การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปริญญานิพนธ์

ของ

ขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2546

ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทคัดย่อ

ของ

ขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2546

ท ๑๒๓๕๐๗

ขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม. (2546), *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ, รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียระพงษ์

การศึกษาครั้งนี้มีความมุ่งหมายของการวิจัย เพื่อสร้างบทเรียนและคู่มือครูเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ และเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาสอน 18 คาบ คาบละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

A STUDY OF LEARNING ACHIEVEMENT ON GRAPHS AND ITS APPLICATIONS OF MATHAYOM SUKSA IV STUDENT

AN ABSTRACT

BY

KWANTA PANBANLAME

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
April 2003

Kwanta Panbanlame. (2003). *A Study of Learning Achievement on Graphs and Its Applications of Mathayom Suksa IV Students.* Master Thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Kamon Ekthaichareon, Assoc. Prof. Orapin Cheerrapong.

The purpose of this research was twofold: (1) to construct a lesson on graphs and their applications together with teacher's manual and (2) to determine the effects of this lesson on students' achievement at Mathayom Suksa IV level.

A group of forty-five MS IV science students from Suksanareewittays School in Bangkok was selected as the sample for this study during the second semester of the 2002 academic year. With guidance of experts and suggestions from reliable sources the researcher constructed a lesson and its accompanying teacher's manual in line with the school mathematics curriculum. Based on these materials, the researcher taught the class for eighteen 50-miniute periods. At the end of the experiment the subjects were tested on graphs and their applications and their performances on the test were used for statistical analysis at the .01 level.

The findings revealed that the students successfully learned graphs and their applications as described in the constructed lesson.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ของ
นางสาวขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาภรณ์ หะวานนท์)
วันที่ ..... เดือน ..... พ.ศ. 2546

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียระพงษ์)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนูกฤติ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องมาจากได้รับความกรุณาเป็นอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ ประธานกรรมการที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียระพงษ์ กรรมการที่ปรึกษาซึ่งให้คำแนะนำแนวทางในการทำวิจัยมาโดยตลอด

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม และรองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนูกฤติ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ ส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่ม ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อารยา แจ่มจันทร์ อาจารย์ สายัณห์ โสธะโร ที่กรุณาให้คำแนะนำและตรวจสอบแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการโรงเรียน ผู้ช่วยฝ่ายวิชาการ และคณะครูหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ที่ให้ความอนุเคราะห์และความสะดวกต่าง ๆ ในการดำเนินการเก็บข้อมูลการวิจัยด้วยความเต็มใจ

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ให้กำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณพี่ เพื่อน และน้อง ๆ นิสิตปริญญาโทสาขาวิชาคณิตศาสตร์ รุ่นปี 2542 และทุกคนที่เป็นกำลังใจ ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

คุณค่า และประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครู อาจารย์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

ขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	3
	ขอบเขตของการวิจัย	3
	ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	3
	กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	3
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	3
	เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	3
	ตัวแปรที่ศึกษา	4
	นิยามศัพท์เฉพาะ	4
	สมมติฐานของการวิจัย	5
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
	ประวัติความเป็นมาของกราฟ	6
	มาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544	7
	ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานเพื่อศึกษาต่อในด้านวิทยาศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา	8
	มาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา	17
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	18
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกราฟ	19
3	วิธีดำเนินการวิจัย	21
	การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง	21
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	21
	ลักษณะของเครื่องมือ	21
	ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	22
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	24
	การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล	24

สารบัญ(ต่อ)

บทที่		หน้า
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	25
	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	25
5	สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	32
	สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน วิธีการดำเนินการวิจัย	32
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	32
	สมมติฐานของการวิจัย	32
	วิธีการดำเนินการวิจัย	32
	สรุปผลการวิจัย	32
	อภิปรายผล	33
	ข้อสังเกตจากการศึกษาวิจัย	35
	ข้อเสนอแนะ	35
	ข้อเสนอแนะทั่วไป	35
	ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย	36
บรรณานุกรม		37
ภาคผนวก		41
	ภาคผนวก ก	42
	ภาคผนวก ข	51
	ภาคผนวก ค	67
	ภาคผนวก ง	184
	ประวัติย่อผู้วิจัย	219

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 26
2 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ 26
3 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 27
4 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ได้จากการทำแบบทดสอบอัตนัย 31
5 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 43
6 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบอัตนัย 43
7 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน 44
8 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก (คะแนนเต็ม 35 คะแนน) 45
9 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบอัตนัย (คะแนนเต็ม 15 คะแนน) 48

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล และแสดงความคิดออกมาอย่างเป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน ตลอดจนสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานของวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี ตลอดจนสังคมวิทยา และวิทยาการต่าง ๆ

การศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เป็นการศึกษาเพื่อปวงชนที่เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องและตลอดชีวิตตามศักยภาพทั้งนี้เพื่อให้เยาวชนเป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่พอเพียง สามารถนำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งสามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาต่อ ซึ่งหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานได้กำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนรู้ผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกันเท่าที่จะเป็นไปได้

สาระที่เป็นองค์ความรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ
สาระที่ 2 การวัด
สาระที่ 3 เรขาคณิต
สาระที่ 4 พีชคณิต
สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น
สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สำหรับผู้เรียนที่มีความสนใจหรือมีความสามารถสูงทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษาอาจจัดให้ผู้เรียนเรียนรู้สาระที่เป็นเนื้อหาวิชาให้กว้างขึ้น เข้มข้นขึ้น หรือฝึกทักษะกระบวนการมากขึ้นโดยพิจารณาจากสาระหลักที่กำหนดไว้นี้ หรือสถานศึกษาอาจจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เพิ่มเติมได้ เช่น แคลคูลัสเบื้องต้น หรือกราฟเบื้องต้น โดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของผู้เรียน ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ทัดเทียมกับนานาอารยประเทศ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (สสวท). 2544 : 2–6)

การเรียนรู้คณิตศาสตร์ต้องเน้นให้คิดเป็น คิดสิ่งที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม คิดจากของจริงที่ปรากฏให้เป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ คิดขอบเขตของปัญหาและแบบจำลองต่าง ๆ ออกมาเป็นรูปธรรม (ยืน ภู่วรวรรณ. 2543 : 35) คณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นในศตวรรษนี้จะเป็นพื้นฐานสำหรับนวัตกรรมทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่จะพัฒนาในศตวรรษหน้า กระบวนการคิด วิธีการมองสิ่งต่าง ๆ ที่นักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ หรือนักวิทยาศาสตร์ใช้ จะสะท้อนอยู่ในระบบที่มีอิทธิพลในเกือบทุกด้านของชีวิตประจำวัน ถ้าต้องการส่งเสริมให้นักเรียนประสบความสำเร็จในชีวิตหลังจบจากโรงเรียนไปแล้ว จำเป็นต้องเตรียมนักเรียนให้สามารถใช้ เข้าใจ บังคับ และปรับเปลี่ยนเทคโนโลยีที่ยัง

ไม่เกิดขึ้น ณ วันนี้ได้ (ทัศนีย์ สงวนสัตย์. 2540 : 33–35)

ปัญหาบางอย่างที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน สามารถแปลงให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยแก้ปัญหา เรียกปัญหาที่แปลงให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) (นิตยา ชิงชัย. ม.ม.ป. : 1) กราฟเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมในการจำลองปัญหาซึ่งเน้นถึงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่างๆ (สมชาย ประสิทธิจูตระกูล และวิทยา วัชระวิทยากุล. 2536 : 4) กราฟมีโครงสร้างที่ง่าย ซึ่งประกอบด้วยจุด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด จึงทำให้การนำเอากราฟไปใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นไปได้โดยง่าย ตัวอย่างหนึ่งที่เห็นได้ชัดเจน คือ ข่ายงานการสื่อสาร (Communication Network) ซึ่งประกอบไปด้วยศูนย์การสื่อสาร และเครือข่ายการติดต่อระหว่างศูนย์ ในการจำลองแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เรานำกราฟไปใช้ โดยใช้จุดแทนศูนย์การสื่อสาร และเส้นแทนเครือข่ายการติดต่อระหว่างศูนย์ สถานการณ์มากมายที่สามารถแสดงความสัมพันธ์ได้โดยใช้แผนภาพที่ประกอบด้วยเซตของจุดกับเส้นที่เชื่อมโยงจุดเหล่านั้น สถานการณ์ที่มีลักษณะเป็นคณิตศาสตร์นามธรรม (Mathematical Abstract) นี้นำไปสู่มโนมติของกราฟ (นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540 : 1–5) กราฟนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี วิจัยการดำเนินงาน วิศวกรรมไฟฟ้า ภาษาศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ (วนิดา เหมะกุล. 2535 : 91)

การพัฒนาหลักสูตรในต่างประเทศ ดังเช่นในเอกสาร Principles and Standards for School Mathematics ซึ่งเป็นเอกสารที่จัดทำไว้เป็นมาตรฐานหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของประเทศสหรัฐอเมริกา ได้บรรจุเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete Mathematics) และเสนอภาพกว้างๆ ของมาตรฐานการศึกษาในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อสำคัญ 3 หัวข้อดังนี้ คณิตศาสตร์เชิงการจัด(Combinatorics) วิธีทำซ้ำและการเวียนเกิด (Iteration and Recursion) และกราฟแบบ จุด-เส้น (Vertex-Edge Graphs) สำหรับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต ทั้ง 3 หัวข้อดังกล่าวสามารถนำมาสอนนักเรียนได้ตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และเพิ่มเมทริกซ์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000 : 31) จากเอกสารดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตไม่จำกัดอยู่ที่ระดับชั้นใดระดับชั้นหนึ่ง แต่สามารถนำมาสอนได้ในทุกระดับชั้น และในระดับชั้นที่สูงขึ้นเนื้อหาจะมีความเข้มข้นขึ้นและเน้นทฤษฎีมากขึ้นเพื่อให้เหมาะสมกับวัย และระดับความรู้ของผู้เรียน

สำหรับการพัฒนาหลักสูตรในประเทศไทยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้จัดทำเอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางให้สถานศึกษาและผู้สอนคณิตศาสตร์ สามารถจัดการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ในเอกสารคู่มือนี้ได้บรรจุสาระการเรียนรู้ เนื้อหากราฟเบื้องต้น เกี่ยวกับ กราฟออยเลอร์ ไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (สสวท. 2544 : 168) แต่เนื่องจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้ผ่านการเรียนรู้เรื่อง เซต การให้เหตุผล จำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ระบบจำนวนจริง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ และจากคำกล่าวของบรูเนอร์ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใดๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนในระดับนั้น ๆ เสียก่อน (Bruner. 1966 : 30) นอกจากนี้นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องกราฟไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน เป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับสูง และเป็นการเพิ่มความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ให้มากขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยคิดว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถเรียนเนื้อหากราฟได้ ถ้าจัดเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสม

จากเหตุผลดังที่ได้กล่าวมา ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นโดยเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหาสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนและคู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ได้รับการสอนโดยบทเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ความสำคัญของการวิจัย

1. ผลการวิจัยครั้งนี้เป็นแนวทางในการเลือกเนื้อหากราฟและการประยุกต์ของกราฟเพื่อบรรจุในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ผลการวิจัยครั้งนี้ทำให้ได้ตัวอย่างบทเรียนและคู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ใช้สำหรับสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน ซึ่งได้โดยวิธีสุ่มแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Random Sampling) มา 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน โดยทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนของแต่ละห้องเรียนแบบคละความสามารถทางการเรียน โดยใช้เกรดเฉลี่ยทุก ๆ วิชาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 45 คน โดยใช้เวลาทดลองในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนตามปกติ ซึ่งเป็นเวลาที่ทางโรงเรียนจัดให้ เป็นเวลาทั้งหมด 18 คาบ ๆ ละ 50 นาที

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหา เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยสาระการเรียนรู้ ดังต่อไปนี้

1. ความรู้เบื้องต้นของกราฟ
   1.1 บทนิยามของกราฟ

1.2 สับกราฟและกราฟเหมือนกัน (Subgraph and identical)

1.3 วิถีและวัฏจักร (Path and Cycle)

1.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ (Matrix Representations of Graph)

1.5 กราฟเชื่อมโยง (Connected Graph)

1.6 กราฟที่มีน้ำหนัก (Weighted Graph)

2. ต้นไม้ (Tree)

3. กราฟออยเลอร์

4. การให้สีกราฟ

การวิจัยครั้งนี้ได้นำเนื้อหาข้างต้นมาสร้างเป็นบทเรียน ซึ่งมีลักษณะดังนี้ ขั้นที่ 1 เสนอกิจกรรมและยกตัวอย่างสถานการณ์ให้นักเรียนวิเคราะห์ปัญหา แล้วแก้ปัญหา เพื่อนำสู่การสร้างแบบจำลองโดยใช้จุด และเส้นในการแก้ปัญหา ขั้นที่ 2 นำเสนอความรู้พื้นฐานของกราฟโดยบทนิยามอยู่ในรูปเซต ขั้นที่ 3 กล่าวถึงการประยุกต์ของกราฟที่สามารถนำไปแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ซึ่งจะอยู่ในหัวข้อ ต้นไม้ กราฟออยเลอร์ และการให้สีกราฟ บทเรียนนี้จะอธิบายเนื้อหาให้มีความเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน เรียบเรียงเนื้อหาโดยการยกตัวอย่างที่ง่ายเพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ด้วยตัวนักเรียนเอง และมีตัวอย่างเสริมเพื่อแนะแนวทางในกรณีที่นักเรียนไม่สามารถหาข้อสรุปได้จากตัวอย่างดังกล่าว และได้กำหนดแบบฝึกหัดไว้ท้ายหัวข้อทุกหัวข้อ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ บทเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ตามที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. บทเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นโดยครอบคลุมสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เรื่อง กราฟเบื้องต้น ตามตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาครายวิชาคณิตศาสตร์เลือก จากเอกสารคู่มือการจัดสาระการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก ของสถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

2. คู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ หมายถึง คู่มือครูที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบกับบทเรียน ประกอบด้วย คำนำประจำบท จำนวนคาบที่ใช้สอนโดยประมาณ จุดประสงค์การเรียนรู้ กิจกรรม และคำตอบของแบบฝึกหัด

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ ซึ่งผ่านการเรียนรู้เรื่อง เซต การให้เหตุผล จำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ระบบจำนวนจริง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์

4. แบบทดสอบเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ หมายถึง แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นข้อสอบปรนัยจำนวน 35 ข้อ และข้อสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ

5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

6. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

สมมติฐานของการวิจัย

จำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. ประวัติความเป็นมาของกราฟ
2. มาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-ม. 6) หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544
3. ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-ม. 6) **หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานเพื่อศึกษาต่อในด้านวิทยาศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา ดังนี้**

3.1 ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-ม. 6)

3.2 ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาควิชา รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-ม. 6)

4. มาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกราฟ

1. ประวัติความเป็นมาของกราฟ

การค้นพบกราฟ มักจะพบในส่วนที่เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งการค้นพบแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกัน และไม่ได้นำมารวมกันไว้ ดังนั้นถ้าจะนับการเกิดทฤษฎีกราฟจริง ๆ จะถือว่าทฤษฎีกราฟเริ่มต้น ในปี ค.ศ. 1736 จากผลงานของนักคณิตศาสตร์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ซึ่งเป็นผู้แก้ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (The KÖnigsberg Bridges Problem) ดังนั้นออยเลอร์ จึงได้ชื่อว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ

สูตรของออยเลอร์ในเรื่องกราฟเชิงระนาบได้ถูกพิสูจน์ในปี ค.ศ. 1752 หลังจากนี้เกือบ 100 ปี ไม่มีอะไรเกิดขึ้นในสาขาทางกราฟ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1847 เคอร์ชอฟฟ์ (G. Kirchhoff) ได้เสนอวิธีการใช้วงจรและทฤษฎีกราฟมาประยุกต์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า (ซึ่งกล่าวถึงกฎของแรงดันและกระแสที่มีชื่อเสียงของเคอร์ชอฟฟ์ในขณะที่เขามีอายุเพียง 21 ปี) หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1857 เคเลย์ (A. Cayley) ได้เสนอการใช้กราฟชนิดหนึ่งซึ่งเรียกว่าต้นไม้ มาช่วยในการหาไอโซเมอร์ของสารประกอบไฮโดรคาร์บอนอิ่มตัว และในระยะเวลาเดียวกัน (ค.ศ. 1852) ได้มีการกล่าวถึงปัญหาสี่สีสำหรับกราฟเชิงระนาบในจดหมายเขียนโดย เดอ มอร์กอง (A De. Morgan) ถึงแฮมิลตัน (W. Hamilton) คำว่ากราฟเริ่มถูกใช้ในปี ค.ศ. 1877 โดย ซิลเวสเตอร์ (J. Sylvester) จากนั้นประมาณครึ่งศตวรรษไม่มีอะไรใหม่ทางกราฟ จนกระทั่งหนังสือทางกราฟเล่มแรกของโคนิก (D. Konig) ได้ถูกตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1936 จากนั้นมาจนถึงปัจจุบัน เป็นช่วงซึ่งมี

ผลงานทางกราฟออกมามากมาย ทั้งทางด้านทฤษฎีและการประยุกต์ จนกระทั่งปี ค.ศ. 1976 โดยการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วย การพิสูจน์ปัญหาสี่สีของกราฟเชิงระนาบสำเร็จโดยแอปเพลและเฮเกน (Appel and Haken) นับว่าได้ใช้เวลากว่าร้อยปีในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ (สมชาย ประสิทธ์จูตระกูล. 2544 : 220)

2. มาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4–ม. 6) หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2544 : 8-26) ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 : เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 : เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3 : ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4 : เข้าใจระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 : เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด ไม่มีมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6)

มาตรฐาน ค 2.2 : วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3 : แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้ ได้

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้ ไม่มีมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6)

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric Model) ในการแก้ปัญหาได้ ไม่มีมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6)

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 : เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 : ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ในการจัดทำสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานของสถานศึกษาสำหรับช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) สถานศึกษาเป็นผู้กำหนดขึ้นเองโดยให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่กำหนดไว้ในหลักสูตร สำหรับการจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกสถานศึกษาสามารถจัดสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมให้เหมาะสมกับความถนัด ความสนใจ และความต้องการของผู้เรียนแต่ละคนหรือแต่ละกลุ่ม ดังนั้นสถานศึกษาสามารถเลือกเนื้อหากราฟและการประยุกต์ของกราฟ บรรจุในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกสำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3. ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4– ม.6) หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานเพื่อศึกษาต่อในด้านวิทยาศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2544 : 156-170) ได้กำหนดความคาดหวังซึ่งส่วนใหญ่เป็นความคาดหวังที่สอดคล้องกับมาตรฐานช่วงชั้นด้านความรู้ ในการเรียนการสอนทุกครั้งผู้สอนต้องคำนึงถึงมาตรฐานด้านทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วยการสอดแทรกกิจกรรมหรือโจทย์ปัญหาที่จะส่งเสริมให้เกิดทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นซึ่งได้แก่ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ และการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ นอกจากนั้นกิจกรรมการเรียนการสอนควรส่งเสริมให้นักเรียนตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตลอดจนฝึกให้นักเรียนทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยตัวอย่างดังนี้

3.1 ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4– ม.6) ดังตารางต่อไปนี้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (40 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
ภาคเรียนที่ 1 1. เซต 1.1 เซต 1.2 การดำเนินการของเซต 1.3 แผนภาพเวนน์ –ออยเลอร์และการแก้ปัญหา	10	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเซต สามารถหายูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์และผลต่างของเซต 2. เขียนแผนภาพแทนเซต และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (40 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
2. การให้เหตุผล 2.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย 2.2 การอ้างเหตุผล	8	1. เข้าใจและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้ 2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพแทนเซต
3. จำนวนจริง 3.1 จำนวนจริง 3.2 สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ การเท่ากันและการไม่เท่ากัน 3.3 สมการกำลังสองตัวแปรเดียว 3.4 อสมการตัวแปรเดียว 3.5 ค่าสัมบูรณ์	14	1. แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงได้ 2. เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริง 3. เข้าใจสมบัติของจำนวนจริงที่เกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากันและการไม่เท่ากันและนำไปใช้ได้ 4. แก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสองได้ 5. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงและหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงได้ 6. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์
4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ 4.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ 4.2 รากที่ n ของจำนวนจริง	8	1. เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ 2. หาค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์และจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีคำนวณที่เหมาะสม

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (40 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
ภาคเรียนที่ 2		
1. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 1.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 1.2 กราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน 1.3 ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ควรรู้จัก	28	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์ และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง สมการ และกราฟได้ 2. เขียนกราฟของความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 3. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ 4. ใช้กราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชันในการแก้ปัญหาได้
2. อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ 2.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	12	1. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหาได้
ภาคเรียนที่ 3		
1. ลำดับและอนุกรม 1.1 ลำดับ 1.2 ลำดับเลขคณิต 1.3 ลำดับเรขาคณิต 1.4 อนุกรม 1.5 ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม	18	1. เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดที่กำหนดให้ได้ 2. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้ 3. เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้
2. ความน่าจะเป็น 2.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ 2.2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	22	1. หาจำนวนผลที่อาจเกิดขึ้นของเหตุการณ์โดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับและแผนภาพต้นไม้อย่างง่ายได้ 2. อธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (40 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
		3. นำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการคาดการณ์และช่วยในการตัดสินใจได้
ภาคเรียนที่ 4 1. สถิติเบื้องต้น 1.1 การเก็บรวบรวมข้อมูล 1.2 การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นและการนำเสนอข้อมูล 1.2.1 การหาค่ากลางของข้อมูลโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมัธยฐานและฐานนิยม 1.2.2 การวัดการกระจายของข้อมูลโดยใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.2.3 การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูลโดยใช้เปอร์เซ็นไทล์ 1.2.4 การนำเสนอข้อมูล	40	1. รู้วิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย และสามารถนำผลจากการสำรวจไปช่วยในการตัดสินใจบางอย่างได้ 2. เลือกใช้ค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้และวัตถุประสงค์ที่ต้องการ 3. วิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นโดยใช้ค่ากลาง การวัดการกระจาย และการวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล 4. นำเสนอข้อมูลในรูปแบบต่าง ๆ รวมทั้งอ่าน และตีความหมายจากการนำเสนอข้อมูลได้ 5. ใช้ข้อมูลข่าวสารและค่าสถิติช่วยในการตัดสินใจได้

3.2 ตัวอย่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4- ม.6) ดังตารางต่อไปนี้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
ภาคเรียนที่ 1 1. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น 1.1 ประพจน์ 1.2 การหาค่าความจริงของประพจน์ 1.3 การสร้างตารางค่าความจริง	28	1. หาค่าความจริงของประพจน์ รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน และบอกได้ว่า การอ้างเหตุผลที่กำหนดให้สมเหตุสมผลหรือไม่

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
1.4 รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน 1.5 การอ้างเหตุผล 1.6 ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณและค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1.7 สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ		
2. ระบบจำนวนจริง 2.1 จำนวนจริง 2.2 การเท่ากัน การบวก การลบ การคูณ และการหารในระบบจำนวนจริง 2.3 สมบัติของระบบจำนวนจริง 2.4 การแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว 2.5 สมบัติการไม่เท่ากัน 2.6 ช่วงและการแก้อสมการ 2.7 ค่าสัมบูรณ์ 2.8 การแก้สมการและอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์	38	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริง 2. นำสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการ ไปใช้ได้ 3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ได้ 4. แก้สมการและอสมการในรูปค่าสัมบูรณ์ได้
3. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น 3.1 สมบัติของจำนวนเต็ม	14	1. เข้าใจสมบัติของจำนวนเต็มและนำไปใช้ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับการหารลงตัวได้
ภาคเรียนที่ 2		
1. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ 1.1 สัญลักษณ์ของเมทริกซ์ 1.2 สมบัติของเมทริกซ์ 1.3 ดีเทอร์มินันต์	20	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเมทริกซ์ และการดำเนินการของเมทริกซ์ 2. หาดีเทอร์มินันท์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่เกินสี่

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
1.4 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น - การแก้ระบบสมการโดยวิธีดีเทอร์มินันต์ - การแก้ระบบสมการโดยวิธีการดำเนินการตามแถวเบื้องต้น		3. วิเคราะห์และหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้
2. เรขาคณิตวิเคราะห์ 2.1 เส้นตรง 2.1.1 ระยะระหว่างจุดสองจุด 2.1.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด 2.1.3 ความชันของเส้นตรง 2.1.4 เส้นขนาน 2.1.5 เส้นตั้งฉาก 2.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง 2.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด 2.2 ภาคตัดกรวย 2.2.1 วงกลม 2.2.2 พาราโบลา 2.2.3 วงรี 2.2.4 ไฮเพอร์โบลา	42	1. หาระยะระหว่างจุดสองจุด จุดกึ่งกลาง ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดได้ 2. หาความชันของเส้นตรง สมการเส้นตรง เส้นขนาน เส้นตั้งฉาก และนำไปใช้ได้ 3. เขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวย เมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ของภาคตัดกรวยให้ และเขียนกราฟของความสัมพันธ์นั้นได้ 4. นำความรู้เรื่องการเลื่อนแกนทางขนานไปใช้ในการเขียนกราฟได้ 5. นำความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้แก้ปัญหาได้
3. ฟังก์ชัน 3.1 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล 3.2 ฟังก์ชันคอมโพสิท 3.3 ฟังก์ชันอินเวอร์ส 3.4 พีชคณิตของฟังก์ชัน	18	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชัน เขียนกราฟของฟังก์ชันและสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
ภาคเรียนที่ 3		
1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	20	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม และเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปใช้แก้ปัญหาได้
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์	40	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้
3. เวกเตอร์ในสามมิติ 3.1 เวกเตอร์ 3.2 การบวกเวกเตอร์ 3.3 การลบเวกเตอร์ 3.4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ 3.5 ผลคูณเชิงสเกลาร์ 3.6 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	20	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ 2. หาผลบวกเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ 3. หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
ภาคเรียนที่ 4		
1. จำนวนเชิงซ้อน 1.1 จำนวนเชิงซ้อน 1.2 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน 1.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว 1.4 สมการพหุนาม	22	1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน เขียนกราฟและหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ 2. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก 3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรีไม่เกินสาม
2. กราฟเบื้องต้น 2.1 กราฟ 2.2 กราฟออยเลอร์	18	1. เขียนกราฟเมื่อกำหนดจุด (Vertex) และเส้น (Edge) ให้ และระบุได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟออยเลอร์หรือไม่

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
2.3 การประยุกต์ของกราฟ		2. นำความรู้เรื่องกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้
3. ความน่าจะเป็น 3.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ 3.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยน 3.3 วิธีจัดหมู่ 3.4 ทฤษฎีบททวินาม 3.5 ความน่าจะเป็น และกฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น	40	1. แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ 2. นำความรู้เรื่องทฤษฎีบททวินามไปใช้ได้ 3. หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้
ภาคเรียนที่ 5		
1. การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น 1.1 ค่ากลางของข้อมูล 1.2 การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล 1.3 การวัดการกระจายของข้อมูล	40	1. เลือกวิธีวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นและอธิบายผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้ถูกต้อง 2. นำความรู้เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลไปใช้ได้
2. การแจกแจงปกติ 2.1 ค่ามาตรฐาน 2.2 การแจกแจงปกติและเส้นโค้งปกติ	20	1. นำความรู้เรื่องค่ามาตรฐานไปใช้ในการเปรียบเทียบข้อมูล 2. หาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติและนำความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติไปใช้ได้
3. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล	20	1. เข้าใจความหมายของการสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลที่ประกอบด้วยสองตัวแปร 2. สร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลที่ประกอบด้วยสองตัวแปรที่อยู่ในรูปอนุกรมเวลาโดยใช้เครื่องคำนวณ 3. ใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อกำหนดตัวแปรอิสระให้

สาระการเรียนรู้รายภาค	จำนวนชั่วโมง (80 ชั่วโมง)	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายภาค
ภาคเรียนที่ 6		
1. ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ 1.1 ลิมิตของลำดับ 1.2 ผลบวกของอนุกรม	20	1. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต 2. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้ 3. นำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้แก้ปัญหาได้
2. แคลคูลัสเบื้องต้น 2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน 2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 2.4 ความชันของเส้นโค้ง 2.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร 2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท 2.7 อนุพันธ์อันดับสูง 2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์ 2.9 ปริพันธ์ 2.10 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต 2.11 ปริพันธ์จำกัดเขต 2.12 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	50	1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ 3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ 4. นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ได้ 5. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 6. หาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ และหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งบนช่วงที่กำหนดให้ได้
3. กำหนดการเชิงเส้น	10	1. แก้ปัญหาโดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และใช้วิธีการของกำหนดการเชิงเส้นที่ใช้กราฟของสมการและอสมการที่มีสองตัวแปร

สำหรับการจัดสาระการเรียนรู้ ดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่าก่อนที่นักเรียนจะเรียนเรื่องกราฟเบื้องต้น นักเรียนต้องผ่านการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานเรื่อง เซต การให้เหตุผล จำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และผ่านการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ระบบจำนวนจริง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์ ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงจะทดลองบทเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีความรู้พื้นฐานเพียงพอน่าจะสามารถเรียนเนื้อหากราฟที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นได้

4. มาตรฐาน วิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา

ดอสซี (Dossey. 1991 : 4 – 8) ได้กล่าวว่า ในปี ค.ศ. 1989 สมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดมาตรฐานการศึกษา วิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต เพื่อให้นักเรียนมีความสามารถ ดังนี้

1. นำสภาพปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต เช่น กราฟ เมทริกซ์ อันดับ และความสัมพันธ์เวียนบังเกิดไปใช้แก้ปัญหาได้
2. จัดทำ และ วิเคราะห์กราฟโดยใช้เมทริกซ์
3. พัฒนา และ วิเคราะห์ขั้นตอนวิธี
4. แก้ปัญหาการแจงนับ และ ความน่าจะเป็นได้

ในการพัฒนาหลักวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตระดับมัธยมศึกษาตอนปลายกำหนดโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตหนึ่งภาคเรียนสำหรับนักเรียนที่ผ่านการเรียน พีชคณิต 1 และพีชคณิต 2 ซึ่งเน้นพัฒนาความสามารถของนักเรียนในการนำไปใช้แก้ปัญหาซึ่งมีเนื้อหาวิชา และระยะเวลาในการสอน ดังนี้

1. ระเบียบวิธีดำเนินการตัดสินใจ (Social Decision Making) (3 – 4 สัปดาห์)
2. ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) (3 – 4 สัปดาห์)
3. เทคนิคการนับ (Counting Techniques) (4 – 5 สัปดาห์)
4. แบบจำลองทางเมทริกซ์ (Matrix Models) (1 – 2 สัปดาห์)
5. คณิตศาตร์เกี่ยวกับวิธีทำซ้ำ (Mathematics of Iteration) (3 – 4 สัปดาห์)

สำหรับในเนื้อหาวิชาทฤษฎีกราฟได้กำหนดเนื้อหาดังนี้

1. เทคนิคของการกำหนดเวลาโครงการ (Program Evaluation and Review Technique(PERT) Methods)
2. ต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด (Minimal Spanning Trees) ได้แก่ ขั้นตอนวิธีของพริม และขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ (Prim's and Kruskal's Algorithms)
3. โครงสร้างของกราฟ (Structure of a graph) ได้แก่ ความรู้พื้นฐาน (Basic Concepts) การแทน (Representation) ด้วย แผนภาพ (Diagrams) เมทริกซ์ประชิด (Adjacency Matrix) และ Adjacency Lists และการค้นตามแนวกว้างและการค้นตามแนวลึก (Breadth and Depth-First Searches)
4. วงและวิถี (Circuits and Paths) ได้แก่ ขั้นตอนวิธีวงออยเลอร์ (Euler Circuit Algorithm) วัฏจักรและวิถีแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian Circuits and Paths) ปัญหาการเดินทางของเซลแมน (Traveling Salesman Problem) ขั้นตอนวิธีของไดค์สตราในการหาวิถีที่สั้นที่สุด (Dijkstra's Algorithm for Shortest Paths)
5. การให้สีกราฟ (Graph Coloring)
6. โครงสร้างของต้นไม้ (Structure of Trees)

จากเนื้อหาวิชาทฤษฎีกราฟดังกล่าว แสดงให้เห็นว่านอกจากเนื้อหากราฟ เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ยังมีเนื้อหากราฟเกี่ยวกับ การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ประชิด การให้สีกราฟ โครงสร้างของต้นไม้ และอื่น ๆ ที่สามารถนำมาสอนนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้ ดังนั้นจึงทำให้ผู้วิจัยสนใจนำเนื้อหากราฟที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นมาสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่ผ่านการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน

เรื่อง เซต การให้เหตุผล จำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และผ่านการเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก เรื่องตรรกศาสตร์เบื้องต้น ระบบจำนวนจริง เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

เนื่องจากสังคมเปลี่ยนแปลงไป ข่าวสารส่งถึงกันได้รวดเร็ว ระบบสื่อสารโทรคมนาคมพัฒนาไปจนกระทั่งลดช่องว่างทางระยะทาง ลดระยะเวลาการเรียนรู้ ระบบสังคมจึงเปลี่ยนแปลงไปเป็นสังคมที่เต็มไปด้วยการเรียนรู้ ดังนั้นกระบวนการจัดการศึกษาต้องเปลี่ยนแปลงไปเพื่อให้ทัดเทียมกับนานาประเทศ งานวิจัยมีบทบาทสำคัญในการกำหนดแนวทางการศึกษา สำหรับการพัฒนาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายด้านการพัฒนาเนื้อหา ก่อนที่จะมีการปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตรจำเป็นจะต้องทำการวิจัยศึกษาความสามารถของผู้เรียนเพื่อเป็นข้อมูลในการพัฒนาหลักสูตรในอนาคต ซึ่งงานวิจัยในด้านการนำเนื้อหาในระดับสูงกว่าระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนั้นมีหลายเรื่อง อาทิเช่น

งานวิจัยในประเทศ มีดังนี้ นพดล สุธาพาณิชย์(2524: 22-25) ได้ทำการศึกษาสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และควรบรรจุวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนลงในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และในปีเดียวกัน วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา (2524: 19-23) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนมีความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ดังนั้นจึงควรเน้นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สิรสินธุ์ นุชนาถ (2538 : 52-58) ได้ทำการศึกษาเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้น และดี บางกระ (2538 : 18-20) ได้ทำการศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียน ฟังก์ชันก่อกำเนิด ปรีชา จั่นกล้า (2539: 20-22) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น และจากผลการวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางในการตัดสิตใจของนักเรียนที่จะเลือกเรื่องเพื่อศึกษาในรายวิชา ค021- ค026 นอกจากนี้ จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ (2545 : 26-29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ และพงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู (2545 : 27-29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 มีจำนวนถึงร้อยละ 82.857 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด 35 คน

ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้และประยุกต์เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศ กัปรัด (Gubrud. 1971 : 6468 – A) ได้ทำการศึกษาความสามารถทางการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8 – 10 ผลการศึกษาสรุปว่า นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถทางการเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 และ 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับที่สูงกว่ามีความสามารถทางการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่านักเรียนในระดับที่ต่ำกว่า ดรัมมอนด์ (Drummond. 1989 : 641-A) ได้นำเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตมาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผลการศึกษาสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้ และไวนิง(Vining. 1989 : 380-A) ได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตในหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาซึ่งกำหนดโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา ปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่า วิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตที่มีในระดับสูงซึ่งแยกมาสอนในระดับมัธยมศึกษามีความเหมาะสม

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศเห็นความสำคัญของการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียนและให้สอดคล้องกับการพัฒนาคุณภาพของประชากร เศรษฐกิจ และสังคม โดยการนำเนื้อหาในระดับสูงกว่าระดับมัธยมศึกษามาสอนในระดับมัธยมศึกษาและพบว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษามีความสามารถเรียนเนื้อหาเหล่านี้ได้ ซึ่งสนับสนุนคำกล่าวของบรูเนอร์ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใด ๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนในระดับนั้น ๆ เสียก่อน (Bruner. 1966 : 30)

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกราฟ

กราฟ เป็นพื้นฐานของเทคโนโลยีและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ งานวิจัยที่เกี่ยวกับกราฟส่วนใหญ่จะเป็นในลักษณะการประยุกต์เพื่อสร้างเทคโนโลยีใหม่ ๆ หรือประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งงานวิจัยในประเทศและต่างประเทศ มีผู้วิจัยไว้มากมายแต่จะขอยกตัวอย่างงานวิจัยในประเทศที่นำกราฟมาใช้เป็นพื้นฐานในการปรับเปลี่ยนเทคโนโลยีและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันที่สามารถมองเห็นเป็นรูปธรรมเท่านั้น อาทิเช่น

จากรายงานโครงการวิจัยปีงบประมาณ 2536 ของฟูศักดิ์ ชีวสุวิทย์ (2536 : n-12) เรื่องการลดข้อมูลภาพทฤษฎีกราฟสำหรับระบบโทรศัพท์ภาพ คือการลดข้อมูลภาพเป็นเทคนิคในการลดจำนวนของข้อมูลให้มีขนาดเล็กลง แต่จะพยายามรักษารายละเอียดและความคมชัดของภาพเอาไว้ให้มากที่สุด การลดข้อมูลภาพโดยการเข้ารหัสพื้นที่ของภาพนั้น ภาพที่จะนำมาเข้ารหัสจะต้องทำการแบ่งเป็นพื้นที่ส่วนย่อยโดยอาศัยพื้นฐานทางทฤษฎีกราฟ ดังนี้ต้นไม้ และ วิธีการขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ จากรายงานการวิจัยของศรีสุรางค์ ทีนะกุล และคณะ (2542-2543 : บทคัดย่อ) เรื่องการกำหนดเส้นทางการเก็บ – ขนขยะ ในเขตเทศบาลนครอุดรธานีโดยทฤษฎีกราฟ การดำเนินการวิจัยได้ทำการสำรวจเส้นทางการเก็บ – ขนขยะในเขตเทศบาลนครอุดรธานีโดยศึกษาจากแผนผังที่มีอยู่ของเทศบาลและสำรวจพื้นที่จริง เขียนแผนผังเส้นทางเก็บขยะแล้วจำลองเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยเขียนเป็นกราฟของเส้นทางในเขตเทศบาลนครอุดรธานี ให้น้ำหนักเป็นความยาวของเส้นทางแต่ละเส้น วิเคราะห์กราฟตามทฤษฎีกราฟ แล้วเขียนแผนผังและกำหนดเส้นทางในการเดินทางไปเก็บ – ขนขยะ ผลการวิจัยได้เส้นทางเก็บขยะ 15 เขต โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ ในการหาวงออยเลอร์

จากกราฟออยเลอร์ เป็นเส้นทางเก็บขยะที่มีทางเดินไม่ซ้ำหรือถ้าซ้ำจะซ้ำเส้นทางที่สั้นที่สุด ซึ่งได้ผลรวมระยะทางมีค่าน้อยที่สุดและมีเงื่อนไขไม่ขัดกฎจราจร จากการวิจัยดังกล่าว แสดงให้เห็นว่ากราฟ เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มีความเหมาะสมอย่างยิ่งในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน จึงทำให้มีนักการศึกษาในประเทศไทยสนใจทำการศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการเรียนเรื่องกราฟ

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม (2542 : 26 - 29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงค่อนข้างมีลักษณะเป็นรูปธรรมที่เข้าใจง่าย พร้อมเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไปว่า ควรทำการวิจัยเรื่องทฤษฎีกราฟ โดยขยายเนื้อหาเพิ่มขึ้นไปอีกเพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนได้หรือไม่ โดยพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหาที่มีวิธีการแก้ปัญหาที่ชัดเจน แต่ถ้ามีวิธีการแก้ปัญหาไม่ชัดเจนไม่ควรนำมาทดลอง ซึ่งแสดงว่าถ้านำเสนอเนื้อหาโดยนิยามบทนิยาม ให้อยู่ในรูป เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน และเน้นทฤษฎีมากขึ้น เนื้อหามีลักษณะเป็นนามธรรมซึ่งทำให้เนื้อหามีวิธีการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน วิธีการแก้ปัญหาจะไม่ชัดเจน ซึ่งเนื้อหาดังกล่าวนักเรียนที่สามารถเรียนได้น่าจะเป็นนักเรียนที่สูงกว่าระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ดังนั้นผู้วิจัยคิดว่าถ้าจะนำเสนอเนื้อหาดังกล่าวมาสอนนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความรู้พื้นฐานเพียงพอนักเรียนน่าจะเรียนได้

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน ซึ่งได้มาโดยวิธีสุ่มแบบเกาะกลุ่ม มา 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 2 ห้องเรียน สาเหตุที่ใช้วิธีการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม เนื่องจากโรงเรียนจัดนักเรียนแบบคละความสามารถทางการเรียน โดยใช้เกรดเฉลี่ยทุก ๆ วิชาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. บทเรียนและคู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 35 ข้อ และเป็นข้อสอบอัตนัย 3 ข้อ ตามที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น

ลักษณะของเครื่องมือ

1. บทเรียนและคู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอน 18 คาบ ๆ ละ 50 นาที ประกอบด้วยสาระการเรียนรู้และจำนวนคาบดังนี้

1.1 ความรู้เบื้องต้นของกราฟ (8 คาบ)

1.1.1 บทนิยามของกราฟ

1.1.2 สับกราฟและกราฟเหมือนกัน

1.1.3 วิถีและวัฏจักร

1.1.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์

1.1.5 กราฟเชื่อมโยง

1.1.6 กราฟที่มีน้ำหนัก

1.2 ต้นไม้ (2 คาบ)

1.3 กราฟออยเลอร์ (5 คาบ)

1.4 การให้สีกราฟ (3 คาบ)

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 35 ข้อ และเป็นข้อสอบอัตนัย 3 ข้อ

ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

สร้างบทเรียนตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาบทเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างบทเรียนและคู่มือครู โดยศึกษาจากหนังสือตำราที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1.1 คณิตศาสตร์ดิสครีต (วนิดา เหมะกุล. 2535 : 91-125)

1.2 คณิตศาสตร์ดิสครีต เชิงประยุกต์ (วิทยา วัชระวิทยากุล และ สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. 2536 : 159-196)

1.3 คณิตศาสตร์ประยุกต์หน่วยที่ 10 (ณรงค์ ปั้นนิ่ม. 2537 : 67-105)

1.4 การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ (นิตยา ชิงชัย. ม.ป.ป. : 1-150)

1.5 ทฤษฎีกราฟ I (นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540 : 1-78 , 159-172)

1.6 ทฤษฎีกราฟ (ชะเอม สายทอง. 2544 : 1-104, 127-148, 167-184)

1.7 ภิทนคณิตศาสตร์ (สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. 2544 : 163-222)

1.8 Discrete Mathematics for Computer Scientists and Mathematicians (Mott, Kandel & Baker. 1986 : 535-542)

1.9 A First Look at Graph Theory (Clark & Holton. 1991 : 1-120, 191-228)

1.10 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics (Lipschutz & Lipson. 1992 : 156-188)

1.11 Applied and Algorithmic Graph Theory (Chartrand & Oellermann. 1993 : 1-30, 99-128)

1.12 Discrete Mathematics (Dossey, et al. 1993 : 88-160)

1.13 Discrete Mathematics (Johnsonbaugh. 1993 : 303-383)

1.14 Discrete Mathematical Structures (Kolman, Busby & Ross. 1996 :197-495)

1.15 Discrete Mathematic with Graph Theory (Goodaire & Parmenter. 1998 : 319-394, 446-497)

1.16 Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen. 1999 : 438-527)

2. กำหนดผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง โดยมีผลการเรียนรู้ที่คาดหวังเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ดังนี้

มุ่งให้นักเรียนสามารถ

2.1 บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

2.2 บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้

2.3 นำความรู้เกี่ยวกับต้นไม้ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

2.4 บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

2.5 นำความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

2.6 บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

2.7 นำความรู้เกี่ยวกับการให้สีกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

3. สร้างบทเรียนและคู่มือครู เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ ตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนและคู่มือครู เนื้อหาเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เพื่อใช้สอนใน 18 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในแต่ละคาบประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา และแบบฝึกหัด สำหรับคู่มือครู ประกอบด้วย คำนำประจำบท จำนวนคาบที่ใช้สอนโดยประมาณ จุดประสงค์การเรียนรู้ กิจกรรม คำตอบของแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ 1 ท่าน ตรวจแก้ไข ปรับปรุง เพื่อวิจารณ์และชี้ข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ปรับปรุงไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งไม่ใช่นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ซึ่งนักเรียนทั้ง 10 คนนี้เป็นอาสาสมัคร ใช้เวลาสอนรวม 18 คาบ ๆ ละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่องในด้านความยากง่าย ภาษา และเวลาที่ใช้สอน ของบทเรียนและคู่มือครู แล้วนำมาปรับปรุงและให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจแก้ไขอีกครั้ง ซึ่งเป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

4. สร้างแบบทดสอบวัดผลสมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 45 ข้อ สร้างข้อสอบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้ คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจคัดเลือกเพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนอาสาสมัครนี้ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ใช้เวลา 2 ชั่วโมง

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ข้อสอบปรนัยและข้อสอบอัตนัย หาค่าความยากง่าย(p) และค่าอำนาจจำแนก(r)

ขั้นที่ 3 คัดเลือกข้อสอบปรนัยและข้อสอบอัตนัยที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ครบตามเนื้อหา จากข้อสอบปรนัย 45 ข้อ คัดเลือกได้ 30 ข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป และข้อสอบปรนัย 5 ข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ซึ่งไม่อยู่ในช่วงดังกล่าว จึงได้ปรึกษาคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ เพื่อปรับปรุงข้อสอบทั้ง 5 ข้อ ภายหลังการปรับปรุงได้นำไปใช้ทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป ส่วนข้อสอบอัตนัย คัดเลือกได้ 3 ข้อที่มีค่าความยากง่าย(p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

ขั้นที่ 4 นำข้อสอบที่คัดเลือกไว้ในขั้นที่ 3 ไปหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้ สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) พบว่าค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ มีค่าเท่ากับ 0.89

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยนำบทเรียนและคู่มือครูที่เรียบเรียงขึ้นไปทดลองสอนกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน ใช้เวลาทั้งหมด 18 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2. ภายหลังการทดลองผู้วิจัยทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ซึ่งเป็นข้อสอบปรนัย 35 ข้อ และข้อสอบอัตนัย 3 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและปรับปรุงแล้ว ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

3. วิเคราะห์ผลการทดสอบ โดยการตรวจให้คะแนนข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก แต่ละข้อถ้าตอบถูก ให้ 1 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ให้ 0 คะแนน ส่วนข้อสอบอัตนัย ให้ข้อละ 5 คะแนน โดยพิจารณาจาก 4 ส่วน คือการสร้างแบบจำลองด้วยกราฟถูกต้อง ให้ 1 คะแนน การเลือกใช้ขั้นตอนวิธีในการนำไปใช้แก้ปัญหาเหมาะสม ให้ 2 คะแนน การคำนวณเพื่อหาคำตอบถูกต้อง ให้ 1 คะแนน และสรุปถูกต้อง ให้ 1 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย โดยใช้การทดสอบ Z สำหรับสัดส่วนของประชากร (Z - Test for Population Proportion)
3. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล
   - 3.1 สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
   - 3.2 สถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z
   - 3.3 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก(r)
   - 3.4 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้ สัมประสิทธิ์แอลฟา

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลตามความมุ่งหมายของการวิจัยและสมมติฐานของการวิจัย ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์

3. การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง

3.1 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

3.2 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบอัตนัย

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	45	50	35.16	70.31	6.36

จากตาราง 1 จะเห็นได้ว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 35.16 คิดเป็นร้อยละ 70.31 ของคะแนนเต็ม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 6.36

2. การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	45	43(95.55%)	6.03 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 2 จะเห็นได้ว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม หรือตั้งแต่ 25 คะแนนขึ้นไปจาก 50 คะแนน มีจำนวน 43 คน ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 95.55 และจากการทดสอบสมมติฐาน พบว่า จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐาน

3. การทดสอบความสามารถทางการเรียน เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง

3.1 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
จุดประสงค์ที่ 1 สร้างแบบจำลองแทนปัญหาบางประการ โดยการใช้จุดและเส้นแทนปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้	45	24(53.33%)	0.40
จุดประสงค์ที่ 2 บอก V(G) และ E(G) ของกราฟ G ใด ๆ ได้	45	44(97.77%)	6.30 **
จุดประสงค์ที่ 3 บอกถึงความสัมพันธ์การประชิด และดกกระทบของกราฟ G ใด ๆ ได้	45	41(91.11%)	5.50 **
จุดประสงค์ที่ 4 บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟที่มีวงวน กราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟว่าง และกราฟแบบบริบูรณ์	45	18(40.00%)	-1.34
จุดประสงค์ที่ 5 หาระดับขั้นของจุดใด ๆ ในกราฟ G ได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่ หรือจุดคี่	45	41(91.11%)	5.50 **
จุดประสงค์ที่ 6 พิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และนำความรู้ทฤษฎีบท 1 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้	45	37(82.22%)	4.29 **

ตาราง 3 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
จุดประสงค์ที่ 7 หาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	29(64.44%)	1.87
จุดประสงค์ที่ 8 บอกถึงความแตกต่าง และหาความยาวของแนวเดินเปิด แนวเดินปิด รอยเดินเปิด รอยเดินปิด วิถี และวัฏจักร ได้	45	38(84.44%)	4.56 **
จุดประสงค์ที่ 9 สร้างวิถีในแนวเดินเมื่อกำหนดแนวเดินใด ๆ มาให้ได้	45	30(66.66%)	2.147
จุดประสงค์ที่ 10 สร้างเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	43(95.55%)	6.04 **
จุดประสงค์ที่ 11 นำความรู้ทฤษฎีบท 3 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้	45	39(86.66%)	4.83 **
จุดประสงค์ที่ 12 บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง หรือกราฟไม่เชื่อมโยง เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	39(86.66%)	4.83 **
จุดประสงค์ที่ 13 หา d(u, v) ใด ๆ ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้	45	40(88.88%)	5.10 **
จุดประสงค์ที่ 14 หาวิถีที่สั้นที่สุดโดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้	45	41(91.11%)	5.50 **

ตาราง 3 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
จุดประสงค์ที่ 15 บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	39(86.66%)	4.83 **
จุดประสงค์ที่ 16 บอกทฤษฎีบทที่บ่งบอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้ได้	45	29(64.44%)	1.87
จุดประสงค์ที่ 17 หาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	34(75.55%)	3.35 **
จุดประสงค์ที่ 18 หาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักโดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	39(86.66%)	4.83 **
จุดประสงค์ที่ 20 บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	13(28.88%)	-2.95
จุดประสงค์ที่ 21 บอกได้ว่ากราฟใดหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	32(71.11%)	2.81 **
จุดประสงค์ที่ 22 หาวงออยเลอร์ และรอยเดินเปิดออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ได้	45	32(71.11%)	2.81 **
จุดประสงค์ที่ 23 หาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้	45	22(48.88%)	-0.26

ตาราง 3 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
จุดประสงค์ที่ 25 บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้	45	25(55.55%)	0.67
จุดประสงค์ที่ 26 **นำความรู้เรื่องการหาจำนวนสีน้อยที่สุดของกราฟไปใช้แก้ปัญหาการระบายสีแผนที่ เมื่อกำหนดแผนที่ใด ๆ มาให้ได้**	45	44(97.77%)	6.30 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 3 จะเห็นได้ว่า

1. จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือกที่มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 คือ จุดประสงค์ที่ 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 21, 22 และ 26

2. จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือกที่ไม่สามารถอ้างได้ว่า มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด คือ จุดประสงค์ที่ 1, 4, 7, 9, 16, 20, 23 และ 25

3.2 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบอัตนัย

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 การทดสอบความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ที่ได้จากการทำแบบทดสอบอัตนัย

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์	ค่าสถิติ Z
จุดประสงค์ที่ 19 นำความรู้เรื่องการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้	45	40(88.88%)	5.10 **
จุดประสงค์ที่ 24 นำความรู้เรื่องการหาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้	45	32(71.11%)	2.81 **
จุดประสงค์ที่ 27 นำความรู้เรื่องการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟใด ๆ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้	45	29(64.44%)	1.87

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 4 จะเห็นได้ว่า

1. จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบอัตนัยที่มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 คือ จุดประสงค์ที่ 19 และ 24

2. จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบอัตนัย ที่ไม่สามารถอ้างได้ว่า มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด คือ จุดประสงค์ที่ 27

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน วิธีการดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนและคู่มือครูเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ได้รับการสอนโดยบทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

สมมติฐานของการวิจัย

จำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีการดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนศึกษานารีวิทยา เขตบางบอน จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนและคู่มือครูเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 35 ข้อ และเป็นข้อสอบอัตนัย 3 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. นำบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น และได้ผ่านการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิเรียบร้อยแล้ว ไปทดลองสอนกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน โดยใช้เวลาสอนในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนตามปกติ เป็นเวลาทั้งหมด 18 คาบๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง

2. ภายหลังจากการสอนครบ 18 คาบ แล้วทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก 35 ข้อ และเป็นข้อสอบอัตนัย 3 ข้อ หลังจากนั้นนำคะแนนไปวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

สรุปผลการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ทางการเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1.1 ด้านเนื้อหา บทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นได้เสนอเนื้อหาเป็นขั้นดังนี้ ขั้นที่ 1 เสนอกิจกรรมและยกตัวอย่างสถานการณ์ให้นักเรียนวิเคราะห์ปัญหา แล้วแก้ปัญหาเพื่อนำสู่การสร้างแบบจำลองโดยใช้จุดและเส้นในการแก้ปัญหา ขั้นที่ 2 นำเสนอความรู้พื้นฐานของกราฟโดยบทนิยามอยู่ในรูปเซต ขั้นที่ 3 กล่าวถึงการประยุกต์ของกราฟที่สามารถนำไปแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน ซึ่งบทเรียนนี้จะอธิบายเนื้อหาส่วนมากให้มีความเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน เรียบเรียงเนื้อหาโดยการยกตัวอย่างที่ง่ายเพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ด้วยตัวนักเรียนเอง และมีตัวอย่างเสริมเพื่อแนะแนวทางในกรณีที่นักเรียนไม่สามารถหาข้อสรุปได้จากตัวอย่างดังกล่าว ซึ่งทำให้เนื้อหาส่วนมากในบทเรียนน่าสนใจ และกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการอยากเรียนรู้

1.2 ด้านผู้เรียน ในขณะที่ดำเนินการทดลอง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสนใจและตั้งใจเรียนเป็นอย่างดี พิจารณาได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจากเนื้อหาเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟในบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นนำเสนอตัวอย่างสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน ปัญหาน่าคิด และเกม

1.3 ด้านการสอน ผู้สอนใช้วิธีสอนที่มีความหลากหลาย เช่น วิธีการอภิปราย วิธีการถาม - ตอบหรือสนทนา และเน้นให้ผู้เรียนฝึกปฏิบัติให้รู้กระบวนการจัดการวิเคราะห์ปัญหา เลือกแนวทางการแก้ปัญหาและหาข้อสรุปด้วยตัวนักเรียนเอง อีกทั้งฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานแบบเป็นกลุ่ม และส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง สามารถนำความรู้เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน เช่น ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางที่สั้นที่สุด ปัญหาการเชื่อมโยง ปัญหาการจัดการประชุม และปัญหาการจัดตารางสอน เป็นต้น

2. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2.1 แบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

2.1.1 จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก ที่มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 คือ จุดประสงค์ที่ 2 (บอก V(G) และ E(G) ของกราฟ G ใด ๆ ได้), 3 (บอกถึงความสัมพันธ์การประชิด และตกกระทบของกราฟ G ใด ๆ ได้), 5 (หาระดับขั้นของจุดใด ๆ ในกราฟ G ได้และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่ หรือจุดคี่), 6 (พิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และนำความรู้ทฤษฎีบท 1 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้), 8 (บอกถึงความแตกต่าง และหาความยาวของแนวเดินเปิด แนวเดินปิด รอยเดินเปิด รอยเดินปิด วิถี และวัฏจักรได้), 10 (สร้างเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 11 (นำความรู้ทฤษฎีบท 3 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้), 12 (บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง หรือกราฟไม่เชื่อมโยง เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 13 (หา d(u, v) ใด ๆ ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้), 14 (หาวิถีที่สั้นที่สุดโดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้), 15 (บอกบทนิยามของต้นไม้และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 17 (หาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟเมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 18 (หาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักโดยใช้

ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 21 (บอกได้ว่ากราฟใดหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้, 22 (หาวงออยเลอร์ และรอยเดินเปิดออยเลอร์ โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ได้), 26 (นำความรู้เรื่องการหาจำนวนสีน้อยที่สุดของกราฟ ไปใช้แก้ปัญหาการระบายสีแผนที่ เมื่อกำหนดแผนที่ใด ๆ มาให้ได้) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1.1.1 จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางดังกล่าว เป็นจุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่วัดความรู้เบื้องต้นของกราฟ ซึ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ต้องมีความเข้าใจในเนื้อหาดังกล่าวเป็นอย่างดี เพื่อจะได้นำความรู้เบื้องต้นของกราฟไปศึกษาในหัวข้อการประยุกต์ของกราฟต่อไป

2.1.1.2 ลักษณะของข้อสอบใช้วัดความรู้เบื้องต้นของกราฟ จึงเป็นข้อสอบที่ไม่ซับซ้อน ใช้คำถามตรงไปตรงมา

2.1.2 จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือกที่ไม่สามารถอ้างได้ว่า มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด คือ จุดประสงค์ที่ 1 (สร้างแบบจำลองแทนปัญหาบางประการ โดยการใช้จุดและเส้นแทนปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้), 4 (บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟที่มีวงวน กราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟว่าง และกราฟแบบบริบูรณ์), 7 (หาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 9 (สร้างวิถีในแนวเดินเมื่อกำหนดแนวเดินใด ๆ มาให้ได้), 16 (บอกทฤษฎีบทที่บอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้ได้), 20 (บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้), 23 (หาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้), 25 (บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1.2.1 ลักษณะของข้อสอบมีความซับซ้อน มีการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างเนื้อหาในหัวข้อต่าง ๆ ไม่ถามตรงไปตรงมา

2.1.2.2 ลักษณะของข้อสอบมีลักษณะเป็นบทนิยามซึ่งอยู่ในรูปนามธรรมทำให้นักเรียนเข้าใจยาก

2.1.2.3 มีความจำกัดในเรื่องของเวลาที่ใช้สอนในแต่ละเนื้อหา

2.2 แบบทดสอบอัตนัย

2.2.1 จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบอัตนัยที่มีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 คือ จุดประสงค์ที่ 19 (นำความรู้เรื่องการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักโดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้), 24 (นำความรู้เรื่องการหาวงออยเลอร์และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.2.1.1 ลักษณะของข้อสอบมีการเรียบเรียงภาษาให้อ่านเข้าใจง่ายถึงแม้ข้อสอบจะมีความซับซ้อนของปัญหา

2.2.1.2 นักเรียนได้รับการฝึกทักษะกระบวนการแก้ปัญหาแบบเป็นขั้นตอนจากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2.2.1.3 มีกิจกรรมเสริมสำหรับฝึกทักษะในการแก้ปัญหา จากการยกตัวอย่างสถานกาณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวันในบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ปัญหาชวนคิด และเกม

2.2.2 จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางจากแบบทดสอบอัตนัย ที่ไม่สามารถอ้างได้ว่ามีจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด คือ จุดประสงค์ที่ 27 (นำความรู้เรื่องการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟใด ๆ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.2.2.1 ลักษณะของข้อสอบมีความซับซ้อนของปัญหา ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจปัญหา จึงทำให้นักเรียนใช้ขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหา และหาคำตอบของปัญหาผิดพลาด

2.2.2.2 มีความจำกัดในเรื่องของเวลาที่ใช้สอนในแต่ละเนื้อหา

ข้อสังเกตจากการศึกษาวิจัย

จากการทดลองสอนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น พบข้อสังเกตบางประการซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. การใช้สื่อการสอนทางการเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาของบทเรียนได้ง่ายขึ้น เช่น ตัวอย่างสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ปัญหาน่าคิด และเกม เป็นต้น นอกจากนี้ครูผู้สอนสามารถสร้างสื่อการสอนที่มีความเหมาะสมกับเนื้อหาที่สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและเห็นภาพพจน์ในสิ่งที่เรียน

2. การส่งเสริมให้นักเรียนค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง และฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหาและหาข้อสรุปด้วยตนเอง สามารถเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น เป็นสิ่งช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการอยากเรียนรู้ และมีความภาคภูมิใจในผลงานของนักเรียน

3. เชื่อมโยงความรู้ระหว่างเนื้อหาเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟกับการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวันโดยการยกตัวอย่าง สามารถทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนได้รวดเร็ว และเห็นคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์

4. การตรวจแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอของครูจะทำให้ทราบถึงข้อบกพร่องในด้านต่าง ๆ ของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งทำให้ครูสามารถนำมาปรับกิจกรรมการเรียนการสอน และแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนแต่ละคนได้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากหลักสูตรคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้นำเนื้อหาเรื่อง กราฟเบื้องต้น รวมอยู่ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกในช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) โดยหลักสูตรดังกล่าวกำหนดให้สถานศึกษาดำเนินการจัดสาระการเรียนรู้ของเนื้อหาวิชาเองตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ดังนั้น บทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นมีความเหมาะสม ซึ่งอาจใช้เป็นตัวอย่างของบทเรียนหรือใช้เป็นแนวทางในการสร้างบทเรียนของสถานศึกษาต่อไป

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรทำการวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับวิธีสอนที่เหมาะสมสำหรับบทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

2.2 ควรทำการวิจัยพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

2.3 ควรทำการวิจัยบทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยขยายเนื้อหาเพิ่มขึ้น โดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน

2.4 ควรทำการวิจัยโดยนำความรู้เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟไปใช้พัฒนาเทคโนโลยีหรือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). *คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

ชะเอม สายทอง. (2544). *ทฤษฎีกราฟ.* กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.

จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ. (2545). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย**ศรีนครินทรวิโรฒ.** ถ่ายเอกสาร.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. (2537). " หน่วยที่ 11 การแก้ปัญหาโดยการจำลองปัญหาด้วยกราฟ 1". *ประมวลสาระชุดวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ หน่วยที่ 8-11.* กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

ดี บางกระ. (2538). *การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย**ศรีนครินทรวิโรฒ.** ถ่ายเอกสาร.

ทัศนีย์ สงวนสัตย์. (2540, กรกฎาคม-กันยายน). "ความวิตกกังวลเกี่ยวกับ การศึกษาคณิตศาสตร์," *วารสารสสวท.* 25(98) : 33-35.

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม. (2542). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นพดล สุธาพาณิชย์. (2524). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นวรัตน์ อนันต์ชื่น. (2540). *ทฤษฎีกราฟ I.* นครปฐม : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

นิตยา ชิงชัย. (ม.ป.ป.). *การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ.* เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ปรีชา จั่นกล้า. (2539). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

พงศ์รัศมี เฟื่องฟู. (2545). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ฟูศักดิ์ ชีวสุวิทย์. (2536). *รายงานการโครงการวิจัยปีงบประมาณ 2536 เรื่อง การลดข้อมูลภาพทฤษฎีกราฟสำหรับระบบโทรศัพท์ภาพ.* กรุงเทพฯ : คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

ยืน ภู่วรวรรณ. (2543, กรกฎาคม-กันยายน). "การจัดการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ตามแผนปฏิรูปการศึกษา," *วารสาร สสวท.* 28(110) : 32-36.

วนิดา เหมะกุล. (2535). *คณิตศาสตร์ดิสครีต.* กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วิทยา วัชระวิทยากุล และ สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. (2536). *คณิตศาสตร์ดิสครีต เชิงประยุกต์.* กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2524). *การศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล, และอื่น ๆ. (2543). *รายงายการวิจัยการกำหนดเส้นทางการเก็บ – ขนขยะในเขตเทศบาลนครอุดรธานีโดยทฤษฎีกราฟ.* อุดรธานี : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏอุดรธานี.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. (2544). *ภินทนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สิรสินธุ์ นุชนาถ. (2538). *การศึกษาการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

Bruner, Jerome Seymour. (1966). *The Process of Education.* Cambridge : Harvard University Press.

Clark, John. & Holton, Derek Allan. (1991). *A First Look at Graph Theory.* Singapore : World Scientific.

Chartrand, Gary. & Oellermann, Ortrud R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory.* Singapore : McGraw-Hill.

Dossey, John A. (1991). "Discrete Mathematics : The Math for Our Time," in *Discret Mathematice Mathematics across the Curriculum, K-12* . Edited by Kenney, Margaret J. & Hirsch, Christian R. p. 4-8. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Dossey, John A. et al. (1993). *Discrete Mathematics.* 2nd ed. New York : HarperCollins College.

Drummound, Pamela Johnson. (1989, September). "The Design, Implementation and Evaluation of a Course in Discrete Mathematics for High School Students," *Dissertation Abstracts International.* 50(3) : 641-A.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory.* New Jersey : Prentice-Hall.

Gubrud, Allarm Roy. (1971, June). "The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vector in Junior and Senior High School,". *Dissertation Abstracts International*. 31(12) : 6468.

Johnsonbaugh, Richard. (1993). *Discrete Mathematics*. 3rd ed. New York : Macmillan.

Kolman, Bernard., Busby, Robert C. & Ross, Sharon. (1996). *Discrete Mathematical Structures*. 3rd ed. New Jersey : Prentice-Hall.

Lipschutz, Seymour. & Lipson, Marc Lars. (1992). *2000 Solved Problems in Discrete Mathematics*. Singapore : McGraw-Hill.

Mott, Joe L., Kandel, Abraham. & Baker, Theodore P. (1986). *Discrete Mathematics for Computer Scientists and Mathematicians*. 2nd ed. New Jersey : Prentice-Hall.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.

Rosen, Kenneth H. (1999). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 4th ed. Singapore : McGraw-Hill.

Vining, Ann Cone. (1989, August). "Discrete Mathematics in The Secondary Curriculum: A Dekphi Study of Topics and Trends,". *Dissertation Abstracts International*. 50(02) : 380-A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบอัตนัย

การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน

คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก (คะแนนเต็ม 35 คะแนน)

คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบอัตนัย (คะแนนเต็ม 15 คะแนน)

ตาราง 5 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.7	0.2	19	0.6	0.4
2	1	0	20	0.7	0.6
3	1	0	21	1	0
4	0.5	0.2	22	0.8	0.2
5	0.7	0.2	23	0.6	0.4
6	0.7	0.2	24	0.7	0.2
7	0.4	0.4	25	0.7	0.2
8	0.5	0.2	26	0.2	0.4
9	0.4	0.8	27	0.8	0.4
10	0.3	0.2	28	0.7	0.6
11	0.7	0.2	29	0.7	0.6
12	0.6	0.8	30	0.4	0.8
13	0.6	0.4	31	0.6	0.8
14	0.3	0.2	32	0.4	0.4
15	0.8	0.4	33	0.5	0.2
16	1	0	34	1	0
17	0.6	0.8	35	0.6	0.8
18	0.8	0.4			

หมายเหตุ จากตาราง 5 จะเห็นได้ว่ามีข้อสอบจำนวน 5 ข้อที่มีค่าความยากง่าย (p) ไม่อยู่ในช่วง 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ไม่อยู่ในช่วง ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จึงได้นำข้อสอบดังกล่าวไปปรึกษาคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ เพื่อปรับปรุงข้อสอบทั้ง 5 ข้อ ภายหลังการปรับปรุง ได้นำไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

ตาราง 6 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ จากแบบทดสอบอัตนัย

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.6	0.4	3	0.3	0.6
2	0.6	0.75			

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.89

ตาราง 7 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียน กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน

x	f	fx	x^2	fx^2
47	3	141	2209	6627
45	2	90	2025	4050
43	1	43	1849	1849
42	2	84	1764	3528
41	1	41	1681	1681
40	1	40	1600	1600
39	3	117	1521	4563
38	2	76	1444	2888
37	2	74	1369	2738
36	3	108	1296	3888
35	4	140	1225	4900
34	3	102	1156	3468
33	6	198	1089	6534
32	1	32	1024	1024
31	1	31	961	961
30	2	60	900	1800
29	2	58	841	1682
26	2	52	676	1352
25	2	50	625	1250
23	1	23	529	529
22	1	22	484	484
	$\sum f = 45$	$\sum fx = 1582$		$\sum fx^2 = 57396$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1582}{45} = 35.16$$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{45(57396) - (1582)^2}{45(44)}}$$

$$= \sqrt{\frac{80096}{1980}}$$

$$= \sqrt{40.45} = 6.36$$

ตาราง 8 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก (คะแนนเต็ม 35 คะแนน)

เลขที่ จุดประสงค์ที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
5	2	2	2	2	1	1	2	2	1	0	0	2	2	2	2
6	0	1	2	0	1	1	1	1	0	0	2	2	2	0	2
7	3	3	3	3	2	2	1	3	0	2	3	3	3	3	1
8	2	0	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	0
9	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
10	3	3	2	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3
11	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
17	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
20	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
21	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
22	2	2	2	0	2	2	2	1	1	0	2	2	2	2	2
23	2	2	3	0	2	3	0	0	0	0	2	1	1	2	0
25	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
26	2	1	2	1	2	1	0	1	1	1	2	1	2	2	1
รวม	32	27	30	20	26	27	18	22	17	19	28	30	30	27	25

ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ / จุดประสงค์ที่	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
2	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
5	2	1	1	2	2	2	1	0	2	2	1	1	1	2	1
6	2	1	0	0	1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2
7	0	1	2	2	2	3	2	2	0	1	2	1	1	3	2
8	1	1	1	2	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	2
9	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
10	2	3	3	3	3	3	2	1	3	3	3	1	3	3	2
11	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
15	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
16	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
17	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
18	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
21	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
22	2	2	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	2
23	2	3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	3	2	2
25	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
26	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2
รวม	25	27	22	22	26	25	18	16	21	19	19	17	30	32	24

ตาราง 8 (ต่อ)

เลขที่ จุดประสงค์ที่	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
5	1	2	2	1	2	2	1	2	2	0	1	2	1	2	2
6	1	2	2	1	2	0	2	2	2	1	1	1	1	2	1
7	1	3	2	3	2	1	1	1	1	1	2	3	1	2	3
8	2	2	1	1	0	1	1	1	2	2	1	1	1	2	2
9	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
10	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3
11	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
13	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
18	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
21	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
22	0	2	0	0	1	0	0	2	2	0	0	2	1	2	2
23	1	0	2	3	1	2	1	2	2	3	2	1	2	3	3
25	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
26	2	2	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	2
รวม	22	26	25	27	24	22	20	27	28	21	21	26	24	32	32

หมายเหตุ

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 1-4, 9, 11-18, 20-21, 25 แต่ละจุดประสงค์มีคะแนนเต็ม 1 คะแนน

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 5-6, 8, 22, 26 แต่ละจุดประสงค์มีคะแนนเต็ม 2 คะแนน

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 7, 10, 23 แต่ละจุดประสงค์มีคะแนนเต็ม 3 คะแนน

ตาราง 9 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ โดยการทำแบบทดสอบอัตนัย (คะแนนเต็ม 15 คะแนน)

เลขที่ / จุดประสงค์ที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
19	5	5	3	5	3	5	3	2	2	5	5	5	3	5	5
24	5	5	0	3	3	1	3	1	2	2	5	5	5	5	5
27	5	5	3	5	1	1	1	0	1	0	4	3	3	3	4
รวม	**15**	**15**	**6**	**13**	**7**	**7**	**7**	**3**	**5**	**7**	**14**	**13**	**11**	**13**	**14**

ตาราง 9 (ต่อ)

เลขที่ / จุดประสงค์ที่	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
19	5	5	5	4	3	5	5	5	5	5	2	5	5	5	5
24	5	4	5	4	5	0	3	4	2	4	1	2	5	5	4
27	3	3	5	5	5	0	5	4	2	1	1	2	5	3	2
รวม	**13**	**12**	**15**	**13**	**13**	**5**	**13**	**13**	**9**	**10**	**4**	**9**	**15**	**13**	**11**

ตาราง 9 (ต่อ)

เลขที่ / จุดประสงค์ที่	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
19	5	2	5	3	4	5	5	3	4	4	4	2	4	5	5
24	1	4	2	1	1	5	4	4	3	5	5	5	3	5	5
27	5	0	2	2	4	2	4	3	3	5	5	3	5	5	5
รวม	**11**	**6**	**9**	**6**	**9**	**12**	**13**	**10**	**10**	**14**	**14**	**10**	**12**	**15**	**15**

หมายเหตุ

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 19, 24, 27 แต่ละจุดประสงค์มีคะแนนเต็ม 5 คะแนน

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z (Z – test for Population Proportion)

สมมติฐาน คือ $H_0 : P \leq 0.50$

$H_1 : P > 0.50$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{43}{45} = 0.95$$

$P_0 = 0.50$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน

แทนค่า $$Z = \frac{0.95 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1 - 0.50)}{45}}}$$

$$= \frac{0.45}{\sqrt{0.005556}}$$

$$= 6.03$$

$Z_{.01} = 2.33$

เพราะว่า $6.03 > 2.33$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

การทดสอบเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z (Z – test for Population Proportion) เป็นรายจุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ดังนี้

จุดประสงค์ที่ 1

สมมติฐาน คือ $H_0 : P \leq 0.50$

$H_1 : P > 0.50$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{24}{45} = 0.53$$

$P_0 = 0.50$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 45 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.53 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1 - 0.50)}{45}}}$$

$$= \frac{0.03}{\sqrt{0.005556}}$$

$$= 0.40$$

$Z_{.01} = 2.33$

เพราะว่า **0.40 < 2.33**

เพราะฉะนั้น ไม่ปฏิเสธ H_0 แสดงว่าผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ ไม่สามารถอ้างได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ในจุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 1

หมายเหตุ ใช้การทดสอบในทำนองเดียวกันกับจุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 2 – 27

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ฉบับนี้ มีจำนวนข้อสอบ 38 ข้อ คะแนนเต็ม 50 คะแนน แบ่งเป็น

1.1 ข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ คะแนนเต็ม 35 คะแนน

1.1.1 ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว แล้วเขียนเครื่องหมาย **X** ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบ

1.1.2 ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบให้เขียนเครื่องหมายขีดทับรอยเครื่องหมายเดิม **Ⓧ** แล้วเขียนเครื่องหมาย **X** ลงในช่องตัวเลือกที่เป็นคำตอบใหม่

1.2 ข้อสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ คะแนนเต็ม 15 คะแนน

1.2.1 ให้นักเรียนแสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหาซึ่งพิจารณาจาก 4 ส่วน คือ การสร้างแบบจำลองด้วยกราฟถูกต้องให้ 1 คะแนน การเลือกใช้ขั้นตอนวิธีในการนำไปใช้แก้ปัญหาเหมาะสมให้ 2 คะแนน การคำนวณเพื่อหาคำตอบถูกต้องให้ 1 คะแนน และสรุปถูกต้องให้ 1 คะแนน

2. ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ปรนัยแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

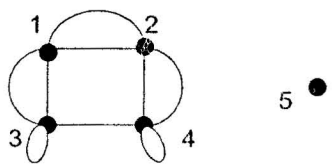
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 1 สร้างแบบจำลองแทนปัญหาบางประการ โดยการใช้จุดและเส้นแทนปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

1. ในวันแห่งความรัก เบิร์ดเตรียมแผนการว่า เขาจะมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบซึ่งมีทั้งหมด 4 คน คือ นัท โบว์ แอม และใหม่ ดังนั้นเขาจึงสั่งซื้อดอกกุหลาบ 4 ช่อ สำหรับคนทั้งสี่ ซึ่งดอกกุหลาบมีช่อละหนึ่งสี คือมีสีแดง ขาว ชมพู และส้ม ถ้านัทชอบดอกกุหลาบสีแดงและส้ม โบว์ชอบดอกกุหลาบสีชมพูและส้ม แอมชอบดอกกุหลาบสีแดงและขาว ส่วนใหม่ชอบดอกกุหลาบสีขาวและชมพู เบิร์ดสามารถมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบได้ตรงตามความชอบหรือไม่

ก. ได้ 1 แบบ ข. ได้ 2 แบบ ค. ได้ 3 แบบ ง. ไม่ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 2 บอก V(G) และ E(G) ของกราฟ G ใด ๆ ได้

2. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหาเซตของจุดและเซตของเส้น ของกราฟ G



ก. V(G) = {1, 2, 3, 4, 5} E(G) = {12, 12, 13, 13, 24, 24, 34, 33, 44}

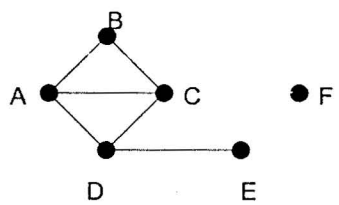
ข V(G) = {1, 2, 3, 4, 5} E(G) = {12, 13, 24, 34, 33, 44}

ค. V(G) = {1, 2, 3, 4} E(G) = {12, 12, 13, 13, 24, 24, 34, 33, 44}

ง. V(G) = {1, 2, 3, 4} E(G) = {12, 13, 24, 34, 33, 44}

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 3 บอกถึงความสัมพันธ์การประชิด และตกกระทบของกราฟ G ใด ๆ ได้

3. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้ข้อใดกล่าวถูกต้อง



ก. จุด A ประชิดกับจุด B, C, D,และ E

ข. จุด B ตกกระทบกับเส้น AB, BC และ DE

ค. เส้น EF ตกกระทบกับจุด D และ E

ง. เส้น DE ประชิดกับเส้น CD และ AD

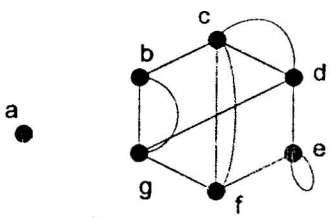
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 4 บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟที่มีวงวน กราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟว่าง และกราฟแบบบริบูรณ์

4. ข้อใดไม่ใช่กราฟเชิงเดียว

ก. กราฟว่าง ข. กราฟชัด ค. กราฟไม่ชัด ง. กราฟแบบบริบูรณ์

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 5 หาระดับขั้นของจุดใด ๆ ในกราฟ G ได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่

กำหนดกราฟ G ดังรูป ให้นักเรียนใช้กราฟ G ตอบคำถาม ข้อ 5 – 6



5. จงหาผลบวกของระดับขั้นของจุดทุก ๆ จุดในกราฟ G

ก. 20 ข. 22 ค. 23 ง. 24

6. จงหาจำนวนจุดคู่ และจุดคี่ของกราฟ G

ก. จุดคู่มีจำนวน 5 จุด และ จุดคี่มีจำนวน 2 จุด

ข. จุดคู่มีจำนวน 4 จุด และจุดคี่มีจำนวน 3 จุด

ค. จุดคู่มีจำนวน 7 จุด

ง. จุดคี่มีจำนวน 7 จุด

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 6 พิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และนำความรู้ทฤษฎีบท 1 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

7. ถ้าจุดในกราฟ G มีระดับขั้น 2 หรือ 5 เท่านั้น และ $|V(G)| = 10$ $|E(G)| = 22$ จงหาจำนวนจุดที่มีระดับขั้น 5

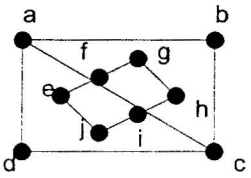
ก. 5 ข. 7 ค. 8 ง. 10

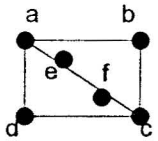
8. ถ้ากราฟ G มีจุดทั้งหมด 11 จุด และมีระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟเรียงจากน้อยไปมาก คือ 1, 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, X, 8 จงหาค่า X

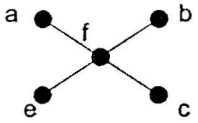
ก. 6 ข. 7 ค. 8 ง. 6 หรือ 8

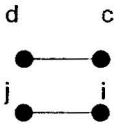
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 7 หาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

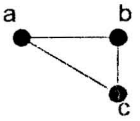
9. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟในข้อใดเป็นสับกราฟของกราฟ G



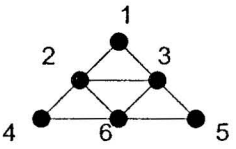
ก.


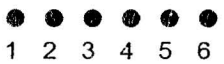
ข.


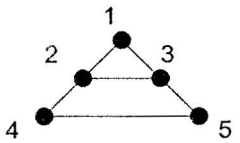
ค.


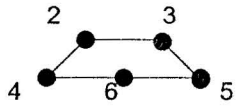
ง.


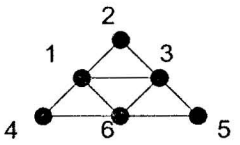
10. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่ากราฟในข้อใด เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของกราฟ G



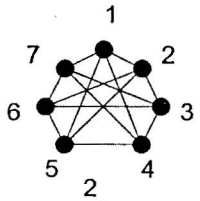
ก.


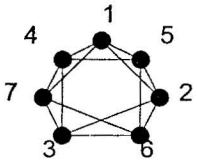
ข.


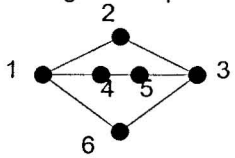
ค.


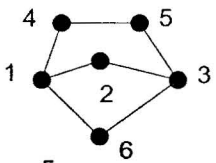
ง.


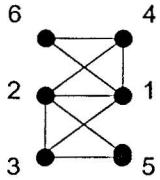
11. จงพิจารณากราฟแต่ละคู่ในข้อใด เป็นกราฟเหมือนกัน

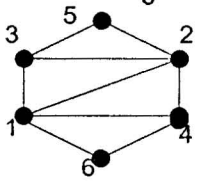
1.




2.




3.




ก. ข้อ 1 และ 2 ข. ข้อ 2 และ 3

ค. ข้อ 1 และ 3 ง. ทั้งข้อ 1, 2 และ 3

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 8 บอกถึงความแตกต่าง และหาความยาวของแนวเดินเปิด แนวเดินปิด รอยเดินเปิด รอยเดินปิด วิถี และวัฏจักรได้

12. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดกล่าวถูกต้อง

(1). จุดและเส้นในแนวเดินอาจเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันได้

(2). ทุก ๆ รอยเดิน เป็นวิถี

(3) ทุก ๆ วิถีเป็นแนวเดิน

ก. ข้อความที่ (1) ถูกเพียงข้อเดียว ข. ข้อความที่ (2) ถูกเพียงข้อเดียว

ค. ข้อความที่ (1) และ 3 ถูก ง. ข้อความที่ (1), (2) และ (3) ถูกทั้งสามข้อ

13. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดกล่าวถูกต้อง

(1). เรียกรอยเดินปิด ว่า วง

(2). เรียก วงที่มีจุดเริ่มต้นและจุดภายในไม่ซ้ำกัน ว่า วัฏจักร

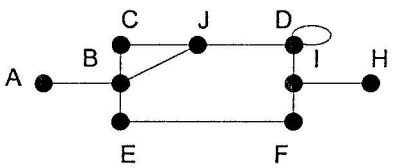
(3). ทุก ๆ วง เป็น วัฏจักร

ก. ข้อความที่ (1) ถูกเพียงข้อเดียว ข. ข้อความที่ (2) ถูกเพียงข้อเดียว

ค. ข้อความที่ (1) และ (3) ถูก ง. ข้อความที่ (2) และ (4) ถูก

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 9 สร้างวิถีในแนวเดิน เมื่อกำหนดแนวเดินใด ๆ มาให้ได้

14. กำหนดกราฟ G จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นวิถีในแนวเดิน A, B, C, J, B, C, J, D, D, I, H

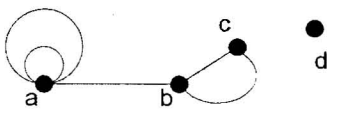


ก. A, B, C, J, D, I, H ข. A, B, E, F, I, H

ค. A, B, J, D, I, H ง. A, B, C, D, I, H

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 10 สร้างเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

15. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในข้อใดเป็นเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G



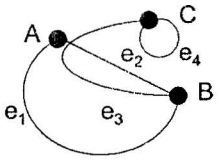
ก.
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ข.
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ค.
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ง.
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

16. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในข้อใดเป็นเมทริกซ์ตกกระทบของกราฟ G



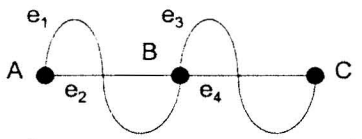
ก.
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ข.
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ค.
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ง.
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

17. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในข้อใดเป็นเมทริกซ์ตกกระทบของกราฟ G



ก.

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	2	4	1	1
B	4	2	2	2
C	1	1	2	2

ข.

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	1	1	0	0
B	1	1	1	1
C	0	0	1	1

ค.

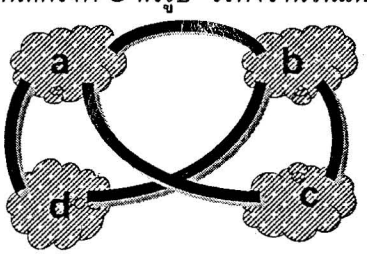
	e_1	e_2	e_3	e_4
A	0	1	0	0
B	1	0	1	1
C	0	0	0	0

ง.

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	1	1	0	0
B	0	0	1	1
C	0	0	1	0

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 11 นำความรู้ทฤษฎีบท 3 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

18. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหาจำนวนแนวเดิน c – d ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด



ก. 0

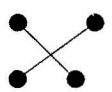
ข. 1

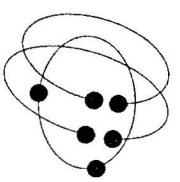
ค. 2

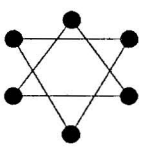
ง. 3

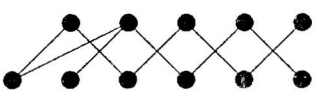
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 12 บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง หรือกราฟไม่เชื่อมโยง เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

19. กราฟในข้อใดเป็นกราฟเชื่อมโยง

ก. 

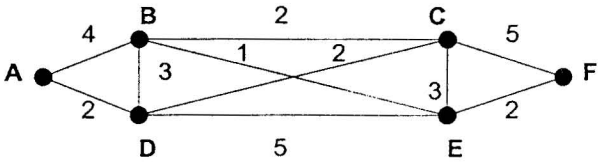
ข. 

ค. 

ง. 

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 13 หา d(u, v) ใด ๆ ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้

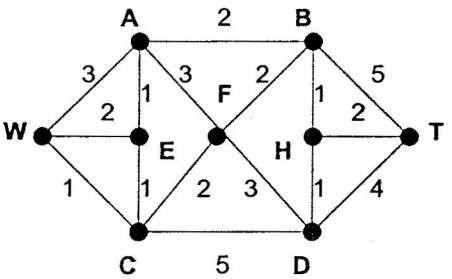
20. กำหนดกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก G ดังรูป จงหา d(A, F)



ก. 4 ข. 5 ค. 6 ง. 7

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 14 หาวิถีที่สั้นที่สุดโดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้

21. กำหนดกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก G ดังรูป จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก W ไป T และเส้นทางดังกล่าว



ก. 7 หน่วย มีเส้นทาง คือ W, A, B, H, T

ข. 8 หน่วย มีเส้นทาง คือ W, A, B, H, T

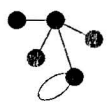
ค. 9 หน่วย มีเส้นทาง คือ W, E, A, B, H, T

ง. 10 หน่วย มีเส้นทาง คือ W, C, D, T

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 15 บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

22. กราฟในข้อใดเป็นต้นไม้

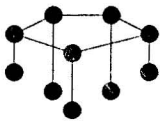
ก.



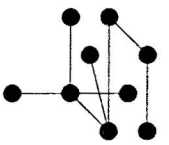
ข.



ค.



ง.



จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 16 บอกทฤษฎีบทที่บ่งบอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้ได้

23. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดกล่าวถูกต้อง

(1). ถ้ากราฟ G ไม่เป็นต้นไม้ แล้วกราฟ G มีวงวน

(2). ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ และจุด 2 จุดใด ๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วยวิถีเพียงวิถีเดียว

(3). ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n จุด แล้ว G จะมีจำนวนเส้น n-1 เส้น

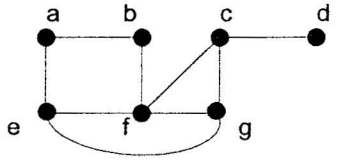
(4). ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n > 1 แล้ว G จะมีจุดที่มีระดับขั้น 1 อย่างน้อย 1 จุด

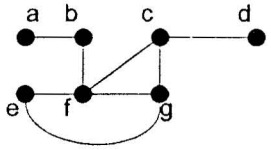
ก. ข้อความที่ (1) และ (3) ถูก ข. ข้อความที่ (3) และ (4) ถูก

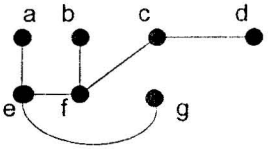
ค. ข้อความที่ (2) และ (3) ถูก ง. ข้อความที่ (1) และ (4) ถูก

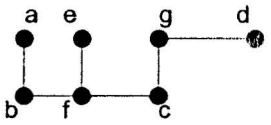
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 17 หาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

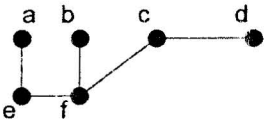
24. กำหนดกราฟ G จงพิจารณาว่ากราฟในข้อใดเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของ G



ก.


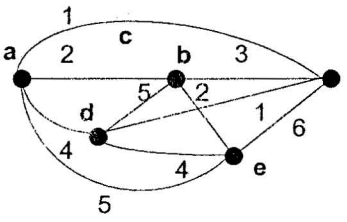
ข.


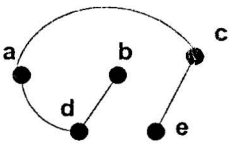
ค.


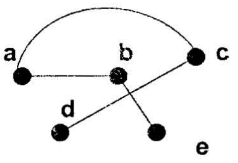
ง.


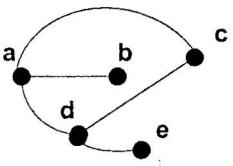
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 18 หาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักโดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

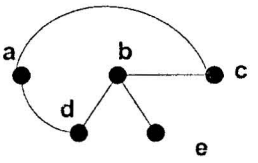
25. กำหนดกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก G จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด



ก.


ข.


ค.


ง.


จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 20 บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

26. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดกล่าวถูกต้อง

(1). ถ้า G เป็นกราฟออยเลอร์ แล้วสามารถหารอยเดินปิดซึ่งไม่ใช่แนวเดินซัด นั่นก็คือ สามารถหาวัฏจักรในกราฟ G ได้

(2). ถ้า G เป็นกราฟที่มีจุดในกราฟเป็นจุดคี่ 2 จุด เรากล่าวว่า กราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์ นั่นก็คือ สามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ในกราฟ G ได้

(3). กราฟแบบบริบูรณ์ K_n เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ เรากล่าวว่า K_n เป็นกราฟออยเลอร์

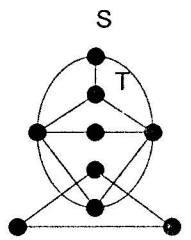
ก. ข้อความที่ (1) ถูกเพียงข้อเดียว ข. ข้อความที่ (1) และ (2) ถูก

ค. ข้อความที่ (3) ถูกเพียงข้อเดียว ง. ข้อความที่ (1), (2) และ (3) ถูกทั้งสามข้อ

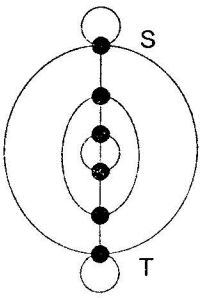
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 21 บอกได้ว่ากราฟใดหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

27. กราฟในข้อใดสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์จาก S ไป T ได้

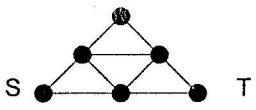
ก.



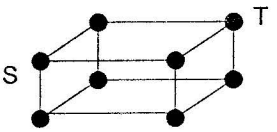
ข.



ค.



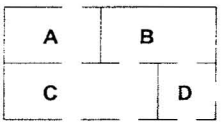
ง.



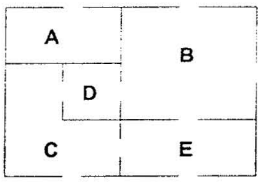
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 22 หาวงออยเลอร์ และรอยเดินเปิดออยเลอร์ โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ได้

28. กำหนดรูปต่อไปนี้ แสดงแปลนของบ้านแต่ละหลัง จงหาแปลนบ้านในข้อใดสามารถเดินผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาที่เดิมได้

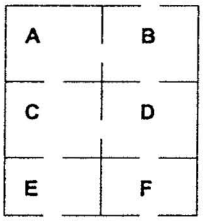
ก.



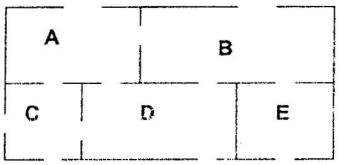
ข.



ค.



ง.

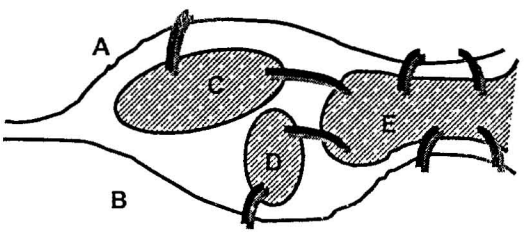


29. จากรูปแสดงแปลนบ้านในแต่ละหลัง ในข้อ 28 จงพิจารณาว่าแปลนบ้านในข้อใด สามารถเดินผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียว แต่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกัน

ก. แปลนบ้าน ก ข. แปลนบ้าน ข ค. แปลนบ้าน ค ง. แปลนบ้าน ง

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 23 หาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้

30. สมมติว่า มีเกาะ 3 เกาะ และ ฝั่ง แต่ละเกาะและฝั่งมีสะพานเชื่อม ดังรูป จงหาเส้นทางที่ข้ามสะพานทุกสะพานเพียงครั้งเดียวแต่ถ้าผ่านซ้ำก็ให้ใช้สะพานน้อยที่สุด แล้วกลับมาที่เดิม ให้เริ่มต้นที่ ฝั่ง A



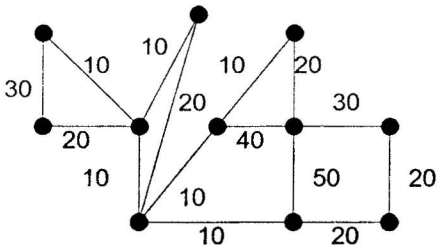
ก. A, C, E, D, B, E, A

ข. A, C, E, A, E, D, B, E, B, E, A

ค. A, E, C, A, E, B, D, E, B, D, E, A

ง. A, C, E, B, D, E, A, E, B, D, E, C, A

31 กำหนดกราฟที่มีน้ำหนัก แทนแผนผัง แสดงจุดและเส้นทางในบริเวณโรงเรียน ที่คุณครูสมศรีมีหน้าที่ตรวจความสะอาดในการทำเวรของนักเรียนในช่วงเช้า และน้ำหนักของเส้น แทน ระยะทาง (เมตร) ดังรูป จงหาว่าคุณครูสมศรีจะต้องเดินตรวจความสะอาดเป็นระยะทางกี่เมตร จึงจะผ่านเส้นทางแต่ละเส้นทางเพียงครั้งเดียว แต่ถ้าผ่านซ้ำก็ให้ใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุด และกลับมาที่จุดเริ่มต้นเหมือนเดิม



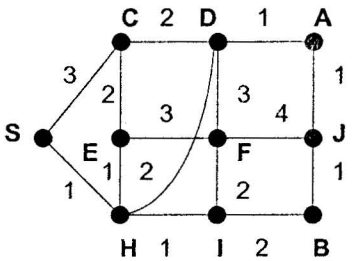
ก. 330 เมตร

ข. 350 เมตร

ค. 410 เมตร

ง. 450 เมตร

32. กำหนดกราฟที่มีน้ำหนัก แทนแผนผังของเขตเทศบาลในอำเภอหนึ่ง ให้ S เป็นสำนักงานเทศบาล ให้จุด แทน ทางแยกของถนนที่รถเก็บขยะต้องไปเก็บขยะแต่ละจุดตามเส้นทางต่าง ๆ และน้ำหนักของเส้น แทน ระยะทาง (กิโลเมตร) ดังรูป จงหาเส้นทางเก็บขยะของรถเก็บขยะที่มีระยะทางน้อยที่สุด และเมื่อเก็บขยะครบทุกเส้นทางแล้ว ต้องนำรถเก็บขยะกลับไปที่สำนักงานเทศบาล เพื่อที่จะนำขยะไปทำลายต่อไป



ก. 27 กิโลเมตร

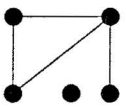
ข. 29 กิโลเมตร

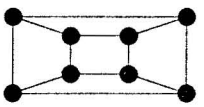
ค. 30 กิโลเมตร

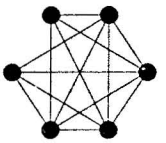
ง. 34 กิโลเมตร

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 25 บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

33. กำหนดกราฟ G_1, G_2 และ G_3 ดังรูป จงหา $\chi(G_1)$, $\chi(G_2)$ และ $\chi(G_3)$

G_1 : 

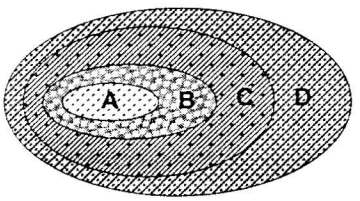
G_2 : 

G_3 : 

ก. 2, 2, 5 ข. 4, 3, 4 ค. 3, 2, 5 ง. 3, 3, 6

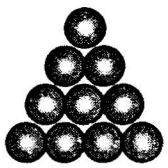
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 26 นำความรู้เรื่องการหาจำนวนสีน้อยที่สุดของกราฟ ไปใช้แก้ปัญหาการระบายสีแผนที่ เมื่อกำหนดแผนที่ใด ๆ มาให้ได้

34. กำหนดแผนที่ของหมู่เกาะทางตอนใต้ของทวีปหนึ่ง ดังรูป จงหาจำนวนสีที่ใช้น้อยที่สุดในการระบายแผนที่



ก. 1
ข. 2
ค. 3
ง. 4

35. กำหนดการวางลูกบอล ดังรูป จงหาจำนวนสีของลูกบอลที่น้อยที่สุดว่ามีกี่สี โดยมีเงื่อนไขว่าลูกบอลที่แตะกันใช้สีต่างกัน



ก. 2 สี
ข. 3 สี
ค. 4 สี
ง. 5 สี

แบบอัตนัย

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 19 นำความรู้เรื่องการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

1. กำหนดตาราง ดังรูป แสดง ค่าเช่าสายโทรศัพท์ต่อเดือน (บาท) ระหว่างจังหวัดสองจังหวัดที่นักเรียนทั้ง 7 คนอาศัยอยู่ จงหาว่า ถ้านักเรียนทั้ง 7 คนวางแผนเชื่อมต่อคอมพิวเตอร์ที่บ้านของแต่ละคนเข้าด้วยกันด้วยการเช่าสายสื่อสารเพื่อรับส่งข้อมูลขององค์การโทรศัพท์ ระหว่างเมืองในราคาที่ต่างกัน นักเรียนทั้ง 7 คนนี้ควรจะเช่าคู่สายใด เพื่อให้คอมพิวเตอร์ของทุก ๆ คนติดต่อกันได้ ด้วยค่าเช่าสายโทรศัพท์ที่ต่ำที่สุด

	กรุงเทพฯ (เกด)	นครปฐม (ไก่)	สุพรรณบุรี (กุ๊ก)	ราชบุรี (กิ๊บ)	กาญจนบุรี (เก่)	อยุธยา (ก้อย)	เพชรบุรี (กิ๊ก)
กรุงเทพฯ	-	40	30	20	50	10	60
นครปฐม	40	-	30	50	60	90	50
สุพรรณบุรี	30	30	-	10	50	40	80
ราชบุรี	20	50	10	-	30	40	20
กาญจนบุรี	50	60	50	30	-	10	10
อยุธยา	10	90	40	40	10	-	50
เพชรบุรี	60	50	80	20	10	50	-

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 24 นำความรู้เรื่องการหาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

2. กำหนดตาราง ดังรูป แสดงระยะทาง (เมตร) ของเส้นทางระหว่างอาคารเรียนสองอาคารเรียนภายในโรงเรียนแห่งหนึ่ง จงหาว่า ในการเดินหาเสียงของ นายพร้อมพงษ์ ผู้สมัครเป็นประธานนักเรียนของโรงเรียนแห่งนี้ เขาจะเดินหาเสียงผ่านเส้นทางทั้งหมดเป็นระยะทางกี่เมตร จึงจะผ่านเส้นทางแต่ละเส้นทางเพียงครั้งเดียว แต่ถ้าต้องผ่านซ้ำก็ให้ใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุด แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้นเหมือนเดิม และบอกเส้นทางการหาเสียงดังกล่าวเมื่อให้นายพร้อมพงษ์เริ่มต้นเดินหาเสียงที่อาคาร b

	a	b	c	d	e	f	g
a	-	11	15	14	15	-	-
b	11	-	13	-	-	21	-
c	15	13	-	10	-	12	-
d	14	-	10	-	17	-	10
e	15	-	-	17	-	-	12
f	-	21	12	-	-	-	18
g	-	-	-	10	12	18	-

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทางที่ 27 นำความรู้เรื่องการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟใด ๆ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

3. กำหนดตาราง ดังรูป แสดงความประสงค์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 10 คน ที่ต้องการเรียนภาคฤดูร้อนในวิชาต่าง ๆ จงพิจารณาว่า เป็นไปได้หรือไม่ ถ้านักเรียนกลุ่มนี้ จะเรียนเฉพาะช่วงเช้าของทุกวันจันทร์ ถึง ศุกร์ โดยที่แต่ละวิชาจะใช้เวลาเรียน 1 ชั่วโมง เริ่มตั้งแต่เวลา 8.00 น. – 12.00 น. ถ้าเป็นไปได้ จงสร้างตารางเรียนภาคฤดูร้อนสำหรับนักเรียนกลุ่มนี้

รายชื่อนักเรียน	วิชา		
1. รักดี	ฟิสิกส์	คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ
2. รักชาติ	ฟิสิกส์	เคมี	เศรษฐศาสตร์
3. รักไทย	เคมี	บัญชี	
4. เกียรติก้อง	สถิติ	เศรษฐศาสตร์	
5. เกรียงไกร	คณิตศาสตร์	บัญชี	
6. บันลือ	ฟิสิกส์	เคมี	
7. บันเทิง	บัญชี	สถิติ	
8. หรรษา	คณิตศาสตร์	เคมี	
9. สุขสันต์	ฟิสิกส์	สถิติ	ภาษาไทย
10. สะอาด	ฟิสิกส์	เศรษฐศาสตร์	ภาษาไทย

ภาคผนวก ค

คู่มือครู

เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

คู่มือครู
เรื่อง
กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

คำชี้แจงการใช้คู่มือครู
เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

คู่มือครูฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อให้ครูผู้สอนใช้เป็นแนวทางในการสอนเนื้อหาเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื้อหาเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟที่สอนในชั้นนี้เน้นให้ผู้เรียนเข้าใจบทนิยาม และสมบัติเบื้องต้นของกราฟ แล้วนำความรู้เรื่องเกี่ยวกับกราฟไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาบางประการที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน

คู่มือครูประกอบด้วย

1. คำนำประจำบท บอกหัวข้อเรื่องของบทเรียน พร้อมด้วยคำอธิบายภาพรวมของเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ในแต่ละหัวข้อ
2. **ตัวอย่างบทเรียนเรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ** ของนักเรียนปรากฏอยู่ในกรอบของคู่มือครู
3. ส่วนที่อยู่นอกกรอบ จะมีคำอธิบายเกี่ยวกับเนื้อหาของทุกหัวข้อในลักษณะต่าง ๆ กัน ดังนี้
   - 3.1 ในบางหัวข้ออาจมีคำอธิบายเหตุผลในการนำเนื้อหาดังกล่าวมาสอน ซึ่งอาจเป็นการเร้าเพื่อให้นักเรียนสนใจในหัวข้อที่กำลังจะศึกษา
   - 3.2 เชิงอรรถที่มีอยู่แต่ละหัวข้อ จะใช้ * กำกับไว้เหนือข้อความในบทเรียนนักเรียน ในเชิงอรรถจะมีคำอธิบายที่เป็นส่วนเพิ่มเติมนอกเหนือจากบทเรียน หรืออาจเป็นคำตอบ หรือเสนอแนวการสอนเฉพาะตอน
   - 3.3 คำตอบอธิบายเพิ่มเติม เพื่อให้ความรู้แก่ผู้สอน
   - 3.4 คำตอบของแบบฝึกหัดในชั้นเรียน แบบฝึกหัดประจำหัวข้อ และวิธีทำของแบบฝึกหัดบางหัวข้อ
   - 3.5 กิจกรรมเสริมซึ่งจะเป็นกิจกรรมเสนอแนะ

กราฟและการประยุกต์ของกราฟ (18 คาบ)

บทเรียนมี 4 หัวข้อ ดังนี้

1. ความรู้เบื้องต้นของกราฟ (8 คาบ)
2. ต้นไม้ (2 คาบ)
3. กราฟออยเลอร์ (5 คาบ)
4. การให้สีกราฟ (3 คาบ)

เนื้อหาเป็นการนำเสนอเรื่อง กราฟ ซึ่งกราฟเป็นแบบจำลองที่สร้างแทนปัญหาบางปัญหาซึ่งทำให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น แล้วแก้ปัญหาโดยการหาคำตอบจากแบบจำลอง จากนั้นนำคำตอบที่ได้จากแบบจำลอง มาอธิบายผลที่เกิดขึ้นจากปัญหาจริง กราฟจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ คน สัตว์ สิ่งของ หรือเหตุการณ์ต่างๆ กราฟ เป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในสาขาคณิตศาสตร์ดิสครีต ความรู้เรื่องเกี่ยวกับกราฟสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้มากมาย ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ การวิจัยดำเนินงาน และด้านอื่นๆ

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อโดยคำนึงถึงระดับสติปัญญา และความสามารถของผู้เรียน บางหัวข้ออาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง หรืออาจเป็นผู้อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ร่วมกันทำกิจกรรมในห้องเรียน ถ้าเป็นไปได้ในแต่ละหัวข้อควรให้นักเรียนสรุปบทเรียนเอง โดยครูอาจเสริมบ้างตามความเหมาะสม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง เรื่องกราฟและการประยุกต์ของกราฟ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้
2. บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับต้นไม้ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้
4. บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้
5. นำความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้
6. บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้
7. นำความรู้เกี่ยวกับการให้สีกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

หัวข้อที่ 1
ความรู้เบื้องต้นของกราฟ
(8 คาบ)

หัวข้อนี้มีหัวข้อย่อย 6 หัวข้อย่อย ดังนี้

1.1 บทนิยามของกราฟ (2 คาบ)
1.2 สับกราฟและกราฟเหมือนกัน (1 คาบ)
1.3 วิถีและวัฏจักร (1 คาบ)
1.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ (2 คาบ)
1.5 กราฟเชื่อมโยง
1.6 กราฟที่มีน้ำหนัก } (2 คาบ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ปลายทาง ของหัวข้อนี้

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ของหัวข้อนี้

1. สร้างแบบจำลองแทนปัญหาบางประการ โดยการใช้จุดและเส้นแทนปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
2. บอก V(G) และ E(G) ของกราฟ G ใด ๆ ได้
3. บอกถึงความสัมพันธ์การประชิด และตกกระทบของกราฟ G ใด ๆ ได้
4. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟที่มีวงวน กราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟว่าง และกราฟแบบบริบูรณ์
5. หาระดับขั้นของจุดใดๆ ในกราฟ G ได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่
6. พิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และนำความรู้ทฤษฎีบท 1 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้
7. หาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
8. บอกถึงความแตกต่าง และหาความยาวของแนวเดินเปิด แนวเดินปิด รอยเดินเปิด รอยเดินปิด วิถี และวัฏจักรได้
9. สร้างวิถีในแนวเดินเมื่อกำหนดแนวเดินใดๆ มาให้ได้
10. สร้างเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
11. นำความรู้ทฤษฎีบท 3 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้
12. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง หรือกราฟไม่เชื่อมโยง เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
13. หา d(u, v) ใด ๆ ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้
14. หาวิถีที่สั้นที่สุดโดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้

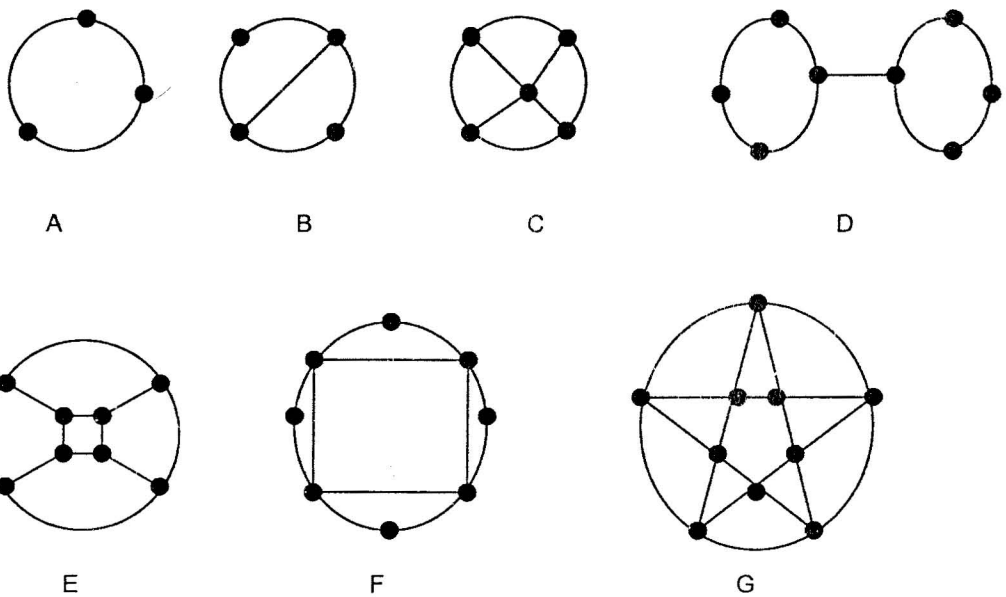
1

1. ความรู้เบื้องต้นของกราฟ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีประโยชน์มาก ซึ่งเราสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน โดยการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยแก้ปัญหา

กิจกรรม

กำหนดรูป A, B, ..., G ดังต่อไปนี้



จากรูป A, B, ..., G แต่ละรูปประกอบด้วยจุดและเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในรูป

กิจกรรมที่ 1 กำหนดเงื่อนไขดังนี้

1. รูปใด ๆ เป็นรูปที่ **สามารถผ่านได้ตลอด** ก็ต่อเมื่อ มีจุดของรูปที่เป็นจุดเริ่มต้นซึ่งสามารถใช้ดินสอลากโดยเริ่มต้นจากจุดนั้นไปตามเส้นในรูปนั้นได้ตลอดโดยไม่ต้องยกดินสอ และแต่ละเส้นนั้นจะต้องลากผ่านเพียงครั้งเดียว (สำหรับจุดอาจจะลากเส้นผ่านได้หลายครั้ง) และสำหรับรูปที่สามารถผ่านได้ตลอด ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย S(start) ไว้ที่จุดที่เป็นจุดเริ่มต้น และทำเครื่องหมาย F(finish) ไว้ที่จุดที่เป็นจุดสิ้นสุด
2. จุดใดๆในรูป เรียกว่าจุดคู่ ก็ต่อเมื่อ จุดนั้นมีเส้นที่ออกจากจุดไปเป็นจำนวนคู่
3. จุดใดๆในรูป เรียกว่าจุดคี่ ก็ต่อเมื่อ จุดนั้นมีเส้นที่ออกจากจุดไปเป็นจำนวนคี่

* กิจกรรมที่1 – กิจกรรมที่ 4 ครูอาจให้นักเรียนจับคู่กัน 2 คน หรือแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละ ไม่เกิน 5 คน

2

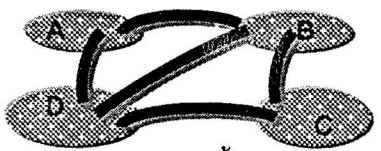
จากรูป A, B, ..., G ที่กำหนด ให้นักเรียนหาจำนวนของจุดคู่ จุดคี่ และบอกด้วยว่ารูปใดเป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอดตามเงื่อนไขข้อ 1 ถึง ข้อ 3

รูป	จำนวนจุดคู่	จำนวนจุดคี่	สามารถผ่านได้ตลอด
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			

กิจกรรมที่ 2 จากรูป A, B, ..., G และกิจกรรม 1 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. รูปที่มีจุดทั้งหมดเป็นจุดคู่ เป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอดหรือไม่
2. รูปที่มีจุดคี่สองจุด (ถ้ามีจุดอื่นๆ จุดเหล่านั้นเป็นจุดคู่) เป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอดหรือไม่
3. รูปที่มีจุดคี่มากกว่าสองจุด เป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอดหรือไม่

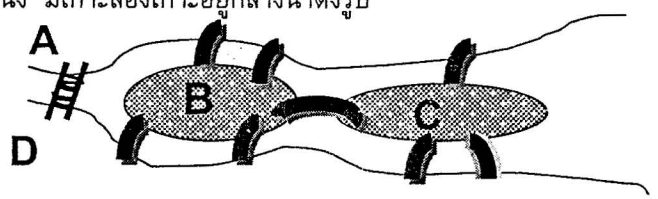
กิจกรรมที่ 3 สมมติว่ามีสวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีเกาะ 4 เกาะ และมีสะพาน 5 สะพานเชื่อมเกาะดังรูป



