

การศึกษาผลลัพธ์ที่ได้จากการรวม ความเชื่อมั่นวลที่สุดและพลังงานน้อยที่สุด ของระบบ
พลศาสตร์เชิงเส้น



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2551

การศึกษาผลลัพธ์ที่ได้จากการรวม ความเชื่อมั่นวลที่สุดและพลังงานน้อยที่สุด ของระบบ
พลศาสตร์เชิงเส้น



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษามลัทธิที่ได้จากการรวม ความนิยมที่สุดและพลังงานน้อยที่สุด ของระบบ
พลศาสตร์เชิงเส้น



บทคัดย่อ
ของ
จำนงค์ ผายสะน้อย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2551

จำนงค์ ผายสระน้อย (2551). การศึกษาผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมความนิ่มนวลที่สุดและพลังงานน้อยที่สุดของระบบพลศาสตร์เชิงเส้นปริภูมิอนุพันธ์ วศ.ม.(เครื่องกล).กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ คณะกรรมการควบคุม : พันโทผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิจิต บัวแก้ว

การจัดทำปริภูมิอนุพันธ์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการวิเคราะห์หาค่าผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมวิธีการ ความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) และการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือสำหรับทำการวิเคราะห์ค่าความเหมาะสมที่สุดหาคำตอบ คือได้ทั้งความนิ่มนวลสูงสุดและใช้พลังงานน้อยที่สุด ผลลัพธ์ที่ได้นำไปเปรียบเทียบกับกรณีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดด้วยวิธีความนิ่มนวลที่สุดและวิธีใช้พลังงานน้อยที่สุดเพียงอย่างเดียว

การศึกษาดังกล่าวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดให้ระบบการเคลื่อนที่มี 2 องศาอิสระ (Two Degree of Freedom) เป็นระบบสปริง มวล และตัวหน่วง (Spring Mass and Damper) ในรูปแบบของ Fully Actuator ของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear of Dynamic Systems) ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดด้วยวิธีการแก้ปัญหาจากการรวมค่าความนิ่มนวลสูงสุดกับวิธีการพลังงานน้อยที่สุดเข้าด้วยกัน จากนั้นใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ MATLAB มาเป็นเครื่องมือช่วยวิเคราะห์และแสดงผลในลักษณะรูปแบบของกราฟ

ผลที่ได้จากการศึกษาและวิจัยตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้ ทำให้ได้ค่าความเหมาะสมสูงสุด คือได้ทั้งความนิ่มนวลที่สุดและใช้พลังงานน้อยที่สุด เมื่อเทียบกับการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดจากการใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เดียว ซึ่งจะเป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์ใช้กับงานจริงต่อไป

A STUDY OF COMBINING MINIMUM JERK AND MINIMUM ENERGY OF LINEAR
DYNAMIC SYSTEMS



AN ABSTRACT
BY
JUMNONG PAISRANOI

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master
of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

May 2008

Jumnong Paisrani. (2008). *A Study of Combining Minimum Jerk and Minimum Energy of Linear Dynamic Systems*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col. Assist. Prof. Dr.Tawiwat Veeraklaew , Assist. Prof. Vichit Baukrew.

The purpose of this research is to study optimum maximum of a combining minimum jerk and minimum energy of linear dynamic systems by using the minimum energy optimization method, minimum jerk optimization method, and then used computer software to finding the results are optimum maximum, respectively.

Both the minimum energy consumption and smoothness, which is quantified as a function of jerk, are generally needed in many dynamic systems such as the automobile and the pick-and-place robot manipulator that handles fragile equipments. Nevertheless, many researchers come up with either solely concerning on the minimum energy consumption or minimum jerk trajectory. This research paper proposes a simple yet very interesting when combining the minimum energy and jerk of indirect jerks approaches in designing the time-dependent system yielding an alternative optimal solution. Extremal solutions for the cost functions of the minimum energy, the minimum jerk and combining them together are found using the dynamic optimization methods together with the numerical approximation. This is to allow us to simulate and compare visually and statistically the time history of state inputs employed by combining minimum energy and jerk designs. the numerical solution of minimum direct jerk and energy problem are exactly the same solution; however, the solutions from problem of minimum energy yield the similar solution especially in term of tendency.

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สามารถสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์ด้วยดี ทุกประการ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบุคคลต่าง ๆ ที่ให้คำปรึกษาแนะนำตลอดทั้งความช่วยเหลือทุกด้าน ดังนี้

พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า อาจารย์ที่ปรึกษาการทำปริญญานิพนธ์ ที่ให้ความรู้ คำปรึกษา ข้อเสนอ ที่เป็นประโยชน์ และช่วยตรวจสอบแก้ไขเพื่อให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จอย่างสมบูรณ์ ขอกราบขอบพระคุณอย่างสูง

กราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ให้ข้อคิดเห็น ข้อชี้แนะและสละเวลาตรวจแก้ไขบทร่างของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง ให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย และร่วมเป็นกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

ขอขอบพระคุณ พันเอก ดร.ธีรนนท์ นันทขว้าง ที่สละเวลามาเป็นประธานสอบปากเปล่า

ขอขอบพระคุณ รศ.ร.อ.ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์ รองคณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ช่วยเหลือด้านเอกสารการศึกษาต่อที่มหาวิทยาลัยแห่งนี้

