การศึกษาเรื่องเกรซฟูลกราฟของไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุนิภา วรินทร์เวช

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2529

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา		คณะกรรมการสอบ	
	ประธาน		ประธาน
	กรรมการ		กรรมการ
			กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือและการแนะนำอย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม และ ดร.สุรพล วัฒนวิกย์กิจ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกถึงพระคุณของบิดามารดา ที่ได้อบรมเลี้ยงดูให้ความอุปการะทั้งในด้านกำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาผู้วิจัยตลอดมา พระคุณนี้หาที่เปรียบมิได้

สุนิภา วรินทร์เวช

สารบาญ

บทที่ 1

บทนำ

<u>คำนำ</u>

ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) เป็นสาขาแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ซึ่งปัจจุบันได้รับความสนใจอย่างมาก เนื่องจากได้มีการนำเอาทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น เช่น ฟิสิกส์ เคมี นอกจากนั้นทฤษฎีกราฟยังเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น เช่น ทฤษฎีกลุ่ม (Group Theory) ทฤษฎีเมตริกซ์ (Matrix Theory) และ ทฤษฎีแลททิส (Lattice Theory) เป็นต้น

การพบทฤษฎีกราฟมักจะพบในส่วนที่เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งการพบแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกันและไม่ได้นำมารวบรวมกันไว้ ดังนั้นถ้าจะนับการเกิดทฤษฎีกราฟจริง ๆ แล้วจะถือว่าเป็นการพบในปี ค.ศ. 1736 โดยผลงานของนักคณิตศาสตร์ ชื่อ เลียวนาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler. 1707 - 1783) ซึ่งเป็นผู้ที่แก้ปัญหาสะพานคอนนิกสเบอร์ก (The Königsberg Bridge Problem) ดังนั้นออยเลอร์จึงได้ชื่อว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ

ต่อมามีผู้ขยายทฤษฎีกราฟอีก คือ เคอร์ชอฟ (G.R. Kirchhoff. 1824 - 1887) และ เคเลย์ (Arthur Cayley. 1821 - 1895) โดยในปี ค.ศ. 1847 เคอร์ชอฟได้พยายามแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้นและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทรี (tree) ซึ่งเป็นกราฟชนิดหนึ่ง และในปี ค.ศ. 1857 เคเลย์ได้ศึกษาทรีเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการหาจำนวนโมเลกุลของสารเคมี นอกจากนั้นก็มีปริศนาที่เกี่ยวข้องกับกราฟคือ เกมส์การท่องเที่ยว (Around The World) ซึ่งถูกตั้งขึ้นในปี ค.ศ. 1859 โดยฮามิลตัน (Sir William Rowan Hamilton. 1805 - 1865) และปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี (The Four Color Problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในทางทฤษฎีกราฟ ปัญหานี้เกิดขึ้นในปี ค.ศ. 1852 และพบคำตอบในปี ค.ศ. 1976 โดยแอพเพล (Appel) และฮาเคน (Haken) ปัจจุบันนี้ทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนาขึ้น และมีการค้นพบทฤษฎีกราฟอีกมากมาย (นิตยา ชิงชัย ม.ป.ป. : 1 - 8)

เกรซฟูลกราฟ (graceful graph) เป็นกราฟชนิดหนึ่งซึ่งโกลอมบ์ (Golomb. 1972 : 23 - 27) เป็นคนแรกที่ให้นิยาม "เกรซฟูลกราฟ" และในปัจจุบันได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ในต้นปี ค.ศ. 1985 โคและแยป (Koh and Yap, 1985 : 41 - 48) ได้พิสูจน์ว่าไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด (cycles with one-vertex chord) เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งนับได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นที่ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษากรณีทั่วไปของกราฟดังกล่าวว่าจะเป็นเกรซฟูลกราฟหรือไม่

<u>ความมุ่งหมายของการวิจัย</u>

เพื่อศึกษาว่าไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด (cycles with one - vertex chords) เป็นเกรซฟูลกราฟหรือไม่

<u>ความสำคัญของการวิจัย</u>

เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

<u>นิยามศัพท์เฉพาะ</u>

1. กราฟ (graph)

"กราฟ" คือคู่อันดับ (V,E) โดยที่ V เป็นเซตจำกัด (finite set) ที่ไม่เป็นเซตว่าง (empty set) ของสมาชิกที่เรียกว่าจุด (vertex) และ E เป็นแฟมิลี่จำกัด (finite family) ของคู่ไม่อันดับของสมาชิกใน V ซึ่งเรียกสมาชิกของ E ว่าเส้น (edge)

เราจะเขียน (u,v) แทนเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด u และ v

2. กราฟไอโซมอร์ฟิสซึม (graph isomorphism)

"ไอโซมอร์ฟิสซึม" จากกราฟ $G = (V,E)$ ไปยังกราฟ $G' = (V',E')$ คือฟังก์ชัน $\Psi : V \to V'$ โดยที่ Ψ มีคุณสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

2.1 Ψ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) จาก V ไปบน (onto) V'

2.2 ถ้า $u,v \in V$ แล้ว $(u,v) \in E$ ก็ต่อเมื่อ $(\Psi(u), \Psi(v)) \in E'$

กราฟ G จะ "ไอโซมอร์ฟิค (isomorphic)" กับกราฟ G' (ใช้สัญลักษณ์ $G \cong G'$) ก็ต่อเมื่อมีไอโซมอร์ฟิสซึมจาก G ไปยัง G'

กำหนดกราฟ G โดยที่ $|V| = m$

จากนิยาม ไอโซมอร์ฟิสซึม เราสามารถกำหนด $V = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$
$X = \{(a_i, a_j) \mid i = 0,1,2,\ldots, m-1 \;;\; j = 0,1,2,\ldots, m-1\}$
เราจะได้ว่า $G = (V,E)$ โดยที่ $E \subseteq X$

๓. ไซเคิลที่มี m จุด (cycle of order m)

กำหนด $V = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$

$$E = \{(a_0,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{m-2},a_{m-1}),(a_{m-1},a_0)\}$$

เราจะเรียก $C_m = (V,E)$ ว่า "ไซเคิลที่มี m จุด"

๔. ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ด (cycle with a chord)

จาก ๓. กำหนดไซเคิล $C_m = (V,E)$

เราจะเรียกกราฟ $G = (V',E')$ ว่า "ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ด" ถ้า $V' = V$ และมี a_i, a_j คู่หนึ่ง ซึ่ง $(a_i,a_j) \notin E$ และ $E' = E \cup \{(a_i,a_j)\}$

๕. ไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด (cycle with one-vertex chords)

จาก ๓. กำหนดไซเคิล $C_m = (V,E)$

เราจะเรียกกราฟ $G = (V',E')$ ว่า "ไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด"
ถ้า $V' = V \cup \{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+k}\}$, $k \in Z^+ \cup \{0\}$ และมี $a_i \in V$ ซึ่ง $a_i \neq a_o$
และ $E' = E \cup \{(a_o, a_{m+x}), (a_i, a_{m+x}) \mid x = 0,1,2,\ldots,k\}$

