

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ
ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

สารนิพนธ์
ของ
อรชร ภูบุญเดิม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
พฤษภาคม 2550

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ
ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

สารนิพนธ์
ของ
อรชร ภูบุญเติม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา

พฤษภาคม 2550

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ
ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

บทคัดย่อ
ของ
อรรช ญบุญเดิม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
พฤษภาคม 2550

อรชร ภูบุญเดิม.(2550). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation). สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) .กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ . อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 60 คน ได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่ม จากการจับสลากมา 1 ห้องเรียน ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน (Representation) ที่แบ่งออกเป็น 4 แผน ตามวิธีการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 วิธี คือ การแก้โจทย์สมการโดยการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตารางและการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ประเมินความสามารถของนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ ชนิดอัตนัย จำนวน 5 ข้อ แบบแผนการวิจัยที่ใช้คือ One – Group Pretest Posttest Design สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ t – test Dependent

ผลการศึกษาพบว่า

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนหลังการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน สูงกว่าก่อนสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITY ON
EQUATION WORD PROBLEMS OF MATHAYOMSUKSA I
STUDENTS USING REPRESENTATION

AN ABSTRACT
BY
ORACHORN PHUBOONTERM

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University
May 2007

Orachorn Phuboonterm. (2007). *A Study of Mathematical Problem – Solving Ability on “Equation Word Problems ” of Mathayomsuksa I Students Using Representation*. Master’s Project, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Project Advisor : Asst. Prof. Chaisak Leelajaruskul.

The purpose of this research was to study Mathematical Problem – Solving Abilities on “Equation Word Problems ” of Mathayomsuksa I students by using representation.

The subjects were 60 Mathayomsuksa I students in the second semester of the 2006 academic year at Kalasin Pittayasan School, Muang District, Kalasin. The experimental group learnt to solve the Ability on “Equation Word Problems ” by using the representation. Those are the real model, drawing the picture, construct the table and using the symbols in Mathematics. The achievement are 5 subjective tests. The One – Group Pretest – Posttest Design was used in this study. The t – test Dependent was used to analyze data.

The results of this study revealed that :

The students’ Mathematical Problem – Solving Abilities on “Equation Word Problems ” after using the representation were higher than that before using the representation at the .01 level of significances.

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร และคณะกรรมการ
สอบ ได้พิจารณาสารนิพนธ์เรื่อง การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง
โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ของ อรรถ
ภูบุญเต็ม ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษา
มหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล)

ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

..... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล)

..... กรรมการสอบสารนิพนธ์
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์)

..... กรรมการสอบสารนิพนธ์
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ)

อนุมัติให้รับสารนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษา
มหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีคณะศึกษาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)
วันที่ เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2550

ประกาศคุณูปการ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ความช่วยเหลือ ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ อย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศรษฐมัลย์ รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุมาลี ดังคนานุรักษ์ อาจารย์ประสาธ สอ้านวงศ์ ที่กรุณาให้เกียรติเป็นผู้เชี่ยวชาญให้คำปรึกษา แนะนำ และตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้อำนวยการสถานศึกษา หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และคณาจารย์โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ทุกท่าน ที่ให้ความสะดวกและความช่วยเหลือในการทดลองเก็บรวบรวมข้อมูลในครั้งนี้ และขอขอบใจนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2549 ทุกคน ที่ให้ความร่วมมือในการหาคุณภาพเครื่องมือและดำเนินการทดลองในการวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี

ขอขอบคุณอาจารย์มานิต เหลื่อมกุ่มमार ที่ให้กำลังใจและช่วยเหลือในการ จัดพิมพ์ข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูลและตรวจแบบอักษร

ขอขอบพระคุณคุณพ่อบัวเรียน - คุณแม่ทองสา บุญญเติม ที่ให้การอบรมเลี้ยงดูและให้การสนับสนุนทั้งด้านการศึกษาและด้านทุนทรัพย์ และขอขอบคุณพี่น้องในครอบครัว และเพื่อนๆ ที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจ ทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ที่พึงมีของสารนิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครู อาจารย์และผู้มีพระคุณทุกท่าน

อรชร บุญญเติม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมาย	3
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	3
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	4
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	4
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	4
ระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า	5
ตัวแปรที่ศึกษา	5
นิยามศัพท์เฉพาะ	5
สมมติฐานการศึกษาค้นคว้า	6
2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง	7
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	8
ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์	8
ประเภทของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์	9
ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	12
กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	12
องค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	17
กลวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	20
ทักษะการแก้ปัญหา	24
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	25
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)	27
ความหมายของการใช้ตัวแทน	27
การใช้ตัวแทนในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น	29
บทบาทของครูในการใช้ตัวแทน	30
ความสำคัญของการใช้ตัวแทน	31
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน	31

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
2 (ต่อ)	
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหา	
ทางคณิตศาสตร์	36
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	36
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถ	
ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	39
ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถทางคณิตศาสตร์.....	42
แนวทางการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์.....	43
แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา	
ทางคณิตศาสตร์.....	46
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์.....	52
3 วิธีดำเนินศึกษาค้นคว้า	55
การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	55
ระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า.....	55
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	56
แบบแผนในการศึกษาค้นคว้า	56
เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	57
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	60
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	61
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	64
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	64
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	65
5 สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ	66
สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีการศึกษาค้นคว้า	66
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า.....	67
อภิปรายผล.....	68
ข้อเสนอแนะ.....	72

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
บรรณานุกรม	74
ภาคผนวก.....	84
ภาคผนวก ก คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	85
ภาคผนวก ข การวิเคราะห์ข้อมูล.....	90
ภาคผนวก ค เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	95
ภาคผนวก ง ภาพประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนการแก้โจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation)	214
ภาคผนวก จ รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ	219
ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์	221

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา.....	49
2 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปแบบ ของ Charles & Lester	53
3 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปลิกโดยแยกพิจารณาเป็นประเด็นย่อยๆตาม ความถูกต้องในแต่ละประเด็น	54
4 แบบแผนการศึกษาค้นคว้าแบบ One Group Pretest – Posttest Design...	59
5 ผลการวิเคราะห์การศึกษาศักยภาพความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการทดลอง.....	68
6 ผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ สมการ	60
7 ค่าความยาก (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ	92
8 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ.....	94

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กระบวนการแก้ปัญหาของสเทอร์นเบิร์ก.....	15
2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนการจดจำโดยใช้ตัวแทน(Representation): วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง	215
3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนการจดจำโดยใช้ตัวแทน(Representation): การวาดภาพ	216
4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนการจดจำโดยใช้ตัวแทน(Representation): การใช้ตาราง	217
5 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนการจดจำโดยใช้ตัวแทน(Representation): การใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)	218

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์ถือเป็นวิชาที่มีความสำคัญมากในการพัฒนาประเทศ เพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้ถูกต้องและเหมาะสม (กระทรวงศึกษาธิการ.2544 : 1) คณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่มีความสำคัญต่อผู้เรียนทั้งไกลและใกล้ตัว สังเกตได้จากในชีวิตประจำวันของมนุษย์เรา ต้องใช้คณิตศาสตร์อยู่เป็นประจำ เช่นการซื้อขายสินค้าต่างๆ การคำนวณกำไรขาดทุน การคิดดอกเบี้ย การคำนวณภาษีเงินได้ การประมาณค่าสิ่งของต่างๆ เช่น น้ำหนักส่วนสูง การตีหรือการอ่านค่าจากตาราง กราฟ แผนภูมิต่างๆในตำนานงานอาชีพ จิวรรณ เศวตมัลย์ (2545 : 20-21) ได้กล่าวถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ไว้ในหนังสือการพัฒนาหลักสูตรการสอนคณิตศาสตร์ว่า คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาเทคโนโลยีต่างๆมากมาย เช่น ทฤษฎีสัมพัทธ์ (Relativity Theory ของ Albert Einstein ค.ศ. 1879 - 1955) ซึ่งชี้ให้เห็นว่าพีชคณิตบูลีนและเลขคณิตสามารถเลียนแบบด้วยอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ คือคอมพิวเตอร์ คณิตศาสตร์อื่นๆได้แก่ Operation Research, Linear Programming, Game Theory , Actuary Sciences ซึ่งมีประโยชน์ในทางเศรษฐศาสตร์ สังคมการเมือง การควบคุมบัญชีของโภชนาการ วิศวกรรมเคมี จิตวิทยา รัฐศาสตร์ การเงิน ธุรกิจและการธนาคาร นอกจากนี้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ยังช่วยส่งเสริมลักษณะอันพึงประสงค์ให้กับผู้เรียนได้ เช่น ความมีระเบียบในการทำงาน ความมีเหตุผลในการแก้ปัญหา การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

แต่จากการเรียนการสอนคณิตศาสตร์กลับพบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ดังจะเห็นได้จากการรายงานผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หรือ GAT – General Achievement Test กระทรวงศึกษาธิการ (ไทยรัฐ .2547 : 15) ที่พบว่า คะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ป.6 , ม.3 และ ม. 6 จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน คือ 16.80, 14.00 และ 13.60 ตามลำดับ และจากประสบการณ์ในการสอนคณิตศาสตร์มาเป็นเวลา 6 ปี ผู้วิจัยเองพบว่านักเรียนได้ประสบปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์หลายเรื่อง และปัญหาที่พบบ่อยเรื่องหนึ่งก็คือ เรื่องที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และเนื่องจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นเสมือนสถานการณ์จำลองที่สร้างขึ้นมาจากปัญหาที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน และถือว่าเป็นสิ่งสำคัญที่ควรจะต้องได้รับการพัฒนาให้นักเรียนได้ฝึกคิดฝึกทดลองแก้ปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้น เพราะการฝึกแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่างๆ ย่อม

มีส่วนในการช่วยส่งเสริมลำดับการคิด กระบวนการคิด และกระบวนการทำงานของผู้เรียน อันจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้และกระบวนการเรียนรู้ที่ได้นี้ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ ดังนั้นถ้าผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ดีก็必将ช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ดีด้วยเช่นกัน (นิกร ขวัญเมือง.2545 : 1) ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงคิดที่จะพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนจึงได้รวบรวมงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาและข้อบกพร่องในการเรียนคณิตศาสตร์เพื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาและสาเหตุสำหรับเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาเพิ่มเติม โดยได้ศึกษางานวิจัยของ สุนนมาศ สันโดษ (2520 : 56) สมบัติ โพธิ์ทอง (2539 : 97 – 99) สุนิสา พงษ์ประยูร (2543:27) และได้พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาหรือมีข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ 1. การทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหา ซึ่งได้แก่การอ่านโจทย์ปัญหาว่า เพื่อวิเคราะห์ว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์ให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 2. การวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มแก้ปัญหายังไรและจะใช้วิธีการใดจึงจะสามารถหาคำตอบนั้นได้ เช่น นักเรียนไม่ทราบว่าเริ่มสร้างตัวแทนในการแก้ปัญหายังไรเป็นต้น 3. การดำเนินการตามแผน และประการสุดท้ายคือการตรวจสอบคำตอบ ข้อบกพร่องที่พบมากที่สุดจากงานวิจัยของ สุนิสา พงษ์ประยูร (2543 : 27) ก็คือ การตรวจสอบคำตอบที่ได้กับเงื่อนไขในโจทย์ ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 80 และเมื่อวิเคราะห์สาเหตุของข้อบกพร่องดังกล่าวพบว่า เกิดจากการที่ผู้เรียนเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ในรูปของสมการนั้นผิดพลาด (ร้อยละ 72.5) จึงทำให้การตรวจสอบคำตอบผิดไปด้วย จากปัญหาดังกล่าวได้แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังมีปัญหาในเรื่องของความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหา จากการศึกษางานวิจัยของท่านอื่นๆที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาและพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ เช่นงานวิจัยของ สุขจิตร ตั้งเจริญ (2543 : 37) ;กัลยา ทองสุ (2545 :97 -104) ; และ จริยาดี บรรทัดเที่ยง (2546 : 62-64) พบว่าทักษะที่มีความสำคัญที่จะช่วยพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการโจทย์ปัญหาก็คือทักษะในการใช้ตัวแทน (Representation) ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการใช้ตัวแทน (Representation) ในการแก้ปัญหา จึงเป็นทักษะสำคัญที่นักเรียนจะต้องได้รับการฝึกฝนให้สามารถนำมาแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้ได้ โดยเฉพาะปัญหาที่มักเกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน

การใช้ตัวแทน(Representation)ทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาหรือที่รู้จักกันในนาม National Council of Teachers of Mathematics (กัลยา ทองสุ. 2545 : 12 ; อ้างอิงจาก NCTM. 2000 : 279-283) ได้กำหนดไว้ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์(Mathematics Process Standards) ที่มีอยู่ 5 มาตรฐาน คือ การแก้ปัญหา (Problem Solving) ,การให้เหตุผลและการพิสูจน์(Reasoning & Proof), การสื่อสาร (Communication)การเชื่อมโยง (Connection) และการใช้ตัวแทน (Representation) โดยสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาได้อธิบายถึงหลักสูตรการใช้ตัวแทน (Representation) ว่า ควรจัดให้นักเรียนสามารถ คิดหาวิธีการใช้ตัวแทน การใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูล จัดบันทึก ตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ สามารถเลือก ประยุกต์ และแปลความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้

และสามารถใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแบบจำลอง ปรากฏการณ์ทางกายภาพ สังคม และคณิตศาสตร์ได้โดยใช้แบบจำลองนั้น การใช้ตัวแทนเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ทั้งนี้ เพราะนักเรียนจะสามารถพัฒนาความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง สามารถหาความสัมพันธ์และเปรียบเทียบสิ่งต่างๆได้ด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ซึ่งตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ เพราะตัวแทนเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียน สื่อสารความคิดของตนเองได้

การคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการพัฒนาการคิดด้านนามธรรม หากนักเรียนได้รับการแก้ปัญหาที่เหมาะสมและสอดคล้องกับช่วงพัฒนาการของเขาแล้วจะทำให้การเรียนรู้ในการแก้ปัญหาของเขาเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ ตามที่เพียร์เจได้กล่าวไว้ว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นวัยที่กำลังเรียนรู้และพัฒนาความคิดต่างๆแบบนามธรรม โดยอาศัยรูปธรรมในระยะเริ่มแรกแล้วจึงพัฒนาไปสู่การเรียนรู้นามธรรมอย่างสมบูรณ์ (ทองหล่อ วงษ์อินทร์ .2537: 7-8) ดังนั้นการปลูกฝังวิธีการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับนี้จึงเป็นการปูพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น ดังนั้นในการศึกษารั้งนี้ ผู้วิจัยจึงได้เลือกที่จะศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งเป็นระดับชั้นที่ผู้วิจัยทำการสอนอยู่ เพราะเห็นว่าการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียนชั้นนี้ จะช่วยให้นักเรียนสามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนในระดับที่สูงขึ้น หากนักเรียนที่ไม่ได้ศึกษาต่อก็จะสามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

จากปัญหาและสาเหตุดังที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงมีความต้องการที่จะศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลจากการศึกษาค้นคว้าทำให้ทราบถึงความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) เพื่อเป็นแนวทางสำหรับผู้สนใจที่จะส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 16 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 923 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่มจากการจับสลากมา 1 ห้องเรียนจำนวน 60 คน

2. เนื้อหาสาระที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นโจทย์สมการในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) ซึ่งเมื่อวิเคราะห์แล้วแบ่งสาระการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับ โจทย์สมการได้ดังนี้

โจทย์สมการ

- โจทย์สมการเกี่ยวกับการเปรียบเทียบจำนวน
- โจทย์สมการเกี่ยวกับอายุ
- โจทย์สมการเกี่ยวกับเศษส่วน
- โจทย์ระคน

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 นี้ ผู้วิจัยใช้เวลาในการทดลองจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาทีดังนี้

ชั่วโมงที่ 1 ทดสอบก่อนเรียน

ชั่วโมงที่ 2-5 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ชั่วโมงที่ 6-7 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การวาดภาพ

ชั่วโมงที่ 8 -9 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การใช้ตาราง

ชั่วโมงที่10-11 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน

สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

ชั่วโมงที่ 12 ทดสอบหลังเรียน

4.ตัวแปรที่ศึกษาค้นคว้า

4.1 ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation)

4.2 ตัวแปรตาม ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

5.นิยามศัพท์เฉพาะ

5.1 ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณ จำนวน วิธีการอธิบายหรือการให้เหตุผล โดยที่ผู้แก้ปัญหานั้นจะต้องใช้ทักษะความรู้ การตัดสินใจ และประสบการณ์หลายอย่างเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบหรือข้อสรุปนั้นได้

5.2 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการที่แต่ละคนจะต้องใช้ความรู้ ทักษะ เทคนิคและประสบการณ์ต่างๆ เพื่อทำความเข้าใจในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย และประมวลความรู้ความสามารถทักษะและประสบการณ์ต่างๆเหล่านั้น เพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่หรือในสถานการณ์ที่แตกต่างออกไปจากเดิม

5.3 การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) มาช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การใช้ตัวแทนเป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความคิด ความเข้าใจในการแก้ปัญหา ทำให้เกิดความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหาและสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

5.4 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) หมายถึง

วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดรูป การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร) เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับปัญหานั้นๆจนทำให้ผู้เรียนสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้ง่ายยิ่งขึ้น การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ตัวแทนนี้เป็นขั้นตอนอีกขั้นตอนหนึ่งของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยใช้ในการศึกษาครั้งนี้ซึ่งมีทั้งหมด 5 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นการสร้างตัวแทน ขั้นการวางแผนในการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจคำตอบ

5.5 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของสติปัญญาที่เกี่ยวข้องกับการทำความเข้าใจปัญหา การสร้างตัวแทน การวางแผน การดำเนินการตามแผนและการตรวจคำตอบ ซึ่งสามารถวัดได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทนซึ่งมี 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาซึ่งเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องอ่านโจทย์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์ถาม
2. ขั้นการสร้างตัวแทน เป็นขั้นตอนที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การวาดรูป การสร้างตาราง การเขียนสัญลักษณ์ต่างๆ แทนข้อความหรือการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างความเข้าใจจากรูปธรรมไปสู่ความเป็นนามธรรม เป็นขั้นของการประมวลความคิดหรือความเข้าใจในโจทย์ปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรมโดยการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว
3. ขั้นการวางแผน เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยที่นักเรียนต้องประมวลสิ่งต่างๆ ที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหาว่า จากสิ่งที่โจทย์กำหนดกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ ผู้แก้ปัญหาจะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาเป็นความสัมพันธ์ในรูปของสมการได้อย่างไร และจะมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลอื่นใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้แต่ต้องใช้ เพื่อมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น
4. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้
5. ขั้นตรวจคำตอบ เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

สมมติฐานการวิจัย

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) หลังการทดลองสูงกว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนทดลอง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 1.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.3 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.4 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.5 องค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.6 กลวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.7 ทักษะการแก้ปัญหา
- 1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

- 2.1 ความหมายของการใช้ตัวแทน
- 2.2 การใช้ตัวแทนในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น
- 2.3 บทบาทของครูในการใช้ตัวแทน
- 2.4 ความสำคัญของการใช้ตัวแทน
- 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหา

ทางคณิตศาสตร์

- 3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.3 ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถทางคณิตศาสตร์
- 3.4 แนวทางการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์
- 3.5 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

บรูคเนอร์และกรอสนิคเคิล (Bruechner ; & Grossnikle.1957: 301) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่นักเรียนไม่สามารถหาคำตอบได้ทันทีโดยใช้วิธีการที่เคยชิน และสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียนเมื่อวานนี้อาจไม่เป็นปัญหานี้ก็ได้

แอดเดอร์สันและพิงกรี (Aderson ; & Pingry.1973 : 228) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาข้อสรุปหรือเป็นคำตอบซึ่งผู้แก้ปัญหาทำได้โดยจะต้องมีกระบวนการที่เหมาะสมซึ่งใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจประกอบกัน

อดัมส์ และคนอื่นๆ (Adams and Others. 1977: 176) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ และคำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณด้วย จะรวมถึงปัญหาที่เป็นภาษา ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องราว ปัญหาที่เป็นคำพูด นอกจากนี้เขาได้กล่าวถึงความแตกต่างระหว่างปัญหา กับการทำแบบฝึกหัดอีกว่า ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะต้องมีการตัดสินใจและลงมือกระทำ ส่วนการทำแบบฝึกหัดไม่ต้องการตัดสินใจ

สุมนมาศ สันโดษ (2520 : 5) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นคำถามทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะต้องตีความหมายโจทย์มาเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ก่อนจึงจะสามารถดำเนินการหาคำตอบได้

พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2525:520) ได้ให้ความหมายไว้ว่าปัญหา หมายถึงข้อสงสัย

วิไลวรรณ เอื้อสุวรรณ (2531:28) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ที่ประกอบด้วยภาษาและตัวเลขที่ต้องการคำตอบโดยที่ผู้แก้ปัญหานั้นจะต้องหาวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมและเลือกตัดสินใจและลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาด้วยตนเอง

สวัสดิ์ จิตต์จนะ (2535:77) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นข้อความที่แสดงถึงเงื่อนไขความสัมพันธ์ของจำนวนที่กำหนดไว้ในแต่ละประโยคในลักษณะใดลักษณะหนึ่ง อันจะก่อให้เกิดจำนวนและผลลัพธ์อีกจำนวนหนึ่งที่ต้องการทราบในคำตอบของโจทย์

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537:62) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณหรือจำนวนหรืออธิบายให้เหตุผล เป็นสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน ไม่สามารถหาคำตอบได้ทันทีทันใด จะต้องใช้ทักษะความรู้ และประสบการณ์หลายๆอย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงจะได้คำตอบ

สุนิสา พงษ์ประยูร (2543:13) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นโจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยต้องการ

คำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยทักษะและความสามารถต่างๆที่เหมาะสมมาประกอบกันในการแก้โจทย์ปัญหา

เยาวลักษณ์ สมवास (2545:16) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึงคำถามทางคณิตศาสตร์หรือโจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณและตัวเลข ผู้แก้ปัญหาคือผู้หาคำตอบได้โดยใช้กระบวนการที่เหมาะสมซึ่งจะต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผนและการตัดสินใจประกอบกัน

นิกร ขวัญเมือง (2545:8) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ซึ่งในการหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์และการตัดสินใจจึงจะทำให้สามารถแก้ปัญหานั้นได้สำเร็จ

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณ วิธีการ คำอธิบายหรือการให้เหตุผล โดยที่ผู้แก้ปัญหานั้นจะต้องใช้ทักษะ ความรู้ การตัดสินใจ และประสบการณ์หลายๆอย่างเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบหรือข้อสรุปนั้นได้

1.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในทางคณิตศาสตร์พบว่าได้มีการแบ่งประเภทโจทย์ปัญหาต่างๆ ดังนี้

โพลยา (Polya.1957 : 23 -29) ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหาซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาให้ค้นคว้า เป็นปัญหาให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณหรือหาวิธีการและคำอธิบายการให้เหตุผล ซึ่งแบ่งเป็น 3 ส่วนคือสิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ เงื่อนไขที่เชื่อมโยงสิ่งที่ต้องการให้หา กับ ข้อมูลที่กำหนดให้

2. ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ต้องการให้แสดงการให้เหตุผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง หรือข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และ ผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องการให้พิสูจน์

ครูลิดและเรย์ (จุฑารัตน์ จันทะนาม.2543 :11; อ้างอิงจาก Krulik; & Reys .1980 : 208) ได้แบ่งชนิดของปัญหาออกเป็น 5 ชนิดคือ

1. ปัญหาที่เป็นความทรงจำ
2. ปัญหาด้านพีชคณิต
3. ปัญหาที่เป็นการประยุกต์ใช้
4. ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์หรือปัญหาที่ให้ค้นหาส่วนที่หายไป
5. ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์

ชาร์ลและเลสเตอร์ (Charles; & Lester.1982:6-10) ได้พิจารณาจำแนกประเภทของปัญหาของการฝึกแก้ปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ฝึก (Drill Exercise) เป็นปัญหาที่ใช้ฝึกขั้นตอนวิธีและการคำนวณเบื้องต้น

2. ปัญหาข้อความอย่างง่าย (Simple Translation Problem) เป็นปัญหาข้อความที่เคยพบมาก่อน เช่น ปัญหาในหนังสือเรียน ต้องฝึกให้คุ้นเคยกับการเปลี่ยนแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ มักเป็นปัญหาขั้นตอนเดียวที่มุ่งให้เกิดความเข้าใจในโมเดลทางคณิตศาสตร์และพัฒนาความสามารถในการคิดคำนวณ

3. ปัญหาข้อความที่ซับซ้อน (Complex Translation Problem) คล้ายกับปัญหาอย่างง่าย แต่เพิ่มเป็นปัญหาที่มี 2 ขั้นหรือมากกว่า 2 การดำเนินการ

4. ปัญหาที่เป็นกระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน ไม่สามารถเปลี่ยนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ทันที จะต้องจัดปัญหาให้ง่ายขึ้นหรือแบ่งเป็นขั้นตอนย่อยๆ แล้วหารูปแบบทั่วไปของปัญหาซึ่งนำไปสู่การคิดและการแก้ปัญหาและการประเมินผลคำตอบ

5. ปัญหาการประยุกต์ (Applied Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะความรู้ โมเดล และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ เช่นการเก็บรวบรวม การแทนข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ จัดระบบ ประมวลผลและแปลผลเพื่อตัดสินใจเกี่ยวกับข้อมูลนั้นๆ ปัญหาการประยุกต์เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้ทักษะกระบวนการ โมเดล และข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหา โดยเฉพาะปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งทำให้ผู้แก้ปัญหาเห็นประโยชน์และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์

6. ปัญหาปริศนา (Puzzle Problem) เป็นปัญหาที่บางครั้งได้คำตอบจากการเดาสุ่ม ไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา บางครั้ง ต้องใช้เทคนิคเฉพาะ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความคิดสร้างสรรค์ มีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา และเป็นปัญหาที่มองได้หลายแง่มุม ปัญหาปริศนามักเป็นปัญหาลับสมอง ปัญหาท้าทาย

บาร์ดี (Baroody. 1987: 260–261) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. ปัญหาปกติ (Routine Problem) เป็นปัญหาที่นักเรียนพบในแบบเรียน

2. ปัญหาไม่ปกติ (Non-Routine Problem) เป็นปัญหาที่แสดงกระบวนการและปัญหาที่เป็นปริศนา (Puzzle problem)

บิทเทอร์ ฮาร์ทฟิลด์ และ เอ็ดเวิร์ดส์ (Bitter, Hatfield ;& Edwards. 1989 : 137) ได้แบ่งประเภทของปัญหาตามลักษณะของปัญหาออกเป็น 3 ลักษณะ คือ

1. ปัญหาปลายเปิด (Opened) เป็นปัญหาที่มีคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบ ขึ้นอยู่กับสถานะสิ่งแวดล้อมและวิธีการแก้ปัญหา ปัญหาลักษณะนี้จะให้ความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ

2. ปัญหาให้ค้นพบ (Discovery) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องดำเนินการตามสถานการณ์หรือเหตุการณ์ที่กำหนดสืบค้นจนกระทั่งได้คำตอบในขั้นสุดท้ายของการแก้ปัญหา มักเป็นปัญหาที่มีวิธีแก้ได้หลากหลายวิธี

3. ปัญหาที่กำหนดแนวทางให้ค้นพบ (Guided Discovery) เป็นปัญหาที่มีรายละเอียดของปัญหาเช่น มีคำชี้แนะและคำชี้แจงในการแก้ปัญหาซึ่งผู้แก้ปัญหาสามารถดำเนินการแก้ปัญหาตามคำชี้แนะได้เลยโดยไม่ต้องกังวลในการหาคำตอบ

เรย์ ชุยตัมและ ลินด์ควิสต์ (Reys ,Suydum ;& Lindquist .1992 : 29) ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหาออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา (Routine Problem) เป็นปัญหาที่ต้องกรให้ประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนผู้แก้มีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญหาเมื่อพบปัญหาสามารถแก้ได้ทันที

2. ปัญหาแปลกใหม่ (Non-routine Problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน และผู้แก้ไม่คุ้นเคยกับปัญหานั้น ผู้แก้ต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน จึงจะแก้ปัญหาได้

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2536:10 -17) ได้แบ่งลักษณะของปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. ปัญหาเกี่ยวกับสาระ ได้แก่ ปัญหาตามที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนทั่วไป เป็นปัญหาที่นำความรู้เกี่ยวกับวิธีคิดคำนวณที่เรียนมาแล้วมาใช้ในการหาคำตอบของสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน จึงอาจกล่าวได้ว่า ปัญหาชนิดนี้มุ่งขยายประสบการณ์ด้านการคิดคำนวณมากกว่าการเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างแท้จริง เช่น ตัวอย่างปัญหาหลังบทเรียนแต่ละเรื่อง เช่น เรื่องการคูณเศษส่วนกับจำนวนนับ นักเรียนแทบจะไม่ต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาที่ต้องแก้เลยเพราะรู้อยู่แล้วว่าจะต้องใช้วิธีการคูณเศษส่วน นักเรียนก็ใช้วิธีการนั้นเลย

2. ปัญหาเกี่ยวกับกระบวนการ เป็นปัญหาที่มุ่งเน้นกระบวนการในการหาคำตอบมากกว่าตัวคำตอบเอง ในการหาคำตอบในบางครั้งไม่จำเป็นต้องนำการบวก ลบ คูณ หาร มาใช้ แต่ใช้กระบวนการคิดอื่นๆ ปัญหาชนิดนี้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาได้ดีและยังส่งเสริมวิธีการคิดอย่างหลากหลาย และสร้างสรรค์ อีกทั้งยังสร้างความรู้สึกล้าทำทายอีกด้วย

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538 :52- 53) ได้แบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. การแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1.1 ปัญหาให้ค้นหาเป็นปัญหาให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณจำนวนหรือให้หาวิธีการ คำอธิบาย ให้เหตุผล

1.2 ปัญหาให้พิสูจน์เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ

2. การแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อน ของปัญหา ซึ่ง แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

2.1 ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน ผู้แก้มีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญห

2.2 ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามองประมวลความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อนำไปแก้ปัญห

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถแบ่งได้เป็นหลายประเภทซึ่งแล้วแต่มุมมองและประสบการณ์ของแต่ละคนผู้วิจัยเองมีความเห็นว่าประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปแล้วสามารถแบ่งเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่พบในหนังสือเรียน ซึ่งเป็นปัญหาที่ต้องการให้ผู้เรียนหาคำตอบหรือปัญหาให้พิสูจน์ โดยมีจุดประสงค์เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะในการใช้กฎ นิยาม สูตร และทฤษฎี ที่เรียนมาใช้แก้ปัญหานั้นๆ

2. ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่พบในชีวิตประจำวัน ซึ่งเป็นปัญหาที่ผู้แก้ต้องประมวลความรู้ความสามารถ ไหวพริบ ทักษะและประสบการณ์หลายอย่าง เข้าด้วยกันเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาดังกล่าวปัญหาที่พบอาจจะมีทั้งปัญหาที่ยากหรือยากก็แล้วแต่สถานการณ์ที่ผู้แก้จะต้องเผชิญในแต่ละวัน

1.3 ความหมายของการแก้ปัญหามathematics

พิศมัย ศรีอำไพ. (2534 :56-57) ได้กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหามathematicsที่เราประสบอยู่ทุกวันนี้ ไม่ใช่จะเป็นปัญหามathematicsเท่านั้นเพราะฉะนั้นหน้าที่ของท่านในฐานะครูสอนคณิตศาสตร์ ก็คือการช่วยเด็กให้เกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหามathematicsในรูปแบบต่าง ๆ กันอย่างกว้างขวาง เราช่วยให้เด็กเรียนรู้ในการแก้ปัญหามathematicsที่เป็นคำบรรยาย ให้เกิดทักษะในการทำ ความเข้าใจเมื่ออ่านโจทย์ ให้ใช้ทักษะที่จำเป็น ที่ต้องการในทางวิทยาศาสตร์ ให้รู้จักวิเคราะห์หา เหตุการณ์ต่าง ๆ เกิดขึ้นได้อย่างไรในสังคมศึกษา และอยู่ร่วมกันในสังคมอย่างมีความสุข สำหรับในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีปัญหาที่มีคำบรรยาย (Story or work problems) และการประยุกต์ใช้ นั้น ครูจำเป็นต้องพัฒนาความสามารถของเด็กให้สามารถใช้เทคนิคและกลยุทธ์ต่าง ๆ ในการแก้ปัญหามathematicsเราทราบกันดีอยู่แล้วว่า ความรู้ ทักษะ และความเข้าใจเป็นองค์ประกอบสำคัญของการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ แต่ในเรื่องการแก้ปัญหามathematics เด็กต้องสังเคราะห์องค์ประกอบเหล่านี้เข้าด้วยกันอย่างมีหลักเกณฑ์เพื่อที่จะตอบคำถาม ตัดสินใจ และทำให้บรรลุจุดมุ่งหมาย

จากที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าการแก้ปัญหามathematicsเป็นกระบวนการที่แต่ละคนจะต้องใช้ ความรู้ ความเข้าใจ ทักษะ เทคนิคและประสบการณ์ต่าง ๆ เพื่อทำความเข้าใจในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย และประมวลความรู้ ความสามารถ ทักษะ และประสบการณ์ต่าง ๆ เหล่านั้น เพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ใหม่หรือในสถานการณ์ที่แตกต่างออกไปจากเดิม

1.4 กระบวนการแก้ปัญหามathematics (Problem Solving Process)

กระบวนการในการแก้ปัญหามathematicsคือการดำเนินตามลำดับขั้นตอนของการคิดตั้งแต่เริ่มเห็นปัญหามาจนถึงการแก้ปัญหามathematicsในการศึกษากระบวนการแก้ปัญหามathematics มีผู้เสนอแนวคิดไว้

หลายท่าน ขั้นตอนของกระบวนการในการแก้ปัญหาส่วนใหญ่แล้วมีความคล้ายคลึงกันจะแตกต่างกันในเรื่องการแบ่งขั้นตอน ดังนี้

บลูม (Bloom.1956:122) ได้เสนอขั้นตอนการคิดแก้ปัญหาดังนี้

ขั้นที่ 1 เมื่อนักเรียนได้พบปัญหา นักเรียนจะคิดค้นหาสิ่งที่เคยพบเห็นและเกี่ยวข้องกับปัญหา

ขั้นที่ 2 นักเรียนจะใช้ผลจากขั้นที่หนึ่งมาสร้างรูปแบบของปัญหาใหม่

ขั้นที่ 3 จำแนกแยกแยะปัญหา

ขั้นที่ 4 การเลือกใช้ทฤษฎี หลักการ ความคิด และวิธีการที่เหมาะสมกับปัญหา

ขั้นที่ 5 การใช้ข้อสรุปของวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 6 ผลที่ได้จากการแก้ปัญหา

นอกจากนี้ บลูมได้อธิบายเพิ่มเติมอีกว่าความสามารถทางสมองที่นำมาใช้แก้ปัญหาในขั้นที่ 1 – 4 เป็นส่วนของการนำมาใช้ ขั้นที่ 5 และ 6 เป็นส่วนของความเข้าใจสำหรับความรู้ความจำถือว่า เป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการแก้ปัญหาส่วนความสามารถในการวิเคราะห์เป็นความสามารถทางสมองอย่างหนึ่งที่นำมาใช้ในกระบวนการแก้ปัญหาในขั้นที่ 3

มาร์ค และคนอื่นๆ (Mark and others. 1965:401– 412) ได้กล่าวถึงการคิดแก้ปัญหาไว้ว่าสิ่งที่นักเรียนจะต้องปฏิบัติในการแก้ปัญหามีดังนี้

1. ค้นหาว่าโจทย์ต้องการอะไรและโจทย์กำหนดอะไรให้ในการหาคำตอบ
2. หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์ให้มากับสิ่งที่ต้องการหาคำ
3. วิเคราะห์ข้อมูลและความสัมพันธ์เพื่อหาคำตอบ
4. ตรวจสอบคำตอบ

บรูเนอร์ (Bruner. 1966:123 –127) ได้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาและได้สรุปว่าการคิดแก้ปัญหาของบุคคลนั้นต้องการกลไกแห่งความสามารถในการอ้างอิงและจำแนกประเภทของ สิ่งรับรู้ ประสบการณ์รับรู้ต่างๆก็เป็นปัจจัยที่สำคัญยิ่งของกระบวนการจัดประเภทอันที่จะนำไปสู่การตอบสนองในขั้นสุดท้าย ขั้นตอนต่างๆ ในการคิดแก้ปัญหามีดังนี้

1. รู้จักปัญหา เป็นขั้นที่บุคคลรับรู้สิ่งที่ตนกำลังเผชิญอยู่ว่าเป็นปัญหา
2. แสวงหาเค้าเงื่อน เป็นขั้นตอนที่บุคคลใช้ความพยายามอย่างมากในการระลึกถึง

ประสบการณ์เดิม

3. ตรวจสอบความถูกต้อง เป็นขั้นตอนที่ตอบสนองในลักษณะของการจัดประเภทหรือแยกโครงสร้างเนื้อหา

4. การตัดสินใจตอบสนองที่สอดคล้องกับปัญหา

วอลลิส (Wallas.1972: 215 -247) ได้เสนอกระบวนการคิดแก้ปัญหามีอยู่ 4 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นเตรียม (Preparation) เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาเลือกปัญหารวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาเป็นความพยายามเบื้องต้นที่จะแก้ปัญหา

2. ขั้นฟักตัว (Incubation) เป็นขั้นที่ผู้แก้หันความสนใจออกไปจากปัญหาไปยังกิจกรรมอื่นๆ
3. ขั้นเกิดความคิดหรือขั้นเข้าใจปัญหา (Illumination) ผู้แก้ปัญหามีความคิด“แว็บ” ขึ้นในสมอง
4. ขั้นตรวจสอบ (Verification) เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหามาตรวจสอบคำตอบของตนว่าสามารถใช้ได้หรือไม่

โพลยา (Polya. 1973: 5 – 40) ได้จัดลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาวี 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา สิ่งแรกที่จะต้องทำความเข้าใจ คือสัญลักษณ์ต่างๆในโจทย์ปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องสามารถสรุปปัญหาออกมาเป็นภาษาของตนเองได้สามารถบอกได้ว่าประเด็นของปัญหาอยู่ที่ใด สามารถบอกได้ว่าโจทย์ถามอะไร อะไรเป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือเงื่อนไขและถ้าจำเป็นจะต้องให้สื่อกับข้อมูลต่างๆ นักเรียนควรเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมได้ นักเรียนจะต้องพิจารณาปัญหาอย่างตั้งใจซ้ำแล้วซ้ำอีกหลายๆแง่มุมจนกระทั่งสามารถสรุปออกมาได้

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นความสำคัญของข้อมูลต่างๆในปัญหาอย่างชัดเจนมาก่อน สิ่งที่ต้องการหามีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่กำหนดให้อย่างไร สิ่งนี้นักเรียนจะต้องทำในขั้นตอนนี้ก็คือ การนึกทบทวนความรู้ที่มีมาว่ามีความรู้อะไรบ้างซึ่งสัมพันธ์กับปัญหา เทคนิคอย่างหนึ่งในการวางแผนแก้ปัญหาได้แก่ การพยายามนึกทบทวนสิ่งที่เคยแก้ปัญหามาก่อนซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาปัจจุบัน เพราะอาจจะช่วยให้สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ใกล้เคียงกัน ในการวางแผนนั้นควรแบ่งเป็นขั้นๆ โดยแบ่งเป็นขั้นตอนใหญ่ๆและในแต่ละขั้นใหญ่แต่ละขั้น ก็แบ่งออกเป็นขั้นเล็กๆอีกมากมาย นอกจากนี้ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นว่า ถ้าเขาต้องการสิ่งหนึ่งเขาต้องใช้เหตุผลหรือข้ออ้างอะไร เพื่อที่จะให้ได้สิ่งนั้นมาตามต้องการ

1. ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือทำการคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อที่จะให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งนี้นักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคำนวณ การรู้จักเลือกวิธีการคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

2. ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ ตรวจสอบปัญหานั้นๆว่าได้ผลเป็นอย่างไรเป็นขั้นการตรวจสอบเพื่อให้แน่ใจว่าได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ โดยพิจารณาและสำรวจดูผลว่ามีความถูกต้องและมีเหตุผลน่าเชื่อถือได้หรือไม่ ตลอดจนกระบวนการในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องรวบรวมความรู้และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกันทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น

สเตอร์นเบิร์ก (Sternberg .1986 : 41–78) ได้กล่าวถึงวิธีการที่จะนำไปแก้ปัญหา ที่เรียกว่า “Metacomponents “ ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นที่ 1 การนิยามธรรมชาติของปัญหา เป็นการทบทวนปัญหา เพื่อทำความเข้าใจต่อจากนั้นก็เป็นการตั้งเป้าหมาย และนิยามปัญหา เพื่อจะนำไปสู่เป้าหมายที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 2 การเลือกองค์ประกอบหรือขั้นตอนที่จะใช้ในการแก้ปัญหา เป็นการกำหนดขั้นตอนให้แต่ละขั้นตอนมีขนาดที่เหมาะสม ไม่กว้างเกินไป หรือไม่แคบเกินไปก่อนจะกำหนดขั้นตอนต่อไป ควรพิจารณารายละเอียดในแต่ละขั้นตอนให้ดีก่อน

ขั้นที่ 3 การเลือกกลวิธีในการจัดลำดับองค์ประกอบการแก้ปัญหา ต้องแน่ใจว่ามีการพิจารณาปัญหาอย่างทั่วถึงแล้ว ไม่ด่วนสรุปในสิ่งที่เกิดขึ้น เพราะอาจเกิดผิดพลาดได้ ต้องแน่ใจว่าการเรียงลำดับขั้นตอนเป็นไปตามธรรมชาติ หรือหลักเหตุผลที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการ

