

การสร้างบทเรียนเสริมเรื่องสมภาค (Congruence) ในระบบจำนวนเต็ม
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์สูง



สารนิพนธ์
ของ
นายวุฒพล ประกอบผล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

มกราคม 2545

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การสร้างบทเรียนเสริมเรื่องสมภาค (Congruence) ในระบบจำนวนเต็ม
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์สูง

13 ก.พ. 2545



บทคัดย่อ
ของ
นายวุฒพล ประกอบผล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษา

มกราคม 2545

160054

วุฒพล ประกอบผล. (2544). การสร้างบทเรียนเสริมเรื่องสมภาค (Congruence)

ในระบบจำนวนเต็มสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์

ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ :

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :

อาจารย์ ดร. จีวีวรรณ เศวตมัลย์, รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ชูชาติ.

บทเรียนเสริมนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนเสริมเรื่อง
คอนกรูเอนซ์ในเรื่องระบบจำนวนเต็มสำหรับเด็กมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์สูง โรงเรียนวัดสระเกศ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียน
ที่ 1 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 40 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนเสริมที่ผู้วิจัยได้
เรียบเรียงขึ้นใช้เวลาสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนด
แล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม และ
วิเคราะห์ข้อมูลโดยการทดสอบค่าสถิติแบบ z-test

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง
สมภาคในระบบจำนวนเต็ม ที่ระดับนัยสำคัญ .01

DEVELOPING AN ENRICHMENT LESSON ON “CONGRUENCE IN THE
INTEGER NUMBER SYSTEM” FOR HIGH ACHIEVING
UPPER SECONDARY STUDENTS



AN ABSTRACT
BY
WUTHAPOL PRAKOBPON

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University

January 2002

Wuttaphon Prakobpol. (2001). *Developing Enrichment Lesson on "Congruence in the Integer Number System" for High Achieving Upper Secondary Students.* Master Project, M. Ed. (Secondary Education).

Bankok : Graduate School, Srinakharinwirot University, Advisor

Committee : Dr. Chaweewan Sawetamalya Assoc. Prof., Dr. Somchai Chuchat.

The purposes of this enrichment lesson was to develop the prototype of enrichment lesson on "congruence in the integer number system" for high achieving upper secondary students.

The groups of sample were the upper secondary students who highly achieved in the study of advanced Mathematics at Watsaket School, located in Promprabsadtrupie, Bangkok. In the first term, in 2001, the number of 40 students, the researcher instructed them this enrichment lesson, which was authored themselves, on 10 periods, each lasted 50 minutes. After the instruction had completed following as the scope of content pre-defined, the students were quized for evaluating the study on "congruence in the integer number system"

The Result of the study

The sample group of students had sufficient capability of learning in "congruence in the integer number system" at the number of 0.01

อาจารย์ที่ปรึกษา ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร และคณะกรรมการสอบ
ได้พิจารณาสารนิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษาของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

.....
(อาจารย์ ดร. ณวีวรรณ เศวตมาลย์)

ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร.ณวีวรรณ เศวตมาลย์)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์พวงรัตน์ ทวีรัตน์)

อนุมัติให้รับสารนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกการมัธยมศึกษาของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีคณะศึกษาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร. คมเพชร นัตรศุกุล)
วันที่ 17 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2545..

ประกาศคุณูปการ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความสะดวกจาก ดร.ฉวีวรรณ เศรษฐมัลย์ ประธานกรรมการควบคุมสารนิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ กรรมการที่ปรึกษาสารนิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล ที่ได้ให้คำปรึกษา และชี้แนะแนวทางแก้ปัญหาตลอดระยะเวลาของการดำเนินการวิจัย ด้วยวิญญานของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

กราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์พวงรัตน์ ทวีรัตน์ กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม ที่กรุณาเป็นกรรมการสอบภายนอกด้านสถิติ และได้ให้คำกรุณาแนะนำ จนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

กราบขอบพระคุณท่านคณะกรรมการผู้เชี่ยวชาญทุกท่าน ที่กรุณาเสียสละเวลาอัน มีค่ายังตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย

กราบขอบพระคุณ คุณพ่อ และคุณแม่ ที่ได้ให้กำลังใจ และเป็นห่วง ตลอดมา

วุฒพล ประกอบผล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย.....	4
ขอบเขตของการวิจัย.....	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
สมมติฐานการวิจัย	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).....	6
เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.....	8
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย.....	9
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	13
เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย	13
วิธีดำเนินการวิจัย.....	14
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	16
ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ผ่านจุดประสงค์ เชิงพฤติกรรม โดยทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	16
ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนน จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาค ในระบบจำนวนเต็มตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม.....	20
ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	21

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ตอนที่ 4 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	22
บทเรียนเสริมเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง.....	23
5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	62
สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล	62
อภิปรายผล	63
ข้อเสนอแนะ	64
บรรณานุกรม	65
ภาคผนวก	68
ประวัติย่อผู้วิจัย	97

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของกลุ่มตัวอย่างของนักเรียน จำนวน 40 คน ที่ผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม.....	17
2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป.....	20
3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง.....	21
4 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	22
5 คะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งไม่ใช่นักเรียน กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 15 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียน เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	82
6 ค่า p ค่า q และ pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องบทเรียนเสริม เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	84
7 การคำนวณหาความเชื่อมั่น และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	85
8 คะแนนรายชื่อของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน ที่ได้ จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบ จำนวนเต็ม.....	86
9 คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ได้ จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาค ในระบบจำนวนเต็ม.....	91
10 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม.....	93

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปไม่ว่าจะเป็นในหรือต่างประเทศว่าทรัพยากรที่มีค่าที่สุดคือทรัพยากรมนุษย์ เมื่อเป็นดังนี้ประเทศต่างๆจึงหันมาให้ความสำคัญโดยการระดมสมองและเงินทุนเพื่อพัฒนาคนให้มีศักยภาพ ประเทศไทยก็เช่นเดียวกัน แต่ในปัจจุบันนี้ประเทศไทยกำลังประสบปัญหาขาดแคลนบุคลากรที่มีความสามารถสูงซึ่งจะเป็นตัวจักรในการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะบุคลากรในด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพราะฉะนั้นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเจริญก้าวหน้าทัดเทียมกับประเทศที่พัฒนาแล้วก็คือการพัฒนาคนให้มีศักยภาพสูง ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับระบบการศึกษา กล่าวคือต้องจัดการศึกษาให้เอื้อต่อการพัฒนาสติปัญญาและความสามารถของผู้เรียน

ความจริงแล้วการจัดการศึกษาเพื่อสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลถือว่าเป็นแนวคิดของนักการศึกษา โดยเฉพาะการจัดการศึกษาให้กับเด็กที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงในวิชาต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ทุกประเทศล้วนส่งเสริมและสนับสนุนอย่างเต็มที่เพื่อจะเป็นกำลังสำคัญในการพัฒนาประเทศต่อไป ด้วยเหตุนี้หลายประเทศจึงเห็นว่หลักสูตรและวิธีสอนวิชาคณิตศาสตร์เท่าที่ผ่านมาไม่เพียงพอกับความต้องการของเด็กกลุ่มนี้ จึงได้มีการปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ได้เริ่มในระดับอุดมศึกษา ก่อน มีการเพิ่มรายวิชาใหม่ๆ และเน้นทางทฤษฎีมากขึ้น ผู้สอนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยเริ่มไม่พึงพอใจในพื้นฐานที่นักเรียนมัธยมศึกษาได้รับมา เพราะสานต่อกับหลักสูตรในระดับอุดมศึกษาไม่ได้ และเริ่มเข้ามามีส่วนช่วยในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ จึงได้มีความพยายามนำเอาหลักการและเนื้อหาคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษาไปทดลองสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาโดยปรับปรุงเนื้อหาและคำอธิบายให้เหมาะกับวัยวุฒิของผู้เรียน

ถึงกระนั้นก็ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ในปัจจุบันที่มีอยู่ในประเทศไทยนั้นก็ยังไม้อื้อต่อการพัฒนาเด็กที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์เท่าที่ควร เพราะไม่สามารถตอบสนองความต้องการต่อการเรียนรู้ของพวกเขาได้ หลักสูตรที่มีอยู่ในปัจจุบันค่อนข้างจะมีข้อจำกัดทางด้านเนื้อหา วิธีการ และเวลา เพราะว่าเป็นหลักสูตรที่จัดไว้สำหรับเด็กทั่วไป เพราะฉะนั้นเราควรสร้างหลักสูตรพิเศษให้พวกเขาได้เรียนรู้เป็นการเฉพาะ เมื่อเป็นเช่นนั้นหลักสูตรที่จะพัฒนาขึ้นมาใหม่นั้น จะต้องพัฒนาในด้านเนื้อหา และวิธีการให้สอดคล้องกับความต้องการ ความสนใจ และศักยภาพที่เขามีอยู่ และจะต้องพัฒนาไปพร้อมๆกัน อย่าเข้าใจว่าเด็ก

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น สสวท. ได้จัดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ศึกษาในหนังสือเรียน ค 011 และ ค 041 ซึ่งการนำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นมาศึกษานั้นนับว่าสอดคล้องกับผลการวิจัยของ สุกัญญา ชันธประสิทธิ์ (2531 : 55 - 60) ที่ว่านักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความจำเป็นที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีจำนวนในระดับยาก

เนื่องจากหัวข้อคอนกรูเอนซ์ก็เป็นหัวข้อหนึ่งของทฤษฎีจำนวน ซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการหารผลต่างของจำนวนเต็มสองจำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัว และเท่าที่เป็นอยู่ในขณะนี้ยังขาดแบบเรียนและไม่ได้มีการนำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับคอนกรูเอนซ์ในทฤษฎีจำนวนมาสอนในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ทั้งๆ ที่เป็นเรื่องที่น่าสนใจและมีประโยชน์ เพราะจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจในโครงสร้างของทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นดียิ่งขึ้น ทำให้มีหลักในการคำนวณ เช่น การหาเศษจากการหารจำนวนเต็ม เป็นต้น และยังเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป นอกจากนี้แล้วประเทศไทยได้ส่งนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเข้าร่วมแข่งขันโอลิมปิกวิชาการทางคณิตศาสตร์มาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2531 ซึ่งการเข้าร่วมดังกล่าว นับว่าเป็นกิจกรรมที่ช่วยสร้างบรรยากาศทางด้านวิชาการ ก่อให้เกิดการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรการเรียนการสอน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2535 : 27) เพราะข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก มักมีโจทย์เกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นปะปนอยู่เสมอ หากมีความรู้เรื่องคอนกรูเอนซ์ในทฤษฎีจำนวนมาช่วยในการคำนวณ จะทำให้สามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้สะดวกรวดเร็ว ดังเช่นในการแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี พ.ศ. 2538 วิชาคณิตศาสตร์ (สอบแข่งขันรอบที่ 1) สอบวันที่ 24 มิถุนายน 2538 โจทย์ข้อที่ 9 ตอนที่ 2 กล่าวว่า กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลักซึ่งหารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และหารด้วย 132 เหลือเศษ 98 m คือจำนวนใด ซึ่ง ดำรงค์ ทิพย์โยธาได้เฉลยไว้ในหนังสือเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย (คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 8) ถ้าใช้ความรู้เรื่องคอนกรูเอนซ์ในทฤษฎีจำนวนจะช่วยย่นเวลาและลดความยุ่งยากลงได้มาก (ดำรงค์ ทิพย์โยธา. 2538 : 8) และในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกครั้งที่ 31 (1990) ณ กรุงปักกิ่ง สาธารณรัฐประชาชนจีน โจทย์ข้อ 3 ของข้อสอบวันแรก (13 กรกฎาคม 2533) กล่าวว่า จงหาจำนวนเต็ม $n > 1$ ทั้งหมดที่ $(2^n + 1) / n^2$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งยติ กฤษณังกูรได้เฉลยไว้ในวารสารคณิตศาสตร์ ฉบับที่ 386 - 387 พฤศจิกายน - ธันวาคม 2533 โดยใช้ความรู้เรื่องคอนกรูเอนซ์ในทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีของแฟร์มาต์ (Fermat's Theorem) ที่กล่าวว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $(a, p) = 1$ แล้วจะได้ว่า $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (ยติ กฤษณังกูร. 2533 : 57 - 67)

จากความสำเร็จและเหตุผลดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยต้องการจะสร้างบทเรียนเรื่องคอนกรีตเสริมเพิ่มเข้าไปในเรื่องระบบจำนวนจริงในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นเรื่องการหารผลต่างของจำนวนเต็มสองจำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัว ซึ่งจะช่วยให้เด็กเรียนเสริมเพื่อเพิ่มพูนประสบการณ์ นอกจากเวลาเรียนปกติ ในวันเสาร์หรือช่วงปิดเทอม

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนเสริมเรื่องคอนกรีตเสริมในเรื่องระบบจำนวนเต็มสำหรับเด็กมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

ทำให้ได้ต้นแบบของบทเรียนเสริมเรื่องคอนกรีตเสริมในเรื่องระบบจำนวนเต็ม สำหรับเด็กมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนวัดสระเกศ เขตป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2544 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์สูง โดยพิจารณาคัดเอาจากผลการเรียนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตั้งแต่ 3.00 ขึ้นไป

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์สูง หมายถึงนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลการเรียนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตั้งแต่ 3.00 ขึ้นไป
2. บทเรียนเสริมเรื่องคอนกรีตเสริมในเรื่องระบบจำนวนเต็ม หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์สูง โดยบทเรียนนี้เป็นบทเรียนเข้มข้นระยะสั้น เวลาที่ใช้เรียน 10 คาบๆ ละ 50 นาที

3. ผู้เชี่ยวชาญ หมายถึง ผู้ที่มีความเชี่ยวชาญ และประสบการณ์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเคยปฏิบัติงานทางด้านการสอนคณิตศาสตร์ระดับมหาวิทยาลัย และ / หรือมัธยมศึกษาตอนปลายมาแล้วไม่น้อยกว่า 15 ปี

สมมติฐานการวิจัย

นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงสามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด



เหล่านี้จะประสบความสำเร็จในชีวิตได้โดยปราศจากคนช่วยเหลือ ซึ่งโดยแท้จริงแล้ว เด็กจะประสบความสำเร็จได้ก็ด้วยแรงผลักดันจากสิ่งใดสิ่งหนึ่ง

เด็กที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงหรือมีความสามารถพิเศษก็ต้องการความรักความเข้าใจเช่นเด็กปกติ แต่สิ่งที่พวกเขาต้องการมากกว่าเด็กในวัยเดียวกันก็คือ อยากจะเข้าร่วมกลุ่มกับพวกที่พูดเหมือนกัน คิดเหมือนกัน คุยกันรู้เรื่อง มีความไว และระดับสติปัญญาเท่ากัน ซึ่งในความเป็นจริงสังคมในปัจจุบัน ยังไม่มีองค์กรใดที่เอาใจใส่ เข้าใจถึงปัญหาที่เด็กเหล่านี้ประสบ ทำให้เด็กแสดงพฤติกรรมที่ผิดแผกออกไป เช่น ก้าวร้าว ปลีกตัวออกจากสังคม เป็นต้น แทนที่จะนำปัญญาและความสามารถของพวกเขามาพัฒนาเพื่อก่อให้เกิดกับประเทศชาติ (อุษณีย์ โพธิสุข. 2536 : 78)

จากการประชุมวิชาการ เรื่อง การหาข้อเสนอแนะเชิงนโยบาย และมาตรการพัฒนาผู้มีปัญญาเลิศ และมีความสามารถพิเศษ ซึ่งจัดโดยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ (สกศ.) ประเวศ วะสี กล่าวว่า กลุ่มเด็กปัญญาเลิศเป็นกลุ่มเด็กน่าสงสาร เพราะไม่มีใครเข้าใจ ครุทั่วไปไม่มีความรู้เรื่องนี้ อาจทำให้เด็กเป็นโรคประสาทได้ เราควรมีโรงเรียนพิเศษสำหรับเด็กกลุ่มนี้ หาผู้เชี่ยวชาญดูแลด้านนี้โดยเฉพาะ เพื่อพัฒนาศักยภาพเด็กกลุ่มนี้อย่างเต็มที่ ซึ่งเราอาจมีไอน์สไตน์หรือบีโทเฟนของประเทศไทยเกิดขึ้นก็ได้ (ประเวศ วะสี. 2537 : 8)

จากคำกล่าวข้างต้นทำให้เรามองเห็นว่า หลักสูตรและกระบวนการเรียนการสอนมีความสำคัญมากสำหรับเด็กกลุ่มนี้ โดยเฉพาะหลักสูตรซึ่งถือว่าเป็นตัวแบบในการตีกรอบและกำหนดทิศทางไปสู่เป้าหมายของการศึกษา ไม่ค่อยสอดคล้องกับเด็กกลุ่มนี้มากเท่าใด เนื่องจากหลักสูตรไม่สามารถตอบสนองความต้องการเป็นพิเศษให้พวกเขาได้ เป็นเหตุให้เด็กกลุ่มนี้สูญเสียความสามารถที่อยู่ในตัวไป ดังนั้นเราควรสนับสนุนและส่งเสริมให้มีการจัดโปรแกรมการศึกษาเฉพาะ หรือสร้างแบบเรียนเสริมในเรื่องบางเรื่องที่คิดว่าจำเป็นและเป็นประโยชน์สำหรับเด็กกลุ่มนี้