กราบขอบพระคุณอย่างสูง ท่าน รศ.น.อ.ดร.วรวจน์ ขำพิศ รองอธิการบดี ฝ่ายวางแผน/คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่คอยให้กำลังใจและช่วยเหลือผู้วิจัยทุก ๆ เรื่อง ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุก ๆ ท่าน ที่เป็นกำลังใจที่ดี

กราบขอบพระคุณบิดา มารดา เป็นผู้มีพระคุณ ในการสนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนปริญญโทรุ่น 4 ทุกท่าน น้องๆ ร่วมรุ่น ในการสนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

สุดท้ายขอขอบคุณภรรยาของผู้วิจัยที่ให้กำลังใจและช่วยเหลือด้านจัดรูปแบบ ช่วยตรวจสอบแก้ไข ข้อบกพร่องปริญญานิพนธ์ให้เสร็จสมบูรณ์

จำนงค์ ผายสระน้อย

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำวิจัย.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
ขอบเขตของการวิจัย.....	1
วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย.....	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
ออปติไมซ์เซชัน	3
แคลคูลัสออพริเอชันส์	7
ไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน.....	15
การเพิ่มของหลักการน้อยที่สุด	27
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์	34
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	36
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	39
การกำหนดปัญหา.....	39
เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ไขปัญหา	41
การกำหนดรูปแบบสมการ	44
ปัญหาความไม่แน่นอนที่สุดโดยวิธีทางตรง.....	45
ปัญหาพลังงานน้อยที่สุด.....	46
ปัญหาการรวมความไม่แน่นอนที่สุดกับปัญหาพลังงานน้อยที่สุด.....	46

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	47
ผลการทดสอบ.....	47
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	66
5 สรุปและวิจารณ์.....	67
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	67
ข้อเสนอแนะ.....	67
บรรณานุกรม.....	69
อภิธานศัพท์.....	71
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	76

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems.....	34
2 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems.....	44
3 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems.....	47
4 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems.....	50
5 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems.....	53
6 Solutions of $x_1(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.....	55
7 Solutions of $\dot{x}_1(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.....	55
8 Solutions of $x_2(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.....	56
9 Solutions of $\dot{x}_2(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.....	56
10 Solutions of $x_1(t)$ from minimum energy.....	56
11 Solutions of $\dot{x}_1(t)$ from minimum energy.....	57
12 Solutions of $x_2(t)$ from minimum energy.....	57
13 Solutions of $\dot{x}_2(t)$ from minimum energy.....	57
14 Solutions of the First State Variables $x_1(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy.....	58
15 Solutions of the Second State Variables $x_2(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy.....	59
16 Solutions of the First Derivative of the First State Variables $\dot{x}_1(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy.....	60

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ

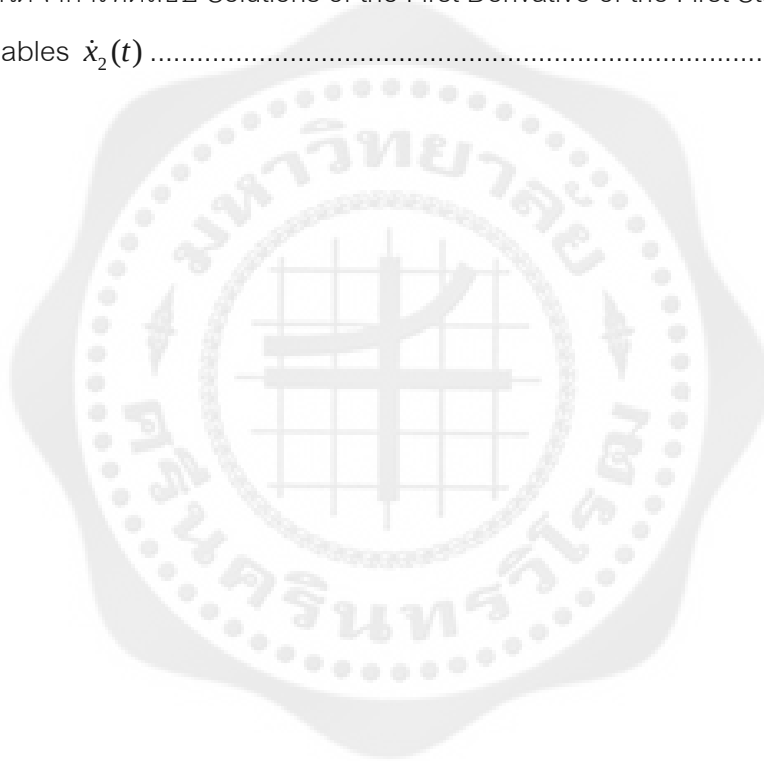
หน้า

17 Solutions of the First Derivative of the Second State Variables from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy.....	61
---	----



บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ Solutions of the First State Variables $x_1(t)$	62
2 ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ Solutions of the Second State Variables $x_2(t)$	63
3 ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ Solutions of the First Derivative of the First State Variables $\dot{x}_1(t)$	64
4 ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ Solutions of the First Derivative of the First State Variables $\dot{x}_2(t)$	65



