

510-7

พ 524 ก

จ. 3

การศึกษาลักษณะวิธีการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
โดยการสอนด้วยบทเรียนสื่อประสม

ปริญญานิพนธ์

ของ

พัชราภา อินทรทัต

25 6.ค. 2529

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร

ปริญญามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2529

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

161476

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวของนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณา
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคามหลักสูตรปริญญา
การศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

คณะกรรมการสอบ

 
.....ประธาน

 
.....ประธาน

 
.....กรรมการ

 
.....กรรมการ

 
.....กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลือจากรองศาสตราจารย์ บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์ และอาจารย์ นิรมล แจ่มจำรัส ท่านอาจารย์ได้กรุณาสละเวลาอันมีค่า และให้ข้อคิดอันเป็นประโยชน์ทั้งในแง่วิชาการ และการปฏิบัติงาน ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจในการศึกษาค้นคว้า และเขียนปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ไว้ด้วยความเคารพอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวลีย์ พลกล้า และรองศาสตราจารย์ ดร.เป็รื่อง กุมุท ที่กรุณาให้คำปรึกษาและให้ยืมตำราเพื่อใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ขอขอบคุณหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ คณะครูอาจารย์และนักเรียน โรงเรียนมัธยมวัดธาตุทอง ที่ให้ความช่วยเหลือและร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล เป็นอย่างดี

ขอขอบคุณคุณปิยะชัย อินทรทัต คุณสุนทรี กิษฐสัทธณ คุณบุญธง กริชไกรวรรณ และคุณสุนันหา กริชไกรวรรณ ตลอดจนเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณ ปิตามารกา และครูอาจารย์ที่ได้อบรมสั่งสอนและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

พัชราภรณ์ อินทรทัต

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	3
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	3
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	4
	นิยามศัพท์เฉพาะ	5
2	เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
	เอกสารเกี่ยวกับสื่อการสอนคณิตศาสตร์	7
	เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนสื่อประสม	10
	เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้	26
	สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	29
3	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	30
	ประชากร	30
	กลุ่มตัวอย่าง	30
	เครื่องมือในการศึกษาค้นคว้า	30
	แบบแผนของการวิจัย	34
	วิธีดำเนินการทดลอง	34
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	35
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	38
	สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	38
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	39

บทที่	หน้า
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	46
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	46
สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	46
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	46
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า	48
อภิปรายผล	48
ข้อเสนอแนะ	51
บรรณานุกรม	53
ภาคผนวก	60
ภาคผนวก ก	61
ภาคผนวก ข	68
ภาคผนวก ค	79

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง	39
2	คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ หลังการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง	40
3	คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของกลุ่มตัวอย่าง	40
4	คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ หลังการทดลอง 3 สัปดาห์ของกลุ่มตัวอย่าง	41
5	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศักรวยของกลุ่มตัวอย่าง	42
6	ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วทีละคู่ ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศักรวย ของกลุ่มตัวอย่าง	43
7	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศักรวย หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ ของกลุ่มตัวอย่าง	44
8	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศักรวย หลังการทดลอง 3 สัปดาห์ ของกลุ่มตัวอย่าง	45
9	แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศักรวย	62

10	แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคศึกษาราย 63	63
11	คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 และคะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคศึกษารายของกลุ่มทดลองที่ 1 65	65
12	คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 และคะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคศึกษารายของกลุ่มทดลองที่ 2 66	66
13	คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 และคะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคศึกษารายของกลุ่มควบคุม 67	67

ภูมิหลัง

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันมีปัญหามากหลายประการ ปัญหาที่สำคัญคือนักเรียนสอบตกมีเป็นจำนวนมาก ในปีการศึกษา 2522 กรมวิชาการได้ทำการประเมินผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ตามที่ตั้งเกณฑ์ไว้ว่า นักเรียนควรทำข้อสอบได้ร้อยละ 60 ของจำนวนจุดประสงค์ทั้งหมดในแต่ละวิชานั้น พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่บรรลุวัตถุประสงค์ของหลักสูตร โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนที่สามารถทำข้อสอบได้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดมีเพียงร้อยละ 14.26 (กรมวิชาการ 2523 : 60-61) ส่วนปัญหาค้นหาการสอนของครูและปัญหาเกี่ยวกับตัวนักเรียนที่มองเห็นได้ชัดได้แก่ จำนวนนักเรียนในโรงเรียนมีมากเกินไปความสามารถของครูที่จะรู้จักนักเรียนได้อย่างถ่องแท้ครูส่วนใหญ่จึงมักสอนนักเรียนทั้งชั้นด้วยวิธีเดียวกัน โดยมีได้คำนึงถึงความสามารถของนักเรียนว่าใครเรียนเร็ว เรียนช้า (อารี สันทติ 2523 : 1) การสอนดังกล่าวจะเน้นการบรรยายโดยครูเป็นผู้บอก ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะ แม้ นักเรียนจะสามารถจำวิธีทำได้ แต่ขาดความเข้าใจในมโนคติ (Concept) และวิธีการให้เหตุผล อันเป็นการสอนที่ขัดแย้งกับเป้าหมายของการสอนคณิตศาสตร์ที่ว่า "เพื่อฝึกให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผล และสามารถใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระเบียบ ชัดเจนและรัดกุม" (พรหมทิพย์ ม้ามณี 2520 : 8) ซึ่งวิธีสอนแบบนี้ไม่สอดคล้องกับหลักจิตวิทยาและธรรมชาติการเรียนรู้ ทั้งยังเป็นการจำกัดความอยากรู้ อยากเห็น ความสนใจใคร่รู้ที่มีอยู่ในตัวผู้เรียนให้อยู่ในกรอบอันจำกัดอีกด้วย (ประสาธ อิศรปริศา 2521 : 10) และจากการวิจัยพบว่า ความแตกต่างระหว่างบุคคลทางด้านความสามารถ อัตราการเรียนรู้ วิธีการเรียนรู้ ความสนใจและสิ่งที่มีผลต่อการเรียนรู้ของเด็ก (อุไรวรรณ อินทรีย์ 2520 : 27)

วิธีหนึ่งที่จะช่วยให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพได้แก่ การนำ

เทคโนโลยีทางการศึกษามาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะเนื้อหาวิชา เพราะเทคโนโลยีทางการศึกษาเป็นการนำความรู้ทางวิทยาศาสตร์ แนวความคิด กระบวนการ เทคนิค ตลอดจนอุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ มาใช้ร่วมกัน เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางการศึกษา (อุทัย บุญประเสริฐ 2517 : 80) สื่อการสอนจัดเป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาอย่างหนึ่งที่มีผู้นำนามาใช้อย่างกว้างขวาง ซึ่งสื่อการสอนจะช่วยครูได้อย่างดีในการใช้รูปธรรมอธิบายนามธรรม (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 1) และยังช่วยเร้าความสนใจ ให้ประสบการณ์จริง ช่วยให้ความเข้าใจและสนใจให้นักเรียนสืบสวนค้นคว้ามากขึ้น (De Kieffer and Cockran. 1966 : 78-80) สื่อการสอนจะช่วยเร้าหรือยั่วให้ผู้เรียนสนใจที่จะเรียน และช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนเข้าใจได้ง่ายถูกต้องตามจุดหมาย เป็นการประหยัดเวลาของผู้สอน ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนจดจำได้นานอีกด้วย การใช้สื่อการสอนอย่างสม่ำเสมอจะสามารถเปลี่ยนทัศนคติหรือความคิดของนักเรียนได้ ..นอกจากนั้นสื่อการสอนยังสามารถช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจได้เร็วและมากขึ้น ส่วนผู้เรียนที่ฉลาดก็จะเรียนรู้ได้มากขึ้น (จารุวรรณ แสงทอง 2523 : 2) ดังนั้นสื่อการสอนจึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน

สื่อการสอนมีหลายชนิดซึ่งในการใช้สื่อต่าง ๆ นั้นถ้าทุกคนประสบกับการกระทำซ้ำ ๆ แบบเดิมบ่อย ๆ จะเกิดความเบื่อหน่าย ดังนั้นการสอนที่ใช้สื่อการสอนหลาย ๆ ชนิดย่อมเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนต้องการเรียนรู้อีกมากขึ้น (Elkins. 1970 : 20) เช่น การให้เด็กอ่านหนังสือ เด็กจะได้รับความรู้จากการเห็นเพียงอย่างเดียว เมื่อเด็กฟังใครคนหนึ่งพูดซึ่งอาจจะ เป็นแผ่นเสียง หรือเทปบันทึกเสียง เด็กจะได้รับเรื่องราวจากการฟังเท่านั้น แต่เมื่อใดที่มีการใช้สื่อหลายอย่างประสมกันในช่วงการเรียน การเรียนรู้ย่อมเกิดขึ้นได้ง่ายและรวดเร็ว (Dunn. 1972 : 99) และจากการวิจัยยังพบว่า สื่อเหล่านั้นต่างให้ผลในทางเสริมซึ่งกันและกัน การใช้สื่อหลายอย่างร่วมกันในการเรียนการสอนจะให้ผลดีกว่าการใช้สื่ออย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว (Knowlton. 1964 : 49) แต่การใช้สื่อในการเรียนการสอนนั้นเชื่อว่าทำให้เกิดผลดีเสมอไป เพราะสื่อแต่ละอย่างอาจจะไม่เหมาะสมกับสภาพของแต่ละโรงเรียน หรือไม่เหมาะสมกับเนื้อหาวิชาก็ได้

จากหลักการและแนวความคิดที่กล่าวมานี้ชี้ให้เห็นว่า การสอนที่จะทำให้นักเรียน

บรรลุผลสำเร็จตามความมุ่งหมายของการศึกษาที่มุ่งจะให้เด็กเรียนคิดเป็น ทำเป็น สรุป และแก้ปัญหาเป็นนั้น จะต้องใช้สื่อหลาย ๆ ชนิด ตลอดจนวิธีการและเทคนิคการสอนต่าง ๆ ร่วมกัน ผู้วิจัยจึงมีความคิดที่จะนำหลักการและวิธีการที่ดี ที่เหมาะสมของสื่อการสอนต่าง ๆ มาสร้างเป็นสื่อ เพื่อใช้สอนเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวย ซึ่งค่อนข้างจะทำความเข้าใจได้ยาก แต่เนื้อหาส่วนนี้ก็เป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูง ผู้วิจัยจึงสนใจสร้าง สื่อการสอนและจัดทำกิจกรรมเพื่อให้เด็กเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง โดยพยายามสร้างสื่อการสอนที่สอดคล้องกับเนื้อหาและสภาพ ความเป็นจริงของโรงเรียน ซึ่งผู้วิจัยเรียกว่า บทเรียนสื่อประสม (Multimedia Instruction) และต้องการศึกษาว่าสามารถนำบทเรียนนี้ไปใช้ประกอบการสอนคณิตศาสตร์ ได้อย่างมีประสิทธิภาพเพียงใด

✕ ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม และบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม กับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน
2. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม และบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม กับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

✓ ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. เป็นแนวทางในการนำสื่อการสอนมาปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และวิชาอื่น ๆ ให้เหมาะสมกับนักเรียน เพื่อลดปัญหาคุณภาพการเรียนการสอน
2. เป็นการเสนอแนะให้มีการนำบทเรียนโปรแกรม และบทเรียนปฏิบัติการ สื่อประสมไปใช้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ให้แพร่หลายยิ่งขึ้น เพื่อขจัดปัญหาค้นปริมาณของนักเรียน ตลอดจนสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล

3. เป็นแนวความคิดในการนำนวัตกรรม และเทคโนโลยีทางการศึกษามาปรับปรุงวิธีการเรียนการสอน และแก้ปัญหาทางการศึกษา

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยจำกัดเฉพาะนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมวัดธาตุทอง เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2528 จำนวน 120 คน (3 ห้องเรียน)

2. เนื้อหา เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้านี้ได้แก่ เรื่องภาคตัดกรวย จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของกระทรวงศึกษาธิการ ที่จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) แบ่งเนื้อหาเป็น 4 หัวข้อดังนี้

- 2.1 วงกลม
- 2.2 พาราโบลา
- 2.3 วงรี
- 2.4 ไฮเพอร์โบลา

3. เวลา การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2528 ใช้เวลาทดลองสอนกลุ่มละ 14 คาบ คาบละ 50 นาที

4. ตัวแปรที่ศึกษา

- 4.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การสอน ซึ่งแบ่งเป็น
 - 4.1.1 การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
 - 4.1.2 การสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม
 - 4.1.3 การสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน
- 4.2 ตัวแปรตาม ได้แก่
 - 4.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 4.2.2 ความคงทนในการเรียนรู้

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. บทเรียนโปรแกรม หมายถึง บทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรงเรื่องภาคตัดกรวย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีทั้งหมด 4 ชุด ตามลำดับเนื้อหา เป็นบทเรียนที่ผู้เรียนต้องศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เป็นรายบุคคล โดยผู้เรียนต้องปฏิบัติตามคำสั่งที่แจ่มชัดที่บอกไว้ในบทเรียนอย่างเคร่งครัด

2. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสื่อประสม หมายถึง กระบวนการเรียน การสอนที่นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองเป็นรายบุคคล จากบทเรียนโปรแกรม 4 ชุด ตามลำดับเนื้อหาย่อย 4 ตอน โดยที่นักเรียนแต่ละคนสามารถศึกษาบทเรียนโปรแกรม จบเร็วหรือช้าตามความสามารถของตน การตรวจคำตอบหรือข้อสรุปให้นักเรียนตรวจเอง จากเฉลยที่มีไว้ให้ในกรอบของบทเรียน เมื่อนักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมจบตอนหนึ่ง ๆ ให้ศึกษาเพิ่มเติมจากปฏิกาน บักรปัญหาและแผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง แล้วทำแบบ ทดสอบย่อย และแจกเฉลยให้นักเรียนตรวจเองก่อนให้นักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรม ตอนต่อไป

3. บทเรียนปฏิบัติการ หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้นักเรียนได้ศึกษา ความวิธีการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งเริ่มจากนักเรียนทำตามข้อปฏิบัติในการทดลอง ใ้ทำการ ทดลองและบันทึกข้อมูล แล้วสรุปหาข้อความจริง หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ จากข้อมูลที่ได้มา

4. การสอนโดยใช้บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม หมายถึง กระบวนการเรียน การสอนที่จัดให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย หรือเป็นรายบุคคล โดยครู แจกแผนภูมิแสดงลำดับขั้นตอนกิจกรรมการเรียนของเนื้อหาแต่ละตอนไว้ในคู่มือ แต่ละกิจกรรม ปฏิบัติการครูแจกใบคำสั่งขั้นตอนกิจกรรมให้นักเรียนปฏิบัติตาม หลังจากนักเรียนได้ข้อสรุป จากการปฏิบัติกิจกรรมให้นักเรียนเสนอข้อมูล ผลการทดลองที่ได้ และร่วมอภิปรายข้อสรุป ที่ได้ โดยมีครูเป็นผู้นำการอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง หลังจากนักเรียนศึกษาจบ แต่ละเนื้อหา ให้ศึกษาเพิ่มเติมจากปฏิกาน บักรปัญหา และแผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง แล้วให้ทำแบบทดสอบย่อย และครูเฉลยคำตอบแบบทดสอบย่อยก่อนให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา ตอนต่อไป

5. ปฏิกาน หมายถึง โจทย์ที่ใช้ฝึกทักษะ การคิดคำนวณ เป็นการนำความรู้ จากกฎเกณฑ์และจากทฤษฎีต่าง ๆ ไปใช้หลังจากเรียนเนื้อหานั้น ๆ แล้ว

6. ปฏิกิริยา หมายถึง โจทย์ที่ใช้ฝึกทักษะการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นปัญหาที่ไม่มีอยู่ในแบบเรียนของนักเรียน ครูค้นคว้ามาจากตำราอื่น หรือคิดขึ้นเอง ให้นักเรียนได้ฝึกคิดแก้ปัญหาจากปฏิกิริยาด้วยตนเอง แล้วตรวจคำตอบได้จากเฉลยที่มีไว้ให้

7. การสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน หมายถึง กระบวนการเรียนการสอนที่จัดทำแผนการสอนรายคาบของโรงเรียนมัธยมศึกษาส่วนกลางกลุ่ม 4 (เขตพระโขนง) ซึ่งประกอบด้วยจุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา อุปกรณ์การเรียนการสอน และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมและบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม แต่ใช้วิธีสอนแบบบรรยาย และการถาม-ตอบ มีอุปกรณ์ประกอบ ได้แก่ กรวยกลมตรง เครื่องมือเขียนรูปวงรีและแผนภูมิสรุปสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย แล้วทำแบบฝึกหัดในแบบเรียน

เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยมุ่งที่จะเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความ
คงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ระหว่างการสอนด้วยบทเรียนสื่อประสม กับการสอนตาม
แผนการสอนรายคาบของโรงเรียนมัธยมศึกษาส่วนกลางกลุ่ม 4 ผู้วิจัยได้แยกเอกสารและ
ผลงานที่เกี่ยวข้องไว้เป็นตอน ๆ เพื่อสะดวกในการศึกษาพิจารณาทำความเข้าใจ ดังนี้

1. เอกสารเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์
 - 1.1 ความหมายของสื่อการสอนและประเภทของสื่อการสอนคณิตศาสตร์
 - 1.2 การเลือกและการใช้สื่อการสอน
2. เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนสื่อประสม
 - 2.1 ความหมายของสื่อประสม
 - 2.2 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรม
 - 2.3 เอกสารและผลงานที่เกี่ยวกับแผ่นโปร่งใส
 - 2.4 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนปฏิบัติการ
 - 2.5 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับการใช้สื่อประสม
3. เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้
 - 3.1 ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้
 - 3.2 ระบบความจำของคน
 - 3.3 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

1. เอกสารเกี่ยวกับสื่อการสอนคณิตศาสตร์

- 1.1 ความหมายของสื่อการสอนและประเภทของสื่อการสอนคณิตศาสตร์
คาร์เตอร์ วี ูก (Carter V. Good 1973 : 370) กล่าวว่าสื่อการสอน

คือ วิธีการและวัสดุอื่นใดที่แสดงให้เห็นเนื้อหาสาระอย่างสมบูรณ์แบบโดยตัวของมันเอง และเป็นผู้ส่งเสริมอย่างกว้างขวางมากกว่าจะเป็นส่วนประกอบของกระบวนการเรียนการสอน

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (ชัยยงค์ พรหมวงศ์ 2519 : 8) กล่าวว่า สื่อการสอนคือ วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรมการสอนที่ครูต้องใช้ เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ โดยกำหนดละเอียดลงไปว่าควรใช้สื่อการสอนประเภทใด เพื่อช่วยครูให้สามารถเตรียมและใช้สื่อการสอนต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง อย่างไรก็ตามครูย่อมมีสิทธิ์จะดัดแปลงเพิ่มเติมสื่อการสอนต่าง ๆ ได้ตามความเหมาะสม แต่สื่อการสอนจะต้องสัมพันธ์กับกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างใกล้ชิด

จากความหมายของสื่อการสอนดังกล่าว สรุปได้ว่า สื่อการสอนหมายถึง อุปกรณ์ เครื่องมือ หรือกิจกรรมใด ๆ ที่นำมาใช้ในการเรียนการสอน แล้วทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพ เพื่อให้ครูคณิตศาสตร์เลือกใช้สื่อการเรียนการสอนได้ตามความเหมาะสมแก่สภาพท้องถิ่น สภาพโรงเรียน และเป็นไปด้วยความประหยัด จึงขอลำดับประเภทของสื่อการสอนคณิตศาสตร์ตามที่ ยุพิน พิพิธกุล (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 248) ได้แบ่งไว้ดังนี้

1. วัสดุแยกออกได้ดังนี้

1.1 วัสดุประกอบการสอนประเภทสิ่งพิมพ์ ได้แก่ แบบเรียน โครงการสอน เอกสารประกอบการสอน วารสาร จดสาร บทเรียนโปรแกรม หรือเอกสารแนะแนวทาง เป็นต้น

1.2 วัสดุประติมากรรม เป็นสิ่งที่ครูทำขึ้นเอง อาจจะใช้กระดาษ ไม้ พลาสติก และสิ่งอื่น ๆ ซึ่งครูประติมากรรมขึ้นใช้ประกอบการสอน เช่น ใช้กระดาษทำรูปทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต เป็นต้นว่า รูปกรวยกลม ปริซึม พีระมิด ชุดการสอน ภาพเขียน แผ่นภาพโป่งใส ภาพถ่าย แผนภูมิ บัตรคำ กระเป๋านั่ง แผ่นภาพพลิก และกระดานตะปู เป็นต้น

1.3 วัสดุถาวร ได้แก่ กระดานคำ กระดานนิเทศ กระดานกราฟ ของจริง ของจำลอง ของตัวอย่าง เทปบันทึกภาพ เทปเสียง โปสเตอร์ แผนที่ แผ่นเสียง และฟิล์มสตริป เป็นต้น

2. อุปกรณ์ สื่อการเรียนการสอนประเภทอุปกรณ์ที่ใช้กันมาก ก็คือ เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะซึ่งใช้กับแผ่นภาพโปร่งใส เครื่องฉายภาพสไลด์และฟิล์มสตริป เครื่องบันทึกเสียง เครื่องเล่นจานเสียงและจอฉายภาพ

3. กิจกรรม การจัดกิจกรรมต่าง ๆ ถือเป็นสื่อการเรียนการสอน เช่นเดียวกัน เช่น การทดลอง การจัดนิทรรศการ การเล่นเกม การเล่าเรื่อง การศึกษานอกสถานที่ การสาธิต การทำโครงการ การร้องเพลง คำประพันธ์ ประเภทร้อยกรอง (กลอน กาพย์ โคลง ฯลฯ) หรือ เกมปริศนา เหล่านี้เป็นต้น

4. สิ่งแวดล้อม นับเป็นสื่อการเรียนการสอนที่หาได้ง่าย เช่น เครื่องใช้ ในชีวิตประจำวัน ครูควรพยายามแสวงหาสิ่งที่อยู่รอบ ๆ ตัวมาใช้ เพื่อเป็นการประหยัด สื่อการเรียนการสอนนั้น ไม่จำเป็นที่จะต้องมียาคาแพง แม้แต่ตัวคนหรือตัวนักเรียนเอง ก็ถือว่าเป็นสื่อการเรียนการสอน นอกจากนั้นพวกประเภทของจริงก็ใช้ได้ เช่น ใช้น้ำมาแบ่งเพื่อสอนเรื่องเศษส่วน เป็นต้น

1.2 การเลือกและการใช้สื่อการสอน

แบทเชเดอร์ (Batcheder. 1956 : 23) ได้กล่าวว่า สื่อการสอนไม่มีความสมบูรณ์ในตัวของมันเอง และเฉพาะตัวของสื่อการสอนก็ไม่สามารถกระทำให้เกิดภาวะทางการศึกษาสำเร็จลุล่วงไปได้ แต่ถ้าสื่อการสอนเหล่านี้ได้รับการเลือกสรรอย่างฉลาด มีการประเมินค่าอย่างเหมาะสม และใช้อย่างมีประสิทธิภาพ ก็สามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างมาก ทักษะและความสามารถในการใช้สื่อการสอนจึงเป็นสิ่งสำคัญ

คาร์เพนเตอร์ (Carpenter. 1957 : 368) ได้กล่าวถึง การสอนและการใช้สื่อว่า เนื่องจากแต่ละคนมีความแตกต่างกัน การพยายามให้เขามรรลุถึงจุดหมายทางการศึกษานั้น ควรใช้วิธีการสอนหลาย ๆ วิธีช่วยสื่อการสอนหลาย ๆ ชนิด และระยะเวลาต่าง ๆ กัน ตามพัฒนาการของแต่ละบุคคล

เคอเคิฟเฟอร์ และ ค็อกกราน (De Keiffer and Cockran. 1966 : 70-80) ได้กล่าวว่า การใช้สื่อการสอนที่ถูกต้องและเหมาะสมจะเป็นเครื่องช่วยให้การเรียนการสอนบรรลุถึงจุดหมายได้ การส่งเสริมปรับปรุงการใช้สื่อการสอนให้มีประสิทธิภาพ ย่อมถือว่าเป็นส่วนหนึ่งที่จะส่งเสริมคุณภาพของการศึกษาให้ดีขึ้น

จากการศึกษาค้นคว้า การเลือก และการใช้สื่อการสอนข้างต้น พอสรุปได้ว่า การใช้สื่อหลาย ๆ ชนิดร่วมกัน น่าจะให้ได้ผลดีกว่าการใช้สื่อเพียงอย่างเดียวหนึ่งเพราะ

1. การเปลี่ยนสื่อการสอนจะเป็นสิ่งกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นสนใจในการเรียนโดยไม่เบื่อหน่าย
2. สิ่งที่ใช้ในการสอนย่อมเป็นสิ่งเร้า และการใช้สิ่งเร้าหลายอย่างเป็นการให้โอกาสนักเรียนเลือกสิ่งเร้าที่เหมาะสมกับประสบการณ์เดิมและจุดมุ่งหมายที่มีต่อเขาได้

2. เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนสื่อประสม

2.1 ความหมายของสื่อประสม

คาร์เตอร์ วี ูก (Carter V. Good. 1973 : 377) กล่าวว่า การสอนโดยใช้สื่อประสมคือ การเลือกใช้วัสดุอุปกรณ์หลาย ๆ อย่างให้เหมาะสมเพื่อนำมาสัมพันธ์กับการเรียนการสอน โดยใช้สื่อการเรียนการสอนมากกว่าหนึ่งอย่างเพื่อสอนหนึ่งเนื้อหา หรือสอนในเวลาหนึ่งคาบ

ไชยยศ เรืองสุวรรณ (ไชยยศ เรืองสุวรรณ 2521 : 220) กล่าวว่า การสอนโดยใช้สื่อประสม หมายถึง ระบบการนำวัสดุอุปกรณ์และวิธีการหลายประเภทมาใช้ปรับปรุงการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

จากความหมายดังกล่าวอาจสรุปได้ว่า ระบบการเรียนการสอนโดยใช้สื่อประสมหมายถึง การเลือกใช้สื่อการเรียนการสอนต่าง ๆ ที่จะทำให้เกิดประสบการณ์ในการเรียนรู้ และสื่อทั้งหลายจะเป็นเครื่องเสริมซึ่งกันและกัน เมื่อเลือกกลวิธีการสอนโดยใช้สื่อประสมด้วยความถูกต้องและระมัดระวังก็จะทำให้ผู้เรียนบรรลุวัตถุประสงค์ตามที่ต้องการได้ เนื่องจากการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมและบทเรียนปฏิบัติการมีความสอดคล้องกับแนวโน้มของการจัดการเรียนการสอนที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและกิจกรรมการเรียนการสอนเน้นที่ตัวผู้เรียนเป็นสำคัญ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้วิธีการสอนดังกล่าวร่วมกับสื่อการสอนอื่น ๆ

2.2 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมเป็นสื่อการเรียนการสอนแบบหนึ่งซึ่งผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง โดยบทเรียนจะแบ่งเป็นส่วนย่อย ๆ สั้น ๆ เรียกว่า กรอบ (Frame) แต่ละกรอบเหล่านั้นเป็นวิธีชักนำให้ผู้เรียน เรียนรู้แก่นสารของบทเรียนนั้น (สุภา ฤชงคกุล 2517 : 162)

การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นเทคนิคใหม่ทางการศึกษาที่พยายามนำเอาผลการทดลองที่ค้นพบในห้องปฏิบัติการจิตวิทยามาใช้ในห้องเรียน โดยยึดหลักการเร้าและการตอบสนอง บทเรียนโปรแกรมใช้การเร้าโดยการให้ความรู้และมีการตอบสนองโดยให้ผู้เรียนลงมือทำ นอกจากนั้นบทเรียนโปรแกรมายังยึดหลักการเสริมแรงเพื่อให้ผู้เรียนเกิดกำลังใจที่จะเรียนต่อโดยการเฉลยคำตอบให้ทราบว่าถูกหรือผิดโดยทันที (ไพโรจน์ เบาลี 2520 : 2)

เปเรื่อง กุมท (เปเรื่อง กุมท 2520 : 49-62) ได้กล่าวถึงเทคนิคการสร้างบทเรียนโปรแกรมไว้ดังนี้คือ เทคนิคแบบนักเรียนตอบด้วยตนเอง (The Constructed Response Frame Sequence) บทเรียนที่สร้างขึ้นโดยใช้เทคนิคนี้มีลักษณะเป็นรูปประโยคไม่เต็มความ นักเรียนต้องเขียนคำตอบด้วยตนเองโดยนำความรู้จากกรอบคัน ๆ มาตอบ การตอบอาจจะตอบเป็นคำหรือข้อความหรืออาจจะวาดรูปภาพหรือโคอะแกรม หรือให้กระทำอย่างใดอย่างหนึ่งซึ่งมองเห็นได้โดยความรู้ความสามารถที่ได้มาจากบทเรียน และบทเรียนนี้ประกอบด้วยกรอบต่าง ๆ คือ

1. กรอบตั้งคัน (Set Frame) คือ กรอบใด ๆ ก็ตามที่มีอยู่ก่อนหนึ่งให้นักเรียนสร้างการตอบสนองลงไป ผลตอบสนองจะเป็นอะไรนั้นนักเรียนสามารถทำได้จากข้อมูลในกรอบเดียวกัน โดยนักเรียนไม่มีความจำเป็นจะต้องมีความรู้สำหรับใช้ตอบมาก่อน

2. กรอบฝึกหัด (Practice Frame) เป็นกรอบที่นักเรียนได้ใช้ฝึกหัดเกี่ยวกับสิ่งที่เขาได้เรียนมาแล้วจากกรอบตั้งคัน หลักการสำคัญสำหรับกรอบนี้ก็คือ จะต้องให้นักเรียนได้ฝึกหัดเฉพาะสิ่งที่เขาได้เรียนจากกรอบตั้งคันเท่านั้น อย่างน่ามนมคือน ๆ มาให้นักเรียนฝึกหัดเป็นอันขาด

3. กรอบส่งท้าย (Terminal Frame) กรอบนี้นักเรียนจะต้องรวบรวม

ความรู้ที่ได้มาจากกรอบต้น ๆ แล้วเขียนตอบสนองออกมาเอง นักเรียนจะพบว่ามีการชี้ช่อง (Prompt) ไว้บ้างหรือไม่เลย

4. กรอบรองกรอบส่งท้าย (Sub Terminal Frame) คือ กรอบทั้งหลายที่จะพาไปสู่กรอบส่งท้าย เป็นกรอบที่ให้ความรู้ที่จำเป็นแก่นักเรียน เพื่อว่านักเรียนจะสนองตอบในกรอบส่งท้ายได้ถูกต้อง กรอบรองกรอบส่งท้ายแรกควรมีความรู้บางส่วนที่จะนำไปใช้ในกรอบส่งท้าย กรอบรองส่งท้ายที่อยู่ถัดไปจะสะสมความรู้เพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผู้เรียนบรรลุถึงความสามารถที่จะตอบสนองในกรอบส่งท้ายได้อย่างถูกต้อง

กรอบทั้งสี่นี้จะต้องศึกษาค้นคว้าเฉลยทุกครั้ง เทคนิคนี้จะมีการแนะแนวทางให้ผู้เรียนตอบสนองโดยใช้เครื่องชี้ทาง (Cues) หรือให้วิธีการปูพื้น วิธีการนี้จะใช้ได้กับกรอบทั้งต้นและกรอบฝึกหัดเท่านั้น เพื่อให้นักเรียนมองเห็นลู่ทางในการสร้างคำตอบซึ่งในกรอบส่งท้ายจะไม่มีการชี้ช่องทางให้ผู้ตอบเลย เทคนิคนี้มีข้อควรคำนึงและข้อควรหลีกเลี่ยงคือ

1. ช่องว่างสำหรับผู้เรียนตอบสนองควรรออยู่ท้ายข้อความภายในกรอบ
2. ควรหลีกเลี่ยงการปูพื้นคำคิด ๆ กัน คือการใช้คำ ๆ เดียวกันเป็นคำตอบสนองโดยติดต่อกัน
3. กรอบหนึ่ง ๆ ควรมีความคึกคักเดียว
4. การตอบสนองควรใช้สิ่งที่สอดคล้องกับเรื่องราวที่เรียน
5. การใช้ภาพประกอบควรใช้ประกอบในฐานะเป็นตัวปูพื้น หรือสิ่งเร้าให้นักเรียนคิด

ไฟโรจน์ เบาใจ (ไฟโรจน์ เบาใจ 2520 : 7-25) ได้กล่าวถึงรูปแบบและวิธีการเขียนบทเรียนโปรแกรมไว้ว่า บทเรียนโปรแกรมมี 2 ประเภท คือ

1. บทเรียนโปรแกรมแบบเส้นตรง (Linear Programme) บทเรียนนี้ผู้เรียนจะต้องเรียนตามลำดับจากกรอบ (Frame) ที่ 1 เรื่อยไปจนกระทั่งจบกรอบสุดท้าย ไม่มีการข้ามกรอบใด ๆ ทั้งสิ้น เนื้อหาจะต้องเรียงจากง่ายไปสู่ยาก และมีความต่อเนื่องกันโดยละเอียดตามลำดับ

2. บทเรียนแบบแตกสาขา (Branching Programme) เป็นบทเรียนอีกประเภทหนึ่งที่ผู้เรียนทุกคนไม่จำเป็นต้องเรียนทุกกรอบ คนเรียนเก่งก็อาจจะจบก่อน

คนเรียนอ่อน เพราะอาจข้ามไปโดยไม่ต้องเรียนบางกรอบ ส่วนคนเรียนอ่อนอาจจบช้า เพราะบางครั้งเมื่อเรียนกรอบใดไม่เข้าใจก็จำเป็นต้องแตกสาขาไปเรียนกรอบอื่น ๆ ที่บทเรียนกำหนดไว้ไปอีก การแตกสาขามบางครั้งอาจจะบอกให้ผู้เรียนแตกสาขาออกไปเรียนจากสื่ออื่น ๆ เช่น จากรูปภาพ แผนภูมิ ดูจากสไลด์ ฟังจากเทปเสียง เป็นต้น โดยบทเรียนจะต้องกำหนดไว้อย่างชัดเจนว่าให้แตกไปที่ไหน เมื่อเสร็จแล้วจะให้กลับมาเริ่มเรียนกรอบใดต่อไป ก็ย่อมจะทำให้ได้ตามความเหมาะสมของเนื้อหา

ประโยชน์ของบทเรียนโปรแกรม

คาลวิน (Calvin. 1969 : 211) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการเรียนการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมพอสรุปได้ดังนี้

1. ในด้านหลักสูตร สามารถขยายหลักสูตรได้กว้างขวาง สามารถเปิดวิชาให้เลือกได้มากวิชา
2. ในด้านผู้บริหารการศึกษา ช่วยแก้ปัญหาการศึกษาคนคลนครู้ นักเรียนไม่มีที่เรียน โรงเรียนที่มีนักเรียนน้อยจนไม่อาจจัดครูมาสอนได้
3. ในด้านตัวครู ครูมีเวลาพอที่จะให้คำปรึกษาแก่เด็กเป็นรายบุคคลได้ สามารถช่วยเหลือเด็กที่เรียนช้า ในขณะที่เดียวกันก็สามารถส่งเสริมเด็กที่เรียนเก่งได้ด้วยและยังมีเวลาเตรียมงานสอนและปรับปรุงการสอนมากขึ้น
4. ในด้านตัวผู้เรียน ผู้เรียนต้องสนใจและเอาใจใส่ในการเรียนมากขึ้นและสามารถเรียนได้อย่างต่อเนื่อง โดยไม่ต้องหยุดพักการเรียนในกรณีที่ไม่มีความรู้ในเวลาที่ปกติ ยังประหยัดเวลาในการเรียนรู้เนื้อหาในบทเรียนแก่ผู้เรียน อีกทั้งบทเรียนโปรแกรมเหมือนกับครูพิเศษ (Tutor) ของผู้เรียน

ขอบเขตของการใช้บทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมมีประโยชน์มากก็จริง แต่ในบางกรณีก็ไม่สามารถจะให้ผลได้ดีเท่าที่ควร (Pereira 1971 : 4) ดังนั้นการใช้บทเรียนโปรแกรมควรมีสลักษณะดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมเหมาะกับเนื้อหาที่เป็นรูปเรื่องของความจริง เช่น ในวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาเทคนิคต่าง ๆ มากกว่าเนื้อหาที่ต้องการแสดงความคิดเห็น
2. บทเรียนโปรแกรมเหมาะกับผู้ที่เข้าใจภาษาที่ใช้ในโปรแกรม

3. บทเรียนโปรแกรมเหมาะสำหรับเนื้อหาที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิชาต่าง ๆ มากกว่าเนื้อหาที่ลึกซึ้ง

จากหลักการและแนวทางในการสร้างบทเรียนโปรแกรมดังกล่าว ผู้วิจัยเชื่อว่า วิชาคณิตศาสตร์สามารถที่จะนำมาสร้างบทเรียนโปรแกรมได้ และหากได้นำนวัตกรรมและสื่อการเรียนอื่น ๆ มาประกอบในการเรียนการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมด้วยแล้วก็จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งกาญจนา เกียรติประวัติ (กาญจนา เกียรติประวัติ มปป. : 60) กล่าวว่า การให้นักเรียนเรียนบทเรียนโปรแกรมตามลำพังตลอดเวลาอาจทำให้ นักเรียนเบื่อหน่าย ควรใช้เทคนิคการสอนอื่น ๆ ประกอบและควรให้นักเรียนได้แสดงออก เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และ นิรมล แจ่มจำรัส (นิรมล แจ่มจำรัส 2521 : 82) กล่าวว่า การให้นักเรียน เรียนด้วยตนเองนั้นครูควรมีบทบาท โดยเป็นผู้อธิบายเป็น บางครั้งจะลดปัญหาการเบื่อเรียน และช่วยนักเรียนบางคนที่ไม่มีความสนใจและสมาธิในการเรียน ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เลือกสื่ออื่น ๆ ประกอบการเรียนการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมครั้งนี้ คือ แผ่นโป่งใสประกอบเทปเสียง

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรม

ผลงานวิจัยในต่างประเทศ คอปเปน (Coppen. 1976 : 141) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปที่เรียนด้วยตนเอง (Individualized Mastery Programme) กับการเรียนการสอนแบบปกติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาในประเทศนิวซีแลนด์ โดยกลุ่มทดลองสอนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปที่เรียนด้วยตนเอง และเป็นนักเรียนที่เรียนอ่อนในวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มควบคุมอีกแปดกลุ่ม ใช้การสอนแบบปกติและเป็นนักเรียนที่เรียนเก่งในวิชาคณิตศาสตร์ ใช้เวลาทดลองเป็นเวลาหนึ่งปีเท่ากันทุกกลุ่ม ผลปรากฏว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมทั้งแปดกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าบทเรียนสำเร็จรูปที่เรียนด้วยตนเองมีประสิทธิภาพต่อการเรียนรู้น่ามากกว่าการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับผลการวิจัยของวิลเลียม (William. 1976 : 7920-A) ซึ่งได้ศึกษาทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้การสอนสองแบบ คือ การสอนด้วยวิธีบรรยาย-อภิปราย กับ

การสอนด้วยวิธีใช้ชุดการเรียนรายบุคคล (Individually Packed Method) กลุ่มควบคุม
สอนด้วยวิธีบรรยาย-อภิปรายและการแก้ปัญหา ผลปรากฏว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมี
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนในกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทาง
สถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการเรียนการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรายบุคคลได้ผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนสูงกว่าการสอนแบบบรรยาย แต่ไม่พบความแตกต่างทางทัศนคติที่มีต่อ
วิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง และในปี 1974 สโตน (Stone.
1974 : 619-A) ซึ่งได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้
วิธีสอนสองแบบคือ การสอนโดยใช้ชุดการเรียนที่เรียนด้วยตนเองกับการสอนแบบปกติ
กลุ่มทดลองสอนโดยใช้ชุดการเรียนที่เรียนด้วยตนเอง กลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ผลปรากฏว่า
นักเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและมีประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่า
นักเรียนในกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ส่วนความก้าวหน้าในการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์นั้น ทั้งกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองมีความแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลงานวิจัยในประเทศ ปี 2520 ปรีชา เนาวเย็นผล (ปรีชา เนาวเย็นผล
2520 : 37) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบ
จำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป
กับการสอนปกติ กลุ่มทดลองเรียนด้วยบทเรียนสำเร็จรูป กลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ
ผลการทดลองพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้
ของกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หมายความว่า
บทเรียนสำเร็จรูปไม่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการสอนแบบปกติแต่อย่างใด แต่
ผลการวิจัยนี้ขัดแย้งกับผลการวิจัยของ สุพจน์ ไชยสังข์ (สุพจน์ ไชยสังข์ 2519 : 33)
ซึ่งได้ทำการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น
ระหว่างการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ กลุ่มทดลองเรียนด้วยบทเรียน
โปรแกรม กลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ เมื่อการทดลองสิ้นสุดลงแล้ว ทำการทดสอบทันที
ผลการทดสอบพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนใน
กลุ่มควบคุม นอกจากนี้แล้ว กัญญา โพธิ์วิวัฒน์ (กัญญา โพธิ์วิวัฒน์ 2523 : 81)
ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมกับนักเรียนที่มีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน

ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มสูงและกลุ่มกลางแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกลุ่มต่ำไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญกับกลุ่มสูงและกลุ่มกลาง ความคิดเห็นของนักเรียนกลุ่มสูงและกลุ่มกลางที่มีต่อการเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมแตกต่างกับนักเรียนกลุ่มต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.3 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแผ่นโปร่งใส

แผ่นโปร่งใสหมายถึง แผ่นพลาสติกใสหรือแผ่นอะซิเตท (Acetate) ที่ผิวนอกติดกับกรอบที่ทำด้วยกระดาษแข็ง ภาพที่เขียนลงบนแผ่นโปร่งใสอาจใช้กรรมวิธีทางเครื่องจักรกล ทางเคมี หรือเขียนด้วยมือก็ได้ โดยใช้ดินสอเทียน หมึกจีน หรือหมึกสีต่าง ๆ ดังนั้นครูจึงสามารถจะทำขึ้นใช้ในการสอนด้วยตนเองได้ ส่วนจำนวนแผ่นจะมากหรือน้อยในบทเรียนหนึ่ง ๆ ขึ้นอยู่กับผู้ผลิต สำหรับชื่อที่ใช้เรียกนั้นมีแตกต่างกันออกไป เช่น ทรานสปาเรนซี (Transparencies) หรือโปรเจกทอล (Projectuals) เป็นต้น

