

539.762

๐419๘

ด.1.

รายงานการวิจัย

การสืบค้นการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสและฟิชชัน

INVESTIGATION OF NUCLEAR CLUSTERIZATION AND FISSION

ปีที่ 1

ผู้วิจัย

รองศาสตราจารย์ อรุณีย์ อินทศร

h # 121204

159152

26 ส.ค. 2545

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนตามโครงการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประจำปี 2544 ประเภทงานวิจัยพื้นฐาน (เป็นการศึกษาค้นคว้าทางทฤษฎีเพื่อหาความรู้ใหม่) สาขาวิทยาศาสตร์กายภาพและคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสำนึกในพระคุณนี้เป็นอย่างสูง นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณ Professor Cseh จาก Institute of Nuclear Research of the Hungarian Academy of Sciences, Debrecen, Hungary ที่ให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกทางด้านเอกสารทั้งหลาย พร้อมทั้งให้คำปรึกษาและแนะนำเกี่ยวกับงานวิจัยนี้ตลอดมา โดยได้สนับสนุนงานวิจัยนี้เข้าเป็นโครงการวิจัยร่วมกันด้วย

ผู้วิจัย

รศ. อรุณีย์ อินทธร

2544

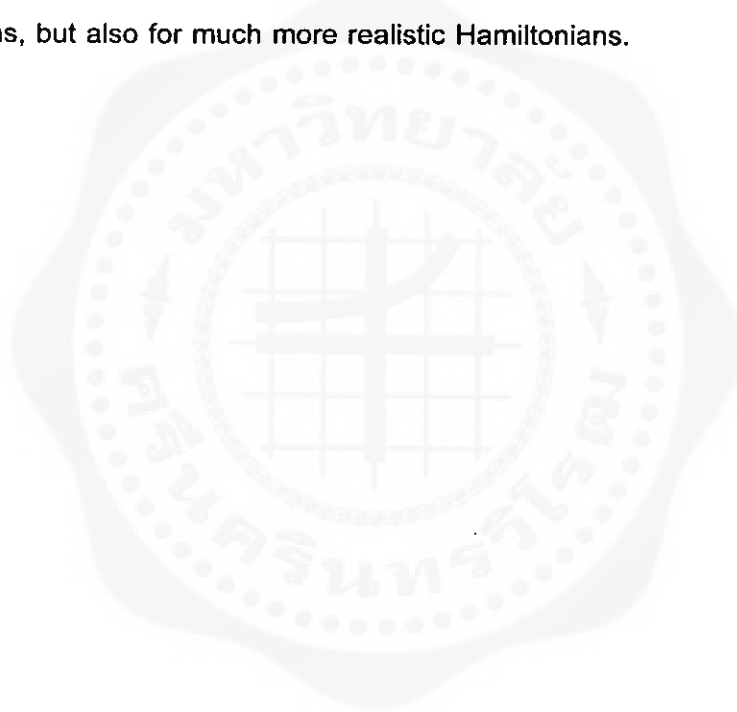
บทคัดย่อ

ได้ทำการศึกษาทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับ The Semimicroscopic Algebraic Cluster Model (SACM) และนำไปประยุกต์ใช้กับการสืบค้นโครงสร้างของ core-plus-alpha-particle ของนิวเคลียส ^{44}Ti ได้ใช้ฮามิลโทเนียนรูปแบบต่างๆที่มีสมมาตรพลวัต $U(3)$ และคุณลักษณะของเซลล์โมเดลเพียงอย่างเดียว เพื่อแสดงให้เห็นว่าคลัสเตอร์โมเดลสามารถมีฮามิลโทเนียนที่เกี่ยวข้องกับฮามิลโทเนียนในเซลล์โมเดล ที่ไม่เป็นเพียงฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ แต่มีอันตรกิริยาที่เป็นจริงประกอบด้วย



ABSTRACT

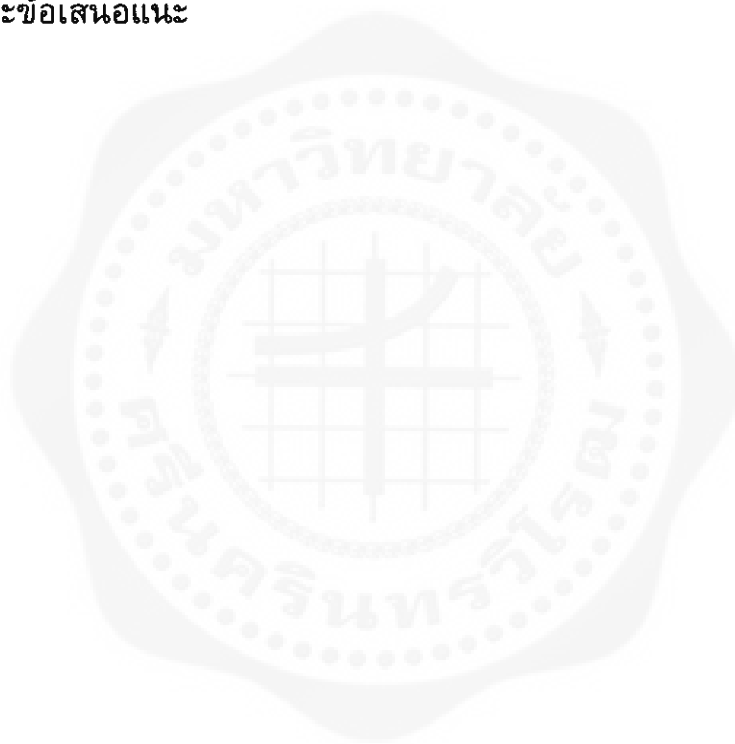
The basic theory of The Semimicroscopic Algebraic Cluster Model (SACM) has been studied. The core-plus-alpha-particle structure of the ^{44}Ti nucleus is investigated in terms of SACM. Several Hamiltonians are applied, each of them having a $U(3)$ dynamic symmetry, and purely shell-model character. The interesting viewpoint is to show that the cluster model can be derived from the spherical shell model not only for harmonic oscillator interactions, but also for much more realistic Hamiltonians.



สารบัญเรื่อง

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
สารบัญตาราง	ฅ
สารบัญรูป	ง
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
1.2 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	4
1.4 ขอบเขตของการวิจัย	4
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.6 ระเบียบวิธีวิจัย	5
1.6.1 แบบการวิจัย	5
1.6.2 ขั้นตอนและวิธีการวิเคราะห์ข้อมูล	5
บทที่ 2 ทฤษฎี	7
2.1 คลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิตกึ่งจุดภาคของนิวเคลียสของอะตอม	7
2.2 การใช้ทฤษฎีกลุ่ม	9
2.3 กลุ่มของการหมุน $SO(2)$	10
2.4 กลุ่มการหมุน $SO(3)$	15
2.5 กลุ่มยูนิแทรีพิเศษ $SU(3)$	19
2.6 วิธีการใช้พีชคณิตเข้าสู่ฟิสิกส์ของนิวเคลียสและโมเลกุล	28
2.7 เซลล์โมเดล โมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน และ คลัสเตอร์โมเดล	32
2.7.1 โมเดลสเปซ	34
2.7.2 โอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์	35
2.7.3 บทบัญญัติของ Harvey	38

	หน้า
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	41
3.1 การคำนวณหาคัลล์เตอร์โมเดลสเปซ	41
3.2 การหาสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียส ^{44}Ti	44
บทที่ 4 ผลการวิจัยและสรุป	47
4.1 ผลการวิจัย	47
4.2 สรุปและข้อเสนอแนะ	49
ภาคผนวก ก	51
บรรณานุกรม	56



สารบัญตาราง

	หน้า
ตาราง 1 แสดงตัวแทน $U(3)$ ที่ได้จับคู่เทียบกันระหว่างสถานะมูลฐานของคลัสเตอร์โมเดลและเซลล์โมเดลสำหรับระบบ $^{12}\text{Ca} + \alpha$	39
ตาราง 2 แสดงข้อมูลของระดับพลังงานในนิวเคลียส ^{44}Ti จากการทดลอง	46
ตาราง 3 ตัวแทน $SU(3)$ ที่ยอมรับได้ของคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ $^{12}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti	47
ตาราง 4 แสดงพารามิเตอร์ (หน่วย MeV) ของสมการพลังงาน (3-4) (3-5) และ (3-6) ในวงเล็บแสดงโอเปอเรเตอร์ของเทอมที่มีพารามิเตอร์นั้นๆ ตัวเลขสีเข้มแสดงพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับค่าสเปกตรัมพลังงานที่ไม่รวมสถานะ 10^+ และ 12^+ ในแถบสถานะพื้น ค่า F แสดงความกลมกลืนของการปรับค่า (goodness of the fit)	48
ตาราง 5 แสดงพารามิเตอร์ของโมเมนต์ความเฉื่อยสำหรับรูปแบบฮามิลโทเนียน (3-6) ที่รวมทั้งสองเทอมของ L^2 เข้าด้วยกัน	48

สารบัญรูป

	หน้า
รูป 1 แสดงระนาบของการหมุน	11
รูป 2 โครงสร้างเชิงเรขาคณิตของโมเดลของการเกิดอันตรกิริยาโบซอน $f=5$	30
รูป 3 โครงสร้างเชิงเรขาคณิตของไวบรอนโมเดล $f=3$	30
รูป 4 สเปกตรัมพลังงานเชิงทฤษฎีและเชิงทดลองที่แสดงแถบของระบบ core-plus-alpha-particle ในนิวเคลียส ^{44}Ti สำหรับคลัสเตอร์โมเดล สเปกตรัมเชิงทฤษฎีได้จากการคำนวณด้วยฮามิลโทเนียนสมมาตรเชิงพลวัต $U(3)$ ตามสมการ(3-5) แถบในคลัสเตอร์โมเดลสเปกตรัมแสดงด้วยเลขควอนตัม $n_\pi(\lambda, \mu) K$ ของสมการ (2-38)	49

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

จุดเริ่มของวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์เกิดขึ้นตั้งแต่ต้นศตวรรษที่ 20 ที่รวมเอาความรู้ทางฟิสิกส์อะตอม สัมพัทธภาพ (relativity) และ ทฤษฎีควอนตัม เข้าด้วยกัน โดยในปี 1896 ได้มีการค้นพบกัมมันตภาพรังสี และก็มี การค้นพบเหตุการณ์ต่างๆทางนิวเคลียร์ฟิสิกส์อย่างต่อเนื่องตลอดมา ดังเช่นในปี 1911 รัทเธอร์ฟอร์ด (Rutherford) ได้ทำการทดลองและสามารถตั้งสมมติฐานที่เป็นจริงของนิวเคลียสของอะตอมขึ้น ปัจจุบันความรู้เกี่ยวกับสมบัติของนิวเคลียสและโครงสร้างนิวเคลียสที่นำมาอธิบายสมบัติเหล่านั้นนับว่าเป็นที่รู้จักและเข้าใจกันเป็นอย่างดี นอกจากนี้เทคนิคทางด้านนี้ยังมีส่วนสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ รวมทั้งทางด้านฟิสิกส์อะตอม และ ฟิสิกส์ของแข็ง (solid state physics) ได้มีการประยุกต์เทคนิคที่ได้จากการทดลองทางนิวเคลียร์ฟิสิกส์นี้ไปใช้ในทางการแพทย์และวิศวกรรมนิวเคลียร์

โครงสร้างของนิวเคลียสและอันตรกิริยา (interaction) ระหว่างอนุภาคทั้งหลายที่ประกอบขึ้นเป็นนิวเคลียสนั้นๆเป็นสิ่งที่นักนิวเคลียร์ฟิสิกส์ทฤษฎีและนักทดลองได้ศึกษาค้นคว้ามานานแล้ว จนถึงปัจจุบันนี้ก็ยังเป็นหัวข้อที่นักวิจัยยังสนใจทำการสืบค้นกันอยู่ เนื่องจากโครงสร้างของนิวเคลียสที่ศึกษากันมาและเป็นที่ยอมรับเป็นเวลานานเหล่านั้น มีอยู่หลายโมเดล (model) ด้วยกัน แต่ละโมเดลก็อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นได้ดีไม่เหมือนกัน บางโมเดลก็อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นบางอย่างไม่ได้ จนถึงปัจจุบันนี้ก็ยังไม่มียโมเดลใดเลยที่สามารถนำมาวิเคราะห์และอธิบายปรากฏการณ์ทั้งหลายที่เกิดขึ้นในแนวทางเชิงพื้นฐานอย่างสมบูรณ์ได้ทุกกรณี โครงสร้างนิวเคลียสของธาตุหนักก็มีความแตกต่างอย่างมากกับโครงสร้างนิวเคลียสของธาตุเบา ผลที่เกิดขึ้นทำให้นักนิวเคลียร์ฟิสิกส์ต้องอภิปรายปัญหาต่างๆในแนวทางเชิงปรากฏการณ์โดยใช้หลักการที่ต่างกันในการอธิบายแต่ละแบบของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น เช่น การสลายแอลฟา (alpha decay) การสลายบีตา (beta decay) ปฏิกิริยาโดยตรง (direct reaction) หรือ ฟิชชัน (fission) เราสามารถอธิบายผลการทดลองที่เกิดขึ้นในแต่ละแบบได้และสามารถคาดเดาผลที่อาจเกิดขึ้นใหม่ได้เป็นอย่างดี แต่ต้องใช้วิธีการและหลักการในการอธิบายแต่ละแบบที่ต่างกัน ปัญหาพื้นฐานทางนิวเคลียร์ฟิสิกส์ดังเช่นธรรมชาติของแรงที่แท้จริงที่ทำให้นิวเคลียสยึดเข้าด้วยกันนั้นยังแก้ไม่ได้ ถึงแม้ว่ามีความก้าวหน้าเกี่ยวกับแรงพื้นฐานระหว่างควาร์ก (quark) ที่ประกอบขึ้นเป็นสสารและได้พยายามนำมาประยุกต์ใช้กับนิวเคลียส แต่ก็ยังช่วยให้เกิดความชัดเจนของสมบัติของนิวเคลียสไม่ได้

บริเวณของนิวเคลียสนั้นจัดไว้อยู่ระหว่างพิสัย (range) ของแรงและขนาดของอะตอมกับฟิสิกส์อนุภาคมูลฐาน (elementary-particle physics) ที่อยู่ภายในนิวคลีออน (nucleon) ซึ่ง

ประกอบด้วยอันตรกิริยาอย่างแรงมากมาย ทำให้นิวเคลียสต้องเกี่ยวข้องกับปัญหาที่มีหลายอนุภาค (many-body problem) ซึ่งเข้าไปสู่ความรู้เชิงสถิติ และต้องมีความเข้าใจปรากฏการณ์เหล่านี้ในระดับจุลภาค (microscopic level)

โครงสร้างนิวเคลียสเชิงจุลภาค (microscopic nuclear structure) เป็นสิ่งที่ยังต้องการสืบค้นกันอยู่ในปัจจุบันเพื่อที่จะหาข้อมูลใหม่และข้อมูลที่ถูกต้องแม่นยำมากขึ้นที่ได้จากการพัฒนาเทคนิคเชิงการทดลองและโมเดลเชิงทฤษฎี คลัสเตอร์โมเดล (cluster model) เป็นโมเดลใหม่ที่ได้มีการนำเสนอขึ้นมาซึ่งนักนิวเคลียร์ฟิสิกส์นานาชาติทั้งนักทดลองและนักทฤษฎีสนใจและศึกษาร่วมกันอย่างต่อเนื่องอยู่ในปัจจุบันนี้ ในอดีตนักวิจัยเชิงการทดลองด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ได้พบหลักฐานสำคัญเกี่ยวกับการคลัสเตอร์ของนิวเคลียส โดยพบความจริงว่าในกระบวนการสลายอนุภาคแอลฟานั้น อนุภาคแอลฟาที่ออกมาประกอบด้วย นิวคลีออน 4 ตัว และเมื่อ 100 ปีก่อนหน้านี้ได้มีการแสดงให้เห็นและเรียกความเกี่ยวเนื่องกันของนิวคลีออนเหล่านั้นว่า การคลัสเตอร์ (clusterization) ซึ่งนับว่ามีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาโครงสร้างนิวเคลียสและการสลายตัวของนิวเคลียสอย่างยิ่ง ต่อมาได้มีการสืบค้นพบหลักฐานเกี่ยวกับการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของธาตุหนักซึ่งได้ผลที่ดีพอๆกับการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของธาตุเบา ทั้งในสถานะพื้น (ground state) และสถานะกระตุ้น (excited states) ของนิวเคลียส ยิ่งกว่านั้นยังมีการคลัสเตอร์ที่แตกต่างกันอีกมากมายที่ค้นพบ ไม่เพียงแต่การคลัสเตอร์ของบางนิวเคลียสกับอนุภาคแอลฟาที่เป็นนิวเคลียส ^4He ที่คิดขึ้นได้ แต่ยังพบการคลัสเตอร์ประหลาด (exotic cluster) ของบางนิวเคลียสกับนิวเคลียส ^{12}C ^{14}C ^{24}Mg ^{34}Si เป็นต้น ก็สามารถเกิดขึ้นได้เช่นเดียวกับอนุภาคแอลฟา การสืบค้นเชิงการทดลองล่าสุดชี้ให้เห็นว่า การเกิดฟิชชันได้เองโดยไม่ได้กระตุ้น (spontaneous fission) ของนิวเคลียสของธาตุหนักบางธาตุสัมพันธ์กับการคลัสเตอร์ประหลาดบางตัว ดังเช่นคลัสเตอร์กับ ^{108}Mo เป็นต้น

เมื่อไม่นานมานี้มีการมุ่งประเด็นไปถึงการสืบค้นเชิงทฤษฎีของการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสที่เรียกว่า “คลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิตกึ่งจุลภาค” (Semimicroscopic Algebraic Cluster Model) (SACM)[1-3] ข้อดีของวิธีการนี้คือสามารถนำหลักการของการสมมาตร (symmetry) และคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ทฤษฎีกลุ่ม (group theory) ไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการอธิบายคลัสเตอร์แบบต่างๆได้ [4-8] โดยเริ่มต้นนำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้กับการสร้างโมเดลของนิวเคลียสของธาตุเบาและขยายออกไปถึงนิวเคลียสของธาตุหนัก [9] รวมทั้งการอธิบายรูปลักษณะเชิงโครงสร้างของกระบวนการฟิชชัน [10] แต่ทั้งหมดที่กล่าวมานี้ยังต้องการการสืบค้นอื่นๆอีกมากมายเกี่ยวกับการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสและฟิชชัน โดยหวังว่าจะสามารถสืบค้นความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันระหว่างโมเดลของโครงสร้างพื้นฐานของนิวเคลียส ได้แก่ เชลล์โมเดล (shell model) โมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน (collective model) และคลัสเตอร์โมเดล (cluster model) ยิ่งกว่านั้นจะสืบค้นต่อไปถึงโครงสร้างนิวเคลียสเชิงจุลภาคที่มีผลต่อกระบวนการสลายตัวของนิวเคลียสโดยใช้การสืบค้นด้วยวิธี SACM โครงการนี้ผู้วิจัยได้กำหนดขึ้นในเบื้องต้นเป็นโครงการวิจัย 3 ปี โดยหวังว่าเมื่อเสร็จสิ้นโครงการวิจัยนี้แล้วผู้วิจัยจะเกิดความเข้าใจเนื้อหาและแนวทางการทำวิจัยเชิงทฤษฎีในเรื่องนี้อย่างลึกซึ้ง พร้อมกับ

สามารถมีผลงานที่ตีพิมพ์เผยแพร่ข้อมูลให้นักฟิสิกส์ไทยได้รับข้อมูลทางด้านนี้สะดวกและเข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น เนื่องจากวารสารทางด้านนี้ส่วนมากราคาค่อนข้างแพงเป็นเหตุให้ห้องสมุดตามสถาบันต่างๆในประเทศไทยไม่ได้รับวารสารเหล่านี้เลย ทำให้ข้อมูลและความรู้ทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์บริสุทธิ์ในประเทศไทยขาดหายไปและในขณะเดียวกันถ้าผลงานที่ออกมาได้สืบค้นพบสิ่งใหม่ที่น่าเชื่อถือก็หวังว่าจะได้ตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติต่อไป

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยประเภทวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์เชิงทฤษฎี ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีในแขนงวิชาต่างๆ ได้แก่ วิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ความสมมาตรในฟิสิกส์ (Symmetry in Physics) และการประยุกต์วิธีการทางทฤษฎีกลุ่ม (Application of Group Theoretical Method) และผลการทดลองที่นักทดลองทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ได้ตีพิมพ์เผยแพร่ เป็นสิ่งที่ผู้วิจัยต้องการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมอยู่ตลอดเวลา และที่กล่าวมาทั้งหมดนี้มีส่วนเกี่ยวข้องกับวิชาที่ใช้สอนอยู่ในมหาวิทยาลัย ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อการยกระดับการเรียนการสอนและการผลิตผลงานเชิงทฤษฎีทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ของมหาวิทยาลัยในประเทศไทยให้สูงขึ้นสู่ระดับสากล รายงานฉบับนี้เป็นรายงานวิจัยของผลงานในปีที่ 1 เท่านั้น และถ้าผู้วิจัยยังได้รับการสนับสนุนให้ดำเนินการวิจัยต่อไปจนสามารถบรรลุจุดมุ่งหมายได้ตามโครงการในปีที่ 3 ผู้วิจัยก็คาดหวังไว้ว่าจะสามารถถ่ายทอดและขยายความรู้และเทคนิคต่างๆให้กับนักวิจัยรุ่นใหม่ต่อไป เพื่อจะได้ยกระดับงานวิจัยทางด้านนี้ให้เกิดขึ้นในประเทศไทยอย่างต่อเนื่องและเป็นที่ยอมรับของนานาชาติต่อไปโดยไม่ให้งานวิจัยนี้สิ้นสุดเพียง 3 ปีเท่านั้น

1.2 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Hodgson[11] นักนิวเคลียร์ฟิสิกส์จากมหาวิทยาลัยออกซ์ฟอร์ด (University of Oxford) ประเทศอังกฤษ ได้วิเคราะห์โครงสร้างของนิวเคลียส ^{44}Ti ว่าเป็นการคลัสเตอร์ของ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ในปี 1991 โดยใช้หลักการ alpha-particle mean field ในการคำนวณ

ในปี 1993 มีการหาความสัมพันธ์ระหว่างอันตรกิริยาที่ปรากฏขึ้นจริง (phenomenological interaction) ของคลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิต (algebraic cluster model) และผลของแรงระหว่าง 2 นิวคลีออน (effective two-nucleon force) สำหรับระบบ $^{16}\text{O} + \alpha$ [12]

การศึกษาระบบ $^{34}\text{S} + \alpha$ เชิงการทดลองและเชิงทฤษฎี ในด้านการทดลองได้อาศัยปฏิกิริยา $^{34}\text{S}(\alpha, \gamma)^{38}\text{Ar}$ โดยใช้ไอออนภาค α ที่พลังงาน 3.4-4.4 MeV ทำปฏิกิริยากับนิวเคลียส ^{34}S สามารถสังเกตพบการเกิดการสั่นพ้อง (resonance) ของปฏิกิริยานี้ขึ้นใหม่ถึง 10 ค่า พร้อมกับได้ศึกษาแผนผังการสลาย (decay scheme) ด้วย สำหรับงานเชิงทฤษฎีได้ใช้ SACM ของ $^{34}\text{S} + \alpha$ อธิบายการเกิดการสั่นพ้องที่เกิดขึ้นใหม่พร้อมกับสถานะในบริเวณพลังงานต่ำ (low-lying state) ของ ^{38}Ar [13]

ในปี 1998 ได้มีการศึกษาความสัมพันธ์ของการผิดรูปควอดรูโพล (quadrupole deformation) และการคลัสเตอร์จากการมองในระดับจุลภาค ความสัมพันธ์ดังกล่าวสร้างขึ้น

โดยอาศัยเซลล์โมเดลที่ประกอบด้วยฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ (harmonic oscillator) และอันตรกิริยาที่เป็นจริง (realistic interaction) และยังศึกษาถึงผลของโครงสร้างจุลภาคของการคลัสเตอร์ประหลาดและฟิชชันที่เกิดสองชั้นส่วนหลังการแตกตัว (binary fission)[14] เป็นต้น

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.3.1 เพื่อก่อให้เกิดผลงานวิจัยพื้นฐานทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ทฤษฎีที่ยอมรับได้ในระดับนานาชาติขึ้นในประเทศไทย จะได้ยกระดับงานวิจัยวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ทางด้านนี้ในประเทศให้มีมาตรฐานดีขึ้นสู่สากล

1.3.2 เพื่อก่อให้เกิดความร่วมมือในการทำวิจัยกับนักวิจัยและผู้เชี่ยวชาญต่างประเทศ สามารถเข้าร่วมประชุมและอภิปรายปัญหาเฉพาะด้านในระดับสูงได้ เป็นการเผยแพร่ชื่อเสียงของประเทศไทยให้เป็นที่รู้จักของประเทศเหล่านั้น

1.3.3 เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจและมีความรู้ในแขนงต่างๆที่เกี่ยวข้องอย่างลึกซึ้ง มีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษา และสามารถพิมพ์เผยแพร่ผลงาน อำนวยความสะดวกต่อการค้นคว้าและศึกษาข้อมูลให้เกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้สำหรับนักฟิสิกส์ไทยต่อไป

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยทั้งโครงการใน 3 ปี เน้นสืบค้นการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของธาตุเบาที่น่าสนใจ และยังไม่มีการตีพิมพ์มาก่อน และสามารถสืบค้นต่อไปถึงการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของธาตุหนัก โดยเน้นการวิจัยที่ใช้ SACM และพยายามให้ได้งานที่เป็นองค์ความรู้ใหม่เกิดขึ้น