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำวิจัย

การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์การเคลื่อนที่ สามารถพิจารณาได้หลายรูปแบบ เช่น อาจจะมีการวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบของความต้องการความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk) หรือรูปแบบความต้องการพลังงานสูงสุด (Maximum Energy) หรือรูปแบบความต้องการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ก็คือความต้องการประหยัดพลังงานนั่นเอง ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดสำหรับงานบางอย่าง อาจมีสิ่งที่ต้องนำมาพิจารณามากกว่าหนึ่งอย่าง ตัวอย่าง เช่น การเคลื่อนที่ของแขนกลสำหรับจับชิ้นงานจากจุดหนึ่งไปจุดหนึ่ง สิ่งที่ต้องการคือการจับชิ้นงานและเคลื่อนที่ไปอย่างนิ่มนวลที่สุดในขณะเดียวกันควรใช้พลังงานน้อยที่สุด ค่าความเหมาะสมสูงสุดคือ ใช้พลังงานในการจับชิ้นงานน้อยที่สุดโดยที่ชิ้นงานต้องไม่หล่นเสียหาย รวมทั้งความนิ่มนวลของการจับด้วย หรือตัวอย่างการเคลื่อนที่ของรถยนต์ ที่เป็นไปอย่างนิ่มนวลและประหยัดต้องอาศัยองค์ประกอบหลายอย่าง ที่ทำงานอย่างสัมพันธ์กัน

จากความต้องการดังกล่าวข้างต้น จึงเป็นที่มาของการศึกษาและวิจัย เพื่อต้องการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด ในรูปแบบของการรวมความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk) และความต้องการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) จากนั้นนำผลที่ได้เปรียบเทียบกับฟังก์ชันวัตถุประสงค์อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งผลที่ได้จากการศึกษาและวิจัยครั้งนี้จะเป็นประโยชน์กับการประยุกต์ใช้งานจริงต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 เพื่อศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ จากการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการรวมความนิ่มนวลที่สุดกับวิธีการพลังงานน้อยสุดของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น
- 1.2.2 เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ เปรียบเทียบกับวิธีความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) และวิธีการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ นำเอาหลักการการใช้ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีตรง (Minimum Direct Jerk) รวมกับหลักการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ของระบบพลศาสตร์เป็นเชิงเส้น (Linear Dynamic)

- 1.3.2 ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีวัตถุประสงค์เป็นมวล 2 ก้อน ที่มีสปริงและตัวหน่วงมาทำการหาสมการการเคลื่อนที่
- 1.3.3 กำหนดรูปแบบของสมการในรูปสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Derivative)
- 1.3.4 นำโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ชื่อ แมทแล็บ (MATLAB) มาช่วยวิเคราะห์แก้ปัญหา

1.4. วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ

- 1.4.1 ทบทวนเอกสารบทปริทรรศน์ของทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อนำมาเป็นแนวทางศึกษาและวิจัย
- 1.4.2 ศึกษารูปแบบสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางพลศาสตร์ หลักการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่
- 1.4.3 กำหนดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยมี สมการการเคลื่อนที่ระบบทางพลศาสตร์ กำหนดสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้าย เงื่อนไขขอบเขตและสร้างคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)
- 1.4.4 นำโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ชื่อ แมทแล็บ (MATLAB) มาใช้ เพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์ ตามแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างไว้
- 1.4.5 ทำการสรุปวิเคราะห์ผลที่ได้จากการวิจัย
- 1.4.6 จัดทำรูปเล่มปริญญานิพนธ์และตีพิมพ์/เผยแพร่เอกสารงานวิจัย

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

- 1.5.1 ผลจากการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาเพื่อให้สามารถนำไปแก้ปัญหากับงานจริง หรือเอาไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ที่มีลักษณะที่ใกล้เคียงกัน
- 1.5.2 ผลจากการวิจัยครั้งนี้สามารถให้ข้อมูลสำหรับการประยุกต์จากการรวมเอาหลักการความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) กับหลักการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) ไปใช้กับปัญหาด้านพลศาสตร์ เพื่อเปรียบเทียบผลที่ได้กับฟังก์ชันวัตถุประสงค์
- 1.5.3 ผลจากการวิจัยครั้งนี้จะทำให้การใช้ประโยชน์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้คำนวณหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาและยังสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาอื่น ๆ ที่ใกล้เคียงกันได้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการพรรณนาถึงลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน ซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of Problem Formulation) ในทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและจำเป็นต้องทำความเข้าใจสามส่วนด้วยกัน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.1.1.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่ระบุชี้ชัดถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์แล้วตัวแปรของการออกแบบ ก็คือตัวแปรที่ค่าที่จะต้องถูกค้นหาค่านั้นเอง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม คือ ดีไซน์วาริเอเบิล ก็คือความยาวและความสูง ในการกำหนดหรือเลือกว่าสิ่งไหนคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) นั้น ผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้สามัญสำนึก ความชำนาญ และพื้นความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ แต่ก็มีหลักการพื้นฐานเช่นกันคือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) จะต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear Independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) จะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ตัวอย่างเช่น การออกแบบหน้าต่างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราจะไม่สามารถกำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) เป็นความยาว ความกว้างและพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรากำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) เป็นความยาวและความกว้างแล้ว ตัวแปรที่สามคือ พื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) สามารถ

มีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) เหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design Vector : Matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใด ๆ ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และในทฤษฎีทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ x , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

2.1.1.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรง เป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector : Matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้าย ๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

