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

ขั้นที่ 5 หา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g} \right)(x) - \left(\frac{1}{g} \right)(a)}{x - a}$ โดยจัดให้อยู่ในรูปของ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ เพื่อจะได้แทนค่าด้วย } g'(a)$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \\ &= \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\ &= \frac{g(a) - g(x)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \\ &= - \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \\ &= -g'(a) \frac{1}{g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \\ &= -\frac{g'(a)}{g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}\end{aligned}$$

ข้อ 6 เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ a ดังนั้น g ต่อเนื่องที่ a
และโดยทฤษฎีบท 0.7 จะได้ว่า $\frac{1}{g}$ ต่อเนื่องที่ a

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}$

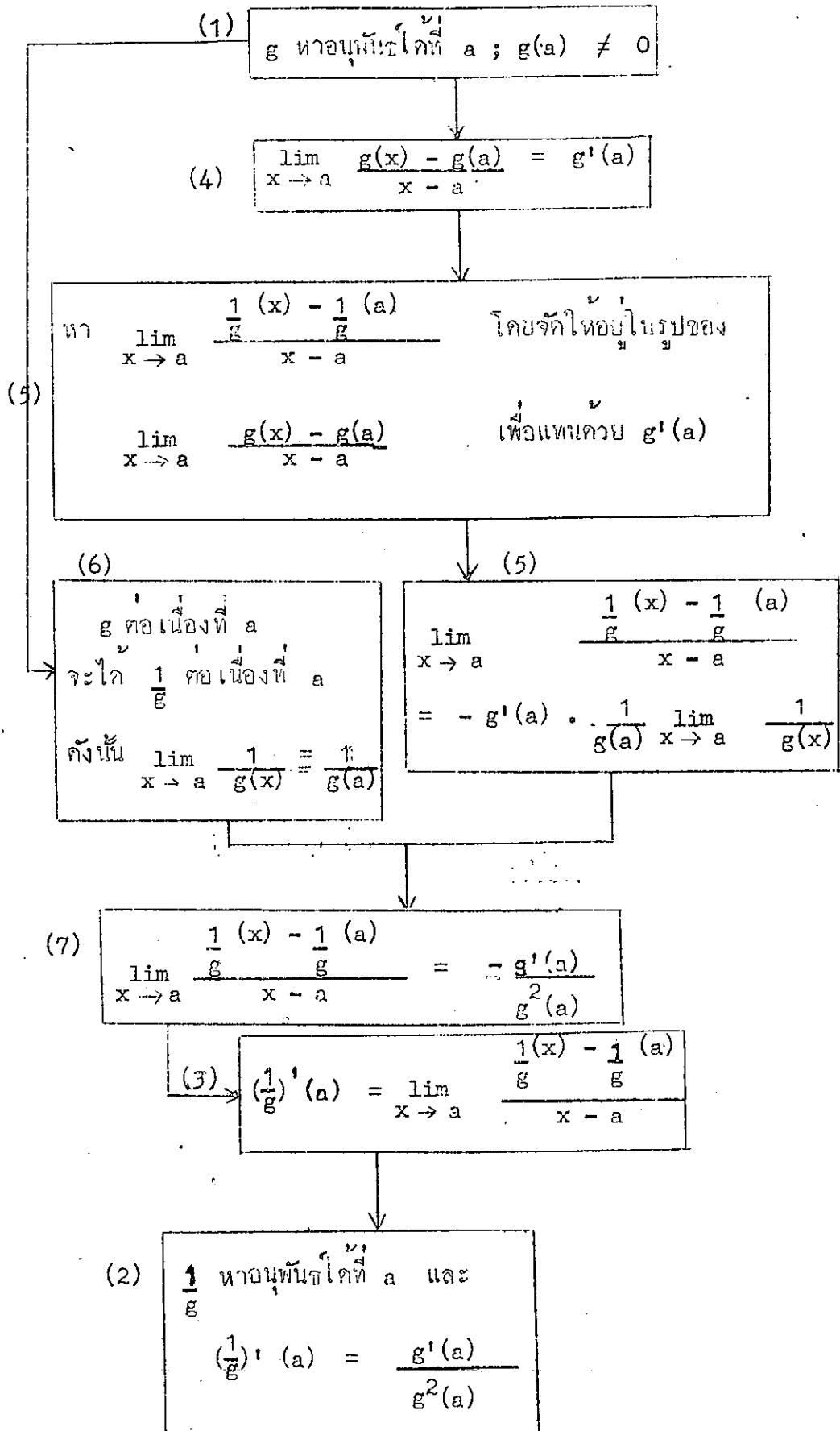
ข้อ 7 นำ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}$ ไปแทนในข้อ 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} &= \frac{-g'(a)}{g(a)} \cdot \frac{1}{g(a)} \\ &= \frac{-g'(a)}{g^2(a)}\end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a}$ มีและเท่ากับ $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$

นั่นคือ $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

และ $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$



พิสูจน์ 4) g หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $g(a) \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

พิจารณา $\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a}$

$$= \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a}$$

$$= \frac{-(g(x) - g(a))}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(g(x) - g(a))}{x - a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$$

เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ a ดังนั้น g ต่อเนื่องที่ a [ทฤษฎีบท 1.2]

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{g}$ ต่อเนื่องที่ a [ทฤษฎีบท 0.7]

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a}$ มีและเท่ากับ $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$

นั่นคือ $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$



ตัวอย่าง 2.2 จงหา $f'(x)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$(1) \quad f(x) = 5x - 3$$

$$(2) \quad f(x) = (x + 1)(x + 2)$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2x+1} ; \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

วิธีทำ (1) $f(x) = 5x - 3$

จากตัวอย่าง 1.4 จะได้ว่า $f'(x) = 5$ □

$$(2) \quad f(x) = (x + 1)(x + 2)$$

ให้ $u(x) = x + 1$

$$v(x) = x + 2$$

ดังนั้น $f(x) = u(x)v(x)$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$f'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

ในที่นี้ $u'(x) = 1$ และ $v'(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = (x + 1) \cdot 1 + (x + 2) \cdot 1$

$$= x + 1 + x + 2$$

$$= 2x + 3$$
 □

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2x+1} ; \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

ให้ $g(x) = 2x + 1 ; \quad g(x) \neq 0$

ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4 จะได้ว่า $f'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

ในที่นี้ $g'(x) = 2$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ □

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $g(a) \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

และ
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $g(a) \neq 0$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $g(a) \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4

จะได้ว่า $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า $f \cdot \frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ดังนั้น $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a)$$

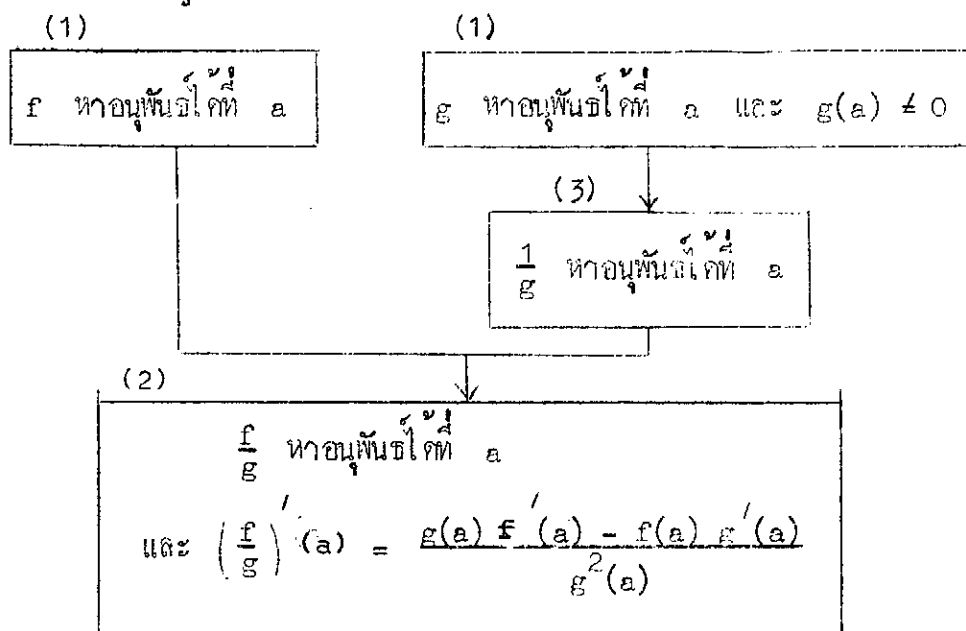
$$= f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + \left(\frac{1}{g}\right)(a) f'(a)$$

$$= f(a) \left[\frac{-g'(a)}{g^2(a)} \right] + \frac{1}{g(a)} f'(a)$$

$$= \frac{-f(a)g'(a) + g(a)f'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ a ; $g(a) \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า $\frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4 จะได้ว่า $f \cdot \frac{1}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ดังนั้น $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a)$$

$$= f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + \left(\frac{1}{g}\right)'(a) f'(a) \quad \left[\text{ท.บ.2.3 ข้อ 3} \right]$$

$$= f(a) \left[\frac{-g'(a)}{g^2(a)} \right] + \frac{1}{g(a)} f'(a) \quad \left[\text{ท.บ.2.3 ข้อ 4} \right]$$

$$= \frac{-f(a)g'(a) + g(a)f'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

□

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ จงหา $f'(x)$ เมื่อ $x \neq -\frac{2}{3}$

วิธีทำ กำหนด $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$

ให้ $u(x) = 2x-1$

$v(x) = 3x+2$

ดังนั้น $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า

$$f'(x) = \frac{v(x) u'(x) - u(x) v'(x)}{v^2(x)}$$

ในที่นี้ $u'(x) = 2$ และ $v'(x) = 3$

เพราะฉะนั้น
$$f'(x) = \frac{(3x+2)2 - (2x-1)3}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{7}{(3x+2)^2}$$



ทฤษฎีบท 2.5 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$

จะได้ว่า $f'(a) = na^{n-1}$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $f'(a) = na^{n-1}$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

ขั้นที่ 3 จะพิสูจน์ว่า $f'(a) = na^{n-1}$ โดยใช้การอุปमानทางคณิตศาสตร์

3.1 เมื่อ $n = 1$ ดังนั้น $f(x) = x$ โดยทฤษฎีบท 2.2

จะได้ว่า $f'(a) = 1 = 1 \cdot a^{1-1}$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

3.2 สมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงที่ $n = k$ นั่นคือ

$f(x) = x^k$ จะได้ $f'(a) = k a^{k-1}$ สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$

3.3 พิจารณาที่ $n = k + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{k+1} \\ &= x^k \cdot x \end{aligned}$$

ให้ $h(x) = x^k$, $I(x) = x$

ดังนั้น $h'(a) = k a^{k-1}$, $I'(a) = 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = h(x) I(x)$

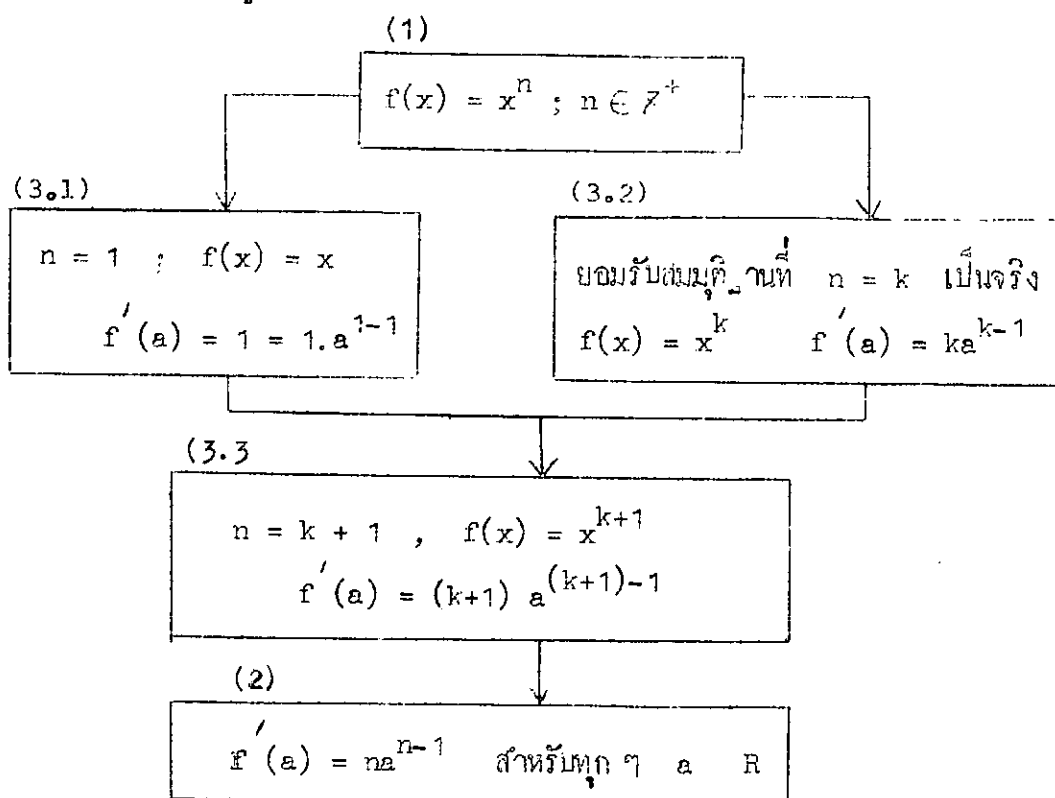
$$= hI(x)$$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(a) &= h(a) I'(a) + I(a) h'(a) \\ &= a^k \cdot 1 + a \cdot k a^{k-1} \\ &= a^k + k a^k \\ &= (k+1) a^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

โดยใช้การอุปมาทางคณิตศาสตร์

1. กรณีที่ $n = 1$ โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $f'(a) = 1 = 1 \cdot a^{1-1}$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

