

วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็ก  
ที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา  
พฤษภาคม 2550

วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็ก  
ที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา  
พฤษภาคม 2550

รุ่งทิวา นามารุง. (2550). *วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี*. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.องอาจ นัยวัฒน์.

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาและวิเคราะห์วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี โดยได้ศึกษาปรากฏการณ์ของวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในช่วงชั้นที่ 1 โรงเรียนสวัสดิศึกษา ทั้งในชั้นเรียนและนอกชั้นเรียน การศึกษาปรากฏการณ์ดังกล่าวได้ใช้วิธีวิทยาของการวิจัยเชิงคุณภาพเพื่อนำข้อมูลและปรากฏการณ์ที่ดำรงอยู่ในตัวเด็กมาสร้างเป็นข้อสรุป ใช้การสัมภาษณ์แบบเจาะลึกจากผู้ให้ข้อมูลหลัก 15 ราย ได้แก่ เด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1) เด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2) และเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3) ช่วงอายุละ 5 คน

จากการศึกษาพบว่า

1) เมื่อเสนอโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้ เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติได้อย่างหลากหลาย โดยนิยมใช้การนับดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมาคือการบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบ ซึ่งอาจใช้การนับจำนวนทั้งหมดจากหนึ่งจนถึงผลรวม วิธีการนับมีทั้งใช้การวาดภาพหรือใช้ตัวแบบ ใช้การนับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ นับเพิ่มทีละ 1 โดยนับออกเสียงจากหนึ่งจนถึงผลรวมหรือนับออกเสียงและเน้นจำนวนที่เป็นแต่ละผลคูณตามขนาดของกลุ่ม นับข้ามโดยการวาดภาพของทั้งหมด นับข้ามโดยเขียนจำนวนกลุ่ม นับข้ามโดยใช้นิ้วมือช่วยนับ หรือนับข้ามโดยไม่ต้องมีตัวช่วยหรืออุปกรณ์ช่วยในการนับ ใช้การบวกซ้ำ/การลบซ้ำ การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก หรือการบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวีคูณ ในการให้เหตุผลของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี เด็กมองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่ผ่านมา สามารถระลึกได้ทันทีว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาเดิม สามารถใช้การประมาณหรือการลองผิดลองถูกเพื่อหาคำตอบ บอกได้ว่าคำตอบที่ได้มาของตนเองสมเหตุสมผลหรือไม่ หรือเมื่อเผชิญสถานการณ์ปัญหาสามารถคาดเดาได้ว่าคำตอบควรประมาณเท่าใดโดยอาศัยคำตอบของโจทย์ปัญหาก่อนหน้านี้ ในการนำเสนอตัวแทนความคิดพบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างหลากหลายทั้งในรูปคำพูด ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้โดยอาจใช้ตัวแบบ ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ หรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ โดยการนำเสนอตัวแทนความคิดนี้จะขึ้นอยู่กับวุฒิภาวะ หรือความสามารถทางภาษาของเด็กเป็นสำคัญเพราะสิ่งเหล่านี้จะส่งผลถึงการคิดของเด็กด้วย เด็กที่มีวุฒิภาวะสูง มีความเข้าใจภาษาที่ดีสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์ได้ ส่วนเด็กที่มีวุฒิภาวะต่ำ ขาดความเข้าใจทางภาษาจะไม่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์ได้

2) เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเอง ใช้การหยั่งรู้ด้วยตนเอง สามารถแสดงการคิดโดยธรรมชาติของตนเองได้ทั้งที่เป็นเรื่องที่ไม่คุ้นเคย และยังไม่ได้เรียนมา โดยนำความรู้เชิงสหสัมพันธ์ ทักษะและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนมาทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่แปลกใหม่เพื่อค้นหาคำตอบของปัญหา แล้วสร้างข้อสรุปจากข้อมูลหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ในลักษณะกรณีทั่วไปอย่างไม่เป็นทางการ และพบว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กมีทั้งในระดับที่ต่ำจนถึงระดับที่สูง ในการดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กมีทั้งการใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะที่ใช้ประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ ใช้การนับในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อประกอบการนับ และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะของการสร้างสัญลักษณ์



NATURAL WAYS OF MATHEMATICAL THINKING ON MULTIPLICATION AND  
DIVISION OF CHILDREN AGED 7-10



Presented in Partial fulfillment of the Requirements for the  
Doctor of Education Degree in Mathematics Education  
at Srinakharinwirot University

May 2007

Rungtiwa Nabumrung. (2007). *Natural Ways of Mathematical Thinking on Multiplication and Division of Children Aged 7-10*. Dissertation , Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Piyavadee Wongyai, Asst. Prof. Dr. Supotch Chaiyasang, Asst. Prof. Dr. Ong-Art Naiyapatana.

Current study aims to investigate and analyze natural ways of mathematical thinking on multiplication and division of counting number for children aged from 7 to 10. Qualitative research methodology is employed in collecting data from children of SAWASDEE WITTAYA SCHOOL during and after class sessions from three different age level groups namely a) children aged 7-8 (grade 1), b) children aged 8-9 (grade 2) and children aged 9-10 (grade 3) with each group comprising of 5 key informants. In its finality, theoretical model is proposed that is based purely on in-depth interview of the key informants where the results of the current study revealed that;

- 1) Children aged 7-10 responded to non-routine problems on multiplication and division in a variety of natural ways of mathematical thinking and the most frequent methods used of problem solving were counting, addition/subtraction and directed model. A wide variety of techniques namely, count-all from one to total, count after drawing or count after directed model, count on from one to total with the use of fingers, counting aloud from one to total or with verbal emphasis at each multiple of the group size, count-by with full drawing, count-by with written groups, count-by using fingers, count-by without materials, repeated addition/repeated subtraction and repeated addition and additive doubling were used depending on personal experiences. For reasoning, children aged 7-10 were able to use analogy by immediately recognizing the similarities between the current and previous problems and direct to reasonable answers by employing approximation or trial and error. Moreover, in case of more familiar and predictable problems, the key informants were able to predict possible answers that are related to the previous solution. The key informants were able to use various representations such as verbal, manipulative situation model, visual situation and symbolic situation depending on the maturity and linguistic skills of the key informants. These factors had essential influences on thinking ways of the key informants, for example, the more mature key informants were linguistic skilful and able to use symbolic representations whilst those less mature ones were linguistic skill-less and unable to use symbolic representations.

2) Children aged 7-10 have their own ways of thinking mathematically. Self-learning children were able to naturally think and deal with both the unseen and non-routine problems by employing intuitive knowledge, skills, and mathematical methods of problem solving. Based on personal skills and problem-solving experiences, inexperienced children analyzed problem for an answer by concluding through informal generalization. Moreover, it was found that the mathematical thinking of children ranging from low to high levels referring to the used methods of problem solving are varied from directed model, counting and mathematical method that are considered as (mental development) in enactive stage, iconic stage and symbolic stage, respectively.



วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็ก  
ที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี



ปริญญานิพนธ์  
ของ  
รุ่งทิwa นามารุง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา  
พฤษภาคม 2550

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปฏิญานิพนธ์

เรื่อง

วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็ก  
ที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

ของ

รุ่งทิwa นามารุง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาการศึกษาดุขภูิบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา  
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ จีระเดชากุล)

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. 2550

คณะกรรมการควบคุมปฏิญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

..... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่)

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์)

..... กรรมการ

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

(รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่)

..... กรรมการ

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.องอาจ นัยพัฒน์)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.องอาจ นัยพัฒน์)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วงษ์ใหญ่)

## ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้เป็นอย่างดีด้วยความอนุเคราะห์จาก รองศาสตราจารย์ ดร. ปิยวดี วงษ์ใหญ่ ประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้คำปรึกษา แนะนำ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่งยวดตลอดมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและความเป็นแบบอย่างของครูที่ดีของท่านเป็นอย่างมาก ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.องอาจ นัยพัฒน์ กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วงษ์ใหญ่ กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศรษฐมัลย์ ประธานกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้ความสนใจและให้คำแนะนำเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ของปริญญานิพนธ์

นอกจากนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้แก่ผู้วิจัยในการศึกษาตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ศึกษา ซึ่งทำให้ผู้วิจัยได้รู้ว่าการศึกษาระดับปริญญาเอกของผู้วิจัยนั้นมีคุณค่าเพียงใด และทำให้ผู้วิจัยได้ตระหนักว่าความรู้ที่ได้มานั้นจะมีคุณค่าอย่างยิ่งเมื่อผู้วิจัยได้นำความรู้ที่ได้มานั้นไปยังประโยชน์ให้แก่ผู้อื่นและประเทศชาติต่อไป

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล อาจารย์สุร กาญจนมยุร รองศาสตราจารย์ประพนธ์ จำเริญญ อาจารย์ณัฐธาดา ไชยกิจ และอาจารย์วิไล ราชนิยม ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือ อาจารย์บุญญิสรา แซ่หล่อ และอาจารย์นงชนก ตุ่มฉาย ผู้ให้รหัสและวิเคราะห์ข้อมูล และขอขอบคุณอาจารย์สุรัชย์ รัชพันธ์ ผู้ตรวจสอบคำศัพท์

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้อำนวยการและผู้ช่วยผู้อำนวยการโรงเรียนส่วสดีวิทยา ครูและนักเรียนโรงเรียนส่วสดีวิทยาที่ให้ความร่วมมือในการเก็บข้อมูลอย่างดียิ่ง จนทำให้งานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จได้เป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาการประถมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่เป็นทั้งพี่และเพื่อนร่วมงานที่ดีและเป็นแรงใจให้แก่ผู้วิจัยตลอดมา

ขอขอบคุณเพื่อนๆ และน้องๆ คณิตศาสตร์ศึกษาทุกคนที่เป็นแรงใจให้แก่กันและกันด้วยดีเสมอมา

ท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อวิชัย-คุณแม่ฤดี แยมรุ่ง คุณเอกกรินทร์ แยมรุ่ง พี่ชายและน้องชาย ที่คอยเป็นกำลังใจและกำลังใจอย่างดีเยี่ยมตลอดระยะเวลาที่ศึกษาและทำวิจัย

คุณความดีทั้งหลายอันเกิดจากการทำวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยขออุทิศแด่คุณพ่อกิตติ-คุณแม่สายัณห์ นามารุง ผู้เป็นแรงบันดาลใจและเป็นที่รักยิ่งของผู้วิจัย

รุ่งทิพา นามารุง

## สารบัญ

| บทที่                                                                       | หน้า     |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 บทนำ.....</b>                                                          | <b>1</b> |
| ความสำคัญของปัญหา.....                                                      | 1        |
| จุดมุ่งหมายของการวิจัย.....                                                 | 3        |
| คำถามวิจัย.....                                                             | 3        |
| ขอบเขตของการวิจัย.....                                                      | 4        |
| ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย.....                                   | 5        |
| นิยามศัพท์เฉพาะ.....                                                        | 6        |
| <b>2 เอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และกรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัย.....</b> | <b>8</b> |
| การคิด.....                                                                 | 9        |
| การคิด.....                                                                 | 9        |
| ลำดับขั้นการเรียนรู้.....                                                   | 9        |
| แบบการรู้คิด.....                                                           | 16       |
| การคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                                   | 17       |
| ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                        | 17       |
| วิถีธรรมชาติแห่งการคิด แบบการคิดและลักษณะเฉพาะ                              |          |
| ของการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                                | 20       |
| วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                       | 25       |
| งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดและการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                  | 32       |
| เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....            | 37       |
| จำนวนและการดำเนินการ.....                                                   | 37       |
| รูปแบบของปัญหาการคูณและการหาร.....                                          | 39       |
| งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและการดำเนินการ.....                           | 45       |
| การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษา.....                                   | 48       |
| การวิจัยเชิงคุณภาพ.....                                                     | 48       |
| การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....           | 51       |
| กรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัย.....                                          | 53       |

## สารบัญ (ต่อ)

| บทที่                                                                                                                                                                                  | หน้า      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3 วิธีดำเนินการวิจัย.....</b>                                                                                                                                                       | <b>57</b> |
| ระยะที่ 1: ระยะสังเคราะห์เอกสารเพื่อสร้างโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบ<br>วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และเก็บรวบรวม<br>ข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน.....                    | 59        |
| ระยะที่ 2: ระยะปรับโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิด<br>เชิงคณิตศาสตร์จากการเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกต<br>ชั้นเรียน.....                                        | 65        |
| ระยะที่ 3: ระยะเก็บข้อมูลเชิงลึก สังเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการศึกษา<br>วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                                                        | 73        |
| <b>4 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหาร...</b>                                                                                                                  | <b>77</b> |
| ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของ<br>เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและ<br>การหารจำนวนนับ.....                                         | 78        |
| ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์<br>ของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหา<br>การคูณและการหารจำนวนนับ พิจารณารูปแบบและ<br>ลักษณะของโจทย์ปัญหา..... | 78        |
| ภาพรวมในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหาร<br>จำนวนนับ.....                                                                                                                           | 81        |
| การตอบโจทย์ปัญหาที่ไม่สามารถให้รหัสได้.....                                                                                                                                            | 87        |
| การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก.....                                                                                                                         | 88        |
| การแก้ปัญหาของเด็ก.....                                                                                                                                                                | 88        |
| การให้เหตุผลของเด็ก.....                                                                                                                                                               | 115       |
| การนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก.....                                                                                                                                                     | 118       |
| กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่<br>7-10 ปี .....                                                                                                       | 121       |

## สารบัญ (ต่อ)

| บทที่                                                               | หน้า       |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5 การศึกษาเฉพาะกรณีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....</b> | <b>125</b> |
| รายละเอียดของกรณีตัวอย่าง.....                                      | 125        |
| ผลการศึกษาเฉพาะกรณี.....                                            | 126        |
| การดำเนินการแก้ปัญหาของปีบ.....                                     | 126        |
| การดำเนินการแก้ปัญหาของผักกาดและมะปราง.....                         | 151        |
| ข้อเสนอในการจัดการเรียนรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ.....        | 162        |
| การใช้ตัวแบบ.....                                                   | 162        |
| การนับ.....                                                         | 163        |
| การบวก/การลบ.....                                                   | 163        |
| การใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน.....                                | 163        |
| การดำเนินการอื่นๆ ที่พบ.....                                        | 164        |
| <b>6 ผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....</b>        | <b>165</b> |
| วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่         |            |
| 7-10 ปี.....                                                        | 165        |
| การแก้ปัญหา.....                                                    | 165        |
| การให้เหตุผล.....                                                   | 167        |
| การนำเสนอตัวแทนความคิด.....                                         | 167        |
| ข้อคิดที่ได้จากผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....  | 168        |
| เกี่ยวกับธรรมชาติทางคณิตศาสตร์.....                                 | 168        |
| เกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก.....                           | 168        |
| เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์.....                 | 169        |
| <b>7 การอภิปรายผล และข้อเสนอจากการวิจัย.....</b>                    | <b>171</b> |
| การอภิปรายผล.....                                                   | 171        |
| วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหาร           |            |
| จำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี.....                      | 171        |
| วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่         |            |
| 7 - 10 ปี.....                                                      | 175        |
| ข้อเสนอจากการวิจัย.....                                             | 177        |

## สารบัญ (ต่อ)

| บทที่                                                                                                                 | หน้า |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| บรรณานุกรม.....                                                                                                       | 179  |
| ภาคผนวก.....                                                                                                          | 190  |
| ภาคผนวก ก.....                                                                                                        | 191  |
| รายนามผู้เชี่ยวชาญ.....                                                                                               | 192  |
| ภาคผนวก ข.....                                                                                                        | 193  |
| ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก<br>สำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)..... | 194  |
| ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก<br>สำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)..... | 205  |
| สรุปผลการตอบโจทย์ปัญหาในแต่ละชุดคำถามของ<br>ผู้ให้ข้อมูลหลักทั้งสามช่วงอายุ.....                                      | 216  |
| ภาคผนวก ค.....                                                                                                        | 221  |
| การสัมภาษณ์อย่างละเอียดในการศึกษากรณีเฉพาะของ<br>بيبและฝึกกาด.....                                                    | 222  |
| ภาคผนวก ง ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล.....                                                                | 235  |
| ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ<br>7-9 ปี.....                                                     | 236  |
| ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ<br>9-10 ปี.....                                                    | 238  |
| ตัวอย่างแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์สำหรับเด็กในช่วงอายุ<br>7-9 ปี และ 9-10 ปี.....                                    | 240  |
| แบบบันทึกการสัมภาษณ์/การให้รหัสและแบบบันทึก<br>การสังเกตพฤติกรรม.....                                                 | 243  |
| ตัวอย่างสถานการณ์ที่ใช้ในการสังเกตพฤติกรรมเด็ก<br>ในชั้นเรียน.....                                                    | 246  |
| ตัวอย่างคำถามที่ใช้ตรวจสอบการคิดของเด็ก.....                                                                          | 249  |
| ประวัติย่อผู้วิจัย.....                                                                                               | 251  |

## บัญชีตาราง

| ตาราง                                                                                                                                                                                                                         | หน้า |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1 แสดงวิธีการหาคำตอบสองวิธี (วิธี A และวิธี B) จากปัญหาเดียวกัน.....                                                                                                                                                          | 19   |
| 2 ความหมายของลักษณะ/ทักษะการคิดและตัวบ่งชี้ความสามารถในการคิด.                                                                                                                                                                | 31   |
| 3 ปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบ.....                                                                                                                                                                                    | 39   |
| 4 ลักษณะของปัญหาการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน อัตรา ราคา<br>และการเปรียบเทียบ.....                                                                                                                                        | 41   |
| 5 โจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ.....                                                                                                                                                                                      | 42   |
| 6 ตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์สำหรับการคูณและการหาร.....                                                                                                                                                                              | 43   |
| 7 รายละเอียดเกี่ยวกับผู้ให้ข้อมูล.....                                                                                                                                                                                        | 64   |
| 8 รายละเอียดการเก็บข้อมูลเบื้องต้น.....                                                                                                                                                                                       | 65   |
| 9 รูปแบบและลักษณะของปัญหาของชุดคำถาม 4 ชุดที่ใช้ในงานวิจัย<br>สำหรับเด็กทุกช่วงอายุ.....                                                                                                                                      | 67   |
| 10 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามการคูณและการหารจำนวนนับ<br>สำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-2) จำแนกตาม<br>รูปแบบและลักษณะของปัญหา.....                                                                | 68   |
| 11 สารการเรียนรู้รายปี คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3<br>ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544.....                                                                                                               | 70   |
| 12 การเก็บข้อมูลเชิงลึกในแต่ละช่วงอายุ.....                                                                                                                                                                                   | 74   |
| 13 จำนวนเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักมีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ที่ตอบโจทย์<br>ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามของแต่ละลักษณะในแต่ละรูปแบบของ<br>ปัญหาถูกต้อง จำแนกตามช่วงอายุ รูปแบบของปัญหาการคูณและ<br>การหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย..... | 79   |
| 14 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ<br>7-8 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ<br>ที่ใช้ในงานวิจัย.....                                                                              | 82   |
| 15 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ<br>8-9 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ<br>ที่ใช้ในงานวิจัย.....                                                                              | 83   |

## บัญชีตาราง (ต่อ)

| ตาราง                                                                                                                                             | หน้า |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 16 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ<br>9-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ<br>ที่ใช้ในงานวิจัย..... | 84   |
| 17 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ<br>7-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ<br>ที่ใช้ในงานวิจัย..... | 85   |
| 18 การดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับของป๊อบ<br>ที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี.....                                                            | 127  |
| 19 การแก้ปัญหาของผึกกาดที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี จำแนกตามรูปแบบของ<br>ปัญหา.....                                                                   | 152  |
| 20 การแก้ปัญหาของมะปรางที่อยู่ในช่วงอายุ 9-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของ<br>ปัญหา.....                                                                  | 156  |
| 21 วิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่พบจากการศึกษาเฉพาะกรณีจำแนกตาม<br>รูปแบบของปัญหา.....                                                                  | 161  |

## บัญชีภาพประกอบ

| ภาพประกอบ                                                                                                                          | หน้า |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1 แบบจำลองพฤติกรรม ตามแนวของมาร์ซาโน.....                                                                                          | 11   |
| 2 กระบวนการภายในสมอง 6 ระดับของ New Taxonomy.....                                                                                  | 12   |
| 3 กรอบความคิด ประเด็นที่ศึกษาในการวิจัย.....                                                                                       | 53   |
| 4 กรอบความคิด รายละเอียดประเด็นที่ศึกษาในการวิจัย.....                                                                             | 55   |
| 5 กรอบความคิด รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ<br>ที่ใช้ในการวิจัย.....                                                       | 56   |
| 6 กระบวนการวิจัย.....                                                                                                              | 58   |
| 7 ประเด็นที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                                                  | 60   |
| 8 โครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์.....                                                                 | 61   |
| 9 รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารที่ใช้ในการวิจัย.....                                                                               | 62   |
| 10 กรอบชุดคำถามในการเก็บข้อมูลเชิงลึก.....                                                                                         | 71   |
| 11 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาในสถานการณ์ปัญหา<br>ที่จำนวนมีขนาดใหญ่..... | 87   |
| 12 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงว่าเด็กไม่มีระยะเข้าสู่การคิด<br>ในการแก้ปัญหา.....                                                   | 90   |
| 13 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงว่าเด็กมีระยะเข้าสู่การคิด<br>ในการแก้ปัญหา.....                                                      | 91   |
| 14 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้ตัวแบบแก้ปัญหาการคูณ.....                                          | 94   |
| 15 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้ตัวแบบแก้ปัญหาการหารในแบบของการวัด.....                            | 95   |
| 16 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้ตัวแบบแก้ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน.....                       | 96   |
| 17 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่สืบสนในการใช้ตัวแบบ.....                                              | 97   |
| 18 ตัวอย่างวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้การนับ.....                                                        | 98   |

## บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

| ภาพประกอบ                                                                                                        | หน้า |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 19 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้การบวก/การลบ.....                                | 100  |
| 20 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้ภาพช่วยให้เกิดการคิด.....                        | 103  |
| 21 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่ใช้การนึกภาพในใจ.....                               | 104  |
| 22 วิธีดำเนินการแก้ปัญหาตามวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์<br>ของเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปีที่พบในงานวิจัย..... | 105  |
| 23 ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา.....                                                        | 108  |
| 24 ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการสร้างกรณีทั่วไปในการแก้ปัญหา.....                                                  | 110  |
| 25 ตัวอย่างที่แสดงการสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็ก.....                                                            | 113  |
| 26 ตัวอย่างที่แสดงการควบคุมการรู้คิดของเด็กในระยะทบทวนการคิด.....                                                | 114  |
| 27 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ของเด็กในระยะเข้าสู่<br>การคิด.....                                  | 116  |
| 28 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลแบบอุปนัยของเด็กในระยะดำเนินการ<br>ให้บรรลุเป้าหมายการคิด.....                     | 117  |
| 29 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยของเด็กในระยะดำเนินการ<br>ให้บรรลุเป้าหมายการคิด.....                     | 118  |
| 30 ตัวอย่างที่แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่<br>สัมผัสได้.....                                       | 120  |
| 31 ตัวอย่างที่แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก<br>ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพ.....                                   | 120  |
| 32 กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก<br>ที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี.....                              | 122  |
| 33 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของป๊อบที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี...                                        | 145  |
| 34 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี...                                        | 176  |

## ส่วนหน้า

ปฏิญญาพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี เนื่องจากผู้วิจัยมีความเชื่อว่าถ้าครูเข้าใจถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กจะทำให้ครูได้นำความรู้ในด้านนี้มาเป็นแนวทางเพื่อเลือกจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก การวิจัยนี้จึงให้ความสนใจต่อการทำความเข้าใจว่าเด็กมีการคิดอย่างไร โดยอาศัยการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กจากการให้เด็กแก้โจทย์ปัญหาในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ และศึกษาวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กแสดงออก อีกทั้งยังศึกษาถึงการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กซึ่งถือเป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ปฏิญญาพนธ์ฉบับนี้แบ่งการนำเสนอเป็น 7 บทด้วยกันคือ

บทที่ 1: บทนำ เป็นการกล่าวถึงประเด็นในการวิจัยซึ่งเป็นขั้นตอนสำคัญในการพัฒนาคำถามวิจัย

บทที่ 2: เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและกรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัย ในบทนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์และวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก เพื่อสรุปข้อมูลต่างๆ อย่างเป็นระบบ นำข้อมูลดังกล่าวมาใช้ในการพัฒนาประเด็นคำถามวิจัยและสร้างกรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัย

บทที่ 3: วิธีดำเนินการวิจัย งานวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพซึ่งแบ่งการวิจัยเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 เป็นระยะสังเคราะห์เอกสารเพื่อสร้างโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน ระยะที่ 2 เป็นระยะปรับโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากการเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน ระยะที่ 3 เป็นระยะเก็บข้อมูลเชิงลึก สังเคราะห์ข้อมูลและสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และสรุปผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

บทที่ 4: วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหาร ในบทนี้เป็นคำตอบคำถามวิจัยข้อแรกคือ เมื่อเสนอโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติได้หรือไม่อย่างไร มีวิธีการแก้ปัญหา ลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างไร การนำเสนอในบทนี้แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ ส่วนที่ 2 การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก ส่วนที่ 3 กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ดังนั้นบทนี้จึงกล่าวถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับโดยละเอียด โดยกล่าวถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก พร้อมตัวอย่างการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในแง่มุมต่างๆ หลังจากนั้นผู้วิจัยได้

ทำการสังเคราะห์ข้อมูลและสร้างกรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสู่ผล การศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในบทที่ 6 ต่อไป

บทที่ 5: การศึกษาเฉพาะกรณีวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ในบทนี้เป็น การนำเสนอกรณีศึกษาของเด็กสามคนที่อยู่ในช่วงอายุต่างๆ ทั้งสามกลุ่มคือ ช่วงอายุ 7-8 ปี 8-9 ปี และ 9-10 ปี เพื่อเจาะลึกถึงวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวน นับ และนำเสนอผลการวิเคราะห์กระบวนการคิดอย่างละเอียดของเด็กทั้งสามคนในการตอบชุด คำถามตามรูปแบบของปัญหา 3 รูปแบบ คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และ ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ซึ่งจะเห็นกระบวนการคิดที่ต่อเนื่องและเป็นรูปธรรมของเด็ก แต่ละคน ทำบทบาทผู้วิจัยได้สรุปวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่พบจากการศึกษาเฉพาะกรณีจำแนกตาม รูปแบบของปัญหา และข้อเสนอในการจัดการเรียนรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ

บทที่ 6: ผลการศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ในบทนี้ผู้วิจัยนำกรอบวิธี ธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นแนวทางในการตอบคำถามวิจัยข้อที่สองคือ เด็กที่มีอายุ ตั้งแต่ 7 - 10 ปี มีวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองอย่างไร รายละเอียดในบท นี้แตกต่างจากบทที่ 4 เนื่องจากผู้วิจัยนำเสนอภาพรวมของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมุ่งนำเสนอ การสังเคราะห์ข้อมูลต่างๆ เกี่ยวกับแง่มุมแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ต่างๆ ไป และสรุปข้อคิดที่ได้ จากผลการศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในท้ายบท

บทที่ 7: การอภิปรายผล และข้อเสนอจากการวิจัย จากการตอบคำถามวิจัยที่ผ่านมา ดังกล่าวทำให้สามารถสรุปผลการวิจัย และข้อเสนอจากการวิจัยในบทนี้ว่าเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับอย่างไร ในการแก้ปัญหาเด็กใช้การดำเนินการแก้ปัญหาแบบใดมากที่สุดและแสดงออกอย่างไร เด็กเข้าใจ ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างไร เมื่อได้คำตอบแล้วเด็กมีการทบทวนการคิดของตนหรือไม่ อย่างไร หรือในขณะที่แก้ปัญหาเมื่อเผชิญสภาวะที่ติดขัดเด็กมีการควบคุมการรู้คิดของตนหรือไม่ อย่างไร วิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กเป็นอย่างไรเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย นอกจากนั้นยังทราบถึงลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิด ของเด็กตามธรรมชาติ

# บทที่ 1

## บทนำ

### ความสำคัญของปัญหา

การศึกษาเป็นกระบวนการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เป็นการถ่ายทอดวัฒนธรรม และเป็นการสร้างภูมิปัญญาให้แก่สังคม การศึกษาคณิตศาสตร์ไม่ได้มีบทบาทสำคัญเพียงแต่เป็นกุญแจในการพัฒนาการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผล แต่คณิตศาสตร์ยังมีความสำคัญต่อการศึกษาวิชาต่างๆ ในโลกปัจจุบัน โลกในปัจจุบันกำลังเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว เป็นสังคมที่อาศัยเทคโนโลยีขั้นสูงมากมาย คนๆ หนึ่งจะต้องมีความสามารถในการคิดเชิงระบบ การคิดวิจารณ์ การคิดเชิงวิเคราะห์ การคิดเชิงเหตุผล การคิดในการแก้ปัญหาและการตัดสินใจ ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยองค์ความรู้จากวิชาคณิตศาสตร์ วิชาคณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่มีความสำคัญกับผู้เรียนทุกคน ผู้เรียนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์และทักษะจากการเรียนคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน และเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้นไป นอกจากนี้วิชาคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาศักยภาพของแต่ละคนให้เป็นคนที่มีสมรรถนะ ช่วยเสริมความมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการคิด มีการวางแผนในการทำงาน มีความรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมาย และมีความสามารถในการแก้ปัญหา (สิริพร ทิพย์คง. 2543: 17) หลักสูตรทุกหลักสูตรของทุกชาติทุกภาษาจึงเน้นวิชาคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ชาติใดที่คนในชาติมีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ชาตินั้นจะมีพลังความคิดสูงตามไปด้วย หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 จึงได้จัดให้คณิตศาสตร์เป็นสาระการเรียนรู้หนึ่งที่สถานศึกษาต้องใช้เป็นหลักในการจัดการเรียนรู้เพื่อสร้างพื้นฐานการคิดและเป็นกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและวิกฤตของชาติ (กรมวิชาการ. 2546 : 5) แต่จากผลการประเมินคุณภาพการศึกษาระดับชาติ เพื่อควบคุมและรักษาคุณภาพการศึกษาของสถานศึกษาต่างๆ ทั่วประเทศให้มีมาตรฐานใกล้เคียงกันและสะท้อนถึงคุณภาพของผู้เรียน โดยผลการประเมินในปีการศึกษา 2546 ของสำนักประเมินผลการจัดการศึกษา ซึ่งทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ มีค่าคะแนนเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 41.70, 34.99 และ 33.99 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยในแต่ละระดับชั้นจะเห็นว่าเมื่อนักเรียนยิ่งเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นกลับมีคะแนนเฉลี่ยลดต่ำลงมาเรื่อยๆ จึงเป็นที่น่าสังเกตว่าอะไรเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน และเมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยความสามารถทางการคิดคำนวณและการคิดเชิงวิเคราะห์ของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่ามีคะแนนเฉลี่ยเป็น 38.86 และ 38.26 ตามลำดับ ซึ่งจัดว่าอยู่ในระดับต่ำเช่นกัน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. 2548: 3-38 -3-39)

นอกจากนี้ผลจากโครงการวิจัยและประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในระดับนานาชาติครั้งที่ 3 (The Third International Mathematics and Science Study หรือ TIMSS) ซึ่งจัดโดยสมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement หรือ IEA) ได้ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลในปี พ.ศ.2538 ยังชี้บอกว่าผลสัมฤทธิ์ด้านเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และ 4 มีคะแนนเฉลี่ยต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยของนานาชาติ โดยประเทศไทยได้คะแนนเฉลี่ยในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เท่ากับ 444 คะแนน เป็นอันดับที่ 17 จาก 24 ประเทศ (คะแนนเฉลี่ยของนานาชาติเท่ากับ 470 คะแนน) และคะแนนเฉลี่ยในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เท่ากับ 490 คะแนน เป็นอันดับที่ 22 จาก 26 ประเทศ (คะแนนเฉลี่ยของนานาชาติเท่ากับ 529 คะแนน) (IEA. 1998: Online; สสวท. 2539: 28-34) จากผลการวิจัยดังกล่าวจึงเป็นสิ่งที่สะท้อนสภาพปัญหาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในประเทศไทยได้ในระดับที่ผู้ที่เกี่ยวข้องต้องตระหนัก และการที่เราต้องเข้าสู่ระบบสากลเพื่อการแข่งขันกับนานาชาติ เราจึงต้องปฏิรูปการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างเร่งด่วนและจริงจัง เนื่องจากผลการประเมินในระดับนานาชาติ ประเทศไทยอยู่ในอันดับค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับหลายๆ ประเทศ โดยเฉพาะประเทศในแถบเอเชียด้วยกัน จึงควรมีการศึกษาแนวทางเพื่อจะพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ของเด็กต่อไป

ปัญหาที่นักการศึกษากำลังประสบอยู่คือ การทำความเข้าใจว่าเด็กคิดอย่างไร ซึ่งนับเป็นความพยายามอย่างหนึ่งที่จะเข้าใจธรรมชาติของผู้เรียนเพื่อหาทางส่งเสริมแนะนําได้อย่างถูกต้องจากการศึกษาของบอร์โรมีโอ (Borromeo. 2005: Online) พบว่า คนเรามีวิธีที่จะอธิบายถึงข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์หลายวิธี และยังมีอีกหลายวิธีที่จะทำความเข้าใจในคณิตศาสตร์และวิธีการคิด บางคนสามารถเข้าใจข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ได้อย่างง่าย โดยผ่านการวาดภาพร่างหรือการเขียนกราฟแบบต่างๆ ขณะที่บางคนจะต้องค้นหาโครงสร้าง แบบรูป หรือสูตร และการประยุกต์ข้อเท็จจริงนั้น ครูจึงต้องทราบถึงข้อผิดพลาดและวิธีการคิดของนักเรียนเพื่อสามารถนำไปปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ของตนต่อไป จากการศึกษางานวิจัยทางการศึกษาต่างๆ เป็นที่ยอมรับว่า การที่ครูได้รู้วิธีการคิดและแนวการเรียนรู้ของนักเรียนจะเป็นประโยชน์ต่อตัวครูที่จะนำมาพัฒนาการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนให้ได้ผลดียิ่งขึ้น นอกจากนี้ปรัชญาของการเรียนรู้เพื่อชี้แนะการรู้คิด (Cognitively Guided Instruction: CGI) ยังกล่าวถึงพื้นฐานความรู้จากศาสตร์ทางความคิดว่าเด็กเรียนรู้เนื้อหาได้อย่างไรเป็นสิ่งที่จำเป็นในการตัดสินใจเลือกการจัดการเรียนรู้ โดยครูจำเป็นต้องตระหนักถึงความรู้ที่หลากหลายระดับของนักเรียน และครูต้องเลือกใช้วิธีการสอนที่หลากหลายเพื่อเชื่อมโยงความรู้ใหม่ไปสู่ความรู้เดิมที่ขยายขึ้นมา (Carpenter; Fennema; & Peterson. 1989: 499-531) และจากงานวิจัยที่ผ่านมาเป็นที่ยอมรับว่าเด็กมีแนวคิดของตัวเองติดตัวมาตั้งแต่ก่อนเข้าโรงเรียน นอกจากนี้จากผลการวิจัยมากกว่า 25 ปี ชี้ว่าเด็กในวัยก่อนเข้าโรงเรียนจะมีความรู้เกี่ยวกับจำนวนอยู่บ้าง (Kilpatrick; Swafford; & Findell. 2001:1-2) แสดงให้เห็นว่าเด็กมีความคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองมาตั้งแต่ก่อนเข้าโรงเรียน ทำให้ผู้วิจัยสนใจว่าบางครั้งในการคิดโจทย์ทางคณิตศาสตร์บางประเภท เด็กสามารถคิดได้เอง แต่เมื่อเข้าสู่กระบวนการเรียน

การสอนในชั้นเรียนนักเรียนหลายคนไม่สามารถนำสิ่งที่ติดตัวมาไปใช้ในการแก้ปัญหา อะไรที่ขัดกับวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นและจากการที่ผู้วิจัยได้เคยทำการศึกษาเปรียบเทียบกระบวนการคิดของเด็กไทยและเด็กญี่ปุ่น พบว่าในบางครั้งการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา นักเรียนไม่ได้นำความรู้ที่ตนเองได้เรียนเพิ่มขึ้นมาใช้ในการแก้ปัญหาเลย แต่กลับนำความรู้ที่ตนเองได้รับสมัยประถมศึกษาหรือความรู้เชิงสหสัญฐาน (Intuitive Knowledge) มาใช้ในการแก้ปัญหา (Rungtiwa. 1998) ดังนั้นถ้าครูได้ทราบถึงวิถีแห่งการคิดและแนวการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน จะทำให้ครูสามารถจัดการเรียนรู้เพื่อช่วยพัฒนากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้อย่างเหมาะสม อีกทั้งในประเทศไทยข้อมูลทางด้านการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กยังมีน้อย ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก เพื่อขยายพื้นที่ความรู้ทางด้านนี้ในประเทศไทย และเนื่องจากการศึกษาควรจะเริ่มศึกษาตั้งแต่ระดับเริ่มต้นของการศึกษาคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษากระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กไทยที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี โดยศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ จากการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของเด็กซึ่งถือเป็นเครื่องมือให้รู้ถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Kriegler. 2004: Online) ทั้งนี้เพื่อใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับแนวคิดและแนวการเรียนรู้ของเด็กต่อไป

### จุดมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาและวิเคราะห์วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี

### คำถามวิจัย

1. วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี เป็นอย่างไร
  - 1.1 เมื่อเสนอโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้เด็กที่มีอายุ 7-10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติได้หรือไม่ อย่างไร
  - 1.2 เมื่อกำหนดสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้ เด็กที่มีอายุ 7-10 ปี จะมีวิธีการแก้ปัญหา ลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างไร
2. เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองอย่างไร

## ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้จะศึกษากับเด็กจากโรงเรียนในกรุงเทพมหานคร

### สนามและผู้ให้ข้อมูลหลัก

สนามที่เลือกในการวิจัยนี้ได้แก่โรงเรียนสวัดิวิทยา เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นโรงเรียนขนาดกลาง สังกัดกรุงเทพมหานคร เปิดสอนตั้งแต่ชั้นเด็กเล็กจนถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ระดับชั้นละ 3 ห้องเรียน มีนักเรียนทั้งหมด 751 คน นักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในครอบครัวที่มีฐานะปานกลาง เนื่องจากสนามนี้เด็กส่วนมากไม่มีการเรียนพิเศษเสริม เป็นโรงเรียนที่เด็กมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ กัน ซึ่งโรงเรียนส่วนใหญ่ในกรุงเทพมหานครจะมีลักษณะเช่นนี้ เด็กของโรงเรียนสวัดิวิทยาส่วนใหญ่คุ้นเคยกับการมีผู้เข้าไปเก็บข้อมูล และแสดงพฤติกรรมอย่างเป็นธรรมชาติ ตามปกติ กล่าวคือ กล่าวแสดงออก และผู้บริหารโรงเรียนอนุญาตให้ผู้วิจัยเข้าไปศึกษาข้อมูลแบบเจาะลึกได้ รวมทั้งครูและนักเรียนที่เข้าร่วมในการวิจัยให้ความร่วมมือกับการวิจัยนี้ด้วยความเต็มใจ

ผู้ให้ข้อมูลในงานวิจัย ได้แก่เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี ที่กำลังศึกษาอยู่ในช่วงชั้นที่ 1 (ป.1 – ป.3) ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ของโรงเรียนสวัดิวิทยา ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่างๆ กัน โดยทำการเลือกแบบเฉพาะเจาะจงอย่างมีจุดมุ่งหมาย จากเด็กในแต่ละช่วงอายุ ซึ่งใช้วันที่ 1 มกราคม 2549 เป็นวันฐานในการนับอายุ ถ้ามีเศษอายุเกิน 6 เดือนขึ้นไปให้คิดเป็น 1 ปี ทั้งนี้แบ่งเด็กออกเป็น 3 ช่วงอายุและชั้นที่เรียน คือ

ช่วงอายุ 7 – 8 ปี (เกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2542 ถึง 31 ธันวาคม 2542 ซึ่งอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1) โดยเด็กในช่วงนี้จะมีพื้นฐานทางด้านจำนวนนับ 1-100 และ 0 การนับการบวกและการลบที่ผลลัพธ์ไม่เกิน 9 แต่ยังไม่มีความรู้พื้นฐานด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ช่วงอายุ 8 – 9 ปี (เกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2541 ถึง 31 ธันวาคม 2541 ซึ่งอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2) ซึ่งเด็กในช่วงนี้จะมีพื้นฐานทางด้านจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 การนับเพิ่มที่ละ 1, 2, 5, 10, 100 การนับลดที่ละ 1, 2, 10, 100 การบวกที่ผลบวกไม่เกิน 1,000 การลบที่ตัวตั้งไม่เกิน 1,000 แต่ยังไม่มีความรู้พื้นฐานด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ช่วงอายุ 9 – 10 ปี (เกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2540 ถึง 31 ธันวาคม 2540 ซึ่งอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3) ในช่วงนี้เด็กจะมีพื้นฐานเหมือนเด็กในช่วงอายุที่ 2 แต่ขยายขนาดของจำนวนไปถึง 100,000 นับเพิ่มที่ละ 3, 4, 25, 50 นับลดที่ละ 3, 4, 5, 25, 50 และมีพื้นฐานทางด้าน การคูณจำนวน 1 หลัก กับ 2 หลัก และการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลักและตัวหาร 1 หลัก ผลหารมี 1 หลัก

ในขณะที่เก็บข้อมูลเด็กช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ยังไม่มีความรู้พื้นฐานด้านการคูณและการหารจำนวนนับเช่นเดียวกัน ยกเว้นเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี ที่มีพื้นฐานดังกล่าวเล็กน้อย

ผู้ให้ข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นและผู้ให้ข้อมูลหลัก

ผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้น คัดเลือกจากเด็กในแต่ละช่วงอายุ ช่วงอายุละ 2 คน รวมทั้งสามช่วงอายุเป็นจำนวน 6 คน โดยคัดเลือกจากเด็กที่สามารถสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนได้ ผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นใช้ในการเก็บข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับพฤติกรรมความคิดของเด็กโดยการสังเกตในชั้นเรียน

ผู้ให้ข้อมูลหลัก คัดเลือกจากเด็กในแต่ละช่วงอายุ ช่วงอายุละ 5 คน รวมทั้งสามช่วงอายุเป็นจำนวน 15 คน ซึ่งไม่ซ้ำกับผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้น โดยคัดเลือกจากเด็กที่สามารถสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนได้ ผู้ให้ข้อมูลหลักใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึกจากการตอบคำถามในชุดคำถามและการสัมภาษณ์เป็นรายบุคคล

### ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การเก็บข้อมูลเบื้องต้นและข้อมูลเชิงลึกกระทำในภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2549

### เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นเนื้อหาในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับในลักษณะของสถานการณ์ปัญหา สำหรับเด็กในช่วงอายุ 7 – 8 ปี และ 8 – 9 ปี ยังไม่ได้เรียนเรื่องการคูณและการหารแต่จำนวนที่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหามันจะอยู่ในขอบข่ายที่เด็กได้เรียนมาแล้ว ส่วนเด็กในช่วงอายุ 9 – 10 ปี ซึ่งเรียนเรื่องการคูณและการหารเบื้องต้นมาแล้วในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 แต่ยังไม่ได้เรียนเรื่องนี้ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โจทย์สถานการณ์ปัญหาจะใช้จำนวนที่มีค่ามากกว่าจำนวนที่เคยเรียนในการหาผลคูณและผลหารมาแล้วในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2

### ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

1. ได้ทราบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิจัยด้านนี้ให้ลึกซึ้งต่อไปและขยายไปสู่การวิจัยในด้านการคิดในแนวคิดทางคณิตศาสตร์อื่นๆ
2. ผู้ที่เกี่ยวข้องทางการศึกษาได้ใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ให้เต็มตามศักยภาพ
3. ใช้เป็นข้อมูลในการปรับปรุงหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 1 (ป.1 – ป.3) ให้เหมาะสมกับวุฒิภาวะของเด็ก
4. ได้แนวทางส่งเสริมให้เด็กรู้จักคิดทางด้านคณิตศาสตร์

## นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) ในการวิจัยนี้ เป็นวิธีการคิดของบุคคลทางด้านคณิตศาสตร์ การคิดแก้ปัญหาเกี่ยวกับปริมาณหรือจำนวน การให้เหตุผล โดยการใช้ความรู้ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจ ค้นหาคำตอบของปัญหาที่ไม่คุ้นเคย สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ โดยวัดจากการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด

2. วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Natural Ways of Mathematical Thinking) ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในตัวบุคคลผู้นั่นเอง เป็นการหยั่งรู้ด้วยตนเอง เป็นการคิดโดยธรรมชาติของเด็กที่ไม่มีการท่องจำมาจากบทเรียน เป็นความพยายามของเด็กเพื่อให้หลุดพ้นจากสภาวะที่ไม่รู้จะแก้ปัญหาอย่างไร โดยอาจใช้ตัวแบบ ใช้ภาพ ใช้การนึกภาพในใจ

3. การดำเนินการแก้ปัญหา (Methods of Problem Solving) ในงานวิจัยนี้ มุ่งความสนใจไปที่วิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เด็กใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของโจทย์ปัญหาการคูณและการหาร เช่น การลงมือปฏิบัติจริงหรือการใช้สถานการณ์จำลอง การใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ เป็นต้น โดยเด็กอาจใช้วิธีเดียวหรือหลายวิธีในการแก้ปัญหา หรือมีวิธีอื่นๆ อีกตามที่เด็กใช้

3.1 การใช้ตัวแบบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ตัวแบบเป็นตัวแทนของสิ่งที่กล่าวถึงในโจทย์มาใช้ในการลงมือปฏิบัติจริง เพื่อประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เช่น แบ่งกลุ่มตามที่โจทย์ระบุ ซึ่งตัวแบบนั้นอาจเป็นของจริงที่จับต้องได้

3.2 การนับ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้การนับที่ละหนึ่ง นับข้าม นับเพิ่ม/นับลด ซึ่งอาจใช้การนับสิ่งของที่มียู่ทั้งหมด โดยใช้การวาดภาพแล้วนับหลังจากวาดภาพ การนับโดยใช้นิ้วมือ

3.3 การบวก/การลบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้การเพิ่มเข้าและหักออกครั้งละเท่าๆ กัน หรือการบวกซ้ำ การบวกในลักษณะทวีคูณ การลบซ้ำ การนับถอยหลังตามจังหวะ การนับข้ามไปข้างหน้า การบวกโดยการแบ่งครึ่ง การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก

3.4 การใช้ภาพ เป็นการแก้ปัญหาโดยการใช้ภาพเพื่อช่วยให้เกิดจินตนาการและง่ายต่อการแก้ปัญหา อาจใช้ภาพของจริง ภาพที่เป็นตัวแทน เช่น ชีต วง รูปภาพและอื่นๆ

3.5 การนึกภาพในใจ เป็นการสร้างจินตนาการภายในของตัวบุคคลในขณะที่พยายามจะแก้ปัญหาโดยการนึกภาพสถานการณ์ตามโจทย์และการดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบ

4. การเก็บข้อมูลเชิงลึก เป็นการเก็บข้อมูลจากผู้ให้ข้อมูลหลักในแต่ละช่วงอายุที่ละคนโดยการตอบชุดคำถามครั้งละหนึ่งข้อจาก 1 ชุดคำถาม หลังจากที่ผู้ให้ข้อมูลหลักแต่ละคนคิดโจทย์ปัญหาในแต่ละปัญหาเสร็จแล้วจึงทำการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกถึงวิธีการคิดเป็นรายบุคคล

5. ชุดคำถาม (Question Sets) เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในการวิจัยนี้ ชุดคำถามเป็นลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก เป็นชุดของโจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับรวมทั้งหมด 8 ชุด เนื่องจากเด็กช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ไม่มีความรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับเหมือนกัน จึงใช้ชุดคำถามเดียวกัน ดังนั้นชุดคำถามจึงแยกเป็นชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-2) จำนวน 4 ชุด และชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3) จำนวน 4 ชุด แต่เนื่องจากชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี มีโครงสร้างเช่นเดียวกับช่วงอายุ 7-9 ปี จึงเรียกชื่อเป็นชุดคำถามที่ 1, 2, 3 และ 4 เช่นเดียวกัน ในชุดคำถามที่ 1, 2 และ 3 แต่ละชุดจะมีโจทย์ปัญหาใน 3 รูปแบบ คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ชุดคำถามที่ 1-3 จะต่างกันทางด้านลักษณะของโจทย์ปัญหา โดยชุดที่ 1 สถานการณ์ของโจทย์ปัญหาเป็นลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ชุดที่ 2 เป็นลักษณะของอัตรา/ราคา ชุดที่ 3 เป็นลักษณะของการเปรียบเทียบ สำหรับชุดที่ 4 มีลักษณะเป็นโจทย์ปัญหาการหาผลคูณครั้งที่เขียนเท่านั้น ในชุดคำถามแต่ละข้อประกอบด้วย โจทย์ปัญหา และส่วนที่ให้นักเรียนเขียนแสดงการทำงาน การคิด วิเคราะห์คำตอบ และคำตอบ โดยโจทย์ปัญหาแต่ละข้อจะเป็นเอกสาร 1 แผ่น ในการทำชุดคำถามนี้มีการสัมภาษณ์ประกอบ และมีวัสดุอุปกรณ์ที่เด็กอาจใช้ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ให้ เช่น ตัวนับ กระดุม ไม้จิ้มฟัน ตะเกียบ กระดาษ ดินสอ เป็นต้น

สถานการณ์ปัญหาในการวิจัยนี้มีรูปแบบของปัญหา 3 รูปแบบ ดังนี้

5.1 การคูณ (Multiplication) เช่น ปัญหาที่ไม่ทราบจำนวนของสิ่งของทั้งหมดที่มีอยู่ โจทย์จะกำหนดจำนวนของกลุ่มที่มีและจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่มมาให้

5.2 การหารในแบบของการวัด (Measurement Division) เช่น ปัญหาการหารที่ไม่ทราบจำนวนของกลุ่มของสิ่งของที่มี โจทย์จะกำหนดจำนวนของสิ่งของทั้งหมดและจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่มมาให้

5.3 การหารในแบบของการแบ่งส่วน (เกี่ยวกับส่วนของทั้งหมด) (Partitive Division) เช่น ปัญหาการหารที่ไม่ทราบจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่ม โจทย์จะกำหนดจำนวนของสิ่งของทั้งหมดและจำนวนของกลุ่มมาให้

6. การสัมภาษณ์ (Interview) ในการวิจัยนี้ เป็นการสัมภาษณ์เจาะลึก แบบกึ่งโครงสร้างซึ่งมีประเด็นที่จะถาม (ข้อคำถาม) ชัดเจน เพื่อให้ทราบถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กจากการตอบคำถามในชุดคำถาม ลักษณะการสัมภาษณ์จะแบ่งออกเป็นสองลักษณะคือการถามเจาะลึกถึงการคิดในขณะหาคำตอบเพื่อศึกษากระบวนการทางสมองในการทำชุดคำถามกับการถามเพื่อขยายแนวคิดสำหรับโจทย์ในลักษณะปัญหาใหม่โดยเปลี่ยนตัวเลขหรือสถานการณ์ใหม่

## บทที่ 2

### เอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และกรอบความคิดในการวิจัย

ในบทนี้แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ

ส่วนแรก ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อนำไปสู่ส่วนที่สองคือการสร้างกรอบความคิดในการวิจัย และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การคิด
  - 1.1 การคิด
  - 1.2 ลำดับขั้นการเรียนรู้
  - 1.3 แบบการรู้คิด
2. การคิดเชิงคณิตศาสตร์
  - 2.1 ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์
  - 2.2 วิถีธรรมชาติแห่งการคิด แบบการคิดและลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์
  - 2.3 วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดและการคิดเชิงคณิตศาสตร์
4. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์
  - 4.1 จำนวนและการดำเนินการ
  - 4.2 รูปแบบของปัญหาการคูณและการหาร
  - 4.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและการดำเนินการ
5. การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษา
  - 5.1 การวิจัยเชิงคุณภาพ
  - 5.2 การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ส่วนที่สอง ผู้วิจัยได้สังเคราะห์ประเด็นและแนวคิดที่ได้จากการศึกษางานในส่วนแรกมาสร้างเป็นกรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัยของผู้วิจัยเอง

## 1. การคิด

### 1.1 การคิด

การคิด เป็นลักษณะเฉพาะของมนุษย์ซึ่งเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในสมองของบุคคล (Cognitive Process) มีแนวทางอันแน่นอน โดยอาศัยข้อมูล ประสบการณ์จากสิ่งแวดล้อมต่างๆ ผ่านเข้ามาทางอวัยวะรับสัมผัส การรู้สึก การรับรู้ และระบบความจำ มาสัมพันธ์กับสิ่งเร้าและสภาพแวดล้อม และนำมาวิเคราะห์ เปรียบเทียบ สังเคราะห์ และประเมินอย่างมีระบบ มีเหตุผล เพื่อให้ได้แนวทางในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม หรือสร้างสรรค์สิ่งใหม่ การแก้ปัญหานั้นอาศัยนามธรรม และสัญลักษณ์เป็นส่วนใหญ่ การคิดมักจะจบลงด้วยการสรุปผลในขั้นสุดท้าย (กันยา สุวรรณแสง. 2532; สมสุข โถวเจริญ. 2541: 15; กรมวิชาการ. 2542: 3; Berger. 1984: 306)

รัสเซล (Russell. 1956: 3-28) กล่าวว่า การคิดเป็นกระบวนการ การคิดอาจจะเริ่มจากการตั้งต้นที่บางสิ่งบางอย่างผ่านไปสู่แบบรูปของความสัมพันธ์ และไปสู่จุดมุ่งหมายหรือข้อสรุป การเรียนรู้จึงส่งผลต่อประสิทธิภาพในการคิดแบบต่างๆ รัสเซลได้จำแนกการคิดในสถานการณ์ต่างๆ ออกเป็น 6 ประเภท คือ การคิดแบบการหยั่งรู้ (Perceptual Thinking) การคิดแบบเชื่อมโยง (Associative Thinking) การคิดแบบอุปนัย-นิรนัย (Inductive-Deductive Thinking) ซึ่งนำไปสู่การสร้างโมทัศน์ การคิดแบบสร้างสรรค์หรือจินตนาการ (Creative or Imaginative Thinking) การคิดแบบวิจารณ์ญาณ (Critical Thinking) และ การคิดแก้ปัญหา (Problem Solving)

ทิสนา แชมมณี นวลจิตต์ เขาวีรดิพงศ์และ ศรีนทร วิริยะสินธุ์ (2547: 4-13) ได้กล่าวถึงทักษะการคิดว่าเป็นคำที่แสดงพฤติกรรมความคิดที่มีลักษณะเป็นรูปธรรมที่ช่วยให้มองเห็นพฤติกรรม/การกระทำที่ชัดเจนของการคิดนั้นๆ

อาจสรุปถึงการคิดได้ว่าเป็นกระบวนการของกิจกรรมทางสมอง ที่มีขบวนการหลายอย่าง โดยสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิต โดยอาศัยประสบการณ์ ทักษะ และความรู้ใหม่ที่ได้รับมาช่วยในการสรุปผล

### 1.2 ลำดับขั้นการเรียนรู้

บลูม ได้จัดลำดับขั้นการเรียนรู้หรือลำดับขั้นการคิด (Bloom's Taxonomy) เป็น 6 ขั้น คือ ความรู้-ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า (Bloom. 1961; Armstrong. 1998: 117-119; Mazano. 2001: 5-9) มาร์ซาโนได้จัดลำดับการเรียนรู้คล้ายกับของบลูม โดยให้ชื่อว่า New Taxonomy of Educational Objectives

New Taxonomy ได้อธิบายถึงตัวแปรเกี่ยวกับกระบวนการภายในสมอง โดยกล่าวถึงระบบภายในสมอง 3 ระบบ คือ ระบบของตนเอง ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง และ ระบบทางด้านการรู้คิด ซึ่งระบบทั้งสามจะใช้ในการเก็บสะสมความรู้ที่อยู่ในองค์ประกอบที่สี่ของแบบจำลองพฤติกรรม (Mazano. 2001:10-12) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

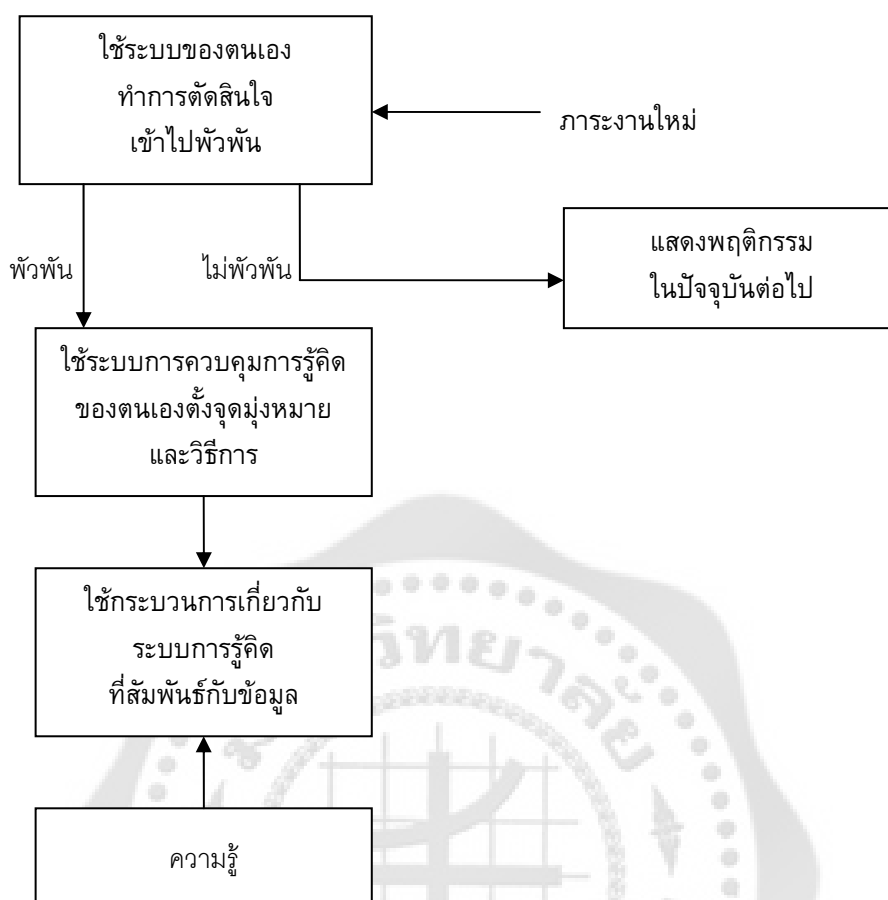
ระบบของตนเอง (the Self-System) เป็นตัวตัดสินใจเข้าสู่ภาระงานใหม่ ถ้าภาระงานมีความสำคัญ หรือมีโอกาสที่จะประสบความสำเร็จสูง หรือมีความรู้สึทางบวกที่จะเข้าไปมีส่วนร่วมกับการทำงาน บุคคลนั้นก็จะเข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้น แต่ถ้าภาระงานชิ้นใหม่ถูกประเมินในลักษณะตรงกันข้าม แรงกระตุ้นที่จะเข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้นก็จะต่ำ

ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง (the Meta-Cognitive System) เป็นการรู้ถึงความคิดของตนเองในการทำอะไรอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเป็นการประเมินการคิดของตนเองและใช้ความรู้นั้นในการควบคุมหรือปรับการกระทำของตนเอง ซึ่งการคิดในลักษณะนี้จะครอบคลุมถึงการวางแผน การควบคุมกำกับกับการกระทำของตนเอง การตรวจสอบความก้าวหน้าและการประเมินผล บุคคลที่ตระหนักถึงการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะสามารถปรับปรุงกระบวนการคิดของตนให้ดีขึ้นเรื่อยๆ จึงส่งผลต่อความสามารถทางการคิดของบุคคลนั้นในภาพรวม ถ้าภาระงานใหม่ถูกเลือก ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะถูกนำไปเกี่ยวข้อง คนที่เริ่มต้นภาระงานโดยใช้ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะตั้งจุดมุ่งหมายที่สัมพันธ์กับภาระงานใหม่ ดังนั้น บุคคลนั้นจึงมีโอกาที่จะประสบความสำเร็จตามจุดมุ่งหมายที่กำหนด ซึ่งระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะมีปฏิสัมพันธ์ต่อเนื่องกับระบบทางด้านการรู้คิด

ระบบการรู้คิด (the Cognitive System) เป็นกระบวนการคิดที่ต้องดำเนินไปเป็นลำดับขั้นตอน ที่จะช่วยให้การคิดนั้นประสบผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายของการคิดนั้นๆ ซึ่งในแต่ละลำดับขั้นตอนอาจต้องอาศัยทักษะการคิดหรือลักษณะการคิดจำนวนมาก และเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ เช่น ทำการอ้างอิง เปรียบเทียบ จำแนกประเภท และประมาณ

สำหรับความรู้ (Knowledge) จะมีความสัมพันธ์กับภาระงานใหม่ การที่คนเราจะประสบความสำเร็จอย่างสูงขึ้นอยู่กับปริมาณความรู้ที่แต่ละคนมีเกี่ยวกับภาระงานใหม่นั้น โดยความรู้จะประกอบไปด้วยตัวแปร 3 ด้าน คือ ข้อมูล กระบวนการทางสมอง และกระบวนการทางกายภาพ

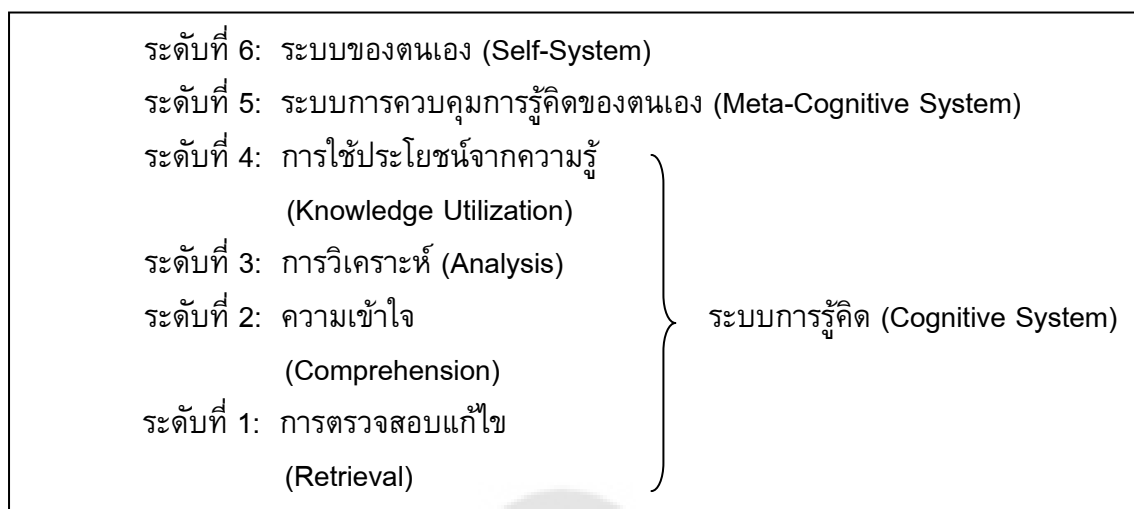
แบบจำลองพฤติกรรมใน New Taxonomy ของมาร์ซาโน แสดงดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 แบบจำลองพฤติกรรม ตามแนวของมาร์ซาโน

ที่มา: Marzano, Robert J. (2001). *Designing a New Taxonomy of Educational Objectives*. p.11.

นอกจากนี้มาร์ซาโนยังได้จัดแบ่งระบบภายในสมองทั้ง 3 ระบบ ตามกระบวนการภายใน สมองออกเป็น 6 ระดับ ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 กระบวนการภายในสมอง 6 ระดับของ New Taxonomy

ที่มา: Marzano, Robert J. (2001). *Designing a New Taxonomy of Educational Objectives*. p.30.

สองระดับแรก คือระดับที่ 6 และ ระดับที่ 5 เป็นการจัดการและการกระทำทั่วไปของเด็กที่อยู่ภายนอกกระบวนการรู้คิด ส่วนระดับที่ 4 ลงมาถึงระดับที่ 1 จะอยู่ภายในกระบวนการรู้คิด ซึ่งเป็นการอธิบายถึงระดับของความคิดที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระดับที่ 6: ระบบของตนเอง เป็นตัวบ่งการแรงจูงใจและความสนใจของคน ประกอบด้วยระบบที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของเจตคติ ความเชื่อ และอารมณ์ ซึ่งปฏิสัมพันธ์ขององค์ประกอบเหล่านี้เป็นตัวกำหนดแรงจูงใจและความสนใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระบบของตนเองจะเป็นตัวกำหนดว่าคนเราจะเข้าไปพัวพันกับภาระงานหรือไม่เข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้น ถ้าเรามีความสนใจในภาระงานใด ตัวแปรที่เกี่ยวกับความคิด (ได้แก่ ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง ระบบการรู้คิด และตัวแปรด้านความรู้) จะถูกนำมาใช้ ระบบของตนเองประกอบด้วย

1) การตรวจสอบความสำคัญ (Examining Importance) 2) การตรวจสอบประสิทธิภาพ (Examining Efficacy) 3) การตรวจสอบการตอบสนองทางอารมณ์ (Examining Emotional Response) และ 4) การตรวจสอบแรงจูงใจทั้งหมด (Examining Overall Motivation)

ระดับที่ 5: ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง เป็นการรับรู้เกี่ยวกับจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้ของเด็ก เป็นความคิดในการรวบรวมกระบวนการคิดของเด็กเพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายสามารถสะท้อนและปรับความคิดของตัวเอง ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจำแนกออกเป็น 4 ประเภท คือ 1) การกำหนดเป้าหมายเฉพาะ (Goal Specification) 2) การควบคุมกระบวนการ (Process Monitoring) 3) การควบคุมความชัดเจน (Monitoring Clarity) และ 4) การควบคุมความถูกต้อง (Monitoring Accuracy)

ระดับที่ 4: การใช้ประโยชน์จากความรู้ เป็นกระบวนการที่แต่ละคนจะใช้เพื่อทำให้งานของตนประสบผลสำเร็จ ในระดับนี้จะจำแนกการใช้ประโยชน์จากความรู้ออกเป็น 4 ประเภท คือ 1) การตัดสินใจ (Decision Making) 2) การแก้ปัญหา (Problem Solving) 3) การค้นพบที่ได้มาจากการทดลอง (Experimental Inquiry) และ 4) การสืบเสาะหาความรู้ (Investigation)

ระดับที่ 3: การวิเคราะห์ ในกระบวนการวิเคราะห์จะประกอบด้วยการดำเนินการทางการคิด 5 ประเภทคือ 1) การจับคู่ (Matching) เป็นการจำแนกความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งต่างๆ 2) การจัดหมวดหมู่ (Classification) เป็นการจัดกลุ่มของข้อมูลตามความเหมาะสม 3) การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน (Error Analysis) 4) การสร้างกรณีทั่วไป (Generalization) เป็นการอนุมานสิ่งที่เคยเรียนแล้วไปสู่สถานการณ์และสิ่งแวดล้อมใหม่และ 5) รายละเอียด (Specification) เป็นการสร้างข้อมูลที่อาศัยการทำนาย ซึ่งการดำเนินการทางการคิดเหล่านี้จะผูกขึ้นมาอย่างเป็นธรรมชาติโดยปราศจากการคิดอย่างมีจิตสำนึก (Conscious Thought)

ระดับที่ 2: ความเข้าใจ ประกอบด้วยกระบวนการที่สัมพันธ์กันสองกระบวนการคือการสังเคราะห์และการนำเสนอตัวแทนความคิด การสังเคราะห์เป็นกระบวนการเกี่ยวกับการกลั่นความรู้ ที่ประกอบด้วย การนำออก (Deletion) การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างองค์ความรู้ใหม่ (Construction) ส่วนการนำเสนอตัวแทนความคิดเป็นกระบวนการแห่งความเข้าใจของการสร้างสรรค์สัญลักษณ์ที่มีความต่อเนื่องกันในความรู้ซึ่งให้กำเนิดเส้นทางที่เป็นกระบวนการของการสังเคราะห์ การนำเสนอตัวแทนความคิดเป็นการแปลงความรู้ไปสู่สัญลักษณ์ มโนภาพ (ที่ไม่ใช่ภาษา) บางอย่าง การนำเสนอตัวแทนความคิดทางสัญลักษณ์ที่เป็นที่รู้จักกันดีในชั้นเรียนตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 คือ ผังความคิด (Graphic Organizers) ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงภาษาและสัญลักษณ์เข้าด้วยกัน

ระดับที่ 1: การตรวจสอบแก้ไข เป็นการกระตุ้นและถ่ายโอนความรู้จากความจำถาวร (Permanent Memory) ไปสู่ความจำในการลงมือทำ (Working Memory) การตรวจสอบแก้ไขเป็นกระบวนการที่อยู่ในระบบการรู้คิดและเป็นกระบวนการซึ่งมีมาแต่กำเนิด กระบวนการตามสภาพจริงที่จัดอยู่ในการตรวจสอบแก้ไขนี้ค่อนข้างจะแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับชนิดของความรู้ที่ได้รับ การตรวจสอบแก้ไข ถ้ากล่าวตามนัยของความรู้ที่เป็นข้อมูล การตรวจสอบแก้ไขจะรวมถึงการถ่ายโอนอย่างง่ายเกี่ยวกับรายละเอียดหรือแนวคิดที่รวบรวมมาจากความจำถาวรไปสู่ความจำในการลงมือทำ ซึ่งตาม New Taxonomy การตรวจสอบแก้ไขเทียบได้กับการระลึก (Recall) เช่นเมื่อนักเรียนแก้ไขข้อมูลที่ขัดแย้งกันจากความจำถาวรและสะสมไว้ในความจำในการลงมือทำ ข้อมูลนี้จะรวมถึงการระลึกถึงรายละเอียดจากตัวแปรข้อมูลด้วย นั่นคือ เมื่อข้อมูลได้รับการแก้ไขจากความจำถาวร มันจะบรรจุองค์ประกอบที่ไม่ชัดเจนในประสบการณ์เริ่มต้นของนักเรียนเกี่ยวกับข้อมูล เพราะว่าโดยธรรมชาติคนเราจะวางแผนอย่างละเอียดกับข้อมูลเริ่มต้นที่นำไปสู่ความจำในการลงมือทำ

จากการพิจารณาระบบภายในสมองที่ มาร์ซาโน (Marzano) ได้จำแนกขึ้นมาใน New Taxonomy เพื่อทำความเข้าใจการคิดและพฤติกรรมของเด็กผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษา

การประเมินคุณภาพการเรียนรู้ลำดับขั้นพัฒนาการอื่นอีก ได้แก่ โครงสร้างของลักษณะผล การเรียนรู้ที่ได้จากการสังเกต (The Structure of the Observed Learning Outcome) ซึ่งเรียกว่า SOLO model หรือบางครั้งอาจเรียกว่า SOLO Taxonomy ตามที่บิกส์และคอลลิส (Biggs; & Collis. 1982: 62-63; 1991: 57-76) ได้พัฒนาขึ้นมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1982

SOLO model ได้พัฒนามาจากโครงสร้างทั่วไปของการพัฒนาทางสติปัญญาของ เพียเจต์ (Piaget's Stages of Cognitive Development) SOLO model ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์ และจัดระดับของการปฏิบัติ โดยการพิจารณาถึงลักษณะในการสังเกตผลของการเรียนรู้จาก การตอบสนองของเด็กต่อระดับความซับซ้อนของคำถามที่ตั้งขึ้นในหลากหลายหัวข้อ/วิชา ใน SOLO model จะประกอบด้วย ลักษณะเฉพาะ 2 ประการ ได้แก่ 1) ลำดับขั้นพัฒนาการ 5 ขั้น (Five Modes of Functioning) และ 2) ลักษณะของการตอบสนอง 5 ระดับ (Five Levels of Response)

ลำดับขั้นพัฒนาการ 5 ขั้น ใน SOLO model ของบิกส์และคอลลิส เป็นพัฒนาการจากการกระทำเชิงรูปธรรมไปสู่โมโนทัศน์เชิงนามธรรม (โดยใช้อายุเป็นตัวแบ่งระดับ) ซึ่งแบ่งออกเป็น 5 ขั้น ดังต่อไปนี้

1. การใช้ประสาทสัมผัส (Sensorimotor) (จากแรกเกิด) ทารกสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับ โลกด้วยวิถีทางตามรูปธรรมเท่านั้น การเรียนรู้พัฒนาผ่านการตอบสนองทางความรู้สึก
2. การใช้ภาพเป็นสื่อ (Ikonic) (จากประมาณ 2 ขวบ) เด็กจะเรียนรู้ผ่านการจินตนาการ ภายในหรือผ่านรูปภาพ
3. รูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic) (จากประมาณ 6 ขวบ) ในขั้นนี้จะรวมถึง กระบวนการที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเกี่ยวกับการเรียนรู้และถือว่าการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญไปสู่ นามธรรม จากการใช้สัญลักษณ์ในโลกจริงโดยตรงไปสู่ภาษาพูด การเขียน ซึ่งเป็นขั้นที่สองของ ระบบสัญลักษณ์ที่ต้องใช้ประสบการณ์ ในขั้นนี้จะตรงกับเด็กในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา
4. แบบเป็นทางการ (Formal) (จากประมาณ 15 หรือ 16 ปี) เป็นระบบเชิงนามธรรมที่สูงขึ้น เด็กที่ได้รับการพัฒนาจนถึงขั้นนี้จะสามารถพัฒนาสมมุติฐานต่างๆ ในโลกอย่างเป็นระเบียบ ในขั้นนี้จะเป็นเด็กระดับปริญญาตรี และมีหลักฐานบ่งชี้ว่าความสามารถในการคิดแบบเป็นทางการนี้ ควรใช้เป็นพื้นฐานสำหรับรับเข้าศึกษาในมหาวิทยาลัย
5. หลังแบบเป็นทางการ (Postformal) (จากประมาณ 22 ปี) การคิดหลังแบบเป็นทางการจะปรากฏออกมาเป็นคำถามซึ่งนำไปสู่ทฤษฎีและการสร้างทฤษฎีใหม่ เกิดเป็นนวัตกรรม ระดับสูงในหลายๆ สาขาวิชา

ในแต่ละลำดับขั้นของพัฒนาการยังจำแนกออกเป็น 5 ระดับ ได้แก่

1. ระดับก่อนจะมีมุมมอง (Prestructural) ผู้เรียนจะแสดงความวอกแวกบ่อยครั้งหรือ เข้าใจสถานการณ์ผิด และไม่เข้าไปพัวพันกับภาระงานหรือไม่ปฏิบัติงาน
2. ระดับมุมมองเดียว (Unistructural) เด็กจะมุ่งความสนใจไปที่ตัวแปร/ปัญหา แต่ จะใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องเพียงข้อมูลเดียว การสรุปจะไม่เที่ยงตรง (Invalid) ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนด ปัญหาต่อไปนี้ให้ เด็กในระดับนี้จะสามารถแก้ปัญหาได้

ก) ถ้า  $q = 8 + 4$  แล้ว  $q = ?$

ข)  $4 + 3 = ?$

ค) ถ้า  $7 * 4 = 3$  แล้ว  $* = ?$

ถ้ากำหนดจำนวนที่มีค่าน้อยๆ ให้ เด็กจะกล่าวว่าข้อความ ค) ดูเหมือนจะไม่ได้ยากกว่าข้อความ ก) และ ข)

3. ระดับหลายมุมมอง (Multistructural) เด็กในระดับนี้จะใช้ข้อมูลสองข้อมูลหรือมากกว่านั้น แต่จะไม่มี การสังเคราะห์ข้อมูลหรือไม่เข้าใจความสัมพันธ์ใดๆ ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น ไม่มีการบูรณาการ เด็กระดับนี้จะประสบความสำเร็จในการใช้ข้อมูลที่หลากหลายจากความจำในการลงมือทำ ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดปัญหาต่อไปนี้

ก)  $n = (6 \times 8) \div 4$   $n = ?$

ข)  $(3 * 6) \div 3 = 6$   $* = ?$

ค)  $(2 * 3) * 4 = 9$   $* = ?$

ง)  $5 * 3 = 4 \circ 2$   $* = ? ; \circ = ?$

ที่ระดับนี้เด็กจะใช้ข้อมูลที่หลากหลายขึ้น และในการแก้ปัญหาเด็กจะ ใช้การลองผิดลองถูก

4. ระดับเห็นความสัมพันธ์ (Relational) เด็กสามารถใช้ข้อมูลทั้งหมดที่หามาได้ และจะ ผสานข้อมูลทั้งหมดตามความสัมพันธ์ ข้อมูลทั้งหมดจะกลายเป็นโครงสร้างที่เชื่อมโยงกันและมีความสอดคล้องกันในระบบที่เป็นที่รู้จัก ที่ระดับนี้เด็กจะทำการตัดสินใจอย่างถูกต้องกับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันภายในข้อความที่กำหนดให้ เช่น เด็กในระดับนี้จะสามารถแก้ปัญหา ลักษณะต่อไปนี้ได้อย่างถูกต้อง

ก)  $(4 \times 3) \circ 1 = 5 \circ (1 \circ 2)$   $\circ = ?$

ข)  $(3 \circ 4) \circ 1 = 12 * (6 * 2)$   $\circ = ? ; * = ?$

ค)  $(96 \times 42) \div 100 = (96 \times 21) \div 50$  ข้อความนี้เป็นจริงหรือเท็จ

5. ระดับขยายนามธรรม (Extended Abstract) เด็กสามารถขยายแนวคิดนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ มีการให้เหตุผลในระดับสูงขึ้น และสามารถสร้างกรณีทั่วไปใหม่ๆ รวมทั้งที่เป็นนามธรรม การใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับข้อมูลที่กำหนดให้มาสร้างสมมุติฐานหรือสร้างหลักการเชิงนามธรรม เด็กในระดับนี้สามารถพิจารณาความเป็นไปได้ของคำตอบ และมีโอกาสที่จะตอบปัญหา ลักษณะต่อไปนี้ได้

ก)  $(a \circ 3) \circ 4 = 8$   $\circ = ? ; a = ?$

ข)  $7 * 6 = 5 * 4$  ข้อความนี้เป็นจริงหรือเท็จ (ให้กำหนดลักษณะเฉพาะของ \* และนิยามข้อยกเว้นของการดำเนิน \* เอง)

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำลำดับขั้นพัฒนาการ 5 ขั้นใน SOLO Model ที่บิกส์และคอลลิสได้พัฒนาขึ้น มาเป็นแนวทางในการพิจารณาสร้างชุดคำถามที่ใช้ในการวิจัยโดยจำแนกสถานการณ์ปัญหาตามลำดับขั้นพัฒนาการคือ สถานการณ์ที่ใช้ประสาทสัมผัส สถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ และสถานการณ์ที่เป็นรูปธรรมหรือสัญลักษณ์ นอกจากนี้ผู้วิจัยจะศึกษาพฤติกรรมความคิดของเด็กเมื่อ

เผชิญกับสถานการณ์ปัญหา โดยพิจารณาว่าสถานการณ์ปัญหาหรือภาระงานลักษณะใดที่เด็กมีโอกาสจะประสบความสำเร็จสูงหรือมีความรู้สึกทางบวกที่จะเข้าไปสู่สถานการณ์นั้น เมื่อเผชิญภาวะที่ไม่สามารถคิดปัญหาต่อไปได้หรือหยุดคิด เด็กมีการควบคุมการรู้คิดของตนเองหรือปรับการคิดของตนตาม New Taxonomy ของมาร์ซาโน หรือไม่ อย่างไร

### 1.3 แบบการรู้คิด

แบบการรู้คิด (Cognitive Styles) เปรียบประจวบัตถุติบในการแก้ปัญหา เพราะปัญหาทุกอย่างจะต้องอาศัยประสบการณ์และวิธีการเฉพาะเป็นอย่างไร ไป และแบบการรู้คิดของเด็กจะเปลี่ยนไปเมื่ออายุมากขึ้น นอกจากนี้ ชุคแมนและสปอลดิ้ง (Suchman, J R.; & Spaulding, R. 1970?: 1-5) ยังเชื่อว่า แบบการรู้คิดเกี่ยวข้องกับกิจกรรมทางสมองหลายประการ โดยเฉพาะเขาเน้นให้เห็นว่าการรับรู้ (Perception) เป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้คนคิดไปต่างๆ กัน ขึ้นอยู่กับประสบการณ์หรือมโนทัศน์ของบุคคลนั้น เช่นเดียวกับที่เคแกน และมอสส์ ซีเกลและฮูฟเฟอร์ (Kagan; & Moss. 1962; Sigel; & Hooper. 1968: 172) ได้แบ่งแบบการรู้คิดออกเป็น 3 แบบ คือ

1. การคิดแบบวิเคราะห์เชิงพรรณนา (Descriptive-Analytical Styles) คือ การคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกัน โดยพิจารณาความคล้ายคลึงของส่วนต่างๆ ดังตัวอย่าง การให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ 2 ภาพ จากภาพ 3 ภาพที่กำหนดให้ ซึ่งมีภาพคน ไม่บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่ภาพกับนาฬิกาหรือไม่บรรทัด ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะต่างมีตัวเลขเหมือนกัน

2. การคิดแบบใช้การอนุมานเพื่อแยกประเภท (Categorical-Inferential Styles) คือ การคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกันโดยอาศัยการอนุมานถึงความรู้ที่ตนได้รับ ดังตัวอย่าง การให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ คือเมื่อกำหนดภาพคน ไม่บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่ภาพกับไม่บรรทัด ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะต่างก็เป็นสิ่งไม่มีชีวิตเหมือนกัน

3. การคิดแบบโยงความสัมพันธ์ (Relational Styles) คือ การคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกัน โดยอาศัยประสบการณ์ยึดถือหน้าที่ที่สัมพันธ์กันของสิ่งของในสถานการณ์อันใดอันหนึ่ง ดังตัวอย่าง การให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ คือเมื่อกำหนดภาพคน ไม่บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่คนกับนาฬิกา ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะคนต้องใช้นาฬิกา

การคิดแบบวิเคราะห์จะเป็นลักษณะของการคิดที่ยึดถือสิ่งเร้าเป็นศูนย์กลาง ส่วนการคิดอีกสองแบบเป็นลักษณะการคิดที่ยึดถือตนเองเป็นศูนย์กลาง เพราะต้องอาศัยความรู้ และประสบการณ์ของตนเองเป็นส่วนประกอบด้วย

กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การแบ่งแบบการรู้คิดตามแนวของเคแกน มอสส์ และ ซีเกล เกิดจากความเชื่อที่ว่า กิจกรรมทางสมองจะประกอบด้วยกระบวนการต่างๆ 3 ประการ คือ การอาศัยข้อมูลภายนอก การอาศัยข้อมูลภายในที่ได้สะสมไว้ และการผสมผสานเกี่ยวโยงข้อมูลที่ได้สะสมไว้ กระบวนการทั้ง 3 ประการนี้จะอยู่ภายใต้อิทธิพลของลักษณะปัญหาที่แต่ละบุคคลประสบ ซึ่งจะสอดคล้องกับแบบการรู้คิดทั้ง 3 แบบตามลำดับ ความแตกต่างของแบบการรู้คิดจะมีการรับรู้เป็นสื่อ

สำคัญที่ทำให้แต่ละบุคคลคิดไปต่างๆ กัน (Suchman; & Spaulding. 1970?: 1-2) การคิดแบบวิเคราะห์เป็นการรับรู้ส่วนย่อยต่างๆ ของสิ่งแวดล้อมมากกว่ารับรู้ส่วนทั้งหมด การคิดแบบโยงความสัมพันธ์เป็นการโยงความคิดหรือการรับรู้กับความคิดหรือการรับรู้อื่นๆ โดยอาศัยความเกี่ยวโยงที่บุคคลมีมาจากระบบการรับรู้ และการคิดแบบจำแนกประเภทเป็นการจัดกลุ่มสิ่งที่รับรู้เข้าในระบบการรับรู้

จากการศึกษาทฤษฎีและแนวคิดทางด้านการคิดส่วนหนึ่งสรุปได้ว่า การคิดไม่ว่าจะเป็นแบบใดล้วนประกอบด้วยกระบวนการคิด และความรู้ประกอบกัน กระบวนการคิดคือวิธีการที่ก่อให้เกิดทักษะการคิด และทักษะการคิดเป็นกระบวนการที่สามารถเรียนรู้ได้ โดยผู้เรียนสามารถนำความรู้และประสบการณ์ของตนมาใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาทักษะการคิด การคิดของผู้เรียนจะมีคุณภาพเพียงใดขึ้นอยู่กับ การแสวงหาข้อมูลของผู้คิด ความสนใจ และต้องการมีส่วนร่วมในการคิดของผู้เรียนเอง ผู้เรียนจะไปคิดแทนย่อมไม่ได้

## 2. การคิดเชิงคณิตศาสตร์

### 2.1 ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นลักษณะหนึ่งของการคิดโดยทั่วไป (Rickart. 1996: 285) เป็นการคิดในเชิงการคำนวณ การคิดแก้ปัญหา การให้เหตุผล ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ รวมทั้งสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ นอกจากนี้ยังรู้จักตรวจสอบหรือควบคุมการรู้จักของตนเอง (Metacognition) ได้อีกด้วย (Hyde; & Hyde. 1991: 29; Reys; et al. 2004: 30) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นการคิดที่มีโครงสร้างทางสติปัญญาที่สำคัญ คือ ประสบการณ์สะสม และความพร้อมในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยอาจจำแนกเป็นองค์ประกอบที่เป็นทักษะพื้นฐานของการคิดที่หลากหลาย เช่น ความมีเหตุผลเชิงปริมาณ ความคล่องแคล่วด้านจำนวน ความมีเหตุผลเชิงอุปมาอุปมัยที่ครอบคลุมไปถึงการให้เหตุผลเชิงอุปนัยและนิรนัย ความลุ่มลึกด้านวิธีการเฉพาะ เช่น การสร้างตัวแทนของปัญหา (การใช้ตัวแบบ) การนึกภาพ การมุ่งเน้นโครงสร้าง การสร้างข้อความคาดการณ์ การคิดย้อนกลับ และการคิดยืดหยุ่น (O'Daffer; & Thornquist. 1993: 39-56; Carroll. 1996: 3-23; Dreyfus; & Eisenberg. 1996: 253-282) หรือการประยุกต์วิธีการอย่างเป็นระบบจนสามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับปริมาณหรือจำนวน จนกระทั่งสามารถนึกถึงแบบรูป สร้างสถานการณ์ปัญหาทั่วไป จำแนกความคลาดเคลื่อน และเลือกใช้วิธีการที่หลากหลายได้ (Northwest Regional Educational Laboratory. 2005b: Online)

มานูชีฮรี (Manouchehri. 2005: Online) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อทำความเข้าใจสิ่งต่างๆ รอบตัว กระบวนการทำความเข้าใจนี้ไม่ใช่คณิตศาสตร์แต่เป็นการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และการดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบเป็น

การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เป็นามธรรม เป็นสัญลักษณ์ การนำเสนอตัวแทนความคิด และการดำเนินการทางสัญลักษณ์ ซึ่งเครื่องมือทางการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผล

สืบเนื่องจากที่ NCTM (2000: 52-71) กล่าวถึงกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่ามีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ส่วนคือ

- การแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
- การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์
- การสื่อสารความคิดเชิงคณิตศาสตร์
- การเชื่อมโยงสาระหลักเชิงคณิตศาสตร์
- การนำเสนอตัวแทนความคิดเชิงคณิตศาสตร์

กรรทอง ไกรรี (2548: Online) ได้วิเคราะห์ว่าองค์ประกอบทั้ง 5 ประการดังกล่าวนี้ เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก โดยระบุว่า ในการแก้ปัญหาผู้เรียนต้องใช้ความสามารถในการสำรวจ (Explore) รวมทั้งมีการคิดเกี่ยวกับตัวปัญหา และการใช้เหตุผลในการหาคำตอบของปัญหาทั้งแบบธรรมดา (Routine Problem) หรือปัญหาที่แปลกใหม่ (Non-Routine Problem) นอกจากนี้กรรทอง ยังกล่าวว่าผู้ที่ใช้เหตุผลและใช้ความคิดเชิงคณิตศาสตร์ในกระบวนการแก้ปัญหา มักจะแสดงพฤติกรรมต่อไปนี้เป็นคือ ใช้การสังเกตอย่างรอบคอบเพื่อค้นหาแบบรูป โครงสร้าง หรือสิ่งที่ไม่เป็นไปตามธรรมดาจากสภาพการณ์หรือปัญหาในชีวิตจริง หรือในสถานการณ์ปัญหาที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ตั้งคำถามต่อตนเองว่าแบบรูปเหล่านี้เกิดขึ้นโดยบังเอิญหรือเกิดขึ้นอย่างมีเหตุผล สร้างข้อคาดการณ์ และพิสูจน์ข้อคาดการณ์ของตนเอง กิจกรรมการแก้ปัญหาจะทำให้เด็กเกิดทักษะทางภาษาและสังคม เกิดทักษะการทำงานร่วมกัน ตลอดจนมีทักษะการสื่อสารความคิดเชิงคณิตศาสตร์เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากการสื่อสารเป็นวิธีการที่บุคคลแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน มีการทำความเข้าใจแนวคิด (Ideas) ซึ่งแนวคิดต่างๆ เป็นสิ่งที่สะท้อนความรู้และความเข้าใจของแต่ละบุคคล การอภิปรายโต้แย้งถกเถียงจะเป็นประเด็นสำคัญที่นำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นอกจากนี้การนำเสนอตัวแทนความคิดเชิงคณิตศาสตร์ยังมีความเกี่ยวข้องับกระบวนการและผลผลิตของการคิดซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้จากภายนอกและเกิดขึ้นภายในสมองของผู้เรียนที่กำลังทำคณิตศาสตร์

สวอนและริดจ์เวย์ (Swan; & Ridgway. 2005: Online) กล่าวว่าความคิดเชิงคณิตศาสตร์นั้นขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่แตกต่างกัน ได้แก่ ความรู้หลักที่เด่นๆ วิธีการแก้ปัญหา การใช้แหล่งข้อมูลที่ได้ผล มีการรับรู้ทางคณิตศาสตร์ และการลงมือปฏิบัติเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์

นักวิชาการหลายท่าน (Schoenfeld. 1992: 336-337; Krulik; & Rudnick. 1993; Sternberg. 1996: 306-307; Dreyfus; & Eisenberg. 1996: 257) มีทรรศนะว่าวิถีทางที่ดีที่สุดที่จะทำให้เด็กบรรลุผลในด้านการคิดซึ่งครอบคลุมทักษะต่างๆ ได้แก่ การแก้ปัญหา นอกจากนั้นเด็กยังต้องมีการคิดที่คล่องแคล่ว มีการควบคุมการรู้คิดและรู้จักที่จะประเมินการคิดของตน มีความอยากรู้

อยากเห็น และมีกระบวนการในการหาคำตอบ นั่นคือรู้จักวิธีการในการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล (RAND Mosaic Project. 2005: Online)

การคิดเชิงคณิตศาสตร์จึงเป็นกระบวนการคิดที่ใช้ในการทำคณิตศาสตร์ แต่การประเมินการคิดเชิงคณิตศาสตร์ทำได้ลำบาก ในการประเมินโครงสร้างหรือคำตอบทางคณิตศาสตร์ไม่ใช่ประเมินเพียงการตอบคำถามได้เท่านั้นแต่ต้องดูว่าเด็กสามารถคิดหรือทำคณิตศาสตร์ได้อย่างไร สละสลวยหรือไม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ถ้ามีผู้เข้าร่วมแข่งขันในรายการเทนนิสรายการหนึ่งซึ่งจัดการแข่งขันแบบแพ้คัดออกทั้งหมด 1,024 คน จะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่จึงจะได้ผู้ชนะเลิศในรายการแข่งขันนี้ สมมุติให้มีการให้เหตุผลสองอย่างดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงวิธีการหาคำตอบสองวิธี (วิธี A และวิธี B) จากปัญหาเดียวกัน

| วิธี A                                                | วิธี B                                                |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| ในรอบที่หนึ่ง จัดการแข่งขัน 512 คู่                   | มีผู้เล่นทั้งหมดในรายการแข่งขันนี้ 1,024 คน           |
| ในรอบที่สอง จัดการแข่งขัน 256 คู่                     | มีเพียงคนเดียวเท่านั้นที่ชนะเลิศ                      |
| ในรอบที่สาม จัดการแข่งขัน 128 คู่ ...                 | จึงมีผู้แพ้ทั้งหมด 1,023 คน                           |
| ดังนั้น จำนวนคู่ทั้งหมดที่จัดการแข่งขันเพื่อให้ได้ผู้ | ผู้แพ้แต่ละคนมาจากการจับคู่แข่งขัน 1 คู่              |
| ชนะเลิศ คือ $512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 +$    | ดังนั้น จำนวนคู่ทั้งหมดที่จัดการแข่งขันเพื่อให้ได้ผู้ |
| $4 + 2 + 1 = 1,023$ คู่                               | ชนะเลิศ คือ 1,023 คู่                                 |

ที่มา: Dreyfus, Tommy; & Eisenberg, Theodore. (1996). On Different Facts of Mathematical Thinking. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia, editors. pp. 254.