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้พยายามปรับปรุงทั้งด้านเนื้อหาและระยะเวลาเรียน ในส่วนเนื้อหาได้พยายามเพิ่มเนื้อหาใหม่ๆ ซึ่งมีประโยชน์และเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูง เช่น เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น กำหนดการเชิงเส้น ดัชนีราคา เป็นต้น โดยเฉพาะทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น จัดว่าเป็นเนื้อหาที่มีความสำคัญมาก ดังที่ ไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass) และเดเดคินด์ (Dedekind) ได้กล่าวว่าทุกสาขาของคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นเรขาคณิต แคลคูลัส และอื่นๆ มีจุดเริ่มร่วมกัน คือเริ่มจากทฤษฎีจำนวน (สมศักดิ์ โพธิ์จิตร. 2523 : 91) จนได้รับการยกย่องจาก คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) ที่กล่าวว่า “เลขคณิตเปรียบเสมือนเป็นราชินีแห่งคณิตศาสตร์ (Arithmetic is the queen of mathematics)” (Bezuszka and Kenney. 1983 : 250 ; citing Guass. 1856) ทฤษฎีจำนวนก็คือเลขคณิตขั้นสูงนั่นเอง สำหรับ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)
2. เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

1. โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทำการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายขึ้นและประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ในปีการศึกษา 2534 สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจัดอยู่ในประเภทวิชาเลือกเสรี มี 2 โครงสร้าง ดังนี้

โครงสร้างที่ 1 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

ค 011 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 012 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 013 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 014 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 015 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 016 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011-016 ให้เลือกเรียนรายวิชาดังต่อไปนี้

ค 021	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 022	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 023	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 024	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 025	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 026	คณิตศาสตร์	1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	0.5 หน่วยการเรียนรู้

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะด้านเพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011-016

ให้เลือกเรียนรายวิชาดังต่อไปนี้

ค 031	คณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.0 หน่วยการเรียนรู้
-------	------------	-----------------------	----------------------

รายวิชา ค 011 - ค 016 รายวิชาละ 2.5 หน่วยการเรียนรู้ นับเป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานการเรียนในระดับสูงหรือมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น ผู้เรียนในกลุ่มนี้หากต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม อาจเลือกเรียนรายวิชา ค 021 - ค 026 รายวิชาละ 0.5 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นชุดที่เน้นการศึกษาด้วยตนเอง และเรื่องที่เลือกให้เรียนเป็นการตกลงระหว่างผู้สอนและผู้เรียนเป็นรายบุคคลโดยความเห็นชอบของโรงเรียน และใช้รหัสวิชา ค 021 เป็นรายวิชาแรกที่เริ่มเรียนของแต่ละคน หากผู้เรียนต้องการเลือกเรียนรายวิชาที่เป็นเนื้อหาเฉพาะด้านเพิ่มเติมอีกอาจเลือกเรียนรายวิชา ค 031 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเน้นการศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปทางเรขาคณิต

โครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐานให้เลือกเรียนรายวิชาดังต่อไปนี้

ค 041	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 042	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 043	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 044	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 045	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 046	คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

หมายเหตุ

สำหรับผู้เลือกเรียนรายวิชาอาชีพและประสงค์จะเลือกเรียนคณิตศาสตร์อาจเลือกเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์จากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ

รายวิชา ค 041 – ค 046 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐาน เหมาะสำหรับผู้ที่ต้องการมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่มากนัก เช่น รัฐศาสตร์ นิติศาสตร์ เป็นต้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 129 - 136)

โดยภาพรวมของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) นับว่าหลักสูตรเป็นแบบบูรณาการมีการยืดหยุ่นทั้งทางด้านเวลา และเนื้อหา มีการเปิดโอกาสให้ครูผู้สอนนำเนื้อหาใหม่ๆ ที่เห็นว่ามีประโยชน์แก่ผู้เรียนและชุมชนมาสอนให้กับนักเรียน โดยไม่ต้องรอให้มีการปรับปรุงหลักสูตรอีก นับว่าเป็นก้าวใหม่ของ การปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ไม่เคยมีมาก่อน ซึ่งนับว่าจะเป็นผลดีแก่การศึกษา คณิตศาสตร์ของเยาวชนของชาติ

2. เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นนับเป็นหัวข้อที่สำคัญดังที่ สมวงษ์ แปลงประสพโชค ได้กล่าวไว้ว่าทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นเป็นวิชาที่เป็นระบบซึ่งเกี่ยวข้องกับผูกพันกับวิชาคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ เช่น พีชคณิตนามธรรม พีชคณิตเชิงเส้น และโทโพโลยี เป็นต้น ผลที่ได้จากการศึกษา คือ วิธีการพิสูจน์ซึ่งมีแนวคิดและหลักการที่เป็นพื้นฐานสำคัญของการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ (สมวงษ์ แปลงประสพโชค. 2535 : 3) จากความสำคัญดังกล่าวสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ จึงได้บรรจุเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้ศึกษาในเรื่องเกี่ยวกับระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ประกอบด้วยหัวข้อดังนี้ หัวข้อจำนวนจริงเป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึงเซตของจำนวนจริงว่าประกอบด้วย เซตของจำนวนตรรกยะยูเนียนกับเซตของจำนวนอตรรกยะ และใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนจริง หัวข้อการเท่ากันในระบบจำนวน ประกอบด้วยสมบัติการสะท้อน สมบัติการสมมาตร สมบัติการถ่ายทอด และสมบัติการบวก และการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน หัวข้อการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึงสมบัติของระบบจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ประกอบด้วย สมบัติปิดของการบวกและการคูณ สมบัติสลับที่ของการบวกและการคูณ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกและการคูณ สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกและการคูณ

และสมบัติการมีอินเวอร์สการบวกและการคูณ หัวข้อสมบัติของระบบจำนวนจริง เป็นการสรุปสมบัติของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ สมบัติการแจกแจง สมบัติของจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ สมบัติปิดของการบวกและการคูณของจำนวนจริงบวก และแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนจริง หัวข้อการลบและการหารจำนวนจริง หัวข้อการแก้สมการตัวแปรเดียว ประกอบด้วย การแก้สมการพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีตัวประกอบจำนวนตรรกยะ หัวข้อสมบัติการไม่เท่ากัน ประกอบด้วย สมบัติไตรวิภาคและทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติการไม่เท่ากัน เช่น สมบัติการถ่ายทอด เป็นต้น หัวข้อช่วง และการแก้อสมการ เป็นการแนะนำให้รู้จักกับช่วงเปิด ช่วงปิด ช่วงอนันต์ และการหาเซตและช่วง คำตอบของอสมการ หัวข้อค่าสัมบูรณ์ ประกอบด้วย บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ หัวข้อสมบัติความบริบูรณ์ ประกอบด้วย บทนิยามค่าขอบเขตบน ลัจพจน์การมีค่าขอบเขตบนน้อยสุด และสรุปโครงสร้างของระบบจำนวนจริง หัวข้อสมบัติของจำนวนเต็ม ประกอบด้วย บทนิยามและสมบัติการหารลงตัว การจำแนกจำนวนเต็มโดยสมบัติการหารลงตัว จำนวนเฉพาะ หลักการมีตัวประกอบชุดเดียว ขั้นตอนวิธีการหาร บทนิยามจำนวนเต็มคู่จำนวนเต็มคี่ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. และทฤษฎีบทพื้นฐานเบื้องต้นทางทฤษฎีจำนวนที่เกี่ยวกับการหารลงตัว และ ห.ร.ม. (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 38 - 110)

จากการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ซึ่งกระทรวงศึกษาธิการบรรจุให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายได้ศึกษาจะพบว่า เนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนเบื้องต้นที่นักเรียนได้ศึกษา มีความลึกซึ้งพอประมาณที่จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนในการเป็นพื้นฐานสำหรับศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ปัจจุบันเศรษฐกิจสังคมและวิทยาการด้านต่าง ๆ เจริญก้าวหน้าไปอย่างรวดเร็ว ประกอบกับแนวโน้มในการพัฒนาประเทศจากประเทศเกษตรกรรมไปสู่ประเทศอุตสาหกรรม ดังนั้นเพื่อให้ทันต่อการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจำเป็นต้องเตรียมประชากรหรือพัฒนาเยาวชนโดยเฉลี่ยให้มีระดับการศึกษาสูงขึ้นจากสภาพปัจจุบันของการจัดการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รวมทั้งแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของสภาพสังคม ซึ่งชี้ชัดว่าถึงเวลาที่จะต้องมีการปรับปรุงและพัฒนาการจัดการศึกษาของชาติ โดยเฉพาะหลักสูตรในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหลักสูตรที่มีหลักการเพื่อเตรียมประชากรวัยรุ่นของชาติส่วนหนึ่งให้เข้าสู่วงการอาชีพ และอีกส่วนหนึ่งให้เข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในอนาคต จะต้องเป็นหลักสูตรที่สอดคล้องและเหมาะสมกับสภาพสังคมในปัจจุบัน สำหรับประชากรวัยรุ่นที่เข้าสู่วงอาชีพ หลักสูตรจะมุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้และทักษะเฉพาะด้านที่จะนำไปประกอบอาชีพ

ได้มีเจตคติต่ออาชีพและมุ่งมั่นในการพัฒนาสังคมตามความสามารถของตน ส่วนประชากรวัยรุ่นที่จะเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา หลักสูตรจะมุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถทางวิชาการค่อนข้างมาก ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในแขนงวิชาต่างๆ ต่อไปอย่างไรก็ตามก่อนที่จะมีการปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตร จำเป็นจะต้องมีการประเมินความสามารถของผู้เรียนในด้านต่างๆ เพื่อให้ทราบถึงปัญหาและอุปสรรคต่างๆ เพื่อที่จะได้นำไปเป็นข้อมูลเบื้องต้นประกอบการพิจารณา หาแนวทางในการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรให้เหมาะสมกับสภาพปัญหาในปัจจุบันและความจำเป็นในอนาคตต่อไป ตลอดจนระยะเวลาที่ผ่านมา จึงมีนักวิจัยหลายท่านสนใจ ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อาทิเช่น

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศนั้นมีผู้วิจัยไว้คือ ดรัมมอนด์ (Drummond. 1989 : 641 - A) ทำการวิจัยออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics) สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยสำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา และเพื่อกำหนดความเหมาะสมของการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ ซึ่งเสนอโดย NCTM ในปี ค.ศ. 1987 ซึ่งหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยประกอบด้วยเรื่องเมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับ และความน่าจะเป็น กราฟ Trees และ Recursion กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ผ่านการเรียนวิชา พีชคณิต 1 เรขาคณิต และพีชคณิต 2 จำนวน 203 คน ผลการศึกษาปรากฏว่านักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเหล่านี้ มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย และหลักสูตรคณิตศาสตร์ ซึ่งเสนอโดย NCTM ในปี ค.ศ. 1987 มีความเหมาะสมและในการศึกษาเอกสารและงานวิจัยพบว่า หลักสูตรที่เหมาะสมกับเด็กที่มีความสามารถพิเศษควรมีลักษณะดังนี้

1. สนองความสนใจของเอกลักษณ์บุคคล
2. มีความยืดหยุ่นของแผนการเรียน
3. เป็นการศึกษาโดยอิสระ
4. ฝึกความคิดวิจารณ์ญาณ ความคิดสร้างสรรค์ และทักษะการแก้ปัญหา

(Greenes. 1981 : 14 -17 ; Renzulli. 1981 ; Heid. 1983 : 224 - 225 ; House. 1987 : 35 ; Chance. 1992.)

โดยทั่วไปการจัดหลักสูตรจะมี 2 ลักษณะ คือ (1) การเรียนร่วมกับเด็กปกติ (Integrated classroom) (2) โปรแกรมพิเศษ (Special program) จากผลงานวิจัยของนักการศึกษาหลายท่านพบว่าเด็กไม่เก่งจะไม่สนใจเรียนแบบจากเด็กเก่งหรืออยากเรียนเก่งเลย แต่จะเรียนแบบกลุ่มที่มีความสามารถใกล้เคียงกัน เด็กไม่เก่งบางคนอาจมีความหวาดหวั่นเมื่อมีเด็กเก่งรวมอยู่ด้วย จากความคิดเห็นของวัสซา (Vassar. 1977) ที่กล่าวว่าเด็กที่มีความสามารถ

นอญคลิเตียนลงในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากการศึกษาผลการวิจัยดังกล่าวพบว่า นักการศึกษาทั้งในและต่างประเทศได้มีการทดลองนำเนื้อหาคณิตศาสตร์หัวข้อใหม่ๆ ซึ่งเคยใช้สอนในระดับอุดมศึกษามาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษา อาทิเช่น แคลคูลัส และเรขาคณิตนอญคลิเตียน เป็นต้น ซึ่งเป็นคำสนับสนุนคำกล่าวของบรูเนอร์ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใดๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอน ให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนเสียก่อน (Bruner. 1966 : 30) งานวิจัยดังกล่าวนับว่าเป็นงานวิจัยนำร่องที่สำคัญ ทำให้ทราบความสามารถของนักเรียนในระดับอุดมศึกษา ก่อนที่จะทำการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมของชาติ

จากการศึกษาผลการวิจัยดังกล่าวพบว่า นักการศึกษาทั้งในและต่างประเทศได้มีการทดลองนำเนื้อหาคณิตศาสตร์หัวข้อใหม่ๆ ซึ่งเคยใช้สอนในระดับอุดมศึกษามาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษา อาทิเช่น แคลคูลัส และเรขาคณิตนอญคลิเตียน เป็นต้น ซึ่งเป็นคำสนับสนุนคำกล่าวของบรูเนอร์ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใดๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอน ให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนเสียก่อน (Bruner. 1966 : 30) งานวิจัยดังกล่าวนับว่าเป็นงานวิจัยนำร่องที่สำคัญ ทำให้ทราบความสามารถของนักเรียนในระดับอุดมศึกษา ก่อนที่จะทำการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมของชาติ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนวัดสระเกศ อำเภอป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 40 คน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์สูง โดยพิจารณาคัดเอาจากผล การเรียนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตั้งแต่ 3.00 ขึ้นไป

เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนเรื่องคอนกรูเอนซ์ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สอนใน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

- | | |
|--|-------|
| - ความรู้เบื้องต้น | 1 คาบ |
| - สมบัติของคอนกรูเอนซ์ | 4 คาบ |
| - การนำเสนอสมบัติของคอนกรูเอนซ์ไปใช้ | 2 คาบ |
| - สมบัติของคอนกรูเอนซ์ (ต่อ) | 2 คาบ |
| - การนำเสนอสมบัติของคอนกรูเอนซ์ไปใช้ (ต่อ) | 1 คาบ |

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องคอนกรูเอนซ์ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตาม สัดส่วนของเนื้อหาที่กำหนด รวม 30 ข้อ

✓ 2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาการสร้างบทเรียนเรื่องคอนกรูเอนซ์

บทเรียนเรื่องคอนกรูเอนซ์ ที่ผู้วิจัยสร้างจะมีลักษณะดังนี้

- ด้านเนื้อหา พยายามจัดให้ถูกต้องได้มาตรฐานตามหลักวิชาการเหมาะสม กับระดับชั้นและวัยของนักเรียน มีคำอธิบายเข้าใจง่าย เมื่อนักเรียนอ่านเนื้อหาด้วยตนเองแล้ว พอลองจะเข้าใจได้ดี คำศัพท์ที่ใช้เป็นไปตามพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน เสนอวิธีการแก้ปัญหาและการคิดคำนวณที่ถูกต้องตามหลักคณิตศาสตร์

- ด้านระบบการเขียน พยายามจัดแบบเรียนต่อเนื่องตามลำดับจากง่าย ไปยาก กระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม มีคำสั่งหรือคำถามเร้าใจนักเรียน

- ด้านความสอดคล้องของเนื้อหาเกี่ยวกับหลักการเรียนการสอน พยายามจัดเนื้อหาให้มีความต่อเนื่องกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน มีการสรุปกฎเกณฑ์ไว้ชัดเจนมีโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน และกิจกรรมพิเศษที่เสริมการเรียนรู้ด้วย

2.2 กำหนดจุดประสงค์ โดยมีจุดประสงค์ของการเรียนรู้เรื่องคอนกรีตเอนซ์ที่ได้ทำการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญแล้ว มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามและยกตัวอย่างของคอนกรีตเอนซ์
2. บอกสมบัติของคอนกรีตเอนซ์และยกตัวอย่างประกอบ
3. นำสมบัติของคอนกรีตเอนซ์ ไปใช้ในการแก้ปัญหา

2.3 สร้างบทเรียนตามลำดับขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนเนื้อหาเรื่องคอนกรีตเอนซ์เพื่อใช้สอนใน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในแต่ละคาบประกอบด้วยจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เนื้อหา และแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้ประธานกรรมการ และผู้ทรงคุณวุฒิ 5 ท่านตรวจ เพื่อวิจารณ์และชี้แนะข้อบกพร่องแล้วนำมาปรับปรุง

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนที่ปรับปรุงไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งไม่ใช่เรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 15 คน ใช้เวลาสอนรวม 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องของบทเรียน แล้วนำมาปรับปรุง และให้ประธานกรรมการสารนิพนธ์ และผู้เชี่ยวชาญตรวจแก้ไขอีกครั้ง เป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องคอนกรีตเอนซ์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ และนำแบบทดสอบนี้ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่านตรวจคัดเลือก เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความตรงตามเนื้อหา จำนวน 30 ข้อ และนำแบบทดสอบนี้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้วจำนวน 15 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตรของ คูเดอร์- ริชาร์ดสัน โดยได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 0.89

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน โดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งสิ้น 10 คาบ

2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 10 คาบแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม เป็นข้อสอบปรนัยจำนวน 30 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างขึ้นโดยมีการคัดเลือก และปรับปรุงตามเกณฑ์ที่กำหนด

3. วิเคราะห์ผลการทดสอบ โดยการตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ข้อที่เลือกตอบถูกต้องได้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 คำตอบในแต่ละข้อให้ 0 คะแนน นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ หาค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทำการทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างสามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรซึ่งใช้สถิติ Z ในการทดสอบ (Z Test for Population Proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ใช้สถิติโดยการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. หาสถาปัตยกรรมมาตรฐาน คำนวณจากสูตร (พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2538 : 143)

$$S.D. = \sqrt{\frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(n-1)}}$$

S.D. แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เมื่อ $\sum fx^2$ แทนผลบวกของผลคูณระหว่างความถี่กับกำลังสองของคะแนน