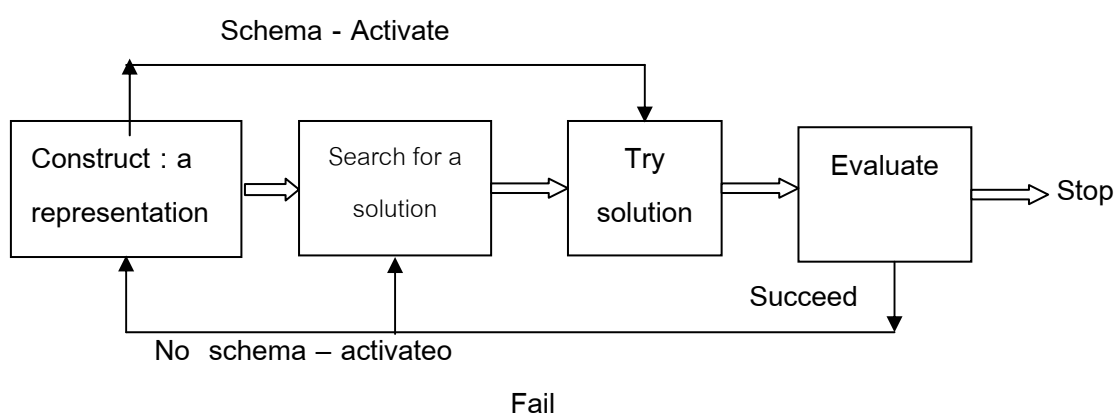
ขั้นที่ 4 การเลือกตัวแทนทางความคิดเกี่ยวกับข้อมูลของปัญหาที่ต้องการทราบรูปแบบความสามารถของตนใช้ตัวแทนทางความคิดในรูปแบบต่างๆจากความสามารถที่ตนมีอยู่ ตลอดจนใช้ตัวแทนภายนอกมาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 5 การกำหนดแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์ ต้องมีการทุ่มเทเวลาให้กับการวางแผนอย่างรอบคอบ ใช้ความรู้ที่มีอยู่อย่างเต็มที่ในการวางแผนและกำหนดแหล่งข้อมูลที่จะนำมาใช้ประโยชน์ มีความยืดหยุ่นในการเปลี่ยนแปลงแผนและแหล่งข้อมูล เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการแก้ปัญหา และแสวงหาแหล่งข้อมูลที่เป็นประโยชน์แหล่งใหม่อยู่เสมอ

ขั้นที่ 6 การตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา จะเป็นวิธีที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาหรือไม่ การแก้ปัญหาด้วยกระบวนการนี้ เน้นกระบวนการที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. การสร้างตัวแทนของปัญหา (Problem Representation) ผู้แก้ปัญหาต้องพยายามทำความเข้าใจปัญหาโดยเชื่อมปัญหากับความรู้เดิมที่มีอยู่และสร้างเป็นตัวแทนของปัญหาขึ้น ในรูปแบบต่างๆ

2. กระบวนการแก้ปัญหา (Solution Process) เป็นการค้นหาขอบข่ายของปัญหา (Problem Space) ซึ่งเป็นการใช้ความเข้าใจ รวมไปถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดไว้ในปัญหานั้น และการสร้างรูปแบบในการแก้ปัญหาขึ้น



ภาพประกอบ 1 แสดงกระบวนการแก้ปัญหของสเทอร์นเบิร์ก

สวัสต์ จิตต์จนะ (2535: 75-81) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 7 ขั้นตอน ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ปัญหา
2. แบ่งโจทย์ปัญหาเป็นประโยค
3. พิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในโจทย์
4. ตัดสินใจเลือกวิธีการหาคำตอบ
5. แสดงความคิดในการแก้โจทย์ปัญหา
6. แสดงวิธีหาคำตอบ
7. คิดคำนวณหาคำตอบและตรวจสอบคำตอบ

ทองหล่อ วงษ์อินทร์ (2537: 72) ได้สรุปกระบวนการแก้ปัญหามathematics เพื่อนำไปใช้ในการศึกษากระบวนการแก้ปัญหามathematics มี 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. การทำความเข้าใจในปัญหาจากโจทย์
 - 1.1 การบอกสิ่งที่โจทย์ให้มา
 - 1.2 การบอกเป้าหมายของการแก้ปัญหา
 - 1.3 การบอกข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา
 - 1.4 การระบุคำที่ยากต่อการเข้าใจ
2. การสร้างตัวแทนของปัญหา
 - 2.1 การวาดรูป แสดงข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนดให้
 - 2.2 การสร้างแผนภูมิหรือแผนภาพ
 - 2.3 การเขียนสัญลักษณ์ต่างๆแทนข้อความในโจทย์
 - 2.4 การแปลงโจทย์ให้อยู่ในรูปของประโยคสัญลักษณ์
 - 2.5 การจัดระบบข้อมูลใหม่
3. การวางแผนในการแก้ปัญหา
 - 3.1 การระบุเงื่อนไขจากโจทย์
 - 3.2 การแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหา
 - 3.3 การเลือกขั้นตอนในการแก้ปัญหา
 - 3.4 การจัดลำดับขั้นตอน
 - 3.5 การประมาณค่าของคำตอบ
 - 3.6 การระบุปัญหาเกี่ยวข้องกับการใช้สูตร กฎ หรือหลักเกณฑ์เรื่องใด
4. การลงมือแก้ปัญหา
 - 4.1 การดำเนินการตามแผนที่กำหนด
 - 4.2 การใช้ทักษะด้านพีชคณิต และเรขาคณิต
 - 4.3 การระบุเหตุผลในการคำนวณ
 - 4.4 การระบุความถูกต้องในการคำนวณ

4.5 การใช้กฎเกณฑ์ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในการคำนวณ

5. การตรวจสอบการแก้ปัญหา

5.1 การตรวจสอบขั้นตอนในการแก้ปัญหา

5.2 การทบทวนคำตอบโดยพิจารณาจากการคิดคำนวณ

5.3 การตรวจสอบคำตอบว่าตรงกับสิ่งที่โจทย์ต้องการหรือไม่

5.4 การตรวจสอบค่าความถูกต้องของคำตอบ

5.5 การตรวจคำตอบจากการประมาณค่า

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่ากระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนตามลำดับดังนี้คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาซึ่งเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องอ่านโจทย์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์ถาม

2. ขั้นการสร้างตัวแทน เป็นขั้นตอนที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การวาดรูป การสร้างตาราง การเขียนสัญลักษณ์ต่างๆแทนข้อความหรือการใช้วัตถุจริง ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้างความเข้าใจสู่ความเป็นนามธรรม เป็นขั้นของการประมวลความคิดหรือความเข้าใจในโจทย์ปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรมโดยการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว

3. ขั้นการวางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยที่นักเรียนต้องประมวลสิ่งต่างๆที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหว่า จากสิ่งที่โจทย์กำหนดกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ ผู้แก้จะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาเป็นความสัมพันธ์ในรูปของสมการได้อย่างไร และจะมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลอื่นใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้แต่ต้องใช้ เพื่อมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น

4. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้

5. ขั้นตรวจคำตอบ เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

1.5 องค์ประกอบของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

อดัมส์ และคนอื่นๆ (Adams ;& others.1977: 176) ได้สรุปองค์ประกอบของการแก้ปัญหาไว้ 3 ด้านคือ

1. องค์ประกอบด้านสติปัญญาการแก้ปัญหามจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูงโดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์ประกอบด้านปริมาณ

2. องค์ประกอบด้านการอ่าน การแก้โจทย์ปัญหาต้องใช้ความสามารถในการอ่านแบบวิเคราะห์ เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเกิดการตัดสินใจว่าควรทำอะไรอย่างไร

3. องค์ประกอบด้านทักษะพื้นฐาน

ไฮเมอร์และทรูบลัด (Heimer ;& Trueblood.1977 :3207-A) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

1. เทคนิคการรู้คำศัพท์ การรู้คำศัพท์ในโจทย์คำถาม จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาครูอาจช่วยฝึกฝนให้นักเรียนได้มีความรู้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น โดยจัดหาเกมหรือกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้คำศัพท์มาให้เล่น

2. ทักษะการคำนวณ ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกฝนในด้านการคำนวณนี้ เช่น อาจใช้วิธีการให้ฝึกคิดคำนวณในใจ

3. การแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง

4. การหาความสัมพันธ์ของข้อมูล

5. การคาดคะเนคำตอบ

6. การเลือกใช้วิธีจัดกระทำกับข้อมูลอย่างถูกต้อง

ซาลิวสกี (Zalewski .1978: 2804-A) ได้ศึกษาองค์ประกอบในการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1.ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์

2. ความสามารถในการอ่านและตีความหมาย

3. ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

4. ทักษะในการคำนวณ

ซุยดัม (Suydam.1990: 36) กล่าวว่าองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งสรุปได้ ดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจความคิดรวบยอดและข้อความทางคณิตศาสตร์

2. ความสามารถในการแยกแยะความคล้ายหรือความแตกต่าง

3. ความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูลและวิธีการที่ถูกต้อง

4. ความสามารถในการแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง

5. ความสามารถในการวิเคราะห์และประมาณค่า

6. ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความหมายของข้อมูลในเชิงปริมาณ

บาร์รูดี (Baroody.1993: 2 -10) กล่าวถึงองค์ประกอบหลักของการแก้โจทย์ปัญหา 3 ประการคือ

1. องค์ประกอบด้านความรู้ความคิด (Cognitive factor) ซึ่งประกอบด้วยความรู้ที่เกี่ยวกับโมเมนต์และยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบด้านความรู้สึก

3. องค์ประกอบทางด้านการสังเคราะห์ความคิด (Metacognitive Factor)

คณะอนุกรรมการการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2524: 141-142) ได้กล่าวถึงความสามารถพื้นฐาน และองค์ประกอบในการแก้ปัญหา (ด้านเจตคติ) ดังนี้

1. ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจมีโมเมนต์และทักษะในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับแก้ปัญหานั้นๆ

2. ความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความ การขยายความ
3. ความสามารถในการแปลข้อความเป็นสัญลักษณ์หรือแผนภาพ
4. ความสามารถในการวิเคราะห์ความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่มีอยู่
5. ความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน
6. การวิเคราะห์หารูปแบบและหาข้อสรุป
7. ความกระตือรือร้น อยากรู้ อยากเห็น มีศรัทธา มีกำลังใจ มีความอดทน

สุนันท์ นิมวัย (2543: 23) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

- 1 องค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกับตัวผู้แก้ปัญหา ซึ่งได้แก่
 - 1.1 ความรู้ ความคิด และประสบการณ์
 - 1.2 ระดับสติปัญญาและความสามารถ
 - 1.3 การรับรู้และการสังเคราะห์ความคิด
 - 1.4 ทักษะและพื้นฐานต่างๆ เช่น ทักษะการอ่าน การดำเนินการและการคิดคำนวณ
 - 1.5 ความรู้สึกและความต้องการที่จะแก้ปัญหา ความเชื่อและเจตคติต่อการแก้ปัญหา
 - 1.6 ความยืดหยุ่นและความมั่นใจในตนเองต่อความสามารถในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบเกี่ยวกับสภาพสิ่งแวดล้อม ซึ่งเกี่ยวกับ

- 2.1 บรรยากาศที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา
- 2.2 วิธีการพัฒนาที่ส่งเสริมให้เกิดความสามารถในการแก้ปัญหา
- 2.3 มีเวลาในการพัฒนาอย่างเพียงพอ และได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง
- 2.4 สถานการณ์ปัญหาที่นำมาเป็นสื่อในการพัฒนา เป็นปัญหาที่ดีที่ก่อให้เกิดการเรียนรู้และการพัฒนาทักษะต่างๆ เป็นปัญหาที่น่าสนใจท้าทายความสามารถและเหมาะสมกับวัย

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า องค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหาได้แก่

1. องค์ประกอบด้านสติปัญญา ซึ่งได้แก่
 - 1.1 ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา คำศัพท์และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ กฎ ทฤษฎี สูตรต่างๆ

สูตรต่างๆ

- 1.2 ความสามารถในการใช้ตัวแทน เช่น การวาดรูป การกำหนดสัญลักษณ์ การสร้างตาราง กราฟหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

- 1.3 ความสามารถในการวางแผน หาความสัมพันธ์ การจัดลำดับ การหาแบบรูปหรือข้อสรุป

- 1.4 ความสามารถพื้นฐานในการคิดคำนวณ เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ซึ่งถือเป็นทักษะพื้นฐานที่สำคัญในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบด้านความรู้สึกและเจตคติต่อการแก้ปัญหา ได้แก่

- 2.1 ความต้องการ ความสนใจในการแก้ปัญหา ซึ่งอาจขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์

ปัญหาว่าทำท่ายหรือสามารถรู้ความสนใจของผู้แก้ปัญหาที่นั้นมากน้อยเพียงใดและมีความเกี่ยวข้องกับผู้แก้ปัญหาหรือไม่ เป็นต้น

2.2 ความมั่นใจ ความวิตกกังวล ความพากเพียรและความอดทนในการแก้ปัญหา

3. ด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งได้แก่

3.1 บรรยากาศในการเรียนการสอน เช่น ครูผู้สอน รูปแบบการสอน (ให้แก้ปัญหาคคนเดียวหรือหลายคน) เทคนิคหรือวิธีการสอนของครู การใช้สื่อ สภาพห้องเรียน เป็นต้น

3.2 เพื่อนร่วมชั้น หรือบุคคลใกล้ชิด

3.3 ระยะเวลาและความต่อเนื่องในการแก้ปัญหา

1.6 กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2525 (2525:57) ได้ให้ความหมายของคำว่า “กลวิธี” ว่า หมายถึง วิธีพลิกแพลงโดยอาศัยความรู้ความชำนาญ

การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หนึ่ง ๆ สามารถกระทำได้หลายวิธี ได้มีผู้เสนอกลวิธีที่จะช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้หลายท่าน ดังนี้

แฮทฟิลด์, เอ็ดวาร์ดส์ และบิทเทอร์ (Hatfield, Edwards ;& Bitter.1993:55-60) เสนอกลวิธีในการแก้ปัญหาวัว 11 กลวิธี ดังนี้

1. กลวิธีประมาณและตรวจสอบ (Estimation and Check) เป็นกลวิธีหนึ่งในการเสนอคำตอบที่ใกล้เคียงเพื่อตัดสินว่าแนวทางแก้ปัญหานั้นจะเป็นวิธีใด คำตอบที่สันนิษฐานไว้ต้องสัมพันธ์กับคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหา และการประมาณคำตอบสามารถทำได้เป็นประจำในชั้นเรียน

2. กลวิธีค้นหารูปแบบ (Looking for Patterns) ปัญหาบางปัญหามีวิธีแก้วิธีเดียว คือ การหารูปแบบได้จากข้อมูลที่ให้มา

3. กลวิธีพิจารณาว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) ในบางครั้งข้อมูลที่ให้มานั้นไม่เพียงพอคือ บางส่วนหายไปจากโจทย์ปัญหา

4. กลวิธีวาดภาพ กราฟ และตาราง (Drawing Pictures, Graph and Table) การวาดภาพ กราฟ และตารางช่วยให้นักเรียนมองเห็นภาพจากข้อมูลที่เป็นตัวเลขได้ กราฟช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏโดยทันที

5. กลวิธีตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออก (Elimination of Extraneous Data) โจทย์ปัญหาบางโจทย์ปัญหาให้ข้อมูลที่จำเป็นและไม่จำเป็นในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจะต้องตัดข้อมูลที่ไม่จำเป็นออก เพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคบลง แทนที่จะใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย

6. กลวิธีพัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formulas and Writing Equation) การสร้างสูตรมีประโยชน์ต่อการเอาจำนวนมาใส่ในสูตร เพื่อคำนวณให้ได้คำตอบ

7. กลวิธีสร้างแบบจำลอง (Modeling) เป็นหนทางที่ช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ครูซึ่งมีความเข้าใจถึงไมโครคอมพิวเตอร์สามารถใช้ในการสร้างแบบจำลองได้ดี

8. กลวิธีย้อนกลับ (Working Blackwards) ในการพิสูจน์เรขาคณิตใช้กลวิธีนี้เพื่อพิจารณาการเขียนพิสูจน์

9. กลวิธีการเขียนผังงาน (Flowcharting) ขั้นตอนการดำเนินงานการเขียนผังงานจะช่วยให้มองเห็นกระบวนการในการแก้ปัญหา ซึ่งผังงานเป็นโครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอนที่ต้องดำเนินการตามเงื่อนไขต่างๆที่ต้องการก่อนที่จะไปถึงทางแก้ปัญหา

10. กลวิธีเทียบเคียงปัญหาอื่น (Acting out the Problem) การมองปัญหาว่าเป็นสถานการณ์ที่เคยพบมาก่อน ทำให้เห็นขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้ง่ายขึ้น

11. กลวิธีทำให้เป็นปัญหาย่างง่าย (Simplifying the Problem) ในโจทย์ปัญหาบางโจทย์มีการคิดคำนวณที่ใช้ตัวเลขที่มีค่ามากๆ การนำตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่าสามารถช่วยคำนวณได้อย่างรวดเร็วและสามารถนำมาแทนที่จำนวนที่มีค่ามากๆนั้นเพื่อช่วยให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบอย่างมีเหตุผลได้ก่อนที่จะแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

เคนเนดีและทิพส์ (Kennedy; & Tipps.1994:139-156) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา 10 กลวิธีดังนี้

1. กลวิธีหารูปแบบ (Look for Pattern) เป็นกลวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายรูปแบบของสิ่งต่างๆได้ เช่น รูปแบบของจำนวนดังต่อไปนี้ 0, 2, 4, 6,...,15, 20, 25,... เป็นต้น ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมรูปแบบที่เป็นนามธรรมและใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น

2. กลวิธีแบบจำลอง (Use a Model) เป็นกลวิธีที่ใช้สำหรับแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่ปกติ นักเรียนควรได้รับการสนับสนุนให้ใช้กลวิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริงจะดีสำหรับเด็กเล็ก ในขณะที่ตัวอย่างด้านนามธรรมสามารถใช้กับเด็กโตได้ดี การใช้แบบจำลองดีกว่าการวาดภาพสำหรับโจทย์ปัญหาบางปัญหา เนื่องจากผู้เรียนสามารถเคลื่อนย้ายได้

3. กลวิธีใช้ภาพหรือแผนภาพ (Use a Drawing or Diagram) จะเป็นประโยชน์มากสำหรับเด็กเล็ก โดยที่เด็กเล็กจะเรียนรู้ที่จะใช้ภาษาเพื่อบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับปัญหา ในขณะที่เขามีความพร้อม การนำเสนอรูปแบบและแผนภาพก็จะเปลี่ยนมาเป็นการแสดงออกมาเป็นจำนวนและสิ่งอื่นๆทางคณิตศาสตร์ รูปภาพและแผนภาพมักใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่างๆของปัญหาลงตลอดจนกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาด้วย

4. กลวิธีปฏิบัติเพื่อออกจากปัญหา (Act it Out) กลวิธีนี้มักจะถูกใช้แก้โจทย์ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีต กลวิธีเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับเด็กบางคนที่มีความบกพร่องทางการเรียนและยังเป็นผลดีกับเด็กที่มีความพร้อมต่ำ

5. กลวิธีสร้างตารางหรือสร้างกราฟ (Construct a Table and/or a Graph) กลวิธีนี้ช่วยทำให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่มีอยู่อย่างกระจัดกระจายมาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลงสามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า

6. กลวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) กลวิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยขาดการไตร่ตรองหรือเดาแบบยุ่งเหยิงจนไม่

สามารถยอมรับได้ เมื่อเราครั้งแรกควรจะตรวจสอบปัญหาว่าถูกต้องหรือเป็นไปตามความจริงหรือไม่ ถ้าเป็นไปได้ต้องเราซ้ำอีก จนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด

7. กลวิธีชี้แจงรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมด (Account for Possibilities) กลวิธีนี้เด็กมักจะใช้ก่อนที่จะทราบคำตอบเสมอ หรืออาจจะนำมาเขียนเป็นรายการหรือตารางเพื่อให้ง่ายต่อการแก้โจทย์ปัญหามากขึ้น

8. กลวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกโจทย์ปัญหาเป็นส่วนๆ (Simplify or Break into Parts) ใช้กับโจทย์ปัญหาที่ยากหรือโจทย์ปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมากๆ ทำให้โจทย์ปัญหานั้นมีความซับซ้อนน้อยลง เพื่อให้แก้โจทย์ปัญหานั้นด้วยกลวิธีนี้

9. กลวิธีทำย้อนกลับ (Work Backward) กลวิธีนี้มีความสำคัญที่สุดในบรรดากลวิธีที่กล่าวมาทั้งหมด เป็นกลวิธีที่ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาค่อยๆ เป็นส่วนเล็กๆ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

10. กลวิธีเปลี่ยนแปลงจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change Your Point of View) กลวิธีนี้อาจเรียกว่า “ Breaking out “ เป็นกลวิธีที่ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาค่อยๆ เป็นส่วนเล็กๆ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับคิดแก้โจทย์ปัญหา

ปรีชา เหว่งเย็นผล (2537: 25-79) ได้เสนอกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาไว้ 10 กลวิธี ได้แก่

1. กลวิธีเดาและตรวจสอบ กลวิธีนี้เป็นกลวิธีพื้นฐานที่เรานำมาใช้แก้ปัญหาย่อยเสมอ สามารถนำมาใช้แก้ปัญหได้ในกรณีที่การแก้ปัญหานั้นโดยตรงอาจยุ่งยาก ใช้เวลามากหรือผู้แก้ปัญหาลืมวิธีการไปแล้ว การเดานั้นต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นใกล้เคียงคำตอบที่ต้องการมากที่สุด การเดาครั้งหลังๆ ต้องอาศัยพื้นฐานข้อมูลจากการเดาครั้งต้นๆ

2. กลวิธีเขียนภาพ แผนภาพ และสร้างแบบจำลอง กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลองช่วยให้มองเห็นปัญหาอย่างเป็นรูปธรรม ทำให้ผู้แก้ปัญหาคิดความรู้สึกว่าได้สัมผัสกับปัญหานั้นอย่างแท้จริง ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาคำความเข้าใจกับปัญหาได้ง่ายขึ้นสามารถกำหนดแนวทางวางแผนแก้ปัญหได้อย่างชัดเจนอีกด้วย

3. กลวิธีสร้างตาราง การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธีสร้างตารางนี้มีประเด็นที่ควรพิจารณาดังนี้

- 3.1 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่างๆที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- 3.2 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี
- 3.3 สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด
- 3.4 สร้างตารางเพื่อค้นหารูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์

4. กลวิธีใช้ตัวแปร การใช้ตัวแปรแทนตัวที่ไม่ทราบค่า เป็นวิธีการแก้ปัญหาย่อยหนึ่งที่ใช้กันในวิชาคณิตศาสตร์ ผู้แก้ปัญหามีการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆที่ปัญหาคำหนดกับตัวแปรที่สมมติขึ้น และในบางปัญหามีการสร้างความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูปสมการได้ ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 2 ลักษณะ คือ

4.1 ใช้ตัวแปรสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและพิจารณาคำตอบของปัญหาจากข้อความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นนั้น

4.2 สร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆของปัญหาในรูปแบบการเท่ากันสามารถสร้างสมการที่สอดคล้องกับปัญหานั้นได้การหาคำตอบทำโดยแก้สมการหรือพิจารณาคำตอบจากสมการนั้น

5. กลวิธีการค้นหารูปแบบ กลวิธีการค้นหารูปแบบเป็นกลวิธีที่สำคัญมากในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เหมาะที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับรูปแบบของจำนวน ผู้แก้ต้องศึกษาปัญหาที่มีอยู่ วิเคราะห์ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น และคาดเดาคำตอบซึ่งอาจเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องก็ได้ จากปัญหาเดียวกันข้อมูลชุดเดียวกัน ผู้แก้ปัญหาแต่ละคนอาจพบปัญหาที่แตกต่างกันก็ได้

6. กลวิธีแบ่งเป็นกรณี โจทย์ปัญหาหลายปัญหาสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น เมื่อแบ่งปัญหาเป็นกรณีมากกว่า 1 กรณีซึ่งในแต่ละกรณีจะมีความชัดเจนมากขึ้นเมื่อแก้ปัญหาของทุกกรณีได้แล้วให้พิจารณาคำตอบของทุกกรณีรวมกันจะได้ภาพรวมซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาเริ่มต้น

7. กลวิธีการใช้เหตุผลตรง กลวิธีการใช้เหตุผลตรงนี้มักพบอยู่ตลอดเวลาในการแก้ปัญหาโดยผู้แก้มักใช้ร่วมกับกลวิธีอื่นๆ ข้อความที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางตรงมักอยู่ในรูป “ถ้า A แล้ว B” โดยที่ข้อความ A เป็นเหตุบังคับให้เกิดข้อความ B การใช้การให้เหตุผลตรงในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการใช้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้ ประมวลเข้ากับความรู้และประสบการณ์ที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่แล้ว ให้เหตุผลนำไปสู่คำตอบของปัญหาที่ต้องการ ปัญหาที่ใช้กลวิธีนี้อาจไม่มีการคิดคำนวณเลยก็ได้ แต่เป็นการเน้นให้เหตุผล

8. กลวิธีการให้เหตุผลทางอ้อม โจทย์ปัญหาบางปัญหาไม่ย่นักที่จะแก้ปัญหาโดยใช้การให้เหตุผลทางตรง ในกรณีเช่นนี้การให้เหตุผลทางอ้อมนับว่าเป็นวิธีทางที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ใช้การให้เหตุผลทางอ้อมมักเป็นปัญหาให้พิสูจน์ สำหรับปัญหาให้ค้นหาจะใช้การให้เหตุผลโดยการพิสูจน์เพื่ออธิบายคำตอบของปัญหา

9. กลวิธีย้อนกลับ โจทย์ปัญหาบางปัญหาสามารถแก้ได้ง่ายกว่า ถ้าเริ่มต้นแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์สุดท้าย แล้วย้อนมาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน กลวิธีทำย้อนกลับใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

10. กลวิธีการสร้างปัญหาขึ้นใหม่ ปัญหาบางปัญหาถ้าแก้ปัญหานั้นโดยตรงอาจทำได้ยากการสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ให้เกี่ยวข้องกับปัญหาเดิมแล้วศึกษาวิธีการแก้ปัญหาใหม่ที่สร้างขึ้นนี้เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้เกิดแนวคิดในการเริ่มต้นการแก้ปัญหาที่มีอยู่ ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่อาจสร้างให้ครอบคลุมปัญหาเดิมทั้งหมด หรือสร้างขึ้นใหม่เพียงบางส่วนของปัญหาเดิมก็ได้ ซึ่งสามารถแยกกล่าวได้เป็น 3 ลักษณะ คือ

10.1 กลวิธีนี้ถึงปัญหาที่สัมพันธ์กัน

10.2 กลวิธีแก้ปัญหาย่อยกว่า

10.3 กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง

จากที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่ากลวิธีที่แต่ละท่านได้เสนอนั้นจะมีลักษณะที่คล้ายกัน ซึ่งผู้วิจัยได้สรุปรวมกลวิธีการแก้ปัญหาได้ 6 ประการ ดังนี้

1. กลวิธีการเดาหรือการประมาณคำตอบและการตรวจสอบ เป็นวิธีการเสนอคำตอบที่ใกล้เคียงกับคำตอบ เพื่อเป็นแนวทางในการตัดสินใจในการเลือกวิธีการหาคำตอบและการตรวจสอบคำตอบของปัญหานั้นๆ

2. กลวิธีค้นหารูปแบบ เป็นวิธีในการหาแนวโน้มหรือทิศทางของข้อมูลโดยพิจารณาจากข้อมูลที่กำหนดให้ว่าจะมีแบบรูป (Pattern) เป็นอย่างไร เพื่อหาทิศทางของคำตอบนั้น

3. กลวิธีการเทียบเคียงปัญหา เป็นวิธีที่ผู้แก้ปัญหาได้เทียบเคียงปัญหากับประสบการณ์ที่ตัวเองเคยได้ประสบมาหรือคุ้นเคยกับปัญหานั้น และใช้ประสบการณ์นั้นในการเทียบเคียงเพื่อหาคำตอบของปัญหานั้น

4. กลวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกเป็นส่วนย่อยๆ กลวิธีนี้เป็นวิธีการแยกปัญหาวางออกเป็น ส่วนหรือกรณีย่อยๆ เพื่อที่จะทำให้การวิเคราะห์ปัญหานั้นง่ายขึ้น

5. กลวิธีการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหา เป็นวิธีการที่จะช่วยให้นักเรียนได้มองเห็นภาพโดยรวมในการแก้ปัญหา โดยการนำเสนอปัญหาเหล่านั้นในรูปของ การสร้างตัวแทน (Representation) เพื่อใช้แทนปัญหานั้น ทำให้ผู้แก้ปัญหาสามารถมองเห็นแนวทางในการหาคำตอบที่ชัดเจนยิ่งขึ้น ซึ่งการสร้างตัวแทนดังกล่าว อาจได้แก่ การวาดรูปหรือการเขียนแผนภาพ การเขียนแผนภูมิ การสร้างตาราง กราฟ สัญลักษณ์ การใช้ตัวแปร และการใช้แบบจำลองหรือวัตถุจริง เป็นต้น

6. กลวิธีย้อนกลับ เป็นวิธีการแก้ปัญหาโดยเริ่มจากการพิจารณาที่ผลลัพธ์สุดท้ายของปัญหา แล้วย้อนกลับไปสู่ตัวปัญหา ซึ่งผู้แก้จะต้องอาศัยกระบวนการในการคิดวิเคราะห์ให้ได้ว่าเงื่อนไขใดที่เป็นตัวที่จะใช้เชื่อมโยงระหว่างเหตุและผลนั้น

1.7 ทักษะการแก้ปัญหา

ทักษะที่สำคัญในการแก้ปัญหามีความจำเป็นในกระบวนการแก้ปัญหาเนื่องจากกระบวนการแก้ปัญหาคือกระบวนการที่ซับซ้อนและต้องใช้ทักษะหลายๆอย่างประกอบกัน

ขอบ ลีซอ (2533: 70 – 71) ได้กล่าวถึงทักษะในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

1. ทักษะในการวิเคราะห์ปัญหา

1.1 การใช้ความคิดรวบยอด หลักการ ทฤษฎีในการบรรยายลักษณะปัญหา

1.2 การจำแนกประเด็นปัญหา

1.3 การใช้แผนภาพ หรือไดอะแกรมอธิบายปัญหา

2. ทักษะการแสวงหาและเก็บข้อมูล

2.1 การเลือกแหล่งข้อมูลที่เชื่อถือได้

2.2 การฟังและการสังเกตเพื่อเก็บข้อมูล

- 2.3 การอ่านอย่างมีวิจารณ์ญาณ
- 2.4 การจำแนกข้อมูลที่สำคัญและไม่สำคัญ
- 2.5 การจดโน้ตย่อ
- 2.6 การอ่านตารางและกราฟ
- 3. ทักษะการวิเคราะห์และตีความข้อมูล
 - 3.1 การเรียบเรียงและจัดระบบข้อมูล
 - 3.2 การสรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล
 - 3.3 การตีความผลสรุปข้อมูล
- 4. ทักษะการนำเสนอผล
 - 4.1 การเสนอรายงานปากเปล่า
 - 4.2 การเสนอข้อมูลโดยใช้ตารางและภาพ
 - 4.3 การทำบรรณานุกรม
- 5. ทักษะการทำงานร่วมกัน
- 6. ทักษะการทำงานและการคิดโดยอิสระ

จะเห็นได้ว่าทักษะเหล่านี้เป็นสิ่งที่สามารถฝึกฝนได้ เนื่องจากการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้ ความสามารถทักษะและเทคนิคต่าง ๆ จึงจะสามารถแก้ปัญหาได้ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผู้สอนจึงต้องฝึกทักษะเหล่านี้ให้แก่ผู้เรียนเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

กิฟฟิน (Giffune.1979:2572 - A) ได้ศึกษาผลการสอนโจทย์ปัญหาที่มุ่งเน้นความเข้าใจ โจทย์ปัญหา ฝึกทักษะการเขียนสมการ การหาคำตอบความคงทนในการเขียนสมการ พบว่า กลุ่มทดลองมีความสามารถทั้งสามด้านสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เทอร์เกอร์ (Tougaw.1994 : 2934 - A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลที่เกิดขึ้นจากการสอนโดยใช้การแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างในการสอนคณิตศาสตร์ โดยศึกษาพฤติกรรมในการแก้ปัญหาและเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา การแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างหมายถึง การสร้างข้อคาดเดา การสืบค้น การค้นพบ การอภิปราย การพิสูจน์ และการหารูปทั่วไป ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการคิด และเจตคติทางบวกเป็นพื้นฐาน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ผ่านการทดสอบโดยใช้ปัญหาแบบเปิดกว้างมีเจตคติทางบวกต่อการเรียนและเพศไม่มีความแตกต่างต่อพฤติกรรมในการแก้ปัญหา

เบอร์กส์ (Burks. 1994 : 4019-A - 4020-A) ได้ศึกษาการเขียนกิจกรรมการสอนนักเรียนเกรด 8 โดยใช้กระบวนการปฏิบัติและใช้ยุทธวิธีโดยการแก้ปัญหาโดยให้ครู 5 คนใช้บทเรียนซึ่ง

ออกแบบกิจกรรมการสอนโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา ซึ่งมีกระบวนการดังนี้ การเข้าสู่ปัญหา การวางแผน การแก้ปัญหา การตรวจสอบ และยุทธวิธีที่ใช้ได้แก่ การหาแบบรูป สร้างแผนภาพ และแจกแจงรายการหรือการสร้างตาราง การเดาและการตรวจสอบ การแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนและครูเห็นด้วยว่ากิจกรรมที่เขียนขึ้นเพื่อฝึกให้นักเรียนได้ดำเนินการด้านกระบวนการคิด และการใช้ยุทธวิธีช่วยให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ฟิกส์ดอล (Fiksda1.1996:1064A) ได้ศึกษาการสอนยุทธวิธีโดยใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาและการดำเนินการแก้ปัญหา ยุทธวิธีที่ใช้คือ การสร้างแผนภาพ การแจกแจงรายการ การแก้ปัญหาที่ง่ายกว่าการใช้ตัวแปร การหารูปแบบ ผลการวิจัยปรากฏว่ายุทธวิธีในการแก้ปัญหาสามารถสอนกลุ่มทดลองได้ กลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาและใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้เพิ่มขึ้น

งานวิจัยในประเทศ

จรรยา ภูอุดม (2524:48 – 54) ได้ทำการวิจัยเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามการประเมินของครู โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนมัธยมศึกษาสังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร จำนวน 6 โรงเรียน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยทุกวิชาอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1 โดยนักเรียนหญิงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนชาย

จันทร์เพ็ญ ธนาศุภกรกุล (2526:63 – 65) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

กมล ชื่นทองคำ (2527: 33-34) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 พบว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปานกลางและต่ำและนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปานกลางมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ

นคร ปลื้มฤดี (2530: 59 –62) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่องสมการ โดยวิธีการเรียนเพื่อรู้แจ้งกับการสอนตามปกติ ผลจากการศึกษาพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยวิธีรู้แจ้ง มีผลสัมฤทธิ์และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

สุดสวาท ขันธมูล (2530 :274) ได้ทำการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องอัตราส่วนที่ได้รับการสอนโจทย์ปัญหา 2 วิธี คือ การสอนแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ขั้นตอนการชี้แนะความเข้าใจโจทย์ปัญหาตามแนวการสอนของสตีฟและการสอนแก้โจทย์ปัญหาตามแนวการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนทั้ง 2 วิธี ไม่แตกต่างกัน

ศิริรัตน์ วรวิชยา (2539:19) ได้ศึกษาถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องสมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ด้วยชุดการสอนที่ประกอบด้วย แผนการสอน บทเรียนสำเร็จรูป เอกสารสรุปบทเรียนพร้อมแบบฝึกหัด และแผ่นโปร่งใส ผลจากการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยชุดการสอนมีผลสัมฤทธิ์ที่สูงกว่ากลุ่มที่เรียนจากการสอนตามปกติ

อนันต์ โพธิกุล (2543:87-88) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนแบบบูรณาการเชิงวิธีการกับการสอนตามคู่มือครู ผลปรากฏว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากการศึกษางานวิจัยจะเห็นได้ว่า ปัจจัยที่มีผลต่อการแก้ปัญหาคือสติปัญญา ซึ่งได้แก่ ความรู้ความจำ ความเข้าใจ การวิเคราะห์ สังเคราะห์ ด้านทักษะ ได้แก่ ทักษะการคิดคำนวณ การอ่าน การแปลและตีความหมาย การฝึกฝนด้วยวิธีการแก้ปัญหาในแบบต่างๆ นอกจากนี้จะเห็นได้ว่า วิธีการสอน เทคนิคและยุทธวิธีการสอนต่างๆ ของครูเป็นอีกอย่างหนึ่งที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนด้วย

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

2.1 ความหมายของการใช้ตัวแทน

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (กัลยา ทองสุ.2545:12 – 13 ; อ้างอิงจาก NCTM.2000: 279-283) ซึ่งรู้จักกันในนามของ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ได้จัดทำเอกสารหลักการและมาตรฐานหลักสูตรที่มีชื่อว่า Principles and Standards for School Mathematics ปี 2000 โดยมีมาตรฐานที่เกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards) 5 มาตรฐานและมาตรฐานที่เกี่ยวกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) 5 มาตรฐาน

มาตรฐานด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standard) 5 มาตรฐาน มีดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ (Number and Operation)
2. พีชคณิต (Algebra)
3. เรขาคณิต (Geometry)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)

มาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards)

5 มาตรฐานดังนี้

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
2. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning & Proof)
3. การสื่อสาร (Communication)
4. การเชื่อมโยง (Connection)
5. การใช้ตัวแทน (Representation)

ในมาตรฐานด้านกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาตรฐานที่ 5 การใช้ตัวแทน (Representation) เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้น สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการใช้ตัวแทน (Representation) ในชั้น Pre – K ถึงเกรด 12 ไว้ดังนี้

โปรแกรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ในชั้น Pre – K ถึงเกรด 12 ควรจัดให้นักเรียนสามารถ

1. คิดหาวิธีการใช้ตัวแทน และใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูล จัดบันทึก ตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้
2. เลือก ประยุกต์และแปลความหมายการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้
3. ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแบบจำลองและสามารถอธิบายปรากฏการณ์ทางด้านกายภาพ สังคม และคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองนั้นได้

การใช้ตัวแทนเป็นหัวใจของการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้ง สามารถหาความสัมพันธ์ในสิ่งที่เขาได้สร้างขึ้นหรือเปรียบเทียบสิ่งต่างๆ ได้ด้วยการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ได้แก่ วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ ตัวแทนเหล่านี้ช่วยให้นักเรียนสื่อสารความคิดของตนเองได้

ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีตัวแทนมากมายที่อยู่ในหลักสูตรระดับนี้ เช่น การเรียนในเรื่องสัดส่วนและความสัมพันธ์เชิงเส้น เป็นเรื่องที่นักเรียนรู้โดยใช้ตัวแปรแทนและใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะต้องเรียนรู้วิธีการในการรวบรวมความรู้การเปรียบเทียบ และการใช้ตัวแทนอย่างมากในเรื่อง เศษส่วน ทศนิยม ร้อยละ และระบบ

จำนวนเต็ม นักเรียนจะต้องเรียนรู้การใช้ตัวแทนจากเลขยกกำลังหรือสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ในกรณีที่จำนวนที่ใช้เป็นจำนวนที่มากมาย หรือ น้อยๆ และเรียนรู้การใช้กราฟเป็นตัวแทนและวิเคราะห์ข้อมูล

กัลยา ทองสุ (2545 :13) กล่าวถึงมาตรฐานการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพอสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น และเป็นทักษะหนึ่งที่สำคัญที่ควรส่งเสริมให้เกิดขึ้นกับนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้อคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายลึกซึ้ง สามารถเชื่อมโยงความเป็นนามธรรมทางคณิตศาสตร์สู่การเรียนรู้ในชีวิตประจำวันได้

จริยาวิดี บรรทัดเทียม. (2546: 24) กล่าวถึง การใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาชั้นนี้ ทักษะที่เกี่ยวข้องกับด้านการใช้ตัวแทน อันได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ เป็นสิ่งที่มีความสำคัญและจำเป็นในการรวบรวมความรู้ ความเข้าใจในคณิตศาสตร์ในการแปลความหมาย เพื่อหาความสัมพันธ์ในการสื่อสารความคิดของผู้เรียนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา ซึ่งเป็นทักษะที่จำเป็นที่น่าจะส่งเสริมให้แก่นักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวสรุปได้ว่า การใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) มาช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การใช้ตัวแทนเป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความคิด ความเข้าใจในการแก้ปัญหา ทำให้เกิดความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหาและสามารถมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหานั้นได้

2.2 การใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (กัลยา ทองสุ.2545.13; อ้างอิงจาก NCTM.2000 : 279-283) ได้กล่าวถึงการ ใช้ตัวแทนของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นต้องเรียนรู้การแก้ปัญหาต่างๆ มากมาย ซึ่งเขาต้องแปลงปัญหาให้เป็นรูปธรรมและใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูลและบันทึกเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของเขา เช่น นักเรียนใช้ตัวแทนในการพัฒนาหรือประยุกต์ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องสัดส่วน เมื่อเขาต้องทำหรือตีความหมายมาตราบการวัดจากรูปหรือสร้างมาตราวัดจากวัตถุ เมื่อนักเรียนเชื่อมโยงความเข้าใจในเรื่องเรขาคณิตเข้ากับอัตราส่วน เมื่อนักเรียนเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลเป็นฮิสโทแกรม ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาที่มีความท้าทาย นักเรียนต้องใช้ตัวแทนที่เป็นมาตรฐาน แต่ก่อนที่จะใช้ตัวแทนที่เป็นมาตรฐานนักเรียนต้องได้พัฒนาการใช้ตัวแทนที่ไม่เป็นมาตรฐานในการแก้ปัญหาให้ได้ดีก่อน