จากตาราง 1 จะเห็นว่าทั้งสองวิธีจะได้คำตอบเหมือนกันแต่มีวิธีการคิดที่แตกต่างกัน การให้เหตุผลในวิธี B จะสละสลวยกว่าวิธี A วิธี A จะเป็นวิธีธรรมดา แต่วิธีการคิดที่ง่าย ๆ อย่างวิธี B จะรู้สึกสัมผัสได้ถึงความยอดเยี่ยมของการคิด ซึ่งเป็นความสุนทรีย์นั่นเอง

ดังนั้นการวัดความสามารถทางการคิดและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของเด็กอาจใช้การวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการตรวจสอบ โดยมีเทคนิคการวัดที่สามารถเลือกใช้ได้อย่างหลากหลายไม่ว่าจะเป็นการวัดโดยใช้แบบสอบ (Test) ที่เป็นทั้งแบบเขียนตอบ และแบบปฏิบัติการ การสังเกตพฤติกรรมโดยตรง (Direct Observations) การสัมภาษณ์เป็นรายบุคคล (Individual Interview) การบันทึกข้อมูลส่วนบุคคล (Comprehensive Personal Record) และจากการตรวจผลงานจากแฟ้มสะสมงาน (Portfolio) การประเมินความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กอาจใช้เทคนิคต่างๆ เช่น การใช้คำถามปลายเปิด (Open-ended Questions) การให้ทำงานตามที่ผูกเรื่องขึ้นมา (Constructed-response Tasks) การเลือกคำตอบ (Selected-response Items)

การทำงานภาคปฏิบัติ (Performance Tasks) การสนทนา (Conversations) บันทึกประจำวัน (Journals) และแฟ้มสะสมงาน (NCTM. 2000: 23; Marzano. 2001: 115-116; Romagnano. 2001: 31; ศิริชัย กาญจนวาสี. 2547: 46-69)

สรุปได้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการคิดของบุคคลทางด้านคณิตศาสตร์ โดยใช้ความรู้ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจ ค้นหาคำตอบของปัญหา ความสัมพันธ์หรือสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆ รู้จักตรวจสอบการรู้คิดของตนเอง สามารถสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นเข้าใจ นอกจากนี้ยังต้องดูว่าสามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างสละสลวยหรือไม่

## 2.2 วิถีธรรมชาติแห่งการคิด แบบการคิดและลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

### 2.2.1 วิถีธรรมชาติแห่งการคิด

ธรรมชาติของมนุษย์ประกอบไปด้วย ลักษณะเฉพาะและพฤติกรรมที่เป็นสากลที่ได้มาโดยอัตโนมัติและเกิดขึ้นโดยตัวของมันเอง โดยมนุษย์ทุกคนจะมีพัฒนาการตามธรรมชาติ ไม่ขึ้นอยู่กับภูมิประเทศ การแข่งขัน วัฒนธรรม อารยธรรม หรือการสั่งสอนโดยตรง (Leron. 2005: Online)

จากการศึกษาของบอร์โรมีโอ (Borromeo. 2005: Online) พบว่า คนเรามีวิธีที่จะอธิบายถึงข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์หลายวิธี และยังมีอีกหลายวิธีที่จะทำความเข้าใจคณิตศาสตร์และวิธีการคิด บางคนสามารถเข้าใจข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ได้อย่างง่ายโดยการเขียนภาพหรือการเขียนกราฟแบบต่างๆ ขณะที่บางคนจะต้องหาโครงสร้าง แบบรูป หรือสูตร และการประยุกต์ข้อเท็จจริงนั้น จากที่บอร์โรมีโอได้ศึกษางานวิจัยตั้งแต่ปี ค.ศ.1892 ของเอฟ.ไคลน์ (F. Klein) ซึ่งจำแนกแบบการคิดของคนเราเป็น 3 ลักษณะที่แตกต่างกัน คือ นักวิเคราะห์ (Analyst) นักเรขาคณิต (Geometer) และนักปรัชญา (Philosopher) นั่นคือคนเราอาจจะชอบใช้แบบการคิดโดยการนึกภาพในใจ (Visual) หรือโดยการวิเคราะห์ (Analytic) หรือโดยใช้การคิดตามมโนทัศน์ (Conceptual Way of Thinking) หรือบางครั้งคนเราอาจจะใช้แบบการคิดทั้งสองวิธี หรือทั้งสามวิธีเลยก็ได้

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ทางด้านการคิดและการคิดเชิงคณิตศาสตร์ พบว่า เด็กเล็กหรือแม้กระทั่งผู้ใหญ่จะมีความเข้าใจบางอย่างในการนับและเลขคณิต ก่อนที่จะได้เรียนคณิตศาสตร์เด็กส่วนใหญ่จะสามารถนับและเปรียบเทียบกลุ่มของสิ่งของจำนวนน้อยๆ ได้ นอกจากนี้เด็กส่วนใหญ่ยังแสดงความเข้าใจบางอย่างเกี่ยวกับการดำเนินการเบื้องต้นทางเลขคณิต เช่น การบวกและการลบ ซึ่งกระบวนการที่เด็กใช้เป็นประจำจะต่างจากที่ได้รับการสอนในโรงเรียน (Resnick. 1986: 159-194; Guberman. 2005: Online) นอกจากนี้เกอเบอร์แมน ราห์ม และเมนค์ (Gueberman; Rahm; & Menk. 2005: Online) ยังกล่าวว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันที่มีมาก่อนของเด็กจะค่อยๆ ปรากฏออกมาในวิถีทางที่แตกต่างกัน และเด็กที่มีอายุต่างกันจะมี

ทางเลือกที่แตกต่างกันตามโครงสร้างของแต่ละกิจกรรม นั่นคือความเข้าใจในคณิตศาสตร์ที่มีมาก่อนของเด็กจะช่วยในการแก้ปัญหาที่เด็กเผชิญ

เบน-ซีฟ (Ben-Zeev. 1996: 55-56) กล่าวว่า เด็กเป็นนักคิดค้น เมื่อพวกเขาเผชิญกับปัญหาที่ไม่รู้จะแก้อย่างไร พวกเขาจะคิดขั้นตอนวิธีของพวกเขาขึ้นมาเองเพื่อให้หลุดพ้นจากสถานะที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ แต่บ่อยครั้งที่ขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาทำให้พวกเขาได้รับคำตอบที่คลาดเคลื่อน เช่น ในการเรียนเรื่องการลบ เด็กมักจะนำจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าไปลบออกจากจำนวนที่มีค่ามากกว่า เช่น

63

-29

46

ลักษณะของความผิดพลาดในทำนองนี้จะเกิดขึ้นอย่างเป็นระบบและอยู่บนพื้นฐานของกฎต่างๆ มากกว่าเกิดขึ้นโดยบังเอิญ นั่นคือเด็กจะสร้างกฎต่างๆ ของตนเองจากกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ ถ้าครูสอนโดยใช้วิธีท่องจำจะนำไปสู่ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ได้

กินส์เบิร์ก (Ginsburg. 1996: 182-183, 192) ยังกล่าวว่า เมื่อเด็กตกอยู่ในสถานการณ์ที่ลำบาก พวกเขามักจะใช้วิธีการเดาที่อยู่บนพื้นฐานหลักเกณฑ์ที่มีเหตุผลและจะใช้สิ่งที่ตนเองรู้เพื่อทำความเข้าใจในโลกคณิตศาสตร์ แต่วิธีการที่เด็กใช้จะไม่คงที่หรือไม่มีความแน่นอน

ราชบัณฑิตยสถาน (2542. 554, 1075) กล่าวว่า วิธี หมายถึงสาย แนว ถนน ทาง มักใช้ประกอบกับคำอื่น เช่น วิธีทาง วิธีชีวิต ส่วนคำว่า ธรรมชาติ หมายถึง (น) สิ่งที่เกิดขึ้นและเป็นอยู่ตามธรรมชาติของสิ่งนั้นๆ (ว) ที่เป็นไปเองโดยมิได้ปรุงแต่ง ดังนั้นวิธีธรรมชาติ จึงเป็นแนวทางที่เป็นไปเองโดยมิได้ปรุงแต่ง หรือเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นและเป็นอยู่ตามธรรมชาติของสิ่งนั้นๆ

วิธีธรรมชาติแห่งการคิด จึงเป็นการคิดที่เกิดขึ้นในตัวบุคคลผู้หนึ่งเอง เป็นการหยั่งรู้ด้วยตนเอง เป็นการคิดโดยธรรมชาติของเด็กที่ไม่มีการลอกเลียนแบบ หรือท่องจำมาจากบทเรียน เป็นความพยายามของเด็กเพื่อให้หลุดพ้นจากสถานะที่ไม่รู้จะแก้ปัญหอย่างไร โดยอาจใช้การนึกภาพในใจ การวิเคราะห์ หรือการคิดตามมโนทัศน์

ในการศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในตัวของเด็กเองจากการตอบชุดคำถามโดยไม่มี การลอกเลียนแบบ เด็กเกิดการหยั่งรู้ด้วยตนเอง เป็นการคิดโดยธรรมชาติของเด็กที่ไม่ได้ท่องจำมาจากบทเรียน โดยการใช้ความรู้หรือความรู้เชิงสหสัมพันธ์ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจ ค้นหาคำตอบของปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ค้นหาความสัมพันธ์หรือสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆ ในเรื่อง การคูณและการหารจำนวนนับ

### 2.2.2 แบบการคิดและลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

บรูเนอร์ได้ให้แนวคิดที่ว่า มนุษย์สามารถเรียนหรือคิดเกี่ยวกับสิ่งต่างๆ ได้ และแบ่งพัฒนาการทางสติปัญญาและการคิดของมนุษย์ออกเป็น 3 ระยะ ดังนี้ (Bruner; et al. 1966: 6-48)

1. ระยะที่มีประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ (Enactive Stage) เด็กจะแสดงออกทางความคิดด้วยการกระทำ เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาโดยการกระทำ ซึ่งเป็นการสัมผัสกับสิ่งที่ป็นรูปธรรม (Concrete Objects or Manipulatives) และวิธีการเช่นนี้จะดำเนินต่อไปตลอดชีวิตโดยมีหยุดอยู่เพียงช่วงอายุใดอายุหนึ่ง เช่น ในชีวิตประจำวันของคนเรา แม้แต่ผู้ใหญ่เอง บางครั้งยังใช้วิธีการแก้ปัญหาหรือถ่ายทอดประสบการณ์ด้วยการกระทำ เช่น การสอนให้คนตีกอล์ฟ หรือตีเทนนิสนั้น วิธีการที่เหมาะสมวิธีหนึ่งคือ การแสดงท่าทางให้ดูเป็นตัวอย่าง ซึ่งจะได้ผลดีกว่าการอธิบายด้วยคำพูดเพียงอย่างเดียว

2. ระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็น (Iconic Stage) พัฒนาการทางความคิดในระยะนี้ขึ้นอยู่กับ การมองเห็น/การนึกภาพในใจ และการใช้ประสาทสัมผัส เช่นการใช้รูปภาพ ไดอะแกรม फिल्मที่เป็นสื่อทางสายตา (Visual Medium) ซึ่งเด็กจะถ่ายทอดประสบการณ์ต่างๆ ด้วยการมีภาพแทนในใจ และยิ่งโตขึ้นเด็กก็จะสร้างภาพในใจได้มากขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ความรู้ความเข้าใจของคนเราจะเพิ่มขึ้นตามอายุ และส่งผลช่วยให้เด็กที่โตรู้จักการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ได้ดียิ่งขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากพัฒนาการทางความรู้ ความเข้าใจ ได้เพิ่มขึ้นตามอายุ

3. ระยะของการสร้างความสัมพันธ์และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage) ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่เห็นในระดับที่สอง หรือสิ่งที่สัมผัสในระดับที่หนึ่งได้ เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์หรือเหตุการณ์ต่างๆ โดยใช้สัญลักษณ์หรือภาษา ระยะนี้ถือเป็นระยะที่สูงที่สุดของพัฒนาการทางความรู้และความเข้าใจ เนื่องจากภาษาเป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นถึงความคิด ซึ่งเด็กจะสามารถคิดหาเหตุผลและเข้าใจสิ่งที่ป็นนามธรรมตลอดจนสามารถคิดแก้ปัญหาได้ เพราะบรูเนอร์เชื่อว่าความรู้และภาษามีพัฒนาการขึ้นมาพร้อมๆ กัน

จากแนวคิดของบรูเนอร์ ผู้เรียนสามารถใช้วิธีแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ได้ในหลายๆ รูปแบบ เช่น จากความรู้ที่เกิดจากการใช้สื่อรูปธรรม (Manipulative Aids) ผู้เรียนสามารถแสดงความรู้ในรูปของรูปภาพ (Pictures) สัญลักษณ์ที่เป็นลายลักษณ์อักษร (Written Symbols) สัญลักษณ์เกี่ยวกับคำพูด (Spoken Symbols) และสถานการณ์จริง (Real World Situation)

บรูเนอร์ (2005: Online; citing Bruner. 1973. *Going Beyond the Information Given.*) ได้ยกตัวอย่างการสร้างความรู้ของเด็กโดยใช้การมองภาพ โดยให้เด็กนำเมล็ดถั่วไปจัดวางเป็นแถวๆ ละเท่าๆ กัน ถ้าจำนวนเมล็ดถั่วที่นำมาเรียงเป็นจำนวนเฉพาะ เด็กจะไม่สามารถจัดวางถั่วในรูปหลายแถวๆ ละเท่าๆ กันได้ เด็กสังเกตว่าจำนวนเมล็ดถั่วที่ทำให้เกิดเช่นนี้เป็นจำนวนเฉพาะ เด็กที่สามารถสังเกตได้ว่าการที่สามารถนำเมล็ดถั่วมาจัดเรียงได้ในลักษณะดังกล่าว จำนวนเมล็ดถั่วนั้นจะเป็นจำนวนประกอบ นั่นคือเด็กสามารถสร้างความรู้เกี่ยวกับการคูณและจำนวนเฉพาะโดยใช้การมองภาพ

เมสัน เบอร์ตัน และสเตซี (Mason; Burton; & Stacey. 1985: 26-48; 131; 146-159) มีความเชื่อว่ากระบวนการสำคัญที่อยู่เบื้องหลังการคิดเชิงคณิตศาสตร์คือการพิจารณากรณีเฉพาะ (Specializing) การสร้างกรณีทั่วไป (Generalizing) การสร้างข้อความคาดการณ์ (Conjecturing) และการสร้างความเชื่อมั่น (Convincing) กระบวนการดังกล่าวมีลักษณะที่ดำเนินไปเป็นพลวัต (Dynamic) ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 ระยะ ได้แก่ 1) ระยะเข้าสู่การคิด (Entry Phase) เป็นระยะการหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามต่างๆ เช่น รู้อะไรบ้าง ต้องการอะไร นำความรู้ใดมาใช้ได้บ้าง 2) ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด (Attack Phase) เป็นระยะที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการสร้างข้อความคาดการณ์ การค้นหาเหตุผล การตัดสินใจความถูกต้อง และการสร้างความเชื่อมั่น และ 3) ระยะทบทวนการคิด (Review Phase) เป็นระยะที่ต้องตรวจสอบการแก้ปัญหา สะท้อนและขยายความรู้และประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา แต่ละระยะมีเกณฑ์ที่ใช้ในการประเมิน (Rubric) เช่น สิ่งที่อยู่แล้ว สิ่งที่ต้องการรู้ และความรู้ที่นำมาใช้ (แผนภาพ สัญลักษณ์ ตัวแทน หรืออื่นๆ) เพื่อเป็นแนวทางในการบันทึกการคิดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะช่วยเสริมประสิทธิภาพในการคิด

เมสัน เบอร์ตัน และสเตซี ได้ให้ความหมายของการพิจารณากรณีเฉพาะ การสรุปกรณีทั่วไป การสร้างข้อความคาดการณ์และการสร้างความเชื่อมั่นตามธรรมชาติของพวกเขาดังนี้

**การพิจารณากรณีเฉพาะ** เมื่อเผชิญคำถามหรือสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ ถ้าบุคคลสามารถหาหรือหยิบยกตัวอย่างของสิ่งที่กล่าวถึงในคำถามได้จะทำให้เกิดความเข้าใจ และอาจมองเห็นลู่ทางในการหาคำตอบได้มากขึ้น การพิจารณากรณีเฉพาะจึงมีบทบาทสำคัญยิ่งในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การเลือกกรณีเฉพาะมาพิจารณาอาจเลือกโดยการสุ่ม เลือกอย่างเป็นระบบ หรือเลือกในลักษณะผู้เชี่ยวชาญ

ตัวอย่างการพิจารณากรณีเฉพาะ เช่น “ถ้าร้านขายส่งแห่งหนึ่งให้ส่วนลด 20% แก่ผู้ซื้อ และต้องชำระภาษีการค้า 15% ของราคาสินค้าด้วย ลูกค้าผู้หนึ่งกำลังตัดสินใจหลังจากซื้อสินค้าว่าควรเลือกวิธีใดในการคำนวณราคาสินค้า ระหว่างการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคิดคำนวณการชำระภาษีก่อนเพื่อจะได้ประหยัดเงินมากที่สุด”

แนวทางการคำนวณ: ทดลองกำหนดราคาสินค้าขึ้นมาเพื่อพิจารณาการคำนวณ เช่น ให้สินค้าที่ต้องการซื้อชนิดหนึ่งมีราคา 100 บาท

วิธีที่ 1 คิดส่วนลด 20% ก่อน แล้วชำระภาษี 15%

ราคาสินค้าไม่รวมภาษีคือ 80 บาท (80% ของ 100 บาท)

เมื่อรวมภาษีต้องจ่ายเงิน  $1.15 \times 80 = 92$  บาท [ $1.15 \times (0.80 \times 100)$ ]

วิธีที่ 2 คิดภาษี 15% ก่อน แล้วจึงคิดส่วนลด 20%

ราคาสินค้าก่อนคิดส่วนลดคือ 115 บาท (115% ของ 100 บาท)

เมื่อหักส่วนลดต้องจ่ายเงิน  $0.80 \times 115 = 92$  บาท [ $0.80 \times (1.15 \times 100)$ ]

จะเห็นว่าการคำนวณทั้งสองวิธีจะจ่ายเงินเท่ากัน [ $1.15 \times (0.80 \times 100) = 0.80 \times (1.15 \times 100)$ ]

ดังนั้นการเลือกกรณีเฉพาะโดยใช้ราคาสินค้า 100 บาท ทำให้สามารถค้นพบความจริงบางอย่างได้

**การสร้างกรณีทั่วไป** เป็นการขยายจากการยกตัวอย่างเพียงไม่กี่กรณีไปสู่ความคาดหมายที่ครอบคลุมกรณีต่างๆ ที่กว้างขวาง หรือมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น เช่น การซื้อสินค้าในราคาขายส่งที่ได้กล่าวมาข้างต้น หากพิจารณาราคาสินค้าอื่นๆ อีก หนึ่งหรือสองชนิด จะเริ่มเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้นคือ “ลำดับของการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคำนวณภาษีก่อนไม่ส่งผลที่แตกต่างกันต่อราคาสินค้าที่ผู้ซื้อต้องจ่ายจริง” แบบรูปนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของการสรุปกรณีทั่วไปของสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมา

กรณีเฉพาะที่นำมาพิจารณาจะช่วยให้สามารถเชื่อมโยงไปสู่การสรุปกรณีทั่วไปสำหรับสินค้าราคาใดๆ (กำหนดให้เป็น P) ได้คือ

$$1.15 \times (0.80 \times P) = 0.80 \times (1.15 \times P)$$

**การสร้างข้อความคาดการณ์** หมายถึง การเสนอสิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แต่ยังไม่มีการพิสูจน์หรือแสดงเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับ

ข้อความคาดการณ์จึงเป็นคำกล่าว ข้อความ หรือประโยคที่พบว่ามีความเป็นไปได้ แต่ยังไม่มีการตัดสินความถูกต้องอย่างน่าเชื่อถือ ข้อคาดการณ์ส่วนใหญ่มักตั้งหรือสร้างขึ้นง่าย ๆ แล้วพยายามตัดสินความถูกต้องเพื่อนำไปสนับสนุนผลลัพธ์หรือวิธีการบางอย่างเท่านั้น การตั้งข้อความคาดการณ์จึงเป็นกระบวนการของความรูสึก (Sensing) หรือการเดาว่าบางสิ่งน่าจะถูก แล้วสำรวจความถูกต้องของสิ่งนั้น

**การสร้างความเชื่อมั่น** ระหว่างการดำเนินการแก้ปัญหา กระบวนการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องเพื่อปะติดปะต่อเป็นข้อความคาดการณ์ ยังมีอีกกระบวนการหนึ่งที่เกิดควบคู่ไปด้วยคือ กระบวนการค้นหาเหตุผลว่าทำไมสิ่งเหล่านั้นจึงถูกต้อง (หรือไม่ถูกต้องสำหรับบางกรณี) ซึ่งจะช่วยสร้างความน่าเชื่อถือให้กับคำตอบหรือข้อค้นพบต่างๆ ทำให้ผู้ค้นพบเกิดความเชื่อมั่น ความเชื่อมั่นจึงมีขอบเขตที่จำกัด ในการสร้างความเชื่อมั่นเกี่ยวกับประเด็นต่างๆ จากคำถามหรือปัญหา สิ่งที่ต้องการจึงไม่ใช่เพียงแค่การยกตัวอย่างแบบผิวเผิน แต่ควรเป็นเหตุผลที่เกี่ยวกับแบบรูปหรือโครงสร้างบางอย่างเพื่อเป็นกรอบในการอธิบายให้เกิดความเชื่อมั่นอย่างแท้จริง

จากการศึกษาลำดับขั้นการเรียนรู้และแบบการรู้คิดในแง่ของศาสตร์ทางสติปัญญาหรือศาสตร์ทางการรู้คิด (Cognitive Science) และแบบการคิดและลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ทำให้ผู้วิจัยได้สังเคราะห์โครงสร้างของวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ขึ้นมา ดังนั้นเมื่อเสนอสถานการณ์ปัญหาให้เด็ก ผู้วิจัยจะศึกษาว่าเด็กสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในรูปแบบใด เป็นไปตามกรอบที่ผู้วิจัยวางไว้หรือไม่ โดยผู้วิจัยทำการเก็บรวบรวมข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูลสลับกันไป เพื่อเป็นการยืนยันวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์และบูรณาการเข้ากับข้อมูลจริง

## 2.3 วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ในการศึกษาถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กเป็นการศึกษาสิ่งที่เป็นนามธรรม และเป็นการศึกษากระบวนการในสมอง จึงจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือต่างๆ เพื่อศึกษาความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ตลอดจนวิธีการต่างๆ ที่เด็กนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

### 2.3.1 เครื่องมือศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์และความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์

ครีกเลอร์ (Kriegler. 2004: Online) ได้กล่าวว่าทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ทักษะการนำเสนอตัวแทนความคิด (Representation Skills) และ ทักษะการให้เหตุผล (Reasoning Skills) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคิดเชิงคณิตศาสตร์รวมถึงการคิดวิเคราะห์ของเด็ก ซึ่งตรงกับที่มานูชีรี (Manouchehri. 2005: Online) กล่าวว่าเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการทำความเข้าใจสิ่งต่างๆ รอบตัว คือ 1) การแก้ปัญหา 2) การนำเสนอตัวแทนความคิด ในรูปแบบที่มองเห็นได้ เช่น แผนภูมิ รูปภาพ หรือกราฟ ในรูปตัวเลข เช่น ตาราง การทำรายการ ในรูปสัญลักษณ์ และในรูปคำพูด 3) การให้เหตุผล ได้แก่ การสร้างกรณีทั่วไป การสรุปที่สมเหตุสมผล วิธีการอุปนัย ซึ่งเป็นการตรวจสอบกรณีเฉพาะ การจำแนกแบบรูปและความสัมพันธ์ การขยายแบบรูปและความสัมพันธ์

เด็กที่มีเครื่องมือเกี่ยวกับการแก้ปัญหจะสามารถเริ่มต้นกับปัญหา ดำเนินการกับปัญหา และเข้าใจว่าตนจะต้องทำอะไร การให้เด็กได้มีโอกาสสำรวจปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการที่หลากหลายหรือการเผชิญกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีคำตอบหลายคำตอบจะทำให้เด็กไม่เพียงแต่จะพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาที่ดีเท่านั้น แต่ยังทำให้เกิดประสบการณ์ที่เป็นประโยชน์ทางคณิตศาสตร์อีกด้วย ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถแสดงออกในหลายรูปแบบรวมทั้ง ในรูปการมองเห็น (เช่น แผนภาพ รูปภาพ หรือ กราฟ) ในรูปตัวเลข (เช่น ตาราง รายการ) ในรูปสัญลักษณ์ และในรูปคำพูด ซึ่งการนำเสนอตัวแทนความคิดแต่ละแบบนี้จะช่วยให้เข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดที่สื่อออกมา สามารถใช้เป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เข้าใจการคิดทางคณิตศาสตร์ของเด็กได้ นอกจากนี้ในการคิดแก้ปัญหา เมื่อถึงขั้นการวางแผน ซึ่งถือว่าเป็นขั้นสำคัญของการแก้ปัญหา นักคิดได้นำกระบวนการพิเศษและวิธีการต่างๆ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา และวิธีการที่ใช่มากที่สุดคือการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การเลือกการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การสร้างตาราง และการวาดภาพ (McNeil. 1974: 246; Sonnabend. 1993: 4-14)

บาร์ดีและคอสลิก (Baroody; & Coslick. 1993: 2-59; 2-64) ได้กล่าวถึงความแตกต่างระหว่างการให้เหตุผลเชิงสหสัญชาตญาณ (Intuitive Reasoning) การให้เหตุผลเชิงอุปนัย และการให้เหตุผลเชิงนิรนัย สำหรับการให้เหตุผลเชิงสหสัญชาตญาณเป็นการหยั่งรู้หรือความรู้สึกล่วงหน้าบ่อยครั้งที่เราไม่จำเป็นต้องมีข้อมูลในการตัดสินใจแต่เราสามารถตัดสินใจได้ในสิ่งที่เข้าใจได้ง่ายหรือใช้ความรู้สึกของเราเองว่าสิ่งนั้นถูก การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการสร้างกฎเกณฑ์ทั่วไปหรือทฤษฎีต่างๆ ขึ้นมาจากการสังเกต รวบรวมตัวอย่าง หรือเหตุผลหลายๆ กรณีเข้าด้วยกัน เป็นการหาความจริงจากการสังเกตข้อเท็จจริง ส่วนการให้เหตุผลแบบนิรนัย

(Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการเพื่อไปสู่ข้อสรุปเฉพาะ โดยอาศัยข้อเท็จจริงหรือสมมุติฐาน หรือหลักการ เป็นการสรุปหรือลงความเห็นจากสิ่งที่เรารู้

บรูเนอร์ (Bruner. 1960: 13-14) ได้กล่าวถึงธรรมชาติของการคิดเชิงสหสัมพันธ์ว่าเป็นเทคนิคของผู้ที่ไม่ผ่านการวิเคราะห์ โดยยังไม่แน่ใจว่าสิ่งที่ได้มานั้นจะเป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผลหรือไม่ บางครั้งการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ก็ผิดได้ เช่น การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ในเรื่องของความน่าจะเป็นในการโยนเหรียญ คนมักจะคิดว่าถ้าโยนเหรียญ 4 ครั้ง แล้วออกหัวทั้ง 4 ครั้ง ถ้าโยนต่อไปโอกาสที่เหรียญจะออกก้อยน่าจะมีมากกว่าออกหัว (Riedesel; Schwartz; & Clements. 1996: 45) ดังนั้นถ้าเด็กมีการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ที่ผิดครูจะต้องพยายามหาทางแก้ไขให้ถูก เพราะมันจะติดตัวเด็กไปตลอด

นอกจากนี้ รัสเซลล์ (Russell. 1999: 1-4) ยังกล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม แต่การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่ทำให้เข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมได้ การให้เหตุผลเกี่ยวข้องกับการสร้างกรณีทั่วไป เช่น แคที นักเรียนในเกรดสาม ได้หาคู่ของตัวประกอบของ 120 กับเพื่อน ตอนแรกพวกเขาเชื่อว่า  $3 \times 42$  น่าจะเป็นคู่ของตัวประกอบของ 120 แต่เมื่อตรวจสอบคำตอบแล้วแคทีคิดว่าคำตอบของเธอผิด เนื่องจากเธอรู้ว่า  $6 \times 20$  เป็นตัวประกอบของ 120 และประสบการณ์ก่อนหน้านี้ในการหาคู่ของตัวประกอบ เธอคิดว่า ถ้าแบ่งครึ่งตัวประกอบตัวหนึ่งในคู่ของมันแล้ว น่าจะบวกซ้ำที่ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งจึงจะทำให้ได้ผลคูณเท่าเดิม สิ่งนี้เป็นผลประโยชน์มาจากการสร้างกรณีทั่วไป แคทีจึงตอบว่าคู่ของตัวประกอบของ 120 น่าจะเป็น  $3 \times 40$  ไม่ใช่  $3 \times 42$  เมื่อเด็กพบคำถามแต่ละคำถาม พวกเขาจะเริ่มพัฒนาความรู้สึกและความเข้าใจอย่างลึกซึ้งทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่โยงไปสู่การสร้างกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ด้วย

ความเข้าใจเป็นสิ่งสำคัญยิ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ ในการศึกษาเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กนั้นอาจเป็นเรื่องที่ค่อนข้างซับซ้อน ดังนั้นในการศึกษาจะต้องพิจารณาถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของเด็ก ถ้าเข้าใจถึงความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของเด็ก จะทำให้สามารถอธิบายได้ว่าทำไมเด็กจึงมีความคิดเชิงคณิตศาสตร์เช่นนั้น เด็กเกิดการเรียนรู้ได้อย่างไร นักการศึกษาจำนวนมากให้ความสนใจศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ดังที่ไพร์และไคเรน (Pirie; & Kieren. 1992: 243-257) ได้เสนอรูปแบบการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ 8 ระดับ ได้แก่

ระดับที่ 1 ความรู้เดิม (Primitive Knowing) ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นที่เป็นความรู้ในระดับต่ำ แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ ความรู้ประเภทนี้เป็นความรู้ที่ผู้สอนทุกคนเชื่อว่าผู้เรียนทุกคนต้องมี ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้แก่ความรู้เชิงสหสัมพันธ์นั่นเอง

ระดับที่ 2 การสร้างภาพ (Image Making) ระดับนี้ผู้เรียนจะใช้ความสามารถที่มีอยู่เกี่ยวกับเงื่อนไขหรือสถานการณ์ใหม่ อาจใช้ตัวแทนเป็นภาพ (Pictorial Representation) หรือด้วยวิธีอื่นๆ เช่นการพับกระดาษ และการใช้คำหรือภาษาที่เกี่ยวข้อง

ระดับที่ 3 การเกิดภาพในใจ (Image Having) เป็นขั้นที่ผู้เรียนเกิดภาพในใจเกี่ยวกับ

กิจกรรมที่ทำในขั้นก่อนๆ ซึ่งผู้เรียนใช้ภาพในใจเหล่านี้ในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

ระดับที่ 4 การสังเกตสมบัติ (Property Noticing) ซึ่งรวมถึงการสังเกตความแตกต่าง การรวมหรือเชื่อมระหว่างภาพต่างๆ ในการคาดคะเนว่าภาพเหล่านี้เกิดได้อย่างไร และจะบันทึกความสัมพันธ์เหล่านั้นได้อย่างไร

ระดับที่ 5 การจัดสมบัติที่สังเกตได้เป็นแบบแผน (Formalizing) ในขั้นนี้ผู้เรียนจะนำสมบัติที่สังเกตได้ในขั้นก่อนมาคิดวิเคราะห์และจัดเป็นแบบแผนเพื่อรวบรวมเป็นกฎหรือหลักการทั่วไป

ระดับที่ 6 การสังเกต (Observing) ซึ่งเป็นขั้นของการสังเกตสิ่งที่ได้จัดแบบแผนไปแล้ว เพื่อนำมาจัดระบบและหาข้อสรุป

ระดับที่ 7 การสร้างโครงสร้าง (Structuring) ในขั้นนี้ผู้เรียนพยายามอธิบายสิ่งที่สังเกตได้อย่างมีโครงสร้างที่เป็นเหตุเป็นผล โดยการค้นหาความสัมพันธ์และสร้างโครงข่ายของความสัมพันธ์เหล่านั้น ระดับนี้เป็นระดับที่ความรู้สามารถถูกพิสูจน์ได้

ระดับที่ 8 การสืบเสาะหาความรู้ (Inventing) ในขั้นนี้ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้ที่สมบูรณ์ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่แท้จริงและความเข้าใจนี้อาจนำมาซึ่งมโนทัศน์ใหม่

นอกจากนี้โกลดินและชเทินโกลด์ (Goldin; & Shteingold. 2001: 4-6) ยังกล่าวไว้วิธีหนึ่งที่ใช้ในการอธิบายความเข้าใจของเด็กเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์คือการพิจารณาจากการนำเสนอตัวแทนความคิด (Internal Representation หรือ Mental Representation) แต่การสังเกตสิ่งที่เป็นตัวแทนภายในความคิดของเด็กไม่สามารถทำได้โดยตรงแต่สามารถอ้างอิงได้จากปฏิสัมพันธ์ของเด็ก การสนทนา หรือ ผลผลิตจากสิ่งที่ปรากฏออกมาให้เห็นภายนอก เช่น การสื่อสารระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน ซึ่งระบบการนำเสนอตัวแทนความคิดมีหลายชนิดโดยผ่านการแสดงออกภายนอกของเด็ก เช่น ภาษา การให้เหตุผล การโต้ตอบ

ในการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิด นักจิตวิทยาจะใช้เทคนิคหลายอย่าง เช่น การเก็บข้อมูลและการวิเคราะห์บันทึกจากการคิดต่างๆ วิธีการบันทึกคำพูด ซึ่งมีสมรรถภาพสูงและเหมาะสมที่จะใช้เพื่อให้ได้ข้อมูลเกี่ยวกับกระบวนการคิดที่ค่อยๆ ปรากฏออกมา เพราะว่าปัญหาที่เกิดขึ้นจากภายในสามารถตรวจสอบโดยอาศัยการแสดงออกมาเป็นคำพูด (Cai. 1995: 5-6)

ดังนั้นในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในงานวิจัยนี้อาศัยเครื่องมือทั้งสาม กล่าวคือ การแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผลเพื่อให้ได้ข้อมูลในการวิเคราะห์ ผู้วิจัยจึงกำหนดสถานการณ์ปัญหาให้เด็กจากชุดคำถามและทำการวิเคราะห์พฤติกรรมของเด็กในการแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผล ทั้งนี้อาศัยจากสิ่งที่ปรากฏออกมาภายนอกจากการมีปฏิสัมพันธ์กับเด็กโดยพิจารณาถึงความเข้าใจทางด้านคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในตนเองของเด็กจากการตอบชุดคำถามและการสัมภาษณ์เชิงลึก

### 2.3.2 วิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

คำตอบของปัญหาเชิงคณิตศาสตร์สามารถหาได้ด้วยวิธีการแก้ปัญหาวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายวิธีรวมกัน เพื่อทำความเข้าใจการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก จึงต้องเรียนรู้และเข้าใจวิธีการต่างๆ อย่างกว้างขวางและลึกซึ้ง วิธีการที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ดังเช่น (Polya. 1973; Kennedy; & Tipps. 1997: 11-25; Troutman; & Lichtenberg. 1995: 2-22; Carpenter; et al. 1999: 39; Musser; Burger; & Peterson. 2000: 1-34; Manouchehri. 2005: Online; Northwest Regional Educational Laboratory. 2005a: Online; และ อัมพร ม้าคอง. 2546: 89-90)

1. การเขียนภาพ แผนภาพ แผนภูมิ หรือตัวแบบ
2. การสร้างตารางแสดงความสัมพันธ์
3. การใช้ตัวแปร
4. การค้นหาแบบรูปความสัมพันธ์
5. การสร้างรายการแสดงลำดับความสัมพันธ์
6. การแบ่งกรณี
7. การนึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน หรือการแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า
8. การสร้างรายการและเลือกการดำเนินการทางคณิตศาสตร์
9. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์
10. การเดา ตรวจสอบคำตอบและทบทวน
11. การทำงานย้อนกลับ
12. การสร้างปัญหาใหม่

ฯลฯ

การวิเคราะห์วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ จะดูวิธีการในการดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กนำมาใช้เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหา ทำการวิเคราะห์การคิดโดยคำนึงถึงความสามารถของผู้เรียนในการเลือกใช้วิธีการหรือเทคนิคในการแก้ปัญหา และนำเสนอในรูปแบบการบรรยายถึงการดำเนินการแก้ปัญหาของเด็ก การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างละเอียด

### 2.3.3 การใช้คำถาม

การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ครูจำเป็นต้องรู้ว่าเด็กรู้อะไร พวกเขามีความเข้าใจในบริบททางคณิตศาสตร์อย่างไร ใช้วิธีการใดในการคิดคำนวณ มีความเข้าใจอย่างถ่องแท้หรือไม่ สามารถสื่อสารความคิดของตนเองได้เพียงใด สิ่งต่างๆ เหล่านี้ไม่สามารถดูได้จากการทำงานของเด็กหรือจากการสังเกตเท่านั้น เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความเป็นนามธรรมสูง การที่จะให้เด็กคิดเองโดยลำพังจึงเป็นไปได้ยาก ดังนั้นการที่ครูรู้จักใช้คำถามให้เด็กแสดงการคิดหรือตรวจสอบการคิดของตนเอง จะช่วยให้เด็กมีความเข้าใจและช่วยให้สามารถศึกษาถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กได้เป็นอย่างดี (NCTM. 2000: 53-55; NRICH. 2003: Online)

ในการใช้คำถามต้องพยายามใช้คำซึ่งจะช่วยให้คำถามนั้นสามารถตอบได้กว้างขึ้นและ  
ไม่ควรแนะคำตอบ คำถามโดยทั่วไป จะแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ คำถามแคบ ซึ่งมีคำตอบที่ถูกต้อง  
เพียงคำตอบเดียวเท่านั้น กับ คำถามกว้างหรือคำถามปลายเปิด ซึ่งเป็นคำถามที่มีคำตอบได้หลาย  
อย่างหรือมีวิธีในการแก้ปัญหาได้หลายวิธี เน้นวิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบมากกว่าที่ต้องการเพียง  
คำตอบเท่านั้น ไม่มีการเตรียมคำตอบไว้ล่วงหน้าเพื่อให้ผู้ตอบเลือก คำถามประเภทหลังนี้ผู้ตอบ  
จะต้องใช้ความคิดระดับสูงกว่าคำตอบประเภทแรก ควรควรเว้นจังหวะของการถามเพื่อให้เด็กมี  
โอกาสคิดหาคำตอบ (Kennedy; & Tipps. 1997: 11; Shimada. 1997: 1; Sanchez; & Ice.  
2004: Online; ลัดดาวัลย์ กัณหาสุวรรณ. 2520: 17, 37-38) มีผู้กล่าวว่าถ้าต้องการให้เด็กคิด  
เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เราต้องใช้เวลาเด็กคิดอย่างน้อย 3 นาที ซึ่งจะมีผลต่อความคิดในระดับสูงของ  
เด็ก (Breyfogle; & Herbal-Eisenmann. 2004: 244)

ในการใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กผ่านการสืบ  
เสาะหาความรู้ จำแนกเป็น 4 ชั้น (NRICH. 2003: Online) คือ

1. คำถามเริ่มต้น คำถามปลายเปิดประเภทนี้จะมุ่งไปที่การคิดทั่วไปของเด็กและ  
กำหนดจุดเริ่มต้นให้พวกเขา ตัวอย่างคำถามเช่น มีกี่วิธีที่นักเรียนสามารถหาคำตอบ เกิดอะไรขึ้น  
เมื่อพวกเรา...
2. คำถามที่ใช้กระตุ้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ คำถามประเภทนี้จะช่วยให้เด็กมุ่งไปสู่  
วิธีการเฉพาะและช่วยให้มองเห็นแบบรูปและความสัมพันธ์ คำถามประเภทนี้จะช่วยได้ดีเมื่อเด็กเกิด  
อาการหยุดคิดหรือติดอยู่กับปัญหา (ครูควรปล่อยให้เด็กกลับไปเข้าสู่ปัญหา) ตัวอย่างคำถามเช่น สิ่งนี้  
เหมือนกับอะไร ต่างกับอะไร นักเรียนสามารถจัดกลุ่มสิ่งเหล่านี้ในทางใด นักเรียนเห็นแบบรูป  
หรือไม่ แบบรูปนี้ช่วยนักเรียนหาคำตอบได้อย่างไร นักเรียนคิดว่าต่อไปจะเป็นอย่างไร ทำไม จะเกิด  
อะไรขึ้นถ้า...
3. คำถามเพื่อการประเมิน คำถามประเภทนี้จะถามเพื่อให้เด็กอธิบายว่า  
พวกเขากำลังทำอะไร หรือได้คำตอบมาได้อย่างไร คำถามประเภทนี้ทำให้ครูเห็นว่าเด็กกำลังคิด  
อย่างไร เด็กเข้าใจอะไร และพวกเขากำลังดำเนินการอยู่ในระดับใด คำถามเหล่านี้จะถามหลังจากที่  
เด็กได้ดำเนินการแก้ปัญหาแล้ว เป็นการบันทึกการค้นพบของเด็กหรือการได้พบคำตอบอย่างน้อย  
หนึ่งคำตอบแล้ว ตัวอย่างคำถามเช่น นักเรียนค้นพบอะไร นักเรียนหาคำตอบได้อย่างไร นักเรียนคิด  
ว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น นักเรียนใช้อะไรในการตัดสินใจที่จะทำโดยวิธีนี้
4. คำถามเพื่อการอภิปรายตอนท้าย คำถามประเภทนี้จะสรุปความยากลำบากของ  
ชั้นเรียนและการร่วมกันกระตุ้นและเปรียบเทียบวิธีการและคำตอบร่วมกัน คำถามในขั้นนี้มี  
ความจำเป็นในกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพราะเป็นการส่งเสริมโอกาสในการสะท้อนและ  
ตระหนักถึงความเป็นจริงเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ คำถามประเภทนี้จะ  
กระตุ้นให้เด็กได้ประเมินการทำงานของพวกเขา ตัวอย่างคำถามเช่น ใครมีคำตอบ/แบบรูป/หรือจัด  
กลุ่มเหมือน...บ้าง ใครมีคำตอบแตกต่างจากนี้บ้าง ทุกคนได้คำตอบเหมือนกันไหม ทำไม/ทำไมไม่

พวกเราพบความเป็นไปได้ทั้งหมดไหม พวกเรารู้ได้อย่างไร นักเรียนคิดว่ามีวิธีอื่นอีกไหมที่สามารถใช้ได้ นักเรียนคิดว่าเราพบคำตอบที่ดีที่สุดหรือยัง

ในการสร้างชุดคำถามในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ใช้คำถามปลายเปิดเพื่อให้เด็กได้แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนออกมาโดยการเขียนตอบ และผู้วิจัยจะสัมภาษณ์โดยใช้คำถามสั้นๆ เพื่อเจาะลึกถึงการคิด ความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ (Carroll. 1999: 247-255; Jacobs; et al. 2006: 276-277) วิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ในการหาคำตอบ

#### 2.3.4 การสัมภาษณ์

การสัมภาษณ์สามารถใช้ได้อย่างกว้างขวางในการวัดความสามารถทั้งในด้านเนื้อหาและกระบวนการเกี่ยวกับการรู้คิด นักจิตวิทยาหลายท่านได้ใช้การสัมภาษณ์เพื่อตรวจสอบระดับของการพัฒนาการรู้คิด กระบวนการคิด และการแก้ปัญหาของเด็ก นอกจากนี้ยังใช้การสัมภาษณ์เพื่อตรวจสอบความเข้าใจในมโนทัศน์และความเข้าใจในมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Fraenkel; & Wallen. 2000: 444) แต่มีงานวิจัยที่ชี้ว่าเด็กเล็กจะมีความยุ่งยากที่จะพูดถึงความคิดของพวกเขา (Ginsburg; Jacobs; & Lopez. 1998: 20-21) ดังนั้นการจัดบรรยากาศต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นในห้องเรียนหรือในการสัมภาษณ์จำเป็นต้องสร้างความรู้สึกับเด็กว่าการคิดและความรู้สึกของพวกเขาที่มีคุณค่าและได้รับการยอมรับ นอกจากนี้เด็กจำเป็นต้องเรียนรู้ทักษะต่างๆ ก่อนที่พวกเขาจะพูดถึงสิ่งที่พวกเขา กำลังคิดหรือสิ่งที่กำลังทำ เช่น การใช้ศัพท์ทางการคิด การฟังความคิดของกลุ่มของตนเอง การสะท้อน การคิดของตนเอง การเขียนการคิดของตนเอง และการวิเคราะห์และประเมินการคิดของเพื่อนร่วมชั้น

การสัมภาษณ์ที่ใช้ทั่วไปในการวิจัยเชิงคุณภาพ แบบแรกเป็นการสัมภาษณ์แบบมีโครงสร้าง คือทุกคำถามจะมีคำตอบที่น่าจะเป็นเตรียมไว้ล่วงหน้า เป็นมาตรฐานเดียวกันทั้งหมด แต่แบบหลังเป็นการสัมภาษณ์แบบไม่มีโครงสร้างหรือกึ่งโครงสร้าง ที่มีความยืดหยุ่นมากกว่าแบบแรก (ชาย โพธิ์สิตา. 2547: 254-255)

ในการวิจัยเชิงคุณภาพถือว่าการสัมภาษณ์เป็นวิธีการที่สำคัญที่สุด เพื่อค้นหาสิ่งที่อยู่ในใจ เพื่อดูว่าคิดอะไรหรือรู้สึกอย่างไร (Fraenkel; & Wallen. 2000: 509; 512-513)

การออกแบบการสัมภาษณ์ มีขั้นตอนดังนี้ (Goldin. 1998: 43)

- การวางแผน โครงสร้างและเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ต้องมีความสัมพันธ์กัน
- การสร้างบทสัมภาษณ์ ต้องมีการวิพากษ์วิจารณ์ก่อนนำไปทดลองใช้
- การนำบทสัมภาษณ์ไปทดลองใช้และนำกลับมาปรับปรุงกับเด็กที่ไม่ใช่กลุ่มที่จะศึกษาแต่ต้องมีลักษณะใกล้เคียงกัน

- การฝึกซ้อมสัมภาษณ์และปรับแก้กับผู้เชี่ยวชาญ

การถามคำถามในการสัมภาษณ์เชิงคุณภาพที่ดีนั้น คือการถามที่ได้ความรู้ (ข้อมูล) ตรงตามที่ต้องการและไม่ทำให้เสียปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้ตอบกับผู้สัมภาษณ์ ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงใช้การสัมภาษณ์เป็นรายบุคคลแบบกึ่งโครงสร้าง โดยกำหนดแนวคำถามไว้ บรรยายภาพของ

การสัมภาษณ์จะเป็นธรรมชาติอย่างที่สุดและมีความยืดหยุ่น สร้างความรู้สึกเป็นกันเอง ให้เด็กได้แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างเป็นธรรมชาติ ถ้าเด็กไม่สามารถแสดงแนวคิดของตนเองในเบื้องต้นได้ ผู้วิจัยอาจใช้คำถามเพื่อช่วยให้เด็กเข้าใจในหัวใจของปัญหามากขึ้น เสนอสื่อหรืออุปกรณ์ต่างๆ เพื่อช่วยให้เด็กใช้ประกอบการคิดของตน

จากการศึกษาเอกสารต่างๆ เกี่ยวกับการคิดและการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีทั้งรูปแบบทักษะ กระบวนการและลักษณะการคิด ผู้วิจัยได้สรุปและนำเสนอเกี่ยวกับการคิดที่คาดว่าเป็นการคิดที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติของเด็กในช่วงชั้นที่ 1 (ป.1 – ป. 3) ไว้ ดังรายละเอียดในตาราง 2

ตาราง 2 ความหมายของลักษณะ/ทักษะการคิดและตัวบ่งชี้ความสามารถในการคิด

| ลักษณะ/ทักษะการคิด                                                                            | ความหมาย                                                                               | ตัวบ่งชี้ความสามารถในการคิด                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การวิเคราะห์<br>(Analyzing)<br>(Marzano. 2001:38)                                             | การแยกข้อมูลหรือส่วนประกอบของสิ่งใดสิ่งหนึ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ                           | 1. จำแนกความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งต่างๆ<br>2. แจกแจงรายละเอียดของส่วนประกอบต่างๆ ของสิ่งที่จะวิเคราะห์                                                                                                                                                                                           |
| การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>(Intuitive Knowledge)<br>(Baroody; & Coslick. 1993: 2-59; 2-64) | การแสดงความคิด ความรู้สึกจากจินตนาการภายในตนเอง                                        | 1. การระลึกได้ทันที<br>2. การบอกได้ว่าสิ่งที่ได้มานั้นถูกต้องหรือไม่                                                                                                                                                                                                                                  |
| การอุปนัย<br>(Inductive)<br>(Baroody; & Coslick. 1993: 2-59)                                  | การสร้างข้อสรุปหรือหลักการทั่วไปโดยเอากรณีเฉพาะรายต่างๆ ที่เกิดขึ้นซ้ำๆ มาสร้างข้อสรุป | 1. สร้างข้อสรุป หรือคำทำนายจากความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ที่ระบุไว้ในข้อมูลนั้นๆ<br>2. เมื่อได้รับข้อมูลเพิ่มเติมสามารถเปลี่ยนข้อสรุปหรือคำทำนายไปตามข้อมูลที่ได้รับอย่างเหมาะสมจนสามารถสร้างข้อสรุปได้<br>3. สามารถตัดสินใจได้ว่าข้อเท็จจริงใดสนับสนุน คัดค้าน หรือไม่เกี่ยวข้องกับข้อสรุปที่คาดเดาไว้ |

## ตาราง 2 (ต่อ)

| ลักษณะ/ทักษะการคิด                                                                                | ความหมาย                                                                                                                           | ตัวบ่งชี้ความสามารถในการคิด                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การนิรนัย<br>(Deductive)<br>(Baroody; & Coslick.<br>1993: 2-59)                                   | การพิจารณาเหตุผลและลง<br>ความเห็น โดยพิจารณาจาก<br>หลักการทั่วไปที่ทุกคนยอมรับและ<br>ให้ข้อสรุปในกรณีเฉพาะตาม<br>หลักการทั่วไปนั้น | 1. สามารถนำหลักการทั่วไปที่ทุก<br>คนยอมรับมาอธิบายหัวข้อที่กำลัง<br>ศึกษา<br>2. สามารถหาข้อสรุปใน<br>สถานการณ์เฉพาะจากประโยค<br>หลักที่กำหนดให้ |
| การสร้างกรณีทั่วไป<br>(Mason; et al.1985)                                                         | การขยายจากการยกตัวอย่างเพียง<br>ไม่กี่กรณีไปสู่ความคาดหมายที่<br>ครอบคลุมกรณีต่างๆ ที่กว้างขวาง<br>หรือมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น       | 1. นำกรณีเฉพาะมาพิจารณา<br>เชื่อมโยงไปสู่การสร้างกรณีทั่วไป<br>2. เริ่มมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้น                                                 |
| การสร้างข้อความ<br>คาดการณ์<br>(Conjecturing)<br>(Mason; et al.1985;<br>กรมวิชาการ. 2542:<br>255) | การเสนอสิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะ<br>ถูกต้อง แต่ยังไม่มีการสรุปหรือ<br>แสดงเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับ                                      | 1. เสนอคำกล่าว ข้อความ หรือ<br>ประโยคที่มีความเป็นไปได้<br>2. พยายามตัดสินความถูกต้อง<br>เพื่อนำไปสนับสนุนผลลัพธ์หรือ<br>วิธีการ                |

## 3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิด และการคิดเชิงคณิตศาสตร์

สืบเนื่องจากการเรียนรู้เพื่อชี้แนะการรู้คิด (Cognitively Guided Instruction : CGI) ที่  
ศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก คาร์เพนเตอร์ และเฟนนิมา (Carpenter; & Fennema.  
1992: 457, 460) ได้กล่าวถึง CGI ว่าเป็นโปรแกรมที่ออกแบบมาเพื่อช่วยให้ครูเข้าใจถึงความคิด  
ของเด็กและใช้ความรู้นั้นทำการตัดสินใจในการจัดการเรียนรู้ CGI จึงเกี่ยวข้องกับกระบวนการ  
จัดการเรียนรู้ในห้องเรียน ซึ่งวิธีการสอนจะใช้การแก้ปัญหา โดยครูต้องคิดและตัดสินใจเลือกจัดการ  
เรียนรู้โดยต้องเข้าใจถึงความคิดของเด็ก การที่ครูเข้าใจถึงความคิดของเด็กและจัดการเรียนรู้ให้  
สอดคล้องกับความคิดของเด็กนั้น มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ของเด็ก

นอกจากนี้คาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ (Carpenter; et al. 1999: 85-95) ยังได้ศึกษาและจัดแบ่งขั้นตอนในกระบวนการสอนโดยใช้ CGI ในชั้นเรียนที่สำคัญออกเป็น 4 ชั้น คือ ชั้นที่ 1 ครูตั้งปัญหา ชั้นที่ 2 นักเรียนแก้ปัญหา ชั้นที่ 3 นักเรียนรายงานคำตอบและวิธีการของตน และชั้นที่ 4 ครูและนักเรียนอภิปรายถึงคำตอบและวิธีการในการแก้ปัญหา

คาร์เพนเตอร์และโมเซอร์ (Carpenter; & Moser. 1984: 179-202) ได้ตรวจสอบกระบวนการที่เด็กในเกรด 1-3 ใช้ในการแก้ปัญหาพื้นฐานทางการบวกและการลบ และอธิบายถึงการปฏิบัติของเด็กเป็น 5 ระดับ คือ

ระดับ 0 เป็นระดับที่เด็กไม่สามารถแก้ปัญหการบวกและการลบได้

ระดับ 1 เด็กในระดับนี้มีข้อจำกัดในวิธีการที่ใช้ เนื่องจากสามารถใช้เฉพาะวิธีการที่ลงมือปฏิบัติจริง โดยใช้ส่วนของร่างกายหรือนิ้วมือ เด็กใช้วิธีการการนับในการแก้ปัญหาการบวกทุกปัญหา และจะใช้วิธีการการนับเพิ่ม การจำแนก และการจับคู่เพื่อแก้ปัญหการลบ นอกจากนี้เด็กในระดับนี้จะไม่สามารถแก้ปัญหระคนที่มีทั้งการบวกและการลบได้

ระดับ 2 เด็กในระดับนี้มีความสามารถในการส่งผ่านวิธีการที่สร้างตัวแบบโดยตรงไปสู่วิธีการการนับ และยังสามารถใช้วิธีการทั้งสองเพื่อแก้ปัญหา รวมทั้งใช้วิธีการนับสิ่งของและการนับเพิ่ม

ระดับที่ 3 เด็กในระดับนี้แสดงออกถึงลักษณะที่อยู่ในภายในตัวแบบโดยตรง และส่วนใหญ่จะใช้การนับอย่างต่อเนื่องเพื่อแก้ปัญหาที่เป็นลักษณะเฉพาะในระดับนี้ เด็กอาจจะใช้การนับนิ้วมือของพวกเขา เพื่อให้การนับดำเนินไปอย่างต่อเนื่องโดยไม่ใช้เครื่องหมายสำหรับการนับ (Tally) เด็กส่วนมากจะใช้วิธีนับสิ่งของ และการนับเพิ่ม-นับลดในการแก้ปัญหการบวกและการลบ

ระดับ 4 เด็กในระดับนี้ใช้การระลึกหรือการนำความจริงเกี่ยวกับจำนวนมาแก้ปัญหการบวกและการลบ โดยพวกเขาได้ผ่านระดับต่างๆ ที่มีความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นฐานทางการบวกและการลบมาแล้ว

โจนส์ ธอร์นตันและพัทท์ (Jones; Thornton; & Putt. 1994: 117-143) ได้พัฒนาโครงร่างการคิดของเด็กในสถานการณ์เกี่ยวกับจำนวนหลายหลัก โดยได้จำแนกแนวคิดที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับความรู้สึกในจำนวนหลายหลักเป็น 4 ประเภทคือ การนับ (Counting) การแบ่งเป็นส่วนย่อย (Partitioning) การจัดกลุ่ม (Grouping) และความสัมพันธ์ของจำนวน (Number Relationships) สำหรับความคิดที่เกิดขึ้นในแต่ละประเภทนั้นจะประกอบไปด้วยระดับของความคิดที่แตกต่างกัน 4 ระดับ คือ ระดับที่ 1 ระดับก่อนค่าประจำหลัก (Pre-Place Value) ระดับที่ 2 ระดับค่าประจำหลักเบื้องต้นแรก (Initial Place Value) ระดับที่ 3 ระดับขยายค่าประจำหลัก 1 (Extended Place Value # 1) และระดับที่ 4 ระดับขยายค่าประจำหลัก 2 (Extended Place Value # 2) โดยพวกเขาได้ใช้วิธีการสัมภาษณ์เพื่อศึกษาเป็นรายกรณีกับนักเรียนเกรด 1 จำนวน 6 คน เพื่อยืนยันและพัฒนาโครงร่างที่พวกเขาสรุปไว้ ผลการศึกษาพบว่า

นักเรียนในระดับที่ 1 มองจำนวนที่เกิดจากการสะสมทีละหนึ่ง จำนวนทั้งหมดเกิดจากส่วนประกอบย่อยๆ เป็นสิบและเป็นหน่วย นักเรียนจะไม่แบ่งจำนวนออกเป็นกลุ่มของสิบ การจัดกลุ่มจำนวนเป็นห้าหรือสิบจะมีความยากสำหรับนักเรียนระดับนี้ นักเรียนในระดับนี้ยังไม่เข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับสิ่งของที่มีจำนวนสิบในฐานะหนึ่งหน่วย พวกเขาจะระลึกได้เพียงจำนวนที่กำหนดให้มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าเท่าไร

นักเรียนในระดับที่ 2 สามารถนับเพิ่มทีละสิบและทีละหนึ่งได้ และเมื่อใช้ตัวแบบของจำนวนหลายหลักนักเรียนสามารถนึกถึงจำนวนที่อยู่ในรูปของ 10 ในฐานะหนึ่งหน่วยได้ นักเรียนในระดับนี้ยังเข้าใจความหมายของ “สิบ” โดยใช้ลำดับสำหรับจำนวนที่มีสองหลัก

นักเรียนในระดับที่ 3 สามารถสร้างตัวแทนหลักสิบและหลักหน่วยสำหรับจำนวนที่มีสองหลัก และใช้วิธีการการนับทั้งหมดโดยนับสิบครั้งของหนึ่งหน่วย นักเรียนในระดับนี้จัดรูปตัวแทนจำนวนสองจำนวนบนพื้นฐานหลักสิบและหลักหน่วย และสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับตัวแทนจำนวนทั้งสองได้

นักเรียนในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการการแบ่งส่วนในการบวกจำนวนสองหลักและสามหลัก นั่นคือนักเรียนในระดับนี้จะนับและใช้วิธีคิดในใจสำหรับจำนวนหลายหลัก แต่พวกเขาไม่สามารถนำเสนอจำนวนสามหลักในรูปของสิบได้

ในปี ค.ศ.1996 โจนส์และคนอื่นๆ (Jones; et al. 1996: 310-336) ได้ขยายและพัฒนาโครงร่างที่อธิบายถึงการคิดของเด็กเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงจำนวนหลายหลัก โดยระดับการคิดจะเพิ่มเป็น 5 ระดับ คือ ระดับที่ 1 ระดับก่อนค่าประจำหลัก ระดับที่ 2 ระดับค่าประจำหลักเบื้องต้น ระดับที่ 3 ระดับการพัฒนาค่าประจำหลัก ระดับที่ 4 การขยายค่าประจำหลัก และระดับที่ 5 ส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลัก จากการสัมภาษณ์นักเรียนในเกรดหนึ่งและสอง ผลการศึกษาพบว่า

นักเรียนที่ระดับก่อนค่าประจำหลักจะไม่มองจำนวนในรูปของหน่วยประกอบแต่จะมองเป็นหน่วยเดี่ยวแทน เช่น ในการมอง “ห้าสิบหก” (56) นักเรียนจะมองแยกเป็นห้าสิบและหกหน่วย นักเรียนในระดับนี้จะไม่ใช้การนับโดยสังเกตหลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกัน นอกจากนี้นักเรียนในระดับนี้ยังไม่เห็นความจำเป็นที่จะนำเสนอจำนวนโดยใช้การรวมกลุ่มครั้งละสิบ และการแบ่งส่วนจำนวนโดยใช้การรวมกลุ่มครั้งละสิบ พวกเขาจะใช้การนับเพื่อกำหนดความสัมพันธ์ของจำนวน (เช่น มากกว่าหรือน้อยกว่า) อย่างไรก็ตามนักเรียนในระดับนี้สามารถกำหนดขนาดของความสัมพันธ์ได้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนคนหนึ่งรู้ว่าจำนวนที่กำหนดให้มีค่ามากกว่า 5 แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามากกว่าเท่าไร

นักเรียนที่ระดับค่าประจำหลักเบื้องต้นจะศึกษาการแสดงความสำคัญของ “สิบ” เช่น เครื่องชี้หน้าที่สำคัญในลำดับจำนวนสองหลัก นักเรียนในระดับนี้จะแสดงหลักฐานบางอย่างเกี่ยวกับการใช้การนับโดยสังเกตหลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกัน พวกเขาจะจำแนก 10 ออกเป็นหนึ่งหน่วยในการแทนจำนวนสองหลัก เพื่อทำการเปรียบเทียบ นักเรียนในระดับนี้สามารถสร้างจำนวนในรูป “สิบ-หน่วย”

ความสามารถในการใช้ความสัมพันธ์ของส่วนย่อย-ส่วนย่อย-ส่วนรวม (part-part-whole) เป็นคุณลักษณะเฉพาะที่สำคัญที่ทำให้นักเรียนเลื่อนระดับจากระดับค่าประจำหลักเบื้องต้นไปสู่ระดับการพัฒนาค่าประจำหลัก นักเรียนในระดับการพัฒนาค่าประจำหลักยึดมั่นที่จะใช้หลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกันและทำการแบ่งส่วนปัญหา นักเรียนในระดับนี้ยังสามารถดำเนินการและเปรียบเทียบการนำเสนอตัวแทนความคิดของสองสิ่งในเวลาเดียวกันเมื่อต้องเข้าไปเกี่ยวข้องกับกรรวมกลุ่มและความสัมพันธ์ของจำนวน

นักเรียนที่ระดับการขยายค่าประจำหลักจะเริ่มต้นขยายความรู้สึกเชิงจำนวนของพวกเขาไปสู่จำนวนสามหลัก ขณะที่นักเรียนในระดับนี้สามารถมอง 100 เช่นหนึ่งหน่วยเชิงเดี่ยว หรือกลุ่มของ 100 ที่เป็นหน่วยๆ แล้ว นักเรียนในระดับนี้ยังสามารถมอง 100 ในรูปของสิบ 10 ตัว และยังใช้คำตอบที่แตกต่างกันในสมอง นอกจากนั้นยังบูรณาการการนับ การแบ่งเป็นส่วนย่อย การรวมกลุ่ม และวิธีการการจัดลำดับเมื่อแก้ปัญหา

ความสามารถในการจำแนก 100 ออกเป็นสิบ 10 ตัว เป็นคุณลักษณะเฉพาะที่สำคัญที่จะจัดนักเรียนเข้าสู่ระดับส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลัก ซึ่งเป็นคุณลักษณะเฉพาะที่จัดรวมอยู่ในระดับการขยายค่าประจำหลักนั้นเช่นกัน แต่โจนส์และคนอื่นๆ ให้ข้อสังเกตว่าที่ระดับส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลักนี้ นักเรียนจะแสดงความชอบในการนำเสนอตัวแทนความคิดในใจ มากกว่าการใช้การนำเสนอทางกายภาพหรือการทดลองบนกระดาน นักเรียนในระดับนี้มีความเข้าใจในการเชื่อมโยงทั้งหมดของโครงสร้างทั้งสี่ข้างต้นด้วย

เบลลิสิโอ (Bellisio. 1997: Online) ได้ศึกษาถึงกระบวนการในการพัฒนาความเข้าใจในแนวคิดทางพีชคณิตของเด็ก การวิจัยเป็นการศึกษาในระยะยาวเกี่ยวกับความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มาจากโรงเรียนในสามอำเภอที่แตกต่างกัน ชั้นเรียนทั้งหมดจะจัดสิ่งแวดล้อมที่เอื้อต่อการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เด็กจะถูกถามคำถามและให้พูดคุยกับเพื่อนๆ เพื่ออธิบายถึงแนวคิดของตนเองอย่างชัดเจนและสื่อคำตอบออกมาให้เพื่อนฟัง งานวิจัยนี้มุ่งพัฒนาความเข้าใจโมทัศน์ทางพีชคณิตเกี่ยวกับตัวแปรของเด็กในระดับประถมศึกษา ในระหว่างบทเรียนจะมีการบันทึกเทปไว้และมี การสัมภาษณ์ในภายหลัง ผู้วิจัยจะจดบันทึก ดูการทำงานของเด็กจากการเขียนและการทำกิจกรรมต่างๆ อย่างระมัดระวัง และศึกษารายละเอียดจากวิดีโอเทปที่บ้านที่กไว้ การนำเสนอจะมาจากตัวอย่างในกรณีศึกษา ส่วนของรายละเอียดจากวิดีโอเทปที่บ้านที่กไว้ ตัวอย่างในการทำงานของเด็ก การวิเคราะห์เบื้องต้นมาจากหลักฐานในการคิดเชิงพีชคณิตของเด็ก

บอร์โรมีโอ (Borromeo. 2005: Online) ได้ศึกษาถึงแบบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กอายุ 15 และ 16 ปี เพราะเขาเชื่อว่าแบบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่มีผู้ศึกษามาก่อนหน้านั้น น่าจะนำมาศึกษาเพื่อจัดจำแนกใหม่ โดยในงานวิจัยได้แสดงให้เห็นว่าการจัดจำแนกแบบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ใหม่ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันควรเป็นอย่างไร ซึ่งบอร์โรมีโอได้ใช้รูปแบบการวิจัยเชิงคุณภาพและทำการวิเคราะห์ข้อมูลและสร้างเป็นทฤษฎีฐานราก (Grounded Theory) เพื่อทำความเข้าใจในกระบวนการคิดโดยการแก้ปัญหาของเด็ก จากผลการวิจัยพบว่า กระบวนการแก้ปัญหาสามารถจำแนกเป็น 4 มิติคือ

1. การสร้างจินตนาการภายใน (Internal Imagination) เป็นการสร้างจินตนาการภายในของตัวบุคคลในขณะที่พยายามจะแก้ปัญหา
2. การนำเสนอตัวแทนความคิดภายนอก (External Representation) เป็นการนำเสนอภายนอกเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ผ่านตัวบุคคล
3. การวิเคราะห์ภาพรวม (Wholist-Analyst) เป็นวิถีทางของการคิดและกลวิธี
4. การสร้างภาพทางคณิตศาสตร์ (Image of Mathematics) เป็นการสร้างภาพทางคณิตศาสตร์ ตามที่ยืนยันเกี่ยวกับความคงทนที่เป็นความชอบทางคณิตศาสตร์

ยังมีงานวิจัยที่พยายามจัดแบ่งระดับของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในสาขาต่างๆ เช่น ทฤษฎีของปีแอร์และไดนา แวน ฮีรี (Theory of Pierre van Dina van Hiele) ที่ได้จัดระดับของการคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 5 ระดับ ซึ่งการเรียนรู้ในแต่ละระดับไม่ได้มีความต่อเนื่องแต่มีการกระโดดข้ามขั้นได้ แต่ละระดับจะมีภาษาของมันเอง นั่นคือคนสองคนที่มีเหตุผลในระดับที่แตกต่างกันจะไม่สามารถเข้าใจภาษาของอีกระดับหนึ่งได้ โครงสร้างทางภาษาจึงเป็นปัจจัยที่สำคัญในการเคลื่อนผ่านไปสู่อีกระดับหนึ่ง (Clements; & Battista. 1992: 426-428) นอกจากนี้ในปี ค.ศ.1997 และ ค.ศ. 1999 โจนส์และผู้ร่วมงานของเขายังได้พัฒนาโครงสร้างของการรู้คิดที่อธิบายถึงการสังเคราะห์การคิดของเด็กในเรื่องความน่าจะเป็น ต่อมาในปี ค.ศ.2000 โจนส์และคณะยังได้พัฒนาโครงสร้างเพื่ออธิบายและทำนายการคิดเชิงสถิติของเด็กอีกด้วย (Jones; et al. 2002: 126)

กมล ภูประเสริฐ (2513) ได้ศึกษาแบบการคิดของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย เมื่อคำนึงถึงระดับอายุ พบว่า การคิดแบบวิเคราะห์ของนักเรียนกลุ่มอายุต่างๆ ไม่แตกต่างกันแต่ค่าเฉลี่ยแสดงแนวโน้มว่าการคิดแบบวิเคราะห์จะเพิ่มขึ้นตามระดับอายุ สำหรับการคิดแบบแยกประเภทและการคิดแบบโยงความสัมพันธ์ ปรากฏว่า นักเรียนในกลุ่มที่มีอายุสูงกว่า 12 ปี มีการคิดแบบแยกประเภทมากกว่า และมีการคิดแบบโยงความสัมพันธ์น้อยกว่านักเรียนในกลุ่มที่มีอายุต่ำกว่า 12 ปี อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งแสดงว่า การคิดแบบจำแนกประเภทจะเพิ่มขึ้นตามระดับอายุ แต่การคิดแบบโยงความสัมพันธ์จะลดลง สำหรับกลุ่มที่มีอายุสูงกว่า 12 ปี กับกลุ่มที่มีอายุ 12 ปี และกลุ่มที่มีอายุ 12 ปี กับกลุ่มที่มีอายุน้อยกว่า 12 ปี ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จรัส นองมาก (2513) ได้ศึกษาแบบการคิดของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนต้น เพื่อดูพัฒนาการของนักเรียนและพิจารณาความแตกต่างของการคิดแต่ละแบบของนักเรียน โดยการแบ่งนักเรียนตามระดับอายุเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่หนึ่ง อายุ 7-8 ปี กลุ่มที่สอง อายุ 9-10 ปี และกลุ่มที่สาม อายุ 11-12 ปี พบว่าการเลือกคิดแบบวิเคราะห์และแบบโยงความสัมพันธ์ของนักเรียนแตกต่างกันคือ แบบวิเคราะห์นักเรียนกลุ่มที่สองเลือกมากกว่ากลุ่มที่หนึ่งและสาม แบบโยงความสัมพันธ์นักเรียนกลุ่มที่สามเลือกมากกว่ากลุ่มที่หนึ่งและสอง ส่วนแบบจำแนกประเภทนักเรียนทั้งสามกลุ่มเลือกไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังทดสอบความแตกต่างของแบบการคิดระหว่างผู้ที่มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสูงและต่ำในวิชาคณิตศาสตร์ พบว่า การคิดแบบโยงความสัมพันธ์ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เพียงคู่เดียวที่กลุ่มสูงเลือกมากกว่ากลุ่มต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นอกนั้นไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์สูงจะเลือกคิด

แบบโยงความสัมพันธ์มากกว่ากลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำเฉพาะในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์จะมีความสัมพันธ์ในทางบวกกับการคิดแบบโยงความสัมพันธ์แต่มีความสัมพันธ์ทางลบกับการคิดแบบวิเคราะห์เฉพาะในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดและการคิดเชิงคณิตศาสตร์ จะเห็นว่ามีนักวิจัยจำนวนไม่น้อยที่พยายามจัดแบบการคิด หรือกำหนดโครงสร้างของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ ไว้ในหลายเนื้อหา แต่ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยมุ่งศึกษาถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 – 10 ปี เพื่อวิเคราะห์ว่าการคิดโดยวิถีธรรมชาติของเด็กจะเป็นอย่างไร

#### 4. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยจะเป็นเนื้อหาที่เด็กยังไม่ได้เรียนในห้องเรียนโดยตรง ส่วนคำถามที่ใช้ถามเด็กจะอาศัยพื้นความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับที่ต่ำ โดยมุ่งความสนใจไปที่กระบวนการที่เป็นพื้นฐานไปสู่ความสำเร็จในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก เพื่อให้เด็กใช้วิธีการคิดที่เด็กยังไม่ได้เรียนมาหรือยังไม่ได้รับการสอนจากครู เพื่อจะดูวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ซึ่งทำให้ทราบกระบวนการคิดโดยธรรมชาติของเด็กที่ไม่มีการลอกเลียนแบบ หรือท่องจำมาจากบทเรียน ทำให้สามารถวิเคราะห์การคิดที่ง่าย ๆ ชัด ๆ ของเด็กได้ ซึ่งสอดคล้องกับที่ชอร์นเฟลด์ (Schoenfeld. 1985: Online) ได้กล่าวถึงลักษณะสำคัญของปัญหาว่าไม่ควรจะยากเกินไป และเด็กควรสามารถทำได้ จึงจะทำให้เด็กสนใจที่จะคิด ดังนั้นชุดคำถามที่ผู้วิจัยใช้จึงมีลักษณะที่มุ่งให้เด็กสามารถแสดงความสามารถในการคิดได้ เพราะการคิดเชิงคณิตศาสตร์สามารถเกิดขึ้นได้โดยบรรยากาศของคำถาม การกระตุ้นและการสะท้อนกลับ (Mason; Burton; & Stacey. 1985: 147, 159) โดยเนื้อหาที่นำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะเป็นเนื้อหาในด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

##### 4.1 จำนวนและการดำเนินการ

หลักสูตรคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับเด็กเล็กจนถึงมัธยมศึกษาตอนต้นมีหลายหัวข้อ แต่เนื้อหาที่ถือเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์คือเนื้อหาเกี่ยวกับมโนทัศน์ของจำนวนและการดำเนินการ ศักยภาพที่เกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการทางตัวเลขยังเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ในอนาคตหรือแม้กระทั่งการศึกษาในสาขาอื่นที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ มโนทัศน์พื้นฐานส่วนมากของคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาจะเป็นเรื่อง จำนวน โดยเฉพาะจำนวนนับและศูนย์ และจากผลการวิจัยมากกว่า 25 ปี ชี้ว่าเด็กในวัยก่อนเข้าโรงเรียนจะรู้เล็กน้อยเกี่ยวกับจำนวน ซึ่งความรู้ส่วนมากของเด็กในวัยนี้จะเป็นความเข้าใจเกี่ยวกับการนับ เด็กอาจจะเคยตอบคำถามว่ามีฟีก่อน มีน้องกี่คน เป็นต้น ความสามารถเหล่านี้จึงบ่งชี้ว่าจำนวนเป็นความสามารถพื้นฐานในโลกแห่งการรับรู้ของเด็ก (Kilpatrick; Swafford; & Findell. 2001:1-2, 157-160; Reys; et al. 2001: 110; Payne; & Huinker. 1993: 45-46; Behr; et al. 1992: 298; Resnick. 1986; Biggs; & Collis. 1982: 61; สสวท. 2544?: 2) อีกทั้งฟูลสัน (Children's

*Understanding of Number*. 2005: Online; citing Fuson, K.C. 1988. *The Development of Mathematical Skill*) ยังศึกษาพบว่าเด็กจะเริ่มนับตั้งแต่อายุ 2-3 ขวบ แต่การนับนี้จะใช้การท่องจำโดยมีความเข้าใจเพียงเล็กน้อย นอกจากนี้เด็กในวัยก่อนเข้าโรงเรียนจะรับรู้ได้แตกต่างกันระหว่างสิ่งของที่มีจำนวนมากกับสิ่งของที่มีจำนวนน้อย เด็กจะรู้ว่าจะนับอย่างไรและรู้ว่าจะใช้การนับกลุ่มของสิ่งของอย่างไร ซึ่งสิ่งต่างๆ เหล่านี้เด็กจะต้องพบเมื่อเข้าเรียน แต่พวกเขาไม่รู้เลยว่าความรู้เหล่านี้พวกเขาได้เคยพบมาแล้วก่อนเข้าโรงเรียน ทำให้เด็กๆ ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่พวกเขาเรียนรู้กับสิ่งที่เรียนได้ เด็กในวัยก่อนเข้าโรงเรียนจะไม่รู้จักกฎ สัญลักษณ์และภาษาทางคณิตศาสตร์ และไม่รู้ว่าจะใช้สิ่งเหล่านี้ในการคิดคำนวณอย่างไร ทำให้พวกเขาต้องสูญเสียความเชื่อมั่นเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์ไป (Archived Information. 2006: Online)

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่างๆ พบว่า มีงานวิจัยที่กล่าวถึงการคูณและการหารจำนวนหลักเดียวน้อยกว่าการบวกและการลบจำนวนหลักเดียวมาก (Kilpatrick; Swafford; & Findell. 2001: 191) เด็กสหรัฐมีลำดับการพัฒนาในกระบวนการของการคูณเกือบจะคล้ายกับกระบวนการของการบวก เด็กจะใช้การจัดกลุ่มที่เท่ากันและนับจำนวนทั้งหมด เด็กจะเรียนรู้การนับข้าม เช่น การคูณด้วยสี่เด็กจะนับ 4, 8, 12, 16, 20, ... ในการนับเพิ่มและนับลดเด็กใช้นิ้วมือและใช้การพับนิ้วไว้เพื่อบันทึกจำนวนครั้ง เด็กจะคิดวิธีการได้เองในการหาผลคูณโดยใช้ความสัมพันธ์กับผลคูณที่รู้แล้ว เด็กจะค้นพบกระบวนการในการหาผลคูณ เด็กจะพบแบบรูปและใช้วิธีการนับข้าม เช่น การหาผลคูณของ  $4 \times 3$  เด็กใช้การนับ 3, 6, 9, 12

มีงานวิจัยจำนวนน้อยมากที่กล่าวถึงการคูณและการหารจำนวนหลักเดียวและหลายหลัก การที่เด็กๆ ได้ค้นพบวิธีการต่างๆ ในการคูณ พวกเขามีวิธีการอย่างไรในการคิดเช่นนั้น ยังมีสิ่งที่น่าสนใจอีกมากมายเกี่ยวกับการค้นพบและการใช้แบบรูปและวิธีการคิดอื่นๆ ที่ง่ายต่อการเรียน การคูณและการหาร ในปัจจุบันนี้เรามีความรู้เพียงเล็กน้อยเกี่ยวกับว่าเด็กต้องการความคล่องแคล่วอย่างไรในการคูณและการหาร หรือประสบการณ์อะไรที่อาจจะช่วยเด็กได้ดีที่สุดในการแก้ปัญหา การคูณและการหาร (Kilpatrick; Swafford; & Findell. 2001: 191-192; NCTM. 2003: 76-77)

ดิกค์สัน เบราน์และกิบสัน (Dickson; Brown; & Gibson. 1984: 231) กล่าวว่า การทำความเข้าใจความหมายของการคูณและการหารจะมีความยุ่งยากกว่าการบวกและการลบ การบวกและการลบจะมีลักษณะเหมือนกันในขณะที่การคูณและการหารต้องให้นิยามที่ซับซ้อนกว่า นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อเสนอปัญหาในเรื่องอัตราส่วนให้ เด็กมัธยมศึกษามากกว่าร้อยละ 30 จะแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการบวกมากกว่าการคูณ ซึ่งเด็กอาจมองการคูณและการหารว่ามีความยุ่งยากมากกว่าการบวกและการลบ เนื่องจากการคูณและการหารต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการนับจำนวน การบวกและการลบ ดังนั้นการนำเนื้อหาเกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวนนับมาประเมินการคิดและความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กน่าจะช่วยให้เห็นถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กได้เป็นอย่างดี

## 4.2 รูปแบบของปัญหาการคูณและการหาร

คาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ (Carpenter; et al. 1999: 33-34) ได้กล่าวถึงรูปแบบของปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารในลักษณะการจัดกลุ่มและการแบ่งส่วนซึ่งแต่ละกลุ่มมีจำนวนเท่าๆ กัน และไม่เหลือเศษ รูปแบบของปัญหาดังกล่าวแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. ปัญหาการคูณ (Multiplication Problem) เป็นปัญหาที่ไม่ทราบจำนวนของสิ่งของทั้งหมดที่มีอยู่ โจทย์จะกำหนดจำนวนของกลุ่มที่มีและจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่มมาให้
2. ปัญหาการหารในแบบของการวัด (Measurement Division Problem) เป็นปัญหาที่ไม่ทราบจำนวนของกลุ่มของสิ่งของที่มี โจทย์จะกำหนดจำนวนของสิ่งของทั้งหมดและจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่มมาให้
3. ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน (เกี่ยวกับส่วนของทั้งหมด) (Partitive Division Problem) เป็นปัญหาที่ไม่ทราบจำนวนของสิ่งของในแต่ละกลุ่ม โจทย์จะกำหนดจำนวนของสิ่งของทั้งหมดและจำนวนของกลุ่มมาให้

ตัวอย่างของปัญหาทั้งสามประเภทและวิธีการที่เด็กใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหา นำเสนอดังตาราง 3

ตาราง 3 ปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบ

| ปัญหา                                                                                                                                                                    | วิธีการแก้ปัญหา                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ปัญหาการคูณ</b><br>บาร์ทมิกล่องดินสออยู่ 4 กล่อง ในแต่ละกล่องมีดินสอ 6 แท่ง บาร์ทมิดินสอทั้งหมดกี่แท่ง                                                                | <b>การจัดกลุ่มที่เท่ากัน</b><br>สร้างกลุ่ม 4 กลุ่ม โดยในแต่ละกลุ่มใช้ตัวนับ 6 ตัว และนับตัวนับทั้งหมดเพื่อหาคำตอบ                       |
| <b>ปัญหาการหารในแบบของการวัด</b><br>บาร์ทมิดินสอ 24 แท่ง จัดใส่กล่องๆ ละ 6 แท่ง จะใช้กล่องดินสอทั้งหมดกี่กล่อง                                                           | <b>การวัด</b><br>จัดตัวนับ 24 ตัว เป็นกลุ่มๆ ละ 6 ตัว และนับจำนวนกลุ่มเพื่อหาคำตอบ                                                      |
| <b>ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน</b><br>บาร์ทมิกล่องดินสอ 6 กล่อง ซึ่งในแต่ละกล่องมีจำนวนดินสอเท่าๆ กัน ถ้านับจำนวนดินสอได้ทั้งหมด 24 แท่ง จะมีดินสอกี่แท่งในแต่ละกล่อง | <b>การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</b><br>แบ่งตัวนับ 24 ตัว ออกเป็น 6 กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมีตัวนับจำนวนเท่าๆ กัน นับตัวนับในหนึ่งกลุ่มเพื่อหาคำตอบ |

ที่มา: Carpenter; & et al. (1999). *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction*. p.39.

นอกจากวิธีการที่เด็กใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหาแล้ว คาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ ยังกล่าวถึงวิธีการอื่นที่เด็กใช้ในการแก้ปัญหาทั้ง 3 ประเภทข้างต้น ได้แก่ วิธีการการนับและการบวก ซึ่งเด็กจะไม่ใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหา แต่จะใช้การนับ นับข้าม หรือการบวกมาช่วยในการแก้ปัญหา

จะเห็นว่รูปแบบของปัญหาทั้งสามประเภทข้างต้นจะเกี่ยวกับการจัดกลุ่มและการแบ่งสิ่งของที่สามารนับได้ โดยที่แต่ละกลุ่มมีจำนวนเท่าๆ กัน และไม่เหลือเศษ คาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ ยังกล่าวถึงปัญหาการคูณและการหารลักษณะอื่นๆ ที่นอกเหนือจากปัญหาการจัดกลุ่มและการแบ่งสิ่งของดังกล่าว ได้แก่ ปัญหาเกี่ยวกับอัตราและการเปรียบเทียบ (Carpenter; & et al. 1999: 45-53) ลักษณะของตัวอย่างปัญหาดังแสดงในตาราง 4



ตาราง 4 ลักษณะของปัญหาการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน อัตรา ราคา และการเปรียบเทียบ

| ชนิดของปัญหา                              | การคูณ                                                                                            | การหารในแบบของ<br>การวัด                                                                                                                               | การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน                                                                                                                        |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การจัดกลุ่ม/<br>การแบ่งส่วนที่<br>เท่ากัน | เจนนี้มีต้นไม้เขือเทศอยู่ 4<br>ต้น แต่ละต้นมีมะเขือเทศ<br>อยู่ 6 ลูก มีมะเขือเทศ<br>ทั้งหมดกี่ลูก | เจนนี้มีต้นไม้เขือเทศอยู่<br>จำนวนหนึ่ง โดยที่แต่ละ<br>ต้นมีมะเขือเทศอยู่ 6 ลูก<br>ถ้านับมะเขือเทศได้<br>ทั้งหมด 24 ลูก จะมีต้น<br>มะเขือเทศอยู่ที่ต้น | เจนนี้มีต้นไม้เขือเทศอยู่<br>4 ต้น โดยที่แต่ละต้นมี<br>มะเขือเทศจำนวนเท่าๆ<br>กัน ถ้ามียะเขือเทศ<br>ทั้งหมด 20 ต้น แต่ละต้น<br>มีมะเขือเทศอยู่ที่ลูก |
| อัตรา                                     | ในเวลา 1 ชั่วโมง เอลเลน<br>เดินได้ 3 ไมล์ ถ้าเวลา 5<br>ชั่วโมง เอลเลนเดินได้กี่<br>ไมล์           | ในเวลา 1 ชั่วโมง เอลเลน<br>เดินได้ 3 ไมล์ ถ้าเอลเลน<br>เดินได้ 15 ไมล์ จะใช้เวลา<br>กี่ชั่วโมง                                                         | เอลเลนเดิน 15 ไมล์ ใช้<br>เวลา 5 ชั่วโมง ถ้า<br>เอลเลนเดินด้วย<br>ความเร็วเท่าเดิมตลอด<br>ระยะทาง ในเวลา 1<br>ชั่วโมง เอลเลนเดินได้<br>เท่าไร        |
| ราคา                                      | ขนมราคาชิ้นละ 4<br>ดอลลาร์ ขนม 7 ชิ้น ราคา<br>เท่าไร                                              | ขนมราคาชิ้นละ 4<br>ดอลลาร์ ถ้ามียะเงิน 28<br>ดอลลาร์ สามารถซื้อขนม<br>ได้กี่ชิ้น                                                                       | เจนซื้อขนมมา 7 ชิ้น<br>จ่ายเงินไปทั้งหมด 28<br>ดอลลาร์ ถ้าขนมแต่ละ<br>ชิ้นราคาเท่ากัน ขนม 1<br>ชิ้นราคาเท่าไร                                        |
| การเปรียบเทียบ                            | ยี่ราฟในสวนสัตว์แห่งหนึ่ง<br>สูงเป็น 3 เท่า ของจิงโจ้<br>ถ้าจิงโจ้สูง 6 ฟุต ยี่ราฟจะ<br>สูงเท่าไร | ยี่ราฟสูง 18 ฟุต จิงโจ้สูง<br>6 ฟุต ยี่ราฟสูงกว่าจิงโจ้<br>กี่เท่า                                                                                     | ยี่ราฟสูง 18 ฟุต ถ้า<br>ยี่ราฟสูงเป็น 3 เท่าของ<br>จิงโจ้ จิงโจ้สูงเท่าไร                                                                            |

ที่มา: Carpenter; & et al. (1999). *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction*. p.48.

นอกจากนี้มัลลิแกนและมิทเชลมอร์ (Mulligan; & Mitchelmore. 1997: 314) ยังได้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ ดังตาราง 5

ตาราง 5 โจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ

| การคูณ                                                                                                                | การหาร                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>การจัดกลุ่มที่เท่ากัน</i>                                                                                          | <i>การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</i>                                                                                              |
| 1. มีโต๊ะอยู่ 2 ตัว ในห้องเรียน แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน                                        | 7. มีเด็ก 8 คน กับโต๊ะ 2 ตัว ในห้องเรียน เด็กสามารถนั่งโต๊ะแต่ละตัวได้กี่คน                                               |
| 2. ปีเตอร์ดื่มน้ำระหว่างอาหารกลางวัน วันละ 2 แก้ว ทุกวัน เมื่อเวลาผ่านไป 3 วัน ปีเตอร์ดื่มน้ำทั้งหมดกี่แก้ว           | 8. แบ่งเครื่องดื่ม 6 แก้ว ให้กับเด็ก 3 คน ในปริมาณเท่าๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้รับเครื่องดื่มในปริมาณคนละเท่าไร              |
| <i>อัตรา</i>                                                                                                          | <i>อัตรา</i>                                                                                                              |
| 3. สติกเกอร์ 1 อัน ราคา 5 เซนต์ ถ้าต้องการซื้อสติกเกอร์ 2 อัน ต้องใช้เงินเท่าไร                                       | 9. ปีเตอร์ซื้อลูกอมมา 4 เม็ด ราคา 20 เซนต์ ถ้าลูกอมแต่ละเม็ดราคาเท่ากัน ดังนั้นลูกอม 1 เม็ด ราคาเท่าไร                    |
| <i>การเปรียบเทียบ</i>                                                                                                 | <i>การเปรียบเทียบ</i>                                                                                                     |
| 4. จอห์นมีหนังสือ 4 เล่ม และซูมีหนังสือเป็น 4 เท่าของจอห์น ซูมีหนังสือทั้งหมดกี่เล่ม                                  | 10. ไชมอนมีหนังสือ 9 เล่ม ซึ่งเป็น 3 เท่าของลิซา ลิซามีหนังสือทั้งหมดกี่เล่ม                                              |
| <i>การจัดแถว</i>                                                                                                      | <i>ผลหาร</i>                                                                                                              |
| 5. เด็กเข้าแถว 4 แถว โดยแต่ละแถวมีเด็กอยู่ 3 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน                                                    | 11. มีเด็ก 16 คน โดยเด็ก 2 คน จะนั่งที่โต๊ะ 1 ตัว มีโต๊ะทั้งหมดกี่ตัว                                                     |
| <i>ผลคูณคาร์ทีเซียน</i>                                                                                               |                                                                                                                           |
| 6. ถ้าต้องการซื้อมันฝรั่งไก่หรือมันฝรั่งแผ่นเรียบ ขนาดเล็ก กลาง หรือใหญ่ นักเรียนมีทางเลือกทั้งหมดกี่ทางที่แตกต่างกัน | 12. มีของเล่นอยู่ 12 ชิ้น ต้องการแบ่งให้เด็กคนละเท่าๆ กัน ถ้าเด็กแต่ละคนได้รับของเล่นคนละ 3 ชิ้น จะมีเด็กอยู่ทั้งหมดกี่คน |

ที่มา: Mulligan; & Mitchelmore. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. In *Journal for Research in Mathematics Education*. p.314.

จากลักษณะปัญหาการคูณและการหารดังตาราง 5 มัลลิแกนและมิทเชลมอร์ ได้สรุปวิธีการในการแก้ปัญหาโดยใช้ชื่อว่า ตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์สำหรับการคูณและการหาร (Intuitive Models for Multiplication and Division) ดังตาราง 6

ตาราง 6 ตัวแบบเชิงสัญลักษณ์สำหรับการคูณและการหาร

| ตัวแบบเชิงสัญลักษณ์ | วิธีการแก้ปัญหา                                                                                                   |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                     | การคูณ                                                                                                            |
| 1. การนับ           | การนับในลักษณะนับทีละหนึ่ง                                                                                        |
| 2. การบวกซ้ำ        | การนับไปข้างหน้าตามจังหวะ<br>การนับข้ามไปข้างหน้า<br>การบวกซ้ำ<br>การบวกในลักษณะทวีคูณ                            |
| 3. การคูณ           | การใช้สูตรคูณที่รู้<br>การหาสูตรคูณ                                                                               |
|                     | การหาร                                                                                                            |
| 1. การนับ           | การสมนัยกันแบบหนึ่งต่อหลายๆ จำนวน<br>การนับในลักษณะนับทีละหนึ่ง<br>ส่วนแบ่ง                                       |
| 2. การลบซ้ำ         | การจัดกลุ่มแบบลองผิดลองถูก<br>การนับถอยหลังตามจังหวะ<br>การนับข้ามไปข้างหลัง<br>การลบซ้ำ<br>การบวกโดยการแบ่งครึ่ง |
| 3. การบวกซ้ำ        | การนับไปข้างหน้าตามจังหวะ<br>การนับข้ามไปข้างหน้า<br>การบวกซ้ำ<br>การบวกในลักษณะทวีคูณ                            |
| 4. การคูณ           | รู้ข้อเท็จจริงทางการคูณ<br>ได้รับข้อเท็จจริงทางการคูณ                                                             |

ที่มา: Mulligan; & Mitchelmore. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. In *Journal for Research in Mathematics Education*. p.316.