สำหรับในปีที่ 1 นี้มีขอบเขตของการวิจัยตั้งแต่การศึกษาทฤษฎีและผลงานตีพิมพ์ทั้งหลายที่เกี่ยวข้อง ศึกษาและดัดแปลงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ เซลล์โมเดลสเปซ(shell model space)ของนิวเคลียส คลัสเตอร์โมเดลสเปซ(cluster model space)ของนิวเคลียส และสเปกตรัมพลังงาน(energy spectrum)ของนิวเคลียส ทดสอบผลการคำนวณที่ได้โดยเทียบกับผลงานที่ได้มีการตีพิมพ์เผยแพร่แล้ว หลังจากนั้นเลือกศึกษาสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียสของธาตุบางตัวที่เกิดจาก นิวเคลียสแกน คลัสเตอร์กับ อนุภาคแอลฟา (core-plus-alpha particle spectrum) โดยได้เลือกประยุกต์ใช้ SACM ศึกษาการคลัสเตอร์ของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 เกิดงานวิจัยที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ในระดับนานาชาติอีก 1 สาขาขึ้นในประเทศไทย และพร้อมที่จะถ่ายทอดความรู้อย่างถูกต้องอย่างต่อเนื่องต่อไป เป็นแนวทางการพัฒนาและ

ฝึกหัดนักวิจัยรุ่นใหม่ต่อไปด้วย ทำให้นักฟิสิกส์ไทยสามารถพึ่งตนเองได้ทั้งงานวิจัยและงานสอนในระดับสูงทางด้านนี้ในอนาคต

1.5.2 เกิดความร่วมมือในการทำวิจัยร่วมกับนักวิจัยและผู้เชี่ยวชาญที่มีชื่อเสียงทางด้านนี้โดยตรง ทำให้ผู้วิจัยสามารถเรียนรู้หรือเกิดทักษะในการทำงานวิจัยทางด้านนี้ได้อย่างถูกต้องและต้องแท้

1.5.3 ยกมาตรฐานคุณภาพการเรียนการสอนวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ในระดับอุดมศึกษาให้ดียิ่งขึ้นสู่ระดับสากล โดยจะมีผลต่อการเรียนการสอนระดับบัณฑิตศึกษาในวิชาฟิสิกส์ควอนตัม ทฤษฎีกลุ่ม นิวเคลียร์ฟิสิกส์ และสมมาตรในฟิสิกส์ สามารถแสดงให้เห็นประโยชน์ของวิชาเหล่านี้ว่าสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวิชาอื่นๆและงานวิจัยได้อย่างไร

1.6 ระเบียบวิธีวิจัย

1.6.1 แบบการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานเชิงทฤษฎีที่ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานที่ลึกซึ้งทางฟิสิกส์หลายๆด้าน รวมทั้งต้องรู้จักการใช้และดัดแปลงโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่องานการคำนวณ ต้องระดมความรู้และความคิดเข้าด้วยกันในการวิจัยเพื่อวิเคราะห์และตีความข้อมูลที่ได้จากการคำนวณ โดยอาศัย SACM โดยเฉพาะ ต้องคอยติดตามและค้นคว้าข้อมูลจากการทดลองที่เกี่ยวข้องของประเทศต่างๆรวมทั้งความรู้ใหม่ๆที่เกี่ยวกับการคลัสเตอร์ทั้งหลายของนิวเคลียสที่ใช้วิธีการที่แตกต่างไปที่ทันสมัยและทันเหตุการณ์ เพื่อใช้ประกอบเป็นแนวทางในการอ้างอิง ในการสร้างความคิดใหม่ๆที่ควรสืบค้นและต้องไม่ล้าสมัย ควรมีการอภิปรายแลกเปลี่ยนปัญหาต่างๆกับผู้เชี่ยวชาญทางด้านนี้ทั้งกลุ่มที่เป็นนักทดลองและนักทฤษฎีด้วยกัน ดังนั้นการเข้าร่วมประชุมนานาชาติทางด้านนิวเคลียร์ฟิสิกส์ หรือ ทางด้านคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง จึงนับว่าจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับงานวิจัยนี้

1.6.2 ขั้นตอนและวิธีการวิเคราะห์ข้อมูล

ก. ศึกษาทฤษฎีทั้งทางด้านคณิตศาสตร์และทฤษฎีนิวเคลียสฟิสิกส์พื้นฐานระดับสูงที่เกี่ยวข้อง ศึกษาค้นคว้าผลงานที่มีการตีพิมพ์เกี่ยวกับ SACM จากเอกสารที่มีอยู่แล้วเพื่อให้เกิดความเข้าใจลึกซึ้งยิ่งขึ้นและเป็นการติดตามผลงานทางด้านนี้อย่างต่อเนื่องและทันเหตุการณ์

ข. ดัดแปลงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้มาบางส่วนให้เหมาะสมและใช้ได้สะดวกกับระบบคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่

ค. เนื่องจากงานทางด้านทฤษฎีนี้ ข้อมูลที่คำนวณได้เป็นตัวเลขมีความสำคัญอย่างยิ่ง นักวิจัยจะต้องมีความเข้าใจและมองภาพออกว่าข้อมูลเหล่านั้นมีความถูกต้องน่าเชื่อถือหรือไม่ และสามารถอธิบายความหมายของข้อมูลที่ได้ด้วย ดังนั้นการศึกษาข้อมูล

เบื้องต้นจึงมีความสำคัญมาก ทำให้ผู้วิจัยจำเป็นต้องมีการฝึกคำนวณข้อมูลโดยใช้โปรแกรม และอ่านข้อมูลดังกล่าวตามลำดับดังนี้

- i ใช้โปรแกรมสร้าง เซลล์โมเดลสเปซของนิวเคลียสที่ไม่ยุ่งยากนัก เช่น นิวเคลียสของ ^{16}O , ^{40}Ca เปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยตรงที่คำนวณขึ้นด้วยตนเอง
- ii ใช้โปรแกรมสร้าง คลัสเตอร์โมเดลสเปซของนิวเคลียสเดียวกัน เปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยตรงที่คำนวณขึ้นด้วยตนเอง
- iii ใช้โปรแกรมเปรียบเทียบข้อมูลในข้อ i และข้อ ii เพื่อคำนวณ คลัสเตอร์โมเดลสเปซที่น่าจะเป็นไปได้ที่สุดของนิวเคลียสนั้น พร้อมกับเปรียบเทียบผลกับการคำนวณที่ทำขึ้นด้วยตนเอง
- iv. นำผลที่ได้ในข้อ iii มาสร้าง ข้อมูลป้อนเข้า(input data)โปรแกรมเพื่อการคำนวณสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียสนั้น
- v. เปรียบเทียบผลในข้อiv กับข้อมูลเกี่ยวกับสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียสที่ได้จากการทดลองที่มีผู้วิจัยและตีพิมพ์ในวารสาร แล้วทำการศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลให้เข้าใจอย่างถ่องแท้
- vi. ใช้โปรแกรมคำนวณสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียสเดียวกันนี้โดยปรับเปลี่ยนข้อมูลป้อนเข้าใหม่เพื่อศึกษาผลของการคำนวณโดยใช้โปรแกรมนี้ว่าเป็นอย่างไ

อนึ่งระหว่างการดำเนินงานทั้งหมดนี้จะต้องทำการบันทึกวิธีการและผลการดำเนินการเป็นภาษาอังกฤษอย่างเป็นระเบียบและเป็นวิทยาศาสตร์เพื่อใช้อภิปรายปัญหาและปรึกษากับศาสตราจารย์ Cseh ซึ่งเป็นนักวิจัยร่วมและเป็นผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านนี้

ง. ฝึกการคำนวณในทำนองเดียวกันกับข้อ ค. แต่เปลี่ยนเป็นชนิดของนิวเคลียสที่ยุ่งยากมากขึ้น ซึ่งไม่สามารถคำนวณโดยตรงด้วยตนเองได้ เพื่อศึกษาวิธีการ ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นและการใช้โปรแกรมให้ดียิ่งขึ้น โดยได้เลือกศึกษาระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ซึ่งแสดงการคลัสเตอร์ของนิวเคลียส ^{44}Ti ที่สนใจกันอยู่ในปัจจุบันและสามารถหาข้อมูลจากการทดลองของนิวเคลียสนี้ได้พอสมควร

จ. พบปะเพื่อปรึกษาและอภิปรายงานวิจัยทั้งทางด้านทฤษฎีและการคำนวณอย่างน้อย 1 ครั้งต่อปี เพื่อความสะดวกและให้มีประสิทธิภาพในการร่วมทำวิจัยร่วมกัน อภิปรายปัญหาที่เกิดขึ้นและงานที่จะต้องดำเนินการต่อไป เนื่องจากงานในขั้นตอนนี้ยากต่อการอภิปรายผ่านทาง e-mail โดยเฉพาะการอภิปรายเกี่ยวกับปัญหาและเทคนิคการแก้ไขวิธีคำนวณโดยใช้คอมพิวเตอร์ และในขณะเดียวกันผู้วิจัยเห็นว่าการได้เข้าร่วมประชุมนานาชาติในเรื่องที่เกี่ยวข้องก็นับว่าเป็นสิ่งจำเป็นและช่วยเสริมให้เกิดความคิดใหม่ๆ ที่ทันสมัยกับงานวิจัยเป็นอย่างดี เพราะจะได้มีโอกาสร่วมอภิปรายและรับรู้ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดขึ้นได้ดีที่สุด

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 คลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิตกึ่งจุลภาคของนิวเคลียสของอะตอม

(The Semimicroscopic Algebraic Cluster Model of Atomic Nuclei)

Semimicroscopic Algebraic Cluster Model (SACM) เป็นงานที่ต้องอาศัยความรู้ในวิชา กลศาสตร์ควอนตัม นิวเคลียร์ฟิสิกส์ และ ทฤษฎีกลุ่ม (Group Theory) มาประยุกต์ใช้กับการศึกษาเกี่ยวกับคลัสเตอร์โมเดล ซึ่งเป็นโมเดลโครงสร้างของนิวเคลียสที่กำลังเป็นที่สนใจโมเดลหนึ่งในปัจจุบันและมีความเกี่ยวเนื่องกันกับโมเดลพื้นฐานอื่นๆของโครงสร้างนิวเคลียสของธาตุเบา ได้แก่ เชลล์โมเดลของนิวเคลียส(nuclear shell model) และ โมเดลแบบเป็นหมู่รวมกัน (collective model) โดยมุ่งเน้นที่จะพัฒนาให้สามารถใช้คลัสเตอร์โมเดลนี้อธิบายปรากฏการณ์ทั้งหลายของนิวเคลียสได้อย่างสมบูรณ์ ซึ่งนำไปสู่คำถามที่ว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่จะสร้างโมเดลที่สามารถเชื่อมโยงระหว่างโมเดลโครงสร้างของนิวเคลียสที่สำคัญเข้าเป็นโมเดลเดียว

การทดลองครั้งแรกที่แสดงให้เห็นการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสคืออนุภาคแอลฟาที่รู้จักกันดีเป็นเวลาร้อยกว่าปีมาแล้ว และการสังเกตพบกัมมันตภาพรังสีที่มีขนาดใหญ่ขึ้นเมื่อไม่นานนักทำให้เกิดความคิดเรื่องการคลัสเตอร์แบบต่างๆที่สำคัญเกิดขึ้น ซึ่งเหมือนกับว่ามีการคลัสเตอร์ในนิวเคลียสของธาตุเบาและธาตุหนักทั้งที่อยู่ในบริเวณสถานะพื้นและบริเวณที่มีพลังงานของการกระตุ้นสูงๆ

การที่เรียกว่า “ กึ่งจุลภาค ” (Semimicroscopic) เพราะเป็นการรวมการสร้างสเปซ (space) ของโมเดลเชิงจุลภาคเข้ากับอันตรกิริยา(interaction)ที่ปรากฏขึ้นจริง [14] และเป็นเชิงพีชคณิต(algebraic) ตรงที่แสดงสถานะมูลฐาน (basis state) และ โอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์ (physical operator)ทั้งหลายในลักษณะของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible representation (irrep)) ของพีชคณิตลี (Lie algebra) ที่เป็นการคำนวณหาสมาชิกเมตริกซ์ (matrix element) ทั้งหมดด้วยวิธีทางทฤษฎีกลุ่ม

ในปี ค.ศ. 1958 ได้มีการสร้างข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับความเกี่ยวเนื่องเชิงจุลภาคระหว่างการผิดรูปควอดดรูโพล (quadrupole deformation) และโครงสร้างของคลัสเตอร์ทั้งหลายโดยอาศัยเชลล์โมเดล ต่อมา Elliott ¹ ได้หาการผิดรูปเชิงการหมุน (rotational deformation) และการผิดรูปควอดดรูโพลของนิวเคลียสของธาตุเบาโดยใช้เชลล์โมเดลแบบทรงกลม (spherical

1: J. P. Elliott, *Proc.Roy.Soc. A*245, 128 and 562. (1958).

shell model) และ Widermuth and Kanellopoulos² สร้างคลัสเตอร์โมเดลจากเชลล์โมเดล แต่มีการเชื่อมโยงของโมเดลที่ค่อนข้างแตกต่างกัน เนื่องจากในโมเดลของ Elliott จะมีการสร้าง SU(3) ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างเชลล์โมเดลกับโมเดลแบบเป็นหลุมร่วมกันที่ได้จากการศึกษาอันตรกิริยาที่เป็นจริง กล่าวคือมีการคิดพลังงานศักย์เพิ่มเติมขึ้นในฮามิลโทเนียน (Hamiltonian) ของเชลล์โมเดล โดยคิดอันตรกิริยาแบบควอดรูโพลกับควอดรูโพล (quadrupole-quadrupole) ระหว่างสองนิวคลีออน แต่ Widermuth และ Kanellopoulos สร้างความสัมพันธ์ของเชลล์โมเดลกับคลัสเตอร์โมเดลเพียงอันตรกิริยาแบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้นซึ่งน้อยเกินไปยังนับว่าไกลจากความเป็นจริงอยู่

ต่อมาได้มีการพัฒนามากขึ้น สามารถทำการแยกเชิงจุลภาคของควอดรูโพลในโมเดลแบบเป็นหลุมร่วมกันออกจากเชลล์โมเดลได้สำเร็จโดยวิธีต่าง ๆ กันแต่ก็ยังไม่มียุทธศาสตร์ที่น่าสนใจนัก จนเมื่อไม่นานมานี้ได้มีการสร้างความเกี่ยวเนื่องระหว่างเชลล์โมเดลกับคลัสเตอร์โมเดลขึ้นโดยใช้ฮามิลโทเนียนที่ประกอบด้วยอันตรกิริยาที่เป็นจริงมากขึ้นซึ่งเหมือนกับโมเดลที่ Elliott ใช้กับเชลล์โมเดลและโมเดลแบบเป็นหลุมร่วมกัน ความสัมพันธ์นี้ทำให้ความเกี่ยวเนื่องของโมเดลพื้นฐานของโครงสร้างนิวเคลียสเข้ากันได้อย่างสมบูรณ์ ยิ่งกว่านั้นยังนำไปใช้ในการศึกษาหาข้อมูลที่น่าสนใจในปัจจุบันได้อีกด้วย ดังเช่น การสลายให้คลัสเตอร์ออกมา (cluster decay) หรือ สถานะของนิวเคลียสที่เกิดฟิชชัน (fission nuclear state) (จากความรู้ในนิวเคลียร์ฟิสิกส์พื้นฐานตั้งแต่อดีต เป็นที่ทราบกันมาว่ากระบวนการฟิชชันโดยทั่วไปอธิบายโดยใช้โมเดลหยดของเหลว (liquid drop model)) และรวมไปถึงการศึกษาสถานะของรูปร่างของนิวเคลียสแบบต่างๆมากมาย

ตามที่ได้อ้างไว้ในตอนต้นเกี่ยวกับการคำนวณที่ใช้ทฤษฎีกลุ่ม สำหรับนิวเคลียสของธาตุเบา ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ $U(3)$ ($U(3)$ irrep) มีบทบาทที่สำคัญต่อสถานะต่างๆของโมเดล สมมาตร $U(3)$ ($U(3)$ symmetry) นี้มีจุดเริ่มต้นเชิงจุลภาคที่สัมพันธ์กับโครงสร้างของเชลล์และธรรมชาติของแรงระหว่างสองนิวคลีออน นอกจากนี้ยังสามารถใช้หาคุณลักษณะเชิงมหภาคได้ดี ดังเช่น การหาปริมาณการบิดรูปควอดรูโพล โมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia) เป็นต้น สมมาตร $U(3)$ นี้ใช้ไม่ได้ผลสำหรับนิวเคลียสของธาตุหนัก เนื่องจากในนิวเคลียสของธาตุหนักจะมีการคิดอันตรกิริยาระหว่างสปินกับโมเมนต์เชิงมุมเชิงออร์บิต (spin-orbit interaction) ดังนั้นในกรณีนิวเคลียสของธาตุหนักการศึกษาเชิงทฤษฎีจะมีความยุ่งยากมากขึ้นและต้องการการประมาณมากขึ้นด้วย

สำหรับโครงสร้างของงานวิจัยในปีแรกจะมุ่งเน้นถึงการเชื่อมโยงโมเดลพื้นฐานของโครงสร้างนิวเคลียสกับการใช้ กลุ่ม $U(3)$ ($U(3)$ group) ซึ่งสัมพันธ์กับปัญหาทั้งหลายที่เกี่ยวกับออสซิลเลเตอร์ โดยแสดงการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสที่เกี่ยวข้องกับโมเดลอื่นๆ ของโครงสร้างนิวเคลียส และในปีต่อไปจะกล่าวถึงโครงแบบคลัสเตอร์หลายเชิง (multiple cluster configuration) และการศึกษา SACM สำหรับนิวเคลียสของธาตุหนัก

2: K. Widermuth and Th. Kanellopoulos, *Nucl.Phys.* 7,150 (1958).

2.2 การใช้ทฤษฎีกลุ่ม (The Use of Group Theory)[15]

ขอเริ่มจากหลักการในการนำทฤษฎีกลุ่มมาประยุกต์ใช้ โดยอาศัยการสร้างกลุ่ม (group) ขึ้นมาหนึ่งกลุ่มด้วยชุดของฟังก์ชันจากการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ทำให้ได้สมาชิกของเมตริกซ์ที่สามารถทำให้เกิดการแปลง (transformation) ระหว่างฟังก์ชันได้ และสามารถทำการเชื่อมโยงระหว่างความคิดของการกระทำทางฟิสิกส์กับการแปลงเมตริกซ์ (matrix transformation) ได้ง่ายขึ้น เมื่อพิจารณาฟังก์ชันของตำแหน่ง $f(x,y)$ ในระนาบและกำหนดแกน x และแกน y รอบแกน z ไปเป็นมุม θ จะได้โคออร์ดิเนต (coordinate) ของตำแหน่งในกรอบที่หมุนเป็น

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}\quad (2-1)$$

การกระทำเช่นนี้ทำให้มีการแปลง $R f(x,y) = f(x', y') = f'(x,y)$ แสดงว่าการหมุนทำให้เกิดการแปลงในฟังก์ชัน $f \rightarrow f'$ ถ้าแสดงฟังก์ชันในเทอมของชุดสมบูรณ์ (complete set) ก็จะได้การแปลงในรูปเมตริกซ์ขึ้น สิ่งนี้นำไปสู่หลักการของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของกลุ่ม สมมติว่ามีการกระทำกับฟังก์ชันด้วยกลุ่ม R_θ ได้ $R_\theta f = f$ แสดงว่า f เป็นสเกลาร์ฟังก์ชัน (scalar) โดยทั่วไปถ้าเรามีชุดของฟังก์ชัน f'_α โดยที่ α เป็นตัวบ่งชี้ชุดของฟังก์ชัน และ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ บ่งชี้ฟังก์ชันภายในชุดนั้นๆ ที่มีสมบัติเป็น $R_\theta f'_\alpha = \sum M^\alpha_{ij}(\theta) f'_j$ สิ่งสำคัญคือฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในชุดเดียวกับฟังก์ชันทางซ้ายมือนั่นคือแต่ละชุด α ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การกระทำของกลุ่ม R_θ โดยกล่าวได้ว่าตัวแทนของกลุ่ม (representation of the group) หาได้จากเมตริกซ์ $M^\alpha_{ij}(\theta)$ ทั้งหมด ที่มี α เป็นตัวบ่งชี้กลุ่มและสามารถกระจายออกไป นั่นคือตัวแทนของชุดฟังก์ชัน f'_α จำนวน n_α ฟังก์ชันจะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด n_α มิติ (dimension)

ถ้ามีชุดที่สามารถแบ่งแยกออกเป็นส่วนๆ โดยแต่ละส่วนนั้นยังไม่เปลี่ยนแปลงภายในกลุ่มนั้น ก็จะลดตัวแทนเหล่านั้นไปเป็นตัวแทนที่มีมิติน้อยลงไปได้ แต่ถ้าการแบ่งแยกนี้ไม่สามารถทำได้อีกแล้ว แสดงว่าชุดและตัวแทนนั้นเป็นตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้

สมบัติที่สำคัญของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือ ในกลศาสตร์ควอนตัม จะเกี่ยวข้องกับการหาค่าไอเกน (eigenvalue) ของ $H\psi = E\psi$ ถ้าแฮมิลโทเนียน H ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การกระทำของกลุ่ม แสดงว่ามีสภาพซ้อนสถานะ (degeneracy) ของ ไอเกนฟังก์ชัน (eigenfunction) ψ ทั้งหมดที่อยู่ในตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของกลุ่มเดียวกัน คุณสมบัติที่ตามมาโดยตรงก็คือสามารถแผ่ช่วงของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้นี้แยกได้โดยเอากลุ่มทั้งหลายไปกระทำบนฟังก์ชันเดี่ยวอันหนึ่งของตัวแทนนั้น และถ้าโอเปอเรเตอร์ (operator)

หนึ่งๆไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับกลุ่มๆหนึ่งจะได้สมาชิกเมตริกซ์ระหว่างฟังก์ชันที่อยู่ในตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ที่ต่างกันมีค่าเท่ากับศูนย์

ในการศึกษาโครงสร้างนิวเคลียสแบบ SACM นี้จะอาศัย กลุ่มสมมาตร(symmetric group)(ของการสลับที่ของอนุภาค) กลุ่มของการหมุน(rotation group) 3 มิติ กลุ่มยูนิแทรี(unitary group)ต่างๆ และกลุ่มย่อย(subgroup)ของมันทั้งหลาย มาใช้ในการคำนวณ โดยมีฮามิลโทเนียนไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การสลับที่ของทุกโคออร์ดิเนตของอนุภาค แต่จากหลักการของเพาลี (Pauli Principle) ได้แสดงไว้ว่า ฟังก์ชันคลื่นสุทธิ (total wave function) ต้องเป็นแบบปฏิสมมาตร (antisymmetric) จึงอาจกล่าวได้ว่าฮามิลโทเนียนไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การสลับที่ที่เป็นเพียงโคออร์ดิเนตเชิงออร์บิทัล (orbital coordinate) เท่านั้น นั่นคือ ตัวบ่งชี้ของตัวแทน (representation label) ของกลุ่มสมมาตรที่กระทำต่อฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัล(orbital wave function) เพียงอย่างเดียวที่จะเป็นเลขควอนตัมที่ดี (good quantum number) และจำเป็นอย่างยิ่งที่ฮามิลโทเนียนจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับการหมุนของโคออร์ดิเนตของสปินและของโคออร์ดิเนตเชิงออร์บิทัลไปด้วยกัน ทำให้เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมรวม J เป็นเลขควอนตัมที่ดีด้วย ระบบที่มีแรงเป็นแรงศูนย์กลาง (central force) เพียงอย่างเดียว ฮามิลโทเนียนก็จะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับการหมุนของสเปซเชิงออร์บิทัล (orbital space) ทำให้เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมเชิงออร์บิทัล L เป็นเลขควอนตัมที่ดีในกรณีนี้ โดยจะมี L เท่านั้นที่เป็นตัวบ่งชี้ของตัวแทนของกลุ่มของการหมุน 3 มิติ R_3 ในสเปซเชิงออร์บิทัล

2.3 กลุ่มของการหมุน $SO(2)$ (The rotation group $SO(2)$)

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นจะขอเริ่มจากการศึกษาชนิดของกลุ่มต่อเนื่อง (continuous group) $SO(2)$ ในหนึ่งมิติของการหมุนในระนาบ [16] เมื่อพิจารณาระบบสมมาตรภายใต้การหมุนในระนาบรอบจุดตรึง 0 ระนาบในระบบคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนต (Cartesian coordinate) มี $\hat{e}_1$ และ $\hat{e}_2$ เป็นเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal basis vectors) ดังรูป 1 ที่แสดงการหมุนไปเป็นมุม ϕ ภายใต้ $R(\phi)$ จะได้

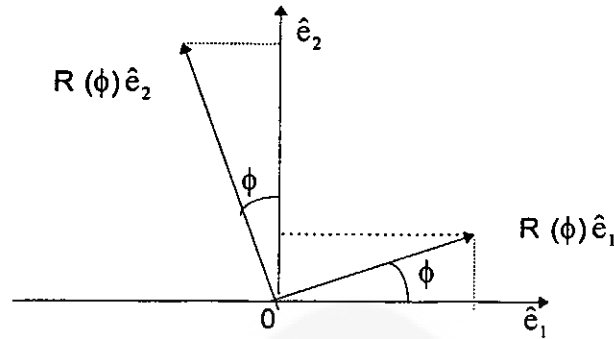
$$\begin{aligned} R(\phi)\hat{e}_1 &= \hat{e}_1 \cos\phi + \hat{e}_2 \sin\phi \\ R(\phi)\hat{e}_2 &= -\hat{e}_1 \sin\phi + \hat{e}_2 \cos\phi \end{aligned}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$R(\phi)\hat{e}_i = \hat{e}_j R(\phi)^j_i \quad (2-2)$$