๖. แวลูเอชัน (valuation) และ เกรซฟูลกราฟ

กำหนดกราฟ $G = (V,E)$ โดยที่ $|E| = m$

"แวลูเอชัน" ของกราฟ G คือฟังก์ชัน θ จาก V ไปยังเซต $N_m = \{0,1,2,\ldots,m\}$

กำหนด "เวท (weight)" ของเส้น $(u,v) \in E$ ภายใต้ แวลูเอชัน θ ดังนี้

$$w(u,v) = |\theta(u) - \theta(v)|$$

เราจะเรียกแวลูเอชัน Θ ว่า "เกรซฟูลแวลูเอชัน (graceful valuation)" ก็ต่อเมื่อ w เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก E ไปบน $N_m - \{0\}$

เราจะเรียกกราฟ G ว่า "เกรซฟูลกราฟ (graceful graph)" ก็ต่อเมื่อ G มีเกรซฟูลแวลูเอชัน

บทที่ ๒

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

<u>ผลงานวิจัยเกี่ยวกับเกรซฟูลกราฟ</u>

โรซา (Rosa. 1966 : 349 - 355) พิสูจน์ได้ว่าไซเคิล C_n ที่มี n จุดจะเป็นเกรซฟูลกราฟ ถ้า $n \equiv 0$ หรือ 3 (mod 4)

โกลอมบ์ (Golomb. 1972 : 23 - 27) พิสูจน์ได้ว่าคอมพลีทกราฟ (complete graph) K_n, $n \geq 5$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ และในปี ค.ศ. ๑๙๗๔ โกลอมบ์ (Golomb. 1974 : 499 - 501) ได้หาเกรซฟูลสับกราฟ (graceful subgraph) ที่มีจำนวนเส้นเท่ากับ $[n^2 / 4] + n - 2$ เส้นของคอมพลีทกราฟ K_n สำหรับทุก ๆ n

แคฮิท (Cahit. 1976 : 35 - 37) ได้แสดงว่าคอมพลีทไบนารีทรี (complete binary tree) ซึ่งมีจำนวนจุดเท่ากับ $2^k - 1$, $k = 2,3,4,5$ เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค โรเจอร์ และแทน (Koh, Rogers and Tan. 1977 : 207 - 211) ได้แสดงว่าทุก ๆ คอมพลีท เอม-อารีทรี (complete m-ary tree) เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค โรเจอร์ และลิม (Koh, Rogers and Lim. 1979 : 58) พิสูจน์ได้ว่า ถ้าให้ T เป็นเกรซฟูลทรี และ G เป็นกราฟใดกราฟหนึ่งต่อไปนี้

๑. สตาร์กราฟ (star graph) ที่มี n จุด, $n \geq 2$

๒. กราฟที่มีจุดไอโซเลต (isolated vertices) n จุด, $n \geq 1$

๓. กราฟที่มี n จุด และ 1 เส้น, $n \geq 2$

แล้วจะได้ $G + T$ เป็นเกรซฟูลกราฟ

โบเดนดิค ชูมเชอร์ และเวกเนอร์ (Bodendiek, Schumacher and Wegner. 1977 : 49 - 58) ได้ตั้งปริศนา (conjecture) ว่าทุก ๆ ไซเคิลที่มีคอร์ดหนึ่งคอร์ดเป็นเกรซฟูลกราฟซึ่งได้ถูกพิสูจน์ว่าเป็นจริงโดยดีลอม และคณะ (Delorme and others. 1980 : 409 - 415)

โค และคณะ (Koh and others. 1980 : 559 - 571) พิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ ไซเคิลที่มี 2 - คอนสิคูทีฟคอร์ด (cycle with 2 - consecutive chords) เป็นเกรซฟูลกราฟ

โค และณรงค์ ปั้นนิ่ม (Koh and Narong Punnim. 1982 : 49 - 63) พิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ ไซเคิลที่มี 3 - คอนสิคูทีฟคอร์ด (cycle with 3 - consecutive chords) เป็นเกรซฟูลกราฟ

โคและแยป (Koh and Yap. 1985 : 41 - 48) พิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ ไซเคิลที่มี P_3 - คอร์ด (cycle with a P_3 - chord) เป็นเกรซฟูลกราฟ

บทที่ 3

ผลการวิจัย

กำหนดให้ $C_m(p, k)$ เป็นสัญลักษณ์แทนกราฟของไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด โดยที่กราฟดังกล่าวมีความยาว (length) ของพาธ (path) $a_0 - a_{m-1} - a_{m-2} - \ldots - a_{i+1} - a_i$, $i < m$, เท่ากับ p และมีจำนวนคอร์ด k + 1 คอร์ด ซึ่งมีจุดปลายร่วมกัน

จากนิยามกราฟไอโซมอร์ฟิสซึมจะได้ว่า $C_m(p,k) \cong C_m(m-p, k)$ ดังนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณา $p \leq [\frac{m}{2}]$

ในการศึกษากราฟ $C_m(p, k)$ ผู้วิจัยจะแบ่งกราฟออกเป็น 16 พวก โดยแบ่งตามจำนวนจุดบน C_m, $m \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ และความยาวของพาธ $p \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$

จากการศึกษาได้ผลดังต่อไปนี้

3.1 เกรซฟูลแวลูเอชันของกราฟ

ทฤษฎีบท 1 กราฟ $C_m(p, k)$, $k \geq 1$ และ $m \equiv 0,3 \pmod 4$ เป็นเกรซฟูลกราฟ

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 ทำได้โดยการสร้างเกรซฟูลแวลูเอชัน θ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1) เมื่อ $m = 4y$, $p = 4t$, $t \geq 1$

$$\theta(a_i) = \begin{cases} j & ; i = 2j & , j = 0,1,2,\ldots,y-t \\ y-t+k+2+j & ; i = 2y-2t+2+2j & , j = 0,1,2,\ldots,y+t-2 \\ 2y+k+1+j & ; i = m-1-2j & , j = 0,1,2,\ldots,2t-1 \\ 2y+k+2t+1+j & ; i = m+j & , j = 0,1,2,\ldots,k \\ 2y+2k+2t+2+j & ; i = m-p-1-2j & , j = 0,1,2,\ldots,y-2t-1 \\ & & \text{ถ้า } y > 2t \\ 3y+2k+3+j & ; i = 2y-1-2j & , j = 0,1,2,\ldots,y-1 \end{cases}$$

กรณีที่ ๒) เมื่อ $m = 4y,\ p = 4t + 1,\ t \geq 0$

๒.๑ ในกรณีที่ $p + 2t < 2y$

เมื่อ $t = 0$

$$\theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ y+k+2+j & ;\ i = 2y+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ 2y+k+2+j & ;\ i = m+j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2y+2k+3+j & ;\ i = m-1-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2y-1 \end{cases}$$

เมื่อ $t \geq 1$

$$\theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ y+1+j & ;\ i = 2y+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ t-1 \\ y+t+k+2+j & ;\ i = 2y+2t+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-3t-1 \\ 2y-2t+k+2+j & ;\ i = m+j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2y-2t+2k+3+j & ;\ i = m-4t+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2t-1 \\ 2y+2k+3+j & ;\ i = m-1-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2y-1 \end{cases}$$

๒.๒ ในกรณีที่ $p + 2t > 2y$

$$\theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ y+1+j & ;\ i = 2y+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-2t-1 \\ 2y-2t+1+j & ;\ i = m+j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2y-2t+k+2+j & ;\ i = m-4t+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 3t-y-1 \\ & \qquad \text{ถ้า } 3t \geq y+1 \\ y+t+2k+3+j & ;\ i = 2y+2t+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-t-1 \\ 2y+2k+3+j & ;\ i = m-1-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2y-1 \end{cases}$$