2. ยอมรับสมมุติฐานที่ $n = k$ เป็นจริง ดังนั้น

$$f(x) = x^k \quad \text{จะได้ว่า} \quad f'(a) = ka^{k-1}$$

3. พิจารณาที่ $n = k+1$ ดังนั้น

$$f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$$

$$\text{ให้ } h(x) = x^k \text{ และ } I(x) = x$$

$$\text{ดังนั้น } h'(a) = ka^{k-1}, \quad I'(a) = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x) = h(x) I(x)$$

$$= h I(x)$$

$$f'(a) = h(a) I'(a) + I(a) h'(a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad f'(a) &= a^k \cdot 1 + a \cdot k a^{k-1} \\
 &= a^k + k a^k \\
 &= (k+1) a^{(k+1)-1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ทฤษฎีนี้เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{Z}^+$



ตัวอย่าง 2.4 จงหา $f'(x)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$1) \quad f(x) = x^5$$

$$2) \quad f(x) = x^7$$

$$3) \quad f(x) = x^{12}$$

วิธีทำ

$$1) \quad f(x) = x^5$$

ดังนั้น

$$f'(x) = 5x^4$$

$$2) \quad f(x) = x^7$$

ดังนั้น

$$f'(x) = 7x^6$$

$$3) \quad f(x) = x^{12}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = 12x^{11}$$



ทฤษฎีบท 2.6

$$\text{ถ้า } f(x) = x^{-n} ; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{จะได้ } f'(a) = -na^{-n-1} \text{ สำหรับทุก } a \neq 0$$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^{-n} ; n \in \mathbb{Z}^+$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $f'(a) = -na^{-n-1}, a \neq 0$

ขั้นที่ 3 จากทฤษฎีบท 2.5 เราทราบว่า ถ้า $f(x) = x^n$ จะได้ $f'(a) = na^{n-1}$
 ดังนั้นจึงพยายามจัดรูป $f(x) = x^{-n}$ ให้อยู่ในรูปของ x^n เพื่อที่จะได้
 ใช้ทฤษฎีบท 2.5 ช่วยในการพิสูจน์

$$\text{จาก } f(x) = x^{-n} ; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$= \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{ให้ } g(x) = x^n ; x \neq 0$$

$$\text{ดังนั้น } g'(a) = na^{n-1} \text{ และ } g(a) = a^n$$

$$\text{และ } f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}}$$

$$= -na^{n-1} \cdot a^{-2n}$$

$$= -na^{-n-1} ; a \neq 0$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

$$(1) \quad f(x) = x^{-n} ; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &\text{จัด } f(x) = x^{-n} \text{ ในรูปของ } x^n \text{ คือ } f(x) = \frac{1}{x^n} \\ &\text{และให้ } g(x) = x^n, \quad x \neq 0 \\ &\text{โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ว่า} \\ &f'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)} = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(a) = -na^{-n-1} \text{ สำหรับทุก ๆ } a \neq 0$$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{Z}^+$

$$= \frac{1}{x^{-n}} ; x \neq 0$$

สมมติให้ $g(x) = x^{-n}$

ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4 $f'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$

โดยทฤษฎีบท 2.5 $g'(a) = na^{n-1}$

ดังนั้น $f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}}$

$$= -na^{n-1} \cdot a^{-2n}$$

$$= -na^{-n-1} ; a \neq 0$$



ตัวอย่าง 2.5 จงหา $f'(x)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

$$1) \quad f(x) = x^{-5}$$

$$2) \quad f(x) = x^{-7}$$

$$3) \quad f(x) = x^{-12}$$

วิธีทำ

$$1) \quad f(x) = x^{-5}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = -5x^{-6}$$

$$2) \quad f(x) = x^{-7}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = -7x^{-8}$$

$$3) \quad f(x) = x^{-12}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = -12x^{-13}$$

□

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 2$$

ดังนั้น

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$$

□

ตัวอย่าง 2.7 กำหนดให้ $f(x) = (x^4 + 3x^2 - x + 1)(x^2 + x + 2)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\text{สมมติให้ } u(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$$

$$\text{และ } v(x) = x^2 + x + 2$$

ดังนั้น

$$f(x) = u(x)v(x)$$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 4 จะได้ว่า $f'(x) = u(x) v'(x) + v(x) u'(x)$

ในทำนอง

$$u'(x) = 4x^3 + 6x - 1 \quad \text{และ} \quad v'(x) = 2x + 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(x) = (x^4 + 3x^2 - x + 1)(2x + 1) + (x^2 + x + 2)(4x^3 + 6x - 1)$$

$$= 6x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 6x^2 + 12x - 1$$

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ สมมติให้ $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$
 $v(x) = x^2 + 2$

ดังนั้น $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

โดยทฤษฎีบท 2.4 $f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

ในที่นี้ $u'(x) = 6x - 5$ และ $v'(x) = 2x$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{(x^2+2)(6x-5) - (3x^2-5x+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$
 $= \frac{6x^3 - 5x^2 + 12x - 10 - 6x^3 + 10x^2 - 2x}{(x^2+2)^2}$
 $= \frac{5x^2 + 10x - 10}{(x^2+2)^2}$ □

แบบฝึกหัดข้อที่ 3

1. จงหา $f'(x)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 29$

1.2 $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$

1.3 $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

1.4 $f(x) = \frac{x}{x+1}$

2. จงหาค่า x ซึ่งทำให้ $f'(x) = 0$ เมื่อกำหนด $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 3}$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x < 3 \\ 8 - x & ; x \geq 3 \end{cases}$

จงหา $f'(3)$

4. จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{4}{x+1}$ ที่ $x = 1$

5. กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหา $f'(x)$

5.1 $f(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 - 3x}{2x^5 + 7x^3 - x}$

5.2 $f(x) = \frac{x^{-4} + x^{-5}}{-31x^{-1} - 4x}$

5.3 $f(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(5x^7 - 4x^2)}{6x - 7}$

5.4 $f(x) = \frac{(3x + 5)(6x - 1)}{(7x - 2)(3x + 4)}$

5.5 $f(x) = \frac{(5x - 3)(x - 6)}{(2x - 7)(4x + 3)}$

Lemma 2.7 ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ ฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$
นิยามฟังก์ชัน ϕ ดังนี้

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} & ; f(x) - f(a) \neq 0 \\ g'(f(a)) & ; f(x) - f(a) = 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\phi(x)$ ต่อเนื่องที่ a

ลำดับขั้นตอนวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

1.2 g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$

1.3 กำหนดฟังก์ชัน ϕ ดังนี้

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} & ; f(x) - f(a) \neq 0 \\ g'(f(a)) & : f(x) - f(a) = 0 \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า ϕ ต่อเนื่องที่ a

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า ϕ ต่อเนื่องที่ a จะต้องแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = g'(f(a))$$

พิสูจน์ เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a))$$

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |f(x) - f(a)| < \delta_1 \implies \left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} - g'(f(a)) \right| < \varepsilon \quad \dots (1)$$

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ a ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ a [ทฤษฎีบท 1.2]

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon = \delta_1$; $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \delta_1$

จาก (1) จะได้ว่า จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} - g'(f(a)) \right| < \varepsilon \quad \dots (2)$$

กรณีที่ 1 พิจารณา $f(x) - f(a) \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \phi(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

จาก (2) เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x - a| < \delta \implies |\phi(x) - g'(f(a))| < \varepsilon \quad \dots (3)$$

กรณี 2 พิจารณา $f(x) - f(a) = 0$

จะได้ว่า $\phi(x) = g'(f(a))$

จาก (2) เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - g'(f(a))| = 0 < \varepsilon \quad \dots (4)$$

จาก (3) และ (4) สรุปได้ว่า

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - g'(f(a))| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = g'(f(a))$

นั่นคือ ϕ ต่อเนื่องที่ a



ทฤษฎีบท 2.8 (The Chain Rule)

f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$

จะได้ว่า $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

1.2 g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า $(g \circ f)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a จะต้องหา

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$$

ซึ่ง $(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ a ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$ โดย Lemma 2.7 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a))$$

ขั้นที่ 5 การที่จะหา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$ จะต้องจัดให้อยู่ในรูปของ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

เพื่อที่จะได้แทนด้วย $f'(a)$ และ $g'(f(a))$ ตามลำดับ

ขั้นที่ 6 พิจารณา $\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$

จะเห็นว่ายังไม่อยู่ในรูปของ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ และ $\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$

จึงต้องคูณด้วย $\frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) f'(a)\end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a}$ มี และ เท่ากับ $(gof)'(a)$

นั่นคือ gof หาอนุพันธ์ได้ที่ a

$$\text{และ } (gof)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(1.1)

f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

(1.2)

g หาอนุพันธ์ได้ที่ f(a)

(4.1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(4.2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a))$$

(5)

หา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$ โดยจัดในรูป $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$ เพื่อแทนด้วย $f'(a)$ และ $g'(f(a))$ ตามลำดับ

(6)

เพิ่มรูปโดยการคูณด้วย $\frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)}$ จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(3)

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$$

(2)

$g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a
และ $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

พิสูจน์ f หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (บทนิยาม 1.1)

และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a))$ (Lemma 2.7)

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) f'(a) \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a}$ มี และเท่ากับ $(g \circ f)'(a)$

ดังนั้น $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a

และ $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

ตัวอย่าง 2.8 กำหนดให้ $f(x) = \sin^2 x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $u(x) = \sin x$, $s(x) = x^2$

ดังนั้น $f(x) = s(u(x))$

โดยกฎลูกโซ่ (The Chain Rule) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u(x)) u'(x) \\ &= 2(u(x)) \cos x \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.9 ถ้า $u(x) = 2x + 7$, $g(x) = x^5$

และ $f(x) = g \circ u(x)$ จงหา $f'(x)$ ✓

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(x) &= g \circ u(x) \\ &= g(u(x)) \\ &= g(2x+7) \\ &= (2x+7)^5 \end{aligned}$$

ให้ $y = f(x) = g(u) = u^5$

ดังนั้น $\frac{dy}{du} = g'(u) = 5u^4$

$\frac{du}{dx} = u'(x) = 2$

โดยกฎลูกโซ่ $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$

$$\begin{aligned} &= 5u^4 \cdot 2 \\ &= 10(2x+7)^4 \end{aligned}$$

□

จากตัวอย่าง 2.9 สามารถเขียนกฎลูกโซ่ได้อีกแบบหนึ่งว่า

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ u

และ u เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่าง 2.10 กำหนดให้ $f(x) = \sin^2(x)^2$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f(x) = \sin^2(x)^2$

ให้ $y = \sin^2(u)$ และ $u = x^2$

$$\begin{aligned}\text{โดยกฎลูกโซ่} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (2 \sin u \cos u)(2x) \\ &= 4x \sin u \cos u\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f'(x) = 4x \sin x^2 \cos x^2 \quad \square$$

ตัวอย่าง 2.11 กำหนดให้ $f(x) = (2x^3 + 3x^2 - x + 5)^4$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $y = u^4$

$$u = (2x^3 + 3x^2 - x + 5)$$

$$\begin{aligned}\text{โดยกฎลูกโซ่} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 4u^3 \cdot (6x^2 + 6x - 1) \\ &= 4(2x^3 + 3x^2 - x + 5)^3(6x^2 + 6x - 1)\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad f'(x) = 4(2x^3 + 3x^2 - x + 5)^3(6x^2 + 6x - 1) \quad \square$$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้ $f(x) = (x^3+1)^2 + 3(x^3+1) + 7$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $u = (x^3 + 1)$

$$y = u^2 + 3u + 7$$

โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (2u + 3)(3x^2) \\ &= [2(x^3 + 1) + 3](3x^2) \\ &= (2x^3 + 2 + 3)(3x^2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 6x^5 + 15x^2$



จากตัวอย่างที่ 2.11

ถ้าให้ $f(x) = u^n$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x จะได้ว่า

$$f'(x) = nu^{n-1} [u'(x)]$$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดให้ $f(x) = (2x + 4)^5(5x + 7)^3$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $g(x) = (2x+4)^5$

$$h(x) = (5x+7)^3$$

ดังนั้น $f(x) = g(x)h(x)$

โดยทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3 $f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $g'(x) = 5(2x+4)^4(2) = 10(2x+4)^4$

และ $h'(x) = 3(5x+7)^2(5) = 15(5x+7)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f'(x) &= (2x+4)^5 \cdot 15(5x+7)^2 + (5x+7)^3 \cdot 10(2x+4)^4 \\
 &= 15(2x+4)^5(5x+7)^2 + 10(2x+4)^4(5x+7)^3 \\
 &= 5(2x+4)^4(5x+7)^2 [3(2x+4) + 2(5x+7)] \\
 &= 5(2x+4)^4(5x+7)^2 (6x+12+10x+14) \\
 &= 5(2x+4)^4(5x+7)^2 (16x+26)
 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัดชุดที่ 4

1. กำหนด $f(x)$ ให้ดังต่อไปนี้ จงหา $f'(x)$

1.1 $f(x) = (3x+4)^4$

1.2 $f(x) = (3x-8)^6$

1.3 $f(x) = (2x^7 - 5x^3 - 3)^4$

1.4 $f(x) = (3x+8)^4 (4x+2)$

1.5 $f(x) = (2x+1)^{-1} (5x+7)^{-2}$

1.6 $f(x) = \frac{(5x^2 - 8)}{(9x-10)^6}$

1.7 $f(x) = (2x+7)^5 + (2x+7)^3 + 5$

2. จงหา $f'(x)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

$$2.1 \quad f(x) = \sin x^3$$

$$2.2 \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$2.3 \quad f(x) = \cos (\sin x)$$

$$2.4 \quad f(x) = \sin (x^3 + 3x^2)$$

$$2.5 \quad f(x) = \cos^3(\sin^2(x^5 - 4x^2))$$

จากทฤษฎีบท 2.5 และ 2.6 ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนเต็มลบ ต่อไปจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ เช่น $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.9 ถ้า $f(x) = x^{1/n}$; $n \in \mathbb{Z}^+$

จะได้ว่า $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$; $x \neq 0$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^{1/n}$; $n \in \mathbb{Z}^+$

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$; $x \neq 0$

ขั้นที่ 3 จาก $f(x) = x^{1/n}$; $n \in \mathbb{Z}^+$ พยายามจัดรูปให้อยู่ในฟังก์ชันที่

ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $f(x) = x^{1/n}$

$$[f(x)]^n = x$$

ขั้นที่ 4 หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $[f(x)]^n = x$

นั่นคือ
$$\frac{d}{dx} [f(x)]^n = \frac{d}{dx} x$$

โดยกฎลูกโซ่
$$\frac{d}{dx} [f(x)]^n = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$$