โดยมีเมตริกซ์ $R(\phi)$ เป็น

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (2-3)$$



รูป 1 แสดงระนาบของการหมุน

ถ้าให้ $\bar{x}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆในระนาบที่มีองค์ประกอบ (x^1, x^2) เทียบกับเวกเตอร์มูลฐาน $\{\hat{e}_i\}$ กล่าวคือ $\bar{x} = \hat{e}_i x^i$ เมื่อแปลง $\bar{x}$ ภายใต้การหมุน $R(\phi)$ จะได้

$$x'^j = R(\phi)_i^j x^i \quad (2-4)$$

โดย $\bar{x}' = \hat{e}_j x'^j$ จะเห็นได้ชัดเจนว่ขนาดความยาวของเวกเตอร์ยังคงไม่เปลี่ยนไปภายใต้การหมุนนี้ นั่นคือ $|\bar{x}|^2 = x_i x^i = |\bar{x}'|^2 = x'_i x'^i$ $R(\phi)$ ในสมการ (2-3) สามารถใช้แทนการหมุนอย่างต่อเนื่องในระนาบได้โดยมี

$$\det R(\phi) = 1 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } \phi$$

ดังนั้นเมตริกซ์ของการหมุนที่เป็นไปตามเงื่อนไขข้างบนนี้ จัดเป็นเมตริกซ์ $SO(2)$ (special orthogonal matrix of rank 2)

ถึงแม้ว่าสมาชิกของกลุ่ม (group element) ทั้งหมดใน $SO(2)$ มีจำนวนมากมายเป็นอนันต์แต่โครงสร้างของมันก็ยังหาได้ ถ้าพิจารณา $SO(2)$ ที่ทำให้เกิดการหมุนไปด้วยมุมเล็กๆ $d\phi$ จะได้ความสัมพันธ์

$$R(d\phi) \equiv E - id\phi J \quad (2-5)$$

โดยที่ E เป็นเมตริกซ์หนึ่งหน่วย (unit matrix) และมีแฟกเตอร์ $(-i)$ ไว้เพื่อความสะดวกต่อไป ในการคำนวณ ปริมาณ J ไม่ขึ้นกับ มุม $d\phi$ ถ้าหมุนด้วย $R(\phi + d\phi)$ ก็สามารถทำได้ สองทางคือ

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi) R(d\phi) = R(\phi) - id\phi R(\phi) J$$

หรือ

$$R(\phi + d\phi) = R(\phi) + d\phi \left(\frac{dR(\phi)}{d\phi} \right)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการทั้งสองจะได้

$$\frac{dR(\phi)}{d\phi} = -iR(\phi) J \quad (2-6)$$

โดยยังมีเงื่อนไขที่ว่า $R(0) = E$ และสามารถเขียนการหมุนในสองมิติทั้งหลายในเทอมของ โอเปอเรเตอร์ J เป็น

$$R(\phi) = e^{-i\phi J} \quad (2-7)$$

โดยเรียก J ว่า "ตัวก่อกำเนิด" (generator) ของกลุ่ม เมื่อใดที่รู้ค่า J ก็สามารถหาสมาชิกของกลุ่มได้ทั้งหมดตามสมการ (2-7) จากสมการ (2-5) อาจเขียนตัวก่อกำเนิด J [17] เป็น

$$J = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{i}{\phi} [R(\phi) - E] \right) \quad (2-8)$$

ถ้าแทนค่า $R(\phi)$ จากสมการ (2-3) ลงในสมการ (2-8) จะได้

$$J = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{i}{\phi} \left\{ \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า J เป็นสปินเมตริกซ์ของเพาลี (Pauli spin matrix) อันหนึ่งที่รู้จักกันดี โดยจะมี

$$e^{-i\phi J} = E - iJ\phi - E\phi^2/(2!) - iJ(-\phi^3/(3!)) + \dots$$

$$= E \cos\phi - iJ \sin\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ดังนั้นถ้าพิจารณาตัวแทนของ $SO(2)$ ใดๆที่นิยามในเวกเตอร์สเปซ (vector space) V ซึ่งมีมิติที่แน่นอน โดยกำหนดให้ $U(\phi)$ เป็นโอเปอเรเตอร์ใน V ที่คล่องจองกับ $R(\phi)$ นั่นคือ

$$U(\phi) = e^{-i\phi J}$$

ถ้า $U(\phi)$ เป็นยูนิแทรีเมตริกซ์สำหรับทุกค่า ϕ ดังนั้น J ต้องเป็นเฮอร์มิเชียน (hermitian) ถ้าให้เวกเตอร์ $|m\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ m เป็นเลขจำนวนเต็มี่คล่องจองกับตัวแทน U^m โดย

$$J|m\rangle = |m\rangle m$$

$$U^m(\phi)|m\rangle = |m\rangle e^{-im\phi}$$

ถ้า $m=0$ $R(\phi) \rightarrow U^0(\phi) = 1$ เป็นตัวแทนเอกลักษณ์ (identity representation) หรือตัวแทนหนึ่งหน่วย

ถ้า $m=1$ $R(\phi) \rightarrow U^1(\phi) = e^{-i\phi}$ เป็นภาวะรูปร่างเหมือนกัน (isomorphism) ระหว่างสมาชิกของกลุ่ม $SO(2)$ และเป็นค่าตัวเลขต่างๆไปของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบเชิงซ้อน ขณะที่ $R(\phi)$ มีพิสัย (range) ตลอดสเปซของกลุ่ม $U^1(\phi)$ ที่ครอบคลุมครบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในทิศตามเข็มนาฬิกาหนึ่งรอบ

ถ้า $m=-1$ $R(\phi) \rightarrow U^{-1}(\phi) = e^{i\phi}$ มีสภาวะเช่นเดียวกับกรณีข้างบนยกเว้นครอบคลุมวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในทิศทวนเข็มนาฬิกาหนึ่งรอบ

ถ้า $m=\pm 2$ $R(\phi) \rightarrow U^{\pm 2}(\phi) = e^{\pm i2\phi}$ เป็นการส่ง (mapping) ของพารามิเตอร์สเปซ (parameter space) ของกลุ่มไปบนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยบนระนาบเชิงซ้อนที่ครอบคลุมถึงการหมุนสองรอบตามทิศทางที่กล่าวข้างต้น

ดังนั้นอาจสรุปผลในรูปแบบ ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของ $SO(2)$ ที่มีค่าเชิงเดียว $J=m$ เมื่อ m เป็นเลขจำนวนเต็มใดๆและ

3: ภาวะรูปร่างเหมือนกัน (Isomorphism) เชิงคณิตศาสตร์: กลุ่ม 2 กลุ่ม $G=\{E, A, B, C, \dots\}$

และ $G'=\{E', A', B', C', \dots\}$ มีอันดับเหมือนกัน จะมีภาวะรูปร่างเหมือนกัน ถ้าสมาชิก

ระหว่างกลุ่ม G และ G' มี one-to-one correspondence

$$U^m(\phi) = e^{-im\phi}$$

ดังนั้นสามารถพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนตัมเชิงมุมและกลุ่มของการหมุนอย่างต่อเนื่องในสามมิติเหมือนมีโอเปอเรเตอร์ J_x , J_y และ J_z เป็นตัวก่อกำเนิดของการหมุนด้วยมุมเล็กๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า ψ เป็นฟังก์ชันคลื่นสำหรับระบบอันหนึ่ง และ J_z เป็นโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบนี้ ดังนั้น

$$\psi' = (E + i\phi J_z) \psi$$

โดย ψ' แทนสถานะ ψ ที่หมุนไปด้วยมุมเล็กๆ ϕ รอบแกน z ในทำนองเดียวกันสำหรับการหมุนรอบแกน x และ y ด้วยมุมเล็กๆ และสามารถก่อกำเนิดการหมุนอย่างต่อเนื่องที่แน่นอนจากการหมุนด้วยมุมเล็กๆ ดังนั้นคำกล่าวที่ว่า “ฮามิลโทเนียนไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุน” จะสมมูล (equivalent) กับคำกล่าวที่ว่า “ฮามิลโทเนียนคอมมิวท์ (commute) กับโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมทั้งสาม” เนื่องจากว่าโอเปอเรเตอร์ทั้งสามสามารถก่อกำเนิดการหมุนด้วยมุมเล็กๆที่แน่นอนทั้งหมดขึ้นได้ และโอเปอเรเตอร์เหล่านี้สัมพันธ์กับโอเปอเรเตอร์อื่นๆที่อธิบายสมบัติของระบบในทางฟิสิกส์ด้วย ตัวอย่างเช่น ฮามิลโทเนียนของโมเมนต์แม่เหล็กและโมเมนต์ไฟฟ้า และโอเปอเรเตอร์ที่ทำให้เกิดการเลื่อน โดยโอเปอเรเตอร์ทั้งหลายที่น่าสนใจในฟิสิกส์มักเป็นไปตามความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์ (commutation relation) กับโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม

โดยทั่วไปสามารถนิยามชุดพหุคูณของโอเปอเรเตอร์ (operator multiplet) ในลักษณะเดียวกับชุดพหุคูณของฟังก์ชันคลื่น (wave function multiplet) โดยเรียกชุดพหุคูณของโอเปอเรเตอร์เหล่านี้ว่า เทนเซอร์ที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible tensor) และสามารถแปลงองค์ประกอบของชุดพหุคูณของโอเปอเรเตอร์ที่มีการรวมเชิงเส้น (linear combination) ซึ่งกันและกันภายใต้การหมุนได้ จะได้คอมมิวเตเตอร์ (commutator) ของ เทนเซอร์โอเปอเรเตอร์ (tensor operator) ดังกล่าวกับโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมที่มีรูปแบบคล้ายความสัมพันธ์ของโอเปอเรเตอร์ขั้นบันได (step operator relation) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (J_x \pm iJ_y) |J, M\rangle &= \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} |J, M \pm 1\rangle \\ J_z |J, M\rangle &= M |J, M\rangle \end{aligned}$$

สำหรับชุดพหุคูณของโมเมนตัมเชิงมุม และ

$$\begin{aligned} [(J_x \pm iJ_y), T_{kq}] &= \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{k(q \pm 1)} \\ [J_z, T_{kq}] &= q T_{kq} \end{aligned} \quad (2-9)$$

โดยที่ T_{kq} เป็นองค์ประกอบที่ q (q -component) ของเทนเซอร์ที่ลดทอนไม่ได้ของระดับชั้นที่ k (degree k) และดัชนี k และ q จะคล้ายกับค่าไอเกน J และ M สำหรับชุดพหุคูณของฟังก์ชันคลื่นที่คล้องจองกัน นั่นคือเทนเซอร์ที่ลดทอนไม่ได้ดังกล่าวมี องค์ประกอบจำนวน $2k+1$ และมีดัชนี q ที่มี $2k+1$ ค่าจาก $-k$ ถึง $+k$

จากความสัมพันธ์คอมมิวเตเตอร์(2-9) แสดงว่าเทนเซอร์ที่ลดทอนไม่ได้รวมกันด้วยวิธีเดียวกับชุดพหุคูณของโมเมนตัมเชิงมุม และนั่นคือสามารถคำนวณหาสมาชิกเมตริกซ์ของเทนเซอร์โอเปอเรเตอร์ที่ลดทอนไม่ได้ระหว่างสถานะไอเกน (eigenstate) ของโมเมนตัมเชิงมุมทั้งหลายตามกฎการคู่ควบเชิงมุม (angular coupling rule) และสามารถแบ่งสถานะทั้งหลายเป็นชุดพหุคูณ โดยสมาชิกเมตริกซ์ของโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมระหว่างสถานะที่อยู่ในชุดพหุคูณที่ต่างกันมีค่าเป็นศูนย์ ภายในแต่ละชุดพหุคูณการกระทำของโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมเป็นแบบง่าย ๆ การรวมเชิงเส้นที่เหมาะสมของโอเปอเรเตอร์เหล่านี้สามารถเลือกที่จะเป็นเมตริกซ์เฉียง (diagonal) เหมือน J_z หรือเป็น โอเปอเรเตอร์แบบขั้นบันไดเหมือน $J_x \pm iJ_y$ โอเปอเรเตอร์แบบขั้นบันไดนี้เปลี่ยนค่าไอเกนของสถานะที่มันกระทำโดยกระโดดจากสถานะหนึ่งไปยังสถานะอื่นๆภายในชุดพหุคูณนั้นๆ

2.4 กลุ่มการหมุน $SO(3)$ (The rotational group $SO(3)$)

$SO(3)$ เป็นกลุ่มการหมุนใน 3 มิติ มีการประยุกต์ใช้ $SO(3)$ กับสมมาตรในการหมุนในสเปซยูคลิด (Euclidean space) 3 มิติต่างๆไป และในกลุ่มลี (Lie group) [17]⁴ ซึ่งเป็นสิ่งที่น่าสนใจในคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ การหมุนรอบแกนตรึงใดๆที่มีทิศทาง $\hat{n}$ จะได้

4: “พีชคณิตลี” (Lie algebra) หมายถึงชุดของโอเปอเรเตอร์ที่เป็นไปตามกฎการคอมมิวท์ (commutation rule) และสามารถนิยาม พีชคณิตลีสำหรับผลคูณเชิงเส้นคู่ของโอเปอเรเตอร์ที่สร้างเฟอร์มิออน (fermion create operator) และ โอเปอเรเตอร์ที่ทำลายล้างเฟอร์มิออน (fermion annihilation operator) ได้ ถึงแม้ว่ามันไม่เป็นตามกฎการคอมมิวท์ของเฟอร์มิออน โอเปอเรเตอร์ แต่เป็นตามกฎการคอมมิวท์ตรงข้าม (anticommutation rule) กล่าวคือมีผลคูณเชิงเส้นคู่ 2 แบบ แบบหนึ่งอ้างถึงโบซอนโอเปอเรเตอร์ และ อีกแบบหนึ่งอ้างถึงเฟอร์มิออนโอเปอเรเตอร์ โดยพีชคณิตลีที่นิยามด้วยผลคูณเชิงเส้นคู่ของโบซอนโอเปอเรเตอร์จะสัมพันธ์กับของเฟอร์มิออนโอเปอเรเตอร์ที่แตกต่างกันเล็กน้อย คอมมิวเตเตอร์จะมีโครงสร้างเหมือนกันแต่อาจมีเครื่องหมายต่างกันในบางคอมมิวเตเตอร์ระหว่างกรณีของโบซอนและเฟอร์มิออน และเรียกกลุ่มของการแปลงอย่างต่อเนื่องที่สามารถสร้างขึ้นจากการแปลงที่น้อยยิ่ง (infinitesimal transformation) ซึ่งก่อกำเนิดโดยโอเปอเรเตอร์ของพีชคณิตลีว่า “กลุ่มลี” (Lie group)

กลุ่มย่อย (subgroup) ของ $SO(3)$ โดยแต่ละกลุ่มย่อยเหล่านี้มีรูปร่างเหมือนกัน (isomorphic) กับกลุ่ม $SO(2)$ (ในระนาบที่ตั้งฉากกับ $\hat{n}$) ดังนั้นแต่ละกลุ่มย่อยก็จะมีตัวก่อกำเนิดที่แสดงด้วย J_n โดยสามารถเขียนทุกสมาชิกของกลุ่มย่อยที่กำหนดให้เป็น

$$R_n(\phi) = e^{-i\phi J_n} \quad (2-10)$$

กลุ่ม $SO(3)$ ประกอบด้วยการแปลงเชิงเส้น (linear transformation) ที่ต่อเนื่องทั้งหมดในสเปซยุคลิด 3 มิติ โดยความยาวของโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ (coordinate vector) ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลง ดังนั้นภายใต้การหมุน J_n จะประพัตติคล้ายเป็นเวกเตอร์หนึ่งในทิศทางของ $\hat{n}$ ถ้าพิจารณาเมตริกซ์พื้นฐาน 3 เมตริกซ์ที่มีทิศทางตามแกนตั้งทั้งสาม จะมี

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$(J_k)_m^l = -i \epsilon_{klm}$$

โดยที่ ϵ_{klm} เป็น เทนเซอร์หนึ่งหน่วยแบบปฏิสมมาตร (anti-symmetric unit tensor) ที่มีค่าลำดับชั้น(rank) 3 ดังนั้นภายใต้การหมุน $\{J_k \ k=1,2,3\}$ ประพัตติคล้ายกับโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ $\{\hat{e}_k\}$ นั่นคือ

$$R J_k R^{-1} = J_l R_k^l$$

และตัวก่อกำเนิดของการหมุนรอบแกน $\hat{n}$ ใดๆ เขียนได้เป็น

$$J_n = J_k n^k \quad \text{เมื่อ} \quad \hat{n} = \hat{e}_k n^k$$

จากสมการ (2-10) อาจเขียนตัวแทนมุมออยเลอร์ (Euler angle representation) ในเทอมของตัวก่อกำเนิดเป็น

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3}$$

จึงนับว่าในทางปฏิบัติ การทำงานด้วยตัวก่อกำเนิดมูลฐาน (basis generator) $\{J_k\}$ ก็นับว่าเพียงพอ โดย $\{J_k\}$ เป็นไปตามพีชคณิตลี (Lie algebra)

$$[J_k, J_l] = i \epsilon_{klm} J^m \quad (2-11)$$

ทางด้านซ้ายของสมการ (2-11) คือคอมมิวเตเตอร์ของ J_k และ J_l ที่เท่ากับ $J_k J_l - J_l J_k$ ในวิชาฟิสิกส์ตัวก่อกำเนิดที่หามาได้มีความสำคัญเป็นอย่างมาก โดยมันจะคล้องจองกับปริมาณในการวัดทางฟิสิกส์ กล่าวคือ $\{J_k\}$ มีความหมายในทางฟิสิกส์ เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ของโอเปอเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมที่วัดในหน่วย $\hbar$ และสมการ (2-11) เป็นความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์ของโอเปอเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมในกลศาสตร์ควอนตัมที่นักฟิสิกส์รู้จักกันดี ถ้าระบบในทางฟิสิกส์แทนได้ด้วยฮามิลโทเนียน H ที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุนจะได้

$$[H, R_n(\phi)] = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } n \text{ และ } \phi$$

ซึ่งสมมูลกับเงื่อนไขที่ว่า

$$[H, J_k] = 0 \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, 3.$$

นั่นคือปริมาณทางฟิสิกส์ที่คล้องจองกับตัวก่อกำเนิดของกลุ่มสมมาตร (symmetry group) จะเป็นปริมาณที่อนุรักษ์ (conserve)

เนื่องจากสมาชิกมูลฐานของพีชคณิตลีเป็นตัวก่อกำเนิดของการหมุนไปด้วยมุมเล็กๆ แสดงว่าทุกตัวแทนของกลุ่มจะเป็นตัวแทนหนึ่งของพีชคณิตลีที่คล้องจองกันโดยอัตโนมัติ ต่อไปนี้เราจะสร้างตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของพีชคณิตลี ของ $SO(3)$ ในสมการ (2-11) และเนื่องจากสเปซของตัวแทน (representation space) สำหรับตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้อันหนึ่งเป็นสเปซที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงกลุ่ม (group transformation) ดังนั้นกลยุทธ์สำหรับการสร้างตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ที่ง่ายที่สุดก็คือ

- (1) เริ่มต้นจากเลือกเวกเตอร์มาตรฐานที่ใช้สะดวกขึ้นมาเวกเตอร์หนึ่งเป็นเวกเตอร์เริ่มต้น
- (2) ทำการก่อกำเนิดเวกเตอร์ที่เหลือในเวกเตอร์มูลฐานที่ลดทอนไม่ได้ (irreducible basis) ด้วยการประยุกต์ใช้ตัวก่อกำเนิดทั้งหลายที่เลือกขึ้นมาโดยกระทำซ้ำๆกัน

ตามธรรมชาติมักจะเลือกเวกเตอร์มูลฐานของสเปซของตัวแทน V เป็นไอเกนเวกเตอร์ ของชุดตัวก่อกำเนิดที่คอมมิวท์ซึ่งกันและกันชุดหนึ่ง (ตามที่ทราบกันดีว่าโอเปอเรเตอร์ที่คอมมิวท์กันเท่านั้นที่สามารถมีชุดสมบูรณ์ของไอเกนเวกเตอร์เดียวกันในเวลาเดียวกันได้) ตัวก่อกำเนิด

J_1, J_2, J_3 ไม่คอมมิวต์ซึ่งกันและกัน

แต่ตัวก่อกำเนิดเดี่ยวอันหนึ่งจะ คอมมิวต์กับ

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad \text{นั่นคือ}$$

$$[J_k, J^2] = 0 \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, 3$$

เรียกโอเปอเรเตอร์ J^2 ที่คอมมิวต์กับทุกสมาชิกของกลุ่มลีหนึ่งๆว่า “ แคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์” (Casimir operator) ของกลุ่มนั้น หมายความว่า J^2 คอมมิวต์กับการแปลงกลุ่ม $SO(3)$ แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งหลายของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ J^2 ที่มีค่าไอเกนเท่ากัน

ตามแบบแผนที่ทำกันอยู่มักเลือกไอเกนเวกเตอร์ของโอเปอเรเตอร์ที่คอมมิวต์กันของ $[J^2, J_3]$ และโอเปอเรเตอร์ที่สำคัญที่เหลือคือ โอเปอเรเตอร์ยกระดับและโอเปอเรเตอร์ลดระดับ (raising and lowering operator)

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$$

ในกลศาสตร์ควอนตัมสามารถเจาะจงเวกเตอร์มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal basis vector) ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} J^2 |J M\rangle &= |J M\rangle J(J+1) \\ J_3 |J M\rangle &= |J M\rangle M \\ J_{\pm} |J M\rangle &= |J M\pm 1\rangle [J(J+1) - M(M\pm 1)]^{1/2} \end{aligned}$$

จำนวนสูงสุดของตัวก่อกำเนิดที่คอมมิวต์ซึ่งกันและกันของกลุ่มลีกลุ่มหนึ่ง เรียกว่า “ค่าลำดับชั้น(rank)ของกลุ่ม” นั่นคือค่าลำดับชั้นของ $SO(3)$ เท่ากับ 1 เพราะว่าตัวก่อกำเนิด J_1, J_2, J_3 ไม่คอมมิวต์ซึ่งกันและกันเลย และในกลุ่มลีกลุ่มหนึ่งแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์จะคอมมิวต์กับทุกตัวก่อกำเนิดในกลุ่มลีนั้น ดังนั้นจำนวนของแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่อิสระต่อกันของกลุ่มลีกลุ่มหนึ่งจะเท่ากับค่าลำดับชั้นของกลุ่มลีนั้น และสังเกตได้ว่าสามารถสร้างแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ได้จากการรวมเชิงเส้นที่เหมาะสมของตัวก่อกำเนิด ดังตัวอย่างข้างต้น

เนื่องจากสามารถสร้างเมตริกซ์ของแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ของกลุ่มลี และ เมตริกซ์ของตัวก่อกำเนิดของกลุ่มให้เป็นเมตริกซ์เฉยพร้อมกันได้ ดังนั้นอาจใช้ค่าไอเกนของแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ เป็นตัวบ่งชี้ ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของกลุ่มลี เมื่อ J^2 ของ $SO(3)$ มีค่าไอเกนเป็น $J(J+1)$ โดยที่ J เป็นค่าจำนวนเต็มที่ไม่เป็นค่าลบ ดังนั้นตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของ $SO(3)$ อาจบ่งชี้ด้วยดัชนี J

การประยุกต์พีชคณิตลีไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆทางฟิสิกส์สามารถทำได้คล้ายกับการประยุกต์ใช้พีชคณิตโมเมนตัมเชิงมุมนี้ ดังเช่นในการแก้ปัญหาของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (time-independent Schrodinger equation) จะขึ้นกับรูปแบบของความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์ระหว่างฮามิลโทเนียนและโอเปอเรเตอร์ของกลุ่มลี ถ้าฮามิลโทเนียนนั้นคอมมิวท์กับทุกโอเปอเรเตอร์ ก็สามารถหาชุดสมบูรณ์ของสถานะไอเกน (complete set of eigenstates) ของฮามิลโทเนียนได้ ซึ่งจะเป็นไอเกนฟังก์ชันของแคชชีเมียร์ โอเปอเรเตอร์และโอเปอเรเตอร์ที่คอมมิวท์กับแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์ทั้งหมดในระบบ โดยทุกสถานะที่อยู่ภายในชุดพหุคูณ (multiplet) ชุดหนึ่งเป็นสถานะไอเกนซ้อน (degenerate eigenstates) ของฮามิลโทเนียน ดังนั้นการประยุกต์ใช้พีชคณิตลีทำให้การหาค่าไอเกนสำหรับฮามิลโทเนียนนี้ง่ายขึ้นโดยการนิยามเลขควอนตัมที่สามารถนำมาใช้ในการบ่งชี้สถานะไอเกนของฮามิลโทเนียนนี้ ในกรณีที่ฮามิลโทเนียนไม่คอมมิวท์กับทุกโอเปอเรเตอร์ แต่ยังคอมมิวท์กับแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์และโอเปอเรเตอร์ที่คอมมิวท์กับแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์ทั้งหมดในระบบ ก็จะได้ผลเช่นเดียวกันแต่สถานะภายในชุดพหุคูณที่กำหนดชุดหนึ่งจะไม่มีสภาพซ้อนสถานะอีกต่อไป สำหรับฮามิลโทเนียนที่ไม่คอมมิวท์กับทุกโอเปอเรเตอร์ของพีชคณิตลี แต่มีคอมมิวเทเตอร์ที่เป็นรูปแบบธรรมดา พีชคณิตลีก็ยังคงมีประโยชน์ในการหาไอเกนฟังก์ชันและสเปกตรัมค่าไอเกน (eigenvalue-spectrum) ของฮามิลโทเนียนนั้น (ชุดของค่าไอเกนของโอเปอเรเตอร์ตัวหนึ่งเรียกว่า สเปกตรัมของโอเปอเรเตอร์นั้น) โดยอาจพิจารณาบางโอเปอเรเตอร์ของพีชคณิตลีเหมือนเป็นสมการของการเคลื่อนที่ธรรมดาและทำการก่อกำเนิดการกระตุ้นระบบขึ้น

