

๕๑๕
๕๑๕
๗๓

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องฟังก์ชันที่อนโทเกรตได้

ปริญญานิพนธ์

ของ

เสนอ คุณประเสริฐ

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

- 7 ก.ค. 2526

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

พุทธทศวรรษ 2526

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิต และคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานิพนธ์
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.....ประธาน

.....กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.....ประธาน

.....กรรมการ

.....กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำอย่างดียิ่งจาก
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุเทพ ทองอยู่ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ
เป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ ที่กรุณาให้ความร่วมมือในการดำเนินการ
วิจัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาทางเทคนิคที่ใช้
ในการวิจัย

ท้ายสุด ผู้วิจัยขอกราบอนุโมทนาถึงพระคุณของบิดาและมารดา ที่ให้ความอุปการะ
ในทางกำลังใจ ในการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา.

เสนอ คุณประเสริฐ

สารบัญ

หน้า		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	3
	ขอบเขตของการวิจัย	3
	สมมติฐานในการวิจัย	3
2	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	4
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎี	4
	จุดมุ่งหมายการศึกษาก่อนหน้านี้	4
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของวิธีการวิเคราะห์	4
	ผลของการเรียน	5
3	วิธีการในการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	9
	กลุ่มตัวอย่าง	9
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	9
	วิธีการในการทดลอง	11
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	11
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	14

บทที่	หน้า
5 สรุป อภิปรายผล และขอเสนอแนะ	16
ความมุ่งหมายของการวิจัย	16
สมมติฐานของการวิจัย	16
กลุ่มตัวอย่าง	16
วิธีดำเนินการวิจัย	16
สรุปผลการวิจัย	17
อภิปรายผล	17
ขอเสนอแนะ	18
บรรณานุกรม	19
ภาคผนวก	22

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

1	จำนวนนิสิตของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2	14
2	เปรียบเทียบจำนวนนิสิตของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2	15

ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์และนักการศึกษาให้ความสนใจต่อคุณภาพของการศึกษาเป็นอย่างยิ่ง เห็นได้ชัดจากการประชุมสัมมนาทางวิชาการหลายครั้ง ได้มีการอภิปรายและแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการปรับปรุงคุณภาพการศึกษา โดยมุ่งที่จะหาข้อมูลมาปรับปรุงระบบการศึกษาให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ในการที่จะบรรลุผลดังกล่าวของอาศัยกระบวนการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรที่เสริมสร้างและพัฒนากระบวนการเรียนการสอน วิจัย วงษ์ใหญ่ กล่าววาทหลักสูตรระดับห้องเรียนเป็นหลักสูตรที่สำคัญที่สุด สังคมจะเปลี่ยนแปลงได้หรือไม่ขึ้นอยู่กับหลักสูตรระดับนี้ (วิจัย วงษ์ใหญ่ 2521 : 4)

ปัญหาการพัฒนาหลักสูตรระดับห้องเรียนจึงเป็นเรื่องสำคัญ วิธีการหนึ่งที่สามารถทำได้คือ การพัฒนาสิ่งพิมพ์ทางวิชาการที่ใช้กันเป็นประจำในสถาบันการศึกษาให้มีคุณภาพ ทั้งนี้เพราะสิ่งพิมพ์ทางวิชาการเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญยิ่งทางการศึกษา (หทัย หทัยภรณ์ 2521 : 83) สิ่งพิมพ์ทางวิชาการดังกล่าวรวมความถึงตำราซึ่งมีบทบาทและสำคัญต่อการเรียนการสอน กล่าวคือเป็นเครื่องมือถ่ายทอดหลักสูตรมาปรากฏเป็นลายลักษณ์อักษร เป็นแหล่งวิทยาการและชี้แนะแนวทางในการศึกษาเล่าเรียนอยู่ในตัว (เป็รื่อง กุมท 2523 : 1 - 5)

ตำราคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการเรียนการสอนก่อน พ.ศ. 2520 ส่วนมากใช้ตำราที่เป็นภาษาอังกฤษ มีเป็นส่วนน้อยที่เขียนเป็นภาษาไทย ทำให้เกิดปัญหาและเป็นอุปสรรคในการเรียน เพราะผู้ที่เรียนคณิตศาสตร์นั้นจะต้องมีพื้นฐานความรู้ภาษาอังกฤษพอสมควร นับแต่ปี พ.ศ. 2520 เป็นต้นมา มีการเสนอผลงานเพื่อเลื่อนตำแหน่งทางวิชาการของบุคลากรในสถาบันการศึกษาระดับอุดมศึกษา ผลงานส่วนใหญ่ที่เสนออยู่ในรูปตำราหรือเอกสารประกอบการสอน เป็นผลให้มีการผลิตตำราที่เป็นภาษาไทยมากขึ้น สำหรับวิชาคณิตศาสตร์มีการผลิตตำราคณิตศาสตร์เพื่อที่จะเป็นคู่มือประกอบการเรียนการสอน และเป็นแบบเรียนคณิตศาสตร์ในเนื้อหาต่าง ๆ ตำราส่วนมากเขียนแปลหรือเรียบเรียงมาจากตำราภาษาอังกฤษ ซึ่ง

ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาและวิธีการมากกว่ากระบวนการคิด คำว่าในลักษณะนี้ไม่สอดคล้อง
กับกระบวนการสอนคณิตศาสตร์ปัจจุบัน คีนส์ กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์เป็นกรศึกษา
เรียนรู้เกี่ยวกับโครงสร้างต่าง ๆ และความสัมพันธ์เกี่ยวของของโครงสร้างทั้งหลายที่
เป็นความคิดรวบยอดของเนื้อหา (Zoltan P. Dienes. 1971 : 239) ดังนั้น
การสอนคณิตศาสตร์ควรเน้นให้เด็กได้เข้าใจโครงสร้างและกระบวนการของโครงสร้าง
รวมทั้งความสามารถที่จะโยงความสัมพันธ์ของแต่ละโครงสร้าง เพื่อจะได้นำมาใช้
ประกอบในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการ
การคิดจึงมีประโยชน์อย่างยิ่ง เพราะมุ่งส่งเสริมให้รู้จักถึงการวิเคราะห์เพื่อให้เข้าใจ
โครงสร้าง การวิเคราะห์องค์ประกอบที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญของเรื่องจะทำให้เกิดกระบวนการ
การคิดแต่ละขั้นตอน ทำให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ขององค์ประกอบพื้นฐานเหล่านั้น
เรียงลำดับความคิดรวบยอดทั้งหมดและสรุปเป็นหลักการหรือแบบแผนของโครงสร้างได้
นอกจากนี้การวิเคราะห์ยังส่งเสริมให้เกิดมโนคติในเรื่องที่เรียน ทำให้เห็นว่าจากสถานการณ์
หนึ่งอาจจะมีรูปแบบของโครงสร้างมากกว่าหนึ่งแบบก็ได้ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจโครงสร้าง
ของคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งมากขึ้น

จากที่กล่าวมาทั้งหมด การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
มีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะเนื้อหาที่เป็น
นามธรรมและการพิสูจน์สลับซับซ้อน นักเรียนส่วนมากมักจะมีปัญหาในการเรียน ดังนั้น
การสอนจำเป็นต้องมีการวิเคราะห์ขั้นตอนในการพิสูจน์ บางครั้งจำเป็นต้องสร้างประพจน์
ที่เป็นจริงแบบใดมาใช้ในการพิสูจน์ การวิเคราะห์จะทำให้ผู้เรียนเข้าใจกระบวนการพิสูจน์
และสามารถเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ ปัจจุบันยังไม่มีแบบเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นรูปแบบการ
วิเคราะห์กระบวนการคิดที่ชัดเจน ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์จะสร้างแบบเรียนที่เน้นรูปแบบ
การวิเคราะห์กระบวนการคิด เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของแบบเรียนเรื่องฟังก์ชันที่อนติเกรตได้
ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้กับนิสิตระดับปริญญาตรีที่เรียนรายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิต
วิเคราะห์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2525

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแนะแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้
2. เสนอแนวทางในการจัดทำรายคณิตศาสตร์ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น
3. เพื่อเสนอแนะแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ทำการทดลองกับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 และเนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง คือฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ตามหลักสูตร คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2525

สมมติฐานในการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพสูง

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับตำรา

กูด (Good Carter V. 1973 : 605) ได้ให้ความหมายของ "ตำรา" ว่าเป็นหนังสือที่ใช้ในการเรียนวิชาหนึ่งโดยเฉพาะ มีการเรียบเรียงอย่างเป็นระบบ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ในการสอนแต่ละระดับ และใช้เป็นหลักในการเรียนการสอนตามหลักสูตรที่กำหนด

เมลลอต (Mellott. 1964 : 142 - 145) เน้นให้เห็นความสำคัญของตำราเรียนโดยเปรียบเทียบว่าตำราเป็นคู่มือครูในรูปสิ่งพิมพ์ และได้กล่าวถึงรูปลักษณะของตำราที่ดีพอสมควรดังนี้

1. ตำราที่ดีควรจัดให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดรวบยอด
2. สารสำคัญที่กล่าวถึงในตำราควรสัมพันธ์กับการปฏิบัติจริง
3. ในตำราควรได้มีการเสนอแนะสิ่งที่เป็นประโยชน์ และโยงความคิดจากแหล่งความรู้อื่น ๆ ให้ผู้อ่านศึกษา
4. ตำราที่ดีไม่ควรบรรยายเพียงความรู้เท่านั้น แต่ควรแสดงให้ผู้เรียนเห็นภาพสรุปรวม และนำไปประยุกต์ใช้ได้
5. ตำราที่ดีควรได้มีการจัดเนื้อหาให้ผู้เรียนได้ศึกษา

จุดมุ่งหมายการศึกษาคณิตศาสตร์

แคปเลอร์ (Kapler. 1965 : 323) กล่าวถึงความมุ่งหมายของการเรียนคณิตศาสตร์ปัจจุบันไว้ดังนี้

1. เพื่อพัฒนาความคิดของนักเรียน
2. เพื่อพัฒนาการคิดหาเหตุผล
3. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

กรอสนิกเกิล (Grossnickle. 1968 : 25 - 26) ได้กล่าวว่า สิ่งที่เป็น
ต้องพิจารณาในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีอยู่ 3 ประการ คือ

1. วัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนแต่ละเรื่อง ในวิชาคณิตศาสตร์นั้นมีเนื้อหา
ทาง ๆ มากมายที่นักเรียนต้องเรียน บางเรื่องต้องการให้นักเรียนรู้แค่เพียงความหมาย
หรือข้อเท็จจริง บางเรื่องต้องการให้นักเรียนเข้าใจแบบแผนทางคณิตศาสตร์ หรือบางเรื่อง
อาจจะจะเป็นความคิดพื้นฐานที่สำคัญของการศึกษาระดับสูง ผู้สอนรู้วัตถุประสงค์เหล่านี้เพื่อกำหนด
ทิศทางของการสอนได้อย่างถูกต้อง

2. การค้นหาโครงสร้าง การเรียนคณิตศาสตร์ที่ได้เพียงความรู้นั้นไม่
เพียงพอ นักเรียนจะต้องรู้ต่อไปว่าโครงสร้างของความรู้ที่ได้มานั้นเป็นอย่างไร ในวิชา
คณิตศาสตร์นั้นมีแบบแผนหรือวิธีปฏิบัติมากมาย เมื่อรวมแบบแผนเหล่านั้นเข้าด้วยกันเรียกว่า
โครงสร้าง การเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนรู้โครงสร้างนั้น ต้องเริ่มต้นให้นักเรียนเข้าใจ
แบบแผนแต่ละเรื่องก่อน แล้วนำแบบแผนเหล่านั้นมาสัมพันธ์กันเป็นโครงสร้างต่อไป

3. การประยุกต์โครงสร้างให้เข้ากับสถานการณ์ใหม่ ในสถานการณ์การเรียน
รู้ใหม่ ครูต้องฝึกให้นักเรียนประยุกต์โครงสร้างเข้าไปช่วยแก้ปัญหา จะต้องฝึกให้นักเรียนแยกแยะ
ว่า สถานการณ์ที่กำลังเผชิญนั้นมีความสอดคล้องกับส่วนไหนของโครงสร้าง และดำเนินการ
แก้ปัญหาภายใต้แบบแผนที่ได้เรียนรู้อยู่มา

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของวิธีการวิเคราะห์ผลต่อการเรียน

กาเย (กมลรัตน์ หล้าสูงษ์ 2524 : 227 - 228) ได้ลำดับขั้นของการเรียนรู้
ไว้ 8 ขั้นดังนี้คือ

1. Signal Learning เป็นการเรียนรู้ชนิดง่ายที่สุด เป็นการเรียนรู้ที่
ผู้เรียนไม่สามารถบังคับพฤติกรรมมิให้เกิดขึ้นได้ มักเป็นพฤติกรรมสะท้อน
2. Stimulus Response Learning เป็นการเรียนรู้ที่เกิดจากการเชื่อมโยง
โยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนอง ผู้เรียนแสดงพฤติกรรมแบบรู้ตัว สามารถควบคุมพฤติกรรม
ได้

3. Chaining เป็นการเรียนรู้ที่เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองที่ติดต่อกันเป็นลูกโซ่

4. Verbal Association เป็นการเรียนรู้เช่นเดียวกับ Chaining แต่เป็นภาษาเขามาเกี่ยวข้องกับ

5. Discrimination Learning เป็นการเรียนรู้ของเห็นความแตกต่างของสิ่งเร้าต่าง ๆ

6. Concept Learning คือการจัดประเภทของสิ่งต่าง ๆ โดยการให้ความหมายของสิ่งนั้น ๆ

7. Principle Learning เป็นการเรียนรู้โดยการจับหลักกว้าง ๆ ของสิ่งต่าง ๆ

8. Problem Solving เป็นการเรียนรู้ที่จะแก้ปัญหา โดยอาศัยประสบการณ์เดิมต่าง ๆ จากการเรียนรู้ทั้ง 7 ประเภทที่กล่าวมาข้างต้น

ดังนั้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรหาวิธีการที่ทำให้ให้นักเรียนสามารถเรียนรู้จนกระทั่งถึงขั้นที่จะแก้ปัญหาได้

ลาวัลย์ พลกล (ทบทวนงานวิจัย 2523 : 55 - 56)

ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จากประสบการณ์ในการแก้ปัญหาและการสอนให้นักเรียนแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจกับปัญหา โดยพิจารณาแยกแยะระหว่างสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการหา

2. จากสิ่งที่กำหนดให้ แปลงให้อยู่ในรูปที่เห็นชัดขึ้น โดยใช้แผนภาพหรือรูปภาพประกอบ

3. จากแผนภาพที่สร้างขึ้น พิจารณาหาเงื่อนไขอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยอาศัยนิยามคุณสมบัติ ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เคยเรียนรูมาแล้ว

4. ในบรรดาสิ่งที่กำหนดให้กับเงื่อนไขที่ได้เพิ่มเติมมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร หรือมีเงื่อนไขอะไรเพิ่มเติมอีกหรือไม่

5. คิดหาวิธีการแก้ปัญห โดยพิจารณาถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกันและทดลอง
เขียนแบบวิธีการแก้ปัญห หรืออาจวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์ต้องการ พิจารณาว่าต้องมี
เงื่อนไขใดอีกบ้างจึงจะคลี่คลายได้ และเงื่อนไขนั้นจะหามาได้อย่างไร

6. เรียบเรียงจลลาคับขั้นตอนในการแก้ปัญห

7. ทดสอบคำตอบว่าสมเหตุผลหรือไม่

8. ถ้าการแก้ปัญหทำได้หลายวิธี เลือกวิธีที่ง่ายและ สั้นที่สุด

การแก้ปัญหามางอย่างโดยการใช้รูปภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้ข้อมูลต่าง ๆ ของ
ปัญหาเป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น ซึ่งทำให้สะดวกต่อการแก้ปัญห ขั้นตอนดังกล่าวนี้จะเป็นสิ่งสำคัญ
ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ซึ่งสอดคล้องกับโคโนแวน (Reading in Secondary
School Mathematics, 1973 : 269) ที่ว่า ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จะต้องให้
นักเรียนสามารถแก้ปัญหในค่านต่าง ๆ ดังนี้

1. เพื่อให้นักเรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ปัญหาได้
2. เพื่อให้นักเรียนสามารถเลือกและหารูปแบบที่จะใช้ในการพิสูจน์ได้
3. เพื่อให้นักเรียนบอกสภาพของปัญหาเดิมที่คล้ายคลึงกับปัญหาหรือสถานที่
ใหม่เพื่อจะใช้สนับสนุนการแก้ปัญหได้
4. เพื่อให้นักเรียนวาคมโนคติของรูปต่าง ๆ ของความสัมพันธ์และกระบวนการ
การทำโดยส่วนรวม
5. เพื่อให้นักเรียนสามารถหาคำตอบจากปัญหาที่ให้ได้
6. เพื่อให้นักเรียนสามารถที่จะแก้ปัญหอื่น ๆ ที่ต่างจากปัญหาเดิมได้
7. เพื่อให้นักเรียนมีความสามารถประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหต่าง ๆ ได้
8. เพื่อให้นักเรียนสามารถใช้ความคิดของตนเองซึ่งได้จากการศึกษาโครง
สร้างต่าง ๆ มา จากนั้นมาสร้างรูปแบบของตนเองได้

การใช้วิธีวิเคราะห์ย้อนกลับเป็นยุทธศาสตร์ในการแก้ปัญห โดยเฉพาะปัญหาที่ทราบ
คำตอบอยู่แล้วแต่ต้องการวิธีดำเนินการ เช่นปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ทั่ว ๆ ไป ยุทิน พิพิธกุล
(ยุทิน พิพิธกุล 2518 : 59) ได้กล่าวถึงการพิสูจน์ปัญหาทางเรขาคณิต

ไว้ว่า อาจจะเริ่มทบทวนจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์และวิเคราะห์ย้อนกลับไปหาเหตุที่ละชั้น ๆ กล่าวคือ จากผลที่ต้องการพิสูจน์พิจารณาว่าความจะมีเหตุมาจากสิ่งใด และเหตุนั้น ๆ โจทย์กำหนดให้ หรือยัง ทำเป็นลำดับเช่นนี้จนสามารถแสดงให้เห็นว่าเหตุนั้น ๆ ยังความสัมพันธ์กับข้อมูลในข้อปัญหา จากนั้นจึงเริ่มทบทวนพิสูจน์จากเหตุไปสู่ผลเป็นลำดับจนได้ถึงสิ่งที่ต้องการอีกครั้งหนึ่ง

โรเบิร์ต จอนสัน (พบวงมหาวิทยาลัย 2523 : 50 อ้างอิงมาจาก โรเบิร์ต จอนสัน) กล่าวว่า การแก้ปัญหาต้องใช้กระบวนการที่ซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้พื้นฐาน ความคิดรวบยอด และทักษะที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ การที่นักเรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้ นักเรียนควรได้รับการฝึกฝนให้มีความรู้ พื้นฐานดังต่อไปนี้

1. มีความรู้เกี่ยวกับ เนื้อหา มีความเข้าใจ มีความคิดรวบยอด และเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหา
2. มีความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความ การขยายความ
3. มีความสามารถในการแปลงข้อความให้เป็นสัญลักษณ์หรือแผนภาพ
4. มีความสามารถในการวิเคราะห์หาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่มีอยู่กับประสบการณ์เก่า
5. มีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน การวิเคราะห์หาตัวแบบและการหาข้อสรุป

จากการประมวลและวิเคราะห์ เอกสาร ตลอดจนงานวิจัยที่มีผู้วิจัยค้นคว้าและรวบรวมมานั้น ทำให้ผู้วิจัยได้แนวคิดในการเสนอรูปแบบตำราเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดขั้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่วิชาศึกษาระดับปริญญาตรีปีที่ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2525 ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 โดยเลือกกลุ่มมา 1 ห้องเรียน จำนวน 44 คน เป็นกลุ่มทดลองที่เรียนด้วยแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรต โดยใช้ผู้วิจัย เป็นผู้สอน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง เป็นแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ตามเนื้อหาในหลักสูตร รายวิชาคณิต 212 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นและดำเนินการสร้างแบบเรียนโดยใช้วิธีการตามลำดับขั้นดังนี้

1.1 พิจารณาขอบข่ายเนื้อหาของเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ในรายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ แล้วแบ่งเนื้อหาเป็นหัวข้อย่อยดังนี้

1.1.1 การมีขอบเขตบน การมีขอบเขตล่าง และการมีขอบเขตของลิมิตของจำนวนจริง

1.1.2 สมาชิกที่ใหญ่ที่สุดและสมาชิกที่เล็กที่สุด

1.1.3 อนุกรมและอินทิกรัล

1.1.4 ฟังก์ชันที่มีขอบเขต

1.1.5 พหุนาม โลเวอร์รีกซ์และอัปเปอร์รีกซ์

1.1.6 คุณสมบัติและนิยามของ โลเวอร์รีกซ์และอัปเปอร์รีกซ์

1.1.7 อินทิกรัลจำกัด โลเวอร์อินทิกรัล ซัปเปอร์อินทิกรัล

1.1.8 นิยามและทฤษฎีของ โลเวอร์อินทิกรัลและซัปเปอร์อินทิกรัล

1.1.9 นิยามและทฤษฎีของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้

1.2 ปรีกษาอาจารย์ที่สอนรายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 เพื่อพิจารณาว่าเนื้อหาต่าง ๆ นั้นครอบคลุมหรือไม่และให้นำหนักความสำคัญในหัวข้อ โดยพิจารณาจากปัญหาในการสอนเนื้อหาเหล่านั้น

1.3 ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบเรียนตามหัวข้อต่าง ๆ โดยศึกษาจากตำราต่าง ๆ

1.4 เขียนแบบเรียนโดยมีลำดับขั้นดังนี้

1.4.1 เลือกนิยาม และทฤษฎีบท

1.4.2 หาตัวอย่างที่จะทำให้นักเรียนเข้าใจนิยาม และทฤษฎี

1.4.3 ขยายการพิสูจน์เนื้อหาต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐานให้ชัดเจน

1.4.4 วิเคราะห์กระบวนการคิดให้เห็นหลักการและโครงสร้างต่าง ๆ

ของการพิสูจน์ และเขียนแผนภาพ พร้อมทั้งจัดลำดับขั้นของการศึกษาวิธีพิสูจน์

1.4.5 หาคำถามที่จะใช้สำหรับแต่ละเนื้อหาย่อย ๆ

1.4.6 เรียบเรียงการพิสูจน์

1.5 ปรีกษาคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และอาจารย์ผู้สอนรายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและปรับปรุงแก้ไขให้ดียิ่งขึ้น จากนั้นทดลองภาษากับนิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 2 ที่เรียนคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์แล้ว จำนวน 3 คน เพื่อขอขอบพระคุณนำมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ โดยศึกษาจากหนังสือที่ใช้ในการสร้างแบบเรียน พร้อมทั้งศึกษาข้อสอบเก่า ๆ ของรายวิชาคณิต 212 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร และบางเขน แล้วสร้างแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 20 ข้อ จากนั้นนำไปทดสอบกับนิสิตปีที่ 3 ที่กำลังเรียนรายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน จำนวน

20 คน เพื่อนำผลมาวิเคราะห์หาค่าอำนาจจำแนก (r) ค่าความยากง่าย (p) ค่าความเชื่อมั่นและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ

การวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ ใช้หลักการ คัดกลุ่ม 25 เปอร์เซนต์ โดยเลือกข้อสอบที่มีค่า p ระหว่าง .20 - .80 และค่า r ตั้งแต่ .20 ขึ้นไปเป็นข้อสอบที่ดี คัดเลือกข้อสอบ 9 ข้อ แล้วหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตรของสัมประสิทธิ์ แอลฟา (α -coefficient) หาค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.62 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 10.63

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 100 นาที
3. การตรวจสอบให้คะแนนทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ข้อที่นิสิตตอบได้ ถูกต้องให้ 10 คะแนน ข้อที่นิสิตตอบผิดให้ 0 คะแนน และข้อที่นิสิตตอบไม่สมบูรณ์ จะให้คะแนนตั้งแต่ 0 - 10 คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ สำหรับแต่ละข้อซึ่งกำหนดไว้ก่อน ตรวจ นำคะแนนของนิสิตมาแบ่งเป็น 2 กลุ่ม เป็นกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เปรียบเทียบความแตกต่างกัน โดยใช้ Chi-Square

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าคะแนนเฉลี่ย จำนวนจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad (\text{Ferguson, 1977 : 45})$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ย
 $\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน
 N แทน จำนวนนิสิตในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนน คำนวณจากสูตร

$$s^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \quad (\text{Ferguson. 1971 : 62})$$

เมื่อ s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน
 $\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน
 $\sum X^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละตัว
 N แทน จำนวนนิสิตในกลุ่ม

3. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คำนวณจากสูตร
 สัมประสิทธิ์ แอลฟา

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right) \quad (\text{โกวิท ประวาทตฤณ 2523 : 166})$$

เมื่อ α แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 s_i^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ
 s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนทั้งหมด
 n แทน จำนวนข้อในแบบทดสอบ

4. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด คำนวณจากสูตร

$$s_e = s_x \sqrt{1 - r_{tt}} \quad (\text{Ferguson. 1971 : 371})$$

เมื่อ S_e แทน ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
 S_x แทน ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
 r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

5. ทดสอบประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง
 ฟังก์ชันที่เกรทได้ ใช้ทดสอบแบบ Chi-Square (Pfaffenbeger And Patterson,
 1977 : 447) มีสูตรดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

เมื่อ χ^2 แทน ค่า Chi - Square

O_i แทน Observed frequency ของตัวอย่างที่ i

E_i แทน Expected frequency ของตัวอย่างที่ i

k แทน จำนวนของตัวอย่าง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลอง 44 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันพหุนามเกรตโค จำนวน 9 ข้อ และดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. นำคะแนนของกลุ่มทดลองมาแบ่งกลุ่มเป็น 2 กลุ่ม นิสิทธ์ที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับ 50 % จะอยู่กลุ่มที่ 1 นิสิทธ์ที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนต่ำกว่า 50 % จะอยู่ในกลุ่มที่ 2 ซึ่งปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 จำนวนนิสิทธ์ของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิทธ์
กลุ่มที่ 1	18
กลุ่มที่ 2	26

2. ทดสอบประสิทธิภาพของ แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชัน
ที่อินทิเกรตได้ ผลปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 เปรียบเทียบจำนวนนิสิตกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิต	χ^2
กลุ่มที่ 1	18	1.454
กลุ่มที่ 2	26	

$$\chi^2_{(0.05:1)} = 3.841$$

จากตาราง 2 $1.454 < 3.841$ แสดงว่านิสิตกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 มีความ
แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 นั่นคือ จากกลุ่มตัวอย่างนี้ไม่สามารถ กล่าวได้ว่า
แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพเป็น
อย่างไร

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพสูง

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนิสิตปีที่ 2 ที่เรียน รายวิชาคณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2525 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 44 คน

วิธีดำเนินการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1.1 แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง เป็นแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการสอน 10 คาบ คาบละ 50 นาที

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 9 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ เท่ากับ 0.62

2. วิธีดำเนินการทดลอง

2.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด ใช้เวลาในการสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้เวลาในการทดสอบ 100 นาที

สรุปผลการวิจัย

จากการทดลอง ไม่สามารถกล่าวได้ว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพเป็นอย่างไร โดยการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า จากการทดลองไม่สามารถกล่าวได้ว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ มีประสิทธิภาพเป็นอย่างไร ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุ

1. กลุ่มตัวอย่างน้อย จากการทดลองกลุ่มตัวอย่างที่มี 44 คน จากนั้นแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่มีผลการเรียนมากกว่า หรือเท่ากับ 50 % และกลุ่มที่มีผลการเรียนน้อยกว่า 50 % ซึ่งจะทำให้สมาชิกของแต่ละกลุ่มน้อย ซึ่งจะส่งผลการทดลองไม่แตกต่างกันได้

2. เนื่องจากนิสิตที่เป็นกลุ่มทดลอง เป็นนิสิตมาจากหลายวิชาเอก ซึ่งพื้นความรู้ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ไม่เท่ากัน ดังนั้นในการใช้เกณฑ์ว่า นิสิตที่ผลการเรียนมากกว่าหรือเท่ากับ 50 % อยู่กลุ่มที่ 1 และนิสิตที่ผลการเรียนน้อยกว่า 50 % นั้น อยู่กลุ่มที่ 2 นั้น เป็นเกณฑ์ค่อนข้างสูงไปสำหรับกลุ่มทดลองครั้งนี้

3. ในค่านแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้นั้น บางเนื้อหาเป็นนามธรรมมาก ทำให้ไม่สามารถที่จะบรรยายเป็นรูปธรรมได้มาก ดังนั้นจึงทำให้เสียเวลาทำความเข้าใจในเนื้อหาเหล่านั้นได้ยาก และเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้นั้นเป็นเรื่องที่มีสัญลักษณ์ใหม่ ๆ เช่น $L(f,P)$, $U(f,P)$, $\int_a^b f$ และ $\int_a^b f$ ดังนั้นเสียเวลาที่จะต้องใช้มโนคติในการเรียนสูงที่จะทำความเข้าใจในเนื้อหาเหล่านั้น ๆ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ควรส่งเสริมให้มีความสามารถในการที่จะหาวิธีการและแนวทางในการที่จะทำการพิสูจน์ได้ ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์

1.2 ในค่านแบบเรียน ควรจะมีการหาวิธีการสร้างแบบเรียนของคณิตศาสตร์ที่จะให้ผู้ที่ศึกษาสามารถทำความเข้าใจในเนื้อหาเหล่านั้น ๆ ได้ด้วยตัวเอง

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเรื่องนี้อีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยให้มีขอบเขตกว้างขวางยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยหาประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กับระดับชั้นอื่น ๆ และเนื้อหาต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์ เพื่อความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด

2.3 ควรทำการวิจัยว่าเมื่อประกอบไปค่างที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2.4 ควรทำการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยวิธีสอนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดกับวิธีสอนปกติ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมลรัตน์ หล้าสงฆ์ จิตวิทยาการศึกษา โรงพิมพ์หามกุฏราชวิทยาลัย กรุงเทพฯ 2524,
278 หน้า

โกวิท ประวาลพุกษ์ และสมศักดิ์ สิบธุระเวทย์ การประเมินในชั้นเรียน
วัฒนาพานิช 2523, 280 หน้า

เป็รื่อง กุญท์ "เกร็ดเกี่ยวกับตำรา" เอกสารไว้นโยบายเลข 7 ประกอบการสัมมนา
การปรับปรุงตำราของมหาวิทยาลัยรามคำแหง 2523, 5 หน้า

มหาวิทยาลัย, ทบวง "ระเบียบทบวงมหาวิทยาลัยว่าด้วยการส่งเสริมการแต่งตำรา"
พ.ศ. 2523 อุดมศึกษา กรกฎาคม 2523, หน้า 16 - 18

ยุพิน พิพิธกุล พฤติกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา แผนกวิชามัธยมศึกษา
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2518, 165 หน้า

วิชัย วงษ์ใหญ่ พัฒนาหลักสูตรและการสอน โรงพิมพ์รุ่งเรืองธรรม 2521, 162 หน้า

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ แคลคูลัสตอนสอง อักษรเจริญทัศน์ กรุงเทพฯ 2515, 92 หน้า

หทัย หัตยาภิรมย์ "ศัลยกรรมแบบโบราณ" ศวันครินทร์วิโรฒ พิมพ์โลก เม.ย. - ก.ค.
2521, หน้า 83 - 98

Aichele, Douglas B. Reading in Secondary School mathematics.
Boston, 1973. 532 p.

Fadell, Albert G. Calculus with Analytic Geometry. Princeton,
N.J. D.Van Nostrand Company, Inc. 1966, 705 p.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in psychology and
Education. New York. McGraw-Hall, 1971. 492 p.

Good, Carter V. The Dictionary of Education. New York,
McGraw-Hill, 1973. 605 p.

Grossnickle, Foster E. Discovering Meaning in elementary school
Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1968. 470 pp.

- Kapler J.N. "Som Recent Effect of Improvement of School in India" The Mathematics Teacher. 61 : 321 - 327 March 1965.
- Mellott, Malcolm E. What to look For in Ghosing a Textbook, Reading in the Method of Education. Edited by Streeve, Frank L. The Odyssey press, Inc. U.S.A. 1964. 142 - 145 pp.
- Mitchell, Barry. calculus without Analytic Geometry. Lexington, Mass, D.C. Heath and Company, 1969. 645 p.
- Pfaffenbevger, Roger C. and James H. Patterson. Statistical Methods for Buiness and Economics. Homewood, Richard D. Irwin, Inc. 1977. 750p.
- Purcell, Edwin J. Cal'sulus with Analytic Geometry. Newyork, Appeton Century Crofts, 1972. 945 p.
- Spivak, Michael. calculus. Newyork, W.A. Benjamin, Inc. 1967. 587 p.

•

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องที่เกรตไค

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำในกระขาะคำตอบ

1. จงอธิบายคำต่อไปนี้ว่าหมายถึงอะไร (10 คะแนน)

$$M_i, m_{i-2}, L(f,P), U(f,P), \int_a^b f(x)dx, \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

2. กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

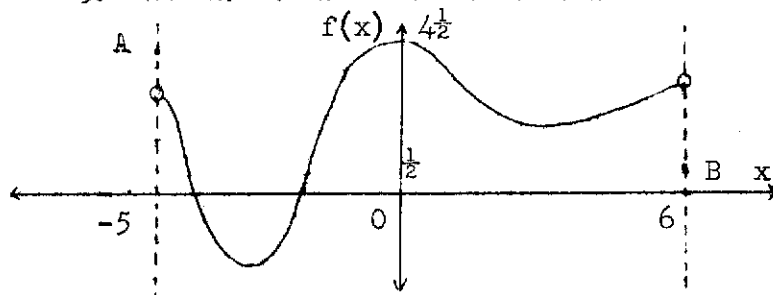
ฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[0,1]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
และจงหาขีดรีบนและขีดรีล่างของฟังก์ชัน f บน $[0,1]$ (ถ้ามี) (10 คะแนน)

3. กำหนด P_1, P_2 เป็นพาร์ติชันของ $[a,b]$ และฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ จงแสดงว่า $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$ (10 คะแนน)

4. กำหนดฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ จงแสดงว่า (10 คะแนน)

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน f มีกราฟดังต่อไปนี้



หมายเหตุ จุด A และ B รวมอยู่ในกราฟของ f ด้วย

ฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[-5, 6]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด (10 คะแนน)

6. กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \\ 6-x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้หรือไม่บน $[0, 3]$ เพราะเหตุใด (10 คะแนน)

7. กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$$

ฟังก์ชัน f อินทิเกรตบน $[0, 4]$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด (10 คะแนน)

8. กำหนด $f(x) = |x+1|$ บน $[0, 5]$

จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[0, 5]$ (10 คะแนน)

9. กำหนด $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ บน $[0, 4]$

ฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้หรือไม่บน $[0, 4]$ เพราะเหตุใด (10 คะแนน)

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r
1	.45	.24
2	.44	.56
3	.24	.48
4	.31	.62
5	.29	.58
6	.50	1.00
7	.36	.72
8	.24	.48
9	.50	1.00

ภาคผนวก ข.

แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง

บทนำ

ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ซึ่งเป็นการศึกษาโดยมุ่งเน้นให้ผู้อ่านเข้าใจและสามารถตัดสินใจว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มานั้นอินทิเกรตได้หรือไม่ แต่ก่อนที่จะศึกษาเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้นั้นจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐาน เกี่ยวกับการมีขอบเขตของเซตที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ เสียก่อน เพื่อจะช่วยให้เกิดประโยชน์ในการทำควาเข้าใจได้รวดเร็วยิ่งขึ้นในเรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ซึ่งอยู่ในบทต่อไป

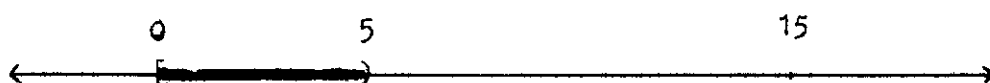
นิยาม 1 กำหนด $A \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

x เป็นค่าขอบเขตบนของ A ก็ต่อเมื่อ $a \leq x \quad \forall a \in A$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนด $[0, 5)$ จงแสดงว่า

1. 5, 15 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$
2. 3, -1 ไม่เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$

วิธีทำ (1)



$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } a \in [0, 5) &\rightarrow 0 \leq a < 5 \\ &\rightarrow a < 5 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } a \leq 5 \quad \forall a \in [0, 5)$$

นั่นคือ 5 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } a \in [0, 5) &\rightarrow 0 \leq a < 5 \\ &\rightarrow a < 15 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } a \leq 15 \quad \forall a \in [0, 5)$$

นั่นคือ 15 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$

(2)



เนื่องจาก $4 \in [0, 5)$ และ $3 < 4$

ดังนั้นข้อความ $a \leq 3 \quad \forall a \in [0, 5)$ เป็นเท็จ

$\therefore 3$ ไม่เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$

เนื่องจาก $2 \in [0, 5)$ และ $-1 < 2$

ดังนั้นข้อความ $a \leq -1 \quad \forall a \in [0, 5)$ เป็นเท็จ

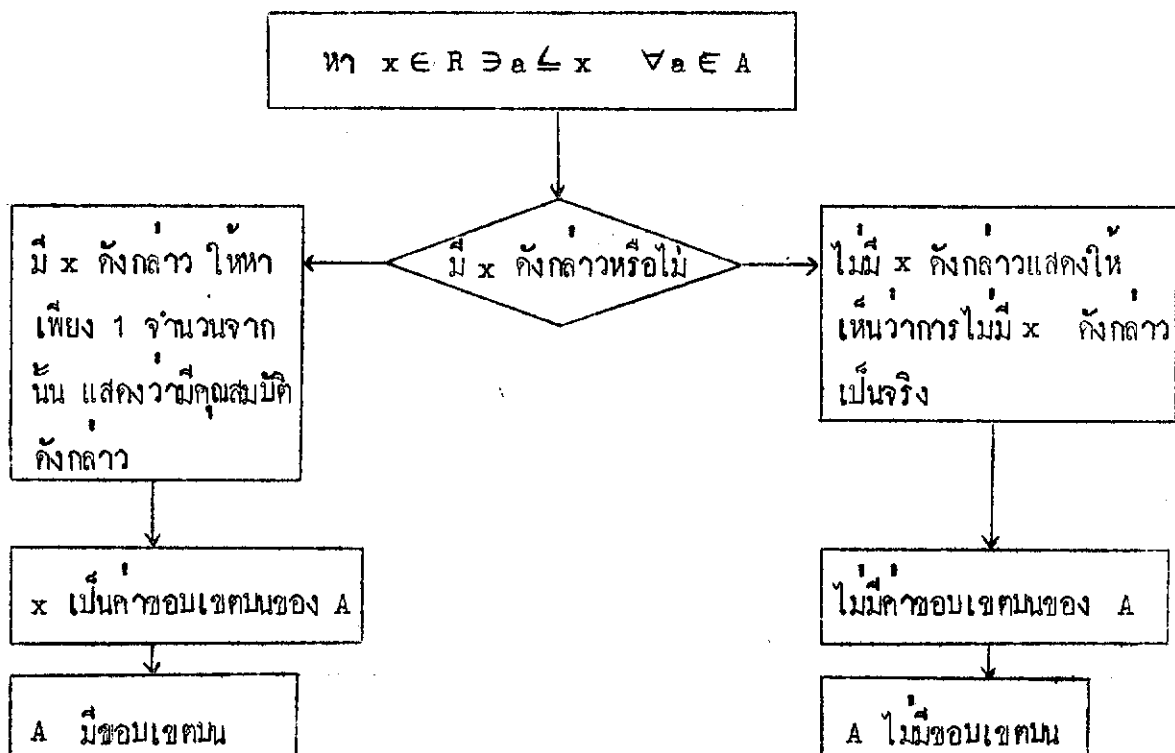
$\therefore -1$ ไม่เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 5)$

□

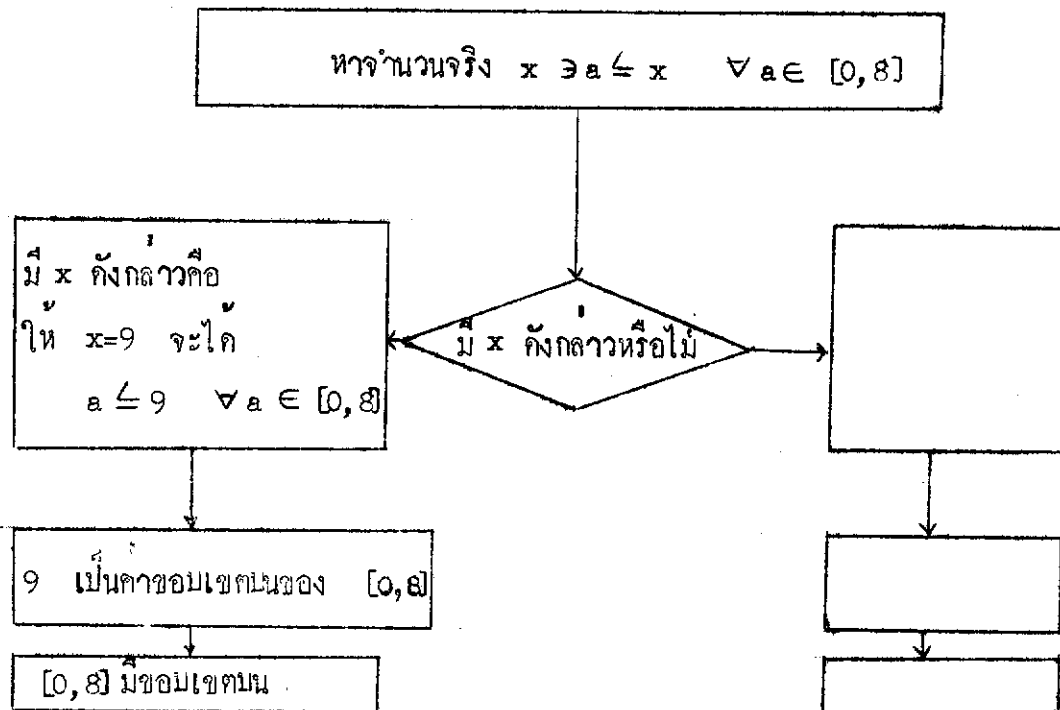
นิยาม 2 กำหนด $A \subset \mathbb{R}$

A มีขอบเขตบน ก็ต่อเมื่อ A มีค่าขอบเขตบน

จากนิยาม 2 สามารถสรุปเป็นแบบวิเคราะห์ลำดับขั้นการคิด เพื่อแสดงว่า A มีขอบเขตใดก็ตาม



ตัวอย่าง 2.1 จงแสดงว่า $[0,8]$ มีขอบเขตบน
วิเคราะห์



วิธีทำ

ให้ตัวว่า $a < 9 \quad \forall a \in [0, 8]$

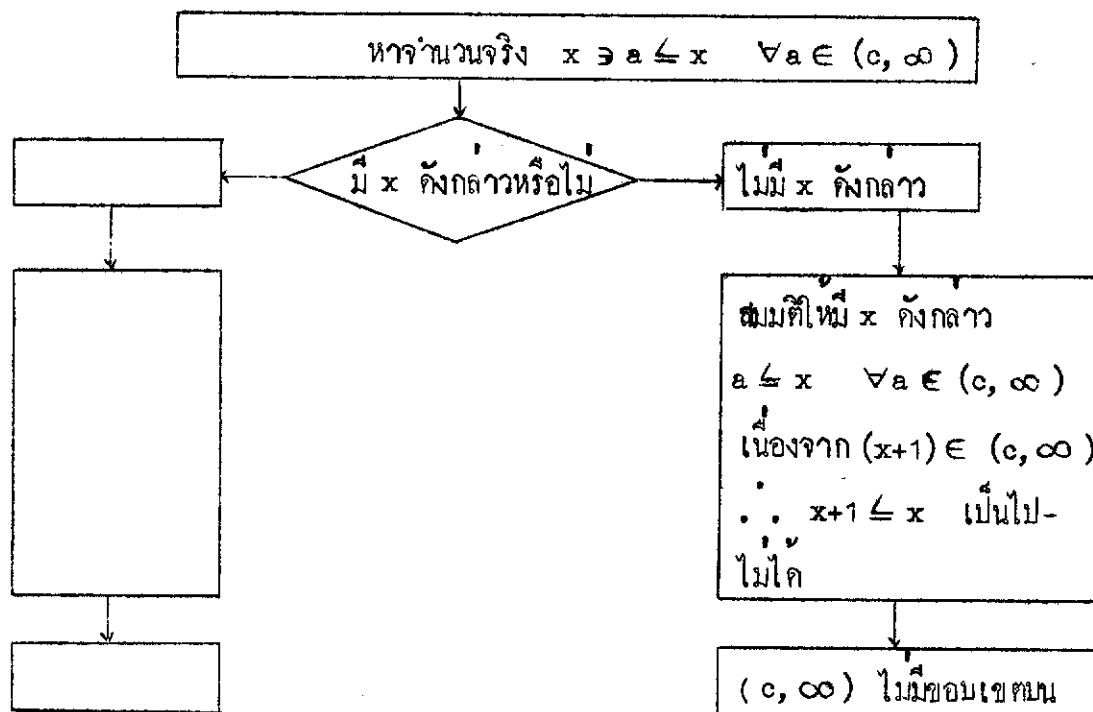
จะได้ว่า $a \leq 9 \quad \forall a \in [0, 8]$

นั่นคือ 9 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[0, 8]$

ดังนั้น $[0, 8]$ มีขอบเขตบน

□

ตัวอย่าง 2.2 จงแสดงว่า (c, ∞) ไม่มีขอบเขตบน
วิเคราะห์



วิธีทำ

สมมติให้ (c, ∞) มีขอบเขตบน
นั่นคือ จะมีจำนวนจริง x เป็นค่าขอบเขตบนของ (c, ∞)
ดังนั้น $a \leq x \quad \forall a \in (c, \infty)$
 $\rightarrow c < x$
 $\rightarrow c < x+1$ (คุณสมบัติของจำนวนจริง)
 $\rightarrow x+1 \in (c, \infty)$
 $\rightarrow a=x+1 \quad \exists a \in (c, \infty)$
 $\rightarrow x+1 \leq x$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (คุณสมบัติของจำนวนจริง)
 ดังนั้นที่สมมติขึ้นเป็นไปไม่ได้
 เพราะฉะนั้น (c, ∞) ไม่มีขอบเขตบน

พิจารณารูปประกอบ



คำถามชุดที่ 1

1. R มีขอบเขตบนหรือไม่
2. ϕ มีขอบเขตบนหรือไม่

ตัวอย่าง 2.3

1. คาขอบเขตบนของ $[1, 2]$ ได้แก่ $2, 3, 3\frac{1}{2}, 10, 11$ เป็นต้น
2. คาขอบเขตบนของ $(-4, 8]$ ได้แก่ $8, 9, 10, 11$ เป็นต้น
3. $(-2, 6)$ คาขอบเขตบน ได้แก่ $6, 7, 9, 10, 13, 56$ เป็นต้น
4. $(-\infty, 0)$ คาขอบเขตบน ได้แก่ $0, 1, 2, 3, 4.25$ เป็นต้น
5. $(-\infty, a)$ คาขอบเขตบน ได้แก่ $a, a+1, a+2$ เป็นต้น
6. $(-\infty, \infty)$ ไม่มีคาขอบเขตบน

□

คำถามชุดที่ 2

1. ทุก ๆ ช่วงมีขอบเขตบนใช่หรือไม่
2. ช่วงลักษณะใดที่มีขอบเขตบน
3. ถ้า x เป็นคาขอบเขตบนของ A และ $y \geq x$ แล้ว y เป็นคาขอบเขตบนของ A หรือไม่

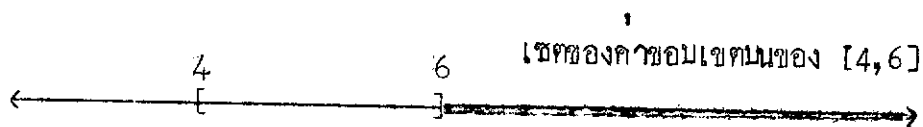
จากตัวอย่าง 2.3 จะเห็นโมดิกของคาขอบเขตบนของ A จะมีลักษณะดังนี้



ตัวอย่าง 2.4 จงหาเซตของคาขอบเขตบนของ $[4, 6]$, $(-6, 0)$, $(4, \infty)$

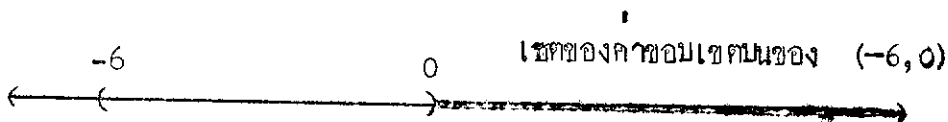
วิธีทำ

1)



∴ เซตของคาขอบเขตบนของ $[4, 6] = \{x \mid x \geq 6\}$

2)



∴ เซตของคาขอบเขตบนของ $(-6, 0) = \{x \mid x \geq 0\}$

3)



∴ เซตของคาขอบเขตบนของ $(4, \infty)$ คือ b

□

คำถามชุดที่ 3

1. เซตของคาขอบเขตบนของเซตว่างคือ
2. เซตของคาขอบเขตบนของ $\{1\}$ คือ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. I^- มีขอบเขตบนหรือไม่ ถ้ามีให้แสดง
2. R^- มีขอบเขตบนหรือไม่ ถ้ามีให้แสดง

นิยาม 3 ถ้า $A \subset R$ และ $y \in A$

y จะเป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A ก็ต่อเมื่อ $a \leq y \quad \forall a \in A$

ลำดับขั้นตอนในการคิดเพื่อแสดงว่า A มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดหรือไม่

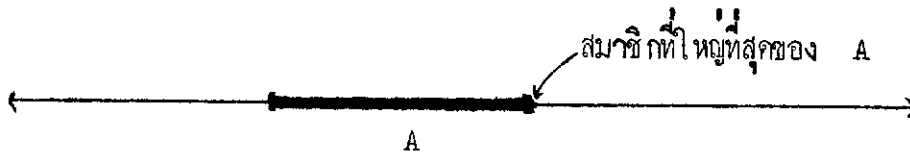
1. พิจารณาวัดจำนวนจริง y ซึ่งอยู่ใน A และมากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A หรือไม่
2. จากข้อ 1 จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้ามี y ดังกล่าว กำหนด y แล้วแสดงว่า y มากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A
 - 2.2 ถ้าไม่มี y ดังกล่าว ให้สมมติว่ามี y ที่อยู่ใน A และมากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A จากนั้นพยายามหาข้อขัดแย้ง ถ้าหาได้สามารถสรุปได้ว่าสมมติเป็นไปไม่ได้ นั่นคือไม่มี y ดังกล่าว
3. จากข้อ 2. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 3.1 ถ้าเป็นกรณี 2.1 จะได้ว่า y เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A
 - 3.2 ถ้าเป็นกรณี 2.2 จะได้ว่า ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A
4. จากข้อ 3. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 4.1 ถ้าเป็นกรณี 3.1 จะได้ว่า A มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด
 - 4.2 ถ้าเป็นกรณี 3.2 จะได้ว่า A ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

ดังนั้น ถ้า y เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A จะได้ว่า

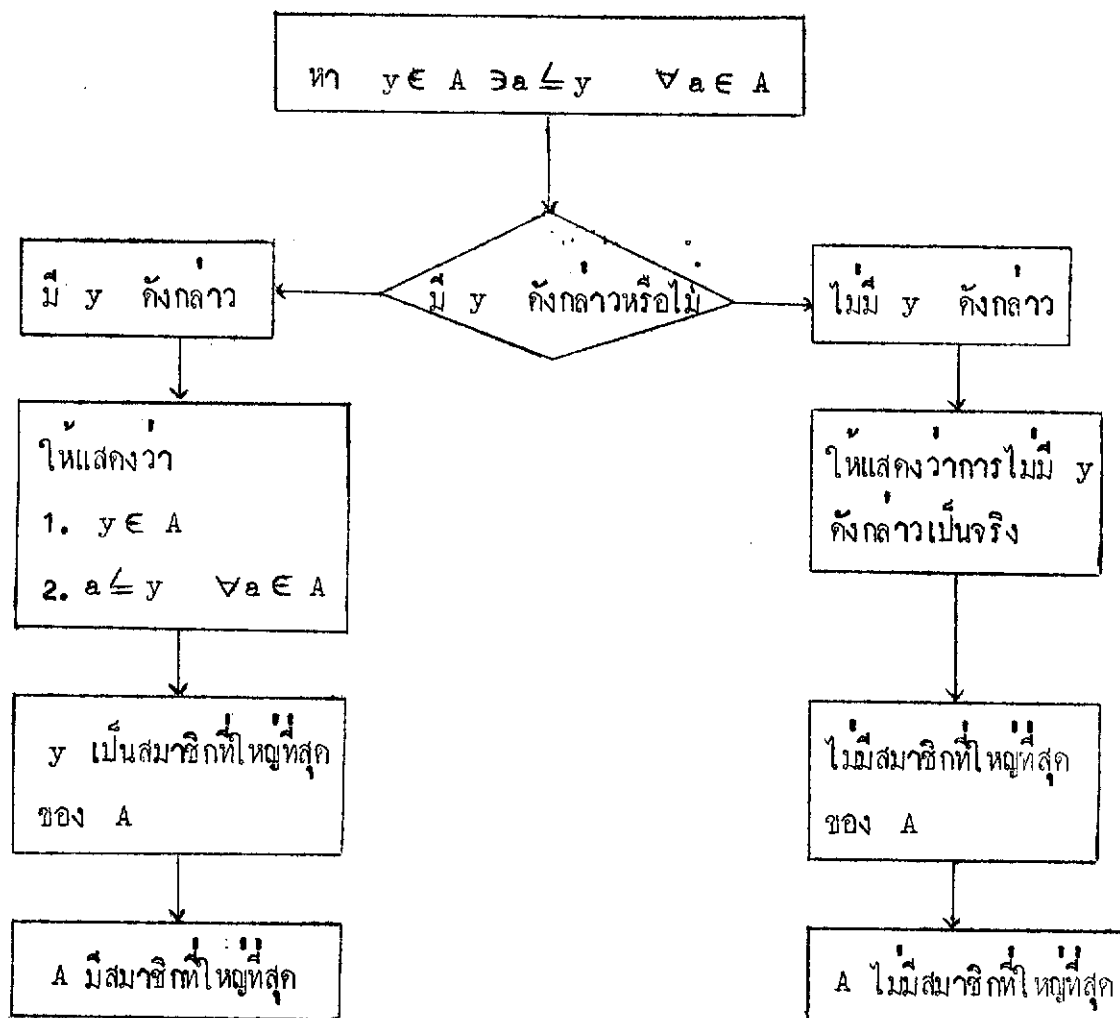
1. $A \neq \emptyset$

2. $y \in A$

และมีนิพจน์ดังนี้



แนววิเคราะห์ลำดับขั้นการคิด เพื่อแสดงว่า A มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด



ตัวอย่าง 3.1 จงหาสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $[1, 2]$ และ $(-4, 8]$

วิธีทำ

1)



เห็นได้ชัดเลยว่า $2 \geq a \quad \forall a \in [1, 2]$ และ $2 \in [1, 2]$
ดังนั้นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $[1, 2]$ คือ 2

2)



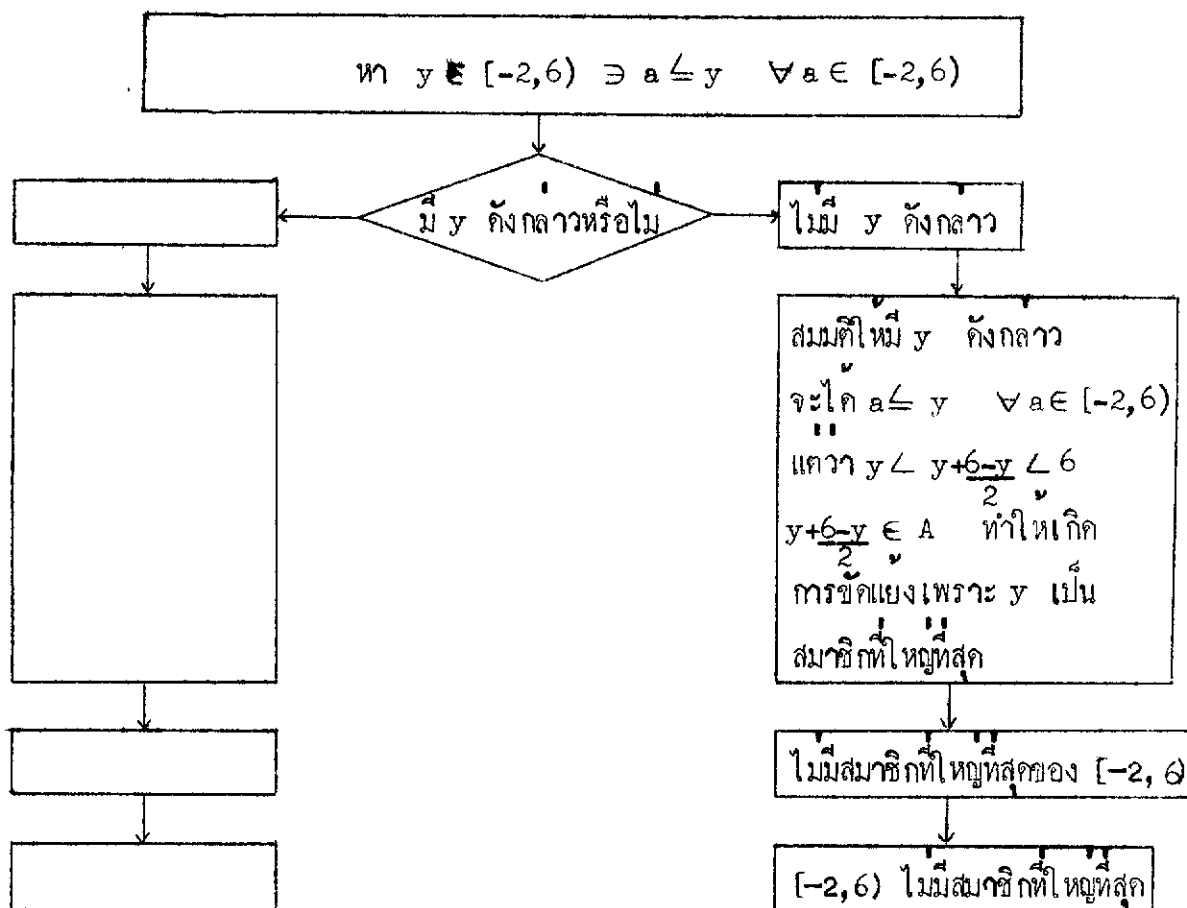
เห็นได้ชัดเลยว่า $8 \geq a \quad \forall a \in (-4, 8]$ และ $8 \in (-4, 8]$
ดังนั้นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $(-4, 8]$ คือ 8

□

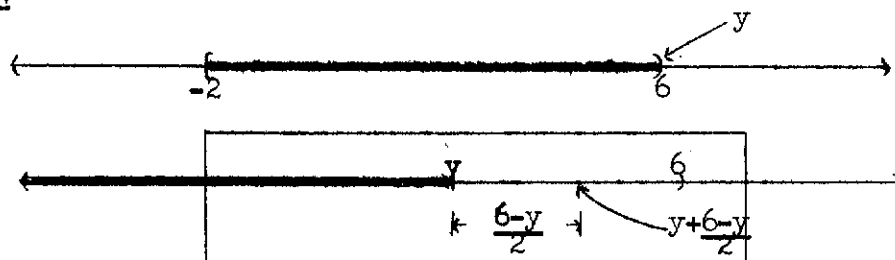
ลำดับขั้นตอนในการคิดตัวอย่าง 3.2

1. หาสมาชิกใน $[-2, 6)$ ซึ่งเป็นตัวที่ใหญ่ที่สุด
2. หาไม่ได้อีกคาดว่าไม่มี พยายามแสดงว่า $[-2, 6)$ ไม่มีสมาชิกใหญ่ที่สุด โดยดำเนินการต่อไป
3. สมมติให้ y เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด
เราทราบว่า $y + \frac{6-y}{2}$ ซึ่งมากกว่า y และอยู่ใน $[-2, 6)$ ซึ่งทำให้เกิดการขัดแย้งที่ว่า y ใหญ่ที่สุด ดังนั้นสมมติจึงไม่จริง
4. จากข้อ 3 $[-2, 6)$ ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

ตัวอย่าง 3.2 สมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $[-2, 6)$ มีหรือไม่
วิเคราะห์



วิธีทำ



สมมติว่า $[-2, 6)$ มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด ให้เป็น y

$$\rightarrow y \in [-2, 6)$$

$$\rightarrow y < 6$$

$$\rightarrow y < y + \frac{6-y}{2} < 6$$

$y + \frac{6-y}{2} \in [-2, 6)$ และ $y < y + \frac{6-y}{2}$
 เนื่องจาก y เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $[-2, 6)$ ดังนั้น
 $y + \frac{6-y}{2} < y$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $y < y + \frac{6-y}{2}$
 เพราะฉะนั้นที่สมมติขึ้นเป็นไปไม่ได้
 นั่นคือ $[-2, 6)$ ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

□

คำถามชุดที่ 4

1. ทุก ๆ เซตจำกัดจะมีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดหรือไม่
2. ทุก ๆ เซตนั้นที่ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด หรือไม่
3. คาขอบเขตบนของ A จะเป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A เสมอหรือไม่
4. "ถ้าเซต A มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดแล้ว A จะมีขอบเขตบน" ข้อความนี้ ถูกหรือไม่
5. สมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A จะเป็นคาขอบเขตบนของ A เสมอหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ 2

1. สมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ คือ
2. จงหาสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $\left\{ \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 10 \right\}$

นิยาม 4 กำหนด $A \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$
 x เป็นคาขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ $x \leq a \quad \forall a \in A$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนด $[4, 8]$

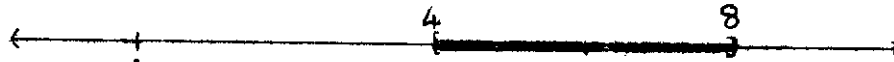
จงแสดงว่า

1. $4, 0$ เป็นคาขอบเขตล่างของ $[4, 8]$
2. $6, 9$ ไม่เป็นคาขอบเขตล่างของ $[4, 8]$

จากนิยาม 5 สามารถสรุปเป็นแบบวิเคราะห้ลำดับขั้นการคิด เพื่อแสดงว่า A
 มีขอบเขตล่าง ได้ดังนี้

วิธีทำ

1)



$$\begin{aligned} 1. \text{ เนื่องจาก } a \in [4, 8] &\rightarrow 4 \leq a \leq 8 \\ &\rightarrow 4 \leq a \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 4 \leq a \quad \forall a \in [4, 8]$$

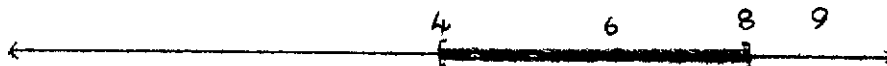
นั่นคือ 4 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[4, 8]$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } a \in [4, 8] &\rightarrow 4 \leq a \leq 8 \\ &\rightarrow 0 \leq a \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 \leq a \quad \forall a \in [4, 8]$$

นั่นคือ 0 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[4, 8]$

2)



$$\text{เนื่องจาก } 5 \in [4, 8] \text{ และ } 5 < 6$$

$$\text{ดังนั้นข้อความ } 6 \leq a \quad \forall a \in [4, 8] \text{ เป็นเท็จ}$$

$\therefore 6$ ไม่เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[4, 8]$

$$\text{เนื่องจาก } 7 \in [4, 8] \text{ และ } 7 < 9$$

$$\text{ดังนั้นข้อความ } 9 \leq a \quad \forall a \in [4, 8] \text{ เป็นเท็จ}$$

$\therefore 9$ ไม่เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[4, 8]$

□

นิยาม 5 กำหนด $A \subset \mathbb{R}$

A มีขอบเขตล่าง ก็ต่อเมื่อ A มีค่าขอบเขตล่าง

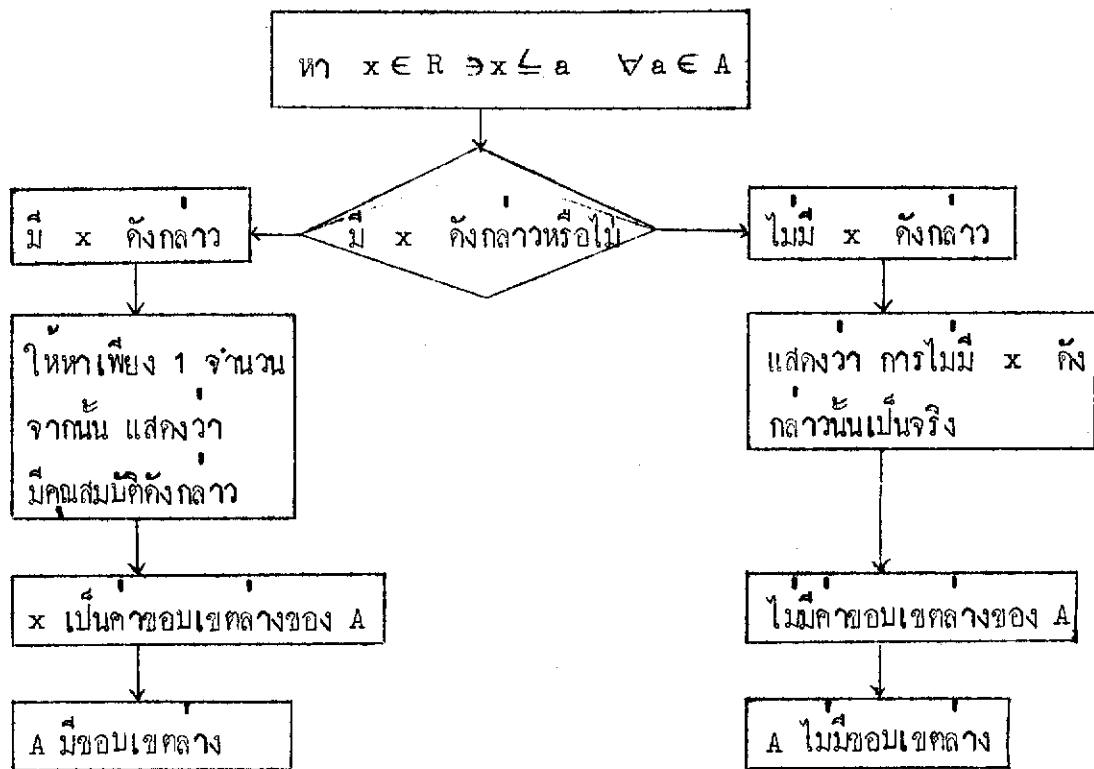
จากนิยาม 5 สามารถสรุปเป็นแบบวิเคราะหาลำดับขั้นตอนการคิด เพื่อแสดงว่า A มีขอบเขตล่าง ได้ดังนี้

ลำดับขั้นตอนในการแสดงว่า A มีขอบเขตกลางหรือไม่

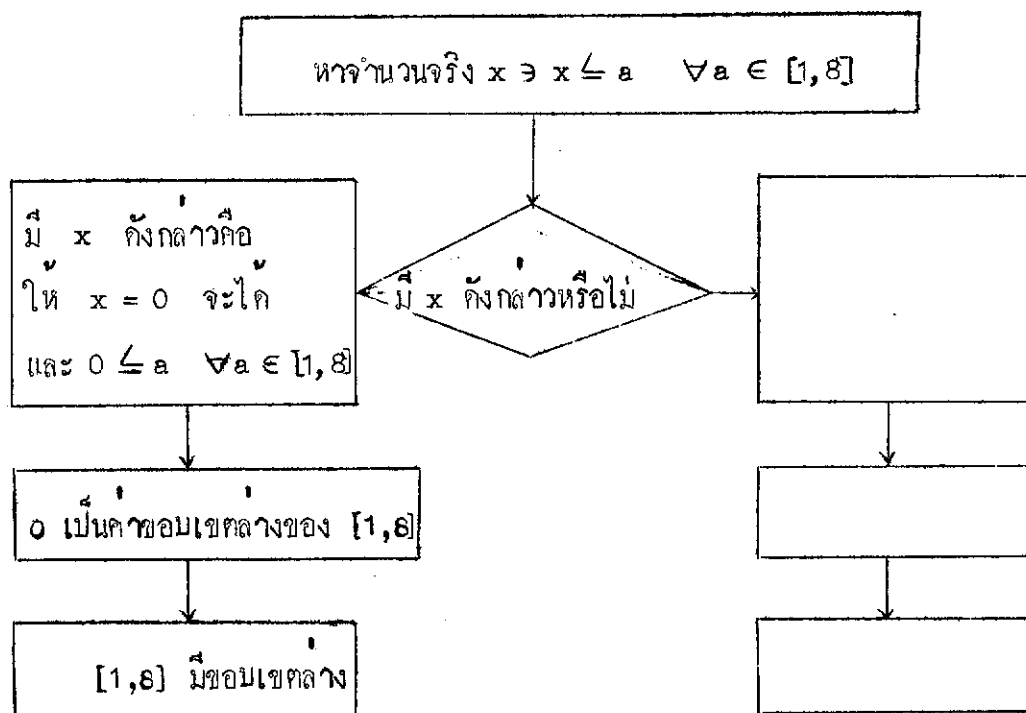
1. พิจารณาวามีจำนวนจริง x ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A หรือไม่
2. จากข้อ 1 จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้ามี x ดังกล่าว กำหนด x แล้วแสดงว่า x น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A
 - 2.2 ถ้าไม่มี x ดังกล่าว ให้สมมติ x ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A จากนั้นพยายามหาข้อขัดแย้ง ถ้าหาได้สามารถสรุปว่าสมมติเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นสรุปว่าไม่มี x ดังกล่าว
3. จากข้อ 2 จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 3.1 ถ้าเป็นกรณี 2.1 จะได้ว่า x เป็นค่าขอบเขตล่างของ A
 - 3.2 ถ้าเป็นกรณี 2.2 จะได้ว่า A ไม่มีค่าขอบเขตล่างของ A
4. จากข้อ 3. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 4.1 ถ้าเป็นกรณี 3.1 จะได้ว่า A มีขอบเขตล่าง
 - 4.2 ถ้าเป็นกรณี 3.2 จะได้ว่า A ไม่มีขอบเขตล่าง