และทฤษฎีบท 2.2
$$\frac{d}{dx} x = 1$$

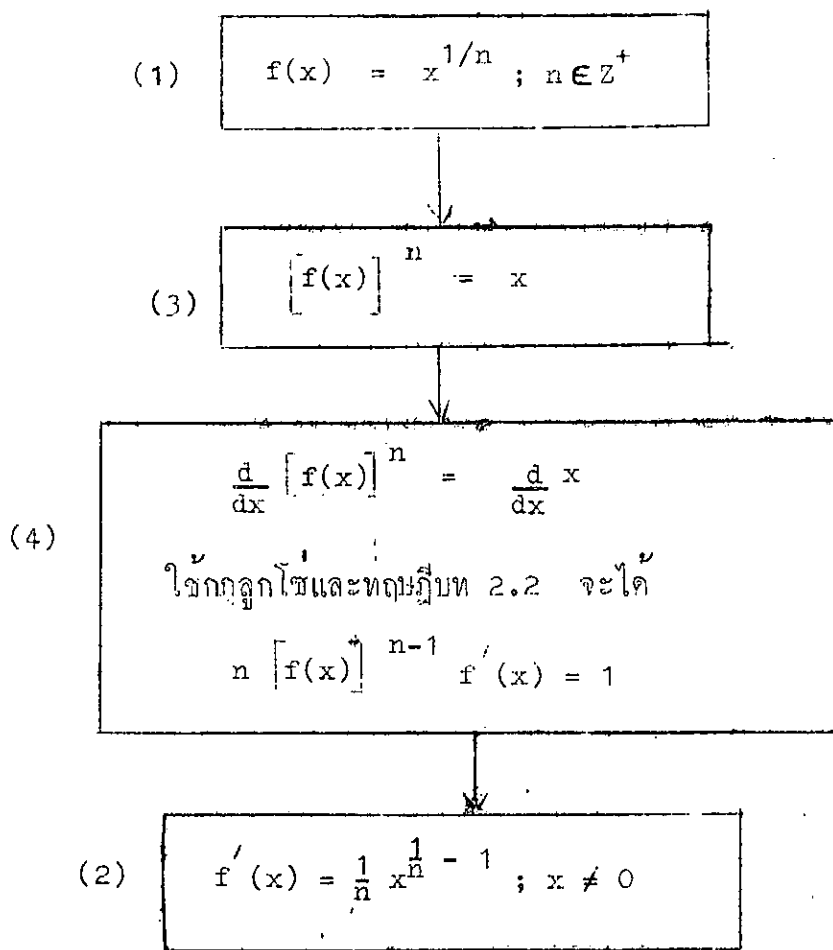
เพราะฉะนั้น
$$n [f(x)]^{n-1} f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{n} [f(x)]^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n} [x^{1/n}]^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} ; x \neq 0$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ ให้ $f(x) = x^{1/n} ; n \in \mathbb{Z}^+$

เพราะฉะนั้น $[f(x)]^n = x$

ดังนั้น $\frac{d}{dx} [f(x)]^n = \frac{d}{dx} x$

โดยกฎลูกโซ่ และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$n [f(x)]^{n-1} f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{n} [f(x)]^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n} [x^{1/n}]^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} ; x \neq 0$$



ตัวอย่าง 2.14

1. ถ้า $f(x) = x^{1/3}$ จะได้ $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} ; x \neq 0$

2. ถ้า $f(x) = x^{1/2}$ จะได้ $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} ; x \neq 0$

คำถามชุดที่ 5

1. ถ้า n เป็นจำนวนคู่ พิจารณา $f(x) = x^{1/n}$ จะต้องนิยามอย่างไร
จึงจะหาอนุพันธ์ได้

2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่ พิจารณา $f(x) = x^{1/n}$ จะต้องนิยามอย่างไร
จึงจะหาอนุพันธ์ได้

ทฤษฎีบท 2.10 ถ้า $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Q}$

จะได้ว่า $f'(x) = n x^{n-1}$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Q}$

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $f'(x) = n x^{n-1}$; $n \in \mathbb{Q}$

ขั้นที่ 3 จาก $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Q}$

เนื่องจากเรารู้ว่าถ้า $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ $f'(x) = n x^{n-1}$;
 $n \in \mathbb{Z}^+$ ดังนั้นพยายามจัด $n \in \mathbb{Q}$ ให้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม

ให้ $n = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$ และ $q \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } f(x) &= x^{p/q} \\ &= \left[x^{1/q} \right]^p \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 สมมติให้ $u(x) = x^{1/q}$; $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า $u'(x) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$

$$\text{และ } f(x) = \left[u(x) \right]^p$$

$$\text{โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า } f'(x) = p \left[u(x) \right]^{p-1} \left[u'(x) \right]$$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= p \left[x^{1/q} \right]^{p-1} \frac{1}{q} \left[x \right]^{\frac{1}{q} - 1} \\
 &= \frac{p}{q} \left[x \right]^{\frac{p-1}{q} + \frac{1-q}{q}} \\
 &= \frac{p}{q} \left[x \right]^{\frac{p}{q} - 1} \\
 &= n x^{n-1} ; n \in \mathbb{Q}
 \end{aligned}$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

(1) $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{Q}$

(3) ให้ $n = \frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$
 ดังนั้น $f(x) = x^{p/q} = \left[x^{1/q} \right]^p$

(4) ให้ $u(x) = x^{1/q}$ ดังนั้น $f(x) = \left[u(x) \right]^p$
 ใช้ทฤษฎีบท 2.9 และกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= p \left[u(x) \right]^{p-1} \left[u'(x) \right] \\
 &= p \left[x^{1/q} \right]^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1}
 \end{aligned}$$

(2) $f'(x) = n x^{n-1} ; n \in \mathbb{Q}$

พิสูจน์ กำหนด $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Q}$

ให้ $n = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$ และ $q \neq 0$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } f(x) &= x^{p/q} \\ &= [x^{1/q}]^p\end{aligned}$$

$$\text{ให้ } u(x) = x^{1/q}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } u'(x) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} \quad \left[\text{ทฤษฎีบท 2.9} \right]$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = [u(x)]^p$$

$$\begin{aligned}\text{โดยกฎลูกโซ่จะได้ } f'(x) &= p[u(x)]^{p-1} [u'(x)] \\ &= p[x^{1/q}]^{p-1} \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} \\ &= \frac{p}{q} [x]^{\frac{p-1}{q} + \frac{1-q}{q}} \\ &= \frac{p}{q} [x]^{\frac{p-1+1-q}{q}} \\ &= \frac{p}{q} [x]^{\frac{p}{q} - 1}\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(x) = n x^{n-1} ; n \in \mathbb{Q}$$



ตัวอย่าง 2.15 ถ้า $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$

โดยทฤษฎีบท 2.9 และกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2} - 1} \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} (2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 2.16 ถ้า $f(x) = x^2(2x^3 - 1)^{2/3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2$

และ $h(x) = (2x^3 - 1)^{2/3}$

ดังนั้น $f(x) = g(x)h(x)$

นั่นคือ $f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$ [ทฤษฎีบท 2.3 ข้อ 3]

ในที่นี้ $g'(x) = 2x$

และ $h'(x) = \frac{2}{3} (2x^3 - 1)^{\frac{2}{3} - 1} (6x^2)$

$$= 4x^2 (2x^3 - 1)^{-1/3}$$

ดังนั้น $f'(x) = x^2(4x^2)(2x^3 - 1)^{-1/3} + (2x^3 - 1)^{2/3} (2x)$

$$= 4x^4 (2x^3 - 1)^{-1/3} + 2x(2x^3 - 1)^{2/3}$$

□

แบบฝึกหัดที่ 5

1. กำหนดฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้ จงหา $f'(x)$

$$1.1 \quad f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2}$$

$$1.2 \quad f(x) = \sqrt{3x+7}$$

$$1.3 \quad f(x) = (2x+1)\sqrt{x^2+9}$$

$$1.4 \quad f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3x+5}}$$

$$1.5 \quad f(x) = \sqrt{x - \frac{3}{x^2}}$$

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน $y = x^3$ ที่จุด $(0, 0)$

3. จงหาความชันของเส้นสัมผัสสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน $y = (x-2)^{2/3}$
หรือ $x = 2$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน $y = x^5$ ที่จุด $(2, 32)$

ฟังก์ชันผกผันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันผกผัน

บทนิยาม 2.1 กำหนดความสัมพันธ์ r เขียนแทนอินเวอร์สของ r ด้วย r^{-1} โดยที่ $r^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in r \}$

บทนิยาม 2.2 กำหนดฟังก์ชัน f ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เรียก f^{-1} ว่า ฟังก์ชันผกผันของ f

ในทฤษฎีเซตสามารถพิสูจน์ได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

กำหนดฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไปบน B

จะได้ว่า $f \circ f^{-1} = I_B$ เมื่อ I_B คือฟังก์ชันเอกลักษณ์บนเซต B

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $f = \{ (x,y) \mid y = 3x - 7 \}$ จงหา f^{-1}

วิธีทำ $y = 3x - 7$

ดังนั้น $x = \frac{y + 7}{3}$

เนื่องจาก $f^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in f \}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1} = \{ (x,y) \mid y = \frac{x + 7}{3} \}$



อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบท 2.11 ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบนช่วงๆหนึ่ง และ $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ แล้ว f^{-1} จะหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบนช่วงๆหนึ่ง

1.2 $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a

ขั้นที่ 3 การที่จะพิสูจน์ว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a สามารถพิสูจน์ได้โดยการสมมุติว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้วพยายามหาข้อขัดแย้งว่าที่สมมุตินั้นไม่จริงแล้วจึงสรุปว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่ามี f^{-1} ซึ่งทำให้ $f \circ f^{-1} = I$

ดังนั้น $(f \circ f^{-1})(a) = I(a) = a$

ขั้นที่ 5 จากที่สมมุติว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า $(f \circ f^{-1})'(a) = f'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a)$

และโดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $I'(a) = 1$

ดังนั้น $(f \circ f^{-1})'(a) = I'(a)$

$$f'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a) = 1$$

จากที่กำหนดให้ $f'(f^{-1}(a)) = 0$

เพราะฉะนั้น $0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1$

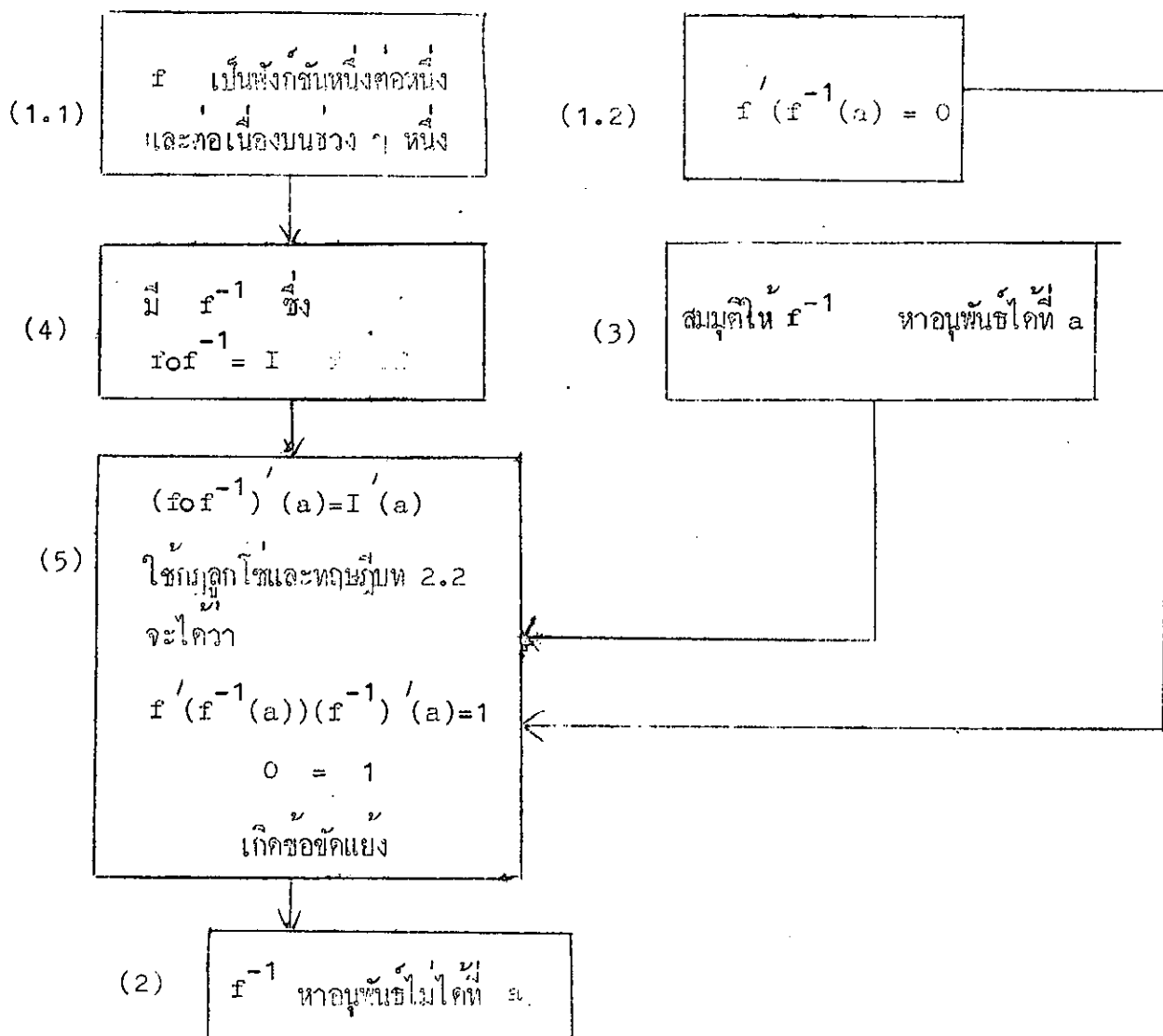
$$0 = 1$$

ซึ่งเป็นไปได้ไม่ได้ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น พิสูจน์ได้ว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a ไม่จริง

นั่นคือ f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ พิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และต่อเนื่องบนช่วงหนึ่ง

