การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ปริญญานิพนธ์
ของ
จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
เมษายน 2545

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

บทคัดย่อ
ของ
จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
เมษายน 2545

จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ. (2545). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส, อาจารย์ละเอียด ปรารถนาดี

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ สร้างบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยใช้เวลาสอน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ และนำผลมาวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

A STUDY OF LEARNING ACHIEVEMENT ON VECTORS IN THREE DIMENSIONS OF MATHAYOM SUKSA V STUDENTS

AN ABSTRACT

BY

JEERASAK DEESAMOH

Presented in partial fulfillment of the requirements

For the Master of Education degree in Mathematics

April 2002

Jeerasak Deesamoh. (2002). *A Study of Learning Achievement on Vectors in Three Dimensions of Mathayom Suksa V Students*. Master Thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Mrs. Suwanna Claikrasae, Mrs. Laied Prathnadee.

This study was in response to an urgency call to add three dimensional vectors into the high school mathematics curriculum. As such, instructional materials covering the topics with a link to its two dimension counterpart were proposed and tested for its effectiveness.

A group of thirty-eight junior high school students [Mathayom Suksa V] from Prakanong Pitayalai in Bangkok took part as subjects in this study during the second semester of the 2001 academic year. They were taught, based on the lessons prepared by the researcher, for twenty 50-minute periods. A final achievement exam was given to the students whose scores were later analyzed and judged for its effectiveness by the Z-test for population proportion.

The findings revealed that the students were able to learn the concepts and applications of vectors in three dimensions at the .01 significance level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ของ
นายจีรศักดิ์ ดีสะเมาะ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาภรณ์ หะวานนท์)
วันที่...28....เดือน...เมษายน.......พ.ศ. 2545

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธาน
(อาจารย์ สุวรรณา คล้ายกระแส)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ละเอียด ปรารถนาดี)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนูกฤติ)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชุติวรรณ เพ็ญเพียร)

ปริญญานิพนธ์นี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัย
จากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำอย่างดียิ่งจาก อาจารย์ สุวรรณา คล้ายกระแส ประธานที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ และอาจารย์ ละเอียด ปรารถนาดี กรรมการที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนูกฤติ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และอาจารย์ ปรเมศวร์ ลิ้มสกุล อาจารย์ประจำหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนูกฤติ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชุติวรรณ เพ็ญเพียร ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดเห็นในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ซึ่งส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สุรพล วัฒนวิกย์กิจ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการเขียนบทคัดย่อภาษาอังกฤษของงานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ผู้อำนวยการ และคณะครูหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ถ้าปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีประโยชน์และเกิดคุณค่า ผู้วิจัยขอมอบความดีงามนี้ สำหรับบิดามารดาและครู-อาจารย์ ของผู้วิจัย

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและเป็นเกียรติอย่างยิ่ง และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

บัญชีตาราง

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล แสดงความคิดออกมาอย่างเป็นระเบียบ ง่าย สั้นและชัดเจน ตลอดจนสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ อีกทั้งความเจริญก้าวหน้าของแขนงวิชาต่างๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี ตลอดจนสังคมวิทยา ต่างก็ขึ้นอยู่กับพัฒนาการของคณิตศาสตร์เป็นส่วนใหญ่ ดังตัวอย่างของแขนงวิชาต่างๆ ที่ใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือ ดังนี้

ฟิสิกส์ : แคลคูลัส เรขาคณิตวิเคราะห์ เวกเตอร์ เมตริกซ์

เคมี : พีชคณิตและแคลคูลัส

ชีววิทยา : ความน่าจะเป็นและสถิติ

เศรษฐศาสตร์ : แคลคูลัส เมตริกซ์ กำหนดการเชิงเส้น (linear programming)

ภูมิศาสตร์ : ตรีโกณมิติ เรขาคณิตระบบยุคลิดและเรขาคณิตเชิงทรงกลม

สถาปัตยกรรมศาสตร์ : ตรีโกณมิติ เรขาคณิตระบบยุคลิดและเรขาคณิตโพรเจกทีฟ

ดนตรี : พีชคณิต (เศษส่วน อัตราส่วน) เป็นต้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). 2540 : 27)

ด้วยเหตุที่คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญดังกล่าวจึงจำเป็นต้องมีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับสภาพและความต้องการทางด้านเศรษฐกิจและสังคมอยู่เสมอ ดังที่ ปานทอง กุลนาถศิริ (วารสาร สสวท. ปีที่ 28 ฉบับที่ 108 มกราคม-มีนาคม. 2543) กล่าวว่า ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมาในต่างประเทศมีโครงการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับการเรียนการสอนและหลักสูตรคณิตศาสตร์หลายโครงการ โดยเฉพาะประเทศสหรัฐอเมริกา สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาซึ่งรู้จักกันในนาม The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ได้จัดทำและเผยแพร่เอกสารเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่สำคัญๆ ดังนี้

1. มาตรฐานหลักสูตรและการวัดผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ที่ชื่อว่า The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics ใน ค.ศ. 1989 (พ.ศ. 2532)

2. มาตรฐานการสอนคณิตศาสตร์ ที่ชื่อว่า The Professional Standards for Teaching Mathematics ใน ค.ศ. 1991 (พ.ศ. 2534)

3. มาตรฐานการประเมินผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ที่ชื่อว่า The Assessment Standards for School Mathematics ใน ค.ศ. 1995 (พ.ศ. 2538)

การจัดทำเอกสารมาตรฐานทั้งสามเล่มนี้ เพื่อเป็นการวางกรอบหลักสูตรที่มีศักยภาพ และกำหนดทิศทางการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับชั้น K-12 ให้ได้มาตรฐานเดียวกันทั้งประเทศ ทั้งในแง่ของเนื้อหาสาระของหลักสูตร การเรียนการสอน การวัดและประเมินผลทางคณิตศาสตร์ ในเวลาต่อมา ความก้าวหน้าและการพัฒนาอย่างรวดเร็วทางด้านเทคโนโลยีโดยเฉพาะอย่างยิ่งเทคโนโลยีสารสนเทศ (Information

Technology : IT) ทำให้ต้องทบทวนวิสัยทัศน์การจัดการศึกษาด้านต่างๆ ใหม่ โดยเฉพาะด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เพื่อเป็นการเตรียมและสร้างเยาวชนอเมริกันให้เป็นผู้ที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่สอดคล้องกับความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศที่พัฒนาไปอย่างรวดเร็ว NCTM จึงได้จัดทำเอกสารหลักการและมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ที่ชื่อว่า NCTM : Principles and Standards for School Mathematics ฉบับร่างเพื่อทำประชาพิจารณ์ใน ค.ศ. 1998 (พ.ศ. 2541) และเผยแพร่ในปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543)

นอกจากความเคลื่อนไหวในการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรในต่างประเทศแล้ว ประเทศไทยได้มีการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ฉบับ พ.ศ. 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และประกาศใช้ทั่วประเทศในปี พ.ศ. 2534 โดยได้มีการปรับปรุงระยะเวลาในการเรียนและเนื้อหาของวิชา โดยเฉพาะในด้านเนื้อหาได้พยายามเพิ่มเนื้อหาใหม่ๆ ซึ่งมีประโยชน์และเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ในระดับสูงให้นักเรียนได้ศึกษา ยิ่งไปกว่านั้นในปัจจุบัน ประเทศไทยกำลังอยู่ในระหว่างการดำเนินการเพื่อปรับปรุงเปลี่ยนแปลงการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาเพื่อให้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายให้ดำเนินการจัดทำกรอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานของกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์และกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทางสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจึงได้จัดทำเอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขึ้น ภายในเอกสารเล่มนี้ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ (12 ปี) และกำหนดสาระการเรียนรู้กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ (12 ปี) โดยแบ่งช่วงชั้นการเรียนรู้เป็น 4 ช่วงชั้นคือ ประถมศึกษาปีที่ 1-3 ประถมศึกษาปีที่ 4-6 มัธยมศึกษาปีที่ 1-3 และมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 และได้จัดหลักสูตรขั้นพื้นฐานโดยแบ่งสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ออกเป็นสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานและสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกไว้ในแต่ละช่วงชั้น

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน เป็นสาระการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับมาตรฐานช่วงชั้นที่กำหนดไว้ในหลักสูตร ส่วนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก เป็นสาระการเรียนรู้สำหรับการศึกษาต่อและอาชีพ ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกในช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ได้มีเนื้อหาเรื่อง " เวกเตอร์ในสามมิติ " รวมอยู่ด้วย

เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นเนื้อหาหนึ่งที่ใช้สอนในระดับอุดมศึกษา การนำเอาเนื้อหาคณิตศาสตร์บางเนื้อหาที่ใช้สอนในระดับอุดมศึกษามาดัดแปลงเพื่อใช้สอนในระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาได้นับว่ามีผลดี ดังคำกล่าวของ ณรงค์ ปั้นนิ่ม ที่กล่าวว่า "การปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรและวิธีสอนคณิตศาสตร์โดยนำเอาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาโดยปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนแล้ว แนวทางดังกล่าวมีผลดีอย่างยิ่งคือ

1. เป็นพื้นฐานของนักเรียนที่จะเรียนในระดับสูงต่อไป และสามารถปรับตัวให้เข้ากับสถานการณ์เมื่อได้เรียนเรื่องใหม่ในขั้นสูง

2. ลดความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษากับคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ทำให้สถาบันอุดมศึกษาต่างๆ สามารถยกมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นอุดมศึกษาให้สูงขึ้นได้

3. เป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตนักคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพสูงให้เพียงพอกับความต้องการของประเทศ ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า ประเทศเราขาดแคลนบุคคลประเภทนี้ รวมทั้งบุคคลที่มีความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

4. นักวิชาการแขนงอื่นๆ ที่ต้องการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์จะได้นำหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น

5. สำหรับผู้ที่ไม่มีโอกาสได้เข้าเรียนในระดับอุดมศึกษา ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะช่วยให้เข้าใจความเคลื่อนไหวต่างๆ ของโลกในปัจจุบันได้ดีขึ้นเพราะว่าผลงานการวิจัยต่างๆ และการให้ข่าวสารส่วนมากจะเสนอออกมาในรูปทางคณิตศาสตร์" (ณรงค์ ปั้นนิ่ม. 2519 : 1)

การศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ได้รับการพัฒนามาเป็นลำดับ จุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์เวกเตอร์เกิดขึ้นใน พ.ศ. 2129 เมื่อนักคณิตศาสตร์ชาวฮอลันดาชื่อ ไซมอน สตีวิน (Simon Stevin , พ.ศ. 2091–2163) ได้ตั้งกฎๆ หนึ่งขึ้นมาชื่อว่า "กฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน" (Parallelogram Law) หรือ "ทฤษฎีบทสามเหลี่ยมของแรง" (Theorem of the triangle of forces) ซึ่งเป็นกฎที่อธิบายถึงผลรวมหรือผลบวกของแรงตามความเป็นจริงตามกายภาพ หลังจากนั้น ผู้ที่มีบทบาทในการพัฒนาเวกเตอร์ที่ควรกล่าวถึงคือ เซอร์วิลเลียม โรแวน แฮมิลทัน (Sir William Rowan Hamilton , พ.ศ. 2348-2408) นักคณิตศาสตร์ชาวไอริช ผู้เสนอวิธีการใหม่ๆ และแง่คิดใหม่ๆ ใน "ทฤษฎีของควอเทอร์เนียน" (Theory of Quaternions) เมื่อ พ.ศ. 2386 สิ่งนี้ก่อให้เกิดความเข้าใจในเรื่องพีชคณิตและฟิสิกส์ดีขึ้นเป็นอันมาก ต่อมามีผู้เอาการวิเคราะห์ควอเทอร์เนียนและเรขาคณิตวิเคราะห์มาผสมผสานกันทำให้เกิดพีชคณิตของเวกเตอร์ขึ้น ซึ่งส่วนใหญ่เป็นผลงานของ โจซิอาห์ วิลลาร์ด กิบบส์ (Josiah Willard Gibbs , พ.ศ. 2382–2446) นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันและ โอลิเวอร์ เฮวีไซด์ (Oliver Heaviside , พ.ศ. 2393–2468) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ อนึ่ง ผู้ที่ขยายมโนมติของเวกเตอร์ไปสู่ปริภูมิที่มีมิติสูงขึ้นตามความต้องการทางเรขาคณิตและฟิสิกส์ ได้แก่ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันสองคน คือ แบร์นฮาร์ด รีมันน์ (Bernhard Riemann , พ.ศ. 2369–2409) และ เอลวิน บรูโน คริสโตฟเฟล (Elvin Bruno Christoffel , พ.ศ. 2372–2443) ผู้คิดค้นเรื่อง เทนเซอร์ (Tensor) ขึ้น ซึ่งทำให้การวิเคราะห์เวกเตอร์กลายเป็นกรณีเฉพาะของการวิเคราะห์เทนเซอร์ และเป็นผลให้เกิดการพัฒนาอย่างรวดเร็วในวิชาเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) ทั้งยังทำให้เกิดทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity) ขึ้นด้วย

ในปัจจุบันเป็นที่ยอมรับกันแล้วว่า เวกเตอร์เป็นเครื่องมือที่ดียิ่งที่ใช้อธิบายความคิดสำคัญๆ ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลายทฤษฎีบทกระทำได้ง่ายและรัดกุมเมื่อใช้เวกเตอร์ นอกจากนั้นเวกเตอร์ยังมีประโยชน์ในการศึกษาโครงสร้างของคณิตศาสตร์และเป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง เวกเตอร์ใน n-มิติ นั้นมีบทบาทสำคัญในเกือบทุกแขนงวิชา เช่น คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ วิทยาศาสตร์กายภาพ วิทยาศาสตร์ชีวภาพ สถิติ ตลอดจนเศรษฐศาสตร์และสังคมศาสตร์ ดังนั้นการศึกษาเวกเตอร์ใน n-มิติ นับว่ามีความสำคัญเพราะมีบทประยุกต์กว้างขวาง ส่วนเวกเตอร์ในสามมิติ มีความสำคัญเป็นพิเศษเพราะการรับรู้ของมนุษย์เคยชินกับโลกสามมิติ (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2526 : 8–9) ดังนั้นการศึกษาเรื่องเวกเตอร์ในสามมิตินับว่ามีประโยชน์อย่างยิ่งต่อผู้ศึกษา

เนื่องจากหลักสูตรฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) มีบทเรียนที่เกี่ยวข้องกับการนำเวกเตอร์ทั้งสองมิติและสามมิติไปประยุกต์ใช้ เช่น การเคลื่อนที่ แรง มวลและกฎการเคลื่อนที่ สมดุลกล งานและพลังงาน การเคลื่อนที่แบบต่างๆ ความร้อน สมบัติของแก๊สและทฤษฎีจลน์ เป็นต้น แต่ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524

(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้กำหนดเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ ไว้ในหนังสือเรียน ค014 สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งภายในบทเรียนนี้ได้กล่าวเพียงเวกเตอร์ในความหมายทางเรขาคณิตและเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติเท่านั้น ซึ่งไม่สอดคล้องกับเนื้อหาในวิชาฟิสิกส์ที่นำเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติไปประยุกต์ใช้บ้างแล้ว ด้วยเหตุผลนี้ทำให้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่าควรนำเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ รวมอยู่ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งความคิดเห็นของผู้วิจัยสอดคล้องกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่กำลังปรับปรุงเปลี่ยนแปลงใหม่ แต่เนื่องจากหลักสูตรดังกล่าวเป็นหลักสูตรที่กำหนดให้สถานศึกษากำหนดสาระการเรียนรู้ของเนื้อหาวิชาเองตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่หลักสูตรกำหนดให้ จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะสร้างบทเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง “เวกเตอร์ในสามมิติ” ขึ้นและนำบทเรียนดังกล่าวไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งผลที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้ อาจนำไปใช้เป็นแนวทางในการดำเนินงานปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและอาจเป็นทางเลือกหนึ่งที่สถานศึกษาจะนำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นนี้ไปใช้สอนในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติตามบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ได้บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. ทำให้ทราบถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
3. ผลจากการวิจัย อาจนำไปใช้เป็นแนวทางในการดำเนินงานปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ซึ่งได้จากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จากทั้งหมด 4 ห้องเรียน โดยทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนของแต่ละห้องเรียนแบบคละความสามารถทางการเรียน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เวลาทดลองในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนตามปกติ เป็นเวลาทั้งหมด 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อ ดังต่อไปนี้

1. เวกเตอร์
2. การบวกและการลบเวกเตอร์
3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
4. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก
5. ผลคูณเชิงสเกลาร์
6. ผลคูณเชิงเวกเตอร์
7. การนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์

เนื้อหาของบทเรียนมีลักษณะดังนี้ ในตอนแรกเป็นการนำเสนอเวกเตอร์ในความหมายทางเรขาคณิต ต่อมาเป็นการนำเสนอเวกเตอร์ในอีกลักษณะหนึ่ง คือเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และสุดท้ายเป็นการกล่าวถึงบทประยุกต์ของเวกเตอร์ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์บางเรื่อง ในบทเรียนนี้จะอธิบายเนื้อหาให้มีความเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน เรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยาก และได้กำหนดแบบฝึกหัดไว้ท้ายหัวข้อทุกหัวข้อ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ ได้แก่ บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 ซึ่งเรียนเรื่องเมตริกซ์และดีเทอร์มินันต์ ตามหัวข้อในบทที่ 3 ของหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค013 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) มาแล้ว

2. บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หมายถึง บทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นโดยยึดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จากเอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

4. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. การเรียนการสอนเป็นไปภายใต้ภาวะปกติในชั้นเรียนทั่วๆ ไป

2. ผลการวิจัยเป็นผลการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากคะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. เนื้อหาเวกเตอร์ตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค014 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และเนื้อหาเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ตามเอกสารวิชาคณิตศาสตร์เล่ม 3 สำหรับนักเรียนในโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

2. งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องเวกเตอร์

3. งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

1. เนื้อหาเวกเตอร์ตามหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค014 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และเนื้อหาเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ตามเอกสารวิชาคณิตศาสตร์เล่ม 3

เนื้อหาเวกเตอร์ที่บรรจุอยู่ในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค014 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. เวกเตอร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง ปริมาณสเกลาร์ ปริมาณเวกเตอร์ สัญลักษณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์ บทนิยามการเท่ากันของเวกเตอร์และบทนิยามนิเสธของเวกเตอร์

2. การบวกเวกเตอร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามการบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ สมบัติของการบวกเวกเตอร์ ซึ่งประกอบด้วย สมบัติปิด สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติการมีอินเวอร์สและสมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน

3. การลบเวกเตอร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามการลบเวกเตอร์

4. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ซึ่งประกอบด้วย สมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการแจกแจง และกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ที่นำไปประยุกต์ใช้กับเรขาคณิตหรือวิชาอื่นๆ

5. การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึงทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทในเรขาคณิต ที่พิสูจน์ได้โดยใช้เวกเตอร์

6. เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนได้รู้จักเวกเตอร์ในอีกลักษณะหนึ่งคือ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก ประกอบด้วย บทนิยามการเท่ากัน การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ นอกจากนั้นยังกล่าวถึงขนาดของเวกเตอร์และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

7. ผลคูณเชิงสเกลาร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์และสมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

8. บทสรุปของเวกเตอร์ เป็นการสรุปสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์คือ สมบัติการบวกเวกเตอร์ ประกอบด้วย สมบัติปิด สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติการมีอินเวอร์ส และสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ประกอบด้วย สมบัติปิด สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการแจกแจง สมบัติการมีเอกลักษณ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 1–47)

สำหรับเนื้อหาเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ที่บรรจุอยู่ในเอกสารวิชาคณิตศาสตร์เล่ม 3 สำหรับนักเรียนในโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ โดยใช้ระบบมือขวา พิกัดของจุดในปริภูมิ 3 มิติ ระยะทางระหว่างจุดสองจุด ทฤษฎีบทของระยะทางระหว่างจุดสองจุด

2. เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามของเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ การเท่ากันของเวกเตอร์ ขนาดของเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย โคไซน์แสดงทิศทาง ความหมายทางเรขาคณิตของโคไซน์

3. โอเปอเรชันของเวกเตอร์ เป็นการแนะนำให้ผู้เรียนทราบถึง บทนิยามการบวกและการลบเวกเตอร์ ความหมายทางเรขาคณิตของการบวกเวกเตอร์ ความหมายของการลบเวกเตอร์ในทางเรขาคณิต บทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ บทนิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ ความหมายของผลคูณเชิงสเกลาร์ในทางเรขาคณิต บทนิยามผลคูณเชิงเวกเตอร์ ความหมายของ $|\bar{a} \times \bar{b}|$ ในทางเรขาคณิต (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 1–45)

เนื่องจากเอกสารวิชาคณิตศาสตร์เล่ม 3 เป็นเอกสารที่ใช้ในโปรแกรมเสริมวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ของโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) ซึ่งมีจุดประสงค์เพื่อเสริมสร้างให้นักเรียนมีความรู้ในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้งและกว้างขวางกว่าในหลักสูตรปกติ ภายในเอกสารเล่มนี้ได้บรรจุเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ รวมอยู่ด้วย ซึ่งมีหัวข้อต่างๆ ดังได้กล่าวไว้แล้วในข้างต้น แต่ในปัจจุบัน สสวท. ได้ดำเนินการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ขึ้นใหม่ โดยมีเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติรวมอยู่ด้วย เพื่อให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สายวิทยาศาสตร์ ทุกคนได้เรียน ด้วยเหตุผลนี้ผู้วิจัยมีความคิดว่าควรนำเอกสารข้างต้นมาปรับปรุงให้มีความง่ายขึ้นและเปลี่ยนแปลงแนวการนำเสนอเนื้อหาบางประการ เพื่อทำให้ได้บทเรียนที่มีความเหมาะสมกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์

2. งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องเวกเตอร์

เนื่องจากเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์มีความสำคัญ จึงมีผู้ที่สนใจทำการวิจัยเกี่ยวกับเรื่องเวกเตอร์ในด้านต่างๆ ดังนี้

ยงยุทธ ธนูกฤติ (2516 : 32 – 39) ได้ศึกษาการทดลองใช้เวกเตอร์ในการสอนเรขาคณิตวิเคราะห์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูงปีที่ 1 ของวิทยาลัยครูสวนสุนันทา ซึ่งเลือก

เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 17 (เรขาคณิตวิเคราะห์ 1) ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2515 จำนวน 83 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลอง 45 คน และกลุ่มควบคุม 38 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ด้วยวิธีการใช้เวกเตอร์และวิธีการเดิมไม่ทำให้ผลการเรียนของนักเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่ในบางส่วนผลการเรียนของนักเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 คือ

- ความสามารถในการเข้าใจคำอนิยาม คำนิยาม และความสัมพันธ์ของคำอนิยามและคำนิยามของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน
- ความสามารถในการนำไปใช้ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน
- ความสามารถในการเขียนกราฟของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน
- ความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการเดิมสูงกว่ากลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการใช้เวกเตอร์

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องเวกเตอร์ใน 2 มิติ นอกจากของ ยงยุทธ ธนูกฤติ แล้วยังมีงานวิจัยอื่นๆ อีก เช่น งานวิจัยของ เสาวนิตย์ วงศ์อำไพ วันชัย ทัพพะปุรณะ และ กับรัด ซึ่งมีสาระสำคัญดังนี้

เสาวนิตย์ วงศ์อำไพ (2516 : 20 – 23) ได้ศึกษาความสามารถในการเรียนเวกเตอร์ของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนสหศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 , 2 และ 3 โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม กรุงเทพมหานคร จำนวนชั้นละ 24 คน รวม 72 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนเวกเตอร์ได้และนักเรียนในระดับชั้นที่สูงสามารถเรียนเวกเตอร์ได้ดีกว่านักเรียนในระดับที่ต่ำกว่า อีกหลายปีต่อมา วันชัย ทัพพะปุรณะ (2529 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนดีบุกพังงาวิทยายน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 โรงเรียนดีบุกพังงาวิทยายน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2528 จำนวน 72 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 สามารถเรียนเรื่องเวกเตอร์ได้และมีความเป็นไปได้ที่จะเริ่มสอนเรื่องเวกเตอร์ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กับรัด (Gubrud. 1971 : 6468 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8–10 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 และนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับที่สูงกว่ามีความสามารถทางการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

ส่วนงานวิจัยที่ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการสอนเวกเตอร์ใน 2 มิติ ในลักษณะต่างๆ มีหลายเรื่อง เช่น งานวิจัยของ ละเมียด กรบงกชมาส รวิวรรณ เทนอิสสระ วัชรี กาญจน์กีรติ มนู สืบพงษ์พันธุ์ นันทิยา ธนูกฤติ วีรยุทธ ด้วงใย และประจิต เอื้ออภิสิทธิ์วงศ์ ซึ่งมีสาระสำคัญดังนี้

