

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความนิยมวลที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อม ในการ
แก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

ปริญญาานิพนธ์

ของ

อมรเทพ โทวราภา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อม ในการ
แก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

ปริญญาานิพนธ์

ของ

อมรเทพ โทวราภา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความนิยมวลที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อม ในการ
แก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

บทคัดย่อ

ของ

อมรเทพ โทวราภา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กรกฎาคม 2551

อมรเทพ ไทวรภา (2551).การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงที่สุดด้วยการพิจารณาโดย
อ้อม ในการแก้ปัญหากลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง
ปริญญาโท วิชา.ม.(เครื่องกล).กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
คณะกรรมการควบคุม : พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า, พันโท ผู้ช่วย
ศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง

ปัญหาของเครื่องจักรที่ใช้งานจริงในปัจจุบัน จะคำนึงถึงการประหยัดพลังงานหรือ
ประหยัดเวลาอย่างเดียวโดยไม่คำนึงถึงความโน้มถ่วงซึ่งผลที่ตามมาก็คือเกิดการกระชากอย่างรุนแรง
ซึ่งการประหยัดพลังงานและประหยัดเวลาให้ผลดีในทางทฤษฎี แต่อาจก่อความเสียหายได้ในทาง
ปฏิบัติในการหาค่าความโน้มถ่วงที่สุดมีการหาค่าของคำตอบได้หลายวิธีในที่นี้ได้เสนอการหาค่าความ
โน้มถ่วงที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อมในการแก้ปัญหากลศาสตร์ ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการ
อนุพันธ์อันดับสูงปัญหาที่นำมาวิเคราะห์จะเป็นปัญหาเชิงเส้น โดยมี มวล สปริง และตัวหน่วง โดยเริ่ม
จาก มวล 2 ก้อน และเป็นระบบที่มีแรงกระทำกับมวลทุกก้อน มีขอบเขตของเวลาเริ่มต้นและเวลา
สุดท้ายคงที่ไม่แปรผัน ในการแก้ปัญหสมการอนุพันธ์อันดับสูงในที่นี้ได้เลือกวิธีเศษตกค้างมา
แก้ปัญห สมการอนุพันธ์อันดับสูงมีค่าถึงอันดับที่ 6 จึงได้เลือกค่าเศษตกค้าง $\phi_i(t) = t^3(t_0 - t_f)^{i+2}$
เป็นตัวเศษตกค้างทำให้หาค่าผลเฉลยของสมการได้อย่างรวดเร็ว

ANALYSIS AND APPLICATION OF IN INDIRECT MINIMUM JERK METHOD FOR
HIGHER ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN DYNAMICS OPTIMIZATION
SYSTEMS

AN ABSTRACT
BY
ARMORNTHEP TOWARAPA

Presented in partial fulfillment of the requirements for the Master
of Engineering degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University
July 2008

Armornthep Towarapa. (2008). *Analysis and Application of in Indirect Minimum Jerk Method for Higher order Differential Equation in Dynamics Optimization Systems*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col. Asst. Prof. Dr.Tawiwat Veeraklaew : Lt. Col. Asst.Prof. Dr.Anotai Suksangpanomrung.

Both the minimum energy consumption and smoothness, which is quantified as a function of jerk, are generally needed in many dynamic systems such as the automobile and the pick-and-place robot manipulator that handles fragile equipments. Nevertheless, many researchers come up with either solely concerning on the minimum energy consumption or minimum jerk trajectory. This research paper considers the indirect minimum Jerk method for higher order differential equation in dynamics optimization proposes a simple yet very interesting indirect jerks approaches in designing the time-dependent system yielding an alternative optimal solution. Extremal solutions for the cost functions of indirect jerks are found using the dynamic optimization methods together with the numerical approximation. This case considers the linear equation of a simple system, for instance, mass, spring and damping. The simple system uses two mass connected together by springs. The boundary initial is defined the fix end time and end point. The higher differential order is solved by Galerkin's methods weight residual. As the result, the 6th higher differential order shows the faster solving time.

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวี วัชร วีระเกล้า ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิจิต บัวแก้ว ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ภรรยา ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่าน ในความสนับสนุนช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 3 และรุ่นพี่รุ่นน้องในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร.จปร. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

อมรเทพ ไทวราภา

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
ขอบเขตของการวิจัย.....	1
วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทฤษฎีอุปติไมซ์เซชัน	5
ทฤษฎีวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง.....	47
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	49
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	53
การกำหนดปัญหา.....	53
เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา	55
กำหนดสมการ Two Degree-of-Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง.....	58
ปัญหาความถี่เรโซแนนซ์สูงสุด โดยวิธีทางอ้อม.....	60
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	72
ผลการทดสอบ.....	72
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	77
5 สรุปและวิจารณ์.....	78
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	78

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ข้อเสนอแนะ.....	78
บรรณานุกรม.....	79
ภาคผนวก.....	81
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	85

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 Two degree of-freedom of spring mass and damper system.....	49
2 Two degree of-freedom of spring mass and damper system.....	58
3 Two degree of-freedom of spring mass and damper system.....	72
4 เปรียบเทียบ $x_1(t), x_2(t)$ ที่ได้จากโหมดฟังก์ชัน 0 และโหมดฟังก์ชัน 1.....	75
5 เปรียบเทียบ $x_1(t), x_2(t)$ ที่ได้จากโหมดฟังก์ชัน 1 และโหมดฟังก์ชัน 2.....	76

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเคลื่อนที่ของวัตถุจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้ายมีการเคลื่อนที่ได้หลายรูปแบบ จากทฤษฎีของพลศาสตร์ ความเหมาะสมที่สุด สามารถแบ่งออกได้ทั้งการเคลื่อนที่แบบใช้เวลาน้อยที่สุด และเคลื่อนที่แบบใช้พลังงานน้อยที่สุด ไม่ว่าจะเป็นการเคลื่อนที่แบบใด ผลที่ตามมาคือเกิดปัญหาใหม่นั้นคือเกิดความยากกระดังงั้นเองซึ่งในทางปฏิบัติแล้วอาจต้องการความนิ่มนวลมากกว่าการประหยัดพลังงานหรือการประหยัดเวลา แต่ปัญหาทางความนิ่มนวลสามารถแก้ปัญหาได้หลายวิธี แต่ในบทความนี้ผู้เขียนได้เสนอถึงวิธีการวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ความนิ่มนวลที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อมในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สนใจนำไปประยุกต์ใช้เขียนโปรแกรมควบคุมเครื่องจักรหรือหุ่นยนต์ได้ในอนาคต

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ทฤษฎี Minimum indirect Jerk มาแก้ปัญหาพลศาสตร์ที่เหมาะสมที่สุดของระบบการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง (Spring-mass-damper linear motion system)

1.2.2 เพื่อศึกษาและนำทฤษฎี Weighted Residual Principle มาใช้แก้ปัญหา

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 กำหนดรูปแบบการเคลื่อนที่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงเป็นแบบเชิงเส้น (Spring-mass-damper linear motion system)

1.3.2 ระบบเป็นแบบ Fully actuated system

1.3.3 กำหนดสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูง (High order derivative)

1.3.4 หาค่าของ Minimum Indirect Jerk

1.3.5 หาผลเฉลยของสมการโดยวิธี Weighted Residual Principle

1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ

1.4.1 ศึกษาวิธีการแบบ Minimum Indirect Jerk Method

1.4.2 ศึกษาวิธีการ Numerical weight residual แบบ Galerkin method

1.4.3 กำหนดระบบการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นแบบสองมิติของระบบสปริง มวลสองก้อน และตัวหน่วงโดยมีแรงภายนอกกระทำกับมวลทุกก้อน

1.4.4 ทำการคำนวณและแก้ไขปัญหาเพื่อหาคำตอบ

1.4.5 ทำการวิเคราะห์และสรุปผลคำตอบของปัญหา

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ผลการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางสำหรับนักวิจัยรุ่นใหม่

1.5.2 ผู้พัฒนาหุ่นยนต์นำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้เขียนโปรแกรมเพื่อควบคุมหุ่นยนต์

1.5.3 ผลการวิจัยครั้งนี้จะให้ข้อมูลสำหรับการใช้เป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นๆ

บทที่ 2

งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ทฤษฎีออปติไมซ์เซชัน (Optimization)
3. ทฤษฎีวิธีเวจน์เรซิดวล (Weighted Residual Principle)

2.1 ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการออกแบบม้งงานวิจัยของผู้อื่นที่ได้ทำการศึกษามาก่อนที่ได้มีการนำเอาวิธีการหาค่าของความนิ่มนวล ที่สุด (Minimum indirect jerk) มาใช้ที่มีลักษณะใกล้เคียงและเกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยในครั้งนี้อย่างต่อเนื่อง

Sunil K. Agrawal และ พันตรี ทวีวัชร วีระเกล้า (1998) ศึกษาเรื่องการออกแบบหุ่นยนต์ที่มีความเหมาะสมสูงสุดกับการเคลื่อนที่แบบซ้ำๆ โดยนำเสนอถึงวิธีการในการหาค่าตัวแปรต่างๆให้ได้ผลถึงความเหมาะสมสูงสุดระหว่างการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในระยะเวลาที่กำหนด วิธีการที่นำเสนอเป็นวิธีการใหม่ที่ไม่มีการคิดค้นมาก่อนและจะไม่มีการใช้ตัวแปรที่ชื่อว่าตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multiplier) ตัวอย่างของระบบหุ่นยนต์ได้ถูกนำเสนอในบทความนี้ยังแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำมาใช้คำนวณหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วมาก ทำให้ได้ผลที่ดีอีกประการหนึ่งนั่นคือ ค่าตัวแปรของระบบหุ่นยนต์จะสามารถถูกปรับเปลี่ยนในขณะที่ หุ่นยนต์กำลังเคลื่อนที่อยู่ได้

Sunil K. Agrawal, พันตรี ทวีวัชร วีระเกล้า และ B.C. Fabien (1998) ศึกษาการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่คงที่แบบทางตรงและทางอ้อมโดยอาศัยการเปลี่ยนรูป โดยทำการวิเคราะห์และหาคำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงและสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ ในระยะเวลาที่กำหนด จากทฤษฎีที่มีอยู่เดิมคำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่และสมการควบคุมเป็นจริงในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง แต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอถึงวิธีการใหม่โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสเตทและควบคุม ไปใช้ในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ ผลที่ได้จะสามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อม มาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี ผู้เขียนได้เปรียบเทียบถึงข้อดีและข้อเสียของการคำนวณไว้พร้อมกับตัวอย่างของระบบการเคลื่อนที่

พันตรี ทวีวัชร วีระเกล้า และ Sunil K. Agrawal (1998) ศึกษาการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่มีขอบเขตด้วยฟังก์ชันเพนัลตี โดยกล่าวถึงปัญหาของการหา

ค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่มีขอบเขต ทั้งที่เป็นสมการและอสมการ วิธีการใหม่นี้ อาศัยหลักการในการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสเตทและตัวแปรควบคุม เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ ถึงกระนั้น ทั้งสมการและอสมการที่เป็นขอบเขต ไม่สามารถแทนค่าในฟังก์ชันดังกล่าวได้ จึงต้องอาศัยฟังก์ชัน เพนัลตี ซึ่งเป็นที่นิยมในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะกับขอบเขตที่เป็นอสมการสุดท้ายในภาพรวมผู้เขียนได้กล่าวถึงข้อเปรียบเทียบด้วยการนำเสนอตัวอย่างในด้านกลศาสตร์วิศวกรรม

พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว สุพจน์ ศรีนุตาพงษ์และพันตรี เศรษฐพงษ์ มะลิสวรรณ (2000) ศึกษาการควบคุมแบบย้อนกลับข้างเคียงของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปอันดับสูงสำหรับการประยุกต์ใช้กับระบบหุ่นยนต์ โดยกล่าวถึงทฤษฎีที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น เปลี่ยนรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ จากสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ไปเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง ได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายและมีข้อได้เปรียบในการควบคุมแบบเวลาจริง ดังนั้นในบทความนี้ผู้ศึกษาจึงได้นำเสนอถึงการค้นคว้าอย่างต่อเนื่องถึงกฎการควบคุมแบบย้อนกลับข้างเคียง ที่จะสามารถถูกนำมาใช้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสูงได้

พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว (2000) ศึกษาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นอย่างเหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีค่าขอบเขตสองตำแหน่งในสมการอันดับที่สี่ สูตรสมการหาคำตอบแบบเวกเนอร์ชิดวล โดยบทความดังกล่าวได้ถูกนำเสนอด้วยระบบ สปริง มวลและตัวหน่วง ที่สามารถถูกจัดให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับที่สี่ได้ เนื่องจากสมการที่มีชื่อว่าสมการโคสเทท (Costate equations) ในทฤษฎีของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดสามารถถูกกำจัดออกจากระบบได้ สมการอนุพันธ์อันดับที่สี่นี้จะอยู่ในรูปของสมการที่สามารถถูกแก้ปัญหาคำตอบได้ด้วยวิธีเวกเนอร์ชิดวล (Weight residual) เช่นวิธีกัลเลอร์คิน (Galerkin methods) วิธีการที่ถูกนำเสนอนี้มีข้อได้เปรียบกว่าวิธีเดิมที่นักวิจัยนิยมใช้แก้ปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดที่มีชื่อว่ามัลติชูตติ้ง (Multiple shooting) ในเชิงของการคำนวณในเวลาที่เป็นจริง

พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว และ Sunil K. Agrawal (2001) เสนอวิธีการใหม่ในการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง โดยกล่าวถึงการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับที่หนึ่ง โดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางวิศวกรรมเครื่องกลจะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอเนื่องจากเป็นผลมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน โดยในบทความนี้ได้แสดงข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจนในด้านการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูงและสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยการสร้าง

ซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีการทางตรงและทางอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่า ไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูปแบบใด ก็จะสามารถที่จะใช้ซอฟต์แวร์เดียวกันภายใต้สภาวะเดียวกันหาคำตอบ เพื่อให้ในการเปรียบเทียบ

พันตรี ทวีวัชร วีระเกล้า (2001) เสนอการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงและหลักการพัฒนาค่าต่ำสุด โดยนำเสนอถึงทฤษฎีที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่งในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการอนุพันธ์อันดับสูงมีชื่อว่า ทฤษฎีความต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าวที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายคือทฤษฎีฮามิลตัน-จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาทฤษฎีของพอนทรียากินและทฤษฎีความต่ำสุดที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งและสนับสนุนทฤษฎีต่างๆให้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสูง และวิธีเอชเอ็นแคลคูลัส ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของ พอนทรียากินและทฤษฎีความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่งซึ่งทั้งสองวิธีให้คำตอบตรงกัน และได้นำเสนอพร้อมตัวอย่างเพื่อแสดงความสอดคล้องกัน

สรุป จากการศึกษาเอกสาร โครงการ งานที่เกี่ยวข้องทำให้ทราบว่ามีการพยายามที่จะหาวิธีการในการแก้ปัญหาสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงให้มีความถูกต้องแม่นยำและง่ายต่อการคำนวณวิธีการหนึ่งที่ผู้ทำวิจัยสนใจคือการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยอ้อม (Minimum indirect jerk) แก้ปัญหาสมการอนุพันธ์อันดับสูงแล้วจึงใช้วิธีเวจเรซิดวล (Weight residual method) แบบกัลเลอร์คิน (Galerkin method) ในการหาคำตอบซึ่งวิธีการนี้ยังไม่มีใครได้ทำการศึกษามาก่อนหุ่ยนยนต์จะต้องมีการคำนวณหาส่วนต่างๆมากมาย หนึ่งในนั้นมีการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่ยนยนต์ ซึ่งถือว่าล่า

2.2 ทฤษฎีออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization goal) ทำให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธีออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการพรรณนาถึงลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน ซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of problem formulation) ในทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและ

จำเป็นต้องทำความเข้าใจสามเทอมด้วยกัน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.2.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่ระบุชี้ชัดถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์แล้วตัวแปรของการออกแบบก็คือตัวไม่ทราบค่าที่จะต้องถูกค้นหาค่านั้นเอง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม คือ ดีไซน์วาริเอเบิลก็คือความยาวและความสูง ในการกำหนดหรือเลือกว่าสิ่งไหนคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) นั้น ผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้สัญชาตญาณ, ความชำนาญ และพื้นความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ แต่ก็มีหลักการพื้นฐานเช่นกันคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ตัวอย่างเช่น การออกแบบหน้าตัดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราไม่สามารถกำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาว, ความกว้างและพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรากำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาวและความกว้างแล้ว ตัวแปรที่สามคือพื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) สามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขน้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ x , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

2.2.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ, คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

2.2.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และ ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) มาประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) นี้สามารถแสดงออกมาใน

รูปแบบของดีไซน์ออบเจกทิฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนั้นก็กลายเป็นออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี่ก็จะเป็นคอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

2.2.3.1 ออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งของออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยทั่วไปจะเป็นแบบฟังก์ชันเดียว รูปแบบของวัตถุประสงค์จะเป็นการหาปริมาณที่น้อยที่สุดหรือปริมาณที่มากที่สุด และปริมาณที่วานี้ก็เป็นปริมาณสเกลาร์ ในทอมทางคณิตศาสตร์นั้นจะเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $f(X)$ และ $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$

2.2.3.2 คอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint functions)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการออกแบบเป็นอย่างมาก และสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ (เป็นได้ทั้งสมการและอสมการ) ดังนั้นจึงเป็นเวกเตอร์ (Vector: matrix) และจะใช้เครื่องหมายดำเนินการเปรียบเทียบสามตัวคือ $\leq$, $\geq$ และ $=$ ซึ่งเงื่อนไขบังคับนี้จะมีได้สามรูปแบบด้วยกันคือ อันคอนสเทรนต์ (Unconstraint), อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraint) มีรายละเอียดดังนี้

2.2.3.2.1 อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)

เป็นเงื่อนไขที่บังคับให้การออกแบบต้องเป็นไปตามเงื่อนไขอย่างเคร่งครัดโดยจะต้องไม่ขาดและไม่เกินจากเงื่อนไข มีลักษณะเป็นสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร g เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[G]$, $[g_1, g_2, \dots, g_l]$ และ $g_l, l = 1, 2, \dots, m$ จำนวนดีไซน์วาร์เอเบิล (Design variables) n จะต้องมีความมากกว่าจำนวน m อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) จึงจะสามารถทำการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ได้โดยจะต้องสอดคล้องกับออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $g_1(X): f(X) - 500 = 0$ เป็นต้น

2.2.3.2.2 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีความยืดหยุ่นในการออกแบบ เพราะจะบังคับในลักษณะเป็นช่วงให้เปรียบเทียบ มีลักษณะเป็นอสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร c เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและจะเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[C]$, $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ และ $c_l, l = 1, 2, \dots, m$ เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับและน้อยกว่าหรือ

เท่ากับแต่จะนิยมแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับในงานด้านวิศวกรรมมากกว่า โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $c_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 1 \leq 0$ เป็นต้น

2.2.3.2.3 ไซด์คอนสเทรนต์ (Side constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่นำมาใช้เพื่อกำหนดตัวเลขช่วงให้กับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และมักมีการกำหนดเป็นลักษณะขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง

2.2.3.2.4 ดีไซน์สเปส (Design space)

ก็คือปริภูมิที่จะถูกใช้เพื่อการออกแบบที่เหมาะสมนั่นเอง เป็นปริภูมิที่เกิดขึ้นจากหลักการของปริภูมิยูคลิดเดียนหรือปริภูมิคาร์ทีเซียน (Euclidean or cartesian n-dimensional space) ที่มีมิติใดๆ ซึ่งมีมิติใดๆ นี้เกิดขึ้นจากกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) แต่จะไม่เหมือนกับระบบปริภูมิอ้างอิงทั่วไปที่มีสามมิติตามที่เรารู้คุ้นเคยกัน เพราะจะมีความซับซ้อนกว่า ยกตัวอย่างเช่น มีดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) 10 ตัว ก็จะมีมิติของปริภูมิเป็น 10 มิติ เป็นการยากมากที่จะอธิบายโดยการวาดภาพหรือเขียนกราฟออกมา ด้วยเหตุนี้จึงใช้ไซด์คอนสเทรนต์ (Side constraints) มาเป็นตัวจำกัดขอบเขตของปริภูมิ ซึ่งหากผลเฉลยอยู่ในช่วงขอบเขตนี้ก็ถือว่ายอมรับได้ (Feasible)

2.2.4 ฟอर्मมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The standard format optimization)

จากที่กล่าวมานั้นล้วนแต่เป็นองค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทั้งสิ้น และมีการเขียนในทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบ ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.2)$$

$$c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$c_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2.3)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.5)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(X), [X]_n \quad (2.9)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } [g(X)]_l = 0 \quad (2.10)$$

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2.11)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2.12)$$

จากฟอร์มมาตรฐานของปัญหาการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดได้ดังนี้ คือ หาค่าน้อยที่สุด (Minimize) ของออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) f โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (Subject to) บังคับเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จำนวน l เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) จำนวน i เงื่อนไข ทั้งนี้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ทั้งหมดจำนวน n ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของไซด์คอนสเทรนต์ (Side constraints) เท่านั้น

2.2.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สถิติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือ การค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยสุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมินิมัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.13)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมินิมัม (Local minimum)

กรณีมากที่สุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.14)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

2.2.5.1 ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ (Variables) ขึ้นกับเวลา (Time-dependent) จะถูกเรียกว่าไดนามิก (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) มาเป็นตัวแสดงระบบไดนามิก (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสเตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คืออนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วย

มวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.15) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.15) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสถานะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกค่าฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.16)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสถานะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สเตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิก (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งวิธีไดเรกต์ (Direct methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่าแต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ในการวิจัยศึกษาในครั้งนี้จะใช้วิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) เข้ามาเป็นเครื่องมือสำหรับหาคำตอบ

ดังนั้นจึงต้องทำการศึกษาและทำความเข้าใจวิธีการแบบอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการศึกษาและทำความเข้าใจแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) โดยเริ่ม

จากระบบขั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสี่ (Multistage systems) เพราะต้องใช้เป็นฐานในการใช้งานกับวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) จากนั้นก็จะลงลึกในรายละเอียดของวิธีการอินไดเรคท์ (Indirect methods) โดยจะเน้นหนักลงไปเกี่ยวกับมินนิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum time optimization)

2.2.6 แคลคูลัสอพอวาริเอเบิล (Calculus of variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสี่ (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสอพอวาริเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.17)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.18)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.18) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสอพอวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนสเซสเซอร์รี่คอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสอพอวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.6.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a single function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.6.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x + h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.19)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.20)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.20) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.21)$$

เมื่อเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.22)$$

ซึ่งสมการ (2.22) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-cauchy) ได้

2.2.6.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.6.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.19-2.21) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} = 0 \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0 \quad (2.25)$$

ซึ่งสมการ (2.23-2.25) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.6.1.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.1.6.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt
\end{aligned} \tag{2.26}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.27) ก็จะได้พบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.28) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

เมื่อเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.31)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.2.6.2 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of n functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.6.2.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end times and end points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.32)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2.33)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.34)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.34) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.35)$$

เมื่อเนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

ซึ่งสมการ (2.36) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-cauchy) ได้

2.2.6.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time and variable end points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.6.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.33-2.35) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามขอบใจ ทำให้ได้เนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

ซึ่งสมการ (2.37-2.39) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-cauchy) ได้เช่นกัน

2.2.6.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.1.6.2.1) ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\
& + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.41) ก็จะได้พบว่

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\
& - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i \Big|_{t_0} - \dot{x}_i \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i \Big|_{t_f} - \dot{x}_i \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.42) จะเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i \Big|_{t_f}$, $\delta x_i \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \tag{2.44}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.45)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.2.6.3 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

2.2.6.3.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)

$g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.46)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F' ตัวใหม่ของเนสซเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารทำการหาเนสซเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.2.6.3.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point function value constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.47)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.43) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

เมื่อเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.2.6.3.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General constraints)

จากหัวข้อ (2.1.6.3.1 และ 2.1.6.3.2) เราสามารถเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j = 1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์ มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.51)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.43) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$

ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right]_{t_f} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\
\left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\
\left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.2.6.4 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions for minimum and maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจหาค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$ นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้อย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ $x, \dot{x}$ และ t ต่อไปหากเรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยสุด ต่อไปลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0) = h(t_f) = 0$ เราจะได้พบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x + h] - J[x]$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{high-order-terms} \tag{2.54}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0} \\
\delta^2 J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) dt
\end{aligned}$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านมา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากที่สุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \tilde{F} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} dt \quad (2.55)$$

เมื่อ

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\tilde{F}$ เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\tilde{F}$ เป็นลบ (Negative definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากที่สุด

2.2.7 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation with dynamic optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่ามีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.2.7.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed final time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.15), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.16), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบบจะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.7.1.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final states are prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วทำให้เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการ (2.16) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.6.3.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.56)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ดังนั้นมีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.57) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ

$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ สำหรับ $j=1, \dots, n$ และ $k=1, \dots, m$ ด้วยการแทนสมการ (2.58) กลับเข้าไปใน

สมการดังกล่าวทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.60)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตต (Costate equations) คือสมการ (2.59) จำนวน n สมการ และเออดีชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.60) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two point boundary value problems) ส่วน $H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of system)