ลักษณะของแผ่นโปร่งใสมีอยู่ 3 ลักษณะ

1. แผ่นโปร่งใสแบบธรรมดา (Transparencies) เป็นแผ่นโปร่งใสชนิดที่เป็นแผ่นเดียวมีเนื้อหาสมบูรณ์ในตัว
2. แผ่นโปร่งใสชนิดซ้อนภาพ (Overlays) เป็นแผ่นโปร่งใส 2-3 แผ่นเย็บติดกันหรือติดขอบคั่นหนึ่ง เมื่อซ้อนภาพลงไปทีละแผ่นจะเป็นภาพที่สมบูรณ์
3. แผ่นโปร่งใสแบบเคลื่อนไหว (Motion Transparencies) เป็นแผ่นโปร่งใสที่มีกรรมวิธีการผลิตโดยการพิมพ์ภาพลงบนแผ่นโปร่งใสหลาย ๆ สี เรียงลำดับกันใช้ Polarizing Filler ปรากฏบนจอจึงดูเหมือนว่าเคลื่อนไหว

ประโยชน์ของแผ่นโปร่งใส

ประโยชน์ของแผ่นโปร่งใสในด้านการเรียนการสอน มีผู้กล่าวไว้หลายท่าน เช่น ซูโซ (Scuorzo. 1967 : 40-41) วิททิช และ ชูลเลอร์ (Wittich and Schuller. 1973 : 352) และ ชูลท์ซ (Schultz. 1965 : 240) ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ใช้ได้ในห้องเรียนที่มีแสงสว่าง ทำให้นักเรียนสามารถจับบันทึกหรือทำแบบฝึกหัดในระหว่างฉายแผ่นโปร่งใสอยู่ได้
2. ในขณะที่ฉายแผ่นโปร่งใส ครูหันหน้าเข้าหานักเรียนได้ตลอดเวลา

ทำให้ครูเห็นปฏิกริยาของนักเรียนในขณะที่สอน

3. เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ง่าย เคลื่อนย้ายสะดวก
4. ครูสามารถเก็บสิ่งที่ต้องการลงในแผ่นโปร่งใสได้ นั่นคือ แผ่นโปร่งใสสามารถแทนกระดานดำได้
5. แผ่นโปร่งใสที่สร้างอย่างถาวรสามารถนำไปใช้ได้หลายครั้ง
6. สามารถฉายได้ครั้งละหลาย ๆ แผ่นพร้อมกัน ซึ่งแต่ละแผ่นแสดงส่วนประกอบย่อย ๆ เมื่อนำมาวางซ้อนกันจนครบจะได้ภาพที่สมบูรณ์ ซึ่งทำให้ผู้เรียนเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น
7. แผ่นโปร่งใสลงทุนต่ำกว่าวัสดุสำหรับฉายชนิดอื่น ๆ เช่น ภาพยนตร์ สไลด์

ผลงานวิจัยเกี่ยวกับแผ่นโปร่งใส

ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ปี 1970 คาร์ไมเคิล และ กริฟฟิน

(Carmicheal and Griffin. 1970 : 21-23) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้แผ่นโปร่งใส ประกอบเทปเสียงในการนำไปปรับปรุงการอ่านออกเสียง และการใช้ภาษาอังกฤษระดับปริญญาตรี ปรากฏว่าได้รับผลสำเร็จในการเรียนสูง นักศึกษาสามารถเขียนและวิจารณ์เรื่องต่าง ๆ โดยใช้ภาษาได้ถูกต้องเป็นอย่างดี ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ ชานส์ (Chance. 1961 : 17) ได้เปรียบเทียบการสอนเรขาคณิตสำหรับหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์ โดยใช้แผ่นโปร่งใสกับการสอนที่ใช้กระดานชอล์คตามปกติ ปรากฏว่า การสอนโดยใช้แผ่นโปร่งใสสามารถประหยัดเวลาได้ 15-60 นาที และผลการทดสอบย่อย 5 ครั้ง พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่กลุ่มที่เรียนโดยใช้แผ่นโปร่งใสมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่า ทั้งผลการทดสอบปลายภาคของกลุ่มที่ใช้แผ่นโปร่งใสก็สูงกว่ากลุ่มที่ใช้กระดานชอล์คอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่มที่ใช้แผ่นโปร่งใสได้เกรด A ถึงร้อยละ 64 ส่วนกลุ่มที่ใช้กระดานชอล์คได้เกรด F ถึงร้อยละ 75 ในปี 1965 บรูคส์ (Brooks. 1965 : 5779-5780-A) ได้ทดลองสอนวิชาพื้นฐานสำหรับงานไม้ด้วยแผ่นโปร่งใสกับนักเรียนเกรดแปด เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้กับนักเรียนที่เรียนตามปกติ ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้

ของกลุ่มที่เรียนด้วยแผ่นโปร่งใสสูงกว่ากลุ่มที่เรียนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนั้น ครูที่มีความสามารถเฉพาะอย่างจะมีผลต่อความสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและครูยังให้การสนับสนุนการใช้แผ่นโปร่งใสเพราะช่วยเพิ่มความสนใจของนักเรียน เป็นการเสนอข้อมูลอย่างมีเหตุผล ลดเวลาการบรรยายและสนับสนุนการใช้เทคนิคต่าง ๆ เพราะแผ่นโปร่งใสทำให้การเรียนการสอนเป็นรูปธรรม ช่วยทำให้การสอนได้ผลดีขึ้น เพอร์เบอร์ก และ เรช (Perberg and Resh. 1967 : 1) ได้ทำการวิจัยการสอนโดย ใช้แผ่นโปร่งใสกับการสอนปกติในวิชาเรขาคณิตและวิชาอุทกศาสตร์ ในระดับชั้นปีที่ 1 และ ปีที่ 2 ของสถาบันเทคโนโลยีเคเนเบียน ปรากฏว่านักเรียนในกลุ่มทดลอง โดยเฉพาะ นักเรียนที่เรียนอ่อนมีผลการเรียนดีขึ้น และช่วยลดระดับความแตกต่างของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในกลุ่มทดลอง ส่วนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่ได้ รายงานว่าแตกต่างกันหรือไม่ แต่รายงานว่านักเรียนชอบเรียนจากแผ่นโปร่งใส

ผลงานวิจัยในประเทศ จารุวรรณ แสงทอง (จารุวรรณ แสงทอง 2523 : 33) ได้ทำการวิจัยการสอนโดยใช้แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง กระดาษคำตอบ กับบทเรียนโปรแกรมเรื่องคู่ลำดับและกราฟ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากแผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่า ซึ่งสอดคล้องกับ ผลการวิจัยของ ประพันธ์ ผัสศรีน (ประพันธ์ ผัสศรีน 2520 : 38) ได้ทำการวิจัย การสอนโดยใช้แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียงและภาพยนตร์ 8 ม.ม.พิเศษประกอบเทป ปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน แต่ทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยทั้งสองที่กล่าวมานี้ สอดคล้องกับผลการวิจัยของ สมชาย แสงทอง (สมชาย แสงทอง 2524 : 1 เล่ม) ซึ่งได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง การแจกแจงความถี่และค่ากลางของข้อมูล โดยใช้บทเรียนโปรแกรมและแผ่นโปร่งใส ประกอบเทปเสียง ผลปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมและแผ่นโปร่งใส ประกอบเทปเสียงมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.4 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนปฏิบัติการ

บทเรียนปฏิบัติการ เป็นสื่อการเรียนการสอนแบบหนึ่งที่ทำให้นักเรียนเรียนจากการกระทำจริง ๆ เป็นการเรียนตามวิธีการทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งนักเรียนต้องทำตามข้อปฏิบัติเพื่อหาข้อมูล บันทึกข้อมูล แล้วสรุปกฎเกณฑ์ต่าง ๆ จากข้อมูลเหล่านั้น บทเรียนปฏิบัติการนี้อาจจะใช้สอนนักเรียนแบบรายบุคคล หรือกลุ่มย่อยก็ได้ จะใช้สอนในชั่วโมงหรือนอกชั่วโมงก็ได้ ลาร์ลีย์ พลกล้ำ (ลาร์ลีย์ พลกล้ำ 2523 : 1-2) กล่าวว่า บทเรียนปฏิบัติการ เป็นสื่ออย่างหนึ่งที่ใช้ในวิธีสอนแบบปฏิบัติการอันเป็นวิธีสอนที่พัฒนามาจากความคิดและผลงานของนักศึกษานอกคิต เช่น เปสตาลอซซี (Pestalozzi) คีนส์ (Dewines) และ คิวอี้ (Dewey) ซึ่งมีความเชื่อว่า การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้จากการปฏิบัติจริง ต่อมา มีการใช้การสอนแบบปฏิบัติการในประเทศอังกฤษ โดยให้นักเรียนรู้มโนคติที่สำคัญ ๆ จากการปฏิบัติจริง ในประเทศสหรัฐอเมริกาและแคนาดา เคเนธ คิดด์ (Keneth Kidd) วิลเลียม ฟิทเชอร์ล (William Fitzgerald) และเดวิด คลากสัน (David Clarkson) เป็นผู้เผยแพร่วิธีสอนแบบนี้โดยมีความเชื่อมั่นว่าวิธีสอนแบบปฏิบัติการเป็นวิธีสอนที่ดี ที่ฝึกให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา

คูเนย์ (Cooney. 1975 : 351-352) กล่าวว่า วิธีสอนแบบปฏิบัติการเป็นวิธีสอนที่จัดให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ หรือเป็นรายบุคคล โดยมีใบคำสั่งขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมเป็นคู่มือให้นักเรียนปฏิบัติตาม หลังจากนั้นให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับความรู้ที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อให้นักเรียนได้สรุปความรู้และกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ด้วยตนเอง สื่อที่ใช้ในการสอนแบบปฏิบัติการได้แก่ บทเรียนกิจกรรม (Activity Card) และบทเรียนปฏิบัติการ (Laboratory Worksheet)

โคปแลนด์ (Kopeland. 1974 : 325-362) กล่าวว่าวิธีสอนคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ เป็นการจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้กระทำกิจกรรมกับวัตถุที่พบเห็น ซึ่งช่วยให้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ไม่เป็นนามธรรมไปจากโลกจริง ผู้เรียนจะได้รับการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดีจากการได้เรียนโดยปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ

ลักษณะของการสอนแบบปฏิบัติการ

ลาร์ลีย์ พลกล้ำ (ลาร์ลีย์ พลกล้ำ 2523 : 3-10) ได้กล่าวถึงวิธีการสอนแบบปฏิบัติการ ดังนี้ การสอนคณิตศาสตร์แบบวิธีปฏิบัติการ เป็นการสอนที่ให้

นักเรียนได้เรียนจากการปฏิบัติจริง เป็นการเรียนจากประสบการณ์ตรง นักเรียนได้ทดลองปฏิบัติ เสาะหาข้อมูล จัดระเบียบข้อมูล พิจารณาหาข้อสรุป ค้นคว้าหาวิธีการ กระบวนการด้วยตนเอง การสอนแบบปฏิบัติการมีลักษณะสำคัญดังนี้

1. ใช้วัสดุอุปกรณ์ซึ่งอาจเป็นรูปธรรม กึ่งรูปธรรม-นามธรรม
2. มีการจัดข้อมูล การจัดทำ การคิดค้น การคำนวณ หรือกิจกรรม ภายภาพ เช่น การสร้าง การวัด เป็นต้น
3. นักเรียนเป็นผู้กระทำการ นักเรียนต้องมีความรับผิดชอบต่อตนเอง ต่อกลุ่ม มีวินัยในการควบคุมตนเอง
4. ส่งเสริมปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียน
5. ให้นักเรียนได้เรียนตามความสามารถของตนเอง สรุป และค้นพบด้วยตนเอง

คุณค่าของการสอนแบบปฏิบัติการ

1. ช่วยให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดในเรื่องนั้น ๆ เกิดจินตนาการ และความคิดสร้างสรรค์ในการหากระบวนการ และวิธีการต่าง ๆ
2. นักเรียนจะสามารถถ่ายโยงคณิตศาสตร์เข้ากับโลกภายนอกห้องเรียนได้
3. การเรียนจากการปฏิบัติจริงนั้น นักเรียนจะเกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ ทำให้เกิดความสามารถในการถ่ายโยงการเรียนรู้
4. บรรยากาศในชั้นเรียน จะเป็นแบบที่นักเรียนเป็นศูนย์กลาง นักเรียนจะต้องแสดงความคิดเห็น และรับผิดชอบต่องานของตนเองและของกลุ่ม
5. การเรียนแบบปฏิบัติการทำให้นักเรียนอยู่ในบรรยากาศที่ไม่เกรงเกรียง ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
6. เปิดโอกาสในการนำปัญหาต่าง ๆ มาให้นักเรียนคิด โดยอาศัยวัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ เป็นเครื่องช่วยในการวิเคราะห์โจทย์นั้นให้เป็นรูปธรรมหรือกึ่งรูปธรรม ทำให้เกิดภาพพจน์และเข้าใจโจทย์ปัญหาได้
7. ช่วยเร้าให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการแก้ปัญหา
8. เสริมสร้างทักษะในการคิดคำนวณ

ข้อควรระวังในการสอนแบบปฏิบัติการ

1. ต้องให้นักเรียนเข้าใจถึงบทบาทของนักเรียนในการเรียนแบบนี้ว่า
ต้องทำตามข้อปฏิบัติ การตอบ และการสรุป ทั้งอาศัยการคิดอย่างมีเหตุผล
2. ต้องมีการเตรียมบทเรียนอย่างดี ให้มีความยากง่ายเหมาะสมกับ
ความสามารถของนักเรียน ระวังอย่าให้นักเรียนเกิดความวิตกกังวล ที่นครหนักต่อความ
ล้มเหลวของตนเอง ครูต้องให้เวลานักเรียนปรับตัวให้คุ้นเคยกับวิธีการเรียนแบบปฏิบัติการ
3. การสอนแบบปฏิบัติการ เป็นการสอนที่เน้นกระบวนการเรียนรู้มากกว่า
การรู้เนื้อหาหรือคำตอบ ซึ่งต่างกับการเรียนแบบเดิมที่มุ่งเนื้อหาและคำตอบ ถึงแม้ว่า
กระบวนการเรียนรู้เป็นสิ่งสำคัญ แต่เนื้อหาของคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรก็ยังมีความสำคัญ
ที่จะต้องคำนึง ดังนั้นการสอนแบบปฏิบัติการควรใช้สอนสลับกับการสอนแบบอื่น ๆ ด้วย
4. การทำงานแบบรายบุคคลและแบบกลุ่มย่อย ต้องมุ่งให้นักเรียนรู้จัก
การระดมความคิดและการหาเหตุผลเพื่อให้เกิดความเข้าใจเนื้อหา

จากความหมายต่าง ๆ ข้างต้น สรุปได้ว่า วิธีสอนแบบปฏิบัติการเป็นการ
จัดการเรียนการสอนที่ให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมต่าง ๆ อันจะนำไปสู่การค้นพบข้อสรุป
มโนคติ กฎสูตรของเนื้อหาด้วยตนเอง ครูมีหน้าที่จัดสื่อการเรียนและอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้
ในการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียนได้อย่างเหมาะสม อันได้แก่ บทเรียนกิจกรรมและ
บทเรียนปฏิบัติการ

ผู้วิจัยต้องการศึกษาการสอนที่ใช้บทเรียนปฏิบัติการร่วมกับแผ่นภาพโปร่งใส
และสื่ออื่น ๆ จึงขอนำขั้นตอนการสร้างบทเรียนปฏิบัติการตามที่ ลาวัลย์ พลกล้า
(ลาวัลย์ พลกล้า 2523 : 13-85) ได้กล่าวไว้มาเสนอ ดังนี้

1. เลือกหัวข้อเรื่อง หัวข้อเรื่องที่ทำเป็นบทเรียนปฏิบัติการนั้นควรเป็น
ประเภทที่สามารถหาข้อสรุปจากการสังเกต โดยเป็นหัวข้อเรื่องที่เราสามารถจัดประสบการณ์
ให้ เรียนจากของจริงที่จับต้องได้ นำไปสู่การเรียนรู้ในเรื่องที่ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นแบบแผน
และเป็นระบบในเชิงนามธรรม
2. เขียนมโนคติ หรือเนื้อหา หรือทักษะที่ต้องการให้นักเรียนเรียนรู้
3. เลือกอุปกรณ์ที่นักเรียนต้องใช้ในการทำกิจกรรม

4. กำหนดข้อปฏิบัติ (Lab Direction) ซึ่งเป็นคำสั่งในการสั่งงาน
อย่างมีระบบและเขียนเป็นข้อ ๆ ไปตามลำดับอย่างชัดเจน

5. การจัดกลุ่ม ถ้าเป็นงานที่ให้ทำไม่มากนัก ควรให้นักเรียนทำเป็น
รายบุคคล แต่ถ้าต้องการหาข้อมูลมากและต้องการฝึกการทำงานเป็นกลุ่มก็จัดเป็นกิจกรรมกลุ่ม

6. ออกแบบตารางบันทึกข้อมูล

7. ส่วนสรุปผลจากการทดลอง เพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปจากข้อมูลที่กรอก
ลงในตารางบันทึกข้อมูล (ดูการจัดรูปแบบได้จากภาคผนวก)

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับบทเรียนปฏิบัติการ

ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ปี 1980 เบลท์ (Blount. 1980 : 1990-A)
ได้ศึกษาผลการสอนคณิตศาสตร์ โดยนำการสอนแบบปฏิบัติการเพิ่มเข้ากับวิธีสอนแบบเดิม
เปรียบเทียบกับวิธีสอนแบบเดิม กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยทำกิจกรรมปฏิบัติการเพิ่ม
จากการสอนแบบเดิม กลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบบรรยาย-อภิปราย ผลปรากฏว่า
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แต่กลุ่มทดลอง
มีทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มากกว่ากลุ่มควบคุม ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ คอว์วิน
(Corwin. 1978 : 6584-A-6585-A) ได้เปรียบเทียบวิธีสอนแบบปฏิบัติการ โดยใช้
การทดลองกับวัสดุอุปกรณ์และเทคนิคการพับกระดาษกับวิธีสอนแบบเดิม (วิธีบรรยาย-อภิปราย
ไม่มีกิจกรรมปฏิบัติการ) ทดลองกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา กลุ่มทดลองเรียนจากวิธีสอน
ที่มีกิจกรรมปฏิบัติการรวม 18 กิจกรรมประกอบกับการศึกษาจากตำรา กลุ่มควบคุมเรียน
จากวิธีสอนแบบเดิม ผลการวิจัยพบว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม
มีค่าสหสัมพันธ์ทางบวกกับทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นนักเรียนและครูในกลุ่มทดลอง
มีความเห็นทางบวกต่อการใช้กิจกรรมปฏิบัติการ และมีความเห็นว่า การทดลองและวัสดุ
อุปกรณ์ที่ใช้ ช่วยให้นักเรียนเกิดจินตนาการ เห็นภาพและเข้าใจเนื้อหาเรขาคณิต และ
ในปี 1977 มอนิเออร์ (Monior. 1977 : 2630-A) ได้ศึกษายผลบางประการจาก
การใช้วิธีสอนแบบปฏิบัติการ ในการสอนวิชาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา นักเรียนกลุ่มทดลอง
เรียนโดยวิธีปฏิบัติกิจกรรม รวมทั้งสิ้น 48 กิจกรรม เพิ่มขึ้นจากการฟังบรรยาย
ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนจากวิธีสอนแบบเดิม ซึ่งใช้เพียงการบรรยายและศึกษาจากตำรา

ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีความเข้าใจในวิชาเรขาคณิต มีคะแนนความคิดสร้างสรรค์ มีความสามารถในการระลึกมโนคติ มีความสามารถในการอธิบายข้อเท็จจริง และมีความสามารถในการสร้างขั้นตอนการพิสูจน์ทฤษฎีเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลงานวิจัยในประเทศ ปี 2526 บัทยา เขียววิศิษฐ์สกุล (บัทยา เขียววิศิษฐ์สกุล 2526 : 160) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยวิธีสอนแบบปฏิบัติการ กลุ่มทดลองสอนด้วยวิธีปฏิบัติการ กลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ บัณฑิต กลิ่นเกษร (บัณฑิต กลิ่นเกษร 2519 : 42-44) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนระดับ ป.กศ. วิทยาลัยครูมหาสารคามที่เรียนโดยครูสอนปกติ และที่เรียนจากชุดปฏิบัติการทดลอง ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนจากชุดปฏิบัติการทดลองกับนักเรียนที่เรียนโดยครูสอนปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ผู้วิจัยได้อภิปรายผลว่า การที่ผลการวิจัย ไม่เป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ว่านักเรียนที่เรียนจากชุดปฏิบัติการทดลองจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยครูสอนปกติ อาจเป็นเพราะนักเรียนส่วนมากไม่เคยเรียนโดยการค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง จึงทำให้ขาดประสบการณ์ในการเรียน ผลการวิจัยทั้งสองข้างต้นสอดคล้องกับผลการวิจัยของ วรณา เณสิมพรพงศ์ (วรณา เณสิมพรพงศ์ 2526 : 107) ซึ่งได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความรู้พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้กลุ่มทดลองเรียนโดยวิธีสอนแบบปฏิบัติการ และกลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากผลงานวิจัยดังกล่าวอาจสรุปได้ว่า การสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการให้ผลดีกว่าหรืออย่างน้อยก็เท่ากับการสอนแบบปกติ แต่อย่างไรก็ตามวิธีสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการจะทำให้ผู้เรียนได้กระทำด้วยตนเอง สามารถค้นพบข้อสรุป กฎเกณฑ์ต่าง ๆ รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล และยังพบว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบนี้มีทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนแบบบรรยาย

จากเอกสารและผลงานวิจัยดังกล่าวจะเห็นว่า ทั้งบทเรียนโปรแกรม แผ่นโปร่งใส และบทเรียนปฏิบัติการ ต่างก็ให้คุณค่าต่อการเรียนการสอนไม่ยิ่งหย่อนกว่ากัน อย่างไรก็ตาม เรายังไม่สามารถจะสรุปได้ว่า การเรียนการสอนที่ใช้สื่อการสอนเหล่านี้เพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งกับการเรียนการสอนตามปกตินั้นวิธีไหนจะให้ผลดีกว่ากัน เพราะสื่อการสอนเหล่านี้ต่างก็มีข้อดีและข้อจำกัดต่างกัน ผู้วิจัยจึงคิดที่จะนำสื่อการสอนเหล่านี้มาใช้ร่วมกัน โดยที่บทเรียนโปรแกรม และบทเรียนปฏิบัติการต่างก็ใช้ร่วมกับแผ่นโปร่งใสประกอบแบบเสียงซึ่งบทเรียนสองแบบนี้ต่างก็ใช้ร่วมกับวัสดุอุปกรณ์อื่น ๆ ได้แก่ หุ่นจำลองภาคศัลยกรรม บัตรงาน บัตรปัญหา แบบฝึกหัด และแบบทดสอบย่อย

2.5 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับการใช้สื่อประสม

ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ปี 1975 บราวเลย์ (Brawley. 1975 : 4280-A) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเลขคณิตระหว่างการสอนด้วยบทเรียนสื่อประสมกับการสอนแบบปกติในเด็กเรียนช้า กลุ่มทดลองใช้บทเรียนสื่อประสมที่มีอุปกรณ์และสื่อการเรียน 12 ชุด กลุ่มควบคุมใช้การสอนแบบปกติปรากฏว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่า บทเรียนที่ใช้สื่อประสมให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับผลการวิจัยของ กิลเบิร์ต (Gilbert. 1974 : 5589-A) ซึ่งได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้การสอนสามแบบคือ กลุ่มทดลองสอนด้วยสื่อประสมที่สร้างขึ้นและให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองเป็นรายบุคคล กลุ่มควบคุมอีกสองกลุ่มใช้การสอนแบบให้สังเกตพร้อมกับความแนะนำจากผู้สอนกับการสอนแบบเป็นกลุ่มเล็ก ๆ แล้วให้นักเรียนได้เรียนร่วมกันเป็นกลุ่ม โดยใช้สื่อการเรียนร่วมกัน ปรากฏว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า บทเรียนที่ใช้สื่อประสมที่ให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าการสอนแบบปกติ นอกจากนี้ในปี 1973 คอเนย์ และ มิเชล (Corney and Micheal. 1973 : 17-18) ได้ทดลองใช้ชุดการเรียนด้วยตนเองแบบสื่อประสมกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่า ผลการเรียนและความคงทนในการจำของกลุ่มทดลอง สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งขัดแย้งกับผลงานวิจัย

ของ เบค (Beck. 1971 : 6270-A) ได้เปรียบเทียบการสอนวิชาฟิสิกส์ระดับวิทยาลัย โดยใช้วิธีสอน 3 แบบ คือการสอนแบบปกติ การสอนแบบโปรแกรม และการสอนที่ใช้สื่อประสม แล้วเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ (Retention) ความไม่สำเร็จ (Failure) และการถอนตัว (Withdrawal) ของนักเรียน 3 กลุ่ม ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนจากการสอนแบบปกติและการสอนที่ใช้สื่อประสมไม่แตกต่างกัน แต่สูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบโปรแกรม อัตราความไม่สำเร็จและการถอนตัวของนักเรียนกลุ่มที่สอนแบบโปรแกรมน้อยที่สุด สำหรับความคงทนในการเรียนรู้นั้น นักเรียนทั้ง 3 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

ผลงานวิจัยในประเทศ นิรมล แจ่มจำรัส (นิรมล แจ่มจำรัส 2521 : 77-80) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับสอนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เรื่อง จำนวนและตัวเลข โดยกลุ่มทดลองที่ 1 เรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อ กลุ่มทดลองที่ 2 เรียนแบบศูนย์การเรียนรู้ และกลุ่มควบคุมเรียนจากการสอนปกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมประกอบสื่อประสมกับการเรียนแบบศูนย์การเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งขัดแย้งกับผลการวิจัยของ รวีวรรณ เทนอิสสระ (รวีวรรณ เทนอิสสระ 2522 : 40-42) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์ โดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนปกติ ให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ซึ่งเรียนจากบทเรียนโปรแกรม เอกสารประกอบการเรียน แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง และร่วมอภิปรายกลุ่มย่อยร่วมกับเพื่อนและครู กลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับกลุ่มทดลอง ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการเรียนตามปกติ ไม่แตกต่างกันและ สุพร อุทรานันท์ (สุพร อุทรานันท์ 2527 : 236) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาภาษาอังกฤษ ทักษะการอ่านของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยการสอนที่ใช้บทเรียนสื่อประสมกับการสอนโดยวิธีครูเป็นศูนย์กลาง ผลปรากฏว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีผลการเรียนไม่แตกต่างกัน ผู้วิจัยได้อภิปรายว่าทั้งนี้เป็นเพราะนักเรียนไม่เคยชินกับการเรียนการสอนที่ต้องกระทำกิจกรรมเอง แต่ผลการวิจัยเหล่านี้ขัดแย้งกับผลการวิจัยของ สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม

(สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม 2523 : 34-35) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่องเมตริกซ์ โดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนตามปกติ ให้กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอน ซึ่งเรียนจากเอกสารประกอบการเรียน บทเรียนโปรแกรม แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง แล้วร่วมอภิปรายกับครู กลุ่มควบคุม เรียนตามปกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม

การศึกษาผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้สื่อประสมทั้งในและต่างประเทศพบว่า สื่อประสมสามารถนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนการสอนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าสื่อประสม นั้นจะอยู่ในรูปชุดการเรียนการสอนรายบุคคล หรือหน่วยการเรียนการสอนเพราะผลการวิจัย โดยทั่วไปพบว่า การสอนโดยใช้สื่อประสมให้ผลการเรียนรู้ดีกว่า หรืออย่างน้อยก็เท่าเทียม กับการสอนตามปกติ ผู้วิจัยจึงคิดว่า ถ้าสร้างสื่อประสมขึ้นมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ น่าจะทำให้ผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

4 เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้

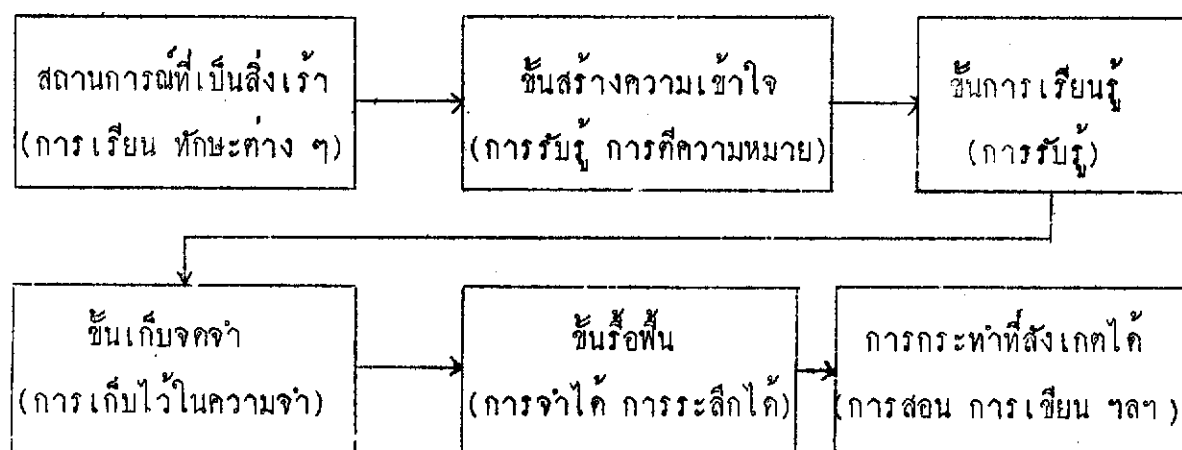
4.1 ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้

ความคงทนในการเรียนรู้ (Learning Retention) คือ การคงไว้ซึ่ง ผลของการเรียนหรือความสามารถที่จะระลึกถึงสิ่งเร้าที่เคยเรียนมา หลังจากที่ได้ทิ้งไว้ชั่ว ระยะเวลาหนึ่ง (Adam. 1976 : 9) ความจำเป็นพฤติกรรมภายใน (Convert Behavior) ที่เกิดขึ้นภายในจิตใจเช่นเดียวกับความรู้สึก การรับรู้ ความชอบและจินตนาการของมนุษย์ การที่จะจดจำสิ่งที่เรียนได้มากน้อยเพียงใดนั้น ส่วนหนึ่งขึ้นอยู่กับกระบวนการเรียนรู้ กาเย่ (Gagne. 1970 : 70-71) ได้อธิบายถึงขั้นตอนของกระบวนการเรียนรู้และการจำดังนี้

1. ขั้นสร้างความเข้าใจเป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถเข้าใจสถานการณ์ที่เป็น สิ่งเร้า
2. ขั้นเรียนรู้ ขั้นนี้จะมีการเปลี่ยนแปลง เกิดเป็นความสามารถอย่างใหม่
3. ขั้นเก็บไว้ในความจำ คือ การนำเอาสิ่งที่เรียนรู้ไปเก็บไว้ในส่วนของ ความจำในช่วงเวลาหนึ่ง

4. **ขั้นการรื้อฟื้น** คือ การนำเอาสิ่งที่เรียนแล้วและเก็บเอาไว้ในออกมาใช้
ในลักษณะของการกระทำที่สังเกตได้

ขั้นตอนต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วนี้จะเกิดอย่างใกล้เคียงกันมาก การเกิดขั้นที่ 1
และขั้นที่ 2 อาจจะพิจารณาร่วมกันเป็นสภาพการณ์ของการเรียนรู้ ส่วนขั้นที่ 3 และ
ขั้นที่ 4 เป็นสภาพของการจำ ดังแผนภูมิ



แผนภูมิแสดงลำดับกระบวนการในการเรียนรู้

การเรียนรู้เนื้อหาวิชาหนึ่ง ๆ เมื่อเวลาว่างเลยไปความจำก็จะค่อย ๆ หายไป
จนบางครั้งพบข้อความตอนนั้นอีกก็อาจจำไม่ได้เลย ฉะนั้นถ้าอ่านทวนซ้ำบ่อย ๆ ความจำอาจจะ
ยังคงมีอยู่และช่วยประหยัดเวลาในการจำ

4.2 ระบบความจำของคน

ระบบความจำของคน แยกเป็น 3 ระบบ คือ

1. ระบบความจำจากการรู้สึกสัมผัส (Sensory Memory)
2. ระบบความจำระยะสั้น (Short-Term Memory)
3. ระบบความจำระยะยาว (Long-Term Memory)

ความจำระยะยาวเป็นความจำที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง เป็นความหมายหรือความ
เข้าใจในสิ่งที่คนรู้สึก เป็นการตีความซึ่งขึ้นอยู่กับประสบการณ์เดิม ความสนใจและ

ความเชื่อมั่นของแต่ละคน สิ่งสำคัญที่จะช่วยให้เกิดความคงทนในการจำอาจจะสรุปได้เป็น 2 ประการ ประการแรกได้แก่ ลักษณะของความต่อเนื่องหรือความสัมพันธ์กันของ ประสบการณ์ที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้ ประการที่สองได้แก่ การทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ไปแล้วอยู่เสมอ ชัยพร วิชชาวุธ (ชัยพร วิชชาวุธ 2520 : 118) กล่าวว่า การศึกษา ทบทวนสิ่งที่จำได้คืออยู่แล้วซ้ำอีกจะช่วยให้ความจำถาวรมากยิ่งขึ้นและถ้าได้ทบทวนอยู่เสมอแล้ว ช่วงระยะเวลาที่ความจำระยะสั้นจะฝังตัวกลายเป็นความจำระยะยาว ซึ่งความคงทนในการ จำนี้จะวัดหลังจากที่ได้ผ่านการเรียนรู้ไปแล้วนานประมาณ 14 วัน

4.3 ผลงานที่เกี่ยวกับความคงทนในการเรียนรู้

ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในปี 1976 สแวนสัน (Swanson. 1976 : 1381-A) ได้ศึกษาถึงอิทธิพลของการสอนที่ใช้วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ด้วยวิธีต่าง ๆ ที่มีผลต่อ ความคงทนในการจำของนักเรียน 3 กลุ่ม ปรากฏว่า คะแนนสอบครั้งสุดท้ายเพิ่มขึ้น จากครั้งแรกของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งผลการวิจัย นี้ขัดแย้งกับผลงานวิจัยของ บรูคส์ (Brooks. 1965 : 5779-5780-A) ได้ทดลองสอน วิชาชีวพื้นฐานสำหรับงานไม้ด้วยแผ่นโปร่งใสกับนักเรียนเกรด 8 ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนด้วยแผ่นโปร่งใสสูงกว่ากลุ่มที่เรียนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทาง สถิติ และความคงทนในการเรียนรู้ของกลุ่มที่เรียนด้วยแผ่นโปร่งใสก็สูงกว่ากลุ่มที่เรียนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ผลงานวิจัยในประเทศ ปี 2527 พรรณี ไสระโร (พรรณี ไสระโร 2527 : 172) ได้ทำการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่มีเพื่อนช่วยสอนอย่าง มีแบบแผน กลุ่มที่มีเพื่อนสอนอย่างอิสระ และกลุ่มที่ไม่มีเพื่อนช่วยสอน แตกต่างกันอย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 3 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ส่วนความคงทนในการเรียนรู้ของทั้ง 3 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญซึ่งสอดคล้องกับผลงานวิจัยของ ประยงค์ นาโค (ประยงค์ นาโค 2527 : 73) ที่ได้ศึกษาผลการสอน 3 แบบ ได้แก่ การเรียนเป็นคณะ เรียนด้วย บทเรียนโปรแกรม และเรียนตามปกติที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเป็นผู้นำ และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลปรากฏว่า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่ 1 แตกต่างกับกลุ่มที่ 3 และกลุ่มที่ 2 แตกต่างกับกลุ่มที่ 3 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนความคงทนในการเรียนรู้ของทั้ง 3 กลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่กลุ่มที่ 1 มีแนวโน้มของความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่ากลุ่มอื่น ๆ และ ทรงศักดิ์ นิธิปริชา (ทรงศักดิ์ นิธิปริชา 2523 : 73) ได้ศึกษาทฤษฎีที่แตกต่างกันในการสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันสำหรับนักเรียนชั้น ป.กศ.สูง พบว่าความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนจากวิธีสอนแบบค้นพบและแบบบรรยาย เมื่อสิ้นสุดการทดลอง 2 สัปดาห์ แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากผลงานวิจัยดังกล่าวจะเห็นว่า มีผู้สนใจศึกษาค้นคว้าถึงวิธีต่าง ๆ เพื่อทำให้ความคงทนในการเรียนรู้ดีขึ้น เพราะวิชาคณิตศาสตร์จะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานต่อเนื่องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้นความคงทนในการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นมากอย่างหนึ่ง ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาว่า การสอนด้วยบทเรียนสื่อประสมทั้ง 2 แบบ ดังกล่าว กับการสอนตามแผนการสอนรายคาบ ของโรงเรียนมัธยมศึกษาส่วนกลางกลุ่ม 4 จะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันหรือไม่

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน
2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ประชากร

ประชากรของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมวิภาวดี เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2528 จำนวนทั้งหมด 250 คน (6 ห้องเรียน)

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมศึกษาวิภาวดี เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2529 จำนวน 3 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 40 คน ซึ่งได้มาโดยการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) จาก 6 ห้องเรียน จากนั้นจับสลากเป็นกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม ดังนี้

1. กลุ่มทดลองที่ 1 เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
2. กลุ่มทดลองที่ 2 เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม
3. กลุ่มควบคุม เป็นกลุ่มที่ดำเนินการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

เครื่องมือในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ประกอบด้วย

1. บทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
2. บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม
3. แผนการสอนรายคาบวิชา ค 012 ของกลุ่มโรงเรียน
4. แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคศักรวย

1. บทเรียนโปรแกรมสื่อประสม ประกอบด้วย

1.1 หุ่นจำลองภาคศักรวย สำหรับสาธิตให้นักเรียนได้เห็นโค้งที่เกิดจากการศักรวยกลมตรงในลักษณะต่าง ๆ กัน

1.2 บทเรียนโปรแกรม เรื่องการสร้างรูปวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลา สำหรับนักเรียนได้ศึกษาวิธีเขียนรูปและสรุปนิยามของวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลา ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยศึกษาวิธีสร้างรูปต่าง ๆ เหล่านี้จากหนังสือที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์หลาย ๆ เล่ม ประกอบกัน ได้แก่

- แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท.
- คู่มือการสอนคณิตศาสตร์ ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ สสวท.
- การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของยุพิน พิพิธกุล
- การสอนคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการของดาร์ลีย์ พลลล่า

แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์จำนวน 6 คน ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำบทเรียนโปรแกรมที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนรัชดาภิเษก จำนวน 37 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนเรื่องภาคศักรวยมาก่อน จำนวน 3 ครั้ง ดังนี้

ครั้งที่ 1 นำบทเรียนโปรแกรมไปทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one try out) กับนักเรียน 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องของบทเรียน ได้แก่ การใช้ภาษา ลำดับขั้นตอนในการทำกิจกรรม ความเหมาะสมของเนื้อหา และระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ครั้งที่ 2 ทดลองกับนักเรียนกลุ่มย่อย (Small group try out) นำบทเรียนที่ปรับปรุงแล้วจากครั้งที่ 1 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่จำนวน 5 คน เพื่อศึกษาหาข้อบกพร่องสำหรับปรับปรุงบทเรียนเช่นเดียวกับครั้งที่ 1

ครั้งที่ 3 ทดลองภาคสนาม (Field try out) นำบทเรียนที่ปรับปรุงจากครั้งที่ 2 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่อีกจำนวน 30 คน เพื่อศึกษาสถานการณ์การเรียนการสอนที่ใกล้เคียงกับการทดลองจริง

บทเรียนโปรแกรมที่ได้จากการปรับปรุงหลังจากการทดลองครั้งที่ 3 เป็น

บทเรียนที่พร้อมจะนำไปใช้จริงกับกลุ่มทดลอง

1.3 แผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง เรื่องการหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามลำดับขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษารูปแบบการสร้าง การประเมินผล และตัวอย่าง แผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง เพื่อรวบรวมความรู้และแนวความคิดที่จะนำไปสร้างแผ่นโปรงใส ประกอบเทปเสียงเรื่องภาคศักรว

ขั้นที่ 2 ศึกษาเนื้อหาเรื่องภาคศักรวจากแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของกระทรวงศึกษาธิการ ที่จัดทำโดย สสวท. และแบบเรียน คณิตศาสตร์ ค 412 ของสุเทพ จันทรมงคล และคณะ เพื่อแบ่งเนื้อหาให้สอดคล้องกับการเรียนการสอน

ขั้นที่ 3 จัดทำสคิปต์ (Script) สำหรับแผ่นโปรงใสพร้อมคำบรรยาย แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์จำนวน 6 คน ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 4 ทำเนิการผลิต โดยนำแผ่นโปรงใสและเทปเสียงทดลอง ใช้ร่วมกัน

ขั้นที่ 5 ปรับปรุงแก้ไขแผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง โดยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 37 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่ เคยเรียนเรื่องภาคศักรวมาก่อน ด้วยวิธีการเช่นเดียวกับการทดลองใช้บทเรียนโปรแกรม

1.4 แบบฝึกหัด ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อฝึกทักษะตามเนื้อหาในบทเรียนโปรแกรม บทเรียนปฏิบัติการ และแผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียงเกี่ยวกับการหาสมการและส่วนประกอบ ต่าง ๆ ของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

2. บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมประกอบด้วย

2.1 หุ่นจำลองภาคศักรว เหมือนบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม

2.2 บทเรียนปฏิบัติการเรื่องการสร้างรูปวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ผู้วิจัยสร้างและทดลองใช้ด้วยวิธีการเช่นเดียวกับการทดลองใช้บทเรียนโปรแกรม

2.3 แผ่นโปรงใสประกอบเทปเสียง การหาสมการ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา เหมือนบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม

2.4 แบบฝึกหัด เหมือนบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม

3. แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 เรื่องภาคตัดกรวย ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามแผนการสอนรายคาบของโรงเรียนมัธยมศึกษาส่วนกลางกลุ่ม 4 ซึ่งแบ่งเนื้อหาดังนี้