นอกจากนี้เชอรินและฟุสัน (Sherin; & Fuson. 2005: 356-377) ยังกล่าวถึงวิธีการและเทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาคำนวณจำนวนนับ ได้แก่

การนับ ซึ่งอาจใช้การนับสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมด แบ่งเป็น 1) ใช้การวาดภาพแล้วนับ หลังจากวาดภาพ เป็นการเขียนกลุ่มสิ่งของและทำการนับทั้งหมด 2) การนับโดยใช้นิ้วมือ เป็นการนับจากหนึ่งจนถึงผลรวม โดยใช้นิ้วช่วยนับ เช่น หนึ่ง สอง สาม สี่-หนึ่ง ห้า หก เจ็ด แปด-สอง เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง-สาม 3) การนับโดยอาศัยจังหวะ เป็นการนับด้วยการเน้นคำที่แต่ละผลคูณตามขนาดของกลุ่ม เช่น หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง นอกจากนี้ อาจใช้การนับเป็นจังหวะประกอบกับการใช้นิ้วมือ

การนับเพิ่มทีละเท่าๆ กัน โดยใช้นิ้วมือหรือโดยการเขียนตัวเลข เช่น การนับทีละ 5 จะใช้เขียน 5 ซ้ำๆ กันช่วย

การบวก โดยใช้ การบวกซ้ำ การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก

การใช้แบบรูปเป็นฐาน เป็นการหาคำตอบโดยใช้แบบรูปเป็นฐาน เช่น การใช้หลักการคูณของ 0 หลักการคูณของ 1 และหลักการคูณของ 10 หรือการใช้เทคนิคนิ้วมือในการท่องสูตรคูณแม่ 9

การใช้สูตรคูณ เป็นการหาคำตอบอย่างรวดเร็วโดยการจับคู่ของผลคูณ และใช้การดำเนินการทางการคูณ โดยไม่มีการใช้นิ้วมือหรือการวาดภาพ

การใช้สองวิธีร่วมกัน เช่นการใช้สูตรคูณกับการนับทั้งหมด หรือการใช้สูตรคูณกับการบวก

การดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ มุ่งความสนใจไปที่แนวทางที่เด็กนำมาใช้ในการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของโจทย์ปัญหาการคูณและการหาร เช่น การลงมือปฏิบัติจริงหรือการใช้สถานการณ์จำลอง การใช้ตัวแบบ การนับ/การบวก/การลบ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ เป็นต้น โดยเด็กอาจใช้วิธีเดียวหรือหลายวิธีในการแก้ปัญหา หรือมีวิธีอื่นๆ อีกตามที่เด็กใช้ เช่น

การลงมือปฏิบัติจริง เป็นการแก้ปัญหาโดยใช้สถานการณ์จำลอง ของจริงตามสถานการณ์ปัญหา ในการอธิบายถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การใช้ตัวแบบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ตัวแบบเป็นตัวแทนของสิ่งที่กล่าวถึงในโจทย์มาใช้ในการลงมือปฏิบัติจริง เช่นแบ่งกลุ่มตามที่โจทย์ระบุ ซึ่งตัวแบบนั้นอาจเป็นของจริงที่จับต้องได้

การนับ/การบวก/การลบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้การนับทีละหนึ่ง นับข้าม นับเพิ่ม/นับลด การเพิ่มเข้าและหักออกครั้งละเท่าๆ กัน หรือการนับซ้ำ

การใช้ภาพ เป็นการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพเพื่อช่วยให้เกิดจินตนาการและง่ายต่อการแก้ปัญหา อาจใช้ภาพของจริง ภาพที่เป็นตัวแทน เช่น ชิด วง รูปภาพและอื่นๆ

การนึกภาพในใจ เป็นการสร้างจินตนาการภายในของตัวบุคคลในขณะที่พยายามจะแก้ปัญหาโดยการนึกภาพ การมองเห็นภาพ หรือการสร้างภาพจินตนาการ

รูปแบบของปัญหาที่ใช้ในงานวิจัยนี้ แบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน โดยปัญหาแต่ละรูปแบบดังกล่าวยังแบ่งตามลักษณะของปัญหาออกเป็น 4 ลักษณะ คือ การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

อัตรา/ราคา การเปรียบเทียบ และผลคูณคาร์ทีเซียน (เฉพาะปัญหาในรูปแบบการคูณ) ซึ่งการสร้างชุดคำถามในการวิจัยนี้จำแนกประเภทออกตามลักษณะและรูปแบบของปัญหาดังกล่าว และพิจารณาในแง่ของขนาดของจำนวนในโจทย์ปัญหา ลักษณะของสิ่งของในโจทย์ปัญหา ส่วนวิธีการแก้ปัญหามุ่งความสนใจไปที่การดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กนำมาใช้ในการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ เช่น การลงมือปฏิบัติจริงหรือการใช้สถานการณ์จำลอง การใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ เป็นต้น โดยเด็กอาจใช้วิธีเดียวหรือหลายวิธีในการแก้ปัญหา หรือมีวิธีอื่นๆ อีกตามที่เด็กใช้

### 4.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและการดำเนินการ

ในการศึกษาความเข้าใจความหมายของจำนวนโดย NAEP (The National Assessment of Educational Progress) ของนักเรียนเกรดสามในสหรัฐอเมริกา พบว่า นักเรียนน้อยกว่าครึ่งที่ประสบความสำเร็จในการทำงานที่เกี่ยวข้องกับความหมายของค่าประจำหลักที่นอกเหนือจากหลักสิบ (Kouba; et al. 1988: 14-19) และผลการศึกษา นักเรียนเกรดสองถึงเกรดห้าของรอสส์ (Ross. 1989: 47-51) โดยให้นักเรียนนับแท่งไม้ เช่น ยีสบห้า แล้วให้นักเรียนเขียนตัวเลขแสดงจำนวน เมื่อครูถามถึงตัวเลขแต่ละตัว พบว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนเกรดสี่และหนึ่งในสามของนักเรียนเกรดห้าไม่ทราบว่า 2 แท่งแท่งไม้ 20 อัน และยังพบว่านักเรียนเกรดสองและเกรดสามมีปัญหา มากกว่านักเรียนเกรดสี่และเกรดห้ามาก เบล โจนส์และคนอื่นๆ (Bell. 1990: 434-449; Jones; & et al. 1996: 311-336) กล่าวถึงความเข้าใจเรื่องค่าประจำหลักว่า ความเข้าใจเรื่องค่าประจำหลักเริ่มจากพื้นฐานการนับ เช่น นับจากหนึ่งถึงสิบ และขยายไปสู่วิธีการการนับโดยใช้กลุ่มของสิบและกลุ่มของหน่วย นอกจากนั้น บูลตัน-ลูอิส และฮัลฟอร์ด (Boulton-Lewis; & Halford. 1992: 1-23) ยังเห็นว่าความเข้าใจค่าประจำหลักต้องอาศัยความรู้ทั้งความสัมพันธ์ในการจับคู่ เช่น ความสัมพันธ์ของชื่อจำนวนและวัตถุที่นับ และความสัมพันธ์ส่วนย่อยและทั้งหมด เช่น เข้าใจว่า 12 แท่ง 1 สิบ และ 2 หน่วย

ฟิสเชอร์ (Fischer. 1990: 207-215) ได้ศึกษาเด็กในระดับปฐมวัยในเรื่องความเข้าใจโมโนทัศน์ของจำนวน การบวก และการลบ พบว่าเด็กที่มีความรู้ส่วนย่อยและทั้งหมด จะมีผลสัมฤทธิ์ที่เกี่ยวข้องกับโมโนทัศน์จำนวน การบวก การลบ โจทย์ปัญหา และโมโนทัศน์ค่าประจำหลักสูงกว่าเด็กที่ไม่มีประสบการณ์ในส่วนย่อยและทั้งหมด

ฟุสัน และไบราร์ส (Fuson; & Briars. 1990: 180-206) ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการจัดการเรียนการสอนค่าประจำหลัก การบวก และการลบจำนวนที่มีหลายหลักสำหรับนักเรียนเกรดหนึ่งและสอง โดยการใช้แท่งไม้ฐานสิบ (Base-Ten-Blocks) แสดงการอ่านและใช้ตัวเลขแสดงจำนวนในระบบเลขฐานสิบ และแสดงการบวกและการลบของจำนวนที่มีสี่หลักด้วยแท่งไม้ขนาดต่างๆ และการย้ายแท่งไม้ และให้รายงานผลในแต่ละขั้นทันทีด้วยตัวเลขฐานสิบ หลังจากให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการหาผลบวกและผลลบของจำนวนที่มีค่าไม่เกินสี่หลักโดยไม่ต้องใช้แท่งไม้

แล้ว เด็กจะได้รับการฝึกกับจำนวนห้าถึงแปดหลัก จากการศึกษาพบว่านักเรียนทั้งสองระดับชั้นสามารถสาธิตการบวกจำนวนที่มีสี่หลักได้อย่างมีความหมาย โดยผลการทดสอบภายหลังการทดลองสอน ปรากฏว่านักเรียนมีคะแนนสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ในกรณีการลบก็เช่นเดียวกัน

คาร์เร (Carey. 1991: 266-280) ได้ศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจในโจทย์ปัญหาของเด็ก เช่น ปัญหาสองปัญหาต่อไปนี้

“แอนมีลูกโป่ง 12 ลูก และให้ทอมไป 7 ลูก แอนจะเหลือลูกโป่งกี่ลูก”

“แอนมีลูกโป่งอยู่ 7 ลูก แอนต้องซื้อเพิ่มอีกกี่ลูกจึงจะมีลูกโป่งรวมกัน 12 ลูก”

ในการศึกษาพบว่า ในเบื้องต้นเด็กจะแก้ปัญหาลำนี้โดยวิธีแตกต่างกัน เช่น ในปัญหาแรกเด็กจะจัดกลุ่มของ 12 ชิ้น แล้วนำออกไป 7 ชิ้น ส่วนในปัญหาที่สองเด็กจะจัดกลุ่มของ 7 ชิ้น และเพิ่มเข้าไปอีกจนกระทั่งครบ 12 ชิ้น โดยเด็กจะไม่เห็นความสัมพันธ์ของปัญหาทั้งสองนี้ ว่าสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีการเดียวกัน

ฟุสัน และคนอื่นๆ (Fuson; et al. 1997: 130-162) ได้วิเคราะห์วิธีการคิดที่เด็กใช้แก้ปัญหในการบวกและการลบจำนวนหลายหลักของเด็กเกรดหนึ่งถึงสาม พบว่าในการหาผลบวกเด็กจะมีวิธีการการคิดแบบต่างๆ เช่น ในการหาผลบวกของ  $38 + 26$  การคิดแบบที่หนึ่ง “เด็กจะรวมสามสิบกับยี่สิบได้ห้าสิบ และแปด เป็นห้าสิบแปด ดังนั้นรวมกับอีกหกได้หกสิบสี่” แบบที่สอง “สามสิบและยี่สิบเป็นห้าสิบ แปดและหกเป็นสิบสี่ นำสิบจากสิบสี่รวมกับห้าสิบได้หกสิบ ดังนั้นจะได้หกสิบสี่” ในการหาผลลบของ  $62-28$  จะมีวิธีการการคิดแบบต่างๆ คือ แบบที่หนึ่ง “หกสิบ นำออกไปยี่สิบ เหลือสี่สิบ แล้วเพิ่มอีกสองเป็นสี่สิบสอง เอาออกสองเหลือสี่สิบ และเอาออกอีกหก เหลือสามสิบสี่” แบบที่สอง “หกสิบเอาออกยี่สิบเป็นสี่สิบ แต่นำแปดออกจากสองไม่ได้ ถ้านำสองออกจากสองต้องเอาออกอีกหก จึงเหลือสามสิบสี่” แบบที่สาม “หกสิบสองเอาออกสามสิบ เหลือสามสิบสอง แต่เราต้องเอาออกเพียงยี่สิบแปด ดังนั้นต้องเพิ่มอีกสองจะได้สามสิบสี่”

มัลลิแกนและมิทเชลเมอร์ (Mulligan; & Mitchelmore. 1997: 309-330) ได้ศึกษาตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์ตามโครงสร้างภายในสมองซึ่งสอดคล้องกับยุทธวิธีในการคิดคำนวณแต่ละแบบที่เด็กใช้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชายและหญิงในเกรด 2 และ 3 ในงานวิจัยนี้จะเก็บข้อมูลจากการสังเกตจำนวน 4 ครั้ง โดยให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารจำนวน 24 ข้อ เมื่อพิจารณาจากคำตอบที่ถูกต้องของกลุ่มตัวอย่าง พบว่านักเรียนจะมียุทธวิธีในการคิดคำนวณที่แตกต่างกัน 12 วิธี ซึ่งสามารถจัดยุทธวิธีที่นักเรียนใช้ตามตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์ออกเป็น 4 วิธีหลัก คือ การนับโดยตรง การบวกซ้ำ การดำเนินการทางการคูณ ส่วนการลบซ้ำซึ่งเป็นตัวแบบที่ 4 จะพบเฉพาะในปัญหาการหารเท่านั้น ตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์ทั้ง 4 แบบ จะใช้โครงสร้างทางความหมายของคำทั้งหมด ความถี่ในการใช้แต่ละตัวแบบจะแปรเปลี่ยนตามปฏิสัมพันธ์ที่ซับซ้อนของอายุ ขนาดของจำนวน ภาษา และโครงสร้างของคำ ผลการศึกษาได้ตีความตามการแสดงออกที่เด็กได้เรียนรู้จากตัวแบบเชิงสหสัมพันธ์ และตามตัวแบบที่เด็กใช้เพื่อแก้ปัญหาดังๆ ที่สะท้อนออกมาตามโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เด็กกำหนดขึ้น

คิลแพทริก, สวาฟฟอร์ด และ ฟินเดล (Kilpatrick; Swafford; & Findell. 2001: 159-160) กล่าวถึงงานวิจัยในเรื่องความเข้าใจของเด็กเกี่ยวกับพื้นฐานในการนับบนหลักการคิด 5 ประการที่นำมาใช้ประโยชน์ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. หนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One) : เป็นความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่าง การนับกับสิ่งของ
2. อันดับที่คงที่ (Stable Order) (ของการนับ) : ในการนับต้องท่องจำ อย่างแม่นยำ และสามารถบอกอันดับในการนับได้
3. จำนวนจากการนับ (Cardinal) : การออกเสียงนับตัวสุดท้ายเป็นตัวชี้ว่าสิ่งของ มีจำนวนเท่าไรจากกลุ่มของทั้งหมด (มากกว่าเป็นเพียงสมบัติเฉพาะของสิ่งของในกลุ่ม)
4. นามธรรม (Abstraction) : การรวมกลุ่มของสิ่งของต่างๆ เข้าด้วยกันเพื่อ จุดมุ่งหมายของการนับ
5. ความไม่เกี่ยวข้องของอันดับ (Order Irrelevance) (สำหรับการนับสิ่งของ) : สิ่งของสามารถถูกนับตามลำดับต่างๆ โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงผลที่ตามมา

นพพร แหยมแสง (2544: 105-107) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาสำนึกเกี่ยวกับ จำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยการดำเนินการวิจัยได้แบ่งเป็น 2 ระยะ ในระยะที่ 1 ได้ทำการรวบรวมสภาพและปัญหาของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 และ 4 ของ โรงเรียนสังกัดสำนักงานศึกษากรุงเทพมหานคร จากโรงเรียนขนาดใหญ่ กลาง และเล็ก จำนวน 534 คน โดยให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบวัดสำนึกเกี่ยวกับจำนวน 3 ฉบับ และสัมภาษณ์ความสามารถ บางอย่างที่ไม่สามารถวัดได้ พบว่า นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 มีปัญหามากที่สุดในด้าน ความเข้าใจความหมายของการดำเนินการ และด้านการรู้ผลสัมพัทธ์ของการดำเนินการ ซึ่งมีคะแนน เฉลี่ยเป็นร้อยละ 30.06 และ 30.62 ตามลำดับ ส่วนนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 พบว่ามี ปัญหามากที่สุดในด้าน การรู้ผลสัมพัทธ์ของการดำเนินการ และด้านความเข้าใจความหมายของ การดำเนินการ มีคะแนนเฉลี่ยเป็นร้อยละ 32.99 และ 36.09 ตามลำดับ

จากการที่ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและการดำเนินการ พบว่าเด็กจะมีความรู้ในเรื่องจำนวนและการดำเนินการง่าย ๆ ติดตัวมาก่อนเข้าโรงเรียน และเด็กใน ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 สามารถแสดงการคิดในระดับต่างๆ ในด้านจำนวนและ การดำเนินการได้ แต่จะมีปัญหาในเรื่องความเข้าใจความหมายของจำนวนและการดำเนินการ เด็ก บางส่วนมีพื้นฐานในการนับแต่ขาดความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของค่าประจำหลัก และมีปัญหา ในการเข้าใจความหมายของการดำเนินการ ดังนั้นในการศึกษาวิจัยครั้งนี้จึงมุ่งเน้นการคิดเชิง คณิตศาสตร์ การนำปัญหาหลักขณะดังกล่าวมาตรวจสอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก น่าจะ สามารถศึกษาวิจัยวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กได้เป็นอย่างดี โดยชุดคำถามที่ถาม เด็กจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการดำเนินการเบื้องต้นทางด้านการคูณและการหารตามลักษณะและ รูปแบบของปัญหาต่างๆ โดยพิจารณาจากการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทน ความคิดทางคณิตศาสตร์ของเด็ก

การศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ จะใช้ชุดคำถามซึ่งประกอบด้วยรูปแบบต่างๆ ของปัญหาการคูณและการหารมาให้เด็กทำ โดยในการคิดแก้ปัญหาจะไม่จำกัดเวลาในการคิดของเด็ก และเด็กสามารถใช้อุปกรณ์ต่างๆ เพื่อช่วยในการคิดได้ ทั้งนี้เนื่องจากทฤษฎีเกี่ยวกับความคิดต่างๆ ชี้ว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่ไม่จำเป็นจะต้องสร้างความรู้ใหม่ที่ละขั้นตอนในระยะเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น แต่บ่อยครั้งที่เด็กจะกระโดดเข้าไปทำการเชื่อมโยงภายในเครือข่ายของความรู้จนสามารถคิดได้ นั่นคือเด็กที่ไม่สามารถแก้ปัญหาในการคิดคำนวณโดยใช้การเขียนตอบ (Paper and Pencil) ก็ยังคงสามารถแก้ปัญหาโดยใช้ซอฟต์แวร์ เช่น อุปกรณ์ทางเทคโนโลยีต่างๆ เช่น เครื่องคิดเลข คอมพิวเตอร์ โปรแกรมสำเร็จรูป (Jensen; & Williams. 1993: 235-238) นอกจากนี้การเปิดโอกาสให้เด็กได้อธิบายวิธีการคิดของตนออกมา หรือการจัดสภาวะแวดล้อมที่เหมาะสมยังส่งผลต่อการเรียนรู้ของเด็กอีกด้วย (Wolfe; & Brandt. 1998: 10-11)

ในการวิเคราะห์วิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์จะศึกษาจาก การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระยะต่างๆ โดยดูจากการทำความเข้าใจปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการควบคุมการรู้คิดของเด็ก ผ่านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก และรายงานผลออกมาในเชิงพรรณนา

## 5. การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษา

### 5.1 การวิจัยเชิงคุณภาพ

การวิจัยเชิงคุณภาพ (Qualitative Research) จะมุ่งความสนใจไปที่กระบวนการ ความหมาย และปฏิสัมพันธ์ทางสังคมภายในบริบทตามธรรมชาติของมัน การวิจัยเชิงคุณภาพ จึงเป็นการศึกษาโลกแห่งความเป็นจริงภายใต้สถานการณ์ที่เป็นไปตามธรรมชาติ ทำความเข้าใจสิ่งต่างๆ ในมุมมองของผู้กระทำที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยความหมายอื่น เปิดกว้างด้วยแนวการวิเคราะห์แบบอุปนัย เนื่องจากการวิจัยเชิงคุณภาพเป็นงานที่ขึ้นอยู่กับกิจกรรมภาคสนามจึงต้องใช้บุคคลเป็นเครื่องมือในการศึกษา ต้องบันทึกเรื่องราวในเวลาเดียวกัน ดังนั้นการวิจัยเชิงคุณภาพจึงให้ความสำคัญแก่การทำความเข้าใจอย่างเป็นองค์รวมภายในบริบทของสิ่งที่ศึกษา โดยนักวิจัยมีการติดต่อแบบมีส่วนร่วมโดยตรงกับประชากรเป้าหมาย เพื่อทำความเข้าใจพลวัตของปรากฏการณ์ ให้ความสำคัญแก่การศึกษาเฉพาะกรณีทั้งหมดที่เป็นไปได้ มีการออกแบบการวิจัยที่ยืดหยุ่นและมีตัวนักวิจัยเป็นเครื่องมือที่สำคัญในกระบวนการวิจัย รายงานการวิจัยเชิงคุณภาพที่ดีจึงต้องเสนอภาพรวมจากทัศนะของคนใน (Teppo. 1998: 2-5; Fraenkel; & Wallen. 2000: 501-504; ดอบเบิร์ต. 2537: 10; สุภางค์ จันทวานิช. 2545: 12-24; และชาย โพธิ์สิตา. 2547: 7-8, 45)

### 5.1.1 ปรากฏการณ์ของการศึกษา

#### สนาม (Field)

การเลือกสนามและตัวอย่างในการศึกษาอย่างเหมาะสมต่องานวิจัยถือว่ามีความสำคัญยิ่ง เพราะปรากฏการณ์ที่ผู้วิจัยต้องการศึกษาวิจัยนั้นจะต้องให้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่จะศึกษาอย่างชัดเจน ดังนั้นสนามหรือตัวอย่างที่ถูกเลือกมาเพื่อการวิจัยจะต้องสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ ปัญหาการวิจัย และกรอบแนวคิดของงานวิจัย ผู้วิจัยจึงต้องกำหนดสนามและตัวอย่างก่อนจะทำการศึกษา ซึ่งตัวอย่างของการวิจัยเชิงคุณภาพทั้งหมดจะได้มาจากการเลือกแบบเฉพาะเจาะจงอย่างมีจุดมุ่งหมาย (Purposive Sampling) โดยการศึกษาเชิงคุณภาพจะเริ่มต้นจากปัญหาการวิจัย (Fraenkel; & Wallen. 2000: 505; ชาย โพธิ์สิตา. 2547: 125)

#### การเข้าสู่สนาม

เมื่อเลือกสนามงานวิจัยได้แล้ว ผู้วิจัยจะต้องจัดเตรียมเครื่องมือที่จะนำมาใช้ในการเก็บข้อมูล ซึ่งในการวิจัยเชิงคุณภาพจะไม่มีกรกระทำหรือการจัดกระทำใดๆ (Treatment or Manipulation) ต่อประชากร อาสาสมัครที่นำมาศึกษาในการวิจัยเชิงคุณภาพจะไม่ถูกแบ่งกลุ่มดังการวิจัยเชิงทดลอง การเก็บรวบรวมข้อมูลจะดำเนินต่อเนื่องไปกับการวิเคราะห์ข้อมูล นักวิจัยจะทำการสังเกตคน เหตุการณ์ และสิ่งที่ปรากฏขึ้นมา บ่อยครั้งอาจจะใช้การสัมภาษณ์แบบเจาะลึก (In-Depth Interviews) ในการเก็บรวบรวมข้อมูลและทำการตรวจสอบเอกสารต่างๆ และบันทึกที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ที่ศึกษา (Fraenkel; & Wallen. 2000: 505)

#### ผู้ให้ข้อมูลหลัก (Key Informant)

ในการวิจัยเชิงคุณภาพเกือบทั้งหมด ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยจะเป็นตัวอย่างที่เลือกแบบเฉพาะเจาะจงอย่างมีจุดมุ่งหมาย (Purposive Sampling) การสุ่มอย่างง่าย (Random Sampling) จะไม่เหมาะสม เนื่องจากผู้วิจัยต้องการความมั่นใจว่าตัวอย่างที่เลือกมานั้นมีลักษณะเฉพาะที่เหมาะสมต่อความมุ่งหมายของการศึกษา (Fraenkel; & Wallen. 2000: 505; ชาย โพธิ์สิตา. 2547: 124-125)

### 5.1.2 การกำหนดรหัสเพื่อวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดรหัสเป็นเครื่องมือในการจำแนกข้อมูลซึ่งนับว่าเป็นหัวใจสำคัญในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ การกำหนดรหัสจะมีลักษณะเป็นเชิงพรรณนา (ที่บอกเพียงว่านี่คืออะไร ใคร ที่ไหน ฯลฯ) และเชิงวิเคราะห์ (บอกเหตุผล คำอธิบาย) กระบวนการกำหนดรหัสจะดำเนินต่อไปเรื่อยๆ กัน คือ (ชาย โพธิ์สิตา. 2547: 180-184)

1. อ่านข้อมูลอย่างพิถีพิถันและอ่านหลายๆ ครั้ง ขณะที่อ่านจะมองหา มโนทัศน์ หรือแนวคิดที่บ่งนัยอยู่ในข้อความนั้น
2. เปรียบเทียบ มโนทัศน์/แนวคิดที่ปรากฏอยู่ในข้อความหนึ่ง กับมโนทัศน์/

แนวคิดในข้อความอื่นที่เหลือ เพื่อให้สามารถบอกได้ว่าสิ่งที่บ่งบอกอยู่ในข้อความเหล่านั้นหมายถึงสิ่งเดียวกัน เรื่องเดียวกัน หรือหมายถึงคนละเรื่องคนละอย่างกัน ข้อความที่มีความหมายเหมือนกันจะถูกกำหนดเป็นรหัสตัวเดียวกัน และที่มีความหมายต่างกันก็จะถูกให้รหัสต่างกัน

ในการวิเคราะห์ข้อมูลมีการกำหนดรหัสอยู่ 3 แบบ (Strauss and Corbin.

1990) คือ

1. การกำหนดรหัสแบบเปิด (Open Coding) เป็นการกำหนดรหัสแบบกว้างๆ เพื่อจำแนกข้อมูล นั่นคือผู้วิจัยจะมองหาข้อความที่มีความหมายเข้าข่ายกับเรื่องที่จะทำการวิเคราะห์ แล้วกำหนดรหัสที่เหมาะสมให้กับข้อความเหล่านั้น เพื่อจัดกลุ่มประเภทหรือจำแนกข้อมูล

2. การนำรหัสมาสร้างมโนทัศน์ (Axial Coding) เป็นการเชื่อมโยงข้อมูล (ข้อความ) ที่ให้รหัสในแบบแรกแล้วให้เป็นกลุ่มตามความสัมพันธ์ที่รหัสเหล่านั้นมีต่อกัน โดยยึดใจความที่เข้ากันได้และที่บ่งถึงเรื่องเดียวกันของข้อความเหล่านั้นเป็นเกณฑ์ ทำให้สามารถจำแนกมโนทัศน์ออกเป็นกลุ่มๆ หรือเป็นหัวข้อย่อย การนำรหัสมาสร้างมโนทัศน์ในขั้นนี้จะเริ่มได้แนวคิดสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ที่ศึกษาในระดับหนึ่ง

3. การคัดเลือกรหัสมาเชื่อมโยง (Selective Coding) เป็นการนำเอาข้อมูลที่จัดเป็นกลุ่มเป็นพวกแล้วในแบบที่สองมาบูรณาการให้เป็นเรื่องเป็นราว โดยอาศัยความสัมพันธ์ของมโนทัศน์หรือหัวข้อย่อยที่ได้จากแบบที่สองเป็นแนวทาง ซึ่งขั้นนี้ผู้วิจัยสามารถสร้างข้อเสนอหรือญัตติทางทฤษฎี (Proposition) หรือสมมุติฐานสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ที่ศึกษา โดยใช้วิธีการตรวจสอบกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่มีอยู่ หรือถ้าจำเป็นอาจจะรวบรวมข้อมูลใหม่เพื่อมาตรวจสอบและปรับสมมุติฐาน/ทฤษฎีที่ได้นั้นโดยเฉพาะ

### ความน่าเชื่อถือของรหัส

ในการให้รหัส ผู้ให้รหัสควรมีความรู้ในเรื่องที่ทำการวิจัย เข้าใจคำถาม แนวคิดในการวิจัย และข้อมูลเป็นอย่างดี และควรมีผู้ให้รหัส 2 หรือ 3 คน เพื่อลดอคติวิสัยหรืออคติที่อาจจะเกิดขึ้น (ชาย โพธิสิตา. 2547: 369-370) โดยให้ต่างคนต่างทำงานเป็นอิสระต่อกัน เสร็จแล้วจึงนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกัน ถ้าผู้ให้รหัสมีความไม่ลงรอยกันมากจะส่งผลต่อความน่าเชื่อถือของรหัส อย่างไรก็ตามถ้ามีความลงรอยกัน (เหมือนกัน) ของรหัสที่ทุกคนให้มาที่ประมาณร้อยละ 90 หรือมากกว่านั้นถือว่ารหัสที่ได้นั้นมีความน่าเชื่อถือสูง โดยอาจคำนวณจากสูตร (Miles; & Huberman. 1994: 64) ต่อไปนี้

$$\text{ความเชื่อมั่น(ความน่าเชื่อถือ)} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสทั้งหมดมีความเห็นลงรอยกัน}}{\text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสมีความเห็นลงรอยกัน} + \text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสมีความเห็นไม่ลงรอยกัน}}$$

เมื่อมีความแตกต่างของผู้ให้รหัส ผู้ให้รหัสจะต้องแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเพื่อหาข้อสรุปที่ดีที่สุด โดยคำนึงถึงคำถามในการวิจัย กรอบแนวคิด และข้อมูลของการวิจัยเป็นสำคัญ

## 5.2 การวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษาและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แนวโน้มปัจจุบันในการวิจัยทางคณิตศาสตร์ศึกษาได้เปลี่ยนจากการวิจัยที่ใช้วิธีการที่เน้นกระบวนการทางวิทยาศาสตร์หรือการศึกษาเชิงปริมาณไปเน้นการวิจัยในเชิงคุณภาพหรือใช้วิธีการที่อาศัยการตีความ (Teppo. 1998: 9-10)

คาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ (Carpenter; et al. 1993: 428-441) ได้สร้างตัวแบบในการแก้ปัญหาจากการศึกษากระบวนการแก้ปัญหาของเด็กในระดับปฐมวัยจำนวน 70 คน จาก 6 ห้องเรียน ใน 2 โรงเรียน โดยเด็กทั้ง 6 ห้องเรียนจะได้รับการสอนจากครู 4 คน ถึงโจทย์ปัญหาชนิดต่างๆ ตลอดปี เด็กจะฝึกแก้ปัญหาต่างๆ กัน โดยครูจะเสนอปัญหาและตัวนับให้กับเด็กซึ่งเด็กสามารถใช้ตัวนับในการแก้ปัญหาได้ แต่ครูจะไม่แสดงให้เด็กดูว่าจะใช้ตัวนับในการแก้ปัญหายังไร เด็กจะนำเสนอวิธีการแก้ปัญหของตนกับชั้นเรียนหรือในกลุ่มเล็ก ดังนั้นเด็กจะเรียนรู้ถึงวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวนับจากเพื่อนคนอื่นๆ เมื่อเด็กผ่านการเรียนมาแล้วประมาณ 8 เดือน ผู้วิจัยจะให้ผู้สัมภาษณ์ที่ได้ผ่านการฝึกมาแล้วจำนวน 3 คน สังเกตเด็กในชั้นเรียนอย่างน้อย 4 ครั้ง และทำการสัมภาษณ์เด็กเป็นรายบุคคล เด็กแต่ละคนจะถูกถามคำถาม 9 ข้อ เกี่ยวกับการบวกและการลบ การเชื่อมโยง การเปรียบเทียบ การคูณและการหาร การหารในแบบของการวัด การหารในแบบของการแบ่งส่วน การหารที่มีเศษเหลือแบบหลายขั้นตอนและเป็นปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ปัญหาที่มีหลายขั้นตอน และสุดท้ายเป็นโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย โดยผู้สัมภาษณ์จะอ่านคำถามให้ฟังและจะอ่านซ้ำเมื่อเด็กต้องการ ในการสัมภาษณ์จะมีตัวนับ กระดาษและดินสอวางไว้ให้ ซึ่งเด็กสามารถนำมาใช้เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาได้เมื่อต้องการ ผู้วิจัยได้กำหนดรหัสในการแก้ปัญหของเด็กตามวิธีการที่เด็กใช้ในการแก้ปัญหามีเหตุผลหรือไม่ และดูว่าการตอบปัญหานั้นถูกหรือผิด ถ้าวิธีการแก้ปัญหามีเหตุผลผู้วิจัยจะแยกรหัสตามวิธีการที่เด็กใช้อีก 5 ระดับ ได้แก่ 1) การใช้ตัวแบบโดยตรง (Direct Modeling) เมื่อเด็กใช้ตัวนับหรือการใช้เครื่องหมายสำหรับนับ (Tally marks) 2) การนับเมื่อเด็กใช้การนับเพิ่มหรือการนับลด หรือการนับข้ามเพื่อหาคำตอบ 3) การได้มาซึ่งข้อเท็จจริง (Derived Facts) เมื่อเด็กใช้การระลึกถึงข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน (Number Facts) เพื่อหาคำตอบ 4) วิธีอื่นๆ และ 5) ไม่สามารถให้รหัสได้ (ในกรณีที่ผู้วิจัยไม่สามารถเข้าใจได้ถึงวิธีการที่เด็กใช้) ผลการศึกษาพบว่า เด็ก 32 คน จะใช้วิธีการที่มีเหตุผลจากการแก้ปัญหทั้ง 9 ข้อ เด็ก 44 คน จะใช้วิธีการที่มีเหตุผลและหาคำตอบถูกต้องถึง 7 ข้อ หรือมากกว่านั้น มีเด็กเพียง 5 คนเท่านั้นที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องเลย นั่นคือเด็กสามารถแก้ปัญหาได้อย่างกว้างขวาง รวมทั้งปัญหาในสถานการณ์การคูณและการหาร วิธีการที่เด็กใช้ในการแก้ปัญหสามารถจำแนกได้ตามการนำเสนอตัวแทนความคิด หรือตัวแบบจากการกระทำหรือความสัมพันธ์ที่อธิบายในปัญหา แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบนี้สามารถใช้เป็นโครงสร้างสำหรับการคิดแก้ปัญหาในระดับประถมศึกษาได้ เพราะการใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหานั้นเป็นวิธีการคิดพื้นฐานที่มีความสัมพันธ์อย่างเป็นธรรมชาติกับเด็กในระดับประถมศึกษามากที่สุด

เดอ โฮโยส กวาจารย์โด (De Hoyos Guajardo. 2004: 59-85) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับ

การแก้ปัญหา โดยมีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาว่าในระหว่างการเรียนการแก้ปัญหา เด็กในระดับต่ำกว่าปริญญาตรีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่คุ้นเคยอย่างไร ระหว่างการวิจัยให้เด็กเสนอเกณฑ์ในการประเมินการทำงานของพวกเขา ซึ่งเกณฑ์ในการประเมินนี้จะใช้เป็นแหล่งข้อมูลหลัก ในการศึกษาพบว่า กระบวนการแก้ปัญหาของเด็กสามารถอธิบายได้เป็น 3 ขั้น ขั้นแรกอ้างถึงขอบข่ายที่เกี่ยวข้องทั่วไปที่เรียกว่า “ความรู้ที่ก่อกำเนิด” (Generating Knowledge) ที่รวมถึงประเด็นที่สัมพันธ์กับ แนวคิดหลัก และการได้มาซึ่งความเข้าใจ ขั้นที่สองจะอ้างถึง “การก่อกำเนิด”

(Generating) และ “การพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ” (Validating a Solution)

ขั้นสุดท้ายเป็นส่วนที่ได้คำตอบและตรวจสอบเหตุผลของคำตอบอีกครั้ง โดยเด็กจะพยายามปรับปรุงคำตอบที่ได้ก่อนที่จะนำเสนอผลลัพธ์ในตอนท้าย ดังนั้นในขั้นสุดท้ายจะเกี่ยวข้องกับ

“การปรับปรุงคำตอบ”

โกลดิน (Goldin, 1998: 40-62). ได้ศึกษาจากผลการสังเกตการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ผ่านการสัมภาษณ์โดยใช้ภาระงานเป็นฐาน ในการศึกษาได้ใช้การสัมภาษณ์แบบคลินิกอย่างมีโครงสร้างโดยมีจุดมุ่งหมายสองด้านคือ 1) เพื่อสังเกตพฤติกรรมทางคณิตศาสตร์ของเด็กหรือผู้ใหญ่โดยการสำรวจการอธิบายเกี่ยวกับการแก้ปัญหา และ 2) เพื่อทำการสรุปอ้างอิงผลจากการสังเกตไปสู่บางสิ่งบางอย่างเพื่อบอกเกี่ยวกับความหมายที่เป็นไปได้ของนักแก้ปัญหา โครงสร้างความรู้ กระบวนการทางความคิด ความรู้สึก หรือการเปลี่ยนแปลงในสิ่งเหล่านี้ในช่วงการสัมภาษณ์

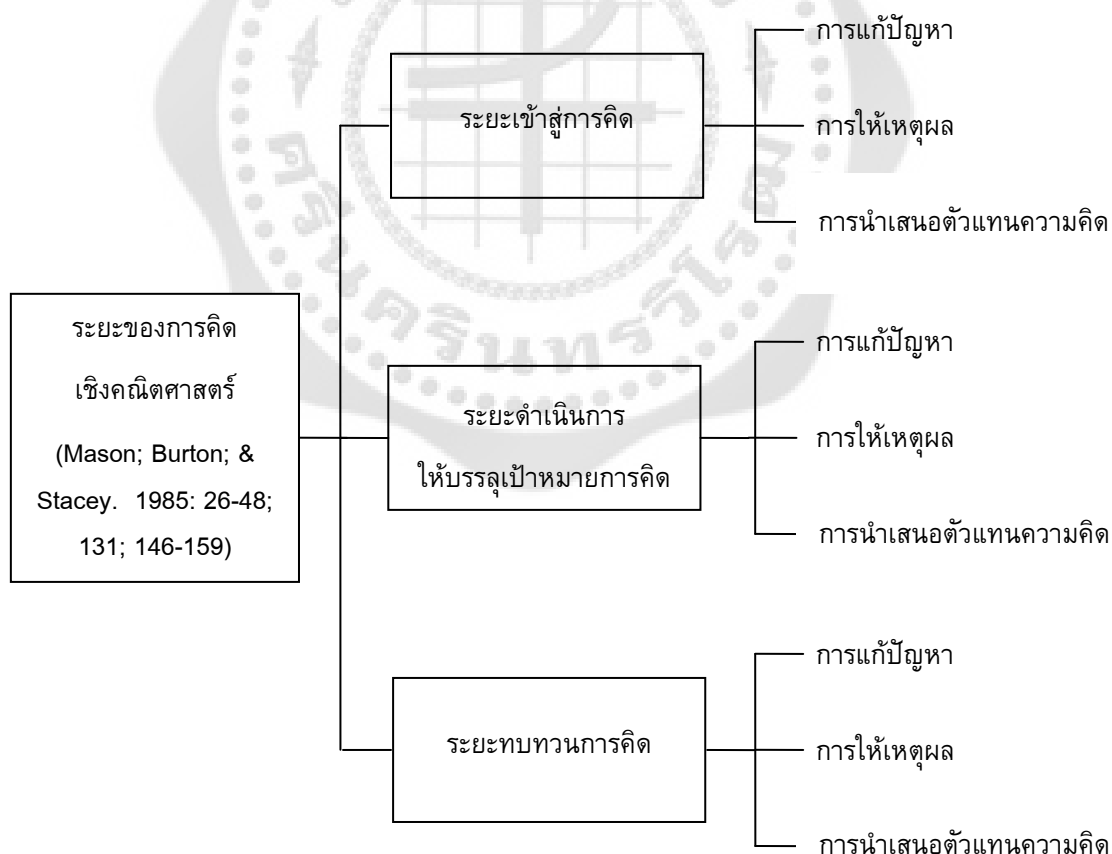
ลาเดสมา (Ledesma, 2005: Online) ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการและข้อเสนอในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการสอนอัตราส่วนและสัดส่วน โดยการสังเกตโดยตรงในชั้นเรียนซึ่งทำการสังเกตโดยตรงจากกิจกรรมที่แสดงออกของเด็กในสมุดบันทึก หลังจากนั้นจึงนำแบบสอบถามที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการทำงานของเด็กเมื่อเด็กได้เข้าไปทำงานเกี่ยวกับอัตราส่วนและสัดส่วนโดยสังเกตเด็กอย่างใกล้ชิด เพื่อตรวจสอบกระบวนการที่เด็กใช้

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ที่ผ่านมา และงานวิจัยบางส่วนในเด็กเล็ก จะเห็นว่า เด็กมีความรู้ทางคณิตศาสตร์หรือการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นของตัวเองมาบ้าง แต่เมื่อเด็กเข้าสู่ระบบโรงเรียนหรือเมื่อเรียนสูงขึ้นเรื่อยๆ สิ่ง (การคิด) ที่ติดตัวเด็กมาหายไปไหน ทำไมเด็กไม่แสดงการคิดที่มีมาแต่เดิมหรือนำประสบการณ์ที่มีอยู่มาใช้ในโรงเรียน อะไรเป็นตัวขัดขวางความคิดของเด็ก ทำให้ผู้วิจัยต้องการทำการยืนยันว่าเด็กมีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นของตนเอง โดยเสนอสถานการณ์ปัญหาที่เด็กยังไม่ได้เรียนโดยตรงในชั้นเรียน เพื่อให้เด็กได้แสดงการคิดของตนเองออกมาตามธรรมชาติ ผู้วิจัยเลือกใช้การวิจัยเชิงคุณภาพในการวิจัยและเก็บข้อมูลจากปรากฏการณ์จริงในชั้นเรียนของเด็ก และจากการตอบชุดคำถาม การสังเกตพฤติกรรม การคิดของเด็กและการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก เพื่อนำมาวิเคราะห์และสร้างโครงสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการอธิบายวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก โดยทำการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ

## กรอบความคิดที่ศึกษาในการวิจัย

จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทางการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบความคิดหรือแง่มุมในการวิเคราะห์การตอบปัญหาการวิจัย เพื่อศึกษากระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับโดยวิถีธรรมชาติของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี ผู้วิจัยอาศัยการศึกษา 3 ด้าน ตามแนวทางของครีกเลอร์ (Kriegler. 2004: Online) กล่าวคือ

การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด เพื่อให้ได้ข้อมูลมาวิเคราะห์จากสิ่งที่ปรากฏออกมาภายนอกจากการมีปฏิสัมพันธ์กับเด็ก โดยการกำหนดสถานการณ์ปัญหาให้เด็กคิดแก้ปัญหา ในการวิจัยนี้จะเป็นโจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับในรูปแบบและลักษณะต่างๆ หลังจากนั้นผู้วิจัยจะศึกษาถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระยะต่างๆ ของเด็กตามแนวของเมสัน เบอร์ตัน และสเตซี (Mason; Burton; & Stacey. 1985: 26-48; 131; 146-159) 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 ระยะเข้าสู่การคิด ระยะที่ 2 ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด และระยะที่ 3 ระยะทบทวนการคิด โดยในแต่ละระยะของการคิดนั้นผู้วิจัยแยกศึกษาใน 3 ด้าน คือ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด ดังแสดงในภาพประกอบ 3

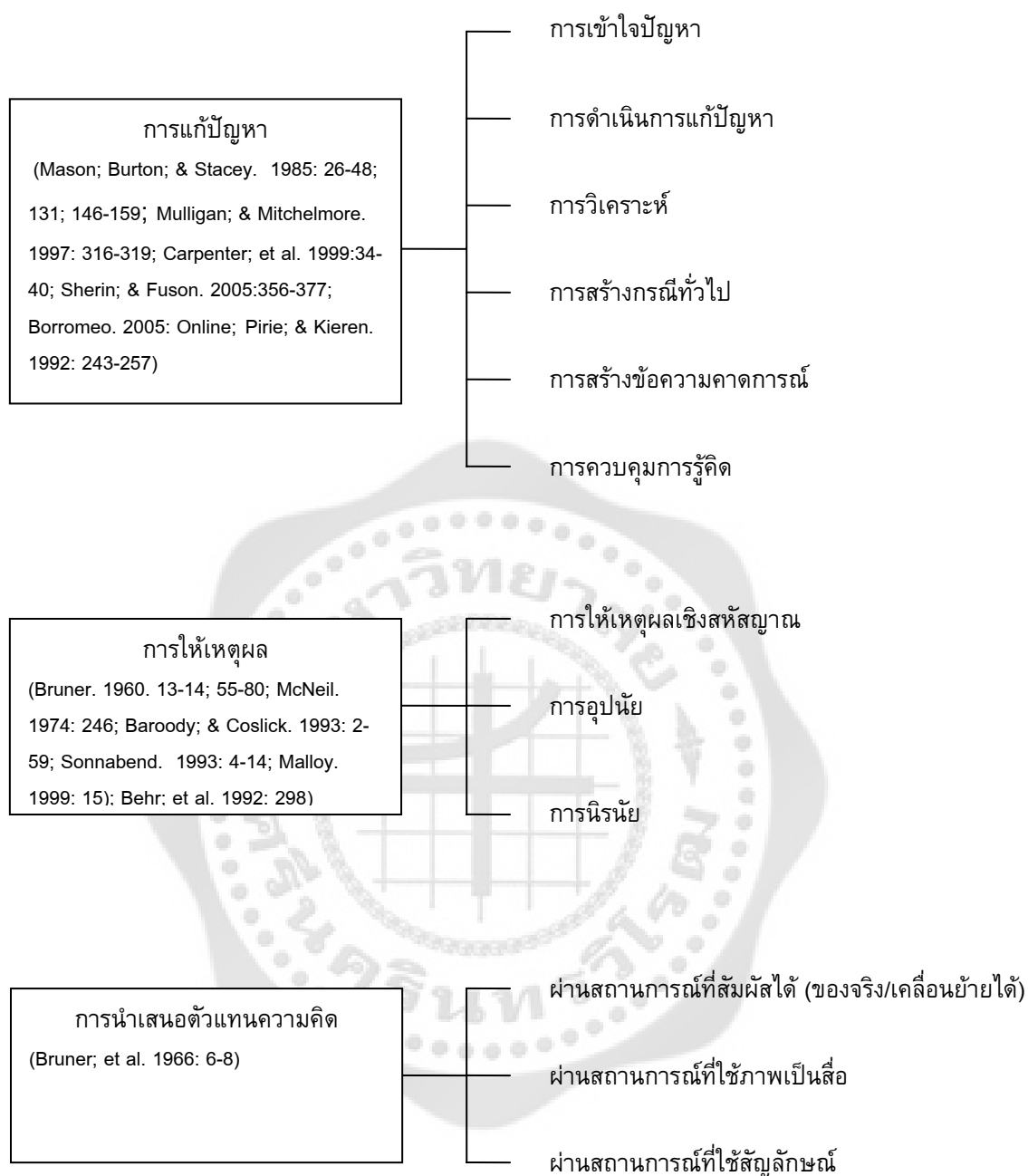


ภาพประกอบ 3 กรอบความคิด ประเด็นที่ศึกษาในการวิจัย

ในการแก้ปัญหานั้นผู้วิจัยศึกษาว่าเด็กเข้าใจปัญหาหรือมีการหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามหรือไม่ เมื่อเด็กตัดสินใจเข้าสู่สถานการณ์ปัญหาตามที่กล่าวถึงในแบบจำลองพฤติกรรมของมาร์ซาโน (Marzano. 2001: 11) ผู้วิจัยได้ศึกษาการแก้ปัญหของเด็กโดยพิจารณาจากการดำเนินการแก้ปัญหที่เด็กใช้ เช่น การลงมือปฏิบัติจริง การใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ หรือลักษณะอื่นๆ ตามที่เด็กแสดง (Mulligan; & Mitchelmore. 1997: 316-319; Carpenter; et al. 1999:34-40; Sherin; & Fuson. 2005:356-377; Borromeo. 2005: Online) และได้ศึกษาถึงการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไปและการสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็ก และศึกษาว่าเด็กมีการตรวจสอบการแก้ปัญหหรือการควบคุมการรู้คิดของตนเองหรือไม่ อย่างไร

และนอกจากนี้ได้ศึกษาการให้เหตุผล โดยศึกษาถึงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Bruner. 1960. 13-14; 55-80; McNeil. 1974: 246; Behr; et al. 1992: 298; Baroody; & Coslick. 1993: 2-59; Sonnabend. 1993: 4-14; Malloy. 1999: 15) การนำเสนอตัวแทนความคิดตามแบบการคิดของเด็ก (Bruner; et al. 1966: 6-8) ดังแสดงในภาพประกอบ 4





ภาพประกอบ 4 กรอบความคิด รายละเอียดประเด็นที่ศึกษาในการวิจัย

ผู้วิจัยได้ศึกษารูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับตามแนวของคาร์เพนเตอร์และคนอื่นๆ (Carpenter; et al. 1999:33-34) และรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับตามแนวของมัลลิแกนและมิทเชลมอร์ (Mulligan; & Mitchelmore. 1997: 314) และได้สังเคราะห์รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัยนี้ออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่ 1) ปัญหาการคูณ 2) ปัญหาการหารในแบบของการวัด และ 3) ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ซึ่งปัญหาแต่ละรูปแบบยังจำแนกเป็น 3 ลักษณะ คือ การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน อัตรา/ราคา การเปรียบเทียบ สำหรับผลคูณคาร์ที่เขียนจะปรากฏอยู่ในปัญหาการคูณเท่านั้น ดังแสดงในภาพประกอบ 5

| รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(Carpenter; et al. 1999:33-34)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- ปัญหาการคูณ</li> <li>- ปัญหาการหารในแบบของการวัด</li> <li>- ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบการคูณ</li> </ul> <p>(Mulligan; &amp; Mitchelmore. 1997: 314)</p> <p>การคูณ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่มที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- การจัดแถว</li> <li>- ผลคูณคาร์ที่เขียน</li> </ul> <p>การหาร</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การแบ่งส่วน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- ผลหาร</li> </ul> | <p>การคูณ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- ผลคูณคาร์ที่เขียน</li> </ul> <p>การหารในแบบของการวัด</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> </ul> <p>การหารในแบบของการแบ่งส่วน</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> </ul> |

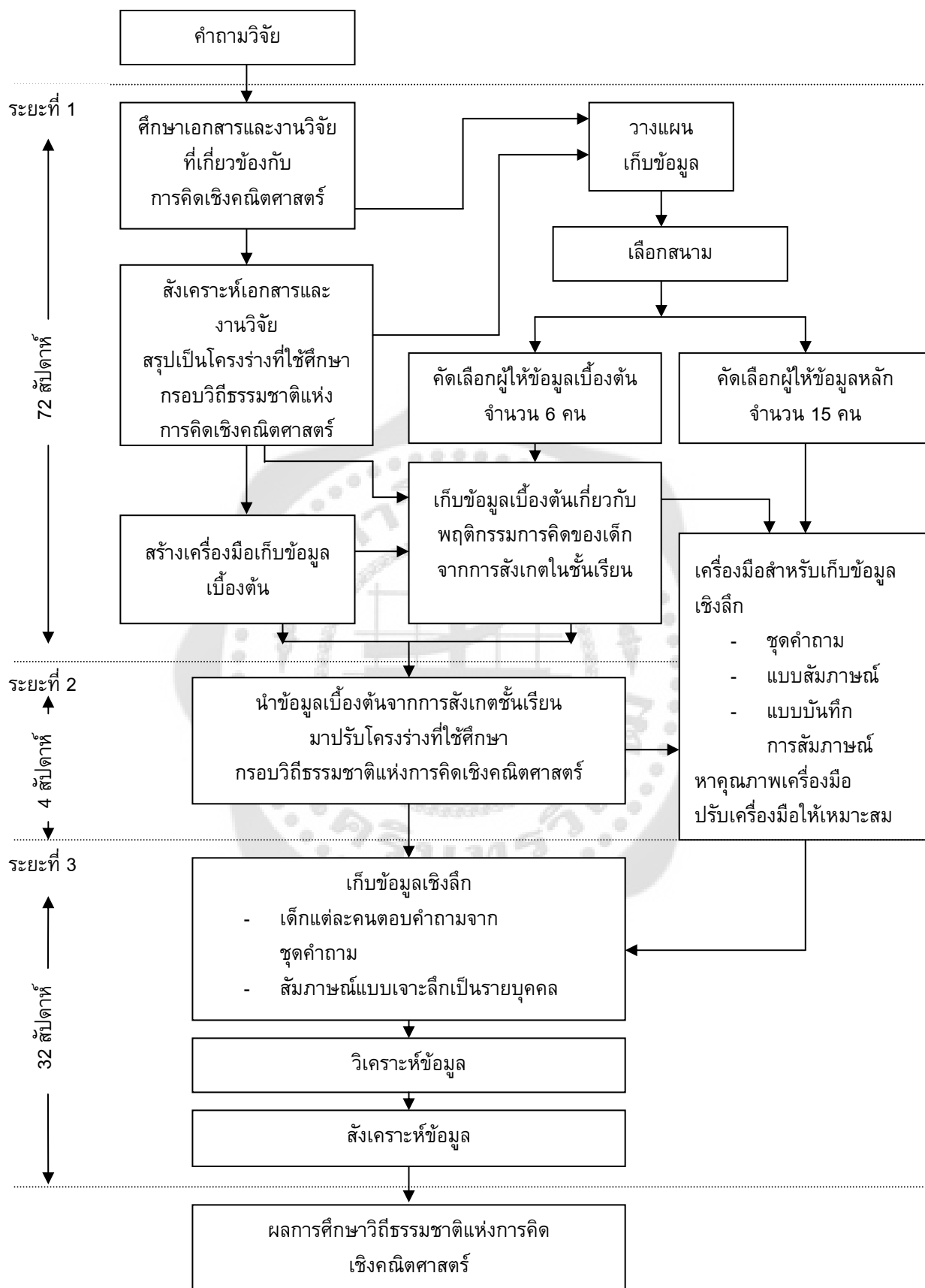
ภาพประกอบ 5 กรอบความคิด รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในการวิจัย

### บทที่ 3

#### วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยเรื่อง วัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและวิเคราะห์วัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ว่าเป็นอย่างไร ผู้วิจัยเลือกใช้การวิจัยเชิงคุณภาพในการอธิบายวัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ การวิจัยแบ่งเป็น 3 ระยะคือ ระยะที่ 1 เป็นระยะสังเคราะห์เอกสารเพื่อสร้างโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน ระยะที่ 2 เป็นระยะปรับโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากการเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน ระยะที่ 3 เป็นระยะเก็บข้อมูลเชิงลึก สังเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการศึกษาวัฒนธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมีกระบวนการวิจัย ดังภาพประกอบ 6





ภาพประกอบ 6 กระบวนการวิจัย

จากภาพประกอบ 6 หลังจากตั้งคำถามวิจัยแล้วสามารถอธิบายกระบวนการวิจัยโดยละเอียดตามขั้นตอนดังนี้

**ระยะที่ 1: ระยะสังเคราะห์เอกสารเพื่อสร้างโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน**

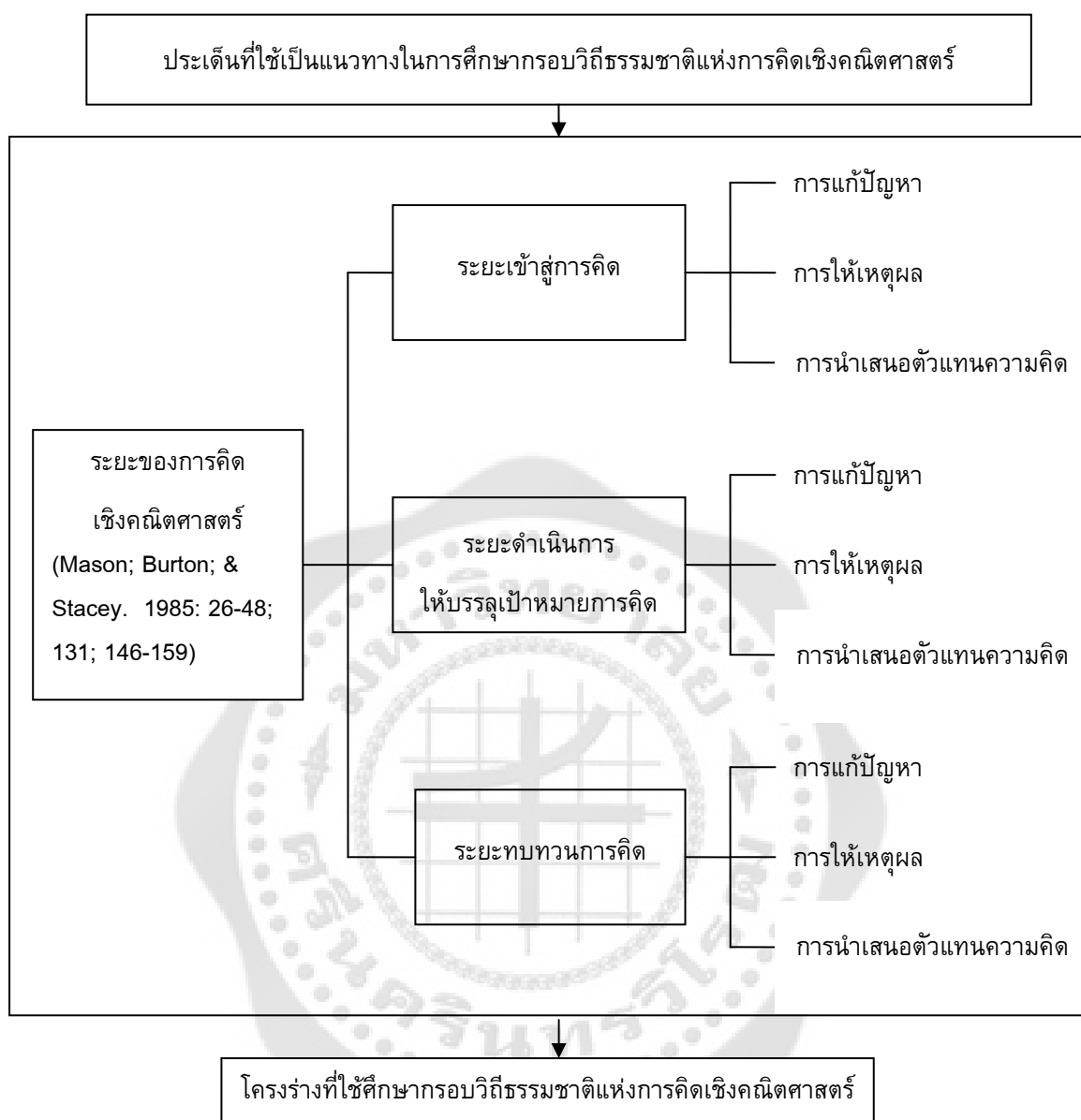
1. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิด การคิดเชิงคณิตศาสตร์ เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และการวิจัยเชิงคุณภาพทางคณิตศาสตร์ศึกษา

2. สังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้

2.1 แนวทางหรือประเด็นในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ดังภาพประกอบ 7

2.2 โครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ ดังภาพประกอบ 8





ภาพประกอบ 7 ประเด็นที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

โครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

| การคิดเชิงคณิตศาสตร์<br>ระยะของ<br>การคิดเชิงคณิตศาสตร์ | การแก้ปัญหา                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | การให้เหตุผล                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | การนำเสนอตัวแทน<br>ความคิด                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่<br>การคิด                                   | การเข้าใจปัญหา/การหาข้อมูล<br>เพื่อหาคำตอบ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | การให้เหตุผลเชิง-<br>สหสัมพันธ์<br>↔ - การระลึกถึงปัญหาที่<br>คล้ายคลึงกัน ↔                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | ในรูปคำพูด<br>(Manouchehri.<br>2005:Online)                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด                     | <br>1. การดำเนินการแก้ปัญหา<br>(Mulligan; & Mitchelmore.<br>1997: 316-319; Carpenter; et<br>al. 1999:34-40; Sherin; &<br>Fuson. 2005:356-377) เช่น<br>- การใช้ตัวแบบ<br>- การใช้การนับ/การบวก/<br>การลบ<br>- การคูณ<br>- การใช้ภาพ<br>- การใช้ภาพในใจ<br>2. การวิเคราะห์<br>3. การสร้างกรณีทั่วไป<br>4. การสร้างข้อความคาดการณ์<br> | <br>1. การอุปนัย<br>- การสรุปวิธีหาคำตอบ<br>- การตรวจสอบกรณีทั่วไป (Manouchehri.<br>2005:Online;<br>Russell.1999: 2-6)<br>↔<br>2. การนิรนัย<br>- การนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่<br> | <br>1. ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้<br>- ใช้ตัวแบบ-ตัวนับและการใช้การนับ (Carpenter; et al. 1993:234-235; 1999: 85-95)<br>↔<br>2. ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ<br>- ใช้รอยขีด<br>- ใช้รูปภาพ<br>↔<br>3. ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์<br>- ใช้ตัวเลข |
| ระยะพบพานการคิด                                         | การควบคุมการรู้คิด<br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <br>1. การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>- การระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่<br>2. การนิรนัย<br>                                                                                                 | <br>ในรูปคำพูดและสัญลักษณ์                                                                                                                                                                                                                       |

ภาพประกอบ 8 โครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

2.3 รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับตามแนวของคาร์เพนเตอร์และคนอื่น ๆ (Carpenter; et al. 1999: 33-34) และรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับตามแนวของมัลลิแกนและมิทเชลมอร์ (Mulligan; & Mitchelmore. 1997: 314) และได้สังเคราะห์รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัยนี้ออกเป็น 3 รูปแบบ ได้แก่ 1) ปัญหาการคูณ 2) ปัญหาการหารในแบบของการวัด และ 3) ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ซึ่งปัญหาแต่ละประเภทยังจำแนกเป็น 3 ลักษณะ คือ การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน อัตรา/ราคา การเปรียบเทียบ สำหรับผลคูณคาร์ที่เขียนจะปรากฏอยู่ในปัญหาการคูณเท่านั้น ดังแสดงในภาพประกอบ 9

| รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(Carpenter; et al. 1999: 33-34)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- ปัญหาการคูณ</li> <li>- ปัญหาการหารในแบบของการวัด</li> <li>- ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบการคูณ</li> </ul> <p>(Mulligan; &amp; Mitchelmore. 1997: 314)</p> <p>การคูณ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่มที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- การจัดแถว</li> <li>- ผลคูณคาร์ที่เขียน</li> </ul> <p>การหาร</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การแบ่งส่วน</li> <li>- อัตรา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- ผลหาร</li> </ul> | <p>การคูณ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> <li>- ผลคูณคาร์ที่เขียน</li> </ul> <p>การหารในแบบของการวัด</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> </ul> <p>การหารในแบบของการแบ่งส่วน</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน</li> <li>- อัตรา/ราคา</li> <li>- การเปรียบเทียบ</li> </ul> |

ภาพประกอบ 9 รูปแบบของปัญหาการคูณและการหารที่ใช้ในการวิจัย

3. วางแผนเก็บข้อมูล หลังจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และจากการสังเคราะห์เอกสารและสร้างโครงร่างที่ใช้ศึกษารอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยเตรียมการคัดเลือกสนามและผู้ให้ข้อมูลเพื่อเก็บข้อมูล การเก็บข้อมูลเป็นการเก็บข้อมูล 2 ครั้ง คือ การเก็บข้อมูลเบื้องต้นและการเก็บข้อมูลเชิงลึก วางแผนการคัดเลือกและการแบ่งผู้ให้ข้อมูลทั้ง 2 กลุ่ม เป็นผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นและผู้ให้ข้อมูลหลัก เพื่อใช้ในการเก็บข้อมูลเบื้องต้นและเก็บข้อมูลเชิงลึก ตามลำดับ เตรียมการเก็บข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับพฤติกรรมความคิดของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตในชั้นเรียน ในการแก้ปัญหาที่เป็นพื้นฐานทางด้านการบวกและการลบจำนวนนับ หรือสถานการณ์ปัญหาทางด้านการคูณและการหารเบื้องต้น และผู้วิจัยเป็นผู้สังเกตพฤติกรรมความคิดโดยรวมของเด็กเพื่อนำไปเป็นแนวทางในการปรับโครงสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์และการเก็บข้อมูลเชิงลึกต่อไป วางแผนการเก็บข้อมูลเชิงลึกและเตรียมการสร้างเครื่องมือและหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก ได้แก่ ชุดคำถาม แบบสัมภาษณ์ และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ วางแผนการหาคุณภาพเครื่องมือ วางแผนวิเคราะห์และสังเคราะห์ข้อมูลจากการเก็บข้อมูลเชิงลึก และสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และสรุปเป็นผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

4. เลือกสนาม (Field) สนามที่เลือกในการวิจัยนี้จะเจาะจงในเขตกรุงเทพมหานคร โดยเลือกสนามที่เป็นโรงเรียนประถมศึกษาขนาดกลาง เปิดสอนตั้งแต่ชั้นเด็กเล็กจนถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เด็กนักเรียนส่วนใหญ่อยู่ในครอบครัวที่มีฐานะปานกลาง ไม่มีการเรียนพิเศษเสริม เป็นโรงเรียนที่เด็กมีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ กัน ค้นเคยกับการมีผู้เข้าไปเก็บข้อมูล และแสดงพฤติกรรมอย่างเป็นธรรมชาติ ตามปกติ กล่าวคือ กล่าวแสดงออกและผู้บริหารโรงเรียนอนุญาตให้ผู้วิจัยเข้าไปศึกษาข้อมูลแบบเจาะลึกได้ รวมทั้งครูและนักเรียนที่เข้าร่วมในการวิจัยให้ความร่วมมือกับการวิจัยนี้ด้วยความเต็มใจ อีกทั้งผู้ให้ข้อมูลที่เลือกมาจะต้องสามารถสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนได้เป็นอย่างดี ซึ่งผู้วิจัยต้องสร้างความคุ้นเคยกับผู้ให้ข้อมูลเพื่อลดช่องว่างต่างๆ

สนามที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่โรงเรียนสวัสดีวิทยา เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร มีนักเรียนทั้งหมด 751 คน

#### 5. การคัดเลือกผู้ให้ข้อมูล

แบ่งเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปีที่กำลังศึกษาอยู่ในช่วงชั้นที่ 1 (ป.1 – ป.3) ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ของโรงเรียนสวัสดีวิทยา ออกเป็น 3 ช่วงอายุ ซึ่งใช้วันที่ 1 มกราคม 2549 เป็นวันฐานในการนับอายุ ถ้ามีเศษอายุเกิน 6 เดือนขึ้นไปให้คิดเป็น 1 ปี คือ

ช่วงอายุ 7-8 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และเกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2542 ถึง 31 ธันวาคม 2542) เด็กในช่วงนี้จะมีพื้นฐานทางด้านจำนวนนับ 1-100 และ 0 การนับ การบวกและการลบที่ผลลัพธ์ไม่เกิน 9 แต่ยังไม่มีความรู้พื้นฐานด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ช่วงอายุ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 และเกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2541 ถึง 31 ธันวาคม 2541) เด็กในช่วงนี้จะมีพื้นฐานทางด้านจำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0 การนับเพิ่มที่

ละ 1, 2, 5, 10, 100 การนับลดทีละ 1, 2, 10, 100 การบวกที่ผลบวกไม่เกิน 1,000 การลบที่ตัวตั้งไม่เกิน 1,000 แต่ยังไม่มีความรู้พื้นฐานด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และเกิดในช่วงวันที่ 1 มกราคม 2540 ถึง 31 ธันวาคม 2540) ในช่วงนี้เด็กจะมีพื้นฐานเหมือนเด็กในช่วงอายุที่ 2 แต่ขยายขนาดของจำนวนไปถึง 100,000 นับเพิ่มทีละ 3, 4, 25, 50 นับลดทีละ 3, 4, 5, 25, 50 และมีพื้นฐานทางด้านการคูณจำนวน 1 หลัก กับ 2 หลัก และการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลักและตัวหาร 1 หลัก ผลหารมี 1 หลัก

คัดเลือกผู้ให้ข้อมูลในงานวิจัย โดยทำการเลือกแบบเฉพาะเจาะจงอย่างมีจุดมุ่งหมายจากเด็กในแต่ละช่วงอายุ โดยผู้วิจัยเข้าสังเกตพฤติกรรมของเด็กในชั้นเรียนโดยรวม ในหลายๆ ช่วงเวลา เพื่อคัดเลือกเด็กแบบเฉพาะเจาะจงในแต่ละช่วงอายุเป็นผู้ให้ข้อมูล โดยคัดเลือกจากเด็กที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ จากการสอบถามครูประจำชั้นและการสังเกตเบื้องต้นในชั้นเรียนจากการแสดงพฤติกรรมในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ที่กล้าแสดงออก สามารถสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนได้เป็นอย่างดี ผู้ให้ข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นและผู้ให้ข้อมูลหลัก

ผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้น (Initial Informant) ใช้ในการเก็บข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับการคิดของเด็กจากการสังเกตในชั้นเรียนในระยะที่ 1 โดยคัดเลือกจากเด็กในแต่ละช่วงอายุ คือ 7-8 ปี 8-9 ปี และ 9-10 ปี ช่วงอายุละ 2 คน รวมทั้งสามช่วงอายุเป็นจำนวน 6 คน โดยทั้ง 6 คนนี้กระจายอยู่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1, 2 และ 3 เป็นจำนวนเท่าๆ กัน

ผู้ให้ข้อมูลหลัก (Key Informant) ใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึกในระยะที่ 3 โดยคัดเลือกจากเด็กในแต่ละช่วงอายุ คือ 7-8 ปี 8-9 ปี และ 9-10 ปี ช่วงอายุละ 5 คน รวมทั้งสามช่วงอายุเป็นจำนวน 15 คน โดยทั้ง 15 คนนี้กระจายอยู่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1, 2 และ 3 เป็นจำนวนเท่าๆ กัน รายละเอียดเกี่ยวกับผู้ให้ข้อมูล ดังตาราง 7

ตาราง 7 รายละเอียดเกี่ยวกับผู้ให้ข้อมูล

| ช่วงอายุ | ระดับชั้น | จำนวนผู้ให้ข้อมูล (คน) |                  | รายชื่อผู้ให้ข้อมูลหลัก           |
|----------|-----------|------------------------|------------------|-----------------------------------|
|          |           | ผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้น  | ผู้ให้ข้อมูลหลัก |                                   |
| 7-8 ปี   | ป.1       | 2                      | 5                | บานชื่น อัญชัน เฟื่องฟ้า จัน ปิ๊บ |
| 8-9 ปี   | ป.2       | 2                      | 5                | กะหล่ำ มะระ ผักกาด แดงกวา ค่ะน้า  |
| 9-10 ปี  | ป.3       | 2                      | 5                | มะปราง องุ่น ทูเรียน ชมพู พุทรา   |
| รวม      |           | 6                      | 15               |                                   |

6. สร้างเครื่องมือในการเก็บข้อมูลเบื้องต้น ได้แก่ แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรม เพื่อใช้ในการเก็บข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับพฤติกรรมความคิดของเด็กในชั้นเรียน

7. เก็บข้อมูลเบื้องต้นเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนประถมศึกษาโดยผู้วิจัยเข้าสังเกตพฤติกรรมความคิดของเด็ก โดยให้ครูโรงเรียนสวัสดิวิทยาที่สอนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3 เป็นผู้เสนอสถานการณ์ปัญหาการบวก การลบ การคูณและการหารให้เด็ก เพื่อให้เด็กทั้งชั้นคิด ผู้วิจัยใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมโดยผู้วิจัยเข้าไปอยู่ในชั้นเรียนและเจาะสังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียนของเด็กที่คัดเลือกเป็นผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้น จำนวน 2 ครั้งๆ ละ 2 คน ซึ่งแต่ละครั้งจะใช้เวลาในการสังเกตตลอดชั่วโมงเรียน และผู้วิจัยเป็นผู้บันทึกพฤติกรรมความคิดโดยรวมของเด็กจากการสังเกตในชั้นเรียนที่ละชั้นเอง สำหรับเด็กในช่วงอายุ 8-10 ปี ที่อยู่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 และ 3 เก็บข้อมูลในช่วงสัปดาห์ที่ 3 และ 4 ของภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ส่วนเด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี ที่อยู่ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จะเก็บข้อมูลในสัปดาห์ที่ 7 ของภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 รายละเอียดการเก็บข้อมูลเบื้องต้นดังตาราง 8

ตาราง 8 รายละเอียดการเก็บข้อมูลเบื้องต้น

| ช่วงอายุ | ระยะเวลาเก็บข้อมูล            | เวลาในการเก็บข้อมูล   |
|----------|-------------------------------|-----------------------|
| 9-10 ปี  | สัปดาห์ที่ 3 ของภาคเรียนที่ 1 | 2 ครั้งๆ ละ 1 ชั่วโมง |
| 8-9 ปี   | สัปดาห์ที่ 4 ของภาคเรียนที่ 1 | 2 ครั้งๆ ละ 1 ชั่วโมง |
| 7-8 ปี   | สัปดาห์ที่ 7 ของภาคเรียนที่ 1 | 2 ครั้งๆ ละ 1 ชั่วโมง |

**ระยะที่ 2: ระยะปรับโครงสร้างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากการเก็บรวบรวมข้อมูลเบื้องต้นจากการสังเกตชั้นเรียน**

1. นำข้อมูลเบื้องต้นที่ได้จากการสังเกตชั้นเรียนมาปรับโครงสร้างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการศึกษาวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก สำหรับการศึกษาเชิงลึกในระยะที่ 3

2. นำประเด็นข้อมูลทั้งหมดมาทำการกำหนดรหัส ได้แก่ รายชื่อผู้ให้ข้อมูลหลัก ภูมิหลังของเด็ก รูปแบบของโจทย์ปัญหา ลักษณะของโจทย์ปัญหา ลำดับของโจทย์ปัญหา ระยะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ การดำเนินการแก้ปัญหา การวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป การสร้างข้อความคาดการณ์ การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กเพื่อใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

3. สร้างและหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงลึกในระยะที่ 3 โดยทำการทดลองและปรับเครื่องมือให้เหมาะสมเพื่อนำไปใช้ในการศึกษาเชิงลึกต่อไป

### เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัยเพื่อเก็บข้อมูลเชิงลึก ประกอบด้วย ชุดคำถาม แบบสัมภาษณ์ แบบบันทึกการสัมภาษณ์

3.1 ชุดคำถาม เป็นลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ข) เป็นชุดของโจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ จำนวน 8 ชุด โดยแยกเป็นชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-2) จำนวน 4 ชุด และชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3) จำนวน 4 ชุด เช่นเดียวกัน แต่ละชุดคำถามที่ 1-3 มีโจทย์ปัญหาใน 3 รูปแบบ คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ชุดคำถามที่ 1, 2 และ 3 จะต่างกันทางด้านลักษณะของปัญหา โดยชุดที่ 1 เป็นลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ชุดที่ 2 เป็นลักษณะของอัตรา/ราคา ชุดที่ 3 เป็นลักษณะของการเปรียบเทียบ สำหรับชุดที่ 4 จะมีเพียงปัญหาในรูปแบบของการคูณที่มีลักษณะเป็นผลคูณคาร์ทีเซียน (ดูตาราง 9) ชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี เป็นชุดเดียวกันเนื่องจากการถามเมื่อเด็กยังไม่เคยเรียนเรื่องการคูณและการหารมา เช่นเดียวกัน ส่วนชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี จะมีสถานการณ์ปัญหาที่เหมือนกับของเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี แต่จะต่างกันที่ขนาดของจำนวน โดยจำนวนที่นำมาคูณหรือหารจะมีขนาดเกินกว่าที่เด็กเคยเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ชุดคำถามสำหรับเด็กแต่ละช่วงอายุจึงมี 4 ชุด ทั้ง 4 ชุด รวมเป็นโจทย์ปัญหาทั้งหมด 49 ปัญหา ซึ่งโจทย์ปัญหาแรกในชุดคำถามเหล่านี้จะเรียกว่า **โจทย์ปัญหาเริ่มต้น** ตัวอย่างโจทย์ปัญหาสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี ดังตาราง 10

ชุดคำถามเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในการวิจัยนี้ โดยวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เด็กยังไม่ได้เรียนในห้องเรียนโดยตรงหรือได้เรียนพื้นฐานที่เกี่ยวข้องมาแล้ว เด็กได้ใช้วิธีการคิดของตนเอง เพื่อจะดูวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กโดยตรง สำหรับปัญหาแต่ละปัญหาในชุดคำถามเอกสารที่ให้เด็กประกอบด้วยส่วนของโจทย์ปัญหา และส่วนเขียนตอบที่让孩子展示การทำงาน การคิดและคำตอบ ซึ่งโจทย์ปัญหา 1 ข้อ จะแยกเป็น 1 แผ่น ซึ่งเรียกว่า “กระดาษเขียนตอบ” นอกจากนี้ในการทำชุดคำถามจะมีวัสดุอุปกรณ์ที่เด็กอาจใช้ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ให้ เช่น ตัวนับ กระดุม ไม้จิ้มฟัน ตะเกียบ กระดาษ ดินสอ เป็นต้น

ตาราง 9 รูปแบบและลักษณะของปัญหาของชุดคำถาม 4 ชุดที่ใช้ในงานวิจัย สำหรับเด็ก  
ทุกช่วงอายุ

| ชุดคำถาม                                                            |                                          |                                              |                                               |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| ชุดคำถามที่ 1:<br>การจัดกลุ่ม/<br>การแบ่งส่วนที่เท่ากัน<br>(17 ข้อ) | ชุดคำถามที่ 2:<br>อัตรา/ราคา<br>(13 ข้อ) | ชุดคำถามที่ 3:<br>การเปรียบเทียบ<br>(15 ข้อ) | ชุดคำถามที่ 4:<br>ผลคูณคาร์ทีเซียน<br>(4 ข้อ) |
| -การคูณ (5 ข้อ)                                                     | -การคูณ (5 ข้อ)                          | -การคูณ (5 ข้อ)                              | -การคูณ (4 ข้อ)                               |
| -การหารในแบบของ<br>การวัด (6 ข้อ)                                   | -การหารในแบบของ<br>การวัด (4 ข้อ)        | -การหารในแบบของ<br>การวัด (5 ข้อ)            |                                               |
| -การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน (6 ข้อ)                              | -การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน (4 ข้อ)   | -การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน (5 ข้อ)       |                                               |

ตาราง 10 ตัวอย่างโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามการคูณและการหารจำนวนนับสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-2) จำแนกตามรูปแบบและลักษณะของปัญหา

| รูปแบบของปัญหา                | ชุดคำถาม : ลักษณะของปัญหา                                                                                |                                                                                                           |                                                                                                    |                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                               | ชุดคำถามที่ 1:<br>การจัดกลุ่ม/<br>การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                  | ชุดคำถามที่ 2:<br>อัตรา/ราคา                                                                              | ชุดคำถามที่ 3:<br>การเปรียบเทียบ                                                                   | ชุดคำถามที่ 4:<br>ผลคูณ<br>คาร์ที่เขียน                                                                                                                                                |
| การคูณ                        | [Y1] มีโต๊ะ 6 ตัว<br>แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่<br>4 คน มีเด็กทั้งหมด<br>กี่คน                               | [Y10] กุหลาบ<br>ราคากำละ 4 บาท<br>กุหลาบ 7 กำ<br>ราคากี่บาท                                               | [Y20] มานีมี<br>หนังสือ 4 เล่ม<br>มานะมีหนังสือ<br>เป็น 2 เท่าของ<br>มานี มานะมี<br>หนังสือกี่เล่ม | [Y35] มะลิขาย<br>ไอศกรีม 3 รส คือ<br>วานิลา กะทิสด และ<br>เผือก ลูกค้าเลือกโรย<br>หน้าได้อย่างใดอย่าง<br>หนึ่ง คือ ถั่วลิสง หรือ<br>ข้าวโพด มะลิจะขาย<br>ไอศกรีมได้ต่างๆ กัน<br>กี่แบบ |
|                               | $\square \times \square = \square \square$                                                               | $\square \times \square = \square \square$                                                                | $\square \times \square = \square$                                                                 | $3 \times 2$                                                                                                                                                                           |
| การหารในแบบของการวัด          | [Y4] โต๊ะเรียนแต่ละ<br>ตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน<br>ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8<br>คน จะมีโต๊ะกี่ตัว                 | [Y14] ขนมปังปัง<br>ราคาแผ่นละ 2<br>บาท ถ้ามีเงิน 8<br>บาท จะซื้อขนม<br>ปังปังได้กี่แผ่น                   | [Y25] เดือนมี<br>สมุด 6 เล่ม ดาว<br>มีสมุด 2 เล่ม<br>เดือนมีสมุดเป็น<br>กี่เท่าของดาว              |                                                                                                                                                                                        |
|                               | $\square \div \square = \square$                                                                         | $\square \div \square = \square$                                                                          | $\square \div \square = \square$                                                                   |                                                                                                                                                                                        |
| การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน | [Y7] เด็ก 9 คน จัด<br>ให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดย<br>ให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน<br>จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละ<br>กี่คน | [Y17] แดงซื้อ<br>ขนมมา 3 ชิ้น เป็น<br>เงิน 6 บาท ถ้า<br>ขนมทุกชิ้นราคา<br>เท่ากัน ขนมราคา<br>ชิ้นละเท่าไร | [Y30] สุดามี<br>ดินสอเป็น 2 เท่า<br>ของนิด นับ<br>ดินสอของสุดา<br>ได้ 8 แท่ง นิดมี<br>ดินสอกี่แท่ง |                                                                                                                                                                                        |
|                               | $\square \div \square = \square$                                                                         | $\square \div \square = \square$                                                                          | $\square \div \square = \square$                                                                   |                                                                                                                                                                                        |

3.2 แบบสัมภาษณ์ (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ง) เป็นแนวคำถามที่ใช้ประกอบการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก (In-depth Interview) เกี่ยวกับปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับตามโจทย์ปัญหาในชุดคำถาม ซึ่งเด็กทุกคนทำโจทย์ปัญหาเริ่มต้นเดียวกันในทุกชุดคำถาม ดังนั้นแนวคำถามที่ใช้ประกอบการสัมภาษณ์สำหรับโจทย์ปัญหาเริ่มต้นจะเหมือนกันทุกคน แต่ในการทำโจทย์ปัญหาถัดไปซึ่งขยายออกมาโดยเปลี่ยนขนาดของจำนวนหรือสถานการณ์ปัญหาขึ้นอยู่กับคำตอบของเด็กและอาจปรับเปลี่ยนตามความเหมาะสม นอกจากนี้ในแบบสัมภาษณ์จะมีแนวคำถามกว้างๆ ที่ใช้ถามเด็กเพื่อให้ทราบถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กจากการตอบโจทย์ปัญหาในชุดคำถาม ลักษณะแนวคำถามในแบบสัมภาษณ์จะแบ่งออกเป็นสองลักษณะคือ คำถามที่เจาะลึกถึงการคิดในขณะหาคำตอบเพื่อศึกษากระบวนการทางสมองในการทำชุดคำถาม กับ คำถามเพื่อขยายแนวคิดสำหรับโจทย์ปัญหาการคูณและการหารที่ปรับใหม่โดยเปลี่ยนตัวเลขหรือขนาดของจำนวนหรือสถานการณ์ใหม่เพื่อสำรวจและตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหานั้นที่เด็กใช้ ซึ่งแบบสัมภาษณ์นี้ใช้หลังจากที่เด็กตอบโจทย์ปัญหา

3.3 แบบบันทึกการสัมภาษณ์ (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ง) เป็นแบบบันทึกที่ใช้บันทึกผลจากการสัมภาษณ์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเชิงลึกในระยะที่ 3 ซึ่งแบบบันทึกการสัมภาษณ์นี้จะแยกเป็นข้อตามโจทย์ปัญหาในชุดคำถามสำหรับแต่ละบุคคล ในการบันทึกเป็นการบันทึกแบบตรวจสอบรายการ (Check List) ตามการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในระยะต่าง ๆ ได้แก่ ระยะเข้าสู่การคิดจะบันทึกว่าเด็กมี การทำความเข้าใจปัญหา การหาข้อมูลเพื่อหาคำตอบหรือไม่ ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด บันทึกว่าเด็กมีการดำเนินการแก้ปัญหานั้นแบบใด มีการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อความคาดการณ์ หรือไม่ ระยะทบทวนการคิด บันทึกว่าเด็กมีการควบคุมการรู้คิดหรือไม่บันทึกวิธีการให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดที่เด็กใช้ว่าใช้แบบใด และบันทึกคำตอบเพิ่มเติมประกอบกับการบันทึกวิธีคิด (ซึ่งแบบบันทึกการสัมภาษณ์นี้จะใช้เป็นแบบบันทึกการให้รหัสในภายหลังด้วย)

#### การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

##### 1. ชุดคำถาม มีขั้นตอนในการสร้างและหาคุณภาพดังนี้

1.1 ศึกษารูปแบบและลักษณะของโจทย์ปัญหาจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ สังเคราะห์รูปแบบและลักษณะของโจทย์ปัญหาจากเอกสารและงานวิจัยและจากข้อมูลเบื้องต้นที่ได้จากการสังเกตผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นในชั้นเรียน

1.2 ศึกษาแบบการคิด เพื่อใช้เป็นแนวทางในการกำหนดสถานการณ์ปัญหาให้เหมาะสมกับพัฒนาการของเด็ก

1.3 วิเคราะห์สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปีคณิตศาสตร์ จากการจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กรมวิชาการ. 2546: 11-13; 17-20; 27-30) เพื่อดูพื้นฐานความรู้ของเด็ก ดังตาราง 11

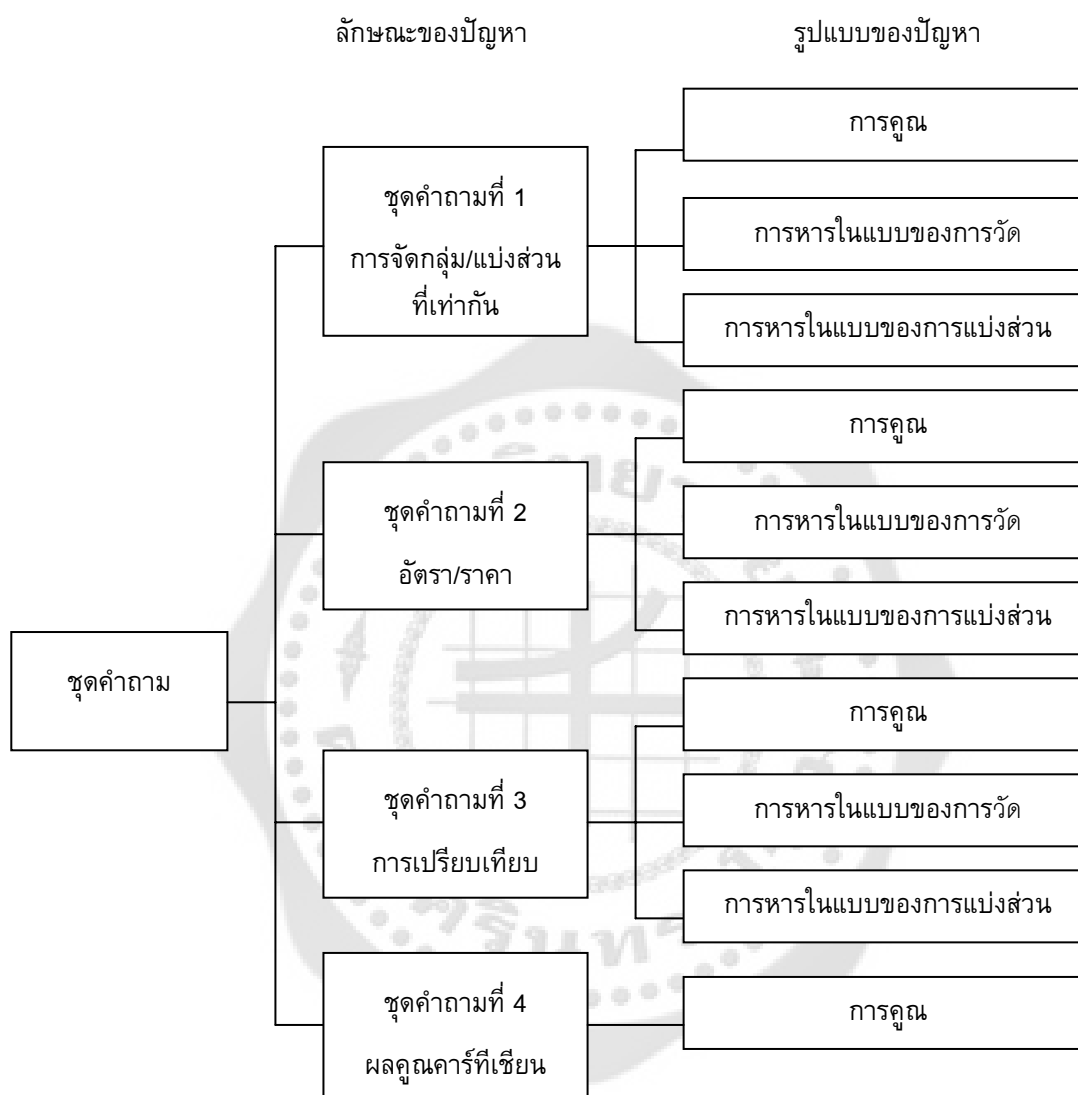
ตาราง 11 สารการเรียนรู้รายปี คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3 ตามหลักสูตรการศึกษา  
ขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544

| ช่วงชั้น (ช่วงอายุ)        |                                |                                |
|----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| ป.1 (อายุ 7-8 ปี)          | ป.2 (อายุ 8-9 ปี)              | ป.3 (อายุ 9-10 ปี)             |
| จำนวนนับ 1-100 และ 0       | จำนวนนับไม่เกิน 1,000 และ 0    | จำนวนนับไม่เกิน 1-100,000      |
| การนับเพิ่มทีละ 1, 2       | การนับเพิ่มทีละ 5, 10, 100     | และ 0                          |
| การนับลดทีละ 1             | การนับลดทีละ 2, 10, 100        | การนับเพิ่มทีละ 3, 4, 25, 50   |
| การบวกที่ผลบวกไม่เกิน 100  | การบวกที่ผลบวกไม่เกิน 1,000    | การนับลดทีละ 3, 4, 5, 25, 50   |
| การลบที่ตัวตั้งไม่เกิน 100 | การลบที่ตัวตั้งไม่เกิน 1,000   | การบวกที่ผลบวกไม่เกิน          |
| (ภาคเรียนที่ 1 การบวก-ลบ   | การคูณจำนวน 1 หลัก กับ 1       | 100,000                        |
| ผลลัพธ์ไม่เกิน 9)          | หลัก                           | การลบที่ตัวตั้งไม่เกิน 100,000 |
|                            | <b>ภาคเรียนที่ 2</b>           | <b>ภาคเรียนที่ 2</b>           |
|                            | การคูณจำนวน 1 หลัก กับ 2       | การคูณจำนวน 1 หลัก กับ         |
|                            | หลัก                           | จำนวนไม่เกิน 4 หลัก            |
|                            | การหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลัก | การคูณจำนวน 2 หลัก กับ 2       |
|                            | และตัวหาร 1 หลัก ผลหารมี 1     | หลัก                           |
|                            | หลัก                           | การหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 4 หลัก |
|                            |                                | และตัวหาร 1 หลัก               |

ที่มา: กรมวิชาการ. (2546). การจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้น  
ประถมศึกษาปีที่ ๑-๖ ตามหลักสูตรการศึกษาระดับขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๔๔. หน้า 11-12, 18,  
28.

