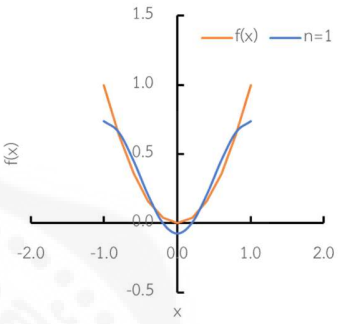
ฟังก์ชัน $f(x)=x^2,-1<x<1$

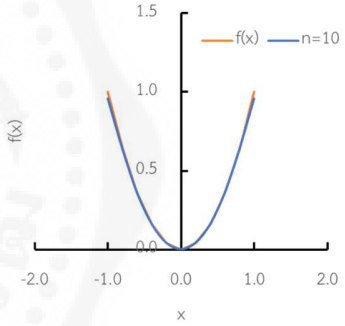
และ $f(x+2)=f(x)$ อนุกรมฟูเรียร์อนุกรมฟูเรียร์ของ

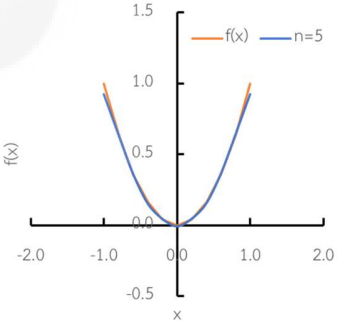
$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

CHE271 MATHEMATICS FOR CHEMICAL ENGINEER II

[Document subtitle]







คำนำ

วิชา วศค271 คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมเคมี 2 (CHE271 MATHEMATICS FOR CHEMICAL ENGINEER II) เป็นวัชาที่มีจำนวนหน่วยกิต 3 หน่วยกิต (3-0-6) โดยต้องเรียนวิชาคณ117 แคลคูลัสสำหรับวิศวกรรมศาสตร์ มาก่อน วิชานี้เป็นรายวิชาของหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเคมี ชุดวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมเคมี โดยมีคำอธิบายรายวิชา ดังนี้ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองสมการเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ การแปลงลาปลาซ ลำดับ อนุกรม การทดสอบด้วยปริพันธ์ การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ การทดสอบด้วยอัตราส่วน อนุกรมสลับ การลู่เข้าสัมบูรณ์ การกระจายทวินาม อนุกรมกำลัง สูตรเทย์เลอร์ ฟังก์ชันเป็นคาบ อนุกรมฟูเรียร์ ผลการแปลงฟูเรียร์ โดยมีจุดป**มุ่งหมายของรายวิชา ดังนี้**

1. สามารถใช้เทคโนโลยีในการสืบค้นและข้อมูลพื้นฐานทางสมบัติของสารสำหรับทำสมดุลมวล (ELO01)

2 สามารถสมดุลมวลโดยการนำเสนอในรูปแบบเอกสาร ปากเปล่า วิดีทัศน์ได้ (ELO02)

3 ใช้ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ (ELO03) สำหรับ

- 3.1. สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองได้
- 3.2. สามารถหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์
- 3.3. สามารถใช้วิธีการแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ได้
- 3.4. สามารถหาอนุกรมฟูเรียร์ ผลการแปลงฟูเรียได้
- 3.5. เข้าใจลำดับและอนุกรม การหาอนุกรมเทย์เลอร์
- 3.6 การใช้อนุกรมกำลังสำหรับหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์

4. สามารถทำงานของตนในฐานะผู้ร่วมทีมและผู้นำทีมเพื่อจัดทำรายงานสมดุลมวล (ELO02)

หนังสือประกอบรายวิชา วศค271 คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมเคมี 2 ได้รวบรวมเนื้อหามาจากหนังสือต่าง ๆ เพื่อประกอบการเรียนการสอนวิชานี้

สิทธินันท์ ท่อแก้ว

สารบัญ

คำนำ 1
สารบัญ 2
บทที่ 1 บทนำ 4
1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 4
1.2 คำนิยาม การจำแนกและคำศัพท์ 7
1.3 การบ้าน 12
1.4 บรรณานุกรม 14
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่ง 15
2.1 บทนำ 15
2.2 ความหมายของผลเฉลย 15
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ 17
2.4 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ 20
2.5 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง 24
2.6 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง 34
2.7 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี 36
2.8 แบบฝึกหัด 40
2.9 บรรณานุกรม 43
บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 45
3.1 บทนำ 45
3.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 46
3.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว 49
3.4 แบบฝึกหัด 80
3.5 บรรณานุกรม 82
บทที่ 4 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการแปลงลาปลาซ 83
4.1 บทนำ 83
4.2 การแปลงลาปลาซเบื้องต้น 83
4.3 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ 87

4.4 การแปลงลาปลาซสมการเชิงอนุพันธ์....92
4.5 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน....94
4.6 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน....95
4.7 การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ 103
4.8 แบบฝึกหัด 107
4.9 บรรณานุกรม.... 109
บทที่ 5 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร 110
5.1 บทนำ.... 110
5.2 สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง 110
5.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร 116
5.4 การหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง.... 128
5.5 แบบฝึกหัด 163
5.6 บรรณานุกรม.... 165
บทที่ 6 อนุกรมฟูเรียร์.... 166
6.1 บทนำ.... 166
6.2 ฟังก์ชันเป็นคาบ.... 166
6.3 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่.... 170
6.3 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π 173
6.4 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ 2L 183
6.5 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่.... 191
6.6 การกระจายครึ่งพิศัย (Half-range expansion).... 193
6.7 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์.... 202
6.8 การหาปริพันธ์นุกรมฟูเรียร์.... 207
6.9 แบบฝึกหัด 211
6.10 บรรณานุกรม 213

บทที่ 1 บทนำ

ในบทนี้อธิบายการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ในงานวิศวกรรมของในด้านต่าง ๆ โดยได้อธิบายแนวคิดการสร้างสมการพื้นฐานสำหรับการออกแบบ การจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หลักการพื้นฐานหรือกฎได้ถูกสร้างขึ้นมาเพื่ออธิบายพฤติกรรมของธรรมชาติ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพื่ออธิบานอัตราการเปลี่ยนแปลงที่สิ่งที่เกิดขึ้น โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาตร์ ทั้งที่อยู่ในรูปสมการพีชคณิตและอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) ตัวอย่างเช่น สมการสมดุลพลังงาน สมการสมดุลมวล เป็นต้น ตัวอย่างการประยุกต์แบบจำลองคณิตศาสตร์ เช่น การออกแบบโครงสร้างเครื่องบิน การออกแบบเรือ การถ่ายเทเครื่องถ่ายเทความร้อน การตรวจหาและพยากรณ์แผ่นดินไหว การแพร่กระจายคลื่น การควบคุมการบินของเครื่องบินและจรวด พยากรณ์อากาศ การอธิบายพฤติกรรมของระบบเศรษฐกิจ การกำหนดราคาของตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน การคาดการณ์และการจัดการการเก็บเกี่ยวของประชากรปลา เป็นต้น

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์

$y' = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y$ สมการการเปลี่ยนแปลงประชากร

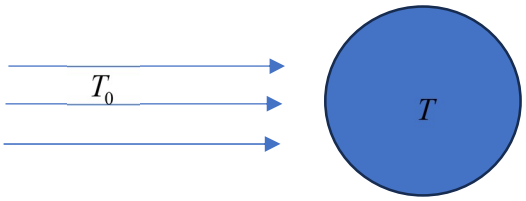
$my'' + \gamma y' + ky = 0$ สมการการเคลื่อนที่ของสปริง

$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ สมการการเคลื่อนที่ของเพนดูลัม

1.1.1 กฎการเย็นตัวของนิวตัน

กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) กล่าวว่า ถ้าวัตถุร้อนหรือเย็นกว่าสภาพแวดล้อม โดยรอบอุณหภูมิของวัตถุจะเข้าใกล้อุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม หากวัตถุมีอุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิสิ่งแวดล้อม อุณหภูมิของวัตถุจะมีค่าลดลง แต่ถ้าวัตถุมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิสิ่งแวดล้อมอุณหภูมิ อุณหภูมิของวัตถุจะมีค่าเพิ่มขึ้น จากกฎการเย็นตัวของนิวตันสามารถบอกได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุแปรผันตรงกับความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมกับอุณหภูมิของวัตถุ เมื่อกำหนดให้ $u(t)$ หมายถึงอุณหภูมิของวัตถุที่เวลา t และ T เป็นอุณหภูมิของวัตถุ (รูปที่ 1.1) เมื่อ $\frac{dT}{dt}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในวัตถุ เมื่อมีการพาหรือการนำความร้อนเกิดขึ้น เมื่อ T_0 คืออุณหภูมิสิ่งแวดล้อม k คือสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน ซึ่งสามารถเขียนเป็น (1-1) ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_0\right) \text{ หรือ } T' = -k\left(T - T_0\right) \quad (1\text{-}1)$$



รูปที่ 1.1 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ (T) กับเวลา (t)

ตัวอย่างที่ 1.1 กาแฟที่มีอุณหภูมิ 200 °F เทใส่ในถ้วยกาแฟ เมื่อทิ้งไว้เป็นเวลา 1 min และอุณหภูมิอากาศเท่ากับ 70 °F พบว่า กาแฟมีอุณหภูมิเหลือเป็น 190 °F จงหาว่าถ้าต้องการให้กาแฟมีอุณหภูมิเป็น 170 °F จะต้องปล่อยให้กาแฟเย็นลงเป็นเวลากี่นาที

วิธีทำ

จากสมการกฎการเย็นตัวของนิวตัน (1-1) ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_0\right) \quad (1\text{-}1)$$

ซึ่งสามารถอินทิเกรตสมการ (1-1) ได้เป็น (E1.1-1)

$$\int \frac{dT}{\left(T - T_0\right)} = -k\int dt$$

$$\ln\left(T - T_0\right) = -kt + C \quad (E1.1\text{-}1)$$

หรือ

$$T - T_0 = \exp(-kt + C) = C_0 \exp(-kt)$$

เมื่อแทนค่า เวลา 0 min กาแฟมีอุณหภูมิ 200 °F เพื่อหาค่า C_0

$$200 - 70 = C_0 \exp(-k \times 0) = C_0$$

$$C_0 = 130\ ^\circ\text{F}$$

เพื่อหาค่า k เมื่อแทนค่า เวลา 1 min กาแฟมีอุณหภูมิ 190 °F

$$190 - 70 = 130\exp(-k \times 1)$$

$$\exp(-k) = \frac{120}{130} = 0.9231$$

$$k = -\ln 0.9231 = 0.08\ \text{min}^{-1}$$

ดังนั้นสมการแสดงอุณหภูมิของกาแฟดังสมการ (E1.1-2)

$$T - 70 = 130\exp(-0.08t) \quad \text{(E1.1-2)}$$

ถ้าแทนอุณหภูมิของกาแฟเป็น 170°F

$$170 - 70 = 130\exp(-0.08t)$$

$$\exp(-0.08t) = \frac{100}{130} = 0.7692$$

$$-0.08t = \ln 0.7692 = -0.2624$$

$$t = \frac{-0.2624}{-0.08} = 3.28\,\text{min}$$

ดังนั้นถ้าต้องการให้กาแฟมีอุณหภูมิเป็น 170°F ต้องใช้เวลา 3 min 17 sec

1.1.2 การทำนายจำนวนประชากร (Population model)

การทำนายจำนวนประชากร เช่น การทำนายจำนวนประชากรของหนูนาในสวนผลไม้ เพื่อควบคุมจำนวนประชากรของหนู เกษตรกรได้ติดตั้งรังนก เพื่อให้นกฮูกมาทำรังและจับหนูนากินเป็นอาหาร ในกรณีที่ไม่มีนกฮูก อัตราการเพิ่มจำนวนของหนูนาแปรผันตรงกับจำนวนของหนูนา กำหนดให้ p หรือ $p(t)$ เป็นจำนวนประชากรของหนูนาที่เวลา t ซึ่งสามารถเขียนได้ตาม (1-2) และในกรณีที่มีนกฮูกเป็นผู้ล่า และมีอัตราในการจับกินหนูนาของนกฮูกเท่ากับ a ตัวต่อนาที ซึ่งจะได้เป็น (1-3)

$$\frac{dp}{dt} = rp \quad \text{(1-2)}$$

$$\frac{dp}{dt} = rp - a \quad \text{(1-3)}$$

เมื่อ r เป็นค่าคงที่ในการเกิด (min^{-1})

ตัวอย่างที่ 1.2 จำนวนประชากรหนูนาสามารถเขียนได้เป็น $\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$ ตัวต่อเดือน ถ้าจำนวนประชากรหนูนาเริ่มต้นเท่ากับ 850 ตัว จงหาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าไรจึงจะทำให้ประชากรหนูนาสูญพันธุ์

วิธีทำ

จากสมการ $\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$ สามารถอินทิเกรตได้เป็น (E1.2-1)

$$\frac{dp}{0.5p - 450} = dt$$

$$\int \frac{dp}{0.5p - 450} = \int \frac{dp}{p - 900} = \frac{1}{2}\int dt$$

$$\ln\left[p - 900\right] = \frac{t}{2} + c \quad \text{(E1.2-1)}$$

หรือ

$p-900=Ce^{t/2}$ หรือ $p=900+Ce^{t/2}$

โจทย์กำหนด จำนวนประชากรหนูเริ่มต้นเท่ากับ 850 ตัว

$850=900+Ce^{0/2}$

$C=850-900=-50$

$p=900-50e^{t/2}$

โจทย์ต้องการทราบว่าจะต้องใช้เวลาเท่าไรจึงจะทำให้ประชากรหนูนาสูญพันธุ์ หมายถึง จำนวนประชากรหนูนาเหลือเป็น 0 ตัว

$0=900-50e^{t/2}$

$\frac{t}{2}=\ln(\frac{900}{50})=2.89$

$t=2.89\times 2=5.78$ เดือน หรือ 5 เดือน 23 วัน

1.2 คำนิยาม การจำแนกและคำศัพท์

สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของหนึ่งหรือมากกว่าของฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระอย่างน้อยหนึ่งตัวแปร ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น สมการ (1-2)

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0) \qquad (1\text{-}2)$$

จากสมการ (1-2) เห็นได้ว่า T เป็นฟังก์ชันที่แปรตามตัวแปร t

จากนิยามสมการเชิงอนุพันธ์สามารถแบ่งประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ได้โดยอาศัย

1. จำนวนตัวแปรต้น (independent variables)
2. จำนวนฟังก์ชัน
3. อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์

1.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและย่อย (Ordinary and Partial Differential Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation, ODE) หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว ตัวอย่างดังสมการต่อไปนี้

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=g(t)$$

$$(\sin y)\frac{d^2y}{dt^2}=(1-y)\frac{dy}{dt}+y^2e^{-5y}$$

$$y^{(4)}+10y'''-4y'+2y=\cos t$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation, PDE) หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังต่อไปนี้

สมการความร้อน

$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ เมื่อ t และ x เป็นตัวแปรอิสระ

สมการคลื่น

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ เมื่อ t และ x เป็นตัวแปรอิสระ

สมการลาปลาซ (Laplace's equation)

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรอิสระ

1.2.2 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (system of differential equations) เป็นระบบที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการเดี่ยว (single equation) หลายสมการ และเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวแปรตามมากกว่าหนึ่งตัวและต่างก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระหนึ่งตัวเดียวกัน ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทั่วไปสามารถจำแนกระบบสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็น ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear differential equations) และระบบสมการไม่เชิงเส้น (system of nonlinear differential equations) การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นทำได้ยาก ในบางครั้งอาจหาผลเฉลยที่ชัดเจนไม่ได้ และบ่อยครั้งที่จำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์หาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยประมาณ ตัวอย่างเช่น สมการของ Lotka–Volterra predator–prey ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเหยื่อและจำนวนนักล่า ตามลำดับ เมื่อค่าคงตัว เมื่อ a α c และ γ เป็นค่าคงที่ได้จากการทดลองและขึ้นกับสายพันธุ์ที่กำลังศึกษา

1.2.3 อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (order) คืออันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ ดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ (degree) คือเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ โดยพิจารณาหลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ **เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก**

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

- $x^3\dfrac{d^3x}{dt^3}-(\sin x)\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^4=\dfrac{1}{x^2+1}$
- $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial u}{\partial t}-\sqrt{u}$
- $x^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^{1/3}=x^3y+\cos x$

วิธีทำ

$$x^3\frac{d^3x}{dt^3}-(\sin x)\frac{d^2x}{dt^2}+x\left(\frac{dx}{dt}\right)^4=\frac{1}{x^2+1}$$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ เท่ากับ 3 เนื่องจาก $\dfrac{d^3x}{dt^3}$ อันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์เท่ากับ 1 เนื่องจาก $\dfrac{d^3x}{dt^3}$ ยกกำลัง 1

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial u}{\partial t}-\sqrt{u}$$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ เท่ากับ 2 เนื่องจาก $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ อันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์เท่ากับ 2 เนื่องจาก $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ยกกำลัง 2

$$x^2\frac{d^2x}{dt^2}+x\left(\frac{dx}{dt}\right)^{1/3}=x^3y+\cos x\,.$$

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ เท่ากับ 2 เนื่องจาก $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ อันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์

เนื่องจากพจน์ $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^{1/3}$ ยกกำลัง $\dfrac{1}{3}$ ดังนั้นต้องทำให้เป็นจำนวนเต็มก่อน โดยการยกกำลัง 3 ทั้งสมการ

$$x^2\frac{d^2x}{dt^2}+x\left(\frac{dx}{dt}\right)^{1/3}=x^3y+\cos x$$

$$\left(x^2\frac{d^2x}{dt^2}+x\left(\frac{dx}{dt}\right)^{1/3}\right)^3=\left(x^3y+\cos x\right)^3$$

ดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์เท่ากับ 3 เนื่องจาก $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ยกกำลัง 3

1.2.4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (linear equation) สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปดังสมการ (1-4)

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t) \qquad (1\text{-}4)$$

และต้องเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. เป็นสมการเชิงอนุพันธ์มีตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เท่านั้น

2. เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

3. เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ เช่น $\sin y \quad e^{-y} \quad \sqrt{1+y^2}$ เป็นต้น

ส่วนสมการที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นถือว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear equation)

ตัวอย่างที่ 1.4 จงบอกว่าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น หรือ สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

1.4.1 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$

1.4.2 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$

1.4.3 $\dfrac{dy}{dx} = xy$

1.4.4 $\sqrt{\dfrac{dy}{dx}} = xy$

1.4.5 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

1.4.6 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$

1.4.7 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

1.4.8 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

วิธีทำ

1.4.1 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - x^3y = \cos x$ ซึ่งตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

1.4.2 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=x^3y+\cos x$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}-x^3y=\cos x$ ซึ่งไม่ตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) เนื่องจากมีพจน์ของ $y\frac{dy}{dx}$ ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

1.4.3 $\frac{dy}{dx}=xy$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $\frac{dy}{dx}-xy=0$ ซึ่งตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

1.4.4 $\sqrt{\frac{dy}{dx}}=xy$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-xy=0$ ซึ่งไม่ตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) เนื่องจากมีพจน์ของ $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ ซึ่งยกกำลัง $\frac{1}{2}$ ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

1.4.5 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-u=0$ ซึ่งตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

1.4.6 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=e^u$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-e^u=0$ ซึ่งไม่ตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) เนื่องจากมีพจน์ของ e^u อยู่ ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

1.4.7 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$ ซึ่งตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

1.4.8 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$ ซึ่งไม่ตรงกับรูปแบบสมการ (1.4) เนื่องจากมีพจน์ของ $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$ อยู่ (ผิดกฎข้อ 2) ดังนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น

1.3 การบ้าน

ข้อที่ 1 จงพิสูจน์ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ค่อไปนี้มีอันดับและดีกรีดังนี้

1.1 $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ มีอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ เท่ากับ 1 และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์เท่ากับ 2

1.2 $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{7}{3}} = 7\frac{d^2y}{dx^2}$ มีอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ เท่ากับ 2 และระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์เท่ากับ 3

แผนการสอนครั้งที่ 2

หัวข้อ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่ง (ครั้งที่ 2)

ผู้สอน ผศ. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

เวลา 3 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่งแบบต่างๆ

การจัดประสบการณ์การเรียนรู้

1. บอกวัตถุประสงค์และเนื้อหา 10 นาที
2. สอนบรรยายเนื้อหาในหัวข้อต่างๆ 150 นาที
3. ให้นิสิตซักถามปัญหา 20 นาที

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. Power point

การประเมินผล

ข้อสอบอัตนัยแสดงวิธีการทำ

หนังสืออ้างอิง

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

1.4 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่ง

2.1 บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่ง (differential equations of First order and First Degree) มีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (2-1)

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ หรือ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (2-1)

เมื่อ $M(x,y)$ $N(x,y)$ และ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่งสามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีต่อไปนี้ 1. สมการแบบแยกตัวแปรได้ (separable equations) 2. สมการเอกพันธุ์ (homogeneous equations) 3. สมการแม่นตรง (exact equations) และ 4. สมการเชิงเส้น (linear equations)

2.2 ความหมายของผลเฉลย

ผลเฉลย (solusion) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง ความสัมพันธ์ใด ๆ ของสมการที่ไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์แล้ว ทำให้สมการนั้นเป็นจริง ตัวอย่างเช่น ถ้า $y = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 2y' + y = 0$ แล้ว เมื่อแทนค่า $y = e^x$ $y' = e^x$ และ $y'' = e^x$ ลงในสมการอนุพันธ์ดังกล่าว พบว่า $e^x - 2e^x + e^x = 0$ เป็นจริง แสดงว่า $y = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

ถ้า $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการนี้บนช่วงเปิด I ถ้าแทนค่า $y = f(x)$ ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ ทำให้สมการนี้เป็นจริงทุกค่าของ x เมื่อ $x \in I$

ถ้า $g(x,y) = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ บนช่วงเปิด I ถ้า $y = f_1(x)$ บนช่วงเปิด I ได้อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันจาก ความสัมพันธ์ $g(x,y) = 0$ แล้วทำให้ $y = f_1(x)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของของสมการเชิงอนุพันธ์ $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ และ ความสัมพันธ์ของ $g(x,y) = 0$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ บนช่วงเปิด I

นี้โดย $f_1(x)$ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ บน ช่วง I

กำหนดให้ $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ หมายถึงผลเฉลยที่ประกอบด้วยตัวคงค่า n ค่า

กำหนดให้ $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ หมายถึงผลเฉลยที่ได้จากการแทนที่ค่าคงตัวลงในผลเฉลยทั่วไปด้วยค่าคงตัวที่ทราบค่าแน่นอนท n ค่า

ตัวอย่างที่ 2.1 จงแสดงว่า $y=\sin x-\cos x$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=0$ สำหรับทุกค่าของจำนวนจริง

วิธีทำ

ถ้า $y=\sin x-\cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=0$ ดังนั้น

$y'=\cos x+\sin x$ และ $y''=-\sin x+\cos x$

เมื่อนำไปแทนค่าลงในสมการอนุพันธ์ $y''+y=0$ ได้ดังนี้

$\left(-\sin x+\cos x\right)+\left(\sin x-\cos x\right)=0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้นสรุปได้ว่า $y=\sin x-\cos x$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=0$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงแสดงว่า $x^2+y^2=1$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายบนช่วงเปิด $\left(-1,1\right)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

วิธีทำ

ถ้า $x^2+y^2=1$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(1\right)$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ หรือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ซึ่งจะเห็นว่าตรงกับสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ที่โจทย์กำหนดมา

แต่สมการ $x^2+y^2=1$ พบว่าค่าของ $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ ดังนั้นค่าของ y มีได้ 2 ค่า ดังนี้ $y_1=\sqrt{1-x^2}$ และ $y_2=\sqrt{1-x^2}$ ซึ่งค่าของ x อยู่ในช่วง $\left(-1,1\right)$ ซึ่งไม่ได้เป็น สำหรับ x ทุกค่าของจำนวนจริง ดังนั้นจึงจัดเป็นผลเฉลยโดยปริยายบนช่วงเปิด $\left(-1,1\right)$

ถ้าแทน $y_1=\sqrt{1-x^2}$ ลงในสมการ $x^2+y^2=1$ พบว่า $x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=1$ และ

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{d\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{dx}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\left(-x^2\right)}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{y_1}$$

และถ้าแทน $y_2=-\sqrt{1-x^2}$ ลงในสมการ $x^2+y^2=1$ พบว่า $x^2+\left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2=1$ และ

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{d\left(-\sqrt{1-x^2}\right)}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d\left(-x^2\right)}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{-y_2}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $x^2+y^2=1$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ (Separable Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและดีกรีหนึ่งเป็นสมการที่สามารถเขียนให้รูปดังนี้

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=p(x)q(y)$$

โดยที่ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $q(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันโดยหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ

$$\frac{dy}{q(y)}=p(x)dx$$

$$\int\frac{dy}{q(y)}=\int p(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1-y^2}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1-y^2}$$

ทำการแยกพจน์ของ x และ y ให้อยู่คนละฝั่งของสมการ

$$(1-y^2)dy=x^2dx$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$\int(1-y^2)dy=\int x^2dx$$

$$y-\frac{y^3}{3}=\frac{x^3}{3}+C$$

หรือ

$3y-y^3=x^3+C_1$ เมื่อ $C_1=3C$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$ เมื่อ $y(0)=-1$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$$

ทำการแยกพจน์ของ x และ y ให้อยู่คนละฝั่งของสมการ

$$2(y-1)dy=(3x^2+4x+2)dx$$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$2\int(y-1)dy=\int(3x^2+4x+2)dx$$

$$2\left(\frac{y^2}{2}-y\right)=\frac{3x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x+C$$

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+C$$

เพื่อหาค่า C เมื่อโจทย์กำหนด $y(0)=-1$

$$(-1)^2-2(-1)=(0)^3+2(0)^2+2(0)+C$$

$$C=3$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3$$

$$y^2-2y-(x^3+2x^2+2x+3)=0$$

แก้สมการเพื่อหาค่า y

$$y=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-(x^3+2x^2+2x+3))}}{2(1)}$$

$$y=\frac{2\pm\sqrt{4+4(x^3+2x^2+2x+3)}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{1+(x^3+2x^2+2x+3)}}{2}$$

$$y=1\pm\sqrt{1+x^3+2x^2+2x+3}=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$$

จะเห็นได้ว่า ค่า y มีได้ 2 ค่า คือ $y=1+\sqrt{1+x^3+2x^2+2x+3}$ และ $y=1-\sqrt{1+x^3+2x^2+2x+3}$ แต่โจทย์กำหนดว่า $y(0)=-1$ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคือ $y=1-\sqrt{1+x^3+2x^2+2x+3}$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ เมื่อ $y(0)=-1$

วิธีทำ

$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$

ทำการแยกพจน์ของ x และ y ให้อยู่คนละฝั่งกันของสมการ

$\frac{dy}{y^3}=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{dy}{y^3}=x\left(1+x^2\right)^{-0.5}dx$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$\int\frac{dy}{y^3}=\int x\left(1+x^2\right)^{-0.5}dx$

$\int y^{-3}dy=\int x\left(1+x^2\right)^{-0.5}dx$

$-\frac{1}{2y^2}=\sqrt{1+x^2}+C$

จากโจทย์กำหนดให้ที่ $y(0)=-1$ เพื่อหาค่า C

$-\frac{1}{2(-1)^2}=\sqrt{1+(0)^2}+C$

$-\frac{1}{2}=\sqrt{1}+C$ ดังนั้น $C=-\frac{3}{2}$

จะได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$-\frac{1}{2y^2}=\sqrt{1+x^2}-\frac{3}{2}$

แก้สมการเพื่อหาค่า y

$\frac{1}{y^2}=3-2\sqrt{1+x^2}$

$y^2=\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

โจทย์กำหนดว่า $y(0)=-1$ ดังนั้น ผลเฉลยชัดแจ้งของสมการคือ $y=-\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$ และค่า x ต้องอยู่ระหว่างค่า $-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}}{2}$ จึงจะหาคำตอบของ y ได้

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(2x-4\right)$ เมื่อ $y(5)=0$

วิธีทำ

$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(2x-4\right)$

ทำการแยกพจน์ของ x และ y ให้อยู่คนละฝั่งกันของสมการ

$e^{y}dy = \left(2x-4\right)dx$

หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$\int e^{y}dy = \int \left(2x-4\right)dx$

$e^{y} = x^2 - 4x + C$

แทนค่า $y(5)=0$ เพื่อหาค่า C

$e^{0} = (5)^2 - 4(5) + C$ จะได้ $C = -4$

จะได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$e^{y} = x^2 - 4x - 4$

แก้สมการเพื่อหาค่า y

$\ln(e^{y}) = \ln(x^2 - 4x - 4)$

$y = \ln(x^2 - 4x - 4)$

ผลเฉลยชัดแจ้งของสมการคือ $y = \ln(x^2 - 4x - 4)$ และค่า x ต้องอยู่ระหว่างค่า $2\sqrt{2} < x < \infty$ จึงจะหาคำตอบของ y ได้

2.4 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ (Homogeneous Differential Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและมีดีกรีเท่ากับหนึ่ง ถ้าสามารถแทน $f\left(tx,ty\right) = t^{k}f\left(x,y\right)$ แล้วถือว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากับ k เมื่อสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $\frac{dy}{dx} = f\left(x,y\right)$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร $y = vx$ หรือ $x = vy$ โดยมีหลักการดังนี้

1. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ที่กำหนดมาเขียนฟังก์ชันในรูป $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ได้ ให้กำหนดให้ $y = vx$
2. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ที่กำหนดมาฟังก์ชันในรูป $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ได้ ให้กำหนดให้ $x = vy$

3. ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ที่กำหนดมาไม่อยู่ในรูปฟังก์ชันในรูป $f\left(\frac{y}{x}\right)$ หรือ $f\left(\frac{x}{y}\right)$ กำหนดให้ $y=vx$ หรือ $x=vy$ ขึ้นกับรูปแบบใดให้ความซับซ้อนน้อยกว่า จะทำให้สามารถหาผลเฉลยได้ง่ายกว่า

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $M\left(x,y\right)dx+N(x,y)dy=0$

จัดรูปสมการได้เป็น $\frac{dy}{dx}+\frac{N\left(x,y\right)}{M\left(x,y\right)}=0$

โดย $M\left(x,y\right)$ และ $N(x,y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน ทำให้สามารถจัดสมการได้ดังนี้

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{N\left(x,y\right)}{M\left(x,y\right)}$$

แทนค่าจะได้เป็น (2-2)

$$\frac{dy}{dx}+F\left(\frac{y}{x}\right)=0 \qquad (2\text{-}2)$$

เมื่อ $y=vx$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

แทนลงใน (2-2) ได้เป็น (2-3)

$$v+x\frac{dv}{dx}+F\left(v\right)=0 \qquad (2\text{-}3)$$

จัดรูปสมการแบบแยกตัวแปรได้ได้เป็นสมการ (2-4)

$$x\frac{dv}{dx}=-\left(v+F\left(v\right)\right)$$

$$\frac{dv}{v+F\left(v\right)}=-\frac{dx}{x} \qquad (2\text{-}4)$$

จากสมการ (2-4) สามารถหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการได้ เช่นเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้แล้วแทนค่า $v=\frac{y}{x}$ กลับลงไปในผลเฉลยอีกครั้ง

ตัวอย่างที่ 2.7 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่

วิธีทำ

แทน $f\left(tx,ty\right)$ ลงในฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{(tx)^2-\left(tx\right)\left(ty\right)+\left(ty\right)^2}{\left(tx\right)\left(ty\right)}$$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{(tx)^2-t^2xy+\left(ty\right)^2}{t^2xy}=\frac{t^2\left(x^2-xy+y^2\right)}{t^2xy}$$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(x^2-xy+y^2\right)}{xy}=t^0f\left(x,y\right)$$

ดังนั้น $f\left(x,y\right)=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 2.8 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=x\ln x-x\ln y$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่

วิธีทำ

แทน $f\left(tx,ty\right)$ ลงในฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=x\ln x-x\ln y$

$$f\left(tx,ty\right)=tx\ln\left(tx\right)-tx\ln\left(ty\right)$$

$$f\left(tx,ty\right)=tx\left(\ln\left(tx\right)-\ln\left(ty\right)\right)=tx\left(\ln t+\ln x-\ln t-\ln y\right)$$

$$f\left(tx,ty\right)=tx\left(\ln\left(tx\right)-\ln\left(ty\right)\right)=tx\left(\ln x-\ln y\right)$$

$$f\left(tx,ty\right)=tx\left(\ln x-\ln y\right)=tf\left(x,y\right)$$

ดังนั้น $f\left(x,y\right)=x\ln x-x\ln y$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากับ 1

ตัวอย่างที่ 2.9 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y}{x^3}$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่

วิธีทำ

แทน $f\left(tx,ty\right)$ ลงในฟังก์ชัน $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y}{x^3}$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(tx\right)^2+ty}{\left(tx\right)^3}$$

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(tx\right)^2+ty}{\left(tx\right)^3}=\frac{t^2x^2+ty}{t^3x^3}=\frac{tx^2+y}{t^2x^3}$$

$$f\left(tx,ty\right)\neq t^nf\left(x,y\right)$$

ดังนั้น $f\left(x,y\right)=\frac{x^2+y}{x^3}$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

ตัวอย่างที่ 2.10 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(y^3-x^3\right)dx+3xy^2dy=0$ จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์หรือไม่

วิธีทำ

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-y^3}{3xy^2}$ หรือ $f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{3xy^2}$

แทน $f(tx,ty)$ ลงในฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{3xy^2}$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^3-(ty)^3}{3(tx)(ty)^2}=\frac{t^3x^3-t^3y^3}{3txt^2y^2}=\frac{t^3(x^3-y^3)}{t^3(3xy^2)}=\frac{x^3-y^3}{3xy^2}$$

ดังนั้น $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{3xy^2}$ จัดเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ $\left(y^3-x^3\right)dx+3xy^2dy=0$ จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{x}$

วิธีทำ

เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ดังนั้นแทน $y=vx$ และ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{x}$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx+x}{x}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx+x}{x}=\frac{x(v+1)}{x}=v+1$$

$v+x\dfrac{dv}{dx}=v+1$ ดังนั้น $x\dfrac{dv}{dx}=1$

$$\int dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$v=\ln|x|+C=\ln|Cx|$$

แทนค่ากลับด้วย $v=\dfrac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}=\ln|Cx|$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y=x\ln|Cx|$ หรือ $y=x\ln Cx$ เมื่อ $C<0$ สำหรับ $x<0$ และเมื่อ $C>0$ สำหรับ $x>0$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$

วิธีทำ

เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ดังนั้นแทน $y=vx$ และ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2(vx)^4+x^4}{x(vx)^3}=\frac{2v^4x^4+x^4}{xv^3x^3}=\frac{2v^4+1}{v^3}$$

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^4+1}{v^3}$ ดังนั้น $x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^4+1}{v^3}-v=\frac{2v^4+1-v^4}{v^3}=\frac{v^4+1}{v^3}$

$$\frac{v^3}{v^4+1}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{v^3}{v^4+1}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln\left|v^4+1\right|=\ln|x|+C=\ln|Cx|$$

$\ln\left|v^4+1\right|=4\ln|Cx|$ หรือ $\ln\left(v^4+1\right)=\ln\left(Cx\right)^4$

$$v^4+1=(Cx)^4$$

แทนค่า $v=\frac{y}{x}$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^4+1=(Cx)^4$$

$y^4=C^4x^8-x^4=C_1x^8-x^4$ เมื่อ $C_1=C^4$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$ คือ $y^4=C^4x^8-x^4=C_1x^8-x^4$

2.5 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (Exact Differential Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถจัดรูปของ $M\left(x,y\right)dx+N(x,y)dy=0$ เมื่อ $M\left(x,y\right)$ และ $N(x,y)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(x,y)$

2.5.1 การทดสอบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงจะมีสมบัติดังต่อไปนี้ $\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}$

ตัวอย่างที่ 2.13 สมการเชิงอนุพันธ์ $\left(3x^2+y^2\right)dx+2xydy=0$ นี้จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(3x^2+y^2\right)dx+2xydy=0$

จะได้ $M\left(x,y\right)=3x^2+y^2$ และ $N\left(x,y\right)=2xy$

ดังนั้น

$$\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(3x^2+y^2\right)}{\partial y}=2y \text{ และ } \frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(2xy\right)}{\partial x}=2y$$

เนื่องจาก $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(3x^2+y^2\right)dx+2xydy=0$ จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 2.14 สมการเชิงอนุพันธ์ $ydx-xdy=0$ นี้จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $ydx-xdy=0$

จะได้ $M(x,y)=y$ และ $N(x,y)=-x$

ดังนั้น $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial y}=1$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(-x)}{\partial x}=-1$

ดังนั้น $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $ydx-xdy=0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

2.5.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จาก $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เมื่อ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ ทำให้มีผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง คือ $F(x,y)=C$

ดังนั้นถ้าอนุพันธ์ของสมการ $F(x,y)=C$ จะได้ $dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=0$

$dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

เมื่อเทียบสมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ พบว่า

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ และ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

หาปริพันธ์ของ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

$\partial F(x,y)=M(x,y)dx$

หาปริพันธ์

$\int\partial F(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ เมื่อ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันไม่เจาะจงของค่าคงที่

$F(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$

อนุพันธ์ $F(x,y)$ เทียบกับ y

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)$

เนื่องจาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

ดังนั้น

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$$

เพื่อหาค่า $g'(y)$ โดยจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

หาปริพันธ์ของ $g'(y)$ เทียบกับ y เพื่อหาค่า $g(y)$

$$g(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \right)dy$$

แทนค่า $g(y)$ จะได้เป็นสมการของผลเฉลยทั่วไป

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \right)dy = C$$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $\left(3x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ

เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังนั้น $M\left(x,y\right) = 3x^2 + y^2$ และ $N\left(x,y\right) = 2xy$

ขั้นที่ 1 หาค่าของ $F(x,y)$ จากหาปริพันธ์ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

$$F(x,y) = \int (3x^2 + y^2)dx + g(y) = x^3 + xy^2 + g(y)$$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ $F(x,y)$ เทียบกับ y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left(x^3 + xy^2 + g(y)\right) = 2xy + g'(y)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2xy$

ดังนั้น $2xy + g'(y) = 2xy$ หรือ $g'(y) = 0$

ดังนั้น $g(y) = C_1$ เมื่อ C_1 คือค่าคงตัวใดๆ

$$F(x,y) = x^3 + y^2x + g(y) = x^3 + y^2x + C_1$$

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงคือ $F(x,y) = C$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(3x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$ เท่ากับ $x^3 + y^2x = C$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง $\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+2y\right)dy=0$

วิธีทำ

$M\left(x,y\right)=3x^2+4xy$ และ $N\left(x,y\right)=2x^2+2y$

ขั้นที่ 1 หาค่าของ $F(x,y)$ จากการหาปริพันธ์ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

$F(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$

$F(x,y)=\int (3x^2+4xy)dx+g(y)$

$F(x,y)=x^3+2x^2y+g(y)$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ $F(x,y)$ เทียบกับ y

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{d}{dy}\left(x^3+2x^2y+g(y)\right)=2x^2+g'(y)$

เนื่องจาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=2x^2+2y$

ดังนั้น $2x^2+g'(y)=2x^2+2y$ หรือ $g'(y)=2y$

ดังนั้น $g(y)=\int 2ydy=y^2+C_1$ เมื่อ C_1 คือค่าคงตัวใดๆ

$F(x,y)=x^3+2x^2y+g(y)=x^3+2x^2y+y^2+C_1$

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงคือ $F(x,y)=C$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+2y\right)dy=0$ เท่ากับ $x^3+2x^2y+y^2=C$

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง $\frac{dy}{dx}=-\frac{y\cos x+2xe^y}{\sin x+x^2e^y-1}$

วิธีทำ

จัดรูปสมการใหม่ $\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy+\left(y\cos x+2xe^y\right)dx=0$

เมื่อ $M\left(x,y\right)=y\cos x+2xe^y$ และ $N\left(x,y\right)=\sin x+x^2e^y-1$

ดังนั้น

ขั้นที่ 1 หาค่าของ $F(x,y)$ หาปริพันธ์จาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

$F(x,y)=\int (y\cos x+2xe^y)dx+g(y)=y\sin x+x^2e^y+g(y)$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ของ $F(x,y)$ เมื่อเทียบกับ y

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{d}{dy}\left(y\sin x+x^2e^y+g(y)\right)=\sin x+x^2e^y+g'(y)$

เนื่องจาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=\cos x+2xe^y$

ดังนั้น $\sin x + x^2 e^y + g'(y) = \sin x + x^2 e^y - 1$ หรือ $g'(y) = -1$

ดังนั้น $g(y) = -\int dy = -y + C_1$ เมื่อ C_1 คือค่าคงตัวใดๆ

$F(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + g(y) = y\sin x + x^2 e^y - y + C_1$

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงคือ $F(x,y) = C$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(y\cos x + 2xe^y\right)dx + \left(\sin x + x^2 e^y - 1\right)dy = 0$ เท่ากับ $y\sin x + x^2 e^y - y = C$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง $\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - x^2\sin y - y\right)dy = 0$ เมื่อ $y(0) = 2$

วิธีทำ

เนื่องจาก $M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y$ และ $N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$

ขั้นที่ 1 หาค่าของ $F(x,y)$ จากการหาปริพันธ์ $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$F(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)dx + g(y) = x^2\cos y + x^3 y + g(y)$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ $F(x,y)$ เทียบกับ y

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \dfrac{d}{dy}\left(x^2\cos y + x^3 y + g(y)\right) = -x^2\sin y + x^3 + g'(y)$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$

ดังนั้น $-x^2\sin y + x^3 + g'(y) = x^3 - x^2\sin y - y$ หรือ $g'(y) = -y$

ดังนั้น $g(y) = -\int y dy = -\dfrac{y^2}{2} + C_1$ เมื่อ C_1 คือค่าคงตัวใดๆ

$F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + g(y) = x^2\cos y + x^3 y - \dfrac{1}{2}y^2 + C_1$

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงคือ $F(x,y) = C$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - x^2\sin y - y\right)dy = 0$ เท่ากับ

$x^2\cos y + x^3 y - \dfrac{1}{2}y^2 = C$

เนื่องจาก $y(0) = 2$ แทนค่าลงใน $x^2\cos y + x^3 y - \dfrac{1}{2}y^2 = C$ เพื่อหาค่า C

$(0)^2\cos 2 + (0)^3 2 - \dfrac{2^2}{2} = C$

ดังนั้น $C = -2$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(y\cos x + 2xe^y\right)dx + \left(\sin x + x^2 e^y - 1\right)dy = 0$ เท่ากับ

$x^2\cos y + x^3 y - \dfrac{1}{2}y^2 = -2$ เมื่อ $y(0) = 2$

2.5.3 ตัวประกอบอินทิเกรต

สมการเชิงอนุพันธ์บางสมการสามารถเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้โดยการคูณด้วยตัวประกอบอินทิเกรต (Integration factor) หรือ $I(x,y) \neq 0$

สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เมื่อคูณด้วยตัวประกอบอินทิเกรต $I(x,y)$ ดังสมการ

$I(x,y)M(x,y)dx + I(x,y)N(x,y)dy = 0$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

$$\frac{\partial I(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial I(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

หาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่

$$M(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} + I(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} + I(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$M(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} = I(x,y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

ตัวประกอบอินทิเกรต $I(x,y)$ สามารถแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ $I(x,y)$ เป็นฟังก์ชันกับ x อย่างเดียว หรือ $I(x,y)$ เป็นฟังก์ชันกับ y อย่างเดียว

กรณี 1 กำหนดให้ $I(x,y)$ เป็นฟังก์ชันกับ x ดังนั้นสามารเขียนตัวประกอบอินทิเกรตได้เป็น $I(x)$

ดังนั้น $\frac{\partial I(x)}{\partial y} = 0$ และ $\frac{\partial I(x)}{\partial x} = \frac{dI(x)}{dx}$ ทำให้ $0 - N(x,y)\frac{dI(x)}{dx} = I(x)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{1}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

ถ้ากำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$ ดังนั้น $\frac{1}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx} = f(x)$

หาปริพันธ์เพื่อหาค่า $I(x)$

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int f(x)dx$$

$\ln I(x) = \int f(x)dx$ หรือ $I(x) = e^{\int f(x)dx}$

กรณี 2 กำหนดให้ $I(x,y)$ เป็นฟังก์ชันกับ y ดังนั้นสามารเขียนตัวประกอบอินทิเกรตได้เป็น $I(y)$

ในกรณีนี้พบว่า $\frac{\partial I(y)}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial I(y)}{\partial y} = \frac{dI(y)}{dy}$ ดังนั้นสมการจะเป็น

$$M(x,y)\frac{dI(y)}{dy}-0=I(y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

จัดรูปสมการใหม่

$$M(x,y)\frac{dI(y)}{dy}=I(y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$\frac{1}{I(y)}\frac{dI(y)}{dy}=\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

กำหนดให้ $g(y)=\dfrac{1}{M(x,y)}\left[\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$

หาปริพันธ์เพื่อหาค่า $I(y)$

$$\int\frac{dI(y)}{I(y)}=\int g(y)dy$$

$\ln I(y)=\int g(y)dy$ หรือ $I(y)=e^{\int g(y)dy}$

สำหรับการหาผลเฉลยสามารถใช้วิธีการหาแบบเดียวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาตัวประกอบอินทิเกรตของ $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$ เพื่อเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

วิธีทำ

เมื่อ $M(x,y)=3xy+y^2$ และ $N(x,y)=x^2+xy$

กรณี 1 เมื่อตัวประกอบอินทิเกรต $I(x)$ เป็นฟังก์ชันกับ x

$$f(x)=\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$$

เมื่อ $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial(3xy+y^2)}{\partial y}=3x+2y$ และ $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial(x^2+xy)}{\partial x}=2x+y$

ดังนั้น $f(x)=\dfrac{1}{x^2+xy}[(3x+2y)-(2x+y)]=\dfrac{1}{x^2+xy}[x+y]=\dfrac{1}{x}$

$$I(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตของ $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$ คือ x

กรณี 2 เมื่อตัวประกอบอินทิเกรต $I(y)$ เป็นฟังก์ชันกับ y

$$g(y)=\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

เมื่อ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(3xy+y^2\right)}{\partial y}=3x+2y$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2+xy\right)}{\partial x}=2x+y$

ดังนั้น $g(y)=\frac{1}{3x+2y}\left[(2x+y)-(3x+2y)\right]=\frac{1}{3x+2y}\left[-x-y\right]=-\frac{x+y}{3x+2y}$

$I(y)=e^{\int g(y)dy}$

ฟังก์ชันของ $g(y)$ เมื่อนำไปหาปริพันธ์พบว่าทำได้ยาก ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตของ $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$ จึงเลือกใช้ตัวประกอบอินทิเกรต $I(x)$ เป็นฟังก์ชันกับ x

ตัวอย่างที่ 2.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$ เมื่อใช้ตัวประกอบอินทิเกรต

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 2.19 ตัวประกอบอินทิเกรต $I(x)=x$ ดังนั้น $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$ ได้เป็น

$$x\left(3xy+y^2\right)dx+x\left(x^2+xy\right)dy=0$$

$$\left(3x^2y+xy^2\right)dx+\left(x^3+x^2y\right)dy=0$$

เมื่อ $M(x,y)=3x^2y+xy^2$ และ $N(x,y)=x^3+x^2y$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(3x^2y+xy^2\right)}{\partial y}=3x^2+2xy$ และ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^3+x^2y\right)}{\partial x}=3x^2+2xy$