2.1.1.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) มาประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions) นี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออบเจกทิฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design Objectives and / or Constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็จะกลายเป็นออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective Function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield Strength) นี้ก็จะเป็น คอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint Functions)

2.1.1.4 ฟอर्मมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นล้วนแต่เป็นองค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทั้งสิ้น และมีการเขียนในทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้หลาย ๆ แบบดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ c_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ x_j^l &\leq x_j \leq x_j^u, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

หรือเขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (2.5)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: $g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l = 1, 2, \dots, m$ (2.6)

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ $f(X), [X]_n$ (2.9)

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: $[g(X)]_l = 0$ (2.10)

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2.11)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2.12)$$

จากฟอร์มมาตรฐานของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดได้ดังนี้ คือ หาค่าน้อยที่สุด (Minimize) ของออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective Function) f โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับ (Equality Constraints) จำนวน l เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับ อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints) จำนวน l เงื่อนไข ทั้งนี้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ทั้งหมดจำนวน n ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของไซด์คอนสเทรนต์ (Side Constraints) เท่านั้น

2.1.1 ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

2.1.1.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาเรียเบิ้ล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of Optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาเรียเบิ้ล (Design Variables) ที่มีออบเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective Function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or Maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยที่สุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมินิมัม (Global Minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.13)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่า โลคอลมินิมัม (Local Minimum)

กรณีมากที่สุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global Maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.14)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่า โลคอลแมกซิมัม (Local Maximum)

2.1.2 แคลคูลัสออฟวาเรียนชันส์ (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาเรียนชันส์ (Calculus of Variations) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.15)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนุโลมหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะมีขึ้นอยู่กับหลาย ๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.16)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.16) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) หลาย ๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาเรียนชันส์ (Calculus of Variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนccessary conditions (Necessary Conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาเรียนชันส์ (Calculus of Variations) มาใช้กับไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.2 แคลคูลัสออฟวาเรียนชันส์ (Calculus of Variations)

2.1.2.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดียว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single Stage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.1.2.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire Function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x + h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.17)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.18)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.4) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.19)$$

เมื่อเนccessary conditions (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.20)$$

ซึ่งสมการ (2.20) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะ
ทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0) = x_0$ และ
 $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธี
ออยเลอร์ คอชี่ (Euler Cauchy) ได้

2.1.2.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.3.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.17 –
2.19) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้
ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนccessary conditions
(Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.23)$$

ซึ่งสมการ (2.21 – 2.23) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's
Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)
 $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์ –
คอชี่ (Euler – Cauchy) ได้

2.1.2.1.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหา
คำตอบคล้าย ๆ กับกรณี (2.3.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire Function) ที่เป็น
เอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$
ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt
\end{aligned} \tag{2.24}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาร์ต (Integrating By Parts) สมการ (2.25) ก็จะได้พบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.26) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

เมื่อเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.29)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.1.2.2 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.1.2.2.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั้นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.30)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.32)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.32) ก็จะได้พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.33)$$

เมื่อเนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

ซึ่งสมการ (2.34) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์ คอชี่ (Euler Cauchy) ได้

2.1.2.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.31 – 2.33) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนสเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

ซึ่งสมการ (2.35 – 2.37) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์ คอชชี (Euler Cauchy) ได้เช่นกัน

2.1.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้าย ๆ กับกรณี (2.3.2.1) ถ้า $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.38)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ &\quad + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.39) ก็จะได้พบว่

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i \Big|_{t_0} - \dot{x}_i \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i \Big|_{t_f} - \dot{x}_i \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.40) จะเป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i \Big|_{t_f}$, $\delta x_i \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.42)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.43)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.1.3 ไดนามิกส์ออปติไมเซชัน (Dynamic Optimization)

ระบบควบคุมทางวิศวกรรมทั้งหมดเป็นระบบที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้มาจากกฎของฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของยานยนต์สามารถหาได้โดยกฎของกลศาสตร์หรือกฎของเทอร์โมไดนามิกส์ระบบที่กล่าวถึงเรียกโดยรวมว่าระบบพลศาสตร์ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.44)$$

เมื่อ t คือ เวลา, x_i คือตัวแปรสถานะ (State Variable) ของระบบ ดังเช่น พิกัดเจเนอเรลไชน์ โคออดิเนต, u_i ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control Input) f_i คือ ฟังก์ชันทั่วไปที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรสถานะ x_i และตัวแปรควบคุมป้อนเข้า u_i หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของตัวแปรสถานะหรือสเตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) ได้ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second – Order Differential Equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First – Order Differential Equation) ดังสมการ (2.44) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.44) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสถานะเริ่มต้นเสมอ (Initial State) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกส์จะเรียกฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือค่าฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.45)$$

เมื่อ t_0 คือ เวลาเริ่มต้น, t_f คือ เวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และสถานะสุดท้าย (Final State) ของระบบ ส่วนที่สองคือ

$\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของ ตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุม (Control Variables) โดยที่ Φ และ L คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุมหรือคอนโทรลวารีเอเบิล (Control Variables) และเป็นความสัมพันธ์กันทางฟิสิกส์ไปสู่ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไป

การแก้ปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์หรือไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สถิติออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of Variations) จากหัวข้อ 2.3 เป็นอย่างมากอีกด้วย ปัญหาของ การหาเวลาที่ผ่านไปของตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของสมการที่ (2.44) สามารถหาคำตอบได้จากวิธีแคลคูลัสของแปรผันที่ได้พัฒนามาจากหัวข้อ 2.3 โดยกล่าวถึงปัญหาที่เป็นการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed Final Time) และปัญหาที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายหรือเวลาสุดท้ายแปรผันได้ (Variable Final Time)

ระบบทางพลศาสตร์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดียว (Single – Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ ๆ ด้วยกัน คือ วิธีตรงหรือวิธีไดเรกต์ (Direct Methods) และวิธีอ้อมหรือวิธีอินไดเรกต์ (Indirect Methods)

2.1.3.1 ปัญหาการกำหนดเวลาสุดท้ายคงที่ (Fixed Final Time)

ข้อปัญหาที่กล่าวถึงในตอนนี้เป็นไปตามสาระสำคัญดังนี้ (1) ระบบพลศาสตร์ที่อธิบายดังสมการที่ (2.30), (2) คอสฟังก์ชันนอลสำหรับค่าที่น้อยที่สุดกำหนดโดยสมการที่ (2.45), (3) เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายกำหนดไว้ตายตัว และ (4) ต้องระบุสถานะเริ่มต้น (Initial States) $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่เคลื่อนขบวนไปมาระหว่างสองเมือง และกำหนดเวลาเข้าและเวลาออกจากแต่ละสถานี ซึ่งอาจจะวางแผนการเดินทางโดยกำหนดเป้าประสงค์ในเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด หรือ ในทางกลับกันอาจจะกำหนดการใช้กำลังงานให้คุ้มค่าที่สุด ต่อเราจะมาพิจารณาปัญหาสามประเภทในตอนนี้คือ (a) ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$, (b) ปัญหาที่สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกบังคับให้อยู่ในแนวของพื้นผิวที่กำหนด (c) ตัวแปรควบคุม

(Control Variables) และตัวแปรสถานะ(State Variables) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่มีความสัมพันธ์กับทุกช่วงเวลา

2.1.3.1.1 ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย (Final State are Prescribed)

เป็นปัญหาที่มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัว เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการจะคงที่และไม่มีผลเกี่ยวข้องใด ๆ กับการหาความเหมาะสมที่สุดหรือออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ จะถูกตัดทิ้งไปในสมการที่ (2.45) ซึ่งเราจะได้ฟังก์ชันนอลใหม่ (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.46)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.47)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสถานะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่าง ๆ ของสมการ (2.48) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \text{ สำหรับ } j=1, \dots, n \text{ และ } k=1, \dots, m \text{ ด้วยการแทนสมการ (2.49) กลับเข้า}$$

ไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็นหรือเนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.51)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเทต (Costates)) และตัวแปรควบคุมป้อนเข้าหรือคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สมการสถานะหรือสเตทอีควเชัน (State Equations) คือ สมการ (2.44) จำนวน n สมการ, สมการโคสเทตหรือสมการสถานะร่วม (Costate Equations) คือ สมการ (2.50) จำนวน n สมการ และ สมการแอดดิชันนอลอีควเชัน (Additional Optimality Equations) คือ สมการ (2.51) จำนวน m สมการทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP : Two Point Boundary Value Problems) ส่วน $H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ เรียกว่า ฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of System)

2.1.3.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ

$l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.52)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางซ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.53)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือ ลากรางซ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.54)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.56)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.57)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรังก์ชันมัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดย การใช้สแตตอีควชัน (State Equations) จำนวน n สมการ, โคสสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.55) จำนวน n สมการ และแอดดิชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.56) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมี การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.57) ส่วนค่า ν_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l|_{t_f} = 0$

2.1.3.1.3 ออากซิลเลอรีคอนสเทรนต์ (Ailiary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.58)$$

เมื่อ ν_l ก็คือ ค่าคงตัวลากรังก์ชันมัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned}
L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\
&+ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \\
&+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือ ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right) \Big|_{t_f} \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าของ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\lambda_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \tag{2.62}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \tag{2.63}$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และ ν_l

สามารถหาค่าได้โดย การใช้สเตตอีควชัน (State Equations) จำนวน n สมการ, คอสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.62) จำนวน n สมการ และแอตติชัณนอลอีควชัน คือ สมการ (2.60) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End – Point Constraint Equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่ t_0 และ คอสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.63)

2.1.3.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Start Time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable End Time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถ เป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control Variables and State Variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.3.2.1 สถานะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.64)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสถานะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสถานะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.65)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.65) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนccessary conditions (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.67)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.68)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State Equations) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.66) จำนวน n สมการ และแอดดิชันนอลอีควชัน คือสมการ (2.67) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.68) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.1.3.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในทอมนทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.69)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.70)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและได้เนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right] \delta t_f \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.73)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.74)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.75)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.44) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.72) จำนวน n สมการ และแอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.73) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.75) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.74)

2.1.3.2.3 อ็อกซิลเลอรีคอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r=1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p \nu_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.76)$$

เมื่อ ν_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned}
L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\
&+ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \\
&+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned} \tag{2.77}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) \delta x_j dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) \delta u_k dt \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_f} \right. \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
&+ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial u_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.78}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการก็จะทำให้เราสามารถหาเนccessอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \tag{2.79}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \tag{2.80}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, \quad j=1, \dots, n \tag{2.81}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.82}$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_i(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.44) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.79) จำนวน n สมการ และแอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.80) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.82) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.81)