ละเมียด กรบงกชมาส (2522 : 70) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง " เวกเตอร์ " โดยวิธีสอนแบบผสมกับวิธีสอนแบบบอกให้รู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งสรุปว่าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง " เวกเตอร์ " โดยใช้วิธีสอนแบบผสมกับวิธีสอนแบบบอกให้รู้แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .01 และผลการวิเคราะห์ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการเรียนโดยวิธีแบบผสม ปรากฏว่า นักเรียนจำนวนร้อยละ 91.43 เห็นว่า การสอนแบบผสม

ทำให้มีการฝึกในด้านการตอบคำถาม รองลงมา นักเรียนจำนวนร้อยละ 88.57 เห็นว่าการเรียนแบบนี้เข้าใจบทเรียนดีขึ้น มีโอกาสได้ร่วมกิจกรรมการสอนและมีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ในปีเดียวกัน รวิวรรณ เทนอิสสระ (2522 : 38 – 43) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2521 ของโรงเรียนวิสุทธิกษัตรี อำเภอพระประแดง จังหวัดสมุทรปราการ จำนวน 60 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 30 คน โดยการสุ่ม ผลการวิจัยปรากฏว่า หน่วยการเรียนการสอนสามารถใช้กับนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ได้ไม่แตกต่างจากการสอนตามปกติของครู แต่หน่วยการเรียนการสอนมีข้อดี คือ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง ทราบความก้าวหน้าในการเรียนและข้อบกพร่องของตนเอง

วัชรี กาญจน์กีรติ (2523 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายในการสอนเรื่องเวกเตอร์ สำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนพรหมานุสรณ์ จังหวัดเพชรบุรี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนพรหมานุสรณ์ จังหวัดเพชรบุรี จำนวน 34 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) ผลการสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) ผลการเรียนของนักเรียนชายและหญิงเมื่อได้รับการสอนทั้งสองแบบแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ผลการเรียนของนักเรียนกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำเมื่อได้รับการสอนทั้งสองแบบแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 4) มีปฏิสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ระหว่างวิธีสอนกับระดับความสามารถ 5) มีปฏิสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ระหว่างวิธีสอนกับเพศ 6) ความคงทนของการเรียนรู้ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 7) นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้สึกและความคิดเห็นที่ดีต่อการสอนแบบค้นพบ หลังจากนั้น มนู สืบพงษ์พันธุ์ (2524 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ผลจากการใช้วิธีสอนที่แตกต่างกันในวิชา ค412 เรื่องเวกเตอร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชัยนาทพิทยาคม จังหวัดชัยนาท กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชัยนาทพิทยาคม จังหวัดชัยนาท ปีการศึกษา 2523 จำนวนทั้งสิ้น 80 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่มๆ ละ 40 คน โดยกลุ่มแรกใช้วิธีสอนแบบค้นพบ ส่วนอีกกลุ่มใช้วิธีสอนแบบบรรยาย ผลของการวิจัยปรากฏว่า 1) วิธีสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน 2) ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มระดับความสามารถเดียวกัน เมื่อเรียนโดยวิธีสอนแบบค้นพบกับแบบบรรยาย 3) ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนเพศเดียวกันเมื่อเรียนโดยวิธีสอนแบบค้นพบและแบบบรรยาย 4) ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนกับระดับความสามารถของนักเรียน 5) ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอนกับเพศของนักเรียน 6) มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีสอน เพศ และระดับความสามารถของนักเรียน 7) การสอนแบบค้นพบกับการสอนแบบบรรยายมีผลให้นักเรียนเกิดความคงทนในการเรียนรู้ไม่แตกต่างกัน และ 8) นักเรียนมีทัศนคติต่อวิธีสอนแบบค้นพบในทางบวก

นันทิยา ธนูกฤติ (2526 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนเรื่องเวกเตอร์ ที่จัดเนื้อหาสาระแบบเรขาคณิตและแบบพีชคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียน ค013 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525 ของโรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี จำนวน 66 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองเป็นกลุ่มที่เรียนเรื่องเวกเตอร์ที่จัดเนื้อหาสาระแบบพีชคณิต กลุ่มควบคุมเป็นกลุ่มที่เรียนเรื่องเวกเตอร์ที่จัดเนื้อหาสาระแบบเรขาคณิต ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) วิธีสอนที่จัดเนื้อหาทั้งสองแบบให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ไม่แตกต่างกัน

2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ที่จัดเนื้อหาสาระแบบเรขาคณิตและแบบพีชคณิตของนักเรียนชายและหญิงไม่แตกต่างกัน และ 3) ปฏิสัมพันธ์ระหว่างเพศและวิธีการสอนไม่มีผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ที่จัดเนื้อหาสาระแบบเรขาคณิตและแบบพีชคณิต

นอกจากนี้ วีรยุทธ ด้วงใย (2536 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง " เวกเตอร์ " ระหว่างกลุ่มที่สอนโดยการคัดสรรกลวิธีการสอนกับการสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตวัดพระศรีมหาธาตุ วิทยาลัยครูพระนคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2535 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 45 คน แล้วจับฉลากเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง " เวกเตอร์ " ของกลุ่มที่สอนโดยการคัดสรรกลวิธีการสอนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผลอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ ประจิต เอื้ออภิสิทธิ์วงศ์ (2537 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง " เวกเตอร์ " ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยการตรวจแบบฝึกหัดโดยครูและกลุ่มที่ตรวจแบบฝึกหัดด้วยตนเองจากการเฉลยคำตอบของครู โรงเรียนมัธยมวัดดุสิตาราม กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 ที่ได้จากการสุ่มแบบกลุ่มจำนวน 2 ห้องเรียน แล้วจับฉลากเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมจำนวนนักเรียน 39 คน และ 40 คน ตามลำดับ ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง " เวกเตอร์ " ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยการตรวจแบบฝึกหัดโดยครูและกลุ่มที่ตรวจแบบฝึกหัดด้วยตนเองจากการเฉลยคำตอบของครู โรงเรียนมัธยมวัดดุสิตาราม กรุงเทพมหานคร ไม่แตกต่างกัน

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ทำให้พอสรุปได้ว่า การศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์ จะมีอยู่ 2 แนวทาง คือแนวทางแรกจะเป็นการศึกษาการนำเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์มาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า แนวทางนี้จะทำให้ทราบถึงความสามารถทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ของนักเรียนในระดับชั้นต่าง ๆ เพื่อที่จะเป็นแนวทางในการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้มีความเหมาะสมต่อไป ส่วนแนวทางที่สองจะเป็นการศึกษาเรื่องเวกเตอร์ในด้านการเปรียบเทียบวิธีสอน ซึ่งเป็นการวิจัยที่ต้องการหาวิธีสอนที่มีความเหมาะสมกับเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ เพื่อที่จะใช้แก้ไขหรือปรับปรุงการเรียนการสอนเรื่อง เวกเตอร์ ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

3. งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเรื่อง ลิมิต กำหนดการเชิงเส้น เรขาคณิตนอนยุคลิเดียน ความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ การลงรอยกันเบื้องต้น ฟังก์ชันก่อกำเนิด เศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้นและคณิตศาสตร์เต็มหน่วย ซึ่งมีสาระสำคัญดังต่อไปนี้

เสกสรร ดำกระบี่ (2517 : 20 – 22) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 72 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 48 คน ซึ่งเป็นนักเรียนโรงเรียน

คณะราษฎรบำรุง จังหวัดยะลา ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถทางการเรียนเรื่องลิมิต แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิมิต

สุทธิพงษ์ พะลัง (2521 : 32 – 35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชากำหนดการเชิงเส้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายพณิชยการ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ของวิทยาลัยเทคโนโลยีและอาชีวศึกษา วิทยาเขตพณิชยการพระนคร กรุงเทพมหานคร ชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 มีความสามารถทางการเรียนวิชากำหนดการเชิงเส้น และความสามารถทางการเรียนวิชากำหนดการเชิงเส้นของนักเรียนทั้งสองชั้นไม่แตกต่างกัน หลังจากนั้น นพดล สุธาพาณิชย์ (2524 : 22 – 25) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยุคลิเดียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวนชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถทางการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยุคลิเดียนได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา (2524 : 19 – 23) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เรียนคณิตศาสตร์ สาย 1 ของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดมหาสารคาม ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ดังนั้นจึงควรเน้นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

สิรสินธ์ นุชนาถ (2538 : 52 – 58) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนคงคาราม อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถทางการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ในปีเดียวกัน ดี บางกระ (2538 : 18 – 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถทางการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และปรีชา จั่นกล้า (2539 : 20 – 22) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนหัตถสารเกษตรวิทยาคาร อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี จำนวน 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรื่องเศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ดรัมมอนด์ (Drummond. 1989 : 641 – A) ได้ทำการวิจัยออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics) สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยประกอบด้วยเรื่อง เมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับและความน่าจะเป็น ทฤษฎีกราฟ กราฟต้นไม้ (Tree) และ Recursion กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ผ่านการเรียนรายวิชาพีชคณิต 1 เรขาคณิต และพีชคณิต 2 จำนวน 203 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย

จากการศึกษาผลการวิจัยดังกล่าวพบว่าสอดคล้องกับคำกล่าวของ บรูเนอร์ (Bruner. 1966 : 30) ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใดๆ ให้แก่นักเรียนระดับใดก็ได้แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหา และวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนก่อน

งานวิจัยดังกล่าวนับได้ว่าเป็นงานวิจัยที่มีประโยชน์ต่อการพัฒนาและการดำเนินการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศไทย เพราะงานวิจัยในลักษณะนี้จะทำให้ทราบถึงผลสัมฤทธิ์หรือความสามารถทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในเนื้อหาต่างๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเป็นสิ่งที่ช่วยในการประกอบการตัดสินใจก่อนที่จะทำการพัฒนาและปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ต่อไป

บทที่ 3
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
3. วิธีการดำเนินการวิจัย
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ซึ่งได้จากการสุ่มเลือกตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จากทั้งหมด 4 ห้องเรียน โดยทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนของแต่ละห้องเรียนแบบคละความสามารถทางการเรียน

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 36 ข้อ ตามที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น

ลักษณะของเครื่องมือ

1. บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนใน 20 คาบๆ ละ 50 นาที ประกอบด้วยสาระการเรียนรู้และจำนวนคาบ ดังต่อไปนี้

- เวกเตอร์ (2 คาบ)
- การบวกและการลบเวกเตอร์ (1 คาบ)
- การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (2 คาบ)
- เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (7 คาบ)
- ผลคูณเชิงสเกลาร์ (2 คาบ)

- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (3 คาบ)
- การนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์ (3 คาบ)

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 36 ข้อ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ และเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 1 ข้อ

ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ศึกษาบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างบทเรียน โดยศึกษาจากหนังสือและตำราที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1.1 หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค014 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 1–47)

1.2 เอกสารวิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 3 สำหรับนักเรียนในโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 1–45 , 67–7)

1.3 เวคเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ (ยงยุทธ ธนูกฤติ. 2520 : 1–55)

1.4 ฟิสิกส์กับเวกเตอร์วิเคราะห์ (ประเสริฐ ภูจันท์ึก. 2525 : 29 – 58)

1.5 Multivariable CALCULUS (Anton. 1992 : 838–876)

2. กำหนดจุดประสงค์ โดยมีจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ดังนี้ มุ่งให้นักเรียนสามารถ

2.1 หาผลบวกเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้

2.2 หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

2.3 นำสมบัติต่างๆ ของเวกเตอร์ไปใช้ได้

3. สร้างบทเรียน ตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนบทเรียน เกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ให้ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อใช้สอนในเวลา 20 คาบๆ ละ 50 นาที

<u>ขั้นที่ 2</u> นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ตรวจแก้ไข ปรับปรุง เพื่อวิจารณ์และชี้แนะข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

<u>ขั้นที่ 3</u> นำบทเรียนที่ปรับปรุงไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 ซึ่งไม่ใช่นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ซึ่งนักเรียนทั้ง 10 คนนี้เป็นอาสาสมัคร โดยใช้เวลาสอนรวม 20 คาบๆ ละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่องในด้านความยากง่าย ภาษาและเวลาที่ใช้สอนของบทเรียนแล้วนำมาปรับปรุงและให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจแก้ไขอีกครั้ง ซึ่งเป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

4. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ และเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 2 ข้อ

<u>ขั้นที่ 2</u> นำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์และผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ตรวจคัดเลือก เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหาและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ซึ่งจะได้แบบทดสอบจำนวน 51 ข้อ ประกอบด้วยแบบทดสอบปรนัยจำนวน 50 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย 1 ข้อ โดยที่แบบทดสอบอัตนัยจะนำมาวิเคราะห์เพื่อการอภิปรายผล

<u>ขั้นที่ 3</u> นำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมในข้อที่ 3 ที่ได้ทดลองสอนมาแล้วจำนวน 10 คน ใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r)

<u>ขั้นที่ 4</u> คัดเลือกแบบทดสอบปรนัยที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 35 ข้อ จาก 50 ข้อ โดยแบบทดสอบปรนัยที่คัดเลือกแล้วมีค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเมื่อใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (KR-20) เท่ากับ 0.92 ส่วนแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 1 ข้อ จะนำมาแก้ไขอีกครั้ง เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา

วิธีการดำเนินการวิจัย

1. นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในกลุ่มตัวอย่าง 38 คน โดยใช้เวลาสอนในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนตามปกติ เป็นเวลาทั้งหมด 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง ในระหว่างการเรียนการสอนจะมีการเก็บคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของแต่ละหัวข้อ ซึ่งมีคะแนนรวม 70 คะแนน เพื่อใช้ในการประเมินผลตามเกณฑ์ประสิทธิภาพของบทเรียน

2. ภายหลังจากการสอนครบ 20 คาบแล้ว จึงทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที

3. ตรวจข้อสอบให้คะแนน แบบทดสอบปรนัยแต่ละข้อถ้าตอบถูกได้ 1 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบได้ 0 คะแนน ส่วนแบบทดสอบอัตนัยให้คะแนน 10 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้ไปทำการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

4. หาประสิทธิภาพของบทเรียน โดยหาความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของแต่ละหัวข้อกับคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หลังจากการใช้บทเรียน โดยคิดเป็นค่าร้อยละ จากนั้นนำผลที่ได้มาเทียบหาประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์ 70 / 70

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. หาประสิทธิภาพของบทเรียนโดยใช้สูตร E_1 / E_2

3. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ในการทดสอบ (Z-Test for Population Proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติหาประสิทธิภาพของบทเรียนโดยใช้สูตร E_1 / E_2
3. สถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z
4. สถิติหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคำนวณจากสูตร KR-20

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิเคราะห์ตามเกณฑ์ประสิทธิภาพ 70 / 70
2. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้ จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ
4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
5. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของแต่ละหัวข้อและคะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิเคราะห์ตามเกณฑ์ประสิทธิภาพ 70 / 70

ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิเคราะห์จากคะแนนที่ได้จากการตรวจแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของแต่ละหัวข้อ ซึ่งมีทั้งหมด 7 หัวข้อ กับคะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 การหาประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิเคราะห์ตามเกณฑ์ประสิทธิภาพ (70 / 70)

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนข้อ	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
- จากการทำแบบฝึกหัดเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ	38	29	70	55.63	79.47	5.12
- จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	38	35	35	25.55	73.00	2.80

จากตาราง 1 แสดงว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งได้รับการสอนด้วยบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ได้คะแนนจากการทำแบบฝึกหัดเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 29 ข้อ โดยได้คะแนนเฉลี่ยเป็น 55.63 คิดเป็นร้อยละ 79.47 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 5.12

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งได้รับการสอนด้วยบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ได้คะแนนจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 35 ข้อ โดยได้คะแนนเฉลี่ยเป็น 25.55 คิดเป็นร้อยละ 73 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.80

จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลข้างต้นจึงสรุปได้ว่า ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ คือ 79.47 / 73.00 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 70 / 70 แสดงว่าบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ

2. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้ จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้หาได้ดังนี้ คือ กรณีที่จุดประสงค์ใดมีข้อคำถามที่เป็นข้อสอบ 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละ คือ ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้นและกรณีที่จุดประสงค์ใดมีข้อคำถามที่เป็นข้อสอบมากกว่า 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละหาได้จากผลบวกของค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้นหารด้วยจำนวนข้อคำถามที่เป็นข้อสอบในจุดประสงค์นั้น ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ข้อที่	จำนวนนักเรียนที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 1 บอกความหมายของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ได้	1	37	97.37	97.37
จุดประสงค์ที่ 2 เขียนส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ที่กำหนดให้ และใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง	2	24	63.16	63.16
จุดประสงค์ที่ 3 บอกได้ว่าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่	3	33	86.84	86.84
จุดประสงค์ที่ 4 หานิเสธของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	4	35	92.10	92.10
จุดประสงค์ที่ 5 หาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	5	34	89.47	89.47
จุดประสงค์ที่ 6 บอกสมบัติต่าง ๆ ของการบวกเวกเตอร์ได้	6	30	78.95	78.95
จุดประสงค์ที่ 7 หาผลลบของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	7 8	22 25	57.89 65.79	61.84
จุดประสงค์ที่ 8 บอกสมบัติต่าง ๆ ของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และนำไปใช้ได้	9	33	86.84	86.84

ตาราง 2 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้	ข้อที่	จำนวนนักเรียนที่ผ่าน(คน)	ร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 9 บอกความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = a\bar{v}$	10	23	60.53	60.53
จุดประสงค์ที่ 10 บอกพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ เมื่อกำหนดพิกัดของจุดบางจุดให้	11	31	81.58	81.58
จุดประสงค์ที่ 11 หาโพรเจกชันของจุดที่กำหนดบนระนาบ xy หรือ yz หรือ xz ได้	12	36	94.74	94.74
จุดประสงค์ที่ 12 หาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดในปริภูมิ 3 มิติ ได้	13	36	94.74	94.74
จุดประสงค์ที่ 13 เขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในรูป $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ หรือ $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$	14	33	86.84	86.84
จุดประสงค์ที่ 14 บอกได้ว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่ และนำความรู้เรื่องการเท่ากันไปใช้	15	13	34.21	34.21
จุดประสงค์ที่ 15 หาผลบวก ผลลบ ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้	16 17	30 34	78.95 89.47	84.21
จุดประสงค์ที่ 16 บอกขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้	18	32	84.21	84.21

ตาราง 2 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้	ข้อที่	จำนวนนักเรียนที่ผ่าน(คน)	ร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 17 หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	19 20	31 24	81.58 63.16	72.37
จุดประสงค์ที่ 18 หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	21	37	97.37	97.37
จุดประสงค์ที่ 19 บอกได้ว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่	22	18	47.37	47.37
จุดประสงค์ที่ 20 หาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	23	35	92.10	92.10
จุดประสงค์ที่ 21 นำสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ไปใช้ได้	24 25	17 22	44.74 57.89	51.31
จุดประสงค์ที่ 22 หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้	26 27	35 27	92.10 71.05	81.57
จุดประสงค์ที่ 23 นำสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปใช้ได้	28 29 30 31 32	18 27 24 34 26	47.37 71.05 63.16 89.47 68.42	67.89

ตาราง 2 (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้	ข้อที่	จำนวนนักเรียนที่ผ่าน(คน)	ร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่าน
จุดประสงค์ที่ 24 นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางเรขาคณิต เรื่อง การใช้เวกเตอร์พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต	33	23	60.53	60.53
จุดประสงค์ที่ 25 นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางฟิสิกส์ เรื่อง งานและโมเมนต์ของแรง	34 35	27 8	71.05 21.05	46.05

จากตาราง 2 แสดงถึงค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 38 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้ ปรากฏว่า จุดประสงค์การเรียนรู้ที่มีจำนวนนักเรียนผ่านมากที่สุด คือ จุดประสงค์ที่ 1 และ 18 คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 97.37 ส่วนจุดประสงค์การเรียนรู้ที่มีจำนวนนักเรียนผ่านน้อยที่สุด คือ จุดประสงค์ที่ 14 คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 34.21 โดยสรุปพบว่า จุดประสงค์การเรียนรู้ที่มีค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านน้อยกว่าร้อยละ 50 มีจุดประสงค์ที่ 14, 19 และ 25 ส่วนจุดประสงค์อื่นๆ มีค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านมากกว่าร้อยละ 50

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	38	35	25.55	73.00	2.80

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 38 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 25.55 คิดเป็นร้อยละ 73 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.80

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ตาราง 4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	38	38	100

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ทุกคนได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

5. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ตาราง 5 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5	**38**	**38**	**6.16 ****

**** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01**

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5
สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน วิธีการดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีการดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนใน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่กำหนด เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปทดลองสอนกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 38 คน โดยใช้เวลาสอนในชั่วโมงเรียนของชั้นเรียนตามปกติ เป็นเวลาทั้งหมด 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง

2. ภายหลังจากการสอนครบ 20 คาบ แล้วทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 35 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 1 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที

3. หาประสิทธิภาพของบทเรียนตามเกณฑ์ 70 / 70

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

1. ค่าประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิเคราะห์ตามเกณฑ์ประสิทธิภาพ 70 / 70

2. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้ จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

5. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปรากฏผลดังนี้

1. ร้อยละของค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนเป็น 79.74 และร้อยละของค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็น 73.00 ดังนั้น ประสิทธิภาพของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ คือ 79.74 / 73.00 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 70 / 70 แสดงว่าบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ

2. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยสรุปพบว่า จุดประสงค์การเรียนรู้ที่มีค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านน้อยกว่าร้อยละ 50 มีจุดประสงค์ที่ 14, 19 และ 25 ส่วนจุดประสงค์อื่นๆ มีค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านมากกว่าร้อยละ 50

3. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 25.55 คิดเป็นร้อยละ 73 ของคะแนนเต็มและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.80

4. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ทุกคนได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม คิดเป็นร้อยละ 100 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

5. จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่สอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุต่างๆ ดังต่อไปนี้

ด้านเนื้อหา

บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยได้พยายามสร้างขึ้นเป็นบทเรียนที่มีเนื้อหาค่อนข้างเหมาะสม เรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยาก ใช้ภาษาที่เข้าใจง่าย มีตัวอย่างและรูปภาพประกอบ อีกทั้งยังมีบทประยุกต์ที่เชื่อมโยงความรู้ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์เองและวิชาคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ ซึ่งทำให้บทเรียนมีความน่าสนใจ

ด้านผู้เรียน

ในขณะที่ดำเนินการทดลอง นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสนใจและตั้งใจเรียนเป็นอย่างดี สังเกตได้จากขณะที่ผู้วิจัยกำลังสอน นักเรียนกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่จะตั้งใจฟัง เมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัยอะไรก็จะถามผู้วิจัย พฤติกรรมดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจากลักษณะของเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้นครอบคลุมเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ ในหนังสือเรียน ค014 ซึ่งนักเรียนกลุ่มตัวอย่างต้องเรียนจึงทำให้นักเรียนตั้งใจเรียนและเอาใจใส่ในการเรียน

ด้านการสอน

ผู้วิจัยใช้วิธีสอนที่มีความหลากหลาย เช่น วิธีการอภิปราย วิธีการถาม-ตอบ วิธีการศึกษาจากปัญหา เป็นต้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของเนื้อหาและเวลาที่ใช้สอน ผู้วิจัยทดลองสอนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ โดยเริ่มสอนเวกเตอร์ในความหมายเชิงเรขาคณิต ต่อมาสอนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และสุดท้ายเป็นบทประยุกต์ ซึ่งในขณะที่สอนนั้นผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอน จึงทำให้เกิดบรรยากาศที่ดีในชั้นเรียน ส่วนในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยเป็นผู้ตรวจแบบฝึกหัดของนักเรียนเองซึ่งทำให้ทราบถึงข้อบกพร่องต่างๆ ในการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างและได้ชี้แจงข้อบกพร่องเหล่านี้ให้นักเรียนทราบและแก้ไขต่อไป

จากผลการวิเคราะห์ข้อมูล จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 14 (บอกได้ว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่ และนำความรู้เรื่องการเท่ากันไปใช้) , 19 (หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้) และ 25 (นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางฟิสิกส์เรื่อง งานและโมเมนต์ของแรง) เป็นจุดประสงค์การเรียนรู้ที่มีค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านน้อยกว่าร้อยละ 50 อาจมีสาเหตุมาจาก

- ลักษณะของข้อสอบมีความซับซ้อน ไม่ถามตรงไปตรงมา
- เนื้อหาสาระที่ใช้สอนในบางเนื้อหาเป็นเนื้อหาที่ค่อนข้างใหม่และเข้าใจยาก
- มีความจำกัดในเรื่องของเวลาที่ใช้สอนในแต่ละเนื้อหา

ด้วยสาเหตุดังกล่าว อาจทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 14, 19 และ 25 ของนักเรียนไม่ถึงเกณฑ์ที่ตั้งไว้

ในการวิจัยครั้งนี้ นอกจากผู้วิจัยจะทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบปรนัยแล้วผู้วิจัยยังทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 1 ข้อ 10 คะแนน เป็นข้อสอบที่วัดความรู้ทางด้าน การบวกและการลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่ง

คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีค่าเฉลี่ยของคะแนนเป็น 5.53 คิดเป็นร้อยละ 55.3 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 3.97 จากผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยพบว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างแตกต่างกันค่อนข้างมาก ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างยังไม่คุ้นเคยกับการทำโจทย์ประเภทแสดงวิธีทำ แต่โดยสรุปพบว่า คะแนนเฉลี่ยในการทำแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีค่ามากกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม แสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความเข้าใจในเนื้อหาของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ข้อสังเกตจากการศึกษาวิจัย

จากการทดลองสอนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ได้พบข้อสังเกตบางประการซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. การใช้สื่อการสอนในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาของบทเรียนง่ายขึ้น เช่น การใช้ชอล์กสีวาดรูป การใช้มุมห้องเรียนเป็นสื่อในการเรียนการสอนเรื่องระบบพิกัดฉากในสามมิติ เป็นต้น นอกจากนี้ครูผู้สอนอาจจะสร้างสื่อการสอนที่มีความเหมาะสมกับเนื้อหาที่สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและเห็นภาพพจน์ในสิ่งที่เรียน

2. การให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอน โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นและแสดงความสามารถจะเป็นสิ่งที่ช่วยสร้างบรรยากาศที่ดีในการเรียนการสอน

3. การตรวจแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอของครูจะทำให้ทราบถึงข้อบกพร่องต่าง ๆ ของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งทำให้ครูสามารถแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนแต่ละคนได้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากหลักสูตรคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2545 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้นำเนื้อหาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ รวมอยู่ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกในช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) โดยหลักสูตรดังกล่าวกำหนดให้สถานศึกษาดำเนินการจัดสาระการเรียนรู้ของเนื้อหาวิชาเองตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ดังนั้น บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นซึ่งมีประสิทธิภาพ เหมาะสม จึงอาจใช้เป็นตัวอย่างของบทเรียนหรือใช้เป็นแนวทางในการสร้างบทเรียนของสถานศึกษาต่อไป

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรทำการวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับวิธีสอนที่เหมาะสมสำหรับบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

2.2 ควรทำการวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่อง เวกเตอร์ โดยนำเสนอบทเรียนในลักษณะควบคู่กันระหว่าง เวกเตอร์ใน 2 มิติ และ 3 มิติ

2.3 ควรทำการวิจัยที่ศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายชั้นใด มีความเหมาะสมต่อ การเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). *คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

————. (2535). *หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค013.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

————. (2535). *หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค014.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

————. (2535). *เอกสารวิชาคณิตศาสตร์เล่ม 3.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. (2519). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง อสมการและค่าสัมบูรณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ดี บางกระ. (2538). *การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม. (2542). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นพดล สุธาพาณิชย์. (2524). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

นันทิยา ธนูกฤติ. (2526). *การเปรียบเทียบการสอนเรื่องเวกเตอร์ที่จัดเนื้อหาสาระแบบเรขาคณิตและแบบพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ประจิต เอื้ออภิสิทธิ์วงศ์. (2537). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง “ เวกเตอร์ ” ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยการตรวจแบบฝึกหัดโดยครู และกลุ่มที่ตรวจแบบฝึกหัดด้วยตนเองจากการเฉลยคำตอบของครู โรงเรียนมัธยมวัดดุสิตาราม กรุงเทพมหานคร.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ประเสริฐ ภูจันทึก. (2525). *ฟิสิกส์กับเวกเตอร์วิเคราะห์.* พิษณุโลก : ภาควิชาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ทั่วไป คณะวิชาวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยครูพิบูลสงคราม พิษณุโลก.