$\sum fx$ แทนผลบวกของผลคูณระหว่างความถี่กับคะแนน

n แทนจำนวนนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง

2. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR. 20 ของคูเตอร์-ริชาร์ดสัน

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left(1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right)$$

เมื่อ N แทนจำนวนข้อทั้งหมด

p แทนสัดส่วนของนักเรียนที่ทำถูกในแต่ละข้อ

q แทนสัดส่วนของนักเรียนที่ทำผิดในแต่ละข้อ

S^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ

3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ใช้ Z - test มีสูตรดังนี้

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทนสัดส่วนของการเกิดเหตุการณ์ในกลุ่มตัวอย่าง

P แทนสัดส่วนของการเกิดเหตุการณ์ของประชากร

n แทนจำนวนคนในกลุ่มตัวอย่าง

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาครั้งนี้ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง โรงเรียนวัดสระเกศ อำเภอป้อมปราบศัตรูพ่าย กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 40 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม จำนวน 30 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

การหาค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมใช้เกณฑ์ดังนี้

1. กรณีที่จุดประสงค์ใดมีข้อคำถาม 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละคือค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้น
2. กรณีจุดประสงค์ใดมีข้อคำถามมากกว่า 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละหาได้จากผลบวกของค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในแต่ละข้อในจุดประสงค์ในข้อนั้นหารด้วยจำนวนข้อคำถามในจุดประสงค์นั้น

ผลการหาค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของกลุ่มตัวอย่างของนักเรียน จำนวน 40 คน ที่ผ่านจุดประสงค์
เชิงพฤติกรรม

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียนที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ จำนวนนักเรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 1 สามารถบอกนิยามและยกตัวอย่าง ของคอนกรีเอนซ์ได้	1	36	90.00	90.00
จุดประสงค์ที่ 2 สามารถบอกได้ว่าจำนวนเต็มที่กำหนด ให้คอนกรีเอนซ์กันหรือไม่โดยใช้ บทนิยามคอนกรีเอนซ์ หรือทฤษฎี บทที่ 1 ในการตรวจสอบ	2	34	85.00	85.00
จุดประสงค์ที่ 3 สามารถหาจำนวนเต็มน้อยที่สุดที่ไม่เป็น ลบ และคอนกรีเอนซ์กันกับจำนวน ที่กำหนดให้	3	22	55.00	55.00
จุดประสงค์ที่ 4 บอกสมบัติของการคอนกรีเอนซ์ ข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน, สมบัติสมมาตร, สมบัติ ถ่ายทอด) และยกตัวอย่างประกอบ	4 5 6	38 34 32	95.00 85.00 80.00	86.67
จุดประสงค์ที่ 5 บอกสมบัติการลงลอยกันข้อ 4 (สมบัติ การบวก ลบ และการคูณจำนวนเต็มกับ จำนวนซึ่งคอนกรีเอนซ์กันในมอดุโล m) และยกตัวอย่างประกอบ	7 8 9	31 35 35	77.50 87.50 87.50	84.17

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียนที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ จำนวนนัก เรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 6 บอกสมบัติของการคอนกรีตอัดแรงข้อ 5-6 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกัน ด้วยจำนวนเต็ม และสมบัติการยกกำลัง จำนวนซึ่งคอนกรีตอัดแรงในมอดูล ๓ ด้วยจำนวนเต็มบวก) และยกตัวอย่าง ประกอบ	10 11 12	17 34 20	42.50 85.00 50.00	59.17
จุดประสงค์ที่ 7 บอกสมบัติของการคอนกรีตอัดแรง ข้อ 7 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณการ คอนกรีตอัดแรงในมอดูล ๓ สองการ คอนกรีตอัดแรง) และยกตัวอย่างประกอบ	13 14 15	36 34 35	90.00 85.00 87.50	87.50
จุดประสงค์ที่ 8 สามารถนำสมบัติการคอนกรีตอัดแรงไป ใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์	16 17 18 19 20 21	15 14 11 9 12 13	37.50 35.00 27.50 22.50 30.00 32.50	30.83
จุดประสงค์ที่ 9 บอกสมบัติข้อ 8 (วิธีการตัดแก้ข้อออก) และยกตัวอย่างประกอบ	22 23 24	37 21 29	92.50 52.50 72.50	72.50

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อสอบ ข้อที่	จำนวน นักเรียนที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ จำนวนนัก เรียน ที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละ ของจำนวน นักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 10 บอกสมบัติข้อ 9 (วิธีการคัดสับเอ็ดออก) และยกตัวอย่างประกอบ	25 26 27	25 33 28	62.50 82.50 70.00	71.67
จุดประสงค์ที่ 11 สามารถนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์ข้อ 8 หรือข้อ 9 (วิธีการคัดแก้ ออก หรือ คัดสับ เอ็ดออก) ไปใช้ตรวจสอบผลการคำนวณ ได้	28 29 30	25 29 7	62.50 72.50 17.50	50.84

จากตาราง 1 แสดงค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม สามารถจัดประเภทของค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านออกเป็นกลุ่มๆ ได้ดังนี้

- กลุ่มที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนตั้งแต่ 80 ขึ้นไป เรียงจากมากไปหาน้อย
จุดประสงค์ที่ 1 (90.00%) , จุดประสงค์ที่ 7 (87.50%) , จุดประสงค์ที่ 4
(86.67%) , จุดประสงค์ที่ 2 (85.00%) , จุดประสงค์ที่ 5 (84.17%)
- กลุ่มที่ 2 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนอยู่ระหว่าง 50 กับ 80 เรียงจากมากไป
หาน้อย
จุดประสงค์ที่ 9 (72.50%) , จุดประสงค์ที่ 10 (71.67%) , จุดประสงค์ที่ 6
(59.17%) , จุดประสงค์ที่ 3 (55.00%) , จุดประสงค์ที่ 11 (50.84%)
- กลุ่มที่ 3 ค่าเฉลี่ยร้อยละของนักเรียนต่ำกว่า 50 ซึ่งมีเพียงจุดประสงค์เดียว
จุดประสงค์ที่ 8 (30.83%)

ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนจากการ
ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มตั้งแต่ร้อยละ
50 ขึ้นไปของคะแนนรวมแสดงในตาราง 2

ตาราง 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของจำนวน นักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป
นักเรียนชั้นมัธยม ศึกษาตอนปลายที่มี ผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนวิชา คณิตศาสตร์สูง	40	32	80.00

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนร้อยละ 50 ขึ้นไป
ของคะแนนรวม หรือตั้งแต่ 15 คะแนนขึ้นไป ใน 30 คะแนนมีจำนวนถึงร้อยละ 80 ซึ่งมากกว่า
ร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ตอนที่ 3 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มแสดงในตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนน เต็ม	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์สูง	40	30	19.65	65.50	4.90

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบ
จำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น
19.65 คิดเป็นร้อยละ 65.50 ของคะแนนเต็ม และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น
4.90

ตอนที่ 4 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียน
เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม แสดงในตาราง 4

ตาราง 4 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่สอบผ่านเกณฑ์
ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์สูง	40	32	3.79**

**มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการ
เรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทเรียนเสริมเรื่องคอนกรีตเสริมเหล็กในระบบจำนวนเต็ม
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง

คำชี้แจงการใช้บทเรียนเสริมเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

บทเรียนเสริมเรื่องคอนกรูเอนซ์ในระบบจำนวนเต็ม เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการหารผลต่างของจำนวนเต็ม 2 จำนวนด้วยจำนวนเต็มบวกได้ลงตัว เพื่อให้นักเรียนได้รู้จักบทนิยามและสมบัติของการคอนกรูเอนซ์และการนำไปใช้ อันจะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียนทำให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาของทฤษฎีจำนวนมากยิ่งขึ้น เช่นการหาเศษจากการหารจำนวนเต็ม การตรวจสอบผลการคำนวณในบางกรณี ผู้ที่จะศึกษาควรจะมีพื้นฐานความรู้มาแล้วในระบบจำนวนจริง ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) จัดทำโดย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อด้วย โดยคำนึงถึงระดับสติปัญญา และความสามารถของผู้เรียนด้วย บางหัวข้ออาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง หรือครูเป็นผู้อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถามร่วมกันทำกิจกรรมในห้องเรียน ถ้าเป็นไปได้ในแต่ละหัวข้อควรให้นักเรียนสรุปบทเรียนเอง โดยครูอาจช่วยเสริมแต่งบ้างตามความเหมาะสม

กำหนดคาบเวลาสอนโดยประมาณ

วิชาคณิตศาสตร์

เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

เนื้อเรื่อง	จำนวนคาบ
1. ความรู้เบื้องต้น	1
2. สมบัติของการคอนกรูเอนซ์	4
3. การนำสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ไปใช้	2
4. สมบัติของการคอนกรูเอนซ์	2
5. การนำสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ไปใช้	1
รวม	10

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามและยกตัวอย่างของคอนกรูเอนซ์ได้
2. บอกได้ว่าจำนวนเต็มที่กำหนดให้คอนกรูเอนซ์หรือไม่ โดยใช้บทนิยามการคอนกรูเอนซ์หรือทฤษฎีบทที่ 1 ในการตรวจสอบ
3. หาจำนวนเต็มน้อยที่สุดที่ไม่เป็นลบ และคอนกรูเอนซ์กับจำนวนที่กำหนดให้ในมอดุโล m
4. บอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด) และยกตัวอย่างประกอบ
5. บอกสมบัติการลบลอยกันข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งลบลอยกันในมอดุโล m) และยกตัวอย่างประกอบ
6. บอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ข้อ 5-6 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วยจำนวนเต็ม และสมบัติการยกกำลังจำนวนซึ่งลบลอยกันในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก) และยกตัวอย่างประกอบ
7. บอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ข้อ 7 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m สองการคอนกรูเอนซ์) และยกตัวอย่างประกอบ
8. สามารถนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์ไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
9. บอกสมบัติข้อ 8 (วิธีการคัดเก้าออก) และยกตัวอย่างประกอบ
10. บอกสมบัติข้อ 9 (วิธีการคัดลบเอ็ดออก) และยกตัวอย่างประกอบ
11. สามารถนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์ข้อ 8 หรือข้อ 9 (วิธีการคัดเก้าออก หรือ การคัดลบเอ็ดออก) ไปใช้ตรวจสอบผลการคำนวณได้

คอนกรีตเอนซ์ (CONGRUENCE)

1. ความรู้พื้นฐาน

เมื่อกล่าวถึงคำว่าคอนกรีตเอนซ์นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาเกือบจะทุกคนมักจะไม่ว่ายคุ้นหูกันนักทั้งที่เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวันของคนเราเอง เช่น หน้าปัดนาฬิกา (mod 12) ลำดับที่ของเดือน (mod 12) และจำนวนกิโละเมตรบนเข็มหน้าปัดรถยนต์ (ปกติใช้ mod 100000) คอนกรีตเอนซ์เป็นเรื่องราวเกี่ยวกับการหารจำนวนเต็มในรูปแบบหนึ่ง เป็นที่ยอมรับกันว่าคอนกรีตเอนซ์เป็นรากฐานในการศึกษาวิชาทฤษฎีจำนวน ความรู้เกี่ยวกับคอนกรีตเอนซ์ได้ปรากฏขึ้นเป็นครั้งแรกในหนังสือ Disquisitiones Arithmeticae ของเกาส์ (Carl Friedrich Gauss ค.ศ. 1777-1855)

ปัญหานำคิด

นักเรียนคิดว่า ถ้าวันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2602 เป็นวันเสาร์ แล้ววันศุกร์แรกของเดือนมกราคม พ.ศ. 2603 ตรงกับวันที่เท่าไร

จากปัญหาดังกล่าวถ้าจะมาแจกแจงเพื่อค้นหาคำตอบคงลำบาก เพราะฉะนั้นแนวคิดในการหาคำตอบก็คือพิจารณาว่าตั้งแต่วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2602 ถึงวันศุกร์แรกของเดือนมกราคม 2603 มีกี่วันเพื่อความสะดวกจะขอใช้ตัวเลข 1 - 7 แทนวันเสาร์ - ศุกร์

ให้	1	แทนวัน	เสาร์	5	แทนวัน	พุธ
	2	แทนวัน	อาทิตย์	6	แทนวัน	พฤหัสบดี
	3	แทนวัน	จันทร์	7	แทนวัน	ศุกร์
	4	แทนวัน	อังคาร			

ตั้งแต่วันที่ 1 มีนาคม พ.ศ. 2602 ถึงวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2603 มีจำนวนวันทั้งสิ้น $31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1 = 307$ วัน และ 307 หารด้วย 7 เหลือเศษ 6 ดังนั้นวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2603 เป็นวันพฤหัสบดี นั่นคือวันศุกร์แรกของเดือนมกราคม พ.ศ. 2603 ตรงกับวันที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2603

ก่อนที่จะกล่าวถึงเนื้อหาเรื่องคอนกรีตเอนซ์ จะขอทบทวนสมบัติของจำนวนจริงพื้นฐานเสียก่อน เนื่องจากเป็นความรู้เบื้องต้นที่ควรจะต้องทราบ

ถ้าพิจารณาเซตของจำนวนเต็ม

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

จะพบว่า เซตจำนวนเต็มสอดคล้องกับสมบัติปิดของการบวก การลบ และการคูณ แต่ไม่สอดคล้องกับสมบัติปิดการหาร กล่าวคือ ถ้า $n \in \mathbb{I}$ และ $m \in \mathbb{I}$ แล้ว m/n อาจจะไม่เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มก็ได้ ถึงแม้ว่า $n \neq 0$ ก็ตาม

อย่างไรก็ตาม มีจำนวนเต็ม m และ n บางคู่ โดยที่ $n \neq 0$ ซึ่งทำให้ m/n เป็นจำนวนเต็ม เช่น

$$m = 2, n = 1 \text{ จะได้ } m/n = 2/1 = 2 \text{ หรือ } 2 = 1(2)$$

$$m = 6, n = 2 \text{ จะได้ } m/n = 6/2 = 3 \text{ หรือ } 6 = 2(3)$$

$$m = -8, n = 4 \text{ จะได้ } m/n = -8/4 = -2 \text{ หรือ } -8 = 4(-2)$$

เป็นต้น ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า n และ m ลงตัว

การหารลงตัว

นิยาม ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม และ $n \neq 0$ จะกล่าวว่า n หาร m ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $m = nc$

สัญลักษณ์ “ n หาร m ลงตัว” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n \mid m$

เรียก n ว่าตัวหาร (divisor) ตัวหนึ่งของ m

จากนิยาม อาจกล่าวได้ว่า

n หาร m ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ไม่มีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $m = nc$

“ n หาร m ไม่ลงตัว” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n \nmid m$

หมายเหตุ ต่อไปนี้ ถ้าเขียน $a \mid b$ มีข้อตกลงว่า a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ และ a หาร b ลงตัว

- ตัวอย่าง
1. $2 \mid 8$ ทั้งนี้เพราะ มีจำนวนเต็ม 4 ซึ่ง $8 = 2 \cdot 4$
 2. $3 \mid 21$ ทั้งนี้เพราะ มีจำนวนเต็ม 7 ซึ่ง $21 = 3 \cdot 7$
 3. $-4 \mid 12$ ทั้งนี้เพราะ มีจำนวนเต็ม -3 ซึ่ง $12 = (-4) \cdot (-3)$
 4. $4 \mid 0$ ทั้งนี้เพราะ มีจำนวนเต็ม 4 ซึ่ง $0 = 4 \cdot 0$
 5. $3 \nmid 4$ ทั้งนี้เพราะ ไม่มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $4 = 3 \cdot c$
 6. $2 \nmid 1$ ทั้งนี้เพราะ ไม่มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $1 = 2 \cdot c$

จากความรู้เรื่องการหารลงตัวจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาเรื่องคอนกรีตต่อไป

คอนกรูเอนซ์

บทนิยามที่ 1 ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า m หาร $a-b$

ลงตัว กล่าวหาว่า a คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล m เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b \pmod{m}$

แต่ถ้า m หาร $(a-b)$ ไม่ลงตัว กล่าวหาว่า a ไม่คอนกรูเอนซ์กับ b มอดุโล m เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \not\equiv b \pmod{m}$

จากความรู้เรื่องการหารลงตัวที่ว่า ถ้า $m \mid (a-b)$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a-b = km$ หรือ $a = b + km$ และจากบทนิยามที่ 1 กล่าวหาว่า ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ ดังนั้น $m \mid (a-b)$ จากความจริงทั้งสองสามารถสรุปสั้นๆ ด้วยสัญลักษณ์ ว่า

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ ก็ต่อเมื่อ } m \mid (a-b)$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงแสดงว่า $49 \equiv 25 \pmod{12}$

วิธีทำ เพราะว่า $49 - 25 = 24$ และ $12 \mid 24$

เพราะฉะนั้น $12 \mid (49 - 25)$

จากบทนิยามที่ 1 จึงสรุปได้ว่า $49 \equiv 25 \pmod{12}$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงแสดงว่า $25 \not\equiv 9 \pmod{3}$

วิธีทำ เพราะว่า $25 - 9 = 16$ และ $3 \nmid 16$

เพราะฉะนั้น $3 \nmid (25 - 9)$

จากบทนิยามที่ 1 จึงสรุปได้ว่า $25 \not\equiv 9 \pmod{3}$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาค่า a โดยที่ $a \equiv 32 \pmod{19}$ และ $52 \leq a \leq 70$

วิธีทำ โจทย์ให้หาค่า a เมื่อ $a \equiv 32 \pmod{19}$

เพราะว่า $a \equiv 32 \pmod{19}$

ดังนั้น $a - 32 = 19k$ เมื่อ $k \in \mathbb{I}$

แต่โจทย์กำหนดให้ $52 \leq a \leq 70$

เนื่องจาก $a = 32 + 19k$

$$52 \leq 32 + 19k \leq 70$$

$$52 - 32 \leq 19k \leq 70 - 32$$

$$20 \leq 19k \leq 38$$

$$20 / 19 \leq k \leq 38 / 19$$

นั่นคือ $k = 2$

สรุปว่าค่าของ a มีค่าเท่ากับ 70

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.1 ซึ่งพบว่า $49 \equiv 25 \pmod{12}$ จะสังเกตเห็นว่าถ้านำ 12 ไปหาร 49 และ 25 ก็จะเหลือเศษเท่ากันพอดีคือ 1 ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 1