ลำดับขั้นตอนในการแสดงในตัวอย่าง 5.1

1. หาจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใน $[1, 8]$
2. เห็นชัดเจนว่า 0 เป็นจำนวนหนึ่งที่สามารถลดลงกับที่ของการในข้อ 1
3. แสดงว่า 0 น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวใน $[1, 8]$
4. จากข้อ 3 สรุปได้ว่า 0 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[1, 8]$
5. จากข้อ 4 สรุปได้ว่า $[1, 8]$ มีขอบเขตล่าง



ตัวอย่าง 5.1 จงแสดงว่า $[1,8]$ มีขอบเขตล่าง
วิเคราะห์



ลำดับชั้นในการแสดงในตัวอย่าง 5.2

1. หาจำนวนจริง x ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใน $(-\infty, c)$
2. สมมติให้มี x ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใน $(-\infty, c)$
เนื่องจาก $x-1 \in (-\infty, c)$ ดังนั้น $x \leq x-1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
ดังนั้นสมมติไม่จริง
3. จากข้อ 2 สรุปได้ว่า ไม่มีค่าขอบเขตล่างของ $(-\infty, c)$
4. จากข้อ 3. สรุปได้ว่า $(-\infty, c)$ ไม่มีขอบเขตล่าง

วิธีทำ

เห็นชัดเจนว่า $0 < a \quad \forall a \in [1, 8]$

จะได้ $0 \leq a \quad \forall a \in [1, 8]$

นั่นคือ 0 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[1, 8]$

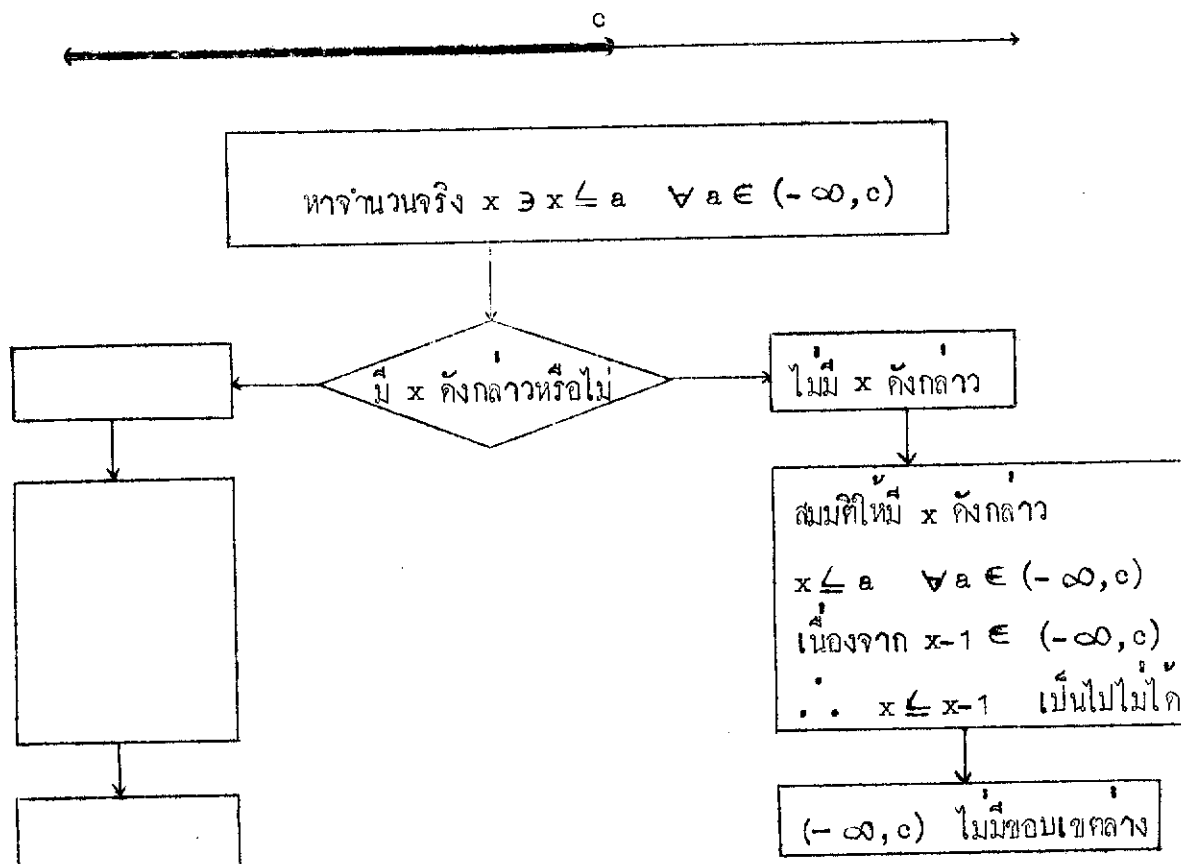
ดังนั้น $[1, 8]$ มีขอบเขตล่าง

□

ตัวอย่าง 5.2 จงแสดงว่า $(-\infty, c)$ ไม่มีขอบเขตล่าง

วิเคราะห์

พิจารณารูปประกอบ



วิธีทำ

สมมติให้ $(-\infty, c)$ มีขอบเขตล่าง

นั่นคือ จะมีจำนวนจริง x เป็นค่าขอบเขตล่างของ $(-\infty, c)$

ดังนั้น $x \leq a \quad \forall a \in (-\infty, c)$

$\rightarrow x < c$

$\rightarrow x-1 < c$ (คุณสมบัติของจำนวนจริง)

$\rightarrow a = x-1 \quad \exists a \in (-\infty, c)$

$\rightarrow x \leq x-1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (คุณสมบัติจำนวนจริง)

ดังนั้นที่สมมติเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $(-\infty, c)$ ไม่มีขอบเขตล่าง

□

คำถามชุดที่ 5

1. $\mathbb{R}$ มีขอบเขตล่างหรือไม่
2. $\emptyset$ มีขอบเขตล่างหรือไม่

ตัวอย่าง 5.3

1. คาขอบเขตล่างของ $[1, 2]$ ไ้แก่ $-5, -4, -3, -1, 0, 1$ เป็นต้น
2. คาขอบเขตล่างของ $(-4, 8]$ ไ้แก่ $-5, -6, -7, -8, -9$ เป็นต้น
3. $(-2, 6)$ คาขอบเขตล่างไ้แก่ $-4, -3, -2$ เป็นต้น
4. $(0, \infty)$ คาขอบเขตล่างไ้แก่ $-4, -3, -2, -1, 0$ เป็นต้น
5. $[a, \infty)$ คาขอบเขตล่างไ้แก่ $a-3, a-2, a-1, a$ เป็นต้น
6. $(-\infty, \infty)$ ไม่มีคาขอบเขตล่าง

□

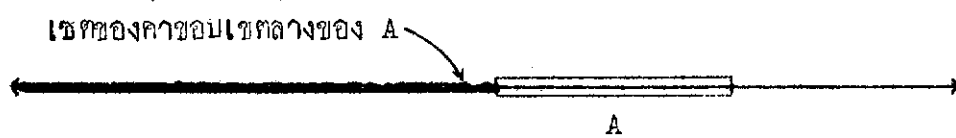
คำถามชุดที่ 6

1. ทุก ๆ ช่วงมีขอบเขตล่างหรือไม่
2. ช่วงลักษณะใดที่มีขอบเขตล่าง
3. ถ้า x เป็นคาขอบเขตล่างของ A และ $y < x$ แล้ว y เป็นคาขอบเขตล่างของ A หรือไม่

แนวคิดตัวอย่าง 5.4

1. ค่าที่จำนวนจริงอะไรบางที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวใน $[4, 6]$
แล้วนำมาเขียนเป็นเซต
2. หาค่าของเกี่ยวกับข้อ 1
3. หาค่าของเกี่ยวกับข้อ 1

จากตัวอย่าง 5.3 จะเห็นโมบิของคาขอบเขตล่างของ A จะมีลักษณะดังนี้



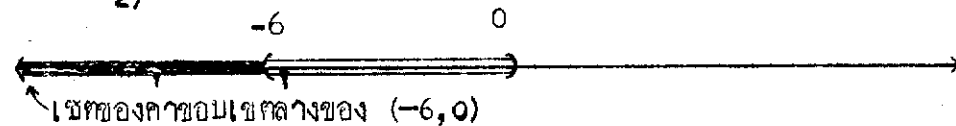
ตัวอย่าง 5.4 จงหาเซตของคาขอบเขตล่างของ $[4, 6]$, $(-6, 0)$, $(-\infty, 4)$

วิธีทำ 1)



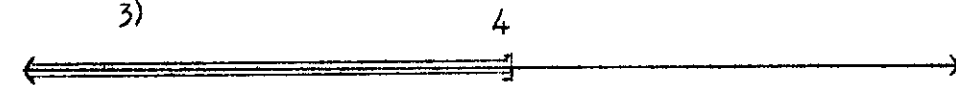
$\therefore$ เซตของคาขอบเขตล่างของ $[4, 6]$ คือ $\{x | x \leq 4\}$

2)



$\therefore$ เซตของคาขอบเขตล่างของ $(-6, 0)$ คือ $\{x | x \leq -6\}$

3)



$\therefore$ เซตของคาขอบเขตล่างของ $(-\infty, 4]$ คือ $\emptyset$

□

คำถามชุดที่ 7

1. เซตของคาขอบเขตล่างของเซตว่างคือ
2. เซตของคาขอบเขตล่างของ $\{1\}$ คือ

แบบฝึกหัดที่ 3

1. I^+ มีขอบเขตล่างหรือไม่ ถ้ามีให้แสดง
2. R^+ มีขอบเขตล่างหรือไม่ ถ้ามีให้แสดง
3. ถ้า $a \in (0, 4)$ ให้หาจำนวนจริงที่น้อยกว่า a และอยู่ใน $(0, 4)$
มา 5 จำนวน

นิยาม 6 ถ้า $A \subset R$ และ $y \in A$

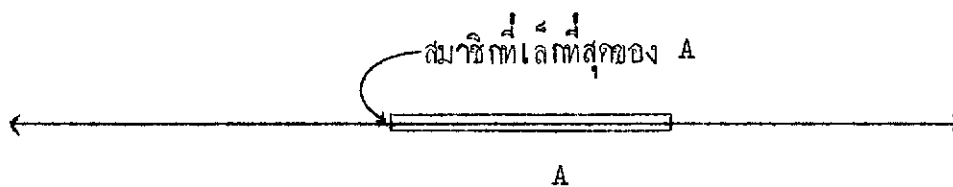
y จะเป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A ก็ต่อเมื่อ $y \leq a \quad \forall a \in A$

ดังนั้น ถ้า y เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A จะได้ว่า

1. $A \neq \emptyset$

2. $y \in A$

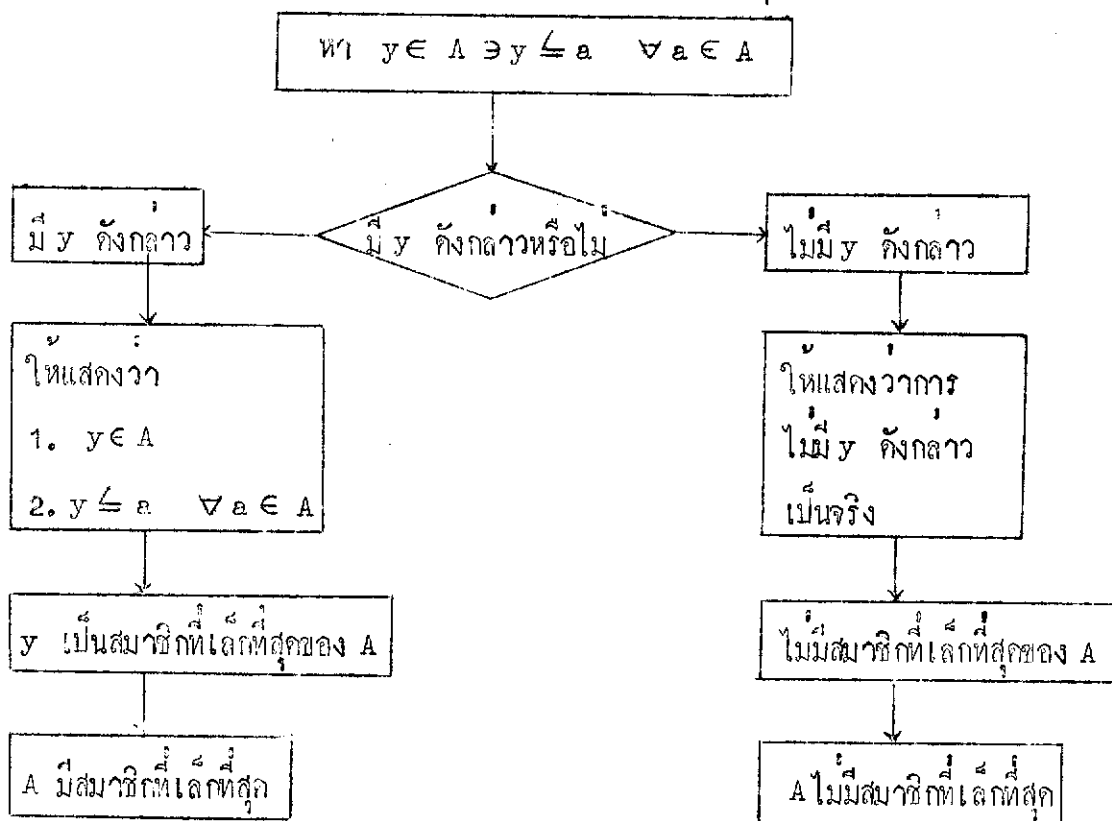
และมีโมโนโทนิกขึ้น



ลำดับขั้นตอนในการคิดเพื่อแสดงว่า A มีสมาชิกที่เล็กที่สุดหรือไม่

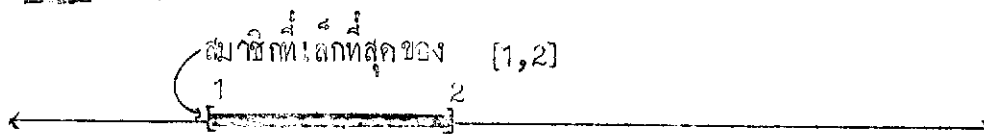
1. พิจารณาวัดจำนวนจริง y ซึ่งอยู่ใน A และน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A หรือไม่
2. จากข้อ 1. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้ามี y ดังกล่าว กำหนด y แล้วแสดงว่า y น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A
 - 2.2 ถ้าไม่มี y ดังกล่าวให้สมมติว่ามี y ที่อยู่ใน A และน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ A จากนั้นพยายามหาว่าถ้ามี y ดังกล่าวแล้วจะสามารถสรุปได้ว่าสมาชิกนั้นไปไม่ได้ นั่นคือไม่มี y ดังกล่าว
3. จากข้อ 2. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 3.1 ถ้าเป็นกรณี 1 จะได้ว่า y เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A
 - 3.2 ถ้าเป็นกรณี 2 จะได้ว่า ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A
4. จากข้อ 3. จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 4.1 ถ้าเป็นกรณี 3.1 จะได้ว่า A มีสมาชิกที่เล็กที่สุด
 - 4.2 ถ้าเป็นกรณี 3.2 จะได้ว่า A ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด

แบบวิเคราะห์ลำดับขั้นตอนการคิด เพื่อแสดงว่า A มีสมาชิกที่เล็กที่สุด



ตัวอย่าง 6.1 จงหาสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $[1, 2]$ และ $[-4, 8]$

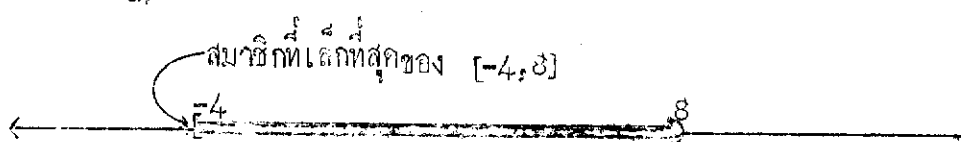
วิธีทำ 1)



เห็นได้ชัดเลยว่า $1 \leq a \quad \forall a \in [1, 2]$ และ $1 \in [1, 2]$

ดังนั้น สมาชิกที่เล็กที่สุดของ $[1, 2]$ คือ 1

2)



เห็นได้ชัดเลยว่า $-4 \leq a \quad \forall a \in [-4, 8]$ และ $-4 \in [-4, 8]$

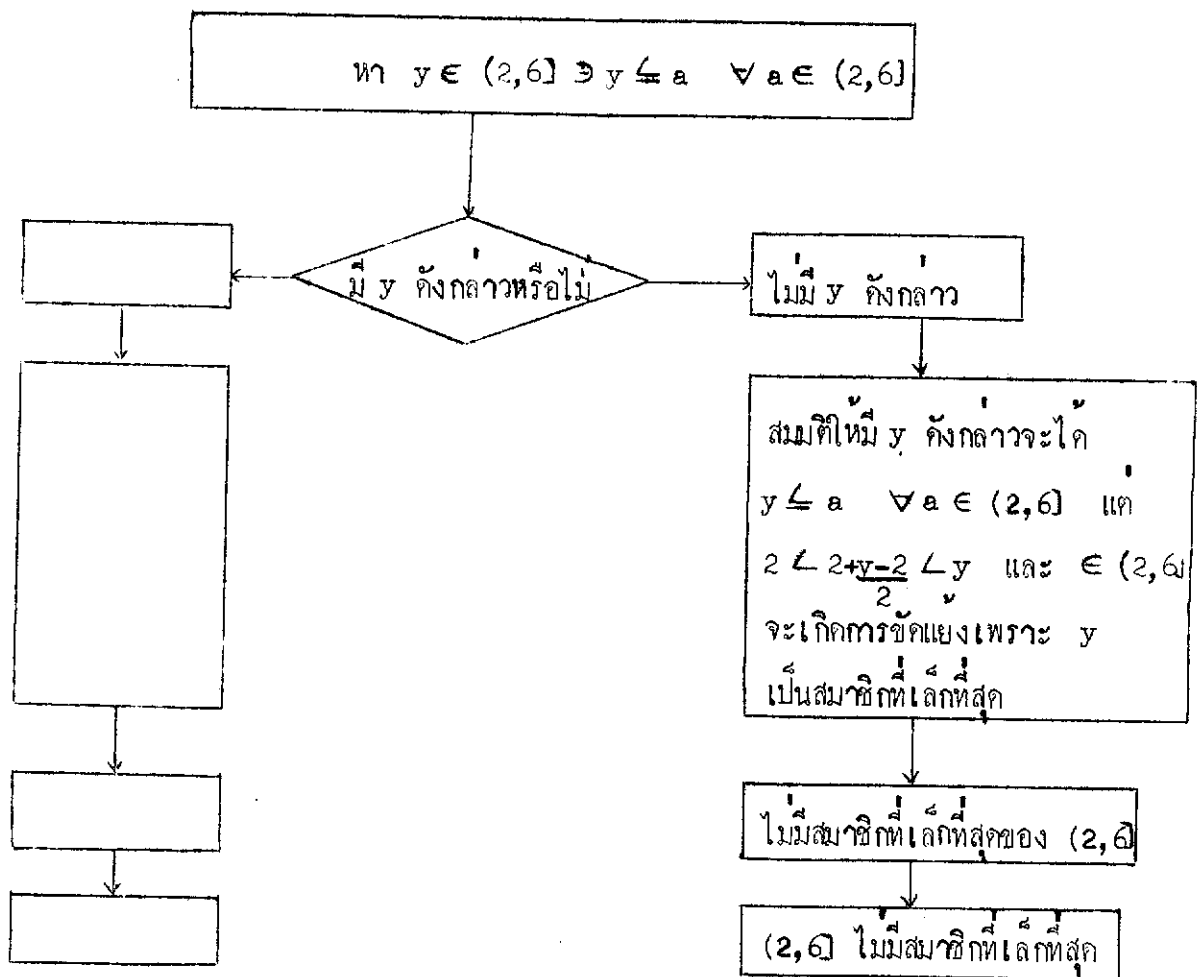
ดังนั้นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $[-4, 8]$ คือ -4

□

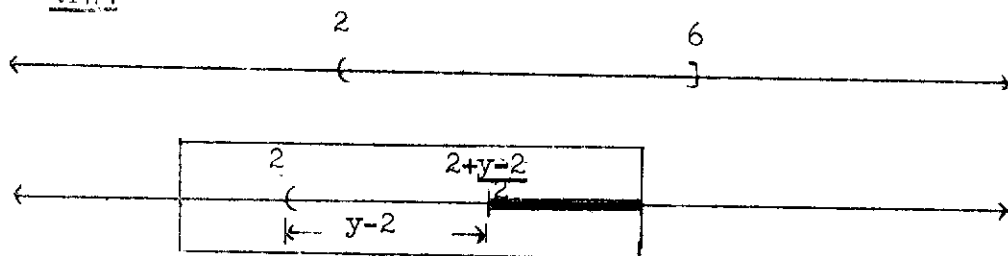
ลำดับขั้นตอนในการคิด ตัวอย่าง 6.2

1. หาสมาชิกใน $(2,6]$ ซึ่งเป็นตัวที่เล็กที่สุด
2. หากไม่ได้จึงคาดว่ามี พยายามแสดงว่า $(2,6]$ ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด
โดยการดำเนินการดังต่อไปนี้
3. สมมติให้ y เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด
เราทราบว่า $2 + \frac{y-2}{2}$ ซึ่งน้อยกว่า และอยู่ใน $(2,6]$ ทำให้เกิด
การขัดแย้งที่ว่า y เล็กที่สุด ดังนั้นที่สมมตินั้นไม่จริง
4. จากข้อ 3. $(2,6]$ ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด

ตัวอย่าง 6.2 สมาชิกที่เล็กที่สุดของ $(2,6]$ มีหรือไม่
วิเคราะห์



วิธีทำ



สมมติว่า $(2,6]$ มีสมาชิกที่เล็กที่สุด ให้เป็น y
 $y \in (2,6]$

$$\rightarrow 2 < y$$

$$\rightarrow 2 < 2 + \frac{y-2}{2} < y$$

$$\rightarrow \frac{2+y-2}{2} \in (2,6] \quad \text{และ} \quad (2 + \frac{y-2}{2}) < y$$

เนื่องจาก y เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $(2,6]$ ดังนั้น

$$y < (2 + \frac{y-2}{2}) \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า} \quad (2 + \frac{y-2}{2}) < y$$

เพราะฉะนั้นสมมติฐานเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $(2,6]$ ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด

คำถามชุดที่ 8

1. ทุก ๆ เซตจำกัดจะมีสมาชิกที่เล็กที่สุดหรือไม่
2. ทุก ๆ เซตนั้นที่ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุดหรือไม่
3. คาขอบเขตล่างของ A จะเป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A เสมอไปหรือไม่
4. "ถ้าเซต A มีสมาชิกที่เล็กที่สุดแล้ว A จะมีขอบเขตล่าง" ข้อความนี้ถูกต้องหรือไม่
5. สมาชิกที่เล็กที่สุดของ A จะเป็นคาขอบเขตล่างของ A เสมอไปหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ 4

1. สมาชิกที่เล็กที่สุดของ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ คือ
2. สมาชิกที่เล็กที่สุดของ $\{x^3 \mid -3 \leq x \leq 3\}$ คือ

นิยาม 7

ถ้า $A \subset \mathbb{R}$ A จะมีขอบเขต ก่อเมื่อ

1. A มีขอบเขตบน

และ 2. A มีขอบเขตล่าง

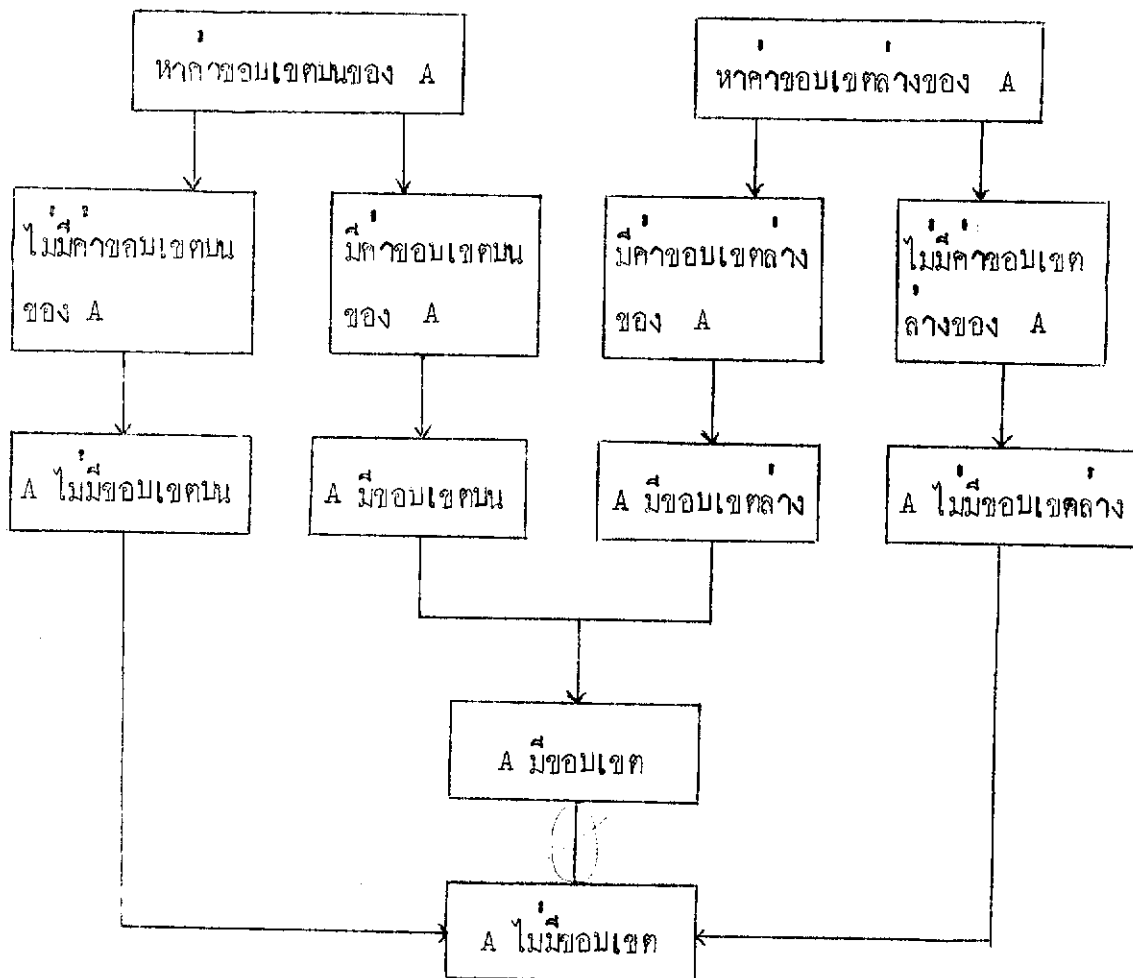
ลำดับขั้นตอนในการแสดงว่า A มีขอบเขตหรือไม่

1. หาจำนวนจริง x และแสดงว่า x เป็นค่าขอบเขตบน จะเป็นได้ 2 กรณี
 - 1.1 ถ้าไม่มี x ดังกล่าว จะได้ว่า A ไม่มีขอบเขตบน ดังนั้น A ไม่มีขอบเขต
 - 1.2 ถ้ามี x ดังกล่าว จะได้ว่า A มีขอบเขตบน
2. จากข้อ 1. ถ้าเป็นกรณี 1.2 ให้หาจำนวนจริง y และแสดงว่า y เป็นค่าขอบเขตล่างของ A ซึ่งเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้าไม่มี y ดังกล่าว จะได้ว่า A ไม่มีขอบเขตล่าง ดังนั้น A ไม่มีขอบเขต
 - 2.2 ถ้ามี y ดังกล่าว จะได้ว่า A มีขอบเขตล่าง
3. จากกรณี 1.2 และ 2.2 สรุปได้ว่า A มีขอบเขต

ดังนั้นการแสดงว่า $A \subset R$ มีขอบเขตต้องแสดงดังนี้

1. A มีขอบเขตบน
2. A มีขอบเขตล่าง

แบบวิเคราะห์หลักขั้นเพื่อพิจารณาว่า A มีขอบเขตหรือไม่



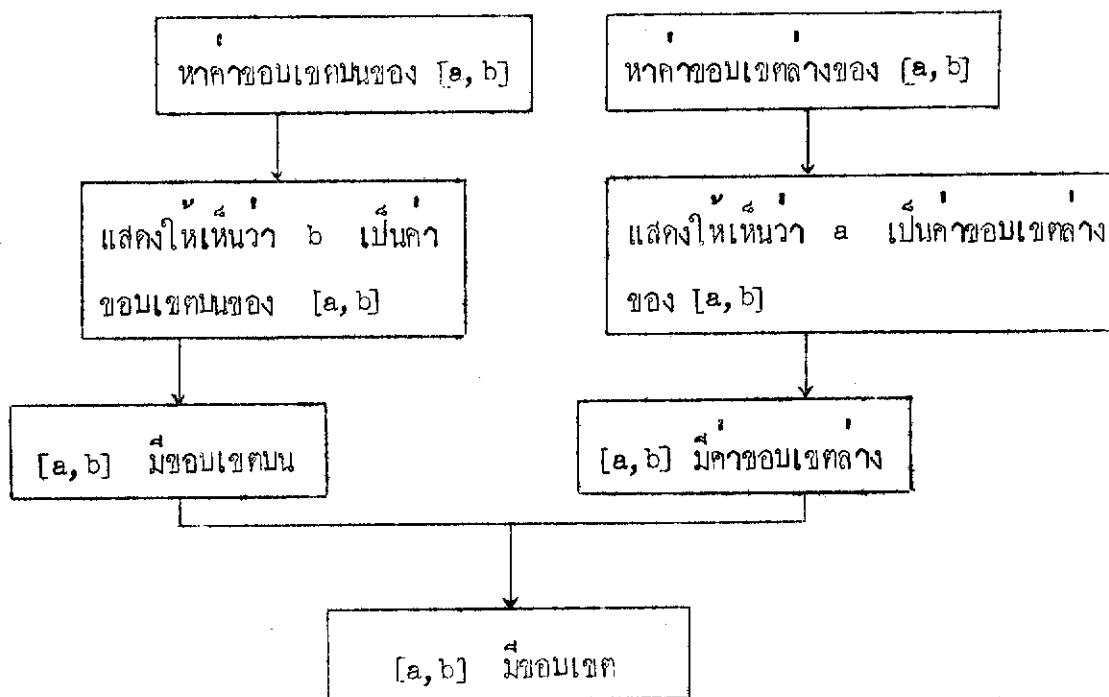
ลำดับขั้นตอนในการคิด ตัวอย่าง 7.1

1. หากค่าขอบเขตบนของ $[a, b]$ ได้ b เป็นค่าขอบเขตบนของ $[a, b]$
2. จากข้อ 1. แสดงว่า $[a, b]$ มีขอบเขตบน
3. หากค่าขอบเขตล่างของ $[a, b]$ ได้ a เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[a, b]$
4. จากข้อ 3. $[a, b]$ มีขอบเขตล่าง
5. จากข้อ 2. และ 4. สรุปได้ว่า $[a, b]$ มีขอบเขต

ตัวอย่าง 7.1 จงแสดงว่า $[a, b]$ มีขอบเขต

วิธีทำ

วิเคราะห์



วิธีทำ

1. เห็นชัดเจนว่า $c \leq b, \forall c \in [a, b]$
 $\therefore b$ เป็นค่าขอบเขตบนของ $[a, b]$
 จะได้ $[a, b]$ มีค่าขอบเขตบน
 2. เห็นชัดเจนว่า $a \leq c, \forall c \in [a, b]$
 $\therefore a$ เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[a, b]$
 จะได้ $[a, b]$ มีขอบเขตล่าง
- จาก 1 และ 2 จะได้ว่า $[a, b]$ มีขอบเขต

□

คำถามชุดที่ 9

1. (a, b) มีขอบเขตหรือไม่
2. R มีขอบเขตหรือไม่
3. $(-\infty, a)$ มีขอบเขตหรือไม่
4. (b, ∞) มีขอบเขตหรือไม่

แนวคิดตัวอย่าง 8.1

1. ต้องแสดงว่า 2 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[1,2]$ นั่นคือ 2 มากกว่า หรือ เท่ากับสมาชิกทุกตัวของ $[1,2]$
2. แสดงว่า ถ้า y เป็นค่าขอบเขตบนของ $[1,2]$ จะได้ว่า $2 \leq y$

แบบฝึกหัด 5

1. จงแสดงว่า $\{x \mid |x| < 1\}$ มีขอบเขต
2. เซต $\{x \mid x^2 = 1\}$ มีขอบเขตหรือไม่
3. เซต $\{f(x) \mid f(x) = 4 \text{ บนช่วง } [0, 6]\}$ มีขอบเขตหรือไม่

นิยาม 8 จำนวนจริง x จะเป็นขอบบนของเซต A ก็ต่อเมื่อ

1. x เป็นค่าขอบเขตบนของ A
- และ 2. ถ้า y เป็นค่าขอบเขตบนของ A จะได้ $x \leq y$
ใช้สัญลักษณ์ $\sup A$ แทนขอบบนของ A

ลำดับขั้นตอนในการแสดงว่า $x = \sup A$

1. แสดงว่า x เป็นค่าขอบเขตบนของ A นั่นคือ แสดงว่า $a \leq x \quad \forall a \in A$
2. ให้ y เป็นค่าขอบเขตบนใด ๆ ของ A แสดงว่า $x \leq y$