กัลยา ทองสุ (2545 : 17) ได้กล่าวถึงการ ใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นว่า ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นระดับการศึกษาที่ควรส่งเสริมการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาทาง

คณิตศาสตร์อย่างหลากหลายเพื่อพัฒนาความสามารถในการคิดและเข้าใจคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้น

จริยาวดี บรรทัดเที่ยง (2546:25) ได้กล่าวถึงการใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ด้านการใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นว่า นักเรียนจะต้องรู้การแปลงปัญหาให้เป็นรูปนามธรรม โดยเลือกใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการรวบรวมข้อมูล ซึ่งการใช้ตัวแทน ที่หลากหลายนี้ เป็นการดำเนินการแก้ปัญหาที่จะพัฒนาความเข้าใจในที่มีความหมายในทางคณิตศาสตร์ได้

จากที่กล่าวมา พอสรุปเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นดังนี้ การฝึกให้นักเรียนใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งได้แก่ วัตถุจริง การวาดภาพ แผนภูมิ ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์ ครูผู้สอนจะต้องสอนให้ผู้เรียนรู้จักตัวแทนทางคณิตศาสตร์ว่ามีอะไรบ้าง จากนั้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการนำตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในลักษณะต่างๆ เพื่อให้ นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่จะใช้ตัวแทนนั้น แล้วค่อยให้นักเรียนได้รับการฝึกการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาด้วยตนเองโดยต้องคำนึงถึงการเรียนรู้ที่จะทำให้ผู้เรียนมีความสามารถในการคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหา การใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูลจดบันทึก ตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ สามารถเลือก ประยุกต์และแปลความหมายการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ไปสู่การแก้ปัญหาได้ สามารถใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นแบบจำลองและสามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันได้

2.3 บทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (กัลยา ทองสุ. 2545:13 ; อ้างอิงจาก NCTM.2000 : 283-284) ได้อธิบาย ถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้ตัวแทนของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดังนี้ ครูคณิตศาสตร์สามารถช่วยให้นักเรียนเรียนรู้การใช้ตัวแทนที่หลากหลายและเหมาะสมได้โดยการส่งเสริมให้นักเรียนคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนเพื่อสนับสนุนความคิดและการสื่อสารความคิดนั้นของนักเรียน ครูช่วยให้นักเรียนพัฒนาการใช้ตัวแทนได้โดยการฟังความคิดเห็นของนักเรียน ถามคำถาม และพยายามเข้าใจในสิ่งที่นักเรียนพยายามสื่อสารด้วยการวาดรูปหรือการเขียนด้วยความจริงใจ ครูจำเป็นต้องรู้ว่าเมื่อไรที่ต้องตัดสินใจในสิ่งที่ถูกต้องและจะช่วยนักเรียนอย่างไรในการใช้ตัวแทนอย่างเป็นแบบแผน แม้การใช้ตัวแทนอย่างเป็นแบบแผนเป็นสิ่งที่มิมีประโยชน์มาก ครูควรให้คำแนะนำเบื้องต้นในการใช้ตัวแทนก่อนที่นักเรียนจะสามารถใช้ตัวแทนอย่างมีความหมายแทนการบอกให้ทราบ

ครูเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยพัฒนาการใช้ตัวแทนอย่างมีความหมายให้กับนักเรียน เช่น นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นต้องเรียนรู้ ทำความเข้าใจในความซับซ้อนของตัวแปร ครูสามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องของตัวแปรได้โดยเตรียมประสบการณ์การใช้ตัวแทนเพื่ออธิบายข้อมูล ครูต้องจัดประสบการณ์ให้นักเรียนในการใช้ตัวแทนที่หลากหลายและแนะนำนักเรียนในรูปแบบการใช้ตัวแทนใหม่ๆ ที่มีประโยชน์ในการแก้ปัญหา ครูเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญในการ

ช่วยให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นพัฒนาความเชื่อมั่นและความสมบูรณ์ในการคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนด้วยตนเองเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาที่มีความท้าทาย และนักเรียนเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลายและเหมาะสมหลังจากที่ได้สั่งสมความรู้ในเรื่องของการใช้ตัวแทนอย่างเป็นแบบแผนการช่วยให้นักเรียนคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนด้วยตนเองหรือนำมีรูปแบบการใช้ตัวแทนที่เป็นแบบแผน ครูควรจะช่วยให้นักเรียนใช้ตัวแทนอย่างมีความหมายด้วยการสนับสนุนให้นักเรียนมีการอภิปรายร่วมกันในเรื่องของกราฟ รูปภาพ หรือสัญลักษณ์ที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา

2.4 ความสำคัญของการใช้ตัวแทน

กรีนและฮอลล์ (Greeno ;& Hall.1997: 361-367) ได้สรุปความสำคัญของตัวแทนไว้ดังนี้

1. การใช้ตัวแทนเป็นเครื่องมือที่มีพลังสำหรับการคิดการใช้ตัวแทนจะช่วยให้เข้าใจคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนจะช่วยสนับสนุนการให้เหตุผลโดยช่วยให้นักเรียนเข้าใจลักษณะสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์
2. การใช้ตัวแทนช่วยให้นักเรียนรวบรวมความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน
3. เมื่อนักเรียนสามารถถ่ายโยงความเข้าใจระหว่างการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกันจะช่วยเพิ่มความเข้าใจ การใช้ความคิดรวบยอด และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนต้องพัฒนาและใช้ตัวแทนในสถานการณ์ที่หลากหลาย
4. การสอนรูปแบบการใช้ตัวแทนจะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง
5. การใช้ตัวแทนเป็นการให้ผู้เรียนใช้เครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการสร้างความเข้าใจ การสื่อสารข้อมูล และแสดงการให้เหตุผล

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทน (Representation)

งานวิจัยต่างประเทศ

นอลลี (Noll. 1983 : 43-12A) ได้ศึกษาผลของการแนะนำด้วยวาจาและการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาร้อยละ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา 60 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มเก่งกับกลุ่มอ่อนในด้านการอ่าน ทดสอบก่อนเรียนในด้านทักษะการคิดคำนวณและการแก้ปัญหของทั้งสองกลุ่ม ทั้งสองกลุ่มจะได้รับการสอนโดยใช้ชุดการสอนที่มีการแนะนำด้วยวาจากับการใช้แผนภาพในการแก้ปัญหชุดการสอนนี้ออกแบบมาเพื่ออธิบายและพัฒนาภาษาและโครงสร้างที่ใช้ในการแก้ปัญหาร้อยละเมื่อเสร็จสิ้นการสอนทดสอบหลังเรียน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า 1) กลุ่มตัวอย่างที่ได้รับการสอนโดยใช้การแนะนำทางวาจาผสมกับการใช้ตัวแทนมีคะแนนทดสอบ หลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ใช้การแนะนำทางวาจาอย่างเดียว 2) นักเรียนกลุ่มที่อ่านเก่งมีคะแนนสอบหลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มอ่อน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และ 3) ปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนกับระดับการอ่านแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

เออร์เรียน (Erion.1985:46-10A) ได้ศึกษาผลของการใช้ตัวแทนและปัญหาที่ซับซ้อนในสถานการณ์ปัญหาของครูฝึกสอนในระดับประถมศึกษา กลุ่มตัวอย่างเป็นครูฝึกสอนในระดับประถมศึกษาโดยครูแต่ละคนจะแก้ปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนและการใช้ตัวแทนที่แตกต่างกัน 1 ข้อ พบว่า วิธีการใช้ตัวแทนและระดับความซับซ้อนของปัญหามีผลต่อความสำเร็จในการแก้ปัญหาอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ในการใช้ตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์ในการแก้ปัญหาจะประสบความสำเร็จมากกว่าการใช้ตัวแทนที่เป็นรูปแบบและการเขียนแสดง

โอคีฟ (O'keef.1992:53-09A) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนที่แสดงการเคลื่อนที่หรือเคลื่อนไหวได้ (Dynamic Representation) ในการเพิ่มความเข้าใจในเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับวิทยาลัย ด้วยการสอนให้นักเรียนใช้ตัวแทนเรื่องฟังก์ชัน สมการ เช่น ตาราง กราฟ และใช้ตัวแทนที่แสดงการเคลื่อนที่เป็นเครื่องมือหนึ่งที่จะช่วยในการเชื่อมโยงความสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างปรากฏในชีวิตจริง เช่น ความเร็ว ทิศทาง ตำแหน่ง ที่แสดงให้เห็นถึงรูปแบบความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ผลการศึกษาพบว่า การใช้ตัวแทนที่แสดงการเคลื่อนที่หรือเคลื่อนไหวได้จะช่วยลดความเป็นนามธรรมระหว่างประสบการณ์จริงกับความเข้าใจที่เป็นแบบแผน

ไฮน์ (Hines.1998:59-09A) ได้ศึกษาการวิเคราะห์กระบวนการตีความหมายเรื่องฟังก์ชันของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้แบบจำลองทางกายภาพและการใช้ตัวแทนในรูปตารางและกราฟพบว่า การเรียนรู้จากสิ่งแวดล้อมจะส่งเสริมการพัฒนาการสอนของครู ซึ่งเด็กคิดว่าเป็นสิ่งที่ทำลาย และเด็กสามารถเชื่อมโยงความรู้จักกับการใช้ตัวแทนอื่นได้ การใช้แบบจำลองทางกายภาพช่วยให้นักเรียนตีความหมายของฟังก์ชันด้วยการทำซ้ำซึ่งนักเรียนหลายคนสามารถสร้างความรู้ที่ก่อให้เกิดการตีความหมายสู่กระบวนการ

เบอร์เคต (Burkett.1998 : 60-20A) ได้ศึกษาการเชื่อมโยงระหว่างตัวแทนที่เป็นตาราง สัญลักษณ์ และกราฟในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 10 คน ที่เรียนพีชคณิตระดับมหาวิทยาลัยในเพนซิลวาเนีย กลุ่มตัวอย่างทำงานที่ได้รับมอบหมาย 9 อย่าง ที่ผู้วิจัยเป็นผู้ออกแบบเพื่อศึกษาในเรื่องการเชื่อมโยงตัวแทนที่หลากหลายแบบ โดยแบ่งเป็น 3 ประเภทดังนี้ ประเภทที่ 1 เป็นงานเกี่ยวกับความชันของเส้นตรง ประเภทที่ 2 เป็นงานเกี่ยวกับการแปลงของสมการกำลังสอง และประเภทที่ 3 เป็นงานเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยประเภทที่ 1 เน้นที่การเชื่อมโยงตัวแทนที่เป็นสัญลักษณ์กับกราฟ งานประเภทที่ 2 เน้นที่การเชื่อมโยงตัวแทนที่เป็นตารางกับสัญลักษณ์ และงานประเภทที่ 3 เน้นที่การเชื่อมโยงตัวแทนที่เป็นตารางและกราฟ ผลการศึกษาพบว่า 1) นักเรียนสามารถเชื่อมโยงตัวแทนที่เป็นตาราง สัญลักษณ์และกราฟได้เป็นอย่างดี 2) ในขณะที่นักเรียนแปลความหมายของตารางไปสู่ตัวแทนแบบอื่นๆ นักเรียนมักจะแนะนำให้ใช้ตัวแทนในลักษณะที่ 3 และ 3) นักเรียนสามารถปรับปรุงตัวแทนที่ผิดพลาดได้

ริทเทิล (Rittle.1999 : 60-06B) ได้ศึกษาการพัฒนาวิธีทำซ้ำในด้านความคิดรวบยอดและทักษะกระบวนการโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนพัฒนาทั้งความคิดรวบยอด ทักษะกระบวนการ และตัวแทนที่เป็นปัญหา กลุ่มทดลองเป็นนักเรียนเกรด 5 และ 6 ระหว่างการสอนนักเรียนจะ

เรียนรู้เศษส่วนและทศนิยมจากเส้นจำนวน กลุ่มทดลองจะได้รับผลย้อนกลับในการแก้ปัญหาและนักเรียนต้องอธิบายถึงวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้องด้วย เมื่อวิเคราะห์ผลการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง พบว่ากลุ่มทดลอง 1 แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของการใช้แบบทำซ้ำ ความคิดรวบยอดของของนักเรียนส่งเสริมทักษะด้านกระบวนการ และในทางกลับกันความรู้ในเชิงกระบวนการก็ส่งเสริมความรู้ด้านความคิดรวบยอดและการใช้ตัวแทนในปัญหาที่หาคำตอบได้ ถูกต้องเป็นสื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจและการปรับปรุงในด้านทักษะตัวแทนไปสู่การปรับปรุงด้านทักษะกระบวนการ ซึ่งสรุปได้ว่า แบบจำลองการทำซ้ำช่วยพัฒนาความรู้ทางด้านทักษะกระบวนการและความรู้ด้านความคิดรวบยอด

เบลลาร์ด (Bellard.2000 : 61-09A) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหาของนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ ที่มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนใช้ตัวแทนอะไรบ้างในการแก้ปัญหา นักเรียนเลือกใช้ตัวแทนนั้นเมื่อใด ใช้ตัวแทนบ่อยแค่ไหนและประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนเพียงใด ผู้วิจัยค้นหารูปแบบพฤติกรรมของ นักเรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 21 คน ผู้วิจัยสัมภาษณ์ในการแก้ปัญหาความน่าจะเป็นจำนวน 5 ข้อและให้นักเรียนอธิบายถึงวิธีการหาคำตอบนั้นๆ ด้วย ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนมีวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด นักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาสามารถวิเคราะห์ปัญหา ค้นพบวิธีหาคำตอบและทราบว่าจะใช้แผนภาพเวนน ใช้สัญลักษณ์เมื่อไรและอย่างไร ส่วนนักเรียนที่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาจะไม่ทราบว่าต้องแก้ปัญหายังไงและไม่เข้าใจว่า 1) ตัวแทนอย่างไรจะช่วยให้ปัญหาชัดเจน 2) จุดมุ่งหมายของการใช้ตัวแทนคืออะไร และ 3) ตัวแทนแบบใดที่ใช้ในการแก้ปัญหา ผู้วิจัยเสนอแนะว่านักเรียนจำเป็นต้องฝึกการแปลความหมายของตัวแทน ต้องเข้าใจลักษณะการใช้ตัวแทนที่หลากหลายและต้องฝึกการใช้ตัวแทนในลักษณะที่แตกต่างกัน

เฮล (Hail. 2000 : 61-07A) ได้ศึกษาผลการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการสร้างความรู้และทักษะเกี่ยวกับความเข้าใจในพื้นฐานพีชคณิต ในการศึกษาครั้งนี้พยายามตอบคำถามว่า 1) ความรู้และทักษะเกี่ยวกับตัวแปรและการเท่ากันของนักเรียนเปลี่ยนไปหรือไม่ระหว่างที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น ถ้าเปลี่ยนๆอย่างไร 2) การใช้ตัวแทนที่หลากหลายช่วยให้นักเรียนพัฒนาความรู้และทักษะในความเข้าใจพีชคณิตเบื้องต้นหรือไม่ อย่างไร 3) ทักษะของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเปลี่ยนไปหรือไม่ระหว่างที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น 4) นักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาพีชคณิตหรือไม่อย่างไรและ 5) นักเรียนสามารถใช้ตัวแทนที่หลากหลายและมีทักษะที่เปลี่ยนไปหรือไม่ในขณะที่แก้ปัญหา ถ้าไม่เปลี่ยน เป็นเพราะเหตุใด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 29 คน ที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น โดยใช้เวลาสอน 4 สัปดาห์ ด้วยวิธีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเรื่องตัวแปร สมการ และการแก้สมการ ผลการศึกษาพบว่านักเรียนใช้กราฟและใช้อุปกรณ์ในการดำเนินการทางสัญลักษณ์ นักเรียนมักใช้ตัวแทนในการอธิบายการดำเนินการทางสัญลักษณ์และส่วนที่ผิดพลาดการใช้อุปกรณ์จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้เรื่องการแก้

สมการ กราฟช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งกราฟและการใช้อุปกรณ์ช่วยให้นักเรียนมองเห็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันและการเปรียบเทียบ นักเรียนจะใช้กราฟในขั้นตอนสุดท้ายของการเรียน แม้ว่าจะมีนักเรียนหลายคนยังไม่ได้เรียนในเรื่องกราฟ มีนักเรียน 5 คน ที่พัฒนาทักษะเกี่ยวกับฟังก์ชันและมีนักเรียนจำนวน 2 คนที่แสดงให้เห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีนักเรียนบางคนที่สามารถเปลี่ยนทักษะและการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาได้อย่างง่ายขึ้นในวิชาพีชคณิต

รินาและปีเตอร์ (Rina ; & Peter. 2004:182-184) ได้ทำการศึกษา บทบาทของการใช้ตัวแทนที่มีผลต่อความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ ของครูที่สอนระดับประถมศึกษา (K-7) และได้พบว่า ตัวแทนมีบทบาทสำคัญต่อความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะของครูที่สอนคณิตศาสตร์ในระดับประถม เพราะตัวแทนเหล่านี้ทำหน้าที่เป็นเสมือนเครื่องมือ (tools) สำหรับการเรียนรู้และการสื่อสารคณิตศาสตร์ (สื่อสารความคิดและการสื่อสารระหว่างบุคคล) นอกจากนี้จะได้ว่า ตัวแทนมีบทบาทสำคัญที่มักจะถูกมองในเรื่องของการสร้างความเข้าใจที่เกี่ยวข้องกับความคิดรวบยอด

งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่จะเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ทั้งนี้เพราะการใช้ตัวแทน เป็นทักษะที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งในขั้นตอนของการแก้ปัญหา ซึ่งจะนำเสนอต่อไปนี้

ทองหล่อ วงอินทร์ (2537 :146 –147) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความรู้เฉพาะด้านกระบวนการในการคิดแก้ปัญหาและเมตาคอกนิชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาผู้ชำนาญและไม่ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า ผู้ชำนาญมีกระบวนการในการคิดแก้ปัญหาในด้านการเข้าใจสูงกว่าผู้ไม่ชำนาญการทั้งความสามารถในการบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดและเป้าหมายของการแก้ปัญหา และในด้านการสร้างตัวแทนปัญหา พบว่า ผู้ชำนาญ มีความสามารถในการสร้างตัวแทนปัญหาได้สมบูรณ์มากกว่า อาทิเช่น การใช้สัญลักษณ์แทนค่าหรือข้อความ การเขียนประโยคสัญลักษณ์ การจัดระบบข้อมูลใหม่ ซึ่งผลวิจัยนี้ สอดคล้องกับผลการวิจัยของไคและคณะ (Chi and Others : 1982) ที่พบว่า ในการแก้ปัญหของผู้เชี่ยวชาญและไม่เชี่ยวชาญจะแตกต่างกัน แม้แต่ กรีนโบว์ (Greenbowe:1983) ค้นพบว่า ผู้ที่แก้ปัญหาได้คือ ผู้ที่สามารถสร้างตัวแทนของการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสมนอกจากนี้ ทองหล่อ วงอินทร์ ยังพบว่า การสร้างตัวแทนปัญหาจะช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความกระฉับต่อการแก้ปัญหา เพราะรู้ว่ามีสิ่งใดบ้างที่เกี่ยวข้อง การสร้างสัญลักษณ์แทนค่าหรือข้อความในโจทย์ เพื่อให้เข้าใจปัญหามากขึ้น การเขียนประโยคสัญลักษณ์จะนำไปสู่วิธีการแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า จนสามารถหาคำตอบได้

สมบัติ โพธิ์ทอง (2539 : 1 - 99) ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการฝึกการแก้ปัญหาโดยใช้เมตาคอกนิชันในการแก้โจทย์ปัญหา และ

ฝึกการใช้กลวิธีการสร้างตัวแทนในการแก้ปัญหา เช่น กลวิธีการเขียนแผนภาพ กลวิธีการวาดภาพ การสร้างตาราง นอกจากนี้ยังมีกลวิธี ย้อนกลับ กลวิธีการให้เหตุผล กลวิธีการเดาและตรวจสอบ โดยให้นักเรียนได้มีโอกาสเลือกวิธีการแก้ปัญหาและเสนอแนวความคิดของกลวิธีที่ใช้ในแต่ละวิธี ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการฝึกสูงกว่าของนักเรียนหลังได้รับการฝึก นอกจากนี้เขายังพบว่า นักเรียนยังมีความสามารถในการเลือก ใช้ตัวแทนและกลวิธีการแก้ปัญหาต่างๆเพิ่มมากขึ้น

กัลยา ทองสุ (2545: 57) ได้ทำการพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทนเรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยสร้างสภาพปัญหา ที่ใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหา เช่น การวาดรูปประกอบการแก้ปัญหา การคาดเดา การสร้างตาราง การเขียนกราฟ และการคำนวณทางพีชคณิต ซึ่งพบว่า การใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหจะช่วยพัฒนาความเข้าใจ ความคิดรวบยอดในเรื่องระบบสมการเชิงเส้นให้กับนักเรียน นักเรียนสามารถมองเห็นการใช้ตัวแทน เพื่อแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างปริมาณกับตัวแปร ทำให้เข้าใจเรื่องสมการ นิพจน์ ความแตกต่างของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของสมการเชิงเส้น

จริยวดี บรรทัดเที่ยง (2547:62-63) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการใช้ชุดที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนเรื่องคู่อันดับและกราฟสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนเรื่องคู่อันดับหลังเรียนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ไม่ได้รับการสอนด้วยชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทน

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศและในประเทศในเรื่องการใช้ตัวแทนสรุปได้ว่าการเรียนรู้คณิตศาสตร์ อาทิ เช่น เรื่องสมการ สมการเชิงเส้นสองตัวแปร เศษส่วน พีชคณิต ฟังก์ชัน และแม้แต่ความน่าจะเป็น ซึ่งเนื้อหาส่วนใหญ่เป็นลักษณะนามธรรม ยากต่อการเข้าใจ การใช้ตัวแทนในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ดังกล่าวจะช่วยให้ นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น เพราะการใช้ตัวแทนจะช่วยสร้างความคิดรวบยอดในการเรียนรู้นั้นๆ นอกจากนี้ยังช่วยลดความเป็นนามธรรมและช่วยสร้างความรู้และทักษะความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการเรียนรู้นั้น

การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหา จะช่วยให้ นักเรียนเชื่อมโยงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์กับสิ่งแวดล้อมได้ ดังนั้นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนควรจะได้รับฝึกการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในสถานการณ์ต่างๆ เพื่อให้เกิดความคุ้นเคย สามารถเลือกใช้ตัวแทนนั้นได้เหมาะสมกับการแก้ปัญหาต่างๆ และสิ่งสำคัญในการใช้ตัวแทนก็คือ การฝึกแปลความหมายของตัวแทน ต้องเข้าใจลักษณะการใช้ตัวแทนที่หลากหลาย การฝึกใช้ตัวแปรในลักษณะต่างๆ เป็นต้น จากงานวิจัยที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าผู้ที่มีความชำนาญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มักเป็นผู้ที่มีความสามารถในการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีด้วยเช่นกัน ดังนั้นจะเห็นได้ว่า การใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาจึงเป็นทักษะที่สำคัญอีกทักษะหนึ่งที่จะต้องส่งเสริมให้เกิดกับนักเรียน ทั้งนี้เพราะการ

ใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาจะช่วยพัฒนาความเข้าใจ ความคิดรวบยอด เกี่ยวกับการแก้ปัญหานั้นๆ จนทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหานั้นได้

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เมื่อมีกระบวนการและยุทธวิธีการแก้ปัญหาแล้วก็ยังไม่ได้ประกันว่าจะสามารถแก้ปัญหาได้ดีเพราะความสามารถในการแก้ปัญหาไม่ใช่ความสามารถที่เป็นไปตามรูปแบบที่กำหนดตายตัว ต้องมีการพัฒนาปรับปรุงรูปแบบการคิดและการแก้ปัญหาใหม่ๆ เสมอ ซึ่งต้องอาศัยทักษะและความสามารถหลายๆ ด้าน อัดัมส์ เอลลิสและบีสัน (Adams, Ellis ;& Beeson. 1977: 174-175) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลถึงความสามารถในการแก้ปัญหา 3 ด้าน คือ

1.สติปัญญา (Intelligence) การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้ปัญหา องค์ประกอบของสติปัญญาที่มีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (Quantitative Factors) ดังนั้นนักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (Verbal Factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษาหรือทางด้านปริมาณ

2.การอ่าน (Reading) การอ่านเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหา เพราะการแก้ปัญหามักต้องอ่านอย่างรอบคอบ อ่านอย่างวิเคราะห์ อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่าควรจะทำอะไร และอย่างไรมีนักเรียนจำนวนมากที่มีความสามารถในการอ่านแต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้

3.ทักษะพื้นฐาน (Basic Skill) หลังจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและตัดสินใจว่าจะทำอะไรแล้วก็ยังเหลือขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องเหมาะสม นั่นคือนักเรียนจะต้องรู้การดำเนินการต่างๆ ที่จำเป็นซึ่งก็คือ ทักษะพื้นฐานนั่นเอง

ซูยดัม (Suydam.1990: 36) กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ความสามารถในการเข้าใจในความคิดรวบยอดและข้อความทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแยกแยะความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างกัน ความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูลและวิธีการที่ถูกต้อง ความสามารถในการแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูลและประมาณค่า ความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความหมายของข้อเท็จจริงเชิงปริมาณ

ในการสอนคณิตศาสตร์นั้นเมื่อผู้เรียนทำแบบฝึกหัด ถ้าเป็นเรื่องง่ายและผู้เรียนสามารถทำได้ก็จะฝึกไปจนเกิดชำนาญ (skill) และใช้ข้อเท็จจริงและความคิดรวบยอดที่ไม่ซับซ้อน อาจจะใช้เพียงข้อเท็จจริงหรือหลักการหรือความคิดรวบยอดเพียงฝึกซ้ำๆจนเกิดทักษะ อย่างไรก็ตามในตัวอย่างแบบฝึกหัดนั้นเมื่อใช้หลายๆข้อเท็จจริงหรือหลายหลักการหรือหลายความคิดรวบยอด นักเรียนก็ไม่สามารถจะทำได้จึงพบ “ปัญหา”ว่าจะทำอย่างไร เมื่อผู้เรียนพบ “ปัญหา” ก็จะเกิดการแก้ปัญหา ก็จะถามต่อไปอีกว่าจะแก้ปัญหายังไง การแก้ปัญหานั้นมี “กระบวนการแก้ปัญหา” เมื่อผู้เรียน

สามารถดำเนินการตามกระบวนการแก้ปัญหา ก็จะแก้ปัญหาได้ เมื่อได้ฝึกการแก้ปัญหาบ่อยๆ ก็
จะเกิดทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skill)

กองวิจัยทางการศึกษา (2532:35) กล่าวว่าสรุปได้ว่า กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
ประกอบด้วย ความสามารถในการเข้าใจโจทย์ ความสามารถในการหาวิธีการได้ถูกต้อง
ความสามารถในการคิดคำนวณ และความสามารถในการหาคำตอบได้ถูกต้อง

สิริพร ทิพย์คง (2536:157-159) เสนอแนะกิจกรรมเสริมทักษะในการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. เลือกปัญหาที่กระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ซึ่งเป็นโจทย์ที่ผู้เรียนมีประสบการณ์ใน
เรื่องเหล่านั้น
2. ทดสอบความรู้พื้นฐานและทบทวนทักษะที่ขาดหายไปก่อนลงมือสอนการแก้ปัญหา
3. ให้อิสระในการคิดแก่นักเรียนและกระตุ้นให้นักเรียนคิดว่าจะสามารถใช้ความคิด
รวบยอด ทักษะและหลักการใดในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ
4. สอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยให้มีแบบฝึกหลายระดับทั้งยาก
ปานกลางและง่ายเพื่อให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเป็นการเสริมกำลังใจให้กับ
นักเรียน
5. ทดสอบว่านักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหานั้นๆ โดยถามถึงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่
โจทย์ต้องการ
6. ฝึกให้นักเรียนรู้จักหาคำตอบโดยการประมาณก่อนการคิดคำนวณ
7. แนะนำให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาโดยการวาดรูปแผนภาพที่นัก
เรียนเคยพบมาก่อน
8. ช่วยนักเรียนในการหาข้อมูลจากการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาและเทียบเคียงกับโจทย์ที่
นักเรียนเคยพบมาก่อน
9. สนับสนุนให้นักเรียนคิดวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีการของนักเรียนเอง แล้วอภิปราย
หาวิธีการที่ถูกต้อง

พรทิพย์ ยาวะประภาส (2537:24) ได้กล่าวว่า ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้น
ครูจำเป็นต้องนำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต่างๆ มาใช้เพื่อ

1. สานิตให้เข้าใจถึงสิ่งที่จำเป็นในการเรียนคณิตศาสตร์
2. ใช้ในการเริ่มความคิดรวบยอดใหม่ๆ ที่ยังไม่เคยเรียนรู้
3. สรุปหลักการทางคณิตศาสตร์
4. ช่วยให้เกิดความเข้าใจและมองความสัมพันธ์ ระหว่างการคิดคำนวณวิธีการต่างๆ
5. ให้มองเห็นปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน
6. เพิ่มพูนประสบการณ์อ่านของนักเรียนให้ดีขึ้น
7. ทำให้เกิดแรงจูงใจ ความสนใจ และเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ขนาด เชื้อสุวรรณทวี (2544: 125) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนสามารถตีความทำความเข้าใจปัญหา จำแนก แยกแยะ สิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาออกจากกัน จะมองปัญหาให้ชัดเจนว่า อะไรคือสิ่งที่ต้องการ อะไรคือสิ่งที่เราคาดหวังว่าจะพบและเรามีข้อมูลอะไรอยู่บ้าง การเขียนภาพจะช่วยให้เราเข้าใจปัญหานั้นๆ ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น
2. ความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้แก้ต้องค้นพบว่าข้อมูลต่างๆ เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันอย่างไร สิ่งที่ยังไม่รู้เกี่ยวข้องกับสิ่งที่รู้แล้วอย่างไร แล้วหาวิธีการแก้ปัญหาโดยนำกฎเกณฑ์ หลักการ ทฤษฎี มาใช้ประกอบกับข้อมูลที่มีอยู่ แล้วเสนอออกมาในรูปของวิธีการ
3. ความสามารถในการคิดคำนวณ หมายถึง ความสามารถในการหาคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่สุดของปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการตามแผนที่วางไว้ผู้แก้ปัญหาจะต้องรู้จักวิธีการคำนวณที่เหมาะสมด้วย

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถของสติปัญญาที่เกี่ยวข้องกับการทำความเข้าใจปัญหา การสร้างตัวแทน การวางแผนในการแก้ปัญหา การดำเนินการตามแผนและการตรวจคำตอบซึ่งสามารถวัดได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทนดังนี้

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา เป็นความสามารถในการอ่านวิเคราะห์โจทย์ปัญหาซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องอ่านโจทย์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์ถาม
2. ความสามารถในการสร้างตัวแทน เป็นความสามารถที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริง การวาดรูป การสร้างตาราง หรือการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) โดยการประมวลความคิดหรือความเข้าใจในโจทย์ปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรมโดยการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว
3. ความสามารถในการวางแผนการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการเสนอแนวคิดหรือการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาโดยที่นักเรียนต้องประมวลสิ่งต่างๆ ที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหาว่า จากสิ่งที่โจทย์กำหนดกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ ผู้แก้จะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาเป็นความสัมพันธ์ในรูปของสมการได้อย่างไรและจะมีสูตร ทฤษฎีข้อเท็จจริงหรือข้อมูลอื่นใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดให้แต่ต้องใช้เพื่อมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น
4. ความสามารถในการดำเนินการตามแผน เป็นความสามารถที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้
5. ความสามารถในการตรวจคำตอบ เป็นการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ว่ามีความสอดคล้องกับสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้หรือไม่

3.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

บทบาทของครู

คณะกรรมการการศึกษาแห่งรัฐแคลิฟอร์เนีย (California State Department of Education.1985:14) ได้ให้ข้อเสนอแนะสำหรับครูเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

1. ระบุพฤติกรรมในการแก้ปัญหาให้ชัดเจน
2. จัดบรรยากาศภายในชั้นเรียนให้นักเรียนได้คิดและแก้ปัญหาอยู่เสมอ
3. ให้โอกาสนักเรียนได้อธิบายแนวคิดในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหา
4. มีความเข้าใจว่าปัญหาแต่ละปัญหามียุทธวิธีในการแก้ปัญหามากกว่าหนึ่งวิธี
5. นำเสนอปัญหาที่สัมพันธ์กับชีวิตจริง และเป็นปัญหาที่ช่วยเพิ่มประสบการณ์ที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้

สเติร์และโกรฟ (Schoenfeld.1989: 83 – 103;citing Stacey ;& Groves.n.d.) ได้สรุปบทบาทของครูในการสอนแก้ปัญหา เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ช่วยให้นักเรียนยอมรับความท้าทายที่ว่า ” ปัญหาจะไม่ใช่ว่าปัญหานั้นกว่าเขาต้องการจะแก้มัน”
2. สร้างบรรยากาศที่สนับสนุนการแก้ปัญหา
3. ให้เด็กได้ทำงานในแนวทางของตนเพื่อหาคำตอบและครูจะช่วยเมื่อจำเป็น
4. ให้สอนการทำงาน เช่น ให้เด็กคิดเกี่ยวกับสิ่งที่ทำ สิ่งที่ถูกปราชัยหรือเขียนออกมาเพื่อให้เด็กได้เข้าใจกระบวนการที่เกี่ยวข้อง
5. อภิปรายกับเด็กเกี่ยวกับกระบวนการที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้เด็กได้สะสมคำศัพท์ที่จะต้องใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป เด็กจะเรียนรู้มากขึ้นถ้าครูเบนความสนใจเข้าสู่ยุทธวิธีหรือกระบวนการที่เกี่ยวข้อง

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM.1991: 57) ได้เสนอแนะการจัดกิจกรรมที่เอื้อให้เกิดการพัฒนาความสามารถของผู้เรียน ดังนี้

1. สร้างบรรยากาศที่ยอมรับและเห็นคุณค่าของแนวคิด วิธีการคิดและความรู้สึกรักของนักเรียน
2. ให้เวลาในการสำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์
3. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ทำงานทั้งส่วนบุคคลและร่วมมือกัน
4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลองใช้ความสามารถในการกำหนดปัญหาและสร้างข้อคาดเดา
5. ให้นักเรียนได้ให้เหตุผลและสนับสนุนแนวคิดด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์

อาภา ถนัดช่วง (2534: 23) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูในการจัดกิจกรรมการสอนแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนไว้ ดังนี้

1. ครูควรสร้างบรรยากาศการเรียนรู้การสอนให้เด็กมีอิสระ กล้าคิด กล้าแสดงออก เพราะการคิดหรือกล้าแสดงออกเหล่านี้จะช่วยให้ครูรู้จักนักเรียนดียิ่งขึ้น ทั้งในแง่ของสติปัญญาและอารมณ์หรือปมทางจิตต่างๆซึ่งครูควรหาวิธีส่งเสริมและช่วยเหลือให้เหมาะสมต่อไป

2. การจะให้เด็กสามารถคิดและแก้ปัญหาได้อย่างฉลาดนั้นจะต้องอาศัยสิ่งเร้าหรือการกระตุ้นที่ดีคือมีการเสนอปัญหาหรือประเด็นให้คิดท้าทาย น่าสนใจ และเหมาะสมกับวัยของเด็ก

3. ครูอาจให้ความรู้ในรูปข้อมูลเพื่อประกอบการพิจารณาหาทางเลือกได้ แต่ในขั้นของการตัดสินใจ ครูควรให้นักเรียนได้ตัดสินใจด้วยตัวเอง เพื่อที่จะให้เด็กได้รับผิดชอบตนเองและรู้จักควบคุมตนเองต่อไป

สุลัดดา ลอยฟ้า (2530.12-13) ได้เสนอแนะบทบาทของครูในการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

1. สร้างบรรยากาศของการประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา โดยครูควรเริ่มต้นด้วยปัญหาที่ง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนมีโอกาสที่จะประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาในระยะเริ่มแรก เพื่อความมั่นใจ และความอยากในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง

2. สนับสนุนการเรียนรู้เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนแก้ปัญหา เมื่อครูกำหนดปัญหาหรือทำปัญหาให้น่าสนใจในการแก้ปัญหาแต่ละปัญหาไม่ได้ วิธีการเพียงวิธีการเดียวคือ ครูพยายามกระตุ้นให้นักเรียน รวมทั้งให้นักเรียนรู้เทคนิควิธีการแก้ปัญหาเพิ่มมากขึ้น เพื่อจะได้นำไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นๆ

3. สอนให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา

4. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในปัญหา

5. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมสร้างปัญหาด้วยตัวเอง ทั้งนี้เพราะการให้นักเรียนสร้างปัญหด้วยตนเอง เขาจะสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าทั้งนี้เพราะเขาจะรู้จักโครงสร้างของปัญหาเป็นอย่างดี

6. สนับสนุนให้นักเรียนวาดภาพหรือแผนภาพประกอบการแก้ปัญหา การวาดรูปหรือการเขียนแผนภาพประกอบการแก้ปัญหจะช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลในปัญหาที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

7. ส่งเสริมให้นักเรียนทำงานเป็นกลุ่มหรือเป็นคู่ การเปิดโอกาสให้นักเรียนช่วยกันคิดอภิปราย สืบรวจ คิดค้นวิธีการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มย่อยจะช่วยพัฒนาหรือกระตุ้นให้นักเรียนแสดงออกเพิ่มมากขึ้น เป็นการสร้างบรรยากาศเชิงสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหายิ่งขึ้น

8. สนับสนุนให้มีการเลือกวิธีที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

9. ครูควรใช้คำถามในลักษณะสร้างสรรค์ ครูควรใช้คำถามในลักษณะชี้แนะหรือเสนอแนะแนวทางแก้ปัญหา แต่ละคำตอบต้องมีลักษณะที่เปิดกว้างที่จะกระตุ้นความนึกคิดให้ชวนคิดค้น พร้อมให้เวลานักเรียนสำหรับคิด

10. เน้นให้นักเรียนคิดและจินตนาการ

11. การใช้ยุทธวิธีเพื่อพัฒนาความคิดและแก้ปัญหาในชั้นเรียน

12. เสนอปัญหามากกว่าหนึ่งขั้นตอน

บทบาทของผู้เรียน

ซุยดัม (Suydam.1980: 36) ได้กล่าวถึงบทบาทของผู้แก้ปัญหาที่ดีไว้ 10 ประการดังนี้

1. มีความสามารถในการเข้าใจในความคิดรวบยอด (Concepts) และข้อความทางคณิตศาสตร์
2. มีความสามารถในการแยกแยะ ความคล้ายคลึงกันหรือความแตกต่างกัน
3. มีความสามารถในการเลือกใช้ข้อมูล และวิธีการที่ถูกต้อง
4. มีความสามารถแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง
5. มีความสามารถในการวิเคราะห์และประมาณค่า
6. มีความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์และตีความสัมพันธ์และความหมายของข้อเท็จจริงเชิงปริมาณ
7. มีความสามารถในการกล่าวถึงส่วนสำคัญของตัวอย่างที่กำหนด
8. มีความสามารถในการเปลี่ยนวิธีคิดได้อย่างถูกต้อง
9. มีความเชื่อมั่นในตนเองสูงและมีสัมพันธภาพที่ดีต่อผู้อื่น
10. มีความวิตกกังวลต่ำ

สุลัดดา ลอยฟ้าและคณะ (2530:12 - 13) ได้เสนอบทบาทของผู้แก้ปัญหาว่าควรมีลักษณะ ดังนี้

1. สังเกตและวิเคราะห์สถานการณ์ได้ว่าอะไรคือปัญหา
2. พิจารณาปัญหาและทำปัญหาให้ง่ายในการแก้ปัญหา เช่น ตัดส่วนที่ไม่เกี่ยวข้อง

ออก เขียนภาพหรือวาดภาพประกอบ

3. เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
4. คิดคำนวณหาผลลัพธ์หรือคำตอบจากประโยคสัญลักษณ์
5. นำผลลัพธ์ไปตอบปัญหา แปลผลลัพธ์ไปสู่ปัญหา
6. นำปัญหาที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าบทบาทของครูและนักเรียนในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนมีดังนี้

บทบาทของครูผู้สอน

1. สร้างบรรยากาศของการประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา โดยครูควรเริ่มต้นด้วยปัญหาที่ง่าย ๆ เพื่อให้ นักเรียนมีโอกาสนที่จะประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาในระยะเริ่มแรก เป็นการเพิ่มความมั่นใจในการแก้ปัญหานักเรียน
2. สนับสนุนการเรียนเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนแก้ปัญหา ซึ่งครูอาจจัดกิจกรรมด้วยการตั้งคำถามการอภิปรายเพื่อหาข้อสรุป เป็นต้น
3. สนับสนุนให้นักเรียนได้มีโอกาสดำเนินงานเป็นกลุ่มเพื่อแลกเปลี่ยนวิธีการและความคิดเห็น

4. ส่งเสริมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหามากที่สุด
5. สนับสนุนให้นักเรียนได้มีโอกาสเรียนรู้การแก้ปัญหาที่หลากหลายวิธี

บทบาทของผู้เรียน

1. ผู้เรียนต้องมีความรู้ในเนื้อหาเช่น เนื้อหาสาระ สูตร หลักเกณฑ์และทฤษฎี
2. ผู้เรียนต้องมีความเข้าใจข้อสรุปสัญลักษณ์และข้อความต่างๆทางคณิตศาสตร์
3. ผู้เรียนต้องมีความสามารถในการอ่าน การตีความ การขยายความและการแปลความหมาย
4. ผู้เรียนจะต้องมีความสามารถในการใช้ตัวแทน เช่นการวาดรูป การสร้างตาราง แผนภูมิ วัตถุจริง แบบจำลอง
5. ผู้เรียนต้องมีทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น การคำนวณ การบวกลบ คูณหาร
6. ผู้เรียนต้องรู้จักการทำงานร่วมกับผู้อื่น
7. ผู้เรียนต้องมีทักษะในการค้นคว้า หาข้อมูลจากแหล่งการเรียนรู้ที่หลากหลาย