ให้นักเรียนสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้โดยให้ จุด แทน เกาะ และ เส้น แทน สะพาน

กิจกรรมที่ 4 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. สวนสาธารณะแห่งหนึ่ง มีเกาะสองเกาะอยู่กลางน้ำดังรูป

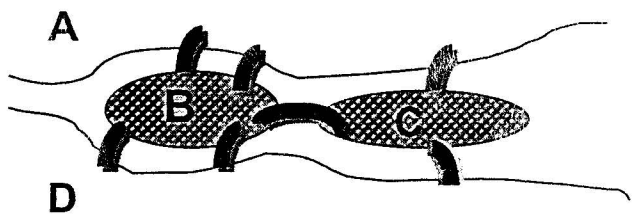


ส่วนต่าง ๆ ของสวนสาธารณะ ส่วน A, B, C และ D เชื่อมกันด้วยสะพาน 9 สะพาน (มี 1 สะพานที่เป็นสะพานรถไฟ) นักเรียนคิดว่านักเรียนจะสามารถเดินเที่ยวชมสวนสาธารณะนี้ทุกส่วน โดยข้ามสะพานทุกสะพานและแต่ละสะพานข้ามเพียงครั้งเดียวได้หรือไม่ (ถ้าได้ ควรเริ่มต้นที่จุดใด)

2. จากข้อ1 ถ้าตัดสะพานรถไฟออก นักเรียนสามารถเดินเที่ยวชมสวนสาธารณะด้วยวิธีดังข้อ 1 ได้หรือไม่

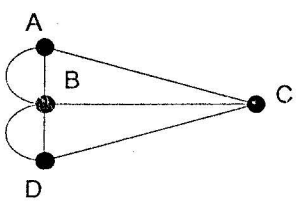
3. จากข้อ1 ถ้าตัดสะพานรถไฟ และสะพานล่างสุดของเกาะทางขวามือ (เกาะ C) ออก นักเรียนสามารถเดินเที่ยวชมเมืองด้วยวิธีดังข้อ 1 ได้หรือไม่

การศึกษากราฟที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นเนื้อหาในวิชาทฤษฎีกราฟ ซึ่งมีประวัติความเป็นมาดังนี้ ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นจากความพยายามในการตอบปัญหาปริศนา(puzzle) ต่าง ๆ ปัญหาหนึ่งที่รู้จักกันดีสำหรับผู้ศึกษาทฤษฎีกราฟ คือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (The KÖnigsberg Bridges Problem) ปัญหานี้มีอยู่ว่า ในเมืองเคอนิกส์เบิร์ก มีเกาะ 2 เกาะ และมีสะพานอยู่ 7 สะพาน ซึ่งเชื่อมเกาะ 2 เกาะนี้ไปยังฝั่งของแม่น้ำพรีเกล (Pregel River) ดังรูป โดยแทนเกาะด้วย B และ C และแทนฝั่งด้วย A และ D



ปัญหามีอยู่ว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่ชาวเมืองเคอนิกส์เบิร์กคนหนึ่งจะเริ่มต้นเดินทางจากเกาะหรือฝั่งใดฝั่งหนึ่งโดยผ่านทุกเกาะและทุกฝั่ง และข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้นจนครบทุกสะพาน แล้วจะต้องกลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น

ปริศนานี้ไม่มีผู้ใดตอบได้จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 **เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler)** นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ได้ตีพิมพ์บทความตอบปริศนานี้ว่า เป็นไปไม่ได้ ออยเลอร์แก้ปัญหานี้โดยการจำลองปัญหาด้วยการใช้จุดแทนเกาะ B เกาะ C ฝั่ง A และฝั่ง D และใช้เส้นเชื่อมแทนสะพาน ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนปัญหานี้สามารถเขียนได้ดังรูป



แนวทางการตอบปัญหานี้ของ ออยเลอร์ คือการดูจากรูปแบบจำลองข้างต้น เขาพบว่าการเริ่มต้นเดินจากจุดใด ๆ แล้วจะต้องเดินผ่านทุก ๆ เส้น ๆ ละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่เดิมเป็นไปไม่ได้ เพราะว่าถ้าต้องเดินจากจุดใด ๆ แล้วต้องเดินผ่านทุก ๆ เส้น ๆ ละ 1 ครั้งนั้นต้องมีเงื่อนไขว่า ไม่ว่าจะเริ่มออกจากจุดใดจะต้องมีการเดินทางเข้าจุดนั้นเสมอโดยเส้นที่ต่างกัน เมื่อเป็นเช่นนี้จำนวนเส้นที่ออกจากจุดแต่ละจุดต้องเป็นจำนวนคู่ ซึ่งจากรูปแบบที่แทนปัญหาดังรูปข้างต้น จะพบว่าไม่มีจุดใดเลยที่มีจำนวนเส้นออกจากจุดเป็นจำนวนคู่

ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ได้รับการยกย่องว่าเป็นปัญหาเริ่มต้นของการก่อกำเนิดทฤษฎีกราฟ ออยเลอร์ซึ่งเป็นผู้แก้ปัญหาดังกล่าวจึงได้รับการยกย่องว่าเป็น**บิดาของวิชาทฤษฎีกราฟ**

4

ในชีวิตประจำวัน กิจกรรมที่คนเราทำอยู่เป็นประจำนั้น ก็เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในการดำเนินชีวิต หลายปัญหาสามารถสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมแทนปัญหา ซึ่งทำให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น แล้วแก้ปัญหาโดยการหาคำตอบจากแบบจำลอง จากนั้นจึงนำคำตอบที่ได้จากแบบจำลองมาอธิบายผลที่เกิดขึ้นจากปัญหาจริง

ปัญหาที่ซับซ้อนบางปัญหาเราสามารถจำลองปัญหาโดยการใช้จุดและเส้นช่วยในการแก้ปัญหาให้ง่ายขึ้นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ *

ตัวอย่างที่ 1 คณะกรรมนักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งแบ่งการทำงานออกเป็น 4 ฝ่าย ได้แก่ ฝ่ายบริหาร ฝ่ายการเงิน ฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น ฝ่ายกิจกรรม แต่ละฝ่ายอาจจะมีกรรมการร่วมกัน โดยประธานนักเรียนได้กำหนดว่าแต่ละฝ่ายจะต้องมีการประชุมสัปดาห์ละ 1 ครั้ง ซึ่งในการจัดประชุมได้จัดเวลาในช่วงเช้าของวันจันทร์ พุธ และศุกร์ นักเรียนคิดว่าผู้ที่มีหน้าที่ในการจัดการประชุมจะมีวิธีการจัดอย่างไรโดยที่กรรมการทุกคนสามารถเข้าร่วมประชุมได้ ถ้ากำหนดคณะกรรมการแต่ละฝ่ายมีคณะกรรมการร่วมกันดังนี้

ฝ่ายบริหาร และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายการเงิน และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

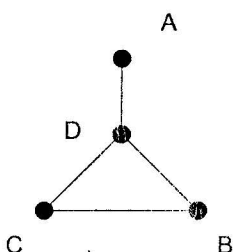
ฝ่ายการเงิน และฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

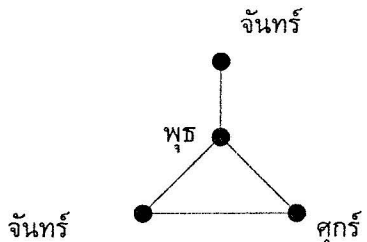
แนวคิด เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้

จุด A, B, C, D แทน ฝ่ายต่าง ๆ ทั้งสี่ฝ่าย เมื่อ A แทนฝ่ายบริหาร B แทนฝ่ายการเงิน C แทนฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น และ D แทนฝ่ายกิจกรรม

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสองฝ่ายนั้นมีกรรมการร่วมกัน ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนสถานการณ์สามารถเขียนได้ดังรูป



รูป (1)



รูป (2)

จากรูป (1) เป็นรูปแบบจำลองที่แสดงถึงคณะกรรมการทั้งสี่ฝ่ายที่มีกรรมการร่วมกัน และจากรูปแบบจำลองรูป (1) สามารถนำมาจัดตารางการประชุมได้โดยกำหนดวัน จันทร์ พุธ และศุกร์ ลงบนจุดแต่ละจุดโดยที่จุด 2 จุดที่มีเส้นเชื่อมจะต้องกำหนดวันที่ต่างกันตัวอย่างเช่นในรูป (2)** จากตัวอย่างนี้นักเรียนจะพบการจำลองสถานการณ์โดยใช้จุดและเส้นทำให้การแก้ปัญหานี้ง่ายขึ้นและนอกจากปัญหาในตัวอย่างนี้ ยังมีปัญหาการจัดตารางสอบ การจัดตารางสอน การกำหนดแผนงาน และการคมนาคมสื่อสาร □

*ครูให้นักเรียนลองแก้ปัญหาสถานการณ์จากตัวอย่างที่ 1-5 และ 7 ก่อน จากนั้นครูจึงแนะนำว่าเราสามารถจำลองสถานการณ์และแก้ปัญหาสถานการณ์ให้ง่ายขึ้นด้วยการจำลองปัญหาโดยใช้จุดและเส้น ** ครูอธิบายว่าในการจัดตารางการประชุมอาจจัดได้มากกว่า 1 วิธี แล้วครูลองให้นักเรียนจัดตารางการประชุมแบบอื่น

5

ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร

สมจิต สมใจ สมคิด สมบูรณ์ และสมชาย สมัครเข้าทำงานตามความสามารถของบุคคลในบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีงานว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง ซึ่งความสามารถของบุคคลทั้ง 5 คน มีดังนี้

สมจิต มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

สมใจ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3

สมคิด มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 1 และ 2

สมบูรณ์ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

สมชาย มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 2 และ 5

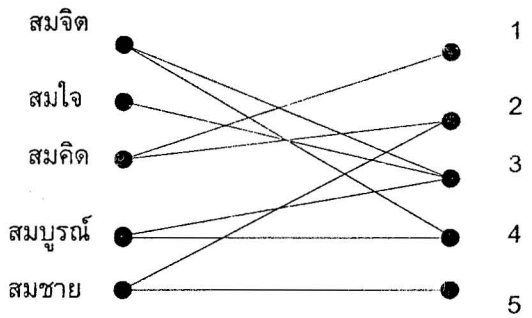
ให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คนได้รับเข้าทำงานในบริษัทแห่งนี้ทั้งหมด

แนวคิด เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้

จุด แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทนคน และกลุ่มที่ 2 แทนตำแหน่งงาน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสามารถของคนกับงาน

ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนสถานการณ์นี้สามารถเขียนได้ดังรูป



จากรูปแบบจำลองนักเรียนจะพบว่าเป็นไปไม่ได้ เหตุผลคือ ให้นักเรียนพิจารณา สมจิต สมใจ และสมบูรณ์ คนสามคนนี้มีความสามารถทำงานได้เพียง 2 งานคือ งาน 3 และงาน 4 ดังนั้นจะต้องมีคนใดคนหนึ่งต้องไม่ได้รับเข้าทำงานอย่างแน่นอน ซึ่งแนวทางในการตอบปัญหานี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาดังเช่น ปัญหาการจับคู่เต้นรำ ปัญหาการจัดเครื่องดื่มในงานปาร์ตี้ เป็นต้น □

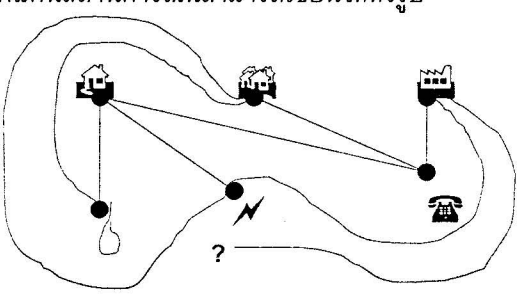
ตัวอย่างที่ 3 มีบ้าน 3 หลัง ซึ่งแต่ละหลังต้องการสาธารณูปโภค 3 อย่าง คือ น้ำ ไฟฟ้า และโทรศัพท์ ถ้าการติดตั้งสาธารณูปโภคเป็นแบบวางท่อใต้ดิน ให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่การต่อสาธารณูปโภคทั้งสามอย่าง มายังบ้าน 3 หลังโดยไม่ให้แนวท่อของเครื่องสาธารณูปโภคนั้นทับกัน

แนวคิด เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้

จุด แทน บ้าน และสาธารณูปโภค

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน แนวท่อใต้ดินของเครื่องสาธารณูปโภค

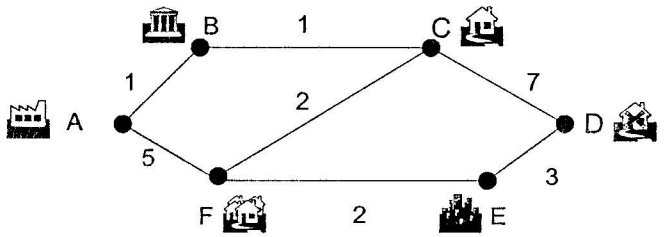
ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนสถานการณ์นี้สามารถเขียนได้ดังรูป



จากรูปแบบจำลองนักเรียนจะพบว่า เป็นไปไม่ได้ จากปัญหานี้นักเรียนจะพบว่าการใช้จุดและเส้นสามารถเป็นแบบจำลองที่ช่วยให้เราแก้ปัญหา ในด้านวิศวกรรมการออกแบบ ซึ่งนอกจากเครื่องสาธารณูปโภคทั้งสามแล้วยังสามารถนำมาใช้กับการทำแผนวงจรไฟฟ้าได้ เป็นต้น □

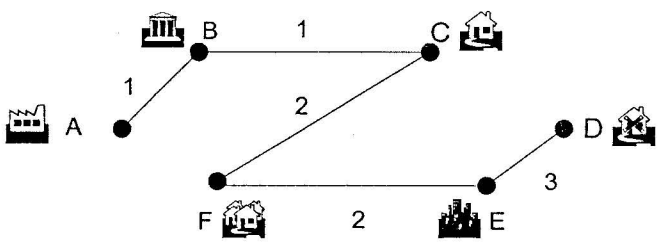
ตัวอย่างที่ 4 สถานการณ์น้ำท่วมในภาคกลาง เป็นผลให้ถนนหลายสายได้รับความเสียหาย ความช่วยเหลือของรัฐบาลไม่สามารถส่งข้าวของเครื่องใช้ไปถึงหมู่บ้านที่ได้รับผลกระทบจากเหตุการณ์ครั้งนี้ ดังนั้นเจ้าหน้าที่ที่มีส่วนเกี่ยวข้องต้องทำการช่วยเหลือในการซ่อมแซมถนนที่ถูกตัดขาดเป็นการด่วน ดังนั้นต้องใช้เวลาในการซ่อมแซมให้น้อยที่สุด

ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ดังกล่าวโดยสมมตินักเรียนไปเจ้าหน้าที่ในการช่วยเหลือ นักเรียนจะเลือกซ่อมแซมถนนเส้นทางใดบ้างที่ใช้เวลาน้อยที่สุดและถนนที่ซ่อมแซมนั้นต้องผ่านทุกหมู่บ้านในเมืองนั้น ๆ ที่ได้รับความเดือดร้อน เมื่อกำหนดแผนผังของเมืองที่ถูกน้ำท่วมดังรูปแบบจำลอง (1) (ตัวเลขที่กำกับเส้นแทนระยะเวลาในการซ่อมแซมถนนระหว่างหมู่บ้านสองหมู่บ้านใด)



รูป (1)

จากรูปแบบจำลอง (1) นักเรียนจะพบว่าเส้นทางที่สามารถซ่อมแซมได้โดยใช้เวลาน้อยที่สุดนั้น ดังรูปแบบจำลอง (2)

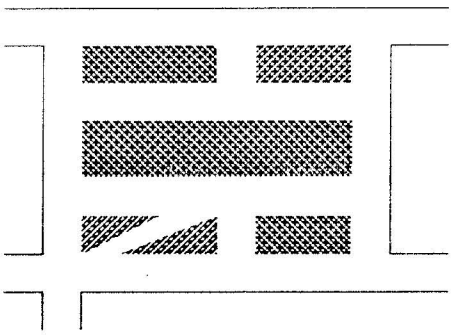


รูป (2)

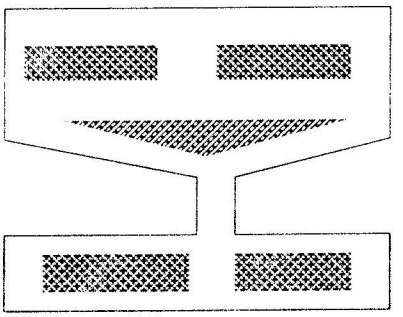
□

7

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดแผนที่ถนนของเมืองสองเมืองดังรูป ให้นักเรียนพิจารณาว่าเมืองสองเมืองนี้สามารถจัดการเดินรถให้เป็นระบบรถวิ่งทางเดียว (รถวิ่งสวนทางกันไม่ได้) โดยที่รถสามารถเดินทางจากแยกใดแยกหนึ่งบนถนนของเมืองนี้ไปยังแยกอื่น ๆ ได้หรือไม่

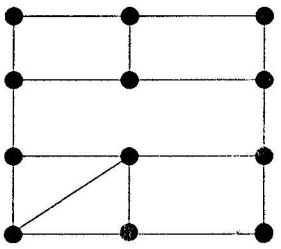


เมืองที่ 1

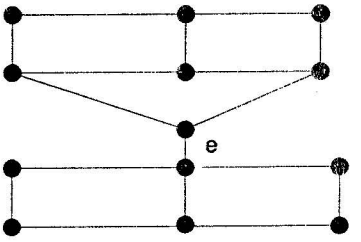


เมืองที่ 2

แนวคิด จากแผนผังเมืองที่ 1 และเมืองที่ 2 เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้
จุด แทน ทางแยก และเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ถนนเชื่อมระหว่างทางแยก
ดังนั้นจะได้รูปแบบจำลองแทนแผงผังเมืองที่1และเมืองที่2 ดังรูป (1) และ (2) ตามลำดับดังนี้ *



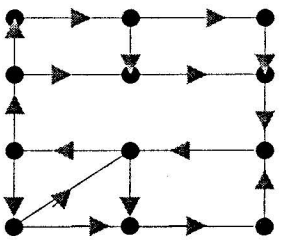
รูป (1)

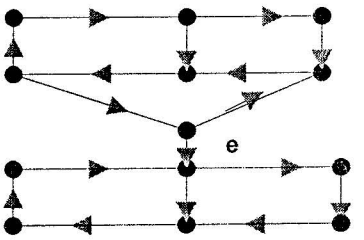


รูป (2)

จากรูปแบบจำลองรูปที่ (1) และ (2) เมื่อใส่ลูกศรแสดงทิศทางการเดินรถแล้วนักเรียนจะพบว่า รูปแบบจำลองรูป (1) นั้นไม่ว่าการเดินรถจะเริ่มที่แยกใด ๆ รถสามารถวิ่งไปยังแยกอื่น ๆ ในเมืองได้ทุกแยก ** แต่สำหรับรูปแบบจำลองรูป (2) นั้นไม่สามารถจัดระบบการเดินรถแบบทางเดียวได้เพราะเนื่องจากถ้าใส่ทิศทางที่เส้น e แล้วจะทำให้ส่วนหนึ่งของเมืองนี้ไม่สามารถติดต่อกับอีกส่วนหนึ่งได้ □

* ครูให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์ โดยใส่ลูกศรแสดงทิศทางการเดินรถ



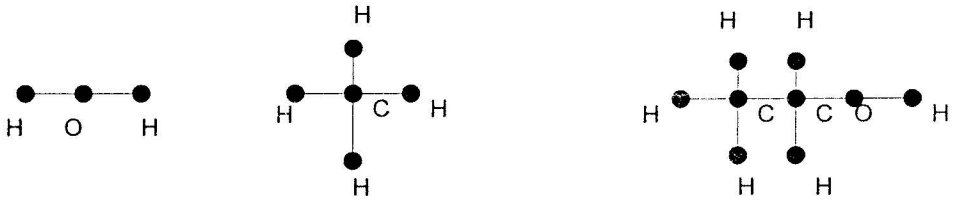


** ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเพิ่มเติมว่า เราสามารถวิ่งจากที่ใด ๆ ของเมืองไปยังที่อื่น ๆ ของเมืองได้ทุกที่

8

การสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์โดยใช้จุดและเส้นสามารถนำมาเชื่อมโยงกับวิชาการสาขาต่าง ๆ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 แผนภาพโครงสร้างของโมเลกุลของน้ำ (H_2O) มีเทน (CH_4) และอีเทนนอล (C_2H_5OH)



แผนภาพโครงสร้าง จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการบอกให้ทราบว่า อะตอมต่าง ๆ เชื่อมต่อกันอย่างไร และเราได้รับข้อมูลต่าง ๆ มากมายที่เกี่ยวกับ พฤติกรรมทางเคมีของแต่ละโมเลกุลจากแผนภาพโครงสร้าง □

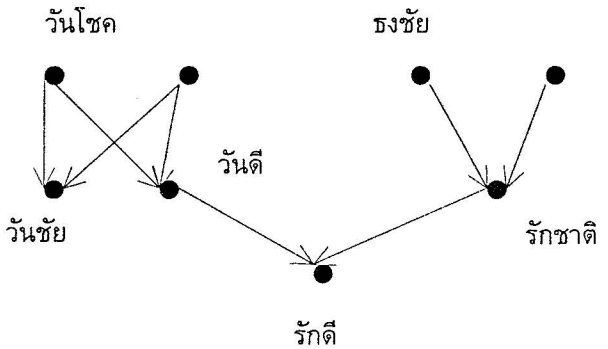
ในการศึกษาสาขาวิชาชีววิทยาในเรื่องของพันธุศาสตร์ เช่นลักษณะการถ่ายทอดทางพันธุกรรม ความสัมพันธ์ทางสายเลือด สามารถอธิบายให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นโดยใช้จุดและเส้นที่มีลูกศรแสดงทิศทางเป็นแบบจำลอง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 มีปัญหาว่า วันโชคเป็นพ่อของวันชัย วันชัยเป็นน้าของรักดี ธงชัยเป็นพ่อของรักชาติ รักชาติเป็นสามีของวันดี วันดีมีน้องชายคนเดียวคือวันชัย ให้นักเรียนพิจารณาว่าวันโชค ธงชัย รักชาติ เป็นอะไรกับรักดี

แนวคิด เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้

จุด แทน คน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดที่มีลูกศรแสดงทิศทาง แทน ความสัมพันธ์ซึ่งหมายถึงจุดปลายลูกศรเป็นลูก ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนสถานการณ์สามารถเขียนได้ดังรูป



จากการสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์นักเรียนจะพบว่า วันโชคเป็นตาของรักดี ธงชัยเป็นปู่ของรักดี และรักชาติเป็นพ่อของรักดี □

9

ปัญหาน่าคิด

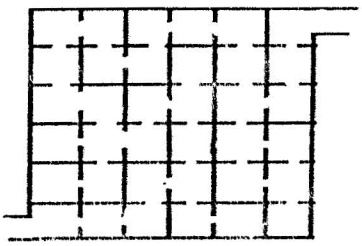
ปัญหาที่ 1 เกมหาทางออก

กำหนดแผนผังของสถานที่เล่นเกมดังรูป ซึ่งผู้เล่นเกมต้องหาทางออกจากสถานที่นี้ให้เร็วที่สุด โดยมีเงื่อนไขว่า ถ้าผู้เล่นเดินทางผิดเพียงครั้งเดียวจะต้องแพ้ทันที นักเรียนจะมีวิธีการวางแผนการเล่นเกมนี้อย่างไร ถึงจะเป็นผู้ชนะในเกมนี้

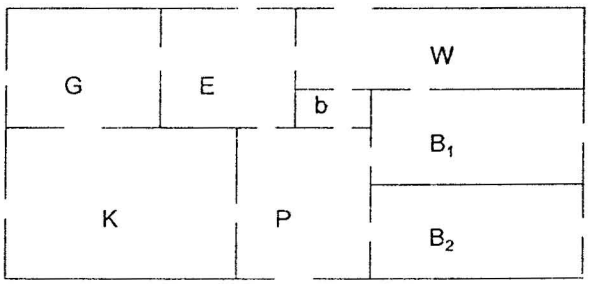
ทางออก



ทางเข้า



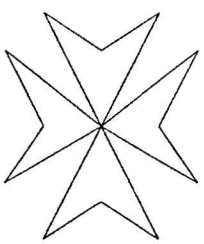
ปัญหาที่ 2 แผนผังบ้านดังรูป



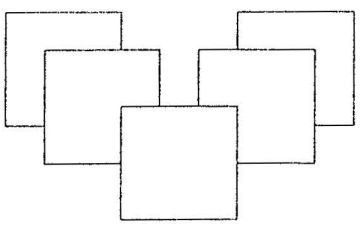
O

จากแผนผังบ้าน ประกอบด้วยห้องนอน(B_1, B_2) จำนวน 2 ห้อง ห้องทำงาน(W) ห้องนั่งเล่น(P) ห้องรับแขก(G) ห้องอาหาร(E) ห้องครัว(K) และห้องน้ำ(b) แต่ละห้องมีจำนวน 1 ห้อง ให้นักเรียนสร้างแบบจำลองแสดงทางเชื่อมระหว่างห้องแต่ละห้องทั้งภายในและภายนอกบ้าน(ภายนอกบ้านกำหนดเป็น (O))

ปัญหาที่ 3 นักเรียนสามารถวาดรูปต่อไปนี้ได้โดยไม่ต้องยกดินสอ และไม่ลากซ้ำเส้นเดิม ได้หรือไม่



รูป(1)



รูป(2)

10

จากตัวอย่างที่กล่าวมา นักเรียนจะเห็นว่าการแทนสถานการณ์โดยใช้จุดและเส้นเป็นแบบจำลองที่ง่ายในการจำลองปัญหาซึ่งเน้นความสัมพันธ์ระหว่างคน สัตว์ สิ่งของ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ

1.1 บทนิยามของกราฟ

กราฟ เป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่งในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete mathematics)* กราฟในที่นี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของจุด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด เช่น แผนที่ถนนเชื่อมระหว่างเมืองต่าง ๆ แผนที่แสดงเส้นทางการบิน และจากตัวอย่างการแก้ปัญหาโดยใช้จุดและเส้นเป็นแบบจำลองที่กล่าวมาข้างต้นเป็นต้น ซึ่งจะให้ความหมายดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 กราฟจำกัด G คือคู่อันดับ (V(G), E(G)) ประกอบไปด้วยเซตจำกัด 2 เซต

1. V(G) เป็นเซตของจุดที่ไม่เป็นเซตว่าง ถ้า u เป็นสมาชิกใน V(G) เรียก u ว่า**จุด** (vertex)
2. E(G) เป็นเซตของเส้น ซึ่งเส้นแต่ละเส้น คือ คู่ที่ไม่เป็นอันดับ (unordered pair) ของจุด u และจุด v ที่เขียนอยู่ในรูป uv เรียก uv ว่า ***เส้น*** (edge)

เรากล่าวว่า V(G) เป็นเซตของจุดของกราฟ G และใช้สัญลักษณ์ $|V(G)|$ แทนจำนวนจุดในกราฟ G
และ E(G) เป็นเซตของเส้นของกราฟ G และใช้สัญลักษณ์ $|E(G)|$ แทนจำนวนเส้นในกราฟ G

หมายเหตุ uv และ vu แทนเส้นเดียวกันที่มีจุดปลาย คือ u และ v

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดกราฟ G = (V(G), E(G))

ซึ่ง $V(G) = \{ a \}$, $E(G) = \varnothing$

เราสามารถแทนกราฟ G ด้วยแผนภาพกราฟ ดังรูป



กราฟ G มี $|V(G)| = 1$, $|E(G)| = 0$ □

กราฟ G มีจุดเพียงจุดเดียวและไม่มีเส้น ดังเช่นตัวอย่างที่ 1 เรียกว่า ***กราฟชัด*** (trivial graph) กราฟที่ไม่ใช่ กราฟชัด เราเรียกว่า ***กราฟไม่ชัด*** (non-trivial graph)

* ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete mathematics) นั้นเป็นรากฐานเชิงทฤษฎีสำหรับเทคโนโลยีของปัจจุบัน เช่น คอมพิวเตอร์ ระบบสื่อสาร และการวิจัยการดำเนินงาน เป็นต้น

11

บทนิยาม 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G

ถ้ามีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v เรากล่าวว่า u ***ประชิด*** (adjacent) กับ v

ให้ e เป็นเส้นในกราฟ G ถ้าจุด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้น e

เรากล่าวว่า เส้น e ***ตกกระทบ*** (incident) กับจุด v หรือ จุด v ตกกระทบกับเส้น e

ให้ e และ f เป็นเส้นที่ต่างกันใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกันคือ จุด v แล้ว

เรากล่าวว่า e ประชิดกับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

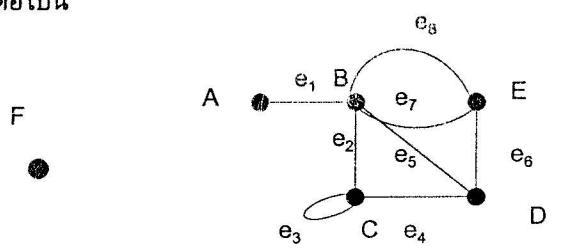
ตัวอย่างที่ 2 ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งกำหนดโดย

$V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

ซึ่ง $e_1 = AB$, $e_2 = BC$, $e_3 = CC$, $e_4 = CD$, $e_5 = BD$, $e_6 = DE$, $e_7 = BE$, $e_8 = BE$

เราสามารถเขียน E(G) ใหม่ได้ดังนี้ $E(G) = \{AB, BC, CC, CD, BD, DE, BE, BE\}$

และใช้แผนภาพแทนกราฟ G ดังรูปต่อไปนี้



กราฟ G มี $|V(G)| = 6$, $|E(G)| = 8$ □

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟ G ในตัวอย่างที่ 2

เราจะได้ว่า จุด D ประชิดกับจุด B, C, และ E

จุด C ตกกระทบกับเส้น e_2, e_3, e_4 หรือ เส้น BC, CC, CD *

เส้น e_6, e_7, e_8 ประชิดกัน หรือ เส้น ED, BE, BE ประชิดกัน □

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้กราฟ G ในตัวอย่างที่ 2 **

1. จุด B ประชิดกับจุดใด
2. จุด E ตกกระทบกับเส้นใด
3. จุด F ประชิดกับจุดใดและตกกระทบกับเส้นใด

ให้นักเรียนตอบคำถามเพื่อนำสู่บทนิยามต่อไป

1. เส้น e_3 หรือ เส้น CC มีลักษณะเฉพาะอย่างไร
2. เส้น e_7 และ e_8 มีลักษณะเฉพาะอย่างไร

* ครูควรให้ข้อสังเกตกับนักเรียนเพื่อนำสู่ข้อสรุปที่ว่าเส้นแต่ละเส้นในกราฟจะตกกระทบกับจุดได้ 1จุดหรือ 2 จุด

** 1. A, C, D, E 2. e_6, e_7, e_8 3. จุด F ไม่ประชิดและตกกระทบกับจุดใดในกราฟ

12

บทนิยาม 3

3.1 เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน เราเรียกว่า ***วงวน*** (loop)

3.2 เส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดคู่เดียวกัน เราเรียกว่า ***เส้นหลายชั้น*** (multiple edges)

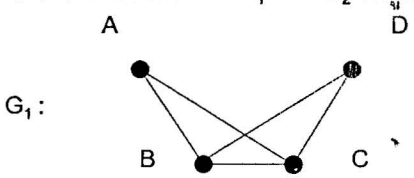
3.3 กราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้นและไม่มีวงวน เราเรียกว่า ***กราฟเชิงเดียว*** (Simple graph)

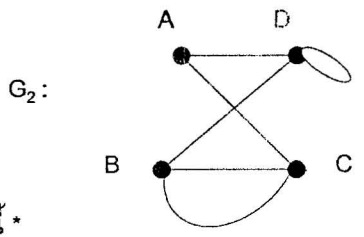
ตัวอย่างที่ 4 จากกราฟ G ในตัวอย่างที่ 2 นักเรียนสามารถตอบปัญหาที่กล่าวมาแล้วได้ ดังนี้

1. **เส้น e_3 หรือ เส้น CC มีจุดปลายของเส้นเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า วงวน**
2. **เส้น e_7 และ e_8 ไม่ใช่เส้นเดียวกันแต่มีจุดปลายของเส้นเหมือนกัน คือจุด B และจุด E เรียกว่า เส้นหลายชั้น**

และ เราสรุปได้ว่า กราฟ G ไม่ใช่กราฟเชิงเดียว □

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดกราฟ G_1 และ G_2 ดังรูป





จากกราฟ G_1 และ G_2 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

1. กราฟใด เป็นกราฟเชิงเดียว เหตุผล
2. กราฟใดเป็นกราฟที่มีเส้นหลายชั้นและมีวงวน เหตุผล □

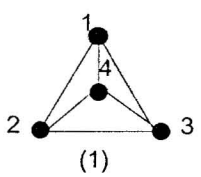
ข้อสังเกต จากบทนิยามกราฟนักเรียนจะพบว่า

1. กราฟ G ที่กำหนดสามารถเขียนแบบจำลองแทนได้หลายแบบ

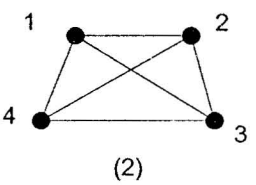
ตัวอย่างที่ 6 $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$

เมื่อ $V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $E(G_1) = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$

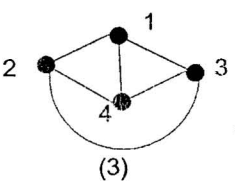
เราสามารถแทนกราฟ G_1 ด้วยแผนภาพกราฟได้หลายแบบดังรูป (1) - (4)



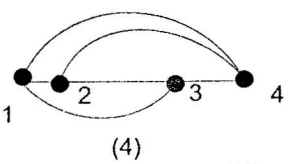
(1)



(2)



(3)



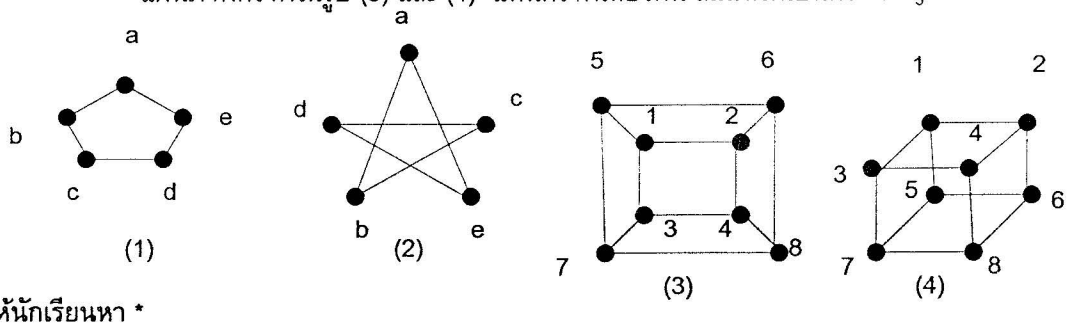
(4)

□

* 1. กราฟ G_1 2. กราฟ G_2

13

ตัวอย่างที่ 7 แผนภาพกราฟในรูป (1) และ (2) แทนกราฟเดียวกัน สมมติให้เป็นกราฟ G_2
แผนภาพกราฟในรูป (3) และ (4) แทนกราฟเดียวกัน สมมติให้เป็นกราฟ G_3



ให้นักเรียนหา *

ใน รูป(1) และ (2) $V(G_2)$=.....,$E(G_2)$=.....

รูป(3) และ (4) $V(G_3)$=.....,$E(G_3)$=..... □

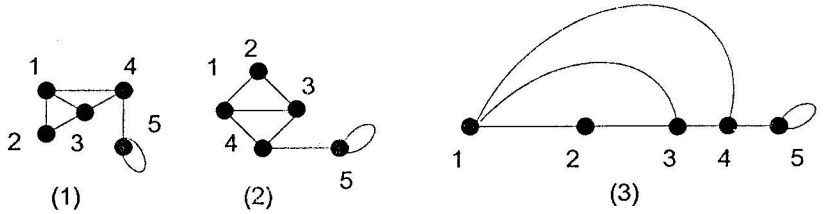
2. ในการสร้างกราฟ G ความยาวและทิศทางของเส้นไม่เป็นสิ่งสำคัญ

3. ในการสร้างกราฟ G มีสิ่งหนึ่งที่สำคัญและไม่เปลี่ยนแปลง คือจำนวนเส้นที่ออกจากจุดแต่ละจุดใน V(G) ดังตัวอย่างที่ 8

ตัวอย่างที่ 8 $G_4 = (V(G_4), E(G_4))$

เมื่อ $V(G_4)$ = {1, 2, 3, 4, 5} และ $E(G_4)$ ={14, 13, 12, 23, 34, 45, 55}

เราเขียนแทนกราฟ G_4 ด้วยแผนภาพกราฟ ดังรูป (1) - (3)



ในแต่ละภาพกราฟ G_4 เราพบว่า จำนวนเส้นที่ออกจาก

จุด1 มี .....เส้น จุด 2 มี.....เส้น จุด 3 มี ..... เส้น

จุด 4 มี.... ....เส้น จุด 5 มี.....เส้น ** □

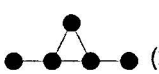
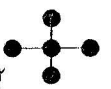
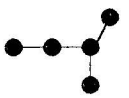
* ครูควรให้นักเรียนลองยกตัวอย่างกราฟพร้อมทั้งวาดแผนภาพกราฟ ที่นอกเหนือจากตัวอย่าง

รูป(1) และ (2) $V(G_2)$ ={a, b, c, d, e} $E(G_2)$= {ab, ae, dc, bc, de}

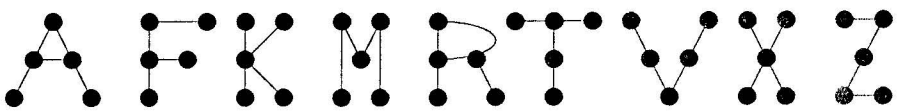
รูป(3) และ (4) $V(G_3)$= {1, 2, ..., 7} $E(G_3)$= {12, 15, 13, 24, 26, 34, 37, 48, 56, 57, 68, 78}

** จำนวนเส้นที่ออกจากจุด 1, 2, 3, 4, 5 คือ 3, 2, 3, 3, 3

ปัญหาชวนคิด 1

มีเชือก 4 แบบดังรูป (1)  (2)  (3)  (4) 

ให้นักเรียนหาว่าเชือกแต่ละแบบจะสร้างตัวอักษรตัวใดได้บ้าง เมื่อกำหนดตัวอักษรดังนี้



14

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

จากข้อสังเกตข้างต้น กราฟซัดสามารถเขียนแผนภาพกราฟได้กี่แบบ *

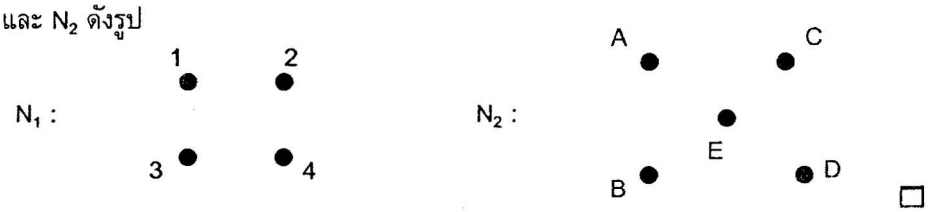
ตัวอย่างที่ 9 ให้นักเรียนกำหนดกราฟที่ประกอบด้วยจุด 4 จุด และ 5 จุด แต่ไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุด

แนวคิด กราฟที่ประกอบด้วยจุด 4 จุด และ 5 จุด คือกราฟ N_1 และ N_2

$N_1 = (V(N_1), E(N_1))$ เมื่อ $V(N_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $E(N_1) = \varnothing$

$N_2 = (V(N_2), E(N_2))$ เมื่อ $V(N_2) = \{A, B, C, D, E\}$ และ $E(N_2) = \varnothing$

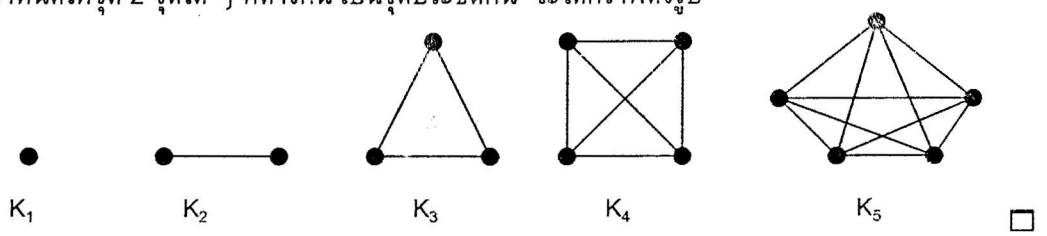
จะได้ กราฟ N_1 และ N_2 ดังรูป



□

กราฟ G ที่มีจุดแต่ไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุด ดังเช่นตัวอย่างที่ 9 เรียกว่า ***กราฟว่าง*** (null graph)

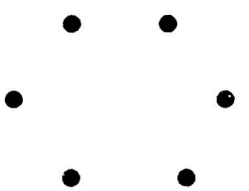
ตัวอย่างที่ 10 ให้นักเรียนกำหนดกราฟเชิงเดียวที่ประกอบด้วยจุด 1, 2, 3, 4 และ 5 จุด เมื่อกำหนดให้จุด 2 จุดใด ๆ ที่ต่างกัน เป็นจุดประชิดกัน จะได้กราฟดังรูป



□

กราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีจำนวนจุด n จุด และเมื่อจุด 2 จุดใด ๆ ที่ต่างกันของ G เป็นจุดประชิดกัน ดังเช่นตัวอย่างที่ 10 เรียกว่า ***กราฟแบบบริบูรณ์*** (complete graph) เขียนแทนด้วย K_n

จงสร้างกราฟแบบบริบูรณ์ K_6



* 1 แบบเท่านั้น **เฉลยปัญหาชวนคิด 1** สร้างตัวอักษร A และ R ใช้เซือกแบบที่ 1 ตัวอักษร M, V และ Z ใช้เซือกแบบที่ 2 ตัวอักษร K และ X ใช้เซือกแบบที่ 3 ตัวอักษร F และ T ใช้เซือกแบบที่ 4

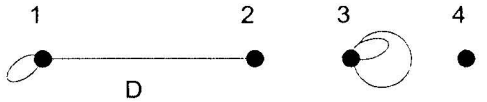
ปัญหาชวนคิด 2 การแข่งขันปิงปอง มีผู้สมัครแข่งขัน 5 คน โดยการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมด ให้นักเรียนจำลองสถานการณ์การแข่งขันปิงปองครั้งนี้ และถ้านักเรียนเป็นคณะกรรมจัดการแข่งขัน นักเรียนต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดจำนวนกี่คู่

15

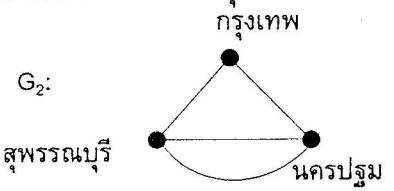
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(1)

1. กำหนดกราฟ G_1, G_2 และ G_3 ดังรูป จงหาเซตของจุดและเซตของเส้นพร้อมทั้งบอกจำนวนจุดและจำนวนเส้นทั้งหมดในกราฟ G_1, G_2 และ G_3

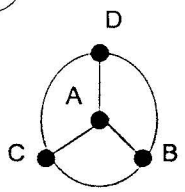
G_1 :



G_2:



G_3:



2. จงเขียนแผนภาพกราฟ เมื่อกำหนด V(G) และ E(G) ดังนี้

2.1 V(G) = {ไทย, ลาว, พม่า, มาเลเซีย, กัมพูชา}

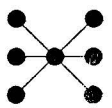
E(G) = {ไทยลาว, ไทยพม่า, ไทยมาเลเซีย, ไทยกัมพูชา, พม่าลาว, ลาวกัมพูชา}

2.2 V(G) = {a, b, c, d} , E(G)= {ab, ab, cc, ac, ac}

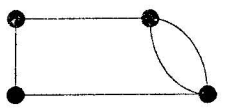
2.3 V(G) = {A, B, C, D, E} , E(G) = ∅

3 กำหนด G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังรูป

G_1 :

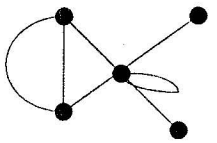


G_2 :



G_3 :

G_4 :



จงพิจารณาตามหัวข้อต่อไปนี้

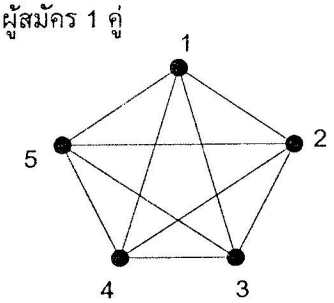
3.1 กราฟใดเป็นกราฟเชิงเดียว

3.2 กราฟใดมีเส้นหลายชั้น

3.3 กราฟใดมีวงวน

3.4 กราฟใดมีวงวนและเส้นหลายชั้น

เฉลยปัญหาชวนคิด 2 เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนการแข่งขันปิงปอง โดยให้ จุด แทน ผู้สมัครแข่งขัน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน การแข่งขันระหว่างผู้สมัคร 1 คู่ ดังนั้นได้รูปแบบจำลองดังนี้



ดังนั้นคณะกรรมต้องจัดแข่งขันปิงปองแบบพบกันหมด

จำนวนทั้งหมด = 10 คู่

16

4. จงเขียนแผนภาพกราฟที่มีจำนวนจุดของกราฟเท่ากับ 5 และจำนวนเส้นของกราฟเท่ากับ 7 ตามหัวข้อต่อไปนี้

4.1 กราฟเชิงเดียว

4.2 กราฟที่มีเส้นหลายชั้น

4.3 กราฟที่มีวงวน

4.4 กราฟที่มีเส้นหลายชั้นและวงวน

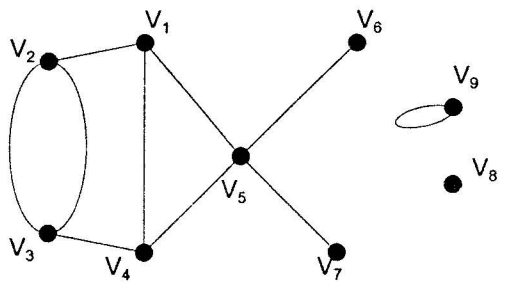
ระดับขั้นของจุดในกราฟ

บทนิยาม 4 กำหนดกราฟ G = (V(G), E(G)) และ $v \in V(G)$ ***ระดับขั้น***(degree) ของ v คือ จำนวนเส้นใน E(G) ที่ตกกระทบกับจุด v เราเขียน deg(v) แทนระดับขั้นของ v
(จำนวนเส้น ใน E(G) ที่ตกกระทบกับจุด v คือจำนวนเส้นใน E(G) ที่ออกจากจุด v นั่นเอง)

ถ้า deg(v) เป็นจำนวนคู่ เราเรียก v ว่า***จุดคู่*** (even vertex)

ถ้า deg(v) เป็นจำนวนคี่ เราเรียก v ว่า***จุดคี่*** (odd vertex)

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดกราฟ G_1 ดังรูป



กราฟ G_1 มี $|V(G_1)| = 9$, $|E(G_1)| = 10$

จะได้ระดับขั้นของจุด v_1 ถึง v_9 ดังนี้

$\deg(v_1) = 3$ $\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 3$ $\deg(v_4) = 3$

$\deg(v_5) = 4$ $\deg(v_6) = 1$

$\deg(v_7) = 1$ $\deg(v_8) = 0$

$\deg(v_9) = 2$

เราเรียก จุด v_8 ที่มีระดับขั้น 0 ว่า***จุดเอกเทศ*** (isolated vertex) ในกราฟ G_1

และเรียก จุด v_6 และ v_7 ที่มีระดับขั้น 1 ว่า ***จุดปลาย*** (end vertex) ในกราฟ G_1

ดังนั้นผลบวกของระดับขั้นของจุดทุก ๆ จุดในกราฟ G_1 คือ $\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_9)$

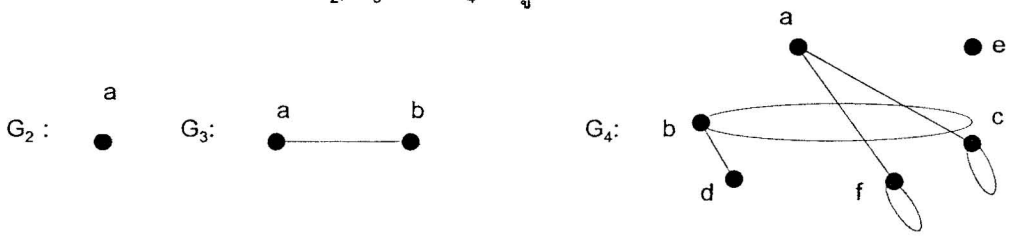
หมายเหตุ จุดที่มีวงวน 1 วงวนจะนับระดับขั้นของจุดนั้นเป็น 2

จะได้ $\sum_{i=1}^{9} \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_9) = 3+3+3+3+4+1+1+0+2 = 20$ □

17

จงพิจารณาว่า ผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ มีความสัมพันธ์กับจำนวนเส้นของกราฟหรือไม่อย่างไรจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดกราฟ G_2, G_3 และ G_4 ดังรูป



จากกราฟที่กำหนดจะได้ตารางแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดและจำนวนเส้นของกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ในตัวอย่างที่ 11 และ 12 ดังต่อไปนี้

กราฟ	จำนวนเส้น	ผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ	จำนวนจุดคี่	จำนวนจุดคู่
G_1	10	20	6	3
G_2	0	0	0	1
G_3	1	2	2	0
G_4	6	12	4	2

□

ข้อสังเกต จากตารางข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ จะมีค่าเท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้นใช่หรือไม่
2. จำนวนจุดคี่ในกราฟใด ๆ จะมีเป็นจำนวนคู่ ใช่หรือไม่

ข้อสังเกตดังกล่าวเป็นจริงเสมอสำหรับทุก ๆ กราฟ ดังทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ $G = (V(G), E(G))$ แทนกราฟ โดย $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = q$

ซึ่ง $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2|E(G)|$$

พิสูจน์* ในการหาระดับขั้นของจุดแต่ละจุดนั้น เส้น 1 เส้นในกราฟ G จะใช้ในการนับระดับขั้นของจุด 2 ครั้ง เพราะ เส้นตกกระทบกับจุด 2 จุด ในกราฟ G

ดังนั้น ผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ G จึงเป็น 2 เท่าของจำนวนเส้น □

* ครูอาจจัดกิจกรรมดังเช่น ให้ตัวแทนนักเรียนจำนวน 2 คน ถือเชือกจำนวน 1 เส้น โดยแต่ละคนจับที่ปลายเชือกของเส้น เพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปจากการศึกษาตัวอย่างที่ 11, 12 และกิจกรรมนี้

18

บทแทรก 1 กราฟทุกกราฟจะมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

หมายเหตุ กราฟใด ๆ จะมีจุดคู่เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าจุดในกราฟ G มีระดับขั้น 3 หรือ 4 เท่านั้น และ $|V(G)| = 12$, $|E(G)| = 20$ จงหาจำนวนจุดที่มีระดับขั้น 3 และระดับขั้น 4

แนวคิด ให้ n แทนจำนวนจุดที่มีระดับขั้น 3 ในกราฟ G

ดังนั้นจำนวนจุดที่มีระดับขั้น 4 ในกราฟมี $12 - n$ จุด

เพราะฉะนั้น $3n + 4(12 - n) = 2(20)$

$3n + 48 - 4n = 40$

$n = 8$

ดังนั้น มีจุด 8 จุดที่มีระดับขั้น 3 และ มีจุด 4 จุดที่มีระดับขั้น 4 □

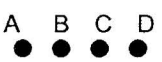
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(2)

1. จงหาระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ $G_1, G_2, \ldots, G_9$

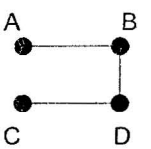
G_1 :



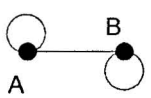
G_2 :



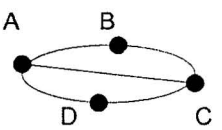
G_3 :



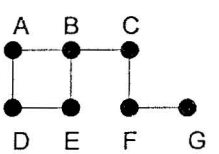
G_4 :



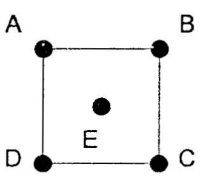
G_5 :



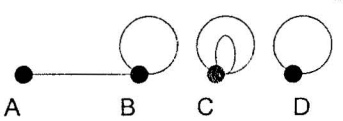
G_6 :



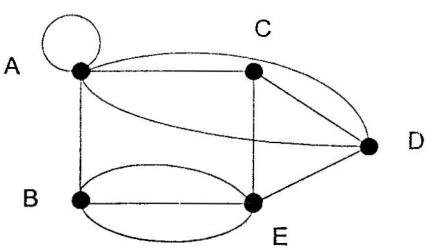
G_7 :



G_8 :



G_9 :



19

2. จงหาผลบวกของระดับขั้นของทุกๆ จุดในกราฟ G เมื่อ V(G) = {A, B, C, D}

2.1 E(G) = {AB, AC, BC, CD}

2.2 E(G) = {AB, AC, AD, BA, BB, CB, CD}

2.3 E(G) = {AA, BB, CC, AB, AB}

3. กำหนด G = (V(G), E(G)) ซึ่ง V(G) = {A, B, C, D} และ deg(A) = 2, deg(B) = 3, deg(C) = 3, deg(D) = 3 มีกราฟ G เกิดขึ้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. ถ้าจุดในกราฟ G มีระดับขั้น 3 หรือ 5 เท่านั้น และ $|V(G)| = 14$, $|E(G)| = 25$ จงหาจำนวนจุดที่มีระดับขั้น 3 และระดับขั้น 5

5. ถ้าจุดแต่ละจุดในกราฟ G มีระดับขั้น 2 เท่านั้น และ $|E(G)| = 10$ จงหาจำนวนจุดในกราฟ G พร้อมเขียนแผนภาพกราฟ G

1.2 สับกราฟและกราฟเหมือนกัน

บทนิยาม 5 ให้ H = (V(H), E(H)) และ G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟใด ๆ

5.1 ถ้า $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$ *

เรากล่าวว่า H เป็น***สับกราฟ*** (subgraph) ของ G

5.2 ถ้า H เป็นสับกราฟของ G และ V(H) = V(G)

เรากล่าวว่า H เป็น***สับกราฟแผ่ทั่วถึง*** (spanning subgraph) ของ G

5.3 ถ้า V(H) = V(G) และ E(H) = E(G)

เรากล่าวว่า กราฟ H และ กราฟ G เป็นกราฟ***เหมือนกัน*** (identical)

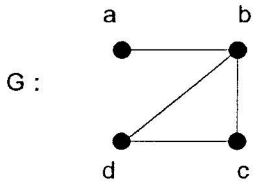
* ในหนังสือบางเล่ม จะใช้สัญลักษณ์ " $\subseteq$ " แทนสับเซต และใช้สัญลักษณ์ " $\subset$ " แทนสับเซตแท้ แต่ในบทเรียนนี้ จะใช้สัญลักษณ์ " $\subset$ " แทนสับเซต

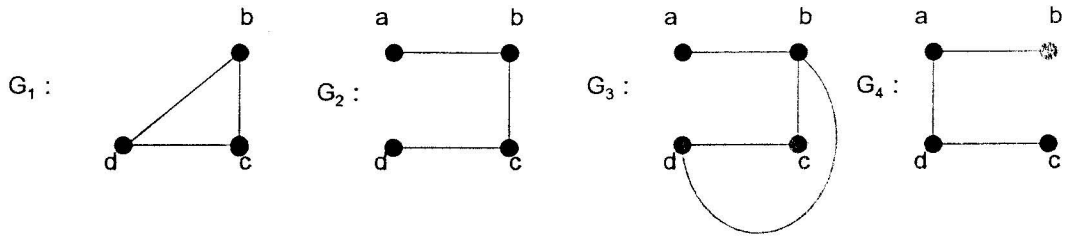
ในกรณีที่เป็นสับเซตแท้จะเขียนว่า " สับเซตแท้ " หรือใช้สัญลักษณ์ " $\subset$ " และ " $\neq$ " แทน เช่น กล่าวว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B หรือ $A \subset B$ และ $A \neq B$

การใช้สัญลักษณ์ดังกล่าว ครูควรพิจารณาจากความรู้พื้นฐานของนักเรียนในการเรียนเรื่อง เซต

20

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดกราฟ G_1 , G_2 , G_3 และ G_4 ดังรูป





1.1 G_1 เป็นสับกราฟของ G

เนื่องจาก $V(G) = \{a, b, c, d\}$ และ $V(G_1) = \{b, c, d\}$ นั่นคือ $V(G_1) \subset V(G)$

$E(G) = \{ ab, bc, cd, bd\}$ และ $E(G_1) = \{bc, cd, bd\}$ นั่นคือ $E(G_1) \subset E(G)$