3.1 รอยตัดที่เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบในลักษณะต่าง ๆ

3.2 วงกลม นิยามของวงกลม สูตรทั่วไป การเขียนกราฟและการประยุกต์ใช้สมการวงกลม

3.3 พาราโบลา นิยามพาราโบลา สูตรทั่วไป การเขียนกราฟและการประยุกต์ใช้สมการพาราโบลา

3.4 วงรี นิยามของวงรี สูตรทั่วไป การเขียนกราฟและการประยุกต์ใช้สมการวงรี

3.5 ไฮเพอร์โบลา นิยามของไฮเพอร์โบลา สูตรทั่วไป การเขียนกราฟ การประยุกต์ใช้สมการไฮเพอร์โบลา และไฮเพอร์โบลาชนิดมุมฉาก

4. แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย เป็นแบบทดสอบปรนัยชนิด 5 ตัวเลือก จำนวน 80 ข้อ ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยศึกษาวิธีสร้างและเทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบจากหนังสือเทคนิคการวัดผลของ ชวาล แพร์ทกุล (ชวาล แพร์ทกุล 2516 : 44-311) แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์จำนวน 6 คน ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ผ่านการเรียนเรื่องภาคตัดกรวยมาแล้วจำนวน 100 คน แล้วนำผลมาวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงแบบทดสอบก่อนใช้จริง

4.1 วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อ โดยใช้เทคนิคการวิเคราะห์อย่างง่าย (บุญเชิก ภิญโญอนันตพงษ์ 2521 : 257) เพื่อหาความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบแต่ละข้อ แล้วคัดเลือกพร้อมทั้งแก้ไขข้อสอบบางข้อให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ซึ่งทำให้ได้ข้อสอบที่เหมาะสมจำนวน 50 ข้อ

4.2 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับที่คัดเลือก โดยใช้สูตร Paul Horst (บุญเชิก ภิญโญอนันตพงษ์ 2521 : 294) พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

แบบแผนของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองแบบ Nonrandomized Control Group Posttest-only Design ซึ่งมีลักษณะการทดลองดังนี้ (ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ 2528 : 219)

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E ₁	-	X ₁	T ₂
E ₂	-	X ₂	T ₂
C	-	-	T ₂

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการทดลอง

- E : กลุ่มทดลอง
- C : กลุ่มควบคุม
- E₁ : กลุ่มทดลอง 1
- E₂ : กลุ่มทดลอง 2
- C : กลุ่มควบคุม
- T₂ : การสอบหลังเรียน
- X₁ : การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
- X₂ : การสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม

วิธีดำเนินการทดลอง

ในการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1. เลือกกลุ่มตัวอย่างโดยวิธีสุ่มอย่างง่าย
2. รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ภาคเรียนที่ 1 ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง เพื่อใช้เป็นตัวแปรร่วม (Covariate)
3. ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 กลุ่ม โดยใช้เนื้อหาเดียวกัน และระยะเวลาเท่ากัน ดังนี้
 - 3.1 กลุ่มทดลองที่ 1 ได้รับการสอนเป็นรายบุคคล ด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
 - 3.2 กลุ่มทดลองที่ 2 ได้รับการสอนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 5 คน ด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม
 - 3.3 กลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน
4. เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้ว ทำการทดสอบ (Posttest) รวมพร้อมกันด้วยแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย
5. ในสัปดาห์ที่ 2 และ 3 หลังจากทำการทดสอบ (Posttest) ไปแล้ว ทำการทดสอบรวมพร้อมกันด้วยแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับเดิม เพื่อศึกษาความคงทนในการเรียนรู้
6. ทรวผลผลการทดสอบ นำคะแนนมาวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลครั้งนี้ นำมาจากฉนวน สายยศ และ อังคณา สายยศ (ฉนวน สานยศ และ อังคณา สายยศ 2528 : 314) ดังนี้

1. หาค่าเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

2. หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) คำนวณจากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum \bar{X})^2}{N(N-1)}}$$

3. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คำนวณจากสูตร
(บุญเชิด ภิญโญนันตพงษ์ 2521 : 294)

$$r_{tt} = \left[\frac{s_t^2 - \sum pq}{s_m^2 - \sum pq} \right] \cdot \frac{s_m^2}{s_m^2}$$

- เมื่อ r_{tt} : ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 s_t^2 : ค่าความแปรปรวนของคะแนนที่สอบได้
 s_m^2 : ค่าความแปรปรวนสูงสุดที่อาจจะเป็นไปได้ของคะแนนที่สอบได้
 p : สัดส่วนของคนตอบถูกในแต่ละข้อ
 q : สัดส่วนของคนตอบผิดในแต่ละข้อ

4. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

คำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ 2528 : 165)

$$S_e = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

- เมื่อ S_e : ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
 S_x : ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
 r_{tt} : ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

5. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทน
ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม
(Analysis of Covariance) คำนวณค่า F ทั้งตาราง (ล้วน สายยศ และ
อังคณา สายยศ 2528 : 125)

Source of Variables	SS'	df'	MS'	F
Between group (b)	SS'_b	$K - 1$	$\frac{SS'_b}{df'_b}$	$\frac{MS'_b}{MS'_w}$
Within group (w)	SS'_w	$N - K - 1$	$\frac{SS'_w}{df'_w}$	
Total (t)	SS'_t	$N - 2$		

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลและแปลความหมาย ผู้วิจัยใช้สัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด
n	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ทดลองแต่ละกลุ่ม
K	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
S^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนน
S	แทน	ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
MS'	แทน	ค่าปรับแก้ของค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนน
SS'	แทน	ค่าปรับแก้ของผลบวกกำลังสองของคะแนน
df'	แทน	ระดับความเป็นอิสระที่ปรับแก้แล้ว (Degree of Freedom)
F	แทน	ค่าสถิติที่ใช้ในการพิจารณา คือ F - Distribution
กลุ่มทดลองที่ 1	หมายถึง	กลุ่มที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม
กลุ่มทดลองที่ 2	หมายถึง	กลุ่มที่สอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม
กลุ่มควบคุม	หมายถึง	กลุ่มที่สอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยได้เสนอลำดับขั้นดังนี้

1. ค่าคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการทดลอง และคะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์
2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 และ 3 สปีคส์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2

และกลุ่มควบคุม ในกรณีที่พบว่าความแตกต่างมีนัยสำคัญทางสถิติ จะทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้วทีละคู่โดยวิธีของ เชฟเฟ (Scheffe')

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง หลังการทดลองและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์ ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม ผลปรากฏ ดังตาราง 1-4

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	n	K	$\bar{X}$	S^2	S
กลุ่มทดลองที่ 1	40	50	22.275	44.922	6.702
กลุ่มทดลองที่ 2	40	50	22.725	52.307	7.232
กลุ่มควบคุม	40	50	19.250	31.167	5.583

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 1 ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมเป็น 22.275 22.725 และ 19.250 ตามลำดับ ส่วนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็น 6.702 7.232 และ 5.583 ตามลำดับ แสดงว่าการกระจายของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

ตาราง 2 คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลองของกลุ่มตัวอย่าง

$\bar{X} = 105.2$

กลุ่มตัวอย่าง	n	K	$\bar{X}$	s^2	s
กลุ่มทดลองที่ 1	40	50	27.050	32.049	5.665
กลุ่มทดลองที่ 2	40	50	31.950	54.408	7.376
กลุ่มควบคุม	40	50	23.800	15.497	3.937

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตารางที่ 2 ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลองของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมเป็น 27.050 31.950 และ 23.800 ตามลำดับ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในครั้งนี้ มีความแตกต่างกันมากขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับก่อนการทดลอง ส่วนความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 5.665 7.376 และ 3.937 ตามลำดับ แสดงว่าการกระจายของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มควบคุม น้อยกว่ากลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2

ตาราง 3 คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	n	K	$\bar{X}$	s^2	s
กลุ่มทดลองที่ 1	40	50	26.975	85.256	9.233
กลุ่มทดลองที่ 2	40	50	27.250	97.321	9.865
กลุ่มควบคุม	40	50	24.050	47.639	6.902

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 3 ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมเป็น 26.975 27.250 และ 24.050 ตามลำดับ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยของความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สปีคหัทของกลุ่มควบคุมเพิ่มขึ้น แต่กลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ลดลง เมื่อพิจารณาความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สปีคหัทของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามจะเห็นว่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเพิ่มขึ้น โดยเฉพาะกลุ่มควบคุมเพิ่มขึ้นมากที่สุด แสดงว่าการกระจายของคะแนนมีมากขึ้น

ตาราง 4 คะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 3 สปีคหัทของกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	n	K	$\bar{X}$	S^2	S
กลุ่มทดลองที่ 1	40	50	28.875	92.830	9.635
กลุ่มทดลองที่ 2	40	50	28.100	90.554	9.516
กลุ่มควบคุม	40	50	25.800	49.497	7.035

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 4 ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมเป็น 28.875 28.100 และ 25.800 ตามลำดับ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยของความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 3 สปีคหัทของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มควบคุมเพิ่มขึ้น แต่กลุ่มทดลองที่ 2 ลดลงเล็กน้อย ส่วนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 3 สปีคหัทของกลุ่มตัวอย่าง

ทั้งสามกลุ่มเพิ่มขึ้นมาก โดยเฉพาะกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มควบคุม แสดงว่าการกระจายของคะแนนมีมากขึ้น ซึ่งกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 มีการกระจายของคะแนนมากกว่ากลุ่มควบคุม

2. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 และ 3 สปีคท์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม

เพื่อให้ทราบว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ จึงนำไปวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองเป็นตัวแปรร่วมและเพื่อให้ทราบว่าคะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สปีคท์และ 3 สปีคท์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ จึงนำไปวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลองเป็นตัวแปรร่วม ปรากฏผลดังตาราง 5-8

ตาราง 5 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ของกลุ่มตัวอย่าง

แหล่งตัวแปร	SS'	df'	MS'	F
ระหว่างกลุ่ม	910.1135	2	445.0578	17.122**
ภายในกลุ่ม	3082.9705	116	26.5773	
รวม	3993.0840	118		

$$F_{.05} (2, 116) = 3.07$$

$$F_{.01} (2, 116) = 4.78$$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 5 ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมเมื่อใช้คะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองเป็นค่าแปรร่วม แตกต่างกันอย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่าการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม บทเรียน ปฏิบัติการสื่อประสม และการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน ทำให้นักเรียน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 1 ที่ตั้งไว้

เพื่อให้ทราบว่า การสอนด้วยวิธีใดทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แตกต่างกัน ผู้วิจัยจึงทำการทดสอบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของคะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็นรายคู่ โดยวิธีของ เชฟเฟ (Scheffe') ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ผลการทดสอบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วที่ละคู่ของผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคศักรวย ของกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง		กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลองที่ 1	กลุ่มทดลองที่ 2
	คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้ว	24.7153	26.6876	31.3975
กลุ่มควบคุม	24.7153	-	1.9723	6.6822**
กลุ่มทดลองที่ 1	26.6876		-	4.7099**
กลุ่มทดลองที่ 2	31.3975			-

$$F .05 (2, 116) = 3.07 \quad S = 2.8564$$

$$F .01 (2, 116) = 4.78 \quad S = 3.5628$$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 6 ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ของกลุ่มควบคุมกับกลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มทดลองที่ 1 กับกลุ่มทดลองที่ 2 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่าการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียนกับการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม และการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมกับการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน แต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุมกับกลุ่มทดลองที่ 1 แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียนกับการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

ตาราง 7 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ ของกลุ่มตัวอย่าง

แหล่งตัวแปร	SS'	df'	MS'	F
ระหว่างกลุ่ม	72.9385	2	36.4693	0.515
ภายในกลุ่ม	8222.1679	116	70.8808	
รวม	8295.1064	118		

$$F_{.05} (2, 116) = 3.07$$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 7 ปรากฏว่าความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมและบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมกับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน ทำให้ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของนักเรียนไม่แตกต่างกัน

ตาราง 8 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของคะแนนความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาควักรวย หลังการทดลอง 3 สัปดาห์ ของกลุ่มตัวอย่าง

แหล่งตัวแปร	SS'	df'	MS'	F
ระหว่างกลุ่ม	239.2936	2	119.6468	1.8004
ภายในกลุ่ม	7708.9964	116	66.4569	
รวม	7948.2800	118		

$$F_{.05} (2, 116) = 3.07$$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามตาราง 8 ปรากฏว่าความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุม แตกต่างกัน
อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการสอนด้วยบทเรียนสื่อประสมและ
บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมกับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน ทำให้
ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 3 สัปดาห์ของนักเรียนไม่แตกต่างกัน

สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการศึกษาผลของการใช้บทเรียนสื่อประสมที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมและบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมกับการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน
2. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมกับการสอนตามแผนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน
2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 และกลุ่มควบคุมแตกต่างกัน

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

1. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2528 โรงเรียนมัธยมศึกษาวิเศษทอง เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร

จำนวน 3 ห้องเรียนจากการสุ่มเป็นกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม กลุ่มละ 40 คน และ
กลุ่มควบคุม 40 คน กลุ่มทดลองที่ 1 หมายถึง กลุ่มที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรม
สื่อประสม กลุ่มทดลองที่ 2 หมายถึง กลุ่มที่สอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม ส่วน
กลุ่มควบคุมเป็นกลุ่มที่สอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วย

- 2.1 บทเรียนโปรแกรมสื่อประสม (รายละเอียดในภาคผนวก ค)
- 2.2 บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม (รายละเอียดในภาคผนวก ค)
- 2.3 แผนการสอนรายคาบวิชา ค 012 ของกลุ่มโรงเรียน (รายละเอียด
ในภาคผนวก ค)
- 2.4 แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคศักรวย เป็นแบบทดสอบ
ชนิดเลือกตอบ 5 ข้อเลือก จำนวน 50 ข้อ (รายละเอียดในภาคผนวก ข) มีความ
ยากง่ายตั้งแต่ .25 ถึง .78 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .25 ถึง .81 ค่าของความเชื่อมั่น
ของแบบทดสอบคำนวณโดยสูตร Paul Horst เท่ากับ 0.94 และความคลาดเคลื่อน
มาตรฐานในการวัดเป็น 2.762 (รายละเอียดในภาคผนวก ก)

3. การดำเนินการทดลอง การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2528
โดยดำเนินการดังนี้

- 3.1 จัดกลุ่มตัวอย่างโดยวิธีสุ่มอย่างง่าย
- 3.2 รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ภาคเรียนที่ 1
ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง เพื่อใช้เป็นตัวแปรร่วม (Covariate)
- 3.3 การทดลองสอน กลุ่มตัวอย่างได้รับการสอนเรื่องภาคศักรวยจากผู้วิจัย
สัปดาห์ละ 4 คาบ คาบละ 50 นาที จำนวน 14 คาบในชั้นเรียนปกติ โดยกลุ่มทดลองที่ 1
ให้ศึกษาเองจากบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม กลุ่มทดลองที่ 2 สอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการ
สื่อประสมส่วนกลุ่มควบคุมสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน
- 3.4 เมื่อเสร็จสิ้นการทดลอง ได้ทำการทดสอบนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้ง
3 กลุ่มด้วยแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคศักรวย ต่อมาอีก
2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์หลังการทดลอง ทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอีกครั้งด้วย

ข้อสอบชุดเดิม เพื่อหาความคงทนในการเรียนรู้ แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

4.1 หาค่าเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ จากภาคเรียนที่ 1 จากการสอบหลังเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม

4.2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม เมื่อพบว่ามีความแตกต่างกันจึงทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้วทีละคู่

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียนกับการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมกับบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมกับการสอนตามแผนการสอนรายคาบแตกต่างกัน อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรม สื่อประสม บทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม และการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผล

1. จากการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมกับบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม และการสอนตามแผน การสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียนกับบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อ 1 ที่ตั้งไว้ อันน่าจะเป็นเพราะสาเหตุดังนี้

1.1 กิจกรรมการเรียนการสอนของการสอนทั้ง 3 แบบนี้แตกต่างกัน

กล่าวคือนักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมมีกิจกรรมที่ต้องปฏิบัติทั้งแบบรายบุคคล และเป็นกลุ่มย่อย นอกจากนั้นการตรวจสอบสรุปความรู้ของนักเรียนก็ทำอย่างเป็นขั้นตอนโดยให้นักเรียนรายงานข้อมูล รายงานผลการทดลองและนักเรียนร่วมกันอภิปรายข้อสรุปที่ได้ โดยมีครูเป็นผู้นำการอภิปราย เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง และยังได้ศึกษาเพิ่มเติมจากบทความ วิทยุหา แผ่นโป่งใสประกอบแบบเสียง และใช้ทดสอบย่อยก่อนเรียนบทเรียนใหม่ ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นและสนใจในการเรียนเพื่อให้ทราบความสามารถของตนเองเป็น การเรียนแข่งกับตนเอง สำหรับการเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสมนั้น นักเรียนต้อง ศึกษาบทเรียนโปรแกรมด้วยตนเองเป็นรายบุคคลโดยตลอด การตรวจสอบสรุปและคำตอบต่าง ๆ ก็ตรวจสอบจากเฉลยที่มีไว้ให้ในบทเรียนโปรแกรม ไม่มีการอภิปรายข้อสรุปความรู้หรือปัญหา อื่น ๆ ร่วมกับผู้อื่น ลักษณะเช่นนี้เป็นจุดบกพร่องของการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมซึ่ง สอดคล้องกับความคิดเห็นของ ฟังก์ (นิรมล แจ่มจำรัส 2521 : 35 อ้างอิงมาจาก Funk. 1973 : 33 และกาญจนา เกียรติประวัติ มปป. 60) ที่กล่าวว่า การให้นักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมตามลำพังตลอดเวลาอาจทำให้นักเรียนเบื่อหน่าย ควรให้มี กิจกรรมร่วมบ้าง เช่น การอภิปรายกลุ่ม หลังจากนักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมด้วยตนเอง จบตอนหนึ่ง ๆ นอกจากนั้นปัญหาเรื่องความซื่อสัตย์ต่อตนเองก็เป็นปัญหาสำคัญของการศึกษา บทเรียนโปรแกรมด้วยตนเอง หากนักเรียนไม่มีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง เปิดดูเฉลยก่อนคิด คำตอบ หรือขณะกำลังคิดคำตอบอยู่ การเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมก็จะไม่ได้ผล ส่วน นักเรียนที่เรียนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียนนั้น จะไม่มีการร่วมอภิปรายหรือ ทำกิจกรรมด้วยตนเอง นอกจากครูจะเป็นผู้กำหนดให้เท่านั้น ทำให้นักเรียนไม่มีความตื่นตัว เท่าที่ควรซึ่ง เอลคินส์ (Elkins. 1970 : 20) กล่าวว่า ถ้าทุกคนประสบกับการกระทำ ซ้ำ ๆ แบบเดิมบ่อย ๆ จะเกิดความเบื่อหน่าย ดังนั้นการใช้สื่อการสอนหลาย ๆ ชนิดตลอดจน จัดกิจกรรมใหม่ ๆ ย่อมเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนต้องการเรียนรู้นมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ ความคิดของดันน์ (Dunn. 1972 : 99)

1.2 การสอนโดยใช้สื่อประสมในรูปแบบการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการ สื่อประสม มีข้อดี เกินข้อซึ่งน่าจะมีผลอย่างมากต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้แก่

การเรียนแบบปฏิบัติจริง ซึ่งช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ทำให้สามารถถ่ายโยงการเรียนรู้ อันเป็นสิ่งพึงประสงค์ของการศึกษา (ลาวัลย์ พลกกล้า 2523 : 3) และจากผลการปฏิบัติทำให้เห็นผลงาน และความก้าวหน้าอย่างชัดเจน จึงเป็นการเสริมแรงให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียน (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 88) นอกจากนี้เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงทางเรขาคณิต และการสร้างการวัด ซึ่งเป็นเนื้อหาหนึ่งที่ลาวัลย์ พลกกล้า (ลาวัลย์ พลกกล้า 2523 : 13) เสนอว่าเป็นเนื้อหาที่เหมาะสมสำหรับทำเป็นบทเรียน ที่ให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปจากการสังเกตหรืออาศัยวิธีอุปมา และเมื่อนำมาใช้ร่วมกับสื่อที่ให้ทั้งภาพและเสียงจะยิ่งทำให้นักเรียนจดจำภาพและคำบรรยายได้มากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ บราวน์เลย์ (Brawley. 1975 : 4280-A) และผลการวิจัยของกิลเบิร์ต (Gilbert. 1974 : 5589-A) ซึ่งพบว่าการสอนโดยใช้สื่อประสมทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และนักเรียนได้รับความสนุกสนานในขณะที่เรียนจากการทำกิจกรรมต่าง ๆ มากกว่าการเรียนโดยฟังครูบรรยายเท่านั้น นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลการศึกษาของ คอเนย์ และ มิเชล (Corney and Micheal. 1973 : 17-19) ได้ทดลองใช้ชุดการเรียนด้วยตนเองแบบสื่อประสมกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่า ผลการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ในการศึกษาคครั้งนี้และผลการวิจัยอื่น ๆ ที่กล่าวมาแล้วทำให้สรุปได้ว่า การสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดีกว่าการสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

2. ผลการศึกษาค้นความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม พบว่าแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 เมื่อพิจารณาตาราง 2 ตาราง 3 และตาราง 4 ซึ่งแสดงคะแนนเฉลี่ยของผลการสอบหลังการทดลองและความคงทนในการเรียนรู้หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์ พบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มควบคุมเพิ่มขึ้น แต่ระดับคะแนนเฉลี่ย ทั้งสามกลุ่มคงเดิม คือเรียงจากกลุ่มทดลองที่ 2 สูงสุด กลุ่มทดลองที่ 1 รองลงมา และกลุ่มควบคุมเป็นอันดับสุดท้าย แต่เป็นที่น่าสังเกตว่ากลุ่มควบคุมซึ่งเดิมมีคะแนนเฉลี่ยเป็น 23.800 คะแนนเฉลี่ย อันเป็นผลของการทดสอบความคงทนในการเรียนรู้หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์

เป็น 24.050 และ 25.800 ตามลำดับ ผู้วิจัยได้สืบหาข้อมูลเพื่ออธิบายการเพิ่มของคะแนนในครั้งนี้พบว่า ในช่วงเวลาดังกล่าวนักเรียนอ่อนเตรียมดูหนังสือสอบซ่อม ประกอบกับการทดลองความคงทนในการเรียนรู้นั้น ผู้วิจัยได้ใช้แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิต ซึ่งนักเรียนอาจจะจำใจห้อย หรือวิธีการคิดได้ ดังนั้นคะแนนการเพิ่มนี้จึงเป็นผลมาจากการเตรียมตัวของนักเรียนดังกล่าวและการจำข้อสอบได้ ซึ่งอยู่นอกเหนือการควบคุมของผู้วิจัย

ผลการศึกษานี้สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ ประยงค์ นาโค (ประยงค์ นาโค 2527 : 73) ซึ่งพบว่า การสอน 3 แบบได้แก่การเรียนเป็นคณะ การเรียนด้วยบทเรียนโปรแกรม และการเรียนตามปกติ ให้ความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนแตกต่างกัน อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และยังสอดคล้องกับผลงานวิจัยของทรงศักดิ์ นิธิปรีชา (ทรงศักดิ์ นิธิปรีชา 2523 : 73) พบว่าการสอนโดยการค้นพบและการบรรยายทำให้นักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ข้อสังเกตบางประการจากการศึกษาค้นคว้า

1. จากการวิจัยพบว่านักเรียนให้ความสนใจต่อการเรียนการสอนโดยใช้บทเรียนสื่อประสมเป็นอย่างดี ขณะที่นักเรียนในกลุ่มควบคุมบางคนขาดความกระตือรือร้นและความสนใจในการเรียน
2. นักเรียนบางคนเกิดความเบื่อหน่ายในขณะศึกษาจากบทเรียนโปรแกรม แต่เมื่อได้ดูแผ่นโปร่งใส และฟังเทปเสียงจะมีความสนใจในการจดบันทึกมากขึ้น
3. แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง แม้ว่าค่าใช้จ่ายในการผลิตค่อนข้างสูง แต่ก็สะดวกในการใช้ประกอบการสอน ทั้งยังเป็นการประหยัดเวลาและแรงงานของครูผู้สอนได้มาก

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยพบว่า นักเรียนมีความสนใจในการเรียนการสอน

ด้วยบทเรียนสื่อประสมมาก โดยเฉพาะบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมเพราะนักเรียนได้ลงมือ
กระทำด้วยตนเองทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่าย ดังนั้นครูผู้สอนควรนำเสนอเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์
ที่เหมาะสมอื่น ๆ มาสร้างเป็นบทเรียนปฏิบัติการให้นักเรียนใช้แทนการสอนแบบบรรยายหรือ
สาธิต ตลอดจนศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมในเรื่อง วิธีสอนที่ใช้สื่อประสม การทดลองสร้าง
สื่อการสอนด้วยตนเอง แล้วนำไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ร่วมกับเทคนิคการสอนแบบอื่น ๆ
เพราะสื่อการสอนแต่ละอย่างอาจเหมาะกับบางเนื้อหา และบางท้องถิ่นเท่านั้น

1.2 ควรส่งเสริมให้มีการสร้างสื่อการเรียนการสอนหลาย ๆ ชนิดมาใช้ใน
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น โดยเฉพาะการนำวัสดุที่หาได้ง่าย และราคาถูกมาประยุกต์ใช้เป็น
สื่อการเรียนการสอน เพราะการสอนโดยใช้บทเรียนสื่อประสมทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
สูงขึ้นซึ่งจะช่วยลดปัญหาการสอนซ่อมเสริมได้มาก ผู้บริหารควรสนับสนุนให้ครูผู้สอนได้เข้ารับ
การอบรมและศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมในการผลิตและการใช้สื่อการสอนให้ได้ประโยชน์สูงสุด
จากหน่วยงานของรัฐหรือเอกชนที่จัดขึ้น

1.3 สำหรับกลุ่มโรงเรียน ควรมีโครงการผลิตสื่อการสอนไว้เป็นผลงาน
ของกลุ่ม และปรับปรุงสื่อการสอนนั้นให้มีประสิทธิภาพ เหมาะแก่การนำไปใช้ยิ่งขึ้น แล้ว
จัดเป็นหมวดหมู่ เพื่อครูประจำการจะได้้นำไปใช้ได้อย่างสะดวกภายในกลุ่มโรงเรียนเดียวกัน

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าครั้งต่อไป

2.1 ควรทดลองใช้บทเรียนสื่อประสมทั้งสองแบบนี้กับกลุ่มตัวอย่างอื่น ๆ

2.2 ควรมีการศึกษาค้นคว้าของบทเรียนสื่อประสมทั้งสองแบบนี้ที่มีอิทธิพลต่อ
การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับสติปัญญาแตกต่างกัน

2.3 ควรมีการศึกษาค้นคว้าการใช้บทเรียนสื่อประสมทั้งสองแบบนี้กับวิธีสอนอื่น

2.4 ควรศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาและพัฒนาความคิดวิชา
คณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสื่อประสมกับวิธีสอนอื่น

—
အဘယျသော

บรรณานุกรม

- กัญญา โพธิ์วัฒน์ การทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมกับนักเรียนที่มีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน ปรินิพนธ์ ค.บ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523, 81 หน้า อักสำเนา
- กาญจนา เกียรติประวัติ นวัตกรรมการทางการศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ม.ป.ป. 216 หน้า อักสำเนา
- ✓จาวรวรรณ แสงทอง การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องคู่ลำดับและกราฟ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมและสื่อสำเร็จรูปแบบผสม ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523, 141 หน้า อักสำเนา
- ✓ชวาล แพร่สกุล เทคนิคการวัดผล พิมพ์ครั้งที่ 5 วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า
- ชัยพร วิชาวุธ จิตวิทยาประสบการณ์ โรงพิมพ์สารมวลชนจำกัด 2520, 118 หน้า
- ✓ชัยยงค์ พรหมวงศ์ เทคโนโลยีทางการศึกษา แผนกโสตทัศนศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2519, 25 หน้า
- ✓ไชยยศ เรืองสุวรรณ หลักและทฤษฎีทางเทคโนโลยีทางการศึกษา แผนกคำสอน ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พินิจโลก 2521, 284 หน้า
- ✓ทรงศักดิ์ นิธิปริชา การศึกษากลวิธีที่แตกต่างกันในการสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันสำหรับนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงวิทยาลัยครูบุรีรัมย์ วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 2523, 192 หน้า อักสำเนา
- นิรมล แจ่มจำรัส การศึกษาชุดการเรียนคณิตศาสตร์ที่สร้างสำหรับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 2521, 253 หน้า อักสำเนา
- ✓บัณฑิต กลิ่นเกษร การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนป.กศ.ต้น ที่เรียนโดยครูสอนปกติและที่เรียนจากชุดปฏิบัติการทดลอง ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 84 หน้า อักสำเนา

- ✓บุญเจติ ภูมิกุญชร การวัดและประเมินผลการศึกษา ทฤษฎีและการประยุกต์
 ภาควิชาพื้นฐาน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
 2521, 420 หน้า อักสำเนา
- ✓ปัทมา เขียววิศิษฐ์ การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยวิธีสอนแบบปฏิบัติการ ปรินญาณพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย
- ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2526, 160 หน้า อักสำเนา
- ✓ประพันธ์ ผัสกรีน การศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนเรขาคณิตชั้นประถมศึกษาปีที่ 6
โดยใช้เครื่องฉายภาพโปร่งใส กับภาพยนตร์ 8 ม.ม. พิเศษ ปรินญาณพนธ์ กศ.ม.
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 52 หน้า อักสำเนา
- ✓ประยงค์ นาโค ผลการสอน 3 แบบที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเป็นผู้นำ
และความคงทนในการเรียนรู้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปรินญาณพนธ์ กศ.ม.
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2527, 73 หน้า อักสำเนา
- ประสาธ อิศรปริศา จิตวิทยาการศึกษา กราฟิการ์ต 2521, 154 หน้า
- ปรีชา เน่าเย็นผล การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ ปรินญาณพนธ์
- กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 50 หน้า อักสำเนา
- เปรี๊ญ ภูมิ เทคนิคการเขียนบทเรียนโปรแกรม ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา
- คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 134 หน้า
- พรรณทิพย์ ม้ามณี การสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ระดับมัธยมศึกษา สารศึกษากาการพิมพ์
- 2520, 105 หน้า
- พรรณิ โสระโร ผลของการให้เพื่อนช่วยสอนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติ
ต่อคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนรู้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรินญาณพนธ์
- กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2527, 172 หน้า อักสำเนา
- ไพโรจน์ เบาใจ A Hand Book for Program Text Writing ภาควิชาเทคโนโลยี
- ทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520, 105 หน้า
- ยุพิน พิพิธกุล การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์
- จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523, 514 หน้า

✓ วิวรรณ เทนอิสสระ การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนปกติ ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2522, 43 หน้า อัดสำเนา

✓ ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ หลักการวิจัยทางการศึกษา ศึกษาพร 2528, 314 หน้า

✓ ลาวลีย์ พลกล้า การสอนคณิตศาสตร์แบบปฏิบัติการ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523, 119 หน้า

✓ วรรณา เณลิพรังค์ การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความรู้พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยวิธีสอนแบบปฏิบัติการ ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2526, 107 หน้า อัดสำเนา

วิชาการ, กรม กอ การวิจัยทางการศึกษา "การประเมินผลการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พ.ศ. 2521 ในปีการศึกษา 2522" วารสารการวิจัยทางการศึกษา 1 : 82-88

มีนาคม 2523

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว 2524, 175 หน้า

----- แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว 2524, 112 หน้า

✓ สมชาย แสงทอง การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการแจกแจงความถี่และค่ากลางของข้อมูล โดยใช้บทเรียนโปรแกรมและแผ่นโปร่งใส ประกอบเทปเสียง ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2524, 1 เล่ม อัดสำเนา

สุเทพ จันทรสมศักดิ์ และคณะ แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 412 ไทยวัฒนาพานิช 2520, 266 หน้า

✓ สุพจน์ ไชยสังข์ การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์เรื่องความน่าจะเป็นแก่นักศึกษา ชั้น ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 82 หน้า อัดสำเนา

✓ สุพร อุทรานันท์ การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาภาษาอังกฤษทักษะการอ่าน
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยการสอนที่ใช้บทเรียนสื่อประสมกับการสอนโดยครู
เป็นศูนย์กลาง ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
2527, 236 หน้า อักสำเนา

สุภา ฤชกุล "Programmed Instruction" ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและ
เทคโนโลยีทางการศึกษา หน้า 162 กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ 2517

✓ สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องเมทริกซ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้กับการ
ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523,
อักสำเนา

เสียง ชูสกุล การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา

ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์จากการเรียนเป็น

และการเรียนตามแผนการสอน สสวท.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 180 หน้า อักสำเนา

อารี สันหลวี่ การวิจัยและการพัฒนาสื่อการเรียนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา วิทยานิพนธ์
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523, 105 หน้า อักสำเนา

อุทัย บุญประเสริฐ "เทคโนโลยีทางการศึกษา" บัณฑิตวิทยาลัย 1 : 80 มกราคม -
มิถุนายน 2517

อุไรวรรณ อินทรีย์ "จะจัดการศึกษาเพื่อสนองความต้องการของบุคคลได้อย่างไร" ศึกษาศาสตร์
1 : 26-28 มกราคม - เมษายน 2520

Adams, Jack A. Human Memory. New York, McGraw-Hill Book Company, 1976.
234 p.

✓ Batcheder, Howard T. Audio Visual Material in Teaching Education.
3rd. ed., New York, McGraw-Hill, 1956. 400 p.

✓ Beck, Marilyn Chark, "A Comparative Analysis of Three Method of Teaching
Remidial Algebra on the Junior College Lever," Dissertation Abstracts.
13(12) : 6270-A, June, 1971.

- ✓ Blount, Morris Alonzo, "Effect of Recycling Laboratory on Attitude Toward and Achievement of Mathematic among College Freshmen," Dissertation Abstracts. 41(5) : 1990-A, November, 1980.
- ✓ Brawley, Oletha Daniels, "A Study Evaluation the Effort of Using Multimedia Instructional Modules to Teach Time Telling to Retard Learners," Dissertation Abstracts. 35 : 4280-A, January, 1975.
- ✓ Brooks, Webster Terrell, "An Experimental Analysis of the Effectiveness of Overhead Transparencies Learning and Retentional (in Selected United) in Beginning Woodworking," Dissertation Abstracts. 25(10) : 5779-5780-A, April, 1965.
- Calvin, Allen D. "Programmed Instruction : Bold New Venture." Indiana University Press, Bloomington and London, 1969. 250 p.
- ✓ Carmichael, John H. and Jacqueline Griffin, "The Use of Media in Teaching Remedial Composition," Audio-Visual Instruction. 15 : 12-23, April, 1970.
- ✓ Carpenter, C. R. "Psychological Concepts and Audio-Visual Instruction," A. V. Communication Review. 5 : 361-369, Winter, 1957.
- ✓ Chance, Clayton William, "Experimentation in Adaptation of Overhead Projector Utilizing 200 Transparencies and 800 Overlays in Teaching Engineering, Descriptive Geometry Curriculum," Audio-Visual Communication Review. 9 : 17-18, July - August, 1961.
- ✓ Cooney, Thomas J., Devis J., and Others., Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics. Boston, 1975. 462 p.
- ✓ Copeland, Richard W. How Children Learn Mathematics. New York, Macmillan, 1974. 374 p.
- Coppon, M. J. "The Development and Evaluation of Individualized Mastery Programmed in Mathematics for Low Ability Secondary School Student," New Zealand Journal of Education Studies. 11 : 131-142, November, 1976.
- ✓ Corney Jeffrey R. and James S. Micheal, "Retention in ASPI. Instructory Psychology Course," Learning Package in American Education. Englewood Cliff, New Jersey, Educational Teachnology Publication, 1973. 233 p.
- ✓ Corwin, Vera-Anne Whittier Versfelt, "A Comparision of Learning Geometry With or Without Laboratory Activities Using Manipulature Adis and Paper Folding Techniques," Dissertation Abstracts. 38(11) : 6584-6585-A, May, 1978.
- ✓ De Kieffer, Robert E. and Lee W. Cocran, Manual of Audio-Visual Techniques. Englewood Cliff, New Jersey, Princeton-Hall, 1966. 220 p.
- Dunn, Rita Stafford, Practical Approaches to Individualizing Instruction : Contracts and Other Effective Teaching Strategies. New York, Paker, 1972. 245 p.

- Elkin, F. S. "An Instructor + Behavior + Objective + Multimedia = Success." Audio-Visual Instruction. 15 : 19-21, January, 1970.
- Gagne, Robert H. The Condition of Learning. 2 nd. ed., New York, Holt Rinehart and Winston Inc., 1970. 409 p.
- ✓ Gilbert, Robert Kenedy, "A Comparision of Three Instructional Approaches Using Manipulative Devices in Third Grade Mathematics," Dissertation Abstracts. 33 : 5589-A, February, 1974.
- ✓ Good, Carter V. Dictionary of Education. 3 rd. ed., New York, McGraw-Hill Book Company Inc., 1973. 681 p.
- Knowlton, James Q. A Socio and Psycho Linguistic Theory of Pictorial Communication. New York, McGraw-Hill, 1964. 880 p.
- ✓ Monior, Mohammad Ibrahim, "Some Effects of An Activity Approach to Teaching Geometry in The High School in Afganistan," Dissertation Abstracts. 5 : 2630-2631-A, November, 1977.
- ✓ Perberg, Arye and Micheal Resh, "Evaluation of The Effectiveness of The Overhead Projector in Descriptive Geometry and Hydrology." The Journal of Educational Research. 61 : 1, November, 1967.
- Pereira, P. D. Instruction to Programmed Learning. Management Development Branch, Human Resources Department, Geneva, 1971. 65 p.
- ✓ Schultz, Morton J. The Teacher and Overhead Projection a Triasury of Ideas, Use and Teachnique. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965. 240 p.
- ✓ Scuorzo, Herbert E. The Practical Audio-Visual Handbook for Teacher. New York, Parker Publishing Co., 1967. 211 p.
- Stone, James Lenious Jr. "The Effect of Individualized Learning Activity Package in Mathematics on the Academic Achievement of Seventh and Eighth Grade Students in the Demopoliscity School," Dissertation Abstracts. 36 : 619-A, August, 1974.
- Swanson, David H. "A Comparison of Feedback System Affecting Achievement in Mastery Learning," Dissertation Abstracts. 37(3) : 1381-A, September, 1976.
- Williams Delbert Richard, "A Comparison of Two Methods of Mathematics Instruction," Dissertation Abstracts. 36 : 7920-A, September, 1976.
- ✓ Wittich Walter Arno and Schuller Charles Francis, Audio-Visual Materials Their Nature and Use. 3 rd. ed., New York, Happer Raw Publish, Invorperated, 1973. 554 p.