3.3 ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา

ถึงแม้ผู้เรียนจะมีกระบวนการและยุทธวิธีการแก้ปัญหาแล้ว ก็ยังไม่ได้ประกันว่าจะสามารถแก้ปัญหาได้ดี เพราะความสามารถในการแก้ปัญหาไม่ใช่ความสามารถที่เป็นไปตามรูปแบบที่กำหนดตายตัว ต้องมีการพัฒนาปรับปรุงรูปแบบการคิดและการแก้ปัญหาใหม่ๆ เสมอ ซึ่งต้องอาศัยทักษะและความสามารถหลายๆด้าน อัดัมส์ เอลลิสและบีสัน (Adams, Ellis ;& Beeson.1977: 174-175) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่ส่งผลถึงความสามารถในการแก้ปัญหา 3 ด้านคือ

1.สติปัญญา (Intelligence) การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้ปัญหา องค์ประกอบของสติปัญญาที่มีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (Quantitative Factors) ดังนั้นนักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (Verbal Factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษาหรือทางด้านปริมาณ

2.การอ่าน (Reading)

การอ่านเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหา เพราะการแก้ปัญหามustอ่านอย่างรอบคอบ อ่านอย่างวิเคราะห์อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่า ควรจะทำอะไรและอย่างไร มีนักเรียนจำนวนมากที่มีความสามารถในการอ่านแต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้

3.ทักษะพื้นฐาน (Basic Skill)

หลังจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและตัดสินใจว่าจะทำอะไรแล้วก็ยังเหลือขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องเหมาะสม นั่นคือนักเรียนจะต้องรู้การดำเนินการต่างๆ ที่จำเป็น ซึ่งก็คือทักษะพื้นฐานนั่นเอง

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่า ปัจจัยที่สำคัญที่ส่งผลต่อการแก้ปัญหา ได้แก่

1. สติปัญญา ซึ่งได้แก่

1.1 ความรู้จำ ความเข้าใจในเนื้อหาคำศัพท์และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
ทฤษฎี สูตรต่างๆ

1.2 การใช้ตัวแทน เช่น การวาดรูป การกำหนดสัญลักษณ์ การสร้างตาราง กราฟ
หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

1.3 การวางแผน หาความสัมพันธ์ การจัดลำดับ การหาแบบรูปหรือข้อสรุป

1.4 ทักษะพื้นฐานในการคิดคำนวณ เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ซึ่งถือเป็น

2. ความรู้สึกและเจตคติต่อการแก้ปัญหา ได้แก่ ความต้องการ ความมั่นใจ ความสนใจ
ในการแก้ปัญหาซึ่งอาจขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์ปัญหาว่าท้าทายหรือสามารถสร้างความสนใจของผู้
แก้ปัญหานั้นมากน้อยเพียงใดและความเกี่ยวข้องกับผู้แก้ปัญหาหรือไม่ เป็นต้น

3. ด้านสิ่งแวดล้อม ซึ่งได้แก่ บรรยากาศในการเรียนการสอน เช่น ครูผู้สอน รูปแบบการ
สอน เทคนิคหรือวิธีการสอนของครู การใช้สื่อ สภาพห้องเรียน เพื่อนร่วมชั้น หรือบุคคลใกล้ชิด
ระยะเวลาและความต่อเนื่องในการแก้ปัญหา เป็นต้น

3.4 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
ได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้แนวคิดไว้ดังนี้

สมาคมครูคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา (NCTM.1991: 57) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับ
สภาพแวดล้อมที่จะเอื้อให้เกิดการพัฒนาความสามารถของผู้เรียนไว้ดังนี้

1. เป็นบรรยากาศที่ยอมรับและเห็นคุณค่าของแนวคิดวิธีการคิดและความรู้สึกของ
นักเรียน

2. ให้อเวลาในการสำรวจแนวคิดในทางคณิตศาสตร์

3. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ทำงานทั้งส่วนบุคคลและร่วมมือกัน

4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลองใช้ความสามารถในการกำหนดปัญหาและสร้างข้อคาดเดา

5. ให้นักเรียนได้ให้เหตุผลและสนับสนุนแนวคิดด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์

กอนซาเลส (Gonzales.199 :74) ได้ให้ความคิดเห็นไว้ว่าบรรยากาศที่ส่งเสริมการพัฒนา
ความสามารถในการแก้ปัญหานั้นจะต้องเป็นบรรยากาศที่ทำให้นักเรียนรู้สึกสะดวกสบายในการแสดง
แนวคิด ไม่เข้มงวดเอาจริงเอาจังจนเกิดความตึงเครียด เพราะถ้านักเรียนเกิดความรู้สึกกลัวในสิ่งที่
ทำผิดพลาดหรือกลัวถูกหัวเราะเยาะจากเพื่อน นักเรียนจะไม่กล้าซักถาม ไม่กล้าแสดงความคิด
เห็น ฉะนั้น ครูจะต้องจัดบรรยากาศของชั้นเรียน ที่ทำให้ผู้เรียนมีความรู้สึกเป็นอิสระเป็น
บรรยากาศที่ส่งเสริมให้มีการสำรวจ สืบค้น ให้เหตุผลและสื่อสารกัน

เวลานับว่าเป็นองค์ประกอบที่สำคัญอีกประการหนึ่งในการแก้ปัญหา นักเรียนต้องมีเวลา
เพียงพอในการแก้ปัญหาแต่ละคนต้องการเวลาในการแก้ปัญหาไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับความรู้
ความสามารถและประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เรย์ ชุยตัมและลินด์ควิสท์ (Reys,Suydum ;&
Lindquist. 1989: 30) กล่าวถึงการใช้เวลาในการแก้ปัญหว่า ในการแก้ปัญหาปัญหาหนึ่ง นักเรียน
ต้องใช้เวลาทำความเข้าใจปัญหา สำรวจหาแนวทางในการแก้ปัญหาและตรวจสอบคำตอบที่ได้

โดยเฉพาะปัญหาที่ยังไม่รู้วิธีแก้ปัญหาต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้นอีก ดังนั้นการให้เวลาที่เหมาะสมจึงเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการแก้ปัญหา

โดยทั่วไปแล้วลักษณะการจัดการเรียนการสอนให้ชั้นเรียนจะเป็นทั้งแบบกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น กลุ่มย่อยและแบบรายบุคคล ธีสเซนและคนอื่นๆ (Thiessen and others.1989: 38) กล่าวว่า กลุ่มใหญ่จะใช้เพื่อฝึกความชำนาญและกลุ่มย่อยจะเป็นการรวมเอาจุดดีของกิจกรรมกลุ่มใหญ่และแบบรายบุคคลมาผสมผสานกัน ซึ่งกลุ่มย่อยนี้นักเรียนทุกคนจะมีส่วนร่วมในกระบวนการแก้ปัญหาอย่างเต็มที่ ได้แลกเปลี่ยนแนวคิด ประสบความสำเร็จและมีเจตคติทางบวกต่อการเรียน และยังพบอีกว่า กลุ่มย่อยสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่ารายบุคคล

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 66-74) ได้เสนอวิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์โดยประยุกต์ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยามาเป็นวิธีการพัฒนาดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา

1.1 การพัฒนาทักษะการอ่านโดยการวิเคราะห์ความสำคัญความเข้าใจในปัญหาเป็นรายบุคคลหรือกลุ่ม อภิปรายความเป็นไปได้ของคำตอบ ความเพียงพอหรือความเกินพอของข้อมูล ปัญหาที่ใช้เพิ่มเติมอาจไม่ใช่ปัญหาคณิตศาสตร์ก็ได้

1.2 การใช้กลวิธีเพื่อเพิ่มพูนความเข้าใจ

1.2.1 การเขียนภาพ แผนภาพ หรือแบบจำลอง เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล จะช่วยให้ข้อมูลมีความเป็นรูปธรรม ทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น

1.2.2 ลดปริมาณที่กำหนดในปัญหาให้น้อยลง เพื่อเน้นโครงสร้างของปัญหามีความชัดเจนขึ้นโดยคำนึงถึงความเป็นไปได้และความมีเหตุผล

1.2.3 การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา

1.2.4 การเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ให้เป็นเรื่องที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวัน

1.3 การใช้ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตประจำวันมาให้ผู้เรียนฝึกทำความเข้าใจโดยกำหนดข้อมูลเกินความจำเป็นหรือไม่เพียงพอ เพื่อให้ผู้เรียนฝึกการวิเคราะห์ว่าข้อมูลที่กำหนดให้ข้อมูลใดไม่ได้ใช้หรือข้อมูลที่กำหนดให้เพียงพอหรือไม่ ซึ่งสอดคล้องกับชีวิตประจำวันที่บางครั้งมีข้อมูลมากมายที่ผู้เรียนจะต้องเลือกข้อมูลที่เกี่ยวข้องมาใช้ในบางครั้งข้อมูลอาจไม่เพียงพอ ผู้เรียนจะต้องแสวงหาความรู้ให้เพียงพอ

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผน ถ้าโจทย์กับปัญหามีความซับซ้อน ควรฝึกให้ผู้เรียนเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์และเขียน หรือพูดลำดับขั้นตอนการคิดอย่างคร่าวๆ ก่อนลงมือทำ เพราะขั้นตอนดังกล่าวเป็นเหมือนการวางแผนในการแก้ไขปัญหา ถ้าผู้เรียนฝึกฝนสม่ำเสมอ ทำให้ผู้เรียนพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ดังนั้น การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหามีแนวทาง ดังนี้

2.1 ไม่บอกวิธีการแก้ปัญหาโดยตรงแต่กระตุ้นโดยใช้คำถามนำแล้วให้ผู้เรียนหาคำตอบ ถ้ายังตอบไม่ได้ให้เปลี่ยนคำถามให้ง่ายลง คำตอบของผู้เรียนจะช่วยให้แผนการการแก้ปัญหาชัดเจนขึ้น

2.2 ส่งเสริมให้ผู้เรียนคิดออกมาดังๆ (Think Aloud) สามารถบอกให้ผู้อื่นทราบว่าตนคิดอะไร ไม่ใช่คิดอยู่ในใจคนเดียว การคิดออกมาดังๆ อาจอยู่ในรูปของการสนทนา หรือการเขียนลำดับขั้นตอนการคิดออกมาให้ผู้อื่นทราบ ทำให้เกิดการอภิปรายเพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 สร้างลักษณะนิสัยของผู้เรียนให้คิดวางแผนก่อนลงมือทำ ทำให้เห็นภาพรวมของปัญหา ประเมินความเป็นไปได้ก่อนลงมือแก้ปัญหาเพื่อป้องกันการผิดพลาดหรือแก้ไขข้อบกพร่องได้ทันที เน้นวิธีการแก้ปัญหาสำคัญกว่าคำตอบ

2.4 จัดปัญหาให้ผู้เรียนฝึกทักษะ ควรเป็นปัญหาที่ท้าทายเหมาะสมกับความสามารถ ไม่ยากหรือง่ายเกินไป

2.5 ในการแก้ปัญหาแต่ละปัญหาควรส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาให้มากกว่า 1 รูปแบบ เพื่อให้ผู้เรียนมีความยืดหยุ่นในการคิด

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน ในการดำเนินการตามแผนผู้เรียนต้องตีความ ขยายความ นำแผนไปสู่การปฏิบัติอย่างละเอียดชัดเจนและประเมินความสามารถที่จะดำเนินการได้หรือไม่

4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบการตรวจสอบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ครอบคลุมประเด็นสำคัญ 2 ประเด็นคือ ประเด็นแรก ตรวจสอบขั้นตอนตั้งแต่เริ่มต้นจนเสร็จสิ้นกระบวนการ รวมทั้งยุทธวิธีอื่นในการแก้ปัญหา ประเด็นที่สอง คือ มองไปข้างหน้าเป็นการใช้ประโยชน์จากกระบวนการแก้ปัญหา โดยสร้างสรรค์ที่เกี่ยข้องสัมพันธ์กันขึ้นมาใหม่ มีแนวทางการพัฒนาดังนี้

4.1 กระตุ้นให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ให้เคยชินจนเป็นนิสัย

4.2 ฝึกให้ผู้เรียนคาดคะเนคำตอบ

4.3 ฝึกการตีความหมายของคำตอบ (ความเป็นไปได้)

5. สนับสนุนให้ผู้เรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้วิธีหาคำตอบมากกว่า 1 วิธีให้ผู้เรียนฝึกสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียน

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าในแนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาสามารถปฏิบัติได้ตามแนวทางต่อไปนี้

1. ระบุพฤติกรรมในการแก้ปัญหาที่ชัดเจน
2. จัดบรรยากาศในชั้นเรียนให้นักเรียนได้คิดและแก้ปัญหาอยู่เสมอๆ
3. เปิดโอกาสนักเรียนได้อธิบายแนวคิดในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหา
4. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา
5. ส่งเสริมให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน
6. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงเหตุผลด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์หรือตัวแทนทางคณิตศาสตร์

7. ฝึกความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่หลากหลาย
8. ใช้เวลาในการแก้ปัญหาอย่างเต็มที่
9. ส่งเสริมให้นักเรียนฝึกความสามารถในการวิเคราะห์ การใช้กลวิธี การวางแผนในการดำเนินงาน การดำเนินการให้เป็นกระบวนการและฝึกการตรวจสอบข้อคำตอบ

3.5 แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่สำคัญมากอีกกระบวนการหนึ่งๆ และวิธีการที่จะกระตุ้นให้ผู้สอนได้ตื่นตัวก็คือการใช้แบบทดสอบเพื่อไปกระตุ้นและท้าทายความคิดของผู้เรียน และได้มีนักการศึกษาหลายท่านที่ได้เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังต่อไปนี้

โพลยา (Polya.1973 : 5-40) ได้เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

ตาราง 1 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของโพลยา

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา	พฤติกรรมชี้วัดความสามารถ
ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	หลังจากอ่านโจทย์แล้วจะต้องบอกได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้ ต้องการทราบอะไรและข้อเท็จจริงเป็นอย่างไร
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	ใช้เงื่อนไขความเป็นจริงในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา	ความสามารถในการสร้างตาราง เขียนไดอะแกรม เขียนสมการหรือ ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และทักษะการคำนวณ
ขั้นตรวจคำตอบ	การพิจารณาความสมเหตุสมผลและการสรุปความหมายของคำตอบ

ส.วาสนา ประवालพฤษ (2537: 48-49) ได้เสนอแนวทางใหม่ในการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาที่เรียกว่า การวัดจากสภาพจริง (Authentic performance Measurement) โดยสร้างข้อคำถามดังนี้

1. เสนอสถานการณ์ที่ประกอบด้วยข้อมูลและข้อจำกัดต่างๆให้นักเรียนหาคำตอบ

พร้อมทั้งอธิบายวิธีการคิดที่จะได้คำตอบ ซึ่งอาจจะมีวิธีการคิดหลายวิธี

2. เสนอปัญหาประกอบด้วยข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง (หรือไม่จำเป็น)ให้นักเรียนพิจารณาแก้ปัญหาและให้ความเห็นเกี่ยวกับข้อมูลที่ไม่เหมาะสม

3. เสนอปัญหาและแนวทางในการแก้ปัญหาบางส่วนให้นักเรียนวิจารณ์และให้แก้ปัญหา นั้นให้สำเร็จ

4. เสนอปัญหาให้แสดงวิธีการการแก้ปัญหาและการตรวจสอบโดยนำเสนอต่อเพื่อนๆ ในชั้นเรียนหรือแลกเปลี่ยนคำตอบกัน

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเพื่อวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (ศักดา บุญโต. 2539 : 22) “มีขวดขนาดบรรจุ 10 ลิตรหนึ่งใบ และขวดขนาดบรรจุ 3 ลิตร อีกหนึ่งใบ ขวดทั้งสองไม่มีขีดบอกปริมาณของเหลวเลย ถ้าต้องการน้ำ 5 ลิตร นักเรียนจะมีวิธีการตวงอย่างไร จงบรรยายวิธีการตวงน้ำดังกล่าว “

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปลัด

เครื่องมือที่ใช้ในการวัดและประเมินการปฏิบัติงานของนักเรียน เป็นแบบทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทน

(Representation)นี้ ใช้เกณฑ์การวัดและการประเมินผลที่เรียกว่า “รูปลัด (Rubric)” ซึ่งกำหนดมาตราการวัด (Scale) และรายการของคุณลักษณะที่บรรยายถึงความสามารถในการแสดงออกของแต่ละจุดในมาตราวัดไว้อย่างชัดเจน การให้คะแนนรูปลัดมี 2 แบบ (กรมวิชาการ .2539 : 54-59)

1. การให้คะแนนเป็นภาพรวม (Holistic Score) คือ การให้คะแนนงานชิ้นใดชิ้นหนึ่ง โดยพิจารณาภาพรวมของชิ้นงานว่ามีความเข้าใจในความคิดรวบยอด การสื่อความหมาย กระบวนการที่ใช้และผลงานเป็นอย่างไร แล้วเขียนอธิบายคุณภาพของงานหรือความสำเร็จของงานเป็นชิ้นๆ โดยอาจจะแบ่งระดับคุณภาพตั้งแต่ 0 – 4 หรือ 0 – 6 สำหรับในขั้นตอนการให้คะแนนรูปลัดอาจจะแบ่งวิธีการให้คะแนนหลายวิธี เช่น

วิธีที่ 1 แบ่งงานตามคุณภาพเป็น 3 กอง คือ

กองที่ 1 ได้แก่ งานที่คุณภาพเป็นพิเศษและเขียนอธิบายลักษณะของงานที่มี

คุณภาพเป็นพิเศษ

กองที่ 2 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้และเขียนอธิบายลักษณะงานที่ยอมรับได้

กองที่ 3 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้น้อยหรือยอมรับไม่ได้ และเขียนอธิบาย

ลักษณะของงานที่ยอมรับได้น้อย

จากนั้นก็นำงานแต่ละกองมาให้คะแนนเป็น 3 ระดับ คือ

งานกองที่ 1 จะให้คะแนน 6 หรือ 5

งานกองที่ 2 จะให้คะแนน 4 หรือ 3

งานกองที่ 3 จะให้คะแนน 2 หรือ 1

วิธีที่ 2 กำหนดระดับความผิดพลาด คือพิจารณาตามความบกพร่อง จากคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใด โดยจะหักจากระดับสูงสุดลงมาทีละระดับ ดังนี้

คะแนน 4 หมายถึง คำตอบถูกแสดงเหตุผล แนวคิดชัดเจน

3. หมายถึง คำตอบถูก เหตุผลถูก แต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย

2 หมายถึง เหตุผลการคิดคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบ

1 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจหลักการความคิดรวบยอดข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนดได้น้อยมาก และเข้าใจ ไม่ถูกต้องบางส่วน

0 หมายถึง ไม่แสดงความคิดเห็นใดเลย

2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) เพื่อให้การมองคุณภาพของงานหรือความสามารถของนักเรียนได้อย่างชัดเจนจึงได้มีการแยกองค์ประกอบของการให้คะแนนและการอธิบายคุณภาพของงานในแต่ละองค์ประกอบเป็นระดับโดยทั่วไปแล้วการแก้ปัญหาจะแยกองค์ประกอบของงาน เป็น 4 ด้านคือ

2.1 ความเข้าใจในความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง เป็นการแสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจในความคิดรวบยอด หลักการในการแก้ปัญหาที่ถามอย่างกระจ่างชัด

2.2 การสื่อความหมาย คือ ความสามารถในการอธิบาย การนำเสนอ การบรรยาย เหตุผล แนวคิด ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ดี มีความคิดสร้างสรรค์

2.3 การใช้กระบวนการและยุทธวิธี สามารถเลือกใช้ยุทธวิธี กระบวนการในการนำไปสู่การแก้ปัญหาได้สำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ

2.4 ผลสำเร็จของงานความถูกต้องแม่นยำในผลสำเร็จของงานหรืออธิบายที่มาและตรวจสอบผลงาน

ตัวอย่างการให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ Analytic Score เรย์ (Reys.1992: 313) ได้กำหนดรูปรีขของความสามารถในการแก้ปัญหาโดยที่แต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา จะให้คะแนนตั้งแต่ 0 – 2 คะแนน ตามรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา

0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย

1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน

2 หมายถึง เข้าใจปัญหาได้ดี ครบถ้วนสมบูรณ์

2. การวางแผนแก้ปัญหา

0 หมายถึง ไม่พยายาม หรือวางแผนได้ไม่เหมาะสมทั้งหมด

1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน

2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด

3. คำตอบ

0 หมายถึง ไม่ตอบ หรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม

1 หมายถึง คัดลอกผิดพลาด คำวนผิด ตอบบางส่วนสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ

2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูก

ชาร์ลส์และเลสเตอร์ (Charles ; & Lester.1982 :11-12) เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ โดยพิจารณาถึงความสามารถ 3 ประการ ดังนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา เป็นความสามารถในการแปลความหมายโจทย์ มีวิธีการให้คะแนนดังนี้

0 หมายถึง แปลความหมายผิดโดยสิ้นเชิง

1 หมายถึง แปลความหมายผิดบางส่วน

2 หมายถึง แปลความหมายโจทย์ถูกต้อง

2. การแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา มีวิธีการให้คะแนน ดังนี้

0 หมายถึง ไม่ลงมือทำหรือทำผิดโดยสิ้นเชิง

1 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้องเป็นบางส่วน

2 หมายถึง มีกระบวนการแก้ปัญหาถูกต้อง (ไม่พิจารณาการคำนวณ)

3. การตอบปัญหา เป็นการพิจารณากระบวนการแก้ปัญหาร่วมกับทักษะการคำนวณมีวิธีการให้คะแนนดังนี้

0 หมายถึง ตอบผิดและกระบวนการแก้ปัญหาผิด

1 หมายถึง ตอบเพียงบางส่วน (ในกรณีที่มีหลายคำตอบ)

2 หมายถึง การคำนวณถูกต้อง

เลสเตอร์ และโอสเตฟเฟอร์ (สมสว่าง ธนพานิชสกุล. 2539:9-20; อ้างอิงจาก Lester ;& O' Daffer .1987) แบ่งสัดส่วนของการให้คะแนนออกเป็น 3 ส่วน คือ ความเข้าใจในการแก้ปัญหา วิธีการแก้ปัญหา และผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งสามารถวิเคราะห์สัดส่วนและสร้างเป็นเกณฑ์ให้คะแนนได้ ดังนี้

ตาราง 2 รูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปแบบของ Charles ; & Lester

ส่วนที่พิจารณา	พฤติกรรมที่แสดง	คะแนนที่ได้
ความเข้าใจในปัญหา	ไม่แสดงอะไร	0
	แปลความหมายผิดทั้งหมด	1
	แปลความหมายผิดเป็นส่วนมาก	2
	แปลความหมายผิดเป็นส่วนน้อย	3
	แปลความหมายได้ถูกต้องสมบูรณ์	4
วิธีแก้ปัญหา	ไม่แสดงอะไร	0
	วางแผนการทำงานไม่ถูกต้อง	1
	แก้ปัญหาถูกเป็นส่วนน้อย	2
	แก้ปัญหาผิดเป็นส่วนน้อย	3
	วางแผนได้เหมาะสมมีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง	4
ผลลัพธ์ที่ได้	ไม่แสดงอะไร	1
	เขียนผิด คำนวนผิด	2
	คำตอบถูกต้อง	3

ส.วาสนา ประवालพฤษ์ (2537: 38-40) ได้เสนอการกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบ
รูบรีค (Rubric) เพื่อประเมินแฟ้มสะสมงานหรือแบบทดสอบ ดังนี้

วิธีที่ 1 แยกประเภทโดยพิจารณาออกเป็นประเด็นย่อยแล้วทำเป็นตารางพิจารณาความ
ถูกต้องในแต่ละประเด็น กำหนดระดับของคะแนนตามจำนวนที่ปฏิบัติถูกต้องในประเด็นเหล่านี้

ตัวอย่าง กำหนดให้นักเรียนศึกษาว่ากระดาศหิซซุ 3 ยี่ห่อ ยี่ห่อไหนจะจับน้ำได้ดีที่สุด
โดยใช้อุปกรณ์การทดลองประกอบด้วย หลอดแก้ว ถาด หลอดหยด และตาชั่ง

เกณฑ์การให้คะแนนจะพิจารณาจากวิธีการ การทำอิมตัว การพิจารณาผล การชั่ง
น้ำหนักและ การสรุปผลดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีโคโดยแยกพิจารณาเป็นประเด็นย่อยๆ ตามความถูกต้องในแต่ละประเด็น

คะแนน	วิธีการ	การทำให้มีตัว	การพิจารณาผล	การชั่ง	ผล
4	ถูก	ถูก	ถูก	ถูก	ถูก
3	ถูก	ถูก	ถูก	ผิด	ถูก/ผิด
2	ถูก	ถูก	คาดเคลื่อน	ผิด	ถูก/ผิด
1	ถูก	ถูก	คาดเคลื่อน	ผิด	ถูก/ผิด
0	ไม่ได้ปฏิบัติเลย/ปฏิบัติผิดหมด				

วิธีที่ 2 กำหนดระดับความสมบูรณ์ ตามเส้นแสดงความต่อเนื่องของความสามารถ เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหา

ผลงานถูกต้อง	6	
แสดงวิธีการคิดมากกว่าวิธีการที่จะแสวงหาคำตอบ		
บอกได้ว่าทำไมคำตอบจึงถูก	5	
บอกแนวทางในการแก้ปัญหาทางอื่นๆได้	4	
	3	บางตอนหรือบางส่วนของคำตอบไม่ถูกต้องค่อนข้างจะบอกได้ว่าคำตอบนั้นถูกต้อง
	2	ทราบว่าวิธีการแก้ปัญหานั้นไม่สำเร็จงานไม่ถูกต้อง
	1	แสดงความพยายามในการแก้ปัญหาไม่สามารถบอกได้ว่าทำไมจึงแก้ปัญหาวีธีนี้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่าวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทนนี้ กระบวนการแก้ปัญหา 5 ขั้น ดังนี้

ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วย ผู้วิจัยได้วัดความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนตาม

1. ขั้นทำความเข้าใจในปัญหา เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาซึ่งเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องอ่านโจทย์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ อะไรคือสิ่งที่โจทย์ถาม

2. ขั้นของการสร้างตัวแทน เป็นขั้นตอนที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปแบบของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การวาดรูปประกอบ การสร้างแผนภูมิหรือแผนภาพ การสร้างตาราง การเขียนสัญลักษณ์ต่างๆแทนข้อความ หรือการใช้วัตถุจริง ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนการสร้าง ความเข้าใจสู่ความเป็นนามธรรม เป็นขั้นของการประมวลความคิดหรือความเข้าใจในโจทย์ปัญหา เพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรมโดยการสร้างตัวแทนทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว

3. ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือการสร้างทางเลือก ในการแก้ปัญหา โดยที่นักเรียนต้องประมวลสิ่งต่างๆที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหาว่า จากสิ่งที่โจทย์กำหนด กับสิ่งที่โจทย์ต้องการ ผู้แก้จะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาเป็น ความสัมพันธ์ในรูปของสมการได้อย่างไร และจะมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลอื่นใดที่โจทย์ ไม่ได้กำหนดให้แต่ต้องใช้ เพื่อมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น

4. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้

5. ขั้นของการตรวจสอบคำตอบ เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ตาม สถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

ส่วนเกณฑ์ในการให้คะแนนนั้นผู้วิจัยได้ยึดหลักเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด (Rubric) แบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) ซึ่งได้กำหนดการให้คะแนนตั้งแต่ 0 – 2 ในแต่ละขั้นของ กระบวนการแก้ปัญหา ข้างต้น

3.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยในต่างประเทศ

เว็บบ์ (Webb.1975: 2689 - A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสำรวจกระบวนการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถทางความรู้ความจำ ซึ่งได้แก่ ภาษา แบบการคิด มิติสัมพันธ์ เหตุผลและการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง

คลาสสัน (Classkson.1979 : 4101 - A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะการแปล ความหมายโจทย์คณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ทำการทดสอบความสามารถในการแปลโจทย์ปัญหาสามแบบ คือ สัญลักษณ์ที่เป็นภาษา (Verbal - Symbolic) สัญลักษณ์ที่เป็นสัญลักษณ์ และสัญลักษณ์ที่เป็นรูปภาพ (Picture - Symbolic) พบว่า การแปลความหมายโจทย์คณิตศาสตร์ทั้งสามแบบมีความสัมพันธ์กับ

การแก้ปัญหาและคนที่มีความสามารถในการแปลความหมายต่างกันจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและทักษะในการแปลความหมายโจทย์เป็นองค์ประกอบที่สำคัญอย่างหนึ่งในการแก้ปัญหา

งานวิจัยในประเทศ

วรรณคดี วรรณศิลป์ (2523 : 62) ได้วิจัยเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างมีจำนวน 310 คน ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหามีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและผลการทดสอบค่าที่ได้พบว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงและนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางเรียนต่ำแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จรรยา ภูอุดม (2524 : 48 - 54) ได้ทำการวิจัยเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการประเมินของครู โดยใช้ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนชั้นมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร จำนวน 6 โรงเรียน เป็นนักเรียนชาย 235 คน นักเรียนหญิง 190 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยทุกวิชาอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยนักเรียนหญิง มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนชาย

จันทร์เพ็ญ ธนาศุภกรกุล (2526 : 63- 65) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหา ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุขจิตร ตั้งเจริญ (2543:37) ได้ทำการศึกษาเรื่อง การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการฝึกการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหานั้นสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม

นิกร ขวัญเมือง (2545: 58) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเมตาคอกนิชันและ การอบรมเลี้ยงดูกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับเมตาคอกนิชันและการอบรมเลี้ยงดูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และค่าน้ำหนักของเมตาคอกนิชัน ด้านงานและด้านการวางแผน ส่งผลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

ขวัญจิรา อนันต์ (2546: 88) ได้ทำการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงเหตุของตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า ตัวแปรที่มีผลโดยตรงต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรียงตามลำดับได้ดังนี้ ความถนัดการเรียนรู้เชิงภาษา ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความถนัดการเรียนรู้เชิงเหตุผล การคิดอนุมาน ส่วนความเอาใจใส่ต่อการเรียนมีผลทางอ้อม

จากการศึกษางานวิจัยจะเห็นได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันในทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติและยังพบอีกว่า ปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคือสติปัญญา ซึ่งได้แก่ความรู้ความจำ ความเข้าใจ การวิเคราะห์ สังเคราะห์ ด้านทักษะได้แก่ ทักษะการคิดคำนวณ การอ่าน การแปลและตีความหมาย นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าวิธีการสอนและเทคนิคการสอนของครูเป็นอีกอย่างหนึ่งที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนด้วยเช่นกัน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. ระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า
3. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
4. แบบแผนในการศึกษาค้นคว้า
5. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
6. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
7. วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า
8. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 16 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 923 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่ม จากการจับสลากมา 1 ห้องเรียนจำนวน 60 คน

2. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 ผู้วิจัยใช้เวลาในการทดลองจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาทีดังนี้

ชั่วโมงที่ 1 ทดสอบก่อนเรียน

ชั่วโมงที่ 2-5 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ชั่วโมงที่ 6-7 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การวาดภาพ

ชั่วโมงที่ 8-9 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การใช้ตาราง

ชั่วโมงที่ 10-11 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

ชั่วโมงที่ 12 ทดสอบหลังเรียน

3. เนื้อหาสาระที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นโจทย์สมการในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 ระดับชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) ซึ่งวิเคราะห์แล้วแบ่งสาระการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับ โจทย์สมการได้ดังนี้

โจทย์สมการ

- โจทย์สมการเกี่ยวกับการเปรียบเทียบจำนวน
- โจทย์สมการเกี่ยวกับอายุ
- โจทย์สมการเกี่ยวกับเศษส่วน
- โจทย์ระยะคน

4. แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้านี้เป็นการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง
โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ซึ่งผู้วิจัยใช้
แบบแผนการวิจัยแบบ One Group Pretest-Posttest Design (ล้วน สายยศ ;& อังคณา สาย
ยศ.2538: 249)

ตาราง 4 แบบแผนการศึกษาค้นคว้าแบบ One Group Pretest - Posttest Design

กลุ่มทดลอง	สอบก่อน	ศึกษาค้นคว้า	สอบหลัง
E	T ₁	X	T ₂

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการศึกษาค้นคว้า

E แทน กลุ่มทดลอง

X แทน การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สม
การของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

T ₁	แทน การสอบก่อนการทดลอง (Pre - test)
T ₂	แทน การสอบหลังการทดลอง (Post – test)

5. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้ามี่ดังนี้

5.1 แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

5.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

6. การสร้างและการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

6.1 แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

ขั้นตอนการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) มีดังนี้

6.1.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 มาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง จุดประสงค์การเรียนรู้ คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-3) และเอกสารประกอบอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับความคิดรวบยอดเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาเรื่องโจทย์สมการ

6.1.2 วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้สำหรับสาระการเรียนรู้เรื่องโจทย์สมการ

6.1.3 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) โดยแบ่งเป็นลำดับขั้นดังนี้

ขั้นนำ เป็นขั้นของการกระตุ้นความสนใจ หรือเตรียมความพร้อมก่อนเรียน

ขั้นสอน เป็นขั้นของการดำเนินกิจกรรมการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1โดยการใช้ตัวแทน

ขั้นสรุป เป็นขั้นของการสรุปความรู้หรือเป็นการประเมินผลจากการเรียนรู้

6.1.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทนสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้วไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความชัดเจนและความถูกต้องของภาษาและกิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำมาปรับเปลี่ยนให้เหมาะสม

6.1.5 ปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญแล้วนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์

อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน เพื่อหาข้อบกพร่องของเนื้อหา ภาษา เวลา และข้อบกพร่องอื่นๆ เพื่อนำไปเป็นข้อมูลในการปรับปรุงและแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปใช้ทดลองจริง

6.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน จำนวน 5 ข้อ ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ของวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง โจทย์สมการจากหลักสูตร คู่มือครู แบบเรียนหรือตำราเรียนต่างๆ
2. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
3. สร้างตารางการวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถที่ต้องการจะวัดในการแก้ปัญหาเรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และจำนวนข้อที่ใช้ในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
4. สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบอัตนัย (Essay Test) โดยให้ผู้สอบพิจารณาสถานการณ์ที่กำหนดให้แล้วเขียนบรรยายวิธีการ แนวคิดที่เป็นไปได้ วิธีคำนวณตลอดจนเหตุผลในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้จำนวน 10 ข้อ ตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดไว้ 5 ขั้นตอน
5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถที่ได้นี้ ไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ตรวจสอบก่อนนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมเชิงเนื้อหา เพื่อหาดัชนีความสอดคล้องของแต่ละข้อ โดยพิจารณาจากค่า IOC ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0.50 โดยใช้สูตรของโรวินELLI และแฮมเบิลตัน
6. นำแบบทดสอบนั้นมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญนี้ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 107 คน ซึ่งผ่านการเรียนเรื่อง โจทย์สมการมาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ
7. นำผลการสอบที่ได้นั้นมาตรวจให้คะแนน ตามเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปลิก ดังนี้

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปลิก (Rubric) แบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) ซึ่งวิเคราะห์จากแนวคิดของเรย์ (Reys.1992 : 313) ที่ได้กำหนดการให้คะแนนตั้งแต่ 0 -2 ในแต่ละขั้นของการแก้ปัญหา ดังนี้

1. **ขั้นความเข้าใจปัญหา**
 - 0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย
 - 1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน
 - 2 หมายถึง เข้าใจปัญหาได้ดี
2. **ขั้นของการสร้างตัวแทน**
 - 0 หมายถึง ไม่สามารถสร้างตัวแทนในการแก้ปัญหาได้เลย
 - 1 หมายถึง แสดงความพยายามในการสร้างตัวแทนหรือสร้างได้ไม่สมบูรณ์
 - 2 หมายถึง สร้างตัวแทนของปัญหาได้สมบูรณ์
3. **ขั้นวางแผนแก้ปัญหา**
 - 0 หมายถึง ไม่พยายามหรือวางแผนได้ไม่เหมาะสมทั้งหมด
 - 1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน
 - 2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด
4. **วิธีแก้ปัญหา**
 - 0 หมายถึง ไม่ตอบหรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม
 - 1 หมายถึง คำนวณผิดพลาด ตอบบางส่วนสำหรับสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ
 - 2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูก
5. **การตรวจสอบคำตอบ**
 - 0 หมายถึง ไม่ตรวจสอบคำตอบ
 - 1 หมายถึง แนวทางในการตรวจสอบคำตอบไม่เหมาะสม
 - 2 หมายถึง ตรวจสอบคำตอบและใช้วิธีการที่เหมาะสม

เกณฑ์การวัดและการประเมินความสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทนมีดังนี้

คะแนนร้อยละ	80 - 100	อยู่ในเกณฑ์	ดีเยี่ยม
คะแนน ร้อยละ	70 - 79	อยู่ในเกณฑ์	ดีมาก
คะแนนร้อยละ	60 - 69	อยู่ในเกณฑ์	ดี
คะแนนร้อยละ	50 - 59	อยู่ในเกณฑ์	ปานกลาง (ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ)
คะแนนต่ำกว่าร้อยละ	50	อยู่ในเกณฑ์	ปรับปรุง

8. วิเคราะห์ข้อสอบที่มีความยาก (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) โดยใช้สูตรของวิทนีย์
 และซาเบอร์ (Whitney and Sabers) คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.2 - 0.8 และมี
 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ผลการวิเคราะห์ พบว่า แบบทดสอบมีค่าความยากอยู่ระหว่าง
 0.40 - 0.63 และมีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่างระหว่าง 0.38 - 0.67

9. นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงเรียบร้อยแล้ว จำนวน 5 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 107 คน และหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบจากสูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบัค ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.77

10. จัดพิมพ์แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) เป็นฉบับพร้อมคู่มือการดำเนินการสอบเพื่อนำไปใช้ในการเก็บข้อมูลการวิจัย

7. วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้า ดังนี้

7.1 สุ่มกลุ่มตัวอย่างจากจำนวนประชากรทั้งหมดด้วยวิธีการสุ่มอย่างง่าย โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่ม จำนวน 1 ห้องเรียนจากจำนวน 16 ห้องเรียน ได้จำนวนนักเรียน 60 คนจากจำนวนนักเรียนทั้งหมด 923 คน ของโรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์

7.2 ทดสอบก่อนเรียน (Pre-test) โดยนำแบบทดสอบวัดความสามารถการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ไปทดสอบกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างแล้วบันทึกคะแนนที่ได้จากการสอบ (T_1)

7.3 ดำเนินการทดลอง โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (representation) ดังนี้

ชั่วโมงที่ 2-5 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ชั่วโมงที่ 6-7 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การวาดภาพ

ชั่วโมงที่ 8-9 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
การใช้ตาราง

ชั่วโมงที่ 10-11 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

7.4 ทำการทดสอบหลังเรียน (Post- test) กับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ด้วยแบบทดสอบคู่ขนานกับแบบทดสอบก่อนเรียน (Pre-test)

7.5 ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบและนำคะแนนที่ได้มาทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

8. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.1 ค่าเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ	$\bar{x}$	แทน	คะแนนค่าเฉลี่ย
	$\sum x$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละตัว
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$S = \sqrt{\frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N - 1)}}$$

เมื่อ	S	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
	$\sum x^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง
	$(\sum x)^2$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมดยกกำลังสอง
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ

2.1 ค่าความเที่ยงตรงของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1โดยการใช้ตัวแทน(Representation) โดยหาจากการพิจารณาค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index Of Congruency : IOC) ระหว่างคุณสมบัติที่นิยามไว้กับข้อสอบที่ใช้วัด โดยใช้สูตรของโรวินेलลีและแฮมเบิลตัน (ล้วน สายยศ ; และอังคณา สายยศ . 2539 : 248)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ	IOC	แทน	ดัชนีความสอดคล้อง มีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง +1
	$\sum R$	แทน	ผลรวมของคะแนนการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
	N	แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 หาดัชนีความยากของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

$$P_E = \frac{S_U + S_L - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	P_E	แทน	ดัชนีค่าความยาก
	S_U	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
	$X_{\max}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนของผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.3 หาค่าอำนาจจำแนกเพื่อวิเคราะห์รายข้อ โดยใช้วิธีของวิทนีและซาเบอร์ (ล้วน สายยศ ; และอังคณา สายยศ .2539:201)

$$D = \frac{S_U - S_L}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	D	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
	S_U	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
	$X_{\max}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนของผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

2.4 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) คำนวณจากการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) โดยใช้สูตรของครอนบัค (ล้วน สายยศ ; และอังคณา สายยศ.2541:228-229) ดังนี้

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right)$$

เมื่อ	α	แทน	สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น
	n	แทน	จำนวนของแบบทดสอบ
	s_i^2	แทน	คะแนนความแปรปรวนของคะแนนข้อหนึ่งๆ
	s_t^2	แทน	คะแนนความแปรปรวนทั้งหมด

3. สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) โดยใช้สูตร t – test Dependent จากสูตรเฟอร์กูสัน (Ferguson.1971:154)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}}, \text{ df} = N - 1$$

เมื่อ	$\sum D$	แทน	ผลรวมความแตกต่างระหว่างคะแนนสอบหลังการทดลองและก่อนการทดลอง
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างคะแนนสอบหลังการทดลองและก่อนการทดลอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมความแตกต่างระหว่างคะแนนสอบหลังการทดลองและก่อนการทดลอง ทั้งหมดยกกำลังสอง
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การนำเสนอผลการวิเคราะห์ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสื่อความหมายในการนำเสนอและแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูลให้เข้าใจตรงกัน ดังนี้