กรณีที่ ๓) เมื่อ $m = 4y,\ p = 4t + 2,\ t \geq 0$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-t-1 \\ y-t+k+1+j & ;\ i = 2y-2t+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ t-1 \text{ ถ้า } t \geq 1 \\ y+k+2+j & ;\ i = 2y+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ 2y+k+2+j & ;\ i = m-1-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2t \\ 2y+k+2t+3+j & ;\ i = m+j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2y+2k+2t+4+j & ;\ i = m-4t-3-2j,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2y-2t-2 \end{cases}$$

กรณีที่ ๔) เมื่อ $m = 4y,\ p = 4t + 3,\ t \geq 0$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} 0 & ;\ i = 0 \\ j & ;\ i = m-2j \quad ,\ j = 1,2,\ldots,\ 2t+1 \\ 2t+2+j & ;\ i = m+j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2t+k+3+j & ;\ i = m-4t-4-2j,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-2t-3 \\ & \qquad\qquad \text{ถ้า } y-2t \geq 3 \\ k+y+2+j & ;\ i = 2y-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-1 \\ k+2y+2+j & ;\ i = 2j+1 \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ t \\ 2k+2y+t+4+j & ;\ i = 2t+3+2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2y-t-2 \end{cases}$$

กรณีที่ 5) เมื่อ $m = 4y + 3,\ p = 4t,\ t \geq 1$

5.1 ในกรณีที่ $p + 2t < 2y + 1$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ; i = 2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y+t \\ y+t+k+2+j & ; i = 2y+2t+2+2j, j = 0,1,2,\ldots, y-3t \\ 2y-2t+k+3+j & ; i = m+j \quad , j = 0,1,2,\ldots, k \\ 2y-2t+2k+4+j & ; i = 4y-p+4+2j, j = 0,1,2,\ldots, 2t-1 \\ 2y+2k+4+j & ; i = m-2-2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y-1 \\ 3y+2k+5+j & ; i = 2y+1-2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y \end{cases}$$

5.2 ในกรณีที่ $p + 2t > 2y + 1$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ; i = 2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, 2y-2t+1 \\ 2y-2t+2+j & ; i = m+j \quad , j = 0,1,2,\ldots, k \\ 2y-2t+k+3+j & ; i = 4y-p+4+2j, j = 0,1,2,\ldots, 3t-y-2 \\ & \text{ถ้า } 3t \geq y+2 \\ y+t+2k+3+j & ; i = 2y+2t+2+2j, j = 0,1,2,\ldots, y-t \\ 2y+2k+4+j & ; i = m-2-2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y-1 \\ 3y+2k+5+j & ; i = 2y+1-2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y \end{cases}$$

กรณีที่ 6) เมื่อ $m = 4y + 3,\ p = 4t + 1,\ t \geq 0$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} 0 & ; i = 0 \\ j & ; i = m-2j \quad , j = 1,2,\ldots,2t \text{ ถ้า } t \geq 1 \\ 2t+1+j & ; i = m+j \quad , j = 0,1,2,\ldots, k \\ 2t+k+2+j & ; i = m-4t-2-2j, j = 0,1,2,\ldots, y-2t-1 \text{ ถ้า } y > 2t \\ k+y+3+j & ; i = 2y+1-2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, y \\ k+2y+4+j & ; i = 2+2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, t-1 \text{ ถ้า } t \geq 1 \\ 2k+2y+t+5+j & ; i = 2t+2+2j \quad , j = 0,1,2,\ldots, 2y-t \end{cases}$$

กรณีที่ 7) เมื่อ $m = 4y + 3,\ p = 4t + 2,\ t \geq 0$

7.1 ในกรณีที่ $p + 2t < 2y + 1$

เมื่อ $t = 0$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y \\ y+k+3+j & ;\ i = 2y+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y-1 \\ 2y+k+3+j & ;\ i = m+j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ k \\ 2y+2k+4 & ;\ i = m-1 & \\ 2y+2k+5+j & ;\ i = m-2-2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ 2y \end{cases}$$

เมื่อ $t \geq 1$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y \\ y+2+j & ;\ i = 2y+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ t-1 \\ y+t+k+3+j & ;\ i = 2y+2t+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y-3t-1 \\ 2y-2t+k+3+j & ;\ i = m+j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ k \\ 2y-2t+2k+4+j & ;\ i = 4y-4t+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ 2t \\ 2y+2k+5+j & ;\ i = m-2-2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ 2y \end{cases}$$

7.2 ในกรณีที่ $p + 2t > 2y + 1$

$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y \\ y+2+j & ;\ i = 2y+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y-2t-1 \\ 2y-2t+2+j & ;\ i = m+j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ k \\ 2y-2t+k+3+j & ;\ i = 4y-4t+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ 3t-y-1 \\ & & \text{ถ้า } 3t \geq y+1 \\ y+t+2k+4+j & ;\ i = 2y+2t+2+2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ y-t \\ 2y+2k+5+j & ;\ i = m-2-2j & ,\ j = 0,1,2,\dots,\ 2y \end{cases}$$

กรณีที่ 8) เมื่อ $m = 4y + 3,\ p = 4t + 3,\ t \geq 0$

กรณีที่ ๘) เมื่อ $m = 4y + 3,\ p = 4t + 3,\ t \geq 0$

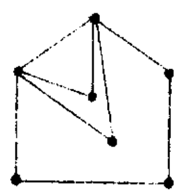
$$\Theta(a_i) = \begin{cases} j & ;\ i = 2j \qquad\qquad\quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-t \\ y-t+k+2+j & ;\ i = 2y-2t+2+2j,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y+t \\ 2y+k+3+j & ;\ i = m-2-2j \qquad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ 2t \\ 2y+k+2t+4+j & ;\ i = m+j \qquad\qquad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ k \\ 2y+2k+2t+5+j & ;\ i = m-4t-4-2j,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y-2t-2 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ถ้า } y-2t \geq 2 \\ 3y+2k+5+j & ;\ i = 2y+1-2j \quad ,\ j = 0,1,2,\ldots,\ y \end{cases}$$

๓.๒ <u>กราฟที่ไม่มีเกรซฟูลแวลูเอชัน</u>

ในหัวข้อ ๓.๒ นี้ ผู้วิจัยจะยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่ามีกราฟ $C_m\ (p,\ k)$ เมื่อ $m \equiv 1,2 \pmod 4$, $k = 1$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ

<u>ตัวอย่างที่ ๑</u> เมื่อ $m = 5,\ k = 1$ และ $p = 1$

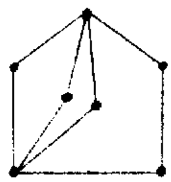
รูปกราฟ $C_5\ (1,\ 1)$ แสดงได้ดังนี้



กราฟ $C_5\ (1,\ 1)$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟซึ่งแสดงได้โดยใช้โปรแกรม P1V 7 ในภาคผนวกและเนื่องจาก $C_5\ (4,\ 1) \cong C_5\ (1,\ 1)$ ดังนั้น $C_5\ (4,\ 1)$ จึงไม่เป็นเกรซฟูลกราฟด้วย

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> เมื่อ $m = 5$, $k = 1$ และ $p = 2$