អរណ្តចារ

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 9 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคทศกรวย

ข้อ	p	r	ข้อ	p	r	ข้อ	p	r
1	.74	.44	18	.51	.69	35	.73	.25
2	.65	.31	19	.60	.25	36	.73	.38
3	.56	.63	20	.60	.31	37	.78	.31
4	.48	.63	21	.56	.31	38	.68	.25
5	.63	.38	22	.78	.25	39	.63	.25
6	.53	.36	23	.70	.36	40	.55	.25
7	.50	.44	24	.44	.50	41	.38	.25
8	.76	.25	25	.73	.56	42	.40	.25
9	.64	.25	26	.30	.44	43	.78	.38
10	.56	.31	27	.58	.25	44	.25	.44
11	.55	.25	28	.44	.44	45	.30	.25
12	.43	.63	29	.58	.31	46	.54	.38
13	.40	.56	30	.44	.25	47	.44	.69
14	.50	.63	31	.44	.62	48	.48	.81
15	.46	.88	32	.46	.25	49	.30	.56
16	.66	.38	33	.81	.25	50	.38	.44
17	.46	.44	34	.80	.31			

ตาราง 10 แสดงค่า p ค่า q และค่า pq ของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคทศกรวย

ข้อ	p	q=1-p	pq	ข้อ	p	q=1-p	pq	ข้อ	p	q=1-p	pq
1	.78	.22	.17	18	.41	.59	.24	35	.56	.44	.25
2	.78	.22	.17	19	.36	.64	.23	36	.56	.44	.25
3	.63	.37	.23	20	.34	.66	.22	37	.53	.47	.25
4	.56	.44	.25	21	.28	.72	.20	38	.25	.75	.19
5	.78	.22	.17	22	.31	.69	.21	39	.31	.69	.21
6	.69	.31	.21	23	.59	.41	.24	40	.25	.75	.19
7	.59	.41	.24	24	.50	.50	.25	41	.25	.75	.19
8	.44	.56	.25	25	.59	.41	.24	42	.31	.69	.21
9	.56	.44	.25	26	.78	.22	.17	43	.31	.69	.21
10	.28	.72	.20	27	.56	.44	.25	44	.36	.64	.22
11	.63	.37	.23	28	.34	.66	.22	45	.56	.44	.25
12	.50	.50	.25	29	.41	.59	.24	46	.78	.22	.17
13	.47	.53	.25	30	.25	.75	.19	47	.59	.41	.24
14	.56	.44	.25	31	.38	.62	.24	48	.53	.47	.25
15	.50	.50	.25	32	.31	.69	.21	49	.53	.47	.25
16	.25	.75	.19	33	.38	.62	.24	50	.47	.53	.25
17	.34	.66	.22	34	.28	.72	.20				

$$\sum pq = 11.19$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \left[\frac{s_t^2 - pq}{s_m^2 - pq} \right] \cdot \frac{s_m^2}{s_t^2} \\
 &= \left[\frac{127.15 - 11.19}{395.65 - 11.19} \right] \cdot \frac{395.65}{127.15} \\
 &= 0.94
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องภาคตัดกรวยฉบับนี้
มีค่าเท่ากับ 0.94

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 s_e &= s \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= 11.28 \sqrt{1 - 0.94} \\
 &= (11.28) (0.245) \\
 &= 2.762
 \end{aligned}$$

ตาราง 11 คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนเรื่อง ภาคทศกรวย ของกลุ่มทดลองที่ 1

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)				เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)			
	ภาคเรียน ที่ 1 (Y)	X_1	X_2	X_3		ภาคเรียน ที่ 1 (Y)	X_1	X_2	X_3
1	26	27	31	35	21	36	35	26	31
2	37	41	42	46	22	16	21	15	19
3	34	30	39	39	23	22	32	35	39
4	22	27	39	42	24	22	25	23	27
5	27	37	46	50	25	19	25	23	23
6	25	33	19	23	26	14	25	27	31
7	22	34	23	27	27	12	19	19	16
8	23	29	23	27	28	30	27	23	27
9	20	33	15	19	29	26	30	15	19
10	22	19	15	19	30	17	25	31	35
11	11	25	15	16	31	20	28	27	31
12	21	24	19	19	32	19	21	23	23
13	20	19	23	19	33	26	25	27	23
14	28	36	39	42	34	14	24	46	31
15	17	18	23	23	35	31	35	39	50
16	25	26	27	23	36	21	22	35	35
17	31	33	39	42	37	20	26	15	31
18	18	26	19	19	38	9	24	39	19
19	25	26	19	23	39	13	22	23	27
20	19	18	23	23	40	31	30	30	42

$$\bar{Y} = 22.275 \quad \bar{X}_1 = 27.050 \quad \bar{X}_2 = 26.975 \quad \bar{X}_3 = 28.875$$

ตาราง 12 คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ภาคทศกรวย ของกลุ่มทดลองที่ 2

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)				เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)			
	ภาคเรียนที่ 1 (Y)	x_1	x_2	x_3		ภาคเรียนที่ 1 (Y)	x_1	x_2	x_3
1	28	39	23	23	21	15	15	8	27
2	25	23	31	35	22	12	20	46	4
3	39	39	39	42	23	12	19	27	42
4	29	36	31	35	24	18	34	19	31
5	19	39	27	31	25	32	35	23	23
6	34	22	19	23	26	27	27	23	27
7	22	39	23	27	27	21	32	27	27
8	40	43	42	46	28	17	33	15	31
9	23	32	15	16	29	20	35	27	16
10	29	36	27	31	30	29	32	19	31
11	16	22	15	19	31	12	37	19	16
12	27	22	19	23	32	24	29	23	23
13	20	40	23	27	33	14	31	23	23
14	32	38	27	27	34	19	26	35	27
15	22	38	27	31	35	24	37	50	23
16	18	36	35	23	36	23	29	42	39
17	30	35	37	39	37	33	37	23	46
18	22	43	39	31	38	26	39	15	42
19	26	42	15	42	39	15	29	40	27
20	10	16	31	16	40	15	28	41	12

$$\bar{Y} = 22.725$$

$$\bar{x}_1 = 31.950$$

$$\bar{x}_2 = 27.250$$

$$\bar{x}_3 = 28.100$$

ตาราง 13 คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ภาควัสดุทราย ของกลุ่มควบคุม

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)				เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)			
	ภาคเรียนที่ 1 (Y)	x_1	x_2	x_3		ภาคเรียนที่ 1 (Y)	x_1	x_2	x_3
1	23	18	15	19	21	17	19	19	23
2	30	20	15	19	22	21	24	19	23
3	22	25	27	23	23	20	20	27	27
4	29	20	23	19	24	26	25	23	27
5	17	25	23	19	25	26	23	23	27
6	23	28	31	27	26	20	29	30	27
7	27	23	35	39	27	17	26	19	16
8	23	23	31	35	28	23	29	27	31
9	19	18	31	35	29	20	29	31	35
10	19	25	23	23	30	29	31	27	31
11	20	22	27	27	31	31	30	35	39
12	24	22	27	23	32	17	22	19	23
13	24	22	31	27	33	16	31	11	16
14	11	22	4	8	34	14	25	15	19
15	14	20	27	31	35	14	24	23	23
16	23	22	27	31	36	19	23	11	23
17	22	26	27	31	37	15	27	19	19
18	19	17	27	31	38	26	28	35	16
19	19	17	23	27	39	26	30	23	23
20	20	20	27	31	40	20	22	25	39

$$\bar{Y} = 19.250 \quad \bar{x}_1 = 23.800 \quad \bar{x}_2 = 24.050 \quad \bar{x}_3 = 25.850$$

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ภาคศึกษารว

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องภาคตัดกรวย

คำอธิบายวิธีตอบแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบนี้มีข้อสอบจำนวน 50 ข้อ ใช้เวลาในการตอบ 2 ชั่วโมง
2. คำถามทั้งหมดเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงคำตอบเดียว โดยกาเครื่องหมาย **x** ลงในช่องสี่เหลี่ยมใต้ตัวอักษรในกระดาษคำตอบดังนี้

ก.	ข.	ค.	ง.	จ.
☐	☐	☒	☐	☐

3. ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ค เป็น ง ให้ทำดังนี้

ก.	ข.	ค.	ง.	จ.
☐	☐	☒	☒	☐

4. ห้ามทำเครื่องหมายหรือขีดเขียนสิ่งใด ๆ ลงในแบบทดสอบ และห้ามลอกนอกห้องสอบ

5. ถ้านักเรียนมีข้อสงสัยให้ถามกรรมการคุมสอบ

1. สมการของกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 0)$ และรัศมียาว $\sqrt{13}$ หน่วย คือข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 2x - 12 = 0$

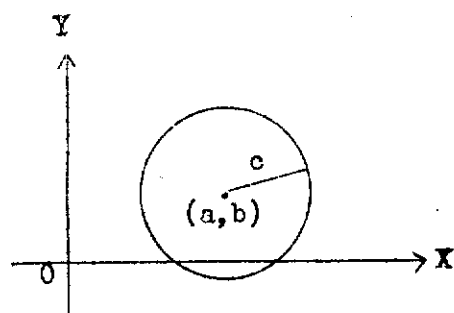
ง. $x^2 + y^2 - 2x - 14 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$

จ. $x^2 + y^2 + 2x - 14 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x + 12 = 0$

2.



สมการของกราฟวงกลมในรูปคือข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + c^2 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - c^2 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - a^2 - b^2 - c^2 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2bx + 2ay + a^2 + b^2 + c^2 = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 2bx - 2ay + a^2 + b^2 - c^2 = 0$

3. สมการของวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางที่จุด $(3, 2)$ และ $(1, 4)$ คือข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$

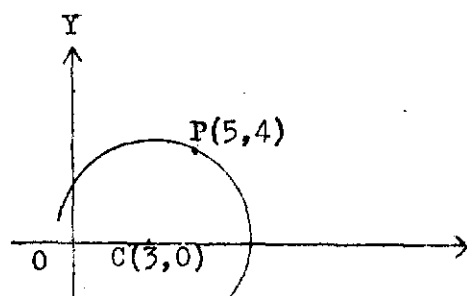
ข. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 11 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 11 = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$

4.



สมการของกราฟวงกลมในรูปข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 6x + 11 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 6x - 29 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 6x - 29 = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 6y - 11 = 0$

5. วงกลมที่มีจุด $(-1, -1)$ เป็นจุดศูนย์กลางและมีพื้นที่ 4π ตารางหน่วย มีสมการดังข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

6. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 3)$ และกราฟสัมผัสกับเส้นตรง $x = 4$ คือข้อใด

ก. $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 6y + 7 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 6y - 25 = 0$

จ. $x^2 + y^2 + 6y - 25 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

7. ความสัมพันธ์ของกราฟวงกลม $\{(x, y) / x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0\}$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมทั้งข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 2

ง. จุดศูนย์กลาง $(1, -3)$ รัศมี 4

ข. จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 2

จ. จุดศูนย์กลาง $(3, 1)$ รัศมี 4

ค. จุดศูนย์กลาง $(-1, 3)$ รัศมี 2

8. จุดตัดของสมการ $x + y = 1$ และ $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ คือข้อใด

ก. $(1, 0)$ และ $(-1, 2)$

ง. $(-1, 2)$ และ $(1, -2)$

ข. $(1, 0)$ และ $(2, -1)$

จ. $(1, 0)$ และ $(-3, -2)$

ค. $(-1, 2)$ และ $(2, -1)$

9. วงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ สัมผัสกับกราฟวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ ที่จุดใด

ก. $(2, 2)$

ง. $(0, 2)$ และ $(2, 2)$

ข. $(2, 0)$

จ. $(2, 0)$ และ $(2, 2)$

ค. $(0, 2)$

10. กราฟวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 3x - 1 = 0$ ผ่านจุดใด

ก. $(0, 1)$ และ $(0, 3)$

ง. $(3, 1)$ และ $(3, -1)$

ข. $(0, 1)$ และ $(0, -1)$

จ. $(3, 1)$ และ $(-3, -1)$

ค. $(3, 1)$ และ $(-3, 1)$

11. สมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 = 13$ สมการเส้นสัมผัสวงกลมนี้ที่จุด $(2, 3)$ คือข้อใด

ก. $2y - 3x = 0$

ง. $3y + 2x = 13$

ข. $2y + 3x = 12$

จ. $3x - 2y = 13$

ค. $3y - 2x = 0$

ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 12-13

ก. $y^2 + 12x = 0$

ง. $x^2 - 12y = 0$

ข. $y^2 - 12x = 0$

จ. ไม่มีคำตอบข้อใดถูกต้อง

ค. $x^2 + 12y = 0$

12. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ และกราฟเปิดล่าง คือข้อใด

13. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ มีแกน x เป็นแกนสมมาตร และกราฟเปิดทางซ้ายมือ คือข้อใด

ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 14-15

ก. $x^2 = 24y$

ง. $y^2 = -24x$

ข. $x^2 = -24y$

จ. ไม่มีคำตอบข้อใดถูกต้อง

ค. $y^2 = 24x$

14. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ และสมการไครเรกตริกซ์คือ $x = 6$ คือข้อใด

15. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ และสมการไครเรกตริกซ์คือ $y = -3$ คือข้อใด

16. พาราโบลาที่มีสมการ $y^2 + 4x = 4$ มีจุดยอดและจุดโฟกัสตั้งข้อใด

ก. จุดยอด $(0, -1)$ โฟกัส $(-1, -1)$ ง. จุดยอด $(0, 1)$ โฟกัส $(0, 0)$

ข. จุดยอด $(-1, 0)$ โฟกัส $(0, 0)$ จ. จุดยอด $(-1, 0)$ โฟกัส $(-2, 0)$

ค. จุดยอด $(0, -1)$ โฟกัส $(1, -1)$

17. พาราโบลาที่มีสมการ $(y - 3)^2 = -8(x + 1)$ มีจุดยอดและโฟกัสตั้งข้อใด

ก. จุดยอด $(-1, 3)$ โฟกัส $(-1, 1)$ ง. จุดยอด $(-1, 3)$ โฟกัส $(1, 3)$

ข. จุดยอด $(-1, 3)$ โฟกัส $(-3, 3)$ จ. จุดยอด $(3, -1)$ โฟกัส $(5, -1)$

ค. จุดยอด $(3, -1)$ โฟกัส $(1, -1)$

ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 18-19

ก. $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

ง. $y^2 - 2y - 4x - 3 = 0$

ข. $x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

จ. $y^2 + 4y - 8x + 20 = 0$

ค. $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

18. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(1, 1)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(0, 1)$ มีสมการตั้งข้อใด

19. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(1,1)$ และสมการไคเรกตริกซ์คือ $y = 0$ มีสมการดังข้อใด
ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 20-21

ก. $x^2 - 2x + 8y - 15 = 0$

ง. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

ข. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$

จ. $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$

ค. $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$

20. พาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x = 1$ สมการไคเรกตริกซ์คือ $y = 4$ โฟกัสอยู่ห่างจากเส้นไคเรกตริกซ์ 4 หน่วย และกราฟเปิดข้างจะมีสมการดังข้อใด

21. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดและโฟกัสอยู่ห่างกัน 2 หน่วย ซึ่งทั้งสองจุดนั้นอยู่บนเส้นตรง $y = 2$ สมการไคเรกตริกซ์คือ $x = -2$ และกราฟเปิดทางขวามือคือข้อใด

22. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(1,2)$ กราฟผ่านจุด $(0,0)$ และกราฟเปิดทางซ้าย มีสมการดังข้อใด

ก. $y^2 - 4y + 4x = 0$

ง. $x^2 - 4x + 4y = 0$

ข. $y^2 - 4y - 4x = 0$

จ. $2x^2 - 4x + y = 0$

ค. $2y^2 - 4y + x = 0$

23. วงรีที่มีสมการ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ มีจุดยอดและโฟกัสดังข้อใด

ก. จุดยอด $(-3,0)$ และ $(3,0)$ โฟกัส $(-2,0)$ และ $(2,0)$

ข. จุดยอด $(-3,0)$ และ $(3,0)$ โฟกัส $(-4,0)$ และ $(4,0)$

ค. จุดยอด $(0,-3)$ และ $(0,3)$ โฟกัส $(0,-2)$ และ $(0,2)$

ง. จุดยอด $(0,-3)$ และ $(0,3)$ โฟกัส $(-4,0)$ และ $(4,0)$

จ. จุดยอด $(0,-3)$ และ $(0,3)$ โฟกัส $(-4,0)$ และ $(4,0)$

24. จุดยอดและโฟกัสของวงรีที่มีสมการ $y^2 + 16x^2 = 16$ คือข้อใด

ก. จุดยอด $(\pm 4,0)$ โฟกัส $(\pm\sqrt{5},0)$ ง. จุดยอด $(0,\pm 4)$ โฟกัส $(0,\pm\sqrt{15})$

ข. จุดยอด $(\pm 4,0)$ โฟกัส $(0,\pm\sqrt{5})$ จ. จุดยอด $(0,\pm 4)$ โฟกัส $(\pm\sqrt{15},0)$

ค. จุดยอด $(\pm 4,0)$ โฟกัส $(0,\pm\sqrt{15})$

25. วงรีที่มีสมการ $9x^2 + 36y^2 = 324$ มีความยาวแกนเอกและแกนโทตามลำดับข้อใด

- ก. แกน x เป็นแกนเอกยาว 9 หน่วย แกน y เป็นแกนโทยาว 6 หน่วย
- ข. แกน x เป็นแกนเอกยาว 12 หน่วย แกน y เป็นแกนโทยาว 6 หน่วย
- ค. แกน x เป็นแกนเอกยาว 16 หน่วย แกน y เป็นแกนโทยาว 10 หน่วย
- ง. แกน x เป็นแกนเอกยาว 12 หน่วย แกน y เป็นแกนโทยาว 10 หน่วย
- จ. แกน y เป็นแกนเอกยาว 16 หน่วย แกน x เป็นแกนโทยาว 10 หน่วย

26. กราฟวงรีที่ตัดแกน x ที่จุด $(\pm 7, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, \pm 5)$ มีสมการข้อใด

- ก. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
- ข. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
- ค. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- ง. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$
- จ. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

27. กราฟวงรีที่มีแกน y เป็นแกนเอกยาว 8 หน่วย แกนโทสั้นกว่าแกนเอก 2 หน่วย มีสมการเป็นข้อใด

- ก. $4x^2 + 9y^2 = 36$
- ข. $16x^2 + 9y^2 = 144$
- ค. $9x^2 + 4y^2 = 36$
- ง. $16y^2 + 9x^2 = 144$
- จ. $4x^2 + 16y^2 = 64$

28. วงรีที่มีสมการ $7(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 112$ มีจุดยอดและโฟกัสข้อใด

- ก. จุดยอด $(-5, 2)$ และ $(3, 2)$ โฟกัส $(-4, 2)$ และ $(1, 2)$
- ข. จุดยอด $(-4, 2)$ และ $(2, 2)$ โฟกัส $(-5, 2)$ และ $(3, 2)$
- ค. จุดยอด $(-5, 2)$ และ $(3, 2)$ โฟกัส $(-4, 2)$ และ $(2, 2)$
- ง. จุดยอด $(-1, 5)$ และ $(-1, -2)$ โฟกัส $(-1, 4)$ และ $(-1, -1)$
- จ. จุดยอด $(-1, 6)$ และ $(-1, -3)$ โฟกัส $(-1, 4)$ และ $(-1, -1)$

ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 29-31

- ก. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
- ข. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 23 = 0$
- ค. $9x^2 + 4y^2 + 18x + 8y - 23 = 0$
- ง. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$
- จ. ไม่มีคำตอบข้อใดถูกต้อง

29. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(1,1)$ แกนเอกขนานกับแกน Y ยาว 6 หน่วย และแกนโทยาว 4 หน่วยคือข้อใด
30. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(1,1)$ แกนเอกขนานกับแกน X ยาว 6 หน่วย และแกนโทยาว 4 หน่วยคือข้อใด
31. สมการวงรีที่มีจุดยอดที่ $(0,1)$ และ $(6,1)$ โดยมีแกนโทยาว 4 หน่วย คือข้อใด
32. จุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น $5x^2 + y^2 + 30x - 4y + 44 = 0$ คือข้อใด
- ก. จุดศูนย์กลาง $(3,-2)$ โฟกัส $(1,-2)$ และ $(5,-2)$
- ข. จุดศูนย์กลาง $(3,-2)$ โฟกัส $(3,0)$ และ $(3,-4)$
- ค. จุดศูนย์กลาง $(-3,2)$ โฟกัส $(-3,4)$ และ $(-3,0)$
- ง. จุดศูนย์กลาง $(-3,2)$ โฟกัส $(-5,2)$ และ $(-1,2)$
- จ. จุดศูนย์กลาง $(2,-3)$ โฟกัส $(2,-1)$ และ $(2,-5)$
33. วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,2)$ โฟกัสที่ $(-1,2)$ และ $(1,2)$ จุดยอดอยู่ที่ $(-2,2)$ และ $(2,2)$ มีสมการทั้งข้อใด
- ก. $3x^2 + 4(y-2)^2 = 12$ ง. $4(x-2)^2 + 3y^2 = 12$
- ข. $4x^2 + 3(y-2)^2 = 12$ จ. $4(x-1)^2 + 3y^2 = 12$
- ค. $3(x-2)^2 + 4y^2 = 12$

ใช้สมการของกราฟไฮเพอร์โบล่าต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 34-35

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

34. จุดยอดและโฟกัสของกราฟคือข้อใด
- ก. จุดยอด $(0, \pm 2)$ โฟกัส $(0, \pm 3)$ ง. จุดยอด $(0, \pm \sqrt{5})$ โฟกัส $(0, \pm 1)$
- ข. จุดยอด $(\pm 2, 0)$ โฟกัส $(\pm 3, 0)$ จ. จุดยอด $(\pm \sqrt{5}, 0)$ โฟกัส $(\pm 3, 0)$
- ค. จุดยอด $(0, \pm 2)$ โฟกัส $(0, \pm 1)$

35. แกนความยาวและแกนตั้งของกราฟคือข้อใด

- ก. แกน x เป็นแกนความยาวยาว 4 หน่วย แกน y เป็นแกนตั้งยาว 5 หน่วย
- ข. แกน x เป็นแกนความยาวยาว 4 หน่วย แกน y เป็นแกนตั้งยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย
- ค. แกน x เป็นแกนความยาวยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย แกน y เป็นแกนตั้งยาว 4 หน่วย
- ง. แกน x เป็นแกนความยาวยาว 5 หน่วย แกน y เป็นแกนตั้งยาว 4 หน่วย
- จ. แกน x เป็นแกนความยาวยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย แกน y เป็นแกนตั้งยาว 4 หน่วย

36. จุดยอดและโฟกัสของไฮเพอร์โบลามีสมการ $16x^2 - 9y^2 = 144$ คือข้อใด

- ก. จุดยอด $(\pm 3, 0)$ โฟกัส $(\pm 4, 0)$
- ข. จุดยอด $(\pm 3, 0)$ โฟกัส $(\pm \sqrt{7}, 0)$
- ค. จุดยอด $(\pm 3, 0)$ โฟกัส $(\pm 5, 0)$
- ง. จุดยอด $(\pm 4, 0)$ โฟกัส $(\pm 3, 0)$
- จ. จุดยอด $(\pm 4, 0)$ โฟกัส $(\pm 5, 0)$

37. ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ โฟกัสอยู่ที่ $(-6, 0)$ และ $(6, 0)$ มีสมการดังข้อใด

- ก. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$
- ข. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$
- ค. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$
- ง. $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$
- จ. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$

ใช้สมการไฮเพอร์โบลาคือข้อ 38-39

$$12(x + 2)^2 - 4(y + 1)^2 = 48$$

38. จุดศูนย์กลางและจุดยอดของกราฟคือข้อใด

- ก. จุดศูนย์กลาง $(2, 1)$ จุดยอด $(0, 1)$ และ $(4, 1)$
- ข. จุดศูนย์กลาง $(2, 1)$ จุดยอด $(2, 3)$ และ $(2, -1)$
- ค. จุดศูนย์กลาง $(-2, -1)$ จุดยอด $(-2, 1)$ และ $(-2, -3)$
- ง. จุดศูนย์กลาง $(-2, -1)$ จุดยอด $(-4, -1)$ และ $(0, -1)$
- จ. จุดศูนย์กลาง $(-2, -1)$ จุดยอด $(-2 + \sqrt{2}, -1)$ และ $(-2 - \sqrt{2}, -1)$

39. จุกโฟกัสของกราฟคือข้อใด

ก. $(-2, 1)$ และ $(6, 1)$

ง. $(-2, 3)$ และ $(-2, -5)$

ข. $(2, 5)$ และ $(2, -3)$

จ. $(-2+\sqrt{8}, -1)$ และ $(-2-\sqrt{8}, -1)$

ค. $(-6, -1)$ และ $(2, -1)$

40. ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการ $16(y + 2)^2 - 9(x - 1)^2 = 144$ มีแกนตามขวางและแกนส่งยุคตั้งข้อใด

ก. แกน $X=1$ เป็นแกนตามขวางยาว 6 หน่วย แกน $Y=-2$ เป็นแกนส่งยุคยาว 8 หน่วย

ข. แกน $X=1$ เป็นแกนตามขวางยาว 8 หน่วย แกน $Y=-2$ เป็นแกนส่งยุคยาว 6 หน่วย

ค. แกน $Y=2$ เป็นแกนตามขวางยาว 6 หน่วย แกน $X=1$ เป็นแกนส่งยุคยาว 8 หน่วย

ง. แกน $Y=-2$ เป็นแกนตามขวางยาว 6 หน่วย แกน $X=1$ เป็นแกนส่งยุคยาว 6 หน่วย

จ. แกน $Y=-2$ เป็นแกนตามขวางยาว 16 หน่วย แกน $X=1$ เป็นแกนส่งยุคยาว 9 หน่วย

ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 41-42

ก. $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

ข. $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

ค. $y^2 - 4x^2 + 6y + 8x + 1 = 0$

ง. $y^2 - 4x^2 - 6y - 8x + 1 = 0$

จ. $y^2 - 4x^2 - 2y - 24x - 39 = 0$

41. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 1)$ จุกยอดจุกหนึ่งอยู่ที่ $(-3, 3)$ และโฟกัสจุกหนึ่งอยู่ที่ $(-3, 1+\sqrt{5})$ มีสมการตั้งข้อใด

42. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 5)$ และ $(-1, 1)$ มีโฟกัสอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง $\sqrt{5}$ หน่วย มีสมการตั้งข้อใด

43. ข้อใดเป็นสมการของไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ก. $3x = 4y$

ง. $5x^2 - 3y^2 = 15$

ข. $3x^2 + 2y^2 = 4$

จ. $3y^2 - 3x^2 = 18$

ค. $3x^2 + 3y^2 = 21$

44. ข้อใดไม่ใช่สมการของกราฟไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ก. $xy = 5$

ง. $x^2 - y^2 = 1$

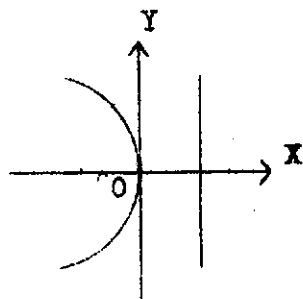
ข. $5xy = 1$

จ. $y^2 - 2x^2 = 2$

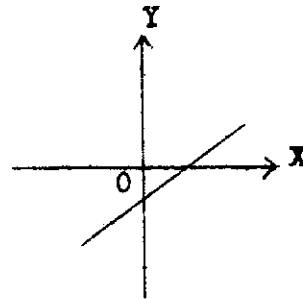
ค. $3x = \frac{4}{y}$

45. ข้อใดคือกราฟที่เหมาะสมที่สุดของไฮเพอร์โบลามีสมการ $1 - 2xy = 0$

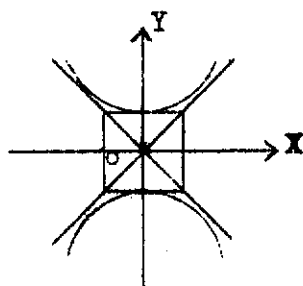
ก.



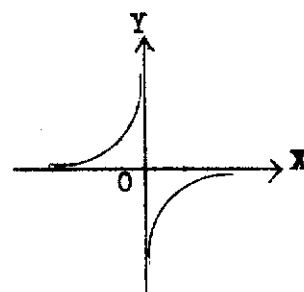
ข.



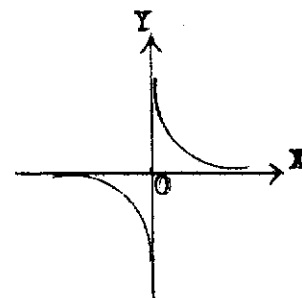
ค.



ง.



จ.



ใช้ตัวเลือกต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 46-50

ก. วงกลม

ง. ไฮเพอร์โบล่า

ข. พาราโบลา

จ. ไม่มีคำตอบข้อใดถูก

ค. วงรี

46. สมการ $3x^2 + 2x = 2y + 1$ เป็นสมการของกราฟอะไร

47. สมการ $3x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$ เป็นสมการของกราฟอะไร

48. สมการ $4x^2 = 4y^2 + 3$ เป็นสมการของกราฟอะไร

49. สมการ $3y^2 = 4y - 3x^2 + 2x - 1$ เป็นสมการของกราฟอะไร

50. สมการ $5y^2 - 25y = 4x^2 - 7x + 2$ เป็นสมการของกราฟอะไร

ภาคผนวก ค

โครงการสอนและบทเรียนสื่อประสม

โครงการสอน

เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เพื่อให้ นักเรียนสามารถ

1. สรุปนิยามของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
2. ระบุส่วนต่าง ๆ ของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
3. หาสมการทั่วไปและความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
4. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ 3

2. เนื้อหา

คาบที่ 1

วงกลม (Circle) คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดหนึ่งที่จุดหนึ่ง เป็นระยะเท่ากัน จุดหนึ่งที่เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center) ระยะทางคงที่เรียกว่า รัศมี (Radius)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k)$ และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \right\}$$

คาบที่ 2

สำหรับสมการวงกลมในรูปทั่วไป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ อาจทำให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2 = r^2$ โดยการย้ายแกน ดังนี้

แกนใหม่ $O'X'$ และ $O'Y'$ ขนานกับแกนเดิม OX และ OY ตามลำดับจุดกำเนิดใหม่ O' เมื่อเทียบกับแกน XY เดิมคือ (h, k)

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งเมื่อเทียบกับแกน XY เดิมแล้วจะได้จุด P เมื่อเทียบกับแกน $X'Y'$ ใหม่ว่า $x' = x - h$ และ $y' = y - k$

คาบที่ 3-4

พาราโบลา (Parabola) คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

จุดคงที่ เรียกว่า โฟกัส (Focus)

เส้นตรงคงที่ เรียกว่า ไคเรกทริกซ์ (Directrix)

เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไคเรกทริกซ์ เรียกว่า แกนพาราโบลา

จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไคเรกทริกซ์ เรียกว่า จุดยอด (Vertex)

สมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $F(0, c)$ และไคเรกทริกซ์คือเส้นตรง $y = -c$ คือ $x^2 = 4cy$ ถ้า $c > 0$ กราฟจะหงาย และ $c < 0$ กราฟจะคว่ำ

พาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(c, 0)$ และสมการไคเรกทริกซ์คือ $x = -c$ จะมีสมการเป็น $y^2 = 4cx$ ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดขวา และ $c < 0$ กราฟจะเปิดซ้าย

คาบที่ 5

พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $A(h, k)$ โฟกัสที่ $F(h, c+k)$ จะมีสมการเป็น $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ถ้า $c > 0$ กราฟจะหงาย และ $c < 0$ กราฟจะคว่ำ

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $A(h, k)$ โฟกัสที่ $F(h+c, k)$ จะมีสมการเป็น $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดขวา $c < 0$ กราฟจะเปิดซ้าย

คาบที่ 6

วงรี (Ellipse) คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด

ใด ๆ บนเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่

จุดคงที่สองจุด เรียกว่า โฟกัส (Focus)

จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center)

เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า แกนเอก (Major Axis) ซึ่งยาว $|2a|$ หน่วย

เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนเอก เรียกว่า แกนโท (Minor Axis)

ซึ่งยาว $|2b|$ หน่วย

จุดที่วงรีตัดแกนเอก เรียกว่า จุดยอด (Vertrices)

คาบที่ 7-8

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ โฟกัสอยู่ที่ $F(\pm c, 0)$ และมีผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$

จะมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ โฟกัสที่ $F(0, \pm c)$ และมีผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$

จะมีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

คาบที่ 9

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) แกนเอกขนานกับแกน x จะมีสมการเป็น

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

ถ้าแกนเอกขนานกับแกน y จะมีสมการเป็น

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = a^2 - c^2$$

ตอนที่ 10

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลต่างจากจุดใด ๆ บนแกนนั้นไป
ยังจุดคงที่สองจุด มีค่าคงที่

จุดคงที่สองจุด เรียกว่า โฟกัส (Focus)

จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัส เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center)

เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า แกนของไฮเพอร์โบลา

จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดแกนของมัน เรียกว่า จุดยอด (Vertrices)

เส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า แกนตามขวาง (Transverse Axis)

ซึ่งยาว $|2a|$ หน่วย

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลาง เรียกว่า แกนสังยุค

(Conjugate Axis) ซึ่งยาว $|2b|$ หน่วย

เมื่อลากเส้นตรงผ่านจุดปลายแกนตามขวางและแกนสังยุคให้ตั้งฉากกันจะเกิด

สี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเส้นทะแยงมุมสี่เหลี่ยมนี้ เรียกว่า Asymtote

ตอนที่ 11-12

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ โฟกัสอยู่ที่ $F(\pm c, 0)$ ผลต่างคงที่
เท่ากับ $2a$ มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ โฟกัสอยู่ที่ $F(0, \pm c)$ ผลต่างคงที่
เท่ากับ $2a$ มีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$

จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ โดยที่
 $b^2 = c^2 - a^2$ ถ้า $a = b$ แล้วเราเรียกว่า ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (Rectangular Hyperbola)

ไฮเพอร์โบลาคืออยู่ในรูป $xy = k$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ และ $k \neq 0$ เรียกว่า
ไฮเพอร์โบลามุมฉาก ถ้า $k > 0$ กราฟจะอยู่ในควอดรันต์ที่ 1, 3
 $k < 0$ กราฟจะอยู่ในควอดรันต์ที่ 2, 4

คาบที่ 13

ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่ $F(h \pm c, k)$ ผลต่างคงที่
เท่ากับ $2a$ มีสมการเป็น

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสที่ $F(h, k \pm c)$ และผลต่างคงที่
เท่ากับ $2a$ มีสมการเป็น

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

คาบที่ 14

นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ 4 แล้วครูและนักเรียนร่วมกันสรุปทบทวนบทเรียน
ตั้งแต่คาบที่ 1-13 พร้อมเฉลยแบบทดสอบย่อยบางชุดที่นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหา

3. ความรู้พื้นฐาน

1. การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ เช่น

$x = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = mx + c \quad \text{เมื่อ } m, c \text{ เป็นค่าคงที่} \}$ จะมีกราฟ
เป็นเส้นตรงตัดแกน y ที่จุด $(0, c)$ ตัดแกน x ที่ $(-\frac{c}{m}, 0)$

2. ระยะทางระหว่างจุด $P(x, y)$ และ $P_1(x_1, y_1)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$|PP_1| \quad \text{หรือ} \quad |P_1P| \quad \text{คือ} \quad \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \quad \text{หรือ} \quad \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

4. อุปกรณ์

1. บทเรียนโปรแกรมเรื่อง การสร้างรูปและการหาสมการทั่วไปของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
2. บทเรียนปฏิบัติการเรื่อง การสร้างรูปวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
3. แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียงเรื่อง การหาสมการทั่วไปและการเขียนกราฟของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
4. บัตรงานพร้อมเฉลยบัตรงานประกอบด้วย
 - บัตรงานที่ 1 เรื่อง วงกลม
 - บัตรงานที่ 2,3 เรื่อง พาราโบลา
 - บัตรงานที่ 4,5 เรื่อง วงรี
 - บัตรงานที่ 6,7 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา
5. บัตรปัญหาพร้อมเฉลยบัตรปัญหาเรื่อง การหาความสัมพันธ์ และการเขียนกราฟภาคตัดกรวยเมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ มาให้
6. แบบฝึกหัดที่ 1-7 เนื้อหาเดียวกับบัตรงาน
7. แบบทดสอบย่อย 4 ชุด และกรวยกลมทรงใส

5. กิจกรรม

คาบที่ 1

กิจกรรม

<u>กลุ่มทดลองที่ 1</u>	<u>กลุ่มทดลองที่ 2</u>
1. ครูผู้แจ้งการ เรียนจากบทเรียนทุกคาบ ประมาณ 5 นาที	1. เหมือนกลุ่มที่ 1
2. ครูแจกบทเรียนโปรแกรมชุดที่ 1 ให้ นักเรียนทำประมาณ 15-20 นาที	2. ครูแจกบทเรียนปฏิบัติการชุดที่ 1 ให้นักเรียน ทำเป็นกลุ่มย่อยประมาณ 30 นาที

- | | |
|--|--|
| 3. นักเรียนศึกษาบัตรงานที่ 1 10 นาที
แล้วตรวจผลจากเฉลยบัตรงาน 5 นาที
ใครเสร็จก่อนให้ทำบัตรปัญหาที่ 1 ต่อ | 3. นักเรียนและครูร่วมอภิปรายและสรุปนิยาม
ของวงกลมประมาณ 5-10 นาที |
|--|--|

คาบที่ 2

กลุ่มทดลองที่ 1

1. ครูฉายแผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง
เรื่อง การหาสมการวงกลม ประมาณ
40 นาที
2. ครูแจกแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำ ใคร
ทำไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน

กลุ่มทดลองที่ 2

1. เหมือนกลุ่มที่ 1
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุป สมการ
และการเขียนกราฟวงกลม 5 นาที
3. ครูแจกแบบฝึกหัดที่ 1 ให้นักเรียนทำเป็น
การบ้าน

คาบที่ 3-4

1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 1 จากแผ่น
เฉลย 10 นาที
2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ 1
10 นาที
3. นักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมชุด
ที่ 2 ประมาณ 25-30 นาที
4. นักเรียนศึกษาบัตรงานที่ 2 10 นาที
ใครเสร็จก่อนให้ศึกษาบัตรปัญหาที่ 2
ต่อแล้วตรวจผลเฉลยด้วย
5. นักเรียนศึกษาจากแผ่นโปร่งใสประกอบ
เทปเสียงเรื่อง การหาสมการ
พาราโบลา ประมาณ 45 นาที

1. เหมือนกลุ่มที่ 1
2. เหมือนกลุ่มที่ 1
3. นักเรียนศึกษาบทเรียนปฏิบัติการที่ 2 ประมาณ
30 นาที แล้วร่วมอภิปราย สรุปนิยามของ
พาราโบลา 5 นาที
4. เหมือนข้อ 5 ในกลุ่ม 1
5. เหมือนข้อ 4 ในกลุ่ม 1
6. เหมือนกลุ่ม 1

6. ครูแจกแบบฝึกหัดที่ 2 ให้นักเรียนทำ
ต่อเนื่องที่บ้าน

คาบที่ 5

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 2 จากแผ่น
เฉลย 10 นาที 2. นักเรียนศึกษาแผ่นโปรงใสประกอบ
เทปเสียงเรื่อง การหาสมการ
พาราโบลาเมื่อจุดยอดอยู่ที่ (h,k)
ประมาณ 20 นาที 3. นักเรียนทำป้ดรงงานที่ 3 แล้วตรวจผล
จากเฉลยป้ดรงงาน ใครเสร็จก่อนให้ทำ
ป้ดรงปัญหาที่ 3 4. ครูแจกแบบฝึกหัดที่ 3 ให้นักเรียนทำ
ต่อเนื่องที่บ้าน | <ol style="list-style-type: none"> 1. เหมือนกลุ่ม 1 2. เหมือนกลุ่ม 1 3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย สรุป
จากการดูแผ่นโปรงใส 5 นาที 4. เหมือนข้อ 3-4 ในกลุ่ม 1 |
|--|--|

คาบที่ 6

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 จาก
แผ่นเฉลย 10 นาที 2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ 2
10 นาที 3. นักเรียนศึกษาทเรียนโปรแกรมชุด
ที่ 3 25 นาที 4. นักเรียนทำป้ดรงงานที่ 4 ให้ตรวจผล
นอกเวลาเรียน | <ol style="list-style-type: none"> 1. เหมือนกลุ่ม 1 2. เหมือนกลุ่ม 1 3. นักเรียนศึกษาทเรียนปฏิบัติการที่ 3
25 นาที 4. ร่วมอภิปราย สรุปนิยามวงรี 5 นาที |
|---|--|

คาบที่ 7-8

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. นักเรียนศึกษาแผ่นโปรงใสประกอบ
เพลงเสียงเรื่อง การหาสมการ
การเขียนกราฟวงรี ประมาณ 60 นาที
แล้วทำปฏิกิริยาที่ 4 พร้อมตรวจผล
15 นาที 2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 แล้วตรวจผล
ในคาบเรียน | <ol style="list-style-type: none"> 1. เหมือนกลุ่ม 1 2. ครู-นักเรียนร่วมกันสรุป การหาสมการ
และการเขียนกราฟวงรี 3. เหมือนกลุ่มที่ 1 ข้อ 2 |
|---|--|

คาบที่ 9

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. นักเรียนศึกษาแผ่นโปรงใสประกอบ
เพลงเสียงเรื่อง การหาสมการวงรี
ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) 20 นาที 2. นักเรียนทำปฏิกิริยาที่ 5 ตรวจผล
เฉลย 15 นาทีใครเสร็จก่อนให้ทำ
ปฏิกิริยาที่ 5 ต่อ 3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 5 ใครทำไม่
เสร็จให้ทำเป็นการบ้าน | <ol style="list-style-type: none"> 1. เหมือนกลุ่มที่ 1 2. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป จากการดู
แผ่นโปรงใส 5 นาที 3. เหมือนข้อ 2,3 ในกลุ่ม 1 |
|--|--|

คาบที่ 10

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 จากแผ่น
เฉลย 5 นาที 2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ 3
10 นาที | <ol style="list-style-type: none"> 1. เหมือนกลุ่ม 1 2. เหมือนกลุ่ม 1 3. นักเรียนศึกษาทบทวนปฏิบัติการที่ 4
30 นาที |
|---|--|

- | | |
|---|---|
| 3. นักเรียนศึกษาบทเรียนโปรแกรมชุด
ที่ 4 25 นาที
4. นักเรียนทำปฏิกิริยาที่ 6 ตรวจสอบ
นอกเวลาเรียน | 4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย สรุปนิยาม
ของไฮเพอร์โบล่า 5 นาที |
|---|---|

คาบที่ 11-12

- | | |
|---|--|
| 1. นักเรียนศึกษาแผ่นโปร่งใสประกอบ
เทปเสียงเรื่อง การหาสมการ
ไฮเพอร์โบล่า 65 นาที แล้วนำ
ปฏิกิริยาที่ 6 ตรวจสอบจากเฉลยใน
เวลา 15 นาที
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 6 ตรวจสอบใน
คาบเรียนใครไม่เสร็จให้ทำต่อเป็น
การบ้าน | 1. เหมือนกลุ่ม 1
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย สรุปสมการ
ของไฮเพอร์โบล่า
3. เหมือนกลุ่ม 1 ข้อ 2 |
|---|--|

คาบที่ 13

- | | |
|--|--|
| 1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 6 บางข้อ
5 นาที
2. นักเรียนศึกษาแผ่นโปร่งใสประกอบ
เทปเสียงเรื่อง การหาสมการ
ไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางที่
(h,k) ประมาณ 20 นาที
3. นักเรียนทำปฏิกิริยาที่ 7 และปฏิ
ริยาที่ 7 (สำหรับบางคนที่ไม่เสร็จก่อน)
แล้วตรวจสอบจากเฉลย 20 นาที | 1. เหมือนกลุ่ม 1
2. เหมือนกลุ่ม 1
3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปจากแผ่นโปร่งใส
5 นาที
4. เหมือนข้อ 3,4 ในกลุ่ม 1 |
|--|--|

4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 7 เป็นการ
บ้าน

คาบที่ 14

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. นักเรียนตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 10 นาที | 1. เหมือนกลุ่มที่ 1 ทุกข้อ |
| 2. นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ 4
10 นาที | |
| 3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทวนบท
เรียนตั้งแต่คาบที่ 1-13 โดยนำ
ข้อสอบย่อยบางข้อที่นักเรียนส่วนใหญ่
มีปัญหา มาประกอบ | |

ทำการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวยเป็น
เวลา 2 ชั่วโมงนอกเวลาเรียน พร้อมกันทั้ง 3 กลุ่ม

6. ระยะเวลา

ระยะเวลา 14 คาบ คาบละ 50 นาที สัปดาห์ละ 4 คาบ

7. การประเมินผล

การประเมินผลทำโดย

- สังเกตจาก - การศึกษาบทเรียนและจากแผ่นโปสเตอร์ประกอบแบบเสียง
- การทำปฏิกิริยา ปฏิกิริยา (บางคน) การทำแบบฝึกหัด
- การซักถามใน-นอกเวลาเรียน
- การทำแบบทดสอบย่อยตามจุดประสงค์การเรียนรู้
- การทำแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย

แผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน

คาบที่ 1

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกได้ว่าศักรวาลกลมในลักษณะใดจึงเกิดวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา
2. บอกนิยามของวงกลมได้
3. บอกสมการของวงกลมได้ เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีให้
4. หาจุดศูนย์กลางและรัศมี พร้อมทั้งเขียนกราฟเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม

เนื้อหา

ภาคศักรวาล การศักรวาลมี 4 แบบ ทำให้เกิดวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