ดังนั้น มี f^{-1} ซึ่งทำให้ $f \circ f^{-1} = I$

เพราะฉะนั้น $f \circ f^{-1}(a) = I(a) = a$

จากที่สมมติว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a

ใช้กฎลูกโซ่ และทฤษฎีบท 2.2

$$(f \circ f^{-1})'(a) = I'(a)$$

$$f'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a) = 1$$

$$0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1$$

$$0 = 1$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นที่สมมติว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a ไม่จริง

นั่นคือ f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ a □

ตัวอย่าง 2.18 กำหนด $f(x) = x^3$ จงแสดงว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0

พิสูจน์ กำหนด $f(x) = x^3$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบน D_f

พิจารณาที่ 0 จะได้ว่า $f'(0) = 0$

เนื่องจาก $f(x) = x^3$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(0) = 0$

นั่นคือ $f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 0$

แสดงว่า f^{-1} หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0

[ทฤษฎีบท 2.11] $\square$

คำถามข้อที่ 6

1. ถ้า $f(x) = x^5, x^7, x^9, \dots$ แล้ว f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 หรือไม่
2. จากข้อที่ 1. สามารถสรุปเป็นรูปทั่วไปได้หรือไม่ อย่างไร

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ และ f มีความต่อเนื่องบน D_f

ถ้า $x = f^{-1}(y) = g(y)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y = f(x)$

จะได้ว่า $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

ลำดับขั้นตอนการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

$$1.1 \quad y = f(x)$$

$$1.2 \quad f \text{ หาอนุพันธ์ได้ และ } f'(x) \neq 0$$

$$1.3 \quad \text{ถ้า } x = f^{-1}(y) = g(y) \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันของ } y = f(x)$$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

ขั้นที่ 3 จักรูปของ $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ โดยแทนด้วย $y = f(x)$ เพื่อที่จะสามารถ

ใช้กฎลูกโซ่ช่วยในการหาค่า $g'(f(x)) f'(x) = 1$

ขั้นที่ 4 จากที่กำหนด $x = g(y)$
 $= g(f(x))$
 $= (g \circ f)(x)$

หาอนุพันธ์ของ $(g \circ f)(x) = x$

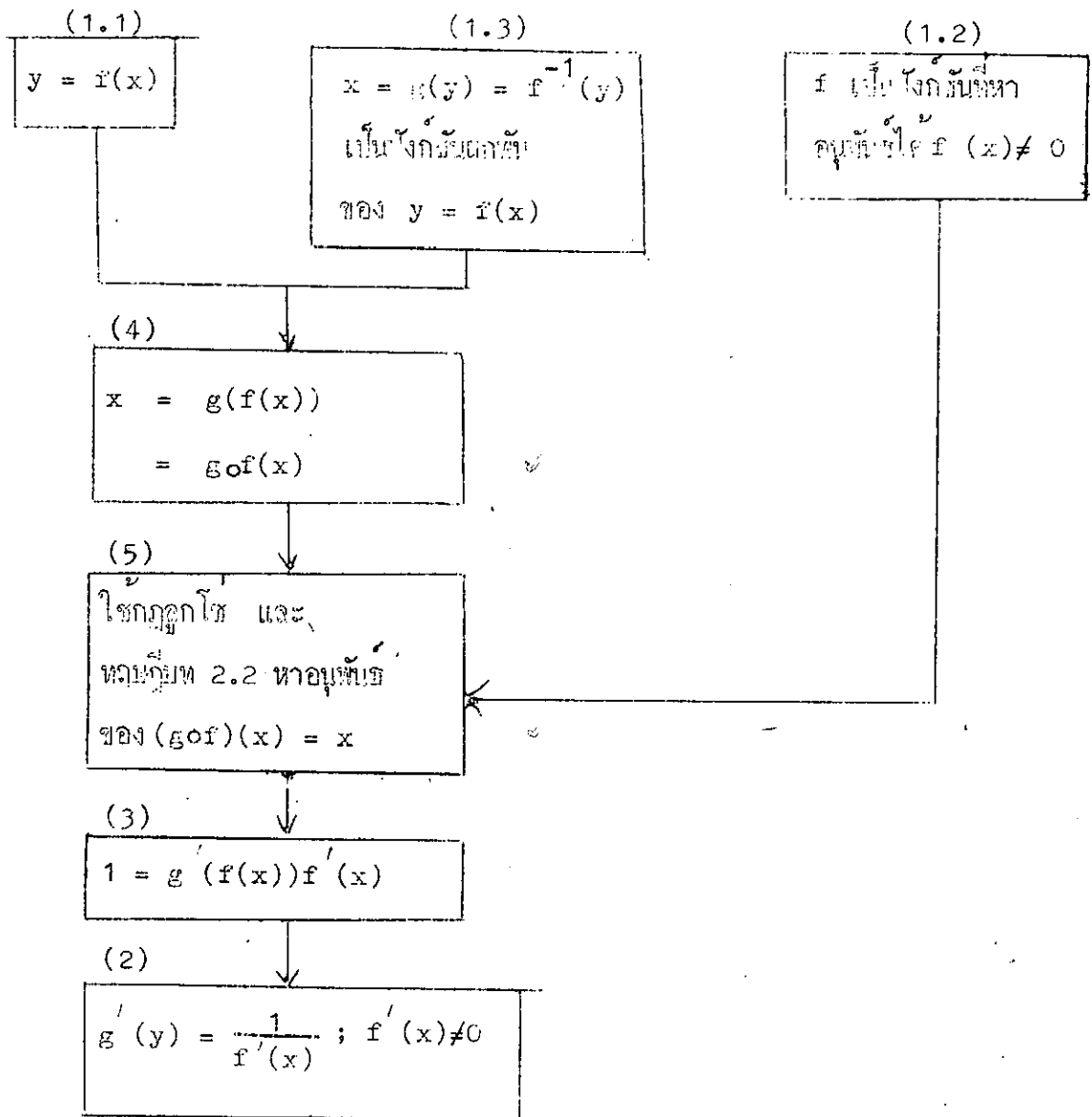
ขั้นที่ 5 โดยกฎลูกโซ่ และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$(g \circ f)'(x) = 1$$

$$g'(f(x)) f'(x) = 1$$

$$\text{นั่นคือ } g'(y) = \frac{1}{f'(x)} ; f'(x) \neq 0$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนด $y = f(x)$

ดังนั้น $x = f^{-1}(y)$

$$= g(y)$$

$$= g(f(x))$$

$$= (g \circ f)(x) \quad \checkmark$$

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $(g \circ f)x = x$ ✓

โดยกฎลูกโซ่ และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$(g \circ f)'(x) = 1 \quad \checkmark$$

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f'(x) \neq 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f'(x) \neq 0 \quad \square$$

หมายเหตุ จาก $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ตัวอย่าง 2.19 จงหาฟังก์ชันผกผัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน $y = x^3 ; x \neq 0$

วิธีทำ $y = f(x) = x^3 ; x \neq 0$

ดังนั้น $x = y^{1/3}$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันผกผันคือ $\{(x, y) \mid y = x^{1/3}\}$
โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

ดังนั้น $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2} ; x \neq 0$

เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน $y = x^{1/3}$ คือ $\frac{1}{3x^2} ; x \neq 0$ □

ตัวอย่าง 2.20 กำหนด $x = y \sqrt{1-y^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $x = y \sqrt{1-y^2}$

ดังนั้น $x = y(1-y^2)^{1/2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dx}{dy} = y \frac{d}{dy} (1-y^2)^{1/2} + (1-y^2)^{1/2} \frac{d}{dy} y$
 $= y \cdot \frac{1}{2}(1-y^2)^{-1/2}(-2y) + (1-y^2)^{1/2} \cdot 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dy} &= \frac{-y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1-y^2} \\
 &= \frac{-y^2 + 1 - y^2}{\sqrt{1-y^2}} \\
 &= \frac{1 - 2y^2}{\sqrt{1-y^2}}
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$



ตัวอย่าง 2.21 กำหนด $f(x) = x^3 - 2x + 1$ และให้ g เป็นฟังก์ชันผกผัน
ของ f จงหา $g'(0)$

วิธีทำ $f(x) = x^3 - 2x + 1$

โดยบทนิยาม 2.2 เราทราบว่า $f(x) = y \iff g(y) = x$

โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

เนื่องจาก $f(1) = 0$ ดังนั้น $g(0) = 1$

นั่นคือ $g'(0) = \frac{1}{f'(1)}$

แต่ $f'(x) = 3x^2 - 2$ เพราะฉะนั้น $f'(1) = 1$

ดังนั้น $g'(0) = \frac{1}{1}$
 $= 1$



แบบฝึกหัดชุดที่ 6

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 3x+5$

1.2 $f(x) = 5x+4$

1.3 $f(x) = x^3 - 3$

1.4 $f(x) = \sqrt{7x+8}$

1.5 $f(x) = x^3 + 25$

1. $f(x) = \frac{4x-5}{3x-2}$

2. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 + 5$; $x \in \mathbb{R}$ และให้ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ f
 จงหา $g'(3)$

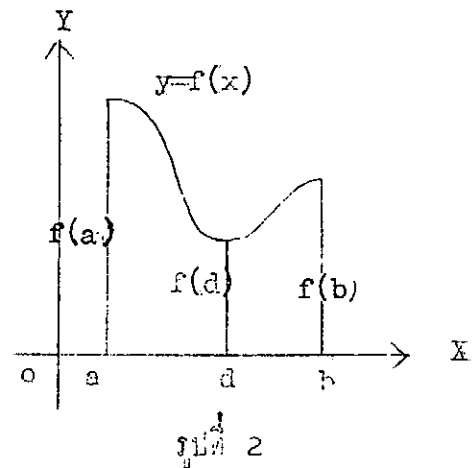
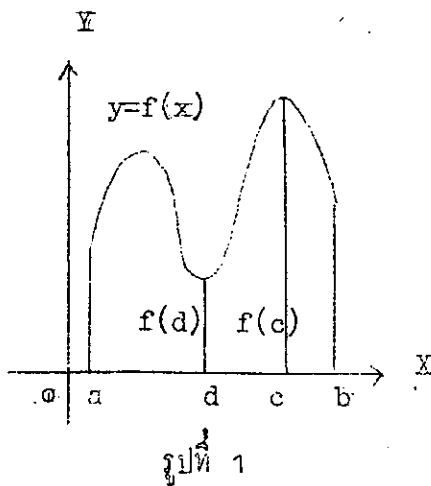
3. กำหนดให้ $f(x) = 5x^2 + 1$; $x \geq 0$ และให้ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ f
 จงหา $g'(11)$

บทที่ 3

การประยุกต์เกี่ยวกับอนุพันธ์

บทนิยาม 3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $A \subset D_f$ จุด B ใน A เป็นจุดสูงสุด (maximum point) ของ f บน A ก็ต่อเมื่อ $f(B) \geq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัวใน A เรียกว่า $f(B)$ ว่าค่าสูงสุดของ f บน A และกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดบน A ที่ B

ในทำนองเดียวกัน จุด r ใน A เป็นจุดต่ำสุด (minimum point) ของ f บน A ก็ต่อเมื่อ $f(r) \leq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัวใน A เรียกว่า $f(r)$ ว่าค่าต่ำสุดของ f บน A และกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดบน A ที่ r



พิจารณารูปที่ 1 และรูปที่ 2 ถ้าให้ $\Lambda = [a, b]$

จากรูปที่ 1 ได้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x \in \Lambda$
และ $f(d) \leq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x \in \Lambda$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดบน Λ ที่ c และ f มีค่าต่ำสุดบน Λ ที่ d

จากรูปที่ 2 ได้ $f(a) \geq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x \in \Lambda$
และ $f(d) \leq f(x)$ สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x \in \Lambda$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดบน Λ ที่ a และ f มีค่าต่ำสุดบน Λ ที่ d

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาจุดสูงสุด และจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน

1) $f(x) = 2x$ บน $[0, 2]$

2) $f(x) = \sin x$ บน $[-\pi, \pi]$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ บน D_f

วิธีทำ 1) กำหนด $f(x) = 2x$; $x \in [0, 2]$

จาก $x \in [0, 2]$

นั่นคือ

$$0 \leq x \leq 2$$

$$2 \cdot 0 \leq 2x \leq 2 \cdot 2$$

$$0 \leq 2x \leq 4$$

ดังนั้น

$$f(0) = 0 \leq f(x) \leq f(2) = 4$$

เพราะฉะนั้น

$$f(2) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, 2]$$

และ

$$f(0) \leq f(x) \quad \forall x \in [0, 2]$$

จากบทนิยาม 3.1 จะได้ว่า

2 เป็นจุดสูงสุดของ f บน $[0, 2]$

และ 0 เป็นจุดต่ำสุดของ f บน $[0, 2]$

2) กำหนด $f(x) = \sin x$ บน $[-\pi, \pi]$

จาก $x \in [-\pi, \pi]$

นั่นคือ

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

ดังนั้น

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

และ

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

จากบทนิยาม 3.1 จะได้ว่า

$\pi/2$ เป็นจุดสูงสุดของ f บน $[-\pi, \pi]$

และ $-\pi/2$ เป็นจุดต่ำสุดของ f บน $[-\pi, \pi]$

3) กำหนด $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ บน D_f

เนื่องจาก ไม่มี $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ ที่ทำให้ $f(p) > f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

และไม่มี $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ ที่ทำให้ $f(r) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

ดังนั้น f ไม่มีจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชัน , $(a,b) \subset D_f$ ถ้า p เป็นจุดสูงสุดของ f บน (a,b) และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ p จะได้ว่า $f'(p) = 0$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้คือ

1.1 p เป็นจุดสูงสุดของ f บน (a,b)

1.2 f หาอนุพันธ์ได้ที่ p

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $f'(p) = 0$

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า $f'(p) = 0$ สามารถแสดงโดยทำให้ได้ว่า

$$f'(p) > 0 \text{ และ } f'(p) \leq 0$$

ขั้นที่ 4 เนื่องจาก p เป็นจุดสูงสุดของ f บน (a,b) โดยบทนิยาม 3.1

จะได้ว่า $f(x) \leq f(p)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

เพราะฉะนั้น $f(x) - f(p) \leq 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