ดังนั้น G_1 เป็นสับกราฟของ G

1.2 G_2 เป็นสับกราฟของ G

เนื่องจาก $V(G) = V(G_2) = \{a, b, c, d\}$ นั่นคือ $V(G_2) = V(G)$

$E(G) = \{ab, bc, cd, bd\}$ และ $E(G_2) = \{ab, bc, cd\}$ นั่นคือ $E(G_2) \subset E(G)$

ดังนั้น G_2 เป็นสับกราฟของ G และ G_2 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G

1.3 G_3 และ G เป็นกราฟเหมือนกัน ($G_3 = G$)

เนื่องจาก $V(G) = V(G_3) = \{a, b, c, d\}$ นั่นคือ $V(G_3) = V(G)$

$E(G) = \{ab, bc, cd, bd\}$ และ $E(G_3) = \{ab, bc, cd, bd\}$ นั่นคือ $E(G_3) = E(G)$

ดังนั้น G_3 และ G เป็นกราฟเหมือนกัน

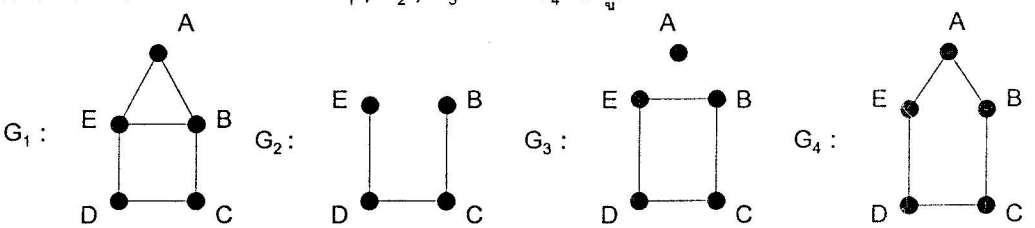
1.4 G_4 ไม่เป็นสับกราฟของ G

เนื่องจาก $ad \in E(G_4)$ แต่ $ad \notin E(G)$

นั่นคือ $E(G_4) \not\subset E(G)$

ดังนั้น G_4 ไม่เป็นสับกราฟของ G □

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟ G_1 , G_2 , G_3 และ G_4 ดังรูป

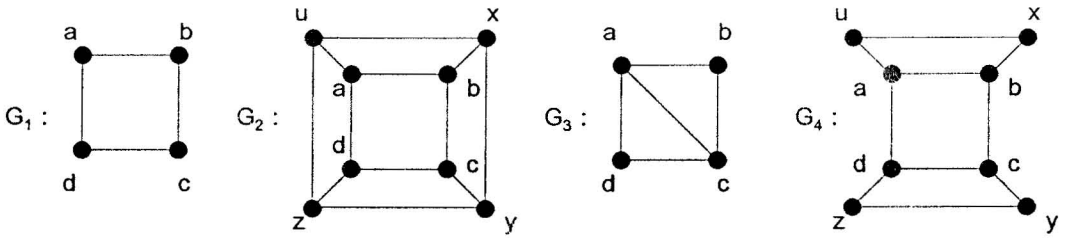


21

G_2, G_3, G_4 เป็นสับกราฟของ G_1

G_3, G_4 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G_1 □

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดกราฟ G_1 , G_2 , G_3 และ G_4 ดังรูป



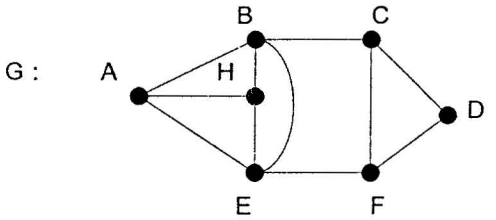
G_1 เป็นสับกราฟของ G_2 , G_3 , G_4 และ G_1 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G_3

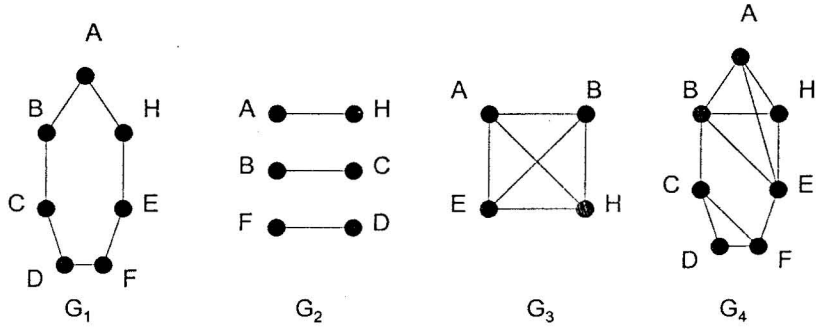
G_3 ไม่เป็นสับกราฟของ G_1 , G_2 และ G_4

G_4 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G_2 □

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

กำหนดกราฟ G, G_1, G_2, G_3 และ G_4 จงพิจารณาว่า กราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 แต่ละกราฟ กราฟใดเป็นสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง หรือ กราฟเหมือนกันของกราฟ G





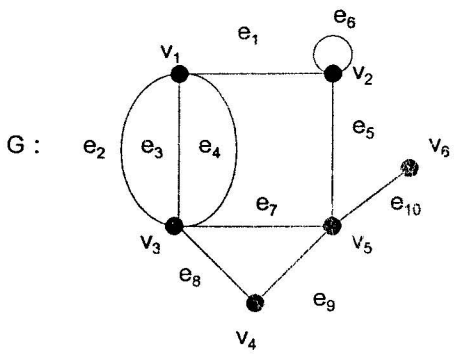
* กราฟ G_1, G_2 และ G_3เป็นสับกราฟของ G, กราฟ G_1 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G เพราะ $V(G_1) = V(G)$, กราฟ G_4 และ G เป็นกราฟเหมือนกัน เพราะ $V(G_4) = V(G)$ และ $E(G_4) = E(G)$

บทนิยาม 6 กำหนด G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟใด ๆ

6.1 ให้ U เป็นเซตของจุดที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็นสับเซตแท้ของ V(G) สับกราฟของ G ที่มีเซตของจุด คือ V(G) – U และมีเซตของเส้น คือ เซตของเส้นใน E(G) ที่ไม่ใช่เส้นที่ตกกระทบกับจุดใน U เขียนแทน ด้วย G – U

6.2 ถ้า F เป็นเซตของเส้นที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็นสับเซตของ E(G) สับกราฟของ G ที่ได้จากการกำจัดเส้นใน F โดยที่ไม่มีผลต่อจุด และมีเซตของเส้น คือ E(G) – F เขียนแทนด้วย G – F

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด G = (V(G), E(G)) ดังรูป



จงหากราฟ G – U

เมื่อ $U \subset V(G)$ ซึ่ง $U \neq \varnothing$ และ $U \neq V(G)$ ดังต่อไปนี้

4.1 ถ้า $U = \{v_1, v_2, v_4\}$

แนวคิด เมื่อกำจัดจุด v_1, v_2 และ v_4 เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_1, v_2 และ v_4 ต้องถูกลบออก

จะได้ว่า $V(G) - U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} - \{v_1, v_2, v_4\}$

$= \{v_3, v_5, v_6\}$

เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_1 คือ เส้น e_1, e_2, e_3, e_4

เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_2 คือ เส้น e_1, e_5, e_6

เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_4 คือ เส้น e_8, e_9

เส้นที่ต้องถูกลบออกคือ เส้น $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9$

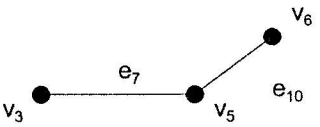
จะได้ว่า

$E(G) - \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$= \{e_7, e_{10}\}$

ดังนั้น กราฟ G – U เป็นสับกราฟของ G ที่มีจุด 3 จุด คือ จุด v_3, v_5, v_6 มีเส้น 2 เส้น คือ เส้น e_7, e_{10} ดังรูป (1)

กราฟ G – U :
เมื่อ $U = \{v_1, v_2, v_4\}$



รูป (1)

23

4.2 ถ้า $U = \{v_3, v_6\}$

แนวคิด เมื่อกำจัดจุด v_3 และ v_6 เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_3 และ v_6 ต้องถูกลบออก

จะได้ว่า $V(G) - U = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} - \{v_3, v_6\}$

$= \{ v_1, v_2, v_4, v_5\}$

เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_3 คือ e_2, e_3, e_4, e_7, e_8

เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_6 คือ e_{10}

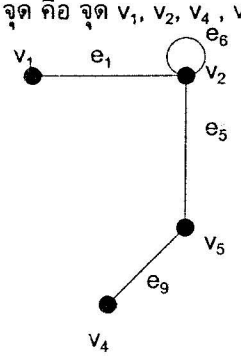
เส้นที่ต้องถูกลบออก คือ เส้น $e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_{10}$

จะได้ว่า $E(G) - \{e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_{10}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_{10}\}$

$= \{e_1, e_5, e_6, e_9\}$

ดังนั้น กราฟ $G - U$ **เป็นสับกราฟของ** G **ที่มีจุด** 4 จุด คือ จุด v_1, v_2, v_4, v_5 มีเส้น 4 เส้น คือ เส้น e_1, e_5, e_6, e_9 ดังรูป (2)

กราฟ $G - U$:
เมื่อ $U = \{v_3, v_6\}$



รูป (2)

4.3 ถ้า $U = \{v_2\}$

แนวคิด เมื่อกำจัดจุด v_2 เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_2 ต้องถูกลบออก

จะได้ว่า $V(G) - U = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} - \{v_2\}$

$= \{ v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

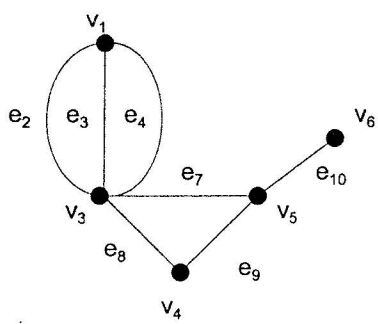
เส้นที่ตกกระทบกับจุด v_2 คือ เส้น e_1, e_5, e_6 เส้นที่ต้องถูกลบออก คือ เส้น e_1, e_5, e_6

จะได้ว่า $E(G) - \{e_1, e_5, e_6\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_1, e_5, e_6\}$

$= \{e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

ดังนั้น กราฟ $G - U$ เป็นสับกราฟของ G ที่มีจุด 5 จุด คือ จุด v_1, v_3, v_4, v_5, v_6 มีเส้น 7 เส้น คือ $e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9, e_{10}$ ดังรูป (3)

กราฟ $G - U$:
เมื่อ $U = \{v_2\}$



รูป (3)

□

หมายเหตุ ในกรณีที่ $U = \{v\}$ เป็นเซตของจุดที่มีเพียงจุดเดียว เพื่อความสะดวก เราใช้สัญลักษณ์ $G - v$ แทน $G - \{v\}$

24

ตัวอย่างที่ 5 จากกราฟ G = (V(G), E(G)) ในตัวอย่างที่ 4

จงหากราฟ G – F

เมื่อ $F \subset E(G)$ ซึ่ง $F \neq \varnothing$ ดังต่อไปนี้

5.1 ถ้า $F = \{e_1, e_2, e_{10}\}$

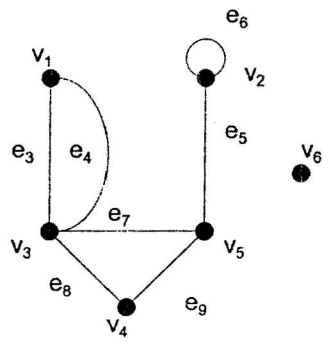
แนวคิด เมื่อกำจัดเส้น e_1, e_2 และ e_{10} จุดที่ตกกระทบกับเส้น e_1, e_2 และ e_{10} ไม่ถูกลบออก

จะได้ว่า $E(G) - F = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_1, e_2, e_{10}\}$

$= \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

ดังนั้น กราฟ G – F เป็นสับกราฟของ G ที่มีเส้น 7 เส้น คือ เส้น e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8และ e_9 ดังรูป (1)

กราฟ G – F :
เมื่อ $F = \{e_1, e_2, e_{10}\}$



รูป (1)

5.2 ถ้า $F = \{e_7, e_9\}$

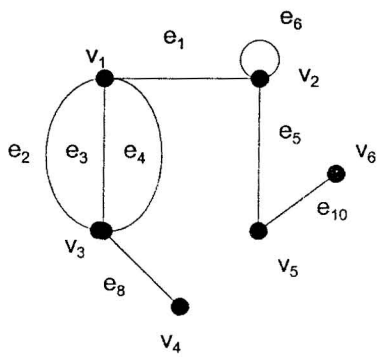
แนวคิด เมื่อกำจัดเส้น e_7 และ e_9 จุดที่ตกกระทบกับเส้น e_7 และ e_9 ไม่ถูกลบออก

จะได้ว่า $E(G) - F = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_7, e_9\}$

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\}$

ดังนั้น กราฟ G – F เป็นสับกราฟของ G ที่มีเส้น 8 เส้น คือ เส้น e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8 และ e_{10} ดังรูป (2)

กราฟ G – F :
เมื่อ $F = \{e_7, e_9\}$



รูป (2)

5.3 ถ้า $F = \{e_5\}$

แนวคิด เมื่อกำจัดเส้น e_5 จุดที่ตกกระทบกับเส้น e_5 ไม่ถูกลบออก

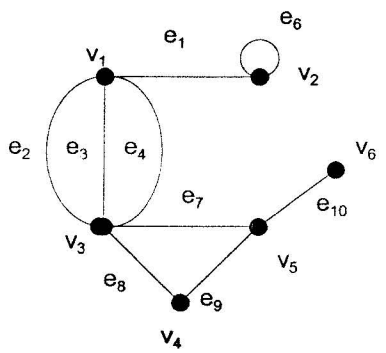
จะได้ว่า $E(G) - F = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} - \{e_5\}$

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

25

ดังนั้น กราฟ G – F เป็นสับกราฟของ G ที่มีเส้น 9 เส้น คือ เส้น e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9และ e_{10} ดังรูป (3)

กราฟ G – F :
เมื่อ F = $\{e_5\}$



รูป (3)

□

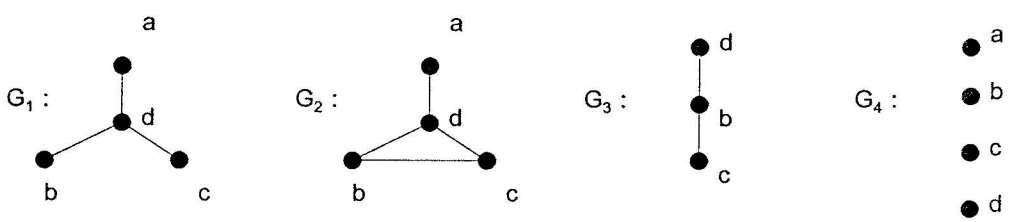
หมายเหตุ ในกรณีที่ F = {e} เป็นเซตของเส้นที่มีเพียงเส้นเดียว เพื่อความสะดวก เราใช้สัญลักษณ์ G – e แทน G – {e}

ข้อสังเกต

กราฟ G – F ซึ่งเป็นสับกราฟของ G เมื่อ F เป็นสับเซตของ E(G) ที่ไม่เป็นเซตว่าง ทำให้กราฟ G – F ยังคงมีเซตของจุดเท่ากับเซตของจุดในกราฟ G ดังนั้น G – F จะเป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของกราฟ G

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.2

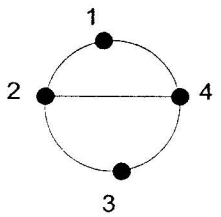
1. กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังรูปจงพิจารณา กราฟใดเป็นสับกราฟ และสับกราฟแผ่ทั่วถึง พร้อมแสดงเหตุผล



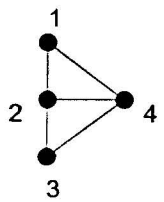
26

2. กำหนดกราฟ G, G_1, G_2, G_3 และ G_4 จงพิจารณา กราฟ G_1, G_2, G_3 และG_4 เป็นสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง หรือกราฟเหมือนกันของกราฟ G

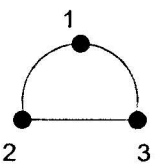
G :



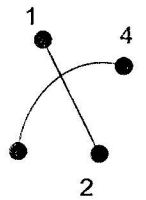
G_1 :



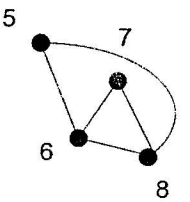
G_2 :



G_3 :

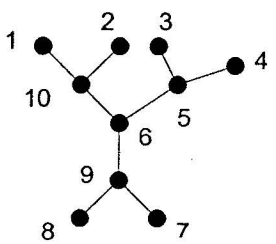


G_4 :

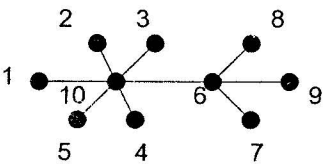


3. จงพิจารณา กราฟคู่ใดเป็นกราฟเหมือนกัน พร้อมแสดงเหตุผล

3.1

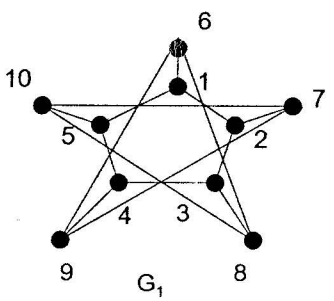


G_1

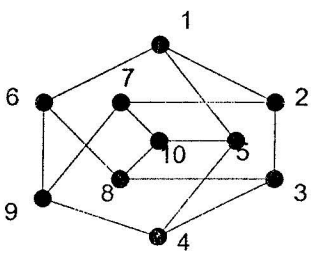


G_2

3.2

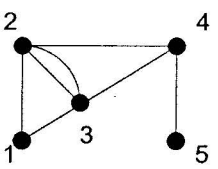


G_1

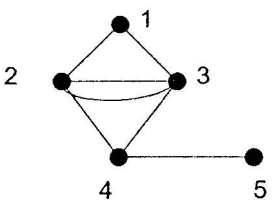


G_2

3.3



G_1



G_2

27

4. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหากราฟของ G – U และ G – F เมื่อ U ⊂ V(G) ซึ่ง U ≠ ∅ และ U ≠ V(G) และ F ⊂ E(G) ดังต่อไปนี้

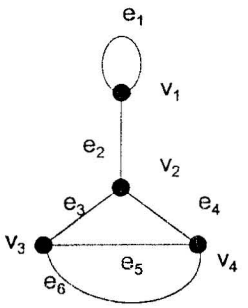
4.1 U = {v_1, v_2, v_3}

4.2 U = {v_1, v_2, v_3, v_4}

4.3 F = {e_1, e_4}

4.4 F = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}

G :



5. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหากราฟ ต่อไปนี้

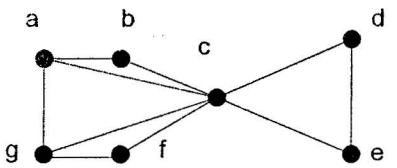
5.1 กราฟของ G – {a, c} เมื่อ {a, c} ⊂ V(G)

5.2 กราฟของ G – {ac, cd, fg} เมื่อ {ac, cd, fg} ⊂ E(G)

5.3 กราฟ G – v เมื่อ v = b

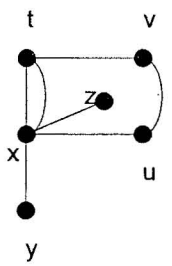
5.4 กราฟ G – e เมื่อ e = ac

G :

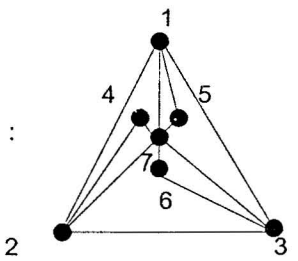


6. กำหนดกราฟ G_1, G_2 และ G_3 จงหาสับกราฟและสับกราฟแผ่ทั่วถึงของกราฟ พร้อมบอกวิธีหาสับกราฟและสับกราฟแผ่ทั่วถึงจากกราฟที่กำหนดให้ มาอย่างละ 3 สับกราฟ

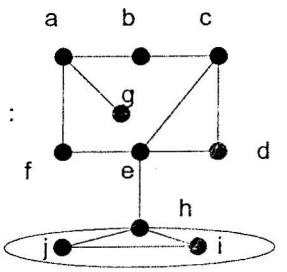
G_1 :



G_2 :



G_3 :



28

1.3 วิถีและวัฏจักร

บทนิยาม 7 ***แนวเดิน*** (Walk) W ในกราฟ G คือ ลำดับจำกัดของจุดและเส้นสลับกันของกราฟ G ดังนี้

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

ซึ่งเส้น e_i มีจุดปลาย คือ v_{i-1} และ v_i สำหรับ $1 \le i \le n$

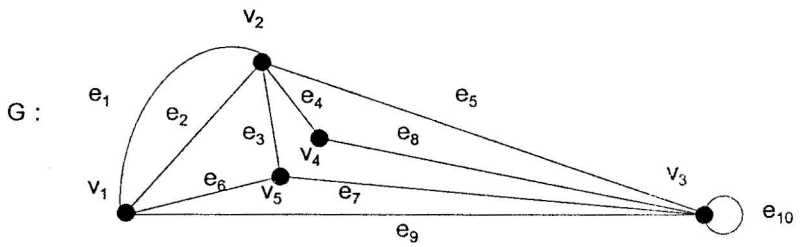
ดังนั้น แต่ละเส้น จะตกกระทบกับ จุด 2 จุด ที่อยู่หน้าและหลังเส้นนั้น เรียกแนวเดิน W ว่า แนวเดิน $v_0 - v_n$ ถ้า แนวเดิน W เริ่มต้นที่จุด v_0 และจบที่จุด v_n เราเรียกจุด v_0 ว่า***จุดเริ่มต้น*** (origin) และจุด v_n ว่า***จุดปลาย*** (terminus)โดยที่จุด v_0 และ v_n อาจเป็นจุดเดียวกันได้ และเรียก จุด $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ ว่า***จุดภายใน*** (internal) และเรียกจำนวนเส้นในแนวเดิน $v_0 - v_n$ ซึ่งเท่ากับ n ว่า***ความยาว*** (length) ของแนวเดิน $v_0 - v_n$ *

บทนิยาม 8 ให้ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G และ W เป็น แนวเดินใน G โดยที่

$W : v$ (ซึ่งมีความยาว = 0)

เราเรียกแนวเดิน W ที่ไม่มีเส้น (n=0) ว่า***แนวเดินชัด*** (trival walk) **

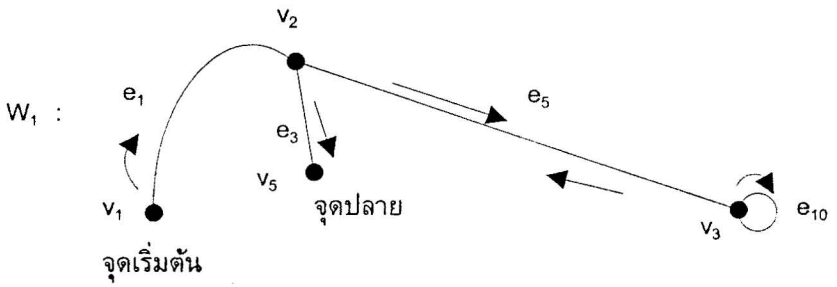
ตัวอย่างที่ 1 พิจารณากราฟ G ดังรูป



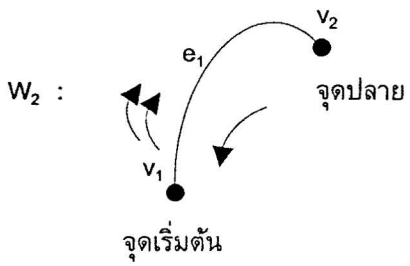
* ครูให้นักเรียนบอกเล่าเส้นทางที่สามารถเดินทางจากบ้านมาโรงเรียน หรือเส้นทางที่นักเรียนจะเดินทางไปรับประทานอาหารกลางวันจากห้องเรียนไปโรงอาหาร ** ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างแนวเดินชัด

29

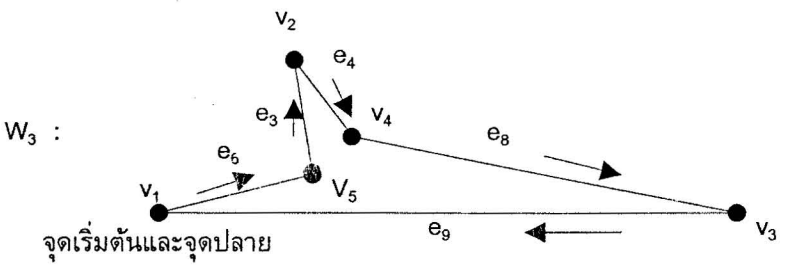
กำหนด แนวเดิน W_1 : $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_{10}, v_3, e_5, v_2, e_3, v_5$



แนวเดิน W_2 : $v_1, e_1, v_2, e_1, v_1, e_1, v_2$



แนวเดิน W_3 : $v_1, e_6, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_8, v_3, e_9, v_1$



แนวเดิน W_1 มีความยาว 5 เป็นแนวเดินจาก $v_1 - v_5$

W_2 มีความยาว 3 เป็นแนวเดินจาก v_1 - v_2

W_3 มีความยาว 5 เป็นแนวเดินจาก v_1 - v_1 □

ข้อสังเกต

1. จุดและเส้นในแนวเดินอาจเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันได้
2. สำหรับในกรณีที่แนวเดินไม่มีเส้นซ้ำกัน หรือแนวเดินในกราฟเชิงเดียวอาจเขียนแทนแนวเดิน ด้วยลำดับของจุดอย่างเดียวได้ เช่น ใน W_3 : $v_1, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1$

30

บทนิยาม 9 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G

เรากล่าวว่าแนวเดิน u – v เป็น***แนวเดินปิด*** (closed walk) เมื่อ u = v

และ แนวเดิน u – v เป็น***แนวเดินเปิด*** (open walk) เมื่อ u ≠v

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป ในตัวอย่างที่ 1

จะได้ว่า W_1 , W_2 เป็นแนวเดินเปิด

W_3 เป็นแนวเดินปิด □

บทนิยาม 10

10.1 ถ้าเส้นในแนวเดิน u – v ไม่ซ้ำกัน เรากล่าวว่าแนวเดิน u – v เป็น*รอยเดิน* (trail)

10.2 ถ้าจุดในแนวเดิน u – v ไม่ซ้ำกัน เรากล่าวว่าแนวเดิน u – v เป็น*วิถี* (path)

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป ในตัวอย่างที่ 1

จะได้ว่า W_1 , W_2 ไม่เป็นรอยเดิน เพราะ W_1 มีเส้น e_5 ซ้ำ และ W_2 มีเส้น e_1 ซ้ำ

W_3 เป็นรอยเดิน □

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 9 และ 10 นักเรียนจะพบว่า ทุก ๆ วิถีเป็นแนวเดิน และ ทุก ๆ วิถีเป็นรอยเดิน

จากแนวเดิน W_1, W_2, W_3 ในตัวอย่างที่ 2

W_1 : $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_{10}, v_3, e_5, v_2, e_3, v_5$

W_2 : $v_1, e_1, v_2, e_1, v_1, e_1, v_2$

W_3 : $v_1, e_6, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_8, v_3, e_9, v_1$

จงพิจารณาและตอบคำถามต่อไปนี้ *

1. W_1 เป็นแนวเดินเริ่มต้นจากจุด v_1 ไปสิ้นสุดที่ จุด v_5 ใช่หรือไม่
2. W_1 ไม่เป็นวิถีใช่หรือไม่
3. จะมีแนวเดินใน W_1 ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเช่นเดียวกับ W_1 และเป็นวิถีหรือไม่
4. W_2 เป็นแนวเดินเริ่มต้นจากจุด v_1 ไปสิ้นสุดที่ จุด v_2 ใช่หรือไม่
5. W_2 ไม่เป็นวิถีใช่หรือไม่
6. จะมีแนวเดินใน W_2 ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเช่นเดียวกับ W_2 และเป็นวิถีหรือไม่
7. W_3 เป็นแนวเดินเริ่มต้นจากจุด v_1 ไปสิ้นสุดที่ จุด v_1 ใช่หรือไม่
8. W_3 ไม่เป็นวิถีใช่หรือไม่
9. จะมีแนวเดินใน W_3 ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเช่นเดียวกับ W_3 และเป็นวิถีหรือไม่

* 1, 4, และ 7 ใช่ 2,5 และ 8 ใช่ 3, 6 และ 9 มี

31

ถ้ากำหนดแนวเดิน W ใด ๆ และ P เป็นแนวเดินใน W ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเป็นจุดเดียวกับ W และเมื่อ P เป็นวิถี ต่อไปจะเรียก ***P ว่าเป็นวิถีใน W***

จากรูปในตัวอย่างที่ 1 ตัวอย่างที่ 4, 5 และ 6 ต่อไปนี้ จงแสดงขั้นตอนวิธีการสร้างวิถีใน W_1, W_2 และ W_3 ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดแนวเดิน $W_3 : v_1, e_6, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_8, v_3, e_9, v_1$
จงสร้างแนวเดินใน W_3 ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเช่นเดียวกับ W_3 และเป็นวิถี
แนวคิด แนวเดินจะเป็นวิถี เมื่อในแนวเดินนั้นไม่มีจุดซ้ำกัน
จาก $W_3 : v_1, e_6, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_8, v_3, e_9, v_1$
จุดเริ่มต้นของ W_3 คือ v_1 และจุดปลายของ W_3 คือ v_1
ดังนั้น แนวเดินใน W_3 ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่ v_1 และเป็นวิถี คือ

$P : v_1$

เรียกวิถีที่มีเพียงจุดเดียวนี้ว่า ***วิถีชัด (trivial path)*** □

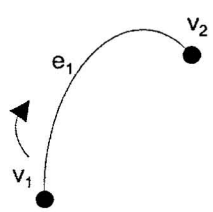
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดแนวเดิน $W_2 : v_1, e_1, v_2, e_1, v_1, e_1, v_2$
จงแสดงขั้นตอนวิธีการสร้างวิถีใน W_2
แนวคิด แนวเดินจะเป็นวิถี เมื่อในแนวเดินนั้นไม่มีจุดซ้ำกัน

$W_2 : v_1, e_1, v_2, e_1, v_1, e_1, v_2$

จุดเริ่มต้นของ W_2 คือ v_1 และจุดปลายของ W_2 คือ v_2
แสดงว่า ถ้ากำจัดจุดที่ซ้ำออก แนวเดิน W_2 น่าจะมีวิถีในแนวเดิน
ให้ u_i แทน จุดในแนวเดิน W_2 เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, 4$
จะได้ $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_1, u_4 = v_2$
เนื่องจาก $u_2 = u_4$ กำจัดจุด u_2 (ลบ v_2, e_1, v_1, e_1) จะได้แนวเดิน $W_{2(1)}$ ดังนี้

$W_{2(1)} : v_1, e_1, v_2$

$W_{2(1)}$:



ดังนั้น แนวเดินใน $W_{2(1)}$ มีจุดเริ่มต้นที่ v_1 และจุดปลายที่ v_2 และเป็นวิถี คือ

$P : v_1, e_1, v_2$ □

32

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดแนวเดิน W_1 : $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_{10}, v_3, e_5, v_2, e_3, v_5$

จงแสดงขั้นตอนวิธีการสร้างวิถีใน W_1 เหมือนกับตัวอย่างที่ 5

แนวคิด แนวเดินจะเป็นวิถี เมื่อในแนวเดินนั้นไม่มีจุดซ้ำกัน

W_1 : $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_{10}, v_3, e_5, v_2, e_3, v_5$

จุดเริ่มต้นของ W_1 คือ v_1 และจุดปลายของ W_1 คือ v_5

แสดงว่า ถ้ากำจัดจุดที่ซ้ำออก แนวเดิน W_1 น่าจะมีวิถีในแนวเดิน

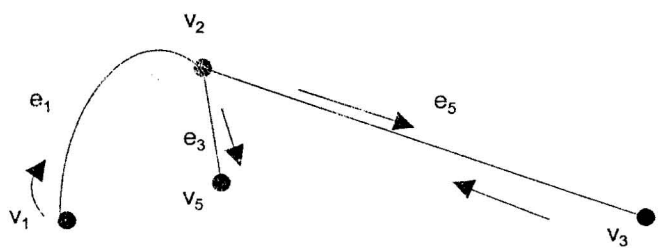
ให้ u_i แทน จุดในแนวเดิน W_1 เมื่อ i = 1, 2, ..., 6

จะได้ $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$, $u_4 = v_3$, $u_5 = v_2$, $u_6 = v_5$

เนื่องจาก ..... กำจัดจุด ..... (ลบ .....) จะได้แนวเดิน $W_{1(1)}$ ดังนี้

$W_{1(1)}$: ..... *

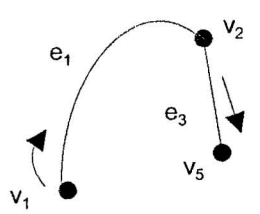
$W_{1(1)}$:



เนื่องจาก ..... กำจัดจุด ..... (ลบ .....) จะได้แนวเดิน $W_{1(2)}$ ดังนี้

$W_{1(2)}$: ..... **

$W_{1(2)}$:



ดังนั้น แนวเดินใน $W_{1(2)}$ มีจุดเริ่มต้น ที่ v_1 และจุดปลายที่ v_5 และเป็นวิถี คือ

P : v_1, e_1, v_2, e_3, v_5 □

* จะได้ว่า $u_3 = u_4$ กำจัดจุด u_3 (ลบ v_3, e_{10}) จะได้แนวเดิน $W_{1(1)}$: $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_5, v_2, e_3, v_5$

** จะได้ว่า $u_2 = u_5$ กำจัดจุด u_2 (ลบ v_2, e_5, v_3, e_5) จะได้แนวเดิน $W_{1(2)}$: v_1, e_1, v_2, e_3, v_5

33

จากตัวอย่างที่ 5 และ 6 เป็นขั้นตอนวิธีการสร้างวิถีในแนวเดิน W ที่เกิดจากการกำจัดจุดที่ซ้ำออก มีหลักการดังนี้ ให้ $W : u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ ซึ่ง $u \neq v$

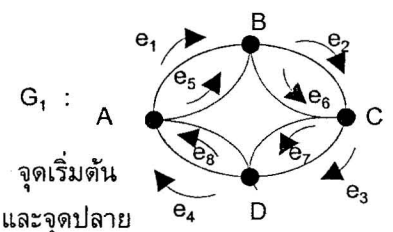
ให้ i และ j เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $i < j$ และ $u_i = u_j$ เมื่อทำการกำจัดจุด $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ ใน W จะได้แนวเดิน $u - v$ ที่มีจำนวนเทอมน้อยกว่าจำนวนเทอมใน W ให้ชื่อว่า W_1 ถ้าใน W_1 ไม่มีจุดซ้ำกัน แล้ว W_1 จะเป็นวิถี $u - v$ แต่ถ้ามีจุดใน W_1 ซ้ำกัน ให้ดำเนินการดังกล่าวข้างต้นซ้ำ ๆ กัน จนกระทั่ง ได้วิถี $u - v$ ขั้นตอนวิธีจึงสิ้นสุดลง เพราะ $u - v$ เป็นลำดับจำกัด

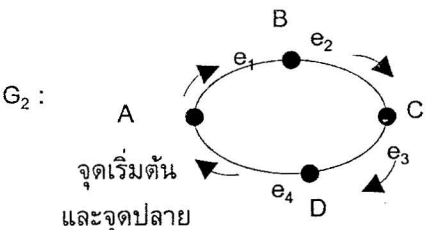
ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 4 ถึง 6 นักเรียนจะพบว่า แนวเดินอาจจะไม่เป็นวิถี แต่เราสามารถสร้างวิถีในแนวเดินนั้น ๆ ได้ ดังทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G ทุก ๆ แนวเดิน u - v จะมีวิถี $u - v$

จากหัวข้อก่อน ๆ เราได้รู้จักแนวเดินปิด และแนวเดินเปิดมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะศึกษารอยเดินปิด ให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถามต่อไปนี้

กำหนดกราฟ G_1 และ G_2 ซึ่งมีลูกศรแสดงทิศทางของรอยเดินปิดที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่จุดA ดังต่อไปนี้





W_1 : A, e_1, B, e_2, C, e_3, D, e_4, A, e_5, B, e_6, C, e_7, D, e_8, A W_2 : A, e_1, B, e_2, C, e_3, D, e_4, A

1. W_1 ซึ่งเป็นรอยเดินปิดใน G_1 มีจุดเริ่มต้นและจุดภายในซ้ำกัน หรือไม่
2. W_2 ซึ่งเป็นรอยเดินปิดใน G_2 มีจุดเริ่มต้นและจุดภายในซ้ำกัน หรือไม่

บทนิยาม 11

11.1 เราเรียกรอยเดินปิดที่ไม่ใช่แนวเดินชัดว่า ***วง*** (circuit)

11.2 เราเรียก วงที่มีจุดเริ่มต้น และจุดภายในไม่ซ้ำกัน ว่า ***วัฏจักร*** (cycle)

* 1. ซ้ำ 2. ไม่ซ้ำ

วัฏจักรที่มีความยาว k คือ วัฏจักรที่มีจำนวนเส้น k เส้น เขียนแทนด้วย วัฏจักร – k

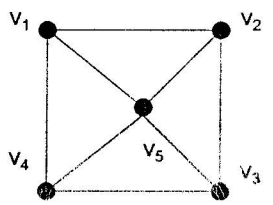
ถ้า k เป็นจำนวนคู่ เรียก ***วัฏจักรคู่*** (even cycle)

ถ้า k เป็นจำนวนคี่ เรียก ***วัฏจักรคี่*** (odd cycle)

ถ้า k = 3 เขียนแทนด้วย วัฏจักร – 3 นิยมเรียกว่า ***วัฏจักรสามเหลี่ยม***

ตัวอย่างที่ 7 พิจารณากราฟ G ดังรูป

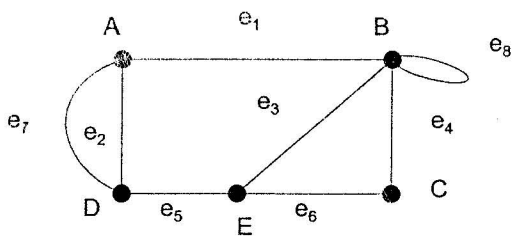
G :



C : v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 เป็น **วัฏจักร - 4**

T : $v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_5, v_1$ **เป็น วง** ที่ไม่ใช่ วัฏจักร เนื่องจาก มีจุด v_5 ซ้ำกัน □

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดกราฟ ดังรูป จงหา วัฏจักร - k เมื่อ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6



จะได้ วัฏจักร – 1 คือ B, e_8, B

วัฏจักร – 2 คือ A, e_2, D, e_7, A

วัฏจักร – 3 คือ B, e_3, E, e_6, C, e_4, B

วัฏจักร - 4 คือ A, e_1, B, e_3, E, e_5, D, e_2, A

วัฏจักร – 5 คือ A, e_1, B, e_4, C, e_6, E, e_5, D, e_2, A

วัฏจักร - 6 ไม่มี □

ข้อสังเกต ทุก ๆ วัฏจักร เป็น วง แต่วงไม่จำเป็นต้องเป็นวัฏจักร

35

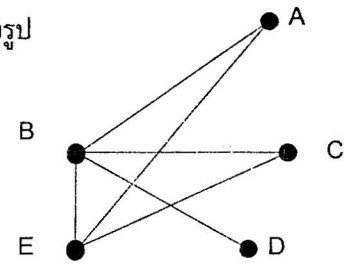
ให้นักเรียนใส่เครื่องหมาย ✓ หมายถึงอนุญาตให้มี เครื่องหมาย × หมายถึงไม่อนุญาตให้มี ลงในตารางต่อไปนี้ จากนิยามข้างต้นสรุปได้ดังนี้ *

ชื่อ	จุดซ้ำกัน	เส้นซ้ำกัน	จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน
1.แนวเดินเปิด			
2.แนวเดินปิด			
3.รอยเดินเปิด			
4.รอยเดินปิด			
5.วิถี			
6.วง			
7.วัฏจักร			

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.3

1. กำหนดกราฟ G ดังรูป

G :



จงพิจารณาแนวเดินที่กำหนดให้เป็น วิถี หรือวัฏจักร

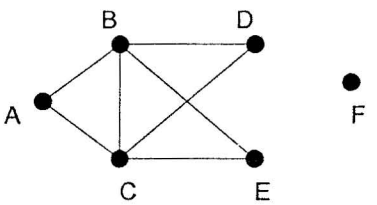
1.1 B, C, E, A, B

1.2 E, C, B, A

1.3 B, C, D, E, B

2. กำหนดกราฟ G ดังรูป

G :



จงหา

2.1 แนวเดิน A – D ที่มีความยาวเท่ากับ 6

* 1. (✓,✓,×) 2.(✓,✓,✓) 3(✓,×,×) 4.(✓,×,✓) 5.(×,×,×) 6.(✓,×,✓) 7.(×,×,✓)

2.2 แนวเดิน B – B ที่มีความยาวเท่ากับ 3

2.3 แนวเดิน A – F ที่มีความยาวเท่ากับ 2

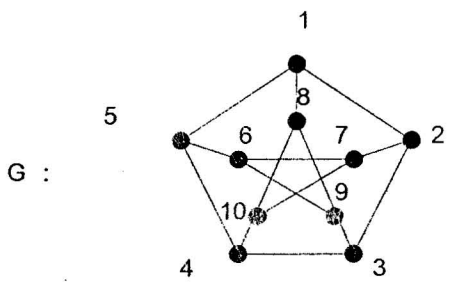
2.4 รอยเดิน A – E ที่มีความยาวเท่ากับ 5

2.5 รอยเดิน D – D ที่มีความยาวเท่ากับ 7

2.6 วิถี A – E ที่มีความยาวเท่ากับ 4

2.7 วิถี A – D ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

3. กำหนดกราฟ G ดังรูป



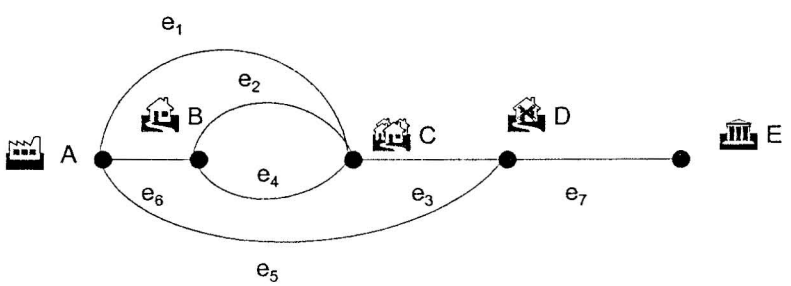
จงหา

3.1 แนวเดินที่มีความยาวเท่ากับ 5

3.2 วิถีที่มีความยาวเท่ากับ 9

3.3 วัฏจักรที่มีความยาวเท่ากับ 5, 6, 8, และ 9

4. กำหนด กราฟแสดงเส้นทางเชื่อมระหว่างหมู่บ้าน A, B, C, D และ E ดังรูป



แนวเดิน W_1 : B, e_4, C, e_2, B, e_4, C, e_3, D

แนวเดิน W_2 : B, e_6, A, e_1, C, e_2, B, e_4, C, e_3, D, e_7, E

แนวเดิน W_3 : E, e_7, D, e_5, A, e_6, B, e_6, A, e_5, D, e_3, C

ให้แนวเดิน W_1 เป็นเส้นทางจากหมู่บ้าน B - D แนวเดิน W_2 เป็นเส้นทางจากหมู่บ้าน B – E แนวเดิน W_3 เป็นเส้นทางจากหมู่บ้าน E – C ซึ่งแนวเดินทั้งสามเส้นทางมีลักษณะเป็นเส้นทางที่อ้อม จงหาแนวเดิน W_1,W_2,W_3ที่ไม่ใช่เส้นทางอ้อม (เส้นทางอ้อม คือแนวเดินที่เดินซ้ำเส้นทางเดิมหรือเดินกลับไปกลับมาที่เดิม)

1.4 การแทนกราฟด้วยเมทริกซ์

ในหัวข้อที่เราทำการศึกษามาแล้ว เราได้ศึกษาถึงการเขียนรูปของกราฟโดยใช้จุดในระนาบแทนจุดในกราฟ และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ ด้วยเส้นกราฟ นอกจากการเขียนรูปแล้วเราอาจใช้เมทริกซ์ในการบ่งบอกลักษณะของกราฟ ซึ่งการใช้เมทริกซ์ในการบ่งบอกลักษณะของกราฟนี้จะมีประโยชน์ในกรณีที่เราต้องการใช้คอมพิวเตอร์ ในการศึกษาสมบัติของกราฟ สำหรับกราฟใด ๆ ที่กำหนดมาให้ เราอาจสร้างเมทริกซ์จากกราฟนั้นได้

คือ

1. เมทริกซ์ประชิด (adjacency matrix)
2. เมทริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix)

บทนิยาม 12 ***เมทริกซ์ประชิด***(adjacency matrix)

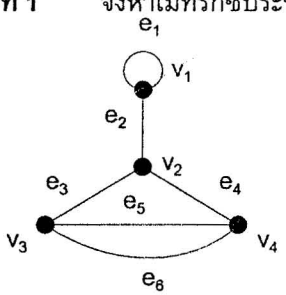
ให้ $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตของจุดในกราฟ เมื่อ $n = |V(G)|$

เมทริกซ์ประชิดของ G เขียนแทนด้วย A(G) จะเป็นเมทริกซ์มีมิติ $n \times n$

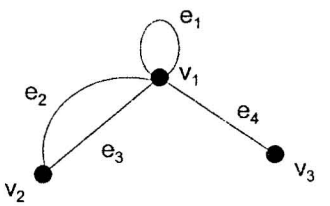
และ $A(G) = [a_{ij}]$ โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนของเส้นที่เชื่อมจุด v_i และ v_j

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 เมื่อกำหนดกราฟ G_1และ G_2 ดังรูปต่อไปนี้

G_1 :



G_2 :



จะได้

$$A(G_1) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

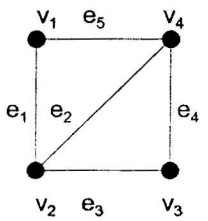
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

ถ้ากราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียว แล้ว สมาชิกแต่ละตัวของ A(G) จะมีค่าเท่ากับจำนวนใด

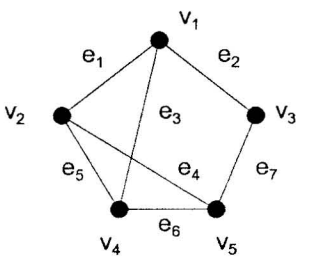
38

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเมทริกซ์ของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 เมื่อกำหนดกราฟ G_1 และ G_2 ดังรูปต่อไปนี้

G_1 :



G_2 :



จะได้

$$A(G_1) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

จากบทนิยาม 12 และ ตัวอย่างที่ 2 นักเรียนสามารถตอบคำถามข้างต้นได้ดังนี้ *

สมาชิกแต่ละตัวของ A(G) จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 เท่านั้น

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ **

1. a_{ij} แทน จำนวนเส้นที่เชื่อม v_i และ v_j ใช่หรือไม่
2. a_{ji} แทน จำนวนเส้นที่เชื่อม v_j และ v_i ใช่หรือไม่
3. จากข้อ 1 และ 2 สามารถบอกได้หรือไม่ว่า $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก ๆ i และ j
4. จากข้อ 3 A(G) เป็นเมทริกซ์ลักษณะใด
5. a_{ij} แทน จำนวนเส้นที่เชื่อม v_i และ v_j เมื่อ i = j a_{ij} จะเป็นสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A(G) ใช่หรือไม่
6. กราฟแบบใด ที่ทำให้ a_{ij} ซึ่งเป็นสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A(G) เท่ากับ 0 และ ผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวมีค่าเท่ากับระดับขั้นของจุดในกราฟ G

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 12

1. A(G) เป็นเมทริกซ์สมมาตร เนื่องจากมีสมาชิกของ A(G) ที่ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก ๆ i และ j
2. ถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A(G) จะเท่ากับ 0 เสมอ และ ผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวมีค่าเท่ากับระดับขั้นของจุดในกราฟ G

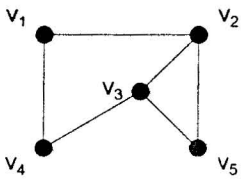
* ครูยกตัวอย่างกราฟเพิ่มเติมแล้วให้นักเรียนสรุป ** 1. ใช่ 2. ใช่ 3. ได้ 4. เมทริกซ์สมมาตร 5. ใช่ 6. กราฟเชิงเดียว

39

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

กำหนดกราฟ G ดังรูป

G :



1. จงหาแนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 1ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด
2. จงหาแนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 2ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

จากรูปกราฟนักเรียนสามารถตอบคำถามข้างต้นได้ดังนี้

ข้อ 1. ตอบได้ทันทีว่า ไม่มีแนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 1 เลย

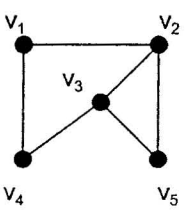
ข้อ 2. แนวเดิน $v_4 - v_5$ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด มีเพียง1แนวเดินซึ่งมีลำดับคือ v_4, v_3, v_5

ซึ่งจากการหาแนวเดิน $v_4 - v_5$ ในข้อ 1 และ 2 จะเห็นว่าสามารถหาได้ง่ายโดยดูจากรูปกราฟ แต่ถ้ากราฟมีขนาดใหญ่และต้องการหาแนวเดินที่มีความยาว 3, 4, 5, ... ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด * โดยใช้วิธีการดูจากรูปกราฟจะทำให้เสียเวลาและได้คำตอบที่ไม่แน่นอน ดังนั้นทฤษฎีบทที่จะศึกษาต่อไปนี้จะทำให้การหาแนวเดินดังกล่าวทำได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบท 3 ให้ $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตของจุดในกราฟ G และ $A = A(G)$ เป็นเมทริกซ์ประชิดของ G แล้วสมาชิก a_{ij} ของ A^k, $k \geq 1$ จะเป็นจำนวนของแนวเดิน $v_i - v_j$ ที่มีความยาว k ที่แตกต่างกันใน G

ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟ G ข้างต้น กำหนดเมทริกซ์ประชิด A(G) ดังรูป

G :



$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

จาก $a_{v_4v_5} = 0$ ของเมทริกซ์ A^1 แสดงว่าไม่มีแนวเดินจาก $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 1 □

* ครูให้นักเรียนลองหาแนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 3 และ 4 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

40

ตัวอย่างที่ 4 จงหาแนวเดินจาก $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเมทริกซ์ในตัวอย่างที่ 3

แนวคิด จากทฤษฎีบท 3 หา $a_{v_4v_5}$ ของเมทริกซ์ A^k เมื่อ $k = 2$

พิจารณา แถวที่ v_4 และหลักที่ v_5 ของเมทริกซ์ A^2 ซึ่งได้จากการคูณที่ละคู่ของสมาชิกในแถว v_4 ด้วยสมาชิกในหลัก v_5 ของเมทริกซ์ A แล้วบวกเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$v_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \overset{v_5}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = [(1\times0) + (0\times1) + (1\times1) + (0\times0) + (0\times0)] = 1$$

ดังนั้น $a_{v_4v_5}$ ของเมทริกซ์ $A^2 = 1$

แสดงว่าแนวเดินจาก $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด มี 1 แนวเดิน และจากกราฟดังรูป ในตัวอย่างที่ 3 แนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 2 มี 1 แนวเดิน มีลำดับคือ v_4, v_3, v_5

ซึ่งผลลัพธ์ เมทริกซ์ A^2 แสดงดังต่อไปนี้

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

□

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้โดยใช้ผลลัพธ์จากเมทริกซ์ A^2 ในตัวอย่างที่ 4 *

1. แนวเดิน $v_1 - v_3$ ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แนวเดิน
2. จงหาแนวเดินที่มีความยาว 2 และมีจำนวนแนวเดินที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด 3 แนวเดิน
3. จงหาแนวเดินที่ไม่มีความยาว 2

* 1. 2 2. 2.1 แนวเดิน $v_2 - v_2$ มีลำดับดังนี้ 1) v_2, v_1, v_2 2) v_2, v_5, v_2 3) v_2, v_3, v_2 2.2 แนวเดิน $v_3 - v_3$ มีลำดับดังนี้ 1) v_3, v_2, v_3 2) v_3, v_5, v_3 3) v_3, v_4, v_3 3. แนวเดิน $v_1 - v_2, v_1 - v_4, v_3 - v_4$

41

ตัวอย่างที่ 5 จงหาแนวเดิน $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 4 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด จากเมทริกซ์ A(G) ในตัวอย่างที่ 3

แนวคิด จากทฤษฎีบท 3 หา $a_{v_4v_5}$ ของ เมทริกซ์ A^k เมื่อ $k = 4$

พิจารณา แถวที่ v_4 และหลักที่ v_5 ของเมทริกซ์ A^4 ซึ่งได้จากการคูณที่ละคู่ของสมาชิกในแถว v_4 ด้วยสมาชิกในหลัก v_5 ของเมทริกซ์ A^2 แล้วบวกเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$v_4 \; [0\ 2\ 0\ 2\ 1] \times \overset{v_5}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = [(0 \times 1) + (2 \times 1) + (0 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 2)] = 6$$

ดังนั้น $a_{v_4v_5}$ **ของเมทริกซ์** $A^4 = 6$

แสดงว่า **แนวเดินจาก** $v_4 - v_5$ ที่มีความยาว 4 มีจำนวน 6 แนวเดินที่แตกต่างกันซึ่งจากรูปกราฟดังรูปในตัวอย่างที่ 3 มีลำดับดังนี้

1. v_4, v_1, v_4, v_3, v_5
2. v_4, v_1, v_2, v_3, v_5
3. v_4, v_3, v_5, v_2, v_5
4. v_4, v_3, v_4, v_3, v_5
5. v_4, v_3, v_5, v_3, v_5
6. v_4, v_3, v_2, v_3, v

ซึ่งผลลัพธ์ เมทริกซ์ A^4 แสดงดังต่อไปนี้

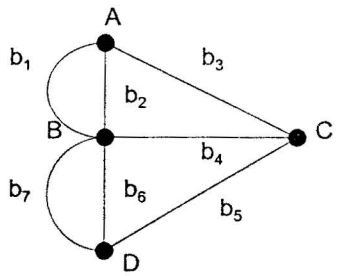
$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \overset{\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}}$$

□

42

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

จากปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก จงหาเส้นทางที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเกาะA ไป เกาะ D โดยข้ามสะพานเพียง 2 สะพาน (สามารถข้ามซ้ำสะพานเดิมได้) กำหนดรูปแบบจำลองปัญหาด้วยกราฟดังรูป โดยให้ จุด แทน ฝั่ง และ เกาะ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน สะพานเชื่อมสองเกาะหรือสองฝั่ง



* จะได้เมทริกซ์ประชิดของกราฟซึ่งแทนปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ดังนี้

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

ต้องหาแนวเดินจาก A ไป D ที่มีความยาว 2 ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด
จะได้ว่า

$$A\,[\,0 \quad 2 \quad 1 \quad 0\,] \times \begin{array}{c} D \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} = [\,(0\times0) + (2\times2) + (1\times1) + (0\times0)\,] = 5$$

ดังนั้น $a_{AD} = 5$

แสดงว่ามีจำนวนเส้นทางจาก เกาะ A ไป D ที่ใช้สะพาน 2 สะพาน(สามารถข้ามซ้ำสะพานเดิมได้) ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด 5 เส้นทาง ซึ่งมีลำดับ ดังนี้

1. A, b_2, B, b_7, D
2. A, b_2, B, b_6, D
3. A, b_1, B, b_7, D
4. A, b_1, B, b_6, D
5. A, b_3, C, b_5, D

และครูควรให้นักเรียนลองหาเส้นทางอื่น

บทนิยาม 13 ***เมทริกซ์ตกกระทบ***(incidence matrix)

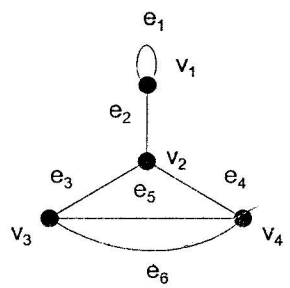
ให้ $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ เป็นเซตของจุดและเซตของเส้นในกราฟ G เมื่อ $n = |V(G)|$ และ $m = |E(G)|$

เมทริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix) ของกราฟ G เขียนแทนด้วย I(G) จะเป็นเมทริกซ์มีมิติ $n \times m$ และ $I(G) = [x_{ij}]$ โดยที่ x_{ij} เป็นจำนวนครั้งที่จุด v_i ตกกระทบกับเส้น e_j ซึ่ง x_{ij} มีค่าดังนี้

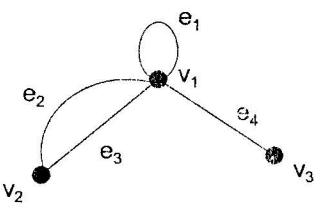
$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } v_i \text{ ไม่เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \\ 1 & \text{ถ้า } v_i \text{ เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \text{ ที่ไม่เป็นวงวน} \\ 2 & \text{ถ้า } v_i \text{ เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \text{ ที่เป็นวงวน} \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาเมทริกซ์ตกกระทบของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 จากกราฟในตัวอย่างที่ 1