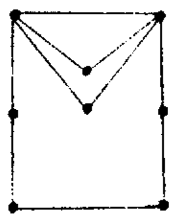
รูปกราฟ C_5 (2, 1) แสดงได้ดังนี้



กราฟ C_5 (2, 1) ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งแสดงได้โดยใช้โปรแกรม P 2 V 7 ในภาคผนวก และเนื่องจาก $C_5 (3, 1) \cong C_5 (2, 1)$ ดังนั้น C_5 (3, 1) จึงไม่เป็นเกรซฟูลกราฟด้วย

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> เมื่อ $m = 6$, $k = 1$ และ $p = 1$

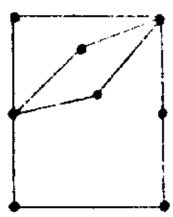
รูปกราฟ C_6 (1, 1) แสดงได้ดังนี้



กราฟ C_6 (1, 1) ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งแสดงได้โดยใช้โปรแกรม PIC 1 ในภาคผนวก

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> เมื่อ $m = 6$, $k = 1$ และ $p = 2$

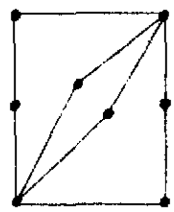
รูปกราฟ C_6 (2, 1) แสดงได้ดังนี้



กราฟ C_6 (2, 1) ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งแสดงได้โดยใช้โปรแกรม PIC 2 ในภาคผนวกและเนื่องจาก $C_6 (4, 1) \cong C_6 (2, 1)$ ดังนั้น C_6 (4, 1) จึงไม่เป็นเกรซฟูลกราฟด้วย

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> เมื่อ $m = 6$, $k = 1$ และ $p = 3$

รูปกราฟ $C_6\ (3,\ 1)$ แสดงได้ดังนี้



กราฟ $C_6\ (3,\ 1)$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งแสดงได้โดยใช้โปรแกรม PIC 3 ในภาคผนวก

3.3 <u>สรุปผลการวิจัย</u>

ในการศึกษากราฟ $C_m\ (p,\ k)$ ผู้วิจัยได้ผลว่า กราฟ $C_m\ (p,\ k)$ เมื่อ $m \equiv 0,3 \pmod 4$ $k \geq 1$ เป็นเกรซฟูลกราฟ และมีกราฟ $C_m\ (p,\ k)$ เมื่อ $m \equiv 1,2 \pmod 4$, $k = 1$ ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ ซึ่งผลที่ได้นี้คล้ายคลึงกับที่ โรซา (A. Rosa) ได้พิสูจน์ไว้ว่า ไซเคิล C_m จะเป็นเกรซฟูลกราฟ ถ้า $m \equiv 0,3 \pmod 4$

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

นิตยา ปิงชัย ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น หน่วยพิมพ์เอกสารทางวิชาการ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ม.ป.ป., ๕๑๐ หน้า

Bodendiek, M., H. Schumacher and H. Wegner. "Uber graziose Numerierungen von Graphen," Elemente der Mathematik. 32 : 49 - 58, 1977.

Cahit, I. "Are all complete binary trees graceful ?," Amer.Math. Monthly. 83 : 35 - 37, January, 1976.

Delorme, C. and others. "Cycles with a chord are graceful," J. Graph Theory. 4 : 409 - 415, 1980.

Golomb, Solomon W. "How to number a graph," in Graph Theory and Computing. p. 23 - 27, New York, Academic Press, 1972.

_______. "The largest graceful subgraph of the complete graph," Amer. Math. Monthly. 81 : 499 - 501, 1974.

Harary, Frank. Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969. 247 p.

Koh, K.M. and others. "Graceful graphs : Some further results and problems," in Proceedings of the 11^{th} Southeastern Conference on Combinatories, Graph Theory, and Computing (March, 1980) U.S.A. p. 559 - 571, Congressus Numerantium, 1980.

Koh, K.M., D.G. Rogers and C.K. Lim. "On graceful graphs I : Sum of graphs," Sea Bull.Math. 3 : 58, August, 1979.

Koh, K.M., D.G. Rogers and T. Tan. "On graceful trees," Nanta Mathematica. 10 : 207 - 211, 1977.

Koh, K.M. and Narong Punnim. "On graceful graphs : Cycles with 3-consecutive chords," Bull. Malaysian Math. Soc. 2 : 49 - 63, 1982.

Koh, K.M. and K.Y. Yap. "Graceful numberings of cycles with a p_3-chord," Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica. 13 : 41 - 48, March, 1985.

Rosa, A. "On certain valuations of the vertices of a graph," in Theory of Graphs. p. 349 - 355, Proc. International Symposium, Rome, 1966.

ภาคผนวก

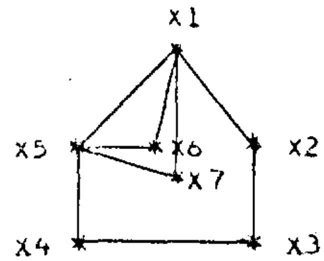
สาระสำคัญในภาคผนวก ผู้วิจัยได้รวบรวมโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการแสดงความไม่เป็นเกรซฟูลกราฟของ $C_m(p,k)$ เมื่อ $m \equiv 1,2 \pmod 4$ และ $k = 1$ ซึ่งได้กล่าวไว้บ้างแล้วในหัวข้อ 3.2 นอกเหนือจากที่กล่าวมาผู้วิจัยคิดว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่แสดงในภาคผนวกนี้ ยังอาจเป็นแนวทางสำหรับผู้สนใจในการศึกษาเกรซฟูลกราฟ หรือกราฟที่ไม่เป็นเกรซฟูลของกราฟชนิดอื่น ๆ ที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน

ข้อมูลที่ใช้สำหรับโปรแกรม P1V 7 และ P2V 7

0	1	2	3	4	5	9
0	1	2	3	4	6	9
0	1	2	3	4	7	9
0	1	2	3	4	8	9
0	1	2	3	5	6	9
0	1	2	3	5	7	9
0	1	2	3	5	8	9
0	1	2	3	6	7	9
0	1	2	3	6	8	9
0	1	2	3	7	8	9
0	1	2	4	5	6	9
0	1	2	4	5	7	9
0	1	2	4	5	8	9
0	1	2	4	6	7	9
0	1	2	4	6	8	9
0	1	2	4	7	8	9
0	1	2	5	6	7	9
0	1	2	5	6	8	9
0	1	2	5	7	8	9
0	1	2	6	7	8	9
0	1	3	4	5	6	9
0	1	3	4	5	7	9
0	1	3	4	5	8	9
0	1	3	4	6	7	9
0	1	3	4	6	8	9
0	1	3	4	7	8	9
0	1	3	5	6	7	9
0	1	3	5	6	8	9
0	1	3	5	7	8	9
0	1	3	6	7	8	9
0	1	4	5	6	7	9
0	1	4	5	6	8	9
0	1	4	5	7	8	9
0	1	4	6	7	8	9
0	1	5	6	7	8	9
0	2	3	4	5	6	9
0	2	3	4	5	7	9
0	2	3	4	5	8	9
0	2	3	4	6	7	9
0	2	3	4	6	8	9
0	2	3	4	7	8	9
0	2	3	5	6	7	9
0	2	3	5	6	8	9
0	2	3	5	7	8	9
0	2	3	6	7	8	9
0	2	4	5	6	7	9
0	2	4	5	6	8	9
0	2	4	5	7	8	9
0	2	4	6	7	8	9
0	2	5	6	7	8	9
0	3	4	5	6	7	9
0	3	4	5	6	8	9
0	3	4	5	7	8	9
0	3	4	6	7	8	9
0	3	5	6	7	8	9
0	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0