2.2.7.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states lie on a constraint surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (2.1.6.3.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.61)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Constant lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.62)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.63)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.65)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, คอสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.64) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.65) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน คอสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.66) ส่วนค่า ν_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l \Big|_{t_f} = 0$

2.2.7.1.3 อักซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.67)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.68)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายดั่งนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.69)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j}|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.71)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.72)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และ ν_l สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.70) จำนวน n สมการ และเอนด์พอยน์ทอีควชันคือสมการ (2.71) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนต์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.72)

2.2.7.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable final time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.7.1) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.15), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.16), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่นการแข่งขันรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะ

สุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.7.2.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final states are prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.73)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.74)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.74) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนccessเซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (2.76)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.77)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.75) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชัน คือสมการ (2.76) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.77) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.2.7.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states lie on a constraint surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับ (2.1.7.1.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.78)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Constant lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.79)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน และได้เนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\
& + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \tag{2.81}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \tag{2.82}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \tag{2.83}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.84}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.81) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.82) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.84) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.83)

2.2.7.2.3 ออกริลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

สแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.85)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์ที่มีลติพลายเออร์ (Constant lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.86)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์ที่มีลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial u_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.87)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.87) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (2.89)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.90)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.91)$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรล อินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรังก์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลา สุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.88) จำนวน n สมการ และเออดิชั่น นอลอีควชันคือสมการ (2.89) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.91) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.90)

2.2.7.2.4 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด (Minimum time motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ ในการหาเวลาที่น้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L=1$ และ $\Phi=0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ (2.1.7.2.3) จะทำให้ได้สมการเนccessary conditions (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.92)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.93)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.94)$$

$$\left[1 + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.95)$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรล อินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลา สุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.92) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.93) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.95) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.94)

2.2.7.3 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions for minimum and maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) นี้มีค่าน้อยสุด

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.96)$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$ และ $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัวต่อไปหากเรากำหนดให้ $\bar{h}_x(t) \in R^n$ และ $\bar{h}_u(t) \in R^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังนี้

$$\Delta J = J[\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u] - J[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.97)$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{higher-order-terms} \quad (2.98)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} - \bar{\lambda} \right] \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\bar{h}_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}} \right) + \bar{h}_u^T \frac{\partial H}{\partial u} \right] dt \\
 \delta^2 J &= \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \bar{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \bar{h}_x^T & \bar{h}_u^T \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} \bar{h}_x \\ \bar{h}_u \end{bmatrix} dt \\
 \tilde{H} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \bar{x}} \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \bar{x}} \right)^T & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

ซึ่งโคสเตตเวกเตอร์ (Costate vector) แสดงอยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตันเนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian function) $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$ และ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้สมการ (2.98) เขียนได้เป็น $\Delta J = \delta^2 J + \text{higher-order-terms}$ ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} > 0; \tilde{H} > 0 \tag{2.100}$$

2.2.8 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \tag{2.101}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \tag{2.102}$$

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \tag{2.103}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \tag{2.104}$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอเนกวัตติคอสเทรนท์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x}, \bar{u}, t), i = 1, \dots, p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอเนกวัตติคอสเทรนท์ (Variable inequality constraints) และสแตตวารีเอเบิลอเนกวัตติคอสเทรนท์ (State variable inequality constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนท์ที่เควชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) + s_i^2(t) = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.105)$$

ซึ่งสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) ในสมการ (2.105) จะเป็นคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.102) และสมการ (2.105) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.101) ด้วยการใช้ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt \quad (2.106)$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.107)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.108)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.109)$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.110)$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.111)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.112)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.113)$$

ซึ่งสมการ (2.107-2.113) คือลักษณะของบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.107 และ 2.108)

คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.109-2.111) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.112 และ 2.113) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับกรณีที่เป็นปัญหาหาค่าน้อยสุด (Minimum) เราสามารถหาเนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i \right) dt \quad (2.114)$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ ทำให้เราได้เนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.115)$$

$$\lambda_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.116)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.117)$$

$$0 = \mu_i c_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.118)$$

$$0 \leq \mu_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.119)$$

$$0 \geq c_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.120)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.121)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.122)$$

2.2.9 การหาผลเฉลยด้วยวิธีอินไดเรกต์ (Indirect solution)

วิธีการหาผลเฉลยวิธีนี้จะใช้หลักการของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variation) โดยจะทำการค้นหาค่าของสเตต (State), โคสเตตวารีเอเบิล (Costate variables) และ คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ด้วยการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problems) ซึ่งเทคนิควิธีนี้ให้ความแม่นยำในการแก้ปัญหาค่าขอบที่เกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์ก็คือมัลติเปิลชูดิงเทคนิค (Multiple shooting techniques) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.2.9.1 ปัญหาค่าขอบของการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control boundary value problems)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) ที่อันคอนสเทรนต์ โดยจะเป็นการหาเนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูป

ของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่เกี่ยวข้องเฉพาะกับสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.123)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad t \in [0, t_f] \quad (2.124)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.125)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) = 0 \quad (2.126)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{x}_0$ คือกลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น (Set of initial conditions), และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือเงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Final state constraint) ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับหัวข้อ 2.1.7.1.2 คือสภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final states lie on a constraint surface) ทำให้เราได้เนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_\lambda = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.127)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.128)$$

$$0 = H_u \quad (2.129)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.130)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.131)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \quad (2.132)$$

เมื่อ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ คือโคสเตตวารีเอเบิล (State variables), สเกลาร์ $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$, $H_x = \partial H / \partial \bar{x}$, $H_u = \partial H / \partial \bar{u}$, $\Phi_x = \partial \Phi / \partial \bar{x}$ ตามลำดับ ส่วน $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เพื่อให้ลดความซับซ้อนลงเราจะทำการสมมติให้อยู่ในสภาวะคงที่ (Stationary condition) คือ $H_u = 0$ และทำการจัดรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) $\bar{u}$ ในเทอมของสเตตวารีเอเบิล (State) และโคสเตตวารีเอเบิล (Costate) นอกจากนี้เราจะทำการสมมติให้สมการ (2.130-2.132) มีจำนวน

$2n + n_f$ เพื่อใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขเพื่อให้อยู่ในเทอมของ $\bar{x}$ และ $\bar{\lambda}$ ด้วยการกำจัด $\bar{v}_f$ ออก ส่วนปัญหาที่ไม่มีการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะทำให้ได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.127-2.132) กลายเป็น

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}) \quad (2.133)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.134)$$

เมื่อ $\bar{y} = [\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T]^T \in R^{2n}$, $\bar{h}(t, \bar{y}) = [H_{\lambda}^T, -H_x^T]^T \in R^{2n}$ และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข ได้จากสมการ (2.130-2.132)

2.2.9.2 ข้อกีดกันเสริมคอนสเทรนต์ (Auxiliary constraints)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) ที่มีอสมการเสริมคอนสเทรนต์ (Equality constraints) เข้ามาเกี่ยวข้องกับสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) โดยเนสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential and algebraic equations: BVP-DAE) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.135)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.136)$$

$$0 = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.137)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.138)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.139)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสแตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอีควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Equality constraints) ของสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำนวน $(0 \leq p \leq n + m)$, และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือช่วงสุดท้ายที่หลากหลายของสภาวะ $0 \leq n_f \leq n$ ในสมการคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) (2.135) ประกอบไปด้วย สเกลาร์เทอร์มินอลเวตติ้งฟังก์ชัน (Scalar terminal weighting function) Φ , และสเกลาร์เพอร์ฟอมานซ์ฟังก์ชัน (Scalar performance function) L ส่วนเวลาสุดท้าย t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว

โดยทั่วไปแล้วปัญหาการหาค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) สามารถทำให้อยู่ในรูปสมการ (2.135-2.139) ส่วนกรณีที่มีอีนีควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Inequality constraints) จะมีการเพิ่มสแลกวารีเอเบิล (Slack variables) เข้าไปเพื่อเปลี่ยนให้เป็นเงื่อนไขเชิงเท่ากัน (Equality constraints) จากนั้นก็ใช้แคลคูลัสของฟารีเอเบิล (Calculus of variations) มีแฮมิลตันนิอัน (Hamiltonian) คือ $H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\mu}^T \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u})$ เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ด้วยการใช้นำมิลตันนิอัน (Hamiltonian) ทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.140)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.141)$$

$$0 = H_u \quad (2.142)$$

$$0 = H_{\mu} = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.143)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.144)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.145)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - (\Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f) \quad (2.146)$$

เมื่อ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในสมการ (2.140-2.146) เพื่อบอกลักษณะของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์คือสมการ (2.140-2.141) ส่วนสมการพีชคณิตคือสมการ (2.142-2.143) และสมการเงื่อนไขขอบเขตคือสมการ (2.144-2.145) สมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสแตตวารีเอเบิล (State variables) ($\bar{x}$), คอสแตตวารีเอเบิล (Costate variables) ($\bar{\lambda}$), คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ($\bar{u}$) และลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ($\bar{\mu}$) ซึ่งเขียนดังนี้

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_u \\ H_\mu \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.147)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.148)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.149)$$

สมการปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) สมการ (2.147-2.149) จะลดรูปลงเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้นด้วยการใช้สมการพีชคณิตสมการ (2.148) มาหาค่า $\bar{z} = G(\bar{y})$ ดังนั้นสมการ (2.147) สามารถเขียนเป็น $\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, G(\bar{y}))$ รวมกับสมการ (2.149) จะมีลักษณะเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential equations: BVP-DE)

2.2.9.3 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints)

จะใช้เทคนิคฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function technique) เปลี่ยนให้ไม่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.150)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.151)$$

$$\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0 \quad (2.152)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.153)$$

เมื่อ $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) และกระจายด้วยการใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) คือ

$$C_i = \begin{cases} -1/c_i & \text{if } -c_i \geq \sigma \\ (3 + 3c_i/\sigma + (c_i/\sigma)^2)/\sigma & \text{if } -c_i < \sigma \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.154)$$

เมื่อ σ คือพารามิเตอร์ ด้วยการใส่สมการ (2.154) ทำให้เปลี่ยนอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ให้เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstraint) ได้ โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^p \rho_k C_i(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.155)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.156)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.157)$$

$$\text{เมื่อ } \sigma = \sqrt{\rho_k}, \rho_k > 0, \rho_k > \rho_{k+1}$$

2.2.9.4 ปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุดที่มีพารามิเตอร์ (Optimal control problems with parameters)

โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ และมีพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) dt \quad (2.158)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.159)$$

$$0 \geq \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.160)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.161)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \quad (2.162)$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) จะทำให้เขียนสมการได้เป็น

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} \left(L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^p C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \right) dt \quad (2.163)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.164)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.165)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \quad (2.166)$$

เมื่อ $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$ และ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ทำให้ได้เนสเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= H_x = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}); \quad \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; \quad \dot{\bar{\gamma}} = H_p \\ 0 &= H_u = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 = \bar{\gamma}(0) = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ 0 &= \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f = \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{aligned} \quad (2.167)$$

โดยฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda}; \rho_k) = L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^p C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \rho_k) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ส่วน $\bar{\gamma} \in R^{n_p}$ คือผลเฉลยอย่างง่ายของปัญหา (Facilitate) สมการ (2.167) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{z} = \bar{u} \in R^m, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{n_p+n_f}$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \\ H_p \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) = H_u \in R^m$$

$$\bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{w}; \rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \\ \gamma(0) \\ \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \\ \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{2n+2n_p+n_f}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) \quad (2.168)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) \quad (2.169)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{w}) \quad (2.170)$$

2.2.10 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยามจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.15) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สถานะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของ แคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ν_i , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากันและเชิงเบรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

2.3 ทฤษฎีวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted Residual Principle)

วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted Residual Methods) เกี่ยวข้องกับการอินทิเกรต เป็นวิธีที่ผลเฉลยโดยประมาณถูกนำมาแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ แต่เนื่องจากผลเฉลยโดยประมาณ นั้นไม่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ จึงทำให้เกิดเศษตกค้างหรือผลของความคลาดเคลื่อนขึ้น เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\Pi = \int_0^H \left[\frac{D}{2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - QT \right] dx \quad (2.171)$$

สมมุติ $T = h(x)$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์(2.171) แทนค่า $T = h(x)$ ลงใน สมการ (2.171) จะได้

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (2.172)$$

โดยที่ $R(X)$ เป็นเศษตกค้าง (Residual error)