ตัวอย่าง 8.1 จงแสดงว่า 2 เป็นขอบบนของ $[1, 2]$

วิธีทำ

1. เนื่องจาก $a \in [1, 2] \rightarrow 1 \leq a \leq 2$
 $\rightarrow a \leq 2$

ดังนั้น $a \leq 2 \quad \forall a \in [1, 2]$

นั่นคือ 2 เป็นค่าขอบเขตบนของ $[1, 2]$

2. ถ้าให้ y เป็นค่าขอบเขตบนใด ๆ ของ $[1, 2]$

จะได้ $a \leq y \quad \forall a \in [1, 2]$

ดังนั้น $2 \leq y$ เพราะว่า $2 \in [1, 2]$

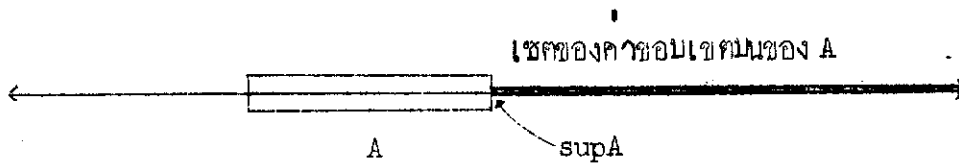
นั่นคือ $2 \leq y$ โดยที่ y เป็นค่าขอบเขตบนใด ๆ ของ $[1, 2]$

จาก 1. และ 2. จะได้ว่า $2 = \sup [1, 2]$

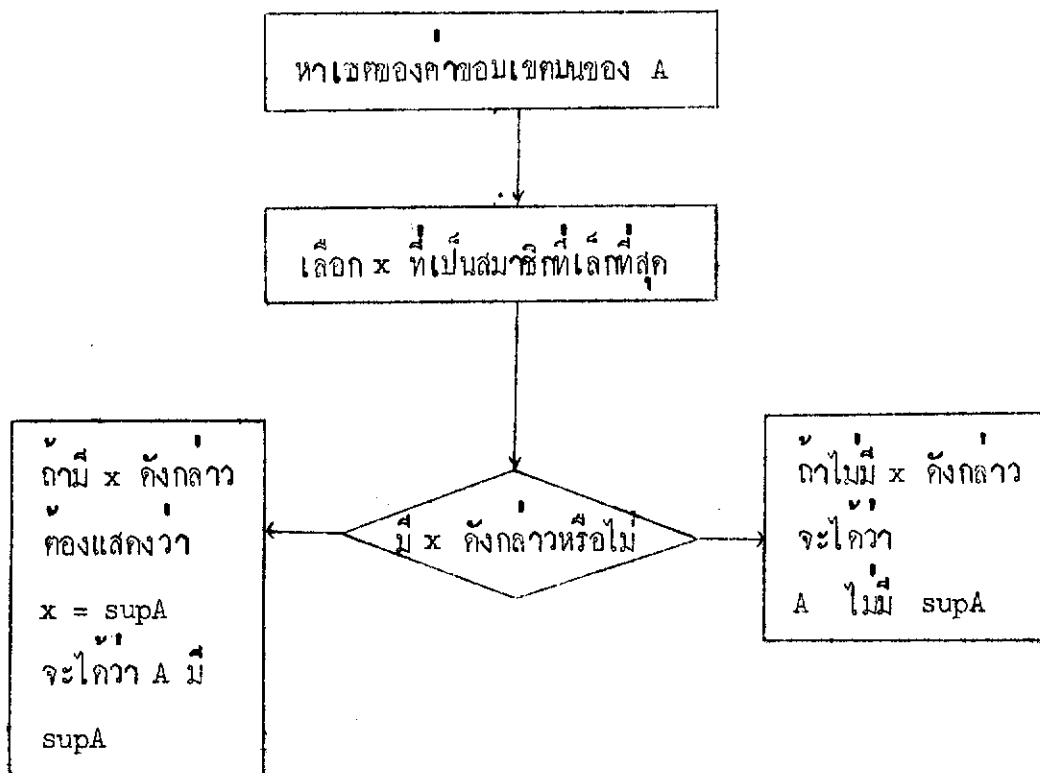
ลำดับขั้นตอนในการหา $\sup A$

1. เขียนเซตของคาขอบเขตบนของ A
2. เลือก x ที่เป็นสมาชิกเล็กที่สุดของเซตในข้อ 1 ซึ่งเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้ามี x ดังกล่าว ต้องแสดง $x = \sup A$ นั่นคือแสดง
 - 1) x เป็นคาขอบเขตบนของ A
 - 2) ถ้า y เป็นคาขอบเขตบนใดๆ ของ A จะได้ $x \leq y$จะได้ว่า A มี $\sup A$
 - 2.2 ถ้าไม่มี x ดังกล่าว ต้องแสดงโดยการสมมติให้มี $\sup A$
จากนั้นพยายามหาข้อขัดแย้ง จะได้ที่สมมตินั้นไม่จริง
นั่นคือ A ไม่มี $\sup A$

พิจารณาจะเห็นว่า $\sup A$ เป็นค่าขอบเขตบนของ A ที่เล็กที่สุด มีนิภาพ
ของ $\sup A$ เป็นดังนี้



หลักในการหา $\sup A$

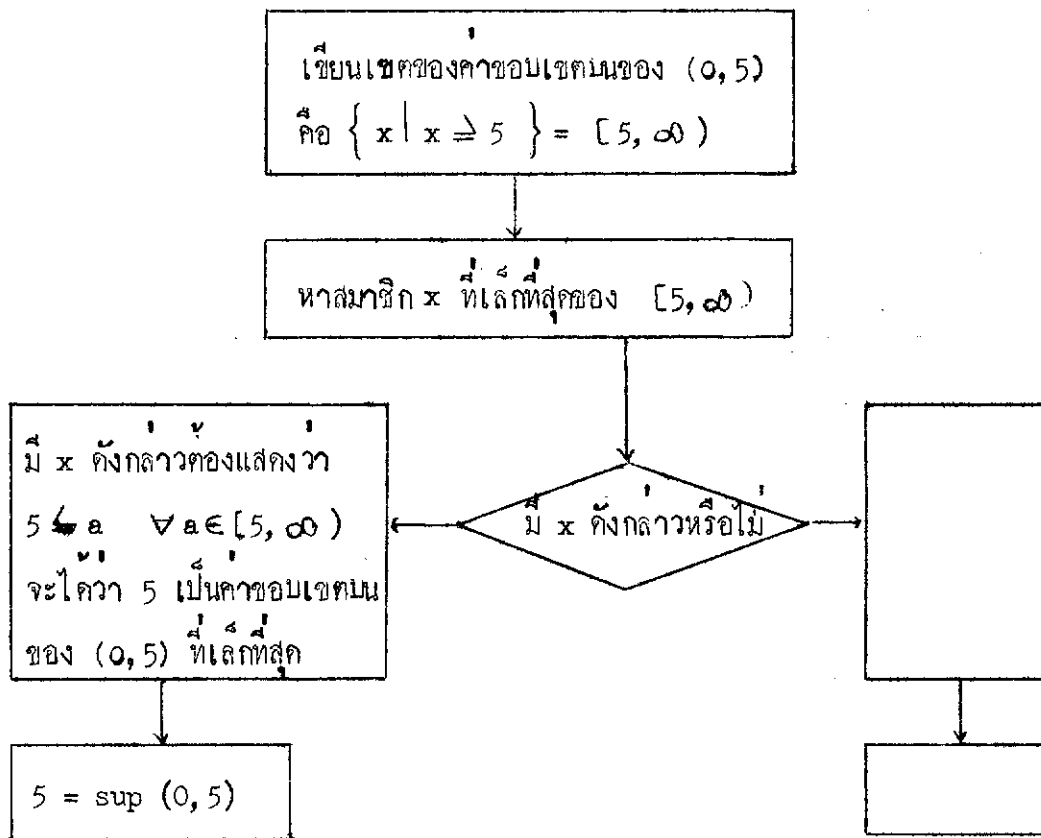


ลำดับขั้นในการคิด ตัวอย่าง 8.2

1. เขียนเซตของค่าขอบเขตบนของ $(0, 5)$ คือ $\{x | x \geq 5\} = [5, \infty)$
2. จากข้อ 1 หา x ที่เล็กที่สุดของ $[5, \infty)$
3. จากข้อ 2 กำหนด $x=5$ และแสดงว่า $5 \leq a \quad \forall a \in [5, \infty)$
จะได้ 5 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $[5, \infty)$
4. สรุปได้ว่า $5 = \sup (0, 5)$

ตัวอย่าง 8.2 จงหาพหุมีของ $(0, 5)$

วิเคราะห์



วิธีทำ

เซตของค่าขอบเขตบนของ $(0, 5)$ คือ

$$\{ x \mid x \geq 5 \} = [5, \infty)$$

1. เห็นชัดเจนว่า $5 \in [5, \infty)$

2. ให้ $y \in [5, \infty)$

$$\rightarrow 5 \leq y < \infty$$

$$\rightarrow 5 \leq y \quad \forall y \in [5, \infty)$$

จาก 1, 2 จะได้ว่า 5 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $[5, \infty)$

นั่นคือ 5 เป็นค่าขอบเขตบนของ $(0, 5)$ ที่เล็กที่สุด

เพราะฉะนั้น 5 เป็นพหุมีของ $(0, 5)$

□

ลำดับขั้นในการคิด ตัวอย่าง 8.4

1. เขียนเซตคาบอมเซกบนของ $[8, \infty)$ คือ ϕ
2. หาสมาชิกที่เล็กที่สุดของ ϕ
3. เนื่องจาก ϕ ไม่มีสมาชิก ดังนั้น ϕ ไม่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด
4. จากข้อ 3 จะได้ว่า $[8, \infty)$ ไม่มีมูลฐาน

คำถามชุดที่ 10

1. " $\sup A$ จะอยู่ในเซต A " ขอความถูกต้องหรือไม่
2. กรณีที่ A เป็นช่วง $\sup A$ จะอยู่ใน A เมื่อ A เป็นช่วงลักษณะใด
3. กรณีที่ A เป็นช่วง $\sup A$ จะไม่อยู่ใน A เมื่อ A เป็นช่วงลักษณะใด

ตัวอย่าง 8.3

$\sup$ ที่มีของ $[1, 4]$ คือ 4

$\sup$ ที่มีของ $(2, 5)$ คือ 5

$\sup \{1, 2, 3, 4\}$ คือ 4

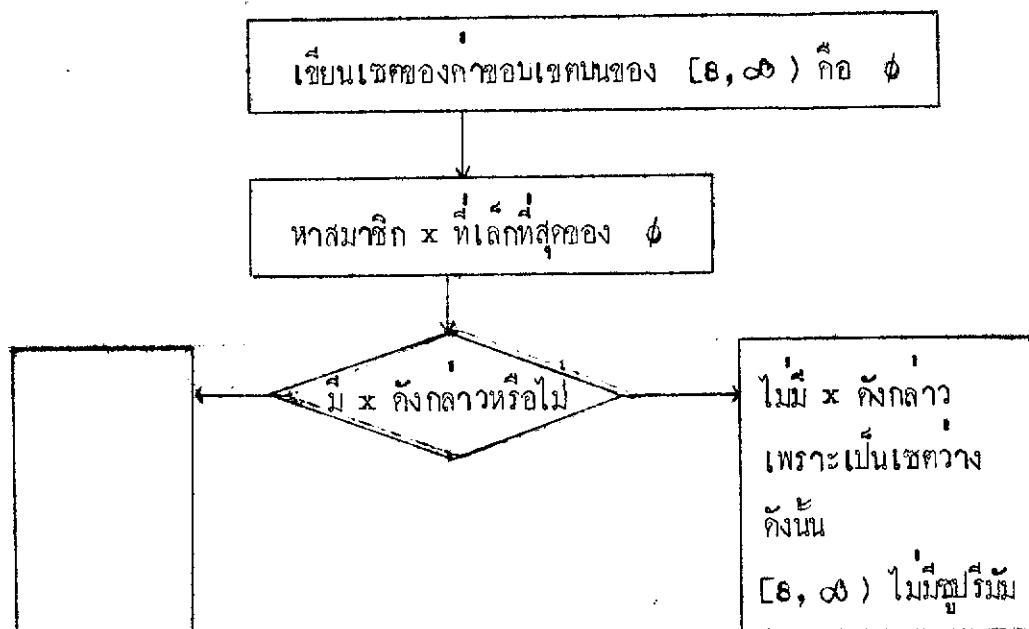
$\sup [4, 9)$ คือ 9

$\sup (-\infty, a)$ คือ a

□

ตัวอย่าง 8.4 กำหนด $[8, \infty)$ มี $\sup$ หรือไม่

วิเคราะห์



วิธีทำ

เนื่องจาก $[8, \infty)$ ไม่มีคาขอบเขตบน

ดังนั้น เซตของคาขอบเขตบนของ $[8, \infty)$ คือ $\emptyset$

เนื่องจาก $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก ดังนั้นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $\emptyset$ ไม่มี
จะได้ $[8, \infty)$ ไม่มีสมาชิก

□

ในบางครั้งเราเพียงต้องการทราบว่าเซต A นั้นมี $\sup A$ หรือไม่ โดยไม่สนใจว่า
จำนวนนั้นคืออะไร สัจพจน์ต่อไปนี้จะช่วยในการพิจารณาว่าเซต A นั้นมี $\sup A$ หรือไม่

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness)

ถ้า 1. $A \subset \mathbb{R}$ และ $A \neq \emptyset$

2. A มีขอบเขตบน

จะได้ว่า A มี $\sup A$

หมายเหตุ

$\sup A$ ที่อยู่ภายใน A จะเป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A

ข้อความข้อที่ 11 ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถ้า A มีขอบเขตบนแล้ว จะมี $\sup A$

2. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ $A \neq \emptyset$ แล้วจะมี $\sup A$

3. เซตนั้นที่ไม่มีขอบเขตบนจะมีสมาชิก

4. ถ้า $x = \sup A$ แล้ว x เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ A

นิยาม 9 จำนวนจริง x จะเป็นอินฟิมัมของเซต A ก็ต่อเมื่อ

1. x เป็นค่าขอบเขตล่างของ A

และ 2. ถ้า y เป็นค่าขอบเขตล่างของ A จะได้ $x \geq y$

ใช้สัญลักษณ์ $\inf A$ แทนอินฟิมัมของ A

คำชี้แจงในการแสดงว่า $x = \inf A$

1. แสดงว่า x เป็นค่าขอบเขตล่างของ A นั่นคือ แสดงว่า

$$x \leq a \quad \forall a \in A$$

แนวคิดตัวอย่าง 9.1

1. ต้องแสดงว่า 1 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[1, 2]$ นั่นคือ 1
น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวของ $[1, 2]$
2. แสดงว่า ถ้า y เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[1, 2]$ จะได้ $1 \geq y$

2. ให้ y เป็นค่าขอบเขตล่างใด ๆ ของ A แล้วแสดงว่า $y \leq x$

ตัวอย่าง 9.1 จงแสดงว่า 1 เป็นอินฟิมัมของ $[1, 2]$

วิธีทำ

1. เนื่องจาก $a \in [1, 2] \rightarrow 1 \leq a \leq 2$
 $\rightarrow 1 \leq a$

ดังนั้น $1 \leq a \quad \forall a \in [1, 2]$

นั่นคือ 1 เป็นค่าขอบเขตล่างของ $[1, 2]$

2. ถ้าให้ y เป็นค่าขอบเขตล่างใด ๆ ของ $[1, 2]$

จะได้ $y \leq a \quad \forall a \in [1, 2]$

ดังนั้น $y \leq 1$ (เพราะว่า $1 \in [1, 2]$)

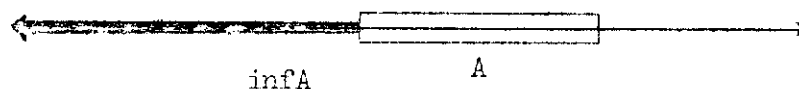
นั่นคือ $y \leq 1$ โดยที่ y เป็นค่าขอบเขตล่างใด ๆ ของ $[1, 2]$

จาก 1 และ 2 จะได้ว่า $1 = \inf [1, 2]$

□

พิจารณาจะเห็นว่า $\inf A$ เป็นค่าขอบเขตล่างของ A ที่ใหญ่ที่สุด มีบทบาทของ $\inf A$ เป็นดังนี้

เซตของค่าขอบเขตล่างของ A



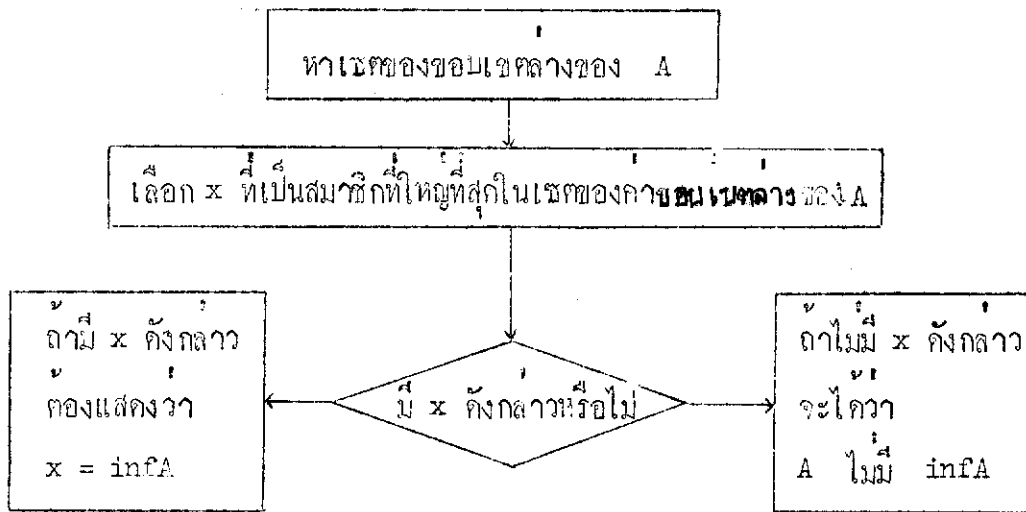
ลำดับขั้นตอนในการหา $\inf A$

1. เขียนเซตของค่าขอบเขตล่างของ A
2. เลือก x ที่เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดในเซตข้อ 1 ซึ่งเป็นได้ 2 กรณี
 - 2.1 ถ้ามี x ดังกล่าว ต้องแสดงว่า $x = \inf A$ นั่นคือแสดง
 - 1) x เป็นค่าขอบเขตล่างของ A
 - 2) ถ้า y เป็นค่าขอบเขตล่างใด ๆ ของ A จะได้ $y \leq x$
 - 2.2 ถ้าไม่มี x ดังกล่าว ต้องแสดงโดยการสมมติให้ $\inf A$ จากนั้นพยายามหาข้อขัดแย้ง จะได้ที่สมมตินั้นไม่จริง นั่นคือ A ไม่มี $\inf A$

ลำดับขั้นตอนในการคิด ตัวอย่าง 9.2

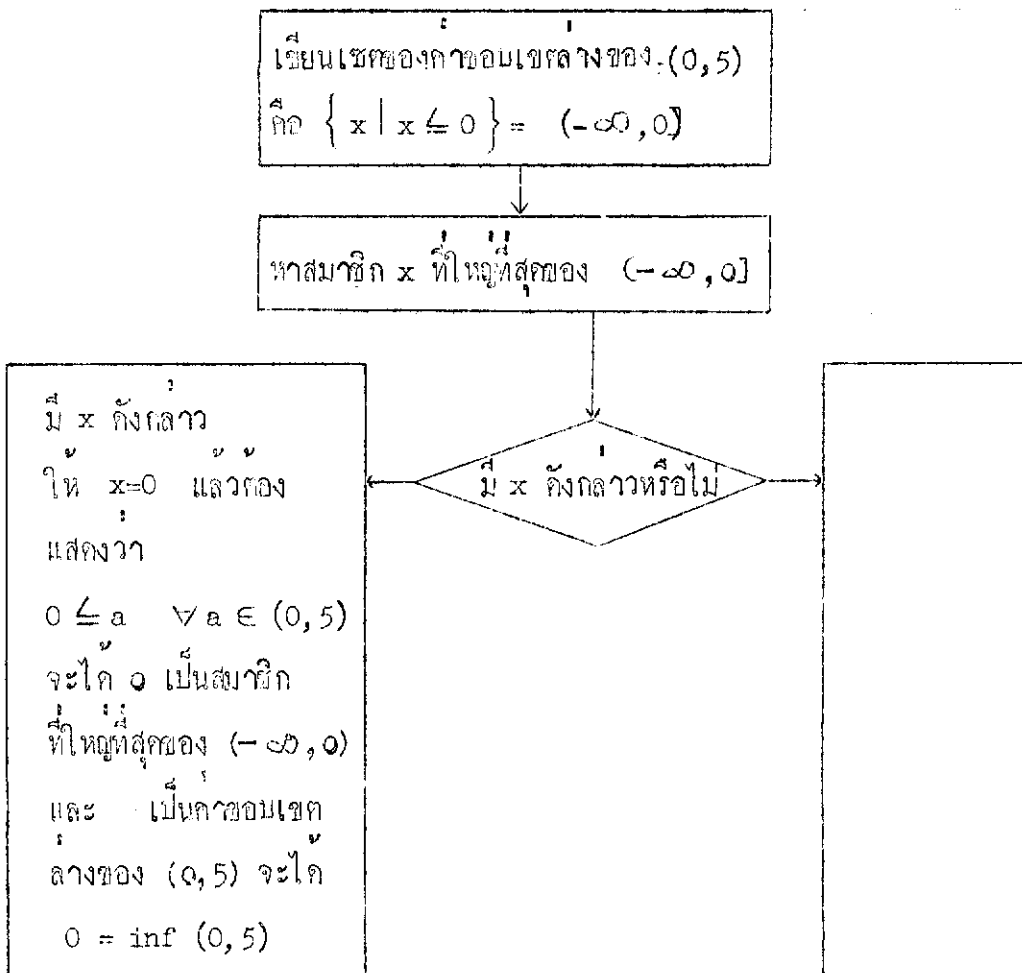
1. เขียนเซตของค่าขอบเขตล่างของ $(0, 5)$ คือ $\{x \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$
2. จากข้อ 1 หา x ที่ใหญ่ที่สุดของ $(-\infty, 0]$
3. จากข้อ 2 กำหนด $x = 0$ และแสดงว่า $0 \geq a \quad \forall a \in (-\infty, 0]$
จะได้ 0 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $(-\infty, 0]$
4. จากข้อ 3 จะเห็นได้ว่า $0 = \inf (0, 5)$

หลักในการหา $\inf A$



ตัวอย่าง 9.2 จงหาอินฟิมัมของ $(0, 5)$

วิเคราะห์



วิธีทำ

เซตของค่าขอบเขตกลางของ $(0,5)$ คือ

$$\{x | x \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

1. เห็นชัดเจนว่า $0 \in (-\infty, 0]$

2. ให้ $y \in (-\infty, 0]$

$$\rightarrow -\infty < y \leq 0$$

$$\rightarrow y \leq 0 \quad \forall y \in (-\infty, 0]$$

จาก 1, 2 จะได้ว่า 0 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $(-\infty, 0]$

นั่นคือ 0 เป็นค่าขอบเขตกลางของ $(0,5)$ ที่ใหญ่ที่สุด

เพราะฉะนั้น 0 เป็นอินฟิมัมของ $(0,5)$

□

คำถามข้อที่ 12

1. " $\inf A$ จะอยู่ในเซต A " ขอความถูกต้องหรือไม่

2. กรณี A เป็นช่วง $\inf A$ จะอยู่ใน A เมื่อ A เป็นช่วงลักษณะใด

3. กรณีที่ A เป็นช่วง $\inf A$ จะไม่อยู่ใน A เมื่อ A เป็นช่วงลักษณะใด

ตัวอย่าง 9.3

อินฟิมัมของ $[1,4]$ คือ 1

อินฟิมัมของ $(2,5)$ คือ 2

$\inf \{1,2,3,4\}$ คือ 1

$\inf [4,9)$ คือ 4

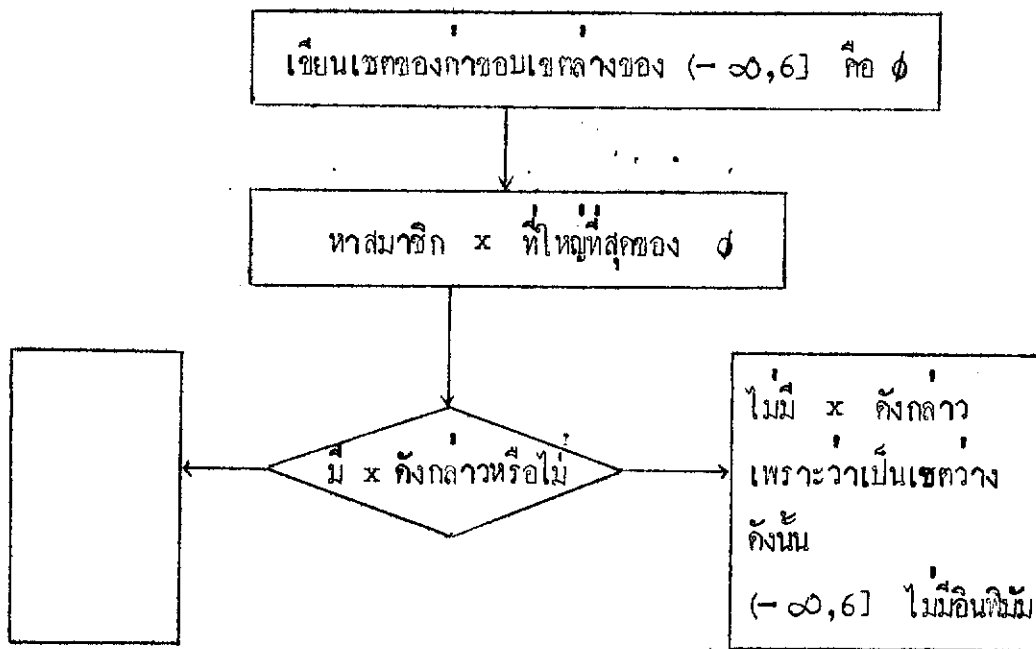
$\inf (a,\infty)$ คือ a

□

ลำดับขั้นตอนในการคิด ตัวอย่าง 9.4

1. เขียนเซตของคาขอบเขตล่างของ $(-\infty, 6]$ คือ $\emptyset$
2. หาสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $\emptyset$
3. เนื่องจาก $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก ดังนั้น $\emptyset$ ไม่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด
4. จากข้อ 3 จะได้ว่า $(-\infty, 6)$ ไม่มีอินฟินัม

ตัวอย่าง 9.4 กำหนด $(-\infty, 6]$ มีอินฟินัมหรือไม่
วิเคราะห์



วิธีทำ

เนื่องจาก $(-\infty, 6]$ ไม่มีค่าขอบเขตล่าง
ดังนั้น เซตของค่าขอบเขตล่างของ $(-\infty, 6]$ คือ $\emptyset$
เนื่องจาก $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก ดังนั้นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $\emptyset$ ไม่มี
จะได้ว่า $(-\infty, 6]$ ไม่มีอินฟินัม

□

ในบางครั้งเราเพียงต้องการทราบว่าเซต A นั้นมี $\inf A$ หรือไม่ โดยไม่สนใจว่าจำนวนนั้นคืออะไร ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการพิจารณาว่าเซต A นั้นมี $\inf A$ หรือไม่

ลำดับขั้นตอนในการคิดเพื่อแสดงว่าฟังก์ชัน f มีขอบเขตหรือไม่

1. หาเรนจ์ฟังก์ชัน f บน A ให้เป็น R_f เป็นได้ 2 กรณี
 - 1.1 ถ้า R_f ไม่มีขอบเขต ต้องแสดงว่า R_f ไม่มีขอบเขตบนหรือไม่มีขอบเขตล่าง
 - 1.2 ถ้า R_f มีขอบเขต ต้องแสดงว่า R_f มีขอบเขตบนและมีขอบเขตล่าง
2. ถ้าเป็นกรณีที่ 1.1 สรุปได้ว่าฟังก์ชัน f ไม่มีขอบเขตบนเขต A และถ้าเป็นกรณีที่ 2.2 สรุปได้ว่าฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนเขต A

ทฤษฎี

- ถ้า
1. $A \subset R$ และ $A \neq \emptyset$
 2. A มีขอบเขตล่าง
- จะได้ว่า A มี $\inf A$

การพิสูจน์ทฤษฎีใช้สัจพจน์ความสมบูรณ์

หมายเหตุ $\inf A$ ที่อยู่ใน A คือ สมาชิกที่เล็กที่สุดของ A

คำถามชุดที่ 13 ขอความใคต่อไปนี้ถูกต้อง

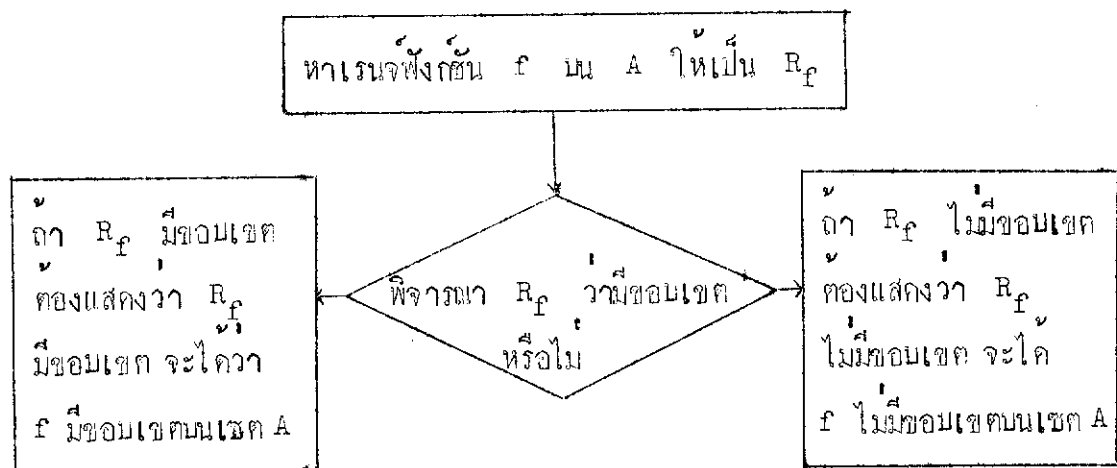
1. ถ้า A มีขอบเขตล่างแล้ว จะมี $\inf A$
2. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ $A \neq \emptyset$ แล้วจะมี $\inf A$
3. เซตนั้นที่มีขอบเขตล่างจะมีอินฟินัม
4. ถ้า $x = \inf A$ แล้ว x เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A

นิยาม 10 ฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนเซต A ก็ต่อเมื่อ

$$\{f(x) \mid x \in A\} \text{ มีขอบเขต}$$

หมายเหตุ $\{f(x) \mid x \in A\}$ คือเรนจ์ของ f บน A

การพิจารณาว่าฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนเซต A หรือไม่



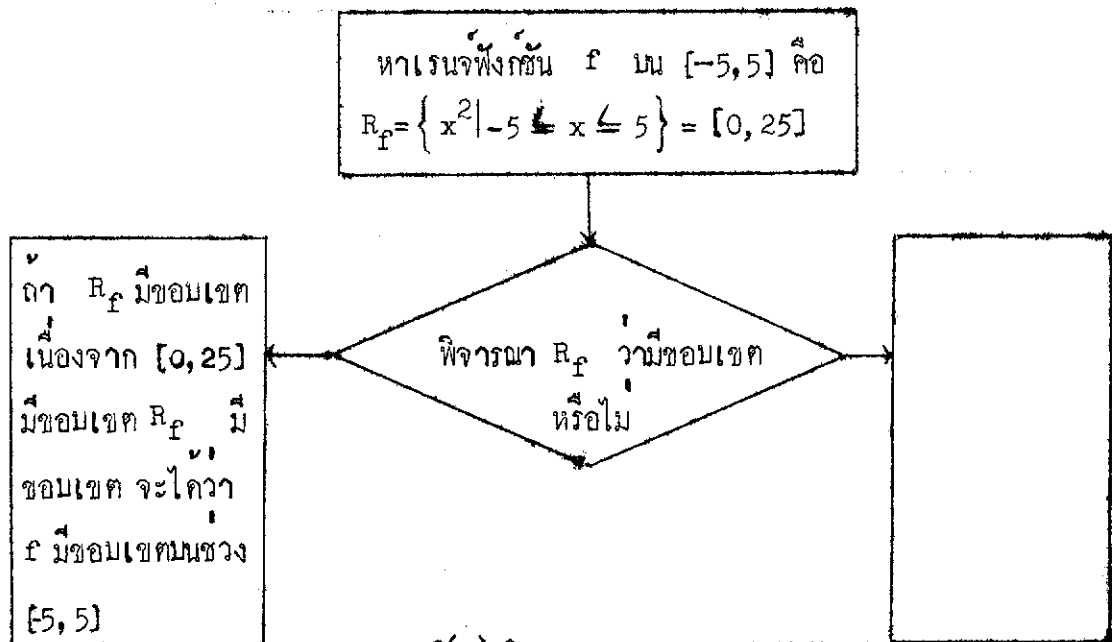
แนวคิดตัวอย่าง 10.1

1. หาเรนจ์ฟังก์ชัน บน $[-5, 5]$ คือ $R_f = \{x^2 | -5 \leq x \leq 5\} = [0, 25]$
และพิจารณาว่า R_f มีขอบเขตหรือไม่
2. แสดงว่า R_f มีขอบเขต นั่นก็แสดงว่า $[0, 25]$ มีขอบเขต
3. จากข้อ 2 จะได้ว่า R_f มีขอบเขต นั่นคือ f มีขอบเขตบนช่วง $[-5, 5]$

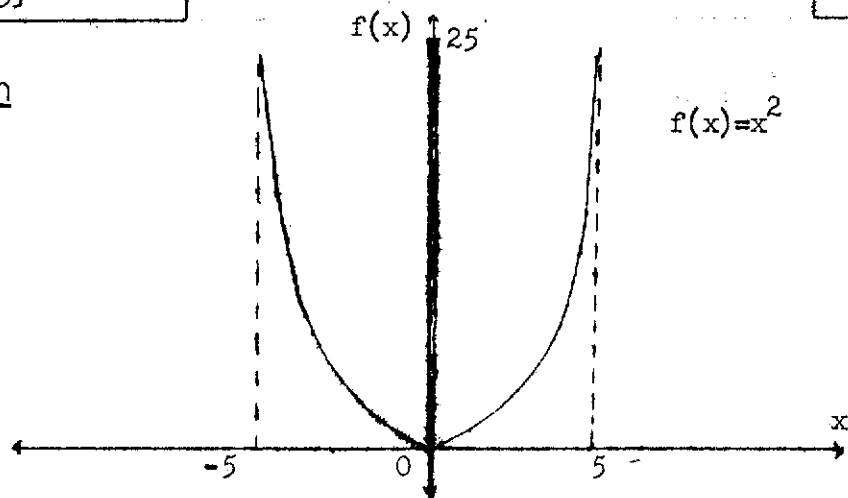
ตัวอย่าง 10.1 จงแสดงว่า $f(x)=x^2$ มีขอบเขตบนช่วง $[-5, 5]$