1. วงกลม
 - นิยามของวงกลม
 - สมการของกราฟวงกลม เมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมี r คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูนำกรวยกลมใส สาธิตการตัดแบบต่างๆ
2. วาดกราฟวงกลม กรณีทั่วไปบนกระดาน แล้วพิจารณาจากรูปไปหานิยาม
3. ครูแสดงวิธีคิดหาสมการวงกลมในรูปทั่วไป เมื่อจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r
4. ครูให้ตัวอย่างที่ 1 เป็นตัวอย่างที่ให้นักเรียนฝึกหาสมการวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีให้ เช่น จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 3)$ รัศมี 4 หน่วย
5. ครูให้ตัวอย่างที่ 2 เป็นตัวอย่างที่ให้สมการวงกลมแล้วให้หาจุดศูนย์กลาง รัศมี พร้อมทั้งวาดกราฟ เช่น จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมี พร้อมเขียนกราฟวงกลมจากสมการ

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

การประเมินผล

1. ทำแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 1, 2, 3

สื่อการสอน

กรวยกลมใส แสดงการตัด 4 แบบ

คาบที่ 2จุดประสงค์การเรียนรู้

หาความสัมพันธ์ที่มีกราฟวงกลม เมื่อกำหนดเงื่อนไขบางอย่างได้ เช่น จุดศูนย์กลางกับ
จุดผ่าน จุดศูนย์กลางกับเส้นสัมผัส จุดศูนย์กลางกับคอร์ด เป็นต้น

เนื้อหา

วงกลม (ต่อ)

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ครูให้ตัวอย่างที่ 3, 4 โดยใช้โจทย์ในแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 10, 12

การประเมินผล

ทำแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 4-18 เว้นข้อ 10, 12

คาบที่ 3-4จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกนิยามของพาราโบลาได้
2. หาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่ $(0,0)$ และแกนของพาราโบลาอยู่บนแกน x หรือแกน y เมื่อกำหนดจุดโฟกัสและไคเรกตริกซ์ให้
3. หาโฟกัส และ สมการไคเรกตริกซ์พร้อมทั้งวาดกราฟคร่าว ๆ เมื่อกำหนดสมการในรูป

$$x^2 = 4cy \quad \text{หรือ} \quad y^2 = 4cx$$

เนื้อหา

1. พาราโบลา - นิยามของพาราโบลา
 - สมการของพาราโบลา
 - เมื่อจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ โฟกัสที่ $(c,0)$ และไคเรกตริกซ์คือ $x = -c$
 - คือ $y^2 = 4cx$
 - เมื่อจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ โฟกัสที่ $(c,0)$ และไคเรกตริกซ์คือ $y = -c$
 - คือ $x^2 = 4cy$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครอบงำนิยามและแสดงรูปภาพตามนิยาม
2. ครอบงำแสดงวิธีหาสมการของพาราโบลา พร้อมเขียนกราฟประกอบ
3. ครอบงำให้ตัวอย่างที่ 1-4 ตามแบบเรียน

การประเมินผล

ให้ทำแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 1-4

คาบที่ 5จุดประสงค์การเรียนรู้

เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา เมื่อกำหนดโฟกัสและไคเรกตริกซ์ให้ จุดยอดอยู่ที่ (h,k) ไคเรกตริกซ์ขนานกับแกน x หรือ y พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้น

เนื้อหา

1. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (h,k) และโฟกัสคือ $(h+c,k)$ ไคเรกตริกซ์คือ $x = h-c$ มีสมการเป็น $(y - k)^2 = 4c(x - h)$
2. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (h,k) และโฟกัสคือ $(h,k+c)$ ไคเรกตริกซ์คือ $y = k-c$ มีสมการเป็น $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูแสดงการหาสมการพาราโบลาตามเนื้อหาข้อ 1 , 2
2. ครูให้ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (3 , 4) โฟกัสที่ (3 , 2) และจงหาจุดยอด โฟกัส สมการโคเรกทริกซ์ของพาราโบลาจากสมการ $x^2 = 6x + 9y$ พร้อมทั้งวาดกราฟ

การประเมินผล

ทำแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 2 (5 , 6 , 7) ข้อ 5(2) ข้อ 6(3 , 4) ข้อ 7 , 8,9

คาบที่ 6

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกนิยามของวงรีได้
2. หาสมการวงรี เมื่อกำหนดจุดคงที่ 2 จุด และระยะทางคงตัวซึ่งเป็นผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรี ไปยังจุดคงที่ทั้งสอง (ผลบวกคงที่)

เนื้อหา

3. วงรี - นิยามของวงรี
 - สมการวงรีที่มีโฟกัสบนแกน x ที่จุด $F'(-c,0)$ และ $F(c,0)$ ผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a^2 = b^2 + c^2$ และ $a > b > 0$
 - สมการวงรีที่มีโฟกัสบนแกน y ที่จุด $F'(-c,0)$ และ $F(c,0)$ ผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ คือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a^2 = b^2 + c^2$ และ $a > b > 0$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูบอกนิยามวงรี แล้วสาธิตการวาดรูปบนระนาบทั้งที่มีโฟกัสบนแกน x และแกน y
2. ครูแสดงวิธีหาสมการวงรีในกรณีทั่วไปเพื่อสรุปเป็นสูตร

การประเมินผล

สังเกตการซักถาม

สื่อการเรียนการสอน

เครื่องมือวาดกราฟวงรี

คาบที่ 7-8 (ต่อ คาบที่ 6)

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้ตัวอย่าง 1 จงหาสมการของวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3,0)$ ความยาวของครึ่งแกนโทเท่ากับ 5 หน่วย
2. ตัวอย่าง 2 จงหาสมการของวงรีซึ่งมีจุดยอดที่ $(\pm 4,0)$ ความกว้างของวงรี ณ จุดศูนย์กลางเท่ากับ 5
3. ตัวอย่าง 3 จงหาจุดยอด โฟกัส พร้อมเขียนกราฟของวงรีจากสมการ

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \text{และ} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

การประเมินผล ทำแบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 1-6

คาบที่ 9-10

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(h \pm c, k)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$
2. เขียนสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(h, k \pm c)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$

เนื้อหา

1. สมการทั่วไปของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(h \pm c, k)$

และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a^2 = b^2 + c^2 \text{ และ } a > b > 0$$

2. สมการทั่วไปของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(h, k \pm c)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ คือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } a^2 = b^2 + c^2 \text{ และ } a > b > 0$$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครอบงมรูปสมการทั่วไปของวงรีทั้งสองตามเนื้อหา
2. ให้ตัวอย่าง 1 จงหาสมการวงรีซึ่งมีโฟกัสที่ $(4, -2)$ และ $(10, -2)$ จุดยอดจุดหนึ่งที่ $(12, -2)$
3. ตัวอย่าง 2 จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(5, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่งที่ $(5, 4)$ แกนโทยาว 4 หน่วย
4. ตัวอย่าง 3 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรีจากสมการ $16x^2 + 25y^2 - 160x - 200y + 400 = 0$ พร้อมเขียนกราฟ

การประเมินผล

ทำแบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 7(1-5) ข้อ 9(1, 3, 4)

คาบที่ 11-12

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกนิยามไฮเพอร์โบลาได้
2. หาสมการของไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนดโฟกัส และ ผลต่างคงที่ให้

เนื้อหา

4. ไฮเพอร์โบลา - นิยามของไฮเพอร์โบลา
- สมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสที่ $(\pm c, 0)$ ผลต่างคงที่ $2a$
คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$
 - สมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสที่ $(0, \pm c)$ ผลต่างคงที่ $2a$
คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นิยามของไฮเพอร์โบลา
2. ครูแสดงวิธีหาสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลาตามเนื้อหา แล้วให้ตัวอย่างตามแบบเรียน

การประเมินผล

สังเกตจากการถาม-ตอบ ให้ทำแบบฝึกหัด 3.4 ข้อ 1(1, 2) ข้อ 2-12

คาบที่ 13จุดประสงค์การเรียนรู้

เขียนสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) โฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และแกน y ผลต่างคงที่ คือ $2a$

เนื้อหา

1. รูปทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) โฟกัสทั้งสองจุดอยู่ที่จุด $(h \pm c, k)$ ผลต่างคงที่ $2a$ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2 ; 2a < 2c$$

2. รูปทั่วไปของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) โฟกัสทั้งสองอยู่ที่จุด $(h, k \pm c)$ ผลต่างคงที่ $2a$ คือ

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่} \quad b^2 = c^2 - a^2 ; \quad 2a < 2c$$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูบอกสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลาตามเนื้อหา
2. ให้ตัวอย่างตามแบบเรียน

การประเมินผล

ทำแบบฝึกหัดข้อ 3.4 ข้อ 15 (1-5) ข้อ 16 (1-4)

คาบที่ 14

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการ $xy = k$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ และ $k \neq 0$
2. เมื่อกำหนดสมการต่าง ๆ มาให้บอกได้ว่ามีกราฟเป็นรูปอะไร

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูแสดงการเขียนกราฟ $xy = 6$ และ $xy = -6$
2. ครูให้นักเรียนจุดสรุป สมการภาคตัดกรวยจากแผนภูมิ
3. ครูและนักเรียนร่วมกันพิจารณาสมการต่าง ๆ จากแบบฝึกหัด 3.4 ข้อ 13 ว่ามีกราฟเป็นรูปอะไร

การประเมินผล ทำแบบฝึกหัด 3.4 ที่เหลือ

สื่อการเรียนรู้การสอน แผนภูมิ สรุปสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย

บทเรียนโปรแกรม
วิชา คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่อง วงกลม

หัวข้อ การสร้างรูปและการหาสมการทั่วไปของวงกลม

จุดประสงค์ทั่วไป

มุ่งให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. นิยามของวงกลม
2. การเขียนกราฟรูปวงกลม
3. การหาสมการทั่วไปของวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาบทเรียนเล่มนี้จบแล้วจะมีความสามารถ

1. สรุปนิยามของวงกลมได้
2. เขียนกราฟของวงกลมได้
3. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมได้

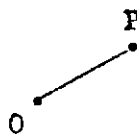
คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรม

1. บทเรียนที่นักเรียนกำลังอ่านอยู่นี้เรียกว่า "บทเรียนโปรแกรม"
2. แต่ละหน้าของบทเรียนเรียกว่า "1 กรอบ" หรือ "1 เฟรม" (Frame)
3. นักเรียนจะต้องศึกษาบทเรียนโดยผ่านทีละกรอบตามลำดับ ไม่ข้ามไปศึกษากรอบอื่นก่อน เพราะเนื้อหามีความต่อเนื่องกันจนจบ
4. นักเรียนสามารถทราบได้ว่าตนเองตอบคำถามได้ถูกต้องหรือไม่ โดยดูเฉลยได้ในกรอบถัดไป แต่นักเรียนต้องไม่เปิดดูคำตอบก่อน มิฉะนั้นนักเรียนจะไม่ได้รับความรู้อะไรจากบทเรียนนี้เลย
5. นักเรียนต้องพยายามอ่านเก็บใจความในแต่ละกรอบให้ได้มากที่สุด พร้อมทั้งตอบคำถามให้ถูกต้องแล้วจึงศึกษากรอบต่อไปได้
6. ทุกคนสามารถเรียนบทเรียนนี้ได้ จะช้าหรือเร็วขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคล ซึ่งเราไม่คำนึงถึงเวลา เพียงขอให้ผู้เรียนมีความตั้งใจจริงเท่านั้น

กรอบที่ 1

นิยามของวงกลม

จากรูป ให้ O เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบ และ P เป็นจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะหนึ่งหน่วย



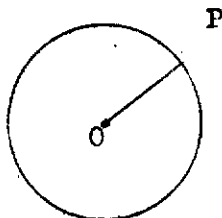
ให้นักเรียนเลื่อนจุด P ไปยังตำแหน่งอื่น ๆ บนระนาบ (ให้รอบจุด O) โดยให้ระยะทาง $|OP|$ เท่าเดิม (1 หน่วยตามที่กำหนดให้)

จุด P ที่นักเรียนเลื่อนไปนั้น จะเรียงกันทำให้เกิดเป็นกราฟรูปอะไรเอ่ย?

วงกลม

ตอบถูกไข่มัยยะ.....เก่งมาก.....อ่านกรอบต่อไปได้อะ

กรอบที่ 2



เนื่องจากกราฟที่เกิดขึ้น เป็นกราฟรูปวงกลม ดังนั้น

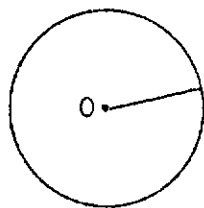
1. จุด O ซึ่งเป็นจุดคงที่ เราเรียกว่า.....
2. $|OP|$ ซึ่งเป็นระยะทางคงที่ เราเรียกว่า.....

1. จุดศูนย์กลาง

2. รัศมี

นักเรียนตอบทุกทั้ง 2 ข้อเลยไหม.....อ่านกรอบที่ 3 ได้เลยคะ

กรอบที่ 3



จากกรอบที่ 1, 2 นักเรียนทราบแล้วว่า จุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน ทำให้เกิดกราฟรูปวงกลม
ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า

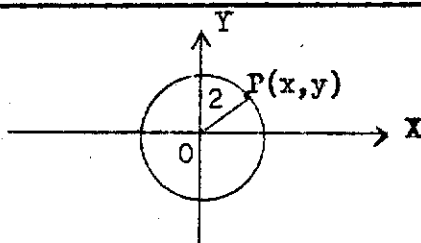
วงกลม คือ เซตของ.....

.....

จุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

ถ้าตอบไม่ถูก.....ให้อ่านกรอบที่ 3 ใหม่.....ผู้ที่ตอบถูกอ่านกรอบที่ 4 ต่อเลย

กรอบที่ 4

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมและการเขียนกราฟวงกลมจากรูป ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0)$ และมีรัศมี 2 หน่วยเราสามารถหา สมการที่มีกราฟเป็นวงกลมนี้ได้โดย ให้ $P(x,y)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งที่อยู่บนวงกลม

จากนิยามของวงกลม เราจะได้ว่า

$$|OP| = 2$$

$$\text{หาระยะทางระหว่างจุด } O \text{ และจุด } P ; \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2$$

$$\text{เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง ; } (x-0)^2 + (y-0)^2 = \dots\dots\dots$$

4

ดีมาก.....อ่านกรอบที่ 5 เลยค่ะ

กรอบที่ 5

จากกรอบที่ 4 เราได้สมการเป็น $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4$

เมื่อจัดสมการใหม่ ; $x^2 + y^2 = 4$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $x^2 + y^2 = 4$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นวงกลม ซึ่งมีความสัมพันธ์เป็น

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 4 \}$$

และมีลักษณะของกราฟดังนี้

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่.....
2. รัศมียาวเท่ากับ.....หน่วย

1. จุดกำเนิด หรือ จุด (0,0)

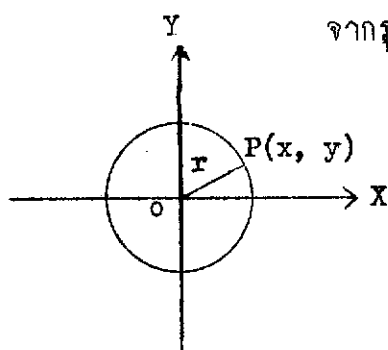
2. 2 หน่วย

ตอบถูกทั้ง 2 ข้อเลยใช่ไหม.....เก่งมาก.....อ่านกรอบที่ 6 เลย

กรอบที่ 6

สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมี r หน่วยละค่ะ

นักเรียนจะหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟดังกล่าวนี้นี้ได้ไหม ?



จากรูป ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย

จากนิยามของวงกลม เราจะได้ว่า $|OP| = r$

แทนค่า ; $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r$

ยกกำลังสอง ; $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$

จัดสมการใหม่ ; $x^2 + y^2 = r^2$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นรูปวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (0,0) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

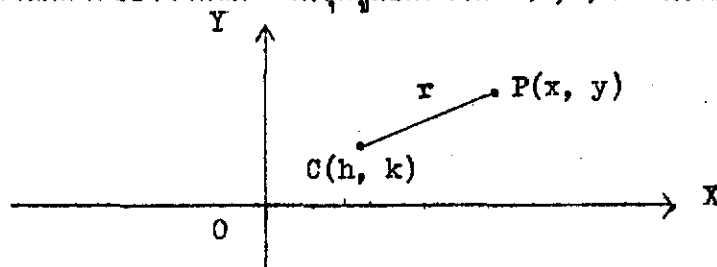
$$\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots \}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ถูกต้องไหม.....เยี่ยม.....อ่านกรอบที่ 7 ใต้เลย

กรอบที่ 7

ต่อไปเราจะหาสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $C(h, k)$ และมีรัศมียาว r หน่วย



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมดังรูป

จากนิยามของวงกลมจะได้

$$|CP| = r$$

$$\text{หาระยะทางระหว่างจุด C และจุด P ; } \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$\text{เมื่อยกกำลังสอง ; } \dots\dots\dots = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2$$

กรอบที่ 8

จากกรอบที่ 7 นักเรียนได้สมการเป็น $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จึงสรุปได้ว่า $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมซึ่งมี

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่.....

2. รัศมียาวเท่ากับ.....หน่วย

3. เขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots \}$$

1. $C(h, k)$

2. r หน่วย

3. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

นักเรียนควรตอบได้ถูกมากกว่า 1 ข้อนะค่ะ ถ้าไม่ถึงต้องกลับไปอ่านกรอบที่ 5-8 ใหม่ค่ะ

กรอบที่ 9

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ และรัศมี 4 หน่วย

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ อยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ และรัศมี 4 หน่วย
นักเรียนทราบแล้วว่า สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r หน่วย

$$\text{คือ } (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\text{ดังนั้น } (h, k) = (2, -3) \quad ; \quad h = 2, k = -3$$

1. จะได้สมการของวงกลมเป็น.....

2. เขียนความสัมพันธ์ได้เป็น.....

$$1. (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2 \text{ หรือ } (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$2. \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \}$$

อ.ก. ...อ่านกรอบที่ 10 ได้เลย

กรอบที่ 10

จากกรอบที่ 9 นักเรียนได้สมการเป็น

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \quad \dots\dots\dots \text{แบบที่ 1}$$

$$\text{เปิดวงเล็บ ; } x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$$

$$\text{จัดสมการใหม่ ; } x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \quad \dots\dots\dots \text{แบบที่ 2}$$

ดังนั้นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, -3)$ และรัศมี 4 หน่วย เขียนได้ 2 แบบคือ

1.....

2.....

$$1. (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$2. x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

นักเรียนคงตอบถูกทั้ง 2 ข้อเลยนะ.....อ่านกรอบที่ 11 ได้เลย

กรอบที่ 11

นักเรียนคงจำสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) ใ้้นะ (อยู่ที่กรอบที่ 8 ใจคะ)

สมการที่ใ้้นั้นคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

เมื่อเปิดวงเล็บจะได้; = r^2

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

โอ้โฮ!.....เก่งจัง อ่านกรอบที่ 12 ซิคะ

กรอบที่ 12

เปิดวงเล็บสมการวงกลมในกรอบที่ 11 จะได้ $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

จัดสมการเรียงตามเลขยกกำลังของ x, y ; $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

D, E และ F เป็นค่าคงที่ใด ๆ

เราเรียกสมการนี้ว่า

สมการทั่วไปของวงกลม

ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \}$

นักเรียนอาจจะอ่านบทเรียนบางกรอบที่ยังสับสนอยู่ก็ใ้้นะคะ.....ถ้าเข้าใจทีแล้ว.....

ไปพบครูผู้สอนได้คะ

บทเรียนโปรแกรม
วิชา คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง พาราโบลา

หัวข้อ การสร้างรูปและการหาสมการพาราโบลา

จุดประสงค์ทั่วไป

มุ่งให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. นิยามของพาราโบลา
2. การเขียนกราฟรูปพาราโบลา
3. การหาสมการทั่วไปของพาราโบลา

จุดประสงค์การเรียนรู้

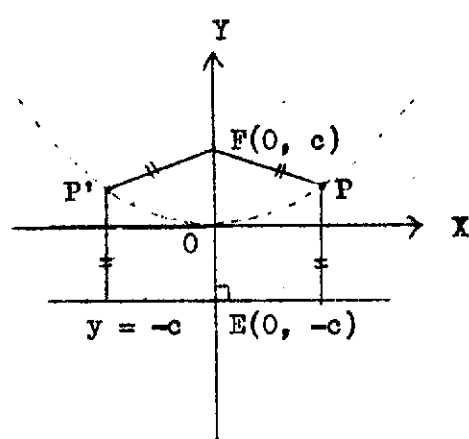
เมื่อนักเรียนอ่านบทเรียนนี้จบแล้วจะมีความสามารถ

1. สรุปนิยามของพาราโบลาได้
2. ระบุด้านต่าง ๆ ของพาราโบลาได้
3. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาได้
4. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลาได้

คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรม

1. บทเรียนที่นักเรียนกำลังอ่านอยู่นี้เรียกว่า "บทเรียนโปรแกรม"
2. แต่ละหน้าของบทเรียนเรียกว่า " 1 กรอบ" หรือ " 1 เฟรม" (Frame)
3. นักเรียนจะต้องศึกษาบทเรียนโดยผ่านทีละกรอบตามลำดับ ไม่ข้ามไปศึกษากรอบอื่นก่อน เพราะเนื้อหามีความต่อเนื่องกันจนจบ
4. นักเรียนสามารถทราบว่าตนเองตอบคำถามได้ถูกต้องหรือไม่ โดยดูเฉลยได้ในกรอบถัดไป แต่นักเรียนต้องไม่เปิดดูคำตอบก่อน มิฉะนั้นนักเรียนจะไม่ได้รับความรู้จากบทเรียนนี้เลย
5. นักเรียนต้องพยายามอ่านเก็บใจความในแต่ละกรอบให้ได้มากที่สุด พร้อมทั้งตอบคำถามให้ถูกต้องแล้วจึงศึกษากรอบต่อไปได้
6. ทุกคนสามารถเรียนบทเรียนนี้ได้ จะช้าหรือเร็วขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคล ซึ่งเราไม่คำนึงถึงเวลา เพียงขอให้ผู้เรียนมีความตั้งใจจริงเท่านั้น

นิยามพาราโบลา



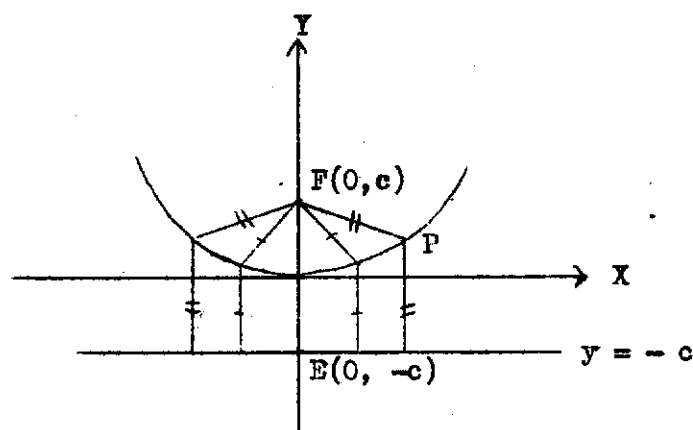
จากรูป เส้นตรง $y = -c$ ตัดแกน Y และตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด $E(0, -c)$

$F(0, c)$ เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งอยู่บนแกน Y ซึ่ง $|FO| = |OE|$; P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนระนาบที่อยู่ห่างจาก $F(0, c)$ และห่างจากเส้นตรง

$y = -c$ เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน

ให้นักเรียนเลื่อนจุด P ไปในตำแหน่งอื่น ๆ บนระนาบ โดยที่จุด P ที่เลื่อนไปนี้ต้องอยู่ห่างจาก $F(0, c)$ และเส้นตรง $y = -c$ เป็นระยะทางเท่ากัน

เมื่อนักเรียนเลื่อนจุด P ไปยังตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าวแล้ว จุด P จะเรียงต่อกันเกิดเป็นรอยโค้งที่เราเรียกว่า พาราโบลา (Parabola)



นักเรียนคิดว่าจุด P และจุดอื่น ๆ ที่เกิดจากการเลื่อนจุด P ไปบนระนาบนั้นมีความสัมพันธ์อย่างไรกับจุด $F(0, c)$ และเส้นตรง $y = -c$

..... ?

จุดที่ได้แต่ละจุดจะอยู่ห่างจากจุด $F(0,c)$ และห่างจากเส้นตรง $y = -c$ เป็นระยะทางเท่ากัน
ถ้านักเรียนยังตอบไม่ถูก.....ต้องกลับไปอ่านกรอบที่ 1 , 2 ใหม่ค่ะ

กรอบที่ 3

เราทราบว่า จุดทุกจุดอยู่ห่างจากจุดคงที่ $F(0,c)$ และเส้นตรงคงที่ $y = -c$
เป็นระยะเท่า ๆ กันนั้น ทำให้เกิดกราฟที่เรียกว่า พาราโบลา

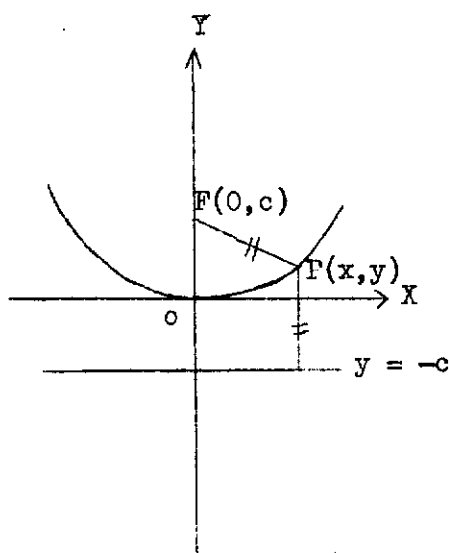
ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

พาราโบลา คือเซตของ.....
.....

จุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทาง
เท่ากันเสมอ

.....เก่งมากค่ะ.....นักเรียนตอบได้ถูกต้อง.....อ่านกรอบที่ 4 ได้เลย

กรอบที่ 4



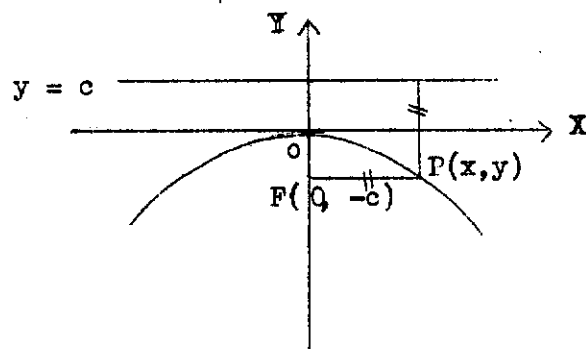
จากรูป เราเรียกส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลา ดังนี้
จุดคงที่ $F(0,c)$ เรียกว่า โฟกัส (Focus)
เส้นตรงคงที่ $y = -c$ เรียกว่า โคเรกทริกซ์
(Directrix)

เส้นตรงที่ผ่าน โฟกัส และตั้งฉากกับโคเรกทริกซ์
เรียกว่า แกนของพาราโบลา (ในที่นี้คือแกน Y)
จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า
จุดยอด (Vertex) (ในที่นี้คือจุดกำเนิด)

นักเรียนคงรู้จักส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลาแล้วนะคะ.....เว็ไปกรอบที่ 5 ได้เลยคะ

กรอบที่ 5

ให้นักเรียนบอกส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลาต่อไปนี้



1. โฟกัสอยู่ที่.....
2. จุดยอดอยู่ที่.....
3. ไคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง.....
4. แกนของพาราโบลา ได้แก่.....

1. $F(0, -c)$
2. จุดกำเนิด หรือ $(0, 0)$
3. $y = c$
4. แกน Y

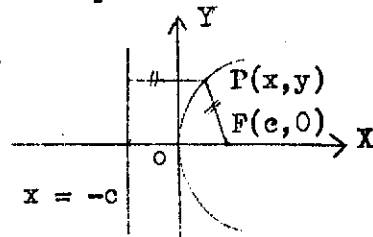
นักเรียนต้องตอบถูกมากกว่า 2 ข้อนะคะ จึงจะอ่านกรอบที่ 6 ได้

ถ้ายังตอบไม่ถูก ให้กลับไปอ่านกรอบที่ 4-5 อีกครั้งนะคะ

กรอบที่ 6

แล้วพาราโบลาต่อไปนี้ นักเรียนจะบอกส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลาได้ไหม

รูปที่ 1



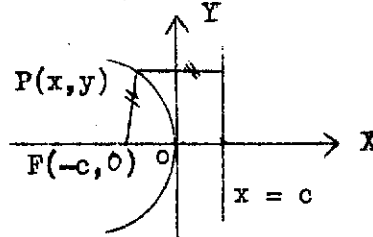
1. โฟกัสอยู่ที่ $F(c, 0)$

2. จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

3. สมการไคเรกทริกซ์ คือ $x = -c$

4. แกนของพาราโบลา คือ แกน X

รูปที่ 2



1. โฟกัสอยู่ที่.....

2. จุดยอดอยู่ที่.....

3. สมการไคเรกทริกซ์ คือ.....

4. แกนของพาราโบลา คือ.....

1. $F(-c, 0)$ 2. $(0, 0)$ 3. $x = c$ 4. แกน x

นักเรียนต้องตอบถูกมากกว่า 2 ข้อนะคะ จึงจะอ่านกรอบที่ 7 ได้

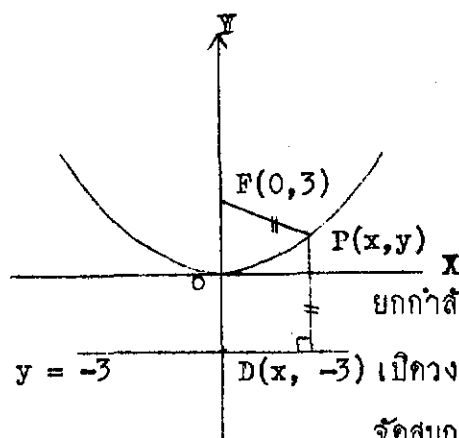
การหาสมการและความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา

กรอบที่ 7

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $(0, 3)$

ไคเรกทริกซ์คือ เส้นตรง $y = -3$

วิธีทำ



จากรูปให้ $P(x, y)$ อยู่บนพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่

$F(0, 3)$ และไคเรกทริกซ์ คือเส้นตรง $y = -3$

จากนิยามของพาราโบลา จะได้ $|PF| = |PD|$

หาระยะจากจุด F ถึง P และจากจุด P ถึง D

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+3)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง ; $(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x-x)^2 + (y+3)^2$

$y = -3$ $D(x, -3)$ เป็ควงเล็บ ; 1. $x^2 + y^2 - 6y + 9 = \dots\dots\dots$

จัดสมการใหม่ ; 2. $x^2 = \dots\dots\dots$

ดังนั้นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F(0, 3)$ ไคเรกทริกซ์คือ $y = -3$

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = \dots\dots\dots\}$

1. $y^2 + 6y + 9$

2. $12y$

3. $12y$

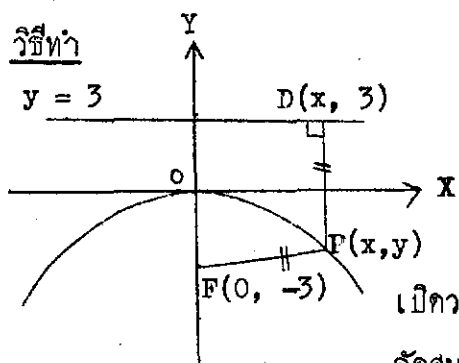
เก่งมากคะ.....อ่านกรอบต่อไปได้เลย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $F(0, -3)$

กรอบที่ 8

ไคเรกทริกซ์คือ $y = 3$

วิธีทำ



จากนิยามของพาราโบลาจะได้ $|PF| = |PD|$

หาระยะจากจุด P ถึง F และจาก P ถึง D แทน

ในสมการ $\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-3)^2}$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง ; $x^2 + (y+3)^2 = (y-3)^2$

เป็ควงเล็บ ; 1. $x^2 + y^2 + 6y + 9 = \dots\dots\dots$

จัดสมการใหม่ ; 2. $x^2 = \dots\dots\dots$

จะได้ความสัมพันธ์เป็น

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots\}$

1. $y^2 - 6y + 9$

2. $-12y$

3. $x^2 = -12y$

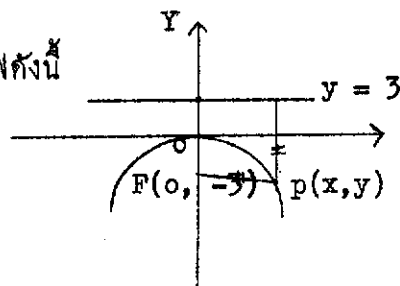
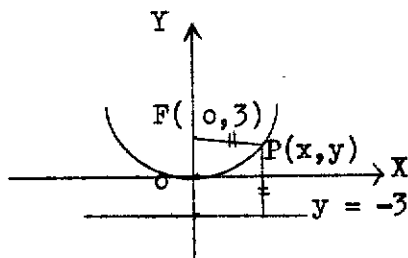
นักเรียนต้องตอบถูกมากกว่า 2 ข้อ นะคะ จึงจะอ่านกรอบต่อไปได้

จากสมการในกรอบที่ 7 คือ $x^2 = 12y$

กรอบที่ 9

จากสมการในกรอบที่ 8 คือ $x^2 = -12y$

ซึ่งได้รูปกราฟดังนี้



นักเรียนบอกได้ไหมว่าพาราโบลาทั้งสองมีอะไรแตกต่างกันบ้าง ?

$$x^2 = 12y$$

$$x^2 = -12y$$

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. จุดยอดอยู่ที่..... | 1. จุดยอดอยู่ที่..... |
| 2. โฟกัสอยู่ที่..... | 2. โฟกัสอยู่ที่..... |
| 3. ไคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง..... | 3. ไคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง..... |
| 4. แกนของพาราโบลา คือ..... | 4. แกนของพาราโบลา คือ..... |
| 5. กราฟหงายหรือคว่ำ..... | 5. กราฟหงายหรือคว่ำ..... |

1. (0,0) 2. (0,3) 3. $y = -3$ 4. แกน Y 5. หงาย

1. (0,0) 2. (0,-3) 3. $y = 3$ 4. แกน Y 5. คว่ำ

ต่อไป เราจะหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัส

กรอบที่ 10

อยู่ที่ $F(0,c)$ และไคเรกทริกซ์คือเส้นตรง $y = -c$ กันนะคะ

จากรูป จุด $F(0, c)$ เป็นโฟกัส

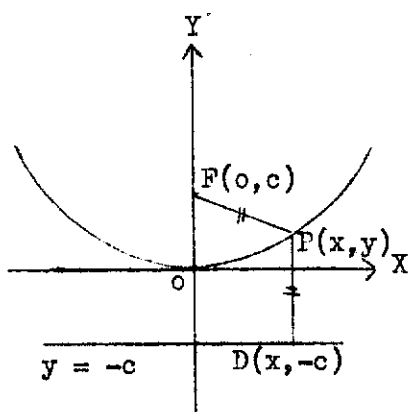
เส้นตรง $y = -c$ เป็นไคเรกทริกซ์

ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$D(x, -c)$ เป็นโปรเจกชันของ $P(x,y)$ บนไคเรกทริกซ์

จากนิยามของพาราโบลา เราจะได้ว่า

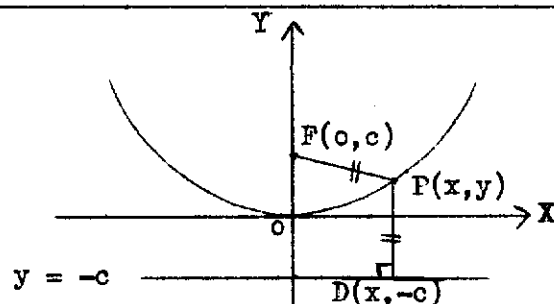
$$|PF| = |PD|$$



|PD|

ถ้านักเรียนตอบผิด ต้องอ่านกรอบที่ 10 ใหม่ค่ะ

กรอบที่ 11



จากรูป นักเรียนจะได้ว่า $|PF| = |PD|$

เมื่อหาระยะทางระหว่างจุด P ถึง F และ P ถึง D จะได้

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ ; 1. $(x-0)^2 + (y-c)^2 = \dots\dots\dots$

เปิกวางเล็บแล้วจะได้ ; 2. $x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = \dots\dots\dots$

1. $(x-x)^2 + (y+c)^2$ หรือ $(y+c)^2$ 2. $y^2 + 2cy + c^2$

เก่งมากเลยที่ตอบถูกทั้ง 2 ข้อ อ่านกรอบที่ 12 ได้ค่ะ

กรอบที่ 12

จากสมการในกรอบที่ 11 ; $x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$

เมื่อกำจัดพจน์เหมือนกันแล้วจะได้ ; $x^2 = 4cy$

จึงสรุปได้ว่า

พาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $F(0, c)$

สมการโคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -c$

และมีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$

จะมีสมการเป็น $x^2 = \dots\dots\dots$

4cy

นักเรียนคงจำสมการพาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(0,c)$ และไคเรกทริกซ์ กรอบที่ 13
คือเส้นตรง $y = -c$ ไคระคะ (อยู่ในกรอบที่ 12 ใจคะ) ซึ่งเราได้สมการเป็น $x^2 = 4cy$

จะเห็นได้ว่า ทางซ้ายของสมการจะมีค่าเป็นบวก หรือศูนย์เท่านั้น ซึ่งทำให้
 $y \geq 0$ กายจึงอาจสรุปได้ว่า

1. ถ้า $c > 0$ กราฟของพาราโบลาจะหงาย ขึ้น
2. ถ้า $c < 0$ กราฟของพาราโบลาจะ.....

และสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$3. \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots \}$$

2. กล่าวถึง

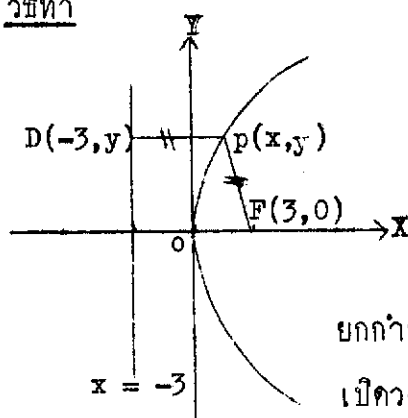
3. $x^2 = 4cy$

ต่อไปนี้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 3, 4 คะ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $F(3,0)$ กรอบที่ 14

ไคเรกทริกซ์ คือ $x = -3$

วิธีทำ



จากรูปให้ $P(x,y)$ อยู่บนพาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(3,0)$

ไคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -3$

จากนิยาม $|PF| = |PD|$

หาระยะทางจากจุด P ถึง F และจาก P ถึง D แทน

ในสมการ $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-y)^2}$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง; $(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2$

เปิดวงเล็บ ; 1. $x^2 - 6x + 9 + y^2 = \dots\dots\dots$

จัดสมการใหม่ 2: $y^2 = \dots\dots\dots$

จะได้ความสัมพันธ์เป็น 3. $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots \}$

1. $x^2 + 6x + 9$

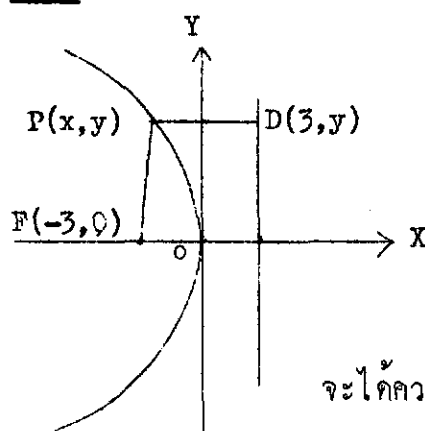
2. $12x$

3. $y^2 = 12x$

เก่งมากอ่านกรอบที่ 15 ได้เลย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสที่ $F(-3,0)$ กรอบที่ 15โคเรกทริกซ์ คือ $x = 3$

วิธีทำ

จากนิยามจะได้ $|PF| = |PD|$

หาระยะทางจากจุด P ถึง F และ P ถึง D แทนใน

สมการ $\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-y)^2}$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง; $(x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2$

เปิดวงเล็บ; 1. $x^2 + 6x + 9 + y^2 = \dots\dots\dots$

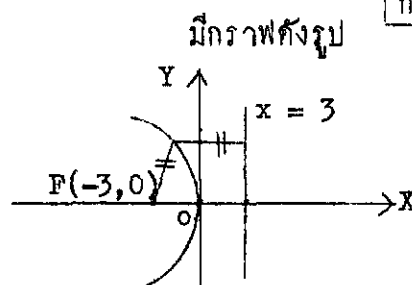
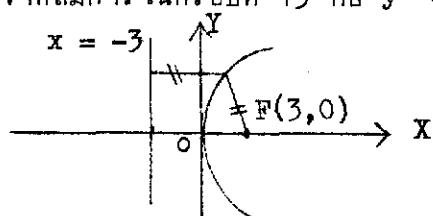
จัดสมการใหม่; 2. $y^2 = \dots\dots\dots$

จะได้ความสัมพันธ์เป็น ; 3. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots\}$

1. $x^2 - 6x + 9$

2. $-12x$

3. $y^2 = -12x$

จากสมการในกรอบที่ 14 คือ $y^2 = 12x$ จากสมการในกรอบที่ 15 คือ $y^2 = -12x$ 

นักเรียนบอกได้ไหมว่าพาราโบลาทั้งสองมีอะไรต่างกันบ้าง

$y^2 = 12x$

$y^2 = -12x$

1. จุดยอดอยู่ที่.....

1. จุดยอดที่.....

2. โฟกัสอยู่ที่.....

2. โฟกัสที่.....

3. โคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง.....

3. โคเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง.....

4. แกนของพาราโบลา คือ.....

4. แกนของพาราโบลา คือ.....

5. กราฟเปิดซ้ายหรือขวา.....

5. กราฟเปิด.....