1.4 สร้างชุดคำถาม ซึ่งมีทั้งหมด 8 ชุด (สำหรับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี จำนวน  
4 ชุดและสำหรับเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี อีก 4 ชุด) โดยชุดคำถาม 4 ชุด (ชุดคำถามที่ 1, 2, 3 และ  
4) สำหรับใช้กับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี ซึ่งการสร้างชุดคำถามในการวิจัยนี้จะคำนึงถึงขนาดของ  
จำนวนในโจทย์ปัญหา ได้แก่ โจทย์ปัญหาที่มีจำนวน 1 หลัก และ 2 หลักเท่านั้น ลักษณะของสิ่งของ  
ในโจทย์ปัญหา ได้แก่ สิ่งของที่เป็นรูปธรรม สัมผัสได้ สามารถเคลื่อนย้ายได้ ลงมือปฏิบัติจริงได้  
เช่น ดินสอ กับสิ่งของที่เป็นรูปธรรมสัมผัสได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนย้ายได้หรือลงมือปฏิบัติจริงไม่ได้  
เช่น ต้นมะเขือเทศ นั่นคือเด็กทุกคนจะต้องทำชุดคำถาม 4 ชุด และทุกชุดคำถามเด็กทุกคนจะตอบ  
โจทย์ปัญหาเริ่มต้นเหมือนกัน ส่วนการตอบโจทย์ปัญหาอื่นในแต่ละชุดจะทำที่ปัญหาขึ้นอยู่กับ

การตอบปัญหาของตัวเด็กเอง (ดูลำดับการตอบปัญหาในภาคผนวก ข) การออกแบบชุดคำถาม  
จำแนกตามลักษณะและรูปแบบของปัญหาดังเช่นภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 กรอบชุดคำถามในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

ส่วนชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี ชุดคำถามที่ 1, 2, 3 และ 4 สถานการณ์ใน  
โจทย์ปัญหาเป็นสถานการณ์เดียวกับของเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี เปลี่ยนแต่ขนาดของจำนวนโดยมี  
เฉพาะจำนวนที่มี 2 หลัก และ 3 หลัก

1.5 นำชุดคำถามที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญที่เป็นครุคณิตศาสตร์  
หรือภาษาไทยระดับประถมศึกษาจำนวน 2 คน พิจารณาความเหมาะสมของภาษาและ

ความเหมาะสมของโจทย์ปัญหากับความรู้และวัยของผู้เรียน ปรับปรุงแก้ไข และนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาจำนวน 3 คน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างของปัญหา โดยพิจารณาดัชนีความสอดคล้อง (IC) เพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปหาคุณภาพขั้นต่อไป โดยมีหลักเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

ให้ +1 สำหรับโจทย์ปัญหาที่แน่ใจว่าวัดได้ตรงตามรูปแบบและลักษณะของปัญหา

ให้ 0 สำหรับโจทย์ปัญหาที่ไม่แน่ใจว่าวัดได้ตรงตามรูปแบบและลักษณะของปัญหา

ให้ -1 สำหรับโจทย์ปัญหาที่แน่ใจว่าวัดได้ไม่ตรงตามรูปแบบและลักษณะของปัญหา

1.6 หลังจากผู้เชี่ยวชาญพิจารณาความสอดคล้องระหว่างโจทย์ปัญหากับรูปแบบและลักษณะของปัญหาแล้วปรากฏว่าโจทย์ปัญหาทุกปัญหามีค่า IC เฉลี่ยเท่ากับ 1 ยกเว้นปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของอัตรา/ราคา เพียงปัญหาเดียวเท่านั้นที่มีค่า IC เฉลี่ยเท่ากับ 0.67 ซึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงภาษาในโจทย์ปัญหาใหม่ตามที่คุณเชี่ยวชาญเสนอแนะ และนำไปใช้เป็นคำถามเพื่อขยายแนวคิดของเด็ก นำโจทย์ปัญหาทั้งหมดไปทดลองใช้กับนักเรียนช่วงชั้นที่ 1 (ป.1.-ป.3) ที่มีอายุในช่วง 7-10 ปี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ของโรงเรียนสวัสดิวิทยา ที่ไม่ใช่ผู้ให้ข้อมูลเบื้องต้นและผู้ให้ข้อมูลหลักแบบ 1:1 ระดับชั้นละ 1 คน เพื่อดูความเข้าใจในภาษา ทำการปรับแก้ และนำไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มเล็กประมาณระดับชั้นละ 3 คน เพื่อตรวจสอบประเด็นที่ได้แก้ไข ความยากง่ายของโจทย์ปัญหาและภาษา เวลาที่ใช้ในการทำโจทย์ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบวิธีการปฏิบัติเพื่อนำไปวางแผนในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

1.7 ปรับปรุงชุดคำถามเพื่อนำไปทดลองใช้กับผู้ให้ข้อมูลหลักต่อไป

1.8 จัดเตรียมวัสดุอุปกรณ์ที่让孩子ใช้ประกอบการคิดสำหรับโจทย์

ปัญหาแต่ละปัญหาในชุดคำถาม

2. แบบสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ มีขั้นตอนในการสร้างและหาคุณภาพดังนี้

2.1 ศึกษาโจทย์ปัญหาจากชุดคำถามที่ผ่านการหาคุณภาพแล้วอย่างละเอียดเพื่อสร้างประเด็นหรือข้อคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ให้สอดคล้องกับโจทย์ปัญหาแต่ละปัญหา

2.2 สร้างแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างและแบบบันทึกการสัมภาษณ์ ซึ่งแบบสัมภาษณ์มีประเด็นที่จะถาม (แนวคำถาม) ชัดเจน เพื่อให้ทราบถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กจากการตอบปัญหาในชุดคำถาม

2.3 นำแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญชุดเดียวกับที่ตรวจสอบชุดคำถามตรวจสอบความเหมาะสม

2.4 หลังแก้ไขปรับปรุงให้มีความเหมาะสมแล้วนำแบบสัมภาษณ์และแบบ

บันทึกการสัมภาษณ์ไปใช้สัมภาษณ์กับนักเรียนที่ใช้ในการหาคุณภาพของชุดคำถามแบบ 1:1 ระดับชั้นละ 1 คน รวมจำนวน 3 คน

2.5 ปรับปรุงแบบสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์จากข้อบกพร่องที่พบ และจัดพิมพ์เป็นฉบับสมบูรณ์เพื่อนำไปใช้ในการเก็บข้อมูลเชิงลึกกับผู้ให้ข้อมูลหลัก

### ระยะที่ 3: ระยะเก็บข้อมูลเชิงลึก สังเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การเก็บข้อมูลเชิงลึกดำเนินการในภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2549 ตั้งแต่วันที่ 1 สิงหาคม ถึง 24 ตุลาคม 2549 และวันที่ 24 พฤศจิกายน ถึง วันที่ 13 ธันวาคม 2549 จากการตอบชุดคำถามและการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ก่อนดำเนินการเก็บข้อมูลเชิงลึก ผู้วิจัยทำความเข้าใจและสร้างความคุ้นเคยกับผู้ให้ข้อมูลหลักเพื่อชี้แจงพร้อมทั้งแนะนำและซักซ้อมความเข้าใจในการตอบชุดคำถามและการสัมภาษณ์ในวันเวลาในการเก็บข้อมูลเชิงลึก

2. จัดเด็กเป็น 3 กลุ่มตามช่วงอายุ กลุ่มละ 5 คน ดังนี้

ช่วงอายุ 7-8 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1)

ช่วงอายุ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2)

ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

3. การเก็บข้อมูลเชิงลึกเก็บจากเด็กทีละคนซึ่งผู้วิจัยให้ผู้ให้ข้อมูลหลักในแต่ละช่วงอายุตอบชุดคำถามในห้องที่แยกออกมาจากห้องเรียน ครั้งละหนึ่งข้อจาก 1 ชุดคำถาม โดยผู้วิจัยแจกเอกสารที่เป็นชุดคำถามแก่ผู้ให้ข้อมูลหลักทีละปัญหา หลังจากที่ผู้ให้ข้อมูลหลักแต่ละคนคิดโจทย์ปัญหาในแต่ละปัญหาเสร็จแล้วผู้วิจัยจะทำการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเป็นรายบุคคลทันที โดยในการสัมภาษณ์นี้เริ่มต้นจะให้เด็กพูดคุยเกี่ยวกับตัวเองและโจทย์ปัญหา ผู้วิจัยจะทำการถามเจาะลึกเพื่อศึกษาถึงกระบวนการคิดเพื่อหาแนวทางในการทำโจทย์ปัญหาในชุดคำถามและถามเพื่อขยายแนวคิดสำหรับโจทย์ปัญหาใหม่โดยเปลี่ยนตัวเลขหรือสถานการณ์ใหม่ ในขณะที่สัมภาษณ์จะมีวัสดุอุปกรณ์ต่างๆ วางไวบนโต๊ะ รวมทั้งกระดาษและดินสอ ผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถใช้วัสดุอุปกรณ์ต่างๆ ได้ตามต้องการ ถ้าผู้ให้ข้อมูลหลักไม่สามารถคิดได้หรือหยุดคิดนานพอสมควร ผู้วิจัย (ผู้สัมภาษณ์) จะถามคำถามเพื่อให้เข้าใจว่าเด็กคิดอย่างไรและดำเนินการคิดต่อไปได้ กระบวนการนี้จะถูกบันทึกไว้ที่บันทึกไว้ ใน 1 วัน ผู้วิจัยเก็บข้อมูลจากเด็ก 1 หรือ 2 คน ซึ่งคำถาม 1 ชุด จะใช้เวลาประมาณ 3 วัน (จำนวนโจทย์ปัญหาที่เด็กแต่ละคนทำจะไม่เท่ากันในแต่ละชุดคำถาม ขึ้นอยู่กับลำดับการตอบปัญหาของเด็กแต่ละคน)

ในช่วงอายุ 7-8 ปี ผู้วิจัยให้ผู้ให้ข้อมูลหลักอ่านโจทย์ปัญหาเอง ถ้าผู้ให้ข้อมูลหลักคนใดอ่านหนังสือไม่คล่อง ผู้วิจัยจะเป็นผู้อ่านโจทย์ปัญหาให้ฟัง ผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถขอให้อ่านซ้ำได้

จนกว่าจะเข้าใจปัญหา และผู้วิจัยซักถามเพื่อตรวจสอบความเข้าใจในปัญหา แล้วให้ผู้ให้ข้อมูลหลักหาคำตอบที่ละปัญหา ในการตอบปัญหาแต่ละปัญหาจะไม่จำกัดเวลาในการคิดของผู้ให้ข้อมูลหลัก เมื่อผู้ให้ข้อมูลหลักทำเสร็จแล้วจึงสัมภาษณ์ แผนดำเนินการและรายละเอียดการเก็บข้อมูลเชิงลึกในแต่ละช่วงอายุ ดังตาราง 12

ตาราง 12 การเก็บข้อมูลเชิงลึกในแต่ละช่วงอายุ

| สัปดาห์ที่ | วันที่ | ชุดคำถามที่ | เด็กคนที่ |
|------------|--------|-------------|-----------|
| 1          | 1      | 1           | 1, 2      |
|            | 2      | 1           | 3, 4      |
|            | 3      | 1           | 5         |
| 2          | 1      | 2           | 1, 2      |
|            | 2      | 2           | 3, 4      |
|            | 3      | 2           | 5         |
| 3          | 1      | 3           | 1, 2      |
|            | 2      | 3           | 3, 4      |
|            | 3      | 3           | 5         |
| 4          | 1      | 4           | 1, 2      |
|            | 2      | 4           | 3, 4      |
|            | 3      | 4           | 5         |

4. ในการสัมภาษณ์ทั้งหมดได้ทำการบันทึกวีดิทัศน์ไว้ ผู้สัมภาษณ์ (ผู้วิจัย) ให้รหัสจากการแสดงออกในการแก้ปัญหาของเด็กในแต่ละปัญหา ถ้าผู้สัมภาษณ์ไม่สามารถเข้าใจว่าเด็กทำอะไร ผู้สัมภาษณ์จะถามเพื่อให้เด็กอธิบายว่าเขาทำอะไรอยู่ สำหรับแต่ละปัญหาให้รหัสตามการคิดเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งจำแนกเป็นการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดที่เด็กใช้ตามโครงร่างกรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาในเบื้องต้น และยังให้รหัสตามคำตอบที่ตอบถูกหรือผิดของเด็กด้วย ส่วนการคิดของเด็กที่ไม่เป็นไปตามโครงร่างกรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ผู้สัมภาษณ์ได้ทำการบันทึกรายละเอียดที่เด็กแสดงออกไว้และดูจากวีดิทัศน์ที่บันทึกไว้ประกอบการพิจารณาว่าเด็กพูดอะไร

#### 5. วิเคราะห์ข้อมูล

หลังจากสัมภาษณ์เสร็จในแต่ละชุดคำถาม ผู้วิจัยนำวีดิทัศน์ไปให้ผู้วิเคราะห์ข้อมูลอีก 2 คน ทำการให้รหัสตามที่เห็นจากวีดิทัศน์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้ผู้ให้รหัส 3 คน ที่มีความรู้

ความเข้าใจในวิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งหนึ่งในสามนี้รวมผู้วิจัยเองด้วย ส่วนผู้ให้รหัสอีก 2 คน เป็นครูสังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐานที่เชี่ยวชาญด้านการคิด 1 คน และนักคณิตศาสตร์ศึกษา 1 คน โดยก่อนการให้รหัสผู้วิจัยได้อธิบายเพื่อทำความเข้าใจถึงเรื่องที่ทำกรวิจัย คำถามในการวิจัย ตลอดจนบทบาท แนวคิด และการกำหนดรหัสที่ต้องใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลกับผู้ให้รหัสก่อน หลังจากนั้นผู้ให้รหัสแต่ละคนทำงานเป็นอิสระต่อกันโดยให้รหัสตามที่แต่ละคนพบจากวิดีโอ เมื่อพบว่าข้อมูลบางส่วนขาดหายไปหรือไม่ชัดเจน ผู้วิจัยได้กลับไปสัมภาษณ์ใหม่ในวันรุ่งขึ้นเสร็จแล้วจึงนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกัน คำนวณหาความน่าเชื่อถือของรหัสจากสูตรของไมล์และฮิวเบอร์แมน (Miles; & Huberman. 1994: 64)

$$\text{ความน่าเชื่อถือ} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสทั้งหมดมีความเห็นตรงกัน}}{\text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสมีความเห็นลงรอยกัน} + \text{จำนวนครั้งที่ผู้ให้รหัสมีความเห็นไม่ตรงกัน}}$$

ผลปรากฏว่ามีความเห็นตรงกัน (เหมือนกัน) ของรหัสที่ทุกคนให้มามากกว่าร้อยละ 90 จึงถือว่ารหัสที่ได้นั้นมีความน่าเชื่อถือสูง ส่วนในการให้รหัสเกี่ยวกับการสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็กพบว่ามีความไม่ชัดเจนในบางส่วน ผู้วิจัยและผู้ให้รหัสจึงย้อนกลับไปดูเทปที่บันทึกไว้ประกอบกับแบบบันทึกต่างๆ ซึ่งการเก็บข้อมูลเชิงลึกกับการวิเคราะห์ข้อมูลนั้นได้ดำเนินควบคู่กันไป นั่นคือหลังจากการสัมภาษณ์ในแต่ละชุดคำถามผู้ให้รหัสทั้ง 3 คน ได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลทันที สำหรับวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลผู้ให้รหัสทั้ง 3 คน ทำการศึกษาจากการตอบชุดคำถาม แบบบันทึก การสัมภาษณ์และจากวิดีโอเป็นหลัก โดยศึกษาจากสิ่งที่ปรากฏออกมาในการทำชุดคำถามและการตอบสัมภาษณ์ หลังจากนั้นผู้วิจัยนำรหัสต่างๆ มาจัดเป็นกลุ่มตามวิธีดำเนินการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด ทำการวิเคราะห์เชิงอุปนัย (Inductive Analysis) เพื่อหาความถี่ของวิธีดำเนินการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดที่ผู้ให้ข้อมูลหลักใช้มากหรือไม่ใช้เลย ซึ่งเป็นการนำส่วนที่มีลักษณะร่วมกันมากที่สุดจากข้อมูลออกมา

#### 6. สังเคราะห์ข้อมูล และสรุปผลการศึกษาวិธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

จากการวิเคราะห์ข้อมูลดังกล่าวทำให้รู้ว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับอย่างไร ในการแก้ปัญหาเด็กใช้การดำเนินการแก้ปัญหาแบบใดมากที่สุดและแสดงออกอย่างไร เด็กเข้าใจปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างไร เมื่อได้คำตอบแล้วเด็กมีการทบทวนการคิดของตนหรือไม่อย่างไร หรือในขณะที่แก้ปัญหาเมื่อเผชิญสภาวะที่ติดขัดเด็กมีการควบคุมการรู้คิดของตนหรือไม่อย่างไร ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของเด็กเป็นอย่างไรเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย นอกจากนั้นยังทราบถึงลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กตามธรรมชาติอีกด้วย

นำโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กมาปรับและเพิ่มเติมรายละเอียดโดยพิจารณาจากข้อเสนอดังกล่าว สังเคราะห์ข้อมูลและสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก

7. นำกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เสนอต่อประธานและกรรมการควบคุมปริญญาโท รวมทั้งครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในช่วงชั้นที่ 1 ของโรงเรียนสวัสดิศึกษา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความเชื่อถือได้ของข้อมูลและกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

8. นำเสนอการสังเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับแง่มุมแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์และสรุปข้อคิดที่ได้จากผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์



## บทที่ 4

### วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหาร

ในการวิจัยเรื่อง วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและวิเคราะห์วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ว่าเป็นอย่างไร งานวิจัยนี้จึงให้ความสนใจต่อการทำความเข้าใจว่าเด็กคิดอย่างไร โดยมุ่งตอบคำถามวิจัย 2 ข้อ คือ 1) เมื่อเสนอโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติได้หรือไม่ อย่างไร มีวิธีการแก้ปัญหา ลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างไร 2) เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองอย่างไร โดยในบทนี้ผู้วิจัยมุ่งศึกษาถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ว่าเป็นอย่างไร โดยรวบรวมข้อมูลต่างๆ และทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อตอบคำถามวิจัยข้อแรก เพื่อนำไปสู่การสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์และนำไปสู่การตอบคำถามวิจัยข้อที่สองในบทที่ 6 ต่อไป

การสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่การตอบคำถามวิจัย ผู้วิจัยและผู้ให้รหัสอีก 2 ท่าน ได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากการตอบชุดคำถาม แบบบันทึกการสัมภาษณ์ และจากวิดีโอเป็นหลัก โดยศึกษาจากสิ่งที่ปรากฏออกมาในการทำชุดคำถามและการตอบสัมภาษณ์ หลังจากนั้นผู้วิจัยนำรหัสต่างๆ มาจัดเป็นกลุ่มตามการคิดเชิงคณิตศาสตร์ใน 3 ด้าน คือ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 ระยะเข้าสู่การคิด ระยะที่ 2 ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด และระยะที่ 3 ระยะทบทวนการคิด ทำการวิเคราะห์เชิงอุปนัยในแง่ของวิธีการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดที่เด็กใช้มากหรือไม่ใช้เลย

การนำเสนอผลในบทนี้แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหา การคูณและการหารจำนวนนับ ส่วนที่ 2 การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก ส่วนที่ 3 กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

## 1. ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ

เพื่อศึกษาถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก ชุดคำถามในงานวิจัยนี้จึงเป็นเนื้อหาที่เด็กยังไม่ได้เรียนในห้องเรียนโดยตรง ได้เรียนเฉพาะพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเท่านั้น ชุดคำถามเป็นชุดของโจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ เด็กช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ไม่มีความรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับเมื่อทำการเก็บข้อมูลเชิงลึกจึงใช้ชุดคำถามเดียวกัน ส่วนชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี มีสถานการณ์ปัญหาที่เหมือนกับของเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี แต่ต่างกันที่ขนาดของจำนวน โดยจำนวนที่นำมาคูณหรือหารจะมีขนาดเกินกว่าที่เด็กเคยเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ชุดคำถามจึงแยกเป็นชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-2) จำนวน 4 ชุด และชุดคำถามสำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3) จำนวน 4 ชุด เช่นเดียวกัน (ดูรายละเอียดของชุดคำถามจากภาคผนวก ข)

ในการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กนั้น เนื่องจากโจทย์ปัญหาในชุดคำถามเป็นเนื้อหาที่เด็กยังไม่เคยเรียนมาก่อน การที่เด็กสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องหรือดำเนินการแก้ปัญหาได้จึงเป็นสิ่งบ่งบอกว่าเด็กน่าจะใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนเองในการแก้ปัญหา

เพื่อให้ทราบถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผู้ให้ข้อมูลหลัก การตอบคำถามในชุดคำถามแบ่งออกเป็นสองขั้นตอนคือ 1) การตอบโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามและทำการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเป็นรายบุคคลถึงการคิดในขณะหาคำตอบเพื่อศึกษากระบวนการทางสมองในการทำชุดคำถาม 2) การตอบโจทย์ปัญหาเพื่อขยายแนวคิดโดยเปลี่ยนตัวเลขหรือสถานการณ์ใหม่ ขึ้นอยู่กับการตอบคำถามของเด็กว่าตอบถูกหรือผิดและทำการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกเป็นรายบุคคลเพื่อดูว่าผู้ให้ข้อมูลหลักมีกระบวนการคิดอย่างไรเมื่อขนาดของจำนวนหรือสถานการณ์เปลี่ยนไป สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้หรือไม่ (ลำดับของโจทย์ปัญหาดังแสดงในภาคผนวก ข)

### 1.1 ความสามารถในการใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ พิจารณาตามรูปแบบและลักษณะของโจทย์ปัญหา

ตาราง 13 แสดงจำนวนเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ที่ตอบโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามถูกต้อง จำแนกตามช่วงอายุและรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

ตาราง 13 จำนวนเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ที่ตอบโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามของแต่ละลักษณะในแต่ละรูปแบบของปัญหาถูกต้อง จำแนกตามช่วงอายุและรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

| รูปแบบของปัญหา                      | จำนวนเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่ตอบ<br>โจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถามถูกต้อง (คน) |        |         |     |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|-----|
|                                     | 7-8 ปี                                                                             | 8-9 ปี | 9-10 ปี | รวม |
| <b>การคูณ</b>                       |                                                                                    |        |         |     |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | 2                                                                                  | 3      | 4       | 9   |
| - อัตรา/ราคา                        | 1                                                                                  | 5      | 4       | 10  |
| - การเปรียบเทียบ                    | 1                                                                                  | 1      | 1       | 3   |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                  | 0                                                                                  | 2      | 4       | 6   |
| รวม                                 | 4                                                                                  | 11     | 13      | 28  |
| <b>การหารในแบบของการวัด</b>         |                                                                                    |        |         |     |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | 5                                                                                  | 5      | 3       | 13  |
| - อัตรา/ราคา                        | 5                                                                                  | 5      | 3       | 13  |
| - การเปรียบเทียบ                    | 3                                                                                  | 4      | 1       | 8   |
| รวม                                 | 13                                                                                 | 14     | 7       | 34  |
| <b>การหารในแบบของการแบ่งส่วน</b>    |                                                                                    |        |         |     |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | 3                                                                                  | 5      | 3       | 11  |
| - อัตรา/ราคา                        | 2                                                                                  | 5      | 4       | 11  |
| - การเปรียบเทียบ                    | 0                                                                                  | 1      | 2       | 3   |
| รวม                                 | 5                                                                                  | 11     | 9       | 25  |
| รวม                                 | 22                                                                                 | 36     | 29      | 87  |

หมายเหตุ จำนวนเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักช่วงอายุละ 5 คน แต่ละคนทำโจทย์ปัญหาเริ่มต้นในชุดคำถาม 10 ข้อ

จากตาราง 13 จะเห็นว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี ตอบโจทย์ปัญหาในชุดคำถามได้ถูกต้องมากที่สุด ช่วงอายุที่ตอบโจทย์ปัญหาได้รองลงมาคือช่วงอายุ 9-10 ปี ในการสัมภาษณ์เมื่อผู้วิจัยเสนอโจทย์ปัญหาโดยเปลี่ยนขนาดของจำนวนหรือเปลี่ยนสถานการณ์แต่ขนาดของจำนวนยังคงเดิม พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี ยังคงตอบคำถามได้ถูกต้องสูงที่สุดเช่นเดียวกัน และเมื่อพิจารณาจากลักษณะและรูปแบบของปัญหาจะเห็นว่า เด็กส่วนมากทั้งสามช่วงอายุตอบ

คำถามในลักษณะของอัตรา/ราคาและการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันได้ถูกต้องสูงสุดทั้งในโจทย์ปัญหาการคูณและการหาร ส่วนปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบเด็กทั้งสามช่วงอายุจะตอบได้ถูกต้องน้อยมากโดยเฉพาะรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารในแบบของการแบ่งส่วน แต่ปัญหาการหารในแบบของการวัดนั้นเด็กที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ตอบคำถามได้ถูกต้องมากกว่าเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี สำหรับโจทย์ปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ทำได้ดีที่สุด รองลงมาคือช่วงอายุ 8-9 ปี และทำไม่ได้เลยในช่วงอายุ 7-8 ปี

นอกจากนี้ยังเป็นที่น่าสนใจว่า เด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี แก้ปัญหาการหารได้ดีกว่าปัญหาการคูณ ซึ่งตรงกันข้ามกับเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี ที่แก้ปัญหาการคูณได้ดีกว่าปัญหาการหาร

จากตาราง 13 พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี ตอบโจทย์ปัญหาในลักษณะอัตรา/ราคาได้ถูกต้องทุกคนทั้งการคูณและการหาร สำหรับโจทย์ปัญหาในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ทุกคนตอบถูกต้องในโจทย์ปัญหาการหาร ยกเว้นปัญหาการคูณมีเด็กที่ตอบผิดสองคนเนื่องจากมีปัญหาการอ่านหนังสือไม่คล่อง แต่ในการสัมภาษณ์เมื่อขยายปัญหาออกไปและผู้วิจัยอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังเด็กทั้งสองคนสามารถคิดปัญหาในลักษณะดังกล่าวได้ถูกต้อง

จากตาราง 13 สรุปในภาพรวมของการแสดงออกถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในแต่ละช่วงอายุได้กว้างๆ ดังนี้

1. เด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าเด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี และ 9-10 ปี ยกเว้นปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบและผลคูณคาร์ที่เขียนที่เด็กในช่วงอายุนี้ไม่เข้าใจและตอบปัญหาได้เพียงบางคนเท่านั้น แต่ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันและอัตรา/ราคาเด็กในช่วงอายุนี้สามารถตอบปัญหาได้ถูกต้องทุกคนและทุกปัญหา
2. เด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์รองจากเด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี ยกเว้นปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนที่เด็กในช่วงอายุนี้ทำได้ถูกต้องมากที่สุดโดยทำถูกต้องถึง 4 คน และ 2 ใน 4 ของเด็กที่ตอบปัญหาได้ถูกต้องนี้ยังสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้อีกด้วย ส่วนปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบเด็กในช่วงอายุนี้จะตอบคำถามไม่ค่อยได้ทั้งปัญหาการคูณและการหาร และยังตอบได้ถูกต้องน้อยกว่าเด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี สำหรับโจทย์ปัญหาการหารในแบบของการวัด
3. เด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้น้อยกว่าเด็กในช่วงอายุอื่น แม้ว่าเด็กในช่วงอายุนี้ไม่มีความรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับและประสบการณ์เกี่ยวกับจำนวนนับมีน้อยกว่าเด็กในช่วงอายุอื่นแต่สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์กับปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันและอัตรา/ราคาได้เป็นอย่างดีโดยสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องทุกคนและทุกปัญหา แต่เด็กในช่วงอายุนี้ไม่สามารถคิดได้เลยสำหรับปัญหาการคูณในลักษณะของผลคูณคาร์ที่เขียน และการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการเปรียบเทียบ

## 1.2 ภาพรวมในการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ

จากการวิเคราะห์เชิงอุปนัยโดยพิจารณาความสามารถในการตอบโจทย์ปัญหาดังกล่าว สามารถสรุปในภาพรวมได้ว่า เด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ เนื่องจากโจทย์ปัญหาที่เสนอให้เด็กทำเป็นปัญหาที่เด็กยังไม่ได้เรียนในชั้นเรียนหรือไม่คุ้นเคย แม้ว่าเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี จะเรียนเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับมาแล้วแต่จำนวนที่ปรากฏในโจทย์ปัญหาสำหรับเด็กในช่วงอายุนี้เป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักมากกว่าที่เคยเรียนมาแล้วในชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เด็กจึงต้องคิดวิธีดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบด้วยวิธีของตนเอง แต่ก็พบว่าเด็กทั้งสามช่วงอายุไม่มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการคูณและการหารในลักษณะการเปรียบเทียบ และยังพบว่าเด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ไม่มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการคูณในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียน ส่วนเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี ยังไม่สามารถนำหลักการเกี่ยวกับการคูณและการหารที่เรียนมาแล้วมาใช้แก้ปัญหาที่ขยายจำนวนให้มากขึ้นได้เท่าที่ควร

เมื่อพิจารณาความแตกต่างระหว่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ดำเนินการแก้ปัญหาโดยวิธีต่าง ๆ พบว่า การดำเนินการแก้ปัญหของเด็กขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาแต่ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา นั่นคือไม่ว่าปัญหาจะมีลักษณะเช่นไรเด็กก็ยังคงดำเนินการแก้ปัญหาในรูปแบบเดียวกัน โดยเด็กจะพิจารณาถึงสถานการณ์ต่าง ๆ ตามรูปแบบของปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหตามสถานการณ์ที่โจทย์กำหนด โดยใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การคูณ การใช้ภาพ หรือการนึกภาพในใจ ขึ้นอยู่กับวิถีธรรมชาติของแต่ละคน เช่นเด็กบางคนถนัดการใช้ตัวแบบก็จะนำตัวแบบต่าง ๆ เช่น เม็ดลูกคิด ภาตพลาสติก ตะเกียบ เป็นต้น มาใช้ช่วยคิดแก้ปัญหของตนเอง เด็กบางคนถนัดการใช้ภาพก็จะนำภาพหรือใช้การวาดภาพประกอบช่วยในการคิดของตนเอง หรือเด็กบางคนสามารถนึกภาพในใจได้โดยไม่ต้องอาศัยสิ่งที่เป็นรูปธรรมหรือกึ่งรูปธรรมช่วยในการคิดก็จะใช้การนับ การบวก/การลบ ในการคิดหาคำตอบได้ทันที การดำเนินการแก้ปัญหของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี แสดงในตาราง 14-17 (รายชื่อที่ปรากฏในงานวิจัยนี้เป็นชื่อสมมติทั้งสิ้น และเพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจผู้วิจัยได้ใช้ชื่อดอกไม้แทนชื่อผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี ชื่อผักแทนชื่อผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี และชื่อผลไม้แทนชื่อผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี)

ตาราง 14 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

| รูปแบบของปัญหา                      | การดำเนินการแก้ปัญหา |           |              |        |           |               |               |
|-------------------------------------|----------------------|-----------|--------------|--------|-----------|---------------|---------------|
|                                     | การใช้ตัวแบบ         | การนับ    | การบวก/การลบ | การคูณ | การใช้ภาพ | การนึกภาพในใจ | ให้รหัสไม่ได้ |
| <b>การคูณ</b>                       |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ ป              | อ         | บ อ จ ป      |        |           | บ ป           |               |
| - อัตรา/ราคา                        | อ ฟ                  | บ อ ฟ จ ป | อ จ ป        |        |           | ป             |               |
| - การเปรียบเทียบ                    | จ                    | ฟ         |              |        | ฟ         |               | บ ป           |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                  | จ                    |           | อ            |        |           | อ             | บ ฟ ป         |
| รวม                                 | 8                    | 7         | 8            | 0      | 1         | 4             | 5             |
| <b>การหารในแบบของการวัด</b>         |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ จ ป            | อ ฟ จ ป   | บ ป          |        |           | ป             |               |
| - อัตรา/ราคา                        | อ ฟ จ ป              | บ อ ฟ จ ป | ป            |        |           | บ ป           |               |
| - การเปรียบเทียบ                    | จ                    | อ ฟ จ ป   | อ ป          |        |           |               | บ             |
| รวม                                 | 10                   | 13        | 5            | 0      | 0         | 3             | 1             |
| <b>การหารในแบบของการแบ่งส่วน</b>    |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ จ ป            | อ ฟ ป     | อ ฟ จ        |        |           | ฟ ป           |               |
| - อัตรา/ราคา                        | จ ป                  | ป         |              |        |           | ป             | ฟ             |
| - การเปรียบเทียบ                    | อ จ                  | ป         | จ            |        |           |               | บ ฟ           |
| รวม                                 | 9                    | 5         | 4            | 0      | 0         | 3             | 3             |
| รวมทั้งสิ้น                         | 27                   | 25        | 17           | 0      | 1         | 10            | 9             |

หมายเหตุ บ แทน บานขึ้น อ แทน อัญชัน ฟ แทน เฟื่องฟ้า จ แทน จัน ป แทน ปีบ

จากตาราง 14 พบว่า เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี ส่วนใหญ่ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบ และการนับ มากที่สุด รองลงมาคือการบวก/การลบ ส่วนการใช้ภาพมีเด็กเพียงคนเดียวเท่านั้นที่ใช้และใช้เพียงปัญหาเดียวเท่านั้น

ตาราง 15 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

| รูปแบบของปัญหา                      | การดำเนินการแก้ปัญหา |           |              |        |           |               |               |
|-------------------------------------|----------------------|-----------|--------------|--------|-----------|---------------|---------------|
|                                     | การใช้ตัวแบบ         | การนับ    | การบวก/การลบ | การคูณ | การใช้ภาพ | การนึกภาพในใจ | ให้รหัสไม่ได้ |
| <b>การคูณ</b>                       |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | ต ค                  | ก ร ผ ต ค | ก ผ          | ก      | ก         | ผ             |               |
| - อัตรา/ราคา                        | ผ ต ค                | ร ผ ต ค   | ก ค          |        | ก         | ร             |               |
| - การเปรียบเทียบ                    | ค                    |           | ก ผ ต ค      |        |           | ผ             | ร             |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                  |                      | ต ค       | ก ค          |        |           |               | ร             |
| รวม                                 | 6                    | 11        | 10           | 1      | 2         | 3             | 2             |
| <b>การหารในแบบของการวัด</b>         |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ก            |        | ก         | ร             |               |
| - อัตรา/ราคา                        | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ก            |        | ก         | ก ร           |               |
| - การเปรียบเทียบ                    |                      | ก ร ผ ค   | ก ร ต        |        |           |               |               |
| รวม                                 | 6                    | 14        | 5            | 0      | 2         | 3             | 0             |
| <b>การหารในแบบของการแบ่งส่วน</b>    |                      |           |              |        |           |               |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ผ            |        | ก ผ       | ร ผ           |               |
| - อัตรา/ราคา                        | ผ                    | ก ร ผ ต ค | ก            |        | ก ค       | ร ผ           |               |
| - การเปรียบเทียบ                    |                      | ต ค       | ร            |        |           |               | ก ผ           |
| รวม                                 | 4                    | 12        | 3            | 0      | 4         | 4             | 2             |
| รวมทั้งสิ้น                         | 16                   | 37        | 18           | 1      | 8         | 10            | 4             |

หมายเหตุ ก แทน กะหล่ำ ร แทน มะระ ผ แทน ผักกาด ต แทน แตงกวา ค แทน คะนํ้า

จากตาราง 15 พบว่า เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนับมากที่สุด รองลงมาคือการบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบ และยังปรากฏว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุนี้อาศัยภาพในการดำเนินการแก้ปัญหามากกว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุอื่น ส่วนการนึกภาพในใจจะใช้มากเท่ากับผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี

ตาราง 16 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

| รูปแบบของปัญหา                          | การดำเนินการแก้ปัญหา |           |                  |        |           |                   | ให้รหัสไม่ได้ |
|-----------------------------------------|----------------------|-----------|------------------|--------|-----------|-------------------|---------------|
|                                         | การใช้<br>ตัวแบบ     | การนับ    | การบวก/<br>การลบ | การคูณ | การใช้ภาพ | การนึกภาพ<br>ในใจ |               |
| การคูณ                                  |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | ช                    | ง ท ช พ   | ม ง ช พ          | พ      |           |                   |               |
| - อัตรา/ราคา                            | ท                    | ม ท       | ม ง ช            | พ      |           | ช                 |               |
| - การเปรียบเทียบ                        | พ                    | ม ท พ     | ง พ              |        | ม         |                   | ช             |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                      | ช                    | ม ง ท ช   | ช พ              | ม ท    | พ         | ง ท ช             |               |
| รวม                                     | 4                    | 13        | 11               | 4      | 2         | 4                 | 1             |
| การหารในแบบของ<br>การวัด                |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | ง                    | ม ง ท พ   | ม ง ช พ          |        | ม         |                   |               |
| - อัตรา/ราคา                            | ท ช                  | ง ท       | ม ง ช พ          |        | ม         | ง                 |               |
| - การเปรียบเทียบ                        |                      | ท         | ม ง              |        |           |                   | ช พ           |
| รวม                                     | 3                    | 7         | 10               | 0      | 2         | 1                 | 2             |
| การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน           |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | ม ง ท ช              | ม ง ท ช   | ช พ              |        |           |                   |               |
| - อัตรา/ราคา                            | ง ท ช                | ม ง ท ช พ | ม ง ช            |        | ม         | ม ท ช             |               |
| - การเปรียบเทียบ                        | ช                    | ท         | ม ง ช พ          |        |           |                   |               |
| รวม                                     | 8                    | 10        | 9                | 0      | 1         | 3                 | 0             |
| รวมทั้งสิ้น                             | 15                   | 30        | 30               | 4      | 5         | 8                 | 3             |

หมายเหตุ ม แทน มะปราง ง แทน องุ่น ท แทน ทูเรียน ช แทน ชมพู พ แทน พุทรา

จากตาราง 16 พบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี มีวิธีดำเนินการแก้ปัญหาคล้ายเด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี โดยใช้การนับและการบวก/การลบมากที่สุดพอๆ กัน และมีการใช้ตัวแบบรองลงมาซึ่งน้อยกว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี ส่วนการดำเนินการแก้ปัญหาที่เหลือจะใช้น้อยมาก เป็นที่น่าสังเกตว่าถึงแม้ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุนี้อาจได้เรียนการคูณและการหารมาบ้างแล้ว แต่พบว่าการคูณมีเด็กเพียงสองคนเท่านั้นที่ใช้และพบเฉพาะปัญหาการคูณในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียนเท่านั้น ส่วนเด็กคนที่สามถึงแม้จะใช้การคูณแต่เป็นการใช้ที่ขาดความเข้าใจ

ตาราง 17 การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหาการดูแลและการหารจำนวนนับที่ใช้ในงานวิจัย

| รูปแบบของปัญหา                          | การดำเนินการแก้ปัญหา |           |                  |        |           |                   | ให้รหัสไม่ได้ |
|-----------------------------------------|----------------------|-----------|------------------|--------|-----------|-------------------|---------------|
|                                         | การใช้<br>ตัวแบบ     | การนับ    | การบวก/<br>การลบ | การคูณ | การใช้ภาพ | การนึกภาพ<br>ในใจ |               |
| การคูณ                                  |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ ป              | อ         | บ อ จ ป          | -      | -         | บ ป               | -             |
|                                         | ด ค                  | ก ร ผ ต ค | ก ผ              | ก      | ก         | ผ                 | -             |
|                                         | ช                    | ง ท ช พ   | ม ง ช พ          | พ      | -         | -                 | -             |
| - อัตรา/ราคา                            | อ ฟ                  | บ อ ฟ จ ป | อ จ ป            | -      | -         | ป                 | -             |
|                                         | ผ ต ค                | ร ผ ต ค   | ก ค              | -      | ก         | ร                 | -             |
|                                         | ท                    | ม ท       | ม ง ช            | พ      | -         | ช                 | -             |
| - การเปรียบเทียบ                        | จ                    | ฟ         | -                | -      | ฟ         | -                 | บ ป           |
|                                         | ค                    | -         | ก ผ ต ค          | -      | -         | ผ                 | ร             |
|                                         | พ                    | ม ท พ     | ง พ              | -      | ม         | -                 | ช             |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                      | จ                    | -         | อ                | -      | -         | อ                 | บ ฟ ป         |
|                                         | -                    | ด ค       | ก ค              | -      | -         | -                 | ร             |
|                                         | ช                    | ม ง ท ช   | ช พ              | ม ท    | พ         | ง ท ช             | -             |
| การหารในแบบของ<br>การวัด                |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ จ ป            | อ ฟ จ ป   | บ ป              | -      | -         | ป                 | -             |
|                                         | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ก                | -      | ก         | ร                 | -             |
|                                         | ง                    | ม ง ท พ   | ม ง ช พ          | -      | ม         | -                 | -             |
| - อัตรา/ราคา                            | อ ฟ จ ป              | บ อ ฟ จ ป | ป                | -      | -         | บ ป               | -             |
|                                         | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ก                | -      | ก         | ก ร               | -             |
|                                         | ท ช                  | ง ท       | ม ง ช พ          | -      | ม         | ง                 | -             |
| - การเปรียบเทียบ                        | จ                    | อ ฟ จ ป   | อ ป              | -      | -         | -                 | บ             |
|                                         | -                    | ก ร ผ ค   | ก ร ต            | -      | -         | -                 | -             |
|                                         | -                    | ท         | ม ง              | -      | -         | -                 | ช พ           |
| การหารในแบบของ<br>การแบ่งส่วน           |                      |           |                  |        |           |                   |               |
| - การจัดกลุ่ม/การแบ่ง<br>ส่วนที่เท่ากัน | บ อ ฟ จ ป            | อ ฟ ป     | อ ฟ จ            | -      | -         | ฟ ป               | -             |
|                                         | ผ ต ค                | ก ร ผ ต ค | ผ                | -      | ก ผ       | ร ผ               | -             |
|                                         | ม ง ท ช              | ม ง ท ช   | ช พ              | -      | -         | -                 | -             |
| - อัตรา/ราคา                            | จ ป                  | ป         | -                | -      | -         | ป                 | ฟ             |
|                                         | ผ                    | ก ร ผ ต ค | ก                | -      | ก ค       | ร ผ               | -             |
|                                         | ง ท ช                | ม ง ท ช พ | ม ง ช            | -      | ม         | ม ท ช             | -             |
| - การเปรียบเทียบ                        | อ จ                  | ป         | จ                | -      | -         | -                 | บ ฟ           |
|                                         | -                    | ด ค       | ร                | -      | -         | -                 | ก ผ           |
|                                         | ช                    | ท         | ม ง ช พ          | -      | -         | -                 | -             |
| รวม                                     | 58                   | 92        | 65               | 5      | 14        | 28                | 16            |

จากตาราง 17 พบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่มีอายุอยู่ในช่วง 7-10 ปี ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนับมากที่สุด รองลงมาคือ การบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบ ส่วนการใช้ภาพ ดำเนินการแก้ปัญหาไม่มากนัก แต่ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี ใช้การนับพอๆ กับการใช้ตัวแบบ ส่วนผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ใช้การนับและการบวก/การลบในการหาคำตอบมากที่สุด

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบของปัญหากับการดำเนินการแก้ปัญหาของผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี พบว่า

- 1) ปัญหาการคูณ ผู้ให้ข้อมูลหลักจะใช้การนับ และการบวก/การลบ ในการดำเนินการแก้ปัญหาที่ใกล้เคียงกัน (31 และ 29 ตามลำดับ) และใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหารองลงมา (18)
- 2) ปัญหาการหารในแบบของการวัด ผู้ให้ข้อมูลหลักใช้วิธีการนับมากที่สุด (34) รองลงมาคือ การบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาพอๆ กัน (20 และ 19 ตามลำดับ)
- 3) ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ผู้ให้ข้อมูลหลักชอบใช้การนับ การใช้ตัวแบบ และการบวก/การลบ (27, 21 และ 16 ตามลำดับ) ในการดำเนินการแก้ปัญหา

นั่นคือไม่ว่าจะพิจารณาในภาพรวมหรือพิจารณาตามรูปแบบของปัญหา ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี นิยมดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนับมากที่สุด ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่จำนวนมีขนาดใหญ่ ผู้ให้ข้อมูลหลักดังกล่าวมีความมั่นใจที่จะใช้การนับในการหาคำตอบมากกว่าวิธีอื่น นอกจากนี้ผู้ให้ข้อมูลหลักยังชอบใช้การบวก/การลบและการใช้ตัวแบบด้วยเช่นกัน

นอกจากนี้ยังพบอีกว่าในการดำเนินการแก้ปัญหาของผู้ให้ข้อมูลหลักนั้น เมื่อเด็กคนใดดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบแล้วเด็กคนนั้นมักจะไม่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพ ในทางกลับกันเด็กที่ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพก็ไม่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบเช่นเดียวกัน แต่ถ้าเด็กที่ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนึกภาพในใจมักจะใช้ควบคู่กับการนับ การบวก/การลบ แต่ถ้าเผชิญสถานการณ์ปัญหาที่จำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้น เด็กกลุ่มนี้มักใช้ตัวแบบเพื่อช่วยให้มองเห็นภาพชัดเจนขึ้น หรือช่วยในการบันทึกเมื่อต้องนับเลขหลายๆ จำนวน เช่น ปิ๊บที่มักใช้การนึกภาพในใจในการดำเนินการแก้ปัญหา โดยเฉพาะปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ซึ่งปิ๊บบอกว่ายากกว่าข้อที่แล้ว (ที่เป็นการหารจำนวนหนึ่งหลักกับหนึ่งหลัก) แต่เมื่อผู้วิจัยเสนอโจทย์ปัญหาที่ขนาดของจำนวนเพิ่มมากขึ้นจากโจทย์ปัญหาเริ่มต้นโดยเปลี่ยนเป็นการหารจำนวนสองหลักด้วยจำนวนที่มีหลักเดียวปิ๊บจะใช้ตัวแบบในการดำเนินการแก้ปัญหาแทน ดังแสดงในภาพประกอบ 11

แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาโดยการลองผิดลองถูก

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา

ปัญหา : สีดากับปลากระบอกได้ 8 ตัว นำไปขายในราคาเท่ากัน ได้เงินมา 40 บาท สีดากับปลากระบอกไปตัวละกี่บาท

การคิดของปีบ: นับถาดพลาสติกมา 8 อัน และเม็ดลูกคิดมา 40 เม็ด ใส่ลงในถาดทีละถาด ครั้งแรกใส่ถาดละ 8 เม็ด ก่อน พอถึงถาดที่ 4 นับถึง 32 เม็ด จึงคิดว่าเม็ดลูกคิดที่เหลือไม่พอแน่ จึงเริ่มใหม่โดยลดลงเหลือถาดละ 7, 6 และสุดท้ายเหลือ 5 เม็ด เมื่อใส่ครบจึงตอบตัวละ 5 บาท

ภาพประกอบ 11 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาในสถานการณ์ปัญหาที่จำนวนมีขนาดใหญ่

เมื่อผู้วิจัยทำการสัมภาษณ์เพื่อขยายแนวคิดของเด็กด้วยการเปลี่ยนตัวเลขหรือสถานการณ์ใหม่ การดำเนินการแก้ปัญหาคำนวณและการหารจำนวนนับที่เด็กเป็นผู้ให้ข้อมูลหลักนำมาใช้ในการคิดเชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของโจทย์ปัญหาคำนวณและการหารมีหลายวิธี เช่น การลงมือปฏิบัติจริงหรือการใช้สถานการณ์จำลอง การใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ เป็นต้น โดยเด็กอาจใช้วิธีเดียวหรือหลายวิธีในการแก้ปัญหาหรือมีวิธีอื่นๆ อีกตามที่เด็กใช้ นั่นคือเมื่อเสนอสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับให้ ผู้ให้ข้อมูลหลักที่มีอายุ 7-10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติที่เป็นวิถีทางของตนเอง โดยในการแสดงการคิดนั้นผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถแสดงออกถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ทั้งที่ได้คำตอบถูกต้องและไม่ถูกต้องแต่อยู่บนพื้นฐานการคิดเชิงคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น โดยการดำเนินการแก้ปัญหานั้นเด็กอาจใช้ตัวแบบ ใช้การนับ การบวก/การลบ ใช้การคูณ ใช้ภาพ หรือใช้การนึกภาพในใจ ช่วยคิดแก้ปัญหา และยังสามารถให้เหตุผลและนำเสนอตัวแทนความคิดของตนได้อย่างชัดเจน

### 1.3 การตอบโจทย์ปัญหาที่ไม่สามารถให้รหัสได้

รูปแบบของปัญหาที่ไม่สามารถให้รหัสได้ เนื่องจากปัญหบางลักษณะผู้ให้ข้อมูลหลักไม่เข้าไปพัวพันในปัญหา หรือไม่มีระยะเข้าสู่การคิด ไม่เข้าใจในปัญหา จึงไม่สามารถแสดงวิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนออกมาได้ และพบว่าโจทย์ปัญหาที่ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี ไม่เข้าไปพัวพันในปัญหามากที่สุดเป็นปัญหาในลักษณะการเปรียบเทียบ รองลงมาเป็นปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

ปัญหาการคูณในลักษณะของการเปรียบเทียบ มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี จำนวน 2 คนและผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี จำนวน 1 คน ที่ไม่เข้าใจปัญหาลักษณะดังกล่าวและไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของการเปรียบเทียบ มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี เพียงคนเดียวเท่านั้นที่ไม่เข้าใจปัญหาดังกล่าวและไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์ปัญหา โดยบอกว่าไม่เข้าใจ ขอเปลี่ยนคำถาม

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการเปรียบเทียบ มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี และช่วงอายุ 8-9 ปี ช่วงอายุละ 2 คน ที่ไม่เข้าใจปัญหาลักษณะดังกล่าวและไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์ปัญหา

ปัญหาการคูณในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียน มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี จำนวน 3 คนและผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี จำนวน 1 คน ที่ไม่เข้าใจปัญหาลักษณะดังกล่าวและไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของอัตรา/ราคา มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี เพียงคนเดียวเท่านั้นที่ไม่เข้าใจปัญหาซึ่งพยายามคิดแต่ไม่สามารถคิดได้

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของอัตรา/ราคา มีผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี เพียงคนเดียวเท่านั้นที่ไม่เข้าใจปัญหาดังกล่าวและไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์ปัญหา โดยบอกว่าไม่เข้าใจ ขอเปลี่ยนคำถาม

นอกจากนี้ยังพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี ตัดสินใจไม่เข้าไปพัวพันในปัญหามากที่สุด ส่วนผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ตัดสินใจไม่เข้าไปพัวพันในปัญหาน้อยที่สุด

ในทางกลับกันพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี ตัดสินใจเข้าไปพัวพันในปัญหาน้อยที่สุด ส่วนผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ตัดสินใจเข้าไปพัวพันในปัญหามากที่สุด

## 2. การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก

### 2.1 การแก้ปัญหาของเด็ก

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอถึงการแก้ปัญหาของเด็กว่า เมื่อเด็กตัดสินใจเข้าสู่สถานการณ์ปัญหาตามที่กล่าวถึงในแบบจำลองพฤติกรรมของมาร์ซาโน เด็กมีการแสดงถึงการเข้าใจปัญหาหรือมีการหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามซึ่งถือเป็นระยะเข้าสู่การคิดหรือไม่ รูปแบบของปัญหาในลักษณะใดที่เด็กสนใจและไม่สนใจที่จะเข้าไปพัวพัน เมื่อเข้าสู่ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด เด็กดำเนินการแก้ปัญหาอย่างไร ใช้การลงมือปฏิบัติจริง/การใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การคูณ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ หรือลักษณะอื่นๆ ตามที่เด็กแสดง และในการแก้ปัญหาเด็กมีการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไปและการสร้างข้อความคาดการณ์หรือไม่ อย่างไร นอกจากนี้ยังนำเสนอผลการวิเคราะห์ว่าเด็กมีการตรวจสอบการแก้ปัญหาหรือการควบคุมการรู้คิดของตนหรือไม่อย่างไร โดยผู้วิจัยได้นำเสนอความถี่ของวิธีดำเนินการแก้ปัญหา ซึ่งนำส่วนที่มีลักษณะร่วมกันมากที่สุดจากข้อมูลออกมา และนำเสนอการแก้ปัญหาของเด็กออกเป็น 3 ระยะ คือ

### 2.1.1 ระยะเข้าสู่การคิด

ในระยะนี้ผู้วิจัยศึกษาว่ารูปแบบของปัญหาในลักษณะใดที่เด็กสนใจและไม่สนใจที่จะเข้าไปพัวพัน และเมื่อเด็กตัดสินใจเข้าสู่สถานการณ์ปัญหา เด็กมีระยะเข้าสู่การคิดโดยพยายามทำความเข้าใจปัญหา หาข้อมูลเพื่อตอบคำถามต่างๆ และหาข้อมูลเพื่อหาคำตอบหรือไม่ เด็กจะดูว่าตนรู้อะไรบ้างจากสิ่งที่โจทย์กำหนด โจทย์ต้องการอะไร และสามารถนำความรู้ใดมาใช้ในการแก้ปัญหาได้บ้าง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า ผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่จะตัดสินใจเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์ปัญหา ถึงแม้ว่าปัญหาจะค่อนข้างยากก็ตาม เช่นปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบทุกรูปแบบ “มานี้มีหนังสือ 4 เล่ม มานะมีหนังสือเป็น 2 เท่า ของมานี้ มานะมีหนังสือกี่เล่ม” เด็กจะไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” แต่จะพยายามคิดและแสดงการคิดออกมาให้เห็น โดยอาจนำตัวเลขในปัญหามาบวก หรือ ลบกัน มีเด็กเพียง 2 คน ในช่วงอายุ 7-8 ปี ที่เมื่ออ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจ จึงเขียนลงในกระดาษเขียนตอบทันทีว่า “ไม่เข้าใจ” แล้วขอเปลี่ยนคำถาม และยังพบเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี อีกหนึ่งคนเมื่อเผชิญปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการเปรียบเทียบ พยายามอ่านโจทย์แต่ไม่เข้าใจ จึงนั่งเฉยๆ และไม่พูดอะไร จนผู้สัมภาษณ์ถามว่าทำได้ไหม จึงส่ายหน้า

นอกจากนี้ยังพบว่าปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ในลักษณะของอัตรา/ราคา และการเปรียบเทียบ เป็นลักษณะปัญหาที่เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักไม่สนใจเข้าไปพัวพันมากที่สุด ซึ่งมีจำนวน 3 คน คือ บานชื่น เฟื่องฟ้า และพุทรา และยังมีปัญหาการคูณในลักษณะของผลคูณคาร์ทีเซียน ปัญหาการคูณในลักษณะของการเปรียบเทียบที่ผู้ให้ข้อมูลหลักไม่สนใจเข้าไปพัวพัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากปัญหาในลักษณะดังกล่าวค่อนข้างยาก มีคำบางคำที่ผู้ให้ข้อมูลหลักยังไม่เข้าใจ และเป็นปัญหาที่เด็กยังไม่คุ้นเคย เช่นคำว่า “เท่า” หรือแม้กระทั่งปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนที่ถามว่า “แดงซื้อขนมมา 3 ชิ้น เป็นเงิน 6 บาท ถ้าขนมทุกชิ้นราคาเท่ากัน ขนมราคาชิ้นละเท่าไร” เด็กอาจจะสับสนในการหาคำตอบ แต่ถ้าเป็นปัญหาการหารในแบบของการวัด จะถามว่า “ขนมปังปิ้งราคาแผ่นละ 2 บาท ถ้ามีเงิน 8 บาท จะซื้อขนมปังปิ้งได้กี่แผ่น” ซึ่งเด็กจะคุ้นเคยและสอดคล้องกับชีวิตจริงมากกว่า เพราะในชีวิตจริงหรือสถานการณ์ที่ครูถามในชั้นเรียนมักถามเพียงว่า จะซื้อได้จำนวนเท่าไร แต่ไม่ค่อยถามย้อนกลับดังปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน

ในการแก้ปัญหา เมื่ออยู่ในระยะเข้าสู่การคิด เด็กส่วนใหญ่เข้าใจปัญหา และทราบข้อมูลต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้เพื่อนำมาใช้ในการหาคำตอบ โดยดูจากเมื่อเด็กทุกคนอ่านสถานการณ์ปัญหาจบแล้ว จะหยุดคิดสักครู่แล้วดำเนินการแก้ปัญหาทันที มีเด็กเพียง 2 คน จากทั้งหมด 15 คน เท่านั้น (คือเฟื่องฟ้ากับพุทรา) ที่แสดงออกถึงระยะเข้าสู่การคิดไม่ชัดเจน โดยบางครั้งแสดงออกว่าเข้าใจปัญหาได้ดีแต่บางครั้งดูเหมือนว่าเด็กทั้งสองคนไม่เข้าใจปัญหาเลยหรือไม่สามารถแสดงการคิดได้ตรงตามสถานการณ์ในโจทย์ เช่น เฟื่องฟ้าเมื่ออ่านคำถามในชุดคำถามจบแล้วจะไม่สามารถแสดงการคิดของตนเองได้ จะทำหน้าหงายๆ แต่บ่อยครั้งที่หันไปเห็นเพื่อน

ใช้ตัวแบบแสดงการคิดตามสถานการณ์ในชุดคำถาม เพื่อฟ้าสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องทันทีในขณะที่เพื่อนยังนึกคำตอบไม่ได้ ส่วนเด็กอีกหนึ่งคน คือ บานชื่น จะไม่ค่อยเข้าใจปัญหาโดยเฉพาะปัญหาในลักษณะของอัตรา/ราคา เมื่อเผชิญโจทย์ปัญหาในลักษณะดังกล่าว บานชื่นมักตัดสินใจไม่เข้าไปพัวพันในปัญหาเลย โดยบอกว่า “ขอเปลี่ยนคำถาม” เช่นคำถามในชุดคำถามที่ 2 : ปัญหาการคูณ ในลักษณะของอัตรา/ราคา “กุหลาบราคากิโล 4 บาท กุหลาบ 7 กิโล ราคากี่บาท” หรือคำถามในชุดคำถามที่ 2 : ปัญหาการหารในแบบของการวัด ในลักษณะของอัตรา/ราคา “ขนมปังปังราคาแผ่นละ 2 บาท ถ้ามีเงิน 8 บาท จะซื้อขนมปังปังได้กี่แผ่น”

เมื่อพิจารณาภาพรวมของระยะเข้าสู่การคิดพบว่า เด็กทั้งสามช่วงอายุจะไม่ค่อยแตกต่างกันเท่าใด เนื่องจากเด็กส่วนใหญ่จะมีความเข้าใจในภาษาที่ดีและอ่านหนังสือได้คล่อง ยกเว้นปีบที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี มะระที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี และทุเรียนที่อยู่ในช่วงอายุ 9-10 ปี ที่อ่านหนังสือไม่คล่อง ผู้วิจัยต้องอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังทุกข้อ แต่เมื่อผู้วิจัยอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังแล้ว เด็กทั้งสามคนสามารถเข้าใจและจำสถานการณ์ปัญหาได้ดี เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักทั้ง 15 คน จะมีระยะเข้าสู่การคิดในด้านการแก้ปัญหาที่ดี ยกเว้น บานชื่นที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี ที่แสดงออกชัดเจนว่าไม่มีระยะเข้าสู่การคิดเพราะบางปัญหามันซับซ้อนจะสับสนว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้ หรือโจทย์ต้องการถามอะไร พอถึงขั้นดำเนินการแก้ปัญหามันซับซ้อนมันก็นำตัวเลขที่มีอยู่ในสถานการณ์ปัญหามามองกันเสมอ เช่น “มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน” บานชื่นตอบ 11 คน เมื่อถามว่า 11 มาจากไหน บานชื่นบอกว่า “มาจาก 6 บวก 4”

ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงว่าเด็กไม่เข้าใจปัญหา/ไม่มีข้อมูลเพื่อหาคำตอบ  
แสดงในภาพประกอบ 12

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน  
ปัญหา : โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว  
ผู้วิจัย : บานชื่นตอบเท่าไรคะ  
บานชื่น : 10 ค่ะ  
ผู้วิจัย : คิดอย่างไร  
บานชื่น : เอา 2 กับ 8 มาบวกกัน  
ผู้วิจัย : ทำไมถึงเอา 2 กับ 8 มาบวกกัน บานชื่นเข้าใจที่โจทย์ถามไหมคะ  
บานชื่น : 2 กับ 8 เอามาจากนี่ (ชี้ที่ตัวคำถาม)  
ผู้วิจัย : บานชื่นเข้าใจคำว่าโต๊ะแต่ละตัวไหม  
บานชื่น : (ส่ายหน้า)

ภาพประกอบ 12 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงว่าเด็กไม่มีระยะเข้าสู่การคิดในการแก้ปัญหา

เมื่อเสนอสถานการณ์ปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบ บานชื่นจะบอกว่าไม่เข้าใจ ขอเปลี่ยนคำถามได้ไหมคะ เมื่อผู้วิจัยถามว่าไม่เข้าใจตรงไหน บอกได้ไหม บานชื่นจะอมยิ้มแล้วส่ายหน้า ในขณะที่เด็กคนอื่นจะพยายามอ่านคำถามและพยายามทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา เมื่อไม่สามารถแก้ปัญหาได้และผู้วิจัยถามว่าทำไมจึงคิดไม่ได้ ทุกคนจะบอกว่ายาก และไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” ยกเว้นคะแนน ที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี คนเดียวที่เข้าใจคำว่า “เท่า” เมื่อผู้วิจัยถามว่าทำไมถึงเข้าใจ คะแนนจะบอกว่า “ตอนแรกก็ไม่เข้าใจ แต่พอคุณครูถามก็เข้าใจ และเคยได้ยินคุณแม่พูดถึง” เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนคำถามของรูปแบบปัญหาการคูณในลักษณะการเปรียบเทียบเป็นคำว่า “ครึ่งหนึ่ง” แทน เด็กบางคนในช่วงอายุ 7-8 ปี (เฟื่องฟ้า) 8-9 ปี (คะแนน) และ 9-10 ปี (องุ่น) จะเข้าใจ และสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้

ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงออกมาเมื่ออยู่ในระยะเข้าสู่การคิดในการแก้ปัญหา เด็กเข้าใจปัญหา/มีข้อมูลเพื่อหาคำตอบ แสดงในภาพประกอบ 13

ปัญหาการคูณ : อัตรา/ราคา

ปัญหา : กุหลาบราคากำละ 102 บาท กุหลาบ 5 กำ ราคากี่บาท

ผู้วิจัย : เข้าใจโจทย์ไหม

ทุเรียน : เข้าใจ

ผู้วิจัย : เข้าใจว่าอย่างไร

ทุเรียน : (พยายามอ่านโจทย์จากกระดาษเขียนตอบ)

ผู้วิจัย : โจทย์ข้อนี้ให้หาอะไร

ทุเรียน : หาว่าซื้อมา 5 กำ ต้องจ่ายเงินเท่าไร

ผู้วิจัย : เข้าใจคำว่าซื้อกุหลาบมาราคากำละ 102 บาทไหม

ทุเรียน : เข้าใจว่าซื้อมาเป็นเงิน 102 บาท

ผู้วิจัย : มีกุหลาบทั้งหมดกี่ดอก

ทุเรียน : ไม่รู้

ผู้วิจัย : จำเป็นต้องรู้จำนวนดอกกุหลาบหรือไม่

ทุเรียน : ไม่จำเป็น เพราะโจทย์ไม่ได้ถาม รู้แค่ 5 กำ ก็พอ

ผู้วิจัย : โจทย์ข้อนี้ให้หาอะไร

ทุเรียน : หาว่าซื้อมา 5 กำ ต้องจ่ายเงินเท่าไร

ผู้วิจัย : สามารถบอกวิธีการคิดหรือหาคำตอบได้ทันทีไหม

ทุเรียน : ได้ ใช้การบวก

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน  
 ปัญหา : เด็ก 9 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน  
 ผู้วิจัย : เข้าใจโจทย์ไหม  
 มະระ : เข้าใจ  
 ผู้วิจัย : เข้าใจว่าอย่างไร  
 มະระ : (พยายามอ่านโจทย์จากกระดาษเขียนตอบ)  
 ผู้วิจัย : รู้ไหมว่าโจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง  
 มະระ : มีโต๊ะ 3 โต๊ะ และเด็ก 9 คน  
 ผู้วิจัย : โจทย์ข้อนี้ให้หาอะไร  
 มະระ : มีเด็กนั่งโต๊ะละกี่คน

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา  
 ปัญหา : หนังสือ 80 หน้า ก้อยใช้เวลาอ่าน 10 วัน ถ้าก้อยอ่านหนังสือได้เท่ากันทุกวัน ใน 1 วัน ก้อยจะอ่านหนังสือได้กี่หน้า  
 ผู้วิจัย : โจทย์ข้อนี้เหมือนข้อก่อนไหม  
 มະปราง : เหมือน  
 ผู้วิจัย : เหมือนตรงไหน  
 มະปราง : คิดคล้ายกัน  
 ผู้วิจัย : แล้วเข้าใจโจทย์ไหม  
 มະปราง : เข้าใจ  
 ผู้วิจัย : เข้าใจว่าอย่างไร  
 มະปราง : (อ่านโจทย์จากกระดาษเขียนตอบ) 80 หน้า ใช้เวลาอ่าน 10 วัน  
 ผู้วิจัย : โจทย์ข้อนี้ให้หาอะไร  
 มະปราง : ถ้าก้อยอ่านหนังสือได้เท่ากันทุกวัน ใน 1 วัน ก้อยจะอ่านหนังสือได้กี่หน้า (อ่านโจทย์จากกระดาษเขียนตอบ)

ภาพประกอบ 13 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ที่แสดงว่าเด็กมีระยะเข้าสู่การคิดในการแก้ปัญหา

จากตัวอย่างทั้ง 3 จะเห็นว่า ในการแก้ปัญหาของเด็กนั้น เด็กจะมีระยะเข้าสู่การคิด และมีข้อมูลเพื่อใช้ในการตอบคำถามต่างๆ โดยเด็กจะทำความเข้าใจปัญหา ดูว่าตนรู้อะไรบ้างจากสิ่งที่โจทย์กำหนด โจทย์ต้องการอะไร และนำความรู้ใดมาใช้ในการแก้ปัญหาได้บ้าง สามารถบอกได้ว่า สิ่งใดจำเป็นหรือไม่จำเป็นในการนำมาใช้แก้ปัญหา (จากตัวอย่างการสัมภาษณ์ทุเรียนที่สามารถบอกได้ว่าไม่จำเป็นต้องรู้จำนวนดอกกุหลาบก็สามารถหาคำตอบได้)

### 2.1.2 ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด

ในระยะนี้ผู้วิจัยศึกษาและนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับการดำเนินการแก้ปัญหา การวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาจากวิธีทัศน์ ผลการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก และกระดาษเขียนตอบของผู้ให้ข้อมูลหลัก ด้านการดำเนินการแก้ปัญหาผู้วิจัยได้ศึกษาการแก้ปัญหาของเด็กโดยพิจารณาจากการดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ได้แก่ การลงมือปฏิบัติจริงโดยใช้ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ การคูณ การใช้ภาพ การนึกภาพในใจ หรือลักษณะอื่นๆ ตามที่เด็กแสดง และได้ศึกษาว่าเด็กมีการวิเคราะห์การสร้างกรณีทั่วไปและการสร้างข้อความคาดการณ์หรือไม่ อย่างไร

ต่อไปเป็นรายละเอียดและตัวอย่างการดำเนินการแก้ปัญหาในระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิดของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ในด้านต่างๆ

#### การใช้ตัวแบบ

การใช้ตัวแบบ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้ตัวแบบเป็นตัวแทนของสิ่งที่กล่าวถึงในโจทย์มาใช้ในการลงมือปฏิบัติจริง เพื่ออธิบายถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เช่น แบ่งกลุ่มตามที่โจทย์ระบุ ซึ่งตัวแบบนี้อาจเป็นของจริงที่จับต้องได้ หรือ ตัวนับ กระดุม ลูกคิด ไม้จิ้มฟัน ตะเกียบ เป็นต้น

การใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา กล่าวคือ

1. ปัญหาการคูณ เด็กจะสร้างกลุ่มโดยใช้ตัวแบบตามสถานการณ์ในโจทย์ก่อน แล้วจึงใช้ตัวแบบอีกสี่หนึ่งหรือตัวแบบอย่างอื่นใส่ในแต่ละกลุ่มตามที่โจทย์กำหนด และนับตัวแบบทั้งหมดเพื่อหาคำตอบ โดยการนับของเด็กนี้บางคนใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งจนครบ แต่บางคนอาจใช้การกะประมาณแล้วจึงเกลี่ยออกให้เท่าๆ กันตามโจทย์ปัญหา ดังแสดงในภาพประกอบ 14

ตัวอย่าง 1 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : มีโต๊ะ 11 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 12 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน



ผู้วิจัย: จะหาจำนวนเด็กทั้งหมดชมพูคิดอย่างไร

ชมพู : นำไม้ตะเกียบมา 11 ไม้

ผู้วิจัย: ทำไมต้องใช้ 11 ไม้ ไม้ตะเกียบแทนอะไร

ชมพู : ไม้หนึ่งไม้แทนคน มี 11 ไม้ก็ 11 คน (ชมพูพูดผิด จริงๆ แล้วใช้ไม้ตะเกียบแทนโต๊ะ)

ผู้วิจัย: ทำอย่างไรต่อ

ชมพู : นับเม็ดใส่ไม้ 12 เม็ด (นับเพิ่มทีละเม็ดจนครบ 12 เม็ด)

ผู้วิจัย: แล้วหาคำตอบได้อย่างไร

ชมพู : นับคำตอบที่ละไม้

ผู้วิจัย: ลองนับให้ครูดูสิ

ชมพู : 1, 2, 3, 4,... (นับต่อไปเรื่อยๆ ทีละไม้ จาก 1 จนถึง 12 ในไม้ที่หนึ่ง และนับต่อในไม้ที่สอง 13, 14, 15,... พอเริ่มนับมากขึ้นเรื่อยๆ ชมพูจะเริ่มสับสนในจำนวนที่ตัวเองนับ เพราะจำนวนมากขึ้นเรื่อยๆ)

ภาพประกอบ 14 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบแก้ปัญหาการคูณ

2. ปัญหาการหารในแบบของการวัด เด็กจะจัดตัวแบบทั้งหมดตามโจทย์ กำหนดเป็นกลุ่มๆ และนับจำนวนกลุ่มเพื่อหาคำตอบ ดังแสดงในภาพประกอบ 15

ตัวอย่าง 2 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา

ปัญหา : ขนมห้างปิ้งราคาแผ่นละ 2 บาท ถ้ามีเงิน 8 บาท จะซื้อขนมปังปิ้งได้กี่แผ่น



ผู้วิจัย : ตอนแรกฉันทำอะไรก่อน

ฉัน : ผมนับเม็ดมา 8 เม็ด และเอาไปใส่ถาดๆ ละ 2 เม็ด (นับเพิ่มทีละ 1 เม็ด)

ผู้วิจัย : ถาดแทนอะไรคะ

ฉัน : ถาดแทนขนมปัง

ผู้วิจัย : แล้วเม็ดสีแดงแทนอะไร

ฉัน : แทนเงินแผ่นละ 2 บาท

ผู้วิจัย : ซื้อขนมปังได้กี่แผ่น

ฉัน : 4 แผ่น นับจากถาด

ภาพประกอบ 15 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบแก้ปัญหาการหารในแบบของการวัด

3. ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน เด็กจะแบ่งตัวแบบตามที่โจทย์ กำหนดออกเป็นกลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมีตัวแบบจำนวนเท่าๆ กัน นับตัวแบบในหนึ่งกลุ่มเพื่อหาคำตอบ ดังแสดงในภาพประกอบ 16 แต่ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนนี้เด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี มักแสดงการปฏิบัติสับสนกับปัญหาการคูณหรือปัญหาการหารในแบบของการวัด หรือเมื่อลงมือปฏิบัติเสร็จแล้วจะหาคำตอบไม่ได้ หรือมักจะสับสนในขั้นตอนการคิดและการหาคำตอบ เช่น การคิดของบานชื่น เริ่มต้นนับถาดพลาสติกมา 3 ใบ แทนโต๊ะ 3 ตัว และตะเกียบ 9 อัน แทนเด็ก 9 คน แต่เวลาคิดบานชื่นจะวางตะเกียบทีละ 9 อัน ที่ถาดพลาสติกแต่ละใบ เมื่อหาคำตอบจึงนับจำนวนตะเกียบทั้งหมดที่อยู่ในถาดทั้งสาม ดังแสดงในภาพประกอบ 17

ตัวอย่าง 3 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : เด็ก 48 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 12 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน



ผู้วิจัย : อุ่นใช้ตัวช่วยไหม

อูน : ใช้...ใช้เม็ด (เม็ดลูกคิด)

ผู้วิจัย : ทำไมจึงใช้ตัวช่วย

อูน : ง่ายดี

ผู้วิจัย : จะหาจำนวนเด็กที่นั่งในแต่ละโต๊ะ คิดอย่างไร ลองเล่าให้ครูฟังสิ

อูน : นับเม็ด มา 48 เม็ด (นับเพิ่มทีละ 1)

ผู้วิจัย : เม็ดที่นับมาแทนอะไร

อูน : แทนคน 48 คน

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

อูน : จัดเม็ดออกเป็นกอง 12 กอง (โดยการวางเม็ดลูกคิดทีละเม็ดแยกออกเป็น 12 กอง แล้วจึงนับเพิ่มอีกทีละหนึ่งเม็ดเหมือนการแจกไฟ จนครบ 48 เม็ด)

ผู้วิจัย : ทำไมต้องจัดเป็น 12 กอง นำเลข 12 มาจากไหน

อูน : 12 มาจากโจทย์ ที่ให้นั่งโต๊ะ 12 ตัว

ผู้วิจัย : แล้วหาคำตอบอย่างไร

อูน : นับจำนวนเม็ดจากกองไหนก็ได้

ผู้วิจัย : ทำไม

อูน : เพราะแต่ละเม็ดแทนเด็ก 1 คน

ผู้วิจัย : แล้วตอบเท่าไร

อูน : 4 โต๊ะ

ผู้วิจัย : 4 โต๊ะหรือ

อูน : ไม่ใช่ 4 คน

ผู้วิจัย : ถ้าไม่ใช่ตัวช่วยจะคิดได้ไหม

อูน : ไม่ได้

ภาพประกอบ 16 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบ  
แก้ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน

ตัวอย่าง 4 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหา  
 ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน  
 ปัญหา : เด็ก 9 คน จัดให้หนึ่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้หนึ่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กหนึ่งโต๊ะละกี่คน



ผู้วิจัย : บานชื่นตอบเท่าไร

บานชื่น : 28

ผู้วิจัย : 28 บานชื่นคิดยังไงคะ

บานชื่น : นับรวมกัน (นับตะเกียบจากแต่ละกองโดยการนับเพิ่มทีละ 1)

ผู้วิจัย : นับรวมกัน แล้วคิดว่านับถูกไหม

บานชื่น : (อมยิ้ม)

ภาพประกอบ 17 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่สับสนในการใช้  
 ตัวแบบ

จากตัวอย่าง 1 และ 3 ชมพูและองุ่นได้เปลี่ยนการดำเนินการแก้ปัญหามาใช้ตัวแบบในการดำเนินการแก้ปัญหาเมื่อขนาดของจำนวนเปลี่ยนไปเป็นจำนวนสองหลักกับสองหลัก โดยก่อนหน้านี้เมื่อแก้ปัญหาในชุดคำถามที่เป็นโจทย์ปัญหาเริ่มต้นได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การบวก ทั้งนี้เนื่องมาจากโจทย์ปัญหาเริ่มต้นจำนวนมีขนาดใหญ่มาก (คือเป็นจำนวนที่มีสามหลัก) จึงไม่สะดวกแก่การใช้ตัวแบบ พอผู้วิจัยเสนอปัญหาที่ขนาดของจำนวนเป็นจำนวนสองหลักกับสองหลัก และเด็กในช่วงอายุนี้อย่างไม่ได้เรียนการคูณหรือการหารจำนวนสองหลักกับสองหลัก ทำให้เด็กมองไม่เห็นว่าจะใช้วิธีการบวก หรือการคูณ/การหารได้อย่างไร เด็กจึงใช้วิธีลงมือปฏิบัติจริงโดยใช้ตัวแบบช่วยในการแก้ปัญหาแทน จึงเห็นได้ว่าถึงแม้ผู้ให้ข้อมูลหลักจะยังไม่ได้เรียนเรื่องนี้มาแต่ผู้ให้ข้อมูลหลักก็มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนเอง

### การนับ

การนับ เป็นการแก้ปัญหาที่เด็กใช้การนับทีละหนึ่ง นับข้าม นับเพิ่ม/นับลดทีละเท่าๆ กัน ซึ่งอาจใช้การนับสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมด โดยใช้การวาดภาพแล้วนับหลังจากวาดภาพ การนับโดยใช้นิ้วมือ ซึ่งอาจนับจากหนึ่งจนถึงผลรวม โดยใช้นิ้วช่วยนับในสถานการณ์ที่แบ่งกลุ่มเท่าๆ กัน เช่น หนึ่ง สอง สาม สี่-หนึ่ง ห้า หก เจ็ด แปด-สอง เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง-สาม หรือ การนับโดยอาศัยจังหวะ ซึ่งเป็นการนับด้วยการเน้นคำที่แต่ละผลคูณตามขนาดของกลุ่ม เช่น หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง นอกจากนั้นอาจใช้การนับเป็นจังหวะ ประกอบกับการใช้นิ้วมือ

การนับเป็นการดำเนินการแก้ปัญหาที่ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี ใช้นามากที่สุด การใช้การนับในการดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กนั้นบางครั้งอาจใช้ควบคู่กับการใช้ตัวแบบ โดยเด็กที่ชอบใช้ตัวแบบมักใช้การนับช่วยในการหาคำตอบ และมักนับเพิ่มจากหนึ่งจนถึงผลรวม ดังตัวอย่าง 1 ในภาพประกอบ 18 ที่แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของอัญชันที่แสดงว่าอัญชันดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนับทีละหนึ่งหลังจากการใช้ตัวแบบช่วยให้มองเห็นภาพ นอกจากนี้เด็กยังใช้การนับข้าม นับเพิ่ม/นับลดทีละเท่าๆ กัน ดังตัวอย่าง 2 และ 3 ในภาพประกอบ 18 ที่แสดงว่าเฟื่องฟ้าและผักกาดใช้การนับข้ามทีละเท่าๆ กัน

ตัวอย่าง 1: แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่ง

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา

ปัญหา : ในเวลา 1 วัน แจ้วอ่านหนังสือได้ 9 หน้า ถ้าแจ้วอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 45 หน้า จะใช้เวลากี่วัน



การคิดของอัญชัน: อัญชันจะนับตะเกียบมาทีละ 1 อัน จนครบ 45 อัน แทนจำนวนหนังสือที่อ่านได้ทั้งหมด แล้วนับตะเกียบมาครั้งละ 9 อัน (โดยนับทีละ 1 อัน) วางแยกเป็นกองๆ ละ 9 อัน ตามโจทย์เหมือนกับการแจกไฟ หลังจากนั้นจะวางเม็ดลูกคิด 1 เม็ดลงในแต่ละกองจนครบทั้ง 5 กอง นับคำตอบจากเม็ดลูกคิดที่วางลงในแต่ละกองโดยการนับเพิ่มทีละหนึ่ง 1, 2, 3, 4, 5 (ในภาพอัญชันกำลังนับทวนว่าตะเกียบที่นับมาครบ 45 อันหรือไม่)

ตัวอย่าง 2 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนับข้ามโดยใช้นิ้ว

ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การเปรียบเทียบ

ปัญหา: เดือนมีสมุด 6 เล่ม ดาวมีสมุด 2 เล่ม เดือนมีสมุดเป็นกี่เท่าของดาว

การคิดของเฟื่องฟ้า: ตอนแรกเฟื่องฟ้าไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” พอผู้วิจัยถามว่า “ถ้าดาวซื้อสมุดครั้งละ 2 เล่ม ดาวต้องซื้อกี่ครั้งจึงจะมีสมุดเท่ากับเดือน” เฟื่องฟ้าจะใช้นิ้วช่วยนับ โดยนับว่า 1 ครั้ง 2 เล่ม 2 ครั้ง 4 เล่ม 3 ครั้ง 6 เล่ม จึงตอบว่าต้องซื้อ 3 ครั้ง



ตัวอย่าง 3 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนับข้ามทีละเท่าๆ กัน

ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การเปรียบเทียบ

ปัญหา: เดือนมีสมุด 6 เล่ม ดาวมีสมุด 2 เล่ม เดือนมีสมุดเป็นกี่เท่าของดาว

การคิดของผักกาด: ผักกาดไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” เช่นเดียวกับเฟื่องฟ้า ผู้วิจัยจึงเปลี่ยนคำถามเช่นเดียวกับเฟื่องฟ้าเป็น “ถ้าดาวซื้อสมุดครั้งละ 2 เล่ม ดาวต้องซื้อกี่ครั้งจึงจะมีสมุดเท่ากับเดือน” ผักกาดคิดสักระยะ จึงนับออกเสียงว่า “2, 4, 6” แล้วตอบว่า “3 ครั้ง ค่ะ”

ภาพประกอบ 18 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนับ

### การบวก/การลบ

การบวก/การลบ เป็นการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เด็กใช้การเพิ่มเข้าและหักออกครั้งละเท่าๆ กัน หรือการบวกซ้ำ การบวกในลักษณะทวีคูณ การลบซ้ำ การนับถอยหลังตามจังหวะ การนับข้ามไปข้างหน้า การบวกโดยการแบ่งครึ่ง การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก (Collapse Groups and Add)

ในการดำเนินการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของผู้ให้ข้อมูลหลักที่ใช้การบวก/การลบนั้นมักใช้การบวก/การลบควบคู่กับการใช้ตัวแบบและการนึกภาพในใจ เด็กที่ใช้การนึกภาพในใจมักนึกภาพของการบวกซ้ำ หรือการบวกในลักษณะทวีคูณ ส่วนเด็กที่ใช้ตัวแบบจะใช้การบวกซ้ำ/การลบซ้ำช่วยในการหาคำตอบหลังจากใช้ตัวแบบช่วยให้มองเห็นภาพแล้ว แต่ในช่วงแรกของการสัมภาษณ์ คือการตอบชุดคำถามที่ 1: ปัญหาการคูณ: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี มักใช้เฉพาะการบวก/การลบ ดำเนินการแก้ปัญหาย่อยๆ เพียงอย่างเดียว ทั้งนี้อาจเป็นเพราะขนาดของจำนวนในสถานการณ์ปัญหาค่อนข้างมาก คือเป็นจำนวนที่มี 3 หลัก จึงไม่สะดวกใน

การใช้ตัวแบบ เมื่อเปรียบเทียบในผู้ให้ข้อมูลหลักทั้งสามช่วงอายุพบว่า ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การบวก/การลบ มากกว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุอื่นอย่างเห็นได้ชัด ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุนี้มีทักษะการบวก/การลบสูงกว่าเด็กในช่วงอายุอื่น และจะเห็นว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุนี้รู้จักนำมโนทัศน์ในแง่ของการบวกซ้ำ/การลบซ้ำมาใช้ในการหาคำตอบ แต่ปรากฏว่าชมพูที่อยู่ในช่วงอายุนี้ชอบใช้การนับเช่นเดียวกับการบวก/การลบ ภาพประกอบ 19 ตัวอย่าง 1 แสดงตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของทุเรียน ที่ดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การบวก/การลบ เท่านั้น ส่วนภาพประกอบ 19 ตัวอย่าง 2 แสดงตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของมะปรางที่ใช้ตัวแบบควบคู่กับการใช้การบวก/การลบ (ทุเรียนและมะปรางอยู่ในช่วงอายุ 9-10 ปี) และภาพประกอบ 19 ตัวอย่าง 3 แสดงตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของปีบ ที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี ที่ใช้วิธีการยุบรวมกลุ่มและทำการบวก

ตัวอย่าง 1 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การบวกซ้ำโดยการนับข้ามไปข้างหน้ากับการลบซ้ำที่นับข้ามไปข้างหลัง

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : ได้เรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 6 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 180 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว

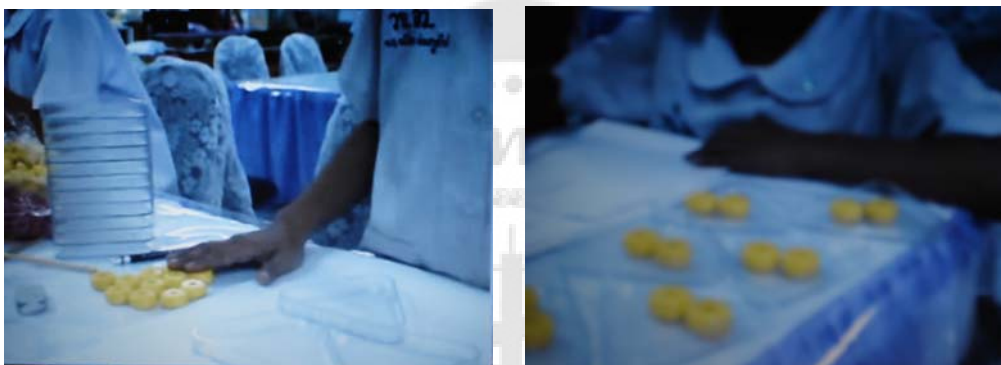
การคิดของทุเรียน : ครั้งแรกทุเรียนใช้การบวกเพิ่มครั้งละ 6 โดยเริ่มจาก 6 ก่อน และนับข้ามไปข้างหน้าทีละ 6 พอบวกไปจนถึง 152 คิดว่าไม่สามารถบวกลงตัวที่ 180 แน่นนอน จึงเปลี่ยนวิธีเป็นการลบ โดยเริ่มจาก 180 แล้วนับข้ามไปข้างหลังทีละ 6 ไปเรื่อยๆ และนับจำนวนที่นำมาลบกันเพื่อหาคำตอบ (โดยเริ่มนับจากจำนวนแรกคือ 180 นับเป็นหนึ่ง 174 นับเป็นสอง...) พอนับมาถึงจำนวนที่ 31 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 8 จึงตอบ 31 และบอกว่า 2 ไม่สามารถลบออกหกได้จึงไม่คิด

วิธีคิด  $16 \times 1215 \div 27 \div 27 \div 33 \div 39 \div 45 \div 50 \div 56 \div 62 \div 68 \div 74 \div 80$   
 $+ 86 \div 92 \div 98 \div 104 \div 110 \div 116 \div 122 \div 128 \div 134 \div 140 \div 146 \div 152$

180-474-169-163-154-149-143-137-131-125-119-113-107-  
 101-105-99-93-87-81-75-69-62-56-50-44-38-32-26  
 20-14-8-2

หมายเหตุ จะเห็นว่าวิธีการคิดของทุเรียนเป็นวิธีการที่ถูกต้อง แต่มีข้อผิดพลาดในการนับข้าม และยังพบว่าทุเรียนมีการควบคุมการรู้คิดที่ดี โดยแสดงให้เห็นว่าเมื่อแก้ปัญหามาได้ระยะหนึ่งเห็นว่าวิธีการของตนไม่ประสบความสำเร็จแน่ จึงเปลี่ยนวิธีการใหม่ทันทีโดยไม่ต้องคิดจนจบให้เสียเวลา

ตัวอย่าง 2 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของมะปรางที่ใช้การบวกซ้ำหลังการใช้ตัวแบบ  
 ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน  
 ปัญหา : เด็ก 120 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 6 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน  
 การคิดของมะปราง : ใช้เม็ดลูกคิด 1 เม็ด แทนเด็ก 10 คน เริ่มต้นมะปรางจะสับสนในสถานการณ์ปัญหา  
 โดยนำเม็ดลูกคิดวางเป็นกองๆ ละ 12 เม็ด 6 กอง แล้วนำ 12 บวกกับ 12 หกจำนวน จึงเห็นว่าไม่ถูก  
 เริ่มคิดใหม่ โดยนำเม็ดลูกคิดใส่ในถาดพลาสติกจนเต็มถาด (ซึ่งมะปรางรู้ว่าเมื่อใส่จนเต็มถาดจะมีจำนวน  
 เท่ากับ 10 เม็ด) และหยิบเม็ดลูกคิดมาเพิ่มอีก 2 เม็ด รวมเป็น 12 เม็ด (เท่ากับเด็ก 120 คน) หยิบเม็ดลูกคิด  
 ที่ละ 1 เม็ด วางเป็น 6 กองๆ ละ 1 เม็ด แล้วจึงใส่เพิ่มอีกกองละ 1 เม็ด และนับ 20, 40, 60, ..., 120  
 (เม็ดลูกคิด 2 เม็ด เท่ากับเด็ก 20 คน) นับคำตอบจากหนึ่งกองซึ่งมีเม็ดลูกคิด 2 เม็ด โดยนำ 10 บวก 10  
 จึงตอบมีเด็กนั่งโต๊ะละ 20 คน



ตัวอย่าง 3 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก  
 ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน  
 ปัญหา : มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน  
 การคิดของป๊อบ : ป๊อบจะใช้การยุบรวมกลุ่มแล้วจึงบวก โดยนำ “4 บวก 4 เป็น 8 และ 4 บวก 4 เป็น 8  
 รวมอีก 8 เป็น 16 16 บวก 8 เป็น 24 ตอบ 24 คน”

ภาพประกอบ 19 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การบวก/การลบ

### การคูณ

การคูณเป็นการใช้สูตรคูณในการหาคำตอบอย่างรวดเร็วโดยการจับคู่ของ  
 ผลคูณ และใช้การดำเนินการทางการคูณ โดยไม่มีการใช้นิ้วมือหรือการวาดภาพ

จากตาราง 17 พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักทั้งสามช่วงอายุไม่ค่อยใช้การคูณใน  
 การดำเนินการแก้ปัญหาต่างๆ ที่ผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปีได้เรียนเรื่องการคูณจำนวนที่มี 1  
 หลัก กับ 2 หลัก และการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 2 หลัก และตัวหาร 1 หลัก ผลหารมี 1 หลัก มาแล้ว  
 แสดงว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุดังกล่าวไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ในเรื่องหลักการหาผลคูณ/  
 ผลหารที่เรียนแล้วในชั้นเรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาคูณ/การหารได้เลย มีเพียงบางครั้งเท่านั้นที่  
 ผู้วิจัยถามว่าสามารถใช้การคูณหรือการหารได้ไหมผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุนี้นจึงบอกว่าสามารถใช้

การคูณได้ แต่ไม่สามารถหาผลคูณได้เพราะจำนวนมีค่ามาก แต่ถ้าเป็นการหารจะพบว่ามิชมพูเพียงคนเดียวเท่านั้นที่นำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์การหาร แต่บอกว่าหารไม่เป็น นั่นคือเด็กเข้าใจความหมายของการคูณ/การหารในแง่ของการบวกซ้ำ/การลบซ้ำแต่ไม่สามารถใช้หลักการที่เรียนมาแล้วในการหาผลคูณ/ผลหาร ส่วนพุทธาถึงแม้จะพบว่าดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การคูณกับปัญหาการคูณในลักษณะอัตรา/ราคา แต่ก็ไม่สามารถหาผลคูณได้อย่างถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดสถานการณ์ปัญหา “กุหลาบราคากิโล 102 บาท กุหลาบ 5 กิโล ราคากี่บาท” พุทธาใช้การตั้งคูณดังนี้

$$\begin{array}{r} 1 \\ 102 \\ \times \\ 5 \\ \hline 110 \end{array}$$

นอกจากนี้ยังพบว่ามิชมพูเรียนและมะปรางเท่านั้นที่สามารถใช้วิธีการคูณได้อย่างถูกต้องและเข้าใจเมื่อเผชิญสถานการณ์ปัญหาในลักษณะผลคูณครั้งที่เขียนมา 1-2 ปัญหา เรียนและมะปรางจึงทราบว่าสามารถใช้การคูณดำเนินการแก้ปัญหาในลักษณะผลคูณครั้งที่เขียนได้ สำหรับทุเรียนทราบว่าสามารถใช้การคูณได้เช่นกันแต่หาผลคูณผิดหรือหาคำตอบโดยใช้การคูณไม่ได้ ต้องใช้การบวกซ้ำแทนในบางปัญหา การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของทุเรียนและมะปรางที่ใช้การคูณในการดำเนินการแก้ปัญหาดังแสดงในตัวอย่าง 3 และ 4 ภาพประกอบ 24 หน้า 111-112

ส่วนกะหล่ำเป็นอีกคนหนึ่งที่พบการดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การคูณในรูปแบบของปัญหาการคูณในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน แต่ไม่สามารถหาผลคูณที่ถูกต้องได้ เช่นเดียวกับพุทธาที่ใช้การคูณในดำเนินการแก้ปัญหาคูณในลักษณะอัตรา/ราคา

### การใช้ภาพ

การใช้ภาพ เป็นการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพเพื่อช่วยให้เกิดจินตนาการและง่ายต่อการแก้ปัญหา อาจใช้ภาพของจริง ภาพที่เป็นตัวแทน เช่น ชีต วง รูปภาพและอื่นๆ

ตัวอย่างการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่แสดงว่าเด็กดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพ แสดงในภาพประกอบ 20 ตัวอย่าง 1 ซึ่งกะหล่ำมักใช้การวาดภาพช่วยให้เกิดความเข้าใจตามสถานการณ์ปัญหา เริ่มต้นกะหล่ำจะวาดภาพโต๊ะถูกต้องว่าต้องมี 4 ตัว แต่เวลาตอบคำถามครั้งแรกกะหล่ำไม่เข้าใจว่าจะตอบเท่าไรจึงนำจำนวนเด็ก 8 คน มาเป็นคำตอบ พอถามว่าโจทย์ถามอะไร เข้าใจที่โจทย์ถามใหม่ จึงตอบได้ถูกต้อง ส่วนตัวอย่าง 2 แสดงการดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ภาพของมะปรางที่มีความเป็นนามธรรมมากขึ้น ซึ่งมะปรางใช้การนับโดยการวาดภาพทั้งหมด (Count-by with Full Drawing)

ตัวอย่าง 1 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ภาพดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา: โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว

การคิดของกะหล่ำ: เริ่มต้นกะหล่ำจะวาดรูปโต๊ะเรียน 1 ตัว และวาดรูปเด็กลงบนโต๊ะเรียน 2 คน ต่อจากนั้นวาดรูปเช่นเดิมอีก แล้วนับจำนวนเด็กที่ได้ทั้งหมด เมื่อพบว่าจำนวนเด็กครบ 8 คน จึงหยุดวาด และนับจำนวนโต๊ะทั้งหมดเพื่อหาคำตอบ

$$2+2+2+2$$

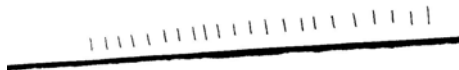


ตัวอย่าง 2 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนับซ้ำโดยการวาดภาพ (รอยขีด) ทั้งหมดดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา

ปัญหา : ขนมห้างราคาแผ่นละ 5 บาท ถ้ามีเงิน 110 บาท จะซื้อขนมปังปังได้กี่แผ่น

การคิดของมะปราง : ใช้รอยขีดแทนขนมปังแต่ละแผ่น เมื่อขีดหนึ่งขีดก็จะเขียนเลข 5 และบวกเพิ่มครั้งละ 5 เมื่อเขียนรอยขีดอีกหนึ่งขีด ตอนหลังจะนับเพิ่มครั้งละ 5 โดยไม่เขียนเลข 5 (40, 45, ..., 110) แต่ใช้รอยขีดแทนการนับแต่ละครั้งแทน แล้วนับรอยขีดทั้งหมดโดยนับเพิ่มทีละ 1 เมื่อนับได้จนครบ จึงตอบ 22 แผ่น



$$\begin{array}{r} 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 + \end{array}$$

คำตอบ

22 แผ่น

ภาพประกอบ 20 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้ภาพ  
ช่วยให้เกิดการคิด

ในภาพประกอบ 20 การใช้ภาพของกะหล่ำ ส่วนใหญ่จะวาดภาพจากสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนด ซึ่งผิดกับมะพร้าวที่จะใช้ภาพที่เป็นนามธรรมมากขึ้นโดยใช้รอยขีดแสดงออกถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนเอง และเป็นการใช้ภาพในการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อช่วยให้เข้าใจปัญหาเพิ่มขึ้น

### การนึกภาพในใจ

การนึกภาพในใจ เป็นการสร้างจินตนาการภายในของตัวบุคคลในขณะที่พยายามจะแก้ปัญหาโดยการนึกภาพในใจ การมองเห็นภาพ หรือการสร้างภาพจินตนาการ

ป๊อบที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี มักดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนึกภาพในใจกับปัญหาในลักษณะอัตรา/ราคา หรือเมื่อขยายปัญหาลงไปโดยเพิ่มขนาดของจำนวน ป๊อบจะทราบแนวทางการคิดแล้วจึงดำเนินการแก้ปัญหาโดยการนึกภาพในใจและตอบคำถามทันที มะระที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี เป็นเด็กอีกคนหนึ่งแสดงออกอย่างชัดเจนว่าชอบใช้การนึกภาพในใจดำเนินการแก้ปัญหา ตัวอย่างการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่แสดงว่าเด็กดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนึกภาพในใจแสดงในภาพประกอบ 21

ตัวอย่าง 1 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนึกภาพในใจและการนับดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา

ปัญหา : แดงซื้อขนมมา 3 ชิ้น เป็นเงิน 6 บาท ถ้าขนมทุกชิ้นราคาเท่ากัน ขนมราคาชิ้นละกี่บาท

การคิดของป๊อบ: เมื่ออ่านโจทย์ให้ป๊อบฟังจบลง ป๊อบจะคิดสักครู่แล้วตอบว่า 2 บาท เมื่อถามว่าคิดอย่างไร ป๊อบตอบว่าใช้การบวก 1 ชิ้น 2 บาท 2 ชิ้น 4 บาท 3 ชิ้น 6 บาท

เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนขนาดของจำนวน เช่น 4 ชิ้น เป็นเงิน 16 บาท ป๊อบจะตอบทันทีว่า 4 บาท พอถามว่าทำไมป๊อบตอบได้ทันทีและไม่ใช้เลขอื่น ป๊อบบอกว่า ถ้า 3 ก็ 4 ชิ้น 12 บาท

ตัวอย่าง 2 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนึกภาพในใจและการบวกดำเนินการแก้ปัญหา

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

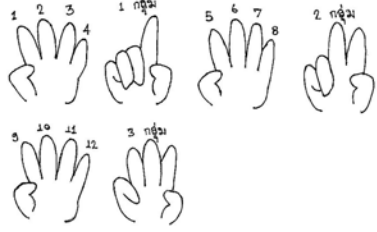
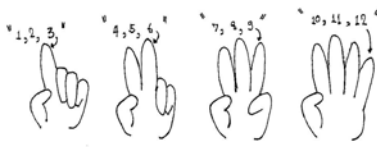
ปัญหา : มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

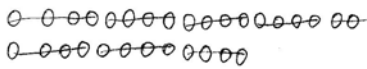
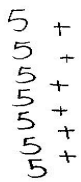
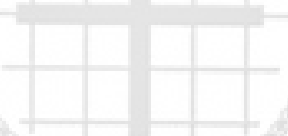
การคิดของมะระ: ตอนแรกผู้วิจัยไม่ทราบว่ามะระอ่านหนังสือไม่ออก จึงปล่อยให้มะระคิดเองเขาตอบ 4 ในการสัมภาษณ์ผู้วิจัยจึงถามว่าคิดคำตอบมาได้อย่างไร มะระจึงบอกว่ามั่วๆ เอา ผู้วิจัยจึงถามว่าเข้าใจไหมว่าโจทย์ถามอะไร มะระสั่นหน้า เพื่อนจึงบอกว่าเขาอ่านหนังสือไม่ออก ผู้วิจัยจึงถามโจทย์ปัญหาใหม่ที่สามารลงมือปฏิบัติจริงได้ โดยอ่านให้มะระฟัง “มีกล่องดินสอ 6 กล่อง แต่ละกล่องมีดินสออยู่ 3 แท่ง มีดินสอทั้งหมดกี่แท่ง” หลังจากผู้วิจัยอ่านคำถามจบลง มะระจึงตอบทันทีว่า 18 โดยอธิบายว่า “นี่ไง 3 + 3 = 6, 3 + 3 = 6, 3 + 3 = 6 เป็น 18”

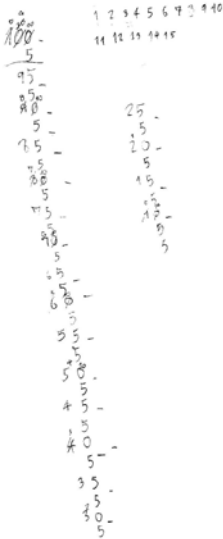
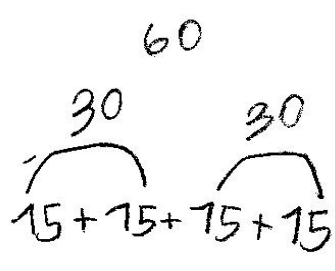
ภาพประกอบ 21 ตัวอย่างวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่ใช้การนึกภาพในใจ

เป็นที่น่าสังเกตว่าทั้งปีบและมะระอ่านหนังสือเองไม่ได้ทั้งคู่ ผู้วิจัยต้องเป็นผู้อ่าน โจทย์ปัญหาให้ฟังทุกปัญหา แต่เมื่อฟังปัญหาจบแล้วทั้งคู่จะแสดงออกถึงความเข้าใจและแสดงออกถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ดีและรวดเร็ว และเด็กทั้งสองคนยังสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้คำพูดอธิบายถึงการดำเนินการแก้ปัญหาของตนเองได้อย่างชัดเจน จากภาพประกอบ 21 ตัวอย่าง 1 ปีบใช้การนับข้ามอธิบายถึงการคิดของตนเอง ส่วนตัวอย่าง 2 มะระใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวกในการอธิบายการคิดของตนเอง

จากการวิเคราะห์การดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับของผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-10 ปี สามารถสรุปความหลากหลายของวิธีดำเนินการแก้ปัญหาตามวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่พบในงานวิจัยนี้ ดังภาพประกอบ 22

| การนับทั้งหมด                            | พฤติกรรมที่พบ                                                                       | นับจำนวนทั้งหมดจากหนึ่งจนถึงผลรวม                                                                                          |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                          | ตัวอย่าง                                                                            |                                                                                                                            |
| การนับหลังจากวาดภาพหรือใช้ตัวแบบ         |   | วาดภาพหรือจัดตัวแบบตามจำนวนทั้งหมดในโจทย์ แยกเป็นกลุ่มๆ แล้วนับจากหนึ่งจนถึงผลรวม                                          |
| การนับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือ          |  | นับออกเสียงจากหนึ่งจนถึงผลรวมโดยใช้นิ้วช่วยนับ<br>“หนึ่ง สอง สาม สี่-หนึ่ง ห้า หก เจ็ด แปด-สอง เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง-สาม |
| การนับเพิ่มทีละ 1 ตามจังหวะโดยใช้นิ้วมือ |  | นับออกเสียงด้วยการเน้นคำที่แต่ละผลคูณตามขนาดของกลุ่ม<br>“หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ สิบเอ็ด สิบสอง         |

| การนับข้าม                                           | พฤติกรรมที่พบ                                                                       | นับข้ามตามลำดับของแต่ละจำนวน : $n, 2n, 3n, 4n, \dots$                                                                   |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวอย่าง                                             |                                                                                     |                                                                                                                         |
| การนับข้ามโดยการวาดภาพทั้งหมด                        |    | วาดภาพสิ่งของทั้งหมดแล้วใช้การนับทั้งหมด แต่หาคำตอบโดยใช้การนับข้ามและชี้ (ขีด) ที่แต่ละกลุ่มตามภาพ “4, 8, 16, ..., 32” |
| การนับข้ามโดยเขียนจำนวนกลุ่ม                         |    | เขียนตัวเลขแต่ละกลุ่มแล้วนับข้ามตามลำดับของแต่ละจำนวน ขณะนับจะชี้ไปที่แต่ละจำนวนด้วย                                    |
| การนับข้ามโดยใช้นิ้วมือช่วยนับ                       |   | นับออกเสียงตามลำดับ บันทึกจำนวนกลุ่มโดยใช้นิ้ว “4, 8, 12, 16, 24” อาจเริ่มจากนิ้วใดก่อนก็ได้                            |
| การนับข้ามโดยไม่ต้องมีตัวช่วยหรืออุปกรณ์ช่วยในการนับ |  | นับออกเสียงตามลำดับ “7, 14, 21, ..., 42”                                                                                |

| การบวก/การลบ                     | พฤติกรรมที่พบ                                                                      | เขียนจำนวนที่นำมาบวก/ลบกัน<br>โดยเครื่องหมายบวก/ลบ                                                                  |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวอย่าง                         |                                                                                    |                                                                                                                     |
| การบวกซ้ำ/การลบซ้ำ               |   | เพิ่มเข้า/หักออกครั้งละเท่าๆ กันตามขนาดของกลุ่ม โดยอาจใช้การตั้งบวก/ตั้งลบ หรือเขียนผลบวก/ผลลบเรียงกันและบวก/ลบในใจ |
| การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก        |  | เขียนจำนวนที่ต้องการหาผลบวกแล้วจับบวกเป็นคู่ๆ หลังจากนั้นนำผลบวกที่ได้มาบวกกันต่อ                                   |
| การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวีคูณ | $7 + 7 \rightarrow 14 + 14 \rightarrow 28$                                         | บวกซ้ำตามขนาดของกลุ่มแล้วนำผลบวกที่ได้ไปบวกซ้ำต่อไป                                                                 |

ภาพประกอบ 22 วิธีดำเนินการแก้ปัญหาตามวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก  
ในช่วงอายุ 7-10 ปีที่พบในงานวิจัย

ในการแก้ปัญหาของเด็กนอกจากจะศึกษาถึงการดำเนินการแก้ปัญหาที่เด็กใช้แล้ว ในงานวิจัยนี้ยังศึกษาว่าเด็กมีการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไปและการสร้างข้อความคาดการณ์หรือไม่ อย่างไร ในหัวข้อต่อไปจะเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลของผู้ให้ข้อมูลหลักและตัวอย่างในประเด็นการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อความคาดการณ์

### การวิเคราะห์

การวิเคราะห์เป็นการแยกข้อมูลหรือส่วนประกอบของสิ่งใดสิ่งหนึ่งออกเป็น ส่วนย่อยๆ การพิจารณาว่าเด็กมีการวิเคราะห์หรือไม่พิจารณาจาก การที่เด็กสามารถจำแนก ความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งต่างๆ หรือแจกแจงรายละเอียดของส่วนประกอบต่างๆ ของ สิ่งที่เราวิเคราะห์ได้ ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาการวิเคราะห์ของเด็ก เช่น ลักษณะโจทย์ข้อนี้เหมือน/ ต่าง จากข้อที่แล้วตรงไหน อย่างไร โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง / เข้าใจว่าอย่างไร ในการคิดมีขั้นตอน การคิดไหม / เริ่มจากอะไร

ในการแก้ปัญหาผู้ให้ข้อมูลหลักเกือบทุกคนมีการวิเคราะห์ สามารถแจกแจง รายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ มีลำดับขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาที่ดี ยกเว้น บานชื่น และ พุทธา ที่ไม่ปรากฏว่ามีการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา ส่วนอัญชันไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาเพื่อใช้ในการ แก้ปัญหาด้วยตัวเองได้ แต่ถ้าผ่านการสัมภาษณ์แล้วอัญชันจึงสามารถเข้าใจปัญหาอย่างชัดเจน จนสามารถแจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ เมื่อพิจารณาย้อนกลับไปสู่ระยะเข้าสู่การคิดจะ เห็นว่าทั้งบานชื่นและพุทธาไม่มีระยะเข้าสู่การคิด นั่นคือทั้งบานชื่นและพุทธาไม่เข้าใจปัญหา และไม่สามารถหาข้อมูลเพื่อหาคำตอบได้ จึงทำให้ไม่สามารถแจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ หรือไม่สามารถลงมือปฏิบัติหรือแสดงการคิดตามสถานการณ์ปัญหาได้จึงทำให้เมื่อถึงขั้นดำเนินการ ให้บรรลุเป้าหมายการคิดจึงไม่สามารถแสดงการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหาได้ ส่วนอัญชันแม้จะเข้าใจ ปัญหาได้ดี สามารถบอกได้ว่าโจทย์ต้องการอะไร หรือมีข้อมูลเพื่อใช้ในการหาคำตอบ แต่อัญชันยัง ไม่สามารถแสดงการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน

ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา แสดงในภาพประกอบ 23

แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ปัญหาของเด็ก

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : เจนปลูกมะเขือเทศไว้ 4 ต้น ถ้าทุกต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล เจนมีมะเขือเทศทั้งหมดกี่ผล

การคิดของผักกาด : ปัญหานี้ผักกาดจะใช้เวลาคิดเพียง 1 นาทีเท่านั้น โดยสามารถบอกว่าปัญหานี้มีวิธีการคิด เหมือนปัญหาก่อนแต่ต่างกันที่ “ต้น” ปัญหาก่อนเป็นเรื่องของ “โต๊ะ” ผักกาดรู้ว่าการบวกคือนำ  $15 + 15 + 15 + 15$

ภาพประกอบ 23 ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

## การสร้างกรณีทั่วไป

การสร้างกรณีทั่วไปเป็นการขยายจากการยกตัวอย่างเพียงไม่กี่กรณีไปสู่ความคาดหมายที่ครอบคลุมกรณีต่างๆ ที่กว้างขวาง หรือมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น การพิจารณาว่าเด็กมีการสร้างกรณีทั่วไปหรือไม่พิจารณาจาก การที่เด็กสามารถนำวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้ หรือสามารถนำกรณีเฉพาะมาพิจารณาเชื่อมโยงไปสู่การสร้างกรณีทั่วไปหรือเริ่มมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้น ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาการสร้างกรณีทั่วไปของเด็ก เช่น ถ้าเพิ่มจำนวนขึ้นอีก คิดเหมือนเดิมไหม จากที่ทำมาทุกข้อเริ่มมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้นไหม สรุปรูปแบบของโจทย์ได้ไหม

จากการเก็บข้อมูลเชิงลึกพบว่าเด็กแปดคนในจำนวนสิบห้าคนหรือจำนวนเด็กเกินครึ่งหนึ่งสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ โดยเฉพาะเด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี ที่สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ทุกคน ส่งผลให้เด็กในช่วงอายุนี้ออกข้อคำถามได้ถูกต้องสูงกว่าเด็กอีกสองกลุ่ม ส่วนในช่วงอายุ 7-8 ปี มีเพียงคนเดียวเท่านั้นที่สร้างกรณีทั่วไปได้ โดยเด็กสามารถแสดงการสร้างกรณีทั่วไปได้เกือบทุกลักษณะของปัญหายกเว้นปัญหาในลักษณะการเปรียบเทียบและผลคูณคาร์ที่เขียนที่ปีกไม่เข้าใจ และในช่วงอายุ 9-10 ปี มีทุเรียน มะปรางและองุ่นเท่านั้นที่สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ นอกจากนี้เด็กสองคนแรกยังสามารถแสดงการสร้างกรณีทั่วไปในปัญหาลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนได้อย่างน่าสนใจอีกด้วย

เมื่อพิจารณาตามรูปแบบของปัญหา พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักร้อยละ 53.33 สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้โดยดูจากเมื่อผู้วิจัยขยายปัญหาออกไปโดยเปลี่ยนเนื้อเรื่องหรือขนาดของจำนวนใหม่ ผู้ให้ข้อมูลหลักเหล่านี้สามารถเชื่อมโยงความคิดเดิมไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ได้ โดยเฉพาะปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนนั้นผู้ให้ข้อมูลหลักที่สามารถแสดงการสร้างกรณีทั่วไปอย่างชัดเจนมีถึง 3 คน คือ ค่ะน้ำ (ในช่วงอายุ 8-9 ปี) ทุเรียนและมะปราง (ในช่วงอายุ 9-10 ปี) เริ่มแรกเด็กทั้ง 3 คนจะแก้ปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนโดยใช้การจับคู่และการนับในการหาคำตอบ หรือใช้ตัวแบบ ต่อมาจึงสามารถเชื่อมโยงการบวกและการคูณมาใช้ในการหาคำตอบ โดยสังเกตจากการแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผ่านมา แล้วนำมาใช้ในการแก้ปัญหากับสถานการณ์ใหม่ โดยเด็กทั้งสามคนจะนำจำนวนของสิ่งของที่กำหนดให้มาบวกกัน และภายหลังมะปรางและทุเรียนสามารถนำการคูณมาใช้หาคำตอบได้ ส่วนค่ะน้ำบอกได้เพียงว่าใช้การคูณแทนการบวกได้ นอกจากนี้องุ่น (ในช่วงอายุ 9-10 ปี) เมื่อเผชิญปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนในลักษณะ 2 มิติ ( $4 \times 2$ ) องุ่นสามารถใช้การนึกภาพในใจจับคู่สิ่งของและใช้การบวกเพื่อหาคำตอบ โดยบอกว่า “ไอศกรีมรสหนึ่งทำได้ 2 แบบ นำ 2 มาบวกกัน 4 ตัว ได้ 8” และเมื่อกำหนดสถานการณ์ปัญหาใหม่ในรูป 2 มิติ ( $4 \times 3$ ) องุ่นสามารถตอบได้ทันทีว่ามี 12 แบบ โดยการจับคู่และบอกว่าคิดเหมือนข้อเดิม แต่เมื่อผู้วิจัยเสนอปัญหาในรูป 3 มิติ ( $3 \times 2 \times 2$ ) ให้ องุ่นบอกว่าคิดไม่เหมือนเดิมโดยใช้ตัวแบบช่วยในการคิดแล้วตอบว่าสามารถทำได้ 5 แบบ

ภาพประกอบ 24 เป็นตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี และ 9-10 ปี มีการสร้างกรณีทั่วไปในการแก้ปัญหา โดยเมื่อขยายปัญหาออกไปเด็กสามารถมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง 1: แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสร้างกรณีทั่วไปของคะแนนในช่วงอายุ 8-9 ปี

ปัญหาการคูณ : ผลคูณคาร์ทีเซียน

ปัญหา : มะลิขายไอศกรีม 3 รส คือ วานิลลา กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง คือ ลูกชิต หรือ ข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของคะแนน : ตอนแรกคะแนนตอบ 2 แบบ พอถามว่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดตอบเท่าไร คะแนนทำหน้าตกใจ พอให้อธิบายจึงใช้ตัวแบบแสดงให้ดู แล้วบอกว่ากะทิสดทำได้ 2 แบบ จึงตอบ 2 พอถามว่าไอศกรีม 3 รส ทำได้เท่าไร จึงตอบ 6 แบบ

ปัญหา เพื่อขยายแนวคิด : น้อยจะขายไอศกรีมตอนปิดภาคเรียน เพื่อหารายได้ น้อยมีไอศกรีม 3 รส คือ วานิลลา กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่าง คือ ถั่วลิสง ลูกชิต หรือ ข้าวโพด น้อยจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของคะแนน : คะแนนใช้เวลาทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาสักครู่ แล้วจึงเขียน  $3 \times 3$  ลงบนกระดาษเขียนตอบ และตอบเท่ากับ 9 เมื่อถามว่าคิดอย่างไร คะแนน จึงตอบว่า “คิดเหมือนข้อก่อนแต่ยากกว่า เพราะเพิ่มหน้าที่ใส่” คะแนนใช้การจับคู่เหมือนเดิมคือ “วานิลลาทำได้ 3 อย่าง กะทิสดทำได้ 3 อย่าง และเผือกทำได้อีก 3 อย่าง” แล้วจึงเขียน  $3 + 3 + 3$  ในขณะที่อธิบายถึงวิธีการคิด

$$3 \times 3 = 3 + 3 + 3$$

ตัวอย่าง 2: แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสร้างกรณีทั่วไปขององุ่นในช่วงอายุ 9-10 ปี

ปัญหาการคูณ : ผลคูณคาร์ทีเซียน

ปัญหา : มะลิขายไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง คือ ถั่วลิสง หรือ ข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดขององุ่น : ใช้การนึกภาพในใจเช่นเดียวกันโดยใช้เวลาคิดเพียง 2 นาที และบอกว่า “รสหนึ่งทำได้ 2 แบบ น้ำ 2 มาบวกกัน 4 ตัว ได้ 8” เมื่อถามว่าใช้การคูณได้ไหม ตอบไม่รู้

ปัญหา เพื่อขยายแนวคิด : น้อยจะขายไอศกรีมตอนปิดภาคเรียน เพื่อหารายได้ น้อยมีไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่าง คือ ถั่วลิสง ลูกชิต หรือ ข้าวโพด น้อยจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดขององุ่น : หลังจากอ่านโจทย์ปัญหาบองุ่นสามารถตอบได้ทันทีว่า “12 แบบ” องุ่นอธิบายว่า “ใช้การจับคู่และบวกกันเหมือนข้อก่อน” (องุ่นทำหน้าที่เหมือนไม่ยากอธิบาย เพราะวิธีการเหมือนข้อก่อน พูดไปก็เหมือนเดิม) “วานิลลาทำได้ 3 แบบ สตอเบอรี่ กะทิสด เผือกก็เหมือนกัน บวกกันได้ 12”

ตัวอย่าง 3: แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสร้างกรณีทั่วไปของทุเรียนในช่วงอายุ 9-10 ปี

ปัญหาการคูณ : ผลคูณคาร์ทีเซียน

ปัญหา : มะลิขายไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง คือ ถั่วลิสง หรือ ข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของทุเรียน : เมื่ออ่านโจทย์ให้ฟังจบลง ทุเรียนตอบทันทีว่า 6 โดยนำ  $4 + 2$  พอสัมภาษณ์ทำให้เข้าใจปัญหาขึ้นจึงตอบ 8 (ใช้การนึกภาพในใจจับคู่ไอศกรีมกับหน้าที่โรย) เพราะไอศกรีม 1 รส ทำได้ 2 แบบ (แล้วใช้การนับข้าม 2, 4, 6, 8) พอถามว่า ถ้าคิดให้เร็วขึ้นทำอย่างไร “คุณ เอา  $4 \times 2$ ” และสามารถบอกได้ว่า 4 มาจาก รสไอศกรีม 2 มาจากหน้าที่โรย

ปัญหา เพื่อขยายแนวคิด : น้อยจะขายไอศกรีมตอนปิดภาคเรียน เพื่อหารายได้ น้อยมีไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่าง คือ ถั่วลิสง ลูกชิต หรือ ข้าวโพด น้อยจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของทุเรียน : หลังจากอ่านโจทย์ให้ฟังจบลง ทุเรียนตอบทันทีว่า 16 แบบ โดยนำ  $4 \times 3$  (พยายามท่องสูตรคูณอยู่หลายรอบ สี่หนึ่งสี่ สีสองแปด สีสสามสิบหก) เมื่อผู้วิจัยถามว่ามั่นใจไหม ทุเรียนจึงหัวเราะแล้วบอกว่าไม่มั่นใจ แต่รู้ว่าได้  $4 \times 3$  พอให้ลองทวนคำตอบ ทุเรียนจึงนำ  $3 + 3 + 3 + 3$  แล้วหัวเราะตอบว่า 12 ที่นี้มั่นใจแล้ว

คำตอบ  $4 \times 3 = 12$  เหม 1266

ตัวอย่าง 4: แสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสร้างกรณีทั่วไปของมะปรางในช่วงอายุ 9-10 ปี

ปัญหาการคูณ : ผลคูณคาร์ทีเซียน

ปัญหา : มะลิขายไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง คือ ถั่วลิสง หรือ ข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของมะปราง : ตอนแรกตอบ 2 แบบ เพราะบอกว่า “ครู สตอเบอรี่เขาไม่ใส่ถั่วลิสงหรอก” ผู้วิจัยจึงบอกว่าไม่เป็นไรให้คิดทั้งหมดตามโจทย์ ไม่ต้องตัดออก มะปรางจึงเริ่มจับคู่ในใจและพูดว่า “วานิลลา 2 แบบ กะทิสด เป็น 4, 6, 8 8 แบบ”

ปัญหาเพื่อขยายแนวคิด : ก็นอยากกินกล้วยเดี่ยว ที่ร้านมีกล้วยเดี่ยวเส้นหมี เส้นเล็ก และเส้นใหญ่ เป็นกล้วยเดี่ยว น้ำกับกล้วยเดี่ยวแห้ง กันเลือกใส่หมูหรือเนื้ออย่างใดอย่างหนึ่ง กันจะเลือกสังกล้วยเดี่ยวได้ต่างๆ กันกี่แบบ

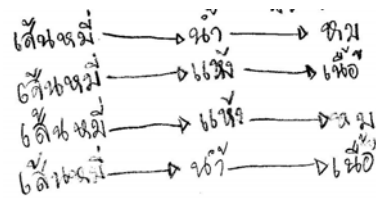
การคิดของมะปราง : หลังจากอ่านปัญหาจบ มะปรางหยุดคิดสักครู่และตอบทันทีว่า 12

เพราะนำจำนวนสิ่งของในโจทย์มาคูณกัน “3 คูณ 2 เป็น 6 และ 6 คูณ 2 ได้ 12”

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

#### ตัวอย่าง 4 (ต่อ)

เมื่อถามมะปรางว่า 12 วิธี มีอะไรบ้าง มะปรางจึงใช้แผนภาพต้นไม้นำเสนอตัวแทนความคิด



๖๔๗๖๕๕

เจ้าหญิง

ภาพประกอบ 24 ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการสร้างกรณีทั่วไปในการแก้ปัญหา

จากภาพประกอบ 24 จะเห็นว่าผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถสร้างกรณีทั่วไปเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน หรือเมื่อถูกถามคำถามเพื่อนำไปสู่การสังเกตผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถตั้งข้อสังเกตและสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้

ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การตั้งสถานการณ์ปัญหาต้องมีลำดับขั้นตอนเพื่อนำไปสู่การสร้างกรณีทั่วไปของเด็ก นอกจากนี้การตั้งคำถามของครูผู้สอนยังมีบทบาทสำคัญอันจะนำไปสู่การสรุปโนทัศน์ต่างๆ ของเด็กได้อีกเช่นกัน

## การสร้างข้อความคาดการณ์

การสร้างข้อความคาดการณ์เป็นการเสนอสิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แต่ยังไม่มีการสรุปหรือแสดงเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับ การพิจารณาว่าเด็กมีการสร้างข้อความคาดการณ์หรือไม่พิจารณาจาก การที่เด็กสามารถเสนอคำกล่าว ข้อความ หรือประโยคที่มีความเป็นไปได้ พยายามตัดสินความถูกต้องเพื่อนำไปสนับสนุนผลลัพธ์หรือวิธีการ ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาการสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็ก เช่น ลองสรุปวิธีการคิดได้ไหม

จากการเก็บข้อมูลเชิงลึกปรากฏว่าผู้ให้ข้อมูลหลักทุกคนไม่สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ ถึงแม้ผู้วิจัยจะพยายามถามเพื่อให้ผู้ให้ข้อมูลหลักทุกคนลองสรุปวิธีการคิดในปัญหาแต่ละรูปแบบ ผู้ให้ข้อมูลหลักทุกคนสามารถบอกได้เพียงว่าปัญหาในข้อนั้นคิดอย่างไร ถ้าพบปัญหาลำบาก ๆ กันนี้สามารถคิดได้ แต่ไม่สามารถเสนอเป็นข้อความคาดการณ์ได้ มีเพียงปีบที่อยู่ในช่วง

อายุ 7-8 ปี ที่คล้ายจะสร้างข้อความคาดการณ์ได้แต่ไม่ชัดเจนนัก เช่น เมื่อเสนอรูปแบบปัญหาในลักษณะเดียวกันให้ปีบสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ เมื่อขยายปัญหาต่อไปปีบจะคาดเดาคำตอบและวิธีการคิดไว้ล่วงหน้าก่อน แล้วจึงดำเนินการคิดว่าตรงกับที่ตนเองคาดการณ์หรือเดาไว้หรือไม่ แต่ปีบยังไม่ถึงกับสร้างเป็นข้อความคาดการณ์และนำเสนอตัวแทนความคิดออกมาได้ ต่อเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ปีบจึงอธิบายข้อความคาดการณ์ของตนออกมา ภาพประกอบ 25 แสดงให้เห็นว่าปีบเข้าใจการสร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้การลองผิดลองถูก

แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของปีบเกี่ยวกับการสร้างข้อความคาดการณ์

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : พ้อซื้อมะปรางมา 4 ต้น แต่ละต้นมีผลมะปรางจำนวนเท่าๆกัน ถ้านับมะปรางได้ทั้งหมด 32 ผล แต่ละต้นมีมะปรางอยู่กี่ผล

การคิดของปีบ : เริ่มต้นปีบจะนำถาดมา 3 ถาดเพื่อแทนต้นมะปราง และนับเม็ดลูกคิด (แทนผลมะปราง) ใส่ลงไปในถาดๆ ละ 6 เม็ด และนับเม็ดลูกคิดรวมกัน เมื่อใส่ถึงถาดที่สองปีบรู้ว่าได้ทั้งหมด 12 เม็ด จึงนับเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดที่สามอีก 6 เม็ด เมื่อรู้อย่างนี้ไม่ครบ 32 จึงนำถาดที่สี่มา แต่ครั้งนี้ปีบจะเพิ่มเม็ดลูกคิดลงไปในถาดทุกใบเป็นใบละ 8 เม็ด ปีบพูดเพิ่มพัมว่า 6 8 24 เมื่อนับเม็ดลูกคิดได้ 24 เม็ดใน 3 ถาด ปีบจึงนับเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดที่สี่อีก 8 เม็ด จึงตอบว่ามีมะปรางอยู่ต้นละ 8 ผล



ผู้วิจัย : ครูเห็นปีบนับใส่ถาดละ 8 เม็ดเลย ทำไมปีบถึงรู้ว่า 8 เม็ด เอา 8 มาจากไหน

ปีบ : เดอาเอครับ

ผู้วิจัย : เดอาเอแล้วนับทีละ 8 หรือคะ

ปีบ : (พยักหน้า) แล้วนับเม็ดครบ 32 พอดี

ผู้วิจัย : ถ้านับแล้วไม่ครบ 32 หรือถ้าเกินไป ปีบจะอย่างไร

ปีบ : (อมยิ้ม)

ผู้วิจัย : สมมติปีบใส่ไปถาดละ 9 ปีบจะอย่างไร

ปีบ : ลบออก

ผู้วิจัย : ลบออกทีละเท่าไร

ปีบ : ลบออก 4 (ลบออกถาดละ 1 เม็ด 4 ถาด รวมเป็น 4)

ผู้วิจัย : แล้วเหลือถาดละเท่าไร

ปีบ : 8

ภาพประกอบ 25 ตัวอย่างที่แสดงการสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็ก

นอกจากนี้ยังเป็นที่น่าสนใจว่าผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนมากสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ กับปัญหาบางรูปแบบแต่ไม่สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ แต่ในกรณีของปีบที่ส่วนมาก สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ปีบจึงมีแนวโน้มที่สามารถจะสร้างข้อความคาดการณ์ได้

### 2.1.3 ระยะทบทวนการคิด

เป็นระยะที่เด็กตรวจสอบการแก้ปัญหาของตน สะท้อนและขยายความรู้และ ประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา เด็กบางคนจะแสดงออกถึงการควบคุมการรู้คิดของตนด้วย ซึ่ง พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี และ 9-10 ปี ทุกคนมีการควบคุมการรู้คิด ถึงแม้ว่าผู้ให้ข้อมูล หลักเหล่านี้มีการตรวจสอบคำตอบบ้าง/ไม่ตรวจสอบบ้างก็ตาม แต่ทุกคนแสดงออกถึงการตรวจสอบ วิธีการแก้ปัญหาของตน หรือเมื่อดำเนินการแก้ปัญหามาได้ระยะหนึ่งสามารถบอกได้ว่า วิธีดำเนินการแก้ปัญหาของตนเองผิดและเปลี่ยนวิธีการคิดได้ หรือเมื่อเด็กบอกคำตอบที่ผิดเมื่อ ผู้วิจัยทำการสัมภาษณ์ผู้ให้ข้อมูลหลักเหล่านี้จะสามารถบอกได้เองว่าคำตอบของตนเองผิด และ อธิบายการคิดแบบใหม่ของตนเอง หรือเปลี่ยนวิธีดำเนินการแก้ปัญหาใหม่ ในขณะที่ปีบซึ่งอยู่ในช่วง อายุ 7-8 ปี เป็นเด็กคนเดียวในช่วงอายุนี้ที่มีการควบคุมการรู้คิดที่ดีเช่นเดียวกับเด็กในสองช่วงอายุ ส่วนเด็กคนอื่นในช่วงอายุนี้พบเฉพาะการตรวจสอบคำตอบเท่านั้น เช่นการคิดของอัญชันในตัวอย่าง 1 ภาพประกอบ 18 หน้า 98

ตัวอย่างต่อไปแสดงการควบคุมการรู้คิดของเด็กในระยะทบทวนการคิด ใน ตัวอย่าง 1 ภาพประกอบ 26 จะเห็นว่าผกกาตมีการควบคุมการรู้คิดของตนเอง โดยรู้ถึงวิธีการคิด ของตนเองในการดำเนินการแก้ปัญหาและสามารถประเมินการคิดของตนเองได้ สามารถบอกได้ว่า ควรใช้วิธีใดในการดำเนินการแก้ปัญหา ส่วนตัวอย่าง 2 ในภาพประกอบ 26 ปีบสามารถบอกได้ ทันทีหลังจากผู้วิจัยอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังใหม่ (ปีบอ่านหนังสือเองไม่ได้) ว่าการคิดของตนเองผิด และเปลี่ยนวิธีดำเนินการแก้ปัญหาใหม่ทันที

ตัวอย่าง 1 : แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผกกาตเกี่ยวกับการควบคุมการรู้คิด

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

การคิดของผกกาต :

ผู้วิจัย : ผกกาตใช้ตัวช่วยไหมคะ

ผกกาต : ไม่ใช่

ผู้วิจัย : แล้วผกกาตคิดอย่างไรลองอธิบายให้ครูฟังสิคะ

(ผกกาตจะใช้นิ้วบวกรู้ โดยนำ 4 บวก 4 ได้ 8 และ 8 บวก 4 ได้ 12 และ 12 บวก 4 ได้ 16

ต่อไปจึงบวกต่อทีละ 1 คือ 17, 18, 19, 20 และ 20 บวก 4 เป็น 24 ตอบ 24)

ผู้วิจัย : มั่นใจไหมคะว่าคำตอบถูก

ผกกาต : มั่นใจค่ะ เพราะคิดตามโจทย์แล้ว คือมีโต๊ะ 6 ตัว จึงนำ 4 มาบวกกัน 6 ตัว

ผู้วิจัย : ทำไมผกกาตไม่ใช้ตัวช่วย

ผกกาต : ถ้าใช้ตัวช่วยมันจะงง

ตัวอย่าง 2: แสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของป๊อบเกี่ยวกับการควบคุมการรู้คิด

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา

ปัญหา : สีสาดจับปลากระบอกได้ 8 ตัว นำไปขายในราคาเท่าๆ กัน ได้เงินมา 40 บาท สีสาดขายปลากระบอกไปตัวละกี่บาท

การคิดของป๊อบ :

ตอนแรกป๊อบจะแสดงกลับกันจากที่โจทย์กำหนด โดยนับเม็ดลูกคิดมา 40 เม็ด ใส่ลงในถาดพลาสติก ถาดละ 8 เม็ด พอผู้วิจัยอ่านโจทย์ให้ฟังใหม่ ป๊อบจึงรู้ทันทีว่าคิดผิดไม่ตรงกับโจทย์ จึงคิดใหม่โดยนับถาดมา 8 ใบ (หยิบมาครั้งละ 2 ใบ) แทนปลา และนำเม็ดลูกคิดที่นับไว้ตอนแรกแทนเงิน หลังจากนั้นจะหยิบเม็ดลูกคิดมาทีละหนึ่งกำมือและนับทีละเม็ดใส่ลงในถาด 6 เม็ด และนับข้ามทีละ 6 ครั้งละหนึ่งถาด พอใส่เม็ดลูกคิดถึงถาดที่หกและนับได้ 32 คิดว่าเม็ดลูกคิดที่เหลือไม่พอแน่ จึงลดเม็ดลูกคิดเหลือถาดละ 5 เม็ด เมื่อใส่เม็ดลูกคิดจนหมด 40 เม็ด จึงตอบ 5 บาท

ภาพประกอบ 26 ตัวอย่างที่แสดงการควบคุมการรู้คิดของเด็กในระยะทบทวนการคิด

## 2.2 การให้เหตุผลของเด็ก

ในส่วนของการให้เหตุผลของเด็กซึ่งเป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์อีกลักษณะหนึ่ง ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาถึงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัยในสถานการณ์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับ โดยทำการวิเคราะห์และรายงานการให้เหตุผลของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะเข้าสู่การคิด ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด และระยะทบทวนการคิด

### 2.2.1 ระยะเข้าสู่การคิด

ในระยะนี้พิจารณาการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ของเด็ก โดยพิจารณาว่าเมื่อถาม โจทย์ปัญหาในลักษณะเดียวกัน เด็กสามารถระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกันได้หรือไม่

**การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์** เป็นความสามารถที่แสดงการระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่กำหนดให้ได้ หรือสามารถบอกได้ว่าปัญหานี้คล้ายกับปัญหาที่เคยทำมาก่อน ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ของเด็กในระยะนี้ เช่น เคยเห็นโจทย์แบบนี้ไหม

เมื่อพิจารณาในภาพรวมพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่ทั้งสามช่วงอายุ แสดงออกไม่ชัดเจนถึงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ในระยะเข้าสู่การคิดนี้ โดยบางครั้งผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถบอกได้ว่าปัญหาที่เสนอให้คล้ายคลึงกับปัญหาที่ผ่านมาหรือมีวิธีการคิดเช่นเดียวกับปัญหาก่อน แต่มีบางครั้งเมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนเนื้อเรื่องหรือสถานการณ์ใหม่ผู้ให้ข้อมูลหลักบางคนจะหาวิธีดำเนินการแก้ปัญหาใหม่ โดยไม่สามารถบอกได้ว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาเดิมหรือมีวิธีการคิดเหมือนเดิม แต่ผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่มองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกันของปัญหา (Analogy) ดูตัวอย่างการคิดของมะปรางในภาพประกอบ 13 หน้า 92

นั่นคือผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ได้ชัดเจนเมื่อสถานการณ์ปัญหาคล้ายกับปัญหาเดิมจริงๆ เช่นปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียน เพราะตัวเนื้อเรื่องหรือวิธีการคิดเป็นเช่นเดิม ส่วนปัญหาในลักษณะอื่นถึงแม้เนื้อเรื่องจะเหมือนเดิมแต่เมื่อผู้วิจัยถามว่า “โจทย์ข้อนี้เหมือนข้อก่อนไหม” เด็กบางคนจะตอบว่า “ไม่เหมือน เพราะตัวเลขต่างกัน” เมื่อถามถึงวิธีคิดเด็กสามารถบอกได้ว่าวิธีคิดเหมือนเดิม แต่พบว่าปัญหาบางรูปแบบนั้นผู้ให้ข้อมูลหลักบางคนไม่มีความสม่ำเสมอในการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ในระยะนี้ หรือบางครั้งปัญหาในลักษณะเดียวกันและสถานการณ์เดียวกันเมื่อเปลี่ยนขนาดของจำนวนใหม่ ผู้ให้ข้อมูลหลักต้องคิดใหม่หรือเปลี่ยนวิธีดำเนินการแก้ปัญหาใหม่ เช่น การแก้ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันของผักกาด ที่เดิมใช้ตัวแบบในการดำเนินการแก้ปัญหา แต่เมื่อเปลี่ยนขนาดของจำนวนใหม่ผักกาดจะใช้การวาดภาพแทน

ภาพประกอบ 27 แสดงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ของเด็กในระยะเข้าสู่การคิดเมื่อผู้วิจัยถามโจทย์ปัญหาเพื่อขยายแนวคิด อุ่นสามารถบอกได้ทันทีว่าปัญหาใหม่นี้มีวิธีการคิดเหมือนปัญหาก่อน

ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ในระยะเข้าสู่การคิด

ปัญหาการคูณ : ผลคูณคาร์ทีเซียน

ปัญหาเพื่อขยายแนวคิด : หน้อยจะขายไอศกรีมตอนปิดภาคเรียน เพื่อหารายได้ หน้อยมีไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตรอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่าง คือ ถั่วลิสง ลูกชิด หรือ ข้าวโพด หน้อยจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ

การคิดของอุ่น: หลังจากอ่านโจทย์ปัญหาจบอุ่นสามารถตอบได้ทันทีว่า “12 แบบ” อุ่นอธิบายว่า “ใช้การจับคู่และบวกกันเหมือนข้อก่อน”

ภาพประกอบ 27 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ของเด็กในระยะเข้าสู่การคิด

### 2.2.2 ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด

พบว่าระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิดนี้ผู้ให้ข้อมูลหลักจะแสดงการให้เหตุผลอย่างเด่นชัดและทำการตัดสินใจถึงความถูกต้องของคำตอบเพื่อสร้างความเชื่อมั่นในคำตอบของตนเอง นอกจากนี้ยังพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักที่บรรลุเป้าหมายการคิดในการแก้ปัญหาจนสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้จะสามารถให้เหตุผลแบบอุปนัยได้เช่นเดียวกัน ส่วนการให้เหตุผลแบบนิรนัยนั้นมีเด็กเพียงบางคนเท่านั้นที่สามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่ เช่น ปิ๊บที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลของปิ๊บดังแสดงในภาพประกอบ 26 หน้า 115 ซึ่งพบว่าปิ๊บสามารถบอกได้ว่าเมื่อนำเม็ดลูกคิดใส่ลงไปในถาดพลาสติก ถ้าใส่เม็ดลูกคิดไปครบสี่ถาดแล้วเม็ดลูกคิดเกิน 32 เม็ด ต้องลบออกสี่ (หมายถึงสี่ถาดๆ ละ 1 เม็ด) ถ้าใส่ไม่ถึง 32 เม็ด ต้องเพิ่มจำนวนเม็ดลูกคิด

**การให้เหตุผลแบบอุปนัย** เป็นความสามารถที่จะสรุปวิธีหาคำตอบได้จากการพิจารณาปัญหาที่คล้ายคลึงกัน และสามารถนำคำตอบที่ได้ไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาว่าเด็กมีการให้เหตุผลแบบอุปนัยในระยะนี้หรือไม่ เช่น เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร สรุปวิธีการคิดได้ไหม

ภาพประกอบ 28 แสดงการให้เหตุผลแบบอุปนัยของเด็กในระยะดำเนินการให้บรรลุปเป้าหมายการคิด เมื่อผู้วิจัยถามโจทย์ในการสัมภาษณ์เพื่อขยายแนวคิด ปิ๊บสามารถสรุปวิธีหาคำตอบได้จากวิธีการหาคำตอบต่างๆ ที่คล้ายคลึงกัน และนำคำตอบที่ได้ไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป

ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการให้เหตุผลแบบอุปนัยในระยะดำเนินการให้บรรลุปเป้าหมายการคิด

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา

ปัญหา : ในเวลา 1 วัน แจ้วอ่านหนังสือได้ 9 หน้า ถ้าแจ้วอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 45 หน้า จะใช้เวลากี่วัน

การคิดของปิ๊บ : หลังจากอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังจบลงปิ๊บคิดสักครู่จึงพูดว่า “1 วัน 9, 2 วัน 18, 3 วัน (พยายามคิดว่า 18 รวมกับ 9 เป็นเท่าไร) 27, 4 วัน 36, 5 วัน 45 ตอบ 5 วัน” เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าจำนวนหน้าเพิ่มขึ้นละ 90 หน้า ใช้เวลากี่วัน” ปิ๊บอมยิ้มแล้วบอกว่าเลขเยอะ

ผู้วิจัย : 45 บวก 45 ได้เท่าไร

ปิ๊บ : 90

ผู้วิจัย : ดังนั้น 90 หน้า ใช้เวลากี่วัน

ปิ๊บ : 10 วัน เพราะ 45 หน้า ใช้เวลา 5 วัน และอีก 45 หน้า ได้ 5 วัน 5 บวก 5 เป็น 10

ภาพประกอบ 28 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลแบบอุปนัยของเด็กในระยะดำเนินการให้บรรลุปเป้าหมายการคิด

**การให้เหตุผลแบบนิรนัย** เป็นความสามารถในการนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้หาคำตอบใหม่ ตัวอย่างคำถามที่ใช้พิจารณาว่าเด็กมีการให้เหตุผลแบบนิรนัยในระยะนี้หรือไม่ เช่น จากข้อสรุปที่ได้ลองยกโจทย์ที่ใช้วิธีคิดเช่นเดียวกันได้ไหม ลองยกโจทย์แบบเดียวกันนี้ได้ไหม ใช้วิธีการแบบข้อก่อนได้ไหม

ภาพประกอบ 29 แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยของเด็กในระยะดำเนินการให้บรรลุปเป้าหมายการคิด เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่แต่ขนาดของจำนวนยังคงเดิมและถามโจทย์ในการสัมภาษณ์เพื่อขยายแนวคิด ปิ๊บสามารถนำหลักการที่ได้จากการหาคำตอบในสถานการณ์ก่อนหน้านี้มาใช้ในการหาคำตอบของสถานการณ์ใหม่ได้

ตัวอย่างที่แสดงว่าเด็กมีการให้เหตุผลแบบนิรนัยในระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด  
 ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา  
 ปัญหา : ต้มยำปลา 1 หม้อ ใส่ปลา 4 ชิ้น ถ้ามีปลา 32 ชิ้น จะทำต้มยำได้กี่หม้อ  
 การคิดของปีบ : ปีบใช้วิธีคิดเช่นเดียวกับปัญหาในภาพประกอบ 28 ผู้วิจัยจึงถามโจทย์ในการสัมภาษณ์เพื่อ  
 ขยายแนวคิด  
 ผู้วิจัย : ถ้ามีปลา 36 ชิ้น ละ  
 ปีบ : 9 เพราะเพิ่มปลาอีก 4 ชิ้น ได้อีก 1 หม้อ  
 ผู้วิจัย : ปลา 40 ชิ้น  
 ปีบ : (ตอบทันที) 10 (นับต่อจาก 36 นำ 36 บวก 4 เป็น 40)  
 ผู้วิจัย : ปลา 80 ชิ้น  
 ปีบ : (ตอบทันที) 20 (ปีบได้หลักการคิดมาจากปัญหาในภาพประกอบ 28 และรู้ว่าการบวกในลักษณะ  
 ทวีคูณ)  
 ผู้วิจัย : ปลา 160 ชิ้น  
 ปีบ : (พยายามบวก 80 กับ 80 ได้ 160) 40

ภาพประกอบ 29 ตัวอย่างที่แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยของเด็กในระยะดำเนินการให้บรรลุ  
 เป้าหมายการคิด

### 2.2.3 ระยะทบทวนการรู้คิด

ในระยะนี้เด็กที่บรรลุเป้าหมายการคิดและตอบคำถามได้ทุกคนมีการให้เหตุผล  
 เชิงสหสัมพันธ์ โดยสามารถระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่ แต่มีเพียงบางคนเท่านั้น  
 ที่สามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยโดยสามารถนำข้อสรุปที่ได้มาก่อนหน้านั้นมาใช้ในการให้เหตุผล แต่  
 แสดงออกไม่ชัดเจนนัก เช่นการคิดของปีบในภาพประกอบ 29 ที่แสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัย แต่  
 ไม่สามารถนำข้อสรุปที่ได้ก่อนหน้านั้นมาให้เหตุผลอย่างเป็นทางการได้

## 2.3 การนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็ก

ในส่วนของการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กซึ่งเป็นการคิดเชิงคณิตศาสตร์  
 เช่นเดียวกัน ผู้วิจัยได้ศึกษาถึงการนำเสนอตัวแทนความคิดในลักษณะต่างๆ ของผู้ให้ข้อมูลหลัก  
 จากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ผ่านมาพบว่า การนำเสนอตัวแทนความคิดของผู้ให้ข้อมูลหลักที่แสดงให้  
 ผู้วิจัยดูบางครั้งไม่ใช่วิธีการที่เด็กใช้ในการคิดจริงๆ เช่นเด็กที่ใช้การนับในการแก้ปัญหาแต่เมื่อ  
 ผู้วิจัยสัมภาษณ์เด็กอาจนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้โดยใช้ตัวแบบและ  
 ใช้การนับ หรือเด็กที่ใช้การนึกภาพในใจเมื่อถูกสัมภาษณ์อาจนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้การนับ  
 การบวก/การลบ หรือบางครั้งอาจนำเสนอโดยผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ เช่นใช้ตัวเลข จากผล  
 การวิเคราะห์ผู้วิจัยได้รายงานการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักออกเป็น 3  
 ระยะ คือ ระยะเข้าสู่การคิด ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด และระยะทบทวนการคิด

### 2.3.1 ระยะเข้าสู่การคิด

ในระยะนี้ผู้ให้ข้อมูลหลักที่ตอบคำถามถูกหรือมีระยะเข้าสู่การคิดในการแก้ปัญหาสามารถเข้าใจปัญหาหรือมีข้อมูลเพื่อหาคำตอบ สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดได้อย่างคล่องแคล่วแต่มักเป็นการนำเสนอในรูปคำพูด ไม่พบผู้ให้ข้อมูลหลักคนใดนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปแบบอื่น

### 2.3.2 ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด

ในระยะนี้เป็นระยะดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กเช่นเดียวกัน พบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักนั้นมุ่งหาคำตอบของโจทย์ปัญหาโดยไม่เขียนแสดงประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เท่าที่ควร โดยเฉพาะผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 7-8 ปี จะเขียนแสดงเฉพาะคำตอบในกระดาษเขียนตอบเท่านั้น มีปรากฏเพียงครั้งเดียวและเพียงคนเดียวเท่านั้นคือป๊อปที่ผู้วิจัยถามว่าเขียนแสดงการคิดได้ไหม จึงเขียนให้ผู้วิจัยดู แต่เป็นการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่สมบูรณ์ ส่วนผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 8-9 ปี มีการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์บ้างซึ่งต่างจากผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 ปี ที่พบการใช้สัญลักษณ์ในการนำเสนอตัวแทนความคิดบ่อยครั้ง

นั่นคือผู้ให้ข้อมูลหลักมีการนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้ โดยอาจใช้ตัวแบบหรือตัวนับ และใช้การนับประกอบนำเสนอตัวแทนความคิด หรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อโดยอาจใช้รอยขีดหรือใช้รูปภาพในการนำเสนอตัวแทนความคิด หรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ซึ่งปรากฏว่าผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนมากใช้ตัวเลขในการนำเสนอตัวแทนความคิดเท่านั้น ยังไม่ปรากฏว่าสามารถเขียนในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้ นอกจากปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนที่พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักในช่วงอายุ 9-10 สามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องและเข้าใจความหมาย นอกจากนั้นยังพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักอีกหนึ่งคนที่สามารถใช้แผนภาพต้นไม้นำเสนอตัวแทนความคิดของตนได้อีกด้วย (จากตัวอย่าง 4 ภาพประกอบ 24 หน้า 112)

ภาพประกอบ 30 เป็นตัวอย่างที่แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้โดยใช้ตัวแบบคือ ถาดพลาสติกและเม็ดลูกคิดแทนสิ่งของที่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหา และใช้การนับเพื่อหาคำตอบ

แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา : เด็ก 9 คน จัดให้หนึ่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้หนึ่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กหนึ่งโต๊ะละกี่คน

การคิดของป๊อบ: ปัญหานี้ป๊อบหาคำตอบจากการคิดในใจ แต่เมื่อผู้วิจัยให้ป๊อบอธิบายป๊อบจึงใช้ตัวแบบนำเสนอตัวแทนความคิดของตน โดยบอกว่า “ใช้กล่องและเม็ด (ถาดพลาสติกและเม็ดลูกคิด) นับโต๊ะมา 3 ตัว และนับเด็กมา 9 คน” ขั้นตอนการอธิบายของป๊อบคือ นับถาดพลาสติกมาก่อน 3 ถาด แล้วจึงนับเม็ดลูกคิดให้ได้ 9 เม็ด โดยนับมาทีละสามเม็ด “สามเหลืออีกหก นับมาอีกสามเป็นหกเหลืออีกสาม นับมาอีกสามเป็นเก้า” ขณะนับป๊อบนำเม็ดลูกคิด ใส่ลงในถาดๆ ละสามเม็ด เมื่อนับครบเก้าเม็ดจึงหยุดนับ และนับคำตอบจากจำนวนเม็ดที่อยู่ในถาด



ภาพประกอบ 30 ตัวอย่างที่แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้

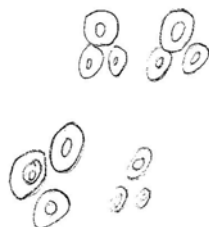
ภาพประกอบ 31 แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กที่เป็นนามธรรมมากขึ้นซึ่งใช้ภาพ โดยมองจากตัวนับที่มีอยู่และวาดภาพแสดงการคิดออกมา และใช้การบวกในการหาคำตอบ

แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพ

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหา: โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว

การคิดของคณะ: ตอนแรกคณะหิบบตัวนับออกมา แต่ไม่ได้ใช้ตัวนับเพื่อช่วยในการคิด เมื่อถามว่าหาคำตอบอย่างไร คณะบอกว่าใช้การบวก เพราะ 2 บวกกันสี่ตัวได้ 8 จึงตอบ 4 ตัว คณะจึงวาดภาพตัวนับที่ละกลุ่ม โดยตัวนับตัวแรกจะแทนโต๊ะ และวาดตัวนับลงไปอีกกลุ่มละ 2 ตัว จนถึงกลุ่มที่ 4 จึงหยุดวาด



ภาพประกอบ 31 ตัวอย่างที่แสดงการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพ

ส่วนตัวอย่างในการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์โดยใช้ตัวเลขเขียนแสดงการคิดของตนเองดูได้จากการคิดของทุเรียนและมะปราง ในตัวอย่าง 3 และ 4 ในภาพประกอบ 24 หน้า 111-112

### 2.3.3 ระยะทบทวนการคิด

ในขณะนี้พบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักที่บรรลุป่าหมายการคิดทุกคนมีการควบคุมการรู้คิดของตนเองในการแก้ปัญหาจึงสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดได้เป็นอย่างดี แต่มักพบการนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปคำพูดมากกว่าการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ต่างๆ

## 3. กรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

จากการวิเคราะห์ข้อมูลดังกล่าวข้างต้นทำให้ได้ข้อเสนอว่าเด็กที่มีอายุ 7-10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับอย่างไร ในการแก้ปัญหาเด็กใช้การดำเนินการแก้ปัญหาแบบใดมากที่สุดและแสดงออกอย่างไร เด็กเข้าใจปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างไร เมื่อได้คำตอบแล้วเด็กมีการทบทวนการคิดของตนหรือไม่ อย่างไร หรือในขณะที่แก้ปัญหาเมื่อเผชิญสภาวะที่ติดขัดเด็กมีการควบคุมการรู้คิดของตนหรือไม่ อย่างไร วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กเป็นอย่างไรเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย นอกจากนั้นยังทราบถึงลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กตามธรรมชาติอีกด้วย

จากการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผู้ให้ข้อมูลหลักพบว่า เมื่อเด็กแก้ปัญหาไปเรื่อยๆ เด็กจะมีพัฒนาการในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น เช่น มะปราง จะทำชุดคำถามในช่วงแรกไม่ได้เลย หรือไม่เข้าใจในปัญหา แต่พอสัมผัสผ่านไปแล้ว 2-3 ครั้ง มะปรางจะแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและชัดเจนขึ้น

ผู้วิจัยได้นำโครงร่างที่ใช้ศึกษากรอบวิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กมาปรับและเพิ่มเติมรายละเอียดโดยพิจารณาจากข้อเสนอดังกล่าว สังเคราะห์ข้อมูลและสร้างกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ดังภาพประกอบ 32

กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

| การคิดเชิงคณิตศาสตร์<br>ระยะของ<br>การคิดเชิงคณิตศาสตร์ | การแก้ปัญหา                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | การให้เหตุผล                                                                                                                                                                                                                                            | การนำเสนอตัวแทนความคิด                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่การคิด                                       | การเข้าไปปัญหา/การหาข้อมูลเพื่อหาคำตอบ (ยกเว้นปัญหาในลักษณะการเปรียบเทียบ)<br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>- การระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน<br>มองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกันของปัญหา (Analogy)<br>                                             | ในรูปคำพูด                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด                     | 1. การดำเนินการแก้ปัญหา<br>- การใช้ตัวแบบ<br>- การใช้การนับ<br>- การบวก/การลบ<br>- การคูณ<br>- การใช้ภาพ<br>- การนึกภาพในใจ<br>2. การวิเคราะห์<br>- แจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหา<br>- บอกได้ว่าปัญหาที่เหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แก้แล้วตรงไหน<br>- บอกขั้นตอนการคิดได้<br>3. การสร้างกรณีทั่วไป<br>- นำวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไปกับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้<br>4. การสร้างข้อความคาดการณ์<br>- เดาคำตอบหรือวิธีการคิดได้<br> | 1. การอุปนัย<br>- การสรุปวิธีหาคำตอบ<br>- การตรวจสอบกรณีทั่วไป<br>2. การนิรนัย<br>- นำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่<br>                           | 1. ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้<br>- ใช้ตัวแบบ-ตัวนับ และใช้การนับ<br>2. ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ<br>- ใช้รอยขีด<br>- ใช้รูปภาพ<br>3. ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์<br>- ใช้ตัวเลข<br> |
| ระยะพบพานการคิด                                         | การควบคุมการรู้คิด<br>- สามารถประเมินการคิดของตนเองและปรับการกระทำของตนเอง<br>- มีการสะท้อนการคิดของตนเองและมั่นใจในคำตอบของตนเองทุกครั้ง<br>                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1. การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>- การระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่<br>2. การนิรนัย<br>- สามารถนำข้อสรุปที่ได้มาก่อนหน้านั้นมาใช้ในการให้เหตุผล<br> | ในรูปคำพูดและสัญลักษณ์<br>                                                                                                                                                             |

ภาพประกอบ 32 กรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

จากภาพประกอบ 32 สรุปได้ว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ในด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปีนั้นสามารถแยกระยะออกเป็น 3 ระยะเช่นเดียวกันแต่จะมีความแตกต่างกันในรายละเอียด กล่าวคือ

### 1. ระยะเข้าสู่การคิด

1.1 การแก้ปัญหา การที่เด็กจะสนใจในปัญหาและเข้าไปพัวพันในสถานการณ์ปัญหานั้น เด็กต้องมีความเข้าใจในปัญหา ถ้ามีคำบางคำในสถานการณ์ปัญหาที่เด็กไม่รู้จำอาจทำให้เด็กนึกภาพไม่ออกและไม่เข้าสู่สถานการณ์ปัญหาได้ เช่น ปิ๊ป ที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี สามารถแสดงการคิดอย่างสมเหตุสมผลมาตั้งแต่ต้น แต่เมื่อผู้วิจัยเสนอสถานการณ์ปัญหาการคูณในลักษณะของอัตรา/ราคา คือ “กุหลาบราคากำละ 4 บาท กุหลาบ 7 กำ ราคากี่บาท” ปิ๊ปจะใช้เวลาคิดอยู่นานและบอกผู้วิจัยว่าทำไม่ได้ เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ปิ๊ปเข้าใจปัญหาไหม” ปิ๊ปบอกว่า “ผมไม่เคยซื้อดอกกุหลาบ ไม่รู้จัก” เมื่อผู้วิจัยถามว่าแล้วปิ๊ปเคยซื้ออะไร ปิ๊ปบอกว่าซื้อไข่ และมาหมา ซองละ 5 บาท ผู้วิจัยจึงเปลี่ยนสถานการณ์และขนาดของจำนวนไปเรื่อยๆ ปรากฏว่าปิ๊ปสามารถดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การนึกภาพในใจแสดงการคิดได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นสถานการณ์ปัญหาที่เสนอให้เด็กควรใกล้เคียงกับชีวิตจริงเพราะจะทำให้เด็กเข้าสู่ปัญหาได้ง่าย สามารถสร้างภาพในใจและเข้าสู่ระยะการคิดได้ทันที นอกจากนี้ขนาดของจำนวนในสถานการณ์ปัญหาก็มีส่วนในการแก้ปัญหของเด็กเช่นเดียวกัน เพราะเมื่อจำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้นเด็กบางคนอาจเปลี่ยนวิธีดำเนินการแก้ปัญหา

1.2 การให้เหตุผล เมื่อขยายปัญหออกไปเด็กส่วนใหญ่สามารถให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ได้ โดยสามารถบอกว่าปัญหาที่ขยายออกไปนั้นคล้ายคลึงกับปัญหาเดิม และมองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกันของปัญหา (Analogy)

1.3 การนำเสนอตัวแทนความคิด เด็กที่ตอบปัญหาถูกสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปคำพูดได้อย่างคล่องแคล่ว

### 2. ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด

2.1 การแก้ปัญหาในระยะนี้ผู้วิจัยพิจารณาถึงการดำเนินการแก้ปัญหา การวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อความคาดการณ์ พบว่า

2.1.1 การดำเนินการแก้ปัญหของเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี ส่วนใหญ่จะคล้ายกันแต่จะแตกต่างในรายละเอียด เช่นเด็กที่ใช้ตัวแบบอาจใช้การนับหลังจากที่ใช้ตัวแบบช่วยให้มองเห็นภาพ (Count after Modeling) หรือใช้การบวกหลังจากใช้ตัวแบบ ส่วนเด็กที่ใช้การนับ การบวก/การลบ อาจใช้การนับทีละหนึ่ง นับข้าม นับเพิ่ม/นับลดทีละเท่าๆ กัน การนับโดยใช้นิ้วมือ หรือใช้การวาดภาพแล้วนับหลังจากวาดภาพ ใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก การบวกซ้ำ หรือการบวกในลักษณะทวีคูณ ใช้การคูณ การใช้ภาพ ส่วนการนึกภาพในใจนั้นจะพบเฉพาะในกลุ่มเด็กที่แสดงการคิดได้ถูกต้องเท่านั้น

2.1.2 การวิเคราะห์ พบว่าเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี บางคนสามารถแจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหา บอกได้ว่าปัญหาที่ทำเหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แล้วตรงไหน อีกทั้งสามารถบอกขั้นตอนการคิดได้

2.1.3 การสร้างกรณีทั่วไป พบว่าเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี บางคนสามารถนำวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้

2.1.4 การสร้างข้อความคาดการณ์ของเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี ยังไม่สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ชัดเจนนัก นอกจากการเดาคำตอบหรือวิธีการคิดแล้วจึงดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อยืนยันว่าการคาดเดาของตนถูกหรือไม่

2.2 การให้เหตุผล พบว่ามีเด็กเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่สามารถแสดงการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้ โดยสามารถสรุปวิธีหาคำตอบได้จากการพิจารณาสถานการณ์ต่างๆ ที่คล้ายคลึงกัน นำคำตอบที่ได้ไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป อีกทั้งสามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่ได้

2.3 การนำเสนอตัวแทนความคิด เด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี มักนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้และการใช้ภาพเป็นสื่อ ส่วนการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์นั้นพบว่า เด็กในช่วงอายุ 8-9 ปี และ 9-10 ปี สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ได้แต่ยังไม่เข้าใจอย่างแท้จริง หรือบางครั้งยังสับสนในการใช้เครื่องหมาย = เช่น  $4 \times 2 = 8 \div 2$  ส่วนเด็กในช่วงอายุ 7-8 ปี เกือบจะไม่ปรากฏการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ นอกจากผู้วิจัยถามว่าสามารถเขียนแสดงการคิดได้หรือไม่มีเด็กเพียงคนเดียวเท่านั้นที่นำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสัญลักษณ์ แต่พบเพียงปัญหาเดียวและครั้งเดียวเท่านั้น

### 3. ระยะทบทวนการคิด

3.1 การแก้ปัญหา เด็กส่วนใหญ่ทั้งสามช่วงอายุมักไม่ค่อยตรวจสอบคำตอบที่ได้แต่จะมั่นใจในคำตอบที่ตนเองคิดเนื่องจากในการคิดแก้ปัญหานั้นได้ทำอย่างรอบคอบ นอกจากนี้ยังพบว่าเด็กที่บรรลุเป้าหมายการคิดในระยะที่ 2 มักมีการควบคุมการรู้คิดของตนเอง สามารถประเมินการคิดของตนเองและปรับการกระทำของตนเอง เมื่อดำเนินการแก้ปัญหามาได้ระยะหนึ่งหรือขณะให้สัมภาษณ์ถ้าวิธีการคิดของตนผิดหรือคิดคำตอบผิดมักรู้ตนเองเสมอ และสามารถบอกได้ทันทีว่าคำตอบผิด หรือไม่สามารถคิดโดยวิธีนี้ได้ต่อไป ก็จะหยุดคิดและเปลี่ยนวิธีหรือเปลี่ยนคำตอบใหม่ นอกจากนี้ยังพบว่าเด็กมีการสะท้อนการคิดของตนเองและมั่นใจในคำตอบของตนเองทุกครั้ง

3.2 การให้เหตุผล ในระยะนี้พบว่าเด็กประมาณครึ่งหนึ่งมีการให้เหตุผลเชิงสหสัญญา โดยสามารถระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่ แต่มีเด็กเพียงส่วนน้อยเท่านั้นที่มีการให้เหตุผลแบบนิรนัยคือสามารถนำข้อสรุปที่ได้มาก่อนหน้านั้นมาใช้ในการให้เหตุผล

3.3 การนำเสนอตัวแทนความคิด เด็กที่บรรลุเป้าหมายการคิดทุกคนสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปคำพูดได้ แต่มีเพียงบางคนเท่านั้นที่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์เพื่อเป็นการตรวจสอบคำตอบของตนอีกด้วย

## บทที่ 5

### การศึกษาเฉพาะกรณีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ในบทนี้เป็นการนำเสนอกรณีศึกษาของป๊อบ ผักกาดและมะปรางที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี 8-9 ปี และ 9-10 ปี ตามลำดับ เพื่อเจาะลึกถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กทั้งสามคน เหตุที่ผู้วิจัยเลือกป๊อบ ผักกาดและมะปรางมาเป็นกรณีสำหรับศึกษาเนื่องจาก ป๊อบเป็นเด็กที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี หรือชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งถือเป็นระดับเริ่มต้นของการศึกษาและป๊อบสามารถแสดงการคิดของตนเองได้อย่างเด่นชัด ดังนั้นน่าจะทำการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างแท้จริง ส่วนผักกาดที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี หรือชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เป็นกรณีที่สามารทำให้ข้อมูลได้มากเช่นกัน สำหรับมะปรางที่อยู่ในช่วงอายุ 9-10 ปี เป็นเด็กที่มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ชัดเจนเช่นกัน ดังนั้นเด็กทั้งสามคนน่าจะเป็นกรณีตัวอย่างที่มีแนวคิดที่ผู้วิจัยจะเรียนรู้ได้มาก การศึกษาเฉพาะกรณีจะช่วยให้สามารถเข้าใจมุมมอง ระบบวิธีคิดของเด็กทั้งสามคนได้ชัดเจนและลึกซึ้งขึ้น โดยเฉพาะกระบวนการคิดภายในสมองของเด็กทั้งสามคน

การนำเสนอในบทนี้ผู้วิจัยนำเสนอถึงผลการวิเคราะห์กระบวนการคิดอย่างละเอียดของเด็กทั้งสามคนในการตอบชุดคำถามตามรูปแบบของปัญหา 3 รูปแบบ คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ซึ่งจะเห็นกระบวนการคิดที่ต่อเนื่องและเป็นรูปธรรมของเด็กแต่ละคน รายละเอียดในการดำเนินการคิดของเด็กแต่ละคนปรากฏอยู่ในผลการศึกษาคณะเฉพาะในภาคผนวก ค

#### 1. รายละเอียดของกรณีตัวอย่าง

##### ป๊อบ

มีอายุอยู่ในช่วง 7-8 ปี ขณะที่เก็บข้อมูลมีอายุ 7 ปี 7 เดือน ที่บ้านอยู่กัน 5 คน คือ บิดา มารดา พี่ชาย น้องสาว และตัวเอง บิดามีอาชีพทำเฟอร์นิเจอร์ ส่วนมารดาขายอาหารตามสั่งอยู่ที่บ้าน พี่ชายเรียนอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 น้องสาวอายุ 4 ปี ป๊อบเล่นไฟไม่เป็นเพราะที่บ้านไม่มีใครเล่นไฟ เวลาทำการบ้านจะทำเองไม่ถามใคร ไม่ได้เรียนพิเศษ เมื่อถามว่าป๊อบเป็นเด็กอย่างไร ป๊อบบอกว่าป๊อบเป็นเด็กดี เพราะไม่เชื่อฟังพ่อ แต่เป็นเด็กเรียนดี ชอบไปโรงเรียนเพราะสนุก ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่สุด ป๊อบอ่านหนังสือไม่คล่อง เมื่อให้ทำโจทย์ปัญหาผู้วิจัยต้องอ่านให้ฟังทุกครั้งเพราะป๊อบไม่สามารถอ่านเองได้ แต่เมื่อผู้วิจัยอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟัง ป๊อบสามารถเข้าใจและจำโจทย์ปัญหาได้ทันที มีบ้างเป็นบางครั้ง (แต่น้อยมาก) ที่ผู้วิจัยต้องอ่านให้ฟังอีกครั้งเมื่อผู้วิจัยถามว่ารู้สึกอย่างไรที่ผู้วิจัยนำโจทย์ปัญหามาให้ทำ ป๊อบบอกว่าชอบทำโจทย์ โจทย์ไม่ยาก

### ผักกาด

มีอายุอยู่ในช่วง 8-9 ปี ขณะที่เก็บข้อมูลมีอายุ 8 ปี 4 เดือน ที่บ้านอยู่กัน 4 คน คือ บิดา มารดา พี่สาว และตัวเอง พี่สาวอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่โรงเรียนสวัสดิศึกษาเช่นเดียวกับผักกาด ที่บ้านของผักกาดขายส้มตำ และผักกาดช่วยที่บ้านขายของด้วย โดยช่วยทอนเงินลูกค้า แต่เวลา คิดเงินจะใช้เครื่องคิดเลขช่วย ผักกาดไม่เคยเล่นไฟ เรียนพิเศษตอนเย็นกับครูประจำชั้น โดยครูจะ สอนทำการบ้านอย่างเดียว เมื่ออยู่บ้านถ้าทำการบ้านไม่ได้จะไม่ถามใคร ผักกาดสามารถอ่าน หนังสือได้คล่องแคล่วและรวดเร็ว เมื่อถามว่าตัวเองเป็นเด็กแบบไหน จะตอบว่าเป็นเด็กเรียนเก่ง ตอน ป.1 สอบได้ที่ 2 แต่เป็นเด็กดีเพราะเวลาเพื่อนแกล้งก็จะแกล้งเพื่อนตอบ แต่ตั้งใจเรียน เมื่อผู้วิจัยถามว่าครูให้คิดเลขรู้อย่างไร ตอบว่าชอบทำโจทย์ โจทย์ไม่ยาก ทำได้

### มะปราง

มีอายุอยู่ในช่วง 9-10 ปี ขณะที่เก็บข้อมูลมีอายุ 9 ปี 2 เดือน ที่บ้านอยู่กัน 4 คน คือ บิดา มารดา น้อง และตัวเอง บิดาเป็นช่างรับจ้างทั่วไป มารดามีอาชีพค้าขาย เวลาอยู่ที่บ้านคนที่สอน การบ้านคือบิดา และถ้าไม่เข้าใจเกี่ยวกับการบ้านจะไปถามพี่ซึ่งเป็นลูกของป้า เวลาอยู่บ้านบางครั้ง ก็ช่วยแม่ขายของหรือยกของ บิดา-มารดาเอาใจใส่ดี ไม่ว่าจะเป็นเรื่องการเรียนหรือความประพฤติ มะปรางบอกว่าตนเองเป็นเด็กร่าเริง มีความรับผิดชอบ วิชาที่ชอบเรียนคือคณิตศาสตร์และ ภาษาไทย ไม่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ เรียนไม่ค่อยรู้เรื่อง เข้าใจยาก เมื่อผู้วิจัยถามว่าครูให้คิด เลขรู้อย่างไร ตอบว่าชอบ เพราะได้ลงมือทำ ได้คิด ได้นับเลข สนุกและเข้าใจในสิ่งที่ทำ

## 2. ผลการศึกษาเฉพาะกรณี

ผู้วิจัยเริ่มต้นศึกษาจากการตอบชุดคำถามในแต่ละชุดคำถามตั้งแต่โจทย์ปัญหาเริ่มต้น จนถึงโจทย์ปัญหาที่ขยายแนวคิดออกไปโดยเพิ่มขนาดของจำนวนหรือเปลี่ยนเนื้อเรื่อง (สถานการณ์ปัญหา) และสังเกตว่าเด็กมีวิธีการคิดอย่างไร อะไรที่อยู่เบื้องหลังการคิดของเด็กทั้ง สามคน โดยจะนำเสนอผลการวิเคราะห์เรียงตามโจทย์ปัญหาที่ถามเด็กทั้งสามคน (โจทย์ปัญหาและ ลำดับของโจทย์ปัญหาดังแสดงในภาคผนวก ข)

ต่อไปเป็นการแสดงลำดับการคิดแก้ปัญหของกรณีตัวอย่างทั้งสามคน โดยเริ่มแรกผู้วิจัย จะทำการศึกษาเชิงลึกกับปีบซึ่งอยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี ก่อน เนื่องจากปีบเป็นผู้ให้ข้อมูลหลักที่แสดง การคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างเด่นชัด มีการคิดที่สละสลวย อีกทั้งปีบยังมีแนวโน้มในการแสดงวิถี ธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ครบถ้วนทุกด้าน ไม่ว่าจะเป็น การแก้ปัญห การให้เหตุผล หรือการนำเสนอตัวแทนความคิดก็ตาม

### 2.1 การดำเนินการแก้ปัญหของปีบ

ต่อไปเป็นรายละเอียดในการดำเนินการแก้ปัญหการคูณและการหารจำนวนนับของปีบ พร้อมการวิเคราะห์โดยละเอียด ดูแผนและลำดับของโจทย์ปัญหาที่ใช้ในการสัมภาษณ์ในภาคผนวก ข

ตาราง 18 การดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับของปีปที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| ลักษณะของสถานการณ์                            | การดำเนินการแก้ปัญหา                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | การวิเคราะห์                                                                                                                                    | วิธีการทางคณิตศาสตร์ |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
|                                               | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                 |                      |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ และจำนวนมีขนาดเล็ก<br>[□x□] | การนึกภาพในใจ และการนับรวมกลุ่มและทำการบวกเพื่อลดขั้นตอนการบวกซ้ำโดยนำผลบวกมาบวกทบ | Y1: มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน [6 x 4 = □□]<br><br>ปีปคิดในใจและอธิบายถึงการคิดว่า 4 บวก 4 เป็น 8 แล้ว 4 บวก 4 เป็น 8 รวมอีก 8 เป็น 16 แล้วอีก 8 เป็น 24 เป็นโต๊ะ 6 ตัวแล้ว ตอบ 24<br><br>รวมจำนวนเด็ก 2 โต๊ะ (คือ 4 + 4) ได้ 8<br>รวมจำนวนเด็กอีก 2 โต๊ะ (คือ 4 + 4) ได้ 8<br>รวมทั้งสี่โต๊ะมีเด็ก 8 + 8 = 16<br>รวมจำนวนเด็กอีก 2 โต๊ะ (คือ 4 + 4) ได้ 8<br>นำจำนวนเด็ก 16 คน จากโต๊ะตัวแรกรวมกับโต๊ะจากสองตัวหลัง 16 + 8 = 24 | $\begin{array}{l} 4 + 4 \rightarrow 8 \\ 4 + 4 \rightarrow 8 \end{array} \rightarrow 16 \quad \begin{array}{l} \rightarrow 24 \\ 8 \end{array}$ |                      |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการคูณ : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| ลักษณะของ<br>สถานการณ์                                                                                   | การ                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | การวิเคราะห์                                                                                                                                                                                                                                    | วิธีการทางคณิตศาสตร์                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                          | ดำเนินการ               | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้<br>จำนวนมีขนาดใหญ่<br>ขึ้น                                                             | ตัวแบบ และ<br>การนับซ้ำ | ใช้ตัวแบบช่วยในการคิดโดยใช้การ์ดแทนโต๊ะ<br>และเมตลูกคิดแทนเด็ก นำเมตลูกคิดสาม<br>เม็ดใส่ลงในถาดแต่ละถาดจนครบสิบเม็ด<br>ถาด และใช้การนับซ้ำทีละ 3 "สาม หก<br>เก้า... สามสิบสาม" (การนับเพิ่มแต่ละครั้ง<br>จะนับตามถาดแต่ละใบ จับถาดใบที่หนึ่งนับ<br>สาม ถาดที่สองนับหก... ถาดที่สิบเอ็ดนับ<br>สามสิบสาม) จึงตอบ 33 | แสดงตามสถานการณ์โดยใช้ตัวแบบแทน<br>จำนวนเด็กในโต๊ะทีละ 1 ตัว นับจำนวนโต๊ะ<br>โดยใช้การนับซ้ำทีละ 3<br>นับจำนวนเด็กจากโต๊ะตัวที่ 1 ได้ 3<br>รวมจำนวนเด็กจากโต๊ะตัวที่ 1 และ 2 ได้ 6<br>จนถึงโต๊ะตัวที่ 11 ได้ 33                                 | ใช้การนับซ้ำทีละ 3 จำนวน 4 ครั้ง<br>โดยอาศัยตัวแบบ<br>ครั้งที่ 1 นับได้ 3<br>ครั้งที่ 2 นับ 6 (3 + 3)<br>ครั้งที่ 3 นับ 9 (6 + 3) |
|                                                                                                          | [□ x □]                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| Y2 : มีโต๊ะ 11 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 3 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน [11 x 3 = □□]                          |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้และ<br>ขนาดของจำนวนคง<br>เดิมแต่เปลี่ยนเนื้อ<br>เรื่องใหม่                              | ตัวแบบ และ<br>การบวก    | ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาโดยนับ<br>ตะเกียบมา 15 อัน แทนผลมะเขือเทศ แล้ว<br>จึงใช้การบวกคือ 4 + 15 ตอบ 19                                                                                                                                                                                                         | เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องปี๊บไม่สามารถเชื่อมโยง<br>การคิดจากปัญหาที่แท้จริง ปี๊บปี๊บใช้ตัวแบบ<br>สถานการณ์ปัญหาที่แท้จริง ปี๊บปี๊บใช้ตัวแบบ<br>ดำเนินการแก้ปัญหา โดยนับตะเกียบมา 15<br>อัน แทนผลมะเขือเทศ แล้วใช้การบวกคือ 4 + 15<br>จึงตอบ 19 ผล | เป็นวิธีการที่ไม่ถูกต้อง                                                                                                          |
|                                                                                                          | [□ x □□]                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| Y3 : เจนปลูกมะเขือเทศไว้ 4 ต้น ทุกต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล เจนมีมะเขือเทศทั้งหมดกี่ผล [4 x 15 = □□] |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้และ<br>ขนาดของจำนวนคง<br>เดิมแต่เปลี่ยนเนื้อ<br>เรื่องใหม่                              | ตัวแบบ และ<br>การบวก    | ใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาโดยนับ<br>ตะเกียบมา 15 อัน แทนผลมะเขือเทศ แล้ว<br>จึงใช้การบวกคือ 4 + 15 ตอบ 19                                                                                                                                                                                                         | เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องปี๊บไม่สามารถเชื่อมโยง<br>การคิดจากปัญหาที่แท้จริง ปี๊บปี๊บใช้ตัวแบบ<br>สถานการณ์ปัญหาที่แท้จริง ปี๊บปี๊บใช้ตัวแบบ<br>ดำเนินการแก้ปัญหา โดยนับตะเกียบมา 15<br>อัน แทนผลมะเขือเทศ แล้วใช้การบวกคือ 4 + 15<br>จึงตอบ 19 ผล | เป็นวิธีการที่ไม่ถูกต้อง                                                                                                          |
|                                                                                                          | [□ x □□]                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                   |

ตาราง 18 (ต่อ)

การหารในแบบของการวัด : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| จุดประสงค์                                                                                   |                                                     | การ                                                                                                                                                                                                                                           | ดำเนินการ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                    | การวิเคราะห์ | วิธีการทางคณิตศาสตร์ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------|
| การแก้ปัญหา                                                                                  |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                            |              |                      |
| [Y4] : ได้เรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว [8 ÷ 2 = □]  |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                            |              |                      |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ และจำนวนมีขนาดเล็ก<br>[□ ÷ □ = □]                                          | ตัวแบบและการนับซ้ำ                                  | ใช้ตัวแบบคือสภาพลาสติกแทนโต๊ะเรียน และเม็ดยกคิดแทนเด็ก นำสภาพลาสติกมาและวางเม็ดยกคิดลงบนสภาพลาสติกทีละแถวครั้งละ 2 เม็ดยก และนับซ้ำทีละสองในแถวที่วางเม็ดยกคิดลงในแต่ละแถว จนได้เม็ดยกคิดครบ 8 เม็ดยกหยุด นับคำตอบจากจำนวนสภาพลาสติกแล้วตอบ 4 | แสดงตามสถานการณ์โดยใช้ตัวแบบแทนโต๊ะและเด็ก นับจำนวนเด็กจากโต๊ะตัวที่ 1 ซึ่งมี 2 คน และใช้การนับซ้ำทีละ 2 จนถึง 8 โดยใช้ตัวแบบช่วยในการบันทึกจำนวนกลุ่ม                                                                                                                                                                    | ใช้การนับซ้ำทีละ 2 จำนวน 4 ครั้ง โดยอาศัยตัวแบบ<br>ครั้งที่ 1 นับได้ 2<br>ครั้งที่ 2 นับ 4 (2 + 2)<br>ครั้งที่ 3 นับ 6 (4 + 2)<br>ครั้งที่ 4 นับ 8 (6 + 2) |              |                      |
| [Y5] : ตันมะม่วงทุกต้นมีผลต้นละ 7 ผล ถ้ามีผลมะม่วงได้ 28 ผล จะมีต้นมะม่วงกี่ต้น [28 ÷ 7 = □] |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                            |              |                      |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ เปลี่ยนเนื้อเรื่องและเพิ่มขนาดของจำนวน                                     | การนึกภาพในใจโดยใช้การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวิคูณ | เมื่ออ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังจบลงปั๊บตอบทันทีว่า 4 ต้น โดยปริยายว่า “มี 7 ผล รวมกันเป็น 14 และอีก 2 ผล (ที่จริง 2 ต้น) เป็น 14 รวมกันเป็น 28 จึงได้ 4 ต้น”                                                                                        | นำจำนวนผลมะม่วงใน 2 ต้นมารวมกัน (คือ 7 + 7 = 14) และจำนวนผลของมะม่วงจาก 2 ต้นรวมกับอีก 2 ต้น (คือ 14 + 14 = 28) จึงตอบ 4 ต้น (14 + 14 มาจาก 7 + 7 กับ 7 + 7 จะเห็นว่าปัญหานี้ปั๊บจะไม่หน้า 7 มาบวกกันทั้งสี่จำนวนตามโจทย์เหมือนปัญหา Y1 แสดงว่าปีบเกิดการเรียนรู้และสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ และเข้าใจว่าจะนำสิ่งใดมาตอบ) | ใช้การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวิคูณ<br>2 ต้น 7 + 7 = 14<br>อีก 2 ต้น 14 + 14 = 28<br>จึงมีจำนวนต้น 4 ต้น                                                   |              |                      |
| [□ □ ÷ □ = □]                                                                                |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                            |              |                      |

ตาราง 18 (ต่อ)

การหารในแบบของการวัด : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| จุดประสงค์                                                                      | การดำเนินการแก้ปัญหา   | การวัดของสิ่งที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | การวิเคราะห์ | วิธีการทางคณิตศาสตร์                              |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|
| ปฏิบัติจริงไม่ได้<br>เปลี่ยนเนื้อเรื่องแต่<br>ขนาดของจำนวน<br>คงเดิม<br>[□÷□=□] | ตัวแบบและ<br>การนับซ้ำ | วิธีการคิดของปีบจะเหมือนกับปัญหา Y4<br>คือใช้ถาดพลาสติกแทนเต็นท์และเม็ดลูกคิด<br>แทนนักเรียน เริ่มต้นปีบจะนับเม็ดลูกคิดมา<br>สามเม็ดใส่ลงในถาดพลาสติกถาดที่หนึ่ง<br>และนับเม็ดลูกคิดอีกสามเม็ดใส่ลงในถาด<br>พลาสติกอีกทีละถาดๆ ละ 3 เม็ด และนับ<br>เพิ่มทีละสามจนได้เม็ดพลาสติกครบ 27<br>เม็ดจึงหยุด นับคำตอบจากจำนวนถาด<br>พลาสติก จึงตอบ 9 | เหมือน Y4    | เหมือน Y4 โดยใช้การนับซ้ำที่ละ 3<br>จำนวน 9 ครั้ง |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| การ                                                                                                               |           | วิธีการทางคณิตศาสตร์                                                            |                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| จุดประสงค์                                                                                                        | ดำเนินการ | การวิเคราะห์                                                                    |                                                           |
| การ                                                                                                               |           | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                         |                                                           |
| แก้ปัญหา                                                                                                          |           |                                                                                 |                                                           |
| N77 : เด็ก 9 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน $[9 \div 3 = \square]$ |           |                                                                                 |                                                           |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้                                                                                                 | การนึกภาพ | ปีบคิดในใจ “สามเหลือีกหก น้บมอีกสาม จัดเด็ก 3 คนแรก น้บโต๊ะตัวที่ 1             | การลบซ้ำโดยคิดในใจ                                        |
| และจำนวนมีขนาดเล็ก                                                                                                | ในใจ      | เป็นหกเหลือีกสาม น้บมอีกสามเป็นเก้า” เหลือีกอีก 6 คน จัดเด็กอีก 3 คนให้นั่งโต๊ะ | $9 - 3 \rightarrow 6 - 3 \rightarrow 3 - 3 \rightarrow 0$ |
|                                                                                                                   | การลบซ้ำ  | ขณะนั้นปีบนำเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดๆ ละ ตัวที่ 2                                   |                                                           |
|                                                                                                                   | และตัวแบบ | สามเม็ด เมื่อน้บครบเก้าเม็ดจึงหยุดนับ และ เหลือีก 3 คน จัดให้นั่งโต๊ะตัวที่ 3   |                                                           |
| $[\square \div \square = \square]$                                                                                |           | น้บคำตอบจากจำนวนเม็ดที่อยู่ในถาด จึงจัดเด็กครบทั้ง 9 คน น้บโต๊ะ 3 ตัวแล้ว       |                                                           |

ข้อสังเกต จากการตอบปัญหาของปีบ จะเห็นว่าปีบมีข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน (Number Fact) ที่ดี โดยปีบรู้ทันทีว่า  $3 + 3 + 3 = 9$  ดังนั้นเมื่อต้องการแบ่ง 9 ออกเป็น 3 กลุ่ม ปีบจึงระลึกได้ทันทีว่าสามารถแบ่งได้ทีละ 3

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| จุดประสงค์                                                                                                | การดำเนินการแก้ปัญหา          | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | การวิเคราะห์                                                                                                                                                                                                                      | วิธีการทางคณิตศาสตร์                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ปฏิบัติจริงไม่ได้                                                                                         | จำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้น           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                          |
| [Y8] : เด็ก 42 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 6 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน [42 ÷ 6 = □] |                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                          |
| จำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้น                                                                                       | การลองผิดลองถูก และการนับข้าม | ใช้ตัวแบบคือสภาพลัสติกแทนโต๊ะและเมดลูกคิดแทนเด็ก เริ่มต้นคิดปับจะนับสภาพลัสติกมา 6 ถาด และเมดลูกคิดมา 42 เมด นำเมดลูกคิดใส่ลงในถาดพลัสติกทั้งหกถาดๆ ละ เท่าๆ กันโดยการลองผิดลองถูก เริ่มแรกปับลองใส่ถาดละ 6 เมด (หยิบเมดลูกคิดไว้ในมือแล้วนับให้ครบหกจึงใส่ลงในถาด) ขณะใส่เมดลูกคิดลงในถาดพลัสติกจะนับผลรวมของเมดลูกคิดที่ใส่ลงไปในถาดพลัสติกด้วย โดยนับข้ามทีละ 6 นับถึงถาดที่ห้าได้สามสิบเมด จึงพบว่าเหลือเมดลูกคิดมากกว่าหกเมด จึงเพิ่มจำนวนเมดลูกคิดเป็นถาดละ 7 เมด | แสดงตามสถานการณ์โดยใช้ตัวแบบแทนโต๊ะและเด็ก จัดเด็ก 42 คน ออกเป็น 6 กลุ่มๆ ละ 7 คน เพื่อให้ที่นั่งโต๊ะ 6 ตัว จัดเด็ก 7 คน นั่งโต๊ะตัวที่ 1 จัดเด็กอีก 7 คน นั่งโต๊ะตัวที่ 2 เป็น 14 คน จัดเด็กอีก 7 คน นั่งโต๊ะตัวที่ 3 เป็น 21 คน | ใช้การนับข้ามทีละ 7 จำนวน 6 ครั้ง โดยอาศัยตัวแบบ                                                                                                                                                         |
| [□ ÷ □ = □]                                                                                               |                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                   | ครั้งที่ 1 นับได้ 7<br>ครั้งที่ 2 นับ 14 (7 + 7)<br>ครั้งที่ 3 นับ 21 (14 + 7)<br>ครั้งที่ 4 นับ 28 (21 + 7)<br>ครั้งที่ 5 นับ 35 (28 + 7)<br>ครั้งที่ 6 นับ 42 (35 + 7)<br>จึงจัดให้นั่งโต๊ะโต๊ะละ 7 คน |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

| จุดประสงค์                                                                                                                         | การดำเนินการ                | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | การวิเคราะห์                                                                                                                                                                                                | วิธีการทางคณิตศาสตร์                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| การแก้ปัญหา                                                                                                                        |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                             |                                          |
| [Y9] : พ่อซื้อมะปรางมา 4 ต้น แต่ละต้นมีผลมะปรางจำนวนเท่าๆกัน ถ้าฉันมีมะปรางได้ทั้งหมด 32 ผล แต่ละต้นมีมะปรางอยู่กี่ผล [32 ÷ 4 = □] |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                             |                                          |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้                                                                                                                  | ตัวแบบ                      | ใช้ตัวแบบโดยนับภาคफलสติกมา 4 ภาค                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | แสดงตามสถานการณ์โดยใช้ตัวแบบแทน                                                                                                                                                                             | ใช้การบวกซ้ำ                             |
| และจำนวนมีขนาดเท่าเดิม แต่เปลี่ยนเนื้อเรื่อง                                                                                       | การลองผิดลองถูกและการบวกซ้ำ | แทนต้นมะปราง และใช้การลองผิดลองถูกในการคาดเดาคำตอบไว้ล่วงหน้า แล้วนับจำนวนเม็ดลูกคิดใส่ลงในภาคफलสติกแต่ละภาคๆ ละเท่าๆ กัน เริ่มแรกนับเม็ดลูกคิดทีละเม็ดใส่ลงในภาคफलสติกภาคละ 6 เม็ด ได้ 2 ภาค จึงเพิ่มเป็นภาคละ 7 เม็ด พอนับมาได้ 3 ภาคจึงใส่เม็ดลูกคิดเพิ่มเป็นภาคละ 8 เม็ด และนับออกเสียงว่า “สิบหก แปด ยี่สิบสี่” หลังจากนั้นจึงหยิบเม็ดลูกคิดใส่ลงในภาคที่ 4 โดยนับเพิ่มทีละ 1 จาก 24 จนถึง 32 และตอบว่า “แปดครับ” | ต้นมะปรางและผลมะปราง นำจำนวนผลมะปรางใน 2 ต้นมารวมกัน (คือ 8 + 8 = 16) และนำจำนวนผลมะปรางจากต้นที่สามรวมกับสองต้นก่อน (คือ 16 + 8 = 24) แล้วจึงนำจำนวนผลมะปรางจากต้นที่สี่รวมกับสามต้นก่อน (คือ 24 + 8 = 32) | 8 + 8 = 16<br>16 + 8 = 24<br>24 + 8 = 32 |
| [□÷ □ = □]                                                                                                                         |                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                             |                                          |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการคูณ : อัตรา/ราคา

| จุดประสงค์                                                                                                                                                    | การดำเนินการแก้ปัญหา       | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                  | การวิเคราะห์                                                                                                                                                                                                                                           | วิธีการทางคณิตศาสตร์                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| [Y10] : กลุ่มอายุราคาก่อนละ 4 บาท กลุ่มอายุ 7 บาท ราคากี่บาท [ 7 x 4 = □□ ] (โจทย์ปัญหาที่ปรับเพื่อความเข้าใจ “ใช้ไปราคาฟองละ 4 บาท ใช้ไป 7 ฟอง ราคากี่บาท” ) |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ และจำนวนมีขนาดเล็ก                                                                                                                          | การนึกภาพในใจและการนับข้าม | นับใช้วัสดุคิดปัญหาให้นานมากแต่ไม่สามารถคิดได้ เมื่อผู้วิจัยถามว่าเข้าใจโจทย์ไหม บ๊อบบอกว่า “ไม่รู้จำกลุ่มอายุ 7 บาท” เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องเป็นสิ่งที่บ๊อบรู้จัก บ๊อบสามารถบอกคำตอบได้ทันทีและอธิบายว่า “1 ฟอง 4 2 ฟอง 8 3 ฟอง 12... 7 ฟอง 28” ซึ่งบ๊อบไม่ต้องการใช้หรืออุปกรณ์ช่วยนับ | สถานการณ์นี้ยากสำหรับบ๊อบเพราะบ๊อบไม่เข้าใจว่ากลุ่มอายุ 7 บาท เป็นอย่างไร เมื่อเปลี่ยนเป็นสิ่งที่บ๊อบรู้จัก เช่น ใช้ ปีบจึงสามารถแสดงวิธีการรวมหาดีของการคิด “ใช้ 1 ฟอง ราคา 4 บาท ใช้ 2 ฟอง ราคา 8 บาท ใช้ 3 ฟอง ราคา 12 บาท... ใช้ 7 ฟอง ราคา 28 บาท | ใช้การนับข้ามทีละ 4 จำนวน 7 ครั้ง คือ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 |
| [□x□ = □□]                                                                                                                                                    |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                |
| [Y11] : แกง 1 หม้อ ใช้เนื้อ 3 แก้ว แกง 4 หม้อ ต้องใช้เนื้อกี่แก้ว [ 4 x 3 = □□ ]                                                                              |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ เปลี่ยนเนื้อเรื่องแต่ขนาดของจำนวนคงเดิม                                                                                                     | การนึกภาพในใจและการนับข้าม | สามารถตอบคำถามได้ทันทีเมื่อฟังปัญหา จบว่าใช้เนื้อ 12 แก้ว โดยบ๊อบพูดว่า “1 หม้อ 3 แก้ว 2 หม้อ 6 แก้ว 3 หม้อ 9 แก้ว 4 หม้อ 12 แก้ว”                                                                                                                                                       | คิดในใจจาก แกง 1 หม้อ ใช้เนื้อ 3 แก้ว แกง 2 หม้อ ใช้เนื้อ 6 แก้ว แกง 3 หม้อ ใช้เนื้อ 9 แก้ว แกง 4 หม้อ ใช้เนื้อ 12 แก้ว                                                                                                                                | ใช้การนับข้ามทีละ 3 จำนวน 4 ครั้ง คือ 3, 6, 9, 12              |
| [□x□ = □□]                                                                                                                                                    |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการคูณ : อัตรา/ราคา

| จุดประสงค์                                                                              | การดำเนินการแก้ปัญหา                                                         | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | การวิเคราะห์                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | วิธีการทางคณิตศาสตร์                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [Y12] : แยก 1 หม้อ ใช้ผ้า 2 แก้ว แยก 14 หม้อ ต้องใช้ผ้ากี่แก้ว [14 x 2 = □□]            |                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้<br>เนื้อเรื่องคงเดิม<br>แต่จำนวนมีขนาด<br>ใหญ่ขึ้น<br>[□□ x □□ = □□□] | การนับข้าม<br>โดยใช้นิ้วมือ<br>ช่วยนับ<br>จำนวนกลุ่ม<br>แล้วใช้<br>การบวกซ้ำ | ใช้การนับข้ามโดยใช้นิ้วมือช่วยบันทึก<br>จำนวนกลุ่ม คือ 1 หม้อ 2 แก้ว ชูนิ้วโป้ง<br>ขึ้นมา 2 หม้อ 4 แก้ว ชูนิ้วชี้ตามมา 3 หม้อ<br>6 แก้ว ชูนิ้วกลางขึ้นมาอีก 4 หม้อ 8 แก้ว<br>ชูนิ้วนาง 5 หม้อ 10 แก้ว ชูนิ้วก้อย และนับ<br>ต่อจนถึง 14 แก้ว โดยชูนิ้วมืออีกข้างหนึ่ง<br>มองดูนิ้วที่ชูขึ้นมาจึงนำ 14 + 14 ตอบ 28<br>แก้ว | ปีปใช้วิธีการคิดเหมือนปัญหาที่แล้วแต่ใช้นิ้ว<br>มือช่วยนับจำนวนกลุ่ม เนื่องจากจำนวนกลุ่ม<br>มีมากเพื่อช่วยในการจำปีปจึงใช้นิ้วมือช่วย<br>(Keep Track) โดยใช้การนับข้ามทีละ 2<br>คือ 2, 4, 6, ..., 14 ได้จำนวนหน้าที่ใช้สำหรับ<br>แยก 7 หม้อ คือ 14 แก้ว และเมื่อพบว่า<br>จำนวนครั้งมากเกินกว่าจะใช้นิ้วมือ จึงใช้วิธี<br>คิดจากการนำจำนวนหน้าของแยก 7 หม้อ รวม<br>กับอีก 7 หม้อ เป็น 14 + 14 ได้ 28 แก้ว<br>แสดงว่าปีปสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้และยัง<br>แสดงการคิดที่สละสลวยอีกด้วย | ใช้การนับข้ามทีละ 2 จำนวน 7 ครั้ง<br>โดยใช้นิ้วมือช่วยนับจำนวนครั้งและใช้<br>การบวกซ้ำ<br>2, 4, 6, ..., 14<br>14 + 14 = 28<br>โดยรู้ว่า 7 กับ 7 ได้ 14 จึงไม่นับข้ามต่อ<br>อีก 7 ครั้ง แต่ใช้การนำ 14 มาบวกซ้ำ |

ข้อสังเกต จะเห็นว่าปีปมีวิธีการคิดที่สละสลวย รู้จักแยกวิธีคิด

โดยปีปรู้ว่า 7 รวมกับอีก 7 เป็น 14 และ 14 รวมกับ 14 เป็น 28

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการคูณ : อัตรา/ราคา

| จุดประสงค์ | การดำเนินการแก้ปัญหา | การคิดของเด็กที่แสดงออก | การวิเคราะห์ | วิธีการทางคณิตศาสตร์ |
|------------|----------------------|-------------------------|--------------|----------------------|
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |
|            |                      |                         |              |                      |

ไข่ตุ้มถ้วยที่ 20 ใช้ไข่ไก่ 2 ฟอง รวมเป็น 40 นำไข่ตุ้ม 20 ถ้วยรวมกับอีก 20 ถ้วย เป็น 40 ถ้วย ใช้ไข่ไก่ 80 ฟอง (มาจาก 40 + 40)

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการวัด : อัตรา/ราคา

| การ                                                                                                                       |                   |                                          |                                            | วิธีการทางคณิตศาสตร์               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------|
| จุดประสงค์                                                                                                                | ดำเนินการแก้ปัญหา | การคิดของเด็กที่แสดงออก                  | การวิเคราะห์                               |                                    |
| [Y14] : ขนมอบ้างปิ้งราคาแผ่นละ 2 บาท ถ้ามีเงิน 8 บาท จะซื้อขนมปังปิ้งได้กี่แผ่น $[8 \div 2 = \square]$                    |                   |                                          |                                            |                                    |
| ปฏิบัติจริงได้                                                                                                            | การนึกภาพ         | สามารถตอบคำถามได้ทันทีเมื่อฟังปัญหา      | คิดในใจโดยการนับข้ามจาก ราคา 2 บาท ได้     | ใช้การนับข้ามทีละ 2 คือ 2, 4, 6, 8 |
| จำนวนมีขนาดเล็ก                                                                                                           | ในใจและ           | พบว่า 4 แผ่น โดยนับบอกว่า “2 1 แผ่น 4    | ขนมปัง 1 แผ่น ราคา 4 บาท ได้ขนมปัง 2       |                                    |
| $[\square \div \square = \square]$                                                                                        | การนับข้าม        | 2 แผ่น 6 3 แผ่น 8 4 แผ่น”                | แผ่น ราคา 6 บาท ได้ขนมปัง 3 แผ่น ราคา 4    |                                    |
|                                                                                                                           |                   |                                          | บาท ได้ขนมปัง 4 แผ่น นั่นคือระบุจำนวน      |                                    |
|                                                                                                                           |                   |                                          | แผ่น (หรือจำนวนครึ่ง) แต่ละแผ่นก็นับ เพื่อ |                                    |
|                                                                                                                           |                   |                                          | นำมาเป็นคำตอบ                              |                                    |
| [Y15] : ในเวลา 1 วัน แ้วอ่านหนังสือได้ 9 หน้า ถ้าแ้วอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 45 หน้า จะใช้เวลากี่วัน $[45 \div 9 = \square]$ |                   |                                          |                                            |                                    |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้                                                                                                         | การนึกภาพ         | นับจะคิดเหมือน Y14 โดยใช้การนับข้ามที่   | เหมือน Y14 แต่ระบุจำนวน (หรือจำนวน         | เหมือน Y14 โดยใช้การนับข้ามทีละ 9  |
| เปลี่ยนเนื้อเรื่องและ                                                                                                     | ในใจ              | ละ 9 “1 วัน 9 2 วัน 18 3 วัน (พยายาม     | ครั้งของการนับ) ก่อน                       |                                    |
| จำนวนมีขนาดใหญ่                                                                                                           | การนับข้าม        | คิดว่า $18 + 9 = ?$ 27 4 วัน 36 5 วัน 45 |                                            |                                    |
| ขึ้น                                                                                                                      | และการบวก         | อ่าน 5 วัน”                              |                                            |                                    |
| $[\square \div \square = \square]$                                                                                        |                   |                                          |                                            |                                    |



ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตราราคา

| จุดประสงค์      | การดำเนินการ                                                                                        |                                                                         | การวิเคราะห์                                                                 | วิธีการทางคณิตศาสตร์   |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
|                 | ดำเนินการ                                                                                           | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                 |                                                                              |                        |
| แก้ปัญหา        |                                                                                                     |                                                                         |                                                                              |                        |
|                 | [Y17] : แดงซื้อขนมมา 3 ชิ้น เป็นเงิน 6 บาท ถ้าขนมทุกชิ้นราคาเท่ากัน ขนมราคาชิ้นละกี่บาท [6 ÷ 3 = □] |                                                                         |                                                                              |                        |
| ปฏิบัติจริงได้  | นึกภาพในใจ                                                                                          | ปีบคิดในใจโดยการนำ 2 มาบวกซ้ำกัน 3                                      | นำราคาของขนมปัง 2 แผ่นมารวมกัน (คือ 2 + 2 = 4) แล้วนำราคาของขนมปังแผ่นที่สาม | การบวกซ้ำโดยคิดในใจ    |
| จำนวนมีขนาดเล็ก | และการบวกซ้ำ                                                                                        | จำนวนได้ 6 จึงตอบ 2 และอธิบายว่า 1 ชิ้น 2 บาท 2 ชิ้น 4 บาท 3 ชิ้น 6 บาท | รวมกับสองแผ่นแรก (คือ 4 + 2 = 6)                                             | 2 + 2 = 4<br>4 + 2 = 6 |
| [□÷□ = □]       |                                                                                                     |                                                                         |                                                                              |                        |

ตาราง 18 (ต่อ)

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา

| จุดประสงค์                                                                                                        | การ<br>ดำเนินการ<br>แก้ปัญหา | การคิดของเด็กที่แสดงออก                    | การวิเคราะห์                              | วิธีการทางคณิตศาสตร์           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------|
| [Y18]: สิตำจับปลากระบอกได้ 8 ตัว นำไปขายในราคาเท่ากัน ได้เงินมา 40 บาท สิตำขายปลากระบอกไปแต่ละกี่บาท [40 ÷ 8 = □] |                              |                                            |                                           |                                |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้                                                                                                 | การนับข้าม                   | เริ่มต้นนับสภาพปลาสดิกมา 8 ถาด แทนปลา      | แบ่งเงิน 40 บาท ออกเป็น 8 ส่วนๆ ละเท่าๆ   | การนับข้ามทีละ 5 จำนวน 8 ครั้ง |
| เปลี่ยนเนื้อเรื่องและ                                                                                             | หลังจากใช้                   | และเม็ดลูกคิด 40 เม็ด แทนเงิน นำเม็ด       | กันโดยใช้ตัวแบบช่วยในการบันทึก            | โดยอาศัยตัวแบบช่วยนับ          |
| จำนวนมีขนาดใหญ่                                                                                                   | ตัวแบบ และ                   | ลูกคิดใส่ลงในสภาพปลาสดิกทั้งแปดถาดๆ        | ตัวที่ 1 ราคา 5 บาท                       | ครั้งที่ 1 นับได้ 5            |
| ขึ้น                                                                                                              | การลองผิด                    | ละ เท่าๆ กันโดยการลองผิดลองถูก             | ตัวที่ 2 ราคา 5 บาท รวม 2 ตัว เป็น 10 บาท | ครั้งที่ 2 ได้ 10 (5 + 5)      |
| [□ ÷ □ = □]                                                                                                       | ลองถูก                       | เริ่มแรกกับปลาลองใส่ถาดละ 8 เม็ด (หยาบเม็ด | ตัวที่ 3 ราคา 5 บาท รวม 3 ตัว เป็น 15 บาท | ครั้งที่ 3 ได้ 15 (10 + 5)     |
|                                                                                                                   |                              | ลูกคิดไว้หมื่อแล้วนับให้ครบแปดจึงใส่ลงใน   |                                           | .                              |
|                                                                                                                   |                              | ถาด) ขณะที่ใส่เม็ดลูกคิดลงในสภาพปลาสดิก    |                                           | .                              |
|                                                                                                                   |                              | จะนับผลรวมของเม็ดลูกคิดที่ใส่ลงไปในการ     |                                           | .                              |
|                                                                                                                   |                              | ปลาสดิกด้วย โดยนับข้ามทีละ 8 นับถึงถาด     | ตัวที่ 8 ราคา 5 บาท รวม 8 ตัว เป็น 40 บาท | ครั้งที่ 8 ได้ 40 (35 + 5)     |
|                                                                                                                   |                              | ที่สี่ได้สามสิบสองเม็ด จึงพบว่าเหลือเม็ด   |                                           |                                |
|                                                                                                                   |                              | ลูกคิดแปดเม็ด จึงลดจำนวนเม็ดลูกคิดเป็น     |                                           |                                |
|                                                                                                                   |                              | ถาดละ 7, 6 และ 5 จากนั้นนำเม็ดลูกคิดใส่    |                                           |                                |
|                                                                                                                   |                              | ลงในถาดทีละถาดจนหมด                        |                                           |                                |

ข้อสังเกต ถ้าเป็นการนับเพิ่มทีละ 5 ปีบจะนับจนครบเพราะนับได้ง่าย แต่ถ้าเป็นจำนวนอื่น เช่น การนับข้ามทีละ 7 ซึ่งนับยากกว่า 5 ปีบจะใช้การบวกซ้ำ หรือการบวกในลักษณะที่ดูช่วยอำนวยความสะดวก

## ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน : อัตรา/ราคา

| จุดประสงค์                                                                                                            | การ<br>ดำเนินกร<br>แก้ปัญหา | การคิดของเด็กที่แสดงออก                                                                                                                                                                           | การวิเคราะห์ | วิธีการทางคณิตศาสตร์          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------|
| [Y19] : หนังสือ 15 หน้า ก้อยใช้เวลาอ่าน 3 วัน ถ้าก้อยอ่านหนังสือได้เท่ากันทุกวัน ใน 1 วัน ก้อยจะอ่านหนังสือได้กี่หน้า |                             |                                                                                                                                                                                                   |              | $[32 \div 4 = \square]$       |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ เปลี่ยนเนื้อเรื่อง จำนวนมีขนาดเท่าเดิม                                                              | นักภาพในใจ และการบวก        | คิดในใจโดยตอนแรกตอบ 9 พอให้เล่าให้ฟัง ว่าทำไมจึงตอบ 9 นิ่งจิตสทครูจึงบอกว่า "ตอบผิด" และเปลี่ยนเป็น 5 วัน บอกว่า "เมื่อกินบิเกน" และนับให้ดู "2 วัน 10 หน้า 3 วัน 15 หน้า" ปีบบอกว่าใจหยังฮั่นยาก |              | การบวกซ้ำโดยคิดในใจเหมือน Y17 |

ปีบสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างดีในรูปแบบและลักษณะปัญหาที่ผ่านมา คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน และในลักษณะอัตรา/ราคา ส่วนปัญหาทางสามรูปแบบในลักษณะการเปรียบเทียบปีบไม่สามารถหาคำตอบได้จึงไม่แสดงไว้ในตารางเพราะขาดความเข้าใจในคำว่า “เท่า” แต่ปีบมีความเข้าใจในเรื่องของการเปรียบเทียบ โดยพิจารณาจากปัญหาการหารในแบบของการวัด [Y25-Y29] เมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนคำถามจาก “เดือนมีสมุด 6 เล่ม ตาวมีสมุด 2 เล่ม เดือนมีสมุดเป็นกี่เท่าของตาว” เป็น “เดือนมีสมุด 6 เล่ม ถ้าตาวซื้อสมุดครั้งละ 2 เล่ม ตาวต้องซื้อสมุดกี่ครั้งจึงจะมีสมุดเท่ากับเดือน” หรือเมื่อเปลี่ยนเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับอายุแทนปีบยังคงตอบปัญหาได้ส่วนปัญหาการคูณในลักษณะของผลคูณการที่เขียนนั้น ปีบไม่สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้เลย

จากตาราง 18 เมื่อพิจารณาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของปีบ จำแนกตามรูปแบบและลักษณะของปัญหาที่ใช้ในการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

ปัญหาการคูณในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน เมื่อจำนวนมีขนาดเล็กปีบจะใช้การนึกภาพในใจ และใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวกเพื่อลดขั้นตอนการบวกซ้ำโดยนำผลบวกมาบวกทบกัน เมื่อจำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้นปีบไม่สามารถคิดในใจได้จึงใช้ตัวแบบช่วยในการคิดและบันทึกจำนวนกลุ่ม แต่เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่และจำนวนยังคงมีขนาดใหญ่เช่นเดิม ปีบไม่สามารถเชื่อมโยงวิธีการคิดจากสถานการณ์ปัญหาก่อนหน้านั้นมาใช้แก้ปัญหาใหม่ได้ แสดงว่าปีบไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้สำหรับปัญหาลักษณะนี้

ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน เริ่มต้นปีบจะใช้ตัวแบบเพื่อช่วยให้มองเห็นภาพและใช้การนับข้ามเพื่อหาคำตอบ เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องและเพิ่มขนาดของจำนวนให้ใหญ่ขึ้นปีบสามารถใช้การนึกภาพในใจโดยใช้การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวีคูณเพื่อหาคำตอบ แสดงว่าปีบเข้าใจปัญหาและมองภาพออกโดยไม่ต้องอาศัยอุปกรณ์ช่วย แต่เมื่อจำนวนกลุ่มของคำตอบมีขนาดมากกว่า 5 ปีบจะใช้ตัวแบบช่วยในการบันทึกและใช้การนับข้ามเพื่อหาคำตอบ

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ในปัญหาเริ่มต้นคือ ปัญหา Y7 “เด็ก 9 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน” ปีบใช้การนึกภาพในใจและการลบซ้ำเพื่อหาคำตอบ แต่เมื่อผู้วิจัยให้ปีบอธิบายวิธีคิดปีบจึงใช้ตัวแบบนำเสนอตัวแทนความคิดของตนออกมา ขั้นตอนการอธิบายของปีบคือ นับถาดพลาสติกมาก่อน 3 ถาด แล้วจึงนับเม็ดลูกคิดให้ได้ 9 เม็ด โดยนับมาทีละสามเม็ด “สามเหลืออีกหก นับมาอีกสามเป็นหกเหลืออีกสาม นับมาอีกสามเป็นเก้า” ขณะที่ปีบนับเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดๆ ละสามเม็ด เมื่อนับครบเก้าเม็ดจึงหยุดนับ และนับคำตอบจากจำนวนเม็ดที่อยู่ในถาด แต่เมื่อเพิ่มขนาดของจำนวนให้ใหญ่ขึ้นโดยจำนวนกลุ่มของคำตอบมีค่ามากกว่า 5 ปีบจะใช้ตัวแบบ การลองผิดลองถูก และการบวกซ้ำเพื่อช่วยในการบันทึกและหาคำตอบ

ปัญหาการคูณในลักษณะของอัตรา/ราคา เริ่มแรกปีบจะใช้การนึกภาพในใจและการนับข้ามเพื่อหาคำตอบ แม้เปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่ปีบยังคงเข้าใจและสามารถเชื่อมโยงวิธีการคิดแบบเดิมได้ แต่เมื่อจำนวนกลุ่มมีขนาดใหญ่ขึ้น (มากกว่า 5) และจำนวนในกลุ่มมีขนาดเป็น 2 ปีบจึงใช้การนับข้ามโดยใช้นิ้วมือช่วยนับและช่วยบันทึกจำนวนกลุ่ม แล้วใช้การบวกซ้ำเพื่อประหยัดเวลาในการหาคำตอบซึ่งเป็นการแสดงถึงการคิดที่สละสลวยของปีบ

ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของอัตรา/ราคา เริ่มต้นปีบจะใช้การนึกภาพในใจและการนับข้าม แต่เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหา Y16 “ตมยำปลา 1 หม้อ ใส่ปลา 4 ชิ้น ถ้ามีปลาอยู่ 32 ชิ้น จะทำตมยำได้กี่หม้อ” ซึ่งจำนวนที่แบ่งมีขนาดเท่ากับ 32 และต้องแบ่งออกทีละ 4 ซึ่งเป็นจำนวนที่ปีบยังไม่คุ้น และจำนวนครั้งที่นับข้ามเกิน 5 ปีบจึงใช้ตัวแบบช่วยบันทึกจำนวนกลุ่มเมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนคำถามโดยเพิ่มขนาดของจำนวนขึ้นเรื่อยๆ ทำให้เห็นการคิดที่สละสลวยและ

การสร้างกรณีทั่วไปของปิ๊บชัดเจนขึ้น

ผู้วิจัย : มีปลา 36 ชิ้น ใส่หม้อละ 4 ชิ้น เหมือนเดิม จะทำต้มยำปลาได้กี่หม้อ

ปิ๊บ : (ตอบทันที) 9 หม้อ เพราะเพิ่มปลาอีก 4 ชิ้น ได้อีก 1 หม้อ

ผู้วิจัย : ถ้ามีปลา 40 ชิ้นล่ะ

ปิ๊บ : (ตอบทันทีเช่นเดิม) 10 หม้อ (เพราะปิ๊บบวกต่อจาก 36 คือนำ  $36 + 4 = 40$ )

ผู้วิจัย : มีปลา 80 ชิ้นล่ะ

ปิ๊บ : (ตอบทันที) 20 หม้อ

ผู้วิจัย : มีปลา 160 ชิ้นล่ะ

ปิ๊บ : (ยิ้มกว้าง แต่พยายามบวก 80 กับ 80 โดยนำ  $50 + 50$  ได้ 100 และ  $30 + 30$  ได้ 60 จึงรู้ว่า  $80 + 80 = 160$  ดังนั้น ปลา 160 ชิ้น จึงทำต้มยำได้  $20 + 20 = 40$  หม้อ) 40 หม้อ

(ที่ปิ๊บพยายามหาผลบวกของ 80 กับ 80 เพราะปิ๊บคาดเดาว่าโจทย์ที่ถามเกิดจากผู้วิจัยที่คูณจำนวนขึ้นเรื่อยๆ ปิ๊บจึงคิดว่า 160 น่าที่จะเป็นผลบวกทวีคูณของ 80 เช่นกัน) การที่ปิ๊บแสดงการคิดเช่นนี้เนื่องจากในปัญหา Y15 “ในเวลา 1 วัน แจ้วอ่านหนังสือได้ 9 หน้า ถ้าแจ้วอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 45 หน้า จะใช้เวลากี่วัน” ผู้วิจัยถามปิ๊บต่อว่า “ถ้าอ่านได้ทั้งหมด 90 หน้าล่ะ” ปิ๊บขมวดคิ้วและบอกว่าเลขเยอะ ผู้วิจัยจึงถามว่า “ $45 + 45$  เท่ากับเท่าไร” ปิ๊บนำ  $40 + 40$  และ  $5 + 5$  จึงบอก 90 ผู้วิจัยจึงถามว่า “ดังนั้น 90 หน้า ใช้เวลากี่วัน” ปิ๊บตอบทันทีว่า 10 และอธิบายว่า “45 หน้า ใช้ 5 วัน ใช้ไหมครับ อีก 45 หน้า ได้ 5 วัน  $5 + 5$  เป็น 10” แสดงว่าปิ๊บมีการให้เหตุผลแบบนิรนัยในการหาคำตอบโดยสามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่ได้

ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของอัตรา/ราคา เริ่มแรกปิ๊บใช้

การนึกภาพในใจและการบวกซ้ำ เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องและจำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้นปิ๊บจึงใช้การนับหลังจากใช้ตัวแบบตามจำนวนทั้งหมดในโจทย์ แยกตัวนับเป็นกลุ่มๆ โดยใช้การลองผิดลองถูก แล้วนับจากหนึ่งจนถึงผลรวม เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่แต่จำนวนมีขนาดใหญ่เท่าเดิมเนื่องจากปิ๊บเข้าใจวิธีคิดแล้วจึงใช้การนึกภาพในใจและการบวกซ้ำเพื่อหาคำตอบ

ปิ๊บไม่เข้าใจลักษณะปัญหาการเปรียบเทียบ ไม่รู้จักคำว่า “เท่า” หรือ “ครึ่งหนึ่ง” และไม่เข้าใจสถานการณ์ปัญหาในลักษณะผลคูณครั้งที่เขียน ปิ๊บจึงไม่สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์กับปัญหาลักษณะดังกล่าวได้

จากการวิเคราะห์การคิดของปิ๊บอย่างละเอียดเป็นที่น่าสังเกตว่า ถ้าจำนวนกลุ่มมีจำนวนมากกว่า 5 หรือเกินจำนวนในนิ้วมือหนึ่งข้าง ปิ๊บมักใช้ตัวแบบช่วยในการบันทึกจำนวนกลุ่ม

ส่วนมากปิ๊บดำเนินการแก้ปัญหาไม่ว่าจะเป็นปัญหาการคูณ หรือการหาร หรือปัญหาในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน อัตรา/ราคา ก็ใช้วิธีการคำนวณเดียวกันคือใช้การคิดในใจและใช้การนับซ้ำหรือการยุบรวมกลุ่มและทำการบวกเพื่อหาคำตอบ แต่เมื่อจำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้นหรือการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนมีจำนวนมากปิ๊บมักใช้ตัวนับมาช่วยในการบันทึกหรือการจำ (Keep Track) เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องส่วนมากปิ๊บเข้าใจและมองรูปแบบของปัญหาออกว่ามีวิธีการคิดเหมือน

ปัญหาก่อนหน้านั้น หรือเมื่อเปลี่ยนขนาดของจำนวนถ้าปีบจำปัญหาก่อนหน้านั้นได้ปีบจะนำคำตอบที่ได้มาคิดต่อไปโดยไม่ต้องเริ่มคิดใหม่ นอกจากนี้ยังพบว่าในการนับของปีบจะไม่ใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งเลย และปีบมักแสดงถึงการคิดที่สละสลวย ลดขั้นตอนที่ซ้ำๆ หรือทำการยุบรวมกลุ่ม เช่น แทนที่จะนับข้ามทีละ 2 จำนวน 14 ครั้ง ก็ใช้นับเพียง 7 ครั้ง แล้วจึงใช้การเพิ่มอีกเท่าหนึ่ง (การบวกในลักษณะทวีคูณ) ซึ่งพบว่าปีบใช้วิธีการนี้ในหลายๆ โจทย์ปัญหา บางครั้งปีบจะคาดเดาคำตอบไว้ล่วงหน้าและดำเนินการแก้ปัญหาก็เพื่อยืนยันคำตอบที่คาดเดาไว้ หรือมีแนวทางในการปรับคำตอบเมื่อการคาดเดาไม่ถูกต้อง

นอกจากนี้ยังพบว่าในการนับของปีบมักใช้การนับข้ามโดยไม่ต้องใช้ตัวช่วยในการนับนานๆ ครั้งจึงพบว่าปีบใช้มือช่วยในการนับ แต่ปีบมักใช้การมองที่นิ้วมือและสร้างภาพในใจแล้วดำเนินการนับโดยไม่ต้องใช้นิ้วมือจริงๆ ซึ่งวิธีการของปีบจะเหมือนกับเด็กที่ฝึกจินตคณิต ที่เริ่มแรกจะฝึกการใช้นิ้วหรือตัวแบบช่วยในการนับ ต่อมาจึงสร้างภาพในใจ/จินตนาการในสมองโดยไม่ต้องใช้ตัวช่วย

สรุปภาพรวมในการดำเนินการแก้ปัญหของปีบทั้ง 3 รูปแบบ พบว่า ไม่ว่าจะเป็นปัญหาคำนวณหรือการหารปีบมักใช้การนับข้ามไปข้างหน้า หรือการบวกในการดำเนินการแก้ปัญหามากกว่าการนับลดไปข้างหลัง หรือการลบ ในการแก้ปัญหทั้งหมดของปีบพบว่าปีบใช้การลบซ้ำเพียงปัญหาเดียวเท่านั้น คือปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน [Y7] แต่เป็นการใช้การลบซ้ำที่ไม่ชัดเจนนัก (ดูรายละเอียดการคิดของปีบจากตาราง 18 หน้า 131) นอกจากนี้ปีบยังมองว่าปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนเป็นปัญหาที่ยากกว่าปัญหาคำนวณหรือปัญหาการหารในแบบของการวัด และปีบมักใช้ตัวแบบและการลองผิดลองถูกในการหาคำตอบ

จากตาราง 18 และจากการศึกษาถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของปีบที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี สามารถสรุปวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ปีบใช้ในการแก้ปัญหาคำนวณและการหารจำนวนนับ ดังภาพประกอบ 33

วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของป๊อบ

| <div>การคิดเชิงคณิตศาสตร์</div> <div>ระยะของ<br/>การคิดเชิงคณิตศาสตร์</div> | การแก้ปัญหา                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | การให้เหตุผล                                                                                                                                                                                                                                                  | การนำเสนอตัวแทนความคิด                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่การคิด                                                           | ป๊อบเข้าใจปัญหา/มีการหาข้อมูลเพื่อหาคำตอบ (ยกเว้นปัญหาในลักษณะการเปรียบเทียบและผลคูณคาร์ทีเซียน)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | มีการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>- แสดงออกถึงการระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน                                                                                                                                                                                   | ในรูปคำพูด                                                                                                        |
| ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด                                         | 1. การดำเนินการแก้ปัญหา<br>- การนึกภาพในใจในลักษณะของการคิดคำนวณ<br>- การใช้ตัวแบบ<br>- การใช้การนับ/การบวก/การลบ<br>2. การวิเคราะห์<br>- แจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้<br>- บอกได้ว่าปัญหาที่ทำเหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แล้วตรงไหน<br>- บอกขั้นตอนการคิดได้<br>3. การสร้างกรณีทั่วไป<br>- สามารถนำวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้<br>4. การสร้างข้อความคาดการณ์<br>- ยังไม่ชัดเจนนักเพราะป๊อบเพียงแต่เดาคำตอบเมื่อขนาดของจำนวนเพิ่มขึ้นเท่านั้น | 1. การอุปนัย<br>- สามารถสรุปวิธีหาคำตอบได้จากการพิจารณาสถานการณ์ต่างๆ ที่คล้ายคลึงกัน<br>- นำคำตอบที่ได้ไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป<br>2. การนิรนัย<br>- สามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่<br>- แสดงเหตุผลในการหาคำตอบได้ชัดเจน | 1. ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้<br>- ใช้ตัวแบบ-ตัวนับ และใช้การนับ<br>2. ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์<br>- ใช้ตัวเลข |
| ระยะทบทวนการคิด                                                             | การควบคุมการรู้คิด<br>- สามารถประเมินการคิดของตนเองและปรับการกระทำของตนเอง<br>- มีการสะท้อนการคิดของตนเองและมั่นใจในคำตอบของตนเองทุกครั้ง                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1. การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์<br>- ระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่<br>2. การนิรนัย<br>- ไม่สามารถนำข้อสรุปที่ได้มาก่อนหน้านั้นมาใช้ในการให้เหตุผล                                                                                                | ในรูปคำพูด                                                                                                        |

### การแก้ปัญหาของبيب

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่การคิด | بيبมีระยะเข้าสู่การคิด เข้าใจในสถานการณ์ปัญหาอย่างดี โดยจะทำความเข้าใจ โจทย์ปัญหา ก่อนเริ่มคิดทุกครั้ง และใช้เวลาไม่นานในการทำ ความเข้าใจปัญหา แยกแยะข้อมูลในโจทย์ปัญหาซึ่งจะใช้ในการตอบคำถามได้ กล่าวคือสิ่งที่โจทย์ กำหนด โจทย์ต้องการอะไร และคิดว่าจะนำวิธีการใดมาใช้ในการดำเนินการ แก้ปัญหาบ้าง |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การเข้าใจปัญหา/การหาข้อมูล เพื่อหาคำตอบ | เมื่อกำหนดปัญหา “โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว” บيبรู้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้และต้องการให้หาอะไร การแสดงออกถึงความเข้าใจปัญหาของبيبโดยนำถาดพลาสติกแทนโต๊ะเรียน และมีตุ๊กตาคิดแทนเด็ก เริ่มต้นبيبจะนำถาดพลาสติกมาและวางมีตุ๊กตาคิดลง บนถาดพลาสติกทีละถาด |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                      |                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะดำเนินการให้บรรลุ เป้าหมายการคิด | بيبแสดงการดำเนินการแก้ปัญหาอย่างมีขั้นตอน มีการวิเคราะห์ปัญหา สามารถสร้างกรณีทั่วไป และสร้างข้อความคาดการณ์โดยการเดาคำตอบหรือ วิธีหาคำตอบล่วงหน้าแล้วค้นหาคำตอบที่ถูกต้อง นอกจากนี้بيبยังสามารถ แสดงการคิดได้อย่างสละสลวย รวดเร็วและถูกต้อง |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การดำเนินการแก้ปัญหา | بيبสามารถแก้ปัญหาได้ทั้งที่มีลักษณะลงมือปฏิบัติจริงได้และปฏิบัติจริงไม่ได้ สามารถบอกได้ว่าปัญหาที่มีรูปแบบและลักษณะของปัญหาเหมือนกันเมื่อ เปลี่ยนเนื้อเรื่องหรือขนาดของจำนวนแต่วิธีการคิดยังคงเหมือนเดิม ซึ่งพบว่า บيبมักดำเนินการแก้ปัญหาใน 4 แบบ คือ <ul style="list-style-type: none"> <li>- ใช้ตัวแบบ กับลักษณะปัญหาการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันในทุกรูปแบบ ของปัญหา และลักษณะปัญหาอัตรา/ราคาในการหารในแบบของการวัด และการหารในแบบของการแบ่งส่วน</li> <li>- ใช้การนับ กับลักษณะปัญหาการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันในปัญหา การหารทั้งสองรูปแบบแต่ไม่ใช้กับปัญหาการคูณ ลักษณะปัญหาอัตรา/ราคาใน ทุกรูปแบบของปัญหา และลักษณะปัญหาการเปรียบเทียบในปัญหาการหารทั้งสองรูปแบบ</li> <li>- ใช้การบวก/การลบ กับลักษณะปัญหาการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากันใน ปัญหาการคูณและปัญหาการหารในแบบของการวัด ลักษณะปัญหาอัตรา/ราคา ในปัญหาการคูณและปัญหาการหารในแบบของการวัด และลักษณะปัญหา การเปรียบเทียบในปัญหาการหารในแบบของการวัด ไม่ปรากฏว่าبيبใช้ การบวก/การลบกับปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน</li> <li>- ใช้การนึกภาพในใจ บيبใช้การนึกภาพในใจเกือบทุกรูปแบบและลักษณะของ ปัญหา ยกเว้นปัญหาในลักษณะการเปรียบเทียบในทุกรูปแบบของปัญหาและ ผลคูณคาร์ที่เขียนที่بيبไม่เข้าใจ</li> </ul> |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|              |                                                                                                                                 |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การวิเคราะห์ | ปีบสามารถแจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหา บอกได้ว่าปัญหาที่ท่าเหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แล้วตรงไหน อีกทั้งสามารถบอกขั้นตอนการคิดได้ |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## ตัวอย่าง

|                                                         |                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| บอกได้ว่าปัญหาที่ท่าเหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แล้วตรงไหน | เมื่อเสนอสถานการณ์ปัญหาที่มีลักษณะและรูปแบบปัญหาเดียวกัน ส่วนมากปีบสามารถบอกได้ว่าปัญหานี้ไม่เหมือนปัญหาก่อนตรงตัวเลขหรือเนื้อเรื่อง แต่วิธีการคิดเหมือนกัน |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                    |                                                                                             |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| การสร้างกรณีทั่วไป | สามารถนำกรณีเฉพาะมาพิจารณาเชื่อมโยงไปสู่การสร้างกรณีทั่วไปหรือเริ่มมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้น |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|

## ตัวอย่าง

|                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| สามารถนำวิธีดำเนินการแก้ปัญหามาใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้ | เมื่อผู้วิจัยเพิ่มขนาดของจำนวนขึ้นในแต่ละสถานการณ์ปัญหาปีบสามารถตอบคำถามได้ทันทีโดยคิดในใจ เช่นจากปัญหา Y1 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าเพิ่มจำนวนเด็กเป็น 20 คน ให้นำไข่ไก่ละ 2 คน เหมือนเดิม จะใช้ไข่ไก่กี่ตัว” ปีบสามารถตอบได้ทันทีว่า 10 คน เมื่อเพิ่มจำนวนเด็กเป็น 100 คน ปีบบอกว่ายังไม่รู้จัก 100 ผู้วิจัยจึงลดขนาดของจำนวนลงเหลือ 60 คน ปีบสามารถเดาคำตอบได้ว่า “ไข่ไก่น่าจะมากกว่า 10 ตัว เพราะเลข (เด็ก) เยอะกว่า น่าจะเป็น 20 ตัว” พอถามว่า “40 คนละ” ปีบบอก “15 ตัว เพราะน้อยกว่า 60 คน” แสดงว่าปีบเริ่มมีการสร้างกรณีทั่วไป |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การสร้างข้อความคาดการณ์ | ปีบคล้ายจะสร้างข้อความคาดการณ์ได้แต่ไม่ชัดเจนนัก เช่น เมื่อเสนอรูปแบบปัญหาในลักษณะเดียวกันให้ปีบสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ เมื่อขยายปัญหาต่อไปปีบจะคาดเดาคำตอบและวิธีการคิดไว้ล่วงหน้าก่อน แล้วจึงดำเนินการคิดว่าตรงกับที่ตนเองคาดการณ์หรือไม่ แต่ปีบยังไม่ถึงกับสร้างเป็นข้อความคาดการณ์และนำเสนอตัวแทนความคิดออกมาได้ ต่อเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ปีบจึงอธิบายข้อความคาดการณ์ของตนออกมา |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## ตัวอย่าง

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| เดาคำตอบและวิธีการคิด | เมื่อกำหนดปัญหา “พ่อซื้อมะปรางมา 4 ต้น แต่ละต้นมีผลมะปรางจำนวนเท่าๆกัน ถ้านับมะปรางได้ทั้งหมด 32 ผล แต่ละต้นมีมะปรางอยู่กี่ผล”<br>การคิดของปีบ: เริ่มต้นปีบจะนำถาดมา 3 ถาดเพื่อแทนต้นมะปราง และนับเม็ดลูกคิด (แทนผลมะปราง) ใส่ลงไปในถาดๆ ละ 6 เม็ด และนับเม็ดลูกคิดรวมกัน เมื่อใส่ถึงถาดที่สองปีบรู้ว่าได้ทั้งหมด 12 เม็ด จึงนับเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดที่สามอีก 6 เม็ด เมื่อรู้ว่ายังไม่ครบ 32 จึงนำถาดที่สี่มา แต่ครั้งนี้ปีบจะเพิ่มเม็ดลูกคิดลงไปในถาดทุกใบเป็นใบละ 8 เม็ด เมื่อนับเม็ดลูกคิดยังไม่ถึง 32 (ปีบนับว่า 6 8 24) ปีบจึงนับเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดที่สี่อีก 8 เม็ด จึงตอบว่ามีมะปรางอยู่ต้นละ 8 ผล |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                 |                                                                                                                                            |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระบะทบทวนการคิด | ปีบมีการควบคุมการรู้คิดของตนเอง สามารถพิจารณาได้ว่าคำตอบของตนเอง สมเหตุสมผลหรือไม่ เมื่อคิดว่าคำตอบไม่ถูกจะเปลี่ยนคำตอบหรือวิธีการคิดทันที |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**ตัวอย่าง**

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การควบคุมการรู้คิด | <p>เมื่อกำหนดปัญหา “มีโต๊ะ 11 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 3 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน”</p> <p>ตอนแรกปีบตอบเท่ากับ 23 เมื่อถามให้ปีบอธิบายวิธีคิดของตนเองปีบจึงอธิบายว่า “4 แล้วเหลือ 3 นับลงไป 1” (หมายถึงตอนแรกได้ 24 แล้วนับลงไป 1 จึงเหลือ 23 ซึ่ง 24 ปีบจะนำมาจากคำตอบของปัญหาที่แล้วซึ่งเป็นปัญหาที่มีเนื้อเรื่องเหมือนกันแต่เปลี่ยนขนาดของจำนวนใหม่) ผู้วิจัยจึงบอกว่า “ไม่เข้าใจว่าปีบได้ 23 มาได้อย่างไรลองเล่าให้ครูฟังสิคะ” ปีบจึงใช้ตัวแบบ (เม็ดลูกติดกับถาดพลาสติก) แสดงการคิดให้ดูโดยใช้ถาดแทนโต๊ะและเม็ดลูกติดแทนเด็ก แต่การใช้ตัวแบบของปีบในครั้งแรกนี้ปีบจะใช้เพียงการนำเม็ดลูกติดสามเม็ดใส่ลงในถาดหนึ่งใบ (ใช้เพื่อแสดงให้เห็นภาพของการจัดเด็กสามคนนั่งโต๊ะหนึ่งตัว) หลังจากนั้นปีบจึงใช้การบวก “3 บวก 3 เป็น 6 แล้ว 3 บวก 6 เป็น 9 แล้ว 9 บวก 3 เป็น 12 บวกไปเรื่อย ๆ 11 ตัว ได้ 23” ปีบจะมั่นใจว่าคำตอบของตนเองถูกต้อง ผู้วิจัยจึงให้ปีบหาผลบวกให้ดูอีกครั้ง ปีบจึงเริ่มนับ “สาม หก เก้า สิบสอง... ยี่สิบเจ็ด” ปีบทำหน้าหงาย ๆ หลังจากนั้นปีบจึงเปลี่ยนไปใช้ตัวแบบช่วยในการคิด ครั้งนี้ปีบจัดจนครบสิบเอ็ดถาดโดยนำเม็ดลูกติดสามเม็ดใส่ลงในถาดแต่ละใบ และตอบ 33 (ปีบแสดงสีหน้าเชื่อมั่นในคำตอบครั้งนี้ของตนเองอย่างยิ่ง) พอให้ปีบนับให้ดูปีบจะใช้การนับข้ามทีละสาม “สาม หก เก้า... สามสิบ สาม” (การนับข้ามแต่ละครั้ง ปีบจะนับตามถาดแต่ละใบ จับถาดใบที่หนึ่งนับสาม ถาดที่สองนับหก... ถาดที่สิบเอ็ดนับสามสิบสาม)</p> |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### การให้เหตุผลของبيب

|                            |                                                                                                                          |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่การคิด          | بيبมีการให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ เมื่อเผชิญปัญหาในรูปแบบและลักษณะเดียวกันสามารถระลึกได้ทันทีว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาเดิม |
| การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ | แสดงออกถึงการระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน                                                                                |

#### ตัวอย่าง

|                                 |                                                                                 |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| การระลึกถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกัน | เมื่อกำหนดปัญหาให้ สามารถบอกได้ทันทีว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาใดที่เคยผ่านมาแล้ว |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|

|                                     |                                                                                                                  |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด | เป็นระยะที่เกี่ยวข้องกับการอุปนัยและการนิรนัย                                                                    |
| การอุปนัย                           | สามารถสรุปวิธีหาคำตอบได้จากการพิจารณาปัญหาที่คล้ายคลึงกัน และสามารถนำคำตอบที่ได้ไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป |

#### ตัวอย่าง

|                      |                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การสรุปวิธีหาคำตอบ   | بيبสามารถหาคำตอบของปัญหา จากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน เช่น เมื่อผู้วิจัยเพิ่มขนาดของจำนวนขึ้นในแต่ละสถานการณ์ปัญหา บيبสามารถตอบคำถามได้ทันทีโดยคิดในใจ นั่นคือبيبสามารถสรุปวิธีการหาคำตอบได้ |
| การตรวจสอบกรณีทั่วไป | بيبสามารถนำคำตอบที่ได้ในแต่ละปัญหาไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป เช่นสามารถนำวิธีการคิดจากปัญหา Y15 มาใช้ในการหาคำตอบของปัญหา Y16 ได้                                                                    |

|           |                                                                                               |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| การนิรนัย | เป็นการพิจารณาเหตุผลและลงความเห็นจากหลักการทั่วไปและให้ข้อสรุปในกรณีเฉพาะตามหลักการทั่วไปนั้น |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|            |                                                                                                                                                                                                                   |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การหาคำตอบ | สามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่ได้ เช่น เมื่อผู้วิจัยขยายแนวคิดโดยเพิ่มขนาดของจำนวนในโจทย์ปัญหาโดยทวีคูณขึ้น บيبสามารถนำวิธีการคิดเดิมและจากการแก้ปัญหาก่อนหน้านั้นมาใช้หาคำตอบใหม่ได้ |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                            |                                                    |
|----------------------------|----------------------------------------------------|
| ระยะทบทวนการคิด            | เป็นระยะที่ต้องการตรวจสอบการแก้ปัญหา               |
| การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ | เป็นการแสดงความคิด ความรู้สึจากจินตนาการภายในตนเอง |

#### ตัวอย่าง

|                                                                           |                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่                           | เมื่อกำหนดปัญหา “มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน จะมีเด็กทั้งหมดถึง 100 คน หรือไม่” สามารถบอกได้ทันทีว่าไม่ควรจะมีเด็กถึง 100 คน |
| การนิรนัย                                                                 | สามารถนำข้อสรุปที่ได้ก่อนหน้านั้นมาใช้ในการให้เหตุผล                                                                                      |
| بيبยังไม่สามารถยืนยันความสมเหตุสมผลของคำตอบจากกรณีทั่วไปที่สร้างขึ้นมาได้ |                                                                                                                                           |

### การนำเสนอตัวแทนความคิดของป๊อบ

|                   |                                    |
|-------------------|------------------------------------|
| ระยะเข้าสู่การคิด | เป็นระยะหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามต่างๆ |
|-------------------|------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|            |                                             |
|------------|---------------------------------------------|
| ในรูปคำพูด | บอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไร และต้องการให้หาอะไร |
|------------|---------------------------------------------|

|                                     |                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด | เนื่องจากป๊อบเข้าใจในปัญหาเป็นอย่างดี ใช้การลงมือปฏิบัติที่ถูกต้อง เมื่อลงมือปฏิบัติยังอธิบายได้ว่าตัวแทนใดใช้แทนสิ่งใดในปัญหา ป๊อบจึงมั่นใจในคำตอบของตนเองทุกปัญหา |
| ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้           | เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาโดยการกระทำ เป็นการสัมผัสกับสิ่งที่ เป็นรูปธรรม                                                                                        |

#### ตัวอย่าง

|                   |                                                                                                                       |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ปฏิบัติจริงได้    | มีเพียง 2 ปัญหาในลักษณะของอัตรา/ราคาเท่านั้นที่ป๊อบทำ และป๊อบใช้ตัวแทนคือเม็ดลูกคิดสองสีแทนสิ่งของในโจทย์ปัญหาสองสิ่ง |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ | ใช้ตัวแทน-ตัวนับ หรือใช้การนับ                                                                                        |

|                              |                                                                    |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ | เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์หรือเหตุการณ์ต่างๆ โดยใช้สัญลักษณ์หรือภาษา |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|                   |                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ปฏิบัติจริงได้    | เมื่อผู้วิจัยถามป๊อบว่าเขียนแสดงวิธีการคิดได้ไหม ป๊อบจึงเขียนตัวเลขแทนจำนวนที่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหา เช่น “2 + 2 4 2 + 2 4” หมายถึง $2 + 2 = 4$ และ $2 + 2 = 4$ (แต่พบเพียงครั้งเดียวและปัญหาเดียวเท่านั้น) |
| ปฏิบัติจริงไม่ได้ | ใช้คำพูด                                                                                                                                                                                                   |

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| ระยะทบทวนการคิด | เป็นระยะที่ต้องการตรวจสอบการแก้ปัญหา |
|-----------------|--------------------------------------|

#### ตัวอย่าง

|            |                        |
|------------|------------------------|
| ในรูปคำพูด | บอกถึงวิธีการตรวจคำตอบ |
|------------|------------------------|

ภาพประกอบ 33 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของป๊อบที่อยู่ในช่วงอายุ 7-8 ปี

## 2.2 การดำเนินการแก้ปัญหาของผักกาดและมะปราง

ต่อไปผู้วิจัยทำการศึกษกรณีตัวอย่างอีกสองคนคือผักกาดและมะปรางซึ่งอยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี และ 9-10 ปี ตามลำดับ โดยการศึกษากรณีตัวอย่างของเด็กสองคนนี้ผู้วิจัยจะไม่แสดงการวิเคราะห์โดยละเอียดเช่นเดียวกับبيب เนื่องจากการแก้ปัญหาของเด็กทั้งสามคนส่วนใหญ่จะคล้ายๆ กัน ผู้วิจัยนำเสนอในส่วนที่بيبไม่สามารถแสดงวิถีธรรมชาติเชิงคณิตศาสตร์ได้แต่เด็กอีกสองคนนี้สามารถแสดงได้ เช่น ปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียนที่มะปรางสามารถแสดงวิถีธรรมชาติเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างสละสลวยและสามารถสร้างกรณีทั่วไปจากการแก้ปัญหาในลักษณะนี้ด้วย

ตาราง 19 และ 20 เป็นรายละเอียดในการดำเนินการแก้ปัญหาคูณและการหารจำนวนนับของผักกาดและมะปราง ตามลำดับ



ตาราง 19 การแก้ปัญหาของฝึกกาตที่อยู่ในช่วงอายุ 8-9 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหา

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | การหาร                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ในแบบของการวัด                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>[Y1] : มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน<br/>ฝึกกาตคิดในใจ โดยการบวกเพิ่มครั้งละ 4<br/>4 + 4 ได้ 8, 8 + 4 ได้ 12 ...<br/>20 + 4 ได้ 24 (วิธีการหาผลบวกของฝึกกาตจะใช้นับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือไปจนครบ 6 ครั้ง )</p> <p>[Y2] : มีโต๊ะ 11 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 3 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน<br/>ใช้นับเพิ่มทีละหนึ่งโดยใช้นิ้วมือช่วยนับ ใช้นิ้วข้างหนึ่งนับจำนวนเด็กและมืออีกข้างหนึ่งนับจำนวนโต๊ะ เช่น หนึ่ง สอง สาม-หนึ่ง สี่ ห้า หก-สอง เจ็ด แปด เก้า-สาม...<br/>สามสิบเอ็ด สามสิบสอง สามสิบสาม-สิบเอ็ด</p> <p>[Y3] : เจนปลูกมะเขือเทศไว้ 4 ต้น ถ้าทุกต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล เจนมีมะเขือเทศทั้งหมดกี่ผล<br/>ฝึกกาตมองออกว่าปัญหานี้คิดเหมือนปัญหาก่อนและสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ และหาคำตอบโดยการนับเพิ่มทีละหนึ่งเหมือนปัญหาที่แล้ว คือ หนึ่ง สอง สาม... สิบห้า-หนึ่ง สิบหก สิบเจ็ด สิบแปด...<br/>สามสิบ-สอง สามสิบเอ็ด สามสิบสอง สามสิบสาม... สิบห้า-สาม สิบหก สิบเจ็ด สิบแปด... ห้าสิบห้า-สี่ (ฝึกกาตนับไม่ครบ เพราะจำผิดว่านับครบแล้ว)</p> | <p>[Y4] : โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว<br/>ใช้ตัวแบบ โดยนับเม็ดลูกคิดสีเหลืองมา 8 เม็ด แทนจำนวนเด็ก และเม็ดลูกคิดสีน้ำเงิน 2 เม็ด แทนมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน เวลาคิดจะแบ่งเฉพาะเม็ดลูกคิดสีเหลืองออกเป็น กองๆ ละ 2 เม็ด ตอบ 4 ตัว โดยนับจากจำนวนกองเพราะแต่ละกองแทนโต๊ะ 1 ตัว</p> <p>[Y5] : ต้นมะม่วงทุกต้นมีผลต้นละ 7 ผล ถ้านับผลมะม่วงได้ 28 ผล จะมีต้นมะม่วงกี่ต้น<br/>ใช้นับเพิ่มทีละหนึ่ง โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ (หนึ่ง สอง สาม... เจ็ด-หนึ่ง ... ยี่สิบสอง ยี่สิบสาม ยี่สิบสี่... ยี่สิบแปด-สี่)</p> <p>[Y6] : ในการเข้าค่ายพักแรม นักเรียน 27 คน เข้าพักในเต็นท์ได้หลังละ 3 คน จะต้องใช้เต็นท์ทั้งหมดกี่หลัง<br/>ฝึกกาตใช้วิธีการคิดแบบเดิม คือ การนับเพิ่มทีละหนึ่ง โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ (หนึ่ง สอง สาม-หนึ่ง...)</p> | <p>[Y7] : เด็ก 9 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน<br/>ใช้ตัวแบบช่วยในการคิด โดยนับเม็ดลูกคิดมา 9 เม็ด แทนเด็ก 9 คน และนำเม็ดลูกคิดมาทีละ 3 เม็ด แบ่งออกเป็น 3 กอง โดยเริ่มใส่ทีละกองๆ ละ 1 เม็ดก่อน แล้วจึงเพิ่มเป็นกองละ 2 และ 3 เม็ดตามลำดับ (เหมือนการแจกไพ่) และตอบโต๊ะละ 3 คน</p> <p>[Y8] : เด็ก 42 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 6 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งได้โต๊ะละกี่คน<br/>ในการคิดปัญหานี้ฝึกกาตใช้การวาดภาพแทนตัวแบบโดยวาดภาพเม็ดลูกคิดทีละกลุ่มๆ ละ 6 เม็ด และนับต่อไปทีละหนึ่งจนครบ 42 เม็ด (ซึ่งได้ 7 กลุ่มๆ ละ 6 เม็ด) เวลาหาคำตอบจะนับจากจำนวนเม็ดลูกคิดในหนึ่งกลุ่ม จึงตอบ 6 คน</p> <p>[N7] : บอมมีลูกอม 25 เม็ด แบ่งให้เพื่อน 5 คนๆ ละ เท่าๆ กัน จะได้คนละกี่เม็ด<br/>ใช้นับเพิ่มทีละหนึ่ง โดยใช้นิ้วช่วยนับเพื่อหาคำตอบ ซึ่งเป็น การนับที่เน้นคำที่แต่ละจำนวนตามขนาดของกลุ่มคือ หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ ... ยี่สิบเอ็ด ยี่สิบสอง ยี่สิบสาม ยี่สิบสี่ ยี่สิบห้า</p> |

## ตาราง 19 (ต่อ)

| การคูณ | การหาร         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|        | ในแบบของการวัด | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|        |                | <p>[N8] : แม่ซื้อไข่ไก่มา 16 ฟอง แบ่ง<br/>         ทำไข่ดาวและไข่ต้มอย่างละเท่าๆ<br/>         กัน แม่ทำไข่ดาวและไข่ต้มอย่างละ<br/>         กี่ฟอง</p> <p>ฝึกภาคคิดในใจ โดยนำ 8 บวก 8<br/>         (เอาแปดไว้ในใจ ชูนิ้วขึ้นมาแปดนิ้ว<br/>         แล้วนับต่อทีละหนึ่งโดยใช้นิ้วช่วย<br/>         นับคือ เก้า สิบ สิบเอ็ด... สิบหก)</p> |



## ตาราง 19 (ต่อ)

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | การหาร                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ในแบบของการวัด                                                                                                                                                                                                                          | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                                                                                                                                                                             |
| อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                              | อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| [Y10]: กุหลาบราคากำละ 4 บาท<br>กุหลาบ 7 กำ ราคาก็บาท<br>ใช้ตัวแบบ โดยจัดเม็ดลูกคิดเป็น 7<br>กองๆ ละ 4 เม็ด นับจำนวนเม็ด<br>ลูกคิดทั้งหมดเพื่อหาคำตอบ                                                                                                                                                                                                                                                     | [Y14]: ขนมห้างปั้งราคาแผ่นละ 2<br>บาท ถ้ามีเงิน 8 บาท จะซื้อขนมปัง<br>ปั้งได้กี่แผ่น<br>คิดในใจโดยการนับลดครั้งละ 2 เมื่อ<br>ให้แสดงการคิดให้ดูจะชื่อนิ้วขึ้นมา 8<br>นิ้ว แล้วจับคู่ทีละสองนิ้วจึงนับหนึ่ง<br>ลดลงไปอีกสองนิ้วนับสอง... | [Y17]: แดงซื้อขนมมา 3 ชิ้น เป็น<br>เงิน 6 บาท ถ้าขนมทุกชิ้นราคา<br>เท่ากัน ขนมราคาชิ้นละกี่บาท<br>คิดในใจ โดยแบ่ง 6 ออกเป็น 3<br>ส่วน ตรวจสอบคำตอบจากการนับข้าม<br>1 ชิ้น 2 บาท 2 ชิ้น 4 บาท 3 ชิ้น 6<br>บาท                                                                    |
| [Y11]: แกง 1 หม้อ ใช้น้ำ 3 แก้ว<br>แกง 4 หม้อ ต้องใช้น้ำกี่แก้ว<br>คิดเหมือน Y10 คือใช้ตัวแบบ โดย<br>จัดเม็ดลูกคิดออกเป็น 4 กองๆ ละ<br>3 เม็ด นับจำนวนเม็ดลูกคิดทั้งหมด<br>เพื่อหาคำตอบ                                                                                                                                                                                                                  | [Y15]: ในเวลา 1 วัน แจ้วอ่าน<br>หนังสือได้ 9 หน้า ถ้าแจ้วอ่าน<br>หนังสือได้ทั้งหมด 45 หน้า จะใช้<br>เวลากี่วัน<br>ใช้ตัวแบบ โดยนับเม็ดลูกคิดมา 45<br>เม็ด แล้วจึงจัดเม็ดลูกคิดออกเป็น<br>กองๆ ละ 9 เม็ด นับคำตอบจาก<br>จำนวนกอง         | [Y18]: สีดาจับปลากระบอกได้ 8<br>ตัว นำไปขายในราคาเท่ากัน ได้เงิน<br>มา 40 บาท สีดาขายปลากระบอก<br>ไปตัวละกี่บาท<br>ฝึกถามมองว่าปัญหานี้ยาก และไม่<br>เหมือนปัญหาก่อน การคิดไม่<br>เหมือนกัน ฝึกถามพยายามคิดแต่<br>คิดไม่ได้                                                     |
| [Y12]: แกง 1 หม้อ ใช้น้ำ 2 แก้ว<br>แกง 14 หม้อ ต้องใช้น้ำกี่แก้ว<br>ใช้ตัวแบบและการนับข้ามครั้งละ 2<br>โดยหยิบเม็ดลูกคิดมาครั้งละ 2 เม็ด<br>แล้วนับหนึ่ง หยิบอีก 2 เม็ดแล้วนับ<br>สอง... หยิบอีก 2 เม็ดแล้วนับสิบสี่<br>นับเม็ดลูกคิดทั้งหมดที่หยิบออกมา<br>เพื่อหาคำตอบ                                                                                                                                 | [Y16]: ต้มยำปลา 1 หม้อ ใส่ปลา 4<br>ชิ้น ถ้ามีปลาอยู่ 32 ชิ้น จะทำต้มยำ<br>ได้กี่หม้อ<br>คิดเหมือน Y15 คือใช้ตัวแบบ โดย<br>นับเม็ดลูกคิดมา 32 เม็ด และจัด<br>ออกเป็นกองๆ ละ 4 เม็ด หาคำตอบ<br>จากจำนวนกอง                                | [N11]: ซื้อยางลบมา 4 แท่ง เป็น<br>เงิน 32 บาท ถ้ายางลบราคาเท่ากัน<br>ทุกแท่ง ยางลบราคาแท่งละกี่บาท<br>ใช้ตัวแบบ โดยนับเม็ดลูกคิดมา 32<br>เม็ดแทนเงิน และนำถาดมา 4 ใบ<br>แทนยางลบ แบ่งเม็ดลูกคิดใส่ถาด<br>ทั้งสี่ถาดละเท่าๆ กัน นับจำนวน<br>เม็ดลูกคิดในหนึ่งถาดเพื่อหา<br>คำตอบ |
| [Y13]: ไข่ตุ๋น 1 ถ้วย ใช้ไข่ไก่ 2<br>ฟอง ไข่ตุ๋น 40 ถ้วย ใช้ไข่ไก่กี่ฟอง<br>ฝึกถามใช้ตัวแบบ โดยนับเม็ดลูกคิด<br>มา 40 เม็ด และใส่ลงในถาด 4 ใบๆ<br>ละ 10 เม็ด ฝึกถามเข้าใจ<br>สถานการณ์ปัญหาผิดโดยคิด<br>กลับกัน คือใช้เม็ดลูกคิดแทนไข่ 40<br>ฟอง เมื่อหาคำตอบจึงใช้การนับ<br>เพิ่มทีละ 1 โดยชี้ที่เม็ดลูกคิดครั้งละ<br>2 เม็ด (2 ฟอง) เท่ากับไข่ตุ๋น 1<br>ถ้วย และนับเพิ่มไปเรื่อยๆ 2 ถ้วย...<br>20 ถ้วย | [Y19]: หนังสือ 15 หน้า ก้อยใช้<br>เวลาอ่าน 3 วัน ถ้าก้อยอ่านหนังสือ<br>ได้เท่ากันทุกวัน ใน 1 วัน ก้อยจะ<br>อ่านหนังสือได้กี่หน้า<br>คิดในใจ โดยแบ่ง 15 ออกเป็น 3<br>ส่วน จึงตอบเท่ากับ 5                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## ตาราง 19 (ต่อ)

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                        | การหาร                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                               | ในแบบของการวัด                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                            |
| การเปรียบเทียบ                                                                                                                                                                                                                                                                | การเปรียบเทียบ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | การเปรียบเทียบ                                                                                                                 |
| <p>[Y20] : มานีมีหนังสือ 4 เล่ม มานะมีหนังสือเป็น 2 เท่าของมานี มานะมีหนังสือกี่เล่ม</p> <p>ฝึกกาไม่เข้าใจคำว่า “2 เท่า” คิดว่า 2 เท่า คือ 2 เล่ม จึงนำ <math>4 - 2 = 2</math></p>                                                                                            | <p>[Y25] : เดือนมีสมุด 6 เล่ม ดาวมีสมุด 2 เล่ม เดือนมีสมุดเป็นกี่เท่าของดาว</p> <p>ฝึกกาไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” เช่นเดิม ผู้วิจัยจึงเปลี่ยนคำถามเป็น “ถ้าดาวซื้อสมุดครั้งละ 2 เล่ม ดาวต้องซื้อกี่ครั้งจึงจะมีสมุดเท่ากับเดือน” ฝึกกาสามารถตอบได้โดยใช้การนับข้ามทีละ 2 คือ “สอง สี่ หก” ตอบ 3 ครั้ง</p> <p>[Y26] : อ้อยมีสมุด 12 เล่ม กันมีสมุด 3 เล่ม อ้อยมีสมุดเป็นกี่เท่าของกัน ฝึกกาคิดเหมือน Y25 โดยใช้การนับข้ามทีละ 3</p> <p>[Y27] : ตาลมีอายุ 8 ปี ส้มมีอายุ 4 ปี ตาลมีอายุเป็นกี่เท่าของส้ม</p> <p>ปัญหานี้ฝึกกาไม่เข้าใจเรื่องอายุ จึงใช้วิธีเดาคำตอบ</p> | <p>[Y30] : สูดามีดินสอเป็น 2 เท่าของนิด นิดดินสอของสูดาได้ 8 แท่ง นิดมีดินสอกี่แท่ง</p> <p>ฝึกกาไม่เข้ามาพัวพันในสถานการณ์</p> |
| - ผลคูณคาร์ทีเซียน                                                                                                                                                                                                                                                            | -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | -                                                                                                                              |
| <p>[Y35] : มะลิขายไอศกรีม 3 รส คือวานิลลา กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งคือ ลูกชิต หรือ ข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ</p> <p>ฝึกกาไม่เข้าใจในสถานการณ์</p> <p>ปัญหา จึงตอบ 2 โดยนำไอศกรีมรวมกับหน้าที่โรย คือ <math>1 + 1 = 2</math></p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                |

ตาราง 20 การแก้ปัญหาของมะปรางที่อยู่ในช่วงอายุ 9-10 ปี จำแนกตามรูปแบบของปัญหา

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | การหาร                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | ในแบบของการวัด                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>[Y1] : มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 100 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน มะปรางพยายามคิดปัญหานี้แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้</p> <p>[N1] : มีกล่องดินสอ 6 กล่อง แต่ละกล่องมีดินสออยู่ 110 แท่ง มีดินสอทั้งหมดกี่แท่ง</p> <p>ใช้การบวกเพิ่มครั้งละ 110 โดยการตั้งบวก หาคำตอบจากผลบวกที่ได้</p>                                                                      | <p>[Y4] : โต๊ะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 6 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 180 คน จะมีโต๊ะกี่ตัว</p> <p>พยายามคิดแต่คิดไม่ได้ จึงไม่ตอบคำถาม</p> <p>[N3] : มีดินสออยู่ 100 แท่ง ใส่ลงในกล่องดินสอกล่องละ 5 แท่ง ได้กี่กล่อง</p> <p>ใช้การลบครั้งละเท่าๆ กัน โดยการตั้งลบ แล้วนับจำนวนครั้งที่นำมาลบเพื่อหาคำตอบ</p>                                                           | <p>[Y7] : เด็ก 120 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 6 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน</p> <p>ใช้ตัวแบบ โดยใช้เม็ดลูกคิด 1 เม็ด แทนเด็ก 10 คน วางเม็ดลูกคิดเป็น 6 กองๆ ละ 1 เม็ด แล้วใส่เพิ่มอีกกองละ 1 เม็ด นับคำตอบจากจำนวนเม็ดลูกคิดในหนึ่งกอง (2 เม็ด เท่ากับ 20 คน)</p> <p>[Y8] : เด็ก 48 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 12 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน</p> <p>ใช้ตัวแบบ โดยนับเม็ดลูกคิดมา 48 เม็ด แทนเด็ก และถาด 12 ถาด แทนโต๊ะ นำเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดๆ ละ 2 เม็ดจนครบ 12 ถาด แล้วจึงใส่เพิ่มอีกถาดละ 2 เม็ด นับคำตอบจากจำนวนเม็ดลูกคิดในหนึ่งถาด</p> <p>[Y9] : พ่อซื้อมะปรางมา 32 ต้น แต่ละต้นมีผลมะปรางจำนวนเท่าๆ กัน ถ้านับมะปรางได้ทั้งหมด 96 ผล แต่ละต้นมีมะปรางอยู่กี่ผล</p> <p>ใช้ตัวแบบ โดยนับตะเกียบมา 32 อัน แทนต้นมะปราง ใช้การลองผิดลองถูกโดยการนับเพิ่มทีละ 2 ก่อน (การนับจะหักไม่ตะเกียบออกทีละไม้เมื่อนับสอง) เมื่อนับครบ 32 ไม้ แต่ผลรวมไม่ถึง 96 จึงนับเพิ่มทีละ 3 โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ หึ่ง สอง สาม-หักออกตะเกียบ 1 อัน</p> |
| <p>110 +</p> <p>110 +</p> <p>110 +</p> <p>110 +</p> <p>110 +</p> <p>110 +</p>                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>100 -</p> <p>5</p> <p>95 -</p> <p>5</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>[N2] : มีกล่องดินสอ 10 กล่อง แต่ละกล่องมีดินสออยู่ 12 แท่ง มีดินสอทั้งหมดกี่แท่ง</p> <p>คิดเหมือน N1 โดยใช้การบวกเพิ่มครั้งละ 12 โดยการตั้งบวก</p> <p>[Y3] : เจนปลูกมะเขือเทศไว้ 24 ต้น ถ้าทุกต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล เจนมีมะเขือเทศทั้งหมดกี่ผล</p> <p>ใช้การบวกเพิ่มครั้งละ 15 โดยนำ 15 มาตั้งบวกทีละ 12 จำนวน ได้ 180 และนำ 180 + 180 = 360</p> | <p>[N4] : มีโดนัทอยู่ 48 ชิ้น ใส่ลงในกล่องๆ ละ 12 ชิ้น ได้กี่กล่อง</p> <p>คิดเหมือน N3 คือใช้การลบครั้งละเท่าๆ กัน โดยการตั้งลบ แล้วนับจำนวนครั้งที่นำมาลบเพื่อหาคำตอบ</p> <p>[N5] : มีแสดมปีอยู่ 32 ดวง ใส่ลงในสมุดสะสมแสดมปีหน้าละ 4 ดวง ได้กี่หน้า</p> <p>ใช้การวาดภาพ โดยเขียนวงกลมเป็นกลุ่มๆ ละ 4 วง และนับเพิ่มทีละ 1 จนถึง 32 นับจำนวนกลุ่มเพื่อหาคำตอบ</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## ตาราง 20 (ต่อ)

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | การหาร                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ในแบบของการวัด                                                                                                                                                                                                                | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                                                                                              | อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                    | อัตรา/ราคา                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| [Y10]: กุหลาบราคากำละ 102 บาท<br>กุหลาบ 5 กำ ราคาที่บาท<br>ใช้การตั้งบวก โดยนำ 102 มาบวก<br>กัน 5 จำนวน ตอบ 510                                                                                                                                                                                         | [Y14]: ขนมปังปังราคาแผ่นละ 5<br>บาท ถ้ามีเงิน 110 บาท จะซื้อ<br>ขนมปังปังได้กี่แผ่น<br>ใช้การวาดภาพ โดยใช้รอยขีด 1 ขีด<br>แทนขนมปัง 1 แผ่น และนับข้าม<br>ครั้งละ 5 จนถึง 110 นับคำตอบจาก<br>จำนวนรอยขีด                       | [Y17]: แดงซื้อขนมมา 3 ชิ้น เป็น<br>เงิน 300 บาท ถ้าขนมทุกชิ้นราคา<br>เท่ากัน ขนมราคาชิ้นละกี่บาท<br>คิดในใจ โดยการนับข้ามทีละ 100<br>คือ 1 ชิ้น 100 บาท 2 ชิ้น 200<br>บาท 3 ชิ้น 300 บาท                                                                                                                                               |
| [Y11]: แกง 1 หม้อ ใช้น้ำ 4 แก้ว<br>แกง 200 หม้อ ต้องใช้น้ำกี่แก้ว<br>ใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่ง ซึ่งเป็น<br>การนับที่เน้นค่าที่แต่ละจำนวนตาม<br>ขนาดของกลุ่มคือ หนึ่ง สอง สาม สี่<br>ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ สิบเอ็ด<br>สิบสอง ... แต่นับไม่ไหวเพราะ<br>จำนวนมีขนาดใหญ่ แต่เดาว่า<br>คำตอบประมาณ 400 แก้ว | [Y15]: ในเวลา 1 วัน แจ้วอ่าน<br>หนังสือได้ 13 หน้า ถ้าแจ้วอ่าน<br>หนังสือได้ทั้งหมด 39 หน้า จะใช้<br>เวลากี่วัน<br>ใช้การตั้งบวก โดยนำ $13 + 13 =$<br>$26$ และ $26 + 13 = 39$ ตอบ 3 (นับ<br>จากการนำ 13 มาบวกกันสาม<br>จำนวน) | [Y18]: สีดาจับปลากระบอกได้ 10<br>ตัว นำไปขายในราคาเท่ากัน ได้เงิน<br>มา 90 บาท สีดาขายปลากระบอก<br>ไปตัวละกี่บาท<br>ใช้รูปภาพและการตั้งบวก โดยวาด<br>รูปวงกลม 10 วง (1 วงแทนปลา 1<br>ตัว) ต่อมาใช้ในการลองผิดลองถูกโดย<br>นำจำนวนสิบจำนวนมาบวกกันให้<br>ได้ 90 โดยการตั้งบวก $9 + 9 = 18$<br>$18 + 9 = 27... 81 + 9 = 90$ จึง<br>ตอบ 9 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | [Y16]: ต้มยาปลา 1 หม้อ ใส่ปลา 14<br>ชิ้น ถ้ามีปลาอยู่ 56 ชิ้น จะทำต้มยา<br>ได้กี่หม้อ<br>คิดเหมือน Y15 คือใช้การตั้งบวก<br>โดยนำ 14 มาบวกกัน 4 จำนวน                                                                          | [Y19]: หนังสือ 80 หน้า ก้อยใช้<br>เวลาอ่าน 10 วัน ถ้าก้อยอ่าน<br>หนังสือได้เท่ากันทุกวัน ใน 1 วัน<br>ก้อยจะอ่านหนังสือได้กี่หน้า<br>ใช้รูปภาพ โดยใช้รอยขีด 1 ขีดแทน<br>1 วัน แล้วใช้ในการลองผิดลองถูก<br>เพื่อหาคำตอบ                                                                                                                  |

## ตาราง 20 (ต่อ)

| การคูณ                                                                                                                                                                      | การหาร                                                                                                                                      |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                             | ในแบบของการวัด                                                                                                                              | ในแบบของการแบ่งส่วน                                                                |
| การเปรียบเทียบ                                                                                                                                                              | การเปรียบเทียบ                                                                                                                              | การเปรียบเทียบ                                                                     |
| [Y20] : มานีมีหนังสือ 8 เล่ม มานะมีหนังสือเป็น 100 เท่าของมานี มานะมีหนังสือกี่เล่ม                                                                                         | [Y25] : เดือนมีสมุด 100 เล่ม ดาวมีสมุด 5 เล่ม เดือนมีสมุดเป็นกี่เท่าของดาว                                                                  | [Y30] : สูดามีดินสอเป็น 2 เท่าของนิด นิดดินสอของสูดาได้ 160 แท่ง นิดมีดินสอกี่แท่ง |
| มะปรางไม่เข้าใจคำว่า “100 เท่า” รู้เพียงว่ามานะต้องมีหนังสือมากกว่ามานี แต่หาคำตอบไม่ได้ เมื่อเปลี่ยนเป็น “ครึ่งหนึ่ง” มะปรางจึงเข้าใจและตอบได้ โดยการแบ่ง 8 ออกเป็นสองส่วน | มะปรางไม่เข้าใจคำว่า “เท่า” เช่นเดิม จึงนำ 5 ลบออกจาก 100 (ซึ่งมะปรางจะมั่นใจในวิธีการคิดของตนเองเป็นอย่างมาก และคิดว่าวิธีการของตนถูกต้อง) | มะปรางคิดว่าวิธีคิดเหมือน Y25 จึงนำ 2 ลบออกจาก 160                                 |
| <b>ผลคูณคาร์ทีเซียน</b>                                                                                                                                                     |                                                                                                                                             |                                                                                    |
| [Y35] : มะลิขายไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา สตรอเบอร์รี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง คือ ถั่วลิสง หรือข้าวโพด มะลิจะขายไอศกรีมได้ต่างๆ กันกี่แบบ     |                                                                                                                                             |                                                                                    |
| ใช้ตัวแบบและการนับข้ามครั้งละ 2 โดยการแจงตามรสไอศกรีม คือ วานิลลาทำได้ 2 แบบ สตรอเบอร์รี่ทำได้ 2 เป็น 4 แบบ กะทิสดทำได้ 2 เป็น 6 แบบ และเผือกทำได้อีก 2 แบบ เป็น 8 แบบ      |                                                                                                                                             |                                                                                    |

## ตาราง 20 (ต่อ)

| การคูณ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | การหาร         |                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | ในแบบของการวัด | ในแบบของการแบ่งส่วน |
| <p>ผลคูณคาร์ทีเซียน (ต่อ)</p> <p>[Y36] : หน้อยจะขายไอศกรีมตอน<br/>ปิดภาคเรียน เพื่อหารายได้ หน้อยมี<br/>ไอศกรีม 4 รส คือ วานิลลา<br/>สตรอเบอรี่ กะทิสด และเผือก ลูกค้า<br/>เลือกโรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่ง<br/>ใน 3 อย่าง คือ ถั่วลิสง ลูกชิด หรือ<br/>ข้าวโพด หน้อยจะขายไอศกรีมได้<br/>ต่างๆ กันกี่แบบ</p> <p>ใช้การนับข้ามครั้งละ 3 โดยการแจง<br/>ตามรสไอศกรีม คือ วานิลลาทำได้ 3<br/>แบบ สตรอเบอรี่ทำได้ 3 เป็น 6<br/>แบบ กะทิสดทำได้ 3 เป็น 9 แบบ<br/>และเผือกทำได้อีก 3 เป็น 12 แบบ</p> <p>[Y37] : นิดขายไอศกรีม 3 รส คือ วา<br/>นิลา กะทิสด และเผือก ลูกค้าเลือก<br/>โรยหน้าได้อย่างใดอย่างหนึ่งคือ ถั่ว<br/>ลิสง หรือ ข้าวโพด และตักใส่ขนม<br/>ปังหรือโคน นิดจะขายไอศกรีมได้<br/>ต่างๆ กันกี่แบบ</p> <p>คิดในใจ เพราะเริ่มมองเห็นแบบรูป<br/>ในการแก้ปัญหา และสามารถสร้าง<br/>กรณีทั่วไปได้โดยใช้การคูณคือ</p> $3 \times 2 \times 2 = 12$ <p>[Y38] : กันอยากกินก้วยเตี่ยว ที่ร้าน<br/>มีก้วยเตี่ยวเส้นหมี เส้นเล็ก และเส้น<br/>ใหญ่ เป็นก้วยเตี่ยวน้ำกับก้วยเตี่ยว<br/>แห้ง กันเลือกใส่หมูหรือนื้ออย่างใด<br/>อย่างหนึ่ง กันจะเลือกสั่งก้วยเตี่ยว<br/>ได้ต่างๆ กันกี่แบบ</p> <p>ใช้การคูณ คือ <math>3 \times 2 \times 2 = 12</math></p> | -              | -                   |

จากตาราง 19-20 เมื่อพิจารณาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของผักกาดและมะปราง จำแนกตามรูปแบบและลักษณะของปัญหาที่ใช้ในการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

#### ผักกาด

มักใช้การบวกเพิ่มหรือการนับเพิ่มครั้งละเท่า ๆ กัน ซึ่งในการนับผักกาดจะนับจากจำนวนสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมดและใช้นิ้วมือช่วยนับโดยนับจากหนึ่งจนถึงผลรวม บางครั้งจะใช้การวาดภาพและนับหลังจากวาดภาพ หรือบางครั้งจะนับโดยอาศัยจังหวะและเน้นคำที่แต่ละผลคูณตามขนาดของกลุ่ม ถ้าจำนวนในโจทย์ปัญหาง่าย (มีขนาดเล็กหรือแบ่งกลุ่มทีละน้อย ๆ) ผักกาดมักใช้การคิดในใจ แต่ถ้าขนาดของจำนวนยาก (จำนวนมีขนาดใหญ่หรือแบ่งกลุ่มทีละมาก ๆ) ผักกาดจะใช้ตัวนับช่วยในการบันทึกจำนวน เมื่อเริ่มต้นคิดปัญหาการหารผักกาดมักใช้การลงมือปฏิบัติเพื่อช่วยให้มองเห็นภาพ แต่เมื่อเปลี่ยนเนื้อเรื่องและขนาดของจำนวนใหม่ผักกาดสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ จึงมักใช้การนับเพิ่มโดยใช้นิ้วมือช่วยนับแทน (ใช้นิ้วมือเพื่อช่วยในการบันทึกจำนวนเพราะจำนวนมีขนาดใหญ่) จะเห็นว่าการนับของผักกาดแตกต่างจากการนับของป๊อบ ผักกาดไม่ใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวกเหมือนป๊อบแต่จะค่อย ๆ นับเพิ่มไปที่ละตัวจากหนึ่งจนถึงผลรวม

ผักกาดไม่เข้าใจลักษณะปัญหาการเปรียบเทียบและผลคูณคาร์ที่เขียนเช่นเดียวกับป๊อบ ไม่รู้จักคำว่า “2 เท่า” หรือ “ครึ่งหนึ่ง” ไม่เข้าใจสถานการณ์ปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียน ผักกาดจึงไม่สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์กับปัญหาลักษณะดังกล่าวได้เช่นกัน

#### มะปราง

ในช่วงแรกเมื่อเผชิญสถานการณ์ที่ปฏิบัติจริงไม่ได้มะปรางไม่สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ แต่เมื่อเปลี่ยนสถานการณ์เป็นลงมือปฏิบัติจริงได้มะปรางสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี โดยมะปรางมักใช้การบวกเพิ่มครั้งละเท่ากันโดยการตั้งบวกกับปัญหาการคูณ และใช้การลบออกครั้งละเท่า ๆ กันโดยการตั้งลบกับปัญหาการหาร แสดงว่ามะปรางสามารถแยกแยะรูปแบบของปัญหาทั้งสองได้ เมื่อมะปรางทำโจทย์ปัญหาไปได้ระยะหนึ่งมะปรางสามารถแสดงการคิดได้เป็นอย่างดี และสามารถแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ลงมือปฏิบัติจริงไม่ได้โดยใช้ตัวนับหรือใช้รอยขีดช่วยในบางปัญหา

เริ่มแรกในการแก้ปัญหามะปรางยังแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดได้ไม่ดีเท่าที่ควร แต่เมื่อเริ่มทำโจทย์ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน มะปรางสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดได้เป็นอย่างดีและตอบคำถามถูกทุกข้อ ยกเว้นปัญหาในลักษณะของการเปรียบเทียบที่มะปรางไม่เข้าใจหรือบางครั้งเข้าใจปัญหาผิด

มะปรางไม่เข้าใจลักษณะปัญหาการเปรียบเทียบเช่นกัน ไม่เข้าใจคำว่า “100 เท่า” สามารถเปรียบเทียบได้เพียงว่าสิ่งใดมากกว่ากันแต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ เมื่อเปลี่ยนคำว่า “100 เท่า” เป็น “ครึ่งหนึ่ง” แทน มะปรางเข้าใจและสามารถหาคำตอบได้ โดยแบ่งจำนวนตามสถานการณ์ในโจทย์ปัญหาออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน แล้วจึงหาคำตอบ

มะปรางสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์กับปัญหาในลักษณะ

ผลคูณคาร์ที่เขียนได้เป็นอย่างดี และยังสามารถสร้างกรณีทั่วไปสำหรับปัญหาในลักษณะนี้ได้อีกด้วย โดยเริ่มแรกมะปรางจะใช้การนับและเขียนแผนภาพต้นไม้ เมื่อขยายปัญหาลงไปมะปรางสามารถบอกว่าการหาคำตอบให้น่าจำนวนสิ่งของที่อยู่ในโจทย์ปัญหามาคูณกันได้เลย

นอกจากนี้ยังพบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลในช่วงอายุ 9-10 ปีเกือบทุกคน (ยกเว้นพุทราคนเดียว) สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์กับปัญหาในลักษณะผลคูณคาร์ที่เขียนได้ และยังพบว่าเด็กในช่วงอายุนี้อาศัยวิธีการของตนเองโดยไม่มีการนำหลักการในการหาผลคูณหรือผลหารมาขยายขอบเขตเมื่อจำนวนเป็นจำนวนที่มีค่ามากขึ้น

จากการศึกษาเฉพาะกรณีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของกรณีตัวอย่างทั้ง 3 คน สามารถสรุปวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่พบจำแนกตามรูปแบบของปัญหา ดังตาราง 21

ตาราง 21 วิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่พบจากการศึกษาเฉพาะกรณีจำแนกตามรูปแบบของปัญหา

| รูปแบบของปัญหา            | بيب                                                                                                                                 | ผักกาด                                                                                                                          | มะปราง                                                                                                                         |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| การคูณ                    | -การนึกภาพในใจ<br>-การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก<br>-ตัวแบบ<br>-การนับข้าม<br>-การบวกซ้ำ<br>-การนับข้ามโดยใช้มือ<br>(14 x 2 และ 40 x 2) | -การนึกภาพในใจ<br>-การบวกเพิ่ม<br>-การนับเพิ่ม<br>-ตัวแบบ<br>-การนับข้าม                                                        | -การบวกเพิ่มและการบวกทวิคูณ<br>-การนับเพิ่ม<br>-ตัวแบบและการนับข้าม<br>-การนับข้าม<br>-การนับข้าม<br>-การนึกภาพในใจ<br>-การคูณ |
| การหารในแบบของการวัด      | -ตัวแบบ<br>-การนับข้าม<br>-การนึกภาพในใจ<br>-การบวกซ้ำ<br>-การบวกทวิคูณ                                                             | -ตัวแบบ<br>-การนับเพิ่ม<br>-การนับลด                                                                                            | -การลบซ้ำ<br>-การวาดภาพและการนับเพิ่ม<br>-การใช้รอยขีดและการบวกซ้ำ                                                             |
| การหารในแบบของการแบ่งส่วน | -การนึกภาพในใจ (จำนวนกลุ่มเป็น 5 หรือจำนวนหนึ่งหลัก)<br>-การลบซ้ำ<br>-ตัวแบบ การลองผิดลองถูก และการนับข้ามหรือการบวกซ้ำ             | -ตัวแบบ (ใส่ที่ละกองเหมือนการแจกไพ่)<br>-การวาดภาพ<br>-การบวกซ้ำ<br>-การนับเพิ่มและใช้นิ้ว<br>-การนึกภาพในใจ (จำนวนกลุ่มเป็น 5) | -ตัวแบบ (1 : 10)<br>-ตัวแบบและการลองผิดลองถูก<br>-การนึกภาพในใจและการนับข้ามที่ละ 100<br>-การวาดภาพ การลองผิดลองถูกและการบวก   |

จากตาราง 21 และจากการศึกษาเฉพาะกรณีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของกรณีตัวอย่างทั้ง 3 คน พบว่าการดำเนินการแก้ปัญหาทั่วไปที่กรณีตัวอย่างนิยมใช้ได้แก่ ตัวแบบ การนับ การบวก/การลบ นอกจากนี้ยังพบว่ามีการใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน และการลองผิดลองถูกกับปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนซึ่งถือว่าเป็นปัญหาที่ยากสำหรับผู้ให้ข้อมูลหลักทุกคน ถ้าจำนวนมีขนาดเล็กคือเป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือจำนวนกลุ่มเป็น 5 หรือ 10 กรณีตัวอย่างทั้ง 3 คน จะใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวนโดยการนึกภาพในใจเพื่อหาคำตอบของโจทย์ปัญหา แต่ถ้าจำนวนมีขนาดใหญ่หรือเป็นจำนวนที่กรณีตัวอย่างไม่คุ้นเคย กรณีตัวอย่างทั้ง 3 คน จะใช้ตัวแบบหรือการวาดภาพเพื่อช่วยให้เข้าใจปัญหา หรือใช้ตัวแบบและการลองผิดลองถูกในการหาคำตอบ

นั่นคือการแก้ปัญหาการคูณและการหารของเด็กจะขึ้นอยู่กับขนาดของจำนวนเป็นสำคัญ ถ้าจำนวนในโจทย์ปัญหามีขนาดเล็กเด็กสามารถใช้การนึกภาพในใจหาคำตอบของปัญหาได้ทันที แต่ถ้าจำนวนมีขนาดใหญ่เด็กอาจใช้อุปกรณ์หรือตัวช่วยอื่นๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เพื่อให้เกิดภาพชัดเจนขึ้น และถ้าจำนวนมีขนาดเท่ากับ “5 หรือ 10” จะเป็นจำนวนที่ง่ายต่อการคิดของเด็กเป็นอย่างมาก ดังนั้นในการให้เด็กฝึกแก้ปัญหาเริ่มต้นครูอาจนำจำนวนที่มีขนาด 5 หรือ 10 มาให้เด็กคิดแก้ปัญหาเพื่อให้เกิดความเข้าใจและไม่เกิดปัญหาเกี่ยวกับขนาดของจำนวน

นอกจากนี้ยังพบว่าไม่ว่าโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาก็จะยากเพียงใด กรณีตัวอย่างทั้ง 3 คน ได้พยายามคิดแก้ปัญหาและหาวิธีในการหาคำตอบจนเป็นผลสำเร็จ จึงเป็นการบ่งบอกว่าผู้ให้ข้อมูลหลักมีความสนใจในปัญหาคณิตศาสตร์และพร้อมที่จะเข้าไปพัวพันในปัญหา และยังเป็น การบ่งบอกถึงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กอีกด้วย

### 3. ข้อเสนอในการจัดการเรียนรู้เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ

ผลจากการศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลที่ผ่านมาดังกล่าวจะเห็นว่าการดำเนินการแก้ปัญหา การคูณและการหารจำนวนนับที่ขนาดของจำนวนมีขนาดใหญ่จะขึ้นอยู่กับพื้นฐานทางการนับของเด็ก นั่นคือก่อนที่เด็กจะเรียนเรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนที่มีสองหลักกับสามหลักเด็กควรได้รับการพัฒนาในเรื่องการนับโดยเฉพาะการนับฐานสิบให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพราะการที่เด็กสามารถนับได้อย่างเข้าใจความหมายเด็กเหล่านั้นก็สามารถแก้ปัญหาจำนวนที่มีสองหลักกับสามหลักได้เช่นกัน

ดังนั้นสามารถสรุปการดำเนินการแก้ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่พบจากงานวิจัยและครูสามารถนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้กับเด็กเล็กได้ดังนี้

#### 3.1 การใช้ตัวแบบ

ครูควรจัดหาอุปกรณ์หรือตัวช่วยต่างๆ ไว้ในชั้นเรียนเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาของเด็กเมื่อเด็กต้องการ เช่น ภาตพลาสติก เม็ดลูกคิด ตะเกียบ ไม้จิ้มฟัน บล็อกพลาสติก ตัวนับ หรือครูอาจกระตุ้นให้เด็กใช้การวาดภาพ ใช้อ้อยขีด หรือใช้นิ้วมือ

ข้อสังเกตที่ได้จากงานวิจัย ในการเก็บข้อมูลเชิงลึกผู้วิจัยได้วางอุปกรณ์ต่างๆ ที่กล่าวมาข้างต้นไว้ให้เด็กเลือกใช้อย่างอิสระ พบว่าเด็กใช้อุปกรณ์ต่างๆ ทุกอย่างบ่อยมาก ยกเว้นบล็อกพลาสติกที่เด็กไม่ค่อยใช้ประกอบการคิด แต่เด็กจะนำมาต่อกันเป็นของเล่นต่างๆ ตามจินตนาการ ส่วนไม้จิ้มฟันนั้นไม่มีเด็กคนใดหยิบไปใช้เลย

### 3.2 การนับ

#### 3.2.1 การนับข้าม

3, 6, 9, 12, 15 ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $5 \times 3 = 15$

#### 3.2.2 การนับเพิ่ม/การนับลด

3 บวกกัน 3 จำนวนได้ 9 ( $3 \times 3 = 9$ ) นับเพิ่มทีละ 1 จาก 9... 10, 11, 12 ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $4 \times 3 = 12$

4 บวกกัน 4 จำนวนได้ 16 ( $4 \times 4 = 16$ ) นับลดทีละ 1 จาก 16... 15, 14, 13, 12 ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $3 \times 4 = 12$

### 3.3 การบวก/การลบ

#### 3.3.1 การบวกซ้ำ

$6 + 6 + 6 = 18$  ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $3 \times 6 = 18$

#### 3.3.2 การลบซ้ำ

$18 - 6 = 12$  และ  $12 - 6 = 6$  และ  $6 - 6 = 0$  ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $18 \div 6 = 3$

#### 3.3.3 การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก

$8 + 8 = 16$  และ  $8 + 8 = 16$  และ  $16 + 16 = 32$  ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $4 \times 8 = 32$

### 3.4 การใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวน

#### 3.4.1 การทวีคูณ

6 บวกกัน 4 จำนวนได้ 24 ( $4 \times 6 = 24$ ) ดังนั้น 6 บวกกัน 8 จำนวนได้ 48 ( $8 \times 6 = 48$ )

#### 3.4.2 การเพิ่มเข้าครั้งละเท่าๆ กัน

4 บวกกัน 6 จำนวนได้ 24 ( $6 \times 4 = 24$ ) และ  $24 + 4 = 28$  ซึ่งเป็นหลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $7 \times 4 = 28$

#### 3.4.3 การหักออกครั้งละเท่าๆ กัน

9 บวกกัน 10 จำนวนได้ 90 ( $10 \times 9 = 90$ ) และ  $90 - 9 = 81$  ซึ่งเป็น

หลักการที่นำไปสู่แนวคิด  $9 \times 9 = 81$

### 3.5 การดำเนินการอื่นๆ ที่พบ

#### 3.5.1 การลองผิดลองถูก

การลองผิดลองถูกจะช่วยให้เด็กเกิดการเรียนรู้และกล้าที่จะแสดงความคิดเห็น เกิดความมั่นใจและอยากที่จะเข้าไปพัวพันในภาระงาน การเริ่มต้นบทเรียนแต่ละเรื่องครูควรฝึกให้เด็กได้แสดงวิธีการคิดและการหาคำตอบทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลายโดยวิธีการที่เป็นของพวกเขาเอง และเปิดโอกาสให้เด็กได้แลกเปลี่ยนวิธีการของพวกเขากับเพื่อนร่วมชั้นเรียน หลังจากนั้นครูจึงสรุปวิธีการที่เหมาะสม เพราะผลจากการวิจัยพบว่าวิธีการที่เด็กค้นพบเองบางครั้งเป็นวิธีการที่ทำหาย สะสสส และเหมาะสมกับวัยของเขาเอง

#### 3.5.2 การกะประมาณ

การกะประมาณเป็นกระบวนการที่ดีที่ครูควรฝึกให้เกิดขึ้นในตัวเด็กทุกคน เนื่องจากการกะประมาณเป็นวิธีการที่ได้ผลและมีคุณค่าในการบูรณาการไปสู่หลักสูตรคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ปัญหาและสถานการณ์ที่พบในชีวิตจริงล้วนต้องใช้การกะประมาณในการหาคำตอบมากกว่าการคำนวณที่แม่นยำ ดังนั้นในช่วงชั้นแรกๆ (ประถมศึกษาปีที่ 1-3) ครูควรจัดกิจกรรมเกี่ยวกับการกะประมาณในชีวิตจริงให้เด็กได้ฝึกบ่อยๆ จนเด็กเกิดความเชื่อมั่นและสามารถนำไปสู่การคำนวณที่แม่นยำในที่สุด

## บทที่ 6

### ผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ในบทนี้ผู้วิจัยมุ่งตอบคำถามวิจัยข้อที่สองว่า เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองอย่างไร โดยนำกรอบวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ในท้ายบทที่ 4 และการศึกษาเฉพาะกรณีในบทที่ 5 เป็นแนวทางในการตอบคำถาม รายละเอียดในบทนี้แตกต่างจากบทที่ 4 เนื่องจากผู้วิจัยนำเสนอภาพรวมของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมุ่งนำเสนอการสังเคราะห์ข้อมูลต่างๆ เกี่ยวกับแง่มุมแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ต่างๆ ไป

การนำเสนอในบทนี้แบ่งออกเป็น ส่วน 2 คือ ส่วนที่ 1 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี ส่วนที่ 2 ข้อคิดที่ได้จากผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

#### 1. วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี

##### 1.1 การแก้ปัญหา

###### 1.1.1 การเข้าใจปัญหา

เด็กมีความพยายามทำความเข้าใจปัญหาด้วยวิธีต่างๆ ถ้ามองปัญหาไม่ชัดพวกเขาจะพยายามหาอุปกรณ์หรือตัวช่วยอื่นๆ เพื่อช่วยให้เข้าใจปัญหายิ่งขึ้น เช่น ตัวแบบรูปภาพ เป็นต้น พบว่าในการทำความเข้าใจปัญหานั้นความสามารถทางภาษาของเด็กมีบทบาทสำคัญอย่างมาก ถ้าเด็กที่มีความเข้าใจทางภาษาที่ดี สามารถอ่านโจทย์ปัญหาเข้าใจเด็กเหล่านี้มีแนวโน้มในการแก้ปัญหาที่สำเร็จ ส่วนเด็กที่ไม่สามารถอ่านหนังสือได้เองแต่ถ้ามีประสบการณ์ทางภาษา ได้พูดคุยแลกเปลี่ยนกับบุคคลอื่นบ่อยๆ เมื่ออ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังก็สามารถเข้าใจปัญหาได้เช่นเดียวกัน

###### 1.1.2 การดำเนินการแก้ปัญหา

เด็กมีการดำเนินการแก้ปัญหาที่เป็นของตนเอง เด็กที่บรรลุเป้าหมายการคิดทุกคนมีพื้นฐานทางการนับที่ดีซึ่งถือเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการคิดเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่ยากสำหรับตนเองเด็กมีวิธีการให้หลุดพ้นจากภาวะที่ติดขัดนั้น เช่น ใช้การลองผิดลองถูก ใช้การกะประมาณ ใช้อุปกรณ์หรือตัวช่วยอื่นเพื่อช่วยดำเนินการแก้ปัญหา นอกจากนี้ยังพบว่าเด็กมีการใช้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับจำนวนในการดำเนินการแก้ปัญหา เช่น เมื่อต้องการแบ่ง 9 ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน เด็กที่รู้ว่า  $3 + 3 + 3 = 9$  สามารถตอบได้ทันทีว่า  $9 \div 3$  เท่ากับ 3 นั่นคือเด็กที่มีประสบการณ์ในการแบ่งบ่อยๆ หรือมีประสบการณ์ในการนับอย่างถ่องแท้จะสามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างอัตโนมัติ

ในการดำเนินการแก้ปัญหา ยังพบหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เด็กนำมาใช้ได้แก่

- สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก (Associative Property for Addition) เช่น  $18 + 9 = (18 + 2) + 7 = 27$  หรือ  $80 + 80 = (50 + 50) + (30 + 30) = 100 + 60 = 160$
- สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ (Associative Property for Multiplication) เช่น  $3 \times 2 \times 2 = (3 \times 2) \times 2 = 6 \times 2 = 12$  (พบในเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี)
- การทวีคูณและการเพิ่มเข้า (Doubling and Counting on) ซึ่งในการคิดของเด็กนั้นเด็กใช้การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก เช่น ในการแก้ปัญหา [Y1] ของปีบในหน้า 127 เมื่อพิจารณาตามหลักการทางคณิตศาสตร์ในการหาผลลัพธ์ของ 6 ครั้งของ 4 (หรือ  $6 \times 4$ ) เด็กใช้แนวคิดการทวีคูณคือ 2 ครั้งของ 4 ได้ 8 ดังนั้น 4 ครั้งของ 4 ได้ 16 ดังนั้น 6 ครั้งของ 4 (หรือ  $6 \times 4$ ) ได้ 24 โดยใช้การเพิ่มเข้าคือ  $16 + 8 = 24$

### 1.1.3 การวิเคราะห์

เนื่องจากการวิเคราะห์เป็นกระบวนการคิดที่อยู่ภายในของเด็ก ในการตรวจสอบการวิเคราะห์ของเด็กจึงเกิดจากการใช้คำถามของผู้วิจัย ดังนั้นการวิเคราะห์ปัญหาของเด็กอาจขึ้นอยู่กับคำถามที่ผู้วิจัยป้อนให้ด้วย แต่พบว่าเด็กส่วนมากสามารถแจกแจงรายละเอียดของปัญหาได้ รู้ว่าสิ่งใดจำเป็นหรือไม่จำเป็นในการแก้ปัญหา

### 1.1.4 การสร้างกรณีทั่วไป

ในการแก้ปัญหาที่ขยายแนวคิดออกไปเด็กสามารถนำวิธีการแก้ปัญหาที่ใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาในรูปแบบเดียวกันได้

### 1.1.5 การสร้างข้อความคาดการณ์

ในการสร้างข้อความคาดการณ์เด็กจะใช้วิธีการลองผิดลองถูก หรืออาจคาดเดาคำตอบหรือวิธีการคิดไว้ล่วงหน้าแล้วจึงดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อยืนยันคำตอบหรือวิธีการคิดของตนเอง เมื่อพบว่าคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้องจะเปลี่ยนคำตอบใหม่แต่ยังใช้วิธีการคิดเช่นเดิม

### 1.1.6 การควบคุมการรู้คิด

เด็กมีการตรวจสอบคำตอบของตนเอง หรือดำเนินการแก้ปัญหด้วยความรอบคอบ ในขณะที่สัมภาษณ์ซึ่งเปรียบเสมือนการทบทวนวิธีการคิดของตนเอง ถ้าวิธีการคิดหรือคำตอบผิดเด็กมักรู้ได้ทันทีและจะเปลี่ยนคำตอบหรือดำเนินการแก้ปัญหใหม่อย่างรอบคอบขึ้น

## 1.2 การให้เหตุผล

### 1.2.1 การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์

เมื่อขยายปัญหาออกไปเด็กส่วนใหญ่สามารถให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ได้ โดยสามารถบอกว่าปัญหาที่ขยายออกไปนั้นคล้ายคลึงกับปัญหาเดิม และยังระลึกได้ทันทีว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผลหรือไม่

### 1.2.2 การมองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกันของปัญหา

เด็กมองเห็นโครงสร้างของปัญหาในรูปแบบเดียวกันว่าคล้ายกัน ถึงแม้เนื้อเรื่องหรือสถานการณ์ในปัญหาเปลี่ยนไปเด็กก็ยังคงใช้วิธีการเดียวกันในการแก้ปัญหา

### 1.2.3 การอุปนัยและการนิรนัย

เด็กสามารถแสดงการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้ โดยสามารถหาคำตอบของปัญหาจากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน เช่น เมื่อผู้วิจัยเพิ่มขนาดของจำนวนขึ้นในแต่ละสถานการณ์ปัญหาเด็กสามารถตอบคำถามได้ทันทีโดยคิดในใจ นั่นคือเด็กสามารถสรุปวิธีการหาคำตอบได้ และสามารถนำคำตอบที่ได้ในแต่ละปัญหาไปเชื่อมโยงหรือตรวจสอบกรณีทั่วไป เช่น สามารถนำวิธีการคิดจากโจทย์ปัญหาเริ่มต้นมาใช้ในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่ขยายออกไปได้ และยังแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยสามารถนำหลักการในการหาคำตอบจากวิธีการเดิมมาใช้ตอบคำถามใหม่ได้

## 1.3 การนำเสนอตัวแทนความคิด

### 1.3.1 ในรูปคำพูด

เมื่อผู้วิจัยทำการสัมภาษณ์แบบเจาะลึกถึงกระบวนการแก้ปัญหาของเด็ก พวกเขาสามารถสื่อสารการคิดของตนเองโดยการอธิบายถึงความเข้าใจในปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน

### 1.3.2 ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้

เด็กสื่อสารการคิดของพวกเขาโดยใช้ตัวแบบ เช่น เม็ดลูกคิด ภาดพลาสติก ตะเกียบ หรือการนับนิ้ว

### 1.3.3 ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ

เด็กสื่อสารการคิดของพวกเขาโดยใช้การวาดภาพจริงตามสถานการณ์ในโจทย์ปัญหา หรือบางครั้งอาจใช้รอยขีด หรือวาดภาพอื่นที่ง่าย ๆ เพื่อใช้แทนสิ่งของที่ปรากฏในโจทย์ปัญหา หรืออาจใช้แผนภาพต้นไม้เพื่อสื่อสารถึงจำนวนสิ่งของต่างๆ ที่ได้มาจากการแก้ปัญหา

### 1.3.4 ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์

เด็กสื่อสารการคิดของพวกเขาโดยใช้ตัวเลขแสดงคำตอบหรือวิธีคิดของพวกเขา หรือบางครั้งอาจใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรือประโยคทางพีชคณิตที่ยังไม่สมบูรณ์เท่าที่ควร

## 2. ข้อคิดที่ได้จากผลการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์

### 2.1 เกี่ยวกับธรรมชาติทางคณิตศาสตร์

ลักษณะที่เป็นธรรมชาติทางคณิตศาสตร์ที่ควรเน้นให้เกิดกับเด็ก ได้แก่

#### 2.1.1 ด้านเนื้อหา

เนื้อหาที่จัดให้เด็กควรมีความลุ่มลึก ความกว้าง และมีการเชื่อมโยงภายในเนื้อหาคณิตศาสตร์ เช่น เมื่อเรียนเรื่องการคูณและการหาร ครูควรเชื่อมโยงถึงการบวกและการลบ หรือในขณะสอนเรื่องการบวกและการลบ ครูควรสอนการบวกซ้ำ การลบซ้ำ เพื่อจะนำไปสู่การเรียนเรื่องการคูณและการหารต่อไป

#### 2.1.2 ด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ควรเน้นให้เกิดกับเด็กทุกคน ได้แก่ การแก้ปัญหา และการให้เหตุผล เนื่องจากทักษะ/กระบวนการทั้งสองเป็นทักษะ/กระบวนการที่นำไปสู่ทักษะ/กระบวนการด้านอื่นๆ ทางคณิตศาสตร์

### 2.2 เกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็ก

พฤติกรรมที่ควรส่งเสริมเพื่อให้เด็กเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพทำได้หลายวิธี วิธีทางที่ดีที่สุดที่จะทำให้เด็กบรรลุผลในด้านการคิดซึ่งครอบคลุมทักษะต่างๆ ได้แก่ การแก้ปัญหา นอกจากนั้นเด็กยังต้องมีการคิดที่คล่องแคล่ว สละสลวย มีความอยากรู้อยากเห็น มีการควบคุมการรู้คิดและรู้จักที่จะประเมินการคิดของตน และมีกระบวนการในการหาคำตอบ นั่นคือ รู้จักวิธีการในการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล

#### 2.2.1 การคิดที่สละสลวย

การคิดที่สละสลวยเป็นวิธีการคิดที่ธรรมดา เป็นวิธีการคิดที่ง่าย ๆ รู้สึกสัมผัสได้ถึงความยอดเยี่ยมของการคิด ซึ่งเป็นความสุนทรีย์นั่นเอง

ครูควรฝึกให้เด็กกลั่นขั้นตอนในการคิดซึ่งนำไปสู่การคิดที่ง่าย ๆ และสละสลวย เช่น ต้องการแบ่งของ 28 ชิ้นออกเป็นกองๆ ละ 7 ชิ้น ถ้าเด็กใช้การนับข้ามทีละ 7 อย่างคล่องแคล่วแล้ว ครูอาจฝึกให้เด็กใช้การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวีคูณ เช่น  $7 + 7 = 14$  และ  $14 + 14 = 28$  ดังนั้น สามารถแบ่งได้ 4 กอง หลังจากนั้นครูอาจฝึกให้เด็กใช้การทวีคูณและการเพิ่มเข้า เช่น  $2 \times 7 = 14$  ดังนั้น  $2 \times 14 = 28$  และ  $14 + 28 = 42$  ดังนั้น  $6 \times 7 = 42$

#### 2.2.2 ความอยากรู้อยากเห็น

การเสนอสถานการณ์ปัญหาที่แปลกใหม่ ค่อนข้างยาก ทำทนายให้กับเด็กเพื่อให้เด็กได้ลองผิดลองถูก หรือลองเสี่ยงหาวิธีการในการแก้ปัญหาก็จะทำให้เด็กอยากที่จะคิดและสนุกกับการคิดมากกว่าการที่ครูให้โจทย์ปัญหาที่ง่าย ๆ ธรรมดาหรือเป็นวิธีการที่เด็กคุ้นเคย

#### 2.2.3 การควบคุมการรู้คิด

การควบคุมการรู้คิดเป็นการรู้ถึงความคิดของตนเองในการกระทำ

อะไรอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเป็นการประเมินการคิดของตนเองและใช้ความรู้นั้นในการควบคุมหรือปรับการกระทำของตนเอง ซึ่งการคิดในลักษณะนี้จะครอบคลุมถึงการวางแผน การควบคุมกำกับ การกระทำของตนเอง การตรวจสอบความก้าวหน้าและการประเมินผล บุคคลที่ตระหนักถึงการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะสามารถปรับปรุงกระบวนการคิดของตนให้ดีขึ้นเรื่อยๆ จึงส่งผลต่อความสามารถทางการคิดของบุคคลนั้นในภาพรวม ถ้าภาระงานใหม่ถูกเลือก ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะถูกนำไปเกี่ยวข้อง คนที่เริ่มต้นภาระงานโดยใช้ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะตั้งจุดมุ่งหมายที่สัมพันธ์กับภาระงานใหม่ ดังนั้นบุคคลนั้นจึงมีโอกาที่จะประสบความสำเร็จตามจุดมุ่งหมายที่กำหนด ซึ่งระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะมีปฏิสัมพันธ์ต่อเนื่องกับระบบทางด้านการรู้คิด

การเริ่มต้นฝึกให้เด็กตระหนักถึงการควบคุมการรู้คิดอาจเริ่มฝึกจากการให้เด็กรู้จักตรวจสอบคำตอบที่ได้ของตนเอง แสดงการคิดอย่างรอบคอบ รู้จักสะท้อนการคิดของตนเองโดยดูว่าตนคิดอย่างไร ฝึกให้เด็กพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ หรือการฝึกให้เด็กรู้จักหยุดคิดและดูว่าวิธีการของตนได้ผลหรือไม่ หากคิดว่าวิธีการของตนไม่ได้ผลแล้วควรเปลี่ยนวิธีการใหม่ เช่น เมื่อใช้การบวกซ้ำในการหาคำตอบแล้วคิดว่าไม่สามารถหาคำตอบได้แน่ อาจเปลี่ยนเป็นการลบซ้ำหรือวิธีอื่นๆ ที่เหมาะสม

#### 2.2.4 กระบวนการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล

การแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผลรวมถึงวิธีการในการหาคำตอบที่หลากหลาย จะทำให้เด็กตระหนักถึงการควบคุมการรู้คิดของตนเอง ครูควรส่งเสริมให้เด็กเรียนรู้อย่างมีความหมายและมีความเข้าใจในคณิตศาสตร์มากกว่ามุ่งที่จะหาคำตอบของปัญหาอย่างเดียวนอกจากนี้ครูควรเปิดโอกาสให้เด็กได้คิดและแก้ปัญหาด้วยตัวเอง

### 2.3 เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ ครูควรจัดการเรียนรู้โดยคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

#### 2.3.1 ความแตกต่างระหว่างบุคคล

ครูควรจัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของเด็กโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่แตกต่างระหว่างบุคคล

#### 2.3.2 การเลือกภาระงานให้กับเด็ก

ครูควรจัดกิจกรรมหรือภาระงานอย่างหลากหลายตามมาตรฐานของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ซึ่งกระตุ้นให้เด็กได้คิด ได้มีการอภิปราย และพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของเด็กมากกว่าการกำหนดกิจกรรมหรือภาระงานที่ง่าย ๆ หรือใช้ความคิดที่ง่ายเกินไป นอกจากนี้ควรจัดกิจกรรมหรือให้ทำงานเป็นกลุ่มเพื่อเด็กได้มีโอกาสคิด ปรัชญาหารือกัน และควรจัดโอกาสให้เด็กได้ออกมานำเสนอแนวคิดของตนเองบ่อย ๆ