G_1 :



G_2 :



จะได้

$$I(G_1) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$I(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

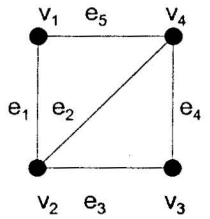
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

ถ้ากราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียว แล้วสมาชิกแต่ละตัวของ I(G) จะมีค่าเท่ากับจำนวนใด

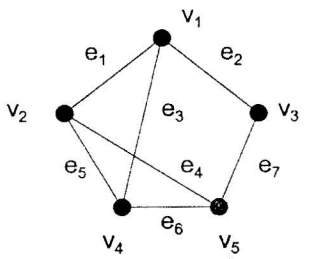
44

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเมทริกซ์ตกกระทบของกราฟ G_1 และ กราฟ G_2 ในตัวอย่างที่ 2

G_1 :



G_2 :



จะได้

$$I(G_1) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$I(G_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

□

จากบทนิยามที่ 13 และ ตัวอย่างที่ 7 นักเรียนสามารถตอบคำถามข้างต้นได้ ดังนี้ *

สมาชิกแต่ละตัวของ I(G) จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 เท่านั้น

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 13

1. x_{ij} จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 หรือ 2 เนื่องจาก เส้นมีจุดปลาย 2 จุดเท่านั้น
2. ผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของ I(G) มีค่าเท่ากับ 2 เนื่องจากเส้นมีจุดปลาย 2 จุดเท่านั้น
3. ระดับขั้นของจุดแต่ละจุดในกราฟ เท่ากับ ผลรวมของสมาชิกแต่ละหลักในแถวของจุดนั้น ๆ

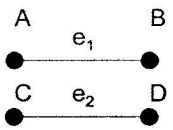
* ครูยกตัวอย่างกราฟเพิ่มเติมแล้วให้นักเรียนสรุป

45

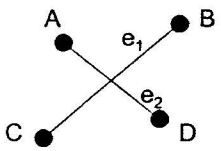
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.4

1. จงหาเมทริกซ์ประชิดและเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟดังรูปต่อไปนี้

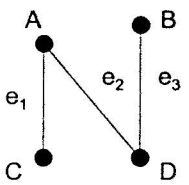
1.1



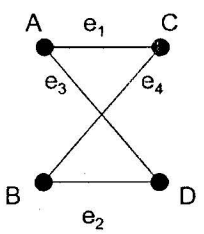
1.2



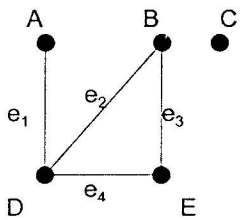
1.3



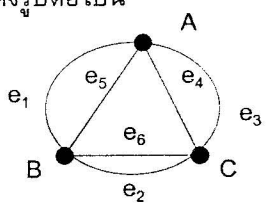
1.4



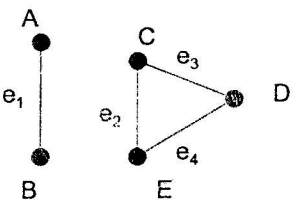
1.5



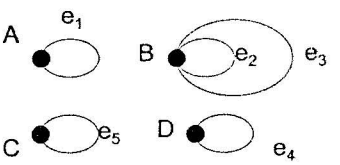
1.6



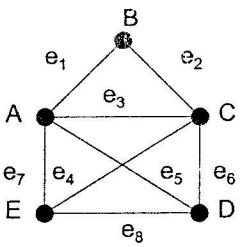
1.7



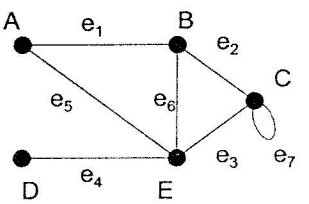
1.8



1.9



1.10



2. จงสร้างกราฟแทนเมทริกซ์ประชิดที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

2.1 $A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

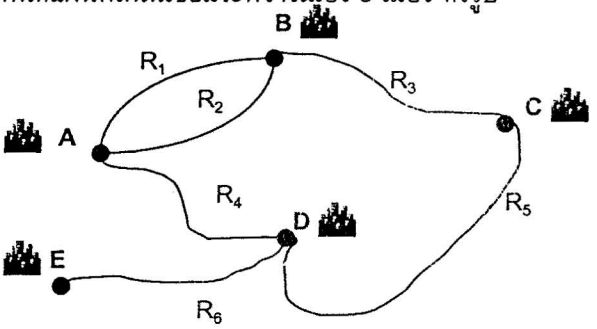
2. 2 $A = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

3. จงสร้างกราฟแทนเมทริกซ์ตกกระทบที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

3.1
$$I = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.2
$$I = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. กำหนดแผนที่ถนนเชื่อมระหว่างเมือง 5 เมือง ดังรูป



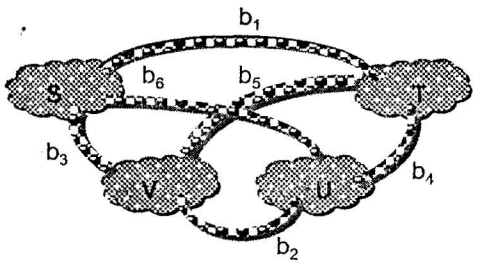
จงหาเส้นทางเชื่อมเมืองที่ใช้ถนนสองสาย (สามารถใช้ถนนสายเดิมได้) ดังต่อไปนี้

4.1 เส้นทางจากเมือง A ไป C ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

4.2 เส้นทางจากเมือง B ไป D ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด

4.3 เส้นทางจากเมืองสองเมืองใดที่ไม่มีเส้นทางที่ใช้ถนนตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

5. กำหนดแผนที่แสดงสะพานเชื่อมเกาะ S, T, U และ V ของสวนสาธารณะแห่งหนึ่ง ดังรูป



5.1 จงหาเส้นทางเดินข้ามสะพาน 2 สะพาน (สามารถเดินข้ามสะพานเดิมได้) จากเกาะ U – V

5.2 จงหาเส้นทางเดินข้ามสะพาน 3 สะพาน (สามารถเดินข้ามสะพานเดิมได้) จากเกาะ S - T

เกม

เกมหยิบเหรียญใส่กระเป๋า



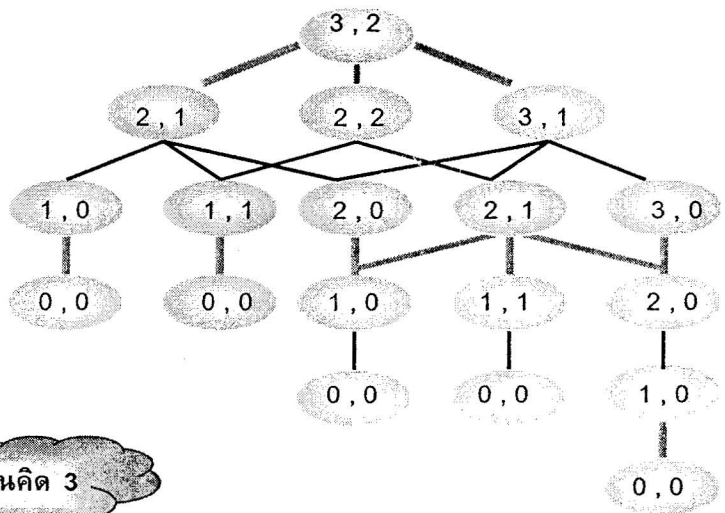
มีเหรียญอยู่สองกอง กองที่หนึ่งมีเหรียญ 2 เหรียญ กองที่สองมีเหรียญ 3 เหรียญ การเล่นเกมนี้ใช้ผู้เล่นสองคน คือ นายดำและนายเทา ซึ่งทั้งสองคนจะผลัดกันหยิบเหรียญ โดยการหยิบมีเงื่อนไขดังนี้

ผู้เล่นจะหยิบเหรียญหนึ่งเหรียญจากกองใดกองหนึ่งก็ได้ หรือ จะหยิบเหรียญออกจากทั้งสองกองกองละหนึ่งเหรียญ ผู้เล่นที่หยิบเหรียญใส่กระเป๋าเป็นคนสุดท้ายคือผู้ชนะ

นักเรียนมีวิธีวางแผนการเล่นเกมนี้อย่างไร นักเรียนถึงจะเป็นผู้ชนะในเกมนี้ทุกครั้ง โดยให้นักเรียนสร้างแบบจำลองของเกมนี้

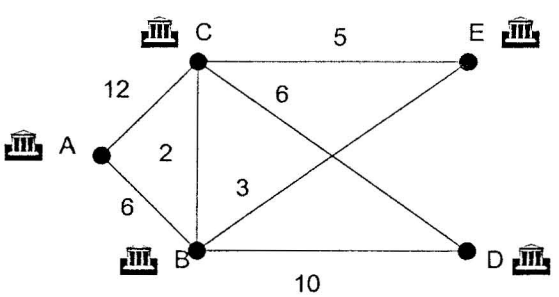
เฉลยเกมหยิบเหรียญใส่กระเป๋า

เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์การเล่นเกมหยิบเหรียญใส่กระเป๋า โดยให้ จุด แทน เหรียญทั้ง 2 กอง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน การหยิบเหรียญของผู้เล่น ซึ่งเส้นสีเทา หมายถึงนายเทากำลังเล่น และเส้นสีดำ หมายถึง นายดำกำลังเล่น ซึ่งในรูปแบบจำลองนายเทาเป็นฝ่ายเริ่มต้นเล่นเกม



ปัญหาชวนคิด 3

สมมติคาบที่ 1 นักเรียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ตึก A คาบที่ 2 เรียนวิชาเคมีที่ตึก D นักเรียนจะเลือกเส้นทางใดที่ไปเรียนวิชาเคมีที่ตึก Dได้เร็วที่สุด กำหนดแผนผังแสดงเส้นทางเชื่อมระหว่างตึกทั้ง 5 ตึกในโรงเรียนดังรูป (ระยะทางระหว่างตึกหน่วยเป็นเมตร)

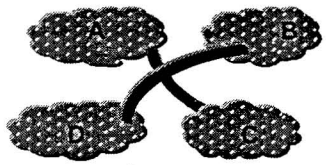


เฉลยปัญหาชวนคิด 3

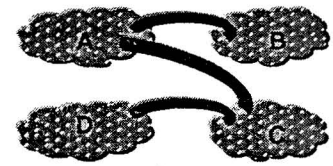
เส้นทาง A, B, C, D มีระยะทาง 14 เมตร เป็นเส้นทางที่สั้นที่สุดจากตึก A ไปตึก D

1.5 กราฟเชื่อมโยง

สมมติมีเกาะอยู่ 4 เกาะ นักเรียนจะเลือกสร้างสะพานดังรูปใดจากรูปข้างล่างโดยมีเงื่อนไขว่าต้องมีเส้นทางเดินจากเกาะหนึ่งไปยังเกาะใด ๆ ได้ทุกเกาะ



รูป(1)



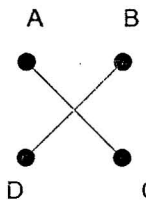
รูป(2)

ต้องเลือกรูป (2) เนื่องจากมีเส้นทางที่สามารถเดินจากเกาะหนึ่งไปเกาะใด ๆ ได้ทุกเกาะ แต่ในรูป (1) ถึงแม้ว่า จะมีเส้นทางที่สามารถเดินจาก เกาะ A ไป C และ เกาะ B ไป D แต่ไม่สามารถเดินจากเกาะหนึ่งไปเกาะใด ๆ ได้ทุกเกาะ เช่น ไม่สามารถเดินจากเกาะ A ไป เกาะ B และ D ได้เป็นต้น จากสถานการณ์ดังรูป (1) และ (2) ดังกล่าวสามารถสร้างกราฟเป็นรูปแบบจำลอง โดยให้

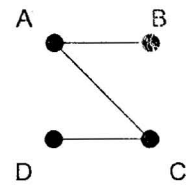
จุด แทน เกาะ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน สะพาน

ให้รูป(1) แทนด้วยกราฟ G_1 และให้รูป(2) แทนด้วยกราฟ G_2

G_1 :



G_2 :



ให้นักเรียนพิจารณาจากปัญหาข้างต้นและตอบคำถามต่อไปนี้

ลักษณะของกราฟ G_1 และ กราฟ G_2 แตกต่างกันอย่างไร

บทนิยาม 14 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G เรากล่าวว่า u และ v เชื่อมโยงกันได้ (connect) เมื่อมีวิถี u – v ในกราฟ G

14.1 ถ้ามีวิถีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในกราฟ G แล้ว
กราฟ G เป็น***กราฟเชื่อมโยง*** (connected graph)

14.2 ถ้าไม่มีวิถีระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในกราฟ G แล้ว
กราฟ G เป็น***กราฟไม่เชื่อมโยง*** (disconnected graph)

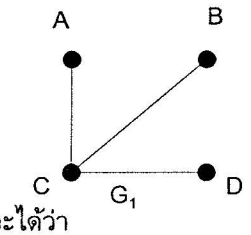
ตัวอย่างที่ 1 นักเรียนสามารถตอบปัญหาข้างต้นได้ดังนี้

กราฟ G_1 เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เนื่องจาก จุด Aและ C ถูกเชื่อมโยงกัน แต่ไม่มีวิถีเชื่อมโยงไปยังจุด B และ D และจุด B และ D ถูกเชื่อมโยงกัน แต่ไม่มีวิถีเชื่อมโยงไปยังจุด A และ C

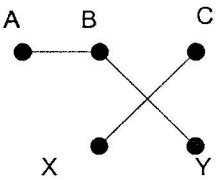
กราฟ G_2 เป็นกราฟเชื่อมโยง เนื่องจาก มีวิถีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ □

48

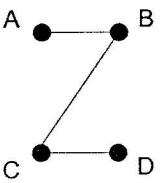
ตัวอย่างที่ 2 พิจารณา กราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยงหรือกราฟไม่เชื่อมโยง พร้อมบอกเหตุผล



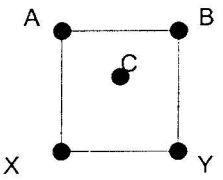
G_1



G_2



G_3



G_4

จะได้ว่า

G_1 เป็นกราฟเชื่อมโยง เนื่องจาก มีวิถีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ

G_2 เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เนื่องจากจุด A ,B และ Y ถูกเชื่อมโยงกัน และ จุด Cและ X ถูกเชื่อมโยงกัน แต่ไม่มีวิถี จาก A , B , Y ไปยัง C หรือ X เลย

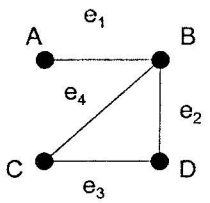
G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง เนื่องจาก มีวิถีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ

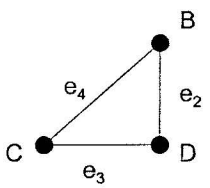
G_4 เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เนื่องจาก ไม่มีวิถี จาก C ไปยังจุดอื่นใดในกราฟ □

บทนิยาม 15 ให้กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ v เป็นจุดในกราฟ G
เรียก จุด v ว่า **จุดตัด** (cut vertex) ถ้ากราฟ G – v เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

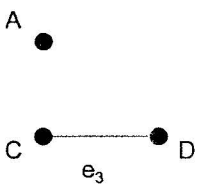
ตัวอย่างที่ 3 พิจารณากราฟ G ซึ่งเป็นกราฟเชื่อมโยง ดังรูป

G :

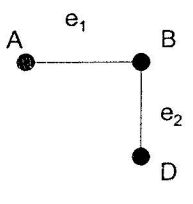




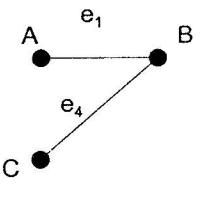
G - A



G - B



G - C



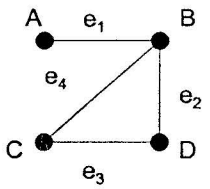
G - D

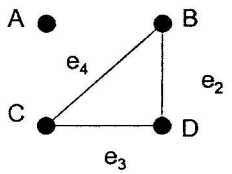
จะได้ว่า กราฟ G มีจุดตัด คือ จุด B เนื่องจาก G – B เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง □

บทนิยาม 16 ให้กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ e เป็นเส้นในกราฟ G
เรียก เส้น e ว่า ***เส้นตัด*** (cut edge) ถ้ากราฟ G - e เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

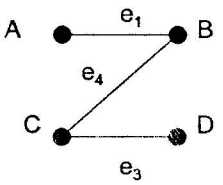
ตัวอย่างที่ 4 พิจารณากราฟ G ในตัวอย่างที่ 3 ซึ่งเป็นกราฟเชื่อมโยง ดังรูป

G :

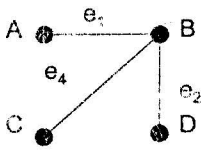




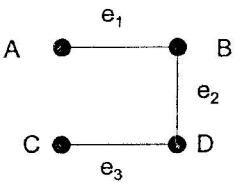
$G - e_1$



$G - e_2$



$G - e_3$

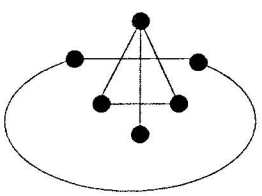


$G - e_4$

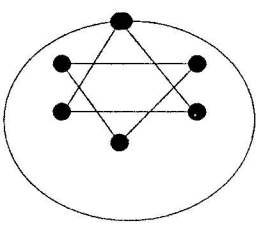
จะได้ว่ากราฟ G มีเส้นตัด คือ เส้น e_1 เนื่องจาก $G - e_1$ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง * □

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.5

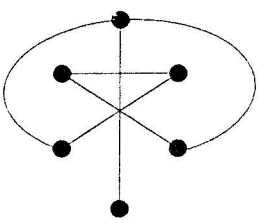
1. จงพิจารณากราฟต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง



G_1



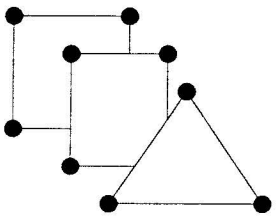
G_2



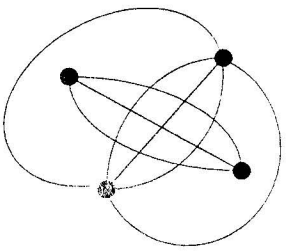
G_3

* ครูยกตัวอย่างกราฟที่มีเส้นตัดมากกว่าหนึ่งเส้นขึ้นไป หรือกราฟที่ไม่มีเส้นตัด

50



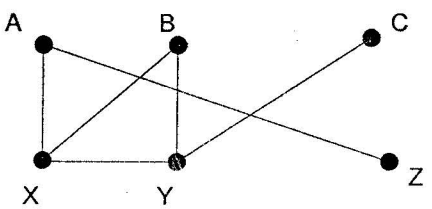
G_4



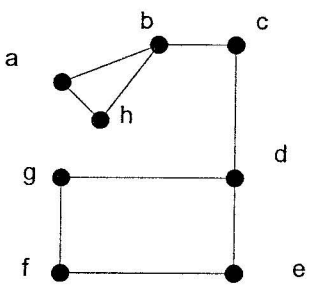
G_5

2. กำหนดกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังรูปต่อไปนี้

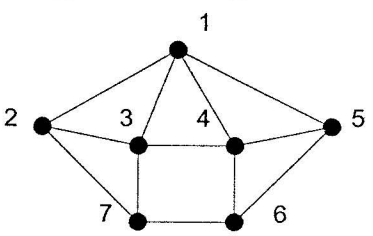
G_1 :



G_2 :



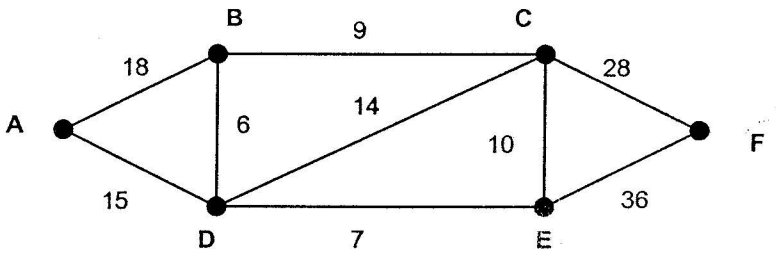
G_3 :



จงหาจุดตัดและเส้นตัดของกราฟ G_1, G_2 และ G_3

1.6 กราฟที่มีน้ำหนัก

สถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงบางสถานการณ์ เราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้กราฟที่มีตัวเลขกำกับบนเส้นแต่ละเส้นในกราฟ ซึ่งโดยทั่วไปตัวเลขที่กำกับบนเส้นในกราฟ อาจใช้แทนค่าใช้จ่าย ระยะทาง เวลา และอื่น ๆ เช่น แผนที่ของอาคารเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งเราใช้กราฟเป็นแบบจำลอง โดยใช้จุดแทนอาคารเรียน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดแทนถนนเชื่อมระหว่างอาคารเรียนสองอาคาร ซึ่งมีตัวเลขที่กำกับไว้บนเส้นแต่ละเส้นในกราฟแทนระยะทางระหว่างอาคารเรียน(กำหนดให้ระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร) ดังรูป (1)



รูป (1)

เราเรียกตัวเลขกำกับบนเส้นในกราฟว่า ***น้ำหนัก*** (weight) ของเส้น และเรียกกราฟที่มีลักษณะ ดังกล่าวนี้ว่า ***กราฟที่มีน้ำหนัก*** (weighted graph)

เราจะให้นิยามที่ชัดเจนของกราฟที่มีน้ำหนักดังนี้

บทนิยาม 17 เรากล่าวว่ากราฟ G เป็น ***กราฟที่มีน้ำหนัก*** เมื่อเส้นแต่ละเส้นใน G ถูกกำหนดด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และเราเรียกจำนวนจริงที่กำหนดบนเส้น e ใน G ว่า ***น้ำหนักของเส้น e*** เขียนแทนด้วย w(e)

บทนิยาม 18 ความยาวของวิถี ในกราฟที่มีน้ำหนัก G คือ ผลรวมของน้ำหนักของทุก ๆ เส้นในวิถีนั้น

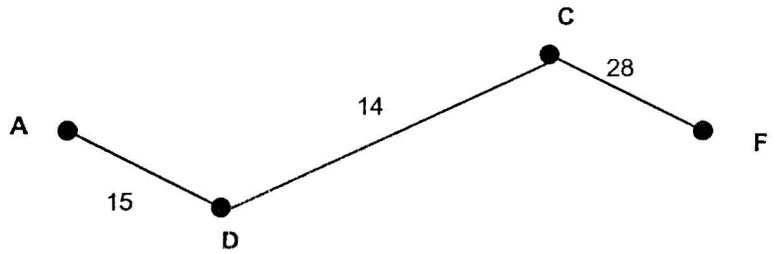
บทนิยาม 19 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก u และ v เป็นจุดใน G ระยะทาง d(u, v) คือ ความยาวของวิถี u – v ที่น้อยที่สุด

52

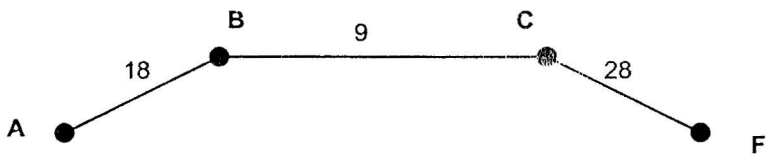
จากแผนที่ของอาคารเรียนดังรูปข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *
ให้นักเรียนหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากอาคาร A ไป อาคาร F

ตัวอย่างที่1 นักเรียนสามารถตอบคำถามข้างต้นได้ดังนี้

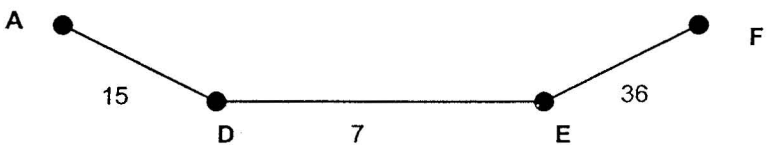
แนวคิด เนื่องจาก ระยะทางที่สั้นที่สุด คือ ความยาวของวิถี A – F ที่น้อยที่สุด ดังนั้น เราต้องหาผลรวมของน้ำหนักของเส้น ในวิถี A – F ซึ่งเราพบว่าเราสามารถหาวิถี A – F ได้หลายแบบ
เช่น



แบบที่ 1 วิถี A, D, C, F มีความยาว 15 + 14 + 28 = 57 เมตร



แบบที่ 2 วิถี A, B, C, F มีความยาว 18 + 9 + 28 = 55 เมตร



แบบที่ 3 วิถี A, D, E, F มีความยาว 15 + 7 + 36 = 58 เมตร

การหาวิถีดังกล่าวข้างต้น นักเรียนจะพบว่า วิถีมีลำดับต่างกันจะมีความยาวของวิถีต่างกัน และจากวิถีทั้ง 3 แบบข้างต้น ทำให้ทราบว่าความยาวของวิถี A – F ที่น้อยที่สุด จะมีค่าไม่เกิน 55 เมตร □

จากตัวอย่างที่ 1 นักเรียนจะพบว่าความยาวของวิถี A – F ที่น้อยที่สุด จะมีค่าไม่เกิน 55 เมตร
ดังนั้น ระยะทาง d(A, F) ≤ 55 เมตร **

* ครูให้นักเรียนช่วยกันหา **ระยะทาง d(A, F) = 55 เมตร
ครูควรอธิบายคำว่า " **จุดนำหน้าจุดปลายของวิถี** " ให้นักเรียนเข้าใจเพื่อศึกษาหัวข้อต่อไป เช่น
มีลำดับวิถีคือ A, B, C, D จุดนำหน้าจุดปลายของวิถีจาก A-D ของลำดับวิถีนี้ คือ จุด C

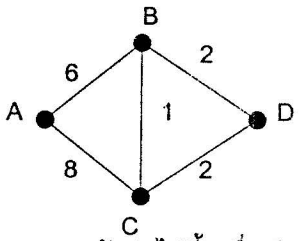
53

ปัญหาวิถีที่สั้นที่สุด (The Shortest Path Problem)

จากตัวอย่างที่ 1. เราพบว่าระยะทาง d(A, F) ≤ 55 เมตร แต่ยังไม่ทราบแน่ชัดว่า ระยะทาง d(A, F) มีค่าเท่ากับเท่าไร ดังนั้นจำเป็นต้องหาความยาวของวิถี A – F ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งจะทำให้เสียเวลาในการหา และประกอบกับในชีวิตประจำวันปัญหาที่เกิดขึ้นอาจซับซ้อน กราฟที่เราสร้างเป็นรูปแบบจำลองอาจมีขนาดใหญ่ เป็นการยากที่จะหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟที่มีน้ำหนักด้วยวิธีการดังกล่าวข้างต้น

ซึ่งต่อไปนี้นักเรียนจะได้ศึกษาขั้นตอนวิธีที่มีประสิทธิภาพในการหาระยะทางที่สั้นที่สุด ระหว่างจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก ให้นักเรียนลองพิจารณาตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟ ดังรูป จงหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป D และระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ไป D



ให้นักเรียนตอบคำถามตามลำดับต่อไปนี้ เพื่อเป็นแนวทางในการหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป D *

1. จุดเริ่มต้น คือ จุด A ดังนั้น d(A, A) = 0 ใช่หรือไม่
2. วิถีที่จะทำการสำรวจต่อไป จะมีจุดปลายของวิถีประชิดกับจุด A ใช่หรือไม่ ถ้าใช่มีวิถีใดบ้าง
3. ความยาวของวิถี A – B มีค่าเท่ากับ d(A, A) + w(AB) และ ความยาวของวิถี A – C มีค่าเท่ากับ d(A, A) + w(AC) ใช่หรือไม่ และทั้งสองวิถีมีความยาวเท่าใด
4. เราสามารถบอกได้หรือไม่ว่า d(A, B) = 6 และ d(A, C) = 8
5. วิถีต่อไปที่จะทำการสำรวจควรมีจุดใดเป็นจุดนำหน้าจุดปลายของวิถีที่จะทำการสำรวจต่อไป
6. วิถีที่จะทำการสำรวจต่อไป คือวิถีที่มีลำดับใด
7. ความยาวของวิถี A – C มีค่าเท่ากับ d(A, B) + w(BC) และ ความยาวของวิถี A – D มีค่าเท่ากับ d(A, B) + w(BD) ใช่หรือไม่ และทั้งสองวิถีมีความยาวเท่าใด
8. เราสามารถบอกได้หรือไม่ว่า d(A, C) = 7 และ d(A, D) = 8
9. วิถีต่อไปที่จะทำการสำรวจควรมีจุดใดเป็นจุดนำหน้าจุดปลายของวิถีที่จะทำการสำรวจต่อไป
10. วิถีที่ทำการสำรวจต่อไป คือวิถีที่มีลำดับใด
11. ความยาวของวิถี A – D มีค่าเท่ากับ d(A, C) + w(CD) ใช่หรือไม่และวิถีดังกล่าวมีความยาวเท่าใด
12. จงหา d(A, D)

□

1.ใช่ 2. ใช่ วิถี A-B มีลำดับ A, B และ วิถี A-C มีลำดับ A, C 3.ใช่ วิถี A-B ที่มีลำดับ A, B มีความยาว= 6 วิถี A-C ที่มีลำดับ A, C มีความยาว= 8 4.d(A, B) = 6 แต่ d(A, C) ยังสรุปไม่ได้ 5. B 6. วิถี A, B, D และวิถี A, B, C 7. ใช่ วิถี A-C ที่มีลำดับ A, B, C มีความยาว = 6 + 1 = 7 วิถี A-D ที่มีลำดับ A, B, D มีความยาว= 6 + 2 = 8 8. d(A, C) = 7 (จากข้อ 3และ 7)แต่ d(A, D) ยังสรุปไม่ได้ 9. C 10. วิถี A, B, C, D 11. ใช่ วิถี A-D ที่มีลำดับ A, B, C, D มีความยาว = 7 + 2 = 9 12. d(A, D) = 8 (จากข้อ 7 และ 11)

จากคำถามข้อ 1 – 12 ครูควรวาดรูปประกอบการซักถามเพื่อให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น

คำถามดังกล่าวข้างต้นเป็นขั้นตอนวิธีในการหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป D ซึ่งจากการตอบคำถามดังกล่าวเราสามารถใช้ตารางแสดงขั้นตอนวิธีการหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป D ได้ โดยมีข้อตกลง ดังนี้

1. จุดแต่ละจุด จะมีค่าประจำจุด เขียนแทนด้วย คู่อันดับ

โดย สมาชิกตัวแรกในคู่อันดับ คือ ผลรวมของความยาวของวิถีจากจุดเริ่มต้น

สมาชิกตัวที่สองในคู่อันดับ คือ จุดที่อยู่นำหน้าจุดปลายของวิถีจากจุดเริ่มต้น

2. จุดในกราฟแบ่งเป็น 2 ประเภท ดังนี้

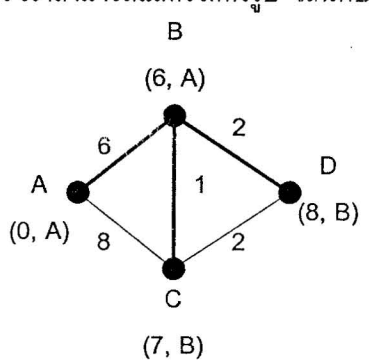
2.1 จุดที่มีค่าประจำจุดถาวร คือ จุดที่ได้รับการสำรวจ และพบวิถีที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้น ดังนั้นค่าประจำจุดไม่ต้องปรับปรุง

2.2 จุดที่มีค่าประจำจุดชั่วคราว คือ จุดที่ได้รับการสำรวจแต่ยังไม่พบวิถีที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้น ดังนั้นค่าประจำจุดสามารถปรับปรุงได้ ถ้าพบความยาวของวิถีจากจุดเริ่มต้นมีค่าน้อยลง และจุดที่ยังไม่ได้รับการสำรวจ โดยกำหนดให้มีค่าประจำจุด เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (∞, ...)

ตารางแสดงขั้นตอนวิธีการหาวิถีที่สั้นที่สุด จาก A ไป D ดังนี้

A	B	C	D	จุดที่มีค่าประจำจุดถาวร
(0, A)	(∞, ...)	(∞, ...)	(∞, ...)	A
	(6, A)	(8, A)	(∞, ...)	B
		(7, B)	(8, B)	C
			~~(9, C)~~ (8, B)	D

ซึ่งเมื่อขั้นตอนวิธีสิ้นสุดลง เราสามารถแสดงได้ดังรูป เส้นทึบแสดงวิถีที่สั้นที่สุด ดังนี้



จากขั้นตอนวิธีดังกล่าวข้างต้น จะได้ว่า

d(A, D) = 8 ซึ่งมีลำดับวิถี คือ A, B, D ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุด จาก Aไป D มีระยะทาง 8 หน่วย

นอกจากนี้เรายังสามารถบอกได้ว่า

d(A, B) = 6 ซึ่งมีลำดับวิถี คือ A, B ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุด จาก Aไป B มีระยะทาง 6 หน่วย

d(A, C) = 7 ซึ่งมีลำดับวิถี คือ A, B, C ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุด จาก Aไป C มีระยะทาง 7 หน่วย

55

ขั้นตอนวิธีในการหาวิถีที่สั้นที่สุดจากจุด ๆ หนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ ในกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักดังกล่าวข้างต้น คือ ***ขั้นตอนวิธีของไดค์สตรา*** (Dijkstra Algorithm) ซึ่งขั้นตอนนี้เป็นการกำหนดค่าประจำจุดถาวรให้กับจุดในกราฟ มีหลักการดังนี้

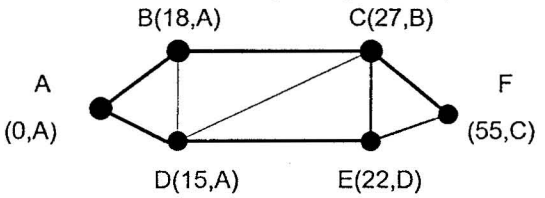
1. กำหนดให้จุดเริ่มต้น เป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร
2. จากนั้นทำการสำรวจจุดต่าง ๆ ในกราฟซึ่งประชิดกับจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร จุดที่ได้รับการสำรวจจะกลายเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดชั่วคราว
3. เลือกจุดที่มีค่าประจำจุดชั่วคราวซึ่งมีค่าประจำจุดน้อยที่สุด (มีผลรวมของความยาวที่น้อยที่สุดจากจุดเริ่มต้น) เข้ารวมเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร
4. ย้อนกลับไปดำเนินการสำรวจตามข้อ 2 และ 3 จนกระทั่งจุดทุกจุดในกราฟถูกรวมเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร

สำหรับขั้นตอนของไดค์สตราที่กล่าวมาเป็นการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด A ไป จุดทุกจุดในกราฟ แต่ปัญหาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดอาจต้องการหาเพียงระยะทางที่สั้นที่สุดเพียงระยะทางเดียว ดังเช่นถ้าปัญหาต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ไป C ดังนั้นเราจะดำเนินการตามขั้นตอนของไดค์สตรา ไปจนกระทั่ง จุด C มีค่าประจำจุดถาวร เป็นการเพียงพอแล้ว

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

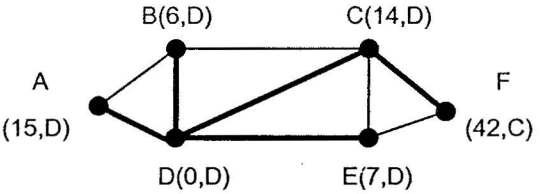
1. ให้นักเรียนหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด A ไปจุดใด ๆ ในกราฟ จากกราฟรูป (1) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตรา
2. ให้นักเรียนหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด D ไปจุดใด ๆ ในกราฟ จากกราฟรูป (1) โดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตรา

* 1. ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด A ไป จุดใด ๆ ในกราฟ



d(A, D) = 15 ซึ่งมีวิถีคือ A, D
d(A, B) = 18 ซึ่งมีวิถีคือ A, B
d(A, E) = 22 ซึ่งมีวิถีคือ A, D, E
d(A, C) = 27 ซึ่งมีวิถีคือ A, B, C
d(A, F) = 55 ซึ่งมีวิถีคือ A, B, C, F

2. ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด D ไป จุดใด ๆ ในกราฟ



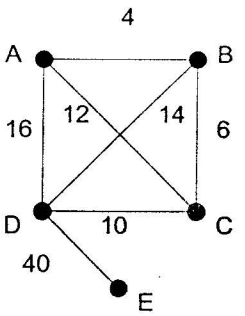
d(D, B) = 6 ซึ่งมีวิถีคือ D, B
d(D, E) = 7 ซึ่งมีวิถีคือ D, E
d(D, C) = 14 ซึ่งมีวิถีคือ D, C
d(D, A) = 15 ซึ่งมีวิถีคือ D, A
d(D, F) = 42 ซึ่งมีวิถีคือ D, C, F

56

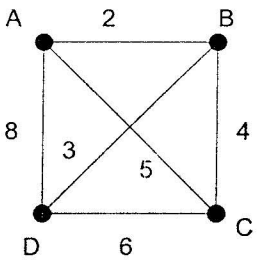
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.6

1. จงใช้ขั้นตอนของไดค์สตรา หาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด A ไปจุดใด ๆ ในกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักต่อไปนี้

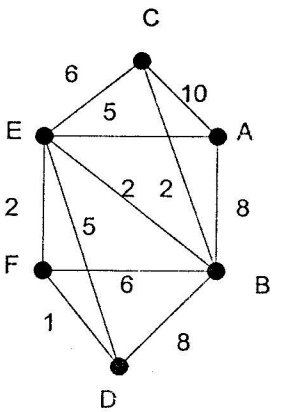
1.1



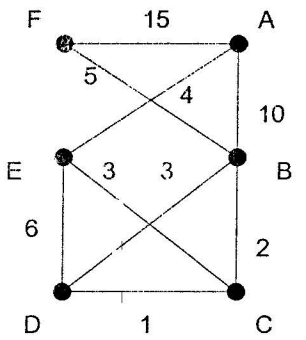
1.2



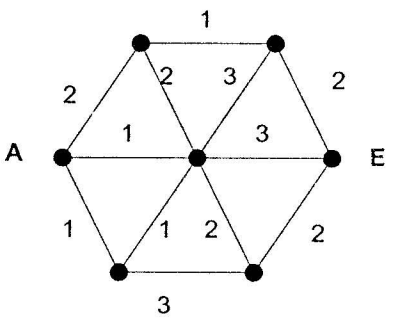
1.3



1.4

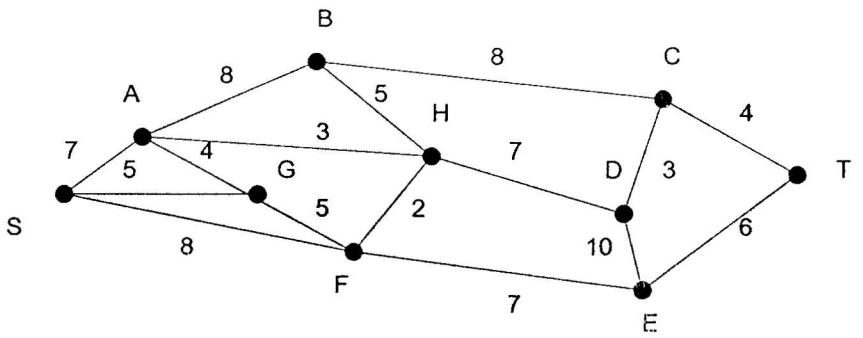


2. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก A ไป E จากกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักต่อไปนี้

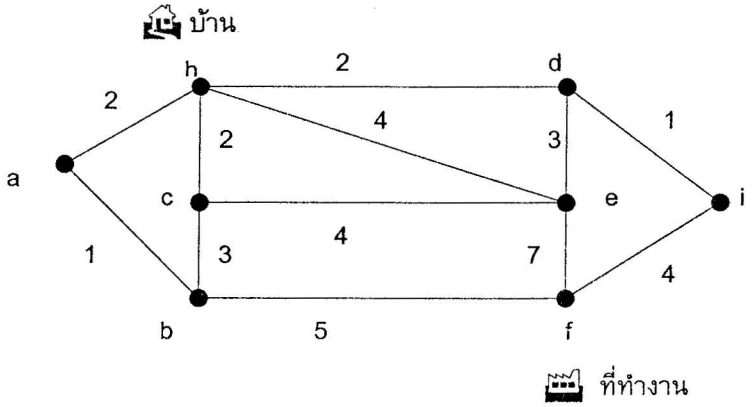


57

3. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางการบินจากเมืองหนึ่ง ไปยังอีกเมืองหนึ่ง โดยให้จุดแทนเมือง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน เส้นทางการบินระหว่างสองเมือง และน้ำหนักของเส้น แทน เวลาที่ใช้บิน(ชั่วโมง) จงหาเส้นทางการบินจากเมือง S ไป เมือง T ที่ใช้เวลาในการบินน้อยที่สุด



4. กำหนดเส้นทางที่นายประหยัดสามารถขับรถจากบ้านไปยังที่ทำงาน โดยให้ จุดแทนแยก เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดแทนเส้นทางเชื่อมระหว่างสองแยก น้ำหนักของเส้นแทนระยะทางระหว่างสองแยก (กิโลเมตร) ซึ่งนายประหยัดต้องการหาเส้นทางที่ทำให้เขาไปทำงานโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด (ค่าใช้จ่ายขึ้นกับระยะทาง) จงหาเส้นทางที่นายประหยัดต้องการ



หัวข้อที่ 2
ต้นไม้
(2 คาบ)

หัวข้อนี้มีหัวข้อย่อย 2 หัวข้อย่อย ดังนี้

2.1 บทนิยามของต้นไม้ (1 คาบ)

2.2 การประยุกต์ของต้นไม้ (1 คาบ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ปลายทาง ของหัวข้อนี้

2. บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับต้นไม้ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

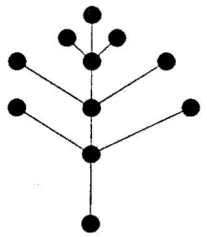
จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ของหัวข้อนี้

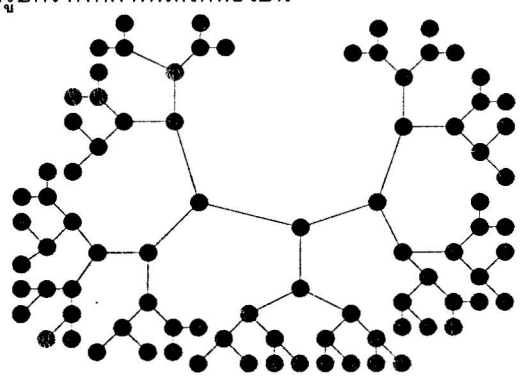
15. บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
16. บอกทฤษฎีบทที่บ่งบอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้ได้
17. หาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
18. หาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
19. นำความรู้เรื่องการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

58

2 ต้นไม้

ให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถามจากรูปกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ *



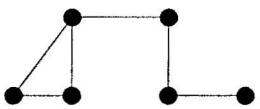


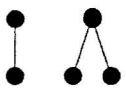
1. กราฟข้างต้นเป็นกราฟเชิงเดียวและเป็นกราฟเชื่อมโยงใช่หรือไม่
2. กราฟข้างต้นมีวัฏจักรหรือไม่

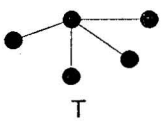
2.1 บทนิยามของต้นไม้

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว เรากล่าวว่า G เป็น ***ต้นไม้*** (Tree)
เมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ พร้อมบอกเหตุผล เมื่อกำหนดกราฟดังรูป


G


H


T

G ไม่เป็นต้นไม้ เนื่องจาก G มีวัฏจักร
H ไม่เป็นต้นไม้เนื่องจาก H เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง
T เป็นต้นไม้ เนื่องจาก T เป็นกราฟเชื่อมโยง และไม่มีวัฏจักร □

ตัวอย่างที่ 2 ต้นไม้ ที่มีจุด 1,2 หรือ 3 จุด จะมีได้เพียงแบบเดียวเท่านั้นดังรูป


1 จุด 2 จุด 3 จุด □

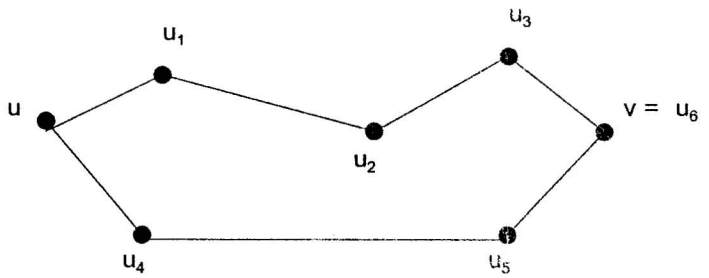
* 1. เป็นกราฟเชิงเดียวและกราฟเชื่อมโยง 2. ไม่มีวัฏจักร

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดกราฟ G ที่มีวงวน ดังรูป



กราฟ G ไม่เป็นต้นไม้ เพราะวงวนมีวัฏจักร-1 □

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดกราฟ G ดังรูป จะแสดงให้เห็นว่า ถ้า G เป็นต้นไม้ แล้ว จุด 2 จุดใด ๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วย วิถีเพียงวิถีเดียว

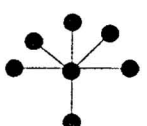


แนวคิด สมมติให้มีวิถีจาก $u - v$ 2 วิถี ให้ P, P' เป็นวิถีจาก $u - v$
จะได้ $P = u, u_1, u_2, u_3, u_6$ และ $P' = u, u_4, u_5, u_6$
ดังนั้นจะเห็นว่า ถ้ามีวิถีจาก $u - v$ เกิดขึ้นตั้งแต่ 2 วิถีขึ้นไป กราฟ G จะมีวัฏจักรเกิดขึ้น
สรุปได้ว่า ถ้า G เป็นต้นไม้ แล้วจุด 2 จุดใด ๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วย วิถีเพียงวิถีเดียว □

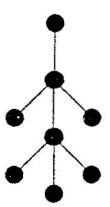
ตัวอย่างที่ 5 ถ้า G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n จุด แล้วกราฟ G จะมีจำนวนเส้น n-1 เส้น แสดงดังรูป

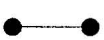


$|V(G)| = 1, |E(G)| = 0$



$|V(G)| = 7, |E(G)| = 6$





$|V(G)| = 2, |E(G)| = 1$

$|V(G)| = 8, |E(G)| = 7$ □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้บ่งบอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้

ทฤษฎีบท 1

1.1 ถ้ากราฟ G มีวงวน แล้วกราฟ G ไม่เป็นต้นไม้

1.2 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ แล้วจุด 2 จุดใด ๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วย วิถีเพียงวิถีเดียว

1.3 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n จุด แล้ว กราฟ G จะมีจำนวนเส้น $n - 1$ เส้น

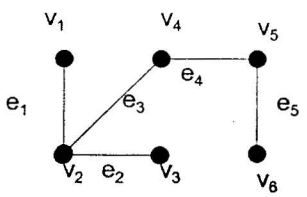
1.4 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด $n > 1$ กราฟ G จะมีจุดที่มีระดับขั้น 1 อย่างน้อย 2 จุด

60

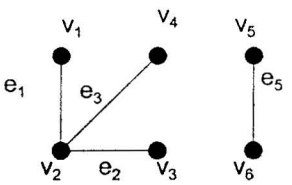
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

ให้ G เป็นต้นไม้ และ e เป็นเส้นในกราฟ G แล้วกราฟ G – e เป็นต้นไม้หรือไม่ พร้อมแสดงเหตุผล

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณากราฟ G เป็นต้นไม้ ดังรูป



G



G – e_4

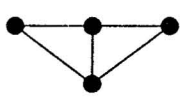
จะได้ว่า กราฟ G – e ไม่เป็นต้นไม้ เนื่องจาก กราฟ G - e_4 กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

ดังนั้น เมื่อ กราฟ G เป็นต้นไม้ ให้ e เป็นเส้นในกราฟ กราฟ G – e ไม่เป็นต้นไม้

เนื่องจาก กราฟ G – e กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง □

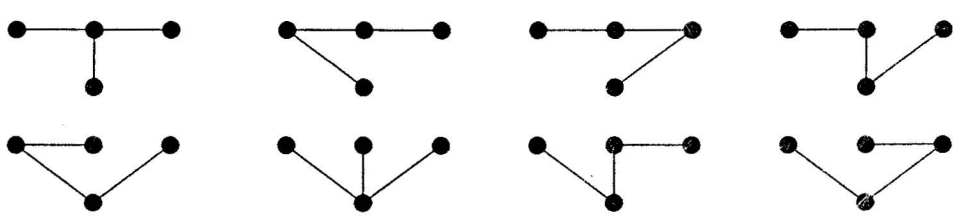
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

1. จงหาต้นไม้ที่มีจุด 4 จุด ว่ามีทั้งหมดกี่แบบที่แตกต่างกัน
2. จงหาต้นไม้ที่เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของกราฟ G ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อกำหนดกราฟ G ดังรูป

G : 

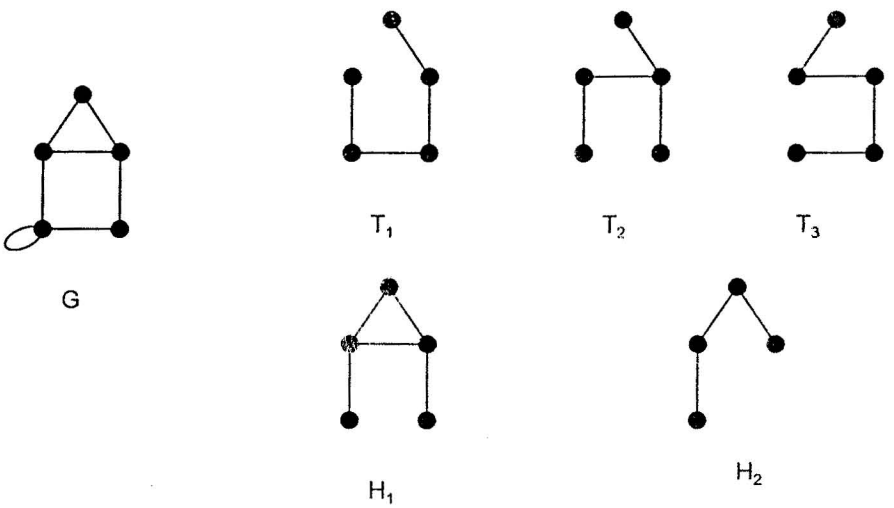
* 1. ต้นไม้ที่มีจุด 4 จุด มีเพียง 2 แบบที่แตกต่างกัน ดังรูป



2. 