ปรีชา จั่นกล้า. (2539). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ปานทอง กุลนาถศิริ. (2543, มกราคม-มีนาคม). "ความเคลื่อนไหว...เกี่ยวกับ NCTM : Principles and Standards for School Mathematics ในปี ค.ศ. 2000," *วารสาร สสวท..* 28(108) : 14-22.

มนู สืบพงษ์พันธ์. (2524). *การวิเคราะห์ผลจากการใช้กลวิธีสอนที่แตกต่างกันในวิชา ค412 เรื่องเวกเตอร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชัยนาทพิทยาคม จังหวัดชัยนาท.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. (2526). *เอกสารการสอนชุดวิชา คณิตศาสตร์ 3 หน่วยที่ 4-7.* กรุงเทพฯ : ทวิคตอรี เพาเวอร์พอยท์.

ยงยุทธ ธนูกฤติ. (2516). *การทดลองใช้เวคเตอร์ในการสอนเรขาคณิตวิเคราะห์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

________. (2520). *เวกเตอร์และเรขาคณิตวิเคราะห์สามมิติ.* กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.

รวิวรรณ เทนอิสสระ. (2522). *การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง "เวกเตอร์" ซึ่งสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ละเมียด กรบงกชมาส. (2522). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง "เวกเตอร์" โดยวิธีสอนแบบผสมกับวิธีสอนแบบบอกให้รู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

วัชรี กาญจน์กีรติ. (2523). *การศึกษาผลการสอนแบบค้นพบและแบบบรรยายในการสอนเรื่อง เวคเตอร์ สำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนพรหมานุสรณ์ จังหวัดเพชรบุรี.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

วันชัย ทัพพะปุรณะ. (2529). *การทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนดีบุกพังงาวิทยายน.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2524). *การศึกษาความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

วีรยุทธ ด้วงใย. (2536). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง "เวกเตอร์" ระหว่างกลุ่มที่สอนโดยการคัดสรรกลวิธีการสอนกับการสอนแบบอธิบายและแสดงเหตุผล.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2540). *25 ปี สสวท..* กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สิรสินธุ์ นุชนาถ. (2538). *การศึกษาการเรียนเรื่องการลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

สุทธิพงษ์ พะลัง. (2521). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพาณิชยการ.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

เสกสรรค์ ดำกระบี่. (2517). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

Anton, Howard. (1992). *Multivariable CALCULUS.* New York : Anton Textbooks,Inc.

Bruner, Jerome Seymour. (1966). *The Process of Education.* Cambridge : Harvard University Press.

Drummound, Pamela Johnson. (1989). "The Design, Implementation and Evaluation of a Course in Discrete Mathematics for High School Students," *Dissertation Abstracts International.* 50(3) : 641-A.

Gubrud, Allarm Roy. (1971, June). "The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School," *Dissertation Abstracts International.* 31(12) : 6468-A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 6 ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	0.8	0.4	19	0.7	0.2
2	0.2	0.4	20	0.6	0.4
3	0.8	0.4	21	0.8	0
4	0.7	0.6	22	0.3	0.6
5	0.7	0.2	23	0.5	0.2
6	0.5	0.2	24	0.2	0.4
7	0.4	0.4	25	0.4	0.4
8	0.3	0.6	26	0.5	0.2
9	0.7	0.2	27	0.5	0.6
10	0.4	0.4	28	0.3	0.6
11	0.5	0.6	29	0.5	0.2
12	0.7	0.2	30	0.5	0.2
13	0.7	0.2	31	0.6	0.8
14	0.5	1.0	32	0.6	0.4
15	0.3	0.6	33	0.2	0.4
16	0.5	0.2	34	0.8	0.4
17	0.2	0.4	35	0.3	0.2
18	0.5	0.2			

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR-20)

$$
\begin{aligned}
r_{tt} &= \frac{N}{N-1}\left[1-\frac{\sum pq}{s^2}\right] \\
&= \frac{35}{34}\left[1-\frac{7.53}{65.81}\right] \\
&= \frac{35}{34}[0.89] \\
&= 0.92
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ s คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน

ตาราง 7 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการทำแบบฝึกหัด ในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ (คะแนนเต็ม 70 คะแนน)

x	f	fx	x^2	fx^2
63	1	63	3969	3969
61	4	244	3721	14884
60	2	120	3600	7200
59	7	413	3481	24367
58	4	232	3364	13456
57	2	114	3249	6498
56	4	224	3136	12544
55	2	110	3025	6050
54	3	162	2916	8748
53	2	106	2809	5618
51	1	51	2601	2601
49	2	98	2401	4802
46	1	46	2116	2116
45	1	45	2025	2025
43	2	86	1849	3698
	$\sum f = 38$	$\sum fx = 2114$		$\sum fx^2 = 118576$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2114}{38} = 55.63$$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{38(118576) - (2114)^2}{38(37)}}$$

$$= \sqrt{\frac{36892}{1406}} = \sqrt{26.24} = 5.12$$

ตาราง 8 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ (35 คะแนน)

x	f	fx	x^2	fx^2
34	1	34	1156	1156
30	2	60	900	1800
29	1	29	841	841
28	4	112	784	3136
27	5	135	729	3645
26	7	182	676	4732
25	6	150	625	3750
24	1	24	576	576
23	6	138	529	3174
22	2	44	484	968
21	3	63	441	1323
	$\sum f = 38$	$\sum fx = 971$		$\sum fx^2 = 25101$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{971}{38} = 25.55$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - \left(\sum fx\right)^2}{N(N-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{38(25101) - (971)^2}{38(37)}} \\ &= \sqrt{\frac{10997}{1406}} = \sqrt{7.82} = 2.80 \end{aligned}$$

ตาราง 9 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จากการทำแบบทดสอบอัตนัยเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ (10 คะแนน)

x	f	fx	x^2	fx^2
10	12	120	100	1200
9	3	27	81	243
8	1	8	64	64
7	1	7	49	49
6	1	6	36	36
5	3	15	25	75
4	3	12	16	48
2	7	14	4	28
1	1	1	1	1
0	6	0	0	0
	$\sum f = 38$	$\sum fx = 210$		$\sum fx^2 = 1744$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{210}{38} = 5.53$$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{38(1744) - (210)^2}{38(37)}}$$

$$= \sqrt{\frac{22172}{1406}} = \sqrt{15.77} = 3.97$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Population Proportion)

สมมติฐาน คือ $H_0 : P \leq 0.50$

$H_1 : P > 0.50$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{38}{38} = 1$$

$$P_0 = 0.50$$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 38 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{1 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{38}}}$$

$$= \frac{0.50}{\sqrt{0.00658}}$$

$$= 6.16$$

เพราะว่า $Z_{.01} = 2.33$

ดังนั้น $6.16 > 2.33$

จึงสรุปได้ว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

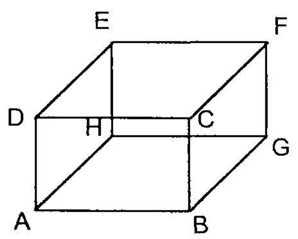
แบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก

จุดประสงค์ที่ 1 บอกความหมายของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ได้

1. ข้อแตกต่างระหว่างปริมาณสเกลาร์กับปริมาณเวกเตอร์ คือข้อใด
   ก. ปริมาณสเกลาร์มีทิศทาง
   ข. ปริมาณเวกเตอร์มีทิศทาง
   ค. ปริมาณสเกลาร์มีขนาด
   ง. ปริมาณเวกเตอร์มีขนาด

จุดประสงค์ที่ 2 เขียนส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ที่กำหนดให้ และใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง

2.



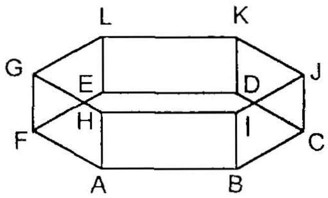
กำหนดให้ ABCDEFGH เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้า A เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ จะสามารถกำหนดเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงนี้ได้ทั้งหมดกี่เวกเตอร์ เมื่อกำหนดจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์เป็นจุดมุมของรูปทรงนี้

ก. 1 เวกเตอร์ ข. 3 เวกเตอร์
ค. 7 เวกเตอร์ ง. 8 เวกเตอร์

จุดประสงค์ที่ 3 บอกได้ว่าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่

3. เวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ จะเท่ากันในกรณีใด
   ก. เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน
   ข. เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและขนานกัน
   ค. เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน
   ง. เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงข้ามกัน

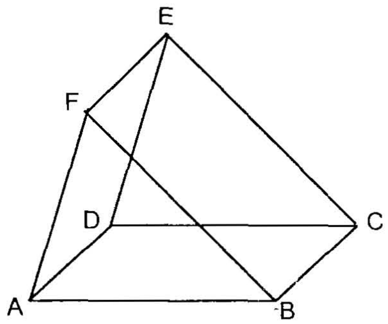
จุดประสงค์ที่ 4 หานิเสธของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

4. 

กำหนด ABCDEFGHIJKL เป็นรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า เวกเตอร์คู่ใดเป็นนิเสธซึ่งกันและกัน

ก. $\overrightarrow{AF}$ กับ $\overrightarrow{JK}$
ข. $\overrightarrow{LK}$ กับ $-\overrightarrow{BA}$
ค. $\overrightarrow{FE}$ กับ $-\overrightarrow{BC}$
ง. $\overrightarrow{ED}$ กับ $\overrightarrow{LK}$

จุดประสงค์ที่ 5 หาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

5. 

จากรูปข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง

ก. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}$
ข. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overline{0}$
ค. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$
ง. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BA}$

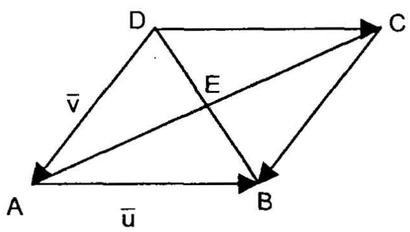
จุดประสงค์ที่ 6 บอกสมบัติต่างๆ ของการบวกเวกเตอร์ได้

6. ข้อใดเป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$

ก. $(\bar{u} + (-\bar{v})) + (-\bar{w})$
ข. $(-\bar{u}) + (\bar{v} + (-\bar{w}))$
ค. $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$
ง. $(-\bar{u}) + ((-\bar{v}) + (-\bar{w}))$

จุดประสงค์ที่ 7 หาผลลบของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

7. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบของ $\bar{u} - \bar{v}$



ก. $\overrightarrow{DB}$
ข. $\overrightarrow{BD}$
ค. $\overrightarrow{CA}$
ง. $\overrightarrow{AC}$

8. เวกเตอร์ผลลัพธ์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ศูนย์

ก. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$

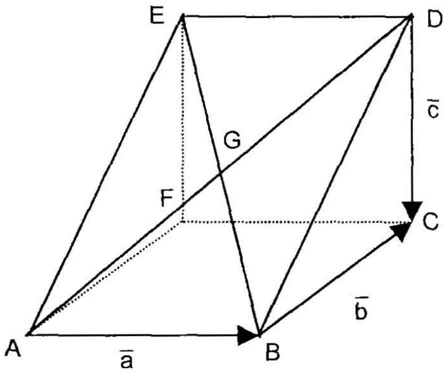
ข. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} - (\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC})$

ค. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB})$

ง. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FA}$

<u>**จุดประสงค์ที่ 8**</u> บอกสมบัติต่างๆ ของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และนำไปใช้ได้

9.



จากรูป เวกเตอร์ AG เขียนในเทอม $\bar{a}$, $\bar{b}$ และ $\bar{c}$ ได้ตามข้อใด

ก. $\frac{1}{2}\left(-(\bar{a}+\bar{b})-\bar{c}\right)$

ข. $\frac{1}{2}\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)$

ค. $\frac{1}{2}\left((\bar{a}+\bar{b})-\bar{c}\right)$

ง. $\frac{1}{2}\left(-\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}\right)$

<u>**จุดประสงค์ที่ 9**</u> บอกความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = a\bar{v}$

10. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ จากสมการ $\bar{u} - 5\bar{v} = 2\bar{u} + \bar{v}$ จะสรุปความสัมพันธ์เกี่ยวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้ดังข้อใด

ก. $|\bar{u}| = |\bar{v}|$

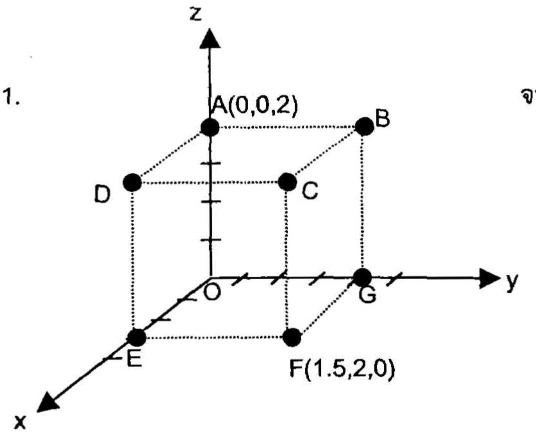
ข. $|\bar{u}| = -6|\bar{v}|$ และ $\bar{u},\bar{v}$ ขนานกัน

ค. $|\bar{u}| = 6|\bar{v}|$, $\bar{u},\bar{v}$ ขนานกันและมีทิศทางเดียวกัน

ง. $|\bar{u}| = 6|\bar{v}|$, $\bar{u},\bar{v}$ ขนานกันและมีทิศทางตรงข้ามกัน

<u>**จุดประสงค์ที่ 10**</u> บอกพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ เมื่อกำหนดพิกัดของจุดบางจุดให้

11.



จากรูป จุด B, C และ D มีพิกัดเป็นเท่าใด

ก. B(0,2,2) , C(1.5,2,2) และ D(1.5,0,2)

ข. B(0,2,2) , C(1.5,0,2) และ D(1.5,2,2)

ค. B(0,2,2) , C(1.5,2,2) และ D(1.5,1.5,2)

ง. B(0,2,2) , C(1.5,2,0) และ D(1.5,0,2)

<u>จุดประสงค์ที่ 11</u> หาโพรเจกชันของจุดที่กำหนดบนระนาบ xy หรือ yz หรือ xz ได้

12. กำหนดให้จุด A เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ มีพิกัดเป็น (1,-2,5) โพรเจกชันของจุด A บนระนาบ xy , yz และ xz ตามลำดับ คือข้อใด

ก. (1,-2,0) , (0,5,-2) , (5,0,1)

ข. (1,-2,0) , (0,-2,5) , (1,0,5)

ค. (1,-2,0) , (0,-2,5) , (1,0,-2)

ง. (1,-2,0) , (1,-2,5) , (0,0,5)

<u>จุดประสงค์ที่ 12</u> หาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ในปริภูมิ 3 มิติ ได้

13. กำหนดให้ จุด P มีพิกัดเป็น (1,-6,0) และจุด Q มีพิกัดเป็น (-1,6,0) แล้ว PQ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $4\sqrt{37}$ ข. $\sqrt{37}$ ค. $2\sqrt{37}$ ง. $3\sqrt{37}$

<u>จุดประสงค์ที่ 13</u> เขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในรูป $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ หรือ $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า A และ B มีพิกัดเป็น (2,3,0) และ (0,-4,0) ตามลำดับแล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ ถ้าจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ มีพิกัดเป็น (5,0,-1) แล้วจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ จะมีพิกัดเป็น (6,2,2)

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ถูกเฉพาะข้อ (1) ข. ถูกเฉพาะข้อ (2)

ค. ถูกทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ง. ผิดทั้งข้อ (1) และข้อ (2)

<u>จุดประสงค์ที่ 14</u> บอกได้ว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่ และนำความรู้เรื่องการเท่ากันไปใช้

15. กำหนดให้ $\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k} = x(\bar{i} + \bar{j}) + y(\bar{j} - \bar{i}) + z(2\bar{k} - \bar{j})$ แล้ว x + y+ z คือข้อใด

ก. –1 ข. –2 ค. –3 ง. –4

<u>**จุดประสงค์ที่ 15**</u> หาผลบวก ผลลบ ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้

16. กำหนด $\bar{u}-\bar{v}=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$ และ $\bar{u}+\bar{v}=\begin{bmatrix}7\\-2\\0\end{bmatrix}$ แล้ว $5\bar{u}+\bar{v}$ เท่ากับข้อใด

ก. $27\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$

ข. $-27\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$

ค. $-27\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$

ง. $27\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$

17. กำหนด $\bar{u}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}, \bar{v}=4\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\bar{w}=\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ แล้ว $-8(\bar{v}+\bar{w})+2\bar{u}$ คือข้อใด

ก. $-6((-6)\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k})$

ข. $6((-6)\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})$

ค. $6(6\bar{i}-\bar{j}-\bar{k})$

ง. $-6(\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k})$

<u>**จุดประสงค์ที่ 16**</u> บอกขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้

18. กำหนดให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ และ $\bar{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $|\bar{u}+\bar{v}|=2$

ข. $|\bar{u}|+|\bar{v}|=\sqrt{7}$

ค. $|3\bar{u}|=3\sqrt{5}$

ง. $|2\bar{u}-3\bar{v}|=\sqrt{11}$

<u>**จุดประสงค์ที่ 17**</u> หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

19. ข้อใดคือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อกำหนดจุด P(-2,-1,2) และ Q(0,-5,6)

ก. $\frac{-1}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}-\frac{2}{3}\bar{k}$

ข. $\frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$

ค. $\frac{-1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}$

ง. $\frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}-\frac{2}{3}\bar{k}$

20. จากข้อ 19. เวกเตอร์ 3 หน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือข้อใด

ก. $\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$

ข. $-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$

ค. $\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$

ง. $-\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$

จุดประสงค์ที่ 18 หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

21. กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u}$ เทียบกับแกน x , y และ z ตามลำดับ คือข้อใด

ก. $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$

ข. $\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$

ค. $\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$

ง. $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$

จุดประสงค์ที่ 19 บอกได้ว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่

22. จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกัน

(1) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(-1,0,1) และจุดสิ้นสุดที่ Q(0,3,-2)

(2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3) $\overrightarrow{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ R(1,3,3)

ก. (1) กับ (3) ข. (2) กับ (3) ค. (1) กับ (2) ง. ทั้ง (1) , (2) และ (3)

จุดประสงค์ที่ 20 หาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

23. ให้ $\bar{u} = \bar{i} + 5\bar{j}$, $\bar{v} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{w} = 3\bar{i} - a\bar{j} + \bar{k}$ ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{w}$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

ก. 2 ข. –2 ค. $\frac{1}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

จุดประสงค์ที่ 21 นำสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ไปใช้ได้

24. กำหนด $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 4$, $\bar{u} \cdot \bar{v}$ คือข้อใด

ก. –5 ข. 9 ค. $-\frac{3}{2}$ ง. $\frac{3}{2}$

25. ข้อใดต่อไปนี้ <u>ไม่ถูกต้อง</u>

ก. ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v}=\pm|\bar{u}||\bar{v}|$

ข. $\bar{i}\cdot\bar{i}\neq\bar{j}\cdot\bar{j}$

ค. $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})=|\bar{u}|^2-|\bar{v}|^2$

ง. ถ้า $\bar{u}\neq\bar{0},\bar{v}\neq\bar{0}$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ แล้ว $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

<u>จุดประสงค์ที่ 22</u> หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

26. กำหนด $\bar{u}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$ และ $\bar{v}=\bar{j}+7\bar{k}$, $(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{u}+\bar{v})$ คือข้อใด

ก. $20\bar{i}-28\bar{j}+4\bar{k}$ ข. $20\bar{i}+28\bar{j}-4\bar{k}$

ค. $-20\bar{i}-28\bar{j}-4\bar{k}$ ง. $-20\bar{i}-28\bar{j}+4\bar{k}$

27.

<u>บทนิยาม</u> กำหนด $\bar{u}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ และ $\bar{v}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ เมื่อ a, b, c, x, y, z เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\bar{u}*\bar{v}=\left(\frac{a+x}{2}\right)\bar{i}+\left(\frac{b+y}{2}\right)\bar{j}+\left(\frac{c+z}{2}\right)\bar{k}$$

ถ้า $\bar{u}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\bar{v}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\bar{w}=\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ แล้ว $|\bar{u}\times(\bar{v}*\bar{w})|$ คือข้อใด

ก. $\sqrt{60}$ ข. $\sqrt{61}$ ค. $\sqrt{62}$ ง. $\sqrt{63}$

<u>จุดประสงค์ที่ 23</u> นำสมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปใช้ได้

28. ข้อความใด<u>ต่อไปนี้ผิด</u>

ก. $\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$ ข. $\bar{u}\times\bar{u}=\bar{0}$

ค. $\bar{u}\times\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ ง. $\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}$

29. ข้อใดคือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ}=\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$, $\overrightarrow{PS}=2\bar{j}+\bar{k}$

ก. $\sqrt{30}$ ตารางหน่วย ข. $\sqrt{14}$ ตารางหน่วย

ค. $\sqrt{6}$ ตารางหน่วย ง. $\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

30. ข้อใดคือปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน ที่มี $\bar{u}=\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{v}=-\bar{i}+\bar{k}$ และ $\bar{r}=\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ ประกอบกันเป็นด้านของรูป

ก. 4 ลูกบาศก์หน่วย ข. 3 ลูกบาศก์หน่วย

ค. 2 ลูกบาศก์หน่วย ง. 5 ลูกบาศก์หน่วย

31. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})$ เป็นปริมาณเวกเตอร์

ข. $(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์

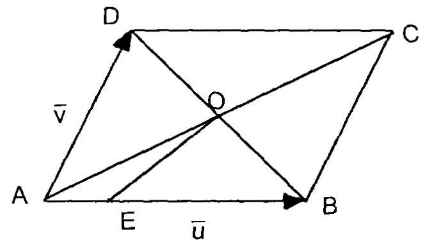
ค. $\bar{u}+(\bar{v}\cdot\bar{w})$ เป็นปริมาณสเกลาร์

ง. $(\bar{u}\times\bar{v})\cdot(\bar{u}\times\bar{w})$ เป็นปริมาณสเกลาร์

32. ข้อใดคือพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม AOB เมื่อกำหนดให้ $\overrightarrow{OA}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$ และ $\overrightarrow{OB}=4\bar{i}-\bar{j}$

ก. $\sqrt{138}$ ข. $\sqrt{13}$ ค. $\frac{1}{2}\sqrt{138}$ ง. $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

<u>**จุดประสงค์ที่ 24**</u> นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางเรขาคณิต เรื่อง การใช้เวกเตอร์พิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต

33. 