เนื่องจาก $T = h(x)$ ไม่สอดคล้องกับสมการ(2.171)วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจึงกำหนดขึ้นโดย

$$\int_0^H W_i(x) R(X) dx = 0 \quad (2.173)$$

กล่าวคือเศษตกค้าง $R(X)$ คูณกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก(Weighting function) $W_i(x)$ แล้วอินทิเกรตผล คูณนี้ได้ค่าเป็นศูนย์ โดยจำนวนพจน์ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักจะเท่ากับจำนวนสัมประสิทธิ์ของตัวไม่รู้ ค่าของผลเฉลยโดยประมาณ วิธีการเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักมีมากมาย แต่วิธีที่พบบ่อยที่สุดได้แก่ วิธีจัดตำแหน่งจุด(Point collocation method) วิธีจัดโดเมนย่อย (Subdomain method)วิธีกำลังสอง น้อยสุด (Least squares method) และวิธีแกเลอรืคิน (Galerkin's method) แต่ในที่นี้จะกล่าวถึง เฉพาะวิธีแกเลอรืคินเท่านั้น

วิธีแกเลอรืคิน

วิธีแกเลอรืคินที่ใช้ในวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ฟังก์ชันทดลอง $\Phi_i(x)$ ซึ่งตัว มันเองจะถูกใช้เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก กล่าวคือ

$$W_i(x) = \Phi_i(x) \quad (2.174)$$

สมการ(2.173) เมื่อใช้วิธีกัลเลอรืคินจะกลายเป็น

$$\int_{\Omega} \Phi_i(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \quad \text{สำหรับ } i = 1 \text{ ถึง } n \quad (2.175)$$

เนื่องจากมีฟังก์ชันทดลองเพียงฟังก์ชันเดียวสำหรับแต่ละตัวแปรไม่รู้ค่า ดังนั้นสมการ(2.175)จึงให้ n สมการ และสามารถแก้สมการได้ตัวแปรไม่รู้ค่า $a_1, a_2, \dots, a_n$

จากการศึกษาทฤษฎีวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบกัลเลอรืคิน เพื่อให้ง่าย ต่อ การทำความเข้าใจ พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + 1000x^2 = 0 \quad (2.176)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบ $T(0) = 0$ และ $T(1) = 0$

เมื่อ T มีหน่วยเป็น $^{\circ}C$ และ x มีหน่วยเป็น m

วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจึงกำหนดขึ้นโดย

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (2.177)$$

จากสมการ(2.176) สามารถแก้ปัญหาก็ได้โดย สมมติฟังก์ชันทดลอง $\Phi(x) = x(1-x^2)$ ด้วยวิธีของกัลเลอรืคินฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $W_i(x)$ จะมีค่าเท่ากับ $\Phi(x)$ สมการผลเฉลยโดยประมาณในรูปทั่วไปคือ

$$T = T(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi(x) \quad (2.178)$$

เนื่องจากกำหนดฟังก์ชันทดลองเพียงฟังก์ชันเดียวจึงมีตัวแปร a_1 เพียงตัวเดียว สมการผลเฉลยโดยประมาณคือ

$$T(x) = a_1 \Phi(x) = a_1 x(1-x^2) \quad (2.179)$$

ขั้นตอนต่อไป หาสมการเศษตกค้าง โดยการแทนค่า $T(x)$ จากสมการ(2.179) ลงในสมการ (2.176)จะได้

$$R(x, a_1) = -6a_1 x + 1000x^2 \quad (2.180)$$

ขั้นตอนต่อไปเมื่อได้ค่าของ $W_i(x)$ และ $R(x)$ แล้ว ทำการแทนค่าลงในสมการ(2.177)จะได้

$$\int_0^1 x(1-x^2)[-6a_1x + 1000x^2]dx = 0 \quad (2.181)$$

คุณสมบัติภายในอินทิกรัลเข้าด้วยกัน จะได้

$$\int_0^1 [-6a_1x^2 + 6a_1x^4 + 1000x^3 - 1000x^5]dx = 0 \quad (2.182)$$

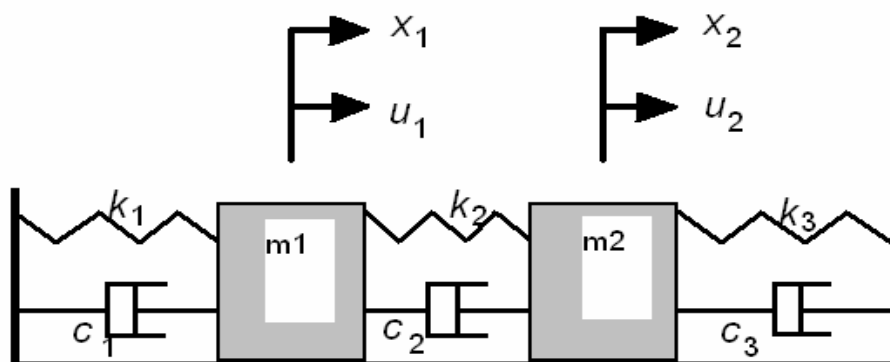
ผลการอินทิเกรต พบว่า

$$\left[-6a_1 \frac{x^3}{3} + 6a_1 \frac{x^5}{5} + 1000 \frac{x^4}{4} - 1000 \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 0 \quad (2.183)$$

และหาค่า a_1 ด้วยการแก้สมการได้ค่า $a_1 = 1000 \left(\frac{5}{48} \right)$

แทนค่า a_1 ลงในสมการ (2.179) ผลเฉลยโดยประมาณ จึงเป็น $T(x) = 5000x(1-x^2)/48$

2.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model)



ภาพประกอบ 1 Two degree-of-freedom of spring mass and damper system

การควบคุมจุดต่อจุดของระบบสปริง-ก้อนมวล-ตัวหน่วง พิจารณาดังแสดงตามรูป สมการการเคลื่อนที่ของระบบดังนี้

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Bu \quad (2.183)$$

จากสมการ(2.183) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second law of newton) ส่วนตัวแปรที่ใช้หน่วยของ เมตร/วินาที

เมื่อ $x_1 > x_2$ และ จากรูปกำหนดให้มีค่า $c_1 = 1$ $k_1 = 1$ $m_1 = 2$
 $c_2 = 2$ $k_2 = 1$ $m_2 = 1$
 $c_3 = 1$ $k_3 = 1$

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $X_1 \setminus X_2$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $\sum F = ma$ (2.184)
 พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} U_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (2.185)$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = U_1 \quad (2.186)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} U_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (2.187)$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = U_2 \quad (2.188)$$

แทนค่าของ c, k, m ลงในสมการ (2.186 และ 2.188)

$$2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 2x_1 - x_2 = U_1 \quad (2.189)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - x_1 + 2x_2 = U_2 \quad (2.190)$$

$x =$ ตำแหน่งของวัตถุ

$\dot{x} =$ ความเร็วของวัตถุ

$\ddot{x} =$ ความเร่งของวัตถุ

$\ddot{x} =$ ความหน่วงกระด้าง

$$Jerk = \ddot{x} = \dot{U}$$

$$\dot{U} = \tilde{U}$$

ปัญหาทางออปติไมซ์เซชัน ที่มีการวิเคราะห์ห้กัน ได้แก่ การเลือกใช้เวลาให้น้อยสุด การเลือกใช้พลังงานน้อยสุด แต่ในที่นี้จะศึกษาถึงการใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด เพราะในความเป็นจริงแล้วการประหยัพลังงานมากที่สุดเป็นสิ่งที่ดีแต่ในการใช้งานจริงนั้นทำไม่ได้เนื่องจากเกิดความหยาบกระด้างมาก เมื่อ *Jerk* คือค่าของความหยาบกระด้าง จึงต้องทำการ Minimum jerk

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2 dt \quad (2.191)$$

โดยที่ $F = \tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2$ นำค่า F มาเข้าสมการ Euler equation

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i} \right) = 0 \quad (2.192)$$

จากสมการ(2.191) เมื่อแทนค่า $\tilde{U}_1$ และ $\tilde{U}_2$ จะได้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2)^2 dt \quad (2.193)$$

เมื่อพิจารณาสมการ(2.192) จะพบว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} = 8\ddot{x}_1 + 16\ddot{x}_1 + 10\dot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 - 14\ddot{x}_2 - 8\dot{x}_2 \quad (2.194)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right) = 8\ddot{x}_1^4 + 16\ddot{x}_1 + 10\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2^4 - 14\ddot{x}_2 - 8\ddot{x}_2 \quad (2.195)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} = -4\ddot{x}_1 - 14\ddot{x}_1 - 8\dot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 + 16\ddot{x}_2 + 10\dot{x}_2 \quad (2.196)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right) = -4\ddot{x}_1^4 - 14\ddot{x}_1 - 8\dot{x}_1 + 4\ddot{x}_2^4 + 16\ddot{x}_2 + 10\ddot{x}_2 \quad (2.197)$$

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} = 12\ddot{x}_1 + 26\ddot{x}_1 + 16\dot{x}_1 - 4\ddot{x}_2 - 24\ddot{x}_2 - 14\dot{x}_2 \quad (2.198)$$

$$\frac{d^2}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} \right) = 12\ddot{x}_1^5 + 26\ddot{x}_1^4 + 16\ddot{x}_1 - 4\ddot{x}_2^5 - 24\ddot{x}_2^4 - 14\ddot{x}_2 \quad (2.199)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} = -8\ddot{x}_1 - 24\ddot{x}_1 - 14\dot{x}_1 + 6\ddot{x}_2 + 26\ddot{x}_2 + 16\dot{x}_2 \quad (2.200)$$

$$\frac{d^2}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right) = -8\ddot{x}_1^5 - 24\ddot{x}_1^4 - 14\ddot{x}_1 + 6\ddot{x}_2^5 + 26\ddot{x}_2^4 + 16\ddot{x}_2 \quad (2.201)$$

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} = 8\ddot{x}_1 + 12\ddot{x}_1 - 8\ddot{x}_2 + 8\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 \quad (2.202)$$

$$\frac{d^3}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} \right) = 8\ddot{x}_1^6 + 12\ddot{x}_1^5 - 8\ddot{x}_2^5 + 8\ddot{x}_1^4 - 4\ddot{x}_2^4 \quad (2.203)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} = 2\ddot{x}_2 - 4\ddot{x}_1 + 6\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 \quad (2.204)$$

$$\frac{d^3}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right) = 2\ddot{x}_2^6 - 4\ddot{x}_1^5 + 6\ddot{x}_2^5 - 2\ddot{x}_1^4 + 4\ddot{x}_2^4 \quad (2.205)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 1 นำค่าสมการ(2.195, 2.199 และ 2.203) แทนลงในสมการ (2.193) จะได้

$$-8\ddot{x}_1^6 + 10\ddot{x}_1^4 - 10\ddot{x}_1 - 4\ddot{x}_2^5 - 18\ddot{x}_2^4 + 8\ddot{x}_2 = 0 \quad (2.206)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 นำค่าสมการ(2.197, 2.201 และ 2.205) แทนลงในสมการ (2.193) จะได้

$$-4\ddot{x}_1^5 - 18\ddot{x}_1^4 + 8\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2^6 + 18\ddot{x}_2^4 - 10\ddot{x}_2 = 0 \quad (2.207)$$

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Problem statement)
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary condition)
3. กำหนดสมการ Two degree-of-freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring-mass-damper
4. ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk problem)

3.1 การกำหนดปัญหา (Problem statement)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First order derivative function) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States, Control input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้คือการหาค่าของ Control input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and fixed end points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad (3.2)$$

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างกันดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ อนุพันธ์อันดับที่สามที่เทียบกับ

เวลา หรือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control input (u) ดังนั้น Jerk สามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

$$Jerk = \ddot{x} \propto \dot{u} \quad (3.3)$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \quad (3.4)$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n+m}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, t); \quad i = 1, \dots, n+m \quad (3.5)$$

ในที่นี้ $\tilde{u}$ คือค่าตัวแปร Control input ของระบบพลศาสตร์ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i^2 dt \quad (3.6)$$

ในลักษณะคล้ายกัน เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum direct jerk problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i^2 dt \quad (3.7)$$

J เป็น Cost function ของความกระด้าง (Jerks)

3.2 เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary condition)

ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of variations) หาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงานให้ฟังก์ชันนอลเป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.8)$$

ซึ่ง

$$\phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \quad (3.9)$$

จะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และ สภาวะสุดท้าย (Final states) ของระบบ และ

$$\int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.10)$$

เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสแตตและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables)

ในการหาค่าความเหมาะสมของฟังก์ชันในระบบพลศาสตร์ได้เพิ่มตัวคูณลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) เข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) จะได้สมการดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.11)$$

ซึ่ง

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i) \quad (3.12)$$

โดยที่ $\lambda_i(t)$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) ดังนั้น สมการ(3.11) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} [L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [\dot{x}_i - f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)]] dt \quad (3.13)$$

การเลือกใช้เงื่อนไขไดนามิกขึ้นอยู่กัปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล ในการศึกษาี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and end points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น t_0 และเวลาสุดท้าย t_f รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable functions) เป็นไปตามสมภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u(t_0) = u_0$ and $u(t_f) = u_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_i \leq t \leq t_f$

ให้ฟังก์ชัน $L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ แสดงฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (3.14)$$

ถ้าให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{x_j}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{u_k}(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_{x_j}(t_0) = h_{x_j}(t_f) = h_{u_k}(t_0) = h_{u_k}(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x_1 + h_{x_1}, \dots, x_n + h_{x_j}, u_1 + h_{u_1}, \dots, u_m + h_{u_k}] - J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \quad (3.15)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[L \left(t, x_1 + h_{x1}, \dots, x_n + h_{xj}, \dot{x}_1 + \dot{h}_{x1}, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_{xj}, \right. \right. \\ \left. \left. u_1 + h_{u1}, \dots, u_m + h_{uk}, \dot{u}_1 + \dot{h}_{u1}, \dots, \dot{u}_m + \dot{h}_{uk} \right) \right. \\ \left. - L \left(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m \right) \right] dt \quad (3.16)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher order terms) ที่จะได้ว่า

$$\delta J' = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{xj} dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{uk} dt \\ + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_i} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_i} \right) \quad (3.17)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $h_{xj}|_{t_f} = h_{xj}|_{t_i} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆของ สมการ(3.17) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad (3.18)$$

และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (3.19)$$

สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$.