ดังนั้น $\left(3x^2y+xy^2\right)dx+\left(x^3+x^2y\right)dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ขั้นที่ 1 หาค่าของ $F(x,y)$ จากการหาปริพันธ์ $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$

$$F(x,y)=\int(3x^2y+xy^2)dx+g(y)=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+g(y)$$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์ $F(x,y)$ เทียบกับ y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{d}{dy}\left(x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+g(y)\right)=x^3+x^2y+g'(y)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=x^3+x^2y$

ดังนั้น $x^3+x^2y+g'(y)=x^3+x^2y$ หรือ $g'(y)=0$

ดังนั้น $g(y)=\int 0dy=C_1$ เมื่อ C_1 คือค่าคงตัวใดๆ

$$F(x,y)=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+g(y)=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+C_1$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรงคือ $F(x,y)=C$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$ เท่ากับ $x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=C$

ในการหาตัวประกอบอินทิเกรตอาจจะใช้วิธีสังเกตกลุ่มเทอม โดยการจัดกลุ่มเทอมดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างของตัวประกอบอินทิเกรต

กลุ่มเทอม	ตัวประกอบอินทิเกรต	ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{-xdy+ydx}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy-ydx}{xy}=d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$
$ydx+xdy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy+ydx}{xy}=d\left(\ln xy\right)$
$ydx+xdy$	$\frac{1}{(xy)^n},n>1$	$\frac{ydy+xdx}{(xy)^n}=d\left(-\frac{1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right)$
$ydx+xdy$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$
$ydx+xdy$	$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^n},n>1$	$\frac{ydy+xdx}{\left(x^2+y^2\right)^n}=d\left(-\frac{1}{2(n-1)\left(x^2+y^2\right)^{n-1}}\right)$

ตัวอย่างที่ 2.21 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $xdy+(1-y-x^2)dx=0$ เมื่อใช้ตัวประกอบอินทิเกรต

วิธีทำ

จากตารางที่ 2.1 จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น $xdy-ydx+(1-x^2)dx=0$ ซึ่งเทอม $xdy-ydx$ สามารถใช้ตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $\frac{1}{x^2}$ ดังนั้น

$$\left(\frac{xdy-ydx}{x^2}\right)+\frac{(1-x^2)dx}{x^2}=0$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{(1-x^2)dx}{x^2}=0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{(1-x^2)dx}{x^2}=-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

หาปริพันธ์

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right)=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$\frac{y}{x}=x+\frac{1}{x}+C$ หรือ $y=x^2+1+Cx$

ผลเฉลยทั่วไปของ $xdy+(1-y-x^2)dx=0$ คือ $y=x^2+1+Cx$

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(y-xy^2)dx+(x+x^2y^2)dy=0$ เมื่อใช้ตัวประกอบอินทิเกรต

วิธีทำ

จากตารางที่ 2.1 จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น $ydx-xy^2dx+xdy+x^2y^2dy=0$ ซึ่งเทอม $xdy+ydx$ สามารถใช้ ตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $\frac{1}{xy}$ ดังนั้น

$\frac{ydx+xdy}{xy}-\frac{xy^2}{xy}dx+\frac{x^2y^2}{xy}dy=0$ หรือ $\frac{ydx+xdy}{xy}-ydx+xydy=0$ ซึ่งยังไม่เป็นรูปแบบที่หาปริพันธ์ได้

ดังนั้นเปลี่ยน ตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $\frac{1}{(xy)^2}$

$\frac{ydx+xdy}{(xy)^2}-\frac{xy^2}{(xy)^2}dx+\frac{x^2y^2}{(xy)^2}dy=0$ หรือ $\frac{ydx+xdy}{(xy)^2}-\frac{1}{x}dx+dy=0$

$d\left(-\frac{1}{(2-1)(xy)^{2-1}}\right)-\frac{1}{x}dx+dy=0$ หรือ $d\left(\frac{1}{xy}\right)=-\frac{1}{x}dx+dy$

หาปริพันธ์

$$\int d\left(\frac{1}{xy}\right)=-\int\frac{1}{x}dx+\int dy$$

$$\frac{1}{xy}=-\ln|x|+y+C$$

ผลเฉลยทั่วไปของ $(y-xy^2)dx+(x+x^2y^2)dy=0$ คือ $\frac{1}{xy}=-\ln|x|+y+C$

2.6 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง (Linear First Order Differential Equations) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปดัง (2-5)

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x) \qquad (2\text{-}5)$$

เมื่อหาร (2-5) ด้วย $a(x)$ เมื่อ $a(x)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y=\frac{c(x)}{a(x)}$$

กำหนดให้ $p(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$ และ $q(x)=\frac{c(x)}{a(x)}$ ดังนั้น (2-5) ได้เป็น (2-6)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (2\text{-}6)$$

จัดรูป (2-6) ใหม่ได้เป็น (2-7)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y-q(x)=0 \qquad (2\text{-}7)$$

รูปแบบ (2-7) เหมือนกับรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถหาได้ด้วยวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้

$$dy+\left[p(x)y-q(x)\right]dx=0$$

เมื่อ $M(x,y)=p(x)y-q(x)$ และ $N(x,y)=1$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(p(x)y-q(x)\right)}{\partial y}=p(x) \text{ และ } \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(1)}{\partial x}=0$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ ซึ่งไม่จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังนั้นจำเป็นต้องใช้ตัวประกอบอินทิเกรต $I(x)$ เมื่อ $f(x)=\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$

เมื่อ $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=p(x)$ $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0$ และ $\frac{d}{dy}I(x)=0$

$$f(x)=\frac{1}{1}\left[p(x)-0\right]=p(x)$$

ดังนั้น

$$I(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int p(x)dx}$$

เมื่อนำตัวประกอบอินทิเกรตไปคูณในสมการ $dy+\left[p(x)y-q(x)\right]dx=0$

$e^{\int p(x)dx}dy + e^{\int p(x)dx}\left[p(x)y - q(x)\right]dx = 0$ หรือ $e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}\left[p(x)y - q(x)\right] = 0$

กระจายเทอมและย้ายข้างสมการ

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

เมื่อ $\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)y$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}q(x) \text{ หรือ } d\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = e^{\int p(x)dx}p(x)ydx$$

หาปริพันธ์

$$\int d\left(e^{\int p(x)dx}y\right) = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

$$y = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right) \text{ หรือ } y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ คือ

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.23 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $xy' + 2y = 4x^2$ เมื่อ $y(1) = 2$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $x\frac{dy}{dx} + 2y - 4x^2 = 0$

ปรับสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y - 4x = 0$$

เมื่อ $p(x) = \frac{2}{x}$ และ $q(x) = 4x$ และมีผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right)$

โดย

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{2}{x}dx}4xdx + C\right) = e^{-\int 2\ln x}\left(\int e^{2\ln x}4xdx + C\right)$$

$$y = e^{\int \ln x^{-2}}\left(\int e^{\ln x^2}4xdx + C\right) = x^{-2}\left(\int x^2 4xdx + C\right) = x^{-2}\left(\int 4x^3dx + C\right) = x^{-2}\left(x^4 + C\right)$$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $y(1)=2$ ดังนั้นค่า C หาได้ดังนี้

$$2=1^2+\frac{C}{1^2}$$

$$C=2-1=1$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น $xy'+2y=4x^2$ เท่ากับ $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

ตัวอย่างที่ 2.24 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น อันดับหนึ่ง $y'+\left(\frac{2x+1}{x}\right)y=e^{-2x}$

วิธีทำ

จัดรูปแบบ $\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x}$ ให้ตรงกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx}+p(x)y-q(x)=0$ ดัง (E2.24-1)

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x+1}{x}\right)y-e^{-2x}=0 \qquad \text{(E2.24-1)}$$

เมื่อ $p(x)=\frac{2x+1}{x}$ และ $q(x)=e^{-2x}$ และมีผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)$$

$$\int p(x)dx=\int\frac{2x+1}{x}dx=\int 2dx+\int\frac{dx}{x}=2x+\ln x$$

$$y=e^{-(2x+\ln x)}\left(\int e^{(2x+\ln x)}e^{-2x}dx+C\right)$$

เมื่อ $e^{-(2x+\ln x)}=e^{-2x-\ln x}=e^{-2x}e^{-\ln x}=e^{-2x}e^{\ln x^{-1}}=e^{-2x}x^{-1}=\frac{1}{xe^{2x}}$ และ $e^{(2x+\ln x)}=xe^{2x}$

$$y=\frac{1}{xe^{2x}}\left(\int xe^{2x}e^{-2x}dx+C\right)=\frac{1}{xe^{2x}}\left(\int xdx+C\right)$$

$$y=\frac{1}{xe^{2x}}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\left(\frac{x}{2}+\frac{C}{x}\right)e^{-2x}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $y'+(\frac{2x+1^2}{x})y=e^{-2x}$ เท่ากับ $y=\left(\frac{x}{2}+\frac{C}{x}\right)e^{-2x}$

2.7 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี (Bernoulli Equations) เป็นสมการเชิงอนพันธ์อันดับหนึ่งที่มีรูปแบบเฉพาะและสามารถเขียนในรูปทั่วไปดังสมการ (2-8) และสามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)y^n \qquad (2\text{-}8)$$

เมื่อหาร (2-8) ด้วย $a(x)$ และ $a(x)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y=\frac{c(x)y^n}{a(x)} \qquad (2\text{-}9)$$

กำหนดให้ $p(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$ และ $q(x)=\frac{c(x)}{a(x)}$ ดังนั้น (2-9) ได้เป็น (2-10)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \qquad (2\text{-}10)$$

หาร (2-10) ด้วย y^n ได้เป็น (2-11)

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}-q(x)=0 \qquad (2\text{-}11)$$

กำหนดให้ $v=y^{1-n}$ ดังนั้น $\frac{dv}{dx}=\frac{d\left(y^{1-n}\right)}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{dy}{dx}=\frac{y^n}{1-n}\frac{dv}{dx}$

แทนลงใน (2-11)

$$y^{-n}\frac{y^n}{1-n}\frac{dv}{dx}+p(x)y^{1-n}-q(x)=0$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+p(x)v-q(x)=0$$

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)\,p(x)v-(1-n)q(x)=0 \qquad (2\text{-}12)$$

ถ้าแทน $P(x)=(1-n)\,p(x)$ และ $Q(x)=(1-n)q(x)$ ใน (2-12) พบว่าเป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น อันดับหนึ่ง ดัง (2-13)

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x) \qquad (2\text{-}13)$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $v=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C\right)$ เมื่อแทนค่าของ $v=y^{1-n}$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี

ตัวอย่างที่ 2.25 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี $y'+y=xy^3$

วิธีทำ

จัดรูปแบบให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี $y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}-q(x)=0$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+y^{-2}-x=0$$

เมื่อ $n=3$ ดังนั้น $v=y^{1-3}=y^{-2}$

$\frac{dv}{dx}=\frac{d\left(y^{1-n}\right)}{dx}=(1-3)y^{-3}\frac{dy}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}y^{3}\frac{dv}{dx}$

แทนค่าลงในสมการ $y^{-3}\frac{dy}{dx}+y^{-2}-x=0$ ให้อยู่ในรูปของ v เมื่อ $v=y^{-2}$

$$\left(y^{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}y^{3}\frac{dv}{dx}\right)+y^{-2}=x$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+v-x=0$$

$$\frac{dv}{dx}-2v+2x=0 \qquad \text{(E2.25-1)}$$

จะเห็นว่า (E2.25-1) เป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง ดังนั้นผลเฉลยหาได้จาก

$v=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C\right)$ เมื่อ $P(x)=-2$ และ $Q(x)=-2x$

ดังนั้น $\int P(x)dx=\int -2dx=-2x$

$$v=e^{-(-2x)}\left(\int e^{-2x}(-2x)dx+C\right)=e^{2x}\left(\int -2xe^{-2x}dx+C\right) \qquad \text{(E2.25-2)}$$

$$\int -2xe^{-2x}dx=xe^{-2x}-\int\left(e^{-2x}dx\right)=xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C \qquad \text{(E2.25-3)}$$

แทนค่า (E2.25-3) ลงใน (E2.25-2)

$$v=e^{2x}\left(xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C\right)=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$$

แทนค่า $v=y^{-2}$

$$y^{-2}=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $y'+y=xy^{3}$ คือ $y^{-2}=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$

ตัวอย่างที่ 2.26 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี $y'+y=x\sqrt{y}$

วิธีทำ

จัดรูป $y'+y=x\sqrt{y}$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี $y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}-q(x)=0$

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dx}+y^{1/2}-x=0$$

เมื่อ $n=0.5$ ดังนั้น $v=y^{1-0.5}=y^{0.5}$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d\left(y^{0.5}\right)}{dx}=0.5y^{-0.5}\frac{dy}{dx} \qquad \text{(E2.26-1)}$$

จัดรูป (E2.26-1) ใหม่ดัง (E2.26-2)

$$\frac{dy}{dx} = 2y^{0.5}\frac{dv}{dx} = 2v\frac{dv}{dx} \qquad \text{(E2.26-2)}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ ในรูปของ $\frac{dv}{dx}$ ลงในสมการ $y^{-1/2}\frac{dy}{dx} + y^{1/2} - x = 0$

$$y^{-1/2}\left(2v\frac{dv}{dx}\right) + y^{1/2} - x = 0$$

หรือ

$$v^{-1}\left(2v\frac{dv}{dx}\right) + v - x = 0 \text{ หรือ } 2\frac{dv}{dx} + v - x = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \qquad \text{(E2.26-3)}$$

จะเห็นว่า (E2.26-3) เป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเชิงเส้น ดังนั้นผลเฉลยหาได้จาก

$$v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)$$

เมื่อ $P(x) = \frac{1}{2}$ และ $Q(x) = \frac{1}{2}x$

$$\int P(x)dx = \int \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}$$

แทนค่า

$$v = e^{-0.5x}\left(\int e^{0.5x}\frac{1}{2}xdx + C\right) \qquad \text{(E2.26-4)}$$

$$\int 0.5xe^{0.5x}dx = xe^{0.5x} - \int\left(e^{0.5x}dx\right) = xe^{0.5x} - 2e^{0.5x} + C \qquad \text{(E2.26-5)}$$

แทนค่า (E2.26-5) ลงใน (E2.26-4)

$$v = e^{-0.5x}\left(xe^{0.5x} - 2e^{0.5x} + C\right) = x - 2 + Ce^{-0.5x}$$

แทนค่า $v = y^{-0.5}$

$$y^{-0.5} = x - 2 + Ce^{-0.5x}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $y' + y = x\sqrt{y}$ คือ $y^{-0.5} = x - 2 + Ce^{-0.5x}$

2.8 แบบฝึกหัด

ข้อที่ 2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้

1. $y' = \dfrac{x^4}{y}$
2. $y' = \dfrac{7x^2 - 1}{7 + 5y}$
3. $y' = \left(\sin^2 2x\right)\left(\cos^2 y\right)$
4. $yy' = \left(x + xy^2\right)e^{x^2}$
5. $y' = \dfrac{x^2 + e^{-x}}{y^2 - e^{y}}$
6. $y' = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$
7. $y' = 4\sqrt{xy}$
8. $y' = x\left(y - y^2\right)$

ข้อที่ 2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์

1. $\left(y + xe^{x/y}\right)y' = ye^{x/y}$
2. $y' = \dfrac{y^4 + 2xy^3 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{2x^2y^2 - 2x^3y - 2x^4}$
3. $xy' = y + 2x^3 \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ เมื่อให้ $y = vx$
4. $y' = \left(y + 4x\right)^2$ เมื่อให้ $y + 4x = v$
5. $xy' = x + y$ เมื่อให้ $y = vx$
6. $xy' = y + 3x^4 \cos\left(y / x\right)$ เมื่อ $y(1) = 0$
7. $y' = \left(x + y - 2\right)^2$ เมื่อ $y(0) = 2$
8. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ เมื่อ $y(2) = 1$

ข้อที่ 2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

1. $\left(x^2 + xy - y^2\right)dx + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 2xy\right)dy = 0$
2. $ye^{xy}dx + \left(xe^{xy} + \sin y\right)dy = 0$ เมื่อ $y(0) = \pi$

3. $\left(\frac{y}{x}-3y^2+x^3\right)dx+\left(\ln x-6xy\right)dy=0$
4. $\left(4x^2y+2y^2\right)dx+\left(3x^3+4xy\right)dy=0$
5. $\left(2x-y\right)dx+\left(2y-x\right)dy=0$ เมื่อ $y(1)=3$
6. $\left(9x^2+y-1\right)dx-\left(4y-x\right)dy=0$ เมื่อ $y(1)=0$

ข้อที่ 2.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการหาตัวประกอบอินทิเกรต

1. $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$
2. $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$
3. $\left(y+1\right)dx-xdy=0$
4. $\left(x+x^4+2x^2y^2+y^4\right)dx+ydy=0$
5. $\left(y+x^4y^2\right)dx+xdy=0$
6. $\left(2xy-x\right)dx-dy=0$

ข้อที่ 2.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

1. $\frac{dx}{dy}+\left(\frac{2y}{y^2+1}\right)x=\frac{1}{1+y^2}$
2. $\cos^2 x\sin x\frac{dy}{dx}+\left(\cos^2 x\right)y=1$
3. $xy'=xy+x^3e^x$
4. $xy'+4y=8x^4$ เมื่อ $y(1)=2$
5. $\frac{dy}{dx}+\left(1+\frac{2}{x}\right)y=\frac{e^x}{x^2}$
6. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+3xy=6x$

ข้อที่ 2.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแบร์นูลลี

1. $\frac{dy}{dx}=xy^4-y$
2. $3y^2\frac{dy}{dx}+y^3=e^x$
3. $x^2\frac{dy}{dx}+2xy-y^3=0$ เมื่อ $x>0$
4. $3x\frac{dy}{dx}+9y=2xy^{5/3}$

5. $5\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=4xy\left(y^3-1\right)$

6. $\frac{dx}{dy}=-xy+x^2y^3$

2.9 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541

แผนการสอนครั้งที่ 7

หัวข้อ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น

ผู้สอน ผศ. สิทธินันท์ ท่อแก้ว

เวลา 3 ชั่วโมง

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบต่างๆ
2. เพื่อให้นิสิตสามารถหาประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบต่างๆ ในปัญหาทางวิศวกรรมเคมี

เนื้อหา

1. วิธีการแก้สมการสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบต่างๆ
2.

การจัดประสบการณ์การเรียนรู้

1. บอกวัตถุประสงค์และเนื้อหา	10 นาที
2. สอนบรรยายเนื้อหาในหัวข้อต่างๆ	150 นาที
3. ให้นิสิตซักถามปัญหา	20 นาที

สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน
2. Power point

การประเมินผล

ข้อสอบอัตนัยแสดงวิธีการทำ

หนังสืออ้างอิง

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

3.1 บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง (Linear second order ordinay differential equations) มีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (3-1)

$$a(x)\frac{d^2y}{dx^2}+b(x)\frac{dy}{dx}+c(x)y=f(x) \tag{3-1}$$

เมื่อ $a(x)\neq 0$, $b(x)$,$c(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เมื่อ หาร (3-1) ด้วย $a(x)$ ได้เป็น (3-2)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b(x)}{a(x)}\frac{dy}{dx}+\frac{c(x)}{a(x)}y=\frac{f(x)}{a(x)} \tag{3-2}$$

ให้ $p(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$ $q(x)=\frac{c(x)}{a(x)}$ และ $g(x)=\frac{f(x)}{a(x)}$

ดังนั้น (3-2) ได้เป็น (3-3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=g(x) \tag{3-3}$$

ถ้า $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และกำหนดให้ $p(x)=a$ และ $q(x)=b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว ดังนั้น (3-3) ได้เป็น (3-4)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=g(x) \tag{3-4}$$

จาก (3-4) เป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถแบ่งรูปแบบสมการได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1. เมื่อ $g(x)=0$ เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเอกพันธ์ (Homogeneous linear second order ordinay differential equations with constant coefficient) และมีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (3-5)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{3-5}$$

กรณีที่ 2. เมื่อ $g(x)\neq 0$ เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบไม่เอกพันธ์ (Nonhomogeneous linear second order ordinay differential equations with constant coefficient) และมีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (3-6)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=g(x) \tag{3-6}$$

ในหัวข้อ 3.2 และ 3.3 เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบเอกพันธ์ และ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแบบไม่เอกพันธ์ตามลำดับ

3.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเป็นสมการที่ฟังก์ชันของ

$g(x)=0$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \qquad (3\text{-}7)$$

ถ้าให้ $y=e^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (3-7) แล้ว เมื่อแทนค่าของ $y=e^{\lambda x}$ ลงใน (3-7) ได้เป็น (3-8)

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+be^{\lambda x}=0 \qquad (3\text{-}8)$$

$\lambda^2e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$ หรือ $\lambda^2+a\lambda+b=0$

(3-8) สามารถหาค่าของ λ ได้ดังนี้

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

ค่าของ λ สามารถได้คำตอบ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $a^2>4b$ ซึ่งจะได้ค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 2 ค่า

ดังนั้นคำตอบคือ $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ และ $\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

กรณีที่ 2 เมื่อ $a^2=4b$ ซึ่งจะได้ค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 1 ค่า ที่มีค่าซ้ำกัน

ดังนั้นจะได้ค่า λ ที่มีค่าซ้ำกัน คือ $\lambda_1=\frac{-a}{2}$ และ $\lambda_2=\frac{-a}{2}$

แต่เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปต้องประกอบด้วย 2 ฟังก์ชัน ดังนั้นเพื่อหาผลเฉลยของฟังก์ชันที่ 2 กำหนดให้

$y=u(x)e^{-\frac{a}{2}x}$

ดังนั้น

$$y'=-\frac{a}{2}u(x)e^{-\frac{a}{2}x}+e^{-\frac{a}{2}x}u'(x)$$

และ

$$y''=\left(\frac{a}{2}\right)^2u(x)e^{-\frac{a}{2}x}-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}u'(x)-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}u'(x)+e^{-\frac{a}{2}x}u''(x)$$

$$y'' = e^{-\frac{a}{2}x}u''(x) - ae^{-\frac{a}{2}x}u'(x) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 u(x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

นำค่าที่ได้ลงไปแทนในสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ หรือ $y'' + ay' + by = 0$

$$e^{-\frac{a}{2}x}u''(x) - ae^{-\frac{a}{2}x}u'(x) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 u(x)e^{-\frac{a}{2}x} + a\left(-\frac{a}{2}u(x)e^{-\frac{a}{2}x} + e^{-\frac{a}{2}x}u'(x)\right) + b\left(u(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right) = 0$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left(u''(x) + u(x)(b - \frac{a^2}{4})\right) = 0$$

เนื่องจาก $b - \frac{a^2}{4} = 0$ ดังนั้น $u''(x) = 0$

ดังนั้นอินทิเกรต $u''(x) = 0$ จะได้เป็น $u(x) = cx + d$

แทนค่า $u(x) = cx + d$ ลงในสมการ $y = u(x)e^{-\frac{a}{2}x}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y = (cx + d)e^{\lambda x}$

กรณีที่ 3 เมื่อ $a^2 < 4b$ ซึ่งจะได้ค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ค่า

ดังนั้นจะได้ค่าเท่ากับ $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ และ $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

หรือ สามารถเขียนเป็น $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ และ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

เมื่อ $\alpha = -\frac{a}{2}$ และ $i\beta = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y = Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x}$

จากสูตรของออยเลอร์ $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$ และ $e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y = Ae^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right] + Be^{\alpha x}\left[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[A + B\right]\cos(\beta x) + e^{\alpha x}\left[A - B\right]i\sin(\beta x)$$

ถ้าให้ $C_1 = A + B$ และ $C_2 = i(A - B)$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ลดรูปได้เป็น

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+5\lambda+4=0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda+4)(\lambda+1)=0$

ดังนั้น $\lambda_1=-4$ และ $\lambda_2=-1$

เนื่องจากค่าของ λ ที่ได้เป็นจำนวนจริง 2 ค่า

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"+3y'=0$ เมื่อ $y(0)=-2, y'(0)=3$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y"+3y'=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+3\lambda=0$

แยกตัวประกอบได้เป็น $\lambda(\lambda+3)=0$ ซึ่งจะได้เป็น $\lambda_1=0$ และ $\lambda_2=-3$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 2 ค่า ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y=C_1e^{0x}+C_2e^{-3x}=C_1+C_2e^{-3x}$

จากโจทย์ แทนค่า $y(0)=-2$ แทนค่า $-2=C_1+C_2e^{-0}=C_1+C_2$

และ

จากโจทย์ แทนค่า $y'(0)=3$ เมื่อ $y'=-3C_2e^{-3x}$ แทนค่า $3=-3C_2e^0=-3+C_2$ ดังนั้น $C_2=-1$

เมื่อแทนค่า $C_2=-1$ ใน $C_1+C_2=-2$ ดังนั้น $C_1=-1$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"+3y'=0$ คือ $y=-1-e^{-3x}$ เมื่อ $y(0)=-2, y'(0)=3$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-2y'+y=0$ เมื่อ $y(0)=1, y'(0)=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-2y'+y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-2\lambda+1=0$

แยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-1)^2=0$ ซึ่งจะได้เป็น $\lambda=1$ และ $\lambda=1$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน 2 ค่า

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ $y=(C_1+C_2x)e^x$

แทนค่า $y(0)=1$ ได้เป็น $1=(C_1+C_2\times0)e^0=C_1$ ดังนั้น $C_1=1$

และ

แทนค่า $y'(0)=0$ ดังนั้น $y'=e^x+C_2e^x+C_2xe^x$ ได้เป็น $0=e^0+C_2e^0+C_2\times0\times e^0=1+C_2$ ดังนั้น $C_2=-1$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-2y'+y=0$ เมื่อ $y(0)=1, y'(0)=0$ คือ $y=(1-x)e^x$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+13y=0$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+13y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-6\lambda+13=0$

$$\lambda=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(13)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=3\pm 2i$$

เนื่องจาก ค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ค่า

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+13y=0$ คือ $y=C_1e^{3x}\cos 2x+C_2e^{3x}\sin 2x$

3.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีฟังก์ชันของ $g(x)\neq 0$ ดังสมการ (3-9)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=g(x) \qquad (3\text{-}9)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์นี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ซึ่งเรียกว่า $y_h(x)$ และส่วนของผลเฉลยเฉพาะของฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่งเรียกผลเฉลยเฉพาะส่วนนี้ว่า $y_p(x)$ ได้ดัง (3-10)

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x) \qquad (3\text{-}10)$$

สำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะของฟังก์ชัน $g(x)$ หรือ $y_p(x)$ สามารถทำได้ 3 วิธี คือ 1 วิธีหาสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า 2 วิธีแปรผันพารามิเตอร์ และ 3 วิธีดำเนินการผกผัน

3.3.1 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

การหาผลเฉลยเฉพาะของฟังก์ชัน $g(x)$ ด้วยวิธีหาสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า (Method of undetermined coefficients) เป็นวิธีการหนึ่งที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยของส่วน $y_p(x)$ ตัวอย่างของผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ที่โดยเทียบกับฟังก์ชัน $g(x)$ แสดงดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่าง $y_p(x)$ สำหรับฟังก์ชัน $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)$	รูปแบบผลเฉลยของ $y_p(x)$
$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ เช่น $g(x)=3x^2+2x+1$	$y_p=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0$ $y_p=A_2x^2+A_1x+A_0$
$g(x)=a_1e^{ax}$ เช่น $g(x)=5e^{-6x}$	$y_p=A_1e^{ax}$ $y_p=A_1e^{-6x}$
$g(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)e^{ax}$ เช่น $g(x)=x^3e^{2x}$	$y_p=\left(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0\right)e^{ax}$ $y_p=\left(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0\right)e^{2x}$
$g(x)=\cos bx$ หรือ $g(x)=\sin bx$ เช่น $g(x)=\cos 2x$	$y_p=A_1\cos bx+A_2\sin bx$ $y_p=A_1\cos 2x+A_2\sin 2x$
$g(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\cos bx$ หรือ $g(x)=\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\sin bx$ เช่น $g(x)=x\cos x$ $g(x)=x^2\sin 2x$	$y_p=\left(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0\right)\cos bx$ $+\left(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\ldots+B_1x+B_0\right)\sin bx$ $y_p=\left(A_1x+A_0\right)\cos x+\left(B_1x+B_0\right)\sin x$ $y_p=\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)\cos 2x$ $+\left(B_2x^2+B_1x+B_0\right)\sin 2x$
$g(x)=e^{ax}\cos bx$ หรือ $g(x)=e^{ax}\sin bx$ เช่น $g(x)=e^{3x}\cos 4x$	$y_p=\left(A_1\cos bx+B_1\sin bx\right)e^{ax}$ $y_p=\left(A_1\cos 4x+B_1\sin 4x\right)e^{3x}$
$g(x)=e^{ax}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\cos bx$ เช่น $g(x)=xe^{3x}\cos 4x$	$y_p=e^{ax}\left(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0\right)\cos bx$ $+e^{ax}\left(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\ldots+B_1x+B_0\right)\sin bx$ $y_p=e^{3x}\left(A_1x+A_0x\right)\cos 4x$ $+e^{3x}\left(A_1x+A_0x\right)\sin 4x$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=4$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=4$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=4$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y"-6y'+13y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-6\lambda+13=0$

$$\lambda=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(13)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=3\pm2i$$

เนื่องจาก ค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 ค่า

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=0$ คือ $y=C_1e^{3x}\cos 2x+C_2e^{3x}\sin 2x$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=4$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=A_0$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=4$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p"-6y_p'+13y_p=4$

เมื่อ $y_p(x)=A_0$ ดังนั้น $y_p'=0$ และ $y_p"=0$ แทนค่า

$(0)-6(0)+13A_0=4$

ดังนั้น $A_0=\frac{4}{13}$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=\frac{4}{13}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-6y'+13y=4$ คือ $y=C_1e^{3x}\cos 4x+C_2e^{3x}\sin 4x+\frac{4}{13}$

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=x^2$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=x^2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=x^2$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y"-3y'-4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-3\lambda-4=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

ดังนั้น $\lambda_1=4$ และ $\lambda_2=-1$ เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 2 ค่า ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y"-3y'-4y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=x^2$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=A_2x^2+A_1x+A_0$
จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=x^2$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p"-3y_p'-4y_p=x^2$
เมื่อ $y_p(x)=A_2x^2+A_1x+A_0$ ดังนั้น $y_p"=2A_2$ และ $y_p'(x)=2A_2x+A_1$ แทนค่า

$$2A_2-3(2A_2x+A_1)-4(A_2x^2+A_1x+A_0)=x^2$$

$$2A_2-6A_2x-3A_1-4A_2x^2-4A_1x-4A_0=x^2$$

ซึ่งจะได้เป็นสมการดังนี้

$$2A_2-3A_1-4A_0=0$$

$$-6A_2x-4A_1x=0$$

$$-4A_2x^2=x^2$$

ดังนั้น $A_2=-\frac{1}{4}$, $A_1=\frac{6}{16}$ และ $A_0=-\frac{26}{64}$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{6}{16}x-\frac{26}{64}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=x^2$ คือ $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}x^2+\frac{6}{16}x-\frac{26}{64}$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y'-2y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-\lambda-2=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

ดังนั้น $\lambda_1=2$ และ $\lambda_2=-1$ เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 2 ค่า ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y'-2y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{3x}$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=Ae^{3x}$
จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p"-y_p'-2y_p=e^{3x}$
เมื่อ $y_p(x)=Ae^{3x}$ ดังนั้น $y_p'=3Ae^{3x}$ และ $y_p"=9Ae^{3x}$ แทนค่า

$$9Ae^{3x}-3Ae^{3x}-2Ae^{3x}=e^{3x}$$

$4Ae^{3x}=e^{3x}$ หรือ $4A=1$

$A=\frac{1}{4}$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=Ae^{3x}=\frac{1}{4}e^{3x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ คือ $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}e^{3x}$

ในกรณีที่ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$ มีเทอมที่ซ้ำกับฟังก์ชัน $y_h(x)$ จำเป็นต้องมีการคูณด้วยฟังก์ชัน x^s เพิ่มเข้าไปกับผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ เมื่อ s ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยสุด เพื่อทำให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ มีเทอมไม่ซ้ำกับผลเฉลยทั่วไป $y_h(x)$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=e^{4x}$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=e^{4x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=e^{4x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-3y'-4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-3\lambda-4=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

ดังนั้น $\lambda_1=4$ และ $\lambda_2=-1$ เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริง 2 ค่า ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-3y'-4y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{4x}$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=Ae^{4x}$ แต่เนื่องจาก ผลเฉลยทั่วไป $y_h(x)$ ปรากฏเทอมของ e^{4x} ซึ่งตรงกับ $y_p(x)=Ae^{4x}$ ดังนั้นจำเป็นต้องคูณด้วย x จึงจะทำให้ได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ เป็น $y_p=Axe^{4x}$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-3y'-4y=e^{4x}$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p"-3y_p'-4y_p=e^{4x}$

เมื่อ $y_p=Axe^{4x}$ ดังนั้น $y_p'=4Axe^{4x}+Ae^{4x}$ และ $y_p"=16Axe^{4x}+Ae^{4x}+4Ae^{4x}=16Axe^{4x}+5Ae^{4x}$

แทนค่า

$16Axe^{4x}+5Ae^{4x}-3\left(4Axe^{4x}+Ae^{4x}\right)-4Axe^{4x}=e^{4x}$

$16Axe^{4x}+5Ae^{4x}-12Axe^{4x}-3Ae^{4x}-4Axe^{4x}=e^{4x}$

$5Ae^{4x}-3Ae^{4x}=e^{4x}$

$2A=1$ หรือ $A=\frac{1}{2}$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=\frac{1}{2}xe^{4x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'-4y=e^{4x}$ คือ $y(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{4x}$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=5\sin 2x$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=5\sin 2x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=5\sin 2x$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+4=0$ ซึ่งจะได้เป็น $\lambda=2i$ และ $\lambda=-2i$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+4y=0$ คือ $y_h(x)=e^{0x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ หรือ $y_h(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=5\sin 2x$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$ แต่เนื่องจาก ผลเฉลยทั่วไป $y_h(x)$ ปรากฏเทอมของ $\sin 2x$ ซึ่งตรงกับ $y_p(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$ ดังนั้นจำเป็นต้องคูณด้วย x จึงจะทำให้ได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ เป็น $y_p(x)=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=5\sin 2x$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p''+4y_p=5\sin 2x$

เมื่อ $y_p(x)=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$

ดังนั้น

$y_p'=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)$

และ

$y_p''=-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)$

$y_p''=-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)$

แทนค่า

$-4A\sin 2x+4B\cos 2x+x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)=5\sin 2x$

$-4A\sin 2x+4B\cos 2x-4xA\cos 2x-4xB\sin 2x+4xA\cos 2x+4xB\sin 2x=5\sin 2x$

$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=5\sin 2x$

เทียบสัมประสิทธิ์

$-4A\sin 2x=5\sin 2x$ และ $4B\cos 2x=0$

ดังนั้น $A=-\frac{5}{4}$ และ $B=0$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x=-\frac{5}{4}x\cos 2x$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"+4y=5\sin 2x$ คือ $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{5}{4}x\cos 2x$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-4y'+4y=e^{2x}$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า เมื่อ $y(0)=2$ และ $y'(0)=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-4y'+4y=e^{2x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y"-4y'+4y=e^{2x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-4y'+4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-4\lambda+4=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-2)(\lambda-2)=0$

ดังนั้น $\lambda_1=2$ และ $\lambda_2=2$ เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน 2 ค่า

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้คือ $y_h(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$

แทนค่า $y(0)=2$ ได้เป็น $2=(C_1+C_2\times 0)e^0=C_1$ ดังนั้น $C_1=2$ ทำให้ $y_h(x)=2e^{2x}+C_2xe^{2x}$

และ

แทนค่า $y'(0)=0$ ดังนั้น $y_h'=4e^{2x}+C_2e^{2x}+2C_2xe^{2x}$ ได้เป็น $0=4e^0+C_2e^0+2C_2(0)e^0=4+C_2$

ดังนั้น $C_2=-4$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+4y=0$ เมื่อ $y(0)=1, y'(0)=0$ คือ $y_h(x)=(2-4x)e^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{2x}$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=Ae^{2x}$ แต่เนื่องจาก ผลเฉลยทั่วไป $y_h(x)$ ปรากฏเทอมของ e^{2x} และ xe^{2x} ซึ่งตรงกับ $y_p(x)=Ae^{2x}$ ดังนั้นจำเป็นต้องคูณด้วย x^2 จึงจะทำให้ได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ เป็น $y_p=Ax^2e^{2x}$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y"-4y'+4y=e^{2x}$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p"-4y_p'+4y_p=e^{2x}$

เมื่อ $y_p=Ax^2e^{2x}$

ดังนั้น

$y_p'=2Ax^2e^{2x}+2Axe^{2x}$

$y_p"=4Ax^2e^{2x}+4Axe^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}=4Ax^2e^{2x}+8Axe^{2x}+2Ae^{2x}$

แทนค่า

$$4Ax^2e^{2x}+8Axe^{2x}+2Ae^{2x}-4(2Ax^2e^{2x}+2Axe^{2x})+4Ax^2e^{2x}=e^{2x}$$

$$4Ax^2e^{2x}-8Ax^2e^{2x}+4Ax^2e^{2x}+4Axe^{2x}+4Axe^{2x}-8Axe^{2x}+2Ae^{2x}=e^{2x}$$

$$2Ae^{2x}=e^{2x}$$

ดังนั้น $A=\frac{1}{2}$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'-4y=e^{4x}$ คือ $y=(2-4x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+25y=2\sin x-\cos x$ ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+25y=2\sin x-\cos x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+25y=2\sin x-\cos x$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-6y'+25y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-6\lambda+25=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $\lambda=\frac{-(-6)\pm\sqrt{36-100}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{6\pm8i}{2}=3\pm4i$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-6y'+25y=0$ คือ $y_h(x)=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=2\sin x-\cos x$ จากตารางที่ 3.1 พบว่าผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=A\sin x+B\cos x$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+25y=2\sin x-\cos x$ เมื่อแทนผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ได้เป็น $y_p''-6y_p'+25y_p=2\sin x-\cos x$ เมื่อ $y_p(x)=A\sin x+B\cos x$

ดังนั้น

$$y_p'(x)=A\cos x-B\sin x$$

$$y_p''(x)=-A\sin x-B\cos x$$

แทนค่า

$-A\sin x - B\cos x - 6A\cos x + 6B\sin x + 25A\sin x + 25B\cos x = 2\sin x - \cos x$

แยกตัวแปร

$-A\sin x + 6B\sin x + 25A\sin x = 2\sin x$ หรือ $24A\sin x + 6B\sin x = 2\sin x$

$-B\cos x - 6A\cos x + 25B\cos x = -\cos x$ หรือ $-6A\cos x + 24B\cos x = -\cos x$

เทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาค่า A และ B จาก

$24A\sin x + 6B\sin x = 2\sin x$ จะได้ $24A + 6B = 2$ หรือ $B = \dfrac{2-24A}{6}$

และ

$-6A\cos x + 24B\cos x = -\cos x$ จะได้ $-6A + 24B = -1$ นำค่า B มาแทนค่า จะได้

$$-6A + 24\left(\frac{2-24A}{6}\right) = -1$$

$$-6A + 4(2 - 24A) = -1$$

$$-6A + 8 - 96A = -1$$

$$A = \frac{-9}{-102} = \frac{3}{34}$$

เมื่อ $A = \dfrac{3}{34}$

ดังนั้น

$$B = \frac{2-24A}{6} = \frac{2}{6} - \left(\frac{24}{6}\right)\left(\frac{3}{34}\right) = -\frac{1}{51}$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ดังนี้ $y_p(x) = \dfrac{3}{34}\sin x - \dfrac{1}{51}\cos x$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-6y'+25y = 2\sin x - \cos x$ คือ

$$y(x) = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + \frac{3}{34}\sin x - \frac{1}{51}\cos x$$

3.3.2 วิธีแปรผันพารามิเตอร์

การหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์ (Variation of parameters) สามารถทำได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{dy}{dx} + by = g(x)$ เมื่อผลเฉลยทั่วไป $y_h(x) = C_1y_{h1}(x) + C_2y_{h2}(x)$ ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้เป็น $y_p(x) = u(x)y_{h1}(x) + v(x)y_{h2}(x)$ เมื่อ $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยเฉพาะที่เหมาะสม

ดังนั้น $y_p(x) = u(x)y_{h1}(x) + v(x)y_{h2}(x)$

เมื่อ

$$y'_p(x) = u'(x)y_{h1}(x) + u(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y_{h2}(x) + v(x)y'_{h2}(x)$$

ผลเฉลยทั่วไป $y_{h1}(x)$ และ $y_{h2}(x)$ เป็นผลเฉลยอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $u'(x)y_{h1}(x) + v'(x)y_{h2}(x) = 0$ ทำให้

$$y'_p(x) = u(x)y'_{h1}(x) + v(x)y'_{h2}(x)$$

และ

$$y''_p(x) = u'(x)y'_{h1}(x) + u(x)y''_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) + v(x)y''_{h2}(x)$$

แทนค่าลงในสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = g(x)$

$$\left[u'(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) + u(x)y''_{h1}(x) + v(x)y''_{h2}(x)\right] + a\left[u(x)y'_{h1}(x) + v(x)y'_{h2}(x)\right]$$
$$+b\left[u(x)y_{h1}(x) + v(x)y_{h2}(x)\right] = g(x)$$

จัดรูปแบบสมการใหม่

$$u'(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) + u(x)y''_{h1}(x) + au(x)y'_{h1}(x) + bu(x)y_{h1}(x)$$
$$+v(x)y''_{h2}(x) + av(x)y'_{h2}(x) + bv(x)y_{h2}(x) = g(x)$$
$$u'(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) + u(x)\left[y''_{h1}(x) + ay'_{h1}(x) + by_{h1}(x)\right]$$
$$+v(x)\left[y''_{h2}(x) + ay'_{h2}(x) + by_{h2}(x)\right] = g(x)$$

เนื่องจาก $y''_{h1}(x) + ay'_{h1}(x) + by_{h1}(x) = 0$ และ $y''_{h2}(x) + ay'_{h2}(x) + by_{h2}(x) = 0$ ดังนั้น

$$u'(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) = g(x)$$

ดังนั้นสามารถได้เป็น 2 สมการ ดัง (3-11) และ (3-12)

$$u'(x)y_{h1}(x) + v'(x)y_{h2}(x) = 0 \tag{3-11}$$

$$u'(x)y'_{h1}(x) + v'(x)y'_{h2}(x) = g(x) \tag{3-12}$$

เพื่อหาค่าของ $u'(x)$ และ $v'(x)$ จากการแก้สมการด้วยวิธีของกฎของเครเมอร์ (Cramer's Rule) ดัง

$$\begin{bmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_{h2}(x) \\ g(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}} = \frac{-g(x)y_{h2}(x)}{y_{h1}(x)y'_{h2}(x) - y'_{h1}(x)y_{h2}(x)} = w_1(x) \tag{3-13}$$

และ

$$v'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & 0 \\ y'_{h1}(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}}=\frac{g(x)y_{h1}(x)}{y_{h1}(x)y'_{h2}(x)-y'_{h1}(x)y_{h2}(x)}=w_2(x) \qquad (3\text{-}14)$$

ดังนั้น

$u(x)=\int w_1(x)dx$ และ $v(x)=\int w_2(x)dx$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y(x)=C_1y_{h1}(x)+C_2y_{h2}(x)+u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$ วิธีการแปรผันพารามิเตอร์มักใช้กับ $g(x)$ ที่ไม่เขียนในรูปของ $g(x)$ ที่ปรากฏอยู่ในตารางที่ 3.1

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y'-2y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-\lambda-2=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=2$ และ $\lambda_2=-1$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y'-2y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{3x}$ แปรผันพารามิเตอร์ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ

$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=e^{-x}$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=-e^{-x}$ และ $y_{h2}(x)=e^{2x}$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=2e^{2x}$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'e^{-x}+v'e^{2x}=0 \qquad (E3.12\text{-}1)$$

$$u'(-e^{-x})+v'2e^{2x}=e^{3x} \qquad (E3.12\text{-}2)$$

ดังนั้น

$$u'(x)=\frac{-g(x)y_{h_2}}{y_{h_1}(x)y'_{h_2}(x)-y'_{h_1}(x)y_{h_2}(x)}=-\frac{e^{3x}\cdot e^{2x}}{e^{-x}2e^{2x}-(-e^{-x}e^{2x})}=-\frac{e^{5x}}{3e^{x}}=-\frac{e^{4x}}{3}$$

$$v'(x)=\frac{g(x)y_{h_1}}{y_{h_1}(x)y'_{h_2}(x)-y'_{h_1}(x)y_{h_2}(x)}=\frac{e^{3x}\cdot e^{-x}}{3e^{x}}=\frac{e^{2x}}{3e^{x}}=\frac{e^{x}}{3}$$

$$u(x)=-\frac{1}{3}\int e^{4x}dx=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)e^{4x}=-\frac{1}{12}e^{4x}$$

$$v(x)=\frac{1}{3}\int e^{x}dx=\frac{1}{3}e^{x}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=-\frac{1}{12}e^{4x}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{x}e^{2x}=-\frac{1}{12}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{3x}=\frac{1}{4}e^{3x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y'-2y=e^{3x}$ คือ $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-2y'=e^{x}\sin x$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-2y'=e^{x}\sin x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-2y'=e^{x}\sin x$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-2y'=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-2\lambda=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $\lambda(\lambda-2)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=2$ และ $\lambda_2=0$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-2y'=0$ คือ $y_h(x)=C_1+C_2e^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{x}\sin x$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=1$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=0$ และ $y_{h2}(x)=e^{2x}$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=2e^{2x}$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'+v'e^{2x}=0 \qquad \text{(E3.13-1)}$$

$$u'(0)+v'2e^{2x}=e^{x}\sin x \qquad \text{(E3.13-2)}$$

ดังนั้น

$$v'2e^{2x}=e^{x}\sin x \text{ หรือ } v'=\frac{e^{x}\sin x}{2e^{2x}}=\frac{1}{2}e^{-x}\sin x \qquad \text{(E3.13-3)}$$

จาก (E3.13-3) แทนใน (E3.13-2) จะได้เป็น (E3.13-4)

$$u'=-v'e^{2x}=-\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x\right)e^{2x}=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x \qquad \text{(E3.13-4)}$$

ดังนั้น

$$v=\int\frac{1}{2}e^{-x}\sin x dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right)=-\frac{1}{4}e^{-x}\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$u=-\int\frac{1}{2}e^{x}\sin x dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{x}(\sin x-\cos x)\right)=-\frac{1}{4}e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)$$

แทนค่า

$$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=-\frac{1}{4}e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)(1)-\frac{1}{4}e^{-x}\left(\sin x+\cos x\right)e^{2x}$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{4}e^{x}\left(\sin x-\cos x\right)-\frac{1}{4}e^{x}\left(\sin x+\cos x\right)=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-2y'=e^{x}\sin x$ คือ $y(x)=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}\sin x$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\sec x$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\sec x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\sec x$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+1=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $\lambda^2=-1$ ดังนั้น $\lambda_1=i$ และ $\lambda_2=-i$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อนดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+y=0$ คือ $y_h(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=\sec x$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=\cos x$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=-\sin x$ และ $y_{h2}(x)=\sin x$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=\cos x$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'\cos x+v'\sin x=0 \qquad \text{(E3.14-1)}$$

$$-u'\sin x+v'\cos x=\sec x \qquad \text{(E3.14-2)}$$

ดังนั้น

$$u'(x)=\frac{-g(x)y_{h2}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{-\sec x\sin x}{\cos x\cos x-(-\sin x\sin x)}=-\sec x\sin x \qquad \text{(E3.14-3)}$$

$$v'(x)=\frac{g(x)y_{h1}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{\sec x\cos x}{\cos x\cos x-(-\sin x\sin x)}=\sec x\cos x=1 \qquad \text{(E3.14-4)}$$