ขั้นที่ 5 เพื่อที่จะหาเกี่ยวกับ $f'(p)$ ดังนั้นจึงพยายามจัดให้อยู่ในรูป

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ ให้ได้ ซึ่งแยกได้ 2 กรณี คือ } x < p \text{ และ } x > p$$

5.1 ถ้า $x < p$ แล้ว $x - p < 0$

เนื่องจาก $f(x) - f(p) \leq 0$

ดังนั้น $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$

$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $f'_-(p) \geq 0$

5.2 ถ้า $x > p$ แล้ว $x - p > 0$

เนื่องจาก $f(x) - f(p) \leq 0$

ดังนั้น $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$

$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$

เพราะฉะนั้น $f'_+(p) \leq 0$

ขั้นที่ 6 เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า

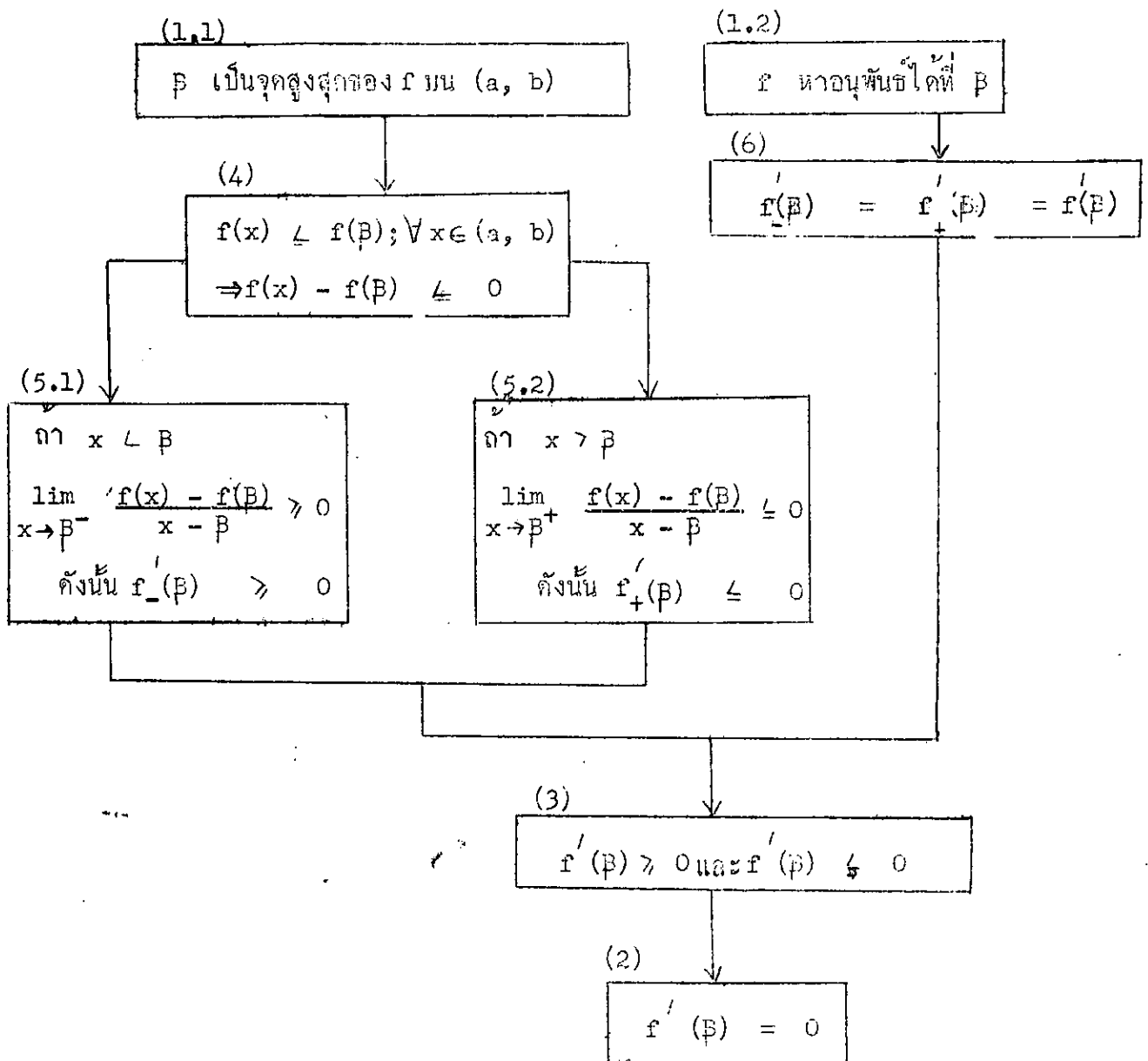
$$f'(p) = f'_+(p) = f'_-(p)$$

แต่เพราะว่า $f'_+(p) \leq 0$ และ $f'_-(p) \geq 0$

เพราะฉะนั้น $f'(p) \leq 0$ และ $f'(p) \geq 0$

นั่นก็จะได้ว่า $f'(p) = 0$ ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ เนื่องจาก f หาค่าชันได้ที่ p

โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า $f'_-(p) = f'_+(p) = f'(p) \dots (1)$

และ p เป็นจุดสูงสุดของ f บน (a, b)

โดยบทนิยาม 3.1 จะได้ว่า $f(x) \leq f(p)$ สำหรับ x ทุกตัวใน (a, b)

ดังนั้น $f(x) - f(p) \leq 0$

พิจารณา $x < p$ ดังนั้น $x - p < 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$$

ดังนั้น $f'_-(p) \geq 0$

พิจารณา $x > p$ ดังนั้น $x - p > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$$

ดังนั้น $f'_+(p) \leq 0$

จาก (1) จะได้ว่า $f'(p) \geq 0$ และ $f'(p) \leq 0$

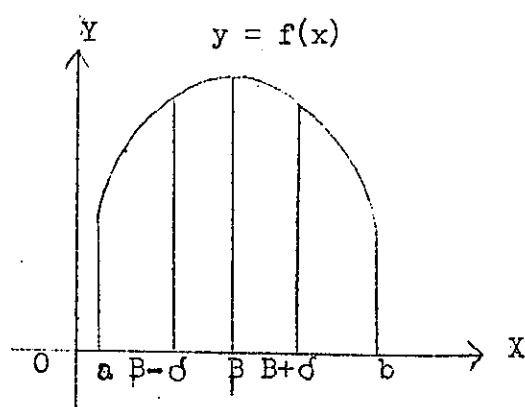
ดังนั้น $f'(p) = 0$ □

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $(a, b) \subset D_f$ ถ้า r เป็นจุดต่ำสุดของ f บน (a, b) และ f หาค่าชันได้ที่ r จะได้ว่า $f'(r) = 0$

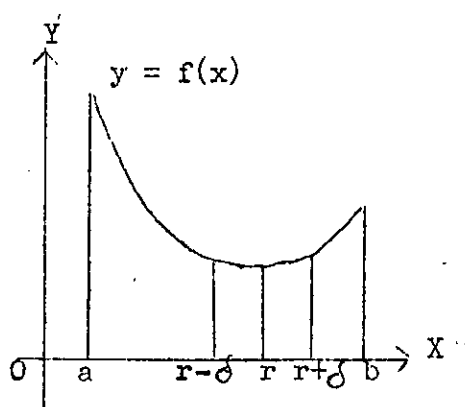
พิสูจน์ การพิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.1 (แบบฝึกหัด)

บทนิยาม 3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $A \subset D_f$ จุด p ใน A จะเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative or local maximum point) ของ f บน A ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง p เป็นจุดสูงสุดของ f บน $A \cap (p - \delta, p + \delta)$

ในทำนองเดียวกัน จุด r ใน A จะเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative or local minimum point) ของ f บน A ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง r เป็นจุดต่ำสุดของ f บน $A \cap (r - \delta, r + \delta)$



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 โดยบทนิยาม 3.2 จะเห็นว่า p เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a, b)

จากรูปที่ 2 โดยบทนิยาม 3.2 จะเห็นว่า r เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a, b)

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ถ้า p เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a,b) และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ p จะได้ว่า $f'(p) = 0$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้คือ

1.1 p เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a,b)

1.2 f หาอนุพันธ์ได้ที่ p

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $f'(p) = 0$

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก p เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a,b)

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.2 จะได้ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่ง p เป็นจุดสูงสุดของ f บน $(a,b) \cap (p-\delta, p+\delta)$

และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ p

ใช้ทฤษฎีบท 3.1 สามารถสรุปได้ว่า $f'(p) = 0$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

(1.1)

p เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์
ของ f บน (a, b)

(1.2)

f หาอนุพันธ์ได้ที่ B

(3)

มี $\delta > 0$ ซึ่ง p เป็นจุดสูงสุดของ
 f บน $(a, b) \cap (p - \delta, p + \delta)$

(2)

$f'(p) = 0$

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $(a,b) \subset D_f$

เนื่องจาก p เป็น จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a,b)

โดยบทนิยาม 3.2 จะได้ว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง p เป็นจุดสูงสุด

ของ f บน $(a,b) \cap (p - \delta, p + \delta)$

และ เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ p

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f'(p) = 0$ □

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $(a,b) \subset D_f$

ถ้า r เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน (a,b) และ

f หาอนุพันธ์ได้ที่ r จะได้ว่า $f'(r) = 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.3 (แบบฝึกหัด)

บทนิยาม 3.3 จุดวิกฤติ (critical point) ของ

ฟังก์ชัน f คือ จุด c ซึ่ง $f'(c) = 0$ และ

เรียก $f(c)$ ว่า ค่าวิกฤติของ f

ขั้นตอนในการหาจุดวิกฤติ

ขั้นที่ 1 กำหนด ฟังก์ชัน $f(x)$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ของ f คือ $f'(x)$

ขั้นที่ 3 ให้ $f'(x) = 0$

แก้สมการหาค่า x

ขั้นที่ 4 ค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ คือ จุดวิกฤติของ f

ตัวอย่าง 3.2 จงหาวิกฤติของฟังก์ชัน

$$1) \quad f(x) = x^3$$

$$2) \quad f(x) = x^3 - 2x + 1$$

วิธีทำ 1) $f(x) = x^3$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2$

ให้ $f'(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $3x^2 = 0$

$$x = 0$$

ดังนั้น จุดวิกฤติของ $f(x) = x^3$ คือ 0

$$2) \quad f(x) = x^3 - 2x + 1$$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2 - 2$

ให้ $f'(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $3x^2 - 2 = 0$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ดังนั้น จุดวิกฤติของ $f(x) = x^3 - 2x + 1$ คือ $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 7

จงหาจุดวิกฤติของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$1. \quad f(x) = 4x^2 + 16x + 4$$

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x - 2$$

$$3. \quad 10y = x^3 - 3x^2 - 24x + 10$$

$$4. \quad f(x) = 1 + 3x + 4x^2 - x^3$$

$$5. \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

ทฤษฎีบท 3.5 (Rolle' s Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) และ $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

1.2 f หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

1.3 $f(a) = f(b)$

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่ามี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่ามี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

จะเห็นว่าจากสิ่งที่กำหนดให้พยายามนำทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2

มาช่วยในการพิสูจน์ ดังนั้นจึงต้องหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

โดยทฤษฎีบท 0.11 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $[a, b]$

ดังนั้นพิจารณากรณีที่เป็นไปได้ คือ

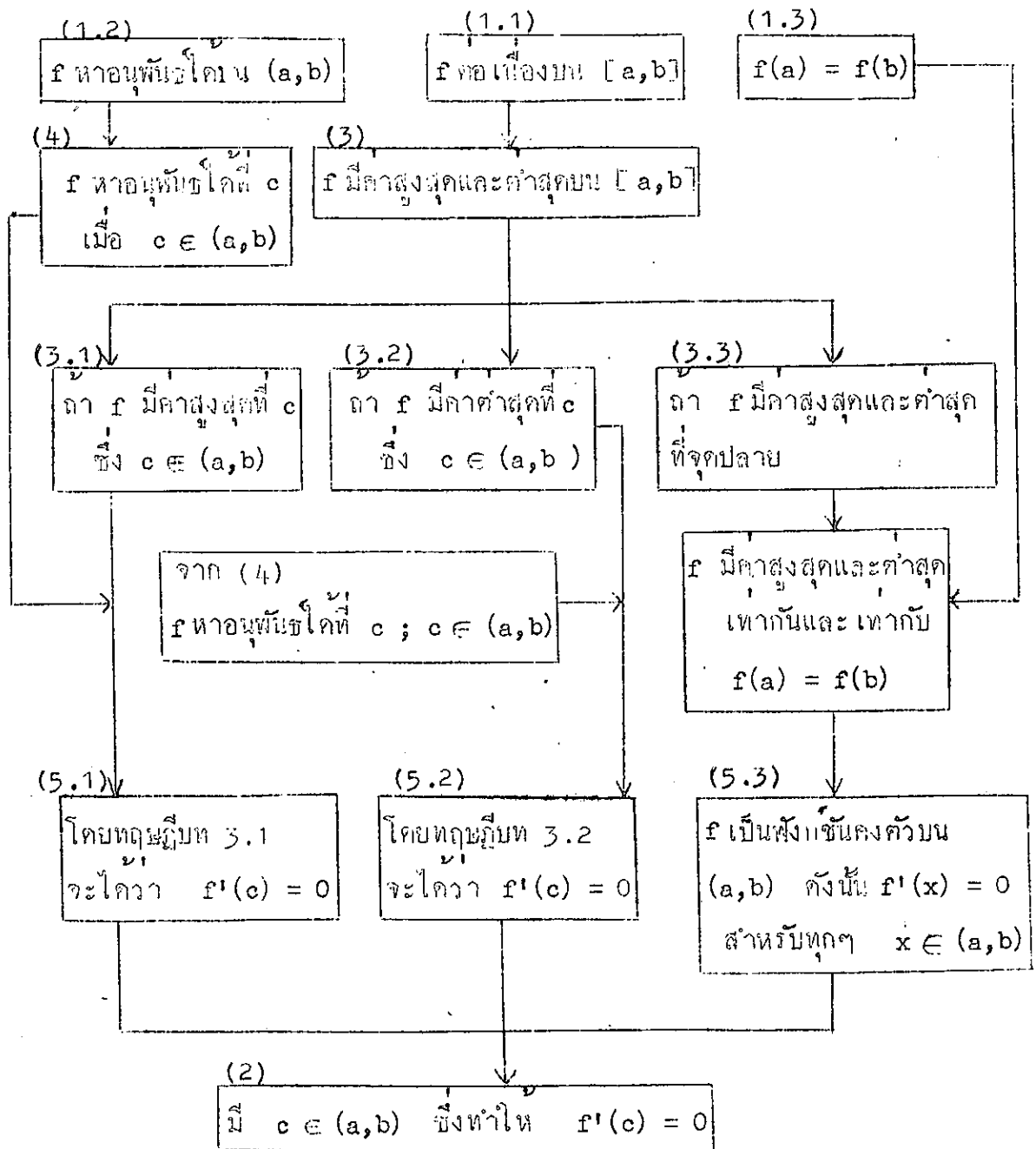
3.1 f มีค่าสูงสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a, b)$