ความสัมพันธ์ของพีชคณิตลีกับปัญหาทางฟิสิกส์สามารถแสดงเหมือนการสมมาตรของฮามิลโทเนียน คล้ายกับพีชคณิตโมเมนตัมเชิงมุมที่สัมพันธ์กับการไม่เปลี่ยนแปลงของฮามิลโทเนียนภายใต้การหมุน โดยสามารถหาการสมมาตรอย่างมีรูปแบบได้ถ้าโอเปอเรเตอร์ของพีชคณิตลีเป็นไปตามความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์อย่างธรรมดากับฮามิลโทเนียนนั้น แต่การสมมาตรของสิ่งที่น่าสนใจในทางฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับพีชคณิตลีที่มีการแปลงแบบไม่ต่อเนื่องที่แน่นอน (certain discrete transformation)

2.5 กลุ่มยูนิแทรีพิเศษ SU(3) (The special Unitary Group SU(3))

ฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอนในไฮโดรเจนอะตอมไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุนทั้งหลาย นั่นคือระบบนี้มี $O(3)$ เป็นกลุ่มสมมาตรเชิงเรขาคณิต (geometrical symmetry group) โดยพลังงานศักย์ของอนุภาคไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การกระทำของโอเปอเรเตอร์ทั้งหลายในกลุ่มสมมาตรเชิงเรขาคณิตนี้ (หรือกล่าวได้ว่าระบบนี้มีความสมมาตรทั้งฮามิลโทเนียนและพลังงานศักย์ของอนุภาค) แต่ก็มีกรกระทำอื่นๆที่เกี่ยวกับการแปลงของโคออร์ดิเนตและโมเมนตัมพร้อมๆกันที่ยังทำให้ฮามิลโทเนียนทั้งหมดไม่เปลี่ยนแปลง (หมายความว่าระบบมีความสมมาตร

ของฮามิลโทเนียนแต่ไม่มีความสมมาตรของพลังงานศักย์) ซึ่งจะเรียกว่าเป็น สมมาตรเชิงพลวัต (dynamical symmetry) ดังเช่น กลุ่มสมมาตรเชิงพลวัต SU(3) ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่เท่ากันทุกทิศทาง (isotropic harmonic oscillator)[18] และเป็นที่น่าสนใจว่ากลุ่มสมมาตรเชิงพลวัตของระบบจะประกอบด้วยกลุ่มสมมาตรเชิงเรขาคณิตของมันเป็นกลุ่มย่อย

เป็นที่ทราบกันดีว่าพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่เท่ากันทุกทิศทาง 3 มิติ มีสภาพซ้อนสถานะของแต่ละระดับพลังงานที่มากกว่าที่หาได้จากกลุ่มสมมาตรเชิงเรขาคณิต O(3) ดังนั้นจึงต้องไปเกี่ยวข้องกับกลุ่มสมมาตรเชิงพลวัต SU(3) ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่เท่ากันทุกทิศทาง 3 มิติ เมื่อแยกฮามิลโทเนียนของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่เท่ากันทุกทิศทางในคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตออกเป็น 3 ออสซิลเลเตอร์ที่อิสระต่อกันโดยมีความถี่เท่ากัน พลังงานของออสซิลเลเตอร์จะขึ้นกับจำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัม (oscillator quantum) N ทั้งหมดที่มีอยู่และไม่ขึ้นกับการแจกแจงควอนตัมระหว่างออสซิลเลเตอร์ทั้งสาม โดยควอนตัมเหล่านี้เป็นโบซอน (ที่มี $L=1$) ดังเช่นระดับพลังงานกระตุ้นอันดับที่หนึ่ง (first excited level) ของออสซิลเลเตอร์จะมีสภาพซ้อนสถานะ 3 (three-fold degeneracy) คล้องจองกับออสซิลเลเตอร์ที่อยู่ในทิศทางใดทิศทางหนึ่งใน 3 ทิศทางโดยมีพลังงานหนึ่งออสซิลเลเตอร์ควอนตัม ($N=1$)

ขอพิจารณาเกี่ยวกับสภาพซ้อนสถานะในเทอมของโอเปอเรเตอร์ที่กระทำการบนสถานะของออสซิลเลเตอร์แล้วทำให้เกิดสถานะซ้อนขึ้น โอเปอเรเตอร์ดังกล่าวเหล่านี้มีสมาชิกเมตริกซ์เฉพาะที่อยู่ระหว่างสถานะซ้อนเท่านั้นและต้องคอมมิวต์กับฮามิลโทเนียนด้วย นั่นคือคอมมิวเตเตอร์ของโอเปอเรเตอร์เหล่านี้จะคอมมิวต์กับฮามิลโทเนียน ดังนั้นน่าจะใช้อโอเปอเรเตอร์เหล่านี้ก่อกำเนิดฟังก์ชันคลื่นขึ้นมาได้ ฮามิลโทเนียนของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ที่เท่ากันทุกทิศทาง ได้แก่

$$H = (1/2m) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + (m \omega^2 / 2) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (2-12)$$

โดยที่ m คือ มวลของออสซิลเลเตอร์ และ ω คือความถี่ โอเปอเรเตอร์ที่ไม่เปลี่ยนพลังงานของสถานะได้แก่โอเปอเรเตอร์ที่ไปลดจำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัมในทิศทางหนึ่ง และเพิ่มจำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัมในอีกทิศทางหนึ่งทำให้จำนวนควอนตัมทั้งหมดคงตัว สามารถทำได้ง่ายด้วยการแสดงในเทอมโอเปอเรเตอร์ที่สร้างออสซิลเลเตอร์ (oscillator creation operator) และ โอเปอเรเตอร์ที่ทำลายล้างออสซิลเลเตอร์ (oscillator annihilation operator) ดังต่อไปนี้

$$a_d = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} X_d + \frac{i}{(2m\omega\hbar)^{1/2}} P_d \quad d = 1, 2, 3$$

$$a_d^+ = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} X_d - \frac{i}{(2m\omega\hbar)^{1/2}} P_d \quad d = 1, 2, 3$$

โดยโอเปอเรเตอร์เหล่านี้ เป็นไปตามความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์ของโบซอน (boson commutation relation)

$$\begin{aligned} [a_d, a_f^\dagger] &= \delta_{df} \\ [a_d^\dagger, a_f^\dagger] &= [a_d, a_f] = 0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

และสามารถเขียนฮามิลโทเนียนในเทอมโอเปอเรเตอร์เหล่านี้ได้เป็น

$$H = (1/2) \hbar \omega \sum_{d=1}^3 (a_d^\dagger a_d + a_d a_d^\dagger) = \hbar \omega \left(\sum_{d=1}^3 a_d^\dagger a_d + 3/2 \right) \quad (2-14)$$

ดังนั้นโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมจะเป็น

$$L_{df} = x_d p_f - p_d x_f = i (a_d a_f^\dagger - a_f a_d^\dagger) \quad (2-15)$$

เห็นได้ชัดว่าผลคูณเชิงเส้นคู่ $a_d^\dagger a_f$ จะคอมมิวท์กับฮามิลโทเนียน และเกี่ยวข้องกับสถานะซ้อนของออสซิลเลเตอร์ เพราะมันจะถ่ายเทควอนตัมหนึ่งจากทิศทาง f ไปยังทิศทาง d แต่ทั้ง d และ f มีค่าที่เป็นไปได้สามค่า ดังนั้นก็จะมีโอเปอเรเตอร์แบบนี้ทั้งหมด 9 โอเปอเรเตอร์ โดยสามารถสร้างอีก 8 การรวมเชิงเส้นของโอเปอเรเตอร์ $a_d^\dagger a_f$ ที่ก่อกำเนิดพีชคณิตลีของ $SU(3)$ [18] ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 & \lambda_2 &= -i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \\ \lambda_3 &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 & \lambda_4 &= a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1 \\ \lambda_5 &= -i(a_1^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1) & \lambda_6 &= a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 \\ \lambda_7 &= -i(a_2^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_2) & \lambda_8 &= (1/\sqrt{3}) (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - 2 a_3^\dagger a_3) \end{aligned} \quad (2-16)$$

(ชุดของ 9 โอเปอเรเตอร์นี้สามารถก่อกำเนิดกลุ่มลี ที่เป็นกลุ่มยูนิแทรีเต็มส่วน (full unitary group) 3 มิติ $U(3)$ ได้ นั่นคือ ชุดของ 8 โอเปอเรเตอร์ที่ก่อกำเนิด $SU(3)$ ก็เป็นการแปลงแบบยูนิแทรี (unitary transformation) ด้วยซึ่งแทนได้ด้วยเมตริกซ์ที่มีดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) เท่ากับ +1 โดยทั้ง 8 โอเปอเรเตอร์นี้เป็นไปตามความสัมพันธ์ของการคอมมิวท์และมีเพียงสองโอเปอเรเตอร์ที่คอมมิวท์ซึ่งกันและกัน แสดงว่าค่าลำดับชั้นของ $SU(3)$ เท่ากับ 2 ดังนั้นกลุ่ม $SU(3)$ ก็มี 2 แคชเมียร์โอเปอเรเตอร์จึงมีตัวบ่งชี้ของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของ $SU(3)$ จำนวน 2 ตัว ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก)

สำหรับโครงสร้างนิวเคลียสแบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ของเชลล์โมเดล ที่สมมติว่าอนุภาคภายในนิวเคลียสเคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้พลังงานศักย์แบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ในกรณีเช่นนี้สามารถใช้วิธีการขยายออสซิลเลเตอร์เดี่ยวไปสู่กรณีของออสซิลเลเตอร์ทั้งหลายของอนุภาคแต่ละตัว และโอเปอเรเตอร์ทั้งหลายของพีชคณิตลี แล้วทำการรวมตลอดอนุภาคทั้งหมด การรวมตลอดของอนุภาคทั้งหมดไม่มีผลต่อความสัมพันธ์ของการคอมมิวต์ของโอเปอเรเตอร์ และก็ยังสามารถใช้ พีชคณิตลีของ $SU(3)$ ได้

สถานะของระบบสามารถจัดชั้นตาม ชุดพหุคูณของ $SU(3)$ โดยสังเกตว่าอนุภาคแต่ละตัวในสถานะหนึ่งจะคล่องจองกับ ชุดพหุคูณของ $SU(3)$ เฉพาะชุดหนึ่ง และทำการรวมชุดพหุคูณเหล่านี้เข้าด้วยกันตามกฎการคูณชุดพหุคูณของ $SU(3)$ (สามารถก่อกำเนิดชุดพหุคูณของ $SU(3)$ โดยการกระทำอย่างต่อเนื่องบนสถานะใดๆด้วย 8 โอเปอเรเตอร์ที่เป็นตัวแทนพีชคณิตลี อาจใช้พารามิเตอร์ 2 ตัว λ และ μ บ่งชี้ ชุดพหุคูณเฉพาะชุดหนึ่งโดยวิธีเดียวกับเลขควอนตัม J สำหรับโมเมนตัมเชิงมุมที่ใช้แสดงลักษณะ ชุดพหุคูณได้สะดวกกว่าใช้ค่าไอเกนของโอเปอเรเตอร์ J^2 ที่มีรูปแบบเป็น $J(J+1)$ ดังนั้นการใช้ λ และ μ ที่เป็นค่าจำนวนเต็มปกติมาบ่งชี้ชุดพหุคูณจึงนับว่าสะดวกกว่าใช้ค่าไอเกนของแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่ปรากฏเป็นรูปแบบที่ซับซ้อนของ λ และ μ สำหรับโครงสร้างของชุดพหุคูณสามารถหาได้จากพีชคณิตลีของ $SU(3)$ โดยทั้ง 8 โอเปอเรเตอร์เหล่านี้สามารถใช้แสดงลักษณะของสถานะในระบบของกลศาสตร์ควอนตัมและจัดเข้าเป็นกลุ่มชุดพหุคูณเดียวกันได้ (โดยชุดพหุคูณเหล่านี้จะมีโครงสร้างเหมือนกัน) เมื่อพิจารณาระบบที่มีอนุภาคหลายตัวโดยแต่ละตัวอยู่ในระดับพลังงานกระตุ้นอันดับที่หนึ่งของศักย์แบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ (เชลล์ p (p -shell)) ก็จะต้องจองกับนิวเคลียสทั้งหลายในเชลล์โมเดลที่มีอนุภาคอยู่เต็มในออสซิลเลเตอร์เชลล์ (oscillator shell) อันต่ำสุดและอนุภาคจำนวนหนึ่งอยู่ในเชลล์ถัดไป ระบบนี้จะมีสถานะที่อยู่ในสภาพซ้อนสถานะสูง โดยแต่ละอนุภาคจะมีสภาพซ้อนสถานะทบ 3 (แต่นิวคลีออนเป็นเฟอร์มิออนไม่สามารถอยู่ในสถานะเดียวกันได้ สภาพซ้อนสถานะจะลดลงเล็กน้อยในโมเดลของนิวเคลียส) ซึ่งสามารถจัดแยกสถานะที่ซ้อนกันของระบบโดยการแสดงสถานะทั้งสามของอนุภาคเดี่ยวอนุภาคหนึ่งว่าเป็น ชุดสาม (triplet) $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ ชุดพหุคูณที่เกิดในระบบที่มี A อนุภาคอยู่ในเชลล์ p จะเป็นไปตามขีดจำกัดของการสมมาตรแบบสลับที่รวมทั้งสปินและ ไอโซสปิน ของอนุภาคเหล่านั้น

ที่ระดับการกระตุ้นอันดับที่สองของออสซิลเลเตอร์มีทั้งหมด 6 สถานะที่คล่องจองกับชุดพหุคูณของ $SU(3)$ $(2, 0)$ โดยนิวเคลียสทั้งหลายเหล่านี้จะมีเชลล์ต่ำสุด 2 เชลล์ที่เต็มและระดับการกระตุ้นที่สอง (เชลล์ sd (sd -shell)) บางส่วนเต็ม ซึ่งสามารถทำการคูณเข้าด้วยกันกับชุดพหุคูณ $(2, 0)$ ได้ หนึ่งเชลล์ที่เต็มจะไม่มีส่วนในการจัดแยกชุดพหุคูณ เนื่องจากว่าเชลล์ที่เต็มจะคล่องจองกับ ชุดพหุคูณ $(0, 0)$ (สถานะพื้น (ground state) ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เป็นสถานะที่ไม่มีสภาพซ้อนสถานะ จะเป็นชุดเดี่ยว (singlet) $(0, 0)$ ของ $SU(3)$ และระดับพลังงานกระตุ้นอันดับที่ N (มีจำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัมเท่ากับ N) จะคล่องจอง

กับชุดพหุคูณ $(N,0)$ ของ $SU(3)$ (ขณะที่ $U(3)$ จะเป็นกลุ่มของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ 3 มิติที่มีตัวบ่งชี้ตัวแทนของ $U(3)$ เป็น $[N,0,0]$) โดยจำนวนสถานะในชุดพหุคูณนี้เท่ากับ $(N+1)(N+2)/2$ ดังนั้นสภาพซ้อนสถานะของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ 3 มิติ สามารถอธิบายได้ด้วยการจัดแยกสถานะของมันด้วยการใช้กลุ่ม $SU(3)$

อาจมีคำถามว่าอะไรคือประโยชน์ที่ได้จากการจัดสถานะของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ด้วยการใช้ กลุ่มของ $SU(3)$ จะเห็นได้ว่าสำหรับออสซิลเลเตอร์เดี่ยว กลุ่มของ $SU(3)$ อาจไปเพิ่มสภาพการซ้อนสถานะของระบบที่นอกเหนือจากระบบของโมเมนตัมเชิงมุม แต่อย่างไรก็ตามสถานะทั้งหมดของออสซิลเลเตอร์อาจจัดแยกกันโดยอาศัย เลขควอนตัมหลัก (principal quantum number) N_x, N_y, N_z และ เลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุม โดยไม่ต้องมีการเลขควอนตัมอื่นอีกเลย แต่สำหรับกรณีอนุภาคหลายตัวในศักย์ออสซิลเลเตอร์จำเป็นต้องมีเลขควอนตัมอื่นเพิ่มเติมในการบ่งชี้จำเพาะสถานะอย่างสมบูรณ์ และ $SU(3)$ สามารถจัดแยกสถานะได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยตัวบ่งชี้ของตัวแทน (λ, μ) ปรากฏเป็นเหมือนเลขควอนตัมของสถานะนำ (leading state) (หรือ maximum weight state) นั่นคือ $\lambda = N_z - N_x$ และ $\mu = N_x - N_y$ ในเทอมของเลขควอนตัมในระบบคาร์ทีเซียนของสถานะนำ โดย $N = N_z + N_x + N_y$ และพบว่าสถานะนำที่มีค่า λ และ μ สูงจะอยู่ที่พลังงานต่ำสุดมีการผิดรูปมากที่สุด โดยค่า μ แสดงระยะห่างออกจากแกนสมมาตรของระบบ[15] (เวกเตอร์ของสถานะปกติ (normalized state vector) หรือสถานะนำคือ $|N_z N_x N_y\rangle$ ที่ $N=0$ เวกเตอร์ของสถานะปกติของนิวคลีออนเดี่ยว ที่เป็นไปได้คือ $|000\rangle$ ที่ $N=1$ มี 3 เวกเตอร์ $|100\rangle, |010\rangle$ และ $|001\rangle$ ที่ $N=2$ มี 6 เวกเตอร์ $|200\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |020\rangle, |011\rangle$ และ $|002\rangle$ เป็นต้น)

ถ้าให้สถานะนำเป็น ϕ เมื่อใช้โอเปอเรเตอร์ทั้ง 8 กลุ่มของ $SU(3)$ กระทำบน ϕ โดยกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งที่กระทำบน ϕ จะสมมูลกับฟังก์ชันอันหนึ่งที่โอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมกระทำบน ϕ ดังนั้นฟังก์ชันใดๆที่อยู่ในตัวแทนอาจสร้างขึ้นได้จากสถานะนำด้วยฟังก์ชันอันหนึ่งของโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม หมายความว่าถ้ากระจาย

$$\phi = \sum_{k,L} a(k,L) \Psi(LK) \quad (2-17)$$

นั่นคือสามารถขยายตัวแทนออกไปได้ด้วยทุกฟังก์ชันของโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม แต่โอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมอันหนึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงโพรเจกชัน (projection) K ของ $\Psi(LK)$ ได้ภายในขีดจำกัด L ถึง $-L$ เท่านั้น ดังนั้นชุดของฟังก์ชันมูลฐานเหล่านี้อาจแสดงได้ด้วย $\Psi(KLM)$ โดยที่ M คือค่าของ L_z และ K เป็นตัวแสดงว่าเป็นเทอมใดในอนุกรม (2-17) จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องรวม K ไว้ในการบ่งชี้ $\Psi(KLM)$ ที่เป็นฟังก์ชันมูลฐานของโมเมนตัมเชิงมุมของตัวแทน (λ, μ)

สัมประสิทธิ์ $a(K,L)$ ไม่เป็นศูนย์สำหรับ $K = \mu, \mu-2, \dots, 1$ หรือ 0 (ขึ้นอยู่กับว่า μ เป็นเลขคี่ หรือเลขคู่) และ $L = K, K+1, \dots, \mu+\lambda$ สำหรับแต่ละค่าของ K ยกเว้นเมื่อ $K = 0$ ในกรณีที่ $K=0$ จะมี $L = \mu+\lambda, \mu+\lambda-2, \dots, 1$ หรือ 0 ดังนั้นค่าของ L เป็นเพียงอนุกรมของแถบการหมุน K (rotational K -band) ทั้งหมด และสามารถนิยามตัวบ่งชี้ K ให้ชัดเจนได้เป็นตัวบ่งชี้ที่ทำให้แบ่งแยกสถานะที่มี (λ, μ) และ L ที่เท่ากันออกจากกันได้เด่นชัด และพบว่าไม่สามารถสร้างสถานะใหม่ด้วยโพเรเจชันของคาร์ที่เขียนฟังก์ชันอื่นๆทั้งหลายใน (λ, μ) แต่เพื่อให้ได้สถานะอื่นๆต้องใช้ตัวแทน (λ', μ') ที่แตกต่างกันไปและดำเนินการจากสถานะนำของตัวแทนนั้นๆ จะเห็นได้ว่า ถ้า $\mu = 0$ แถบ $(\lambda, 0)$ จะมีสถานะที่มี $L = \lambda, \lambda-2, \dots, 1$ หรือ 0 แต่ถ้า $\mu \neq 0$ ก็จะมีแถบมากมายโดยแต่ละแถบจะเริ่มด้วยค่า K ค่าหนึ่งๆ

ตัวอย่างความหมายเชิงฟิสิกส์ของค่า K ที่พิจารณาด้วยโมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกันอาจอธิบายได้เหมือนโพเรเจชันของ L ไปบนแกนที่มีทิศทางตามฟังก์ชันหนึ่งของตัวแปรเชิงพลวัต (dynamical variable) ของระบบ ถ้าสถานะของระบบไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุนรอบแกนที่ว่านี้ แสดงว่า $K = 0$ ที่กล่าวมานี้เป็นกรณีที่ระบบมีแกนสมมาตรอันหนึ่ง กรณีอื่นอาจสมมติ K เป็นค่าแบบอื่นได้

จากที่กล่าวมาในตอนต้นจะเห็นได้ว่า ฮามิลโทเนียน H ของระบบนี้คอมมิวท์กับทุกตัวก่อกำเนิดใน $U(3)$ ดังนั้นค่าไอเกนของสถานะทั้งหลายที่เป็นตามตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้อันหนึ่งของ $U(3)$ ย่อมมีค่าเท่ากันโดยหาได้จากค่า N เพียงอย่างเดียว และสภาพซ้อนสถานะของสถานะเหล่านี้จะสัมพันธ์กับ H ที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงของ $U(3)$ [19-20] นั่นคือ สำหรับ $N=0$ ไม่มีโพซอนและสถานะของนิวคลีออนเดี่ยวมี $L=0$ สถานะที่มี $N=1$ โพซอนมี $L=1$ สำหรับกรณีที่ $N=2$ จะมีออร์บิต d ($L=2$) และออร์บิต s ($L=0$) และที่ $N=3$ จะมีออร์บิต f และ p เป็นต้น สำหรับค่า N ค่าหนึ่งออร์บิตที่มีค่า L สูงสุดจะเป็น $L=N$ และค่า L อื่นๆคือ $N-2, N-4, \dots, 1$ หรือ 0 กล่าวคือ

ถ้า N เป็นเลขคี่ : $L = 1, 3, 5, \dots, N$

N เป็นเลขคู่ : $L = 0, 2, 4, \dots, N$

สถานะสมมาตรของ N โพซอน ที่มีค่า L ที่ใช้ได้ทั้งหมดเหล่านี้มีค่าไอเกนของ H เท่ากันเท่ากับ $\hbar \omega (N+3/2)$ และจากการที่ H ของระบบนี้ก็คอมมิวท์กับทุกองค์ประกอบของโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม ดังนั้น H นี้จะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การหมุน และองค์ประกอบของ L อยู่ภายใต้พีชคณิตลีของกลุ่ม $SO(3)$ ถ้าเลือก L_z เป็นตัวก่อกำเนิดของกลุ่ม $SO(2)$ ก็สามารถสร้างโครงสร้างกลุ่ม (group structure) ได้เป็น

$$U(3) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \quad (2-18)$$

ดังนั้นสำหรับค่า N ค่าหนึ่งจะมีชุดของสถานะ $|NLM\rangle$ ที่มีสภาพซ้อนสถานะทบ $(N^2+3N+2)/2$

ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ทั้งหมดของ $U(3)$: $[N_1, N_2, N_3]$ แสดงได้ด้วยตารางยัง (Young tableau) (เป็นเครื่องมือที่สะดวกต่อการศึกษาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยน(permutation)) ที่ประกอบด้วยแถวที่มีความยาว N_1 , N_2 และ N_3 จำนวน 3 แถว ที่เป็นไปตามความสัมพันธ์

$$N_1 \geq N_2 \geq N_3 \quad N_1 + N_2 + N_3 = A \quad (2-19)$$

(ตัวอย่างตารางยังของ $U(3)$ ที่มี $A=4$ เช่น $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \equiv [4,0,0] \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \equiv [3,1,0]$

$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \equiv [2,2,0]$ เป็นต้น) ในที่นี้ A เป็นจำนวนทั้งหมดของอนุภาคที่มี $L=1$ (โบซอน) ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของอนุภาค A ตัวนี้จะประกอบด้วยสถานะของนิวคลีออนเดี่ยวที่แสดงได้ด้วย $N_1 = A$

$N_2 = N_3 = 0$ แล้วการแปลงเชิงเส้นระหว่างฟังก์ชันคลื่นทั้งหมดจะได้จากผลคูณของสถานะนิวคลีออนเดี่ยว A สถานะ เนื่องจากการแปลง $U(3)$ ใช้ได้กับนิวคลีออนแต่ละตัวอย่างอิสระไม่ขึ้นต่อกัน จึงสามารถใช้ได้กับทุกนิวคลีออนพร้อมๆ กัน แต่ในเซลล์โมเดลแต่ละสถานะนำในนิวเคลียสจะมีนิวคลีออนอยู่ได้ไม่เกิน 4 ตัวตามหลักการห้ามซ้อนของเพาลี ดังนั้นเซลล์ที่