$u(x)=\int -\sec x\sin x dx=\ln|\cos x|$ และ $v(x)=\int 1dx=x$

$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\sec x$ คือ

$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=\sin^2 2x$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=\sin^2 2x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+4y=\sin^2 2x$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+4y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+4=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $\lambda^2=-4$ ดังนั้น $\lambda_1=2i$ และ $\lambda_2=-2i$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนเชิงซ้อนดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+4y=0$ คือ $y_h(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=\sin^2 2x$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ

$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=\cos 2x$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=-2\sin 2x$ และ $y_{h2}(x)=\sin 2x$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=2\cos 2x$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'\cos 2x+v'\sin 2x=0 \qquad \text{(E3.15-1)}$$

$$-2u'\sin 2x+2v'\cos 2x=\sin^2 2x \qquad \text{(E3.15-2)}$$

ดังนั้น

$$u'=\frac{-g(x)y_{h2}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{-\sin^2 2x\sin 2x}{c\cos 2x(2\cos 2x)-\sin 2x(-2\sin 2x)}$$

$$u'=\frac{-\sin^3 2x}{2c\cos^2 2x+2\sin^2 2x}=\frac{-\sin^3 2x}{2(c\cos^2 2x+\sin^2 2x)}=-\frac{\sin^3 2x}{2}$$

$$v' = \frac{g(x)y_{h1}}{(y_{h1}y'_{h2} - y_{h2}y'_{h1})} = \frac{\sin^2 2x\cos 2x}{c\cos 2x(2\cos 2x) - \sin 2x(-2\sin 2x)} = \frac{\cos 2x\sin^2 2x}{2}$$

$$u = -\frac{1}{2}\int \sin^3 2x dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2x \sin^2 2x dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2x(1-\cos^2 2x)dx$$

$$u = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx(-1+\cos^2 2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x\cos^2 2x dx$$

$$u = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx(-1+\cos^2 2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x\cos^2 2x dx$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cos^3 2x = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos^3 2x$$

$$v(x) = \frac{1}{2}\int \cos 2x\sin^2 2x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\sin^3 2x = \frac{1}{12}\sin^3 2x$$

$$y_p(x) = u(x)y_{h1} + v(x)y_{h2} = \left(\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos^3 2x\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{12}\sin^3 2x\right)\sin 2x$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{12}\cos^4 2x + \frac{1}{12}\sin^4 2x = \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{12}\left(\cos^4 2x - \sin^4 2x\right)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{12}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)\left(\cos^2 2x + \sin^2 2x\right) = \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{12}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\cos^2 2x - \frac{1}{12}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^2 2x = \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^2 2x$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x) = \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^2 2x$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + 4y = \sin^2 2x$ คือ

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\sin^2 2x$$

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^{2x}$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^{2x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย

$y = y_h(x) + y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+4y=(x^2+1)e^{2x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-4y'+4y=0$
สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-4\lambda+4=0$
เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-2)(\lambda-2)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=2$ และ $\lambda_2=2$
เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-4y'+4y=0$ คือ $y_h(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}=C_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=(x^2+1)e^{2x}$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ

$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=e^{2x}$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=2e^{2x}$ และ $y_{h2}(x)=xe^{2x}$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=2xe^{2x}+e^{2x}$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'e^{2x}+v'xe^{2x}=0 \qquad \text{(E3.16-1)}$$

$$u'2e^{2x}+v'(2xe^{2x}+e^{2x})=(1+x^2)e^{2x} \qquad \text{(E3.16-2)}$$

ดังนั้น

$$u'=\frac{-g(x)y_{h2}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=-\frac{(x^2+1)e^{2x}xe^{2x}}{e^{2x}(2xe^{2x}+e^{2x})-xe^{2x}2e^{2x}}=-\frac{(x^3+x)e^{4x}}{2xe^{4x}+e^{4x}-2xe^{4x}}=-\frac{(x^3+x)e^{4x}}{e^{4x}}=-x^3-x$$

$$u=\int(-x^3-x)dx=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

$$v'=\frac{g(x)y_{h1}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{(x^2+1)e^{2x}e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{(x^2+1)e^{4x}}{e^{4x}}=x^2+1$$

$$v=\int\left(x^2+1\right)dx=\frac{x^2}{2}+x$$

$$y_p=u\left(x\right)y_{h1}+v\left(x\right)y_{h2}=\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)e^{2x}+\left(\frac{x^3}{3}+x\right)xe^{2x}=\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+x^2\right)e^{2x}$$

$$y_p=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x^4e^{2x}+\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2e^{2x}=\frac{1}{12}x^4e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p=\frac{1}{12}x^4e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+4y=(x^2+1)e^{2x}$ คือ

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{12}x^4e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+3y'+2y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2+3\lambda+2=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=-2$ และ $\lambda_2=-1$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''+3y'+2y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

ฟังก์ชัน $g(x)=\frac{1}{1+e^x}$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ อยู่ในรูปทั่วไปคือ

$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$

กำหนดให้ $y_{h1}(x)=e^{-x}$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=-e^{-x}$ และ $y_{h2}(x)=e^{-2x}$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=-2e^{-2x}$

เพื่อให้ง่าย แทน $u(x)$ ด้วย u และแทน $v(x)$ ด้วย v

$$u'e^{-x}+v'e^{-2x}=0 \qquad \text{(E3.17-1)}$$

$$-u'e^{-x}-2v'e^{-2x}=\frac{1}{1+e^x}=(1+e^x)^{-1} \qquad \text{(E3.17-2)}$$

ดังนั้น

$$u'=\frac{-g(x)y_{h2}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{-(1+e^x)^{-1}e^{-2x}}{e^{-x}(-2e^{-2x})-e^{-2x}(-e^{-x})}=\frac{-(1+e^x)^{-1}e^{-2x}}{-2e^{-3x}+e^{-3x}}=\frac{-(1+e^x)^{-1}e^{-2x}}{-e^{-3x}}=(1+e^x)^{-1}e^x$$

$$u=\int(1+e^x)^{-1}e^xdx$$

กำหนดให้ $A=1+e^x$ ดังนั้น $dA=e^xdx$

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{Ae^x}dA=\int\frac{1}{A}dA=\ln|A|$$

ดังนั้น $u=\int(1+e^x)^{-1}e^xdx=\ln|1+e^x|=\ln(1+e^x)$

$$v'=\frac{g(x)y_{h1}}{(y_{h1}y'_{h2}-y_{h2}y'_{h1})}=\frac{(1+e^x)^{-1}e^{-x}}{-e^{-3x}}=-(1+e^x)^{-1}e^{2x}$$

$$v=\int-(1+e^x)^{-1}e^{2x}dx=-\int\frac{e^{2x}}{(1+e^x)}dx$$

กำหนดให้ $A=1+e^x$ ดังนั้น $dA=e^x dx$ และ $e^x=A-1$

$$\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)}dx=\int \frac{e^x e^x}{(1+e^x)}dx=\int \frac{e^x(A-1)}{Ae^x}dA=\int \frac{(A-1)}{A}dA=\int\left(1-\frac{1}{A}\right)dA=A-\ln|A|$$

$$v=-\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)}dx=-\left(1+e^x-\ln\left|1+e^x\right|\right)=-1-e^x+\ln\left|1+e^x\right|$$

$$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)+e^{-2x}\left(-1-e^x+\ln(1+e^x)\right)$$

$$y_p(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)-e^{-2x}-e^{-x}-e^{-2x}\ln(1+e^x)$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)-e^{-2x}-e^{-x}-e^{-2x}\ln(1+e^x)$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$ คือ

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\ln(1+e^x)-e^{-2x}-e^{-x}-e^{-2x}\ln(1+e^x)$$

3.3.3 วิธีดำเนินการผกผัน

การหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน (inverse operator method) กำหนดให้สัญญาลักษณ์ของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) เป็น D เมื่อ $D=\dfrac{d}{dx}$ ดังนั้น $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=g(x)$ สามารถเขียนได้เป็น $D^2y+aDy+by=g(x)$ หรือ $\left(D^2+aD+b\right)y=g(x)$ สามารถเขียนย่อได้ดัง $P(D)y=g(x)$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้เป็น $y_p=\dfrac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $\dfrac{1}{P(D)}$ เรียกว่าตัวดำเนินการแบบผกผัน (inverse operator)

สมบัติเชิงเส้นของตัวดำเนินการแบบผกผันมีดังนี้

1. $y_p=\dfrac{1}{P(D)}\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]=\alpha\dfrac{1}{P(D)}f(x)+\beta\dfrac{1}{P(D)}g(x)$
2. $y_p=\dfrac{1}{P(D)Q(D)}f(x)=\dfrac{1}{P(D)}\left[\dfrac{1}{Q(D)}f(x)\right]=\dfrac{1}{Q(D)}\left[\dfrac{1}{P(D)}f(x)\right]=\dfrac{1}{Q(D)P(D)}f(x)$
3. $y_p=\left(\alpha\dfrac{1}{P(D)}+\beta\dfrac{1}{Q(D)}\right)f(x)=\alpha\dfrac{1}{P(D)}f(x)+\beta\dfrac{1}{Q(D)}f(x)$

สำหรับการดำเนินการของตัวดำเนินการแบบผกผันมีสมบัติดังนี้

1. $\dfrac{1}{D}g(x)=\int g(x)dx$

2. $\frac{1}{D^n}g(x)=\frac{1}{D^{n-1}}\frac{1}{D}g(x)=\iint\ldots\int g(x)(dx)^n$

3. $\frac{1}{D-a}g(x)=e^{ax}\int e^{-ax}g(x)dx$

4. $\frac{1}{(D-a)^n}g(x)=\frac{1}{(D-a)^{n-1}}\frac{1}{D-a}g(x)=e^{ax}\iint\cdots\int e^{-ax}g(x)(dx)^n$

ตัวอย่างที่ 3.18 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=e^{2x}$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=e^{2x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=e^{2x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-4y'+3y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-4\lambda+3=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=1$ และ $\lambda_2=3$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-4y'+3y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$ **ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน**

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{2x}$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=\frac{1}{P(D)}g(x)$

$(D^2-4D+3)y_p(x)=e^{2x}$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-4D+3}e^{2x}=\frac{1}{(D-1)(D-3)}e^{2x}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{D-1}e^{3x}\int e^{-3x}\cdot e^{2x}dx=\frac{1}{D-1}e^{3x}\int e^{-x}dx=\frac{1}{D-1}e^{3x}(-e^{-x})=-\frac{1}{D-1}e^{2x}$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{D-1}e^{2x}=-e^x\int e^{-x}\cdot e^{2x}dx=-e^x\int e^xdx=-e^xe^x=-e^{2x}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=-e^{2x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=e^{2x}$ คือ $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-3y'+2y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-3\lambda+2=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=1$ และ $\lambda_2=2$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-3y'+2y=0$ คือ $y_h(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$ **ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน**

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{5x}$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=\dfrac{1}{P(D)}g(x)$

$(D^2-3D+2)y_p(x)=e^{5x}$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{5x}=\frac{1}{(D-2)(D-1)}e^{5x}=\frac{1}{D-2}e^{5x}-\frac{1}{D-1}e^{5x}$$

$$y_p(x)=e^{2x}\int e^{-2x}e^{5x}dx-e^{x}\int e^{-x}e^{5x}dx=e^{2x}\int e^{3x}dx-e^{x}\int e^{4x}dx$$

$$y_p(x)=e^{2x}\frac{1}{3}e^{3x}-e^{x}\frac{1}{4}e^{4x}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)e^{5x}=\frac{1}{12}e^{5x}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=\dfrac{1}{12}e^{5x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=e^{5x}$ คือ $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{12}e^{5x}$

ตัวอย่างที่ 3.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=e^{-x}$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=e^{-x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=e^{-x}$ ปรับเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y=0$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ λ ได้ดังนี้ $\lambda^2-1=0$

เมื่อแยกตัวประกอบได้เป็น $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$ ดังนั้น $\lambda_1=1$ และ $\lambda_2=-1$

เนื่องจากค่าของ λ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $y''-y=0$ คือ $y_h=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$ **ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน**

ฟังก์ชัน $g(x)=e^{-x}$ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=\frac{1}{P(D)}g(x)$

$(D^2-1)y_p(x)=e^{-x}$

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-1}e^{-x}=\frac{1}{(D-1)(D+1)}e^{-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+1}\right)e^{-x}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1}e^{-x}-\frac{1}{D+1}e^{-x}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{x}\int e^{-x}e^{-x}dx-e^{-x}\int e^{x}e^{-x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[e^{x}\int e^{-2x}dx-e^{-x}\int dx\right]$$

$$y_p(x)=\frac{1}{2}\left[e^{x}\frac{1}{-2}e^{-2x}-e^{-x}x\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}-xe^{-x}\right]=-\frac{1}{4}(1+2x)e^{-x}$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)=-\frac{1}{4}(1+2x)e^{-x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=e^{-x}$ คือ $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}(1+2x)e^{-x}$

3.3.4 วิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีดำเนินการผกผันแบบลัด (short inverse operator method) เป็นวิธีที่ช่วยให้สามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้เร็วขึ้น $\left(D^2+aD+b\right)y=g(x)$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+aD+b}g(x)=\frac{1}{P(D)}g(x)$$

เมื่อ $P(D)\left[\frac{1}{P(D)}g(x)\right]=g(x)=\frac{1}{P(D)}\left[P(D)g(x)\right]$

กรณี 1. เมื่อฟังก์ชัน $g(x)=e^{\alpha x}$

จาก $P(D)e^{\alpha x}=\left(D^2+aD+b\right)e^{\alpha x}=\left(\alpha^2+a\alpha+b\right)e^{\alpha x}=P(\alpha)e^{\alpha x}$ เมื่อ $P(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b$ และ $P(\alpha)\neq 0$

$P(D)e^{\alpha x}=P(\alpha)e^{\alpha x}$

เมื่อหารด้วย $P(D)$ ทั้งสองข้างของสมการ

ดังนั้น

$$\frac{1}{P(D)}P(D)e^{\alpha x}=\frac{1}{P(D)}P(\alpha)e^{\alpha x}=P(\alpha)\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}$$

$$e^{\alpha x}=P(\alpha)\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}$$

หารด้วย $P(\alpha)$ ทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p=\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}$ เมื่อ $P(\alpha)\neq 0$

ในกรณีที่ $P(\alpha)=0$

$P(D)e^{\alpha x}=(D-\alpha)^n\phi(D)e^{\alpha x}$ เมื่อ $n\geq 1$

เมื่อหารด้วย $P(D)$ ทั้งสองข้างของสมการ

ดังนั้น

$$\frac{1}{P(D)}P(D)e^{\alpha x}=\frac{1}{P(D)}(D-\alpha)^n\phi(D)e^{\alpha x}=(D-\alpha)^n\phi(D)\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}$$

$$e^{\alpha x}=(D-\alpha)^n\phi(D)\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}$$

หารด้วย $(D-\alpha)^n\phi(D)$ ทั้งสองข้าง

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{(D-\alpha)^n\phi(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\phi(D)}\left[\frac{1}{(D-\alpha)^n}e^{\alpha x}\right]$$

จาก $\frac{1}{(D-a)^n}g(x)=\frac{1}{(D-a)^{n-1}}\frac{1}{D-a}g(x)=e^{ax}\iint\cdots\int e^{-ax}g(x)(dx)^n$

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\phi(D)}\left[\frac{1}{(D-\alpha)^n}e^{\alpha x}\right]=\frac{1}{\phi(D)}\left[e^{\alpha x}\iint\cdots\int e^{-\alpha x}e^{\alpha x}(dx)^n\right]$$

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\phi(D)}\left[\frac{1}{(D-\alpha)^n}e^{\alpha x}\right]=\frac{1}{\phi(D)}\frac{x^ne^{\alpha x}}{n!}=\frac{1}{\phi(\alpha)}\frac{x^ne^{\alpha x}}{n!}$$

ตัวอย่างที่ 3.21 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน

$\left(D^2-3D+2\right)y=e^{5x}$

$$y_p(x)=\frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}=\frac{1}{\left(5^2-3(5)+2\right)}e^{5x}=\frac{1}{12}e^{5x}$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{5x}$ คือ $y_p(x)=\frac{1}{12}e^{5x}$

ตัวอย่างที่ 3.22 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=\left(e^{2x}+3\right)^2$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=\left(e^{2x}+3\right)^2$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน

$\left(D^2-4D+3\right)y_p(x)=\left(e^{2x}+3\right)^2=e^{4x}+6e^{2x}+9$

ดังนั้น $y_p(x)=\dfrac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}=\dfrac{1}{\left(D^2-4D+3\right)}\left(e^{4x}+6e^{2x}+9\right)$

$$y_p(x)=\frac{1}{\left(D^2-4D+3\right)}e^{4x}+\frac{1}{\left(D^2-4D+3\right)}6e^{2x}+\frac{1}{\left(D^2-4D+3\right)}9e^{0x}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{\left(4^2-4(4)+3\right)}e^{4x}+\frac{1}{\left(2^2-4(2)+3\right)}6e^{2x}+\frac{1}{\left(0^2-4(0)+3\right)}9e^{0x}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{3}e^{4x}+\frac{1}{-1}6e^{2x}+\frac{1}{3}9e^{0x}=\frac{1}{3}e^{4x}-6e^{2x}+3$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=\left(e^{2x}+3\right)^2$ คือ $y_p(x)=\dfrac{1}{3}e^{4x}-6e^{2x}+3$

ตัวอย่างที่ 3.23 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^x+2e^{2x}$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^x+2e^{2x}$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน

$\left(D^2-3D+2\right)y(x)=e^x+2e^{2x}$ ซึ่ง $P(D)=D^2-3D+2$ สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $P(D)=(D-2)(D-1)$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=e^x+2e^{2x}$ พบว่า เมื่อ $\alpha=1$ และ $\alpha=2$ ส่งผลให้ $P(\alpha)=0$

ดังนั้น ใช้สูตร $\dfrac{1}{(D-\alpha)^n\,\phi(D)}e^{\alpha x}=\dfrac{1}{n!\phi(\alpha)}x^ne^{\alpha x}$ เมื่อ $P(\alpha)\neq 0$ และ $n=1,2,3,...$

$$y_p(x)=\frac{1}{(D-2)}\left[\frac{1}{(D-1)}\right]e^x+2\frac{1}{(D-1)}\left[\frac{1}{(D-2)}\right]e^{2x}$$

เนื่องจาก $n=1$ ดังนั้น $\dfrac{1}{(D-\alpha)}e^{\alpha x}=\dfrac{x}{1!}e^{\alpha x}$

$$y_p(x)=\frac{1}{(D-2)}\left[\frac{x}{1!}\right]e^x+2\frac{1}{(D-1)}\left[\frac{x}{1!}\right]e^{2x}=\frac{1}{(1-2)}\left[\frac{x}{1!}\right]e^x+2\frac{1}{(2-1)}\left[\frac{x}{1!}\right]e^{2x}$$

$$y_p(x)=-xe^x+2xe^{2x}$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^x+2e^{2x}$ คือ $y_p(x)=-xe^x+2xe^{2x}$

กรณี 2. เมื่อฟังก์ชัน $g(x)=\sin(\alpha x)$ ***หรือ*** $g(x)=\cos(\alpha x)$

พิจารณา

$D\sin(\alpha x)=\alpha\cos(\alpha x)$

$D^2\sin(\alpha x)=-\alpha^2\sin(\alpha x)$

$D^3\sin(\alpha x)=-\alpha^3\cos(\alpha x)$

$D^4\sin(\alpha x)=+\alpha^4\sin(\alpha x)$

สามารถสรุปได้ว่าเมื่ออันดับอนุพันธ์เป็นเลขคู่ พบว่า $D^{2n}\sin(\alpha x)=(-1)^n\alpha^{2n}\sin(\alpha x)$.ทำให้

$P(D^2)\sin(\alpha x)=P(-\alpha^2)\sin(\alpha x)$

หารด้วย $P(D^2)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$\sin(\alpha x)=\frac{1}{P(D^2)}P(-\alpha^2)\sin(\alpha x)=P(-\alpha^2)\frac{1}{P(D^2)}\sin(\alpha x)$$

$\frac{1}{P(D^2)}\sin(\alpha x)=\frac{1}{P(-\alpha^2)}\sin(\alpha x)$ เมื่อ $P(-\alpha^2)\neq 0$

สำหรับ $g(x)=\cos(\alpha x)$ ทำเช่นเดียวกับ $g(x)=\sin(\alpha x)$

$\frac{1}{P(D^2)}\cos(\alpha x)=\frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos(\alpha x)$ เมื่อ $P(-\alpha^2)\neq 0$

ในกรณีที่ $P(-\alpha^2)=0$

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2}\sin(\alpha x)=-\frac{x}{2\alpha}\cos(\alpha x)$$

$$\frac{1}{D^2+\alpha^2}\cos(\alpha x)=\frac{x}{2\alpha}\sin(\alpha x)$$

ตัวอย่างที่ 3.24 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'-2y=10\sin 2x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'-2y=10\sin 2x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2-3D-2)y=10\sin 2x$ ซึ่ง $P(D)=D^2-3D-2$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=10\sin 2x$ ดังนั้น เมื่อแทนค่าด้วย $\alpha=2$ เมื่อแทนลงในเทอม $P(D^2)=P(-\alpha^2)$ ได้เป็น $P(\alpha)=-\alpha^2-3D-2=-(2)^2-3D-2=-3D-4$ ซึ่ง $P(-\alpha^2)\neq 0$

ดังนั้น ใช้สูตร $\frac{1}{P(D^2)}\sin(\alpha x)=\frac{1}{P\left(-\alpha^2\right)}\sin(\alpha x)$ เมื่อ $P\left(-\alpha^2\right)\neq 0$

แทนค่าด้วย $\alpha=2$ ที่ D^2

$$y_p(x)=\frac{1}{\left(D^2-3D-2\right)}10\sin 2x=10\frac{1}{\left(-(2)^2-3D-2\right)}\sin 2x$$

$$y_p(x)=\frac{10}{\left(-4-3D-2\right)}\sin 2x=\frac{10}{\left(-3D-6\right)}\sin 2x=\frac{10}{-3\left(D+2\right)}\sin 2x$$

ทำการคูณด้วยคอนจูเกตของ $\left(D+2\right)$ ด้วย $\left(D-2\right)$

$$y_p(x)=\frac{10}{-3\left(D+2\right)}\frac{\left(D-2\right)}{\left(D-2\right)}\sin 2x=\frac{10\left(D-2\right)}{-3\left(D^2-4\right)}\sin 2x$$

แทนค่าด้วย $\alpha=2$ ที่ D^2

$$y_p(x)=\frac{10\left(D-2\right)}{-3\left(-(2)^2-4\right)}\sin 2x=\frac{10\left(D-2\right)}{-3\left(-4-4\right)}\sin 2x=\frac{10\left(D-2\right)}{(-3)(-8)}\sin 2x$$

$$y_p(x)=\frac{10}{24}\left(D-2\right)\sin 2x=\frac{10}{24}\left(\frac{d}{dx}\sin 2x-2\sin 2x\right)=\frac{10}{24}\left(2\cos 2x-2\sin 2x\right)$$

$$y_p(x)=\frac{5}{12}\left(\cos 2x-\sin 2x\right)$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'-2y=10\sin 2x$ คือ $y_p(x)=\frac{5}{12}\left(\cos 2x-\sin 2x\right)$

ตัวอย่างที่ 3.25 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\cos x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\cos x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $\left(D^2+1\right)y=10\sin 2x$ ซึ่ง $P(D)=D^2+1$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=\cos x$ ดังนั้น เมื่อแทนค่าด้วย $\alpha=1$ เมื่อแทนลงในเทอม $P(D^2)=P(-\alpha^2)$ ได้เป็น $P(\alpha)=-\alpha^2+1=-(1)^2+1=-1+1=0$ ซึ่ง $P\left(-\alpha^2\right)=0$

ดังนั้น $\frac{1}{D^2+\alpha^2}\cos(\alpha x)=\frac{x}{2\alpha}\sin(\alpha x)$

$$y_p(x)=\frac{1}{\left(D^2+1\right)}\cos x=\frac{x}{2(1)}\sin x=\frac{x}{2}\sin x$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=\cos x$ คือ $y_p(x)=\frac{x}{2}\sin x$

กรณี 3. เมื่อฟังก์ชัน $g(x)=Ax^m$ ***เมื่อ*** A ***เป็นค่าคงตัว และ*** m ***เป็นจำนวนเต็ม***

$P(D)y_p(x)=Ax^m$

พิจารณา $P(D)=(D-a)$ เมื่อ $a\neq 0$

$(D-a)y_p(x)=Ax^m$

$$y_p(x)=\frac{1}{(D-a)}Ax^m=\frac{1}{(-a+D)}Ax^m=\frac{1}{-a\left(1-\frac{D}{a}\right)}Ax^m$$

เมื่อ $\frac{1}{\left(1-\frac{D}{a}\right)}=1+\frac{D}{a}+\left(\frac{D}{a}\right)^2+\left(\frac{D}{a}\right)^3+\left(\frac{D}{a}\right)^4+\ldots$

$$y_p(x)=-\frac{1}{a}\left(1+\frac{D}{a}+\left(\frac{D}{a}\right)^2+\left(\frac{D}{a}\right)^3+\left(\frac{D}{a}\right)^4+\ldots\right)Ax^m$$

เนื่องจาก $D^{m+1}x^m=0$

$$y_p(x)=-\frac{A}{a}\left(1+\frac{D}{a}+\left(\frac{D}{a}\right)^2+\left(\frac{D}{a}\right)^3+\left(\frac{D}{a}\right)^4+\ldots\right)x^m=-\frac{A}{a}\left(x^m+\frac{mx^{m-1}}{a}+\frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^2}+\ldots+\frac{m!}{a^m}\right)$$

เมื่อ $a\neq 0$

ตัวอย่างที่ 3.26 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $2y''+2y'+3y=x^2+2x-1$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $2y''+2y'+3y=x^2+2x-1$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $\left(2D^2+2D+3\right)y=x^2+2x-1$ ซึ่ง $P(D)=2D^2+2D+3$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=x^2+2x-1$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{(2D^2+2D+3)}\left(x^2+2x-1\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2+\ldots\right)\left(x^2+2x-1\right)$$

$$y_p(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{9}D\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{27}D^2\left(x^2+2x-1\right)$$

$$y_p(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{9}\left(2x+2\right)-\frac{2}{27}\left(2\right)=\frac{1}{3}x^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right)x+\left(-\frac{1}{3}-\frac{4}{9}-\frac{4}{27}\right)$$

$$y_p(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $2y''+2y'+3y=x^2+2x-1$ คือ $y_p(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{25}{27}$

ตัวอย่างที่ 3.27 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y'-2y=2+2x-2x^2$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y'-2y=2+2x-2x^2$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2+D-2)y_p(x)=2+2x-2x^2$ ซึ่ง $P(D)=D^2+D-2$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=2+2x-2x^2$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2+D-2}(2+2x-2x^2)=\frac{1}{-2+D+D^2}(2+2x-2x^2)$$

$$y_p(x)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{D}{4}-\frac{3}{8}D^2\right)\left(2+2x-2x^2\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)(2+2x-2x^2)-\frac{D}{4}(2+2x-2x^2)-\frac{3}{8}D^2(2+2x-2x^2)$$

$$y_p(x)=-1-x+x^2-\frac{1}{4}(2-4x)-\frac{3}{8}(-4)=-1-x+x^2-\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}=x^2$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y'-2y=2+2x-2x^2$ คือ $y_p(x)=x^2$

กรณี 4. เมื่อฟังก์ชัน $g(x)=e^{\alpha x}G(x)$ เมื่อ α เป็นค่าคงตัว

$$P(D)y_p(x)=e^{\alpha x}G(x)$$

$$y_p(x)=\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}G(x)$$

จาก $D(e^{\alpha x}y)=e^{\alpha x}Dy+\alpha e^{\alpha x}y=e^{\alpha x}(D+\alpha)y$

ดังนั้น

$$P(D)\left[e^{\alpha x}G(x)\right]=e^{\alpha x}P(D+\alpha)G(x)$$

ถ้าให้ $P(D+\alpha)G(x)=G_1(x)$ ดังนั้น $G(x)=\frac{1}{P(D+\alpha)}G_1(x)$

$$P(D)\left[e^{\alpha x}G(x)\right]=P(D)\left[e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}G_1(x)\right]=e^{\alpha x}G_1(x)$$

หารด้วย $P(D)$ ทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}G_1(x)=e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}G_1(x)$$

ดังนั้น

$$e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)=\frac{1}{P(D)}\left[e^{\alpha x}F(x)\right] \text{ หรือ } \frac{1}{P(D)}\left[e^{\alpha x}F(x)\right]=e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$$

ตัวอย่างที่ 3.28 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+2y'+4y=e^x\sin 2x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+2y'+4y=e^x\sin 2x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2+2D+4)y_p(x)=e^x\sin 2x$ ซึ่ง $P(D)=D^2+2D+4$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=e^x\sin 2x$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{P(\mathrm{D})}e^x\sin 2x=e^x\frac{1}{P(D+1)}\sin 2x$$

$$y_p(x)=e^x\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+4}\sin 2x=e^x\frac{1}{D^2+2D+1+2D+2+4}\sin 2x=e^x\frac{1}{D^2+4D+7}\sin 2x$$

$$y_p(x)=e^x\frac{1}{D^2+4D+7}\sin 2x=e^x\frac{1}{-2^2+4D+7}\sin 2x=e^x\frac{1}{4D+3}\sin 2x$$

$$y_p(x)=e^x\frac{4D-3}{4D-3}\frac{1}{4D+3}\sin 2x=e^x(4D-3)\frac{1}{16D^2-9}\sin 2x=e^x(4D-3)\frac{1}{-16(2)^2-9}\sin 2x$$

$$y_p(x)=e^x(4D-3)\frac{1}{-73}\sin 2x=-\frac{1}{73}e^x(4D)\sin 2x-\frac{1}{73}e^x(-3)\sin 2x$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{73}e^x(8\cos 2x)+\frac{3}{73}e^x\sin 2x=-\frac{e^x}{73}(-8\cos 2x+3\sin 2x)$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+2y'+4y=e^x\sin 2x$ คือ

$$y_p(x)=-\frac{e^x}{73}(-8\cos 2x+3\sin 2x)$$

ตัวอย่างที่ 3.29 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{-x}\sin x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{-x}\sin x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2-3D+2)y_p(x)=e^{-x}\sin x$ ซึ่ง $P(D)=D^2-3D+2$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=e^{-x}\sin x$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{-x}\sin x$$

$$y_p(x)=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2-3(D-1)+2}\sin x=e^{-x}\frac{1}{D^2-2D+1-3D+3+2}\sin x$$

$$y_p(x)=e^{-x}\frac{1}{D^2-5D+6}\sin x=e^{-x}\frac{1}{-1^2-5D+6}\sin x=e^{-x}\frac{1}{-5D+5}\sin x$$

$$y_p(x)=e^{-x}\frac{1}{-5D+5}\left(\frac{5D+5}{5D+5}\right)\sin x=e^{-x}\frac{5D+5}{-5^2D^2+5^2}\sin x=e^{-x}\frac{5D+5}{-5^2(-1^2)+5^2}\sin x$$

$$y_p(x)=\frac{e^{-x}}{50}(5D+5)\sin x=\frac{e^{-x}}{10}(D+1)\sin x=\frac{e^{-x}}{10}(\cos x+\sin x)$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-3y'+2y=e^{-x}\sin x$ คือ $y_p(x)=\frac{e^{-x}}{10}(\cos x+\sin x)$

ตัวอย่างที่ 3.30 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=4xe^{3x}-8e^x\cos 2x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=4xe^{3x}-8e^x\cos 2x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2-4D+3)y_p(x)=4xe^{3x}-8e^x\cos 2x$ ซึ่ง $P(D)=D^2-4D+3$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=4xe^{3x}-8e^x\cos 2x$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{P(\mathrm{D})}\left(4xe^{3x}-8e^x\cos 2x\right)=\frac{1}{P(\mathrm{D})}4xe^{3x}-\frac{1}{P(\mathrm{D})}8e^x\cos 2x$$

$$y_p(x)=4e^{3x}\frac{1}{P(\mathrm{D}+3)}x-8e^x\frac{1}{P(\mathrm{D}+1)}\cos 2x$$

$$y_p(x)=4e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-4(D+3)+3}x-8e^x\frac{1}{(D+1)^2-4(D+1)+3}\cos 2x$$

$$y_p(x)=4e^{3x}\frac{1}{D^2+2D}x-8e^x\frac{1}{D^2-2D}\cos 2x=4e^{3x}\left(\frac{1}{D}\right)\frac{1}{D+2}x-8e^x\frac{1}{-2^2-2D}\cos 2x$$

$$y_p(x)=4e^{3x}\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}D+\ldots\right)x-8e^x\frac{1}{-2D-4}\cos 2x=4e^{3x}\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+4e^x\frac{1}{D+2}\cos 2x$$

จาก $\frac{1}{D}g(x)=\int g(x)dx$

$$y_p(x)=4e^{3x}\int\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)dx+4e^x\frac{D-2}{D-2}\frac{1}{D+2}\cos 2x=4e^{3x}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)+4e^x(D-2)\frac{1}{D^2-4}\cos 2x$$

$$y_p(x)=4e^{3x}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)+4e^x(D-2)\frac{1}{-2^2-4}\cos 2x=e^{3x}\left(x^2-x\right)+4e^x(D-2)\frac{1}{-8}\cos 2x=$$

$$y_p(x)=e^{3x}\left(x^2-x\right)-\frac{1}{2}e^x(D-2)\cos 2x=e^{3x}\left(x^2-x\right)-\frac{1}{2}e^x(-2\sin 2x-2\cos 2x)$$

$$y_p(x)=e^{3x}\left(x^2-x\right)-\frac{1}{2}e^x(D-2)\cos 2x=e^{3x}\left(x^2-x\right)+e^x(\sin 2x+\cos 2x)$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-4y'+3y=4xe^{3x}-8e^{x}\cos 2x$ คือ $y_p(x)=e^{3x}\left(x^2-x\right)+e^{x}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$

กรณี 5. เมื่อฟังก์ชัน $g(x)=xF(x)$

$$P(D)\left[xG(x)\right]=xP(D)\,\mathrm{G}(x)+P'(D)\,\mathrm{G}(x)$$

ให้ $P(D)G(x)=F(x)$ ดังนั้น $G(x)=\dfrac{1}{P(D)}F(x)$

$$P(D)\left[x\frac{1}{P(D)}F(x)\right]=xP(D)\frac{1}{P(D)}F(x)+P'(D)\frac{1}{P(D)}F(x)$$

$$P(D)\left[x\frac{1}{P(D)}F(x)\right]=xF(x)+P'(D)\frac{1}{P(D)}F(x)$$

หารด้วย $P(D)$ ทั้งสองข้างของสมการ

$$x\frac{1}{P(D)}F(x)=\frac{1}{P(D)}xF(x)+\frac{1}{P(D)}P'(D)\frac{1}{P(D)}F(x)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{P(D)}xF(x)=x\frac{1}{P(D)}F(x)-\frac{1}{P(D)}P'(D)\frac{1}{P(D)}F(x)$$

ตัวอย่างที่ 3.31 จงหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=x\sin 2x$ ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=x\sin 2x$ เขียนให้อยู่ในรูปตัวดำเนินการผกผัน $(D^2+3D+2)y_p(x)=x\sin 2x$ ซึ่ง $P(D)=D^2+3D+2$ เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน $g(x)=x\sin 2x$

ดังนั้น

$$y_p(x)=\frac{1}{P(\mathrm{D})}x\sin 2x=x\frac{1}{P(D)}\sin 2x-\frac{1}{P(D)}P'(D)\frac{1}{P(D)}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x-\frac{1}{D^2+3D+2}(2D+3)\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\frac{1}{D^2+3D+2}\sin 2x-\frac{2D+3}{\left(D^2+3D+2\right)^2}\sin 2x=x\frac{1}{-2^2+3D+2}\sin 2x-\frac{2D+3}{\left(-2^2+3D+2\right)^2}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\frac{1}{-4+3D+2}\sin 2x-\frac{2D+3}{\left(-4+3D+2\right)^2}\sin 2x=x\frac{1}{3D-2}\sin 2x-\frac{2D+3}{\left(3D-2\right)^2}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\left(\frac{3D+2}{3D+2}\right)\frac{1}{3D-2}\sin 2x-\frac{2D+3}{9D^2-12D+4}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\frac{3D+2}{9D^2-4}\sin 2x-\frac{2D+3}{9(-2^2)-12D+4}\sin 2x=x\frac{3D+2}{9(-2)^2-4}\sin 2x-\frac{2D+3}{-36-12D+4}\sin 2x$$

$$y_p(x)=x\frac{3D+2}{-36-4}\sin 2x-\frac{2D+3}{-12D-32}\sin 2x=-\frac{1}{40}x(3D+2)\sin 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{3D-8}{3D-8}\right)\frac{2D+3}{3D+8}\sin 2x$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(3(2\cos 2x)+2\sin 2x\big)+\frac{1}{4}\frac{(3D-8)(2D+3)}{9D^2-64}\sin 2x$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)+\frac{1}{4}\frac{\big(6D^2-7D-24\big)}{9(-2^2)-64}\sin 2x$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)-\frac{1}{400}\big(6(-4\sin 2x)-7(2\cos 2x)-24\sin 2x\big)$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)-\frac{1}{400}\big(-24\sin 2x-14\cos 2x-24\sin 2x\big)$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)-\frac{1}{400}\big(-48\sin 2x-14\cos 2x\big)$$

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)+\frac{1}{200}\big(24\sin 2x+7\cos 2x\big)$$

ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'+2y=x\sin 2x$ คือ

$$y_p(x)=-\frac{1}{40}x\big(6\cos 2x+2\sin 2x\big)+\frac{1}{200}\big(24\sin 2x+7\cos 2x\big)$$

3.4 แบบฝึกหัด

ข้อที่ 3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y''+8y'+41y=0$
2. $y''-4y'+8y=0$
3. $4y''+4y=0$
4. $16y''+24y'+9y=0$
5. $2y''+5y'+3y=0$ เมื่อ $y(0)=3$ และ $y'(0)=-4$
6. $4y''-4y'+y=0$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=-1.5$
7. $y''+16y=0$ เมื่อ $y(\pi/4)=-3$ และ $y'(\pi/4)=4$
8. $y''-2y'+5y=0$ เมื่อ $y(\pi)=0$ และ $y'(\pi)=2$

ข้อที่ 3.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ด้วยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ไม่รู้ค่า

1 $y''+5y'+4y=10e^{-3x}$

2 $y''-9y=12\cos\pi x$

3 $y''+4y'+4y=e^{-x}\cos x$

4. $y''+3y=18x^2$ เมื่อ $y(0)=-3$ และ $y'(0)=0$

5. $y''+4y=-12\sin 2x$ เมื่อ $y(0)=1.8$ และ $y'(0)=5$

ข้อที่ 3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

1 $y''+y=\tan x$ คำตอบ $y=C_1\sin x+C_1\cos x+\frac{1}{2}\cos x\ln(\sin x-1)-\frac{1}{2}-\cos x\ln(\sin x+1)$

2 $y''+y=1+x^2$ คำตอบ $y=C_1\sin x+C_1\cos x+x^2-1$

3 $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$ คำตอบ $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-e^x x-e^{2x}x+e^x\ln(e^x+1)+e^{2x}\ln(e^x+1)$

4 $y''-2y'+y=4e^x x^{-3}\ln x$ คำตอบ $y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3e^x}{x}+\frac{2e^x\ln x}{x}$

ข้อที่ 3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ด้วยวิธีดำเนินการผกผัน

1 $2y''+2y'+3y=x^2+2x-1$

2 $y''+2y'+4y=e^x\sin 2x$

3 $y''-2y'+y=xe^x\sin x$

4 $y''+3y'+2y=x\sin x$

ข้อที่ 3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ด้วยวิธีดำเนินการผกผันแบบลัด

1 $y''+2y'+y=e^{x}-\cos^{2}x$ คำตอบ $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\left(4\sin 2x-3\cos 2x\right)$

2 $y''+4y=\cos x\cos 3x$ คำตอบ $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\frac{1}{8}x\sin 2x-\frac{1}{24}\cos 4x$

3 $y''-3y'+2y=6x^{2}-6x-11$ คำตอบ $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+3x^{2}+6x+\frac{1}{2}$

4 $y''+4y'+5y=4e^{-2x}\cos x$ คำตอบ $y=C_1e^{-2x}\sin x+C_2e^{-2x}\cos x+2e^{-2x}x\sin x$

3.5 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541

บทที่ 4 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการแปลงลาปลาซ

4.1 บทนำ

ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) หรือลาปลาซทรานส์ฟอร์มเป็นวิธีการหนึ่ง ที่สามารถใช้หาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์โดยการเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปการแปลงลาปลาซแล้วหาผลเฉลย ผลการแปลงลาปลาซหาได้จาก (4-1)

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (4\text{-}1)$$

เมื่อ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีค่า x เท่ากับ $[0,\infty]$ และ S เป็นเซตที่ $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ ลู่เข้าทุกค่า เมื่อ $s \in R$ ดังนั้น $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของฟังก์ชัน $f(t)$

4.2 การแปลงลาปลาซเบื้องต้น

จากสมการ (4-1) เมื่อผลการแปลงลาปลาซ $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ ดังนั้น หัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างฟังก์ชัน $f(t)$ ต่าง ๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1. เมื่อฟังก์ชัน $f(t) = 1$

ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L\{1\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{s} \text{ เมื่อ } s > 0$$

ถ้า $s < 0$ ทำให้ $-\frac{1}{s}e^{-\infty}$ มีค่าลู่ออก และถ้า $s = 0$ พบว่า $-\frac{1}{s}e^{-\infty}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นทำให้ $s > 0$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = 1$ คือ $L\{1\} = \frac{1}{s}$ เมื่อ $s > 0$

กรณีที่ 2. เมื่อฟังก์ชัน $f(t) = e^{at}$

ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L\left\{e^{at}\right\} = F(s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\frac{1}{(s-a)}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{(s-a)}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{s-a} \text{ เมื่อ } s > a$$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = e^{at}$ คือ $L\left\{e^{at}\right\} = F(s) = \frac{1}{s-a}$ เมื่อ $s > a$

กรณีที่ 3. เมื่อฟังก์ชัน $f(t) = \sin at$

ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$L\{\sin at\} = F(s) = \int_0^\infty (\sin at)e^{-st}dt$ ซึ่งใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) ในการหาค่าปริพันธ์

ให้ $u = \sin at$ จะได้ $du = a(\cos at)dt$ และ $dv = e^{-st}dt$ จะได้ $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$\int (\sin at)e^{-st}dt = \sin at(-\frac{1}{s}e^{-st}) - \int (-\frac{1}{s}e^{-st})(\cos at)dt = -\sin at(\frac{1}{s}e^{-st}) + \int (\frac{1}{s}e^{-st})(\cos at)dt$$

วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนของ $\int (\frac{1}{s}e^{-st})(\cos at)dt$

ให้ $u = \cos at$ จะได้ $du = -a(\sin at)dt$ และ $dv = \frac{1}{s}e^{-st}dt$ จะได้ $v = -\frac{1}{s^2}e^{-st}$

$$\int (\frac{1}{s}e^{-st})(\cos at)dt = \cos at(-\frac{1}{s^2}e^{-st}) - \int (-\frac{1}{s^2}e^{-st})(a\sin at)dt = -\cos at(\frac{1}{s}e^{-st}) + \int (\frac{1}{s}e^{-st})(a\sin at)dt$$

แทนค่า

$$\int (\sin at)e^{-st}dt + \int (\frac{s^2}{a^2}e^{-st})(\sin at)dt = -\frac{1}{a}e^{-st}\cos at - (\frac{s}{a^2})e^{-st}\sin at$$

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int (\sin at)e^{-st}dt = -e^{-st}\left(\frac{1}{a}\cos at + (\frac{s}{a^2})\sin at\right)$$

$$\int (\sin at)e^{-st}dt = -e^{-st}\left(\frac{a^2}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{a}\cos at + (\frac{s}{a^2})\sin at\right)$$

แทนค่า

$$\int_0^\infty (\sin at)e^{-st}dt = -e^{-st}\left(\frac{a^2}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{a}\cos at + (\frac{s}{a^2})\sin at\right)\Big|_0^\infty$$

$$\int_0^\infty (\sin at)e^{-st}dt = -e^{-\infty}\left(\frac{a^2}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{a}\cos\infty + (\frac{s}{a^2})\sin\infty\right) - \left[-e^0\left(\frac{a^2}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{a}\cos 0 + (\frac{s}{a^2})\sin 0\right)\right]$$

$$\int_0^\infty (\sin at)e^{-st}dt = \left[\left(\frac{a^2}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{a}+0\right)\right] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

ดังนั้น $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = \sin at$ คือ $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$ เมื่อ $s > 0$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = t^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L\{t^n\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt \text{ เมื่อ } s > 0$$

$$L\{t^n\} = F(s) = -\left(\frac{t^\infty e^{-\infty}}{\mathrm{s}} - \frac{0e^0}{\mathrm{s}}\right) + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$$

$$L\{t^{n-1}\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = -\frac{t^{n-1} e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n-1}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-2} dt = -\left(\frac{t^\infty e^{-\infty}}{\mathrm{s}} - \frac{0e^0}{\mathrm{s}}\right) + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n-1}{s}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-21} dt$$

ดังนั้น

$$L\{t^n\} = F(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} L\{t^{n-2}\} = \frac{n(n-1)(n-2)}{s^3} L\{t^{n-3}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = t^n$ คือ $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ เมื่อ $s > 0$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \sinh at$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ

เมื่อ $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ ดังนั้น ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sinh at dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt - \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} dt\right)$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{(-\mathrm{s}+a)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-s+a} e^{(-\mathrm{s}+a)t}\Big|_0^\infty - \frac{1}{-s-a} e^{(-\mathrm{s}-a)t}\Big|_0^\infty\right)$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-s+a}\left(e^{-\infty} - 1\right) - \frac{1}{-s-a}\left(e^{-\infty} - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{-s+a} + \frac{1}{-s-a}\right)$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{-(-s-a)+(-s+a)}{s^2 - a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+a-s+a}{s^2 - a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{s^2 - a^2}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t) = \sinh at$ คือ $L\{f(t)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$ เมื่อ $s > a$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \begin{cases} 3, 0 < t \le 2 \\ -1, 2 < t \le 4 \\ 0, t > 4 \end{cases}$

วิธีทำ

ผลการแปลงลาปลาซได้ดังนี้

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^2 3e^{-st}dt+\int_2^4(-1)e^{-st}dt+\int_4^\infty(0)e^{-st}dt=3\int_0^2 e^{-st}dt-\int_2^4 e^{-st}dt+0$$

$$L\{f(t)\}=F(s)=\frac{3}{(-s)}e^{-st}\Big|_0^2-\frac{1}{(-s)}e^{-st}\Big|_2^4=-3\left\{\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{1}{s}\right\}+\left\{\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right\}$$

$$L\{f(t)\}=F(s)=-\frac{3e^{-2s}}{s}+\frac{3}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{-3e^{-2s}+3+e^{-4s}-e^{-2s}}{s}=\frac{e^{-4s}-4e^{-2s}+3}{s},s>0$$

ผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)=\begin{cases}3,0<t\le 2\\-1,2<t\le 4\\0,t>4\end{cases}$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{e^{-4s}-4e^{-2s}+3}{s}$ เมื่อ $s>0$

ตารางที่ 4.1 เป็นตารางสรุปผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่างๆ นอกจากนี้ผลการแปลงลาปลาซสามารถใช้ https://www.emathhelp.net/calculators/differential-equations/laplace-transform-calculator/ เพื่อใช้ในการคำนวณ

ตารางที่ 4.1 สรุปสำหรับการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่างๆ

$f(t)$	$L\{f(t)\}=F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s},s>0$
2. $t^n,n=1,2,3,...$	$\frac{n!}{s^{n+1}},s>0$
4. e^{at}	$\frac{1}{s-a},s>a$
5. $e^{at}t^n,n=1,2,3,...$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},s>a$
6. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},s>0$
7. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},s>0$
8. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2},s>\lvert a\rvert$
9. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2},s>\lvert a\rvert$
10. $t\sin at$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2},s>0$

11. $t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}, s>0$
12. $t\sinh at$	$\frac{2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}, s>\lvert a\rvert$
13. $t\cosh at$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}, s>\lvert a\rvert$
14. $e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}, s>a$
15. $e^{at}\cos kt$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+k^2}, s>a$
16 $\sin at - at\cos at$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
17. $\cosh at - at\sinh at$	$\frac{2a^3}{\left(s^2-a^2\right)^2}$
18. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
19. $\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
20. $t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
21. $f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

4.3 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

ถ้าให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้ เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัว ดังนั้นสมบัติของผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

1. สมบัติเชิงเส้น (linearity)

$$L\{C_1f(t)+\mathrm{C}_2\,g(t)\}=C_1L\{f(t)\}+C_2L\{g(t)\}$$

พิสูจน์

$$L\{C_1 f(t)+\mathrm{C}_2\, g(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\left(C_1 f(t)+\mathrm{C}_2\, g(t)\right)dt=\int_0^{\infty} e^{-st}C_1 f(t)\,\mathrm{dt}+\int_0^{\infty} e^{-st}C_2 g(t)\,\mathrm{dt}$$

$$L\{C_1 f(t)+\mathrm{C}_2\, g(t)\}=C_1\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{dt}+C_2\int_0^{\infty} e^{-st}g(t)\,\mathrm{dt}=C_1 L\{f(t)\}+\mathrm{C}_2\, L\{g(t)\}$$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=5\sin 2t+2e^{-3t}$

วิธีทำ

$$L\{f(t)\}=L\{5\sin 2t+2e^{-3t}\}=5L\{\sin 2t\}+2L\{e^{-3t}\}$$

$$L\{f(t)\}=F(s)=5\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)+2\left(\frac{1}{s-(-3)}\right)=\frac{10}{s^2+4}+\frac{2}{s+3}$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=5\sin 2t+2e^{-3t}$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{10}{s^2+4}+\frac{2}{s+3}$

2. สมบัติการเลื่อนแบบที่หนึ่ง (First shifting)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ แล้ว $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

เมื่อ $L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt=F(s-a)$

ตัวอย่างที่ 4.5 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=e^{2t}\sin 2t$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(t)=\sin 2t$ ให้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้ $L\{f(t)\}=L\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^2+4}$

สมบัติการเลื่อนแบบที่หนึ่ง ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคือ $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\}=L\{e^{2t}\sin 2t\}=F(s-2)=\frac{2}{(s-2)^2+4}=\frac{2}{s^2-4s+4+4}=\frac{2}{s^2-2s+8}$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=e^{2t}\sin 2t$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{2}{s^2-2s+8}$

3. สมบัติการคูณด้วย t^n (Multiplication of $f(t)$ by t^n)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ แล้ว $L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n F(s)}{ds^n}$

เมื่อ $L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $F(s)$ เทียบกับ s

$$F'(s)=\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt=(-1)^1\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt=(-1)^1L\{tf(t)\}$$

อนุพันธ์อันดับสองของ $F(s)$ เทียบกับ s

$$F''(s)=\frac{dF'(s)}{ds}=(-1)^1\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt=(-1)^1\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}tf(t)dt=(-1)^2\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt=(-1)^2L\{t^2f(t)\}$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับ n ของ $F(s)$ เทียบกับ s

$$F^n(s)=\frac{dF^{n-1}(s)}{ds}=(-1)^{n-1}\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}f(t)dt=(-1)^{n-1}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}t^{n-1}f(t)dt=(-1)^n\int_0^\infty t^ne^{-st}f(t)dt=(-1)^nL\{t^nf(t)\}$$

หารด้วย $(-1)^n$ ทั้งสองข้างสมการ

$$L\{t^nf(t)\}=\frac{1}{(-1)^n}F^n(s)=(-1)^n\frac{dF^n(s)}{ds}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=te^{-t}\cos t$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(t)=\cos t$ ให้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้ $L\{f(t)\}=L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1^2}=\frac{s}{s^2+1}$

สมบัติการเลื่อนแบบที่หนึ่ง ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคือ $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

ดังนั้น

$$L\{e^{-t}\cos t\}=F(s+1)=\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}=\frac{s+1}{s^2+2s+1+1}=\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

สมบัติการคูณด้วย t^n ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคือ $L\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$

เมื่อ $n=1$ ดังนั้น

$$L\{te^{-t}\cos t\}=(-1)^1\frac{dF(s)}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right)=-\frac{(s^2+2s+2)(1)-(s+1)(2s+2)}{(s^2+2s+2)^2}$$

$$L\{te^{-t}\cos t\}=-\frac{s^2+2s+2-(2s^2+4s+2)}{(s^2+2s+2)^2}=-\frac{s^2+2s+2-2s^2-4s-2}{(s^2+2s+2)^2}=-\frac{-s^2-2s}{(s^2+2s+2)^2}$$

$$L\{te^{-t}\cos t\}=\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=te^{-t}\cos t$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$

4. สมบัติการหารด้วย t (Divisios of $f(t)$ by t)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ แล้ว $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$

เมื่อ $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

$$\int_s^\infty F(u)du=\int_s^\infty\int_0^\infty e^{-ut}f(t)dtdu=\int_0^\infty\int_s^\infty e^{-ut}f(t)dudt=\int_0^\infty f(t)\left(-\frac{1}{t}e^{-ut}\Big|_s^\infty\right)dt=\int_0^\infty f(t)\left(-\frac{1}{t}\left(e^{-\infty}-e^{-st}\right)\Big|_s^\infty\right)dt$$

$$\int_s^\infty F(u)du=\int_0^\infty f(t)\left(-\frac{1}{t}\left(0-e^{-st}\right)\Big|_s^\infty\right)dt=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$$

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ เมื่อ $\int\frac{1}{x^2+1}dx=\tan^{-1}x$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(t)=\sin t$ ให้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้ $L\{f(t)\}=L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1^2}=\frac{1}{s^2+1}$

สมบัติการหารด้วย t ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคือ $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$

ดังนั้น

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=\arctan s\Big|_s^\infty=\arctan(\infty)-\arctan s=\frac{\pi}{2}-\arctan s$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{\pi}{2}-\arctan s$

5. สมบัติการเปลี่ยนมาตราส่วน (Change of scal)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ และ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $L\{f(\mathrm{a}t)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

เมื่อ $L\{f(at)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt$

ให้ $u=at$ และ $du=adt$

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=\cos 4t$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(t)=\cos 4t$ ให้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้ $L\{f(t)\}=L\{\cos 4t\}=\frac{s}{s^2+4^2}=\frac{s}{s^2+16}$

สมบัติการเปลี่ยนมาตราส่วน ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคือ $L\{f(\mathrm{a}\,t)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

ดังนั้น

$$L\{\cos(4t)\}=\frac{1}{4}F\left(\frac{s}{4}\right)$$

ฟังก์ชัน $f(t)=\cos t$ ให้ผลการแปลงลาปลาซดังนี้ $L\{f(t)\}=L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}$

ดังนั้น

$$L\{\cos(4t)\}=\frac{1}{4}\left(\frac{(s/4)}{(s/4)^2+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{s}{4}}{\frac{s^2}{16}+1}\right)=\frac{1}{4}\frac{s}{4}\left(\frac{1}{\frac{s^2+16}{16}}\right)=\frac{s}{s^2+16}$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=\cos 4t$ คือ $L\{f(t)\}=\frac{s}{s^2+16}$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=e^{-2t}\left(2e^{4t}+3\sin 2t+6\right)$

วิธีทำ

$$L\{f(t)\}=F(s)=L\{e^{-2t}2e^{4t}\}+L\{e^{-2t}3\sin 2t\}+L\{e^{-2t}6\}$$

$$F(s)=L\{2e^{2t}\}+L\{3e^{-2t}\sin 2t\}+L\{6e^{-2t}\}=2L\{e^{2t}\}+3L\{e^{-2t}\sin 2t\}+6L\{e^{-2t}\}$$

$$F(s)=2\frac{1}{s-2}+3\frac{2}{(s-2)^2+2^2}+6\frac{1}{s-(-2)}=\frac{2}{s-2}+\frac{6}{s^2-4s+4+4}+\frac{6}{s+2}$$

$$F(s)=\frac{2}{s-2}+\frac{6}{s^2-4s+8}+\frac{6}{s+2}$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=e^{-2t}\left(2e^{4t}+3\sin 2t+6\right)$ คือ

$$L\{f(t)\}=\frac{2}{s-2}+\frac{6}{s^2-4s+8}+\frac{6}{s+2}$$

4.4 การแปลงลาปลาซสมการเชิงอนุพันธ์

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty]$ และ $f'(t)$ เป็นฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty]$ ทำให้ $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

จาก

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = 0 - f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n หรือ $f^{(n)}(t)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty]$ แล้ว

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - sf^{(n-2)}(0) - sf^{(n-1)}(0)$$

จาก

$$L\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt = e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = 0 - f''(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$L\{f''(t)\} = -f'(0) + s\left(sL\{f(t)\} - f(0)\right) = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'-10y = 50e^{2x}\cos x$ เมื่อ $y(0) = -1$ และ $y'(0) = 1$

วิธีทำ

$$L\{y''+3y'-10y\} = L\{50e^{2x}\cos x\}$$

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} - 10L\{y\} = 50\frac{(s-2)}{(s-2)^2+1^2}$$

เมื่อ

$$L\{y\} = Y(s)$$

$$L\{y'\} = sL\{y\} - y(0) = sY(s) - y(0)$$

$$L\{y''\} = s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

แทนค่า

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3\left[sY(s) - y(0)\right] - 10Y(s) = 50\frac{(s-2)}{s^2-4s+4+1}$$

$$s^2Y(s) - s(-1) - (1) + 3\left[sY(s) - (-1)\right] - 10Y(s) = 50\frac{s-2}{s^2-4s+5}$$

$$s^2Y(s) + s - 1 + 3sY(s) + 3 - 10Y(s) = 50\frac{s-2}{s^2-4s+5}$$

$$s^2Y(s)+3sY(s)-10Y(s)+s+2=50\frac{s-2}{s^2-4s+5}$$

$$\left(s^2+3s-10\right)Y(s)=50\frac{s-2}{s^2-4s+5}-s-2$$

$$Y(s)=50\frac{s-2}{\left(s^2-4s+5\right)\left(s^2+3s-10\right)}-\frac{s+2}{\left(s^2+3s-10\right)}$$

ผลการแปลงลาปลาซของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+3y'-10y=50e^{2x}\cos x$ คือ

$$Y(s)=50\frac{s-2}{\left(s^2-4s+5\right)\left(s^2+3s-10\right)}-\frac{s+2}{\left(s^2+3s-10\right)}$$

ตัวอย่างที่ 4.11 จงหาผลการแปลงลาปลาซของสมการเชิงอนุพันธ์ $3y''+4y'+y=e^{-2x}(x^2+2\sin 2x)$ เมื่อ $y(0)=-1$ และ $y'(0)=1$

วิธีทำ

$$L\{3y''+4y'+y\}=L\left\{e^{-2x}(x^2+2\sin 2x)\right\}$$

$$3L\{y''\}+4L\{y'\}+L\{y\}=L\left\{e^{-2x}x^2\right\}+L\left\{2e^{-2x}\sin 2x\right\}$$

เมื่อ

$$L\{y\}=Y(s)$$

$$L\{y'\}=sL\{y\}-y(0)=sY(s)-y(0)$$

$$L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

แทนค่า

$$3\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+4\left[sY(s)-y(0)\right]+Y(s)=\frac{2!}{(s+2)^{2+1}}+2\frac{2}{(s+2)^2+2^2}$$

$$3\left[s^2Y(s)-s(-1)-(1)\right]+4\left[sY(s)-(-1)\right]+Y(s)=\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{4}{s^2+4s+4+4}$$

$$3s^2Y(s)+3s-3+4sY(s)+4+Y(s)=\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{4}{s^2+4s+8}$$

$$3s^2Y(s)+4sY(s)+Y(s)+3s+1=\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{4}{s^2+4s+8}$$

$$\left(3s^2+4s+1\right)Y(s)=\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{4}{s^2+4s+8}-3s-1$$

$$Y(s)=\frac{2}{(s+2)^3\left(3s^2+4s+1\right)}+\frac{4}{\left(s^2+4s+8\right)\left(3s^2+4s+1\right)}-\frac{3s+1}{\left(3s^2+4s+1\right)}$$

ผลการแปลงลาปลาซของสมการเชิงอนุพันธ์ $3y''+4y'+y=e^{-2x}(x^2+2\sin 2x)$ คือ

$$Y(s)=\frac{2}{(s+2)^3\left(3s^2+4s+1\right)}+\frac{4}{\left(s^2+4s+8\right)\left(3s^2+4s+1\right)}-\frac{3s+1}{\left(3s^2+4s+1\right)}$$

4.5 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีผลการแปลงลาปลาซเป็น $L\{f(t)\}=F(s)$ แล้ว

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{1}{s}L\{f(t)\}=\frac{F(s)}{s}$$

ให้ $g(t)=\int_0^t f(u)du$ ดังนั้น $g'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(u)du=f(t)$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $g'(t)=f(t)$ แล้ว

$$L\{g'(t)\}=sL\{g(t)\}-g(0)=L\{f(t)\}$$

กำหนดให้ $g(0)=0$ ดังนั้น

$$L\{g'(t)\}=sL\{g(t)\}-0=sL\{g(t)\}=L\{f(t)\}=F(s)$$

$$sL\{g(t)\}=F(s)$$

$$L\{g(t)\}=L\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

ตัวอย่างที่ 4.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน $\int_0^t e^u du$

วิธีทำ

$$L\left\{\int_0^t e^u du\right\}=\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{s}\right) \text{ หรือ } \int_0^t e^u du=e^u\Big|_0^t=e^t-1$$

$$L\left\{\int_0^t e^u du\right\}=L\{e^t\}-L\{1\}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}=\frac{s-(s-1)}{(s-1)s}=\frac{1}{s(s-1)}$$

หรือ

$$L\left\{\int_0^t e^u du\right\}=\frac{L\{e^t\}}{s}=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{(s-1)}\right)=\frac{1}{s(s-1)}$$

ผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน $\int_0^t e^u du$ คือ $L\left\{\int_0^t e^u du\right\}=\frac{1}{s(s-1)}$

ตัวอย่างที่ 4.13 จงหาผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน $\int_0^t x\sin 2x dx$

วิธีทำ

$$L\left\{\int_0^t x\sin 2x dx\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

เนื่องจาก $L\{x\sin 2x\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$

$$L\left\{\int_0^t x\sin 2x dx\right\}=\frac{F(s)}{s}=\frac{4s}{s\left(s^2+4\right)^2}$$

ผลการแปลงลาปลาซของอินทิกรัลฟังก์ชัน $\int_0^t x\sin 2x dx$ คือ $L\left\{\int_0^t x\sin 2x dx\right\}=\frac{4s}{s\left(s^2+4\right)^2}$

4.6 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ผลการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) สามารถเขียนได้เป็น $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ ซึ่ง L^{-1} เรียกว่าตัวดำเนินการผลการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform operator)

ตัวอย่างที่ 4.14 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{12}{s^4}\right\}$

วิธีทำ

$$L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{12}{s^4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{12}{s^4}\right\}$$

จากตารางที่ 4.1

$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ $L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$ และ $L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$

เมื่อ

$$L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\}=3e^{2t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{4\times 2}{s^2+2^2}\right\}=4L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=4\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{12}{s^4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2\times 3!}{s^{3+1}}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}=2t^3$$

ดังนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{12}{s^4}\right\}=3e^{2t}+2\sin 2t-2t^3$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{12}{s^4}\right\}$ คือ $f(t)=3e^{2t}+2\sin 2t-2t^3$

ตัวอย่างที่ 4.15 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4s+20}\right\}$

วิธีทำ

เมื่อพิจารณาตัวหาร พบว่า เทอมของ $s^2+4s+20$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $\cos at$ หรือ $\sin at$ เมื่อทำการจัดรูปพบว่า $s^2+4s+4+16=(s^2+4s+4)+16=(s+2)^2+16$

จาก $L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$

จัดรูปโดยให้รูปในรูปของ $F(s-a)$

$$\frac{3s+2}{s^2+4s+20}=\frac{3s+2}{(s^2+4s+4)+16}=\frac{3s+2}{(s+2)^2+4^2}=\frac{3(s+2)-4}{(s+2)^2+4^2}=3\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}-\frac{4}{(s+2)^2+4^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4s+20}\right\}=3L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+4^2}\right\}=3e^{-2t}\cos 4t-e^{-2t}\sin 4t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4s+20}\right\}=3e^{-2t}\cos 4t-e^{-2t}\sin 4t$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+4s+20}\right\}$ คือ $f(t)=3e^{-2t}\cos 4t-e^{-2t}\sin 4t$

ตัวอย่างที่ 4.16 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

วิธีทำ

พิจารณา $\frac{1}{(s^2+4)^2}$ ยกกำลัง 2 แสดงว่ามาจาก $L\left\{t^nf(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$

ถ้าให้ $F(s)=\frac{1}{(s^2+4)}$ แล้ว $\frac{dF(s)}{ds}=\frac{0-2s}{(s^2+4)^2}=\frac{-2s}{(s^2+4)^2}$

เมื่อ $n=1$ ดังนั้น $L\left\{tf(t)\right\}=(-1)\frac{dF(s)}{ds}$

$$\frac{s}{(s^2+4)^2}=-\frac{1}{2}\frac{-2s}{(s^2+4)^2}=-\frac{1}{2}\left[(-1)^1\frac{-2s}{(s^2+4)^2}\right]=-\frac{1}{2}\left[(-1)^1\frac{dF(s)}{ds}\right]$$

เมื่อ $L^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}=(-1)^1tf(t)=-tL^{-1}\left\{F(s)\right\}$

เมื่อ $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$ ดังนั้น $L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$

$-tL^{-1}\{F(s)\}=-\frac{t}{2}\sin 2t$

และ

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}=-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}\sin 2t\right)=\frac{t}{4}\sin 2t$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$ คือ $f(t)=\frac{t}{4}\sin 2t$

การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยอาศัยตาราง และสมบัติบางประการของการแปลงลาปลาซผกผัน แต่วิธีดังกล่าวข้างต้น ปัญหาว่าการจัดรูปแบบของ $F(s)$ เพื่อให้อยู่ในรูปที่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน ดังนั้น 1. วิธีการแยกเศษส่วนย่อย และ 2. การใช้ทฤษฎีคอนโวลูชัน

4.6.1 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย

วิธีการแยกเศษส่วนย่อยทำได้โดยการแยกตัวประกอบของ $F(s)$ ก่อน ซึ่งสามารถแบ่งรูปของตัวส่วนได้ 2 รูปแบบ คือ $(as+b)^n$ และ $(as^2+bs+c)^n$ เมื่อ n เป็น 1 2 3 ...

กรณีที่ 1. เมื่อ $F(s)$ **มีตัวส่วนอยู่ในรูป** $(as+b)^n$

$F(s)$ สามารถกระจายตัวในรูปของเศษส่วนได้ดังนี้

$$F(s)=\frac{P(s)}{(as+b)^n}=\frac{A}{as+b}+\frac{B}{(as+b)^2}+\frac{C}{(as+b)^3}+\ldots+\frac{N}{(as+b)^n}$$

เมื่อ $A,B,C,...,N$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2. เมื่อ $F(s)$ **มีตัวส่วนอยู่ในรูป** $(as^2+bs+c)^n$

$F(s)$ สามารถกระจายตัวในรูปของเศษส่วนได้ดังนี้

$$F(s)=\frac{P(s)}{(as^2+bs+c)^n}=\frac{As+A_1}{as^2+bs+c}+\frac{Bs+B_1}{(as^2+bs+c)^2}+\frac{Cs+C_1}{(as^2+bs+c)^3}+\ldots+\frac{Ns+N_1}{(as^2+bs+c)^n}$$

เมื่อ $A,B,C,...,N$ และ $A_1,B_1,C_1,...,N_1$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 4.17 จงแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชัน $F(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}$

วิธีทำ

พิจารณา $F(s)$ พบว่าส่วนตัวหารมีเฉพาะเทอม $(s-1)$ และ $(s+3)$ ซึ่งจัดเป็น $F(s)$ มีตัวส่วนอยู่ในรูป $(as+b)^n$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s+3)}$$

คูณด้วย $(s-1)^2(s+3)$

$$1=\frac{A(s-1)^2(s+3)}{(s-1)}+\frac{B(s-1)^2(s+3)}{(s-1)^2}+\frac{C(s-1)^2(s-1)^2}{(s+3)}=A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2$$

$$A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2=1$$

ถ้าแทน $s=1$ จะได้ $0A+B(1+3)+0C=1$ ดังนั้น $B=\frac{1}{4}$

ถ้าแทน $s=-3$ จะได้ $A(3-1)(-3+3)+B(-3+3)+C(-3-1)^2=0+0+16C=1$ ดังนั้น $C=\frac{1}{16}$

ถ้าแทน $s=-1$ จะได้ $A(-1-1)(-1+3)+B(-1+3)+C(-1-1)^2=-4A+2B+4C=1$

ดังนั้น $A=\frac{(1-2B-4C)}{-4}=\frac{\left(1-2\left(\frac{1}{4}\right)-4\left(\frac{1}{16}\right)\right)}{-4}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}{-4}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{-4}=-\frac{1}{16}$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}=-\frac{1}{16}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{(s+3)}$$

เศษส่วนย่อยของฟังก์ชัน $F(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}$ คือ $F(s)=-\frac{1}{16}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{(s+3)}$

ตัวอย่างที่ 4.18 จงแยกเศษส่วนย่อยของ $F(s)=\frac{2s^2+3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

วิธีทำ

พิจารณา $F(s)$ พบว่าส่วนตัวหารมีเฉพาะเทอม $(s-1)$ ซึ่งจัดเป็น $F(s)$ มีตัวส่วนอยู่ในรูป $(as+b)^n$ และ (s^2+1) ซึ่งจัดเป็น $F(s)$ มีตัวส่วนอยู่ในรูป $(as^2+bs+c)^n$

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{(s^2+1)}$$

คูณด้วย $(s-1)(s^2+1)$

$$2s^2+3s+1=\frac{A}{s-1}(s-1)(s^2+1)+\frac{Bs+C}{(s^2+1)}(s-1)(s^2+1)=A(s^2+1)+\left(Bs+C\right)(s-1)$$

$$A(s^2+1)+\left(Bs+C\right)(s-1)=2s^2+3s+1$$

ถ้าแทน $s=-1$

$$A(1^2+1)+\left(B(1)+C\right)(1-1)=2(1)^2+3(1)+1$$

$2A+0=2+3+1=6$ ดังนั้น $A=3$

ถ้าแทน $s=0$

$A(0^2+1)+\big(B(0)+C\big)(0-1)=2(0)^2+3(0)+1$

$3(1)+\big(0+C\big)(-1)=0+0+1$

$3-C=1$ ดังนั้น $C=2$

ถ้าแทน $s=2$

$A(2^2+1)+\big(B(2)+C\big)(2-1)=2(2)^2+3(2)+1$

$3(5)+\big(2B+2\big)(1)=8+6+1=15$

$2B=15-15-2=-2$ ดังนั้น $B=-1$

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{(s^2+1)}=\frac{3}{s-1}+\frac{-s+2}{(s^2+1)}$$

เศษส่วนย่อยของฟังก์ชัน $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$ คือ $F(s)=\dfrac{3}{s-1}+\dfrac{-s+2}{(s^2+1)}$

4.6.2 การใช้ทฤษฎีคอนโวลูชัน

ทฤษฎีคอนโวลูชัน (Convolution theorem) เป็นการประยุกต์การแปลงผกผันลาปลาซ เมื่อ $F(s)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขนาดใหญ่

ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ t เมื่อ $t>0$ คอนโวลูชันของ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t ด้วย และสามารถเขียนแทนด้วย $(f*g)(t)$ หรือ $f(t)*g(t)$ โดยมีค่าดังนี้

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

การสลับที่ของคอนโวลูชัน

การสลับที่ของคอนโวลูชัน (commutative of Convolution) มีค่าดังนี้

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

ถ้าให้ $v=t-u$ ดังนั้น $u=t-v$ เมื่อ $u=t$ ทำให้ $v=t-t=0$ และ $-dv=du$

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_t^0 f(t-v)g(v)(-dv)=-\int_t^0 f(t-v)g(v)(dv)=\int_0^t g(v)f(t-v)(dv)$$

$$(f*g)(t)=f(t)*g(t)=(g*f)(t)$$

ตัวอย่างที่ 4.19 ถ้า $f(t)=t$ และ $g(t)=e^t$ จงหาคอนโวลูชันของ $f(t)$ และ $g(t)$

วิธีทำ

$$(f*g)(t)=t)*e^t=\int_0^t ue^{t-u}du=\int_0^t ue^te^{-u}du=e^t\int_0^t ue^{-u}du$$

$$(f*g)(t)=t)*e^t=e^t\left(-ue^{-u}+\int_0^t e^{-u}du\right)=e^t\left(-ue^{-u}\Big|_0^t-e^{-u}\Big|_0^t\right)=e^t\left(-te^{-t}-e^{-t}+1\right)$$

$$(f*g)(t)=t)*e^t=e^t\left(-te^{-t}-e^{-t}+1\right)=-t-1+e^t$$

ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เป็น $F(s)$ และ $G(s)$ ตามลำดับ ดังนั้น $L\{f(t)\}=F(s)$ และ $L\{g(t)\}=G(s)$ แล้ว

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

$$G(s)=L\{g(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt=\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv$$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}f(u)e^{-sv}g(v)dvdu=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv$$

กำหนดให้ $t=u+v$ และ $dt=dv$

เมื่อ $v=0$ จะได้ $t=u$ และ $v=\infty$ จะได้ $t=\infty$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-st}f(u)g(t-u)dudt=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(u)g(t-u)dudt$$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]dt=L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_0^t g(u)f(t-u)du$$

ตัวอย่างที่ 4.20 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน

วิธีทำ

ผลการแปลงลาปลาซ $\dfrac{1}{s^2(s-1)}=\dfrac{1}{s^2}\dfrac{1}{s-1}$ สามารถแยกได้เป็น $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$ และ $G(s)=\dfrac{1}{s-1}$

$F(s)=\frac{1}{s^2}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1!}{s^{1+1}}\right\}=t$

$G(s)=\frac{1}{s-1}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$

ทฤษฎีคอนโวลูชัน $L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

เมื่อ $f(t)=t$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $f(u)=u$

เมื่อ $g(t)=e^t$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $g(t-u)=e^{t-u}=e^te^{-u}$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t ue^te^{-u}du=e^t\int_0^t ue^{-u}du=e^t\left(-ue^{-u}-e^{-u}\right)_0^t=e^t\left(-te^{-t}-e^{-t}+0+1\right)=e^t\left(-te^{-t}-e^{-t}+1\right)$$

$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=e^t-t-1$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน คือ $f(t)=e^t-t-1$

ตัวอย่างที่ 4.21 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน

วิธีทำ

$\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{1}{(s-1)^2}\frac{1}{(s+3)}$ สามารถแยกได้เป็น $F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$ และ $G(s)=\frac{1}{s+3}$

$F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น

$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=e^tL^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=te^t$

$G(s)=\frac{1}{s+3}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$

ทฤษฎีคอนโวลูชัน $L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

เมื่อ $f(t)=te^t$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $f(u)=ue^u$

เมื่อ $g(t)=e^{-3t}$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $g(t-u)=e^{-3(t-u)}=e^{-3t}e^{3u}$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t ue^ue^{-3t}e^{3u}du=e^{-3t}\int_0^t ue^{4u}du=e^{-3t}\left(\frac{1}{4}ue^{4u}-\frac{1}{16}e^{4u}\right)_0^t=e^{-3t}\left(\frac{1}{4}te^{4t}-\frac{1}{16}e^{4t}-0+\frac{1}{16}\right)$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=e^{-3t}\left(\frac{1}{4}te^{4t}-\frac{1}{16}e^{4t}+\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{4}te^t-\frac{1}{16}e^t+\frac{e^{-3t}}{16}$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน คือ $f(t)=\frac{1}{4}te^t-\frac{1}{16}e^t+\frac{e^{-3t}}{16}$

ตัวอย่างที่ 4.22 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน

วิธีทำ

$\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$ สามารถแยกได้เป็น $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ และ $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$

$G(s)=\frac{1}{s^2+1}$ ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซผกผันได้เป็น $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$

เมื่อ $f(t)=\cos t$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $f(u)=\cos u$

เมื่อ $g(t)=\sin t$ ซึ่งสามารถเขียนในรูป $g(t-u)=\sin(t-u)$

ทฤษฎีคอนโวลูชัน $L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t \cos u\sin(t-u)du=\int_0^t \cos u(\sin t\cos u-\cos t\sin u)du=\int_0^t (\sin t\cos^2 u-\cos t\sin u\cos u)du$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t \sin t\cos^2 udu-\int_0^t \cos t\sin u\cos udu=\sin t\int_0^t \cos^2 udu-\cos t\int_0^t \sin u\cos udu$$

จาก $\cos 2u=\frac{1+\cos^2 u}{2}$ และ $\sin u\cos u=\frac{\sin 2u}{2}$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\sin t\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)du-\cos t\int_0^t\left(\frac{\sin 2u}{2}\right)du=\sin t\left(\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}\right)\Big|_0^t+\cos t\left(\frac{\cos 2u}{4}\right)\Big|_0^t$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\sin t\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}-\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4}\right)+\cos t\left(\frac{\cos 2t}{4}-\frac{\cos 0}{4}\right)=\sin t\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+\cos t\left(\frac{\cos 2t}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{4}\sin t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos t\cos 2t-\frac{1}{4}\cos t$$

จาก $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ และ $2\cos A\,\mathrm{s}\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\big(\cos(2t-t)-\cos(2t+t)\big)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\big(\cos(2t+t)+\cos(2t-t)\big)-\frac{1}{4}\cos t$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{8}\big(\cos t-\cos 3t\big)+\frac{1}{8}\big(\cos 3t+\cos t\big)-\frac{1}{4}\cos t=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{8}2\cos t-\frac{1}{4}\cos t$$

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{4}\cos t-\frac{1}{4}\cos t=\frac{t}{2}\sin t$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน คือ $f(t)=\frac{t}{2}\sin t$

4.7 การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

การใช้วิธีการแปลงลาปลาซสำหรับหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเหมาะสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีอันดับสูงและต้องเป็นสมการที่ทราบค่าเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 4.23 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dt^2}+y=t$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=-1$ และ $y'(0)=2$

วิธีทำ

$$L\{y''\}+L\{y\}=L\{t\}$$

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+L\{y\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\left(s^2+1\right)L\{y\}+s-2=\frac{1}{s^2}$$

$$\left(s^2+1\right)L\{y\}=\frac{1}{s^2}-s+2$$

$$L\{y\}=\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}+\frac{-s+2}{\left(s^2+1\right)}$$

$$\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}s^2\left(s^2+1\right)=\frac{A}{s^2}s^2\left(s^2+1\right)+\frac{B}{s^2+1}s^2\left(s^2+1\right)=A\left(s^2+1\right)+Bs^2$$

$$A\left(s^2+1\right)+Bs^2=1$$

ถ้าแทน $s=0$ ดังนั้น $A\left(0^2+1\right)+B0^2=1$ จะได้ $A=1$

ถ้าแทน $s=1$ ดังนั้น $A\left(1^2+1\right)+B1^2=1$ จะได้ $2A+B=1$ ดังนั้น $B=1-2A=1-2(1)=-1$

$$Y(s)=L\{y\}=\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}+\frac{-s+2}{\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=t+\sin t-\cos t$$

ตัวอย่างที่ 4.24 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=3te^{-t}$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=4$ และ $y'(0)=2$

วิธีทำ

$L\{y''\}+2L\{y'\}+L\{y\}=L\{3te^{-t}\}$

$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+2\left(sL\{y\}-y(0)\right)+L\{y\}=L\{3te^{-3t}\}$

$s^2L\{y\}-4s-2+2\left(sL\{y\}-4\right)+L\{y\}=s^2L\{y\}+2sL\{y\}+L\{y\}-4s-10=L\{3te^{-3t}\}$

$\left(s^2+2s+1\right)L\{y\}=L\{3te^{-3t}\}+4s+10$

$L\{t\}=\frac{1}{s^2}$ ดังนั้น $L\{te^{-t}\}=\frac{1}{(s+1)^2}$

$\left(s^2+2s+1\right)L\{y\}=\frac{3}{(s+1)^2}+4s+10$

$L\{y\}=\frac{3}{(s^2+2s+1)(s+1)^2}+\frac{4s+10}{(s^2+2s+1)}=\frac{3}{(s+1)^4}+\frac{4s+10}{(s+1)^2}$

เมื่อ $\frac{4s+10}{(s+1)^2}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+1)^2}$ ดังนั้น $\frac{4s+10}{(s+1)^2}(s+1)^2=\frac{A}{(s+1)}(s+1)^2+\frac{B}{(s+1)^2}(s+1)^2$

$A(s+1)+B=4s+10$

เมื่อแทน $s=-1$ จะได้ $A(-1+1)+B=4(-1)+10=-4+10=6$ ดังนั้น $B=6$

เมื่อแทน $s=0$ จะได้ $A(0+1)+B=4(0)+10=10$ ดังนั้น $A=10-B=10-6=4$

$L\{y\}=\frac{3}{(s+1)^4}+\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}$

$y(t)=L^{-1}\{y\}=L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{4}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{6}{(s+1)^2}\right\}$

$y(t)=e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}+e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\}+e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2}\right\}=e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}+e^{-t}L^{-1}\left\{4\frac{1}{s}\right\}+e^{-t}L^{-1}\left\{6\frac{1!}{s^{1+1}}\right\}$

$y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}t^3+4e^{-t}+6e^{-t}t=e^{-t}\left(\frac{t^3}{2}+6t+4\right)$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=3te^{-t}$ คือ $y(t)=e^{-t}\left(\frac{t^3}{2}+6t+4\right)$ เมื่อ $y(0)=4$ และ $y'(0)=2$

ตัวอย่างที่ 4.25 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-2y=4$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=0$ และ $y'(0)=0$

วิธีทำ

$$L\{y''\}+L\{xy'\}-2L\{y\}=L\{4\}$$

เมื่อ

$$L\{y\}=Y(s)$$

จาก

$L\{t^nf(t)\}=\frac{1}{(-1)^n}F^n(s)=(-1)^n\frac{dF^n(s)}{ds}$ เมื่อ $n=1$ ได้เป็น $L\{tf(t)\}=\frac{1}{(-1)^1}F'(s)=-\frac{dF(s)}{ds}$

ดังนั้น $L\{xy'\}=-\frac{d}{ds}L\{y'\}=-\frac{d}{ds}\big(sY(s)-y(0)\big)=-\frac{d}{ds}\big(sY(s)\big)=-Y(s)-sY'(s)$

$L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s(0)-s(0)=s^2Y(S)$

แทนค่า

$$s^2Y(s)+\big[-Y(s)-sY'(s)\big]-2Y(s)=\frac{4}{s}$$

$$s^2Y(s)-Y(s)-sY'(s)-2Y(s)=\frac{4}{s}$$

$$s^2Y(s)-3Y(s)-sY'(s)=\frac{4}{s}$$

$$-sY'(s)+\left(s^2-3\right)Y(s)=\frac{4}{s}$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือ $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)$

$$Y'(s)+\left(\frac{3-s^2}{s}\right)Y(s)=-\frac{4}{s^2}$$

เมื่อ $p(s)=\left(\frac{3-s^2}{s}\right)=\frac{3}{s}-s$ และ $q(s)=-4s^{-2}$

แทนค่า

$$e^{\int\left(\frac{3}{s}-s\right)ds}=e^{3\ln s-\frac{s^2}{2}}=e^{\ln s^3-\frac{s^2}{2}}=s^3e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$Y(s)=e^{-\left(3\ln s-\frac{s^2}{2}\right)}\left(\int e^{3\ln s-\frac{s^2}{2}}\left(-\frac{4}{s^2}\right)ds+C\right)=-s^{-3}e^{\frac{s^2}{2}}\left(\int s^3e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{4}{s^2}ds+C\right)$$

$$Y(s)=s^{-3}e^{\frac{s^2}{2}}\left(-\int 4se^{-\frac{s^2}{2}}ds+C\right)=s^{-3}e^{\frac{s^2}{2}}\left(4e^{-\frac{s^2}{2}}+C\right)=4s^{-3}+Cs^{-3}e^{\frac{s^2}{2}}$$

เนื่องจาก $\lim_{s\to\infty}Y(s)=0$

$$\lim_{s\to\infty}Y(s)=\lim_{s\to\infty}\left(4s^{-3}+Cs^{-3}e^{\frac{s^2}{2}}\right)=0$$

ดังนั้น $C=0$

$$Y(s)=4s^{-3}$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{4s^{-3}\}$ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน คือ $f(t)=\frac{t}{2}\sin t$

$$y(x)=\frac{4}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}=2x^2$$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-2y=4$ คือ $y(x)=\frac{4}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}=2x^2$ เมื่อ $y(0)=0$

และ $y'(0)=0$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)\qquad \int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}[3\sin x-\sin 3x]\qquad \cos^3 x=\frac{1}{4}[\cos 3x-3\cos x]$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\qquad \cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\qquad \sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

4.8 แบบฝึกหัด

ข้อที่ 4.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^2 - e^{-x} + 5$
2. $f(x) = (x^2 + 2)^2$
3. $f(x) = x\cosh 4x$
4. $f(x) = \sin^3 x$
5. $f(x) = x^2 e^x \sin x$
6. $f(x) = x(e^{2x} - e^{-x})^2$
7. $f(x) = \begin{cases} 3, 0 < t \le 2 \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x, 0 < t < 2 \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$

ข้อที่ 4.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $F(s) = \dfrac{1}{(s+2)^4}$
2. $F(s) = \dfrac{-8s^2 - 5s + 9}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}$
3. $F(s) = \dfrac{-5s - 36}{(s+2)(s^2 + 9)}$
4. $F(s) = \dfrac{s+4}{s^2 + 4s + 8}$
5. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2 + 8)}$
6. $F(s) = \dfrac{2s+5}{s^2 + 6s + 34}$

ข้อที่ 4.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้ ด้วยทฤษฎีคอนโวลูชัน

1. $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$
2. $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s - 40}$
3. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 4)}$
4. $F(s) = \dfrac{9}{s^2(s^2 + 9)}$

ข้อที่ 4.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ

1. $y''+2y'+y=4x^2$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$
2. $y''+y'+y=0$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=4$ และ $y'(0)=-3$
3. $y''+4y'+6y=1+e^{-x}$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=0$ และ $y'(0)=0$
4. $y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=2$ และ $y'(0)=17$
5. $y''+xy'-y=0$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=0$ และ $y'(0)=3$
6. $xy''-2y'+xy=0$ ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=0$

4.9 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541

บทที่ 5 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

5.1 บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร มีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (5-1)

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=g(x) \qquad (5\text{-}1)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรสามารถแบ่งวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรดังนี้

5.2 สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง

สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง (Second order Cauchy-Euler equation) สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปดัง (5-2)

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=g(x) \qquad (5\text{-}2)$$

เมื่อ $a_0\neq 0$ และ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว

5.2.1 สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์

เมื่อ $g(x)=0$ เป็นรูปแบบของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปดังนี้ $a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=0$ ถ้า $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์ เมื่อแทนค่า

$y''=\frac{d^2x^r}{dx^2}=r(r-1)x^{r-2}$ และ $y'=\frac{dx^r}{dx}=rx^{r-1}$ แทนค่าลงใน (5-2) ได้เป็น (5-3)

$$a_0x^2r(r-1)x^{r-2}+a_1xrx^{r-1}+a_2x^r=0 \qquad (5\text{-}3)$$

$a_0r(r-1)x^r+a_1rx^r+a_2x^r=0$ หรือ $a_0r(r-1)+a_1r+a_2=0$

หารด้วย x^r ได้เป็น

$$a_0r^2+(a_1-a_0)r+a_2=0 \qquad (5\text{-}4)$$

จาก (5-4) ค่า r สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_h(x)=C_1x^{r1}+C_2x^{r2}$

กรณีที่ 2 เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นรากจำนวนจริงซ้ำกัน

ดังนั้นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_{h1}=x^r$ เนื่องจาก y_{h1} และ y_{h2} เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น $y_{h2}(x)=y_{h1}(x)u(x)$ ทำให้ $y_{h2}(x)=x^ru(x)$ หรือ $y_{h2}=x^ru$

เมื่อ $y'_{h2} = rx^{r-1}u + x^r u'$ และ $y''_{h2} = r(r-1)x^{r-2}u + rx^{r-1}u' + rx^{r-1}u' + x^r u''$ แทนค่าลงในสมการ (5-5)

$$a_0x^2\left[r(r-1)x^{r-2}u + rx^{r-1}u' + rx^{r-1}u' + x^r u''\right] + a_1x\left[rx^{r-1}u + x^r u'\right] + a_2x^r u = 0$$

$$a_0\left[r(r-1)x^r u + rx^{r+1}u' + rx^{r+1}u' + x^{r+2}u''\right] + a_1\left[rx^r u + x^{r+1}u'\right] + a_2x^r u = 0$$

$$a_0x^{r+2}u'' + \left[2a_0r + a_1\right]x^{r+1}u' + \left[a_0r(r-1) + a_1r + a_2\right]x^r u = 0$$

เนื่องจาก $a_0r(r-1) + a_1r + a_2 = 0$ ดังนั้น

$$a_0x^{r+2}u'' + \left[2a_0r + a_1\right]x^{r+1}u' = 0$$

$$a_0u'' + \frac{\left[2a_0r + a_1\right]}{x}u' = 0 \text{ หรือ } u'' + \frac{\left[2a_0r + a_1\right]}{a_0x}u' = 0$$

เนื่องจาก r เป็นรากจำนวนจริงที่ซ้ำกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ $r = \frac{-(a_1 - a_0)}{2a_0} = \frac{a_0 - a_1}{2a_0}$ ดังนั้น

$2a_0r = a_0 - a_1$ หรือ $2a_0r + a_1 = a_0$ หรือ $\frac{2a_0r + a_1}{a_0} = 1$

ดังนั้น

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0 \text{ หรือ } \frac{du'}{dx} + \frac{1}{x}u' = 0$$

$$\frac{du'}{dx} = -\frac{1}{x}u' \text{ หรือ } \frac{du'}{u'} = -\frac{1}{x}dx$$

ดังนั้น

$$\int\frac{du'}{u'} = -\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln u' = -\ln|x| + C1$$

$$u' = \frac{C_1}{|x|}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C_1}{|x|} \text{ หรือ } u = \int\frac{C_1}{|x|}dx + C_2$$

$$u = C_1\ln|x| + C_2$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y_h = C_1y_{1h} + C_2y_{2h}u = C_1|x|^r + C_2|x|^r\ln|x|$

กรณีที่ 3 เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นรากจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ซ้ำกัน ดังนั้น $r = a \pm bi$

ผลเฉลยของสมการทั้วไปคือ $y_h = C_1x^{a\pm bi} = C_1x^a x^{\pm bi}$

$$y_h = C_1x^a x^{\pm bi} = C_1x^a e^{\pm bi\ln x}$$

$$y_h = |x|^a\left[A\cos\left(b\ln|x|\right) + B\sin(b\ln|x|)\right]$$

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''+1.5xy'-0.5y=0$

วิธีทำ

เมื่อให้ $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y''+1.5xy'-0.5y=0$

ดังนั้น $x^2r(r-1)x^{r-2}+1.5xrx^{r-1}-0.5x^r=0$ หรือ $r(r-1)x^r+1.5rx^r-0.5x^r=0$

$r(r-1)+1.5r-0.5=0$

$r^2-r+1.5r-0.5=0$ หรือ $r^2+0.5r-0.5=0$

$$r=\frac{-0.5\pm\sqrt{(0.5)^2-4(1)(-0.5)}}{2(1)}=\frac{-0.5\pm\sqrt{0.25+2}}{2}=\frac{-0.5\pm\sqrt{2.25}}{2}=\frac{-0.5\pm1.5}{2}$$

$r_1=\frac{-0.5+1.5}{2}=\frac{1}{2}$ และ $r_2=\frac{-0.5-1.5}{2}=-\frac{2}{2}=-1$ จะเห็นว่าเป็นรากจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป $y_h=C_1x^{0.5}+C_2x^{-1}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''+1.5xy'-0.5y=0$ คือ $y_h=C_1x^{0.5}+C_2x^{-1}$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $4x^2y''+8xy'+y=0$

วิธีทำ

เมื่อให้ $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการ $4x^2y''+8xy'+y=0$

ดังนั้น $4x^2r(r-1)x^{r-2}+8xrx^{r-1}+x^r=0$ หรือ $4r(r-1)x^r+8rx^r+x^r=0$

$4r(r-1)+8r+1=0$

$4r^2-4r+8r+1=0$ หรือ $4r^2+4r+1=0$

$$r=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(4)1}}{2(4)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

r เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป $y_h=C_1|x|^{-0.5}+C_2|x|^{-0.5}\ln|x|$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $4x^2y''+8xy'+y=0$ คือ $y_h=C_1|x|^{-0.5}+C_2|x|^{-0.5}\ln|x|$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-3xy'+13y=0$

วิธีทำ

เมื่อให้ $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2y''-3xy'+13y=0$

ดังนั้น $x^2r(r-1)x^{r-2}-3xrx^{r-1}+13x^r=0$ หรือ $r(r-1)x^r-3rx^r+13x^r=0$

$r(r-1)-3r+13=0$

$r^2-r-3r+13=0$ หรือ $r^2-4r+13=0$

$$r=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(1)13}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i$$

r เป็นรากจำนวนเชิงซ้อนไม่ซ้ำกัน

ผลเฉลยทั่วไป $y_h=|x|^2\left[C_1\cos\left(3\ln|x|\right)+C_2\sin\left(3\ln|x|\right)\right]$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-3xy'+13y=0$ คือ $y_h=|x|^2\left[C_1\cos\left(3\ln|x|\right)+C_2\sin\left(3\ln|x|\right)\right]$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $(x-1)^2y''-2(x-1)y'-4y=0$

วิธีทำ

เปลี่ยนรูปให้ ให้ $t=x-1$ ดังนั้น $dt=dx$ ดังนั้น สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $(x-1)^2y''-2(x-1)y'-4y=0$ ได้เป็น $t^2y''-2ty'-4y=0$