3.2 f มีค่าต่ำสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a, b)$

3.3 f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่จุดปลายช่วงปิด $[a, b]$

- ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
 ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่ c ; $c \in (a,b)$
- ขั้นที่ 5 5.1 ถ้า f มีค่าสูงสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a,b)$
 และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c
 ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f'(c) = 0$
- 5.2 ถ้า f มีค่าต่ำสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a,b)$
 และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c
 ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $f'(c) = 0$
- 5.3 ถ้า f มีค่าสูงสุดและค่าสุดที่จุดปลาย
 เพราะฉะนั้น f มีค่าสูงสุดและค่าสุดเหมือนกัน
 และเท่ากับ $f(a) = f(b)$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน (a,b)
 โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $f'(x) = 0$ สำหรับทุกๆ
 $x \in (a,b)$
 เพราะฉะนั้นถ้าให้ $c \in (a,b)$ จะได้ $f'(c) = 0$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[a, b]$
 โดยทฤษฎีบท 0.11 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน (a, b)
 กรณีที่ 1 ถ้า f มีค่าสูงสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a, b)$
 โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $f'(c) = 0$
 กรณีที่ 2 ถ้า f มีค่าต่ำสุดที่ c ซึ่ง $c \in (a, b)$
 โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $f'(c) = 0$
 กรณีที่ 3 ถ้า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่จุดปลายช่วงปิด
 จะได้ว่า ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f เท่ากัน
 และเท่ากับ $f(a) = f(b)$
 ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a, b]$
 โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า
 $f'(x) = 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$
 เพราะฉะนั้น มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$ $\square$

คำถามชุดที่ 7

จากทฤษฎีนี้ ถ้า f หาอนุพันธ์ไม่ไต่อย่างจุใน (a, b) ผลสรุปจะเป็นจริงหรือไม่

ทฤษฎีบท 3.6 (The Mean Value Theorem)

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)
 จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ลำดับขั้นวิเคราะห์หาคำกล่าวการนิยจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

1.2 f หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่ามี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ขั้นที่ 3 จาก $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\exists c \in (a, b)$

ดังนั้น $f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$, $\exists c \in (a, b)$

ขั้นที่ 4 การที่จะได้ว่า $f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$ พยายามหา

ฟังก์ชัน h ซึ่ง $h'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$; $\exists c \in (a, b)$

ดังนั้น $h(x) = f(x) - g(x)$

โดยที่ $g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ขั้นที่ 5 จาก $g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ หาฟังก์ชัน g ที่มี

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

เนื่องจาก $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ คือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(a, f(a))$

และจุด $(b, f(b))$

เพราะฉะนั้นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ คือ

$$g(x) - f(a) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a)$$

ดังนั้น
$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a)$$

จะได้ว่า g ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ขั้นที่ 6 ทดสอบ $h(x) = f(x) - g(x)$ ว่าสอดคล้องกับสมมติฐาน

Rolle's Theorem

เนื่องจาก f และ g ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ f และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ดังนั้น h ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ h หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

พิจารณา $h(a)$ กับ $h(b)$

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (a - a) - f(a) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - g(b) \\ &= f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (b - a) - f(a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(a) = h(b)$

จาก h ต่อเนื่องบน $[a, b]$, หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

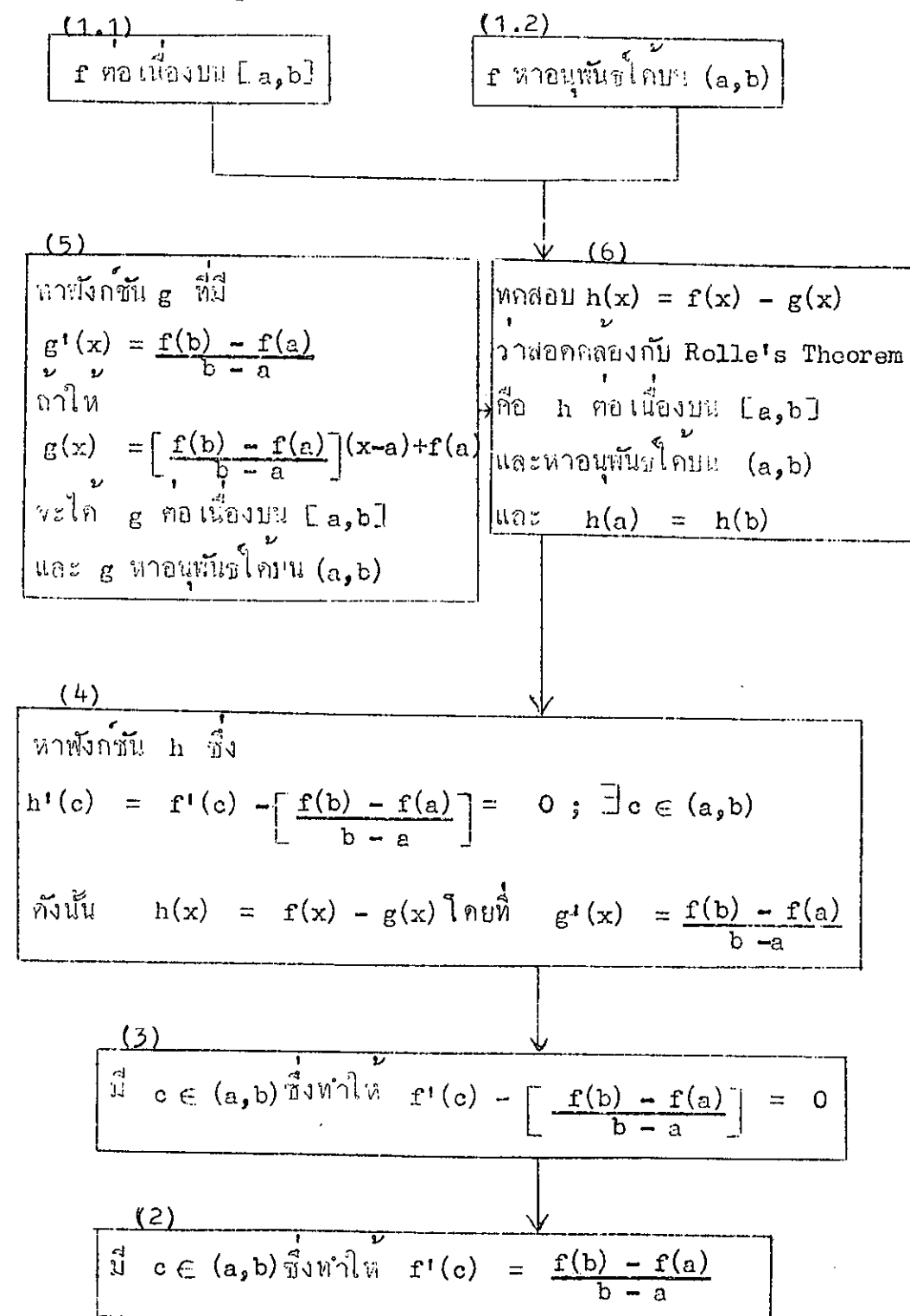
และ $h(a) = h(b)$ โดย Rolle's Theorem

จะได้ว่า มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $h'(c) = 0$

แต่
$$h'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$$

ดังนั้น
$$f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] = 0$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน g โดย

$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a) + f(a)$$

ดังนั้น g ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

นิยามฟังก์ชัน h โดย $h(x) = f(x) - g(x)$

ดังนั้น h ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } h(a) &= f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (a - a) - f(a) \\ &= f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (b - a) - f(a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } h(a) = h(b)$$

จะได้ว่า สอดคล้องกับสมมุติฐานของ Rolle's Theorem

เพราะฉะนั้น มี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $h'(c) = 0$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } h'(c) &= f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] \\ 0 &= f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $x \in [1, 4]$

จงแสดงว่ามี $c \in (1, 4)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$

และจงหาค่า c

พิสูจน์ กำหนด $f(x) = x^2 + 2x + 1$ เมื่อ $x \in [1, 4]$

จะเห็นว่า f ต่อเนื่องบน $[1, 4]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(1, 4)$

โดย The Mean Value Theorem

จะได้ว่ามี $c \in (1, 4)$ ซึ่งทำให้

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

พิจารณา $f'(x) = 2x + 2$

ดังนั้น $f'(c) = 2c + 2$

และ $f(4) = 25$, $f(1) = 4$

นั่นคือ $2c + 2 = \frac{25 - 4}{3}$

$$6c = 15$$

เพราะฉะนั้น $c = \frac{5}{2}$

□

แบบฝึกหัดชุดที่ 8

1. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$ บนช่วง $[-2, 0]$

จงหาจุดต่ำสุดของ f

2. กำหนดให้
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 3 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

จงหาจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดของ f ในช่วง $[0, 3]$

3. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ สำหรับ $x \in [1, 3]$

จงแสดงว่ามี $c \in (1, 3)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

หรือไม่ ถ้ามีจงหา c

4. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x - 2$ สำหรับ $x \in [0, 2]$

จงแสดงว่ามี $c \in (0, 2)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$

หรือไม่ ถ้ามีจงหา c

5. กำหนด $f(x) = |x| + |x-1|$; $0 \leq x \leq 1$ จงพิจารณาว่า

f สอดคล้องกับสมมติฐาน Rolle's Theorem หรือไม่

ถ้าสอดคล้อง จงหาค่า c ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 3.7 (Cauchy's Mean Value Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b) แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f และ g ต่อเนื่องบน $[a, b]$

1.2 f และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$$

ขั้นที่ 3 พิจารณา

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c) ; \exists c \in (a, b)$$

$$[f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0 ; \exists c \in (a, b)$$

ขั้นที่ 4 การที่จะได้ว่า $[f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0$

เราจะต้องหาฟังก์ชัน h ซึ่ง

$$h'(c) = [f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0, \exists c \in (a, b)$$

$$\text{ดังนั้น } h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$$

ขั้นที่ 5 ทดสอบ $h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$

ว่าสอดคล้องกับสมมุติฐานของ Rolle's Theorem

เนื่องจาก f และ g ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ f และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ดังนั้น h ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ h หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

พิจารณา $h(a)$ กับ $h(b)$

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)] g(a) - [g(b) - g(a)] f(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)] g(b) - [g(b) - g(a)] f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h(a) = h(b)$

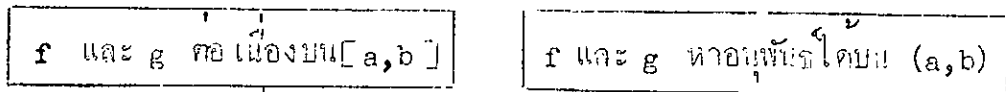
จะเห็นว่า h สอดคล้องกับสมมติฐานของ Rolle's Theorem

ดังนั้น มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $h'(c) = 0$

$$\text{แต่ } h'(c) = [f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } [f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์



ทดสอบ $h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$
 ตรวจสอบสอดคล้องกับ Rolle's Theorem คือ
 h ต่อเนื่องบน $[a, b]$, หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) และ $h(a) = h(b)$

หาฟังก์ชัน h ซึ่ง $h'(c) = [f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0$
 $\exists c \in (a, b)$
 ดังนั้น $h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x)$

มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $[f(b) - f(a)] g'(c) - [g(b) - g(a)] f'(c) = 0$

มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$

พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน h บน $[a, b]$ ดังนี้

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

เนื่องจาก f และ g ต่อเนื่องบน $[a, b]$

ดังนั้น h ต่อเนื่องบน $[a, b]$

และ f และ g หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

ดังนั้น h หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a) \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a) \\ &= -f(a)g(b) + f(b)g(a) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $h(a) = h(b)$

จะได้ว่า h สอดคล้องกับสมมติฐานของ Rolle's Theorem

ดังนั้น มี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $h'(c) = 0$

พิจารณา ฟังก์ชัน h หาอนุพันธ์ของ h ที่ x

$$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

$$\text{ดังนั้น } h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$$

$$\text{นั่นคือ } [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

บทนิยาม 3.3 , ถ้า $f(x_1) \leq f(x_2)$ สำหรับทุกๆค่า $x_1 < x_2$ ใน D_f
จะเรียก f ว่าฟังก์ชันไม่ลด (nondecreasing function) บน D_f

บทนิยาม 3.4 , ถ้า $f(x_1) \geq f(x_2)$ สำหรับทุกๆค่า $x_1 < x_2$ ใน D_f
จะเรียก f ว่าฟังก์ชันไม่เพิ่ม (nonincreasing function) บน D_f

บทนิยาม 3.5 , ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกๆค่า $x_1 < x_2$ ใน D_f
จะเรียก f ว่าฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บน D_f

บทนิยาม 3.6 , ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกๆค่า $x_1 < x_2$ ใน D_f
จะเรียก f ว่าฟังก์ชันลด (decreasing function) บน D_f

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ บน $(-\infty, \infty)$ จงแสดงว่า
 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ กำหนด $f(x) = x^3, x \in (-\infty, \infty)$

ให้ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $x_1 < x_2$

จะเห็นว่า $x_1^3 < x_2^3$

เพราะฉะนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ โดยที่ $x_1 < x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, \infty)$

□

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

(1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a, b)

(2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว

f เป็นฟังก์ชันลดบน (a, b)

(3) ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว

f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน (a, b)

ลำดับขั้นวิเคราะห์หาแนวการพิสูจน์ (1)