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม m เป็นจำนวนเต็มบวก

$a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ m หาร a และ m หาร b แล้วเหลือเศษเท่ากัน

ข้อควรระวัง เมื่อ r เป็นเศษจากการหารจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งด้วย m แล้ว $0 \leq r < m$

พิสูจน์ (สำหรับนักเรียนที่สนใจเป็นกรณีพิเศษ)

(1) ให้ $a \equiv b \pmod{m}$

ดังนั้น $m \mid (a-b)$ (จากบทนิยามคอนกรูเอนซ์)

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a-b = km$ (จากบทนิยามการหารลงตัว)

หรือ $a = km + b$

r จากทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารจะได้ว่า

มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $b = qm + r$, $0 \leq r < m$

จาก $a = km + b$

แทนค่า b จะได้ $a = km + (qm + r)$
 $= (k + q)m + r$, $0 \leq r < m$

จะได้ว่า เมื่อนำ m หาร a จะเหลือเศษเท่ากับ r

นั่นคือถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้วจะได้ว่าเมื่อนำ m ไปหาร a และ b แล้วเหลือเศษเท่ากัน

(2) ถ้านำ m ไปหาร a และ b แล้วเหลือเศษ r เท่ากันจะได้ว่า

มีจำนวนเต็ม q_1, q_2 ซึ่ง $a = q_1 m + r$, $0 \leq r < m$

$b = q_2 m + r$, $0 \leq r < m$

ดังนั้น $a-b = (q_1 m + r) - (q_2 m + r) = (q_1 - q_2)m$

แต่ $q_1 - q_2$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $m \mid (a-b)$ นั่นคือ $a \equiv b \pmod{m}$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ a หารด้วย m และ b หารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.4 จงแสดงว่า $49 \equiv 5 \pmod{4}$ โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1

วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 1 กล่าวว่า

$a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ m หาร a และ m หาร b แล้วเหลือเศษเท่ากัน

เพราะว่า เมื่อนำ 4 ไปหาร 49 และ 5 จะเหลือ เศษ 1 เท่ากัน

เพราะฉะนั้นตามทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ว่า $49 \equiv 5 \pmod{4}$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงแสดงว่า $27 \equiv -3 \pmod{5}$ โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1

วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 1 กล่าวว่า

$a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ m หาร a และ m หาร b แล้วเหลือเศษเท่ากัน

เพราะว่าเมื่อนำ 5 ไปหาร 27 จะเหลือเศษ 2 และ นำ 5 ไปหาร -3 จะเหลือเศษ 2

(2 มาจาก $-3 = (-1) \cdot 5 + 2$)

เพราะฉะนั้นตามทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ว่า $27 \equiv -3 \pmod{5}$

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างเศษจากการหารด้วยจำนวนต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาเศษที่เป็นไปได้จากการหารจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยจำนวนเต็มต่อไปนี

- (1) หารด้วย 2
- (2) หารด้วย 3
- (3) หารด้วยจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ (1) จำนวนเต็มใด ๆ เมื่อหารด้วย 2 จะเหลือเศษที่เป็นไปได้

2 จำนวนคือ 0, 1

(2) จำนวนเต็มใด ๆ เมื่อหารด้วย 3 จะเหลือเศษที่เป็นไปได้

3 จำนวนคือ 0, 1, 2

(3) จำนวนเต็มใด ๆ เมื่อหารด้วยจำนวนเต็มบวก m จะเหลือเศษที่

เป็นไปได้ m จำนวนคือ 0, 1, 2, ..., $m-1$

จากตัวอย่างที่ 1.6 จะพบว่าจำนวนเต็มในช่วง 0, 1, 2, ..., $m-1$ เป็นเศษที่เกิดจากการหารจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยจำนวนเต็มบวก m ตามขั้นตอนวิธีการหาร ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2 ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว a คอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m กับจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งในช่วง $0, 1, 2, \dots, m-1$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ (สำหรับนักเรียนที่มีความสนใจเป็นกรณีพิเศษ)

ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จากทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารจะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวซึ่ง

$$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

$$a - r = mq, \quad r = 0, 1, 2, \dots, m-1 \text{ เพียงจำนวนเดียว}$$

จะได้ $a \equiv r \pmod{m}$ เมื่อ $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$ เพียงจำนวนเดียว



แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคอนกรูเอนซ์
จงเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. กำหนด $17 \equiv a \pmod{5}$ แล้ว a ตรงกับข้อใด

- ก. 2 ข. 3 ค. 4 ง. 5

2. กำหนด $325 \equiv b \pmod{37}$ แล้ว b ตรงกับข้อใด

- ก. -12 ข. -8 ค. -1 ง. 3

3. กำหนด $c \equiv 1 \pmod{3}$ แล้ว c ตรงกับข้อใด

- ก. -4 ข. -3 ค. -2 ง. -1

4. คอนกรูเอนซ์ในข้อใดเป็นผลที่ได้โดยตรงจากประโยค $-31-11 = (-6)(7)$

- ก. $-31 \equiv 7 \pmod{11}$ ข. $-31 \equiv 11 \pmod{7}$
ค. $7 \equiv -31 \pmod{11}$ ง. $11 \equiv -31 \pmod{7}$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงใช้บทนิยามที่ 1 ตรวจสอบว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $10 \equiv 4 \pmod{3}$

(2) $20 \equiv -8 \pmod{12}$

(3) $-7 \equiv 13 \pmod{5}$

(4) $10 \equiv 5 \pmod{3}$

(5) $-16 \equiv -2 \pmod{7}$

2. จงใช้ทฤษฎีบทที่ 1 ตรวจสอบว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $12 \equiv 2 \pmod{5}$

(2) $8 \equiv 4 \pmod{3}$

(3) $-20 \equiv -4 \pmod{4}$

(4) $42 \equiv 0 \pmod{3}$

(5) $-32 \equiv 3 \pmod{7}$

2. สมบัติของคอนกรูเอนซ์

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการคอนกรูเอนซ์อีกแง่มุมหนึ่งในขอบข่ายที่กว้างขวางและลึกซึ้งยิ่งขึ้น อันจะเป็นประโยชน์ในการนำสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ไปใช้แก้ปัญหาในทางคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป

ขอให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถามต่อไปนี้

1. $8 \equiv 8 \pmod{4}$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. $10 \equiv 10 \pmod{4}$ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
3. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว

$$x \equiv x \pmod{10} \text{ จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด}$$

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติสะท้อน ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้
สมบัติข้อ 1 (สมบัติสะท้อน) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก และ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ว่า

$$a \equiv a \pmod{m}$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $a - a = 0$

และ $m \mid 0$

เพราะฉะนั้น $m \mid (a - a)$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$a \equiv a \pmod{m}$$

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้ แล้วตอบคำถาม

เมื่อกำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

หากสลับที่กันระหว่าง 10 และ 2 ผลที่ได้จะยังคงคอนกรูเอนซ์ ในมอดุโล 4 หรือไม่ เพราะเหตุใด

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติสมมาตร ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

สมบัติข้อ 2 (สมบัติสมมาตร) กำหนด m เป็นจำนวนเต็ม บวก a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

$$\text{ถ้า } a \equiv b \pmod{m} \quad \text{แล้ว } b \equiv a \pmod{m}$$

พิสูจน์ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$a - b = km, \quad k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$-(a - b) = -km$$

$$b - a = (-k)m$$

$$\text{ดังนั้น } b \equiv a \pmod{m}$$

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$\text{เมื่อกำหนดให้ } 15 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{และ } 3 \equiv 27 \pmod{4}$$

$$\text{แล้ว } 15 \equiv 27 \pmod{4} \quad \text{จะยังคงเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด}$$

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง ตามสมบัติถ่ายทอด ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

สมบัติข้อ 3 (สมบัติถ่ายทอด) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b , และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv c \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{m}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

$$\text{และ } b \equiv c \pmod{m}$$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$m \mid (a - b) \quad \text{และ } m \mid (b - c)$$

มี k, l เป็นจำนวนเต็มซึ่งทำให้

$$mk = a - b \quad \text{และ}$$

$$ml = b - c$$

$$mk + ml = (a - b) + (b - c)$$

$$m(k + l) = a - c$$

เพราะว่า $k + l$ เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{ดังนั้น } m \mid (a - c)$$

$$\text{จะได้ว่า } a \equiv c \pmod{m}$$

จงเติมข้อความในช่องว่างต่อไปนี้

1. $2 \equiv 2 \pmod{8}$

เป็นผลจากสมบัติ _____

2. เมื่อกำหนด $7 \equiv 9 \pmod{2}$

แล้ว $9 \equiv 11 \pmod{2}$

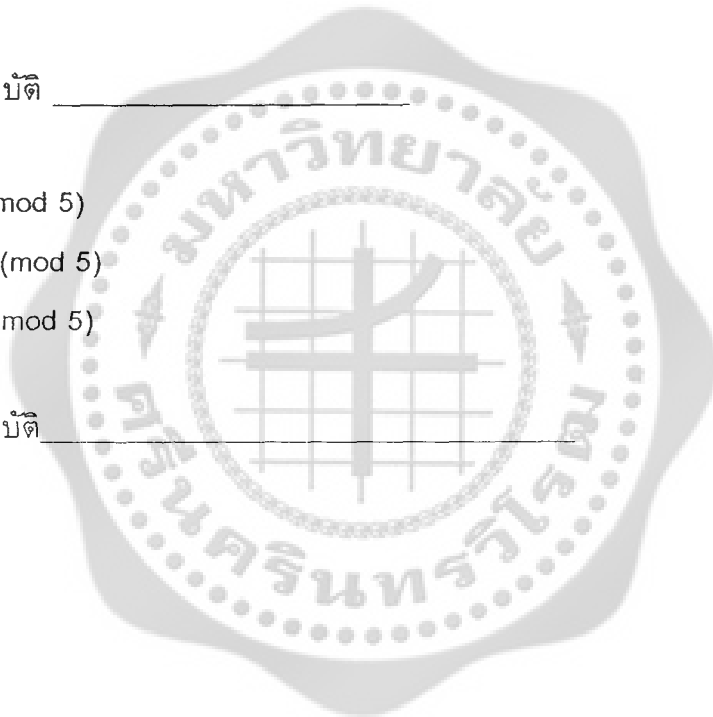
เป็นผลจากสมบัติ _____

3. ถ้า $7 \equiv 2 \pmod{5}$

และ $2 \equiv 17 \pmod{5}$

แล้ว $7 \equiv 17 \pmod{5}$

เป็นผลจากสมบัติ _____



แบบฝึกหัด 2.1

1. จงใช้สมบัติสะท้อนหาค่า X ต่อไปนี้

ตัวอย่าง $8X \equiv 24 \pmod{5}$

วิธีทำ $8X \equiv 24 \pmod{5}$

จากสมบัติสะท้อน จะได้ว่า

$$8X = 24$$

$$\therefore X = 3$$

(1) $21 \equiv 7X \pmod{3}$

(2) $11 \equiv 5+X \pmod{9}$

(3) $29 - X \equiv 21+ X \pmod{5}$

2. จงใช้สมบัติสมมาตรเติมข้อความในช่องว่างให้ถูกต้อง

ตัวอย่าง ถ้า $8 \equiv 12 \pmod{4}$

แล้ว _____

วิธีทำ จาก $8 \equiv 12 \pmod{4}$

จากสมบัติสมมาตร จะได้ว่า

$$12 \equiv 8 \pmod{4}$$

(1) ถ้า $23 \equiv 2 \pmod{7}$

แล้ว _____

(2) ถ้า $33 \equiv 9 \pmod{4}$

แล้ว _____

(3) ถ้า $0 \equiv -24 \pmod{8}$

แล้ว _____

3. จงใช้สมบัติถ่ายทอดเติมข้อความในช่องว่างให้ถูกต้อง

ตัวอย่าง กำหนด $14 \equiv 9 \pmod{5}$

และ $9 \equiv 24 \pmod{5}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า _____

วิธีทำ จาก $14 \equiv 9 \pmod{5}$

และ $9 \equiv 24 \pmod{5}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า

$$14 \equiv 24 \pmod{5}$$

(1) กำหนด $10 \equiv 1 \pmod{3}$

และ $1 \equiv -11 \pmod{3}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า _____

(2) กำหนด $-60 \equiv 12 \pmod{6}$

และ $12 \equiv 30 \pmod{6}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า _____

(3) เมื่อ X เป็นจำนวนเต็ม

กำหนด $5 \equiv X \pmod{10}$

และ $X \equiv 15 \pmod{10}$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า _____

ถ้า $12 \equiv 2 \pmod{10}$

แล้วนักเรียนคิดว่าความสัมพันธ์ทั้ง 2 ข้อข้างล่างนี้จะเป็นจริงหรือไม่

1. $12 + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{10}$

2. $12 \times 5 \equiv 2 \times 5 \pmod{10}$

ข้อความข้างต้นเป็นจริง เนื่องจากเป็นไปตามสมบัติการบวก การลบ และการคูณ จำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

สมบัติข้อ 4 (สมบัติจากการบวก การลบ และการคูณ จำนวนเต็มกับจำนวน ซึ่งคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m) กำหนด m เป็น จำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว

$$1. a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

$$2. a - c \equiv b - c \pmod{m}$$

$$3. ac \equiv bc \pmod{m}$$

พิสูจน์

1. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

จากบทนิยามที่ 1 และการหารลงตัว

จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว , $a - b = km$

นำ c มาบวก และลบออก เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จะได้ว่า $a + c - c - b = km$

ดังนั้น $(a + c) - (b + c) = km$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

สมบัติการลบจะมีวิธีการพิสูจน์เช่นเดียวกับการบวก

2. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

จากบทนิยามที่ 1 และการหารลงตัว

จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว , $a - b = km$

นำ c คูณทั้งสองข้าง เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จะได้ว่า $ac - bc = (km)c$

จากสมบัติการสลับที่การคูณ จะได้ว่า

$$ac - bc = c(km)$$

จากสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณจะได้ว่า

$$ac - bc = (ck)m$$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

ตัวอย่างการนำสมบัติข้อ 4 ไปใช้เช่น

(1) เนื่องจาก $19 \equiv 3 \pmod{8}$

ดังนั้น $19 + 7 \equiv 3 + 7 \pmod{8}$

หรือ $26 \equiv 10 \pmod{8}$

(2) เนื่องจาก $17 \equiv 1 \pmod{8}$

ดังนั้น $17 - 2 \equiv 1 - 2 \pmod{8}$

หรือ $15 \equiv -1 \pmod{8}$

(3) เนื่องจาก $19 \equiv 3 \pmod{8}$

ดังนั้น $19 \times 3 \equiv 3 \times 3 \pmod{8}$

หรือ $57 \equiv 9 \pmod{8}$

ตัวอย่างข้างต้นนี้ เป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าการคอนกรูเอนซ์มีสมบัติคล้ายสมบัติของสมการ กล่าวคือ เมื่อกำหนดการคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m มาให้สามารถที่จะบวก ลบ หรือคูณด้วย จำนวนเต็มใด ๆ ได้ โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้ยังคงคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m เช่น เดิม

แบบฝึกหัด 2.1

จงเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $15 \equiv 7 \pmod{4}$

1.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการบวก การคอนกรูเอนซ์กันด้วย 5
จะได้ว่า _____

1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการลบ การคอนกรูเอนซ์กันด้วย 3
จะได้ว่า _____

1.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการคูณ การคอนกรูเอนซ์กันด้วย 2
จะได้ว่า _____

2. กำหนดให้ $-10 \equiv 8 \pmod{3}$

2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการบวก การคอนกรูเอนซ์กันด้วย 10
จะได้ว่า _____

2.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการลบ การคอนกรูเอนซ์กันด้วย 4
จะได้ว่า _____

2.3 จากสิ่งที่กำหนดให้ ถ้าใช้สมบัติการคูณ การคอนกรูเอนซ์กันด้วย -3
จะได้ว่า _____

แบบฝึกหัด 2.2

ในแต่ละข้อได้กำหนดการคอนกรูเอนซ์กัน และสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ จงหาการคอนกรูเอนซ์ที่เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $16 \equiv 4 \pmod{6}$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 4

วิธีทำ จาก $16 \equiv 4 \pmod{6}$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 4

จะได้ว่า $20 \equiv 8 \pmod{6}$

1. กำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 5

2. กำหนดให้ $12 \equiv -3 \pmod{5}$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 7

3. กำหนดให้ $32 \equiv 10 \pmod{11}$

โดยสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 7

4. กำหนดให้ $38 \equiv -12 \pmod{10}$

โดยสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 20

5. กำหนดให้ $-10 \equiv -20 \pmod{10}$

โดยสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันด้วย 5

6. กำหนดให้ $-42 \equiv 0 \pmod{7}$

โดยสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันด้วย -8

จากสมบัติข้อ 4 (การบวก ลบ และการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนที่คอนกรูเอนซ์กัน) จะพบว่าการคอนกรูเอนซ์กันของจำนวนเต็มจะยังคงเป็นจริงภายใต้การบวก ลบ และการคูณด้วยจำนวนเต็มใดๆ แต่สำหรับการหารนั้นไม่จริง กล่าวคือ สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ $c \neq 0$ ถ้า $ac \equiv bc \pmod{m}$ แล้วข้อความ $a \equiv b \pmod{m}$ ไม่จริงเสมอไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด	$20 \equiv 14 \pmod{6}$
วิธีทำ จาก	$20 \equiv 14 \pmod{6}$
ซึ่งคือ	$10 \times 2 \equiv 7 \times 2 \pmod{6}$
แต่	$10 \not\equiv 7 \pmod{6}$

เมื่อเพิ่มสมบัติบางประการ จะทำให้การคอนกรูเอนซ์กันของจำนวนเต็มยังคงเป็นจริงภายใต้การหาร ดังสมบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