สมการ(3.18) และ สมการ(3.19) เป็นเนสเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ที่จะนำไปแก้ปัญหาร่วมกับตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$, และ Control inputs $u_k(t)$ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเนสเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ได้หลายทาง

สำหรับ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

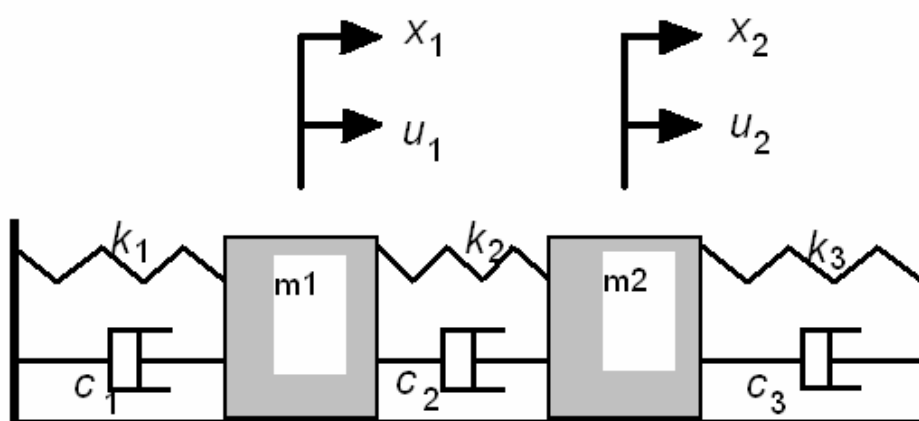
เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ของสมการ(3.20)

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

จาก เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และ สมการพีชคณิต (Differential and algebraic equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขของเขตสองจุด (TPBVP : Two point boundary valued problem)

3.3 กำหนดสมการ Two degree-of-freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring-mass-damper



ภาพประกอบ 2 Two degree of-freedom of spring mass and damper system

ในงานศึกษาวิจัยนี้สำหรับการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของ สปริง ก้อนมวล และ ตัวหน่วง A spring – mass – damper system ของการเคลื่อนที่ Two degree-of-freedom ซึ่งจะได้สมการดังนี้

$$A\dot{x} = Bu \quad (3.23)$$

จัดรูปให้อยู่ในเมตริกซ์ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

จัดรูปเมตริกซ์ของ M , C และ K เป็น

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

จากสมการ(3.23) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second law of newton) ส่วนตัวแปรที่ใช้หน่วยของ เมตริกดังนี้

$$\begin{array}{lll} \text{จากรูปกำหนดให้ค่า} & c_1 = 1 & k_1 = 1 & m_1 = 2 \\ & c_2 = 2 & k_2 = 1 & m_2 = 1 \end{array}$$

$$c_3 = 1 \quad k_3 = 1$$

เงื่อนไขขอบเขต(Boundary conditions)

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 2 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = 0 & \dot{x}_2(0) = 0 \\ \ddot{x}_1(0) = 0 & \ddot{x}_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 0 & x_2(1) = 0 \\ \dot{x}_1(1) = 0 & \dot{x}_2(1) = 0 \\ \ddot{x}_1(1) = 0 & \ddot{x}_2(1) = 0 \end{array}$$

3.4 ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk problem)

จากภาพประกอบ 2 กำหนดให้มีค่า

$$\begin{array}{lll} c_1 = 1 & k_1 = 1 & m_1 = 2 \\ c_2 = 2 & k_2 = 1 & m_2 = 1 \\ c_3 = 1 & k_3 = 1 & \end{array}$$

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $X_1 \rangle X_2$

$$\text{จากกฎข้อที่สองของนิวตัน} \quad \sum F = ma \quad (3.29)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \quad U_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.30)$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = U_1 \quad (3.31)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \quad U_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.32)$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = U_2 \quad (3.33)$$

แทนค่าของ c, k, m ลงในสมการ (3.31 และ 3.33)

$$2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 2x_1 - x_2 = U_1 \quad (3.34)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - x_1 + 2x_2 = U_2 \quad (3.35)$$

$x =$ ตำแหน่งของวัตถุ

$\dot{x} =$ ความเร็วของวัตถุ

$\ddot{x} =$ ความเร่งของวัตถุ

$\ddot{\ddot{x}} =$ ความหยวบกระด้าง

$$Jerk = \ddot{\ddot{x}} = \dot{U}$$

$$\dot{U} = \tilde{U}$$

ปัญหาทางออปติไมซ์เซชัน ที่มีการวิเคราะห์กัน ได้แก่ การเลือกใช้เวลาให้น้อยสุด การเลือกใช้พลังงานน้อยสุด แต่ในที่นี้จะศึกษาถึงการใช้น้ำมันมวลมากที่สุด เพราะในความเป็นจริงแล้วการประหยัดพลังงานมากที่สุดเป็นสิ่งที่ดีแต่ในการใช้งานจริงนั้นทำไม่ได้เนื่องจากเกิดความหยวบกระด้างมาก เมื่อ *Jerk* คือค่าของความหยวบกระด้าง จึงต้องทำการ Minimum jerk

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2 dt \quad (3.36)$$

โดยที่ $F = \tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2$ นำค่า F มาเข้าสมการ Euler equation

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_i} \right) = 0 \quad (3.37)$$

จากสมการ(3.36) เมื่อแทนค่า $\tilde{U}_1$ และ $\tilde{U}_2$ จะได้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2)^2 dt \quad (3.38)$$

เมื่อพิจารณาสมการ(3.37) จะพบว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 8\ddot{x}_1 + 16\ddot{x}_1 + 10\dot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 - 14\ddot{x}_2 - 8\dot{x}_2 \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right) = 8\ddot{x}_1^4 + 16\ddot{x}_1 + 10\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2^4 - 14\ddot{x}_2 - 8\dot{x}_2 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = -4\ddot{x}_1 - 14\ddot{x}_1 - 8\dot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 + 16\ddot{x}_2 + 10\dot{x}_2 \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \right) = -4\ddot{x}_1^4 - 14\ddot{x}_1 - 8\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2^4 + 16\ddot{x}_2 + 10\ddot{x}_2 \quad (3.42)$$

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} = 12\ddot{x}_1 + 26\ddot{x}_1 + 16\dot{x}_1 - 4\ddot{x}_2 - 24\ddot{x}_2 - 14\dot{x}_2 \quad (3.43)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_1} \right) = 12\ddot{x}_1^5 + 26\ddot{x}_1^4 + 16\ddot{x}_1 - 4\ddot{x}_2^5 - 24\ddot{x}_2^4 - 14\ddot{x}_2 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} = -8\ddot{x}_1 - 24\ddot{x}_1 - 14\dot{x}_1 + 6\ddot{x}_2 + 26\ddot{x}_2 + 16\dot{x}_2 \quad (3.45)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2} \right) = -8\ddot{x}_1^5 - 24\ddot{x}_1^4 - 14\ddot{x}_1 + 6\ddot{x}_2^5 + 26\ddot{x}_2^4 + 16\ddot{x}_2 \quad (3.46)$$

$\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_i}$ จะมี 2 สมการคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_1} = 8\ddot{x}_1 + 12\ddot{x}_1 - 8\ddot{x}_2 + 8\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 \quad (3.47)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_1} \right) = 8\ddot{x}_1^6 + 12\ddot{x}_1^5 - 8\ddot{x}_2^5 + 8\ddot{x}_1^4 - 4\ddot{x}_2^4 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_2} = 2\ddot{x}_2 - 4\ddot{x}_1 + 6\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 \quad (3.49)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\ddot{x}}_2} \right) = 2\ddot{x}_2^6 - 4\ddot{x}_1^5 + 6\ddot{x}_2^5 - 2\ddot{x}_1^4 + 4\ddot{x}_2^4 \quad (3.50)$$

พิจารณามวลก่อนที่ 1 นำค่าสมการ(3.40, 3.44 และ 3.48) แทนลงในสมการ (3.36) จะได้

$$-8\ddot{x}_1^6 + 10\ddot{x}_1^4 - 10\ddot{x}_1 - 4\ddot{x}_2^5 - 18\ddot{x}_2^4 + 8\ddot{x}_2 = 0 \quad (3.51)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 นำค่าสมการ(3.42, 3.46 และ 3.50) แทนลงในสมการ (3.36) จะได้

$$-4\ddot{x}_1^5 - 18\ddot{x}_1^4 + 8\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2^6 + 18\ddot{x}_2^4 - 10\ddot{x}_2 = 0 \quad (3.52)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 2 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = 0 & \dot{x}_2(0) = 0 \\ \ddot{x}_1(0) = 0 & \ddot{x}_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 0 & x_2(1) = 0 \\ \dot{x}_1(1) = 0 & \dot{x}_2(1) = 0 \\ \ddot{x}_1(1) = 0 & \ddot{x}_2(1) = 0 \end{array}$$

TPBVP Weighted Residual Methods

ค่าของผลเฉลยโดยประมาณคือ

$$X(t) = \Phi_0(t) + \sum_{i=1}^n L_i \Phi_i(t) \quad (3.53)$$

$$X_1 = \Phi_{10} + \sum_{i=1}^n L_{1i} \Phi_{1i} \quad (3.54)$$

$$X_2 = \Phi_{20} + \sum_{i=1}^n L_{2i} \Phi_{2i} \quad (3.55)$$

$$\text{โดยที่ } \Phi_{10} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (3.56)$$

ที่ เวลา $t_0 = 0$ และเวลา $t_f = 1$

$$x_1(0) = 2 \quad \text{จะได้ } \Phi_{10}(0) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (3.57)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.57)

$$\Phi_{10}(0) = a_0 \quad (3.58)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad \text{จะได้ } \dot{\Phi}_{10}(0) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \quad (3.59)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.59)

$$\dot{\Phi}_{10}(0) = a_1 \quad (3.60)$$

$$\ddot{x}_1(0) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \ddot{\Phi}_{10}(0) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (3.61)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.61)

$$\ddot{\Phi}_{10}(0) = 2a_2 \quad (3.62)$$

$$x_1(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \Phi_{10}(1) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (3.63)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.63)

$$\Phi_{10}(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad (3.64)$$

$$\dot{x}_1(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \dot{\Phi}_{10}(1) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (3.65)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.65)

$$\dot{\Phi}_{10}(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 \quad (3.66)$$

$$\ddot{x}_1(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \ddot{\Phi}_{10}(1) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (3.67)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.67)

$$\ddot{\Phi}_{10}(1) = 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 \quad (3.68)$$

มีตัวแปรไม่รู้ค่า 6 ตัวแปร มี 6 สมการสามารถแก้สมการหาค่าตัวแปรได้ด้วยวิธีแมทริก

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}$$

ผลของการแก้สมการคือ $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = -20, a_4 = 30, a_5 = -12$

นำผลที่ได้ไปแทนค่าในสมการ (3.56) ได้ค่า

$$\Phi_{10} = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 \quad (3.69)$$

$$\Phi_{20} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 \quad (3.70)$$

ที่ เวลา $t_0 = 0$ และเวลา $t_f = 1$

$$x_2(0) = 1 \quad \text{จะได้} \quad \Phi_{20} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 \quad (3.71)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.71)

$$\Phi_{20} = b_0 \quad (3.72)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \dot{\Phi}_{20} = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_4 t^3 + 5b_5 t^4 \quad (3.73)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.73)

$$\dot{\Phi}_{20} = b_1 \quad (3.74)$$

$$\ddot{x}_2(0) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \ddot{\Phi}_{20} = 2b_2 + 6b_3 t + 12b_4 t^2 + 20b_5 t^3 \quad (3.75)$$

แทนค่าเวลา $t=0$ ลงในสมการ (3.75)

$$\ddot{\Phi}_{20} = 2b_2 \quad (3.76)$$

$$x_2(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \Phi_{20} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 \quad (3.77)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.77)

$$\Phi_{20} = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 \quad (3.78)$$

$$\dot{x}_2(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \dot{\Phi}_{20} = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_4 t^3 + 5b_5 t^4 \quad (3.79)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.79)

$$\dot{\Phi}_{20} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 \quad (3.80)$$

$$\ddot{x}_2(1) = 0 \quad \text{จะได้} \quad \ddot{\Phi}_{20} = 2b_2 + 6b_3 t + 12b_4 t^2 + 20b_5 t^3 \quad (3.81)$$