โปรแกรม PIV7

```
C -----------------------------------------------------------------
C   FN      FT        FM
C   PIV7    FORTRAN   A1
C
C   FI 3    DISK PIV7    DATA A1
C   FI 4    TER
C   FI 5    DISK PIV7    OUT  A1
C
C
C
C -----------------------------------------------------------------
C
```



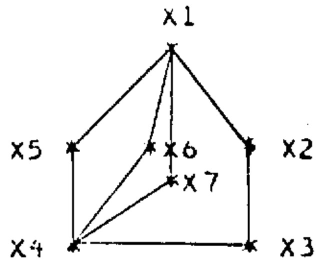

```
      INTEGER X(7),Y(9)
      WRITE(4,10)
   10 FORMAT('1','*********************************************
     1***********',//,30X,'I AM THINKING.',//,'*****************
     2************************************************',//)
      ICOUNT=0
C -------------------------
C LOOP BEGIN AT LINE NO.15
C
   15 ICHECK=0
      READ(3,20)(X(I),I=1,7)
   20 FORMAT(7I4)
      IF (X(2).EQ.0) STOP
      ICOUNT=ICOUNT+1
      DO 300 I1=1,7
      DO 310 I2=1,7
      IF (I2.EQ.I1) GOTO 310
      Y(1)=IABS(X(I1)-X(I2))
      DO 320 I3=1,7
      IF (I3.EQ.I1) GOTO 320
      IF (I3.EQ.I2) GOTO 320
      Y(2)=IABS(X(I2)-X(I3))
      IF (Y(2).EQ.Y(1)) GOTO 320
      DO 330 I4=1,7
      IF (I4.EQ.I1) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I2) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I3) GOTO 330
      Y(3)=IABS(X(I3)-X(I4))
      IF (Y(3).EQ.Y(1)) GOTO 330
      IF (Y(3).EQ.Y(2)) GOTO 330
      DO 340 I5=1,7
      IF (I5.EQ.I1) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I2) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I3) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I4) GOTO 340
```

```
Y(4)=IABS(X(I4)-X(I5))
IF (Y(4).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(3)) GOTO 340
Y(5)=IABS(X(I5)-X(I1))
IF (Y(5).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(3)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(4)) GOTO 340
DO 350 I6=1,7
IF (I6.EQ.I1) GOTO 350
IF (I6.EQ.I2) GOTO 350
IF (I6.EQ.I3) GOTO 350
IF (I6.EQ.I4) GOTO 350
IF (I6.EQ.I5) GOTO 350
Y(6)=IABS(X(I5)-X(I6))
IF (Y(6).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(5)) GOTO 350
Y(7)=IABS(X(I6)-X(I1))
IF (Y(7).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(5)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(6)) GOTO 350
DO 360 I7=1,7
IF (I7.EQ.I1) GOTO 360
IF (I7.EQ.I2) GOTO 360
IF (I7.EQ.I3) GOTO 360
IF (I7.EQ.I4) GOTO 360
IF (I7.EQ.I5) GOTO 360
IF (I7.EQ.I6) GOTO 360
Y(8)=IABS(X(I5)-X(I7))
IF (Y(8).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(6)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(7)) GOTO 360
Y(9)=IABS(X(I7)-X(I1))
IF (Y(9).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(9).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(9).EQ.Y(3)) GOTO 360
```

```
      IF (Y(9).EQ.Y(4)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(5)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(6)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(7)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(8)) GOTO 360
C ------------------------------------------
      WRITE(4,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7)
      WRITE(5,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7)
   40 FORMAT('0','------------------------------------------',/,
     1'FIND OUT ... ',7I4)
      WRITE(4,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7
      WRITE(5,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7
   39 FORMAT(' ','I...      = ',7I4)
      ICHECK=1
C
C ------------------------------------------
  360 CONTINUE
  350 CONTINUE
  340 CONTINUE
  330 CONTINUE
  320 CONTINUE
  310 CONTINUE
  300 CONTINUE
      IF(ICHECK.EQ.0)GOTO 400
      GOTO 15
  400 WRITE(4,50)ICOUNT,(X(I),I=1,7)
      WRITE(5,50)ICOUNT,(X(I),I=1,7)
   50 FORMAT(' ',10X,'NO.',I4,'  SET     ',7I4,' --------- OK.')
      GOTO 15
      END
**************************************************************
```

โปรแกรม P2V7

```
C ------------------------------------------------------------------
C   FN      FT          FM
C   P2V7    FORTRAN     A1
C
C   FI 3    DISK  P1V7    DATA  A1
C   FI 4    TER
C   FI 5    DISK  P2V7    OUT   A1
C
C
C
C ------------------------------------------------------------------
C
```




```
      INTEGER X(7),Y(9)
      WRITE(4,10)
   10 FORMAT('1','*************************************************
     1************',//,30X,'I AM THINKING.',//,'***************
     2*************************************************',//)
      ICOUNT=0
C ---------------------
C LOOP BEGIN AT LINE NO.15
C
   15 ICHECK=0
      READ(3,20)(X(I),I=1,7)
   20 FORMAT(7I4)
      IF (X(2).EQ.0) STOP
      ICOUNT=ICOUNT+1
      DO 300 I1=1,7
      DO 310 I2=1,7
      IF (I2.EQ.I1) GOTO 310
      Y(1)=IABS(X(I1)-X(I2))
      DO 320 I3=1,7
      IF (I3.EQ.I1) GOTO 320
      IF (I3.EQ.I2) GOTO 320
      Y(2)=IABS(X(I2)-X(I3))
      IF (Y(2).EQ.Y(1)) GOTO 320
      DO 330 I4=1,7
      IF (I4.EQ.I1) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I2) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I3) GOTO 330
      Y(3)=IABS(X(I3)-X(I4))
      IF (Y(3).EQ.Y(1)) GOTO 330
      IF (Y(3).EQ.Y(2)) GOTO 330
      DO 340 I5=1,7
      IF (I5.EQ.I1) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I2) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I3) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I4) GOTO 340
```

```
Y(4)=IABS(X(I4)-X(I5))
IF (Y(4).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(3)) GOTO 340
Y(5)=IABS(X(I5)-X(I1))
IF (Y(5).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(3)) GOTO 340
IF (Y(5).EQ.Y(4)) GOTO 340
DO 350 I6=1,7
IF (I6.EQ.I1) GOTO 350
IF (I6.EQ.I2) GOTO 350
IF (I6.EQ.I3) GOTO 350
IF (I6.EQ.I4) GOTO 350
IF (I6.EQ.I5) GOTO 350
Y(6)=IABS(X(I4)-X(I6))
IF (Y(6).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(5)) GOTO 350
Y(7)=IABS(X(I6)-X(I1))
IF (Y(7).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(5)) GOTO 350
IF (Y(7).EQ.Y(6)) GOTO 350
DO 360 I7=1,7
IF (I7.EQ.I1) GOTO 360
IF (I7.EQ.I2) GOTO 360
IF (I7.EQ.I3) GOTO 360
IF (I7.EQ.I4) GOTO 360
IF (I7.EQ.I5) GOTO 360
IF (I7.EQ.I6) GOTO 360
Y(8)=IABS(X(I4)-X(I7))
IF (Y(8).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(6)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(7)) GOTO 360
Y(9)=IABS(X(I7)-X(I1))
IF (Y(9).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(9).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(9).EQ.Y(3)) GOTO 360
```