วิธีทำ

วิเคราะห์



วิธีทำ



$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \{f(x) \mid -5 \leq x \leq 5\} &= \{x^2 \mid -5 \leq x \leq 5\} \\ &= \{x^2 \mid 0 \leq x^2 \leq 25\} \\ &= [0, 25] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $[0, 25]$ มีขอบเขต

ดังนั้น $\{f(x) \mid -5 \leq x \leq 5\}$ มีขอบเขต

นั่นคือ f มีขอบเขตบนช่วง $[-5, 5]$

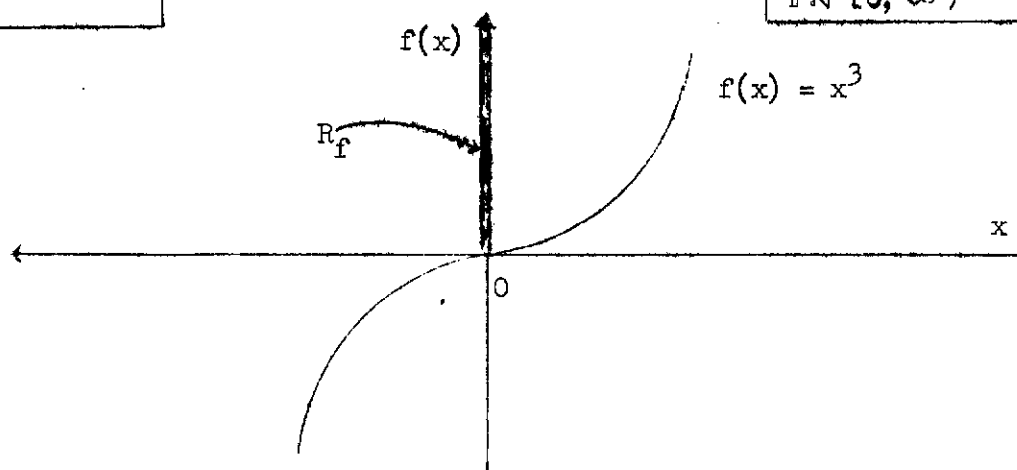
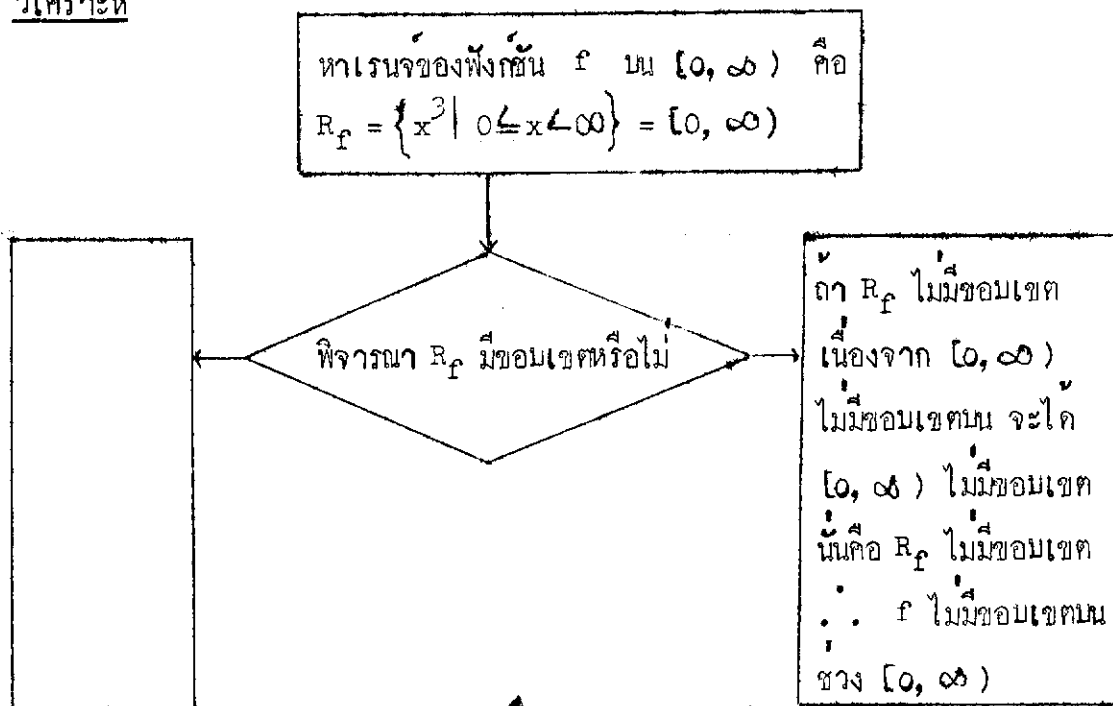
□

ลำดับขั้นตอนในการคิดตัวอย่าง 10.2

1. หาเรนจ์ของฟังก์ชัน f บน $[0, \infty)$ คือ $R_f = \{x^3 \mid 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty)$
และพิจารณาว่า R_f มีขอบเขตหรือไม่
2. คาดว่า R_f ไม่มีขอบเขต นั่นคือต้องแสดงว่า $[0, \infty)$ ไม่มีขอบเขตบนหรือไม่มีขอบเขตล่าง
3. เห็นชัดว่า $[0, \infty)$ ไม่มีขอบเขตบน ดังนั้น $[0, \infty)$ ไม่มีขอบเขต
4. จากข้อ 3. จะได้ว่า R_f ไม่มีขอบเขต นั่นคือ f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[0, \infty)$

ตัวอย่าง 10.2 ให้ $f(x) = x^3$ บน $[0, \infty)$ จะมีขอบเขตหรือไม่

วิเคราะห์



พิจารณา $\{f(x) \mid 0 \leq x < \infty\} = \{x^3 \mid 0 \leq x < \infty\}$
 $= \{x^3 \mid 0 \leq x^3 < \infty\}$
 $= [0, \infty)$

เนื่องจาก $[0, \infty)$ ไม่มีขอบเขตบน $\rightarrow [0, \infty)$ ไม่มีขอบเขต
 $\rightarrow \{f(x) \mid 0 \leq x < \infty\}$ ไม่มีขอบเขต

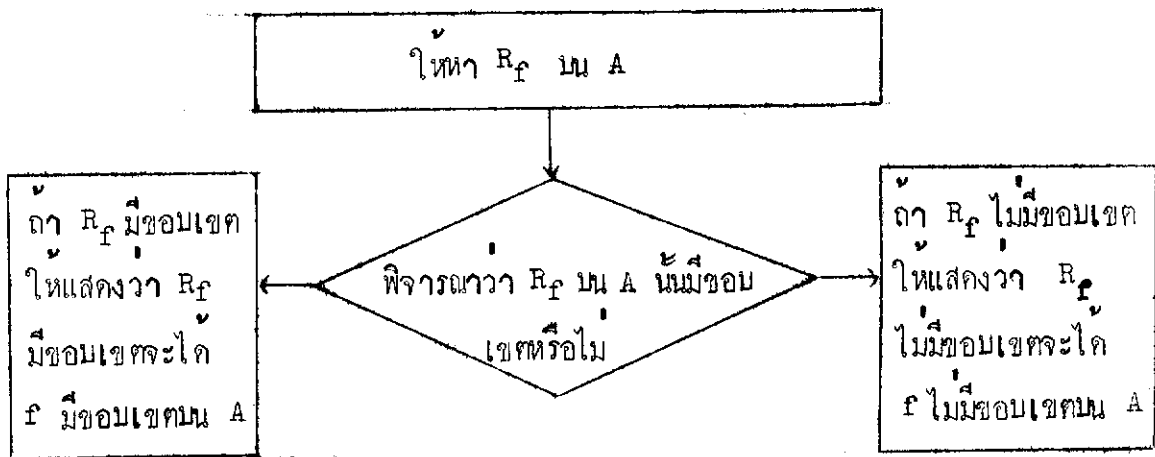
นั่นคือ f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[0, \infty)$

ตัวอย่าง 10.3 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x}$

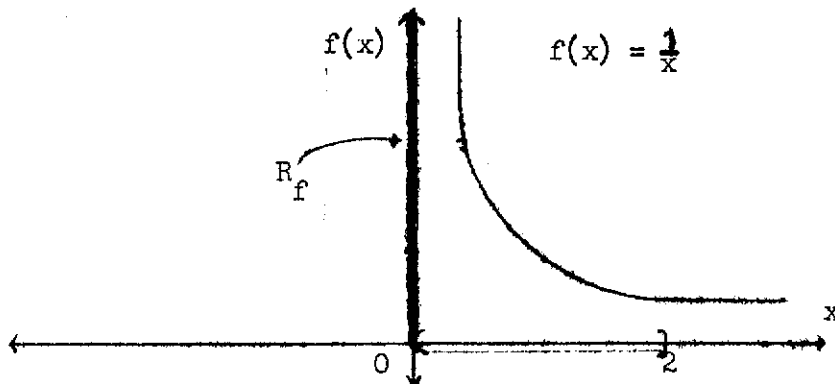
จงแสดงว่า

1. f มีขอบเขตบนช่วง $(0, 2]$ หรือไม่
2. f มีขอบเขตบนช่วง $[1, 2]$ หรือไม่
3. f มีขอบเขตบนช่วง $[-2, 0)$ หรือไม่

วิเคราะห์



วิธีทำ 1. f มีขอบเขตบนช่วง $(0, 2]$ หรือไม่



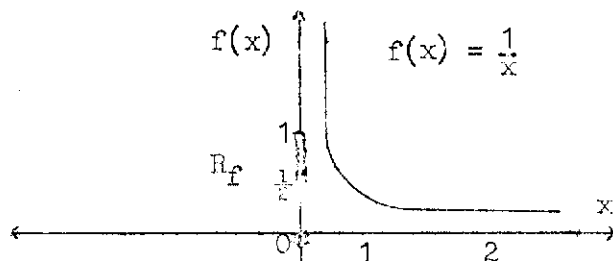
$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } \{f(x) \mid 0 < x \leq 2\} &= \left\{ \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} < \infty \right\} \\
 &= \left[\frac{1}{2}, \infty \right)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ ไม่มีขอบเขตบน $\rightarrow \left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ ไม่มีขอบเขต
 $\rightarrow \left\{ \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 2 \right\}$ ไม่มีขอบเขต

จะได้ f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $(0, 2]$

□

2. f มีขอบเขตบน $[1, 2]$ หรือไม่



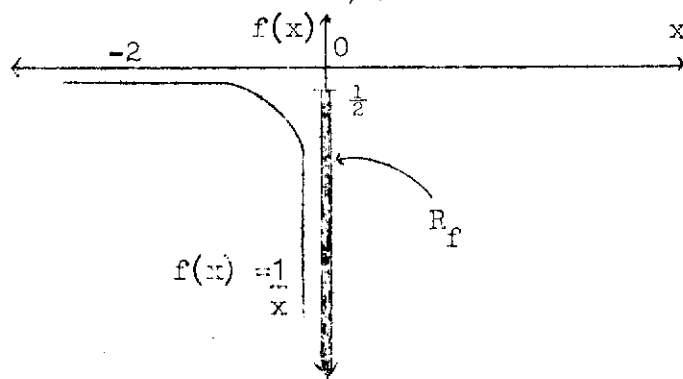
$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \left\{ f(x) \mid 1 \leq x \leq 2 \right\} &= \left\{ \frac{1}{x} \mid 1 \leq x \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ มีขอบเขต $\rightarrow \left\{ \frac{1}{x} \mid 1 \leq x \leq 2 \right\}$ มีขอบเขต

จะได้ f มีขอบเขตบนช่วง $[1, 2]$

□

3. f มีขอบเขตบนช่วง $[-2, 0)$ หรือไม่



$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \left\{ f(x) \mid -2 \leq x < 0 \right\} &= \left\{ \frac{1}{x} \mid -2 \leq x < 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \mid -\infty < \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} \right\} \\ &= (-\infty, -\frac{1}{2}] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ ไม่มีขอบเขตล่าง $\rightarrow (-\infty, -\frac{1}{2}]$ ไม่มีขอบเขต

$$\longrightarrow \left\{ \frac{1}{x} \mid -\infty < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \right\} \text{ ไม่มีขอบเขต}$$

ดังนั้น f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[-2, 0)$

□

พิจารณา

ถ้า f มีขอบเขตบนเซต $A \longrightarrow \{f(x) \mid x \in A\}$ มีขอบเขตบน

และ $\{f(x) \mid x \in A\}$ มีขอบเขตล่าง

แต่ $\{f(x) \mid x \in A\}$ มีขอบเขตบน $\longrightarrow$ จะมีค่าขอบเขตบน M ซึ่ง

$$\exists f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$

และ $\{f(x) \mid x \in A\}$ มีขอบเขตล่าง $\longrightarrow$ จะมีค่าขอบเขตล่าง N ซึ่ง

$$\exists N \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

ดังนั้น $N \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

เนื่องจาก $-|N| \leq N$ และ $M \leq |M|$ (คุณสมบัติค่าสมบูรณ์)

เพราะฉะนั้น $-|N| \leq f(x) \leq |M| \quad \forall x \in A \quad \dots\dots\dots (1)$

ให้ K เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ $\{|M|, |N|\}$

จะได้ว่า $|N| \leq K$ และ $|M| \leq K$

$$-K \leq -|N| \quad \text{และ} \quad |M| \leq K$$

จาก (1) จะได้ว่า $-K \leq -|N| \leq f(x) \leq |M| \leq K \quad \forall x \in A$

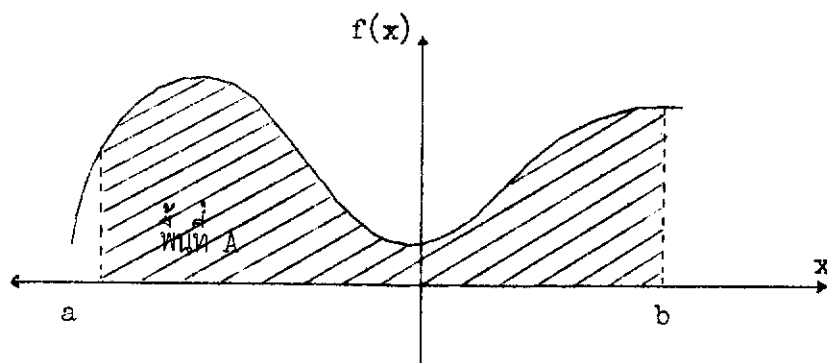
นั่นคือ $-K \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in A$

จะได้ว่า $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in A$

ดังนั้น ถ้า f มีขอบเขตบนเซต A จะมี $K \in \mathbb{R}^+$ ซึ่ง $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in A$

มโนภาพอินทิกรัล

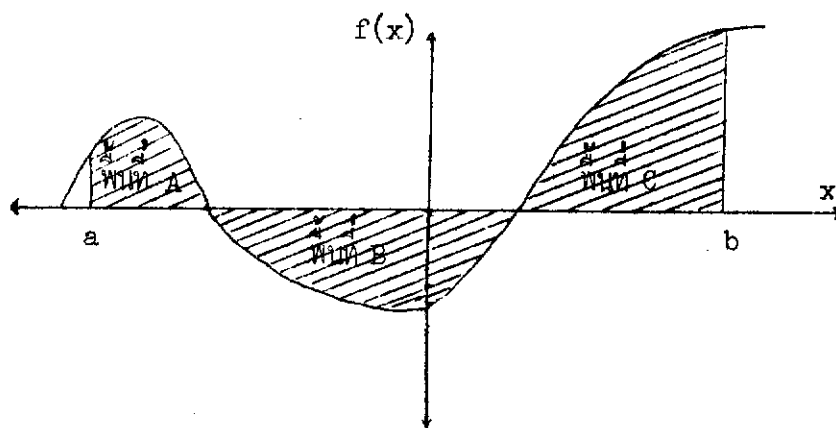
ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) \geq 0$ สำหรับ x ทุกตัวในช่วง $[a, b]$



ให้พื้นที่ A เป็นอาณาบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยแกน x และเส้นตรงที่ขนานกับแกน y โดยผ่าน $(a, 0)$, $(b, 0)$ และกราฟของ f (ส่วนที่แรเงา)

มโนภาพของอินทิกรัลของ f ในช่วง $[a, b]$ คือพื้นที่ A

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f มีกราฟดังรูปข้างล่างนี้



มโนภาพของอินทิกรัลของ f ในช่วง $[a, b]$ คือพื้นที่ A - พื้นที่ B + พื้นที่ C

โลเวอร์ซัม และอัปเปอร์ซัม

นิยาม 11 พาร์ทิชันของ $[a, b]$ คือเซตจำกัด ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจริงในช่วง $[a, b]$ รวมทั้ง a และ b

ถ้า P เป็นพาร์ทิชันของ $[a, b]$ จะได้ว่า

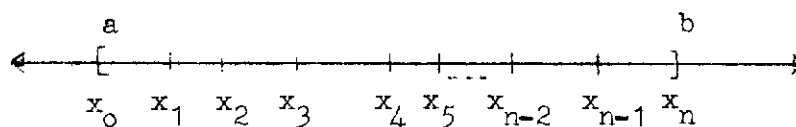
- 1) P เป็นเซตจำกัด
- 2) สมาชิกทุกตัวของ P เป็นจำนวนจริงใน $[a, b]$
- 3) $a \in P$ และ $b \in P$

ดังนั้น ถ้า P ประกอบด้วยสมาชิก $n + 1$ ตัว อาจเขียน

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{โดยที่}$$
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ข้อตกลง ถ้าเขียน $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a, b]$

จะหมายความว่า $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ดังรูป



คำถามชุดที่ 14

1. $P = \{a, b\}$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a, b]$ หรือไม่
2. "ถ้า $c \in [a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a, b]$ จะได้ว่า $c \in [x_{i-1}, x_i]$ สำหรับบางตัว $i = 1, 2, \dots, n$ " ข้อความนี้ถูกต้องหรือไม่
3. ถ้า $c \in [a, b]$ จะมีพาร์ทิชัน P ของ $[a, b]$ หรือไม่ ซึ่ง $c \notin P$
4. ถ้า $c \in [a, b]$ จะมีพาร์ทิชัน P ของ $[a, b]$ หรือไม่ ซึ่ง $c \in P$

พิจารณา

f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต บนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

→ มีจำนวนจริง K ซึ่ง $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$

→ มีจำนวนจริง K ซึ่ง $-K \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

→ $\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ มีขอบเขต $\forall i = 1, 2, \dots, n$

→ มี $\sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ และมี $\inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

ดังนั้นสามารถนิยามต่อไปได้

นิยาม 12 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

$$\text{ให้ } M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

เรียก $U(f, P)$ ว่าอัลเปอร์ริธึมของ f สำหรับพาร์ติชัน P

และ $L(f, P)$ ว่าโลเวอร์ริธึมของ f สำหรับพาร์ติชัน P

หมายเหตุ 1. จากนิยาม $[a, b]$ ต้องเป็นสับเซตของโดเมนของ f

2. เนื่องจาก $\forall i=1, 2, \dots, n$

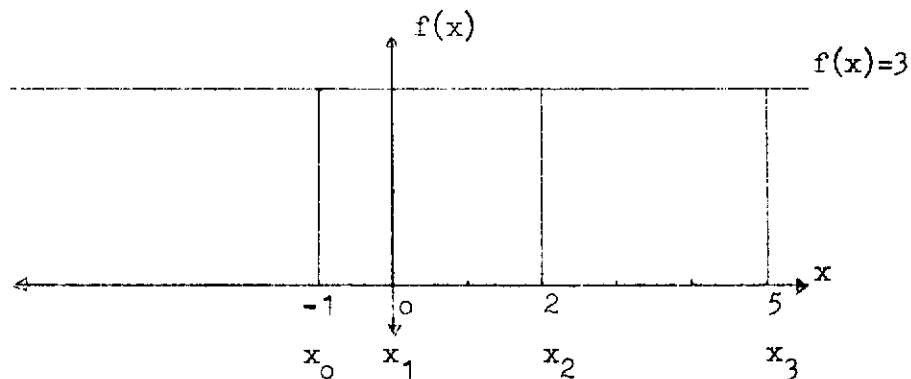
$$m_i = \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \rightarrow m_i \leq f(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\text{และ } M_i = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \rightarrow M_i \geq f(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\text{ดังนั้น } m_i \leq M_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

ตัวอย่าง 12.1 กำหนด $f(x) = 3$ และ $P = \{-1, 0, 2, 5\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[-1, 5]$ จงหา $L(f, P)$ และ $U(f, P)$

วิธีทำ



ให้ $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$ และ $x_3 = 5$

เนื่องจาก $f(x) = 3$ สำหรับทุก ๆ $x \in [-1, 5]$

ดังนั้น $\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \{3\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

จะได้ว่า $m_1 = m_2 = m_3 = 3$

และ $M_1 = M_2 = M_3 = 3$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } U(f, P) &= \sum_{i=1}^3 M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) \\ &= 3(0 - (-1)) + 3(2 - 0) + 3(5 - 2) \\ &= 3(1) + 3(2) + 3(3) \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } L(f, P) &= \sum_{i=1}^3 m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) \\ &= 3(0 - (-1)) + 3(2 - 0) + 3(5 - 2) \\ &= 3(1) + 3(2) + 3(3) = 18 \end{aligned}$$

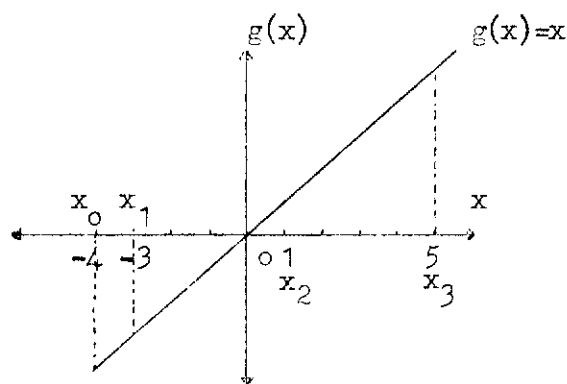
จะเห็นว่า $L(f,P) = U(f,P) = 18$

□

ตัวอย่าง 12.2 กำหนด $g(x) = x$ จงหา $L(g,P)$ และ $U(g,P)$ จากพาร์ติชัน

- P คือ $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$
1. ถ้า $P = \{-4, -3, 1, 5\}$
 2. ถ้า $P = \{-4, -2, -1, 2, 3, 5\}$

วิธีทำ



ให้ $x_0 = -4, x_1 = -3, x_2 = 1$ และ $x_3 = 5$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-4, 5]$

นั่นคือ $m < n \Rightarrow g(m) < g(n)$, สำหรับทุก ๆ $m, n \in [-4, 5]$

ดังนั้นในแต่ละช่วง $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

$$m_i = g(x_{i-1}) = x_{i-1}$$

นั่นคือ $m_1 = g(x_0) = -4$

$$m_2 = g(x_1) = -3$$

$$m_3 = g(x_2) = 1$$

และ $M_i = g(x_i) = x_i$

นั่นคือ $M_1 = g(x_1) = -3$

$$M_2 = g(x_2) = 1$$

$$M_3 = g(x_3) = 5$$

เนื่องจาก $(x_1 - x_0) = (-3 - (-4)) = 1$

$$(x_2 - x_1) = (1 - (-3)) = 4$$

$$(x_3 - x_2) = (5 - 1) = 4$$

จะได้ $L(g, P) = \sum_{i=1}^3 m_i (x_i - x_{i-1})$

$$= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2)$$

$$= -4(1) + (-3)(4) + 1(4)$$

$$= -4 - 12 + 4$$

$$= -12$$

$$U(g, P) = \sum_{i=1}^3 M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2)$$

$$= -3(1) + 1(4) + 5(4)$$

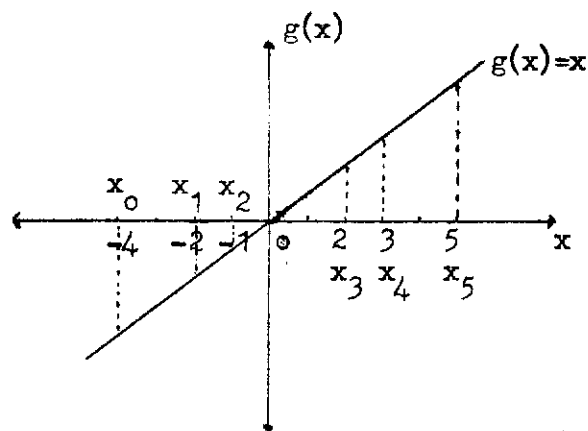
$$= -3 + 4 + 20$$

$$= 21$$

จะเห็นว่า $L(g, P) < U(g, P)$

□

2) ถ้า $P = \{-4, -2, -1, 2, 3, 5\}$



ให้ $x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$ และ $x_5 = 5$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้นในแต่ละช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ จะได้ว่า

$$m_i = g(x_{i-1}) = x_{i-1}$$

$$M_i = g(x_i) = x_i$$

ดังนั้น

$$m_1 = -4, \quad M_1 = -2, \quad (x_1 - x_0) = (-2) - (-4) = 2$$

$$m_2 = -2, \quad M_2 = -1, \quad (x_2 - x_1) = (-1) - (-2) = 1$$

$$m_3 = -1, \quad M_3 = 2, \quad (x_3 - x_2) = 2 - (-1) = 3$$

$$m_4 = 2, \quad M_4 = 3, \quad (x_4 - x_3) = 3 - 2 = 1$$

$$m_5 = 3, \quad M_5 = 5, \quad (x_5 - x_4) = 5 - 3 = 2$$

$$\text{นั่นคือ } L(g, P) = \sum_{i=1}^5 m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3) + m_5(x_5 - x_4)$$

$$= -4(2) + (-2)(1) + (-1)(3) + 2(1) + 3(2)$$

$$= -8 - 2 - 3 + 2 + 6$$

$$= -5$$

$$U(g, P) = \sum_{i=1}^5 M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3) + M_5(x_5 - x_4)$$

$$= -2(2) + (-1)(1) + 2(3) + 3(1) + 5(2)$$

$$= -4 - 1 + 6 + 3 + 10$$

$$= 14$$

จะเห็นว่า $L(g, P) < U(g, P)$

□

คำถามชุดที่ 15

1. $Q = \{a, b\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ หรือไม่
2. "ถ้า P เป็นพาร์ติชันใด ๆ ของ $[a, b]$ และ $Q = \{a, b\}$ จะได้ว่า $Q \subset P$ "
ขอความถูกต้องหรือไม่
3. "ถ้า P_1, P_2 เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ จะได้ว่า $P_1 \cup P_2$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ " ขอความถูกต้องหรือไม่

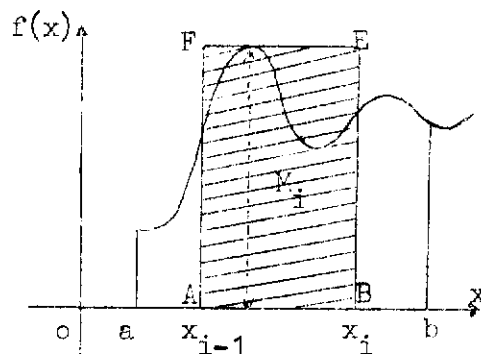
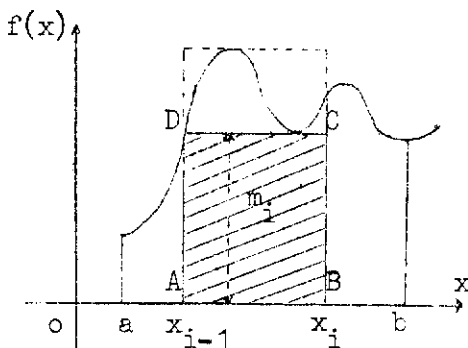
แบบฝึกหัด 6

จงหา $L(f, P)$ และ $U(f, P)$ โดยใช้พาร์ติชันที่กำหนดให้

1. $f(x) = x^2$ บนช่วง $[-3, 2]$, $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$
2. $f(x) = 1 - x$ บนช่วง $[-2, 3]$, $P = \{-2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3\}$
3. $f(x) = \sin x$ บนช่วง $[-\pi, 2\pi]$, $P = \{-\pi, \pi/2, \pi, 2\pi\}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$ บนช่วง $[1, 4]$, $P = \{1, 2, 3, 4\}$
5. $f(x) = \begin{cases} 2 & 1 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ บนช่วง $[1, 5]$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

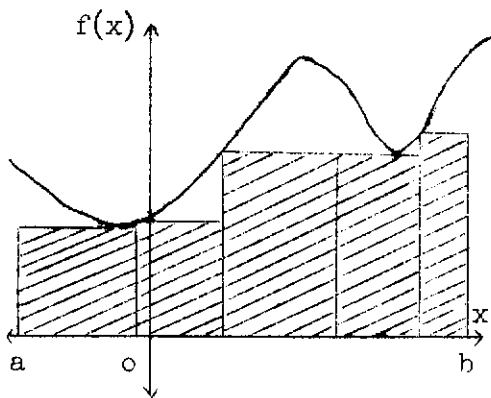
มโนภาพของโดเวอร์ซัมและอัปเปอร์ซัม

ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$

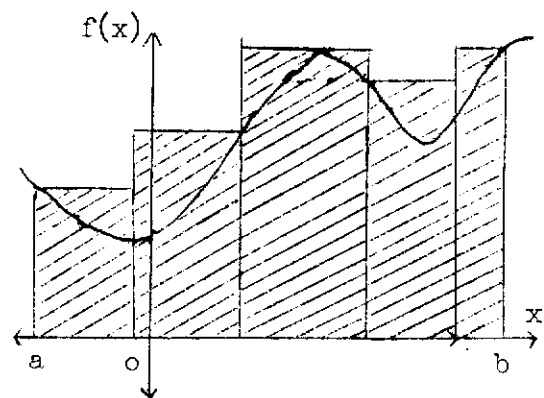


พิจารณา

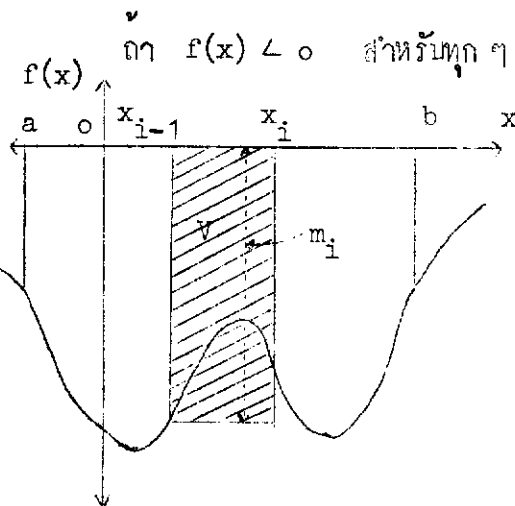
$m_i(x_i - x_{i-1})$ คือพื้นที่เหลี่ยม ABCD และ $M_i(x_i - x_{i-1})$ คือพื้นที่เหลี่ยม ABEF



$L(f, P)$ คือผลบวกของพื้นที่เหลี่ยม
มุมฉากที่แคบกว่า



$U(f, P)$ คือผลบวกของพื้นที่เหลี่ยม
มุมฉากที่แคบกว่า



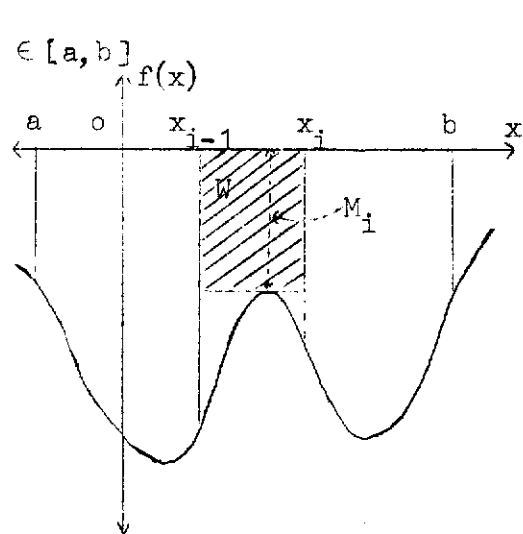
จะได้

$$m_i < 0$$

$$\text{ดังนั้น } m_i(x_i - x_{i-1}) < 0$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = -V$$

เมื่อ V คือพื้นที่เหลี่ยมมุมฉากที่แคบกว่า

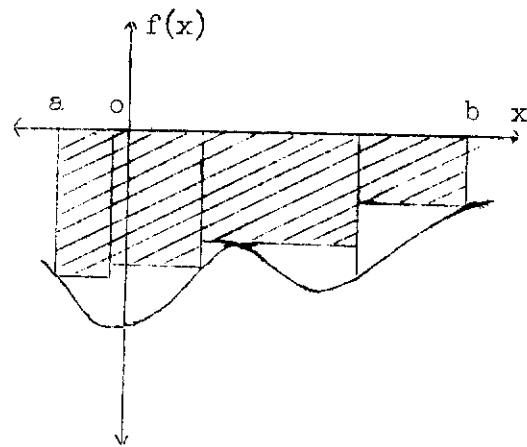
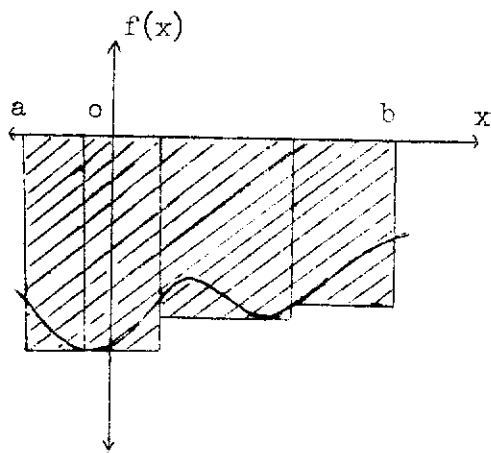


$$\text{และ } M_i < 0$$

$$\text{ดังนั้น } M_i(x_i - x_{i-1}) < 0$$

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = -W$$

เมื่อ W คือพื้นที่เหลี่ยมมุมฉากที่แคบกว่า



$L(f, P) = -R$ เมื่อ R คือผลบวก
ของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากที่ต่ำกว่า

$U(f, P) = -Q$ เมื่อ Q คือผลบวกของ
พื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ต่ำกว่า

ทฤษฎีบท 13 กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 13

ขั้นที่ 1 เขียนในสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $L(f,P) \leq U(f,P)$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 เรียงอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น

$$m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\dots+m_n(x_n-x_{n-1})$$

$$\leq M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\dots+M_n(x_n-x_{n-1})$$

ขั้นที่ 3 เขียนกรณฑ์เป็นไปได้อันจะสรุปขั้นที่ 2 ได้ ที่น่าสนใจคือ

$$m_i(x_i-x_{i-1}) \leq M_i(x_i-x_{i-1}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ขั้นที่ 4 พิจารณาขั้นที่ 3 กรณฑ์ที่น่าสนใจจะสรุปขั้นที่ 3 นี้

$$4.1 \quad \text{ถ้า } x_i-x_{i-1} \leq 0 \rightarrow m_i \geq M_i \quad \forall i$$

$$4.2 \quad \text{ถ้า } x_i-x_{i-1} \geq 0 \rightarrow m_i \leq M_i \quad \forall i$$