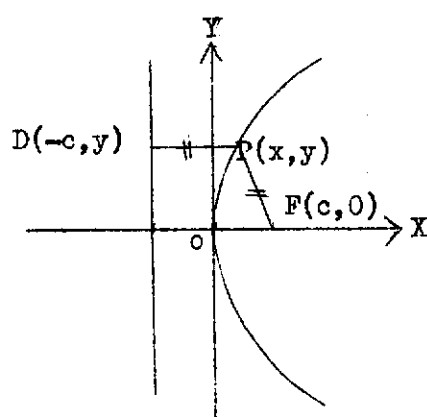
1. (0,0) 2. F(3,0) 3. $x = -3$ 4. แกน x 5. ขวา

2. (0,0) 2. F(-3,0) 3. $x = 3$ 4. แกน x 5. ซ้าย

นักเรียนสามารถหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ F(0,c) และ กรอบที่ 17

ไดเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -c$ ไ้แล้วนะคะ (กรอบที่ 10-13 ใจ)

ต่อไปเราจะหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ F(c,0) และมีไดเรกทริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -c$ กันนะคะ ไม่ยากหรอก ลองดูซิคะ



จากรูปให้ P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

D(-c,y) เป็นโปรเจกชันของ P(x,y) บนไดเรกทริกซ์

จากนิยามของพาราโบลา จะได้

$$|PF| = |PD|$$

เมื่อหาระยะระหว่างจุด P ถึง F และ P ถึง D จะได้

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\quad ?}$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - y)^2}$$

กรอบที่ 18

จากสมการในกรอบที่ 17 เราได้ว่า

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + (y - y)^2}$$

เมื่อยกกำลังทั้ง 2 ข้างจะได้

$$1. (x - c)^2 + y^2 = \dots\dots\dots$$

เปิดวงเล็บแล้วจะได้สมการเป็น

$$2. x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \dots\dots\dots$$

เมื่อกำจัดพจน์เหมือนกันออกแล้วจะได้

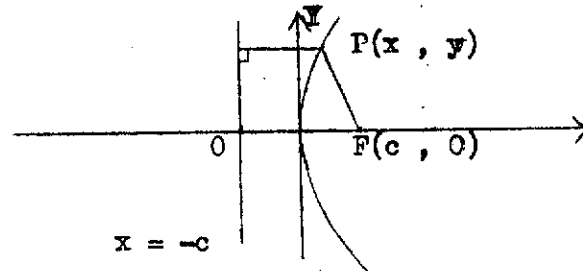
$$3. y^2 = \dots\dots\dots$$

1. $(x + c)^2$ 2. $x^2 + 2cx + c^2$ 3. $4cx$

นักเรียนต้องตอบถูกมากกว่า 1 ข้อนะคะจึงจะอ่านกรอบที่ 19 ได้

นักเรียนได้สมการในกรอบที่ 18 เป็น $y^2 = 4cx$ ซึ่งมีกราฟดังรูป

กรอบที่ 19



ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า พาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(c, 0)$ สมการโคเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -c$ และมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จะมีสมการเป็น

1. $y^2 = \dots\dots\dots$

ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots\}$

1. $y^2 = 4cx$

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 4cy\}$

กรอบที่ 20

นักเรียนทราบแล้วว่าพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $F(c, 0)$ โคเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -c$

จะมีสมการเป็น $y^2 = 4cx$

ซึ่งทางซ้ายของสมการนี้จะมีค่าเป็นจำนวนบวก หรือศูนย์เท่านั้น

ดังนั้น $x \geq 0$ ด้วย นั่นคือ

1. ถ้า $c > 0$ กราฟของพาราโบลาจะเปิดทางขวา

2. ถ้า $c < 0$ กราฟของพาราโบลาจะเปิดทางซ้าย

ถ้านักเรียนเข้าใจก็แล้ว ไปพบครูผู้สอนได้ค่ะ

บทเรียนโปรแกรม
วิชา คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่อง วงรี

หัวข้อ การหาสมการวงรีและการสร้างรูปวงรี

จุดประสงค์ทั่วไป

มุ่งให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. นิยามของวงรี
2. การเขียนกราฟรูปวงรี
3. สมการทั่วไปของวงรี

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนอ่านบทเรียนเล่มนี้จบแล้ว จะมีความสามารถ

1. สรุปนิยามของวงรีได้
2. ระบุส่วนต่าง ๆ ของวงรีได้
3. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีได้
4. เขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นรูปวงรีได้

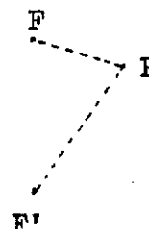
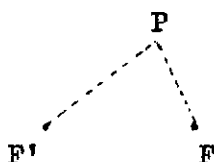
คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรม

1. บทเรียนที่นักเรียนกำลังอ่านอยู่นี้เรียกว่า " บทเรียนโปรแกรม"
2. แต่ละหน้าของบทเรียนเรียกว่า "1 กรอบ" หรือ "1 เฟรม" (Frame)
3. นักเรียนจะต้องศึกษาบทเรียนโดยผ่านทีละกรอบตามลำดับ ไม่ข้ามไปศึกษากรอบอื่นก่อน เพราะเนื้อหามีความต่อเนื่องกันจนจบ
4. นักเรียนสามารถทราบได้ว่าตนเองตอบคำถามได้ถูกต้องหรือไม่ โดยดูเฉลยได้ในกรอบถัดไป แต่นักเรียนต้องไม่เปิดดูคำตอบก่อน มิฉะนั้นนักเรียนจะไม่ได้รับความรู้อะไรจากบทเรียนนี้เลย
5. นักเรียนต้องพยายามอ่านเก็บใจความในแต่ละกรอบให้ไ้มากที่สุด พร้อมทั้งตอบคำถามให้ถูกต้องแล้วจึงศึกษากรอบต่อไปได้
6. ทุกคนสามารถเรียนบทเรียนนี้ได้ จะช้าหรือเร็วขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคล ซึ่งเราไม่คำนึงถึงเวลา เพียงขอให้ผู้เรียนมีความตั้งใจจริงเท่านั้น

นิยามของวงรี

กำหนดให้จุด F และ F' เป็นจุดคงที่ 2 จุดใด ๆ บนระนาบ

P เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยัง F และ F' มีค่าคงที่ (ในที่นี้มีค่าเป็น 3 เซนติเมตร)



ให้นักเรียนเลื่อนจุด P ไปยังตำแหน่งอื่น ๆ บนระนาบ แต่ยังคงทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด F และ F' มีค่าคงที่เท่าเดิม (ในที่นี้คือ 3 เซนติเมตร)

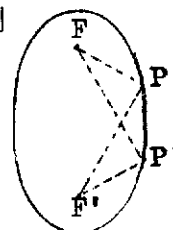
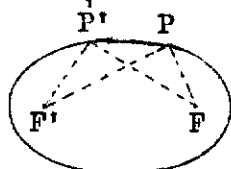
จุด P ที่นักเรียนเลื่อนไปนั้นจะเรียงกันเป็นรูปอะไรเอ่ย ?

.....

วงรี

เก่งมากค่ะ.....อ่านกรอบที่ 2 ใ้จ้ะ

นักเรียนทราบแล้วว่า จุด P ที่เลื่อนไปนั้น แต่ยังคงทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด F และจุด F' มีค่าคงที่ จะทำให้เกิดกราฟรูปวงรี ดังรูป



นักเรียนคิดว่า ผลบวกของระยะทางจากจุด P ต่าง ๆ (ที่เลื่อนไปนั้น) ไปยังจุดคงที่ที่กำหนดให้ (จุด F และ F') มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ?

ผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด F และ F' มีค่าคงที่ หรือ $|PF| + |PF'|$ มีค่าคงที่
ถ้านักเรียนตอบถูก อ่านกรอบที่ 3 ได้เลย ถ้าตอบผิดให้อ่านกรอบที่ 1 , 2 อีกครั้งค่ะ

กรอบที่ 3

นักเรียนทราบแล้วว่าจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งทำให้ผลบวกของระยะทางจากจุดทุกจุดดังกล่าว
ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่นั้น ทำให้เกิดกราฟเป็นวงรี (Ellipse)

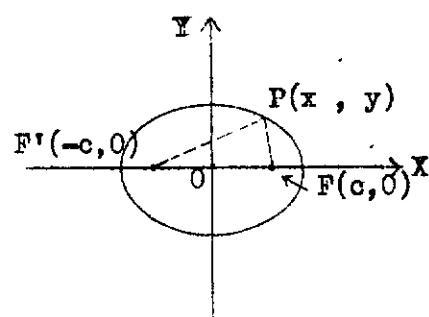
จึงสามารถสรุปได้ว่า

วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของ.....
.....

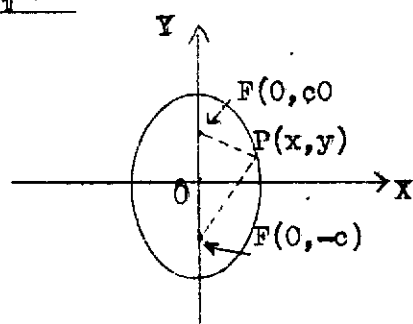
ระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่

รูปที่ 1

กรอบที่ 4



รูปที่ 2



จากรูป 1 จุดคงที่ที่กำหนดให้คือ $F(c, 0)$

และ $F'(-c, 0)$ เรียกว่า โฟกัส (Focus)

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี

จากรูป 2 จุดโฟกัสคือ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$

จากนิยามวงรี จะได้ว่า

$$|PF'| + |PF| = 2a$$

(สมมติให้ $2a$ เป็นค่าคงที่)

นักเรียนคิดว่า $|PF'| + |PF|$ จะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า $|FF'|$?

.....

มากกว่า

นักเรียนทอมถูกใช้มี.....เก่งมากค่ะ.....อ่านกรอบที่ 5 เลขค่ะ

กรอบที่ 5

จากกรอบที่ 4 นักเรียนทราบว่า $|PF'| + |PF|$ มีค่ามากกว่า $|FF'|$

จึงสรุปได้ว่า

ค่าคงที่ $2a$ ย่อมมีค่า.....มากกว่า หรือ น้อยกว่า.....ระยะระหว่างโฟกัสทั้งสอง

..... ?

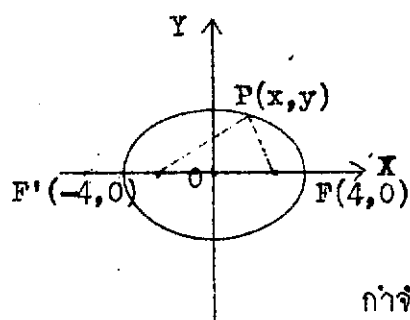
มากกว่า

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F(\pm 4, 0)$

กรอบที่ 6

และผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัส เท่ากับ 10

วิธีทำ



จากนิยามของวงรีจะได้ว่า $|PF'| + |PF| = 10$

แทนค่าระยะทางระหว่างจุด P ถึง F' และ P ถึง F

จะได้สมการเป็น $\sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = 10$

จัดสมการใหม่; $\sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

ยกกำลังสอง $(x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2$

; $x^2 + 8x + 16 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2} + x^2 - 8x + 16 + y^2$

กำจัดพจน์เหมือน ; $20\sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2} = 100 - 16x$

นำ 4 ทหาร ; $5\sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2} = 25 - 4x$

ยกกำลังสอง ; $25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 625 - 200x + 16x^2$

จะพักทบทวนกรอบที่ 6 อีกสักกรอบก็ได้ค่ะ

กรอบที่ 7

จากสมการในกรอบที่ 6 คือ $25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 625 - 200x + 16x^2$

เปิดวงเล็บทางซ้าย ; $25x^2 - 200x + 400 + 25y^2 = 625 - 200x + 16x^2$

กำจัดพจน์เหมือนกัน ; $25x^2 - 16x^2 + 25y^2 = 625 - 400$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

นำ 225 หาร ; $\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีที่มีโฟกัสที่ $F(\pm 4, 0)$ ผลบวกคงที่เท่ากับ 10

คือ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$

กรอบที่ 8

การหาสมการและความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี

เราสามารถหาสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน x

ที่จุด $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ ได้ดังนี้

จากรูป ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนวงรี

จากนิยามของวงรี จะได้ว่า

$|PF'| + |PF|$ มีค่าคงที่ (สมมติให้เป็น $2a$)

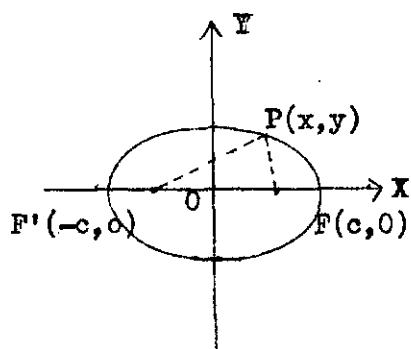
ดังนั้น

1. $|PF'| + |PF| = \dots\dots\dots$

เมื่อแทนค่าระยะทางระหว่างจุด P ถึง F' และ P ถึง

F จะได้

2. $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$



1. $2a$

2. $\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$

กรอบที่ 9

นักเรียนได้สมการว่า $\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$

จัดสมการใหม่ ; $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

ยกกำลังสอง ; $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$

เปิดวงเล็บ ; $\dots\dots\dots + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \dots\dots\dots + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$
 เกินมากคะ.....อ่านกรอบที่ 10 ใต้เลย.....

กรอบที่ 10

เมื่อเปิดวงเล็บแล้ว นักเรียนได้สมการเป็น

$(x^2) + 2cx + (c^2) + (y^2) = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x^2) - 2cx + (c^2) + (y^2)$

จัดสมการใหม่ ; $4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$

นำ 4 ทหาร ; $a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

ยกกำลังสอง ; $a^2 [(x - c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$

เปิดวงเล็บ ; $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

นักเรียนตอบถูกไหม ที่มา.....อ่านกรอบที่ 11 ซิคะ

กรอบที่ 11

จากกรอบที่ 10 นักเรียนได้สมการเป็น

$$a^2x^2 - (2a^2cx) + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - (2a^2cx) + c^2x^2$$

ถ้าจัดพจน์เหมือน ; $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$

จัดสมการใหม่ ; $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

นำ $a^2(a^2 - c^2)$ ทหาร ; เมื่อ $a^2 \neq c^2$ จะได้

$$\frac{x^2}{\boxed{}} + \frac{y^2}{\boxed{}} = \boxed{}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ถ้านักเรียนตอบผิด ท่องกลับไปอ่านกรอบที่ 11 อีกครั้ง

จากกรอบที่ 1: นักเรียนได้สมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

กรอบที่ 12

$\because a > c > 0$ (...จากกรอบที่ 4, 5 ใจคะ) ดังนั้น $a^2 - c^2 > 0$

ให้ $b^2 = a^2 - c^2$ แทนลงในสมการจะได้ว่า $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จึงสรุปได้ว่า

วงรีมีโฟกัสอยู่ที่ $F(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = a^2 - c^2$$

ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ โดยที่ } b^2 = a^2 - c^2\}$$

จากสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $b^2 = a^2 - c^2$ กรอบที่ 13

1. เนื่องจาก $\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ดังนั้นแกน y เป็นแกนสมมาตร

และ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ดังนั้นแกน x เป็นแกนสมมาตร

2. เนื่องจาก $b^2 = a^2 - c^2$ ดังนั้น $a^2 > b^2$

จะได้ $a > b$

3. ถ้า $y = 0$ แล้ว $x = \pm a$ จะได้จุดอันตรายเป็น $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$

4. ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = \pm b$ จะได้จุดอันตรายเป็น $(0, b)$ และ $(0, -b)$

5. ดังนั้นจุดที่อยู่บนวงรีได้แก่ $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ และ $(0, -b)$

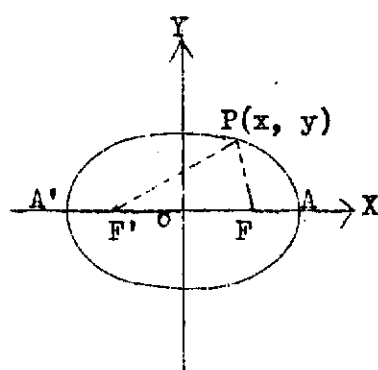
3. $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$ 4. $(0, b)$ และ $(0, -b)$

5. $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ และ $(0, -b)$

นักเรียนต้องตอบถูกอย่างน้อย 2 ข้อนะค่ะ จึงจะอ่านกรอบที่ 14 ได้

จากกรอบที่ 13 เราจะได้กราฟของวงรีเป็น

กรอบที่ 14



จากรูป เราเห็น ส่วนต่าง ๆ ของวงรี ดังนี้

1. จุด $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ เรียกว่า โฟกัส (Focus)

2. จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี (Center)

3. เส้นตรง AA' ผ่านโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า แกนเอก (Major Axis)

4. เส้นตรง BB' ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลางของวงรี เรียกว่า แกนโท (Minor Axis)

5. จุดที่วงรีตัดแกนเอก คือ $A(a, 0)$ และ $A'(-a, 0)$ เรียกว่า จุดยอดของวงรี (Vertices)

นักเรียนคิดว่า ก. $|AA'|$ ยาวเท่ากับ | ? | หน่วย

ข. $|BB'|$ ยาวเท่ากับ | ? | หน่วย

ก. | 2a |

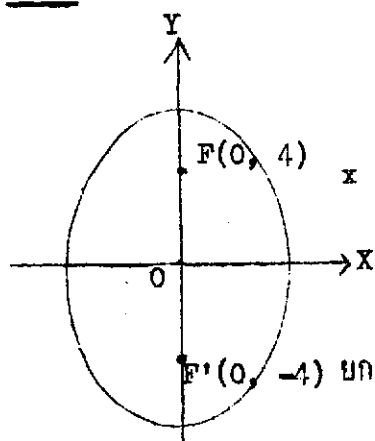
ข. | 2b |

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรีที่มีโฟกัสที่ $F(0, \pm 4)$

กรอบที่ 15

ผลบวกจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสเท่ากับ 10

วิธีทำ

จากนิยามของวงรีจะได้ $|PF'| + |PF| = 10$ แทนค่า; $\sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = 10$ จัดสมการใหม่; $\sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$

$$x^2 + y^2 + 8y + 16 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} + x^2 + y^2 - 8y + 16$$

กำจัดพจน์เหมือน; $20\sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 100 - 16y$ นำ 4 ทหาร; $5\sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 25 - 4y$ ยกกำลังสอง; $25(x^2 + y^2 - 8y + 16) = 625 - 200y + 16y^2$

กรอบที่ 16

จากสมการในกรอบที่ 15 คือ $25(x^2 + y^2 - 8y + 16) = 625 - 200y + 16y^2$ เปิดวงเล็บ; $25x^2 + 25y^2 - 200y + 400 = 625 - 200y + 16y^2$ กำจัดพจน์เหมือน; $25x^2 + 25y^2 - 16y^2 = 625 - 400$

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

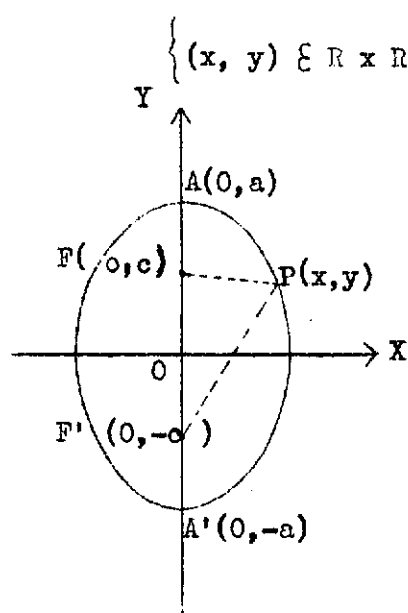
$$\text{นำ } 225 \text{ ทหาร ; } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\text{หรือ } \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$

ความสัมพันธ์ของวงรีที่มีโฟกัสที่ $F(0, \pm 4)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ 10

$$\text{คือ } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1 \right\}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ ดังรูป ได้เป็น



ในกรณีนี้ นักเรียนบอกส่วนต่าง ๆ ของวงรีได้ไหม

1. จุดโฟกัสของวงรี คือ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$
2. จุดยอดของวงรี คือ $(0, a)$ และ $(0, -a)$
3. แกนเอกได้แก่เส้นตรง AA' ยาวเท่ากับ $|2a|$ หน่วย
4. แกนโทได้แก่เส้นตรง.....ยาวเท่ากับ.....หน่วย

2. $A(0, a)$ และ $A'(0, -a)$

3. BB' ยาวเท่ากับ $|2b|$ หน่วย

เก่งมากเลยล่ะ.....แต่ถ้ายังไม่ถูก ให้กลับไปอ่านกรอบ 14 , 17 ใหม่ค่ะ

นักเรียนจะอ่านบททบทวนบทเรียนนี้โดยเลือกอ่านเฉพาะบางกรอบไปพลาง ๆ ก่อนก็ได้..

เมื่อเข้าใจแล้วก็ไปพบครูผู้สอนนะคะ

บทเรียนโปรแกรม
วิชา คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4
เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

หัวข้อ การสร้างรูปและการหาสมการไฮเพอร์โบลา

จุดประสงค์ทั่วไป

มุ่งให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. นิยามของไฮเพอร์โบลา
2. การเขียนรูปไฮเพอร์โบลา
3. สมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลา

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนอ่านบทเรียนเล่มนี้จบแล้วจะมีความสามารถ

1. สรุปนิยามของไฮเพอร์โบลาได้
2. ระบุด้านต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลาได้
3. เขียนสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลาได้
4. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาได้

คำแนะนำในการใช้บทเรียนโปรแกรม

1. บทเรียนที่นักเรียนกำลังอ่านอยู่นี้เรียกว่า "บทเรียนโปรแกรม"
2. แต่ละหน้าของบทเรียนเรียกว่า "1 กรอบ" หรือ "1 เฟรม" (Frame)
3. นักเรียนจะต้องศึกษามบทเรียนโดยผ่านทีละกรอบตามลำดับ ไม่ข้ามไปศึกษากรอบอื่นก่อน เพราะเนื้อหามีความต่อเนื่องกันจนจบ
4. นักเรียนสามารถทราบได้ว่าตนเองตอบคำถามได้ถูกต้องหรือไม่ โดยดูเฉลยได้ในกรอบถัดไป แต่นักเรียนไม่เปิดดูคำตอบก่อน มิฉะนั้นนักเรียนจะไม่สามารถได้รับความรู้อะไรจากบทเรียนนี้เลย
5. นักเรียนต้องพยายามอ่านเก็บใจความในแต่ละกรอบให้ได้มากที่สุด พร้อมทั้งตอบคำถามให้ถูกต้องแล้วจึงศึกษากรอบต่อไปได้
6. ทุกคนสามารถเรียนบทเรียนนี้ได้ จะช้าหรือเร็วขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคล ซึ่งเราไม่คำนึงถึงเวลาเพียงขอให้ผู้เรียนมีความตั้งใจจริงเท่านั้น

กรอบที่ 1

นิยามของไฮเพอร์โบลา

จากรูป กำหนดให้ $F'(-2,0)$ และ $F(2,0)$ เป็นจุดคงที่สองจุดใด ๆ บนระนาบ

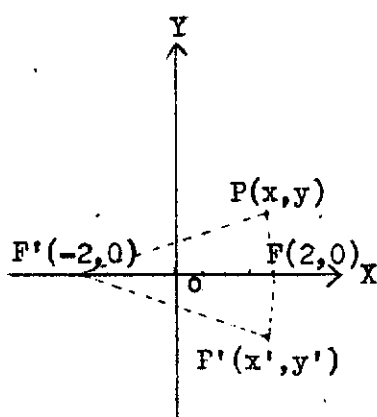
$P(x, y)$ เป็นจุด ๆ หนึ่งที่ทำให้ผลต่างของระยะทางจาก

$P(x, y)$ ไปยังจุด F' และ F มีค่าคงที่เสมอ

(ในที่นี้ให้เท่ากับ 4 หน่วย)

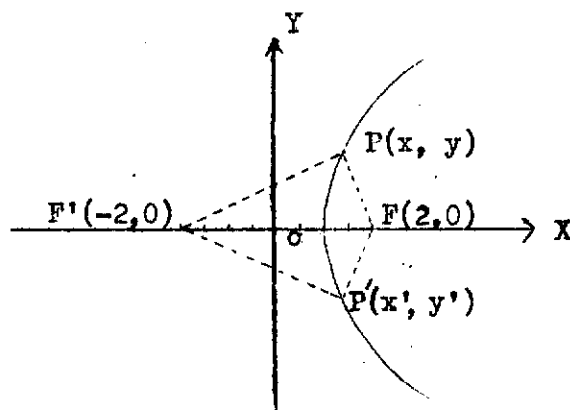
ให้นักเรียนเลื่อนจุด $P(x, y)$ ไปยังตำแหน่งอื่น ๆ บนระนาบ

แต่ยังคงทำให้ $||PF'| - |PF|| = 4$ เสมอ



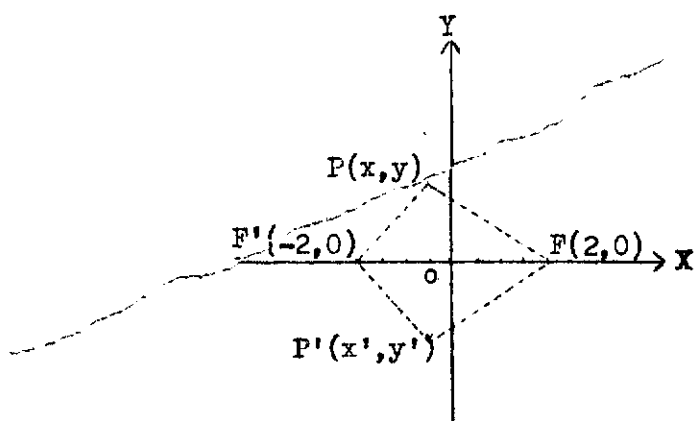
กรอบที่ 2

จุด $P(x, y)$ ที่เลื่อนไปนั้น ต้องเรียงกันได้กราฟอย่างนั้นะคะ

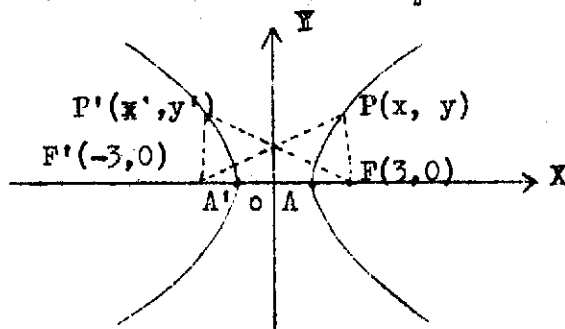


จากรูป ให้นักเรียนเลื่อนจุด $P(x, y)$ ไปยังตำแหน่งอื่น ๆ แต่ยังคงทำให้

$$||PF'| - |PF|| = 4 \text{ เสมอ}$$



จากกรอบที่ 1,2 นักเรียนจะได้กราฟเป็นรูปต่อไปนี้ค่ะ



เส้นโค้งที่เกิดจากจุด $P(x,y)$ ที่เลื่อนไปนั้นเรียงกันทำให้ได้กราฟที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

จุดคงที่ 2 จุด คือ F และ F' นั้นเรียกว่า โฟกัส (Focus)

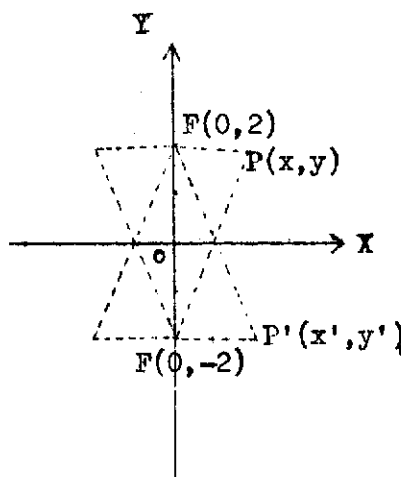
จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา (Center)

จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองนั้น เรียกว่า จุดยอด (Vertices)

นักเรียนคิดว่า $|AA'|$ มากกว่า หรือน้อยกว่า $|FF'|$

..... ?

น้อยกว่า

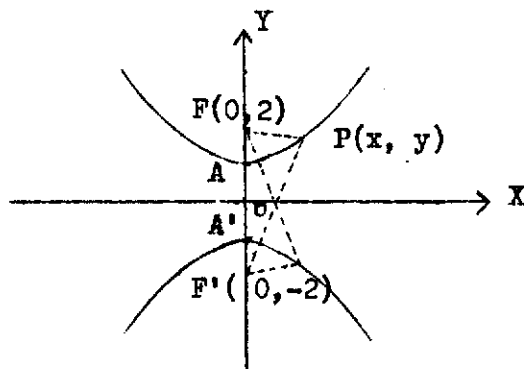


จากรูป กำหนดให้ $F'(0,-2)$ และ $F(0,2)$ เป็นจุดคงที่สองจุดใด ๆ บนระนาบ $P(x,y)$ เป็นจุดหนึ่งที่ทำให้ผลต่างของระยะทางจาก $P(x,y)$ ไปยังจุด F' และ F มีค่าคงที่เสมอ (ในที่นี้ เท่ากับ 4 หน่วย)

ให้นักเรียนเลื่อนจุด $P(x,y)$ ไปยังตำแหน่งอื่น ๆ บนระนาบ แต่ยังคงทำให้ $||PF'| - |PF|| = 4$ เสมอ

กรอบที่ 5

จุด $P(x, y)$ ที่เลื่อนไปนั้นต้องเรียงกันได้กราฟอย่างนั้นะคะ



เราเรียกกราฟนี้ว่า ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) และเรียกส่วนต่าง ๆ ดังนี้

1. จุดคงที่ F' และ F คือ โฟกัส (Focus)
2. จุด O คือ จุดศูนย์กลาง (Center)
3. จุด A' และ A คือ จุดยอด (Vertices)
4. ระยะ $|AA'|$ น้อยกว่า $|FF'|$

กรอบที่ 6

นักเรียนทราบแล้วว่า จุดทุกจุดบนระนาบที่ทำให้ผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดคงที่ สองจุด มีค่าคงที่ นั้น ทำให้เกิดกราฟไฮเพอร์โบลา

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของ.....

.....

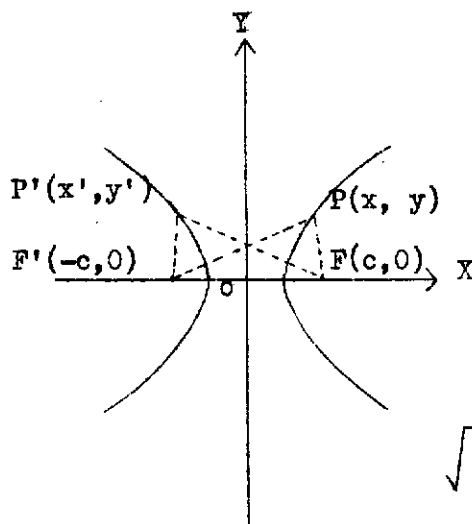
เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยัง

จุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่เสมอ

ต่อไปเราจะหาสมการไฮเพอร์โบลา.....

กรอบที่ 7

สมการของไฮเพอร์โบลา



จากรูป ให้ $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา

จากนิยามของไฮเพอร์โบลา เราได้ว่า

$||PF'| - |PF||$ มีค่าคงที่เสมอ.....(สมมติให้เป็น $2a$)

$$\therefore ||PF'| - |PF|| = 2a$$

เมื่อหาระยะทางระหว่างจุด P ไป F' และ P ไป F

และถอดค่าสัมบูรณ์ จะได้สมการเป็น

$$\sqrt{\dots\dots\dots} - \sqrt{\dots\dots\dots} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-o)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-o)^2} = \pm 2a$$

ถ้านักเรียนตอบถูกแล้ว อ่านกรอบที่ 8 เลยค่ะ

กรอบที่ 8

เราได้สมการในกรอบที่ 7 เป็น

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-o)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-o)^2} = \pm 2a$$

$$\text{จัดสมการใหม่ ; } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{ยกกำลังสอง ; } (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\text{เปิดวงเล็บ ; } \dots\dots\dots + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \dots\dots\dots + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

ถ้านักเรียนตอบถูกแล้ว.....อ่านกรอบที่ 9 ได้เลยคะ

กรอบที่ 9

สมการที่ได้จากกรอบที่ 8 คือ

$$(x^2) + 2cx + (c^2) + (y^2) = 4a^2 \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2) - 2cx + (c^2) + (y^2)$$

กำจัดพจน์เหมือนกัน ; $4cx - 4a^2 = \pm 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

นำ 4 ทหาร ; $cx - a^2 = \pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

ยกกำลังสอง ; $(cx - a^2)^2 = a^2 [(x-c)^2 + y^2]$

เปิดวงเล็บ ; = ...

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

นักเรียนตอบถูกมั๊ยคะ.....ยอดเยี่ยมจริง ๆ.....อ่านกรอบที่ 10 ได้คะ

กรอบที่ 10

จากกรอบที่ 9 เราได้สมการเป็น

$$c^2x^2 - (2a^2cx) + a^4 = a^2x^2 - (2a^2cx) + a^2c^2 + a^2y^2$$

กำจัดพจน์เหมือนกัน ;

$$\begin{array}{l} c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \end{array}$$

นำ $a^2(c^2 - a^2)$ ทหารตลอด เมื่อ $c^2 - a^2 \neq 0$ จะได้สมการเป็น

$$\frac{x^2}{\square} - \frac{y^2}{\square} = \square$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

โอ้โฮ! นักเรียนเก่งจังเลยที่ตอบได้ถูกต้อง

เราได้สมการไฮเพอร์โบลาเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

กรอบที่ 11

เนื่องจาก $c > a > 0$ (จากกรอบที่ 3) ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$ แทนลงในสมการเดิมจะได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$

เป็นสมการที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งมี

1. จุดโฟกัสอยู่ที่ $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$
2. ผลต่างคงที่มีค่าเท่ากับ $2a$
3. มีความสัมพันธ์เป็น $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \dots\dots\dots \}$

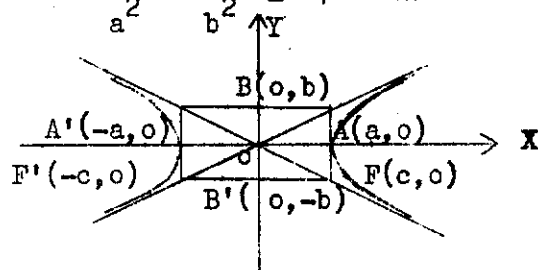
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2 = c^2 - a^2$

จากกรอบที่ 11 เราได้สมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสที่ $(\pm c, 0)$ และ

กรอบที่ 12

ผลต่างคงที่ $= 2a$ เป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $b^2 = c^2 - a^2$ และมีกราฟเป็น



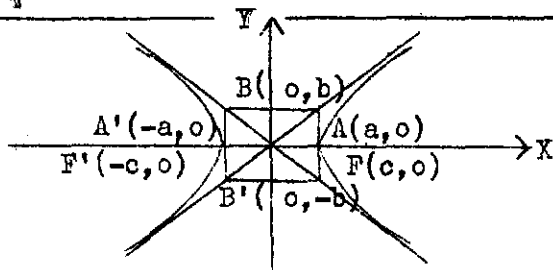
นักเรียนพอจะรู้จักส่วนต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลามบ้างแล้ว ดังนั้นคงตอบคำถามนี้ได้

1. จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้อยู่ที่จุด.....
2. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา อยู่ที่จุด.....และ.....
3. จุดยอดของไฮเพอร์โบลา อยู่ที่จุด.....และ.....
4. เส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า แกนตามขวาง (Transverse Axis)
5. เส้นตรง BB' ตั้งฉากและแบ่งครึ่งแกนตามขวาง เรียกว่า แกนสังยุค

(Conjugate Axis)

1. $(0,0)$ 2. $F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$ 3. $A(a, 0)$ และ $A'(-a, 0)$

นักเรียนต้องตอบถูกอย่างน้อย 2 ข้อนะคะ จึงจะอ่านกรอบที่ 13 ได้



กรอบที่ 13

เราทราบแล้วว่า เส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดของไฮเพอร์โบลา เรียกว่า แกนตามขวาง

เส้นตรงที่กึ่งฉากและแบ่งครึ่งแกนตามขวาง เรียกว่า แกนสังยุค

นักเรียนขอ ได้ไหมว่า จากรูปข้างบนนี้ แกนทั้งสองดังกล่าว คือ เส้นตรงใด ?

1. แกนตามขวาง คือ เส้นตรง.....ซึ่งยาวเท่ากับ.....หน่วย

2. แกนสังยุค คือ เส้นตรง.....ซึ่งยาวเท่ากับ.....หน่วย

1. AA' ; $|2a|$ หน่วย 2. BB' ; $|2b|$ หน่วย

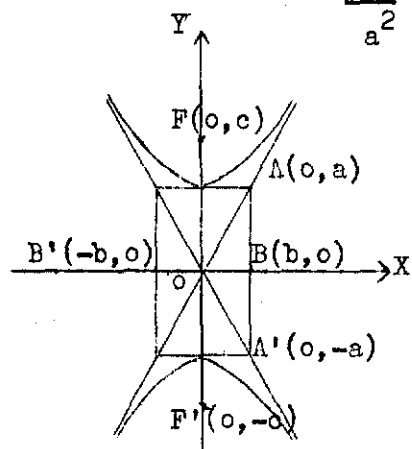
ถูกต้องใช่ไหม ดีมากคะ.....อ่านกรอบที่ 14 ได้เลย

กรอบที่ 14

นักเรียนสามารถหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน x ได้แล้วคะ

ซึ่งในทำนองเดียวกัน ถ้าไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสอยู่บนแกน y และมีผลต่างคงที่เท่ากับ

$$2a \text{ ก็จะมีสมการเป็น } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{โดยที่ } b^2 = c^2 - a^2$$



จากรูป ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จุดโฟกัส อยู่ที่.....และ.....
2. จุดยอด อยู่ที่.....และ.....
3. แกนตามขวางคือ เส้นตรง.....
4. แกนสังยุค คือ เส้นตรง.....

1. $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ 3. AA'

2. $A(0, a)$ และ $A'(0, -a)$ 4. BB'

นักเรียนควรตอบถูกมากกว่า 2 ข้อนะค่ะ จึงจะอ่านกรอบที่ 15 ได้

กรอบที่ 15

ในการเขียนกราฟว่า ๆ ของไฮเพอร์โบลาที่ผ่านมา นักเรียนจะเห็นว่า มี ☐
มมฉากหนึ่ง ☐ รูปนั้นเกิดจาก

1. การลากเส้นตรงผ่านจุดยอดให้ขนานกับแกนสัจยุค และลากเส้นตรงผ่านจุดปลายของแกนสัจยุคให้ขนานกับแกนตามขวาง

2. เส้นทะแยงมุมของ ☐ มมฉากนั้นจะช่วยให้เขียนกราฟได้ง่ายขึ้นเราเรียกเส้นทะแยงมุมนี้ว่า Asymtote

3. ถ้า $AA' = BB'$ เรียกไฮเพอร์โบลานี้ว่า ไฮเพอร์โบลามมฉาก

(Rectangular Hyperbola)

4. ไฮเพอร์โบลามีสมการอยู่ในรูป $xy = k$; $k \in \mathbb{R}$ เป็นไฮเพอร์โบลามมฉาก

กรอบที่ 16

นักเรียนคงจำได้ว่า $xy = k$ ก็เป็นสมการไฮเพอร์โบลารูปหนึ่ง

ซึ่งเราจะศึกษาถึงรูปกราฟของ $xy = k$ กันนะค่ะ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $xy = 6$

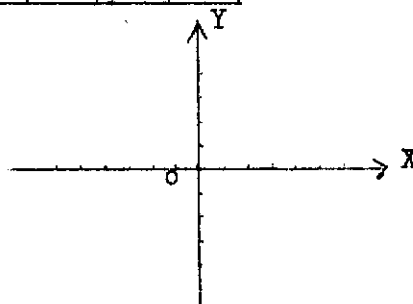
วิธีทำ จากสมการ $xy = 6$ ซึ่งอาจเขียนได้เป็น $y = \frac{6}{x}$
ให้นักเรียนหาค่า y เติมลงในตารางให้สอดคล้องกับ x ที่กำหนดให้

1.

x	...	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	...
y	...				-6	6				...

2. นำ (x, y) มาเขียนกราฟได้เป็น

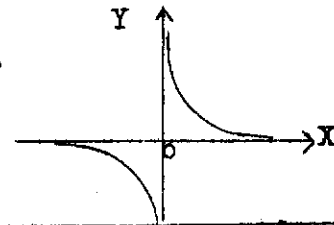
3. กราฟอยู่ในควอดรันต์ใดบ้าง ?



1.

x	...	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	...
y	...	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1	...

2.



3. ควอดรนต์ ที่ 1 และ 3

กรอบที่ 17

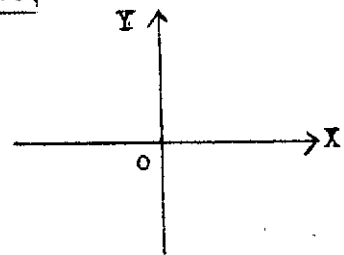
ต่อไปให้พิจารณาตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $xy = -6$ วิธีทำ จากสมการ $xy = -6$ หรือเขียนได้เป็น $y = \frac{-6}{x}$ 1. ให้นักเรียนหาค่า y เติมในตารางให้สอดคล้องกับค่า x ที่กำหนดให้

x	...	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	...
y	...				6	-6				...

2. เมื่อเขียนกราฟจะได้กราฟเป็น

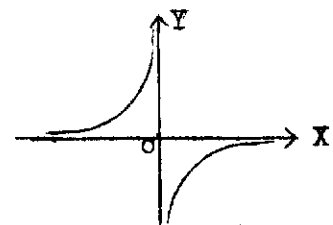
3. กราฟอยู่ในควอดรนต์ที่เท่าไร ?



1.

...	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	...
...	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1	...

2.



3. ควอดรนต์ที่ 2 และ 4

กรอบที่ 18

จากกรอบที่ 14 และ 15 เราสรุปได้ว่า สำหรับไฮเพอร์โบลา $xy = k$ 1. ถ้า $k > 0$ กราฟจะอยู่ในควอดรนต์ที่ 1 และ 32. ถ้า $k < 0$ กราฟจะอยู่ในควอดรนต์ที่ 2 และ 4

นักเรียนจะอ่านบทวนบางกรอบที่ยังสงสัยอยู่ไปพลาจ ๆ ก่อนก็ได้
เมื่อเข้าใจแล้วไปพบครูผู้สอน

บทเรียนปฏิบัติการ

เรื่องการสร้างรูปวงกลม

<u>ชั้น</u>	มัธยมศึกษาปีที่ 4
<u>จุดประสงค์</u>	เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปวงกลมและสรุปหาณิยามของวงกลม
<u>อุปกรณ์</u>	ไม้บรรทัด เชือก 1 เส้น หนุ่คหัวกลม 2 ตัว กระดาษแข็ง 1 แผ่น คินสอคำ และโหม 1 แผ่น
<u>การจัดกลุ่ม</u>	แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละ 4-5 คน
<u>กิจกรรม</u>	1. ให้นักเรียนกำหนดจุด O ลงบนบริเวณกลางกระดาษแข็ง 2. วาดกระดาษแข็งลงบนแผ่นโหม (เพื่อความสะดวกในการปักหนุ่ค) 3. ใช้หนุ่คหัวกลมซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือก (ยาว 1 หน่วย) อีกข้างผูกติดกับคินสอคำ บักหนุ่คลงที่จุด O (กำหนด 1 หน่วย : 1 นิ้ว) 4. ใช้ปลายคินสอดึงเชือกให้ตึงโดยใช้เชือกทาบอยู่บนกระดาษ แล้วเคลื่อนคินสอไป (พยายามให้เชือกตึงอยู่ตลอดเวลา) 5. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงาน ผลการทดลอง แล้วคึงหนุ่คออก 6. กำหนดจุด $P, P_1, P_2, \dots$ ใด ๆ บนกราฟ แล้วลาก $\overline{OP}, \overline{OP}_1, \overline{OP}_2, \dots$ 7. วัดระยะ $\overline{OP}, \overline{OP}_1, \overline{OP}_2, \dots$ แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง 8. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหาณิยามของวงกลม 9. ส่งแผ่นรายงานผลการทดลอง พร้อมบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์คืนอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองโครงการสร้างปัญญา

กำหนดจุด 0 และ F ทางต้น 1 หน่วย	รูปที่ เกิด	ระบบ PO	ระบบ P ₁ O	ระบบ P ₂ O	

สรุปนิยามของวงกลม

วงกลม คือ

.....

บทเรียนปฏิบัติการ

เรื่องการสร้างรูปพาราโบลา

<u>ชั้น</u>	มัธยมศึกษาปีที่ 4
<u>จุดประสงค์</u>	เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปพาราโบลา และสรุปนิยามของพาราโบลาได้
<u>อุปกรณ์</u>	1. ไม้ T เชือก เข็มหมุด 2 ตัว กระดาษแข็ง 4 แผ่น และโฟม 1 แผ่น 2. แผ่นรายงานผลการทดลอง
<u>การจัดกลุ่ม</u>	แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละ 4-5 คน
<u>กิจกรรม</u>	1. ให้นักเรียนกำหนดจุด F ใด ๆ ลงบนกระดาษแข็งแผ่นแรก 1 จุด 2. ลากเส้นตรง l ในแนวตั้งทางซ้ายของจุด F ให้ห่างจากจุด F 6 หน่วย 3. วางกระดาษลงบนโฟม (เพื่อความสะดวกในการปัก เข็มหมุด) 4. ปักเข็มหมุดซึ่งผูกติดกับปลายเชือกข้างหนึ่ง ลงที่จุด F 5. เลื่อนไม้ T ไปตามแนวเส้นตรง l โดยให้ด้าน AB ตั้งฉากกับ l ตลอดเวลา แล้วใช้ปลายคินสอขีดเส้นเชือกให้ทาบทามแนว AB ขณะที่เลื่อนไม้ T ไป และให้ลงจุดต่าง ๆ ลงบนกระดาษให้มากพอสมควร จนมองเห็นการเรียงของจุด แล้วเอาหมุดออก (พยายามเลื่อนไม้ T ไปทีละน้อย ซึ่งจะทำให้ได้จุดอยู่ห่างกันไม่มากนัก) 6. ใช้คินสอโยงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น 7. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง 8. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ ลาก $\overline{PF}$ และลากเส้นตั้งฉากจาก P ไป l (PQ) รัศมี $\overline{PF}$ และ $\overline{PQ}$ จากนั้นบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง 9. ให้นักเรียนพิจารณาว่า $\overline{PF}$ และ $\overline{PQ}$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร เขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง

10. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-9) ลงบนกระดาษแผ่นใหม่อีก 3 แผ่น โดยเปลี่ยนคำสั่งข้อ 2 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2, 3, 4 ตามลำดับ
 แผ่นที่ 2 ลากเส้นตรง 1 ในแนวตั้งทางขวาของจุด F ห่างจาก F 6 หน่วย
 แผ่นที่ 3 ลากเส้นตรง 1 ในแนวนอนทางใต้ของจุด F ห่างจาก F 6 หน่วย
 แผ่นที่ 4 ลากเส้นตรง 1 ในแนวนอนทางเหนือของจุด F ห่างจาก F 6 หน่วย
11. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปทฤษฎีบทของพาราโบลา
12. ส่งแผ่นรายงานผลการทดลองพร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์คืนอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองเรื่องการสร้างรูปแบบทราโนล

รูปที่	รูปที่เกิดข้อ	ระยะ PF	ระยะ PD	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PL
1				
2				
3				
4				

สรุปเนื้อหาของทราโนล

ทราโนล คือ

.....

บทเรียนปฏิบัติการ

เรื่องการสร้างรูปวงรี

- ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4
- จุดประสงค์ เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปวงรี และสรุปนิยามของวงรี
- อุปกรณ์
1. ไม้บรรทัด เชือก 2 เส้น หนูกหัวกลม 2 ตัว กระดาษแข็ง 2 แผ่น และโฟม 1 แผ่น
 2. แผ่นรายงานการทดลอง
- การจัดกลุ่ม แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละ 4-5 คน
- กิจกรรม
1. ให้นักเรียนกำหนดจุด 2 จุด ให้จุด F ทางขวามือ และ F' ทางซ้ายมือ ลงบนกระดาษตามแนวนอนให้ห่างกัน 8 หน่วย (กำหนด 1 หน่วย = 2 ซม.)
 2. วางกระดาษลงบนแผ่นโฟม เพื่อความสะดวกในการปักเข็มหมุด
 3. ใช้หนูกหัวกลมซึ่งผูกอยู่ที่ปลายเชือกทั้ง 2 ข้าง บักลงที่จุด F และ F' (เชือกยาว 10 หน่วย)
 4. ใช้ปลายคินสอดึงเส้นเชือกให้ตึง โดยให้เชือกทาบอยู่บนกระดาษ แล้วเคลื่อนคินสอดึงเส้นเชือกให้เคลื่อนที่ตลอดเวลา
 5. พิจารณารูปกราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง แล้วดึงหนูกออก
 6. กำหนดจุด P ใด ๆ บนกราฟ แล้วลาก $\overline{PF}$ และ $\overline{PF'}$
 7. วัดระยะ $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$ และ $\overline{PF} + \overline{PF'}$ แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง
 8. ให้นักเรียนพิจารณาว่า $\overline{PF} + \overline{PF'}$ มีความสัมพันธ์กับความยาวของเส้นเชือกอย่างไร แล้วเขียนผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง

9. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-8) ลงบนกระดาษแผ่นใหม่อีก 1 แผ่นโดยเปลี่ยนคำสั่งข้อ 1 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็นการกำหนดจุด F' ข้างบนและ F'' ข้างล่าง บนกระดาษตามแนวดิ่งให้ห่างกัน 8 หน่วย
10. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของวงรี
11. ส่งแผ่นรายงานผลการทดลอง พร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการ และอุปกรณ์ชิ้นอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองโครงการสร้างโรงน้ำ

กำหนด F, F' ทางขึ้น 8 หน่วย	รูปที่แสดง	ระยะ PF	ระยะ PF'	PF + PF'	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF + PF' กับความยาวของเส้นเชื่อม
รูปที่ 1					
รูปที่ 2					

สรุปเนื้อหาของงาน

งาน คือ

.....

.....

บทเรียนปฏิบัติการ

เรื่องการสร้างรูปไฮเพอร์โบลา

<u>ชั้น</u>	มัธยมศึกษาปีที่ 4
<u>จุดประสงค์</u>	เพื่อให้นักเรียนทดลองสร้างรูปไฮเพอร์โบลา และสรุปนิยามของไฮเพอร์โบลาได้
<u>อุปกรณ์</u>	1. เชือก หนา 2 ตัว กระดาษแข็ง 2 แผ่น และโฟม 1 แผ่น 2. แผ่นรายงานผลการทดลอง
<u>การจัดกลุ่ม</u>	แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละประมาณ 4-5 คน
<u>กิจกรรม</u>	1. ให้นักเรียนกำหนดจุด 2 จุด คือ F อยู่ทางขวา F' อยู่ทางซ้ายมือ ลงบนกระดาษตามแนวนอนห่างกัน 4 นิ้ว 2. วาดกระดาษแผ่นแรกลงบนแผ่นโฟม (เพื่อความสะดวกในการปักหมุด) 3. ปักหมุดลงที่จุด F และ F' จุดละตัว 4. ใช้เชือกซึ่งผูกปลายทั้งสองข้างเข้าเป็นปม (ให้ความยาวในวงเชือก 10 นิ้ว) วางพาดและคล้องหมุดที่จุด F และ F' ตามลำดับ 5. ผูกคินสอให้อยู่ในวงเชือกแล้วทำให้เชือกตึง 6. คึงปลายเชือกข้างที่มีปม เชือกที่เป็นวงซึ่งมีคินสออยู่ภายในจะลดความยาวลง แล้วใช้คินสอลงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นขณะที่คึงปลายเชือกข้างที่มีปม 7. ใช้คินสอโยงจุดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น 8. ในทางกลับกัน คล้องเชือกที่จุด F และพาดเชือกที่จุด F' และทำเช่นเดียวกับข้อ 5 , 6 , 7 9. พิจารณากราฟที่เกิดขึ้นว่าเป็นรูปอะไร จากนั้นบันทึกผลการพิจารณาลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง 10. ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ วัฏระยะ $\overline{PF}$ และ $\overline{PF'}$ แล้วบันทึกระยะที่วัดได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง 11. หาผลต่างระหว่าง $\overline{PF}$ และ $\overline{PF'}$ แล้วบันทึกผลที่ได้ลงในแผ่นรายงานผลการทดลอง

12. ให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{PF}$ และ $\overline{PF'}$
13. ให้นักเรียนปฏิบัติวิธีเดียวกันนี้ (ตั้งแต่ข้อ 1-12) ลงบนกระดาษแผ่นที่ 2 แต่เปลี่ยนคำสั่งข้อ 1 ในการปฏิบัติบนกระดาษแผ่นที่ 2 เป็น กำหนดจุด 2 จุด คือ F อยู่ข้างบน และ F' อยู่ข้างล่าง
ลงบนกระดาษในแนวตั้งห่างกัน 4 นิ้ว
14. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปหานิยามของไฮเพอร์โบลา
15. ส่งแผ่นรายงานผลการทดลอง พร้อมกับบทเรียนปฏิบัติการและอุปกรณ์
คืนอาจารย์ผู้สอน

แผนรายงานผลการทดลองเรื่องการสร้างรูปไฮเพอร์โบลา

รูปที่	รูปที่เกิดขึ้น	ระยะ PF	ระยะ PF'	ความสัมพันธ์ระหว่าง PF และ PF'
1				
2				

สรุปนิยามของไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา คือ

.....

.....

เรื่องวงกลม

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4

ใบกิจกรรมที่ 1

- เนื้อหา
1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ รัศมี หน่วย มีความสัมพันธ์เป็น $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = r^2 \}$
 2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมี r หน่วย มีความสัมพันธ์เป็น $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \}$

งาน ให้นักเรียนเขียนคำตอบลงในสมุดงานของนักเรียน แล้วตรวจคำตอบจากแผ่นเฉลย เสร็จแล้วนำใบกิจกรรมและแผ่นเฉลยคืนผู้สอน

จุดศูนย์กลาง	รัศมี	ความสัมพันธ์
$(2, 3)$	2	
$(-2, 3)$	2	
$(2, -3)$	2	
$(-2, -3)$	2	
$(0, 0)$	2	

เรื่องพาราโบลา

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4ปฏิกิริยาที่ 2

- เนื้อหา
1. พาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(c, 0)$ สมการโคเรกตริกซ์คือ $x = -c$
 มีความสัมพันธ์เป็น $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = 4cx \}$
 ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดขวา
 ถ้า $c < 0$ กราฟจะเปิดซ้าย
 2. พาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(0, c)$ สมการโคเรกตริกซ์คือ $y = -c$
 มีความสัมพันธ์เป็น $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 = 4cy \}$
 ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดบนหรือหงาย
 ถ้า $c < 0$ กราฟจะเปิดล่างหรือคว่ำ

งาน ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในสมุดงานของนักเรียน แล้วตรวจคำตอบ
 ข้อ 1, 3 จากแผ่นเฉลย และส่งคำตอบข้อ 2 ให้อาจารย์ผู้สอนตรวจเป็น
 รายบุคคล พร้อมทั้งส่งปฏิกิริยาและแผ่นเฉลยคืน

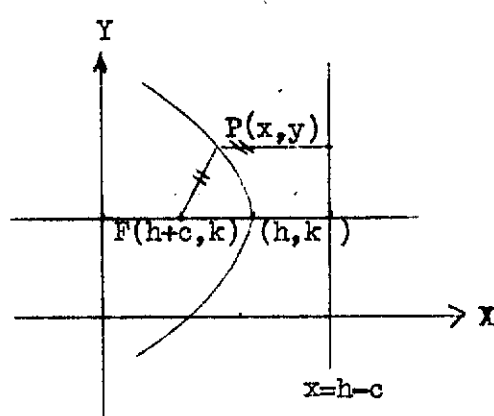
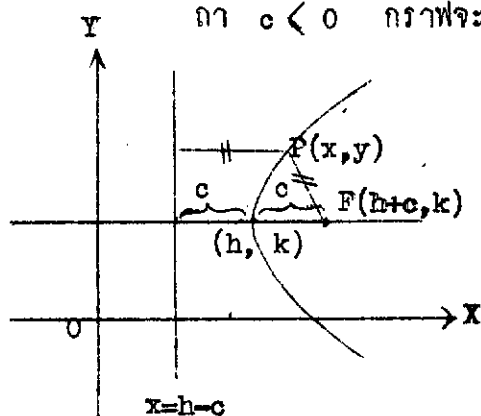
1. จงหาจุดโฟกัสและสมการโคเรกตริกซ์จากสมการพาราโบลาต่อไปนี้
 ก. $x^2 = 4y$ ข. $-3x = \frac{y^2}{8}$
2. จงเขียนกราฟของพาราโบลาในข้อ 1
3. จงหาสมการพาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $(-\frac{3}{2}, 0)$ และจุดยอดที่ $(0, 0)$

เรื่องพาราโบลา

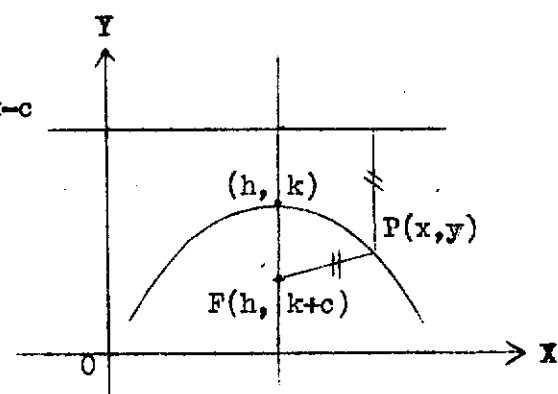
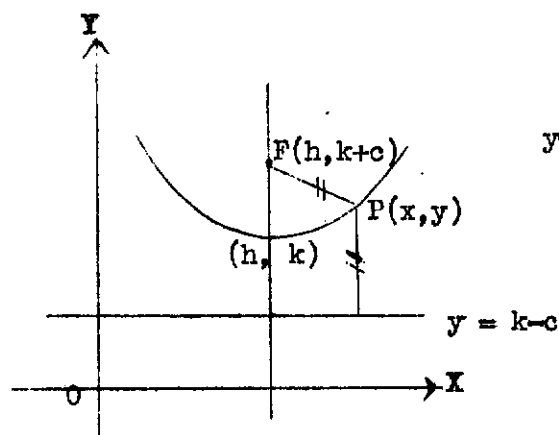
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ใบงานที่ 3

- เนื้อหา 1. พาราโบลาที่มีแกนขนานกับแกน x จุดยอดอยู่ที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่ $F(h+c, k)$ และสมการโคเรกตริกซ์คือ $x = h - c$ มีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (y - k)^2 = 4c(x - h)\}$
 ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดขวา
 ถ้า $c < 0$ กราฟจะเปิดซ้าย



2. พาราโบลาที่มีแกนขนานกับแกน y จุดยอดอยู่ที่ (h, k) โฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c)$ และสมการโคเรกตริกซ์คือ $y = k - c$ มีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - h)^2 = 4c(y - k)\}$
 ถ้า $c > 0$ กราฟจะเปิดบน (หงาย)
 ถ้า $c < 0$ กราฟจะเปิดล่าง (คว่ำ)



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการพาราโบลาที่มีแกนขนานกับแกน x จุยกออยู่ที่ $(2, 3)$ และสมการผ่านจุด $(4, 7)$

วิธีทำ

แกนพาราโบลาขนานกับแกน x

จึงเลือกใช้สมการ $(y - k)^2 = 4c(x - h) \dots\dots\dots ①$

ในที่นี้ $(h, k) = (2, 3) \quad (x, y) = (4, 7)$

แทนค่าในสมการ 1 ; $(7 - 3)^2 = 4c(4 - 2)$

$$(4^2) = 4c(2)$$

$$\therefore c = \frac{16}{8}$$

แทนค่า c, h, k ในสมการ ①

$$(y - 3)^2 = 4(2)(x - 2)$$

$$(y - 3)^2 = 8(x - 2)$$

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 16$$

หรือ $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส สมการโคเรกตริกซ์และเขียนกราฟพาราโบลา จากสมการ $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$

วิธีทำ

จากสมการ $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$

จัดสมการใหม่; $y^2 - 6y + \square = 8x - 25 + \square$

นำ $(\frac{6}{2})^2$ บวกเข้าทั้งสองข้าง ; $y^2 - 6y + \boxed{9} = 8x - 25 + \boxed{9}$

$$(y - 3)^2 = 8(x - 2)$$

เทียบกับสมการ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$

จะได้ $h = 2, k = 3$ และ $4c = 8$ หรือ $c = 2$

1. จุดยอดคือ $(h, k) = (2, 3)$

2. โฟกัสคือ $(h+c, k) = (2+2, 3) = (4, 3)$

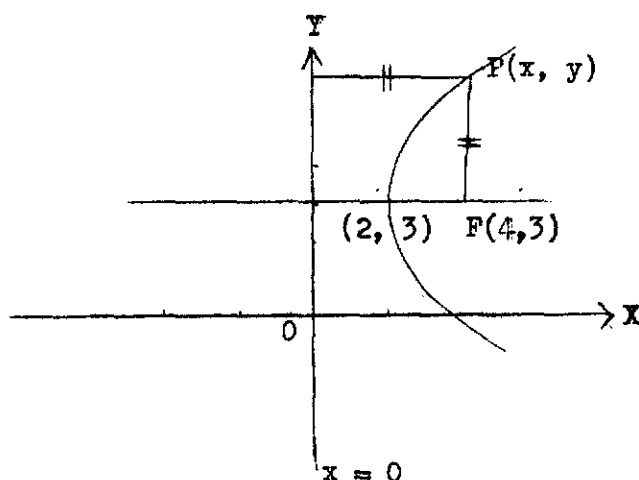
3. สมการโคเรกตริกซ์คือ $x = h - c$

$$= 2 - 2$$

$$= 0$$

ตอบ

4. ได้กราฟเป็น



ตอบ

งาน ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในสมุดงานของนักเรียนและตรวจคำตอบข้อ 1, 2 จากแผ่นเฉลย และส่งคำตอบข้อ 3 ให้ครูผู้สอนตรวจเป็นรายบุคคลพร้อมทั้งส่งบัตรงานและแผ่นเฉลยคืนอาจารย์ผู้สอน

1. จงหาสมการพาราโบลาที่มีแกนขนานกับแกน y จุดยอดอยู่ที่ $(3, 2)$ และกราฟผ่านจุด $(1, 4)$
2. จงหาสมการพาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(-3, 0)$ สมการไคเรกตริกซ์คือเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด $(1, 0)$
3. จงหาจุดยอด โฟกัส สมการไคเรกตริกซ์และเขียนกราฟพาราโบลาจากสมการ

$$2x^2 - 12x + 4y + 26 = 0$$

เรื่องวงรี

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4

บทเรียนที่ 4

เนื้อหา วงรีคือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่

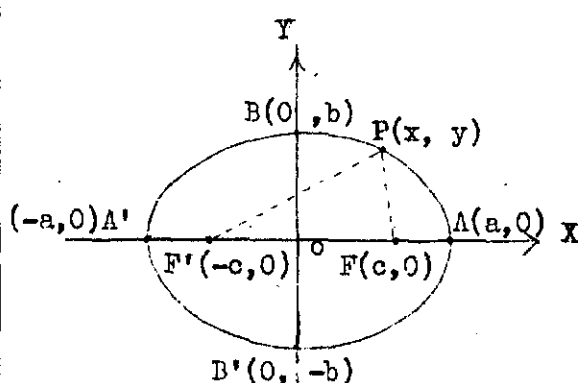
จุดคงที่สองจุดเรียกว่า โฟกัสของวงรี

1. วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน x ที่จุด $F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$ มีผลบวกจากจุด $P(x, y)$ ไปยังโฟกัสเท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; b^2 = a^2 - c^2 \right\}$$

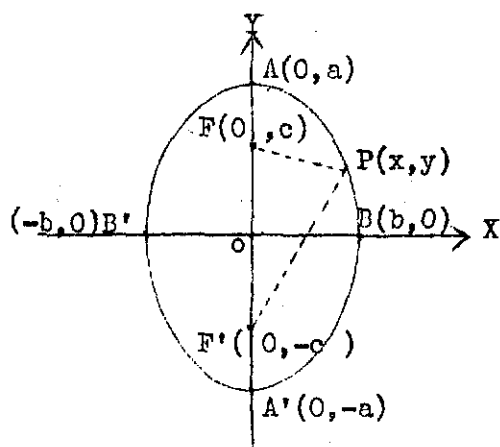
2. วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน y ที่จุด $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ มีผลบวกจากจุด $P(x, y)$ ไปยังโฟกัสเท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 ; b^2 = a^2 - c^2 \right\}$$



รูปที่ 1

1. จุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$
2. จุดยอดคือ $A(a, 0)$ และ $A'(-a, 0)$
3. จุดโฟกัสคือ $F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$
4. แกนเอกยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนโทยาว $|2b|$ หน่วย



รูปที่ 2

1. จุดศูนย์กลางคือ $(0, 0)$
2. จุดยอดคือ $A(0, a)$ และ $A'(0, -a)$
3. จุดโฟกัสคือ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$
4. แกนเอกยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนโทยาว $|2b|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงรีที่มีศูนย์กลางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุด $(4, 0)$
และ $(-4, 0)$ เท่ากับ 10

วิธีทำ โฟกัส $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$ อยู่บนแกน x จะได้ $c = \pm 4$
จึงเลือกใช้สมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ซึ่งมีศูนย์กลางที่ $= 2a$
ดังนั้น $2a = 10$ จะได้ $a = 5$ หรือ $a^2 = 25$
จากโฟกัสจะได้ $c = \pm 4$ หรือ $c^2 = 16$
แทนค่า a^2, c^2 ใน $b^2 = a^2 - c^2$
 $= 25 - 16$
 $= 9$

สมการวงรีที่ต้องการคือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทพร้อมทั้ง
เขียนกราฟของวงรีจากสมการ $25x^2 + 16y^2 = 400$

วิธีทำ จากสมการ $25x^2 + 16y^2 = 400$
นำ 400 หารตลอด ; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

เทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
จะได้ $a^2 = 25$ หรือ $a = \pm 5$

และ $b^2 = 16$ หรือ $b = \pm 4$

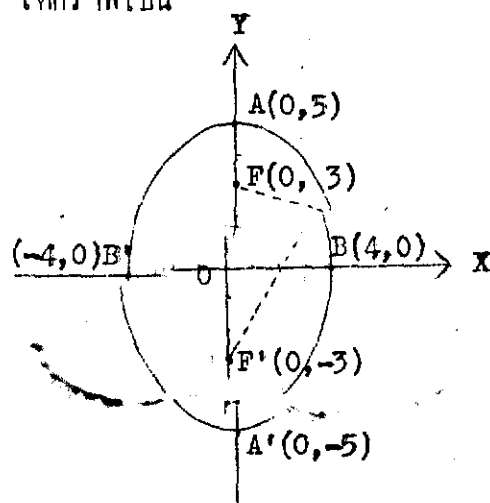
จาก $b^2 = a^2 - c^2$; $16 = 25 - c^2$

$$c^2 = 25 - 16$$

$$c^2 = 9$$

$$c = \pm 3$$

1. จุดยอด $A(a, a)$ และ $A'(0, -a)$ คือ $(0, 5)$ และ $(0, -5)$
2. โฟกัส $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ คือ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$
3. แกนเอกยาว $|2a| = |2(\pm 5)| = 10$ หน่วย
4. แกนโทยาว $|2b| = |2(\pm 4)| = 8$ หน่วย
5. ได้กราฟเป็น



งาน ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ในสมุดงานแล้วตรวจคำตอบในแผ่นเฉลยแล้วส่งผลงานพร้อมแผ่นเฉลยคืนอาจารย์ผู้สอน

1. จงหาสมการวงรีที่มีผลบวกจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังโฟกัสทั้งสองคือ $(0, 4)$ และ $(0, -4)$ มีค่าเท่ากับ 10
2. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรีจากสมการ

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

เรื่องวงรี

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

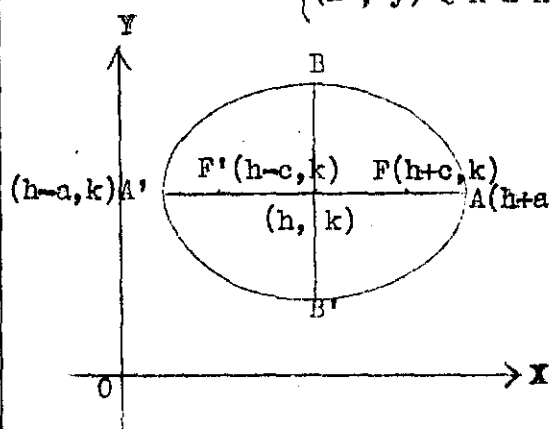
บทงานที่ 5

เนื้อหา 1. วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน x มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 ; b^2 = a^2 - c^2\}$$

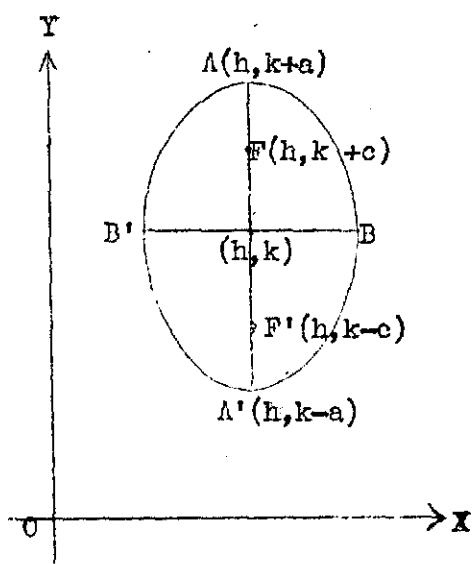
2. วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน y มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และผลบวกคงที่เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 ; b^2 = a^2 - c^2\}$$



รูปที่ 1 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

1. จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
2. จุดยอดคือ $A(h+a, k)$, $A'(h-a, k)$
3. จุดโฟกัสคือ $F(h+c, k)$, $F'(h-c, k)$
4. แกนเอกยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนโทยาว $|2b|$ หน่วย



รูปที่ 2 $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

1. จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
2. จุดยอดคือ $A(h, k+a)$, $A'(h, k-a)$
3. โฟกัสคือ $F(h, k+c)$, $F'(h, k-c)$
4. แกนเอกยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนโทยาว $|2b|$ หน่วย



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงรีที่มีจุดยอดที่ $(0, 1)$ และ $(6, 1)$ โดยมีแกนโทยาว 4 หน่วย

วิธีทำ

จุดยอด $(0, 1)$ และ $(6, 1)$ อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x
จึงเลือกใช้สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $b^2 = a^2 - c^2$ โดยมีแกนโทยาว $2b$

$$2b = 4$$

$$4b^2 = 16$$

$$b^2 = 4$$

$$b = \pm 2$$

จุดกึ่งกลางระหว่าง $(0, 1)$ และ $(6, 1)$ คือ $(3, 1)$

$$(h, k) = (3, 1)$$

จุดยอด $\Delta(h+a, k) = (6, 1)$ จะได้ $h+a=6$ หรือ $a=3$

แทนค่า h, k, a^2 และ b^2 ในสมการวงรีที่เลือกใช้

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

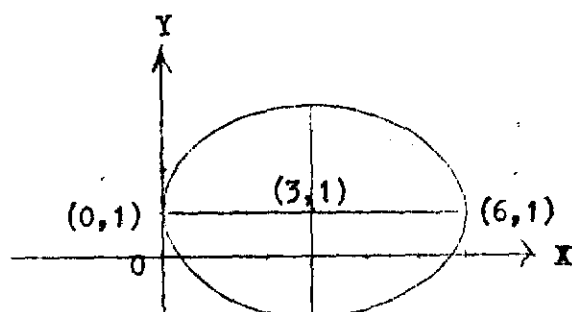
นำ 36 คูณตลอด ; $4(x-3)^2 + 9(y-1)^2 = 36$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 2y + 1) = 36$$

$$4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 18y + 9 = 36$$

สมการวงรีคือ $4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 18y + 9 = 0$

หรือ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ตอบ



ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอดและโฟกัสของวงรี $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

วิธีทำ

จากสมการ $7x^2 + 16y^2 + 14x - 64y - 41 = 0$

จัดสมการใหม่ $(7x^2 + 14x + \boxed{}) + (16y^2 - 64y + \boxed{}) = 41 + \boxed{} + \boxed{}$

$7(x^2 + 2x + \boxed{}) + 16(y^2 - 4y + \boxed{}) = 41 + \boxed{} + \boxed{}$

$7(x^2 + 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 41 + 7 + 64$

$7(x + 1)^2 + 16(y - 2)^2 = 112$

นำ 112 หารตลอด $\frac{(x + 1)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{7} = 1$

เทียบกับ $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$; $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ $a^2 = 16$, $b^2 = 7$; $c^2 = 16 - 7 = 9$ หรือ $c = \pm 3$

จุดยอดอยู่ที่ $A(h+a, k)$ และ $A'(h-a, k)$ คือ $(-1+4, 2)$ และ $(-1-4, 2)$

หรือ $(3, 2)$ และ $(-5, 2)$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h+c, k)$ และ $F'(h-c, k)$ คือ $(-1+3, 2)$ และ $(-1-3, 2)$

หรือ $(2, 2)$ และ $(-4, 2)$

ตอบ

งาน ให้นักเรียนตอบคำถามลงในสมุดงาน แล้วตรวจคำตอบจากแผ่นเฉลยจากนั้น

นำแผ่นเฉลยและสมุดงานส่งอาจารย์ผู้สอน

1. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 2)$ จุดยอดจุดหนึ่งคือ $(2, 2)$

และโฟกัสจุดหนึ่งคือ $(1, 2)$

2. จงหาจุดยอด จุดศูนย์กลาง โฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น

$$5x^2 + y^2 + 30x - 4y + 44 = 0$$

เรื่องไฮเพอร์โบลา

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4

บทเรียนที่ 6

เนื้อหา ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ที่สองจุดมีค่าคงที่
จุดคงที่สองจุดนี้เรียกว่า โฟกัสของไฮเพอร์โบลา

1. ไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่

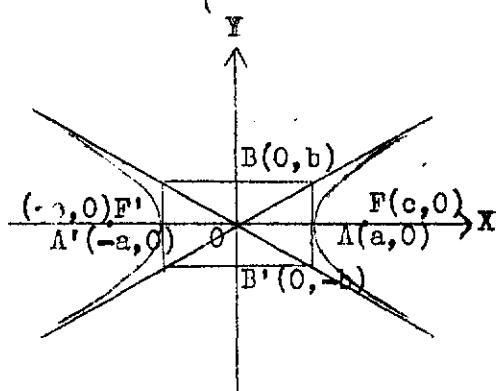
$F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$ เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ; b^2 = c^2 - a^2 \right\}$$

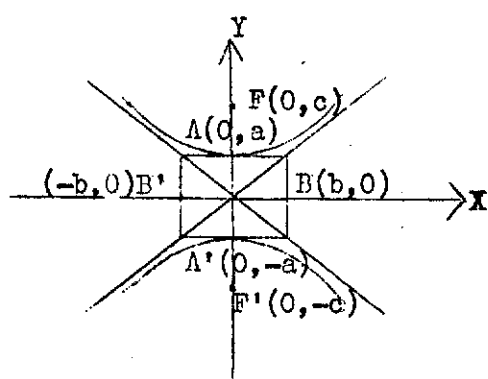
2. ไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่

$F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ; b^2 = c^2 - a^2 \right\}$$



- รูปที่ 1
1. จุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$
 2. จุดยอดที่ $A(a, 0)$ และ $A'(-a, 0)$
 3. โฟกัสที่ $F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$
 4. แกนตามขวางยาว $|2a|$ หน่วย
 5. แกนส่งยุคยาว $|2b|$ หน่วย



- รูปที่ 2
- $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
1. จุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$
 2. จุดยอดที่ $A(0, a)$ และ $A'(0, -a)$
 3. โฟกัสที่ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$
 4. แกนตามขวางยาว $|2a|$ หน่วย
 5. แกนส่งยุคยาว $|2b|$ หน่วย

3. สมการไฮเพอร์โบลาในข้อ 1, 2 ถ้า $a^2 = b^2$ จะเรียกว่าไฮเพอร์โบลามุมฉาก

4. สำหรับ $xy = k$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ และ $k \neq 0$ เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซต
นี้ไปยังจุดโฟกัส (2, 0) และ (-2, 0) เท่ากับ 1

วิธีทำ โฟกัส (2, 0) และ (-2, 0) อยู่บนแกน x ซึ่ง $c = 2$ หรือ $c^2 = 4$
จึงเลือกใช้สมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $b^2 = c^2 - a^2$ ผลต่างคงที่ = $2a$

$$2a = 1 \quad \text{จะได้} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad a^2 = \frac{1}{4}$$

แทนค่า a^2, c^2 ใน $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2 = 4 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{15}{4}$$

แทนค่า a^2, b^2 ในสมการไฮเพอร์โบลาจะได้ $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{15}{4}} = 1$

$$\text{หรือ} \quad 4x^2 - \frac{4y^2}{15} = 1$$

$$\text{หรือ} \quad 60x^2 - 4y^2 = 15$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค
พร้อมทั้งเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา $16y^2 - 9x^2 = 144$

วิธีทำ จากสมการ $16y^2 - 9x^2 = 144$

นำ 144 หารตลอด $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

เทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$; $b^2 = c^2 - a^2$

จะได้ $a^2 = 9$ นั่นคือ $a = \pm 3$

และ $b^2 = 16$ นั่นคือ $b = \pm 4$

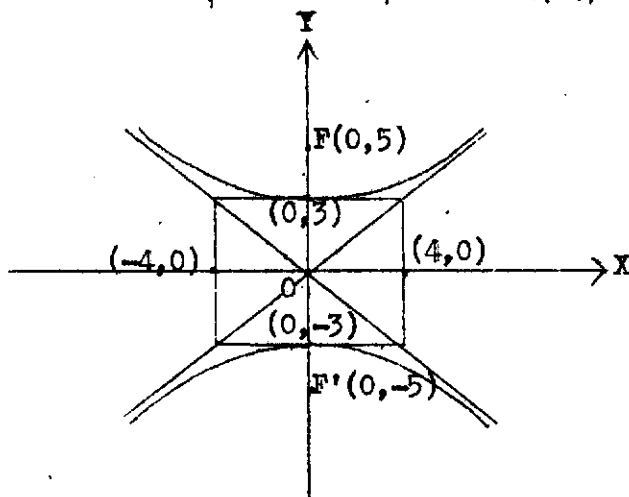
จาก $b^2 = c^2 - a^2$; $c^2 = a^2 + b^2$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$c = \pm 5$$

1. จุดยอดที่ $A(0, a)$ และ $A'(0, -a)$ คือ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$
2. โฟกัสที่ $F(0, c)$ และ $F'(0, -c)$ คือ $(0, 5)$ และ $(0, -5)$
3. แกนตามขวางยาว $|2a| = |2(\pm 3)| = 6$ หน่วย
4. แกนส่งยุค $|2b| = |2(\pm 4)| = 8$ หน่วย



ตอบ

งาน ให้นักเรียนตอบคำถามในสมุดงานเมื่อตรวจคำตอบจากแผ่นเฉลยแล้วนำแผ่นเฉลยและสมุดงานส่งอาจารย์ผู้สอน

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$ เท่ากับ 4
2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดจุดหนึ่งที่ $(-4, 0)$ โฟกัสจุดหนึ่งที่ $(6, 0)$
3. จงหาจุดยอด โฟกัส แกนตามขวาง แกนส่งยุคและเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น

$$9x^2 - 36y^2 = 324$$

เรื่องไฮเพอร์โบลา

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

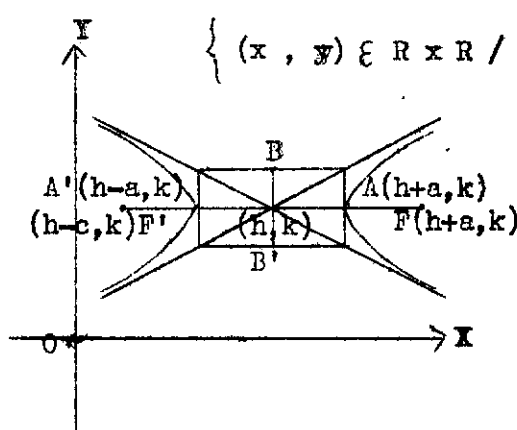
บทงานที่ 7

เนื้อหา 1. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน x และผลต่างคงที่เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 ; b^2 = c^2 - a^2 \right\}$$

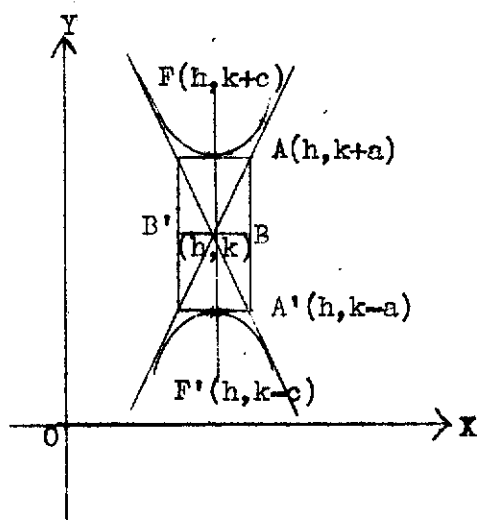
2. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) แกนตามขวางขนานกับแกน y และผลต่างคงที่เท่ากับ $2a$ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 ; b^2 = c^2 - a^2 \right\}$$



รูปที่ 1 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

1. จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
2. จุดยอดคือ $A(h+a, k)$ และ $A'(h-a, k)$
3. โฟกัสคือ $F(h+c, k)$ และ $F'(h-c, k)$
4. แกนตามขวางยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนส่งยุคยาว $|2b|$ หน่วย



รูปที่ 2 $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

1. จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
2. จุดยอดคือ $A(h, k+a)$ และ $A'(h, k-a)$
3. โฟกัสคือ $F(h, k+c)$ และ $F'(h, k-c)$
4. แกนตามขวางยาว $|2a|$ หน่วย
5. แกนส่งยุคยาว $|2b|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, -1)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -1)$ โฟกัสอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง 4 หน่วย
วิธีทำ จุดศูนย์กลาง $(2, -1)$ และจุดยอด $(-4, -1)$ อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

เลือกใช้สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $b^2 = c^2 - a^2$ ซึ่งมี..... (1)

จุดศูนย์กลาง $(h, k) = (-2, -1)$

จุดยอด $A(h+a, k) = (0, -1)$ จะได้ $a = 2$ นั่นคือ $a^2 = 4$

โฟกัสอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง 4 หน่วย นั่นคือ $c = 4$ จะได้ $c^2 = 16$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$; $b^2 = 16 - 4$ นั่นคือ $b^2 = 12$

แทนค่า h, k, a^2, b^2 ในสมการ (1) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด จุดศูนย์กลาง และโฟกัสของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น

$$y^2 - 4x^2 - 2y + 24x - 39 = 0$$

วิธีทำ

จากสมการ $y^2 - 4x^2 - 2y + 24x - 39 = 0$

จัดสมการใหม่ ; $(y^2 - 2y + \square) - 4(x^2 - 6x + \square) = 39 + \square - \square$

$$(y^2 - 2y + 1) - 4(x^2 - 6x + 9) = 39 + 1 - 36$$

$$(y-1)^2 - 4(x-3)^2 = 4$$

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{1} = 1$$

เทียบกับ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$; $b^2 = c^2 - a^2$

จะได้ $a^2 = 4$ นั่นคือ $a = \pm 2$

และ $b^2 = 1$ นั่นคือ $b = \pm 1$ จะได้ $c^2 = 4 + 1$; $c = \pm 5$

1. จุดยอดที่ $A(h, k+a)$ และ $A'(h, k-a)$ คือ $(3, 1+2)$ และ $(3, 1-2)$

หรือ $(3, 3)$ และ $(3, -1)$

2. จุดศูนย์กลาง (h, k) คือ $(3, 1)$

3. โฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c)$ และ $F'(h, k-c)$ คือ $(3, 1+5)$ และ $(3, 1-5)$

ตอบ

งาน ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ลงในสมุดงานแล้วตรวจคำตอบจากแผ่นเฉลยจากนั้น
นำแผ่นเฉลยและสมุดงานส่งอาจารย์ผู้สอน

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ $(-1, 5)$ และ $(-1, 1)$ มีโฟกัส
อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง $\sqrt{5}$ หน่วย
2. จงบอกแกนสังยุค แกนตามขวางไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น

$$16y^2 - 9x^2 + 64y + 18x - 89 = 0$$

เฉลยป้กรงานที่ 1

จุดศูนย์กลาง	รัศมี	ความสัมพันธ์
(2 , 3)	2	$\{ (x , y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \}$
(-2, 3)	2	$\{ (x , y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \}$
(2 , -3)	2	$\{ (x , y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \}$
(-2, -3)	2	$\{ (x , y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \}$
(0 , 0)	2	$\{ (x , y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 4 \}$

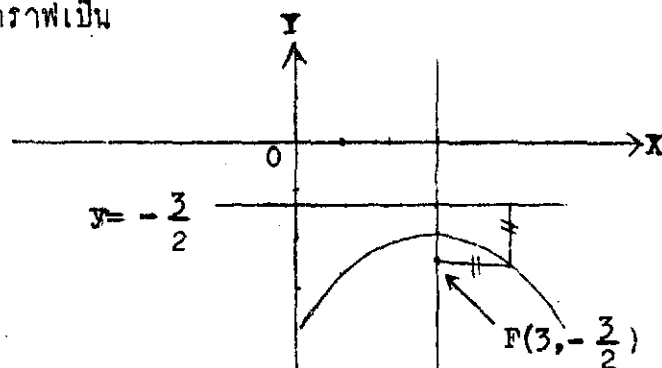
เฉลยป้กรงานที่ 2

1. ก. โฟกัส คือ (0 , 1) สมการไคเรกตริกซ์ คือ $y = -1$
- ข. โฟกัส คือ (-6, 0) สมการไคเรกตริกซ์ $x = 6$
3. $y^2 = -6x$

เฉลยป้กรงานที่ 3

1. $(x - 3)^2 = 2(y - 2)$ หรือ $x^2 - 6x - 2y + 13 = 0$
2. $(y - 0)^2 = -8(x + 1)$ หรือ $y^2 = -8(x + 1)$ $y^2 + 8x + 8 = 0$
3. $(x - 3)^2 = -2(y + 2)$
 1. จุดยอด คือ (3 , -2)
 2. โฟกัสคือ $(3 , -\frac{5}{2})$
 3. ไคเรกตริกซ์ $y = -\frac{3}{2}$

4. ใ้กราฟเป็น



เฉลยป้กรงานที่ 4

1. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

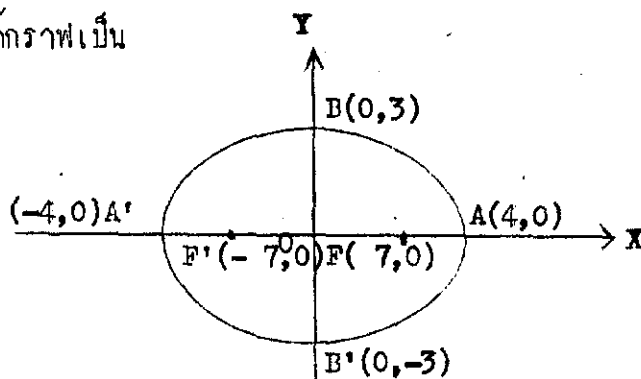
1. จุดยอดที่ $A(a, 0)$ และ $A'(-a, 0)$ คือ $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$

2. โฟกัสที่ $F(c, 0)$ และ $F'(-c, 0)$ คือ $(7, 0)$ และ $(-7, 0)$

3. แกนเอกยาว $|2a| = |2(\pm 4)| = 8$ หน่วย

4. แกนโทยาว $|2b| = |2(\pm 3)| = 6$ หน่วย

5. ใ้กราฟเป็น



เฉลยป้กรงานที่ 5

1. $3x^2 + 4(y - 2)^2 = 12$ หรือ $3x^2 + 4y^2 - 16y + 4 = 0$

2. จุดยอด คือ $(-3, 2+\sqrt{5})$ และ $(-3, 2-\sqrt{5})$

จุดศูนย์กลาง คือ $(-3, 2)$

โฟกัส คือ $(-3, 4)$ และ $(-3, 0)$

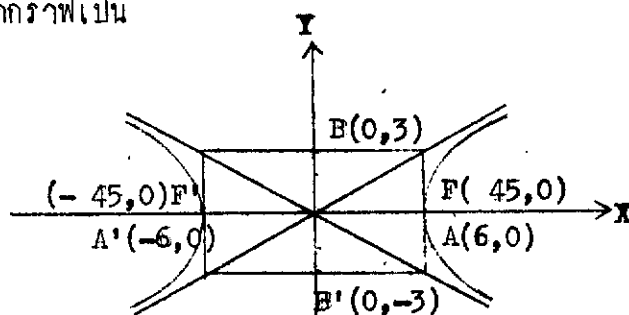
เฉลยใบทำงานที่ 6

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

3. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$

1. จุดยอด คือ $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$
2. โฟกัส คือ $(\sqrt{45}, 0)$ และ $(-\sqrt{45}, 0)$
3. แกน x เป็นแกนตามขวาง ยาว 12 หน่วย
4. แกน y เป็นแกนสังยุค ยาว 6 หน่วย
5. ได้กราฟเป็น



เฉลยใบทำงานที่ 7

1. $y^2 - 4x^2 - 6y - 8x + 1 = 0$

2. แกน $y = -2$ เป็นแกนตามขวาง ยาว 6 หน่วย

แกน $x = 1$ เป็นแกนสังยุค ยาว 8 หน่วย

บัตรปัญหาที่ 1

1. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $(2, 1)$ และ $(3, 5)$ เป็นจุดปลายเส้นผ่าศูนย์กลาง
2. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, -5)$ และสัมผัสแกน x

บัตรปัญหาที่ 2

1. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด กราฟเปิดขวา และผ่านจุด $(4, 3)$
2. จงเขียนกราฟพาราโบลาในข้อ 1.