ระดับพลังงานพื้น ($0 \hbar \omega$) เต็มจะมี $U(3)$ เป็น $[0,0,0]$ ถ้าเซลล์ p ($1 \hbar \omega$) เต็มจะมี $U(3)$

เท่ากับ $[4,4,4]$ ตัวอย่างเช่นกรณีของนิวเคลียส ^{40}Ca จะมี 4 นิวคลีออนที่เซลล์ s เต็ม

12 นิวคลีออนอยู่ที่เซลล์ p เต็ม และ 24 นิวคลีออนอยู่ที่เซลล์ sd ($2 \hbar \omega$) เต็ม ดังนั้น $U(3)$

ของนิวเคลียสนี้แสดงได้ด้วย $[0,0,0] \otimes [4,4,4] \otimes [16,16,16] = [20,20,20]$ เป็นต้น

เมื่อมาพิจารณา $SU(3)$ จะเห็นได้ว่า N ไม่ใช่ค่าไอเกนของตัวก่อกำเนิดอีกแล้ว แต่ตัว

แทนที่ลดทอนไม่ได้ของ $SU(3)$ จะแสดงได้ด้วย $\lambda = N_z - N_x$ และ $\mu = N_x - N_y$ หรือ

$\lambda = N_1 - N_2$ และ $\mu = N_2 - N_3$ ดังนั้นสถานะของนิวคลีออนเดี่ยวตามสมการ (2-19)

ที่มีเลขควอนตัมเป็น (λ, μ) ก็จะเป็น $(N, 0)$ ตัวแทน $SU(3)$ ของนิวเคลียส ^{40}Ca ข้างต้น

จะเป็น $(0,0)$ สถานะที่ประกอบด้วยนิวคลีออนหลายตัวจะซับซ้อนกว่านี้และค่า $\mu \neq 0$

โดยทั่วไปการแปลงเหล่านี้ไม่เป็นตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ แต่จะแยกออกเป็นตัวแทนที่ลดทอนไม่

ได้จำนวนมากที่แสดงได้ด้วยค่า (λ, μ) ที่แน่นอนของ $SU(3)$ โดยค่า L ภายใต้ $SU(3) \rightarrow SO(3)$

จะเป็น

$$L = K, K+1, K+2, \dots, K+\max(\lambda, \mu) \quad \text{สำหรับ } K \neq 0$$

โดยที่ $K = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1$ หรือ 0

ถ้า $K=0$ จะมี $L = \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1$ หรือ 0

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสำหรับ N ที่กำหนดค่าหนึ่งตัวแทน $(N,0)$ ของ $SU(3)$ ที่แผ่กระจายออกจะ

สังสรรค์กับสถานะ $|NLM\rangle$ ของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์

ที่กล่าวมาโดยตลอดยังไม่ได้พิจารณาการไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเลื่อน

(translational invariance) ของฮามิลโทเนียนของเซลล์โมเดล ถ้าพิจารณาเซลล์โมเดลที่มี

สถานะที่มีนิวคลีออนหลายตัว ระบบที่มีอันตรกิริยาซึ่งกันและกันระหว่างนิวคลีออน A ตัวต้องมี

สถานะไอเกนที่ไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเลื่อน สถานะไอเกนเหล่านี้ขึ้นกับฮามิลโทเนียนอันหนึ่งที่ประกอบด้วยพลังงานจลน์ของนิวคลีออนทั้งหมดและอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออนที่ไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเลื่อน ด้วยวิธีการประมาณที่ดีจะจัดวางนิวเคลียสไว้ตรงตำแหน่งตรึงในสเปซ ถ้านิวคลีออนเคลื่อนที่อย่างอิสระในหลุมศักย์ (potential well) ที่ตรึงในสเปซ ศูนย์กลางมวล (center of mass) ของนิวเคลียสถูกหุ้มอยู่ภายในหลุมศักย์ ถ้าโคออร์ดิเนตและโมเมนตัมของศูนย์กลางมวลตามลำดับเป็น

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mathbf{r}_j \quad \text{และ} \quad \mathbf{P} = \sum_{j=1}^A \mathbf{p}_j$$

โมเมนตัมและโคออร์ดิเนตของนิวคลีออน เทียบกับ โมเมนตัมเฉลี่ย และ โคออร์ดิเนตของนิวคลีออนสัมพัทธ์ตามลำดับเป็น

$$\mathbf{p}'_j = \mathbf{p}_j - \frac{1}{A} \mathbf{P} \quad \text{และ} \quad \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{R}$$

จะได้รูปแบบของฮามิลโทเนียนเป็น

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^A \mathbf{p}'_j{}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{j=1}^A \mathbf{r}'_j{}^2 + \frac{1}{2mA} \mathbf{P}^2 + \frac{1}{2} mA \omega^2 \mathbf{R}^2$$

นั่นคือฮามิลโทเนียน H ประกอบด้วยผลรวมของส่วนของฮอสซิลเลเตอร์ที่แท้จริงของมันเอง (intrinsic part) และส่วนของฮอสซิลเลเตอร์ฮามิลโทเนียนสำหรับศูนย์กลางมวลที่เป็นอิสระต่อกัน เมื่อพิจารณาฟังก์ชันคลื่นของนิวคลีออน A ตัวในหลุมศักย์แบบฮาร์มอนิกฮอสซิลเลเตอร์ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้นจะคล่องจองกับสถานะต่ำสุดของ H ซึ่งตรงกับออร์บิตต่ำสุดที่นิวคลีออนทั้งหมดอยู่ตามหลักการของเพาลีและเป็นฟังก์ชันแบบปฏิสมมาตรในการแปรเปลี่ยนของนิวคลีออน โคออร์ดิเนตของศูนย์กลางมวลเป็นสมมาตรในโคออร์ดิเนตของนิวคลีออนทั้งหมด กล่าวคือเป็นสมมาตรตามฟังก์ชันของ $\mathbf{R}$ ถ้านิวคลีออนทุกตัวอยู่ในออร์บิตต่ำสุดของมัน ศูนย์กลางมวลต้องอยู่ที่สถานะต่ำสุดของมันที่ $N=0$ และ $L=0$ (มีฟังก์ชันคลื่น $\varphi_{N=0,L=0}(\mathbf{R})$ เป็นผลคูณของสถานะแท้จริงของมันเองทั้งหลายที่แตกต่างกัน) ในกรณีของเซลล์ที่เต็มจะมีเพียงสถานะแท้จริงของมันเองเพียงหนึ่งสถานะ และทราบใดที่นิวคลีออนอยู่ในฮอสซิลเลเตอร์เซลล์หลัก (major shell) เดียวกัน ศูนย์กลางมวลก็จะอยู่ที่สถานะ $N=0$ และ $L=0$ ดังนั้นฮามิลโทเนียนของศูนย์กลางมวลสำหรับสถานะดังกล่าวนี้จะมีพลังงานเท่ากันเท่ากับ $(3/2) \hbar \omega$ สรุปได้ว่าการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลจะไม่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกฮอสซิลเลเตอร์ที่สถานะพื้น แต่จะมีความยุ่งยากมากขึ้นเมื่อพิจารณาโครงแบบ

(configuration)ของการกระตุ้น ถ้าคำนวณหาสถานะที่ว่าเป็นโดยพิจารณาเหมือนเป็นการยกนิวคลีออนหนึ่งตัวขึ้นไปยังเซลล์ที่สูงกว่าถัดไป โดยสถานะของเซลล์โมเดลสถานะหนึ่งที่ได้จากผลคูณของสถานะที่แท้จริงของมันเองของโครงสร้างของสถานะพื้นกับสถานะของศูนย์กลางมวลที่มี $N=1, L=1$ จะมีพลังงานเท่ากับเหมือนอยู่ในสถานะพื้นและมีพลังงานมากขึ้นอีก $\hbar \omega$ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล (หรือกล่าวได้ว่าผลคูณภายนอก (outer product) ของตัวแทน $U(3)$ ทั้งหมดของโครงสร้างของสถานะพื้นในเซลล์โมเดล กับ ตัวแทน $U(3)$ $[1,0,0]$ จะเป็นสถานะที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล $1 \hbar \omega$ และถ้าคูณกับตัวแทน $U(3)$ $[2,0,0]$ ก็จะเป็นสถานะที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล $2 \hbar \omega$ โดยในกรณีนี้ผลคูณภายนอกของตัวแทน $U(3)$ ทั้งหมดของโครงสร้างของสถานะกระตุ้นที่แท้จริง $1 \hbar \omega$ ในเซลล์โมเดล กับ ตัวแทน $U(3)$ $[1,0,0]$ จะเป็นสถานะที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล $2 \hbar \omega$ ด้วย) ดังนั้นสถานะดังกล่าวนี้ไม่ควรนับเป็นสถานะอิสระอันหนึ่งของนิวเคลียส จึงจัดเป็นสถานะที่ไม่แท้จริง (spurious state) ในนิวเคลียส ซึ่งต้องกำจัดออกจากสถานะของเซลล์โมเดล

การสร้างแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์กำลังที่สองของ $SU(3)$ ทำได้โดยการรวมเชิงเส้นของตัวก่อกำเนิดยกกำลังสอง ถ้ามีนิวคลีออน A ตัว ตัวก่อกำเนิด $SU(3)$ จะเป็น

$$L = \sum_{j=1}^A L(j) \quad Q_{\mu}^{(2)} = \sum_{j=1}^A q_{\mu}^{(2)}(j)$$

โดยที่ควอดรูโพลโอเปอเรเตอร์ของแต่ละนิวคลีออนคือ

$$q_{\mu}^{(2)} = \frac{\sqrt{6}}{2\hbar} (r \times r)_{\mu}^{(2)} + \frac{\sqrt{6}}{2\hbar} (p \times p)_{\mu}^{(2)}$$

ควอดรูโพลโอเปอเรเตอร์และโอเปอเรเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุม L ของนิวคลีออนต่างกันจะคอมมิวท์กัน โอเปอเรเตอร์ที่สร้างออสซิลเลเตอร์ควอนตัมในสถานะของนิวคลีออนตัวหนึ่งจะคอมมิวท์กับโอเปอเรเตอร์ที่ทำลายล้างออสซิลเลเตอร์ในสถานะของนิวคลีออนอีกตัวหนึ่ง และจะมีแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์

$$C_{SU(3)}^{(2)} = (1/4) [Q^{(2)} \cdot Q^{(2)}] + (3/4) (L \cdot L) \quad (2-20)$$

เป็นสเกลาร์โอเปอเรเตอร์และคอมมิวท์กับทุกองค์ประกอบของ L และ $Q_{\mu}^{(2)}$ ดังนั้นจะได้ทอม $L \cdot L = L^2$ และ $Q \cdot Q = Q^2$ และสามารถเขียนค่าไอเกนของแคชชีเมียร์โอเปอเรเตอร์นี้สำหรับสถานะของ $SU(3)$ ที่มีตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ (λ, μ) เป็น [19]

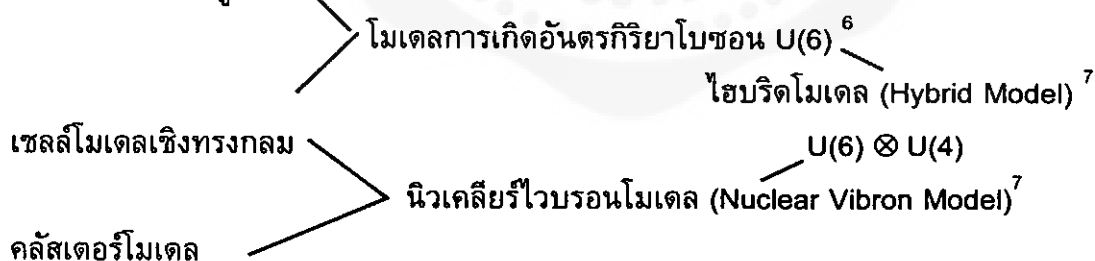
$$C^{(2)}(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \lambda \mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)$$

กรณีของนิวคลีออนเดี่ยว แคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ (2-20) อาจแปลงอยู่ในรูปแบบธรรมดาได้โดยแทน $\lambda = N, \mu = 0$ จะได้ $C^{(2)}(N,0) = N^2 + 3N$ จะเห็นได้ว่า รูปแบบของ $SU(3)$ มีประโยชน์เมื่อคิดอันตรกิริยาแบบสองอนุภาค (two-body interaction) ระหว่างนิวคลีออน กรณีที่มีวาเลนซ์โปรตอน(valence proton) และวาเลนซ์นิวตรอนอยู่ภายนอกเชลล์ที่เต็มโดยอยู่ภายใต้การคู่ควบ L-S (L-S coupling) ก็ต้องพิจารณาโอเปอเรเตอร์ของสปิน (S) และไอโซสปิน (T)[19] ถ้าฮามิลโทเนียนประกอบด้วยโอเปอเรเตอร์ของสปินและไอโซสปิน และค่าไอเกนของฮามิลโทเนียนนี้ขึ้นกับฟังก์ชันของสเปซโคออร์ดิเนตเพียงอย่างเดียวแต่ไม่ขึ้นกับสถานะที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสปินและไอโซสปิน โดยฟังก์ชันของสปินและไอโซสปินที่เป็นแบบสมมาตรควรคูณกับฟังก์ชันของสเปซที่จะทำให้ได้รูปแบบของสถานะที่เป็นแบบปฏิสมมาตรเต็มรูป (fully antisymmetric) สามารถสร้างฟังก์ชันของสปิน-ไอโซสปินแบบสมมาตรด้วยการแปลงยูนิแทรีในสเปซ 4 มิติ ที่มีกลุ่มของการแปลง $U^{ST}(4)$ ของ Wigner⁵ มีตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้เป็นตามตารางยัง $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = a$ โดย $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4$ ในที่นี้ a คือจำนวนของวาเลนซ์โปรตอนและวาเลนซ์นิวตรอน ตัวอย่างเช่น สถานะของสปิน-ไอโซสปินของนิวคลีออนเดี่ยวตัวหนึ่งจะมี $f_1 = a = 1$ และ $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ ดังนั้นถ้ามีนิวคลีออนเต็มเชลล์ s ก็จะมี $U^{ST}(4)$ เป็น $[1,1,1,1]$ เป็นต้น

2.6 วิธีการใช้พีชคณิตเข้าสู่ฟิสิกส์ของนิวเคลียสและโมเลกุล [21-22]

(The Algebraic approach to Nuclear and Molecular Physics)

วิธี การใช้พีชคณิตเข้าสู่ฟิสิกส์ของนิวเคลียสและโมเลกุลโดยอาศัยเทคนิคการเกิดอันตรกิริยาของโบซอน จะนำเฉพาะบางโมเดลที่เกี่ยวข้องกับสถานะในนิวเคลียร์ฟิสิกส์มาศึกษาตามแผนภูมิต่อไปนี้ โดยบ่งชี้แต่ละโมเดลของโครงสร้างนิวเคลียสด้วยโครงสร้างกลุ่มของมัน โมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน



5: E.P. Wigner, Phys. Rev. 51, 106 (1937).

6: A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. (N.Y.) 99, 253 (1976);

A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. (N.Y.) 111, 201 (1978);

A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. (N.Y.) 123, 468 (1979).

7: F. Iachello and A.D. Jackson, Phys. Lett. 108B, 151 (1982)

F. Iachello, Nucl. Phys. A396, 233C (1983).

การใช้เทคนิคการเกิดอันตรกิริยาของโบซอนในการสร้างโมเดลดังกล่าว มีขั้นตอนดังนี้

ก) เลือกระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ที่เหมาะสมที่เป็นตัวเลข f

ข) สร้างชุดของโบซอนโอเปอเรเตอร์หนึ่งชุดที่มีจำนวน $n = f + 1$ โอเปอเรเตอร์เป็น

$$b_r^\dagger \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

ค) เขียนแฮมิลโทเนียนและโอเปอเรเตอร์อื่นๆในเทอมของโบซอนโอเปอเรเตอร์เหล่านี้

$$H = h_0 + \sum_{rr'} \mathcal{E}_{rr'} b_r^\dagger b_{r'} + \frac{1}{2} \sum_{rsr's'} u_{rsr's'} b_r^\dagger b_s^\dagger b_{r'} b_{s'} + \dots \quad (2-21)$$

จะได้ค่าโอเกนและสถานะโอเกนเมื่อทำให้ H เป็นเมตริกซ์เจียงในสถานะมูลฐานของ

โบซอน (boson basis) ที่เหมาะสม $B: b_r^\dagger, \dots, b_r^\dagger |0\rangle$

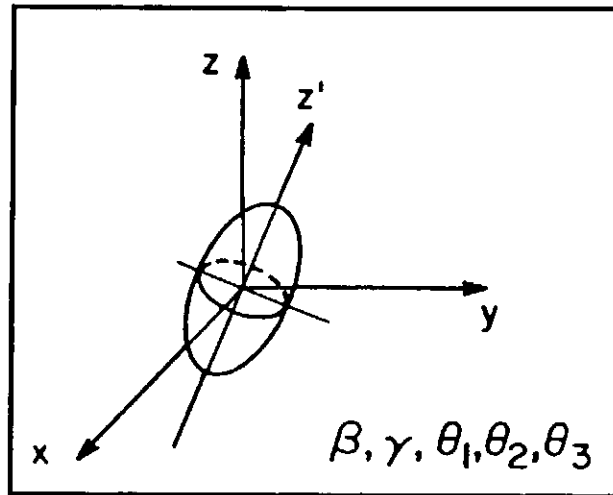
ตัวอย่างเช่น

i) $f = 5$ เป็นระดับขั้นความเสรีแบบควอดรูโพล คล้องจองกับโมเดลของการเกิดอันตรกิริยาโบซอน โครงสร้างกลุ่มเป็น $U(6)$ และโครงสร้างเรขาคณิตแสดงดังรูป 2 โบซอนในโมเดลของการเกิดอันตรกิริยาโบซอนสามารถอธิบายอีกแบบหนึ่งได้ในเทอมของคู่ควิลิออน⁸ สเปกตรัมเนื่องจากการหมุนและการสั่น (rotation-vibration spectrum) ในนิวเคลียสทั้งหลายได้มาจากความจริงที่ว่าพื้นผิวของนิวเคลียสอาจมีการผิดรูปควอดรูโพลเหมือนในรูป 2 โดยมี β และ γ แสดงลักษณะรูปร่าง และมุมออยเลอร์ (Euler angles) ในสเปซ θ_1, θ_2 และ θ_3 แสดงการวางตัวของรูปร่างที่ผิดรูปไป ดังนั้นอาจวิเคราะห์สเปกตรัมได้ด้วยการนำ 6 โบซอนโอเปอเรเตอร์ที่คล้องจองกับโครงสร้างกลุ่มที่เป็นกลุ่มพลวัต $U(6)$ มาใช้

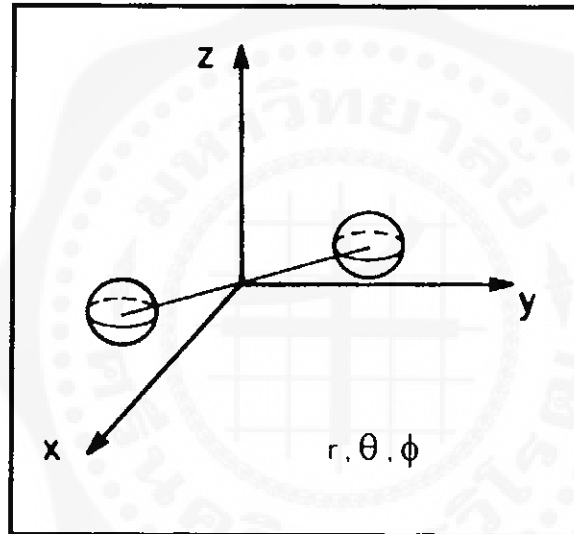
ii) $f = 3$ เป็นระดับขั้นความเสรีแบบไดโพล คล้องจองกับไวบรอนโมเดล โครงสร้างกลุ่มเป็น $U(4)$ และโครงสร้างเรขาคณิตแสดงดังรูป 3 ตัวอย่างเช่นสเปกตรัมของการหมุนและการสั่นของโมเลกุลแบบไดอะตอมที่แยกกันด้วยระยะทาง r โดยมีองค์ประกอบของ r ในโคออร์ดิเนตเชิงทรงกลม r, θ และ ϕ ซึ่งคล้องจองกับกลุ่มพลวัต $U(4)$ ที่ก่อกำเนิดด้วย 4 โอเปอเรเตอร์ที่สร้างและทำลายล้าง

8: A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello and I. Talmi, Phys. Lett. 66B, 205 (1977);

T. Otsuka, A. Arima, , F. Iachello and I. Talmi, Phys. Lett. 76B, 139 (1978).



รูป 2⁸ โครงสร้างเชิงเรขาคณิตของโมเดลของการเกิดอันตรกิริยาโบซอน $f=5$



รูป 3⁸ โครงสร้างเชิงเรขาคณิตของไวบรอนโมเดล $f=3$

ถ้าสามารถเขียนฮามิลโทเนียน H ตามสมการ (2-21) ในเทอมของแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงของห่วงโซ่กลุ่มย่อยของกลุ่มเต็มที่สมบูรณ์อันหนึ่งได้ ก็จะทำให้เกิดสมมาตรเชิงพลวัต และสามารถแก้ปัญหาค่าไอเกนสำหรับ H ได้ ห่วงโซ่กลุ่ม (group chain) ที่เป็นไปได้ของกรณี

i) $f = 5, n = 6$

$$\begin{array}{l}
 U(6) \begin{cases} U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \\ SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \\ O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \end{cases}
 \end{array} \quad (2-22)$$

ii) $f = 3, n = 4$

$$\begin{array}{l}
 U(4) \begin{cases} U(3) \supset O(3) \supset O(2) \\ O(4) \supset O(3) \supset O(2) \end{cases}
 \end{array} \quad (2-23)$$

ห่วงโซ่เหล่านี้ได้มีการศึกษาอย่างละเอียดมาแล้ว และได้มีการตรวจสอบข้อมูลเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับกรณีก่อนหน้าต่อไปนี้จะศึกษาการใช้ประโยชน์จากสมการของห่วงโซ่ (2-23) ซึ่งเกี่ยวข้องกับไวยรอนโมเดลที่น่าสนใจ ตอนแรกต้องเขียนตัวบ่งชี้ของสถานะที่สมบูรณ์ได้ก่อน ขอล่าถึงเฉพาะห่วงโซ่อันบนอันที่เกี่ยวข้องกับงานที่กำลังศึกษาอยู่ โดยห่วงโซ่นี้จะมีตัวบ่งชี้ตัวแทนเป็น

(ก) เลขควอนตัม N เป็นจำนวนไวยรอน (หรือโบซอน) ทั้งหมดซึ่งแสดงตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้เชิงสมมาตรทั้งหมดของ $U(4)$

(ข) เลขควอนตัม n_π ที่แสดงตัวแทนของ $U(3)$ โดยที่ $n_\pi = N, N-1, \dots, 0$

(ค) เลขควอนตัม J ที่แสดงตัวแทนของ $O(3)$ โดยที่ $J = n_\pi, n_\pi - 2, \dots, 1$ หรือ 0 สำหรับ $n_\pi =$ เลขคี่หรือเลขคู่

(ง) เลขควอนตัม M (ที่เป็นองค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวแกน Z) ที่แสดงตัวแทนของ $O(2)$ โดยที่ $-J \leq M \leq J$ ดังนั้นตัวบ่งชี้ตัวแทนของสถานะที่สมบูรณ์ในห่วงโซ่ดังกล่าวนี้คือ

$$\begin{array}{c}
 U(4) \supset U(3) \supset O(3) \supset O(2) \\
 | N, \quad n_\pi, \quad J, \quad M \rangle
 \end{array} \quad (2-24)$$

สิ่งที่น่าสนใจคือห่วงโซ่นี้ใช้ได้สะดวกมากในการทำให้ฮามิลโทเนียน H ส่วนมากเป็นเมตริกซ์เฉียงได้

สมมติว่าฮามิลโทเนียน H สามารถเขียนได้ในเทอมของโอเปอเรเตอร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลง(แคชเมียร์โอเปอเรเตอร์) ของห่วงโซ่นี้เท่านั้น จะได้

$$H = \epsilon + \gamma C_{U(3)}^{(1)} + \delta C_{U(3)}^{(2)} + \beta C_{O(3)}^{(2)} \quad (2-25)$$

โดยที่ ϵ, γ, δ และ β เป็นพารามิเตอร์อิสระ และกลุ่มยูนิแทรีนี้มีทั้งแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ของ $U(3)$ เชิงเส้นและกำลังสอง ที่มีรูปแบบง่าย ๆ เป็น

$$C_{U(3)}^{(1)} = n_\pi \quad \text{และ} \quad C_{U(3)}^{(2)} = n_\pi^2 + 3 n_\pi \quad (2-26)$$

ฮามิลโทเนียน (2-25) เป็นเมตริกซ์เฉียงในสถานะมูลฐาน (2-24) โดยค่าไอเกนคือ

$$E(N, n_\pi, J, M) = \varepsilon + \gamma n_\pi + \delta n_\pi (n_\pi + 3) + \beta J(J+1) \quad (2-27)$$

สิ่งที่น่าสนใจคือพลังงานศักย์ 3 มิติ ส่วนมากมีสเปกตรัมที่คล้องจองกับสมการ (2-27) โดยประมาณ ถ้ามีการรวมเทอมที่มีอันดับสูงขึ้นจะทำให้ค่าไอเกนของพลังงานมีจำนวนเทอมมากขึ้น ตัวอย่างเทอมที่อาจเพิ่มขึ้นในสมการ (2-27)

$$E(N, n_\pi, J, M) = \sum_{i,j} z_{ij} n_\pi^i [J(J+1)]^j \quad (2-28)$$

ขีดจำกัดของการใช้พีชคณิตที่แสดงข้างต้นนี้ขึ้นกับพื้นฐานของกลุ่มกะชับ (compact group) $U(4)$ ที่ตัวแทนยูนิแทรีจำเป็นต้องมีค่าไม่ต่อเนื่อง (discrete) และมีมิติที่จำกัด (finite-dimensional)