ให้ $y=t^r$ เป็นผลเฉลยของสมการ $t^2y''-2ty'-4y=0$

ดังนั้น $t^2r(r-1)t^{r-2}-2trt^{r-1}-4t^r=0$ หรือ $r(r-1)t^r-2rt^r-4t^r=0$

$r(r-1)-2r-4=0$

$r^2-r-2r-4=0$ หรือ $r^2-3r-4=0$

$(r+1)(r-4)=0$

$r_1=-1$ และ $r_2=4$ เป็นรากจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y_h=C_1t^{-1}+C_2t^4$

เมื่อแทน $t=x-1$ ทำให้ $y_h=C_1(x-1)^{-1}+C_2(x-1)^4$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $(x-1)^2y''-2(x-1)y'-4y=0$ คือ $y_h=C_1(x-1)^{-1}+C_2(x-1)^4$

5.2.2 สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบไม่เอกพันธุ์

สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบไม่เอกพันธุ์มีรูปแบบสมการทั่วไปดัง (5-6)

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=g(x) \qquad (5\text{-}6)$$

เมื่อ $a_0\neq0$ และ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบไม่เอกพันธุ์ ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ $y_h(x)$ เป็น ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธุ์ และ $y_p(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของฟังก์ชัน $g(x)$ ดังนั้นผลเฉลยประกอบด้วย $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ สำหรับการ

หาผลเฉลยเฉพาะของฟังก์ชัน $g(x)$ จำเป็นต้องเปลี่ยน $g(x)$ ให้เป็น $h(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ แล้วใช้วิธีแปรผันพารามิเตอร์ ดังที่เคยได้กล่าวมาในหัวข้อ 3.3.2

ตัวอย่างที่ 5.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x$

วิธีทำ

สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x$ จะเห็นว่าเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย $y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 หาของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y_h(x)$

เปลี่ยนรูปให้เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์ $x^2y''-2xy'+2y=0$

ให้ $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2y''-2xy'+2y=0$

ดังนั้น $x^2r(r-1)x^{r-2}-2xrx^{r-1}+2x^r=0$ หรือ $r(r-1)x^r-2rx^r+2x^r=0$

$r(r-1)-2r+2=0$

$r^2-r-2r+2=0$ หรือ $r^2-3r+2=0$

$(r-2)(r-1)=0$

ดังนั้น $r_1=2$ และ $r_2=1$ ซึ่งเป็นรากจำนวนจริงไม่ซ้ำกันดังนั้น

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y_h(x)=C_1x^2+C_2x$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ **ของฟังก์ชัน** $g(x)$

เนื่องจาก $g(x)=x\ln x$ ดังนั้น $h(x)=\frac{x\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x}$

เมื่อ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$ ให้ $y_{h1}(x)=x^2$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=2x$ และ $y_{h2}(x)=x$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=1$

$u'x^2+v'x=0$ (E5.4-1)

$u'2x+v'=\frac{\ln x}{x}$ (E5.4-2)

ดังนั้น

$$u'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_{h2}(x)\\ g(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_{h1}(x) & y_{h2}(x)\\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & x\\ \frac{\ln x}{x} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x^2 & x\\ 2x & 1\end{vmatrix}}\frac{-\left(\frac{\ln x}{x}\right)x}{x^2(1)-2x(x)}=\frac{-\ln x}{x^2-2x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$$

และ

$$v'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & 0 \\ y'_{h1}(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{\ln x}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix}}\frac{x^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x^2(1)-2x(x)}=\frac{x\ln x}{x^2-2x^2}=-\frac{\ln x}{x}$$

ดังนั้น

$$u(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\ln x\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}(1+\ln x)$$

$$v(x)=-\int\frac{\ln x}{x}dx=-\frac{1}{2}\ln^2 x$$

$$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=-\frac{1}{x}(1+\ln x)x^2-\frac{1}{2}(\ln^2 x)x$$

$$y_p(x)=-x(1+\ln x)-\frac{x}{2}\ln^2 x$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ คือ $y(x)=C_1x^2+C_2x-x(1+\ln x)-\frac{x}{2}\ln^2 x$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$

วิธีทำ

สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสอง $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$ จะเห็นว่าเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการประกอบด้วย

$y=y_h(x)+y_p(x)$

ขั้นที่ 1 ปรับสมการให้เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์ เพื่อหาค่า y_h

จากสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$

ให้ $y=x^r$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$

ดังนั้น $x^2r(r-1)x^{r-2}-3xrx^{r-1}+3x^r=0$ หรือ $r(r-1)x^r-3rx^r+3x^r=0$

$r(r-1)-3r+3=0$

$r^2-r-3r+3=0$ หรือ $r^2-4r+3=0$

$(r-1)(r-3)=0$

เมื่อ $r_1=3$ และ $r_2=1$ ซึ่งเป็นรากจำนวนจริงไม่ซ้ำกันดังนั้น

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y_h=C_1x+C_2x^3$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ของฟังก์ชัน $g(x)$

เนื่องจาก $g(x)=2x^4e^x$ ดังนั้น $h(x)=\frac{2x^4e^x}{x^2}=2x^2e^x$

เมื่อ $y_p(x) = u(x)y_{h1}(x) + v(x)y_{h2}(x)$

ให้ $y_{h1}(x) = x$ ดังนั้น $y'_{h1}(x) = 1$ และ $y_{h2}(x) = x^3$ ดังนั้น $y'_{h2}(x) = 3x^2$

$$u'x + v'x^3 = 0 \qquad \text{(E5.5-1)}$$

$$u' + v'3x^2 = 2x^2e^x \qquad \text{(E5.5-2)}$$

ดังนั้น

$$u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_{h2}(x) \\ g(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(2x^2e^x\right)x^3}{x(3x^2) - 1(x^3)} = \frac{-2x^5e^x}{3x^3 - x^3} = \frac{-2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x$$

และ

$$v'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & 0 \\ y'_{h1}(x) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}} \frac{x\left(2x^2e^x\right)}{2x^3} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x$$

ดังนั้น

$u(x) = \int -x^2e^x dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$ และ $v(x) = \int e^x dx = e^x$

ดังนั้น

$$y_p(x) = u(x)y_{h1}(x) + v(x)y_{h2}(x) = x\left(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x\right) + x^3\left(e^x\right) = 2x^2e^x - 2xe^x$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ คือ $y(x) = C_1x + C_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$

5.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรสามารถเขียนในรูปทั่วไปดัง (5-7)

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x) \qquad \text{(5-7)}$$

เมื่อ $a_0(x) \neq 0$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรแบ่งออกได้เป็น 1. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรแบบเอกพันธ์ และ 2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรแบบไม่เอกพันธ์ ดังนั้นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรสามารถทำได้ดังนี้

5.3.1 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรแบบเอกพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรแบบเอกพันธ์สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปดัง (5-8) แล้วให้ผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y_h(x) = y_{h1}(x)$ อีกหนึ่งผลเฉลยสามารถเขียนในรูปของ $y_{h2} = v(x)y_{h1}(x)$

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \qquad (5\text{-}8)$$

เมื่อ $a_0(x) \neq 0$

การลดทอน (reduction of order) เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยอาศัยการลดอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์. อันดับสองให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์.อันดับสองอันดับหนึ่ง สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ 1 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเอกพันธ์ และ 2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เอกพันธ์

5.3.1 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเอกพันธ์ด้วยวิธีการลดทอน

ถ้า $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$ แล้วให้ผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y_h(x) = y_{h1}(x)$ แล้วอีกหนึ่งผลเฉลยสามารถเขียนในรูปของ $y_{h2} = v(x)y_{h1}(x)$ แล้ว

$$y' = v(x)y'_1(x) + v'(x)y_1(x)$$

$$y'' = v(x)y''_1(x) + 2v'(x)y'_1(x) + v''(x)y_1(x)$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$ ได้เป็น (5-9)

$$a_0(x)\left(v(x)y''_1(x) + 2v'(x)y'_1(x) + v''(x)y_1(x)\right) + a_1(x)\left(v(x)y'_1(x) + v'(x)y'_1(x)\right) + a_2(x)v(x)y_1(x) = 0 \qquad (5\text{-}9)$$

จัดรูปแบบ (5-9) ได้เป็น (5-10)

$$a_0(x)y_1(x)v''(x) + \left(2a_0(x)y'_1(x) + a_1(x)y_1(x)\right)v'(x) + \left(a_0(x)y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2y_1(x)\right)v(x) = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

เนื่องจาก $y = v(x)y_1(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น (5-11)

$$a_0(x)y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2y_1(x) = 0$$

$$a_0(x)y_1(x)v''(x) + \left(2a_0(x)y'_1(x) + a_1(x)y_1(x)\right)v'(x) = 0 \qquad (5.\text{-}11)$$

ถ้าให้ $w = v'(x)$ ดังนั้น (5-11) ได้เป็น (5-12)

$$a_0(x)y_1(x)w' + \left(2a_0(x)y'_1(x) + a_1(x)y_1(x)\right)w = 0 \qquad (5\text{-}12)$$

ซึ่ง (5-10) จัดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดัง (5-13)

$$w'+\left(\frac{2a_0(x)y'_1(x)}{a_0(x)y_1(x)}+\frac{a_1(x)y_1(x)}{a_0(x)y_1(x)}\right)w=0$$

$$w'+\left(\frac{2y'_1(x)}{y_1(x)}+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)w=0 \tag{5-13}$$

เมื่อสมการเชิงอนุพันธ์ (5-13) ลดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบเชิงเส้น ดังนั้นตัวประกอบอินทิเกรตดัง (5-14)

$$I(x)=\exp\left(2\int\frac{y'_1(x)}{y_1(x)}dx+\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)$$

$$I(x)=\exp\left(2\ln y_1(x)+\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)=\left(y_1(x)\right)^2\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right) \tag{5-14}$$

นำตัวประกอบอินทิเกรตไปคูณกับ (5-14) ได้เป็น (5-15)

$$\left(y_1(x)\right)^2\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)w'+\left(y_1(x)\right)^2\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)\left(\frac{2y'_1(x)}{y_1(x)}+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)w=0 \tag{5-15}$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left(w\left(y_1(x)\right)^2\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)\right)=0$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดัง (5-16)

$$wy_1^2(x)\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)=C \tag{5-16}$$

จัดรูป (5-16) และแทนค่า $w=v'(x)$ เพื่อหาค่าของ $v(x)$ ดัง (5-1)

$$w=\frac{C}{y_1^2(x)\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}=\frac{C\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{y_1^2(x)}$$

$$\frac{dv(x)}{dx}=\frac{C\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{y_1^2(x)} \tag{5-17}$$

ดังนั้นผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น (5-18)

$$v(x)=\int y_1^{-2}(x)C\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx+C_1 \tag{5-18}$$

ถ้าให้ $C=1$ และ $C_1=0$ ดังนั้น (5-18) ได้เป็น (5-19)

$$v(x)=\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx \tag{5-19}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ $y=v(x)y_1(x)$ ดัง (5-20)

$$y_2(x)=y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx \tag{5-20}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$

เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_{h2}=u(x)y_{h1}(x)=ux$

ดังนั้น $y_{h2}'=u+xu'$ และ $y_{h2}''=u'+(u'+xu'')=2u'+xu''$ แทนค่าลงในสมการเชิงอนุพันธ์

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$\left(1-x^2\right)\left(2u'+xu''\right)-2x\left(u+xu'\right)+2xu=0$$

$$\left(2u'+xu''-2x^2u'-x^3u''\right)+\left(-2xu-2x^2u'\right)+2xu=0$$

$$2u'+xu''-2x^2u'-x^3u''-2xu-2x^2u'+2xu=-x^3u''+xu''-4x^2u'+2u'=0$$

$$(-x^3+x)u''+(-4x^2+2)u'=0 \tag{E5.7-1}$$

ให้ $v=u'$ แทนค่าลงใน (E5.7-1)

$$(-x^3+x)v'+(-4x^2+2)v=0 \tag{E5.7-2}$$

$$(-x^3+x)v'=-(-4x^2+2)v$$

$$(-x^3+x)\frac{dv}{dx}=-(-4x^2+2)v$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{4x^2-2}{x-x^3}v$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{4x^2-2}{x-x^3}dx=\left(\frac{4}{1-x^2}-\frac{2}{x-x^3}\right)dx=\left(\frac{4}{(1-x)(1+x)}-\frac{2}{x(1-x)(1+x)}\right)dx$$

$$\frac{4}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1-x}$$

$$\frac{2}{x(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

แทนค่า

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{x} - \frac{1/2}{1-x} - \frac{1/2}{1+x}\right)dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{3/2}{1-x} - \frac{5/2}{1+x}\right)dx$$

หาปริพันธ์

$$\int \frac{dv}{v} = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{3/2}{1-x} - \frac{5/2}{1+x}\right)dx$$

$$v = x(1-x)^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{5}{2}} + C$$

$$\frac{du}{dx} = x(1-x)^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$u = \int\left(x(1-x)^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{5}{2}} + C\right)dx$$

หาได้จาก $y_2(x) = y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx$

เมื่อเทียบรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$ พบว่า $a_0(x) = 1-x^2$ $a_1(x) = -2x$ และ $a_2(x) = 2$ เมื่อผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_1(x) = x$

แทนค่า

$$y_2(x) = x)\int x^{-2}\exp\left(-\int \frac{-2x}{1-x^2}dx\right)dx$$

$$y_2(x) = x\int x^{-2}\exp\left(-\ln(1-x^2)\right)dx = x\int x^{-2}(1-x^2)^{-1}dx$$

พิจารณา $x^{-2}(1-x^2)^{-1} = \frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$

$$y_2(x) = x\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\right)dx = x\left(-x^{-1} - \frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\right) = \frac{x}{2}\ln|1+x| - \frac{x}{2}\ln|1-x| - 1$$

$$y_2(x) = \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$$

ดังนั้นผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ คือ $y_2(x)=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1$ และสามารถเขียนผลเฉลยทั่วไปคือ $y=y_1(x)+y_2(x)=C_1x+C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)$

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-2x-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2(1+x)\frac{dy}{dx}-2y=0$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x+1$

วิธีทำ

สมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-2x-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2(1+x)\frac{dy}{dx}-2y=0$

เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x+1$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ หาได้จาก

$$y_2(x)=y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx$$

เมื่อเทียบรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ พบว่า $a_0(x)=1-2x-x^2$ $a_1(x)=2(1+x)$ และ $a_2(x)=-2$ เมื่อผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_1(x)=x+1$

แทนค่า

$$y_2(x)=(x+1)\int(x+1)^{-2}\exp\left(-\int\frac{2(x+1)}{1-2x-x^2}dx\right)dx=(x+1)\int(x+1)^{-2}\exp\left(\int\frac{-2-2x}{1-2x-x^2}dx\right)dx$$

$$y_2(x)=(x+1)\int(x+1)^{-2}\exp\left(\ln(1-2x-x^2)\right)dx=(x+1)\int(x+1)^{-2}(1-2x-x^2)dx$$

พิจารณา $\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx$ เมื่อ $x=u-1$ ดังนั้น $dx=du$

แทนค่า

$$\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx=\int\frac{1-2(u-1)-(u-1)^2}{u^2}du=\int\frac{1-2u+2-(u^2-2u+1)}{u^2}du$$

$$\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx=\int\frac{1-2u+2-(u^2-2u+1)}{u^2}du=\int\frac{1-2u+2-u^2+2u-1}{u^2}du=\int\frac{2-u^2}{u^2}du=\int\left(\frac{2}{u^2}-1\right)du$$

$$\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx=\int\left(\frac{2}{u^2}-1\right)du=-\frac{2}{u}-u$$

แทนค่า $u=1+x$

$$\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx=-\frac{2}{1+x}-(1+x)$$

$$y_2(x)=(x+1)\int\frac{1-2x-x^2}{(1+x)^2}dx=(x+1)\left(-\frac{2}{1+x}-(1+x)\right)=-2-(1+x)^2$$

$$y_2(x)=-2-(1+2x+x^2)=-3-2x-x^2$$

ดังนั้นผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\left(1-2x-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2(1+x)\frac{dy}{dx}-2y=0$ คือ $y_2(x)=-3-2x-x^2$ และสามารถเขียนผลเฉลยทั่วไปคือ $y=y_1(x)+y_2(x)=C_1(x+1)+C_2\left(-3-2x-x^2\right)$

5.3.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เอกพันธ์ด้วยวิธีการลดทอน

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เอกพันธ์ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=g(x)$ สามารถหาได้เช่นเดียวกับ5.2.2 สมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบไม่เอกพันธุ์ ด้วยวิธีการแปรผันพารามิเตอร์

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ ด้วยวิธีลดทอน เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x$ และ $y(1)=2$ และ $y'(1)=-3$

วิธีทำ

1. การหาด้วยวิธีปกติ

สมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)=y_1(x)u=xu$

เมื่อ $y_2'=xu'+u$ และ $y_2''=xu''+u'+u'=xu''+2u'$

แทนค่าลงใน $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$

$$x^2\left(xu''+2u'\right)+x\left(xu'+u\right)-xu=x^2+1$$

$$\left(x^3u''+2x^2u'\right)+\left(x^2u'+xu\right)-xu=x^2+1$$

$$x^3u''+3x^2u'+xu-xu=x^2+1$$

$$x^3u''+3x^2u'=x^2+1$$

$$u''+\frac{3}{x}u'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$$

แทนค่า $v=u'$

$v'+\frac{3}{x}v=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ คือ

$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)$

$\frac{dv}{dx}+\frac{3}{x}v=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$ เมื่อ $p(x)=\frac{1}{x}$ และ $q(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$

$v(x)=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{3}{x}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx+C\right)=e^{-3\ln x}\left(\int e^{3\ln x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx+C\right)=x^{-3}\left(\int x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx+C\right)$

$v(x)=x^{-3}\left(\int\left(x^2+1\right)dx+C\right)=x^{-3}\left(\frac{1}{3}x^3+x+C\right)=\frac{1}{3}+x^{-2}+Cx^{-3}$

แทนค่า $v=u'$

$v(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}+x^{-2}+Cx^{-3}$

$u=\int\left(\frac{1}{3}+x^{-2}+Cx^{-3}\right)dx=\frac{1}{3}x-x^{-1}-\frac{1}{2}Cx^{-2}+C_1$

จาก $y_2(x)=y_1(x)u=xu$

$y_2(x)=xu=x\left(\frac{1}{3}x-x^{-1}-\frac{1}{2}Cx^{-2}+C_1\right)=\frac{1}{3}x^2-1-\frac{1}{2}Cx^{-1}+C_1x=\frac{1}{3}x^2-1+Cx^{-1}+C_1x$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+Cx^{-1}+C_1x$

เมื่อ $y(1)=2$ และ $y'(1)=-3$ เมื่อ $y(x)=\frac{2}{3}-Cx^{-2}+C_1x$

$2=\frac{1}{3}(1)^2-1-\frac{1}{2}C(1)^{-1}+C_1(1)$ ได้เป็น $C+C_1=\frac{8}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

$-3=\frac{2}{3}-C(1)^{-2}+C_1(1)$ ได้เป็น $C-C_1=-\frac{11}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

ดังนั้น

$C=-\frac{1}{2}$ และ $C_1=\frac{19}{6}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ คือ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+\frac{19}{6}x^{-1}+\frac{1}{2}x$

2. การหาด้วยสูตร

ขั้นที่ 1 ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ ปรับให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ได้เป็น $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$ เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=e^{4x}$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ หาได้จาก $y_2(x)=y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx$

เมื่อเทียบรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ พบว่า $a_0(x)=x^2$ $a_1(x)=x$ และ $a_2(x)=-1$ เมื่อผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_1(x)=x$

แทนค่า

$$y_2(x)=x\int(x)^{-2}\exp\left(-\int\frac{x}{x^2}dx\right)dx=x\int(x)^{-2}\exp\left(-\int\frac{1}{x}dx\right)dx$$

$$y_2(x)=x\int(x)^{-2}\exp\left(-\ln x\right)dx=x\int x^{-2}\exp\left(\ln x^{-1}\right)dx=x\int x^{-2}x^{-1}dx=x\int x^{-3}dx$$

$$y_2(x)=x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)=-\frac{1}{2x}$$

ขั้นที่ 2 ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

ฟังก์ชัน $g(x)=x^2+1$ ดังนั้น $h(x)=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะเมื่อ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$ ให้ $y_{h1}(x)=x$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=1$ และ $y_{h2}(x)=x^{-1}$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=-x^{-2}$

$$xu'+x^{-1}v'=0 \qquad \text{(E5.9-1)}$$

$$(1)u'+(-x^{-2})v'=\frac{1+x^2}{x^2} \qquad \text{(E5.9-2)}$$

ดังนั้น

$$u'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_{h2}(x)\\ h(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_{h1}(x) & y_{h2}(x)\\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & x^{-1}\\ \frac{1+x^2}{x^2} & -x^{-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & x^{-1}\\ 1 & -x^{-2}\end{vmatrix}}=\frac{-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)x^{-1}}{(x)(-x^{-2})-(1)x^{-1}}=\frac{-\frac{1+x^2}{x^3}}{-x^{-1}-x^{-1}}=\frac{-\frac{1+x^2}{x^3}}{-2x^{-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$$

และ

$$v'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & 0 \\ y'_{h1}(x) & h(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{h1}(x) & y_{h2}(x) \\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x) \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1+x^2}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix}}=\frac{x\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)}{(x)(-x^{-2})-(1)x^{-1}}=\frac{\frac{1+x^2}{x}}{-x^{-1}-x^{-1}}=\frac{-\frac{1+x^2}{x}}{-2x^{-1}}=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)$$

ดังนั้น

$$u(x)=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\text{ และ }v(x)=\int-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)$$

ดังนั้น

$$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=x\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+x^{-1}\left(-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right)=\frac{1}{3}x^2-1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+Cx^{-1}+C_1x$

เมื่อ $y(1)=2$ และ $y'(1)=-3$ เมื่อ $y(x)=\frac{2}{3}-Cx^{-2}+C_1x$

$2=\frac{1}{3}(1)^2-1-\frac{1}{2}C(1)^{-1}+C_1(1)$ ได้เป็น $C+C_1=\frac{8}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

$-3=\frac{2}{3}-C(1)^{-2}+C_1(1)$ ได้เป็น $C-C_1=-\frac{11}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

ดังนั้น

$C=-\frac{1}{2}$ และ $C_1=\frac{19}{6}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ คือ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+\frac{19}{6}x^{-1}+\frac{1}{2}x$

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาผลทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x}$ ด้วยวิธีลดทอน เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x^2$ และ $0<x<\infty$

วิธีทำ

1. การหาด้วยวิธีปกติ

สมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x}$ ปรับให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ได้เป็น $x^2y''-3xy'+4y=0$ เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x^2$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ หาได้จากวิธีลดทอน $y_2(x)=y_1(x)u=x^2u$

เมื่อ $y_2'=x^2u'+2xu$ และ $y_2''=2xu'+x^2u''+2u+2xu'=x^2u''+4xu'+2u$

แทนค่า $x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x}$

$$x^2\left(x^2u''+4xu'+2u\right)-3x\left(x^2u'+2xu\right)+4\left(x^2u\right)'=\sqrt{x}$$

$$x^4u''+4x^3u'+2ux^2-3x^3u'-6x^2u+4x^2u=\sqrt{x}$$

$$x^4u''+\left(4x^3-3x^3\right)u'+\left(2x^2-6x^2+4x^2\right)u=\sqrt{x}$$

$$x^4u''+x^3u'+0\times u=\sqrt{x} \quad \text{หรือ} \quad x^4u''+x^3u'=\sqrt{x}$$

แทนค่า $v=u'$

$$x^4v'+x^3v=\sqrt{x} \quad \text{หรือ} \quad v'+\frac{1}{x}v=\frac{\sqrt{x}}{x^4}=x^{-7/2}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ คือ

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)$$

แทนค่า

$$v=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\frac{\sqrt{x}}{x^4}dx+C\right)=e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}x^{-\frac{7}{2}}dx+C\right)=x^{-1}\left(\int xx^{-\frac{7}{2}}dx+C\right)$$

$$v=x^{-1}\left(\int x^{-\frac{5}{2}}dx+C\right)=x^{-1}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C\right)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{2}}+Cx^{-1}$$

แทนค่า $v=u'$

$$v=u'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{2}}+Cx^{-1}$$

$$u=\int\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{2}}+Cx^{-1}\right)dx=\frac{4}{9}x^{-\frac{3}{2}}+C\ln x+C_1$$

ดังนั้น

$$y(x)=x^2u=x^2\left(\frac{4}{9}x^{-\frac{3}{2}}+C\ln x+C_1\right)=\frac{4}{9}\sqrt{x}+Cx^2\ln x+C_1x^2$$

https://math.libretexts.org/Courses/Community_College_of_Denver/MAT_2562_Differential_Equations_with_Linear_Algebra/05%3A_Linear_Second_Order_Equations/5.06%3A_Reduction_of_Order

https://howellkb.uah.edu/public_html/DEtext/Part3/Var_Parameter.pdf

2. การหาด้วยสูตร

ขั้นที่ 1 ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x}$ ปรับให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ได้เป็น $x^2y''-3xy'+4y=0$ เมื่อผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_1(x)=x^2$ แล้ว ผลเฉลยอีกส่วน $y_2(x)$ หาได้จาก $y_2(x)=y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\exp\left(-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)dx$

เมื่อเทียบรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ พบว่า $a_0(x)=x^2$ $a_1(x)=-3x$ และ $a_2(x)=4$ เมื่อผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $y_1(x)=x^2$

แทนค่า

$$y_2(x)=x^2\int(x^2)^{-2}\exp\left(-\int\frac{-3x}{x^2}dx\right)dx=x^2\int x^{-4}\exp\left(\int\frac{3}{x}dx\right)dx$$

$$y_2(x)=x^2\int x^{-4}\exp\left(\int\frac{3}{x}dx\right)dx=x^2\int x^{-4}\exp\left(3\ln x\right)dx=x^2\int x^{-4}x^3dx=x^2\int x^{-1}dx=x^2\ln x$$

ขั้นที่ 2 ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์

ฟังก์ชัน $g(x)=\sqrt{x}$ ดังนั้น $h(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2}=x^{-3/2}$ ด้วยวิธีแปรผันพารามิเตอร์ กำหนดให้ผลเฉลยเฉพาะ เมื่อ $y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)$ ให้ $y_{h1}(x)=x^2$ ดังนั้น $y'_{h1}(x)=2x$ และ $y_{h2}(x)=x^2\ln x$ ดังนั้น $y'_{h2}(x)=2x\ln x+x$

$$x^2u'+\left(x^2\ln x\right)v'=0 \qquad \text{(E5.10-1)}$$

$$2xu'+(2x\ln x+x)v'=x^{-3/2} \qquad \text{(E5.10-2)}$$

ดังนั้น

$$u'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_{h2}(x)\\ h(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_{h1}(x) & y_{h2}(x)\\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & x^2\ln x\\ x^{-3/2} & 2x\ln x+x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x^2 & x^2\ln x\\ 2x & 2x\ln x+x\end{vmatrix}}=\frac{-x^{-3/2}x^2\ln x}{(x^2)(2x\ln x+x)-(2x)x^2\ln x}=\frac{-x^{1/2}\ln x}{2x^3\ln x+x^3-2x^3\ln x}$$

$$u'(x)=\frac{-x^{1/2}\ln x}{x^3}=-x^{-5/2}\ln x$$

ดังนั้น $u=\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln x+\frac{4}{9}x^{-3/2}$ ใช้การอินทริเกรตที่ละส่วน ให้ $u=\ln x$ และ $dv=-x^{-5/2}dx$

และ

$$v'(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_{h1}(x) & 0\\ y'_{h1}(x) & h(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_{h1}(x) & y_{h2}(x)\\ y'_{h1}(x) & y'_{h2}(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & x^{-3/2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x^2 & x^2\ln x\\ 2x & 2x\ln x+x\end{vmatrix}}=\frac{x^2x^{-3/2}}{x^3}=x^{-5/2}$$

ดังนั้น $\frac{dv}{dx}=x^{-5/2}$ หรือ $v=-\frac{2}{3}x^{-3/2}$

$$y_p(x)=u(x)y_{h1}(x)+v(x)y_{h2}(x)=x^2\left(\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln x+\frac{4}{9}x^{-3/2}\right)+x^2\ln x\left(-\frac{2}{3}x^{-3/2}\right)=\frac{4}{9}x^{1/2}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x}$ คือ

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Cx^2\ln x+C_1x^2+\frac{4}{9}x^{1/2}$$

เฉพาะ $y_p(x)$ คือ สมการ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+Cx^{-1}+C_1x$

เมื่อ $y(1)=2$ และ $y'(1)=-3$ เมื่อ $y(x)=\frac{2}{3}-Cx^{-2}+C_1x$

$2=\frac{1}{3}(1)^2-1-\frac{1}{2}C(1)^{-1}+C_1(1)$ ได้เป็น $C+C_1=\frac{8}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

$-3=\frac{2}{3}-C(1)^{-2}+C_1(1)$ ได้เป็น $C-C_1=-\frac{11}{3}$ หรือ $2=\frac{1}{3}(1)^2-1+C(1)^{-1}+C_1(1)$

ดังนั้น

$C=-\frac{1}{2}$ และ $C_1=\frac{19}{6}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2+1$ คือ $y(x)=\frac{1}{3}x^2-1+\frac{19}{6}x^{-1}+\frac{1}{2}x$

5.4 การหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง

5.4.1 อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (Power series) หมายถึงอนุกรมที่สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปได้ดัง (5.15)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{5.21}$$

(5.15) สามารถกระจายอนุกรมได้ดัง (5.16)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \tag{5.22}$$

เมื่อ x_0 เรียกว่าจุดศูนย์กลางการกระจายของอนุกรม (center of expansion) และ a_n เป็นค่าคงตัวของอนุกรมกำลัง ที่ $n=0,1,2,3,\ldots$

5.4.2 การลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้า

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า (convergent sesies) ที่จุด x_0 เมื่อ $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n(x-x_0)^n$ หาค่าได้ นอกนั้นถือว่าเป็นอนุกรมกำลังลู่ออก (diconvergent sesies)

ถ้าทุกอนุกรมกำลังมีช่วงของการลู่เข้า โดยที่ช่วงการลู่เข้าคือ เซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้า

ถ้าทุกอนุกรมกำลังมีรัศมีของการลู่เข้า (radius of convergent, R) แล้ว

1. ถ้า $R>0$ แล้วอนุกรมกำลังลู่เข้าเมื่อ $|x-a|<R$ และลู่ออกเมื่อ $|x-a|>R$ โดยอนุกรมกำลังอาจลู่เข้าหรือลู่ออกที่จุด $x=a+R$ หรือ $x=a-R$
2. ถ้าอนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุดเดียว คือ จุด $x=x_0$ ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้า $R=0$
3. ถ้าอนุกรมกำลังลู่เข้าทุกค่าของ x ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้า $R=\infty$

การทดสอบลู่เข้าของอนุกรมได้จากการทดสอบแบบอัตราส่วน (the ratio test) ดัง (5.17)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad (5.23)$$

ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $L<1$ แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์

กรณีที่ 2 ถ้า $L>1$ แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่ออก

กรณีที่ 3 ถ้า $L=1$ แสดงว่าอนุกรมนี้อาจลู่เข้าหรือลู่ออก

รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ สามารถหาได้จาก (5.18)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ หรือ } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|a_n|}} \qquad (5.24)$$

ตัวอย่างที่ 5.11 จงหารัศมีและช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังนี้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

วิธีทำ

จากการทดสอบอัตราส่วนแบบถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าพบว่า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x| = |x| < 1$$

ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังนี้เมื่อ $|x| < 1$ ทำให้ $-1 < x < 1$ และทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่ $x = -1$ และ $x = 1$

เมื่อ $x = -1$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 1$$

ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เท่ากับ $R = 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ มีช่วงการลู่เข้าเท่ากับ $-1 \le x < 1$ และมีรัศมีของการลู่เข้า $R = 1$

ตัวอย่างที่ 5.12 จงหารัศมีและแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

วิธีทำ

จากการทดสอบอัตราส่วนแบบถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าพบว่า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)|x| = 0$$

รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$$

ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เท่ากับ $R = \infty$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ มีช่วงการลู่เข้าเท่ากับ $-\infty \le x < \infty$ และมีรัศมีของการลู่เข้า $R = \infty$

ตัวอย่างที่ 5.13 จงหารัศมีและแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$

วิธีทำ

จากการทดสอบอัตราส่วนแบบถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าพบว่า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(x-3)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}(x-3)\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x-3|=|x-3|<1$$

ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังนี้เมื่อ $|x-3|<1$ ทำให้ $2<x<4$ และทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่ $x=2$ และ $x=4$

เมื่อ $x=2$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เมื่อ $x=4$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$$

ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เท่ากับ $R=1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ มีช่วงการลู่เข้าเท่ากับ $2\le x<4$ และมีรัศมีของการลู่เข้า $R=1$

ตัวอย่างที่ 5.14 จงหารัศมีและแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n}$

วิธีทำ

จากการทดสอบอัตราส่วนแบบถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าพบว่า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x-1)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(3x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}(3x-1)\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|3x-1|=|3x-1|<1$$

ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังนี้เมื่อ $|3x-1|<1$ ได้เป็น $3x-1>-1$ ดังนั้น $x>0$ และ $3x-1<1$ ดังนั้น $x=\frac{2}{3}$ ทำให้ $0<x<\frac{2}{3}$ และทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่ $x=0$ และ $x=\frac{2}{3}$

เมื่อ $x=0$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\times0-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เมื่อ $x=\frac{2}{3}$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3\times\frac{2}{3}-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(x-\frac{1}{3}\right)^n}{n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{3^{n+1}}\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\frac{1}{3}$$

ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เท่ากับ $R=\frac{1}{3}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n}$ มีช่วงการลู่เข้าเท่ากับ $0\le x<\frac{2}{3}$ และมีรัศมีของการลู่เข้า $R=\frac{1}{3}$

5.4.3 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่สามารถเขียนในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) สำหรับการหาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_0 มีอยู่และลู่เข้าสู่ $f(x)$ ดัง (5-25)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\ldots \quad (5\text{-}25)$$

ถ้า $x_0=0$ ดัง (5-26) เรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots \quad (5\text{-}26)$$

ตัวอย่างฟังก์ชัน $f(x)$ ที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของอนุกรมแมคลอรินและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมนี้

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-\infty,+\infty)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-\infty,+\infty)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-\infty,+\infty)$

$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-\infty,+\infty)$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-\infty, +\infty)$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-1, 1]$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $(-1, 1)$

ตัวอย่างที่ 5.15 จงหาอนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = e^x$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ

เนื่องจาก $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

ดังนั้น $e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \frac{e^0}{4!}x^4 + ... = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \ln x$ รอบจุด $x_0 = 1$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f'(x) = x^{-1}$ $f''(x) = -x^{-2}$ $f'''(x) = 2x^{-3}$ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! x^{-n}$

ดังนั้น $f'(1) = 1^{-1} = 1$ $f''(1) = -(1)^{-2} = -1$ $f'''(1) = 2(1)^{-3} = 2$ $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n!(1)^{-n} = (-1)^{n+1} n!$

ดังนั้น $\ln x = \ln(1)(x-1)^0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3\times 2}{4!}(x-1)^4 + ...$

$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ รอบจุด $x_0 = 1$

อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \ln x$ รอบจุด $x_0 = 1$ คือ $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + ...$

5.4.3.1 การหาฟังก์ชันผลบวกในรูปอนุกรมกำลังด้วยเอกลักษณ์

ตัวอย่างของฟังก์ชันผลบวกที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง เช่น

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ...$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x| < 1$

ตัวอย่างที่ 5.17 จงหาอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ด้วยเอกลักษณ์

วิธีทำ

จากอนุกรมกำลัง $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x=x^2$

ดังนั้น $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x^2|<1$ หรือ $|x|<1$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ เท่ากับ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ เมื่อช่วงการลู่เข้าคือ $-1<x<1$

5.4.3.2 การหาฟังก์ชันผลบวกในรูปอนุกรมกำลังด้วยการอินทิกรัล

ตัวอย่างที่ 5.18 จงหาอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\tan^{-1}x$ ด้วยการอินทิกรัล

วิธีทำ

จาก $f(x)=\tan^{-1}x$ สามารถหาอนุพันธ์ได้เป็น $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$

จากตัวอย่างที่ 4.15 พบว่า $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

ดังนั้น

$$f(x)=\tan^{-1}x=\int\frac{1}{1+x^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\tan^{-1}x$ เท่ากับ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ เมื่อช่วงการลู่เข้าคือ $-1<x<1$

5.4.4 ฟังก์ชันผลบวกจากอนุกรมกำลัง

เมื่อ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ แล้ว $f(x)$ ถูกเรียกว่าฟังก์ชันผลบวก (sum function) ของอนุกรมกำลัง

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ อนุกรมกำลังรอบจุด $x_0=0$ ตัวอย่างเช่น

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

ตัวอย่างที่ 5.19 จงหาฟังก์ชันผลบวกจากอนุกรมกำลังต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

วิธีทำ

จาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \frac{1}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$ หรือ $-1<x<1$

ตัวอย่างที่ 5.20 จงหาผลบวกของฟังก์ชันจากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$

วิธีทำ

จาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x = 1-x$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|1-x|<1$

พิจารณาช่วงการลู่เข้า $|1-x|<1$

ดังนั้นช่วงการลู่เข้าสามารถหาได้จาก $1-x>-1$ ดังนั้น $x<2$ และ $1-x<1$ ดังนั้น $x>0$ ทำให้ช่วงการลู่เข้าคือ $0<x<2$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันผลคือ $f(x)=\frac{1}{x}$ จากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้าคือ $0<x<2$

ตัวอย่างที่ 5.21 จงหาผลบวกของฟังก์ชันจากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$

วิธีทำ

จาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x = 2x-1$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n = \frac{1}{1-(2x-1)} = \frac{1}{1-2x+1} = \frac{1}{2-2x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|2x-1|<1$

พิจารณาช่วงการลู่เข้า $|2x-1|<1$

ดังนั้นช่วงการลู่เข้าสามารถหาได้จาก $2x-1>-1$ ดังนั้น $x>0$ และ $2x-1<1$ ดังนั้น $x<1$ ทำให้ช่วงการลู่เข้าคือ $0<x<1$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันผลคือ $f(x)=\frac{1}{2-2x}$ จากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n$ เมื่อ ช่วงการลู่เข้าคือ $0<x<1$

ตัวอย่างที่ 5.22 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกของ $f(x)=\frac{1}{1-2x}$

วิธีทำ

จาก $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x=2x$

$f(x)=\frac{1}{1-(2x)}=1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+....=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|2x|<1$

พิจารณาช่วงการลู่เข้า $|2x|<1$ ดังนั้นช่วงการลู่เข้าคือ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันผลคือ $f(x)=\frac{1}{2-2x}$ จากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty}(2x-1)^n$ เมื่อ ช่วงการลู่เข้าคือ $0<x<1$

ตัวอย่างที่ 5.23 จงหาอนุกรมกำลังจากฟังก์ชันผลบวกของ $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$

วิธีทำ

จาก $f(x)=\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\right)$

เมื่อ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x=\frac{x^2}{4}$ ดังนั้น $\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$

$f(x)=\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $\left|\frac{x^2}{4}\right|<1$ หรือ $|x^2|<4$ หรือ $|x|<2$ ดังนั้นช่วงการลู่เข้าคือ $-2<x<2$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันผลคือ $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ จากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$ เมื่อ ช่วงการลู่เข้าคือ $-2<x<2$

ตัวอย่างที่ 5.24 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกของ $f(x)=\frac{x}{(1-4x^2)^2}$

วิธีทำ

เมื่อ $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

เมื่อแทน $x=4x^2$ ดังนั้น $f(x)=\frac{1}{1-4x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|4x^2|<1$ หรือ $|x^2|<\frac{1}{4}$ หรือ $|x|<\frac{1}{2}$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n\right)$$

เมื่อ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(1-4x^2\right)^{-1}=-\left(1-4x^2\right)^{-2}(-8x)=\frac{8x}{\left(1-4x^2\right)^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2n4^nx^{2n-1}$$

$$\frac{8x}{\left(1-4x^2\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}2n4^nx^{2n-1}$$

$$\frac{x}{\left(1-4x^2\right)^2}=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}2n4^nx^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}n4^nx^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n4^{n-1}x^{2n-1}$$

ดังนั้น ผลบวกของฟังก์ชันผลคือ $f(x)=\frac{x}{(1-4x^2)^2}$ จากอนุกรมต่อนี้ $\sum_{n=1}^{\infty}n4^{n-1}x^{2n-1}$ เมื่อ ช่วงการลู่เข้าคือ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 5.25 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกของ $f(x)=\ln(1+x)$

วิธีทำ

เมื่อ $\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)+C$

ดังนั้น $\ln(x+1)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1^n)x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1^n)\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ เมื่อช่วงการลู่เข้า $|x|<1$

หาค่า C เนื่องจาก $|x|<1$ ดังนั้นแทนค่า $x=0$

$\ln(1+0)=0+0+0+0+....+C$ ดังนั้น $C=0$

ดังนั้น $\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

5.4.5 สมบัติของอนุกรม

ถ้า $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ และ $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ ทั้งสองอนุกรมมีช่วงการลู่เข้า $|x-x_0|<R$ เมื่อ $R>0$ ดังนั้น อนุกรม $f(x)$ และ $g(x)$ สามารถดำเนินการได้ดังนี้

1. สมบัติการบวกและลบของอนุกรม

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

2. สมบัติการคูณ

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

3. สมบัติการหาร

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \text{ เมื่อ } g(x)\neq 0$$

4. สมบัติอนุพันธ์

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่ง $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$

อนุพันธ์อันดับสอง $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

อนุพันธ์อันดับ k $f^{(k)}'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$

5. สมบัติการเลื่อนดัชนี

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+k} = \sum_{n-k=n_0}^{\infty} a_{n-k}(x-x_0)^{n-k+k} = \sum_{n=n_0+k}^{\infty} a_{n-k}(x-x_0)^n$$

ตัวอย่างที่ 5.26 จงหาอนุกรมกำลังของผลบวกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$

วิธีทำ

เนื่องจากอนุกรม $n = 0,1,2,3,...$

พิจารณาให้ $(x-1)$ ยกกำลังเท่ากันทั้ง 2 อนุกรม

สำหรับอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$

เมื่อแทน $n = n+1$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n+1=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^{n+1-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n$

กระจายอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n = (-1+1)a_{-1+1}(x-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n + (n+1)a_{n+1}\right](x-1)^n$$

ตัวอย่างที่ 5.27 จงหาผลบวกของอนุกรมกำลังของ $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$

วิธีทำ

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

ปรับให้เลขยกกำลัง x^{n+1} เป็น x^n

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1)a_{n+2}x^{n+2-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

สมบัติการบวกอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n\right]x^n$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n\right]x^n$$

ตัวอย่างที่ 5.28 จงเปลี่ยนอนุกรมกำลังของ $x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง

วิธีทำ

อนุกรมกำลังของ $x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$ มีรูปของ $(x-2)^{n-2}$ ดังนั้น

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$$

$$= (x-2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$$

พิจารณา

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-1} = \sum_{n+1=0}^{\infty}(n+1)(n+1-1)a_{n+1}(x-2)^{n+1-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n+2=0}^{\infty} 2(n+2)(n+2-1)a_{n+2}(x-2)^{n+2-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n$$

กระจาย

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n = (-1)(-1+1)a_{-1+1}(x-2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-1} = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n$$

$$= 2(-2+1)(-2+2)a_{-2+2}(x-2)^{-2} + 2(-1+1)(-1+2)a_{-1+2}(x-2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = 0+0+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n$$

ดังนั้น

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2}$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}(x-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-2)^n$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)(n+2)a_{n+2}\right](x-2)^n$$

5.4.6 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

5.4.6.1 ผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดสามัญ

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ที่จุด x_0 แล้ว ดังนั้นอนุกรมกำลังรอบจุด x_0 มีอยู่และลู่เข้าสู่แล้ว $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ เมื่อช่วงของการลู่เข้า $|x-x_0| < R$ เมื่อ R คือรัศมีของการลู่เข้า

การหาผลเฉลยในรูปอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ดัง (5-27)

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (5\text{-}27)$$

เมื่อ $a_2(x)$ $a_1(x)$ และ $a_0(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่จุด x_0

เมื่อ (5-27) หารด้วย $a_2(x)$ และ $a_2(x) \neq 0$ ได้เป็น (5-28)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0 \qquad (5\text{-}28)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (5\text{-}29)$$

เมื่อ $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ และ $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$

ที่จุด x_0 แล้วทำให้ $P(x_0)$ หาค่าได้ เรียกจุดนี้ว่า จุดสามัญ (ordinary point) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ถ้าฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ สามารถหาค่าได้ แต่ถ้าฟังก์ชัน $P(x)$ หรือ $Q(x)$ ไม่เป็น ฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 จะเรียกจุด x_0 ว่า จุดเอกฐาน (singular point)

จุดเอกฐานแบ่งได้ 2 ลักษณะ คือ จุดเอกฐานปกติ (regular singular point) ถ้า $(x-x_0)P(x)$ และ $(x-x_0)^2Q(x)$ สามารถหาค่าได้ ถือว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 หรือ จุดเอกฐานไม่ปกติ (irregular singular point) ถ้า $(x-x_0)P(x)$ และ $(x-x_0)^2Q(x)$ ไม่สามารถหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 5.29 จงหาจุดสามัญหรือจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+xy'+(x^2+2)y=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+xy'+(x^2+2)y=0$ พิจารณาเทียบกับ (5-27) พบว่า $P(x)=x$ และ $Q(x)=x^2+2$ พบว่าทั้ง $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ เมื่อ $-\infty<x<\infty$ ดังนั้น $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ทุกค่าของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

ตัวอย่างที่ 5.30 จงหาจุดสามัญหรือจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ $x(x-1)^3y''+2(x-1)^3y'+3y=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $x(x-1)^3y''+2(x-1)^3y'+3y=0$ ปรับสมการให้อยู่ในรูป (5-27)

$$y''+\frac{2(x-1)^3}{x(x-1)^3}y'+\frac{3}{x(x-1)^3}y=0$$

$$y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{x(x-1)^3}y=0$$

พิจารณาเทียบกับ (5-27) พบว่า $P(x)=\frac{2}{x}$ และ $Q(x)=\frac{3}{x(x-1)^3}$ พบว่า $P(x)$ หาค่าได้ทุกจุด ยกเว้น $x=0$ และ $Q(x)=\frac{3}{x(x-1)^3}$ พบว่า $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุด ยกเว้น $x=0$ และ $x=1$ แสดงว่าจุด $x=0$ และ $x=1$ เป็นจุดเอกฐาน

พิจารณาที่จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติหรือไม่

$(x-x_0)P(x)=(x-0)\frac{1}{x}=1$ พบว่า $(x-x_0)P(x)$ หาค่าได้

$(x-x_0)^2Q(x)=(x-0)^2\frac{3}{x(x-1)^3}=\frac{3x}{(x-1)}$ พบว่า $(x-x_0)^2Q(x)$ หาค่าได้

แสดงว่า จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ

พิจารณา $x=1$

$(x-x_0)P(x)=(x-1)\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ พบว่า $(x-x_0)P(x)$ หาค่าได้

$(x-x_0)^2Q(x)=(x-1)^2\dfrac{3}{x(x-1)}=\dfrac{3x}{(x-1)}$ พบว่า $(x-x_0)^2Q(x)$ หาค่าไม่ได้