2.1.4 การเพิ่มของหลักการน้อยที่สุด (Extensions of The Minimum Principle)

จุดประสงค์ของหัวข้อนี้เป็นการเสนอให้หลักการน้อยที่สุดสำหรับค่าเหมาะสมที่สุดในการควบคุมในกรณี $p > 1$. หลักการน้อยที่สุดจะกลายมาจากการใช้ทฤษฎีฮามิลตัน-จาโคบี เป็นการเริ่มต้นที่กว้างออกไปจากของหลักการพرونทรียากินที่สามารถนำไปใช้ได้กับระบบอนุพันธ์อันดับสูง

2.1.4.1 ทฤษฎีฮามิลตัน – จาโคบี (Hamilton – Jacobi Theory)

ในกลุ่มนี้แหล่งที่มาซึ่งกว้างออกไปจากหลักการพرونทรียากินเป็นการแสดงใน 2 ขั้นตอน ขั้นแรก กำหนดเงื่อนไขบังคับของตัวแปรควบคุมไม่ขึ้นกับเวลาและตัวแปร นั่นคือ $u \in U$ ที่ U เป็นที่รับได้ของ $u(t)$ ความเหมาะสมของเงื่อนไขในกรณีนี้ได้นำมาจากการพิสูจน์ใน [29] ขั้นสอง กำหนดเงื่อนไขที่พิจารณาให้ขึ้นกับเวลาและตัวแปร นั่นคือ $u \in A[t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(p-1)}(t)]$ ในคำสั่งได้ทำให้สั้นลงโดยกำหนด $x(t) = (x(t)^T x^{(1)}(t)^T \dots x^{(p-1)}(t)^T)^T$

กำหนดเงื่อนไขบังคับ u

เราพิจารณาในปัญหาที่ใหญ่กว่าโดยกำหนด

$$J(x(t), t, u(\tau)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (2.83)$$

เมื่อ $x(t)$ เป็นจุดเริ่มต้นที่ยอมรับได้ที่ t และ $u(\tau)$ และอยู่ในเส้นสถานะที่รับได้ นั่นคือ $u(\tau) \in U$ และกำหนด $t \leq \tau \leq t_f$ สำหรับที่จุดเริ่มต้น $(t, x(t))$ ได้กำหนด

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau) \in U} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (2.84)$$

โดยการแบ่งช่วงเวลา (t, t_f) ไป $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ และ $t + \Delta t \leq \tau \leq t_f$ จากหลักการของความเหมาะสมที่สุด สามารถเขียนสมการที่ (2.84) ได้เป็น

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau) \in U} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L d\tau + J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \quad (2.85)$$

บนช่วงย่อยของสมการที่ (2.85) โดยใช้อนุกรมของเทเลอร์กับ $(x(t), t)$ ได้ดังนี้

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau) \in U} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L d\tau + J^*(x(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) x^{(1)}(t) \Delta t + h.o.t. \right\} \quad (2.86)$$

การยกเลิก $x(t) = (x(t)^T \ x^{(1)}(t)^T \ \dots x^{(p-1)}(t)^T)^T$ และสำหรับ Δt

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(t) \in U} \left\{ J^*(x(t), t) + \left[L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) x^{(1)}(t) + \dots + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-2)}}(x(t), t) x^{(p-1)}(t) + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right] \Delta t + o(\Delta t) \right\} \quad (2.87)$$

ตัดอนุพันธ์อันดับสูงในเทอมของ Δt และแยกเทอมที่ขึ้นกับ $u(t)$ สามารถเขียนใหม่ได้

$$0 = \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) x^{(1)}(t) + \dots + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-2)}}(x(t), t) x^{(p-1)}(t) + \min_{u(t) \in U} \left\{ L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} \quad (2.88)$$

กำหนดให้ H (Hamiltonian)

$$H\left(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right) = L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.89)$$

และ

$$H\left(x(t), u^*\left(x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right) = \min_{u(t) \in U} H\left(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right) \quad (2.90)$$

ซึ่งค่าต่ำสุดในการควบคุมขึ้นกับ $x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T(x(t), t)$ และ t จากสมการที่ (2.88) และ (2.90) ได้ขยายจากสมการของแฮมิลตัน – จาโคบี เป็น

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) x^{(1)}(t) + \dots + \frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-2)}}(x(t), t) x^{(p-1)}(t) \\ & + H\left(x(t), u^*\left(x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

เมื่อสภาวะขอบเขตที่เหมาะสม (J)

$$J^*(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) \quad (2.92)$$

สรุปคือ หนึ่ง ค่าเหมาะสมที่สุดในการควบคุม $u^*\left(x(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T, t\right)$ ให้ได้ค่าต่ำสุดของ ฮามิลโตเนียน กำหนดไว้ในสมการที่ (2.90) และ สองค่าเหมาะสมของ Return Function ที่แสดง

ในสมการที่ (2.91) ถ้า $p=1$ จะได้ผลลัพธ์ที่ง่ายขึ้นจากสมการ ฮามิลตัน – จาโคบี และสมการที่ (2.90) ก็จะมีค่าเท่ากับการแสดงผลด้วย พรอนทริยาгин

2.1.4.2 หลักการของพรอนทริยาгин (Pontryagin's Principle)