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน AC และ BD ตัดกันที่จุด O , E เป็นจุดแบ่ง AB ออกเป็น AE : EB = 1 : 3 กำหนด $\overrightarrow{AB}=\bar{u}$, $\overrightarrow{AD}=\bar{v}$

จงแสดงว่า $\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{4}(\bar{u}+2\bar{v})$

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน , AC และ BD ตัดกันที่จุด O

2. E เป็นจุดแบ่ง AB ออกเป็น AE : EB = 1 : 3

<u>สิ่งที่ต้องพิสูจน์</u> $\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{4}(\bar{u}+2\bar{v})$

<u>พิสูจน์</u> จากรูป

$$\overrightarrow{OE}=....(1)....+\overrightarrow{AE}$$
$$=.\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA})+....(2)....$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+....(2)....$$
$$=....(3)....+(\frac{1}{4}\bar{u})$$
$$=(-\frac{1}{2}\bar{v})-(\frac{1}{2}\bar{u})+(\frac{1}{4}\bar{u})$$
$$=(-\frac{1}{2}\bar{v})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\bar{u}$$
$$=(-\frac{1}{2}\bar{v})-(\frac{1}{4}\bar{u})=-\frac{1}{4}(\bar{u}+2\bar{v})$$

คำตอบในช่องว่าง (1) , (2) และ (3) คือข้อใด

ก. $\overrightarrow{OA}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}(-\bar{v}-\bar{u})$

ข. $\overrightarrow{CO}$, $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}(\bar{v}-\bar{u})$

ค. $\overrightarrow{CO}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}(-\bar{v}+\bar{u})$

ง. $\overrightarrow{OA}$, $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}(-\bar{v}-\bar{u})$

จุดประสงค์ที่ 25 นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางฟิสิกส์ เรื่อง งานและโมเมนต์ของแรง

34. ออกแรง 5 N ดึงวัตถุในแนวทำมุม 30 กับพื้นราบ เป็นผลทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง 10 m ข้อใดต่อไปนี้เป็นงานที่แรงกระทำได้

ก. 25 J　　　ข. –25 J

ค. $25\sqrt{3}$ J　　　ง. $-25\sqrt{3}$ J

35. กำหนดให้ $\bar{F}=\bar{i}+\bar{j}$ กระทำที่จุด (2,0,-1) โมเมนต์ของแรง $\bar{F}$ รอบจุด (1,1,0) คือข้อใด

ก. $\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ N-m　　　ข. $-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ N-m

ค. $\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ N-m　　　ง. $-\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ N-m

ข้อสอบอัตนัย

จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด (10 คะแนน)

1. กำหนดให้ $\bar{u}-2\bar{v}=3\bar{i}+\bar{j}$ และ $\bar{v}-\bar{u}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ จงหา

(1) $\bar{v}$

(2) $\bar{u}$

(3) $(\bar{u}\times\bar{v})\cdot(2\bar{u}\times\bar{v})$ (แนะนำ ใช้สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์)

ภาคผนวก ค
บทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

เวกเตอร์ในสามมิติ

คำชี้แจงของบทเรียน

บทเรียนฉบับนี้ จัดทำขึ้นเพื่อเป็นตัวอย่างหนึ่งของบทเรียน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เนื้อหาของบทเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ใช้สอนในระดับนี้เป็นการนำเสนอเรื่องเวกเตอร์ในความหมายเชิงเรขาคณิต เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ และบทประยุกต์ของเวกเตอร์ทางเรขาคณิตและฟิสิกส์

เวกเตอร์เป็นเครื่องมือที่ดียิ่งที่ใช้อธิบายความคิดสำคัญ ๆ ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลายทฤษฎีบทกระทำได้ง่ายและรัดกุมเมื่อใช้เวกเตอร์ นอกจากนั้น เวกเตอร์ยังมีประโยชน์ในการศึกษาโครงสร้างของคณิตศาสตร์และเป็นรากฐานของวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง ดังนั้นการศึกษาเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ นับว่ามีประโยชน์อย่างยิ่งต่อผู้ที่ศึกษา

เนื้อหาของบทเรียนฉบับนี้ ประกอบด้วยสาระการเรียนรู้และจำนวนคาบ ดังนี้

เวกเตอร์ในสามมิติ (20 คาบ)

บทเรียนมี 7 หัวข้อ ดังนี้

1. เวกเตอร์ (2 คาบ)
2. การบวกและการลบเวกเตอร์ (1 คาบ)
3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (2 คาบ)
4. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (7 คาบ)
5. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (2 คาบ)
6. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (3 คาบ)
7. การนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในทางเรขาคณิตและฟิสิกส์ (3 คาบ)

เนื้อหาของบทเรียนนี้ ในตอนแรกเป็นการนำเสนอเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต ต่อมาเป็นการนำเสนอเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ใน 2 มิติ โดยมีตัวอย่างของเวกเตอร์ทั้งใน 2 และ 3 มิติ สุดท้ายเป็นการนำเสนอบทประยุกต์ของเวกเตอร์ทางเรขาคณิตและฟิสิกส์บางเนื้อหา เพื่อทำให้ผู้เรียนได้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์เอง หรือวิชาคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ อีกทั้งในแต่ละหัวข้อของบทเรียนจะมีแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อไว้ให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะและเสริมสร้างความเข้าใจของเนื้อหาวิชาของบทเรียนด้วย

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีสอนและจำนวนคาบที่ใช้สอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาของแต่ละหัวข้อ โดยพิจารณาจากความสามารถของผู้เรียน และในการจัดการเรียนการสอนนั้นครูควรให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนให้มากที่สุด เพื่อจะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. หาผลบวกเวกเตอร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
2. หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้
3. นำสมบัติต่าง ๆ ของเวกเตอร์ไปใช้ได้

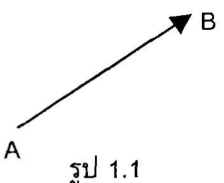
เวกเตอร์ในสามมิติ

1. เวกเตอร์ (Vectors)

ปริมาณมีสองประเภท ประเภทหนึ่งใช้บอกแต่ขนาด เช่น พื้นที่ มวล ความสูง อุณหภูมิ ซึ่งเขียนแทนขนาดด้วยจำนวนเพื่อบอกให้ทราบว่า มากหรือน้อยเพียงใด เช่น นาแห่งหนึ่งมีพื้นที่ 100 ไร่ กล่องใบหนึ่งมีมวล 20 กรัม ชายคนหนึ่งมีความสูง 180 เซนติเมตร วันนี้กรุงเทพฯ มีอุณหภูมิสูงสุด 32 องศาเซลเซียส เหล่านี้เป็นต้น ส่วนปริมาณอีกประเภทหนึ่งบอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การเคลื่อนที่ แรง ความเร็ว ความเร่ง ปริมาณเหล่านี้จำเป็นต้องบอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ชายคนหนึ่งเดินทางไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร เป็นต้น

<u>บทนิยาม 1</u> ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์** (Scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์** (Vector quantity)

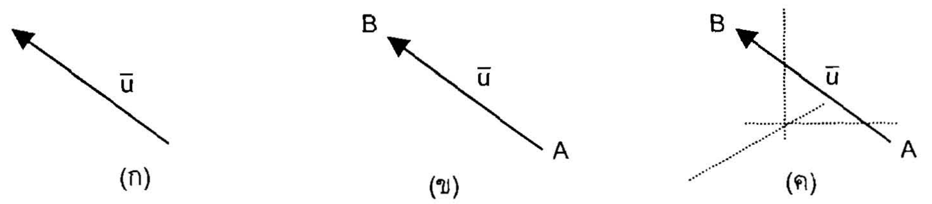
ปริมาณสเกลาร์ แทนด้วยจำนวนจริง ส่วนปริมาณเวกเตอร์ ในเชิงเรขาคณิตแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง (directed line segment หรือ directed segment) โดยที่ความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์



รูป 1.1

รูป 1.1 แสดงเวกเตอร์จาก A ไป B อ่านว่า **เวกเตอร์ เอบี** เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ (ในที่นี้จะใช้ $\overrightarrow{AB}$) เรียก A ว่า **จุดเริ่มต้น** (initial point) ของเวกเตอร์ และเรียก B ว่า **จุดสิ้นสุด** (terminal point) ของเวกเตอร์ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB หรือ BA คือ ขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

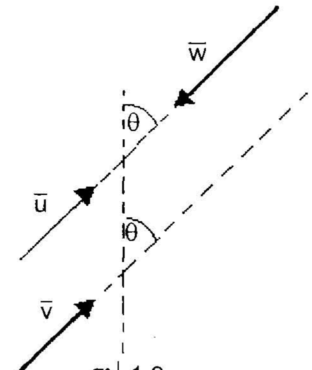
ในกรณีที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจะใช้อักษรตัวเดียว และมีเครื่องหมาย $\longrightarrow$ หรือ — กำกับเขียนแทนเวกเตอร์ เช่น $\bar{u}$, $\bar{v}$, หรือ $\bar{u}$, $\bar{v}$ (ในที่นี้จะใช้ $\bar{u}$) ดังรูป 1.2 (ก) ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่แทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงจาก A ไป B ดังรูป 1.2 (ข) เราจะเขียน $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ และใช้สัญลักษณ์ $|\bar{u}|$ แทนขนาดของ $\bar{u}$



(ก) (ข) (ค)

รูป 1.2

<u>หมายเหตุ</u> โดยทั่วไป การเขียนรูปแสดงเวกเตอร์จะแสดงได้ดังรูป 1.2 (ก) หรือ 1.2 (ข) ส่วนรูป 1.2 (ค) จะแสดงรูปเวกเตอร์โดยมีแนวแกน (เส้นประ) ประกอบ เพื่อที่จะให้ผู้เรียนรับรู้ว่าเวกเตอร์ที่กล่าวถึงอาจจะพิจารณาว่าเป็นเวกเตอร์ในสามมิติได้ด้วย

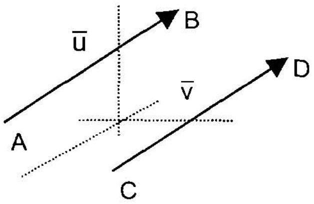


รูป 1.3

เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน จากรูป 1.3 $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

ส่วนเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน แต่หัวลูกศรไปทางตรงข้ามกัน จากรูป 1.3 $\bar{u}$ กับ $\bar{w}$ และ $\bar{v}$ กับ $\bar{w}$ ต่างมีทิศทางตรงกันข้าม

<u>บทนิยาม 2</u> $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ **ขนานกัน** ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม



รูป 1.4

ในกรณีที่ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน แล้ว ดังรูป 1.4 จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ โดยใช้คำว่า " เท่ากัน " ดังบทนิยามต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 3</u> $\bar{u}$ **เท่ากับ** $\bar{v}$ (เขียนแทนด้วย $\bar{u} = \bar{v}$) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

<u>ข้อสังเกต</u> 1. การที่ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ไม่ได้หมายความว่าส่วนของเส้นตรง AB กับส่วนของเส้นตรง CD ต้องเป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน

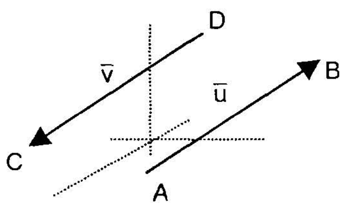
2. ถ้า $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ แล้ว $|\bar{u}| = |\overrightarrow{AB}|$

3. เมื่อกล่าวถึงเวกเตอร์ใดๆ จะเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนเวกเตอร์นั้น ได้จำนวนไม่จำกัด

4. เมื่อเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนเวกเตอร์ใดๆ จะเลื่อนจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไปอยู่ที่ใดก็ได้

5. เวกเตอร์ที่ขนานกันไม่จำเป็นต้องมีทิศทางเดียวกันและขนาดก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

6. เวกเตอร์ที่เท่ากันขนานกัน



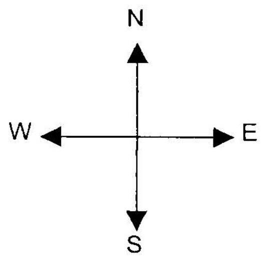
รูป 1.5

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{CD}$ มีความยาวเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ดังรูป 1.5 จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ โดยใช้คำว่า " นิเสธ " ดังบทนิยามต่อไปนี้

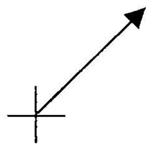
<u>บทนิยาม 4</u> **นิเสธ ของ** $\bar{u}$ (negative of $\bar{u}$) (เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$) **คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ** $\bar{u}$ **แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ** $\bar{u}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง แสดงการเคลื่อนที่ของรถยนต์ซึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือด้วยอัตราเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

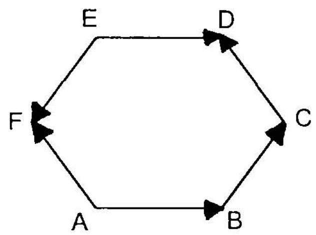
<u>วิธีทำ</u>



ใช้มาตรส่วน 1 เซนติเมตร ต่อ 40 กิโลเมตร และกำหนดทิศทาง ก็จะได้ส่วนของเส้นตรงที่ต้องการ ดังรูป



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า เวกเตอร์ที่กำหนดให้คู่ใดบ้างที่เท่ากัน คู่ใดบ้างเป็นนิเสธซึ่งกันและกัน



<u>วิธีทำ</u> จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

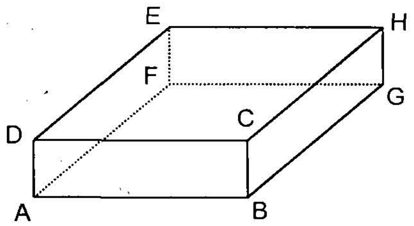
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{ED}$ และ $\overrightarrow{AF}$ กับ $\overrightarrow{CD}$

เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน คือ $\overrightarrow{BC}$ กับ $\overrightarrow{EF}$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ABCDEFGH เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้ เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากัน และเวกเตอร์ใดบ้างที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GB}$ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AF}$ และ $\overrightarrow{GH}$



<u>วิธีทำ</u> จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AF}$

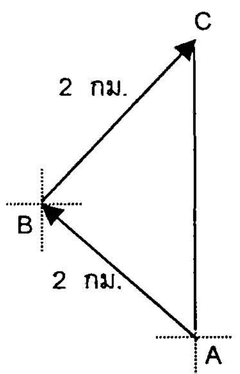
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{GH}$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือ (1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ และ $\overrightarrow{FG}$ (2) $\overrightarrow{DA}$ กับ $\overrightarrow{CB}$

เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน คือ (1) $\overrightarrow{GB}$ กับ $\overrightarrow{AF}$ (2) $\overrightarrow{DA}$ กับ $\overrightarrow{GH}$ (3) $\overrightarrow{CB}$ กับ $\overrightarrow{GH}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> นกตัวหนึ่งบินหาอาหารโดยเริ่มบินไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร แล้วบินตรงไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร อยากทราบว่านกตัวนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น

<u>วิธีทำ</u>



นกตัวนี้ เริ่มเดินทางจากจุด A ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือถึงจุด B เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร แล้วบินต่อไปถึงจุด C เป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร ในทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

$\therefore$ จากรูป สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

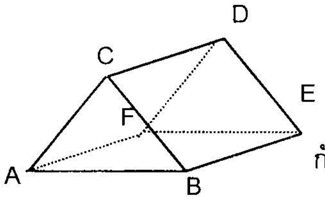
จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 2^2 + 2^2 \\ &= 4 + 4 \\ &= 8 \\ AC &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ นกตัวนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง $2\sqrt{2}$ กิโลเมตร ในทางทิศเหนือของจุดเริ่มต้น

แบบฝึกหัด 1

1. จงยกตัวอย่าง ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ อย่างละ 3 ตัวอย่าง

2. 

จากรูป จงหาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันและที่มีทิศทางตรงกันข้ามกันอย่างละ 4 คู่ (ให้กำหนดหัวลูกศรตามความเหมาะสม)

3. จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้ (ให้กำหนดมาตราส่วนตามความเหมาะสม)

   (1) 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ

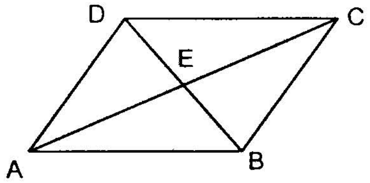
   (2) 30 เมตร ไปทางทิศ 060°

   (3) 80 กิโลเมตร ไปทางทิศ 300°

   (4) 10 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

หมายเหตุ การกำหนดทิศทางเป็นองศาจะกำหนดโดยบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือตามเข็มนาฬิกาไปยังทิศที่ต้องการ ค่าของมุม จะอยู่ระหว่าง 0° ถึง 360° ถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100° จะเขียนศูนย์นำทุกครั้ง เช่น 030°, 070° เป็นต้น ระบบที่ใช้นี้เรียกว่า ระบบตัวเลขสามตัว (three figure system)

4. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากรูปจงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

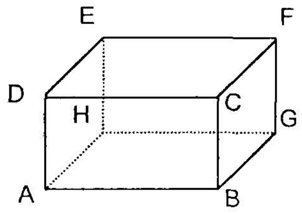


(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AE}$ (4) $\overrightarrow{ED}$

(5) $-\overrightarrow{BC}$ (6) $-\overrightarrow{AE}$

5. กำหนด ABCDEFGH เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จงหา (1) เวกเตอร์ที่ขนานกัน 3 คู่
(2) เวกเตอร์ที่เท่ากัน 3 คู่
(3) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน 3 คู่



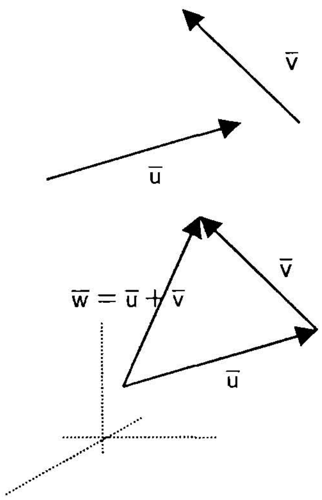
6. ถ้า $\bar{u}$ แทนการเดินทาง 300 กิโลเมตร ไปทางทิศ 075° จงบรรยายถึงการเดินทางที่แทนด้วย $-\bar{u}$

7. ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศ 315° เป็นระยะทางอีก 3 กิโลเมตร ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร และอยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

2. การบวกและการลบเวกเตอร์ (Addition and Subtraction of Vectors)

<u>การบวกเวกเตอร์</u>

<u>บทนิยาม 5</u> ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน $\bar{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ **ผลบวก** ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย " $\bar{u}+\bar{v}$ " คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ (ดังรูป 2.1)



รูป 2.1

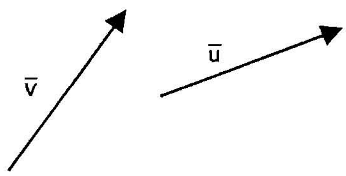
นอกจากนี้วิธีการข้างต้น เราอาจหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยวิธีการที่เรียกว่า **กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** ดังต่อไปนี้ เลือกจุด A เป็นจุดเริ่มต้น หาจุด B ที่ทำให้ $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ แล้วหาจุด D ที่ทำให้ $\bar{v} = \overrightarrow{AD}$ ต่อจากนั้นสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD และโดยอาศัยบทนิยามของการบวกเวกเตอร์ ข้างต้น จะได้ว่า $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ ซึ่งแทนด้วยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น ซึ่งเวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีจุดเริ่มต้นเดียวกันกับจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังรูป 2.2

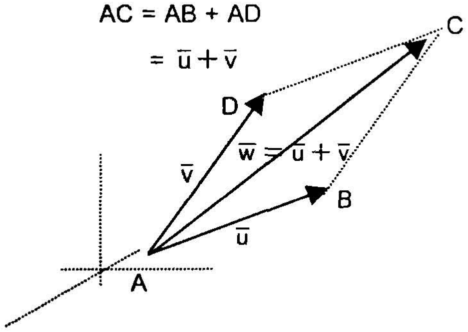
จากรูป 2.2 $\quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

และ $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

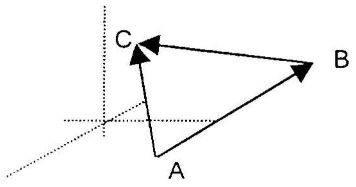
$= \bar{u} + \bar{v}$



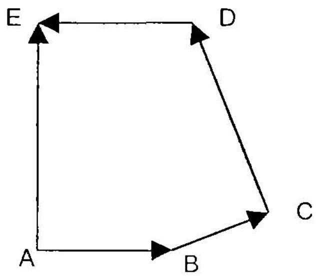


รูป 2.2

ตัวอย่างการบวกเวกเตอร์



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

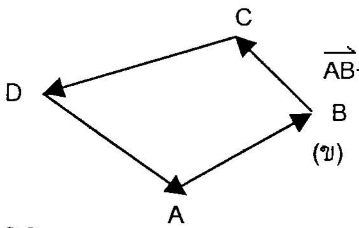
บทนิยาม 6 **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{0}$

ข้อสังเกต 1. กรณีของเวกเตอร์ศูนย์ ไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงทิศทางของเวกเตอร์ แต่ถ้าต้องการกล่าวถึงมีข้อตกลงว่าจะระบุทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์เป็นเช่นใดก็ได้

2. เมื่อเขียนรูปเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ศูนย์ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเวกเตอร์เป็นจุดเดียวกัน ดังตัวอย่างในรูป 2.3 (ก) หรือ (ข)

• P $\overrightarrow{PP} = \bar{0}$

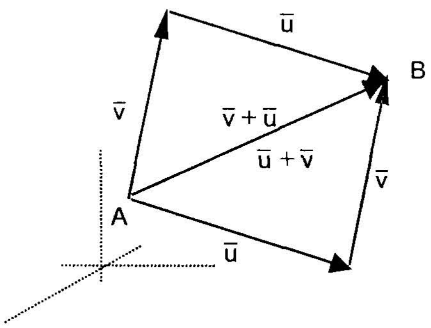
(ก)



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \bar{0}$

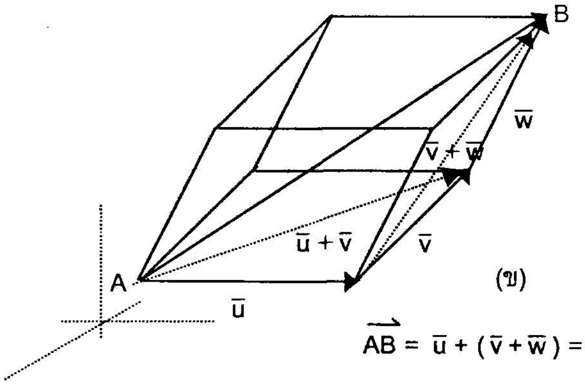
(ข)

รูป 2.3



(ก)

$\overrightarrow{AB} = \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$



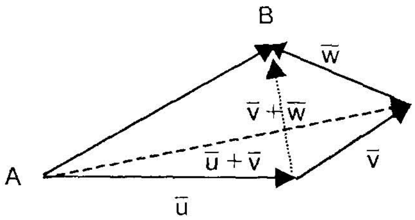
(ข)

$\overrightarrow{AB} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

สมบัติของการบวกเวกเตอร์

ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ (สมบัติปิด)
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ (สมบัติการสลับที่)
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. มี $\bar{0}$ โดยที่ $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} = \bar{u} + \bar{0}$ (สมบัติการมีเอกลักษณ์)
5. สำหรับทุก $\bar{u}$ จะมี $-\bar{u}$ โดยที่ $-\bar{u} + \bar{u} = \bar{0} = \bar{u} + (-\bar{u})$ (สมบัติการมีอินเวอร์ส)
6. ถ้า $\bar{u} = \bar{v}$ แล้ว $\bar{u} + \bar{w} = \bar{v} + \bar{w}$ (สมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน)



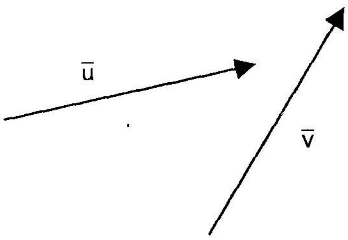
(ค)

รูป 2.4

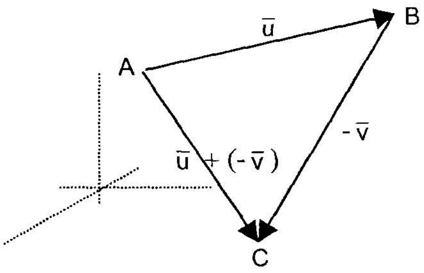
สมบัติข้อ 2 และข้อ 3 อาจแสดงให้เห็นจริง โดยใช้รูปทางเรขาคณิต ดังรูป 2.4 ก และ รูป 2.4 ข แต่ถ้าเป็นรูปในระนาบ สมบัติข้อ 3 อาจแสดงให้เห็นจริง ดังรูป 2.4 ค