สมบัติข้อ 5 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วยจำนวนเต็ม) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $c \neq 0$ ถ้า $ac \equiv bc \pmod{m}$ และ ห.ร.ม. ของ c และ m เป็น d แล้ว $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

สมบัติข้อ 5 นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่จะให้ตัวอย่างแสดงการนำสมบัติไปใช้

ตัวอย่าง 2.4 กำหนด	$50 \equiv 20 \pmod{15}$
วิธีทำ จาก	$50 \equiv 20 \pmod{15}$
ซึ่งคือ	$5 \times 10 \equiv 2 \times 10 \pmod{15}$
และ ห.ร.ม. ของ 10 และ 15 เป็น 5	

จากสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย 5

จะได้ว่า $5 \equiv 2 \pmod{3}$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนด $21 \equiv -3 \pmod{8}$

วิธีทำ จาก $21 \equiv -3 \pmod{8}$

ซึ่งคือ $7 \times 3 \equiv -1 \times 3 \pmod{8}$

และ ห.ร.ม. ของ 3 และ 8 เป็น 1

จากสมบัติการตัดออก สำหรับการคูณด้วย 3

จะได้ว่า $7 \equiv -1 \pmod{8}$

จากตัวอย่าง 2.4 และ 2.5 เป็นการแสดงการใช้สมบัติการตัดออก สำหรับการคูณด้วยจำนวนเต็ม ซึ่งมีคุณสมบัติคล้ายสมบัติของสมการในบางกรณี

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

กำหนดให้ $6 \equiv 2 \pmod{4}$

แล้ว $6^2 \equiv 2^2 \pmod{4}$ จริงหรือไม่

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง เป็นไปตามสมบัติการยกกำลังจำนวนที่คอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

สมบัติข้อ 6 (การยกกำลังจำนวนที่คอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก) กำหนด m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

สมบัติข้อ 6 นี้ จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่จะให้ตัวอย่างแสดงการนำสมบัติไปใช้

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $4 \equiv 1 \pmod{3}$

วิธีทำ จากสมบัติการยกกำลังจำนวนที่คอนกรูเอนซ์กันด้วยในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $4^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$

หรือ $16 \equiv 1 \pmod{3}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ $12 \equiv 3 \pmod{9}$

1.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย 3 จะได้ว่า

1.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลังการคูณกันด้วย 2 จะได้ว่า

2. กำหนดให้ $-8 \equiv 12 \pmod{10}$

2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย 4 จะได้ว่า

2.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลังการคูณกันด้วย 3 จะได้ว่า

3. กำหนดให้ $-14 \equiv -4 \pmod{5}$

3.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย -2 จะได้ว่า

3.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลังการคูณกันด้วย 2 จะได้ว่า

4. กำหนดให้ $20 \equiv -4 \pmod{3}$

4.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย -4 จะได้ว่า

4.2 จากสิ่งที่กำหนดให้ใช้สมบัติการยกกำลังการคูณกันด้วย 2 จะได้ว่า

2.จงหาเศษที่ได้จากการหารตามกำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) 5^5 หารด้วย 7

(2) 3^{10} หารด้วย 11

(3) 2^{12} หารด้วย 13

(4) 5^{16} หารด้วย 17

(5) 32^{22} หารด้วย 25

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความต่อไปนี้

กำหนดให้ $10 \equiv 1 \pmod{3}$

และ $8 \equiv 2 \pmod{3}$

1. $10 + 8 \equiv 1 + 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่
2. $10 - 8 \equiv 1 - 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่
3. $10 \times 8 \equiv 1 \times 2 \pmod{3}$ จริงหรือไม่

ข้อความข้างต้นนี้เป็นจริง เป็นไปตามสมบัติการบวก ลบ และการคูณการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m สองคอนกรูเอนซ์ ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ ได้ดังนี้

สมบัติข้อ 7 (การบวก ลบ และการคูณ การคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m สองคอนกรูเอนซ์) กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
3. $ac \equiv bd \pmod{m}$

พิสูจน์

1. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

และ $c \equiv d \pmod{m}$

จะได้ว่า $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{I}, a - b = k_1 m$

และ $c - d = k_2 m$

ดังนั้น $(a - b) + (c - d) = k_1 m + k_2 m$

จะได้ว่า $(a + c) - (b + d) = (k_1 + k_2) m, k_1 + k_2 \in \mathbb{I}$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$a + c \equiv b + d \pmod{m}$

จาก $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{I}, a - b = k_1 m$

และ $c - d = k_2 m$

ดังนั้น $(a - b) - (c - d) = k_1 m - k_2 m$

จะได้ว่า $(a - c) - (b - d) = (k_1 - k_2) m, k_1 - k_2 \in \mathbb{I}$

จากบทนิยามที่ 1 จะได้ว่า

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$\text{เมื่อ } a \equiv b \pmod{m}$$

$$\text{และ } c \equiv d \pmod{m}$$

$$\text{แล้ว } a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

สมบัติการลบพิสูจน์เช่นเดียวกับสมบัติการบวก

2. เนื่องจาก $a \equiv b \pmod{m}$

$$\text{และ } c \equiv d \pmod{m}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กัน จะได้ว่า

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

$$\text{และ } bc \equiv bd \pmod{m}$$

จากสมบัติถ่ายทอด จะได้ว่า

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $15 \equiv 5 \pmod{5}$

$$\text{และ } 7 \equiv 2 \pmod{5}$$

วิธีทำ จากสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล 5 สองคอนกรูเอนซ์

$$\text{จะได้ว่า } 15 + 7 \equiv 5 + 2 \pmod{5}$$

$$\text{หรือ } 22 \equiv 7 \pmod{5}$$

และจากสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันสองคอนกรูเอนซ์

$$\text{จะได้ว่า } 15 - 7 \equiv 5 - 2 \pmod{5}$$

$$\text{หรือ } 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

และจากสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันสองคอนกรูเอนซ์

$$\text{จะได้ว่า } 15 \times 7 \equiv 5 \times 2 \pmod{5}$$

$$\text{หรือ } 105 \equiv 10 \pmod{5}$$

ตัวอย่าง 2.7 เป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่า การคอนกรูเอนซ์กันมีสมบัติคล้ายกับสมการกล่าวคือสามารถนำการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโลเดียวกันสองคอนกรูเอนซ์มาบวก ลบ และคูณกันได้เหมือนกับการนำเอาสมการสองสมการมาบวก ลบ และคูณกันซึ่งมีข้อควรระวังคือการคอนกรูเอนซ์กันทั้งสองจะต้องอยู่ในมอดุโลเดียวกัน

แบบฝึกหัด 2.4

ในแต่ละข้อได้กำหนดการคอนกรูเอนซ์กันสองคอนกรูเอนซ์ และสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กัน จงหาการคอนกรูเอนซ์กันที่เป็นผลมาจากสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $10 \equiv 2 \pmod{4}$

$$\text{และ } 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 4 สองการคอนกรูเอนซ์

วิธีทำ จาก $10 \equiv 2 \pmod{4}$

$$\text{และ } 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 4 สองคอนกรูเอนซ์

$$\text{จะได้ว่า } 10 + 9 \equiv 2 + 1 \pmod{4}$$

$$\text{หรือ } 19 \equiv 3 \pmod{4}$$

1. กำหนดให้ $10 \equiv 4 \pmod{3}$

$$\text{และ } 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 3 สองคอนกรูเอนซ์

2. กำหนดให้ $20 \equiv 10 \pmod{5}$

$$\text{และ } 18 \equiv -7 \pmod{5}$$

โดยสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 5 สองคอนกรูเอนซ์

3. กำหนดให้ $11 \equiv 2 \pmod{3}$

$$\text{และ } 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

โดยสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 3 สองคอนกรูเอนซ์

4. กำหนดให้ $14 \equiv 2 \pmod{6}$

$$\text{และ } 4 \equiv -2 \pmod{6}$$

โดยสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 6 สองคอนกรูเอนซ์

5. กำหนดให้ $5 \equiv 2 \pmod{3}$

และ $2 \equiv 8 \pmod{3}$

โดยสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันโมดูล 3 สองคอนกรูเอนซ์

6. กำหนดให้ $10 \equiv -2 \pmod{4}$

และ $6 \equiv 2 \pmod{4}$

โดยสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันโมดูล 4 สองคอนกรูเอนซ์

3. การนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์ไปใช้

หัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึง สมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้จะป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการนำสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ไปใช้ในการแก้ปัญหา

ตัวอย่าง 3.1 จงหาเศษจากการหาร 5^{111} ด้วย 6

วิธีทำ เนื่องจาก $5^2 \equiv 1 \pmod{6}$

ดังนั้น $(5^2)^{55} \equiv (1)^{55} \pmod{6}$

ดังนั้น $5^{110} \equiv 1 \pmod{6}$

และโดยสมบัติข้อ 4 ได้ว่า $5^{110} \times 5 \equiv 1 \times 5 \pmod{6}$

หรือ $5^{111} \equiv 5 \pmod{6}$

ดังนั้น 5 จึงเป็นเศษที่ได้จากการหาร 5^{111} ด้วย 6

จากตัวอย่าง 3.1 การแก้ปัญหาให้เริ่มต้นด้วยจำนวนเต็มที่เราหาเศษได้ง่ายๆ ในรูปที่สามารถนำไปสู่สิ่งที่เราต้องการหาเศษได้ง่าย เช่น เริ่มจาก $5^2 \equiv 1 \pmod{6}$ แล้วจึงยกกำลังให้ได้เท่ากับที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 3.2 จงแสดงว่า

$2^{20} - 1$ หารด้วย 41 ลงตัว

วิธีทำ เนื่องจาก $2^5 \equiv -9 \pmod{41}$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนที่คอนกรูเอนซ์ กันโมดูล 41 ด้วย 4

จะได้ว่า $(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41}$

หรือ $2^{20} \equiv 81^2 \pmod{41}$

แต่ $81 \equiv -1 \pmod{41}$

ดังนั้น $81^2 \equiv (-1)^2 \pmod{41}$

$$81^2 \equiv 1 \pmod{41}$$

จากสมบัติการถ่ายทอด จะได้ว่า

$$2^{20} \equiv 1 \pmod{41}$$

จากบทนิยามการคอนกรูเอนซ์ กันจะได้ว่า $41 \mid (2^{20} - 1)$

ตัวอย่าง 3.3 จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(25 \times 34) + (9 \times 8^5)$ ด้วย 7

วิธีทำ เนื่องจาก $25 \equiv -3 \pmod{7}$ และ $34 \equiv -1 \pmod{7}$

โดยสมบัติข้อ 7 จะได้ว่า $(25 \times 34) \equiv (-3) \times (-1) \pmod{7}$

$$(25 \times 34) \equiv 3 \pmod{7}$$

เนื่องจาก $9 \equiv 2 \pmod{7}$ และ $8 \equiv 1 \pmod{7}$

โดยสมบัติข้อ 6 จะได้ว่า $8^5 \equiv 1 \pmod{7}$

โดยสมบัติข้อ 7 จะได้ว่า $(9 \times 8^5) \equiv 2 \times 1 \pmod{7}$

$$9 \times 8^5 \equiv 2 \pmod{7}$$

และโดยสมบัติข้อ 7 อีกเช่นเดียวกันจะได้ว่า

$$(25 \times 34) + (9 \times 8^5) \equiv 3 + 2 \pmod{7}$$

$$(25 \times 34) + (9 \times 8^5) \equiv 5 \pmod{7}$$

ดังนั้น 5 เป็นเศษที่ได้จากการหาร $(25 \times 34) + (9 \times 8^5)$ ด้วย 7

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาเศษจากการหารจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) 3^{20} หารด้วย 5
- (2) 2^{50} หารด้วย 7
- (3) 41^{65} หารด้วย 7
- (4) 7^{10} หารด้วย 51
- (5) 224^{103} หารด้วย 13
- (6) 5^{21} หารด้วย 129

2. จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการคอนกรูเอนซ์ แสดงว่า ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $15 \mid (17^{100} - 1)$
- (2) $23 \mid (2^{15} - 9)$
- (3) $47 \mid (14^{12} - 25)$

3. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(3^{12} + 5^{12})$ ด้วย 7

4. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(4^6 \times 18) + 15^{13}$ ด้วย 14

5. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $(124^4 + 12^{10})^4 - (7^{10} + 4^4)^5$ ด้วย 5

4. สมบัติการคอนกรูเอนซ์ (ต่อ)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติการคอนกรูเอนซ์เพิ่มเติม วิธีการตัดเก้าออก และวิธีการคัดสิบเอ็ดออก ความรู้พื้นฐานในการศึกษาเรื่องนี้ คือ การเขียนจำนวนในฐานสิบ และสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ที่เคยทราบมาแล้วก่อนหน้า

สมบัติข้อ 8 (วิธีการตัดเก้าออก) จำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบ ย่อมคอนกรูเอนซ์กับผลบวกของเลขโดด (digit) ของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

พิสูจน์ ให้ N แทนจำนวนเต็มบวก ซึ่งเขียนในรูปกระจายเป็น

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0$$

โดย a_i เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$, และ $k = 0, 1, 2, \dots$

เนื่องจาก $9 \mid (10 - 1)$

ดังนั้น $10 \equiv 1 \pmod{9}$

และ $10^0 \equiv 1^0 \pmod{9}$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนเต็มบวกใดๆ ที่คอนกรูเอนซ์กัน จะได้ว่า

$$10^1 \equiv 1^1 \pmod{9}$$

$$10^2 \equiv 1^2 \pmod{9}$$

$$10^3 \equiv 1^3 \pmod{9}$$

...

...

...

$$10^{k-1} \equiv 1^{k-1} \pmod{9}$$

$$10^k \equiv 1^k \pmod{9}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 9 จะได้ว่า

$$a_0 10^0 \equiv a_0 1 \pmod{9}$$

$$a_1 10 \equiv a_1 1 \pmod{9}$$

$$a_2 10^2 \equiv a_2 1 \pmod{9}$$

...

...

...

$$a_{k-1} 10^{k-1} \equiv a_{k-1} 1 \pmod{9}$$

$$a_k 10^k \equiv a_k 1 \pmod{9}$$

$$a_i 10^i \equiv a_i \pmod{9}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

จากสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 9 สองคอนกรูเอนซ์ จะได้ว่า

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

แสดงว่าจำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบย่อมคอนกรูเอนซ์กับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

สมบัติข้อ 8 ดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า “วิธีการตัดเก้าออก” (Casting Out Nines) ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบ ย่อมคอนกรูเอนซ์กันกับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

ตัวอย่าง 4.1 จงหาเศษจากการหาร 1,956,672 ด้วย 9

วิธีทำ $1,956,672 \equiv 1+9+5+6+6+7+2 \pmod{9}$

$$\equiv 36 \pmod{9}$$

$$\equiv 3+6 \pmod{9}$$

$$\equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\text{นั่นคือ } 1,956,672 \equiv 0 \pmod{9}$$

ดังนั้น 1,956,672 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ หรือ 1,956,672 หารด้วย 9 ได้ลงตัว

$$10^2 \equiv 1^2 \pmod{9}$$

$$10^3 \equiv 1^3 \pmod{9}$$

...

...

...

$$10^{k-1} \equiv 1^{k-1} \pmod{9}$$

$$10^k \equiv 1^k \pmod{9}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 9 จะได้ว่า

$$a_0 10^0 \equiv a_0 1 \pmod{9}$$

$$a_1 10 \equiv a_1 1 \pmod{9}$$

$$a_2 10^2 \equiv a_2 1 \pmod{9}$$

...

...

...

$$a_{k-1} 10^{k-1} \equiv a_{k-1} 1 \pmod{9}$$

$$a_k 10^k \equiv a_k 1 \pmod{9}$$

$$a_i 10^i \equiv a_i \pmod{9}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

จากสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 9 สองคอนกรูเอนซ์ จะได้ว่า

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

แสดงว่าจำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบย่อมคอนกรูเอนซ์กับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

สมบัติข้อ 8 ดังกล่าวนี้อาจเรียกว่า “วิธีการตัดเก้าออก” (Casting Out Nines) ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนเต็มบวกใดๆ ในฐานสิบ ย่อมคอนกรูเอนซ์กับผลบวกของเลขโดดของจำนวนนั้นในมอดุโล 9

ตัวอย่าง 4.1 จงหาเศษจากการหาร 1,956,672 ด้วย 9

วิธีทำ $1,956,672 \equiv 1+9+5+6+6+7+2 \pmod{9}$

$$\equiv 36 \pmod{9}$$

$$\equiv 3+6 \pmod{9}$$

$$\equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

นั่นคือ $1,956,672 \equiv 0 \pmod{9}$

ดังนั้น 1,956,672 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ หรือ 1,956,672 หารด้วย 9 ได้ลงตัว

ตัวอย่าง 4.2 จงหาเศษจากการหาร 125,436 ด้วย 9

วิธีทำ $125,436 \equiv 1+2+5+4+3+6 \pmod{9}$

$$\equiv 21 \equiv 3 \pmod{9}$$

นั่นคือ $125,436 \equiv 3 \pmod{9}$ แสดงว่า 125,436 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 3

ในทางปฏิบัติเราไม่จำเป็นต้องบวก 9 หรือ ผลรวมของจำนวนที่ได้เป็น 9 เข้าไปในผลบวกของเลขโดดด้วยเพื่อให้ตัวเลขในการคำนวณน้อยลง เช่น จากจำนวน 125436 เราอาจตัด 5,4 และ 3,6 ออกจึงเหลือ 1,2 ซึ่งนำมาคิดคำนวณได้

$$125436 \equiv 1+2+5+4+3+6$$

$$\equiv 1+2 \equiv 3 \pmod{9}$$

สมบัติข้อ 9 (วิธีการคัดลิสเบ็ดออก) สำหรับจำนวนเต็มบวก N ที่เขียนในรูปกระจายเป็น

$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ โดย a_i เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$ และ

$k = 0, 1, 2, \dots$ จะได้ว่า N คอนกรูเอนซ์กับ $(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$ ในมอดุโล 11

พิสูจน์ ให้ N แทนจำนวนเต็มบวก ซึ่งเขียนในรูปกระจายเป็น

$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ โดย a_i เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$

และ $k = 0, 1, 2, \dots$

เนื่องจาก $11 \mid (10 - (-1))$

ดังนั้น $10 \equiv -1 \pmod{11}$

และ $10^0 \equiv (-1)^0 \pmod{11}$

จากสมบัติการยกกำลังจำนวนเต็มบวกใดๆ ที่คอนกรูเอนซ์กัน จะได้ว่า

$$10^1 \equiv (-1)^1 \pmod{11}$$

$$10^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11}$$

$$10^3 \equiv (-1)^3 \pmod{11}$$

...