ขั้นที่ 5 กำหนด $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

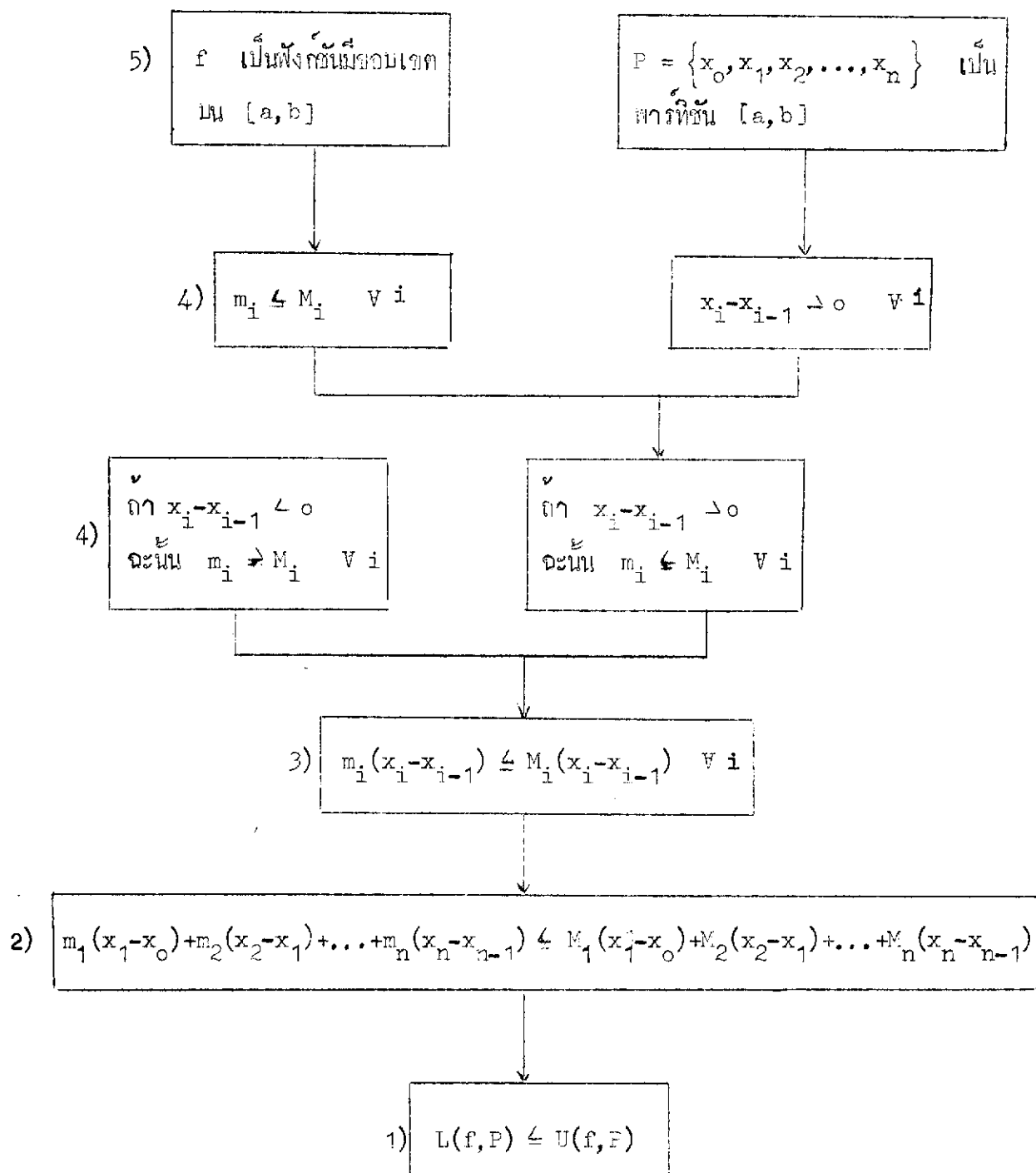
และ m_i, M_i ให้ชัดเจน และพิจารณาความสัมพันธ์ m_i, M_i, x_i-x_{i-1}

จะได้ $m_i \leq M_i$ และ $x_i-x_{i-1} \geq 0 \quad \forall i$

ข้อสังเกต ถ้าว่า ขั้นที่ 1, ขั้นที่ 2, ... นั้น เป็นการลำดับขั้นวิเคราะห์เหตุการณ์ก่อน

หลังจากลำดับ เช่น ขั้นที่ 1 ก่อนขั้นที่ 2, ขั้นที่ 2 ก่อนขั้นที่ 3 เป็นต้น

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

จะได้ว่า $m_i \leq M_i$ และ $x_i - x_{i-1} \geq 0$

นั่นคือ $m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\rightarrow m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) \leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

จะได้ว่า $L(f, P) \leq U(f, P)$

□

ทฤษฎีบท 14 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

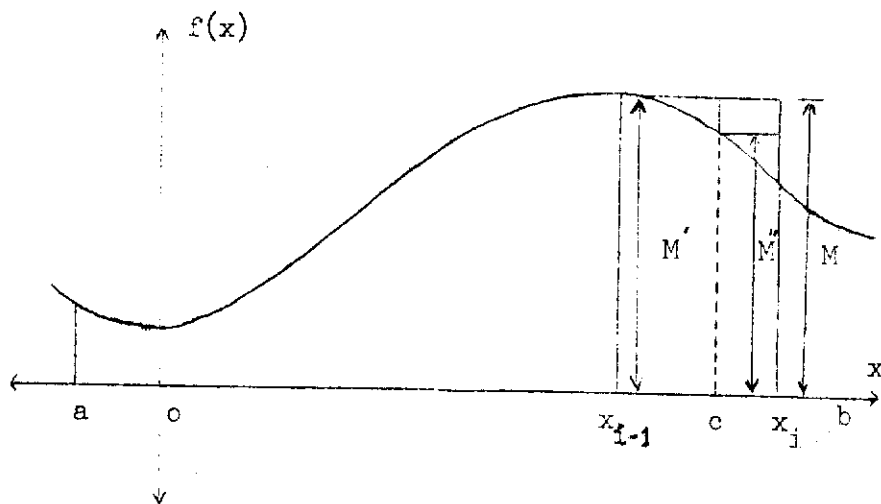
$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

และ $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

จะได้ว่า $L(f, P) \leq L(f, P_1)$

และ $U(f, P_1) \leq U(f, P)$

พิจารณาจากรูป



ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 14

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $U(f, P_1) \leq U(f, P)$

ขั้นที่ 2 ใช้นิยามเขียน $U(f, P_1)$ และ $U(f, P)$ ในขั้นที่ 1 ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} & M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M_i(x_i-x_{i-1}) + \dots + M_n(x_n-x_{n-1}) \\ \geq & M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) + \dots + M_n(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 ในการที่จะสรุปขั้นที่ 2 เห็นได้ชัดว่าเป็นการเพียงพอที่ว่า

$$M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) \leq M(x_i-x_{i-1})$$

ขั้นที่ 4 เขียนสิ่งที่กำหนดมาให้ โดยกำหนด M, M', M'' ให้ชัดเจน
พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง M, M', M'' จะได้ว่า

$$[x_{i-1}, c] \subset [x_{i-1}, x_i] \rightarrow M' \leq M$$

$$[c, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i] \rightarrow M'' \leq M$$

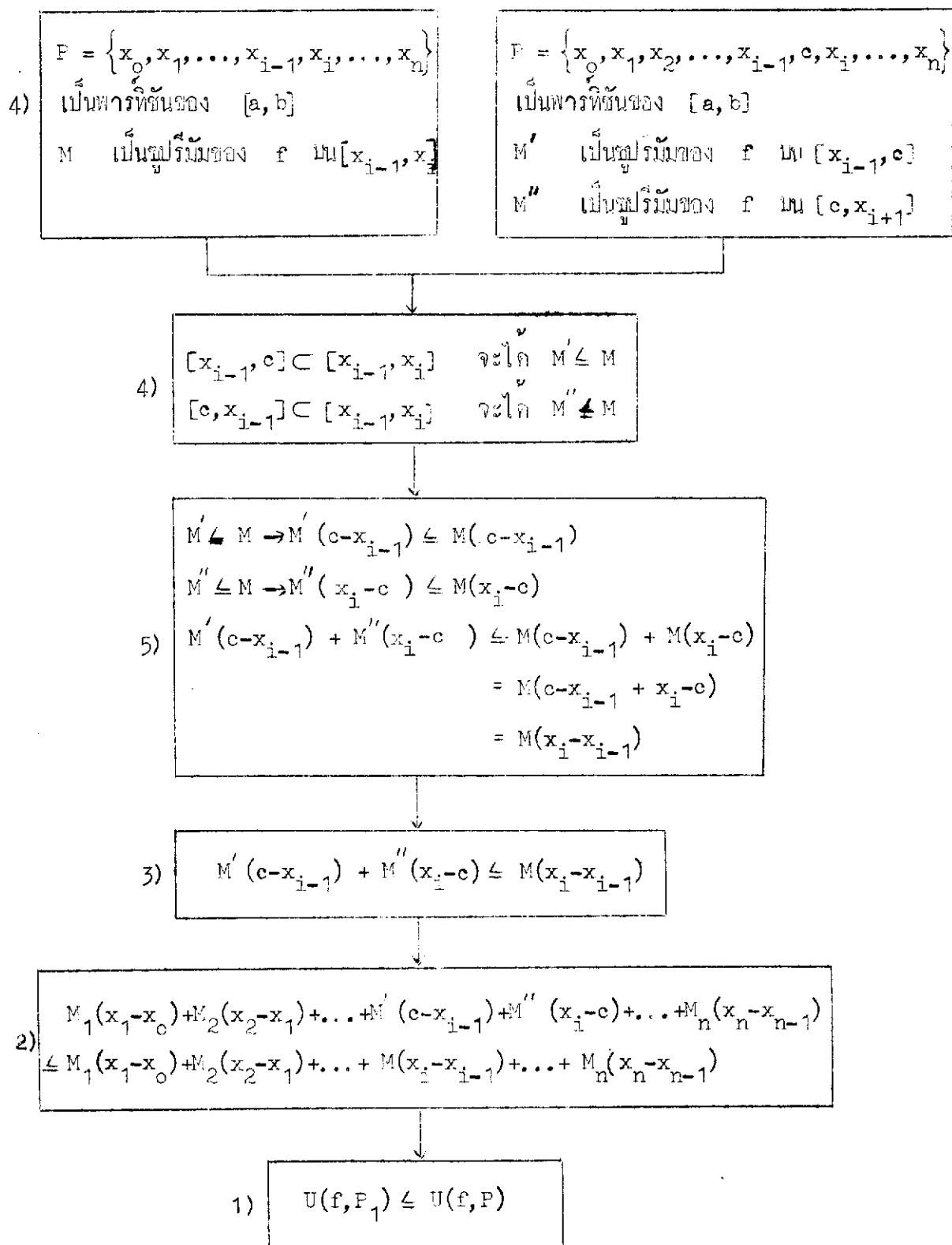
ขั้นที่ 5 พยายามหาความสัมพันธ์ เพื่อนำไปสู่การสรุปขั้นที่ 3 ดังนั้นจากขั้นที่ 4 จะได้

$$M'(c-x_{i-1}) \leq M(c-x_{i-1})$$

$$M''(x_i-c) \leq M(x_i-c)$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) & \leq M(c-x_{i-1}) + M(x_i-c) \\ & = M(x_i-x_{i-1}) \end{aligned}$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



วิธีทำ

ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

เนื่องจากฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

ให้ M เป็นค่ามีนัยของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

M' เป็นค่ามีนัยของ f บน $[x_{i-1}, c]$

M'' เป็นค่ามีนัยของ f บน $[c, x_i]$

เนื่องจาก $[x_{i-1}, c] \subset [x_{i-1}, x_i]$ จะได้ว่า $M' \leq M$

และ $[c, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$ จะได้ว่า $M'' \leq M$

จะได้ว่า $M'(c-x_{i-1}) \leq M(c-x_{i-1})$ และ $M''(x_i-c) \leq M(x_i-c)$

ดังนั้น $M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) \leq M(c-x_{i-1}) + M(x_i-c)$

$$= M(c-x_{i-1}+x_i-c)$$

$$= M(x_i-x_{i-1})$$

$$\therefore M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) \leq M(x_i-x_{i-1}) \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{เนื่องจาก } U(f, P_1) = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c) + \dots + M_n(x_n-x_{n-1}) \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{และ } U(f, P) = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + \dots + M(x_i-x_{i-1}) + \dots + M_n(x_n-x_{n-1})$$

จาก (1) และ (2) เพราะฉะนั้น

$$U(f, P_1) \leq U(f, P)$$

□

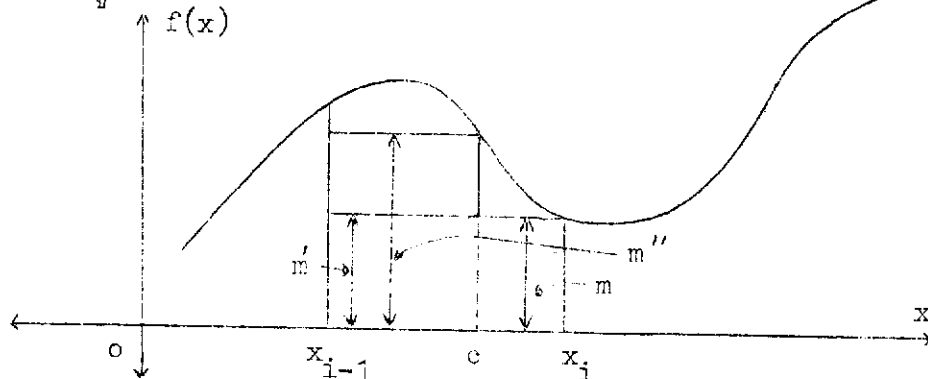
ตอนที่ 2 การวิเคราะห์แนวการพิสูจน์คล้ายกับตอนแรก

ให้ m เป็นอินทิมีนของ f บน $[x_{i-1}, x_i]$

m' เป็นอินทิมีนของ f บน $[x_{i-1}, c]$

m'' เป็นอินทิมีนของ f บน $[c, x_i]$

พิจารณาประกอบ



เนื่องจาก $[x_{i-1}, c] \subset [x_{i-1}, x_i]$ จะได้ว่า $m \leq m'$

และ $[c, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$ จะได้ว่า $m \leq m''$

จะได้ $m'(c-x_{i-1}) \geq m(c-x_{i-1})$ และ $m''(x_i-c) \geq m(x_i-c)$

$$m'(c-x_{i-1}) + m''(x_i-c) \geq m(c-x_{i-1}) + m(x_i-c)$$

$$= m(c-x_{i-1}+x_i-c)$$

$$= m(x_i-x_{i-1})$$

$$\therefore m(x_i-x_{i-1}) \leq m'(c-x_{i-1}) + m''(x_i-c) \quad \text{--- (1)}$$

เนื่องจาก $L(f, P) = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \dots + m_i(x_i-x_{i-1}) + \dots + m_n(x_n-x_{n-1})$

$$L(f, P_1) = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \dots + m'(c-x_{i-1}) + m''(x_i-c) + \dots + m_n(x_n-x_{n-1}) \quad \text{--- (2)}$$

จาก (1) และ (2) เพราะฉะนั้น

$$L(f, P) \leq L(f, P_1)$$

□

ทฤษฎีบท 15 กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$, P_1 และ P_2 เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$ ซึ่ง $P_1 \subset P_2$ จะได้ว่า

$$L(f, P_1) \leq L(f, P_2)$$

$$\text{และ } U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$$

แนวการวิเคราะห์การพิสูจน์

เนื่องจากพหุนาม $[a, b]$ เป็นเซตจำกัด และ $P_1 \subset P_2$

ดังนั้น P_1 มีสมาชิกมากกว่า P_2 n ตัว โดยที่ $n \geq 0$ $n \in \mathbb{I}^+$

การพิสูจน์จะแยกเป็นกรณี

(1) กรณี $n = 0$

(2) กรณี $n \geq 1$ ใช้การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ คือ

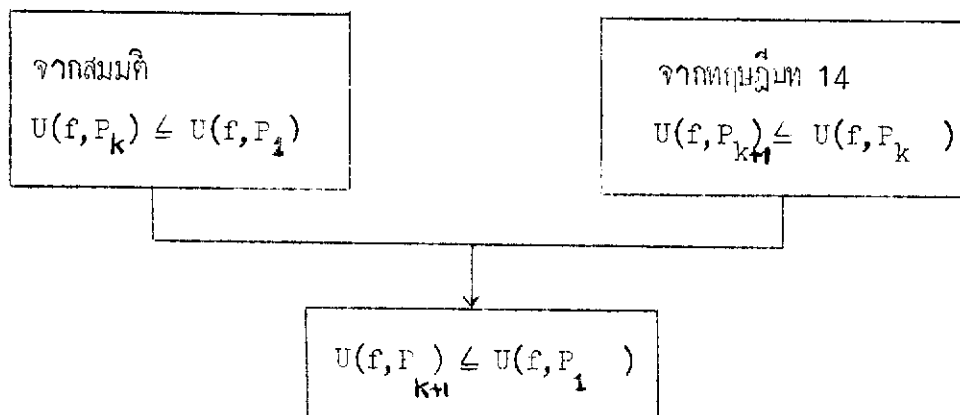
ก. $n = 1$ เป็นจริง

ข. สมมติว่า $n = k$ เป็นจริง

จะต้องพิสูจน์ว่า $n = k+1$ เป็นจริง

เนื่องจากกรณี 1 เห็นได้ชัด และกรณี 2 ข้อ ก. เป็นจริงโดยทฤษฎีบท 14

ดังนั้นจะวิเคราะห์เพียงกรณี 2 ข้อ ข.



พิสูจน์

กรณี $n = 0$ นั่นคือ $P_1 = P_2$

ดังนั้น $L(f, P_1) = L(f, P_2) \rightarrow L(f, P_1) \leq L(f, P_2)$

และ $U(f, P_2) = U(f, P_1) \rightarrow U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$

กรณี $n = 1$ หมายถึง P_2 มีสมาชิกมากกว่า P_1 1 ตัว

นั่นคือ $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

$P_2 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c, x_i, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

จากทฤษฎีบท 14 จะได้ว่า

$$L(f, P_1) \leq L(f, P_2)$$

$$\text{และ } U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$$

สมมติกรณี $n=k$ เป็นจริง, ดังนั้น P_2 มีสมาชิกมากกว่า P_1 k ตัว

จะได้ $L(f, P_1) \leq L(f, P_2)$ และ $U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$

พิจารณากรณี $n=k+1$

ให้ P_2 มีสมาชิกมากกว่า P_1 อยู่ $k+1$ ตัว

และให้ $y \in P_2 - P_1$

พิจารณา $Q = P_2 - \{y\}$

จะได้ $P_1 \subset Q$ และ Q มีสมาชิกมากกว่า P_1 อยู่ k ตัว

โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q)$$

$$\text{และ } U(f, Q) \leq U(f, P_1)$$

แต่จากกรณี $n=k$ จะได้ว่า

$$L(f, Q) \leq L(f, P_2)$$

$$\text{และ } U(f, P_2) \leq U(f, Q)$$

ดังนั้น $L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq L(f, P_2)$

และ $U(f, P_2) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_1)$

เพราะฉะนั้น $L(f, P_1) \leq L(f, P_2)$

และ $U(f, P_2) \leq U(f, P_1)$

□

คำถามข้อที่ 15

1. ถ้าเราแบ่งพหุคูณให้ละเอียดขึ้น ถ้า $U(f, P)$ และ $L(f, P)$ จะมีลักษณะเป็นอย่างไร
2. ถ้าเรามี $L(f, P')$ จะมีพหุคูณ P บน $[a, b]$ ใหม่ที่ทำให้

$$U(f, P) \leq L(f, P')$$

ทฤษฎีบท 16 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ P_1 และ P_2 เป็นพหุคูณใด ๆ ของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

ลำดับขั้นวิเคราะห๑แนวการพิสูจน์ทฤษฎีบท 16

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที๑ต้องการพิสูจน์ $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ พิจารณาว่าเกี่ยวข๑งกับ
ทฤษฎีบทและนิยามใดบาง

1.1 $L(f, P_1) \leq U(f, P_1)$

1.2 $L(f, P_2) \leq U(f, P_2)$

ถ้าจะโย๑งไปสู๑สิ่งที๑ต้องการ P_1 และ P_2 น่าจะสัมพันธ์กั๑ในลักษณะสับเซต
(พิจารณาทฤษฎีบท 15) แต่กำหนดไม๑ไปก่อนไ้

ขั้นที่ 2 ให้ $Q = P_1 \cup P_2$ ซึ่งจะได้ $P_1 \subset Q$ และ $P_2 \subset Q$ และโดยทฤษฎี-
บท 14 จะไ้ว่า

2.1 1) $U(f, Q) \leq U(f, P_1)$

2) $L(f, P_1) \leq L(f, Q)$

2.2 1) $U(f, Q) \leq U(f, P_2)$

2) $L(f, P_2) \leq L(f, Q)$

ขั้นที่ 3 พิจารณาส่๑งที๑ต้องการ (ในขั้นที่ 1) คือ

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

จากขั้นที่ 2 $L(f, P_1)$ ปรากฏอยู๑ใน 2.1 2)

$U(f, P_2)$ ปรากฏอยู๑ใน 2.2 1)

ดังนั้นพิจารณา 2.1 2) และ 2.2 1) คือ

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \quad \text{และ} \quad U(f, Q) \leq U(f, P_2)$$

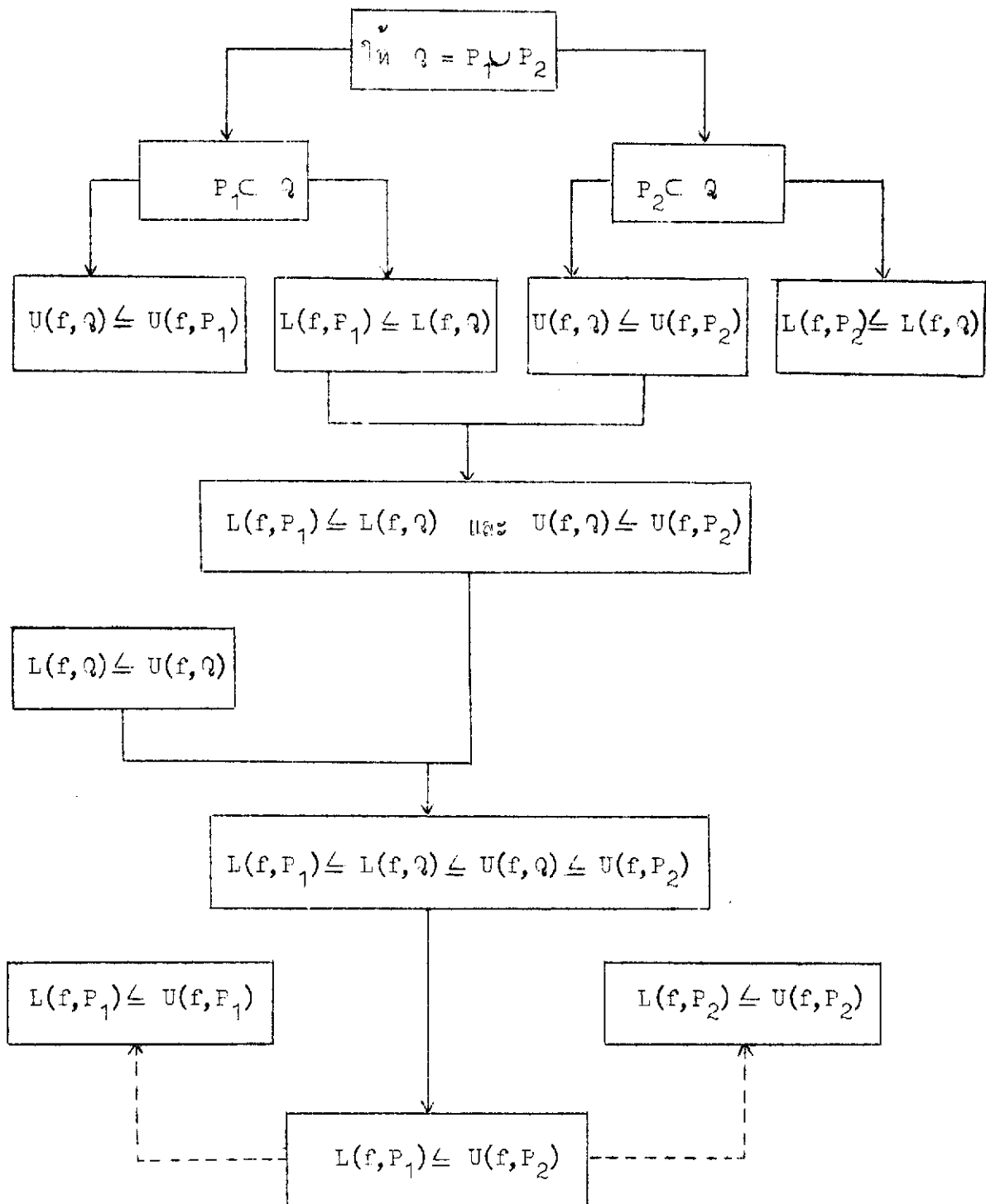
แต่โดยทฤษฎีบท 13 จะไ้

$$L(f, Q) \leq U(f, Q)$$

ดังนั้น $L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2)$

ซึ่งจะไ้ $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ ให้ $Q = P_1 \cup P_2$

จะได้ว่า Q เป็นพาร์ทิชันของ (a, b) ซึ่ง $P_1 \subset Q$ และ $P_2 \subset Q$
โดยทฤษฎี 15 จะได้

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \quad \text{และ} \quad U(f, Q) \leq U(f, P_2)$$

โดยทฤษฎี 13 จะได้

$$L(f, Q) \leq U(f, Q)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

□

ข้อสังเกต

จากทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า โดเวอร์มีน้อยกว่าหรือเท่ากับอัปเปอร์ซมเสมอไป ไม่ว่าพาร์ทิชันสำหรับโดเวอร์มีและอัปเปอร์ซมจะเหมือนกันหรือต่างกัน

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงหา $L(f,P)$ และ $U(f,P)$ เมื่อกำหนด f และ P ดังต่อไปนี้

ก. $f(x) = 1-x^2$ $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

ข. $f(x) = x^3$ $P = \left\{-2, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{1}{3}, 0\right\}$

ค. $f(x) = \frac{1}{x}$ $P = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$

2. ถ้าฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ $c \in \mathbb{R}$
จงแสดงว่า cf มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$

3. ถ้าฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นพาร์ติชันใด ๆ
ของ $[a,b]$ จงแสดงว่า

1. $L(cf,P) = cL(f,P)$

2. $U(cf,P) = cU(f,P)$

4. ถ้าฟังก์ชัน f, g มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นพาร์ติชันใด ๆ
ของ $[a,b]$ จงแสดงว่า

1. $U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$

2. $L(f+g,P) \geq L(f,P) + L(g,P)$

อินทิกรัลจำกัดเขต

เพื่อความสะดวก จะใช้สัญลักษณ์

$$\{L(f, P)\} \text{ แทน } \{L(f, P) \mid P \text{ เป็นพาร์ติชันของ } [a, b]\}$$

$$\{U(f, P)\} \text{ แทน } \{U(f, P) \mid P \text{ เป็นพาร์ติชันของ } [a, b]\}$$

$$\text{พิจารณา } P_1 = \{a, b\}$$

เห็นชัดว่า P_1 เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

$$\text{ดังนั้น } L(f, P_1) \in \{L(f, P)\} \text{ และ } U(f, P_1) \in \{U(f, P)\}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \{L(f, P)\} \neq \emptyset \text{ และ } \{U(f, P)\} \neq \emptyset \quad \text{_____ (1)}$$

สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ เนื่องจาก $P_1 \subset P$ จะได้ว่า

$$m(b-a) = L(f, P_1) \leq L(f, P) \text{ และ } U(f, P) \leq U(f, P_1) = M(b-a)$$

$$\text{โดยที่ } m = \inf \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$

$$M = \sup \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$

$$\text{ดังนั้น } m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } m(b-a) \text{ เป็นค่าขอบเขตล่างของ } \{L(f, P)\} \text{ และ } \{U(f, P)\}$$

$$\text{และ } M(b-a) \text{ เป็นค่าขอบเขตบนของ } \{L(f, P)\} \text{ และ } \{U(f, P)\}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \{L(f, P)\} \text{ และ } \{U(f, P)\} \text{ มีขอบเขต } \text{_____ (2)}$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ว่ามี } \sup \{L(f, P)\} \text{ และ } \inf \{U(f, P)\}$$

ดังนั้น สามารถให้นิยามต่อไปนี้

นิยาม 17 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

$$\text{ให้ } \int_a^b f(x) dx = \sup \{ L(f, P) \}$$

$$\text{และ } \int_a^b f(x) dx = \inf \{ U(f, P) \}$$

เรียก $\int_a^b f(x) dx$ ว่า โลเวอร์อินทิกรัลของ f บน $[a, b]$

และ $\int_a^b f(x) dx$ ว่า อันเปอรอินทิกรัลของ f บน $[a, b]$

จากนิยาม 17 เห็นได้ชัดว่า สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$$

ทฤษฎีบท 18 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ทฤษฎีบท 18

ขั้นที่ 1 พิจารณาลิมิตของการพิสูจน์คือ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 ใช้นิยามเขียนอยู่ในรูป

$$\sup \{L(f, P)\} \leq \inf \{U(f, P)\}$$

ขั้นที่ 3 พิจารณาว่าขั้นที่ 2 จะสรุปได้จากอะไรซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณีคือ

3.1 $\inf \{U(f, P)\}$ เป็นค่าขอบเขตบนของ $\{L(f, P)\}$

3.2 $\sup \{L(f, P)\}$ เป็นค่าขอบเขตล่างของ $\{U(f, P)\}$

ขั้นที่ 4 ใช้นิยามเขียน 3.1 และ 3.2 ใหม่ดังนี้

$$4.1 \quad \forall P_1, L(f, P_1) \leq \inf \{U(f, P)\}$$

$$4.2 \quad \forall P_2, \sup \{L(f, P)\} \leq U(f, P_2)$$

ขั้นที่ 5 ใช้นิยามของอินทิกรัลและอุปบริมเขียน 4.1 และ 4.2 ใหม่ดังนี้

$$5.1 \quad \forall P_1, L(f, P_1) \text{ เป็นขอบเขตล่างของ } \{U(f, P)\}$$

$$5.2 \quad \forall P_2, U(f, P_2) \text{ เป็นค่าขอบเขตบนของ } \{L(f, P)\}$$

ขั้นที่ 6 ใช้นิยามของค่าขอบเขตล่างและค่าขอบเขตบนเขียน 5.1 และ 5.2 ใหม่ดังนี้

$$6.1 \quad \forall P_1 [L(f, P_1) \leq U(f, P_2), \forall P_2]$$

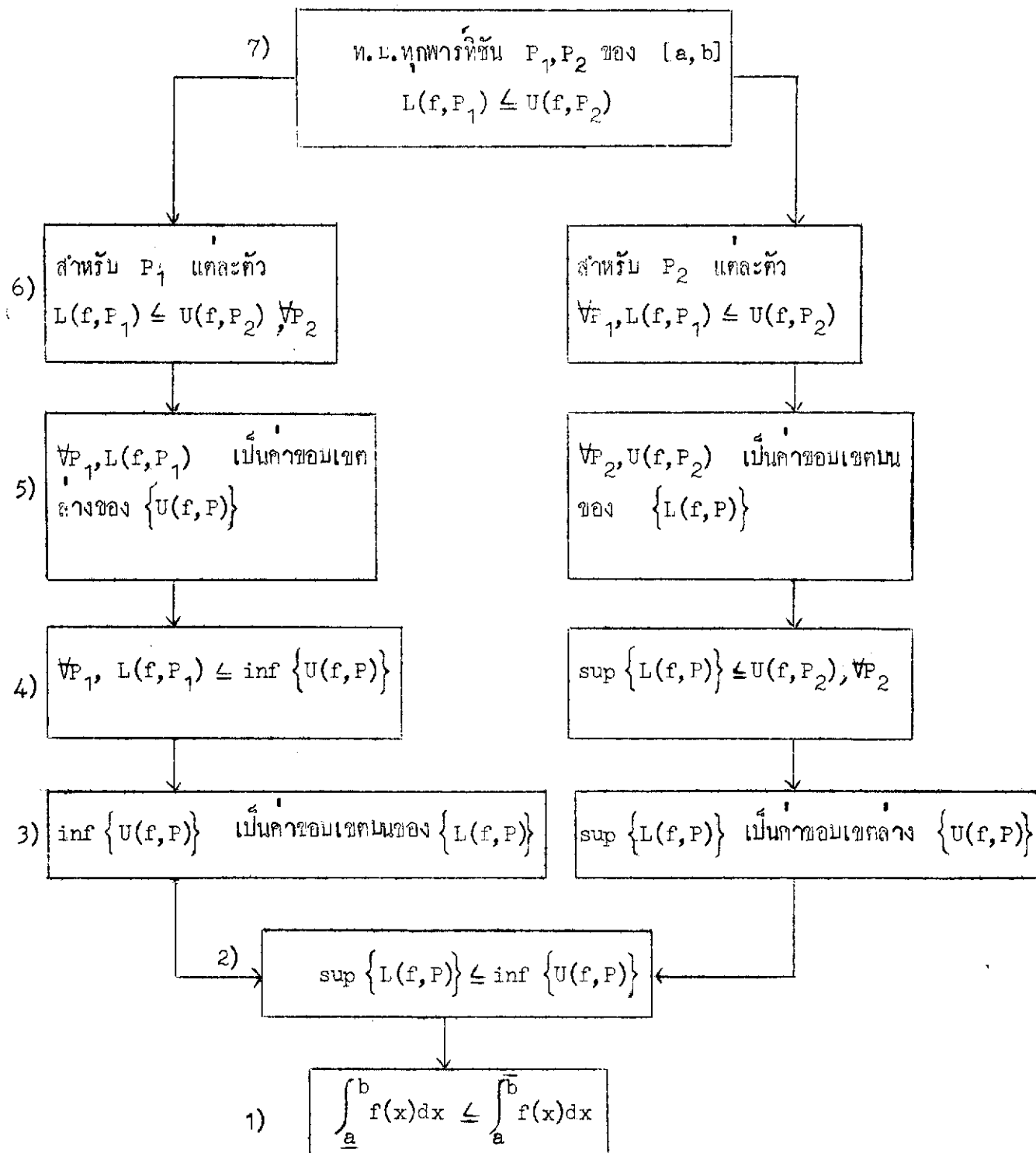
$$6.2 \quad \forall P_2 [L(f, P_1) \leq U(f, P_2), \forall P_1]$$