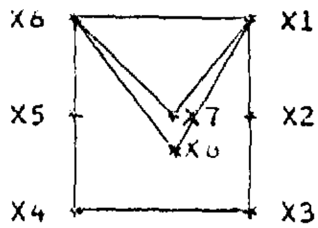
```
      IF (Y(9).EQ.Y(4)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(5)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(6)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(7)) GOTO 360
      IF (Y(9).EQ.Y(8)) GOTO 360
C --------------------------------------------------
      WRITE(4,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7)
      WRITE(5,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7)
   40 FORMAT('0','-------------------------------------------',/,
     1'FIND OUT ... ',7I4)
      WRITE(4,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7
      WRITE(5,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7
   39 FORMAT(' ','I...     = ',7I4)
      ICHECK=1
C
C --------------------------------------------------
  360 CONTINUE
  350 CONTINUE
  340 CONTINUE
  330 CONTINUE
  320 CONTINUE
  310 CONTINUE
  300 CONTINUE
      IF(ICHECK.EQ.0)GOTO 400
      GOTO 15
  400 WRITE(4,50)ICOUNT,(X(I),I=1,7)
      WRITE(5,50)ICOUNT,(X(I),I=1,7)
   50 FORMAT(' ',10X,'NO.',I4,'  SET      ',7I4,' --------- OK.')
      GOTO 15
      END
***********************************************************************
```

ข้อมูลที่ใช้สำหรับโปรแกรม PIC 1, PIC 2 และ PIC 3

0	1	2	3	4	5	6	10
0	1	2	3	4	5	7	10
0	1	2	3	4	5	8	10
0	1	2	3	4	5	9	10
0	1	2	3	4	6	7	10
0	1	2	3	4	6	8	10
0	1	2	3	4	6	9	10
0	1	2	3	4	7	8	10
0	1	2	3	4	7	9	10
0	1	2	3	4	8	9	10
0	1	2	3	5	6	7	10
0	1	2	3	5	6	8	10
0	1	2	3	5	6	9	10
0	1	2	3	5	7	8	10
0	1	2	3	5	7	9	10
0	1	2	3	5	8	9	10
0	1	2	3	6	7	8	10
0	1	2	3	6	7	9	10
0	1	2	3	6	8	9	10
0	1	2	3	7	8	9	10
0	1	2	4	5	6	7	10
0	1	2	4	5	6	8	10
0	1	2	4	5	6	9	10
0	1	2	4	5	7	8	10
0	1	2	4	5	7	9	10
0	1	2	4	5	8	9	10
0	1	2	4	6	7	8	10
0	1	2	4	6	7	9	10
0	1	2	4	6	8	9	10
0	1	2	4	7	8	9	10
0	1	2	5	6	7	8	10
0	1	2	5	6	7	9	10
0	1	2	5	6	8	9	10
0	1	2	5	7	8	9	10
0	1	2	6	7	8	9	10
0	1	3	4	5	6	7	10
0	1	3	4	5	6	8	10
0	1	3	4	5	6	9	10
0	1	3	4	5	7	8	10
0	1	3	4	5	7	9	10
0	1	3	4	5	8	9	10
0	1	3	4	6	7	8	10
0	1	3	4	6	7	9	10
0	1	3	4	6	8	9	10
0	1	3	4	7	8	9	10
0	1	3	5	6	7	8	10
0	1	3	5	6	7	9	10
0	1	3	5	6	8	9	10
0	1	3	5	7	8	9	10
0	1	3	6	7	8	9	10
0	1	4	5	6	7	8	10
0	1	4	5	6	7	9	10
0	1	4	5	6	8	9	10
0	1	4	5	7	8	9	10
0	1	4	6	7	8	9	10
0	1	5	6	7	8	9	10
0	2	3	4	5	6	7	10
0	2	3	4	5	6	8	10
0	2	3	4	5	6	9	10
0	2	3	4	5	7	8	10
0	2	3	4	5	7	9	10
0	2	3	4	5	8	9	10
0	2	3	4	6	7	8	10
0	2	3	4	6	7	9	10
0	2	3	4	6	8	9	10
0	2	3	4	7	8	9	10
0	2	3	5	6	7	8	10
0	2	3	5	6	7	9	10
0	2	3	5	6	8	9	10
0	2	3	5	7	8	9	10
0	2	3	6	7	8	9	10
0	2	4	5	6	7	8	10
0	2	4	5	6	7	9	10
0	2	4	5	6	8	9	10
0	2	4	5	7	8	9	10
0	2	4	6	7	8	9	10
0	2	5	6	7	8	9	10
0	3	4	5	6	7	8	10
0	3	4	5	6	7	9	10
0	3	4	5	6	8	9	10
0	3	4	5	7	8	9	10
0	3	4	6	7	8	9	10
0	3	5	6	7	8	9	10
0	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0

โปรแกรม PIC 1

```
C -----------------------------------------------------------------
C   FN      FT         FM
C   PIC1    FORTRAN    A1
C
C   FI 3    DISK INP2    DATA A1
C   FI 4    TER
C   FI 5    DISK OUTP1   OUT  A1
C
C
C
C -----------------------------------------------------------------
```