แทนค่าเวลา $t=1$ ลงในสมการ (3.81)

$$\ddot{\Phi}_{20} = 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 + 20b_5 \quad (3.82)$$

มีตัวแปรไม่รู้ค่า 6 ตัวแปร มี 6 สมการสามารถแก้สมการหาค่าตัวแปรได้ด้วยวิธีแมทริท

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

ผลของการแก้สมการคือ $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = -10, b_4 = 15, b_5 = -6$

นำผลที่ได้ไปแทนค่าในสมการ (3.70) ได้ค่า

$$\Phi_{20} = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 \quad (3.83)$$

จากสมการ (3.53) ที่ mode 0 ค่า X_1, X_2 มีค่าเท่ากับ Φ_{10}, Φ_{20}

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 \\ x_2 &= 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 \\ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{10} \\ \Phi_{20} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n L_i \Phi_i \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\text{โดยเลือกค่า } \Phi_i = t^3(t - t_f)^{i+2} \quad (3.85)$$

Mode 1 $\rightarrow i = 1$

จากสมการ (3.84, 3.85) จะได้

$$x_1 = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \{L_{11} * (t^3(t-1)^3)\} \quad (3.86)$$

$$\dot{x}_1 = -60t^2 + 120t^3 - 60t^4 + \{L_{11} * (3t^2(t-1)^3 + 3t^3(t-1)^2)\} \quad (3.87)$$

$$\ddot{x}_1 = -120t + 360t^2 - 240t^3 + \{L_{11} * (6t(t-1)^3 + 18t^2(t-1)^2 + 6t^3(t-1))\} \quad (3.88)$$

$$\ddot{x}_1 = -120 + 720t - 720t^2 + \{L_{11} * (6(t-1)^3 + 54t(t-1)^2 + 54t^2(t-1) + 6t^3)\} \quad (3.89)$$

$$\ddot{x}_1^4 = 720 - 1440t + \{L_{11} * (72(t-1)^2 + 216t(t-1) + 72t^2)\} \quad (3.90)$$

$$\ddot{x}_1^5 = -1440 + \{L_{11} * (720t - 360)\} \quad (3.91)$$

$$\ddot{x}_1^6 = \{L_{11} * 720\} \quad (3.92)$$

$$x_2 = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + \{L_{21} * (t^3(t-1)^3)\} \quad (3.93)$$

$$\dot{x}_2 = -30t^2 + 60t^3 - 30t^4 + \{L_{21} * (3t^2(t-1)^3 + 3t^3(t-1)^2)\} \quad (3.94)$$

$$\ddot{x}_2 = -60t + 180t^2 - 120t^3 + \{L_{21} * (6t(t-1)^3 + 18t^2(t-1)^2 + 6t^3(t-1))\} \quad (3.95)$$

$$\ddot{\ddot{x}}_2 = -60 + 360t - 360t^2 + \{L_{21} * (6(t-1)^3 + 54t(t-1)^2 + 54t^2(t-1) + 6t^3)\} \quad (3.96)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{x}}}_2^4 = 360 - 720t + \{L_{21} * (72(t-1)^2 + 216t(t-1) + 72t^2)\} \quad (3.97)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}_2^5 = -720 + \{L_{21} * (720t - 360)\} \quad (3.98)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}}_2^6 = \{L_{21} * 720\} \quad (3.99)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.86-3.99) แทนค่าในสมการ (3.51)ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} 0 = & -5760L_{11} + 3600 - 720t + 720L_{11}(t-1)^2 + 2160L_{11}(t-1) + 720L_{11}t^2 - 2160t^2 \\ & + 1440t^3 - 60L_{11}t(t-1)^3 - 180L_{11}t^2(t-1)^2 - 60L_{11}t^3(t-1) - 1440L_{21}(t-1) - 1440L_{21}t \\ & - 1296L_{21}(t-1)^2 - 3888L_{21}t(t-1) - 1296L_{21}t^2 + 48L_{21}t(t-1)^3 + 144L_{21}t^2(t-1)^2 \\ & + 48L_{21}t^3(t-1) \end{aligned} \quad (3.100)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.100)คูณด้วย Φ_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^3$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \{(3.100) \times t^3(t-1)^3\} dt = 0 \quad (3.101)$$

ผลที่ได้คือ

$$\frac{459}{11}L_{11} - \frac{80}{77}L_{21} = \frac{144}{7} \quad (3.102)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.86-3.99) แทนค่าในสมการ (3.52)ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} 0 = & -720 - 1440L_{11}(t-1) - 1440L_{11}t + 12600t - 1296L_{11}(t-1)^2 - 3888L_{11}t(t-1) \\ & - 1296L_{11}t^2 + 1080t^2 - 720t^3 + 48L_{11}t(t-1)^3 + 144L_{11}t^2(t-1)^2 + 48L_{11}t^3(t-1) \\ & - 1440L_{21} + 1296L_{21}(t-1)^2 + 3888L_{21}t(t-1) + 1296L_{21}t^2 - 60L_{21}t(t-1)^3 \\ & - 180L_{21}t^2(t-1)^2 - 60L_{21}t^3(t-1) \end{aligned} \quad (3.103)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.103)คูณด้วย Φ_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^3$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \{(3.103) \times t^3(t-1)^3\} dt = 0 \quad (3.104)$$

ผลที่ได้คือ
$$-\frac{80}{77}L_{11} + \frac{623}{55}L_{21} = \frac{288}{7} \quad (3.105)$$

จะเห็นว่าสมการ(3.102 และ 3.105)มีตัวแปรอยู่ 2 ตัวคือ L_{11}, L_{21}

$$\begin{bmatrix} \frac{459}{77} & -\frac{80}{55} \\ \frac{11}{77} & \frac{623}{55} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{144}{7} \\ \frac{288}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{459}{77} & -\frac{80}{55} \\ \frac{11}{77} & \frac{623}{55} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{144}{7} \\ \frac{288}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix}$$

ได้ค่า $L_{11} = 0.5847$ และ $L_{21} = 3.6858$

นำค่าของ L_{11} และ L_{21} แทนลงในสมการ(3.84)

$$x_1(t) = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \{0.5847 * t^3(t-1)^3\} \quad (3.106)$$

$$x_2(t) = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + \{3.6858 * t^3(t-1)^3\} \quad (3.107)$$

Mode 2 $\rightarrow i = 2$

จากสมการ (3.84,3.85) จะได้

$$x_1 = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \{L_{11} * t^3(t-1)^3 + L_{12} * t^3(t-1)^4\} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -60t^2 + 120t^3 - 60t^4 + 3L_{11}t^2(t-1)^3 + 3L_{11}t^3(t-1)^2 + 3L_{12}t^2(t-1)^4 \\ & + 4L_{12}t^3(t-1)^3 \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & -120t + 360t^2 - 240t^3 + 6L_{11}t(t-1)^3 + 18L_{11}t^2(t-1)^2 + 6L_{11}t^3(t-1) \\ & + 6L_{12}t(t-1)^4 + 24L_{12}t^2(t-1)^3 + 12L_{12}t^3(t-1)^2 \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{x}}_1 = & -120 + 720t - 720t^2 + 6L_{11}(t-1)^3 + 54L_{11}t(t-1)^2 + 54L_{11}t^2(t-1) + 6L_{11}t^3 \\ & + 6L_{12}(t-1)^4 + 72L_{12}t(t-1)^3 + 108L_{12}t^2(t-1)^2 + 24L_{12}t^3(t-1) \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{\ddot{x}}}_1 = & 720 - 1440t + 72L_{11}(t-1)^2 + 216L_{11}t(t-1) + 72L_{11}t^2 + 96L_{12}(t-1)^3 \\ & + 432L_{12}t(t-1)^2 + 288L_{12}t^2(t-1) + 24L_{12}t^3 \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}_1 = -1440 + 360L_{11}(t-1) + 360L_{11}t + 720L_{12}(t-1)^2 + 1440L_{12}t(t-1) + 360L_{12}t^2 \quad (3.113)$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}}_1 = 720L_{11} + 2880L_{12}(t-1) + 2160L_{12}t \quad (3.114)$$

$$x_2 = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + L_{21}t^3(t-1)^3 + L_{22}t^3(t-1)^4 \quad (3.115)$$

$$\dot{x}_2 = -30t^2 + 60t^3 - 30t^4 + 3L_{21}t^2(t-1)^3 + 3L_{21}t^3(t-1)^2 + 3L_{22}t^2(t-1)^4 + 4L_{22}t^3(t-1)^3 \quad (3.116)$$

$$\ddot{x}_2 = -60t + 180t^2 - 120t^3 + 6L_{21}t(t-1)^3 + 18L_{21}t^2(t-1)^2 + 6L_{21}t^3(t-1) + 6L_{22}t(t-1)^4 + 24L_{22}t^2(t-1)^3 + 12L_{22}t^3(t-1)^2 \quad (3.117)$$

$$\ddot{x}_2 = -60 + 360t - 360t^2 + 6L_{21}(t-1)^3 + 54L_{21}t(t-1)^2 + 54L_{21}t^2(t-1) + 6L_{21}t^3 + 6L_{22}(t-1)^4 + 72L_{22}t(t-1)^3 + 108L_{22}t^2(t-1)^2 + 24L_{22}t^3(t-1) \quad (3.118)$$

$$\ddot{x}_2^4 = 360 - 720t + 72L_{21}(t-1)^2 + 216L_{21}t(t-1) + 72L_{21}t^2 + 96L_{22}(t-1)^3 + 432L_{22}t(t-1)^2 + 288L_{22}t^2(t-1) + 24L_{22}t^3 \quad (3.119)$$

$$\ddot{x}_2^5 = -720 + 360L_{21}(t-1) + 360L_{21}t + 720L_{22}(t-1)^2 + 1440L_{22}t(t-1) + 360L_{22}t^2 \quad (3.120)$$

$$\ddot{x}_2^6 = 720L_{21} + 2880L_{22}(t-1) + 2160L_{22}t \quad (3.121)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.108-3.121) แทนค่าในสมการ (3.51) ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} 0 = & 3600 - 120t - 1440L_{21}(t-1) - 432L_{22}t^3 + 48L_{21}t(t-1)^3 + 144L_{21}t^2(t-1)^2 \\ & + 48L_{21}t^3(t-1) + 48L_{22}t(t-1)^4 + 192L_{22}t^2(t-1)^3 + 96L_{22}t^3(t-1)^2 - 3888L_{21}t(t-1) \\ & - 7776L_{22}t(t-1)^2 - 5184L_{22}t^2(t-1) - 5760L_{22}t(t-1) - 1296L_{21}(t-1)^2 - 1296L_{21}t^2 \\ & - 1728L_{22}(t-1)^3 - 1440L_{21}t - 2880L_{22}(t-1)^2 - 1440L_{22}t^2 - 60L_{11}t(t-1)^3 \\ & - 180L_{11}t^2(t-1)^2 - 60L_{11}t^3(t-1) + 2160L_{11}t(t-1) - 240L_{12}t^2(t-1)^3 \\ & - 120L_{12}t^3(t-1)^2 - 5760L_{11} + 1440t^3 - 2160t^2 + 720L_{11}(t-1)^2 + 720L_{11}t^2 \\ & + 960L_{12}(t-1)^3 + 240L_{12}t^3 + 4320L_{12}t(t-1)^2 + 2880L_{12}t^2(t-1) - 23040L_{12}(t-1) \\ & - 17280L_{12}t - 60L_{12}t(t-1)^4 \end{aligned} \quad (3.122)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.122)คูณด้วย Φ_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^3$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \left\{ (3.122) \times t^3(t-1)^3 \right\} dt = 0 \quad (3.123)$$

ผลที่ได้คือ

$$\frac{459}{11}L_{11} - \frac{459}{22}L_{12} - \frac{80}{77}L_{21} - \frac{4}{77}L_{22} = \frac{144}{7} \quad (3.124)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.122)คูณด้วย Φ_2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^4$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \{(3.122) \times t^3(t-1)^4\} dt = 0 \quad (3.125)$$