ขั้นที่ 7 พิจารณาว่าการสรุปขั้นที่ 6 ได้จากอะไร "จากทฤษฎีบท 16 สำหรับทุกพาร์ทิชัน

$$P_1, P_2 \text{ ของ } [a, b], L(f, P_1) \leq U(f, P_2)''$$

หมายเหตุ สำหรับแนวการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ อาจใช้เพียงข้างเดียว (ดูแผนภาพ) คือ
ข้างซ้ายหรือข้างขวา ในการพิสูจน์ต่อไปนี้จะใช้แนวข้างซ้าย

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



ในที่นี้จะใช้การพิสูจน์แนวทางซ้าย

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 16 สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P_1, P_2 ของ $[a, b]$

จะได้ว่า $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$

นั่นคือสำหรับพาร์ติชัน P_2 แต่ละตัวของ $[a, b]$

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2) \quad \forall P_2 \text{ เป็นพาร์ติชันของ } [a, b]$$

ดังนั้น $U(f, P_2)$ เป็นค่าขอบเขตบนของ $\{L(f, P)\}$

นั่นคือ $\sup \{L(f, P)\} \leq U(f, P_2)$

เพราะฉะนั้น $\sup \{L(f, P)\} \leq U(f, P_2) \quad \forall P_2$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

จะได้ว่า $\sup \{L(f, P)\}$ เป็นค่าขอบเขตล่างของ $\{U(f, P)\}$

$$\therefore \sup \{L(f, P)\} \leq \inf \{U(f, P)\}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

□

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบท 15 และทฤษฎีบท 18 จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

นิยาม 19 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ f จะเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

นิยาม 20 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ เขียนแทน $\int_a^b f(x) dx$ หรือ $\int_a^b f(x) dx$ ด้วย $\int_a^b f(x) dx$ หรือ $\int_a^b f$ และเรียกว่า อินทิกรัลของ f บน $[a, b]$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

จะเห็นว่าการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้โดยใช้นิยามนี้ลำบากขึ้นดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

ขั้นที่ 2 หาเซต $\{L(f, P)\}$ และ $\{U(f, P)\}$

ขั้นที่ 3 หา $\sup \{L(f, P)\}$ และ $\inf \{U(f, P)\}$ แล้วแสดงว่าเท่ากัน

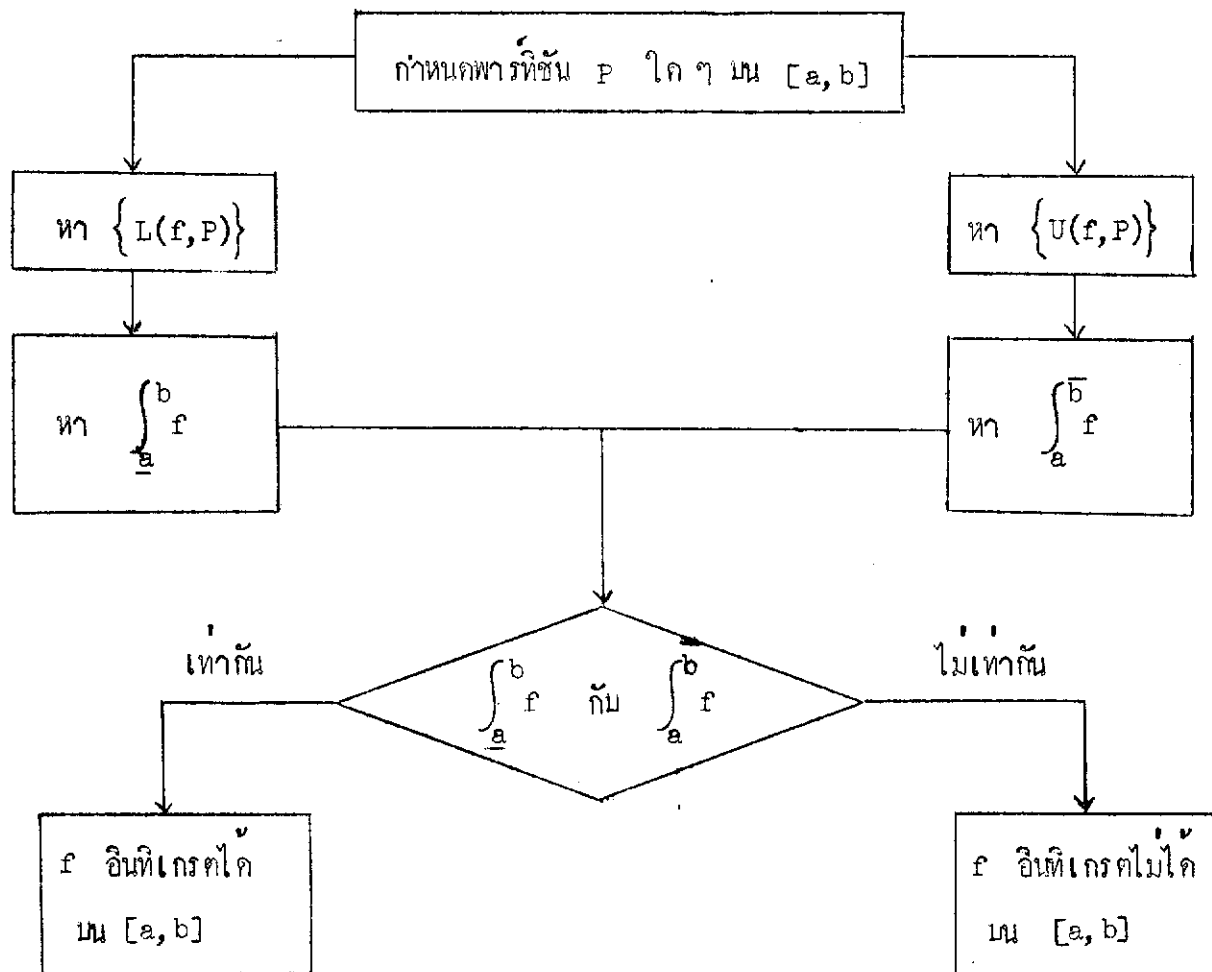
ขอยกผล เราจะใช้ $\int_a^b f(x)dx$ แทนด้วย $\int_{\underline{a}}^b f$

$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ แทนด้วย $\int_a^{\bar{b}} f$

และ $\int_a^b f(x)dx$ แทนด้วย $\int_a^b f$

ในลำดับขั้นการคิดและในแบบวิเคราะห

แบบวิเคราะห์การแสดงว่าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้หรือไม่บน $[a, b]$ โดยใช้นิยาม



ตัวอย่าง 20.1 กำหนด $f(x) = 4$ จงแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน $[2, 8]$

และจงหา $\int_2^8 f(x)dx$

วิเคราะห์แนวความคิด

1. กำหนด $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพหุวัตินของ $[2, 8]$
2. หา $\{L(f, P)\}$ และ $\{U(f, P)\}$
3. จากนั้นหา $\int_a^b f$ และ $\int_a^b f$ แล้วพิจารณาว่าเท่ากันหรือไม่

วิธีทำ ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันใด ๆ ของ $[2, 8]$

เนื่องจาก $f(x) = 4$ สำหรับทุก ๆ $x \in [2, 8]$

ดังนั้น $f(x) = 4$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ สำหรับทุก ๆ $i=1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } M_i &= \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= \sup \{ 4 \} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } m_i &= \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= \inf \{ 4 \} = 4 \end{aligned}$$

สำหรับทุก ๆ $i=1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 4 (x_i - x_{i-1}) \\ &= 4 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= 4 \{ (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \} \\ &= 4 (-x_0 + x_n) \\ &= 4 (x_n - x_0) \\ &= 4 (8 - 2) \\ &= 24 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $L(f, P) = 24$ สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$

$$\text{ดังนั้น } \sup \{ L(f, P) \} = \sup \{ 24 \} = 24$$

$$\therefore \int_2^8 f(x) dx = 24 \quad \text{_____} (1)$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n 4 (x_i - x_{i-1})$$

$$= 24$$

เนื่องจาก $U(f, P) = 24$ สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$

$$\text{ดังนั้น } \inf \{U(f, P)\} = \inf \{24\} = 24$$

$$\therefore \int_2^8 f(x) dx = 24 \quad \text{_____} (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \int_2^8 f(x) dx = \int_2^8 f(x) dx = 24$$

ดังนั้น f อินทิเกรตได้บน $[2, 8]$

$$\text{และ } \int_2^8 f(x) dx = 24$$

□

ตัวอย่าง 20.2 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 1, & x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f อินทิเกรตได้หรือไม่บน $[0, 5]$

วิเคราะห์แนวคิด

1. ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันใด ๆ ของ $[0, 5]$

2. หา $\{L(f, P)\}$ และ $\{U(f, P)\}$

3. หา $\int_0^5 f$ และ $\int_0^5 f$ แล้วพิจารณาว่าเท่ากันหรือไม่

วิธีทำ ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันใด ๆ ของ $[0, 5]$

สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

จะมีจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะอยู่ใน $[x_{i-1}, x_i]$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } M_i &= \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= \sup \{ 0, 1 \} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } m_i &= \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= \inf \{ 0, 1 \} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } L(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 0 (x_i - x_{i-1}) \\ &= 0 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $L(f, P) = 0$ สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[0, 5]$

$$\text{ดังนั้น } \sup \{ L(f, P) \} = \sup \{ 0 \} = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_0^5 f(x) dx = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{aligned}U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 1 (x_i - x_{i-1}) \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= x_n - x_0 \\ &= 5 - 0 \\ &= 5\end{aligned}$$

เนื่องจาก $U(f, P) = 5$ สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[0, 5]$

$$\text{ดังนั้น } \inf \{ U(f, P) \} = \inf \{ 5 \} = 5$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^5 f(x) dx = 5$ _____ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\int_0^5 f(x) dx \neq \int_0^5 f(x) dx$

ดังนั้น f อินทิเกรตไม่ได้บน $[0, 5]$

□

การใช้นิยามแสดงหรือตรวจสอบว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้อินทิเกรตได้หรือไม่นั้น
เป็นเรื่องยาก ดังนั้นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่จะช่วยทำให้ง่ายขึ้นต่อไป

ทฤษฎีบทประกอบ 21 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ สำหรับ
ทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า

1) มีพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f(x) dx - \epsilon \leq L(f, P_1)$
และ 2) มีพาร์ติชัน P_2 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P_2) \leq \int_a^b f(x) dx + \epsilon$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ 21

ขั้นที่ 1 สมมติในสัจของข้อความที่ว่ามีการพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon < L(f, P_1)$
"ไม่มีพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon < L(f, P_1)$ "

ขั้นที่ 2 เขียนข้อสมมติในขั้นที่ 1 เป็นดังนี้

"สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon \geq L(f, P)$ "

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 จะได้ว่า

$\int_a^b f - \epsilon$ เป็นค่าขอบเขตบนของ $\{L(f, P)\}$

ขั้นที่ 4 จากนิยามปริมาตร จะได้ว่า

$$\sup \{L(f, P)\} \leq \int_a^b f - \epsilon$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \int_a^b f \leq \int_a^b f - \epsilon$$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 เป็นไปไม่ได้ (เกิดข้อขัดแย้ง) เพราะ $\epsilon > 0$

ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 5 จะทำให้สมมติในขั้นที่ 1 ไม่เป็นจริง

ขั้นที่ 7 สรุปว่า มีพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon < L(f, P_1)$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

เนื่องจากการพิสูจน์ว่ามีพาร์ติชัน P_1 ดังกล่าวโดยตรง ทำได้ยาก จะพิสูจน์ทางอ้อมโดยใช้การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

กำหนด $\epsilon > 0$

1) สมมติว่าไม่มีพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon < L(f, P_1)$

2) สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon \geq L(f, P)$

3) $\int_a^b f - \epsilon$ เป็นค่าขอบเขตบนของ $\{L(f, P)\}$

4) $\sup \{L(f, P)\} \leq \int_a^b f - \epsilon$
 $\int_a^b f \leq \int_a^b f - \epsilon$

5) เป็นไปไม่ได้ (เกิดข้อขัดแย้ง) เพราะว่า $\epsilon > 0$

6) ที่สมมติเป็นไปไม่ได้

7) มีพาร์ติชัน P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\int_a^b f - \epsilon < L(f, P_1)$

พิสูจน์ กำหนด $\epsilon > 0$

$$(1) \text{ สมมติว่ามีพาร์ติชัน } P_1 \text{ ของ } [a, b] \text{ ซึ่ง } \int_a^b f(x) dx - \epsilon < L(f, P_1)$$

$$\text{ดังนั้น สำหรับทุก ๆ พาร์ติชัน } P \text{ ของ } [a, b] \text{ จะได้ } \int_a^b f(x) dx - \epsilon \geq L(f, P)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_a^b f(x) dx - \epsilon \text{ เป็นค่าขอบเขตบนของ } \{L(f, P)\}$$

$$\text{แต่ } \int_a^b f(x) dx = \sup \{L(f, P)\}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx - \epsilon$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (เพราะว่า $\epsilon > 0$)

$$\text{ดังนั้นสมมติไม่มีพาร์ติชัน } P_1 \text{ ของ } [a, b] \text{ ซึ่ง } \int_a^b f(x) dx - \epsilon < L(f, P_1)$$

เป็นไปได้

$$\text{นั่นคือมีพาร์ติชัน } P_1 \text{ ของ } [a, b] \text{ ซึ่ง } \int_a^b f(x) - \epsilon < L(f, P_1)$$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกันให้เป็นแบบฝึกหัด

□

แบบฝึกหัดที่ 6

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ 21 ตอนที่ 2
2. กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $0 \leq a - b < \epsilon; \forall \epsilon > 0$
จะได้ $a = b$

ทฤษฎีบท 22 กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$
ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$
ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

ลำดับขั้นวิธีการหาพื้นที่ผิวของผิว 22 ตอนที่ 1

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ "มี P ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ "

ขั้นที่ 2 เขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

2.1 f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้

2.2 f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

ขั้นที่ 3 ใช้นิยามและทฤษฎีการแจกขั้นที่ 2.1 และ 2.2 จะได้ว่า

$$3.1 \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

3.2 จะใช้ทฤษฎีบทประกอบที่ 21

$$ก. \forall \epsilon > 0 \text{ มี } P_1 \text{ ซึ่ง } U(f, P_1) < \int_a^b f^+ + \frac{\epsilon}{2}$$

$$ข. \forall \epsilon > 0 \text{ มี } P_2 \text{ ซึ่ง } \int_a^b f^- + \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f^-$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 หา $U(f, P_1) - L(f, P_2)$ ได้

$$U(f, P_1) - L(f, P_2) < \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- + \epsilon/2 + \epsilon/2$$

ขั้นที่ 5 ใช้เหตุผลจากขั้นที่ 2 จะได้ว่า

$$U(f, P_1) - L(f, P_2) < \epsilon$$

ขั้นที่ 6 พยายามเปลี่ยนผลจากขั้นที่ 5 ให้ P_1 และ P_2 ใน $U(f, P_1)$

และ $L(f, P_2)$ เป็นพาร์ติชัน P เหมือนกัน

ขั้นที่ 7 ให้ $P = P_1 \cup P_2$ จะได้

$$U(f, P) \leq U(f, P_1)$$

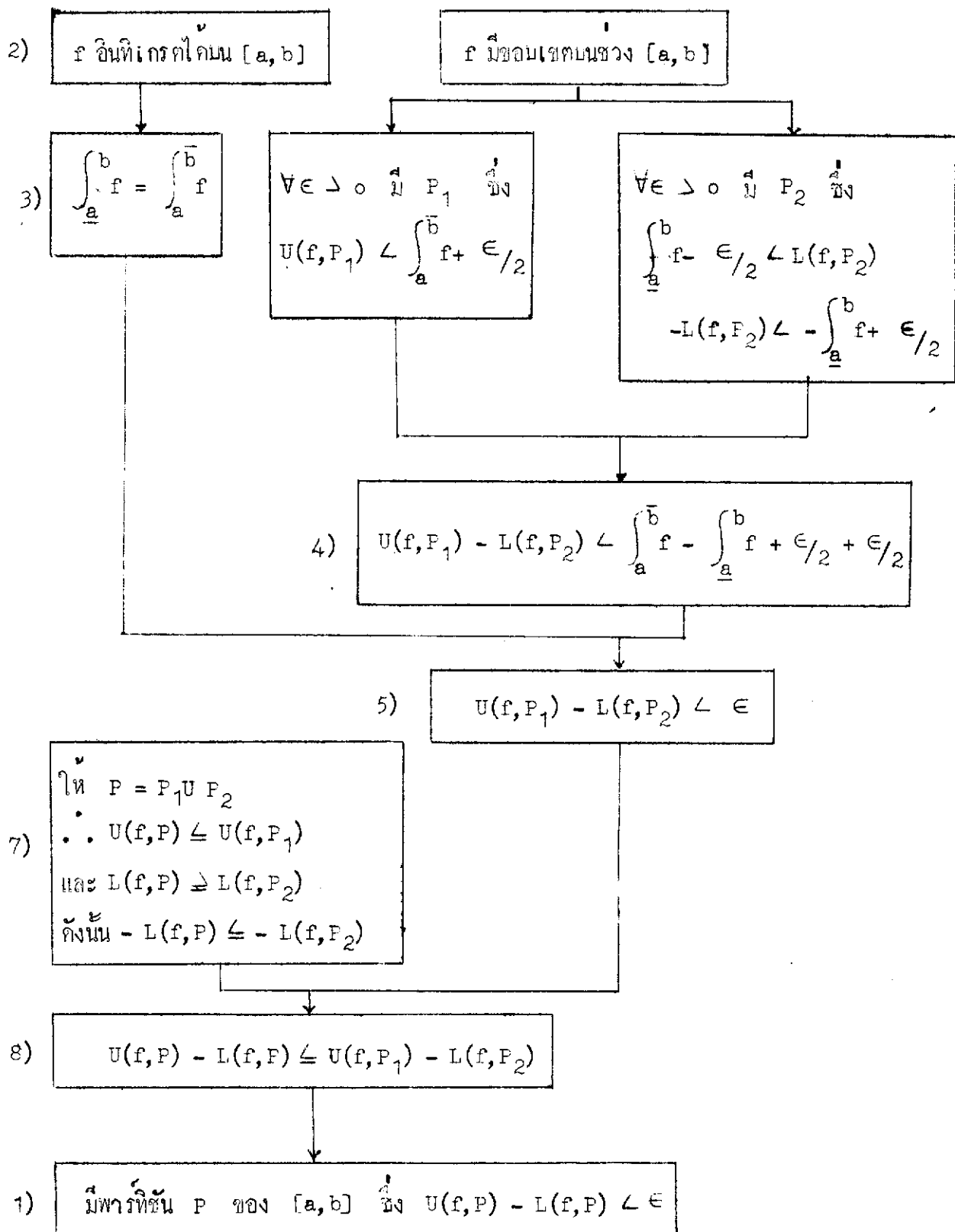
$$\text{และ } L(f, P_2) \leq L(f, P)$$

ขั้นที่ 8 หา $U(f, P) - L(f, P)$ ได้

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_1) - L(f, P_2)$$

ขั้นที่ 9 ใช้ผลสรุปจากขั้นที่ 5 สรุปได้ว่า $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ (ตอน 1)



พิสูจน์ (1) ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ จะแสดงว่าสำหรับทุก $\epsilon > 0$

จะมีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

กำหนด $\epsilon > 0$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 21

ดังนั้นมีพาร์ติชัน P_1 ซึ่ง $U(f, P_1) < \int_a^b f(x) dx + \epsilon/2$

และมีพาร์ติชัน P_2 ซึ่ง $\int_a^b f(x) dx - \epsilon/2 < L(f, P_2)$

$$\rightarrow -L(f, P_2) < -\int_a^b f(x) dx + \epsilon/2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } U(f, P_1) - L(f, P_2) < \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx + \epsilon/2 + \epsilon/2 \quad (1)$$

เนื่องจาก f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

$$\text{จะได้ว่า } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{จาก (1) จะได้ } U(f, P_1) - L(f, P_2) < \epsilon \quad (2)$$

$$\text{ให้ } P = P_1 \cup P_2$$

โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า $P_1 \subset P$ และ $P_2 \subset P$

$$\text{ดังนั้น } U(f, P) \leq U(f, P_1)$$

$$\text{และ } L(f, P) \geq L(f, P_2)$$

$$\rightarrow -L(f, P) \leq -L(f, P_2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_1) - L(f, P_2) \quad (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

□

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์ทฤษฎีบท 22 ตอนที่ 2

ขั้นที่ 1 ให้เขียนในสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ " อินทิเกรตใดบน $[a, b]$ "

ขั้นที่ 2 ใช้นิยามเขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ใหม่ได้ดังนี้

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

ขั้นที่ 3 พิจารณาความมีกรณีใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 2 ได้

3.1 จากแบบฝึกหัดที่ 6 ถ้า $0 \leq \int_a^b f - \int_a^b f < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$
จะได้อีก $\int_a^b f = \int_a^b f$

หรือ 3.2 $\int_a^b f - \int_a^b f = 0$

ขั้นที่ 4 จากสิ่งที่กำหนดและที่ทราบมาก่อน มองไม่เห็นทางที่จะสรุป 3.2

ดังนั้นพิจารณากรณี 3.1 แยกอีกเป็น

4.1 $0 \leq \int_a^b f - \int_a^b f$

และ 4.2 $\int_a^b f - \int_a^b f < \epsilon$

ขั้นที่ 5 เขียน 4.1 ใหม่เป็น $\int_a^b f \leq \int_a^b f$ ซึ่งรู้ว่าเป็นจริง

วิเคราะห์ว่าทำอย่างไรจึงจะสามารถสรุป 4.2 โดยกลับไปพิจารณาสี่ที่กำหนดให้

ขั้นที่ 6 จากสี่ที่กำหนดให้ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ มีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 ถ้าจะสรุปขั้นที่ 5 การหาทางสรุปให้ได้ว่า

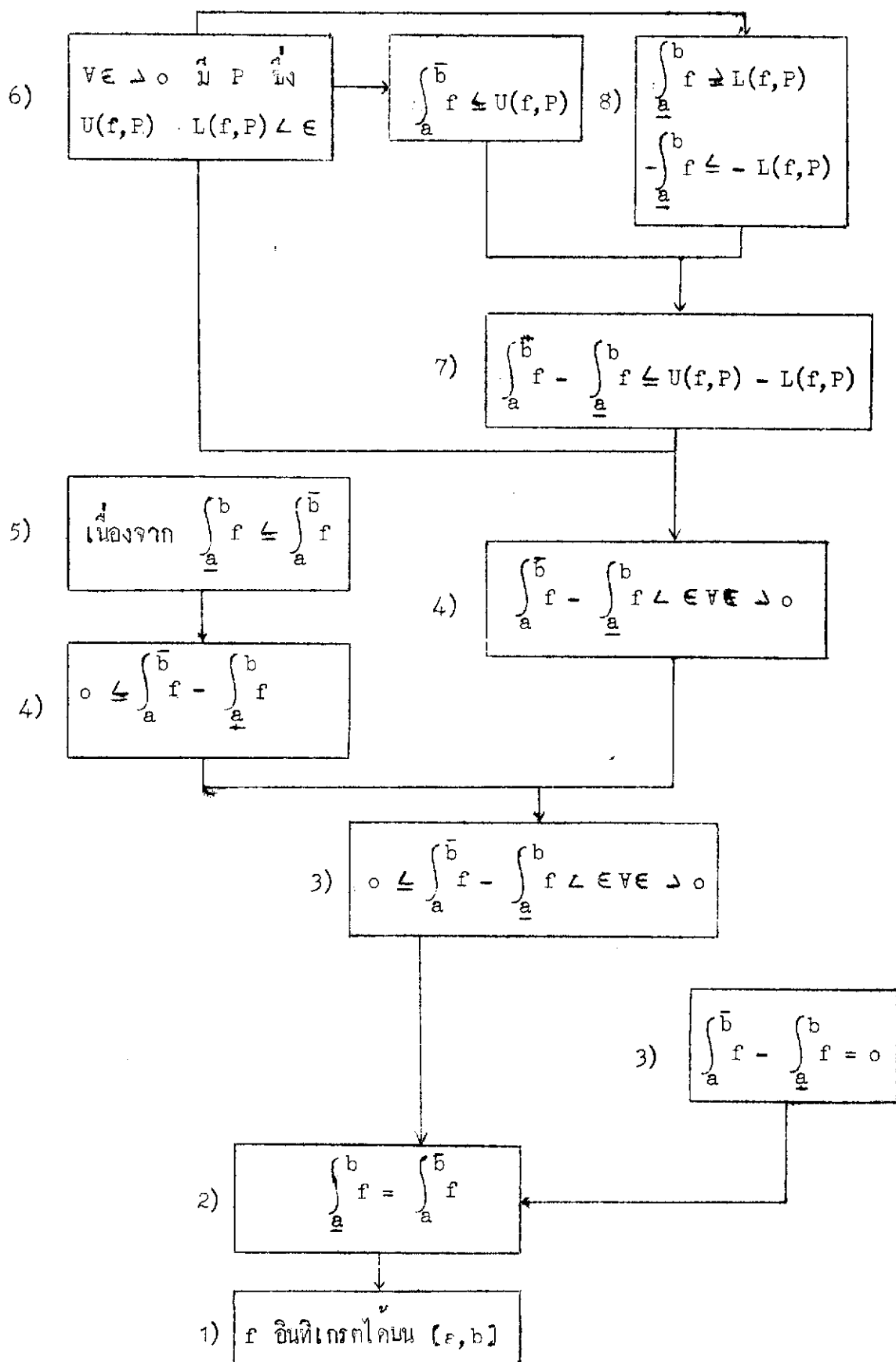
$$\int_a^b f - \int_a^b f \leq U(f, P) - L(f, P)$$

ขั้นที่ 8 ใช้นิยามเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่าง $\int_a^b f$ กับ $U(f, P)$

และ $\int_a^b f$ กับ $L(f, P)$

ขั้นที่ 9 พยายามสรุปขั้นที่ 7 โดยใช้อยู่ที่ 8

วิเคราะห์แนวคิดในตอนที่ 2



พิสูจน์ (2) ถ้าสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีพาร์ติชัน P ซึ่ง

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

จะแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

เนื่องจาก

$$\int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$$

และ

$$\int_a^b f(x) dx \geq L(f, P)$$

$\rightarrow$

$$-\int_a^b f(x) dx \leq -L(f, P)$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P)$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

เนื่องจาก

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

ดังนั้น

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

โดยแบบฝึกหัด 8 ข้อที่ 2 จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ดังนั้น

f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

□

สัจพจน์ของอาร์คิมิดีส

สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x, y และ $x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$

ซึ่ง $nx > y$

ลำดับชั้นแนวการพิสูจน์ตัวอย่าง 22.1

1. กำหนด $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$
 โดยการแบ่ง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ n ช่วง แต่ละช่วงกว้าง $\frac{b-a}{n}$
 จะได้ $x_i = a + i \frac{(b-a)}{n} \quad i=1, 2, \dots, n$

$$2. \text{ หา } U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n}$$

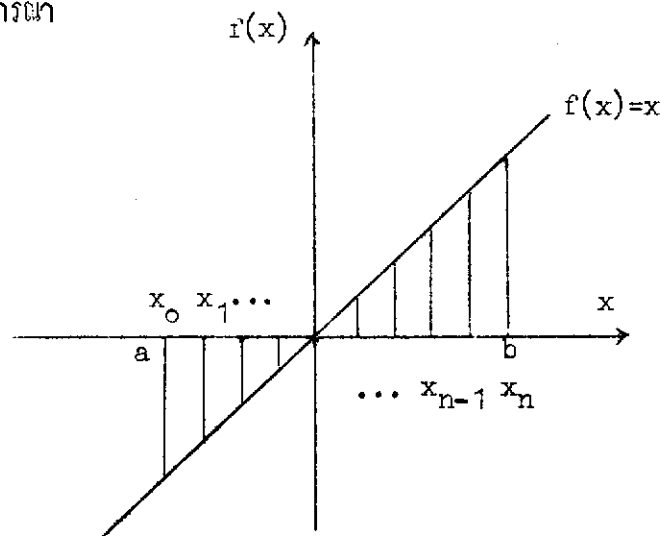
3. ใช้ สัจพจน์ของอาร์คิมิดีส จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{ซึ่ง } n \geq \frac{(b-a)^2}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\text{จะได้ } \frac{(b-a)^2}{n} < \epsilon$$

ตัวอย่าง 22.1 กำหนด $f(x) = x$ จงแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

วิธีทำ พิจารณา



ให้ $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

โดยที่ $x_i = a + i \frac{(b-a)}{n}$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

นั่นคือ แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงกว้าง $\frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (x_i - x_{i-1}) &= \left\{ a + i \frac{(b-a)}{n} \right\} - \left\{ a + (i-1) \frac{(b-a)}{n} \right\} \\ &= \left\{ a + i \frac{(b-a)}{n} \right\} - \left\{ a + i \frac{(b-a)}{n} - \frac{(b-a)}{n} \right\} \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(x) = x$ ดังนั้น $m \geq n \Rightarrow f(m) \geq f(n)$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } M_i &= \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= f(x_i) = x_i \\ m_i &= \inf \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} \\ &= f(x_{i-1}) = x_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ } U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \frac{(b-a)}{n} (b-a) \\
&= \frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

สำหรับ $\epsilon > 0$ โดยสัญกรณ์ของอาร์คิมิดีส จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{ซึ่ง } n > \frac{(b-a)^2}{\epsilon} \quad \text{เปรียบกับ สำหรับ } x = 1 \quad \text{และ } y = \frac{(b-a)^2}{\epsilon}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{(b-a)^2}{n} < \epsilon$$

$$\text{ดังนั้นจะมีพหุคูณ } P_n \text{ ซึ่ง } U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{(b-a)^2}{n} < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 22 จะได้ว่า

f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

□

ลำดับขั้นแนวการพิสูจน์ตัวอย่าง 23.2

1. กำหนด $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[0, b]$
 โดยการแบ่ง $[0, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงกว้าง $\frac{b}{n}$

จะได้ $x_i = i\frac{b}{n} \quad i=1, 2, \dots, n$

2. หา $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$

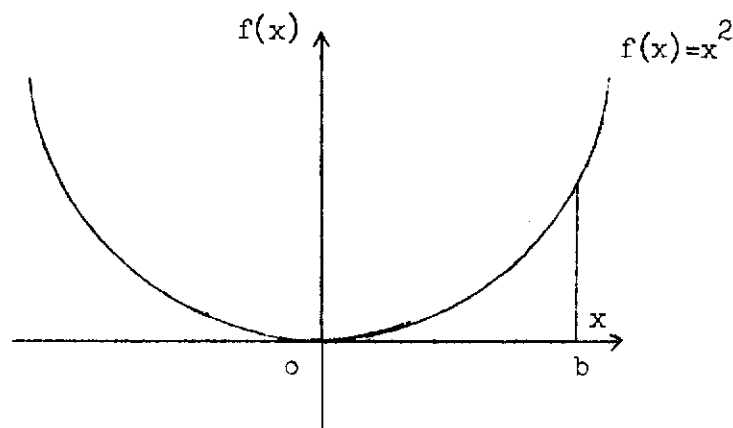
$$= \frac{b^3}{n}$$

3. ใช้สัจพจน์ของอาร์คิมิดีส จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$

ซึ่ง $n > \frac{b^3}{\epsilon} ; \forall \epsilon > 0$

จะได้ $\frac{b^3}{n} < \epsilon$

ตัวอย่าง 23.2 กำหนด $f(x) = x^2$ จงแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน $[0, b]$



พิจารณา $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

โดยที่ $x_i = \frac{i(b-a)}{n} = \frac{ib}{n}$ สำหรับทุก ๆ $i=1, 2, \dots, n$

นั่นคือ แบ่งช่วง $[0, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงกว้าง $\frac{b}{n}$

$$\text{ดังนั้น } x_i - x_{i-1} = \frac{ib}{n} - (i-1)\frac{b}{n} = \frac{ib}{n} - \frac{(i-1)b}{n} = \frac{b}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } m &\geq n \rightarrow m^2 \geq n^2 \\ &\rightarrow f(m) \geq f(n) \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } M_i &= \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \\ &= f(x_i) = x_i^2 \\ m_i &= \inf \{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \\ &= f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \frac{b}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \\
&= \frac{b}{n} (x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n-1}^2) \\
&= \frac{b}{n} (x_n^2 - x_0^2) \\
&= \frac{b}{n} (b^2 - 0) \\
&= \frac{b^3}{n}
\end{aligned}$$

สำหรับ $\epsilon > 0$ โดยสัจพจน์ของอาร์คิมิดีส จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$

$$n > \frac{b^3}{\epsilon}$$

$$\rightarrow \frac{b^3}{n} < \epsilon$$

ดังนั้นจะมีพาร์ติชัน P_n ซึ่ง $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{b^3}{n} < \epsilon$

โดยทฤษฎีบท 22 จะได้ว่า

f อินทิเกรตไดบน $[a, b]$

□

แบบฝึกหัดที่ 9

1. สมมติ $f(x) = \begin{cases} 2 & 1 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f จะอินทิเกรตได้หรือไม่ในช่วง $[1, 5]$

2. สมมติ $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f จะอินทิเกรตได้หรือไม่ในช่วง $[0, 2]$

3. กำหนดให้ $f(x) = |x|$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[0, 5]$

4. กำหนดให้ $f(x) = [2x]$ ($\because$ จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด ไม่น้อยกว่า หรือเท่ากับ $2x$)

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[0, 3]$

5. กำหนดให้ $f(x) = 4x$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[0, 2]$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ทฤษฎีบท 23

ในการพิสูจน์จะใช้นิยามที่ว่า

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันใด ๆ บน $[a, b]$

ขั้นที่ 2 หาก $L(f, P) ; \forall P$ และ $U(f, P) ; \forall P$

ได้ $L(f, P) = k(b-a) ; \forall P$ และ $U(f, P) = k(b-a) ; \forall P$

ขั้นที่ 3 หาก $\sup \{L(f, P)\}$ และ $\inf \{U(f, P)\}$

ได้ $\sup \{L(f, P)\} = k(b-a)$ และ $\inf \{U(f, P)\} = k(b-a)$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 จะได้ $\int_a^b f = \int_a^b f = k(b-a)$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 จะได้