บทนิยาม 2 ต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree) ของกราฟ G คือ สับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G ที่เป็นต้นไม้

ตัวอย่างที่ 7 พิจารณากราฟที่กำหนดให้ดังรูป



พิจารณา กราฟ T_1, T_2, T_3, H_1 และ H_2 เป็นสับกราฟของ G

จะได้ว่า กราฟ T_1, T_2, T_3 เป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G

กราฟ H_1 ไม่เป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G เพราะ H_1 ไม่เป็นต้นไม้เนื่องจากมีวัฏจักร

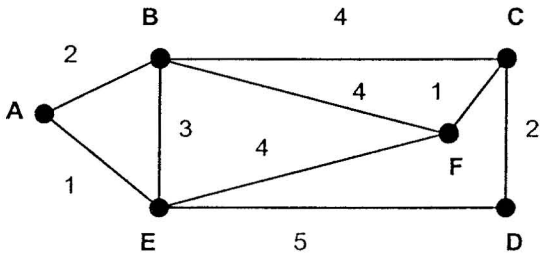
กราฟ H_2 ไม่เป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ G เพราะ H_2 มี $V(H) \neq V(G)$ □

2.2 การประยุกต์ของต้นไม้

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

สมมติเราต้องการสร้างถนนเชื่อมต่อระหว่างเมืองต่าง ๆ โดยที่ทราบค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างถนนที่เชื่อมเมือง 2 เมืองใด ๆ ปัญหาที่เกิดขึ้น คือ เราควรสร้างถนนเชื่อมระหว่างเมืองใดบ้าง เพื่อให้เมือง 2 เมืองใด ๆ สามารถติดต่อกันได้ทางรถยนต์และเสียค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างน้อยที่สุด เราสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์ด้วยกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยให้ จุด แทน เมือง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุด แทนถนนเชื่อมระหว่างเมืองสองเมือง และน้ำหนักของเส้น แทน ค่าใช้จ่ายในการสร้างถนน (หน่วยเป็นล้านบาท) ดังรูป (1)

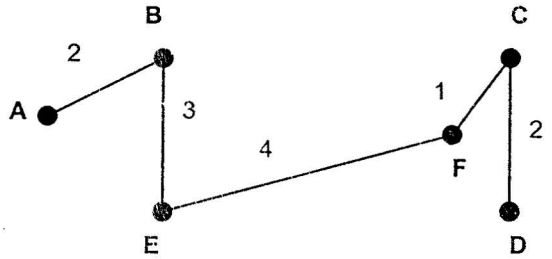
62



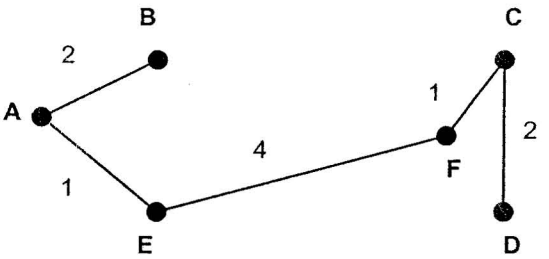
รูป (1)

ตัวอย่างที่ 1 นักเรียนสามารถหาคำตอบของปัญหาข้างต้น ได้ดังนี้

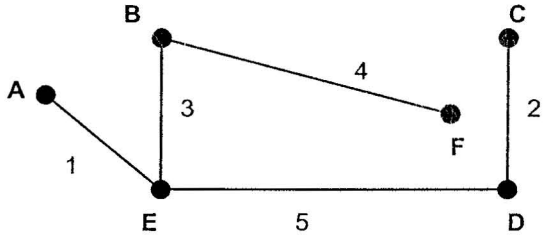
แนวคิด เนื่องจากต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟใด ๆ จะประกอบด้วยจุดทุก ๆ จุดของกราฟนั้น และจากสมบัติของต้นไม้ จะมีวิถีระหว่างทุก ๆ คู่ของจุดในต้นไม้ ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้ เราสามารถหาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟดังรูป (1) ซึ่งเราจะพบว่าต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟมีได้หลายแบบ เช่น



แบบที่ 1 ได้ผลรวมของน้ำหนักของเส้นของต้นไม้ เท่ากับ 2 + 3 + 4 + 1 + 2 = 12



แบบที่ 2 ได้ผลรวมของน้ำหนักของเส้นของต้นไม้ เท่ากับ 2 + 1 + 4 + 1 + 2 = 10

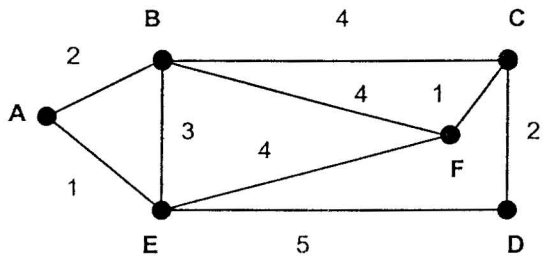


แบบที่ 3 ได้ผลรวมของน้ำหนักของเส้นของต้นไม้ เท่ากับ 1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15

จากต้นไม้แบบทอดข้ามทั้งสามแบบข้างต้น จะพบว่าผลรวมของน้ำหนักของเส้นที่น้อยที่สุดของต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟดังรูป (1) จะมีค่าไม่เกิน 10 ดังนั้นเราสามารถทราบค่าใช้จ่ายในการสร้างถนนของปัญหานี้ว่าจะมีค่าใช้จ่ายในการสร้างถนนไม่เกิน 10 ล้านบาท □

63

ให้นักเรียนพิจารณาหาคำตอบของปัญหาข้างต้น โดยใช้กราฟดังรูป (1) ตามขั้นตอนต่อไปนี้

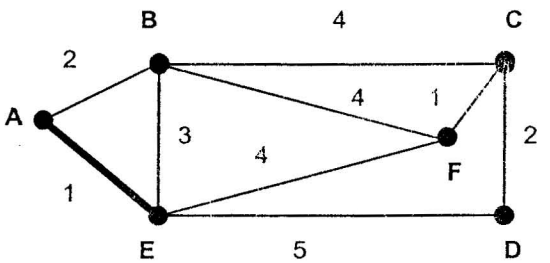


ในแต่ละขั้นตอนเส้นที่เลือกจะใช้เส้นทึบ

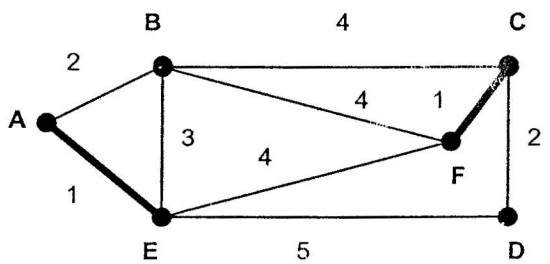
ขั้นที่ 1 จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปหามาก

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5

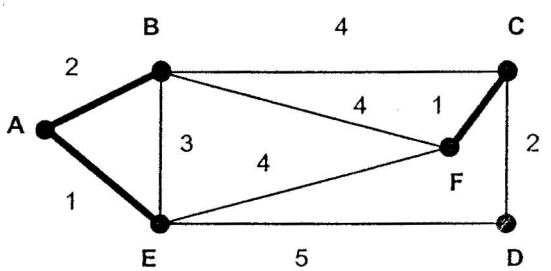
ขั้นที่ 2 เลือกเส้นที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด



ขั้นที่ 3 เลือกเส้นที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดจากเส้นที่เหลือ และไม่ทำให้เกิดวัฏจักรเมื่อรวมเส้นนี้เข้าเป็นส่วนหนึ่งของต้นไม้แบบทอดข้ามที่กำลังหา

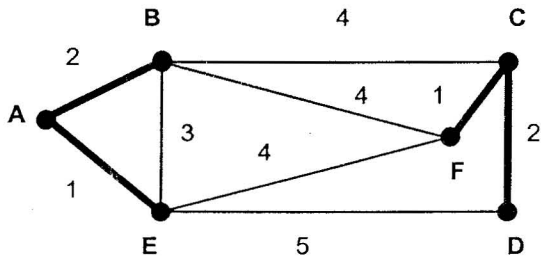


ขั้นที่ 4 ดำเนินการตามขั้นที่ 3

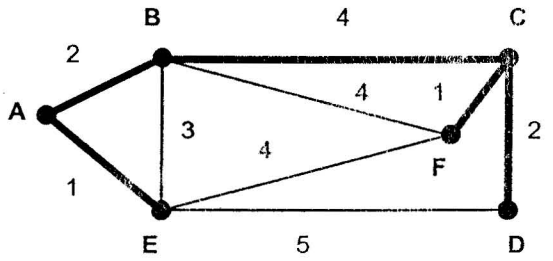


64

ขั้นที่ 5 ดำเนินการตามขั้นที่ 3



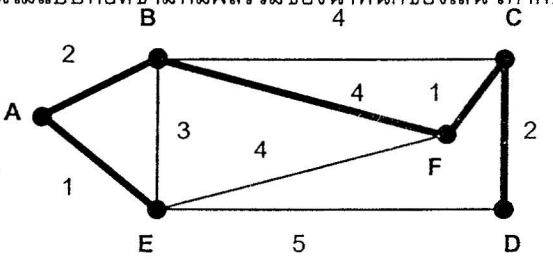
ขั้นที่ 6 ดำเนินการตามขั้นที่ 3 ซึ่งจะพบว่าเส้นที่เหลือที่มีน้ำหนักของเส้นน้อยที่สุดคือ 3 แต่ไม่สามารถเลือกได้ เพราะจะทำให้เกิดวัฏจักร ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเลือกเส้นที่มีน้ำหนัก 4 ซึ่งมี 3 เส้นจะเลือกเส้นใดก็ได้แต่เราจะเลือกเพียงเส้นเดียว



เมื่อสิ้นสุดขั้นตอนที่ 6 จะได้ต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ ซึ่งมีผลรวมของน้ำหนักของเส้น เท่ากับ 1+1+2+2+4 = 10

ดังนั้นคำตอบของปัญหาการสร้างถนนครั้งนี้จะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการก่อสร้างถนน เท่ากับ 10 ล้านบาท

ข้อสังเกต ในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้น เท่ากับ 10 อาจมีมากกว่า 1 แบบ ดังรูป



ขั้นตอนวิธีในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นน้อยที่สุดที่ได้กล่าวข้างต้น คือขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ (Kruskal' s Algorithm) ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีมีหลักการดังนี้

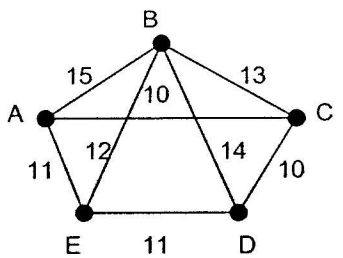
เลือกเส้นที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดจากกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก ติดต่อกันไปเพื่อสร้างกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยเลือกเส้นในกราฟไม่เกิน n-1 ครั้ง เมื่อ กราฟมีจุด n จุด และการเลือกเส้นดังกล่าวต้องไม่ก่อให้เกิดวัฏจักร การเลือกนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อได้ต้นไม้แบบทอดข้าม และเราเรียก ต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นน้อยที่สุด ว่า ***ต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด*** (minimum spanning tree)

65

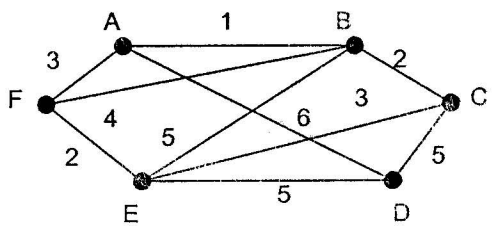
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 2

1. จงใช้ขั้นตอนของครูสกาวล์ในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดจากกราฟดังรูปต่อไปนี้

1.1



1.2



2. ปัญหาการวางสายโทรศัพท์

บริษัทรับเหมาติดตั้งโทรศัพท์ ต้องการวางสายโทรศัพท์เชื่อมโยงระหว่างสถานที่ต่าง ๆ 6 แห่ง ดังตารางข้างล่าง ถ้าบริษัทต้องการเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เขาควรจะวางสายโทรศัพท์อย่างไร (ค่าใช้จ่ายขึ้นอยู่กับความยาวของสายโทรศัพท์)

ตารางแสดงระยะทาง (กิโลเมตร) ระหว่างเมือง 2 เมือง

เมือง	กรุงเทพ ฯ	นครปฐม	ราชบุรี	กาญจนบุรี	สมุทรสาคร	เพชรบุรี
กรุงเทพ ฯ	-	7	15	11	7	10
นครปฐม	7	-	11	18	3	12
ราชบุรี	15	11	-	27	8	13
กาญจนบุรี	11	18	27	-	18	20
สมุทรสาคร	7	3	8	18	-	9
เพชรบุรี	10	12	13	20	9	-

หัวข้อที่ 3
กราฟออยเลอร์
(5 คาบ)

หัวข้อนี้มีหัวข้อย่อย 2 หัวข้อย่อย ดังนี้

3.1 บทนิยามของกราฟออยเลอร์ (1 คาบ)

3.2 การประยุกต์กราฟออยเลอร์ (4 คาบ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ปลายทาง ของหัวข้อนี้

4. บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
5. นำความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ของหัวข้อนี้

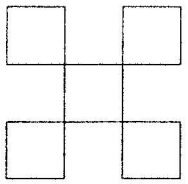
20. บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้
21. บอกได้ว่ากราฟใดหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
22. หาวงออยเลอร์ และรอยเดินเปิดออยเลอร์ โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ได้
23. หาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้
24. นำความรู้เรื่องการหาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

66

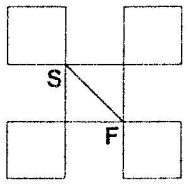
3. กราฟออยเลอร์

กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph) มีต้นกำเนิดมาจากการตอบปัญหาปริศนาข้อหนึ่ง คือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ซึ่งเราได้กล่าวมาแล้วข้างต้นในหัวข้อที่ 1 ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะศึกษาแนวคิดและบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และการประยุกต์กราฟออยเลอร์

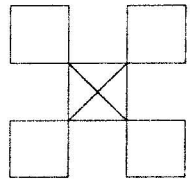
ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้ รูปใดสามารถวาดได้โดยไม่ต้องยกดินสอ และไม่ลากซ้ำเส้นที่ลากแล้ว *



รูป(1)



รูป(2)



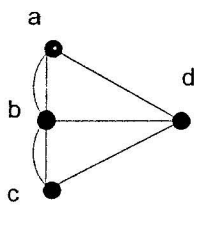
รูป(3)

จากรูปข้างต้น จะได้ว่ารูป(1) สามารถวาดรูปได้โดยไม่ต้องยกดินสอ และสามารถเริ่มต้นที่จุดใดของรูปได้ รูป(2) สามารถวาดรูปได้โดยไม่ต้องยกดินสอ แต่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดในการวาดรูปมีเพียง 2 จุดเท่านั้น คือจุด Sและจุด Fและสลับที่ระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดได้ ส่วนรูป(3) ไม่สามารถวาดรูปตามเงื่อนไขดังกล่าวได้

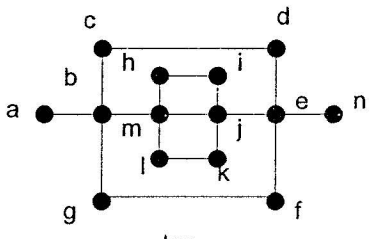
3.1 บทนิยามของกราฟออยเลอร์

ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์กซึ่งเป็นปัญหาการเดินผ่านทุก ๆ เส้น เส้นละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเดิม เป็นปัญหาเดียวกับปัญหาการลากดินสอไปในรูปกราฟโดยให้ผ่านเส้นทั้งหมด เส้นละ 1 ครั้ง และกลับมาที่จุดเดิม ดังรูป(1) ข้างต้น ซึ่งในการแก้ปัญหา คือ หารอยเดินปิดซึ่งไม่ใช่แนวเดินชัด นั่นก็คือ การหาวงในกราฟนั่นเอง

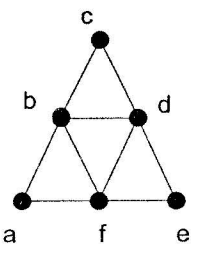
ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนพิจารณากราฟดังรูปต่อไปนี้ ว่ากราฟใดสามารถใช้ดินสอลากผ่านเส้นทุกเส้น เส้นละ 1 ครั้งได้โดยไม่ต้องยกดินสอ



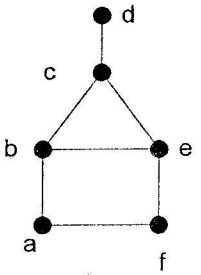
รูป(1)



รูป(2)



รูป(3)



รูป(4)

จะได้ว่า รูปกราฟที่สามารถใช้ดินสอลากผ่านเส้นทุกเส้น เส้นละ 1 ครั้งโดยไม่ต้องยกดินสอ คือกราฟ รูป (2) มีเส้นทางหนึ่งที่เป็นไปได้ มีลำดับคือ a,b,c,d,e,f,g,b,m,h,i,j,k,l,m,j,e,n **และ รูป (3) มีเส้นทางหนึ่งที่เป็นไปได้มีลำดับคือ a,b,c,d,e,f,d,b,f,a ** □

* ครูทบทวนความรู้เดิมจากกิจกรรมในหัวข้อที่ 1และให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา ** ครูให้นักเรียนหาเส้นทางอื่น

ตารางต่อไปนี้แสดงลักษณะของจุดในกราฟ ในตัวอย่างที่ 1

กราฟรูปที่	ลักษณะของจุด		
	จุดคู่ทุกจุด	จุดคี่ไม่เกิน 2 จุด	จุดคี่มากกว่า 2 จุด
1	-	-	มี
2		มี	-
3	มี		-
4	-	-	มี

ข้อสังเกต จากกราฟรูป (2) และ (3) **ให้นักเรียนพิจารณาจุดเริ่มต้นและจุดปลายจากการลากเส้นดินสอของกราฟทั้งสองมีลักษณะเหมือนกันหรือแตกต่างกันอย่างไร**

จาก**แนวคิดในการตอบปัญหาปริศนาของออยเลอร์**ดังกล่าวข้างต้นในหัวข้อที่ 1 นำไปสู่บทนิยามของกราฟออยเลอร์
ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง
เรากล่าวว่า G เป็น***กราฟออยเลอร์*** (Eulerian graph) เมื่อ G มีรอยเดินปิดซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นใน G และเรียกรอยเดินปิดดังกล่าวนี้ว่า รอยเดินออยเลอร์หรือ วงออยเลอร์ (Eulerian circuit)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้บ่งบอกลักษณะเฉพาะของกราฟออยเลอร์

ทฤษฎีบท 1 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ $|E(G)| \geq 1$
จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดทุกจุดใน G เป็นจุดคู่

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณากราฟและตารางแสดงลักษณะของจุดในกราฟ ในตัวอย่างที่ 1
แนวคิด จากกราฟรูป (3) เป็นกราฟที่มีจุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่
ดังนั้น จากบทนิยาม 1 และ ทฤษฎีบท 1 ดังกล่าวข้างต้น จะได้ว่า กราฟรูป(3) เป็นกราฟออยเลอร์ และ เราสามารถหาวงออยเลอร์ได้ ซึ่งสอดคล้องกับการลากดินสอในกราฟรูป (3) ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน คือ จุด a □

ในตัวอย่างที่ 1และ 2 จะได้ว่ากราฟรูป (1), (2), (4) ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ แต่กราฟในรูป (2) สามารถลากดินสอผ่านเส้นทุกเส้นโดยไม่ซ้ำกันได้ แต่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายต่างกัน เราสามารถอธิบายลักษณะของกราฟรูป (2) ได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

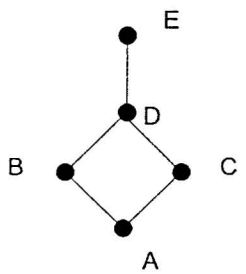
บทนิยาม 2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง เราเรียกรอยเดินเปิดใน G ว่า ***รอยเดินเปิดออยเลอร์*** (Eulerian trail) เมื่อรอยเดินดังกล่าวนี้ผ่านเส้นทุกเส้นใน G

ทฤษฎีบท 2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง G มีรอยเดินเปิดออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ G มีจุดที่เป็นจุดคี่ไม่เกิน 2 จุด ยิ่งไปกว่านั้นจุดคี่เหล่านี้จะเป็นจุดเริ่มต้นและจุดปลายของรอยเดินเปิดออยเลอร์

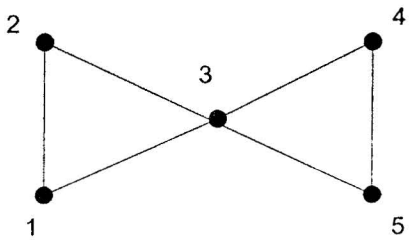
ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณา กราฟรูป (2) ในตัวอย่างที่ 1

แนวคิด จากบทนิยาม 2 และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า กราฟรูป (2) ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ แต่มีรอยเดินเปิดออยเลอร์ และ มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายอยู่ที่ จุด a และจุด n หรือสลับจุดเริ่มต้นและจุดปลายได้ ซึ่งมีรอยเดินหนึ่งที่เป็นไปได้ มีลำดับคือ a,b,c,d,e,f,g,b,m,h,i,j,k,l,m,j,e,n □

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณากราฟดังรูปต่อไปนี้



รูป (1)



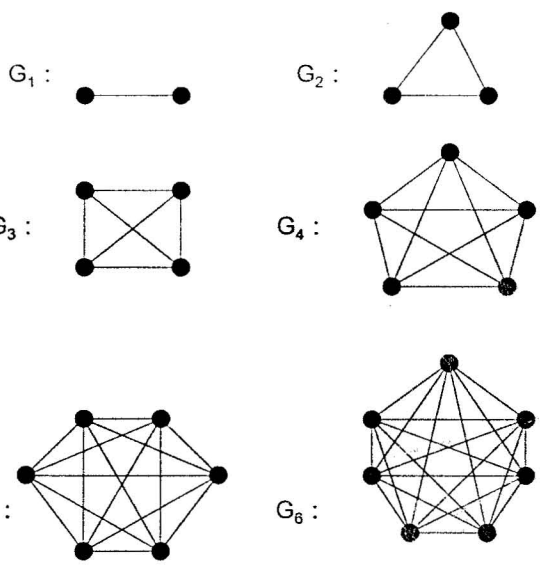
รูป (2)

แนวคิด จากกราฟรูป (1) มีจุดคี่ ไม่เกิน 2 จุด จะได้ว่า ไม่ใช่กราฟออยเลอร์แต่สามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ มีลำดับ คือ E, D, B, A, C, D เป็นต้น

จากกราฟรูป (2) มีจุดคู่ทุกจุด จะได้ว่า เป็นกราฟออยเลอร์และสามารถหาวงออยเลอร์ได้ มีลำดับคือ 1, 2, 3, 5, 4, 3, 1 เป็นต้น □

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.1

1. ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ เมื่อกำหนดกราฟ $G_1, G_2, \ldots, G_6$ ดังรูปต่อไปนี้

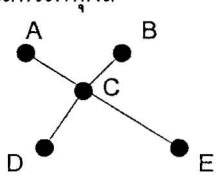


1.1 จงหาว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์

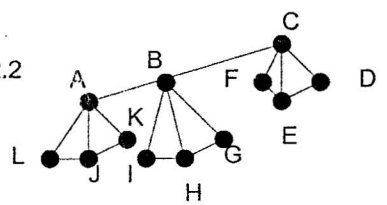
1.2 กราฟแบบบริบูรณ์ จะเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อใด

2. จงหาว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ หรือไม่เป็นกราฟออยเลอร์แต่สามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ พร้อมแสดงเหตุผล

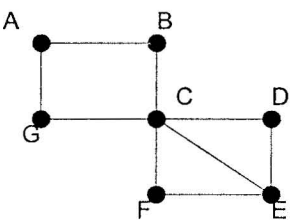
2.1



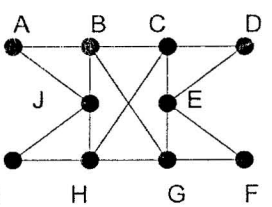
2.2



2.3



2.4



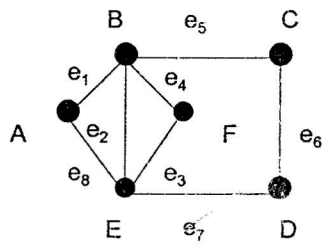
3.2 การประยุกต์กราฟออยเลอร์

จากหัวข้อที่กล่าวมาข้างต้น ในการหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ นักเรียนจะเห็นว่าเราสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน ในเรื่องการหาเส้นทางที่เดินผ่านเส้นทางเพียงครั้งเดียว โดยไม่ซ้ำเส้นทางเดินเดิมแล้วกลับมาที่เดิม หรือการหาเส้นทางที่เดินผ่านเส้นทางเพียงครั้งเดียวโดยไม่ซ้ำเส้นทางเดินเดิมซึ่งจุดเริ่มต้นและจุดปลายไม่ใช่จุดเดียวกันจากการหาวงออยเลอร์ ซึ่งในกรณีที่กราฟออยเลอร์มีขนาดเล็กสามารถหาวงออยเลอร์ได้ง่าย แต่ในกรณีที่กราฟออยเลอร์มีขนาดใหญ่เรามีขั้นตอนวิธีที่จะหาวงออยเลอร์ได้

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาวงออยเลอร์จากกราฟ G ที่กำหนดให้ ดังรูป

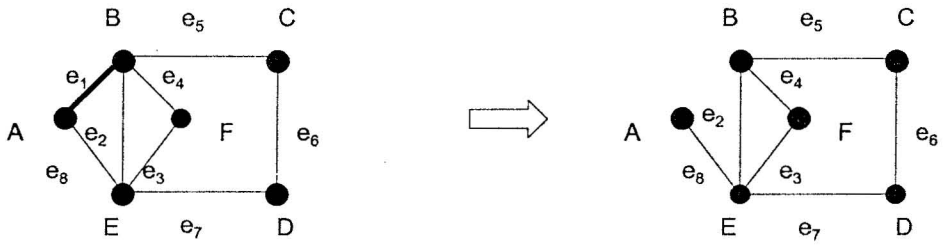
G :



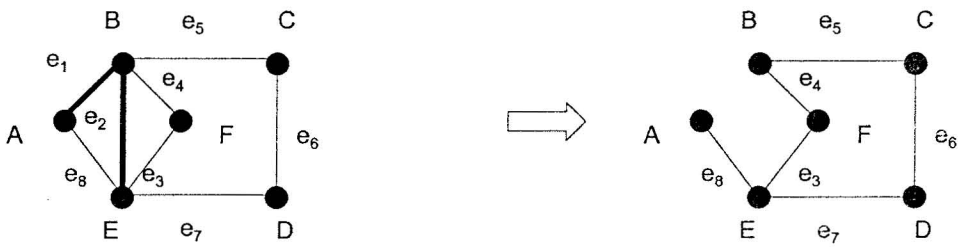
แนวคิด เนื่องจาก จุดทุกจุดในกราฟ G เป็นจุดคู่ ดังนั้นสามารถหาวงออยเลอร์ได้ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกจุดใดก็ได้ในกราฟ สมมติเลือกจุด A

ขั้นที่ 2 เลือกเส้นใดก็ได้ที่ตกกระทบกับจุด A เลือกเส้น e_1 แล้วกำจัดเส้น e_1 ออกจากกราฟ (เส้นทึบแสดงเส้นที่เลือก)

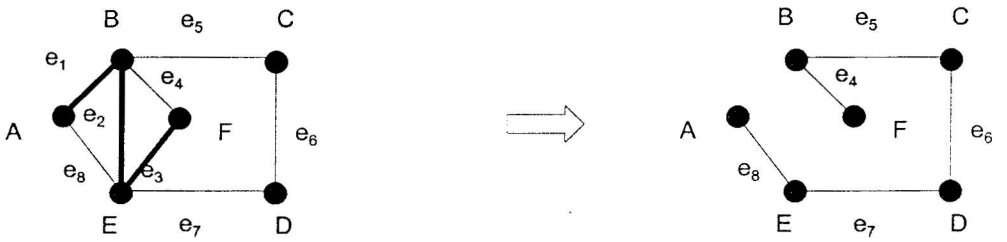


ขั้นที่ 3 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด B เลือกเส้น e_2 แล้วกำจัดเส้น e_2 ออกจากกราฟ

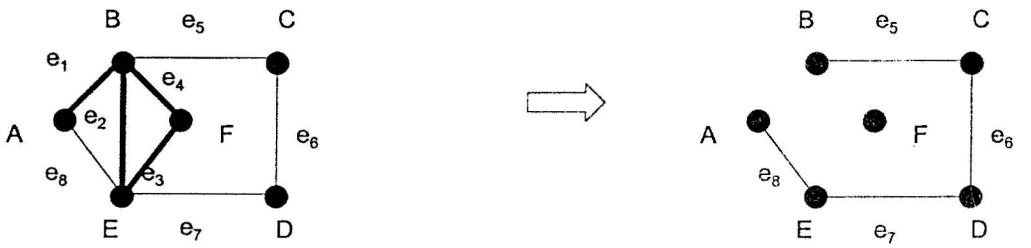


71

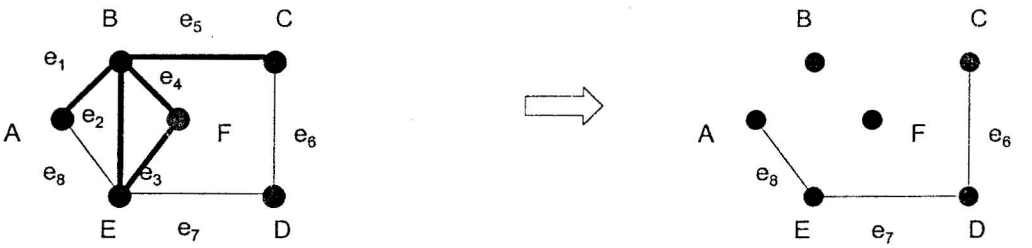
ขั้นที่ 4 เลือกเส้นใดที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด E ยกเว้นเส้น e_8 เพราะเป็นเส้นตัดของกราฟ $G - \{e_1, e_2\}$* เลือกเส้น e_3 แล้วกำจัดเส้น e_3 ออกจากกราฟ



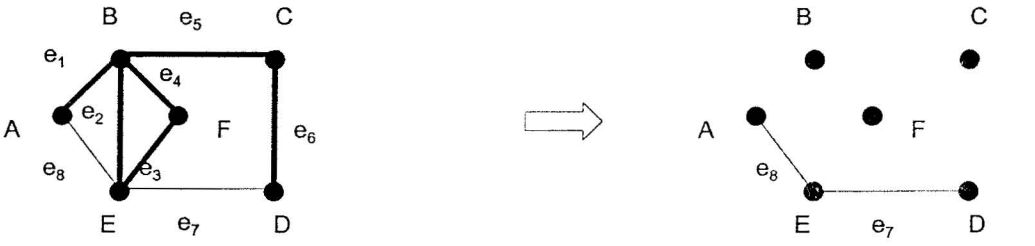
ขั้นที่ 5 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด F เลือกเส้น e_4 แล้วกำจัดเส้น e_4 ออกจากกราฟ



ขั้นที่ 6 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด B เลือกเส้น e_5 แล้วกำจัดเส้น e_5 ออกจากกราฟ



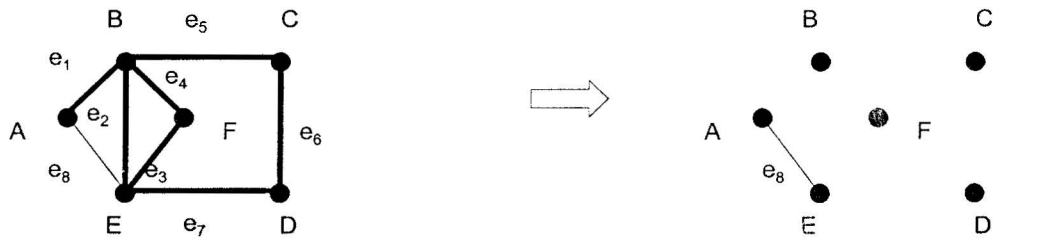
ขั้นที่ 7 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด C เลือกเส้น e_6 แล้วกำจัดเส้น e_6 ออกจากกราฟ



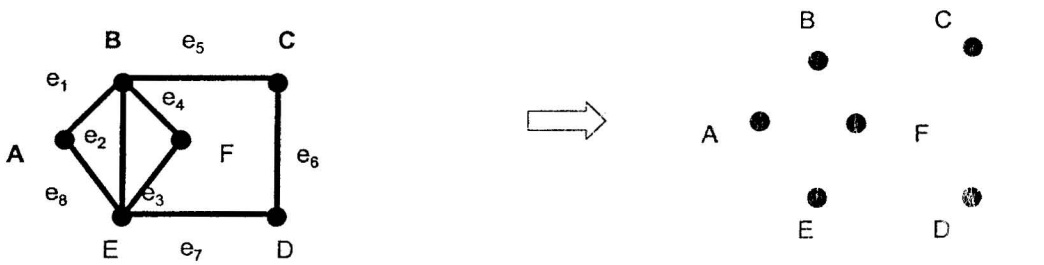
* ถ้าเลือกเส้น e_8 แล้วทำการกำจัดเส้น e_8 จะทำให้สับกราฟของ G ที่ได้ในขั้นตอนนี้กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

72

ขั้นที่ 8 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด D เลือกเส้น e_7 แล้วกำจัดเส้น e_7 ออกจากกราฟ



ขั้นที่ 9 เลือกเส้นที่ยังไม่ถูกเลือกและตกกระทบกับจุด E เลือกเส้น e_8 แล้วกำจัดเส้น e_8 ออกจากกราฟ



ในขั้นที่ 9 จะพบว่า ไม่มีเส้นให้เลือกต่อได้ เนื่องจากเราได้เลือกครบทุกเส้นในกราฟ เมื่อสิ้นสุดขั้นตอนที่ 9 จะได้ รอยเดินปิดหรือ วงออยเลอร์ ที่มีลำดับคือ A, e_1, B, e_2, E, e_3, F, e_4, B, e_5, C, e_6, D, e_7, E, e_8, A เนื่องจากกราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียว ดังนั้นเราเขียนวงออยเลอร์ดังกล่าว ซึ่งมีลำดับคือ A, B, E, F, B, C, D, E, A ได้อย่างไรก็ตาม วงออยเลอร์ อาจมีแบบอื่นได้ ดังลำดับต่อไปนี้ B, e_2, E, e_7, D, e_6, C, e_5, B, e_4, F, e_3, E, e_8, A, e_1, B หรือ C, e_6, D, e_7, E, e_8, A, e_1, B, e_2, E, e_3, F, e_4, B, e_5, C เป็นต้น * □

การหาวงออยเลอร์ มีปัญหาอยู่ที่ว่าเมื่อเริ่มต้นที่จุดใดจุดหนึ่งในกราฟแล้วจะเลือกเส้นใดต่อไป ซึ่งปัญหานี้สามารถแก้ได้ จากขั้นตอนวิธีในการหาวงออยเลอร์ดังที่ได้กล่าวในตัวอย่างที่ 5 คือ ***ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์*** (Fleury ' Algorithm) ดังนี้

ให้ G เป็นกราฟออยเลอร์

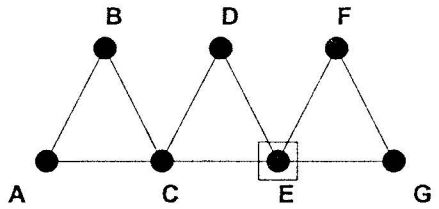
1. เริ่มที่จุดใด ๆ ในกราฟ จากนั้นเดินตามเส้นใน G ไปเรื่อย ๆ เมื่อเดินผ่านเส้นใดก็ให้กำจัดเส้นนั้นออกจากกราฟ
2. ในการเลือกเส้นที่ผ่านนั้น มีเงื่อนไขดังนี้
   2.1 เลือกเส้นที่ตกกระทบกับจุดก่อนหน้า
   2.2 เลือกเส้นที่ไม่เป็นเส้นตัดของกราฟ G – F เมื่อ F เป็นเซตของเส้นที่ถูกเลือกแล้ว นอกเสียจากไม่มีเส้นอื่น ๆ ให้เลือกอีกแล้ว **

* ครูให้นักเรียนสังเกตเส้นในลำดับไม่ซ้ำกัน **ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์โดยใช้ตัวอย่างที่ 5

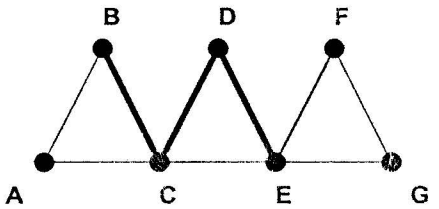
73

ให้นักเรียนหาวงออยเลอร์ของกราฟโดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ ซึ่งขั้นตอนที่ดำเนินต่อไปนี้ยังไม่สมบูรณ์ ให้นักเรียนดำเนินการตามขั้นตอนของฟลูรีย์ในการหาวงออยเลอร์ของกราฟต่อไปนี้ ให้สมบูรณ์ดังนี้

เส้นทึบแสดงเส้นทางที่เลือก



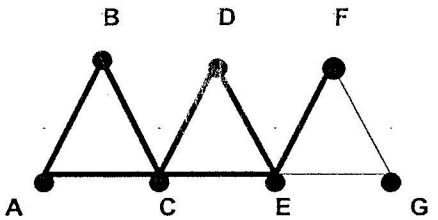
ขั้นที่ 1 เลือกจุดใดก็ได้ในกราฟ สมมติเลือกจุด E



ขั้นที่ 2 พิจารณาเส้น ..... เลือกเส้นใดก็ได้ เหตุผล.....สมมติเลือกเส้น.....

ขั้นที่ 3 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก .... เลือกเส้นใดก็ได้เหตุผล.....

ขั้นที่ 4 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก .... เลือกเส้นใดก็ได้ยกเว้นเส้น.....เหตุผล..... สมมติเลือกเส้น.....



ขั้นที่ 5 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก ....

ขั้นที่ 6 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก ....

ขั้นที่ 7 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก ....

ขั้นที่ 8 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก .... เลือกเส้นใดก็ได้เหตุผล.....สมมติเลือกเส้น...

ขั้นที่ 9 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก ....

ขั้นที่10 พิจารณาเส้นที่ยังไม่ถูกเลือก .....

ดังนั้น จะได้วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ .....

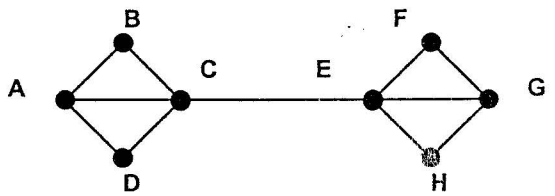
* วงออยเลอร์ของกราฟ มีลำดับคือ E, D, C, B, A, C, E, F, G, E และครูให้นักเรียนหาวงออยเลอร์แบบอื่น ๆ

74

ในบางสถานการณ์ กราฟที่กำหนดให้ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ แต่สามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ ให้นักเรียนพิจารณาว่าจะมีวิธีการใดในการหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ *

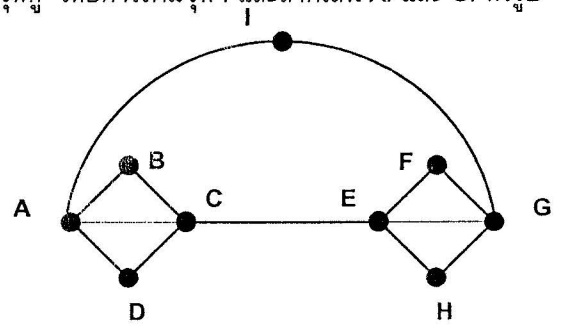
จากคำถามดังกล่าวข้างต้น นักเรียนสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ จากการหาวงออยเลอร์ ซึ่งต้องสร้างกราฟใหม่จากกราฟเดิมที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยการเพิ่มจุด 1 จุดในกราฟ แล้วเชื่อมจุดคี่กับจุดที่เพิ่มเข้า ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 สมมติตำรวจทางหลวงคนหนึ่งมีงานที่ต้องรับผิดชอบ คือ ขับรถตรวจดูความเรียบร้อยบนถนนทุกสายแสดงดังรูป ถ้าตำรวจคนนี้อยู่ที่จุด A เขาจะหาเส้นทางที่ขับรถจากจุด A และไปสิ้นสุดที่จุด G ได้หรือไม่ โดยที่เขาต้องการขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว ถ้าเป็นไปได้ตำรวจคนนี้จะใช้เส้นทางใด



แนวคิด จากรูปกราฟไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เนื่องจากมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด A และ จุด G ซึ่งจากโจทย์กำหนดให้ จุด A เป็นจุดเริ่มต้นและจุด G เป็นจุดสิ้นสุด ดังนั้นสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้

การหารอยเดินเปิดออยเลอร์หาได้จากขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ ซึ่งจุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่ โดยการเพิ่มจุด I และลากเส้น AI และ GI ดังรูป



ดังนั้น กราฟใหม่ที่ได้จะเป็นกราฟออยเลอร์ และหาวงออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ โดยให้เริ่มต้นที่จุด I จะได้ วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ I, A, B, C, A, D, C, E, G, F, E, H, G, I

แล้วกำจัดจุด I ออกไป เส้น AI และ GI จะถูกลบออกด้วย

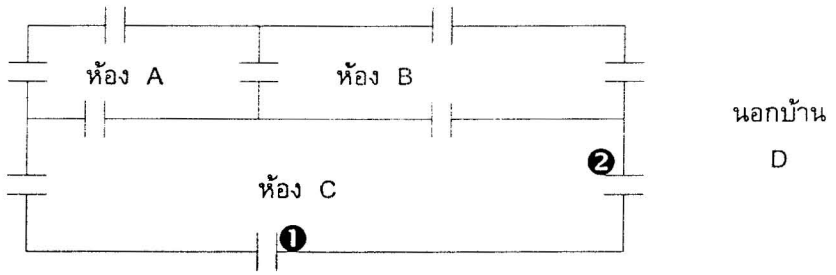
จะได้ รอยเดินเปิดออยเลอร์จาก A ไป G มีลำดับคือ A, B, C, A, D, C, E, G, F, E, H, G

จากโจทย์จะได้ว่า ตำรวจขับรถตรวจถนนทุกสายตามเงื่อนไขที่เขาต้องการได้และได้เส้นทางจาก A ไป G มีลำดับ คือ A, B, C, A, D, C, E, G, F, E, H, G □

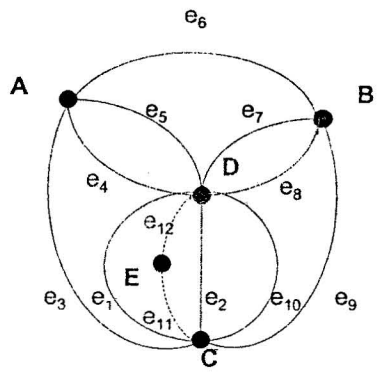
* ครูให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์หาคำตอบ

75

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดแปลนบ้านหลังหนึ่งดังรูป ให้นักเรียนพิจารณาว่าเราสามารถเดินผ่านเข้าหรือออกจากประตูทุกประตูของบ้านเพียงครั้งเดียวได้หรือไม่ โดยให้เริ่มต้นที่ ประตู (1) และสิ้นสุดที่ประตู (2)



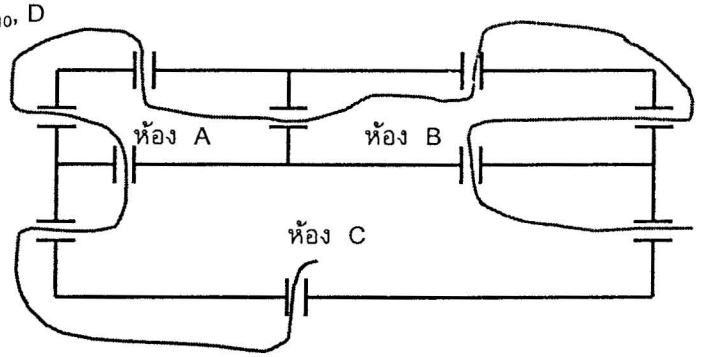
แนวคิด กำหนดให้ จุด แทน ห้อง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ประตูเชื่อมระหว่างสองห้อง จะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้



จากรูปกราฟไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เนื่องจากมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด C และ จุด D แต่เราสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ การหารอยเดินเปิดออยเลอร์หาได้จากขั้นตอนของฟลูรีย์ คือต้องสร้างกราฟใหม่ โดยการเพิ่มจุด E และลากเส้น CE (e_{11})และ DE (e_{12}) ดังเส้นประ

ดังนั้นกราฟใหม่ที่ได้จะเป็นกราฟออยเลอร์ และหาวงออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ โดยให้เริ่มต้นที่จุด E จะได้วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ E, e_{11}, C, e_1, D, e_2, C, e_3, A, e_4, D, e_5, A, e_6, B, e_7, D, e_8, B, e_9, C, e_{10}, D, e_{12}, E แล้วกำจัดจุด E ออกไป เส้น e_{11} และ e_{12} จะถูกลบออกด้วย

จะได้รอยเดินเปิดออยเลอร์ จาก C ไป D มีลำดับ คือ C, e_1 , D, e_2, C, e_3, A, e_4, D, e_5, A, e_6, B, e_7, D, e_8, B, e_9, C, e_{10}, D

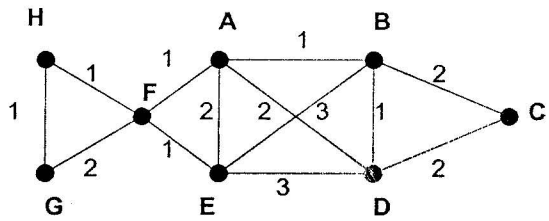


□

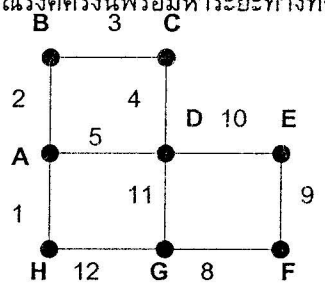
76

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

1. กำหนดแผนที่ถนนของสวนสาธารณแห่งหนึ่งให้ จุดแทน แยกของถนน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดแทนถนนเชื่อมระหว่างสองแยก น้ำหนักของเส้นแทนความยาวของถนน (กิโลเมตร) ดังรูป ถ้านักเรียนต้องการวิ่งออกกำลังกาย 1 รอบโดยผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว ซึ่งเริ่มต้นที่จุด A แล้ววิ่งกลับมาที่เดิม นักเรียนจะวางแผนการวิ่งอย่างไรและนักเรียนต้องวิ่งเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

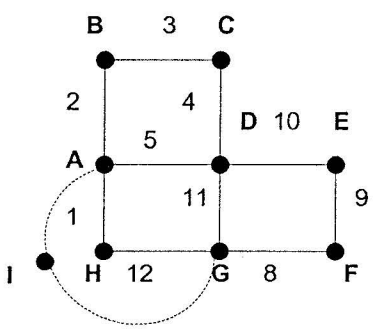


2. กำหนดแผนที่ การเดินรณรงค์ต่อต้านยาเสพติดของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งต้องเดินผ่านถนนทุกสายในแผนที่ โดยจุด แทนแยกของถนน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทนถนนเชื่อมระหว่างสองแยก และน้ำหนักของเส้นแทนความยาวของถนน (กิโลเมตร) ดังรูป ถ้าการเดินรณรงค์ครั้งนี้เริ่มต้นที่จุด A แล้วสิ้นสุดที่จุด G ให้นักเรียนหาเส้นทางการเดินรณรงค์ครั้งนี้พร้อมหาระยะทางที่ต้องเดินรณรงค์



* 1. ควรวิ่งรอบสวนสาธารณมีเส้นทางลำดับ คือ A, B, C, D, E, F, G, H, F, A, D, B, E, A
ซึ่งต้องวิ่งเป็นระยะทาง 22 กิโลเมตร

2.

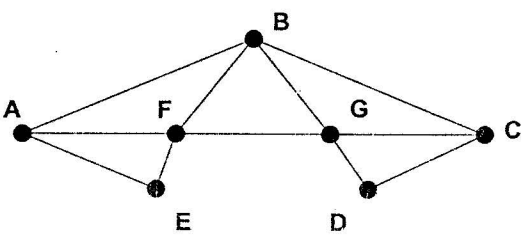


เส้นทางในการเดินรณรงค์มีลำดับ คือ
A, B, C, D, E, F, G, D, A, H, G
ซึ่งมีระยะทางในการเดินรณรงค์ 65 กิโลเมตร

สถานการณ์จริงบางสถานการณ์สามารถแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เรื่องกราฟออยเลอร์ในการหาวงออยเลอร์ ต้องสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนปัญหานั้น ๆ ซึ่งการสร้างแบบจำลองด้วยกราฟจากสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงบางครั้งกราฟที่สร้างขึ้นไม่ใช่กราฟออยเลอร์ ดังนั้นเราจะมีวิธีการใดในการหาวงออยเลอร์จากกราฟดังกล่าว ซึ่งการหาวงออยเลอร์ของกราฟที่หาได้นั้นจะต้องมีการเดินซ้ำเส้นทางเดิม ดังนั้นจึงเกิดปัญหาตามมาว่าจะหาวงออยเลอร์แบบใดที่ทำให้ได้ระยะทางที่สั้นที่สุด

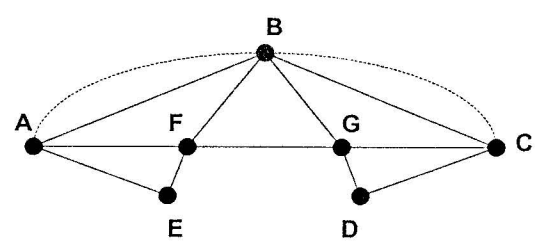
ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้เพื่อนำสู่การศึกษาหัวข้อต่อไป

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดกราฟ G ให้นักเรียนหาเส้นทางที่สามารถผ่านเส้นทุกเส้น เส้นละ 1 ครั้ง โดยให้เริ่มต้นที่จุด A และกลับมาที่จุด A ตามเดิม แต่ถ้าไม่สามารถหาได้ ให้หาเส้นทางที่ผ่านเส้นซ้ำกันได้ โดยใช้ระยะทางน้อยที่สุด



แนวคิด จากกราฟดังรูปไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด A และ จุด C
จะต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยการเชื่อมเส้นระหว่างจุด A และ จุด C
ซึ่งจากโจทย์ ต้องการหาวงออยเลอร์ที่มีระยะทางสั้นที่สุด แสดงว่าต้องมีการเดินซ้ำเส้นทางเดิมและเส้นทางที่เดินซ้ำต้องมีระยะทางสั้นที่สุด ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป C

ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป C
จะได้ว่า d (A , C) = 1 + 1 = 2 หน่วย วิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป C มีลำดับ คือ A, B, C
ดังนั้น เส้นที่เพิ่มเข้าคือ เส้น AB และ เส้น BC
สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ซึ่งจะได้กราฟดังรูป

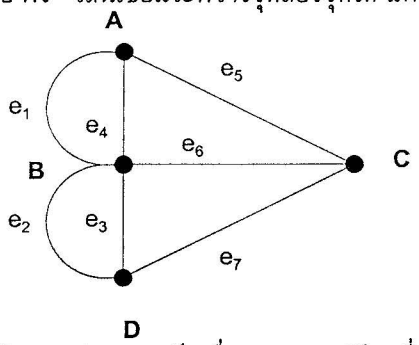


หาวงออยเลอร์จากกราฟออยเลอร์ที่สร้างใหม่
จะได้ วงออยเลอร์ คือ A, B, C, D, G, B, F, E, A, F, G, C, B, A
เส้นทางที่ได้มีระยะทาง คือ จำนวนเส้นเดิม + จำนวนเส้นใหม่ที่เพิ่มเข้า = 11 + 2 = 13 หน่วย □

78

ตัวอย่างที่ 9 จากปัญหา "สะพานเคอนิกเบิร์ก" สร้างแบบจำลองด้วยกราฟดังรูป ให้นักเรียนหาเส้นทางเดินดังกล่าว โดยที่เดินซ้ำสะพานน้อยที่สุด โดยให้เริ่มต้นที่ฝั่ง A

โดยให้ จุด แทน เกาะ หรือ ฝั่ง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน สะพานเชื่อมระหว่างสองเกาะ หรือสองฝั่ง



แนวคิด กราฟดังรูปไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 4 จุด คือ จุด A , B, C, D

ดังนั้น ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยการเชื่อมเส้นระหว่างจุดคี่ 2 จุด แต่กราฟมีจุดคี่ 4 จุด **ซึ่ง เราต้องจับคู่ของจุดคี่ทั้ง 4 จุด ก่อน แล้วหาวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมคู่ของจุดคี่ทั้งหมด**

เราสามารถจับคู่จุดคี่ ทั้ง 4 จุด ได้ 3 แบบ พร้อมวิถีที่เชื่อมคู่ของจุดคี่ ดังนี้

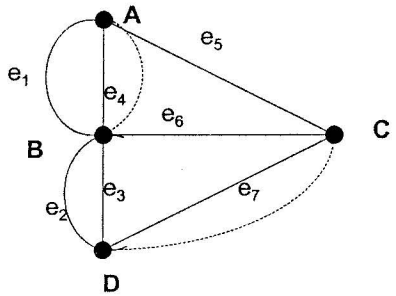
แบบที่ 1 d (A, B) + d (C, D) = 1 + 1 = 2

แบบที่ 2 d (A, C) + d (B, D) = 1 + 1 = 2

แบบที่ 3 d (A, D) + d (B, C) = 2 + 1 = 3

จะได้ การจับคู่ที่มีวิถีที่สั้นที่สุดคือ แบบที่ 1 และ แบบที่ 2 สมมติเลือก แบบที่ 1

วิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป B มีลำดับ คือ A, e_4, B หรือ A, e_1, B สมมติเลือก A, e_4, B และวิถีที่สั้นที่สุดจาก C ไป D มีลำดับ คือ C, e_7, D สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ซึ่งจะได้กราฟดังรูป



หาวงออยเลอร์จากกราฟออยเลอร์ที่สร้างใหม่

จะได้ วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ A, e_1, B, e_3, D, e_7, C, e_6, B, e_2, D, e_7, C, e_5, A, e_4, B, e_4, A

ดังนั้น เส้นทางเดินที่เดินซ้ำสะพานน้อยที่สุด มีลำดับ คือ A, e_1, B, e_3, D, e_7, C, e_6, B, e_2, D, e_7, C, e_5, A, e_4, B, e_4, A เส้นทางที่ได้มีระยะทาง คือ จำนวนเส้นเดิม + จำนวนเส้นใหม่ที่เพิ่มเข้า = 7 + 2 = 9 หน่วย □

** ครูให้นักเรียนหาเส้นทางอื่นโดยใช้การจับคู่ของจุดคี่แบบ 2

ปัญหาบุรุษไปรษณีย์จีน (The Chinese Postman Problem)

ปัญหานี้ตั้งโดย นักคณิตศาสตร์ชาวจีน ชื่อ ไม-โค ควาน (Mei-ko Kwan) ซึ่งปัญหานี้กล่าวว่า บุรุษไปรษณีย์จะนำไปรษณีย์ภัณฑ์ทั้งหมดไปจ่ายได้อย่างไร จึงจะทำให้เส้นทางนำจ่ายนั้นมีระยะทางน้อยที่สุด และหลังจากที่จ่ายแล้วต้องกลับมายังที่เดิม

จากปัญหา บุรุษไปรษณีย์จีน จะเห็นว่าบุรุษไปรษณีย์จะต้องพยายามหาเส้นทางที่ใช้ถนนแต่ละสายอย่างน้อย 1 ครั้ง ซึ่งปัญหานี้จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของกราฟมีน้ำหนักโดยให้ กราฟแทนแผนที่ถนน และน้ำหนักของแต่ละเส้นในกราฟ แทนความยาวของถนน ดังนั้นปัญหานี้สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ โดยการหาวงออยเลอร์ และผลบวกของน้ำหนักเส้นในวงออยเลอร์จะมีระยะทางที่น้อยที่สุด

สถานการณ์จากปัญหาบุรุษไปรษณีย์จีน มีลักษณะเดียวกับ สถานการณ์ของคนกวาดถนน คนเก็บขยะ พนักงานจดมิเตอร์น้ำประปาหรือไฟฟ้า ฯลฯ **ซึ่งสามารถนำความรู้เรื่องวงออยเลอร์มาใช้ในการแก้ปัญหาสำหรับการปฏิบัติหน้าที่ที่รับผิดชอบให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น**

หลักการพิจารณาปัญหาโดยใช้กราฟออยเลอร์ในการหาวงออยเลอร์ ดังนี้

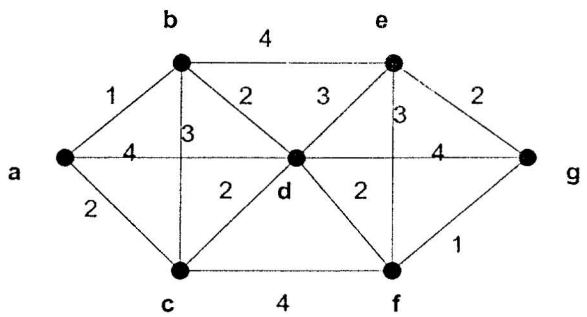
กรณีที่ 1 กราฟของปัญหาเป็นกราฟออยเลอร์ เราสามารถหาวงออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ได้

กรณีที่ 2 กราฟของปัญหาไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เราต้องสร้างกราฟใหม่จากกราฟเดิมให้เป็นกราฟออยเลอร์

2.1 ถ้ากราฟมีจุดคี่ เพียง 2 จุด กราฟออยเลอร์สร้างได้จากการเชื่อมคู่ของจุดคี่ด้วยวิถีที่สั้นที่สุด ซึ่งจะมีได้แบบเดียวเท่านั้น

2.2 ถ้ากราฟมีจุดคี่มากกว่า 2 จุด ซึ่งอาจจะเป็น 4, 6, 8, ... (จากทฤษฎีบท จุดคี่มีเป็นจำนวนคู่) กราฟออยเลอร์สร้างได้จากการนำจุดคี่ทุกจุดในกราฟมาจับคู่ และหาวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดคี่แต่ละคู่ที่จับคู่กัน ซึ่งการจับคู่นั้นมีได้มากกว่า 1 แบบ ดังนั้นเราต้องเลือกการจับคู่ที่มีผลรวมของวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดคี่แต่ละคู่ ที่มีค่าน้อยที่สุด

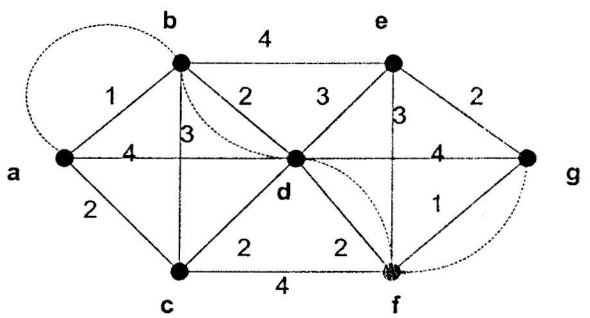
ตัวอย่างที่ 10 ให้ a เป็นที่ทำการไปรษณีย์โทรเลขแห่งหนึ่ง ให้จุดแทนตำแหน่งทางแยกของถนนที่จะนำไปรษณีย์ภัณฑ์ไปจ่ายให้กับแต่ละบ้านตามเส้นทางต่าง ๆ แสดงดังรูปด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก โดยที่น้ำหนักของเส้นแต่ละเส้นในกราฟแทนความยาวของถนน(หน่วยเป็นกิโลเมตร) ให้นักเรียนหาเส้นทางนำจ่ายที่มีระยะทางน้อยที่สุดซึ่งเมื่อจ่ายได้ครบทุกเส้นทางแล้ว บุรุษไปรษณีย์จะต้องกลับไปอยู่ที่ทำการไปรษณีย์โทรเลขตามเดิม



80

แนวคิด

ขั้นที่ 1 กราฟดังรูปไม่เป็นกราฟอออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด a และ จุด g
ดังนั้น ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟอออยเลอร์ โดยหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป g
จะได้ว่า d (a , g) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 * วิถีที่สั้นที่สุดจาก a ไป g มีเส้นทาง คือ a, b, d, f, g
ขั้นที่ 2 สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟอออยเลอร์ซึ่งจะได้กราฟดังรูป



ขั้นที่ 3 หาวงออยเลอร์จากกราฟในขั้นตอนที่ 2
จะได้ วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ a, b, c, d, e, b, d, f, e, g, f, g, d, a, b, d, f, c, a

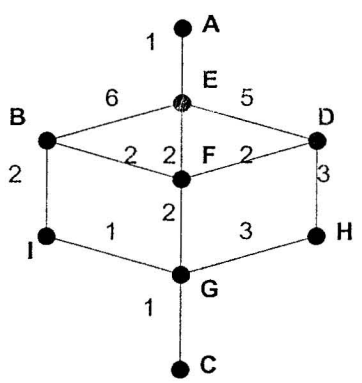
จากขั้นที่1 ถึง ขั้นที่3 จะได้ว่า เส้นทางที่บุรุษไปรษณีย์นำจ่ายไปรษณีย์ภัณฑ์ครบทุกเส้นทางและมีระยะทางน้อยที่สุดแล้วกลับมาที่ทำการไปรษณีย์ มีลำดับ คือ

a, b, c, d, e, b, d, f, e, g, f, g, d, a, b, d, f, c, a

และระยะทางทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทาง คือ ผลรวมของน้ำหนักในกราฟเดิม + น้ำหนักของเส้นที่เพิ่มเข้า

= [1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+4+4+4+4] + [1+2+2+1] = 43 กิโลเมตร □

ตัวอย่างที่ 11 นักศึกษาวิชาทหารได้รับคำสั่งจากครูฝึก ให้เดินทางไกลจากศูนย์ฝึก(จุด A) ตามเส้นทางแสดงดังรูป โดยมีเงื่อนไขว่าต้องผ่านทุกเส้นและกลับมาศูนย์ฝึก(จุด A) ให้ทันตามเวลาที่กำหนดให้ ถ้ากลับมาไม่ทันตามเวลาที่กำหนดให้จะถูกลงโทษ นักศึกษาวิชาทหารจะเลือกใช้เส้นทางใดจากเส้นทางที่กำหนดให้ (ระยะทางหน่วยเป็นกิโลเมตร)



* ใช้ขั้นตอนของไดค์สตรา

81

แนวคิด นักเรียนวิชาทหารต้องวางแผนการเดินทางไกล ดังนี้

ขั้นที่ 1 กราฟดังรูปไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 4 จุด คือ จุด A , B , C และ จุด D ดังนั้น ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์โดยหาวิถีที่สั้นที่สุดของการจับคู่แต่ละคู่ ดังนี้

แบบที่ 1 d (A, B) + d (C, D) = 5+5 = 10

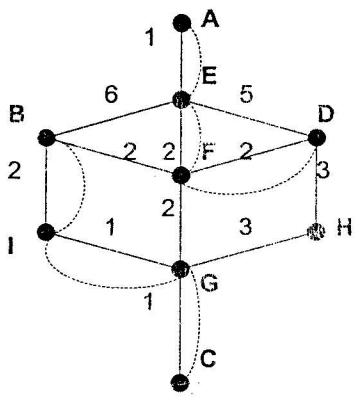
แบบที่ 2 d (A, C) + d (B, D) = 6+4 = 10

แบบที่ 3 d (A, D) + d (B, C) = 5+4 = 9

จะได้ การจับคู่ที่มีวิถีที่สั้นที่สุดคือ แบบที่ 3

วิถีที่สั้นที่สุดจาก A ไป D มีลำดับ คือ A, E, F, D และวิถีที่สั้นที่สุดจาก B ไป C มีลำดับ คือ B, I, G, C