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

$\sum D$ แทน ผลรวมของความแตกต่างของคะแนนสอบหลังการทดลองและก่อนการทดลอง

$\sum D^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างของคะแนนสอบหลังการทดลองและก่อนการทดลอง

t แทน ค่า t - Dependent Sample

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังได้รับการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังได้รับการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) ปรากฏผลในตาราง 5 ดังนี้

ตาราง 5 ผลการวิเคราะห์การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
กลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการทดลอง

	N	$\bar{X}$	ΣD	ΣD^2	t
Pretest	60	10.75			
			1063	22737	16.87**
Posttest	60	28.47			
	$t_{(.01,59)} = 2.66$			** p < .01	

จากตาราง 5 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังได้รับการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองโดยมีระดับความเชื่อมั่น 99% ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐาน

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) ซึ่งสามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) หลังการทดลองสูงกว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 16 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 923 คน

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่ม จากการจับสลากมา 1 ห้องเรียนจำนวนนักเรียน 60 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

2.1 แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 4 แผน ดังนี้

- แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง
- แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ
- แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้ตาราง
- แผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

2.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัยจำนวน 5 ข้อ โดยวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยกำหนดไว้ 5 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นตรวจสอบคำตอบ มีความยาก (P_E) อยู่ระหว่าง 0.40 - 0.63 ค่าอำนาจจำแนก (D) อยู่ระหว่าง 0.38 - 0.67 ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.77

3. วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บข้อมูลโดยให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนในคาบที่ 1 และได้ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) ในคาบเรียนที่ 2 - 11 และทดสอบหลังเรียนในคาบเรียนที่ 12 จากนั้นนำผลสอบมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์การให้คะแนนของแบบทดสอบ ทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน ($t - test$ Dependent)

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ก่อนการทดลองกับหลังการทดลองโดยใช้วิธีการทางสถิติแบบ $t - test$ Dependent

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

จากการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองสอนแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผล

จากการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) พบว่า หลังการทดลองสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน (Representation) สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ทั้งนี้อาจมีสาเหตุมาจาก

1. วิธีการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน(Representation) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้กำหนดไว้ 5 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจคำตอบซึ่งในการแก้โจทย์สมการโดยใช้ทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาใน 5 ขั้นนี้ ผู้วิจัยได้เน้นการสอนในขั้นที่ 2 คือ ขั้นของการสร้างตัวแทนทั้งนี้เพราะการใช้ตัวแทน(Representation) เป็นหัวใจสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์สามารถพัฒนาความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้อย่างลึกซึ้ง (NCTM.2000:279-283) นอกจากนี้ สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกายังได้ให้ความสำคัญของการใช้ตัวแทนในการเรียนคณิตศาสตร์โดยได้กำหนดการใช้ตัวแทนไว้ในมาตรฐานด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์และยังได้อธิบายมาตรฐานหลักสูตรการใช้ตัวแทนในระดับ Pre-K ถึงเกรด 12 ไว้ว่า ควรจัดให้นักเรียนสามารถคิดหาวิธีการใช้ตัวแทนและใช้ตัวแทนในการรวบรวมข้อมูล จัดบันทึกตลอดจนสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ได้ สามารถเลือก ประยุกต์และแปลความหมายของการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ สามารถใช้ตัวแทนเพื่อเป็นแบบจำลองและอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพ สังคมและคณิตศาสตร์โดยใช้แบบจำลองนั้นได้ อีกทั้งยังมีงานวิจัยอื่นๆ เช่น งานวิจัยของ กัลยา ทองสุ (2545 : 97-104) และ จริยวดี บรรทัดเที่ยง (2547: 62) ที่ได้สนับสนุนให้มีการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทนนี้ ผู้วิจัยจึงได้แบ่งการเรียนการสอนออกเป็น 4 แผน ตามวิธีการใช้ตัวแทนในการแก้โจทย์สมการซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดไว้ 4 วิธีคือ การแก้โจทย์สมการโดยการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนทั้ง 4 วิธีนี้ ผลปรากฏ ดังนี้

1.1 ผลจากการเรียนรู้โดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงใช้ในการแก้ ปัญหา นักเรียนสามารถนำ เชือก ลูกอม ขนม ขวดน้ำ แผ่นกระดาษ ผลไม้ ก้อนหิน และอื่นๆ มาใช้ในการแก้โจทย์สมการที่ครูกำหนดให้ได้เป็นอย่างดีและจากการอภิปรายถึงความเหมาะสมในการนำวัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงมาใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของแต่ละกลุ่ม นักเรียนส่วนใหญ่สามารถอธิบายแนวคิดและวิธีการหาคำตอบโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงมาใช้ประกอบการให้เหตุผลในแก้โจทย์สมการนั้นได้ถูกต้อง

1.2 ผลจากการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยการวาดภาพทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ดีกว่า ในบางครั้งการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงแม้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจคณิตศาสตร์

ได้ดีก็จริงแต่ในบางครั้งอาจไม่สะดวกในการนำของจริงมาใช้แก้ปัญหาได้ ดังนั้นการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทนการวาดภาพจึงเป็นวิธีที่สะดวกและง่ายต่อการเรียนรู้ ในการเรียนด้วยวิธีนี้นักเรียนจึงได้เห็นความเหมือนและความแตกต่างระหว่างการแก้ปัญหาโดยใช้วัตถุหรือแบบจำลองของจริงกับการใช้วิธีการวาดภาพทำให้สามารถเชื่อมโยงการคิดแก้ปัญหาระหว่างการใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงสู่การใช้วิธีการการวาดภาพได้

1.3 ผลจากการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตาราง พบว่า การที่นักเรียนได้ช่วยกันออกแบบตารางเพื่อใช้ในการหาคำตอบทำให้นักเรียนได้มองเห็นความสัมพันธ์ของเงื่อนไขตัวเลขที่เป็นแบบรูป(pattern)ที่ปรากฏอยู่ในตาราง ทำให้นักเรียนสามารถคาดเดาคำตอบได้โดยง่าย และจากกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยได้จัดให้นักเรียนเรียนเป็นกลุ่มๆ โดยให้นักเรียน 2 กลุ่มออกแบบตารางเพื่อแก้โจทย์สมการข้อเดียวกันและนำเสนอผลงานพร้อมกันโดยให้สมาชิกกลุ่มที่เหลือช่วยกันพิจารณา วิพากษ์ วิจัยการออกแบบตารางของทั้งสองกลุ่ม ผลปรากฏว่า การที่นักเรียนได้ช่วยกันออกแบบตารางแล้วนำเสนอผลงานของกลุ่มหน้าชั้นเรียน ทำให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นในการเรียนและจากการอภิปราย วิพากษ์ วิจัย การออกแบบตารางของแต่ละกลุ่มทำให้นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องในการออกแบบตารางและได้เรียนรู้การออกแบบตารางที่ถูกต้องและสอดคล้องกับโจทย์สมการที่กำหนดจากการอภิปราย วิพากษ์ วิจัยนั้น

1.4 ผลจากการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) พบว่า การที่นักเรียนได้รับการฝึกแก้โจทย์สมการโดยการกำหนดสัญลักษณ์(ตัวแปร)แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่าในข้อความหรือโจทย์สมการทำให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์สมการได้โดยใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

2. เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง เนื่องจากบทเรียนที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้คือเรื่องโจทย์สมการซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ที่มีความหลากหลายในเนื้อหา เช่น โจทย์สมการเกี่ยวกับจำนวน อายุ เศษส่วน ทศนิยม อัตราส่วน รวมไปถึงโจทย์สมการที่เป็นทั้งสมการเชิงเส้น 1 ตัวแปร และ 2 ตัวแปร ดังนั้นในการคัดเลือกโจทย์สมการเพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างตัวแทนในการอธิบายและหาคำตอบได้ง่าย ผู้วิจัยจึงได้คัดเลือกโจทย์สมการที่ง่ายและเหมาะสมต่อการใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหาในแต่ละวิธี ดังนี้

2.1 ในการแก้โจทย์สมการโดยใช้วัตถุหรือแบบจำลองของจริง ผู้วิจัยได้เลือกโจทย์สมการที่นักเรียนจะสามารถนำของจริงหรือสร้างแบบจำลองของจริง เช่น การใช้ลูกอม ขวดน้ำ แผ่นกระดาษ แดงโม ขนมและสิ่งต่างๆที่อยู่รอบตัวมาช่วยในการแก้ปัญหาต่างๆ โดยในการเรียนการสอนนักเรียนแต่ละกลุ่มได้ช่วยกันคิดหาวัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง มาใช้ในการ แก้โจทย์สมการของตนและนำเสนอวิธีการแก้ปัญหานั้นหน้าชั้นเรียน จากนั้นให้เพื่อนนักเรียนกลุ่มอื่นได้ช่วยกันแสดงความคิดเห็นในการใช้ตัวแทนต่อกลุ่มว่ามีความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด ทำให้นักเรียนได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการใช้ตัวแทนที่เหมาะสมและถูกต้อง

2.2 การแก้โจทย์สมการโดยการวาดภาพ เพื่อให้การแก้โจทย์สมการมีความต่อเนื่องและนักเรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างการใช้ตัวแทนวัตถุหรือแบบจำลองของจริงกับการวาดภาพ ผู้วิจัยจึงได้ใช้โจทย์เดียวกันในการอธิบายการแก้โจทย์สมการเพื่อให้นักเรียนได้เห็น

ความสัมพันธ์และการเชื่อมโยงการแก้ปัญหาโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง สู่การวาดภาพ และให้นักเรียนได้ฝึกแก้โจทย์สมการโดยใช้การวาดภาพจากโจทย์ที่แตกต่างจากโจทย์สำหรับการใช้วัตถุจริง

2.3 การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตาราง โดยปกติการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตารางมีประเด็นที่ใช้ในการพิจารณา คือ สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่างๆที่เป็นไปได้ทั้งหมด สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลสองชุด และสร้างตารางเพื่อค้นหารูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์ (ปริชา เนาว์เย็นผล. 2537 : 25-79) ดังนั้นในการเลือกโจทย์สมการผู้วิจัยจึงได้เลือกโจทย์สมการที่ฝึกให้นักเรียนสร้างตารางตามประเด็นต่างๆที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น ทำให้นักเรียนได้มองเห็นความสัมพันธ์ของตัวเลขที่เป็นแบบรูป (pattern) ที่ปรากฏอยู่ในตารางทำให้นักเรียนสามารถคาดเดาคำตอบได้ง่ายยิ่งขึ้น

2.4 การแก้โจทย์สมการโดยใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) เป็นวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่นิยมใช้กันมากในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังจะเห็นได้จากหนังสือเรียนที่ใช้กันทั่วไปก็มักใช้วิธีการแก้โจทย์สมการโดยใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร) ในการแก้โจทย์สมการโดยใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร) นี้ นักเรียนจะต้องสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆที่ปัญหากำหนดกับตัวแปรที่สมมติขึ้นให้อยู่ในรูปของสมการให้ได้นักเรียนจึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหานั้นได้

3. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) นี้ ผู้วิจัยได้จัดให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาดังกล่าวโดยผ่านกระบวนการกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งครูได้ละความสามารถ เก่ง ปานกลางและอ่อน การจัดกิจกรรมโดยใช้กระบวนการกลุ่มนี้ เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ผู้เรียนต้องร่วมกันแก้โจทย์สมการต่างๆโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา 5 ขั้นตอนคือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบคำตอบ ในการหาคำตอบในแต่ละขั้น สมาชิกในกลุ่มจะได้ร่วมกันพูดคุย ชักถาม อธิบาย แสดงความคิดเห็นต่าง ๆ มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกันเพื่อหาข้อสรุปร่วมกันของกลุ่มและนำเสนอผลงานของกลุ่มหน้าชั้นเรียน และการที่นักเรียนได้เรียนรู้โดยผ่านกระบวนการกลุ่ม ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ถึงวิธีคิดและได้เห็นวิธีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ ช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหามากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับแนวการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของ ปริชา เนาว์เย็นผล (2543 : 35) ที่ได้กล่าวไว้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องให้ความสำคัญกับการอภิปรายร่วมกันของนักเรียนเพื่อกำหนดแนวทางในการหาวิธีแก้ปัญหา ทั้งนี้เพราะการให้นักเรียนทำงานคณิตศาสตร์ร่วมกันจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้มีการสื่อสาร การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ในการปฏิสัมพันธ์กันถือเป็นการสร้างบรรยากาศในการเรียนที่ดีนอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของสลาวิน (Slavin.1996:49-50) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับความสำเร็จกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบร่วมมือพบว่าการได้พูดคุยถึงกระบวนการต่างๆ จะทำให้ทราบข้อบกพร่องและสามารถแก้ปัญหาได้ ประสพการณ์เป็นสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลและสร้างกระบวนการในการเรียนรู้ที่สามารถพิสูจน์และวิพากษ์วิจารณ์กันได้ การทำงานร่วมกับผู้อื่นสามารถช่วยให้หา

ข้อสรุปและมีความคิดริเริ่มในการเรียนรู้การมีปฏิสัมพันธ์กันทำให้นักเรียนเกิดแนวคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาทั้งหมดนี้อาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ส่งผลให้ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า

จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ข้อสังเกตจากการศึกษาค้นคว้า ดังนี้

1.ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน(Representation) ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) พบว่า นักเรียนใช้เวลาในการเรียนรู้วิธีการแก้โจทย์สมการโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงค่อนข้างมากเนื่องจากนักเรียนยังไม่คุ้นเคยการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทนที่เป็นวัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

2.การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตาราง นอกจากนักเรียนจะได้ฝึกการออกแบบตารางเพื่อหาคำตอบจากโจทย์สมการแล้วยังทำให้นักเรียนได้มองเห็นแบบรูป (pattern) หรือความสัมพันธ์ของตัวเลข ซึ่งนอกจากจะช่วยให้ นักเรียนสามารถหาคำตอบได้เร็วยิ่งขึ้นแล้ว แบบรูปยังเป็นการเรียนรู้พื้นฐานที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ต่อไป

3. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ตัวแทนจาก การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตาราง และการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร) เป็นการเรียนรู้จากรูปธรรมไปสู่นามธรรมซึ่งเป็นการเรียนรู้ที่จะทำให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง

4. จากการตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) ซึ่งผู้วิจัย ได้ตรวจให้คะแนนตามทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้กำหนดไว้ 5 ขั้น คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจคำตอบผู้วิจัย พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ค่อยแสดงวิธีการตรวจคำตอบเท่าที่ควร

ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

จากการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์และการศึกษาค้นคว้าในครั้งต่อไป ดังนี้

1. ก่อนที่จะมีการอธิบายหรือสอนเนื้อหาใดก็ตาม ครูควรชี้ให้เห็นความสำคัญของสิ่งที่เรียนก่อนว่ามีความสำคัญและมีประโยชน์อย่างไร ทำให้นักเรียนเห็นด้วยในสิ่งที่ครูอธิบายซึ่งจะทำให้ให้นักเรียนเฝ้ายามและสนใจที่จะรับฟังสิ่งที่ครูจะสอนอย่างตั้งใจ

2. การสอนเรื่องการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน(Representation) ครูควรสอนให้นักเรียนรู้จักตัวแทนทางคณิตศาสตร์ก่อนว่ามีอะไรบ้าง จากนั้นค่อยสอนการนำตัวแทนไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาในลักษณะต่างๆ เช่น การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้วัตถุจริง การวาดภาพ การใช้ตาราง และการใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)

3. ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เนื่องจากการแก้ปัญหาโดยใช้ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นการเรียนรู้ที่เป็นระบบ มีลำดับขั้นตอนในการคิดซึ่งจะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้

4. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดกระบวนการคิด ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนโดยใช้กระบวนการกลุ่มเพราะการเรียนรู้โดยผ่านกระบวนการกลุ่มจะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีคิดและได้เห็นวิธีแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ การได้พูดคุย อธิบายถึงกระบวนการต่างๆ จะทำให้นักเรียนได้เห็นข้อบกพร่องและแก้ปัญหาได้

5. การสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอน ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนครูพยายามสร้างบรรยากาศในการเรียนให้สนุก ทำทนาย ไม่เข้มงวดเอาจริงเอาจังจนเกิดความตึงเครียด สร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองเพื่อให้นักเรียนมีความรู้สึกสนุก เป็นอิสระ ทำให้นักเรียนกล้าพูดกล้าแสดงออกและอยากมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมต่างๆ ซึ่งถือเป็นการจัดบรรยากาศในการเรียนที่ส่งเสริมและสนับสนุนการแก้ปัญหาของผู้เรียน ให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของ กอนซาเลส (Gonsales.1994:74) ซึ่งได้กล่าวถึงบทบาทของครูเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า ครูต้องสร้างบรรยากาศที่ทำให้นักเรียนมีความรู้สึกเป็นอิสระ กล้าคิดกล้าแสดงออก และต้องเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนการแก้ปัญหายอยู่เสมอ

6. การทดสอบเพื่อวัดผลและประเมินผลนักเรียนเกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) ที่ผู้วิจัยได้ตรวจให้คะแนนตามทักษะ/กระบวนการแก้ปัญหาที่กำหนดไว้ 5 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจคำตอบ ครูไม่ควรดูคำตอบว่าถูกหรือผิดเท่านั้นแต่ควรสังเกตด้วยว่านักเรียนมีข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาในขั้นตอนใด

ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนลักษณะนี้ แต่เปลี่ยนกลุ่มตัวอย่าง เนื้อหาและระดับชั้นอื่นๆ ต่อไป
2. ในการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน(Representation) นอกจากจะพิจารณาผลการแก้ปัญหาแล้วควรได้มีการศึกษาข้อบกพร่องของการแก้ปัญหาวัย

บรรณานุกรม

- กมล ชื่นทองคำ. (2527). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ในโรงเรียนสังกัดกรุงเทพมหานคร. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2544) .หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).
- กัลยา ทองสุ. (2545). การพัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน เพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 . วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- ขวัญจิรา อนันต์. (2546). การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงสาเหตุของตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยและสถิติทางการศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา
- คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์. (2524). ชุดเสริมประสบการณ์สำหรับครูสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ทบวงมหาวิทยาลัย.อัดสำเนา.
- จรรยา ภูอุดม. (2524). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหากับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนตามการประเมินของครู. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- จริยาวดี บรรทัดเที่ยง.(2547). ผลการใช้ชุดกิจกรรมที่ส่งเสริมทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการใช้ตัวแทนเรื่องคู่อันดับและกราฟสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา).กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- จารึก วิเชียรเกื้อ. (2527). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการสอนโดยใช้แบบฝึกหัดในแบบเรียนและแบบฝึกหัดที่สร้างขึ้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ :บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัด สำเนา.
- จุฑารัตน์ จันทะนาม. (2543). การพัฒนาชุดการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยตนเองที่ใช้การ์ตูนประกอบสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ :บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.

- จันทร์เพ็ญ ธนาศุภกรกุล. (2526). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อุดສຳເນາ.
- ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. (2545). การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ. (2542). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดສຳເນາ
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2528). ชุดการสอนในระดับประถมศึกษา. กรุงเทพฯ ฯ มหาวิทยาลัยสุโขทัย ธรรมาธิราช. อุดສຳເນາ
- ชูลีพร แจ่มถนอม. (2542). การสร้างแบบทดสอบที่ใช้ในการฝึกการคิดโจทย์คำนวณเคมี เรื่อง สมบัติของก๊าซ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดສຳເນາ.
- ดวงเดือน อ่อนน่วม. (2536, พฤศจิกายน). โจทย์ปัญหา ปัญหาโจทย์ . วารสารคณิตศาสตร์. ทบวงมหาวิทยาลัย. (2524). ชุดการเรียนการสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ ฯ : ทบวงมหาวิทยาลัย.
- ทองหล่อ วงษ์อินทร์. (2537). การวิเคราะห์ความรู้เฉพาะด้านกระบวนการในการคิดแก้ปัญหา และเมตาคอกนิชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาผู้ชำนาญและไม่ชำนาญในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อุดສຳເນາ.
- นคร ปลื้มฤดี. (2530). การศึกษาผลสัมฤทธิ์และความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนเรื่องสมการโดยใช้วิธีการเรียนเพื่อรู้แจ้งกับการสอนตามปกติ. ปรินญา นิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา).กรุงเทพฯ:บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดສຳເນາ.
- นิกร ขวัญเมือง. (2545). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเมตาคอกนิชันและการอบรมเลี้ยงดูกับ ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม.(การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ ฯ :บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรี นครินทรวิโรฒ. อุดສຳເນາ.
- ประเสริฐ ส่องแสง. (2526). การทดลองวิธีการให้แบบฝึกหัดและการตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ส่งผลต่อ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดສຳເນາ.

- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). หน่วยที่ 12 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะ และวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 12-15. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- _____. (2538). การพัฒนาทักษะการคิดคำนวณของนักเรียนระดับประถมศึกษา. สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์. กรุงเทพฯ:โรงพิมพ์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- _____. (2543). กิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด.วารสารคณิตศาสตร์. 43 (ฉบับพิเศษ) : 35.
- พรทิพย์ ยาวะประภาษ. (2537,มีนาคม-เมษายน).เทคนิคการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์. 38 (426 - 427) : 57-62 .
- เพลินพิศ กาสลัก. (2542). สร้างแบบทดสอบที่ใช้ในการฝึกความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา โจทย์คณิตศาสตร์ เรื่องการหาปริมาตรและพื้นที่ผิว สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ. ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดมศึกษา.
- เยาวลักษณ์ สมวาส. (2545). ผลของการสอนซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย เรื่อง โจทย์สมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) .กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดมศึกษา.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2525). พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน.กรุงเทพฯ : อักษรเจริญ.
- รุ่งฤดี ลุ่มร้อย. (2546). ชุดสื่อประสมเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องสมการของนักเรียนชั้นปีที่ 2 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การ มัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดมศึกษา.
- ล้วน สายยศ;และอังคณา สายยศ. (2539). เทคนิคการวัดผลและการเรียนรู้.กรุงเทพฯ:สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2541). เทคนิคการสร้างข้อสอบและข้อสอบความถนัดทางการเรียน.พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- วรรณคดี วรรณศิลป์. (2523). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 . วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- วาสนา สุพัฒน์.(2530). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอนตามคู่มือครูโดยการทำแบบฝึกหัดแบบปรนัยชนิดเลือกตอบแบบฝึกหัดแบบอัตนัยกับการทำแบบฝึกหัดในหนังสือแบบเรียน. ปรินิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อุดมศึกษา.

- วิไลวรรณ เอื้อสุวรรณ. (2531). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้อาณัติศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีความสามารถในการเรียนแตกต่างกันโดยใช้วิธีสอนแบบวรรณคดีกับวิธีสอนของ สสวท. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- ศิริรัตน์ วรวิชา. (2539). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง สมการโดยใช้ชุดการเรียนการสอนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- ศักดิ์ดา บุญโต. (2539). ห้องเรียนสมองไว เล่ม 2. กรุงเทพฯ ฯ : โปรดักทีฟบุ๊ค จำกัด.
- ส.วาสนา ประवालพฤษ. (2537). การวัดผลจากการปฏิบัติจริง. วารสารการวัดผลการศึกษา. สมบัติ โพธิ์ทอง. (2539). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สมสว่าง ชนะพานิชย์สกุล. (2539). การสร้างแบบทดสอบวัดกระบวนการแก้โจทย์คณิตศาสตร์. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม.(การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สวัสต์ จิตต์จนะ. (2535). แนวคิดการสอนโจทย์ปัญหา. การพัฒนาหลักสูตร 11(110) : 157-159.
- สิริพร ทิพย์คง. (2536). ทฤษฎีและวิธีการสอนคณิตศาสตร์. (เอกสารประกอบคำสอน). กรุงเทพฯ ฯ : คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อัดสำเนา .
- สำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). รายงานการประเมินคุณภาพทางการศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2542. กรุงเทพฯ ฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.
- สุขจิตร ตั้งเจริญ. (2543). การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สุโขทัยธรรมาธิราช, มหาวิทยาลัย. (2532). การสอนกลุ่มทักษะ 2 (คณิตศาสตร์) หน่วยที่ 8 – 15. (เอกสารประกอบคำสอน). กรุงเทพฯ ฯ : ฝ่ายการพิมพ์ มสธ.
- สุนิสา พงษ์ประยูร. (2543). การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) . กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.

- สุนันท์ ฉิมวัย. (2543). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สุดสวาท ชันธมูล. (2530). ผลการสอนโจทย์ปัญหา 2 วิธี ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สุลัดดา ลอยฟ้าและคณะ. (2530). การพัฒนารูปแบบการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา. รายงานการวิจัย. กรุงเทพฯ : คณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- สุนนมาศ สันโดษ. (2520). ความเข้าใจโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- สุวิริยาวิชัย พาณิชยสว. (2542). รายงานการวิจัยเรื่องการศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่ใช้แบบฝึกหัดเสริมการแก้โจทย์ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ในชั้นเรียน. กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อัดสำเนา.
- เสาวนีย์ สีขาบัณฑิต. (2528). เทคโนโลยีทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า.
- อนันต์ โพธิ์กุล. (2543). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนแบบบูรณาการเชิงวิธีการกับการสอนตามคู่มือครู. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- อาภา ฤกษ์ช้าง. (2534). การสอนแบบแก้ปัญหา. วารสารแนะแนว. 25 (135) : 15-23.
- อังศุมาลิน เพิ่มผล. (2532). การสร้างแบบฝึกทักษะการคำนวณวิชาคณิตศาสตร์เรื่องวงกลมสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.

- Adam,S. ; et al. (1977). *Teaching Mathematics with Emphasis on the Diagnostic Approach*. New York : Harper & Row.
- Anderson ,K.B.; & Pingry, R.E. (1973) . Problem – Solving in Mathematics . *The Learning Mathematics : It's Theory and Practice*. Washington. D.C. : The National Council of Teachers and Mathematics.
- Baroody ,A. J. (1987). *Children 's Mathematics Thinking*. New York : Teacher College Press.
- Bellard, Jane William. (2000). Students Use of Multiple Representations in Mathematical Problem Solving. *Dissertation Abstracts International*. 61-09A.
- Billow , F. L. (1962). *The Teacher Work Out His Own Exercises : The Techniques of Language Teaching*. London : Green and Company Ltd.
- Brucehner, Leo J. ; & Grossnickle, Faster E. (1957). *How to make Arithmetic meaningful*. Philadelphia : The John C. Winston Co.
- Burkett, Denine. Garol. (1998). Making Connections Between the Tabular, Symbolic, and Graphical Representations in the Context of writing Activities Used During (Instruction of Functions,). *Dissertation Abstracts Online*.p. 61-02A.
- Carrol , John B. (1963, May). A Model of School Learning. *Teacher College Recor* . 64 : 723- 733 .
- Edwards , Clefford H . (1975,February). Changing Teacher Behavior through Self-Instruction and Supervised Micro Teaching in a Competency Based Program. *The Journal of Educational Research*.
- Erion, Ralph Hoyd. (1985). The Effect of Mode of Representation and Problem Complexing on Performance in Problem Situation by Preservice Elementary School Teachers. *Dissertation Abstracts Online*.p.46-10A.
- Gagne' , R.M. (1970). *The Condition of Learning*. New York : CSB College Publishing.
- Fan, Chung -Teh. (1952). *Item Analysis Table*. Princeton, New Jersey : Educational Testing Service.
- Fehr , Howard. (1972) . *Teaching Model Mathematics in the Elementary School*. Philippines : Adderson - Wesley Publishing Company.
- Giffune, Magdelene Pontolillo. (1977, April). The Effect of Inservice Training in Reading Upon Students Ability to Solve Verbal Problems in Mathematics :*Dissertation Abstracts International*. 37 (online) : 6324 –A.
- Greeno, James G. ; & Hall, Roger B. (1977, January). Practicing Representation : Learning with and about Representational Form. *Phi Delta kappan* 79 : 361-67.

- Haid, Christopher Jason. (2000). The Effect of Using Multiple Representations on Students' Knowledge and Perspective of basic Algebraic Concepts, *Dissertation Abstracts Online*.p.61-07A.
- Hatfield, Mary M ., Edwards , Noney ; & Bilter, Gary G. (1993). *Mathematics Methods for the Elementary and Middle School*. 2nd ed. Massachusetts : Allyn and Bacon,Inc.
- Heimer,Ralph T. ; & Cecil R. True blood . (1977). *Strategies for teaching Children Mathematics*. Massachusetts : Addison Wesley .
- Helton, Floyd F. (1958) . *Introducing Mathematics* . 2nd ed. New York : John Wiley & Sons , Inc.
- Hines, Mary Edlen. (1998). Analysis of Processes Used by Middle-School Students to Interpret Functions Embedded in Dynamic Physical Models and Represented In Tables, Equations, Graphs (Function Interpretation Embedded Function). *Dissertation Abstracts Online*.p.59-09A.
- Kennedy, Leonard M . (1984). *Guiding Children 's Learning of Mathematics*. 4th ed. Belmont, California : Wadsworth Publishing Company.
- Kramarski, B. ; & Mevarech, Z.R. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in Classroom. The effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal*,40,281-310.
- Krulik,Stephen ; & Reys,Obert E . (1980). *Problem Solving in School Mathematics* . Washington D.C. : The Nationnal Council of Teachers of Mathematics .
- Lawrey, Daniel Ralph. (1978, November). Effect of Feedback on Individuality. *Dissertation Abstracts Interational*. 36 (online). 317-A.
- Lester, F,K. (1977, November). Ideas about Problem Solving : A Look at Some Psychological Research. *Arithmetics Teacher*. 25 : 12-15.
- National Council of teacher of Mathematics. (1997) . Problem Solving in School Mathematics. *Arithmetic Teachers*. (25) November : 17 .
- . (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston. Virginia : NCTM.
- Noll, Rhona Susan. (1983). Effect of Verbal Cueing and a Visual Representation on Percent problem Solving Performance of Remedial Adults. *Dissertation Abstrack Online*.p.4317-12A.
- O'keel, James Joseph. (1992). Using Dynamic Representation to Enchance Student's

- Understanding of the Concept of Function (Students understanding). *Dissertation Abstracts Online* . p. 53-09A.
- Patty, Green . (1968) . *Language Workbook and Practices Material ; Developing Language Teaching*. London : Green and Company.
- Polya, George. (1957). *How to Solve It*. 2nd ed . A New Aspect of Mathematical Method. New York : Doubleday and Company Garden City. York : Doubleday and Company Garden City.
- _____. (1973). *How to Solve It*. New Jersey : Princeton University Press.
- Prescott, Daniel A. (1961). Report of Conference on Child Study, *Education Educational Bulletin*. Faculty of Education, Chulalongkorn University.
- Revers , Willga M. (1968). *Teaching Foreign Language Skills*. Chicago : The University of Chicago Press.
- Reys, Robert E. , Marilyn N. Suydam ; & Mary Montgomery Lindquist. (1992). *Helping Children Learn Mathematics*. 3rd ed. Boston : Allyn and Bacon, Inc.
- Rittle John, Bethang. (1999). Iterative Development of Conceptual and Procedural Knowledge : A Framework for Understanding Knowledge Change (Learning, Problem Representation). *Dissertation Abstracts Online*. P. 60-06A.
- Sternberg, R.J. (1986). *Intelligence Applied*. Orlando, Florida : Harcourt Brace Jovanovich.
- Suydam , H. L. (1990). *Untangling Clues From Research on Problem Solving. Problem Solving in School Mathematics*. National Council of teacher of Mathematics.
- Swanson , H. Lee. (1990). Influence of Metacognitive Knowledge and Aptitude on Problem solving. *Journal of Educational Psychology*. 82 (2) : 306-314.
- Wallas, G. (1972). The Art of Thought. *In A Systematic Introduction to Psychology of Thinking*. D.M. Johnson (edited). New York : Harper & Row.
- Webb, N.L. (1975, November). An Exploration of Mathematical Problem solving Process. *Dissertation Abstracts International*. 36 : 2689-A.
- Webster, N. (1979). *Webster's New Twentieth Century Dictionary of the English Language Unabridged*. Springfield, Massachusetts : Collins & World Company.
- Willson , Jame W . (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. *In Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. P.57-58. New York : Macmillan Publishing Company.

Zalewski ,Claire Jean. (1978, July). An Investigation of Selected Factors Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem. *Dissertation Abstracts International*. 58 :2804-A.

———. (1978). *Mathematical Problem Solving in the Elementary School. : Some Education and Psychological Considerations*. Columbus Ohio ; ERIC / SMRAC.

ภาคผนวก ก
คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้

- ผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (IOC) ของแบบทดสอบชนิดอัตนัย
- ค่าความยาก (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
- ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (α)

ตาราง 6 ผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
(IOC) ของแบบทดสอบชนิดอัตนัย

ข้อที่ \ คนที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม $\sum R$	IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	3	1
2	+1	+1	+1	3	1
3	+1	+1	± 1	3	1
4	+1	+1	+1	3	1
5	+1	+1	+1	3	1
6	+1	+1	+1	3	1
7	+1	+1	+1	3	1
8	+1	+1	+1	3	1
9	+1	+1	+1	3	1
10	+1	+1	+1	3	1

ตาราง 7 ค่าความยาก (P_E) ค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการ
แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

ข้อที่	(P_E)	(D)
1	0.63	0.67
2	0.41	0.38
3	0.40	0.48
4	0.36	0.49
5	0.46	0.56

ค่าความยาก (P_E) อยู่ระหว่าง 0.40 – 0.63 ค่าอำนาจจำแนก (D) อยู่ระหว่าง 0.38 – 0.67

การคำนวณค่าความยาก (P_E) และค่าอำนาจจำแนก (D)

การคำนวณค่าความยาก (P_E)

คำนวณค่าความยาก (P_E) ของแบบทดสอบโดยใช้วิธีของวิทนีและซาเบอร์ ดังนี้

$$P_E = \frac{S_U + S_L - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

$$\text{ข้อ 1 } P_E = \frac{246 + 132 - (2 \times 27 \times 2)}{2 \times 27 (10 - 2)} = 0.63$$

$$\text{ข้อ 2 } P_E = \frac{161 + 58 - (2 \times 27 \times 0)}{2 \times 27 (10 - 0)} = 0.41$$

$$\text{ข้อ 3 } P_E = \frac{182 + 65 - (2 \times 27 \times 1)}{2 \times 27 (10 - 1)} = 0.40$$

$$\text{ข้อ 4 } P_E = \frac{186 + 79 - (2 \times 27 \times 2)}{2 \times 27 (10 - 2)} = 0.36$$

$$\text{ข้อ 5 } P_E = \frac{206 + 71 - (2 \times 27 \times 1)}{2 \times 27 (10 - 1)} = 0.46$$

การคำนวณค่าอำนาจจำแนก (D)

หาค่าอำนาจจำแนก (D) เพื่อวิเคราะห์รายข้อ โดยใช้วิธีของวิทนีและซาเบอร์ ดังนี้

$$D = \frac{S_U - S_L}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

$$\text{ข้อ 1 } D = \frac{246 - 132}{27 (10 - 2)} = 0.67$$

$$\text{ข้อ 2 } D = \frac{161 - 58}{27 (10 - 0)} = 0.38$$

$$\text{ข้อ 3 } D = \frac{182 - 65}{27 (10 - 1)} = 0.48$$

$$\text{ข้อ 4 } D = \frac{186 - 79}{27 (10 - 2)} = 0.49$$

$$\text{ข้อ 5 } D = \frac{206 - 71}{27 (10 - 1)} = 0.56$$

ตาราง 8 คะแนนความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ ของนักเรียนจำนวน 107 คน

ข้อที่	x	x ²	$\bar{x}$	S.D.	S ²	α
1	872	7672	8.21	2.10	4.41	0.77 *
2	707	5465	6.61	2.74	7.51	
3	577	3719	5.39	2.39	5.71	
4	643	4525	6.01	2.50	6.25	
5	587	4245	5.49	3.11	9.67	
รวม	3392	116780	31.70	9.34		

หมายเหตุ * ค่าความเชื่อมั่นที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ SPSS 10.0 for Windows คือ 0.77

หาความเชื่อมั่น (α) ของแบบทดสอบ โดยใช้วิธีของครอนบัค ดังนี้

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right)$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่น
 n แทน จำนวนของแบบทดสอบ
 S_i^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของคะแนนข้อหนึ่งๆ
 S_t^2 แทน คะแนนความแปรปรวนทั้งหมด

การแทนค่า

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{107}{107-1} \left(1 - \frac{33.55}{87.24} \right) \\ \alpha &= \frac{107}{106} (1 - 0.38) \\ \alpha &= \frac{107}{106} (0.62) \\ \alpha &= 0.63 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข
การวิเคราะห์ข้อมูล

- คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ก่อนเรียนและหลังเรียน
- การคำนวณค่า t – test Dependent

ตาราง 9 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)

คนที่	คะแนนสอบ (50 คะแนน)		ผลต่าง	ผลต่างกำลังสอง	t
	ก่อนเรียน	หลังเรียน			
1.	9	32	23	529	
2.	20	40	20	400	
3.	8	43	35	1225	
4.	17	47	30	900	
5.	19	29	10	100	
6.	11	27	16	256	
7.	8	24	16	25	
8.	10	33	23	529	
9.	9	16	7	49	
10.	11	31	20	400	
11.	8	28	20	400	
12.	10	45	35	1225	
13.	10	24	14	196	
14.	8	32	24	576	
15.	5	17	12	144	
16.	7	38	31	961	
17.	7	19	12	144	
18.	5	17	12	144	
19.	8	12	4	16	
20.	8	17	9	81	
21.	4	19	15	225	
22.	9	29	20	400	
23.	7	31	24	576	
24.	6	40	34	1156	

ตาราง 9 (ต่อ)

คนที่	คะแนนสอบ (50 คะแนน)		ผลต่าง	ผลต่างกำลังสอง	t
	ก่อนเรียน	หลังเรียน			
25.	7	22	15	225	
26.	3	27	24	576	
27.	12	20	8	64	
28.	10	21	11	121	
29.	2	23	21	441	
30.	12	38	26	676	
31.	14	38	24	576	
32.	17	28	11	121	
33.	6	26	20	400	
34.	7	22	15	225	
35.	18	27	9	81	
36.	13	41	28	784	
37.	12	23	11	121	
38.	14	29	15	225	
39.	5	35	30	900	
40.	15	32	17	289	
41.	3	26	13	169	
42.	28	49	21	441	
43.	8	18	10	100	
44.	11	28	17	289	
45.	12	31	19	361	
46.	8	30	22	484	
47.	21	48	27	729	
48.	7	33	26	676	
49.	6	38	32	1024	
50.	12	28	16	256	

ตาราง 9 (ต่อ)

คนที่	คะแนนสอบ (50 คะแนน)		ผลต่าง	ผลต่างกำลังสอง	t
	ก่อนเรียน	หลังเรียน			
51.	10	17	7	49	16.87**
52	13	18	5	25	
53.	14	37	23	529	
54.	18	27	9	81	
55.	8	15	7	49	
56.	10	24	14	196	
57.	9	27	18	324	
58.	10	17	7	49	
59.	15	27	12	144	
60.	21	28	7	49	
รวม	645	1708	1063	22737	

$$t_{(.01,59)} = 2.66$$

$$**p < .01$$

การคำนวณค่า t – test Dependent

ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) โดยใช้สูตร t – test dependent ของเฟร็ดริกสัน ดังนี้

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N - 1}}} \quad , df = N - 1$$

$$t = \frac{1063}{\sqrt{\frac{60 \times 22737 - (1063)^2}{60 - 1}}} \quad , df = 60 - 1$$

$$t = \frac{1063}{\sqrt{\frac{60 \times 22737 - (1063)^2}{60 - 1}}} \quad , df = 59$$

$$t = \frac{1063}{\sqrt{\frac{1364220 - 1129969}{59}}} \quad , df = 59$$

$$t = \frac{1063}{\sqrt{\frac{234251}{59}}} \quad , df = 59$$

$$t = \frac{1063}{\sqrt{39703559}} \quad , df = 59$$

$$t = \frac{1063}{63.0107} \quad , df = 59$$

$$t = 16.87 \quad , df = 59$$

ภาคผนวก ค
เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

- ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
- แผนการจัดการเรียนรู้ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้
ตัวแทน (Representation) จำนวน 4 แผน

ตัวอย่าง

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation)

คำชี้แจง

แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบที่กำหนดให้ผู้เข้าสอบได้แสดงความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์สมการโดยเขียนคำตอบลงบนกระดาษคำตอบตามกระบวนการแก้ปัญหา ดังนี้

- 1) ขั้นทำความเข้าใจในปัญหา เป็นขั้นที่นักเรียนต้องตอบคำถามให้ได้ว่า สิ่ง โจทย์ถามคืออะไรและสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง
- 2) ขั้นการสร้างตัวแทน เป็นขั้นที่นักเรียนต้องแสดงความสามารถในการเข้าใจปัญหาโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลอง การวาดภาพ การสร้างตาราง การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) เพื่อสร้างความคิดรวบยอดในการแก้โจทย์สมการนั้น
- 3) ขั้นการวางแผน เป็นขั้นที่นักเรียนต้องวิเคราะห์และประมวล ข้อมูล ความรู้ต่างๆ ที่เรียนมาเพื่อหาว่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนด สิ่ง โจทย์ถามและจากตัวแทนที่นักเรียนสร้างขึ้นนั้นสิ่งเหล่านี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรและจะเขียนโจทย์ปัญหานั้นในรูปสมการเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างไร
- 4) ขั้นการดำเนินการ เป็นขั้นที่นักเรียนดำเนินการแก้สมการหรือดำเนินการตามที่ได้วางแผนไว้
- 5) ขั้นการตรวจสอบคำตอบ เป็นขั้นที่นักเรียนจะต้องแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้ดูว่า คำตอบที่ได้ดูนั้นมีความสอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือไม่

เกณฑ์การให้คะแนน

แบบทดสอบต่อไปนี้ทั้งหมด 5 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน ผู้เข้าสอบจะได้ คะแนนตามกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งกำหนดคะแนนในแต่ละขั้น ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจในปัญหา

- 0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย
- 1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน
- 2 หมายถึง เข้าใจปัญหาดี

2. ขั้นสร้างตัวแทน

- 0 หมายถึง ไม่สร้างตัวแทนในการแก้ปัญหาเลย
- 1 หมายถึง แสดงความพยายามในการสร้างตัวแทนหรือสร้างตัวแทนได้ไม่สมบูรณ์
- 2 หมายถึง สร้างตัวแทนของปัญหาได้สมบูรณ์

3. ขั้นของการวางแผน

- 0 หมายถึง ไม่พยายามหรือวางแผนได้ไม่สมบูรณ์ทั้งหมด
- 1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน
- 2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้อง

4. ขั้นการดำเนินการ

- 0 หมายถึง ไม่ตอบหรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม
- 1 หมายถึง จำนวนผิดพลาด ตอบบางส่วนสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ
- 2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูก

5. ขั้นตรวจคำตอบ

- 0 หมายถึง ไม่ตรวจสอบคำตอบ
- 1 หมายถึง แนวทางในการตรวจคำตอบไม่เหมาะสม
- 2 หมายถึง ตรวจคำตอบและใช้วิธีการที่เหมาะสม

เกณฑ์การประเมินผล

เกณฑ์การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (representation) มีดังนี้

- ได้คะแนนร้อยละ 80 - 100 อยู่ในเกณฑ์ ดีเยี่ยม
- ได้คะแนนร้อยละ 70 - 79 อยู่ในเกณฑ์ ดีมาก
- ได้คะแนนร้อยละ 60 - 69 อยู่ในเกณฑ์ ดี
- ได้คะแนนร้อยละ 50 - 59 อยู่ในเกณฑ์ ปานกลาง (ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ)
- ได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ 50 อยู่ในเกณฑ์ ปรับปรุง

1. นิคหน้อยมีเหรียญอยู่ในกระบอกสาม ชนิด คือเหรียญบาท เหรียญห้าบาทและเหรียญ สิบบาท อย่าง
ละเท่าๆกันคิดเป็นจำนวนเงินทั้งสิ้น 128 บาท จงหาว่านิคหน้อยมีเหรียญห้าบาท เป็นจำนวนเงินเท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

2. เมื่อ 10 ปีก่อนปราณีมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของโสภา ปัจจุบัน ปราณีและโสภามีอายุรวมกันได้ 62 ปีพอดี จงหาว่าในปัจจุบันปราณีมีอายุเท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

.....