ผลที่ได้คือ

$$-\frac{459}{22}L_{11} + \frac{18516}{1001}L_{12} + \frac{12}{11}L_{21} - \frac{1888}{5005}L_{22} = -\frac{818}{77} \quad (3.126)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.108-3.121) แทนค่าในสมการ (3.52)ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} 0 = & -720 + 12600t + 432L_{22}t^3 - 1440L_{21} - 60L_{21}t(t-1)^3 - 180L_{21}t^2(t-1)^2 \\ & - 60L_{21}t^3(t-1) - 60L_{22}t(t-1)^4 - 240L_{22}t^2(t-1)^3 - 120L_{22}t^3(t-1)^2 \\ & + 3888L_{21}t(t-1) + 7776L_{22}t(t-1)^2 + 5184L_{22}t^2(t-1) + 1296L_{21}(t-1)^2 \\ & + 1296L_{21}t^2 + 1728L_{22}(t-1)^3 - 5760L_{22}(t-1) - 4320L_{22}t - 2880L_{12}(t-1)^2 \\ & + 48L_{11}t(t-1)^3 + 144L_{11}t^2(t-1)^2 + 48L_{11}t^3(t-1) - 3888L_{11}t(t-1) \\ & + 192L_{12}t^2(t-1)^3 + 96L_{12}t^3(t-1)^2 - 720t^3 + 1080t^2 - 1296L_{11}(t-1)^2 - 1296L_{11}t^2 \\ & - 1440L_{11}(t-1) - 1440L_{11}t - 1728L_{12}(t-1)^3 - 432L_{12}t^3 - 7776L_{12}t(t-1)^2 \\ & - 5184L_{12}t^2(t-1) - 5760L_{12}t(t-1) - 1440L_{12}t^2 + 48L_{12}t(t-1)^4 \end{aligned} \quad (3.127)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.127)คูณด้วย Φ_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^3$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \{(3.127) \times t^3(t-1)^3\} dt = 0 \quad (3.128)$$

ผลที่ได้คือ

$$-\frac{80}{77}L_{11} - \frac{4}{77}L_{12} + \frac{623}{55}L_{21} - \frac{623}{110}L_{22} = \frac{288}{7} \quad (3.129)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ(3.127)คูณด้วย Φ_2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $t^3(t-1)^4$ แล้วอินทิเกรตจาก $t_0 - t_f$

$$\int_0^1 \{(3.127) \times t^3(t-1)^4\} dt = 0 \quad (3.130)$$

ผลที่ได้คือ

$$\frac{12}{11}L_{11} - \frac{1888}{5005}L_{12} - \frac{623}{110}L_{21} + \frac{2252}{455}L_{22} = -\frac{1384}{77} \quad (3.131)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ(3.124,3.126,3.129และ3.131)มีตัวแปรอยู่ 4 ตัวคือ $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$

$$\begin{bmatrix} \frac{459}{11} & -\frac{459}{18516} & -\frac{80}{12} & -\frac{4}{77} \\ \frac{22}{80} & \frac{1001}{4} & \frac{11}{623} & -\frac{5005}{623} \\ -\frac{77}{12} & -\frac{77}{1888} & \frac{55}{623} & -\frac{110}{2252} \\ 11 & -5005 & 110 & 455 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{144}{7} \\ -\frac{77}{818} \\ \frac{77}{288} \\ \frac{7}{1384} \\ -\frac{77}{77} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{459}{11} & -\frac{459}{18516} & -\frac{80}{12} & -\frac{4}{77} \\ \frac{22}{80} & \frac{1001}{4} & \frac{11}{623} & -\frac{5005}{623} \\ -\frac{77}{12} & -\frac{77}{1888} & \frac{55}{623} & -\frac{110}{2252} \\ 11 & -5005 & 110 & 455 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{144}{7} \\ -\frac{77}{818} \\ \frac{77}{288} \\ \frac{7}{1384} \\ -\frac{77}{77} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix}$$

ได้ค่า $L_{11} = 0.4554, L_{12} = -0.2868, L_{21} = 4.1972, L_{22} = 1.0491$

นำค่าของ $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ แทนลงในสมการ(3.84)

$$x_1(t) = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \left\{ 0.4554 * t^3(t-1)^3 - 0.2868 * t^3(t-1)^4 \right\} \quad (3.132)$$

$$x_2(t) = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + \left\{ 4.1972 * t^3(t-1)^3 + 1.0491 * t^3(t-1)^4 \right\} \quad (3.133)$$

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

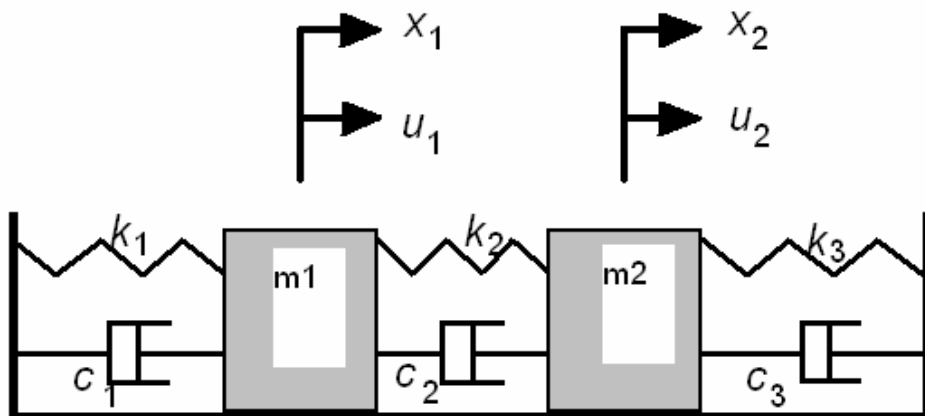
ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบในงานวิจัยนี้ได้ หาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect Jerk) โดยกำหนดให้ระบบการเคลื่อนที่มี 2 องศาอิสระ (Two degree-of-freedom) ของระบบ สปริงมวล และ ตัวหน่วง (Spring-mass-damper) ในรูปแบบของ Fully actuators โดยกำหนดสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูง (High order derivative) ของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear of dynamic systems) ดังที่จะนำมาสู่ผลการทดลองดังนี้

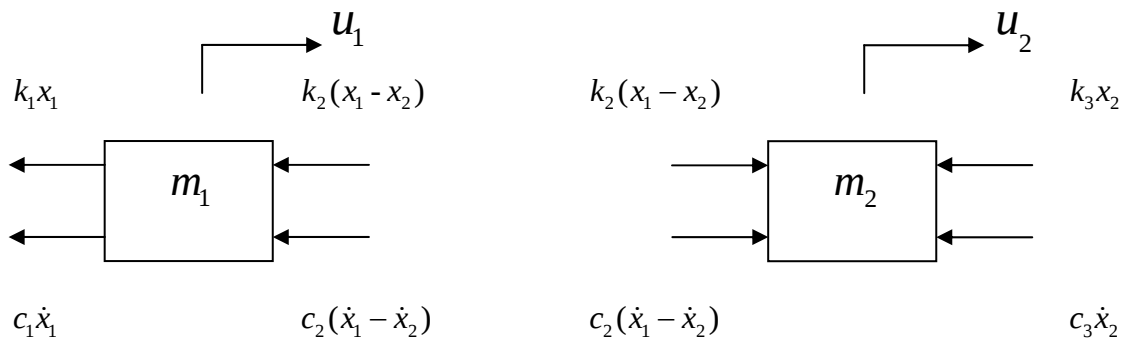
4.1.1 การทดสอบของการแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk problem)



ภาพประกอบ 3 Two degree of-freedom of spring mass and damper system

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of motion : EOM)

$$x_1 > x_2$$



จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's law)

$$\sum F = ma \quad (4.1)$$

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (4.2)$$

พิจารณาที่มวล m_1

$$\xrightarrow{+} \quad U_1 - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) = m_1\ddot{x}_1 \quad (4.3)$$

พิจารณาที่มวล m_2

$$\xrightarrow{+} \quad U_2 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3\dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 = m_2\ddot{x}_2 \quad (4.4)$$

จากสมการ(4.3)

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = U_1 \quad (4.5)$$

จากสมการ(4.4)

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = U_2 \quad (4.6)$$

กำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของเมตริก ดังนี้

$$c_1 = 1 \quad k_1 = 1 \quad m_1 = 2$$

$$\begin{array}{lll} c_2 = 2 & k_2 = 1 & m_2 = 1 \\ c_3 = 1 & k_3 = 1 & \end{array}$$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion : EOM) ของระบบ Two degree of-freedom of spring mass and damper system ดังนี้

$$2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 2x_1 - x_2 = U_1 \quad (4.7)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - x_1 + 2x_2 = U_2 \quad (4.8)$$

เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and fixed end points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

Boundary condition

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 2 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_1(0) = 0 & \dot{x}_2(0) = 0 \\ \ddot{x}_1(0) = 0 & \ddot{x}_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 0 & x_2(1) = 0 \\ \dot{x}_1(1) = 0 & \dot{x}_2(1) = 0 \\ \ddot{x}_1(1) = 0 & \ddot{x}_2(1) = 0 \end{array} \quad (4.9)$$

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป สมการดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 dt \quad (4.10)$$

เมื่อทำการหาคำตอบจากบทที่ 3 แล้วจะได้คำตอบดังนี้

ผลเฉลยของเส้นวิถี ณ โหมดฟังก์ชันที่ 0

$$x_1 = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5$$

$$x_2 = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5$$

ผลเฉลยของเส้นวิถี ณ โหมดฟังก์ชันที่ 1

$$x_1(t) = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \{0.5847 * t^3(t-1)^3\}$$

$$x_2(t) = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + \{3.6858 * t^3(t-1)^3\}$$

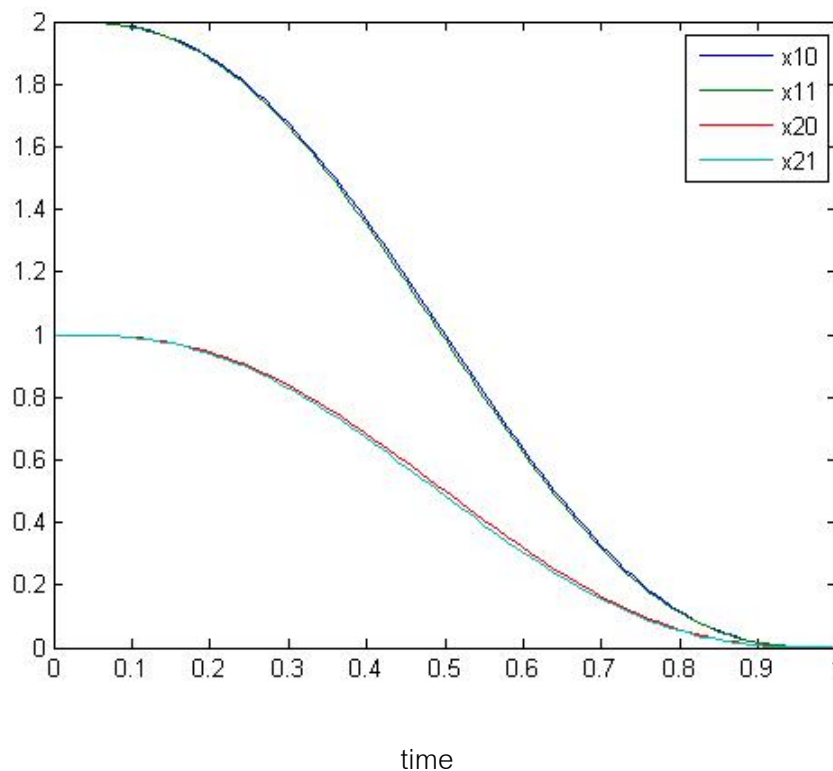
ผลเฉลยของเส้นวิถี ณ โหมดฟังก์ชันที่ 2

$$x_1(t) = 2 - 20t^3 + 30t^4 - 12t^5 + \{0.4554 * t^3(t-1)^3 - 0.2868 * t^3(t-1)^4\}$$

$$x_2(t) = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5 + \{4.1972 * t^3(t-1)^3 + 1.0491 * t^3(t-1)^4\}$$

4.1.2 ผลการทดสอบการเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความโน้มถ่วงที่สุดโดยวิธีทางอ้อม

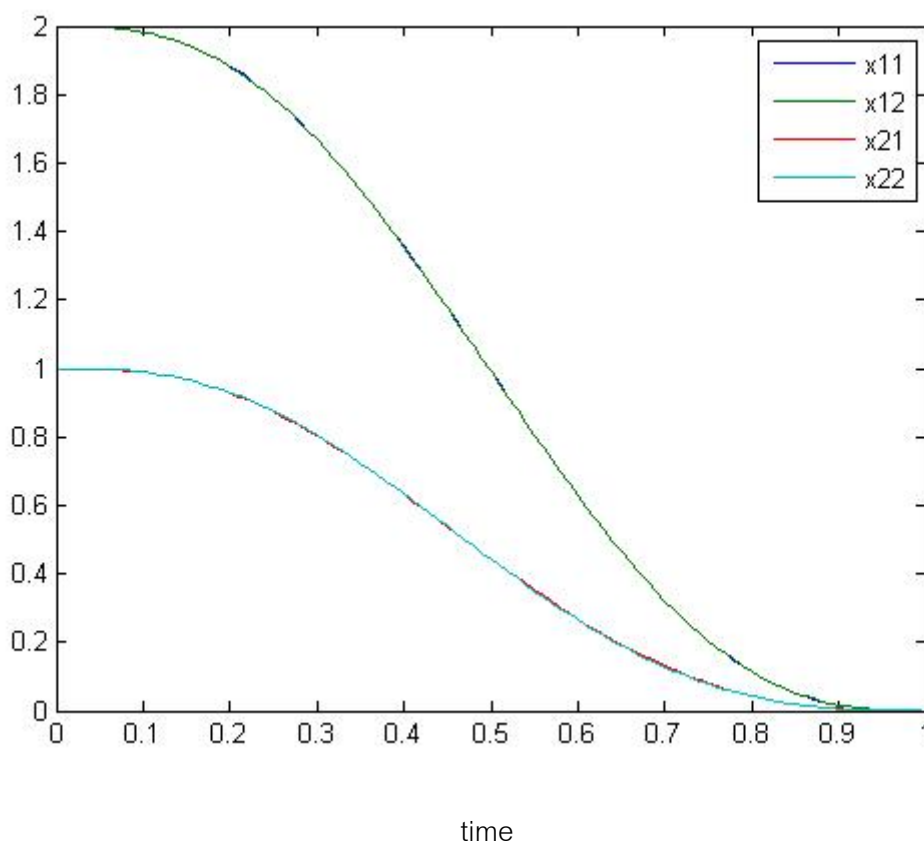
กราฟเปรียบเทียบ Minimum indirect jerk mode function 0 กับ 1