ขั้นที่ 2 สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ ซึ่งจะได้กราฟดังรูป



ขั้นที่ 3 หาวงออยเลอร์จากกราฟในขั้นที่ 2

จะได้ วงออยเลอร์ มีลำดับ คือ A, E, B, I, G, C, G, H, D, E, F, D, F, B, I, G, F, E, A

จากขั้นที่1 ถึง ขั้นที่3 จะได้ว่า เส้นทางที่นักศึกษาวิชาทหารใช้เดินทางไกลเพื่อให้ได้ระยะทางสั้นที่สุด และประหยัดเวลาที่สุด มีลำดับ คือ

A, E, B, I, G, C, G, H, D, E, F, D, F, B, I, G, F, E, A

และระยะทางทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทาง คือ ผลรวมของน้ำหนักในกราฟเดิม + น้ำหนักของเส้นที่เพิ่มเข้า

= [1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+5+6] + [1+1+1+2+2+2] = 39 กิโลเมตร □

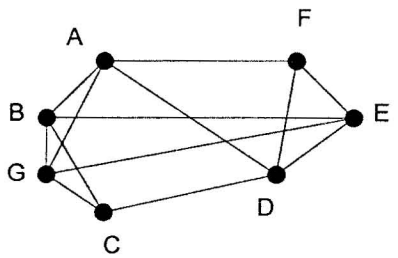
* ครูให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาพร้อมทั้งหาคำตอบของปัญหาขึ้นเอง จากประสบการณ์ของนักเรียน แล้วสุ่มนักเรียนมานำเสนอ

82

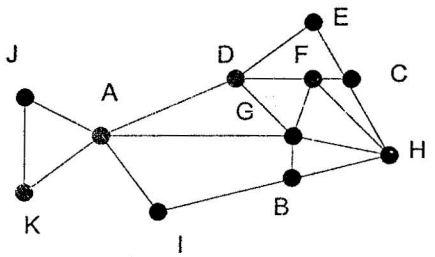
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2

1. จงหาวงออยเลอร์หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ จากกราฟในแบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.1 ข้อ 2 โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์

2. จงหาวงออยเลอร์หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ จากกราฟที่กำหนดให้ ถ้าหาไม่ได้ให้อธิบายเหตุผล

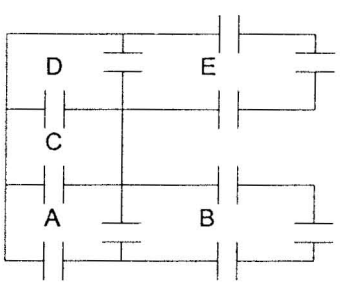


3. จงหารอยเดินเปิดออยเลอร์ จากจุด A ไป จุด B และ จากจุด A ไป จุด C ถ้าหาไม่ได้ให้อธิบายเหตุผล

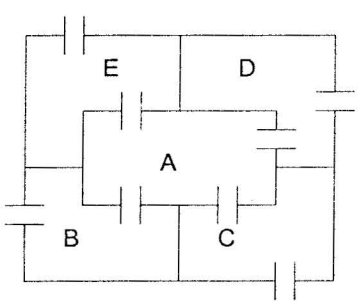


4. นายสะอาดต้องการสร้างสถานที่แสดงงานศิลปะ โดยมีเงื่อนไขว่าสถานที่ของงานแสดงศิลปะประกอบด้วยห้อง 5 ห้อง และเมื่อนายสะอาดพาแขกชมงามศิลปะ โดยผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียว แล้วกลับมาที่ห้องเดิม นายสะอาดจะเลือกแปลนของสถานที่แบบไหนในงานแสดงศิลปะครั้งนี้ และเมื่อนายสะอาดเลือกแล้วนายสะอาดวางแผนเส้นทางพาแขกชมงานเส้นทางใด

แปลนที่ 1

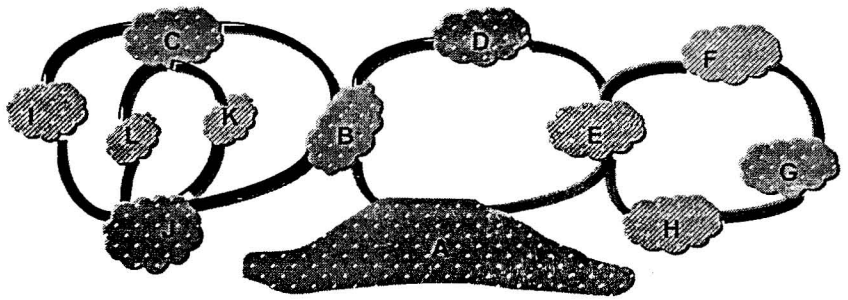


แปลนที่ 2

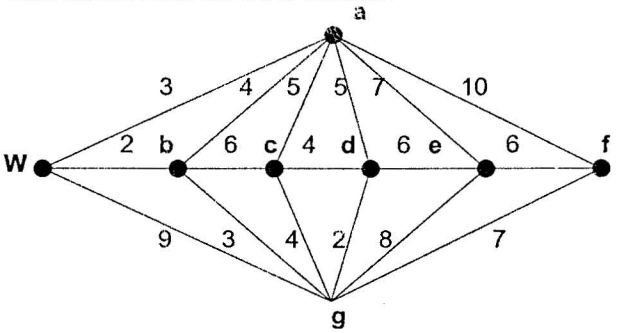


83

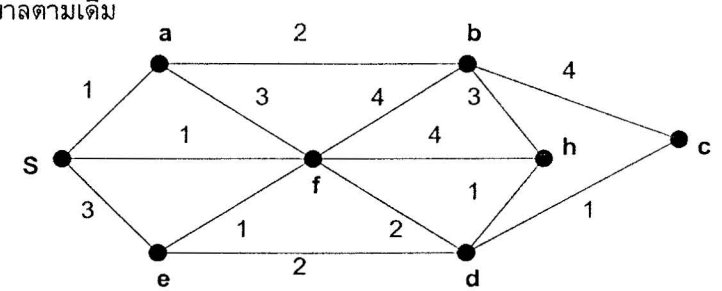
5. แผนผังของเมื่องหนึ่ง ซึ่งมีเกาะต่าง ๆ ดังรูป นักท่องเที่ยวต้องการนั่งเรือชมเกาะทุกเกาะโดยลงเรือจากฝั่ง A และกลับมาที่ฝั่ง A ตามเดิม จงหาเส้นทางการเดินเรือจากฝั่ง A ไปยังเกาะทุกเกาะโดยใช้เส้นทางการเดินเรือเพียงเส้นทางเดียว



6. ให้ W แทนสำนักงานประปา ให้จุด แทน ตำแหน่งทางแยกของถนนที่พนักงงานประปาต้องไปเก็บค่าน้ำแต่ละบ้าน ตามเส้นทางดังกล่าว ดังแสดงด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก ดังรูป โดยที่ น้ำหนักแทนความยาวของถนน (กิโลเมตร) จงหาเส้นทางที่พนักงานเก็บค่าน้ำไปเก็บค่าน้ำตามบ้านที่มีระยะทางน้อยที่สุดซึ่งเมื่อเก็บค่าน้ำครบทุกเส้นทางแล้ว พนักงานต้องกลับมาที่สำนักงานประปา



7. ให้ S เป็นสำนักงานเทศบาล ให้จุดแทน ตำแหน่งทางแยกของถนนที่รถเก็บขยะต้องไปเก็บขยะ ตามเส้นทางดังกล่าว ดังแสดงด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก ดังรูป โดยที่ น้ำหนักแทนความยาวของถนน(กิโลเมตร) จงหาเส้นทางที่รถเก็บขยะไปเก็บขยะตามจุดที่มีระยะทางน้อยที่สุดเมื่อเก็บขยะครบทุกจุดแล้ว ต้องนำรถเก็บขยะมาจอดไว้ที่สำนักงานเทศบาลตามเดิม



หัวข้อที่ 4
การให้สีกราฟ
(3 คาบ)

หัวข้อนี้มีหัวข้อย่อย 2 หัวข้อย่อย ดังนี้

4.1 บทนิยามการให้สีกราฟ (1 คาบ)

4.2 การประยุกต์การให้สีกราฟ (2 คาบ)

จุดประสงค์การเรียนรู้ปลายทาง ของหัวข้อนี้

6. บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
7. นำความรู้เกี่ยวกับการให้สีกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์การเรียนรู้นำทาง ของหัวข้อนี้

25. บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
26. นำความรู้เรื่องการหาจำนวนสีน้อยที่สุดของกราฟ ไปใช้แก้ปัญหาการระบายสีแผนที่ เมื่อกำหนดแผนที่ใด ๆ มาให้ได้
27. นำความรู้เรื่องการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟใด ๆ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

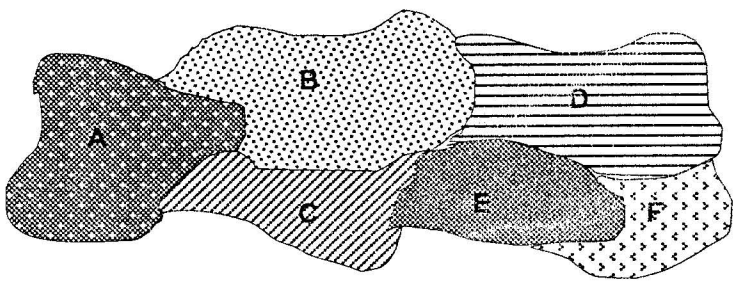
84

4. การให้สีกราฟ

สถานการณ์บางสถานการณ์เราสามารถสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนสถานการณ์นั้นและแก้ปัญหาสถานการณ์ด้วยการให้สีลงบนจุดในกราฟ

ให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถามต่อไปนี้ เมื่อกำหนดแผนที่ที่มีอาณาบริเวณแสดงดังรูป *

1. จงหาจำนวนสีที่จะต้องใช้ระบายอาณาบริเวณละ 1 สี โดยที่ 2 อาณาบริเวณที่มีพรมแดนติดกันต้องใช้สีต่างกัน
2. จงหาจำนวนสีที่ใช้น้อยที่สุดในการระบายสีแผนที่



จากรูปแผนที่ข้างต้น จะได้ว่า

1. เนื่องจาก แผนที่ข้างต้นแบ่งเป็น 6 อาณาบริเวณ นักเรียนสามารถตอบได้ว่าจำนวนสีที่ใช้เท่ากับ 6 สี เพราะสามารถระบายสีอาณาบริเวณละ 1 สี

2. เนื่องจาก การหาจำนวนสีที่จะใช้น้อยที่สุดในการระบายสีแผนที่ สามารถใช้วิธีทดลองกำหนดสีลงบนแต่ละอาณาบริเวณ

เช่น A ระบายสีแดง

B และ C มีอาณาบริเวณติดกับ A ระบายสีแดงไม่ได้ และ B และ C มีอาณาบริเวณติดกัน จะระบายสีเดียวกันไม่ได้ สมมติ B ระบายสีเขียว และ C ระบายสีฟ้า

E มีอาณาบริเวณติดกับ B และ C ดังนั้นระบายสีเขียวและฟ้าไม่ได้ เลือก E ระบายสีแดงได้

D มีอาณาบริเวณติดกับ B และ E ดังนั้นระบายสีเขียวและแดงไม่ได้ เลือก D ระบายสีฟ้าได้

F มีอาณาบริเวณติดกับ D และ E ดังนั้นระบายสีฟ้าและแดงไม่ได้ เลือก F ระบายสีเขียวได้

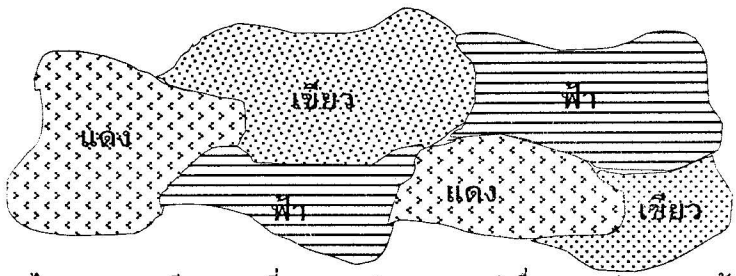
* ครูให้นักเรียนพิจารณาหาคำตอบซึ่งคำตอบของนักเรียนอาจเหมือนกันหรือต่างกันได้ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุป

ปัญหาชวนคิด 4 ให้นักเรียนระบายสีแผนที่จังหวัดที่มีรหัสโทรศัพท์ทางไกลที่ขึ้นต้นด้วย 045 โดยมีเงื่อนไขดังนี้ จังหวัดที่มีเขตแดนติดกันให้ใช้สีต่างกัน นักเรียนจะระบายสีแผนที่ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้โดยใช้สีน้อยที่สุดได้กี่สี (ดูจากสมุดโทรศัพท์)

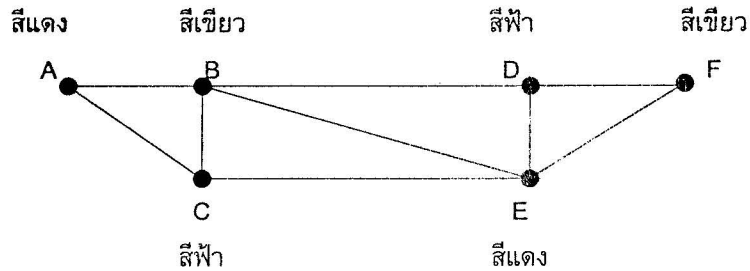
เฉลยปัญหาชวนคิด 4 นักเรียนจะใช้สีระบายแผนที่ได้น้อยที่สุด 3 สี

85

ดังนั้นนักเรียนจะพบว่าการใช้สีเพียง 3 สีเพียงพอสำหรับระบายสีลงบนแผนที่นี้ ดังรูปต่อไปนี้



จากเงื่อนไขการระบายสีบนแผนที่สามารถกำหนดกราฟเพื่อแทนรูปแบบของปัญหานี้ได้ โดยให้ **จุด แทน อาณาบริเวณ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน อาณาบริเวณสองอาณาบริเวณที่มีพรมแดนติดกัน** ดังนั้นแผนที่ที่กำหนดให้สามารถแทนด้วยกราฟดังรูปต่อไปนี้



จากรูปแบบของปัญหาดังกล่าวจะเห็นว่า กราฟเป็นแบบจำลองของปัญหาที่เหมาะสมและการแก้ปัญหาจากกราฟทำได้ไม่ยาก

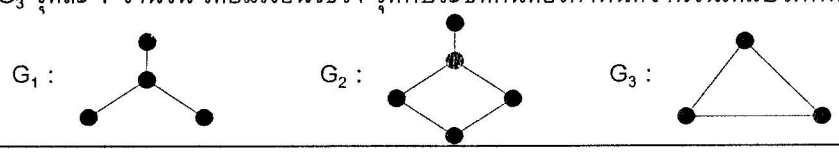
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ จากกราฟข้างต้น *

1. จุดในกราฟที่ประชิดกัน สีบนจุดดังกล่าวเป็นสีเดียวกันหรือต่างสีกัน
2. จุดในกราฟที่ไม่ประชิดกัน สีบนจุดดังกล่าวเป็นสีเดียวกันหรือต่างสีกัน

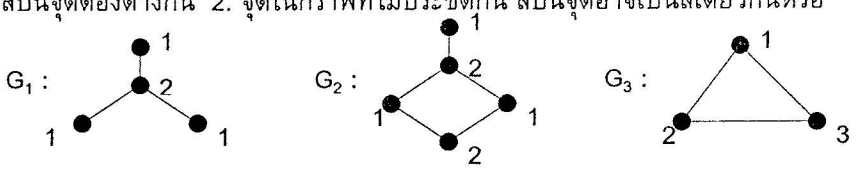
4.1 บทนิยามการให้สีกราฟ

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

กำหนดกราฟ G_1, G_2 และ G_3 ดังรูป จงหาว่าสามารถกำหนดจำนวนเต็มบวก 1 และ 2 ลงบนจุดในกราฟ G_1, G_2 และ G_3 จุดละ 1 จำนวน โดยมีเงื่อนไขว่า จุดที่ประชิดกันต้องกำหนดจำนวนเต็มบวกที่ต่างกัน ได้หรือไม่ **



* 1. จุดในกราฟที่ประชิดกัน สีบนจุดต้องต่างกัน 2. จุดในกราฟที่ไม่ประชิดกัน สีบนจุดอาจเป็นสีเดียวกันหรือต่างกันได้ ** G_1 และ G_2 ได้



การให้สีกราฟจะศึกษาเฉพาะ กราฟเชิงเดียว

บทนิยาม 1 ให้ G = (V(G), E(G)) และ k เป็นจำนวนเต็มบวก
เราเรียกกราฟ G ว่าเป็น***กราฟที่ให้สีบนจุด k สี*** ได้ (k-colorable) ก็ต่อเมื่อเราสามารถกำหนดจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ... , k ลงบนจุดในกราฟ G จุดละ 1 จำนวน และจุดสองจุดใดที่ประชิดกันจะต้องได้รับการกำหนดจำนวนดังกล่าวที่ต่างกัน

ข้อสังเกต จากนิยามข้างต้นนักเรียนจะพบว่า

1. ถ้า G มีจุด n จุดแล้ว G จะเป็นกราฟที่ให้สีบนจุด n สีได้
2. ถ้า G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุด 1 สีได้ แล้ว G จะเป็นกราฟว่าง

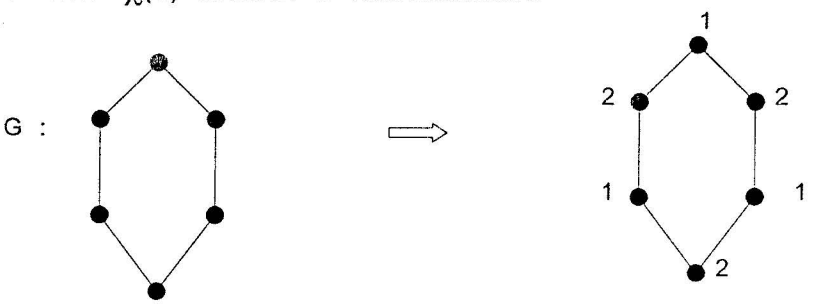
บทนิยาม 2 เรากล่าวว่า กราฟ G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุดน้อยที่สุด k สี ก็ต่อเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุด k สี
ถ้าให้ $\chi(G)$ คือ จำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ G เขียนแทนด้วย $k = \chi(G)$

จากนิยามข้างต้นให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

1. ถ้ากราฟ G มีจุด n จุด แล้ว ค่าที่เป็นไปได้ของ $\chi(G)$ เท่ากับจำนวนใด
2. ถ้ากราฟ G เป็นกราฟว่างที่มีจุด n จุด แล้ว $\chi(G)$ มีค่าเท่ากับจำนวนใด

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\chi(G)$ ของกราฟ G ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1

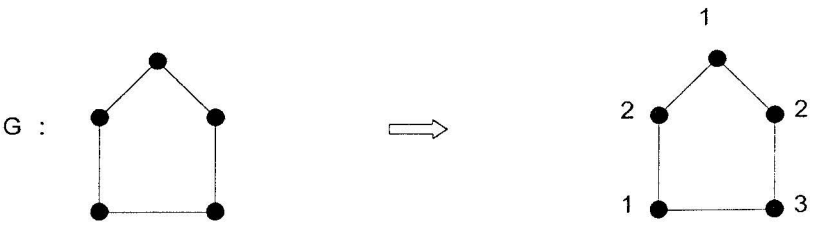


แนวคิด จากกราฟ G มีจุดในกราฟ 6 จุด ที่เป็นวัฏจักรที่มีความยาว 6
และ จากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ จะได้ว่า $\chi(G) = 2$

* 1. $\chi(G) \leq n$ 2. $\chi(G) = 1$

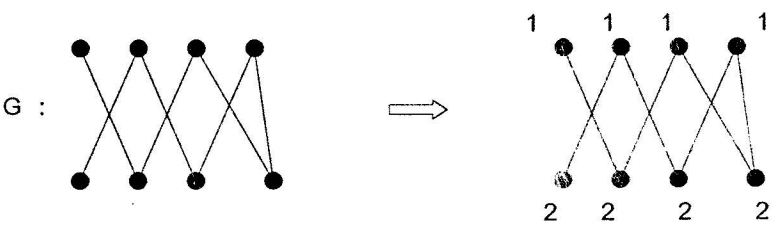
87

1.2



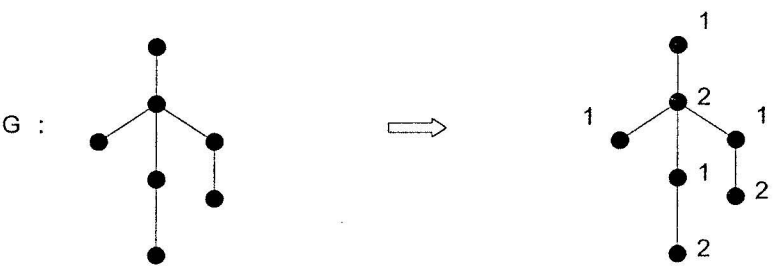
แนวคิด จากราฟ G มีจุดในกราฟ 5 จุด ที่เป็นวัฏจักรที่มีความยาว 5
และ จากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ จะได้ว่า $\chi(G) = 3$

1.3



แนวคิด ซึ่งจากราฟ G มีจุดในกราฟ 8 จุด ที่เป็นวิถีที่มีความยาว 7
และ การกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ จะได้ว่า $\chi(G) = 2$

1.4

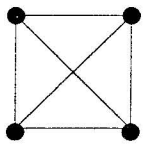


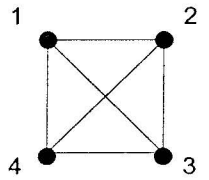
แนวคิด จากกราฟ G เป็นต้นไม้ ซึ่งมีจำนวนจุด 7 จุด
และ จากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ จะได้ว่า $\chi(G) = 2$

88

1.5

G :





แนวคิด จากกราฟ G เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ ซึ่งมีจำนวนจุด 4 จุด
และ จากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ จะได้ว่า $\chi(G) = 4$ □

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นจะได้ข้อสังเกตดังนี้
กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. ให้ C_n แทนวัฏจักรที่มีความยาว n จะได้ว่า

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 3 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$$

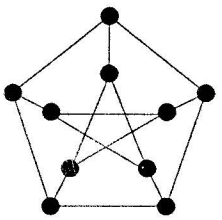
2. ให้ P_n แทนวิถี ที่มีความยาว n จะได้ว่า $\chi(P_n) = 2$

3 ให้ T_n แทนต้นไม้ ที่มีจุด n จุดจะได้ว่า $\chi(T_n) = 2$

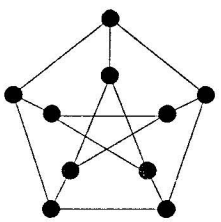
4. ให้ K_n แทนกราฟแบบบริบูรณ์ ที่มีจุด n จุดจะได้ว่า $\chi(K_n) = n$

จงหา $\chi(G)$ ของกราฟ G เมื่อกำหนดกราฟ G ดังรูปต่อไปนี้ *

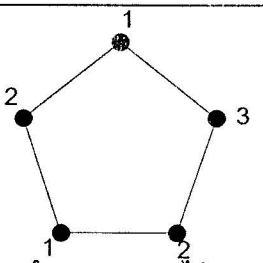
G :

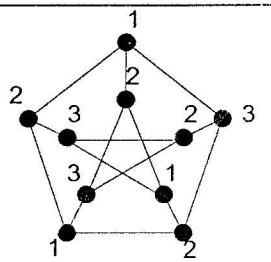


G :



H :



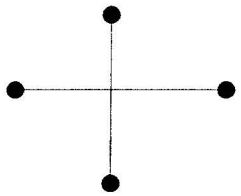


จากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟ H จะได้ว่า $\chi(H) = 3$ และจากการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงจุดในกราฟ G จะได้ว่า $\chi(G) = 3$

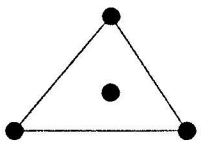
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 4.1

1. จงหา $\chi(G)$ ของกราฟต่อไปนี้

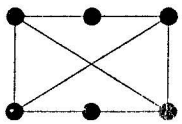
1.1



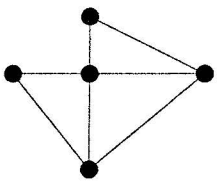
1.2



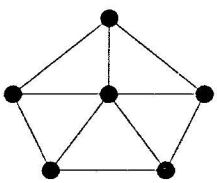
1.3



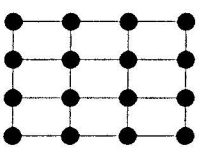
1.4



1.5

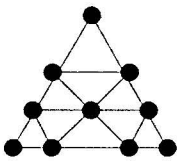


1.6

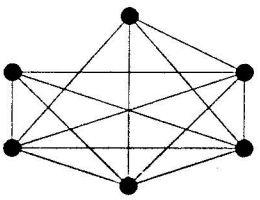


90

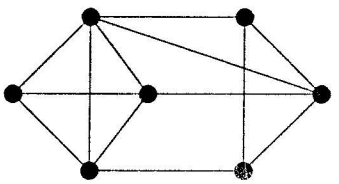
1.7



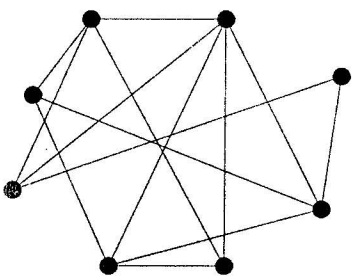
1.8



1.9

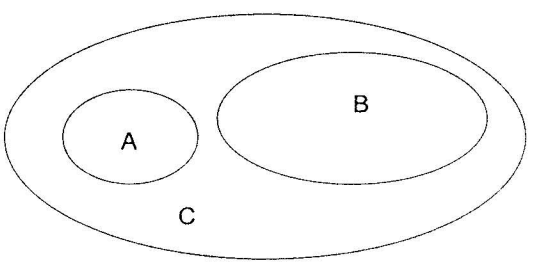


1.10



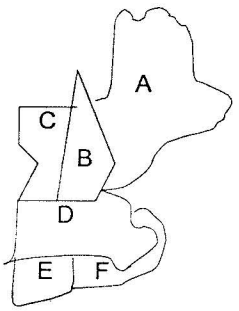
2. จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดในการระบายสีแผนที่ต่อไปนี้

2.1

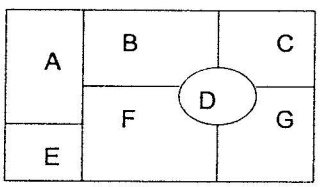


91

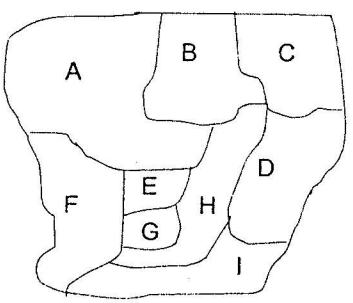
2.2



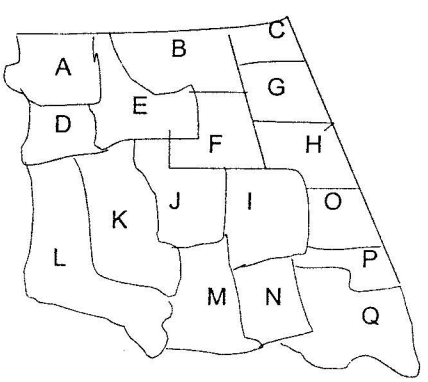
2.3



2.4



2.5



4.2 การประยุกต์การให้สีกราฟ

การให้สีกราฟสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้จริง ซึ่งเราสามารถนำการให้สีกราฟมาใช้แก้ปัญหาการจัดตารางสอน การจัดเวลาการประชุมได้ และในการสื่อสารต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 การจัดตารางสอนในภาควิชาคณิตศาสตร์ กำหนดวิชาที่ต้องสอนในช่วงเช้า มีจำนวน 5 วิชา และมีอาจารย์ผู้สอน ดังนี้

อาจารย์สมชัย สอนวิชา เวกเตอร์ในสามมิติ (V) สถิติ(S)

อาจารย์สมศักดิ์ สอนวิชา สถิติ(S) กราฟ(G)

อาจารย์สมศรี สอนวิชา เวกเตอร์ในสามมิติ(V) กราฟ(G)

อาจารย์สมสมร สอนวิชา สถิติ(S) กราฟ(G) ความน่าจะเป็น(P)

อาจารย์สมคิด สอนวิชา แคลคูลัส(C)

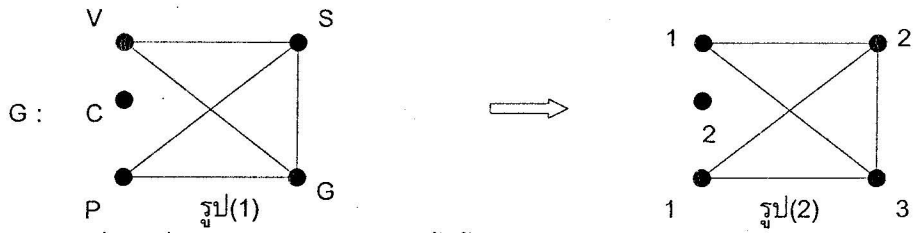
ซึ่งแต่ละวิชาใช้เวลาสอน 3 ชั่วโมง ตั้งแต่เวลา 9.00 – 12.00 น. จงหาจำนวนวันที่น้อยที่สุดในการจัดตารางสอนดังกล่าว พร้อมยกตัวอย่างตารางการจัดตารางสอน

แนวคิด วิชาที่มีอาจารย์ผู้สอนคนเดียวกัน วิชาดังกล่าวไม่สามารถจัดสอนในเวลาเดียวกันได้

ขั้นที่ 1 แทนสถานการณ์โดยสร้างรูปแบบจำลองด้วยกราฟ

กำหนดให้ จุด แทน ชื่อวิชา เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าวิชาสองวิชามีอาจารย์ผู้สอนคนเดียวกัน ดังรูป (1)

ขั้นที่ 2 หา $\chi(G)$ โดยการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟจะได้กราฟดังรูป(2)



ดังนั้นจำนวนวันที่น้อยที่สุดในการจัดตารางสอนครั้งนี้ จะใช้เวลา 3 วัน

ขั้นที่ 3 นำกราฟดังรูป(1), (2) ในขั้นตอนที่ 1 และ 2 มาจัดตารางสอน

พิจารณากราฟดังรูปในขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้สีที่ 1, 2, 3 แทน วันจันทร์ อังคาร พุธ

จะได้ตารางการจัดตารางสอนแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ ดังนี้

วัน	วิชา
จันทร์	เวกเตอร์ในสามมิติ ความน่าจะเป็น
อังคาร	สถิติ แคลคูลัส
พุธ	กราฟ

□

* ครูให้นักเรียนหาตารางการจัดตารางสอนแบบอื่น ๆ ที่เป็นไปได้

93

ตัวอย่างที่ 4 ในการจัดการประชุมคณะกรรมการของบริษัทแห่งหนึ่ง แบ่งเป็น 5 ฝ่าย คือ ฝ่ายบริหาร(A) ฝ่ายการเงิน(F) ฝ่ายเทคนิค(T) ฝ่ายบริการ(S) ฝ่ายประชาสัมพันธ์(P) โดยบริษัทกำหนดให้ทุกฝ่ายต้องมีการประชุมในช่วงเช้าทุกวันที่ 1 ของเดือน ตั้งแต่เวลา 8.00 – 12.00 น. โดยแต่ละฝ่ายใช้เวลาประชุม 1 ชั่วโมง ในการประชุมมีคณะกรรมการบางคนต้องเข้าร่วมประชุมฝ่ายมากกว่า 1 ฝ่าย ซึ่งมีรายชื่อคณะกรรมการที่ต้องเข้าประชุมแต่ละฝ่ายดังข้อมูลข้างล่างนี้ จงจัดตารางการประชุมตามเงื่อนไขที่กำหนด

ฝ่ายบริหาร(A) มีรายชื่อผู้เข้าร่วมประชุม คือ บรรทัด บรรจง บัณฑิต สมศรี

ฝ่ายการเงิน(F) มีรายชื่อผู้เข้าร่วมประชุม คือ บันเทิง บรรจง สมคิด

ฝ่ายเทคนิค(T) มีรายชื่อผู้เข้าร่วมประชุม คือ บัณฑิต บันลือ

ฝ่ายบริการ(S) มีรายชื่อผู้เข้าร่วมประชุม คือ บันเทิง สมคิด บรรจง

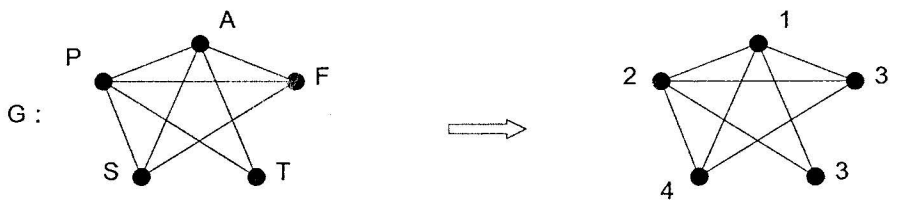
ฝ่ายประชาสัมพันธ์(P) มีรายชื่อผู้เข้าร่วมประชุม คือ สมศรี บันลือ สมคิด

แนวคิด คณะกรรมการบางคนต้องเข้าร่วมประชุมมากกว่า 1 ฝ่ายทำให้ฝ่ายดังกล่าวต้องประชุมในเวลาที่ไม่ตรงกัน

ขั้นที่ 1 แทนสถานการณ์โดยสร้างรูปแบบจำลองด้วยกราฟ

กำหนดให้ จุด แทน ฝ่าย เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสองฝ่ายมีคณะกรรมร่วมกัน ดังรูป (1)

ขั้นที่ 2 หา $\chi(G)$ โดยการกำหนดจำนวนเต็มบวกลงบนจุดในกราฟจะได้กราฟดังรูป(2)



รูป(1) รูป(2)

ดังนั้นสามารถจัดการประชุมฝ่ายทั้ง 5 ฝ่ายให้เสร็จในเวลา 8.00 – 12.00 น . ได้

ขั้นที่ 3 นำกราฟดังรูป(1), (2) ในขั้นตอนที่ 1 และ 2 มาจัดตารางการประชุม

พิจารณากราฟดังรูปในขั้นตอนที่ 2 แสดงว่าเวลาเริ่มประชุมมีทั้งหมด 4 ช่วง จากเวลา 8.00 – 12.00 น. ดังนั้น กำหนดให้ สีที่ 1, 2, 3, 4 แทนเวลาเริ่มประชุม 8.00 น., 9.00 น., 10.00 น., 11.00 น.

จะได้ตารางการจัดการประชุมแบบหนึ่งที่เป็นไปได้ ดังนี้

เวลาเริ่มประชุม	ฝ่าย
8.00 น.	ฝ่ายบริหาร
9.00 น.	ฝ่ายประชาสัมพันธ์
10.00 น.	ฝ่ายการเงิน ฝ่ายเทคนิค
11.00 น.	ฝ่ายบริการ

□

94

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ *

มีปลาสวยงามอยู่ 6 ชนิดซึ่งมีข้อมูลดังนี้

ปลาชนิด A จะต่อสู้กับปลาชนิด B, C, D, E

ปลาชนิด B จะต่อสู้กับปลาชนิด A, C, D, E, F

ปลาชนิด C จะต่อสู้กับปลาชนิด F

ปลาชนิด D จะต่อสู้กับปลาชนิด E, F

ปลาชนิด E จะต่อสู้กับปลาชนิด F

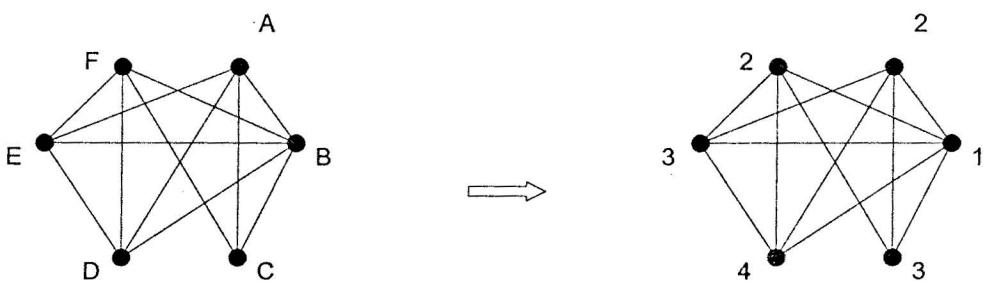
ปลาชนิด F จะต่อสู้กับปลาชนิด E

ถ้านักเรียนต้องการเลี้ยงปลาทั้ง 6 ชนิด นักเรียนต้องซื้อตู้ปลาจำนวนน้อยที่สุดกี่ตู้ พร้อมยกตัวอย่างการจัดปลาใส่ตู้มาหนึ่งแบบที่เป็นไปได้

* แนวคิด ปลาที่ต่อสู้กัน แสดงว่าปลาดังกล่าวไม่สามารถอยู่ร่วมกันได้

สร้างแบบจำลองด้วยกราฟ โดยให้

จุด แทน ชนิดของปลา เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่า ปลาสองชนิดต่อสู้กัน



ดังนั้นนักเรียนต้องซื้อตู้ปลาจำนวนน้อยที่สุด 4 ตู้ และสามารถจัดปลาใส่ตู้แบบหนึ่งที่เป็นไปได้ดังนี้

ตู้ปลา	ชนิดของปลา
1	B
2	A , F
3	C, E
4	D

95

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 4.2

1. กำหนดรายวิชาคณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 มีทั้งหมด 6 รายวิชา จงหาจำนวนคาบที่น้อยที่สุดในการจัดตารางสอบ มีเงื่อนไขดังนี้

1.1 มีนักเรียนลงทะเบียนเรียนคนละ 1 รายวิชาเท่านั้น

1.2 ทุก ๆ 2 รายวิชา มีนักเรียนลงทะเบียนเรียนร่วมกัน

2. ในการกำหนดคลื่นความถี่ของสถานีวิทยุ มีข้อกำหนดว่า สถานี 2 สถานีใดที่มีระยะห่างต่ำกว่า 200 กิโลเมตร จะเกิดคลื่นแทรก จึงจำเป็นต้องมีคลื่นความถี่ที่ต่างกัน จงหาว่าจะต้องใช้คลื่นความถี่จำนวนน้อยที่สุดกี่คลื่นเมื่อกำหนดข้อมูลของสถานีวิทยุดังนี้

สถานีวิทยุ	A	B	C	D	E
A	-	90	100	220	60
B	90	-	50	300	210
C	100	50	-	190	250
D	220	300	190	-	80
E	60	210	250	80	-

3. ในการจัดสัมมนากลุ่มย่อย ซึ่งมีกลุ่มย่อย 6 กลุ่ม กำหนดให้ทุกกลุ่มต้องมีการสัมมนากลุ่มในวันจันทร์ของทุกสัปดาห์ ใช้เวลากลุ่มละ 1 ชั่วโมง โดยใช้เวลาในช่วงเช้า ตั้งแต่ละเวลา 9.00 – 12.00 น. ซึ่งในการประชุมนี้มีสมาชิกบางคนต้องเข้าร่วมประชุมกลุ่มมากกว่า 1 กลุ่ม ซึ่งมีรายชื่อสมาชิกกลุ่มย่อยที่ต้องเข้าประชุมแต่ละกลุ่มย่อยดังนี้

กลุ่มที่ 1 a, b, c

กลุ่มที่ 2 d, e

กลุ่มที่ 3 b, e

กลุ่มที่ 4 a, b

กลุ่มที่ 5 c, e

กลุ่มที่ 6 c, d, e

ข้อมูลดังกล่าวสามารถจัดการประชุมกลุ่มย่อยครั้งนี้ได้หรือไม่ ถ้าจัดได้จงยกตัวอย่างตารางการประชุมมาหนึ่งแบบที่เป็นไปได้ และถ้าจัดไม่ได้ นักเรียนจะมีวิธีแก้ไขอย่างไรพร้อมยกตัวอย่างตารางการประชุมที่ปรับปรุงแล้วมาหนึ่งแบบที่เป็นไปได้เมื่อกำหนดให้ช่วงเวลา 9.00 – 12.00 น. สามารถขยายเวลาเป็น 8.00 – 12.00 น.

96

4. กำหนดวิชา A, B, C, D, E ต้องใช้ห้องปฏิบัติการดังนี้

ห้องปฏิบัติการที่ 1 ใช้สอนวิชา A, B, D

ห้องปฏิบัติการที่ 2 ใช้สอนวิชา B, E

ห้องปฏิบัติการที่ 3 ใช้สอนวิชา C, D

ห้องปฏิบัติการที่ 4 ใช้สอนวิชา A, C

ซึ่งแต่ละวิชาใช้เวลาสอน 3 ชั่วโมง ตั้งแต่เวลา 13.00 – 16.00 น. และกำหนดให้ทั้ง 5 วิชานี้ต้องเรียนในวันจันทร์ พุธ และศุกร์ เท่านั้น ข้อมูลดังกล่าวสามารถจัดตารางสอนตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้หรือไม่ ถ้าจัดได้จงยกตัวอย่างตารางสอนมาหนึ่งแบบที่เป็นไปได้ และถ้าจัดไม่ได้นักเรียนจะมีวิธีแก้ไขอย่างไรพร้อมยกตัวอย่างตารางสอนที่ปรับปรุงแล้วมาหนึ่งแบบที่เป็นไปได้เมื่อกำหนดให้เพิ่มวันอังคารได้อีกหนึ่งวัน

เฉลย

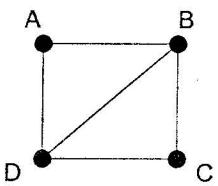
กิจกรรมที่ 1

รูป	จำนวนจุดคู่	จำนวนจุดคี่	สามารถผ่านได้ตลอด
A	3	0	✓
B	2	2	✓
C	1	4	✗
D	6	2	✓
E	0	8	✗
F	8	0	✓
G	10	0	✓

กิจกรรมที่ 2

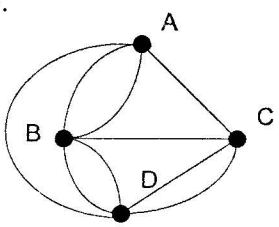
1. รูปที่มีจุดทั้งหมดเป็นจุดคู่ เป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอด
2. รูปที่มีจุดคี่สองจุดเป็นรูปที่สามารถผ่านได้ตลอด
3. รูปที่มีจุดคี่มากกว่าสองจุดไม่ใช่รูปที่สามารถผ่านได้ตลอด

กิจกรรมที่ 3



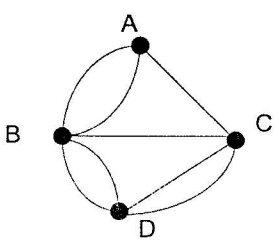
กิจกรรมที่ 4

1.



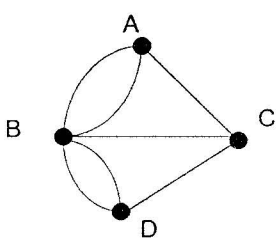
สามารถเดินเที่ยวชมเมืองตามเงื่อนไขดังกล่าวได้ เพราะจากรูปมีจุดคี่ 2 จุด โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่จุด B หรือ D

2.



สามารถเดินเที่ยวชมเมืองตามเงื่อนไขดังกล่าวได้ เพราะจากรูปมีจุดคี่ 2 จุด โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดที่จุด A หรือ B

3.

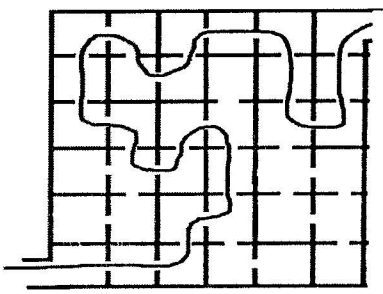


ไม่สามารถเดินเที่ยวชมเมืองตามเงื่อนไขดังกล่าวได้ เพราะจากรูปมีจุดคี่ 4 จุด

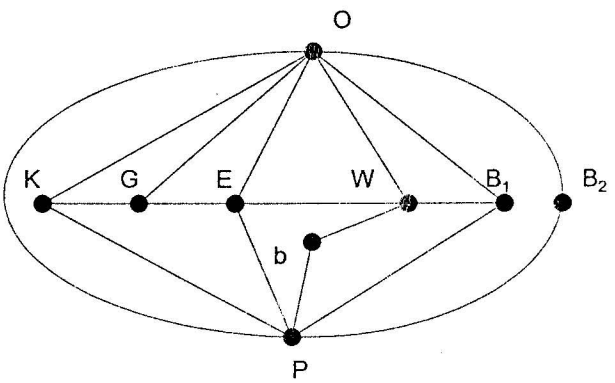
ปัญหาที่ 1 เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้
จุด แทน ห้อง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ทางเข้าออกระหว่างห้อง ซึ่งนักเรียนจะได้เส้นทางที่ถูกต้องของเกมดังนี้



ทางเข้า



ปัญหาที่ 2 เราสามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้
จุด แทน ห้องแต่ละห้องในบ้าน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ทางเชื่อมห้องแต่ละห้องภายในบ้านและทางเชื่อมห้องแต่ละห้องกับภายนอกบ้าน ดังนั้นได้ตัวอย่างรูปแบบจำลองดังรูป



ปัญหาที่ 3 รูป(1) สามารถวาดรูปได้โดยไม่ต้องยกดินสอ
รูป(2) ไม่สามารถวาดรูปได้โดยไม่ต้องยกดินสอ

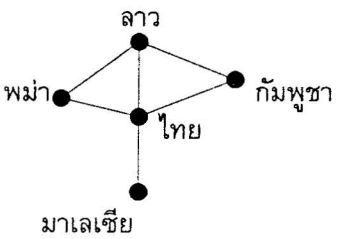
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(1)

1. G_1 : $V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ $E(G_1) = \{11, 12, 33, 33\}$

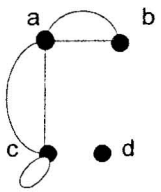
   G_2 : $V(G_2) = \{$ กรุงเทพ, สุพรรณบุรี, นครปฐม $\}$ $E(G_2) = \{$กรุงเทพ สุพรรณบุรี, กรุงเทพ นครปฐม, สุพรรณบุรี นครปฐม, สุพรรณบุรี นครปฐม$\}$

   G_3 : $V(G_3) = \{A, B, C, D\}$ $E(G_3) = \{AD, AB, AC, DC, DB, CB\}$

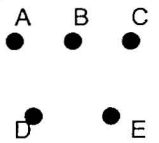
2. 2.1



2.2



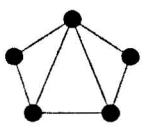
2.3



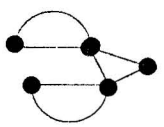
3. 3.1 กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว 3.2 กราฟ G_2 เป็นกราฟมีเส้นหลายชั้น

3.3 กราฟ G_3 เป็นกราฟมีวงวน 3.4 กราฟ G_4 เป็นกราฟมีวงวนและมีเส้นหลายชั้น

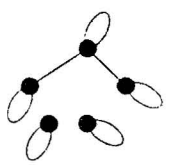
4. 4.1



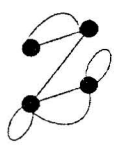
4.2



4.3



4.4



แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(2)

1. G_1 : deg A = 1 และ deg B = 1 G_2 : deg A = 0, deg B = 0, deg C = 0, deg D = 0

G_3 : deg A = 1, deg B = 2, deg C = 1, deg D = 2 G_4 : deg A = 3, deg B = 3

G_5 : deg A = 3, deg B = 2, deg C = 3, deg D = 2

G_6 : deg A = 2, deg B = 3, deg C = 2, deg D = 2, deg E = 2, deg F = 2, deg G = 1

G_7 : deg A = 2, deg B = 2, deg D = 2, deg C = 2, deg E = 0

G_8 : deg A = 1, deg B = 3, deg C = 4, deg D = 2

G_9 : deg A = 6, deg B = 4, deg C = 3, deg D = 4, deg E = 5

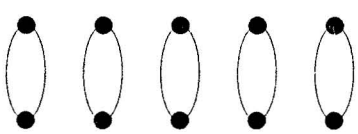
2. 2.1 8 2.2 14 2.3 10

3. ไม่มีกราฟ G เกิดขึ้น เพราะผลบวกของระดับขั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ เท่ากับ 11 เป็นจำนวนคี่ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1

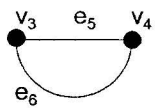
4. มีจำนวนจุด 10 จุด ที่มีระดับขั้น 3 และมีจำนวนจุด 4 จุดที่มีระดับขั้น 5

5. จำนวนจุดในกราฟ มี 10 จุด เขียนแผนภาพกราฟ G ดังนี้

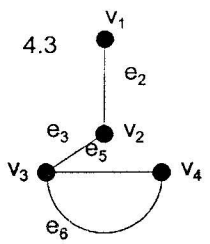
G :

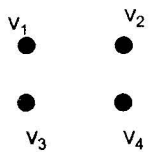


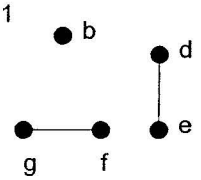
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.2

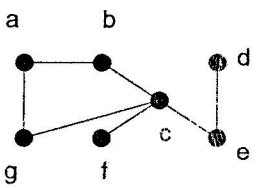
1. กราฟ G_1 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ กราฟ G_2 , กราฟ G_3 เป็นสับกราฟของ กราฟ G_2 กราฟ G_4 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ กราฟ G_1 และ G_2
2. กราฟ $G_1 = G$ และ กราฟ G_3 เป็นสับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G
3. 3.1 กราฟ $G_1 \neq G_2$ 3.2 กราฟ $G_1 = G_2$ 3.3 กราฟ $G_1 = G_2$
4. 4.1 

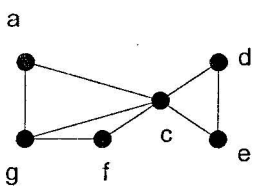
4.2 

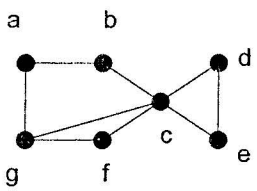
4.3 

4.4 

5. 5.1 

5.2 

5.3 

5.4 

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.3

1. 1.1 เป็นวัฏจักร 1.2 เป็นวิถี 1.3 ไม่เป็นวิถีและไม่เป็นวัฏจักร
2. 2.1 A, C, B, E, C, B, D 2.2 B, A, C, B 2.3 ไม่มีแนวเดิน A – F
   2.4 A, B, D, C, B, E 2.5 D, B, A, C, E, B, C, D 2.6 A, B, D, C, E
   2.7 1). A, B, D 2). A, B, C, D 3). A, B, E, C, D 4). A, C, D 5). A, C, E, B, D 6). A, C, B, D
3 3.1 1, 5, 4, 10, 8, 1 3.2 1, 8, 9, 3, 2, 7, 10, 4, 5, 6
   3.3 วัฏจักรที่มีความยาว 5 มีลำดับคือ 8, 9, 6, 7, 10, 8
   วัฏจักรที่มีความยาว 6 มีลำดับคือ 4, 10, 7, 6, 9, 3, 4
   วัฏจักรที่มีความยาว 8 มีลำดับคือ 1, 8, 9, 3, 2, 7, 6, 5, 1
   วัฏจักรที่มีความยาว 9 มีลำดับคือ 4, 10, 7, 2, 1, 5, 6, 9, 3, 4

4. แนวเดิน W_1 ที่ไม่ใช่เส้นทางอ้อม มีลำดับคือ B, e_4, C, e_3, D
   แนวเดิน W_2 ที่ไม่ใช่เส้นทางอ้อม มีลำดับคือ B, e_4, C, e_3, D, e_7, E
   แนวเดิน W_3 ที่ไม่ใช่เส้นทางอ้อม มีลำดับคือ E, e_7, D, e_3, C

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.4

1. เมทริกซ์ประชิดของกราฟ ข้อ 1.1 – 1.10 มีดังนี้

1.1

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	0	0	0
C	0	0	0	1
D	0	0	1	0

1.2

	A	B	C	D
A	0	0	0	1
B	0	0	1	0
C	0	1	0	0
D	1	0	0	0

1.3

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	0	1
C	1	0	0	0
D	1	1	0	0

1.4

	A	B	C	D
A	0	0	1	1
B	0	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	0

1.5

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	0
B	0	0	0	1	1
C	0	0	0	0	0
D	1	1	0	0	1
E	0	1	0	1	0

1.6

	A	B	C
A	0	2	2
B	2	0	2
C	2	2	0

1.7

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	1	0	0	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	0	0	1	1	0

1.8

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	2	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

1.9

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	1
B	1	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	1	0	1	0	1
E	1	0	1	1	0

1.10

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	1	0	1	0	1
C	0	1	1	0	1
D	0	0	0	0	1
E	1	1	1	1	0

เมทริกซ์ตกกระทบ ข้อ 1.1 – 1.10 มีดังนี้

1.1

	e_1	e_2
A	1	0
B	1	0
C	0	1
D	0	1

1.2

	e_1	e_2
A	0	1
B	1	0
C	1	0
D	0	1

1.3

	e_1	e_2	e_3
A	1	1	0
B	0	0	1
C	1	0	0
D	0	1	1

1.4

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	1	0	1	0
B	0	1	0	1
C	1	0	0	1
D	0	1	1	0

1.5

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	1	0	0	0
B	0	1	1	0
C	0	0	0	0
D	1	1	0	1
E	0	0	1	1

1.6

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
A	1	0	1	1	1	0
B	1	1	0	0	1	1
C	0	1	1	1	0	1

1.7

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	1	0	0	0
B	1	0	0	0
C	0	1	1	0
D	0	0	1	1
E	0	1	0	1

1.8

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
A	2	0	0	0	0
B	0	2	2	0	0
C	0	0	0	0	2
D	0	0	0	2	0

1.9

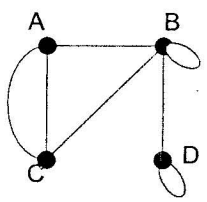
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
A	1	0	1	0	1	0	1	0
B	1	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	1	1	0	1	0	0
D	0	0	0	0	1	1	0	1
E	0	0	0	1	0	0	1	1

1.10

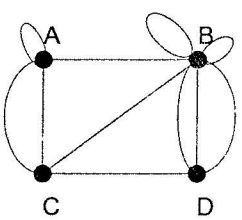
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
A	1	0	0	0	1	0	0
B	1	1	0	0	0	1	0
C	0	1	1	0	0	0	1
D	0	0	0	1	0	0	0
E	0	0	1	1	1	1	0

2.