แสดงว่า จุด $x=1$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติ

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรรอบจุดสามัญ $x=x_0$ ในรูปของอนุกรมกำลัง ดัง (5-30) เมื่อผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์นี้มีช่วงในการลู่เข้า $|x-x_0|<R$ เมื่อ $R>0$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (5\text{-}30)$$

ตัวอย่างที่ 5.31 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $y''+y=0$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''+y=0$ พบว่า $P(x)=0$ และ $Q(x)=1$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x ได้ แสดงว่า ที่จุด $x_0=0$ สามารถหาผลเฉลยในอนุกรมกำลังได้

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ และ $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

แทนค่าใน $y''+y=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n-2} ให้อยู่ในรูป x^n

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}(n+2)(n+2-1)a_{n+2}x^{n+2-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0$$

เมื่อ $x^n\neq 0$ ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]=0$

ดังนั้น $(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0$ เมื่อ $n=0,1,2,3,...$

$$a_{n+2}=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 0

เมื่อ $n=0$ ได้ $a_{2+0}=a_2=-\dfrac{a_0}{(0+2)(0+1)}=-\dfrac{a_0}{2}$

เมื่อ $n=1$ ได้ $a_{1+2}=a_3=-\dfrac{a_1}{(1+2)(1+1)}=-\dfrac{a_1}{3\bullet 2}$

เมื่อ $n=2$ ได้ $a_{2+2}=a_4=-\dfrac{a_2}{(2+2)(2+1)}=-\dfrac{a_2}{4\bullet 3}=-\dfrac{1}{4\bullet 3}\left(-\dfrac{a_0}{2}\right)=\dfrac{a_0}{4\bullet 3\bullet 2}=\dfrac{a_0}{4!}$

เมื่อ $n=3$ ได้ $a_{3+2}=a_5=-\dfrac{a_3}{(3+2)(3+1)}=-\dfrac{a_3}{5\bullet 4}=-\dfrac{1}{5\bullet 4}\left(-\dfrac{a_1}{3\bullet 2}\right)=\dfrac{a_1}{5\bullet 4\bullet 3\bullet 2}=\dfrac{a_1}{5!}$

เมื่อ $n=4$ ได้ $a_{4+2}=a_6=-\dfrac{a_4}{(4+2)(4+1)}=-\dfrac{a_4}{6\bullet 5}=-\dfrac{1}{6\bullet 5}\left(\dfrac{a_0}{4!}\right)=-\dfrac{a_0}{6!}$

เมื่อ $n=5$ ได้ $a_{5+2}=a_7=-\dfrac{a_5}{(5+2)(5+1)}=-\dfrac{a_5}{7\bullet 6}=-\dfrac{1}{7\bullet 6}\left(\dfrac{a_1}{5!}\right)=-\dfrac{a_1}{7!}$

แทนค่า $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,...$ ใน $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3++a_4x^4+a_5x^5+...$$

$$y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{3!}x^3+\frac{a_0}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5-\frac{a_0}{6!}x^6-\frac{a_1}{7!}x^7+...$$

$$y=\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+...\right)a_0+\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+...\right)a_1$$

เมื่อ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y=a_0\cos x+a_1\sin x$

ตัวอย่างที่ 5.32 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $y''-xy'+2y=0$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-xy'+2y=0$ พบว่า $P(x)=-x$ และ $Q(x)=2$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x ได้ แสดงว่า ที่จุด $x_0=0$ สามารถหาผลเฉลยในอนุกรมกำลังได้

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ และ $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

แทนค่าใน $y''-xy'+2y=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n-2} ให้อยู่ในรูป x^n

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1)a_{n+2}x^{n+2-2} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เพื่อหาผลบวกของอนุกรม จำเป็นต้องกระจายเทอม $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n\right]x^n = 0$$

เมื่อ $x^n \neq 0$ ดังนั้น $a_2 = -a_0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n\right] = 0$

ดังนั้น $(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n = 0$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 1

เมื่อ $n=1$ ได้ $a_{1+2} = a_3 = \frac{(1-2)}{(1+2)(1+1)}a_1 = -\frac{1}{3\bullet 2}a_1$

เมื่อ $n=2$ ได้ $a_{2+2} = a_4 = \frac{(2-2)}{(2+2)(2+1)}a_2 = 0$

เมื่อ $n=3$ ได้ $a_{3+2} = a_5 = \frac{(3-2)}{(3+2)(3+1)}a_3 = \frac{1}{5\bullet 4}a_3 = \frac{1}{5\bullet 4}\left(-\frac{1}{3\bullet 2}a_1\right) = -\frac{1}{5!}a_1$

เมื่อ $n=4$ ได้ $a_{4+2} = a_6 = \frac{(4-2)}{(4+2)(4+1)}a_4 = \frac{2}{6\bullet 5}(0) = 0$

เมื่อ $n=5$ ได้ $a_{5+2} = a_7 = \frac{(5-2)}{(5+2)(5+1)}a_5 = \frac{3}{7\bullet 6}a_3 = \frac{3}{7\bullet 6}\left(-\frac{1}{5!}a_1\right) = -\frac{3}{7!}a_1$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ใน $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y = a_0 + a_1x - a_0x^2 - \frac{1}{3!}a_1x^3 + 0 - \frac{3}{7!}a_1x^5 + \ldots$$

$$y = a_0\left(1 - x^2\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{3}{7!}x^5 + \ldots\right)$$

ดังนั้น $y_1 = a_0\left(1 - x^2\right)$ และ $y_2 = a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{3}{7!}x^5 + \ldots\right)$

ตัวอย่างที่ 5.33 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0$ รอบจุด $x_0 = 0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0$ พบว่า $P(x) = x - 1$ และ $Q(x) = 2x - 3$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x ได้ ดังนั้นที่จุด $x_0 = 0$ สามารถหาผลเฉลยในอนุกรมกำลังได้

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ และ } y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

แทนค่าใน $y'' + (x-1)y' + (2x-3)y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} xn a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} x a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n-2} x^{n-1} และ x^{n+1} ให้อยู่ในรูป x^n

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1)a_{n+2} x^{n+2-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n+1=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n+1-1} + 2\sum_{n-1=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ผลบวกของอนุกรม

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - 3a_0 - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 - a_1 - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 - a_1 - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} - 3a_n\right]x^n = 0$$

$$2a_2 - a_1 - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} + (n-3)a_n\right]x^n = 0$$

เมื่อ $x^n \neq 0$ ดังนั้น $2a_2 - a_1 - 3a_0 = 0$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} + (n-3)a_n\right]x^n = 0$$

ดังนั้น $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + 3a_0\right) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0$ และ $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} + (n-3)a_n = 0$ เมื่อ

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_{n+2} = \frac{(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} - (n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} - (n-3)a_n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)}a_{n+1} - \frac{n-3}{(n+2)(n+1)}a_n - \frac{2}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 1

เมื่อ $n = 1$ ได้

$$a_{1+2} = a_3 = \frac{1}{(1+2)}a_{1+1} - \frac{1-3}{(1+2)(1+1)}a_1 - \frac{2}{(1+2)(1+1)}a_{1-1} = \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3\bullet 2}a_1 - \frac{2}{3\bullet 2}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right) + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = \frac{3}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_0 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0$$

เมื่อ $n = 2$ ได้

$$a_{2+2} = a_4 = \frac{1}{(2+2)}a_{2+1} - \frac{2-3}{(2+2)(2+1)}a_2 - \frac{2}{(2+2)(2+1)}a_{2-1} = \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4\bullet 3}a_2 - \frac{2}{4\bullet 3}a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4\bullet 3}a_2 - \frac{2}{4\bullet 3}a_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right) - \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0$$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ใน $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$$

$$y = a_0 + a_1x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)x^3 + \left(\frac{1}{6}a_0\right)x^4 + \ldots$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 0x^4 + \ldots\right)$$

ดังนั้น $y_1 = a_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots\right)$ และ $y_2 = a_1\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 0x^4 + \ldots\right)$

ตัวอย่างที่ 5.34 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $2y"+xy'+y=0$ รอบจุด $x_0=1$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $2y"+xy'+y=0$ หรือ $y"+\frac{x}{2}y'+\frac{1}{2}y=0$ พบว่า $P(x)=\frac{x}{2}$ และ $Q(x)=\frac{1}{2}$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x ได้ ดังนั้นที่จุด $x_0=1$ สามารถหาผลเฉลยในอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ ได้

เพื่อความสะดวกในการหาผลเฉลยของอนุกรมกำลัง ให้ $t=x-1$ และรอบจุด $t_0=0$ ดังนั้น $2y"+xy'+y=0$ เป็น $2y"+(t+1)y'+y=0$

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$ และ $y"=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$

แทนค่าใน $2y"+(t+1)y'+y=0$

$$2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+(t+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nt^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nt^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

เปลี่ยนให้เทอม t^{n-2} และ t^{n-1} ให้อยู่ในรูป t^n

$$\sum_{n+2=2}^{\infty}2(n+2)(n+2-1)a_{n+2}t^{n+2-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+\sum_{n+1=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^{n+1-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

ผลบวกของอนุกรม

$$4a_2+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$4a_2+a_1+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$4a_2+a_1+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+(n+1)a_{n+1}+a_n\right]t^n=0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n\right]t^n=0$

เมื่อ $x^n\neq 0$ ดังนั้น $4a_2+a_1+a_0=0$ และ $2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n=0$

ดังนั้น $a_2=-\frac{1}{4}\left(a_1+a_0\right)=-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_0$ และ $a_{n+2}=-\frac{1}{2(n+2)}a_{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}a_n$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 1

เมื่อ $n=1$ ได้

$a_{1+2}=a_3=-\frac{1}{2(1+2)}a_{1+1}-\frac{1}{2(1+2)}a_1=-\frac{1}{2\bullet 3}a_2-\frac{1}{2\bullet 3}a_1=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_0\right)-\frac{1}{6}a_1$

$a_3=\frac{1}{24}a_1+\frac{1}{4}a_0-\frac{1}{6}a_1=-\frac{3}{24}a_1+\frac{1}{24}a_0=-\frac{1}{8}a_1+\frac{1}{24}a_0$

เมื่อ $n=2$ ได้

$a_{2+2}=a_4=-\frac{1}{2(2+2)}a_{2+1}-\frac{1}{2(2+2)}a_2=-\frac{1}{2\bullet 4}a_3-\frac{1}{2\bullet 4}a_2=-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{8}a_1+\frac{1}{24}a_0\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_0\right)$

$a_4=\frac{1}{64}a_1-\frac{1}{192}a_0+\frac{1}{32}a_1+\frac{1}{32}a_0=\frac{3}{64}a_1+\frac{5}{192}a_0$

แทนค่า $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,...$ ใน $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ รอบจุด $x_0=0$

$y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+...$

$y=a_0+a_1t+\left(-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{4}a_0\right)t^2+\left(-\frac{1}{8}a_1+\frac{1}{24}a_0\right)t^3+\left(\frac{3}{64}a_1+\frac{5}{192}a_0\right)t^4+...$

$y=a_0\left(1-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{192}t^4+...\right)+a_1\left(t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+\frac{3}{64}t^4+...\right)$

แทนค่า $t=x-1$

ดังนั้น $y_1=a_0\left(1-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{24}(x-1)^3+\frac{5}{192}(x-1)^4+...\right)$ และ

$y_2=a_1\left((x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{8}(x-1)^3+\frac{3}{64}(x-1)^4+...\right)$

ดังนั้น $y_1=a_0\left(1+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^4+...\right)$ และ $y_2=a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+0x^4+...\right)$

ตัวอย่างที่ 5.35 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $(x^2+4)y"+xy=x+2$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $(x^2+4)y"+xy=x+2$ หรือ $y"+\frac{x}{(x^2+4)}y=\frac{x+2}{(x^2+4)}$ พบว่า $P(x)=0$ และ $Q(x)=\frac{x+2}{(x^2+4)}$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x ได้

ดังนั้นที่จุด $x_0=0$ สามารถหาผลเฉลยในอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ได้

เมื่อ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ดังนั้น $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ และ $y"=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

แทนค่าใน $(x^2+4)y"+xy=x+2$

$$(x^2+4)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x+2$$

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x+2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}4n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x+2$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n-2} และ x^{n+1} ให้อยู่ในรูป x^n

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n+2=2}^{\infty}4(n+2)(n+2-1)a_{n+2}x^{n+2-2}+\sum_{n-1=0}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1+1}=x+2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x+2$$

ผลบวกของอนุกรม โดยกระจายอนุกรมให้ถึงพจน์ $n=2$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+4(0+2)(0+n+1)a_{0+2}x^0+4(1+2)(1+1)a_{1+2}x^1+\sum_{n=2}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_{1-1}x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=x+2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+8a_2+24a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=x+2$$

$$8a_2+24a_3x-2+a_0x-x+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

$$8a_2-2+(24a_3+a_0-1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n+4(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_{n-1}\right]x^n=0$$

เมื่อ $x \neq 0$ ดังนั้น $8a_2 - 2 = 0$ $24a_3 + a_0 - 1 = 0$ และ $\left[n(n-1)a_n + 4(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1}\right] = 0$ เมื่อ $n = 2,3,4,...$

ดังนั้น $a_2 = \frac{1}{4}$ $a_3 = -\frac{1}{24}a_0 + \frac{1}{24}$ และ $4(n+2)(n+1)a_{n+2} = -n(n-1)a_n - a_{n-1}$

$$a_{n+2} = -\frac{n(n-1)}{4(n+2)(n+1)}a_n - \frac{1}{4(n+2)(n+1)}a_{n-1}$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 2

เมื่อ $n = 2$ ได้

$$a_{2+2} = a_4 = -\frac{2(2-1)}{4(2+2)(2+1)}a_2 - \frac{1}{4(2+2)(2+1)}a_{2-1} = -\frac{2}{4\bullet4\bullet3}a_2 - \frac{1}{4\bullet4\bullet3}a_1 = -\frac{2}{4\bullet4\bullet3}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4\bullet4\bullet3}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1$$

เมื่อ $n = 3$ ได้

$$a_{3+2} = a_5 = -\frac{2(3-1)}{4(3+2)(3+1)}a_3 - \frac{1}{4(3+2)(3+1)}a_{3-1} = -\frac{2\bullet3}{4\bullet5\bullet4}a_3 - \frac{1}{4\bullet5\bullet4}a_2 = -\frac{3}{40}a_3 - \frac{1}{80}a_2$$

$$a_5 = -\frac{3}{40}\left(-\frac{1}{24}a_0 + \frac{1}{24}\right) - \frac{1}{80}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{960}a_0 - \frac{3}{960} - \frac{1}{320} = \frac{1}{320}a_0 - \frac{1}{160}$$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$ ใน $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ...$$

$$y = a_0 + a_1x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1\right)x^4 + \left(\frac{1}{320}a_0 - \frac{1}{160}\right)x^5 + ...$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{320}x^5 + ...\right) + a_1\left(x - \frac{1}{48}a_1x^4 + ...\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{160}x^5 + ...\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $(x^2+4)y'' + xy = x + 2$ รอบจุด $x_0 = 0$ คือ

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{320}x^5 + ...\right) + a_1\left(x - \frac{1}{48}a_1x^4 + ...\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{160}x^5 + ...\right)$$

5.4.6.2 ผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุดเอกฐานปกติด้วยวิธีโฟรเบนิอุส

ผลเฉลยในรูปอนุกรม $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รอบจุดสามัญแต่ในกรณีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รอบจุดเอกฐานปกติไม่สามารถเขียนในรูปของอนุกรมนี้ได้ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รอบจุดเอกฐานปกติสามารถทำได้ด้วยวิธีโฟรเบนิอุส (Frobenius method)

ถ้า $x=x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสองดัง (5-31) แล้ว อย่างน้อย ผลเฉลยหนึ่งของสมการจะอยู่ในรูป (5-32) เมื่อ r เป็นจำนวนจริงและอนุกรมนี้ลู่เข้า สำหรับ $0<x-x_0<R$ เมื่อ R คือ รัศมีของช่วงการลู่เข้า และมีค่าเท่ากับระยะทางจาก x_0 ไปยัง จุดเอกฐานอื่นที่ใกล้ที่สุด

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{5-31}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r} \tag{5-32}$$

ถ้าให้ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ เมื่อ $a_0\neq 0$ เป็นผลเฉลยของ (5.-33) ที่มีจุด $x_0=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{5.33}$$

ดังนั้น $xP(x)$ และ $x^2Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$ ดัง (5-34) และ (5-35)

$$xP(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots \tag{5-34}$$

$$x^2Q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots \tag{5-35}$$

จาก (5-34) และ (5-35) เมื่อ $x=0$ พบว่า $xP(x)=p_0$ และ $x^2Q(x)=q_0$

จาก (5-35) ถ้าคูณด้วย x^2 ได้เป็น (5-36)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^2P(x)\frac{dy}{dx}+x^2Q(x)y=0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\big(xP(x)\big)\frac{dy}{dx}+x^2Q(x)y=0 \tag{5-36}$$

เมื่อแทน $xP(x)$ และ $x^2Q(x)$ จาก (5-34) และ (5-35) ตามลำดับ ใน (5-36) ได้เป็น (5-37)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\Big(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\Big)\frac{dy}{dx}+\Big(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\Big)y=0 \tag{5-37}$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ เมื่อ $y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$ และ $y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$ แทนลงใน (5-37) ได้เป็น (5-38)

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}+x\left(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\left(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\left(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+\left(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0 \quad (5\text{-}38)$$

จาก (5-38) พิจารณาเมื่อ $n=0$ ได้เป็น (5-39)

$$r(r-1)a_0x^r+\left(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\right)ra_0x^r+\left(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\right)a_0x^r=0$$

$$r(r-1)+\left(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\right)r+\left(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\right)=0 \quad (5\text{-}39)$$

เมื่อแทน $x=0$ ใน (5-39) ได้เป็น (5-40)

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \quad (5\text{-}40)$$

$$r^2-r+p_0r+q_0=r^2+(p_0-1)+q_0=0 \quad (5\text{-}41)$$

(5-41) เรียกว่า สมการดัชนี (indicial equation) และรากของสมการดัชนี r_1 และ r_2 จาก (5-41) เรียกว่า เลขชี้กำลัง (exponents) ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของ (5-31) เมื่อค่าของ r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถแบ่งได้ออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1. $r_1\neq r_2$ และ r_1-r_2 ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนี้ $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$ และ $y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}$

กรณี 2. $r_1=r_2$ และเป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ 1 ผลเฉลย ดังนี้ $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$ ส่วนอีก 1 ผลเฉลยสามารถหาได้จากการเปลี่ยนสมการสัมประสิทธิ์ r เพื่อหาสัมประสิทธิ์ $a_n(n\geq 1)$ ในรูปของ r และ a_0 ซึ่งพบว่า a_n เป็นฟังก์ชันของ $y(r,x)$ ดังนั้น $y_2=\left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$ บางครั้งพบว่า y_1 ไม่สามารถอินทิเกรตได้ ดังนั้นสามารถให้ $y_2=y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{n+r_1}$

กรณี 3. $r_1<r_2$ และ r_1-r_2 เป็นจำนวนเต็มบวก ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ 2 ผลเฉลย ดังนี้ $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$ ส่วนอีก 1 ผลเฉลยสามารถหาได้จาก $y_2=y_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$ บางครั้งพบว่า y_1 ไม่สามารถอินทิเกรตได้ ดังนั้นสามารถให้ $y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_1}$

ตัวอย่างที่ 5.36 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$ หรือ $y''+\frac{7}{2x}(x+1)y'-\frac{3}{2x^2}y=0$ พบว่า $P(x)=\frac{7}{2x}(x+1)$ และ $Q(x)=\frac{3}{2x^2}$ พบว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x ยกเว้นจุด $x=0$ แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ยกเว้นจุด $x=0$ ซึ่ง จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน พิจารณาที่จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติหรือไม่

$(x-x_0)P(x)=(x-0)\frac{7}{2x}(x+1)=\frac{7}{2}(x+1)$ ดังนั้น $(x-x_0)P(x)$ หาค่าได้

$(x-x_0)^2Q(x)=(x-0)^2\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}=\frac{3}{2}$ ดังนั้น $(x-x_0)^2Q(x)$ หาค่าได้

แสดงว่า จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้ทุกค่าของ x รอบจุด $x_0=0$ ได้ และผลเฉลยในอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$

เมื่อ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ ดังนั้น $y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$ และ $y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$

แทนค่าใน $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+(7x^2+7x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2x^2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(7x^2+7x)(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2x^2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}7x^2(n+r)a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}7x(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n+r+1} ให้อยู่ในรูป x^{n+r}

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n-1=0}^{\infty}7(n-1+r)a_{n-1}x^{n-1+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}7(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

ผลบวกของอนุกรม โดยกระจายอนุกรมให้ถึงพจน์ $n=1$

$$2r(r-1)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}7(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}$$

$$+7ra_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}7(n+r)a_nx^{n+r}-3a_0x^r-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+r}=0$$

$$\left[2r(r-1)+7r-3\right]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n+7(n+r-1)a_{n-1}+7(n+r)a_n-3a_n\right]x^{n+r}=0$$

$$\left[2r(r-1)+7r-3\right]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-3\right)a_n+7(n+r-1)a_{n-1}\right]x^{n+r}=0$$

เมื่อ $x\neq 0$ และ $a_0\neq 0$ ดังนั้น $2r(r-1)+7r-3=0$ และ

$\left(2(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-3\right)a_n+7(n+r-1)a_{n-1}=0$ เมื่อ $n=1,2,3,4,...$

$$a_n=-\frac{7(n+r-1)}{2(n+r)(n+r-1)+7(n+r)-3}a_{n-1}$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนพันธ์จำเป็นต้องหาค่า r_1 และ r_2 จากสมการดัชนี $2r(r-1)+7r-3=0$

$2r^2-2r+7r-3=0$ หรือ $2r^2+5r-3=0$

ดังนั้น $r_1=\frac{1}{2}$ และ $r_2=-3$ ซึ่งตรงกับ**กรณี 1.** $r_1\neq r_2$ และ r_1-r_2 ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ผลเฉลยของสมการ

อนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนี้ $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$ และ $y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_2}$

กรณี $r_1=\frac{1}{2}$

$$a_n=-\frac{7\left(n+\frac{1}{2}-1\right)}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}-1\right)+7\left(n+\frac{1}{2}\right)-3}a_{n-1}=-\frac{7\left(\frac{2n+1-2}{2}\right)}{2\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1-2}{2}\right)+7\left(\frac{2n+1}{2}\right)-3}a_{n-1}$$

$$a_n=-\frac{7(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)+7(2n+1)-6}a_{n-1}=-\frac{7(2n-1)}{4n^2-1+14n+7-6}a_{n-1}=-\frac{7(2n-1)}{4n^2+14n}a_{n-1}$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 1

เมื่อ $n=1$ ได้

$$a_1=-\frac{7(2\bullet 1-1)}{4(1)^2+14\bullet 1}a_{1-1}=-\frac{7(1)}{4+14}a_0=-\frac{7}{18}a_0$$

เมื่อ $n=2$ ได้

$$a_{1+1}=a_2=-\frac{7(2\bullet 2-1)}{4(2)^2+14\bullet 2}a_{2-1}=-\frac{7(3)}{16+28}a_1=-\frac{21}{44}a_1=-\frac{21}{44}\left(-\frac{7}{28}a_0\right)=\frac{147}{792}a_0$$

เมื่อ $n=3$ ได้

$$a_{3+1}=a_4=-\frac{7(2\bullet 3-1)}{4(3)^2+14\bullet 3}a_{3-1}=-\frac{7(5)}{36+52}a_2=-\frac{35}{88}a_2=-\frac{35}{88}\left(\frac{147}{792}a_0\right)=-\frac{1715}{23232}a_0$$

แทนค่า $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,...$ ใน $y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ รอบจุด $x_0=0$

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+..\right)$$

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\left(a_0-\frac{7}{18}a_0x+\frac{147}{792}a_0x^2-\frac{1715}{23232}a_0x^3+...\right)=a_0x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{7}{18}x+\frac{147}{792}x^2-\frac{1715}{23232}x^3+...\right)$$

กรณี $r_2=-3$

$$a_n=-\frac{7(n-3-1)}{2(n-3)(n-3-1)+7(n-3)-3}a_{n-1}=-\frac{7(n-4)}{2(n-3)(n-4)+7(n-3)-3}a_{n-1}$$

$$a_n=-\frac{7(n-4)}{2(n^2-7n+12)+7n-21-3}a_{n-1}=-\frac{7(n-4)}{2n^2-14n+24+7n-21-3}a_{n-1}=-\frac{7(n-4)}{2n^2-7n}a_{n-1}$$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 1

เมื่อ $n=1$ ได้

$$a_1=-\frac{7(1-4)}{2(1)^2-7(1)}a_{1-1}=-\frac{7(-3)}{2-7}a_0=-\frac{21}{5}a_0$$

เมื่อ $n=2$ ได้

$$a_2=-\frac{7(2-4)}{2(2)^2-7(2)}a_{2-1}=-\frac{7(-2)}{8-14}a_1=-\frac{14}{6}a_1=-\frac{7}{3}\left(-\frac{21}{5}\right)a_0=-\frac{49}{5}a_0$$

เมื่อ $n=3$ ได้

$$a_3=-\frac{7(3-4)}{2(3)^2-7(3)}a_{3-1}=-\frac{7(-1)}{18-21}a_2=-\frac{7}{3}a_2=-\frac{7}{3}\left(-\frac{49}{5}\right)a_0=-\frac{343}{15}a_0$$

เมื่อ $n=4$ ได้

$$a_4=-\frac{7(4-4)}{2(4)^2-7(4)}a_{4-1}=-\frac{7(0)}{32-28}a_3=0$$

เมื่อ $n=5$ ได้

$$a_4=-\frac{7(5-4)}{2(5)^2-7(5)}a_{5-1}=-\frac{7(1)}{50-35}a_4=-\frac{7}{15}(0)=0$$

ดังนั้น เมื่อ $n=4,5,6,7,...$ พบว่า $a_4=a_5=a_6....=0$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ ใน $y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$$y_1 = x^{-3}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ..\right)$$

$$y_1 = x^{-3}\left(a_0 - \frac{21}{5}a_0x - \frac{49}{5}a_0x^2 - \frac{343}{15}a_0x^3 + 0x^4 + \ldots\right) = a_0x^{-3}\left(1 - \frac{21}{5}x - \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$ รอบจุด $x_0 = 0$ คือ

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1a_0x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 - \frac{1715}{23232}x^3 + \ldots\right) + C_2a_0x^{-3}\left(1 - \frac{21}{5}x - \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3\right)$$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ ใน $y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ..\right)$$

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(a_0 - \frac{7}{18}a_0x + \frac{147}{792}a_0x^2 - \frac{1715}{23232}a_0x^3 + \ldots\right) = a_0x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 - \frac{1715}{23232}x^3 + \ldots\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $(x^2+4)y'' + xy = x + 2$ รอบจุด $x_0 = 0$

$y_1 = a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{320}x^5 + \ldots\right)$ $y_2 = a_1\left(x - \frac{1}{48}a_1x^4 + \ldots\right)$ และ

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{160}x^5 + \ldots$$

ตัวอย่างที่ 5.37 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ รอบจุด $x_0 = 0$

วิธีทำ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$ หรือ $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$ พบว่า $P(x) = \frac{1}{x}$ และ $Q(x) = 1$ พบว่า $P(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x ยกเว้นจุด $x = 0$ และ $Q(x)$ หาค่าได้ทุกจุดของ x แสดงว่า ทุกค่าของ x เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ยกเว้นจุด $x = 0$ ซึ่ง จุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

พิจารณาที่จุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติหรือไม่

$(x - x_0)P(x) = (x - 0)\frac{1}{x} = 1$ ดังนั้น $(x - x_0)P(x)$ หาค่าได้

$(x-x_0)^2Q(x)=x^2$ ดังนั้น $(x-x_0)^2Q(x)$ หาค่าได้

แสดงว่าที่จุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังได้

ทุกค่าของ x รอบจุด $x_0=0$ ได้ และผลเฉลยในอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$

เมื่อ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ ดังนั้น $y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$ และ $y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$

แทนค่าใน $x^2y''+xy'+x^2y=0$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

เปลี่ยนให้เทอม x^{n+r+2} ให้อยู่ในรูป x^{n+r}

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n-2=0}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2+r+2}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

ผลบวกของอนุกรม โดยกระจายอนุกรมให้ถึงพจน์ $n=2$

$$r(r-1)a_0x^r+(r+1)(r)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+ra_0x^r+(r+1)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$r(r-1)a_0x^r+ra_0x^r+(r+1)(r)a_1x^{r+1}+(r+1)a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$\left[r(r-1)+r\right]a_0x^r+\left[(r+1)(r)+(r+1)\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$\left[r^2-r+r\right]a_0x^r+\left[r^2+r+r+1\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)\right]a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$r^2a_0x^r+(r+1)^2a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)\left[(n+r-1)+1\right]a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$r^2a_0x^r+(r+1)^2a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$r^2a_0x^r+(r+1)^2a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)^2a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

เมื่อ $x\neq0$ และ $a_0\neq0$

ดังนั้น

เทอม $r^2 a_0 x^r = 0$ ได้เป็น $r^2 a_0 = 0$ ดังนั้น $r_1 = r_2 = 0$

เทอม $(r+1)^2 a_1 x^{r+1} = 0$ ได้เป็น $(r+1)^2 a_1 = 0$ ดังนั้น $r_1 = r_2 = -1$

เทอม $\left[(n+r)^2 a_n + a_{n-2}\right] x^{n+r} = 0$ ได้เป็น $a_n = -\frac{1}{(n+r)^2} a_{n-2}$ เมื่อ $n = 2,3,4,5,6,7,...$

จาก**กรณี 2** $r_1 = r_2$ และเป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์สามารถเขียนในรูปอนุกรมได้ 1 ผลเฉลย ดังนี้

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$ ส่วนอีก 1 ผลเฉลยสามารถหาได้จาก $y_2 = \left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$

เมื่อแทน $r_1 = 0$ ดังนั้น $(0+1)^2 a_1 = a_1 = 0$

$a_n = -\frac{1}{(n+0)^2} a_{n-2} = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$ เมื่อ $n = 2,3,4,5,6,7,...$

เมื่อแทนค่า n เริ่มจาก 2

เมื่อ $n = 2$ ได้

$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_{2-2} = -\frac{1}{4} a_0$

เมื่อ $n = 3$ ได้

$a_3 = -\frac{1}{3^2} a_{3-2} = -\frac{1}{9} a_1 = -\frac{1}{9}(0) = 0$

เมื่อ $n = 4$ ได้

$a_4 = -\frac{1}{4^2} a_{4-2} = -\frac{1}{16} a_2 = -\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\right) a_0 = \frac{1}{64} a_0$

เมื่อ $n = 5$ ได้

$a_5 = -\frac{1}{5^2} a_{5-2} = -\frac{1}{25} a_3 = -\frac{1}{25}(0) = 0$

เมื่อ $n = 6$ ได้

$a_6 = -\frac{1}{6^2} a_{6-2} = -\frac{1}{36} a_4 = -\frac{1}{36}\left(\frac{1}{64}\right) a_0 = \frac{1}{2304} a_0$

จากการแทนค่า n พบว่าเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะทำให้ $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$

แทนค่า $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$ ใน $y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ รอบจุด $x_0 = 0$

$y_1 = x^0 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + ..\right)$

$y_1 = a_0 + 0x - \frac{1}{4} a_0 x^2 - 0x^3 + \frac{1}{64} a_0 x^4 + 0x^5 - \frac{1}{2304} a_0 x^6 + ... = a_0 \left(1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2304} x^6 + ...\right)$

การหาผลเฉลย $y_2 = \left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$

จาก $a_n = -\frac{1}{(n+r)^2}a_{n-2} = -\frac{1}{(n+r)^2}a_{n-2}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะทำให้ $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$

เมื่อ $n = 2$ ได้

$$a_2 = -\frac{1}{(r+2)^2}a_{2-2} = -\frac{1}{(r+2)^2}a_0$$

เมื่อ $n = 4$ ได้

$$a_4 = -\frac{1}{(r+4)^2}a_{4-2} = -\frac{1}{(r+4)^2}a_2 = -\frac{1}{(r+4)^2}\left(-\frac{1}{(r+2)^2}a_0\right) = \left(\frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}\right)a_0$$

เมื่อ $n = 6$ ได้

$$a_6 = -\frac{1}{(r+6)^2}a_{6-2} = -\frac{1}{(r+6)^2}a_4 = -\frac{1}{(r+6)^2}\left(\frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}\right)a_0 = \frac{1}{(r+6)^2(r+4)^2(r+2)^2}a_0$$

เมื่อแทนค่า

$$y(r,x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = x^r\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ..\right)$$

$$y(r,x) = x^r\left(a_0 - \frac{1}{(r+2)^2}a_0x^2 + \frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}a_0x^4 - \frac{1}{(r+6)^2(r+4)^2(r+2)^2}a_0x^6 + ..\right)$$

$$y(r,x) = a_0\left(x^r - \frac{1}{(r+2)^2}x^{r+2} + \frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}x^{r+4} - \frac{1}{(r+6)^2(r+4)^2(r+2)^2}x^{r+6} + ..\right)$$

$y_2 = \left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$ เมื่อ $\frac{dx^r}{dr} = x^r\ln x$

$$\frac{\partial y(r,x)}{\partial r} = a_0\frac{d}{dr}\left[x^r - \frac{1}{(r+2)^2}x^{r+2} + \frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}x^{r+4} - \frac{1}{(r+6)^2(r+4)^2(r+2)^2}x^{r+6} + ..\right]$$

$$\frac{\partial y(r,x)}{\partial r} = a_0\left[\begin{array}{l} x^r\ln x + \left(-\frac{1}{(r+2)^2}x^{r+2}\ln x - \frac{(-2)}{(r+2)^3}x^{r+2}\right) + \\ \left(\frac{1}{(r+4)^2(r+2)^2}x^{r+4}\ln x + \frac{(-2)}{(r+4)^3(r+2)^2}x^{r+4} + \frac{(-2)}{(r+4)^2(r+2)^3}x^{r+4}\right) + .. \end{array}\right]$$

$$y_2 = \left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=0} = a_0\left[\begin{array}{l} x^0\ln x + \left(-\frac{1}{(0+2)^2}x^{0+2}\ln x - \frac{(-2)}{(0+2)^3}x^{0+2}\right) + \\ \left(\frac{1}{(0+4)^2(0+2)^2}x^{0+4}\ln x + \frac{(-2)}{(0+4)^3(0+2)^2}x^{0+4} + \frac{(-2)}{(0+4)^2(0+2)^3}x^{0+4}\right) + .. \end{array}\right]$$

$$y_2=\left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=0}=a_0\left[\ln x+\left(-\frac{1}{2^2}x^2\ln x+\frac{2}{2^3}x^2\right)+\left(\frac{1}{4^2\bullet 2^2}x^4\ln x-\frac{2}{4^3\bullet 2^2}x^4-\frac{2}{4^2\bullet 2^3}x^4\right)+..\right]$$

$$y_2=\left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=0}=a_0\left(\ln x-\frac{1}{2^2}x^2\ln x+\frac{1}{4^2\bullet 2^2}x^4\ln x+...\right)+a_0\left[\frac{2}{2^3}x^2+\left(-\frac{2}{4^3\bullet 2^2}-\frac{2}{4^2\bullet 2^3}\right)x^4+..\right]$$

$$y_2=\left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=0}=a_0\ln x\left(1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{4^2\bullet 2^2}x^4+...\right)+a_0\left[\frac{1}{2^2}x^2-\left(\frac{1}{4^3\bullet 2}+\frac{1}{4^2\bullet 2^2}\right)x^4+..\right]$$

จาก $y_1=a_0\left(1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+...\right)$

$$y_2=\left.\frac{\partial y(r,x)}{\partial r}\right|_{r=0}=y_1\ln x+a_0\left[\frac{1}{2^2}x^2-\left(\frac{1}{4^3\bullet 2}+\frac{1}{4^2\bullet 2^2}\right)x^4+..\right]$$

ดังนั้น ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $x^2y''+xy'+x^2y=0$ รอบจุด $x_0=0$ คือ

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1a_0\left(1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+...\right)+C_2\left(y_1\ln x+a_0\left[\frac{1}{2^2}x^2-\left(\frac{1}{4^3\bullet 2}+\frac{1}{4^2\bullet 2^2}\right)x^4+..\right]\right)$$

5.4.6 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสองแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามารถใช้อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x=x_0$ ในการหาผลเฉลยได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+...$$

ตัวอย่างที่ 5.38 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์กำลังสอง $y''+xy'+(2x-1)y=0$ เมื่อ $y(-1)=2$ และ $y'(-1)=-2$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x=-1$

วิธีทำ

$y''+xy'+(2x-1)y=0$ ปรับสมการได้เป็น $y''=-xy'-(2x-1)y$

เมื่อ $y(-1)=2$ และ $y'(-1)=-2$

ดังนั้น $y''(-1)=-(-1)(-2)-((2(-1)-1)(2)=-2-(-3)(2)=4$

หา $y'''(-1)$

จาก $y'''=\frac{d}{dx}\left(-xy'-(2x-1)y\right)=-y'-xy''-2y-(2x-1)y'$

เมื่อ $y(-1)=2$ $y'(-1)=-2$ และ $y''(-1)=4$

ดังนั้น $y'''(-1)=-(-2)-(-1)(4)-2(2)-(2(-1)-1)(-2)=2+4-4-6=-4$

หา $y^{(4)}(-1)$

จาก $y^{(4)} = \frac{d}{dx}\left(-y' - xy'' - 2y - (2x-1)y'\right) = -y'' - y'' - xy''' - 2y' - 2y' - (2x-1)y''$

$y^{(4)} = -2y'' - xy''' - 4y' - (2x-1)y'' = -2y'' - xy''' - 4y' - 2xy'' + y'' = -y'' - xy''' - 4y' - 2xy''$

$y^{(4)} = -xy''' - (2x+1)y'' - 4y'$

เมื่อ $y(-1) = 2 \quad y'(-1) = -2 \quad y''(-1) = 4$ และ $y'''(-1) = -4$

ดังนั้น $y^{(4)}(-1) = -(-1)(-4) - \left(2(-1)+1\right)(4) - 4(-2) = -4 - (-1)(4) + 8 = -4 + 4 + 8 = 8$

เมื่อนำไปแทนในอนุกรมเทย์เลอร์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รอบจุด $x = -1$

$$y = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 + \ldots$$

$$y = 2 + \frac{(-2)}{1!}(x+1) + \frac{(4)}{2!}(x+1)^2 + \frac{(-4)}{3!}(x+1)^3 + \frac{(8)}{4!}(x+1)^4 + \ldots$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \ldots$$

5.5 แบบฝึกหัด

ข้อที่ 5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบเอกพันธ์

1. $x^2y''-9xy'+25y=0$
2. $x^2y''+4y=0$
3. $x^2y''-7xy'+16y=0$
4. $x^2y''-6xy'+13y=0$
5. $x^2y''+4xy'+4y=0$
6. $x^2y''-3xy'+y=0$
7. $x^2y''+6xy'+9y=0$
8. $x^2y''+2xy'-3y=0$

ข้อที่ 5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบของสมการโคชี-ออยเลอร์อันดับสองแบบไม่เอกพันธ์

1. $x^2y''-xy'-3y=2x^3$
2. $x^2y''-2y=x^3e^x$
3. $x^2y''-2xy'+2y=x^3\ln x$
4. $x^2y''+xy'+y=\sin(2\ln x)$

ข้อที่ 5.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

1. $xy''+(2+2x)y'+2y=8e^{2x}$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_{h1}(x)=x^{-1}$
2. $(x+1)y''+xy'-y=(x+1)^2$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_{h1}(x)=e^{-x}$
3. $(1-2x-x^2)y''+(2+2x)y'-2y=0$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_{h1}(x)=x+1$
4. $(1-x^2)y''+2xy'=0$ ถ้าผลเฉลยส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ $y_{h1}(x)=1$

ข้อที่ 5.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรในรูปอนุกรมกำลัง

1. $y''+xy'+(2x^2+1)y=0$ รอบจุด $x=0$
2. $(x^2+1)y''+xy'+xy=0$ รอบจุด $x=0$
3. $(1-x^2)y''+2xy'+5y=0$ รอบจุด $x=0$
4. $y''-y'+2xy=0$ รอบจุด $x=0$

4. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมของปัญหาค่าเริ่มต้นในแต่ละข้อต่อไปนี้

4.1 $(x^2+1)y'' + xy' + 2xy = 0 \ ; \ y(0) = 2, y'(0) = 3$

4.2 $y'' - xy' + 2y = 0 \ ; \ y(0) = 2, y'(0) = 3$

4.3 $y'' + x^2y' + x^2y = 0 \ ; \ y(0) = 2, y'(0) = 4$

4.4 $xy'' + y' + 2y = 0 \ ; \ y(1) = 2, y'(1) = 4$

4.5 $(x^2-2x)y'' + (x-1)y' - 4y = 0 \ ; \ y(1) = 1, y'(1) = 2$

ข้อที่ 5.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรในรูปด้วยอนุกรมเทย์เลอร์

1. $(x^2+1)y''+xy'+2xy=0$ เมื่อ $y(0)=2$ และ $y'(0)=3$
2. $y''-xy'+2y=0$ เมื่อ $y(0)=2$ และ $y'(0)=3$
3. $y''+x^2y'+x^2y=0$ เมื่อ $y(0)=2$ และ $y'(0)=4$
4. $xy''+y'+2y=0$ เมื่อ $y(1)=2$ และ $y'(1)=4$

5.6 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541

บทที่ 6 อนุกรมฟูเรียร์

6.1 บทนำ

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) เป็นรูปผลรวมของอนุกรมอนันต์ที่เป็นฟังก์ชันรายคาบ ถ้าเป็นผลรวมของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์ทางตรีโกณมิติ (trigonometric Fourier series) ถ้าเป็นผลรวมของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลจะเรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์ทางเอ็กซ์โพเนนเชียล (exponential Fourier series)

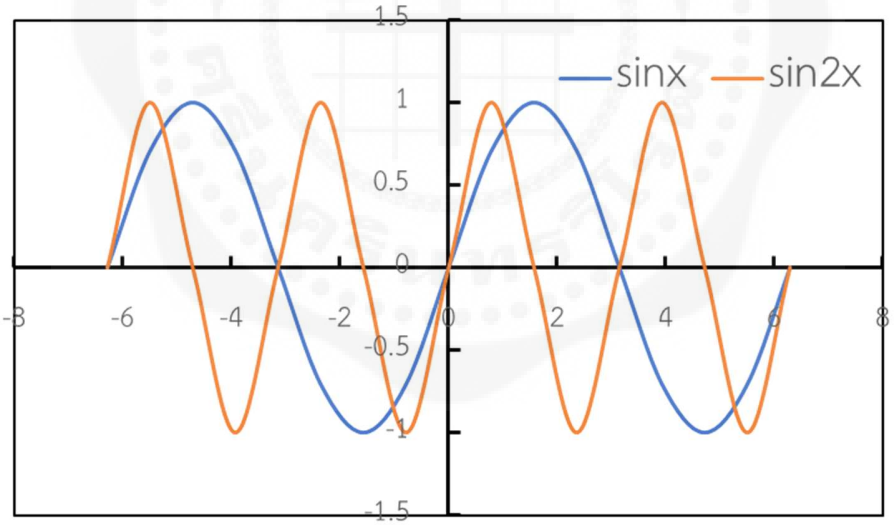
6.2 ฟังก์ชันเป็นคาบ

ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodic functions) คือฟังก์ชันที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป (6-1) สำหรับทุกค่า x

$$f(x+T)=f(x) \tag{6-1}$$

เมื่อ T เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด และ T เป็น คาบ (period) ของฟังก์ชัน $f(x)$ ของทุกค่าจริงของ x

ตัวอย่างฟังก์ชันคาบเช่น $f(x)=\sin x$ และ $f(x)=\sin 2x$ ดังรูปที่ 6.1 จากรูปที่ 6.1 พบว่า เมื่อ $f(x)=\sin x$ ที่มีคาบเท่ากับ 2π จะมีค่าเท่ากับ $f(x)=\sin 2x$ ที่มีคาบเท่ากับ π



รูปที่ 6.1 ลักษณะของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\sin x$ และ $f(x)=\sin 2x$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบ ดังนั้น $f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x)$ ดังนั้น เมื่อให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ถ้า เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบ แล้ว $f(x+nT)=f(x)$ ส่งผลให้ คาบสามารถมีได้หลาย

ค่า เช่น $2T, 3T, 4T, \ldots$ ดังนั้น กำหนดให้ T คือคาบที่น้อยที่สุด ซึ่งเรียกว่าคาบมูลฐาน (fundamental period) ของฟังก์ชัน $f(x)$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันคาบแล้ว และมีคาบเท่ากับ T แล้ว ฟังก์ชัน $h(x) = af(x) + bg(x)$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว และมีคาบเท่ากับ T ดังนั้น

$$h(x+T) = af(x+T) + bg(x+T) = af(x) + bg(x) = h(x)$$

ตัวอย่างที่ 6.1 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x$

ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ มีค่าเท่ากับ $T = 2\pi$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x) = \tan x$

วิธีทำ

จากฟังก์ชัน $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ จะเห็นได้ว่า

ถ้าให้คาบ $T = \pi$

$$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan x$$

ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $f(x) = \tan x$ มีค่าเท่ากับ $T = \pi$

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x) = \cos 2x$

วิธีทำ

เมื่อให้ $T = 2\pi m$ ดังนั้น $f(x+2\pi m) = \cos(2x+2\pi m)$

เอกลักษณ์ $\cos(A+B) = \cos A \sin B + \cos B \sin A$

$$\cos(2x+2\pi m) = \cos 2x \sin 2\pi m + \sin 2x \cos 2\pi m$$

เมื่อ $m = 1, 2, 3, ..$ พบว่า $\sin 2\pi m = 0$ และ $\cos 2\pi m = 1$

$$\cos(2x+2\pi m) = \cos 2x$$

ให้ $m = 1$ เป็นตัวเลขต่ำสุด ดังนั้น $f(x+T) = \cos(2x+2\pi) = \cos 2(x+\pi) = \cos 2x$

ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $f(x) = \cos 2x$ มีค่าเท่ากับ $T = \pi$

ตัวอย่างที่ 6.4 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x)=\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}$

วิธีทำ

$f(x+T)=\cos\frac{1}{3}(x+T)+\cos\frac{1}{4}(x+T)$

จากตัวอย่างก่อนหน้านี้พบว่า $\cos(x+2n\pi)=\cos(x)$ สำหรับทุกค่า n

ดังนั้นเทอมแรก $2m\pi=\frac{T}{3}$ และเทอมที่สอง $2n\pi=\frac{T}{4}$ ดังนั้นเทอมแรก $T=6m\pi$ และเทอมที่สอง $T=8n\pi$ เนื่องจาก คาบมีได้ค่าเดียว และ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เมื่อแทน $m=1$ ได้ $T=6\pi$ เมื่อแทน $m=2$ ได้ $T=12\pi$ เมื่อแทน $m=3$ ได้ $T=18\pi$ และ เมื่อแทน $m=4$ ได้ $T=24\pi$

เมื่อแทน $n=1$ ได้ $T=8\pi$ เมื่อแทน $n=2$ ได้ $T=16\pi$ และ เมื่อแทน $n=3$ ได้ $T=24\pi$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ $m=4$ ได้ $T=24\pi$ และ เมื่อ $n=3$ ได้ $T=24\pi$ ซึ่งได้คาบมีค่าเท่ากับ ดังนั้น คาบมีค่าเท่ากับ $T=24\pi$