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

1.1 f หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

1.2 $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

ขั้นที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a, b)

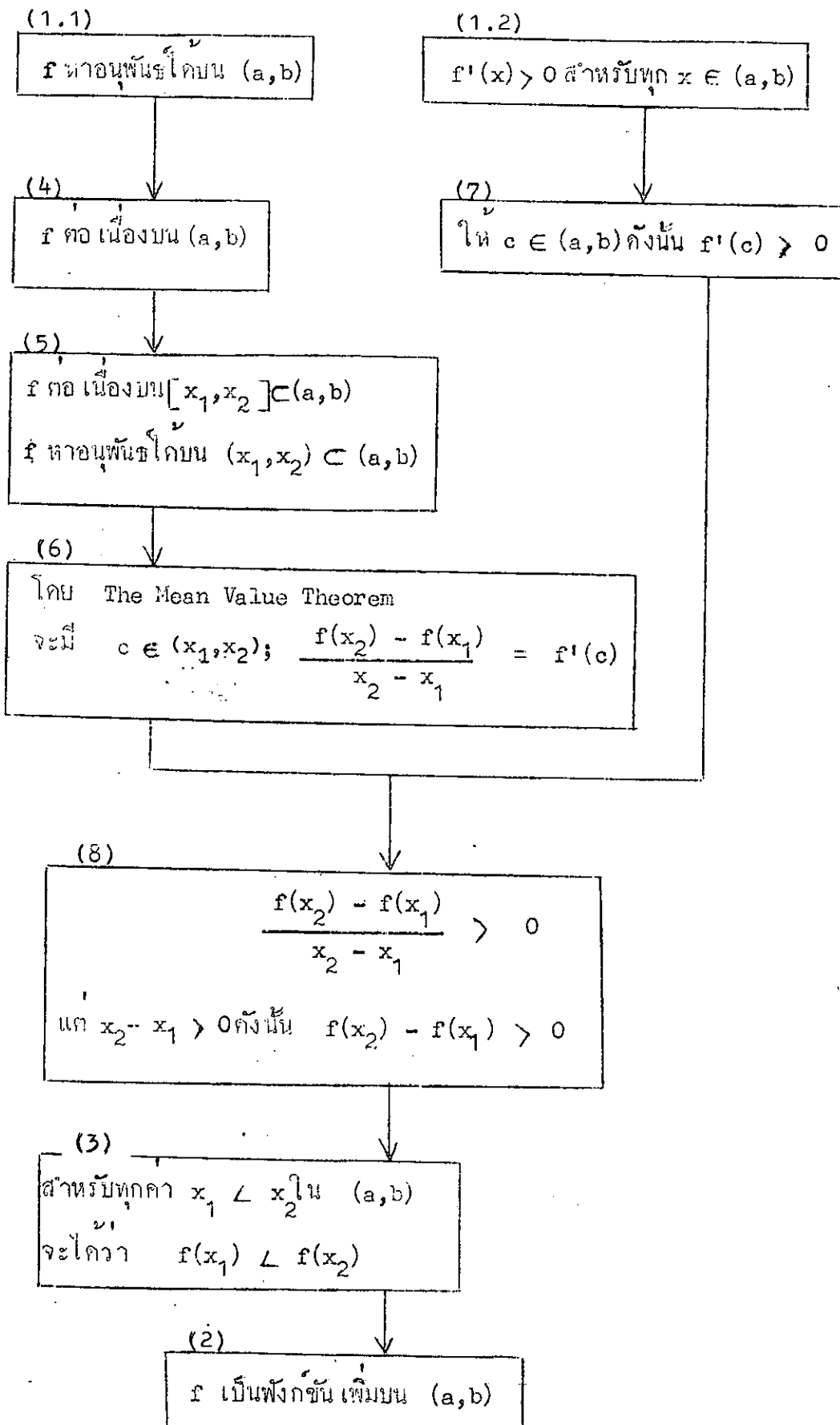
ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a, b) ต้องแสดงว่า

สำหรับทุกๆ ค่า $x_1 < x_2$ ในช่วง (a, b) ต้องได้ว่า $f(x_1) < f(x_2)$

(บทนิยาม 3.5)

- ขั้นที่ 4 เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
 ดังนั้น f ต่อเนื่องบน (a,b) (ท.บ. 1.2)
- ขั้นที่ 5 จาก f ต่อเนื่องบน (a,b) และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)
 ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $[x_1, x_2] \subset (a,b)$
 และ f หาอนุพันธ์ได้บน $(x_1, x_2) \subset (a,b)$
- ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 5 จะเห็นว่า f สอดคล้องกับสมมุติฐานของ
 The Mean Value Theorem ดังนั้น มี $c \in (x_1, x_2)$
 ซึ่งทำให้
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$
- ขั้นที่ 7 เนื่องจาก $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$
 ดังนั้น ถ้า $c \in (a,b)$ จะได้ $f'(c) > 0$
- ขั้นที่ 8 จาก $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ และ $f'(c) > 0$
 ดังนั้น
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

 แต่ $x_1 < x_2$ เพราะฉะนั้น $x_2 - x_1 > 0$
 เพราะฉะนั้น $f(x_2) - f(x_1) > 0$
 นั่นคือ $f(x_1) < f(x_2)$



พิสูจน์ (1)

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน (a,b) (ทฤษฎีบท 1.2)

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบน $[x_1, x_2] \subset (a,b)$

และ f หาอนุพันธ์ได้บน $(x_1, x_2) \subset (a,b)$

โดย The Mean Value Theorem จะได้ว่ามี $c \in (x_1, x_2)$

$$\text{ซึ่งทำให้ } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \dots (1)$$

เนื่องจาก $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

ดังนั้น ถ้า $c \in (a,b)$ จะได้ว่า $f'(c) > 0$

$$\text{จาก (1) จะได้ว่า } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

เพราะว่า $x_1 < x_2$ ดังนั้น $x_2 - x_1 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(x_2) - f(x_1) > 0$

นั่นคือ $f(x_1) < f(x_2)$

โดยบทนิยาม 3.5 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a,b) □

พิสูจน์ (2) ใช้บทนิยาม 3.6 พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับ (1)

พิสูจน์ (3) พยายามพิสูจน์ว่า $f(x_1) = f(x_2)$

สำหรับทุกๆ $[x_1, x_2] \subset (a,b)$

(แบบฝึกหัด)

คำถามชุดที่ 8

พิจารณาทฤษฎีบท 3.8 บทกลับทฤษฎีนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์
ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

ข้อสังเกตุ

ทฤษฎีบท 3.8 สามารถนำไปใช้ในการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของ
ฟังก์ชันต่างๆได้

การตรวจสอบเพื่อหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

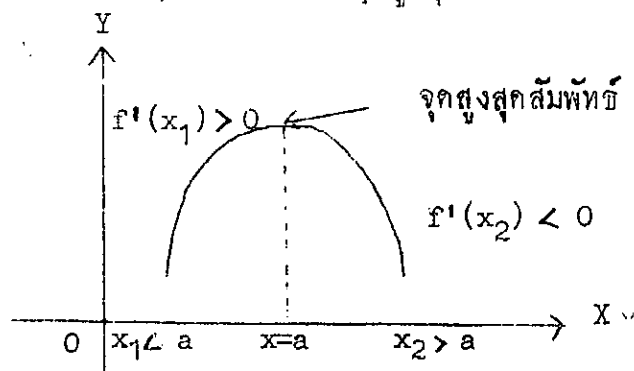
ลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์แนวการหา

- ขั้นที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$
- ขั้นที่ 2 หองการหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
- ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์ของ f ที่ x คือ $f'(x)$
- ขั้นที่ 4 หาจุดวิกฤตของ f คือ หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$
สมมติว่าที่ a
- ขั้นที่ 5 หลักการตรวจสอบโดยใช้ทฤษฎีบท 3.8

$$5.1 \quad x_1 < a \implies f'(x_1) > 0$$

$$\text{และ } x_2 > a \implies f'(x_2) < 0$$

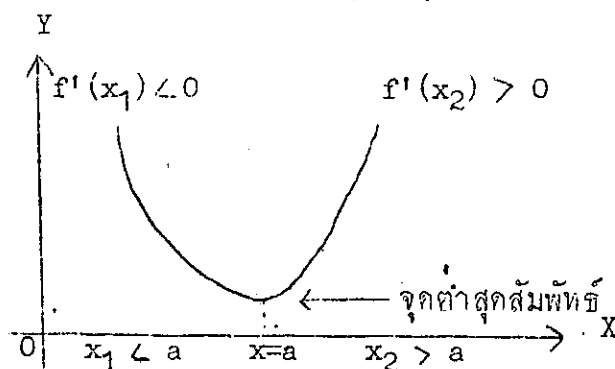
จะได้ว่า จุดวิกฤตนั้นเป็นจุดสูงสุด



$$5.2 \quad x_1 < a \implies f'(x_1) < 0$$

$$\text{และ } x_2 > a \implies f'(x_2) > 0$$

จะได้ว่า จุดวิกฤตนั้นเป็นจุดต่ำสุด



5.3 ถ้า $f'(x) < 0$ หรือ $f'(x) > 0$ เหมือนกันตลอดช่วงทางซ้ายและขวาของจุดวิกฤต แสดงว่าจุดวิกฤตนั้นไม่เป็นทั้งจุดสูงสุดและจุดต่ำสุด

ตัวอย่าง 3.5 กำหนด $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

ดังนั้น $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

หาจุดวิกฤติของ f ให้ $f'(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $6x^2 - 6x - 12 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

จะเห็นว่า $x < -1$ จะได้ว่า $f'(x) > 0$

$x > -1$ จะได้ว่า $f'(x) < 0$

ดังนั้น -1 เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

และ $x < 2$ จะได้ว่า $f'(x) < 0$

$x > 2$ จะได้ว่า $f'(x) > 0$

ดังนั้น 2 เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f □

ตัวอย่าง 3.6 กำหนด $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีทำ $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

หาจุดวิกฤตของ f ให้ $f'(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}, -1$$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

จะเห็นว่า $x < -1$ จะได้ว่า $f'(x) > 0$

$x > -1$ จะได้ว่า $f'(x) < 0$

ดังนั้น -1 เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

และ $x < \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $f'(x) < 0$

$x > \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $f'(x) > 0$

ดังนั้น $\frac{1}{3}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f □

แบบฝึกหัดชุดที่ 9

1. จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 4x^2 + 16x + 4$

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x - 2$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

4. $f(x) = (2 - x)^3$

5. $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$

2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้า $f'(x) = g'(x)$ เมื่อ $x \in (a, b)$ แล้วจงพิสูจน์ว่า f และ g มีความแตกต่างกันคงที่บนช่วง $[a, b]$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้ามีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (a, a + \delta)$ แล้วจงพิสูจน์ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ a

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้ามีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (b - \delta, b)$ แล้วจงพิสูจน์ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ b

บทที่ 4

กฎของโลปีตาล

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

ในกรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

จะกล่าวว่า $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดในรูป $\frac{0}{0}$

ในกรณีที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

จะกล่าวว่า $\frac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดในรูป $\frac{\infty}{\infty}$

ในทำนองเดียวกันอาจกล่าวถึงรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form)

$0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 และ 0^0

ลิมิตของฟังก์ชันซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนดอาจมีหรือไม่มีก็ได้ และในการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันดังกล่าวส่วนใหญ่ไม่สามารถทำได้โดยวิธีการหรือทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วในบทต้น ในตอนนี้จะกล่าวถึงกฎของโลปีตาล (L'Hospital Rules) ซึ่งมีประโยชน์มากในการหาลิมิตของฟังก์ชันซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนด

ทฤษฎีบท 4.1 (กฎของโลบิตาลสำหรับรูปแบบ $\frac{0}{0}$)

กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$, $a \in (\alpha, \beta)$ โดยที่

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (\alpha, \beta) - \{a\}$

ถ้า
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

จะได้ว่า
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 กำหนดให้

$$1.1 \quad f \text{ และ } g \text{ หาอนุพันธ์ได้บน } (\alpha, \beta) - \{a\}$$

$$a \in (\alpha, \beta)$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L ; g'(x) \neq 0$$

สำหรับทุก $x \in (\alpha, \beta) - \{a\}$

ขั้นที่ 2 ต้องการพิสูจน์ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

ขั้นที่ 3 การที่จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ จะต้องแสดงให้เห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

ขั้นที่ 4 จาก $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

หาฟังก์ชัน F และ G ให้มี

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ขั้นที่ 5 จาก $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x)}{G'(x)}$ ดังนั้น $[F(x) - 0] G'(x) = [G(x) - 0] F'(x)$

จะเห็นได้ว่า F และ G ที่หาจะต้องมีสมบัติฐานที่สอดคล้องกับ

The Cauchy Mean Value Theorem

คือ F และ G ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้

ขั้นที่ 6 จาก $[F(x) - 0] G'(x) = [G(x) - 0] F'(x)$
นิยามฟังก์ชัน F และ G ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq a \\ 0 & ; x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \neq a \\ 0 & ; x = a \end{cases}$$

ดังนั้น $F(x) = f(x)$ และ $G(x) = g(x) \forall x \in (\alpha, \beta) - \{a\}$

นั่นคือ F และ G หาอนุพันธ์ได้บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$ (1)

เพราะฉะนั้น F และ G ต่อเนื่องบน $(\alpha, \beta) - \{a\}$

พิจารณา

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = G(a)$$

นั่นคือ F และ G ต่อเนื่องที่ a

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $x \in (\alpha, \beta)$ จะได้ว่า

F และ G ต่อเนื่องบน $[a, x]$

F และ G หาอนุพันธ์ได้บน (a, x)

โดย The Cauchy Mean Value Theorem จะได้ว่ามี $c \in (a, x)$ ซึ่ง

$$[G(x) - G(a)] F'(c) = [F(x) - F(a)] G'(c)$$

แต่ $F(a) = G(a) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$G(x) F'(c) = F(x) G'(c)$$

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

เนื่องจาก $c \in (a, x)$

ดังนั้นเมื่อ x เข้าใกล้ a จะได้ว่า c เข้าใกล้ a

เพราะฉะนั้น
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

จากนิยามของ F และ G จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

และ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

(1.1)

f และ g หาอนุพันธ์ได้
บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$, $a \in (\alpha, \beta)$