2.1

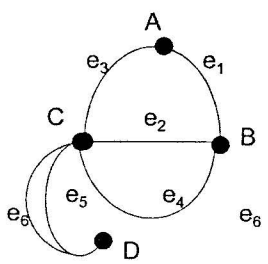


2.2

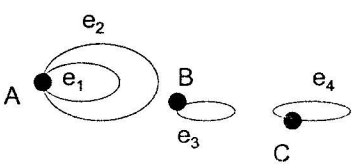


3

3.1



3.2



4. เมทริกซ์ประชิดแทนแผนที่ถนนเชื่อมระหว่างเมือง ดังนี้

$A(G) =$

	A	B	C	D	E
A	0	2	0	1	0
B	2	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	1	0	1	0	1
E	0	0	0	1	0

4.1 เส้นทางจากเมือง A ไป เมือง C ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด มี 3 เส้นทาง มีลำดับคือ 1) A, R_1, B, R_3, C 2) A, R_2, B, R_3, C 3) A, R_4, D, R_5, C

4.2 เส้นทางจากเมือง B ไป เมือง D ที่แตกต่างกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด มี 3 เส้นทาง มีลำดับคือ 1) B, R_1, A, R_4, D 2) B, R_2, A, R_4, D 3) B, R_3, C, R_5, D

4.3 จะได้ $A^2 =$

	A	B	C	D	E
A	5	0	3	0	1
B	0	5	0	5	0
C	3	0	2	0	1
D	0	5	0	3	0
E	1	0	1	0	1

จะได้เมืองสองเมืองที่ไม่สามารถใช้ถนนสองสายตามเงื่อนไขของโจทย์ ดังนี้

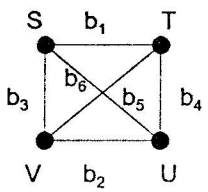
1) A-B 2) A-D 3) B-C 4) B-E 5) C-D 6) D-E

5. สร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้

จุด แทน เกาะ S, T, U และ V เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน สะพาน

จะได้กราฟแทนสถานการณ์ และเมทริกซ์ของกราฟดังกล่าว ดังนี้

G :



$A(G) =$

	S	T	U	V
S	0	1	1	1
T	1	0	1	1
U	1	1	0	1
V	1	1	1	0

5.1 $U\,[1\ 1\ 0\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ (V) $= 1 + 1 + 0 + 0 = 2$

ดังนั้นมีเส้นทาง U – V 2 เส้นทาง มีลำดับคือ 1) U, b_6, S, b_3, V 2) U, b_4, T, b_5, V

5.2 $S\,[3\ 2\ 2\ 2]\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ (T) $= 3 + 0 + 2 + 2 = 7$

ดังนั้นมีเส้นทาง S – T 7 เส้นทาง มีลำดับคือ

1) S, b_1, T, b_1, S, b_1, T 2) S, b_3, V, b_3, S, b_1, T 3) S, b_6, U, b_6, S, b_1, T

4) S, b_3, V, b_2, U, b_4, T 5) S, b_6, U, b_2, V, b_5, T 6) S, b_1, T, b_4, U, b_4, T 7) S, b_1, T, b_5, V, b_5, T

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.5

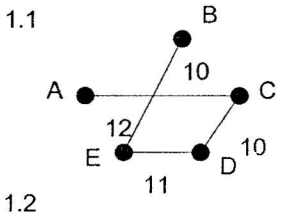
1. กราฟ G_3 เป็นกราฟเชื่อมโยง และ กราฟ G_1 , G_2 , G_4และ กราฟ G_5 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง
2. กราฟ G_1 มีจุดตัด คือ จุด A, X และ Y มีเส้นตัด คือ AX, AZ และ CY
   กราฟ G_2 มีจุดตัด คือ จุด b, c, d มีเส้นตัด คือ bc และ cd
   กราฟ G_3 ไม่มีจุดตัด และ ไม่มีเส้นตัด

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.6

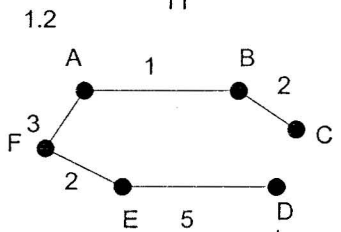
1. 1.1 d(A, B) = 4 มีลำดับคือ A, B d(A, C) = 10 มีลำดับคือ A, B, C d(A, D) = 16 มีลำดับคือ A, D
   d(A, E) = 56 มีลำดับคือ A, D, E
   1.2 d(A, B) = 2 มีลำดับคือ A, B d(A, C) = 5 มีลำดับคือ A, C d(A, D) = 5 มีลำดับคือ A, B, D
   1.3 d(A, B) = 7 มีลำดับคือ A, E, B d(A, C) = 9 มีลำดับคือ A, E, B, C d(A, D) = 8 ลำดับคือ A, E, F
   d(A, E) = 5 มีลำดับคือ A, E d(A, F) = 7 มีลำดับคือ A, E, F
   1.4 d(A, B) = 9 มีลำดับคือ A, E, C d(A, C) = 7 มีลำดับคือ A, E, C d(A, D) = 8 มีลำดับคือ A, E, C, D
   d(A, E) = 4 มีลำดับคือ A, E d(A, F) = 14 มีลำดับคือ A, E, C, B, F
2. d(A, E) = 4
3. เส้นทางการบินจากเมือง S ไป เมือง T ที่ใช้เวลาในการบินน้อยที่สุด จะใช้เวลา 21 ชั่วโมง เส้นทางมีลำดับคือ S, F, E, T
4. เส้นทางที่นายประหยัดต้องการ คือ h, d, l, f มีระยะทาง 7 กิโลเมตร

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 2

1. ต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด ข้อ 1.1 และ 1.2 ดังนี้

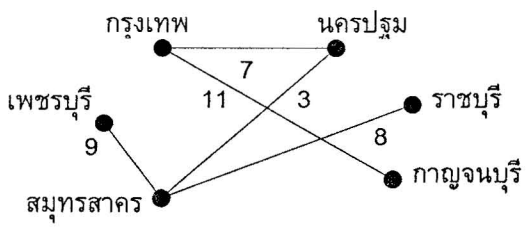


ผลรวมของน้ำหนักของเส้นในกราฟ เท่ากับ 10+10+11+12 = 43



ผลรวมของน้ำหนักของเส้นในกราฟ เท่ากับ 1+2+2+3+5 = 13

2. เส้นทางการวางสายโทรศัพท์ที่ทำให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ดังรูป



บริษัทธ์เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด เท่ากับ 3+7+8+9+11 = 38

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.1

1. 1.1 กราฟ G_2, G_4 และ G_6 เป็นกราฟออยเลอร์

   1.2 กราฟแบบบริบูรณ์ K_n จะเป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มีค่าตั้งแต่ 3 ขึ้นไป

2. กราฟข้อ 2.3 ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ แต่สามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ เพราะมีจุดคี่ 2 จุดในกราฟ คือ จุด C และ E และกราฟข้อ 2.4 เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะมีจุดทุกจุดในกราฟเป็นจุดคู่

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2

1. กราฟข้อ 2.3 มีรอยเดินเปิดออยเลอร์ มีลำดับ คือ C, B, A, G, C, F, E, D, C, E

   กราฟข้อ 2.4 มีวงออยเลอร์ มีลำดับคือ B, A, J, I, H, J, B, C, H, G, E, C, D, E, F, G, B

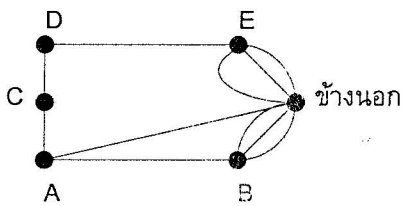
2. กราฟมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด C และ F ดังนั้นสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ได้ มีลำดับ คือ F, A, D, E, B, A, H, E, F, D, C, B, H, C

3. ไม่สามารถหารอยเดินเปิดจากจุด A ไป จุด B และจากจุด A ไป จุด C ได้ เพราะกราฟไม่เป็นกราฟออยเลอร์และกราฟมีจุดคี่มากกว่า 2 จุด คือ จุด A, B, C และ G

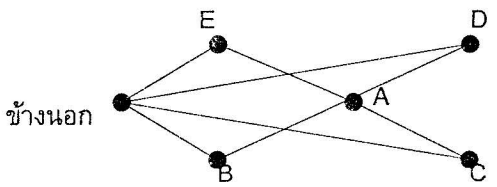
4. สามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้

   จุด แทน ห้องแต่ละห้อง เส้นเชื่อมระหว่างสองจุดใด แทน ทางเชื่อมห้องแต่ละห้องภายในห้องและทางเชื่อมห้องแต่ละห้องกับภายนอกห้อง

   แปลนที่ 1 ดังรูป



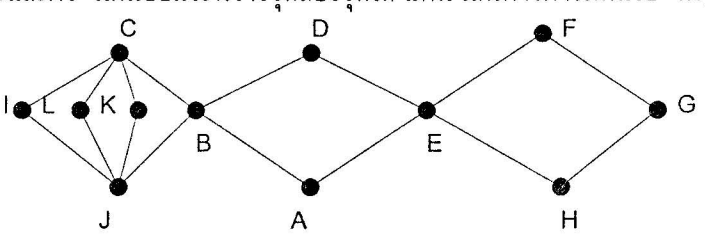
   แปลนที่ 2 ดังรูป



   นายสะอาดต้องเลือกแปลนที่ 2 และเส้นทางพาแขกชมงาม มีลำดับ คือ E, F, B, A, D, F, C, E

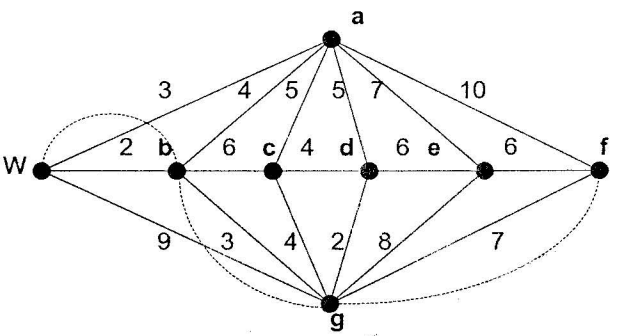
5. สามารถสร้างรูปแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้

จุด แทน เกาะและฝั่ง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน เส้นทางการเดินเรือ ดังรูป



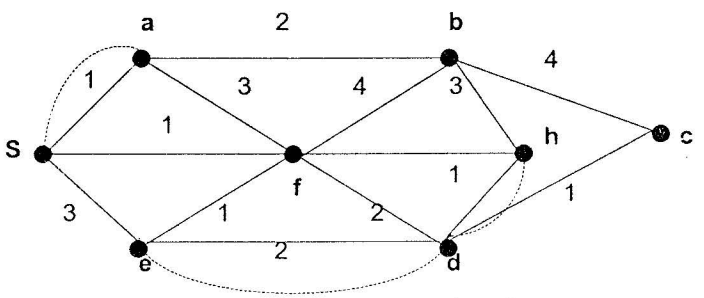
   จะได้เส้นทางการเดินเรือจากฝั่ง A ไปยังเกาะทุกเกาะโดยใช้เส้นทางการเดินเรือเพียงเส้นทางเดียว มีลำดับ คือ A, E, F, G, H, D, B, J, I, C, L, J, K, C, B, A

6. กราฟดังรูปไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 2 จุด คือ จุด W และ จุด f
ดังนั้น ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยหาวิถีที่สั้นที่สุดจาก W ไป f
จะได้ว่า d(W, f) = 2 + 3 + 7 = 12 วิถีที่สั้นที่สุดจาก W ไป f มีลำดับ คือ W, b, g, f
สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ซึ่งจะได้กราฟดังรูป



จะได้เส้นทางที่พนักงานเก็บค่าน้ำตามบ้านที่มีระยะทางน้อยที่สุดซึ่งเมื่อเก็บค่าน้ำครบทุกเส้นทางแล้ว พนักงานต้องกลับมาที่สำนักงานประปา มีลำดับ คือ W, a, b, g, c, a, d, g, e, a, f, g, f, e, d, c, b, W, g, b, W และพนักงานใช้ระยะทางในการเดินทางเก็บค่าน้ำ เท่ากับ 91 + 12 = 103 กิโลเมตร

7. กราฟดังรูปไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เนื่องจากกราฟมีจุดคี่ 4 จุด คือ จุด S, a, e, h
ดังนั้น ต้องสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์โดยหาวิถีที่สั้นที่สุดของการจับคู่แต่ละคู่ ดังนี้
แบบที่ 1 d(S, e) + d(a, h) = 2 + 5 = 7
แบบที่ 2 d(S, h) + d(a, e) = 4 + 3 = 7
แบบที่ 3 d(S, a) + d(e, h) = 1 + 3 = 4
จะได้การจับคู่ที่มีวิถีที่สั้นที่สุด คือ แบบที่ 3 วิถีที่สั้นที่สุดจาก S ไป a มีลำดับคือ S, a และวิถีที่สั้นที่สุดจาก e ไป h มีลำดับคือ e, d, h สร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ ดังรูป



จะได้เส้นทางที่รถเก็บขยะไปเก็บขยะตามจุดที่มีระยะทางน้อยที่สุดเมื่อเก็บขยะครบทุกจุดแล้ว ต้องนำรถเก็บขยะมาจอดไว้ที่สำนักงานเทศบาลตามเดิม มีลำดับคือ S, a, b, c, d, e, S, f, h, d, f, e, d, h, b, f, a, S และระยะทางที่ใช้ในการเดินทางเก็บขยะ เท่ากับ 32 + 4 = 36 กิโลเมตร

แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2

1. 1.1 $\chi(G) = 2$ 1.2 $\chi(G) = 3$ 1.3 $\chi(G) = 2$ 1.4 $\chi(G) = 3$
1.5 $\chi(G) = 4$ 1.6 $\chi(G) = 2$ 1.7 $\chi(G) = 3$ 1.8 $\chi(G) = 5$

1.9 $\chi(G) = 4$ 1.10 $\chi(G) = 3$

2. 2.1 2 2.2 3 2.3 3 2.4 4 2.5 4

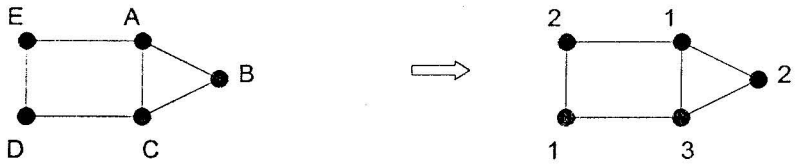
แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2

1. 1.1 1 คาบ 1.2 6 คาบ

2. แนวคิด สถานีที่มีระยะห่างต่ำกว่า 200 กิโลเมตร ต้องใช้คลื่นความถี่ต่างกัน

แทนสถานการณ์โดยสร้างแบบจำลองด้วยกราฟ โดยให้

จุด แทน สถานีวิทยุ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสถานีวิทยุ 2 สถานีที่ระยะห่างต่ำกว่า 200 กิโลเมตร ดังรูป



ดังนั้นจะต้องใช้คลื่นความถี่จำนวนน้อยที่สุด 3 คลื่น

3. แนวคิด สมาชิกบางคนต้องเข้าร่วมสัมมนากลุ่มมากกว่า1 กลุ่มทำให้กลุ่มดังกล่าวต้องสัมมนากลุ่มในเวลาที่ไม่ตรงกัน

แทนสถานการณ์โดยสร้างรูปแบบจำลองด้วยกราฟ โดยให้

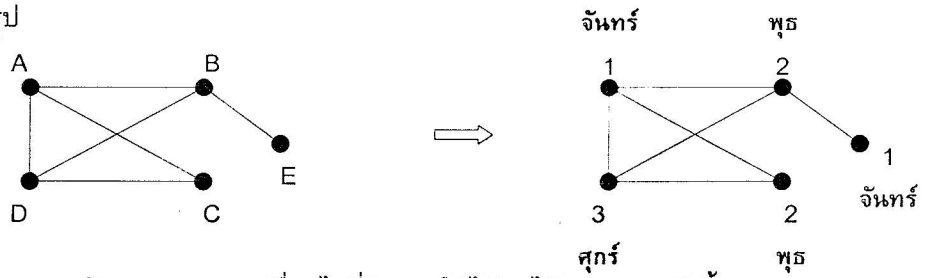
จุด แทน กลุ่มที่สัมมนา เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสองกลุ่มมีสมาชิกร่วมกัน ดังรูป



ดังนั้นไม่สามารถจัดเวลาการสัมมนากลุ่มย่อยในช่วงเช้าตั้งแต่เวลา 9.00 – 12.00 น. ได้ เพราะต้องใช้เวลาสัมมนากลุ่มย่อย 4 ชั่วโมง แต่ถ้าขยายเวลาในการสัมมนากลุ่มย่อย เป็น 8.00 – 12.00 น. จะสามารถจัดการสัมมนากลุ่มย่อยในช่วงเช้าได้ จะได้ตารางการสัมมนากลุ่มย่อย ดังนี้

เวลา	กลุ่ม
8.00 – 9.00 น.	1, 2
9.00 – 10.00 น.	4, 5
10.00 – 11.00 น.	3
11.00 – 12.00 น.	6

4. แนวคิด วิชาที่ใช้ห้องปฏิบัติการเดียวกันไม่สามารถจัดเวลาสอนในวันเดียวกันได้
แทนสถานการณ์โดยสร้างรูปแบบจำลองด้วยกราฟ โดยให้
จุด แทน ชื่อวิชา เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสองวิชาใช้ห้องปฏิบัติการเดียวกันดังรูป



ดังนั้น สามารถจัดตารางสอนตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้ จะได้ตารางสอนดังนี้

วัน	วิชา
จันทร์	A, E
พุธ	B, C
ศุกร์	D

ภาคผนวก ง

แผนการจัดการเรียนรู้

เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

แผนการจัดการเรียนรู้
เรื่อง
กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

ในชีวิตประจำวัน กิจกรรมที่คนเราทำอยู่เป็นประจำนั้น ก็เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริง หลายปัญหาสามารถสร้างแบบจำลองโดยการใช้จุดและเส้นช่วยในการแก้ปัญหาให้ง่ายขึ้นได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

1. สร้างแบบจำลองแทนปัญหาบางประการ โดยการใช้จุดและเส้นแทนปัญหาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีประโยชน์มาก ซึ่งเราสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาบางอย่างที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน โดยการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ช่วยแก้ปัญหา ปัญหาบางปัญหาเราสามารถแทนสถานการณ์โดยใช้จุดและเส้น ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ง่ายในการจำลองปัญหาซึ่งเน้นความสัมพันธ์ระหว่างคน สัตว์ สิ่งของ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนจับคู่กัน 2 คน ช่วยกันศึกษาและทำกิจกรรมที่ 1 - กิจกรรมที่ 4
2. ครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอผลจากการทำกิจกรรม 2 – 3 กลุ่ม จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายสรุปผลจากการทำกิจกรรม โดยครูเป็นผู้แนะนำ
3. ครูนำสนทนาเกี่ยวกับกิจกรรมที่นักเรียนทำอยู่เป็นประจำในชีวิตประจำวัน ซึ่งกิจกรรมที่ทำก็เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน ซึ่งปัญหาแต่ละปัญหามีวิธีการในการแก้ปัญหาแตกต่างกัน วิธีการหนึ่งที่สามารถช่วยให้การแก้ปัญหาเป็นไปได้ง่าย คือ การสร้างแบบจำลองแทนปัญหา โดยการใช้จุดและเส้น
4. ครูใช้การถามตอบ และให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 7 โดยครูเป็นผู้แนะนำ
5. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปโครงสร้างของแบบจำลองประกอบด้วยอะไรบ้าง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์ปัญหาน่าคิด หน้า 9	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์ปัญหาน่าคิดได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

กราฟในที่นี้จะกล่าวถึง ความสัมพันธ์ของจุดและเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด เช่นแผนที่ถนนเชื่อมระหว่างเมืองต่าง ๆ แผนที่แสดงเส้นทางการบิน ฯลฯ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

2. บอก V(G) และ E(G) ของกราฟ G ใด ๆ ได้
3. บอกถึงความสัมพันธ์การประชิด และดกกระทบของกราฟ G ใด ๆ ได้
4. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟที่มีวงวน กราฟที่มีเส้นหลายชั้น กราฟเชิงเดียว กราฟว่าง และ กราฟแบบบริบูรณ์
5. หาระดับขั้นของจุดใด ๆ ในกราฟ G ได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่
6. พิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และนำความรู้ทฤษฎีบท 1 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 1 กราฟจำกัด G คือคู่อันดับ (V(G), E(G)) ประกอบไปด้วยเซตจำกัด 2 เซต

1. V(G) เป็นเซตของจุดที่ไม่เป็นเซตว่าง ถ้า u เป็นสมาชิกใน V(G) เรียก u ว่า***จุด*** (vertex)
2. E(G) เป็นเซตของเส้น ซึ่งเส้นแต่ละเส้น คือ คู่ที่ไม่เป็นอันดับ (unordered pair) ของจุด u และจุด v ที่เขียนอยู่ในรูป uv เรียก uv ว่า ***เส้น*** (edge)

บทนิยาม 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G

ถ้ามีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v เรากล่าวว่า u ***ประชิด*** (adjacent) กับ v

ให้ e เป็นเส้นในกราฟ G ถ้าจุด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้น e เรากล่าวว่า เส้น e ***ตกกระทบ*** (incident) กับจุด v หรือ จุด v ตกกระทบกับเส้น e

ให้ e และ f เป็นเส้นที่ต่างกันใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกันคือ จุด v แล้ว เรากล่าวว่า e ประชิดกับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

บทนิยาม 3

3.1 เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน เราเรียกว่า ***วงวน*** (loop)

3.2 เส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดคู่เดียวกัน เราเรียกว่า ***เส้นหลายชั้น*** (multiple edges)

3.3 กราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้นและไม่มีวงวน เราเรียกว่า ***กราฟเชิงเดียว*** (Simple graph)

บทนิยาม 4 กำหนดกราฟ G = (V(G), E(G)) และ $v \in V(G)$ ***ระดับขั้น***(degree) ของ v คือจำนวนเส้นใน E(G) ที่ตกกระทบกับจุด v เราเขียน deg(v) แทนระดับขั้นของ v(จำนวนเส้น ใน E(G) ที่ตกกระทบกับจุด v คือจำนวนเส้นใน E(G) ที่ออกจากจุด v นั่นเอง)

ถ้า deg(v) เป็นจำนวนคู่ เราเรียก v ว่า***จุดคู่*** (even vertex)

ถ้า deg(v) เป็นจำนวนคี่ เราเรียก v ว่า***จุดคี่*** (odd vertex)

ทฤษฎีบท 1 ให้ G = (V(G), E(G)) แทนกราฟ โดย $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = q$ ซึ่ง $V(G) = \{ v_1, v_2, \ldots, v_p \}$ และ $E(G) = \{ e_1, e_2, \ldots, e_q \}$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2|E(G)|$$

บทแทรก 1 กราฟทุกกราฟจะมีจุดคี่เป็นจำนวนคู่

สื่อการเรียนรู้

1. เชือก
2. ปัญหาชวนคิด 1 และ 2
3. เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองโดยการใช้จุดและเส้น เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาบางประการจากคาบเรียนที่ผ่านมา เพื่อนำสู่บทนิยาม 1, 2 และ 3 จากนั้นครูให้บทนิยาม 1, 2 และ 3

2. ครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 - 5 แล้วให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายสรุปข้อสังเกตจากบทนิยามกราฟ ในตัวอย่างที่ 6, 7 และ 8 แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาชวนคิด 1

3. ครูสุ่มนักเรียนตอบคำถามในหน้าที่ 14 โดยให้นักเรียนในชั้นช่วยกันตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

4. ครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 9 และ 10 แล้วสุ่มนักเรียนออกมาสร้างกราฟแบบบริบูรณ์ K_6 บนกระดานดำ จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจความถูกต้อง แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาชวนคิด 2

5. ครูสอนบทนิยาม 4 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 11 และ 12 แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายสรุปข้อสังเกตในหน้า 17 เพื่อนำสู่ทฤษฎีบท 1 จากนั้นครูให้ทฤษฎีบท 1

6. ครูให้นักเรียน 2 คนออกมาถือเชือกโดยจับที่ปลายเชือกคนละข้างเพื่อประกอบการอธิบายในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 ครูใช้การถามตอบในการสอนพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 และบทแทรก 1

7. ครูให้นักเรียนทุกคนทำตัวอย่างที่ 13 แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

8. ครูใช้การถามตอบให้นักเรียนสรุป บทนิยามกราฟและทฤษฎีบทที่เรียนในคาบเรียนนี้

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(1) หน้า 15 – 16 และแบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.1(2) หน้า 18 – 19	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

ให้ $H = (V(H), E(H))$ และ $G = (V(G), E(G))$

1. ถ้า $V(H) \subset V(G)$ และ $E(H) \subset E(G)$ เรากล่าวว่า H เป็นสับกราฟของ G
2. ถ้า $V(H) = V(G)$ และ $E(H) = E(G)$ เรากล่าวว่า กราฟ H และกราฟ G เป็นกราฟเหมือนกัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

7 หาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 5 ให้ H = (V(H), E(H)) และ G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟใด ๆ

5.1 ถ้า V(H) $\subset$ V(G) และ E(H) $\subset$ E(G)

เรากล่าวว่า H เป็น***สับกราฟ*** (subgraph) ของ G

5.2 ถ้า H เป็นสับกราฟของ G และ V(H) = V(G)

เรากล่าวว่า H เป็น***สับกราฟแผ่ทั่วถึง*** (spanning subgraph) ของ G

5.3 ถ้า V(H) = V(G) และ E(H) = E(G)

เรากล่าวว่า กราฟ H และ กราฟ G เป็นกราฟ***เหมือนกัน*** (identical)

บทนิยาม 6 ให้ G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟใด ๆ

6.1 ให้ U เป็นเซตของจุดที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็นสับเซตแท้ของ V(G) สับกราฟของ G ที่มีเซตของจุดคือ V(G) – U และมีเซตของเส้น คือ เซตของเส้นใน E(G) ที่ไม่ใช่เส้นที่ตกกระทบกับจุดใน U เขียนแทน ด้วย G – U

6.2 ถ้า F เป็นเซตของเส้นที่ไม่เป็นเซตว่าง และเป็นสับเซตของ E(G) สับกราฟของ G ที่ได้จากการกำจัดเส้นใน F โดยที่ไม่มีผลต่อจุด และมีเซตของเส้น คือ E(G) – F เขียนแทนด้วย G – F

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนบทนิยาม 1 เพื่อนำเข้าสู่บทนิยาม 5 จากนั้นครูให้บทนิยาม 5
2. ครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 แล้วครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามในหน้า 21 จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง
3. ครูให้บทนิยาม 6 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 4 และ 5 จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต โดยครูเป็นผู้แนะนำ
4. ครูยกตัวอย่างกราฟและใช้การถามตอบ เพื่อให้นักเรียนสรุปการหาสับกราฟ สับกราฟแผ่ทั่วถึง และกราฟเหมือนกัน อีกครั้ง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.2 หน้า 25 – 27	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

1. ทุก ๆ วิถีเป็นแนวเดิน และทุก ๆ วิถีเป็นรอยเดิน
2. ทุก ๆ วัฏจักรเป็นวง แต่วงไม่จำเป็นต้องเป็นวัฏจักร

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

8. บอกถึงความแตกต่าง และหาความยาวของแนวเดินเปิด แนวเดินปิด รอยเดินเปิด รอยเดินปิด วิถี และวัฏจักร ได้
9. สร้างวิถีในแนวเดินเมื่อกำหนดแนวเดินใด ๆ มาให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 7 ***แนวเดิน*** (Walk) W ในกราฟ G คือ ลำดับจำกัดของจุดและเส้นสลับกันของกราฟ G ดังนี้

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

ซึ่งเส้น e_i มีจุดปลาย คือ v_{i-1} และ v_i สำหรับ $1 \leq i \leq n$

บทนิยาม 8 ให้ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G และ W เป็น แนวเดินใน G โดยที่

$W : v$ (ซึ่งมีความยาว = 0)

เราเรียกแนวเดิน W ที่ไม่มีเส้น (n=0) ว่า***แนวเดินชัด*** (trival walk)

บทนิยาม 9 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G

เรากล่าวว่าแนวเดิน $u - v$ เป็น***แนวเดินปิด*** (closed walk) เมื่อ $u = v$

และ แนวเดิน $u - v$ เป็น***แนวเดินเปิด*** (open walk) เมื่อ $u \neq v$

บทนิยาม 10

10.1 ถ้าเส้นในแนวเดิน $u - v$ **ไม่ซ้ำกัน** เรากล่าวว่าแนวเดิน $u - v$ เป็น***รอยเดิน*** (trail)

10.2 ถ้าจุดในแนวเดิน $u - v$ **ไม่ซ้ำกัน** เรากล่าวว่าแนวเดิน $u - v$ เป็น***วิถี*** (path)

ทฤษฎีบท 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G ทุก ๆ แนวเดิน $u - v$ จะมีวิถี $u - v$

บทนิยาม 11

11.1 เราเรียกรอยเดินปิดที่ไม่ใช่แนวเดินชัดว่า ***วง*** (circuit)

11.2 เราเรียก วงที่มีจุดเริ่มต้น และจุดภายในไม่ซ้ำกัน ว่า ***วัฏจักร*** (cycle)

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำสนทนา การหาเส้นทางการเดิน โดยยกตัวอย่างสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ดังนี้ นักเรียนจะใช้เส้นทางใดในการเดินทางจากห้องที่เรียนเพื่อไปรับประทานอาหารกลางวันที่โรงอาหารในวันนี้ ซึ่งเส้นทางที่นักเรียนแต่ละคนเลือก อาจใช้เส้นทางเดียวกันหรือแตกต่างกัน จากนั้นครูให้นักเรียนสร้างกราฟแทนสถานการณ์ แล้วครูให้นักเรียนอภิปรายร่วมกัน เพื่อหาว่าเส้นทางของใครใช้จำนวนเส้นน้อยที่สุดโดยดูจากกราฟที่สร้าง

2. ครูให้บทนิยาม 7 และ 8 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันสรุปข้อสังเกต โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูให้บทนิยาม 9 และ 10 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 2 และ 3 ตามลำดับ จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันสรุปข้อสังเกต

4. ครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามข้อ 1 ถึง ข้อ 9 ในหน้า 30 แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง จากนั้นครูใช้การถามตอบ ในการสอนตัวอย่างที่ 4, 5 และ 6 เพื่อนำสู่ทฤษฎีบท 2 แล้วครูให้ทฤษฎีบท 2

5. ครูสุ่มนักเรียน 2 – 3 คน ตอบคำถาม ในหน้า 33 แล้วให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง จากนั้นครูให้บทนิยาม 11

6. ครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 7 และ 8 แล้วให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต

7. ครูให้นักเรียนสรุป โดยให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามในหน้า 35 แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.3 หน้า 35 – 36	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 **ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2** **เวลา 2 คาบ**

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

เราสามารถแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ได้ ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะกล่าวถึงการแทนกราฟด้วยเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

10. สร้างเมทริกซ์ประชิด และเมทริกซ์ตกกระทบ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
11. นำความรู้ทฤษฎีบท 3 ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 12 ***เมทริกซ์ประชิด***(adjacency matrix)

ให้ $V(G) = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ เป็นเซตของจุดในกราฟ เมื่อ $n = |V(G)|$ เมทริกซ์ประชิดของ G เขียนแทนด้วย A(G) จะเป็นเมทริกซ์มีมิติ $n \times n$ และ $A(G) = [a_{ij}]$ โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนของเส้นที่เชื่อมจุด v_i และ v_j

ทฤษฎีบท 3 ให้ $V(G) = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ เป็นเซตของจุดในกราฟ G และ A = A(G) เป็นเมทริกซ์ประชิดของ G แล้วสมาชิก a_{ij} ของ A^k , $k \geq 1$ จะเป็นจำนวนของแนวเดิน v_i - v_j ที่มีความยาว k ที่แตกต่างกันใน G

บทนิยาม 13 ***เมทริกซ์ตกกระทบ***(incidence matrix)

ให้ $V(G) = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ และ $E(G) = \{ e_1 , e_2 , \dots , e_m \}$ เป็นเซตของจุดและเซตของเส้นในกราฟ G เมื่อ $n = |V(G)|$ และ $m = |E(G)|$ เมทริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix) ของกราฟ G เขียนแทนด้วย I(G) จะเป็นเมทริกซ์มีมิติ $n \times m$ และ $I(G) = [x_{ij}]$ โดยที่ x_{ij} เป็นจำนวนครั้งที่จุด v_i ตกกระทบกับเส้น e_j ซึ่ง x_{ij} มีค่า ดังนี้

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } v_i \text{ ไม่เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \\ 1 & \text{ถ้า } v_i \text{ เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \text{ ที่ไม่เป็นวงวน} \\ 2 & \text{ถ้า } v_i \text{ เป็นจุดปลายของเส้น } e_j \text{ ที่เป็นวงวน} \end{cases}$$

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวน เรื่อง มิติของเมทริกซ์ การเท่ากันของเมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

2. ครูให้บทนิยาม 12 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 และ 2 จากนั้นครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถาม ข้อ 1 ถึง ข้อ 6 ในหน้าที่ 38 แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูสุ่มนักเรียน 2-3 คน ตอบคำถามข้อ 1 และ 2 ในหน้า 39 แล้วให้นักเรียนพิจารณาคำตอบด้วยตัวเอง จากนั้นครูให้ทฤษฎีบท 3 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 3 และ 4 แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน เพื่อตอบคำถามข้อ 1, 2 และ 3 ในหน้า 40 และให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

4. ครูให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 5 โดยครูเป็นผู้แนะนำ แล้วให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามในหน้า 42 และให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

5. ครูให้บทนิยาม 13 และใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 6 และ 7 แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต โดยครูเป็นผู้แนะนำ

6. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปความรู้ที่เรียนในคาบเรียนนี้

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.4 หน้า 45 – 46	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

สาระสำคัญ

เราสามารถนำความรู้เรื่องกราฟเชื่อมโยง และกราฟที่มีน้ำหนักไปใช้ในการแก้ปัญหาบางปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวันได้ เช่น ปัญหาการหาระยะทางที่สั้นที่สุด

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

1. บอกบทนิยาม และอธิบายสมบัติเบื้องต้นของกราฟได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

12. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟเชื่อมโยง หรือกราฟไม่เชื่อมโยง เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
13. หา d(u, v) ใด ๆ ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้
14. หาวิถีที่สั้นที่สุดโดยใช้ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 14 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G เรากล่าวว่า u และ v เชื่อมโยงกันได้ (connect) เมื่อมีวิถี u – v ในกราฟ G

14.1 ถ้ามีวิถีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในกราฟ G แล้ว กราฟ G เป็น***กราฟเชื่อมโยง*** (connected graph)

14.2 ถ้าไม่มีวิถีระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในกราฟ G แล้ว กราฟ G เป็น***กราฟไม่เชื่อมโยง*** (disconnected graph)

บทนิยาม 15 ให้กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ v เป็นจุดในกราฟ G เรียก จุด v ว่า ***จุดตัด*** (cut vertex) ถ้ากราฟ G – v เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 16 ให้กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ e เป็นเส้นในกราฟ G เรียก เส้น e ว่า ***เส้นตัด*** (cut edge) ถ้ากราฟ G - e เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 17 เรากล่าวว่ากราฟ G เป็น ***กราฟที่มีน้ำหนัก*** เมื่อเส้นแต่ละเส้นใน G ถูกกำหนดด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และเราเรียกจำนวนจริงที่กำหนดบนเส้น e ใน G ว่า ***น้ำหนักของเส้น e*** เขียนแทนด้วย w(e)

บทนิยาม 18 ความยาวของวิถี ในกราฟที่มีน้ำหนัก G คือ ผลรวมของน้ำหนักของทุก ๆ เส้นในวิถีนั้น

บทนิยาม 19 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก u และ v เป็นจุดใน G ระยะทาง d(u, v) คือ ความยาวของวิถี u – v ที่น้อยที่สุด

ขั้นตอนวิธีในการหาวิถีที่สั้นที่สุดจากจุด ๆ หนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ ในกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก คือ ***ขั้นตอนวิธีของไดค์สตรา*** (Dijkstra Algorithm) ซึ่งขั้นตอนนี้เป็นการกำหนดค่าประจำจุดถาวรให้กับจุดในกราฟ มีหลักการดังนี้

1. กำหนดให้จุดเริ่มต้น เป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร
2. จากนั้นทำการสำรวจจุดต่าง ๆ ในกราฟซึ่งประชิดกับจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร จุดที่ได้รับการสำรวจจะกลายเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดชั่วคราว
3. เลือกจุดที่มีค่าประจำจุดชั่วคราวซึ่งมีค่าประจำจุดน้อยที่สุด (มีผลรวมของความยาวที่น้อยที่สุดจากจุดเริ่มต้น) เข้ารวมเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร
4. ย้อนกลับไปดำเนินการสำรวจตามข้อ 2 และ 3 จนกระทั่งจุดทุกจุดในกราฟถูกรวมเป็นจุดที่มีค่าประจำจุดถาวร

สื่อการเรียนรู้

1. เกมหยิบเหรียญใส่กระเป๋า
2. ปัญหาชวนคิด 3
3. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ในหน้า 47 เพื่อนำเข้าสู่บทนิยาม 14 จากนั้นครูให้บทนิยาม 14 แล้วใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 และ 2

2. ครูให้บทนิยาม 15 แล้วให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 3 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูให้บทนิยาม 16 แล้วให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที 4 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

4. ครูให้นักเรียนเล่นเกมหยิบเหรียญใส่กระเป๋า และปัญหาชวนคิด 3

5. ครูยกตัวอย่างสถานการณ์ จากกราฟรูป (1) แล้วให้บทนิยาม 17, 18 และ 19 จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ในหน้า 52 แล้วให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 1 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

6. ครูนำสนทนาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 แล้วครูตั้งคำถามให้นักเรียนวิเคราะห์ว่านักเรียนคิดว่าจะมีวิธีการใดนอกเหนือจากวิธีการแก้ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ที่มีประสิทธิภาพดีกว่านี้ เพื่อนำสู่การสอนตัวอย่างที่ 2 จากนั้นครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 2 แล้วให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปผล **โดยครูให้นักเรียนนำเสนอขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาจากการตอบคำถามในตัวอย่างที่ 2 ในรูปตาราง โดยครูเป็นผู้แนะนำ**

7. **ครูใช้การถามตอบ เพื่อให้นักเรียนสรุปขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาในตัวอย่างที่ 2 อีกครั้ง แล้วครูสรุปขั้นตอนวิธีดังกล่าวอีกครั้ง แล้วบอกว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าวในตัวอย่างที่ 2 คือ ขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาหลักการของขั้นตอนวิธีของไดค์สตาร์ โดยครูเป็นผู้แนะนำ**

8. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม เพื่อตอบคำถาม ในหน้า 55 โดยให้กลุ่มที่ 1 ทำข้อ 1 กลุ่มที่ 2 ทำข้อ 2 แล้วให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.5 หน้า 49 – 50 และแบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 1.6 หน้า 56 – 57	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

สาระสำคัญ

ต้นไม้ เป็นกราฟเชิงเดียว และเป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร เราสามารถนำความรู้เรื่องต้นไม้มาใช้แก้ปัญหาการเชื่อมโยงได้ เช่น การสร้างถนน การวางสายไฟ การวางสายโทรศัพท์ ฯลฯ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

2. บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

15. บอกบทนิยามของต้นไม้ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นต้นไม้ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
16. บอกทฤษฎีบทที่บ่งบอกลักษณะเฉพาะของต้นไม้ได้
17. หาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว เรากล่าวว่า G เป็น ***ต้นไม้*** (Tree) เมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ทฤษฎีบท 1

1.1 ถ้ากราฟ G มีวงวน แล้วกราฟ G ไม่เป็นต้นไม้

1.2 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ แล้วจุด 2 จุดใด ๆ ใน G เชื่อมโยงกันได้ด้วย วิถีเพียงวิถีเดียว

1.3 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n จุด แล้ว กราฟ G จะมีจำนวนเส้น n – 1 เส้น

1.4 ถ้ากราฟ G เป็นต้นไม้ ที่มีจุด n > 1 กราฟ G จะมีจุดที่มีระดับขั้น 1 อย่างน้อย 2 จุด

บทนิยาม 2 ต้นไม้แบบทอดข้าม (spanning tree) ของกราฟ G คือ สับกราฟแผ่ทั่วถึงของ G ที่เป็นต้นไม้

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถามจากรูปกราฟ ในข้อ 1 และ 2 เพื่อนำสู่บทนิยาม 1
2. ครูให้บทนิยาม 1 แล้วครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 5
3. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปลักษณะเฉพาะของต้นไม้ เพื่อนำสู่ทฤษฎีบท 1 จากนั้นครูให้ทฤษฎีบท 1
4. ครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถาม ในหน้า 60 โดยครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น จากนั้นให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 6 โดยครูเป็นผู้แนะนำ
5. ครูให้นักเรียนตอบคำถามในข้อ 1 และ 2 หน้า 60 เพื่อนำสู่นิยาม 2
6. ครูให้บทนิยาม 2 แล้วครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 7

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 **ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2** **เวลา 1 คาบ**

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เรื่องเกี่ยวกับต้นไม้ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

สาระสำคัญ

(ต่อ) ต้นไม้ เป็นกราฟเชิงเดียว และเป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร เราสามารถนำความรู้เรื่องต้นไม้มาใช้แก้ปัญหาการเชื่อมโยงได้ เช่น การสร้างถนน การวางสายไฟ สายโทรศัพท์ ฯลฯ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

3. นำความรู้เรื่องเกี่ยวกับต้นไม้ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

18. หาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้
19. นำความรู้เรื่องการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยใช้ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

ขั้นตอนวิธีในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นน้อยที่สุด คือขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ (Kruskal' s Algorithm) ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีมีหลักการดังนี้

เลือกเส้นที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดจากกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนักติดต่อกันไปเพื่อสร้างกราฟเชื่อมโยงที่มีน้ำหนัก โดยเลือกใช้เส้นในกราฟไม่เกิน n-1 ครั้ง เมื่อ กราฟมีจุด n จุด และการเลือกเส้นดังกล่าวต้องไม่ก่อให้เกิดวัฏจักร การเลือกนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อได้ต้นไม้แบบทอดข้าม และเราเรียก ต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นน้อยที่สุด ว่า ***ต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด*** (minimum spanning tree)

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำสนทนาเกี่ยวกับปัญหาการเชื่อมโยง โดยยกตัวอย่างสถานการณ์ การสร้างถนนเชื่อมระหว่างเมืองต่างๆ ดังกราฟรูป (1) แล้วให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ปัญหา และให้นักเรียนเสนอความคิดในการแก้ปัญหา จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 1 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

2. ครูเสนอขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหา โดยใช้กราฟรูป (1) ในหน้า 63 – 64 ตั้งแต่ขั้นที่1 ถึงขั้นที่ 6 จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปขั้นตอนวิธีดังกล่าวว่ามีหลักการอย่างไร โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูให้นักเรียนสรุปหลักการขั้นตอนวิธีอีกครั้ง แล้วครูจึงบอกว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าว คือ ขั้นตอนวิธีของครูสกาวล์ ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีในการหาต้นไม้แบบทอดข้ามเล็กที่สุด

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 2 หน้า 65	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

สาระสำคัญ

กราฟออยเลอร์ มีต้นกำเนิดมาจากการตอบปัญหาปริศนาข้อหนึ่ง คือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก ซึ่งเป็นปัญหาการเดินผ่านทุกๆ เส้น เส้นละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเดิม เป็นปัญหาเดียวกับปัญหาการลากดินสอไปในรูปกราฟโดยให้ผ่านเส้นทั้งหมด เส้นละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเดิม ซึ่งเป็นการหารอยเดินปิดซึ่งไม่ใช่แนวเดินชัด นั่นก็คือ การหาวงในกราฟนั่นเอง

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

4. บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

20. บอกบทนิยามของกราฟออยเลอร์ และบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนด กราฟใด ๆ มาให้ได้
21. บอกได้ว่ากราฟใดหาวงออยเลอร์ หรือรอยเดินเปิดออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง

เรากล่าวว่า G เป็น***กราฟออยเลอร์*** (Eulerian graph) เมื่อ G มีรอยเดินปิดซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นใน G และเรียกรอยเดินปิดดังกล่าวนี้ว่า รอยเดินออยเลอร์หรือ วงออยเลอร์ (Eulerian circuit)

ทฤษฎีบท 1 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง และ $|E(G)| \geq 1$

จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดทุกจุดใน G เป็นจุดคู่

บทนิยาม 2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง เราเรียกรอยเดินเปิดใน G ว่า ***รอยเดินเปิดออยเลอร์*** (Eulerian trail) เมื่อรอยเดินดังกล่าวนี้ผ่านเส้นทุกเส้นใน G

ทฤษฎีบท 2 ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง G มีรอยเดินเปิดออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ G มีจุดที่เป็นจุดคี่ไม่เกิน 2 จุด ยิ่งไปกว่านั้นจุดคี่เหล่านี้จะเป็นจุดเริ่มต้นและจุดปลายของรอยเดินเปิดออยเลอร์

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำสนทนาเกี่ยวกับประวัติทฤษฎีกราฟในหัวข้อที่ 1 แล้วให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาและหาคำตอบจากรูป (1), (2), และ (3) จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 1 โดยครูเป็นผู้แนะนำ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นตารางในหน้า 67

2. ครูใช้การถามตอบ แล้วให้บทนิยาม 1 และ ทฤษฎีบท 1 แล้วให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 2 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูใช้การถามตอบ แล้วให้บทนิยาม 2 และ ทฤษฎีบท 2 แล้วให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 3 และ 4 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.1 หน้า 69	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เรื่องเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

สาระสำคัญ

เราสามารถหาวงออยเลอร์ได้โดยง่าย โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ และเราสามารถหารอยเดินเปิดออยเลอร์ ได้จากการหาวงออยเลอร์ ซึ่งต้องลร้างกราฟใหม่จากกราฟเดิมที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ให้เป็นกราฟออยเลอร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

5. นำความรู้เรื่องเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

22 หาวงออยเลอร์ และรอยเดินเปิดออยเลอร์ โดยใช้ขั้นตอนของฟลูรีย์ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

การหาวงออยเลอร์ โดยใช้ ***ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์*** (Fleury ' Algorithm) ดังนี้

ให้ G เป็นกราฟออยเลอร์

1. เริ่มที่จุดใด ๆ ในกราฟ จากนั้นเดินตามเส้นใน G ไปเรื่อย ๆ เมื่อเดินผ่านเส้นใดก็ให้กำจัดเส้นนั้นออกจากกราฟ
2. ในการเลือกเส้นที่ผ่านนั้น มีเงื่อนไขดังนี้

2.1 เลือกเส้นที่ตกกระทบกับจุดก่อนหน้า

2.2 เลือกเส้นที่ไม่เป็นเส้นตัดของกราฟ G – F เมื่อ F เป็นเซตของเส้นที่ถูกเลือกแล้ว นอกเสียจากไม่มีเส้นอื่น ๆ ให้เลือกอีกแล้ว

การหารอยเดินเปิดออยเลอร์ ได้จากการหาวงออยเลอร์ ซึ่งต้องสร้างกราฟใหม่จากกราฟเดิมที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ ให้เป็นกราฟออยเลอร์ โดยการเพิ่มจุด 1 จุด ในกราฟ แล้วเชื่อมจุดคี่กับจุดที่เพิ่มเข้า จากนั้นหาวงออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ โดยให้เริ่มต้นที่จุดที่เพิ่มเข้า เมื่อได้วงออยเลอร์ แล้วทำการกำจัดจุดที่เพิ่มเข้าออกไป เส้นที่เชื่อมระหว่างจุดคี่กับจุดที่เพิ่มเข้าจะถูกลบออกด้วย จะได้รอยเดินเปิดออยเลอร์

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูตั้งคำถาม ว่า การหาวงออยเลอร์ของกราฟออยเลอร์ที่มีขนาดใหญ่ นักเรียนจะมีวิธีการใดในการหา แล้วให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์ จากนั้นครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 5
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปขั้นตอนวิธีในการหาวงออยเลอร์ในตัวอย่างที่ 5 แล้วครูจึงบอกว่า ขั้นตอนวิธีดังกล่าว คือ ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาหลักการของขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ โดยครูเป็นผู้แนะนำ
3. ครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถามในหน้า 73 แล้วสุ่มนักเรียน 2–3 คน เฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง แล้วครูให้นักเรียนลองหาวงออยเลอร์แบบอื่นๆ จากโจทย์ดังกล่าว แล้วให้นักเรียนนำเสนอในชั้นเรียน
4. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปหลักการของขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์อีกครั้ง
5 ครูนำสนทนาเกี่ยวกับการหารอยเดินเปิดออยเลอร์ว่าสามารถหาได้จากการหาวงออยเลอร์ โดยการสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์ แล้วใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ได้หรือไม่ โดยครูให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ และอภิปรายหาข้อสรุป จากนั้นครูสุ่มนักเรียน 2-3 คน นำเสนอผลการวิเคราะห์ดังกล่าว
6. ครูใช้การถามตอบ ในการสอนตัวอย่างที่ 6 และ 7
7. ครูให้นักเรียนจับคู่กัน 2 คน ตอบคำถามข้อ 1 และ 2 ในหน้า 76 แล้วสุ่มนักเรียน 2-3 กลุ่ม เฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3 ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2 หน้า 82 ข้อ 1-5	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

สาระสำคัญ

ปัญหาการหาเส้นทางการเดินทางของพนักงานเก็บค่าน้ำ พนักงานเก็บค่าไฟฟ้า บุรุษไปรษณีย์ รถเก็บขยะ ฯลฯ ว่าควรใช้เส้นทางใดในการทำงานที่รับผิดชอบให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด โดยสามารถประหยัดเวลา และค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการปฏิบัติหน้าที่ ซึ่งเส้นทางนั้นจะต้องมีระยะทางที่สั้นที่สุด การหาวงออยเลอร์สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาดังกล่าวได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

5. นำความรู้เกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

23. หาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ เมื่อกำหนดกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้
24. นำความรู้เรื่องการหาวงออยเลอร์ และความยาวของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ ใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุด ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

หลักการพิจารณาปัญหาโดยใช้กราฟออยเลอร์ในการหาวงออยเลอร์ ดังนี้

กรณีที่ 1 กราฟของปัญหาเป็นกราฟออยเลอร์ เราสามารถหาวงออยเลอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ได้

กรณีที่ 2 กราฟของปัญหาไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เราต้องสร้างกราฟใหม่จากกราฟเดิมให้เป็นกราฟออยเลอร์

2.1 ถ้ากราฟมีจุดคี่ เพียง 2 จุด กราฟออยเลอร์สร้างได้จากการเชื่อมคู่ของจุดคี่ด้วยวิถีที่สั้นที่สุด ซึ่งจะมีได้แบบเดียวเท่านั้น

2.2 ถ้ากราฟมีจุดคี่มากกว่า 2 จุด ซึ่งอาจจะเป็น 4, 6, 8, ... (จากทฤษฎีบท จุดคี่มีเป็นจำนวนคู่) กราฟออยเลอร์สร้างได้จาก การนำจุดคี่ทุกจุดในกราฟมาจับคู่ และหาวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดคี่แต่ละคู่ที่จับคู่กัน ซึ่งการจับคู่นั้นจับได้มากกว่า 1 แบบ ดังนั้นเราต้องเลือกการจับคู่ที่มีผลรวมของวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดคี่แต่ละคู่ ที่มีค่าน้อยที่สุด

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำสนทนาเรื่องเกี่ยวกับ การหาวงออยเลอร์ ซึ่งกราฟที่สามารถหาวงออยเลอร์ได้นั้นต้องเป็นกราฟออยเลอร์ แต่สถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน เมื่อสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนปัญหานั้นๆ กราฟที่สร้างขึ้นอาจไม่ใช่กราฟออยเลอร์ ดังนั้นจะมีวิธีการใดที่จะหาวงออยเลอร์จากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ได้ ครูให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ แล้วให้นักเรียนนำเสนอผลการวิเคราะห์ดังกล่าว จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 8 และ 9 โดยครูเป็นผู้แนะนำ จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปหลักการในการหาวงออยเลอร์ของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ แล้วครูจึงสรุปหลักการที่ถูกต้องในการหาวงออยเลอร์ของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์อีกครั้ง

2. ครูตั้งคำถามว่า การหาวงออยเลอร์ของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาให้กับบุคคลที่ประกอบอาชีพอะไรได้บ้าง โดยครูให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 10 และ 11 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

3. ครูให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาพร้อมหาคำตอบของปัญหาขึ้นเองจากประสบการณ์ แล้วสุ่มนักเรียน 2-3 คน นำเสนอ แล้วครูให้นักเรียนช่วยกันสรุป การหาวงออยเลอร์ของกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์ และประโยชน์ในการหาวงออยเลอร์

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 3.2 หน้า 83 ข้อ 6 และ 7	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 1 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

สาระสำคัญ

สถานการณ์บางสถานการณ์เราสามารถสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนสถานการณ์และแก้ปัญหาสถานการณ์ด้วยการให้สีลงบนจุดในกราฟ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

6. บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใด ๆ มาให้ได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

25. บอกบทนิยามของกราฟที่ให้สีบนจุด k สี และหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ เมื่อกำหนดกราฟใดๆ มาให้ได้
26. นำความรู้เรื่องการหาจำนวนสีน้อยที่สุดของกราฟ ไปใช้แก้ปัญหาการระบายสีแผนที่ เมื่อกำหนดแผนที่ใด ๆ มาให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม 1 ให้ G = (V(G), E(G)) และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

เราเรียกกราฟ G ว่าเป็น***กราฟที่ให้สีบนจุด k สี*** ได้ (k-colorable) ก็ต่อเมื่อเราสามารถกำหนดจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ... , k ลงบนจุดในกราฟ G จุดละ 1 จำนวน และจุดสองจุดใดที่ประชิดกันจะต้องได้รับการกำหนดจำนวนดังกล่าวที่ต่างกัน

บทนิยาม 2 เรากล่าวว่า กราฟ G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุดน้อยที่สุด k สี ก็ต่อเมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุด k สี

ถ้าให้ $\chi(G)$ คือ จำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ G เขียนแทนด้วย $k = \chi(G)$

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. ให้ C_n แทนวัฏจักรที่มีความยาว n จะได้ว่า

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 3 \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$$

2. ให้ P_n แทนวิถี ที่มีความยาว n จะได้ว่า $\chi(P_n) = 2$

3. ให้ T_n แทนต้นไม้ ที่มีจุด n จุดจะได้ว่า $\chi(T_n) = 2$

4. ให้ K_n แทนกราฟแบบบริบูรณ์ ที่มีจุด n จุดจะได้ว่า $\chi(K_n) = n$

สื่อการเรียนรู้

1. แผนที่ประเทศไทย
2. สมุดโทรศัพท์
3. เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำแผนที่ประเทศไทยมากางบนกระดานดำ แล้วตั้งคำถามว่า นักเรียนคิดว่าจะมีวิธีการใดที่สามารถหาจำนวนการใช้สีน้อยที่สุดในการระบายสีลงบนแผนที่ในเขตภาคกลางโดยมีเงื่อนไขว่าจังหวัดที่มีพรมแดนติดกันต้องใช้สีต่างกัน โดยครูให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์ แล้วนำเสนอผลการวิเคราะห์ จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อ 1 และ 2 และศึกษาคำตอบ ในหน้า 84 โดยครูเป็นผู้แนะนำ แล้วครูให้นักเรียนตอบคำถามข้อ 1 และ 2 ในหน้า 85

2. ครูให้นักเรียนแก้ปัญหาชวนคิด 4

3. ครูให้นักเรียนตอบคำถาม โดยใช้กราฟ G_1, G_2 และ G_3 ในหน้า 85 เพื่อนำสู่บทนิยาม 1 จากนั้นครูให้บทนิยาม 1 แล้วให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต

4. ครูให้บทนิยาม 2 จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต

5. ครูใช้การถามตอบในการสอนตัวอย่างที่ 1 แล้วให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายและสรุปข้อสังเกต จากนั้นครูให้นักเรียนทุกคนตอบคำถาม ในหน้า 88 แล้วให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 4.1 หน้า 89-91	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กราฟและการประยุกต์ของกราฟ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 ภาคเรียนที่ 2 เวลา 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เกี่ยวกับการให้สีกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

สาระสำคัญ

การให้สีกราฟสามารถนำมาแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันได้ ดังเช่น ปัญหาการจัดตารางสอน การจัดเวลาการประชุม ฯลฯ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

จุดประสงค์ปลายทาง ผู้เรียนสามารถ

7. นำความรู้เกี่ยวกับการให้สีกราฟไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

จุดประสงค์นำทาง ผู้เรียนสามารถ

27. นำความรู้เรื่องการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟใด ๆ ไปใช้แก้ปัญหาบางประการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสารและนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความร่วมมือ
2. ทำงานเป็นระบบ
3. มีความเชื่อมั่นในตนเอง

สาระการเรียนรู้

การให้สีกราฟสามารถนำมาแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันได้ ดังเช่น ปัญหาการจัดตารางสอน การจัดเวลาการประชุม และในการสื่อสารต่างๆ โดยการสร้างกราฟเป็นแบบจำลองแทนสถานการณ์ แล้วหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟ

สื่อการเรียนรู้

เครื่องฉายภาพข้ามศรีษะ และแผ่นโปร่งใส

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำสนทนาเกี่ยวกับตารางสอนของนักเรียน แล้วตั้งคำถามว่า นักเรียนคิดว่าถ้านักเรียนเป็นคนจัดตารางสอน นักเรียนจะมีวิธีการใดในการจัด โดยครูให้นักเรียนวิเคราะห์ แล้วนำเสนอผลการวิเคราะห์ดังกล่าว จากนั้นครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 3 และ 4 โดยครูเป็นผู้แนะนำ
2. ครูให้นักเรียนจับคู่กัน 2 คน ตอบคำถาม ในหน้า 94 แล้วสุ่มนักเรียน 2-3 กลุ่ม ออกมาเฉลยบนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ ครูตรวจสอบความถูกต้อง
3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปประโยชน์ในการหาจำนวนการให้สีน้อยที่สุดของกราฟว่าสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาอะไรได้บ้าง

การวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม 2. สังเกตจากการทำกิจกรรม 3. ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่อง 4.2 หน้า 95 -96	1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง 2. นักเรียนส่วนใหญ่ตั้งคำถามได้เหมาะสม 3. นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม 4. นักเรียนส่วนใหญ่ทำโจทย์แบบฝึกหัดท้ายเรื่องได้ได้ถูกต้อง

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นางสาวขวัญตา พันธุ์บ้านแหลม
วันเดือนปีเกิด	เกิดวันที่ 30 มีนาคม พุทธศักราช 2517
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลศิริราช จังหวัดกรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	44 / 1 หมู่ 9 ตำบลนครปฐม อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000 โทร. 034 - 259208
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนคงทองวิทยา อำเภอดอนตูม จังหวัดนครปฐม
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2529	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนธัมมสิริศึกษาสัตหีบ จังหวัดชลบุรี
พ.ศ. 2532	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตราชภัฏนครปฐม
พ.ศ. 2535	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสาธิตราชภัฏนครปฐม
พ.ศ. 2538	กศ.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี
พ.ศ. 2546	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จังหวัดกรุงเทพมหานคร