ดังนั้น คาบของฟังก์ชัน $f(x)=\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}$ มีค่าเท่ากับ $T=24\pi$

ตัวอย่างที่ 6.5 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x)=(10\cos x)^2$

วิธีทำ

$f(x)=(10\cos x)^2=100\cos^2 x$

$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos(2x)+1=2\cos^2 x$

$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$

$f(x)=100\cos^2(x+T)=50+50\cos\left(2(x+T)\right)=50+50\cos\left(2x+2T\right)$

แทนค่า

$f(x+p)=50+50\cos(2x+2p)$

ซึ่งพบว่า

$\cos(x+2\pi)=\cos x$

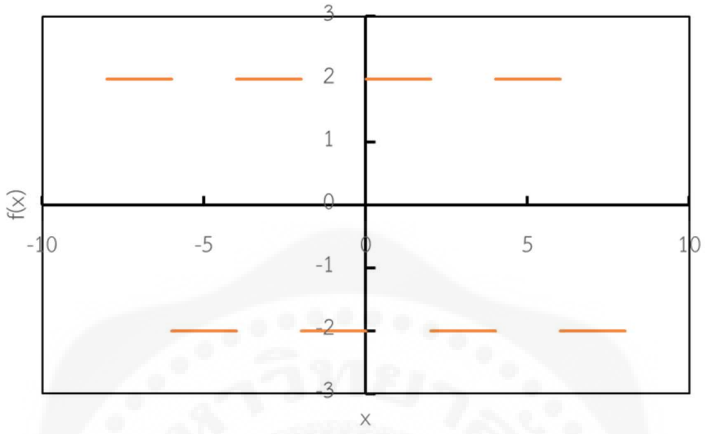
ดังนั้น $p=\pi$

ดังนั้นคาบคือ π

ตัวอย่างที่ 6.6 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}2;0<x<2\\-2;-2<x<0\end{cases}$ โดยที่ $f(x+4)=f(x)$

วิธีทำ

คาบเท่ากับ 4 ดังนั้น

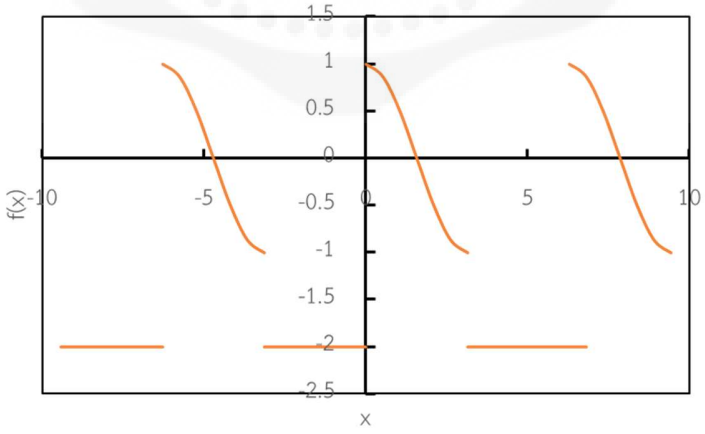


รูปที่ E6.6-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\cos x;0<x<\pi\\-2;\pi<x<2\pi\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\cos x;0<x<\pi\\-2;\pi<x<2\pi\end{cases}$ โดยที่ $f(x)$ มีคาบเท่ากับ 2π

วิธีทำ

คาบเท่ากับ 2π ดังนั้น



รูปที่ E6.7-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\cos x;0<x<\pi\\-2;\pi<x<2\pi\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$

6.3 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

ฟังก์ชันคู่ (even function) เป็นฟังก์ชันที่สามารถเขียนในรูป $f(-x)=f(x)$

ฟังก์ชันคี่ (odd function) เป็นฟังก์ชันที่สามารถเขียนในรูป $f(-x)=-f(x)$

ตัวอย่างที่ 6.8 จากฟังก์ชัน $f(x)=\cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=\cos x$ เมื่อแทน $f(-x)=\cos(-x)=\cos x$

ดังนั้น $f(x)=\cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

ตัวอย่างที่ 6.9 จากฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=x^2$ เมื่อแทน $f(-x)=f(-x)^2=x^2$

แสดงให้เห็นว่า $f(-x)=f(x)$ ดังนั้น $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่

ตัวอย่างที่ 6.10 จากฟังก์ชัน $f(x)=\tan x$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=\tan x$ เมื่อแทน $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan x$

แสดงให้เห็นว่า $f(-x)=-f(x)$ ดังนั้น $f(x)=\tan x$ เป็นฟังก์ชันคี่

ตัวอย่างที่ 6.11 จากฟังก์ชัน $f(x)=x\sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=x\sin x$ เมื่อแทน $f(-x)=(-x)\sin(-x)=-x(-\sin x)=x\sin x$

แสดงให้เห็นว่า $f(-x)=f(x)$ ดังนั้น $f(x)=x\sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่

ตัวอย่างที่ 6.12 จากฟังก์ชัน $f(x)=x^2\sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=x^2\sin x$ เมื่อแทน $f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=x^2(-\sin x)=-x^2\sin x$

แสดงให้เห็นว่า $f(-x)=-f(x)$ ดังนั้น $f(x)=x^2\sin x$ เป็นฟังก์ชันคี่

ตัวอย่างที่ 6.13 จากฟังก์ชัน $f(x)=x-x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$f(x)=x-x^2$ เมื่อแทน $f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2$

แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่สามารถจัดในรูปของ $f(-x)=-f(x)$ หรือ $f(-x)=f(x)$ ดังนั้น $f(x)=x-x^2$ ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคี่หรือฟังก์ชันคู่

6.3.1 สมบัติทางพีชคณิตของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. ผลบวกของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคู่ได้เป็นฟังก์ชันคู่
2. ผลบวกของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ได้เป็นฟังก์ชันคี่
3. ผลบวกของฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคี่ได้เป็นฟังก์ชันคี่
4. ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคู่ได้เป็นฟังก์ชันคู่
5. ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ได้เป็นฟังก์ชันคี่
6. ผลคูณของฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคี่ได้เป็นฟังก์ชันคู่

6.3.2 สมบัติการอินทิเกรตของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันคู่
2. $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันคี่

ถ้า $f(x+p)=f(x)$ สำหรับทุกค่า x เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ p เป็นคาบของฟังก์ชัน

1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+p}^{\beta+p} f(x)dx$ เมื่อ α,β เป็นจำนวนจริง
2. $\int_{0}^{p} f(x)dx = \int_{a}^{a+p} f(x)dx$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
3. $\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx = 0$ สำหรับ $k=1,2,3,\ldots$
4. $\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx = 0$ สำหรับ $k=1,2,3,\ldots$
5. $\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0; m\neq n \\ p; m=n\neq 0 \\ 2p; m=n=0 \end{cases}$
6. $\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0; m\neq n \\ p; m=n\neq 0 \\ 0; m=n=0 \end{cases}$
7. $\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = 0$ สำหรับ $m,n=1,2,3,\ldots$

8. $\int_c^{c+2p} \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง c เมื่อ $k = 1,2,3,\ldots$

9. $\int_c^{c+2p} \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง c เมื่อ $k = 1,2,3,\ldots$

10. $\int_{-p}^{c+2p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ p; m = n \end{cases}$ สำหรับทุกจำนวนจริง c และ $m,n = 1,2,3,\ldots$

11. $\int_{-p}^{c+2p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ p; m = n \end{cases}$ สำหรับทุกจำนวนจริง c และ $m,n = 1,2,3,\ldots$

12. $\int_{-p}^{c+2p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ p; m = n \end{cases}$ สำหรับทุกจำนวนจริง c และ $m,n = 1,2,3,\ldots$

สมบัติพื้นฐานตรีโกณมิติ

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\sin(n\pi) = 0$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

ตัวอย่างที่ 6.14 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1} x^3 dx$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น $\int_{-1}^{1} x^3dx=0$

$$\int_{-1}^{1} x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=\frac{(1)^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

ตัวอย่างที่ 6.15 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{2}\left(|x|-x^2+3\right)dx$

วิธีทำ

ฟังก์ชัน $f(x)=|x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ และ $f(x)=-x^2+3$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $f(x)=|x|-x^2+3$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$\int_{-2}^{2}\left(|x|-x^2+3\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(x-x^2+3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{0}^{2}=2\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+3(2)-0-0-0\right)=2\left(2-\frac{8}{3}+6\right)=\frac{32}{3}$$

6.3.3 การเปลี่ยนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f_e(x)+f_o(x)$$

เมื่อ $f_e(x)$ และ $f_o(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 6.16 จากฟังก์ชัน $f(x)=e^x$ จงเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

วิธีทำ

$$e^x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sinh x+\cosh x$$

เมื่อ $f(x)=\sinh x$ เป็นฟังก์ชันคี่ และ $f(x)=\cosh x$ เป็นฟังก์ชันคู่

6.3 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π สามารถเขียนได้ดัง (6.2)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin(nx)\right] \qquad (6.2)$$

ซึ่ง (6.2) สามารถเขียนในรูปอนุกรมอย่างง่ายได้ดัง (6.3)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right] \qquad (6.3)$$

จาก (6.3) a_0 a_n และ b_n เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ของอนุกรมและแต่ละพจน์มีคาบเท่ากับ 2π

6.3.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_0

เมื่ออินทิเกรต (6.3) ตั้งแต่ $-\pi$ ถึง π ดัง (6.4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\right)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(nx)\right)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(nx)\right)dx\right] \qquad (6.4)$$

พิจารณาที่ละเทอม

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = \frac{a_0}{2}\left(2\pi\right) = \pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(nx)\right)dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\sin n\pi - \sin(-n\pi)\right] = \frac{1}{n}\left[0-0\right] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin nx\right)dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right] = -\frac{1}{n}\left[\cos n\pi - \cos(n\pi)\right] = 0$$

ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi + 0 + 0 \text{ หรือ } a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

6.3.2 การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_n

การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_n สามารถทำได้โดยการคูณสมการ (6.3) ด้วย $\cos(mx)$ และอินทิเกรตตั้งแต่ $-\pi$ ถึง π ดัง (6.5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\right)\cos(mx)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx\right] \qquad (6.5)$$

1. พิจารณาเทอม $\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\left(0\right) = 0$$

2. พิจารณาเทอม $a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx$ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี. 1 $m\neq n$ เมื่อ $\cos(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right)+\cos(A-B)\right]$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=a_n\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos(m-n)x\right]dx$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left[\frac{\sin\left(m+n\right)x}{\left(m+n\right)}+\frac{\sin(m-n)x}{\left(m-n\right)}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left[\frac{\sin\left(m+n\right)\pi}{\left(m+n\right)}+\frac{\sin(m-n)(\pi)}{\left(m-n\right)}-\frac{\sin\left(m+n\right)(-\pi)}{\left(m+n\right)}-\frac{\sin(m-n)(-\pi)}{\left(m-n\right)}\right]$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left[\frac{\sin\left(m+n\right)(\pi)}{\left(m+n\right)}+\frac{\sin(m-n)(\pi)}{\left(m-n\right)}-\frac{\sin\left(m+n\right)(\pi)}{\left(m+n\right)}+\frac{\sin(m-n)(\pi)}{\left(m-n\right)}\right]$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left[\frac{\sin\left(m+n\right)\pi}{\left(m+n\right)}+\frac{\sin(m-n)(\pi)}{\left(m-n\right)}-\frac{\sin\left(m+n\right)(-\pi)}{\left(m+n\right)}-\frac{\sin(m-n)(-\pi)}{\left(m-n\right)}\right]=0$$

กรณี. 2 $m=n$ เมื่อ $\cos^2(mx)=\frac{1+\cos 2mx}{2}$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(mx)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(mx)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mx)dx$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left(x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{a_n}{2}\left(\pi+\frac{1}{2m}\sin 2m\pi-(-\pi)+\frac{1}{2m}\sin 2m(-\pi)\right)$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left(x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{a_n}{2}\left(\pi+\frac{1}{2m}\sin 2m\pi-(-\pi)+\frac{1}{2m}\sin 2m(-\pi)\right)$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(mx)dx=\frac{a_n}{2}\left(\pi+\frac{1}{2m}\sin 2m\pi+\pi-\frac{1}{2m}\sin 2m\pi\right)=\frac{a_n}{2}\left(2\pi\right)=a_n\pi$$

สรุปได้ว่า $a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(nx)dx=a_n\pi$

3. พิจารณาเทอม $b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx$ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี. 1 $m\neq n$ เมื่อ $\sin(A)\cos(B)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(A+B\right)+\sin(A-B)\right]$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big[\sin\big(n+m\big)x+\sin(n-m)x\Big]dx$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sin\big(n+m\big)x+\sin(n-m)x\Big]dx = -\frac{b_n}{2}\left[\frac{\cos\big(n+m\big)x}{n+m}+\frac{\cos\big(n-m\big)x}{n-m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{b_n}{2}\left[\frac{\cos\big(n+m\big)(\pi)}{n+m}+\frac{\cos\big(n-m\big)(\pi)}{n-m}-\frac{\cos\big(n+m\big)(-\pi)}{n+m}-\frac{\cos\big(n-m\big)(-\pi)}{n-m}\right]$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx = -\frac{b_n}{2}\left[\frac{\cos\big(n+m\big)(\pi)}{n+m}+\frac{\cos\big(n-m\big)(\pi)}{n-m}-\frac{\cos\big(n+m\big)(\pi)}{n+m}-\frac{\cos\big(n-m\big)(\pi)}{n-m}\right]=0$$

กรณี. 2 $m=n$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(mx)dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big[\sin\big(m+m\big)x+\sin(m-m)x\Big]dx$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(mx)dx = \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sin\big(m+m\big)x+\sin 0\Big]dx = \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2mxdx$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(mx)dx = \frac{b_n}{2}\left(-\frac{\cos 2mx}{2m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_n}{2}\left(\frac{\cos 2m(\pi)}{2m}-\frac{\cos 2m(-\pi)}{2m}\right)$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(mx)dx = -\frac{b_n}{2}\left(\frac{\cos 2m(\pi)}{2m}-\frac{\cos 2m(\pi)}{2m}\right)=0$$

สรุปได้ว่า $b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(nx)dx=0$

4. แทนค่าสัมประสิทธิ์

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx = \frac{(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n\pi+(0)\big]$$

เมื่อ $m=n$ ทำให้ $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(mx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\pi a_n$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$

6.3.3 การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ b_n

การหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ b_n สามารถทำได้โดยการคูณสมการ (6.3) ด้วย $\sin(mx)$ และอินทิเกรตตั้งแต่ $-\pi$ ถึง π ดัง (6.6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]\right)\sin(mx)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx\right] \tag{6.6}$$

1. พิจารณาเทอม $\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx = \frac{a_0}{2}\left(-\frac{1}{m}\cos mx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{a_0}{2m}\left[\cos m\pi-\cos(-m\pi)\right] = -\frac{a_0}{2m}\left[\cos m\pi-\cos(m\pi)\right] = 0$$

2. พิจารณาเทอม $a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx$ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี. 1 $m\neq n$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx = a_n\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos(m-n)x\right]dx = 0$$

กรณี. 2 $m=n$ เมื่อ $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin\left(A+B\right)+\sin(A-B)\right]$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx = a_n\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin\left(n+n\right)x+\sin(n-n)x\right]dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin 2nx+\sin 0\right]dx$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin 2nx+0\right]dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nxdx = \frac{a_n}{2}\left(-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx = -\frac{a_n}{2}\left(\frac{\sin 2n(\pi)}{2n}-\frac{\sin 2n(-\pi)}{2n}\right) = -\frac{a_n}{2}\left(\frac{\sin 2n(\pi)}{2n}-\frac{\sin 2n(\pi)}{2n}\right) = 0$$

กรณี. 2 $m=n$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx = a_n\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin\left(n+n\right)x+\sin(n-n)x\right]dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin 2nx+\sin 0\right]dx$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin 2nx+0\right]dx=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nxdx=\frac{a_n}{2}\left(-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)dx=-\frac{a_n}{2}\left(\frac{\sin 2n(\pi)}{2n}-\frac{\sin 2n(-\pi)}{2n}\right)=-\frac{a_n}{2}\left(0-0\right)=0$$

3. พิจารณาเทอม $b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx$ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี. 1 $m\neq n$ เมื่อ $\sin(A)\sin(B)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A-B\right)-\cos(A+B)\right]$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left(n-m\right)x-\cos(n+m)x\right]dx=\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(n-m\right)x-\cos(n+m)x\right]dx$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=\frac{b_n}{2}\left(\frac{\sin\left(n-m\right)x}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)x}{n-m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=\frac{b_n}{2}\left[\left(\frac{\sin\left(n-m\right)(\pi)}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)(\pi)}{n-m}\right)-\left(\frac{\sin\left(n-m\right)(-\pi)}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)(-\pi)}{n-m}\right)\right]$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=\frac{b_n}{2}\left[\left(\frac{\sin\left(n-m\right)(\pi)}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)(\pi)}{n-m}\right)-\left(\frac{\sin\left(n-m\right)(\pi)}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)(\pi)}{n-m}\right)\right]=0$$

กรณี. 2 $m=n$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(nx)dx=b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left(n-n\right)x-\cos(n+n)x\right]dx=\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos 0-\cos 2nx\right]dx$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(nx)dx=\frac{b_n}{2}\left(x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{b_n}{2}\left[\left(\pi-\frac{\sin 2n\pi}{2n}\right)-\left((-\pi)-\frac{\sin 2n(-\pi)}{2n}\right)\right]$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(nx)dx=\frac{b_n}{2}\left[\left(\pi-0\right)-\left(-\pi+0\right)\right]=\frac{b_n}{2}\left[\pi+\pi\right]=\pi b_n$$

4. แทนค่าสัมประสิทธิ์

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(mx)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(mx)dx=\frac{(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)+b_n\pi\right]$$

เมื่อ $m=n$ ทำให้ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \pi b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$

6.3.4 การหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π

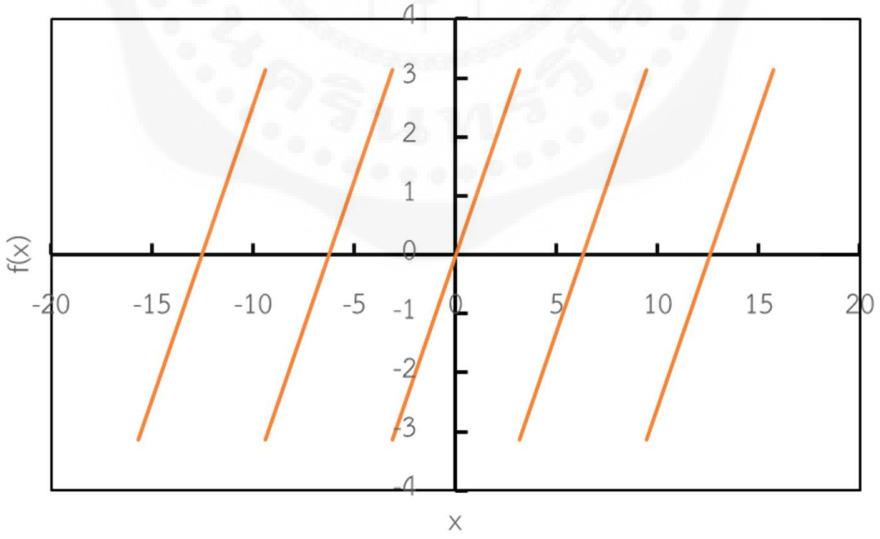
ฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถเขียนในอนุกรมฟูเรียร์ได้ดังนี้ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$ เมื่อสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 a_n และ b_n ดังนี้

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

ตัวอย่างที่ 6.17 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชั $f(x) = x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ และ $f(x+2\pi) = f(x)$



รูปที่ E6.17-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$ และ $f(x+2\pi) = f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x)=x$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$

ดังนั้น

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{(-\pi)^2}{2}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right]=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{(-\pi)}{n}\sin n(-\pi)-\frac{1}{n^2}\cos n(-\pi)\right]$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}0+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{(-\pi)}{n}0-\frac{1}{n^2}\cos n(\pi)\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{\sin n\pi}{n^2}+\frac{(-\pi)}{n}\cos n(-\pi)-\frac{\sin n(-\pi)}{n^2}\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+0-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right]$$

$$b_n=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$ และ $f(x+2\pi)=f(x)$ เมื่อ $a_0=0$

$a_n=0$ และ $b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ แทนค่าลงใน $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$ ดังนั้น

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

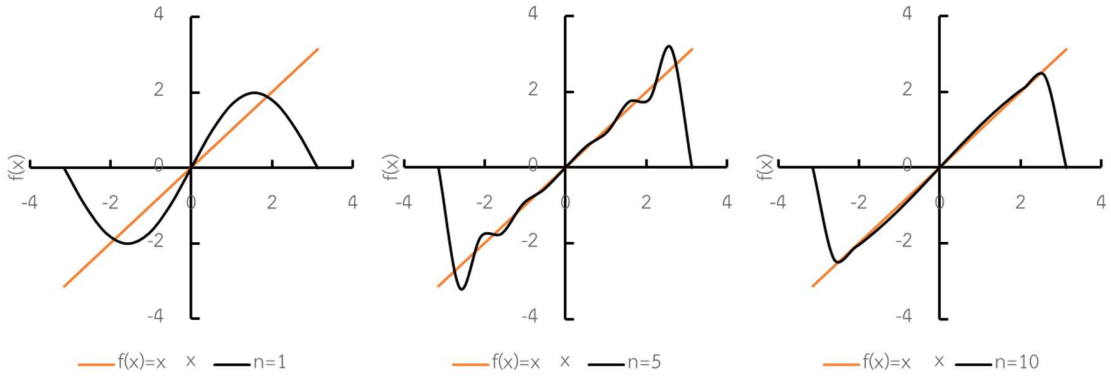
เมื่อกระจาย $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$ ได้ดังนี้

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\left(\frac{(-1)^{1+1}}{1}\sin x+\frac{(-1)^{2+1}}{2}\sin 2x+\frac{(-1)^{3+1}}{3}\sin 3x+\frac{(-1)^{4+1}}{4}\sin 4x+\ldots\right)$$

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right)$$

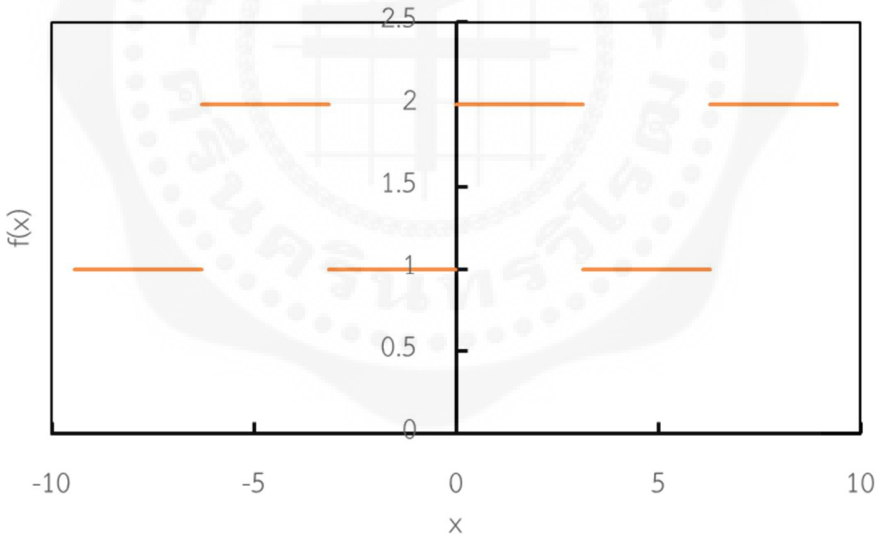
เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right)$ ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่

E6.17-2



รูปที่ E6.17-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$ และ $f(x+2\pi)=f(x)$ เมื่อกระจายอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$ ถึง $n=1,5,10$

ตัวอย่างที่ 6.18 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชั $f(x)=\begin{cases}1; & -\pi<x<0\\ 2; & 0<t<\pi\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$



รูปที่ E6.18-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}1; & -\pi<x<0\\ 2; & 0<t<\pi\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x)=\begin{cases}1; & -\pi<x<0\\ 2; & 0<t<\pi\end{cases}$

ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} 2dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0} + 2x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0-(-\pi)+2\pi-0\right) = \frac{1}{\pi}\left(3\pi\right) = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(nx)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{2\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{2\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin(nx)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{2\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos 0}{n} - \frac{\cos n(-\pi)}{n}\right] + 2\left[\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos 0}{n}\right]\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2\cos n\pi}{n} - \frac{2}{n}\right)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1; & -\pi < x < 0 \\ 2; & 0 < t < \pi \end{cases}$ เมื่อ $a_0 = 3$ $a_n = 0$ และ $b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ แทน

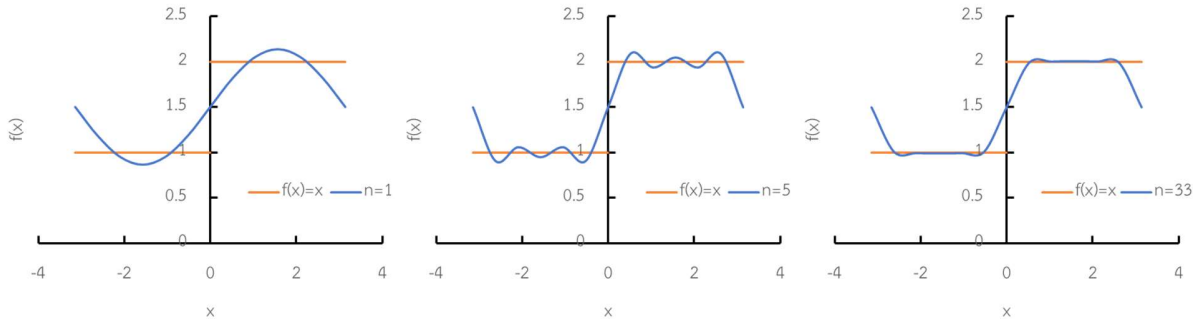
ค่าลงใน $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$ ดังนั้น $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\sin(nx)$

เมื่อกระจาย $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\sin(nx)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\sin(nx) = \frac{3}{2} + \frac{1-(-1)^1}{\pi}\sin x + \frac{1-(-1)^2}{2\pi}\sin 2x + \frac{1-(-1)^3}{3\pi}\sin 3x + \frac{1-(-1)^4}{4\pi}\sin 4x + \ldots$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{0}{2\pi}\sin 2x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{0}{4\pi}\sin 4x + \ldots = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \ldots$$

เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \ldots$ ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่ E6.18-2



รูปที่ E6.18-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}1; & -\pi<x<0\\ 2; & 0<t<\pi\end{cases}$ เมื่อกระจายอนุกรม

$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\sin(nx)$ ถึง $n=1,5,33$

6.4 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ 2L

จากหัวข้อ 6.3 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2π มีรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ดังนี้

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$ เมื่อ สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 a_n และ b_n ดังนี้

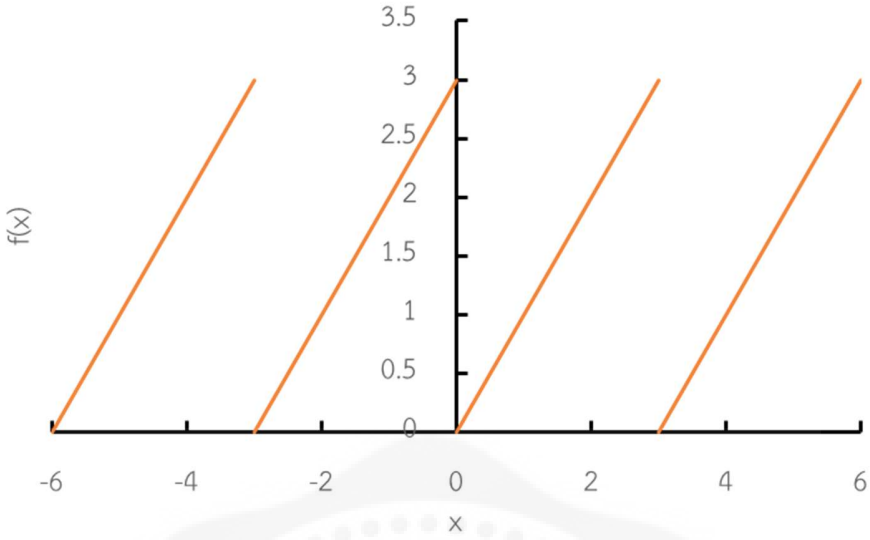
$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$ และ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ $2L$ สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนคาบจาก 2π เป็น $2L$ ทำให้ $x=\frac{Lz}{\pi}$ ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ $2L$ สามารถเขียนแทนได้เป็น

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$ เมื่อ สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 a_n และ b_n ดังนี้

$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ และ $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

ตัวอย่างที่ 6.19 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$



รูปที่ E6.19-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก คาบเท่ากับ 3 ดังนั้น $L=3/2$ สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ $2L$ มีรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2n\pi x/3)+b_n\sin(2n\pi x/3)\right]$

เมื่อ $f(x)=x, 0<x<3$

1. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_0

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{3/2}\int_0^3 xdx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=\frac{2}{3}\left[\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{3^2}{2}\right]=3$$

2. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_n เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{3/2}\int_0^3 x\cos\left(2n\pi x/3\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\left(2n\pi x/3\right)dx$$

$$a_n=\frac{2}{3}\left[\frac{x\sin\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}-\int_0^3\frac{\sin\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}dx\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{x\sin\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}+\frac{\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)^2}\right]_0^3$$

$$a_n=\frac{2}{3}\left[\frac{3\sin\left(2n\pi(3)/3\right)}{(2n\pi/3)}+\frac{\cos\left(2n\pi(3)/3\right)}{(2n\pi/3)^2}-\frac{(0)\sin\left(2n\pi(0)/3\right)}{(2n\pi/3)}-\frac{\cos\left(2n\pi(0)/3\right)}{(2n\pi/3)^2}\right]$$

$$a_n=\frac{2}{3}\left[\frac{3\sin 2n\pi}{(2n\pi/3)}+\frac{\cos 2n\pi}{(2n\pi/3)^2}-0-\frac{\cos(0)}{(2n\pi/3)^2}\right]=\frac{2}{3}\left[0+\frac{1}{(2n\pi/3)^2}-0-\frac{1}{(2n\pi/3)^2}\right]=0$$

3. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ b_n เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{3/2}\int_0^3 x\sin\left(2n\pi x/3\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\left(2n\pi x/3\right)dx$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}-\int_0^3\left(-\frac{\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}\right)dx\right]=\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}+\int_0^3\left(\frac{\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}\right)dx\right]$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cos\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)}+\frac{\sin\left(2n\pi x/3\right)}{(2n\pi/3)^2}\right]_0^3$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[-\frac{(3)\cos\left(2n\pi(3)/3\right)}{(2n\pi/3)}+\frac{\sin\left(2n\pi(3)/3\right)}{(2n\pi/3)^2}+\frac{(0)\cos\left(2n\pi(0)/3\right)}{(2n\pi/3)}-\frac{\sin\left(2n\pi(0)/3\right)}{(2n\pi/3)^2}\right]$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[-\frac{3\cos 2n\pi}{(2n\pi/3)}+\frac{\sin 2n\pi}{(2n\pi/3)^2}+\frac{(0)\cos(0)}{(2n\pi/3)}-\frac{\sin 0}{(2n\pi/3)^2}\right]$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[-\frac{3(1)}{(2n\pi/3)}+\frac{0}{(2n\pi/3)^2}+\frac{0}{(2n\pi/3)}-\frac{0}{(2n\pi/3)^2}\right]=\frac{2}{3}\left[-\frac{9}{2n\pi}\right]=-\frac{3}{n\pi}$$

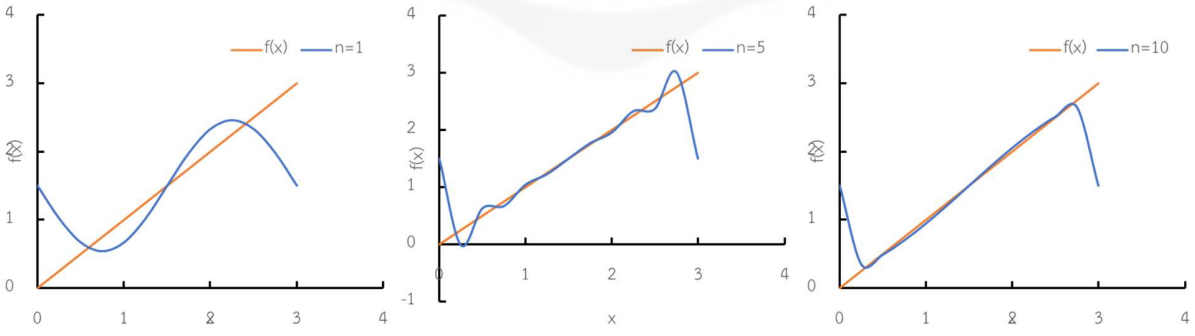
อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x,0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$ เมื่อ $a_0=3$ $a_n=0$ และ $b_n=-\frac{3}{n\pi}$ แทนค่าลงใน $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$ เมื่อ $L=3/2$ ดังนั้น

$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x/3)}{n}$$

เมื่อกระจาย $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x/3)}{n}$ ได้ดังนี้

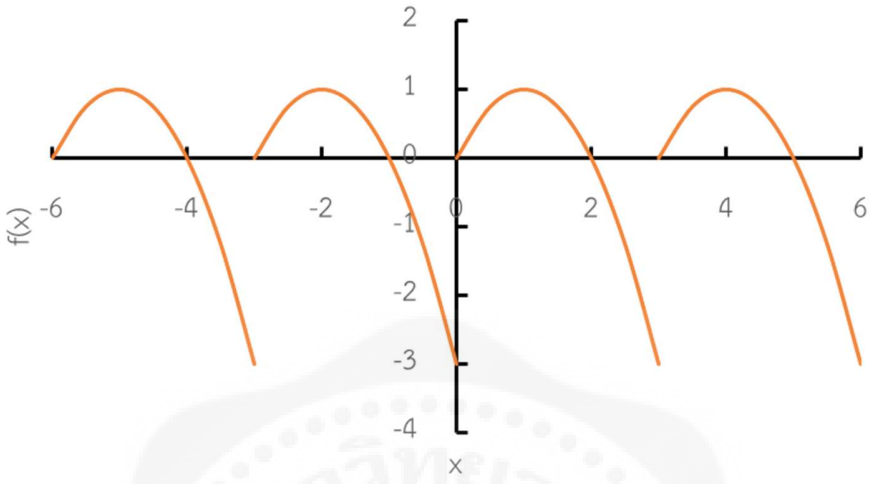
$$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin(2\cdot1\cdot\pi x/3)+\frac{1}{2}\sin(2\cdot2\cdot\pi x/3)+\frac{1}{3}\sin(2\cdot3\cdot\pi x/3)+\frac{1}{4}\sin(2\cdot4\cdot\pi x/3)+...\right)$$

เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่ E6.19-2



รูปที่ E6.20-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x,0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$ เมื่อกระจายอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x/3)}{n}$ เมื่อ $n=1,5,10$

ตัวอย่างที่ 6.20 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x-x^2, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$



รูปที่ E6.20-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x-x^2, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก คาบเท่ากับ 3 ดังนั้น $L=3/2$ สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ $2L$ มีรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$

เมื่อ $f(x)=2x-x^2, 0<x<3$

1. หาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_0

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{3/2}\int_0^3\left(2x-x^2\right)dx=\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^3=\frac{2}{3}\left[\left(3^2-\frac{3^3}{3}\right)-\left(0-\frac{0^3}{3}\right)\right]$$

$$a_0=\frac{2}{3}\left[\left(3^2-3^2\right)-\left(0-0\right)\right]=0$$

2. หาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_n เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{3/2}\int_0^3\left(2x-x^2\right)\cos\left(2n\pi x/3\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^3\left(2x-x^2\right)\cos\left(2n\pi x/3\right)dx$$

$$a_n=\frac{2}{3}\left[\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi x/3\right)-\int_0^3\frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi x/3\right)dx\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi x/3\right) - \left(-\frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)^2}\cos\left(2n\pi x/3\right) - \int_0^3 \frac{(-2)}{(2n\pi/3)^2}\left(-\cos(2n\pi x/3)\right)dx\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi x/3\right) + \frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)^2}\cos\left(2n\pi x/3\right) + \int_0^3 \frac{2}{(2n\pi/3)^2}\cos(2n\pi x/3)dx\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi x/3\right) + \frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)^2}\cos\left(2n\pi x/3\right) + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\sin(2n\pi x/3)\right]_0^3$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{(2\times3-3^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi(3)/3\right) + \frac{(2-2\times3)}{(2n\pi/3)^2}\cos\left(2n\pi(3)/3\right) + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\sin(2n\pi(3)/3)\right) \\ -\left(\frac{(2\times0-0^2)}{(2n\pi/3)}\sin\left(2n\pi(0)/3\right) + \frac{(2-2\times0)}{(2n\pi/3)^2}\cos\left(2n\pi(0)/3\right) + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\sin(2n\pi(0)/3)\right)\end{array}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{6-9}{(2n\pi/3)}\sin 2n\pi + \frac{(2-6)}{(2n\pi/3)^2}\cos 2n\pi + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\sin 2n\pi\right) \\ -\left(\frac{0-0}{(2n\pi/3)}\sin 0 + \frac{(2-0)}{(2n\pi/3)^2}\cos 0 + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\sin 0\right)\end{array}\right]$$

เมื่อ $\sin 2n\pi = 0$ และ $\cos 2n\pi = 1$ เมื่อ $n = 1,2,3,...$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{-3}{(2n\pi/3)}(0) + \frac{-4}{(2n\pi/3)^2}(1) + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}(0)\right) - \left(\frac{2}{(2n\pi/3)}(0) + \frac{2}{(2n\pi/3)^2}(1) + \frac{2}{(2n\pi/3)^3}(0)\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\left(0 - \frac{4}{(2n\pi/3)^2} + 0\right) - \left(0 + \frac{2}{(2n\pi/3)^2} + 0\right)\right] = -\frac{2}{3}\frac{6}{(2n\pi/3)^2} = -\frac{2}{3}\frac{6\times9}{4n^2\pi^2} = -\frac{9}{n^2\pi^2}$$

3. หาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ b_n เมื่อ $n = 1,2,3,...$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{3/2}\int_0^3 \left(2x-x^2\right)\sin\left(2n\pi x/3\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \left(2x-x^2\right)\sin\left(2n\pi x/3\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left[\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\left(-\cos(2n\pi x/3)\right) - \int_0^3 \frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)}\left(-\cos(2n\pi x/3)\right)dx\right]$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left[-\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\cos(2n\pi x/3) + \int_0^3 \frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)}\cos(2n\pi x/3)dx\right]$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left[-\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\cos\left(2n\pi x/3\right) + \left(\frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)^2}\sin\left(2n\pi x/3\right) - \int_0^3 \frac{(-2)}{(2n\pi/3)^2}\sin(2n\pi x/3)dx\right)\right]$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left[-\frac{(2x-x^2)}{(2n\pi/3)}\cos\left(2n\pi x/3\right) + \frac{(2-2x)}{(2n\pi/3)^2}\sin\left(2n\pi x/3\right) - \frac{2}{(2n\pi/3)^3}\cos(2n\pi x/3)\right]_0^3$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{(2\times3-3^2)}{(2n\pi/3)}\cos\left(2n\pi(3)/3\right)+\frac{(2-2\times3)}{(2n\pi/3)^2}\sin\left(2n\pi(3)/3\right)-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\cos(2n\pi(3)/3)\right)\right.$$
$$\left.-\left(-\frac{(2\times0-0^2)}{(2n\pi/3)}\cos(0)+\frac{(2-2\times0)}{(2n\pi/3)^2}\sin(0)-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\cos(0)\right)\right]$$

เมื่อ $\sin 2n\pi=0$ และ $\cos 2n\pi=1$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{(6-9)}{(2n\pi/3)}\cos 2n\pi+\frac{(2-6)}{(2n\pi/3)^2}\sin 2n\pi-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\cos 2n\pi\right)\right.$$
$$\left.-\left(-\frac{(0-0)}{(2n\pi/3)}\cos(0)+\frac{(2-0)}{(2n\pi/3)^2}\sin(0)-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\cos(0)\right)\right]$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{(-3)}{(2n\pi/3)}(1)+\frac{(-4)}{(2n\pi/3)^2}(0)-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}(1)\right)-\left(-0(1)+\frac{2}{(2n\pi/3)^2}(0)-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}(1)\right)\right]$$

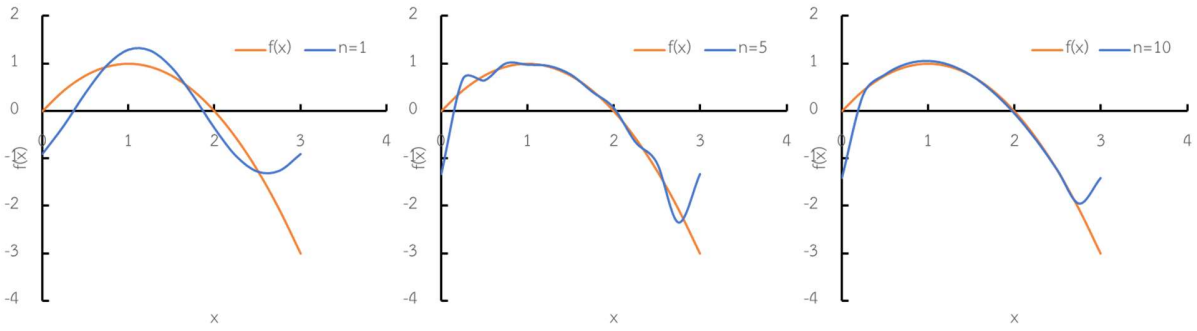
$$b_n=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{(2n\pi/3)}+0-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\right)-\left(0+0-\frac{2}{(2n\pi/3)^3}\right)\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{(2n\pi/3)}\right)=\frac{3}{n\pi}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x-x^2,0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$ เมื่อ $a_0=0$ $a_n=-\frac{9}{n^2\pi^2}$ และ $b_n=\frac{3}{n\pi}$ แทนค่าลงใน $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$ เมื่อ $L=3/2$ ดังนั้น $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x/3)+\frac{3}{n\pi}\sin(2n\pi x/3)\right)$

เมื่อกระจาย $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(2n\pi x/3)+\frac{3}{n\pi}\sin(2n\pi x/3)\right)$ ได้ดังนี้

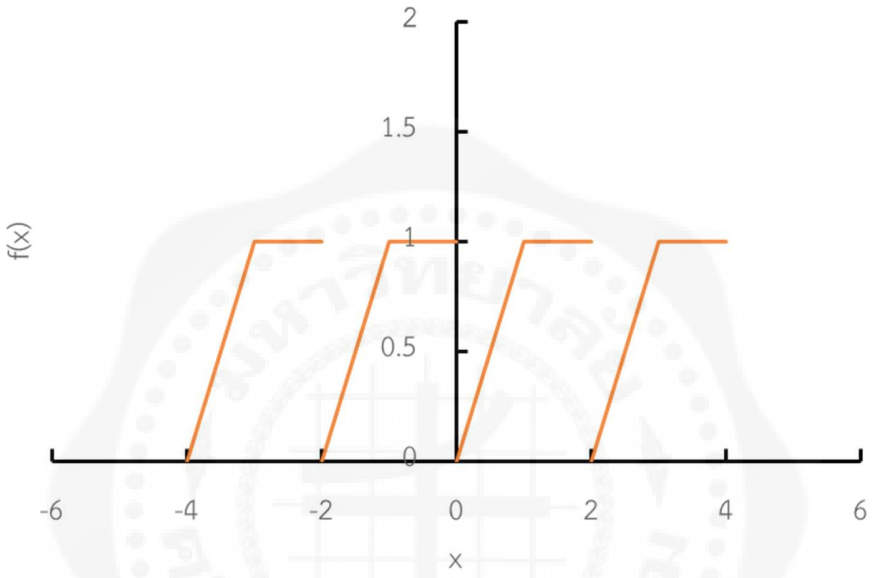
$$f(x)=-\frac{9}{1^2\pi^2}\cos(2\cdot1\cdot\pi x/3)+\frac{3}{1\cdot\pi}\sin(2\cdot1\cdot\pi x/3)-\frac{9}{2^2\pi^2}\cos(2\cdot2\cdot\pi x/3)+\frac{3}{2\cdot\pi}\sin(2\cdot2\cdot\pi x/3)$$
$$-\frac{1}{3^2\pi^2}\cos(2\cdot3\cdot\pi x/3)+\frac{3}{3\cdot\pi}\sin(2\cdot3\cdot\pi x/3)-\frac{9}{4^2\pi^2}\cos(2\cdot4\cdot\pi x/3)+\frac{3}{4\cdot\pi}\sin(2\cdot4\cdot\pi x/3)$$
$$-\frac{9}{5^2\pi^2}\cos(2\cdot5\cdot\pi x/3)+\frac{3}{5\cdot\pi}\sin(2\cdot5\cdot\pi x/3)+...$$

เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่ E6.19-2



รูปที่ E6.20-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x-x^2, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$ เมื่อกระจายอนุกรมฟูเรียร์ $f(x)=-\frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi x/3)+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi x/3)$ ถึง $n=1,5,10$

ตัวอย่างที่ 6.21 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<1\\ 1; & 1<t<2\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2)=f(x)$



รูปที่ E6.20-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<1\\ 1; & 1<x<2\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2)=f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก คาบเท่ากับ 2 ดังนั้น $L=1$ สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ $2L$ มีรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

เมื่อ $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<1\\ 1; & 1<t<2\end{cases}$

1. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_0

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{1}\left[\int_0^1 x dx+\int_1^2 1dx\right]=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_1^2=\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+(2-1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

2. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ a_n เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{1}\left(\int_0^1 x\cos n\pi x dx+\int_1^2\cos n\pi x dx\right)=\int_0^1 x\cos n\pi x dx+\int_1^2\cos n\pi x dx$$

$$a_n=\left[\left.\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right|_0^1-\int_0^1\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx+\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_1^2\right]=\left[\left.\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right|_0^1-\left.\frac{(-\cos n\pi x)}{n^2\pi^2}\right|_0^1+\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_1^2\right]$$

$$a_n=\left.\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right|_0^1+\left.\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1+\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_1^2$$

เมื่อ $\sin n\pi=\sin 2n\pi=0$ $\cos n\pi=(-1)^n$ และ $\cos 2n\pi=1$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$a_n=\frac{(1)\sin n\pi(1)}{n\pi}-\frac{(0)\sin n\pi(0)}{n\pi}+\frac{\cos n\pi(1)}{n^2\pi^2}-\frac{\cos n\pi(0)}{n^2\pi^2}+\frac{\sin n\pi(2)}{n\pi}-\frac{\sin n\pi(1)}{n\pi}$$

$$a_n=\frac{\sin n\pi}{n\pi}-0+\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}-\frac{\cos 0}{n^2\pi^2}+\frac{\sin 2n\pi}{n\pi}-\frac{\sin n\pi}{n\pi}=0-0+\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}+0-0=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$$

3. หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ b_n เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{1}\left(\int_0^1 x\sin n\pi x dx+\int_1^2\sin n\pi x dx\right)=\int_0^1 x\sin n\pi x dx+\int_1^2\sin n\pi x dx$$

$$b_n=\left[\left.\frac{x(-\cos n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1-\int_0^1\frac{(-\cos n\pi x)}{n\pi}dx+\left.\frac{(-\cos n\pi x)}{n\pi}\right|_1^2\right]=\left[-\left.\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1+\left.\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1-\left.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_1^2\right]$$

$$b_n=-\frac{(1)\cos n\pi(1)}{n\pi}-\frac{(0)\cos n\pi(0)}{n\pi}+\frac{\sin n\pi(1)}{n^2\pi^2}-\frac{\sin n\pi(0)}{n^2\pi^2}-\frac{\cos n\pi(2)}{n\pi}+\frac{\cos n\pi(1)}{n\pi}$$

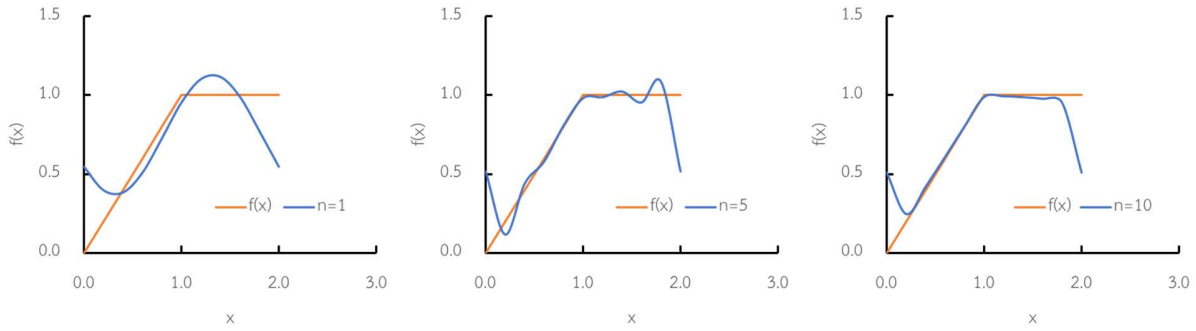
$$b_n=-\frac{\cos n\pi}{n\pi}-0+\frac{\sin n\pi}{n^2\pi^2}-\frac{\sin 0}{n^2\pi^2}-\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}+\frac{\cos n\pi}{n\pi}=-\frac{(-1)^n}{n\pi}-0+0-0-\frac{1}{n\pi}+\frac{(-1)^n}{n\pi}=-\frac{1}{n\pi}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<1\\ 1; & 1<t<2\end{cases}$ เมื่อ $f(x+2)=f(x)$ เมื่อ $a_0=\frac{3}{2}$

$a_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$ และ $b_n=-\frac{1}{n\pi}$ แทนค่าลงใน $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$ เมื่อ

$L=1$ ดังนั้น $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)\cos n\pi x-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x$

เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่ E6.21-2



รูปที่ E6.21-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x-x^2, 0<x<3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$ เมื่อกระจายอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x)=-\frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(2n\pi x/3)+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi x/3)$$ ถึง $n=1,5,10$

6.5 อนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ที่มีคาบเท่ากับ $2L$ พบว่า สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 a_n และ b_n ดังนี้

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$ เมื่อ $n=1,2,3,4,...$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0$$ เมื่อ $n=1,2,3,4,...$

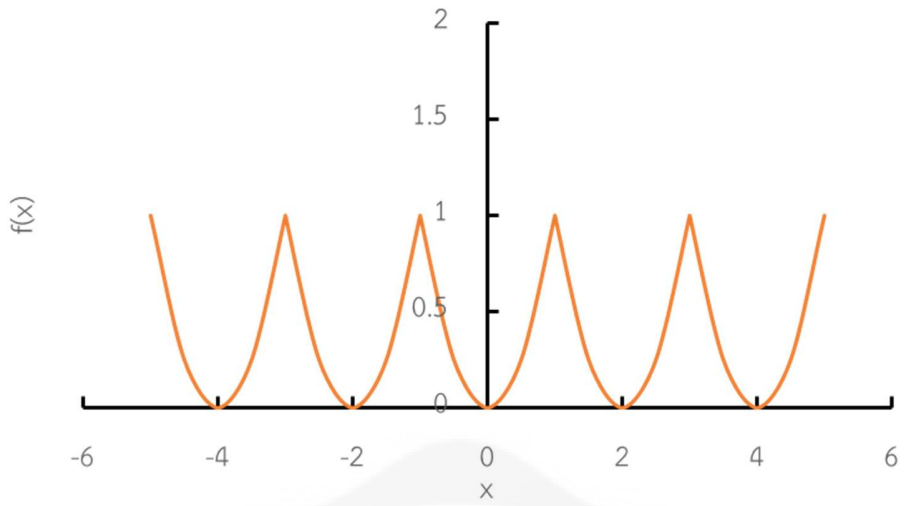
เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ที่มีคาบเท่ากับ $2L$ พบว่า สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 a_n และ b_n ดังนี้

$$a_0=\frac{2}{L}\int_{-L}^L f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0$$ เมื่อ $n=1,2,3,4,...$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$ เมื่อ $n=1,2,3,4,...$

ตัวอย่างที่ 6.22 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2, -1<x<1$ และ $f(x+2)=f(x)$



รูปที่ E6.22-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2,-1<x<1$ และ $f(x+2)=f(x)$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x)=x^2,-1<x<1$ เป็นฟังก์ชันคู่ ที่มีคาบเท่ากับ 2 พบว่า สัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ ของ a_0 และ a_n เมื่อ $L=1$ และ $b_n=0$ ดังนี้

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ของ a_0 เมื่อ $L=1$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=2\int_0^1 x^2dx=2\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1\right)=2\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ของ a_n เมื่อ $L=1$ และ $n=1,2,3,4,...$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{1}\int_0^1 x^2\cos\frac{n\pi x}{1}dx=\int_0^1 2x^2\cos n\pi x dx$$

$$a_n=2x^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)_0^1-\int_0^1 4x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)dx=2x^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)_0^1-4x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)_0^1+\int_0^1 4\left(\frac{-\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)dx$$

$$a_n=\left[2x^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)-4x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)-4\left(\frac{\sin n\pi x}{n^3\pi^3}\right)\right]_0^1$$

$$a_n=\left[2(1)^2\left(\frac{\sin n\pi(1)}{n\pi}\right)+4(1)\left(\frac{\cos n\pi(1)}{n^2\pi^2}\right)-4\left(\frac{\sin n\pi(1)}{n^3\pi^3}\right)\right]$$

$$-\left[2(0)^2\left(\frac{\sin n\pi(0)}{n\pi}\right)+4(0)\left(\frac{\cos n\pi(0)}{n^2\pi^2}\right)-4\left(\frac{\sin n\pi(0)}{n^3\pi^3}\right)\right]$$

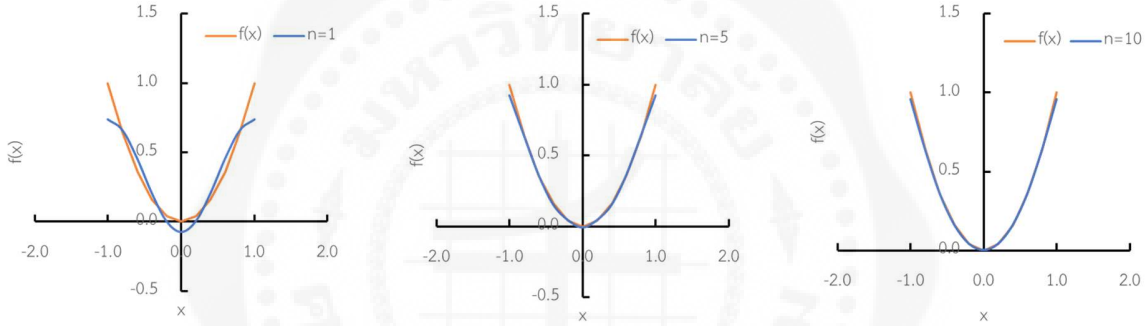
$$a_n = \left[2\left(\frac{\sin n\pi}{n\pi}\right)+4\left(\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right)-4\left(\frac{\sin n\pi}{n^3\pi^3}\right)\right]-[0+0-0]$$

เมื่อ $\sin n\pi = \sin 2n\pi = 0$ $\cos n\pi = (-1)^n$ และ $\cos 2n\pi = 1$ เมื่อ $n = 1,2,3,...$

$$a_n = \left[2(0)+4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}-4(0)\right]-[0+0-0] = 4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2, -1<x<1$ และ $f(x+2)=f(x)$ เมื่อ $a_0 = \frac{2}{3}$ และ $a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$ เมื่อ $b_n = 0$ และ $L=1$ แทนค่าลงใน $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)+b_n\sin(n\pi x/L)\right]$

ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ เมื่อนำอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้นำไปเขียนกราฟดังรูปที่ E6.22-2



รูปที่ E6.22-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2, -1<x<1$ เมื่อ $f(x+2)=f(x)$ เมื่อกระจายอนุกรมฟูเรียร์ $f(x) = \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ ถึง $n = 1,5,10$

6.6 การกระจายครึ่งพิศัย (Half-range expansion)

ในกรณีที่ $f(x)$ ที่มีให้คาบเท่ากับครึ่งช่วง หรือ ครึ่งคาบเท่ากับ L เพื่อให้สามารถหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ สามารถทำได้โดยการขยายช่วง เพื่อให้คาบมีค่าเท่ากับ $2L$ ซึ่งสามารถทำได้ 2 วิธี คือ

1. การขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบเท่ากับ $2L$

$$f_e(x) = \begin{cases} f_e(x); 0<x<L \\ f_e(-x); -L<x<0 \end{cases}$$ เมื่อ $f_e(x+2L) = f(x)$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของ $f_e(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

เมื่อ $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)dx$ และ $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$

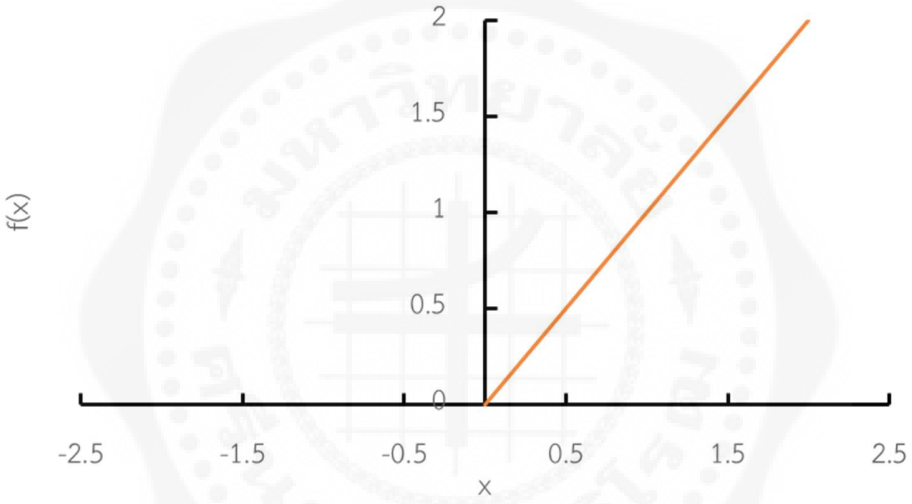
2. การขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคี่และมีคาบเท่ากับ $2L$

$f_o(x)=\begin{cases} f_o(x);0<x<L \\ -f_o(-x);-L<x<0 \end{cases}$ เมื่อ $f_o(x+2L)=f(x)$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ของ $f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

เมื่อ $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$

ตัวอย่างที่ 6.23 จงหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์สำหรับการกระจายแบบครึ่งช่วงของฟังก์ชัน $f(x)=x,0<x<2$

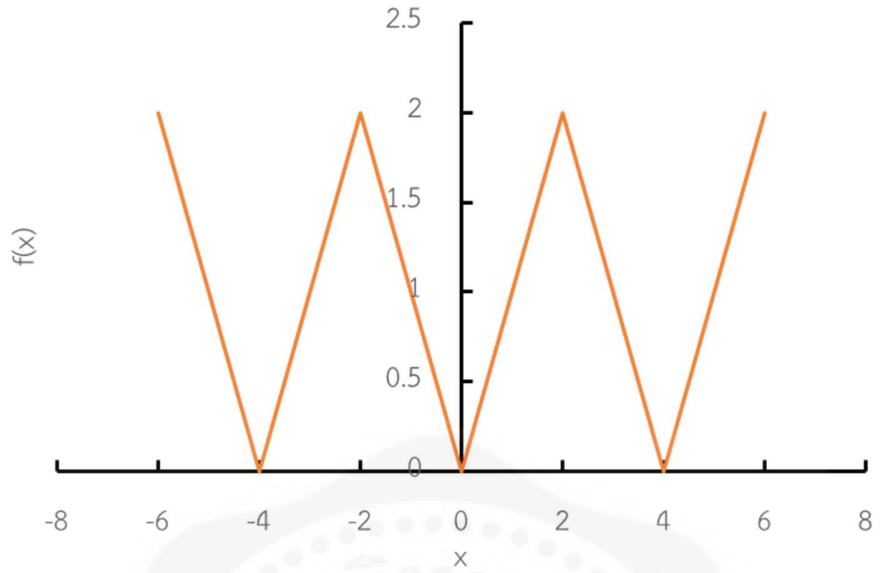


รูปที่ E6.23-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x,0<x<2$

วิธีทำ

1. อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของ $f_e(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})$

ดังนั้นเมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบเท่ากับ $2L$ เมื่อ $f(x)=\sin x$ ดังนั้นการขยายฟังก์ชัน $f(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคู่ในช่วง $-2<x<2$ สามารถทำได้โดยให้ $f_e(x)=\begin{cases} x;0<x<2 \\ -x;-2<x<0 \end{cases}$



รูปที่ E6.23-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x, 0<x<2$ เมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบเท่ากับ 4

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_0 เมื่อ $L=2$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)dx=\frac{2}{2}\left[\int_0^2 xdx\right]=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2$$

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_n เมื่อ $L=2$ และ $n=1,2,3,4,\ldots$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\left.\frac{2x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$a_n=\left.\frac{2x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2-\frac{2^2}{n^2\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2=\left.\frac{2x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\left.\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right|_0^2$$

$$a_n=\left[\frac{2(2)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(2)}{2}\right)-\frac{2(0)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(0)}{2}\right)\right]+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi(2)}{2}\right)-\cos\left(\frac{n\pi(0)}{2}\right)\right]$$

เมื่อ $\sin n\pi=\sin 2n\pi=0$ $\cos n\pi=(-1)^n$ และ $\cos 2n\pi=1$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$

$$a_n=\left[\frac{4}{n\pi}\sin n\pi-0\sin 0\right]+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]=\left[\frac{4}{n\pi}0-0\right]+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

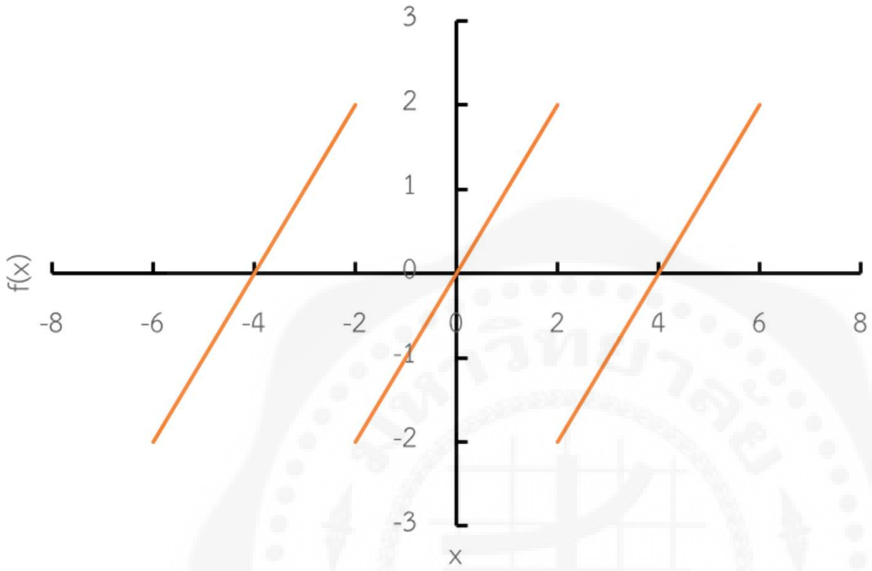
$$a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

แทนค่า

$$f_e(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})=\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

2. อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

ดังนั้นเมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคี่และมีคาบเท่ากับ $2L$ เมื่อ $f(x)=x$ ดังนั้นการขยายฟังก์ชัน $f(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคี่ในช่วง $-2<x<2$ สามารถทำได้โดยให้ $f_o(x)=\begin{cases}x;0<x<2\\x;-2<x<0\end{cases}$ หรือ $f_o(x)=x,-2<x<2$



รูปที่ E6.23-3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x,0<x<2$ เมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคี่และมีคาบเท่ากับ 4

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ b_n **เมื่อ** $L=2$ **และ** $n=1,2,3,4,...$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\frac{2x}{n\pi}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)dx$$

$$b_n=-\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2+\int_0^2\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=-\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2+\frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$b_n=-\left(\frac{2(2)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(2)}{2}\right)-\frac{2(0)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(0)}{2}\right)\right)+\left(\frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi(2)}{2}\right)-\frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi(0)}{2}\right)\right)$$

$$b_n=-\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi-\frac{2(0)}{n\pi}\cos 0\right)+\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin 0\right)=-\left(\frac{4}{n\pi}(-1)^n-0\right)+\left(\frac{4}{n^2\pi^2}0-\frac{4}{n^2\pi^2}0\right)$$

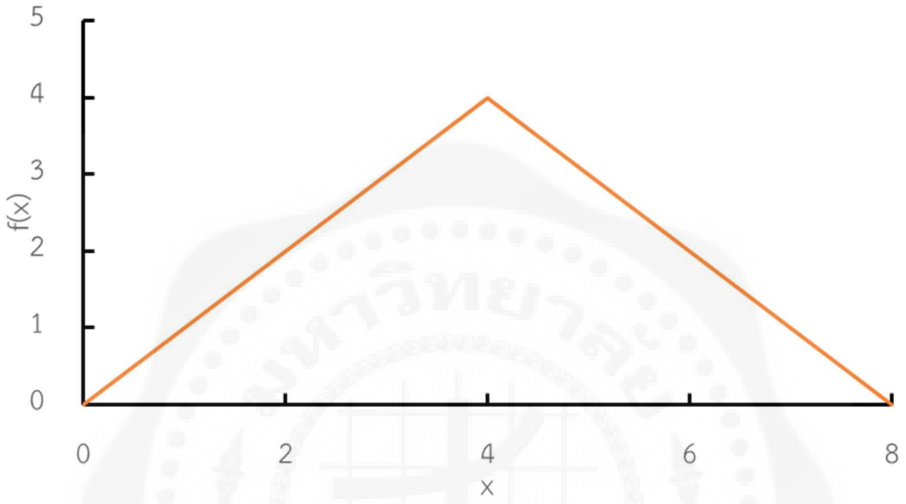
$$b_n=-\frac{4(-1)^n}{n\pi}=\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

แทนค่า

$$f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 6.24 จงหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์สำหรับการกระจายแบบครึ่งช่วงของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<4\\ 8-x; & 4<x<8\end{cases}$$



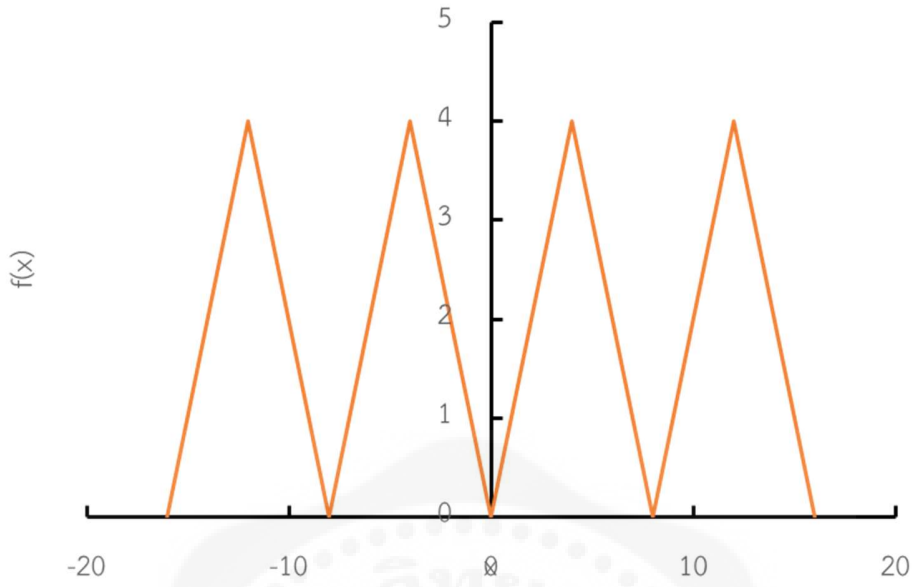
รูปที่ E6.24-1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<4\\ 8-x; & 4<x<8\end{cases}$

วิธีทำ

1. อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของ $f_e(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})$

ดังนั้นเมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบเท่ากับ $2L$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<4\\ 8-x; & 4<x<8\end{cases}$ ดังนั้นการขยาย

ฟังก์ชัน $f(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคู่ในช่วง $-8<x<8$ สามารถทำได้โดยให้ $f_e(x)=\begin{cases}8+x;-8<x<-4\\ -x;-4<x<0\\ x;0<x<4\\ 8-x;4<x<8\end{cases}$



รูปที่ E6.24-2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} x; & 0<x<4 \\ 8-x; & 4<x<8 \end{cases}$ เมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคู่และมีคาบเท่ากับ 16

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_0 เมื่อ $L=8$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)dx=\frac{2}{8}\left[\int_0^4 xdx+\int_4^8 (8-x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4+\left.\left(8x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_4^8\right]=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+\left(8(8)-\frac{8^2}{2}-\left(8(4)-\frac{4^2}{2}\right)\right)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{4}\left[(8-0)+\left(64-32-(32-8)\right)\right]=\frac{1}{4}\left[8+64-32-32+8\right]=\frac{1}{4}16=4$$

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ a_n เมื่อ $L=8$ และ $n=1,2,3,4,\ldots$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{8}\left[\int_0^4 x\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx+\int_4^8 (8-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{8x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_0^4-\int_0^4\frac{8}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx+\left.\frac{8(8-x)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_4^8-\int_4^8\left(-\frac{8}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right)dx\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{8x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_0^4-\left.\frac{8^2}{n^2\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right)\right|_0^4+\left.\frac{8(8-x)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_4^8+\int_4^8\frac{8}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{8x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_0^4-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right)\right|_0^4+\left.\frac{8(8-x)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_4^8+\frac{8^2}{n^2\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right)\Bigg|_0^4\Bigg]$$

เมื่อ $\sin n\pi=\sin 2n\pi=0$ $\cos n\pi=(-1)^n$ และ $\cos 2n\pi=1$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=(-1)^{2n+1}\quad\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\left.\frac{8x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_0^4+\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_0^4+\left.\frac{8(8-x)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\right|_4^8-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)\Bigg|_0^4\Bigg]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{8(4)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(4)}{8}\right)-\frac{8(0)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(0)}{8}\right)\right)+\left(\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi(4)}{8}\right)-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi(0)}{8}\right)\right)\\+\left(\frac{8(8-(8))}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(8)}{8}\right)-\frac{8(8-(4))}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(4)}{8}\right)\right)-\left(\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi(8)}{8}\right)-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi(4)}{8}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{32}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-0\sin 0\right)+\left(\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos 0\right)\\+\left(\frac{8(0)}{n\pi}\sin n\pi-\frac{8(4)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{8^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{32}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-0\sin 0\right)+\left(\frac{64}{n^2\pi^2}(0)-\frac{64}{n^2\pi^2}\right)\\+\left(0\sin n\pi-\frac{32}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{64}{n^2\pi^2}(-1)^n-\frac{64}{n^2\pi^2}(0)\right)\end{array}\right]$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\frac{32}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{64}{n^2\pi^2}-\frac{32}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{64}{n^2\pi^2}(-1)^n\right]=\frac{1}{4}\left[-\frac{64}{n^2\pi^2}+\frac{64}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right]$$

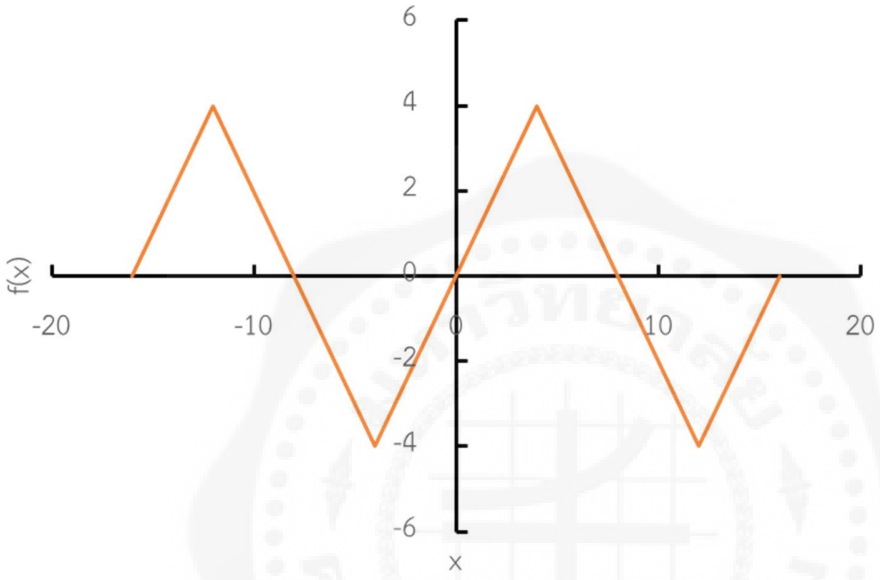
$$a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{64}{n^2\pi^2}\right)\left[(-1)^{n+1}-1\right]=\frac{16}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1}-1\right]$$

แทนค่า

$$f_e(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})=\frac{4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}\left[(-1)^{n+1}-1\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)=2+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$

2. อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

ดังนั้นเมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคี่และมีคาบเท่ากับ $2L$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<4\\ 8-x; & 4<x<8\end{cases}$ ดังนั้นการขยายฟังก์ชัน $f(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันคี่ในช่วง $-8<x<8$ สามารถทำได้โดยให้ $f_o(x)=\begin{cases}-8-x;-8<x<-4\\ x;-4<x<0\\ x;0<x<4\\ 8-x;4<x<8\end{cases}$



รูปที่ E6.24-3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x; & 0<x<4\\ 8-x; & 4<x<8\end{cases}$ เมื่อขยายช่วงแล้วได้เป็นฟังก์ชันคี่และมีคาบเท่ากับ 16

สัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ b_n เมื่อ $L=2$ และ $n=1,2,3,4,\ldots$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{8}\left[\int_0^4 x\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx+\int_4^8(8-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[x\left(\frac{-\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_0^4-\int_0^4\left(\frac{-\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)dx\right]+\frac{1}{4}\left[(8-x)\left(\frac{-\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_4^8-\int_4^8\left(-\frac{-\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)dx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[-x\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_0^4+\int_0^4\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)dx\right]+\frac{1}{4}\left[-(8-x)\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_4^8-\int_4^8\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)dx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[-x\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_0^4+\left(\frac{\sin(n\pi x/8)}{(n\pi/8)^2}\right)_0^4\right]+\frac{1}{4}\left[-(8-x)\left(\frac{\cos(n\pi x/8)}{(n\pi/8)}\right)_4^8-\left(\frac{\sin(n\pi x/8)}{(n\pi/8)^2}\right)_4^8\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\left(-4\frac{\cos(n\pi 4/8)}{(n\pi/8)}+0\frac{\cos(n\pi(0)/8)}{(n\pi/8)}\right)+\left(\frac{\sin(n\pi(4)/8)}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin(n\pi(0)/8)}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(-(8-8)\frac{\cos(n\pi(8)/8)}{(n\pi/8)}+(8-4)\frac{\cos(n\pi(4)/8)}{(n\pi/8)}\right)-\left(\frac{\sin(n\pi(8)/8)}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin(n\pi(4)/8)}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

เมื่อ $\sin n\pi=\cos(n\pi/2)=0$ $\sin(n\pi/2)=\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{2n-2}{4}}$ และ $\cos n\pi=(-1)^n$ เมื่อ

$n=1,2,3,...$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\left(-4\frac{\cos(n\pi/2)}{(n\pi/8)}+0\right)+\left(\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin 0}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(-(0)\frac{\cos(n\pi)}{(n\pi/8)}+(4)\frac{\cos(n\pi/2)}{(n\pi/8)}\right)-\left(\frac{\sin(n\pi)}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\left(-4\frac{\cos 0}{(n\pi/8)}+0\right)+\left(\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin 0}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left(-(0)\frac{\cos(n\pi)}{(n\pi/8)}+(4)\frac{\cos 0}{(n\pi/8)}\right)-\left(\frac{\sin 0}{(n\pi/8)^2}-\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}\right)\right]$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\frac{-4}{(n\pi/8)}+\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{4}{(n\pi/8)}+\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/8)^2}=\frac{1}{2}\frac{8^2}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)$$

$$b_n=\frac{32}{n^2\pi^2}\sin(n\pi/2)$$

$$b_n=\frac{32}{n^2\pi^2}\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{2n-2}{4}}$$

แทนค่า

$$f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$

$$f_o(x)=\frac{32}{1^2\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)+\frac{32}{2^2\pi^2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{8}\right)+\frac{32}{3^2\pi^2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{8}\right)+...$$

6.7 การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดัง (6.7) เมื่อคาบมีค่าเท่ากับ 2π และ

$-\pi < x < \pi$

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n \sin(nx)\right] \tag{6.7}$$

ดังนั้น

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-nA_n \sin(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n \cos(nx)\right] \tag{6.8}$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2 A_n \cos(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2 B_n \cos(nx)\right] \tag{6.9}$$

ตัวอย่างที่ 6.25 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ $y' + 2y = f(x)$ เมื่อ $f(x+2\pi) = f(x), -\pi < x < \pi$

วิธีทำ

$f(x)$ สามารถขียนในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin(nx)\right]$$

ผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n \sin(nx)\right]$$

ทำให้

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-nA_n \sin(nx)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n \cos(nx)\right]$$

แทนค่าลงใน $y' + 2y = f(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-nA_n \sin(nx) + nB_n \cos(nx)\right] + 2\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right]\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

จัดรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-nA_n \sin(nx) + nB_n \cos(nx)\right] + A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right] - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] = 0$$

$$A_0 - \frac{a_0}{2} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-nA_n \sin(nx) + 2B_n \sin(nx) - b_n \sin(nx)\right] = 0$ ได้ $-nA_n + 2B_n = b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[nB_n\cos(nx)+2A_n\cos(nx)-a_n\cos(nx)\right]=0$ ได้ $nB_n+2A_n=a_n$

แก้สมการเพื่อหาค่า A_0, A_n, B_n

$$A_0=\frac{a_0}{2}$$

$$A_n=\frac{2a_n-nb_n}{n^2+4}$$

$$B_n=\frac{na_n+2b_n}{n^2+4}$$

เมื่อแทนค่า A_0, A_n, B_n ลงในผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)\right]=\frac{a_0}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2a_n-nb_n}{n^2+4}\right)\cos(nx)+\left(\frac{na_n+2b_n}{n^2+4}\right)\sin(nx)\right]$$

ตัวอย่างที่ 6.26 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ $y'+2y=f(x)$ เมื่อ

$$f(x)=\begin{cases}-1; & -\pi<x<0\\ 1; & 0<t<\pi\end{cases}$$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$

วิธีทำ

$$f(x)=\begin{cases}-1; & -\pi<x<0\\ 1; & 0<t<\pi\end{cases}$$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$ สามารถเขียนในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ได้ดังนี้

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=odd}^{\infty}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]$$

จากตัวอย่างที่ 6.25 พบว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$y(x)=\frac{a_0}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2a_n-nb_n}{n^2+4}\right)\cos(nx)+\left(\frac{na_n+2b_n}{n^2+4}\right)\sin(nx)\right]$$

จาก $f(x)$ พบว่า $a_0=0$ $a_n=0$ และ $b_n=\frac{4}{n\pi}$ ดังนั้น

$$y(x)=\frac{0}{4}+\sum_{n=odd}^{\infty}\left[\left(\frac{2(0)-n(4/n\pi)}{n^2+4}\right)\cos(nx)+\left(\frac{n(0)+2(4/n\pi)}{n^2+4}\right)\sin(nx)\right]$$

$$y(x)=\sum_{n=odd}^{\infty}\left[-\frac{4/\pi}{n^2+4}\cos(nx)+\frac{8/n\pi}{(n^2+4)}\sin(nx)\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{n=odd}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2+4}\cos(nx)+\frac{2}{n(n^2+4)}\sin(nx)\right]$$

ตัวอย่างที่ 6.27 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ $y''+2y=3x, 0<x<1$ เมื่อ

$y(0)=y(1)=0$

วิธีทำ

$f(x)=3x$ เลือกใช้การขยายช่วงอนุกรมฟูเรียร์ไซน์สำหรับการกระจายแบบครึ่งช่วงของฟังก์ชัน $f(x)=3x,-1<x<1$ และมีคาบเท่ากับ 2

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ $f_o(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เมื่อ $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 3x\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=6\int_0^1 x\sin\left(n\pi x\right)dx$$

$$b_n=6\left(-\frac{x\cos\left(n\pi x\right)}{n\pi}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{\cos\left(n\pi x\right)}{n\pi}dx\right)=6\left(-\frac{x\cos\left(n\pi x\right)}{n\pi}\bigg|_0^1+\frac{\sin\left(n\pi x\right)}{n^2\pi^2}\bigg|_0^1\right)$$

$$b_n=6\left(\left[-\frac{1\cos\left(n\pi(1)\right)}{n\pi}+\frac{0}{n\pi}\right]+\left[\frac{\sin\left(n\pi(1)\right)}{n^2\pi^2}-\frac{\sin\left(n\pi(0)\right)}{n^2\pi^2}\right]\right)=6\left(\left[-\frac{\cos n\pi}{n\pi}\right]+\left[0-0\right]\right)=-6\frac{\cos n\pi}{n\pi}$$

$$f(x)=3x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}-6\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin n\pi x=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$$

ผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ เมื่อ $L=1$

ดังนั้น $y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(n\pi x\right)+B_n\sin\left(n\pi x\right)\right]$

ทำให้

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n\pi A_n\sin(n\pi x)+n\pi B_n\cos(n\pi x)\right]$$

$$y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n\cos(n\pi x)-n^2\pi^2 B_n\sin(n\pi x)\right]$$

แทนค่าลงใน $y''+2y=3x$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n\cos(n\pi x)-n^2\pi^2 B_n\sin(n\pi x)\right]+2\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(n\pi x\right)+B_n\sin\left(n\pi x\right)\right]\right)=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$$

จัดรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n\cos(n\pi x)-n^2\pi^2 B_n\sin(n\pi x)\right]+\left(A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(n\pi x\right)+B_n\sin\left(n\pi x\right)\right]\right)=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$$

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n\cos(n\pi x)+2A_n\cos\left(n\pi x\right)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 B_n\sin(n\pi x)+2B_n\sin\left(n\pi x\right)\right]=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$$

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n+2A_n\right]\cos\left(n\pi x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 B_n+2B_n\right]\sin(n\pi x)=-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$A_0 = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 A_n + 2A_n\right]\cos\left(n\pi x\right) = 0$

ดังนั้น $A_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\pi^2 B_n + 2B_n\right]\sin(n\pi x) = -\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n\pi x$

$-n^2\pi^2 B_n + 2B_n = -\frac{6}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n}$

$(2-n^2\pi^2)B_n = -\frac{6}{n\pi}\cos n\pi$

ดังนั้น $B_n = -\frac{6}{n\pi(2-n^2\pi^2)}\cos n\pi$

ผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{6}{n\pi(2-n^2\pi^2)}\cos n\pi\sin\left(n\pi x\right)\right] = -6\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n\pi - n^3\pi^3)}\cos n\pi\sin\left(n\pi x\right)\right]$ เมื่อ $L = 1$

ตัวอย่างที่ 6.28 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ $ay''+by'+cy = f(x)$ เมื่อ

$f(x+2L) = f(x), -L < x < L$

วิธีทำ

$f(x)$ สามารถขียนในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ที่มีคาบเท่ากับ $2L$ ได้ดังนี้

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin(n\pi x/L)\right]$

ถ้าให้ $\omega = \pi/L$ ดังนั้น $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin(n\omega x)\right]$

ผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega x) + B_n\sin(n\omega x)\right]$

ทำให้

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-n\omega A_n\sin(n\omega x) + n\omega B_n\cos(n\omega x)\right]$

$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\omega^2 A_n\cos(n\omega x) - n^2\omega^2 B_n\sin(n\omega x)\right]$

แทนค่าลงใน $ay''+by'+cy = f(x)$

$$a\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n^2\omega^2 A_n\cos(n\omega x)-n^2\omega^2 B_n\sin(n\omega x)\right]+b\sum_{n=1}^{\infty}\left[-n\omega A_n\sin(n\omega x)+n\omega B_n\cos(n\omega x)\right]$$

$$+c\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega x)+B_n\sin(n\omega x)\right]\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-an^2\omega^2 A_n\cos(n\omega x)-an^2\omega^2 B_n\sin(n\omega x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-bn\omega A_n\sin(n\omega x)+bn\omega B_n\cos(n\omega x)\right]$$

$$+\left(\frac{cA_0}{2}+c\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega x)+B_n\sin(n\omega x)\right]\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\right]$$

จัดรูป

$\frac{cA_0}{2}=\frac{a_0}{2}$ หรือ $A_0=\frac{a_0}{c}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-an^2\omega^2 A_n\cos(n\omega x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[bn\omega B_n\cos(n\omega x)\right]+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[cA_n\cos(n\omega x)\right]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x)\right]$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-an^2\omega^2 A_n+bn\omega B_n+cA_n\right]\cos(n\omega x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega x)$ ได้ $-an^2\omega^2 A_n+bn\omega B_n+cA_n=a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-an^2\omega^2 B_n\sin(n\omega x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-bn\omega A_n\sin(n\omega x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[cB_n\sin(n\omega x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega x)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-an^2\omega^2 B_n-bn\omega A_n+cB_n\right]\sin(n\omega x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega x)$ ได้ $-an^2\omega^2 B_n-bn\omega A_n+cB_n=b_n$

หาค่าของ A_n, B_n

$$A_n=\frac{a_n\left(c-an^2\omega^2\right)-bn\omega b_n}{\left(c-an^2\omega^2\right)^2+\left(bn\omega\right)^2}$$

$$B_n=\frac{b_n\left(c-an^2\omega^2\right)+bn\omega a_n}{\left(c-an^2\omega^2\right)^2+\left(bn\omega\right)^2}$$

เมื่อ $\left(c-an^2\omega^2\right)^2+\left(bn\omega\right)^2\neq 0$

เมื่อแทนค่า A_0, A_n, B_n ลงในผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega x)+B_n\sin(n\omega x)\right]$$

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega x)+B_n\sin(n\omega x)\right]$$

6.8 การหาปริพันธ์นุกรมฟูเรียร์

การหาปริพันธ์อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier's integral) จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขดังนี้

1. $f(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในช่วง $(-L,L)$ เมื่อ 1. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยว อยู่ในช่วง $(c,c+2L)$ 2. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ $2L$ และ 3. $f(x)$ และ $f'(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $(c,c+2L)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ ต้องลู่เข้า ทำให้ $f(x)$ หาปริพันธ์ได้สมบูรณ์ในช่วง $(-\infty,\infty)$

เมื่อ $f(x)$ คือปริพันธ์ฟูเรียร์ ดังนั้น

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\big(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\big)dw$$

เมื่อ

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv \text{ และ } B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv$$

ตัวอย่างที่ 6.29 จงหาปริพันธ์ฟูเรียร์ของ $f(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ 1; & 0<x<1\\ 0; & x>1\end{cases}$

วิธีทำ

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\cos wvdv=\frac{1}{w\pi}\big(\sin wv\big)_0^1$$

$$A(w)=\frac{1}{w\pi}\big(\sin wv\big)_0^1=\frac{1}{w\pi}\big(\sin w-\sin 0\big)=\frac{\sin w}{w\pi}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\sin wvdv=\frac{1}{w\pi}\big(-\cos wv\big)_0^1$$

$$B(w)=\frac{1}{w\pi}\big(-\cos w+\cos 0\big)=\frac{1}{w\pi}\big(1-\cos w\big)$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\big(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\big)dw$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w\pi}\cos wx+\frac{1}{w\pi}\big(1-\cos w\big)\sin wx\right)dw=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx+\frac{(1-\cos w)}{w}\sin wx\right)dw$$

จากเงื่อนไข

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx+\frac{(1-\cos w)}{w}\sin wx\right)dw=\begin{cases}0; & x<0\\ \frac{1}{2}; & x=0\\ 1; & 0<x<1\\ \frac{1}{2}; & x=1\\ 0; & x>1\end{cases}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx+\frac{(1-\cos w)}{w}\sin wx\right)dw=\begin{cases}0; & x<0\\ \frac{\pi}{2}; & x=0\\ \pi; & 0<x<1\\ \frac{\pi}{2}; & x=1\\ 0; & x>1\end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 6.30 จงหาปริพันธ์ฟูเรียร์ของ $f(x)=\begin{cases}1; & |x|<1\\ 0; & |x|>1\end{cases}$

วิธีทำ

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wvdv=\frac{1}{w\pi}\left(\sin wv\right)_{-1}^{1}$$

$$A(w)=\frac{1}{w\pi}\left(\sin wv\right)_{-1}^{1}=\frac{1}{w\pi}\left(\sin w-\sin(-w)\right)=\frac{2\sin w}{w\pi}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin wvdv=\frac{1}{w\pi}\left(-\cos wv\right)_{-1}^{1}$$

$$B(w)=\frac{1}{w\pi}\left(-\cos w+\cos(-w)\right)=\frac{1}{w\pi}\left(-\cos w+\cos w\right)=0$$

ดังนั้น

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right)dw$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(\frac{2\sin w}{w\pi}\cos wx+0\right)dw=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx\right)dw$$

จากเงื่อนไข

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx\right)dw=\begin{cases}1; & |x|<1\\ \frac{1}{2}; & |x|=1\\ 0; & |x|>1\end{cases}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos wx\right)dw=\begin{cases}\frac{\pi}{2}; & |x|<1\\ \frac{\pi}{4}; & |x|=1\\ 0; & |x|>1\end{cases}$$

ถ้าให้ $x=0$

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\cos 0\right)dw=\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$$

การหาปริพันธ์นุกรมฟูเรียร์สามารถเขียนในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์หรืออนุกรมโคไซน์ โดยมีการกำหนดดังนี้

1. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ แล้ว $A(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(v)\cos wvdv$ และ $B(w)=0$ แล้วทำให้ $f(x)=\int_0^{\infty}A(w)\cos wxdw$ ซึ่งเป็นปริพันธ์ฟูเรียร์โคไซน์

2. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ แล้ว $A(w)=0$ และ $B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(v)\sin wvdv$ แล้วทำให้ $f(x)=\int_0^{\infty}B(w)\sin wxdw$ ซึ่งเป็นปริพันธ์อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

ตัวอย่างที่ 6.31 จงหาปริพันธ์ฟูเรียร์ไซน์และโคไซน์ของ $f(x)=e^{-kx}$ เมื่อ $x>0$

วิธีทำ

ปริพันธ์ฟูเรียร์ไซน์

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(w)\sin wxdw \text{ และ } B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(v)\sin wvdv$$

$$B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kv}\sin wvdv$$

$$\int_0^{\infty}e^{-kv}\sin wvdv=\frac{w}{k^2+w^2}$$

ดังนั้น

$$B(w)=\frac{2w}{\pi\left(k^2+w^2\right)}$$

ดังนั้น

$$f(x)=e^{-kx}=\int_0^{\infty}B(w)\sin wxdw=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w\sin wx}{\left(k^2+w^2\right)}dw$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{\left(k^2+w^2\right)}dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \text{ เมื่อ } x>0$$

ปริพันธ์ฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wxdw \text{ และ } A(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wvdv$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wvdv$$

$$\int_0^\infty e^{-kv}\cos wvdv = \frac{k}{k^2+w^2}$$

ดังนั้น

$$A(w)=\frac{2k}{\pi\left(k^2+w^2\right)}$$

ดังนั้น

$$f(x)=e^{-kx}=\int_0^\infty A(w)\cos wxdw=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{\left(k^2+w^2\right)}dw$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{\left(k^2+w^2\right)}dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \text{ เมื่อ } x>0$$

6.9 แบบฝึกหัด

ข้อที่ 6.1 จงหาคาบของฟังก์ชัน $f(x)=\sin x$

ข้อที่ 6.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\begin{cases} x; -\pi \le x < 0 \\ 0; 0 \le x < \pi \end{cases}$ $x<0$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$
2. $f(x)=\begin{cases} 1; -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1; \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$
3. $f(x)=\begin{cases} \sin x; 0 < x < \pi \\ 0; \pi < x < 2\pi \end{cases}$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$
4. $f(x)=e^x, -\pi < x < \pi$ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x)$
5. $f(x)=\begin{cases} x+1; -1 < x < 0 \\ 1-x; 0 < x < 1 \end{cases}$ เมื่อ $f(x+2)=f(x)$
6. $f(x)=\begin{cases} 0; -2 \le x < -1 \\ x; -1 \le x < 1 \\ 0; 1 \le x < 2 \end{cases}$ เมื่อ $f(x+4)=f(x)$
7. $f(x)=\begin{cases} 0; -2 < x < 0 \\ x^2(2-x); 0 < x < 2 \end{cases}$ เมื่อ $f(x+4)=f(x)$
8. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}; -2 < x < 0 \\ 2x-\dfrac{1}{2}x^2; 0 < x < 2 \end{cases}$ เมื่อ $f(x+4)=f(x)$

ข้อที่ 6.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์สำหรับการกระจายแบบครึ่งช่วงของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=2-x^2$ เมื่อ $0 < x < 2$
2. $f(x)=-x$ เมื่อ $-\pi < x < 0$
3. $f(x)=x^2-2x$ เมื่อ $0 < x < 4$
4. $f(x)=\begin{cases} 0; 0 < x \le \pi \\ 1; \pi < x \le 2\pi \\ 2; 2\pi < x \le 3\pi \end{cases}$ เมื่อ $0 < x < 2$

จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x, 0 < x < 3$ เมื่อ $f(x+3)=f(x)$

ข้อที่ 6.1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^2,-1<x<1$ และ $f(x+2)=f(x)$

ข้อที่ 6.4 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ต่อไปนี้ เมื่อ $f(x+2\pi)=f(x),-\pi<x<\pi$

1. $x^2y''-9xy'+25y=0$
2. $x^2y''+4y=0$
3. $x^2y''-7xy'+16y=0$
4. $x^2y''-6xy'+13y=0$

6.10 บรรณานุกรม

1. Richard Bronson and Gabriel B. Costa, DIFFERENTIAL EQUATIONS in Schaum's Outline Series, Third Edition, McGRAW-HILL

2. James R. Brannan, William E. Boyce, and Mark A. McKibben, DIFFERENTIAL EQUATIONS An Introduction to Modern Methods and Applications, Third Edition, John Wiley & Sons

3. วชิรารักษ์ โอรสรัมย, สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ, คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ISBN 978-616-394-608-9, 2558

4. วรรณรัตน์ รุ่งโรจน์ธีระ, สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2566

5. วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, MA216 สมการเชิงอนุพันธ์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2541