3. $\frac{1}{2}$ ของอายุน้องเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ของอายุพี่ ถ้าพี่กับน้องอายุรวมกันได้ 60 ปี จงหาว่าน้องมีอายุเท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

.....

4. ตาขมนับจำนวนเปิดและวักที่เลี้ยงไว้รวมกันได้ 16 ตัว ถ้านับจำนวนขาจะได้ขาเปิด มากกว่าขาวั
8 ขา อยากทราบว่าตาขมเลี้ยงเปิดและวักอย่างละกี่ตัว

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

5. ครูมีหนังสืออยู่จำนวนหนึ่ง แจกให้นักเรียนจำนวน 2 ใน 5 ของจำนวนหนังสือที่มีอยู่ ปรากฏว่า ยังมีหนังสือเหลืออยู่จำนวน 60 เล่ม จงหาว่าเดิมครูมีหนังสืออยู่เท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้
การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ..1..

เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน
(Representation) : วัตถุจริง หรือ แบบจำลองของจริง (จำนวน 4 คาบ)

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงได้

1.2 ด้านทักษะกระบวนการ : นักเรียน

- 1) มีความสามารถในการแก้ปัญหาได้
- 2) มีความสามารถในการให้เหตุผลได้
- 3) มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอข้อมูลได้

1.3 ด้าน คุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

- 1) มีความรับผิดชอบ
- 2) มีระเบียบวินัย
- 3) ทำงานเป็นระบบ

2. สารการเรียนรู้

1. แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน

(Representation) : วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงเป็นการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้แก้ปัญหามustแก้ปัญหโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา 5 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจ ขั้นสร้างตัวแทน ขั้นวางแผน ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจคำตอบ โดยในขั้นของการสร้างตัวแทนนั้นผู้แก้ปัญหามustตัดสินใจในการเลือกใช้ตัวแทนในการแก้ปัญหานั้นๆว่า ผู้แก้ปัญหามustใช้ของจริงในการแก้ปัญหหรือจะสร้างแบบจำลองของจริงในการแก้ปัญหานั้น

ต่อไปนี้เป็นคำแนะนำตัวอย่างของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ตัวอย่างที่ 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล จงหาว่าราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่กี่ผล

วิธีทำ

1. **ขั้นทำความเข้าใจ :** เป็นขั้นที่ผู้แก้จะต้องวิเคราะห์และตอบคำถามให้ได้ว่า สิ่งที่โจทย์ถาม และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ นั้น มีอะไรบ้าง ดังนี้

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ จงหาว่าราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ กี่ผล

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ

ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล

2. **ขั้นสร้างตัวแทน :** ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหามustทำการตัดสินใจเลือกใช้ตัวแทนที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา เช่น ผู้แก้ปัญหามustใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง ของลูกแอปเปิ้ล สาลี่และมะม่วง เพื่อใช้เป็นตัวแทนของสถานการณ์ที่โจทย์กำหนด ดังนี้

กำหนดให้



แทน ราคาของแอปเปิ้ล



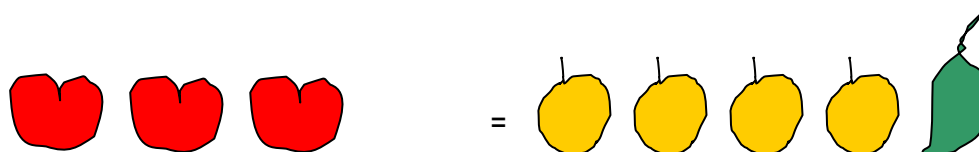
แทน ราคาของสาลี่



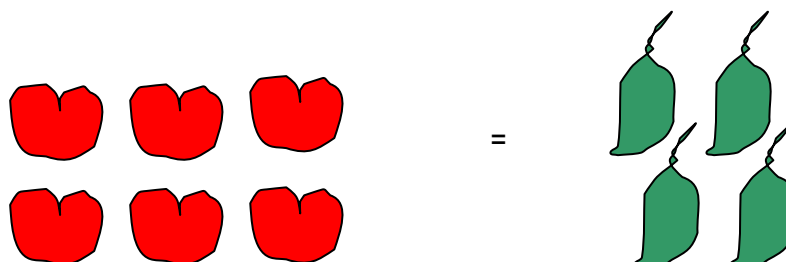
แทน ราคาของมะม่วง

3. **การวางแผน :** ในขั้นนี้ผู้แก้ปัญหามustวางแผนในการแก้ปัญหามustว่าจะใช้ตัวแทนที่สร้างขึ้นนั้นมาช่วยในการแก้ปัญหามustได้อย่างไร ซึ่งผู้แก้ปัญหามustอาจสร้างสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดโดยใช้ตัวแทนวัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง ดังนี้

เงื่อนไขที่ 1 : ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล

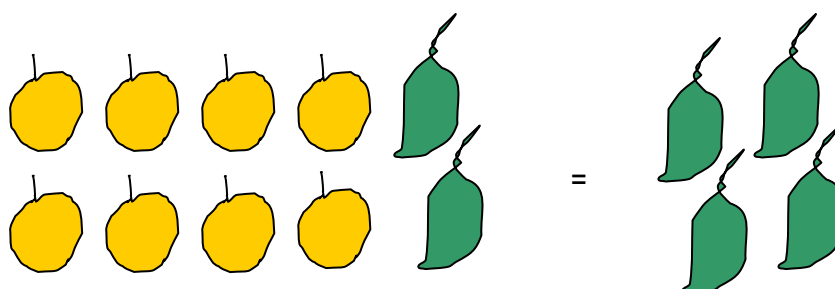


เงื่อนไขที่ 2 : และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล



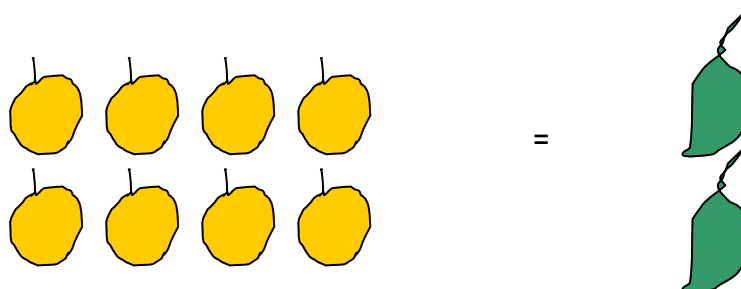
4. ขั้นตอนการ

แทนค่าจากเงื่อนไขที่ 1 ลงในเงื่อนไขที่ 2 ดังนี้

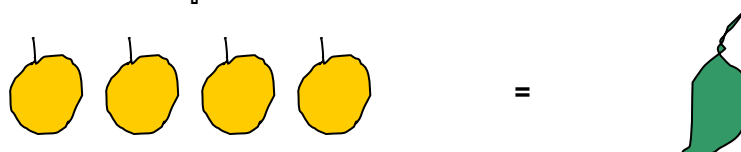


จากรูปจะเห็นว่า มะม่วง 2 ผล (ด้านซ้ายมือ) เท่ากับ มะม่วง 2 ผล (ด้านขวามือ)

ดังนั้นจะเห็นว่า ราคาสาลี่ 8 ผล จะเท่ากับ ราคามะม่วง 2 ผล ดังนี้



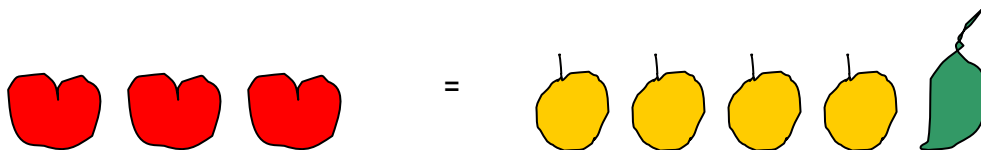
พิจารณาจากรูปด้านบนจะเห็นว่า ราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล



จากรูปจึงสรุปได้ว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล จะเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล

5. ขั้นตรวจคำตอบ

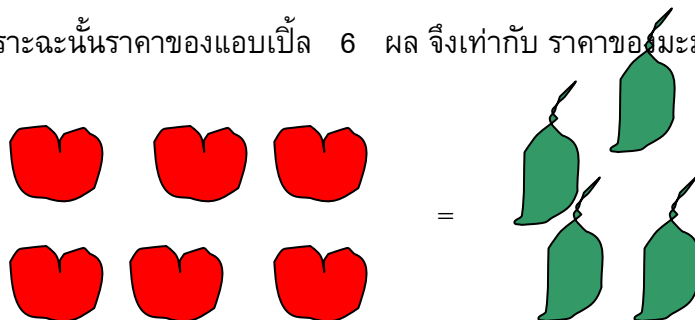
จากเงื่อนไขที่ 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล
จะได้ว่า



แต่คำตอบที่ได้คือ ราคามะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาสาลี่ 4 ผล
ดังนั้น จึงได้ว่าราคาแอปเปิ้ล 3 ผล จึงเท่ากับ ราคาของมะม่วง 2 ผล ดังนี้



เพราะฉะนั้นราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล จึงเท่ากับ ราคาของมะม่วง 4 ผล ดังนี้



จะเห็นได้ว่า ผลที่ได้นี้ตรงกับเงื่อนไขที่ 2 ที่โจทย์กำหนดให้ (ซึ่งเป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด)

ตัวอย่างที่ 2 : ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข และ ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก
ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 360 บาท อยากทราบว่าแต่ละคนมีเงินเท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ อยากทราบว่าแต่ละคนมีเงินเท่าใด

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข

และ ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก

ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 360 บาท

2. ขั้นสร้างตัวแทน : ใช้ซองบรรจุเงิน

กำหนดให้  ซองบรรจุเงินนี้ แทนด้วย จำนวนเงินที่ ข มีอยู่

นั่นคือ ข มีเงินอยู่ในซอง แทนด้วย  บาท

ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข แทนด้วย   บาท

ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก แทนด้วย  
 
 

3. ขั้นวางแผน

จากการสร้างตัวแทนโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง จะเห็นได้ว่า

1. ข มีซองบรรจุเงินอยู่ 1 ซอง
 ก มีซองบรรจุเงินอยู่ 2 ซอง
 ค มีซองบรรจุเงินอยู่ 6 ซอง
2. นำจำนวนเงิน(ที่เป็นซอง)ของทั้งสามคนมารวมกันแล้วให้เท่ากับ 360 บาท
3. คำนวณหาจำนวนเงินในแต่ละซอง ของแต่ละคน

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

นำจำนวนเงิน ของทั้งสามคนมารวมกัน ดังนี้

$$\text{เงินของ ข} + \text{เงินของ ก} + \text{เงินของ ค} = 360 \text{ บาท}$$

$$1 \text{ ซอง} + 2 \text{ ซอง} + 6 \text{ ซอง} = 360 \text{ บาท}$$

$$9 \text{ ซอง} = 360 \text{ บาท}$$

$$1 \text{ ซอง} = 40 \text{ บาท}$$

เนื่องจาก ข มีซองบรรจุเงินอยู่ 1 ซอง ดังนั้น ข จึงมีเงิน $1 \times 40 = 40$ บาท

ก มีซองบรรจุเงินอยู่ 2 ซอง ดังนั้น ก จึงมีเงิน $2 \times 40 = 80$ บาท

ค มีซองบรรจุเงินอยู่ 6 ซอง ดังนั้น ค จึงมีเงิน $6 \times 40 = 240$ บาท

5. ขั้นตรวจคำตอบ

จาก ข มีเงิน 40 บาท
 ก มีเงิน 80 บาท
 ค มีเงิน 240 บาท
 ทั้งสามมีเงินรวมกันได้ $40 + 80 + 240 = 360$ บาท

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า

ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข

และ ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก

ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 360 บาท (เป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด)

ตัวอย่างที่ 3 มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอจำนวน $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่ ที่เหลือแบ่งไปร้อยเข็มขัด 65 เม็ด และเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด จงหาว่าเดิมมาลีมีลูกปัดทั้งหมด กี่เม็ด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ จงหาว่าเดิมมาลีมีลูกปัดทั้งหมด กี่เม็ด

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอจำนวน $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่
 ที่เหลือ แบ่งไปร้อยเข็มขัด 65 เม็ด
 และเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด

2. ขั้นสร้างตัวแทน ; ใช้ถุงบรรจุลูกปัด

กำหนดให้



แทน ถุงที่บรรจุเม็ดลูกปัดจำนวนจำนวนหนึ่ง

3. ขั้นวางแผน ; วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนด ดังนี้

จาก มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอไป $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่

ดังนั้น จึงสมมติให้ เดิมมาลีมีลูกปัดอยู่ทั้งหมด 7 ถุง และนำไปร้อยสร้อยคอ 2 ถุง



ใช้ร้อยสร้อยคอ 2 ถุง ที่เหลือ แบ่งไปร้อยเข็มขัด 65 เม็ดและเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด
การวางแผน

1. มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอไป $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่แสดงว่าใช้ไป 2 ถุง เหลือลูกปัดอยู่ 5 ถุง

แต่ลูกปัดที่เหลือนั้นมีจำนวน $65 + 65 = 130$ เม็ด

นั่นคือ ลูกปัดที่เหลือ 5 ถุง $= 130$ เม็ด

2. คำนวณหาลูกปัดในแต่ละถุงว่ามีจำนวนถุงละ กี่ เม็ด

4. ขั้นตอนดำเนินการตามแผน

จาก ลูกปัดที่เหลือ 5 ถุง มีลูกปัด 130 เม็ด



นั่นคือลูกปัด 1 ถุง



บรรจุเม็ดลูกปัดไว้ $\frac{130}{5} = 26$ เม็ด

เดิมมาลีมีลูกปัด 7 ถุง ดังนั้น มาลีจึงมีเม็ดลูกปัดทั้งหมด $7 \times 26 = 182$ เม็ด

5. ขั้นตรวจคำตอบ

เดิมมามีลูกปัดทั้งหมด 182 เม็ด

แบ่งไปร้อยสร้อยคอ $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่ นั่นคือ $\frac{2}{7} \times 182 = 52$ เม็ด

จะเหลือลูกปัด $182 - 52 = 130$ เม็ด

(แบ่งไปร้อยเข็มขัด 65 เม็ด และเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด รวม 130 เม็ด)

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ ; ครูนำเสนอสถานการณ์การแก้สมการโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง ดังนี้

สถานการณ์ 1

ครูหยิบกล่องชอล์กขาวขึ้นมาหนึ่งกล่องพร้อมกับ ชอล์กขาวอีก 3 แท่ง แล้วให้นักเรียนตอบคำถามดังนี้

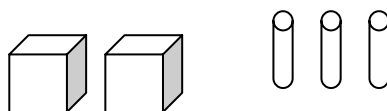


คำถาม

1. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 15 แท่ง จงหาว่ากล่องใบนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (12 แท่ง)
2. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 32 แท่ง จงหาว่ากล่องใบนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (29 แท่ง)
3. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 44 แท่ง จงหาว่ากล่องใบนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (41 แท่ง)
4. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด x แท่ง จงหาว่ากล่องใบนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (x-3 แท่ง)

สถานการณ์ 2

ครูหยิบกล่องชอล์กขาวที่บรรจุจำนวนชอล์กเท่ากัน ขึ้นมา 2 กล่องพร้อมกับ ชอล์กขาวอีก 3 แท่ง แล้วให้นักเรียนตอบคำถามดังนี้



คำถาม

1. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 13 แท่ง จงหาว่ากล่องชอล์ก ทั้งสองกล่องนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (10 แท่ง)
2. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 13 แท่ง จงหาว่าในกล่องชอล์กแต่ละกล่องจะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (5 แท่ง)
3. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 33 แท่ง จงหาว่ากล่องชอล์ก 2 ทั้งสองกล่องนี้จะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง (30 แท่ง)
4. ถ้าครูมีชอล์กทั้งหมด 33 แท่ง จงหาว่าในกล่องชอล์กแต่ละกล่องจะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง
5. นักเรียนจะมีวิธีการหาคำตอบได้อย่างไรเมื่อครูมีชอล์กทั้งหมด x แท่ง จงหาว่าในกล่องชอล์กแต่ละกล่องจะมีชอล์กทั้งหมดกี่แท่ง ($\frac{x-3}{2}$ แท่ง)

ขั้นสอน

1. ครูจัดให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่มกลุ่มละ 4 –5 คน โดยลดความสามารถ เด็กเรียนเก่ง เด็กปานกลางและ เด็กเรียนอ่อน (โดยพิจารณาจากระดับผลการเรียนที่ผ่านมา) แล้วให้นักเรียน ทำกิจกรรม จาก เอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 1 ดังต่อไปนี้
2. ครูนำเสนอปัญหาใน **กิจกรรมที่ 1.1** :ปัญหาทำให้คิด 1 และจัดเตรียมอุปกรณ์หรือวัตถุจริง ตามที่โจทย์กำหนด
3. ให้นักเรียนช่วยกันแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวภายในเวลา 10 นาที
4. ให้นักเรียนกลุ่มที่คิดคำตอบได้ออกมาสาธิตวิธีการหาคำตอบ (ให้ครูอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่ นักเรียนยังอธิบายได้ไม่สมบูรณ์)
5. ครูนำเสนอปัญหาใน**กิจกรรมที่ 1.2 และ 1.3** : ปัญหาทำให้คิด 2 และ 3 ตามลำดับ และดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ ในทำนองเดียวกับข้อ 2 – 3

6. ครูให้นักเรียนฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน :
วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง โดยให้แต่ละกลุ่มจับสลากหมายเลข 1 – 8
ตามลำดับข้อที่ปรากฏอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 1 ในส่วนของ **แบบฝึก
ทักษะที่ 1**
7. ครูให้นักเรียนปรึกษาและช่วยกันวิเคราะห์โจทย์สมการเองว่านักเรียนจะต้องจัดเตรียม
วัสดุใดมาใช้ในการประกอบการแก้โจทย์สมการนั้นเพื่อให้เตรียมนำเสนอการแก้โจทย์
สมการนั้น
8. ครูให้นักเรียนเตรียมตัวในการนำเสนอการแก้ปัญหาของแต่ละกลุ่มตามอุปกรณ์ที่ได้
เตรียมมา
9. ครูให้แต่ละกลุ่มเริ่มการนำเสนอ/สาธิตการแก้ปัญหามาตามที่ได้เตรียมมานั้น

ขั้นสรุป : ครูและนักเรียนร่วมกันวิเคราะห์และวิจารณ์การนำเสนอของเพื่อนในแต่ละกลุ่ม
ในเรื่องของการใช้ตัวแทนว่าเหมาะสมหรือไม่ การนำเสนอเป็นอย่างไร

4. สื่อ/อุปกรณ์

1. เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 1 (เรื่องการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์
สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง)
2. แอปเปิ้ล สาลี่ มะม่วง (หรือแบบจำลองของจริง)
3. ชong/ถุงสำหรับบรรจุเงิน ธนบัตรปลอม (หรือแบบจำลองของจริง)
4. ถุงบรรจุเม็ดลูกปัด/ลูกปัด/ก้อนหิน/เม็ดกระดุม/เม็ดมะยม

5. การวัดและการประเมิน

การวัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
ด้านความรู้	- ตรวจจากเอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 1	- เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 1	-นักเรียน ร้อยละ 80 ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำของแบบประเมินคุณภาพชิ้นงานชุดที่ 1
ด้านทักษะ/กระบวนการ	- สังเกตจากการร่วมกิจกรรม - การนำเสนอข้อมูล -ตรวจ ผลงาน	-แบบวัดผลและประเมินผล คณิตศาสตร์ด้านทักษะ/กระบวนการ	- นักเรียนร้อยละ 80 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัดและประเมินผล คณิตศาสตร์ด้านทักษะกระบวนการ
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	สังเกตจาก - การส่งงาน (ส่งงานครบ ตามกำหนด) - ความสะอาด ของสมุด/แบบฝึกทักษะ/งานที่ได้รับมอบหมาย	- แบบวัดและประเมินผลด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- นักเรียนร้อยละ 80 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัดและประเมินผล คณิตศาสตร์ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

6. บันทึกผลหลังสอน

[illegible]

เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 1

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation)

1. การใช้วัตถุจริงหรือ แบบจำลองของจริง

กิจกรรมที่ 1.1

ปัญหาทำให้คิด

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงได้

ชื่อกิจกรรม : ปัญหาทำให้คิด 1

ปัญหาทำให้คิด 1

ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผลและราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับ ราคาของมะม่วง 4 ผล จงหาว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ กี่ ผล

อุปกรณ์/สื่อ

1. แอปเปิ้ลจำนวน 9 ผล
2. สาลี่จำนวน 8 ผล
3. มะม่วงจำนวน 6 ผล
4. ใบงาน ที่ 1.1

คำสั่ง

1. ให้นักเรียนแก้โจทย์สมการที่กำหนดให้โดยใช้อุปกรณ์ที่เตรียมไว้
2. ให้นักเรียนเขียนวิธีการแก้โจทย์สมการตามกระบวนการแก้ปัญหาที่ได้กำหนดไว้ในใบงานนั้นให้ครบทุกขั้นตอน
3. ให้นักเรียนแสดงการสาธิตวิธีการแก้โจทย์สมการดังกล่าวโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ใบงานที่ 1.1

การแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

โดยใช้ตัวท่น (Representation) : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ปัญหาทำให้คิด 1

ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผลและราคาของแอปเปิ้ล 6 ผลเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล จงหาว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ กี่ ผล

วิธีทำ : ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจ (ให้นักเรียนอ่านโจทย์สมการแล้วตอบคำถามด้านล่างนี้)

สิ่งที่โจทย์ถามคือ

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ

.....

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน (จงอธิบายว่า นักเรียนใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงนั้นมาช่วยในการแก้ปัญหาได้อย่างไร)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน (เมื่อนักเรียนสร้างตัวแทนของปัญหาในข้อ2 แล้ว จงอธิบายว่านักเรียนจะวางแผนแก้โจทย์ปัญหานั้นได้อย่างไร มีความจริงหรือมีข้อมูลอื่นใดที่จะทำให้สามารถแก้ปัญหานั้นให้ง่ายขึ้น)

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตอนการตามแผน (นักเรียนมีการ ดำเนินการแก้โจทย์สมการนั้นอย่างไร ให้นักเรียนสาธิตหรือเขียนตอบโดยละเอียด)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ (ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าตรงตามที่เงื่อนไขที่โจทย์กำหนดนั้นหรือไม่ โดยการสาธิตการตรวจคำตอบหรือเขียนตอบโดยละเอียด)

.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมที่ 1.2

ปัญหาทำให้คิด 2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงได้

ชื่อกิจกรรม : ปัญหาทำให้คิด 2

ปัญหาทำให้คิด 2

ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข และ ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก
ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 360 บาท อยากทราบว่าแต่ละคนมีเงินเท่าใด

อุปกรณ์/สื่อ

1. ชong/ถุง บรรจุเงิน
2. ใบงานที่ 1.2

คำสั่ง

1. ให้นักเรียนแก้โจทย์สมการที่กำหนดให้โดยใช้อุปกรณ์ที่เตรียมไว้
2. ให้นักเรียนเขียนวิธีการแก้โจทย์สมการตามกระบวนการแก้ปัญหาที่ได้กำหนดไว้ในใบงานนั้นให้ครบทุกขั้นตอน
3. ให้นักเรียนแสดงการสาธิตวิธีการแก้โจทย์สมการดังกล่าวโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ใบงานที่ 1.2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

โดยใช้ตัวท่น (Representation) : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ปัญหาทำให้คิด 2

ก มีเงินเป็น 2 เท่าของ ข และ ค มีเงินเป็น 3 เท่าของ ก
ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 360 บาท อยากทราบว่าแต่ละคนมีเงิน
เท่าใด

วิธีทำ : ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจ (ให้นักเรียนอ่านโจทย์สมการแล้วตอบคำถามด้านล่างนี้)

สิ่งที่โจทย์ถามคือ

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ

.....

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน (จงอธิบายว่า นักเรียนใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงนั้นมาช่วยในการ
แก้ปัญหาได้อย่างไร)

.....

.....

.....

.....

.....

3. ขั้ววางแผน (ให้นักเรียนช่วยกันคิดว่าจะเสนอวิธีแก้โจทย์สมการนี้อย่างไร จะใช้วิธีการสาธิตหรือเล่นบทบาทสมมติหรือวิธีอื่นๆอย่างไร)

[illegible]

4. **ขั้นตอนการตามแผน** (นักเรียนมีการดำเนินการแก้ไขข้อบกพร่องอย่างไร ให้เขียน
สถิติหรือดำเนินการ
ตามนั้น).....

[illegible]

5. ขั้นตรวจคำตอบ (ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าตรงตามที่เงื่อนไขโจทย์กำหนดนั้นหรือไม่)

[illegible]

กิจกรรมที่ 1.3

ปัญหาทำให้คิด 3

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงได้

ชื่อกิจกรรม : ปัญหาทำให้คิด 2

ปัญหาทำให้คิด 3

มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอ $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่ ที่เหลือแบ่งไปร้อย
เข็มขัด 65 เม็ดและเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด จงหาว่าเดิมมาลีมีลูกปัด
ทั้งหมดกี่เม็ด

อุปกรณ์/สื่อ

1. ลูกปัดหรือก้อนหิน จำนวนๆหนึ่ง
2. ถังสำหรับใส่ลูกปัด
3. ใบงานที่ 1.3

คำสั่ง

1. ให้นักเรียนแก้โจทย์สมการที่กำหนดให้โดยใช้อุปกรณ์ที่เตรียมไว้
2. ให้นักเรียนเขียนวิธีการแก้โจทย์สมการตามกระบวนการแก้ปัญหาที่ได้กำหนดไว้ในใบงานนั้นให้ครบทุกขั้นตอน
3. ให้นักเรียนแสดงการสาธิตวิธีการแก้โจทย์สมการดังกล่าวโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ใบงานที่ 1.3

การแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

โดยใช้ตัวท่น (Representation) : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

ปัญหาทำให้คิด 3

มาลีใช้ลูกปัดร้อยสร้อยคอ $\frac{2}{7}$ ของที่มีอยู่ ที่เหลือแบ่งไปร้อย
เข็มขัด 65 เม็ดและเก็บไว้ให้น้องสาวอีก 65 เม็ด จงหาว่าเดิมมาลีมี
ลูกปัดทั้งหมดกี่เม็ด

วิธีทำ : ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจ (ให้นักเรียนอ่านโจทย์สมการแล้วตอบคำถามด้านล่างนี้)

สิ่งที่โจทย์ถามคือ

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ

.....

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน (จงอธิบายว่า นักเรียนใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริงนั้นมาช่วยในการ
แก้ปัญหาได้อย่างไร)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน (เมื่อนักเรียนสร้างตัวแทนของปัญหาในข้อ2 แล้ว จงอธิบายว่านักเรียนจะวางแผนแก้โจทย์ปัญหานั้นได้อย่างไร มีความจริงหรือมีข้อมูลอื่นใดที่จะทำให้สามารถแก้ปัญหานั้นให้ง่ายขึ้น)

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตอนการตามแผน (นักเรียนมีการ ดำเนินการแก้โจทย์สมการนั้นอย่างไร ให้นักเรียน สาระหรือเขียนตอบโดยละเอียด)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. การตรวจคำตอบ (ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าตรงตามที่เงื่อนไขที่โจทย์ กำหนดนั้นหรือไม่ โดยการสาริตการตรวจคำตอบหรือเขียนตอบโดยละเอียด)

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะ 1

การแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

จงแก้โจทย์สมการต่อไปนี้โดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง

1. ต้องการตัดเชือกยาว 175 เมตร ออกเป็น 2 ส่วน โดยให้ส่วนที่หนึ่งยาวกว่าครึ่งหนึ่งของส่วนที่สองอยู่ $\frac{1}{4}$ เมตร จงหาว่า แต่ละส่วนจะยาวกี่เมตร
2. ต้องการตัดเชือกยาว 130 เซนติเมตร ออกเป็น 2 ส่วน โดยให้ส่วนหนึ่งยาวกว่า 3 เท่าของอีกส่วนหนึ่งอยู่ 10 เซนติเมตรจะต้องตัดเชือกให้ยาวเส้นละเท่าใด
3. ซื้อลูกอมมาจำนวน 100 เม็ดในราคา 5 เม็ด 4 บาท แต่ขายไปทั้งหมดในราคา 4 เม็ด 5 บาท อยากทราบว่า จะได้กำไรกี่บาท
4. ขวดน้ำขนาดบรรจุ 10 ลิตร หนึ่งใบและขวดน้ำขนาดบรรจุ 3 ลิตรอีกหนึ่งใบขวดทั้งสองไม่มีขีดบอกปริมาณของเหลวเลย ถ้าต้องการน้ำ 5 ลิตร นักเรียนจะมีวิธีการตวงอย่างไร จงบรรยายวิธีการตวง
5. กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแผ่นหนึ่งกว้าง 80 ซม. ยาว 120 ซม. ตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 20 ซม. แล้วพับเป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด จงหาว่ากล่องใบนี้มีความจุเท่าใด
6. จงแบ่งผลแดงโม ออกเป็น 8 ชั้นโดยมีกติกาว่า จะต้องใช้มีดตัดได้เพียง 3 ครั้ง เท่านั้น
7. แบ่งขนมให้ห้อง สองคนคิดเป็น $\frac{1}{4}$ ของขนมทั้งหมด ปรากฏว่าห้องได้ขนมคนละ 3 ชิ้น จงหาว่าเดิมมีขนมทั้งหมด กี่ ชิ้น
8. สามเท่าของจำนวน ๗หนึ่งน้อยกว่า 85 อยู่ 15 จงหาจำนวนนั้น

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ..2..

เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การวาดภาพ (จำนวน 2 คาบ)

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การวาดภาพได้

1.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ : นักเรียน

- 1) มีความสามารถในการแก้ปัญหาได้
- 2) มีความสามารถในการให้เหตุผลได้
- 3) มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอข้อมูลได้

1.3 ด้าน คุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

- 1) มีความรับผิดชอบ
- 2) มีระเบียบวินัย
- 3) ทำงานเป็นระบบ

2. สาระการเรียนรู้

2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation)

: การวาดภาพ

2.1 การแก้สมการโดยใช้การวาดภาพ

1) การวาดภาพแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์

ตัวแปรที่เรานิยมใช้ในคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะเป็นอักษรภาษาอังกฤษ เช่น a, b, c, x, y เป็นต้นซึ่งอักษรแต่ละตัวจะหมายถึง จำนวนจำนวนหนึ่งซึ่งแทนด้วยจำนวนที่เราไม่ทราบค่าที่แน่นอน แต่ในบางครั้งเราอาจแทนตัวแปรเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์อย่างอื่นที่ไม่ใช่ ตัวอักษรภาษาอังกฤษ เช่น เราอาจแทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า ด้วยสัญลักษณ์  หรือ  หรือ  เป็นต้น

เช่น

x

แทนด้วย



$2x$

แทนด้วย



$3x$ แทนด้วย 

$\frac{2}{3}y$ แทนด้วยด้วย 

$\frac{3}{4}z$ แทนด้วย(ส่วนที่แรเงา)



ตัวอย่าง 1 จงแก้สมการ $3x + 3 = 15$

วิธีทำ

กำหนดให้ x แทนด้วย 

ดังนั้นจาก $3x + 3 = 15$

จะได้ว่า  + 3 = 15

เนื่องจาก 12 + 3 = 15

จึงได้ว่า  = 12

แต่ 4 + 4 + 4 = 12

ดังนั้น  = 4

นั่นคือ $x = 4$

ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $5x - 4 = 21$ **วิธีทำ**กำหนดให้ x แทนด้วย ดังนั้นจาก $5x - 4 = 21$ จะได้ว่า  - 4 = 21เนื่องจาก $25 - 4 = 21$ จะได้ว่า  = 25แต่ $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ ดังนั้น  = 5นั่นคือ $x = 5$ **ตัวอย่าง 3** จงแก้สมการ $\frac{2}{3}x + 1 = 5$ **วิธีทำ**กำหนดให้ x แทนด้วย ดังนั้น $\frac{2}{3}x$ แทนด้วย  $\frac{2}{3}x + 1$ แทนด้วย  + 1

จากสมการ $\frac{2}{3}x + 1 = 5$

จะได้ว่า  + 1 = 5

แต่ 4 + 1 = 5

จากรูปจะได้ว่า  = 4

ดังนั้นจะได้ว่า  = 6

นั่นคือ  = 6

ดังนั้น $x = 6$

2) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) :
การวาดภาพ

**ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation)**

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหจะต้องอ่านโจทย์ปัญหา เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดและอะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการ
2. ขั้นสร้างตัวแทน (Representation) เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ผู้แก้ปัญหจะต้องประมวลความคิด ความเข้าใจในปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรม โดยการสร้างตัวแทนดังกล่าว
3. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือสร้างทางเลือกในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนจะต้องประมวลสิ่งต่างๆที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนแนวทางในการแก้ปัญหว่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนดและจากสิ่งที่โจทย์ต้องการ นักเรียนจะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาในรูปของสมการได้อย่างไรและจะมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดแต่ต้องนำมาใช้เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น
4. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้
5. ขั้นตรวจคำตอบ เป็นขั้นของการตรวจคำตอบที่ได้ว่า คำตอบที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกับสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้หรือไม่

ตัวอย่าง 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผลเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล จงหาว่าราคาของมะม่วง 1 ผลเท่ากับราคาของสาลี่กี่ผล

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับราคาของสาลี่กี่ผล

สิ่งที่โจทย์กำหนดคือ ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผลเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล

และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผลเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล

2. ขั้นการสร้างตัวแทน : การวาดภาพ

กำหนดให้



แทน แอปเปิ้ล



แทน สาลี่

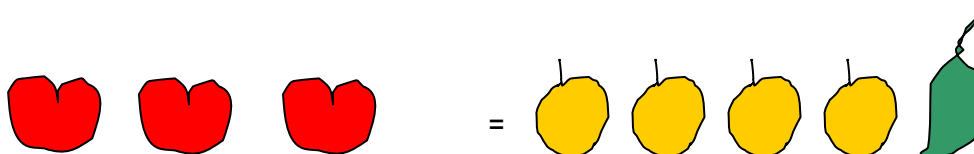


แทนมะม่วง

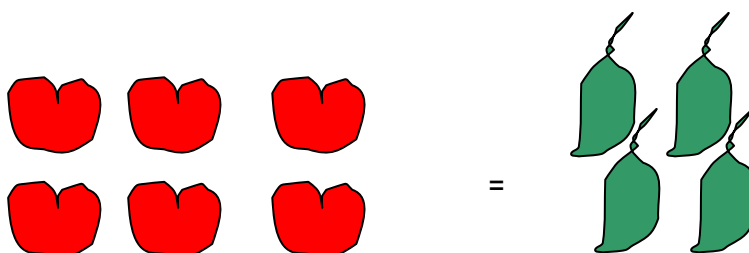
3. การวางแผน

สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือ ให้หาว่าราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับสาลี่กี่ผล

เงื่อนไขที่ 1 : ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผลเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล

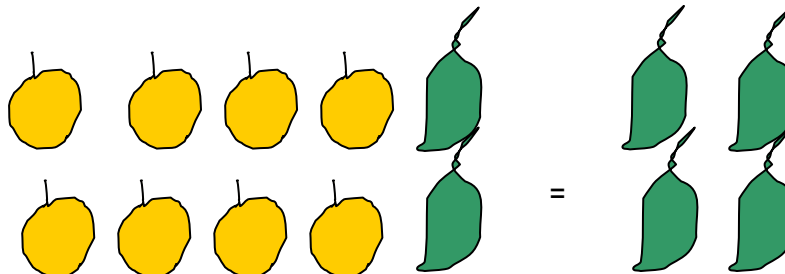


เงื่อนไขที่ 2 : ราคาของแอปเปิ้ล 6 ผลเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล

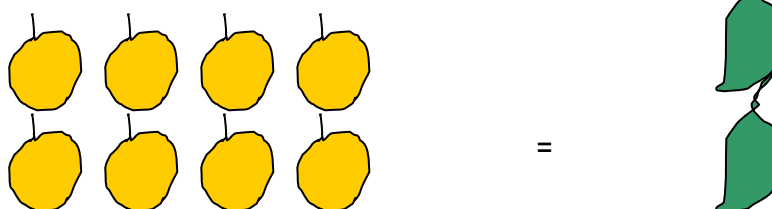


4. ขั้นตอนการ

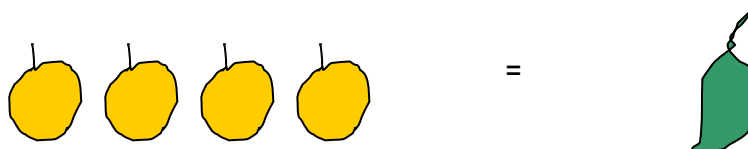
จากเงื่อนไขที่ 1 และ 2 จะได้ว่า



จากรูปจะได้ว่า ราคามะม่วง 2 ผล (ด้านขวามือ) เท่ากับ ราคามะม่วง 2 ผล (ด้านซ้ายมือ)
ดังนั้นจะได้ว่า



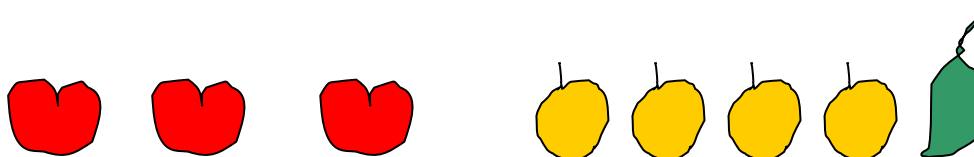
พิจารณาจากรูปด้านบนจะได้ว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล



จากรูปจึงสรุปได้ว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล จะเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล

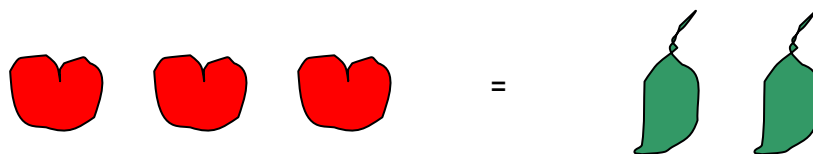
5. ขั้นตอนคำตอบ

จากเงื่อนไขที่ 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล
จะได้ว่า

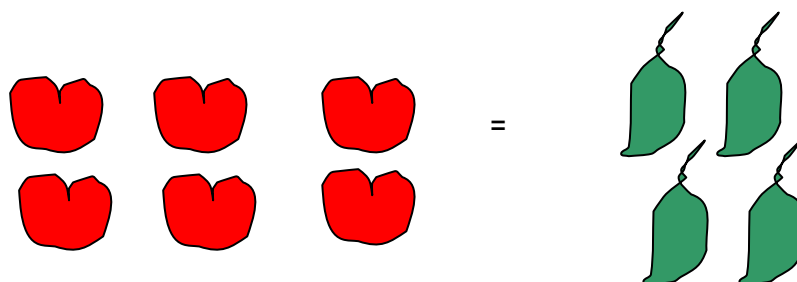


แต่ คำตอบที่ได้คือ ราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล

ดังนั้น จึงได้ว่าราคาแอปเปิ้ล 3 ผล จึงเท่ากับ ราคาของมะม่วง 2 ผล ดังนี้



เพราะฉะนั้น ราคาแอปเปิ้ล 6 ผล จึงเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล ดังนี้



จะเห็นได้ว่า ผลที่ได้นี้ตรงกับเงื่อนไขที่ 2 ที่โจทย์กำหนดให้ (ซึ่งเป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด)

ตัวอย่าง 2 อภิชาติเลี้ยงสัตว์ 3 ชนิด มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด และมีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ นอกนั้นเป็นหมู 14 ตัว จงหาว่าอภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด กี่ ตัว