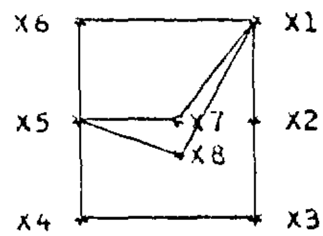

```
C
      INTEGER X(8),Y(10)
      WRITE(4,10)
   10 FORMAT('1','*****************************************************
     1**************',//,30X,'I AM THINKING.',//,'***************
     2*******************************************',//)
      ICOUNT=0
C ------------------------------
C LOOP BEGIN AT LINE NO.15
C
   15 ICHECK=0
      READ(3,20)(X(I),I=1,8)
   20 FORMAT(8I4)
      IF (X(2).EQ.0) STOP
      ICOUNT=ICOUNT+1
      DO 300 I1=1,8
      DO 310 I2=1,8
      IF (I2.EQ.I1) GOTO 310
      Y(1)=IABS(X(I1)-X(I2))
      DO 320 I3=1,8
      IF (I3.EQ.I1) GOTO 320
      IF (I3.EQ.I2) GOTO 320
      Y(2)=IABS(X(I2)-X(I3))
      IF (Y(2).EQ.Y(1)) GOTO 320
      DO 330 I4=1,8
      IF (I4.EQ.I1) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I2) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I3) GOTO 330
      Y(3)=IABS(X(I3)-X(I4))
      IF (Y(3).EQ.Y(1)) GOTO 330
      IF (Y(3).EQ.Y(2)) GOTO 330
      DO 340 I5=1,8
      IF (I5.EQ.I1) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I2) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I3) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I4) GOTO 340
```

```
Y(4)=IABS(X(I4)-X(I5))
IF (Y(4).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(3)) GOTO 340
DO 350 I6=1,8
IF (I6.EQ.I1) GOTO 350
IF (I6.EQ.I2) GOTO 350
IF (I6.EQ.I3) GOTO 350
IF (I6.EQ.I4) GOTO 350
IF (I6.EQ.I5) GOTO 350
Y(5)=IABS(X(I5)-X(I6))
IF (Y(5).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(4)) GOTO 350
Y(6)=IABS(X(I6)-X(I1))
IF (Y(6).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(5)) GOTO 350
DO 360 I7=1,8
IF (I7.EQ.I1) GOTO 360
IF (I7.EQ.I2) GOTO 360
IF (I7.EQ.I3) GOTO 360
IF (I7.EQ.I4) GOTO 360
IF (I7.EQ.I5) GOTO 360
IF (I7.EQ.I6) GOTO 360
Y(7)=IABS(X(I6)-X(I7))
IF (Y(7).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(6)) GOTO 360
Y(8)=IABS(X(I7)-X(I1))
IF (Y(8).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(6)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(7)) GOTO 360
DO 370 I8=1,8
IF (I8.EQ.I1) GOTO 370
IF (I8.EQ.I2) GOTO 370
IF (I8.EQ.I3) GOTO 370
IF (I8.EQ.I4) GOTO 370
IF (I8.EQ.I5) GOTO 370
IF (I8.EQ.I6) GOTO 370
IF (I8.EQ.I7) GOTO 370
```

```
      Y(9)=IABS(X(I6)-X(I8))
      IF (Y(9).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(8)) GOTO 370
      Y(10)=IABS(X(I8)-X(I1))
      IF (Y(10).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(8)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(9)) GOTO 370
C ------------------------------------------------
      WRITE(4,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
      WRITE(5,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
   40 FORMAT('0','-------------------------------------------',/,
     1'FIND OUT...   ',8I4)
      WRITE(4,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
      WRITE(5,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
   39 FORMAT(' ','I...      = ',8I4)
      ICHECK=1
C ------------------------------------------------
  370 CONTINUE
  360 CONTINUE
  350 CONTINUE
  340 CONTINUE
  330 CONTINUE
  320 CONTINUE
  310 CONTINUE
  300 CONTINUE
      IF(ICHECK.EQ.0)GOTO 400
      GOTO 15
  400 WRITE(4,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
      WRITE(5,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
   50 FORMAT(' ',10X,'NO.',I4,'   SET     ',8I4,' --------- OK.')
      GOTO 15
      END
****************************************************************
```

โปรแกรม PIC 2

```
C ---------------------------------------------------------------------
C   FN      FT        FM
C   PIC2    FORTRAN   A1
C
C   FI 3    DISK INP2    DATA  A1
C   FI 4    TER
C   FI 5    DISK OUTP2   OUT   A1
C
C
C
C ---------------------------------------------------------------------
C
      INTEGER X(8),Y(10)
      WRITE(4,10)
   10 FORMAT('1','*******************************************************
     1**************',//,30X,'I AM THINKING.',//,'*****************
     2*******************************************',//)
      ICOUNT=0
C ------------------------------
C LOOP BEGIN AT LINE NO.15
C
   15 ICHECK=0
      READ(3,20)(X(I),I=1,8)
   20 FORMAT(8I4)
      IF (X(2).EQ.0) STOP
      ICOUNT=ICOUNT+1
      DO 300 I1=1,8
      DO 310 I2=1,8
      IF (I2.EQ.I1) GOTO 310
      Y(1)=IABS(X(I1)-X(I2))
      DO 320 I3=1,8
      IF (I3.EQ.I1) GOTO 320
      IF (I3.EQ.I2) GOTO 320
      Y(2)=IABS(X(I2)-X(I3))
      IF (Y(2).EQ.Y(1)) GOTO 320
      DO 330 I4=1,8
      IF (I4.EQ.I1) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I2) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I3) GOTO 330
      Y(3)=IABS(X(I3)-X(I4))
      IF (Y(3).EQ.Y(1)) GOTO 330
      IF (Y(3).EQ.Y(2)) GOTO 330
      DO 340 I5=1,8
      IF (I5.EQ.I1) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I2) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I3) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I4) GOTO 340
```

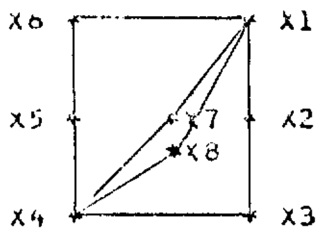


```
Y(4)=IABS(X(I4)-X(I5))
IF (Y(4).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(3)) GOTO 340
DO 350 I6=1,8
IF (I6.EQ.I1) GOTO 350
IF (I6.EQ.I2) GOTO 350
IF (I6.EQ.I3) GOTO 350
IF (I6.EQ.I4) GOTO 350
IF (I6.EQ.I5) GOTO 350
Y(5)=IABS(X(I5)-X(I6))
IF (Y(5).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(4)) GOTO 350
Y(6)=IABS(X(I6)-X(I1))
IF (Y(6).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(5)) GOTO 350
DO 360 I7=1,8
IF (I7.EQ.I1) GOTO 360
IF (I7.EQ.I2) GOTO 360
IF (I7.EQ.I3) GOTO 360
IF (I7.EQ.I4) GOTO 360
IF (I7.EQ.I5) GOTO 360
IF (I7.EQ.I6) GOTO 360
Y(7)=IABS(X(I5)-X(I7))
IF (Y(7).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(6)) GOTO 360
Y(8)=IABS(X(I7)-X(I1))
IF (Y(8).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(6)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(7)) GOTO 360
DO 370 I8=1,8
IF (I8.EQ.I1) GOTO 370
IF (I8.EQ.I2) GOTO 370
IF (I8.EQ.I3) GOTO 370
IF (I8.EQ.I4) GOTO 370
IF (I8.EQ.I5) GOTO 370
IF (I8.EQ.I6) GOTO 370
IF (I8.EQ.I7) GOTO 370
```

```
      Y(9)=IABS(X(I5)-X(I8))
      IF (Y(9).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(8)) GOTO 370
      Y(10)=IABS(X(I8)-X(I1))
      IF (Y(10).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(8)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(9)) GOTO 370
C ------------------------------------------------------------
      WRITE(4,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
      WRITE(5,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
   40 FORMAT('0','--------------------------------------------------',/,
     1'FIND OUT...   ',8I4)
      WRITE(4,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
      WRITE(5,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
   39 FORMAT(' ','I...       = ',8I4)
      ICHECK=1
C ------------------------------------------------------------
  370 CONTINUE
  360 CONTINUE
  350 CONTINUE
  340 CONTINUE
  330 CONTINUE
  320 CONTINUE
  310 CONTINUE
  300 CONTINUE
      IF(ICHECK.EQ.0)GOTO 400
      GOTO 15
  400 WRITE(4,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
      WRITE(5,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
   50 FORMAT(' ',10X,'NO.',I4,'   SET      ',8I4,' ---------- OK.')
      GOTO 15
      END
*****************************************************************
```