บัตรปัญหาที่ 3

1. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-5, 2)$ และเส้นตรง $x = 1$ เป็นไดเรกทริกซ์
2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 0)$ กราฟผ่านจุด $(1, -2)$ และแกนของพาราโบลาคู่ขนานกับแกน x

บัตรปัญหาที่ 4

1. จงหาสมการของวงรีที่กราฟตัดแกน x ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, \pm 4)$
2. จงหาสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 5, 0)$ และกราฟผ่านจุด $(0, 12)$

บัตรปัญหาที่ 5

จงหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 1)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-8, 1)$ และแกนโทยาว 4 หน่วย

บัตรปัญหาที่ 6

1. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(\pm 5, 0)$ และมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 8, 0)$
2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, \pm 2)$ กราฟผ่านจุด $(1, 4)$

บัตรปัญหาที่ 7

1. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(2, 6)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(4, 6)$ และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x
2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-7, 0)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

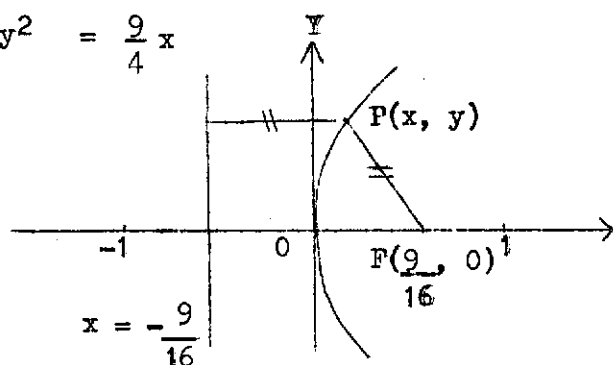
เฉลยบัตรปัญหาที่ 1

1. $4x^2 + 4y^2 - 20x - 24y - 43 = 0$
2. $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 5^2$ หรือ $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 4 = 0$

เฉลยบัตรปัญหาที่ 2

1. $y^2 = \frac{9}{4}x$

2.



เฉลยปริบปัญหาที่ 3

$$1. (y - 2)^2 = -12(x + 2)$$

$$2. (x + 1)^2 = -2y$$

เฉลยปริบปัญหาที่ 4

$$1. \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$$

$$2. \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

เฉลยปริบปัญหาที่ 5

$$\frac{(x)^2}{68} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

เฉลยปริบปัญหาที่ 6

$$1. \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$$

$$2. \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$$

เฉลยปริบปัญหาที่ 7

$$1. \frac{x^2}{4} - \frac{(y - 6)^2}{12} = 1 \quad 2. \frac{(x + 7)^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ และรัศมี 3 หน่วย
2. จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมและความยาวของรัศมี จากสมการ $x^2 + y^2 + 6x = 0$
3. จงหาจุดตัดแกน x ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 3)$ และรัศมี 3 หน่วย
4. จงหาจุดตัดของวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 17 = 0$
 $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 31 = 0$
5. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 23$
 ที่จุด $(3, 4)$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 3)$ และจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$
2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, 0)$ และไคเรกทริกซ์คือ
 เส้นตรง $x - 2 = 0$
3. จงหาโฟกัส และสมการไคเรกทริกซ์ของพาราโบลาจากสมการต่อไปนี้
 - 3.1 $x^2 = 9y$
 - 3.2 $x^2 = -4y$
 - 3.3 $y^2 = 6x$
 - 3.4 $y^2 = -2x$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(2, -2)$ และไคเรกทริกซ์คือ
 เส้นตรง $y = -4$
2. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(3, 4)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(1, 4)$

3. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(2,1)$ จุดยอดอยู่บนเส้นตรง $7y + 3x + 1 = 0$ และโคเรกทริกซ์ขนานกับแกน x
4. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(1,-3)$ กราฟผ่านจุด $(5,0)$ และมีแกนขนานกับแกน y
5. จงบอกส่วนต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา $y^2 - 6y + 4x + 1 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาสมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, \pm 2)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ 6
2. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดจุดหนึ่งที่ $(-6,0)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,0)$
3. จงบอกส่วนต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรีจากสมการต่อไปนี้

$$3.1 \quad 25x^2 + 16y^2 = 400$$

$$3.2 \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x โฟกัสอยู่ที่จุด $(3,-6)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(3,10)$
2. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = 2$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(5,-6)$ และแกนโทยาว 2 หน่วย
3. จงบอกส่วนต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$
4. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,-3)$ และ $(4,-3)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,-3)$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 4, 0)$ และผลต่างคงที่เท่ากับ 2
2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, \pm 5)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, \pm 7)$
3. จงบอกส่วนต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $4y^2 - 5x^2 = 20$
4. ถ้ากราฟไฮเพอร์โบลา $4y^2 - 16x^2 = k$ ผ่านจุด $(0, 2)$ จงหาค่า k พร้อมทั้งบอกส่วนต่าง ๆ และเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลานี้ด้วย

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ไปยังจุดคงที่ $(-10, 2)$ และ $(10, 2)$ เท่ากับ 12
2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-2, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-2, 4)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-2, 6)$
3. จงบอกส่วนต่าง ๆ พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$
4. จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการต่อไปนี้

4.1 $xy = 12$

4.2 $xy = -15$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$ หรือ $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
2. จุดศูนย์กลางคือ $(-3, 0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย
3. จุดตัดแกน x คือ $(-1, 0)$
4. $(1, -2)$ และ $(1, 10)$
5. $3y + 4x = 24$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1. $x^2 = 12y$
2. $y^2 = -8x$
3. โฟกัส สมการโคเรกตริกซ์

3.1 $(0, \frac{9}{4})$	$y = -\frac{9}{4}$
3.2 $(0, -1)$	$y = 1$
3.3 $(\frac{3}{2}, 0)$	$x = -\frac{3}{2}$
3.4 $(-\frac{1}{2}, 0)$	$x = \frac{1}{2}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

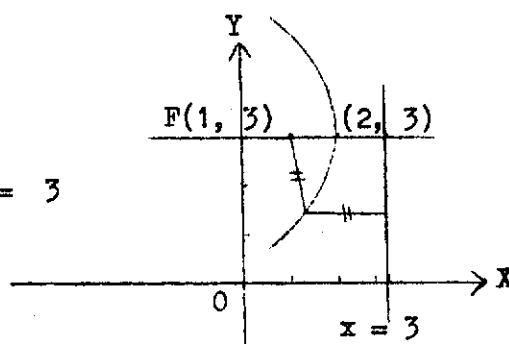
1. $(x - 2)^2 = 4(y + 3)$
2. $(y - 4)^2 = -8(x - 3)$
3. $(x - 2)^2 = 8(y + 1)$
4. $(x - 1)^2 = 4(y + 4)$ หรือ $(x - 1)^2 = -16(y - 1)$

5. จุดยอด $(h,k) = (2,3)$

โฟกัส $(h+c,k) = (1,3)$

สมการโคเรกทริกซ์ $x = h - c ; x = 3$

กราฟเปิดซ้ายดังรูป



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4

1. $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$

2. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

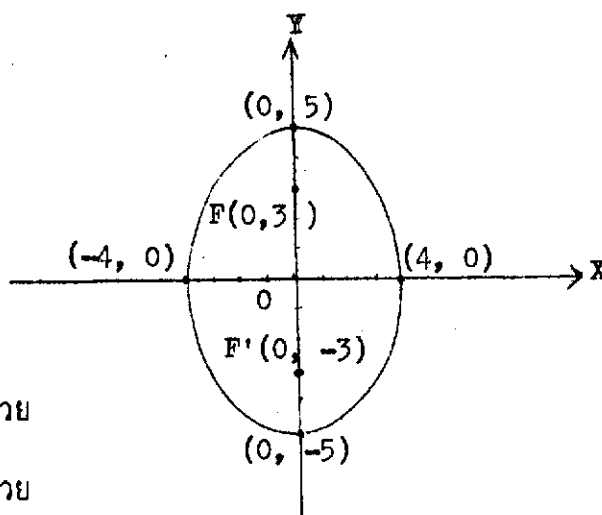
3.1 จุดยอด $(0, \pm 5)$

โฟกัส $(0, \pm 3)$

ความยาวของแกนเอก 10 หน่วย

ความยาวของแกนโท 8 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



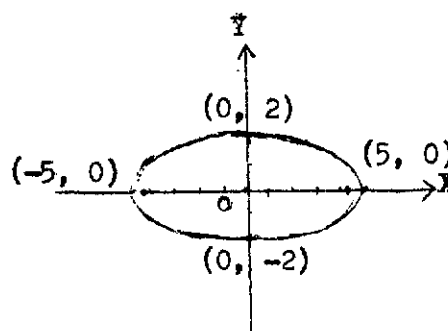
3.2 จุดยอด $(\pm 5, 0)$

โฟกัส $(\pm \sqrt{21}, 0)$

ความยาวของแกนเอก 10 หน่วย

ความยาวของแกนโท 4 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5

1. $\frac{y^2}{100} + \frac{(x-3)^2}{64} = 1$

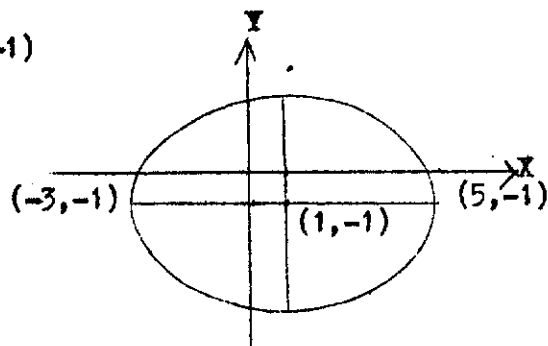
$$2. \frac{(y-2)^2}{64} + \frac{(x-5)^2}{1} = 1$$

$$3. \text{จุดยอดคือ } (h \pm a, k) = (5, -1) ; (-3, -1)$$

$$\text{โฟกัสคือ } (h \pm c, k) = (1+2\sqrt{2}, -1) ; (1-2\sqrt{2}, -1)$$

$$\text{จุดศูนย์กลางคือ } (h, k) = (1, -1)$$

ได้กราฟดังนี้



$$4. \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1 \text{ หรือ } 3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6

$$1. \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$$

$$2. 24y^2 - 25x^2 = 600$$

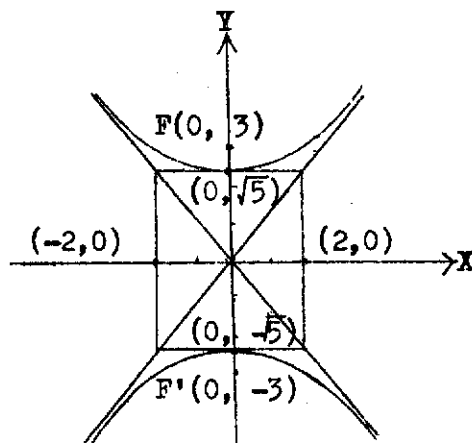
$$3. \text{จุดยอดคือ } (0, \pm\sqrt{5})$$

$$\text{โฟกัสคือ } (0, \pm 3)$$

ความยาวของแกนตามขวาง $2\sqrt{5}$ หน่วย

ความยาวของแกนสลับคู่ 4 หน่วย

ได้กราฟดังนี้



4. ค่าของ $k = 16$

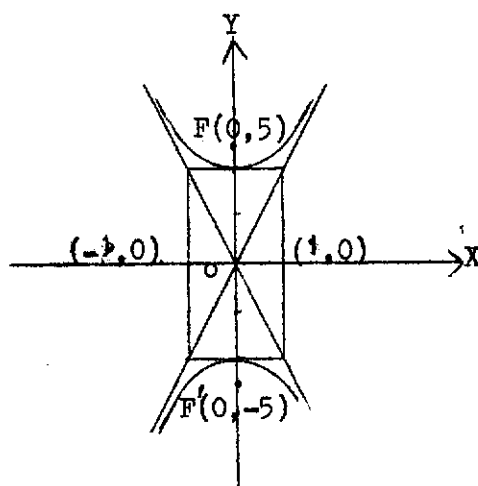
จุดยอดคือ $(0, -2)$, $(0, 2)$

โฟกัสคือ $(0, -5)$, $(0, 5)$

แกนตามขวางยาว 4 หน่วย

แกนส่งยุคยาว 2 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7

1. $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-2)^2}{64} = 1$

2. $16(y-1)^2 - 9(x+2)^2 = 144$

3. จุดศูนย์กลางคือ $(3, 0)$

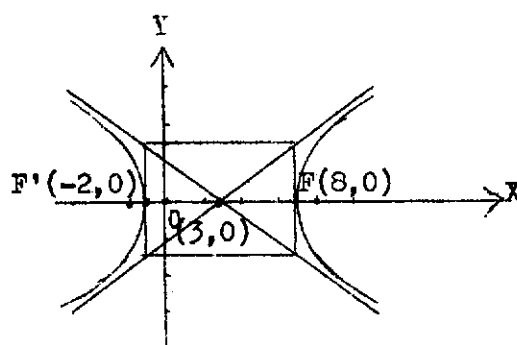
จุดยอดคือ $(7, 0)$, $(-1, 0)$

โฟกัสคือ $(8, 0)$, $(-2, 0)$

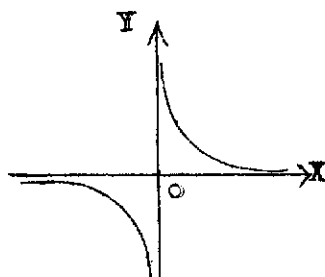
แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

แกนส่งยุคยาว 6 หน่วย

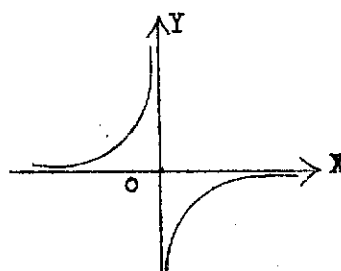
ได้กราฟดังรูป



4. กราฟของ $xy = 12$



กราฟของ $xy = -15$



แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 1

คำสั่ง จงกา X ใต้อักษร ก ข ค ง หรือ จ ที่เป็นคำตอบถูกต้องที่สุดในกระขาคำตอบ

1. ความสัมพันธ์ของกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, -2)$ และรัศมี 3 หน่วยคือข้อใด

ก. $\{(x, y) / (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3\}$ ง. $\{(x, y) / (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$

ข. $\{(x, y) / (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3\}$ จ. $\{(x, y) / (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9\}$

ค. $\{(x, y) / (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$

2. กราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 1)$ และกราฟผ่านจุด $(2, 2)$ มีสมการดังข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 2y - 10 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 4$

ข. $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

3. วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 25 = 0$ มีจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีดังข้อใด

ก. $(1, 5)$; 1

ง. $(-1, -5)$; 5

ข. $(-1, 5)$; 1

จ. $(1, 5)$; 5

ค. $(-1, -5)$; 1

4. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ ตัดกราฟ $x = 2$ ที่จุดใด

ก. $(2, 2)$, $(2, 3)$

ง. $(2, 3)$, $(2, 4)$

ข. $(2, 2)$, $(2, 4)$

จ. $(2, -3)$, $(2, -4)$

ค. $(2, -2)$, $(2, -4)$

5. สมการวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ สมการเส้นสัมผัสวงกลมวงนี้ที่จุด $(5, 1)$ คือข้อใด

ก. $3y - x = 8$

ง. $y + 3x = -14$

ข. $y + 3x = 16$

จ. $3y - x = -16$

ค. $3y - x = -2$

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 2

คำสั่ง ให้แก้เรียนกา x ใต้ตัวอักษร ก ข ค ง หรือ จ ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวในกระดาษคำตอบ

1. พาราโบลาที่มีสมการ $3x^2 - 36y = 0$ มีจุดโฟกัสและสมการไคเรกตริกซ์ตั้งข้อใด

ก. $(0, -6)$; $y = 6$

ง. $(3, 0)$; $x = -3$

ข. $(0, -3)$; $y = 3$

จ. $(-3, 0)$; $x = 3$

ค. $(0, 3)$; $y = -3$

2. สมการพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่จุด $(-\frac{3}{2}, 0)$ และมีจุดยอดที่ $(0, 0)$ คือข้อใด

ก. $x^2 = 6y$

ง. $y^2 = 6x$

ข. $y^2 = -6x$

จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

ค. $x^2 = -6y$

3. พาราโบลาที่มีสมการ $x^2 - 12y + 36 = 0$ มีจุดยอดและโฟกัสตั้งข้อใด

ก. จุดยอด $(0, 3)$ โฟกัส $(0, 6)$

ง. จุดยอด $(3, 0)$ โฟกัส $(6, 0)$

ข. จุดยอด $(0, 3)$ โฟกัส $(0, 0)$

จ. จุดยอด $(-3, 0)$ โฟกัส $(0, 0)$

ค. จุดยอด $(0, -3)$ โฟกัส $(0, 0)$

4. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(2, -1)$ ไคเรกตริกซ์ขนานกับแกน y และกราฟผ่านจุด $(3, 0)$ มีสมการตั้งข้อใด

ก. $y^2 - 4y - x + 3 = 0$

ง. $x^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

ข. $x^2 - 4x - y + 3 = 0$

จ. $y^2 + 2y - x + 3 = 0$

ค. $y^2 + 2y + x + 3 = 0$

5. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-2, 2)$ โฟกัสอยู่บนแกน y และแกนพาราโบลาขนานกับแกน x มีสมการตั้งข้อใด

ก. $x^2 - 2x + 8y - 15 = 0$

ง. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

ข. $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$

จ. $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$

ค. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 3

คำสั่ง ให้นักเรียนกา x ใน $\square$ ใต้ตัวอักษร ก ข ค ง หรือ จ ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดในกระดาษคำตอบ

- วงรี $3x^2 + 4y^2 = 12$ มีจุดและโฟกัสตามลำดับข้างข้อใด

ก. จุดยอด $(\pm 2, 0)$ โฟกัส $(0, \pm 1)$ ง. จุดยอด $(0, \pm 2)$ โฟกัส $(0, \pm 1)$

ข. จุดยอด $(\pm 2, 0)$ โฟกัส $(\pm 1, 0)$ จ. จุดยอด $(0, \pm 2)$ โฟกัส $(0, \pm 3)$

ค. จุดยอด $(0, \pm 2)$ โฟกัส $(\pm 1, 0)$
- วงรีที่ตัดแกน x ที่จุด $(\pm 5, 0)$ ตัดแกน y ที่ $(0, \pm 7)$ มีสมการดังข้อใด

ก. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ง. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

ข. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ จ. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

ค. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- วงรีที่มีจุดยอดที่ $(0, \pm 4)$ โฟกัสที่ $(0, \pm 2)$ มีสมการดังข้อใด

ก. $y^2 + 16x^2 = 16$ ง. $12y^2 + 8x^2 = 96$

ข. $4x^2 + 16y^2 = 64$ จ. $12y^2 + 16x^2 = 192$

ค. $4y^2 + 16x^2 = 64$
- วงรี $49(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 49$ มีแกนเอกและแกนโทของกราฟดังข้อใด

ก. แกนเอกคือ $x = 2$ ยาว 14 หน่วย แกนโทคือ $y = 4$ ยาว 2 หน่วย

ข. แกนเอกคือ $x = 2$ ยาว 2 หน่วย แกนโทคือ $y = 4$ ยาว 14 หน่วย

ค. แกนเอกคือ $x = 2$ ยาว 49 หน่วย แกนโทคือ $y = 4$ ยาว 2 หน่วย

ง. แกนเอกคือ $y = 4$ ยาว 14 หน่วย แกนโทคือ $x = 2$ ยาว 2 หน่วย

จ. แกนเอกคือ $y = 4$ ยาว 2 หน่วย แกนโทคือ $x = 2$ ยาว 14 หน่วย
- จุดโฟกัสของกราฟวงรีที่มีสมการ $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$ คือข้อใด

ก. $(3 - \sqrt{2}, -2)$ $(3 + \sqrt{2}, -2)$ ง. $(1, 3 - \sqrt{2})$ $(1, 3 + \sqrt{2})$

ข. $(-1, 3 - \sqrt{2})$ $(-1, 3 + \sqrt{2})$ จ. $(3 - \sqrt{2}, 1)$ $(3 + \sqrt{2}, 1)$

ค. $(3 - \sqrt{2}, -1)$ $(3 + \sqrt{2}, -1)$

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 4

คำสั่ง ให้นักเรียนกา x ใน $\square$ ให้ตัวกร ก ข ค ง หรือ จ ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุด
ในกระดาษคำตอบ

ใช้สมการไฮเพอร์โบลาคือไปนี้ตอบคำถามข้อ 1-2

$$7y^2 - 9x^2 = 63$$

1. จุดยอดและโฟกัสของกราฟคือข้อใด

ก. จุดยอด $(0, \pm 3)$ โฟกัส $(0, \pm 4)$

ง. จุดยอด $(\pm 3, 0)$ โฟกัส $(\pm 2, 0)$

ข. จุดยอด $(0, \pm 7)$ โฟกัส $(0, \pm 4)$

จ. จุดยอด $(\pm 7, 0)$ โฟกัส $(\pm 4, 0)$

ค. จุดยอด $(\pm 3, 0)$ โฟกัส $(\pm 4, 0)$

2. แกนตามขวางและแกนสัณยุคของกราฟคือข้อใด

ก. แกน x เป็นแกนตามขวางยาว 6 หน่วย แกน y เป็นแกนสัณยุคยาว $2\sqrt{7}$ หน่วย

ข. แกน x เป็นแกนตามขวางยาว $2\sqrt{7}$ หน่วย แกน y เป็นแกนสัณยุคยาว 6 หน่วย

ค. แกน y เป็นแกนตามขวางยาว 6 หน่วย แกน x เป็นแกนสัณยุคยาว $2\sqrt{7}$ หน่วย

ง. แกน y เป็นแกนตามขวางยาว $2\sqrt{7}$ หน่วย แกน x เป็นแกนสัณยุคยาว 6 หน่วย

จ. แกน x เป็นแกนตามขวางยาว 7 หน่วย แกน y เป็นแกนสัณยุคยาว 3 หน่วย

3. โฟกัสของไฮเพอร์โบล่า $5y^2 - 4x^2 - 10y - 24x - 51 = 0$ คือข้อใด

ก. $(-6, 1)$ และ $(0, 1)$

ง. $(6, 1)$ และ $(0, 1)$

ข. $(-3, 3)$ และ $(-3, -1)$

จ. $(-3, 4)$ และ $(-3, -1)$

ค. $(0, -1)$ และ $(6, -1)$

4. ไฮเพอร์โบล่าที่มีเส้นตรง $y = 4$ เป็นแกนตามขวางยาว 2 หน่วย เส้นตรง $x = 5$ เป็นแกนสัณยุคยาว 6 หน่วย มีสมการดังข้อใด

ก. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

ง. $\frac{(y-1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$

ข. $\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x-5)^2}{9} = 1$

จ. $\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

ค. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

5. ข้อใดไม่ใช่สมการของไฮเพอร์โบลามุมฉาก

ก. $x = \frac{12}{y}$

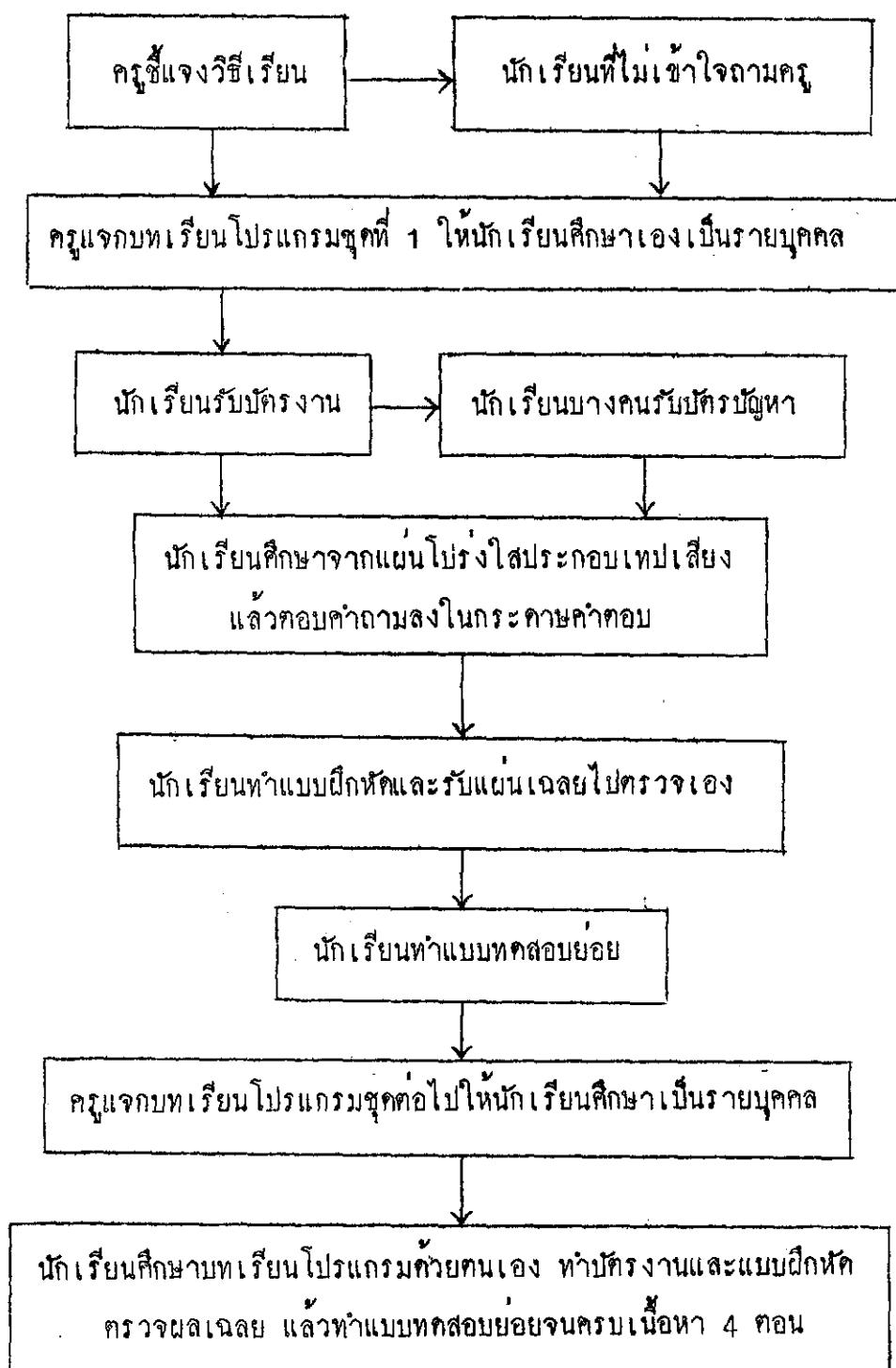
ข. $y^2 - x^2 = 12$

ค. $3x^2 - 3y^2 = 81$

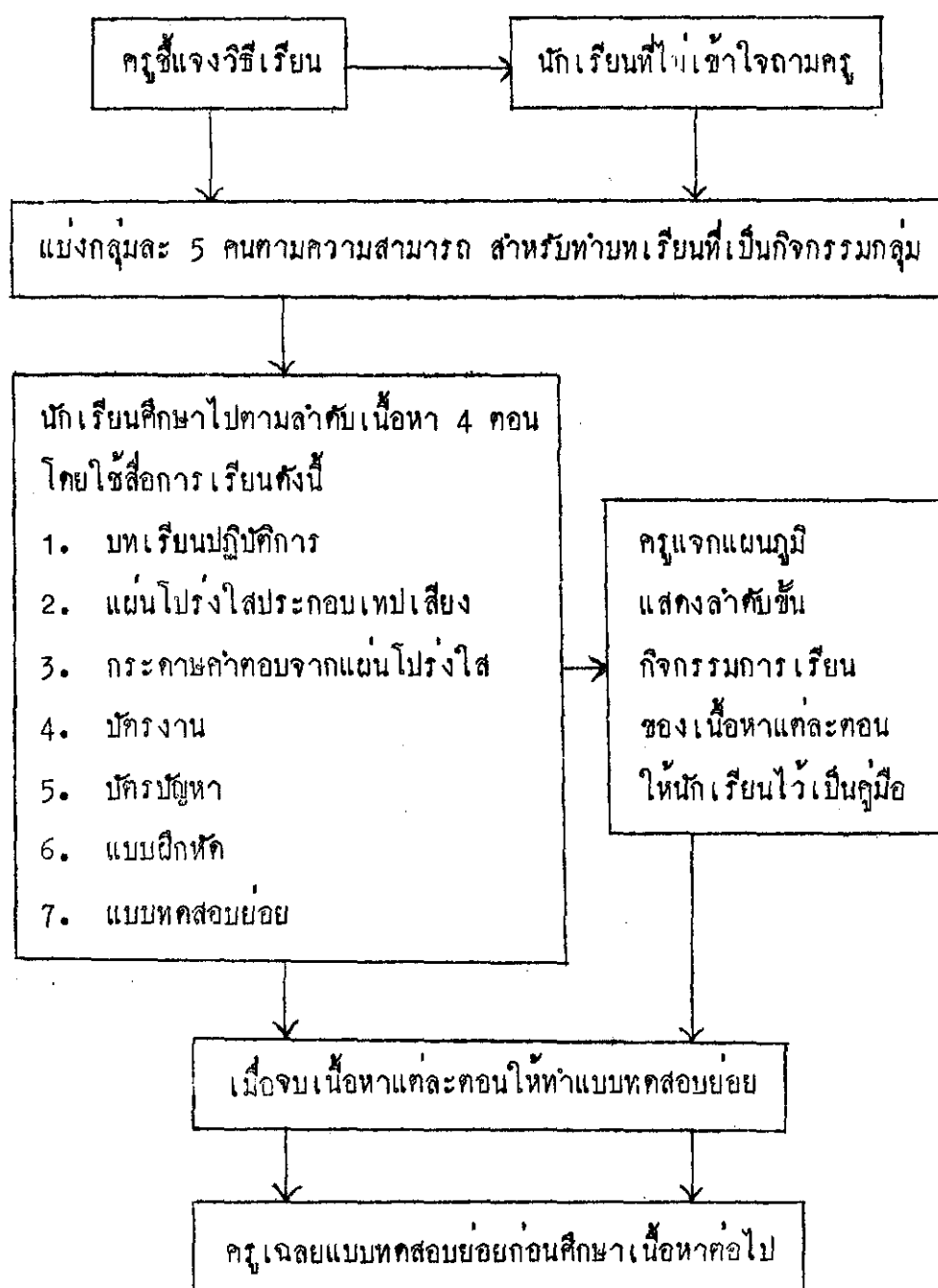
ง. $7y^2 = 7x^2 - 3y - 2x - 3$

จ. $y^2 = 2 - x^2 + 2x$

แผนภูมิแสดงลำดับขั้นการเรียนรู้การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม



แผนภูมิแสดงลำดับขั้นการ เรียนการสอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม



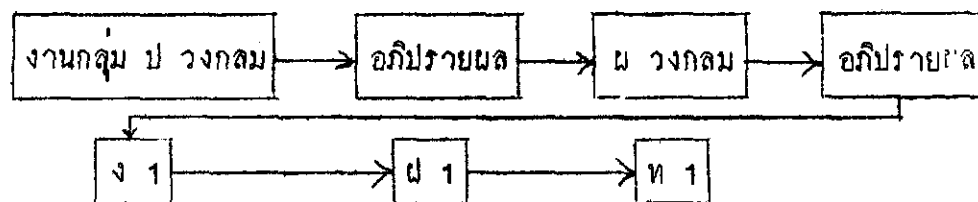
หมายเหตุ กิจกรรมใดมิได้ระบุเป็นงานกลุ่ม หมายถึง ทำเป็นรายบุคคล นักเรียนคนใดทำงานเสร็จก่อนคนอื่น ให้มารับบัตรปัญหาจากครู

แผนภูมิแสดงลำดับขั้นกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสมของเนื้อหาแต่ละตอน

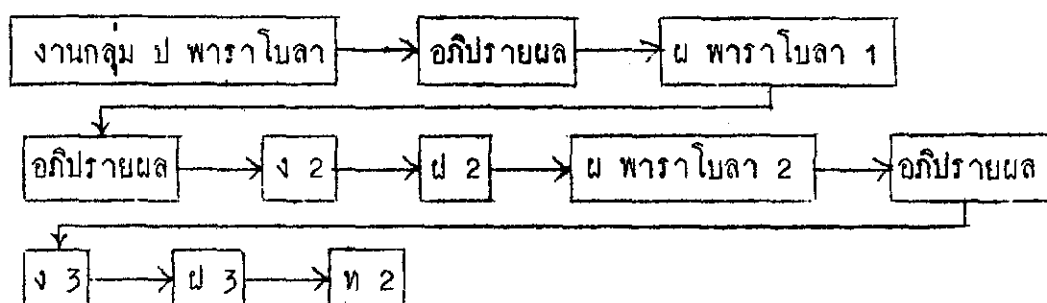
ป : บทเรียนปฏิบัติการ ง : ปักรงาน ท : ทดสอบย่อย

ผ : แผ่นโปร่งใสประกอบเทปเสียง ผ : แบบฝึกหัด

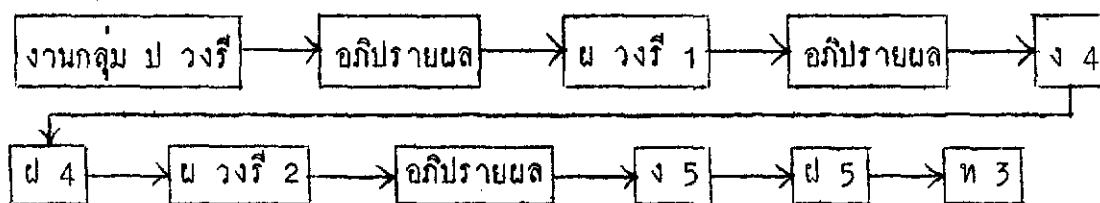
เนื้อหาตอนที่ 1



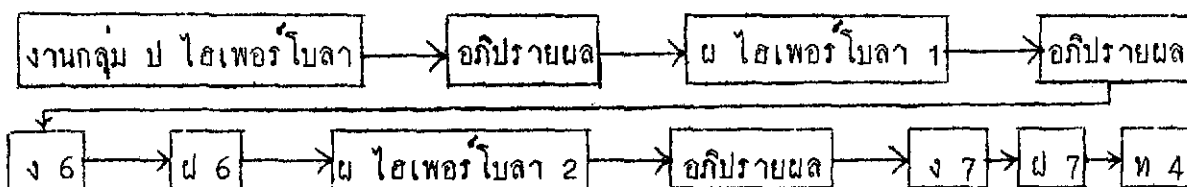
เนื้อหาตอนที่ 2



เนื้อหาตอนที่ 3



เนื้อหาตอนที่ 4



แผ่นโปรงใสประกอบเพปเสียงและกระดาษคำตอบ
(ผู้สนใจขอได้ที่ หมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมวิสาขกุลทอง
เขตพระโขนง กรุงเทพมหานคร)

การศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
โดยการสอนด้วยบทเรียนสื่อประสม

บทคัดย่อ

ของ

พัชราภรณ์ อินทรหัตถ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2529

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมวิภาวดีทอง กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2528 จำนวน 3 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 40 คน การจัดห้องเรียนให้เป็นกลุ่มทดลองหรือกลุ่มควบคุม ใช้วิธีสุ่มโดยการจับสลาก กลุ่มทดลองที่ 1 สอนด้วยบทเรียนโปรแกรมสื่อประสม กลุ่มทดลองที่ 2 สอนด้วยบทเรียนปฏิบัติการสื่อประสม และกลุ่มควบคุมสอนตามแผนการสอนรายคาบของกลุ่มโรงเรียน ใช้เวลาทดลองกลุ่มละ 14 คาบ คาบละ 50 นาที ใช้เนื้อหาในการทดลองเหมือนกัน การวิจัยเชิงทดลองนี้ใช้แบบแผน Nonrandomized Control-Group Posttest-only Design พร้อมทั้งมีการทดสอบความคงทนในการเรียนรู้หลังการทดลอง 2 สัปดาห์และ 3 สัปดาห์ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เมื่อทดสอบความแตกต่างเป็นรายคู่ พบว่ากลุ่มทดลองที่ 2 แตกต่างจากกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองที่ 1 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แต่กลุ่มทดลองที่ 1 แตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

A STUDY OF MATHAYOM SUKSA 4 STUDENTS' LEARNING ACHIEVEMENT
AND LEARNING RETENTION IN MATHEMATICS THROUGH
MULTIMEDIA INSTRUCTION

AN ABSTRACT

BY

PHATCHUDA INTARATAT

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
February 1986

The purpose of this research was to study the Mathayom Suksa 4 students' learning achievement and learning retention in mathematics through multimedia instruction.

The sample consisted of 3 classes with 40 students in each at Mathayom Wattatthong School, Bangkok in the 1985 academic year. The three classes were randomized into two experimental groups and one control group. The first experimental group was taught by multimedia programmed instruction, the second experimental group was taught by operational multimedia instruction and in the control group the conventional teaching was used. It took each group 14 fifty minutes' periods. The Nonrandomized Control-Group Posttest-only Design was used in the study. The retention was tested after the experiment lasted two and three weeks. The analysis of Covariance was statistically used to analyze the collected data. The results of this study were as follows :

1. The mathematics achievement test of the three groups were significantly different at the .01 level. The test of significance between means in each pair revealed that the second experimental group and the control group were significantly different at the .01 level, the second experimental group and the first experimental group were significantly different at the .01 level. On the contrary, the first experimental group and the control group were not significantly different at the .05 level.

2. The learning retention in mathematics of the three groups were not significantly different at the .05 level.