### 2.3.3 การตั้งคำถาม

การใช้คำถามที่ดีช่วยกระตุ้นให้เด็กคิดหรือแสดงการคิดต่อไปได้เมื่อเกิดภาวะติดขัด นอกจากนี้ครูควรหยุดฟังคำตอบของเด็กด้วย คำถามที่ถามเด็กควรเน้นคำถาม “ทำไม” “ทำไมจึงเป็นแบบนี้” “ทำไมจึงคิด/ทำแบบนี้” มากกว่าจะถามว่า “ทำอย่างไร” นอกจากนี้คำถามที่ถามเด็กควรมีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ หรือมีวิธีการในการคิดหลายวิธี หรือถามถึงวิธีการหาคำตอบที่หลากหลายแต่ไม่ถามคำตอบ เช่น มีมะม่วง 12 ผล จัดใส่ถุงๆ ละเท่าๆ กัน จัดได้อย่างไรบ้าง

### 2.3.4 การนำเสนอตัวแทนความคิด/การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ส่งเสริมให้เด็กได้นำเสนอตัวแทนความคิดและสื่อสารเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในวิถีทางที่หลากหลายไม่ใช่ให้เด็กเขียนแสดงคำตอบในรูปตัวเลขเท่านั้น เช่น การพูด รายงานหน้าชั้นเรียน การใช้ตัวแบบ การใช้ภาพ เป็นต้น

### 2.3.5 การจัดบรรยากาศในชั้นเรียน

ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ควรมีอุปกรณ์ต่างๆ วางไว้ให้เด็กได้เลือกใช้ ประกอบการคิดอย่างอิสระ นอกจากนั้นบรรยากาศในการเรียนรู้ควรเป็นไปอย่างเป็นกันเอง ให้เด็กรู้สึกมีโอกาสนที่จะประสบความสำเร็จในการคิดหรือมีความรู้สึทางบวกเพื่อเด็กจะได้เข้าไปมีส่วนร่วมร่วมกับกิจกรรมหรือภาระงานนั้น และต้องการที่จะคิด

### 2.3.6 สื่อการเรียนรู้

ครูควรใช้สื่อในการจัดการเรียนรู้ที่หลากหลายเพื่อช่วยให้เด็กมองเห็นภาพได้ชัดเจนขึ้น และสื่อที่นำมาใช้ควรเป็นสื่อที่เหมาะสมกับวัยของเด็ก ใช้สะดวก/ง่ายต่อการใช้และการดูแลรักษา จากงานวิจัยพบว่าเด็กชอบใช้สื่อที่มีสีสันสวยงาม หรือหยิบใช้ง่าย เช่น เม็ดลูกคิด ภาตพลาสติก ตะเกียบ เป็นต้น

## บทที่ 7

### การอภิปรายผล และข้อเสนอจากการวิจัย

จากการตอบคำถามวิจัยที่ผ่านมามีผลทำให้ได้ข้อเสนองานวิจัยว่าเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี มีวิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนน้อยอย่างไร ในการแก้ปัญหาเด็กใช้การดำเนินการแก้ปัญหาแบบใดมากที่สุดและแสดงออกอย่างไร เด็กเข้าใจปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างไร เมื่อได้คำตอบแล้วเด็กมีการทบทวนการคิดของตนเองหรือไม่ อย่างไร หรือในขณะที่แก้ปัญหาเมื่อเผชิญสภาวะที่ติดขัดเด็กมีการควบคุมการรู้คิดของตนเองหรือไม่ อย่างไร วิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กเป็นอย่างไรเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย นอกจากนั้นยังทราบถึงลักษณะการให้เหตุผลและการนำเสนอตัวแทนความคิดของเด็กตามธรรมชาติอีกด้วย โดยสามารถอภิปรายผลตามประเด็นต่างๆ ดังนี้

#### การอภิปรายผล

##### 1. วิธีการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนน้อยของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี

###### 1.1 การเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์ปัญหา

เมื่อเผชิญกับสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่มากกว่าร้อยละ 90 จะเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์ปัญหาและจะพยายามแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนเองออกมาทั้งที่ถูกและไม่ถูกตามหลักคณิตศาสตร์ โดยอิงสถานการณ์ตามโจทย์ปัญหา เช่น เด็กที่ไม่เข้าใจการแก้ปัญหาแต่ยังคงนำตัวเลขหรือรายละเอียดในสถานการณ์มาใช้ในการคิดของตนเอง แสดงถึงว่าเด็กส่วนมากพร้อมที่จะเข้าไปพัวพันในสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มองว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญ ซึ่งในบางครั้งเด็กยังมองไม่เห็นโอกาสที่จะประสบความสำเร็จในการเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์ปัญหาแต่เด็กมีความรู้สึกทางบวกที่จะเข้าไปมีส่วนร่วมกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์นั้น เด็กจะไม่ลังเลที่จะเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์ปัญหานั้น ซึ่งมาร์ซาโน (Mazano, 2001: 30-31) กล่าวว่า “ระบบของตนเองจะเป็นตัวกำหนดว่าคนเราจะเข้าไปพัวพันกับภาระงานหรือไม่เข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้น ถ้าเรามีความสนใจในภาระงานใดตัวแปรที่เกี่ยวกับความคิด (ได้แก่ ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง ระบบการรู้คิด และตัวแปรด้านความรู้) จะถูกนำมาใช้”

นั่นคือเด็กมีความสนใจที่จะแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีความรู้สึกหรือเจตคติทางบวกต่อคณิตศาสตร์ แสดงว่าในช่วงชั้นแรกๆ เด็กเล็กให้ความสำคัญหรือมีความสนใจในคณิตศาสตร์ พยายามที่จะแก้ปัญหาหรือมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการที่ครูจะมอบหมายภาระงานใดให้กับเด็ก ครูควรสร้างความรู้สึกทางบวกให้เกิดขึ้นกับเด็กโดยภาระงานนั้นต้องเร้าความสนใจ มีความแปลกใหม่ และท้าทายการคิดของเด็ก

1.2 เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักมีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเอง ถึงแม้เผชิญกับสถานการณ์ปัญหาหรือเรื่องที่ตนเองยังไม่ได้เรียนเพียงแต่มีความรู้พื้นฐานที่จำเป็นเด็กเหล่านี้ก็สามารถแสดงการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิดได้เป็นอย่างดี

นั่นคือในการจัดการเรียนรู้ควรจัดประสบการณ์ให้เด็กได้เผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่แปลกใหม่ ท้าทายเพื่อส่งเสริมให้เด็กได้มีโอกาสใช้วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นของตนเอง สถานการณ์ที่จัดให้กับเด็กควรมีความหมายและมีความสำคัญ กระตุ้นให้เด็กสามารถเชื่อมโยงประสบการณ์ใหม่เข้ากับประสบการณ์เก่าได้ สามารถมองเห็นภาพของสถานการณ์ปัญหาจนสามารถแก้ปัญหาตามวิถีทางของตนเองได้สำเร็จ

1.3 วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของเด็กจะเกี่ยวพันกับ ภาษา และความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของเด็ก กล่าวคือ

1.3.1 ภาษา ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ความเข้าใจในภาษามีส่วนสำคัญต่อการแก้ปัญหของเด็กเป็นอย่างมาก เนื่องจากจะมีคำบางคำทางคณิตศาสตร์ที่เด็กเข้าใจ และคำบางคำที่เด็กไม่เข้าใจ เช่นคำว่า “เท่า” “จัดได้กี่แบบ” ซึ่งคำเหล่านี้ถือว่าเป็นคำใหม่สำหรับเด็ก จากการวิจัยพบว่าเด็กที่มีความเข้าใจในภาษามีส่วนช่วยให้เด็กเข้าสู่ระยะการคิดได้เป็นอย่างดีและเด็กผู้นั้นมีแนวโน้มที่จะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิดได้ อีกทั้งเด็กที่มีประสบการณ์ทางภาษาและมีปฏิสัมพันธ์กับบุคคลอื่น เช่น พ่อ แม่ พี่ น้อง หรือ เพื่อนๆ จะทำให้เด็กสามารถเข้าใจภาษาได้ง่าย สามารถสื่อสารหรือนำเสนอตัวแทนความคิดของตนได้เป็นอย่างดี

ดังนั้นในการเสนอสถานการณ์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับให้กับเด็กเล็ก ถึงแม้สถานการณ์ปัญหานั้นจะเป็นสถานการณ์ที่เด็กยังไม่เคยเรียนมาก่อนเด็กก็ยังแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นของตนเองได้เป็นอย่างดี แต่ในการที่จะทำให้เด็กสนใจในปัญหาและเข้าสู่สถานการณ์ปัญหา ครูผู้สอนควรคำนึงถึงคำศัพท์และภาษาที่ใช้และสถานการณ์ควรเป็นสถานการณ์ที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง หรือเป็นสถานการณ์ที่เด็กเข้าใจง่าย สามารถนึกภาพได้ จะทำให้เด็กสามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของตนได้ และครูควรจัดประสบการณ์แบบไม่เป็นการเพื่อให้เด็กเข้าใจความหมายของภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นคำใหม่สำหรับเด็ก เช่น สถานการณ์เกี่ยวกับความหมายของคำว่า “ครึ่งหนึ่ง” หรือ “เท่า” สถานการณ์เกี่ยวกับการแบ่ง เนื่องจากผลของการเก็บข้อมูลเชิงลึกพบว่าเด็กมีความเข้าใจปัญหาการคูณ และปัญหาการหารในแบบของการวัดเป็นอย่างดี แต่เด็กไม่เข้าใจหรือมีความสับสนกับปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน ปัญหาในลักษณะดังกล่าวจึงเป็นปัญหาที่ไม่ง่ายสำหรับเด็ก

1.3.2 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับเด็กในเรื่องการคูณและการหารจำนวนนับ ได้แก่ “การนับ” จากงานวิจัยพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่ใช้การนับดำเนินการแก้ปัญหการคูณและการหารมากที่สุดและยังสามารถหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการคูณและการหารที่ยังไม่ได้เรียนมาได้ ทั้งนี้เนื่องจากการนับเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการดำเนินการในด้าน การบวก การลบ การคูณและการหาร ดังนั้นถ้าเด็กมีความเข้าใจอย่างถ่องแท้เกี่ยวกับการนับพวกเขาสามารถ

ดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิดในเรื่องการคูณและการหารได้

ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้เรื่องการนับให้กับเด็กเล็กต้องเป็นการสอนอย่างมีความหมายซึ่งจะทำให้เด็กสามารถนำการนับไปใช้ได้ นั่นคือนอกจากสอนให้เด็กท่องจำอันดับในการนับได้อย่างแม่นยำแล้ว เด็กยังต้องสามารถบอกอันดับในการนับได้ นอกจากนี้ครูต้องสอนให้เด็กเข้าใจถึงความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างการนับกับสิ่งของ สามารถบอกจำนวนสิ่งของว่ามีจำนวนเท่าไรจากกลุ่มของสิ่งของทั้งหมด สามารถรวมกลุ่มของสิ่งของเข้าด้วยกันเพื่อจุดมุ่งหมายของการนับ และตระหนักว่าสิ่งของสามารถถูกนับตามลำดับต่าง ๆ โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงผลที่ตามมา

#### 1.4 การเข้าใจปัญหา

เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักมีระยะเข้าสู่การคิด เข้าใจสถานการณ์ปัญหาอย่างดี โดยจะทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาก่อนเริ่มคิดทุกครั้ง และใช้เวลาไม่นานในการทำความเข้าใจปัญหา สามารถแยกแยะข้อมูลในโจทย์ปัญหาซึ่งจะใช้ในการตอบคำถามได้ กล่าวคือรู้ว่าโจทย์กำหนดอะไร โจทย์ต้องการอะไร สิ่งใดจำเป็นหรือไม่จำเป็นในการแก้ปัญหา และรู้ว่าจะนำวิธีการใดมาใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาบ้าง นอกจากนี้ยังปรากฏว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถวิเคราะห์โจทย์ปัญหา โดยสามารถแจกแจงรายละเอียดของโจทย์ปัญหา บอกได้ว่าปัญหาที่เหมือนหรือต่างจากปัญหาที่แล้วตรงไหน อีกทั้งสามารถบอกขั้นตอนการคิดได้

ดังนั้นเมื่อสอนโจทย์ปัญหาให้กับเด็ก ครูควรให้อิสระและเวลากับเด็กในการแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ นอกจากเด็กอ่านโจทย์ปัญหาไม่ได้ครูจึงอ่านให้ฟัง เมื่อพบว่าเด็กไม่เข้าใจปัญหาก็อาจใช้คำถามเพื่อช่วยให้เด็กเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาขึ้น หลังจากนั้นครูจึงปล่อยให้เด็กแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเขาเอง

#### 1.5 การดำเนินการแก้ปัญหา

เมื่อเผชิญกับสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาการคูณและการหารจำนวนนับที่ไม่คุ้นเคย ผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดได้อย่างหลากหลาย โดยนิยมใช้การนับดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมาคือการบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบ โดยแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

1.5.1 ใช้การนับ โดยใช้การนับทั้งหมดหรือการนับข้ามเพื่อหาคำตอบ ขึ้นอยู่กับว่าเด็กคนใดมีความชำนาญเกี่ยวกับพื้นฐานทางจำนวนมากน้อยเพียงใด ถ้าเด็กที่ไม่สามารถใช้การบวก/การลบได้คล่องมักใช้การนับทั้งหมดเพื่อหาคำตอบ ซึ่งอาจจะใช้การนับหลังจากวาดภาพหรือใช้ตัวแบบ ใช้การนับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ หรือใช้การนับเพิ่มทีละ 1 ตามจังหวะโดยใช้นิ้วมือ ส่วนเด็กที่สามารถบวก/ลบได้คล่องมักใช้การนับข้ามซึ่งอาจเป็นการนับข้ามโดยการวาดภาพทั้งหมด หรือการนับข้ามโดยเขียนจำนวนกลุ่ม หรือการนับข้ามโดยใช้นิ้วมือช่วยนับก็ได้ แต่ยังพบเด็กบางคนที่ชอบใช้การคิดในใจและทำการนับข้ามโดยไม่ต้องใช้ตัวช่วยหรืออุปกรณ์ช่วยในการนับ

1.5.2 ใช้การบวก/การลบ ผู้ให้ข้อมูลหลักใช้การบวก/การลบต่างๆ กัน ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา สถานการณ์ในโจทย์ปัญหา หรือขนาดของจำนวน วิธีการบวก/การลบที่พบในงานวิจัยนี้ได้แก่ การบวกซ้ำ/การลบซ้ำ การยุบรวมกลุ่มและทำการบวก การบวกซ้ำและการบวกในลักษณะทวีคูณ

1.5.3 การใช้ตัวแบบ ผู้ให้ข้อมูลหลักจะใช้ตัวแบบเพื่อช่วยให้มองเห็นภาพและเข้าใจปัญหายิ่งขึ้น หรือบางครั้งพบว่าผู้ให้ข้อมูลหลักใช้ตัวแบบเพื่อช่วยในการบันทึกจำนวน นั่นคือครูควรส่งเสริมให้เด็กได้แสดงวิธีการแก้ปัญหาอย่างหลากหลายโดยผ่านสถานการณ์ปัญหาในรูปแบบต่างๆ

#### 1.6 การควบคุมการรู้คิด

เมื่อได้คำตอบแล้วเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนใหญ่ไม่มีการทบทวนการคิดของตนเอง เด็กส่วนมากจะบอกว่าดำเนินการคิดอย่างดีแล้วจึงมั่นใจในวิธีการและคำตอบที่ได้ ไม่จำเป็นต้องทบทวน จึงไม่พบการแสดงออกอย่างเด่นชัดในการทบทวนการคิดของตนเอง แต่เด็กส่วนใหญ่ที่ตอบคำถามถูกต้องมีการควบคุมการรู้คิดของตนเอง โดยพบได้จากเมื่อดำเนินการแก้ปัญหาได้ระยะหนึ่งหรือในขณะสัมภาษณ์เด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักส่วนมากสามารถรู้ได้ทันทีว่าวิธีการคิดหรือคำตอบของตนเองผิด และจะเปลี่ยนวิธีการคิดใหม่หรือหาคำตอบใหม่ทันที

นอกจากนี้เมื่อเผชิญสถานะที่ติดขัดเด็กจะมีการควบคุมการรู้คิดของตนเอง โดยพยายามเปลี่ยนวิธีดำเนินการแก้ปัญหา หรือพยายามหาตัวช่วยหรืออุปกรณ์ เช่น ตัวแบบ มาช่วยให้มองเห็นภาพและเข้าใจปัญหาได้ดีขึ้น

นั่นคือครูควรส่งเสริมให้เด็กได้มีการควบคุมการรู้คิดเพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่างๆ

#### 1.7 การสร้างกรณีทั่วไป

เมื่อผู้ให้ข้อมูลหลักเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน หรือขนาดของจำนวนในโจทย์ปัญหาเปลี่ยนไป ผู้ให้ข้อมูลหลักสามารถนำวิธีดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ไปใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้

นั่นคือครูควรส่งเสริมให้เด็กได้มองเห็นรูปแบบของปัญหาจนสามารถเชื่อมโยงข้อมูลเก่ากับข้อมูลใหม่ได้ โดยสถานการณ์ที่ตั้งให้เด็กต้องมีลำดับขั้นตอนเพื่อนำไปสู่การสร้างกรณีทั่วไปของเด็ก นอกจากนี้การตั้งคำถามของครูผู้สอนยังมีบทบาทสำคัญอันจะนำไปสู่การสรุปมโนทัศน์ต่างๆ ของเด็กได้เช่นกัน

#### 1.8 การให้เหตุผล

ผู้ให้ข้อมูลหลักมองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่ผ่านมา จึงสามารถระลึกได้ทันทีว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาเดิม สามารถใช้การประมาณหรือการลองผิดลองถูกเพื่อหาคำตอบ บอกได้ว่าคำตอบที่ได้มาของตนเองสมเหตุสมผลหรือไม่ หรือเมื่อเผชิญสถานการณ์ปัญหาสามารถคาดเดาได้ว่าคำตอบควรประมาณเท่าใด ควรเพิ่มหรือลดขนาดของจำนวนเท่าใด

นั่นคือครูควรเปิดโอกาสให้เด็กได้อธิบายเหตุผลของข้อสรุปที่ได้

### 1.9 การนำเสนอตัวแทนความคิด

พบว่าเด็กที่เป็นผู้ให้ข้อมูลหลักนำเสนอตัวแทนความคิดอย่างหลากหลาย ทั้งในรูปคำพูด ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้โดยอาจใช้ตัวแบบ ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ หรือ ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ โดยการนำเสนอตัวแทนความคิดนี้จะขึ้นอยู่กับวุฒิภาวะ หรือ ความสามารถทางภาษาของเด็กเป็นสำคัญเพราะสิ่งเหล่านี้จะส่งผลถึงการคิดของเด็กด้วย เด็กที่มี วุฒิภาวะสูง มีความเข้าใจภาษาที่ดีสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์ได้ ส่วนเด็กที่มี วุฒิภาวะต่ำ ขาดความเข้าใจทางภาษาจะไม่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้สัญลักษณ์ได้ นั่นคือควรควรให้เด็กได้สื่อความคิดของเด็กเองโดยใช้ตัวแทนความคิดในรูปสิ่งที่สัมผัส ได้และในรูปคำพูด

### 2. วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี

เด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี มีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเอง เด็กเกิดการเรียนรู้หรือการหยั่งรู้ด้วยตนเอง สามารถแสดงการคิดโดยธรรมชาติของตนเองทั้งที่เป็น เรื่องที่ไม่คุ้นเคยและยังไม่ได้เรียนมา โดยนำความรู้เชิงสหสัมพันธ์ ทักษะและการดำเนินการที่ หลากหลายทางคณิตศาสตร์มาทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา ค้นหาคำตอบของปัญหาที่ไม่ คุ่นเคย สร้างข้อสรุปจากข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆ ในลักษณะกรณีทั่วไปอย่างไม่เป็นทางการได้ แต่เป็นที่น่าสังเกตว่ามีเด็กบางคนในวัย 7-8 ปี สามารถแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิง คณิตศาสตร์ของตนเองได้เป็นอย่างดีและดีกว่าเด็กในวัย 8-10 ปี ซึ่งจากการศึกษาวิถีธรรมชาติแห่ง การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กในช่วงอายุ 7-10 ปี พบว่าเด็กดังกล่าวมีลักษณะเฉพาะของการคิด เชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเอง และสามารถแบ่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตั้งแต่การใช้ตัวแบบซึ่งเป็น ระยะที่มีประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ การใช้การนับที่อยู่ในระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อใน การมองเห็น และการใช้การบวกที่อยู่ในระยะของการสร้างสัญลักษณ์ ได้จากการดำเนินการ แก้ปัญหาของเด็กและสามารถสรุปลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กซึ่งเป็นวิถี ธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังภาพประกอบ 34

การคิดในระดับที่ต่ำกว่า  $\longrightarrow$  การคิดในระดับที่สูงกว่า

| ระยะที่มีประสบการณ์ตรง<br>และสัมผัสได้                                                                                                                                                                                                                               | ระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อ<br>ในการมองเห็น                                                                                                                                                                                                                                   | ระยะของการสร้าง<br>สัญลักษณ์                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวแบบ                                                                                                                                                                                                                                                               | การนับ                                                                                                                                                                                                                                                                     | การบวก                                                                                                                                                 |
| <p>ใช้การลงมือปฏิบัติ (ใช้<br/>ตัวนับ) ตามสถานการณ์ใน<br/>โจทย์ปัญหา</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ปัญหาการคูณ<br/>ใช้การจัดกลุ่ม</li> <li>- ปัญหาการหาร<br/>ใช้การแบ่งส่วนหรือ<br/>การวัด</li> </ul> <p>ใช้การลองผิดลองถูก</p> <p>ใช้การกะประมาณ</p> | <p>การนับหลังจากวาดภาพ<br/>หรือใช้ตัวแบบ</p> <p>การนับเพิ่มทีละ 1<br/>โดยใช้นิ้วมือ</p> <p>การนับเพิ่มทีละ 1<br/>ตามจังหวะโดยใช้นิ้วมือ</p> <p>การนับข้าม<br/>โดยการวาดภาพทั้งหมด</p> <p>การนับข้าม<br/>โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ</p> <p>การนับข้าม<br/>โดยเขียนจำนวนกลุ่ม*</p> | <p>การนับข้าม<br/>โดยเขียนจำนวนกลุ่ม*</p> <p>การบวกซ้ำ/การลบซ้ำ</p> <p>การยุบรวมกลุ่มและ<br/>ทำการบวก</p> <p>การบวกซ้ำและการบวก<br/>ในลักษณะทวีคูณ</p> |

ภาพประกอบ 34 วิธีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี

\* หมายเหตุ การนับข้ามโดยเขียนจำนวนกลุ่ม เป็นการส่งผ่าน (หรือการเชื่อมต่อ) จากระยะ  
การใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็นมาสู่ระยะของการสร้างสัญลักษณ์

## ข้อเสนอจากการวิจัย

### ข้อเสนอสำหรับนักพัฒนาหลักสูตร

1. การจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ในช่วงชั้นที่ 1 เรื่องการคูณและการหาร สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2-3 อาจจัดให้เรียนโจทย์ปัญหาการคูณและการหารโดยเน้นสถานการณ์จริงหรือสถานการณ์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงเป็นสิ่งที่ใกล้ตัวเด็ก แล้วจึงเชื่อมโยงแนวความคิดที่ได้จากประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของเด็ก เช่น การจัดกลุ่ม การแบ่ง การวัด การบวกซ้ำ การลบซ้ำ การบวกเพิ่ม หรือการลบเพิ่ม ไปสู่การเรียนรู้เรื่องการคูณและการหารในรูปสัญลักษณ์ซึ่งถือเป็นสิ่งที่เป็นนามธรรม ยากแก่การเข้าใจของเด็ก สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 อาจจัดให้เรียนโจทย์ปัญหาการคูณและการหารแบบไม่เป็นทางการ โดยการแก้ปัญหาของเด็กในระดับชั้นนี้ยังไม่เชื่อมโยงไปสู่สัญลักษณ์การคูณและการหาร
2. โจทย์ปัญหาการคูณและการหารในลักษณะของการเปรียบเทียบควรเริ่มเรียนเมื่อเด็กมีวัยสูงขึ้น หรือครูผู้สอนควรให้ความสำคัญเป็นพิเศษในการสอนเรื่องนี้โดยเฉพาะคำศัพท์ที่เกิดขึ้นใหม่ เช่นคำว่า “เท่า”
3. โจทย์ปัญหาการคูณและการหารในลักษณะผลคูณคาร์ทีเซียนสามารถนำมาสร้างเป็นสถานการณ์ปัญหาสำหรับเด็กอายุ 9 ปี ขึ้นไป เพื่อให้เด็กได้แสดงการคิดแก้ปัญหา

### ข้อเสนอสำหรับครูผู้สอน

1. เนื่องจากในการวิจัยพบว่าเด็กใช้การนับเป็นวิธีการในการแก้ปัญหามากที่สุด ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้ควรคำนึงถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ของเด็กเช่น พื้นฐานเกี่ยวกับการนับ ครูควรสอนให้เด็กเกิดความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นฐานในการนับอย่างมีความหมาย เข้าใจความหมายของการนับอย่างถ่องแท้ ไม่ใช่เพียงการสอนให้เด็กนับได้เท่านั้น เด็กต้องเรียนรู้การนับของจำนวนทั้งที่เป็นจำนวนเชิงการนับ (Cardinal Number) และจำนวนเชิงอันดับที่ (Ordinal Number) เด็กต้องเข้าใจคำว่า “สอง” ในฐานะของกลุ่มของสิ่งของที่มีขนาดเท่ากับสอง ไม่ใช่เรียนรู้เพียงอันดับของการนับเท่านั้น
2. วิธีการจัดการเรียนรู้หรือวิธีการสอนของครูอาจไม่เหมาะสมกับเด็ก ดังนั้นครูควรจัดการเรียนรู้โดยคำนึงถึงวิถีธรรมชาติแห่งการเรียนรู้ของเด็ก ครูควรระลึกไว้เสมอว่า เด็กมีวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเอง ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้ครูควรจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับวิถีธรรมชาติแห่งการคิดของเด็ก เปิดโอกาสให้เด็กได้คิดแก้ปัญหาเอง โดยครูไม่ต้องหาวิธีการหรือเสนอวิธีคิดให้ ในชั้นเรียนเด็กควรได้ใช้เวลาส่วนใหญ่แก้ปัญหาเองและนำเสนอวิธีแก้ปัญหาในชั้นเรียนระหว่างเด็กด้วยกัน และเด็กกับครู หลังจากนั้นให้เด็กได้นำเสนอวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาแล้วเปรียบเทียบและหาข้อแตกต่างของวิธีการแต่ละวิธี หลังจากนั้นครูจึงใช้ข้อมูลจากการฟังเด็กมาตัดสินใจเลือกวิธีการสอนที่เหมาะสม เพราะการที่ครูให้เด็กได้ฝึกการคิดจนเกิดเป็นทักษะทางการคิดที่หลากหลายจะทำให้เด็กเกิดการเรียนรู้เพื่อนำไปใช้ตลอดชีวิต โดยเริ่มแรกอาจเริ่มจากสถานการณ์ปัญหาหรือสิ่งที่เด็กเข้าใจสอดคล้องกับชีวิตจริงและสามารถแสดง

การคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ เช่นในการแก้โจทย์ปัญหา ไม่จำเป็นที่ครูต้องให้เด็กเขียนประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ก่อนแล้วจึงคิดหาคำตอบ เพราะประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นนามธรรมยากแก่การเข้าใจของเด็ก ครูควรให้เด็กได้แสดงการคิดของเขาเองอย่างอิสระโดยครูยังไม่บอกขั้นตอนการคิดแล้วจึงค่อยสรุปออกมาในรูปสัญลักษณ์

3. ครูควรคำนึงถึงภาษาที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้ ควรใช้ภาษาที่เหมาะสมกับวัยของเด็ก ควรมีการพูดคุยแลกเปลี่ยนประสบการณ์ทางภาษาระหว่างครูกับเด็ก นอกจากนี้ครูควรส่งเสริมให้เด็กได้มีปฏิสัมพันธ์กับบุคคลอื่นในห้องเรียนและนอกห้องเรียน

4. ในการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ให้กับเด็ก ข้อมูลที่จัดเสนอให้กับเด็กต้องมีความหมายและมีความสำคัญ ครูควรหาวิธีการให้เด็กและช่วยให้เด็กสามารถเชื่อมโยงข้อมูลความรู้ใหม่เข้ากับข้อมูลความรู้เก่าได้ โดยครูต้องคำนึงถึงพื้นความรู้เดิมหรือประสบการณ์ที่เด็กมีอยู่เพื่อให้เด็กสามารถนึกภาพหรือคิดต่อได้ ครูอาจจัดประสบการณ์อย่างไม่เป็นทางการและเป็นการเรียนรู้ที่เด็กรู้สึกสนุกสนานโดยผ่านประสาทสัมผัสทั้งห้าเพื่อให้เด็กได้รับประสบการณ์ตรงซึ่งจะช่วยให้เด็กเข้าใจข้อมูลใหม่ได้ดีขึ้น

5. ในการจัดสถานการณ์ในการเรียนรู้นั้นครูควรให้เด็กทุกคนรู้สึกถึงความสำเร็จของตัวเอง เกิดความรู้สึกที่จะเข้าไปพัวพันกับสถานการณ์นั้นและเกิดความเชื่อมั่นในการคิด

6. ครูควรจัดหาอุปกรณ์หรือตัวช่วยต่างๆ ไว้ในชั้นเรียนเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาของเด็กเมื่อเด็กต้องการ เช่น ภาตพลาสติก เมตลูกคิด ตะเกียบ ไม้จิ้มฟัน บล็อกพลาสติก ตัวนับ หรือคู่อากระตุ้นให้เด็กใช้การวาดภาพ ใช้ออยซีต หรือใช้นิ้วมือ

#### ข้อเสนอสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพที่มุ่งศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี โดยมุ่งเน้นการดำเนินการค้นหาคำตอบโดยตรงจากบุคคลเป้าหมาย ในพื้นที่เป้าหมาย ในบรรยากาศที่เป็นธรรมชาติ และเน้นการใช้วิธีการเชิงอุปนัยในการดำเนินการค้นหาคำสรุปที่เชื่อมโยงโดยตรงกับข้อมูลดิบที่ได้รับรวบรวมมา ผลการวิจัยที่ได้รับจากการวิจัยครั้งนี้จึงเป็นเรื่องราวเกี่ยวกับบริบทในโรงเรียนที่ผู้วิจัยเข้าไปเก็บรวบรวมข้อมูลซึ่งอาจมีข้อจำกัดในการสรุปอ้างอิงที่เป็นสากล อย่างไรก็ตามผลการวิจัยที่ได้รับดังกล่าวสามารถนำไปพัฒนาเป็นทฤษฎี และสมมติฐานเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กเพื่อนำไปสู่การทดสอบต่างๆ ในการวิจัยครั้งต่อไป หรือในการวิจัยเชิงปริมาณอันได้แก่

1. การศึกษาเปรียบเทียบระหว่างวิธีการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการจัดประสบการณ์ผ่านวิถีธรรมชาติแห่งการเรียนรู้เชิงคณิตศาสตร์ของเด็กกับการจัดการเรียนรู้ตามแนวทางของครู
  2. การศึกษาคุณค่าของการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการจัดประสบการณ์ผ่านวิถีธรรมชาติแห่งการเรียนรู้เชิงคณิตศาสตร์ของเด็กมีคุณค่าอย่างไร
  3. การวิจัยเกี่ยวกับคำสำคัญของภาษาทางคณิตศาสตร์ในวัยต่างๆ
- นอกจากนี้ควรมีการทำการวิจัยที่เน้นการศึกษาเฉพาะกรณีให้มากขึ้น



### บรรณานุกรม

- กมล ภูประเสริฐ. (2513). *การศึกษาแบบการคิด Cognitive Styles ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย*. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- กรองทอง ไครี. (2548) "ICT กับการพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในทุกช่วงชั้น. สืบค้นเมื่อ 9 พฤศจิกายน 2548, จาก [http://www.ipst.ac.th/it/rosegarden/GSP\\_krongtong.htm](http://www.ipst.ac.th/it/rosegarden/GSP_krongtong.htm)
- กรมวิชาการ. (2542). *การสังเคราะห์รูปแบบการพัฒนาศักยภาพของเด็กไทยด้านทักษะการคิด. ใน เอกสารประกอบโครงการการศึกษาศักยภาพของเด็กไทย*. กรุงเทพฯ: กองวิจัยการศึกษา กรมฯ.
- . (2546). *การจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ ๑-๖ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๔๔*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- กันยา สุวรรณแสง. (2532). *จิตวิทยาทั่วไป*. กรุงเทพฯ: อักษรพิทยา
- จำรัส นองมาก. (2513). *การศึกษาแบบการคิด Cognitive Styles ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนต้น*. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ชาย โพรธิตา. (2547). *ศาสตร์และศิลป์แห่งการวิจัยเชิงคุณภาพ*. กรุงเทพฯ: อัมรินทร์พรินต์ติ้ง แอนด์พับลิชชิ่ง.
- ดอบเบิร์ต, มาเรียน ลันดี, บรรณาธิการ. (2537). *การวิจัยเชิงคุณภาพ: ทฤษฎีและการประยุกต์ใช้ในการศึกษาและสังคมสมัยใหม่*. แปลโดย อูษา ดวงสา. กรุงเทพฯ: ศึกษาภัณฑ์พาณิชย์.
- ทิศนา ขัมมณี; นวลจิตต์ เขาวีรดิพงษ์และ ศรีนคร วิริยะสินธุ์. (2547). *มิติของการคิด: กรอบแนวคิดเพื่อพัฒนาการคิดของเด็กและเยาวชนไทย*. (เอกสารประกอบการประชุมเชิงปฏิบัติการ เรื่องการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.
- นพพร แหยมแสง. (2544). *การพัฒนาสำนักเกี่ยวกับจำนวนสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2*. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2542). *พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พุทธศักราช 2542*. กรุงเทพฯ: อักษรเจริญทัศน์.
- ลัดดาวัลย์ กันหสุวรรณ. (2520). *การใช้คำถาม*. (เอกสารเนื่องในวันครบรอบการสถาปนาวิทยาลัยครูพระนคร ปีที่ 85. 12 ตุลาคม 2520). อัดสำเนา.

- ศิริชัย กาญจนวาสี. (2547). การวัดและประเมินความสามารถในการคิด. ใน เอกสาร  
ประกอบการประชุมเชิงปฏิบัติการ เรื่อง การจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด. หน้า  
46-69. กรุงเทพฯ: ภาควิชาประถมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่าย  
เอกสาร
- สมสุข โถงเจริญ. (2541). ความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักศึกษาพยาบาล  
วิทยาลัยพยาบาลบรมราชชนนี ภาคใต้. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (จิตวิทยาพัฒนาการ).  
กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (สสวท.). (2539, ตุลาคม-ธันวาคม).  
ผลสัมฤทธิ์วิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยเมื่อเปรียบเทียบกับ  
นานาชาติ. วารสารสสวท. 95(24): 28-34.
- (2544?). กิจกรรมในห้องเรียนเพื่อพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวน. (เอกสารเสริมสำหรับ  
ครู). สาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ  
เทคโนโลยี.
- สิริพร ทิพย์คง. (2543, กันยายน). ศิลปะการตั้งคำถามในวิชาคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์.  
ฉบับพิเศษ: 15-19.
- สุภาวค์ จันทวานิช. (2545). วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์  
มหาวิทยาลัย.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2548). การติดตามและประเมินผลการจัดการศึกษา. ใน  
เอกสารประกอบการสัมมนาระดมความคิด. กรุงเทพฯ: สำนักประเมินผลการจัด  
การศึกษา สำนักงาน.
- อัมพร ม้าคนอง. (2546). คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่ง  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- Archived Information. (2006). *What do Children Know about Numbers? What do They  
Need to be Taught?* Retrieved August 21, 2005, from [http://www.ed.gov/pubs/  
InstScience/chap1c.html](http://www.ed.gov/pubs/InstScience/chap1c.html)
- Armstrong, Thomas. (1998). *Awakening Genius in the Classroom*. VA: Association for  
Supervision and Curriculum Development.
- Baroody, Arthur J.; & Coslick, Ronald T. (1993). *Problem Solving, Reasoning, and  
Communicating, K-8*. USA: Macmillan.
- Behr, Merlyn J.; et al. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In *Handbook of  
Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, Douglas A. editor. pp  
296-333. New York: Macmillan.

- Bell, G. (1990, January). Language and Counting: Some Recent Results. *Mathematics Education Research Journal*. 20(5): 434-449.
- Bellisio, Carol. (1997) *Elementary School Children can do Algebra*. Retrieved May 18, 2005, from <http://soeweb.syr.edu/mathed/abstracs.html>
- Ben-Zeev, Talia. (1996). When Erroneous Mathematical Thinking Is Just as "Correct": The Oxymoron of Rational Errors. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia, editors. pp.55-79. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Berger, M.C. (1984, September). Critical Thinking Ability and Nursing Students. *Journal of Nursing Education*. 23: 306-308.
- Biggs, John B; & Collis, Kevin F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning*. New York: Academic Press.
- (1991). Multimodal Learning and Intelligent Behavior. In *Reconceptualization and Measurement Intelligence*. H. Rowe, Editor. pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bloom, B.S. (1961). *Taxonomy of Education Objectives*. New York: David Mckay.
- Borromeo Ferri, Rita. (2005). *Mathematical Thinking Styles-An Empirical Study*. Retrieved April 21, 2005, from <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups>.
- Boulton-Lewis, G.; & Halford, G. (1992, January). The Processing: Loads of Young Children's and Teachers' Representations of Place Value and Implications for Teaching. *Mathematics Education Research Journal*. 4(1): 1-23.
- Breyfogle, M.Lynn; & Herbal-Eisenmann, Beth A. (2004, April). Teacher Education: Focusing on Students' Mathematical Thinking. *Mathematics Teacher*. 97(4): 244-247.
- Bruner, Jerome. (1960). *The Process of Education*. London: Oxford University.
- (2005). *Constructivist Theory*. Retrieved October 23, 2005, from file://E:\research\TIP Theories.htm
- Bruner, Jerome S.; et al (1966). *Study in Cognitive Growth*. New York: John Wiley & Son.
- Cai, Jinfa. (1995). *A Cognitive Analysis of U.S. and Chinese Students' Mathematical Performance on Tasks Involving Computation, Simple problem solving, and Complex Problem solving*. Virginia: NCTM. (Journal for Research in Mathematics Education; Monograph No.7)

- Carey, Deborah A. (1991, July). Number Sentence: Linking Addition and Subtraction Word Problems and Symbols. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22(4): 266-280.
- Carpenter, Thomas P.; & Moser, James M. (1984). The Acquisition and Subtraction Concepts in Grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*. 15(3): 179-202.
- Carpenter, Thomas P.; Fennema, E.; & Peterson, P.L. (1989). Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study. *American Educational Research Journal*. 26(4): 499-531.
- Carpenter, Thomas P.; & Fennema, E. (1992). Cognitively Guided Instruction: Building on the Knowledge of Students and Teachers. In *International Journal of Educational Research*. Walberg, H.J.; et al, editors. pp. 457-470. NY: Pergamon.
- Carpenter, Thomas P.; et al. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for Research in Mathematics Education*. 24: 428-441.
- Carpenter, Thomas P.; et al. (1999). Children Mathematics: Cognitively Guided Instruction. NH: Heinemann.
- Carroll, John B. (1996). Mathematical Abilities: Some Result from Factor Analysis. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia, editors. pp. 3-26. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carroll, William M. (1999). Using Short Questions to Develop and Assess Reasoning. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 1999. Yearbook*. Stiff, Lee V.; & Curcio, Frances R. editors. pp.247-255. Virginia: NCTM.
- Children's Understanding of Number*. (2005). Retrieved September 18, 2005, from <http://www.dur.ac.uk/j.w.adams/Dev2/number.htm>
- Clements, Douglas H.; & Battista, Michael T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, Douglas A., editor. pp. 420-464. New York: Macmillan.
- De Hoyos Guajardo, Maria. (2004). Solution. *The Grounded Theory Review*. 4(1): 59-85.
- Dickson, Linda; Brown, Margaret; & Gibson, Olwen. (1984). *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*. Oxford: Alden.
- Dreyfus, Tommy; & Eisenberg, Theodore. (1996). On Different Facts of Mathematical Thinking. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia, editors. pp. 253-284. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Fischer, Florence E. (1990, March). A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(2): 207-215.
- Fraenkel, Jack R.; & Wallen, Norman E. (2000). *How to Design and Evaluate Research in Education*. 4<sup>th</sup> ed. Boston: McGraw Hill.
- Fuson, K.C.; & Briars, D.J. (1990, March). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First and Second-Grade Place Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(3): 180-206.
- Fuson, K.C.; et al. (1997, March). Children's Conceptual Structures for Multidigit Number and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. 28(2): 130-162.
- Ginsburg, Herbert P. (1996). Toby's Math. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia., editors. pp. 175-202. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ginsburg, Herbert P.; Jacobs, Susan F.; & Lopez, Luz Stella. (1998). *The Teacher's Guide to Flexible Interviewing in the Classroom Learning What Children Know about Math*. MA: Allyn & Bacon.
- Goldin, Gerald A. (1998). Observing Mathematical Problem Solving Through Task-Based Interviews. In *Journal for Research in Mathematics Education Qualitative Research Methods in Mathematics Education*. Teppo, Anne R., editor. pp.40-62. Virginia: NCTM.
- Goldin, Gerald A.; & Shteingold, Nina. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In *The Roles of Representation in School Mathematics 2001 Yearbook*. Cuoco, Albert A; & Curcio, Frances R., editor. pp.1-23. Virginia: NCTM.
- Guberman, Steven R. (2005). *Cultural Aspects of Young Children's Mathematics Knowledge*. Retrieved October 23, 2005, from [http://spot.colorado.edu/~gubermas/NCTM\\_pap.htm](http://spot.colorado.edu/~gubermas/NCTM_pap.htm)
- Gueberman, Steven R.; Rahm, Jrene; & Menk, Debra, W. (2005). *Transforming Cultural Practices: Illustrations from Children's Game Play*. Retrieved October 23, 2005, from <http://spot.colorado.edu/~gubermas/Monopoly%20paper.htm>
- Hyde, Authur A.; & Hyde, Pamela R. (1991). *Mathwise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving*. Portsmouth, NH: Heinemann.

- Jacobs, Victoria R.; et al. (February, 2006). Using Teacher-Produced Videotapes of Student Interviews as Discussion Catalysts. *Teaching Children Mathematics*. 12(6): 276-281.
- Jensen, Robert J.; & Williams, Brevard S. (1993). Technology: Implications for Middle Grades Mathematics. In *Research Ideas for the Classroom Middle Grades Mathematics*. Owens, Douglas T., editor. pp. 225-243. New York: Macmillan.
- Jones, Graham A.; Thornton, Carol A.; & Putt, Lan J. (1994). A Model for Nurturing and Assessing Multidigit Number Sense among First grade Children. *Educational Studies in Mathematics*. 27: 117-143.
- Jones, Graham A.; et al. (1996, May). Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27(3): 310-336.
- Jones, Graham A.; et al. (2002). Elementary Students' Access to Powerful Mathematical Ideas. In *Handbook of International Research in Mathematics Education*. English, editor.
- Kagan, J., & Moss, H. A. (1962). *Birth to maturity: A study in psychological development*. New York: John Wiley & Sons.
- Kennedy, L.M.; & Tipps, S. (1997). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, California: Wadsworth.
- Kilpatrick, Jeremy.; Swafford, Jane.; & Findell, Bradford., editors. (2001). *Adding It Up Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kouba, V.L.; et al. (1988, April). Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number Operations and Word Problems. *Arithmetic Teacher*. 35(8): 14-19.
- Kriegler, Shelley. (2004). *Just What is Algebraic Thinking*. Retrieved June 10, 2004, from <http://www.math.ucla.edu/~kriegler/>
- Krulik, S.; & Rudnick, J. (1993). Reasoning and Problem Solving. In *A Handbook for Elementary School Teachers*. Boston: Allyn & Bacon.
- Ladesma. (2005). *Study of Solving Strategies and Proposal for the Teaching of Ratio and Proportion*. Retrieved September 18, 2005, from <http://www.west.asu.edu/cmw/Pme/webshortorals/PME-so-ruiz-form.htm>
- Leron, Uri. (2005). *Mathematical Thinking and Human Nature*. Retrieved April 10, 2005, from <http://www.icme-organises.dk/tsg28/Leron%20Human%20Nature%2026.4.04.doc>

- Malloy, Carol E. (1999). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Stiff, Lee V.; & Curcio, Frances R., editors. pp. 13-21. Reston, Va: NCTM.
- Manouchehri. (2005). *Lecture Notes: Math 461*. Retrieved October 19, 2005, from <http://www.cst.cmich.edu/users/manoula/461/461.day2.ppt#1>
- Mason, John; Burton, Leone; & Stacey, Kaye. (1985). *Thinking Mathematically*. Harlow: Addison-Wesley.
- Marzano, Robert J. (2001). *Designing a New Taxonomy of Educational Objectives*. Thousand Oaks, California: Corwin Press.
- McNeil, Elton B. (1974). *The Psychology of Being Human*. San Francisco: Canfield.
- Miles, Matthew B.; & Huberman, A. Michael. (1994). *Qualitative Data Analysis. An Expanded Sourcebook*. 2<sup>nd</sup> ed. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Mulligan, Joanne T.; & Mitchelmore, Michael C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. In *Journal for Research in Mathematics Education*. 28(3): 309-330.
- Musser, Gary L.; Burger, William F; & Peterson, Blake E. (2000). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*. 5<sup>th</sup> ed. New York: John Wiley & Sons.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.
- (2003). *A Research Companion to Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Northwest Regional Educational Laboratory. (2005a). *Give Students Lots of High Quality Problems to Solve*. Retrieved February 16, 2005, from <http://www.nwrel.org/msec/mpm/quality.html>
- Northwest Regional Educational Laboratory. (2005b). *Working Definition of Assessment Terms*. Retrieved February 16, 2005, from <http://www.nwrel.org/msec/mpm/quality.html>
- NRICH. (2003). *Using Question to Stimulate Mathematical Thinking*. Retrieved March 8, 2005, from [http://www.nrich.maths.org/public/viewer.php?obj\\_id=2473&part](http://www.nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2473&part)
- O'Daffer, Phares G.; & Thornquist, Bruce A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning, and Proof. In *Research Ideas for the Classroom High School Mathematics*. Wilson, Patricia S., editor. pp. 39-56. New York: Macmillan.

- Payne, Joseph N.; & Huinker, DeAnn M. (1993). Early Number and Numeration. In *Research Ideas for the Classroom Early Childhood Mathematics*. Jensen, Robert J., editor. pp. 43-71. New York: Macmillan.
- Pirie, S.E.B.; & Kieren, T.E. (1992). Watching Sandy's Understanding Grow. In *Journal of Mathematical Behavior*. 11: 243-257.
- Polya, G. (1973). *How to Solve It*. New Jersey: Princeton University Press.
- RAND Mosaic Project. (2005). *Elements of Standards-Based Mathematics*. Retrieved May 18, 2005, from <http://www.rand.org/education/projects/mosaic2/downloads/elements.math.pdf>.
- Resnick, L.B. (1986). The Development of Mathematical Intuition. In *Minnesota Symposium on Child Psychology*. Perlmutter, M., editor. 19: 159-194. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Reys, Robert E.; et al. (2001). *Helping Children Learn Mathematics*. Sixth Edition. New York: Wiley & Sons, Inc.
- (2004). *Helping Children Learn Mathematics*. Seventh Edition. New York: Wiley & Sons, Inc.
- Rickart, Charles. (1996). Structuralism and Mathematical Thinking. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia., editors. pp. 285-300. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Riedesel, C. Alan; Schwartz, James E; & Clements, Douglas H. (1996). *Teaching Elementary School Mathematics*. MA: Allyn & Bacon.
- Romagnano, Lew. (2001, January). The Myth of Objectivity in Mathematics Assessment. In *Implementing the Assessment Standards for School Mathematics*. 94(1): 31-37.
- Ross, S.H. (1989, February). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *Arithmetic Teacher*. 36(6): 47-51.
- Rungtiwa Nabumrung. (1998). *A Study on Mathematics Education in Upper Secondary School in Japan and Thailand*. A Research Paper at Akita University Mathematics Education Special, Graduate School of Education. Japan.
- Russell, David H. (1956). *Children's Thinking*. USA: Ginn and Company.
- Russell, Susan Jo. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 1999 Yearbook*. Stiff, Lee V.; & Curcio, Frances R. editors. pp. 1-12. Reston, Virginia: NCTM.

- Sanchez, Wendy; & Ice, Nicole. (2004, July/August). *Open-Ended Items Better Reveal Students' Mathematical Thinking*. Retrieved July 3, 2005, from [http://www.nctm.org/news/assessment/2004\\_07nb.htm](http://www.nctm.org/news/assessment/2004_07nb.htm)
- Schoenfeld, Alan H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Retrieved July 24, 2005, from <http://tip.psychology.org/schoen.html>
- (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, Douglas A., editor. pp. 334-370. New York: Macmillan.
- Sherin, Bruce; & Fuson, Karen. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. In *Journal for Research in Mathematics Education*. 36(4) : 345-395.
- Shimada, Shigeru. (1997). The Significance of an Open-Ended Approach. In *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Becker, Jerry P.; & Shimada, Shigeru., editors. pp. 1-9. Reston, VA: NCTM.
- Sigel, I. E., & Hooper, F. H. (Eds.). (1968). *Logical thinking in children*. New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc.
- Sonnabend, Thomas A. (1993). *Mathematics for Elementary Teachers*. U.S.A.: Saunders College.
- Sternberg, Robert J. (1996). What is Mathematical Thinking?. In *The Nature of Mathematical Thinking*. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia., editors. pp. 303-318. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Strauss, Anselm L.; & Corbin, Juliet M.. (1990). *Basic of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Technique*. Newbury Park, CA: Sage.
- Suchman, J R.; & Spaulding, R. (1970?) Cognitive Style: Theory, Observation, and Measurement. In *Theory and Process in Elementary Education*. Photocopied.
- Swan, Malcolm; & Ridgway, Jim. (2005). *Mathematical Thinking CATs*. Retrieved April 5, 2005, from <http://www.flagoide.org/extra/download/cat/math/math/mathw97.doc>.
- Teppo, Anne R. (1998). Diverse Ways of Knowing. In *Journal for Research in Mathematics Education Qualitative Research Methods in Mathematics Education*. Teppo, Anne R., editor. pp.1-16. Virginia: NCTM.

The International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

(1998). *Highlights Of Results from TIMSS-Primary School Years*. Retrieved January 19, 2001, from <http://www.Csteep.bc.edu/TIMSS1/HilightB.html>

Troutman, Andria P.; & Lichtenberg, Betty K. (1995). *Mathematics a Good Beginning*. 5<sup>th</sup> ed. California: Brooks/Cole.

Wolfe, Pat; & Brandt, Ron. (1998, November). What Do We Know from Brain Research? *Educational Leadership*. 56(3): 8-13.



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก

รายนามผู้เชี่ยวชาญ



## รายนามผู้เชี่ยวชาญ

### ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา

|            |            |                                                                                                |
|------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| รศ.ดร.สมพล | เล็กสกุล   | ผู้เชี่ยวชาญพิเศษคณิตศาสตร์ ปฏิบัติหน้าที่ที่ปรึกษาสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี |
| อาจารย์สุร | กาญจน์มยุร | ผู้เชี่ยวชาญคณิตศาสตร์สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี                              |
| รศ.ประพนธ์ | จ่ายเจริญ  | อาจารย์สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ (ฝ่ายประถม)                    |

### ผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์และภาษาไทยในระดับประถมศึกษา

|              |         |                                                        |
|--------------|---------|--------------------------------------------------------|
| อาจารย์ณัฐดา | ไชยกิจ  | อาจารย์ 2 ระดับ 7<br>อาจารย์สอนภาษาไทย โรงเรียนมีนบุรี |
| อาจารย์วิไล  | ราชนิยม | อาจารย์สอนคณิตศาสตร์<br>โรงเรียนอัสสัมชัญ คอนแวนต์     |

### ผู้ให้รหัสข้อมูล

|                  |         |                                                                                                      |
|------------------|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| อาจารย์บุญญาธิสา | แซ่หล่อ | อาจารย์แผนกหลักสูตรและการสอน ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี |
| อาจารย์นงชนก     | ตุ้มฉาย | อาจารย์ 3 ระดับ 9 ผู้เชี่ยวชาญด้านการคิด<br>ข้าราชการบำนาญ สังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน         |

### อาจารย์โรงเรียนสวัสดีวิทยา: ผู้ตรวจสอบความถูกต้องและความเชื่อถือได้ของข้อมูล

|                  |              |                                                                     |
|------------------|--------------|---------------------------------------------------------------------|
| อาจารย์พัชรินทร์ | พูลสวัสดิ์   | อาจารย์ 2 ระดับ 7<br>อาจารย์สอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 |
| อาจารย์ปิยมน     | ธรรนทีบุญส่ง | อาจารย์ 2 ระดับ 7<br>อาจารย์สอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 |
| อาจารย์พรชัย     | พิมพ์โคตร    | อาจารย์ 2 ระดับ 7<br>อาจารย์สอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 |

### ภาคผนวก ข

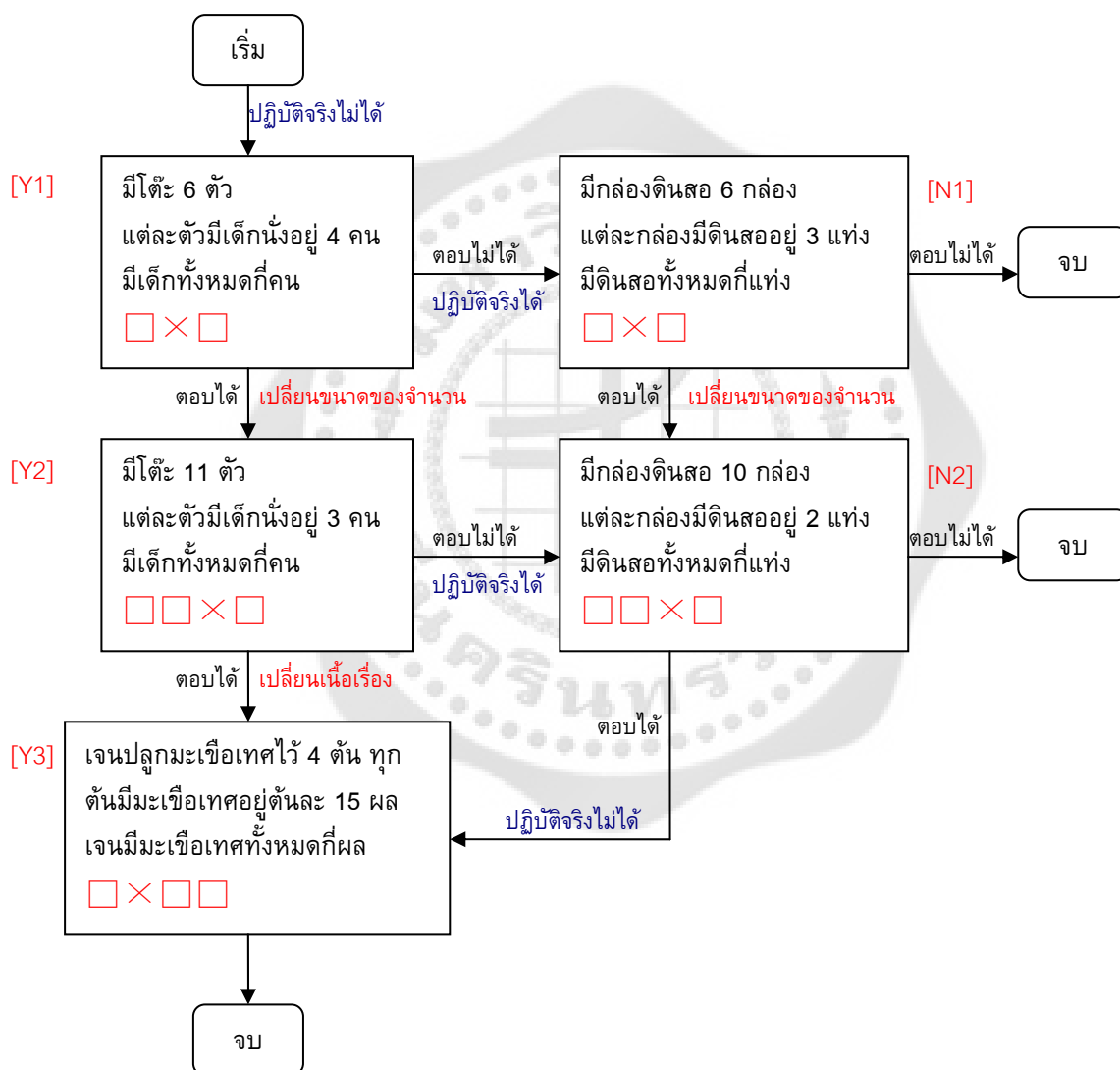
- ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก สำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)
- ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก สำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)
- สรุปผลการตอบโจทย์ปัญหาในแต่ละชุดคำถามของผู้ให้ข้อมูลหลักทั้งสามช่วงอายุ

ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก สำหรับเด็กช่วงอายุ  
7-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

### ชุดคำถามที่ 1

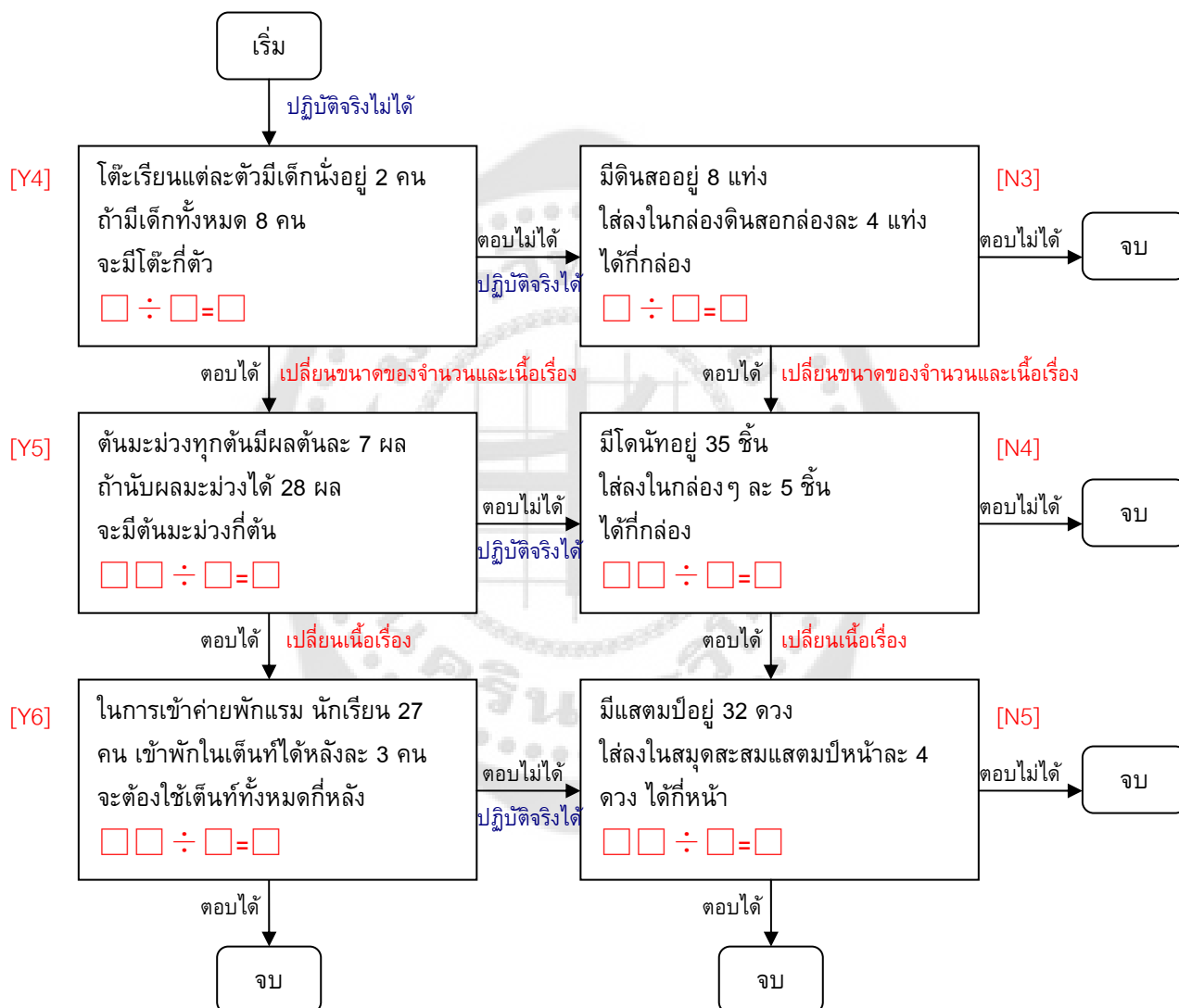
ปัญหาการคูณ: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

ชุดคำถามที่ 1

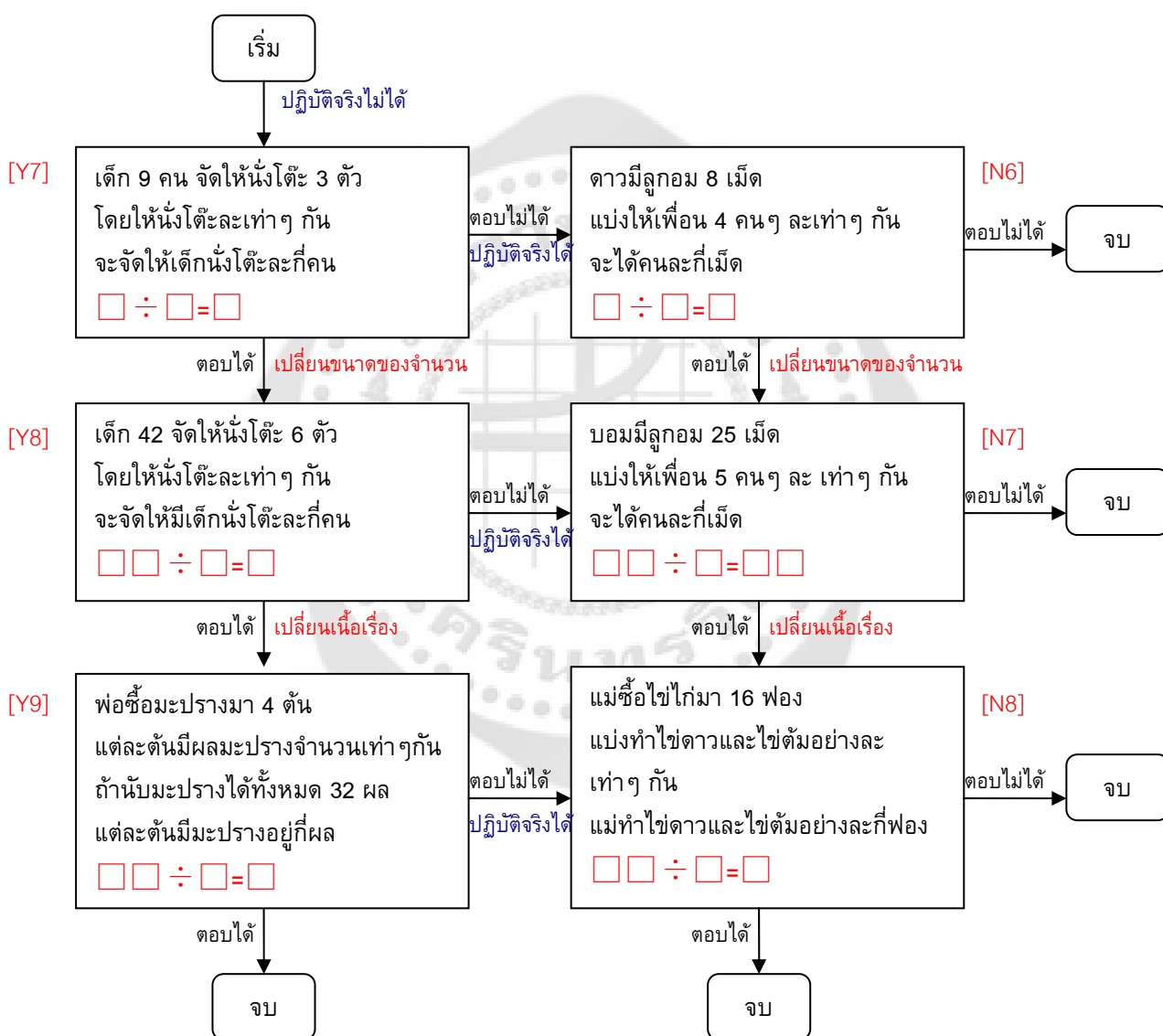
ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

ชุดคำถามที่ 1

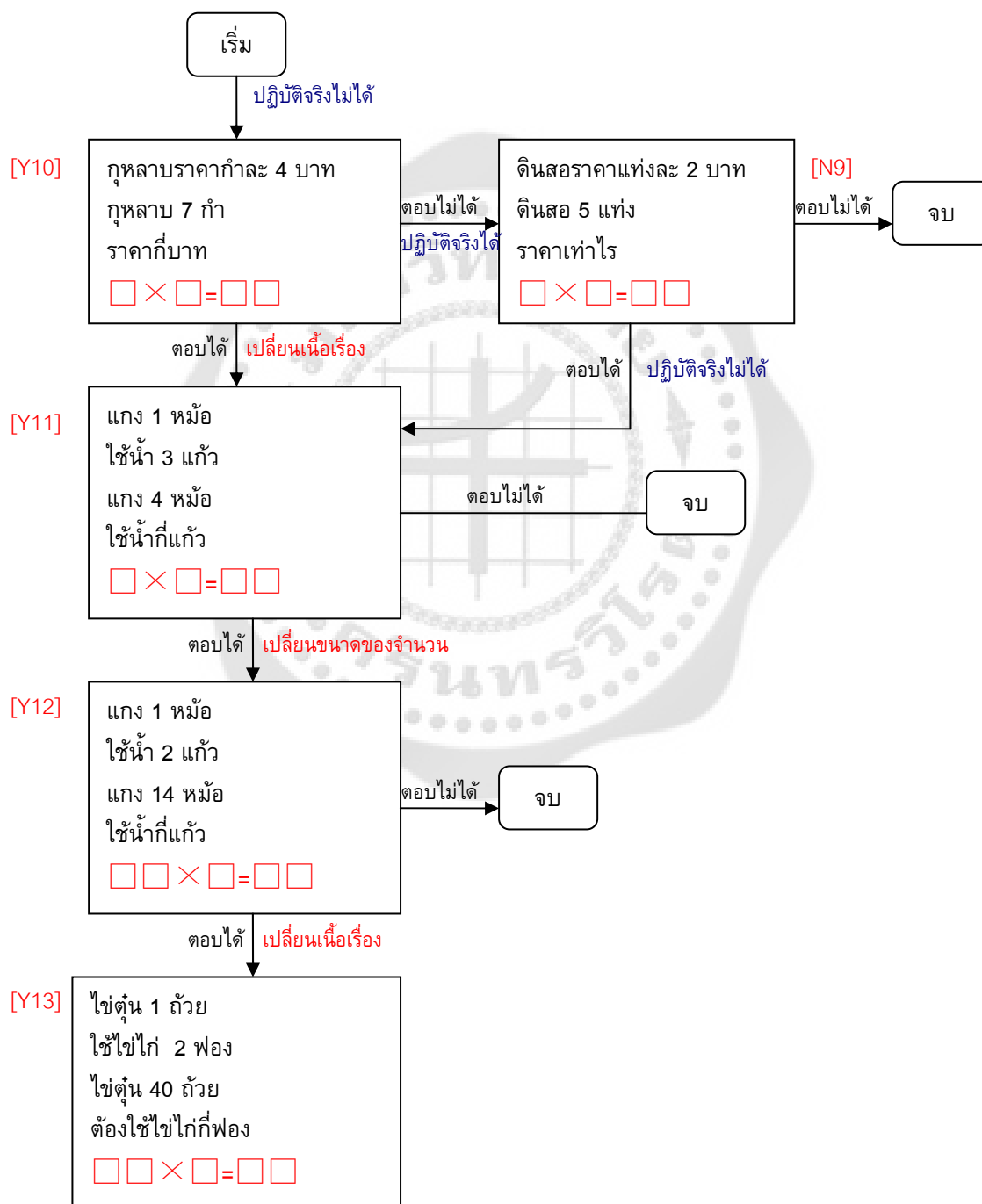
ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

ชุดคำถามที่ 2

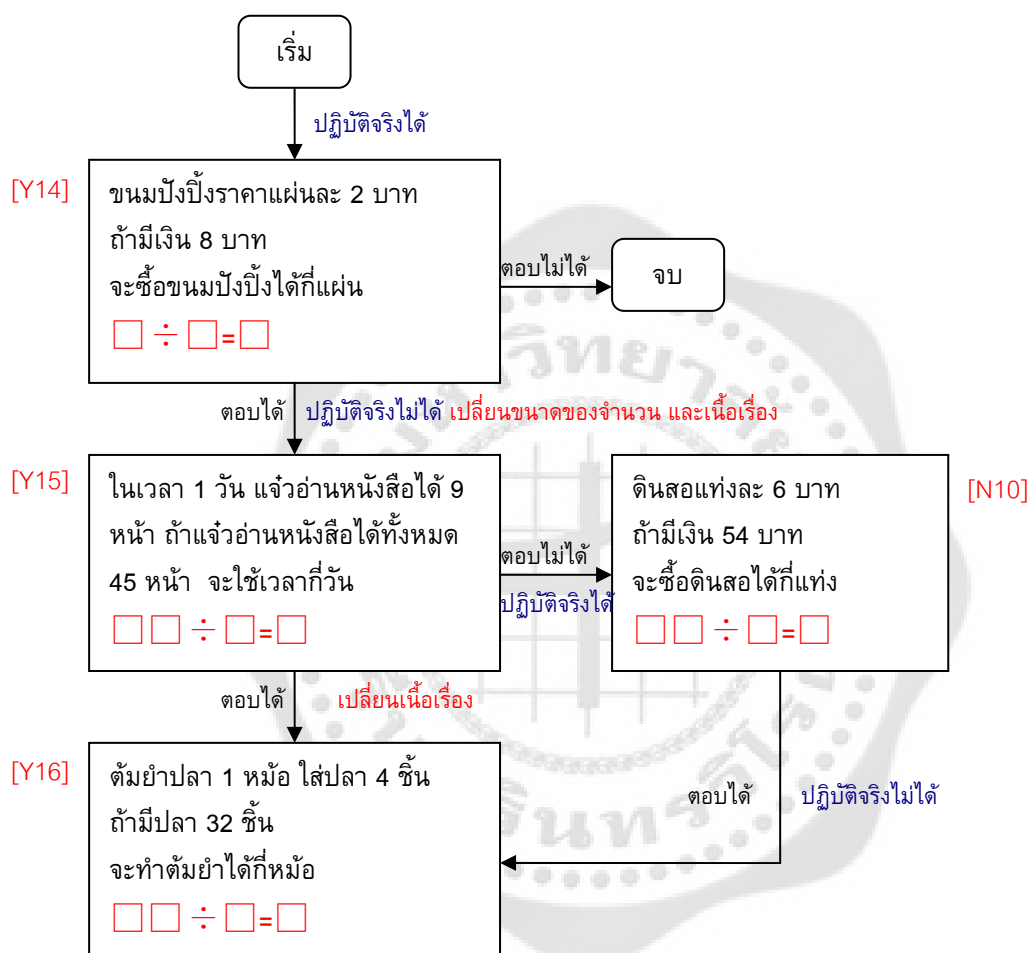
ปัญหาการคูณ: อัตรา/ราคา



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

## ชุดคำถามที่ 2

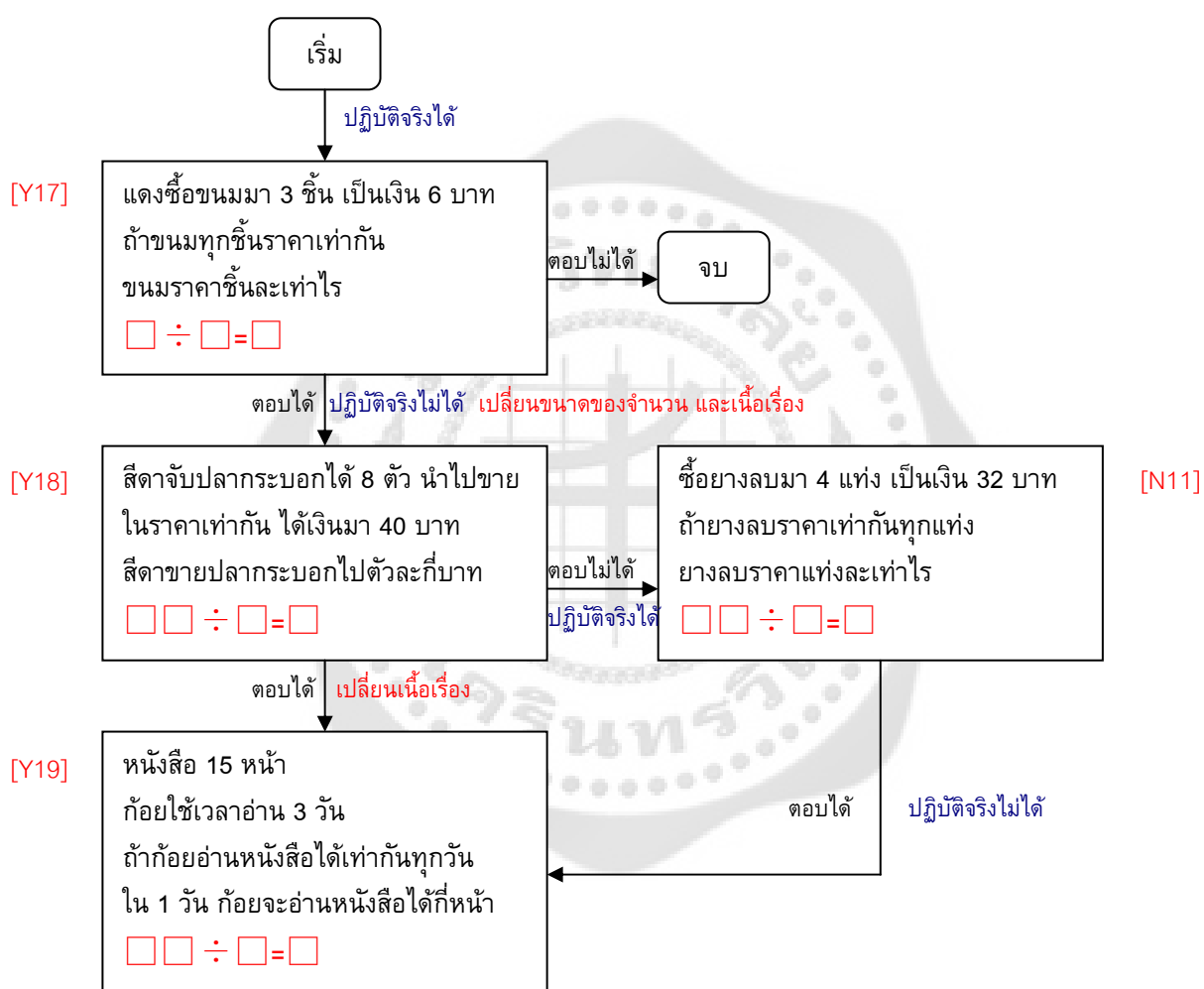
ปัญหาการหารในแบบของการวัด: อัตรา/ราคา



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

## ชุดคำถามที่ 2

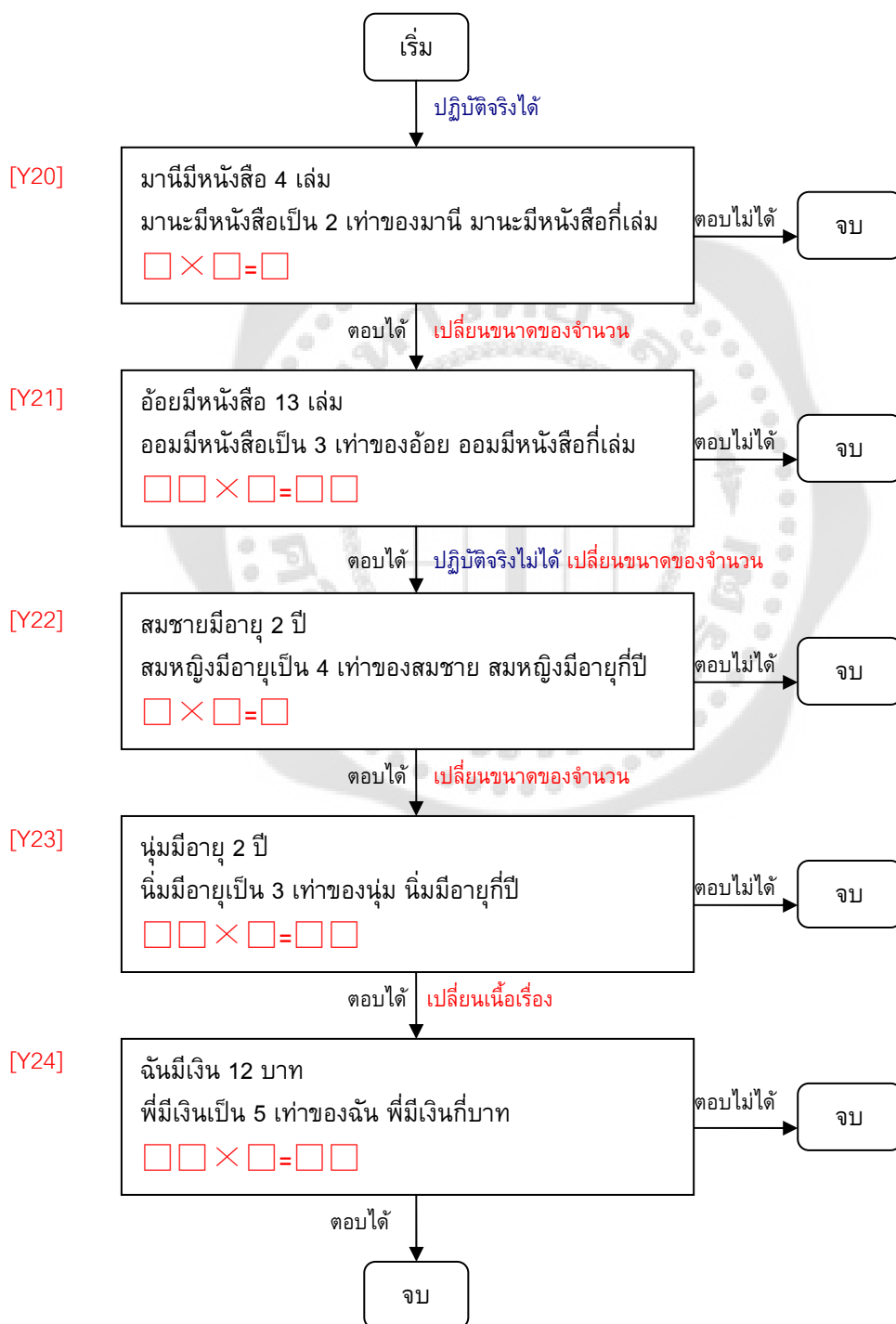
ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: อัตรา/ราคา



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

ชุดคำถามที่ 3

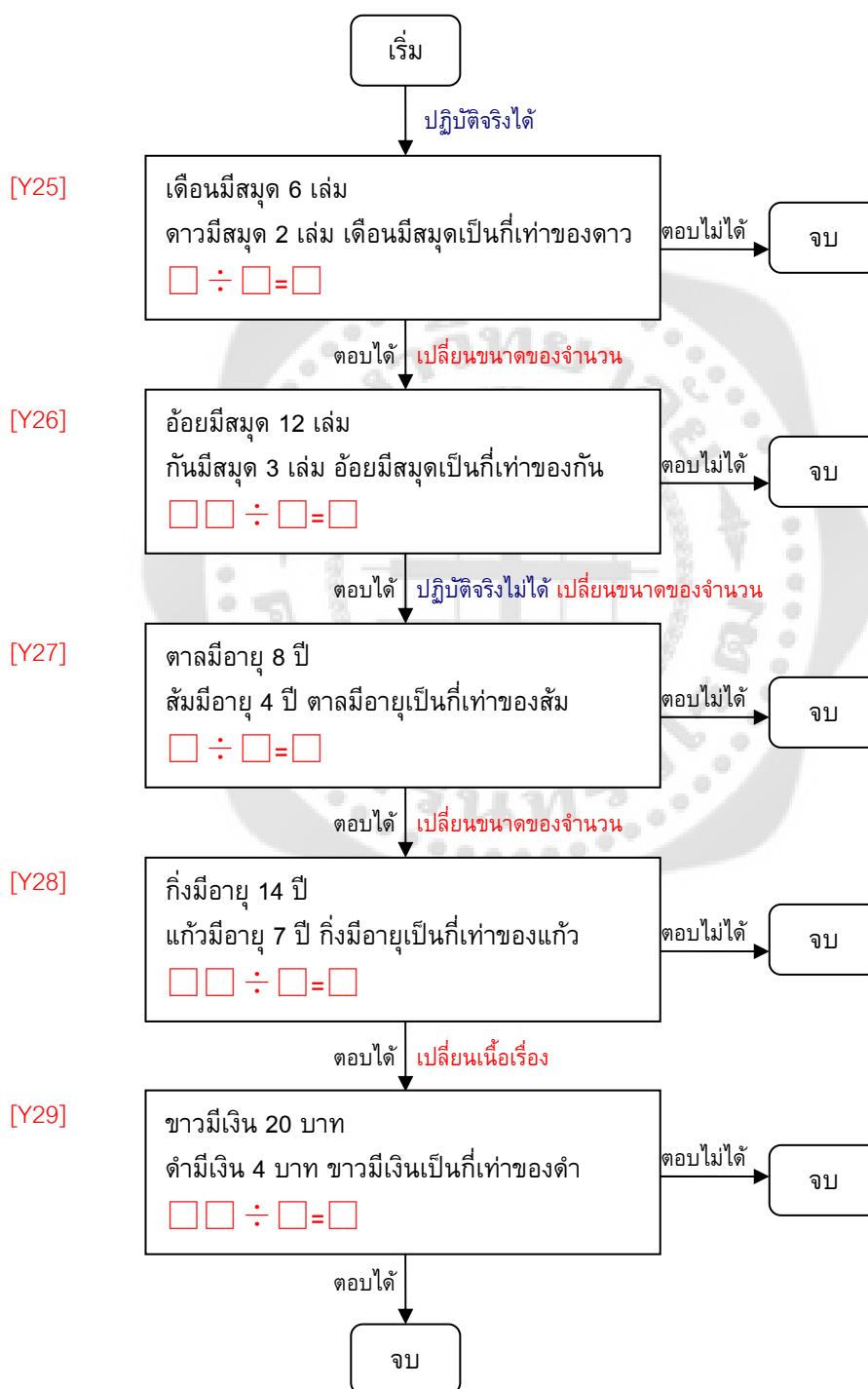
ปัญหาการคูณ: การเปรียบเทียบ



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

### ชุดคำถามที่ 3

ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การเปรียบเทียบ



ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

### ชุดคำถามที่ 3

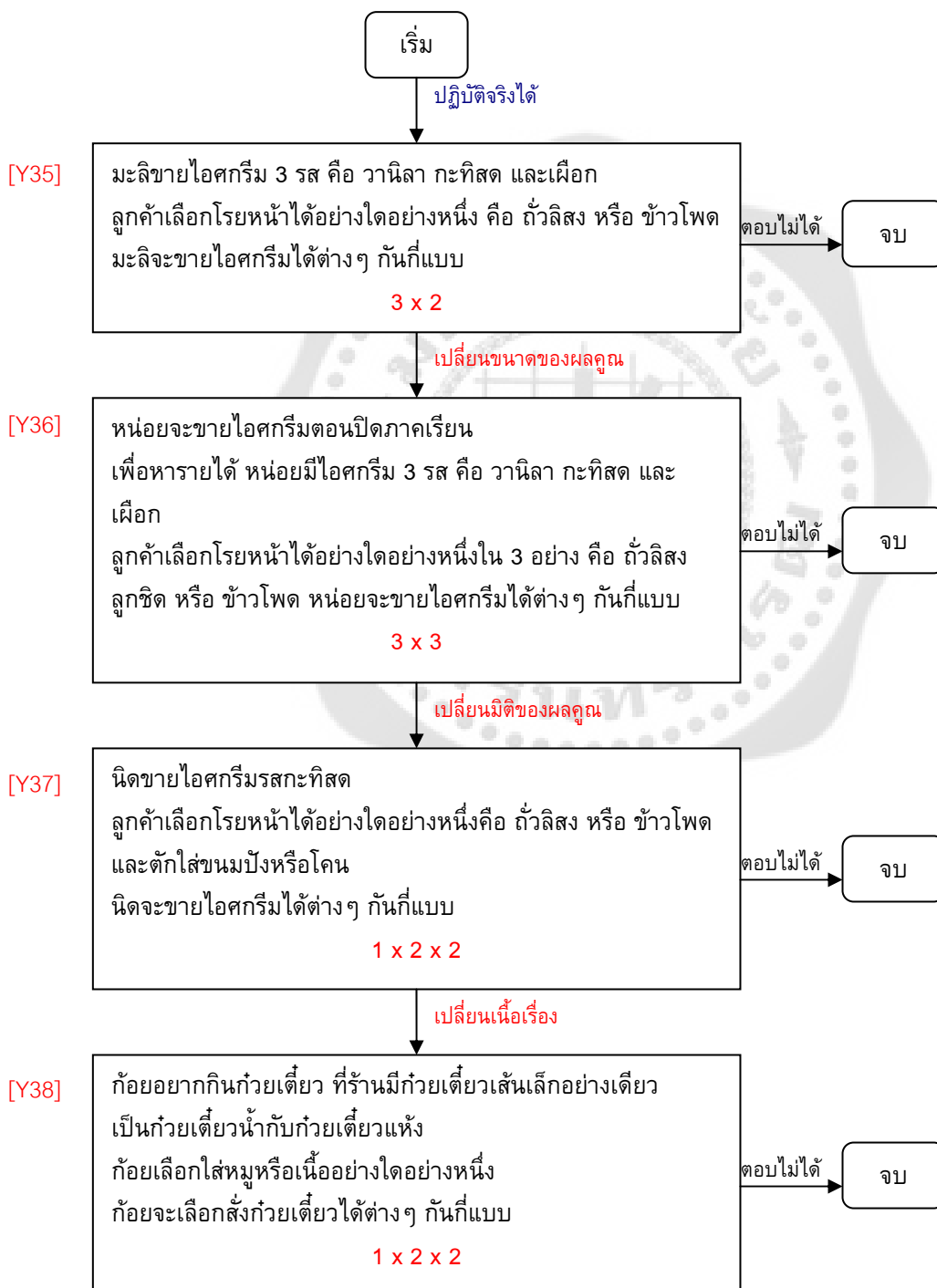
ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: การเปรียบเทียบ



## ช่วงอายุ 7-8 ปี และ 8-9 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่1-2)

### ชุดคำถามที่ 4

#### ปัญหาการคูณ: ผลคูณคาร์ทีเซียน

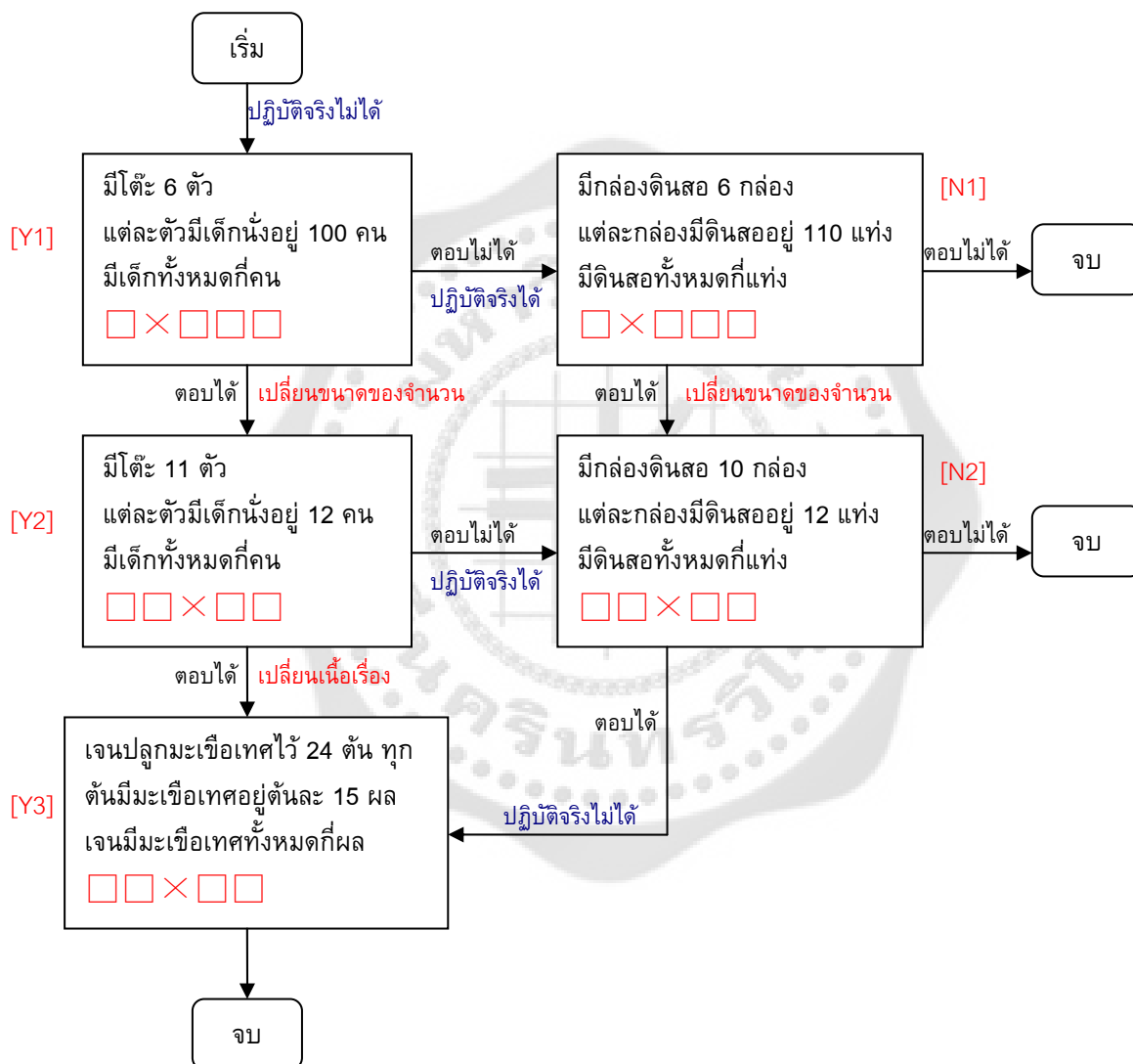


ลำดับของโจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยใช้ประกอบการเก็บข้อมูลเชิงลึก สำหรับเด็กช่วงอายุ  
9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 1

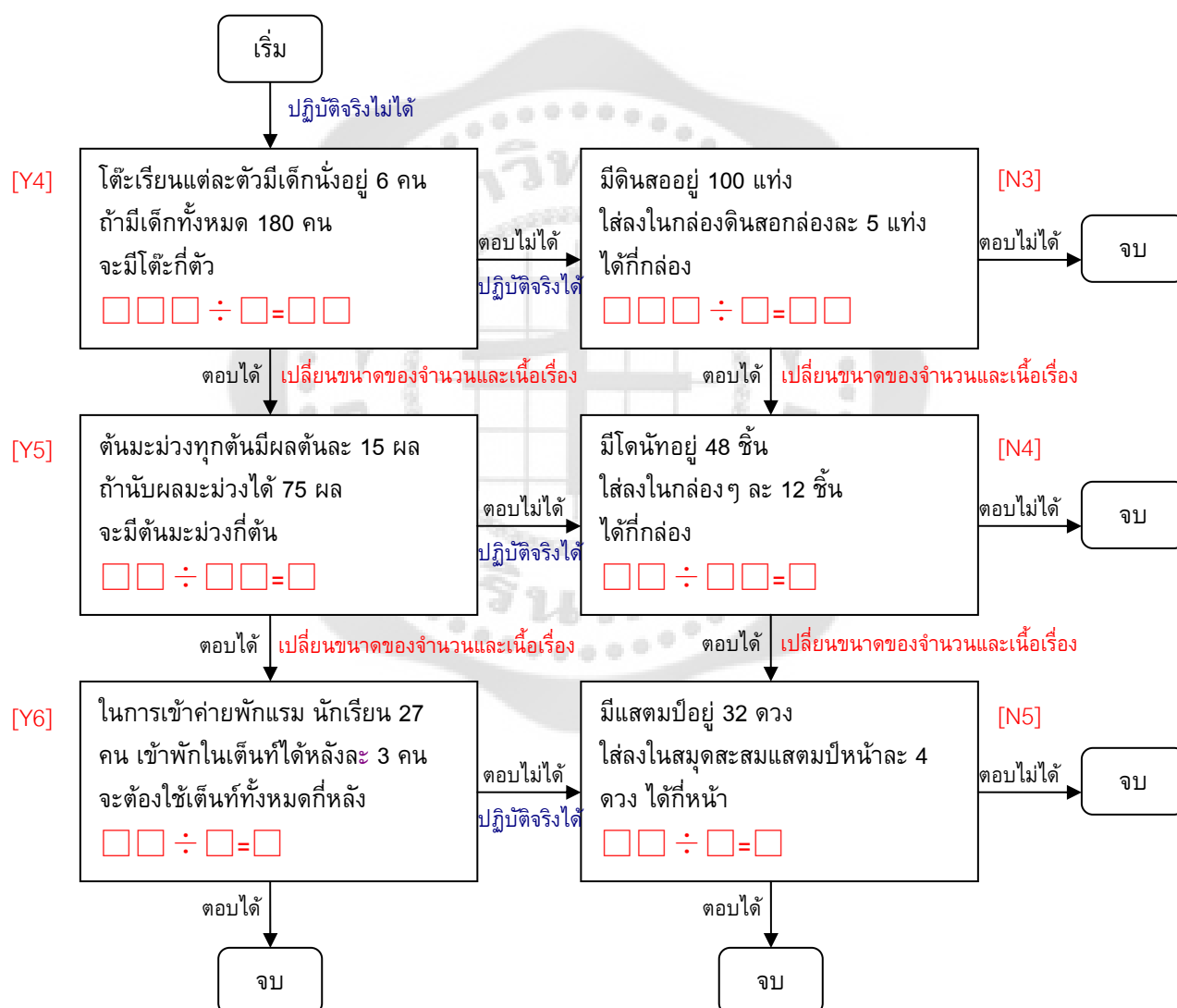
ปัญหาการคูณ: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 1