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถามคือ จงหาว่า อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด กี่ ตัว

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ อภิชาติเลี้ยงสัตว์ 3 ชนิด

มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด และมีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ
นอกนั้นเป็นหมู 14 ตัว

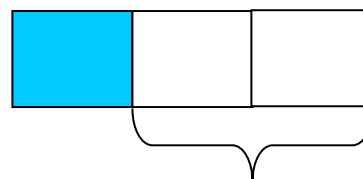
2. ขั้นสร้างตัวแทน : การวาดรูป

กำหนด ให้สิ่งที่โจทย์ถาม คือ
จำนวนสัตว์เลี้ยงทั้งหมดของอภิชาติ แทนด้วย



สิ่งที่โจทย์กำหนด

มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด แทนด้วย

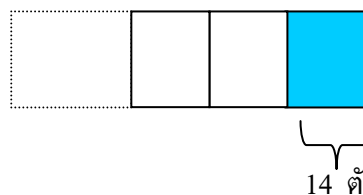


ส่วนที่เหลือ

มีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ แทนด้วย



นอกนั้น เป็นหมู 14 ตัว แทนด้วย



3. ขั้นการวางแผน

จากรูปจะได้ว่า	หมู	มี	1	ส่วน (เล็ก)	คิดเป็น	14	ตัว
	เป็ด	มี	2	ส่วน (เล็ก)	คิดเป็น	28	ตัว
แต่	หมู และ เป็ด	มี	3	ส่วน (เล็ก)	จึงมี	42	ตัว
จากรูปจะได้ว่า	ส่วนที่เหลือ	มี	2	ส่วน (ใหญ่)	ซึ่งเท่ากับ	42	ตัว
ดังนั้น	ไก่	มี	1	ส่วน (ใหญ่)	คือ	21	ตัว

4. ขั้นตอนการตามแผน

ให้นักเรียนพิจารณารูปภาพ จากด้านล่างมายังด้านบน ดังนี้

จำนวนสัตว์เลี้ยงทั้งหมดของอภิชาติ แทนด้วย



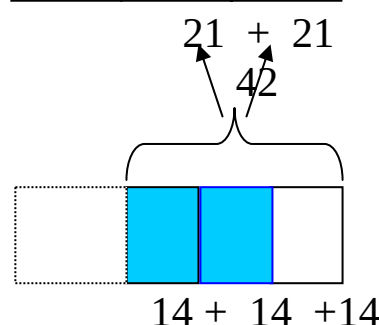
สิ่งที่โจทย์กำหนด

$$21 + 21 + 21$$

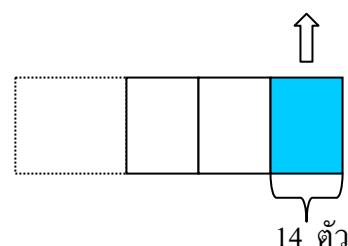
มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด แทนด้วย



มีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ แทนด้วย



นอกนั้น เป็นหมู 14 ตัว แทนด้วย



จากรูปจะได้ว่า มีไก่ 21 ตัว มีเป็ด 28 ตัว และมีหมู 14 ตัว

ดังนั้น อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด $21 + 28 + 14 = 63$ ตัว

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด 63 ตัว

$$\text{มีไก่ } \frac{1}{3} \text{ ของสัตว์ทั้งหมด นั่นคือ } \frac{1}{3} \times 63 = 21 \text{ ตัว}$$

$$\text{ดังนั้นสัตว์ที่เหลือ คือ } 63 - 21 = 42 \text{ ตัว}$$

$$\text{มีเป็ด } \frac{2}{3} \text{ ของสัตว์ที่เหลือ นั่นคือ } \frac{2}{3} \times 42 = 28 \text{ ตัว}$$

$$\text{นอกนั้นเป็นหมู } 42 - 28 = 14 \text{ ตัว}$$

(ถูกต้องตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด)

3. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนความรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับการแก้สมการ โดยให้นักเรียนแก้สมการดังต่อไปนี้

ทบทวนการแก้สมการ

ให้นักเรียนแก้สมการ $3x + 3 = 15$ โดยใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

วิธีทำ $3x + 3 = 15$

นำ -3 มาบวกจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$\begin{aligned} 3x + 3 + (-3) &= 15 + (-3) \\ 3x &= 12 \end{aligned}$$

นำ $\frac{1}{3}$ คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (3x) &= \frac{1}{3} \times (12) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

ตอบ คำตอบของสมการ คือ 4

2. ครูตั้งคำถามนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่ายังมีวิธีอื่นอีกหรือไม่ ถ้ามี อะไรบ้าง

ขั้นสอน ครูให้นักเรียนนั่งเรียนเป็นกลุ่มตามที่ได้แบ่งไว้ในตอนแรก

1. ครูแจก เอกสารการประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 2 : เรื่องการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการ โดยการใช้ตัวแทน(Representation) : การวาดภาพ
2. ครูให้นักเรียนศึกษาการแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพใน **กิจกรรมที่ 2.1** ด้วยตนเอง (นักเรียนที่เรียนเก่งอาจทำหน้าที่ในการอธิบายให้สมาชิกฟัง แต่ถ้ายังไม่เข้าใจนักเรียนสามารถให้ครูช่วยอธิบายได้)และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงานที่ 2.1 ก และใบงานที่ 2.1 ข มาส่ง
3. เมื่อนักเรียนทำ**กิจกรรมที่ 2.1** เสร็จแล้ว ครูยกตัวอย่างการแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพเพิ่มเติมเพื่อช่วยเสริมให้นักเรียนเข้าใจมากขึ้น จากนั้นจึงให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษา **กิจกรรมที่ 2.2** ซึ่งนักเรียนจะต้องศึกษาขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เรื่องโจทก์สมการ โดยการใช้ตัวแทน (Representation) ก่อนศึกษาตัวอย่างของการแก้โจทก์
สมการโดยใช้ตัวแทน: การวาดภาพในตัวอย่างที่ 1 และ 2

4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำ ใบงานที่ 2.2 มาส่ง

ขั้นสรุป : ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันวิเคราะห์โจทย์ปัญหาในแต่ละข้อในใบงานที่ 2.2 เพื่อ
พิจารณาว่า ในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหานั้นว่า ถูกต้อง เหมาะสม ชัดเจนหรือไม่
เพียงใด

4. สื่อ/อุปกรณ์

- เอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 2 เรื่อง การแก้ปัญหาวัดคณิตศาสตร์เรื่องโจทก์สมการโดย
การใช้ตัวแทน (Representation) : การการวาดภาพ

5. การวัดและการประเมิน

การวัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
ด้านความรู้	- ตรวจจากเอกสาร ประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 2	- เอกสารประกอบการ เรียนรู้ชุดที่ 2 - แบบประเมินคุณภาพ ชิ้นงาน ชุดที่ 2	-นักเรียน ร้อยละ 70 ผ่าน เกณฑ์ขั้นต่ำของแบบ ประเมินคุณภาพชิ้นงาน ชุดที่ 2
ด้านทักษะ/ กระบวนการ	- สังเกตจากการร่วม กิจกรรม - การนำเสนอข้อมูล -ตรวจ ผลงาน	-แบบวัดผลและ ประเมินผลคณิตศาสตร์ ด้านทักษะ/กระบวนการ	- นักเรียนร้อยละ 70 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัดและ ประเมินผลคณิตศาสตร์ ด้านทักษะกระบวนการ
ด้านคุณลักษณะ อันพึงประสงค์	สังเกตจาก - การส่งงาน (ส่งงาน ครบ ตามกำหนด) - ความสะอาด ของสมุด/ แบบฝึกทักษะ/งานที่ ได้รับมอบหมาย	- แบบวัดและประเมินผล ด้านคุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- นักเรียนร้อยละ 80 ผ่าน เกณฑ์ตามแบบวัดและ ประเมินผลคณิตศาสตร์ ด้านคุณลักษณะอันพึง ประสงค์

6. บันทึกผลหลังสอน

[illegible]

เอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation)

2. การวาดภาพ

2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ

คำชี้แจง

ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ อย่างเป็นลำดับตามเนื้อหาที่ได้นำเสนอนี้ และหากมีส่วนใดที่ไม่เข้าใจ นักเรียนสามารถสอบถามกับครูผู้สอนได้

เนื้อหาสาระ

นักเรียนจะได้ศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ จากเนื้อหาที่กำหนดไว้เป็นลำดับ ดังนี้

2.1 การแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพ

คำอธิบาย : นักเรียนส่วนใหญ่มักจะคุ้นเคยเกี่ยวกับการแก้สมการที่อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ ตัวแปรมาแล้ว แต่ในขั้นนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพซึ่งเป็นวิธีการแก้สมการอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจและยังเป็นวิธีพื้นฐานที่สำคัญที่จะนำไปใช้ในการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทนการวาดภาพต่อไปอีกด้วย

2.2 การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การวาดภาพ

คำอธิบาย : ในการศึกษาเนื้อหาในส่วนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทนการวาดภาพและจะได้ฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทนจากแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมที่ 2.1 : การแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพ

2.1.1การวาดภาพแทนสัญลักษณ์(ตัวแปร)ทางคณิตศาสตร์

2.1.2การแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพ

กิจกรรมที่ 2.2 : การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การวาดภาพ

กิจกรรมที่ 2.1

การแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพ

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

1. เพื่อให้นักเรียนสามารถวาดภาพแทนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ได้
2. เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพได้

คำสั่ง :

1. ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพจากใบงานที่แจกให้
2. ให้นักเรียนฝึกการแก้สมการด้วยวิธีการแก้ปัญหาโดยทำใบงานท้ายกิจกรรม

2.1 การแก้สมการโดยใช้วิธีการวาดภาพ

นักเรียนอาจเคยแก้สมการ $3x + 3 = 15$ โดยใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนเต็มมาบ้างแล้ว ต่อไปนี้จะเป็นการแก้สมการโดยใช้วิธีการวาดภาพซึ่งเป็นการแก้สมการอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจดังนี้



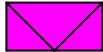
2.1.1 การวาดภาพแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์

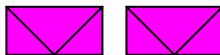
ตัวแปรที่เรานิยมใช้ในคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะเป็นอักษรภาษาอังกฤษ เช่น a, b, c, x, y เป็นต้น ซึ่งอักษรแต่ละตัวจะหมายถึง จำนวนจำนวนหนึ่งซึ่งเราไม่ทราบค่าที่แน่นอน

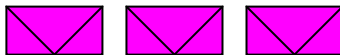
แต่ในบางครั้งเราอาจแทนตัวแปรเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์อย่างอื่นที่ไม่ใช่ ตัวอักษรภาษาอังกฤษ

เช่น เราอาจแทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า ด้วยสัญลักษณ์  หรือ  หรือ  เป็นต้น

เช่น

x แทนด้วย 

$2x$ แทนด้วย 

$3x$ แทนด้วย 

$\frac{2}{3}y$ แทนด้วยด้วย 

$\frac{3}{4}z$ แทนด้วย(ส่วนที่แรเงา)



ใบงาน 2.1 ก

การแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ด้วยการวาดภาพ

คำสั่ง : ให้นักเรียนวาดภาพแทนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

ข้อความทางคณิตศาสตร์	สัญลักษณ์ (ตัวแปร x)	การวาดภาพ
1. จำนวนจำนวนหนึ่ง	x	
2. สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง	2x	
3. 5 เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง	5x	
4. 2 ใน 3 ของจำนวนจำนวนหนึ่ง	$\frac{2}{3}x$	
5. สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง รวมกับ 5	$2x + 5$	
6. สี่เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่า 10 อยู่ 42	$4x - 10 = 42$	
7. 3 ใน 5 ของจำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่า 8 อยู่ 4	$\frac{3}{5}x - 8 = 4$	

2.1.2 การแก้สมการด้วยวิธีการวาดภาพ

ให้นักเรียนพิจารณาการแก้สมการด้วยการวาดภาพจากตัวอย่างที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงแก้สมการ $3x + 3 = 15$

วิธีทำ

กำหนดให้	x	แทนด้วย				
ดังนั้นจาก	$3x$	$+$	3	$= 15$		
จะได้ว่า	  	$+$	3	$= 15$		
เนื่องจาก	12	$+$	3	$= 15$		
จึงได้ว่า	  			$= 12$		
แต่	4	$+$	4	$+$	4	$= 12$
ดังนั้น				$= 4$		
นั่นคือ	x			$= 4$		

เป็นไงบ้างครับนักเรียนศึกษาการแก้สมการโดยวิธีการ
วาดภาพแล้วเข้าใจไหมครับ

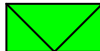
ถ้าใครไม่เข้าใจ อาจถามคุณครูหรือเพื่อนที่หนึ่ง
อยู่ข้าง ๆ ที่เขาเข้าใจได้นะครับ

แต่ถ้าใครเข้าใจแล้วก็ให้ศึกษาตัวอย่างที่ 2 ต่อ
ได้เลยครับผม



ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $5x - 4 = 21$

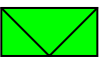
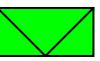
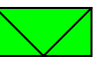
วิธีทำ

กำหนดให้ x แทนด้วย 

ดังนั้นจาก $5x - 4 = 21$

แทนด้วย      $- 4 = 21$

และเนื่องจาก $25 - 4 = 21$

จะได้ว่า      $= 25$

แต่ $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$

ดังนั้น  $= 5$

นั่นคือ $x = 5$

เมื่อนักเรียนศึกษา ตัวอย่างการแก้สมการด้วยวิธีการ
วาดภาพจากตัวอย่างที่ 2 แล้ว ไม่เข้าใจ ให้ถามครูก่อนศึกษา
ตัวอย่างที่ 3 นะครับ

แต่ถ้าเข้าใจแล้วก็เริ่มศึกษาตัวอย่างที่ 3 ได้ทันที



ตัวอย่าง 3 จงแก้สมการ $\frac{2}{3}x + 1 = 5$

วิธีทำ

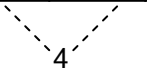
กำหนดให้ x แทนด้วย 

ดังนั้น $\frac{2}{3}x$ แทนด้วย 

$\frac{2}{3}x + 1$ แทนด้วย  + 1

จากสมการ $\frac{2}{3}x + 1 = 5$

จะได้ว่า  + 1 = 5

แต่  + 1 = 5

จากรูปจะได้ว่า  = 4
 $2 + 2$

ดังนั้นจะได้ว่า  = 6

นั่นคือ  = 6

ดังนั้น $x = 6$

เมื่อนักเรียนศึกษา ตัวอย่างการแก้สมการด้วยวิธีการวาด
ภาพจากตัวอย่างที่ 3 แล้ว ไม่เข้าใจ ให้ถามครูก่อนลงมือทำใบงานที่
2.1 ข ในขั้นต่อไปนะคะ

สำหรับผู้ที่ไม่เข้าใจขอแสดงความยินดีด้วยครับ



กิจกรรมที่ 2.2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพได้

คำสั่ง : ให้นักเรียนปฏิบัติตามลำดับต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนศึกษาขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากเอกสารที่แจกให้
2. ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน

(Representation) : การวาดภาพ จากตัวอย่างที่ 1 และ 2

3. ให้นักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ จากใบงานที่ 2.2

2.2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การวาดภาพ

ให้ผู้เรียนศึกษากระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) ด้านล่างนี้ให้เข้าใจ ซึ่งอาจสอบถามจากครูผู้สอนก็ได้ จากนั้นก็ให้ไปศึกษาแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน

(Representation) จากตัวอย่างที่ 1 และ 2

เสร็จแล้วยาลืม ฝึกฝนตนเองโดยทำใบงานที่ 2.2

นะครับ



ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation)

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา** เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหามust ต้องอ่านโจทย์ปัญหา เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่า อะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดและอะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการ
2. **ขั้นสร้างตัวแทน (Representation)** เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ผู้แก้ปัญหามust ต้องประมวลผลความคิดความเข้าใจในปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรม โดยการสร้างตัวแทนดังกล่าว
3. **ขั้นวางแผน** เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือสร้างทางเลือกในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนจะต้องประมวลสิ่งต่างๆที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนแนวทางในการแก้ปัญหาว่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนดและจากสิ่งที่โจทย์ต้องการ นักเรียนจะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาในรูปของสมการได้อย่างไรและมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดแต่ต้องนำมาใช้เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น
4. **ขั้นดำเนินการตามแผน** เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้
5. **ขั้นตรวจคำตอบ** เป็นขั้นของการตรวจคำตอบที่ได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

ตัวอย่าง 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล จงหาว่าราคาของมะม่วง 1 ผลเท่ากับราคาของสาลี่กี่ผล

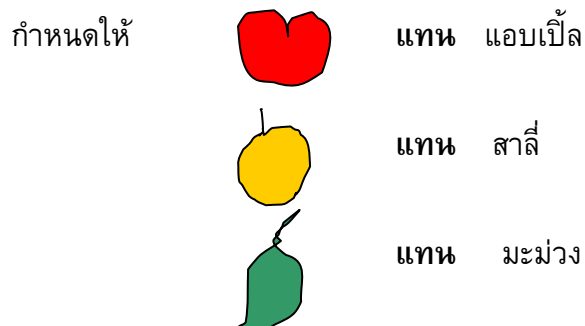
วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับราคาของสาลี่กี่ผล

สิ่งที่โจทย์กำหนดคือ ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล และราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล

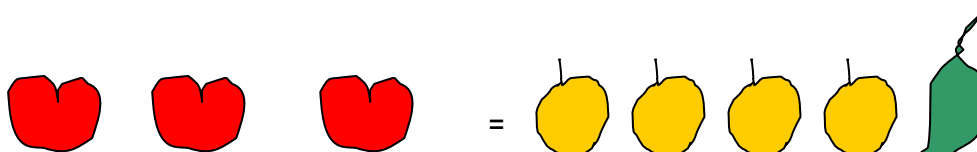
2. ขั้นการสร้างตัวแทน : การวาดภาพ



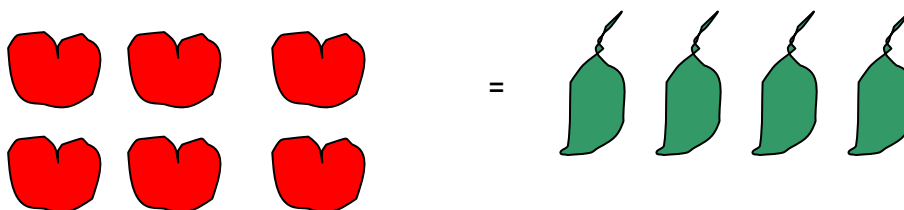
3. การวางแผน

สิ่งที่โจทย์ต้องการ คือให้หาว่าราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับสาลี่กี่ผล

เงื่อนไขที่ 1 : ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล

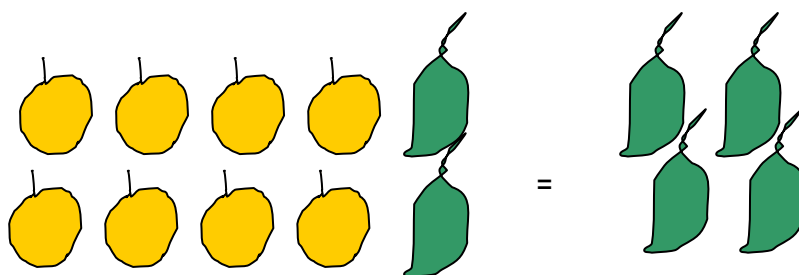


เงื่อนไขที่ 2 : ราคาของแอปเปิ้ล 6 ผล เท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล

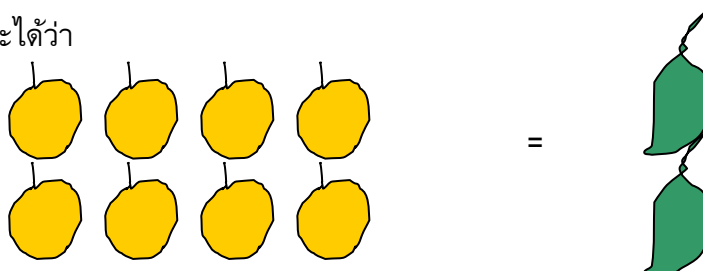


4. ขั้นตอนการ

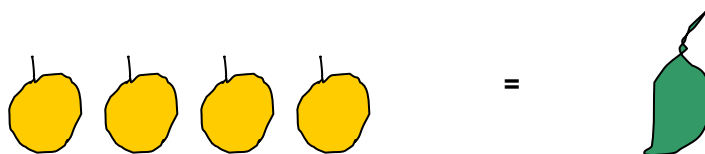
จากเงื่อนไขที่ 1 และ 2 จะได้ว่า



จากรูปจะได้ว่า ราคามะม่วง 2 ผล (ด้านขวามือ) เท่ากับ ราคามะม่วง 2 ผล (ด้านซ้ายมือ)
ดังนั้นจะได้ว่า



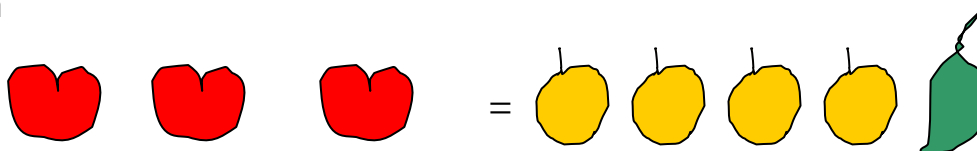
พิจารณาจากรูปด้านบนจะได้ว่า ราคาของมะม่วง 1 ผลจะเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล



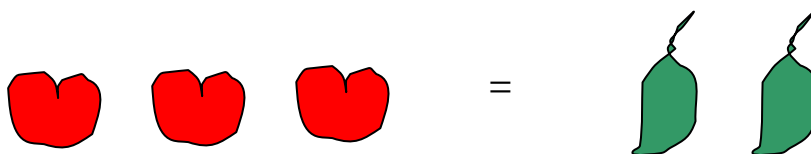
สรุปได้ว่า ราคาของมะม่วง 1 ผล จะเท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล

5. ขั้นตอนคำตอบ

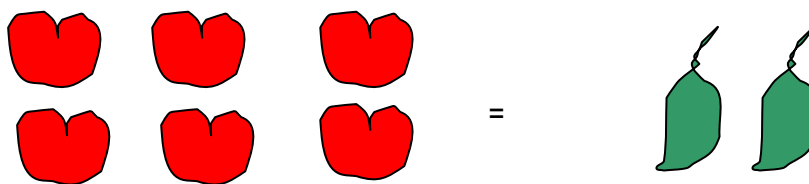
จากเงื่อนไขที่ 1 ราคาของแอปเปิ้ล 3 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผลรวมกับราคาของมะม่วง 1 ผล
จะได้ว่า



แต่ คำตอบที่ได้คือ ราคาของมะม่วง 1 ผล เท่ากับราคาของสาลี่ 4 ผล
ดังนั้น จึงได้ว่าราคาแอปเปิ้ล 3 ผล จึงเท่ากับ ราคาของมะม่วง 2 ผล ดังนี้



เพราะฉะนั้น ราคาแอปเปิ้ล 6 ผล จึงเท่ากับราคาของมะม่วง 4 ผล ดังนี้



จะเห็นว่า ผลที่ได้นี้ตรงกับเงื่อนไขข้อที่ 2 ที่โจทย์กำหนดให้ (ซึ่งเป็นจริงตามที่โจทย์กำหนด)

ตัวอย่าง 2 อภิชาติเลี้ยงสัตว์ 3 ชนิด มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด และมีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ นอกนั้นเป็นหมู 14 ตัว จงหาว่าอภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด กี่ ตัว

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถามคือ จงหาว่า อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด กี่ ตัว

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ อภิชาติเลี้ยงสัตว์ 3 ชนิด

มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด และมีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ
นอกนั้นเป็นหมู 14 ตัว

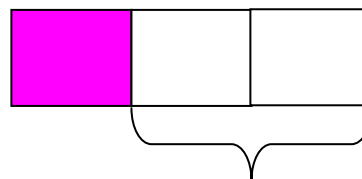
2. ขั้นสร้างตัวแทน : การวาดรูป

กำหนด ให้สิ่งที่โจทย์ถาม คือ
จำนวนสัตว์เลี้ยงทั้งหมดของอภิชาติ แทนด้วย

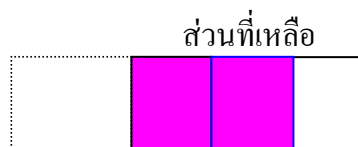


สิ่งที่โจทย์กำหนด

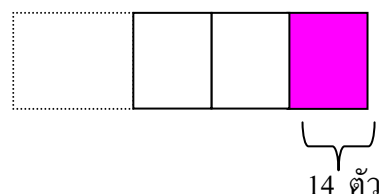
มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด แทนด้วย



มีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ แทนด้วย



นอกนั้น เป็นหมู 14 ตัว แทนด้วย



3. ขั้นการวางแผน

จากรูปจะได้ว่า หมู มี 1 ส่วน(เล็ก) คิดเป็น 14 ตัว
 เป็ด มี 2 ส่วน(เล็ก) คิดเป็น 28 ตัว
 แต่ หมู และ เป็ด มี 3 ส่วน(เล็ก) คิดเป็น 42 ตัว

จากรูปจะได้ว่า ส่วนที่เหลือ มี 2 ส่วน (ใหญ่) คิดเป็น 42 ตัว
 ดังนั้น ไก่ มี 1 ส่วน (ใหญ่) คิดเป็น 21 ตัว

4.ขั้นตอนการตามแผน

ให้นักเรียนพิจารณารูปภาพ จากด้านล่างมายังด้านบน ดังนี้

จำนวนสัตว์เลี้ยงทั้งหมดของอภิชาติ แทนด้วย



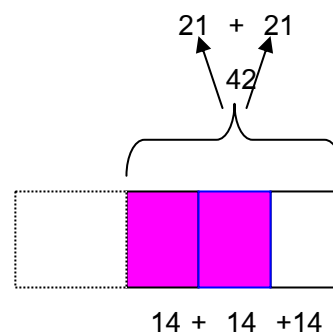
สิ่งที่โจทย์กำหนด

$$21 + 21 + 21$$

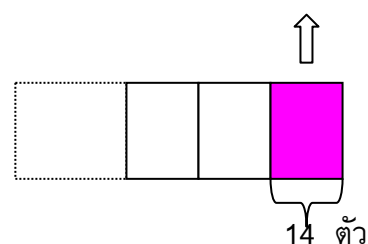
มีไก่ $\frac{1}{3}$ ของสัตว์ทั้งหมด แทนด้วย



มีเป็ด $\frac{2}{3}$ ของสัตว์ที่เหลือ แทนด้วย



นอกนั้น เป็นหมู 14 ตัว แทนด้วย



จากรูปจะได้ว่า มีไก่ 21 ตัว มีเป็ด 28 ตัว และมีหมู 14 ตัว
 ดังนั้น อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด $21 + 28 + 14 = 63$ ตัว

5. ขั้นตรวจคำตอบ

อภิชาติเลี้ยงสัตว์ทั้งหมด

63 ตัว

$$\text{มีไก่ } \frac{1}{3} \text{ ของสัตว์ทั้งหมด นั่นคือ } \frac{1}{3} \times 63 = 21 \text{ ตัว}$$

$$\text{ดังนั้นสัตว์ที่เหลือ คือ } 63 - 21 = 42 \text{ ตัว}$$

$$\text{มีเป็ด } \frac{2}{3} \text{ ของสัตว์ที่เหลือ นั่นคือ } \frac{2}{3} \times 42 = 28 \text{ ตัว}$$

$$\text{นอกนั้นเป็นหมู } 42 - 28 = 14 \text{ ตัว}$$

(ถูกต้องตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด)

เป็นไงครับ จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 นักเรียนอ่านแล้ว
เป็นอย่างไรกันบ้าง

ถ้าไม่เข้าใจอย่าเพิ่งทำใบงานนะครับให้นักเรียนศึกษา
ให้เข้าใจเสียก่อน อาจให้คุณครูหรือเพื่อนช่วยอธิบายได้ครับ
แต่ถ้าใครเข้าใจแล้วให้ทำใบงานต่อได้เลยครับผม



ใบงาน 2.2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน(Representation)การวาดภาพ

คำสั่ง: จงแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
(Representation):การวาดภาพ

1. ฝรั่ง 2 ผลมีน้ำหนักเท่ากับ 1 ใน 4 ของแตงโมผลหนึ่ง ถ้าแตงโมผลนั้น น้ำหนัก
2,400 กรัม จงหาว่าฝรั่งแต่ละผลหนักเท่าใด

วิธีทำ

- 1) ขั้นทำความเข้าใจ

.....

.....

.....

.....

.....

- 2) ขั้นสร้างตัวแทน: การวาดภาพ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 3) ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) ขั้นตอนดำเนินการตามแผน

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page, providing a template for writing or drawing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5) ขั้นตอนตรวจคำตอบ

[illegible]

4) ขั้นตอนการตามแผน

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5) ขั้นตอนการตรวจสอบ

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. 1 ใน 3 ของอายุน้อง เท่ากับ 1 ใน 5 ของอายุพี่ ถ้าอายุของพี่กับน้องรวมกันได้ 40 ปี จงหาว่าน้องจะมีอายุเท่าใด

วิธีทำ

1) ขั้นทำความเข้าใจ

.....

.....

.....

.....

.....

2) **ชั้นสร้างตัวแทน:** การวาดภาพ

[illegible]

3) ขั้ววางแผน

[illegible]

4) ขั้นตอนดำเนินการตามแผน

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

5) ขั้นตอนตรวจคำตอบ

[illegible]

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ..3..

**เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การ
สร้างตาราง (จำนวน 2 คาบ)**

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การสร้างตารางได้

1.2 ด้านทักษะกระบวนการ : นักเรียน

- 1) มีความสามารถในการแก้ปัญหาได้
- 2) มีความสามารถในการให้เหตุผลได้
- 3) มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอข้อมูลได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

- 1) มีความรับผิดชอบ
- 2) มีระเบียบวินัย
- 3) ทำงานเป็นระบบ

2. สาระการเรียนรู้

3. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน

(Representation) :

การสร้างตาราง

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) :

การสร้างตาราง เป็นวิธีการแก้โจทย์สมการที่ผู้แก้โจทย์สมการจะต้องออกแบบตารางเพื่อเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถาม ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนเต็มบวกสองจำนวนรวมกันได้ 27 ผลคูณของจำนวนทั้งสอง เป็น 180 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวน

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ จำนวนเต็มบวกสองจำนวนรวมกันได้ 27

จำนวนเต็มบวกสองจำนวนนั้นคูณกันได้ 180

2. การสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง (ต้องออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล)

จากจากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนสองจำนวนได้ดังนี้

จำนวนเต็มสองจำนวนที่รวมกันได้ 27		ผลคูณ ของจำนวนสองจำนวนนั้น
a	b	

3. การวางแผน

1. กำหนดให้ a และ b แทนจำนวนสองจำนวนนั้น (สิ่งที่โจทย์ถาม)

2. หาจำนวนสองจำนวนที่บวกกันแล้วได้ 27 (สิ่งที่โจทย์กำหนด)

3. หาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้ 180

นั่นคือ $a + b = 27$

$a \times b = 180$

4. ขั้นตอนการตามแผน

เติมตัวเลขลงในตารางตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

จำนวนเต็มสองจำนวนที่รวมกันได้ 27		ผลคูณ ของจำนวนสองจำนวนนั้น
a	b	
1	26	26
2	25	50
3	24	72
4	23	92
5	22	110
6	21	126
7	20	140
8	19	152
9	18	162
10	17	170
11	16	176
12	15	180
13	14	
14	13	

จากตารางจะได้ว่า จำนวนสองจำนวนที่บวกกันได้ 27 และคูณกันแล้วได้ 180
คือ 12 และ 15

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

เนื่องจาก

$$12 + 15 = 27$$

$$12 \times 15 = 180$$

ผลการตรวจเป็นจริงตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

ดังนั้น 12 และ 15 จึงเป็นคำตอบของโจทย์สมการข้อนี้

ตัวอย่างที่ 2 เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอสองชนิดรวมกัน 50 แท่งเป็นเงิน 290 บาท โดยดินสอชนิดที่ 1 ราคาแท่งละ 5 บาท ดินสอชนิดที่ 2 ราคาแท่งละ 7 บาท จงหาว่าเขาซื้อดินสอแท่งละ 5 บาทมาทั้งหมด กี่แท่ง

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ เขาซื้อดินสอแท่งละ 5 บาทมาทั้งหมด กี่ แท่ง

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอ 2 ชนิดรวมกัน 50 แท่งเป็นเงิน 290 บาท

โดย ดินสอชนิดที่ 1 ราคาแท่งละ 5 บาท

ดินสอชนิดที่ 2 ราคาแท่งละ 7 บาท

2. การสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง (นักเรียนต้องออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล) จากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล ดังนี้

จำนวนดินสอ		ราคาดินสอ		ผลรวมราคาดินสอ ชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2
ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	

3. การวางแผน

1. หาจำนวนดินสอชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ที่รวมกันแล้วได้ 50 แท่ง (ให้เติมตัวเลขลงในตารางช่องที่ 1 และ 2 ให้สมบูรณ์)
2. หาราคาที่ต้องซื้อดินสอแต่ละชนิด (เติมตัวเลขลงในตารางช่องที่ 3 กับ 4 ให้สมบูรณ์)
3. หาผลบวกระหว่างราคาดินสอชนิดที่ 1 และ 2 (ให้เติมตัวเลขลงในช่องที่ 5)
4. พิจารณาคำตอบโจทย์สมการจากแถวที่มีผลรวมของราคาดินสอทั้งสองชนิดเป็น 290 บาท

4. ขั้นตอนการตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามที่ได้วางแผนไว้ ดังนี้

จำนวนดินสอ		ราคาดินสอ		ผลรวมราคาดินสอ ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2
ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	
1	49	5	343	348
2	48	10	336	346
3	47	15	329	344
4	46	20	322	342
5	45	25	315	340
6	44	30	308	338
7	43	35	301	336
8	42	40	294	334
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
30	20	150	140	290

จากตารางจะได้ว่า

จำนวนดินสอชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ที่รวมกันแล้วได้ 50 แท่ง

และ ผลบวกราคาดินสอชนิดที่ 1 และ 2 เป็น 290 บาท

ดังนั้น ต้องซื้อดินสอชนิดที่ 1 จำนวน 30แท่ง

ต้องซื้อดินสอชนิดที่ 2 จำนวน 20แท่ง

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

จำนวนดินสอทั้งสองชนิด คือ30.....+ ...20.... =50.....

ราคารวมของดินสอที่ซื้อ คือ150... . + ...140. =290.....

ดังนั้น เด็กชายคนนี้ ต้อง ซื้อดินสอราคาแท่งละ 5 บาท จำนวน30.....แท่ง

3. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) ในแต่ละขั้นโดยให้นักเรียนอ่านทบทวน (5 นาที) จากในเอกสารการเรียนรู้ชุดที่ 3 ที่แจกให้

ขั้นสอน

1. ครูนำเสนอการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง จาก ตัวอย่างที่ 1 ดังนี้

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน(Representation) : การสร้างตาราง ตัวอย่างที่ 1 จำนวนเต็มบวกสองจำนวนรวมกันได้ 27 ผลคูณของจำนวนทั้งสองเป็น 180 จงหาจำนวนทั้งสองนั้น	
---	--

2. ครูให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบของโจทย์สมการโดยให้นักเรียนช่วยกันเติมตัวเลขลงในตารางที่แจกให้ ให้ถูกต้อง ดังนี้

ตาราง 1 การหาคำตอบจากโจทย์สมการในตัวอย่างที่ 1

จำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 27		ผลคูณของจำนวนสองจำนวนนั้น
จำนวนที่ 1	จำนวนที่ 2	
1		
2		

3. เมื่อนักเรียนสามารถหาคำตอบได้แล้วครูจึงอธิบายวิธีการเขียนคำตอบตามลำดับขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยละเอียด
4. ครูให้นักเรียนทุกคนหาคำตอบของโจทย์สมการใน ตัวอย่างที่ 2 โดยให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางให้ถูกต้องดังนี้

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน(Representation) : การสร้างตาราง

ตัวอย่างที่ 2 เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอสองชนิดรวมกัน 50 แท่ง เป็นเงิน 290 บาท โดยดินสอชนิดที่ 1 ราคาแท่งละ 5 บาท ดินสอชนิดที่ 2 ราคาแท่งละ 7 บาท จงหาว่าเขาซื้อดินสอแท่งละ 5 บาทมาทั้งหมดกี่แท่ง

ตาราง 2 การหาคำตอบจากโจทย์สมการในตัวอย่างที่ 2

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

จำนวนดินสอ		ราคาดินสอ		ผลรวมราคา ชนิดที่ 1 + ชนิดที่ 2
ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	

5. เมื่อนักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 และ 2 เสร็จแล้วครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม จับสลาก 8 ใบที่มีหมายเลข ๑ จำนวนสามใบ หมายเลข ๒ จำนวนสามใบและ หมายเลข ๓ จำนวนสองใบ ซึ่งหมายเลข ๑ , ๒ และ ๓ นั้นเป็นหมายเลขที่แสดงโจทย์สมการข้อที่ 1, 2 และ 3 ในใบงานที่ 3 ตามเอกสารการเรียนรู้ชุดที่ 3

6. ครูแจกกระดาษชาร์ตและปากกาเมจิก เพื่อให้กลุ่มที่จับสลากได้หมายเลข ๑ , ๒ และ ๓ ช่วยกันออกแบบตาราง และเขียนแสดงวิธีการแก้โจทย์สมการของตนเอง

7. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอผลงาน(ทุกกลุ่ม)โดยให้กลุ่มที่ได้เรื่องเดียวกัน ออกมานำเสนอก่อนตามลำดับหมายเลข ๑ ๒ และ ๓ ที่จับสลากได้

8. ครูติดตามผลงานของนักเรียนบนกระดานดำ (เป็นตารางที่นักเรียนได้ช่วยกันออกแบบแล้ว)

ขั้นสรุป ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายถึงการออกแบบในการแก้โจทย์สมการของแต่ละกลุ่ม ว่ามีความถูกต้อง เหมาะสมหรือไม่

4. สื่อ/อุปกรณ์

- เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 3: เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน(Representation) : การสร้างตาราง
- กระดาษชาร์ต , ปากกาเมจิก

5. การวัดและการประเมิน

การวัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
ด้านความรู้	- ตรวจจากเอกสาร ประกอบการเรียนรู้ ชุดที่3	- เอกสารประกอบการ เรียนรู้ชุดที่ 3 - แบบประเมินคุณภาพ ชิ้นงาน ชุดที่ 3	-นักเรียน ร้อยละ 70 ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำของ แบบประเมินคุณภาพ ชิ้นงาน ชุดที่ 3
ด้านทักษะ/ กระบวนการ	- สังเกตจากการร่วม กิจกรรม - การนำเสนอข้อมูล -ตรวจ ผลงาน	-แบบวัดผลและ ประเมินผลคณิตศาสตร์ ด้านทักษะ/กระบวนการ	- นักเรียนร้อยละ 70 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัด และประเมินผล คณิตศาสตร์ด้านทักษะ กระบวนการ
ด้านคุณลักษณะ อันพึงประสงค์	สังเกตจาก - การส่งงาน (ส่งงาน ครบ ตามกำหนด) - ความสะอาด ของ สมุด/แบบฝึกทักษะ/งาน ที่ได้รับมอบหมาย	- แบบวัดและ ประเมินผลด้าน คุณลักษณะอันพึง ประสงค์	- นักเรียนร้อยละ80 ผ่าน เกณฑ์ตามแบบ วัดและประเมินผล คณิตศาสตร์ด้าน คุณลักษณะอันพึง ประสงค์

6. บันทึกผลหลังสอน

.....

.....

.....

.....

เอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation)

3.การสร้างตาราง

3. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง อย่างเป็นลำดับตามเนื้อหาที่ได้นำเสนอ และหากมีส่วนใดที่ไม่เข้าใจ นักเรียนสามารถสอบถามครูผู้สอนได้

เนื้อหาสาระ

3. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การสร้างตาราง

คำอธิบาย : ในการศึกษาเนื้อหาในส่วนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การสร้างตาราง และได้ฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การสร้างตารางจากใบงานที่ 3

กิจกรรมที่ 3

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้
ตัวแทน (Representation) : การสร้างตารางได้

คำสั่ง : ให้นักเรียนปฏิบัติตามลำดับต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนศึกษาขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากเอกสารที่
แจกให้
2. ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้
ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง จากตัวอย่างที่ 1 และ 2
3. ให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน
(Representation) : การสร้างตาราง จากใบงานที่ 3

3. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง

ให้ผู้เรียนศึกษากระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน (Representation) ด้านล่างนี้ให้เข้าใจ ซึ่งอาจสอบถามจากครูผู้สอนก็ได้ จากนั้นศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 ตามลำดับเสร็จแล้วอย่าลืมฝึกฝนตนเองโดยทำใบงานที่ 3นะครับ



ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation)

1. **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา** เป็นขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหามust ต้องอ่านโจทย์ปัญหา เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาที่โจทย์กำหนดให้ได้ว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์กำหนดและอะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการ
2. **ขั้นสร้างตัวแทน (Representation)** เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถแสดงความเข้าใจออกมาในรูปของการสร้างตัวแทน ซึ่งได้แก่ การใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ผู้แก้ปัญหามust ต้องประมวลผลความคิดความเข้าใจในปัญหาเพื่อนำเสนอออกมาให้เห็นเป็นรูปธรรม โดยการสร้างตัวแทนดังกล่าว
3. **ขั้นวางแผน** เป็นขั้นของการเสนอแนวคิดหรือสร้างทางเลือกในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนจะต้องประมวลผลสิ่งต่างๆที่ได้ในขั้นที่ 1 และ 2 เพื่อวางแผนแนวทางในการแก้ปัญหามาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดและจากสิ่งที่โจทย์ต้องการ นักเรียนจะสามารถเขียนสิ่งเหล่านี้ออกมาในรูปของสมการได้อย่างไรและมีสูตร ทฤษฎี ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลใดที่โจทย์ไม่ได้กำหนดแต่ต้องนำมาใช้เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น
4. **ขั้นดำเนินการตามแผน** เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแผนที่ได้วางไว้
5. **ขั้นตรวจคำตอบ** เป็นขั้นของการตรวจคำตอบที่ได้ตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนเต็มบวกสองจำนวนรวมกันได้ 27 ผลคูณของจำนวนทั้งสอง เป็น 180

จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวน

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ จำนวนเต็มบวกสองจำนวนรวมกันได้ 27

จำนวนเต็มบวกสองจำนวนนั้นคูณกันได้ 180

2. การสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง (นักเรียนต้องออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล)

จากจากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนสองจำนวนได้ดังนี้

จำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่รวมกันได้ 27		ผลคูณ ของจำนวนสองจำนวนนั้น
a	b	

3. การวางแผน

1. กำหนดให้ a และ b แทนจำนวนสองจำนวนนั้น (สิ่งที่โจทย์ถาม)

2. หาจำนวนสองจำนวนที่บวกกันแล้วได้ 27 (สิ่งที่โจทย์กำหนด)

3. หาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้ 180

นั่นคือ $a + b = 27$

$a \times b = 180$

4. ขั้นตอนการตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

จำนวนเต็มสองจำนวนที่รวมกันได้ 27		ผลคูณ ของจำนวนสองจำนวนนั้น
a	b	
1	26	26
2	25	50
3	24	72
4	23	92
5	22	110
6	21	126
7	20	140
8	19	152
9	18	162
10	17	170
11	16	176
12	15	180

จากตารางจะได้ว่า จำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่รวมกันได้ 27 และคูณกันแล้วได้ 180
คือ 12 และ 15

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

เนื่องจาก

$$12 + 15 = 27$$

$$12 \times 15 = 180$$

ผลการตรวจสอบ เป็นจริงตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

ดังนั้น 12 และ 15 จึงเป็นคำตอบของโจทย์สมการข้อนี้

ตัวอย่างที่ 2 เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอสองชนิดรวมกัน 50 แท่งเป็นเงิน 290 บาท โดยดินสอชนิดที่ 1 ราคาแท่งละ 5 บาท ดินสอชนิดที่ 2 ราคาแท่งละ 7 บาท จงหาว่าเขาซื้อดินสอแท่งละ 5 บาทมาทั้งหมด กี่แท่ง

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ เขาซื้อดินสอแท่งละ 5 บาทมาทั้งหมด กี่แท่ง

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ เด็กคนหนึ่งซื้อดินสอ 2 ชนิดรวมกัน 50 แท่งเป็นเงิน 290 บาท

โดย ดินสอชนิดที่ 1 ราคาแท่งละ 5 บาท

ดินสอชนิดที่ 2 ราคาแท่งละ 7 บาท

2. การสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง (นักเรียนต้องออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล)จากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล ดังนี้

จำนวนดินสอ		ราคาดินสอ		ผลรวมราคาดินสอ ชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2
ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	

3. การวางแผน

1. หาจำนวนดินสอชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ที่รวมกันแล้วได้ 50 แท่ง (ให้เติมตัวเลขลงในตารางช่องที่ 1 และ 2 ให้สมบูรณ์)
2. หาราคาที่ต้องซื้อดินสอแต่ละชนิด (เติมตัวเลขลงในตารางช่องที่ 3 กับ 4 ให้สมบูรณ์)
3. หาผลบวกระหว่างราคาดินสอชนิดที่ 1 และ 2 (ให้เติมตัวเลขลงในช่องที่ 5)
4. พิจารณาคำตอบโจทย์สมการจากแถวที่มีผลรวมของราคาดินสอทั้งสองชนิดเป็น 290 บาท

4. ขั้นตอนการตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามที่ได้วางแผนไว้ ดังนี้

จำนวนดินสอ		ราคาดินสอ		ผลรวมราคาดินสอ ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2
ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	
1	49	5	343	348
2	48	10	336	346
3	47	15	329	344
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
30	20	150	140	290

จากตารางจะได้ว่า

จำนวนดินสอชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ที่รวมกันแล้วได้ 50 แท่ง และ

ผลบวกราคาดินสอชนิดที่ 1 และ 2 เป็น 290 บาท คือ

ต้องซื้อดินสอชนิดที่ 1 จำนวน 30แท่ง

ต้องซื้อดินสอชนิดที่ 2 จำนวน 20แท่ง

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

จำนวนดินสอทั้งสองชนิด คือ30.....+20..... =50.....

ราคารวมของดินสอที่ซื้อ คือ150... +140. =290.....

ดังนั้น เด็กชายคนนี้ ต้อง ซื้อดินสอราคาแท่งละ 5 บาทจำนวน30.....แท่ง

ใบงานที่ 3

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การสร้างตาราง

1. เมื่อนำอายุพี่กับน้องที่คิดเป็นจำนวนเต็มปีมารวมกันจะได้ 25 ปี และถ้านำมาคูณกันปรากฏว่าได้ 156 จงหาว่าคนที่เป็นน้องมีอายุเท่าใด

วิธีทำ

1.ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ

.....

2. ขั้นตอนสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง

ให้นักเรียนออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยพิจารณาว่าจากจากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไร

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

จากสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนด นักเรียนจะมีวิธีดำเนินการอย่างไรเขียนอธิบายเป็นข้อๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามที่ได้วางแผนไว้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

ให้นักเรียนตรวจคำตอบที่ได้โดยพิจารณาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

2. สมศรีนับไก่และหมู รวมกันได้ 12 ตัว ถ้าหมาจะได้ขาไ้มากกว่าขาหมู 6 ขา อยากทราบว่ามีไก่และหมูอย่างละกี่ตัว

วิธีทำ

1.ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ

.....
.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง

ให้นักเรียนออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยพิจารณาว่าจากจากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไร

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. ขั้นวางแผน

จากสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนด นักเรียนจะมีวิธีดำเนินการอย่างไรเขียนอธิบายเป็นข้อ ๆ

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. ขั้นตอนดำเนินการ ตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามที่ได้วางแผนไว้

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

3. จงหาจำนวนคู่บวกสามจำนวนเรียงกันที่ผลบวกของทั้งสามจำนวนเป็น 60

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน : การสร้างตาราง

ให้นักเรียนออกแบบตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยพิจารณาว่าจากจากสิ่งที่โจทย์กำหนดสามารถสร้างเป็นตารางเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

จากสิ่งที่โจทย์ถามและสิ่งที่โจทย์กำหนด นักเรียนจะมีวิธีดำเนินการอย่างไรเขียนอธิบายเป็นข้อ ๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นตอนดำเนินการ ตามแผน

ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางตามที่ได้วางแผนไว้

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. ขัณฑ์ตรวจคำตอบ

ให้นักเรียนตรวจคำตอบที่ได้โดยพิจารณาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

[illegible]

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ..4..

เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน :
การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จำนวน 2 คาบ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้

นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

1.2 ด้านทักษะกระบวนการ : นักเรียน

- 1) มีความสามารถในการแก้ปัญหาได้
- 2) มีความสามารถในการให้เหตุผลได้
- 3) มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอข้อมูลได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

- 1) มีความรับผิดชอบ
- 2) มีระเบียบวินัย
- 3) ทำงานเป็นระบบ

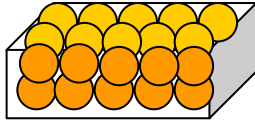
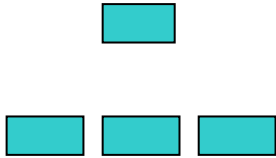
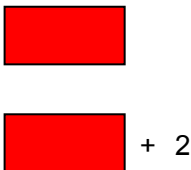
2. สาระการเรียนรู้

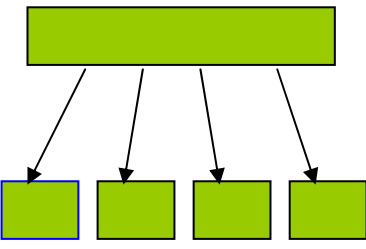
4. แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) :
การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

4.1 การแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษา ด้วยสัญลักษณ์(ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์

4.1.1 การกำหนดตัวแปรแทนจำนวน

ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มักมีการกำหนดสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ แทน จำนวนที่เราไม่ทราบค่า เช่น เราอาจกำหนดให้สิ่งที่เราไม่ทราบค่านั้นด้วยรูปภาพ หรือตัวแปร ต่างๆดังนี้

ข้อความ/ประโยคภาษา	รูปภาพ	สัญลักษณ์
1. กล่องใบหนึ่งบรรจุส้มจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนส้มเหล่านั้น แทนด้วย		x
2. 3 เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนนั้น แทนด้วย ดังนั้น 3 เท่าของจำนวนนั้น แทนด้วย		y $3y$
3. 2 ใน 3 ของจำนวนจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนนั้น แทนด้วย ดังนั้น 2 ใน 3 ของจำนวนนั้น แทนด้วย		z $\frac{2}{3} z$
4. จำนวนที่มากกว่าจำนวนจำนวนหนึ่งอยู่ 2 <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนหนึ่ง แทนด้วย ดังนั้น จำนวนที่มากกว่าจำนวนหนึ่งอยู่ 2 แทนด้วย		x $x + 2$

ข้อความ/ประโยคภาษา	รูปภาพ	สัญลักษณ์
5. แบ่งเงินจำนวนหนึ่งให้กับเด็ก 4 คน คนละเท่ากัน <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนเงินเหล่านั้น แทนด้วย จำนวนที่เด็กแต่ละคนได้รับ แทนด้วย		A $\frac{A}{4}$

4.1.2 การกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวกับอายุ

โจทย์สมการที่เกี่ยวข้องกับอายุ เป็นโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา ที่มีความสัมพันธ์และมีความต่อเนื่องกันระหว่าง เวลาในอดีต เวลาปัจจุบัน และเวลาในอนาคต ดังนั้นการกำหนดตัวแปรเกี่ยวกับอายุจึงสามารถกำหนดได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

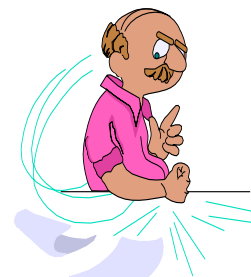
สถานการณ์ที่ 1				
ปัจจุบันลุงสมใจมีอายุ x ปี อีก 12 ปีข้างหน้าลุงสมใจจะมีอายุครบ 52 ปีพอดี จงหาว่า เมื่อ 5 ปีที่แล้วลุงสมใจมีอายุเท่าใด				
คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนสัญลักษณ์(ตัวแปร) แทนข้อความ/ประโยคต่อไปนี้				
1. ปัจจุบัน	อายุของลุงสมใจ	แทนด้วย	 (x)	ปี
2. อีก 12 ปีข้างหน้า	อายุของลุงสมใจ	แทนด้วย	 ($x + 12$)	ปี
3. เมื่อ 5 ปีที่แล้ว	อายุของลุงสมใจ	แทนด้วย	($x - 5$)	ปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพเพื่อวิเคราะห์หาสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ของอายุของสมใจได้ดังนี้

อดีต (เมื่อ 5 ปีที่แล้ว)

ปัจจุบัน

อนาคต (12 ปีข้างหน้า)



$x - 5$ ปี

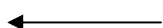
x ปี

$x + 12$ ปี

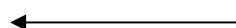


52 ปี

40 - 5



40



40 + 12

จากแผนภาพจะได้ว่า

ปัจจุบัน	ลุงสมใจอายุ	40 ปี
อีก 12 ปีข้างหน้า	ลุงสมใจอายุ	$40 + 12 = 52$ ปี
เมื่อ 5 ปีที่แล้ว	ลุงสมใจอายุ	$40 - 12 = 35$ ปี

4.2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุบุตร อีก 10 ปีข้างหน้าพ่อจะมีอายุครบ 61 ปีพอดี จงหาว่าปัจจุบันบุตรมีอายุกี่ปี

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ปัจจุบันบุตรมีอายุ กี่ ปี

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุบุตร

อีก 10 ปีข้างหน้าพ่อจะมีอายุครบ 61 ปีพอดี

2. การสร้างตัวแทน

กำหนดให้ ปัจจุบัน	อายุของบุตร	แทนด้วย	x	ปี
ดังนั้น	พ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร	แทนด้วย	$3x$	ปี

3. การวางแผน

เนื่องจาก โจทย์กำหนดว่าอีก 10 ปีข้างหน้าพ่อจะมีอายุครบ	61	ปี
ดังนั้น ปัจจุบันพ่อมีอายุ	$61 - 10 =$	51 ปี
แต่ ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร	$3x$	ปี
สมการที่ได้ก็คือ	$3x =$	51

4. การดำเนินการตามแผน

จากสมการ	$3x =$	51
นำ $\frac{1}{3}$	คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ	
	$\frac{1}{3} (3x) =$	$\frac{1}{3} (51)$
	$x =$	17

นั่นคือ ปัจจุบันบุตรมีอายุ 17 ปี

5. ขั้นตรวจคำตอบ

ปัจจุบัน	บุตรมีอายุ	17	ปี
	พ่อ มีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร	$3 \times 17 =$	51 ปี
ดังนั้น	อีก 10 ปีข้างหน้า พ่อจะมีอายุ	$51 + 10 =$	61 ปี
(ซึ่งตรงกับที่โจทย์กำหนดว่า อีก 10 ปีข้างหน้า พ่อจะมีอายุครบ 61 ปี)			

ตัวอย่าง 2 สุณีย์อ่านหนังสือเล่มหนึ่ง วันแรกอ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม วันที่สองอ่านได้อีก 45 หน้ารวมสองวันอ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี จงหาว่าหนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด กี่ หน้า

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ หนังสือมีทั้งหมด กี่ หน้า

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ วันแรก อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม

วันที่สอง อ่านได้อีก 45 หน้า

รวมสองวัน อ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี

2. ขั้นสร้างตัวแทน

กำหนดให้สิ่งที่โจทย์ถาม คือ หนังสือมีทั้งหมด แทนด้วย x หน้า

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ วันแรก อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม แทนด้วย $\frac{1}{5}x$ หน้า

วันที่สอง อ่านได้อีก 45 หน้า

รวมสองวัน อ่านได้ครึ่งเล่มพอดี แทนด้วย $\frac{1}{2}x$ หน้า

3. ขั้นวางแผน

โจทย์กำหนดว่า รวมสองวันอ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี $\frac{1}{2}x$ หน้า

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{1}{5}x + 45 = \frac{1}{2}x$$

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

$$\text{จากสมการ} \quad \frac{1}{5}x + 45 = \frac{1}{2}x$$

แก้สมการ ค.ร.น. ของ 5 และ 2 คือ 10

นำ 10 คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$(10) \frac{1}{5}x + (10)45 = (10) \frac{1}{2}x$$

$$2x + 450 = 5x$$

นำ $-2x$ บวกจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$2x + (-2x) + 450 = 5x + (-2x)$$

$$3x = 450$$

นำ $\frac{1}{3}$ คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(450)$$

$$x = 150$$

นั่นคือ หนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด **150** หน้า

5. ขั้นตรวจคำตอบ

จาก หนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด		150	หน้า
วันแรก	อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม	$\frac{1}{5} \times 150 =$	30 หน้า
วันที่สอง	อ่านได้อีก		45 หน้า
รวมสองวัน	อ่านได้	$30 + 45 =$	75 หน้า

(ซึ่งตรงกับที่โจทย์กำหนดว่า อ่านสองวันได้ ครึ่งเล่มพอดี)

3. กิจกรรมเรียนรู้

ขั้นนำ 1. ครูนำเสนอสถานการณ์การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้โจทย์สมการ ดังนี้

สถานการณ์ 1

ครูหยิบซองบรรจุเงินมา 1 ซองพร้อมกับเงินอีก 75 บาท แล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



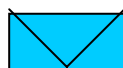
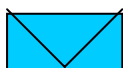
+ 75 บาท

คำถาม 1 : นักเรียนมีวิธีการหาคำตอบจากคำถามเหล่านี้ได้อย่างไร

- 1.1) ถ้าครูมีเงินทั้งหมด 100 บาท จงหาจำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซอง
- 1.2) จากข้อ 1.1 ถ้าครูมีซองบรรจุเงินที่เท่ากับเงินในซองนี้จำนวน 4 ซอง ครูจะมีเงิน

สถานการณ์ 2

ครูหยิบซองบรรจุเงินจำนวน 3 ซอง พร้อมกับเงินอีก 30 บาท แล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



+ 30 บาท

คำถาม 2 : นักเรียนมีวิธีคิดหาคำตอบจากคำถามเหล่านี้ได้อย่างไร

เมื่อกำหนดให้จำนวนเงินในแต่ละซองมีจำนวนเท่ากัน

- 2.1) ถ้าครูมีเงินทั้งหมด 300 บาท จงหาว่าจำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซองบรรจุเงินทั้ง 3 ซองนี้เป็นเท่าใด
- 2.2) ซองบรรจุเงินแต่ละซองมีเงินเท่าใด เมื่อแต่ละซองมีจำนวนเงินเท่ากัน

2) ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นและอธิบายวิธีการหาคำตอบจากสถานการณ์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ขั้นสอน :

1. ครูนำเสนอวิธีการการกำหนดสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์ โดยอธิบายการเขียนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ที่ 1 และ สถานการณ์ที่ 2 ดังนี้

ในการหาคำตอบจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในขั้นหน้านั้น เราสามารถกำหนดสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์ที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้

สถานการณ์ที่ 1 :

ครูหยิบซองบรรจุเงินมา 1 ซองพร้อมกับเงินอีก 75 บาท แล้วให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้



+ 75

วิธีทำ

เราอาจกำหนดให้ จำนวนเงินที่อยู่ในซอง แทนด้วย x บาท
 ดังนั้นจากสถานการณ์ที่ 1 จึงเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x + 75$

จากคำถามข้อ 1.1)

“ ถ้าครูมีเงินทั้งหมด 100 บาท จงหาจำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซองบรรจุเงิน “

จะได้ว่า $x + 75 = 100$

นำ -75 บวกจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$x + 75 + (-75) = 100 + (-75)$$

$$x = 25$$

นั่นคือ จำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซอง ก็คือ 25 บาท

จากคำถามข้อ 1.2)

“ ถ้าครูมีซองบรรจุเงินเท่ากับเงินในซองนี้อยู่ 4 ซองจงหาว่า ครูจะมีเงินทั้งหมดเท่าใด “

จะได้ว่า จำนวนเงินใน 4 ซอง แทนด้วย $x + x + x + x = 4x$

$$\text{นั่นคือ} \quad 4x = 4 \times x$$

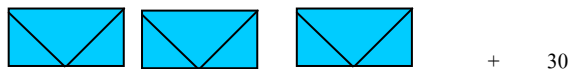
$$\text{แทน } x \text{ ด้วย } 25 \quad \text{จะได้ว่า} \quad 4x = 4 \times (25)$$

$$= 100$$

นั่นคือ ถ้าครูมีซองบรรจุเงินทั้งหมด 4 ซองครูจะมีเงินทั้งหมด 100 บาท

จากสถานการณ์ที่ 2 :

ครูหยิบซองบรรจุเงินจำนวน 3 ซอง พร้อมกับเงินอีก 30 บาท แล้วให้นักเรียนตอบคำถาม ต่อไปนี้



วิธีทำ

เราอาจกำหนดให้จำนวนเงินในแต่ละซอง แทนด้วย y บาท

สัญลักษณ์ คือ $y + y + y + 30$

หรือ $3y + 30$

จากคำถาม 2.1

ถ้าครูมีเงินทั้งหมด 300 บาท จงหาว่าจำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซองบรรจุเงินทั้ง 3 ซองนี้เป็นเท่าใด
จะได้ว่า

$$3y + 30 = 300$$

นำ -30 บวกจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$3y + 30 + (-30) = 300 + (-30)$$

$$3y = 270$$

นั่นคือ จำนวนเงินที่บรรจุอยู่ในซองทั้งสามซองนี้ คือ 270 บาท

จากคำถาม 2.2

ซองบรรจุเงินแต่ละซองมีจำนวนเงินเท่าใด เมื่อแต่ละซองมีจำนวนเงินเท่ากัน

จะได้ว่า จาก $3y = 270$

นำ 3 หารจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$\frac{3y}{3} = \frac{270}{3}$$

$$y = 90$$

นั่นคือ แต่ละซองมีเงิน 90 บาท

2. ครูแจกเอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 4 ให้นักเรียนศึกษา
3. ครูให้นักเรียนทำ กิจกรรมที่ 4.1 ที่ครูแจกให้ ซึ่งเป็นกิจกรรมที่จะให้ผู้เรียนได้ฝึกการเขียนสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของเศษส่วนและอายุตามลำดับ
4. ครูให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) โดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาตัวอย่างจาก กิจกรรมที่ 4.2 ที่ครูแจกให้ทั้งนี้ขณะที่นักเรียนกำลังศึกษานี้ ครูต้องมีหน้าที่ในการ

ช่วยเหลือ ให้คำอธิบาย และตอบข้อซักถามของนักเรียนเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ

5. ครูสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) อีกครั้งโดยยกตัวอย่างเพิ่มเติม เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น
6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันฝึกแก้โจทย์สมการโดยใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์โดย
ให้นักเรียนทำใบงานที่ 4.2
7. เมื่อนักเรียนทำใบงานที่ 4.2 เสร็จแล้ว ครูสุ่มให้ตัวแทนนักเรียนจาก 3 กลุ่มได้ออกมา
นำเสนอวิธีการคิดแก้โจทย์สมการของตนเอง

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ว่ามีลำดับขั้นตอนอย่างไร
2. ครูนำตัวอย่างจากใบงานที่ 4.2 เพื่อให้ นักเรียนทั้งหมดช่วยกันวิเคราะห์ว่า ในโจทย์แต่ละข้อนั้นนักเรียนคิดว่า การใช้ตัวแทนใด (การใช้วัตถุจริง/แบบจำลองของจริง การวาดภาพ การสร้างตาราง และการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์) เหมาะสมกับโจทย์ข้อใดมากที่สุด

4. สื่อ/อุปกรณ์

1. ชองบรรจุเงินจำนวน 4 ชอง
2. เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดที่ 4 เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

5. การวัดและการประเมิน

การวัดผล	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
ด้านความรู้	- ตรวจจากเอกสารประกอบการเรียนรู้อุบัติที่4	- เอกสารประกอบการเรียนรู้อุบัติที่ 4 - แบบประเมินคุณภาพชิ้นงาน อุบัติที่ 4	-นักเรียน ร้อยละ 70 ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำของแบบประเมินคุณภาพชิ้นงาน อุบัติที่ 4
ด้านทักษะ/กระบวนการ	- สังเกตจากการร่วมกิจกรรม - การนำเสนอข้อมูล -ตรวจ ผลงาน	-แบบวัดผลและประเมินผลคณิตศาสตร์ด้านทักษะ/กระบวนการ	- นักเรียนร้อยละ 70 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์ด้านทักษะกระบวนการ
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	สังเกตจาก - การส่งงาน (ส่งงานครบ ตามกำหนด) - ความสะอาด ของสมุด/แบบฝึกทักษะ/งานที่ได้รับมอบหมาย	- แบบวัดและประเมินผลด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์	- นักเรียนร้อยละ80 ผ่านเกณฑ์ตามแบบวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

6. บันทึกผลหลังสอน

[illegible]

เอกสารประกอบการเรียนรู้ ชุดที่ 4

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation)

4.การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

4. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์(ตัวแปร)

คำชี้แจง

ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) อย่างเป็นลำดับตามเนื้อหาที่ได้นำเสนอ และหากมีส่วนใดที่ไม่เข้าใจ นักเรียนสามารถสอบถามกับครูผู้สอนได้

เนื้อหาสาระ

4.1 การแทนประโยคภาษาด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร)

คำอธิบาย : ในการศึกษาเนื้อหาในส่วนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษา ให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์(ตัวแปร)ทางคณิตศาสตร์จากกิจกรรมที่ 4.1 และจะได้ฝึกการแทนประโยคภาษาด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร)ทางคณิตศาสตร์จากใบงานที่ 4.1

4.2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทน :การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

คำอธิบาย : ในการศึกษาเนื้อหาในส่วนนี้นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ในกิจกรรมที่ 4.2 และจะได้ฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน : การการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จากใบงานที่ 4.2 ด้วย

กิจกรรม 4

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้
ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ได้

คำสั่ง : ให้นักเรียนปฏิบัติตามลำดับต่อไปนี้

4. ให้นักเรียนศึกษาการแทนประโยคภาษาด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทาง
คณิตศาสตร์ จากกิจกรรมที่ 4.1 เสร็จแล้วให้ทำใบงานที่ 4.1 ส่งครู
5. ครูให้นักเรียนทุกคนร่วมกันเฉลยใบงานที่ 4.1 ก่อนให้ศึกษาหัวข้อต่อไป
6. ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้
ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จากกิจกรรมที่ 4.2
7. ให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน
(Representation) : การการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จากใบงานที่ 4.2

กิจกรรมที่ 4.1

การแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษา ด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร)
ทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนสามารถแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษา ด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร)
ทางคณิตศาสตร์ได้

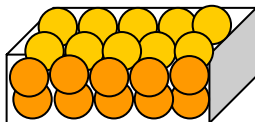
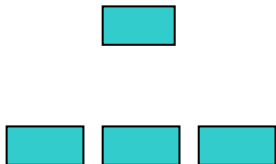
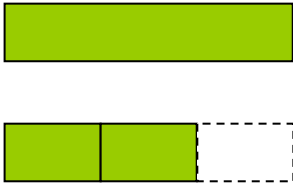
คำสั่ง : ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

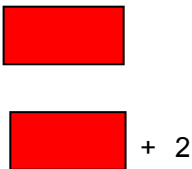
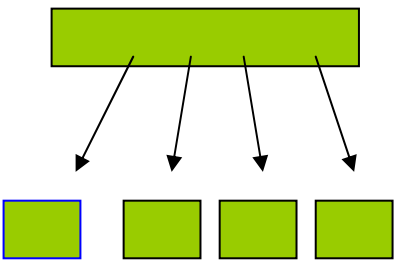
1. ศึกษาการแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษาด้วยสัญลักษณ์(ตัวแปร)ทาง
คณิตศาสตร์ จากเอกสารที่แจกให้
2. ฝึกการการแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษาด้วยสัญลักษณ์(ตัวแปร)ทาง
คณิตศาสตร์ในใบงานที่ 4.1 เสร็จแล้วให้ส่งใบงานครูด้วย

4.1 การแทนประโยคภาษาหรือข้อความภาษา ด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ทางคณิตศาสตร์

4.1.1 การกำหนดตัวแปรแทนจำนวน

ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะมีการกำหนดสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนจำนวนที่เราไม่ทราบค่า เช่น เราอาจกำหนดให้สิ่งที่เราไม่ทราบค่านั้นด้วยรูปภาพ หรือตัวแปร ดังต่อไปนี้

ข้อความ/ประโยคภาษา	รูปภาพ	สัญลักษณ์
1. กล่องใบหนึ่งบรรจุส้มจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนส้มเหล่านั้น แทนด้วย		x
2. 3 เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนนั้น แทนด้วย ดังนั้น 3 เท่าของจำนวนนั้น แทนด้วย		y $3y$
3. 2 ใน 3 ของจำนวนจำนวนหนึ่ง <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนนั้น แทนด้วย ดังนั้น 2 ใน 3 ของจำนวนนั้น แทนด้วย		z $\frac{2}{3} z$

ข้อความ/ประโยคภาษา	รูปภาพ	สัญลักษณ์
4.จำนวนที่มากกว่าจำนวนจำนวนหนึ่งอยู่ 2 <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนจำนวนหนึ่ง แทนด้วย ดังนั้น จำนวนที่มากกว่าจำนวนจำนวนหนึ่ง อยู่ 2 แทนด้วย		x $x + 2$
5. แบ่งเงินจำนวนหนึ่งให้กับเด็ก 4 คน คนละเท่ากัน <u>วิธีทำ</u> เราอาจกำหนดให้ จำนวนเงินเหล่านั้น แทนด้วย ดังนั้น จำนวนที่เด็กแต่ละคนได้รับ แทนด้วย		y $\frac{y}{4}$

4.1.2 การกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับอายุ

โจทย์สมการที่เกี่ยวข้องกับอายุ เป็นโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเวลา ที่มีความสัมพันธ์และมีความต่อเนื่องกันระหว่าง เวลาในอดีต เวลาปัจจุบัน และเวลาในอนาคต ดังนั้นการกำหนดตัวแปรเกี่ยวกับอายุจึงสามารถกำหนดได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

สถานการณ์ที่ 1

ปัจจุบันลุงสมใจมีอายุ x ปี อีก 12 ปีข้างหน้าสมใจจะมีอายุครบ 52 ปีพอดี จงหาว่า เมื่อ 5 ปีที่แล้วสมใจมีอายุเท่าใด

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนสัญลักษณ์(ตัวแปร) แทนข้อความ/ประโยคต่อไปนี้

1. ปัจจุบัน อายุของลุงสมใจแทนด้วย (x) ปี
2. อีก 12 ปีข้างหน้า อายุของลุงสมใจ แทนด้วย ($x + 12$) ปี
3. เมื่อ 5 ปีที่แล้ว อายุของลุงสมใจ แทนด้วย ($x - 5$) ปี

วิธีทำ เขียนแผนภาพเพื่อวิเคราะห์หาสัญลักษณ์ (ตัวแปร) ของอายุของสมใจได้ดังนี้

อดีต (เมื่อ 5 ปีที่แล้ว)



$x - 5$ ปี

$40 - 5$

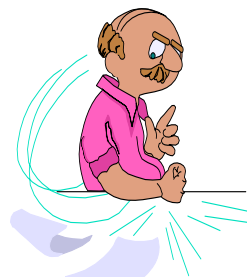
ปัจจุบัน



x ปี

40

อนาคต (12 ปีข้างหน้า)



$x + 12$ ปี



52 ปี

$40 + 12$

จากแผนภาพจะได้ว่า

ปัจจุบัน	ลุงสมใจอายุ	40	ปี
อีก 12 ปีข้างหน้า	ลุงสมใจอายุ	$40 + 12 = 52$	ปี
เมื่อ 5 ปีที่แล้ว	ลุงสมใจอายุ	$40 - 12 = 35$	ปี

ใบงาน 4.1

การแทนประโยคภาษาด้วยสัญลักษณ์ (ตัวแปร)ทางคณิตศาสตร์

1. จงเขียนสัญลักษณ์(ตัวแปร)ทางคณิตศาสตร์ แทนข้อความหรือประโยคภาษาต่อไปนี้
เมื่อกำหนดให้ จำนวนจำนวนหนึ่ง แทนด้วย x

ข้อความหรือประโยคทางคณิตศาสตร์	การเขียนสัญลักษณ์ (ตัวแปร x)
1. สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง	
2. สามเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งที่มากกว่า 6	
3. ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งรวมกับ 7	
4 จำนวนที่มากกว่า ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งอยู่ 7	
5. แบ่งขนมจำนวนหนึ่งให้เด็ก 8 คนคนละเท่าๆกัน	
6. สองเท่าของผลบวกระหว่าง จำนวนจำนวนหนึ่งกับ 5	
7. สามเท่าของผลต่างระหว่าง จำนวนจำนวนหนึ่ง กับ 4	
8. หกเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งรวมกับ 7 เท่ากับ 43	
9. สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง ลบกับ สี่เท่าของจำนวนจำนวนนั้น	
10. 1 ใน 4 ของจำนวนจำนวนหนึ่ง	
11. 2 ใน 5 ของส่วนที่จำนวนจำนวนหนึ่งน้อยกว่า 6	
12. ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งเท่ากับ 20	
13. ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งลบด้วย 3 เท่ากับ 1	
14. ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่ง รวมกับ 9 เท่ากับ 69	
15. จำนวนจำนวนหนึ่งมากกว่า 7 อยู่ 10	
16. จำนวนจำนวนหนึ่งน้อยกว่า 17 อยู่ 5	
17. จำนวนจำนวนหนึ่งน้อยกว่า 7 อยู่ 10	
18. 1 ใน 4 ของจำนวนจำนวนหนึ่ง คือ 25	
19. 2 ใน 5 ของจำนวนจำนวนหนึ่งที่มากกว่า 6 คือ 10	
20. แม่มีเงินจำนวนจำนวนหนึ่ง พ่อให้อีก 300 แล้วนำเงินทั้งหมดไปแบ่งให้ลูก 3 คนคนละเท่าๆกัน ปรากฏว่า ได้คนละ 200	

2. จงเขียนสัญลักษณ์(ตัวแปร) แทนประโยคภาษาที่เกี่ยวข้องกับอายุ ดังนี้
เมื่อกำหนดให้ x แทนอายุในปัจจุบัน

ข้อความ/ประโยคภาษา	สัญลักษณ์ (ตัวแปร)
1. ปีติแก่กว่าก้อย 3 ปี กึ่งอ่อนกว่าก้อย 4 ปี	ปัจจุบันก้อยมีอายุ x ปี ปีติมีอายุปี กึ่งมีอายุปี
2. อายุอีก 10 ปีข้างหน้าของพ่อ อายุเมื่อ 7 ปีที่แล้วของพ่อ	ปัจจุบันพ่อมีอายุ y ปี อีก 10 ปีข้างหน้าพ่อมีอายุ.....ปี เมื่อ 7 ปีที่แล้วของพ่อ คือ..... ปี
3. พ่อมีอายุเป็นสามเท่าของบุตร	ถ้า บุตรมีอายุ x ปี พ่อมีอายุ ปี
4.ปัจจุบันกึ่งมีอายุเป็นสองเท่าของก้อย	ปัจจุบัน ก้อยมีอายุ..... xปี กึ่งมีอายุปี อีก 3 ปีข้างหน้า ก้อยมีอายุ.....ปี กึ่งมีอายุปี เมื่อ 10 ปีที่แล้ว ก้อยมีอายุ.....ปี กึ่งมีอายุปี
5. แดงมีอายุมากกว่าดำ 10 ปี	ถ้าปัจจุบัน ดำมีอายุ xปี แดงมีอายุปี อีก 3 ปีข้างหน้า ดำมีอายุปี แดงมีอายุปี เมื่อ 10 ปีที่แล้ว ดำมีอายุปี แดงมีอายุปี

กิจกรรมที่ 4.2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ

โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

จุดประสงค์ในการเรียนรู้

เพื่อให้นักเรียนสามารถการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ
โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ได้

คำสั่ง : ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
(Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) จากกิจกรรมที่ 4.2
2. ฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
(Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ในใบงานที่ 4.2 เสร็จแล้ว
ให้ส่งครูด้วย

กิจกรรมที่ 4.2

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

ให้นักเรียนพิจารณาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน
(Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุบุตร อีก 10 ปีข้างหน้าพ่อจะมีอายุครบ 61 ปีพอดีจงหาว่าปัจจุบันบุตรมีอายุกี่ปี

วิธีทำ

1. ชื่นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ ปัจจุบัน บุตรมีอายุ กี่ ปี

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ ปัจจุบัน พ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุบุตร
อีก 10 ปีข้างหน้า พ่อจะมีอายุครบ 61 ปีพอดี

2. การสร้างตัวแทน

กำหนดให้ ปัจจุบัน	อายุของบุตร	แทนด้วย	x	ปี
ดังนั้น	พ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร	แทนด้วย	3x	ปี

3. การวางแผน

เนื่องจาก	โจทย์กำหนดว่า	อีก 10 ปีข้างหน้า	พ่อจะมีอายุครบ	61	ปี
ดังนั้น	ปัจจุบัน พ่อมีอายุ		$61 - 10 =$	51	ปี
แต่	ปัจจุบันพ่อมีอายุ			3x	ปี
	สมการที่ได้ก็คือ		$3x =$	51	ปี

4. การดำเนินการตามแผน

จากสมการ		$3x =$	51
นำ $\frac{1}{3}$	คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ		
	$\frac{1}{3} (3x) =$	$\frac{1}{3} (51)$	
	$x =$	17	

นั่นคือ ปัจจุบันบุตรมีอายุ 17 ปี

5. ตรวจสอบคำตอบ

ปัจจุบัน บุตรมีอายุ 17 ปี

พ่อ มีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร $3 \times 17 = 51$ ปี

ดังนั้น อีก 10 ปีข้างหน้า พ่อจะมีอายุ $51 + 10 = 61$ ปี

(ซึ่งตรงกับที่โจทย์กำหนดว่า อีก 10 ปีข้างหน้า พ่อจะมีอายุครบ 60 ปี)

ตัวอย่าง 2 สุนิย์อ่านหนังสือเล่มหนึ่ง วันแรกอ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม วันที่สองอ่านได้อีก 45 หน้า รวมสองวันอ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี จงหาว่าหนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด กี่ หน้า

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม คือ หนังสือมีทั้งหมด กี่ หน้า

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ วันแรก อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม

วันที่สอง อ่านได้อีก 45 หน้า

รวมสองวัน อ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี

2. ขั้นสร้างตัวแทน

กำหนดให้สิ่งที่โจทย์ถาม คือ หนังสือมีทั้งหมด x หน้า

สิ่งที่โจทย์กำหนด คือ วันแรก อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม $\frac{1}{5} x$ หน้า

วันที่สองอ่านได้อีก 45 หน้า

รวมสองวันอ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี $\frac{1}{2} x$ หน้า

3. ขั้นวางแผน

โจทย์กำหนดว่า รวมสองวันอ่านได้ ครึ่งเล่มพอดี $\frac{1}{2} x$ หน้า

นั่นคือ $\frac{1}{5} x + 45 = \frac{1}{2} x$

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

จากสมการ $\frac{1}{5} x + 45 = \frac{1}{2} x$

แก้สมการ ค.ร.น. ของ 5 และ 2 คือ 10

นำ 10 คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$(10) \frac{1}{5} x + (10)45 = (10) \frac{1}{2}$$

$$2x + 450 = 5x$$

นำ $-2x$ บวกจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$2x + (-2x) + 450 = 5x + (-2x)$$

$$3x = 450$$

นำ $\frac{1}{3}$ คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(450)$$

$$x = 150$$

นั่นคือ หนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด 150 หน้า

5. ขั้นตอนตรวจสอบ

จาก	หนังสือเล่มนี้มีทั้งหมด	150	หน้า
	วันแรก อ่านได้ 1 ใน 5 ของเล่ม	$\frac{1}{5} \times 150 = 30$	หน้า
	วันที่สองอ่านได้อีก	45	หน้า
	รวมสองวันอ่านได้	$30 + 45 = 75$	หน้า

(ซึ่งตรงกับที่โจทย์กำหนดว่า อ่านสองวันได้ ครึ่งเล่มพอดี)

ใบงานที่ 4.2

การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ โดยใช้ตัวแทน (Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

คำสั่ง : ให้นักเรียนแก้โจทย์สมการต่อไปนี้ โดยใช้ตัวแทน(Representation) : การใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร)

1. ครูมีหนังสืออยู่จำนวนหนึ่ง แจกให้นักเรียนไป 1 ใน 4 ของจำนวนหนังสือที่มีอยู่ปรากฏว่า เหลือหนังสืออยู่ 36 เล่มเดิมครูมีหนังสืออยู่กี่เล่ม

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

2. สมุดราคาแพงกว่าดินสอ 4 บาท ถ้าสมุดและดินสอมีราคารวมกัน 100 บาท จงหาราคาของสมุดและดินสอ

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการตามแผน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

.....

3. เมื่อ 8 ปีที่แล้ว พ่อมีอายุนานกว่าลูก 26 ปี ปัจจุบันพ่อมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุลูก จงหาว่า
ปัจจุบันพ่อและลูกมีอายุเท่าใด

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการ

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

4. พี่น้องสามคนมีอายุรวมกันได้ 38 ปี พี่คนโตมีอายุมากกว่าน้องคนเล็ก 8 ปี และน้องคนเล็กอายุน้อยกว่าพี่คนกลาง 3 ปี จงหาอายุของพี่น้องสามคนนี้

วิธีทำ

1. ขั้นทำความเข้าใจ

สิ่งที่โจทย์ถาม

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....

.....

2. ขั้นสร้างตัวแทน

.....

.....

.....

.....

3. ขั้นวางแผน

.....

.....

.....

.....

.....

4. ขั้นดำเนินการ

.....

.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตรวจคำตอบ

.....

.....

.....

.....

ภาคผนวก ง

ภาพประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
การแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation)

ภาพประกอบ 2 กิจกรรมการเรียนรู้การสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation) :
วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง



ภาพประกอบ 3 กิจกรรมการเรียนรู้การสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ ตัวแทน (Representation)

: การวาดภาพ



ภาพประกอบ 4 กิจกรรมการเรียนรู้การสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ ตัวแทน
(Representation): การสร้างตาราง



ภาพประกอบ 5 กิจกรรมการเรียนรู้การสอนการแก้โจทย์สมการโดยใช้ตัวแทน (Representation):
สัญลักษณ์ (ตัวแปร)



ภาคผนวก จ
รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ ผู้อำนวยการ สำนักทดสอบทาง
การศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์ประสาท สอ้านวงศ์ ข้าราชการบำนาญ ผู้เชี่ยวชาญ
คณิตศาสตร์ สาขาการมัธยมศึกษา
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุมาลี ตั้งคณานุรักษ์ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิต
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ฝ่ายประถม

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ประวัติย่อทำสารนิพนธ์

ชื่อ ชื่อสกุล	อรชร ภูบุญเต็ม
วัน เดือน ปีเกิด	17 มกราคม 2519
สถานที่เกิด	อำเภอยางตลาด จังหวัดกาฬสินธุ์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	711 ถนนอนรรฆนาค ตำบลกาฬสินธุ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ 46000
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสีห์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2537	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนอนุกุลนารี อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์
พ.ศ. 2541	ศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาการมัธยมศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น
พ.ศ. 2550	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาการมัธยมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