2.7 เซลล์โมเดล โมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน และ คลัสเตอร์โมเดล (Shell, Collective and Cluster Models)

ความแตกต่างเชิงฟิสิกส์ของโมเดลพื้นฐานของโครงสร้างนิวเคลียสของธาตุเบา ทั้ง 3 โมเดลอาจกล่าวได้อย่างชัดเจนดังนี้ ในเซลล์โมเดล คิดว่านิวคลีออนทั้งหลายในนิวเคลียสเคลื่อนที่อยู่ภายใต้พลังงานศักย์เฉลี่ยและอันตรกิริยาอื่นๆที่นิวคลีออนกระทำซึ่งกันและกัน (โดยปกติมักเป็นแรงระหว่างสองนิวคลีออน) ในโมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน ศึกษานิวเคลียสเหมือนหยดของเหลวเชิงจุลภาคที่อยู่ภายใต้การผิดรูปควอดรูโพล และทั้งหยดของเหลวนั้นสามารถหมุนและสั่นรอบรูปร่างสมดุลของมันเอง และสำหรับคลัสเตอร์โมเดล สมมติว่านิวเคลียสประกอบขึ้นด้วยนิวเคลียสที่มีขนาดเล็กกว่าที่เรียกว่า “คลัสเตอร์” อย่างน้อยสองคลัสเตอร์ ดังนั้นสามารถแยกระดับชั้นความเสถียรที่เกี่ยวข้องได้เป็น 2 ประเภทได้แก่ ประเภทที่อธิบายการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของคลัสเตอร์ และประเภทที่สัมพันธ์กับ โครงสร้างภายในของคลัสเตอร์

Elliott ได้คิดโมเดลที่เรียกว่า “โมเดลของ Elliott” ซึ่งอธิบายรูปลักษณะของการเป็นหมู่ร่วมกันของนิวเคลียสบนพื้นฐานของการคู่ควบระหว่างสปินและโมเมนตัมเชิงมุมเชิงออร์บิต (spin-orbit coupling) ในเซลล์โมเดลแบบทรงกลม โดยอาศัยแผนผังชุดพหุคูณยวดยิ่งของ Wigner (Wigner's supermultiplet scheme) อธิบายระดับชั้นความเสถียรของสปินและไอโซสปินที่สามารถแสดงสถานะของนิวเคลียสด้วยตัวบ่งชี้ของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของ $U^{ST}(4)$ ซึ่งเป็นเลขควอนตัมที่ดี ขณะที่ใช้กลุ่มสมมาตร $U(3)$ แทนฟังก์ชันคลื่นส่วนที่เกี่ยวข้องกับสเปซ (spatial part) ดังนั้นเมื่อสมมติว่าพลังงานศักย์เฉลี่ยในเซลล์โมเดลเป็นแบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ และพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างสองนิวคลีออนเป็นแบบควอดรูโพล

กับควอดรูโพล ก็สามารถเขียนฮามิลโทเนียน H ในเทอมแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ของห่วงโซ่กลุ่มได้ดังต่อไปนี้

$$U(3) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \\ | [N_1, N_2, N_3], (\lambda, \mu), K, L, M \rangle \quad (2-29)$$

(ได้แสดงตัวบ่งชี้ของตัวแทนของกลุ่มที่ปรากฏข้างบนด้วย ในที่นี้ K เป็นตัวแยกแถบของการเป็นหมู่ร่วมกัน (collective band) ที่อยู่ใน ชุดพหุคูณ $SU(3)$ (หรือ (λ, μ)) เดียวกัน L คือ โมเมนตัมเชิงมุมของสถานะ และ M คือ โพรเจกชัน (projection) ของโมเมนตัมเชิงมุม กฎทั่วไปเกี่ยวกับค่า L ของสถานะสำหรับตัวแทน (λ, μ) ที่กำหนดอันหนึ่งของ $SU(3)$ เป็นไปตามที่กล่าวไว้ในหัว 2.5)

$$H = H_{HO} + \chi Q \cdot Q \quad (2-30)$$

โดยที่ Q เป็นควอดรูโพลโอเปอเรเตอร์ที่สัมพันธ์กับแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์อันดับที่สองของกลุ่ม $SU(3)$ คล้ายกับสมการ (2-20) โดยกรณีนี้มี

$$C_{SU(3)}^{(2)} = 2 Q \cdot Q + (3/4) L \cdot L \quad (2-31)$$

และ H_{HO} เป็นฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ฮามิลโทเนียนที่สัมพันธ์กับแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงอันดับที่หนึ่ง (first-order Casimir invariant) $C_{U(3)}^{(1)}$ ของกลุ่ม $U(3)$ ดังนี้

$$H_{HO} = \gamma (C_{U(3)}^{(1)} + 3/2) = \gamma (N + 3/2) \quad (2-32)$$

ในที่นี้ $C_{U(3)}^{(1)}$ มีความหมายเชิงฟิสิกส์เป็นโอเปอเรเตอร์ตัวเลขของออสซิลเลเตอร์ควอนตัม N และ γ แสดงพลังงานของออสซิลเลเตอร์ควอนตัม ดังนั้นค่าไอเกนของพลังงานได้แก่

$$E = \gamma (N + 3/2)$$

สามารถเขียนได้ว่า

$$H = \gamma C_{U(3)}^{(1)} + (1/2)\chi C_{SU(3)}^{(2)} - (3/8)\chi C_{SO(3)}^{(2)} \quad (2-33)$$

และสมการในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ของค่าไอเกนของฮามิลโทเนียนนี้คือ

$$E = \gamma N + (1/2) \chi (\lambda^2 + \lambda \mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)) - (3/8) \chi L(L+1)$$

จะเห็นว่าในโมเดลนี้ นิยามแถบของการหมุนของนิวเคลียสด้วยกลุ่มสมมาตร SU(3) นั่นคือ ตัวแทน (λ, μ) สถานะไอแกนใน (λ, μ) ที่กำหนดค่าหนึ่งจะมีค่าไอแกนของ $C_{SU(3)}^{(2)}$ เท่ากัน และจะมีค่าไอแกนทั้งหมดเป็นสัดส่วนกับ $L(L+1)$ ซึ่งจะไม่เป็นสถานะซ้อนอีกต่อไป โดยพลังงานส่วนนี้คล้ายกับระดับพลังงานของการหมุนเชิงสมมาตรของวัตถุแข็งเกร็งที่มีโมเมนต์ของความเฉื่อย I ซึ่งหาได้จากความแรงของอันตรกิริยาของควอดรูโพล $(1/2\theta) = (3/8) \chi$

สำหรับกรณีของคลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิตกึ่งจุลภาค (SACM) ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.1 เกี่ยวกับ SACM ที่มีการเชื่อมโยงระหว่างรูปแบบของเซลล์กับรูปแบบของคลัสเตอร์ที่ประกอบด้วยอันตรกิริยาที่เป็นจริง โดยใน SACM จะใช้ เซลล์โมเดลของ Wigner-Elliott (กลุ่มสมมาตร $U_C^{ST}(4) \otimes U_C(3)$ โดยที่ C แทน cluster) ในการอธิบายโครงสร้างภายในของคลัสเตอร์ และใช้ ไวบริออนโมเดล (Vibron model) [21-23] (โมเดลที่ใช้พีชคณิตกลุ่มเชิงพลวัต $U_R(4)$ อธิบายปรากฏการณ์การเคลื่อนที่แบบหมุนและแบบสั่น ในสเปซ 3 มิติ ในที่นี้ R แทนการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (relative motion) โดยมีโบซอนเป็นควอนตัมของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์) อธิบายการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของคลัสเตอร์ทั้งหลาย ดังนั้นในระบบที่มี K คลัสเตอร์ จะมี K-1 สเปซเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เป็นอิสระต่อกัน และจะมีโครงสร้างกลุ่ม (group structure) ของโมเดลเป็น

$$\begin{aligned} & U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}^{ST}(4) \otimes U_{C_2}(3) \otimes \dots \otimes U_{C_K}^{ST}(4) \otimes U_{C_K}(3) \\ & \otimes U_{R_1}(4) \otimes U_{R_2}(4) \otimes \dots \otimes U_{R_{K-1}}(4) \\ & \supset U_C^{ST}(4) \otimes U_C(3) \otimes U_R(3) \supset U_C^{ST}(2) \otimes U(3) \\ & \supset U_C^S(2) \otimes O(3) \supset U(2) \supset O(2) \end{aligned} \quad (2-34)$$

สถานะมูลฐานทั้งหลายของโมเดลแสดงด้วยตัวบ่งชี้ของตัวแทนของกลุ่มเหล่านี้ ดังนั้นโครงสร้างของกลุ่มไม่เพียงแต่แสดงสถานะมูลฐานด้วยตัวบ่งชี้ของตัวแทนของกลุ่ม แต่ยังแสดงอันตรกิริยาในเทอมของตัวบ่งชี้ที่กำหนดด้วย

2.7.1 โมเดลสเปซ (Model space)

หลักสำคัญในการสร้างโมเดลสเปซจะเกี่ยวข้องกับสถานะต้องห้าม (forbidden state) ที่เป็นไปตามกฎการห้ามซ้อนของเพาลี (Pauli exclusion principle) และที่เกิดขึ้นจากการกระตุ้นที่ไม่แท้จริงอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล การกำจัดสถานะต้องห้ามเหล่านี้ทำได้หลายวิธีด้วยกัน วิธีที่ธรรมดาที่สุดสำหรับนิวเคลียสหนึ่งที่ต้องการศึกษาเรา จะใช้การตัดกัน (intersection) ระหว่างสถานะมูลฐาน SU(3) ของคลัสเตอร์โมเดลที่คล่องจองกับ

ห้วงโซ่กลุ่ม (2-34) กับ SU(3) ของเซลล์โมเดลที่มีสถานะทั้งหมดเป็นแบบปฏิสมมาตรของนิวเคลียสเดียวกันนั้น โดยยึดหลักความสมมูลของฮามิลโทเนียนของเซลล์โมเดลกับของคลัสเตอร์โมเดลและสมมติฐานที่ว่าทุกค่าคงตัวออสซิลเลเตอร์ ($\hbar\omega$) มีค่าเท่ากัน ดังนั้นสถานะมูลฐาน SU(3) ที่สร้างขึ้นโดยวิธีนี้สามารถใช้อธิบายโครงสร้างแบบคลัสเตอร์ (cluster configuration) ที่ไม่มีสถานะต้องห้ามของเพาลีและไม่มีสถานะพิเศษที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลประกอบอยู่ซึ่งเป็นสถานะที่ไม่แท้จริง โดยได้กำจัดสถานะที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลในเซลล์โมเดลออกจาก SU(3) ของเซลล์โมเดลก่อนทำการตัดกันสำหรับพาริตี (parity) P ของสถานะมูลฐานหาได้จาก $P = P_C P_R$ โดยพาริตีที่กำหนดด้วยคลัสเตอร์ $P_C = P_{C_1} P_{C_2} \dots$ และการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ $P_R = (-1)^{N\pi}$ (สถานะภายในของคลัสเตอร์ที่มีโปรตอนและนิวตรอนจำนวนเลขคู่จะมีพาริตีเป็นบวก $P_C = (-1)^{N_1^C + N_2^C + N_3^C}$ ถ้าไม่พิจารณาการกระตุ้นเซลล์หลักของคลัสเตอร์ด้วย)

ถึงแม้ว่ามีอันตรกิริยาอื่นๆเพิ่มเข้ามาสถานะมูลฐาน SU(3) ก็จะใช้ได้เหมือนเดิม ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันคลื่นของ เซลล์โมเดล โมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน และคลัสเตอร์โมเดลก็ใช้ได้ ถึงแม้ว่าฮามิลโทเนียนจะประกอบด้วยเทอมอันตรกิริยาที่เป็นจริงหรือไม่ก็ตาม

2.7.2 โอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์ (Physical operator)

โอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์ของโมเดลแสดงในเทอมของตัวก่อกำเนิดของห้วงโซ่กลุ่ม (2-34) โดยสามารถหาพารามิเตอร์ของแต่ละโอเปอเรเตอร์ของฮามิลโทเนียนได้จากการเทียบผลกับข้อมูลจากการทดลอง ความยากง่ายของโครงสร้างกลุ่มขึ้นกับจำนวนของคลัสเตอร์ในนิวเคลียสนั้นและขึ้นกับว่านิวเคลียสนั้นเป็นนิวเคลียสที่มีเซลล์เต็มหรือไม่ กรณีที่ง่ายที่สุดคือ ระบบที่ประกอบด้วยสองคลัสเตอร์ที่มีเซลล์เต็มที่เรียกว่า “เซลล์ปิด” (เช่น $^{16}\text{O} + ^4\text{He}$ ของนิวเคลียส ^{20}Ne) จัดว่าไม่มีโครงสร้างภายใน (structureless) จะมี $U_C^{\text{ST}}(4)$ และ $U_C(3)$ เป็นสเกลาร์ทั้งหมด ดังนั้นโอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์ของระบบนี้ประกอบด้วยเทอมง่ายๆเพียงเทอมเดียวของกลุ่ม $U_R(4)$ (ที่เป็นไวบริออนโมเดลแบบธรรมดาทั่วไป) ของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เท่านั้น

ตามที่กล่าวมาแล้วว่าถ้าโมเดลเชิงพีชคณิตอยู่ภายใต้ขีดจำกัดความสมมาตรเชิงพลวัต (dynamic symmetry) ที่สามารถเขียนฮามิลโทเนียนในเทอมของของแคซิเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงของห้วงโซ่กลุ่ม ก็จะได้ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของค่าไอเกนของพลังงานกับชุดสมบูรณ์ (complete set) ของสถานะมูลฐานทั้งหลาย โดยสามารถนำไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขของกรณีต่างๆไปได้ ดังตัวอย่างเช่น กรณีของนิวเคลียสที่ประกอบด้วยสองคลัสเตอร์ซึ่งมีเซลล์ปิด จะมีห้วงโซ่กลุ่ม (และตัวบ่งชี้ของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ที่คล่องจอง) เป็น

$$U_R(4) \supset U_R(3) \supset O_R(3) \quad (2-35)$$

$$| N, \quad n_\pi, \quad L \rangle$$

$$n_\pi = N, N-1, \dots, 0 \quad ; \quad L = n_\pi, n_\pi - 2, \dots, 1 \text{ or } 0$$

โดยที่ n_π คือ จำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัมในการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของสองคลัสเตอร์ ซึ่งมีค่ามากกว่าขีดจำกัดที่หาได้จากเงื่อนไข Widermuth (Widermuth condition[24]) และ N คือ ขีดจำกัดบน (upper limit) ที่กำหนดขนาดสเปซของโมเดล และเป็นจำนวนสูงสุดของ ออสซิลเลเตอร์ควอนตัมของการกระตุ้นที่มีผลต่อการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ ถ้าพิจารณา ฮามิลโทเนียนที่มีเฉพาะเทอมโอเปอเรเตอร์เชิงเส้นและโอเปอเรเตอร์กำลังที่สอง

$$H = \varepsilon + \gamma_R C_{U_R(3)}^{(1)} + \delta_R C_{U_R(3)}^{(2)} + \beta C_{O_R(3)}^{(2)} \quad (2-36)$$

จะได้ค่าไอเกนที่คล่องจงเป็น

$$E = \varepsilon + \gamma_R n_\pi + \delta_R n_\pi^2 + \beta L(L+1) \quad (2-37)$$

โดยที่ ε , γ_R , δ_R และ β เป็นพารามิเตอร์ที่หาได้จากวิธีการเทียบผลกับข้อมูลสเปกตรัม พลังงานของนิวเคลียสนั้นๆที่ได้จากการทดลอง ดังนั้นสูตรพลังงานง่ายๆนี้สามารถนำมาใช้หา สเปกตรัมของแถบคลัสเตอร์ (cluster band) ของ $^{16}\text{O} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{20}Ne ได้เป็นอย่างดี

เมื่อเปรียบเทียบฮามิลโทเนียนในสมการ(2-33) กับสมการ (2-36) จะเห็นได้ว่า อันตรกิริยาในเซลล์โมเดลกับอันตรกิริยาที่คล่องจงกับแบบสมมาตรเชิงพลวัตของคลัสเตอร์ โมเดลมีความคล้ายกัน สิ่งที่แตกต่างกันคืออันตรกิริยา $Q.Q$ ทำให้ความแรงสัมพัทธ์ของ แคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ของกลุ่ม $U(3)$ และกลุ่ม $O(3)$ เหมือนเดิม ขณะที่ฮามิลโทเนียน ของแบบสมมาตรเชิงพลวัตจะไม่ขึ้นกับอันตรกิริยา $Q.Q$ จึงสามารถกล่าวได้ว่าการเพิ่ม แรงควอดรูโพลของเซลล์โมเดลจะเกี่ยวเนื่องกับอันตรกิริยา $L.L$ ในคลัสเตอร์โมเดลเชิงพีชคณิต ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างสถานะมูลฐานของเซลล์โมเดลและคลัสเตอร์โมเดลย่อมใช้ได้สำหรับ อันตรกิริยาทั่วไปที่มีเทอมมากกว่าในสมการ (2-36) และสถานะมูลฐานทั้งหลายที่มี ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ $SU(3)$ ต่างกันจะตั้งฉาก (orthogonal) ซึ่งกันและกัน

กรณีระบบประกอบด้วย 2 คลัสเตอร์และมีเพียงหนึ่งคลัสเตอร์เท่านั้นที่เป็นเซลล์ ปิด(เช่น ^4He , ^{16}O , ^{40}Ca) ขณะที่อีกคลัสเตอร์หนึ่งเป็นนิวเคลียสแบบจำนวนโปรตอนและ จำนวนนิวตรอนเป็นเลขคู่ (even-even nucleus) (เช่น $^{12}\text{C} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{16}O) ระบบนี้ จะมีสปินและไอโซสปินเป็นศูนย์ แสดงว่าต้องพิจารณา $U^{ST}(4)$ เฉพาะในการสร้างโมเดลสเปซ เท่านั้น (โดยกรณีนี้พิจารณาเฉพาะสถานะ $U^{ST}(4)$ ที่เป็นสเกลาร์เท่านั้นเป็นเงื่อนไขการจับคู่ เทียบกันระหว่างสถานะมูลฐานของคลัสเตอร์โมเดลกับเซลล์โมเดล) แต่ตัวก่อกำเนิดของมัน

จะไม่ปรากฏเป็นโอเปอเรเตอร์ของระบบ ดังนั้นโมเดลนี้จะมีโครงสร้างกลุ่มของ $U_C(3) \otimes U_R(4)$ เท่านั้น สถานะมูลฐานของคลัสเตอร์โมเดลแสดงได้ด้วยตัวบ่งชี้ของตัวแทนของห่วงโซ่กลุ่มดังต่อไปนี้

$$U_C(3) \otimes U_R(4) \supset U_C(3) \otimes U_R(3) \supset SU_C(3) \otimes SU_R(3) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (2-38)$$

$$|[N_1^C, N_2^C, N_3^C], [N, 0, 0, 0], [n_\pi, 0, 0], (\lambda_C, \mu_C), (n_\pi, 0), (\lambda, \mu) K, L, M \rangle$$

โดย $SU(3)$ เป็นแบบสมมาตรเชิงพลวัต และสามารถเขียนฮามิลโทเนียนในเทอมของแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ที่มีรูปแบบโดยทั่วไปในกรณีนี้คือ

$$H = \varepsilon + \gamma_R n_\pi + \delta_R C_{SU_R(3)}^{(2)} + \delta_C C_{SU_C(3)}^{(2)} + \delta C_{SU(3)}^{(2)} + \theta K^2 + \beta L^2 \quad (2-39)$$

โดยที่ $C^{(2)}$ เป็นแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์อันดับที่สองของกลุ่ม $SU(3)$ ต่างๆ กัน คลัสเตอร์สเปกตรัมที่หาได้โดยวิธีนี้จะเกี่ยวข้องกับทั้งบริเวณสถานะพื้นและบริเวณสถานะของการกระตุ้นสูงๆ

แต่ถ้าคลัสเตอร์เหล่านั้นมีสปินและไอโซสปินไม่เป็นศูนย์ ห่วงโซ่กลุ่ม (2-38) ต้องประกอบด้วยกลุ่ม $U^{ST}(4)$ และฮามิลโทเนียนก็ต้องขึ้นกับสปินและไอโซสปินด้วย ในทำนองเดียวกันถ้าจะคิดโอเปอเรเตอร์เชิงฟิสิกส์อื่นๆ อาทิเช่น โอเปอเรเตอร์ของการเปลี่ยนสถานะเชิงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic transition operator) ก็ต้องสร้างเทนเซอร์ที่เหมาะสมรวมเข้าไปในตัวก่อกำเนิดของกลุ่มที่เกี่ยวข้องกันด้วย

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าในขีดจำกัดแบบสมมาตรเชิงพลวัตของ SACM รูปแบบของคลัสเตอร์หาได้จากเซลล์โมเดลโดย

- (i) การตัดทอนสเปซของเซลล์โมเดลตามหลักการสมมาตร จะได้ตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ $SU(3)$ ของคลัสเตอร์โมเดล
 - (ii) การประยุกต์ใช้อันตรกิริยาที่มีการอนุรักษ์ของการสมมาตร หรือกล่าวสั้นๆว่าส่วนที่ร่วมกันของเซลล์โมเดลและคลัสเตอร์โมเดล ก็คือ $U(3)$ แบบสมมาตรเชิงพลวัต
- แสดงว่าตอนนี้คลัสเตอร์โมเดลและโมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกันมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันโดยอาศัยความเกี่ยวเนื่องกับเซลล์โมเดล โดยสถานะทั้งหลายที่อธิบายได้ด้วย $U(3)$ แบบสมมาตรเชิงพลวัตจะมีโครงแบบของเซลล์โมเดลบริสุทธิ์ มีควอดรูโพลตามโมเดลแบบเป็นหมู่ร่วมกัน และมีโครงแบบของคลัสเตอร์โมเดล พร้อมกันในเวลาเดียวกัน

2.7.3 บทบัญญัติของ Harvey (Harvey's prescription)

บทบัญญัติของ Harvey⁹ กล่าวถึงจำนวนการยึดครองเชลล์ย่อยของนิวเคลียสที่เกิดจากคลัสเตอร์ทั้งหลายรวมเป็นนิวเคลียสหนึ่งเดียว (united nucleus) ซึ่งมีเงื่อนไขแตกต่างจากเงื่อนไขของ Widermuth (ที่ใช้ในการเลือกตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ $U(3)$ ที่ยอมรับได้) แต่ความสัมพันธ์ระหว่างสมมติฐานของทั้งสองแบบมีความเหมือนกัน โดยทั่วไปบทบัญญัติของ Harvey จะไม่ใช่หาสมมาตร $U(3)$ และ รูปแบบของการแจกแจง $[N_1, N_2, N_3]$ แต่อย่างไรก็ตามสำหรับสถานะนำ การแจกแจงควอนตัมและตัวบ่งชี้ $U(3)$ ของทั้งสองแบบมีความเหมือนกันทุกประการ ดังนั้นอาศัยความเกี่ยวเนื่องของทั้งสองแบบมาหาสถานะพื้นของนิวเคลียสของธาตุเบาที่แสดงด้วยตัวแทน $U(3)$ โดยเลือกใช้บทบัญญัติของ Harvey ในการคำนวณหา n_π ของระบบการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของคลัสเตอร์ทั้งหลายก่อน บทบัญญัติของ Harvey พิจารณาสถานะที่แสดงด้วยจำนวนออสซิลเลเตอร์ควอนตัมใน 3 ทิศทาง N_z, N_x, N_y โดยแต่ละสถานะมีนิวคลีออนอยู่ได้ 4 นิวคลีออน เมื่อนิวเคลียสทั้งหลายเคลื่อนที่เข้าหากันตามแกน z จะไม่กระทบกระเทือนค่าระดับชั้นความเสถียรในทิศทางของ x และ y กล่าวคือ N_x, N_y ยังคงมีค่าคงที่ ขณะที่ N_z ต้องมีค่าเปลี่ยนแปลงเพื่อให้เป็นไปตามหลักการของเพาลี แต่ในสถานะนำเราสามารถถ่ายเทควอนตัมใดๆจากทิศทาง y ไปยังทิศทาง x หรือ z ได้ และจากทิศทาง x ไปยังทิศทาง z ได้ จะเห็นได้ว่าสามารถใช้บทบัญญัติของ Harvey เชื่อมโยงสถานะมูลฐานระหว่างคลัสเตอร์โมเดลกับเชลล์โมเดล

ตัวอย่าง ระบบที่ประกอบด้วย 2 คลัสเตอร์ $^{12}\text{C} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{16}O จะมีโครงแบบเชลล์โมเดลของนิวเคลียส ^4He คือ $(1)^4 (k)^n$ แสดงว่า n อนุภาคอยู่ในเชลล์ที่มีพลังงาน $k\hbar\omega$ ในกรณีนี้ 4 นิวคลีออนอยู่ที่เชลล์ $0\hbar\omega$ เต็มที่มีตัวแทน $U_{C_1}(3)$ เป็นสเกลาร์ $[0,0,0]$ และ $U_{C_1}^{ST}(4) = [1,1,1,1]$ และโครงแบบเชลล์โมเดลของนิวเคลียส ^{12}C เป็น $(1)^4 (2)^8$ ที่มีตัวแทน $U_{C_2}(3)$ เป็น $[0,0,0] \otimes [4,4,0]$ เท่ากับ $[4,4,0]$ และ $U_{C_2}^{ST}(4) = [3,3,3,3]$ ตามบทบัญญัติของ Harvey เมื่อคลัสเตอร์เคลื่อนที่เข้าหากันคลัสเตอร์ ^4He จะเข้ารวมกับอีกคลัสเตอร์หนึ่งคือ ^{12}C โดย 4 นิวคลีออนของ ^4He จะเข้ายึดครองสถานะที่ว่างในเชลล์ $1\hbar\omega$ ของ ^{12}C ตามบทบัญญัติของ Harvey และรวมเข้ากันเป็นนิวเคลียส ^{16}O ที่มีเลขควอนตัมของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ $n_\pi = 4 \times 1 = 4$ ดังนั้นสถานะมูลฐานในคลัสเตอร์โมเดลของนิวเคลียส ^{16}O แสดงด้วยตัวแทน $U_{CM}(3)$ ที่หาได้จากผลคูณภายนอกของ $U(3) \otimes U_R(3)$ โดย $U(3) = [4,4,0] \otimes [0,0,0] = [4,4,0]$ และ $U_R(3) = [n_\pi, 0,0]$ เมื่อ $n_\pi \geq 4$ จะได้

9: M. Harvey, Proc. 2nd Int. Conf. On Clustering Phenomena in Nuclei (college Park)

USDERA report ORO-4856-26, 549 (1975).