การลบเวกเตอร์

<u>บทนิยาม 7</u> ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ **ผลลบ** ของ $\bar{u}$ ด้วย $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}-\bar{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ หรือ $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$

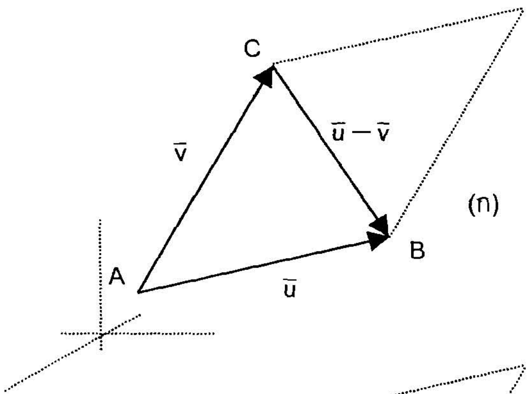


รูป 2.5



การหา $\bar{u}-\bar{v}$ ทำได้โดยหาผลบวกของ $\bar{u}$ กับนิเสธของ $\bar{v}$ ดังรูป 2.5 ซึ่งจะได้ว่า

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\bar{u}+(-\bar{v})=\bar{u}-\bar{v}$$

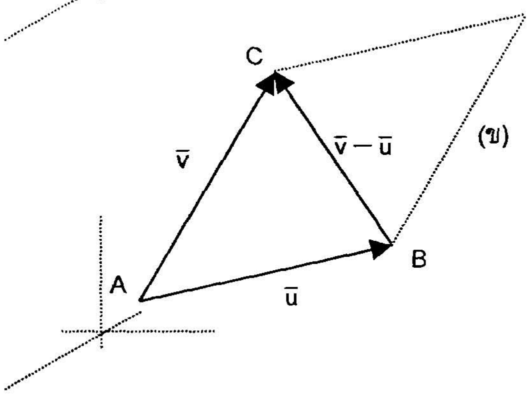


การหาผลลบของเวกเตอร์ อาจทำได้อีกวิธีหนึ่ง โดยให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน และสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป 2.6

จากรูป 2.6 (ก) เนื่องจาก

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$$

$$=-\bar{v}+\bar{u}=\bar{u}-\bar{v}$$



รูป 2.6

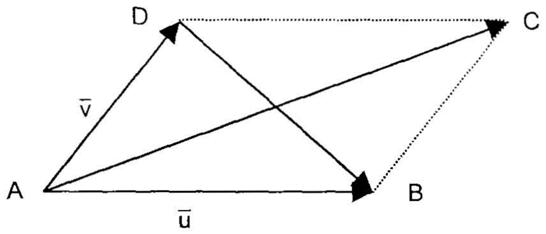
และจากรูป 2.6 (ข)

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\bar{u}+\bar{v}$$

$$=\bar{v}-\bar{u}$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ที่เป็นผลลบจะมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ทั้งสองที่กำหนดให้ โดยเวกเตอร์ที่เป็นผลลบกับเวกเตอร์ที่เป็นตัวตั้งมีจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

<u>ข้อสังเกต</u> เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ให้เวกเตอร์ทั้งสองมีจุดเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน เช่นที่ A โดยให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$ แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ดังรูป 2.7 จะได้



รูป 2.7

$\overrightarrow{AC} = \bar{u} + \bar{v}$

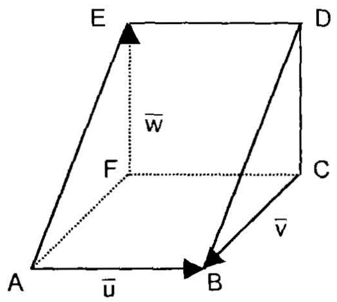
$\overrightarrow{BD} = \bar{v} - \bar{u}$

$\overrightarrow{DB} = \bar{u} - \bar{v}$

จะเห็นว่าเมื่อกำหนดเวกเตอร์ให้สองเวกเตอร์ จะหาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์ทั้งสองได้โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะแทนผลบวกและผลลบที่ต้องการเมื่อระบุทิศทางให้ถูกต้อง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จากรูป จงหา $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{BE}$ ในรูปของ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$

<u>วิธีทำ</u> การหาเวกเตอร์ที่กำหนดให้ สามารถพิจารณาได้หลายแนวทาง เช่น



(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB})$

$= \bar{u} + (-\bar{v})$

$= \bar{u} - \bar{v}$

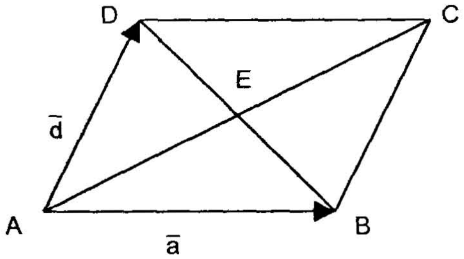
(2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FE}$

$= (\bar{u} - \bar{v}) + \bar{w}$

(3) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE} = (-\overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{FE}$

$= (-\bar{u}) + (-\bar{v}) + \bar{w} = \bar{w} - \bar{u} - \bar{v}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ให้ AB = $\bar{a}$, AD = $\bar{d}$ จงเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ และ $\overrightarrow{BD}$ ในรูปขอ $\bar{a}$ และ $\bar{d}$



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ว่า AD = BC และ AB = DC

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \bar{d}$

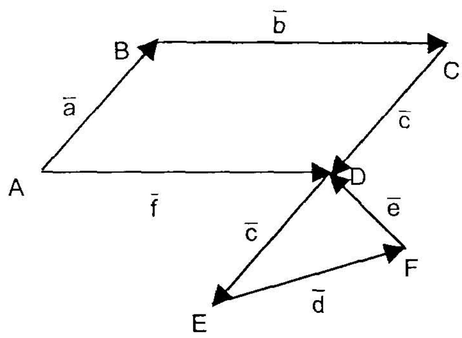
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\bar{a}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\bar{d} - \bar{a}$

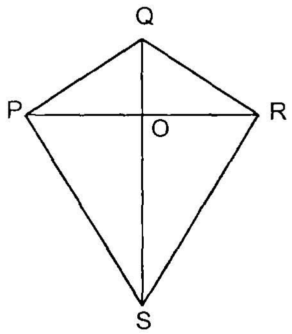
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\bar{a} + \bar{d}$

$= \bar{d} - \bar{a}$

แบบฝึกหัด 2

1. 

จากรูป จงเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{EA}$ ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ และ $\bar{f}$

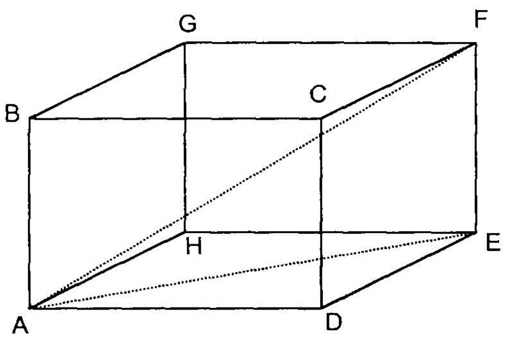
2. 

PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O

จงหา (1) $\overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP})$

(2) $(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{QS}) + \overrightarrow{RO}$

(3) $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) - \overrightarrow{SR}$

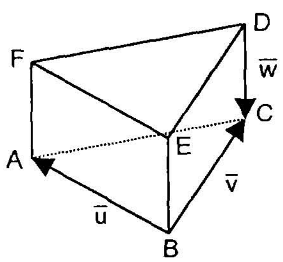
3. 

กำหนด ABCDEFGH เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จงหา (1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$

(2) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{AB}$

(3) เวกเตอร์ที่นำมาบวกกันแล้วได้ $\bar{0}$

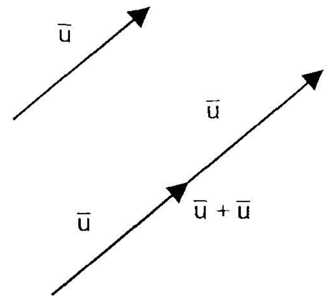
4. 

กำหนด ABCDEF เป็นรูปทรงสามเหลี่ยม จงเขียน $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{FC}$ ในรูปของ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$

5. จงเขียนรูปทรงสามมิติ เพื่อแสดงว่า $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE}$

3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Multiply vectors by a scalar)

ในการศึกษาเรื่องเวกเตอร์จะใช้อักษร a, b, c, ... แทนสเกลาร์ (จำนวนจริง) ความหมายของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์เหมือนกับการคูณในทางพีชคณิตซึ่งเป็นการขยายความเข้าใจสำหรับการบวกให้กว้างขึ้น



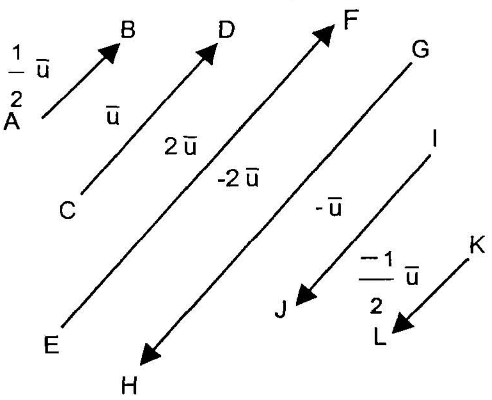
รูป 3.1

เมื่อพิจารณาผลบวกของ $\bar{u}+\bar{u}$ จะพบว่า $\bar{u}+\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{u}$ และมีทิศทางเดียวกัน แต่ขนาดของ $\bar{u}+\bar{u}$ เป็น 2 เท่าของขนาดของ $\bar{u}$ ดังรูป 3.1 จากผลลัพธ์ดังกล่าวเป็นแนวทางให้นิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้ดังนี้

<u>บทนิยาม 8</u> ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ **ผลคูณระหว่าง a และ $\bar{u}$** เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1. ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
2. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
3. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

จากบทนิยามจะเห็นว่า $(-1)\bar{u} = -\bar{u}$



รูป 3.2

พิจารณารูป 3.2 กำหนดให้ $\overrightarrow{CD} = \bar{u}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\bar{u}, \overrightarrow{EF} = 2\bar{u}, \overrightarrow{GH} = -2\bar{u}$

$\overrightarrow{IJ} = -\bar{u}$ และ $\overrightarrow{KL} = \frac{-1}{2}\bar{u}$

และจะเห็นว่า

$|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ และมีทิศทางเดียวกัน

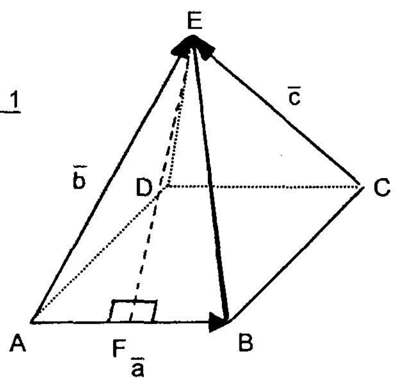
$|\overrightarrow{EF}| = 2|\overrightarrow{CD}|$ และมีทิศทางเดียวกัน

$|\overrightarrow{GH}| = 2|\overrightarrow{CD}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

$|\overrightarrow{IJ}| = 1|\overrightarrow{CD}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

และ $|\overrightarrow{KL}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>



จากรูปพีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

โดย $\bar{a} = AB$, $\bar{b} = AE$ และ $\bar{c} = CE$

(1) $\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{EF}$

<u>วิธีทำ</u> (1) จากรูป $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\bar{a}$, $\overrightarrow{AE} = \bar{b}$ และ $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{CE} = -\bar{c}$

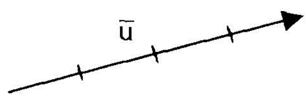
ดังนั้น $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE} = -\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = \bar{b} - \bar{a} - \bar{c}$

(2) จากรูป $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = -\bar{b}$ และ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\bar{a}$

ดังนั้น $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และมีทิศทางดังรูป จงบรรยายลักษณะของเวกเตอร์ ต่อไปนี้



(1) $4\bar{u}$ (2) $-4\bar{u}$ (3) $\frac{1}{4}\bar{u}$ (4) $-\frac{1}{4}\bar{u}$

<u>วิธีทำ</u> จากบทนิยาม 8 สามารถบรรยายลักษณะของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ ได้ดังนี้

(1) $4\bar{u}$

เนื่องจาก 4 > 0 ดังนั้น $4\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|4||\bar{u}| = (4)(4) = 16$ หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

(2) $-4\bar{u}$

เนื่องจาก –4 < 0 ดังนั้น $-4\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|-4||\bar{u}| = (4)(4) = 16$ หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

(3) $\frac{1}{4}\bar{u}$

เนื่องจาก $\frac{1}{4} > 0$ ดังนั้น $\frac{1}{4}\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $\left|\frac{1}{4}\right||\bar{u}| = (\frac{1}{4})(4) = 1$ หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

(4) $-\frac{1}{4}\bar{u}$

เนื่องจาก $-\frac{1}{4} < 0$ ดังนั้น $-\frac{1}{4}\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $\left|-\frac{1}{4}\right||\bar{u}| = (\frac{1}{4})(4) = 1$ หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

<u>บทนิยาม 9</u> เรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (Unit vector)

<u>ข้อสังเกต</u> ให้ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u}$ หรือ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

ส่วนเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\dfrac{1}{|\bar{u}|}\bar{u}$ หรือ $-\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ มีสมบัติต่างๆ ที่สำคัญ ดังนี้

สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ a และ b เป็นสเกลาร์

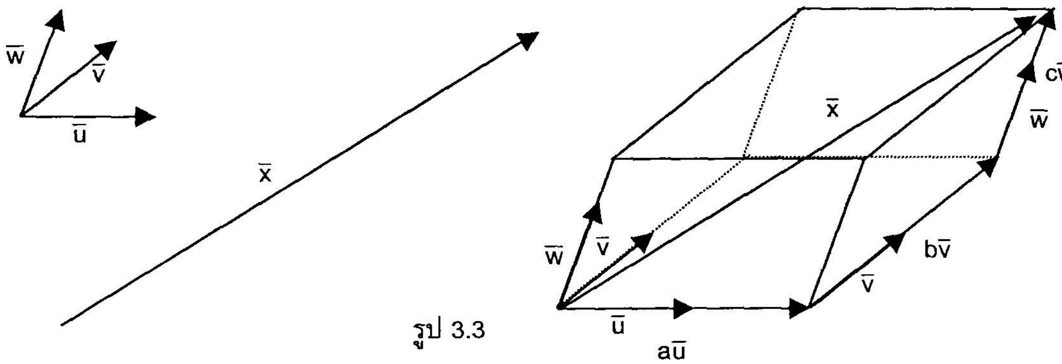
1. $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ (สมบัติปิด)
2. $a(b\bar{u}) = (ab)\bar{u}$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
3. $(a + b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$
   $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ (สมบัติการแจกแจง)
4. $1\bar{u} = \bar{u}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ มีดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$, $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้ $\bar{u} = a\bar{v}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> สำหรับ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ไม่มีสองเวกเตอร์ใดขนานกันและไม่มีเวกเตอร์หนึ่งขนานกับระนาบที่กำหนดจากอีกสองเวกเตอร์ที่เหลือ สำหรับทุกสเกลาร์ a, b และ c ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} + c\bar{w} = \bar{0}$ แล้ว จะได้ a = b = c = 0

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> สำหรับ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ไม่มีสองเวกเตอร์ใดขนานกันและไม่มีเวกเตอร์หนึ่งขนานกับระนาบที่กำหนดจากอีกสองเวกเตอร์ที่เหลือ $\bar{x}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ (ในสามมิติ) จะมีสเกลาร์ a, b และ c เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $\bar{x} = a\bar{u} + b\bar{v} + c\bar{w}$ (ดังตัวอย่าง รูป 3.3)



รูป 3.3

ทฤษฎีบทที่ 3 มีความหมายว่า ทุกๆ เวกเตอร์ในสามมิติ สามารถกำหนดได้ด้วยเวกเตอร์สามเวกเตอร์ที่ต่างไม่เท่ากับศูนย์ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ไม่มีสองเวกเตอร์ใดขนานกันและไม่มีเวกเตอร์หนึ่งขนานกับระนาบที่กำหนดจากอีกสองเวกเตอร์ที่เหลือได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบททั้งสามนี้จะนำไปใช้โดยไม่พิสูจน์

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงแสดงว่า สำหรับ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ไม่มีสองเวกเตอร์ใดขนานกันและไม่มีเวกเตอร์หนึ่งขนานกับระนาบที่กำหนดจากอีกสองเวกเตอร์ที่เหลือ
ถ้า $a_1\bar{u}+b_1\bar{v}+c_1\bar{w}=a_2\bar{u}+b_2\bar{v}+c_2\bar{w}$ แล้ว $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$

<u>วิธีทำ</u> จาก $a_1\bar{u}+b_1\bar{v}+c_1\bar{w}=a_2\bar{u}+b_2\bar{v}+c_2\bar{w}$

จะได้ $(a_1-a_2)\bar{u}+(b_1-b_2)\bar{v}+(c_1-c_2)\bar{w}=\bar{0}$

แต่ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด ไม่มีสองเวกเตอร์ใดขนานกันและไม่มีเวกเตอร์หนึ่งขนานกับระนาบที่กำหนดจากอีกสองเวกเตอร์ที่เหลือ

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้

$a_1-a_2=0$, $b_1-b_2=0$, $c_1-c_2=0$

นั่นคือ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$

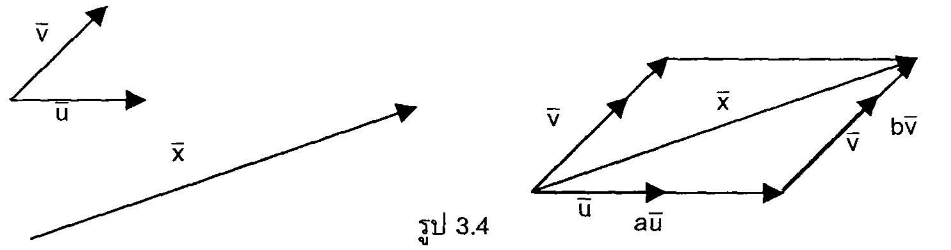
<u>ข้อสังเกต</u>

1. จากทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าให้ $\bar{w}=\bar{0}$ ทฤษฎีบทที่ 2 จะเปลี่ยนเป็น

สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ สำหรับทุกสเกลาร์ a และ b ถ้า $a\bar{u}+b\bar{v}=\bar{0}$ แล้ว จะได้ a = 0 และ b = 0

2. จากทฤษฎีบทที่ 3 ถ้าให้ $\bar{w}=\bar{0}$ ทฤษฎีบทที่ 3 จะเปลี่ยนเป็น

สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$, $\bar{x}$ เป็น เวกเตอร์ใดๆ (ในสองมิติ) จะมีสเกลาร์ a และb เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $\bar{x}=a\bar{u}+b\bar{v}$ (ดังตัวอย่าง รูป 3.4)



รูป 3.4

ข้อสังเกตที่ 2 มีความหมายว่า ทุกๆ เวกเตอร์ในระนาบ (สองมิติ) ใดระนาบหนึ่ง สามารถกำหนดได้ด้วยเวกเตอร์สองเวกเตอร์ ที่ต่างไม่เท่ากับศูนย์และไม่ขนานกัน ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ จะสรุปเกี่ยวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้อย่างไร

(1) $3\bar{u}-2\bar{v}=4\bar{v}-\bar{u}$

(2) $\lambda\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+2\bar{v}$ $(\bar{u}\neq\bar{0},\ \bar{v}\neq\bar{0})$

<u>วิธีทำ</u> (1) $3\bar{u}-2\bar{v}=4\bar{v}-\bar{u}$

$4\bar{u}=6\bar{v}$

$\bar{u}=\frac{3}{2}\bar{v}$

จากสมการ $\bar{u}=\frac{3}{2}\bar{v}$ จะสรุปความสัมพันธ์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้ดังนี้คือ

ก. $\bar{u} = \bar{v} = \bar{0}$

หรือ ข. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว $\bar{u}$ มีขนาดเป็น $\frac{3}{2}$ เท่าของ $\bar{v}$

$\bar{u}, \bar{v}$ ขนานกันและมีทิศทางเดียวกัน

(2) จาก $\lambda\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + 2\bar{v}$ ($\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่เท่ากับ $\bar{0}$)

ดังนั้น $(\lambda - 1)\bar{u} = 3\bar{v}$

$$\bar{u} = \frac{3}{\lambda - 1}\bar{v}$$

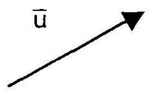
เนื่องจาก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ดังนั้น $\bar{u}$ มีขนาดเป็น $\left|\frac{3}{\lambda - 1}\right|$ เท่าของ $\bar{v}$

$\bar{u}, \bar{v}$ ขนานกันและจะมีทิศทางเดียวกันเมื่อ $\lambda > 1$ หรือมีทิศทางตรงข้ามกัน เมื่อ $\lambda < 1$

แบบฝึกหัด 3

1. กำหนด $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใดๆ จงแสดงรูปเวกเตอร์ดังกล่าว เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้
   (1) $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่เดียวกัน
   (2) $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และมีจุดเริ่มต้นที่เดียวกัน

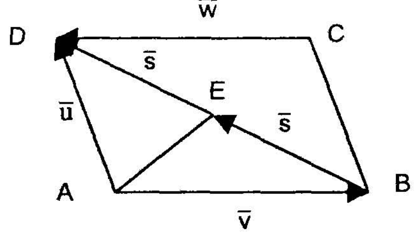
2.



กำหนด $\bar{u}$ ดังรูป จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{u}$ กับ
(1) $\bar{v}$ เมื่อ $3\bar{u} - 2\bar{v} = \bar{v}$
(2) $\bar{w}$ เมื่อ $2\bar{u} + \bar{w} = 2\bar{w} + 5\bar{u}$

3. กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน
   ให้ $\bar{w} = (a + 4b)\bar{u} + (2a + b + 1)\bar{v}$
   $\bar{s} = (b - 2a + 2)\bar{u} + (2a - 3b - 1)\bar{v}$
   ถ้า $3\bar{w} = 2\bar{s}$ จงหาค่า a และ b

4.



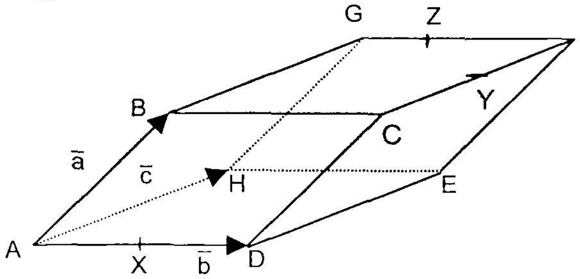
จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

(1) $\bar{v} = \bar{w}$ (2) $\overrightarrow{DB} = \bar{u} + \bar{v}$

(3) $2\bar{s} - \bar{u} = \bar{v}$ (4) $2\overrightarrow{AE} = \bar{u} + \bar{v}$

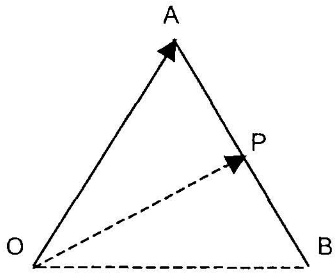
(5) $\overrightarrow{AE} = \bar{w} + \bar{s}$ (6) $\overrightarrow{AE} = \frac{\bar{u}}{2} - \frac{\bar{w}}{2}$

5.



กำหนด ABCDEFGH เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป มี X ,Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และ CF ตามลำดับและ $GZ = \frac{1}{3}GF$ ถ้า $\bar{a} = \overrightarrow{AB}, \bar{b} = \overrightarrow{AD}, \bar{c} = \overrightarrow{AH}$ จงเขียน $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{EY}$ และ $\overrightarrow{XZ}$ ในรูปของ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

6.