ภาพประกอบ 4 เปรียบเทียบ $x_1(t)$, $x_2(t)$ ที่ได้จากโหมดฟังก์ชัน 0 และโหมดฟังก์ชัน 1

จากภาพประกอบ 4 กำหนดเวลาเริ่มต้น = 0 และเวลาที่จุดสุดท้าย = 1 ระยะเวลาเริ่มต้นของ $x_1(t)$ เริ่มต้นที่ 2 และระยะเวลาที่จุดสุดท้าย = 0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum indirect jerk ของทั้งสองโหมดฟังก์ชันไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First state variables $x_1(t)$ ของเส้นวิถี Minimum indirect jerk เกือบจะซ้อนทับกันพอดี และ $x_2(t)$ เวลาเริ่มต้นที่ 0 และเวลาสุดท้ายที่ 1 ระยะเวลาเริ่มต้นของ $x_2(t)$ เริ่มต้นที่ 1 และระยะเวลาสุดท้ายสิ้นสุดที่ 0 ซึ่งผลจากการเขียนกราฟของผลเฉลยที่โหมดฟังก์ชัน 0 และโหมดฟังก์ชัน 1 มีวิถีทางเดินที่ต่างกันพอสมควรไม่ถึงกับซ้อนทับกันพอดี

กราฟเปรียบเทียบ Minimum indirect jerk mode function 1 กับ 2



ภาพประกอบ 5 เปรียบเทียบ $x_1(t)$, $x_2(t)$ ที่ได้จากโหมดฟังก์ชัน 1 และโหมดฟังก์ชัน 2

จากภาพประกอบ 5 กำหนดเวลาเริ่มต้น = 0 และเวลาที่จุดสุดท้าย = 1 ระยะเวลาเริ่มต้นของ $x_1(t)$ เริ่มต้นที่ 2 และระยะเวลาที่จุดสุดท้าย = 0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum indirect jerk ของทั้งสองโหมดฟังก์ชันไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First state variables $x_1(t)$ ของเส้นวิถี Minimum indirect jerk ซ้อนทับกันพอดี และ $x_2(t)$ เวลาเริ่มต้นที่ 0 และเวลา

สุดท้ายที่ 1 ระยะทางเริ่มต้นของ $x_2(t)$ เริ่มต้นที่ 1 และระยะทางสุดท้ายสิ้นสุดที่ 0 ซึ่งผลจากการเขียนกราฟของผลเฉลยที่โหมดฟังก์ชัน 1 และโหมดฟังก์ชัน 2 มีวิถีทางเดินทางเดียวกันพอสมควรซ้อนทับกันพอดี ทำให้ดูเหมือนเป็นเส้นทางเดินเดียวกัน

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากการพล็อตกราฟ $x_1(t)$, $x_2(t)$ เทียบกับเวลา โดยเปรียบเทียบวิธี Minimum indirect jerk ของแต่ละโหมดฟังก์ชัน จะเห็นได้ว่าวิถีของเส้นกราฟในระหว่างโหมดฟังก์ชันที่ศูนย์กับโหมดฟังก์ชันที่หนึ่งนั้นวิถีของเส้นกราฟยังไม่ซ้อนทับกันพอดีมีค่าความแตกต่างกัน แต่ที่โหมดฟังก์ชันที่หนึ่งกับโหมดฟังก์ชันที่สองจะเห็นได้ว่าวิถีเส้นกราฟของทั้งสองโหมดฟังก์ชันจะซ้อนทับกันมากขึ้นแทบจะดูเหมือนเป็นเส้นเดียวกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่า การหาค่าผลเฉลยด้วยวิธี Minimum indirect jerk นั้นสามารถหาคำตอบของผลเฉลยได้อย่างรวดเร็ว

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

ในงานวิจัยครั้งนี้ได้ทำการหาค่าความน้มนวลที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อม ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง ในการแก้ปัญหาได้นำระเบียบวิธีการทางตัวเลข ด้วยวิธี Weighted Residual Principle มาใช้แก้ปัญหาเพื่อหาค่าผลเฉลยของสมการ ปัญหาที่ได้นำมาวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้คือ ระบบของมวล สปริงและตัวหน่วงที่มีลำดับชั้น ความถี่ของการเคลื่อนที่เท่ากับ 2 มาวิเคราะห์ เพื่อหาค่าความน้มนวลที่สุดด้วยการพิจารณาโดยอ้อม

ผลจากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาค่าความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk) ได้ผลของการหาค่าความน้มนวลที่สุด ได้ผลอย่างรวดเร็ว เพราะในการเปรียบเทียบที่โหมดฟังก์ชันศูนย์กับโหมดฟังก์ชันหนึ่งเส้นวิถีทางเดินของผลเฉลยสมการก็มีผลต่างกันเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่เมื่อพิจารณาที่โหมดฟังก์ชันหนึ่งกับโหมดฟังก์ชันสองเส้นวิถีทางเดินของผลเฉลยสมการมีค่าผลที่แตกต่างกันน้อยมากหรือจะเรียกว่าซ้อนทับกันพอดี ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการใช้วิธีการทางตัวเลขด้วยวิธี Weighted Residual Principle สามารถนำมาแก้ปัญหาทางพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดได้และวิธีการทางตัวเลขด้วยวิธี Weighted Residual Principle นั้นเหมาะสำหรับการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสูง ในการแก้ปัญหาคำนวณของตัวแปร Control input ในระบบพลศาสตร์ ต้องเท่ากับจำนวนของตัวแปร State variables เพราะฉะนั้นตัวแปรซึ่งถูกใช้ใน ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Cost function) ของปัญหาความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม เมื่อพิจารณาระบบพลศาสตร์ที่เป็น Fully actuator หรือระบบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ (Robotic systems)

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากผลงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า การหาค่าความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum indirect jerk) สำหรับระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear dynamic systems) ได้อย่างแน่นอน โดยใช้ระยะเวลาในการหาค่าผลเฉลยของสมการได้อย่างรวดเร็ว และสามารถตัดส่วนที่เป็นลากหางน้มนวลติโพส์เออร์ออกได้ด้วย อย่างไรก็ตามในปัญหาของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamic systems) สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบผลในอนาคตและเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาขึ้นอีก ซึ่งคาดว่าผลการทดลองของ Minimum indirect jerk ที่แก้ปัญหาคำนวณด้วยระเบียบวิธีการทางตัวเลขด้วยวิธี Weighted Residual Principle มาใช้แก้ปัญหาได้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- มนัส สังวรศิลป์, และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- Tawirat Veeraklaew, *A New Approach on Direct/Indirect Linear Optimization Problem ;“Bang-Bang” Control : An Equivalent to the Maximum Energy with Free Final Time Problem.*
- Sunil K. Agrawal ,Veeraklaew, T., Fabien, B.C., 1998, “Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations,” *Optimal Control Applications and Methods*, (19): 393-410.
- Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien,(2001). New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems, *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic* 24 (2) :228 – 236.
- T. Veerakleaw, (พศัศิกายน. 2544).Optimization of Higher – Order System and Extentions of Minimum Principle, *เอกสารประชุมทางวิชาการ – เครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย* 15 (2) :MC131-MC140.
- Sunil K. Agrawal, T.Veerakleaw, *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constrian Using Higher – Order Method with Penalty Function*, WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics) Vol.1,2541
- M .V. Bain and M. A.(2002) Alcorta Garcia, *Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems*, *Applied Mathematics E - Notes*, (2):36-44.
- Shiler H. Chang and V. Wong, *The Practical Implimentation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators*, *Robotic & Computer - Integrate Manufacturing.*
- M.C. Renolds, P.H.Meckl, *Composite Optimization Scheme for time Optimal Control.*
- Yotsak Saisanit. (2005). *Maximum Velocity of a Five Degree of Freedom Racing Car* . Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew : Major. Dr. Settapong Malisuwan.

ภาคผนวก

ประมวลศัพท์

Algebraic equation	สมการทางพีชคณิต
Boundary condition	เงื่อนไขขอบเขต
Calculus of variation	แคลคูลัสความแปรปรวน
Constraints	เงื่อนไขบังคับ
Continuous derivatives	อนุพันธ์ต่อเนื่อง
Continuous time	เวลาต่อเนื่อง
Control input	คอนโทรลอินพุท
Control variable	คอนโทรลวารีเอเบิล
Cost functional	คอสฟังก์ชันนอล
Differential equation	แบ่งแยกกันของฟังก์ชัน
Direct method	วิธีตรง
Displacement	การเคลื่อนที่
Dynamics constraints	ขอบเขตทางพลศาสตร์
Dynamic equation	สมการทางพลศาสตร์
Dynamic optimization problem	ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์
Dynamic system	ระบบพลศาสตร์
Equality constraints	เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ
Extremize	ค่าตอบที่เหมาะสมที่สุด
Extremum	ค่าเหมาะสมสูงสุด
Final time	เวลาสุดท้าย
First order condition	เงื่อนไขอันดับหนึ่ง
First-order forms	รูปแบบของลำดับที่หนึ่ง
Functional	ฟังก์ชันนอล
Independent variable	ตัวแปรอิสระ
Indirect method	วิธีอ้อม
Inequality constraints	เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ
Initial condition	เงื่อนไขเริ่มต้น

Initial time	เวลาเริ่มต้น
Interval	ช่วงเวลา
Initial guess	ค่าเริ่มต้น
Jacobian	จาโคเบียน
Jacobian matrix	จาโคเบียนเมตริกซ์
Jerk	ความกระด้าง
Lagrange method	วิธีของลากรางจ์
Lagrange multipliers	ตัวคูณลากรางจ์
Linear dynamics	พลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น
Maximum trajectories	คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าสูงสุด
Minimum trajectories	คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าต่ำสุด
Minimum direct jerk	ความนิ่มนวลที่สุดทางตรง
Minimum indirect jerk	ความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อม
Minimum principle	หลักการการหาค่าที่ต่ำที่สุด
Mobile robot	หุ่นยนต์ชนิดที่เคลื่อนที่ได้
Necessary condition	เงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด
Nonlinear dynamics	พลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น
Nonlinear programming	โปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น
Nonlinear systems	ระบบไม่ใช่เชิงเส้น
Numerical method	วิธีเชิงตัวเลข
Objective	เป้าหมายที่ต้องการ
Objective function	ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ
Optimality conditions	สภาวะที่เหมาะสมที่สุด
Optimal control problem	ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม
Optimization	ออปติไมเซชัน
Optimum	ค่าที่เหมาะสมที่สุด
Optimum solution	คำตอบที่เหมาะสมที่สุด
Pick-and-Place	งานที่ต้องหยิบยกชิ้นงาน
Pontryagin's principle	หลักการของพอนทริยาгин
Second variation	ความแปรปรวนที่สอง

State equation	สมการแสดงสถานะ
Statement of problem	สเตทเมนต์ออฟพรอเบม
State variable	สเตทวารีเอเบิล
Sufficient condition	สภาวะที่เพียงพอ
Terminal condition	สภาวะที่ปลายทาง
Time derivative	อนุพันธ์ของเวลา
Time variant	ฟังก์ชันของเวลา
Upper bounded	ขอบเขตบน

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายอมรเทพ ไทวราภา
วันเดือนปีเกิด	20 มิถุนายน 2516
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	683/121 ถ.จรัญสนิทวงศ์ บางกอกน้อย กทม. 10700
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2531	มัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนทวีธาภิเศก กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2535	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ โรงเรียนเทคโนโลยีสยาม กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2539	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง โรงเรียนเทคโนโลยีสยาม กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2544	อุดมศึกษา อุดสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ. เครื่องกล) มหาวิทยาลัยสยาม
พ.ศ. 2551	บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