...

$$10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$$

จากสมบัติการคูณจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 11 จะได้ว่า

$$a_0 10^0 \equiv a_0 1 \pmod{11}$$

$$a_1 10 \equiv a_1 (-1) \pmod{11}$$

$$a_2 10^2 \equiv a_2 1 \pmod{11}$$

$$a_k 10^k \equiv a_k (-1)^k \pmod{11}$$

$$a_i 10^i \equiv (-1)^i a_i \pmod{11}, i = 1, 2, \dots, k$$

จากสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันโมดูลุส 11 สองการคอนกรูเอนซ์ จะได้ว่า

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0 \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}$$

แสดงว่า จำนวนเต็มบวก N ใดๆ จะคอนกรูเอนซ์กันกับจำนวนเต็มซึ่งเกิดจากการนำเลขโดดในหลักหน่วย, หลักร้อย, หลักหมื่น, ... ของ N มารวมกันและลบออกด้วยผลบวกของเลขโดดในหลักสิบ, หลักพัน, หลักแสน, ... ของ N โมดูลุส 11

สมบัติข้อ 9 ดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า "วิธีการคัดสิบเอ็ดออก" (Casting Out Elevens)

ตัวอย่าง 4.3 จงหาเศษจากการหาร 874,523,045 ด้วย 11

วิธีทำ $874,523,045 \equiv 8-7+4-5+2-3+0-4+5$
 $\equiv 0 \pmod{11}$

นั่นคือ $874,523,045 \equiv 0 \pmod{11}$

ดังนั้น 874,523,045 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 0

หรือ 874,523,045 หารด้วย 11 ได้ลงตัว

ตัวอย่าง 4.4 จงหาเศษจากการหาร 143,217 ด้วย 11

วิธีทำ $143,217 \equiv -1+4-3+2-1+7 \equiv 8 \pmod{11}$

นั่นคือ $143,217 \equiv 8 \pmod{11}$

ดังนั้น 143,217 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 8

ในทางปฏิบัติเราอาจตัวจำนวนที่บวกลบกันได้ 11 หรือ -11 หักไปก็ได้ เช่นจาก $-1+4-3+2-1+7$ เราอาจตัด $4+7 \equiv 11$ ออกจึงเหลือ $-1-3+2-1$ ซึ่งนำมาคิดคำนวณได้ดังนี้

$$143,217 \equiv 1+4-3+2-1+7$$

$$\equiv -1-3+2-1 \equiv -3 \equiv 8 \pmod{11}$$

นั่นคือ $143,217 \equiv 8 \pmod{11}$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงใช้วิธีการตัดเก้าหรือสิบเอ็ดออก หาค่าจากการหารจำนวนเต็มในแต่ละข้อต่อไปนี้ ด้วย 9 หรือ 11

ตัวอย่าง 4,346,452

วิธีทำ เนื่องจาก $4,346,452 \equiv 4+3+4+6+4+5+2$
 $\equiv 1 \pmod{9}$

นั่นคือ $4,346,452 \equiv 1 \pmod{9}$

แสดงว่า 4,346,452 หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 1

เนื่องจาก $4,346,452 \equiv 4-3+4-6+4-5+2$
 $\equiv 0 \pmod{11}$

นั่นคือ $4,346,452 \equiv 0 \pmod{11}$

แสดงว่า 4,346,452 หารด้วย 11 แล้วเหลือเศษ 0

หรือ 4,346,452 หารด้วย 11 ได้ลงตัว

(1) 23,046,789

(2) 18,565,452

(3) 743,336,002

(4) 500,007,891

(5) 45,122,154,236

2. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงใช้วิธีการตัดเก้าหรือสิบเอ็ดออก หาค่าของเลขโดด y และ z ซึ่งทำให้เงื่อนไขที่กำหนดให้เป็นไปได้

(1) 4, z65, 423 หารด้วย 9 ลงตัว

(2) 234, y07, หารด้วย 9 ลงตัว

(3) y, 345, 641 หารด้วย 11 ลงตัว

(4) 1,237, z02 หารด้วย 11 ลงตัว

(5) 87, 4y2, 345 หารด้วย 11 ลงตัว

5. การนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์ไปใช้ (ต่อ)

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงสมบัติของการคอนกรูเอนซ์ ข้อ 8 และข้อ 9 (วิธีการตัดเก้าและสิบเอ็ดออก) ในหัวข้อนี้จะนำสมบัติดังกล่าว ไปใช้ตรวจสอบผลการคำนวณในบางกรณี ทั้งโดยอาศัยสมบัติว่า ถ้าจำนวนเต็มสองจำนวนเท่ากันแล้ว จำนวนเต็มทั้งสองนั้นต้องคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโลที่กำหนดให้ ดังนั้นถ้าใช้วิธีการตัดเก้าหรือสิบเอ็ดออก วิธีใดวิธีหนึ่งแล้ว จำนวนเต็มสองจำนวนที่กำหนดให้ไม่คอนกรูเอนซ์กันก็จะได้ว่า จำนวนเต็มสองจำนวนนั้นไม่เท่ากัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1 จงใช้วิธีการตัดเก้าออก

ตรวจสอบข้ออ้างที่ว่า

$$(253)^2 = 65,209 \text{ เป็นจริงหรือไม่}$$

วิธีทำ ใช้วิธีการตัดด้วยเก้ากับ $(253)^2$ และ 65,209

$$\text{จะได้ } 253 \equiv 2+5+3 = 10$$

$$\equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$(253)^2 \equiv 1^2 \pmod{9}$$

$$(253)^2 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\text{และ } 65,209 \equiv 6+5+2+0+9 = 22$$

$$\equiv 2+2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } (253)^2 \not\equiv 65,209 \pmod{9}$$

นั่นคือข้ออ้างที่ว่า

$$(253)^2 \equiv 65,209 \text{ เป็นเท็จ}$$

ตัวอย่าง 5.2 ข้อความที่ว่า 26,671 หารด้วย 34 จะได้ผลหารเป็น 774 และเหลือเศษ 15 เป็นจริงหรือไม่

วิธีทำ ใช้วิธีการตัดสิบเอ็ดออกกับตัวหาร, ตัวตั้ง ผลหารและเศษ ได้ดังนี้

$$\text{ตัวหาร } 34 \equiv -3+4 = 1 \pmod{11}$$

$$\text{ตัวตั้ง } 26,671 \equiv 2-6+6-7+1 \equiv -4 \pmod{11}$$

$$\text{และ } -4 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\text{ดังนั้น } 26,671 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$\text{ผลหาร } 774 \equiv 7-7+4 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{เศษ } 15 \equiv -1+5 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{เนื่องจาก (ตัวหาร}\times\text{ผลหาร)}+\text{เศษ} \equiv (1\times 4)+4$$

$$\equiv 8 \equiv 7 \equiv \text{ตัวตั้ง} \pmod{11}$$

$$\text{แสดงว่า } 26671 \not\equiv (34\times 774)+15 \pmod{11}$$

ดังนั้น ข้อความดังกล่าวเป็นเท็จ

ข้อสังเกต

ในการตรวจสอบผลการคำนวณด้วยวิธีการตัดเก้าและสิบเอ็ดออกดังได้กล่าวมาแล้วนี้ มีข้อพึงระวังคือกรณีที่พบว่า สิ่งที่ต้องการตรวจสอบทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มีการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล 9 หรือมอดุโล 11 อันใดอันหนึ่งแล้วจะสรุปไม่ได้ทันที โดยเพียงใช้มอดุโลที่มีการคอนกรูเอนซ์กันนั้นว่าผลการคำนวณถูกต้องหรือไม่ ดังตัวอย่าง เช่น

$$\text{มี } (11)^2 \equiv (1+1)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{และ } 103 \equiv 1+0+3 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } (11)^2 \equiv 103 \pmod{9} \text{ ในขณะที่ } (11)^2 = 121 \neq 103$$

$$\text{มี } 25\times 6 \equiv (2+5)\times 6 \equiv 42 \equiv 4+2 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{และ } 150 \equiv 1+5+0 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$\text{ดังนั้น } 25\times 6 \equiv 150 \pmod{9} \text{ ในขณะที่ } 25\times 6 = 150$$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อสิ่งที่ต้องการตรวจสอบทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มีการคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล 9 แล้วผลการคำนวณอาจถูกหรือผิดก็ได้ ในที่นี้เมื่อการคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล 9 เป็นจริง จึงใช้การคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล 9 มาตรวจสอบการคำนวณไม่ได้

อย่างไรก็ตามจาก 1. ในตัวอย่างข้างต้น ถ้าเราใช้การคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล 11 มาตรวจสอบจะพบ $(11)^2 \not\equiv 0 \equiv 4 \equiv 103 \pmod{11}$ ซึ่งจะสรุปได้ทันทีว่า $(11)^2 \neq 103$

ตัวอย่าง 5.3 จงตรวจสอบผลการคำนวณที่ว่า $(27,463)^3 = 932,736,457$ โดยใช้

(1) วิธีการตัดเก้าออก

(2) วิธีการตัดสิบเอ็ดออก

วิธีทำ (1) $(27,463)^3 \equiv (2+7+4+6+3)^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 6+4 \equiv 10 \equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$

$$\text{และ } 932,736,457 \equiv 9+3+2+7+3+6+4+5+7$$

$$\equiv 10 \equiv 1+0 \equiv 1 \pmod{9}$$

ทำให้ได้ $(27,463)^3 \equiv 932,736,457 \pmod{9}$

ดังนั้นเมื่อใช้วิธีการตัดเก้าออก จะสรุปไม่ได้ว่าผลการคำนวณนี้เป็นจริงหรือไม่

$$(2) \quad (27,463)^3 \equiv (2-7+4-6+3)^3 \equiv (-4)^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv (3-4+3) \equiv 2 \pmod{11}$$

และ $932,736,457 \equiv (9-3+2-7+3-6+4-5+7)$

$$\equiv 4 \pmod{11}$$

ทำให้ได้ $(27,463)^3 \equiv 932,736,457 \pmod{11}$

ดังนั้น $(27,463)^3 \neq 932,736,457$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงใช้วิธีการตัดเก้าออกตรวจสอบผลการคำนวณในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

$$(1) \quad 1,452 \times 3,546 = 6,138,792$$

$$(2) \quad (4174)^3 = (76 \times 413)^2$$

$$(3) \quad (459 \times 63)^2 - (531)^3 = 9,541,728$$

2. จงใช้วิธีการตัดสิบเอ็ดออกตรวจสอบผลการคำนวณในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

$$(1) \quad (3,502 \times 1421)^3 = 3,404,373,088$$

$$(2) \quad (125)^2 = 15,625$$

$$(3) \quad 6,524 \times 9,846 = 64,235,004$$

3. จงใช้วิธีการตัดเก้าหรือสิบเอ็ดออก ตรวจสอบผลการคำนวณในข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่

$$(1) \quad (286)^3 + (314)^2 = (352)^5$$

$$(2) \quad 1,331 \times 5,292 = 79,441,812$$

$$(3) \quad (3,663)^8 = (9,009)^4$$

$$(4) \quad 4,751 + (6,511)^5 = 7,112,413,562$$

$$(5) \quad (96,889)^2 = 93,857,644,321$$

$$(6) \quad (48,841 \times 2,500)^2 = (22,050)^4$$

4. จงใช้วิธีการตัดสิบเอ็ดออก หาค่าของเลขโดด y ที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

$$(1) \quad 41,210 + 35,010 = 7y,220$$

$$(2) \quad 231 \times 412 = 95,y72$$

$$(3) \quad (451)^2 = 2y3,401$$

การนำสมบัติคอนกรูเอนซ์ไปใช้แก้ปัญหาข้อสอบระดับยาก

1. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และหารด้วย 132 เหลือเศษ 98 m คือจำนวนใด

แนวคิด โดยใช้ทฤษฎีจำนวน

$$m = 112 \pmod{131} \dots\dots\dots(1)$$

$$m = 98 \pmod{132} \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) $131 \mid (m - 112)$

ดังนั้นมี $x \in \mathbb{I}^+$, $m - 112 = 131x$

$$m = 131x + 112 \dots\dots\dots(3)$$

จาก (2) แทนค่า m จะได้

$$\begin{aligned} 131x + 112 &\equiv 98 \pmod{132} \\ 131x &\equiv (98 - 112) \pmod{132} \\ 131x &\equiv -14 \pmod{132} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $132 \mid (131x + 14)$

ดังนั้น $y \in \mathbb{I}$, $131x + 14 = 132y$

$$131x - 132y = -14 \dots\dots\dots(4)$$

เพราะว่า $131 - 132 = -1$

เพราะฉะนั้น $(14)(131) - (14)(132) = -14$

ดังนั้น x ที่เป็นไปได้ตัวหนึ่งคือ $x = 14$

ให้ $x = 14 + 132t$, $t \in \mathbb{I}$

จะได้ $m = 112 + 131(14 + 132t)$
 $= 112 + 1834 + (131)(132)t$
 $= 1946 + (131)(132)t$

สรุปเลือก $m = 1946$

หมายเหตุ โดยใช้เหตุผลตามแนวคิดนี้ จะพบว่า m จะอยู่ในรูปแบบ

$$m = (131)(132)n + 1946 \quad , \quad n \in \mathbb{I}$$

ถ้าไม่เจาะจงว่า m เป็นจำนวนเต็มบวก

2. กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งหารด้วย 3, 4, 5, 6 และ 7 จะเหลือเศษ 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ ค่า n ที่น้อยที่สุด ที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าไร

แนวคิด โดยใช้ทฤษฎีจำนวน

$$n = 2 \pmod{3} \dots\dots\dots(1)$$

$$n = 3 \pmod{4} \dots\dots\dots(2)$$

$$n = 4 \pmod{5} \dots\dots\dots(3)$$

$$n = 5 \pmod{6} \dots\dots\dots(4)$$

$$n = 6 \pmod{7} \dots\dots\dots(5)$$

$$(1) \text{ และ } (2) , \quad n \equiv 11 \pmod{12} \dots\dots\dots(6)$$

$$(6) \text{ และ } (3) , \quad n \equiv 59 \pmod{60} \dots\dots\dots(7)$$

$$(7) \text{ และ } (4) , \quad n \equiv 59 \pmod{60} \dots\dots\dots(8)$$

$$(8) \text{ และ } (5) , \quad n \equiv 419 \pmod{420} \dots\dots\dots(9)$$

สรุป n ที่เล็กที่สุดคือ $n = 419$

3. เศษจากการหาร 7^{2541} ด้วย 4 เท่ากับเท่าไร

$$\text{แนวคิด } 7^{2541} = (4+3)^{2541}$$

$$3^{2541} = (3^3)^{847} = (27)^{847} = (6(4)+3)^{847}$$

$$3^{847} = (3^7)^{121} = (2187)^{121} = (546(4) + 3)^{121}$$

$$3^{121} = (3^{11})^{11} = (177147)^{11} = (44286(4) + 3)^{11}$$

$$3 = 177147 \text{ หารด้วย } 4 \text{ เหลือเศษ } 3$$

$$\text{เศษจากการหาร } 7^{2541} \text{ ด้วย } 4$$

$$= \text{เศษจากการหาร } 3^{2541} \text{ ด้วย } 4$$

$$= \text{เศษจากการหาร } 3^{847} \text{ ด้วย } 4$$

$$= \text{เศษจากการหาร } 3^{121} \text{ ด้วย } 4$$

$$= \text{เศษจากการหาร } 3^{11} \text{ ด้วย } 4$$

$$= 3$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 7^{2541} \pmod{4} \equiv 3^{2541} \pmod{4} \equiv 3^{121} \pmod{4} \equiv 3^{11} \pmod{4}$$

$$\equiv 177147 \pmod{4}$$

$$\equiv 3 \pmod{4}$$

4. จงแสดงว่า 41 หาร $2^{20} - 1$ ลงตัว

แนวคิด เนื่องจาก $2^5 \equiv -9 \pmod{41}$

$$\text{จะได้ } (2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41}$$

$$\text{จะได้ } 2^{20} \equiv 81 \cdot 81 \pmod{41}$$

$$\text{แต่ } 81 \equiv -1 \pmod{41}$$

$$\text{ดังนั้น } 81 \cdot 81 \equiv 1 \pmod{41}$$

$$\text{จะได้ } 2^{20} \equiv 1 \pmod{41}$$

นั่นคือ $41 \mid (2^{20} - 1)$

5. จงหาเศษจากการนำ 12 ไปหาร $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 99! + 100!$

แนวคิด $4! \equiv 0 \pmod{12}$ เพราะ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ซึ่ง 12 หารลงตัว

$$5! \equiv 0 \pmod{12} \quad \text{เพราะ } 5! = 5 \cdot 4! \quad \text{ซึ่ง 12 หารลงตัว}$$

$$6! \equiv 0 \pmod{12} \quad \text{เพราะ } 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4! \quad \text{ซึ่ง 12 หารลงตัว}$$

$$\text{เมื่อ } k \geq 4 \text{ จะได้ } k! \equiv 0 \pmod{12}$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 99! + 100! \equiv 1! + 2! + 3! + 0 + \dots + 0 \pmod{12}$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 99! + 100! \equiv 9 \pmod{12}$$

9 จึงเป็นเศษที่ต้องการ

เราทราบมาแล้วว่าคอนกรูเอนซ์มีสมบัติเหมือนสมการ คือ การบวก ลบ คูณ ด้วยจำนวนที่เท่ากัน แต่มีสมบัติหนึ่งที่เรายังไม่ได้กล่าวถึง คือ การหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน

จึงพิจารณาคอนกรูเอนซ์ต่อไปนี้

$$60 \equiv 42 \pmod{9} \quad \text{เป็นจริง} \quad \text{ถ้าหารด้วย 3 จะได้}$$

$$20 \equiv 14 \pmod{9} \quad \text{ไม่จริง} \quad \text{แต่ถ้าหารด้วย 2 จะได้}$$

$$30 \equiv 21 \pmod{9} \quad \text{เป็นจริง}$$

จะเห็นว่าการหารด้วยจำนวนที่เท่ากันให้ผลเป็นจริงหรือไม่จริงจึงต้องระมัดระวัง

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษาจากการสร้างบทเรียนเสริมเรื่องสมภาค ในระบบจำนวนเต็มสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ได้แสดงในตารางนี้

ตาราง 5 ค่าเฉลี่ยร้อยละของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเรียงจากมากไปหาน้อย

อันดับที่	จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	จำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ
1	จุดประสงค์ที่ 1	90.00
2	จุดประสงค์ที่ 7	87.50
3	จุดประสงค์ที่ 4	86.67
4	จุดประสงค์ที่ 2	85.00
5	จุดประสงค์ที่ 5	84.17
6	จุดประสงค์ที่ 9	72.50
7	จุดประสงค์ที่ 10	71.67
8	จุดประสงค์ที่ 6	59.17
9	จุดประสงค์ที่ 3	55.00
10	จุดประสงค์ที่ 11	50.84
11	จุดประสงค์ที่ 8	30.83

2. นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม มีจำนวนร้อยละ 80 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. คะแนนผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 19.65 คิดเป็นร้อยละ 65.50 ของคะแนนเต็ม และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.90

4. นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

อภิปรายผล

ผลการวิจัยพบว่า

1. จำนวนนักเรียนที่ไม่ผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คือ จุดประสงค์ที่ 8 และมีอยู่จุดประสงค์เดียวที่นักเรียนสอบไม่ผ่าน ซึ่งมีข้อคำถามอยู่ 5 ข้อ และทุกข้อเป็นข้อสอบแนวประยุกต์ เป็นการนำสมบัติการคอนกรีตไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งข้อสอบประเภทนี้จะวัดในด้านการนำไปใช้ จะพบว่านักเรียนในประเทศไทยมักจะไม่ได้อ่านฝึกมากนัก เพราะถูกสอนให้เรียนแบบท่องจำเสียมากกว่า ไม่ได้สอนให้ฝึกคิดหาเหตุผล ซึ่งเป็นการเรียนแบบแก้ปัญหา หรือการเรียนแบบค้นพบด้วยตนเอง

อย่างไรก็ตาม การจะทำข้อสอบประเภทนี้ได้ดี นักเรียนต้องมีความรู้พื้นฐานเพียงพอที่จะเชื่อมความรู้เก่าและใหม่ให้เข้ากันได้ด้วย อีกทั้งต้องอาศัยไหวพริบปฏิภาณ ตลอดจนประสบการณ์เดิมอีกด้วย ซึ่งจะต่างจากข้อสอบประเภทความจำ และความเข้าใจ ซึ่งนักเรียนจะทำได้ดี โดยดูจากนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนค่าเฉลี่ยในจุดประสงค์อื่นๆ อยู่ในเกณฑ์สูง โดยเฉพาะจุดประสงค์ที่ 1 ได้ค่าเฉลี่ยร้อยละ 90.00 และรองลงมาก็คือจุดประสงค์ที่ 7 ได้ค่าเฉลี่ยร้อยละ 87.50

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถเพียงพอในการเรียนบทเรียนเสริมเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1 ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาในบทเรียน ให้เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันกับความรู้พื้นฐานเรื่องระบบจำนวนจริง ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วตามหัวข้อต่างๆ ในบทที่ 2 ของหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ โดยผู้วิจัยเริ่มจากเนื้อหาว่างไปหายาก ตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของนักการศึกษาท่านหนึ่งคือ เวสเลย์ (Wesley. 1950 : 237) ได้กล่าวถึงลักษณะของบทเรียนที่ดีไว้ว่า ควรมีเนื้อเรื่อง คำอธิบาย รูปภาพ กิจกรรม แบบฝึกหัดสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของวิชานั้นๆ และใช้ภาษาสละสลวยเหมาะสมกับวุฒิภาวะกับผู้เรียน มีการจัดระเบียบวางลำดับบทเรียนก่อนหลังตามหลักวิชา เพื่อความสะดวกต่อการเรียนการสอน แบ่งบทเรียนออกเป็นหน่วย มีเนื้อหาวิชา

เหมาะสมที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจในแต่ละหน่วยได้ในเวลาอันสมควร มีเวลาทบทวน และหาความรู้เพิ่มเติมได้

2.2 ในขณะที่ดำเนินการทดลอง นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสนใจ และตั้งใจเรียน ดีมาก พิจารณาได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด ในระหว่างดำเนินการทดลองไม่มีนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างคนใดขาดเรียนเลย

2.3 จากผลการทดลอง นักเรียนกลุ่มตัวอย่างสามารถสอบผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด เนื่องมาจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีพื้นฐานความรู้จากเรื่องจำนวนจริงมาก่อน และที่สำคัญกว่านั้นเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงอยู่แล้วจึงสามารถเรียนรู้ และเชื่อมโยงความรู้ได้รวดเร็วกว่านักเรียนปกติ อีกทั้งผู้วิจัยพยายามใช้วิธีสอนโดยจัดกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนได้ฝึกปฏิบัติ และส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยน่าจะเป็นแนวทางในการตัดสินใจของนักเรียน ที่จะเลือกเรื่องที่จะศึกษาตามความพอใจของตน

1.2 ในการจัดการเรียนการสอน ผู้สอนควรคำนึงถึงความพร้อมของผู้เรียนเป็นหลักโดยปรับบทเรียนและวิธีสอนเพื่อสนองความต้องการ ความสามารถ และความสนใจของนักเรียน

1.3 ควรที่จะบรรจุเนื้อหาเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม ลงไปให้นักเรียนได้ศึกษาเพื่อเป็นการขยายฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายต่อไป

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้ซ้ำอีกให้กว้างขวาง โดยขยายผลเพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยเรื่องนี้เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์สูงด้วย ซึ่งผลการศึกษาค้นคว้าจะทำให้ทราบว่าควรที่จะนำบทเรียนเสริมเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม มาจัดให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงได้เรียนด้วย

บรรณานุกรม

- ก่อ สวัสดิพาณิชัย. (2507, มีนาคม). "หนังสือเรียนของเด็ก " ศูนย์ศึกษา. 11(3) : 32 – 36.
- ณรงค์ ปันนัม. คู่มือการสอนคณิตศาสตร์ 321 ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ :
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2531. อัดสำเนา.
- ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2538). เฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย.
- ประจำปี 2533 – 2538. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธาดาศักดิ์ วัชรปรีชาพงษ์. (2514). การวิเคราะห์หนังสือแบบเรียนวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในแง่ของรูปแบบและวิธีการเสนอเนื้อหา. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : วิทยาลัยการศึกษา ประสานมิตร อัดสำเนา.
- นภดล สุธาพาณิชัย. (2524). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตตอนนุคเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 5. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ อัดสำเนา.
- ประเวศ ะสี. (2537, 29 มิถุนายน). "เด็กปัญญาเลิศกลับเป็นเด็กที่น่าสงสาร !" ไทยรัฐ. ปีที่ 45 (ฉบับที่ 14523) : 8.
- ปิยวดี วงษ์ใหญ่. (2538). ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ยติ กฤษณ์กู. (2533, พฤศจิกายน-ธันวาคม). "คณิตศาสตร์โอลิมปิก," คณิตศาสตร์. 34 (386 - 387) : 57 – 67.
- รัฐจวน อินทรกำแหง. (2515). "การเลือกหนังสือและสื่อวัสดุ." นครหลวงกรุงเทพ ธนบุรี : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย. (2534). เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2534). แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.
- _____. (2534). แบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 041 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.
- สมใจ จิตพิทักษ์. (2524). ทฤษฎีจำนวน. สงขลา : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา.
- สมพร เรืองโชติวิทย์. (2524). ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.

- สมพล เล็กสกุล. (2521). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพฯ : อักษรบัณฑิต.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2535). *ทฤษฎีจำนวน*. กรุงเทพฯ : ชมรมคณิตศาสตร์
วิทยาลัยครูพระนคร.
- สมศักดิ์ โพธิ์จิตร. (2523). *หลักคณิตศาสตร์และโครงสร้างของระบบจำนวน*. สงขลา :
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา.
- สุกัญญา ชันธประสิทธิ์. (2531). *ความรู้พื้นฐานสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ค 012
ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในทรรคนะของครูในเขตการศึกษา 1. วิทยานิพนธ์
ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์) กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. อัดสำเนา.*
- สุทธิพงษ์ พะลัง. (2521). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรง โดยใช้หน่วย
การเรียนรู้ การสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ.
ปริญญาโท กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ อัดสำเนา.*
- เสกสรร ดำกระบี่. (2517). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิต ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์. ปริญญาโท กศ.ม.
(การมัธยมศึกษา) กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ อัดสำเนา.*
- อุษณีย์ โพธิ์สุข. (2537). "การศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศ," ใน *การพัฒนาความสามารถพิเศษ
ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของเด็กและเยาวชน*. หน้า 32 – 53. กรุงเทพฯ :
อัมรินทร์การพิมพ์.
- Bezuszka, Stanley J. and Margaret J. (1983, April). "Challenges for Enriching the
Curriculum : Arithmetic and Number Theory," *Mathematics Teacher*. 76 (12) :
250 - 252, 269.
- Bressoud, David M. (1989). *Factorization and Primality Testing*. New York : Springer-
Verlag Press.
- Bruner, Jerome Seymour. (1966). *The Process of Education*. Cambridge : Harvard
University Press.
- Chance, P.L. (1992, December). "A Model for Gifted Education in Middle Schools," *DAI
(Dissertation Abstracts International)*. 12 (552) : 22-A.
- Douglas, Harl R. (1956). *The High School Curriculum*. New York : Ronald Press.
- Drummond, Pamela Johnson. (1989, January). "The design , implementation, and
evaluation of a course in discrete mathematics for high school students,"
Dissertation Abstracts. 50(3) : 641-A.
- Greenes, Carole. (1981, February). "Identifying the Gifted Student in Mathematics,"
Arithmetic Teacher. 28 (6) : 14 - 17.

- Hardy, G H. and E. M. Wright. (1968). *An Introduction to the Theory Numbers*.
London : Oxford University Press.
- Heid, Kathleen M. (1983, April). "Characteristics and Special Needs of the Gifted Student in Mathematics," *Mathematics Teacher*. 76 (866) : 221 - 226.
- House, Peggy A. (1987). *Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12*.
Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Leveque, W T. (1969). *Studies in Number Theory Volume 6*. Michigan : University of Michigan.
- Ogilvie, E. (1973). *Gifted Children in Primary Schools*. London : Macmillan.
Education Ltd.
- Renzulli, Joseph S. (1981). *The Enrichment Triad Model : A Guide for Developing Defensible Programs for the Gifted and Talented*. Nethersfield, Conn :
Creative Learning Press.
- Tempest, N. (1974). *Teaching Clever Children*. London : Routledge.
- Testini , (1976). Gregory and Benchaporn Testini. *Number Theory*. Bangkok:
Ramkhamhaeng University Press.
- Wesley, Edgar Bruce. (1950). *Teaching Social Studies in High School*. Boston : B. C.
Health.
- Vassar, Ann. (1977). *Discovery and Nurturance of Giftedness in the Culturally Difference*. Reston, Va. : Council for Exceptional Children.



ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็มพร้อมคำตอบ



แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง การคอนกรูเอนซ์ในระบบจำนวนเต็มชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
เวลา 1 ชั่วโมง 30 คะแนน

.....

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบนี้เป็นข้อๆ ในแต่ละคำถามมีตัวเลือกให้ 4 ตัวเลือก
2. ในการตอบ เมื่อได้คำตอบตามที่ต้องการแล้ว ให้ทำเครื่องหมาย (×) ในช่องที่ตรงกับหมายเลขข้อคำตอบที่ต้องการในกระดาษคำตอบ เช่น ต้องการเลือกคำตอบ ข. เป็นคำตอบ ก็ให้ทำเครื่องหมายดังนี้

ข้อ.	ก.	ข.	ค.	ง.
0.		×		

3. ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ให้ทำเครื่องหมาย = ทับเครื่องหมาย × เดิมเสียก่อน แล้วทำการทำเครื่องหมาย × ในคำตอบใหม่ เช่น ต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ข. เป็นข้อ ค. ให้ทำดังนี้

ข้อ.	ก.	ข.	ค.	ง.
0.		≠	×	

4. ในการตอบแต่ละข้อห้ามทำเครื่องหมาย × เกิน 1 คำตอบ
5. ห้ามขีดเขียนข้อความใดๆ ลงในแบบทดสอบนี้

จุดประสงค์ที่ 1

ให้นักเรียนสามารถบอกบทนิยามและยกตัวอย่างของการคอนกรูเอนซ์ได้

1. กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม m เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดเป็นนิยามของการคอนกรูเอนซ์ในมอดุโล m

ก. $a \equiv m \pmod{b}$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a - b)$

ข. $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a - b)$

ค. $m \mid (a - b)$ ก็ต่อเมื่อ $a \equiv a \pmod{m}$

ง. $m \mid (a - b)$ ก็ต่อเมื่อ $b \equiv m \pmod{a}$

จุดประสงค์ที่ 2

ให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าจำนวนเต็มที่กำหนดให้คอนกรูเอนซ์กันหรือไม่ โดยใช้บทนิยามการคอนกรูเอนซ์กันหรือทฤษฎีบทที่ 1 ในการตรวจสอบ

2. ข้อต่อไปนี้เป็นข้อใดถูกต้อง

ก. $-15 \equiv 7 \pmod{3}$

ข. $20 \equiv -8 \pmod{5}$

ค. $-32 \equiv 0 \pmod{7}$

ง. $-18 \equiv 12 \pmod{6}$

จุดประสงค์ที่ 3

ให้นักเรียนสามารถหาจำนวนเต็มน้อยสุดที่ไม่เป็นลบ และคอนกรูเอนซ์กันกับจำนวนที่กำหนดให้ในมอดุโล m

3. ข้อใดเป็นจำนวนเต็มน้อยสุดไม่เป็นลบและคอนกรูเอนซ์กับ -40 ในมอดุโล 7

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จุดประสงค์ที่ 4

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กันข้อ 1-3 (สมบัติสะท้อน, สมบัติสมมาตร, สมบัติถ่ายทอด) และยกตัวอย่างประกอบ

4. การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติสะท้อน

ก. $10 \equiv 8 \pmod{2}$

ข. $5 \equiv 1 \pmod{4}$

ค. $10 \equiv 10 \pmod{6}$

ง. $12 \equiv 4 \pmod{8}$

5. การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติสมมาตร

ก. ถ้า $5 \equiv 15 \pmod{10}$ แล้ว

$10 \equiv 15 \pmod{5}$

ข. ถ้า $10 \equiv -6 \pmod{4}$ แล้ว

$-6 \equiv 4 \pmod{10}$

ค. ถ้า $-50 \equiv 15 \pmod{5}$ แล้ว

$-5 \equiv 50 \pmod{5}$

ง. ถ้า $16 \equiv 5 \pmod{11}$ แล้ว

$5 \equiv 16 \pmod{11}$

6. การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติถ่ายทอด

ก. กำหนด $-14 \equiv 8 \pmod{2}$

และ $16 \equiv -4 \pmod{2}$

แล้ว $-14 \equiv -4 \pmod{2}$

ข. กำหนด $15 \equiv -6 \pmod{7}$

และ $-6 \equiv 1 \pmod{7}$

แล้ว $15 \equiv 1 \pmod{7}$

ค. กำหนด $20 \equiv 4 \pmod{4}$

และ $24 \equiv -12 \pmod{4}$

แล้ว $20 \equiv -12 \pmod{4}$

ง. กำหนด $25 \equiv 0 \pmod{5}$

และ $10 \equiv 15 \pmod{5}$

แล้ว $25 \equiv 15 \pmod{5}$

จุดประสงค์ที่ 5

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กันข้อ 4 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณ จำนวนเต็ม กับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m)

7. กำหนด $20 \equiv 8 \pmod{4}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดได้มาจากที่กำหนดและเป็นไปตามสมบัติการบวกจำนวนเต็ม กับจำนวน ซึ่งคอนกรูเอนซ์กัน

ก. $28 \equiv 8 \pmod{4}$

ข. $28 \equiv 28 \pmod{12}$

ค. $28 \equiv 16 \pmod{4}$

ง. $28 \equiv -8 \pmod{12}$

8. กำหนด $36 \equiv -48 \pmod{12}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดได้มาจากที่กำหนดและเป็นไปตามสมบัติการบวกจำนวนเต็ม กับจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันด้วยจำนวนเต็ม

ก. $30 \equiv -42 \pmod{12}$

ข. $30 \equiv -45 \pmod{12}$

ค. $30 \equiv -48 \pmod{6}$

ง. $30 \equiv -54 \pmod{6}$

9. กำหนด $-10 \equiv 20 \pmod{5}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดได้มาจากที่กำหนดและเป็นไปตามสมบัติการบวกจำนวนเต็ม กับ จำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันด้วยจำนวนเต็มกับจำนวนซึ่งไม่คอนกรูเอนซ์กัน

ก. $-20 \equiv 40 \pmod{5}$

ข. $-20 \equiv 20 \pmod{5}$

ค. $-20 \equiv 40 \pmod{10}$

ง. $-20 \equiv 20 \pmod{10}$

จุดประสงค์ที่ 6

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กันข้อ 5-6 (สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วยจำนวนเต็มและการยกกำลังจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m ด้วยจำนวนเต็มบวกและยกตัวอย่างประกอบ)