(1.2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(1.3)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$g'(x) \neq 0$

(6)

นิยามฟังก์ชัน F และ G ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq a \\ 0 & ; x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \neq a \\ 0 & ; x = a \end{cases}$$

(5)

พิจารณา $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$ ทำให้ $[G(x)-0] F'(x) = [F(x)-0] G'(x)$

แสดงว่า F และ G ที่หาจะต้องมีคุณสมบัติต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ เพื่อ
จะได้สอดคล้องกับ The Cauchy Mean Value Theorem

(4)

ถ้าต้องการ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ หาฟังก์ชัน
 F และ G ให้

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน F และ G ดังต่อไปนี้

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq a \\ 0 & , x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & , x \neq a \\ 0 & , x = a \end{cases}$$

จะได้ว่า $F(x) = f(x)$ และ $G(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in (\alpha, \beta) - \{a\}$
 ดังนั้น F และ G หาอนุพันธ์ได้บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$

เพราะฉะนั้น F และ G มีความต่อเนื่องบน $(\alpha, \beta) - \{a\}$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$

และ $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = G(a)$

ดังนั้น F และ G มีความต่อเนื่องที่ a

พิจารณาสำหรัทุก ๆ $x \in (\alpha, \beta)$ เนื่องจาก F และ G มีความต่อเนื่องบน $[a, x]$ และ F และ G หาอนุพันธ์ได้บน (a, x) โดย The Cauchy Mean Value Theorem จะมี c อยู่ระหว่าง a กับ x ซึ่งทำให้

$$F'(c) [G(x) - G(a)] = G'(c) [F(x) - F(a)]$$

แต่ $F(a) = G(a) = 0$ ดังนั้น $F'(c) G(x) = G'(c) F(x)$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(c)}{G'(c)}$

แต่ c อยู่ระหว่าง a กับ x

ดังนั้น เมื่อ x เข้าใกล้ a จะได้ c เข้าใกล้ a

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)}$

แต่นิยามของ F และ G จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

และ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$



ตัวอย่าง 4.1 จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

พิสูจน์

$$\text{ให้ } f(x) = \sin x \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } g(x) = x \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{เนื่องจาก } f \text{ หาอนุพันธ์ได้ และ } f'(x) = \cos x \quad \dots(3)$$

$$g \text{ หาอนุพันธ์ได้ และ } g'(x) = 1 \quad \dots(4)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \dots(5)$$

จาก (1)-(5) สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 4.1 ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \square$$

ตัวอย่าง 4.2 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}$

พิสูจน์

$$\text{ให้ } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } g(x) = 1 - e^{2\sqrt{x}} \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{2\sqrt{x}}) = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{เนื่องจาก } f \text{ หาอนุพันธ์ได้ และ } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \dots(3)$$

$$g \text{ หาอนุพันธ์ได้ และ } g'(x) = \frac{-e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad \dots(4)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-2e^{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} - \frac{1}{2e^{2\sqrt{x}}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

...(5)

จาก (1) - (5) โดยทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$$

นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}$$

คำถาม พิจารณา

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2}$$

$$= 3$$

สังเกตว่า การหาขีดข้อนั้นผิดที่ใด

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{2x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{2}$$

$$= 3$$

สังเกตว่า การหาขีดข้อนั้นผิดที่ใด

หมายเหตุ ในทฤษฎีบท 4.1 ถ้าแทน $x \rightarrow a$ ด้วย $x \rightarrow a^-$ หรือ $x \rightarrow a^+$ ยังคงได้ข้อความเป็นจริง นอกจากนั้นถ้าแทน $x \rightarrow a$ ด้วย $x \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$ และเปลี่ยนสมมุติฐานในทฤษฎีบทเพียงเล็กน้อย ยังคงได้ข้อความเป็นจริง แต่จะไม่กล่าวรายละเอียดไว้ในที่นี้

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - x) e^x - x - 2}{x^3}$$

$$1.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}$$

$$1.5 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

$$1.6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x - 2 \sin^2 x}{x^4}$$

ทฤษฎีบท 4.2 (กฎของโลปีตาลสำหรับรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$)

กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$;
 $a \in (\alpha, \beta)$ โดยที่

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (\alpha, \beta) - \{a\}$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้

1.1 f และ g หาอนุพันธ์ได้บน $(\alpha, \beta) - \{a\}$

1.2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

1.3 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ขั้นที่ 3 โดยบทนิยามลิมิต จะพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ นั่นคือ

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 จาก $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แสดงว่า

กำหนด $\varepsilon_1 > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

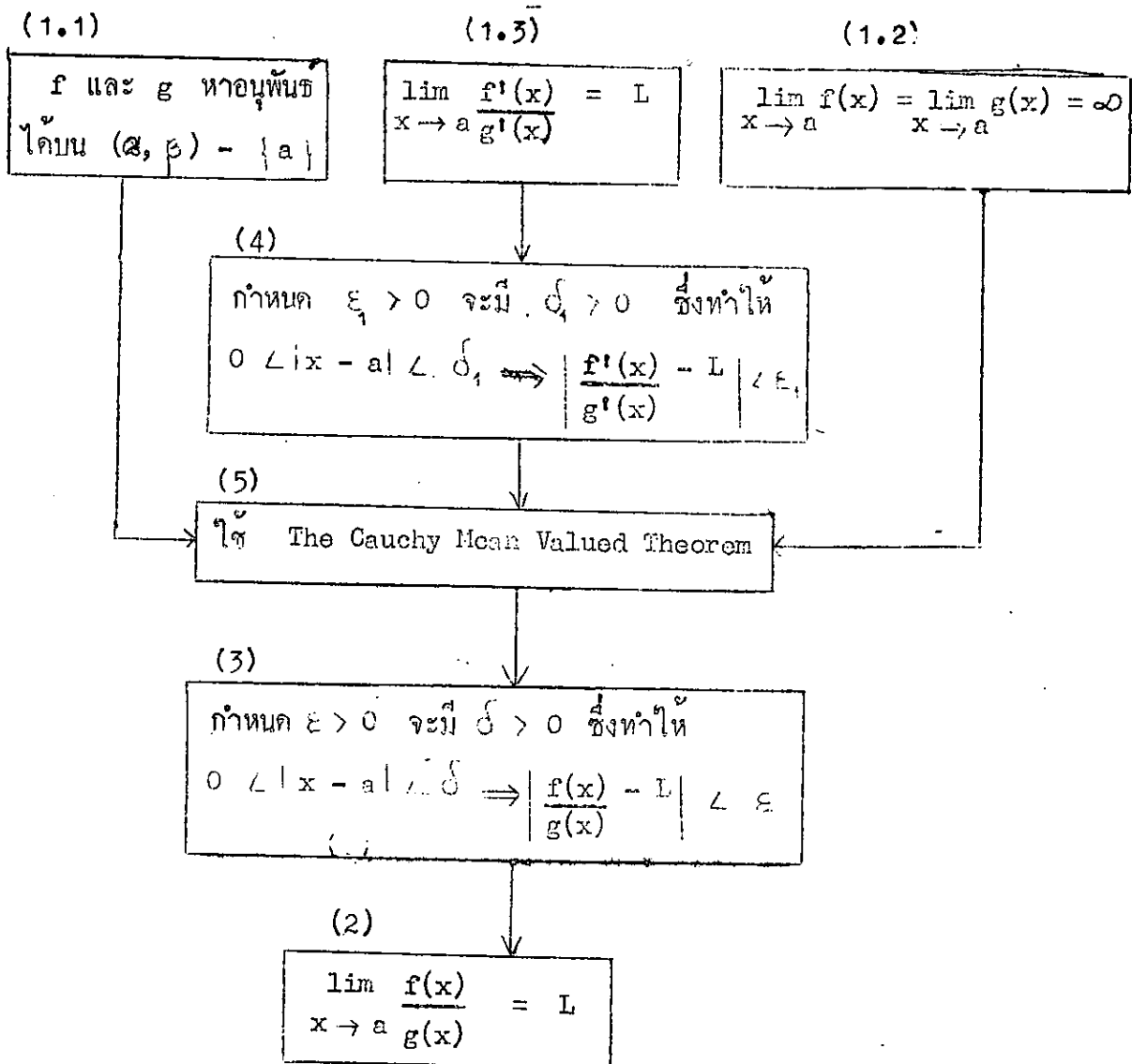
$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon_1$$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 พยายามใช้ทฤษฎีบท

(The Cauchy Mean Valued Theorem)

ช่วยในการพิสูจน์ เพื่อที่จะสรุปในขั้นที่ 3 ได้

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\epsilon_1 > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$

$$\text{ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta_1 \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \epsilon_1 \quad \dots (1)$$

เลือก x และ x_1 โดยที่ $a < x < x_1 < a + \delta_1$

โดย The Cauchy Mean Valued Theorem

จะมี $c \in (x, x_1)$ ที่ทำให้

$$f'(c) [g(x) - g(x_1)] = g'(c) [f(x) - f(x_1)]$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{g(x) - g(x_1)}{f(x)}}{\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x)}} \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \\ &= \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x_1)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} \right| = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$

เพราะฉะนั้น มี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon_1 \quad \dots(3)$$

ให้ $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon_1 \quad \text{และ}$$

$$\left| \frac{1 - [g(x_1) / g(x)]}{1 - [f(x_1) / f(x)]} - 1 \right| < \varepsilon_1$$

แต่ $a < c < a + \delta_1$ ดังนั้น $0 < |c - a| < \delta_1$

เพราะฉะนั้น ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon_1 \quad \text{และ} \quad \left| \frac{1 - [g(x_1) / g(x)]}{1 - [f(x_1) / f(x)]} - 1 \right| < \varepsilon_1$$

ให้

$$\text{ให้ } A = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{และ} \quad B = \frac{1 - [g(x_1) / g(x)]}{1 - [f(x_1) / f(x)]}$$

จะได้ว่า $|A - L| < \varepsilon_1$ และ $|B - 1| < \varepsilon_1$

ดังนั้น $|A - L| + |B - 1| < \varepsilon_1$

$$|AB - LB - A + L| < \varepsilon_1^2$$

$$|AB - L + L - LB - A + L| < \varepsilon_1^2$$

$$|(AB - L) - L(B - 1) - (A - L)| < \varepsilon_1^2$$

$$|AB - L| - |L| |B - 1| - |A - L| < \varepsilon_1^2$$

$$|AB - L| < \varepsilon_1^2 + |L| |B - 1| + |A - L|$$

$$< \varepsilon_1^2 + |L| \varepsilon_1 + \varepsilon_1$$

$$= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |L| + 1)$$

แต่จาก (2) $|AB - L| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right|$

ดังนั้น $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon + (\varepsilon + |L| + 1)$

เนื่องจากเป็นจริงสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และ L เป็นค่าคงตัว ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ □

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^x$

และ $g(x) = x^2$

จะได้ว่า f และ g หาอนุพันธ์ได้

และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \quad \dots(1)$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$ จะเห็นว่า

ให้ $m(x) = e^x$

$n(x) = 2x$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = \infty$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m'(x)}{n'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty \quad \dots(2)$

โดยทฤษฎีบท 4.2 พิจารณา (1) และ (2)

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$ □

รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ จะกล่าวว่า

ฟังก์ชัน $f(x) \cdot g(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ ในการหาขีดของฟังก์ชัน
ซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ ทำได้โดยจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎของ
โลปีตาล ช่วยโดยเปลี่ยนรูปแบบดังนี้

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{อยู่ในรูปแบบ } \frac{0}{0}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{อยู่ในรูปแบบ } \frac{\infty}{\infty}$$

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \ln x$ และ $g(x) = x$

จะเห็นว่า f และ g หาอนุพันธ์ได้บน $(0, \infty)$

และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

ดังนั้น $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)$$

$$= 0$$



หมายเหตุ $x \rightarrow a$ อาจแทนด้วย $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ หรือ $x \rightarrow \pm \infty$ ก็ได้

รูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$

เราจะกล่าวว่า $f - g$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$ เมื่อ $x \rightarrow a$ (หรือ $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \pm \infty$) ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

เราสามารถหาขีดจำกัดของฟังก์ชันได้โดยจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎของโลปีตาลช่วยในการหาค่า

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

จัดในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ แต่ไม่สะดวกเท่ากับในรูป $\frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ หรืออาจ

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x}$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด $\infty - \infty$

เราสามารถเปลี่ยนผลต่างนี้ให้อยู่ในรูป $\frac{\sin x - x}{x^2}$

จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

รูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{1}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$

พิจารณา $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

จะกล่าวว่า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด 0^0

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

จะกล่าวว่า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด 1^∞

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

จะกล่าวว่า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด ∞^0

วิธีหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบยังไม่กำหนด

0^0 , ∞^0 และ ∞^{∞} ทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} h(x) &= [f(x)]^{g(x)} \\ &= e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} \\ &= e^{g(x) \ln [f(x)]} \end{aligned}$$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln [f(x)]$ เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} h(x) &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln [f(x)]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln [f(x)]} \\ &= e \end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln [f(x)]$

ถ้า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด 0^0

จะได้ $g(x) \ln [f(x)]$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$

ถ้า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด 1^{∞}

จะได้ $g(x) \ln [f(x)]$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$

ถ้า $h(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด ∞^0

จะได้ $g(x) \ln [f(x)]$ มีรูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$

ดังนั้น ในการหา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln [f(x)]$ อาจทำได้โดยเขียน $g(x) \ln [f(x)]$ ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

ตัวอย่าง 4.6 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$

พิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด 0^0

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x}$

$$= e^0 \quad (\text{จากตัวอย่าง 4.4})$$

$$= 1$$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด 1^∞

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) \ln (e^x + x)}$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) \ln (e^x + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (e^x + x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + x} \quad (\text{กฎโลิตาล } \frac{0}{0})$$

$$= \frac{e^0}{e^0 + 0} = 1$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} = 1$ □

แบบฝึกหัด

จงหาค่าของ

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{3x + 5}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{5x^2 + 3x + 8}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{2x^5 + 4x^4 + x^2}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$$

6.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

7.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

8.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}$$

9.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$$

10.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{cosec} x \right)^{1/\ln x}$$