: H. Chandra and U. Mosel, Nucl. Phys. A 298, 151 (1978)

ตาราง 1[2]

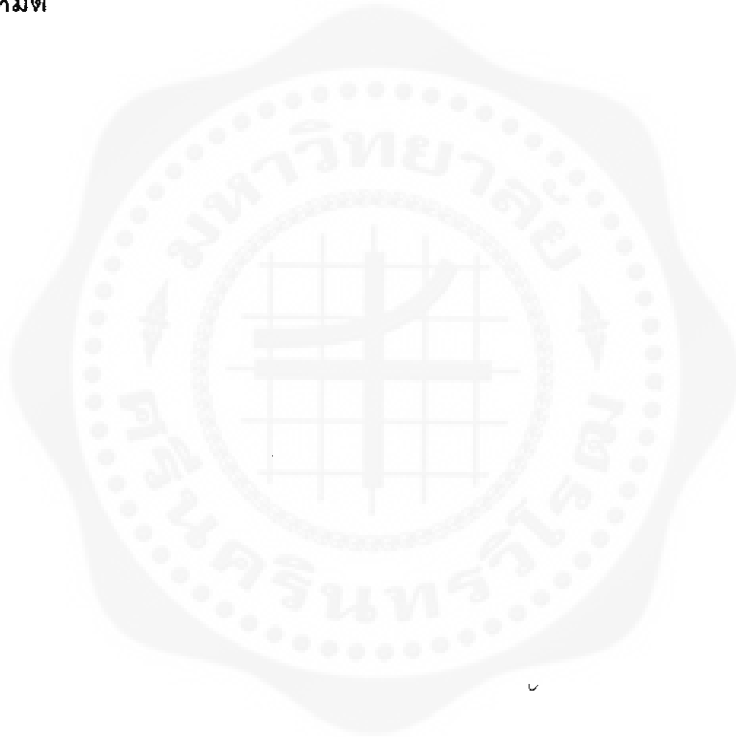
แสดงตัวแทน $U(3)$ ที่ได้จากการจับคู่เทียบกันระหว่างสถานะมูลฐานของ
คลัสเตอร์โมเดลและเซลล์โมเดลสำหรับระบบ $^{12}\text{C} + \alpha$

n_π	$[N_1, N_2, N_3]$	(λ, μ)	K^π	J^π
4	[4,4,4]	(0,0)	0^+	0^+
5	[6,4,3]	(2,1)	1^-	$1^- 2^- 3^-$
6	[6,4,4]	(2,0)	0^+	$0^+ 2^+$
	[7,4,3]	(3,1)	1^+	$1^+ 2^+ 3^+ 4^+$
	[8,4,2]	(4,2)	0^+	$0^+ 2^+ 4^+$
			2^+	$2^+ 3^+ 4^+ 5^+ 6^+$
7	[7,4,4]	(3,0)	0^-	$1^- 3^-$
	[8,4,3]	(4,1)	1^-	$1^- 2^- 3^- 4^- 5^-$
	[9,4,2]	(5,2)	0^-	$1^- 3^- 5^-$
			2^-	$2^- 3^- 4^- 5^- 6^- 7^-$
	[10,4,1]	(6,3)	1^-	$1^- 2^- 3^- 4^- 5^- 6^- 7^-$
			3^-	$3^- 4^- 5^- 6^- 7^- 8^- 9^-$

$$[4,4,0] \otimes [n_\pi, 0, 0] = \sum_{i=0}^4 [4 + n_\pi - i, 4, i] \quad (2-40)$$

และ $U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_2}^{ST}(4) = [4,4,4,4]$ คลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบหาได้จากการจับคู่เทียบ
กันระหว่างสถานะมูลฐานของคลัสเตอร์โมเดลกับเซลล์โมเดลตามที่กล่าวในหัวข้อ 2.7.2 ดังนั้น
ในการคำนวณสถานะมูลฐานในเซลล์โมเดล $U_{SM}(3)$ จะอาศัยกฎการเลือก (selection rule)
 $U^{ST}(4)$ ดังเช่น โครงแบบของการกระตุ้นด้วย $2\hbar\omega$ ในเซลล์โมเดลของนิวเคลียส ^{16}O ที่เป็นไป
ได้คือ $(0)^4 (1)^{10} (2)^2$ Elliott ได้ทำการศึกษาสมมาตรเชิงออร์บิทของอนุภาคในการจัดตัว
ของแต่ละอนุภาคในแต่ละออสซิลเลเตอร์เซลล์ โดยโครงแบบ $(1)^{10}$ จะมีสมมาตรเชิงออร์บิท
เป็น [442] และ [433] ซึ่งประกอบด้วยตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4)$ [3,3,2,2] และ [3,3,3,1] ตามลำดับ
ขณะที่โครงแบบ $(2)^2$ มีสมมาตรเชิงออร์บิทเป็น [2] และ [11] ซึ่งประกอบด้วยตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4)$
[1,1,0,0] และ [2,0,0,0] ตามลำดับ จะเห็นได้ว่ามีเพียงผลคูณภายนอกของ
[3,3,2,2] $\otimes$ [1,1,0,0] และ [3,3,3,1] $\otimes$ [2,0,0,0] ที่ได้ผลลัพธ์เป็นของตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4)$ เท่ากับ

[3,3,3,3] ขณะที่ผลคูณอื่นๆไม่ได้ผลลัพธ์นี้ ดังนั้นการเกิดชุดพหุคูณ $U_{SM}(3)$ ที่นับว่าใช้ได้จะมีเพียง $[4,4,2] \otimes \{ [4,0,0] \oplus [2,2,0] \}$ และ $[4,3,3] \otimes [3,1,0]$ ขณะที่ $[4,4,2] \otimes [3,1,0]$ และ $[4,3,3] \otimes \{ [4,0,0] \oplus [2,2,0] \}$ ต้องตัดทิ้งไปตามกฎการเลือก $U^{ST}(4)$ นอกจากนี้ตัวแทน $U_{SM}(3)$ อันหนึ่งสามารถใช้แทนสถานะมูลฐานของเซลล์โมเดลได้เพียงแต่เมื่อตัวแทน $U_{SM}(3)$ นี้มีภาวะการเกิดชุดพหุคูณ (multiplicity) ที่สูงกว่าตัวแทนที่เหมือนกันที่คล้องจองกับการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลที่เป็นสถานะที่ไม่แท้จริง กล่าวคือ ในกรณี ^{16}O นี้มีตัวแทน $U(3) [5,4,4]$ ที่พบว่าเป็นสถานะมูลฐานในเซลล์โมเดลระหว่างการกระตุ้น $1\hbar$ ω ที่มีภาวะการเกิดชุดพหุคูณเท่ากับ 1 ซึ่งคล้องจองกับการกระตุ้นที่ไม่แท้จริงเนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล ตาราง 1 แสดงคลัสเตอร์โมเดลสเปซที่ได้จากการจับคู่เทียบกันของสถานะมูลฐานของเซลล์โมเดลกับคลัสเตอร์โมเดล สำหรับ $n_\pi \geq 8$ ทุกสถานะที่คำนวณได้จากสมการ (2-40) ใช้ได้หมด



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 การคำนวณหาคลัสเตอร์โมเดลสเปซ

งานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบต่างๆมากมาย อาทิเช่น ระบบ $^{12}\text{C} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{16}O ระบบ $^{16}\text{O} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{20}Ne และ ระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti เป็นต้น โดยสามารถตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณได้จากเอกสารที่ได้ตีพิมพ์แล้ว ซึ่งทุกระบบใช้วิธีการคำนวณแบบเดียวกัน สำหรับระบบ $^{12}\text{C} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{16}O ได้อธิบายเป็นตัวอย่างในหัวข้อ 2.7 ดังนั้นจะขอนำวิธีการคำนวณคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti มาแสดงอย่างเป็นขั้นตอนในบทนี้

ขั้นตอนในการคำนวณคลัสเตอร์โมเดลสเปซเป็นตามลำดับดังนี้

(ก) คำนวณหาตัวแทน $SU_{CM}(3)$ และ $U_{CM}^{ST}(4)$ ของนิวเคลียสหนึ่งเดียว (unite nucleus) ของระบบที่เกิดจากการคลัสเตอร์ของคลัสเตอร์ทั้งหลาย (ในที่นี้ CM แทนคลัสเตอร์โมเดล) สำหรับสถานะพื้นและแต่ละสถานะของการกระตุ้นทั้งหลาย

(ข) คำนวณหาตัวแทน $SU_{SM}(3)$ และ $U_{SM}^{ST}(4)$ ของนิวเคลียสหนึ่งเดียวในข้อ (ก) ในเซลล์โมเดล (ในที่นี้ SM แทนเซลล์โมเดล) ที่เป็นไปตามกฎการเลือกและต้องไม่มีสถานะที่ไม่แท้จริงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลอยู่ สำหรับสถานะพื้นและสถานะของการกระตุ้นทั้งหลาย

(ค) ทำการตัดกัน (intersection) ระหว่างสถานะมูลฐาน $SU_{CM}(3)$ ของคลัสเตอร์โมเดล ในข้อ(ก) กับ $SU_{SM}(3)$ ของเซลล์โมเดล ในข้อ(ข) ซึ่งสถานะทั้งหมดเป็นแบบปฏิสมมาตรที่ไม่มีสถานะต้องห้ามของเพาลีและไม่มีสถานะพิเศษที่ไม่แท้จริงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลประกอบอยู่ สำหรับสถานะพื้นและสถานะของการกระตุ้นทั้งหลาย

การคำนวณคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti

ขั้นตอน(ก):

พิจารณานิวเคลียสแกน(core nucleus) เป็น $^{40}_{20}\text{Ca}$ (ประกอบด้วย 40 นิวคลีออนที่เป็นโปรตอน 20 และนิวตรอน 20 นิวตรอนมีไอโซสปิน $T = 1/2$ และ $T_z = 1/2$ สปิน $S = 1/2$ และโปรตอนมี $T = 1/2$ และ $T_z = -1/2$ $S=1/2$ ดังนั้น T_z รวมและ S รวมของ $^{40}_{20}\text{Ca}$ เท่ากับ 0) ซึ่งเป็นคลัสเตอร์ที่มีเซลล์ sd ปิด โดยมี 4 นิวคลีออนอยู่ที่เซลล์ $0\hbar\omega$ 12 นิวคลีออนอยู่ที่เซลล์

1 $\hbar \omega$ และ 24 นิวคลีออนอยู่ที่เชลล์ 2 $\hbar \omega$ ได้ตัวแทน $U_{C_1}^{ST}(4) = [10, 10, 10, 10]$ และ $SU_{C_1}(3) = (0, 0)$ และคลัสเตอร์กับนิวเคลียส ${}^4\text{He}$ ซึ่งเป็นคลัสเตอร์ที่มีเชลล์ s ปิด และ $T_z = 0$ และ $S = 0$ มีตัวแทน $U_{C_2}^{ST}(4) = [1, 1, 1, 1]$ และ $SU_{C_2}(3) = (0, 0)$ เช่นกัน (เรียกว่าเป็นนิวเคลียสที่ไม่มีโครงสร้างภายใน (structureless))

ดังนั้นระบบดังกล่าวนี้ประกอบด้วย 2 คลัสเตอร์ที่เป็นเชลล์ปิดคลัสเตอร์เข้าด้วยกันได้ นิวเคลียส ${}^{44}\text{Ti}$ ที่มี $T_z = 0$ $S = 0$ โดย 4 นิวคลีออนของ ${}^4\text{He}$ จะเข้ายึดครองสถานะที่ว่างใน ${}^{40}\text{Ca}$ ในเชลล์ fp (3 $\hbar \omega$) ตามบทบัญญัติของ Harvey หาค่า n_π ได้ $n_\pi \geq 12$ และตัวแทน $U_{CM}^{ST}(4)$ ของ ${}^{44}\text{Ti}$ คือ $U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_2}^{ST}(4) = [10, 10, 10, 10] \otimes [1, 1, 1, 1] = [11, 11, 11, 11]$ โดยมีห่วงโซ่กลุ่ม (และตัวบ่งชี้ของตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ที่คล่องจอง) เป็นตามสมการ (2-35) ดังนี้

$$\begin{aligned} U_R(4) \supset U_R(3) \supset O_R(3) \\ |N, n_\pi, L\rangle \\ n_\pi = N, N-1, \dots, 0; \quad L = n_\pi, n_\pi - 2, \dots, 1 \text{ or } 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

นั่นคือ $SU_{CM}(3) = (n_\pi, 0)$

สำหรับสถานะพื้น (0 $\hbar \omega$) ของ ${}^{44}\text{Ti}$ จะมี $SU_{CM}(3) = (12, 0)$ แปรติ $P = (-1)^{12} = +1$

สำหรับสถานะกระตุ้น 1 $\hbar \omega$ ของ ${}^{44}\text{Ti}$ จะมี $SU_{CM}(3) = (13, 0)$ แปรติ $P = (-1)^{13} = -1$

สำหรับสถานะกระตุ้น 2 $\hbar \omega$ ของ ${}^{44}\text{Ti}$ จะมี $SU_{CM}(3) = (14, 0)$ แปรติ $P = (-1)^{14} = +1$ เป็นต้น

ข้อสังเกต: จะเห็นได้ว่าแต่ละสถานะมี $SU_{CM}(3)$ เพียงค่าเดียวและมีภาวะการเกิดพหุคูณเป็นหนึ่งเท่านั้น แสดงว่าคลัสเตอร์โมเดลสเปซของนิวเคลียส ${}^{44}\text{Ti}$ น่าจะประกอบด้วย $SU(3)$ ดังกล่าวทั้งหมด เพื่อยืนยันความถูกต้องจะแสดงการคำนวณตามขั้นตอนต่อไป

ขั้นตอน (ข):

การคำนวณหาตัวแทน $SU_{SM}(3)$ และ $U_{SM}^{ST}(4)$ ของนิวเคลียส ${}^{44}\text{Ti}$ ในเชลล์โมเดลที่สถานะต่างๆจะต้องพิจารณาโครงแบบของแต่ละสถานะที่ยอมรับได้ตามกฎการเลือก $U^{ST}(4)$ ดังนี้ ที่สถานะพื้น (0 $\hbar \omega$) ของนิวเคลียส ${}^{44}\text{Ti}$ มีโครงแบบของเชลล์โมเดลเป็น $(0)^4 (1)^{12} (2)^{24} (3)^4$ โดยโครงแบบ $(3)^4$ มีสมมาตรเชิงออร์บิทเป็น [4] [31] [22] [211] และ [1111] ซึ่งจะมีสมมาตรเชิงออร์บิท [4] เท่านั้นที่มีตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4) = [11, 11, 11, 11]$ และ

$$U_{SM}(3) = [0, 0, 0] \otimes [4, 4, 4] \otimes [16, 16, 16] \otimes [12, 0, 0] = [32, 20, 20]$$

$$SU_{SM}(3) = (12, 0)$$

ที่สถานะของการกระตุ้นด้วย $1\hbar\omega$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti มีโครงสร้างของเซลล์โมเดลที่เป็นไปได้ เป็น (i) $(0)^4 (1)^{12} (2)^{24} (3)^3 (4)^1$ จะมีสมมาตรเชิงออร์บิทของ 3 อนุภาคในเซลล์ $3\hbar\omega$ เป็น

[3] และ 1 อนุภาคในเซลล์ $4\hbar\omega$ เป็น [1] ที่จะมีตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4) = [11,11,11,11]$ และ

$$U_{SM}(3) = [0,0,0] \otimes [4,4,4] \otimes [16,16,16] \otimes [9,0,0] \otimes [4,0,0] \\ = [33,20,20] \oplus [32,21,20] \oplus [31,22,20] \oplus [30,23,20] \oplus [29,24,20]$$

$$SU_{SM}(3) = (13,0), (11,1), (9,2), (7,3), (5,4)$$

(ii) $(0)^4 (1)^{12} (2)^{23} (3)^5$ กรณีนี้ 23 อนุภาคอยู่ในเซลล์ $2\hbar\omega$ ขาดเพียงอนุภาคเดียวก็เต็มเซลล์ ขณะที่ 5 อนุภาคในเซลล์ $3\hbar\omega$ จะมีสมมาตรเชิงออร์บิทเป็น [41] และ

[32] เท่านั้นที่ จะมีตัวแทน $U_{SM}^{ST}(4) = [11,11,11,11]$ ดังนั้นในกรณีที่ 5 อนุภาคในเซลล์ $3\hbar\omega$ ที่มีสมมาตรเชิงออร์บิทเป็น [41] จะมี

$$U_{SM}(3) = [0,0,0] \otimes [4,4,4] \otimes [16,16,14] \otimes [14,1,0] \\ = [34,21,18] \oplus [34,20,19] \oplus [33,21,19] \oplus [33,20,20] \oplus [32,21,20]$$

$$SU_{SM}(3) = (13,3), (14,1), (12,2), (13,0), (11,1)$$

และกรณีที่ 5 อนุภาคในเซลล์ $3\hbar\omega$ ที่มีสมมาตรเชิงออร์บิทเป็น [32] จะมี

$$U_{SM}(3) = [0,0,0] \otimes [4,4,4] \otimes [16,16,14] \otimes [13,2,0] \\ = [33,22,18] \oplus [33,20,20] \oplus [32,22,19] \oplus [32,21,20] \oplus [31,22,20]$$

$$SU_{SM}(3) = (11,4), (13,0), (10,3), (11,1), (9,2)$$

เมื่อรวมทั้ง (i) และ (ii) จะมีตัวแทน $SU_{SM}(3) = (13,3), (14,1), (11,4), (12,2), (13,0)^3,$

$$(10,3), (11,1)^3, (9,2)^2, (7,3), (5,4)$$

เลขที่กำกับบนตัวแทนแสดงจำนวนภาวะการเกิดชุดพหุคูณ ที่ไม่มีเลขกำกับแสดงว่ามีค่าเป็นหนึ่ง สำหรับสถานะที่ไม่แท้จริงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลในสถานะ

ของการกระตุ้นด้วย $1\hbar\omega$ จะมีตัวแทน $U(3) = [32,20,20] \otimes [1,0,0] = [33,20,20]$ และ

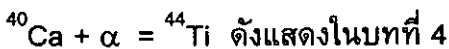
$SU(3) = (13,0)$ เมื่อนำไปหักล้างจาก $SU_{SM}(3)$ ข้างต้น จะทำให้จำนวนภาวะการเกิดชุดพหุคูณของ (13,0) เหลือเพียง 2 เท่านั้น

สถานะการกระตุ้นถัดขึ้นไปก็ดำเนินการคำนวณในลักษณะเช่นเดียวกันนี้

ขั้นตอน (ค):

ทำการตัดกัน (intersection) ระหว่างสถานะมูลฐาน $SU_{CM}(3)$ ของคลัสเตอร์โมเดลใน

ข้อ(ก) กับ $SU_{SM}(3)$ ของเซลล์โมเดล ในข้อ(ข) จะได้คลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ



3.2 การหาสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียส ^{44}Ti

การหาสมการค่าไอเกนของพลังงานเชิงวิเคราะห์ของนิวเคลียส ^{44}Ti ทำได้โดยเขียนฮามิลโทเนียนในเทอมของแคชเมียร์โอเปอเรเตอร์ของห่วงโซ่กลุ่ม (3-1) ซึ่งเป็นขีดจำกัดพิเศษในโมเดลพีชคณิตที่เรียกว่า “ความสมมาตรเชิงพลวัต” ในกรณีนี้มีรูปแบบเป็นแบบ core-plus-alpha-particle ซึ่งจะมีรูปแบบของฮามิลโทเนียนทั่วไปตามสมการ (2-39) เป็น

$$H = \varepsilon + \gamma_R n_\pi + \delta_R C_{SU_R(3)}^{(2)} + \delta_C C_{SU_C(3)}^{(2)} + \delta C_{SU(3)}^{(2)} + \theta K^2 + \beta L^2 \quad (3-2)$$

เมื่อพิจารณาคลาสเตอร์โมเดลสเปกที่คำนวณได้ในหัวข้อ 3.1 จะเห็นได้ว่าสเปกตรัมพลังงานของระบบจะมีแต่แถบ $K = 0$ เท่านั้น ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ไม่จำเป็นต้องพิจารณาเทอม K^2 และอาจเขียนสมการค่าไอเกนของพลังงานของระบบนี้เป็น

$$E = \varepsilon + \gamma_R n_\pi + \delta_R n_\pi^2 + \delta (\lambda^2 + \lambda \mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)) + \beta L(L+1) \quad (3-3)$$

ค่า γ_R สามารถคำนวณจากออสซิลเลเตอร์พารามิเตอร์ที่เป็นระบบซึ่งขึ้นกับมวลอะตอม A คือ $^{10} 45 A^{-1/3} - 25 A^{-2/3}$ สำหรับพารามิเตอร์อื่นๆที่เหลือได้จากการปรับค่าพลังงานของสมการ(3-3) เข้ากับข้อมูลพลังงานที่ได้จากการทดลองที่มีการตีพิมพ์เผยแพร่แล้ว

สาเหตุที่ตอนท้ายสุดได้เลือกศึกษาระบบนี้ ก็ด้วยเหตุผลที่ว่า มีผลงานล่าสุดที่พยายามอธิบายสเปกตรัมพลังงานที่วัดได้จากการทดลองว่าเป็นแถบคลาสเตอร์ของสเปกตรัมโดยการคำนวณด้วยทฤษฎีที่ต่างกันไป และเนื่องจากว่า alpha-cluster structure ของนิวเคลียสในบริเวณ(เชลล์ fp) Ca-Ti มีความคล้ายคลึงกับของนิวเคลียสในบริเวณ (เชลล์ sd) O-Ne ที่มี การศึกษามานานจนในปัจจุบันเป็นที่รู้จักกันดีว่าเป็นอย่างไร ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงสนใจที่จะศึกษาระบบนี้โดยใช้ SACM ในการอธิบายสถานะของ core-plus-alpha-particle ของนิวเคลียส ^{44}Ti จำนวน 4 แถบ (ขึ้นกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง) ที่คิดว่าเป็นแถบคลาสเตอร์ และต้องการตรวจสอบต่อไปว่าฮามิลโทเนียนที่มีรูปแบบธรรมดาที่สุดในการคำนวณสเปกตรัมพลังงานของนิวเคลียสนี้เป็นอย่างไร โดยเฉพาะอย่างยิ่งเราต้องการพิจารณาอันตรกิริยาที่ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงในเชลล์โมเดลมาสัมพันธ์กับในคลาสเตอร์โมเดลด้วย และประยุกต์ใช้สมการค่าไอเกนในเชลล์โมเดลดังกล่าว 3 รูปแบบมาใช้ในการคำนวณค่าพลังงานเปรียบเทียบกับผลของสเปกตรัมพลังงานจากการคำนวณด้วยสมการค่าไอเกนทั้งสามแบบกับสเปกตรัมพลังงานจากการทดลอง โดยสมการค่าไอเกนทั้งสามได้แก่

10: J. Blomqvist and A. Molinari, Nucl. Phys. A 106, 545 (1968).