จากรูป ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว จงแสดงว่า $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

7. A, B และ C เป็นจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน C แบ่ง $\overline{AB}$ ตามอัตราส่วน $|AC|:|CB|$ = m:n O เป็นจุดๆหนึ่งซึ่งไม่อยู่บน $\overline{AB}$ ให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OB} = \bar{v}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m+n}(n\bar{u} + m\bar{v})$

☆8. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M , N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ CD ตามลำดับ ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{AM}$ และ $\bar{v} = \overrightarrow{AN}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$

4. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System of Vectors)

ในตอนแรกเรากล่าวถึงเวกเตอร์ในความหมายเชิงเรขาคณิต กล่าวคือ เขียนแทนเวกเตอร์ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง และการศึกษารายละเอียดของเวกเตอร์จะใช้สมบัติในทางเรขาคณิตเป็นส่วนใหญ่ แต่ในตอนนี้จะกล่าวถึงเวกเตอร์ในความหมายเชิงพีชคณิตโดยอ้างอิงระบบพิกัดฉาก ดังนั้นสมบัติต่างๆ ที่ใช้ส่วนใหญ่จะเป็นสมบัติในทางพีชคณิตและยังคงใช้สมบัติทางเรขาคณิตได้อีกด้วย

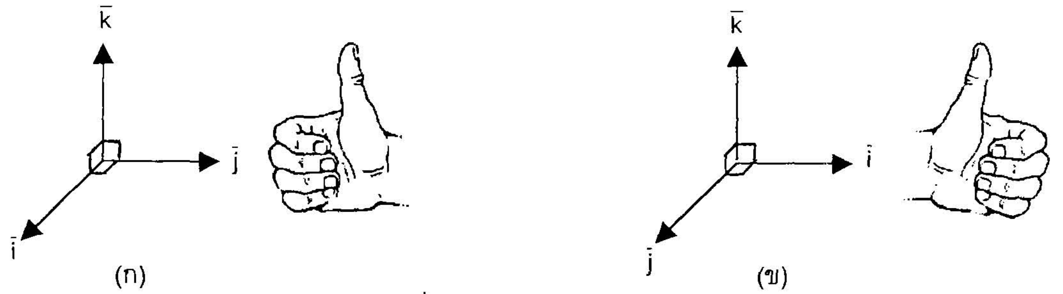
ประโยชน์จากการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากคือ สามารถนำความรู้ทางพีชคณิตมาให้ความหมายของเวกเตอร์ได้ สามารถนำความรู้ทางเรขาคณิตเบื้องต้นมาใช้ได้ สามารถศึกษาเรื่องเวกเตอร์ได้กว้างขวางขึ้น และจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ในขั้นสูงต่อไป

ก่อนที่จะศึกษาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก เราจะศึกษาระบบพิกัดฉากและระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ 3 มิติเสียก่อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

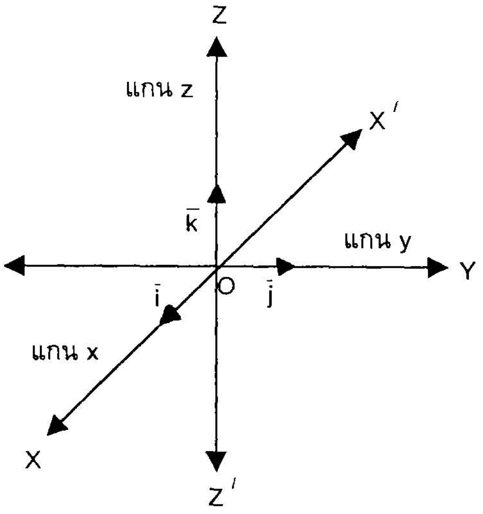
สิ่งสำคัญที่ใช้ในการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก คือ ทฤษฎีบทที่ 3 (หน้า 65) และข้อสังเกตที่ 2 (หน้า 66) กล่าวคือ ทฤษฎีบทที่ 3 ใช้กำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ ส่วนข้อสังเกตที่ 2 ใช้กำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากใน 2 มิติ (ระนาบ)

4.1 ระบบพิกัดฉากและระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิ 3 มิติ

กำหนดให้ $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีจุดเริ่มต้นที่เดียวกันและตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยที่การกำหนดทิศทางของ $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ เป็นไปได้ 2 ระบบ คือ ระบบมือขวาหรือระบบมือซ้าย ดังรูป 4.1 (ก) และ (ข) ตามลำดับ แต่ในบทเรียนนี้เรากำหนด $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ โดยใช้ระบบมือขวา



รูป 4.1

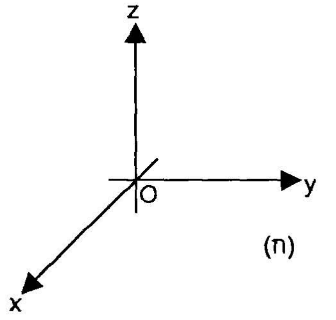


ให้เส้นตรง XX′ , YY′ และ ZZ′ เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกับส่วนของเส้นตรงที่ใช้แทน $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ตามลำดับ ดังรูป 4.2 และให้เส้นตรงเหล่านี้เป็นเส้นจำนวน (real line) โดยที่จำนวนบวกจะแทนด้วยจุดบนเส้นทางด้านเดียวกับ $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ เรียก เส้นตรง XX′ , YY′ และ ZZ′ ว่า **แกนพิกัด x** , **แกนพิกัด y** และ **แกนพิกัด z** หรือเรียกสั้นๆ ว่า **แกน x** (x-axis) , **แกน y** (y-axis) และ **แกน z** (z-axis) ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน x แกน y และแกน z หรือจุดเริ่มต้นของ $\bar{i},\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ว่า **จุดกำเนิด** (origin)

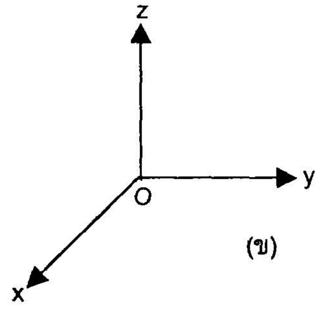
รูป 4.2

เรียกส่วนของเส้นตรง OX , OY และ OZ ว่าแกน x ทางบวก (positive x-axis) แกน y ทางบวก (positive y-axis) และแกน z ทางบวก (positive z-axis) ตามลำดับ และเรียกส่วนของเส้นตรง OX′, OY′ และ OZ′ ว่าแกน x ทางลบ (negative x-axis) แกน y ทางลบ (negative y-axis) และแกน z ทางลบ (negative z-axis) ตามลำดับ

โดยทั่วไป เมื่อเขียนรูปแกนพิกัดในปริภูมิ 3 มิติ นิยมเขียนเฉพาะ แกน x , แกน y และแกน z ที่เน้นเฉพาะทางด้านที่แทนจำนวนจริงบวกซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูป 4.3 (ก) หรือ 4.3 (ข) โดยละทางด้านจำนวนจริงลบและ $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจ

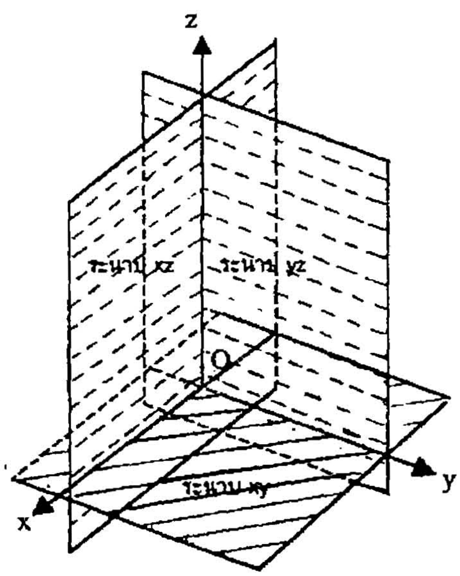


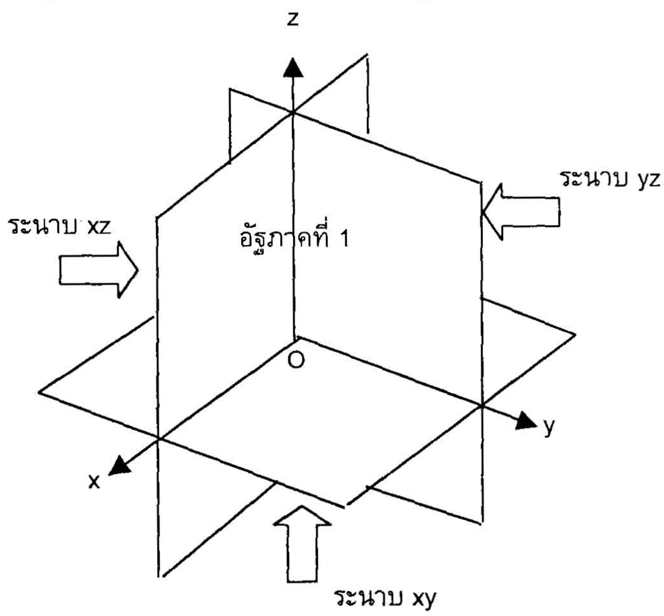
รูป 4.3



หมายเหตุ ในการศึกษาระบบพิกัดฉาก 3 มิติ อาจจะศึกษาได้หลายแนวทาง ในบทเรียนเล่มนี้จะใช้เวกเตอร์เป็นเครื่องมือ

แกน x แกน y และแกน z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง** เรียกระนาบที่กำหนดด้วย แกน x และแกน y ว่า **ระนาบอ้างอิง xy** ระนาบที่กำหนดด้วยแกน y และแกน z ว่า **ระนาบอ้างอิง yz** และระนาบที่กำหนดด้วยแกน x และแกน z ว่า**ระนาบอ้างอิง xz** หรือเรียกสั้นๆ ว่า **ระนาบ xy** , **ระนาบ yz** และ **ระนาบ xz** ตามลำดับ ดังรูป 4.4 (ก) จะเห็นได้ว่า ระนาบ xy ระนาบ yz และระนาบ xz ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 บริเวณ คือ เหนือระนาบ xy จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ xy จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า **อัฐภาค** (octant) ดังรูป 4.4 (ข) อัฐภาคที่บรรจุแกน x แกน y และแกน z ทางบวกจะเรียกว่า **อัฐภาคที่ 1** ส่วนอัฐภาคอื่นๆ จะใช้ข้อตกลงเดียวกับในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ (นับทวนเข็มนาฬิกาไปตามลำดับ) โดยพิจารณาบริเวณเหนือระนาบ xy ก่อน

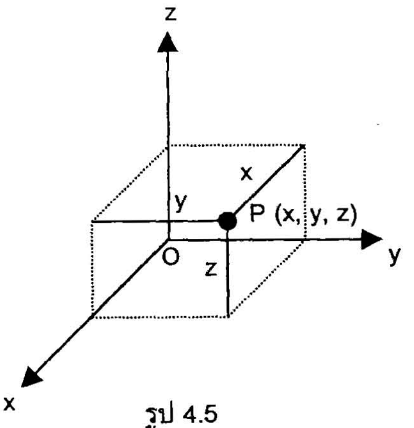




รูป 4.4

(ก) (ข)

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิ 3 มิติ จะระบุตำแหน่งของจุด P หรือพิกัดของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับ หรือเรียกว่า " สามอันดับ " (ordered triple) ในรูป (x, y, z) **โดยที่**



รูป 4.5

x **คือ ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน x ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ yz เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวก เมื่อวัดจากระนาบ yz ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน x มีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน x และมีค่าเป็นศูนย์เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ yz**

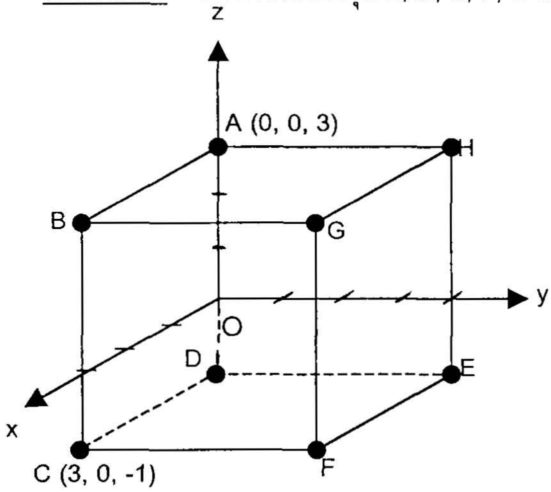
y **คือ ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน y ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ xz เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวก เมื่อวัดจากระนาบ xz ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน y มีค่าเป็น**

จำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน y และมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ xz

z คือ ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน z ซึ่งระบุว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ xy เท่าใด ระยะดังกล่าวมีค่าเป็นจำนวนบวก เมื่อวัดจากระนาบ xy ไปยังจุด P ไปทางด้านบวกของแกน z มีค่าเป็นจำนวนลบเมื่อวัดไปทางด้านลบของแกน z และมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อจุด P อยู่บนระนาบ xy

เรียก " (x, y, z) " ว่า **พิกัด** ของจุด P และบางครั้งจะเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น " P (x, y, z) " ดังรูป 4.5

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาพิกัดของจุด B, D, E, F, G และ H



จากรูป

จุด B มีพิกัดเป็น (3, 0, 3)

จุด D มีพิกัดเป็น (0, 0, -1)

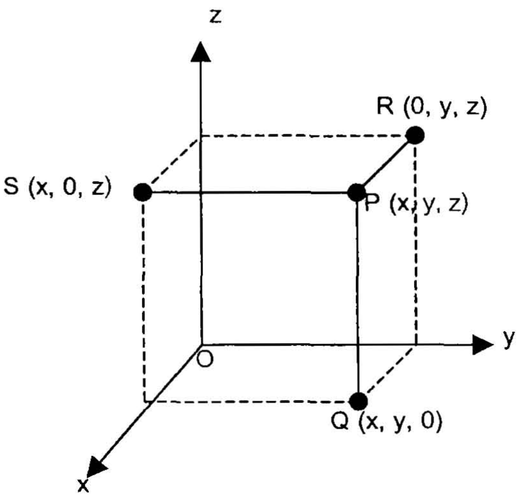
จุด E มีพิกัดเป็น (0, 4, -1)

จุด F มีพิกัดเป็น (3, 4, -1)

จุด G มีพิกัดเป็น (3, 4, 3)

และ จุด H มีพิกัดเป็น (0, 4, 3)

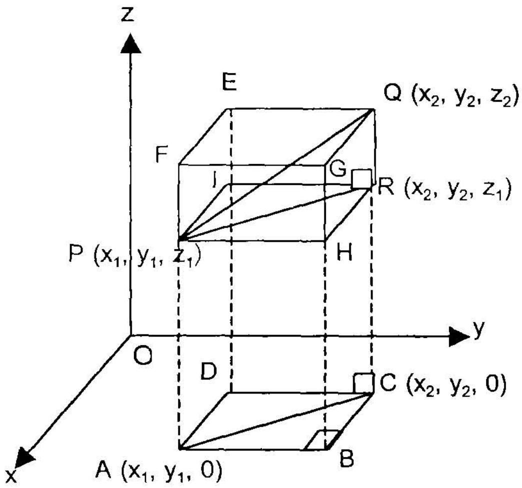
ระยะทางระหว่างสองจุดในปริภูมิ 3 มิติ



รูป 4.6

ถ้าเราลากเส้นผ่านจุด P (x, y, z) ให้ขนานกับแกน z ไปตัดระนาบ xy จะได้จุดตัดมีพิกัด Q (x, y, 0) เรียกจุดนี้ว่า **โพรเจกชัน** ของจุด P บนระนาบ xy

ในทำนองเดียวกันจะเรียกจุด R (0, y, z) ว่าเป็นโพรเจกชันของจุด P บนระนาบ yz และเรียกจุด S (x, 0, z) ว่าเป็นโพรเจกชันของจุด P บนระนาบ xz ดังรูป 4.6



รูป 4.7

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ สมมติว่าเป็น จุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ อาจหาได้โดยอาศัยโพรเจกชันของจุดทั้งสองบนระนาบ xy และอาศัยทฤษฎีบทปีทาโกรัส ดังนี้

ให้ A, C เป็นโพรเจกชันของ P และ Q บนระนาบ xy แล้วสร้างรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป 4.7 จะได้ PRQ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยอาศัยความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดบนระนาบ xy จะได้

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

เนื่องจาก $PR = AC$ และ $QR = |z_2 - z_1|$

และ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

ดังนั้น $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ แล ะ$Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ มีค่าเท่ากับ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

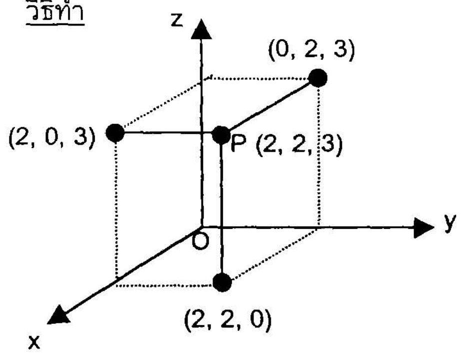
(**หมายเหตุ** ในการสร้างรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก อาจสร้างได้หลายวิธี เช่น จากจุด A และ C ลากเส้นให้ขนานกับแกน x และแกน y โดยให้เส้นขนานเหล่านี้ตัดกัน จะได้รูปสี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป 4.7 จากจุด A , B , D ลากเส้นตั้งฉากกับระนาบ xy ให้ยาวเท่ากับ QC จะได้รูปสี่เหลี่ยม EFGQ ดังนั้นเราจะได้รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCDEFGQ ที่จุด P สร้างรูปสี่เหลี่ยม PHRI ให้ขนานกับระนาบ xy และลากเส้นทแยงมุม PR ส่วนรูปสี่เหลี่ยม ABCD ลากเส้นทแยงมุม AC)

ทฤษฎีบทที่ 4 ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ มีค่าเท่ากับ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโพรเจกชันของจุด P (2, 2, 3) บนระนาบ xy , yz และ xz

วิธีทำ



จากรูป

โพรเจกชันของจุด P (2, 2, 3) บนระนาบ xy คือจุด (2, 2, 0)

โพรเจกชันของจุด P (2, 2, 3) บนระนาบ yz คือจุด (0, 2, 3)

โพรเจกชันของจุด P (2, 2, 3) บนระนาบ xz คือจุด (2, 0, 3)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาระยะทางระหว่างจุด A (1, 0, 3) และ B (-1, 3, 2)

วิธีทำ จากสูตร $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

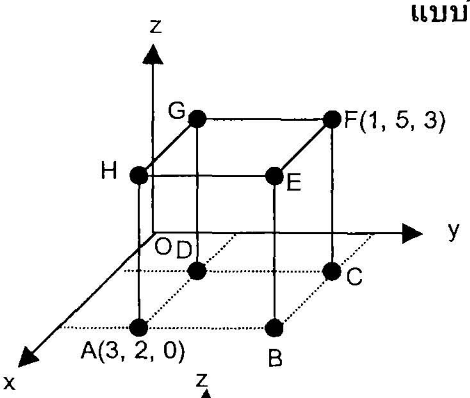
จะได้ $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-0)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{4+9+1}$

$= \sqrt{14}$

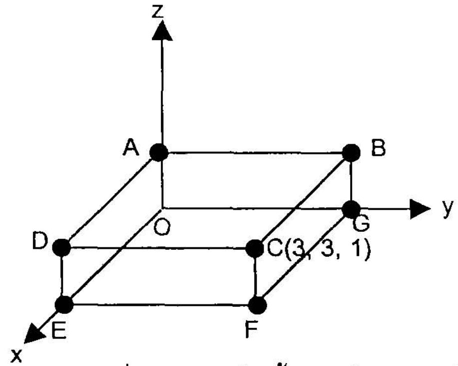
แบบฝึกหัด 4.1

1.



จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีหน้าทั้งหกขนานกับระนาบอ้างอิง

2.



จากรูปจงหาพิกัดของจุดที่เหลือ

(1) บนแกน x (4) ในระนาบ xy

(2) บนแกน y (5) ในระนาบ yz

(3) บนแกน z (6) ในระนาบ xz

3. จงพิจารณาว่า จุดที่กำหนดต่อไปนี้มีพิกัดในรูปแบบใด

(1) จุดบนแกน x (2) จุดบนแกน y (3) จุดบนแกน z

(4) จุดในระนาบ xy (5) จุดในระนาบ yz (6) จุดในระนาบ xz

4. จงกำหนดระบบพิกัดฉากของจุดในปริภูมิ 3 มิติ โดยใช้ระบบมือขวาและเขียนจุดในปริภูมิ 3 มิติ ที่มีพิกัดต่อไปนี้

A. (1, 1, 1) B. (1, -1, 2) C. (3, 2, -1) D. (-1, -1, -2)

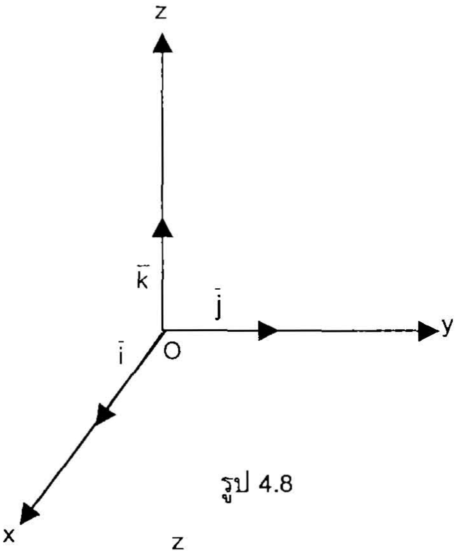
5. จงหาโพรเจกชันของจุด P, Q บนระนาบ xy , yz และ xz เมื่อ P, Q มีพิกัดเป็น (3, -4, 8) และ (7, -2, 8) ตามลำดับ

6. จงหาระยะทางระหว่างจุด P (1, -2, 7) และ Q (-2, -1, 0)

7. จงพิจารณาว่า สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A (1, 2, 1) ,B (-3, 7, 9) และ C (11, 4, 2) เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

8. จงหาสมการของความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขว่า จุด (x, y, z) ใดๆ บนกราฟของความสัมพันธ์ห่างจากจุด (3, -1, 2) เป็นระยะทาง 3 หน่วย

4.2 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

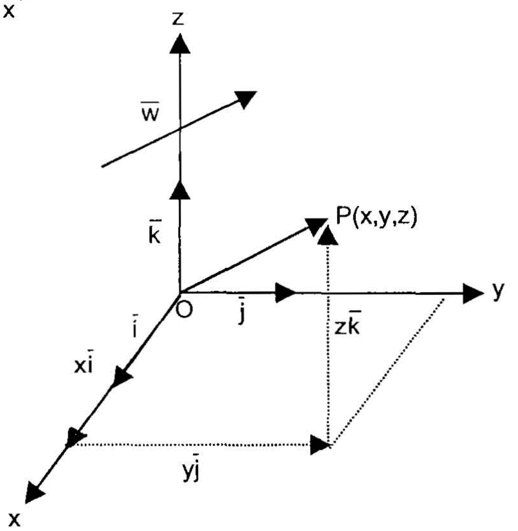


รูป 4.8

จากหัวข้อ 4.1 เราทราบแล้วว่า $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่งอยู่บนแกน x , y และ z ทางด้านบวก ตามลำดับ ดังรูป 4.8

ให้ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยอาศัยการเท่ากันของเวกเตอร์ เราสามารถแทน $\bar{w}$ ด้วย $\overrightarrow{OP}$ โดยที่ O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ ที่ทำให้ $\overrightarrow{OP} = \bar{w}$ ดังรูป 4.9 โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 3 (หน้า 65) จะได้ว่า มีสเกลาร์ x, y และ z เพียงชุดเดียว ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ และจากหัวข้อ 4.1 ทำให้ทราบว่าจุด P มีพิกัด (x, y, z)

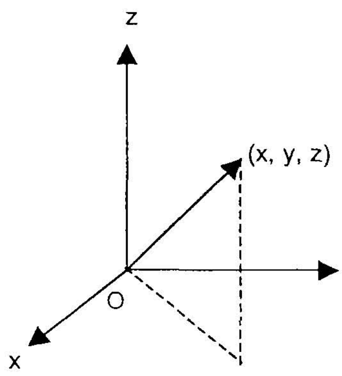
จากรูป 4.9 จะสังเกตเห็นได้ว่า จุดเริ่มต้นของ $\overrightarrow{OP}$ มีพิกัดเป็น (0, 0, 0) และจุดสิ้นสุดมีพิกัดเป็น (x, y, z) ดังนั้นเราจึงนิยามเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (O) และจุดสิ้นสุดที่ (x,y,z) ได้ดังนี้



รูป 4.9

<u>บทนิยาม 10</u> กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่า **เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ** หรือ **เวกเตอร์ในสามมิติ** หรือ เรียกสั้นๆ ว่า **เวกเตอร์**

ในทางเรขาคณิตเราแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (O) และมีจุดสิ้นสุดที่ (x, y, z) (ดังรูป 4.10)



รูป 4.10

หมายเหตุ ให้ $\overrightarrow{OP}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จากทฤษฎีบทที่ 3 (หน้า 65) จะได้ว่า มีสเกลาร์ x, y, z เพียงชุดเดียว ซึ่งทำให้

$$\overrightarrow{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาเวกเตอร์ ก) มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดอยู่ที่ P (3, 1, -2)

ข) มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดอยู่ที่ Q (0, -2, 5)

<u>วิธีทำ</u> โดยอาศัยบทนิยาม 10 จะได้

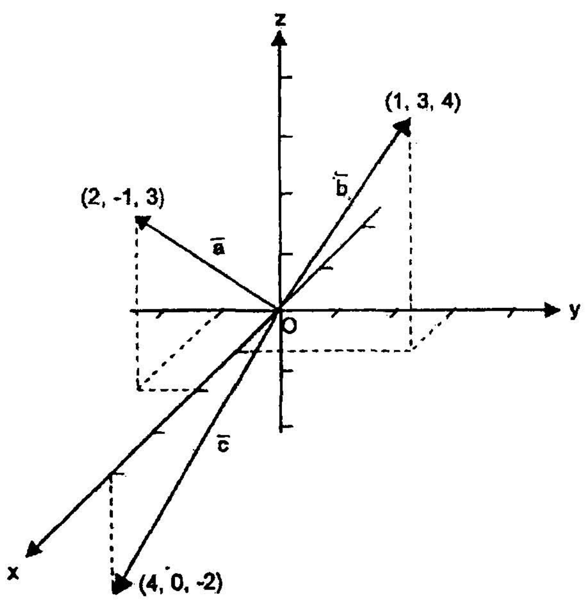
ก) $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ

ข) $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงกำหนดเวกเตอร์ต่อไปนี้ลงไปในระบบพิกัดฉาก $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ

$\bar{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>



<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ และเขียนรูปลงไปในระบบพิกัดฉากด้วย

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{และ} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

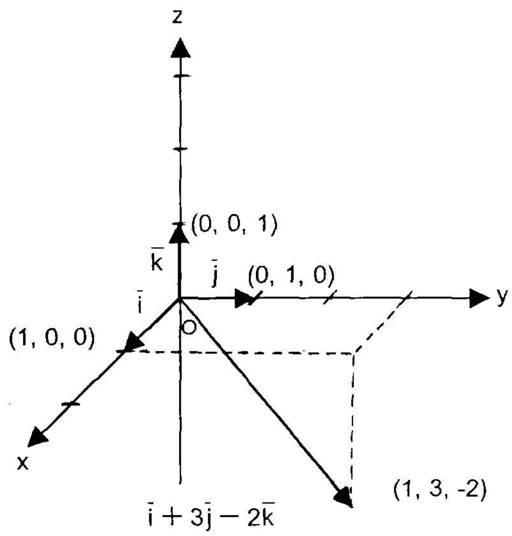
<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = (1)\bar{i} + (3)\bar{j} + (-2)\bar{k} = \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (1)\bar{i} + (0)\bar{j} + (0)\bar{k} = \bar{i}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)\bar{i} + (1)\bar{j} + (0)\bar{k} = \bar{j}$$

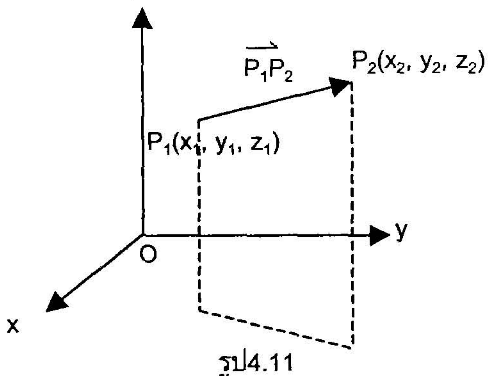
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0)\bar{i} + (0)\bar{j} + (1)\bar{k} = \bar{k}$$



จากตัวอย่างที่ 3 จะพบว่า $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญใน 3 มิติ

ในบทนิยาม 10 ได้กล่าวถึงการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ส่วนการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้นที่ไม่ใช่จุดกำเนิด สามารถกำหนดได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 5</u> ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง มีจุดตั้งต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ (ดังรูป 4.11)



รูป4.11

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ P มีพิกัดเป็น (3,4,-4) และ Q มีพิกัดเป็น (5,0,7) จงหา $\overrightarrow{PQ}$

<u>วิธีทำ</u> $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 0-4 \\ 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ การเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะเป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

เรื่อง	บทนิยาม
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a = d, b = e, และ c = f
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d \\ -e \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

<u>ข้อสังเกต</u> 1. สามารถเขียนแทนเวกเตอร์ $(-1)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ด้วย $-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

2. ในกรณีที่ α = -1 จะเห็นว่า $(-1)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)a \\ (-1)b \\ (-1)c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$ นั่นคือ

$$-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

3. เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $\lambda \neq 0$ ที่ทำให้ $a = \lambda d$, $b = \lambda e$ และ $c = \lambda f$

4. $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 \\ b+0 \\ c+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\alpha = 3$

จงหา $\bar{u}+\bar{v}$, $\bar{u}-\bar{v}$, $-\bar{v}$, $\alpha\bar{u}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{u}+\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) \\ 3+4 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}-\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 3-4 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\bar{v} = (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) \\ (-1)4 \\ (-1)0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\bar{u} = 3\bar{u} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(2) \\ (3)(3) \\ (3)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\alpha = -\frac{1}{2}$

จงหา $\bar{a}+2\bar{b}$, $3\bar{a}-\bar{b}$, $-\bar{a}$, $\alpha\bar{a}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{a}+2\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2)(3) \\ (2)(4) \\ (2)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 \\ 2+8 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

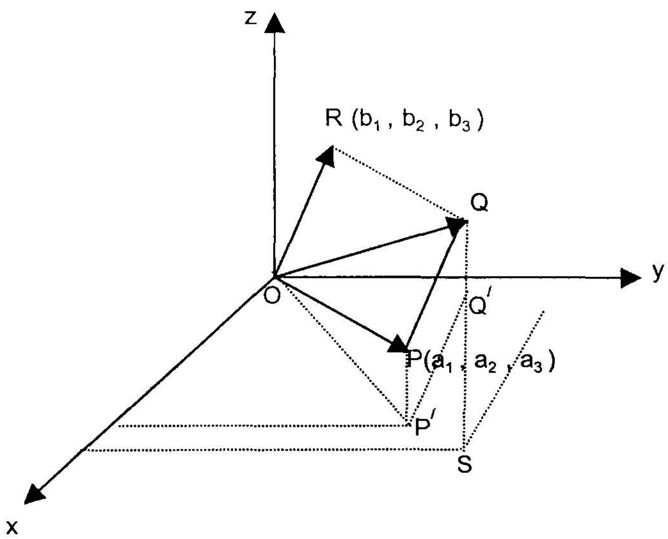
$$3\bar{a}-\bar{b} = (3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(1) \\ (3)(2) \\ (3)(4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 \\ 6-4 \\ 12-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$-\bar{a} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(1) \\ (-1)(2) \\ (-1)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\bar{a} = -\frac{1}{2}\bar{a} = (-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2})(1) \\ (-\frac{1}{2})(2) \\ (-\frac{1}{2})(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ความหมายทางเรขาคณิตของการบวกเวกเตอร์

กำหนด $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$



ให้ OPQR เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เราจะแสดงว่า $\overrightarrow{OQ}$ เป็นผลบวกของ $\overrightarrow{OP}$ กับ $\overrightarrow{OR}$ โดยจะพยายามหาพิกัดของจุด Q ดังนี้

ให้ P' และ S เป็นโพรเจกชันของ P และ Q ตามลำดับบนระนาบ xy

ให้ Q' อยู่บนเส้นตรง QS ซึ่ง $\overrightarrow{P'Q'}$ ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$

แต่ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$

และ $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

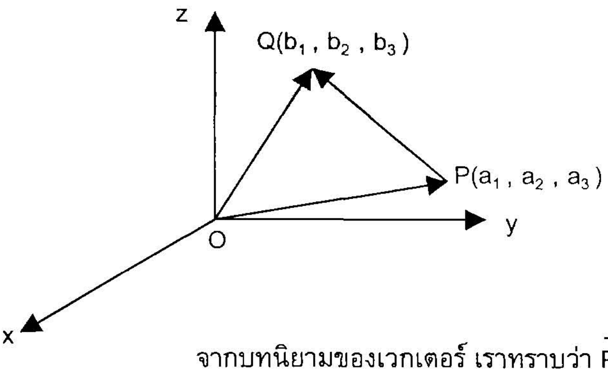
ดังนั้น $\overrightarrow{P'Q'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

แต่ P' มีพิกัดเป็น $(a_1, a_2, 0)$ ดังนั้น Q' มีพิกัดเป็น (a_1+b_1, a_2+b_2, b_3)

แต่ $|\overrightarrow{QQ'}| = |\overrightarrow{PP'}| = |a_3|$ ดังนั้น Q มีพิกัดเป็น $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

นั่นคือ $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$ ซึ่งจะเห็นว่าผลบวกของสองเวกเตอร์ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็นเวกเตอร์ทั้งสองที่มีจุดเริ่มต้นที่เดียวกัน

ความหมายทางเรขาคณิตของการลบเวกเตอร์



ให้ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

จากบทนิยามของเวกเตอร์ เราทราบว่า $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$

จากบทนิยามการลบ เราทราบว่า $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$

จากที่กล่าวมาแล้วว่าเวกเตอร์ใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ ได้เสมอ ในที่นี้จะแสดงให้เห็นโดยใช้สมบัติทางพีชคณิต ได้ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

แบบฝึกหัด 4.2 ก

1. จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนด A และ B ดังต่อไปนี้

   (1) A (-2, 1, 0), B (3, 2, 0)

   (2) A (7, 3, 1), B (-1, 8, 3)

   (3) A (0, 0, 0), B (2, -1, 0)

   (4) A (1, 1, -1), B (0, 1, -4)

2. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ (O เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก)

   (1) $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

   (2) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A และ B มีพิกัดเป็น (3, 2, 0) และ (-4, 1, 0) ตามลำดับ

   (3) $\overrightarrow{CD}$ โดยที่ C และ D มีพิกัดเป็น (-3, 0, 4) และ (0, 1, -2) ตามลำดับ

   (4) $\overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

   (5) $\overrightarrow{XY}$ โดยที่ X และ Y มีพิกัดเป็น (1, -1, 2) และ (3, 2, 6) ตามลำดับ

(6) $\overrightarrow{MN}$ โดยที่ M และ N มีพิกัดเป็น (0, 1, 1) และ (-1, -1, 2) ตามลำดับ

3. กำหนด $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ และ $\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

จงหา (1) $\bar{a} + 5\bar{b}$ (2) นิเสธของ $\bar{a} + 5\bar{b}$

(3) $\bar{a} - \frac{3}{4}\bar{b}$ (4) นิเสธของ $\bar{a} - \frac{3}{4}\bar{b}$

(5) $2\bar{b} - (\bar{a} + \bar{c})$ (6) $-8(\bar{b} + \bar{c}) + 2\bar{a}$

4. กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน 3 มิติ และ λ, μ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จงแสดงว่า (1) $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

(2) $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$

(3) $\lambda(\mu\bar{v}) = (\lambda\mu)\bar{v}$

(4) $(\lambda + \mu)\bar{u} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{u}$

(5) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

5. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

ขนาดของเวกเตอร์ใน 3 มิติ

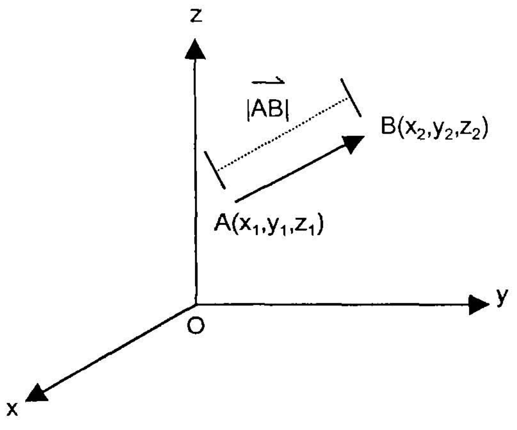
ได้กล่าวมาแล้วว่าขนาดของเวกเตอร์ใดๆ ก็ตาม หมายถึงความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทนเวกเตอร์นั้น (ดังรูป 4.12)

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็น เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) จะได้

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 4 (หน้า 72) ทำให้ได้ว่า

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



รูป 4.12

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$, $z_2 - z_1 = c$ แล้วจะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(ก) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (ข) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P มีพิกัดเป็น (2, 1, 0) และ Q มีพิกัดเป็น (-1, 1, 0)

<u>วิธีทำ</u> (ก) $|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5}$

(ข) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

เนื่องจากเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ (ที่ไม่ใช่ $\bar{0}$) คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

<u>หมายเหตุ</u> เราทราบว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ และเนื่องจาก $\left|\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ดังนั้น $|a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> $\overrightarrow{P_1P_2}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (1, 2, 0) และจุดสิ้นสุดที่ (-2, 3, 1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

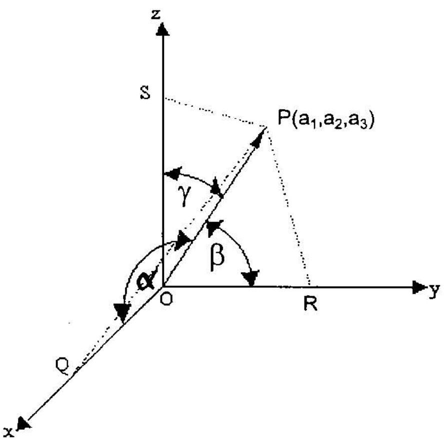
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\end{bmatrix}=\frac{-3}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{-3}{\sqrt{11}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j}+\frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}$$

โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines)

ในการกำหนดทิศทางของเวกเตอร์นั้น นอกจากการกำหนดด้วยพิกัดของเวกเตอร์แล้วเรายังสามารถกำหนดด้วยมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสาม ซึ่งมีอยู่สามมุม (ดังรูป)



กำหนดจุด $P(a_1, a_2, a_3)$ จะได้ $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

กำหนด α , β , γ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับไปยัง $\overrightarrow{OP}$ จะได้

$$\cos\alpha=\frac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{a_1}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\beta=\frac{OR}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{a_2}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\gamma=\frac{OS}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{a_3}{|\overrightarrow{OP}|}$$

หมายเหตุ **ในที่นี้ OQ, OR, OS หมายถึง ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน**

มุม α , β , γ คือมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน x, y, z ทางด้านบวก ตามลำดับ เรียกมุมดังกล่าวว่า **มุมกำหนดทิศทาง** (direction angle) ของ $\overrightarrow{OP}$ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\overrightarrow{OP}$ เราสามารถนิยาม โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ใดๆ ได้ดังนี้

บทนิยาม 11 โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\bar{a}$ เมื่อ

$\bar{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\bar{a}|\neq 0$ เทียบกับแกน x , y , z ตามลำดับ คือจำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}$, $\frac{a_2}{|\bar{a}|}$, $\frac{a_3}{|\bar{a}|}$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$

<u>วิธีทำ</u> $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน x, y, z ตามลำดับคือ $\frac{3}{5\sqrt{2}}$, $\frac{4}{5\sqrt{2}}$, $\frac{5}{5\sqrt{2}}$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P (0, 3, 5) จุดสิ้นสุดที่ Q (1, 5, 2)

<u>วิธีทำ</u> $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 5-3 \\ 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

$\therefore$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ เทียบกับแกน x, y, z ตามลำดับคือ $\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\frac{-3}{\sqrt{14}}$

<u>บทนิยาม 12</u> เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกันและจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกัน

ก. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P (1, 2, 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q (2, -3, 5)

ข. $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$

ค. เวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ R (-3, 15, -6)

<u>วิธีทำ</u> ก. $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -3-2 \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ เทียบกับแกน x, y, z คือ $\frac{1}{\sqrt{30}}$, $\frac{-5}{\sqrt{30}}$, $\frac{2}{\sqrt{30}}$

ข. $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$

$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 100 + 16} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน x, y, z คือ $\frac{2}{2\sqrt{30}}, \frac{-10}{2\sqrt{30}}, \frac{4}{2\sqrt{30}}$ หรือ $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$

ค. $\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} -3-0 \\ 15-0 \\ -6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{(-3)^2 + 15^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+225+36} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{OR}$ เทียบกับแกน x, y, z คือ $\frac{-3}{3\sqrt{30}}, \frac{15}{3\sqrt{30}}, \frac{-6}{3\sqrt{30}}$

หรือ $\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}$

จะเห็นว่า $\overrightarrow{PQ}$, $\bar{a}$, และ $\overrightarrow{OR}$ ต่างก็ขนานกัน

แบบฝึกหัด 4.2 ข

1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{7} \end{bmatrix}$

(2) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{v} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$

(3) $\overrightarrow{XY}$ เมื่อพิกัดของ X และ Y คือ (7, 4, 1) และ (-1, 3, 5) ตามลำดับ

2. จงแก้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยเขียนเวกเตอร์เหล่านี้ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

(1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A และ B มีพิกัดเป็น (1,0, -3) และ (-4,0, 5) ตามลำดับ

(3) $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(4) $\overrightarrow{XY}$ โดยที่ X และ Y มีพิกัดเป็น (1, 5, 8) และ (0, -3, 1) ตามลำดับ

4. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในข้อ 3

5. จงหาเวกเตอร์พร้อมทั้งบอกขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด ดังนี้

	จุดเริ่มต้น	จุดสิ้นสุด
ก.	P (2, 5, 3)	Q (3, 5, -1)
ข.	R (-1, 4, -2)	S (2, -4, 7)
ค.	T (-3, 1, 0)	V (4, 2, 8)

6. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกันบ้าง

ก. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P (1, 4, 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q (-2, 0, 1)

ข. $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

ค. เวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ R (5, 0, 2)

5. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 13 ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ **ผลคูณเชิงสเกลาร์**ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยูดอตเวกเตอร์วี** หรือ อ่านสั้นๆ ว่า **ยูดอตวี** โดยที่

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\bar{u}\cdot\bar{v} &= (2\bar{i}+3\bar{j})\cdot(-3\bar{i}+4\bar{j}) \\ &= (2)(-3) + (3)(4) \\ &= -6 + 12 \\ &= 6\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{a}\cdot\bar{b}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= (4)(1) + (1)(-2) + (-2)(-3) \\ &= 4 - 2 + 6 \\ &= 8\end{aligned}$$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า
   - (1.1) $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$
   - (1.2) $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$
   - (1.3) $a(\bar{u}\cdot\bar{v}) = (a\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(a\bar{v})$
   - (1.4) $\bar{0}\cdot\bar{u} = 0$
   - (1.5) $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$
   - (1.6) $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1$
     $\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$
2. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0 \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$
   (มุมระหว่างเวกเตอร์หมายถึงมุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีซึ่งขนานและมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)
3. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

ในที่นี้จะพิสูจน์สมบัติข้อ (1.1), (1.5), 2 และ 3 ส่วนในข้ออื่น ๆ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

(1.1) พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ใน 3 มิติ

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$\bar{v} \cdot \bar{u} = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$

โดยสมบัติการสลับที่ของการคูณของจำนวนจริง

จะได้ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$

ดังนั้น $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(1.5) พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ใน 3 มิติ

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

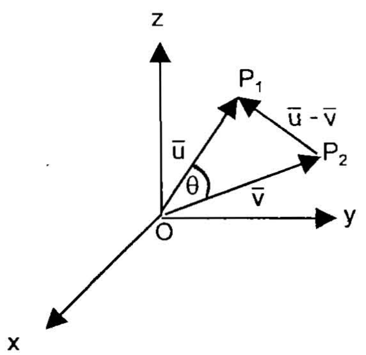
$$= xx + yy + zz$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

$$= \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$$

$$= |\bar{u}|^2$$

2. พิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ใน 3 มิติ



<u>พิสูจน์</u> กำหนด $\overrightarrow{OP_1} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OP_2} = \bar{v}$

จะได้ $\overrightarrow{P_2P_1} = \bar{u} - \bar{v}$

โดยอาศัยกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$P_2P_1^{\ 2} = OP_1^{\ 2} + OP_2^{\ 2} - 2OP_1OP_2\cos\theta$$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 =$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

นั่นคือ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$\therefore$ $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

3. <u>พิสูจน์</u> ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = 0$

แต่ $|\bar{u}| \neq 0$ และ $|\bar{v}| \neq 0$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\cos\theta = 0$

ก็ต่อเมื่อ $\theta = 90^\circ$ ($\because 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ และ $\cos 90^\circ = 0$)

ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

ดังนั้น $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เมื่อ

ก) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ข) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ก) เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

แต่ $\bar{u}\cdot\bar{v} = (2)(2) + (3)(1) + (0)(0) = 4 + 3 + 0 = 7$

และ $|\bar{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$

$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{65}} \approx 0.87$

ข) $|\bar{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

และ $|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (-4)(2) + (2)(7) + (4)(-1) = -8 + 14 - 4 = 2$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{2}{6\sqrt{54}} \approx 0.045$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A (4, 9, 1), B (-2, 6, 3) และ C (6, 3, -2) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

<u>วิธีทำ</u>

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-4 \\ 6-9 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 6-4 \\ 3-9 \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= (-6)(2) + (-3)(-6) + (2)(-3)$$

$$= -12 + 18 - 6 = 0$$

ดังนั้น ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$

แบบฝึกหัด 5

1. จงหาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังต่อไปนี้
   (1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$
   (2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{j}$
   (3) $\bar{u} = -\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$
   (4) $\bar{u} = -\bar{i} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{j}$
2. จงหาค่าของมุม ระหว่างเวกเตอร์ต่อไปนี้
   (1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 9\bar{i} + 6\bar{j}$
   (2) $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + 6\bar{j}$
   (3) $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$
   (4) $\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$ ($\cos 85^\circ 20' = 0.0987$ และ $\cos 85^\circ 30' = 0.0958$)
3. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ ข้อ 1.5
   (1) $\bar{u} = -\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$
   (2) $\bar{v} = -3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$
   (3) $\bar{u} - \bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (4) $\bar{u} + \bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
4. กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})$

(3) $\bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{b})$ (4) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$

5. เวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

(1) $\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

6. จงหาค่า m เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}=(1-m)\bar{i}+2\bar{j}$ และ $\bar{v}=m\bar{i}+(m+2)\bar{j}$ โดยที่

(1) $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

(2) $\bar{u}$ มีขนาดเท่ากับ $\bar{v}$

7. ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}\neq\bar{0}$ และ $\bar{v}\neq\bar{0}$ แล้ว จงแสดงว่า $|\bar{u}+\bar{v}|^2=|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2$

8. ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}\neq\bar{0}$ และ $\bar{v}\neq\bar{0}$ แล้ว จงแสดงว่า $|\bar{u}-\bar{v}|^2=|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2$

9. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก $|\overrightarrow{AC}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$ และ $|\overrightarrow{BC}|=a$ จงแสดงว่า $a^2=b^2+c^2$

☆10. ถ้า $|\bar{u}|=5$, $|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=4$ แล้ว $|\bar{u}-\bar{v}|$ มีค่าเท่าใด

☆11. กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}|=|\bar{w}|$ และ $|\bar{u}-\bar{v}|=|\bar{v}+\bar{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีค่าเท่าไร

☆12. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA}=\bar{i}+3\bar{j}$, $\overrightarrow{OB}=4\bar{i}+\bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่จุด D พื้นที่ของ $\triangle$ OAD มีค่าเท่าใด

6. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product หรือ vector product)

เนื่องจากในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งเรียกว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงผลคูณอีกแบบหนึ่งที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ คือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่งนิยามได้ดังนี้

<u>**บทนิยาม 14**</u> **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** ของ $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ และ $\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u}\times\bar{v}$ อ่านว่า **ยู ครอส วี** หมายถึง เวกเตอร์ซึ่งนิยามดังนี้

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix} \quad \text{หรือ}$$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\b_2 & b_3\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\b_1 & b_3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}\bar{k}$$

<u>หมายเหตุ</u> ในทางปฏิบัตินิยมใช้รูปของดีเทอร์มินันต์ เพื่อหาผลลัพธ์ของ $\bar{u}\times\bar{v}$ ดังนี้

$$\boxed{\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}}$$

โดยถือว่าการเขียน $\bar{u}\times\bar{v}$ ในรูปดังกล่าว เป็นวิธีการหรือเครื่องมือที่ช่วยให้จำรูปแบบได้ง่ายขึ้นและขอให้สังเกตว่าจำนวนจริงที่คูณ $\bar{i}$ หาได้โดยการตัดแถวและหลักที่มี $\bar{i}$ ดังรูป

$\begin{vmatrix}\cancel{\bar{i}} & \cancel{\bar{j}} & \cancel{\bar{k}}\\ \cancel{a_1} & a_2 & a_3\\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ สำหรับการหาจำนวนจริงที่คูณ $-\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ก็ทำในทำนองเดียวกัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$ จงหา $\bar{u}\times\bar{v}$

<u>วิธีทำ</u> $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$=((0)(4)-(3)(3))\bar{i}-((-1)(4)-(1)(3))\bar{j}+((-1)(3)-(1)(0))\bar{k}$$

$$=(0-9)\bar{i}-(-4-3)\bar{j}+(-3-0)\bar{k}$$

$$=-9\bar{i}+7\bar{j}-3\bar{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> **จงหา $\bar{u}\times\bar{v}$ เมื่อกำหนด**

(1) $\bar{u}=2\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{v}=\bar{i}-5\bar{j}$

(2) $\bar{u}=2\bar{i}+3\bar{k}$, $\bar{v}=\bar{i}+5\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> (1) $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -5 & 0\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -5 & 0\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$=((-3)(0)-(-5)(0))\bar{i}-((2)(0)-(1)(0))\bar{j}+((2)(-5)-(1)(-3))\bar{k}$$

$$=(0-0)\bar{i}-(0-0)\bar{j}+(-10+3)\bar{k}$$

$$=-7\bar{k}$$

(2) $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\bar{k}$

$=((0)(5)-(0)(3))\bar{i}-((2)(5)-(1)(3))\bar{j}+((2)(0)-(1)(0))\bar{k}$

$=(0-0)\bar{i}-(10-3)\bar{j}+(0-0)\bar{k}$

$=-7\bar{j}$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. กำหนด $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ
   - (1.1) $\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$
   - (1.2) $(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w}=(\bar{u}\times\bar{w})+(\bar{v}\times\bar{w})$
   - (1.3) $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})+(\bar{u}\times\bar{w})$
   - (1.4) $\bar{u}\times(k\bar{v})=k(\bar{u}\times\bar{v})$
   - (1.5) $(k\bar{u})\times\bar{v}=k(\bar{u}\times\bar{v})$
   - (1.6) $\bar{u}\times\bar{u}=\bar{0}$
   - (1.7) $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$
2. ให้ $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$
3. ถ้า $\bar{u},\bar{v}\neq\bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u}\times\bar{v}|=|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$
   เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$
4. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{u}\times\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ในที่นี้จะพิสูจน์ ข้อ 1.1, 1.5 และ 3 ที่เหลือให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