โปรแกรม PIC 3

```
C ----------------------------------------------------------------------
C   FN      FT          FM
C   PIC3    FORTRAN     A1
C
C   FI 3    DISK INP2    DATA  A1
C   FI 4    TEK
C   FI 5    DISK OUTP3   OUT   A1
C
C
C
C ----------------------------------------------------------------------
C
```




```
      INTEGER X(8),Y(10)
      WRITE(4,10)
   10 FORMAT('1','******************************************
     1**********',//,30X,'I AM THINKING.',//,'**************
     2*****************************************',//)
      ICOUNT=0
C ---------------------------------
C LOOP BEGIN AT LINE NO.15
C
   15 ICHECK=0
      READ(3,20)(X(I),I=1,8)
   20 FORMAT(8I4)
      IF (X(2).EQ.0) STOP
      ICOUNT=ICOUNT+1
      DO 300 I1=1,8
      DO 310 I2=1,8
      IF (I2.EQ.I1) GOTO 310
      Y(1)=IABS(X(I1)-X(I2))
      DO 320 I3=1,8
      IF (I3.EQ.I1) GOTO 320
      IF (I3.EQ.I2) GOTO 320
      Y(2)=IABS(X(I2)-X(I3))
      IF (Y(2).EQ.Y(1)) GOTO 320
      DO 330 I4=1,8
      IF (I4.EQ.I1) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I2) GOTO 330
      IF (I4.EQ.I3) GOTO 330
      Y(3)=IABS(X(I3)-X(I4))
      IF (Y(3).EQ.Y(1)) GOTO 330
      IF (Y(3).EQ.Y(2)) GOTO 330
      DO 340 I5=1,8
      IF (I5.EQ.I1) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I2) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I3) GOTO 340
      IF (I5.EQ.I4) GOTO 340
```

```
Y(4)=IABS(X(I4)-X(I5))
IF (Y(4).EQ.Y(1)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(2)) GOTO 340
IF (Y(4).EQ.Y(3)) GOTO 340
DO 350 I6=1,8
IF (I6.EQ.I1) GOTO 350
IF (I6.EQ.I2) GOTO 350
IF (I6.EQ.I3) GOTO 350
IF (I6.EQ.I4) GOTO 350
IF (I6.EQ.I5) GOTO 350
Y(5)=IABS(X(I5)-X(I6))
IF (Y(5).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(5).EQ.Y(4)) GOTO 350
Y(6)=IABS(X(I6)-X(I1))
IF (Y(6).EQ.Y(1)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(2)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(3)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(4)) GOTO 350
IF (Y(6).EQ.Y(5)) GOTO 350
DO 360 I7=1,8
IF (I7.EQ.I1) GOTO 360
IF (I7.EQ.I2) GOTO 360
IF (I7.EQ.I3) GOTO 360
IF (I7.EQ.I4) GOTO 360
IF (I7.EQ.I5) GOTO 360
IF (I7.EQ.I6) GOTO 360
Y(7)=IABS(X(I4)-X(I7))
IF (Y(7).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(7).EQ.Y(6)) GOTO 360
Y(8)=IABS(X(I7)-X(I1))
IF (Y(8).EQ.Y(1)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(2)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(3)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(4)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(5)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(6)) GOTO 360
IF (Y(8).EQ.Y(7)) GOTO 360
DO 370 I8=1,8
IF (I8.EQ.I1) GOTO 370
IF (I8.EQ.I2) GOTO 370
IF (I8.EQ.I3) GOTO 370
IF (I8.EQ.I4) GOTO 370
IF (I8.EQ.I5) GOTO 370
IF (I8.EQ.I6) GOTO 370
IF (I8.EQ.I7) GOTO 370
```

```
      Y(9)=IABS(X(I4)-X(I8))
      IF (Y(9).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(9).EQ.Y(8)) GOTO 370
      Y(10)=IABS(X(I8)-X(I1))
      IF (Y(10).EQ.Y(1)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(2)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(3)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(4)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(5)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(6)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(7)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(8)) GOTO 370
      IF (Y(10).EQ.Y(9)) GOTO 370
C ----------------------------------------------------------------
      WRITE(4,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
      WRITE(5,40)X(I1),X(I2),X(I3),X(I4),X(I5),X(I6),X(I7),X(I8)
   40 FORMAT('0','--------------------------------------------',/,
     1'FIND OUT...   ',8I4)
      WRITE(4,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
      WRITE(5,39)I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8
   39 FORMAT(' ','I...      = ',8I4)
      ICHECK=1
C ----------------------------------------------------------------
  370 CONTINUE
  360 CONTINUE
  350 CONTINUE
  340 CONTINUE
  330 CONTINUE
  320 CONTINUE
  310 CONTINUE
  300 CONTINUE
      IF(ICHECK.EQ.0)GOTO 400
      GOTO 15
  400 WRITE(4,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
      WRITE(5,50)ICOUNT,(X(I),I=1,8)
   50 FORMAT(' ',10X,'NO.',I4,'  SET     ',8I4,' ---------- OK.')
      GOTO 15
      END
*********************************************************************
```

การศึกษาเรื่องเกรซฟูลกราฟของไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด

บทคัดย่อ

ของ

สุนิภา วรินทร์เวช

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2529

ในการศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อต้องการหา เกรซฟูลแวลูเอชันของไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด หลังจากผู้วิจัยได้กำหนด C_m (p, k) เป็นสัญลักษณ์แทนกราฟของไซเคิลที่มีจุดบนคอร์ดหนึ่งจุด โดยที่กราฟดังกล่าวมีจำนวนคอร์ด k + 1 คอร์ด ซึ่งมีจุดปลายร่วมกัน และพาธที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดปลายของคอร์ดตามแนวไซเคิล มีความยาวเท่ากับ p แล้ว ผู้วิจัยได้แบ่งกราฟ $C_m(p, k)$ ออกเป็น 16 พวก โดยแบ่งตามจำนวนจุดบน C_m, $m \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ และความยาวของพาธ $p \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$

ผลที่ได้จากการศึกษา ประการแรกคือกราฟ C_m (p, k), $k \geq 1$ และ $m \equiv 0, 3 \pmod 4$ เป็นเกรซฟูลกราฟ ประการที่ 2 คือ กราฟ C_m (p, k), $k \geq 1$ และ $m \equiv 1, 2 \pmod 4$ ดูเหมือนว่าจะไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ กล่าวคือ ผู้วิจัย ได้ใช้คอมพิวเตอร์ แสดงได้ว่ากราฟ C_5 (1, 1), C_5 (2, 1), C_5 (3, 1), C_5 (4, 1), C_6 (1, 1), C_6 (2, 1), C_6 (3, 1) และ C_6 (4, 1) ไม่เป็นเกรซฟูลกราฟ

ON GRACEFUL GRAPHS : CYCLES WITH ONE - VERTEX CHORDS

AN ABSTRACT

BY

SUNIPA WARINWECH

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Education degree

at Srinakharinwirot University

March 1986

This study is to find a graceful valuation in each case of cycles with one-vertex chords. We have first defined $C_m (p,k)$ to represent the graph containing cycle of order m with k + 1 one-vertex chords having the same end points, and the shorter path from the end points on the cycle has length p. The class of all graphs $C_m (p,k)$ will be divided into sixteen subclasses according to the combinations of $m \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ and $p \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$. The two main results are obtained, namely, the graphs $C_m (p,k)$, where $m \equiv 0, 3 \pmod 4$ and $k \geq 1$, are all graceful, while, the graphs $C_m (p,k)$, where $m \equiv 1, 2 \pmod 4$ and $k \geq 1$, seem to be not graceful. By making use of a high speed computer, it can be easily shown that the graphs $C_5 (1,1)$, $C_5 (2,1)$, $C_5 (3,1)$, $C_5 (4, 1)$, $C_6 (1,1)$, $C_6 (2,1)$, $C_6 (3,1)$ and $C_6 (4,1)$ are not graceful.