10. กำหนด $25 \equiv -15 \pmod{4}$

โดยสมบัติของการตัดออกสำหรับการคูณกันด้วย 5 คือข้อใด

ก. $-5 \equiv 15 \pmod{4}$

ข. $5 \equiv -15 \pmod{4}$

ค. $5 \equiv -3 \pmod{4}$

ง. $-5 \equiv 3 \pmod{4}$

11. กำหนด $1 \equiv -7 \pmod{2}$

โดยสมบัติการยกกำลังจำนวนซึ่งคอนกรูเอนซ์กันด้วย 2 คือข้อใด

ก. $1 \equiv -49 \pmod{2}$

ข. $1 \equiv 49 \pmod{4}$

ค. $1 \equiv 49 \pmod{2}$

ง. $-1 \equiv -49 \pmod{4}$

12. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร 2^{10} ด้วย 5

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จุดประสงค์ที่ 7

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กันข้อ 7 (สมบัติการบวก ลบ และการคูณ การคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล m สองการคอนกรูเอนซ์กัน และยกตัวอย่างประกอบ)

13. กำหนด $30 \equiv 2 \pmod{7}$ และ $18 \equiv 4 \pmod{7}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติการบวกการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโลที่กำหนดให้สองการคอนกรูเอนซ์กัน

ก. $48 \equiv 6 \pmod{14}$

ข. $48 \equiv 20 \pmod{14}$

ค. $48 \equiv 6 \pmod{7}$

ง. $48 \equiv 20 \pmod{7}$

14. กำหนด $54 \equiv 36 \pmod{9}$ และ $-18 \equiv 27 \pmod{9}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติการลบการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโลที่กำหนดให้สองการคอนกรูเอนซ์กัน

ก. $36 \equiv 9 \pmod{9}$

ข. $72 \equiv 9 \pmod{9}$

ค. $72 \equiv -9 \pmod{9}$

ง. $36 \equiv -9 \pmod{9}$

15. กำหนด $20 \equiv 16 \pmod{4}$ และ $8 \equiv -4 \pmod{4}$

การคอนกรูเอนซ์กันในข้อใดเป็นไปตามสมบัติการคูณการคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโลที่กำหนดให้สองการคอนกรูเอนซ์กัน

ก. $160 \equiv 64 \pmod{16}$

ข. $160 \equiv -64 \pmod{14}$

ค. $160 \equiv 16 \pmod{16}$

ง. $160 \equiv -4 \pmod{4}$

จุดประสงค์ที่ 8

ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติการคอนกรูเอนซ์กันไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

16. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร 3^{10} ด้วย 5

- ก. 1
- ข. 2
- ค. 3
- ง. 4

17. การหารในข้อใดมีเศษเท่ากับ 1

- ก. 6^{20} หารด้วย 4
- ข. 8^{20} หารด้วย 5
- ค. 5^{21} หารด้วย 6
- ง. 9^{10} หารด้วย 7

18. ข้อใดถูกต้อง

- ก. $15 \mid (4^{200} - 1)$
- ข. $7 \mid (2^{60} + 1)$
- ค. $3 \mid (5^{25} - 1)$
- ง. $12 \mid (6^{72} + 1)$

19. ข้อใดถูกต้อง

- ก. $12 \nmid (8^{15} + 14^{10})$
- ข. $16 \nmid (5^{20} - 7^2)$
- ค. $9 \mid (14^{16} + 5)$
- ง. $11 \mid (15^{10} + 7^4)$

20. ข้อใดเป็นเศษจากการหาร $(7^{12} \times 3^{16})$ ด้วย 17

- ก. 10
- ข. 11
- ค. 12
- ง. 13

21. กำหนด $12 \mid (7^{15} - y)$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq y < 12$ ข้อใดเป็นค่าของ y

- ก. 6
- ข. 7
- ค. 8
- ง. 9

จุดประสงค์ 9

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 8 (วิธีการตัดเก้าออก) และยกตัวอย่างประกอบ

22. ข้อใดคือผลจากวิธีการตัดเก้าออก

- ก. $9 \mid 423$ เพราะ $9 \mid (4+2+3)$
- ข. $9 \mid (4-2+3)$ เพราะ $9 \mid 234$
- ค. $9 \mid 342$ เพราะ $9 \mid (3-4+2)$
- ง. $9 \mid 243$ เพราะ $9 \mid (2-4+3)$

23. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร 146, 783, 654 ด้วย 9

- ก. 8
- ข. 7
- ค. 6
- ง. 5

24. ถ้า 12,567, y41 หารด้วย 9 ลงตัว แล้วข้อใดเป็นเลขโดด y

- ก. 1
- ข. 2
- ค. 3
- ง. 4

จุดประสงค์ที่ 10

ให้นักเรียนสามารถบอกสมบัติข้อ 9 (วิธีการตัดสิบเอ็ดออก) และยกตัวอย่างประกอบ

25. กำหนด $11 \mid 45, 155, 253$ แสดงว่า

ก. $11 \mid (4+5+1+5+5+2+5+3)$

ข. $11 \mid (-4+5-1+5-5+2-5+3)$

ค. $11 \mid (4-5+1-5+5-5+2-3)$

ง. $11 \mid (-4-5-1-5-5-2-5-3)$

26. ข้อใดเป็นเศษที่ได้จากการหาร 3,578,167 ด้วย 11

ก. 10

ข. 9

ค. 4

ง. 3

27. ถ้า 3,4y6,213 หารด้วย 11 ลงตัว แล้วเลขโดด y คือข้อใด

ก. 6

ข. 5

ค. 4

ง. 3

จุดประสงค์ที่ 11

ให้นักเรียนสามารถนำสมบัติของการคอนกรูเอนซ์กันข้อ 8 หรือข้อ 9 (วิธีการตัดเก้าหรือสิบเอ็ดออก) ไปใช้ในการตรวจสอบผลการคำนวณได้

28. จงใช้ความรู้ในเรื่องวิธีการตัดเก้าออก ตรวจสอบว่าผลการคำนวณในข้อใดผิด

ก. $(5,012)^2 + (7,403)^2 = 79,924,553$

ข. $(145 \times 654 \times 98) - 60 = 154,889$

ค. $(7,485 \times 985 \times 9)^4 = (66,354,025)^4$

ง. $(4,789)^2 + 9,841,726 = 32,776,247$

29. จงใช้ความรู้ในเรื่องวิธีการตัดสิบเอ็ดออกตรวจสอบว่าผลการคำนวณในข้อใดผิด

ก. $(3,654)^2 = 13,351,716$

ข. $369 \times 741 = 283,429$

ค. $(1,458+3,587) \times 12 = 60,540$

ง. $(421)^3 = 74,618,461$

30. จงหาค่าของ เลขโดด y ที่สอดคล้องกับสมการ

$$7,172 \times 2,546 = 18,25y,912$$

ก. 0

ข. 3

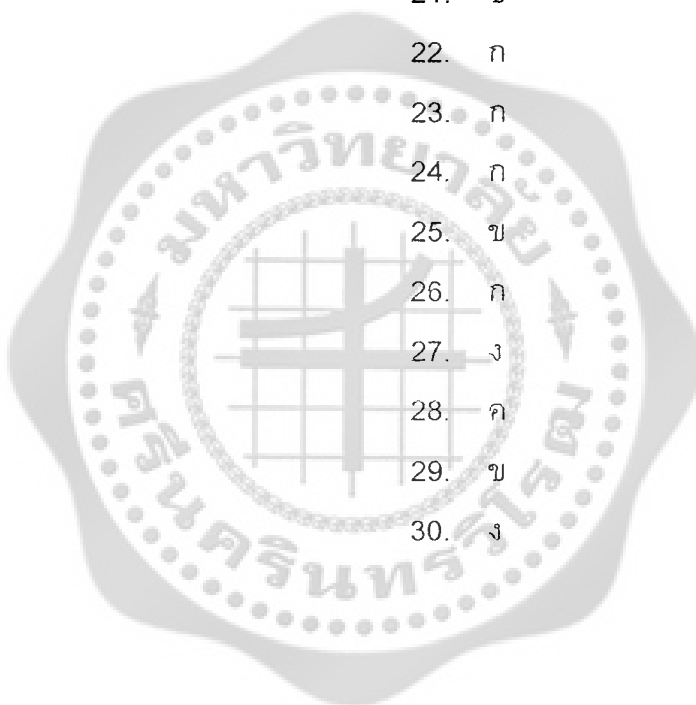
ค. 6

ง. 9



เฉลยคำตอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องคอนกรีตเสริมเหล็กในระบบจำนวนเต็ม

- | | |
|-------|-------|
| 1. ข | 16. ง |
| 2. ง | 17. ข |
| 3. ข | 18. ก |
| 4. ค | 19. ค |
| 5. ง | 20. ง |
| 6. ข | 21. ข |
| 7. ค | 22. ก |
| 8. ข | 23. ก |
| 9. ก | 24. ก |
| 10. ค | 25. ข |
| 11. ค | 26. ก |
| 12. ง | 27. ง |
| 13. ค | 28. ค |
| 14. ข | 29. ข |
| 15. ข | 30. ง |





ตาราง 5 คะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งไม่ใช่นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
จำนวน 15 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาค
ในระบบจำนวนเต็ม

เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	รวม
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15
2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	9
3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	10
4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	11
5	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	12
6	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	8
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	10
8	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	11
9	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	8
10	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	9
11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	12
12	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5
13	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	13
14	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	6
15	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	10
16	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	9
17	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	9
18	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
19	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
20	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7
21	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	11
22	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	12
23	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	10
24	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	8
25	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	9
26	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	8

ตาราง 5 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	รวม
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	10
28	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	11
29	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	10
30	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	6
รวม	30	27	27	24	21	21	18	18	18	15	15	15	10	10	8	



ตาราง 6 ค่า p ค่า q และ pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องบทเรียนเสริม
เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม โดยที่ p คือสัดส่วนของนักเรียนที่ทำแบบทดสอบ
ถูกต้องในข้อที่กำหนดต่อจำนวนนักเรียนทั้งหมด (15 คน) และ $q = 1 - p$

ข้อที่	P	q	pq
1.	1.00	0	0
2.	0.60	0.40	0.2400
3.	0.67	0.33	0.2211
4.	0.73	0.27	0.1971
5.	0.80	0.20	0.1600
6.	0.53	0.47	0.2491
7.	0.67	0.33	0.2211
8.	0.73	0.27	0.1971
9.	0.53	0.47	0.2491
10.	0.60	0.40	0.2400
11.	0.80	0.20	0.1600
12.	0.33	0.67	0.2211
13.	0.87	0.13	0.1131
14.	0.40	0.60	0.2400
15.	0.67	0.33	0.2211
16.	0.60	0.40	0.2400
17.	0.60	0.40	0.2400
18.	0.27	0.73	0.1971
19.	0.27	0.73	0.1971
20.	0.47	0.53	0.2491
21.	0.73	0.27	0.1971
22.	0.80	0.20	0.1600
23.	0.67	0.33	0.2211
24.	0.53	0.47	0.2491
25.	0.60	0.40	0.2400
26.	0.53	0.47	0.2491

ตาราง 6 (ต่อ)

ข้อที่	P	q	pq
27.	0.67	0.33	0.2211
28.	0.73	0.27	0.1971
29.	0.67	0.33	0.2211
30.	0.40	0.60	0.2400
$\sum pq = 6.2489$			

ตาราง 7 การคำนวณหาความเชื่อมั่น และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

X	f	fx	X ²	fx ²
30	1	30	900	900
27	2	54	729	1458
24	1	24	576	576
21	2	42	441	882
18	3	54	324	972
15	3	45	225	675
10	2	20	100	200
8	1	8	64	64
$\sum f = 15$		$\sum fx = 277$	$\sum fx^2 = 5727$	

ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{N \sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)} \\ &= \frac{15(5727) - (277)^2}{15(14)} \\ &= \frac{85905 - 76729}{210} \end{aligned}$$

$$S^2 = 4.370$$

$$S = 6.61$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR-20)

$$\begin{aligned} r_{tt} &= \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right] \\ &= \frac{30}{29} \left[1 - \frac{6.2489}{43.70} \right] \\ &= \frac{30}{29} (0.8570) \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

ตาราง 8 คะแนนรายข้อของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน ที่ได้จากการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
5	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
7	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
8	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
9	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
10	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
11	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
12	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
13	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
14	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
17	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
18	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
19	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
21	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
22	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
23	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
24	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
25	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0

ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
26	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
27	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
29	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
30	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
รวม	23	28	13	18	22	28	15	26	18	22	13	26	21	18	23



ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	16	17	18	19	20	21	20	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
3	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
10	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
11	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
12	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
13	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
14	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
15	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
16	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
17	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
18	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
20	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
21	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
22	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
23	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
24	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
25	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
26	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
28	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
29	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
30	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
รวม	21	23	19	17	21	19	24	19	23	12	11	26	12	23	11

ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	รวม
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	36
2	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	34
3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	22
4	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	38
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	34
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32
7	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	31
8	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	35
9	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	35
10	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	17
11	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	34
12	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	20
13	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	36
14	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	34
15	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	35
16	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	15
17	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	14
18	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	11
19	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9
20	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	12
21	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	13
22	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	37
23	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	21
24	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	29
25	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	25
26	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	33
27	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	28

ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ ข้อที่	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	รวม
28	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	25
29	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	29
30	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	7
รวม	19	25	18	12	23	21	23	11	20	19	



ตาราง 9 คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ได้จากการทำ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม

เลขที่	คะแนน (30)
1.	23
2.	28
3.	13
4.	18
5.	22
6.	28
7.	15
8.	26
9.	18
10.	22
11.	13
12.	26
13.	21
14.	18
15.	23
16.	21
17.	23
18.	19
19.	17
20.	21
21.	19
22.	24
23.	19
24.	23
25.	12
26.	11
27.	26

ตาราง 9 (ต่อ)

เลขที่	คะแนน (30)
28.	12
29.	23
30.	11
31.	19
32.	25
33.	18
34.	12
35.	23
36.	21
37.	23
38.	11
39.	20
40.	19

หมายเหตุ ในที่นี้มีนักเรียน 32 คนใน 40 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม หรือตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม หรือตั้งแต่ 15 คะแนนขึ้นไปใน 30 คะแนน

ตาราง 10 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียน
กลุ่มตัวอย่าง 40 คน จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องสมภาคในระบบ
จำนวนเต็ม

X	f	fx	X ²	fx ²
11	3	33	121	363
12	3	36	144	432
13	2	26	169	338
15	1	15	225	225
17	1	17	289	289
18	4	72	324	1296
19	5	95	361	1805
20	1	20	400	400
21	4	84	441	1764
22	2	44	484	968
23	7	161	529	3703
24	1	24	576	576
25	1	25	625	625
26	3	78	676	2028
28	2	56	784	1568
	$\sum f = 40$	$\sum fx = 786$		$\sum fx^2 = 16380$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{\frac{Nfx^2 - (fx)^2}{N(N-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{40(16380) - (786)^2}{40(39)}} \\
 &= \sqrt{\frac{655200 - 617796}{1560}} \\
 &= \sqrt{\frac{37404}{1560}} \\
 S &= 4.90
 \end{aligned}$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งใช้สถิติ z ทดสอบ (z- test for Population Proportion)

สมมติฐาน คือ $H : p \leq 0.50$

$H : p > 0.50$

สถิติที่ใช้ทดสอบ $z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{P(1-P)/N}}$

เมื่อ $\hat{P}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ต่อจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด 40 คน

$$\hat{P} = \frac{32}{40} = 0.80$$

p แทนสัดส่วนที่กำหนด หรือความน่าจะเป็นของสัดส่วนที่เกิดเหตุการณ์เท่ากับ 0.50

n แทนจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน

$$\begin{aligned}
 \text{แทนค่า } z &= \frac{0.80 - 0.50}{\sqrt{0.50(1 - 0.50) / 40}} \\
 &= \frac{0.30}{\sqrt{0.00625}} \\
 &= 3.79
 \end{aligned}$$

$$z_{.01} = 2.33$$

เพราะว่า $3.79 > 2.33$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องสมภาคในระบบจำนวนเต็ม เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ค
รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบบทเรียนเสริม และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่ตรวจบทเรียนเสริม

- | | |
|---|--|
| 1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ ไชยสังข์ | ภาควิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
| 2. รองศาสตราจารย์โสภภาพรรณ ทิพย์โยธา | ภาควิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิตยา ปภาพจน์ | ภาควิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย |
| 4. ดร.จรรยา ภูอุดม | หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนดอนเมืองจตุรจินดา
หมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา |
| 5. อาจารย์สุทิน พิทักษ์นรชน | |

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่ตรวจแบบทดสอบ

- | | |
|--|--|
| 1. รองศาสตราจารย์โสภภาพรรณ ทิพย์โยธา | ภาควิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| 2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิตยา ปภาพจน์ | ภาควิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย |
| 3. อาจารย์สุทิน พิทักษ์นรชน | หมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา |



ประวัติย่อผู้วิจัย



ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ	นายวุฒพล ประกอบผล
เกิดเดือนปีเกิด	วันที่ 10 ตุลาคม 2512
สถานที่เกิด	อำเภอพระสมุทรเจดีย์ สมุทรปราการ
สถานที่ปัจจุบัน	46 / 72 ถ. แจ่งวิวัฒน์ ต. บางตลาด อ.ปากเกร็ด จ. นนทบุรี 11120
ตำแหน่งหน้าที่การงาน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสิงห์ปทุมราษฎร์วิทยา ต.สวนพริกไทย อ.เมือง จ.ปทุมธานี
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2530	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปว.ช.) เอกช่างไฟฟ้า
พ.ศ. 2534	วิทยาลัยเทคนิคสมุทรปราการ(ปวช.) สมุทรปราการ ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปว.ส.) เอกไฟฟ้ากำลัง
พ.ศ. 2538	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพมหานคร กศ.บ. (เอกคณิตศาสตร์)
พ.ศ. 2544	มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช กรุงเทพมหานคร กศ.ม. (การมัธยมศึกษา การสอนคณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร