

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ปริญญานิพนธ์
ของ
เบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม

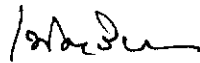
เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2548
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

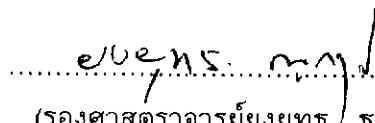
ของ
นายเบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม

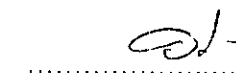
ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

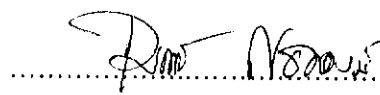


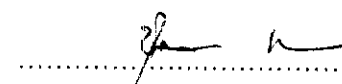
..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่ ... พฤษภาคม พ.ศ. 2548

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

 ประธาน
(รองศาสตราจารย์ยังยุทธ ธนุกฤติ)

 กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิวรรณ งามสันติกุล)

 กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์)

 กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตีวรรณ เพ็ญเพียร)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ เนื่องมาจากได้รับความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ชนุกฤติ ประธานคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์วิวรรณ งามสันติกุล กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์ดูแลและให้คำแนะนำปรึกษา รวมถึงให้ข้อเสนอแนะต่างๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.สุรสาธ ผาสุข และ ดร.วินัย โพธิ์สุวรรณ ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ ให้คำแนะนำและตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินรณ เพ็ญเพียร ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการ คณะครูอาจารย์หมวดคณิตศาสตร์ และ ขอขอบคุณนักเรียนโรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร ที่ให้ความอนุเคราะห์และความสะดวกต่างๆ ในการดำเนินการเก็บข้อมูลการวิจัยด้วยความเต็มใจ

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดาและบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ให้อำลักำลังใจ และกำลังทรัพย์สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบคุณ คุณพรพิศ ศรีชาคำ คุณอาคเนย์ ฉัตรบรรยงค์ คุณอิทธิเทพ นวาระสุจิตร์ พี่ และน้องๆ นิสิตปริญญาโทสาขาวิชาคณิตศาสตร์ รุ่นปี 2545 ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือผู้วิจัยตลอดเวลาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา ครู อาจารย์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

เบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ภูมิหลัง.....	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
	ความสำคัญของการวิจัย.....	4
	ขอบเขตของการวิจัย.....	5
	ประชากรที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย.....	5
	ตัวแปรที่ศึกษา.....	5
	นิยามศัพท์เฉพาะ.....	6
	สมมติฐานในการวิจัย.....	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	8
	ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	8
	ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	9
	ชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	10
	กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	13
	การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	20
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	30
3	วิธีดำเนินการวิจัย.....	34
	การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง.....	34
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	34
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	35
	การเก็บรวบรวมข้อมูล.....	38
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	42
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	42

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	43
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	43
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	47
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	47
สมมติฐานในการวิจัย.....	47
วิธีดำเนินการวิจัย.....	47
สรุปผลการวิจัย.....	48
อภิปรายผล.....	48
ข้อเสนอแนะ.....	50
บรรณานุกรม.....	51
ภาคผนวก.....	56
ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล.....	57
ภาคผนวก ข แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	66
ภาคผนวก ค บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	74
ภาคผนวก ง คู่มือครูและแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	127
ภาคผนวก จ ตัวอย่างโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	192
ภาคผนวก ฉ รายนามผู้เชี่ยวชาญ.....	206
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	208

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 6	43
2	คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนการปฏิบัติกิจกรรม ระหว่างเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.....	44
3	คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนโครงงาน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.....	44
4	คำร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.....	45
5	คำร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม.....	45
6	ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	46
7	แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	58
8	แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แบบปรนัย.....	60
9	แสดงคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	61
10	การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	63

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 การแบ่งชนิดของแบบจำลองของจิออร์ดาโนและเวียร์.....	11
2 การแบ่งชนิดของแบบจำลองของอิงลิช.....	12
3 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของจิออร์ดาโนและเวียร์.....	14
4 กระบวนการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเมเยอร์.....	15
5 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสเวทซ์และฮาร์ทเลอร์.....	16
6 กระบวนการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของดอสซี่.....	17
7 กระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ คอมเบอร์.....	18
8 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสุรสาธ ภาสุข.....	19
9 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น.....	23
10 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองกำลังสอง.....	24
11 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล.....	24
12 ลักษณะเส้นแนวโน้มแบบ Gompertz curve.....	25
13 แสดงลักษณะต่างๆ ของค่าคงตัวในแบบจำลองตรีโกณมิติ.....	28
14 ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	29

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม (กรมวิชาการ. 2545 : 1) และยิ่งไปกว่านั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่ทำให้วิทยาการสาขาต่างๆ และเทคโนโลยีเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว อาชีพต่างๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน เช่น วิศวกรไฟฟ้าต้องมีความรู้เรื่องแคลคูลัส สมการเชิงอนุพันธ์ อุตสาหกรรมต้องมีความรู้เรื่องสถิติว่าด้วยการควบคุมคุณภาพ ผู้บริหารต้องสามารถแปลความของข้อมูลทางสถิติได้ (เสริมศักดิ์ สุรวัณณ. 2535 : 24-25) อีกทั้งคณิตศาสตร์ยังเป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 2)

สภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาโดยทั่วไป ที่ผ่านมามักจะเน้นความจำในเรื่องสูตร บทนิยาม และวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยสอนให้นักเรียนแก้ปัญหาโจทย์ด้วยวิธีการที่แน่นอนวิธีเดียว (กิตติ พัฒนตระกูลสุข. 2546-2547 : 54) ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ดวงเดือน อ่อนน้อม (2538 : 51) ที่ว่า การสอนคณิตศาสตร์ที่ทำกันโดยทั่วไปมักมุ่งที่การให้ได้คำตอบที่ถูกต้องเป็นสำคัญ โดยไม่คำนึงถึงวิธีการใช้ในการคิดหาคำตอบนั้น จึงทำให้นักเรียนไม่มีโอกาสได้พัฒนาสมรรถภาพในการคิดเท่าที่ควร โดยเฉพาะในยุคโลกาภิวัตน์เช่นในปัจจุบัน ซึ่งเป็นยุคของข้อมูลข่าวสาร ผู้คนในยุคนี้ต้องเป็นคนที่สมรรถภาพในการคิดสูงขึ้นจึงจะสามารถดำรงชีวิตอยู่ได้อย่างมีคุณภาพ ดังนั้นการสอนคณิตศาสตร์จึงควรเปลี่ยนแปลงไปเพื่อสามารถพัฒนาสมรรถภาพในการคิดให้สูงกว่าที่เป็นอยู่ และที่ผ่านมามathematics ส่วนใหญ่มักจะได้ยินคำถามจากนักเรียนที่ว่า เรียนคณิตศาสตร์ไปทำไมอยู่เสมอ เหตุที่นักเรียนถามคำถามนี้เป็นเพราะว่า นักเรียนยังไม่เห็นสะพานเชื่อมระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงและระหว่างคณิตศาสตร์กับวิทยาการแขนงอื่นๆ รวมถึงการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์จริง (รจิต วัฒนสินธุ์. 2522 : 53)

ในปี พ.ศ. 2541 สมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (International Association for the Evaluation of Educational Achievement : IEA) ได้มีการประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เป็นครั้งที่ 2 (ครั้งแรกได้ทำไปเมื่อปี พ.ศ. 2538) ที่รู้จักกันในนามของ TIMSS-1999 (Third International Mathematics and Science Study) หรือ TIMSS-R (The Third International Mathematics and Science Study Repeat) ซึ่งในประเทศไทย

มีสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเป็นศูนย์ประสานงานและดำเนินการ โดยประเมินนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางด้านเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนไทยมีผลสัมฤทธิ์ค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับกลุ่มประเทศอาเซียน 5 ประเทศที่เข้าร่วม โครงการ ซึ่งการทดสอบครั้งนี้ครอบคลุมเนื้อหาสาระ 5 ด้าน คือ 1) เศษส่วนและความรู้สีกเชิง-จำนวน 2) การวัด 3) การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น 4) เรขาคณิต 5) พีชคณิต โดยเนื้อหาที่อ่อนที่สุดสำหรับนักเรียนไทยคือ พีชคณิต (สุนีย์ คล้ายนิล. 2546 : 18-24) นอกจากนี้แล้วยังมีการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ ตามโครงการ PISA (Programme for International Student Assessment) ขององค์กรเพื่อความร่วมมือและพัฒนาทางเศรษฐกิจหรือที่รู้จักกันในนามของ OECD (The Organization for Economic Co-operation and Development) ในระยะแรกคือ PISA-2000 ประเมินทักษะการรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของนักเรียนวัยจบการศึกษาภาคบังคับ การประเมินเน้นที่ทักษะการรู้เรื่อง (Literacy Skills) ของนักเรียนในการใช้แนวคิดและหลักการทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน โครงการมีจุดประสงค์หลักเพื่อตรวจสอบว่าระบบการศึกษาของประเทศ ที่เข้าร่วมโครงการสามารถวางพื้นฐานเพื่อการเตรียมประชากรในอนาคตให้มีประสิทธิภาพและคุณภาพสำหรับการอยู่ในสังคมได้ดีเพียงใด โดยการรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Literacy) มีการประเมิน 3 ด้าน คือ 1) เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ เป็นการประเมินแนวคิดกว้างๆ ของคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ส่วนเนื้อหาในหลักสูตร (เช่น จำนวน พีชคณิต เรขาคณิต ฯลฯ) จะให้ความสำคัญรองลงมา 2) กระบวนการของคณิตศาสตร์เป็นสมรรถนะทั่วไปทางคณิตศาสตร์ ซึ่งรวมทั้ง การใช้ภาษาคณิตศาสตร์ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Modeling) และทักษะการแก้ปัญหา 3) การใช้คณิตศาสตร์ ประเมินตั้งแต่การใช้คณิตศาสตร์ในการคิดวิเคราะห์สำหรับตนเอง ไปจนกระทั่งถึงการใช้คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับประเด็นทางวิทยาศาสตร์หรือโลกธรรมชาติและในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับทางสังคมหรือสามารถใช้ความรู้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาที่ไม่ใช่โจทย์คณิตศาสตร์แบบดั้งเดิม ผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนไทยมีคะแนนต่ำกว่าค่าเฉลี่ยของ OECD และได้อันดับที่ 32 จากทั้งหมด 41 ประเทศที่เข้าทดสอบ (สุนีย์ คล้ายนิล. 2547 : 9-18)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่มีการเชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริงกับโลกของคณิตศาสตร์ กล่าวคือของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะเป็นกระบวนการที่เริ่มต้นจากสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เราสนใจ จากนั้นแทนสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจสร้างขึ้นเองโดยอาศัยมโนคติทางคณิตศาสตร์หรือด้วยการเลือกจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่แล้วใน รูปแบบของสูตร สมการหรือฟังก์ชันที่พิจารณาแล้วว่าเหมาะกับสถานการณ์จริงนั้นมากที่สุด และเมื่อได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วก็ดำเนินการหาผลลัพธ์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลายๆ อย่างผสมผสานกัน แล้วนำไปอธิบายสถานการณ์จริงหรือนำไปทำนายอนาคตของสถานการณ์จริงนั้นต่อไป (สุรสาธิต ผาสุข. 2546 : 17) นอกจากนี้ ดอสซี่ (Dossey. 1996 : 276) ยังกล่าวว่าการที่นักเรียนได้เกี่ยวข้องกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในชั้นเรียนจะสามารถเปลี่ยนมุมมองของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ จากวิชาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทที่แน่นอน เปลี่ยนเป็นวิชาที่การคาดเดาก็เป็นวิธีการที่เหมาะสมได้ถ้ามีการตรวจสอบข้อคาดเดาที่ถูกต้อง เปลี่ยนเป็นวิชาที่การสร้างสรรค์เป็นสิ่งที่มีความหมายและมีคุณค่า เปลี่ยนเป็นวิชาที่คำตอบของสถานการณ์ปัญหาไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียว และเปลี่ยนเป็นวิชาซึ่งการคิดเป็นสิ่งที่มีความหมายมากกว่าการคำนวณ นอกจากนี้การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในตัวนักเรียนจากการแยกตัวออกไปทำงานคนเดียวและการฟังเพื่อจดบันทึก ไปสู่การทำงานเป็นกลุ่ม ไปสู่การตัดสินใจในการวางแผนเก็บรวบรวมและการวิเคราะห์ข้อมูล การพัฒนาสมมติฐานการสร้างสมการและการสื่อสารผลลัพธ์ที่ได้ ส่วนสเวทซ์และฮาร์ทเลอร์ (Swetz & Hartzler, 1991 : 6) ได้กล่าวถึงเป้าหมายในการสอนของครูต้องทำให้ได้อีกอย่างหนึ่งก็คือการสอนนักเรียนแล้วนักเรียนสามารถนำเอาความรู้ที่ได้หรือที่มีอยู่ไปใช้ด้วยความมั่นใจ รอบรู้ และสามารถแก้ปัญหาสถานการณ์จริงของโลก ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็เป็นหนึ่งในรูปแบบของการแก้ปัญหานั้น โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะช่วยแก้ปัญหาเหล่านั้นโดยใช้ทักษะที่หลากหลายของคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบและยังจะช่วยให้นักเรียนได้เห็นถึงการประยุกต์ของคณิตศาสตร์อีกด้วย นักเรียนที่ได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีความซาบซึ้งในศักยภาพของคณิตศาสตร์

ในปี ค.ศ. 2000 สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาได้กล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไว้ในเอกสารชื่อ หลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Principles and Standards for School Mathematics 2000) โดยกล่าวไว้ในมาตรฐาน เนื้อหาวิชาพีชคณิตว่า โปรแกรมการสอนพีชคณิตของนักเรียนตั้งแต่ชั้นเตรียมอนุบาลไปจนถึงนักเรียนเกรด 12 ควรเป็นโปรแกรมที่ให้นักเรียนสามารถใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงและสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงปริมาณได้เนื่องจากศักยภาพสูงสุดประการหนึ่งของการใช้คณิตศาสตร์คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปรากฏการณ์ธรรมชาติ ดังนั้นนักเรียนในทุกๆ ระดับชั้นจึงควรมีโอกาสได้ศึกษาถึงแบบจำลองของปรากฏการณ์ธรรมชาติอย่างหลากหลายในวิธีการที่เหมาะสมกับระดับชั้นของเขา เช่น ในระดับประถมศึกษาตอนต้น นักเรียนสามารถใช้วัตถุ รูปภาพ และสัญลักษณ์ต่างๆ แทนแบบจำลองของสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบวกและ การลบของจำนวนเต็มบวกและศูนย์ได้ สำหรับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายควรจะสามารถพัฒนาแบบจำลองด้วยการใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันชนิดต่างๆ เพื่อใช้ในการตัดสินใจ เช่น สถานการณ์จริงสถานการณ์หนึ่งจะใช้แบบจำลองในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้นหรือฟังก์ชันกำลังสองจึงจะดีที่สุดที่จะช่วยให้สามารถสร้างข้อสรุปโดยการวิเคราะห์จากแบบจำลองได้ (NCTM, 2000 : 37-40)

ส่วนในประเทศไทยนั้นกรมวิชาการได้กล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ ในสาระที่ 4 พีชคณิต มาตรฐาน ค 4.2 โดยมีใจความสำคัญคือ ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้ แล้วยังได้เสนอองค์ประกอบหลักที่ช่วยส่งเสริมการพัฒนาการเรียนรู้ทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนควรมีทักษะใน

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างความสัมพันธ์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่ต้องเกี่ยวข้องด้วย และอีกองค์ประกอบหลักก็คือ นักเรียนควรมีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่หาได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้นอย่างสมเหตุสมผล (กรมวิชาการ. 2545 : 203)

จากสภาพปัญหาและความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นนั้น ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะสร้างบทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อสอนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์มากขึ้นกว่าที่เป็นอยู่ และสามารถนำเอาความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ไปใช้อธิบายหรือแก้ปัญหาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงได้ และที่เลือกสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นั้น เนื่องจากนักเรียนในระดับชั้นนี้ได้ผ่านการศึกษาเรื่องฟังก์ชันต่าง ๆ มาเป็นอย่างดีแล้ว ไม่ว่าจะเป็น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม รวมไปถึงเนื้อหาในเรื่องสถิติ ซึ่งจะเป็นความรู้พื้นฐานและช่วยให้เรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้ตัวอย่างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. เป็นแนวทางในการนำเนื้อหาเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ไปเป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนที่กำลังศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร ทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร โดยได้มาจากการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวน 30 คน จากทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน ซึ่งทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนแบบคณะกรรมการเรียนในระดับสูง ระดับกลาง และระดับต่ำ เข้าเรียนในห้องเรียนเดียวกัน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ดำเนินการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โดยใช้เวลาเรียนปกติ ซึ่งใช้เวลาในการสอน 15 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง และเวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 2 ชั่วโมง

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นเนื้อหาเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. บทนิยาม ชนิดและความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ
2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 9 คาบ
 - 2.1 การสร้างแบบจำลองเชิงเส้นและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.2 การสร้างแบบจำลองกำลังสองและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.3 การสร้างแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียลและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.4 การสร้างแบบจำลองตรีโกณมิติและการตรวจสอบความเหมาะสม
3. การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
จำนวน 5 คาบ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การออกแบบและสร้างสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงที่ต้องการศึกษา
2. ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ชุดการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยใช้เนื้อหาของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วย
 - 2.1 บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 2.2 คู่มือครู ประกอบด้วย วัตถุประสงค์ของบทเรียน แนวทางการใช้บทเรียน ลักษณะของกิจกรรมที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอน และข้อเสนอแนะการใช้ชุดการสอน
 - 2.3 แผนการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วย ชื่อเรื่อง เวลาที่ใช้ จุดประสงค์การเรียนรู้สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนการสอน กิจกรรมการเรียนการสอน การวัดผลและประเมินผล
3. โครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การศึกษาสถานการณ์จริงที่สนใจโดยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สุรสาธิต ภาสข (2546 : 39) ได้เสนอไว้เป็นแนวทาง ซึ่งประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้
 - 3.1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง
 - 3.2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 3.3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 3.4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 3.5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดจาก 3 ส่วนด้วยกัน คือ คะแนนปฏิบัติการระหว่างเรียน คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และคะแนนจากการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
5. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากทั้ง 3 ส่วน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์

สมมติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการสร้างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.1 ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.2 ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.3 ชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.4 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.5 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.1 ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่รอบ ๆ ตัวเรา โดยที่จุดประสงค์หลักของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็คือการเน้นที่การแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่อยู่ในชีวิตประจำวัน แต่แนวความคิดของเรื่องนี้ยังเป็นเรื่องใหม่ในแวดวงการศึกษาหรือในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และไม่ว่าจะใช้สามัญสำนึกหรือการอ้างอิงจากงานวิจัยต่าง ๆ ก็ตามเราสามารถกล่าวได้ว่าการเรียนคณิตศาสตร์ที่จะประสบผลสำเร็จนั้นควรมีการเชื่อมโยงสถานการณ์ในชีวิตจริงเข้ากับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้วย สิ่งเหล่านี้ก็คือกระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั่นเอง (Hilke, 1995 : 29) ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ คอมเบอร์ (Comber, 1999 : 1) ที่ว่าเป็นเวลานานแล้วที่มีการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในด้านวิศวกรรมและเทคโนโลยี ในการออกแบบก่อสร้างสิ่งต่าง ๆ เช่น การสร้างเขื่อน การสร้างสะพาน เครื่องบิน รถยนต์และอื่นๆ ต่อมาได้มีการนำเอาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ เช่น ชีววิทยา แพทย์ ภูมิศาสตร์ และวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม ปัญหาสิ่งแวดล้อม เช่น ปัญหาการเพิ่มของจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิต ปัญหาการผลิตอาหาร ปัญหาด้านมลภาวะ ปัญหาการตัดไม้ทำลายป่า ปัญหาน้ำท่วมและปัญหา การกัดกร่อนของดิน เป็นต้น ในบางครั้งมีความจำเป็นจะต้องตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาเหล่านี้ แต่ข้อมูลที่มีจะไม่เพียงพอที่จะทำให้ทราบว่าตัดสินใจอย่างไรจึงจะดีที่สุด แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ช่วยให้เราสามารถตัดสินใจได้ว่าตัวแปรใดที่ดีที่สุดที่เหมาะสมกับสถานการณ์ที่มีอยู่เพราะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถช่วยเราแจกแจงองค์ประกอบต่างๆ ที่เป็นองค์ประกอบ ที่สำคัญที่สุดของปัญหาได้ ช่วยให้เราเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและพารามิเตอร์ และยังช่วยเราในการทำนายว่าอะไรจะเกิดขึ้นถ้าเราเปลี่ยนแปลง ค่าของพารามิเตอร์บางตัวจากสถานการณ์หรือปัญหา นอกจากนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่มีการเชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริง (Real world) กับโลกของคณิตศาสตร์ (World of mathematics) ด้วยการแทนสถานการณ์จริงของโลกในเชิงคณิตศาสตร์ นอกจากนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังสามารถเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ เช่น การศึกษา วิทยาศาสตร์ ศิลปะ สังคมศึกษา และวิชาอื่นๆ ในหลักสูตร และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังเป็นกระบวนการที่คำนึงถึงความรู้สึกรักของนักเรียนในขณะปฏิบัติกิจกรรมซึ่งเป็นสิ่งสำคัญของการปฏิบัติกิจกรรมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ต้องการความรู้สึกร่วมในส่วนของนักเรียนด้วย (Hodgson, 1995 : 351-358) ส่วน สุรสาล ผาสุข (2546 : 11) กล่าวว่า ความสำคัญและคุณค่าของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะเห็นได้จากผลลัพธ์ที่เกิดจากการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่างๆ การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะช่วยให้เด็กนักเรียนมองเห็นและเข้าใจถึงศักยภาพที่แท้จริงของคณิตศาสตร์ ช่วยให้สามารถตัดสินใจในสถานการณ์จริงที่ในบางครั้งข้อมูลที่มีอยู่ไม่เพียงพอ และช่วยให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น จะพบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อวิชาคณิตศาสตร์เองและศาสตร์อื่นๆ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนเข้าใจถึงศักยภาพที่แท้จริงของคณิตศาสตร์ว่าไม่ใช่เฉพาะวิชาที่คิดคำนวณเท่านั้น แต่สามารถนำเอาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ นอกจากนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงได้อย่างดีด้วย และยังช่วยให้นักเรียนสามารถตัดสินใจเกี่ยวกับสถานการณ์ต่างๆ ได้ เมื่อมีข้อมูลอยู่อย่างจำกัดหรือไม่เพียงพอ และที่สำคัญยังช่วยพัฒนาเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์อีกด้วย

1.2 ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เคอร์ จูเนียร์และมากิ (Kerr, Jr & Maki. 1979 : 2) กล่าวว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หมายถึง สิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เช่น เซต จำนวน รูปทรงเรขาคณิต และฟังก์ชัน รวมไปถึงนิพจน์ ซึ่งเกิดจากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านั้น เช่น สมการ กราฟ และตาราง เป็นต้น

จิออร์ดาโนและเวียร์ (Giordano & Weir. 1985 : 32) ได้ให้นิยามของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการออกแบบและสร้างสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์สำหรับใช้ในการนิยามเฉพาะของปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เป็นจริง โดยสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ดังกล่าวรวมถึงแบบจำลองในรูปของกราฟ แบบจำลองในรูปของสัญลักษณ์ สถานการณ์จำลอง และการทดลอง

เมเยอร์ (Meyer. 1985 : 2) กล่าวว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หมายถึง แบบจำลอง (Model) ที่มีส่วนประกอบบางส่วนอยู่ในรูปของมโนคติทางคณิตศาสตร์ (Mathematical concepts) เช่น อยู่ในรูปของตัวแปร ค่าคงที่ ฟังก์ชัน สมการ และอสมการ เป็นต้น

เอ็ดเวิร์ด และแฮมสัน (Edwards & Hamson. 1989 : 2-3) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง การสร้างแบบจำลองโดยใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น ฟังก์ชัน และสมการ โดยในการสร้างนั้นจะเป็นการย้ายโลกของความจริง (real world) เข้าไปสู่ความเป็นนามธรรมของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์แล้วทำการสร้างแบบจำลองด้วยการดำเนินการต่างๆ ของคณิตศาสตร์แล้วนำเอาคำตอบนั้นย้อนกลับมาอธิบายหรือตีความปัญหาในโลกของความจริงหรือสถานการณ์จริงอีกครั้ง

สเวทซ์และฮาร์ทเลอร์ (Swetz & Hartler. 1991 : 1) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง โครงสร้างที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งใช้ในการประมาณลักษณะต่างๆ ของปรากฏการณ์ธรรมชาติ

เมียร์สเคิร์ต (Meerschaert. 1993 : xiv) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับโลกของความจริง โดยการนำปัญหาในโลกของความจริงสู่ปัญหาในโลกของคณิตศาสตร์พร้อมทั้งใช้คณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบและเอาคำตอบนั้นมาอธิบายโลกของความจริง

ไคม์และคราก (Kime & Clark. 1998 : 64) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง สูตรหรือสมการที่ใช้สำหรับอธิบายสถานการณ์ที่เป็นจริง

โดแลนและคณะ (Dolan; et al. 1998 : 21) ได้อธิบายว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์คือความสัมพันธ์กันระหว่างการใช้เทคนิคต่างๆ ของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และกระบวนการแก้ปัญหาจริง (Real problems) ซึ่งในการแก้ปัญหาจริงนั้นจะเป็นการนำเอาสถานการณ์จริงไปสู่ทฤษฎีของคณิตศาสตร์แล้วนำเอาคำตอบที่ได้มาอธิบายปัญหาจริง

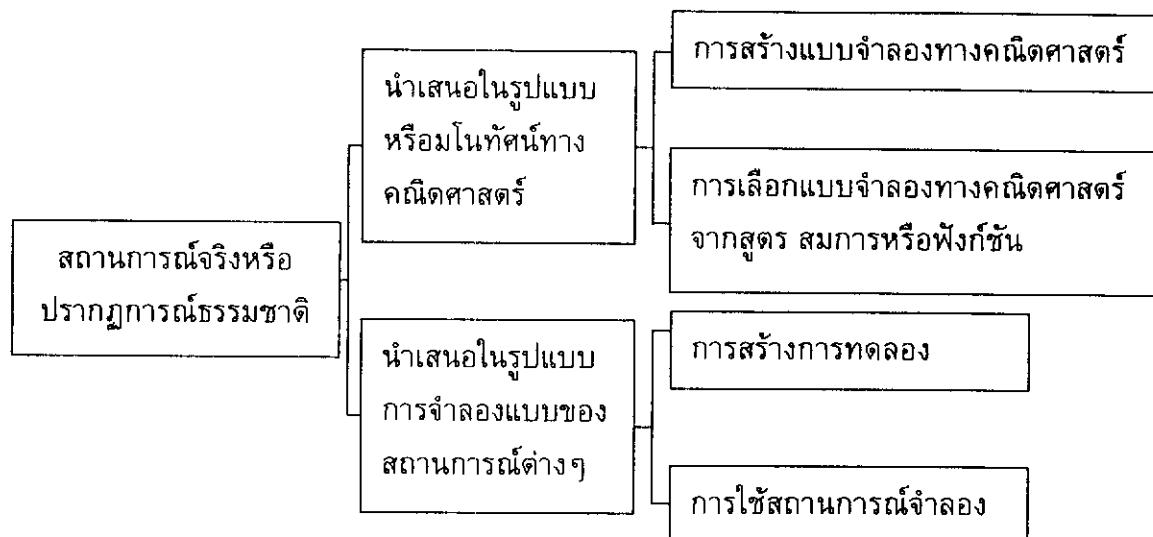
ทศพร จันทรังค (2544 : 11) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง สิ่งที่เกิดขึ้นโดยอาศัยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เช่น ฟังก์ชันและสมการ โดยเมื่อทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นจะเป็นการย้ายจากโลกของความจริง ไปสู่โลกที่ไม่มีตัวตนของมโนคติทางคณิตศาสตร์

สุรสาธ ผาสุข (2546 : 11) ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง สิ่งที่ใช้เชื่อมโยงความจริงของโลกคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบที่หลากหลายแตกต่างกัน เช่น สัญลักษณ์ ฟังก์ชัน สูตร สมการ นิพจน์ กราฟ ตาราง สถานการณ์จำลอง และการทดลอง เป็นต้น

จากความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น อาจกล่าวโดยสรุปได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การออกแบบและสร้างสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงที่ต้องการศึกษา โดยอาศัยมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ สัญลักษณ์ กราฟ ตาราง ฟังก์ชัน สมการและอสมการ สูตร เป็นต้น

1.3 ชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จิออร์ดาโนและเวียร์ (Giordano & Wier. 1985 : 32) ได้แบ่งแบบจำลองออกเป็น 4 ชนิด สองชนิดแรกเป็นแบบจำลองที่มีโครงสร้างเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในรูปของสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม ได้แก่ แบบจำลองที่สร้างขึ้นโดยอาศัยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ภายใต้เงื่อนไขและข้อมูลของสถานการณ์จริงกับอีกชนิดหนึ่งเป็นแบบจำลองที่ได้จากการเลือก สูตร ฟังก์ชัน หรือสมการต่างๆ ที่มีอยู่แล้วเช่น สมการกำลังสอง เป็นต้น ที่เหมาะกับสถานการณ์จริง ส่วนอีกสองชนิดเป็นแบบจำลองซึ่งเป็นรูปธรรมที่สามารถนำไปสู่ผลลัพธ์ของสถานการณ์จริง ได้แก่แบบจำลองที่เป็น การทดลอง กับ แบบจำลองที่อยู่ในรูปของสถานการณ์จำลอง ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 1 การแบ่งชนิดของแบบจำลองของจิออร์ดาโนและเวียร์

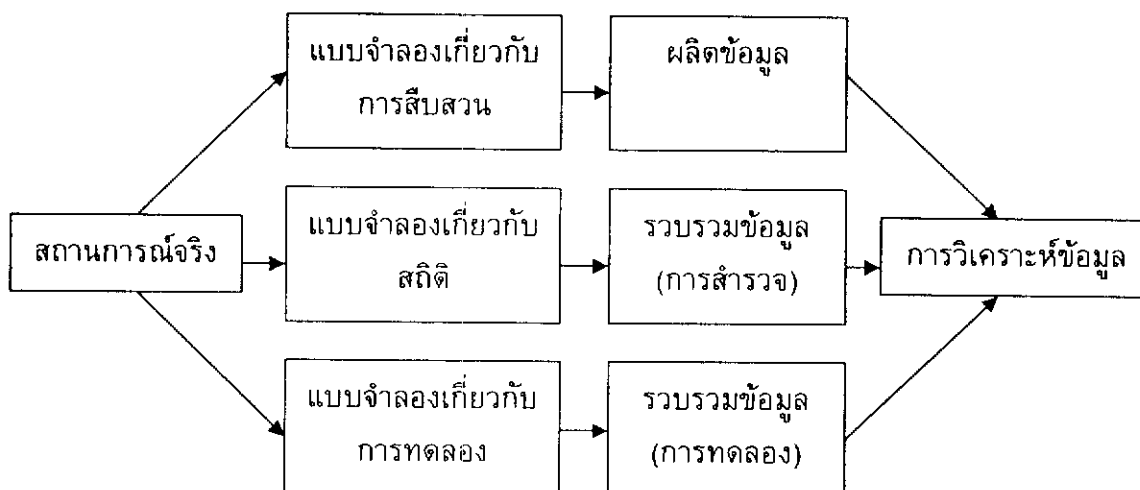
เมียร์สแคร์ท (Meerschaert. 1993 : 1-251) ได้นำเสนอประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3 ประเภทใหญ่ๆ ดังนี้

1. แบบจำลองการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization Models) เป็นการออกแบบเพื่อใช้ในการตัดสินใจของตัวแปรควบคุม (control variables) หรือตัวแปรอิสระที่จะนำมาซึ่งผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือส่งผลต่อคำตอบของปัญหาที่กำหนดให้ ซึ่งผลลัพธ์ที่ดีที่สุดนั้นอาจเป็นการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดก็ได้

2. แบบจำลองพลศาสตร์ (Dynamic Models) เป็นการสร้างแบบจำลองเพื่อเป็นตัวแทนของปัญหาหรือสถานการณ์ ที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาของระบบที่เกี่ยวข้อง เช่น ปฏิกริยาทางเคมี การเจริญเติบโตของประชากร ปัญหามลพิษ เป็นต้น

3. แบบจำลองความน่าจะเป็น (Probability Models) เป็นแบบจำลองของปัญหาหรือสถานการณ์ที่มีความไม่แน่นอนของพฤติกรรมหรือตัวแปรในแต่ละสถานการณ์ ซึ่งตัวแปรส่วนใหญ่จะเป็นตัวแปรสุ่ม ทำให้ต้องนำเอาความรู้ทางด้านความน่าจะเป็นเข้ามาช่วยในการพิจารณาหาคำตอบของปัญหาด้วย เช่น จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นที่สี่แยกแห่งหนึ่ง หรืออายุการใช้งานของหลอดไฟฟ้า เป็นต้น

อิงลิช (English. 1999 : 118-119) ได้จำแนกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนอายุ 11 – 16 ปี ออกเป็น 3 กลุ่ม ดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2 การแบ่งชนิดของแบบจำลองของอิงลิช

1. แบบจำลองการสืบสวน (Investigational Models) เป็นแบบจำลองที่ต้องมีแบบจำลองเริ่มต้นเพื่อผลิตข้อมูลซึ่งจะนำไปสู่การเป็นตัวแทนในรูปทั่วไปมากขึ้น ปัญหาหรือความยุ่งยากของนักเรียนจะอยู่ที่การหาแบบจำลองเริ่มต้นเพราะส่วนใหญ่ นักเรียนมักไม่รู้ว่าตนเองกำลังหาอะไรอยู่

2. แบบจำลองสถิติ (Statistical Models) โดยทั่วไปแบบจำลองจะเป็นสมมติฐานซึ่งต้องอาศัยระเบียบวิธีการทางสถิติ ในการค้นหาความจริง เช่น เรื่องของกลุ่มตัวอย่าง แบบสอบถาม และการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งถ้านักเรียนเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง จะถือว่าการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการใช้แบบจำลอง หรือนักเรียนจะใช้ข้อมูลจากแหล่งทุติยภูมิก็ได้

3. แบบจำลองการทดลอง (Experimental Models) แบบจำลองเริ่มแรกของแบบจำลองชนิดนี้สร้างขึ้นจากการสังเกตข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ข้อมูลที่ได้จะนำไปเขียนกราฟและสุดท้ายจะเก็บไว้ในรูปของสเปรดชีต (Spreadsheet)

วินส์ตัน (Winston. 2004 : 1-5) ได้ให้ความหมายประเภทต่าง ๆ ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. แบบจำลองสถิต (Static Models) คือแบบจำลองที่ตัวแปรอิสระหรือตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) ไม่เปลี่ยนแปลงหรือไม่ขึ้นกับเวลาที่เพิ่มขึ้นหรือเวลาที่เปลี่ยนไป

2. แบบจำลองพลศาสตร์ (Dynamic Models) คือแบบจำลองที่ตัวแปรตามหรือตัวแปรตัดสินใจมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้นหรือเปลี่ยนไป

การแก้ปัญหาของแบบจำลองสถิตจะเป็นการแก้ปัญหาเพียงครั้งเดียวก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุดที่ต้องการได้เลยไม่ว่าเวลาจะเปลี่ยนไปหรือไม่ ส่วนแบบจำลองพลศาสตร์เมื่อเราได้แบบจำลองมาแล้วก็ยังไม่ได้คำตอบต้องพิจารณาแต่ละจุดของเวลาด้วยเพราะจะให้คำตอบที่ต่างกัน

3. แบบจำลองเชิงเส้น (Linear Models) เป็นแบบจำลองที่แต่ละพจน์ในแบบจำลองนั้น ตัวแปรอิสระขึ้นอยู่กับค่าคงที่เท่านั้น ตัวแปรแต่ละตัวจะไม่คูณกัน และแต่ละพจน์ต้องอยู่ในรูปการบวกเท่านั้น และดีกรีของตัวแปรแต่ละตัวต้องเท่ากับหนึ่ง

4. แบบจำลองไม่เชิงเส้น (Nonlinear Models) คือแบบจำลองที่ไม่ใช่แบบจำลองเชิงเส้น

5. แบบจำลองเชิงกำหนด (Deterministic Models) เป็นแบบจำลองที่สร้างขึ้นจากสถานการณ์จริงที่สามารถวัดค่าของตัวแปรอิสระหรือตัวแปรที่เกี่ยวข้องได้แน่นอน

6. แบบจำลองสโตแคสติก (Stochastic Models) เป็นแบบจำลองที่สถานการณ์จริงที่นำมาศึกษานั้นไม่สามารถวัดค่าของตัวแปรได้แน่นอน หรือตัวแปรอิสระที่นำมาสร้างแบบจำลองนั้นมีลักษณะของตัวแปรสุ่ม จึงต้องมีการดำเนินการทางสถิติเข้ามาในการสร้างแบบจำลอง

จากชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ผู้วิจัยได้เลือกแบบจำลองในรูป ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันตรีโกณมิติ และสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมกับสถานการณ์จริงที่ศึกษา โดยเนื้อหาที่ศึกษาไม่เกินความรู้ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

1.4 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

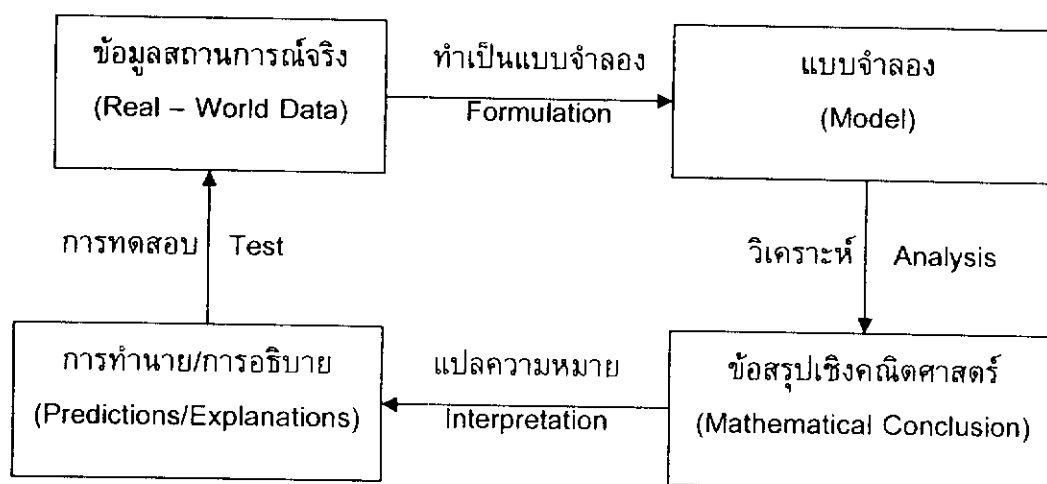
จิออร์ดาโนและเวียร์ (Giordano & Weir, 1985 : 29-49) ได้เสนอกระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. สังเกตลักษณะเฉพาะบางอย่างของสถานการณ์จริงที่ทำการศึกษาและระบุองค์ประกอบที่เกี่ยวข้อง ซึ่งตามปกติเราจะไม่สามารถระบุองค์ประกอบทุกองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องได้ทั้งหมด ดังนั้นข้อจำกัดหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จึงอาจสร้างขึ้นได้โดยการตัดองค์ประกอบบางส่วนออก

2. สร้างข้อจำกัดหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่างๆ

3. หาข้อสรุปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

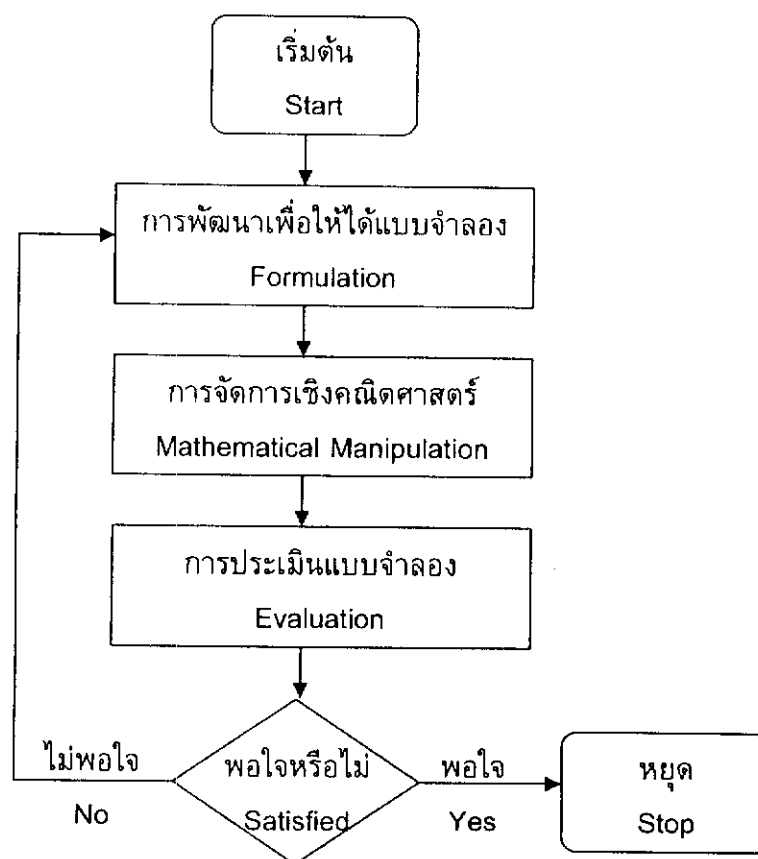
4. แปลความหมายของข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ในเทอมของสถานการณ์จริง



ภาพประกอบ 3 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของจิออร์ดาโนและเวียร์

เมเยอร์ (Meyer. 1985 : 2) แบ่งกระบวนการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. การพัฒนาเพื่อให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 - 1.1 เริ่มด้วยการถามคำถามเกี่ยวกับพฤติกรรมที่สนใจในสถานการณ์จริง คำถามดังกล่าวนี้ถ้ายังไม่ชัดเจนทำให้ชัดเจน ถ้ากว้างเกินไปแบ่งให้แคบลงแต่ต้องสามารถหาคำตอบได้
 - 1.2 ระบุงบค้ประกอบต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกัปัญหาได้แก่ปริมาณต่างๆ ตลอดจนความสัมพันธ์ทั้งที่สำคัญและไม่สำคัญ
 - 1.3 ในนิยามเชิงคณิตศาสตร์ โดยการแทนปริมาณที่สำคัญด้วยตัวแปร ฟังก์ชัน รูปเรขาคณิต ฯลฯ ที่เหมาะสม และแทนความสัมพันธ์ด้วยสมการ อสมการ หรือข้อตกลงเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่เหมาะสม
 2. การจัดการเชิงคณิตศาสตร์ น้อยครั้งมากที่สถานการณ์จริงที่เรานำมาศึกษาจะให้แบบจำลองมาโดยตรง ดังนั้นการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงต้องมีการลงมือทำคณิตศาสตร์ซึ่งได้แก่ การคำนวณ การแก้สมการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท ฯลฯ
 3. การประเมินผล มีหลายสิ่งที่สามารถใช้ตัดสินว่าแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมานั้นเป็นแบบจำลองที่ดีหรือไม่ โดยดูว่าแบบจำลองนั้นให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องหรือไม่ (ถ้าผลลัพธ์ไม่ถูกต้องเพียงพอหรือแบบจำลองนั้นมีวิธีพัฒนาอื่นที่สั้นกว่า ก็ควรจะทดลองใช้วิธีที่สั้นกว่านั้น) มีความเป็นไปได้ที่ความผิดพลาดจะเกิดขึ้นในขั้นตอนของการจัดการเชิงคณิตศาสตร์ หรืออาจเป็นไปได้อีกเช่นกันที่ปริมาณหรือความสัมพันธ์ที่คิดว่าไม่สำคัญอาจกลายเป็นสิ่งสำคัญเกินกว่าที่เราคิดก็ได้
- ดังนั้น กระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จึงมีลักษณะทำซ้ำเป็นวงจรจนกว่าจะได้สิ่งที่พอใจ ดังผังงานต่อไปนี้

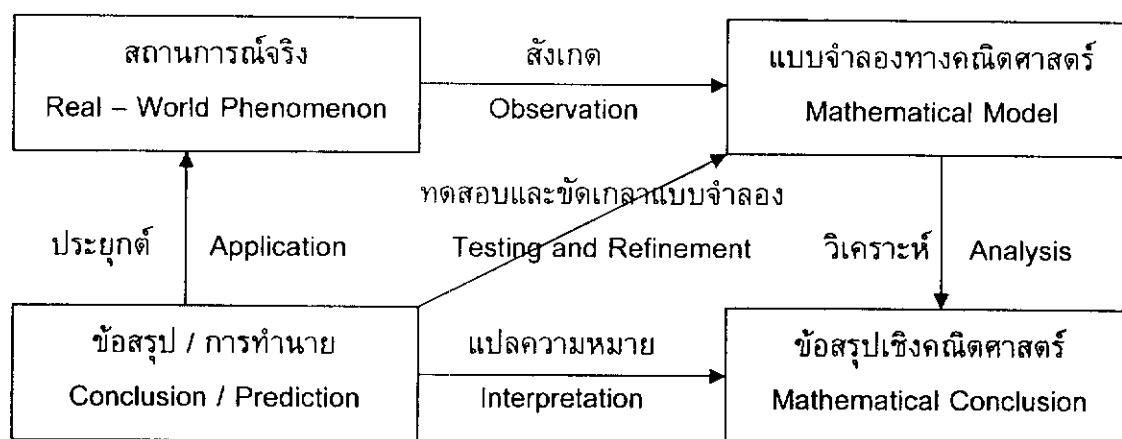


ภาพประกอบ 4 กระบวนการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเมเยอร์

สเวทซ์และฮาร์ทเลอร์ (Swetz & Hartzler. 1991 : 1-3) กล่าวว่า การศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ กระบวนการที่เป็นระบบ (ที่มีกฎเกณฑ์/แบบแผน) ใช้ทักษะหลายด้าน ใช้กิจกรรมที่ใช้สติปัญญาในระดับสูง ในการแปลความหมาย วิเคราะห์ และสังเคราะห์ โดยกระบวนการจะเป็นการผสมผสานของขั้นตอน 4 ขั้นตอน คือ

1. การสังเกตสถานการณ์จริงที่จะศึกษา เพื่อหาสถานการณ์ที่เป็นปัญหา หรือพฤติกรรมที่สนใจจากสถานการณ์จริงนั้น และหาล่องประกอบที่สำคัญ (ตัวแปร/ตัวพารามิเตอร์) ซึ่งจะมีผลกระทบต่อสถานการณ์ที่เป็นปัญหาหรือพฤติกรรมเฉพาะที่สนใจนั้น
2. ทำการคาดเดาความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ จากนั้นจึงแปลความหมายของความสัมพันธ์เหล่านั้นออกมาในเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสู่แบบจำลองของสถานการณ์จริงที่ทำการศึกษา
3. หาข้อสรุปจากแบบจำลอง โดยใช้การประยุกต์ การวิเคราะห์เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม
4. แปลความหมายของข้อสรุปที่ได้ออกมาในบริบทของสถานการณ์จริงที่อยู่ภายใต้การศึกษาพร้อมทั้งหาออกมาเป็นภาพสรุป

5. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลอง เป็นขั้นตอนที่สามารถเพิ่มเข้าไปในกระบวนการนี้ได้ ถ้าภาพสรุปยังใช้ไม่ได้หรือไม่มีเหตุผลเพียงพอ การขัดเกลาแบบจำลอง อาจทำได้โดยการกลับไปสำรวจองค์ประกอบของแบบจำลองและทำการปรับแบบจำลอง และถ้ามีความจำเป็นก็เป็นไปได้ที่จะทำการแก้ไขสูตรของแบบจำลองใหม่



ภาพประกอบ 5 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสเวทซ์และฮาร์ทเลอร์

แผนภูมิข้างต้นเริ่มจากสถานการณ์จริงที่สนใจศึกษา

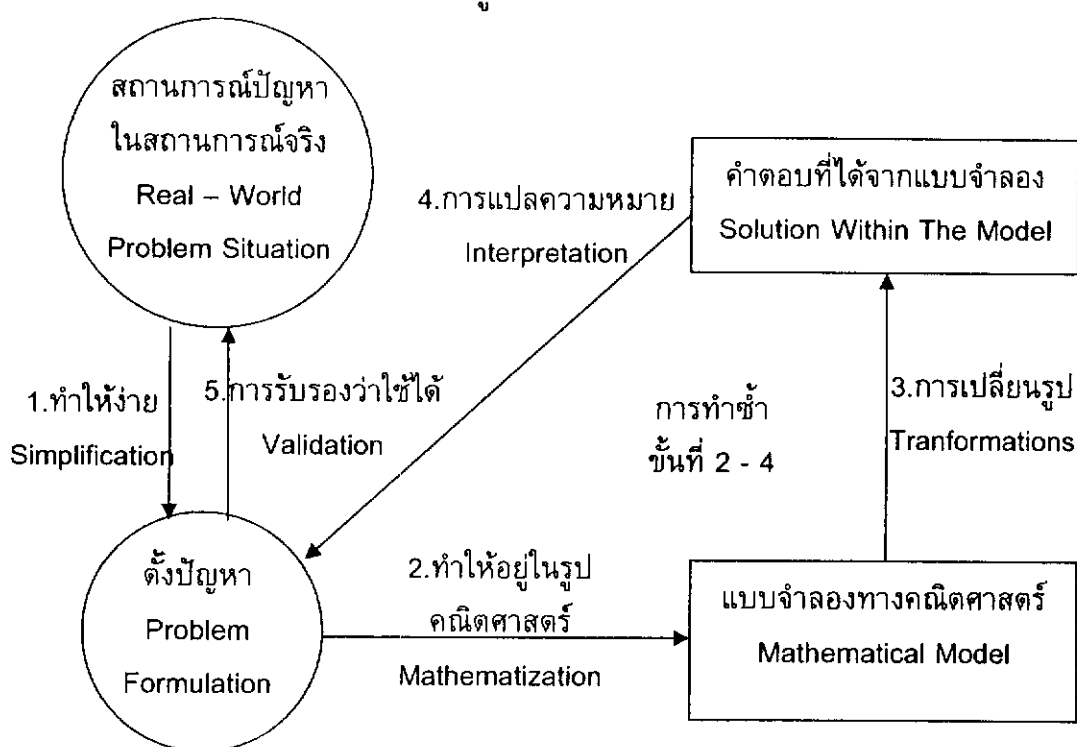
1. ทำการรวบรวมข้อมูลให้เพียงพอที่จะพัฒนาให้เป็นแบบจำลอง
2. ทำการวิเคราะห์แบบจำลองเพื่อหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์
3. แปลความหมายของแบบจำลองและสร้างคำทำนายหรือให้คำอธิบาย
4. ทดสอบข้อสรุปของสถานการณ์จริงเปรียบเทียบกับ การสังเกตและข้อมูลใหม่

ภายหลังการทดสอบอาจพบว่ามี ความจำเป็นที่ต้องกลับไปปรับปรุงแบบจำลอง เพื่อพัฒนาการทำนายของแบบจำลอง หรือเพื่อพัฒนาการอธิบายถึงความสามารถของแบบจำลองหรือในบางครั้งอาจจะพบว่าแบบจำลองนั้นยังไม่เหมาะกับสถานการณ์จริง ทำให้จำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงแบบจำลองใหม่

ดอสซี่ (Dossey, 1996 : 221-280) ได้นำเสนอกระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริง โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจำกัดขอบเขตของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จะใช้อธิบายสถานการณ์จริงไว้ที่ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และยังได้มีการนำเทคโนโลยีซึ่งได้แก่เครื่องคำนวณเชิงกราฟมาใช้ในการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วย ดอสซี่ได้แบ่งขั้นตอนของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ

1. การจำแนกแยกแยะสถานการณ์จริงที่ศึกษา
2. สร้างสมมติฐาน
 - 2.1 จำแนกหรือระบุตัวแปรและทำการแบ่งหมวดหมู่ของตัวแปรที่เป็นไปได้
 - 2.2 กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร (แบบจำลองทางคณิตศาสตร์)
3. พัฒนาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร (ถ้าเป็นไปได้) และพัฒนาเลขชี้กำลังที่มีผลต่อตัวแปร (ถ้าจำเป็น)
4. การตรวจสอบแบบจำลองเพื่อดูว่า
 - 4.1 แบบจำลองนั้นบรรยายถึงสถานการณ์จริงที่ศึกษาได้ตรงประเด็นหรือไม่
 - 4.2 แบบจำลองนั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่
 - 4.3 การทำนายของแบบจำลองนั้นไปกันได้กับข้อมูลจริงหรือไม่

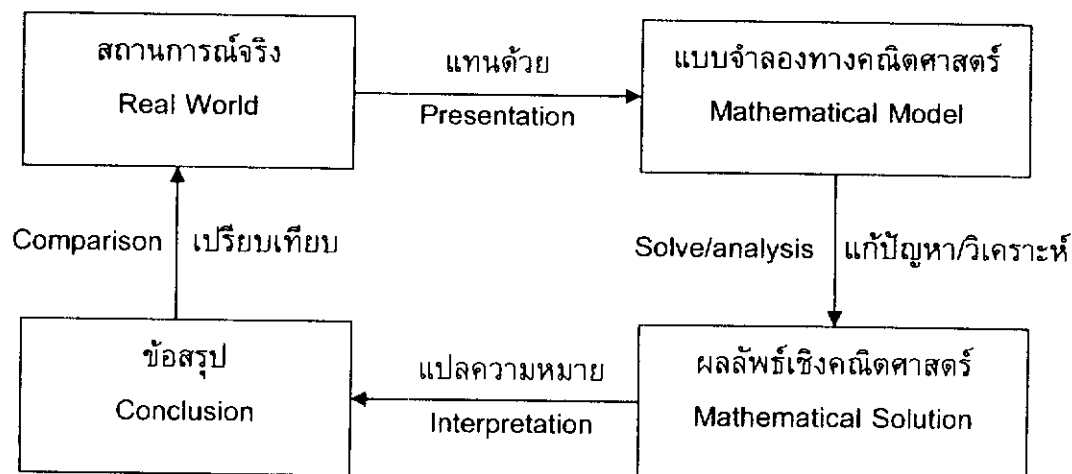
นอกจากขั้นตอนข้างต้นแล้ว ดอสซี่ยังได้นำเสนอกระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพประกอบ 6 กระบวนการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของดอสซี่

จากแผนภูมิข้างต้นสามเหลี่ยมของกระบวนการตั้งแต่ขั้นที่ 2 ถึงขั้นที่ 4 ถือเป็นสิ่งสำคัญ การใช้ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพื่อหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม การเปลี่ยนรูปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปสู่คำตอบชั่วคราว และการแปลความหมายของคำตอบ ทั้ง 3 ขั้นตอนนี้อาจจำเป็นหรือต้องทำซ้ำๆ หลายครั้ง จนกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะอยู่ในระดับที่สามารถนำมาตัดสินใจสถานการณ์จริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คอมเบอร์ (Comber, 1999 : 1) ได้นำเสนอกระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริง โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก 4 ขั้นตอน ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพประกอบ 7 กระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคอมเบอร์

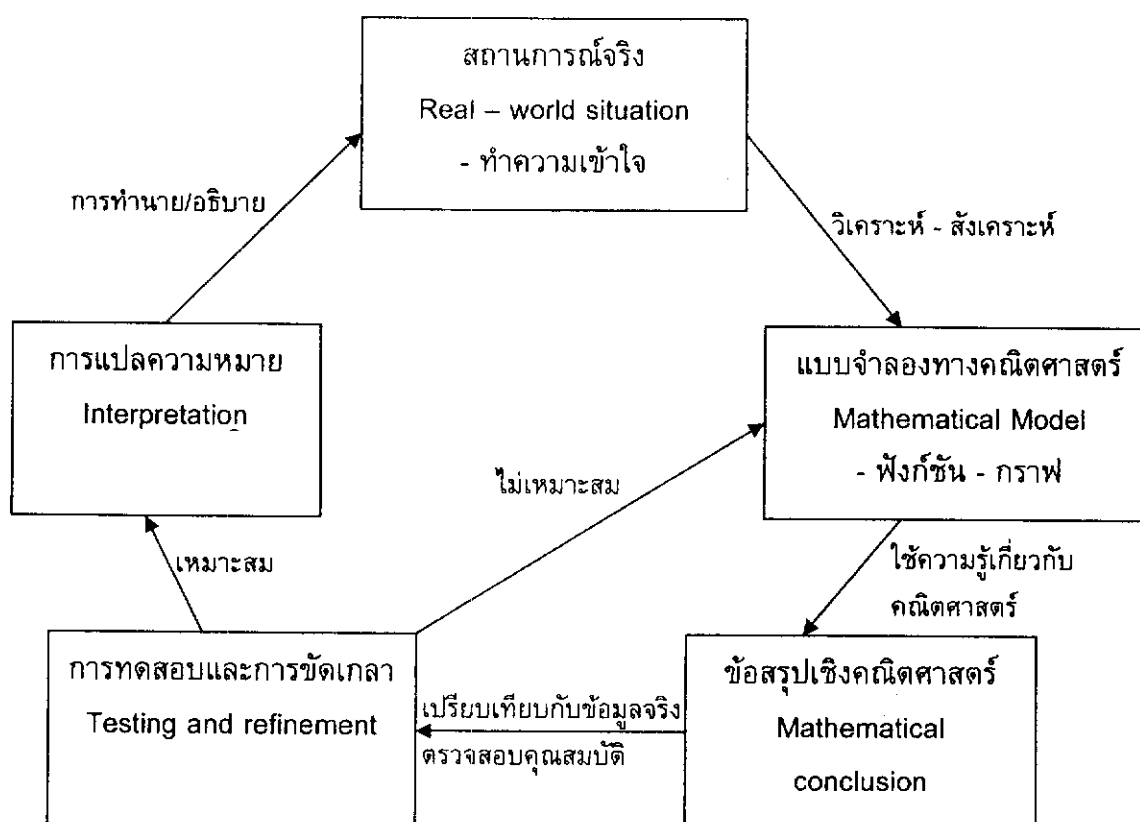
จากขั้นตอนหลักในแผนภูมิ คอมเบอร์นำมาใส่รายละเอียด จนได้กระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับใช้ในชั้นเรียน ดังนี้

1. ทำการศึกษาสถานการณ์จริง
2. พยายามเดาตัวแปรที่สำคัญ
3. พัฒนาขึ้นเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย ๆ โดยการ
 - 3.1 สร้างสมมติฐาน
 - 3.2 สมมติข้อมูล
 - 3.3 สร้างสมการ
4. หาผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้นโดย
 - 4.1 การแก้สมการ
 - 4.2 เขียนกราฟ
5. แปลความหมายของผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์ โดยการตอบคำถาม
 - 5.1 ความหมายของผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์ในสถานการณ์จริงคืออะไร
 - 5.2 กราฟบอกอะไรกับเราบ้างเกี่ยวกับสถานการณ์จริง
6. เปรียบเทียบข้อสรุปกับสถานการณ์จริง โดยการตอบคำถาม
 - 6.1 ข้อสรุปนั้นสมเหตุสมผลหรือไม่
 - 6.2 ข้อสรุปนั้นเป็นจริงหรือไม่
 - 6.3 สมมติฐานอะไรที่ทำให้ได้ผลลัพธ์เช่นนั้น
 - 6.4 สมมติฐานนั้นสมเหตุสมผลหรือไม่

โดยการใช้กระบวนการข้างต้น คอมเบอร์กล่าวว่าแบบจำลองแรกๆ อาจยังไม่เป็นจริงมากนัก แต่จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์จริงนั้นมากขึ้น รวมทั้งมองเห็นว่าตัวแปรทั้งหลายสัมพันธ์กันอย่างไร และตัวแปรใดบ้างที่เป็นตัวแปรที่สำคัญที่สุด จากนั้นพยายามแก้ไขและแปลความหมายผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งความเป็นไปได้ที่นักเรียนจะสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปทั่วไปจะเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ

สุรสาธ ผาสุข (2546 : 39) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนากระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง
 2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 4. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
 5. การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง
- ทั้ง 5 ขั้นตอนมีลักษณะเป็นวงจร ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพประกอบ 8 กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสุรสาธ ผาสุข

จากตัวอย่างกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านมานั้นจะพบว่ากระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีลักษณะคล้ายกันโดยมีลักษณะเป็นวัฏจักร นั่นคือเราจะเริ่มจากการศึกษาปัญหาในสถานการณ์จริง สร้างแบบจำลอง แปลผลแล้วนำผลที่ได้มาอธิบายปัญหาในสถานการณ์จริงอีกครั้งหนึ่ง ส่วนขั้นตอนการทดสอบและขัดเกลา นั้นขึ้นอยู่กับระดับความรู้ของผู้เรียนว่าจะมีหรือไม่ก็ได้ โดยในการศึกษาค้างนี้ผู้วิจัยจะนำกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สุรัสสา ผาสุข ได้เสนอเป็นแนวทางไว้มาใช้ประกอบการสร้างบทเรียน ส่วนขอบเขตของสถานการณ์จริงที่นำมาใช้ในการศึกษานั้นเป็นสถานการณ์จริงง่ายๆ ที่ไม่ซับซ้อน มีการสิ้นสุดของผลลัพธ์ที่ชัดเจนหรือมีการประมาณที่สมเหตุสมผลอย่างใดอย่างหนึ่งและมีบริบทเป็นที่คุ้นเคยของนักเรียน

1.5 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แมคเคอร์น (McCown. 1994 : 97 ; 103) ได้นำเสนอขั้นตอนในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. เลือกข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กัน นำมาสร้างเป็นคู่อันดับ
2. สร้างระบบพิกัดฉาก ระบุแกน และกำหนดมาตราส่วนที่เหมาะสม
3. ลงจุดของข้อมูลจากคู่อันดับในข้อ 1 บนระบบพิกัดฉาก
4. พิจารณาแนวโน้มของจุดที่ได้ในข้อ 3 ว่าเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง
5. หาสมการเส้นแนวโน้มที่ได้ในข้อ 4
6. ใช้กราฟและสมการที่ได้มาทำนายผลลัพธ์
7. พิจารณาความสมเหตุสมผลของผลลัพธ์

และนอกจากนี้แมคเคอร์น ยังได้นำเสนอขั้นตอนในการสร้างแบบจำลองเชิงเส้น ดังนี้

1. เลือกข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กันนำมาสร้างเป็นคู่อันดับ
2. สร้างระบบพิกัดฉาก ระบุแกน และกำหนดมาตราส่วนที่เหมาะสม
3. ลงจุดของข้อมูลจากคู่อันดับในข้อ 1 บนระบบพิกัดฉาก
4. เลือกจุดจากข้อ 3 มา 2 จุดแล้วลากเส้นตรงให้ผ่านจุดนั้น
5. สร้างสมการเส้นตรงจาก

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \text{ หรือ } Y = mX + b$$

โดยที่ (X_1, Y_1) เป็นจุดบนเส้นตรงที่ลากหรือบนเส้นแนวโน้ม

m เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน Y

6. ใช้กราฟเส้นตรง และสมการที่ได้มาทำนายผลลัพธ์
7. พิจารณาความสมเหตุสมผลของผลลัพธ์

นอกจากขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังได้กล่าวมาแล้วนั้น ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารต่อไปนี้

- 1) เทคนิคการพยากรณ์การวิเคราะห์อนุกรมเวลา ของศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์
- 2) การวิเคราะห์การถดถอย ของทรงศิริ แต่สมบัติ
- 3) เอกสารประกอบการบรรยาย วิชา การวิเคราะห์อนุกรมเวลา ของสือ ล้ออุทัย
- 4) การวิเคราะห์การถดถอย ของวิรัช พานิชวงศ์
- 5) การวิเคราะห์การถดถอยเชิงธุรกิจ ของศรีเพ็ญ ทรัพย์มณชัย
- 6) แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร ของยงยุทธ ชนุกฤติ
- 7) แบบฝึกหัดและการประเมินผลคณิตศาสตร์ ม.6 ค 016 ของกนกวลี อุษณกรกุล
- 8) A First Course in Mathematical Modelling : Third Edition ของจิออร์ดาโน, เวียร์ และ ฟอกซ์ (Giordano, Weir & Fox)

9) Elementary Mathematical Modeling ของ เดวิสและเอ็ดเวิร์ด (Davis & Edwards)

ซึ่งผู้วิจัยได้สรุปวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการสร้างแบบจำลองที่ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ โดยก่อนการสร้างแบบจำลองด้วยการคำนวณนั้นจะต้องเขียนแผนภาพการกระจายของข้อมูลระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามเพื่อดูแนวโน้มของข้อมูลว่าเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง แล้วจึงทำการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมกับแผนภาพการกระจาย แต่เนื่องจากการศึกษาสถานการณ์จริงนั้นส่วนใหญ่ข้อมูลที่ได้เมื่อนำมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วไม่สามารถสร้างเส้นตรงหรือเส้นโค้งที่ผ่านจุดทุกจุดได้ จึงต้องมีการพิจารณาเส้นแนวโน้มจากแผนภาพการกระจายว่ามีลักษณะเป็นเช่นใด ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงประมาณด้วยการสร้างเส้นแนวโน้มตามลักษณะของแต่ละเส้นแนวโน้ม ซึ่งมีหลายวิธี ดังต่อไปนี้

1. วิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ (selected two points method) เป็นวิธีการสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น โดยพิจารณาจากแผนภาพการกระจายของข้อมูล

ขั้นตอนการสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีเลือก 2 จุดใดๆ

1.1 เลือกจุด 2 จุด เพื่อเป็นตัวแทนของข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งจุดที่เลือก 2 จุด อาจเป็นจุดเริ่มต้นของข้อมูล และจุดสุดท้ายของข้อมูลหรืออาจเลือก 2 จุดใดๆ ของข้อมูลที่กำหนดให้

1.2 ลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดที่เลือกไว้ เส้นที่ลากได้นี้คือเส้นแนวโน้มของแบบจำลอง

1.3 สร้างสมการเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์เกี่ยวกับการสร้างสมการเส้นตรงจากจุด 2 จุด (two point form) ดังนี้

กำหนดให้ (X_1, Y_1) และ (X_2, Y_2) เป็นจุด 2 จุดที่เลือกไว้

(X, Y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (X_1, Y_1) และ (X_2, Y_2) คือ m

$$\text{โดยที่ } m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

แล้วนำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 1.2 ไปแทนใน $Y - Y_1 = m(X - X_1)$

แล้วจัดรูปแบบทั่วไปของสมการเส้นแนวโน้มที่ได้ให้อยู่ในรูป

$$\hat{Y} = a + bX$$

โดยที่ $\hat{Y}$ แทน ค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม

a แทน จุดตัดบนแกนตั้งฉาก

b แทน คือความชันของเส้นแนวโน้ม

2. วิธีกึ่งเฉลี่ย (semi-average method) เป็นวิธีการสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น โดยใช้หลักการสร้างคล้ายกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ กล่าวคือจะต้องหาจุด 2 จุด และลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดเช่นเดียวกัน ต่างกันที่จุด 2 จุดของวิธีกึ่งเฉลี่ยจะต้องได้จากค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้

ขั้นตอนการสร้างเส้นแนวโน้มด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ย

2.1 เรียงลำดับของตัวแปรอิสระจากน้อยไปหามาก

2.2 แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่าๆ กัน

2.3 หาค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่แบ่งได้แต่ละกลุ่ม

2.4 ลากเส้นเชื่อมค่าเฉลี่ยทั้งสองกลุ่ม เส้นที่ลากได้คือเส้นแนวโน้ม

2.5 สร้างสมการเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์ เช่นเดียวกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ

กำหนดให้ $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)$ และ $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2)$ เป็นจุดสองจุดที่เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล

(X, Y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1)$ และ $(\bar{X}_2, \bar{Y}_2)$ คือ m

$$\text{โดยที่ } m = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}$$

แล้วนำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 2.4 ไปแทนใน $Y - \bar{Y}_1 = m(X - \bar{X}_1)$

แล้วจัดรูปแบบทั่วไปของสมการเส้นแนวโน้มที่ได้ให้อยู่ในรูป

$$\hat{Y} = a + bX$$

โดยที่ $\hat{Y}$ แทน ค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม

a แทน จุดตัดบนแกนตั้งฉาก

b แทน คือความชันของเส้นแนวโน้ม

วิธีกึ่งเฉลี่ยเป็นวิธีที่มีหลักเกณฑ์ดีกว่าวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ เพราะการได้มาของจุดสำหรับวิธีนี้ใช้ค่าเฉลี่ย ซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ การสร้างเส้นแนวโน้มด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ยอาจ

มีปัญหาถ้าจำนวนข้อมูลมีจำนวนคี่ จะทำให้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่ากันไม่ได้ จึงมีวิธีแก้ปัญหา ดังนี้

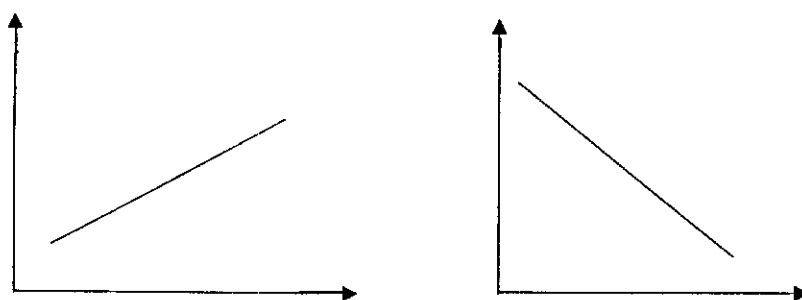
1) ตัดข้อมูลจำนวนที่อยู่ตรงกลางทิ้ง เพื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน การตัดข้อมูลตรงกลางทิ้งไม่นิยมปฏิบัติเพราะต้องสูญเสียข้อมูลไปโดยเปล่าประโยชน์ และการคำนวณหาสมการเส้นแนวโน้มจะต้องคำนึงถึงช่วงเวลาที่ตัดข้อมูลทิ้งไปด้วย

2) นำข้อมูลจำนวนที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 แล้วหาค่าเฉลี่ยครั้งหนึ่งและนำข้อมูลตัวเดียวกันนั้นมารวมกับกลุ่มที่ 2 แล้วหาค่าเฉลี่ยอีกครั้ง ซึ่งจะทำให้ได้ค่าเฉลี่ยสำหรับข้อมูลกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เช่นกัน

3) นำข้อมูลจำนวนที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 หรือกลุ่มที่ 2 เพียงกลุ่มเดียวแล้วหาค่าเฉลี่ย การจะนำข้อมูลจำนวนตรงกลางรวมกับกลุ่มใดควรพิจารณาตามความเห็นสมควร สำหรับกรณีนี้จะทำให้การแบ่งข้อมูล 2 กลุ่มไม่เท่ากัน แต่ขั้นตอนการสร้างเส้นแนวโน้มยังคงใช้วิธีหาค่าเฉลี่ยเช่นเดียวกับกรณีที่แบ่งข้อมูล 2 กลุ่มเท่ากัน

3. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square method) เป็นวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แนวคิดที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าแนวโน้มกับค่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้มีค่าน้อยที่สุด (least square error) การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีที่นิยมเพราะเป็นวิธีที่ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ และน่าเชื่อถือในการหาเส้นที่เหมาะสมที่สุดที่เป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้และใช้สร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น แบบจำลองกำลังสองและแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อพิจารณาแผนภาพการกระจายอาจมีรูปการกระจายที่มีแนวโน้มเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งแบบต่างๆ มากมาย ดังนั้นรูปทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจึงมีมากมายหลายแบบดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.1 ลักษณะเส้นแนวโน้มของข้อมูลเป็นเส้นตรงดังภาพประกอบ 9 จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองเชิงเส้น ซึ่งสมการทั่วไปของเส้นแนวโน้ม คือ $\hat{Y} = a + bX$ (เมื่อ $\hat{Y}$ แทนค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม และ a, b เป็นค่าคงตัว)

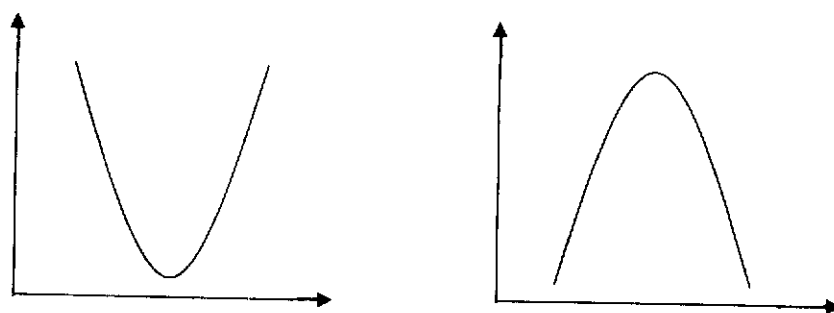


ภาพประกอบ 9 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น

จากภาพประกอบ 9 พบว่าเส้นแนวโน้มที่เกิดจากข้อมูลมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงคงที่ (อย่างใดอย่างหนึ่ง)

3.2 ลักษณะเส้นแนวโน้มของข้อมูลเป็นรูปพาราโบลาดังภาพประกอบ 10 จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองกำลังสอง ซึ่งสมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ

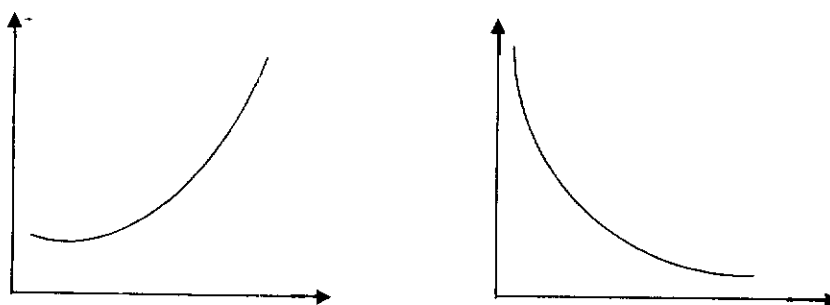
$\hat{Y} = a + bX + cX^2$ (เมื่อ $\hat{Y}$ แทนค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม และ a, b, c เป็นค่าคงตัว)



ภาพประกอบ 10 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองกำลังสอง

จากภาพประกอบ 10 พบว่าเส้นแนวโน้มที่เกิดจากข้อมูลที่มีลักษณะการเพิ่มขึ้นหรือลดลงไม่คงที่แต่ทิศทางการเพิ่มขึ้นหรือลดลงคงที่ จึงทำให้ลักษณะเส้นแนวโน้มเป็นกราฟหงายหรือกราฟคว่ำ

3.3 ลักษณะเส้นแนวโน้มของข้อมูลเป็นรูปเอกซ์โพเนนเชียลดังภาพประกอบ 11 จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งสมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ $\hat{Y} = ab^X$ (เมื่อ $\hat{Y}$ แทนค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม และ a, b เป็นค่าคงตัว)

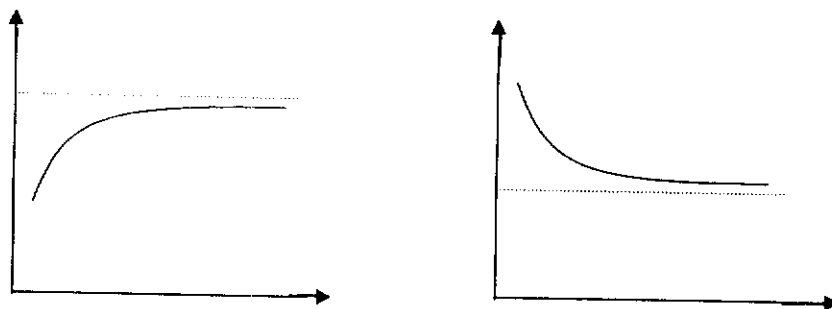


ภาพประกอบ 11 ลักษณะเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล

จากภาพประกอบ 11 พบว่าเส้นแนวโน้มที่เกิดจากข้อมูลที่มีลักษณะการเพิ่มขึ้นหรือลดลงไม่เป็นเส้นตรง และการเปลี่ยนแปลงไม่คงที่ แต่มีทิศทางการเพิ่มขึ้นหรือลดลงไปทางเดียว และอัตราการเพิ่มขึ้นหรือ ลดลงคงที่ ถ้าสร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูลชุดนี้บนกระดาษกราฟ

semi-logarithm (หมายถึงกระดาษกราฟที่มีแกนตั้งเป็นหน่วยลอการิทึม (logarithm) แกนนอน มาตราเป็นหน่วยปกติ) จะได้แผนภาพการกระจายเป็นเส้นตรง

แผนภาพการกระจายข้อมูลอาจมีลักษณะเส้นแนวโน้มขึ้นนอกเหนือจากรูปแบบที่กล่าว มาแล้ว เช่น แผนภาพการกระจายมีลักษณะแนวโน้มเป็นแบบ Gompertz curve ที่มีแบบจำลอง รูปทั่วไปคือ $Y = ka^{bx}$ (k, a, b เป็นค่าคงตัว) ซึ่งเกิดจากข้อมูลที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลง ช่วงแรกรวดเร็วและช่วงหลังค่าเปลี่ยนแปลงเริ่มคงที่ หรือช่วงแรกค่าเปลี่ยนแปลงน้อยและช่วงหลัง ค่าการเปลี่ยนแปลงข้อมูลเป็นไปอย่างรวดเร็ว เช่น อัตราการตายด้วยโรคชนิดหนึ่ง เมื่อโรคชนิดนี้ เริ่มระบาดระยะแรกอัตราการตายจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อวงการแพทย์สามารถหาทางรักษาโรค ชนิดนี้ได้อัตราการตายจะลดลงจนเกือบคงที่



ภาพประกอบ 12 ลักษณะเส้นแนวโน้มแบบ Gompertz curve

สำหรับการศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะกล่าว เฉพาะแบบจำลองที่มีลักษณะเส้นแนวโน้มเป็นดังนี้

- 1) รูปเส้นตรง
- 2) รูปพาราโบลา
- 3) รูปเอกซ์โพเนนเชียล

1) การสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น (linear Models)

จากแนวความคิดที่จะทำให้ผลรวมของกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าแนวโน้มกับ ค่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้มีค่าน้อยที่สุด

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ $\hat{Y} = a + bX$ (a, b เป็นค่าคงตัว)

โดยที่ Y แทนค่าของตัวแปรตาม

X แทนค่าของตัวแปรอิสระ

$\hat{Y}$ แทนค่าของตัวแปรตาม Y ที่ได้จากสมการเส้นแนวโน้ม

จากสมบัติกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2 \text{ มีค่าน้อยที่สุด เพื่อความสะดวกจะเขียนแทนด้วย } \sum (Y - \hat{Y})^2$$

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum [Y - (a + bX)]^2 \quad \text{สมการ (1)}$$

ต้องการให้สมการ (1) มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์คำนวณหาค่า a, b โดยหาอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) เทียบกับ a

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum [Y - (a + bX)]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum [Y^2 - 2(a + bX)Y + (a + bX)^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum [Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = 0$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial a} [Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = 0$$

$$\sum (-2Y + 2a + 2bX) = 0$$

$$(-2) \sum Y + 2na + 2b \sum X = 0$$

$$\text{จะได้ } \sum Y = na + b \sum X \quad \text{สมการ (2)}$$

และหาอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) เทียบกับ b

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum [Y - (a + bX)]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum [Y^2 - 2(a + bX)Y + (a + bX)^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum [Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = 0$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial b} [Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = 0$$

$$\sum (-2XY + 2aX + 2bX^2) = 0$$

$$(-2) \sum XY + 2a \sum X + 2b \sum X^2 = 0$$

$$\text{จะได้ } \sum XY = a \sum X + b \sum X^2 \quad \text{สมการ (3)}$$

จากสมการ (2) และสมการ (3) ทำให้เราได้สมการปกติดังนี้

$$\sum Y = na + b \sum X$$

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2$$

และจากสมการปกติสามารถหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$b = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X^2 - n \bar{X}^2}$$

$$a = \bar{Y} - b \bar{X}$$

โดยที่ $\bar{Y}$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

2) การสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองกำลังสอง (Quadratic Models)

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ $\hat{Y} = a + bX + cX^2$ จากแนวความคิดเช่นเดียวกับการสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น คือต้องการหาค่า a , b และ c ที่ทำให้ $\sum (Y - \hat{Y})^2$ มีค่าน้อยที่สุด ขั้นตอนการคำนวณนั้นสามารถทำได้เช่นเดียวกับแบบจำลองเชิงเส้น ซึ่งจะไม่ขอกล่าวถึงรายละเอียดการคำนวณ แต่จะได้สมการปกติ 3 สมการคือ

$$\sum Y = na + b \sum x + c \sum X^2$$

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2 + c \sum X^3$$

$$\sum X^2 Y = a \sum X^2 + b \sum X^3 + c \sum X^4$$

ต้องแก้สมการปกติ 3 สมการเพื่อหาค่า a , b และ c แล้วนำค่าที่คำนวณได้ไปแทนลงในสมการทั่วไปของเส้นแนวโน้ม $\hat{Y} = a + bX + cX^2$

3) การสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Models)

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้ม คือ $\hat{Y} = ab^X$ จะแปลงสมการทั่วไปโดยใช้สมบัติของลอการิทึม ดังนี้

$$\log \hat{Y} = \log a + (\log b) X$$

ทำการคำนวณหาค่า a และ b ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเหมือนแบบจำลองเชิงเส้น โดยมีสมการปกติคือ

$$\sum \log Y = n \log a + (\log b) \sum X$$

$$\sum (X \log Y) = (\log a) \sum X + (\log b) \sum X^2$$

จากสมการปกติทั้ง 2 สมการ เราจะได้

$$\log b = \frac{n \sum X \log Y - \sum X \sum \log Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sum X \log Y - n \bar{X} (\overline{\log Y})}{\sum X^2 - n \bar{X}^2}$$

$$\log a = (\overline{\log Y}) - (\log b) \bar{X}$$

โดยที่ $\bar{Y}$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

$\overline{\log Y}$ แทน ค่าเฉลี่ยของค่า $\log$ ของตัวแปรตาม

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มที่ได้มาอยู่ในรูป $\hat{Y} = ab^X$ หรือ

$\log \hat{Y} = \log a + (\log b) X$ ก็ได้

4. การสร้างเส้นแนวโน้มของแบบจำลองตรีโกณมิติ (Trigonometric Models)

แบบจำลองประเภทนี้จะถูกใช้แทนสถานการณ์ที่มีการเคลื่อนไหวเนื่องมาจากฤดูกาล โดยการเคลื่อนไหวจะมีลักษณะขึ้นลงเหมือนลูกคลื่นที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันในแต่ละปี ซึ่งในการศึกษาค้างนี้จะศึกษาเฉพาะในกรณีที่แนวโน้มของกราฟเป็นกราฟรูปไซน์

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ $\hat{Y} = A + B \sin\left(\frac{2\pi(t - D)}{P}\right)$

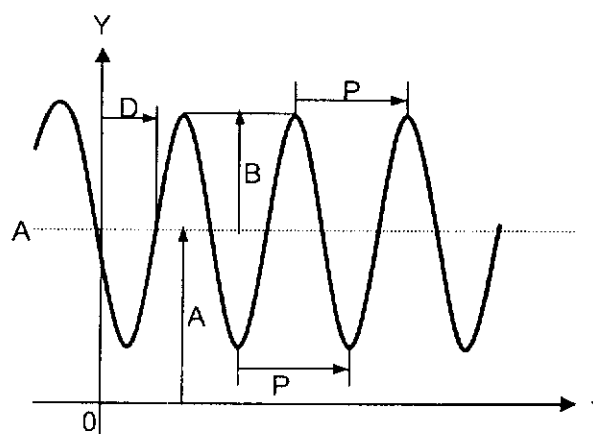
โดยที่ A แทน ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดของ Y

B แทน แอมพลิจูด หรือค่าครึ่งหนึ่งของผลบวกระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ Y

P แทน คาบ หรือช่วงที่สั้นที่สุดที่กราฟจะซ้ำรูปเดิม

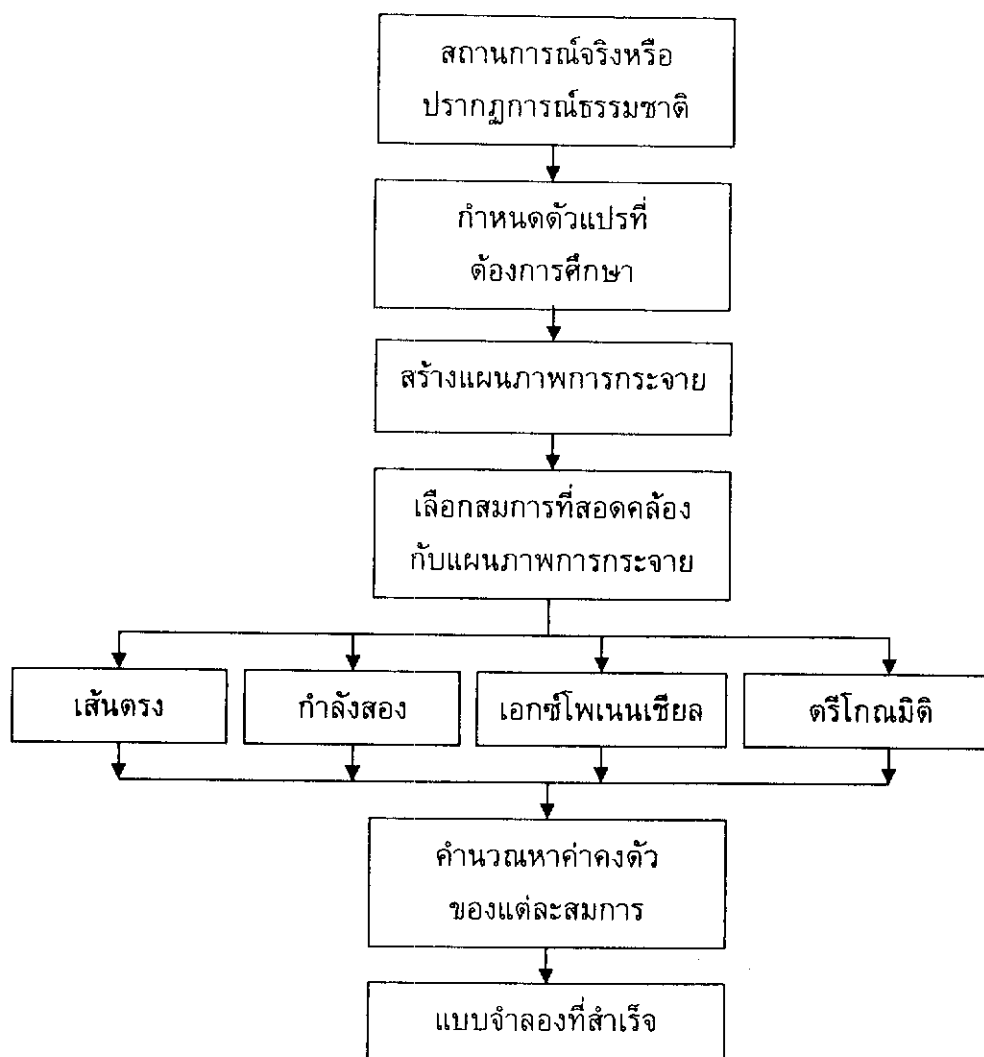
D แทน เวลาตั้งแต่ $t = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A)

t แทน เวลาที่ได้ข้อมูลแต่ละค่า



ภาพประกอบ 13 แสดงลักษณะต่างๆ ของค่าคงตัวในแบบจำลองตรีโกณมิติ

จากขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวไปแล้วนั้น ผู้วิจัยได้สรุปขั้นตอนในการสร้างผังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 14 ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากภาพประกอบ 14 ผังผังจะเริ่มจากสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติ แล้วทำตามลำดับขั้นดังนี้

1. กำหนดตัวแปรที่ต้องการศึกษาโดยแบ่งเป็นตัวแปรอิสระ (นิยมใช้ X) และตัวแปรตาม (นิยมใช้ Y)
2. นำข้อมูลที่มีอยู่มาสร้างแผนภาพการกระจายเพื่อพิจารณาแนวโน้ม โดยให้ตัวแปรอิสระเป็นแกนนอนและตัวแปรตามเป็นแกนตั้ง
3. เลือกสมการที่สอดคล้องกับแนวโน้มของแผนภาพการกระจายในข้อ 2 ซึ่งจะมี สมการเส้นแนวโน้มของแบบจำลองเชิงเส้น แบบจำลองกำลังสอง แบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล และแบบจำลองตรีโกณมิติ
4. คำนวณหาค่าคงตัวของแต่ละสมการทั่วไปของเส้นแนวโน้ม

5. นำค่าคงตัวที่ได้ไปแทนในสมการทั่วไป ก็จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปอธิบายสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติต่อไป

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สก๊อตต์ (Scott. 1980 : online) ได้ทำการศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์สำหรับนักศึกษาที่คาดว่าจะเป็นครูมัธยมศึกษา การศึกษานี้ได้มีการออกแบบและสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์โดยเน้นที่มโนทัศน์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้พัฒนาความสามารถของนักศึกษาเหล่านั้นในการแก้ปัญหาและการประยุกต์คณิตศาสตร์กับสถานการณ์จริง หลักสูตรได้ถูกพัฒนาทดลองใช้และแก้ไขปรับปรุงที่มหาวิทยาลัยสเตทเทคนิคอล (State Technical University) ในเมืองซานติเอโก ประเทศชิลี ผู้วิจัยได้อ้างว่าการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาที่มีประสบการณ์น้อยในการแก้ปัญหาและประยุกต์คณิตศาสตร์ ขั้นตอนแรกในการศึกษา คือทำการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องได้แก่ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การประยุกต์คณิตศาสตร์และการสอนการคณิตศาสตร์ ขั้นตอนต่อมาคือกำหนดหน่วยการเรียนรู้เพื่อนำไปสร้างเป็นบทเรียนแล้วนำเอาไปบทเรียนไปทดลองใช้กับนักศึกษากลุ่มตัวอย่าง แล้วนำเอาข้อบกพร่อง ข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขและนำไปใช้ในลำดับต่อไป

ดรัมมอนด์ (Drummond. 1988 : online) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การออกแบบบทเรียนและการประเมินผลในวิชาคณิตศาสตร์ดีสคริตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จุดประสงค์ของการวิจัยคือ

- 1) ออกแบบหลักสูตรของคณิตศาสตร์ดีสคริตที่เหมาะสมสำหรับนักเรียนมัธยมศึกษา ซึ่งจะเน้นที่การให้ความสำคัญของการประยุกต์ในการแก้ปัญหาและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 2) สร้างบทเรียนเพื่อใช้ในการเรียนการสอนซึ่งต้องสอดคล้องกับหลักสูตรที่กล่าวไปแล้วในข้อ 1)

3) พิจารณาถึงความเป็นไปได้ของการประเมินหลักสูตรนี้โดยใช้มาตรฐานการประเมินผลสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Evaluation Standards for School Mathematics 1987) ของสมาคมครูคณิตศาสตร์สหรัฐอเมริกา (The National Council of Teacher of Mathematics : NCTM) เป็นหลัก

เนื้อหาของคณิตศาสตร์ดีสคริตประกอบไปด้วยเรื่อง เมตริกซ์, ตรรกศาสตร์, เซต, กราฟ, ต้นไม้, การนับและความน่าจะเป็น และความสัมพันธ์เวียนเกิด กลุ่มตัวอย่างเป็นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาจำนวน 203 คน ซึ่งผ่านการเรียนเรื่อง พีชคณิต 1, เรขาคณิตและพีชคณิต 2 มาแล้ว โดยในการวิจัยครั้งนี้จะประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดีสคริต, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, การแก้ปัญหาและเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากการวิเคราะห์ข้อมูลพบว่า คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดีสคริตและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองเพิ่มขึ้นมากกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ และประสบการณ์ทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอย่างมีนัยสำคัญ คะแนนผลสัมฤทธิ์ในการแก้ปัญหามี

ความก้าวหน้าทั้งของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ส่วนเจตคติของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ดีขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทั้งสองกลุ่ม การวิจัยครั้งนี้สรุปผลได้ดังนี้

1) การจัดการเรียนสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่สคริตไม่ส่งผลทางลบต่อคะแนนสอบ วัดความถนัดทางการเรียน (SAT)

2) การสอนให้นักเรียนได้มีโอกาสประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันหรือ สถานการณ์จริงที่สนใจศึกษาจะส่งผลต่อการเพิ่มของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

3) การใช้มาตรฐานของ NCTM 1987 เป็นต้นแบบในการประเมินผลนั้นมีความเป็นไปได้สูง

เพรสตัน (Preston. 1997 : online) ได้ศึกษาความเป็นไปได้และข้อจำกัดในการสอน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา จุดประสงค์เพื่อศึกษาความเป็นไปได้ในการนำ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา กลุ่มตัวอย่าง ประกอบไปด้วยครูคณิตศาสตร์จำนวน 21 คน ได้เข้าร่วมอบรมเป็นเวลา 4 สัปดาห์ เพื่อเตรียม ความพร้อมของครูในการสอนเรื่องนี้ โดยในการอบรมจะเน้นที่ตัวอย่างที่ดีของแบบจำลองทาง คณิตศาสตร์ที่สามารถแทนสถานการณ์จริงได้ และมีการใช้เทคโนโลยีช่วยในการแก้ปัญหาที่ยาก และซับซ้อน และรวมไปถึงการพัฒนาแบบจำลองให้เป็นโครงการในชั้นเรียนด้วย ผู้วิจัยจะเก็บ รวบรวมข้อมูลโดยการสังเกต สัมภาษณ์ ผลการทำงานของผู้เข้าร่วมอบรม และแบบสอบถาม ซึ่งผู้วิจัยได้สรุปความเป็นไปได้ในการสอนเรื่องนี้ว่า ประโยชน์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนอยากเรียนเรื่องนี้ รวมไปถึงครูจะเป็นตัวช่วยกระตุ้นให้นักเรียนอยาก เรียนด้วยการใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสมอีกด้วย ส่วนข้อจำกัดของการสอนเรื่องนี้ยังอยู่ที่หลักสูตรของ แต่ละโรงเรียน การประเมินเรื่องนี้ซึ่งยังเป็นเรื่องที่ยากอยู่ รวมไปถึงความอดทนในการเรียนของ นักเรียนด้วย ตลอดจนองค์ประกอบโดยทั่วๆ ไปที่ส่งผลต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เช่น เวลา ข้อมูลที่นำมาใช้ในการศึกษาที่เหมาะสมกับสถานการณ์จริง เป็นต้น ผู้วิจัยได้ให้ข้อเสนอแนะว่าใน การปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ใหม่นั้น แต่ละโรงเรียนควรมีการสอนเรื่องแบบจำลองทาง คณิตศาสตร์รวมอยู่ด้วย และครูควรให้ความสำคัญในการสอนเกี่ยวกับโครงการด้วยเพื่อนักเรียนจะ ได้มีโอกาสฝึกฝนทักษะต่างๆ ทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

เลเนียร์ (Lanier. 1999 : online) ได้ศึกษาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับแบบจำลอง เชิงเส้นในวิชาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระดับวิทยาลัย มีจุดประสงค์ในการศึกษาคือสำรวจ ความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับแบบจำลองเชิงเส้นเมื่อใช้ตารางการทำงาน (spreadsheet template) ในการสร้างแบบจำลองจากข้อมูลที่กำหนดให้ นอกจากความเข้าใจแล้วยังศึกษาเกี่ยวกับการคิดและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วย ซึ่งการศึกษาครั้งนี้แบ่งตามหมวดหมู่ที่สำคัญ 5 หมวด คือ 1) ความรู้พื้นฐาน 2) ยุทธวิธีการแก้ปัญหา 3) การตรวจสอบและควบคุม 4) ความเชื่อ และความรู้สึก 5) แบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ การศึกษาในครั้งนี้เก็บข้อมูลจากการสังเกต สัมภาษณ์ และการเขียนรายงานของนักเรียน ผลการศึกษาพบว่า

1. นักเรียนยังมีความกังวลเรื่องกระบวนการที่ใช้ในการหาแบบจำลองเชิงเส้นที่ดีที่สุด
2. นักเรียนสามารถใช้ตารางการคำนวณเพื่อช่วยในการสร้างแบบจำลองได้
3. ประสบการณ์จากชีวิตจริงของนักเรียนมีผลต่อการสร้างแบบจำลองและการตีความ
4. เมื่อมีการกำหนดสถานการณ์ให้นักเรียนสามารถแสดงความคิดเห็น ตัดสินใจ และเชื่อมโยงความคิดของเขาเกี่ยวกับแบบจำลองเชิงเส้นได้

แวร์ส (Wares, 2001 : online) ได้ทำการศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยทำการศึกษาพัฒนาการในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 จำนวน 25 คน ในการศึกษาจะประกอบด้วยการศึกษาถึงชนิดของแบบจำลองที่นักเรียนสร้างขึ้น บทบาทในการเปลี่ยนความคิดของนักเรียนในการสร้างกิจกรรม และชนิดของมาตรฐานคณิตศาสตร์ทางสังคม ในการทดลองแบ่งนักเรียนเป็น 2 กลุ่มหรือกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงและต่ำ ผู้วิจัยจะสังเกตการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียนรวมไปถึงการมีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนด้วย ใช้เวลาในการทดลองทั้งหมด 8 ครั้ง แบ่งนักเรียนเป็น 8 กลุ่มให้ศึกษาและปฏิบัติกิจกรรมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้ง 8 กิจกรรม จากการทดลองพบว่า นักเรียน 50% ของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้และอธิบายเหตุผลประกอบด้วย โดยนักเรียน 2 กลุ่มสามารถให้เหตุผลด้วยตนเองได้ แต่อีก 2 กลุ่มต้องอาศัยการตรวจสอบอย่างละเอียดก่อนจึงสามารถให้เหตุผลประกอบได้ ส่วนอีก 4 กลุ่มที่เหลือไม่สามารถให้เหตุผลที่เหมาะสมกับการสร้างแบบจำลองของพวกเขาได้ ส่วนในการเปลี่ยนความคิดนั้นจากการศึกษาพบว่าเป็นเรื่องปกติธรรมดาที่มักจะพบอุปสรรคในเรื่องนี้ ผู้วิจัยจึงได้พยายามสร้างกิจกรรมที่ค่อยๆ เปลี่ยนความคิดของนักเรียนไปทีละน้อย โดยจะนำเทคโนโลยีเข้ามาช่วย ผลจากเรื่องนี้ทำให้นักเรียนสามารถถ่วงถ่วงแบบจำลองที่เหมาะสมกับสถานการณ์จริงได้ ส่วนด้านมาตรฐานคณิตศาสตร์ในสังคมนั้นพบว่า 1) มาตรฐานการจัดการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยความสมเหตุสมผลโดยนักเรียนต้องอ้างเหตุผลสนับสนุนกับสถานการณ์จริงได้ ทำให้นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลในการทำแบบฝึกหัด 2) มาตรฐานความเข้าใจในการสร้าง การเปรียบเทียบแบบจำลองด้วยความสมเหตุสมผล สิ่งสำคัญที่ได้จากการศึกษาในครั้งนี้ก็คือผู้ที่นำกิจกรรมแบบนี้ไปใช้นั้นต้องมีความเข้าใจถึงบทบาทของการนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์จริง ซึ่งจะทำให้ครูสามารถเปลี่ยนความคิดของนักเรียนและยกระดับความสามารถในการสร้างแบบจำลองของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น

สุรสาธิต ผาสุข (2546 : 78-87) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความสามารถและการคิดเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และผลในด้านเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 5 ขั้นตอนคือ 1) การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง 2) การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ 3) การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ 4) การทดสอบและขัดเกลาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และ 5) การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง โดยกิจกรรมที่ใช้ในการทดลองเป็นชุดกิจกรรมจำนวน 12 ชุดกิจกรรม แต่ละชุดกิจกรรมประกอบด้วย แผนการสอน

สถานการณ์ปัญหา ประเด็นปัญหาเพิ่มเติม แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมและเอกสารสำหรับครู กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 32 คน เมื่อทดลองใช้ชุดกิจกรรมแต่ละชุดกิจกรรมกับกลุ่มตัวอย่างแล้วก็จะประเมินความสามารถและการคิดในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่กลุ่มตัวอย่างทำและสังเกตพฤติกรรม ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มตัวอย่างสามารถวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและสังเคราะห์ความรู้ที่เกี่ยวข้องมาสร้างตัวแบบที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นและเอกซ์โพเนนเชียลได้ คิดหาข้อสรุปจากตัวแบบในรูปฟังก์ชันและทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบได้ แต่การคิดเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริงยังทำได้ไม่ดีนัก ส่วนเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังจากการทดลองใช้กิจกรรมการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการเรียนการสอนตามที่กล่าวมาแล้วนั้น พบว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับสถานการณ์จริงได้เป็นอย่างดี โดยการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นอาจจะสร้างเป็นบทเรียนหรือเป็นเฉพาะกิจกรรมที่เน้นการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็ได้ แต่ที่สำคัญคือควรจัดให้มีการทำโครงการควบคู่ไปกับการเรียนการสอนในเรื่องนี้เพื่อนักเรียนจะได้มีโอกาสฝึกทักษะต่างๆ ได้ดียิ่งขึ้น และยิ่งไปกว่านั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาเจตคติของผู้เรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ให้ดีขึ้นอีกด้วย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูล
6. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนที่กำลังศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร ทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร โดยได้มาจากการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวน 30 คน จากทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน ซึ่งทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนแบบความสามารถทางการเรียนในระดับสูง ระดับกลาง และระดับต่ำ เข้าเรียนในห้องเรียนเดียวกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วย

1. บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. คู่มือครู และแผนการจัดการเรียนรู้สำหรับครู
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างบทเรียน คู่มือครูและแผนการจัดการเรียนรู้ ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างบทเรียน คู่มือครูและแผนการจัดการเรียนรู้ โดยศึกษาจากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1.1.1 เอกสารการสอนชุดวิชาสถิติธุรกิจและการวิเคราะห์เชิงปริมาณ หน่วยที่ 4 เรื่องการวิเคราะห์การถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย (อัจฉรา ชีวะตระกูลกิจ. 2542)

1.1.2 คู่มือการสอนโครงการคณิตศาสตร์ (สมวงศ์ แปลงประสพโชค และคณะ. 2545)

1.1.3 โครงการคณิตศาสตร์ (ชัยศักดิ์ สีสัจกุล. 2541)

1.1.4 101 โครงการคณิตศาสตร์ (โบลท์; และ ฮอบส์. 2540)

1.1.5 การศึกษาผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนตัวเลขของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยการทำโครงการ (อารีรัตน์ ขวัญทะเล. 2546)

1.1.6 การวิเคราะห์การถดถอย (ทรงศิริ แต้มสมบัติ. 2541)

1.1.7 การวิเคราะห์การถดถอย (วิรัช พานิชวงศ์. 2545)

1.1.8 คณิตศาสตร์ ม. 6 เล่ม 6 ค 016 (กมล เอกไทยเจริญ. ม.ป.ป.)

1.1.9 แบบฝึกหัดและประเมินผลคณิตศาสตร์ ม. 6 ค 016 (กนกวลี อุษณกรกุล. ม.ป.ป.)

1.1.10 เทคนิคการพยากรณ์การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์. ม.ป.ป.)

1.1.11 เอกสารประกอบการบรรยายวิชาวิเคราะห์อนุกรมเวลา (สือ ล้ออุทัย. ม.ป.ป.)

1.1.12 แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร (ยงยุทธ ธนุกฤติ. 2524)

1.1.13 Operations Research : Applications and Algorithms (Winston. 2004)

1.1.14 Guide to Mathematical Modelling (Edwards; & Hamson. 1989)

1.1.15 Patterns in Mathematics Problem Solving from Counting to Chaos (Mccown; & Sequeira. 1994)

1.1.16 Thinking with Mathematical Models : Representing Relationships (Lappan; et al. 1998)

1.1.17 Elementary Mathematical Modeling : Function and Graphs (Davis; & Edwards. 2001).

1.1.18 A First Course in Mathematical Modelling : Third Edition (Giordano; Weir & Fox. 2003)

1.1.19 Introduction to Management Science : Fifth Edition (Taylor. 1996)

1.2 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถ

1.2.1 สร้างแบบจำลองเชิงเส้นจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1.2.2 สร้างแบบจำลองกำลังสองจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1.2.3 สร้างแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียลจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1.2.4 สร้างแบบจำลองตรีโกณมิติจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1.2.5 เลือกแบบจำลองที่เหมาะสมกับข้อมูลหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1.2.6 นำเอาความรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาจริงได้

1.3 กำหนดกรอบเนื้อหาของบทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งเป็น 3 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งมีรายละเอียดของเนื้อหา ดังนี้

1.3.1 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 บทนิยาม ชนิดและความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ

1.3.2 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 9 คาบ แบ่งเป็นหน่วยเรียนย่อย ดังต่อไปนี้

- การสร้างแบบจำลองเชิงเส้นและการตรวจสอบความเหมาะสม
- การสร้างแบบจำลองกำลังสองและการตรวจสอบความเหมาะสม
- การสร้างแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียลและการตรวจสอบความเหมาะสม
- การสร้างแบบจำลองตรีโกณมิติและการตรวจสอบความเหมาะสม

1.3.3 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 5 คาบ

1.4 สร้างคู่มือครูของชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย

1.4.1 หลักการและเหตุผลของชุดการสอน

1.4.2 วัตถุประสงค์ของชุดการสอน

1.4.3 สารการเรียนรู้ของชุดการสอน

1.4.4 แนวทางในการใช้ชุดการสอน

1.4.5 ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการสอน

1.4.6 เกณฑ์ในการให้คะแนนโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.5 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย

1.5.1 ชื่อเรื่อง

1.5.2 เวลาที่ใช้

1.5.3 จุดประสงค์การเรียนรู้

1.5.4 สารการเรียนรู้

1.5.5 สื่อการเรียนการสอน

1.5.6 กิจกรรมการเรียนรู้

1.5.7 การวัดผลและประเมินผล

1.6 นำชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมในด้านของเนื้อหา จุดประสงค์ กิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งแนะข้อบกพร่อง และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข

1.7 นำชุดการสอนที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 12 คน โดยใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 60 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่องในด้านความยากง่ายของภาษาและเวลาที่ใช้สอนของชุดการสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจแก้ไขอีกครั้ง ซึ่งเป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.1 ศึกษาทฤษฎีและหลักการการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเขียนข้อสอบ และการวัดและประเมินผลการเรียนรู้

2.2 วิเคราะห์เนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่ใช้ในการทดลองเพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2.3 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเติมคำจำนวน 30 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 10 ข้อ โดยให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ที่กำหนด

2.4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สร้างขึ้นชุดนี้ เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบว่าแบบทดสอบที่สร้างขึ้นนั้นสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่ โดยใช้ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ซึ่งมีเกณฑ์ดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

2.5 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้เชี่ยวชาญมาคำนวณค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

2.6 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในข้อ 2.5 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มเดียวกับข้อ 1.7 ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง 30 นาที

2.7 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการทดลองในข้อ 2.6 เฉพาะในส่วนของแบบทดสอบปรนัยแบบเติมคำมาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ได้ข้อสอบจำนวน 20 ข้อ

ในส่วนของแบบทดสอบอัตนัย หลังจากนำไปทดลองกับนักเรียนในข้อ 2.6 แล้วทำการปรับปรุงและแก้ไขตามข้อเสนอนะของกรรมการควบคุมปริญาณิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญ โดยพิจารณาการทำข้อสอบของกลุ่มทดลองประกอบด้วย แล้วคัดเลือกข้อสอบไว้ 5 ข้อ

2.8 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากข้อ 2.7 มาหาค่าความเชื่อมั่น โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) ซึ่งแบบทดสอบปรนัยแบบเติมคำมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.72 แบบทดสอบอัตนัยมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.91 และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งฉบับมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.91 แล้วนำแบบทดสอบที่ได้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้บทเรียนและแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยสอนในเวลาเรียนปกติใช้เวลาทั้งหมด 15 คาบ ซึ่งในระหว่างการสอนนี้ทำการเก็บคะแนน 2 ส่วน คือ

1.1 คะแนนการปฏิบัติกิจกรรมของกลุ่มตัวอย่างมีคะแนนเต็ม 25 คะแนน โดยประเมินจากการตรวจงานใบกิจกรรมและการร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน

1.2 คะแนนจากการทำโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีคะแนนเต็ม 25 คะแนน โดยให้นักเรียนศึกษาจากสถานการณ์จริงที่นักเรียนสนใจโดยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เวลานอกเวลาเรียนปกติ แล้วนำเสนอหน้าชั้นเรียน ซึ่งเกณฑ์การประเมินแบ่งเป็น 3 ส่วน ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

1.2.1 ปัญหาหรือสถานการณ์จริงที่ศึกษา 5 คะแนน โดยประเมินจาก

- 1) ตรงตามความสนใจของนักเรียน
- 2) ตรงตามระดับความรู้และความสามารถของตน
- 3) มีความเหมาะสมในเรื่องเวลา งบประมาณ กำลังคน
- 4) มีแหล่งข้อมูลในการศึกษาค้นคว้า
- 5) มีประโยชน์ในการทำให้เกิดความรู้ใหม่ๆ หรือนำไปใช้ปรับปรุงแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้
- 6) มีแนวทางการดำเนินงาน หรือแนวทางการแก้ปัญหา
- 7) เป็นปัญหาที่มีความเฉพาะเจาะจงชัดเจนและไม่กว้างเกินไป

8) เป็นปัญหาที่ส่งเสริมด้านความคิดสร้างสรรค์

1.2.2 การนำเสนอโครงงาน 5 คะแนน โดยประเมินจาก

- 1) การเสนอโครงงานสื่อความหมายให้ผู้อื่นเข้าใจได้
- 2) การบรรยายชัดเจน
- 3) แผนภาพ ตาราง หรืออุปกรณ์ประกอบในการนำเสนอมีความชัดเจน
- 4) การเสนอโครงงานแต่ละส่วนสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์

โดยในแต่ละข้อมีหลักในการให้คะแนน ดังนี้

ดีมาก	มีคะแนนเท่ากับ 5 คะแนน
ดี	มีคะแนนเท่ากับ 4 คะแนน
ปานกลาง	มีคะแนนเท่ากับ 3 คะแนน
น้อย	มีคะแนนเท่ากับ 2 คะแนน
น้อยมาก	มีคะแนนเท่ากับ 1 คะแนน

1.2.3 เนื้อหาของโครงงาน 15 คะแนน โดยนำเกณฑ์การประเมินจากเกณฑ์ที่

สุรสาธิต ผาสุข (2546 : 97-99) และฮอดสัน (Hodgson. 1995 : 357-358) เสนอไว้เป็นแนวทางมาใช้ ประเมินในส่วนที่เป็นกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาสถานการณ์จริง ซึ่งแบ่งได้ดังนี้

1) การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้อย่างชัดเจนโดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นระหว่างตัวแปรได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้โดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นระหว่างตัวแปรได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน 2 ใน 3

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้บ้าง โดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน 1 ใน 3

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้ โดยระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นของตัวแปรได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่สามารถแสดงความคิดเห็นใดๆ

2) การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้นและ/หรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้น และ/หรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้อย่างถูกต้อง แต่ขาดความครบถ้วนหรือมีข้อบกพร่องในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้นได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้น และ/หรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

3) การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องและสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องทุกประเด็นแต่ยังขาดความสมบูรณ์ครบถ้วนหรือมีข้อบกพร่องในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องบางประเด็น

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

4) การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง สรุปผลของการทดสอบและปรับปรุงหรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใหม่ (ถ้าจำเป็น) ได้อย่างถูกต้อง

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองได้ถูกต้อง แต่การสรุปผลของการทดสอบยังไม่สมบูรณ์และไม่สามารถขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ (ถ้าจำเป็น)

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองได้ แต่มีข้อบกพร่องในการทดสอบบางประการหรือไม่สามารถสรุปผลของการทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ (ถ้าจำเป็น)

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง สรุปผลของการทดสอบและการขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

5) การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้อย่างถูกต้อง โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้อย่างถูกต้องและสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ถูกต้องทุกประเด็นแต่ยังขาดความสมบูรณ์ครบถ้วนในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้บ้าง โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ถูกต้องบางทุกประเด็น

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

2. เมื่อสิ้นสุดการสอน ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 25 ข้อ มีคะแนนเต็ม 50 คะแนน ใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง แล้วตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ดังนี้

2.1 แบบทดสอบปรนัยแบบเติมคำ 20 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน รวมเป็น 20 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนคือ ตอบถูกให้ 1 คะแนน ตอบผิดหรือไม่ตอบ 0 คะแนน

2.2 แบบทดสอบอัตนัย 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน รวมเป็น 30 คะแนน โดยมีเกณฑ์ให้คะแนน ดังนี้

2.2.1 การเลือกใช้ขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาเหมาะสม 3 คะแนน

2.2.2 การคำนวณเพื่อหาคำตอบถูกต้อง 2 คะแนน

2.2.3 สรุปถูกต้อง 1 คะแนน

3. นำคะแนนที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียน 25 คะแนน คะแนนจากการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 25 คะแนน และคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 50 คะแนน รวมเป็นคะแนนเต็มทั้งหมด 100 คะแนน มาทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การวิเคราะห์ข้อมูล

ทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ด้วยการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากร โดยใช้สถิติทดสอบ Z (Z – test for population proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของเครื่องมือ ได้แก่ ค่า IOC ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
3. สถิติสำหรับการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ สถิติทดสอบ Z (Z – test for population proportion)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร จำนวน 1 ห้องเรียน นักเรียนจำนวน 30 คน ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังต่อไปนี้

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
3. ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดจาก 3 ส่วน ได้แก่ คะแนนจากการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียน 25 คะแนน คะแนนจากการทำโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 25 คะแนน และคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 50 คะแนน

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	100	69.36	69.36	8.87

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 69.36 คิดเป็นร้อยละ 69.36 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 8.87

จากหัวข้อที่ 1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วยคะแนนจาก 3 ส่วน ซึ่งคิดคะแนนเต็ม 100 คะแนน เมื่อวิเคราะห์คะแนนทั้ง 3 ส่วน จะปรากฏรายละเอียดในตาราง 2 ถึง ตาราง 4 ดังนี้

ตาราง 2 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	25	22.67	90.68	1.67

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า คะแนนการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 22.67 คิดเป็นร้อยละ 90.68 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 1.67

ตาราง 3 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	25	20.23	80.46	1.47

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า คะแนนโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 20.23 คิดเป็นร้อยละ 80.46 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 1.47

ตาราง 4 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	50	26.47	52.94	7.36

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 26.47 คิดเป็นร้อยละ 52.94 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 7.36

2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ (คน)	ค่าร้อยละของ จำนวนนักเรียนที่ ผ่านเกณฑ์
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	26	86.67

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ผ่านเกณฑ์การเรียนร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวน 26 คน จากนักเรียน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 86.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ (คน)	ค่าสถิติ ทดสอบ Z	ค่าวิกฤติที่ ระดับ นัยสำคัญ .01
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 6	30	26	4.03 **	2.33

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 6 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยบทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานในการวิจัย และวิธีดำเนินการวิจัย ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สมมติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร โดยได้มาจากการสุ่มแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน จำนวน 30 คน จากทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน ซึ่งทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนแบบละความสามารถทางการเรียนในระดับสูง ระดับกลาง และระดับต่ำ เข้าเรียนในห้องเรียนเดียวกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วย

1. บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. คู่มือครู และแผนการจัดการเรียนรู้สำหรับครู
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน โดยใช้ชุดการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาในการเรียนการสอน 15 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง
2. สำหรับการเรียนการสอนในแต่ละคาบจะมีการให้คะแนนการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียน ได้แก่คะแนนจากใบกิจกรรม และการร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน

3. สำหรับในคาบที่ 11 – 15 ที่เป็นเรื่องการประยุกต์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะมีการให้คะแนนจากการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และนำเสนอหน้าชั้นเรียน

4. เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเติมคำ จำนวน 20 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 2 คาบ คาบละ 1 ชั่วโมง

5. นำคะแนนที่ได้จากข้อ 2 ข้อ 3 และ ข้อ 4 มารวมกันแล้วนำไปวิเคราะห์ข้อมูลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับดังนี้

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
3. ผลการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สรุปผลการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

อภิปรายผล

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผ่านเกณฑ์การเรียนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ แวร์ส (Wares. 2001 : online) ที่ได้ศึกษาพัฒนาการในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนพบว่านักเรียน 50 % ของกลุ่มตัวอย่างสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และให้อธิบายเหตุผลประกอบได้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1. ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ประกอบด้วยบทเรียนและกิจกรรม ซึ่งมีการเรียบเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยในช่วงแรกเป็นการสร้าง

แบบจำลองด้วยวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ และวิธีกิ่งเฉลี่ย จากนั้นจึงเป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งการสร้างวิธีนี้ก็เริ่มจากการสร้างสมการเส้นตรง สมการกำลังสอง และสมการเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งมีความยากขึ้นเป็นลำดับ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาที่เป็นขั้นตอนจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อนแล้วจึงเพิ่มเนื้อหาที่ยากขึ้นตามลำดับ และยังมีการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนได้มีการฝึกทักษะเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยเน้นที่กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ขั้น ซึ่งนักเรียนได้ลงมือศึกษาสถานการณ์จริงด้วยตนเองและมีการนำเสนอหน้าชั้นเรียน ซึ่งนักเรียนมีความสนใจและกระตือรือร้นในการทำโครงการนี้มาก

2. บทเรียน และกิจกรรมที่ผู้วิจัยใช้ในการเรียนการสอน มีตัวอย่างและกิจกรรมสำหรับให้นักเรียนได้ฝึกคิดและทำโดยเห็นตัวอย่างที่หลากหลาย ซึ่งตัวอย่างจะมีทั้งง่ายและที่ซับซ้อน และให้นักเรียนสามารถใช้เครื่องคิดเลขหรือโปรแกรม Microsoft Excel สำหรับช่วยคำนวณซึ่งจะช่วยลดความยุ่งยากซับซ้อนของการคำนวณ ทำให้นักเรียนลดความกังวลในการคำนวณและมีเวลาในการตีความสถานการณ์จริงเพื่อเข้าสู่กระบวนการการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่อไป ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ แวร์ส (Wares. 2001 : online) ที่กล่าวว่า การนำเทคโนโลยีเข้ามาช่วยในการเรียนการสอนจะช่วยให้นักเรียนสามารถถ่วงถ่วงแบบจำลองที่เหมาะสมกับสถานการณ์จริงนั้นๆ ได้

3. ในช่วงการเรียนรู้ผู้วิจัยจะสังเกตการร่วมมือในชั้นเรียนของนักเรียน ไม่ว่าจะเป็นการถาม-ตอบคำถาม หรือการทำใบกิจกรรม แล้วรวบรวมเป็นคะแนนไว้สำหรับนำไปวิเคราะห์ข้อมูล และเมื่อสิ้นสุดการสอนในแต่ละคาบ จะมีการเก็บรวบรวมใบกิจกรรมของแต่ละคนที่ทำในเวลาเรียนมาตรวจ เพื่อตรวจสอบดูว่านักเรียนมีความรู้และความเข้าใจในเรื่องนั้นๆ ในแต่ละคาบหรือไม่ ทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียน สนใจที่จะเรียน เพื่อที่ทำคะแนนของตนเองในส่วนนี้ให้ได้ จึงทำให้ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียน มีค่าสูงถึง 22.67 คะแนนจากคะแนนเต็ม 25 คะแนน (คิดเป็นร้อยละ 90.68 ของคะแนนเต็ม)

4. ในส่วนของการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่นักเรียนจะหาสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมไม่ค่อยได้ ผู้วิจัยจึงเป็นผู้แนะนำให้ในบางส่วนแล้วให้นักเรียนเลือกหัวข้อที่ตนเองสนใจและมีความสามารถพอในการแก้ปัญหาต่างๆ ทำให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มมีความกระตือรือร้นที่จะศึกษาสถานการณ์นั้นๆ และพยายามหาคำตอบของแต่ละปัญหาให้ได้ และถ้าในส่วนใดที่ยังไม่เข้าใจหรือไม่สามารถทำต่อได้ผู้วิจัยก็จะเป็นผู้แนะนำ แต่ที่มีปัญหาก็คือการนำเสนอหน้าชั้นเรียนยังไม่ได้เท่าที่ควร ซึ่งค่าเฉลี่ยของคะแนนโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีค่า 20.23 คะแนน จากคะแนนเต็ม 25 คะแนน (คิดเป็นร้อยละ 80.46 ของคะแนนเต็ม) สอดคล้องกับ เพรสตัน (Preston. 1997 : online) ที่ได้ศึกษาความเป็นไปได้ของการสอนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา แล้วเสนอว่าแต่ละโรงเรียนควรมีการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และครูควรให้ความสำคัญในการสอนเกี่ยวกับโครงการเพื่อนักเรียนจะได้มีโอกาสฝึกฝนทักษะต่างๆ ทางแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

5. ในส่วนของคะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีค่าไม่มาก ซึ่งเท่ากับ 26.47 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน (คิดเป็นร้อยละ 52.94 ของคะแนนเต็ม) อาจเกิดขึ้นจากในการทำกิจกรรมในชั้นเรียนนักเรียนทำงานเป็นกลุ่ม ช่วยกันคำนวณและ สามารถใช้โปรแกรม Microsoft Excel ช่วยในการคำนวณได้ ทำให้ในเวลาเรียนสามารถคำนวณได้อย่างรวดเร็วและมีความถูกต้องสูง แต่เวลาทำแบบทดสอบใช้เฉพาะเครื่องคิดเลขเท่านั้น ทำให้นักเรียนบางคนไม่แสดงวิธีหาคำตอบ (ข้อสอบอัตนัย) เพียงแต่หาสมการปกติของแต่ละปัญหาได้ก็หยุดไว้แค่นั้นโดยไม่คำนวณหาค่าคงตัวของแต่ละสมการ ทำให้คะแนนในส่วนของแบบทดสอบมีค่าน้อย โดยเฉพาะแบบทดสอบในเรื่องของแบบจำลองกำลังสองซึ่งมีปัญหามากในการคำนวณ เพราะสมการปกติของแบบจำลองกำลังสองจะมีถึง 3 สมการ ซึ่งยากต่อการคำนวณ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่กำหนดให้สถานศึกษาดำเนินการจัดสาระการเรียนรู้ของเนื้อหาวิชาเองตามมาตรฐานที่กำหนดไว้ ดังนั้นชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้จึงอาจใช้เป็นตัวอย่างหรือแนวทางในการเรียนการสอนสำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

1.2 การนำโปรแกรม Microsoft Excel และเครื่องคิดเลขมาช่วยในการคำนวณในการเรียนการสอนจะช่วยลดความกังวลในการคำนวณที่ยุ่งยากและซับซ้อนของนักเรียน แต่ควรมีการสอนเกี่ยวกับการใช้โปรแกรมนี้สำหรับช่วยในการคำนวณของนักเรียนในรายที่ยังไม่มีความรู้หรือทบทวนก่อนสำหรับนักเรียนที่มีความรู้อยู่แล้ว

1.3 ข้อมูลที่นำมาใช้ในตัวอย่างในบทเรียนนั้นควรมีค่าไม่มากหรือง่ายต่อการคำนวณเพื่อให้ให้นักเรียนได้ฝึกทักษะของการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งตัวอย่างในหน่วยการเรียนรู้เรื่องแบบจำลองกำลังสอง ส่วนในหน่วยการเรียนรู้เรื่องของการประยุกต์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นจึงควรนำข้อมูลจริงมาใช้ในการศึกษา

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการนำชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงแก้ไข และนำไปทดลองซ้ำกับกลุ่มตัวอย่างอื่นๆ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับความแตกต่างของการนำเทคโนโลยีที่เหมาะสมมาใช้ในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับกลุ่มที่ไม่ได้ใช้เทคโนโลยี

2.3 ควรมีการพัฒนาชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับชั้นอื่น ตามความเหมาะสมของเนื้อหาในแต่ละระดับชั้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดและประเมินผลคณิตศาสตร์ ม.6 ค 016. กรุงเทพฯ: เติบโตบุคส์.
- กมล เอกไทยเจริญ. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ: ไอเอ็ดพับลิชชิง.
- กรมวิชาการ. (2545). เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- _____. (2545). หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์
- กิตติ พัฒนตระกูลสุข. (2545, พฤศจิกายน-ธันวาคม - 2546, มกราคม). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทยล้มเหลวจริงหรือ. วารสารคณิตศาสตร์. 46(530-532) : 54-58.
- ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2541). โครงงานคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- ดวงเดือน อ่อนน่วม. (2538, กันยายน-ตุลาคม). การสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการ. วารสารคณิตศาสตร์. 39(444-445) : 54-66.
- ทรงศิริ แท้สมบัติ. (2541). การวิเคราะห์การถดถอย. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- ทศพร จันทรัง. (2544). Mathematical Model. ใน *Modelling and Simulation*. หน้า 1. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ. เอกสารโรเนียว.
- โบลท์, ไบรอัน; และ ฮอบส์, เดวิด. (2540). 101 โครงงานคณิตศาสตร์. แปลโดย ยุพิน พิพิธกุล; สิริพร ทิพย์คง และ สิทธา พินิจภูวดล. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ยงยุทธ ธนุกฤติ. (2524). แคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- รจิต วัฒนสินธุ์. (2522). เอกสารประกอบการสัมมนา สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย. กรุงเทพฯ.
- วิรัช พานิชวงค์. (2545). การวิเคราะห์การถดถอย. กรุงเทพฯ: ศูนย์ผลิตตำราเรียน สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.
- ศรีเพ็ญ ทรัพย์มณชัย. (2545). การวิเคราะห์การถดถอยเชิงธุรกิจ. กรุงเทพฯ: ปิ่นเกล้าการพิมพ์.
- ศิริลักษณ์ สุวรรณวงศ์. (ม.ป.ป.). เทคนิคการพยากรณ์การวิเคราะห์หอนุกรมเวลา. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- สมวงศ์ แปลงประสพโชค. (2545). คู่มือการสอนโครงการคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: Learn and Play MATHGROUP.
- สือ ล้ออุทัย. (ม.ป.ป.). เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์อนุกรมเวลา. กรุงเทพฯ: กองวิชาการสถิติ สำนักงานสถิติแห่งชาติ.
- สุนีย์ คล้ายนิล. (2546, กรกฎาคม-สิงหาคม). คณิตศาสตร์ไทยไม่เข้มแข็ง:เพราะอะไร. *วารสารการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี*. 31(125) : 18-24.
- _____. (2547, มีนาคม-เมษายน). การรู้คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของนักเรียนวัยจบ การศึกษาภาคบังคับ. *วารสารการศึกษาวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี*. 32(129) : 9-18.
- สุรสาธ ผาสุข. (2546). การศึกษาความสามารถและการคิดเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และผลในด้านเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. *ปริญญาานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต. (คณิตศาสตร์ศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- เสริมศักดิ์ สุรวัลลก. (2535). *คณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- อัจฉรา ชีวะตระกูลกิจ. (2542). การวิเคราะห์การถดถอยและสหสัมพันธ์อย่างง่าย. ใน *เอกสาร การสอนชุดวิชาสถิติธุรกิจและการวิเคราะห์เชิงปริมาณ (หน่วยที่ 1-8)*. หน้า 115-155. พิมพ์ครั้งที่ 11. กรุงเทพฯ: สาขาวิชาวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- อารีรัตน์ ขวัญทะเล. (2546). การศึกษาผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนและตัวเลขของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนด้วยการทำโครงการ. *ปริญญาานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. (คณิตศาสตร์)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- Comber, G. (1999). *Introduction and Teaching Mathematical Modelling*. (Hand out). Edith Cowan University Perth Western Australia. Copy.
- Davis, Mary Ellen.; & Edwards, C. Henry. (2001). *Elementary Mathematical Modeling : Functions and Graphs*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Dolan, Stan.; et al. (1998). *16-19 Mathematics Problem Solving : The School Mathematics Project*. 4th ed. Cambridge University Press.
- Dossey, John A. (1996). Modeling with Function. in *Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education*. pp. 221-280. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Drummond, Pamela Johnson. (1988). *The Design, Implementation, and Evaluation of a Course in Discrete Mathematics for High School Student*. (online). Available: <http://wwwlib.umi.com/dissertations/fullcit/8910179>.

- Edwards, Dilwyn.; & Hamson, Mike. (1989). *Guide to Mathematical Modelling*. London: Macmillan Education.
- English, Carolyn. (1999). Modelling for the New Millennium. in *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Edited by Celia Hoyles and others. pp. 118-129. Great Britain: Biddles.
- Giordano, Frank R.; Weir, Maurice D.; & Fox, William P. (2003). *A First Course in Mathematical Modeling*. 3rd ed. Brook/Cole.
- Hilke, Eileen Veronica. (1996?). *Mathematical Modeling*. Indiana: Phi Delta Kappa Education Foundation.
- Hodgson, Tod. (1995, November). Secondary Mathematics Modeling : Issues and Challenges. *School Science and Mathematics*. 95(7) : 351-358.
- Kerr, Donald R., Jr.; & Maki, Daniel. (1979). Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom. in *Application in School Mathematics 1979 Yearbook*. pp. 1-7. Reston, Virginia : The National Council of Teacher of Mathematics.
- Kime, Linda Almgren.; & Clark, Judy. (1998). *Explorations in College Algebra*. New York: John Wiley & Sons.
- Lanier, Susie Mae. (1999). *Students' Understanding of linear Modeling in a College Mathematical Modeling Course*. (online). Available: <http://wwwlib.umi.com/dissertations/fullcit/9928955>.
- Lappan, Glenda.; et al. (1998). *Thinking with Mathematical Models : Representing Relationships*. Michigan: Dale Seymour.
- Mccown, Jack R.; & Sequeira, Michael A. (1994). *Pattern in Mathematics Problem Solving from Counting to Chaos*. Boston : PWS.
- Meerchaert, Mark M. (1993). *Mathematical Modeling*. Boston: Academic Press.
- Meyer, Walter J. (1985). *Concept of Mathematical Modeling*. New York: Mc Graw-Hill.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Principle and Standard for School Mathematics 2000*. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Preston, Ronald V. (1997). *Mathematical Modeling in the Secondary School : Possibilities and Constraints*. (online). Available: <http://wwwlib.umi.com/dissertations/fullcit/9810753>.
- Scott, Patrick Burton. (1980). *A Curriculum Study in Applied Mathematics for Prospective Secondary School Teacher*. (online). Available: <http://wwwlib.umi.com/dissertations/fullcit/8015101>.

- Swetz, Frank.; & Hartzler, J.S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. A Resource Guide of Classroom Exercises. Reston: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Taylor, Bernard W. (1996). *Introduction to Management Science*. 5th ed. New Jersey: Prentice-Hall.
- Wares, Arsalan. (2001). *Middle School Student' Construction of Mathematical Models*. (online). Available: <http://wwwlib.umi.com/dissertations/fullcit/3064487>.
- Winston, Wayne L. (2004). *Operations Research : Applications and Algorithms*. 4th ed. Brooks/Cole.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 7 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
แบบปรนัย					
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	0	+1	0.67	ใช้ได้
5	+1	0	-1	0	ใช้ไม่ได้
6	+1	-1	+1	0.33	ใช้ไม่ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
14	0	+1	+1	0.67	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
18	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
19	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
22	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
23	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
24	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
25	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
26	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
27	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
28	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 7 (ต่อ)

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
29	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
30	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
<u>แบบอัตนัย</u>					
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

หมายเหตุ คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

ตาราง 8 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	p	r
<u>แบบปรนัย</u>		
1	0.58	0.50
2	0.75	0.50
3	0.67	0.33
4	0.50	0.33
5	0.67	0.33
6	0.50	0.67
7	0.58	0.83
8	0.33	0.33
9	0.58	0.50
10	0.42	0.50
11	0.33	0.33
12	0.50	0.33
13	0.50	0.33
14	0.67	0.33
15	0.58	0.50
16	0.67	0.33
17	0.67	0.33
18	0.67	0.33
19	0.50	0.33
20	0.58	0.50

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยเท่ากับ 0.72

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบอัตนัยเท่ากับ 0.91

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้งฉบับเท่ากับ 0.91

ตาราง 9 แสดงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

คนที่	กิจกรรม ระหว่างเรียน (25 คะแนน)	โครงการแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ (25 คะแนน)	แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน (50 คะแนน)	รวม (100 คะแนน)
1	24	19.75	29	72.75
2	23	19.75	31	73.75
3	23	19.75	19	61.75
4	22	19.75	31	72.75
5	22	21.50	31	74.50
6	20	21.50	16	57.50
7	21	21.50	21	63.50
8	24	21.50	35	80.50
9	23	18.88	32	73.88
10	24	18.88	32	74.88
11	19	18.88	7	44.88
12	23	18.88	19	60.88
13	23	22.38	27	72.38
14	22	22.38	27	71.38
15	24	22.38	35	81.38
16	23	22.38	35	80.38
17	24	18.88	27	69.88
18	20	18.88	23	61.88
19	23	18.88	19	60.88
20	23	18.88	28	69.88
21	25	18.63	33	76.63
22	24	18.63	32	74.63
23	25	18.63	28	71.63
24	20	18.63	13	51.63
25	22	18.63	34	74.63

ตาราง 9 (ต่อ)

คนที่	กิจกรรม ระหว่างเรียน (25 คะแนน)	โครงการแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ (25 คะแนน)	แบบทดสอบวัด ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (50 คะแนน)	รวม (100 คะแนน)
26	21	21.63	31	73.63
27	24	21.63	32	77.63
28	20	21.63	14	55.63
29	25	21.63	26	72.63
30	24	21.63	27	72.63

ตาราง 10 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

x	f	fx	x^2	fx^2
44.88	1	44.88	2014.2144	2014.2144
51.63	1	51.63	2665.6569	2665.6569
55.63	1	55.63	3094.6969	3094.6969
57.50	1	57.50	3306.2500	3306.2500
60.88	2	121.76	3706.3744	7412.7488
61.75	1	61.75	3813.0625	3813.0625
61.88	1	61.88	3829.1344	3829.1344
63.50	1	63.50	4032.2500	4032.2500
69.88	2	139.76	4883.2144	9766.4288
71.38	1	71.38	5095.1044	5095.1044
71.63	1	71.63	5130.8569	5130.8569
72.38	1	72.38	5238.8644	5238.8644
72.63	2	145.26	5275.1169	10550.2338
72.75	2	145.50	5292.5625	10585.125
73.63	1	73.63	5421.3769	5421.3769
73.75	1	73.75	5439.0625	5439.0625
73.88	1	73.88	5458.2544	5458.2544
74.50	1	74.50	5550.2500	5550.2500
74.63	2	149.26	5569.6369	11139.2738
74.88	1	74.88	5607.0144	5607.0144
76.63	1	76.63	5872.1569	5872.1569
77.63	1	77.63	6026.4169	6026.4169
80.38	1	80.38	6460.9444	6460.9444
80.50	1	80.50	6480.2500	6480.2500
81.38	1	81.38	6622.7044	6622.7044
ผลรวม	30	2080.86		146612.3318

จากสูตร $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

และ $s = \sqrt{\frac{n \sum f x^2 - (\sum fx)^2}{n(n-1)}}$

ดังนั้น จากตาราง 6 จะได้

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2080.86}{30} \\ &= 69.36\end{aligned}$$

และ $s = \sqrt{\frac{30(146612.3318) - (2080.86)^2}{30(29)}}$

$$= 8.87$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร โดยใช้สถิติทดสอบ Z (z-test for population proportion)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.50$

$H_1 : p > 0.50$

สถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{26}{30} = 0.8667$$

$$p_0 = 0.50$$

n แทนจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 30 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{0.8667 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{30}}} \\ &= \frac{0.3667}{\sqrt{0.0083}} \\ &= \frac{0.3667}{0.0911} \end{aligned}$$

ดังนั้น $Z = 4.0252$

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $Z > Z_{0.1}$

$$Z_{0.1} = 2.326$$

เนื่องจาก $4.0252 > 2.326$ อยู่ในบริเวณวิกฤต

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

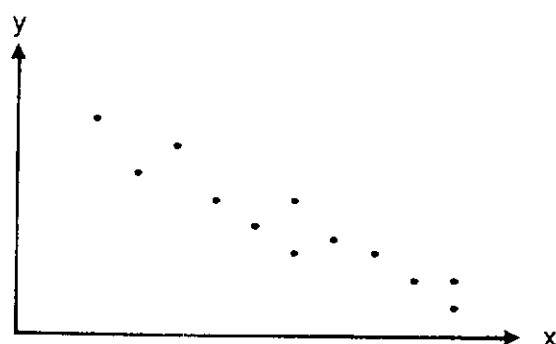
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 2 ตอน ดังนี้
 - ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบปรนัยแบบเติมคำตอบ 20 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน
 - ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบอัตนัย 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน
2. ให้นักเรียนทำข้อสอบลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้
3. นักเรียนสามารถใช้เครื่องคิดเลขในการคำนวณได้
4. ข้อสอบฉบับนี้ใช้เวลา 2 ชั่วโมง

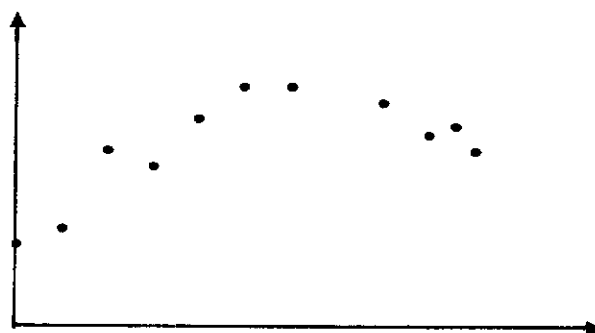
ตอนที่ 1 จงเขียนตอบเฉพาะคำตอบที่ถูกต้อง

1. แผนภาพการกระจายของข้อมูลต่อไปนี้



สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อยู่ในรูปใด เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม

2. แผนภาพการกระจายข้างล่างนี้ กราฟมีแนวโน้มเป็นรูปอะไร



3. จากข้อมูลในตารางข้างล่างนี้ แผนภาพการกระจายของข้อมูลมีความสัมพันธ์กันเป็นรูปอะไร

x	1	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	5	6	8	8	11	15

4. ความสัมพันธ์ระหว่างรายได้ (x) และรายจ่าย (y) ของครอบครัวต่างๆ ในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง คือ $\hat{y} = 0.68x + 0.42$ ซึ่งถ้าครอบครัวหนึ่งมีรายได้ 1,000 บาท จะมีรายจ่าย 680.42 บาท หากครอบครัวนี้มีรายจ่าย 500 บาทแล้ว ครอบครัวนี้มีรายได้เท่าใด
5. กำหนดให้ $\hat{y} = 55 - 2x$ เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y โดยที่ x คือจำนวนบุตรที่สูบบุหรี่เป็นซองต่อวัน และ y คืออายุของผู้สูบบุหรี่ที่คาดว่าจะมีอายุยืนอยู่ได้คิดเป็นปี ถ้าสูบบุหรี่วันละ 1 ซอง คาดว่าผู้สูบบุหรี่คนนี้จะมียุยืนประมาณกี่ปี

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 6 – 7

กำหนดตารางคะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ (x) และวิชาคณิตศาสตร์ (y) ของนักเรียน 6 คน ดังตารางต่อไปนี้

x	1	3	5	6	7	8
y	3	6	12	14	17	20

6. ถ้า y เป็นตัวแปรตามแล้ว จงหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y สมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y มีกราฟเป็นเส้นตรง
7. จากสมการที่ได้ในข้อ 6 ถ้านักเรียนที่สอบวิชาวิทยาศาสตร์ได้ 4 คะแนน แล้วเขาจะสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้กี่คะแนน
8. ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณปุ๋ย (x) กับผลผลิต (y) (หน่วยเป็นกิโลกรัม/ไร่) มีความสัมพันธ์เป็นแบบสมการเส้นตรง และกำหนดให้ $\sum_{i=1}^5 x_i = 15$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 60$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 200$ และ $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 95$ จงหาสมการเพื่อแทนความสัมพันธ์นี้

9. กำหนดข้อมูล 2 ชุดเป็นดังนี้

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	3	5	9

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y มีกราฟเป็นรูปพาราโบลา จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์

10. ถ้า y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับ x ในลักษณะพาราโบลา กำหนดให้ x เป็นตัวแปรอิสระ

มีค่าสังเกต (x, y) จำนวน 4 ชุด และมีค่าที่คำนวณได้ ดังนี้ $\sum x = 10$, $\sum y = 19$,

$\sum x^2 = 30$, $\sum xy = 60$, $\sum x^3 = 100$, $\sum x^2y = 207$, $\sum x^4 = 354$ และ

$\sum x^3y = 750$ จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์

11. จากการทดลองใช้ปุ๋ยชนิดหนึ่งแล้วสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณปุ๋ยที่ใช้กับปริมาณผลผลิตที่ได้เป็นดังนี้

ปริมาณปุ๋ย (กิโลกรัม) : x	1	2	3
ผลผลิต (ตัน) : y	3	10	21

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลชุดนี้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx$; $a, b \neq 0$ แล้ว
จงหาสมการของความสัมพันธ์

12. สถิติจำนวนประชากรของตำบลแห่งหนึ่งตั้งแต่ปี พ.ศ. 2538 – พ.ศ. 2546 ช่วงละ 2 ปี
เป็นดังนี้

พ.ศ.	2538	2540	2542	2544	2546
จำนวนประชากร (พันคน)	1	2	4	8	10

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนประชากร (y) กับเวลา (x) สัมพันธ์กันแบบเอกซ์โพเนนเชียล
และแทนเวลาด้วย -2, -1, 0, 1, 2 จะได้

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 10$$

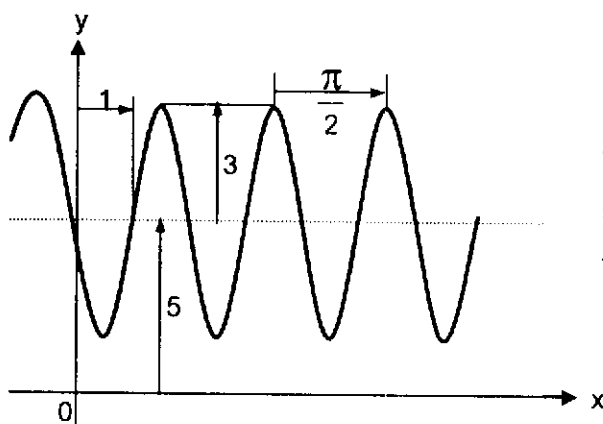
$$\sum_{i=1}^5 \log y_i = 2.806, \quad \sum_{i=1}^5 x_i \log y_i = 2.602$$

เมื่อกำหนด $\log 4 = 0.6020$ แล้ว ในปี พ.ศ. 2550 ตำบลนี้จะมีประชากรจำนวนกี่คน

13. จากข้อมูลในตารางที่กำหนดให้ จงหาสมการเพื่อทำนายงบประมาณ

พ.ศ.	2540	2541	2542	2543	2544	2545
งบประมาณ (ล้านบาท)	1	2	3	6	9	16

14.



จากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง
เวลา (x) และอุณหภูมิ (y)
จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์นี้

15. จากสมการ $\hat{y} = 3 + 4 \sin \frac{\pi(x-2)}{3}$ ถ้า $x = 1$ แล้ว $\hat{y}$ มีค่าเท่าใด

16. กำหนด x คือรายได้ของครอบครัว (หน่วยเป็นพันบาท) และ y คือค่าใช้จ่ายของครอบครัว (หน่วยเป็นพันบาท)

X	1	5	9	13	17
y	7	6	9	8	10

ถ้าสร้างสมการแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลโดยมี y เป็นตัวแปรตามด้วย
สมการเส้นตรงจะได้สมการคือ $\hat{y} = 0.2x + 6.2$ ซึ่งมีค่า $MSE = 1.2$ และ $r^2 = 0.64$

และถ้าสร้างสมการแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลโดยมี y เป็นตัวแปรตามด้วย
สมการกำลังสองจะได้สมการคือ $\hat{y} = 0.01x^2 + 0.04x + 6.64$ ซึ่งมีค่า $MSE = 1.73$ และ $r^2 = 0.67$

ถ้าตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด
ของทั้งสองสมการแล้วสมการใดมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน

17. จากข้อมูลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนวิชาภาษาไทย (x) และ วิชาภาษาอังกฤษ (y)
ซึ่งมีคะแนนเต็ม 10 คะแนน ของนักเรียน 8 คน ดังตาราง

x	1	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	5	6	8	8	9	9

จากข้อมูลในตารางนำมาหาสมการเพื่อให้แทนความสัมพันธ์โดยวิธีต่างๆ ดังนี้

วิธีเลือกจุด 2 จุด จะได้สมการ $\hat{y}_1 = 0.86x + 1.14$

วิธีที่ง่ายจะได้สมการ $\hat{y}_2 = 0.94x - 0.49$

วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้สมการ $\hat{y}_3 = 0.86x + 0.99$

ถ้าต้องการตรวจสอบว่าสมการ $\hat{y}_1$, สมการ $\hat{y}_2$ และสมการ $\hat{y}_3$ สมการใดมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากันน่าจะตรวจสอบความเหมาะสมด้วยวิธีใด ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยกับค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 18 – 20

ข้อมูลแสดงค่าใช้จ่าย (y) ของโรงเรียนอนุบาลจำนวน 5 แห่ง แต่ละแห่งมีจำนวนนักเรียน x คน ในเวลา 1 เดือน ปรากฏดังตาราง

จำนวนเด็ก (คน) : x	1	2	3	4	5
ค่าใช้จ่าย (พันบาท) : y	3	4	8	9	8

จากข้อมูลในตารางถ้านำมาสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ ดังนี้

(1) สมการเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลคือ $\hat{y} = 1.50x + 1.90$
และมี $r^2 = 0.77$

(2) สมการกำลังสองที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล คือ $\hat{y} = -0.50x^2 + 4.50x - 1.60$
และมี $r^2 = 0.89$

18. ถ้าโรงเรียน ก มีนักเรียนจำนวน 10 คน จะมีค่าใช้จ่ายเท่าไร โดยใช้สมการรูปแบบที่ (1)

19. ถ้าโรงเรียน ก มีนักเรียนจำนวน 10 คน จะมีค่าใช้จ่ายเท่าไร โดยใช้สมการรูปแบบที่ (2)

20. สมการรูปแบบใดมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. ความสัมพันธ์ของสินค้าที่ลดราคากับจำนวนสินค้าที่ขายได้เพิ่มขึ้นเป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งมีข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

ลดราคาสินค้า (บาท/ 1 ชิ้น)	จำนวนสินค้า (ชิ้น)
1	2
2	5
3	7
4	8
5	10

จงสร้างแบบจำลองเชิงเส้นของข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

2. จากการทดลองใช้ปุ๋ยชนิดหนึ่งและสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณปุ๋ยที่ใช้กับปริมาณผลผลิตที่ได้เป็นดังนี้

ปริมาณปุ๋ย (กิโลกรัม)	1	2	3	4	5	6
ผลผลิต (ตัน)	3	4	8	9	8	5

จงสร้างแบบจำลองกำลังสองของข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมทั้งทำนายผลผลิตเมื่อใช้ปุ๋ย 5.8 กิโลกรัม

3. ข้อมูลต่อไปนี้ เป็นรายได้ต่อเดือนของบริษัทแห่งหนึ่งในปี 2540 โดยกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลมีกราฟเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล

เดือน	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม	มิถุนายน
รายได้ (ล้านบาท)	1.2	1.5	2	3	3.5	4.5

จงทำนายว่าในเดือนสิงหาคม พ.ศ. 2540 บริษัทนี้จะมีรายได้ประมาณเท่าใด

4. บริษัทแห่งหนึ่งขายผลิตภัณฑ์ของเด็กเล่น ยอดจำหน่ายใน 5 เดือนแรกของปีนี้ ได้ข้อมูลดังนี้

เดือน	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม
ยอดจำหน่าย (100 ชิ้น)	2	5	6	8	10

จงทำนายว่าในเดือนมิถุนายน บริษัทนี้จะมียอดจำหน่ายประมาณเท่าใด

5. จากการสำรวจจำนวนรถยนต์บนถนนที่สี่แยกไฟแดงแห่งหนึ่งขณะที่ติดไฟแดง ได้ข้อมูลดังตาราง

y : ระยะเวลาของไฟแดง (วินาที)	n : จำนวนรถยนต์บนถนน (คัน)
3.0	0
7.3	2
11.5	4
15.9	6

ให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับทำนายระยะเวลาไฟแดงจากจำนวนรถยนต์บนถนน และเปรียบเทียบสมการที่ได้กับสมการ $\hat{y} = 2.1n + 3.7$ ว่าสมการใดมีความเหมาะสมมากกว่ากัน (6 คะแนน)

กำหนดให้

$$\log 1.2 = 0.0792$$

$$\log 1.5 = 0.1761$$

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log 3 = 0.4771$$

$$\log 3.5 = 0.5441$$

$$\log 4.5 = 0.6532$$

$$\log 6 = 0.7782$$

$$\log 15 = 1.1761$$

$$\log 38 = 1.5798$$

$$\log 68 = 1.8325$$

$$\log 105 = 2.0212$$

ภาคผนวก ค
บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.1 ความสำคัญและความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นที่รู้จักกันมานานแล้ว ทางด้านวิศวกรรมและเทคโนโลยีได้นำไปใช้ในการออกแบบก่อสร้างสิ่งต่างๆ เช่น การสร้างเขื่อน การสร้างสะพาน เครื่องบิน รถยนต์ และอื่นๆ ต่อมาได้มีการนำเอาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสาขาวิชาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นทางด้านชีววิทยา แพทย์ ภูมิศาสตร์ และวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม ปัญหาสิ่งแวดล้อม เช่น ปัญหาการเพิ่มของจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิต ปัญหาการผลิตอาหาร ปัญหาด้านมลภาวะ ปัญหาการตัดไม้ทำลายป่า ปัญหาน้ำท่วมและปัญหาการกัดกร่อนของดิน เป็นต้น ในบางครั้งมีความจำเป็นจะต้องตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาเหล่านี้ แต่ข้อมูลที่มีอยู่จะไม่เพียงพอที่จะทำให้เราได้รู้ว่าจะตัดสินใจอย่างไรจึงจะดีที่สุด แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ช่วยให้เราสามารถตัดสินใจได้ว่าตัวแปรใดที่ดีที่สุดที่เหมาะสมกับสถานการณ์ที่มีอยู่เพราะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถช่วยเราแจกแจงองค์ประกอบต่างๆ ที่สำคัญที่สุดของปัญหาได้ ช่วยให้เราเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและค่าคงตัว และยังช่วยเราในการทำนายว่าอะไรจะเกิดขึ้นถ้าเราเปลี่ยนแปลงค่าคงตัวบางค่าจากสถานการณ์หรือปัญหา นอกจากนี้แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่มีการเชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริง (Real world) กับโลกของคณิตศาสตร์ (World of mathematics) ด้วยการแทนสถานการณ์จริงของโลกในเชิงคณิตศาสตร์ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังสามารถเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ เช่น การศึกษา วิทยาศาสตร์ ศิลปะ สังคมศึกษา

โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะอาศัยกฎเกณฑ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เป็นหลักเพื่อมาอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์ที่เราสนใจ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การออกแบบหรือสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงที่ต้องการศึกษา โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ สัญลักษณ์ กราฟ ตาราง ฟังก์ชัน สมการและอสมการ สูตร เป็นต้น

จากความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นพบว่าการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นวัฏจักร กล่าวคือจะเป็นกระบวนการที่เริ่มต้นจากสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เราสนใจ จากนั้นแทนสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจสร้างขึ้นเองโดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์หรือด้วยการเลือกจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่แล้วในรูปแบบของสูตร สมการหรือฟังก์ชันที่พิจารณาแล้วว่าเหมาะกับสถานการณ์จริงนั้นมากที่สุด และเมื่อได้แบบจำลองทาง

คณิตศาสตร์แล้วก็ดำเนินการหาผลลัพธ์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลายๆ อย่างผสมผสานกัน แล้วนำไปอธิบายสถานการณ์จริงหรือนำไปทำนายอนาคตของสถานการณ์จริงนั้นต่อไป

1.2 ชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

อิงลิช (English) ได้จำแนกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

1. แบบจำลองเกี่ยวกับการสืบสวน (Investigational Models) เป็นแบบจำลองที่ต้องมีแบบจำลองเริ่มต้นเพื่อผลิตข้อมูลซึ่งจะนำไปสู่การเป็นตัวแทนในรูปทั่วไปมากขึ้น ปัญหาหรือความยุ่งยากของนักเรียนจะอยู่ที่การหาแบบจำลองเริ่มต้นเพราะส่วนใหญ่ นักเรียนมักไม่รู้ว่าตนเองกำลังหาอะไรอยู่

2. แบบจำลองเกี่ยวกับสถิติ (Statistical Models) โดยทั่วไปแบบจำลองจะเป็นสมมติฐานซึ่งต้องอาศัยระเบียบวิธีการทางสถิติ ในการค้นหาความจริง เช่น เรื่องของกลุ่มตัวอย่างแบบสอบถาม และการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งถ้านักเรียนเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ซึ่งในกรณีนี้จะถือว่าการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการใช้แบบจำลอง หรือนักเรียนจะใช้ข้อมูลจากแหล่งทุติยภูมิก็ได้

3. แบบจำลองเกี่ยวกับการทดลอง (EXperimental Models) แบบจำลองเริ่มแรกของแบบจำลองชนิดนี้สร้างขึ้นจากการสังเกตข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ข้อมูลที่ได้จะถูกนำไปเขียนเป็นกราฟและสุดท้ายจะถูกเก็บไว้ในรูปของตารางการทำงาน (Spreadsheet)

เมียร์สแคร์ท (Meerschaert) ได้จำแนกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

1. แบบจำลองการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization Models) เป็นการออกแบบเพื่อใช้ในการตัดสินใจของตัวแปรควบคุม (control variables) หรือตัวแปรอิสระที่จะนำมาซึ่งผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือส่งผลต่อคำตอบของปัญหาที่กำหนดให้ ซึ่งผลลัพธ์ที่ดีที่สุดนั้นอาจเป็นการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดก็ได้

2. แบบจำลองพลศาสตร์ (Dynamic Models) เป็นการสร้างแบบจำลองเพื่อเป็นตัวแทนของปัญหาหรือสถานการณ์ ที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาของระบบที่เกี่ยวข้อง เช่น ปฏิกริยาทางเคมี การเจริญเติบโตของประชากร ปัญหามลพิษ เป็นต้น

3. แบบจำลองความน่าจะเป็น (Probability Models) เป็นแบบจำลองของปัญหาหรือสถานการณ์ที่มีความไม่แน่นอนของพฤติกรรมหรือตัวแปรในแต่ละสถานการณ์ ซึ่งตัวแปรส่วนใหญ่จะเป็นตัวแปรสุ่ม ทำให้ต้องนำความรู้ทางด้านความน่าจะเป็นเข้ามาช่วยในการพิจารณาการหาคำตอบของปัญหาด้วย เช่น จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นที่สี่แยกแห่งหนึ่ง หรืออายุการใช้งานของหลอดไฟฟ้า เป็นต้น

วินสตัน (Winston) ได้แบ่งประเภทของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. แบบจำลองเชิงกำหนด (Deterministic Models) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจากสถานการณ์จริงที่สามารถวัดค่าของตัวแปรอิสระหรือตัวแปรที่เกี่ยวข้องได้อย่างแน่นอน
2. แบบจำลองสโตแคสติก (Stochastic Models) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สถานการณ์จริงที่นำมาศึกษานั้นไม่สามารถวัดค่าของตัวแปรได้อย่างแน่นอน หรือตัวแปรที่นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นมีลักษณะของตัวแปรสุ่ม ซึ่งต้องมีการดำเนินการทางสถิติเข้ามาช่วยในการสร้างแบบจำลอง

สำหรับในระดับขั้นนี้จะแบ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ทราบสมการตั้งต้น ซึ่งจะกล่าวถึงในเรื่องการศึกษาสถานการณ์จริงด้วยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ทราบสมการตั้งต้น โดยแต่ละสมการจะขึ้นอยู่กับลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละสถานการณ์ พร้อมทั้งทำนายค่าของสิ่งของสิ่งหนึ่งเมื่อทราบค่าของสิ่งของอีกสิ่งหนึ่งที่เหลือ โดยสิ่งของที่ทราบค่านั้นจะเรียกว่า “ตัวแปรอิสระ” และสิ่งของที่ถูกทำนายนั้น (ค่าที่จะหา) จะเรียกว่า “ตัวแปรตาม” และสมการที่เลือกมาจะศึกษาเป็นสมการที่เมื่อกำหนดค่าตัวแปรอิสระให้ 1 ค่า แล้วจะก่อให้เกิดค่าตัวแปรตามเพียงค่าเดียวเท่านั้น จึงเรียกสมการที่เลือกมาศึกษาว่า “ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล”

โดยทั่วไปความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลจะประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว คือตัวแปรอิสระ 1 ตัว (นิยมใช้ x) และตัวแปรตาม 1 ตัว (นิยมใช้ y) โดยจะแบ่งความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันออกตามลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้วเลือกสมการที่มีอยู่แล้วในทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความสัมพันธ์นั้นๆ ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

2.1 ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่กราฟเป็นเส้นตรง มีรูปสมการทั่วไปของความสัมพันธ์เป็น

$$y = ax + b$$

เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ซึ่งทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

2.2 ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่กราฟไม่เป็นเส้นตรง ได้แก่ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นรูปอื่นๆ ที่ไม่เป็นเส้นตรง ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นโค้ง พาราโบลา เส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล และเส้นโค้งไซน์ (sine curve) ซึ่งมีรูปสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{และ}$$

$$y = ba^x \quad \text{และ}$$

$$y = a \sin(bx + c) + d$$

เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ a , b , c และ d เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

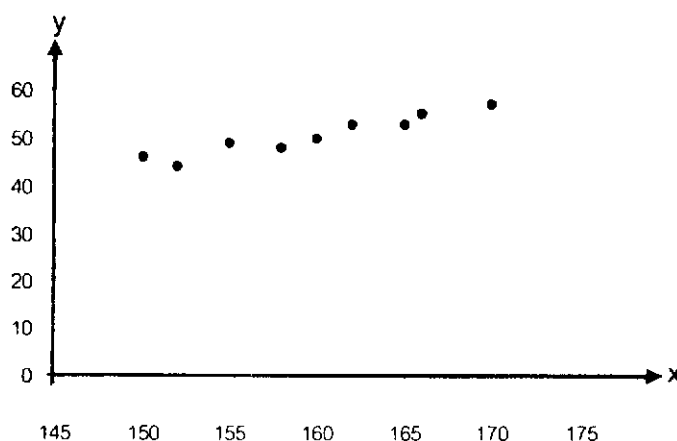
ตามที่ได้ให้ความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไว้แล้วข้างต้นนั้น การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในที่นี้ จะหมายถึงการหาสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ซึ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ต้องอาศัยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ โดยก่อนการสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์นั้น จะต้องเขียนแผนภาพการกระจายของข้อมูลระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามเพื่อดูความสัมพันธ์หรือแนวโน้มของข้อมูลว่าเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง แล้วจึงทำการเลือกสมการที่เหมาะสมกับความสัมพันธ์ของข้อมูล แต่เนื่องจากในสถานการณ์จริงนั้นส่วนใหญ่ข้อมูลที่ได้เมื่อนำมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วไม่สามารถสร้างเส้นตรงหรือเส้นโค้งที่ผ่านจุดทุกจุดได้ จึงต้องมีการพิจารณาแนวโน้มจากแผนภาพการกระจายว่ามีลักษณะเป็นเช่นใด ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงประมาณด้วยการสร้างสมการของแต่ละความสัมพันธ์ของข้อมูล

1.3 แผนภาพการกระจาย (Scatter Diagram)

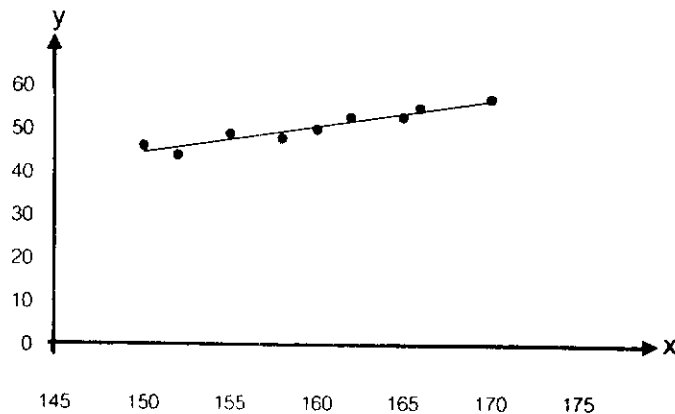
ตัวอย่างที่ 1 ถ้าศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียน 9 คน พบข้อมูลดังนี้

นักเรียน	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ส่วนสูง (ซม.)	150	152	160	158	155	162	165	166	170
น้ำหนัก (กก.)	46	44	50	48	49	53	53	55	57

ถ้าให้ส่วนสูงแทนด้วยตัวแปร x และน้ำหนักแทนด้วยตัวแปร y จะได้คู่อันดับ (x, y) ดังต่อไปนี้ $(150, 46)$, $(152, 44)$, $(160, 50)$, $(158, 48)$, $(155, 49)$, $(162, 53)$, $(165, 53)$, $(166, 55)$, $(170, 57)$ ซึ่งเมื่อนำจุดเหล่านี้ไปวาดกราฟหรือหาตำแหน่งบนระบบพิกัดฉาก จะได้กราฟของจุดเหล่านี้ ดังรูป



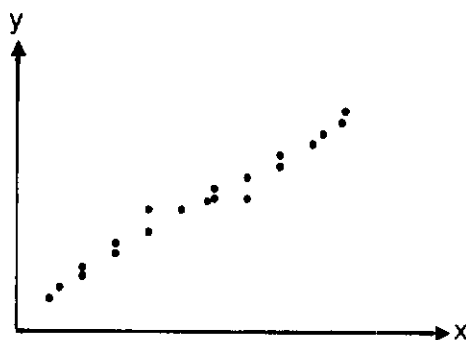
ถ้าพิจารณากราฟจะพบว่า การกระจายของจุดต่าง ๆ จำนวน 9 จุด มีลักษณะที่พอจะประมาณหรือสร้างตัวแทนของจุดเหล่านี้ได้ด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งหมายความว่า เราสามารถสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงและถือว่าเป็นตัวแทนของข้อมูลที่กำหนดให้ดังรูป



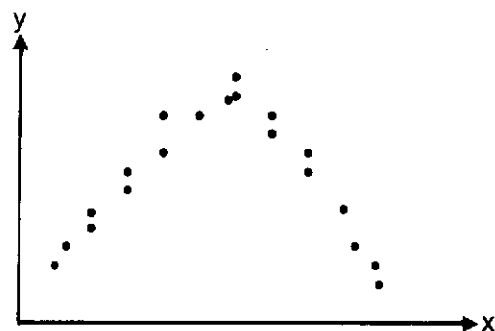
วิธีการที่กล่าวถึงในตัวอย่างที่ 1 คือวิธีการสร้างแผนภาพการกระจายเพื่อพิจารณาแนวโน้มของข้อมูลว่ามีลักษณะใด มีแนวโน้มของความสัมพันธ์เป็นกราฟเส้นตรง หรือกราฟเส้นโค้ง ซึ่งจะเป็นขั้นตอนแรกของการสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล กล่าวคือการสร้างแผนภาพการกระจายคือการวาดกราฟของค่าจากการสังเกตทุกค่าของข้อมูลเพื่อพิจารณาแนวโน้มของความสัมพันธ์ โดยทั่วไปจะให้แกนนอนแทนตัวแปรอิสระ และแกนตั้งแทนตัวแปรตาม ซึ่งจะมีลักษณะเป็นจุด เราเรียกรูปแบบนี้ว่าแผนภาพการกระจาย

การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต้องพิจารณาจากแผนภาพการกระจายว่ามีลักษณะเช่นใด แนวโน้มของความสัมพันธ์ที่ได้จะเป็นเช่นใด ในบางครั้งการดูจากแผนภาพการกระจายอาจจะยังบอกไม่ได้แน่ชัดว่ารูปแบบของความสัมพันธ์จะเป็นเช่นไร เนื่องจากลักษณะการกระจายของจุดต่างๆ ในแผนภาพของการกระจายไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของความสัมพันธ์ใดๆ ได้ หรืออาจจะมีลักษณะการกระจายที่คาบเกี่ยวระหว่างความสัมพันธ์สองความสัมพันธ์

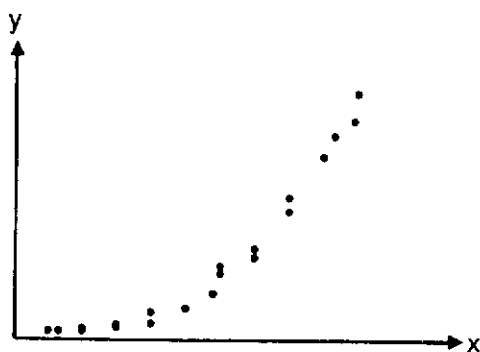
ดังนั้นแผนภาพการกระจายที่มีลักษณะคาบเกี่ยวระหว่างรูปแบบของความสัมพันธ์สองความสัมพันธ์นั้น ถ้าไม่ต้องการความละเอียดถูกต้องมากนักก็อาจจะเลือกรูปแบบของความสัมพันธ์ที่ง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งแผนภาพการกระจายที่สำคัญมีดังต่อไปนี้



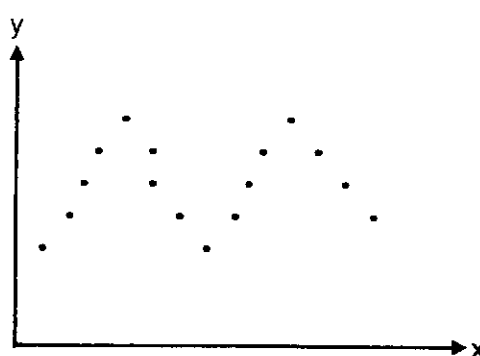
แนวโน้มเป็นเส้นตรง



แนวโน้มเป็นพาราโบลา



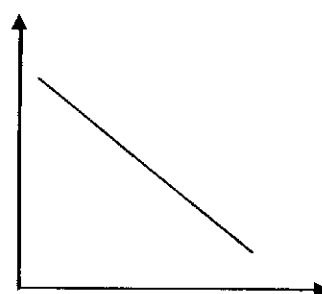
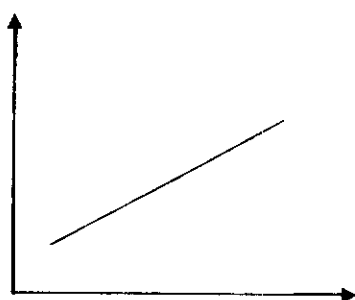
แนวโน้มเป็นเอกซ์โพเนนเชียล



แนวโน้มเป็นตรีโกณมิติ

2. แบบจำลองเชิงเส้น

ถ้านำข้อมูลมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วพบว่าลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงดังภาพ



จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองเชิงเส้น

ดังนั้นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรง จะมีสมการทั่วไป คือ $y = ax + b$ (เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ, a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา)

2.1 วิธีสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรง

2.1.1 วิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ เป็นวิธีการสร้างสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

1.1 เลือกจุด 2 จุด เพื่อเป็นตัวแทนของข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งจุดที่เลือก 2 จุด อาจเป็นจุดเริ่มต้นของข้อมูล และจุดสุดท้ายของข้อมูลหรืออาจเลือก 2 จุดใดๆ ของข้อมูลที่กำหนดให้

1.2 ลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดที่เลือกไว้ เส้นที่ลากได้นี้คือเส้นแนวโน้มของสมการ

1.3 สร้างสมการโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์เกี่ยวกับการสร้างสมการเส้นตรงจากจุด 2 จุด (two point form) ดังนี้

กำหนดให้ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็นจุด 2 จุดที่เลือกไว้
 (x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ m

$$\text{โดยที่ } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

นำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 1.2 ไปแทนใน $y - y_1 = m(x - x_1)$

แล้วจัดสมการที่ได้ให้อยู่ในรูป $\hat{y} = ax + b$

โดยที่ $\hat{y}$ เป็นค่าของตัวแปรตาม y ที่ได้จากสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

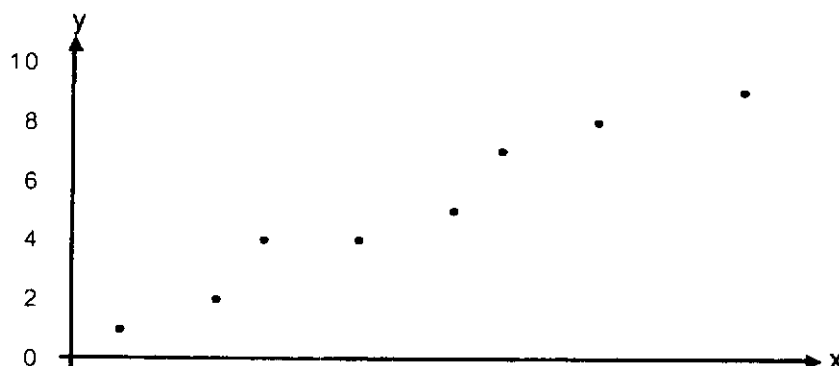
a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

ตัวอย่าง 2 จากข้อมูลที่กำหนดไว้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ



สมมติว่าแนวโน้มของข้อมูลจากแผนภาพการกระจายมีลักษณะเป็นเส้นตรง

ดังนั้นเราจะสร้างสมการเส้นตรงเพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

เลือกจุด 2 จุดเพื่อสร้างสมการเส้นตรง

เลือก จุด $(1, 1)$ และ จุด $(11, 8)$

$$m = \frac{8 - 1}{11 - 1} = \frac{7}{10} = 0.7$$

จะได้ $y - 1 = 0.7(x - 1)$

$$y - 1 = 0.7x - 0.7$$

$$\hat{y}_1 = 0.7x + 0.3 \quad \text{_____ (1)}$$

แต่ถ้าเลือกจุด $(3, 2)$ และ จุด $(9, 7)$

$$m = \frac{7-2}{9-3} = \frac{5}{6} = 0.83$$

จะได้ $y - 2 = 0.83(x - 3)$

$$y - 2 = 0.83x - 2.49$$

$$\hat{y}_2 = 0.83x - 0.49 \quad \text{_____}(2)$$

จะเห็นว่าถ้าเลือกจุดที่ต่างกันไปก็จะได้สมการเส้นตรงที่ต่างกันออกไป ดังนี้

สมการที่ 1 คือ $\hat{y}_1 = 0.7x + 0.3$

สมการที่ 2 คือ $\hat{y}_2 = 0.83x - 0.49$

แล้วสมการใดที่เหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน ซึ่งสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ที่ติดนั้นควรจะทำให้ค่าของตัวแปรตาม $\hat{y}$ ที่ได้จากสมการแทนความสัมพันธ์กับค่าตัวแปรตาม y ที่เป็นข้อมูลจริงมีความแตกต่างกันไม่มาก

จากสมการเส้นตรงทั้ง 2 สมการ ให้พิจารณาตารางต่อไปนี้

x_i	y_i	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$	$y_i - \hat{y}_{1i}$	$y_i - \hat{y}_{2i}$	$(y_i - \hat{y}_{1i})^2$	$(y_i - \hat{y}_{2i})^2$
1	1	1	0.64	0	0.36	0	0.1296
3	2	2.4	2.3	-0.4	-0.3	0.16	0.09
4	4	3.1	3.13	0.9	0.87	0.81	0.7569
6	4	4.5	4.79	-0.5	-0.79	0.25	0.6241
8	5	5.9	6.45	-0.9	-1.45	0.81	2.1025
9	7	6.6	7.28	0.4	-0.28	0.16	0.0784
11	8	8	8.94	0	-0.94	0	0.8836
14	9	10.1	11.43	-1.1	-2.43	1.21	5.9049
$\sum_{i=1}^n x_i$ =56	$\sum_{i=1}^n y_i$ =40	-				$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ =3.4	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$ =10.57

จากตารางจะเห็นว่าความแตกต่างระหว่างค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์กับค่าจากข้อมูลจริงมีค่าเป็นบวกบ้าง ลบบ้าง ขึ้นอยู่กับว่าแต่ละค่าของค่าจากสมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์กับค่าจากข้อมูลจริงค่าใดจะมากกว่ากัน ทำให้ผลรวมดังกล่าวอาจจะหักล้างกันไปหมดพอดี นั่นคือผลรวมของความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นศูนย์ ดังนั้นในการวัดความคลาดเคลื่อนโดยไม่ให้ผลรวมของความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นศูนย์ จึงต้องยกกำลังสองของความแตกต่างที่เกิดขึ้นแต่ละค่า แล้วหาผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างที่เกิดขึ้น ถ้าผลรวมนี้น้อยที่สุดจะถือว่าสมการเส้นตรงที่ได้นั้นเหมาะสมจะใช้ในการประมาณค่าตัวแปรตามมากที่สุด

จากตารางจะพบว่า $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ มีค่าน้อยกว่า $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$ ดังนั้นแสดงว่าสมการ $\hat{y}_1 = 0.7x + 0.3$ จะเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่าสมการ $\hat{y}_2 = 0.83x - 0.49$ ☺

2.1.2 วิธีกึ่งเฉลี่ย เป็นวิธีการสร้างสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรง โดยใช้หลักการสร้างคล้ายกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ กล่าวคือจะต้องหาจุด 2 จุดและลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดเช่นเดียวกัน ต่างกันที่จุด 2 จุดของวิธีกึ่งเฉลี่ยจะต้องได้จากค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้าง ดังนี้

2.1 เรียงลำดับของตัวแปรอิสระจากมากไปหาน้อยหรือน้อยไปหามากก็ได้

2.2 แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่าๆ กัน

2.3 หาค่ากลางของข้อมูลที่แบ่งได้แต่ละกลุ่ม สำหรับค่ากลางที่นิยมใช้คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต (mean) หรือค่ามัธยฐาน (median) โดยให้ $\bar{x}_1$ เป็นค่ากลางของตัวแปรอิสระกลุ่มที่ 1, $\bar{x}_2$ เป็นค่ากลางของตัวแปรอิสระกลุ่มที่ 2, $\bar{y}_1$ เป็นค่ากลางของตัวแปรตามกลุ่มที่ 1, $\bar{y}_2$ เป็นค่ากลางของตัวแปรตามกลุ่มที่ 2

2.4 ลากเส้นตรงเชื่อมค่ากลางทั้งสองกลุ่ม เส้นที่ลากได้คือเส้นแนวโน้มของสมการ

2.5 สร้างสมการโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์เช่นเดียวกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ

กำหนดให้ $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ เป็นจุดสองจุดที่เป็นค่ากลางของข้อมูล

(x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ คือ m

$$\text{โดยที่ } m = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

นำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 2.4 ไปแทนใน $y - \bar{y}_1 = m(x - \bar{x}_1)$

แล้วจัดสมการที่ได้ให้อยู่ในรูป $\hat{y} = ax + b$

โดยที่ $\hat{y}$ เป็นค่าของตัวแปรตาม y ที่ได้จากสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

วิธีกึ่งเฉลี่ยเป็นวิธีที่มีหลักเกณฑ์ดีกว่าวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ เพราะการได้มาของจุดสำหรับวิธีนี้ใช้ค่ากลางซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ ส่วนวิธีการคำนวณหาค่ากลางจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือมัธยฐานให้พิจารณาจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ว่า ถ้าข้อมูลในกลุ่มมีค่าแตกต่างกันมาก การใช้ค่ามัธยฐานจะเป็นตัวแทนข้อมูลที่ดีกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต แต่ถ้าข้อมูลในกลุ่มเดียวกันไม่มีค่าใดที่มากหรือน้อยผิดปกติ จะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตทั้งนี้เพราะถ้าค่าของข้อมูลมากหรือน้อยผิดปกติจะมีผลกระทบต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ซึ่งจะทำให้สมการที่คำนวณได้

คลาดเคลื่อนมาก และการสร้างสมการด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ยอาจมีปัญหาถ้าจำนวนข้อมูลมีจำนวนคี่ จะทำให้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่ากันไม่ได้ จึงมีวิธีแก้ปัญหา ดังนี้

1) ตัดข้อมูลที่อยู่ตรงกลางทิ้ง เพื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน การตัดข้อมูลตรงกลางทิ้งไม่นิยมปฏิบัติเพราะต้องสูญเสียข้อมูลไปโดยเปล่าประโยชน์ และการคำนวณหาสมการจะต้องคำนึงถึงช่วงเวลาตัดข้อมูลทิ้งไปด้วย

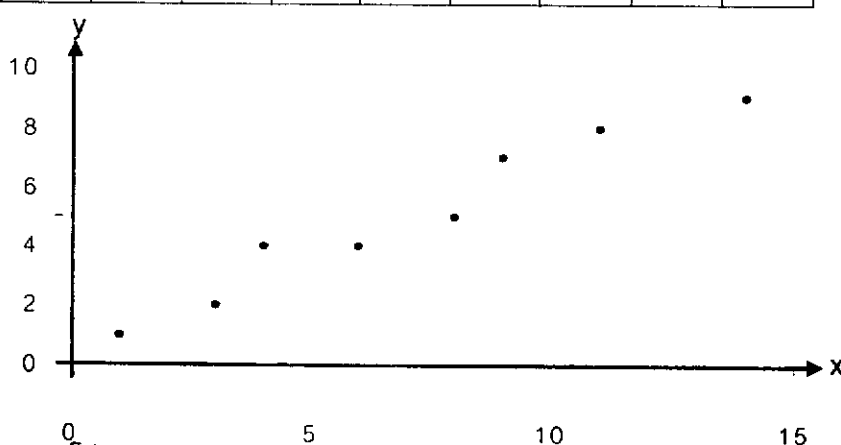
2) นำข้อมูลที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 แล้วหาค่ากลางครั้งหนึ่งและนำข้อมูลตัวเดียวกันนั้นมารวมกับกลุ่มที่ 2 แล้วหาค่ากลางอีกครั้ง ซึ่งจะทำให้ได้ค่ากลางสำหรับข้อมูลกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เช่นกัน

3) นำข้อมูลที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 หรือกลุ่มที่ 2 เพียงกลุ่มเดียว แล้วหาค่ากลาง การจะนำข้อมูลตรงกลางรวมกับกลุ่มใดควรพิจารณาตามความเห็นสมควร สำหรับกรณีนี้จะทำให้การแบ่งข้อมูล 2 กลุ่มไม่เท่ากัน แต่ขั้นตอนการสมการยังคงใช้วิธีกึ่งเฉลี่ยเช่นเดียวกับกรณี que แบ่งข้อมูล 2 กลุ่มเท่ากัน

ตัวอย่าง 3 จากข้อมูลที่กำหนดไว้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ



สมมติว่าแนวโน้มของข้อมูลจากแผนภาพการกระจายมีลักษณะเป็นเส้นตรง

ดังนั้นเราจะสร้างสมการเส้นตรงเพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y

จากสมการเส้นตรง $y - \bar{y}_1 = m(x - \bar{x}_1)$

เลือกจุด 2 จุดเพื่อสร้างสมการเส้นตรง แต่การเลือกจุดของวิธีนี้จะต่างจากแบบที่ 1

นั่นคือ จุด 2 จุดที่ต้องการนั้นจะเป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามดังนี้

เรียงตัวแปรอิสระและตัวแปรตามจากน้อยไปหามากแล้วแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชุด

ชุดที่ 1 ประกอบด้วย (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4)

ชุดที่ 2 ประกอบด้วย (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)

$$\text{จะได้ } \bar{x}_1 = \frac{1+3+4+6}{4} = 3.5, \bar{y}_1 = \frac{1+2+4+4}{4} = 2.75$$

$$\text{และ } \bar{x}_2 = \frac{8+9+11+14}{4} = 10.5, \bar{y}_2 = \frac{5+7+8+9}{4} = 7.25$$

จุดที่ต้องการ 2 จุด คือ (3.5, 2.75) และ (10.5, 7.25)

$$\text{นั่นคือ } m = \frac{7.25 - 2.75}{10.5 - 3.5} = \frac{4.5}{7} = 0.64$$

$$\text{ดังนั้น } y - 2.75 = 0.64(x - 3.5)$$

$$y - 2.75 = 0.64x - 2.24$$

$$\hat{y} = 0.64x + 0.51$$



2.1.3 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แนวคิดที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าตัวแปรอิสระที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ ($\hat{y}$) กับค่าตัวแปรอิสระจากข้อมูลจริง (y) ที่เก็บรวบรวมมาได้มีค่าน้อยที่สุด การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีที่นิยมเพราะเป็นวิธีที่ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ และน่าเชื่อถือในการหาเส้นที่เหมาะสมที่สุดที่เป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้

นั่นคือเราต้องการให้ $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด (เมื่อ n เป็นจำนวนตัวอย่างหรือจำนวน

ข้อมูลทั้งหมดที่นำมาสร้างความสัมพันธ์) ส่วนวิธีที่จะทำให้ $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุดนั้นจะใช้

ความรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูง ซึ่งจะไม่ขอกล่าวถึง แต่จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังกล่าวจะทำให้ได้สมการที่เรียกว่า "สมการปกติ" โดยมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนค่าคงตัวที่ต้องการหา

สำหรับความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงนั้น มีรูปสมการทั่วไปเป็น $y = ax + b$ โดยที่ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ, a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา จะมีสมการปกติ 2 สมการ คือ

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

และจากสมการปกติสามารถหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

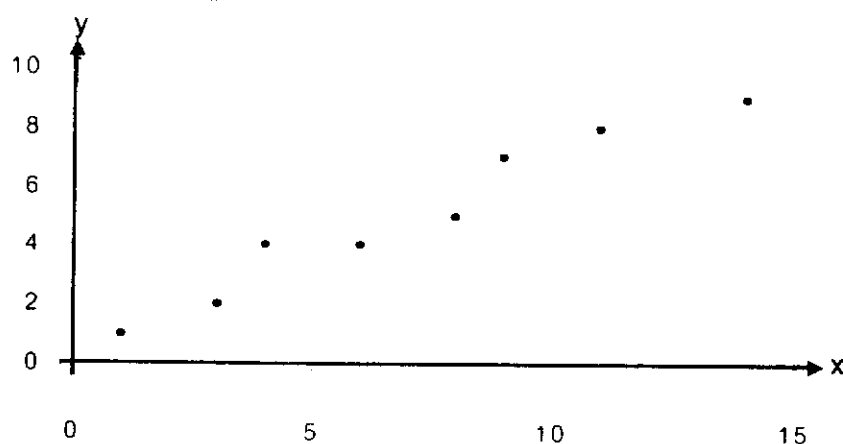
$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

โดยที่ $\bar{y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม, $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

ตัวอย่าง 4 จากข้อมูลที่กำหนดไว้ในตาราง จงหาสมการที่แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



เมื่อพิจารณาแผนภาพการกระจายแล้วความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้นสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงซึ่งมีรูปสมการทั่วไป $\hat{y} = ax + b$ คือ

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

พิจารณาตารางต่อไปนี้

x	y	x^2	xy
1	1	1	1
3	2	9	6
4	4	16	16
6	4	36	24
8	5	64	40
9	7	81	63
11	8	121	88
14	9	196	126
$\sum_{i=1}^n x_i = 56$	$\sum_{i=1}^n y_i = 40$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 524$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 364$

วิธีที่ 1 ประมาณค่าคงตัว a และ b โดยการแทนค่า $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ในสมการปกติ

ด้วยค่าที่หาได้ในตาราง จะได้

$$40 = 56a + 8b \quad \text{_____ (1)}$$

$$364 = 524a + 56b \quad \text{_____ (2)}$$

จากการแก้ระบบสมการทำให้ได้ $a = 0.6364$ และ $b = 0.5252$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

$$\hat{y} = 0.6364x + 0.5452$$

วิธีที่ 2 ประมาณค่าคงตัว a และ b ได้จากสูตรต่อไปนี้

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad \text{และ} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

จากตารางจะได้ $\bar{x} = \frac{56}{8} = 7$ และ $\bar{y} = \frac{40}{8} = 5$

จะได้ $a = \frac{364 - (8)(7)(5)}{524 - (8)(7)^2} = \frac{364 - 280}{524 - 392} = \frac{84}{132} = 0.6364$

$$b = 5 - (0.6364)(7) = 0.5452$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

$$\hat{y} = 0.6364x + 0.5452$$


3. การตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในที่นี้ก็คือ การตรวจสอบดูว่าสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากน้อยเพียงใด หรือดูว่าสมการที่ได้สามารถทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรอิสระได้ดีเพียงใดหรือค่าตัวแปรตามที่ได้ควรจะมีการมีความแตกต่างจากค่าตัวแปรตามของข้อมูลจริงให้น้อยที่สุด ซึ่งการตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองมีด้วยกันหลายวิธี ดังต่อไปนี้

3.1 ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

เป็นการวัดความแม่นยำจากค่าเฉลี่ยผลรวมกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าตัวแปรตามจากข้อมูลที่แท้จริงกับค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}$$

โดยที่ y เป็นค่าตัวแปรตามจากข้อมูลจริง

$\hat{y}$ เป็นค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์

n เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด

p เป็นค่าคงตัวที่มีอยู่ในแต่ละสมการ เช่น สมการเส้นตรงมี $p = 2$,

สมการกำลังสองมี $p = 3$, สมการเอกซ์โพเนนเชียลมี $p = 2$, สมการไซน์มี $p = 4$ เป็นต้น

โดยที่ถ้าค่า MSE มีค่าน้อยแสดงว่าสมการนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่าสมการที่มีค่า MSE มาก ยิ่งถ้าสมการใดมีค่า MSE เป็นศูนย์แสดงว่าสมการนั้นสามารถทำนายค่าตัวแปรตามได้ดีที่สุด แต่ในสถานการณ์จริงโอกาสเช่นนั้นแทบไม่มีเลย ดังนั้นค่า MSE ที่ดีจึงควรมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

3.2 สัมประสิทธิ์ของการกำหนด (Coefficient of Determination)

สัมประสิทธิ์การกำหนดเป็นการวัดสัดส่วนหรือเปอร์เซ็นต์ที่ตัวแปรอิสระ x มีส่วนในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์นี้จึงเป็นค่าที่ใช้วัดว่าสมการที่ได้มีความเหมาะสมกับข้อมูลเพียงใด ถ้าสัมประสิทธิ์การกำหนดมีค่ามากขึ้นแสดงว่าสมการนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากขึ้น หรือคุณภาพของสมการในการทำนายตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรอิสระจะมีมาก นิยมแทนสัมประสิทธิ์การกำหนดด้วยสัญลักษณ์ r^2 ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

คุณสมบัติของ r^2

1. ค่า r^2 เป็นบวกเสมอ
2. $0 \leq r^2 \leq 1$ ถ้า $r^2 = 1$ หมายความว่าสมการแสดงความสัมพันธ์จะทำนาย y หรือตัวแปรตามได้อย่างสมบูรณ์
ถ้า $r^2 = 0$ แสดงว่าสมการแสดงความสัมพันธ์ไม่สามารถทำนาย y หรือตัวแปรตามได้
3. ค่า r^2 จะใช้ตรวจสอบสมการที่ได้จากการประมาณค่าคงตัวด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเท่านั้น

ตัวอย่าง 5 จงตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากตัวอย่างที่ 2 - 4

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2 มีสมการแสดงความสัมพันธ์ 2 สมการคือ

$$\hat{y}_1 = 0.7x + 0.3$$

$$\hat{y}_2 = 0.83x - 0.49$$

จากตัวอย่างที่ 3 มีสมการแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\hat{y}_3 = 0.64x + 0.51$$

จากตัวอย่างที่ 4 มีสมการแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\hat{y}_4 = 0.6364x + 0.5452$$

จากข้อมูลจะได้ $\bar{y} = \frac{40}{8} = 5$

พิจารณาตารางต่อไปนี้

x_i	y_i	$\hat{y}_{1i}$	$y_i - \hat{y}_{1i}$	$(y_i - \hat{y}_{1i})^2$	$\hat{y}_{2i}$	$y_i - \hat{y}_{2i}$	$(y_i - \hat{y}_{2i})^2$	$\hat{y}_{3i}$	$y_i - \hat{y}_{3i}$	$(y_i - \hat{y}_{3i})^2$
1	1	1	0	0	0.34	0.66	0.4356	1.15	-0.15	0.0225
3	2	2.4	-0.4	0.16	2	0	0	2.43	-0.43	0.1849
4	4	3.1	0.9	0.81	2.83	1.17	1.3689	3.07	0.93	0.8649
6	4	4.5	-0.5	0.25	4.49	-0.49	0.2401	4.35	-0.35	0.1225
8	5	5.9	-0.9	0.81	6.15	-1.15	1.3225	5.63	-0.63	0.3969
9	7	6.6	0.4	0.16	6.98	0.02	0.0004	6.27	0.73	0.5329
11	8	8	0	0	8.64	-0.64	0.4096	7.55	0.45	0.2025
14	9	10.1	-1.1	1.21	11.13	-2.13	4.5369	9.47	-0.47	0.2209
$\sum_{i=1}^n x_i$ =56	$\sum_{i=1}^n y_i$ =40			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ =3.4			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$ =8.314			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{3i})^2$ =2.548

x_i	y_i	$\hat{y}_{4i}$	$y_i - \hat{y}_{4i}$	$(y_i - \hat{y}_{4i})^2$	$(\hat{y}_{4i} - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	1	1.1816	-0.1816	0.0330	14.5802	16
3	2	2.4544	-0.4544	0.2065	6.4801	9
4	4	3.0908	0.9092	0.8266	3.6450	1
6	4	4.3636	-0.3636	0.1322	0.4050	1
8	5	5.6364	-0.6364	0.4050	0.4050	0
9	7	6.2728	0.7272	0.5288	1.6200	4
11	8	7.5456	0.4544	0.2065	6.4801	9
14	9	9.4548	-0.4548	0.2068	19.8452	16
$\sum_{i=1}^n x_i$ =56	$\sum_{i=1}^n y_i$ =40			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{4i})^2$ =2.5455	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_{4i} - \bar{y})^2$ =53.4607	$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ =56

จากตารางจะได้

$$MSE_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})}{n-2} = \frac{3.4}{6} = 0.5667$$

$$MSE_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})}{n-2} = \frac{8.314}{6} = 1.3857$$

$$MSE_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{3i})}{n-2} = \frac{2.548}{6} = 0.4247$$

$$MSE_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{4i})}{n-2} = \frac{2.5455}{6} = 0.4243$$

ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 1 คือ 0.5667

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 2 คือ 1.3857

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 3 คือ 0.4247

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 4 คือ 0.4243

แสดงว่าเมื่อตรวจสอบด้วยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้ว สมการที่ 4 มี

ความเหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุด

เนื่องจาก 3 สมการแรกไม่ได้ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าของค่าคงตัว ดังนั้น
จึงจะหาสัมประสิทธิ์ของการกำหนดเฉพาะสมการที่ 4

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{53.4607}{56} = 0.9547 = 95.47 \%$$

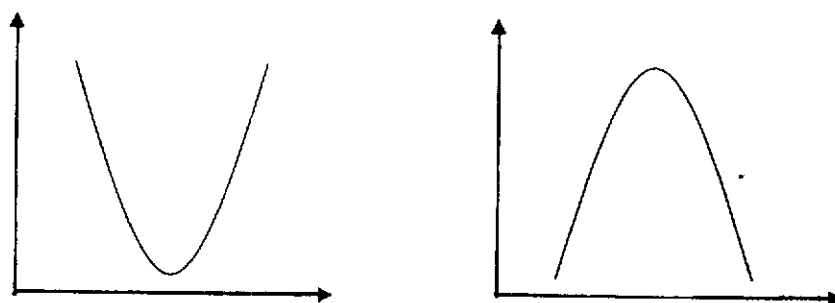
นั่นคือสัมประสิทธิ์ของการกำหนดของสมการที่ 4 คือ 95.47 % หมายความว่าตัวแปรอิสระ
x มีส่วนในการทำนายค่าของตัวแปรตาม y ได้ดีถึง 95.47 % ☺

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการเขียน จะใช้ $\sum$ แทน $\sum_{i=1}^n$ โดยจะไม่เขียน $i = 1$ และ n ลงไป

ในเครื่องหมาย $\sum$ เช่น ใช้ $\sum x$ แทน $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum xy$ แทน $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ เป็นต้น

4. แบบจำลองกำลังสอง

ถ้านำข้อมูลมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วพบว่าลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นโค้งพาราโบลาหงายหรือคว่ำ ดังภาพ



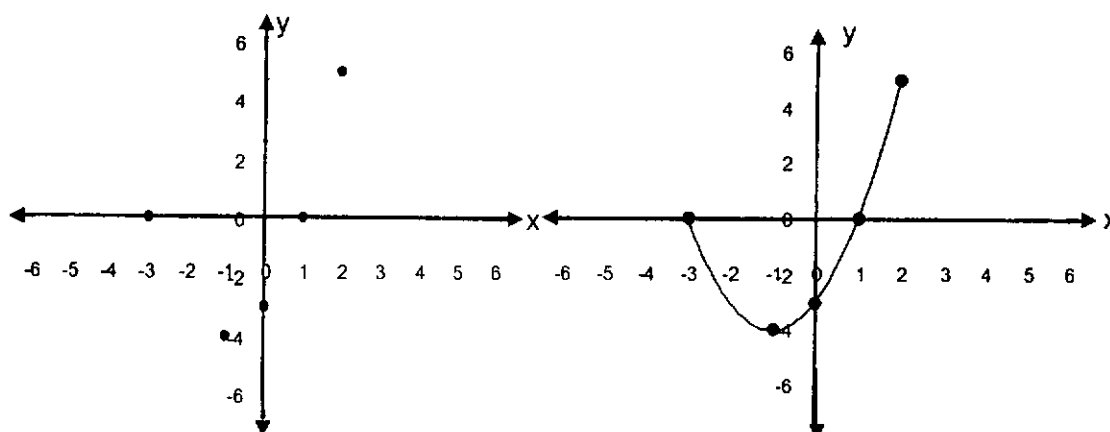
จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองกำลังสอง

ดังนั้นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งพาราโบลา จะมีสมการทั่วไป คือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$ (เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ, a , b และ c เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา)

ตัวอย่าง 6 จากข้อมูลที่กำหนดให้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	-3	-1	0	1	2
y	0	-4	-3	0	5

วิธีทำ จากข้อมูลในตารางสามารถสร้างแผนภาพการกระจายได้ดังนี้



จากแผนภาพการกระจายจะพบว่าจุด (x, y) ทุกจุดอยู่บนเส้นโค้งพาราโบลา(เส้นแนวโน้ม)

สมการทั่วไปคือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$

จะคำนวณหาค่า a , b และ c โดยการแทนค่าจุดลงไปในสมการทั่วไปดังนี้

เลือกจุด $(-3, 0)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(-3)^2 + b(-3) + c &= 0 \\ 9a - 3b + c &= 0 \end{aligned} \quad \text{_____ (1)}$$

เลือกจุด $(-1, -4)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(-1)^2 + b(-1) + c &= -4 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned} \quad \text{_____ (2)}$$

เลือกจุด $(0, -3)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(0)^2 + b(0) + c &= -3 \\ \text{ดังนั้น } c &= -3 \end{aligned}$$

นำค่า $c = -3$ แทนลงใน (1) และ (2)

$$\text{จะได้ } 9a - 3b - 3 = 0 \quad \text{_____ (3)}$$

$$\text{และ } a - b - 3 = -4 \quad \text{_____ (4)}$$

$$3 \times (4) ; \quad 3a - 3b - 9 = -12 \quad \text{_____ (5)}$$

$$\begin{aligned} (3) - (5) ; \quad 6a + 6 &= 12 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่า $a = 1$ ใน (4)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 1 - b - 3 &= -4 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

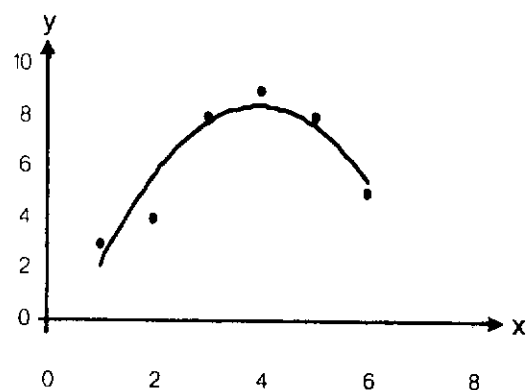
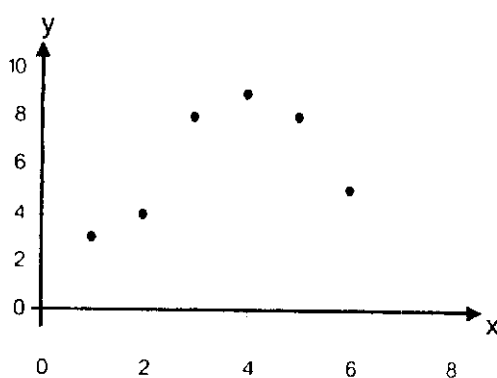
ดังนั้นสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล คือ $\hat{y} = x^2 + 2x - 3$ ☺

หมายเหตุ ให้นักเรียนเลือกจุดที่ต่างจากจุดที่เลือกในตัวอย่างแล้วพิจารณาแบบจำลองที่ได้

ตัวอย่าง 7 จากข้อมูลที่กำหนดให้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	2	3	4	5	6
y	3	4	8	9	8	5

วิธีทำ จากข้อมูลในตารางสามารถสร้างแผนภาพการกระจายได้ดังนี้



จากแผนภาพการกระจายจะพบว่าจุด (x, y) ไม่ได้อยู่บนเส้นโค้งพาราโบลา(เส้นแนวโน้ม)

สมการทั่วไปคือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$

จะคำนวณหาค่า a , b และ c โดยการแทนค่าจุดลงไปในสมการทั่วไปดังนี้

เลือกจุด $(1, 3)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(1)^2 + b(1) + c &= 3 \\ a + b + c &= 3 \end{aligned} \quad \text{_____ (1)}$$

เลือกจุด $(3, 8)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(3)^2 + b(3) + c &= 8 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned} \quad \text{_____ (2)}$$

เลือกจุด $(6, 5)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a(6)^2 + b(6) + c &= 5 \\ \text{ดังนั้น } 36a + 6b + c &= 5 \end{aligned} \quad \text{_____ (3)}$$

จาก (1) จะได้ $c = 3 - a - b$ แล้วนำไปแทนลงใน (2) และ (3)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 9a + 3b + 3 - a - b &= 8 \\ 8a + 2b &= 5 \end{aligned} \quad \text{_____ (4)}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } 36a + 6b + 3 - a - b &= 5 \\ 35a + 5b &= 2 \end{aligned} \quad \text{_____ (5)}$$

$$5 \times (4) ; \quad 40a + 10b \quad = 25 \quad \underline{\hspace{1cm}} (6)$$

$$2 \times (5) ; \quad 70a + 10b \quad = 4 \quad \underline{\hspace{1cm}} (7)$$

$$(6) - (7) ; \quad -30a \quad = 21$$

$$a \quad = -0.7$$

แทนค่า $a = -0.7$ ใน (4)

$$\text{จะได้} \quad 8(-0.7) + 2b = 5$$

$$b = 5.3$$

แทนค่า $a = -0.7$ และ $b = 5.3$ เพื่อหาค่า c

$$c = 3 - (0.7) - 5.3$$

$$= -1.6$$

ดังนั้น สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล คือ

$$\hat{y} = -0.7x^2 + 5.3x - 1.6$$



หมายเหตุ ให้นักเรียนเลือกจุดที่ต่างจากจุดที่เลือกในตัวอย่างแล้วพิจารณาแบบจำลองที่ได้

จากแผนภาพการกระจายในตัวอย่างที่ 6 จะเห็นว่าจุดทุกจุดอยู่บนเส้นโค้งพาราโบลา และไม่ว่าเราจะเลือก 3 จุดใดๆ มาคำนวณหาค่าคงตัวก็จะได้ค่าคงตัวที่เหมือนกัน ซึ่งทำให้ได้แบบจำลองที่เหมือนกันไม่ว่าจะเลือกจุด 3 จุดใดๆ ก็ตาม

แต่จากแผนภาพการกระจายในตัวอย่างที่ 7 จะเห็นว่าจุดบางจุดไม่ได้อยู่บนเส้นโค้งพาราโบลา และเมื่อเราเลือก 3 จุดใดๆ มาคำนวณหาค่าคงตัวจะได้ค่าที่แตกต่างกันออกไปตามจุด 3 จุดที่เลือก ทำให้ได้สมการกำลังสองที่ต่างกันออกไปด้วย แล้วสมการกำลังสองใดที่เหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน นั่นคือสำหรับในกรณีที่เราไม่สามารถสร้างเส้นให้ผ่านจุดจากข้อมูลจริงได้ทุกจุดนั้นเราจะสร้างเส้นแนวโน้มโดยพิจารณาจากแผนภาพการกระจาย ซึ่งค่าตัวแปรตามจากเส้นแนวโน้มควรจะมีความแตกต่างจากค่าตัวแปรของข้อมูลจริงน้อยที่สุด ซึ่งตรงกับวิธีที่จะกล่าวต่อไปนี้

การสร้างแบบจำลองกำลังสองโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งพาราโบลา จะมีสมการทั่วไป คือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$ (เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ, a , b และ c เป็นค่าคงตัวที่ต้องหา และ $a \neq 0$)

ด้วยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อให้ $(\sum (y - \hat{y})^2)$ มีค่าน้อยที่สุดนั้นจะทำให้ได้สมการปกติ 3 สมการ ดังนี้

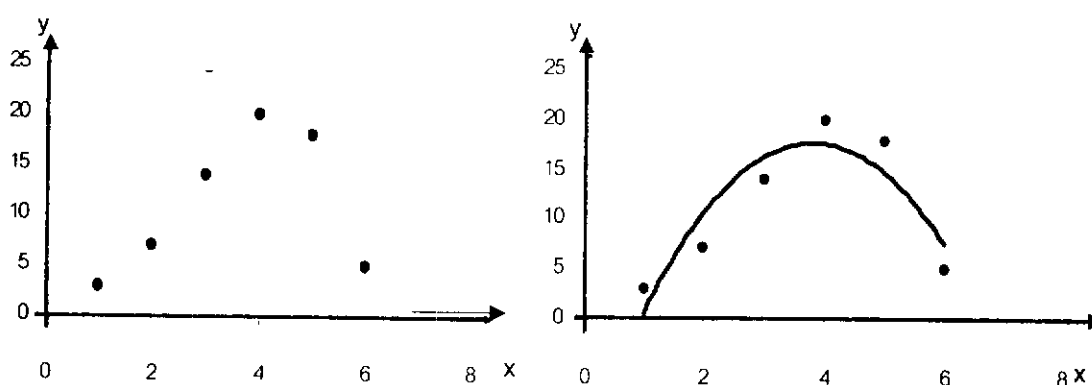
$$\begin{aligned}\sum y &= a\sum x^2 + b\sum x + cn \\ \sum xy &= a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x \\ \sum x^2y &= a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8 จากข้อมูล

x	1	2	3	4	5	6
y	3	7	14	20	18	5

จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ถ้าสมมติว่าแนวโน้มของความสัมพันธ์เป็นเส้นโค้งพาราโบลา

วิธีทำ จากข้อมูลในตารางสามารถสร้างแผนภาพการกระจายได้ดังนี้



จากข้อมูลในโจทย์สามารถสร้างตารางได้ดังนี้

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	3	1	1	1	3	3
2	7	4	8	16	14	28
3	14	9	27	81	42	126
4	20	16	64	256	80	320
5	18	25	125	625	90	450
6	5	36	216	1296	30	180
$\sum x = 21$	$\sum y = 67$	$\sum x^2 = 91$	$\sum x^3 = 441$	$\sum x^4 = 2275$	$\sum xy = 259$	$\sum x^2y = 1107$

สมการทั่วไปของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งพาราโบลา คือ

$\hat{y} = ax^2 + bx + c$ ซึ่งมีสมการปกติ 3 สมการ คือ

$$\sum y = a\sum x^2 + b\sum x + cn$$

$$\sum xy = a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x$$

$$\sum x^2y = a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2$$

จากข้อมูลในตาราง จะได้

$$67 = 91a + 21b + 6c \quad \text{_____ (1)}$$

$$259 = 441a + 91b + 21c \quad \text{_____ (2)}$$

$$1107 = 2275a + 441b + 91c \quad \text{_____ (3)}$$

จากการแก้สมการ (1) , (2) และ (3) จะได้

$$a = -2.16$$

$$b = 16.53$$

$$c = -13.9$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลคือ $\hat{y} = -2.16x^2 + 16.53x - 13.9$

และจากสมการที่ได้เราสามารถทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรอิสระได้

เช่น เมื่อ $x = 3.5$ จะได้ $\hat{y} = -2.16(3.5)^2 + 16.53(3.5) - 13.9$

$$= 17.495$$

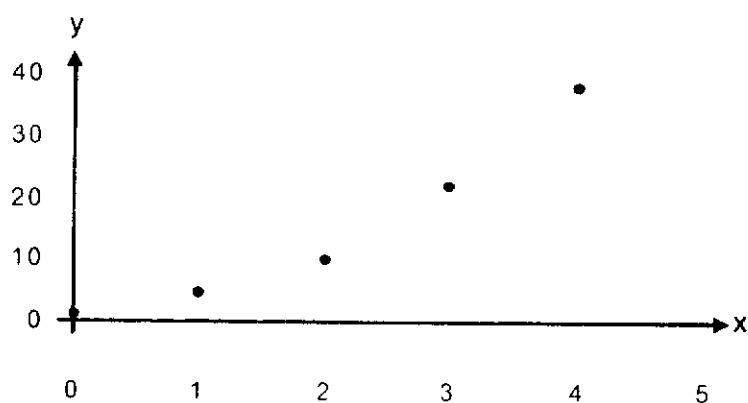


ตัวอย่าง 9 จากข้อมูล

x	0	1	2	3	4
y	1	5	10	22	38

จงหาสมการกำลังสองที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และทำนายค่าของ y เมื่อ $x = 7$

วิธีทำ จากข้อมูลในตารางสามารถสร้างแผนภาพการกระจายได้ดังนี้



พิจารณາตารางต่อไปนี้

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
0	1	0	0	0	0	0
1	5	1	1	1	5	5
2	10	4	8	16	20	40
3	22	9	27	81	66	198
4	38	16	64	256	152	608
$\sum x = 10$	$\sum y = 76$	$\sum x^2 = 30$	$\sum x^3 = 100$	$\sum x^4 = 354$	$\sum xy = 243$	$\sum x^2y = 851$

เนื่องจากโจทย์ต้องการทำนายค่า y เมื่อ $x = 7$ แสดงว่า y จะเป็นตัวแปรตาม

จะได้สมการทั่วไปคือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$

จากข้อมูลในตารางและสมการปกติ จะได้

$$76 = 30a + 10b + 5c \quad \text{_____ (1)}$$

$$243 = 100a + 30b + 10c \quad \text{_____ (2)}$$

$$851 = 354a + 100b + 30c \quad \text{_____ (3)}$$

จากการแก้สมการ (1) , (2) และ (3) จะได้

$$a = 2.21$$

$$b = 0.24$$

$$c = 1.43$$

ดังนั้นสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล คือ

$$\hat{y} = 2.21x^2 + 0.24x + 1.43$$

จากสมการที่ได้เราสามารถทำนายค่าของ y เมื่อ $x = 7$

$$\text{นั่นคือ } \hat{y} = 2.21(7)^2 + 0.24(7) + 1.43$$

$$= 111.4$$



ตัวอย่าง 10 จากข้อมูลในตัวอย่าง 9 จงหาสัมประสิทธิ์การกำหนดและความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

วิธีทำ สมการแสดงความสัมพันธ์จากตัวอย่างที่ 8 คือ $\hat{y} = 2.21x^2 + 0.24x + 1.43$

x	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - \bar{y}$	$y - \bar{y}$	$(\hat{y} - \bar{y})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
0	1	1.43	-13.77	-14.2	189.61	201.64	-0.43	0.1849
1	5	3.88	-11.32	-10.2	128.14	104.04	1.12	1.2544
2	10	10.75	-4.45	-5.2	19.80	27.04	-0.75	0.5625
3	22	22.04	6.84	6.8	46.79	46.24	-0.04	0.0016
4	38	37.75	22.55	22.8	508.50	519.84	0.25	0.0625
$\sum x = 10$	$\sum y = 76$	-			$\sum (\hat{y} - \bar{y})^2 = 892.85$	$\sum (y - \bar{y})^2 = 898.80$		$\sum (y - \hat{y})^2 = 2.0659$

จากตาราง จะได้ $\bar{y} = \frac{76}{5} = 15.2$

$$\text{จาก } r^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

$$\text{จะได้ } r^2 = \frac{892.846}{898.8} = 0.9934$$

ค่า $r^2 = 99.34\%$ หมายความว่าตัวแปรอิสระ x สามารถทำนายตัวแปรตาม y ได้ถูกต้องถึง 99.34 %

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 3} \\ &= \frac{2.0659}{5 - 3} = 1.03295 \end{aligned}$$

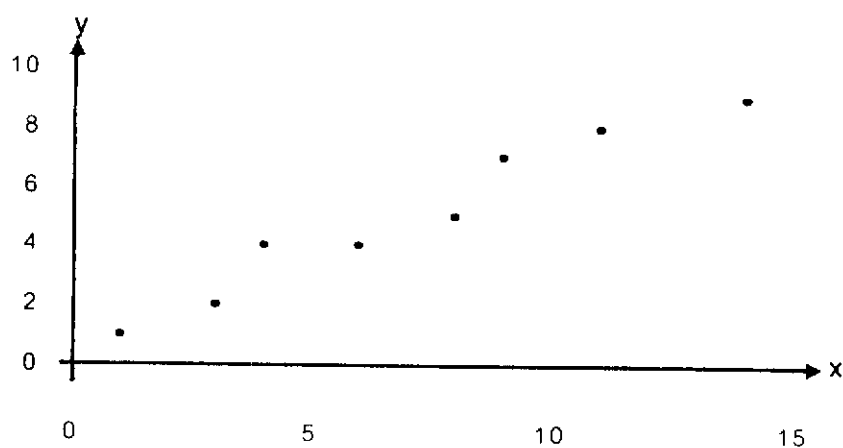
นั่นคือความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่แสดงความสัมพันธ์จากตัวอย่างที่ 9 คือ 1.03295



ตัวอย่าง 11 จากข้อมูลที่กำหนดไว้ในตาราง จงหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม และตรวจสอบว่าสมการใดมีความเหมาะสมกับข้อมูล

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	1	1	1	1	1	1
3	2	9	27	81	6	18
4	4	16	64	256	16	64
6	4	36	216	1296	24	144
8	5	64	512	4096	40	320
9	7	81	729	6561	63	567
11	8	121	1331	14641	88	968
14	9	196	2744	38416	126	1764
$\sum x = 56$	$\sum y = 40$	$\sum x^2 = 524$	$\sum x^3 = 5624$	$\sum x^4 = 65348$	$\sum xy = 364$	$\sum x^2y = 3846$

สร้างแบบจำลองเชิงเส้น

จากตัวอย่าง 4 สมการแสดงความสัมพันธ์ คือ $\hat{y} = 0.6364x + 0.5452$

สร้างแบบจำลองกำลังสอง

สมการทั่วไปของเส้นแนวโน้มคือ $\hat{y} = ax^2 + bx + c$

จากตารางจะได้สมการปกติ ดังนี้

$$40 = 524a + 56b + 8c \quad \text{_____ (1)}$$

$$364 = 5624a + 524b + 56c \quad \text{_____ (2)}$$

$$3846 = 65348a + 5624b + 524c \quad \text{_____ (3)}$$

จากการแก้สมการ (1) , (2) และ (3) จะได้

$$a = -0.0092$$

$$b = 0.7723$$

$$c = 0.1948$$

ดังนั้นสมการแสดงความสัมพันธ์ คือ $\hat{y} = -0.0092x^2 + 0.7723x + 0.1948$

ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง

ตรวจสอบโดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) จากสูตร

$$MSE = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 3}$$

ให้สมการเชิงเส้นเป็น $\hat{y}_s = 0.6364x + 0.5452$

ให้สมการกำลังสองเป็น $\hat{y}_p = -0.0092x^2 + 0.7723x + 0.1948$

x	y	$\hat{y}_s$	$\hat{y}_p$	$y - \hat{y}_s$	$y - \hat{y}_p$	$(y - \hat{y}_s)^2$	$(y - \hat{y}_p)^2$
1	1	1.1816	0.9579	-0.1816	0.0421	0.03298	0.00177
3	2	2.4544	2.4289	-0.4544	-0.4289	0.20648	0.18396
4	4	3.0908	3.1368	0.9092	0.8632	0.82664	0.74511
6	4	4.3636	4.4974	-0.3636	-0.4974	0.1322	0.24741
8	5	5.6364	5.7844	-0.6364	-0.7844	0.405	0.61528
9	7	6.2728	6.4003	0.7272	0.5997	0.52882	0.35964
11	8	7.5456	7.5769	0.4544	0.4231	0.20648	0.17901
14	9	9.4548	9.2038	-0.4548	-0.2038	0.20684	0.04153
$\sum x$ = 56	$\sum y$ = 40					$\sum (y - \hat{y}_s)^2$ 2.5455	$\sum (y - \hat{y}_p)^2$ 2.3737

จากตารางจะได้

$$\begin{aligned} \text{MSE}_1 &= \frac{2.5455}{8-2} \\ &= 0.4243 \end{aligned}$$

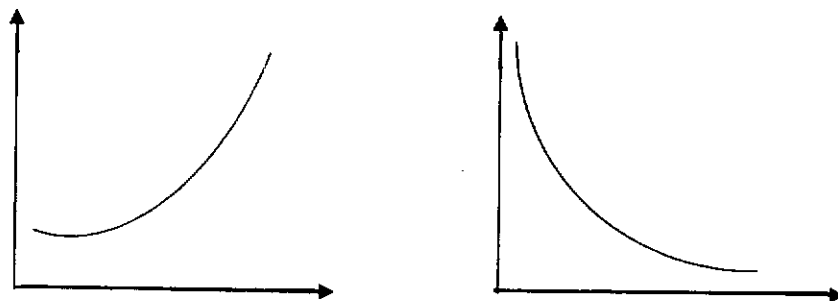
$$\begin{aligned} \text{MSE}_2 &= \frac{2.3737}{8-3} \\ &= 0.4747 \end{aligned}$$

นั่นคือ ค่า MSE ของสมการเส้นตรงมีค่าน้อยกว่าค่า MSE ของสมการกำลังสอง แสดงว่า สำหรับความสัมพันธ์ของข้อมูลชุดนี้ถ้าประมาณด้วยสมการเส้นตรงจะมีความเหมาะสมกว่าสมการกำลังสอง



5. แบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล

ถ้านำข้อมูลมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วพบว่าลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล ดังภาพ



จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล

ดังนั้นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล จะมีสมการทั่วไป คือ $\hat{y} = ba^x$ (เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ และ a, b เป็นค่าคงตัว)

ซึ่งการสร้างสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล จะแปลงสมการทั่วไปโดยใช้สมบัติของลอการิทึม ดังนี้

$$y = ba^x$$

$$\log y = \log(ba^x)$$

$$\log y = \log b + \log(a^x)$$

$$\log y = \log b + (\log a)x$$

$$\log y = (\log a)x + \log b$$

เมื่อเทียบกับสมการเส้นตรง $y = a'x + b'$

นั่นคือ $\log y = y$, $\log a = a'$ และ $\log b = b'$

โดยที่ถ้าสมการทั่วไป คือ $y = a'x + b'$ จะมีสมการปกติ คือ

$$\sum y = a' \sum x + nb'$$

$$\sum xy = a' \sum x^2 + b' \sum x$$

ดังนั้นเราจะได้สมการปกติของสมการเอกซ์โพเนนเชียล $\hat{y} = ba^x$ คือ

$$\sum \log y = (\log a) \sum x + n \log b$$

$$\sum (x \log y) = (\log a) \sum x^2 + (\log b) \sum x$$

จากสมการปกติของสมการเส้นตรง $y = a'x + b'$ จะได้

$$a' = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \quad \text{และ } b' = \bar{y} - a'\bar{x}$$

นั่นคือ $\log a = \frac{\sum x \log y - n\bar{x}(\overline{\log y})}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$ และ $\log b = (\overline{\log y}) - (\log a)\bar{x}$

โดยที่ $\bar{y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

$\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

$\overline{\log y}$ เป็นค่าเฉลี่ยค่า $\log$ ของตัวแปรตาม y

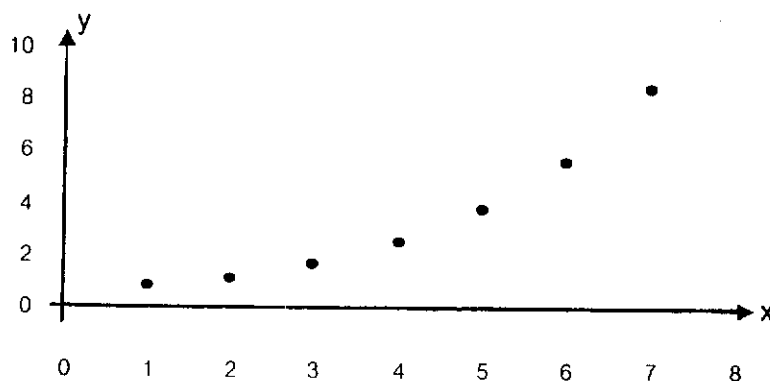
สมการทั่วไปที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล อาจอยู่ในรูป $\hat{y} = ba^x$ หรือ $\log \hat{y} = (\log a)x + \log b$ ก็ได้

ตัวอย่าง 12 ข้อมูลต่อไปนี้ แสดงการเจริญเติบโตของพืชชนิดหนึ่ง จากการสำรวจ 7 สัปดาห์ที่ผ่านมา

x : สัปดาห์ที่	1	2	3	4	5	6	7
y : ความสูง (ซม.)	0.8	1.1	1.7	2.6	3.8	5.7	8.5

จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูล



จากแผนภาพการกระจายแนวโน้มของความสัมพันธ์มีลักษณะเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งมีสมการที่มีตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม คือ

$$\hat{y} = ba^x \quad \text{หรือ} \quad \log \hat{y} = (\log a)x + \log b$$

$$\text{โดยที่} \quad \log a = \frac{\sum x \log y - n \bar{x}(\overline{\log y})}{\sum x^2 - n \bar{x}^2} \quad \text{และ}$$

$$\log b = (\overline{\log y}) - (\log a) \bar{x}$$

พิจารณาดารงต่อไปนี้

x	y	log y	x^2	x log y
1	0.8	-0.0969	1	-0.0969
2	1.1	0.0414	4	0.08279
3	1.7	0.2304	9	0.69135
4	2.6	0.4150	16	1.65989
5	3.8	0.5798	25	2.89892
6	5.7	0.7559	36	4.53525
7	8.5	0.9294	49	6.50593
$\sum x = 28$		$\sum \log y = 2.855$	$\sum x^2 = 140$	$\sum x \log y = 16.2773$

$$\text{จะได้} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\overline{\log y} = \frac{\sum \log y}{n} = \frac{2.855}{7} = 0.4079$$

ดังนั้นจากค่าในตาราง จะได้

$$\log a = \frac{16.2773 - 7(4)(0.4079)}{140 - 7(4)^2} = \frac{16.2773 - 11.4212}{140 - 112} = \frac{4.8561}{28} = 0.1734$$

$$\begin{aligned} \log b &= 0.4079 - (0.1734)4 \\ &= 0.4079 - 0.6936 \\ &= -0.2857 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

$$\log \hat{y} = 0.1734x - 0.2857$$

$$\text{หรือ} \quad \hat{y} = 10^{0.1734x - 0.2857}$$

$$\hat{y} = 0.5179(1.4907^x)$$



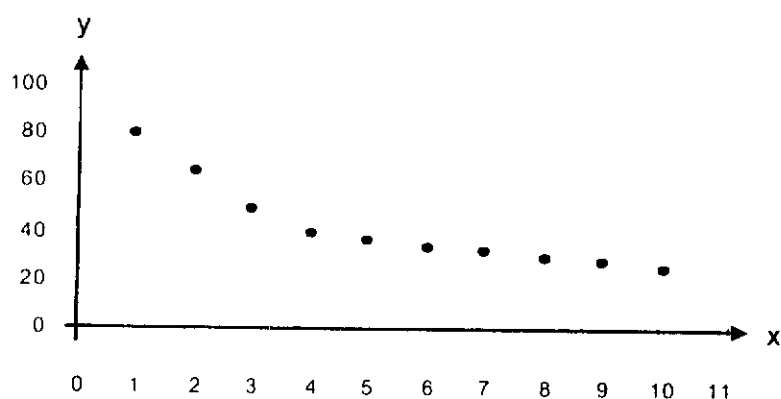
ตัวอย่าง 13 ข้อมูลต่อไปนี้ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนการผลิตสินค้าต่อหน่วยกับจำนวนสินค้าที่ผลิต

x : จำนวนที่ผลิต (X 100)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y : ต้นทุนต่อหน่วย (บาท)	80	65	50	40	37	34	32	30	28	26

จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลและจงทำนายค่า y เมื่อ $x = 650$ และ $x = 2,000$

วิธีทำ เนื่องจากต้องการทำนายค่า y เมื่อกำหนด $x = 650$ และ $x = 2,000$ แสดงว่า y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

สร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูล



จากแผนภาพการกระจายแนวโน้มของความสัมพันธ์มีลักษณะเป็นเส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งมีสมการที่มีตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม ดังนี้

$$\hat{y} = ba^x \quad \text{หรือ} \quad \log \hat{y} = (\log a)x + \log b$$

x	y	log y	x^2	x log y
1	80	1.9031	1	1.90309
2	65	1.8129	4	3.62583
3	50	1.6990	9	5.09691
4	40	1.6021	16	6.40824
5	37	1.5682	25	7.84101
6	34	1.5315	36	9.18887
7	32	1.5051	49	10.536
8	30	1.4771	64	11.817
9	28	1.4472	81	13.0244
10	26	1.4150	100	14.1497
$\sum x = 55$		$\sum \log y = 15.9613$	$\sum x^2 = 385$	$\sum x \log y = 83.5923$

$$\text{ดังนั้น } \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\bar{\log y} = \frac{\sum \log y}{n} = \frac{15.9613}{10} = 1.5961$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \log a &= \frac{83.5923 - 10(5.5)(1.5961)}{385 - 10(5.5)^2} = \frac{83.5923 - 87.7855}{385 - 302.5} \\ &= \frac{-4.1932}{82.5} = -0.0508 \end{aligned}$$

$$\log b = 1.5961 - (-0.0508)(5.5) = 1.5961 + 0.2794 = 1.8755$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

$$\log \hat{y} = 0.0508X + 1.8755$$

$$\text{หรือ } \hat{y} = 10^{-0.0508x + 1.8755}$$

$$\text{หรือ } \hat{y} = 75.0758(0.8896^x)$$

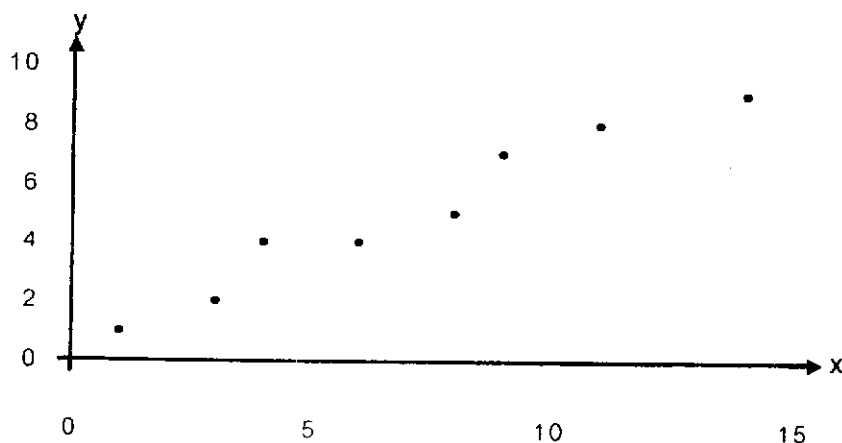
$$\text{ดังนั้นถ้า } x = 650 \quad \text{จะได้ } \hat{y} = 75.0758(0.8896^{6.5}) \approx 35.0967$$

$$\text{และถ้า } x = 2,000 \quad \text{จะได้ } \hat{y} = 75.0758(0.8896^{20}) \approx 18.4432 \quad \text{😊}$$

ตัวอย่าง 14 จากข้อมูลในตัวอย่าง 11 จงพิจารณาว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุดระหว่างแบบจำลองเชิงเส้น แบบจำลองกำลังสองและแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



จากตัวอย่าง 4 สมการเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ $\hat{y} = 0.6364x + 0.5452$

จากตัวอย่าง 11 สมการกำลังสองที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ $\hat{y} = -0.0092x^2 + 0.7723x + 0.1948$

ต่อไปจะสร้างสมการเอกซ์โพเนนเชียลที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตาม

x	y	$\log y$	x^2	$x \log y$
1	1	0	1	0
3	2	0.3010	9	0.9030
4	4	0.6021	16	2.4084
6	4	0.6021	36	3.6126
8	5	0.6989	64	5.5912
9	7	0.8451	81	7.6059
11	8	0.9031	121	9.9341
14	9	0.9542	196	13.3588
$\sum x = 56$	$\sum y = 40$	$\sum \log y = 4.9065$	$\sum x^2 = 524$	$\sum x \log y = 43.4140$

จากตาราง จะได้ $\bar{x} = \frac{56}{8} = 7$ และ $\overline{\log y} = \frac{4.9065}{8} = 0.6133$

ดังนั้น $\log a = \frac{43.414 - 8(7)(0.6133)}{524 - 8(7)^2} = 0.0687$

$\log b = 0.6133 - 0.0687(7) = 0.1324$

นั่นคือ $\log \hat{y} = 0.0687x + 0.1324$

หรือ $\hat{y} = 10^{0.0687x + 0.1324}$

จากทั้ง 3 สมการให้สมการเส้นตรงเป็น $\hat{y}_s = 0.6364x + 0.5452$

ให้สมการกำลังสองเป็น $\hat{y}_p = -0.0092x^2 + 0.7723x + 0.1948$

และให้สมการเอกซ์โพเนนเชียลเป็น $\hat{y}_e = 10^{0.0687x + 0.1324}$

ลำดับต่อไปจะตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองโดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE)

x	y	$\hat{y}_s$	$y - \hat{y}_s$	$(y - \hat{y}_s)^2$	$\hat{y}_p$	$y - \hat{y}_p$	$(y - \hat{y}_p)^2$
1	1	1.1816	-0.1816	0.0330	0.9579	0.0421	0.0018
3	2	2.4544	-0.4544	0.2065	2.4289	-0.4289	0.1840
4	4	3.0908	0.9092	0.8266	3.1368	0.8632	0.7451
6	4	4.3636	-0.3636	0.1322	4.4974	-0.4974	0.2474
8	5	5.6364	-0.6364	0.4050	5.7844	-0.7844	0.6153
9	7	6.2728	0.7272	0.5288	6.4003	0.5997	0.3596
11	8	7.5456	0.4544	0.2065	7.5769	0.4231	0.1790
14	9	9.4548	-0.4548	0.2068	9.2038	-0.2038	0.0415
$\sum x = 56$	$\sum y = 40$			$\sum (y - \hat{y}_s)^2 = 2.5455$			$\sum (y - \hat{y}_p)^2 = 2.3737$

x	y	$\hat{y}_e$	$y - \hat{y}_e$	$(y - \hat{y}_e)^2$
1	1	1.5889	-0.5889	0.3468
3	2	2.1802	-0.1802	0.0325
4	4	2.5539	1.4461	2.0913
6	4	3.5043	0.4957	0.2457
8	5	4.8084	0.1916	0.0367
9	7	5.6325	1.3675	1.8701
11	8	7.7286	0.2714	0.0737
14	9	12.4222	-3.4222	11.7117
$\sum x = 56$	$\sum y = 40$			$\sum (y - \hat{y}_e)^2 = 16.4085$

จากตารางจะได้

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการเส้นตรง คือ

$$MSE_1 = \frac{2.5455}{8 - 2} = 0.4243$$

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการกำลังสอง คือ

$$MSE_2 = \frac{2.3737}{8 - 3} = 0.4747$$

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$$MSE_3 = \frac{16.4085}{8-2} = 2.7348$$

นั่นคือ ค่า MSE ของสมการเส้นตรงมีค่าน้อยที่สุด แสดงว่าสมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลมีความเหมาะสมกว่าสมการกำลังสองและสมการเอกซ์โพเนนเชียล 😊

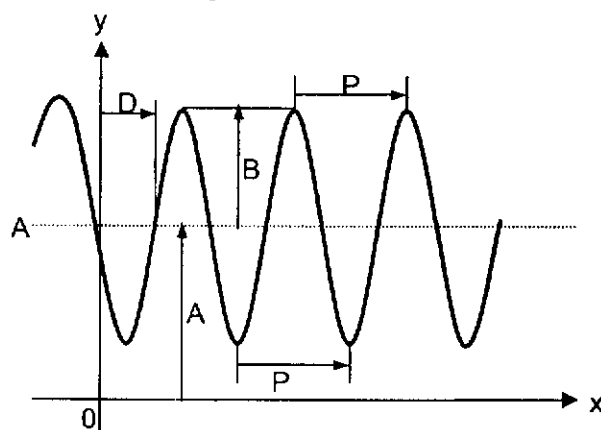
6. แบบจำลองตรีโกณมิติ

แบบจำลองประเภทนี้จะถูกใช้แทนสถานการณ์ที่มีการเคลื่อนไหวเนื่องมาจากฤดูกาล โดยการเคลื่อนไหวจะมีลักษณะขึ้นลงเหมือนลูกคลื่นที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันในแต่ละปี เช่น อุณหภูมิในรอบปีซึ่งจะมีอุณหภูมิต่ำในเดือนมกราคมแล้วจะสูงขึ้นเรื่อยๆ ในเดือนถัดไปและมีค่าสูงสุดประมาณเดือนเมษายนหรือพฤษภาคม แล้วอุณหภูมิก็จะลดลงไปจนถึงเดือนธันวาคม เป็นต้น ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะศึกษาเฉพาะในกรณีที่แนวโน้มของกราฟเป็นเส้นโค้งไซน์

สมการทั่วไปที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งไซน์ คือ

$$\hat{y} = A + B \sin\left(\frac{2\pi(x - D)}{P}\right)$$

- โดยที่ A แทน ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดของ y
 B แทน แอมพลิจูด หรือค่าครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ y
 P แทน คาบ หรือช่วงที่สั้นที่สุดที่กราฟจะซ้ำรูปเดิม
 D แทน เวลาตั้งแต่ $t = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A)
 x - แทน เวลาที่ได้ข้อมูลแต่ละค่า



ภาพแสดงลักษณะต่างๆ ของค่าคงตัวในแบบจำลองตรีโกณมิติ

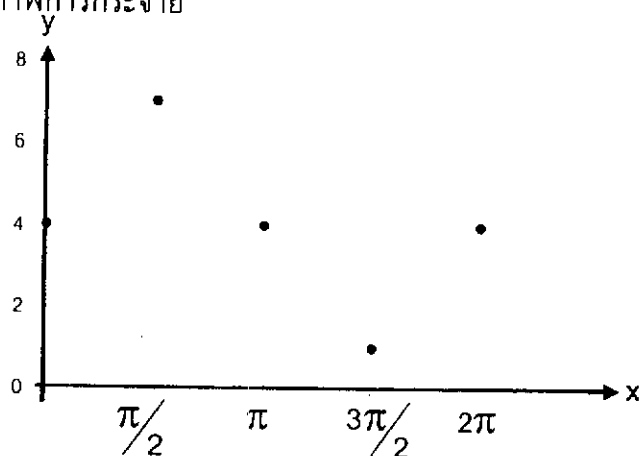
โดยในการหาสมการไซน์นี้จะไม่ใช่วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเหมือนกับแบบจำลอง 3 แบบที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่จะคำนวณหาค่าคงตัวจากข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้เลย ส่วนการตรวจสอบความเหมาะสมก็ใช้ได้เฉพาะค่า MSE เท่านั้น

ตัวอย่าง 15 จงสร้างสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล โดยมี y เป็น

ตัวแปรตาม จากข้อมูลต่อไปนี้ พร้อมทั้งทำนายค่า y เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	4	7	4	1	4

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



จากแผนภาพการกระจายความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งไซน์

$$\text{เลือกสมการ } \hat{y} = A + B \sin\left(\frac{2\pi(t - D)}{P}\right)$$

$$A = \frac{4 + 7 + 4 + 1 + 4}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$B = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

เนื่องจาก D คือเวลาที่ทำให้ $y = A$ ซึ่งในตัวอย่างนี้ $y = 4$ ที่ $x = 0$

นั่นคือ $D = 0$

เนื่องจาก P คือเวลาที่กราฟจะมาซ้ำรูปเดิมเมื่อพิจารณาจากแผนภาพการกระจายแล้ว

พบว่า $P = 2\pi$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตามคือ

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 4 + 3 \sin\left(\frac{2\pi(x - 0)}{2\pi}\right) \\ &= 4 + 3 \sin(x)\end{aligned}$$

ถ้า $x = \frac{\pi}{4}$

จะได้ $\hat{y} = 4 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 $= 4 + 3(0.7854)$
 $= 4 + 2.3562$
 $= 6.3562$

ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองด้วยค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (MSE)

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตามคือ

$$\hat{y} = 4 + 3 \sin(x)$$

พิจารณตารางต่อไปนี้

x	y	$\hat{y}$	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
0	4	4	0	0
$\pi/2$	7	7	0	0
π	4	4	0	0
$3\pi/2$	1	1	0	0
2π	4	4	0	0
				$\sum (y - \hat{y})^2 = 0$

ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของแบบจำลองตรีโกณมิติ หาได้จากสูตร

$$MSE = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 4}$$

ดังนั้น $MSE = \frac{0}{5 - 4} = 0$

จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสองมีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่าสมการที่ได้นี้มีความเหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้

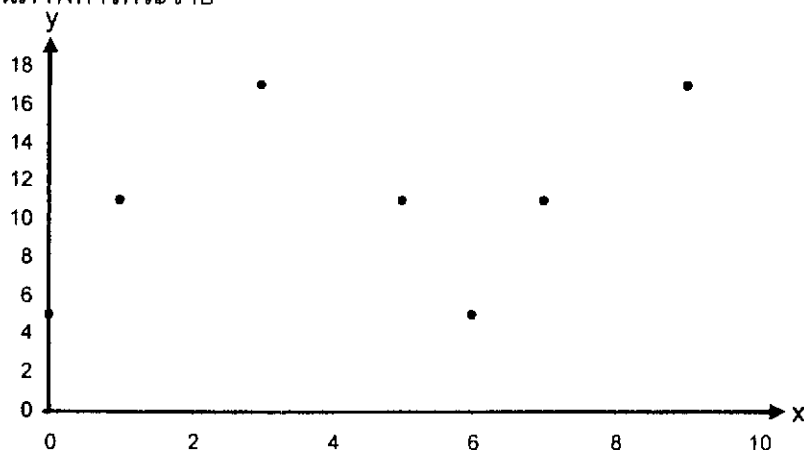


ตัวอย่าง 16 จงสร้างสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล โดยมี y เป็น

ตัวแปรตาม จากข้อมูลต่อไปนี้ พร้อมทั้งทำนายค่า y เมื่อ $x = 4.8$

x	0	1	3	5	6	7	9
y	5	11	17	11	5	11	17

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



จากแผนภาพการกระจายความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งไซน์

ซึ่งมีสมการทั่วไป คือ $\hat{y} = A + B \sin\left(\frac{2\pi(x - D)}{P}\right)$

$$A = \frac{5 + 11 + 17 + 11 + 5}{5} = \frac{49}{5} = 9.8$$

$$B = \frac{17 - 5}{2} = 6$$

เนื่องจากในตัวอย่างนี้ $A = 9.8$ ซึ่งจากข้อมูลที่มีอยู่ไม่มีค่า x ที่ทำให้ $A = y = 9.8$ ดังนั้นจะ
คำนวณหา x ดังนี้

จากตาราง ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 5$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = 11$

นั่นคือ ถ้า y เพิ่มขึ้น $11 - 5 = 6$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $1 - 0 = 1$

ถ้า y เพิ่มขึ้น $9.8 - 5 = 4.8$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $\frac{4.8 \times 1}{6} = 0.8$

ดังนั้น $D = x = 0 + 0.8 = 0.8$

เมื่อพิจารณาจากแผนภาพการกระจายพบว่าเป็นกราฟรูปไซน์เพียงครึ่งเดียวเท่านั้นซึ่งมี
เวลาเป็น 6 เดือน ดังนั้นถ้าจะครบรอบต้องเป็น 12 เดือน นั่นคือ $P = 12$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มี y เป็นตัวแปรตามคือ

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 9.8 + 6 \sin\left(\frac{2\pi(x - 0.8)}{12}\right) \\ &= 9.8 + 6 \sin\left(\frac{\pi(x - 0.8)}{6}\right)\end{aligned}$$

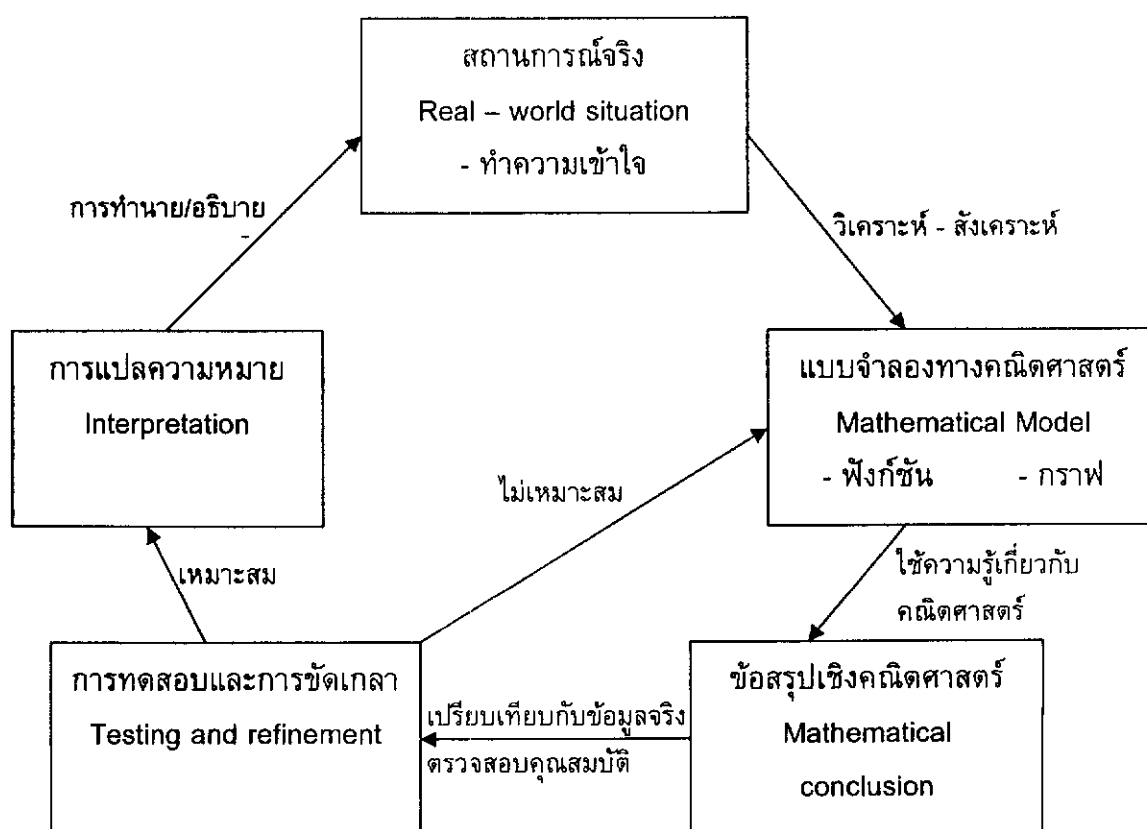
ถ้า $x = 4.8$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \hat{y} &= 9.8 + 6\sin\left(\frac{\pi(4.8 - 0.8)}{6}\right) \\
 &= 9.8 + 6\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) \\
 &= 9.8 + 6\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= 9.8 + 6(0.8660) \\
 &= 14.99
 \end{aligned}$$



6. การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ตามที่ได้กล่าวไปแล้วว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริงกับโลกของคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ซึ่งการศึกษาศถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นจะเริ่มจากสถานการณ์จริงที่เราสนใจ แล้วแทนสถานการณ์จริงนั้นด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แล้วทำการหาผลลัพธ์จากแบบจำลอง และนำคำตอบที่ได้ไปอธิบายสถานการณ์จริงอีกรอบ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ สุธาส ผาสุข ได้เสนอแนวทางไว้ในการพัฒนากระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 5 ขั้นตอน ซึ่งมีลักษณะเป็นวงจร ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ซึ่งแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียด ดังนี้

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง นักเรียนสามารถระบุประเด็นปัญหาของปัญหาที่ต้องการศึกษาได้ถูกต้องหรือไม่ รวมถึงสามารถวิเคราะห์ได้ว่าประเด็นปัญหามีอะไรบ้างเป็นตัวแปร ตัวแปรใดเป็นตัวแปรที่สำคัญหรือตรงประเด็นที่ต้องการศึกษา และตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร
2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถสังเคราะห์ความรู้ต่าง ๆ เช่น มโนคติ สมบัติและกราฟของสมการที่เกี่ยวข้อง ความรู้ทางสถิติ ตลอดจนความรู้เกี่ยวกับการจัดการเชิงคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ในการแทนประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงเส้น กำลังสอง และเอกซ์โพเนนเชียล
3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์หาข้อสรุปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้
4. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถทดสอบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ มีความเหมาะสมกับประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาหรือไม่ ในกรณีพบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังไม่เหมาะสม นักเรียนสามารถขัดเกลาหรือหาแบบจำลองที่เหมาะสมกว่าได้หรือไม่
5. การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง นักเรียนสามารถแปลความหมายจากข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่ประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาได้ตรงประเด็นหรือไม่ รวมไปถึงความสามารถในการให้เหตุผลสนับสนุนหรือชี้แจงการแปลความหมายนั้น

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยในส่วนแรกจะเป็นสถานการณ์จริงที่เราทราบสมการตั้งต้นของแต่ละความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้วทำการคำนวณหาค่าคงตัวของแต่ละสมการ ซึ่งเราเรียกกันว่าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล

ตัวอย่างที่ 17 ตารางต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งกับความยาวของกระดูกท่อนขา (ตั้งแต่เอวไปถึงเข่า) หน่วยเป็นเซนติเมตร

นักเรียนชาย		นักเรียนหญิง	
ความสูง	ความยาวกระดูกท่อนขา	ความสูง	ความยาวกระดูกท่อนขา
155	47	145	47.5
157	47	150	52.5
160	50	153	50
163	49	157	53.5
165	47	157	52
166	51	157	53
167	50	158	56
169	51	159	56
170	53	162	54
175	54	164	59



1. จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนของนักเรียนชาย
2. จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนของนักเรียนหญิง
3. จงทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง 171 เซนติเมตร

วิธีทำ

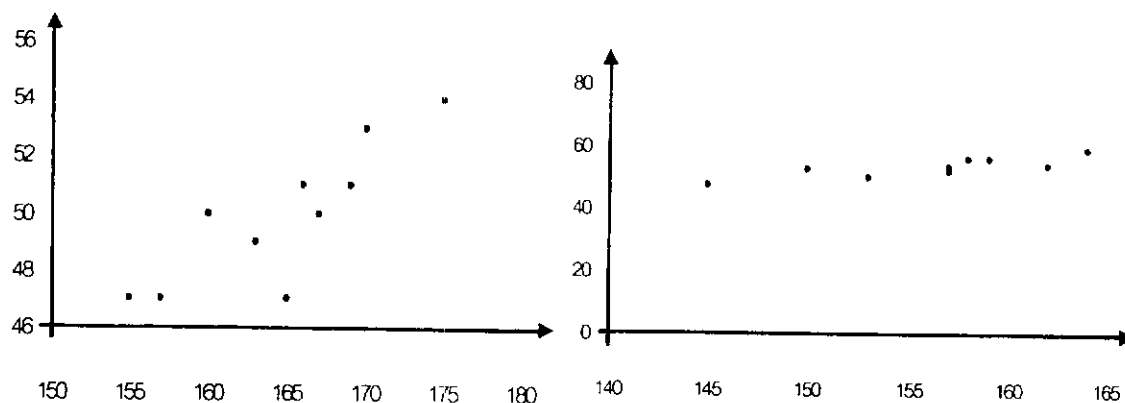
ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวของกระดูกท่อนขา ทั้งของนักเรียนชายและนักเรียนหญิง
2. ประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง 171 เซนติเมตร

ตัวแปรที่สำคัญ ความสูง , ความยาวกระดูกท่อนขา

ความสัมพันธ์เบื้องต้น เนื่องจากข้อมูลประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว แต่ค่าของแต่ละตัวแปรมีหลายค่า ดังนั้นจะต้องพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากแผนภาพการกระจาย



แผนภาพการกระจายของนักเรียนชาย

แผนภาพการกระจายของนักเรียนหญิง

จากแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงและความยาวกระดูกท่อนขาทั้งของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้นจะเลือกสมการเส้นตรง $\hat{y} = ax + b$ เพื่อแสดงความสัมพันธ์

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 2 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

x แทนความสูง (เซนติเมตร)

y แทนความยาวของกระดูกท่อนขา (เซนติเมตร)

และเนื่องจากประเด็นปัญหาต้องการประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อทราบความสูง ดังนั้นตัวแปรอิสระคือความสูง และตัวแปรตามคือความยาวของกระดูกท่อนขา

นั่นคือสมการทั่วไปคือ $\hat{y} = ax + b$

ซึ่งมีสมการปกติ 2 สมการ คือ

$$\sum y = a \sum x + nb$$

$$\sum xy = a \sum x^2 + b \sum x$$

ผู้ชาย				ผู้หญิง			
x	y	x^2	xy	x	y	x^2	xy
155	47	24025	7285	145	47.5	21025	6887.5
157	47	24649	7379	150	52.5	22500	7875
160	50	25600	8000	153	50	23409	7650
163	49	26569	7987	157	53.5	24649	8399.5
165	47	27225	7755	157	52	24649	8164
166	51	27556	8466	157	53	24649	8321
167	50	27889	8350	158	56	24964	8848
169	51	28561	8619	159	56	25281	8904
170	53	28900	9010	162	54	26244	8748
175	54	30625	9450	164	59	26896	9676
$\sum x =$ 1647	$\sum y =$ 499	$\sum x^2 =$ 271599	$\sum xy =$ 82301	$\sum x =$ 1562	$\sum y =$ 533.5	$\sum x^2 =$ 244266	$\sum xy =$ 83473

จากตารางจะได้ค่าเฉลี่ยของความสูงนักเรียนชายคือ $\bar{x}_1 = \frac{1647}{10} = 164.7$ และ

ค่าเฉลี่ยของความยาวกระดูกท่อนขานักเรียนชาย $\bar{y}_1 = \frac{499}{10} = 49.9$

ค่าเฉลี่ยของความสูงนักเรียนหญิงคือ $\bar{x}_2 = \frac{1562}{10} = 156.2$ และ

ค่าเฉลี่ยของความยาวกระดูกท่อนขานักเรียนหญิง $\bar{y}_2 = \frac{533.5}{10} = 53.35$

จากตารางจะได้สมการปกติของนักเรียนชาย คือ

$$499 = 1647a_1 + 10b_1 \quad \text{_____ (1)}$$

$$82301 = 271599a_1 + 1647b_1 \quad \text{_____ (2)}$$

จากตารางจะได้สมการปกติของนักเรียนหญิง คือ

$$533.5 = 1562a_2 + 10b_2 \quad \text{_____ (1)}$$

$$83473 = 244266a_2 + 1562b_2 \quad \text{_____ (2)}$$

และจากสมการปกติสามารถหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad a_1 &= \frac{82301 - 10(164.7)(49.9)}{271599 - 10(164.7)^2} \\
 &= \frac{115.7}{338.1} = 0.3422 \\
 b_1 &= 49.9 - 0.3422(164.7) \\
 &= -6.4603
 \end{aligned}$$

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$

$$\begin{aligned}
 \text{และจะได้} \quad a_1 &= \frac{83473 - 10(156.2)(53.35)}{244266 - 10(156.2)^2} \\
 &= \frac{140.3}{281.6} = 0.4982 \\
 b_1 &= 53.35 - 0.4982(156.2) = -24.4688
 \end{aligned}$$

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$

และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$

ประเด็นปัญหาข้อที่ 2 คือประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง
171 เซนติเมตร นั่นคือ $x = 171$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \hat{y}_1 &= 0.3422(171) - 6.4603 = 52.0559 \text{ เซนติเมตร} \\
 \hat{y}_2 &= 0.4982(171) - 24.4688 = 60.7234 \text{ เซนติเมตร}
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$ ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ
 $MSE_1 = 1.9133$ และค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ $r_1^2 = 72.12$ แสดงว่าความสูงของ
นักเรียนชายมีส่วนในการทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาได้ดีถึง 72.12 %

และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขาของ
นักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองคือ
 $MSE_2 = 3.0780$ และค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ $r_2^2 = 73.95$ แสดงว่าความสูงของ
นักเรียนหญิงมีส่วนในการทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาได้ดีถึง 73.95 %

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

ถ้าทั้งผู้ชายและผู้หญิงที่มีความสูง 171 เซนติเมตร จะมีความยาวของกระดูก
ท่อนขาประมาณ 52 เซนติเมตร และ 61 เซนติเมตร ตามลำดับ



ตัวอย่างที่ 18 จากข้อมูลของกรมอุตุนิยมวิทยาในการรวบรวมข้อมูลอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีเวลา
กลางคืนในปีพ.ศ. 2545 ของสถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร ดังนี้

เดือน	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.
อุณหภูมิเฉลี่ย รายปี ($^{\circ}\text{C}$)	18.2	19.8	22.4	24.7	25.1	25.5	25	24.6	24.3	23.6	21.4	18

จากข้อมูลอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีในตาราง จงหาสมการที่ใช้ทำนายอุณหภูมิของเดือน
กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548 ในจังหวัดกำแพงเพชร

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

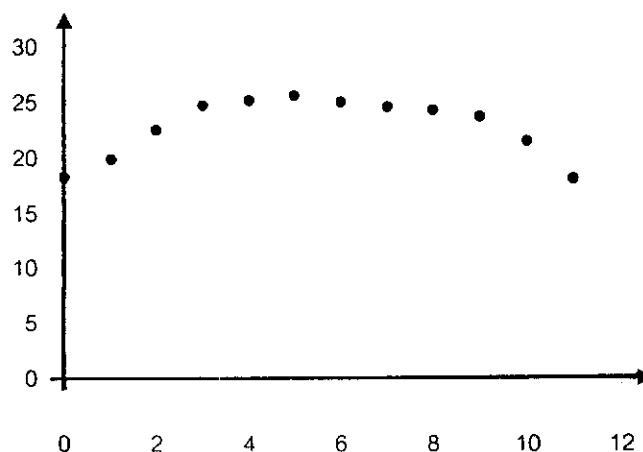
ประเด็นปัญหาคือ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (สมการ) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง
อุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา ทั้งที่จังหวัดกำแพงเพชร
2. ทำนายอุณหภูมิของเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548

ตัวแปรที่สำคัญ อุณหภูมิเฉลี่ยรายปี , เวลา (มกราคม – ธันวาคม)

ความสัมพันธ์เบื้องต้น จะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากแผนภาพ

การกระจาย โดยการสร้างแผนภาพการกระจายและการกำหนดค่า x เดือนแรกจะเริ่มที่ 0 แล้วเดือน
ถัดไปเพิ่มขึ้นทีละ 1 เสมอ



จากแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและเวลาที่จังหวัดกำแพงเพชร มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งพาราโบลา แต่เนื่องจากข้อมูลในสถานการณ์นี้เป็นอุณหภูมิที่มีการเคลื่อนไหวตามฤดูกาล นั่นคือในอุณหภูมิของเดือนมกราคม, กุมภาพันธ์ และ มีนาคม ในปีถัดไปจะเท่ากันหรือใกล้เคียงกับอุณหภูมิของเดือนเดียวกันในปีที่ผ่านมา ทำให้กราฟที่ได้เป็นกราฟรูปคลื่น ดังนั้นจะ

เลือกสมการเส้นโค้งไซน์ $y = A + B \sin\left(\frac{2\pi(x - D)}{P}\right)$ เพื่อแสดงความสัมพันธ์

- โดยที่ A แทน ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดของ y
 B แทน แอมพลิจูด หรือค่าครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ y
 P แทน คาบ หรือช่วงที่สั้นที่สุดที่กราฟจะซ้ำรูปเดิม
 D แทน เวลาตั้งแต่ $t = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A)
 x แทน เวลาที่ได้ข้อมูลแต่ละค่า

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 2 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

x แทนเวลา (มกราคม - ธันวาคม) เนื่องจากเลือกสมการเส้นโค้งไซน์ในการแทนความสัมพันธ์ของข้อมูล ดังนั้นเวลาจะเริ่มตั้งแต่ 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 11

y แทนอุณหภูมิเฉลี่ยรายปี (องศาเซลเซียส)

ให้ A แทนค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีที่จังหวัดกำแพงเพชร
 จะได้

$$A = \frac{18.2 + 19.8 + 22.4 + 24.7 + 25.1 + 25.5 + 25 + 24.6 + 24.3 + 21.4 + 18}{12}$$

$$= \frac{272.6}{12} = 22.72$$

ให้ B แทนแอมพลิจูดของกราฟจากข้อมูลที่จังหวัดกำแพงเพชร
 จะได้

$$B = \frac{25.5 - 18}{2} = \frac{7.5}{2} = 3.75$$

เนื่องจากข้อมูลนี้เป็นอุณหภูมิเฉลี่ยรายปี ดังนั้นคาบหรือค่า $P = 12$

ให้ D แทนเวลาตั้งแต่ $x = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A) ของข้อมูลจังหวัด

กำแพงเพชร

เนื่องจากในตัวอย่างนี้ $A = 22.72$ ซึ่งจากข้อมูลที่มีอยู่ไม่มีค่า x ที่ทำให้ $A = y = 22.72$ และ ดังนั้นจะคำนวณหา x ดังนี้

- จากตาราง ถ้า $x = 2$ (มีนาคม) จะได้ $y = 22.4$
 ถ้า $x = 3$ (เมษายน) จะได้ $y = 24.7$

นั่นคือ ถ้า y เพิ่มขึ้น $24.7 - 22.4 = 2.3$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $3 - 2 = 1$
 ถ้า y เพิ่มขึ้น $22.72 - 22.4 = 0.32$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $\frac{0.32 \times 1}{2.3} = 0.14$
 ดังนั้น $D = x = 2 + 0.14 = 2.14$

เมื่อได้ค่าคงตัวครบแล้วก็จะนำไปแทนลงในสมการทั่วไป

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{2\pi(x - 2.14)}{12}\right) \\ &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)\end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\hat{y} = 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)$$

และประเด็นปัญหาข้อที่ 2 คือ ทำนายอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีของเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548

นั่นคือ $t = 1$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \hat{y} &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(1 - 2.14)}{6}\right) \\ &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(-1.14)}{6}\right) \\ &\approx 22.72 - 3.75(0.56) \\ &\approx 22.72 - 2.1 \\ &\approx 20.62 \text{ องศาเซลเซียส}\end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\hat{y} = 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)$$

เมื่อคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มีค่าเท่ากับ 2.1170

ซึ่งสถานการณ์ในตัวอย่างนี้เหมาะสำหรับสมการไซน์เท่านั้นจึงไม่จำเป็นต้องขัดเกลาแบบจำลองใหม่ แต่ถ้าศึกษาในระดับที่สูงขึ้นไปจะพบว่า มีสมการที่เหมาะสมกับสถานการณ์นี้อีก

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

อุณหภูมิจนเฉลี่ยรายปีตอนกลางคืนในเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548 ที่จังหวัดกำแพงเพชร มีค่าประมาณ 20.61 องศาเซลเซียส

สำหรับในตัวอย่างต่อไปจะเป็นการศึกษาสถานการณ์จริงในลักษณะที่เราไม่ทราบสมการตั้งต้นของความสัมพันธ์และตัวแปรที่สัมพันธ์กันอาจมีมากกว่า 2 ตัว นั่นคือตัวแปรอิสระอาจมีมากกว่า 1 ตัวแต่ตัวแปรตามจะยังมีตัวเดียวเหมือนเดิม ดังนั้นสิ่งแรกก็คือเราต้องหาความสัมพันธ์จากข้อมูลในสถานการณ์จริงให้ได้ เมื่อได้สมการตั้งต้นแล้วเราก็หาค่าคงตัวในแต่ละสมการโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19 เมื่อตอนสุตาเกิด พ่อได้ฝากเงินไว้กับธนาคาร 10,000 บาท เพื่อให้เป็นของขวัญในวันเกิด ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 3 บาทต่อปี อยากทราบว่าถ้าสุตามีอายุครบ 5 ปี จะมีเงินรวม (เงินต้น + ดอกเบี้ย เมื่อครบ 5 ปี) ในธนาคารทั้งหมดกี่บาท

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมดเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี

ตัวแปรที่สำคัญ เงินรวม , ดอกเบี้ย , เงินต้น , เวลาที่ฝากเงิน

ความสัมพันธ์เบื้องต้น เมื่อเวลาฝากเงินเพิ่มขึ้น เงินฝากก็จะเพิ่มขึ้นเพราะธนาคาร

จะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้กับผู้ฝาก

ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,000 = 300 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ย} = 10,000 + 300 = 10,300 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 2 ปี เงินรวมของปีที่ 1 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 2

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,300 = 309 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,300 + 309 = 10,609 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 3 ปี เงินรวมของปีที่ 2 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 3

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,609 = 318.27 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,609 + 318.27 = 10,927.27 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 4 ปี เงินรวมของปีที่ 3 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 4

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,927.27 = 327.82 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,927.27 + 327.82 = 11,255.09 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 5 ปี เงินรวมของปีที่ 4 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 5

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 11,255.09 = 337.65 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 11,255.09 + 337.65 = 11592.74 \text{ บาท}$$

แสดงว่าเมื่อครบรอบวันเกิดปีที่ 5 ของสุดา จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมด 11592.74 บาท แต่ถ้าต้องการทราบเงินรวมในปีที่ 10 หรือปีที่ 15 ก็ต้องทราบเงินรวมในปีก่อนหน้านั้นๆ ก่อน ซึ่งไม่สะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจึงจะหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปัญหาในลักษณะนี้

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 4 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

P แทนเงินต้น (บาท)

t แทนจำนวนปีที่ฝากเงิน (ปี)

r แทนอัตราดอกเบี้ยต่อปี

S แทนเงินรวมแบบดอกเบี้ยทบต้น (บาท)

จากการคำนวณในขั้นที่ 1 จะพิจารณาในรูปทั่วไปของตัวแปร

นั่นคือ เมื่อครบ 1 ปี

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = \text{เงินต้น} \times \text{อัตราดอกเบี้ย} = Pr \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ย} = P + Pr = P(1 + r) \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 2 ปี เงินรวมของปีที่ 1 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 2

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)^2 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 3 ปี เงินรวมของปีที่ 2 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 3

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^2 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^2 + P(1 + r)^2 r = P(1 + r)^2 (1 + r) = P(1 + r)^3 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 4 ปี เงินรวมของปีที่ 3 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 4

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^3 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^3 + P(1 + r)^3 r = P(1 + r)^3 (1 + r) = P(1 + r)^4 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 5 ปี เงินรวมของปีที่ 4 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 5

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^4 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^4 + P(1 + r)^4 r = P(1 + r)^4 (1 + r) = P(1 + r)^5 \text{ บาท}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

เมื่อครบ t ปี เงินรวมของปีที่ $t - 1$ จะเป็นเงินต้นของปีที่ t

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^{t-1} r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^{t-1} + P(1 + r)^{t-1} r = P(1 + r)^{t-1} (1 + r)$$

$$= P(1 + r)^{t-1+n} = P(1 + r)^t \text{ บาท}$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของปัญหานี้คือ

$$S = P(1 + r)^t$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ประเด็นปัญหาคือ จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมดเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี

จากสมการ $S = P(1 + r)^t$

ซึ่ง $P = 10,000$ บาท , $r = 0.03$ ต่อปี , $t = 5$ ปี

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S &= 10,000(1 + 0.03)^5 \\ &= 10,000(1.03)^5 \\ &\approx 10,000 \times 1.1593 \\ &\approx 11,593 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการคำนวณในขั้นที่ 1 เมื่อครบ 5 ปี สุดามีเงินรวมทั้งหมด 11,592.74 บาท

และจากการคำนวณโดยสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ในขั้นที่ 3

เมื่อครบ 5 ปี สุดามีเงินรวมทั้งหมด 11,593 บาท

นั่นแสดงว่าค่าที่ได้จากการคำนวณโดยตรงกับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลมีความแตกต่างกันไม่มาก ($11,593 - 11,592.74 = 0.26$) ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้มีความเหมาะสมกับสถานการณ์ปัญหานี้

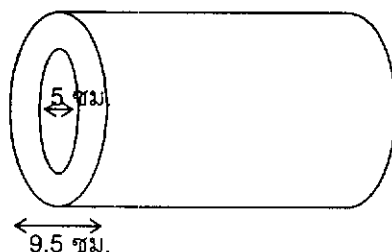
ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

จาก $S \approx 11,593$ บาท

นั่นคือ เมื่อสุดามีอายุครบ 5 ปี จะมีเงินรวมในธนาคารประมาณ 11,593 บาท ☺

ตัวอย่างที่ 20 กระดาษชำระชนิดม้วน ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร แกนกระดาษมี

เส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และถ้ากระดาษมีความหนา 0.01 เซนติเมตร อยากทราบว่ากระดาษม้วนนี้มีความยาวเท่าไร และจงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหานี้



วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ กระดาษม้วนจะมีความยาวเท่าไร เมื่อกระดาษม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร แกนกระดาษม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และกระดาษมีความหนา 0.1 เซนติเมตร

ตัวแปรที่สำคัญ รัศมีของกระดาษม้วน , รัศมีของแกนกระดาษ , ความหนาของกระดาษ , ความยาวทั้งหมดของกระดาษม้วน , จำนวนรอบของกระดาษม้วน

ความสัมพันธ์เบื้องต้น ความยาวของกระดาษม้วนในแต่ละรอบจะเพิ่มขึ้นเสมอ เพราะกระดาษมีความหนา นั่นคือความยาวรอบที่ 1 ของกระดาษม้วนก็คือความยาวของเส้นรอบวงกลมของแกนกระดาษนั่นเอง

ดังนั้น เมื่อครบ 1 รอบ

$$\text{กระดาษมีความยาว} = 2\pi r = 2\pi(2.5) = 15.71 \text{ เซนติเมตร}$$

เมื่อครบ 2 รอบ

$$\text{กระดาษมีความยาว} = 2\pi r = 2\pi(2.5 + 0.01) = 15.78 \text{ เซนติเมตร}$$

นั่นคือในรอบถัดไปเรื่อยๆ ความยาวของกระดาษในแต่ละรอบก็จะเพิ่มตามจำนวนรอบ

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 5 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

L แทนความยาวทั้งหมดของกระดาษม้วน (เซนติเมตร)

R แทนรัศมีของกระดาษม้วน (เซนติเมตร)

r แทนรัศมีของแกนกระดาษ (เซนติเมตร)

t แทนความหนาของกระดาษ (เซนติเมตร)

N แทนจำนวนรอบของกระดาษม้วน (รอบ)

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ 1} = 2\pi r$$

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ 2} = 2\pi(r + t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ 3} = 2\pi(r + 2t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ 4} = 2\pi(r + 3t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ 5} = 2\pi(r + 4t)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{ความยาวของกระดาษรอบที่ N} = 2\pi[r + (N - 1)t]$$

นั่นคือ ความยาวของกระดาม้วนทั้งหมด (L)

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi r + 2\pi(r+t) + 2\pi(r+2t) + 2\pi(r+3t) + \dots + 2\pi[r+(N-1)t] \\
 &= \underbrace{(2\pi r + 2\pi r + 2\pi r + \dots + 2\pi r)}_{N \text{ ตัว}} + [2\pi t + 2\pi 2t + 2\pi 3t + \dots + 2\pi(N-1)t] \\
 &= 2\pi rN + 2\pi t[1 + 2 + 3 + \dots + (N-1)] \\
 &= 2\pi rN + 2\pi t \frac{(N-1)(N-1+1)}{2} \\
 &= 2\pi rN + \pi t(N-1)N
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของปัญหานี้คือ

$$L = 2\pi rN + \pi t(N-1)N$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

กระดาม้วนจะมีความยาวเท่าไร เมื่อกระดาม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร
แกนกระดาม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และกระดามีความหนา 0.1 เซนติเมตร

$$\text{จากสมการ } L = 2\pi rN + \pi t(N-1)N$$

ซึ่ง $r = 2.5$ เซนติเมตร , $t = 0.01$ เซนติเมตร

$$N = \frac{\text{ความหนาของกระดาม้วน}}{\text{ความหนาของกระดาม้วน}}$$

$$N = \frac{\text{รัศมีของกระดาม้วน} - \text{รัศมีของแกนกระดาม้วน}}{\text{ความหนาของกระดาม้วน}}$$

$$N = \frac{4.75 - 2.5}{0.01} = 225 \text{ รอบ}$$

$$\text{ดังนั้น } L = 2\pi(2.5)(225) + \pi(0.01)(225-1)225$$

$$= 5117.6544 \text{ เซนติเมตร}$$

$$= 51.1765 \text{ เมตร}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ปัญหานี้สร้างจากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องหลาย ๆ ตัว ดังนั้นจะไม่มีการทดสอบแบบจำลองที่ได้ แต่จะพิจารณาถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบแทน

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

$$\text{จาก } L = 51.1765 \text{ เมตร}$$

นั่นคือ กระดาม้วนนี้มีความยาวประมาณ 51 เมตร



ภาคผนวก ง

คู่มือครูและแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

คู่มือการใช้ชุดการสอน เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

1. หลักการและเหตุผล

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และยิ่งไปกว่านั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่ทำให้วิทยาการสาขาต่างๆ และเทคโนโลยีเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว อาชีพต่างๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน เช่น วิศวกรไฟฟ้าต้องมีความรู้เรื่องแคลคูลัส สมการเชิงอนุพันธ์ อุตสาหกรรมต้องมีความรู้เรื่องสถิติว่าด้วยการควบคุมคุณภาพ ผู้บริหารต้องสามารถแปลความของข้อมูลทางสถิติได้ อีกทั้งคณิตศาสตร์ ยังเป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการรู้เรื่องทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากกระบวนการของการศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะเป็นกระบวนการที่เริ่มต้นจากสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เราสนใจ จากนั้นแทนสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจสร้างขึ้นเองโดยอาศัยมโนคติทางคณิตศาสตร์หรือด้วยการเลือกจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่แล้วในรูปแบบของสูตร สมการ หรือฟังก์ชันที่พิจารณาแล้วว่าเหมาะกับสถานการณ์จริงนั้นมากที่สุด และเมื่อได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วก็ดำเนินการหาผลลัพธ์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลายๆ อย่างผสมผสานกัน แล้วนำไปอธิบายสถานการณ์จริงหรือนำไปทำนายอนาคตของสถานการณ์จริงนั้นต่อไป ซึ่งนักเรียนที่ได้เกี่ยวข้องกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะสามารถเปลี่ยนมุมมองของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ จากวิชาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทที่แน่นอน เปลี่ยนเป็นวิชาที่การคาดเดาก็เป็นวิธีการที่เหมาะสมได้ถ้ามีการตรวจสอบข้อคาดเดาที่ถูกต้อง เปลี่ยนเป็นวิชาที่การสร้างสรรค์เป็นสิ่งที่มีความหมายและมีคุณค่า เปลี่ยนเป็นวิชาที่คำตอบของสถานการณ์ปัญหาไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียว และเปลี่ยนเป็นวิชาซึ่งการคิดเป็นสิ่งที่มีความหมายมากกว่าการคำนวณ การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในตัวนักเรียนจากการแยกตัวออกไปทำงานคนเดียวและการฟังเพื่อจดบันทึก ไปสู่การทำงานเป็นกลุ่ม ไปสู่การตัดสินใจในการวางแผนเก็บรวบรวมและการวิเคราะห์ข้อมูล การพัฒนาสมมติฐานการสร้างสมการและการสื่อสารผลลัพธ์ที่ได้ เป้าหมายในการสอนของครูต้องทำให้ได้อีกอย่างหนึ่งก็คือการสอนนักเรียนแล้วนักเรียนสามารถนำเอาความรู้ที่ได้หรือที่มีอยู่ไปใช้ด้วยความมั่นใจ รอบรู้ และสามารถแก้ปัญหาสถานการณ์จริงของโลก ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็เป็นหนึ่งในรูปแบบของ

การแก้ปัญหา นั้น โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะช่วยแก้ปัญหาเหล่านั้นโดยใช้ทักษะที่หลากหลายของคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบและยังจะช่วยให้นักเรียนได้เห็นถึงการประยุกต์ของคณิตศาสตร์อีกด้วย นักเรียนที่ได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีความซาบซึ้งในศักยภาพของคณิตศาสตร์

กรมวิชาการได้กล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ ในสาระที่ 4 พืชมคณิต มาตรฐาน ค 4.2 โดยมีใจความสำคัญคือ ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้ แล้วยังได้เสนอองค์ประกอบหลักที่ช่วยส่งเสริมการพัฒนาการเรียนรู้ทักษะ/กระบวนการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนควรมีทักษะในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างความสัมพันธ์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่ต้องเกี่ยวข้องด้วย และอีกองค์ประกอบหลักก็คือ นักเรียนควรมีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่หาได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้นอย่างสมเหตุสมผล

จากสภาพปัญหาและความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นนั้น ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะสร้างบทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อสอนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์มากขึ้นกว่าที่เป็นอยู่ และสามารถนำเอาความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ไปใช้อธิบายหรือแก้ปัญหาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงได้

2. วัตถุประสงค์

เพื่อให้ครูใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

3. สาระการเรียนรู้

บทเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. บทนิยาม ชนิดและความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 1 คาบ
2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 9 คาบ
 - 2.1 การสร้างแบบจำลองเชิงเส้นและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.2 การสร้างแบบจำลองกำลังสองและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.3 การสร้างแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียลและการตรวจสอบความเหมาะสม
 - 2.4 การสร้างแบบจำลองตรีโกณมิติและการตรวจสอบความเหมาะสม

3. การประยุกต์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จำนวน 5 คาบ

4. แนวทางในการใช้ชุดการสอน

ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วย คู่มือการใช้ชุดการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้ บทเรียน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในการใช้ชุดการสอนให้ปฏิบัติตามคู่มือการใช้ชุดการสอน ใบกิจกรรมต่างๆ ให้ปฏิบัติตามแผนการจัดการเรียนรู้ และเมื่อเสร็จสิ้นการสอนในทุกหน่วยการเรียนรู้แล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการเรียนการสอน

ในส่วนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นั้น จะวัดจาก 3 ส่วนคือ คะแนนจากการปฏิบัติกิจกรรมระหว่างเรียน 25 คะแนน คะแนนจากการทำโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 25 คะแนน และคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 50 ซึ่งมีเกณฑ์การประเมินโครงการทางคณิตศาสตร์ดังนี้

5. ข้อเสนอแนะในการใช้ชุดการเรียน

ในการใช้ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ ครูควรศึกษากิจกรรมการเรียนการสอนทุกขั้นตอนก่อนดำเนินการสอน จัดเตรียมสื่อการเรียนรู้ในแต่ละครั้งให้พร้อม นอกจากนี้ในขณะดำเนินการสอนครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมแสดงความคิดเห็นและแสดงเหตุผลต่างๆ และควรให้คำแนะนำสำหรับบางกิจกรรมที่นักเรียนไม่คุ้นเคย และสามารถใช้เครื่องคิดเลขหรือโปรแกรมสำเร็จรูปช่วยคำนวณในกิจกรรมที่ยุ่งยากและซับซ้อนได้

6. เกณฑ์ในการให้คะแนนโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 25 คะแนน จะประเมินจาก 3 ส่วน ดังนี้

1. ปัญหาหรือสถานการณ์จริงที่ศึกษา 5 คะแนน โดยประเมินจาก

- 1) ตรงตามความสนใจของนักเรียน
- 2) ตรงตามระดับความรู้และความสามารถของตน
- 3) มีความเหมาะสมในเรื่องเวลา งบประมาณ กำลังคน
- 4) มีแหล่งข้อมูลในการศึกษาค้นคว้า
- 5) มีประโยชน์ในการทำให้เกิดความรู้ใหม่ๆ หรือนำไปใช้ปรับปรุงแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้
- 6) มีแนวทางการดำเนินงาน หรือแนวทางการแก้ปัญหา
- 7) เป็นปัญหาที่มีความเฉพาะเจาะจงชัดเจนและไม่กว้างเกินไป
- 8) เป็นปัญหาที่ส่งเสริมด้านความคิดสร้างสรรค์

2. การนำเสนอโครงการ 5 คะแนน โดยประเมินจาก

- 1) การเสนอโครงการสื่อความหมายให้ผู้อื่นเข้าใจได้
- 2) การบรรยายชัดเจน
- 3) แผนภาพ ตาราง หรืออุปกรณ์ประกอบในการนำเสนอมีความชัดเจน
- 4) การเสนอโครงการแต่ละส่วนสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์

โดยในแต่ละข้อมีหลักในการให้คะแนน ดังนี้

ดีมาก	มีคะแนนเท่ากับ 5 คะแนน
ดี	มีคะแนนเท่ากับ 4 คะแนน
ปานกลาง	มีคะแนนเท่ากับ 3 คะแนน
น้อย	มีคะแนนเท่ากับ 2 คะแนน
น้อยมาก	มีคะแนนเท่ากับ 1 คะแนน

3. เนื้อหาของโครงการ 15 คะแนน โดยนำเกณฑ์การประเมินจากเกณฑ์ที่สุรสาธิต ผาสุข (2546 : 97-99) และฮอดสัน (Hodgson. 1995 : 357-358) เสนอไว้เป็นแนวทางมาใช้ประเมินในส่วนที่เป็นกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาสถานการณ์จริง ซึ่งแบ่งได้ดังนี้

1) การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้อย่างชัดเจนโดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นระหว่างตัวแปรได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้โดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นระหว่างตัวแปรได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน 2 ใน 3

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้บ้างโดยสามารถระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน 1 ใน 3

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถทำความเข้าใจสถานการณ์จริงได้โดยระบุประเด็นปัญหา ตัวแปรสำคัญและความสัมพันธ์เบื้องต้นของตัวแปรได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่สามารถแสดงความคิดเห็นใดๆ

2) การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้นและ/หรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้น และ/หรือสร้าง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้อย่างถูกต้อง แต่ขาดความครบถ้วนหรือมีข้อบกพร่องในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้นได้อย่างถูกต้อง แต่ไม่สามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถเขียนแผนภาพการกระจายหรือกราฟเส้น และ/หรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันที่เหมาะสมกับข้อมูลได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

3) การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องและสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องทุกประเด็นแต่ยังขาดความสมบูรณ์ครบถ้วนหรือมีข้อบกพร่องในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ถูกต้องบางประเด็น

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถหาผลลัพธ์จากกราฟ หรือจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของฟังก์ชันหรือจากประเด็นปัญหาได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

4) การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง สรุปผลของการทดสอบและปรับปรุงหรือสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใหม่ (ถ้าจำเป็น) ได้อย่างถูกต้อง

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองได้ถูกต้อง แต่การสรุปผลของการทดสอบยังไม่สมบูรณ์และไม่สามารถขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ (ถ้าจำเป็น)

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้บ้าง โดยสามารถทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองได้ แต่มีข้อบกพร่อง

ในการทดสอบบางประการหรือไม่สามารถสรุปผลของการทดสอบและขัดเกลารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ (ถ้าจำเป็น)

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถทดสอบและขัดเกลารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ โดยทำการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลอง สรุปผลของการทดสอบและการขัดเกลารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

5) การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

ระดับ 4 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้อย่างถูกต้อง โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้อย่างถูกต้องและสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น

ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ถูกต้องทุกประเด็นแต่ยังขาดความสมบูรณ์ครบถ้วนในบางประการ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้บ้าง โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ถูกต้องบางประเด็น

ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่า ไม่สามารถเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ โดยสามารถอธิบายหรือแปลความหมายจากผลลัพธ์เชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่สถานการณ์จริงได้ไม่ถูกต้อง

ระดับ 0 นักเรียนไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จำนวน 1 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกนิยาม ความสำคัญและชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้

สาระการเรียนรู้

การศึกษาสถานการณ์จริงโดยใช้แบบจำลองทางเป็นกระบวนการที่เริ่มต้นจากสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติที่เราสนใจ แล้วแทนสถานการณ์จริงหรือปรากฏการณ์ธรรมชาติด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจสร้างขึ้นเองโดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์หรือด้วยการเลือกจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่แล้วในรูปแบบของสูตร สมการหรือฟังก์ชันที่พิจารณาแล้วว่าเหมาะสมกับสถานการณ์จริงนั้นมากที่สุด และเมื่อได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วก็ดำเนินการหาผลลัพธ์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลายๆ อย่าง ผสมผสานกัน แล้วนำไปอธิบายสถานการณ์จริงหรือนำไปทำนายอนาคตของสถานการณ์จริง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบ่งได้ 2 กลุ่มใหญ่ ๆ คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ทราบสมการตั้งต้น เช่น สมการเส้นตรง สมการกำลังสอง สมการเอกซ์โพเนนเชียล และสมการไซน์ ซึ่งแบบจำลองประเภทนี้เราต้องคำนวณหาค่าคงตัวของแต่ละสมการให้ได้ กับแบบจำลองที่เราไม่ทราบสมการตั้งต้นต้องพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรแล้วนำมาสร้างสมการและคำนวณหาค่าคงตัวของแต่ละสมการ

สื่อการเรียนรู้

ใบความรู้ที่ 1, ใบกิจกรรมที่ 1 และ 2

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูแจกใบความรู้ที่ 1 และบรรยายเกี่ยวกับความสำคัญ บทนิยาม และชนิดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. ครูสนทนาเกี่ยวกับสถานการณ์จริงในชีวิตประจำวันที่สามารถนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ พร้อมทั้งให้นักเรียนยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่น่าสนใจ

3. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 และ 2 แล้วให้นักเรียนศึกษาและทำใบกิจกรรมที่ 1 โดยมีครูเป็นผู้แนะนำแล้วร่วมกันสรุปถึงลักษณะของแผนภาพการกระจาย
4. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2 ด้วยตนเอง

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ตรวจใบกิจกรรมที่ 1 และ 2

ใบความรู้ที่ 1

ความสำคัญและความหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นที่รู้จักกันมานานแล้ว ทางด้านวิศวกรรมและเทคโนโลยี ได้นำไปใช้ในการออกแบบก่อสร้างสิ่งต่างๆ เช่น การสร้างเขื่อน การสร้างสะพาน เครื่องบิน รถยนต์ และอื่นๆ ต่อมาได้มีการนำเอาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสาขาวิชาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นทางด้านชีววิทยา แพทย์ ภูมิศาสตร์ และวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม ปัญหาสิ่งแวดล้อม เช่น ปัญหาการเพิ่มของจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิต ปัญหาการผลิตอาหาร ปัญหาด้านมลภาวะ ปัญหาการตัดไม้ทำลายป่า ปัญหาน้ำท่วมและปัญหาการกัดกร่อนของดิน เป็นต้น ในบางครั้งมีความจำเป็นจะต้องตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาเหล่านี้ แต่ข้อมูลที่มีอยู่จะไม่เพียงพอที่จะทำให้เราได้รู้ว่าจะตัดสินใจอย่างไรจึงจะดีที่สุด แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ช่วยให้เราสามารถตัดสินใจได้ว่าตัวแปรใดที่ดีที่สุด ซึ่งเหมาะสมกับสถานการณ์ที่มีอยู่เพราะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถช่วยเราแจกแจงองค์ประกอบต่างๆ ที่สำคัญที่สุดของปัญหาได้ ช่วยให้เราเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและค่าคงตัว และยังช่วยเราในการทำนายว่าอะไรจะเกิดขึ้นถ้าเราเปลี่ยนแปลง ค่าคงตัวบางค่าจากสถานการณ์หรือปัญหา นอกจากนี้แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่มีการเชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริง (Real world) กับโลกของคณิตศาสตร์ (World of mathematics) ด้วยการแทนสถานการณ์จริงของโลกในเชิงคณิตศาสตร์ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังสามารถเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ เช่น การศึกษา วิทยาศาสตร์ ศิลปะ สังคมศึกษา

โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะอาศัยกฎเกณฑ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เป็นหลักเพื่อมาอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์ที่เราสนใจ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การออกแบบหรือสร้างความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือสถานการณ์จริงที่ต้องการศึกษาโดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ สัญลักษณ์ กราฟ ตาราง ฟังก์ชัน สมการและอสมการ สูตร เป็นต้น

สำหรับในระดับชั้นนี้จะแบ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ทราบสมการตั้งต้น ซึ่งจะกล่าวถึงในเรื่อง การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ทราบสมการตั้งต้น โดยแต่ละสมการจะขึ้นอยู่กับลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละสถานการณ์ พร้อมทั้งทำนายค่าของสิ่งของสิ่งหนึ่งเมื่อทราบค่าของสิ่งของอีกสิ่งหนึ่งที่เหลือ โดยสิ่งของที่ทราบค่านั้นจะเรียกว่า “ตัวแปรอิสระ” และสิ่งของที่ถูกทำนายนั้น (ค่าที่จะหา) จะเรียกว่า “ตัวแปรตาม” และสมการที่เลือกมาจะศึกษานี้เป็นสมการที่

เมื่อกำหนดค่าตัวแปรอิสระให้ 1 ค่า แล้วจะก่อให้เกิดค่าตัวแปรตามเพียงค่าเดียวเท่านั้น จึงเรียกสมการที่เลือกมาศึกษาว่า "ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล"

โดยทั่วไปความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลจะประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว คือตัวแปรอิสระ 1 ตัว (นิยมใช้ x) และตัวแปรตาม 1 ตัว (นิยมใช้ y) โดยจะแบ่งความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันตามลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้วเลือกสมการที่มีอยู่แล้วในทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับความสัมพันธ์นั้นๆ ซึ่งสามารถจำแนกได้ดังนี้

1. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่กราฟเป็นเส้นตรง มีรูปแบบการทั่วไปของความสัมพันธ์เป็น

$$y = ax + b$$

เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ซึ่งทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

2. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่กราฟไม่เป็นเส้นตรง ได้แก่ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นรูปอื่นๆ ที่ไม่เป็นเส้นตรง ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นโค้งพาราโบลา เส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล และเส้นโค้งไซน์ (sine curve) ซึ่งมีรูปแบบการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{และ}$$

$$y = ba^x \quad \text{และ}$$

$$y = a \sin(bx + c) + d$$

เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ a , b , c และ d เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

ใบกิจกรรมที่ 1

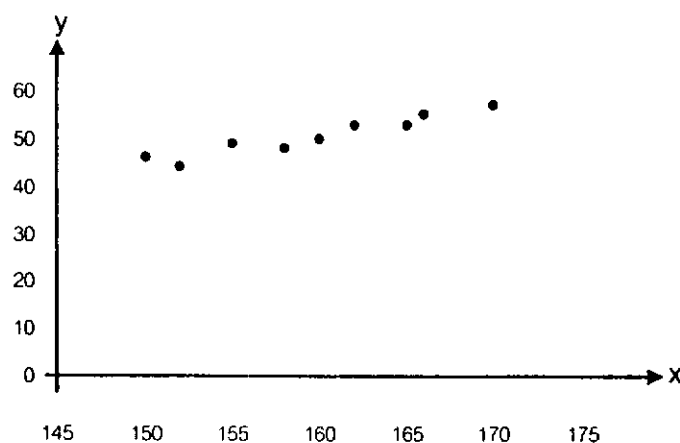
ถ้าศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียน 9 คน พบข้อมูลดังนี้

นักเรียน	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ส่วนสูง (ซม.)	150	152	160	158	155	162	165	166	170
น้ำหนัก (กก.)	46	44	50	48	49	53	53	55	57

ถ้าให้ส่วนสูงแทนด้วยตัวแปร x และน้ำหนักแทนด้วยตัวแปร y จะได้คู่อันดับ (x, y) ดังต่อไปนี้

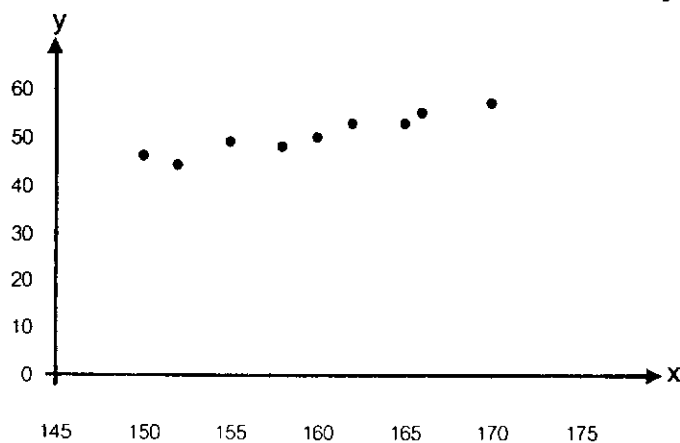
.....

 ซึ่งเมื่อนำจุดเหล่านี้ไปวาดกราฟหรือหาตำแหน่งบนระบบพิกัดฉาก จะได้กราฟของจุดเหล่านี้ ดังรูป



รูป 1

ถ้าพิจารณากราฟจะพบว่า การกระจายของจุดต่างๆ จำนวน 9 จุด มีลักษณะที่พอจะประมาณหรือสร้างตัวแทนของจุดเหล่านี้ได้ด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งหมายความว่า เราสามารถสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงและถือว่าเป็นตัวแทนของข้อมูลที่กำหนดให้ดังรูป



รูป 2

วิธีการที่กล่าวถึงนี้คือวิธีการสร้างแผนภาพการกระจายเพื่อพิจารณาแนวโน้มของข้อมูลว่ามีลักษณะใด มีแนวโน้มของความสัมพันธ์เป็นกราฟเส้นตรง หรือกราฟ เส้นโค้ง ซึ่งจะเป็นขั้นตอนแรกของการสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

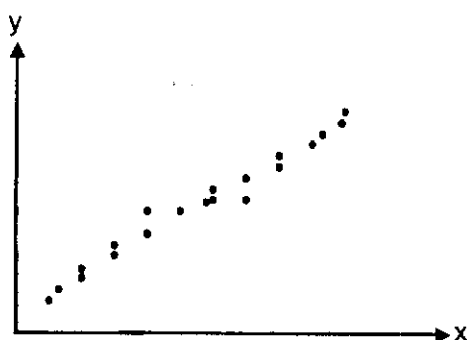
การสร้างแผนภาพการกระจายคือ.....

.....

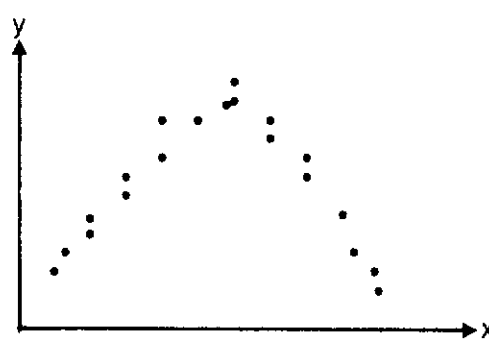
.....

.....

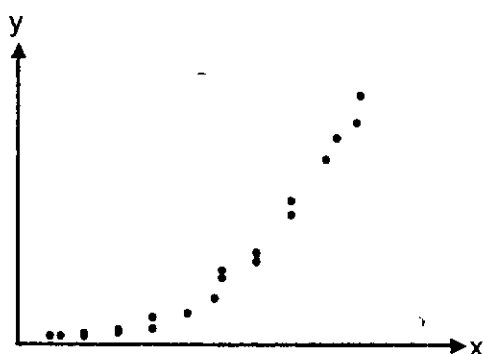
แผนภาพการกระจายที่สำคัญมีดังต่อไปนี้



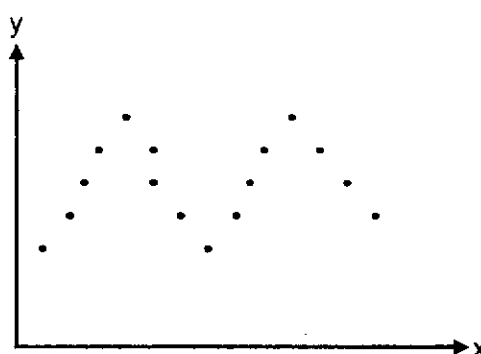
แนวโน้มเป็น.....



แนวโน้มเป็น.....



แนวโน้มเป็น.....



แนวโน้มเป็น.....

ใบกิจกรรมที่ 2

จากข้อมูลต่อไปนี้ให้นักเรียนสร้างแผนภาพการกระจายพร้อมทั้งบอกลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลว่ามีแนวโน้มหรือกราฟเป็นรูปใด ระหว่างเส้นตรง , เส้นโค้งพาราโบลา เส้นโค้งเอกซ์โพเนนเชียล หรือเส้นโค้งไซน์

1.

x	0	1	2	3	4
y	1	0	1	3	10

2.

x	1	2	3	4	5
y	6	15	38	60	105

3.

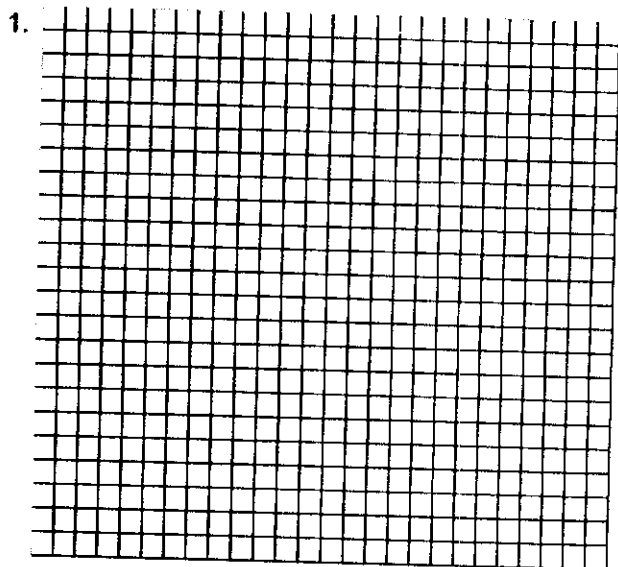
x	1	2	3	4	5	6
y	3	4	8	9	8	5

4.

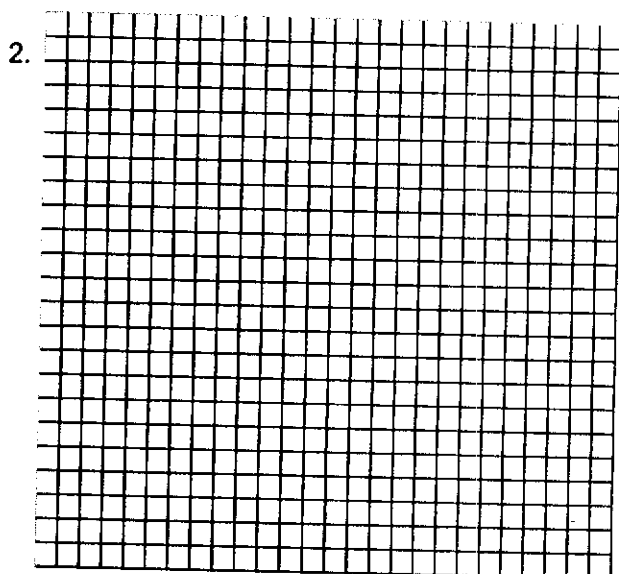
x	0	1	2	3	4	5	6
y	7	12	17	12	7	12	17

5.

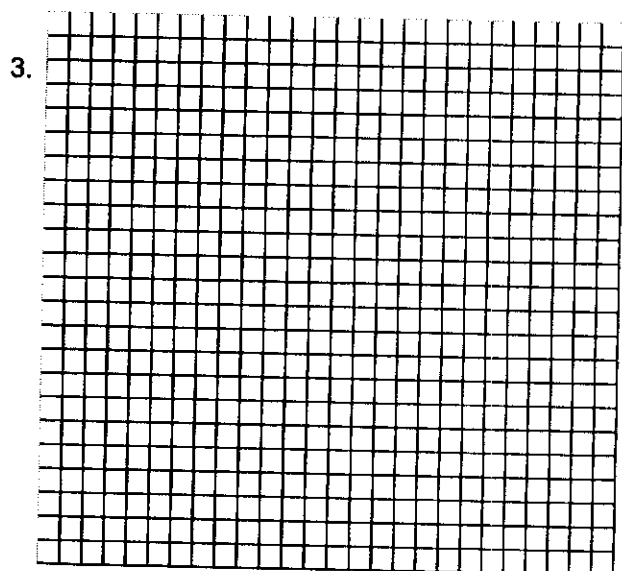
x	84	87	98	71	75	65	68	70	93
y	89	91	97	80	82	74	76	78	93



กราฟมีแนวโน้มเป็นรูป.....
.....

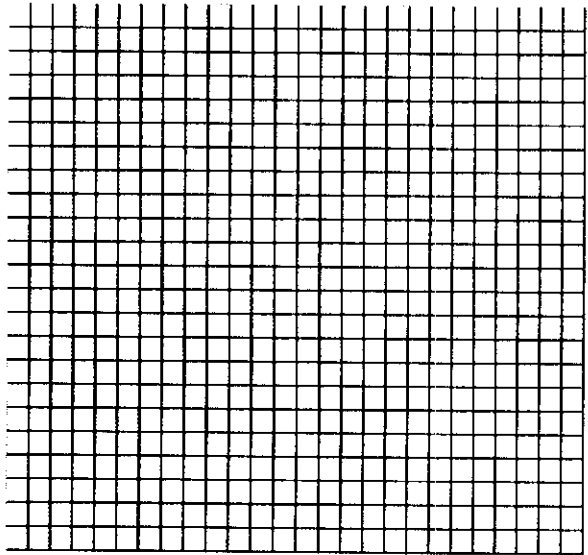


กราฟมีแนวโน้มเป็นรูป.....
.....



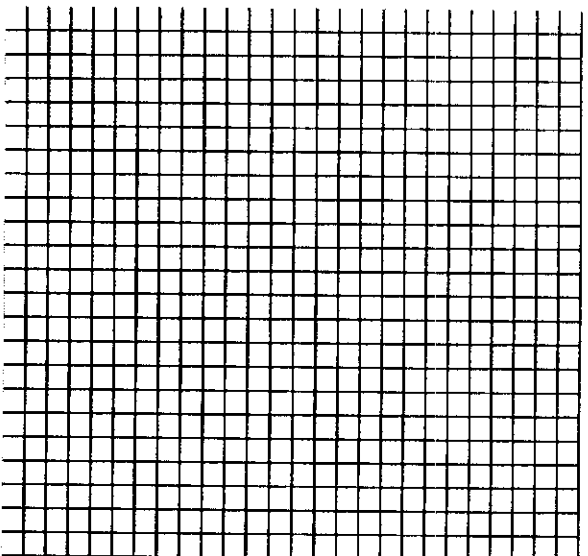
กราฟมีแนวโน้มเป็นรูป.....
.....

4.



กราฟมีแนวโน้มเป็นรูป.....
.....

5.



กราฟมีแนวโน้มเป็นรูป.....
.....

แผนการจัดการเรียนรู้ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชา คณิตศาสตร์
เรื่อง แบบจำลองเชิงเส้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
จำนวน 3 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีเลือก 2 จุดใดๆ ได้
2. นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ยได้
3. นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้
4. นักเรียนสามารถตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองเชิงเส้นได้

สาระการเรียนรู้

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยการเลือกสมการแสดงความสัมพันธ์ที่มีอยู่แล้วในทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบค่าตัวแปรอิสระ ซึ่งเรียกสมการที่เลือกมาศึกษาว่า "ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล" โดยความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่กราฟเป็นเส้นตรง มีรูปแบบการทั่วไปของความสัมพันธ์เป็น $y = ax + b$ เมื่อ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

ซึ่งวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นจะกล่าวถึงเพียง 3 วิธี คือ

1. วิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ
2. วิธีกึ่งเฉลี่ย
3. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองเชิงเส้นจะใช้ 2 วิธี คือ

1. ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
2. ค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด

สื่อการเรียนรู้

ใบความรู้ที่ 2 - 5, ใบกิจกรรมที่ 3 - 10, เครื่องคิดเลข, เครื่องคอมพิวเตอร์

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูแจกใบความรู้ที่ 2 - 5 และใบกิจกรรมที่ 3 - 10

2. ครูให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 2 ร่วมกันแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับแบบจำลองเชิงเส้น และร่วมกันสรุปถึงลักษณะสำคัญของแบบจำลองชนิดนี้

3. ครูบรรยายเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีเลือก 2 จุดใดๆ แล้วให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3 ร่วมกับครู

4. ครูให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 3 และบรรยายเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ย แล้วให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4 ร่วมกับครู

5. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 5 ด้วยตนเอง

6. ครูให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 4 และบรรยายเกี่ยวกับวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด แล้วให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 6 ร่วมกับครู ถึงวิธีการคำนวณหาค่าคงตัวทั้งจากสมการปกติและจากสูตร

7. ครูให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายถึงสมการที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ที่ได้จากใบกิจกรรมที่ 3, 4 และ 6 พร้อมทั้งช่วยกันพิจารณาว่าสมการใดที่มีความเหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุด

8. ครูให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 5 และบรรยายเกี่ยวกับวิธีการตรวจสอบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งโดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด และให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 7 และ 8 ร่วมกับครู

9. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 9 และ 10 ด้วยตนเอง

10. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปถึงวิธีการสร้างและตรวจสอบแบบจำลองเชิงเส้น

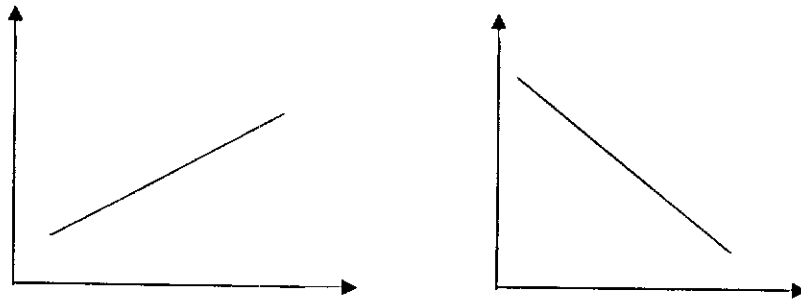
การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากความสนใจ
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ตรวจใบกิจกรรมที่ 3 – 10
4. ทำแบบฝึกหัด ข้อ 1 – 3

ใบความรู้ที่ 2

แบบจำลองเชิงเส้น

ถ้านำข้อมูลมาสร้างแผนภาพการกระจายแล้วพบว่าลักษณะความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงดังภาพ



จะเรียกแบบจำลองในลักษณะนี้ว่าแบบจำลองเชิงเส้น

ซึ่งความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรงจะมีสมการทั่วไป คือ

$$y = ax + b$$

เมื่อ y เป็น.....

x เป็น.....

a และ b เป็น.....

วิธีสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรง

1. วิธีเลือกจุด 2 จุดใด ๆ เป็นวิธีการสร้างสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

1.1 เลือกจุด 2 จุด เพื่อเป็นตัวแทนของข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งจุดที่เลือก 2 จุด อาจเป็นจุดเริ่มต้นของข้อมูลและจุดสุดท้ายของข้อมูลหรืออาจเลือก 2 จุดใด ๆ ของข้อมูลที่กำหนดให้ก็ได้

1.2 ลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดที่เลือกไว้ เส้นที่ลากได้นี้คือเส้นแนวโน้มของสมการ

1.3 สร้างสมการโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์เกี่ยวกับการสร้างสมการเส้นตรงจากจุด 2 จุด (two point form) ดังนี้

กำหนดให้ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็นจุด 2 จุดที่เลือกไว้

(x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ m

โดยที่ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

นำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 1.2 ไปแทนใน

.....

แล้วจัดสมการที่ได้ให้อยู่ในรูป $\hat{y} = ax + b$

โดยที่ $\hat{y}$ เป็นค่าของตัวแปรตาม y ที่ได้จากสมการของความสัมพันธ์

a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

ใบความรู้ที่ 3

วิธีสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรง

2. วิธีกึ่งเฉลี่ย เป็นวิธีการสร้างสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่มีกราฟเป็นเส้นตรง โดยใช้หลักการสร้างคล้ายกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ กล่าวคือจะต้องหาจุด 2 จุด และลากเส้นเชื่อมจุด 2 จุดเช่นเดียวกัน ต่างกันที่จุด 2 จุดของวิธีกึ่งเฉลี่ยจะต้องได้จากค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้าง ดังนี้

2.1 เรียงลำดับของตัวแปรอิสระจากมากไปหาน้อยหรือน้อยไปหามากก็ได้

2.2 แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่าๆ กัน

2.3 หาค่ากลางของข้อมูลที่แบ่งได้แต่ละกลุ่ม สำหรับค่ากลางที่นิยมใช้คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต (mean) หรือค่ามัธยฐาน (median) โดยให้ $\bar{x}_1$ เป็นค่ากลางของตัวแปรอิสระกลุ่มที่ 1, $\bar{x}_2$ เป็นค่ากลางของตัวแปรอิสระกลุ่มที่ 2, $\bar{y}_1$ เป็นค่ากลางของตัวแปรตามกลุ่มที่ 1, $\bar{y}_2$ เป็นค่ากลางของตัวแปรตามกลุ่มที่ 2

2.4 ลากเส้นตรงเชื่อมค่ากลางทั้งสองกลุ่ม เส้นที่ลากได้คือเส้นแนวโน้มของสมการ

2.5 สร้างสมการโดยใช้ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์เช่นเดียวกับวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ

กำหนดให้ $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ เป็นจุดสองจุดที่เป็นค่ากลางของข้อมูล

(x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นแนวโน้มที่เกิดขึ้น

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ คือ m

โดยที่ $m = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$

นำค่า m ที่คำนวณได้ และเลือกจุด 1 จุดจากข้อ 2.4 ไปแทนใน $y - y_1 = m(x - x_1)$

แล้วจัดสมการที่ได้ให้อยู่ในรูป $\hat{y} = ax + b$

โดยที่ $\hat{y}$ เป็นค่าของตัวแปรตาม y ที่ได้จากสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

a เป็นความชันของเส้นตรง

b เป็นระยะตัดแกน y ทั้ง a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา

วิธีกึ่งเฉลี่ยเป็นวิธีที่มีหลักเกณฑ์ดีกว่าวิธีเลือกจุด 2 จุดใดๆ เพราะการได้มาของจุดสำหรับวิธีนี้ใช้ค่ากลางซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ ส่วนวิธีการคำนวณหาค่ากลางจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือมัธยฐานให้พิจารณาจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ว่า ถ้าข้อมูลในกลุ่มมีค่าแตกต่างกันมาก การใช้ค่ามัธยฐานจะเป็นตัวแทนข้อมูลที่ดีกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต แต่ถ้าข้อมูลในกลุ่มเดียวกันไม่มีค่าใดที่มากหรือน้อยผิดปกติ จะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตทั้งนี้เพราะถ้าค่าของข้อมูล มากหรือน้อยผิดปกติจะมีผลกระทบต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิต ซึ่งจะทำให้สมการที่คำนวณได้คลาดเคลื่อนมาก

และการสร้างสมการด้วยวิธีกิ่งเฉลี่ยอาจมีปัญหากำหนดจำนวนข้อมูลมีจำนวนคี่ จะทำให้แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่มเท่ากันไม่ได้ จึงมีวิธีแก้ปัญหา ดังนี้

1) ตัดข้อมูลที่อยู่ตรงกลางทิ้ง เพื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน การตัดข้อมูลตรงกลางทิ้งไม่นิยมปฏิบัติเพราะต้องสูญเสียข้อมูลไปโดยเปล่าประโยชน์ และการคำนวณหาสมการจะต้องคำนึงถึงช่วงเวลาที่ตัดข้อมูลทิ้งไปด้วย

2) นำข้อมูลที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 แล้วหาค่ากลางครั้งหนึ่งและนำข้อมูลตัวเดียวกันั้นมารวมกับกลุ่มที่ 2 แล้วหาค่ากลางอีกครั้ง ซึ่งจะทำให้ได้ค่ากลางสำหรับข้อมูลกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 เช่นกัน

3) นำข้อมูลที่อยู่ตรงกลางรวมกับข้อมูลกลุ่มที่ 1 หรือกลุ่มที่ 2 เพียงกลุ่มเดียว แล้วหาค่ากลาง การจะนำข้อมูลตรงกลางรวมกับกลุ่มใดควรพิจารณาตามความเห็นสมควร สำหรับกรณีนี้จะทำให้การแบ่งข้อมูล 2 กลุ่มไม่เท่ากัน แต่ขั้นตอนการสมการยังคงใช้วิธีกิ่งเฉลี่ยเช่นเดียวกับกรณี que แบ่งข้อมูล 2 กลุ่มเท่ากัน

ใบความรู้ที่ 4

วิธีสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรง

3. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แนวคิดที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าตัวแปรอิสระที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ ($\hat{y}$) กับค่าตัวแปรอิสระจากข้อมูลจริง (y) ที่เก็บรวบรวมมาได้มีค่าน้อยที่สุด การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เป็นวิธีที่นิยมเพราะเป็นวิธีที่ใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ และน่าเชื่อถือในการหาเส้นที่เหมาะสมที่สุดที่เป็นตัวแทนของข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้

นั่นคือเราต้องการให้ $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด (เมื่อ n เป็นจำนวนตัวอย่างหรือจำนวน

ข้อมูลทั้งหมดที่นำมาสร้างความสัมพันธ์) ส่วนวิธีที่จะทำให้ $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุดนั้นจะใช้ความรู้คณิตศาสตร์ชั้นสูง ซึ่งจะไม่แสดงไว้ในที่นี้ แต่จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังกล่าวจะทำให้ได้สมการที่เรียกว่า "สมการปกติ" โดยมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนค่าคงตัวที่ต้องการหา

สำหรับความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงนั้น มีรูปสมการทั่วไปเป็น $y = ax + b$ โดยที่ y เป็นตัวแปรตาม, x เป็นตัวแปรอิสระ, a และ b เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหา จะมีสมการปกติ 2 สมการ คือ

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i + nb \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

และจากสมการปกติสามารถหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ b &= \bar{y} - a\bar{x}\end{aligned}$$

โดยที่ $\bar{y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม, $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ

ใบความรู้ที่ 5

การตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในที่นี้ก็คือ การตรวจสอบดูว่า สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากน้อย เพียงใด หรือดูว่าสมการที่ได้สามารถทำนายค่าตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรอิสระได้ดีเพียงใดหรือ ค่าตัวแปรตามที่ได้ควรจะมีความแตกต่างจากค่าตัวแปรตามของข้อมูลจริงให้น้อยที่สุด ซึ่งการตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองมีด้วยกันหลายวิธี ดังต่อไปนี้

1. ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

เป็นการวัดความแม่นยำจากค่าเฉลี่ยผลรวมกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าตัวแปรตามจากข้อมูลที่แท้จริงกับค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}$$

โดยที่ y เป็นค่าตัวแปรตามจากข้อมูลจริง

$\hat{y}$ เป็นค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์

n เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด

p เป็นค่าคงตัวที่มีอยู่ในแต่ละสมการ เช่น สมการเส้นตรงมี $p = \dots\dots\dots$, สมการกำลังสองมี $p = \dots\dots\dots$, สมการเอกซ์โพเนนเชียลมี $p = \dots\dots\dots$, สมการไซน์มี $p = \dots\dots\dots$ เป็นต้น

โดยที่ถ้าค่า MSE มีค่าน้อยแสดงว่าสมการนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่าสมการ ที่มีค่า MSE มาก ยิ่งถ้าสมการใดมีค่า MSE เป็นศูนย์แสดงว่าสมการนั้นสามารถทำนายค่า ตัวแปรตามได้ดีที่สุด แต่ในสถานการณ์จริงโอกาสเช่นนั้นแทบไม่มีเลย ดังนั้นค่า MSE ที่ดีจึงควรมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

2. สัมประสิทธิ์ของการกำหนด (Coefficient of Determination)

สัมประสิทธิ์การกำหนดเป็นการวัดสัดส่วนหรือเปอร์เซ็นต์ที่ตัวแปรอิสระ x มีส่วนในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์นี้จึงเป็นค่าที่ใช้วัดว่าสมการที่ได้มีความเหมาะสมกับข้อมูลเพียงใด ถ้าสัมประสิทธิ์การกำหนดมีค่ามากขึ้นแสดงว่าสมการนั้นมีความเหมาะสมกับข้อมูลมากขึ้น หรือคุณภาพของสมการในการทำนายตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรอิสระจะมีมาก นิยมแทนสัมประสิทธิ์การกำหนดด้วยสัญลักษณ์ r^2

ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

คุณสมบัติของ r^2

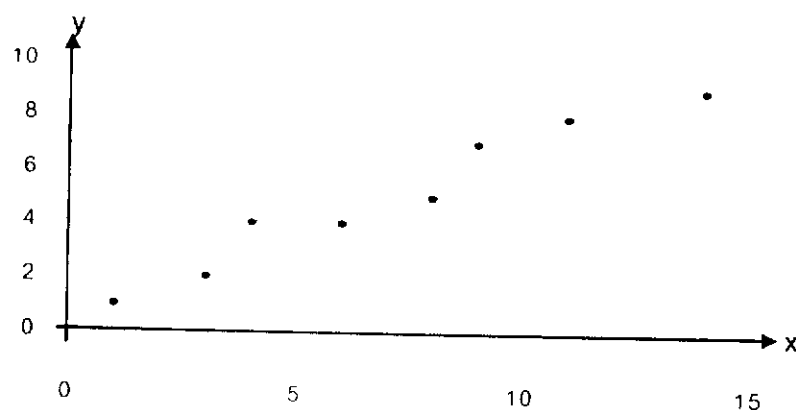
1. ค่า r^2 เป็นบวกเสมอ
2. $0 \leq r^2 \leq 1$ ถ้า $r^2 = 1$ หมายความว่าสมการแสดงความสัมพันธ์จะทำนาย y หรือตัวแปรตามได้อย่างสมบูรณ์
- ถ้า $r^2 = 0$ แสดงว่าสมการแสดงความสัมพันธ์ไม่สามารถทำนาย y หรือตัวแปรตามได้
3. ค่า r^2 จะใช้ตรวจสอบสมการที่ได้จากการประมาณค่าคงตัวด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเท่านั้น

ใบกิจกรรมที่ 3

จากข้อมูลที่กำหนดให้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ



สมมติว่าแนวโน้มของข้อมูลจากแผนภาพการกระจายมีลักษณะเป็นเส้นตรง
ดังนั้นจะสร้างสมการเส้นตรงเพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y
จากสมการเส้นตรง

เลือกจุด 2 จุดเพื่อสร้างสมการเส้นตรง

เลือก จุด และ จุด

จะได้ $m = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

จะได้

$\hat{y}_1 = \dots\dots\dots$ (1)

แต่ถ้าเลือก จุด และ จุด

จะได้ $m = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

จะได้

$\hat{y}_2 = \dots\dots\dots$ (2)

จะเห็นว่าถ้าเลือกจุดที่ต่างกันไปก็จะได้สมการเส้นตรงที่ต่างกันออกไป ดังนี้

สมการที่ 1 คือ $\hat{y}_1 = \dots\dots\dots$

สมการที่ 2 คือ $\hat{y}_2 = \dots\dots\dots$

แล้วสมการใดที่เหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน ซึ่งสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ที่ดีนั้นควรจะทำให้ค่าของตัวแปรตาม $\hat{y}$ ที่ได้จากสมการแทนความสัมพันธ์กับค่าตัวแปรตาม y ที่เป็นข้อมูลจริงมีความแตกต่างกันไม่มาก

จากสมการเส้นตรงทั้ง 2 สมการ ให้พิจารณาตารางต่อไปนี้

x_i	y_i	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$	$y_i - \hat{y}_{1i}$	$y_i - \hat{y}_{2i}$	$(y_i - \hat{y}_{1i})^2$	$(y_i - \hat{y}_{2i})^2$
1	1						
3	2						
4	4						
6	4						
8	5						
9	7						
11	8						
14	9						
$\sum_{i=1}^n x_i$ =.....	$\sum_{i=1}^n y_i$ =.....					$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ =	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$ =

จากตารางจะเห็นว่าความแตกต่างระหว่างค่าตัวแปรตามที่ได้จากสมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์กับค่าจากข้อมูลจริงมีค่าเป็นบวกบ้าง ลบบ้าง ขึ้นอยู่กับว่าแต่ละค่าของค่า จากสมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์กับค่าจากข้อมูลจริงค่าใดจะมากกว่ากัน ทำให้ผลรวมดังกล่าวอาจจะหักล้างกันไปหมดพอดี นั่นคือผลรวมของความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นศูนย์ ดังนั้นในการวัดความคลาดเคลื่อนโดยไม่ให้ผลรวมของความแตกต่างที่เกิดขึ้นเป็นศูนย์ จึงต้องยกกำลังสองของความแตกต่างที่เกิดขึ้นแต่ละค่า แล้วหาผลรวมของกำลังสองของความแตกต่างที่เกิดขึ้น ถ้าผลรวมนี้น้อยที่สุดจะถือว่าสมการเส้นตรงที่ได้นั้นเหมาะสมจะใช้ในการประมาณค่าตัวแปรตามมากที่สุด

จากตารางจะพบว่า $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ มีค่า..... $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$

แสดงว่าสมการ $\hat{y}_1 = \dots\dots\dots$ จะเหมาะสมกับข้อมูล.....สมการ

$\hat{y}_2 = \dots\dots\dots$

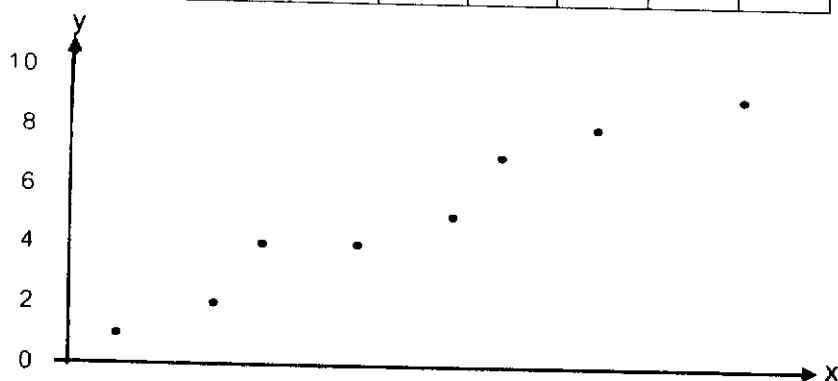


ใบกิจกรรมที่ 4

จากข้อมูลที่กำหนดไว้ในตาราง จงหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ



สมมติว่าแนวโน้มของข้อมูลจากแผนภาพการกระจายมีลักษณะเป็นเส้นตรง

ดังนั้นจะสร้างสมการเส้นตรงเพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล x และ y

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$

เลือกจุด 2 จุดเพื่อสร้างสมการเส้นตรง แต่การเลือกจุดของวิธีนี้จะต่างจากแบบที่ 1

นั่นคือ จุด 2 จุดที่ต้องการนั้นจะเป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามดังนี้

เรียงตัวแปรอิสระและตัวแปรตามจากน้อยไปหามากแล้วแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ชุด

ชุดที่ 1 ประกอบด้วย

ชุดที่ 2 ประกอบด้วย

จะได้ $\bar{x}_1 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$, $\bar{y}_1 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

และ $\bar{x}_2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$, $\bar{y}_2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

จะได้จุดที่ต้องการ 2 จุด คือ และ

นั่นคือ $m = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น

.....

.....



ใบกิจกรรมที่ 5

จากข้อมูลในตาราง สมมติให้ความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง จงสร้างแบบจำลองเชิงเส้นโดยวิธีเลือกจุด 2 จุด และวิธีกึ่งเฉลี่ย ซึ่งมี y เป็นตัวแปรตาม พร้อมทั้งตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

x	1	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	5	6	8	8	9	9

วิธีทำ

เนื่องจากโจทย์สมมติให้ความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้นจึงไม่ต้องสร้างแผนภาพการกระจาย

สร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีเลือก 2 จุดใด ๆ

สมการเส้นตรงคือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ _____(1)

เลือกจุด 2 จุด คือจุด (..... ,) และจุด (..... ,)

จะได้ $m =$

เลือกจุด 1 จุด คือ จุด (..... ,) และนำค่า m ที่ได้แทนในสมการ (1)

จะได้สมการเส้นตรงคือ

.....

สมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลชุดนี้โดยมี y เป็นตัวแปรตามคือ $\hat{y} =$

สร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ย

เนื่องจากข้อมูลในตารางตัวแปรอิสระเรียงจากน้อยไปหามากอยู่แล้ว จึงแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มที่ 1 มี (..... ,) , (..... ,) , (..... ,) , (..... ,)

กลุ่มที่ 2 มี (..... ,) , (..... ,) , (..... ,) , (..... ,)

ให้ $\bar{x}_1$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ x กลุ่มที่ 1
 $\bar{x}_2$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ x กลุ่มที่ 2
 $\bar{y}_1$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม y กลุ่มที่ 1
 $\bar{y}_2$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม y กลุ่มที่ 2
 จะได้ $\bar{x}_1 = \dots\dots\dots$
 $\bar{x}_2 = \dots\dots\dots$
 $\bar{y}_1 = \dots\dots\dots$
 $\bar{y}_2 = \dots\dots\dots$

นั่นคือจุดที่จะนำมาสร้างสมการเส้นตรง 2 จุด คือ

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\dots\dots, \dots\dots)$$

และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (\dots\dots, \dots\dots)$

จะได้ $m = \dots\dots\dots$

เลือกจุด 1 จุด คือ จุด $(\dots\dots, \dots\dots)$ และนำค่า m ที่ได้แทนในสมการ (1)

จะได้สมการเส้นตรงคือ

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

สมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลชุดนี้โดยมี y เป็นตัวแปรตามคือ $\hat{y} = \dots\dots\dots$

ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ให้ $\hat{y}_a$ แทนแบบจำลองเชิงเส้นที่ได้จากวิธีเลือกจุด 2 จุด

นั่นคือ $\hat{y}_a = \dots\dots\dots$

ให้ $\hat{y}_b$ แทนแบบจำลองเชิงเส้นที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อย

นั่นคือ $\hat{y}_b = \dots\dots\dots$

ให้ MSE_1 แทนค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{y}_a$

MSE_2 แทนค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{y}_b$

โดยที่
$$MSE = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2}$$

พิจารณตารางต่อไปนี้

x	y	$\hat{y}_a$	$\hat{y}_b$	$y - \hat{y}_a$	$y - \hat{y}_b$	$(y - \hat{y}_a)^2$	$(y - \hat{y}_b)^2$
1	2						
4	4						
5	5						
6	6						
7	8						
8	8						
9	9						
10	9						

จากตารางจะได้

$MSE_1 = \dots\dots\dots$

$MSE_2 = \dots\dots\dots$

นั่นคือเมื่อพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้วพบว่าสมการ.....
มีความเหมาะสมกับข้อมูลชุดนี้มากกว่าสมการ.....

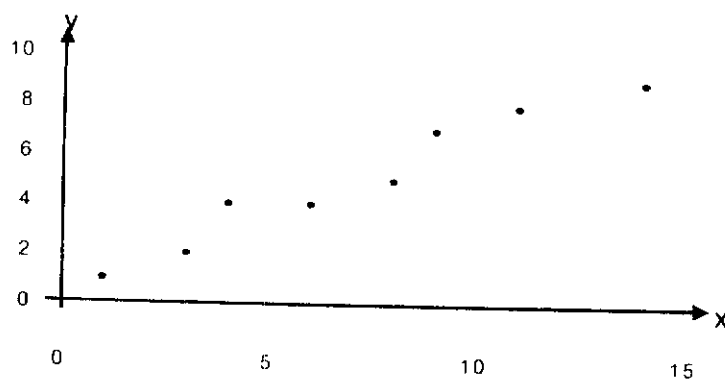


ใบกิจกรรมที่ 6

จากข้อมูลที่กำหนดให้ในตาราง จงหาสมการที่แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง ข้อมูล x และ y โดยมี y เป็นตัวแปรตาม

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ สร้างแผนภาพการกระจาย



เมื่อพิจารณาแผนภาพการกระจายแล้วความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้น สมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงซึ่งมีรูปแบบการทั่วไป คือ

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

พิจารณาดาวงต่อไปนี้

x	y	x^2	xy
1	1		
3	2		
4	4		
6	4		
8	5		
9	7		
11	8		
14	9		
$\sum_{i=1}^n x_i = \dots\dots\dots$	$\sum_{i=1}^n y_i = \dots\dots\dots$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots\dots\dots$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \dots\dots\dots$

วิธีที่ 1

ประมาณค่าคงตัว a และ b โดยการแทนค่า $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ใน สมการ
ปกติด้วยค่าที่หาได้ในตาราง จะได้

$$\dots\dots\dots (1)$$

$$\dots\dots\dots (2)$$

จากการแก้ระบบสมการทำให้ได้ $a = \dots\dots\dots$ และ $b = \dots\dots\dots$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

.....

วิธีที่ 2

ประมาณค่าคงตัว a และ b ได้จากสูตรต่อไปนี้

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

จากตารางจะได้ $\bar{x} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$ และ $\bar{y} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

จะได้ $a = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

$$b = \dots\dots\dots$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ที่มี y เป็นตัวแปรตาม คือ

.....



ใบกิจกรรมที่ 7

จากข้อมูลในตาราง สมมติให้ความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง จงสร้างแบบจำลองเชิงเส้นโดยวิธีเลือกจุด 2 จุด และวิธีกึ่งเฉลี่ย ซึ่งมี y เป็นตัวแปรตาม พร้อมทั้งตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

x	1	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	5	6	8	8	9	9

วิธีทำ

เนื่องจากโจทย์สมมติให้ความสัมพันธ์ของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้นจึงไม่ต้องสร้างแผนภาพการกระจาย

สร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีเลือก 2 จุดใด ๆ

สมการเส้นตรงคือ $y - y_1 = m(x - x_1)$ _____ (1)

เลือกจุด 2 จุด คือจุด (..... ,) และจุด (..... ,)

จะได้ $m =$

เลือกจุด 1 จุด คือ จุด (..... ,) และนำค่า m ที่ได้แทนในสมการ (1)

จะได้สมการเส้นตรงคือ

.....

สมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลชุดนี้โดยมี y เป็นตัวแปรตามคือ $\hat{y} =$

สร้างแบบจำลองเชิงเส้นด้วยวิธีกึ่งเฉลี่ย

เนื่องจากข้อมูลในตารางตัวแปรอิสระเรียงจากน้อยไปหามากอยู่แล้ว จึงแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มที่ 1 มี (..... ,) , (..... ,) , (..... ,) , (..... ,)

กลุ่มที่ 2 มี (..... ,) , (..... ,) , (..... ,) , (..... ,)

ให้ $\bar{x}_1$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ x กลุ่มที่ 1
 $\bar{x}_2$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ x กลุ่มที่ 2
 $\bar{y}_1$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม y กลุ่มที่ 1
 $\bar{y}_2$ แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม y กลุ่มที่ 2
 จะได้ $\bar{x}_1 = \dots\dots\dots$
 $\bar{x}_2 = \dots\dots\dots$
 $\bar{y}_1 = \dots\dots\dots$
 $\bar{y}_2 = \dots\dots\dots$

นั่นคือจุดที่จะนำมาสร้างสมการเส้นตรง 2 จุด คือ

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\dots\dots, \dots\dots)$$

และ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (\dots\dots, \dots\dots)$

จะได้ $m = \dots\dots\dots$

เลือกจุด 1 จุด คือ จุด $(\dots\dots, \dots\dots)$ และนำค่า m ที่ได้แทนในสมการ (1)

จะได้สมการเส้นตรงคือ

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

สมการเส้นตรงที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลชุดนี้โดยมี y เป็น
 ตัวแปรตามคือ $\hat{y} = \dots\dots\dots$

ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ให้ $\hat{y}_a$ แทนแบบจำลองเชิงเส้นที่ได้จากวิธีเลือกจุด 2 จุด

นั่นคือ $\hat{y}_a = \dots\dots\dots$

ให้ $\hat{y}_b$ แทนแบบจำลองเชิงเส้นที่ได้จากวิธีกำลังสองเฉลี่ย

นั่นคือ $\hat{y}_b = \dots\dots\dots$

ให้ MSE_1 แทนค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{y}_a$

MSE_2 แทนค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $\hat{y}_b$

โดยที่
$$MSE = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2}$$

พิจารณตารางต่อไปนี้

x	y	$\hat{y}_a$	$\hat{y}_b$	$y - \hat{y}_a$	$y - \hat{y}_b$	$(y - \hat{y}_a)^2$	$(y - \hat{y}_b)^2$
1	2						
4	4						
5	5						
6	6						
7	8						
8	8						
9	9						
10	9						

จากตารางจะได้

$$MSE_1 = \dots\dots\dots$$

$$MSE_2 = \dots\dots\dots$$

นั่นคือเมื่อพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้วพบว่าสมการ.....
มีความเหมาะสมกับข้อมูลชุดนี้มากกว่าสมการ..... ☺

ใบกิจกรรมที่ 8

จงตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากใบกิจกรรมที่ 3 , 4 และ 6

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

วิธีทำ

จากใบกิจกรรมที่ 3 มีสมการแสดงความสัมพันธ์ 2 สมการคือ

$$\hat{y}_1 = \dots\dots\dots$$

$$\hat{y}_2 = \dots\dots\dots$$

จากใบกิจกรรมที่ 4 มีสมการแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\hat{y}_3 = \dots\dots\dots$$

จากใบกิจกรรมที่ 6 มีสมการแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\hat{y}_4 = \dots\dots\dots$$

จากข้อมูลจะได้ $\bar{y} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

พิจารณาดารงต่อไปนี้

x_i	y_i	$\hat{y}_{1i}$	$y_i - \hat{y}_{1i}$	$(y_i - \hat{y}_{1i})^2$	$\hat{y}_{2i}$	$y_i - \hat{y}_{2i}$	$(y_i - \hat{y}_{2i})^2$	$\hat{y}_{3i}$	$y_i - \hat{y}_{3i}$	$(y_i - \hat{y}_{3i})^2$
1	1									
3	2									
4	4									
6	4									
8	5									
9	7									
11	8									
14	9									
$\sum_{i=1}^n x_i$ =56	$\sum_{i=1}^n y_i$ =40			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})^2$ =.....			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})^2$ =.....			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{3i})^2$ =.....

x_i	y_i	$\hat{y}_{4i}$	$y_i - \hat{y}_{4i}$	$(y_i - \hat{y}_{4i})^2$	$(\hat{y}_{4i} - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	1					
3	2					
4	4					
6	4					
8	5					
9	7					
11	8					
14	9					
$\sum_{i=1}^n x_i$ =56	$\sum_{i=1}^n y_i$ =40			$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{4i})^2 =$	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_{4i} - \bar{y})^2 =$ =.....	$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 =$

จากตารางจะได้

$$MSE_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{1i})}{n-2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

$$MSE_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{2i})}{n-2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

$$MSE_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{3i})}{n-2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

$$MSE_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{4i})}{n-2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 1 คือ

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 2 คือ

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 3 คือ

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของสมการที่ 4 คือ

แสดงว่าเมื่อตรวจสอบด้วยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยแล้ว สมการที่ มี

ความเหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุด

เนื่องจาก 3 สมการแรกไม่ได้ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าของค่าคงตัว ดังนั้น
จึงจะหาสัมประสิทธิ์ของการกำหนดเฉพาะสมการที่ 4

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ของการกำหนดของสมการที่ 4 คือ หมายความว่าตัวแปรอิสระ x มีส่วนในการทำนายค่าของตัวแปรตาม y ได้ดีถึง ☺

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกในการเขียน จะใช้ $\sum$ แทน $\sum_{i=1}^n$ โดยจะไม่เขียน $i = 1$ และ n ลงไป

ในเครื่องหมาย $\sum$ เช่น ใช้ $\sum x$ แทน $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum xy$ แทน $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ เป็นต้น

ใบกิจกรรมที่ 9

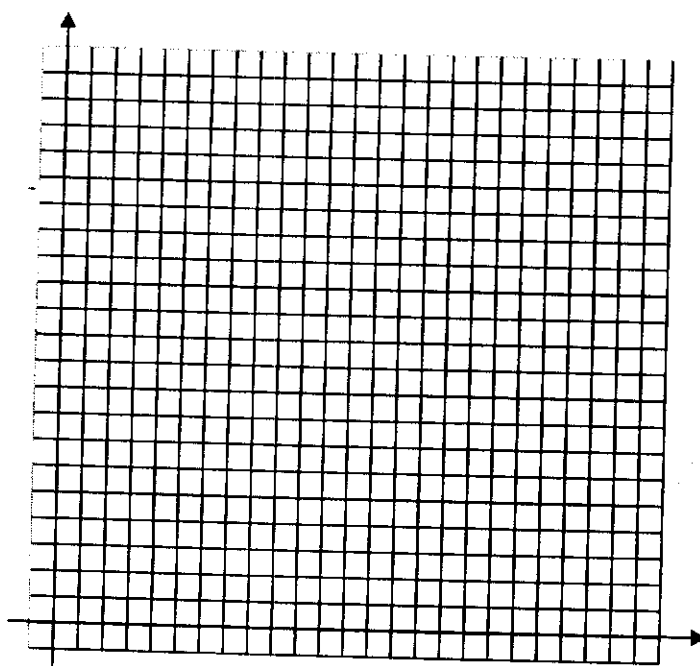
ข้อมูลต่อไปนี้เป็นรายได้และรายจ่าย (ต่อเดือน) ของครอบครัวจำนวน 9 ครอบครัว ที่มีรายได้ตั้งแต่ 2,000 บาท ถึง 16,000 บาท

รายได้ (พันบาท)	2	4	6	7	9	11	12	14	16
รายจ่าย (พันบาท)	2	3	4	5	7	8	10	12	13

- 1) จงสร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูล
- 2) จงหาสมการเส้นตรงที่ใช้ทำนายรายจ่าย เมื่อทราบรายได้
- 3) ถ้าครอบครัวหนึ่งมีรายได้ 5,000 บาท จงทำนายรายจ่ายของครอบครัวนี้
- 4) จงหาสมการเส้นตรงที่ใช้ทำนายรายได้ เมื่อทราบรายจ่าย
- 5) จงตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองที่ได้ในข้อ 4) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด

วิธีทำ

- 1) แผนภาพการกระจายของข้อมูล มีลักษณะดังรูป



2) จากแผนภาพการกระจายความสัมพันธ์ของข้อมูลมีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรง
 เนื่องจากต้องการทำนายรายจ่าย ดังนั้น

ตัวแปรอิสระคือ.....แทนด้วย x

ตัวแปรตามคือ.....แทนด้วย y

สมการทั่วไปของกราฟเส้นตรงคือ.....

ซึ่งมีสมการปกติ 2 สมการคือ

.....

พิจารณาดังต่อไปนี้

x	y	x^2	xy
$\sum x =$	$\sum y =$	$\sum x^2 =$	$\sum xy =$

นำค่าจากตารางแทนลงในสมการปกติจะได้

.....(1)

.....(2)

จากการแก้สมการทั้ง 2 สมการ จะได้

$a =$

$b =$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ใช้ทำนายรายจ่ายคือ $\hat{y} =$

3) ถ้ารายได้เท่ากับ 5,000 บาท ($x =$ ) จะได้

$\hat{y} =$

$=$

แสดงว่าครอบครัวนี้มีรายจ่ายประมาณ.....บาท

4) ถ้าต้องการสร้างสมการเส้นตรงเพื่อใช้ในการทำนายรายจ่าย แล้ว

ตัวแปรอิสระคือ.....แทนด้วย x

ตัวแปรตามคือ.....แทนด้วย y

สมการทั่วไปของกราฟเส้นตรงคือ.....

ซึ่งมีสมการปกติ 2 สมการคือ

.....

โดยที่
$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

พิจารณาดาวางต่อไปนี้

x	y	x^2	xy
$\sum x =$	$\sum y =$	$\sum x^2 =$	$\sum xy =$

จากตารางจะได้

$$\bar{x} = \dots\dots\dots$$

$$\bar{y} = \dots\dots\dots$$

จะได้

$$a = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$b = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ใช้ทำนายรายได้คือ $\hat{y} = \dots\dots\dots$

5) ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองเชิงเส้นที่ได้จากข้อ 4) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนด

จากข้อ 4) สมการเชิงเส้น คือ $\hat{y} = \dots\dots\dots$

สัมประสิทธิ์ของการกำหนดคำนวณได้จากสูตร

$$r^2 = \frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}$$

พิจารณาดังต่อไปนี้

จากข้อมูลจะได้ $\bar{y} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

x	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - \bar{y}$	$(\hat{y} - \bar{y})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
$\sum x =$	$\sum y =$					

จากตารางจะได้

$$r^2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

สัมประสิทธิ์ของการกำหนดเท่ากับ.....หมายความว่า.....

.....

.....

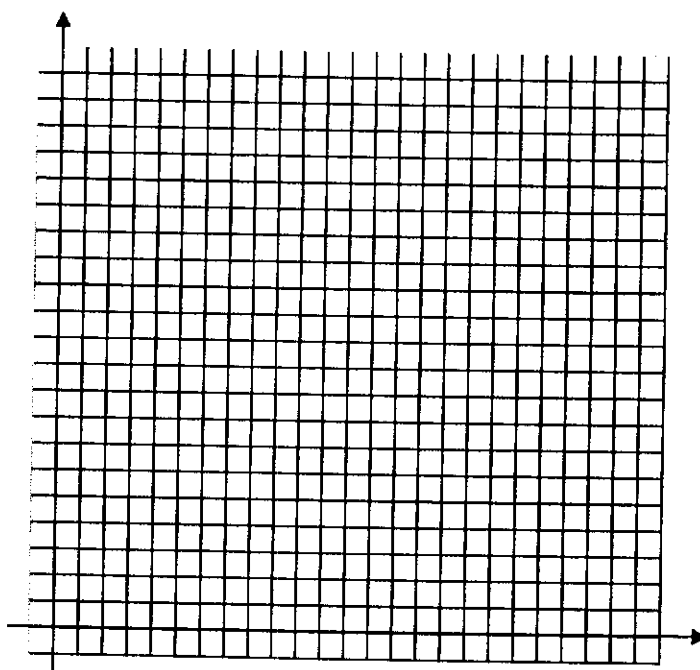
ใบกิจกรรมที่ 10

ถ้าตัวเลขแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนการผลิตสินค้าต่อหน่วย (บาท) กับจำนวนสินค้าที่ผลิตได้ของโรงงานผลิตของเด็กเล่นแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

จำนวนที่ผลิต (หน่วย)	1	2	3	4	5	7	9	11	15
ต้นทุนการผลิต (บาท)	58	56	55	50	45	40	37	30	26

- 1) จงทำนายต้นทุนการผลิตสินค้าต่อหน่วย ถ้าจำนวนสินค้าที่ผลิตได้เป็น 7 หน่วย
- 2) จงตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและสัมประสิทธิ์ของการกำหนด

วิธีทำ แผนภาพการกระจายของข้อมูล มีลักษณะดังรูป



.....

.....

.....

.....

[illegible]

แผนการจัดการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

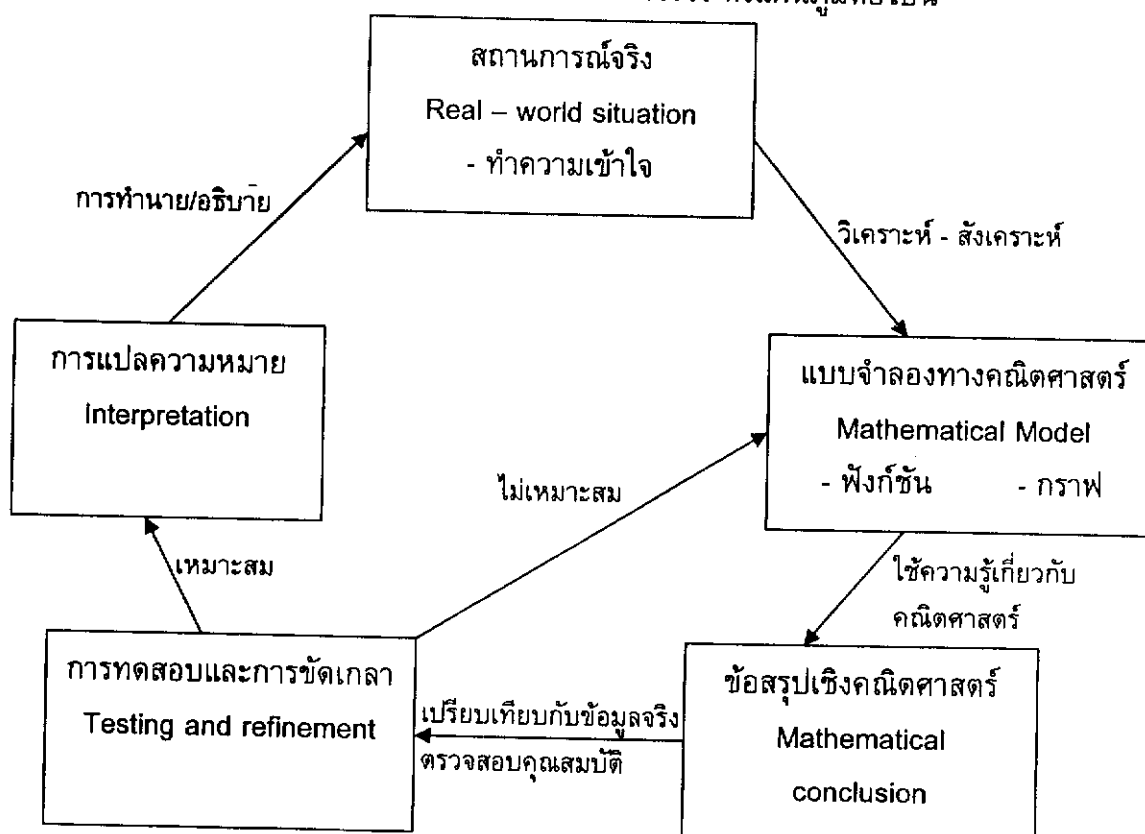
เรื่อง การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จำนวน 4 คาบ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเลือกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับข้อมูลหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถนำเอาความรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาจริงได้

สาระการเรียนรู้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริงกับโลกของคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ซึ่งการศึกษาศถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นจะเริ่มจากสถานการณ์จริงที่เราสนใจ แล้วแทนสถานการณ์จริงนั้นด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แล้วทำการหาผลลัพธ์จากแบบจำลอง และนำคำตอบที่ได้ไปอธิบายสถานการณ์จริงอีกรอบ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ สุธาสล ผาสุข ได้เสนอแนวทางไว้ในการพัฒนากระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่า ประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 5 ขั้นตอน ซึ่งมีลักษณะเป็นวงจร ดังแผนภูมิต่อไปนี้



สื่อการเรียนรู้

ใบความรู้ที่ 9, ใบกิจกรรมที่ 19, เครื่องคิดเลข , เครื่องคอมพิวเตอร์

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ชนิด
2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 4 คน แล้วให้แต่ละกลุ่มยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่สนใจ และให้แต่ละกลุ่มอภิปรายร่วมกันว่าจะมีวิธีการแก้ปัญหาของกลุ่มตัวเองอย่างไร
3. ครูแจกใบความรู้ที่ 9 และบรรยายเกี่ยวกับกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ขั้นตอน และรายละเอียดของกระบวนการในแต่ละขั้น
4. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาตัวอย่างที่ 3 – 6
5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์จริงที่สนใจที่จะนำมาแก้ปัญหาด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
6. เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้ปัญหาหรือสถานการณ์จริงแล้วก็ให้ดำเนินการแก้ปัญหาด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีครูเป็นผู้แนะนำ
7. เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มดำเนินการครบกระบวนการทั้ง 5 ขั้นตอนแล้วให้เขียนรายงานและเตรียมตัวเพื่อนำเสนอหน้าชั้นเรียน
8. ครูและนักเรียนช่วยกันประเมินผลงานและการนำเสนอของรายงานของนักเรียนกลุ่มอื่นๆ

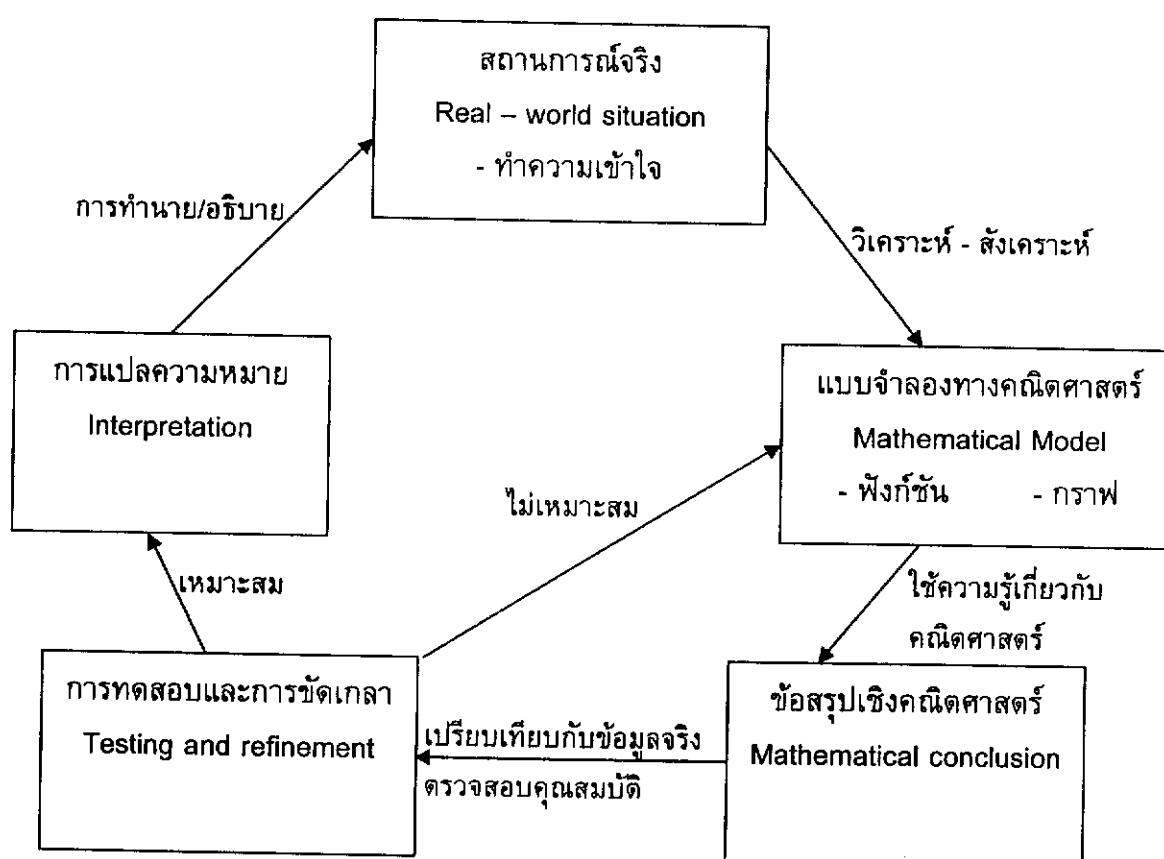
การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากความสนใจและการร่วมกิจกรรมกลุ่ม
2. สังเกตจากการตอบคำถาม
3. ประเมินจากรายงานการศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทั้ง 3 ส่วนคือ ปัญหาที่สนใจ กระบวนการทั้ง 5 ขั้นตอน และการนำเสนอผลงาน

ใบความรู้ที่ 9

6. การศึกษาสถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ตามที่ได้กล่าวไปแล้วว่า แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างโลกที่เป็นจริงกับโลกของคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ซึ่งการศึกษาศถานการณ์จริงด้วยกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นจะเริ่มจากสถานการณ์จริงที่เราสนใจ แล้วแทนสถานการณ์จริงนั้นด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แล้วทำการหาผลลัพธ์จากแบบจำลอง และนำคำตอบที่ได้ไปอธิบายสถานการณ์จริงอีกรอบ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ สุรสา ผาสุข ได้เสนอแนวทางไว้ในการพัฒนากระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆ 5 ขั้นตอน ซึ่งมีลักษณะเป็นวงจร ดังแผนภูมิต่อไปนี้



ซึ่งแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียด ดังนี้

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง นักเรียนต้องระบุประเด็นปัญหาของปัญหาที่ต้องการศึกษา รวมถึงต้องวิเคราะห์ว่าประเด็นปัญหามีอะไรบ้างเป็นตัวแปร ตัวแปรใดเป็นตัวแปรที่สำคัญหรือตรงประเด็นที่ต้องการศึกษา และตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร
2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องสังเคราะห์ความรู้ต่างๆ เช่น มโนคติ สมบัติและกราฟของสมการที่เกี่ยวข้อง ความรู้ทางสถิติ ตลอดจนความรู้เกี่ยวกับการจัดการเชิงคณิตศาสตร์ต่างๆ ในการแทนประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงเส้น กำลังสอง และเอกซ์โพเนนเชียล
3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์หาข้อสรุปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
4. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องทดสอบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ มีความเหมาะสมกับประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษาหรือไม่ ในกรณีที่พบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ยังไม่เหมาะสม นักเรียนต้องขัดเกลาหรือหาแบบจำลองที่เหมาะสมกว่า
5. การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง นักเรียนต้องแปลความหมายจากข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่ประเด็นปัญหาที่ต้องการศึกษา รวมไปถึงต้องมีเหตุผลสนับสนุนหรือชี้แจงการแปลความหมายนั้นด้วย

ตัวอย่างที่ 3 ตารางต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งกับความยาวของกระดูกท่อนขา (ตั้งแต่เอวไปถึงเข่า) หน่วยเป็นเซนติเมตร

นักเรียนชาย		นักเรียนหญิง	
ความสูง	ความยาวกระดูกท่อนขา	ความสูง	ความยาวกระดูกท่อนขา
155	47	145	47.5
157	47	150	52.5
160	50	153	50
163	49	157	53.5
165	47	157	52
166	51	157	53
167	50	158	56
169	51	159	56
170	53	162	54
175	54	164	59



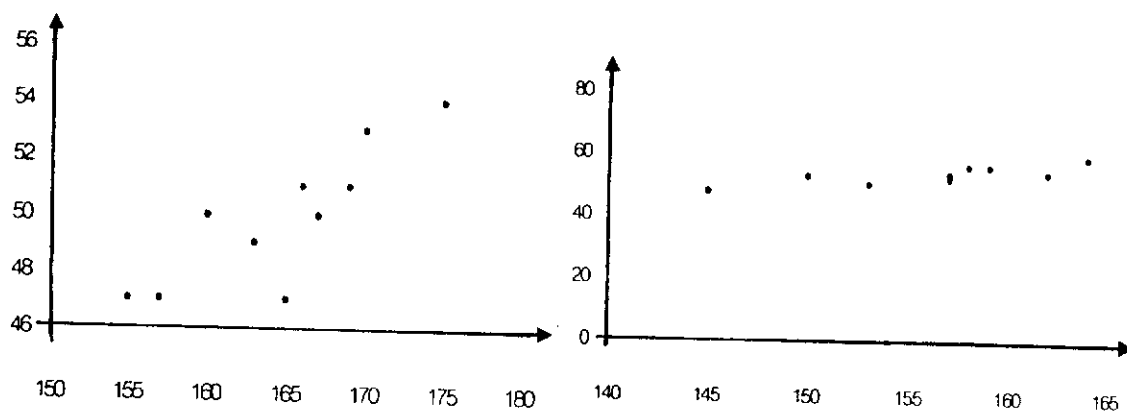
1. จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนของนักเรียนชาย
2. จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนของนักเรียนหญิง
3. จงทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง 171 เซนติเมตร

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวของกระดูกท่อนขา ทั้งของนักเรียนชายและนักเรียนหญิง
 2. ประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง 171 เซนติเมตร
- ตัวแปรที่สำคัญ ความสูง , ความยาวกระดูกท่อนขา
- ความสัมพันธ์เบื้องต้น เนื่องจากข้อมูลประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว แต่ค่าของแต่ละตัวแปร มีหลายค่า ดังนั้นจะต้องพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากแผนภาพการกระจาย



แผนภาพการกระจายของนักเรียนชาย

แผนภาพการกระจายของนักเรียนหญิง

จากแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงและความยาวกระดูกท่อนขาทั้งของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง ดังนั้นจะเลือกสมการเส้นตรง $\hat{y} = ax + b$ เพื่อแสดงความสัมพันธ์

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 2 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

x แทนความสูง (เซนติเมตร)

y แทนความยาวของกระดูกท่อนขา (เซนติเมตร)

และเนื่องจากประเด็นปัญหาต้องการประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อทราบความสูง ดังนั้นตัวแปรอิสระคือความสูง และตัวแปรตามคือความยาวของกระดูกท่อนขา

นั่นคือสมการทั่วไปคือ $\hat{y} = ax + b$

ซึ่งมีสมการปกติ 2 สมการ คือ

$$\sum y = a \sum x + nb$$

$$\sum xy = a \sum x^2 + b \sum x$$

ผู้ชาย				ผู้หญิง			
x	y	x^2	xy	x	y	x^2	xy
155	47	24025	7285	145	47.5	21025	6887.5
157	47	24649	7379	150	52.5	22500	7875
160	50	25600	8000	153	50	23409	7650
163	49	26569	7987	157	53.5	24649	8399.5
165	47	27225	7755	157	52	24649	8164
166	51	27556	8466	157	53	24649	8321
167	50	27889	8350	158	56	24964	8848
169	51	28561	8619	159	56	25281	8904
170	53	28900	9010	162	54	26244	8748
175	54	30625	9450	164	59	26896	9676
$\sum x =$ 1647	$\sum y =$ 499	$\sum x^2 =$ 271599	$\sum xy =$ 82301	$\sum x =$ 1562	$\sum y =$ 533.5	$\sum x^2 =$ 244266	$\sum xy =$ 83473

จากตารางจะได้ค่าเฉลี่ยของความสูงนักเรียนชายคือ $\bar{x}_1 = \frac{1647}{10} = 164.7$ และ

ค่าเฉลี่ยของความยาวกระดูกท่อนขานักเรียนชาย $\bar{y}_1 = \frac{499}{10} = 49.9$

ค่าเฉลี่ยของความสูงนักเรียนหญิงคือ $\bar{x}_2 = \frac{1562}{10} = 156.2$ และ

ค่าเฉลี่ยของความยาวกระดูกท่อนขานักเรียนหญิง $\bar{y}_2 = \frac{533.5}{10} = 53.35$

จากตารางจะได้สมการปกติของนักเรียนชาย คือ

$$499 = 1647a_1 + 10b_1 \quad \text{_____ (1)}$$

$$82301 = 271599a_1 + 1647b_1 \quad \text{_____ (2)}$$

จากตารางจะได้สมการปกติของนักเรียนหญิง คือ

$$533.5 = 1562a_2 + 10b_2 \quad \text{_____ (1)}$$

$$83473 = 244266a_2 + 1562b_2 \quad \text{_____ (2)}$$

และจากสมการปกติสามารถหาค่า a และ b ได้ดังนี้

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad a_1 &= \frac{82301 - 10(164.7)(49.9)}{271599 - 10(164.7)^2} \\
 &= \frac{115.7}{338.1} = 0.3422 \\
 b_1 &= 49.9 - 0.3422(164.7) \\
 &= -6.4603
 \end{aligned}$$

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$

$$\begin{aligned}
 \text{และจะได้} \quad a_1 &= \frac{83473 - 10(156.2)(53.35)}{244266 - 10(156.2)^2} \\
 &= \frac{140.3}{281.6} = 0.4982 \\
 b_1 &= 53.35 - 0.4982(156.2) = -24.4688
 \end{aligned}$$

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$

และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$

ประเด็นปัญหาข้อที่ 2 คือประมาณความยาวของกระดูกท่อนขาเมื่อมีความสูง
171 เซนติเมตร นั่นคือ $x = 171$

$$\text{จะได้} \quad \hat{y}_1 = 0.3422(171) - 6.4603 = 52.0559 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\hat{y}_2 = 0.4982(171) - 24.4688 = 60.7234 \text{ เซนติเมตร}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลารูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขา
ของนักเรียนชายคือ $\hat{y}_1 = 0.3422x - 6.4603$ ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยคือ
 $MSE_1 = 1.9133$ และค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ $r_1^2 = 72.12$ แสดงว่าความสูงของ
นักเรียนชายมีส่วนในการทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาได้ดีถึง 72.12 %

และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับความยาวกระดูกท่อนขาของ
นักเรียนหญิงคือ $\hat{y}_2 = 0.4982x - 24.4688$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองคือ
 $MSE_2 = 3.0780$ และค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ $r_2^2 = 73.95$ แสดงว่าความสูงของ
นักเรียนหญิงมีส่วนในการทำนายความยาวของกระดูกท่อนขาได้ดีถึง 73.95 %

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

ถ้าทั้งผู้ชายและผู้หญิงที่มีความสูง 171 เซนติเมตร จะมีความยาวของกระดูก
ท่อนขาประมาณ 52 เซนติเมตร และ 61 เซนติเมตร ตามลำดับ



ตัวอย่างที่ 4 จากข้อมูลของกรมอุตุนิยมวิทยาในการรวบรวมข้อมูลอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีเวลา
กลางคืนในปีพ.ศ. 2545 ของสถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร ดังนี้

เดือน	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.
อุณหภูมิเฉลี่ย รายปี ($^{\circ}\text{C}$)	18.2	19.8	22.4	24.7	25.1	25.5	25	24.6	24.3	23.6	21.4	18

จากข้อมูลอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีในตาราง จงหาสมการที่ใช้ทำนายอุณหภูมิของเดือน
กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548 ในจังหวัดกำแพงเพชร

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

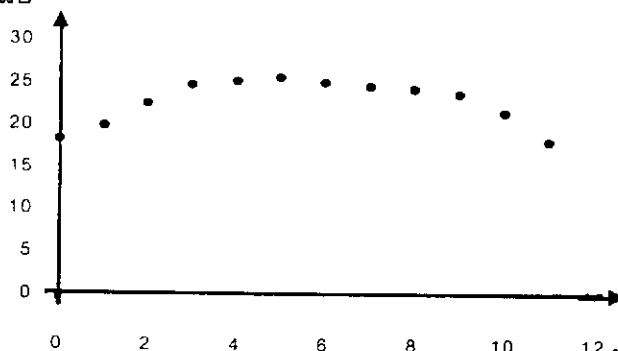
ประเด็นปัญหาคือ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (สมการ) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง
อุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา ทั้งที่จังหวัดกำแพงเพชร
2. ทำนายอุณหภูมิของเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548

ตัวแปรที่สำคัญ อุณหภูมิเฉลี่ยรายปี , เวลา (มกราคม – ธันวาคม)

ความสัมพันธ์เบื้องต้น จะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากแผนภาพ

การกระจาย โดยการสร้างแผนภาพการกระจายและการกำหนดค่า x เดือนแรกจะเริ่มที่ 0 แล้วเดือน
ถัดไปเพิ่มขึ้นทีละ 1 เสมอ



จากแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและเวลาทั้งที่จังหวัดกำแพงเพชร
มีแนวโน้มเป็นเส้นโค้งพาราโบลา แต่เนื่องจากข้อมูลในสถานการณ์นี้เป็นอุณหภูมิที่มีการเคลื่อนไหว
ตามฤดูกาล นั่นคือในอุณหภูมิของเดือนมกราคม, กุมภาพันธ์ และมีนาคม ในปีถัดไปจะเท่ากันหรือ

ใกล้เคียงกับอุณหภูมิของเดือนเดียวกันในปีที่ผ่านมา ทำให้กราฟที่ได้เป็นกราฟรูปคลื่น ดังนั้นจะเลือกสมการเส้นโค้งไซน์ $y = A + B \sin\left(\frac{2\pi(x - D)}{P}\right)$ เพื่อแสดงความสัมพันธ์

- โดยที่ A แทน ค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดของ y
 B แทน แอมพลิจูด หรือค่าครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ y
 P แทน คาบ หรือช่วงที่สั้นที่สุดที่กราฟจะซ้ำรูปเดิม
 D แทน เวลาตั้งแต่ $t = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A)
 x แทน เวลาที่ได้ข้อมูลแต่ละค่า

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 2 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

x แทนเวลา (มกราคม - ธันวาคม) เนื่องจากเลือกสมการเส้นโค้งไซน์ในการแทนความสัมพันธ์ของข้อมูล ดังนั้นเวลาจะเริ่มตั้งแต่ 0, 1, 2, 3, ..., 11

y แทนอุณหภูมิเฉลี่ยรายปี (องศาเซลเซียส)

ให้ A แทนค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีที่จังหวัดกำแพงเพชร
จะได้

$$A = \frac{18.2 + 19.8 + 22.4 + 24.7 + 25.1 + 25.5 + 25 + 24.6 + 24.3 + 21.4 + 18}{12}$$

$$= \frac{272.6}{12} = 22.72$$

ให้ B แทนแอมพลิจูดของกราฟจากข้อมูลที่จังหวัดกำแพงเพชร
จะได้

$$B = \frac{25.5 - 18}{2} = \frac{7.5}{2} = 3.75$$

เนื่องจากข้อมูลนี้เป็นอุณหภูมิเฉลี่ยรายปี ดังนั้นคาบหรือค่า $P = 12$

ให้ D แทนเวลาตั้งแต่ $x = 0$ ถึง เวลาที่กราฟตัดกับค่าเฉลี่ย (A) ของข้อมูลจังหวัดกำแพงเพชร

เนื่องจากในตัวอย่างนี้ $A = 22.72$ ซึ่งจากข้อมูลที่มีอยู่ไม่มีค่า x ที่ทำให้ $A = y = 22.72$ และดังนั้นจะคำนวณหา x ดังนี้

จากตาราง ถ้า $x = 2$ (มีนาคม) จะได้ $y = 22.4$

ถ้า $x = 3$ (เมษายน) จะได้ $y = 24.7$

นั่นคือ ถ้า y เพิ่มขึ้น $24.7 - 22.4 = 2.3$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $3 - 2 = 1$

ถ้า y เพิ่มขึ้น $22.72 - 22.4 = 0.32$ แล้ว x จะเพิ่มขึ้น $\frac{0.32 \times 1}{2.3} = 0.14$

ดังนั้น $D = x = 2 + 0.14 = 2.14$

เมื่อได้ค่าคงตัวครบแล้วก็จะนำไปแทนลงในสมการทั่วไป

นั่นคือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{2\pi(x - 2.14)}{12}\right) \\ &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)\end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\hat{y} = 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)$$

และประเด็นปัญหาข้อที่ 2 คือ ทำนายอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีของเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548
นั่นคือ $t = 1$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \hat{y} &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(1 - 2.14)}{6}\right) \\ &= 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(-1.14)}{6}\right) \\ &\approx 22.72 - 3.75(0.56) \\ &\approx 22.72 - 2.1 \\ &\approx 20.62 \text{ องศาเซลเซียส}\end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเฉลี่ยรายปีกับเวลา (มกราคม – ธันวาคม) ที่สถานีตรวจอากาศจังหวัดกำแพงเพชร คือ

$$\hat{y} = 22.72 + 3.75 \sin\left(\frac{\pi(x - 2.14)}{6}\right)$$

เมื่อคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มีค่าเท่ากับ 2.1170

ซึ่งสถานการณ์ในตัวอย่างนี้เหมาะสมสำหรับสมการไซน์เท่านั้นจึงไม่จำเป็นต้องขัดเกลาแบบจำลองใหม่ แต่ถ้าศึกษาในระดับที่สูงขึ้นไปจะพบว่ามีสมการที่เหมาะสมกับสถานการณ์นี้อีก

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

อุณหภูมิเฉลี่ยรายปีตอนกลางคืนในเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2548 ที่จังหวัดกำแพงเพชร มีค่าประมาณ 20.61 องศาเซลเซียส

สำหรับในตัวอย่างต่อไปจะเป็นการศึกษาสถานการณ์จริงในลักษณะที่เราไม่ทราบสมการตั้งต้นของความสัมพันธ์และตัวแปรที่สัมพันธ์กันอาจมีมากกว่า 2 ตัว นั่นคือตัวแปรอิสระอาจมีมากกว่า 1 ตัวแต่ตัวแปรตามจะยังมีตัวเดียวเหมือนเดิม ดังนั้นสิ่งแรกก็คือเราต้องหาความสัมพันธ์จากข้อมูลในสถานการณ์จริงให้ได้ เมื่อได้สมการตั้งต้นแล้วเราก็หาค่าคงตัวในแต่ละสมการโดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 เมื่อตอนสุดาเกิด พ่อได้ฝากเงินไว้กับธนาคาร 10,000 บาท เพื่อให้เป็นของขวัญในวันเกิด ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 3 บาทต่อปี อยากทราบว่าถ้าสุดามีอายุครบ 5 ปี จะมีเงินรวม (เงินต้น + ดอกเบี้ย เมื่อครบ 5 ปี) ในธนาคารทั้งหมดกี่บาท

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหา คือ จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมดเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี

ตัวแปรที่สำคัญ เงินรวม , ดอกเบี้ย , เงินต้น , เวลาที่ฝากเงิน

ความสัมพันธ์เบื้องต้น เมื่อเวลาฝากเงินเพิ่มขึ้น เงินฝากก็จะเพิ่มขึ้นเพราะธนาคาร

จะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้กับผู้ฝาก

ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,000 = 300 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ย} = 10,000 + 300 = 10,300 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 2 ปี เงินรวมของปีที่ 1 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 2

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,300 = 309 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,300 + 309 = 10,609 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 3 ปี เงินรวมของปีที่ 2 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 3

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,609 = 318.27 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,609 + 318.27 = 10,927.27 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 4 ปี เงินรวมของปีที่ 3 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 4

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 10,927.27 = 327.82 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 10,927.27 + 327.82 = 11,255.09 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 5 ปี เงินรวมของปีที่ 4 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 5

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = 0.03 \times 11,255.09 = 337.65 \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = 11,255.09 + 337.65 = 11,592.74 \text{ บาท}$$

แสดงว่าเมื่อครบรอบวันเกิดปีที่ 5 ของสุดา จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมด 11,592.74 บาท แต่ถ้าต้องการทราบเงินรวมในปีที่ 10 หรือปีที่ 15 ก็ต้องทราบเงินรวมในปีก่อนหน้านั้นๆ ก่อน ซึ่งไม่สะดวกในการคำนวณ ดังนั้นจึงจะหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายปัญหาในลักษณะนี้

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 4 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

P แทนเงินต้น (บาท)

t แทนจำนวนปีที่ฝากเงิน (ปี)

r แทนอัตราดอกเบี้ยต่อปี

S แทนเงินรวมแบบดอกเบี้ยทบต้น (บาท)

จากการคำนวณในขั้นที่ 1 จะพิจารณาในรูปทั่วไปของตัวแปร

นั่นคือ เมื่อครบ 1 ปี

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = \text{เงินต้น} \times \text{อัตราดอกเบี้ย} = Pr \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ย} = P + Pr = P(1 + r) \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 2 ปี เงินรวมของปีที่ 1 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 2

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)^2 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 3 ปี เงินรวมของปีที่ 2 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 3

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^2 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^2 + P(1 + r)^2 r = P(1 + r)^2(1 + r) = P(1 + r)^3 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 4 ปี เงินรวมของปีที่ 3 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 4

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^3 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^3 + P(1 + r)^3 r = P(1 + r)^3(1 + r) = P(1 + r)^4 \text{ บาท}$$

เมื่อครบ 5 ปี เงินรวมของปีที่ 4 จะเป็นเงินต้นของปีที่ 5

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^4 r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^4 + P(1 + r)^4 r = P(1 + r)^4(1 + r) = P(1 + r)^5 \text{ บาท}$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

เมื่อครบ t ปี เงินรวมของปีที่ $t - 1$ จะเป็นเงินต้นของปีที่ t

$$\text{ดอกเบี้ยที่ได้รับ} = P(1 + r)^{t-1} r \text{ บาท}$$

$$\text{เงินรวม} = P(1 + r)^{t-1} + P(1 + r)^{t-1} r = P(1 + r)^{t-1}(1 + r)$$

$$= P(1 + r)^{t-1+n} = P(1 + r)^t \text{ บาท}$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของปัญหานี้คือ

$$S = P(1 + r)^t$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ประเด็นปัญหาคือ จะมีเงินรวมในธนาคารทั้งหมดเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี

$$\text{จากสมการ} \quad S = P(1 + r)^t$$

$$\text{ซึ่ง} \quad P = 10,000 \text{ บาท}, r = 0.03 \text{ ต่อปี}, t = 5 \text{ ปี}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } S &= 10,000(1 + 0.03)^5 \\
 &= 10,000(1.03)^5 \\
 &\approx 10,000 \times 1.1593 \\
 &\approx 11,593 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการคำนวณในขั้นที่ 1 เมื่อครบ 5 ปี สุดามีเงินรวมทั้งหมด 11,592.74 บาท และจากการคำนวณโดยสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ในขั้นที่ 3 เมื่อครบ 5 ปี สุดามีเงินรวมทั้งหมด 11,593 บาท

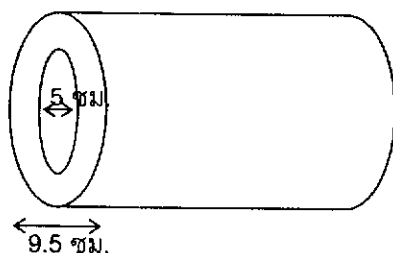
นั่นแสดงว่าค่าที่ได้จากการคำนวณโดยตรงกับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลมีความแตกต่างกันไม่มาก ($11,593 - 11,592.74 = 0.26$) ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้มีความเหมาะสมกับสถานการณ์ปัญหานี้

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

จาก $S \approx 11,593$ บาท

นั่นคือ เมื่อสุดามีอายุครบ 5 ปี จะมีเงินรวมในธนาคารประมาณ 11,593 บาท ☺

ตัวอย่างที่ 6 กระดาษชำระชนิดม้วน ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร แกนกระดาษมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และถ้ากระดาษมีความหนา 0.01 เซนติเมตร อยากทราบว่ากระดาษม้วนนี้มีความยาวเท่าไร และจงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหานี้



วิธีทำ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ กระดาษม้วนจะมีความยาวเท่าไร เมื่อกระดาษม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร แกนกระดาษม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และกระดาษมีความหนา 0.1 เซนติเมตร

ตัวแปรที่สำคัญ รัศมีของกระดาษม้วน , รัศมีของแกนกระดาษ , ความหนาของกระดาษ , ความยาวทั้งหมดของกระดาษม้วน , จำนวนรอบของกระดาษม้วน

ความสัมพันธ์เบื้องต้น ความยาวของกระดาดม้วนในแต่ละรอบจะเพิ่มขึ้นเสมอ เพราะกระดาดมีความหนา นั่นคือความยาวรอบที่ 1 ของกระดาดม้วนก็คือความยาวของเส้นรอบวงกลมของแกนกระดาดนั่นเอง

ดังนั้น เมื่อครบ 1 รอบ

$$\text{กระดาดมีความยาว} = 2\pi r = 2\pi(2.5) = 15.71 \text{ เซนติเมตร}$$

เมื่อครบ 2 รอบ

$$\text{กระดาดมีความยาว} = 2\pi r = 2\pi(2.5 + 0.01) = 15.78 \text{ เซนติเมตร}$$

นั่นคือในรอบถัดไปเรื่อยๆ ความยาวของกระดาดในแต่ละรอบก็จะเพิ่มตามจำนวนรอบ

ขั้นที่ 2 การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 5 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

L แทนความยาวทั้งหมดของกระดาดม้วน (เซนติเมตร)

R แทนรัศมีของกระดาดม้วน (เซนติเมตร)

r แทนรัศมีของแกนกระดาด (เซนติเมตร)

t แทนความหนาของกระดาด (เซนติเมตร)

N แทนจำนวนรอบของกระดาดม้วน (รอบ)

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ 1} = 2\pi r$$

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ 2} = 2\pi(r + t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ 3} = 2\pi(r + 2t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ 4} = 2\pi(r + 3t)$$

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ 5} = 2\pi(r + 4t)$$

⋮

⋮

⋮

$$\text{ความยาวของกระดาดรอบที่ N} = 2\pi[r + (N - 1)t]$$

นั่นคือ ความยาวของกระดาดม้วนทั้งหมด (L)

$$= 2\pi r + 2\pi(r + t) + 2\pi(r + 2t) + 2\pi(r + 3t) + \dots + 2\pi[r + (N - 1)t]$$

$$= \underbrace{(2\pi r + 2\pi r + 2\pi r + \dots + 2\pi r)}_{N \text{ ตัว}} + [2\pi t + 2\pi 2t + 2\pi 3t + \dots + 2\pi(N - 1)t]$$

$$= 2\pi rN + 2\pi t[1 + 2 + 3 + \dots + (N - 1)]$$

$$= 2\pi rN + 2\pi t \frac{(N - 1)(N - 1 + 1)}{2}$$

$$= 2\pi rN + \pi t(N - 1)N$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของปัญหานี้คือ

$$L = 2\pi rN + \pi t(N - 1)N$$

ขั้นที่ 3 การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

กระดาม้วนจะมีความยาวเท่าไร เมื่อกระดาม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 9.5 เซนติเมตร
แกนกระดาม้วนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 เซนติเมตร และกระดามีความหนา 0.1 เซนติเมตร

$$\text{จากสมการ } L = 2\pi rN + \pi t(N - 1)N$$

$$\text{ซึ่ง } r = 2.5 \text{ เซนติเมตร, } t = 0.01 \text{ เซนติเมตร}$$

$$N = \frac{\text{ความหนาของกระดาม้วน}}{\text{ความหนาของกระดาด}}$$

$$N = \frac{\text{รัศมีของกระดาม้วน} - \text{รัศมีของแกนกระดาด}}{\text{ความหนาของกระดาด}}$$

$$N = \frac{4.75 - 2.5}{0.01} = 225 \text{ รอบ}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } L &= 2\pi(2.5)(225) + \pi(0.01)(225 - 1)225 \\ &= 5117.6544 \text{ เซนติเมตร} \\ &= 51.1765 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ปัญหานี้สร้างจากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องหลาย ๆ ตัว ดังนั้นจะไม่มี การทดสอบแบบจำลองที่ได้ แต่จะพิจารณาถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบแทน

ขั้นที่ 5 การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

$$\text{จาก } L = 51.1765 \text{ เมตร}$$

นั่นคือ กระดาม้วนนี้มีความยาวประมาณ 51 เมตร



ใบกิจกรรมที่ 19

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มๆ ละ 4 คน แล้วร่วมกันทำกิจกรรมตามลำดับต่อไปนี้

1. ให้แต่ละกลุ่มยกสถานการณ์จริงหรือปัญหาที่สนใจกลุ่มละ 1 ปัญหา
2. ให้นักเรียนศึกษาสถานการณ์จริง โดยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ทั้ง 5 ขั้น
3. ให้แต่ละกลุ่มรายงานการศึกษาศถานการณ์จริงโดยใช้กระบวนการใช้แบบจำลองทาง
คณิตศาสตร์ หน้าชั้นเรียน

สถานการณ์จริงหรือปัญหาที่สนใจ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ภาคผนวก จ

ตัวอย่างโครงการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

-

ตัวอักษรในเกมต่อศัพท์ภาษาอังกฤษ (Crossword)

จัดทำโดย

- | | | |
|--------------------|-------------|--------|
| 1. นางสาวสิริทิพย์ | วงศ์สกุลพิน | ม. 6/1 |
| 2. นายเอกชัย | จันปาสิ | ม. 6/1 |
| 3. นางสาวธินีพร | ชัยชนภู | ม. 6/1 |
| 4. นางสาวอุษา | ปิติพันธ์ | ม. 6/1 |

เสนอ

อาจารย์เบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม

สถานการณ์จริงหรือปัญหาที่สนใจ

การเล่นต่อศัพท์ภาษาอังกฤษ หรือ Crossword เป็นที่นิยมเล่นกันมาก เพราะจะทำให้รู้ศัพท์ภาษาอังกฤษเพิ่มมากขึ้นแล้ว ยังได้ความสนุกสนานเพลิดเพลินและรู้จักใช้เวลาว่างให้เป็นประโยชน์ ซึ่งตัวอักษรภาษาอังกฤษที่ใช้ในเกม Crossword และจำนวนแต้มของแต่ละตัวอักษร มีดังต่อไปนี้

ตัวอักษร	จำนวนที่มีใน Crossword	จำนวนแต้ม	ตัวอักษร	จำนวนที่มีใน Crossword	จำนวนแต้ม
A	9	1	N	6	1
B	2	3	O	8	1
C	2	3	P	2	3
D	4	2	Q	1	10
E	12	1	R	6	1
F	2	4	S	4	1
G	3	2	T	6	1
H	2	4	U	4	1
I	9	1	V	2	4
J	1	8	W	2	4
K	1	5	X	1	8
L	4	1	Y	2	4
M	2	3	Z	1	10
BLANK	2	0			

ประเด็นปัญหาที่สนใจคือ ถ้าเลือกบทความภาษาอังกฤษมา 1 บทความ ซึ่งในบทความนั้นมีคำอย่างน้อย 300 คำ แล้วจะศึกษาร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับร้อยละของจำนวนอักษรในเกม Crossword และร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับแต้มของอักษรใน Crossword ว่าจะเลือกใช้สมการใดจึงจะมีความเหมาะสม

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาที่สนใจคือ ถ้าเลือกบทความภาษาอังกฤษมา 1 บทความ ซึ่งในบทความนั้นมีคำอย่างน้อย 300 คำ แล้ว

1. หาสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับร้อยละของจำนวนอักษรในเกม Crossword

2. หาสมการเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับแต้มของอักษรใน Crossword

ตัวแปรที่สำคัญ คือ ร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความ ร้อยละของจำนวนอักษรในเกม Crossword

บทความภาษาอังกฤษ

The town of Shenzhen, just forty kilometres north of Hong Kong, is the world's biggest building site. In 1982 it was a fishing village with two main roads, fields, and a population of 30,000. Now it has a population of 3 million. It is growing at an incredible speed. It is spreading north towards Guangzhou (also known Canton) and west towards Macau. The Chinese government hopes that in less than ten years this area will be the biggest city on earth, with a population of 40 million people.

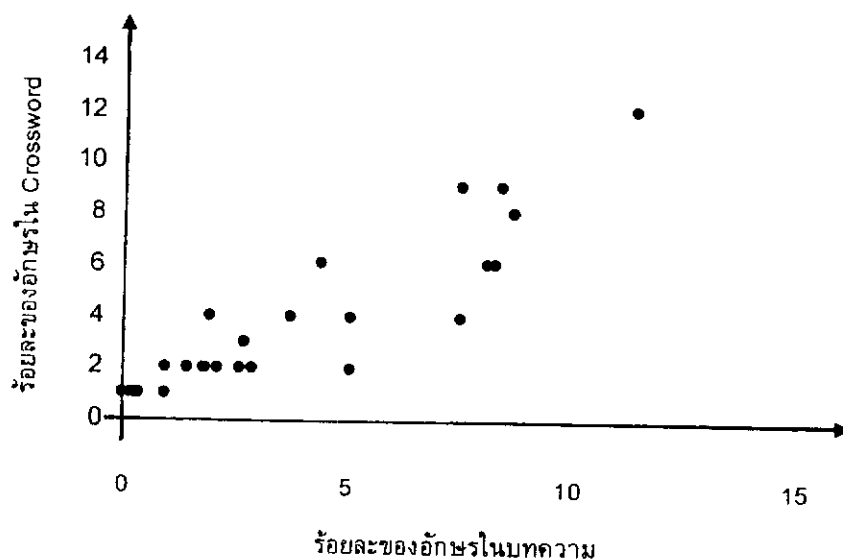
China is changing. It is no longer a country where absolutely everything is owned and controlled by the state. Developers are welcome. As Deng Xiaoping, the Chinese leader, said in 1992, 'To get rich is glorious'. The old China of bicycles and Little Red Books is disappearing. A world of mobile phones and capitalism is arriving.

The Chinese people seem to welcome dramatic change. They don't worry about losing traditional ways of life. They want the new. As the posters on the sides of the highway shout, 'Development is the only way.' Shenzhen is a shocking place, like nowhere else on earth that I have ever seen. It is a city with no boundaries and no centre. There are new concrete office blocks, factories, and housing blocks as far as the eye can see. Not just dozens of new buildings, nor even hundreds, but thousands. And it is all happening so fast. It takes just six months to design, build, and finish a 60-storey, air-conditioned skyscraper. As one architect said to me, 'If you move too slowly here, someone will walk over you.'

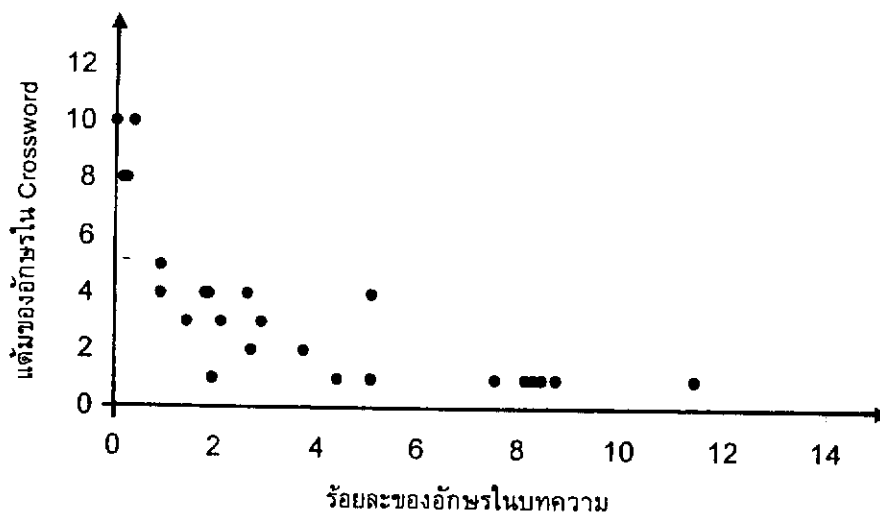
จากบทความจะได้จำนวนตัวอักษรภาษาอังกฤษในบทความตามตาราง

ตัวอักษร	จำนวนใน บทความ	ร้อยละของอักษร ในบทความ	ร้อยละของอักษร ใน crosswrod	จำนวนเต็มใน crossword
A	89	7.55	9.18	1
B	17	1.44	2.04	3
C	34	2.88	2.04	3
D	44	3.73	4.08	2
E	135	11.45	12.24	1
F	21	1.78	2.04	4
G	32	2.71	3.06	2
H	60	5.09	2.04	4
I	100	8.48	9.18	1
J	3	0.25	1.02	8
K	11	0.93	1.02	5
L	60	5.09	4.08	1
M	17	1.44	2.04	3
N	98	8.31	6.12	1
O	103	8.74	8.16	1
P	25	2.12	2.04	3
Q	0	0.00	1.02	10
R	52	4.41	6.12	1
S	89	7.55	4.08	1
T	96	8.14	6.12	1
U	23	1.95	4.08	1
V	11	0.93	2.04	4
W	31	2.63	2.01	4
X	2	0.17	1.02	8
Y	22	1.87	2.04	4
Z	4	0.34	1.02	10
รวม	1179			

ความสัมพันธ์เบื้องต้น เนื่องจากประเด็นปัญหาต้องการ 2 สมการที่แสดงความสัมพันธ์ ดังนั้น จะสร้างแผนภาพการกระจายของข้อมูลทั้ง 2 ชุดเพื่อพิจารณาแนวโน้มของข้อมูล



เมื่อพิจารณาจากแผนภาพการกระจายระหว่างร้อยละของตัวอักษรในบทความและร้อยละของอักษรใน Crossword แล้วพบว่า แนวโน้มมีลักษณะเป็นเส้นตรง ดังนั้นจะเลือกสมการเส้นตรงเพื่อแทนความสัมพันธ์นี้



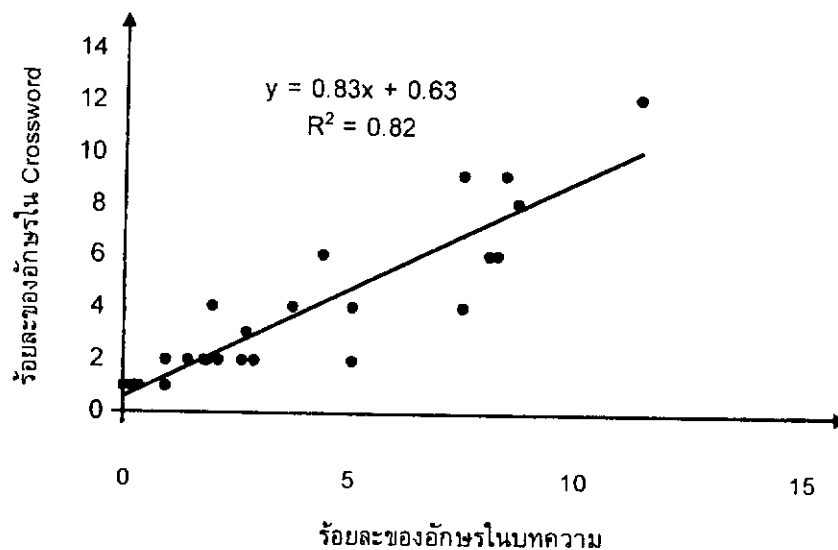
เมื่อพิจารณาแผนภาพการกระจายระหว่างร้อยละของตัวอักษรในบทความและแต้มของตัวอักษรใน Crossword แล้วพบว่าแนวโน้มมีลักษณะเป็นเส้นตรง หรือเป็นเส้นโค้งก็ได้ ดังนั้นจะเลือกสมการเส้นตรงและสมการกำลังสองเพื่อแสดงความสัมพันธ์นี้แล้วจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ของกำหนดช่วยตัดสินใจว่าสมการใดจะเหมาะสมกับข้อมูลมากกว่ากัน

2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

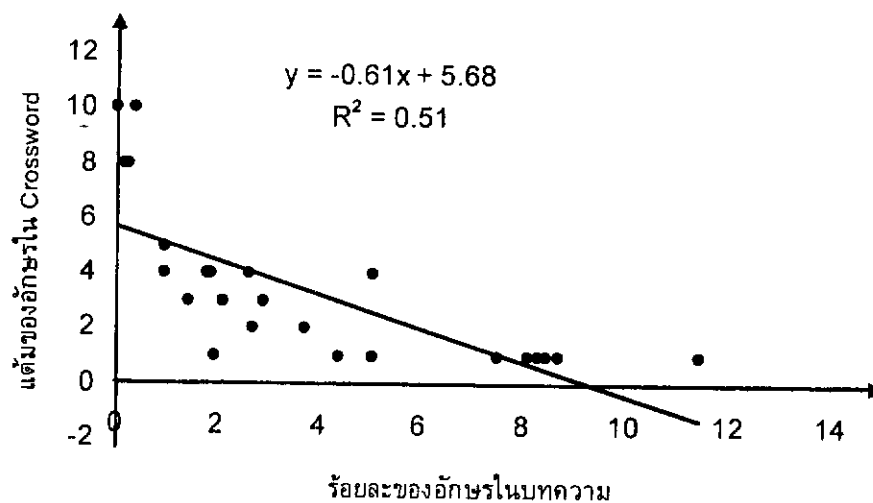
จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 3 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

- x แทนร้อยละของตัวอักษรในบทความ
- y แทนร้อยละของตัวอักษรใน Crossword
- z แทนจำนวนเต็มของตัวอักษรใน Crossword

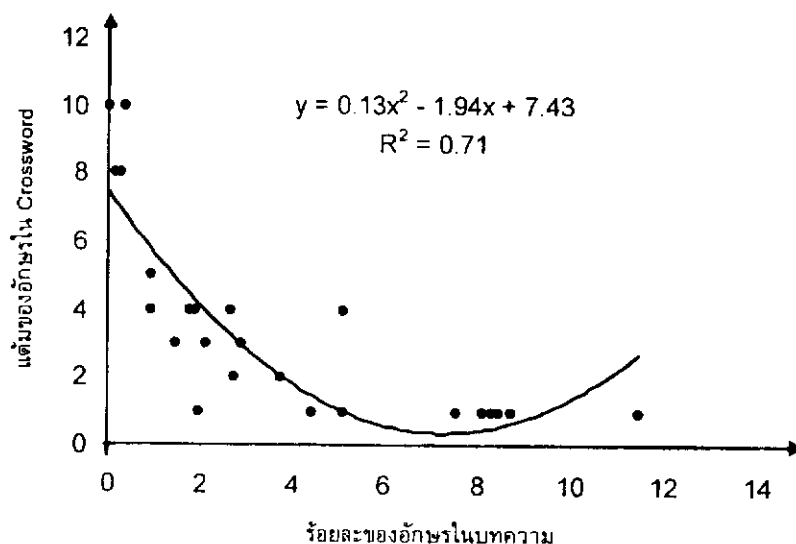
แล้วจะหาสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดโดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel ช่วยในการคำนวณ ซึ่งได้ผลดังนี้



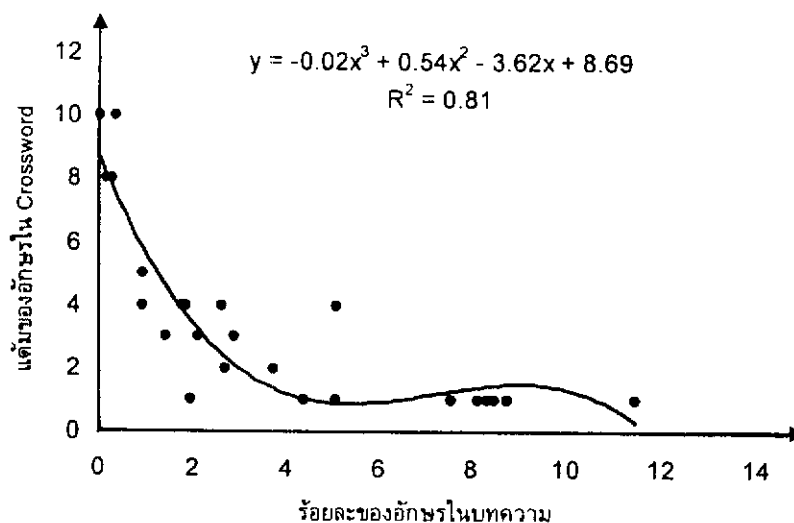
รูป 1



รูป 2



รูป 3



รูป 4

จากรูป 1 จะได้ว่าสมการใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับร้อยละของจำนวนอักษรในเกม Crossword คือ $y = 0.83x + 0.63$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.82

เนื่องจากใช้โปรแกรม Microsoft Excel ช่วยคำนวณจึงหาถึงสมการกำลังสาม และจากรูป 2-4 จะได้ว่าสมการใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับเต็มของอักษรใน Crossword คือ

1. $y = -0.61x + 5.68$ มีค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.51
2. $y = 0.13x^2 - 1.94x + 7.43$ มีค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.71
3. $y = -0.02x^3 + 0.54x^2 - 3.62x + 8.69$ มีค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.81

3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สมมติว่าร้อยละของจำนวนอักษร B ในบทความภาษาอังกฤษ คือ 4

ดังนั้น จากสมการ $y = 0.83x + 0.63$

จะได้ $y = 0.83 \cdot 4 + 0.63$
 $= 3.95$

จากสมการ $y = -0.61x + 5.68$

จะได้ $y = -0.61 \cdot 4 + 5.68$
 $= 3.24$

จากสมการ $y = 0.13x^2 - 1.94x + 7.43$

จะได้ $y = 0.13 \cdot 4^2 - 1.94 \cdot 4 + 7.43$
 $= 1.75$

จากสมการ $y = -0.02x^3 + 0.54x^2 - 3.62x + 8.69$

จะได้ $y = -0.02 \cdot 4^3 + 0.54 \cdot 4^2 - 3.62 \cdot 4 + 8.69$
 $= 1.57$

4. การทดสอบและขัดเกลาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สมการใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับร้อยละของจำนวนอักษรในเกม Crossword คือ $y = 0.83x + 0.63$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.82

สมการใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของจำนวนตัวอักษรในบทความกับแต้มของอักษรใน Crossword คือ $y = -0.02x^3 + 0.54x^2 - 3.62x + 8.69$ เพราะจากค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดคือ 0.81 มีความเหมาะสมกว่าสมการเส้นตรงและสมการกำลังสอง

5. การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริง

สมมติว่าร้อยละของจำนวนอักษร B ในบทความภาษาอังกฤษ คือ 4 ดังนั้นร้อยละของจำนวนตัวอักษร B ใน Crossword คือ 3.95

ส่วนจำนวนแต้มของอักษร B มีค่าประมาณ 2



เลือกโทรแบบไหนดี

จัดทำโดย

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1. นายนรินทร์ | ชินบาน |
| 2. นางสาวศิริวิมล | อินทร์เอี่ยม |
| 3. นางสาวมัตตัญญู | ตะตียะ |
| 4. นายณัฐพล | แย้มสอาด |
- นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1

เสนอ

อาจารย์เบญจมินทร์	อรัญเพิ่ม
-------------------	-----------

สถานการณ์จริงหรือปัญหาที่สนใจ

สภาพปัจจุบันโทรศัพท์มือถือได้กลายมาเป็นส่วนหนึ่งในชีวิตประจำวัน ซึ่งทำให้สภาพการแข่งขันของระบบโทรศัพท์ต่างๆ มีมาก และเป็นผลดีต่อผู้ใช้โทรศัพท์ทุกคน

สถานการณ์ที่จะศึกษาคือ มีระบบโทรศัพท์ระบบหนึ่งได้จัดโปรโมชั่นสำหรับการโทรดังนี้

โทรนาทีละ 0.50 บาท มีรายละเอียด คือ

เวลา 23.00 น. – 17.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 4 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที)

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท 60 วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 5 บาท (คิดเป็นวินาที) วินาทีถัดไปคิด 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที)

โทรนาทีละ 1 บาท มีรายละเอียด คือ

เวลา 23.00 น. – 17.00 น. 30 วินาทีแรกคิด 2.50 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 1 บาท (คิดเป็นวินาที)

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท วินาทีถัดไปคิด 1 บาท (คิดเป็นวินาที)

ประเด็นปัญหาที่สนใจคือ สร้างสมการเพื่อค้นหาจำนวนเงินที่การโทรในแต่ละครั้งและควรเลือกใช้โปรโมชั่นใดระหว่างโทรนาทีละ 0.50 บาทหรือ 1 บาท จึงจะถูกกว่ากัน

1. การทำความเข้าใจสถานการณ์จริง

ประเด็นปัญหาคือ สร้างสมการเพื่อค้นหาจำนวนเงินที่การโทรในแต่ละครั้งและควรเลือกใช้โปรโมชั่นใดระหว่างโทรนาทีละ 0.50 บาทหรือ 1 บาท จึงจะถูกกว่ากัน

ตัวแปรที่สำคัญ เวลาของการโทร , จำนวนเงินในการโทรแต่ละครั้ง

ความสัมพันธ์เบื้องต้น

โทรนาทีละ 0.50 บาท มีรายละเอียด คือ

เวลา 23.00 น. – 17.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 4 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที)

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท 60 วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 5 บาท (คิดเป็นวินาที) วินาทีถัดไปคิด 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที)

โทรนาทีละ 1 บาท มีรายละเอียด คือ

เวลา 23.00 น. – 17.00 น. 30 วินาทีแรกคิด 2.50 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 1 บาท (คิดเป็นวินาที)

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท วินาทีถัดไปคิด 1 บาท (คิดเป็นวินาที)

2. การเชื่อมโยงสถานการณ์จริงไปสู่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 1 มีตัวแปรที่สำคัญ 2 ตัวแปร ซึ่งจะกำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปร ดังนี้

M แทนจำนวนเงินในการโทรแต่ละครั้งคิดเป็นบาท

t แทนเวลาในการโทรคิดเป็นวินาที

สร้างสมการของโปรโมชัน นาทีละ 0.50 บาท

เวลาโทร 23.00 น. – 17.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 4 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที) จะได้สมการคือ

$$M = 4 \quad \text{สำหรับนาทีแรก}$$

$$M = 4 + 0.50 \cdot (t - 60)/60 \quad \text{สำหรับตั้งแต่นาทีที่สองเป็นต้นไป}$$

$$= 4 + (t - 60)/120$$

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท 60 วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 5 บาท (คิดเป็นวินาที) วินาทีถัดไปคิด 0.50 บาท (คิดเป็นวินาที) จะได้สมการคือ

$$M = 5 \quad \text{สำหรับนาทีแรก}$$

$$M = 5 + 5 \cdot (t - 60)/60 \quad \text{สำหรับนาทีที่สอง}$$

$$= 5 + (t - 60)/12$$

$$M = 10 + 0.50 \cdot (t - 120)/60 \quad \text{สำหรับตั้งแต่นาทีที่สามเป็นต้นไป}$$

$$= 10 + (t - 120)/120$$

สร้างสมการของโปรโมชัน นาทีละ 1 บาท

เวลา 23.00 น. – 17.00 น. 30 วินาทีแรกคิด 2.50 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 1 บาท (คิดเป็นวินาที) จะได้สมการคือ

$$M = 2.5 \quad \text{สำหรับครึ่งนาทีแรก}$$

$$M = 2.5 + (t - 30)/60 \quad \text{สำหรับตั้งแต่ครึ่งนาทีถัดไป}$$

เวลา 17.00 น. – 23.00 น. 60 วินาทีแรกคิด 5 บาท วินาทีถัดไปคิดนาทีละ 1 บาท (คิดเป็นวินาที) จะได้สมการคือ

$$M = 5 \quad \text{สำหรับนาทีแรก}$$

$$M = 5 + (t - 60)/60 \quad \text{สำหรับตั้งแต่นาทีที่สองเป็นต้นไป}$$

3. การหาข้อสรุปเชิงคณิตศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากขั้นที่ 2 ได้สมการสำหรับหาจำนวนเงินในการโทรแต่ละครั้ง

ต่อไปจะพิจารณาว่าโปรโมชั่นใดถูกกว่ากัน

เวลาโทร (นาที)	เวลาโทร (วินาที)	นาทีละ 0.50 บาท		นาทีละ 1 บาท	
		23.00น.-17.00น.	17.00น.-23.00น.	23.00น.-17.00น.	17.00น.-23.00น.
0.5	30	4	5	2.5	5
0.75	45	4	5	2.75	5
1	60	4	5	3	5
1.5	90	4.25	7.5	3.5	5.5
2	120	4.5	10	4	6
2.5	150	4.75	10.25	4.5	6.5
3	180	5	10.5	5	7
3.5	210	5.25	10.75	5.5	7.5
4	240	5.5	11	6	8
4.5	270	5.75	11.25	6.5	8.5
5	300	6	11.5	7	9
5.5	330	6.25	11.75	7.5	9.5
6	360	6.5	12	8	10
6.5	390	6.75	12.25	8.5	10.5
7	420	7	12.5	9	11
7.5	450	7.25	12.75	9.5	11.5
8	480	7.5	13	10	12
8.5	510	7.75	13.25	10.5	12.5
9	540	8	13.5	11	13
9.5	570	8.25	13.75	11.5	13.5
10	600	8.5	14	12	14
10.5	630	8.75	14.25	12.5	14.5
11	660	9	14.5	13	15
11.5	690	9.25	14.75	13.5	15.5
12	720	9.5	15	14	16
12.5	750	9.75	15.25	14.5	16.5
13	780	10	15.5	15	17

ภาคผนวก จ
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องของชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ความเที่ยงตรงของเนื้อหาและความเหมาะสมของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีดังนี้

1. รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธัญกฤติ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. ดร.สุรสาธ ผาสุข
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี
3. ดร.วินัย โพธิ์สุวรรณ
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายเบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม
วันเดือนปีเกิด	20 พฤศจิกายน 2519
สถานที่เกิด	อำเภอวิเชียรบุรี จังหวัดเพชรบูรณ์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	269 หมู่ 11 ตำบลหนองแม่แตง อำเภอไทรงาม จังหวัดกำแพงเพชร 62150
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม ตำบลนครชุม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2532	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนหนองหลวงราษฎร์บำรุง จังหวัดกำแพงเพชร
พ.ศ.2535	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนนิยมศิลป์อนุสรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์
พ.ศ.2538	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนไทรงามพิทยาคม จังหวัดกำแพงเพชร
พ.ศ.2542	ค.บ.(คณิตศาสตร์ เกียรตินิยมอันดับ 2) สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร จังหวัดกำแพงเพชร
พ.ศ.2548	กศ.ม.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

บทคัดย่อ

ของ

เบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม

ปี 2 พ.ศ. 2548

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2548

เบญจมินทร์ อรัญเพิ่ม. (2548). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ, ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิวรรณ งามสันติกุล.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หลังการใช้ชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนวชิรปราการวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร 1 ห้องเรียน จำนวน 30 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม จากทั้งหมด 5 ห้องเรียน จำนวน 200 คน

ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นเวลา 15 ชั่วโมง โดยในระหว่างการสอนได้เก็บคะแนนกิจกรรมระหว่างเรียน 25 คะแนน เมื่อสิ้นสุดการสอนทำการเก็บคะแนนจากการทำโครงงานแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 25 คะแนน และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 50 คะแนน

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนด้วยชุดการสอนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

A STUDY OF ACHIEVEMENT IN LEARNING MATHEMATICAL MODEL
OF MATHAYOMSUKSA VI STUDENTS

AN ABSTRACT
BY
BENJAMIN ARUNPHOEM

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
May 2005

Benjamin Arunphoem. (2005). *A Study of Achievement in Learning Mathematical Model of Mathayomsuksa VI Students*. Master thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Yongyuth Tanugrit, Asst. Prof. Raweewan Ngamsuntikul.

The main purposes of this study was to create the instructional package on mathematical modeling for mathayomsuksa VI level and study the achievement when used this instructional package.

The study was conducted in the second semester for 2004 academic year at Wachiraprakarnwittayakom school, Muang district, Kamphaengphet province. With a cluster sampling, 30 mathayomsuksa VI students from 5 classes, 200 students, were chosen as subjects for this experiment.

The researcher taught the students with the instructional package on mathematical modeling. They were taught by the researcher over 15 hours. This package was divided the achievement score to 3 parts, the activity during used this package was worth 25 points, the mathematical modeling project was worth 25 points, and the achievement test was worth 50 points.

Based on their scores on the achievement scores, it was found that the number of students who pass criterion was more than 50% of the total number of students. The statistical test was analyzed at .01 level of significance. It is concluded that this instructional package is suitable at this level.