5.1 f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

และ 5.2 $\int_a^b f = k(b-a)$

ฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้

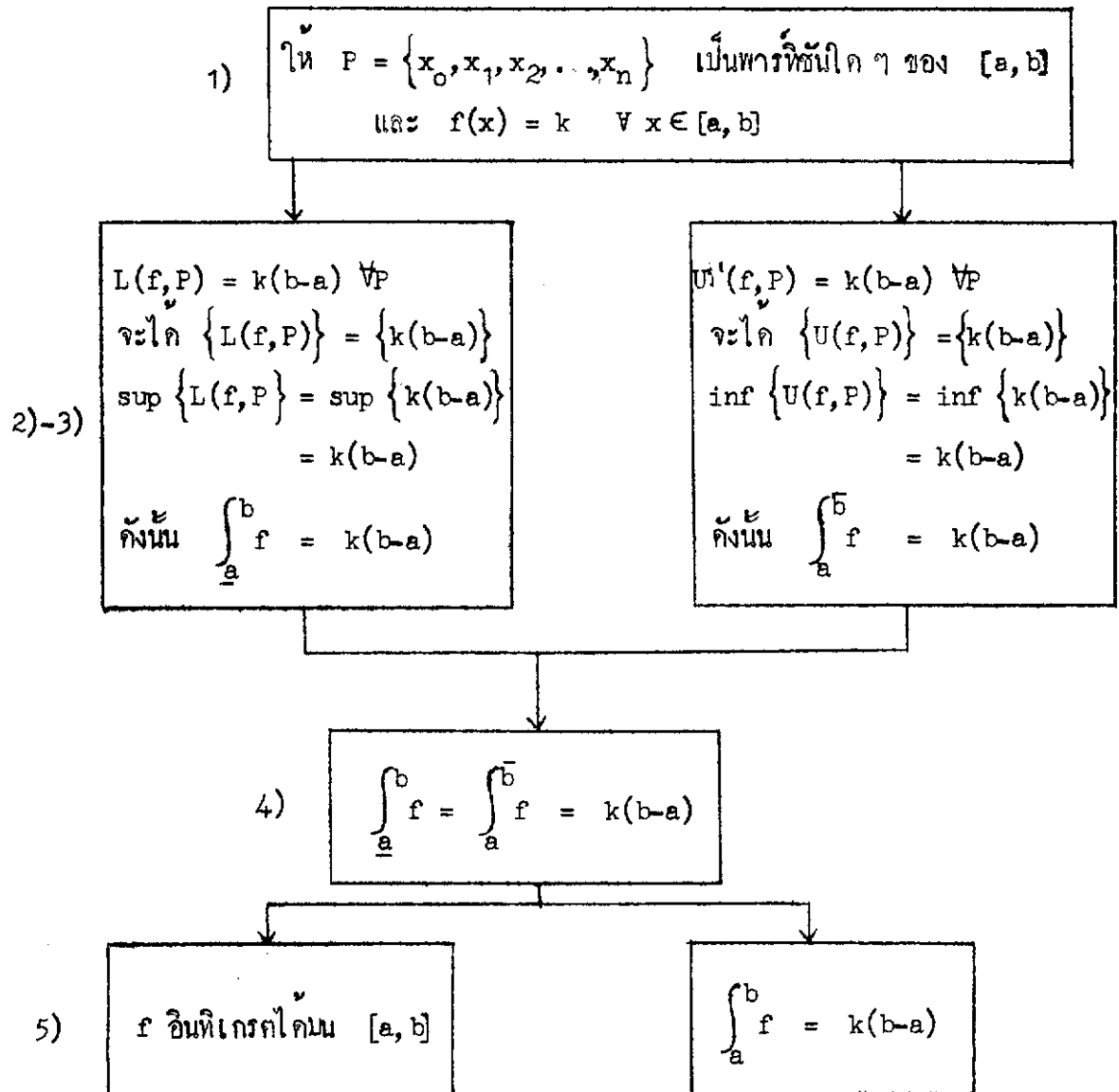
ในตอนนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางประการของฟังก์ชัน ซึ่งทำให้ฟังก์ชันนั้นอินทิเกรตได้

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนด $k \in \mathbb{R}$ และ $f(x) = k$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ และ

$$\int_a^b f(x) dx = k(b-a)$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันใด ๆ ของ $[a, b]$

เนื่องจาก $f(x) = k ; \forall x \in [a, b]$

ดังนั้น $f(x) = k ; \forall x \in [x_{i-1}, x_i] , \forall i = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $M_i = m_i = k ; \forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n k (x_i - x_{i-1}) \\ &= k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= k (b-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n k (x_i - x_{i-1}) \\ &= k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= k (b-a) \end{aligned}$$

จะได้ $\{L(f, P)\} = \{k(b-a)\}$

ดังนั้น $\sup \{L(f, P)\} = \sup \{k(b-a)\} = k(b-a)$

และ $\inf \{U(f, P)\} = \inf \{k(b-a)\} = k(b-a)$

ดังนั้น

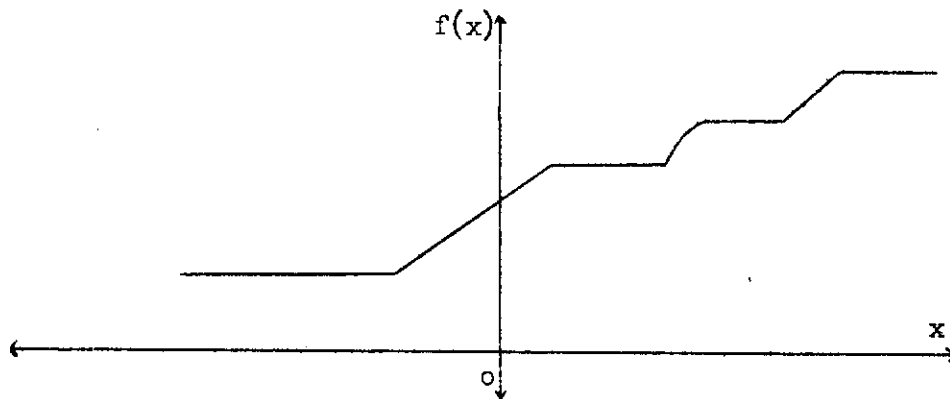
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = k(b-a)$$

เพราะฉะนั้น f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

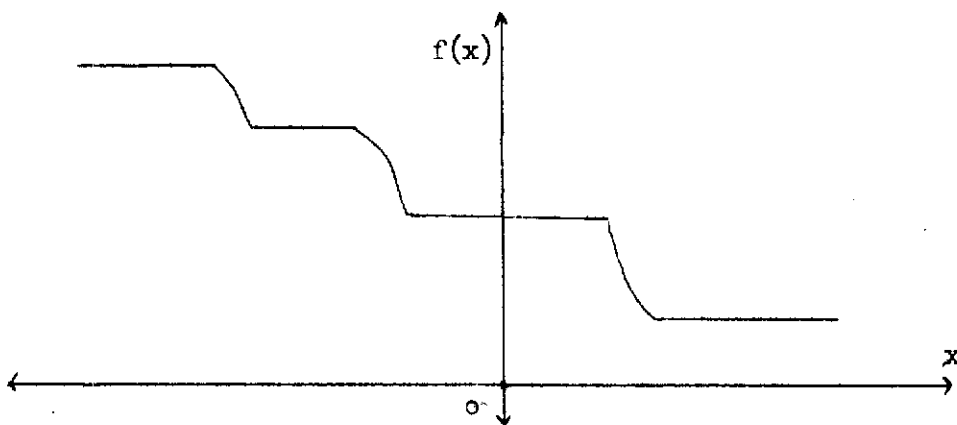
และ $\int_a^b f(x) dx = k(b-a)$

□

นิยาม 24 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันไม่ลดก็ต่อเมื่อ ถ้า x_1 และ x_2 อยู่ในโดเมนของ f และ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า $f(x_1) \leq f(x_2)$
 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม ก็ต่อเมื่อ ถ้า x_1 และ x_2 อยู่ในโดเมนของ f ของ $x_1 < x_2$ จะได้ว่า $f(x_1) \geq f(x_2)$



ตัวอย่างของกราฟของฟังก์ชัน ไม่ลด



ตัวอย่างของกราฟของฟังก์ชันไม่เพิ่ม

คำถามชุดที่ 17

1. ฟังก์ชัน $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดหรือไม่เพิ่ม
2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดหรือไม่เพิ่ม
3. ฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดหรือไม่เพิ่ม
4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดหรือไม่เพิ่ม

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$ ทุรีมีัมและอินฟีนิั้มของ f บนช่วง $[a, b]$ คือ
6. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a, b]$ ทุรีมีัมและอินฟีนิั้มของ f บนช่วง $[a, b]$ คือ

แบบฝึกหัดที่ 10 จงแสดงว่า

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$ และ $f(a) = f(b)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a, b]$ และ $f(a) = f(b)$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (หรือไม่ลด) บนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า f มีขอบเขต

ลำดับขั้นตอนการพิสูจน์ตัวอย่าง 23.1

ขั้นที่ 1 กำหนดพหุคูณ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ โดยแต่ละช่วงกว้าง $\frac{b-a}{n}$
นั่นคือ $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \forall i=1, 2, 3, \dots, n$

ขั้นที่ 2 สำหรับทุก $\epsilon > 0$ แล้วแสดงได้ว่า
$$\frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\epsilon} > 0$$

ขั้นที่ 3 ใช้สัจพจน์อาร์คิมิดีสสรุปได้ว่า จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่

$$n > \frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\epsilon}$$

จะได้ว่า $\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)}$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ (1), (3) ดังนั้น สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีพหุคูณ P ของ $[a, b]$

ซึ่ง $x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)} \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

ตัวอย่าง 23.1

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$ และ $f(a) \neq f(b)$ สำหรับ
ทุก $\epsilon > 0$ จะได้ว่า มีพาร์ติชัน $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ และ $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$
ซึ่ง $x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a, b]$ และ $f(a) \neq f(b)$ สำหรับ
ทุก $\epsilon > 0$ จะได้ว่า มีพาร์ติชัน $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ และ $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$
ซึ่ง $x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

วิธีทำ (1) แบ่งช่วง $[a, b]$ เป็นช่วงย่อย n ช่วงซึ่งแต่ละช่วงกว้าง $\frac{b-a}{n}$

นั่นคือให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ โดยที่ $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x_i - x_{i-1} &= \left\{ a + i \frac{b-a}{n} \right\} - \left\{ a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right\} \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } \forall i = 1, 2, \dots, n ; x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{----- (1)}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และ $a < b$ ดังนั้น

$$\rightarrow f(a) \geq f(b)$$

$$\rightarrow f(a) > f(b) \quad (\because f(a) \neq f(b))$$

$$\rightarrow f(a) - f(b) > 0$$

$$\rightarrow (b-a)(f(a) - f(b)) > 0 \quad (\because (b-a) > 0)$$

กำหนด $\epsilon > 0$

โดยสัญพจน์ของอาร์คิมิดีส จะมี $n \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง

$$n > \frac{(b-a)(f(a) - f(b))}{\epsilon}$$

$$\rightarrow \frac{\epsilon}{f(a) - f(b)} > \frac{b-a}{n} \quad \left\{ \because f(a) - f(b) > 0 \right\}$$

นั่นคือ
$$\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)} \quad \text{--- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า
$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)} \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

ดังนั้นจะมีพหุคูณ P ของ $[a, b]$ ซึ่ง
$$x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)} \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

2) (ทำเป็นแบบฝึกหัด)

□

ตัวอย่าง 23.2 1) จากตัวอย่าง 23.1 1) จงหา

$$U(f, P) - L(f, P)$$

2) จากตัวอย่าง 23.1 2) จงหา

$$U(f, P) - L(f, P)$$

วิธีทำ 1) จากตัวอย่าง 23.1 1)

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$

และ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพหุคูณของ $[a, b]$

ซึ่ง
$$x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)}$$

พิจารณา ถ้า $m < n$

จะได้ $f(m) > f(n)$ ($\because f$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม)

สำหรับ $i=1, 2, \dots, n$

จะได้ $M_i = f(x_{i-1})$ และ $m_i = f(x_i)$

เพราะฉะนั้น
$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^n \{f(x_{i-1}) - f(x_i)\} \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)}$$

$$= \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{i=1}^n \{f(x_{i-1}) - f(x_i)\}$$

$$= \frac{\epsilon}{f(a)-f(b)} (f(a)-f(b))$$

$$= \epsilon$$

2) ทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 24 ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (หรือไม่ลด) บนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม (หรือไม่ลด) ดังจะแยกการพิสูจน์เป็น

กรณี 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $[a, b]$

กรณี 2 ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $[a, b]$ และ

2.1 f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม

2.2 f เป็นฟังก์ชันไม่ลด

กรณี 1 โดยทฤษฎีบท 23 จะได้ว่า
 f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

ลำดับขั้นตอนวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 24 กรณี 2.1

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ " f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ "

ขั้นที่ 2 มีทฤษฎีหรือนิยามอะไรบางที่จะนำสรุปขั้นที่ 1

2.1 $\forall \epsilon > 0$ มีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

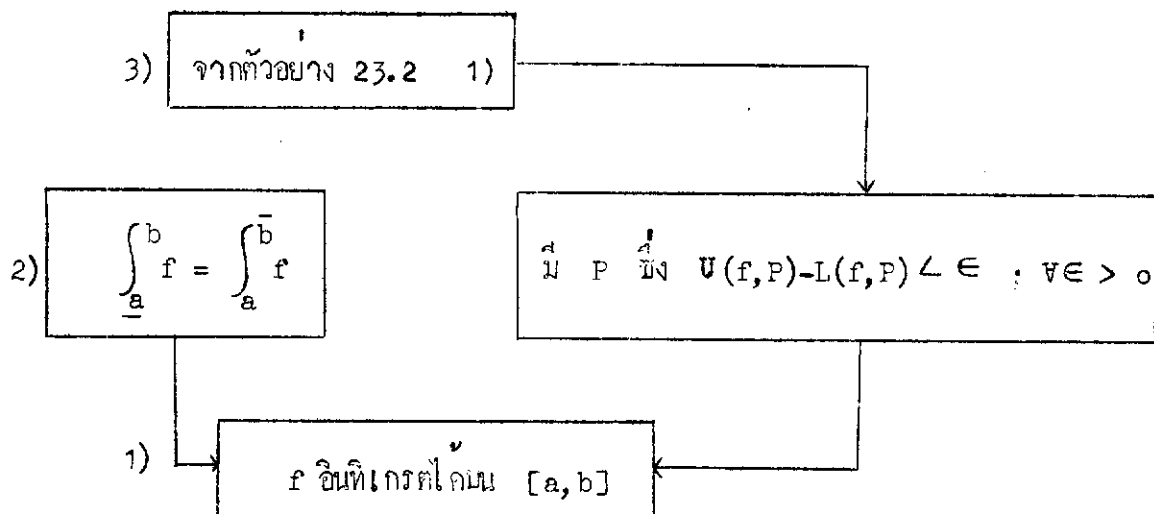
$$2.2 \quad \int_a^b f = \int_a^b f$$

ขั้นที่ 3 จากตัวอย่าง 23.2 1) จะได้ 2.1

ดังนั้นการเริ่มการพิสูจน์ได้ 2.1

กรณี 2.1 f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวและไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$

ดังนั้น $f(a) > f(b) \rightarrow f(a) - f(b) > 0$



กรณี 2.2 f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวและไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$

ดังนั้น $f(b) > f(a) \rightarrow f(b) - f(a) > 0$

ทำนองเดียวกับตัวอย่าง 23.1 1) และ 23.2 1)

พิสูจน์ กรณี 2.1 f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวและไม่เพิ่มบนช่วง $[a, b]$

ดังนั้น $f(a) > f(b)$

$\rightarrow f(a) - f(b) > 0$

จากตัวอย่าง 23.2 (1)

จะได้ว่ามีพหุหัตถ์ P ของ $[a, b]$ หนึ่ง ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

จากทฤษฎี 22 จะได้ว่า

f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

กรณี 2.2 f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวและไม่ลดบนช่วง $[a, b]$

ดังนั้น $f(a) < f(b)$

$\rightarrow f(b) - f(a) > 0$

จากตัวอย่าง 23.2 (2)

จะได้ว่ามีพหุคูณ P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

จากทฤษฎี 22 จะได้ว่า

f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

□

ตัวอย่าง 24.1 กำหนด $f(x) = 3x+2$

วิธีทำ พิจารณา

$$m > n \rightarrow 3m > 3n$$

$$\rightarrow 3m+2 > 3n+2$$

$$\rightarrow f(m) > f(n)$$

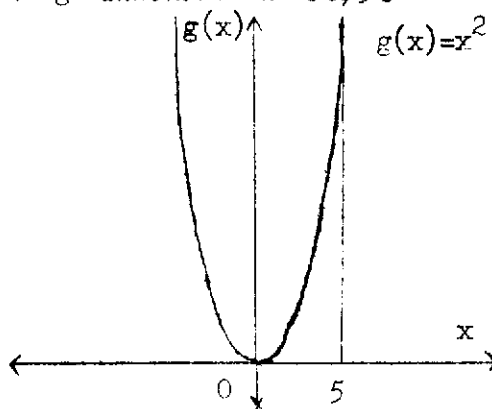
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[a, b]$ ใด ๆ

เพราะฉะนั้น f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

ตัวอย่าง 24.2 กำหนด $g(x) = x^2$

จงแสดงว่า g อินทิเกรตได้บน $[0, 5]$

วิธีทำ



เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันไม่ลดบนช่วง $[0, 5]$

ดังนั้น g อินทิเกรตได้บน $[0, 5]$

ข้อสังเกต จากกราฟจะเห็นว่า โดยทฤษฎีบท 24

g อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ เมื่อ $[a, b]$ อยู่ในรูปต่อไปนี้

1) $[0, b]$

$$2) [a, 0]$$

$$3) [a, b] \text{ เมื่อ } a > 0$$

$$4) [a, b] \text{ เมื่อ } b < 0$$

นิยาม 25 ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเสมอที่จุด a ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in D_f$ และ $|x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

ตัวอย่าง 25.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0, 6]$

จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่องเสมอที่จุด a บน $[0, 6]$

แนวคิด

กำหนด $\epsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 6] \quad |x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

พิจารณา $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

$$\Leftrightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| < \epsilon$$

แต่ $x_1, x_2 \in [0, 6] \rightarrow |x_1 + x_2| \leq 12$

$$\rightarrow |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq 12 |x_1 - x_2|$$

ดังนั้นการที่จะได้ว่า $|x_1 + x_2| |x_1 - x_2| < \epsilon$

ควรจะได้ $12 |x_1 - x_2| < \epsilon$ ก่อน

นั่นคือควรจะได้ $|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{12}$

ดังนั้น ถ้าให้ $\delta = \frac{\epsilon}{12}$

จะได้ $|x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{12}$

$$\rightarrow 12 |x_1 - x_2| < \epsilon$$

$$\rightarrow |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| < \epsilon$$

$$\rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon$$

$$\rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

พิสูจน์

กำหนด $\epsilon > 0$

เลือก $\delta = \frac{\epsilon}{12}$ ถ้า $x_1, x_2 \in [0, 6]$

ซึ่ง $|x_1 - x_2| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &= |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \\ &\leq 12 |x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in [0, 6]) \\ &< 12 \frac{\epsilon}{12} = \epsilon \end{aligned}$$

จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องสม่ำเสมอปลายบน $[0, 6]$

ทฤษฎีบท 26 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสม่ำเสมอปลายบน $[a, b]$ $\square$

[พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด]

ทฤษฎีบท 27 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 27

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ " f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ "

ขั้นที่ 2 มีทฤษฎีหรือนิยามอะไรบางอย่างที่สรุปขั้นที่ 1

2.1 $\forall \epsilon > 0$ มีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

$$2.2 \int_a^b f = \int_a^b f$$

ขั้นที่ 3 เขียน $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$ แทนในขั้นที่ 2.1

ขั้นที่ 4 จากที่กำหนดให้ f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

4.1 f ต่อเนื่องสม่ำเสมอ กล่าวถึงนั้น $\forall \epsilon > 0$

$$\forall x, y \in [a, b] \text{ ซึ่ง } |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

4.2 จะมีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดและเล็กที่สุดของ f บน $[a, b]$

$$\text{นั่นคือมี } x, y \in [x_{i-1}, x_i] \text{ ซึ่ง } M_i = f(x) ; m_i = f(y)$$

$$\text{ดังนั้น } |x - y| < x_i - x_{i-1} \text{ และ } M_i - m_i = f(x) - f(y)$$

ขั้นที่ 5 ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ของ $[a, b]$ ซึ่ง $x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

ขั้นที่ 6 จะได้ $|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$

$$\rightarrow |M_i - m_i| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$$\rightarrow M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$$

ขั้นที่ 7 จะได้ $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1}$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} (b-a)$$

$$= \epsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

f ต่อเนื่องบน $[a, b]$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ โดยที่
 $x_i - x_{i-1} < \delta, \forall i=1, 2, \dots, n$

f ต่อเนื่องสม่ำเสมอ

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b]$
 ถ้า $|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$

จะมี $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$
 ซึ่ง $M_i = f(x), m_i = f(y)$
 และ $|x-y| < \delta$

$|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon / (b-a)$
 $\rightarrow |M_i - m_i| < \epsilon / (b-a)$
 $\rightarrow (M_i - m_i) < \epsilon / (b-a)$

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \epsilon / (b-a) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \epsilon / (b-a) (b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f$$

$\forall \epsilon > 0$ มีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$
 $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

พิสูจน์

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

โดยนิยาม 25 จะได้ว่า f ต่อเนื่องเสมอบนเส้นปลายบน $[a, b]$

ดังนั้น สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$, $\forall x, y \in [a, b]$ ซึ่ง

$$|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad (1)$$

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชันของ $[a, b]$

โดยที่ $(x_i - x_{i-1}) < \delta \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

และ f ต่อเนื่องบน $[x_{i-1}, x_i] \quad \forall i=1, \dots, n$ (พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

นั่นคือจะมีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดและเล็กที่สุดของ $\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

จะได้ว่ามี $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$

ซึ่ง $M_i = f(x)$ และ $m_i = f(y)$

$$x, y \in [x_{i-1}, x_i] \rightarrow |x-y| \leq x_i - x_{i-1}$$

$$\rightarrow |x-y| < \delta$$

$$\rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad [\text{จาก 1}]$$

$$\rightarrow |M_i - m_i| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$$\rightarrow M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a} \quad (\because M_i \geq m_i)$$

เพราะฉะนั้น

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} (x_n - x_0)$$

$$= \frac{\epsilon}{(b-a)} (b-a)$$

$$= \epsilon$$

ดังนั้นสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$

$$\text{ซึ่ง} \quad U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

เพราะฉะนั้น f อินทิเกรตได้ $[a, b]$

□

ตัวอย่าง 27.1 ทุก ๆ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอินทิเกรตได้บน $[a, b]$ ใด ๆ

เพราะว่าทุก ๆ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ต่อเนื่องบน $[a, b]$

□

ตัวอย่าง 27.2 เนื่องจาก $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ต่อเนื่องที่ a สำหรับทุก ๆ $a \neq 1$

ดังนั้น f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ ใด ๆ ซึ่ง $1 \notin [a, b]$

บทสรุป 28 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ และต่อเนื่องบน (a, b)
จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

ลำดับขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 28

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ "f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ "

ขั้นที่ 2 มีทฤษฎีหรือนิยามที่จะสรุปขั้นที่ 1 ได้

2.1 $\forall \epsilon > 0$ มีพาร์ติชัน P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$

$$2.2 \int_a^b f = \int_a^b f$$

ขั้นที่ 3 เขียนสิ่งที่กำหนดให้

3.1 f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ จะได้ $\forall x \in [a, b]$ มี $K > 0$ ซึ่ง $|f(x)| < K$

3.2 f ต่อเนื่องบน (a, b) เนื่องจาก $[c, d] \subset (a, b)$ เมื่อ $c = a + \frac{\epsilon}{8K}$

และ $d = b - \frac{\epsilon}{8K}$ $\forall \epsilon > 0$ จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[c, d]$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3.2 จะได้ว่ามีพาร์ติชัน P_1 ของ $[c, d]$ ซึ่ง $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}$

ขั้นที่ 5 ให้ $P = P_1 \cup \{a, b\}$, m' , m'' เป็นอินฟินัมของ f บน $[a, c]$, $[d, b]$

และ m' , m'' เป็นอินฟินัมของ f บน $[a, c]$, $[d, b]$

ขั้นที่ 6 พิจารณา $U(f, P) - L(f, P) = M'(c-a) + U(f, P_1) + M''(b-d) - m'(c-a)$

$$- L(f, P_1) - m''(b-d)$$

$$= (M' + M'') \frac{\epsilon}{8K} + U(f, P_1) - L(f, P_1) - (m' + m'') \frac{\epsilon}{8K}$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 พิจารณาหาความสัมพันธ์ระหว่าง

M' , M'' , m' , m'' กับ K จากขั้นที่ 4 และ 3.1 จะได้ว่า $M' \leq K$, $M'' \leq K$

และ $-K \leq m'$, $-K \leq m''$ จะได้ $-m' \leq K$, $-m'' \leq K$

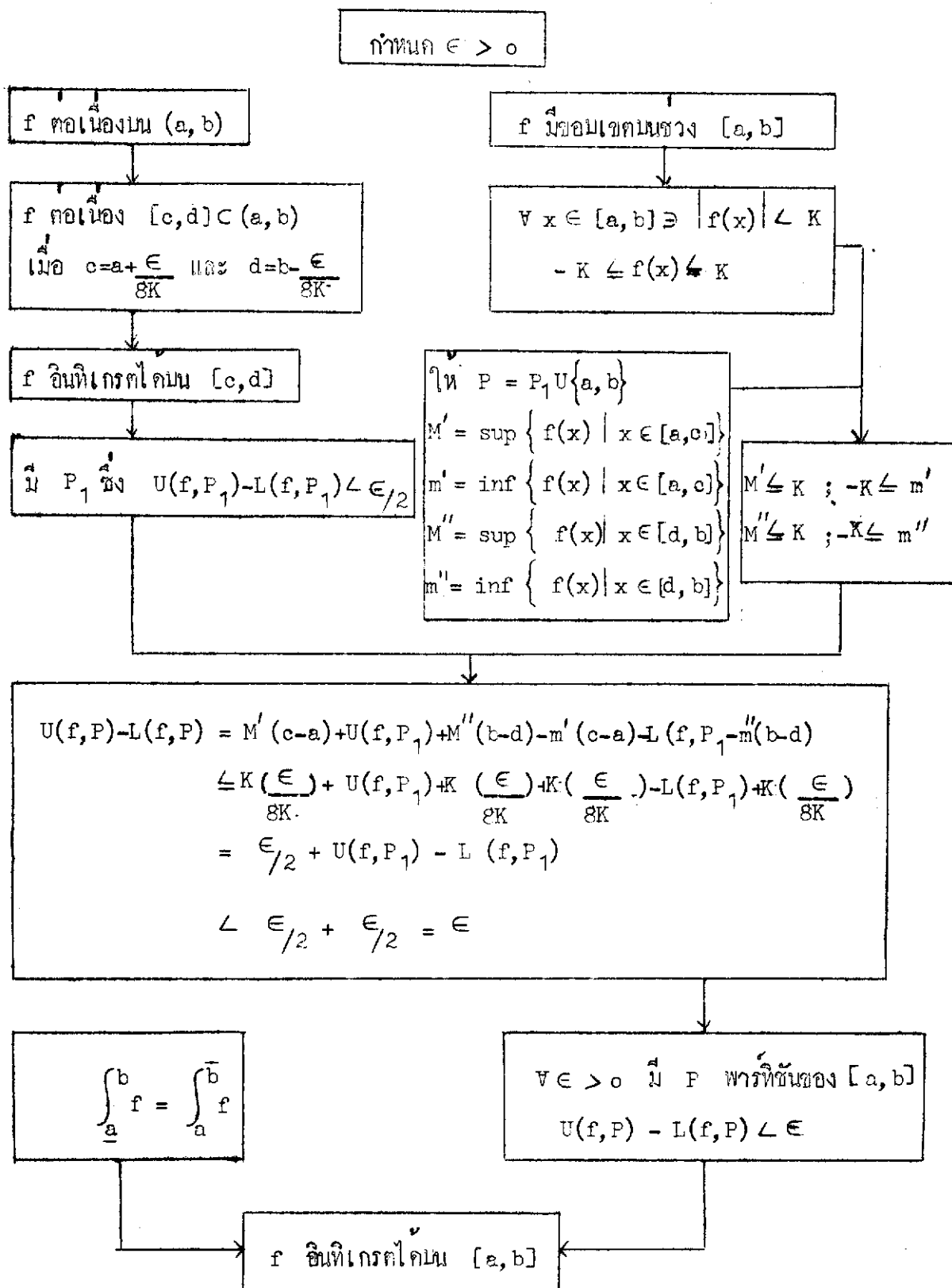
ขั้นที่ 8 จะได้ $U(f, P) - L(f, P) = (M' + M'') \frac{\epsilon}{8K} + U(f, P_1) - L(f, P_1) - (m' + m'') \frac{\epsilon}{8K}$

$$< 2K \frac{\epsilon}{8K} + \frac{\epsilon}{2} + 2K \frac{\epsilon}{8K}$$

$$= \epsilon$$

สรุปขั้นที่ 2.1 ได้

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิจารณา

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน (a, b) ดังนั้น f จะต่อเนื่องบน $[c, d]$ ใด ๆ

ซึ่ง $[c, d] \subset (a, b)$ [นั่นคือ $a < c$ และ $d < b$]

โดยทฤษฎีบท 27 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[c, d]$

ดังนั้นจะมีพหุคูณ P_1 ของ $[c, d]$ ซึ่ง $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon$; $\forall \epsilon > 0$

เราจะพิสูจน์ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ โดยใช้ทฤษฎีบท 22

คือจะแสดงว่ามีพหุคูณ P ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$; $\forall \epsilon > 0$

ถ้าให้ $P = P_1 \cup \{a, b\}$

เนื่องจาก P_1 เป็นพหุคูณของ $[c, d]$ ซึ่ง $[c, d] \subset [a, b]$

จะได้ว่า P เป็นพหุคูณของ $[a, b]$

$$\text{และ} \quad U(f, P) = M'(c-a) + U(f, P_1) + M''(b-d)$$

$$L(f, P) = m'(c-a) + L(f, P_1) + m''(b-d)$$

$$U(f, P) - L(f, P) = \{U(f, P_1) - L(f, P_1)\} + (M' - m')(c-a) + (M'' - m'')(b-d)$$

ถ้าเราเลือก c และ d ให้เหมาะสม จะได้ว่า

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

พิสูจน์ สำหรับทุก $\epsilon > 0$

เนื่องจาก f มีขอบเขตบนตรง $[a, b]$

ดังนั้นมี $K \in \mathbb{R}^+$ ซึ่ง $|f(x)| < K$; $\forall x \in [a, b]$

$$\text{ให้ } c = a + \frac{\epsilon}{8K} \text{ และ } d = b - \frac{\epsilon}{8K}$$

จะได้ว่า $a < c$ และ $d < b$

ดังนั้น $[c, d] \subset (a, b)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน (a, b)

จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[c, d]$

โดยทฤษฎีบท 27 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[c, d]$

ดังนั้นมีพหุคูณ P_1 ของ $[c, d]$ ที่ $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon/2$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } P &= P_1 \cup \{a, b\} \\ M' &= \sup \{f(x) \mid x \in [a, c]\} \\ m' &= \inf \{f(x) \mid x \in [a, c]\} \\ M'' &= \sup \{f(x) \mid x \in [d, b]\} \\ m'' &= \inf \{f(x) \mid x \in [d, b]\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $|f(x)| < K ; \forall x \in [a, b]$

ดังนั้น $-K \leq f(x) \leq K ; \forall x \in [a, b]$

เพราะฉะนั้น $M' \leq K ; M'' \leq K$

และ $-K \leq m' , -m' \leq K$ และ $-K \leq m'' , -m'' \leq K$

ดังนั้น $(M' - m') \leq 2K$ และ $(M'' - m'') \leq 2K$

พิจารณา $U(f, P) = M'(c-a) + U(f, P_1) + M''(b-d)$

$L(f, P) = m'(c-a) + L(f, P_1) + m''(b-d)$

$U(f, P) - L(f, P) = (M' - m')(c-a) + U(f, P_1) - L(f, P_1) + (M'' - m'')(b-d)$

$$< 2K \left(\frac{\epsilon}{8K} \right) + \frac{\epsilon}{2} + 2K \left(\frac{\epsilon}{8K} \right)$$

$$= \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4$$

$$= \epsilon$$

ดังนั้นมีพหุคูณ P ของ $[a, b]$ ที่ $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon ; \forall \epsilon > 0$

เพราะฉะนั้น f อินทิเกรตได้บน $[a, b]$

□

แบบฝึกหัดที่ 11

1. ฟังก์ชันต่อไปนี้ อินทิเกรตได้หรือไม่ บนช่วงที่กำหนดให้ เพราะเหตุใด

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$(2) \quad g(x) = \begin{cases} 3 & -2 \leq x < 3 \\ -3 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$(3) \quad h(x) = x^6 \text{ บนช่วง } [-2, 2]$$

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(5) \quad g(x) = \begin{cases} 12 & x = -2 \\ x & -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(6) \quad h(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ บนช่วง } (-1, 0)$$

$$(8) \quad f(x) = x^3 \text{ บนช่วง } (-3, \infty)$$

$$(9) \quad f(x) = \sin x \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(10) \quad f(x) = \cos x \quad [0, 2\pi]$$

$$(11) \quad f(x) = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(12) \quad f(x) = x + [x] \text{ บนช่วง } [0, 5]$$

$$(13) \quad g(x) = \begin{cases} x + [x] & x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

2. จงหาฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัติทุก ๆ โดเวอร์ชัน จะเท่ากับอีเปอร์ชัน
3. จงหาฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัติบางอีเปอร์ชัน ที่เท่ากับโดเวอร์ชัน
4. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่มีคุณสมบัติทุก ๆ โดเวอร์ชันเท่ากัน

□

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องฟังก์ชันที่นักเรียนทำได้

บทคัดย่อ

ของ

เสนอ คุณประเสริฐ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2526

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องที่เกรตไค

กลุ่มทดลองไคแก นิสิตปริญญาตรี ปีที่ 2 ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ในภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2525 มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 44 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องที่เกรตไค ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องที่เกรตไค

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะสรุปว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องที่เกรตไคมีประสิทธิภาพสูงโดยการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

A STUDY OF EFFICIENCY OF LESSON ON INTEGRABLE FUNCTION
EMPHASIZING ANALYTICAL PROCESS OF THOUGHT

AN ABSTRACT

BY

SANOE KOONPRASERT

Presented in partical fulfilment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
February 1983

The purpose of this was to study the efficiency of lessons on Integrable function emphasizing analytical process of thought.

The subjects were 44 sophomores of the faculty of science Srinakharinwirot University, Prasarnmitr, registered for Math. 212 Calculus and Analytic Geometry 2 in the second semester of the academic year 1982. The researcher taught them by using lessons on Integrable function emphasizing analytical process of thought for 10 periods. Each period is 50 minutes. The achievement test on Integrable function was administered at the end of the experiment.

The result indicated that it was unable to conclude the efficiency of lessons on Integrable function emphasizing analytical process of thought with the statistical hypothesis test at .05 level of significance.