(1.1) <u>พิสูจน์</u> ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

$$-(\bar{v}\times\bar{u})=-\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=-((a_3b_2-a_2b_3)\bar{i}-(a_3b_1-a_1b_3)\bar{j}+(a_2b_1-a_1b_2)\bar{k})$$

$$=-(a_3b_2-a_2b_3)\bar{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\bar{j}-(a_2b_1-a_1b_2)\bar{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

จะเห็นว่า $\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$

(1.5) <u>พิสูจน์</u> ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$k\bar{u}=k\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{bmatrix}$$

$$(k\bar{u})\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ ka_1 & ka_2 & ka_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=((ka_2)b_3-(ka_3)b_2)\bar{i}-((ka_1)b_3-(ka_3)b_1)\bar{j}+((ka_1)b_2-(ka_2)b_1)\bar{k}$$

$$=(k(a_2b_3)-k(a_3b_2))\bar{i}-(k(a_1b_3)-k(a_3b_1))\bar{j}+(k(a_1b_2)-k(a_2b_1))\bar{k}$$

$$=k(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-k(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+k(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

$$=k((a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k})$$

$$=k(\bar{u}\times\bar{v})$$

ดังนั้น $(k\bar{u})\times\bar{v}=k(\bar{u}\times\bar{v})$

3. <u>พิสูจน์</u> ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\bar{i}-(a_3b_1-a_1b_3)\bar{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{k}$$

$$|\bar{u}\times\bar{v}|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3$$
$$+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

$$=(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)+a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2$$
$$-(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)-2a_2a_3b_2b_3-2a_1a_3b_1b_3-2a_1a_2b_1b_2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$=|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-|\bar{u}\cdot\bar{v}|^2$$

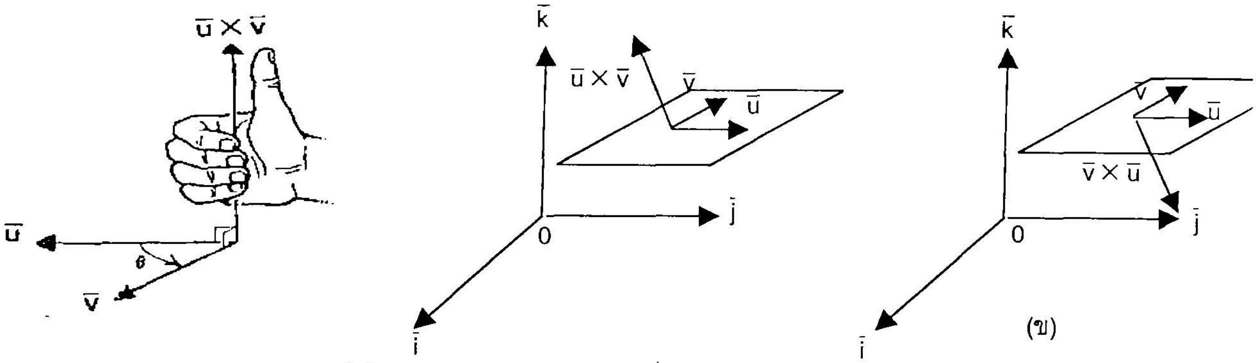
$$=|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2\cos^2\theta$$

$$=|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2\sin^2\theta$$

$\therefore$ $|\bar{u}\times\bar{v}|=|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta,\ 0^\circ\le\theta\le180^\circ$

<u>ข้อสังเกต</u> จากสมบัติข้อ 4 จะทำให้สรุปได้ว่า $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{u}\times\bar{v}$ จะตั้งฉากกัน ทิศทางของ $\bar{u}\times\bar{v}$ จะเป็นไปได้อย่างใดอย่างหนึ่งขึ้นอยู่กับว่าจะเลือกใช้ระบบมือขวาหรือระบบมือซ้าย ในที่นี้จะแสดงรูปของ $\bar{u}\times\bar{v}$ และ $\bar{v}\times\bar{u}$ โดยใช้ระบบมือขวา ดังรูป 6.1 ก หรือ ข



(ข)

(ก) รูป 6.1

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ จงหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= ((-1)(1) - (1)(0))\bar{i} - ((2)(1) - (2)(0))\bar{j} + ((2)(1) - (2)(-1))\bar{k}$$

$$= (-1-0)\bar{i} - (2-0)\bar{j} + (2+2)\bar{k}$$

$$= -\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{4+1+10} = \sqrt{5}$$

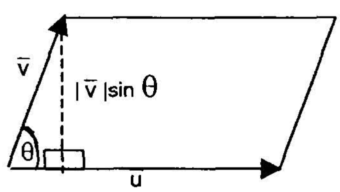
$$|\bar{b}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

จาก $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{21}{30}} = \sqrt{0.7} \approx 0.84$$

6.1) การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูป 6.1.1

จากรูป 6.1.1 θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

$|\bar{v}|\sin\theta$ คือส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น $|\bar{u}\times\bar{v}|=|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านไม่ขนานกันยาว $|\bar{u}|$ และ $|\bar{v}|$ หน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB}=\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$ และ $\overrightarrow{AD}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u> พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD คือ $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$=\big((3)(1)-(-2)(4)\big)\bar{i}-\big((1)(1)-(3)(4)\big)\bar{j}+\big((1)(-2)-(3)(3)\big)\bar{k}$$

$$=(3+8)\bar{i}-(1-12)\bar{j}+(-2-9)\bar{k}$$

$$=11\bar{i}+11\bar{j}-11\bar{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\sqrt{11^2+11^2+11^2}=\sqrt{121+121+121}=\sqrt{363}=11\sqrt{3}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $11\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(1, -1, 3) , B(2, 3, -2) และ C(1, 1, 5) ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u> พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}2-1\\ 3-(-1)\\ -2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ -5\end{bmatrix}=\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k} \quad \text{และ}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}1-1\\ 1-(-1)\\ 5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=2\bar{j}+2\bar{k}$$

ดังนั้น $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 2 & 2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$=\big((4)(2)-(2)(-5)\big)\bar{i}-\big((1)(2)-(0)(-5)\big)\bar{j}+\big((1)(2)-(0)(4)\big)\bar{k}$$

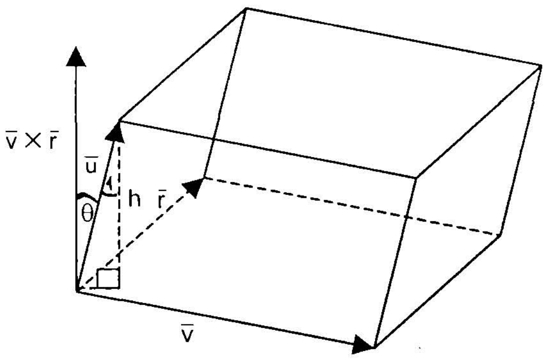
$$=(8+10)\bar{i}-(2-0)\bar{j}+(2-0)\bar{k}$$

$$=18\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{18^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{324+4+4}=\sqrt{332}=2\sqrt{83}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $\frac{1}{2}(2\sqrt{83})=\sqrt{83}$ ตารางหน่วย

6.2) การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน



รูป 6.2.1

จากรูป 6.2.1 h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ มายังระนาบที่กำหนดด้วย $\bar{v}$ และ $\bar{r}$, θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}\times\bar{r}$

ดังนั้น $\hat{1}=\theta$

$\therefore$ $h=|\bar{u}||\cos\theta|$

โดยที่ $|\bar{v}\times\bar{r}|$ คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็น $\bar{v}$ และ $\bar{r}$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน (parallelepiped) $=|\bar{u}|\cos\theta|\bar{v}\times\bar{r}|$

$$=|\bar{u}||\bar{v}\times\bar{r}||\cos\theta|$$
$$=|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})|$$

<u>ข้อสังเกต</u> 1) $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})=\bar{r}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})=\bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{u})$

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})=-\bar{u}\cdot(\bar{r}\times\bar{v})=-\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{r})=-\bar{r}\cdot(\bar{v}\times\bar{u})$

2) ถ้า $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{r}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})=0$

3) จากเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ใดๆ ถ้าทราบว่าเวกเตอร์เท่ากันสองเวกเตอร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่น

$$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{v})=\bar{v}\cdot(\bar{r}\times\bar{r})=\bar{r}\cdot(\bar{u}\times\bar{u})=0$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันที่มี $\bar{u}=\bar{i}+\bar{j},\bar{v}=\bar{j}+\bar{k},\bar{r}=\bar{i}+\bar{k}$ ประกอบกันเป็นด้านของรูป

<u>วิธีทำ</u> ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันคือ $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})|$

$$\bar{v}\times\bar{r}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\bar{k}$$
$$=\big((1)(1)-(0)(1)\big)\bar{i}-\big((0)(1)-(1)(1)\big)\bar{j}+\big((0)(0)-(1)(1)\big)\bar{k}$$
$$=(1-0)\bar{i}-(0-1)\bar{j}+(0-1)\bar{k}$$
$$=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$$

ดังนั้น $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})|=|(\bar{i}+\bar{j})\cdot(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})|$

$$=|(1)(1)+(1)(1)+(0)(-1)|$$
$$=|1+1+0|$$

$= |2| \quad = 2$

$\therefore$ ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันคือ 2 ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัด 6

1. จงหาค่าของ $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$ จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   (1) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$
   (2) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = \bar{j}$
   (3) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
2. ให้ $\bar{u} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{j} - \bar{k}$ จงหา
   (1) $\bar{u} \times \bar{v}$
   (2) $|\bar{u} \times \bar{v}|$
   (3) ค่า sine ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
3. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน 3 มิติ
   จงแสดงว่า $(\bar{u} - \bar{v}) \times (\bar{u} + \bar{v}) = (2\bar{u}) \times \bar{v}$
4. จงพิจารณาว่าการนำเวกเตอร์มาคูณกันดังต่อไปนี้มีความหมายหรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีความหมาย จะมีผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์หรือสเกลาร์
   (1) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{r}$
   (2) $(\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{r}$
   (3) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{r}$
   (4) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \times \bar{r}$
   (5) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})$
5. ให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\bar{u} \cdot \bar{v}|$ และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
6. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PORS เมื่อ
   $\overrightarrow{PO} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{PS} = 3\bar{j} + 4\bar{k}$
7. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A (0, 2, 2), B (8, 8, -2) และ C (9, 12, 6)
8. จงหาปริมาตรของรูปทรงเหลี่ยมด้านขนานทรงตันที่มีด้านประกอบมุมหนึ่งเป็น
   ก. $\bar{u} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{r} = \bar{j} + \bar{k}$
   ข. $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

บทสรุปสมบัติของเวกเตอร์

สมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์ มีดังนี้

1. **สมบัติของการบวกเวกเตอร์**

ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในเซต V

(1) สมบัติปิด $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในเซต V

(2) **สมบัติการสลับที่** $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$

(3) **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$

(4) **สมบัติการมีเอกลักษณ์** มี $\bar{0}$ โดยที่ $\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}=\bar{u}+\bar{0}$

(5) **สมบัติการมีอินเวอร์ส** สำหรับทุก $\bar{u}$ จะมี $-\bar{u}$ โดยที่

$$-\bar{u}+\bar{u}=\bar{0}=\bar{u}+(-\bar{u})$$

2. **สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์**

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในเซต V   a และ b เป็นสเกลาร์

(1) **สมบัติปิด** $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในเซต V

(2) **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** $a(b\bar{u})=(ab)\bar{u}$

(3) **สมบัติการแจกแจง** ก. $a(\bar{u}+\bar{v})=a\bar{u}+a\bar{v}$

ข. $(a+b)\bar{u}=a\bar{u}+b\bar{u}$

(4) **สมบัติการมีเอกลักษณ์** มี 1 โดยที่ $1(\bar{u})=\bar{u}=(\bar{u})1$

ในระบบคณิตศาสตร์ เซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง ซึ่งการบวกของสมาชิกในเซตและการคูณสมาชิกในเซตด้วยสเกลาร์ สอดคล้องตามสมบัติทั้ง 9 ข้อ ข้างต้น มีชื่อเรียกว่า **เวกเตอร์สเปซ** (Vector Space) และสมาชิกของเซตมีชื่อเรียกว่า **เวกเตอร์**

3. **สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์**

(3.1) ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

(3.1.1) $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$

(3.1.2) $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$

(3.1.3) $a(\bar{u}\cdot\bar{v})=(a\bar{u})\cdot\bar{v}=\bar{u}\cdot(a\bar{v})$

(3.1.4) $\bar{0}\cdot\bar{u}=0$

(3.1.5) $\bar{u}\cdot\bar{u}=|\bar{u}|^2$

(3.1.6) $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$

$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$

(3.2) ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ แล้ว

$\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

(3.3) ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$

4. สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ในระบบมือขวา)

(4.1) กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

(4.1.1) $\bar{u}\times\bar{v}=-(\bar{v}\times\bar{u})$

(4.1.2) $(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w}=(\bar{u}\times\bar{w})+(\bar{v}\times\bar{w})$

(4.1.3) $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})+(\bar{u}\times\bar{w})$

(4.1.4) $\bar{u}\times(k\bar{v})=k(\bar{u}\times\bar{v})$

(4.1.5) $(k\bar{u})\times\bar{v}=k(\bar{u}\times\bar{v})$

(4.1.6) $\bar{u}\times\bar{u}=\bar{0}$

(4.1.7) $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$

(4.2) ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$

(4.3) ถ้า $\bar{u},\bar{v}\neq\bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u}\times\bar{v}|=|\bar{u}||\bar{v}|\ \sin\theta$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$

(4.4) ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{u}\times\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

7. การนำเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ทางเรขาคณิตและฟิสิกส์

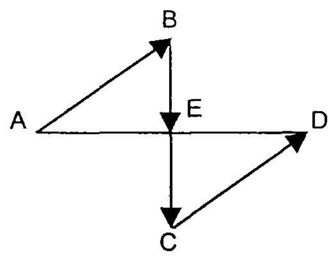
เวกเตอร์เป็นวิชาที่เป็นประโยชน์ในการศึกษาวิชาอื่น ๆ เช่น เรขาคณิต หรือเรขาคณิตวิเคราะห์ นอกจากนั้นยังเป็นประโยชน์ในการเรียนฟิสิกส์ในเรื่อง การเคลื่อนที่ ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น ซึ่งผู้เรียนจะเห็นความสัมพันธ์ระหว่างวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงประโยชน์ของเวกเตอร์ในวิชาเรขาคณิตและฟิสิกส์บางเรื่อง การที่จะนำเรื่อง เวกเตอร์ไปใช้นั้นควรจะพิจารณาดังนี้

- ถ้าโจทย์ไม่กำหนดในรูปของเวกเตอร์ ควรจะกำหนดเองให้เหมาะสมกับโจทย์
- การเขียนลูกศรกำกับในรูป จะทำให้มองเห็นแนวทางได้เร็วขึ้น

7.1) การใช้เวกเตอร์พิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จากรูป $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$ จงพิสูจน์ว่า AE = ED



<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

2. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$

<u>สิ่งที่ต้องพิสูจน์</u> AE = ED

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (บทนิยามการบวกเวกเตอร์)

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC}$ ($\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$)

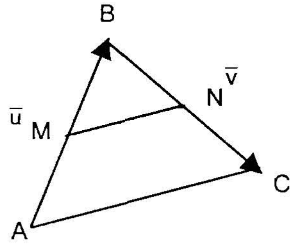
$= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$ (สมบัติการสลับที่สำหรับการบวกเวกเตอร์)

$= \overrightarrow{ED}$ (บทนิยามการบวกเวกเตอร์)

ดังนั้น $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$

จึงสรุปได้ว่า $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{ED}|$ หรือ AE = ED (บทนิยามการเท่ากันของเวกเตอร์)

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม และขนานกับด้านที่สาม



<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

2. $MB = \frac{1}{2}AB, BN = \frac{1}{2}BC$

<u>สิ่งที่ต้องพิสูจน์</u> 1. $MN = \frac{1}{2}AC$

2. MN // AC

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}, \overrightarrow{BC} = \bar{v}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\bar{u} \text{ และ } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\bar{v}$$

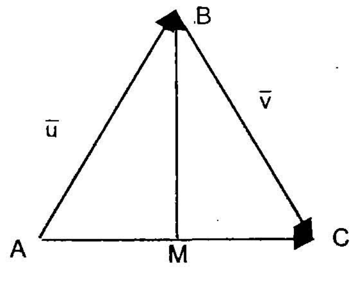
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$$

ดังนั้น $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

นั่นคือ $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ และ $\overrightarrow{MN}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AC}$

จึงสรุปได้ว่า ส่วนของเส้นตรง MN ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC และขนานกับด้าน AC

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงแสดงว่าเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมตั้งฉากกับฐาน



<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่ AB = BC

2. เส้นมัธยฐาน BM แบ่งครึ่งด้าน AC ที่จุด M

<u>สิ่งที่ต้องพิสูจน์</u> BM ตั้งฉากกับ AC

พิสูจน์ ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) - \bar{v} = \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v})$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v}) \cdot \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$$

$$= \frac{1}{4}(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$$

$$= \frac{1}{4}\{(\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{u} + (\bar{u} - \bar{v}) \cdot \bar{v}\}$$

$$= \frac{1}{4}(\bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{v})$$

$$= \frac{1}{4}(|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2) = 0$$

แต่ $\overrightarrow{MB}$ และ $\overrightarrow{MC}$ ต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ ดังนั้น $\overrightarrow{MB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{MC}$ แสดงว่า เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมตั้งฉากกับฐาน

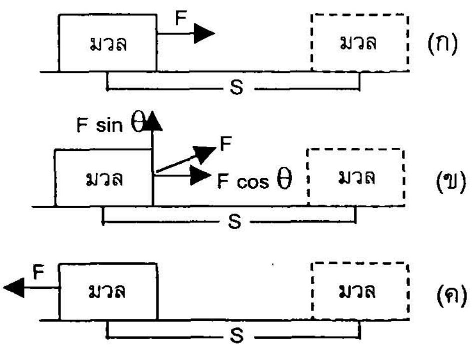
7.2) ตัวอย่างการประยุกต์เวกเตอร์ในวิชาฟิสิกส์

ในหัวข้อนี้จะขอยกตัวอย่างการประยุกต์ใช้เวกเตอร์ในเรื่องของ งาน (Work) และ โมเมนต์ (Moment) ส่วนเรื่องอื่นๆ นั้น ผู้เรียนสามารถอ่านได้จากหนังสือฟิสิกส์ทั่วไป

1) งาน (Work)

งานเป็นปริมาณสเกลาร์ซึ่งเป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ของแรง ($\bar{F}$) กับการขจัด ($\bar{S}$) ที่อยู่ในแนวเดียวกัน มีหน่วยเป็นจูล (J) มีสูตรคือ

$$W = \bar{F} \cdot \bar{S} = FS\cos\theta$$



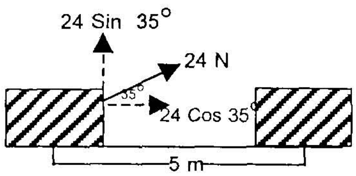
ถ้า $\bar{F}$ และ $\bar{S}$ อยู่ในแนวเดียวกัน ดังรูป7.2.1 (ก) จะได้ W = FS

ถ้า $\bar{F}$ และ $\bar{S}$ อยู่คนละแนว ดังรูป 7.2.1(ข) จะได้ $W = FS\cos\theta$

ถ้า θ = 180o แสดงว่าแรงกับการขจัดมีทิศทางตรงข้ามกันส่วนใหญ่ ได้แก่ งานเนื่องจากแรงเสียดทาน ดังรูป 7.2.1(ค) จะได้ W = -F S

รูป 7.2.1

ตัวอย่างที่ 4 หีบใบหนึ่งถูกลากไปตามหิมะเป็นระยะทาง 5 เมตร โดยใช้แรง 24 นิวตัน ทำมุม 035o กับพื้นหิมะ จงหางานที่ต้องทำในการลากหีบใบนี้ ($\cos 35^\circ = 0.819$)



แนวคิด แยกแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบ แล้วนำไปคูณกับระยะทางที่เคลื่อนที่

วิธีทำ จาก $W = \bar{F} \cdot \bar{S}$

$$= (24 \cos 35^\circ)(5)$$

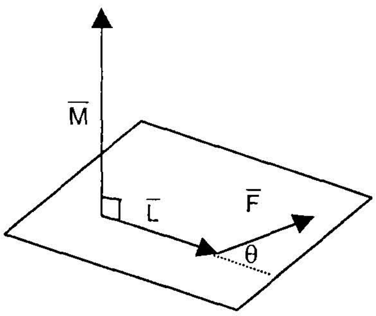
$$= 120 \cos 35^\circ$$

$$= 120\ (0.819)$$

$$= 98 \text{ J}$$

2) โมเมนต์ของแรงหรือทอร์ค (moment of force or torgue)

ในวิชาฟิสิกส์ถือว่าเมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุ และวัตถุนั้นเกิดการหมุนหรือพยายามที่จะหมุน เราเรียกอาการนั้นว่า "โมเมนต์หรือทอร์ค" ($\bar{M}$)



ถ้าให้ $\bar{F}$ คือ แรงที่กระทำต่อวัตถุมีหน่วยเป็นนิวตัน(N)

$\bar{L}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งจากจุดหมุนไปยังจุดที่แรงกระทำ มีหน่วยเป็นเมตร (m)

θ คือ มุมระหว่าง $\bar{F}$ กับ $\bar{L}$

$\bar{M}$ คือ โมเมนต์ หรือทอร์ค มีหน่วยเป็น

นิวตันเมตร(N-m)

จากผลการทดลองในวิชาฟิสิกส์ เขียนความสัมพันธ์ของสิ่งที่กล่าวมาแล้วเป็นสมการของผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ ดังต่อไปนี้

$$\bar{M} = \bar{L} \times \bar{F}$$

ความสัมพันธ์ของสมการข้างบนนี้แสดงไว้ในรูปข้างต้น และถ้าคิดเฉพาะขนาดจะได้ดังนี้

$$M = LF \sin\theta$$

เครื่องหมายของโมเมนต์ ในทางฟิสิกส์ได้สมมติว่า โมเมนต์ซึ่งมีทิศทวนเข็มนาฬิกา จะมีค่าเป็นบวก ส่วนโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกาจะมีค่าเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 5 แรง $\bar{F} = 12\bar{i} - 7\bar{j}$ N กระทำบนวัตถุที่จุดหนึ่ง ซึ่งมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\bar{L} = \bar{i} + \bar{j}$ m จงหาโมเมนต์ที่เกิดขึ้น

วิธีทำ จากสูตร $\bar{M} = \bar{L} \times \bar{F}$

$$= (\bar{i} + \bar{j}) \times (12\bar{i} - 7\bar{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 12 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -7 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= \big((1)(0) - (-7)(0)\big)\bar{i} - \big((1)(0) - (12)(0)\big)\bar{j} + \big((1)(-7) - (12)(1)\big)\bar{k}$$

$$= (0-0)\bar{i} - (0-0)\bar{j} + (-7-12)\bar{k} \ = -19\bar{k} \text{ N-m}$$

นั่นคือขนาดของโมเมนต์มีค่า 19 N-m เป็นโมเมนต์ชนิดตามเข็มนาฬิกา

แบบฝึกหัด 7

1. ถ้า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{DC}$ เป็นเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่เท่ากัน แต่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB และ O เป็นจุดใด ๆ ภายนอกเส้นตรง AB จงแสดงว่า $OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB$
3. จงแสดงว่าเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง และจุดนั้นแบ่งเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดจุดใดจุดหนึ่งมายังฐานออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1
4. จงแสดงว่าผลรวมของเวกเตอร์ที่สมนัยกับเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมเป็นเวกเตอร์ศูนย์ โดยที่จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์
5. จงแสดงว่ามุมยอดของรูปสามเหลี่ยมที่บรรจุในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก
6. จงหางานที่เกิดขึ้นจากแรง $\bar{F} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ N กระทำให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\bar{S} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$ m
7. กำหนดให้แรง $\bar{F} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$ กระทำที่จุด (1, -1, 2) จงหาโมเมนต์ของแรง $\bar{F}$ รอบจุด (2, -1, 3)

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นาย จีรศักดิ์ ดีสะเมาะ
วันเดือนปีเกิด	7 กุมภาพันธ์ 2520
สถานที่เกิด	เขตป้อมปราบ จังหวัดกรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	208 ซอยพัฒนาการ 20 แยก 5 แขวงสวนหลวง เขตสวนหลวง กรุงเทพมหานคร 10250. โทร. 0-2314-3046
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2532	ประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนเกษมพิทยา
พ.ศ. 2538	มัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนปทุมคงคา
พ.ศ. 2542	วท.บ. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2545	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