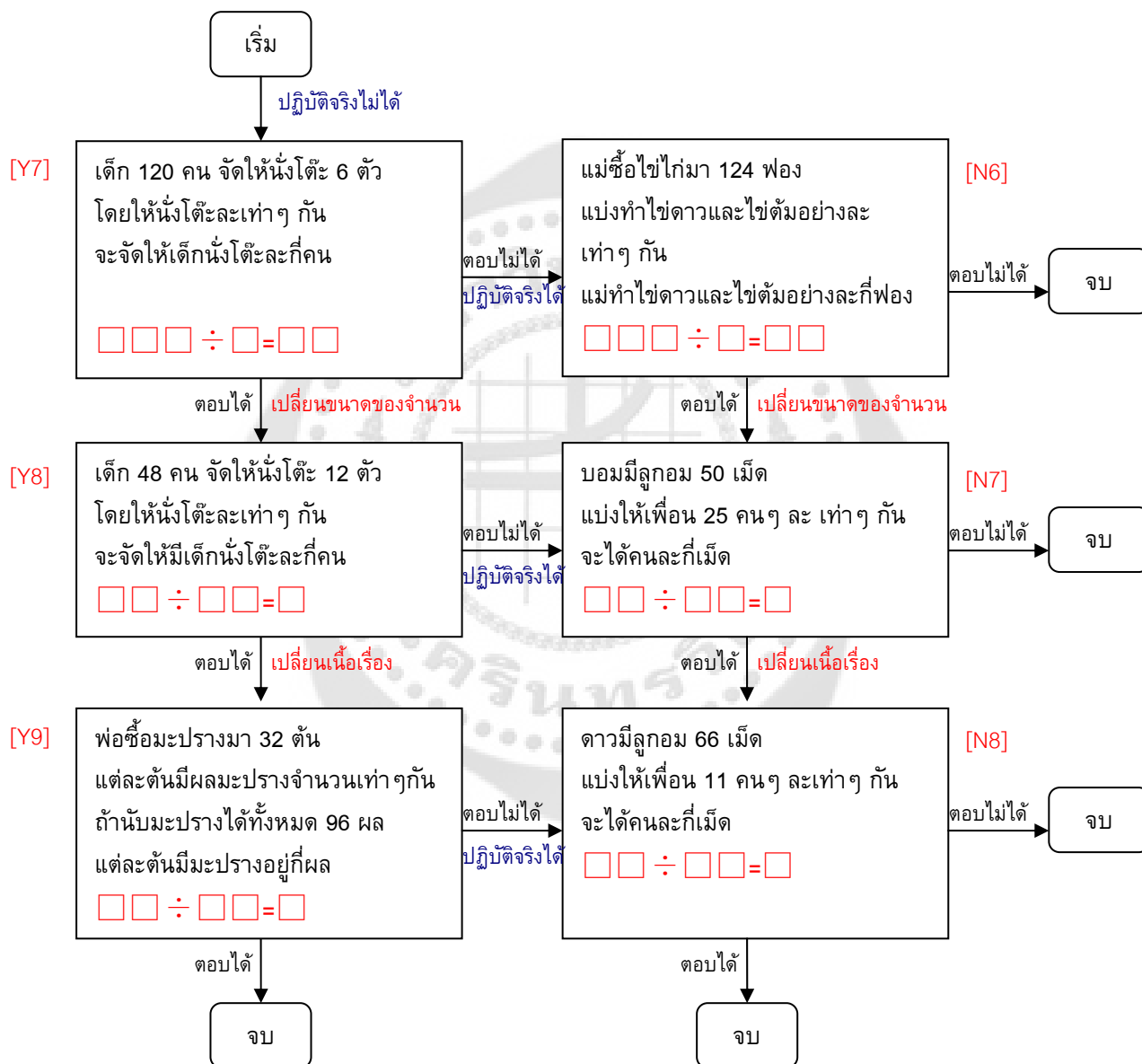
ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 1

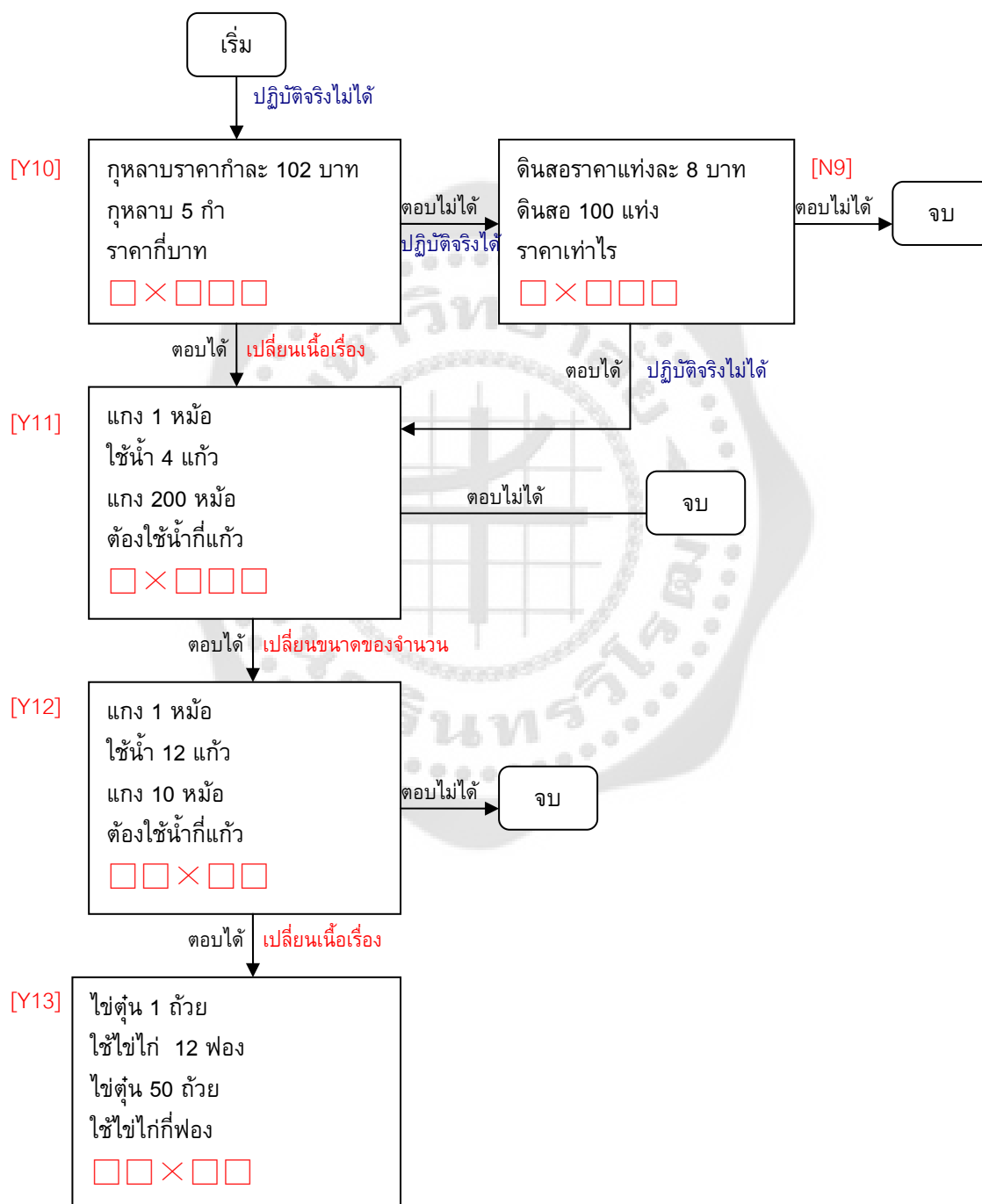
ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 2

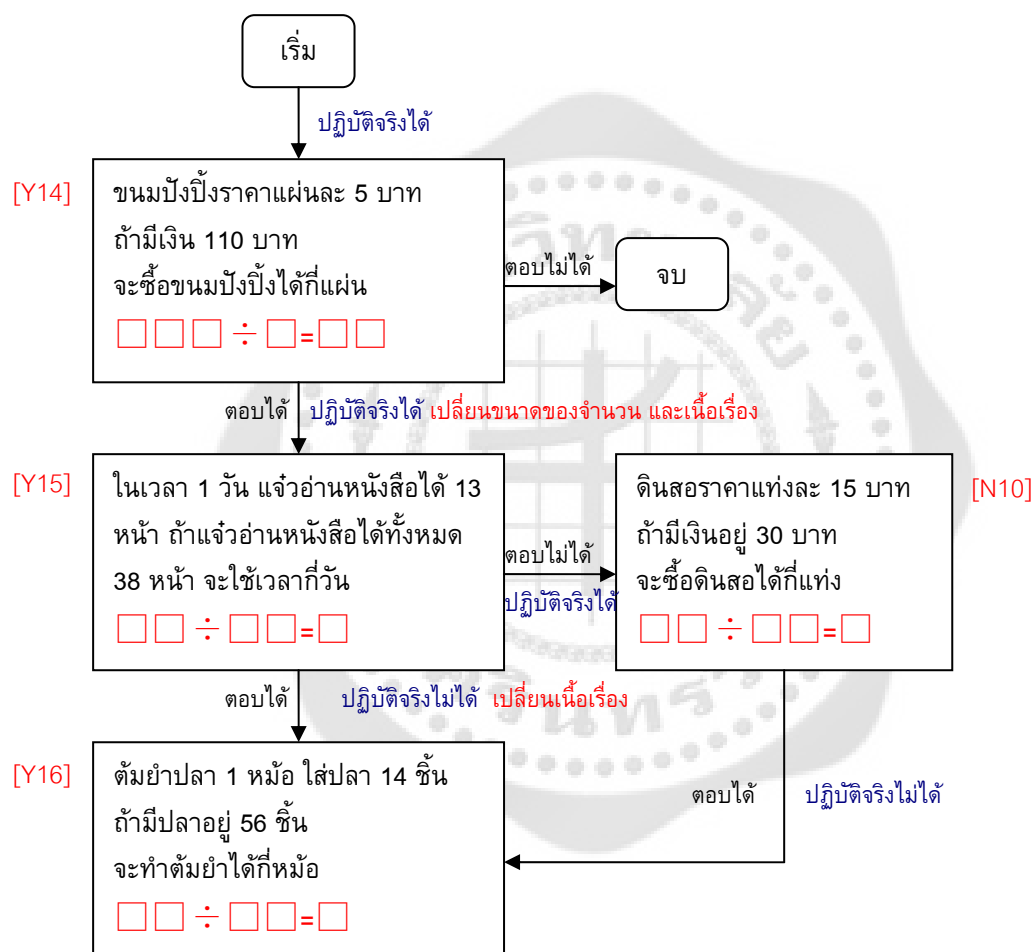
#### ปัญหาการคูณ: อัตรา/ราคา



ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

ชุดคำถามที่ 2

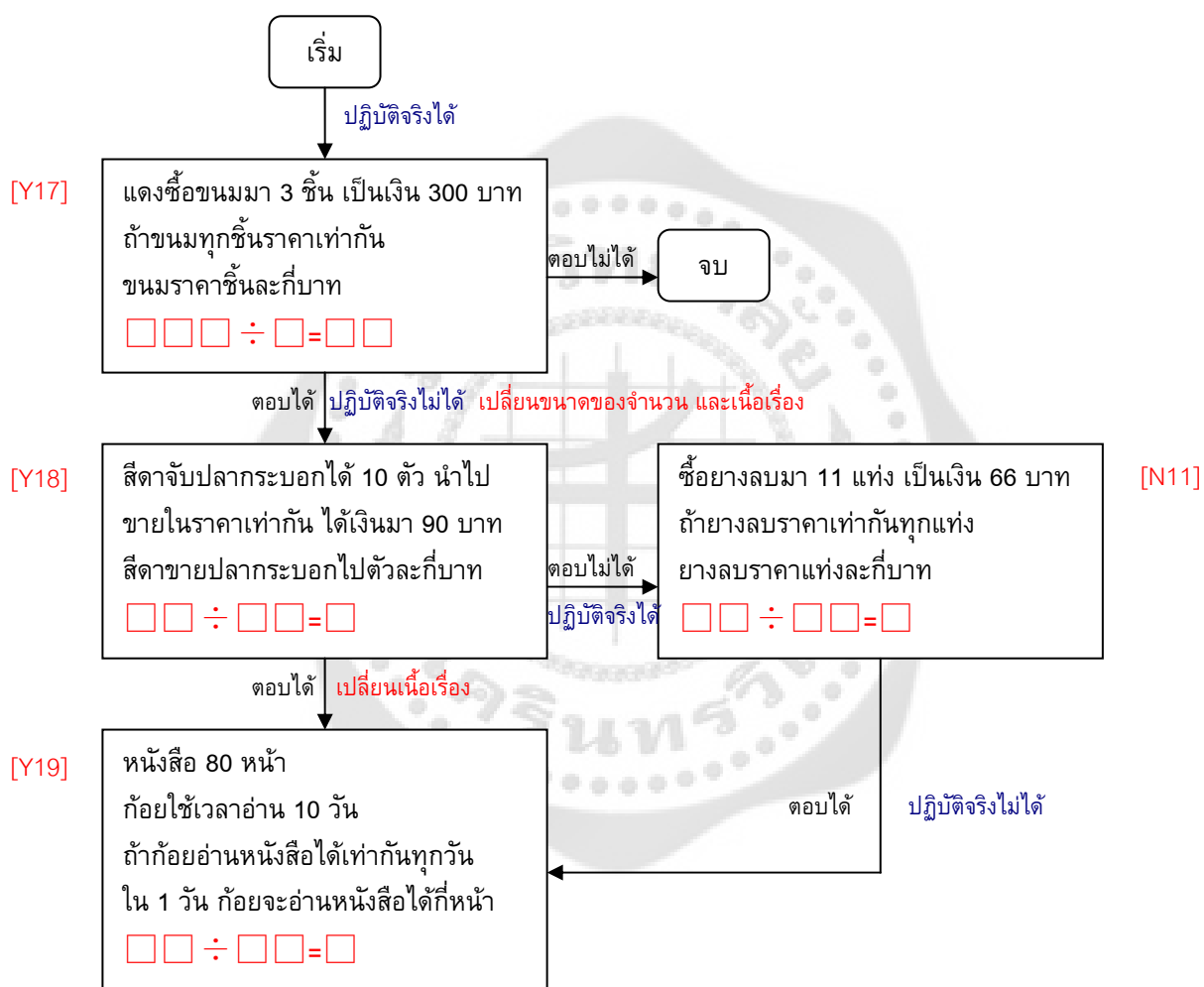
ปัญหาการหารในแบบของการวัด: อัตรา/ราคา



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 2

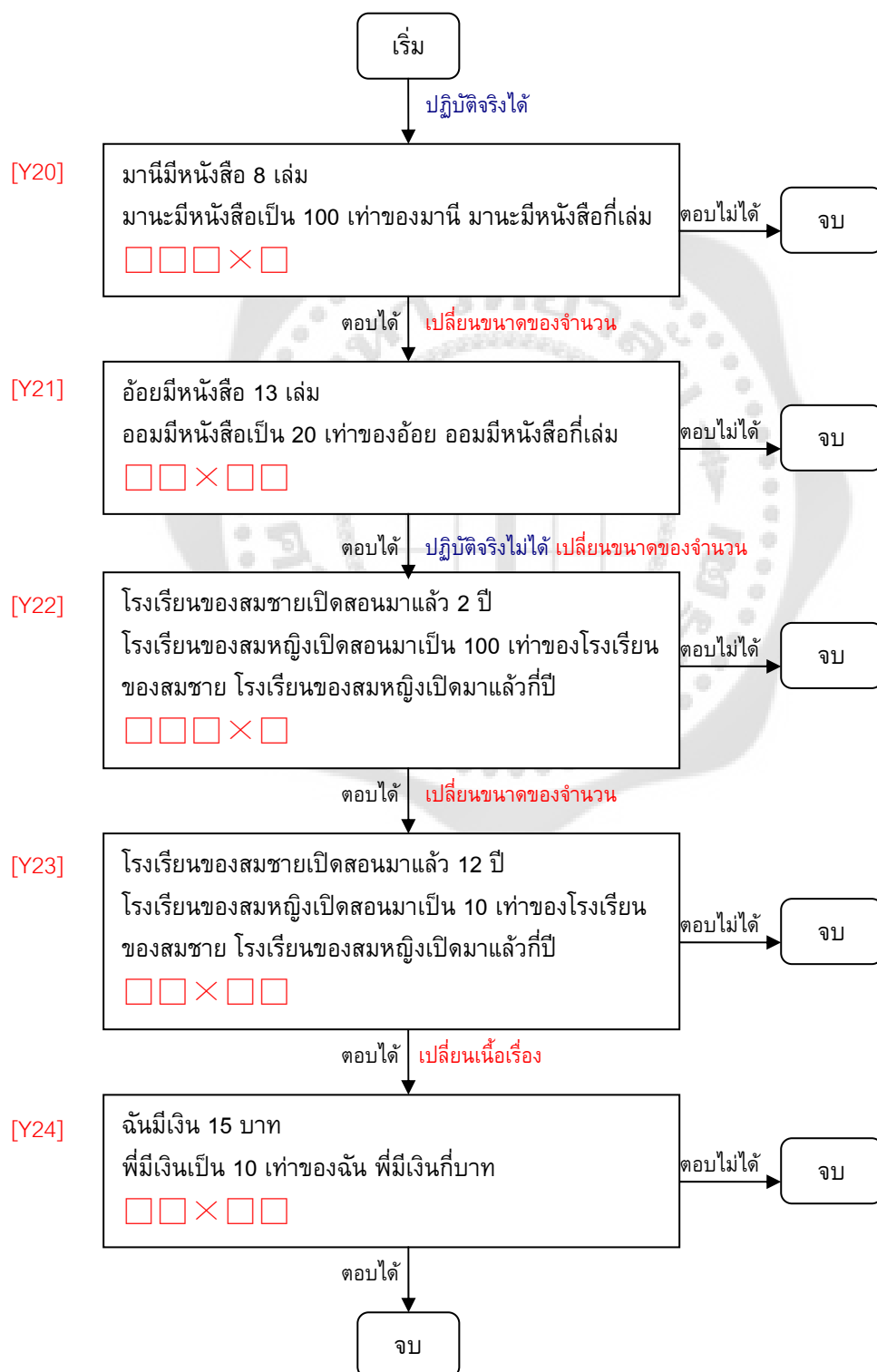
#### ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: อัตรา/ราคา



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 3

#### ปัญหาการคูณ: การเปรียบเทียบ



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 3

#### ปัญหาการหารในแบบของการวัด: การเปรียบเทียบ



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 3

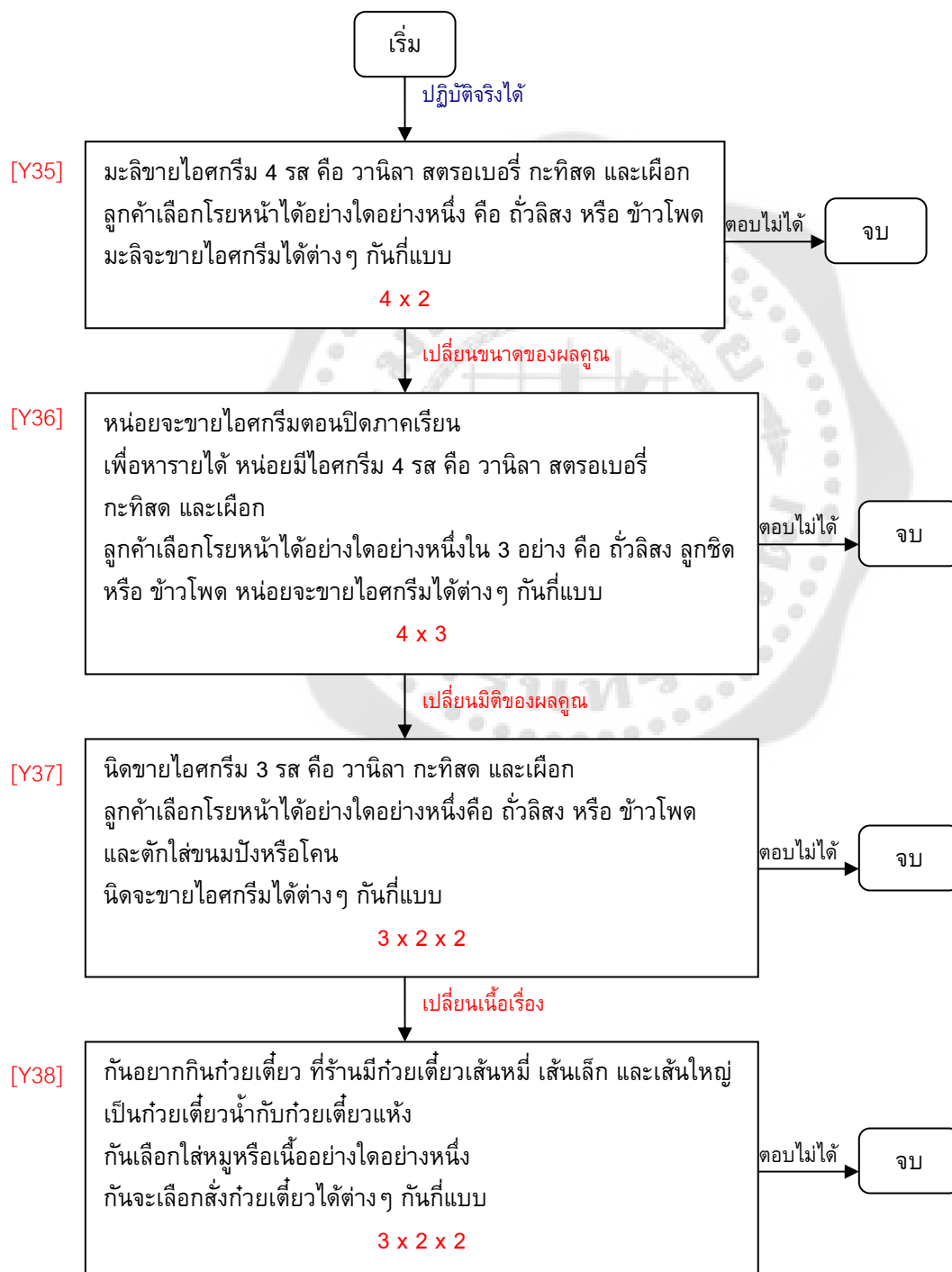
#### ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน: การเปรียบเทียบ



## ช่วงอายุ 9-10 ปี (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3)

### ชุดคำถามที่ 4

#### ปัญหาการคูณ: ผลคูณคาร์ทีเซียน



สรุปผลการตอบโจทย์ปัญหาในแต่ละชุดคำถามของผู้ให้ข้อมูลหลักทั้งสามช่วงอายุ



| ชุดคำถาม                                         | รูปแบบของปัญหา                                                                                                  | บ  | อ  | พ  | จ  | ป  | สุ | ธี | ปิ | ส  | ศ  | ช  | ว  | ธ  | นุ | ม  |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ชุดคำถามที่ 1 : การจัดกลุ่มการแบ่งส่วนที่เท่ากัน | ปัญหาการคูณ<br>(จำนวนปัญหาที่ ป.1 ทำถูก,<br>จำนวนปัญหาที่ ป.2 ทำถูก,<br>จำนวนปัญหาที่ ป.3 ทำถูก) =<br>(7,14,11) | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 | Y1 |
|                                                  |                                                                                                                 | X  | X  | ✓  | X  | ✓  | X  | X  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  |
|                                                  |                                                                                                                 | N1 | N1 | Y2 | N1 | Y2 | N1 | N1 | Y2 | Y2 | Y2 | Y2 | Y2 | Y2 | Y2 | N1 |
|                                                  |                                                                                                                 | ✓  | ✓  | X  | X  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | ✓  | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 | N2 | N2 | N2 |    | Y3 | N2 | N2 | Y3 | Y3 | Y3 | Y3 | Y3 | N2 | Y3 | N2 |
|                                                  |                                                                                                                 | ✓  | X  | X  |    | X  | ✓  | ✓  | X  | ✓  | ✓  | X  | X  | ✓  | X  | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 | Y3 |    |    |    |    | Y3 | Y3 |    |    |    |    |    | Y3 |    | Y3 |
|                                                  |                                                                                                                 | ✓  |    |    |    |    | ✓  | ✓  |    |    |    |    |    | X  |    | ✓  |
|                                                  | ปัญหาการหารในแบบของการ<br>วัด<br>(10,15,12)                                                                     | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 | Y4 |
|                                                  |                                                                                                                 | X  | X  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | ✓  | -  | -  |
|                                                  |                                                                                                                 | N3 | N3 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | Y5 | N3 | Y5 | N3 | N3 |
|                                                  |                                                                                                                 | ✓  | ✓  | -  | ~  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | -  | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 | N4 | N4 | N4 |    | Y6 | Y6 | Y6 | Y6 | Y6 | Y6 | Y6 | N4 | Y6 |    | N4 |
|                                                  |                                                                                                                 | X  | ✓  | ✓  |    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |    | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 |    | N5 | N5 |    |    |    |    |    |    |    |    | N5 |    |    | N5 |
|                                                  |                                                                                                                 |    | X  | ✓  |    |    |    |    |    |    |    |    | ✓  |    |    | ✓  |
|                                                  | ปัญหาการหารในแบบของการ<br>แบ่งส่วน<br>(12,15,11)                                                                | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 | Y7 |
|                                                  |                                                                                                                 | X  | X  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | X  | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 | N6 | N6 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | Y8 | N6 | N6 | Y8 |
|                                                  |                                                                                                                 | X  | ✓  | -  | -  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 |    | N7 | N7 | N7 | Y9 | Y9 | Y9 | N7 | Y9 | Y9 | Y9 | Y9 | N7 |    | Y9 |
|                                                  |                                                                                                                 |    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | X  | ✓  | -  | ✓  | ✓  |    | ✓  |
|                                                  |                                                                                                                 |    | N8 | N8 | N8 |    |    |    | N8 | N8 |    | N8 |    | N8 |    |    |
|                                                  |                                                                                                                 |    | ✓  | ✓  | ✓  |    |    |    | ✓  | ✓  |    | X  |    | ✓  |    |    |

หมายเหตุ    ✓ หมายถึง ตอบคำถามถูกในปัญหานั้น    X หมายถึง ตอบคำถามผิดในปัญหานั้น    - หมายถึง พยายามคิดแต่ตอบปัญหาไม่ได้    ~ หมายถึง ไม่เข้าสู่สถานการณ์ปัญหา

| ชุดคำถาม                   | รูปแบบของปัญหา                               | บ   | อ   | พ   | จ   | ป   | สุ  | ธี  | ปี  | ส   | ศ   | ช   | ว   | ธ   | นุ  | ม   |
|----------------------------|----------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ชุดคำถามที่ 2 : อัตรา/ราคา | ปัญหาการคูณ<br>(9, 19, 4)                    | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 | Y10 |
|                            |                                              | X   | X   | X   | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   |
|                            |                                              | N9  | N9  | N9  | N9  | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | Y11 | N9  | Y11 |
|                            |                                              | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | -   | -   | X   | X   | X   |
|                            |                                              |     | Y11 | Y11 | Y11 | Y12 | Y12 | Y12 | Y12 | Y12 | Y12 |     |     |     |     |     |
|                            |                                              |     | -   | ✓   | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   |     |     |     |     |     |
|                            |                                              |     |     | Y12 |     | Y13 | Y13 | Y13 | Y13 | Y13 | Y13 |     |     |     |     |     |
|                            |                                              |     |     | ✓   |     | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   | ✓   |     |     |     |     |     |
|                            |                                              |     |     | Y13 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|                            |                                              |     |     | X   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|                            | ปัญหาการหารในแบบของการวัด<br>(10, 14, 9)     | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 | Y14 |
|                            |                                              | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   | X   | ✓   |
|                            |                                              | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 | Y15 |     | Y15 |     | Y15 |
|                            |                                              | ~   | X   | ✓   | -   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   |     | ✓   |     | ✓   |
|                            |                                              | N10 | N10 | Y16 | N10 | Y16 | Y16 | Y16 | Y16 | Y16 | Y16 | Y16 |     | Y16 |     | Y16 |
|                            |                                              | X   | X   | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   | ✓   |     | ✓   |     | ✓   |
|                            | ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน<br>(4, 13, 9) |     |     |     | Y16 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|                            |                                              | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 | Y17 |
|                            |                                              | ~   | X   | ~   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   |
|                            |                                              |     |     |     | Y18 | Y18 | Y18 | Y18 | Y18 | Y18 | Y18 | Y8  | Y18 | Y18 |     | Y18 |
|                            |                                              |     |     |     | X   | ✓   | ✓   | ✓   | -   | X   | ✓   | -   | -   | ✓   |     | ✓   |
|                            |                                              |     |     |     | N11 | Y19 | Y19 | Y19 | N11 | N11 | Y19 | N11 | N11 | Y19 |     | Y19 |
|                            |                                              |     |     |     | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   | X   | ✓   | X   |     | ✓   |
|                            |                                              |     |     |     |     |     |     |     | Y19 |     |     | N8  | Y19 |     |     |     |
|                            |                                              |     |     |     |     |     |     |     | ✓   |     |     | X   | ✓   |     |     |     |

| ชุดคำถาม                       | รูปแบบของปัญหา                              | บ        | อ                                            | พ                                            | จ        | ป                                                        | สุ                               | ธี                               | ปิ                               | ส        | ศ                                    | ช        | ว        | ธ                                | นุ       | ม        |
|--------------------------------|---------------------------------------------|----------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------|--------------------------------------|----------|----------|----------------------------------|----------|----------|
| ชุดคำถามที่ 3 : การเปรียบเทียบ | ปัญหาการคูณ<br>(1, 5, 1)                    | Y20<br>~ | Y20<br>X                                     | Y20<br>✓<br>Y21<br>X                         | Y20<br>- | Y20<br>-                                                 | Y20<br>X                         | Y20<br>-                         | Y20<br>X                         | Y20<br>X | Y20<br>Y21<br>Y22<br>Y23<br>Y24<br>✓ | Y20<br>- | Y20<br>✓ | Y20<br>X                         | Y20<br>X | Y20<br>X |
|                                | ปัญหาการหารในแบบของการวัด<br>(9, 11, 1)     | Y25<br>~ | Y25<br>✓<br>Y26<br>✓<br>Y27<br>✓<br>Y28<br>- | Y25<br>✓<br>Y26<br>-<br>Y27<br>-<br>Y28<br>- | Y25<br>X | Y25<br>✓<br>Y26<br>✓<br>Y27<br>✓<br>Y28<br>✓<br>Y29<br>✓ | Y25<br>✓<br>Y26<br>✓<br>Y27<br>X | Y25<br>✓<br>Y26<br>✓<br>Y27<br>X | Y25<br>✓<br>Y26<br>✓<br>Y27<br>X | Y25<br>X | Y25<br>Y26<br>Y27<br>Y28<br>Y29<br>✓ | Y25<br>- | Y25<br>✓ | Y25<br>X                         | Y25<br>~ | Y25<br>X |
|                                | ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน<br>(3, 5, 3) | Y30<br>~ | Y30<br>X                                     | Y30<br>~                                     | Y30<br>X | Y30<br>X                                                 | Y30<br>X                         | Y30<br>X                         | Y30<br>-                         | Y30<br>X | Y30<br>Y31<br>Y32<br>Y33<br>Y34<br>✓ | Y30<br>X | Y30<br>✓ | Y30<br>✓<br>Y31<br>✓<br>Y32<br>- | Y30<br>X | Y30<br>X |

| ชุดคำถาม                         | รูปแบบของปัญหา            | บ   | อ   | ฟ   | จ   | ป   | สุ  | ธี  | ปิ  | ส   | ศ   | ช   | ว   | ธ   | นุ  | ม   |
|----------------------------------|---------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ชุดคำถามที่ 4 : ผลคูณคาร์ทีเซียน | ปัญหาการคูณ<br>(4, 6, 12) | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 | Y35 |
|                                  |                           | ~   | X   | X   | X   | X   | X   | X   | X   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | X   | ✓   |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     | Y36 | Y36 | Y36 | Y36 | Y36 |     | Y36 |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   | ✓   |     | ✓   |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     | Y37 | Y37 | Y37 | Y37 | Y37 |     | Y37 |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     | X   | ✓   | X   | X   | ✓   |     | ✓   |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     |     | Y38 |     |     | Y38 |     | Y38 |
|                                  |                           |     |     |     |     |     |     |     |     |     | ✓   |     |     | ✓   |     | ✓   |

#### หมายเหตุ

- ✓ หมายถึง ตอบคำถามถูกในปัญหานั้น
- X หมายถึง ตอบคำถามผิดในปัญหานั้น
- หมายถึง พยายามคิดแต่ตอบปัญหาไม่ได้
- ~ หมายถึง ไม่เข้าสู่สถานการณ์ปัญหา

|                  |               |              |                 |              |             |
|------------------|---------------|--------------|-----------------|--------------|-------------|
| ช่วงอายุ 7-8 ปี  | บ แทน บานเย็น | อ แทน อัญชัน | ฟ แทน เฟื่องฟ้า | จ แทน จัน    | ป แทน ปีบ   |
| ช่วงอายุ 8-9 ปี  | ก แทน กะหล่ำ  | ร แทน มะระ   | ผ แทน ผักกาด    | ต แทน แดงกวา | ค แทน คะน้า |
| ช่วงอายุ 9-10 ปี | ม แทน มะปราง  | ง แทน องุ่น  | ท แทน ทูเรียน   | ช แทน ชมพู   | พ แทน พุทรา |

## ภาคผนวก ค

การสัมภาษณ์อย่างละเอียดในการศึกษากรณีเฉพาะของปีบและผักกาด



## การสัมภาษณ์อย่างละเอียดในการศึกษากรณีเฉพาะของป๊อบและผักกาด

### ปัญหาการคูณในลักษณะการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

**ป๊อบ** การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ช่วงแรกป๊อบใช้การนึกภาพในใจและใช้วิธีการนับเพื่อหาคำตอบ แต่ป๊อบจะนับผิดและสับสนจึงเปลี่ยนเป็นการใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหานั้นจึงช่วยให้ป๊อบมองเห็นภาพได้ชัดเจนขึ้น เมื่อผู้วิจัยเสนอโจทย์ปัญหาใหม่โดยเปลี่ยนเนื้อเรื่อง (Y3) ป๊อบจะไม่เข้าใจปัญหา จึงนำตัวเลขที่อยู่ในโจทย์ปัญหามาวกกัน และมั่นใจในการตอบปัญหาของตนเองมากเนื่องจากคิดว่าบวกเลขได้ถูกต้อง ป๊อบมีทักษะในการคิดคำนวณที่ดี โดยดูจากการนับของป๊อบซึ่งป๊อบจะใช้วิธีนับข้ามมากกว่าการนับทีละหนึ่ง และจะใช้นิ้วช่วยนับเป็นบางครั้งเท่านั้น เป็นที่สังเกตว่าถึงแม้ป๊อบจะอ่านโจทย์ปัญหาเองไม่ได้ก็ตามแต่ป๊อบจะมีความเข้าใจภาษาที่ดี และสามารถจดจำโจทย์ปัญหาได้แม้ว่าผู้วิจัยอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังเพียงครั้งเดียวก็ตาม ป๊อบไม่เคยขอให้ผู้อื่นอ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังใหม่เลย นอกจากผู้วิจัยเห็นว่าป๊อบไม่เข้าใจโจทย์ปัญหาหรือจำโจทย์ปัญหาไม่ได้ผู้วิจัยจึงอ่านให้ป๊อบฟังอีกรอบหนึ่ง ในชุดคำถามนี้ยังไม่สามารถสรุปได้ว่าป๊อบมีการสร้างกรณีทั่วไปเพราะป๊อบไม่สามารถมองเห็นแบบรูปของปัญหา เมื่อเผชิญสถานการณ์ปัญหา ป๊อบจะเริ่มคิดใหม่ทุกครั้ง และป๊อบสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้เท่านั้น ยังไม่สามารถนำเสนอตัวแทนความคิดผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อหรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ได้

**ผักกาด** การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ ผักกาดสามารถตอบคำถามถูกในสองปัญหาแรก ส่วนปัญหาที่สามเป็นการเปลี่ยนเนื้อเรื่องซึ่งผักกาดบอกได้ว่าวิธีการคิดเหมือนปัญหาก่อน แต่เนื่องจากจำนวนมีขนาดใหญ่ขึ้นผักกาดจึงนับผิด การคิดของผักกาดจะใช้การนับ โดยผักกาดบอกว่าจะนับอย่างไรดูจากตัวเลขตามโจทย์ และผักกาดสามารถบอกได้ว่าใช้การคูณแทนการบวกได้ การตอบคำถามทุกครั้งผักกาดจะมั่นใจในการคิดของตนเอง ระหว่างการคิดจะไม่คิดว่าตัวเองคิดผิด เพราะจะคิดจนเสร็จอย่างรอบคอบจึงมั่นใจว่าคิดถูก ไม่ต้องทวน ในการตอบชุดคำถามผักกาดจะเข้าใจคำถามและสามารถวิเคราะห์ปัญหา มีความรู้ทางภาษาที่ดี เช่นสามารถบอกได้ว่า “แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน” หมายถึง “โต๊ะตัวหนึ่ง คน 4 คน นั่งอยู่” สามารถสรุปการคิดได้ว่าใช้การคูณ ถ้าคูณเป็นก็คูณ ถ้าคูณไม่เป็นก็ใช้การบวก นอกจากนี้ผักกาดยังสามารถยกตัวอย่างปัญหาที่คล้ายกับที่ทำมา เช่น “200 x 12” หรือ “ปลูกมะม่วงไว้ 4 ต้น เผอิญทุกต้นมี 18 ผล จะมีมะม่วงทั้งหมดกี่ผล” เมื่อถามว่าตอบเท่าไร ผักกาดบอก “18 x 4” ผักกาดสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดได้อย่างชัดเจนทั้งที่ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้ ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อหรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ ผักกาดเริ่มมีการสร้างกรณีทั่วไป และสามารถให้เหตุผลเชิงอุปนัยได้จากการตอบคำถามหลายๆ คำถาม นอกจากนี้ผักกาดยังสามารถแสดงความคิด ความรู้สึกจากจินตนาการภายในตนเอง ซึ่งถือเป็นการให้เหตุผลเชิงสหฐานนั่นเอง

คำถาม : [Y1] มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

การคิดของป๊อป : ปัญหานี้ป๊อปใช้เวลาทำ 9 นาที ในช่วงแรกป๊อปไม่ค่อยเข้าใจโจทย์ปัญหา เนื่องจากป๊อปอ่านคำถามเองไม่ได้และผู้วิจัยไม่ทราบ แต่พอถามว่าป๊อปเข้าใจโจทย์ไหม จึงทราบว่าป๊อปพยายามอ่านโจทย์อยู่นานมาก ผู้วิจัยจึงอ่านโจทย์ปัญหาให้ป๊อปฟัง หลังจากฟังโจทย์จบป๊อปจึงตอบว่า “32 คน” ป๊อปมีความเข้าใจปัญหา สามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยในการหาคำตอบป๊อปจะใช้การบวก “4 บวก 4 เป็น 8 แล้ว 4 บวก 4 เป็น 8 รวมอีก 8 เป็น 16 แล้วอีก 8 เป็น 24 เป็นโต๊ะ 6 ตัวแล้ว ตอบ 24” (ป๊อปจะใช้การยุบรวมและบวก) ผู้วิจัยจึงถามว่า “แล้วทำไมตอนแรกป๊อปได้ 32” (ผู้วิจัยคิดว่าป๊อปน่าจะนำ  $16 + 16$ ) ป๊อปยิ้มและมั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องควรเป็น 24 เพราะนับได้ 24

การคิดของผักกาด : ผักกาดจะใช้เวลาประมาณ 5 นาที โดยใช้การคิดในใจและบอกว่า “นำ 4 บวก 4 ได้ 8 8 บวก 4 ได้ 12 12 บวก 4 ได้ 16 16 บวก 4 ได้ 20 20 บวก 4 ได้ 24” (การบวกของผักกาดจะใช้การนับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือคือ หนึ่ง สอง สาม สี่-หนึ่ง ห้า หก เจ็ด แปด-สอง... ยี่สิบเอ็ด ยี่สิบสอง ยี่สิบสาม ยี่สิบสี่-หก) จะไม่ใช่ตัวแบบช่วยในการคิด บอกถ้าใช้จริงจะไม่สามารถใช้วิธีอื่นได้ ผักกาดรู้ว่าสามารถใช้  $4 \times 6$  ได้เพราะ  $4 \times 6$  เท่ากับ 4 บวกกันหกจำนวน แต่คุณไม่เป็น

คำถาม : [Y2] มีโต๊ะ 11 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 3 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

การคิดของป๊อป : ป๊อปใช้เวลาประมาณ 8 นาที สำหรับปัญหานี้ โดยป๊อปบอกว่าโจทย์และวิธีคิดในปัญหานี้ไม่เหมือนกับปัญหาที่แล้วแต่ป๊อปเข้าใจปัญหาอย่างดีสามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้และต้องการให้หาอะไร ซึ่งตอนแรกป๊อปตอบเท่ากับ 23 เมื่อถามให้ป๊อปอธิบายวิธีคิดของตนเองป๊อปจึงอธิบายว่า “4 แล้วเหลือ 3 นับลงไป 1” (หมายถึงตอนแรกได้ 24 แล้วนับลงไป 1 จึงเหลือ 23) ผู้วิจัยจึงบอกว่า “ไม่เข้าใจว่าป๊อปได้ 23 มาได้อย่างไรลองเล่าให้ครูฟังสิคะ” ป๊อปจึงใช้ตัวแบบ (เมื่อดูลูกคิดกับถาดพลาสติก) แสดงการคิดให้ดูโดยใช้ถาดแทนโต๊ะและเมื่อดูลูกคิดแทนเด็ก แต่การใช้ตัวแบบของป๊อปในครั้งแรกนี้ป๊อปจะใช้เพียงการนำเมื่อดูลูกคิดสามเม็ดใส่ลงในถาดหนึ่งใบ (ใช้เพื่อแสดงให้เห็นภาพของการจัดเด็กสามคนนั่งโต๊ะหนึ่งตัว) หลังจากนั้นป๊อปจึงใช้การบวก “3 บวก 3 เป็น 6 แล้ว 3 บวก 6 เป็น 9 แล้ว 9 บวก 3 เป็น 12 บวกไปเรื่อยๆ 11 ตัว ได้ 23” ป๊อปจะมั่นใจว่าคำตอบของตนเองถูกต้อง ผู้วิจัยจึงให้ป๊อปหาผลบวกให้ดูอีกครั้ง ป๊อปจึงเริ่มนับ “สาม หก เก้า สิบสอง... ยี่สิบเจ็ด” ป๊อปทำหน้าหงาย หลังจากนั้นก็เปลี่ยนไปใช้ตัวแบบช่วยในการคิด คราวนี้ป๊อปจัดจนครบสิบเอ็ดถาดโดยนำเมื่อดูลูกคิดสามเม็ดใส่ลงในถาดแต่ละใบ และตอบ 33 (ป๊อปแสดงสีหน้าเชื่อมั่นในคำตอบครั้งนี้ของตนอย่างยิ่ง) พอให้ป๊อปนับให้ดูป๊อปจะใช้การนับข้ามครั้งละสาม “สาม หก เก้า... สามสิบสาม” (การนับข้ามแต่ละครั้ง ป๊อปจะนับตามถาดแต่ละใบ จับถาดใบที่หนึ่งนับสาม ถาดที่สองนับหก... ถาดที่สิบเอ็ดนับสามสิบสาม)



(การดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ตัวแบบของปิ๊บ)

หลังจากปิ๊บได้คำตอบมาเรียบร้อยแล้วผู้วิจัยจึงย้อนถามปิ๊บถึงการคิดที่ปิ๊บได้คำตอบ 23 ปิ๊บจึงบอกว่า “4 ลบ 1 เหลือ 3 เลขสี่จะคิดขึ้นมาเฉยๆ” พอผู้วิจัยให้ปิ๊บลองแสดงการคิดให้ดู ปิ๊บจึงเริ่มนับโดยใช้นิ้วช่วยนับ (ใช้สองมือโดยนับนิ้วต่อไปเรื่อยๆ) “สามหนึ่งโต๊ะ หกสองโต๊ะ เก้าสามโต๊ะ... สิบแปดหกโต๊ะ ยี่สิบเอ็ดเก้าโต๊ะ ยี่สิบสี่” แล้วลืมนับได้เท่าไรแล้ว



(การดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้การนับโดยใช้นิ้วช่วยนับของปิ๊บ)

การคิดของผักกาด : ผักกาดจะบอกว่าโจทย์ปัญหานี้ง่ายและใช้เวลาคิดเพียง 3 นาที ใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่ง โดยใช้มือช่วยนับ ซึ่งผักกาดจะใช้มือข้างหนึ่งนับจำนวนเด็กและมืออีกข้างหนึ่งนับจำนวนโต๊ะ เช่น หนึ่ง สอง สาม-หนึ่ง สี่ ห้า หก-สอง เจ็ด แปด เก้า-สาม... สามสิบเอ็ด สามสิบสอง สามสิบสาม-สิบเอ็ด ใช้วิธีอื่นก็ได้คือ  $11 \times 3$  และรู้ว่า  $3 \times 11$  ก็มีค่าเท่ากัน แต่คุณไม่เป็นเพราะยังไม่ได้เรียน

คำถาม : [Y3] เงินปลูกมะเขือเทศไว้ 4 ต้น ถ้าทุกต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล  
เงินมีมะเขือเทศทั้งหมดกี่ผล

**การคิดของปีบ :** ปัญหานี้ปีบใช้เวลาเพียง 4 นาที โดยปีบบอกว่าปัญหานี้ไม่เหมือนปัญหาก่อนและวิธีการคิดก็ไม่เหมือนกันเพราะตัวเลขไม่เหมือนกัน ปีบมั่นใจว่าตนเองเข้าใจปัญหาดีและคำตอบของตนถูกต้องแน่นอนเพราะบวกเลขได้ถูกต้อง (แต่ที่จริงแล้วในปัญหานี้ปีบไม่เข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่แท้จริง เพราะเมื่อผู้วิจัยถามว่าเข้าใจโจทย์ไหมที่บอกว่า “มีมะเขือเทศอยู่ 4 ต้น แต่ละต้นมีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 15 ผล” ปีบพยักหน้า เมื่อผู้วิจัยถามว่าต้นที่หนึ่งมีกี่ผล ปีบจึงตอบว่าหนึ่งผล) ปีบใช้ตัวแบบดำเนินการแก้ปัญหาโดยนับตะเกียบมา 15 อัน แทนผลมะเขือเทศ แล้วปีบจึงใช้การบวกคือ  $4 + 15$  จึงตอบ 19 แสดงว่าปีบคิดว่ามีมะเขือเทศอยู่ต้นละ 1 ผล มะเขือเทศ 15 ต้น จึงมี 15 ผล และนำจำนวน 4 ต้น ในโจทย์ปัญหามาบวกอีก

**การคิดของผักกาด :** ปัญหานี้ผักกาดจะใช้เวลาคิดเพียง 1 นาทีเท่านั้น โดยสามารถบอกว่ปัญหานี้มีวิธีการคิดเหมือนปัญหาก่อนแต่ต่างกันว่า “ต้น” ปัญหาก่อนเป็นเรื่องของ “โต๊ะ” การคิดตอนแรกผักกาดจะตอบ 45 ผล เมื่อสัมภาษณ์และให้ผักกาดแสดงการคิดให้ดู ระหว่างที่นับถึง 45 ผักกาดจะอมยิ้มและรู้ว่าคำตอบของตัวเองผิด จึงมั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องเป็น 55 ผล โดยผักกาดเริ่มต้นนับใหม่จาก หนึ่งจนถึง ห้าสิบห้า เมื่อถามว่าคำตอบต้องลงท้ายด้วยเลขใด ผักกาดบอกว่า 5 เพราะ  $45 + 15$  ได้ 55 การคิดของผักกาดทราบว่าการบวกคือ  $15 + 15 + 15 + 15$  ได้ 45 แต่เวลาหาคำตอบจะใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่ง (เหมือนปัญหาที่แล้ว) คือ หนึ่ง สอง สาม... สิบห้า-หนึ่งสิบหก สิบเจ็ด สิบแปด... สามสิบ-สอง สามสิบเอ็ด สามสิบสอง สามสิบสาม... สี่สิบห้า-สาม สี่สิบหก สี่สิบเจ็ด สี่สิบแปด... ห้าสิบห้า-สี่ เมื่อถามว่านับครบสิบห้าหรือยัง ผักกาดจะมั่นใจมากกว่าตนนับครบและมั่นใจในคำตอบว่าตนนับได้ถูกต้อง (ในการนับของผักกาดเนื่องจากผักกาดจะใช้มือข้างหนึ่งแทนจำนวนมะเขือเทศและมืออีกข้างหนึ่งแทนจำนวนต้นมะเขือเทศ เมื่อนับมาถึงสี่สิบห้าและต้องนับต่ออีกสิบห้าผักกาดจึงสับสนว่าตนเองนับครบแล้ว) ผักกาดรู้ว่าคำตอบสามารถเขียนในรูปการคูณได้ ถ้าคูณเป็นก็นำ  $15 \times 4$  (ตอนแรกผักกาดพูดว่า  $4 \times 15$  แล้วร้องเอ๊ย  $15 \times 4$ ) พอถามว่าใช้  $4 \times 15$  ได้ไหม ผักกาดบอกไม่ได้ นอกจากนี้ผักกาดยังรู้ว่าปัญหาลักษณะนี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับการคูณ และเข้าใจใหม่โน้ตส่นของการคูณว่ามาจากการบวกซ้ำจำนวนที่เท่าๆ กัน

### ปัญหาการหารในแบบของการวัดในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

**ปีบ** การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ปีบเริ่มแสดงวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เด่นชัดขึ้น และมีความเข้าใจสถานการณ์ปัญหามากขึ้นโดยปีบจะทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาก่อนเริ่มคิดทุกครั้ง ปีบจึงมั่นใจในคำตอบของตนเองทุกปัญหาส่งผลให้ปีบตอบคำถามได้ถูกต้องทุกปัญหา เมื่อผู้วิจัยเพิ่มขนาดของจำนวนขึ้นในแต่ละสถานการณ์ปัญหาปีบสามารถตอบคำถามได้ทันทีโดยคิดในใจ เช่นจากปัญหา Y1 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าเพิ่มจำนวนเด็กเป็น 20 คน ให้นั่งโต๊ะละ 2 คน เหมือนเดิม จะใช้โต๊ะกี่ตัว” ปีบสามารถตอบได้ทันทีว่า 10 คน เมื่อเพิ่มเด็กเป็น 100 คน ปีบจะยังไม่รู้จัก

ผู้วิจัยจึงลดขนาดของจำนวนลงเหลือ 60 คน ป๊อบสามารถเดาคำตอบได้ว่า “โตะน่าจะมากกว่า 10 ตัว เพราะเลข (เด็ก) เยอะกว่า น่าจะเป็น 20 ตัว” พอถามว่า “40 คนละ” ป๊อบบอก “15 ตัว เพราะน้อยกว่า 60 คน” แสดงว่าป๊อบเริ่มมีการสร้างกรณีทั่วไป ส่วนการสร้างข้อความคาดการณ์ของป๊อบยังไม่ชัดเจนนักเพราะป๊อบเพียงแค่เดาคำตอบเมื่อขนาดของจำนวนเพิ่มขึ้นเท่านั้น ยังไม่มีการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องและผู้วิจัยไม่ได้ตั้งคำถามป๊อบเพื่อให้ป๊อบแสดงวิธีหาคำตอบที่ถูกต้อง แต่อย่างไรก็ตามการที่เด็กในวัยนี้จะสร้างข้อความคาดการณ์ได้เองนั้นเป็นเรื่องที่ค่อนข้างยากนอกจากครูผู้สอนจะตั้งคำถามเพื่อให้เด็กสามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ด้วยตนเอง แต่ป๊อบสามารถให้เหตุผลเชิงอุปนัยได้จากการตอบคำถามหลายๆ คำถาม นอกจากนี้ป๊อบยังสามารถให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ที่แสดงถึงจินตนาการภายในตนเองออกมาได้เป็นอย่างดีอีกด้วย

**ผู้สังเกต** การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ ผู้สังเกตสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องทุกปัญหา ไม่ว่าจะเป็นเปลี่ยนขนาดของจำนวนให้ใหญ่ขึ้น (จาก  $\square \div \square = \square$  เป็น  $\square\square \div \square = \square$ ) หรือเปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่ก็ตามผู้สังเกตยังคงมองเห็นแบบรูปของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และสามารถใช้เวลาในการคิดน้อยลงเรื่อยๆ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการที่ผู้สังเกตสามารถสร้างกรณีทั่วไปและมองว่าในการคิดปัญหาใหม่นี้มีรูปแบบการคิดเหมือนปัญหาที่ผ่านมา ตอนเริ่มต้นคิดปัญหาแรกในชุดคำถามนี้ผู้สังเกตพยายามใช้การนึกภาพในใจและใช้การนับนิ้วช่วย แต่ไม่สามารถคิดได้ จึงเปลี่ยนมาใช้ตัวแบบ (เม็ดลูกคิด) เพื่อช่วยให้มองเห็นภาพชัดเจนขึ้น แล้วจึงใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งช่วยในการหาคำตอบ หลังจากนั้นเมื่อผู้วิจัยเปลี่ยนขนาดของจำนวนในปัญหาต่อมาหรือเปลี่ยนเนื้อเรื่องใหม่ผู้สังเกตไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแบบอีกก็สามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว นอกจากนี้ผู้สังเกตยังสามารถยกสถานการณ์ปัญหาที่เข้ากับลักษณะและรูปแบบของปัญหาในชุดคำถามนี้ได้ แต่ผู้สังเกตไม่สามารถบอกได้ว่าชุดคำถามนี้เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร แต่เป็นการเพียงพอที่สามารถบอกว่าผู้สังเกตมีการสร้างกรณีทั่วไป การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์และการให้เหตุผลเชิงอุปนัย เพราะชุดคำถามนี้เป็นเรื่องของการหารผู้สังเกตจึงคิดว่าไม่ใช้การคูณแน่นอนแต่ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นเรื่องของการหาร

คำถาม : [Y4] โตะเรียนแต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน ถ้ามีเด็กทั้งหมด 8 คน จะมีโตะกี่ตัว

**การคิดของป๊อบ :** ป๊อบใช้เวลาในการคิดประมาณ 5 นาที โดยใช้ตัวแบบคือถาดพลาสติก แทนโตะเรียนและเม็ดลูกคิดแทนเด็ก เริ่มต้นป๊อบจะนำถาดพลาสติกมาและวางเม็ดลูกคิดลงบนถาดพลาสติกทีละถาดๆ ละ 2 เม็ด และนับเพิ่มทีละสองจนได้เม็ดพลาสติกครบ 8 เม็ดจึงหยุด นับคำตอบจากจำนวนถาดพลาสติก จึงตอบ 4 ป๊อบจะมั่นใจในคำตอบของตนเองมากและไม่มีการทวนคำตอบ เพราะตอนคิดนั้นป๊อบบอกว่าคิดอย่างดีแล้ว

**การคิดของผู้สังเกต :** ผู้สังเกตจะใช้เวลาในการคิดประมาณ 3 นาที โดยครั้งแรกจะคิดในใจ (โดยการนับนิ้ว) แต่คิดไม่ได้จึงเปลี่ยนเป็นใช้เม็ดลูกคิด โดยนับเม็ดลูกคิดสีเหลืองมา 8 เม็ด แทนจำนวนเด็ก และเม็ดลูกคิดสีน้ำเงิน 2 เม็ด แทนมีเด็กนั่งอยู่ 2 คน (ผู้สังเกตจะนับเม็ดลูกคิดและแบ่ง

ประเภทตามสถานการณ์ที่ปรากฏอยู่ในโจทย์) แต่เวลาคิดหาคำตอบฝึกภาคจะแบ่งเฉพาะเม็ดลูกคิดสีเหลืองออกเป็นกองๆ ละ 2 เม็ด ตอบ 4 ตัว โดยนับจากจำนวนกองเพราะแต่ละกองแทนโต๊ะ 1 ตัว เม็ดลูกคิดสีน้ำเงินที่นำมาครั้งแรกไม่ใช่เพราะนำมาแทนตามโจทย์เท่านั้น เมื่อถามว่าปัญหานี้ยากไหม ฝึกภาคจะบอกว่ายากกว่า 3 ปัญหาที่แล้ว วิธีคิดไม่เหมือนกัน แต่ฝึกภาคไม่สามารถระบุได้ชัดว่าโจทย์ปัญหาต่างกันอย่างไร

คำถาม : [Y5] ต้นมะม่วงทุกต้นมีผลต้นละ 7 ผล ถ้านับผลมะม่วงได้ 28 ผล จะมีต้นมะม่วงกี่ต้น

การคิดของป๊อบ : เมื่ออ่านโจทย์ปัญหาให้ฟังจบลงป๊อบตอบทันทีว่า 4 ต้น โดยป๊อบอธิบายว่า “มี 7 ผล รวมกันเป็น 14 และอีก 2 ผล (ที่จริง 2 ต้น) เป็น 14 รวมกันเป็น 28 (ป๊อบใช้การยุบรวมและบวกโดยนำ 7 บวก 7 ได้ 14 และ 14 บวก 14 เป็น 28 ) เมื่อเพิ่มขนาดของจำนวนเป็น “ต้นหนึ่งมี 10 ผล นับมะม่วงได้ 100 ผลละ” ป๊อบตอบ 20 ต้น เพราะต้องมากกว่า 4 ต้น

การคิดของฝึกภาค : ปัญหานี้ฝึกภาคใช้เวลาคิด 2 นาที เมื่ออ่านโจทย์จบฝึกภาครู้ได้ทันทีว่าจะใช้วิธีใด การเริ่มต้นคิดฝึกภาคใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งโดยใช้นิ้วช่วยเพื่อหาคำตอบ และตอบ 4 ต้น เมื่อถามถึงรายละเอียดในโจทย์ปัญหา ฝึกภาคสามารถอธิบายได้ว่า ต้นหนึ่งมี 7 ผล โจทย์ไม่ได้บอกจำนวนต้นมาให้ จะใช้การนับทีละเจ็ดเพื่อหาคำตอบ (ฝึกภาคใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งเช่นเดิม) นับจนกว่าจะได้ 28 ที่นับครั้งละ 7 เพราะ หนึ่งต้นมี 7 ผล ปัญหานี้ใช้การคูณไม่ได้ เพราะ  $28 \times 7$  ไม่ได้เท่ากับ 4 แต่จะมากกว่า 4 ใช้การหารได้คือ  $28 \div 7$  เพราะเป็นการแบ่งทีละ 7 รู้จักการหาร เพราะป๊อบบอกแต่ยังไม่ได้เรียน ฝึกภาคยังบอกอีกว่าถ้าหารเป็นการหารน่าจะง่ายกว่าการคูณ

คำถาม : [Y6] ในการเข้าค่ายพักแรม นักเรียน 27 คน เข้าพักในเต็นท์ได้หลังละ 3 คน จะต้องใช้เต็นท์ทั้งหมดกี่หลัง

การคิดของป๊อบ : ปัญหานี้ป๊อบใช้เวลาคิดประมาณ 5 นาที โดยใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหาซึ่งวิธีการคิดของป๊อบจะเหมือนกับปัญหา Y4 คือใช้ถาดพลาสติกแทนเต็นท์และเม็ดลูกคิดแทนนักเรียน เริ่มต้นป๊อบจะนับเม็ดลูกคิดมาสามเม็ดใส่ลงในถาดพลาสติกหนึ่งใบและนับเม็ดลูกคิดอีกสามเม็ดใส่ลงบนถาดพลาสติกอีกทีละถาดๆ ละ 3 เม็ด และนับเพิ่มทีละสามจนได้เม็ดพลาสติกครบ 27 เม็ดจึงหยุด นับคำตอบจากจำนวนถาดพลาสติก จึงตอบ 9 ป๊อบจะมั่นใจในคำตอบของตนเองมากและไม่มีการทวน เมื่อถามป๊อบว่า “ทำไมพอบนับได้สามแล้วถึงเปลี่ยนถาดใหม่” ป๊อบบอกว่า “เดี๋ยวผิดครับ” เป็นการแสดงว่าป๊อบเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาอย่างดี



(การดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบของปีบ)

การคิดของผักกาด : ปัญหานี้ผักกาดใช้เวลาคิดประมาณ 2 นาที เมื่ออ่านโจทย์จบก็เริ่มใช้การนับนิ้ว โดยนับเพิ่มครั้งละ 3 (นับทีละหนึ่งคือ หนึ่ง สอง สาม-หนึ่ง...) พอนับไปสักครู่ไม่มั่นใจจึงเริ่มนับใหม่ และตอบ 9 หลัง ผักกาดบอกว่าปัญหานี้ง่ายเพราะรู้วิธีการคิด ต่างจากปัญหาก่อนที่เลขมากขึ้น (เพราะผักกาดนับครั้งละ 3 จึงต้องนับถึง 9 ครั้ง ในขณะที่ปัญหาที่แล้วนับเพียงแค่ 4 ครั้ง) และเนื้อเรื่องที่เป็นเต็นท์ พอถามว่าใช้วิธีอื่นได้ไหม ผักกาดบอกใช้การคูณ (แต่พูดค่อยๆ เพราะไม่มั่นใจ) แล้วจึงบอกใหม่ที่ใช้การนับ เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้านักเรียนเพิ่มเป็น 300 คน ละ” ผักกาดบอกว่า “น่าจะใช้เต็นท์มากกว่า 9 เพราะเลขเยอะกว่า น่าจะได้ 10” แต่เมื่อผักกาดลองเทียบกับโจทย์เดิมจึงบอกว่าจะมากกว่า 10 คำตอบน่าจะเป็น 95 หลัง

### ปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนในลักษณะของการจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปีบ การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ปีบสามารถตอบถูกทุกข้อและเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาอย่างดี สามารถใช้ตัวแบบนำเสนอตัวแทนความคิดของตนโดยผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้อย่างถูกต้อง แสดงว่าปีบเข้าใจในปัญหาเป็นอย่างดีและใช้การลงมือปฏิบัติที่ถูกต้องและยังอธิบายได้ว่าตัวแบบใดใช้แทนสิ่งใดในปัญหา นอกจากนั้นในการคิดหาคำตอบ ปีบจะใช้การนึกภาพในใจโดยการคิดหาคำตอบในใจและนำเสนอออกมาโดยผ่านตัวแบบ นอกจากนี้ยังพบว่าปีบมีทักษะในการคิดคำนวณอย่างถูกต้องและรวดเร็ว มีการคิดที่สละสลวยโดยพิจารณาจากการที่ผู้วิจัยเปลี่ยนขนาดของจำนวนในแต่ละสถานการณ์ปัญหา ปีบสามารถแสดงการคิดได้อย่างสละสลวยรวดเร็วและถูกต้องโดยคิดในใจทุกคำถาม ดังคำสัมภาษณ์ต่อไปนี้

ผู้วิจัย : ถ้าเพิ่มเด็กเป็น 15 คน นั่งโต๊ะ 3 ตัวละ จะจัดให้เด็กนั่งได้โต๊ะละกี่คน (ต่อจากปัญหา Y7)

ปีบ : (ปีบคิดแว็บหนึ่ง) ห้าคนครับ

ผู้วิจัย : ปีบคิดอย่างไร

ปีบ : ห้าใช้ไหมครับ เหลือสิบ เหลืออีกห้าเป็นสิบ เหลืออีกห้าเป็นสิบห้า

(คำว่า “เหลืออีก” ของปีบคือรวมอีก ปีบแสดงให้เห็นว่าห้าบวกกันสามจำนวนเป็นสิบห้า

นั่นคือนั่งโต๊ะละห้าคน สามโต๊ะจึงเป็นเด็กสิบห้าคน)

ผู้วิจัย : เพิ่มเด็กเป็น 20 คน นั่งโต๊ะ 4 ตัวละ

ป๊อบ : (ป๊อบหยุดคิด) ห้าครับ

ผู้วิจัย : ทำไมถึงได้ห้า

ป๊อบ : โต๊ะสี่ตัวใช้ใหม่ครับ ห้า (เน้นเสียง) เหลืออีกสิบห้า เหลืออีกห้าเป็นสิบ เหลืออีกห้าเป็นสิบห้า เหลืออีกห้าเป็นยี่สิบ

ผู้วิจัย : อ้อ ป๊อบใช้วิธีแบ่งยี่สิบออกเป็นส่วนๆ หรือ

ป๊อบ : (ป๊อบยิ้มและพยักหน้า)

ผู้วิจัย : เอ้า! เปลี่ยนใหม่ ทีนี้เด็ก 20 คน เหมือนเดิม แต่นั่งโต๊ะ 2 ตัว

ป๊อบ : (ป๊อบตอบทันที) 10 คน

ผู้วิจัย : ทำไมป๊อบคิดเร็วจัง

ป๊อบ : (ยิ้มแฉ่งแทบปริ) สิบบวกสิบ

ผู้วิจัย : เด็ก 40 คน นั่งโต๊ะ 4 ตัวละ

ป๊อบ : (หยุดคิด) สิบครับ

ผู้วิจัย : อืม!

ป๊อบ : สิบแล้วใช้ใหม่ครับ เหลืออีกสามสิบ อีกสิบเป็นยี่สิบ เหลืออีกยี่สิบ อีกสิบเป็นสามสิบ (ป๊อบพยายามแสดงการแบ่ง 40 ออกเป็นสี่ส่วน)

ผู้วิจัย : เด็ก 30 คน นั่งโต๊ะ 3 ตัวละ

ป๊อบ : สิบคน (ป๊อบอธิบายต่อ) โต๊ะหนึ่งสิบคน อีกโต๊ะเป็นยี่สิบ อีกโต๊ะเป็นสามสิบ

*ผู้สังเกต* การตอบคำถามในชุดคำถามนี้ผู้สังเกตจะค่อนข้างสับสนในการหาคำตอบ โจทย์ปัญหาบางปัญหา (Y8) ผู้สังเกตจะใช้วิธีการคิดเหมือนปัญหาการหารในแบบของการวัด ทั้งนี้เนื่องมาจากรูปแบบของโจทย์ปัญหาประเภทนี้จะค่อนข้างสับสนสำหรับเด็กเพราะโจทย์ไม่ได้กำหนดจำนวนสิ่งของที่อยู่ในกลุ่มมาให้ แต่โจทย์จะกำหนดจำนวนสิ่งของทั้งหมดและจำนวนกลุ่มมาให้และถามหาจำนวนสิ่งของในแต่ละกลุ่ม เด็กจึงมองไม่เห็นว่าจะจัดจำนวนของลงในกลุ่มเท่าไร จึงมักนำตัวเลขที่กำหนดให้ในโจทย์ปัญหามาใช้ในการคิดคำนวณ ในปัญหา Y7 ที่ผู้สังเกตตอบคำถามได้ถูกนั้นอาจเป็นเพราะจำนวนกลุ่มที่กำหนดให้พอดีเท่ากับจำนวนสิ่งของในกลุ่มพอดี แต่เมื่อผู้สังเกตทำโจทย์ปัญหา Y8 ผู้สังเกตจะนำจำนวน (หก) ที่กำหนดให้ในโจทย์ปัญหามาใช้เป็นจำนวนสิ่งของที่อยู่ในกลุ่ม ทั้งๆ ที่จำนวน (หก) นั้นต้องเป็นจำนวนของกลุ่ม ผู้สังเกตจึงตอบว่าจะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละ 6 คน แต่เมื่อเปลี่ยนสถานการณ์ของโจทย์ปัญหามาเป็นสถานการณ์ที่ปฏิบัติจริงได้ในปัญหา N7 ผู้สังเกตจึงเริ่มแสดงความเข้าใจขึ้นโดยการนำเสนอได้ตรงตามสถานการณ์ในโจทย์ปัญหา (แต่ผู้วิจัยยังไม่มั่นใจว่าผู้สังเกตเข้าใจสถานการณ์ปัญหาจริงๆ เพราะจำนวนกลุ่มที่กำหนดให้พอดีเท่ากับจำนวนสิ่งของในกลุ่มพอดีเหมือนปัญหา Y7) แต่เมื่อผู้สังเกตเริ่มคิดโจทย์ปัญหา N8 ผู้วิจัยจึงมั่นใจว่าผู้สังเกตเข้าใจรูปแบบของปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วนแล้ว โดยผู้สังเกตสามารถ

แสดงออกได้อย่างถูกต้องตามสถานการณ์ปัญหา ชุดคำถามนี้ฝึกภาคสามารถใช้คำว่า “แบ่ง” ได้อย่างถูกต้อง แสดงว่าฝึกภาคเข้าใจเรื่องการหารแต่ไม่สามารถบอกได้อย่างชัดเจนว่าเป็นการหาร แต่ถึงกระนั้นจากการตอบคำถามในชุดคำถามนี้เป็นการยืนยันว่าฝึกภาคมีการวิเคราะห์ การสร้างกรณีทั่วไป การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์และการให้เหตุผลเชิงอุปนัย ส่วนการควบคุมการรู้คิดยังไม่เด่นชัดเท่าที่ควร

คำถาม : [Y7] เด็ก 9 คน จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว โดยให้นั่งโต๊ะละเท่าๆ กัน  
จะจัดให้เด็กนั่งโต๊ะละกี่คน

การคิดของبيب : ปัญหานี้بيبใช้เวลาคิดเพียงแค่ 1 นาที และตอบเท่ากับ 3 เมื่อผู้วิจัยให้بيبอธิบายว่าคิดอย่างไร ปิบจึงบอกว่า “ใช้กล่องและเม็ด (ถาดพลาสติกและเม็ดลูกคิด) นับโต๊ะมา 3 ตัว และนับเด็กมา 9 คน” (จริงๆ แล้วبيبหาคำตอบมาจากการคิดในใจ แต่เมื่อผู้วิจัยให้بيبอธิบาย ปิบจึงใช้ตัวแบบนำเสนอตัวแทนความคิดของตนออกมา) ขั้นตอนการอธิบายของبيبคือ นับถาดพลาสติกมาก่อน 3 ถาด แล้วจึงนับเม็ดลูกคิดให้ได้ 9 เม็ด โดยนับมาทีละสามเม็ด “สามเหลืออีกหก นับมาอีกสามเป็นหกเหลืออีกสาม นับมาอีกสามเป็นเก้า” ขณะนับبيبนำเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดๆ ละสามเม็ด เมื่อนับครบเก้าเม็ดจึงหยุดนับ และนับคำตอบจากจำนวนเม็ดที่อยู่ในถาด



(การนำเสนอตัวแทนความคิดโดยผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้ของبيب)

การคิดของฝึกภาค : ฝึกภาคใช้เวลา 3 นาที ในการทำโจทย์ปัญหานี้และมีความเข้าใจในโจทย์ปัญหาคือ ฝึกภาคเข้าใจว่าโต๊ะทุกตัวต้องมีเด็กนั่งเท่ากัน วิธีดำเนินการแก้ปัญหของฝึกภาคจะใช้ตัวแบบช่วยในการคิด โดยนับเม็ดลูกคิดมา 9 เม็ด แทนเด็ก 9 คน และแบ่งเม็ดลูกคิดทีละ 3 เม็ด (ฝึกภาคบอกว่าที่แบ่งทีละ 3 เม็ด จะได้เท่าๆ กัน แต่ผู้วิจัยคิดว่าฝึกภาคนับออกมาครั้งละ 3 เม็ด เพราะโจทย์ปัญหากล่าวว่า “จัดให้นั่งโต๊ะ 3 ตัว”) ออกเป็น 3 กอง โดยเริ่มใส่ทีละกองๆ ละ 1 เม็ด ก่อน แล้วจึงเพิ่มเป็นกองละ 2 และ 3 เม็ด ตามลำดับ (เหมือนการแจกไฟ) และตอบโต๊ะละ 3 คน

คำถาม : [Y8] เด็ก 42 คน จัดให้หนึ่งโต๊ะ 6 ตัว โดยให้หนึ่งโต๊ะละเท่าๆ กัน จะจัดให้มีเด็กหนึ่งโต๊ะละกี่คน

การคิดของป๊อบ : ปัญหานี้ป๊อบใช้เวลาคิดนานถึง 9 นาที แต่สามารถตอบได้ถูกต้อง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะจำนวนในสถานการณ์ปัญหามีขนาดใหญ่ ป๊อบจึงใช้ตัวแบบในการดำเนินการแก้ปัญหา โดยใช้ถาดพลาสติกแทนโต๊ะและเม็ดลูกคิดแทนเด็ก เริ่มต้นคิดป๊อบจะนับถาดพลาสติกมา 6 ถาดและนับเม็ดลูกคิดมา 42 เม็ด และนำเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดพลาสติกทั้งหกถาดๆ ละ เท่าๆ กันโดยการลองผิดลองถูก เริ่มแรกป๊อบลองใส่ถาดละ 6 เม็ดก่อนแล้วใช้การบวกเพิ่มเพื่อหาผลรวมของเม็ดลูกคิดที่ใส่ลงไปในถาดพลาสติกแล้ว พอนับผลรวมของเม็ดลูกคิดถึงสามสิบสอง (บวกผิด) จึงพบว่าเหลือเม็ดลูกคิดมากกว่าหกเม็ด จึงเพิ่มจำนวนเม็ดลูกคิดเป็นถาดละ 7 เม็ด (ป๊อบบอกว่าเพราะถ้าใส่ 5 เม็ด ห้ามันน้อยกว่าหก จึงคิดว่าห้ามันไม่ถึงสี่สิบสองแน่จึงเพิ่มทีละเม็ดเป็นเจ็ดก่อนตามตัวเลข)

เมื่อพิจารณาการคิดของป๊อบจากปัญหานี้ ดูเหมือนป๊อบสามารถสร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้การคาดเดาคำตอบล่วงหน้าอย่างมีหลักการ แล้วพยายามค้นหาคำตอบที่ถูกต้องจากการลองผิดลองถูก



(การดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบของป๊อบ)

การคิดของผักกาด : ผักกาดจะใช้เวลาค่อนข้างนานประมาณครึ่งชั่วโมง เพราะเล่นกับเพื่อน (ส้ม) ในปัญหานี้ผักกาดจะใช้การวาดภาพในการดำเนินการแก้ปัญหา ซึ่งผักกาดจะวาดภาพเม็ดลูกคิดแทนเด็ก (แต่เมื่อถามว่าแล้วใช้เม็ดลูกคิดจริงๆ ช่วยคิดหรือไม่ ผักกาดบอกว่าไม่) โดยผักกาดวาดภาพเม็ดลูกคิดทีละกลุ่มๆ ละ 6 เม็ด และนับต่อไปทีละหนึ่งจนครบ 42 วง (ซึ่งได้ 7 กลุ่มๆ ละ 6 เม็ด) เวลาหาคำตอบจะนับจากจำนวนเม็ดลูกคิดในหนึ่งกลุ่ม จึงตอบ 6 คน และผักกาดจะมั่นใจในคำตอบของตนเองว่าถูกต้อง คำสัมภาษณ์ต่อไปนี้เป็นการยืนยันว่าผักกาดมีความมั่นใจในคำตอบของตนเองมาก

ผู้วิจัย : ทำไมต้องวาดเม็ดลูกคิดออกเป็น 7 กองด้วย (กลุ่ม)

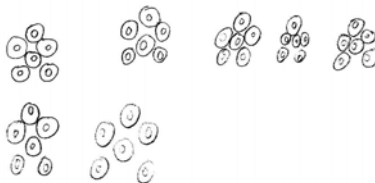
ผักกาด : เพราะนับให้ครบ 42

ผู้วิจัย : แล้วทำไมไม่เอา 7 มาตอบ

ผักกาด : 7 มันจะเกิน

ผู้วิจัย : มันใจใหม่ว่าถูก

ผักกาด : มันใจ (อมยิ้ม)



คำตอบ ๔.๖

(การดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้การวาดภาพของผักกาด)

คำถาม : [Y9] พ่อซื้อมะปรางมา 4 ตัน แต่ละตันมีผลมะปรางจำนวนเท่าๆกัน ถ้านับมะปรางได้ทั้งหมด 32 ผล แต่ละตันมีมะปรางอยู่กี่ผล

การคิดของป๊อบ : ปัญหานี้ป๊อบใช้เวลาเพียง 4 นาทีเท่านั้น โดยใช้ตัวแบบในการดำเนินการคิดเช่นเดียวกับปัญหา Y8 เริ่มแรกป๊อบจะนำถาดพลาสติกมา 4 ถาดแทนต้นมะปรางและนับเม็ดลูกคิดมา 32 เม็ดแทนผลมะปราง ป๊อบจะใช้การลองผิดลองถูกเช่นเดิมโดยการคาดเดาคำตอบไว้ล่วงหน้า แล้วนับจำนวนเม็ดลูกคิดใส่ลงในถาดพลาสติกแต่ละถาดๆ ละเท่าๆ กัน และใช้การบวกเพิ่มเพื่อหาผลรวมของจำนวนเม็ดลูกคิดทั้งหมดที่ใส่ลงในถาดพลาสติกทุกถาด โดยจำนวนแรกที่ป๊อบคาดเดาคือ 6 แต่ป๊อบจะใช้เพียงแค่สามถาดก่อนเมื่อนับรวมสามถาดป๊อบคิดว่าผลรวมไม่ถึง 32 แน่จึงเพิ่มเป็นถาดละ 7 เม็ด และหยิบเม็ดลูกคิดจะใส่ลงในถาดที่สี่แต่เปลี่ยนใจมาเพิ่มลูกคิดในอีกสามถาดเป็น 8 เม็ด และนับออกเสียงว่าสิบหกแปดยี่สิบสี่ หลังจากนั้นจึงนับเม็ดลูกคิดเพิ่มครั้งละหนึ่งใส่ลงในถาดที่สี่ และตอบว่า “แปดครับ” ป๊อบยังสามารถบอกได้ว่าถ้าจำนวนเม็ดลูกคิดที่ใส่ลงในถาดพลาสติกถ้าผลรวมมากกว่า 32 ให้ลบออก ถ้าน้อยกว่า 32 ให้บวกเพิ่ม (จากการตอบคำถามของผู้วิจัยเมื่อผู้วิจัยถามว่าถ้าใส่เม็ดลูกคิดไปครบสี่ถาดแล้วเกิน 32 เม็ดป๊อบจะอย่างไร เช่นใส่ไปถาดละ 9 เม็ด ป๊อบบอกว่าลบออกสิ (หมายถึงสี่ถาดๆ ละ 1 เม็ด) เมื่อผู้วิจัยถามว่าถ้าใส่ไปถาดละ 5 เม็ด ต้องเพิ่มจำนวนเม็ดหรือลด ป๊อบบอกว่าเพิ่ม)



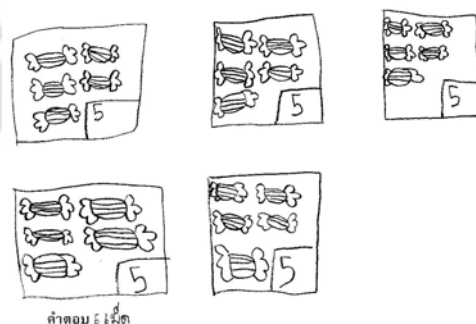
(การดำเนินการแก้ปัญหาที่ใช้ตัวแบบและการลองผิดลองถูกในการหาคำตอบของป๊อบ)

(ผู้สังเกต : ผู้สังเกตไม่ได้ทำโจทย์ปัญหานี้เพราะผู้สังเกตตอบปัญหา Y8 ผิด จึงต้องทำ  
ปัญหา N7)

คำถาม : [N7] บอมมีลูกอม 25 เม็ด แบ่งให้เพื่อน 5 คนๆ ละ เท่าๆ กัน จะได้คนละกี่เม็ด

(ปิ๊บ : ปิ๊บไม่ได้ทำโจทย์ปัญหานี้เพราะปิ๊บตอบปัญหา Y8 ผิด)

การคิดของผู้สังเกต : ผู้สังเกตใช้เวลา 20 นาที (เพราะผู้สังเกตใช้เวลาในการวาดภาพอยู่นาน ซึ่งภาพที่วาดสวยงามมาก) เนื่องจากผู้สังเกตตอบปัญหาที่แล้วไม่ได้ ปัญหานี้จึงเปลี่ยนเป็นสถานการณ์ที่ปฏิบัติจริงได้ เริ่มต้นผู้สังเกตมีความเข้าใจในปัญหาอย่างดี ก่อนวาดภาพผู้สังเกตใช้การนับเพิ่มทีละหนึ่งโดยใช้นิ้วช่วยนับเพื่อหาคำตอบ ซึ่งเป็นการนับที่เน้นคำที่แต่ละจำนวนตามขนาดของกลุ่มคือ หนึ่ง สอง สาม สี่ ห้า หก เจ็ด แปด เก้า สิบ ... ยี่สิบเอ็ด ยี่สิบสอง ยี่สิบสาม ยี่สิบสี่ ยี่สิบห้า แล้วจึงวาดภาพลูกอมลงในกรอบสี่เหลี่ยมทีละกรอบๆ ละ 5 เม็ด เพราะถ้าวาดน้อยกว่า 5 เช่น 3 ก็จะไม่ถึง 25 และที่นับทีละ 5 เพราะง่าย พอถามว่าไม่ใช่เพราะแบ่งให้เพื่อน 5 คน หรือผู้สังเกตจึงยิ้มและตอบว่าใช่ (ผู้วิจัยไม่แน่ใจว่าผู้สังเกตเข้าใจผิดเหมือนปัญหาที่แล้วหรือไม่ เพราะตัวเลขที่กำหนดให้คือ 25 และ 5 ซึ่งเป็นตัวเลขที่ไม่เหมาะในการตรวจสอบความเข้าใจในปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน แต่ผู้วิจัยมีความต้องการจะตรวจสอบการนับของเด็กเมื่อขนาดของจำนวนคือ 5 แต่จากการสัมภาษณ์และดูจากการนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้ภาพเป็นสื่อผู้วิจัยคิดว่าการคิดโจทย์ปัญหานี้ผู้สังเกตเริ่มเข้าใจแล้ว)

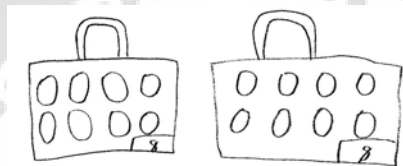


(การนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้ภาพเป็นสื่อของผู้สังเกต)

คำถาม : [N8] แม่ซื้อไข่ไก่มา 16 ฟอง แบ่งทำไข่ดาวและไข่ต้มอย่างละเท่าๆ กัน  
แม่ทำไข่ดาวและไข่ต้มอย่างละกี่ฟอง

(ป๊อบ : ป๊อบไม่ได้ทำโจทย์ปัญหานี้เพราะป๊อบตอบปัญหา Y8 ถูก)

การคิดของผัดกาด : ผัดกาดใช้เวลา 7 นาที เริ่มแรกผัดกาดคิดในใจโดยนำ 8 บวก 8 (เอาแปดไว้ในใจ ชูนิ้วขึ้นมาแปดนิ้ว แล้วนับต่อทีละหนึ่งโดยใช้นิ้วช่วยนับคือ แก้ว สิบ สิบเอ็ด... สิบหก) ที่ไม่ใช่เลขอื่น เช่น 7 เพราะถ้าเป็น 7 จะไม่ถึง 16 ซึ่งผัดกาดไม่ได้ลองใช้เลขอื่นในการนับเลย (ผู้วิจัยคิดว่าผัดกาดน่าจะมีความรู้ใน Number Fact เกี่ยวกับการบวกซ้ำ เนื่องจากทางโรงเรียนจะฝึกการบวกเลขซ้ำตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ผัดกาดจึงสามารถระลึกได้ทันทีว่า  $8 + 8 = 16$ ) หลังจากผัดกาดคิดคำตอบในใจได้แล้วจึงนำเสนอตัวแทนความคิดของตนเองโดยใช้ภาพเป็นสื่อเหมือนปัญหาที่แล้ว



คำตอบ 8 ฟอง

(การนำเสนอตัวแทนความคิดโดยใช้ภาพเป็นสื่อของผัดกาด)

การการศึกษาค้นคว้าเฉพาะของเด็กทั้งสองคนในการตอบชุดคำถามที่ 1 : การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน ซึ่งปัญหาในชุดคำถามนี้ประกอบด้วยรูปแบบปัญหา 3 รูปแบบ คือ ปัญหาการคูณ ปัญหาการหารในแบบของการวัด และปัญหาการหารในแบบของการแบ่งส่วน พบว่าไม่ว่าขนาดของจำนวนจะเปลี่ยนไปหรือเนื้อเรื่องจะเปลี่ยนไปก็ตาม เด็กทั้งสองคนสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ นั่นคือการเปลี่ยนขนาดของจำนวนหรือเปลี่ยนเนื้อเรื่องไม่เป็นปัญหาสำหรับเด็กทั้งสองคนนี้ เด็กทั้งสองสามารถมองออกว่าปัญหารูปแบบใดจะคิดแก้ปัญหาอย่างไร เด็กทั้งคู่เข้าใจแบบรูปของปัญหาแต่ละรูปแบบนั่นเอง

## ภาคผนวก ง

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล

- ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี
- ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี
- ตัวอย่างแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์สำหรับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี และ 9-10 ปี
  - แบบบันทึกการสัมภาษณ์/การให้รหัส และ แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรม
  - ตัวอย่างสถานการณ์ที่ใช้ในการสังเกตพฤติกรรมเด็กในชั้นเรียน
  - ตัวอย่างคำถามที่ใช้ตรวจสอบการคิดของเด็ก

ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี



กระดาษเขียนตอบ

ชื่อนักเรียน.....ชั้น.....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

ปัญหา      มีโต๊ะ 6 ตัว  
                 แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน  
                 มีเด็กทั้งหมดกี่คน

แสดงการคิดของนักเรียน



คำตอบ

ตัวอย่างเอกสารประกอบในชุดคำถามสำหรับเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี



กระดาษเขียนตอบ

ชื่อนักเรียน.....ชั้น.....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. ....

ปัญหา            มีโต๊ะ 6 ตัว  
                     แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 100 คน  
                     มีเด็กทั้งหมดกี่คน

แสดงการคิดของนักเรียน



คำตอบ

ตัวอย่างแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์สำหรับเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี และ 9-10 ปี



แนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์  
สำหรับเด็กช่วงอายุ 7-9 ปี (ป.1-2)

ชุดคำถามที่ 1: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหาการคูณ: มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

[Y1]

แบบสัมภาษณ์

ชื่อนักเรียนที่ถูกสัมภาษณ์..... ชั้น.....  
วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. .... เวลา ..... น.  
เรื่องที่สัมภาษณ์ .....

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบนักเรียน

- มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน .....
- เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร .....
- โจทย์บอกว่ามีโต๊ะอยู่ที่ตัว .....
- แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน เข้าใจว่าอย่างไร .....
- โต๊ะทุกตัวต้องมีเด็กนั่งเท่ากันไหม .....
- โจทย์ให้นักเรียนหาอะไร .....
- มีเด็กทั้งหมด 4 คน ใช่ไหม .....
- จะหาจำนวนเด็กทั้งหมด คิดอย่างไร .....
- นักเรียนลองเล่าให้ครูฟังซิว่านักเรียนคิดอย่างไร .....
- นักเรียนมีวิธีคิดอย่างไรจึงได้คำตอบนี้ .....
- ลองคิดวิธีอื่นดูสิ / ใช้วิธีคูณได้ไหม .....
- เมื่อนักเรียนได้คำตอบแล้วนักเรียนกลับไปตรวจสอบอีกทีหรือเปล่า .....
- ถ้าจำนวนโต๊ะเป็น 10 ตัว จะคิดอย่างเดิมได้ไหม .....
- ลองบอกวิธีการคิดให้ครูฟัง .....
- ประมาณคำตอบได้ไหม .....
- ถ้าเปลี่ยนโจทย์เป็น มีโต๊ะ 20 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 4 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน จะคิดเหมือนกันไหม .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

แนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์  
สำหรับเด็กช่วงอายุ 9-10 ปี (ป.3)

ชุดคำถามที่ 1: การจัดกลุ่ม/การแบ่งส่วนที่เท่ากัน

ปัญหาการคูณ: มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 100 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน

[Y1]

แบบสัมภาษณ์

ชื่อนักเรียนที่ถูกสัมภาษณ์..... ชั้น.....  
วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. .... เวลา ..... น.  
เรื่องที่สัมภาษณ์ .....

ประเด็นที่สัมภาษณ์

บันทึกคำตอบนักเรียน

- มีโต๊ะ 6 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 100 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน .....
- เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร .....
- โจทย์บอกว่ามีโต๊ะอยู่ที่ตัว .....
- แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 100 คน เข้าใจว่าอย่างไร .....
- โต๊ะทุกตัวต้องมีเด็กนั่งเท่ากันไหม .....
- โจทย์ให้นักเรียนหาอะไร .....
- มีเด็กทั้งหมด 100 คน ใช่ไหม .....
- จะหาจำนวนเด็กทั้งหมด คิดอย่างไร .....
- นักเรียนลองเล่าให้ครูฟังซิว่านักเรียนคิดอย่างไร .....
- นักเรียนมีวิธีคิดอย่างไรจึงได้คำตอบนี้ .....
- ลองคิดวิธีอื่นดูสิ .....
- เมื่อนักเรียนได้คำตอบแล้วนักเรียนกลับไปตรวจสอบอีกทีหรือป่าว .....
- ถ้าจำนวนโต๊ะเป็น 100 ตัว จะคิดอย่างเดิมได้ไหม .....
- ลองบอกวิธีการคิดให้ครูฟัง .....
- ประมาณคำตอบได้ไหม .....
- ถ้าเปลี่ยนโจทย์เป็น มีโต๊ะ 100 ตัว แต่ละตัวมีเด็กนั่งอยู่ 6 คน มีเด็กทั้งหมดกี่คน จะคิดเหมือนกันไหม .....
- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

แบบบันทึกการสัมภาษณ์/การให้รหัสและ  
แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรม



**แบบบันทึกการสัมภาษณ์/การให้รหัส**

ชื่อนักเรียนที่ถูกสัมภาษณ์..... ชั้น.....

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. .... เวลา ..... น.

เรื่องที่สัมภาษณ์ .....

| ลักษณะที่เด็กแสดงออก            | มี /ไม่มี | พฤติกรรมเพิ่มเติมของเด็ก |
|---------------------------------|-----------|--------------------------|
| การเข้าสู่การคิด                | .....     | .....                    |
| วิธีดำเนินการแก้ปัญหา           |           |                          |
| -ลงมือปฏิบัติจริง               | .....     | .....                    |
| -การใช้ตัวแบบ                   | .....     | .....                    |
| -การใช้การนับ/การบวก/การลบ      | .....     | .....                    |
| -การใช้ภาพ                      | .....     | .....                    |
| -การใช้การนึกภาพในใจ            | .....     | .....                    |
| การวิเคราะห์                    | .....     | .....                    |
| การสร้างกรณีทั่วไป              | .....     | .....                    |
| การสร้างข้อคาดการณ์             | .....     | .....                    |
| การทบทวนการคิด                  | .....     | .....                    |
| -การควบคุมการรู้คิด             | .....     | .....                    |
| การให้เหตุผล                    |           |                          |
| -การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์     | .....     | .....                    |
| -การอุปนัย                      | .....     | .....                    |
| -การนิรนัย                      | .....     | .....                    |
| การนำเสนอตัวแทนความคิด          |           |                          |
| -ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้      | .....     | .....                    |
| -ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ | .....     | .....                    |
| -ผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์   | .....     | .....                    |

**สรุปสาระสำคัญจากการสังเกตด้านการคิดเชิงคณิตศาสตร์และอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง**

.....

.....

.....

.....

ผู้ให้รหัส.....

### แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรม

วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. .... ช่วงเวลาที่สังเกต .....

สถานที่สังเกต ..... ผู้ถูกสังเกต .....ชั้น.....อายุ.....

#### เนื้อหาหรือสถานการณ์

.....

.....

.....

#### รายละเอียดพฤติกรรมที่บ่งบอกถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ปรากฏ

| พฤติกรรมที่บ่งบอก                  | มี    | ไม่มี |
|------------------------------------|-------|-------|
| การเข้าสู่การคิด                   | ..... | ..... |
| การดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด | ..... | ..... |
| การทบทวนการคิด                     | ..... | ..... |
| วิธีดำเนินการแก้ปัญหา              | ..... | ..... |
| การนำเสนอ                          | ..... | ..... |
| การให้เหตุผล                       | ..... | ..... |
| การตอบคำถาม                        | ..... | ..... |
| การให้คำปรึกษากับเพื่อน            | ..... | ..... |
| .....                              | ..... | ..... |
| .....                              | ..... | ..... |
| .....                              | ..... | ..... |

#### สรุปสาระสำคัญจากการสังเกตด้านการคิดเชิงคณิตศาสตร์และอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

.....

.....

.....

ผู้สังเกต.....

ตัวอย่างสถานการณ์ที่ใช้ในการสังเกตพฤติกรรมเด็กในชั้นเรียน



สถานการณ์ที่ใช้สังเกตพฤติกรรมเด็กในช่วงอายุ 7-9 ปี

สถานการณ์ที่ 1

กำหนดโจทย์ปัญหาบนกระดานดำที่ละข้อ และให้นักเรียนคิด

1.  $1 + 2 = ?$
2.  $2 + 5 = ?$
3.  $1 + 2 + 3 + 5 = ?$

สถานการณ์ที่ 2

พื้นฐานทางด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ให้นักเรียนแบ่งดินสอจำนวน 6 แท่ง ให้เพื่อน 3 คนๆ ละเท่าๆ กัน

สถานการณ์ที่ 3

ให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาที่ต้องใช้การบวกและการลบ

สถานการณ์ที่ใช้สังเกตพฤติกรรมเด็กในช่วงอายุ 9-10 ปี

สถานการณ์ที่ 1

กำหนดโจทย์ปัญหาบนกระดานดำที่ละข้อ และให้นักเรียนคิด

4.  $11 + 12 = ?$

5.  $12 + 15 = ?$

6.  $11 + 12 + 13 + 15 = ?$

สถานการณ์ที่ 2

พื้นฐานทางด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

แบ่งดินสอจำนวน 24 แท่ง ให้เพื่อน 6 คนๆ ละเท่าๆ กัน ได้คนละกี่แท่ง

สถานการณ์ที่ 3

พื้นฐานทางด้านการคูณและการหารจำนวนนับ

ให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาที่ต้องใช้การบวกและการลบ

สถานการณ์ที่ 4

การคูณและการหารจำนวนนับเบื้องต้น

ให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาจากประโยคสัญลักษณ์  $3 \times 4 = ?$

ตัวอย่างคำถามที่ใช้ตรวจสอบการคิดของเด็ก



| การคิด                        | คำถาม                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. การวิเคราะห์               | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ลักษณะโจทย์ข้อนี้เหมือน/ต่าง จากข้อที่แล้วตรงไหนอย่างไร</li> <li>- โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง / เข้าใจว่าอย่างไร</li> <li>- ในการคิดมีขั้นตอนการคิดไหม / เริ่มจากอะไร</li> </ul> |
| 2. การให้เหตุผลเชิงสหสัมพันธ์ | <ul style="list-style-type: none"> <li>- เคยเห็นโจทย์แบบนี้ไหม</li> <li>- คำตอบที่ได้ถูกต้องหรือไม่ / วิธีการถูกต้องไหม</li> </ul>                                                                                   |
| 3. การอุปนัย                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร</li> <li>- สรุปวิธีการคิดได้ไหม</li> </ul>                                                                                                          |
| 4. การนิรนัย                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- จากข้อสรุปที่ได้ลองยกโจทย์ที่ใช้วิธีคิดเช่นเดียวกันได้ไหม</li> <li>- ลองยกโจทย์แบบเดียวกันนี้ได้ไหม</li> </ul>                                                              |
| 5. การสร้างกรณีทั่วไป         | <ul style="list-style-type: none"> <li>- จากที่ทำมาทุกข้อเริ่มมองเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้นไหม</li> <li>- สรุปรูปแบบของโจทย์ได้ไหม</li> </ul>                                                                             |
| 6. การสร้างข้อความคาดการณ์    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ลองสรุปวิธีการคิดได้ไหม</li> </ul>                                                                                                                                          |
| 7. การตรวจสอบการรู้คิด        | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ใช้วิธีการคิดแบบนี้จะได้ผลไหม</li> <li>- ทำไมจึงเปลี่ยนวิธีการคิด</li> </ul>                                                                                                |

ประวัติย่อผู้วิจัย



## ประวัติย่อผู้วิจัย

|                              |                                                                                                            |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ชื่อ ชื่อสกุล                | นางสาวรุ่งทิwa นามำรุง                                                                                     |
| วันเดือนปีเกิด               | 19/มิถุนายน/2506                                                                                           |
| สถานที่เกิด                  | อ.เมือง จ.นนทบุรี                                                                                          |
| สถานที่อยู่ปัจจุบัน          | 32 ถนนนนทบุรี 1 ตำบลท่าทราย อำเภอเมือง<br>จังหวัดนนทบุรี 11000                                             |
| ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน | อาจารย์ประจำสาขาวิชาการประถมศึกษา<br>ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์<br>มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
| ประวัติการศึกษา              |                                                                                                            |
| พ.ศ.2519                     | ประถมศึกษาปีที่ 7<br>โรงเรียนกลาโหมอุทิศ                                                                   |
| พ.ศ.2523                     | มัธยมศึกษาปีที่ 5<br>โรงเรียนสตรีวิทยา                                                                     |
| พ.ศ.2529                     | ครุศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์)<br>วิทยาลัยครูสวนดุสิต                                                         |
| พ.ศ.2534                     | ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์)<br>มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์                                           |
| พ.ศ.2541                     | Education Specialist (Mathematics and Mathematics<br>Education) Akita University, Japan                    |
| พ.ศ.2549                     | การศึกษาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์ศึกษา)<br>มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ                                        |