H. Chandra and U. Mosel, Nucl. Phys. A 298, 151 (1978).

$$E = \varepsilon + \gamma N + \delta N^2 + \beta L(L+1) \quad (3-4)$$

$$E = \varepsilon + \gamma N + \zeta C_2(\lambda, \mu) + \beta L(L+1) \quad (3-5)$$

$$E = \varepsilon + \gamma N + \delta N^2 + \beta L(L+1) + \eta \{N L(L+1)\} \quad (3-6)$$

โดย $C_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu$ ที่เป็ค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงแคชเมียร์ (Casimir invariant) อันดับสองของกลุ่ม $U(3)$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti และค่า $\gamma = 45 \text{ A}^{-1/3} - 25 \text{ A}^{-2/3} = 10.741 \text{ MeV}$. ในกรณีนี้ $N = N_c + n_\pi$ (N_c เป็นจำนวนออกซิลเลเตอร์ควอนตัมของนิวเคลียสแกน ในกรณีคือ ^{40}Ca จะมี $N_c = 60$) ความหมายทางฟิสิกส์ของแต่ละเทอมของอันตรกิริยาอธิบายได้ดังนี้ เทอมที่ขึ้นกับ N จะคล้องจองกับอันตรกิริยาของการสั่นแบบฮาร์มอนิกออกซิลเลเตอร์ เทอม N^2 พิจารณาการเป็นแอนฮาร์โมนิก (anharmonicity) C_2 เป็น เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงแคชเมียร์อันดับสองของกลุ่ม $SU(3)$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti ที่ประกอบด้วยอันตรกิริยาควอดรูโพลกับควอดรูโพล เทอม L^2 เป็นเทอมของการหมุนและเทอม $N L(L+1)$ อธิบายการคู่ควบของการสั่นและการหมุน

ข้อมูลจากการทดลองที่นำมาใช้ในการคำนวณแสดงตามตาราง 2 พร้อมกำกับเอกสารอ้างอิงของข้อมูลทีนำมาด้วย ข้อมูลจากการทดลองทั้งหลายสำหรับแถบของสถานะพื้นมีสถานะ 10^+ และ 12^+ แตกต่างกัน ดังนั้นในการคำนวณจึงแยกข้อมูลเป็น 2 ชุด ชุดหนึ่งจะไม่รวม 2 สถานะนี้ ส่วนอีกชุดหนึ่งจะรวม 2 สถานะเข้าไปด้วย และข้อสังเกตจากนักทดลองได้แสดงว่าแถบพลังงานในสถานะสูงๆขึ้นไปจะมีสถานะคลัสเตอร์ที่มีชิ้นส่วนย่อย (fragment) มากมาย

ตัวอย่าง Input File และ Output File ในการคำนวณและปรับค่าพารามิเตอร์ของสมการ (3-5) ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์แสดงไว้ในภาคผนวก ก และได้แสดงรูปสเปกตรัมของพลังงานที่เปรียบเทียบระดับพลังงานในแถบคลัสเตอร์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมใน Output File กับระดับพลังงานในแถบคลัสเตอร์จากการทดลองไว้ในบทที่ 4 รูปที่ 4

ตาราง 2
แสดงข้อมูลของระดับพลังงานในนิวเคลียส ^{44}Ti จากการทดลอง

K^π	J^π	E (MeV)	Ref.	Comments
0_1^+	0^+	0.00		
	2^+	1.08	Ya 90 ¹¹	
	4^+	2.45	Ya 90	
	6^+	4.02	Ya 90	
	8^+	6.47	Gu 93 ¹²	
	(10^+)	(7.67)	Gu 93	Ya 90: (6^+)
	(12^+)	(8.04)	Gu 93	Ya 90: (8^+)
0_1^-	1^-	6.22	Gu 93	
	3^-	7.34	Gu 93	
	5^-	9.43	Gu 93	
0^+	0^+	10.86	Mi 98 ¹³	
	0^+	11.08	Mi 98	
	0^+	11.19	Mi 98	
	2^+	12.12	Mi 98	
	2^+	12.18	Mi 98	
	4^+	12.86	Mi 98	
	4^+	13.18	Mi 98	
0^-	1^-	11.69	Mi 98	
	1^-	11.73	Mi 98	
	3^-	12.57	Mi 98	
	3^-	12.78	Mi 98	
	5^-	14.7	Mi 98	

11: T. Yamaya, S. Oh-ami, M. Fujiwara, T. Itahashi, K. Katori, M. Tosaki, S. Kato, S. Hatori and S. Ohkubo, Phys. Rev. C 42, 1935 (1990).

12: P. Guazzoni, M. Jaskol, L. Zetta, Chong-Yeal Kim, T. Udagawa and G. Bohlen, Nucl. Phys. A 564, 425 (1993).

13: F. Michel, S. Ohkubo and G. Reidemeister, Prog. Theor. Phys. Suppl., 132 7 (1998) .

บทที่ 4

ผลการวิจัยและสรุป

4.1 ผลการวิจัย

ผลการคำนวณคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti แสดงดังตาราง 3 และตาราง 4 แสดงพารามิเตอร์ของสมการ (3-4) (3-5) และ (3-6) ที่ได้จากการปรับค่าไอเกนของพลังงานกับข้อมูลจากการทดลองด้วยระเบียบวิธีการกำลังสองน้อยสุด (least-square method) (ยกเว้น γ ที่กำหนดให้มีค่าคงที่เท่ากับ 10.741 MeV) โดยได้ประยุกต์ค่าถ่วงน้ำหนัก (weight) ให้กับแต่ละสถานะเป็นสัดส่วนกับส่วนกลับของค่าพลังงานของมันเอง (ตามความจริงที่พบอยู่เสมอว่าค่าพลังงานของสถานะในบริเวณพลังงานต่ำที่วัดได้จะได้ผลดีกว่า) โดยแสดงค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับค่าสำหรับแต่ละสมการของค่าไอเกนเป็น 2 ค่า ค่าอันบนได้จากการปรับค่าที่ใช้ข้อมูลจากการทดลองชุดที่รวมสถานะ 10^+ และ 12^+ ส่วนค่าอันล่างได้จากชุดที่ไม่รวมทั้งสองสถานะไว้ จากตาราง 4 จะเห็นได้ว่าสมการค่าไอเกน (3-6) มีเทอม L^2 ด้วยกัน 2 เทอม ดังนั้นจึงได้ทำการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ของทั้งสองเทอมได้แก่พารามิเตอร์ β และ $(\beta + \eta N)$ ซึ่งเหมือนพารามิเตอร์ของโมเมนต์ความเฉื่อย โดยแสดงค่า $(\beta + \eta N)$ ที่คล่องจองกับออกซิลเลเตอร์ควอนตัม N ในตาราง 5

ตาราง 3

ตัวแทน SU(3)ที่ยอมรับได้ของคลัสเตอร์โมเดลสเปซของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti

n_π	(λ, μ)	K^π	J^π
12	(12,0)	0^+	$0^+ 2^+ 4^+ 6^+ 8^+ 10^+ 12^+$
13	(13,0)	0^-	$1^- 3^- 5^- 7^- 9^- 11^- 13^-$
14	(14,0)	0^+	$0^+ 2^+ 4^+ 6^+ 8^+ 10^+ 12^+ 14^+$
15	(15,0)	0^-	$1^- 3^- 5^- 7^- 9^- 11^- 13^- 15^-$

ตาราง 4

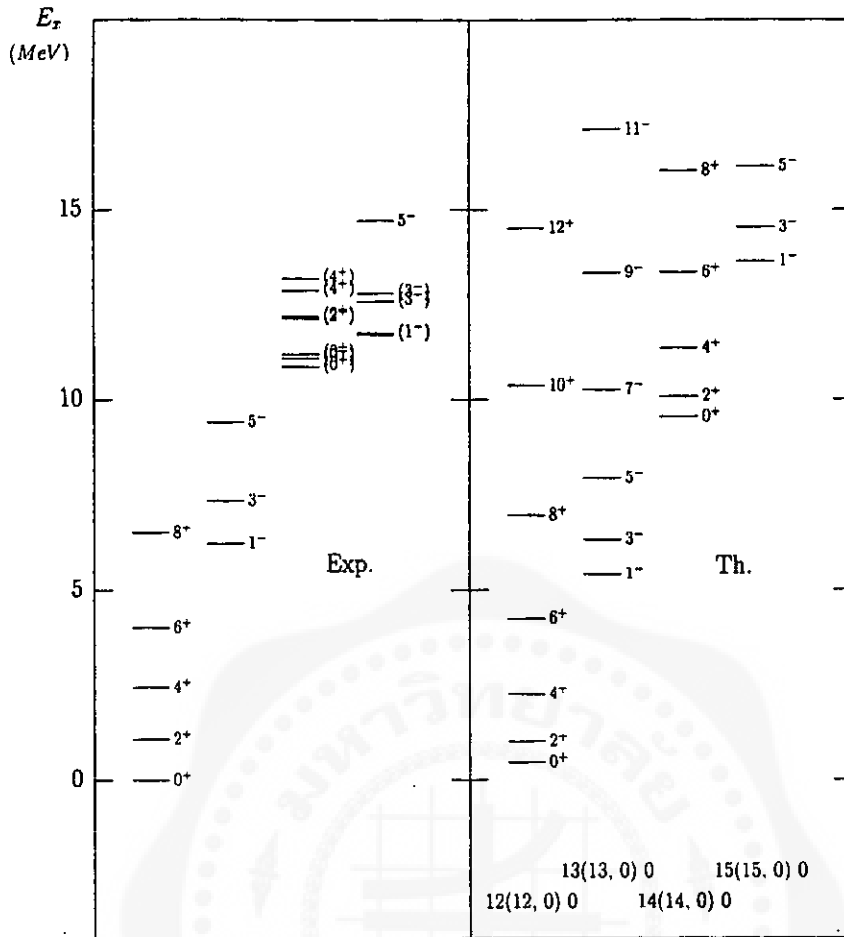
แสดงพารามิเตอร์ (หน่วย MeV) ของสมการพลังงาน (3-4) (3-5) และ (3-6) ในวงเล็บแสดง โอเปอเรเตอร์ของเทอมที่มีพารามิเตอร์นั้นๆ ตัวเลขสี่เหลี่ยมแสดงพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับค่า สเปกตรัมพลังงานที่ไม่รวมสถานะ 10^+ และ 12^+ ในแถบสถานะพื้น ค่า F แสดงความกลมกลืน ของการปรับค่า (goodness of the fit)

H	ϵ	$\gamma(N)$	$\delta(N^2)$	$\zeta(C_2)$	$\beta(L^2)$	$\eta(NL^2)$	F
(3-4)	-697.17	10.741	-0.05234	-	0.05946	-	4.58
	-697.26	10.741	-0.05250	-	0.08937	-	3.06
(3-5)	-734.21	10.741	-	-0.21311	0.05969	-	3.79
	-734.40	10.741	-	-0.21380	0.08998	-	2.26
(3-6)	-695.63	10.741	-0.05341	-	-0.68645	0.01035	4.56
	-698.20	10.741	-0.05185	-	0.54867	-0.00636	3.05

ตาราง 5

แสดงพารามิเตอร์ของโมเมนต์ความเฉื่อยสำหรับรูปแบบฮามิลโทเนียน (3-6) ที่รวมทั้งสองเทอม ของ L^2 เข้าด้วยกัน

	N = 72	N = 73	N=74	N =75
$\beta + \eta N$	0.05875	0.06910	0.07945	0.08980
	0.09075	0.08439	0.07803	0.07167



รูป 4 สเปกตรัมพลังงานเชิงทฤษฎีและเชิงทดลองที่แสดงแถบของระบบ core-plus-alpha-particle ในนิวเคลียส ^{44}Ti สำหรับคลัสเตอร์โมเดลสเปกตรัมเชิงทฤษฎีได้จากการคำนวณด้วยฮามิลโทเนียนสมมาตรเชิงพลวัต $U(3)$ ตามสมการ (3-5) แถบในคลัสเตอร์โมเดลสเปกตรัมแสดงด้วยเลขควอนตัม $n_\pi (\lambda, \mu) K$ ของสมการ (2-38)

4.2 สรุปและข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยการคลัสเตอร์ของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti ด้วยรูปแบบฮามิลโทเนียนที่แตกต่างกัน โดยทำการคำนวณค่าระดับพลังงานของระบบนี้สำหรับแถบคลัสเตอร์ 4 แถบที่พิจารณาตามข้อมูลจากการทดลองและการคำนวณเชิงทฤษฎีอื่นๆ ที่ได้มีผู้วิจัยมาแล้วแยกข้อมูลออกได้เป็น 2 ชุด เนื่องจากยังมีความไม่ชัดเจนสำหรับสถานะ 10^+ และ 12^+ ของแถบสถานะพื้น การคำนวณด้วยฮามิลโทเนียนที่มีรูปแบบธรรมดาๆ ทั้งสามสมการ (3-4) - (3-6) ที่มีสมมาตรเชิงพลวัต $U(3)$ และเป็นไปตามการไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลงในเซลล์โมเดลได้ผลออกมาค่อนข้างเป็นที่น่าพอใจ และจะเห็นได้ว่าสมการฮามิลโทเนียนนอกจากจะประกอบด้วยเทอมฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ที่ขึ้นกับ N แล้ว ควรจะต้องมีเทอม

แอนฮาร์โมนิกเพิ่มเข้าไปด้วย โดยสมการค่าไอเกนของพลังงานที่ประกอบด้วยเทอม แคชเมียร์อันดับสอง C_2 ให้ผลที่น่าสนใจกว่าเทอม N^2 (พิจารณาจากค่า F ในตาราง 4) ดังนั้นจากการพิจารณาค่า F ในตาราง 4 และจากการเปรียบเทียบสเปกตรัมของพลังงานจากการคำนวณกับการทดลองอาจกล่าวได้ว่า ตามข้อมูลการทดลองเท่าที่หามาได้ไม่แสดงหลักฐานการคู่ควบเชิงการหมุนกับการสั่น (rotational-vibrational coupling) ที่รุนแรง นั่นคือเทอม $N(L+1)$ ในสมการค่าไอเกนของพลังงาน (3-6) ไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาในกรณีนี้ ด้วยเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงได้เลือกแสดงผลการคำนวณและรูปสเปกตรัมพลังงานของระบบนี้ตามสมการ (3-5) แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งของโครงการใหญ่ที่มุ่งเน้นในการศึกษาต่อไปว่าฮามิลโทเนียนพีชคณิตที่มีรูปแบบธรรมชาติของเซลล์โมเดลสามารถนำมาอธิบายรูปแบบสเปกตรัมพลังงานของแถบคลัสเตอร์ได้หรือไม่ เพื่อจะได้ตอบคำถามที่เป็นปัญหากันอยู่ว่าโมเดลโครงสร้างนิวเคลียสพื้นฐานมีอันตรกิริยาแบบใด ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้เราจึงได้ทำการสืบค้น SACM ทั้งกรณีของสถานะมูลฐาน และ โอเปอเรเตอร์ทางฟิสิกส์ ที่มีคุณสมบัติของการสมมาตรโดยการสร้างความสัมพันธ์ของเซลล์โมเดลและคลัสเตอร์โมเดล สำหรับอันตรกิริยาที่เป็นจริงที่ไม่เป็นเพียงฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้น โดยได้เริ่มศึกษาเกี่ยวกับการคลัสเตอร์ของนิวเคลียส $^{40}\text{Ca} + \alpha = ^{44}\text{Ti}$

สรุปงานวิจัยในปีที่ 1 นี้การศึกษางานทั้งทางทฤษฎีและการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณโมเดลสเปซและการปรับค่าพารามิเตอร์ในสมการค่าไอเกนของพลังงาน ทำให้มีความเข้าใจถึงหลักการของ SACM และวิธีคำนวณได้อย่างแท้จริง โดยคาดหวังว่าจะสามารถดำเนินการคำนวณต่อไปยังนิวเคลียสทั้งหลายในบริเวณ Ca-Ti ที่อยู่ในกลุ่มนิวเคลียสของธาตุที่หนักปานกลางในบริเวณเซลล์ fp ศึกษาความเป็นไปได้ของการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ในโมเดลของฮามิลโทเนียนที่พิจารณาว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นระบบหรือไม่ ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับการศึกษานิวเคลียสในบริเวณ(เซลล์ sd) O-Ne ใน [8] ที่ประสบความสำเร็จในการศึกษาการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของกลุ่มธาตุเบา แต่ยังไม่สามารถแสดงว่าคลัสเตอร์โมเดลใช้ได้กับทุกนิวเคลียสเหมือนกรณีของเซลล์โมเดล และโมเดลแบบเป็นหมู่รวมกัน ดังนั้นถ้าการสืบค้นนิวเคลียสทั้งหลายในบริเวณ Ca-Ti ได้ผลตามที่คาดหมายไว้ ก็นับว่าเป็นก้าวต่อไปในการศึกษาความเป็นไปได้ของการเกิดการคลัสเตอร์ของนิวเคลียสของธาตุที่หนักปานกลางในบริเวณเซลล์ fp และสามารถแสดงความสัมพันธ์ของเซลล์โมเดลและคลัสเตอร์โมเดลสำหรับอันตรกิริยาที่เป็นจริงซึ่งไม่เป็นเพียงฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ที่เป็นที่รู้จักกันดีในอดีตเท่านั้น แต่สามารถอธิบายรูปแบบสเปกตรัมพลังงานของแถบคลัสเตอร์ได้ด้วยฮามิลโทเนียนในเซลล์โมเดลได้

ภาคผนวก ก

ตัวอย่าง Input File สำหรับการคำนวณสเปกตรัมพลังงานในคลัสเตอร์โมเดลของระบบ $^{40}\text{Ca} + \alpha$ ของนิวเคลียส ^{44}Ti โดยวิธีปรับค่าพารามิเตอร์ทั้งหลายของสมการค่าไอเกนพลังงาน (3-5) กับข้อมูลจากการทดลองด้วยระเบียบวิธีการกำลังสองน้อยสุด (least-square method) (ยกเว้น γ ที่กำหนดให้มีค่าคงที่เท่ากับ 10.741 MeV)

0,

81,7,7,1,0,1,

27,

00.000,00,60,0,12,12,00,0,1.,

01.080,02,60,0,12,12,00,0,1.,

02.450,04,60,0,12,12,00,0,1.,

04.020,06,60,0,12,12,00,0,1.,

06.470,08,60,0,12,12,00,0,1.,

00.000,10,60,0,12,12,00,0,0.,

00.000,12,60,0,12,12,00,0,0.,

06.220,01,60,0,13,13,00,0,1.,

07.340,03,60,0,13,13,00,0,1.,

09.430,05,60,0,13,13,00,0,1.,

00.000, 07,60,0,13,13,00,0,0.,

00.000,09,60,0,13,13,00,0,0.,

00.000,11,60,0,13,13,00,0,0.,

10.860,00,60,0,14,14,00,0,3,

11.080,00,60,0,14,14,00,0,3,

11.190,00,60,0,14,14,00,0,3,

12.120,02,60,0,14,14,00,0,5,

12.180,02,60,0,14,14,00,0,5,

12.860,04,60,0,14,14,00,0,5,

13.180,04,60,0,14,14,00,0,5,

00.000,06,60,0,14,14,00,0,0.,

00.000,08,60,0,14,14,00,0,0.,

11.690,01,60,0,15,15,00,0,5,

11.730,01,60,0,15,15,00,0,5,

12.570,03,60,0,15,15,00,0,5,

12.780,03,60,0,15,15,00,0,5,

14.700,05,60,0,15,15,00,0,1.,

10.741,.0,.0,.0,.0,.0,.0,

80,.0,1,80,

.001,.0001,.0001,.0001,.0001,.0001,.0001,

0,0,1,1,1,0,0,



ตัวอย่าง Output File ที่ได้จากการคำนวณโดยอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มี Input File ตามตัวอย่างข้างต้น

DYSY

ISGA=0, NO SPECTRUM-GENERATION

MODEL= 81 INDEX= 7 IPARAM= 7 ILL= 1 IDB= 0 IS= 0

U(3)*U(3)-SU(3) SYMMETRY

INDICES: L,NC,NON, NPI, LAM, MU, KHI

PARAMETERS: EP, AE,KAP, KAPV, FE, RV, AK

$$E = EP \cdot NPI + AE \cdot (2 \cdot NPI \cdot NC + NC \cdot NC + NPI \cdot NPI) + AKAP \cdot C2(LAM, MU) + AKAPV \cdot L \cdot (L+1) + FE + RV \cdot (NPI + NC) \cdot L \cdot (L+1) + AK \cdot KHI \cdot (KHI+1)$$

THE FITTING PROCEDURE IS SWITCHED ON

THE INITIAL PARAMETERS

10.74100020

0.00000000

0.00000000

0.00000000

0.00000000

0.00000000

0.00000000

ESCALE= 80.0 IPRINT= 0 ICON= 1 MAXIT= 80

PARAMETERS TO FIT:

NO	INITIAL VALUE	ACCURACY
3	0.0000E+00	0.1000E-03
4	0.0000E+00	0.1000E-03
5	0.0000E+00	0.1000E-03

THE NUMBER OF STATES = 27

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL ENERGIES WEIGHTS AND INDICES

0.0000	0.4679	1.00	0	60	0	12	12	0	0
1.0800	1.0078	0.93	2	60	0	12	12	0	0
2.4500	2.2674	0.41	4	60	0	12	12	0	0
4.0200	4.2469	0.25	6	60	0	12	12	0	0
6.4700	6.9462	0.15	8	60	0	12	12	0	0
0.0000	10.3654	0.00	10	60	0	12	12	0	0
0.0000	14.5043	0.00	12	60	0	12	12	0	0
6.2200	5.4023	0.16	1	60	0	13	13	0	0
7.3400	6.3021	0.14	3	60	0	13	13	0	0
9.4300	7.9217	0.11	5	60	0	13	13	0	0
0.0000	10.2611	0.00	7	60	0	13	13	0	0
0.0000	13.3203	0.00	9	60	0	13	13	0	0
0.0000	17.0993	0.00	11	60	0	13	13	0	0
10.8600	9.5492	0.03	0	60	0	14	14	0	0
11.0800	9.5492	0.03	0	60	0	14	14	0	0
11.1900	9.5492	0.03	0	60	0	14	14	0	0
12.1200	10.0891	0.04	2	60	0	14	14	0	0
12.1800	10.0891	0.04	2	60	0	14	14	0	0
12.8600	11.3488	0.04	4	60	0	14	14	0	0
13.1800	11.3488	0.04	4	60	0	14	14	0	0
0.0000	13.3283	0.00	6	60	0	14	14	0	0
0.0000	16.0276	0.00	8	60	0	14	14	0	0

11.6900	13.6284	0.04	1	60	0	15	15	0	0
11.7300	13.6284	0.04	1	60	0	15	15	0	0
12.5700	14.5282	0.04	3	60	0	15	15	0	0
12.7800	14.5282	0.04	3	60	0	15	15	0	0
14.7000	16.1478	0.07	5	60	0	15	15	0	0

THE PARAMETERS:

0.10741E+02

0.00000E+00

-0.21380E+00

0.89977E-01

-0.89939E+02

0.00000E+00

0.00000E+00

F= 0.226E+01



บรรณานุกรม

- [1] J. Cseh, "Semimicroscopic Algebraic Description of Nuclear Cluster States",
Phys. Lett. B 281, 173 (1992).
- [2] J. Cseh, and G. Levai, "Semimicroscopic Algebraic Cluster Model of Light Nuclei:
Two-Cluster-Systems with Spin-Isospin-Free Interactions", *Ann. Phys. (N.Y.)* 230, 165
(1994).
- [3] J. Cseh, "Multichannel Dynamical Symmetry and the Heavy Ion Resonances",
Phys. Rev. C 50, 2240 (1994).
- [4] J. Cseh, and W. Scheid, "On the Relation between Cluster and Superdeformed
States of Light Nuclei", *J. Phys. G* 18, 1419 (1992).
- [5] G. Levai, J. Cseh, and W. Scheid, "Semimicroscopic Algebraic Study of the
 α - Cluster States of the ^{18}O Nucleus", *Phys. Rev. C* 46, 548 (1992).
- [6] J. Cseh, G. Levai, and W. Scheid, "Algebraic $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ Cluster Model of the ^{24}Mg
Nucleus", *Phys. Rev. C* 48, 1724 (1993).
- [7] J. Cseh, "On the Binary Fission Modes of Ground-State-Like Configurations in sd
Shell Nuclei", *J. Phys. G* 19, L97 (1993).
- [8] G. Levai, and J. Cseh, "Consistent Semimicroscopic Algebraic Description of
Core + α - Particle Systems in the $A = 16$ to 20 Region", *Phys. Lett. B* 381, 1 (1996).
- [9] J. Cseh, R. K. Gupta, and W. Scheid, "Semimicroscopic Algebraic Approach to
Clusterization of Heavy Nuclei: Application to the $^{210}\text{Pb} + ^{14}\text{C}$ System",
Phys. Lett. B 299, 205 (1993).
- [10] A. Algara, and J. Cseh, "Cold Binary Fission and the Pseudo $\text{SU}(3)$ Symmetry"
J. Phys. G 22, L39 (1996).
- [11] P. E. Hodgson, "Clustering Phenomena in Atoms and Nuclei", pp.350, *International
Conference on Nuclear and Atomic Clusters* (1991).
- [12] K. Varga, and J. Cseh, "Relations between the Phenomenological Interactions of
the Algebraic Cluster Model and the Effective Two-Nucleon Forces" *Phys. Rev. C* 48
602 (1993).
- [13] Zs. Fulöp, G. Levai, E. Somorjai, A. Z. Kiss, J. Cseh, P. Tikkanen, and
J. Keinonen, "A Comprehensive Study of the $^{34}\text{S} + \alpha$ System", *Nucl. Phys. A* 604,
286 (1996).

- [14] J. Cseh, " Deformation, Clusterization and Fission". *Heavy Ion Physics* 7, 23 (1998).
- [15] J.P. Elliott, " The Nuclear Shell Model and Its Relation with Other Nuclear Models",
Selected Topics in Nuclear Theory. International Atomic Energy Agency, Vienna,
157 (1963).
- [16] W. K. Tung, *Group Thoery in Physics*. World Scientific, Philadelphia, 1985.
- [17] H. J. Lipkin, *Lie Groups for Pedestrians*. North-Holland Publishing company,
Amsterdam, 1966.
- [18] A.W. Joshi, *Elements of Group Theory for Physicists. Third Edition*. Wiley Eastern
Limited, New Delhi, 1982.
- [19] I. Talmi, *Contempolary Concepts in Physics, Vol.7, Simple Models of Complex
Nuclei: The shell model and interacting boson model*, Harwood academic
publishers, 1983.
- [20] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [21] F. Iachello, R.D. Levine, " Algebraic Approach to Molecule Rotation-Vibration
Spectra. I. Diatomic Molecules" *J. Chem. Phys.* 77(6), 3046 (1982).
- [22] F. Iachello, " Present Status of the Algebraic Approach to Nuclear and Molecular
Physics" *Proceedings of the Workshop on Bosons in Nuclei, Drexel, USA*, 3 (1983).
- [23] F. Iachello, J. Cseh and G. Le vai, " Dynamical Symmetries of Molecular States in
Atomic, Nuclear and Hadron physics" *Heavy Ion Phys.* 1, 91 (1995).
- [24] K. Widermuth and Y. C. Tang, *A Unified Theory of the nucleus*, Academic Press,
New York, 1977.