ทฤษฎีของพรอนทริยาгинจะยังคงใช้สมการข้อกำหนดของปัญหา คือ สมการ

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.93)$$

และสมการ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt. \quad (2.94)$$

กับเงื่อนไขของสภาวะที่เพิ่มเข้ามานั้นคือ $u(t) \in U$ สำหรับช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ เมื่อ U คือ เซตของตัวแปรควบคุมที่ยอมรับได้ ขั้นแรกจะหาค่าที่เข้าใกล้ค่าของสมการแฮมิลตัน – จาโคบี – เบลแมน โดยใช้หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The Principle of Optimality)

หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The Principle of Optimality) กล่าวว่า ถ้าตัวแปรควบคุม (Control Input); $u(t)$ เป็นค่าที่เหมาะสมในสภาวะเริ่มต้น $x(t)$ ที่อยู่ในช่วงเวลา $[t_0, t_f]$ ในทำนองเดียวกับการควบคุมในช่วง $[t + \Delta t, t_f]$ และยังคงมีความเหมาะสมกับเหมือนกันกับ $x(t + \Delta t)$ เมื่อ $\Delta t \geq 0$ และ $x(t + \Delta t)$ คือจุดที่อยู่บนเส้นสถานะที่เหมาะสม จากสมการที่ (2.93) พิจารณาสมการ

$$J(x(t), t, u(\tau)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad (2.95)$$

เมื่อ $x(t)$ สถานะที่ยอมรับได้และ $t \leq t_f$ เรากำหนดให้ค่าดัชนีสมรรถนะขึ้นอยู่กับ $x(t)$ และ t อยู่ในช่วง $[t_0, t_f]$ สำหรับค่า $x(t)$ และ $t \leq t_f$ ใช้สมการควบคุมที่ค่าต่ำสุดจะได้ คออสฟังก์ชันอล (Cost Function) หรือเรียกว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) กำหนดเป็น

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (2.96)$$

บนช่วงย่อย และใช้คุณสมบัติการบวกของการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^t L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (2.97)$$

หลักการของความเหมาะสมที่สุดจะกลายเป็น

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \quad (2.98)$$

เมื่อ $J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ คือ ค่าต่ำสุดจากค่าสถานะเริ่มต้น $x(t+\Delta t)$ ที่อยู่นอกช่วงเวลา $J(t+\Delta t), t_f$ ในการขยายความที่เกี่ยวกับ $(x(t), t)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$J^*(x(t), t) = \min_{t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), t) x^{(1)} \Delta t + \text{higher order terms} \right\} \quad (2.99)$$

เมื่อตัดเทอม Δt และทำการแยกเทอมที่ขึ้นอยู่กับ $u(t)$ ดังนี้

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} = 0 \quad (2.100)$$

กำหนดให้ H (Hamiltonian) เป็น

$$H(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x} \right)^{(T)}, t) = L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.101)$$

และ

$$\begin{aligned}
H(x(t), u^*(x(t)), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T, t) \\
= \min_{u(t)} \{ H(x(t), u(t), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T, t) \}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

สมการ แฮมมิลตัน – จาคอบี – เบลแมน หาได้จาก

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) + H\left(x(t), u^*(x(t)), \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T, t\right) = 0 \tag{2.103}$$

เมื่อสภาวะขอบเขตที่เหมาะสม (J)

$$J^*(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) \tag{2.104}$$

กำหนดให้อยู่ในรูป สเกลาร์ แฮมมิลตัน (H)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t)) + \lambda(t)^T f(x(t), u(t), t) \tag{2.105}$$

เมื่อ $\lambda(t) \in R^n$ และเท่ากับ $\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T$ เมื่อ $\lambda(t)$ เรียกว่าผลคูณลากรางจ์หรือตัวแปร

สถานะร่วม, โคสเตทวาริเอเบิล (Co – State Variables) ถ้าหากว่า $u^*(t)$ เป็นวิถีหรือเส้นทางที่เหมาะสมสำหรับปัญหาแล้ว $x^*(t)$ ก็จะเป็นสถานะที่เหมาะสมด้วย ดังนั้นวิธีการโดยอ้อม (Indirect Approaches) ใช้ทฤษฎีของพอนทียากิน (Pontryagin's Theory) สมการแสดงสถานะ (State Equations) เป็นดังนี้ $\lambda(t)$ ก็จะเป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น

$$x^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = f(x^*, u^*, t) \tag{2.106}$$

$$\lambda^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = (x^*, u^*, \lambda^*, t) \tag{2.107}$$

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \tag{2.108}$$

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^T - \lambda \right]_{t_f} = 0 \quad (2.109)$$

$$\left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.110)$$

สำหรับการควบคุมที่ยอมรับได้ และทุกค่าของ $t \in [t_0, t_f]$ สมการที่ (2.110) จะกลายเป็น

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (2.111)$$

ถ้าปัญหาที่ไร้ขอบเขต ตัวแปรควบคุม (Control Input, $u(t)$) จากสมการที่ (2.111) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T = 0 \quad (2.112)$$

ซึ่งหลักการและทฤษฎีของพอนทริยาгинนี้ เป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาโดยทางอ้อม (Indirect) ได้ผลเช่นเดียวกับวิธีแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of Variation)

ใช้ทฤษฎีของพอนทริยาгин (Pontryagin's Theory) สมการสถานะที่จำเป็นคือสมการที่ (2.111) สิ่งที่จะได้คือสมการสถานะ (State Equations)

$$\dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T, \quad (2.113)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (2.114)$$

และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t). \quad (2.115)$$

เมื่อ H (Hamiltonian) กำหนดให้เป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = 1 + \lambda(t)^T f(x, u, t) \quad (2.116)$$

$\lambda(t) \in R^n$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) สภาวะที่จำเป็น (Necessary Condition) ที่จำเป็นสำหรับวิธีโดยอ้อม สมการที่ (2.116) เป็นที่รู้จักกันดีในเรื่องของสภาวะการที่เหมาะสม ซึ่ง ปัญหาของโครงสร้างที่เป็นแบบสวิตชิง (Switching Structure) สามารถที่จะหาค่าได้

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T, \quad (2.117)$$

$$H_{t_f} = 0, \quad (2.118)$$

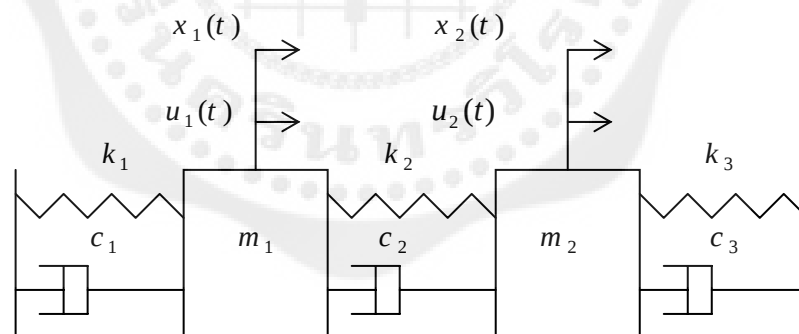
และ

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (2.119)$$

เมื่อแฮมมิลตันเนียน H (Hamiltonian) กำหนดเป็น

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -\left(\sum_{i=1}^m u_i^2\right) + \lambda(t)^T f(x, u, t) \quad (2.120)$$

2.1.5 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)



ภาพประกอบ 1 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper System

การควบคุมจุดต่อจุดของระบบสปริง ก้อนมวลและตัวหน่วง พิจารณาดังแสดงตามรูป สมการ การเคลื่อนที่ของระบบดังนี้

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Bu \quad (2.121)$$

จากสมการ (2.121) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรที่ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

เมื่อ $x_1 > x_2$ และ

$$m_1 = m_2 = 1.0, c_1 = c_3 = 1.0, c_2 = 2.0, k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$$

ดังนั้นสมการระบบสามารถกำหนดได้โดย

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \quad (2.122)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \quad (2.123)$$

จากสมการที่ (2.122) และ (2.123) สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสแตท (State Space) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1 \quad ; \quad u_1 = x_5 \\ \dot{x}_4 &= 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + x_6 \quad ; \quad u_2 = x_6 \\ \dot{x}_5 &= \tilde{u}_1 \\ \dot{x}_6 &= \tilde{u}_2 \end{aligned} \quad (2.124)$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization) มีประโยชน์มากมายหลายด้าน ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ตัวอย่างการหาค่าต่ำสุดที่เหมาะสมสูงสุด เช่น การออกแบบแขนกลให้หยิบวัตถุ ความต้องการคือหยิบให้นิ่มนวลหรือออกแรงน้อยที่สุดเพื่อไม่ให้วัตถุเสียหาย ในขณะเดียวกันการหยิบนั้นต้องมีขนาดของแรงที่พอเหมาะไม่ทำให้ตกหล่นเสียหายก่อนถึงจุดหมาย ในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งซึ่งที่ต้องการถึงจุดหมายด้วยเวลาที่น้อยที่สุด ในขณะที่ต้องใช้พลังงานมากที่สุด ดังนั้นเป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) กระบวนการทำให้เกิดความคุ้มค่าที่สุด ซึ่งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยการนำเอาวิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาใช้ที่มีลักษณะใกล้เคียงและเกี่ยวข้องกับวิจัยครั้งนี้ ได้แก่

ทวิวัชร วีระเกล้า, ณัฐสิทธิ์ พัฒนะอ้อม, ทรงกิต hemะ (Tawiwat Veeraklaew, Nathasit Phathana – im, and Songkit Heama 2008 : Abstract) ได้ทำการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น โดยทำการเปรียบเทียบการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด ด้วยวิธีต้องการความนิ่มนวลที่สุดทางตรง (Minimum Direct Jerk) เปรียบเทียบกับวิธีต้องการความนิ่มนวลสูงสุดทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk) ใช้แบบจำลองประกอบด้วย สปริง, มวล, และตัวหน่วง (Spring Mass Damper) ผลจากการวิจัยพบว่าทั้งสองกรณีให้คำตอบที่ใกล้เคียงกัน แต่แก้ปัญหาหาค่าความเหมาะสมสูงสุดทางอ้อมจะรวดเร็วกว่า เพราะตัวแปรซึ่งถูกใช้ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Cost Function) ของปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมจะน้อยกว่าปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง เมื่อพิจารณาระบบพลศาสตร์ที่เป็น Fully Actuator หรือระบบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ (Robotic Systems)

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien., (1998) กล่าวถึงการวิเคราะห์คำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงและสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ในระยะเวลาที่กำหนดจากทฤษฎีที่มีอยู่เดิม คำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่ และสมการควบคุมเป็นจริงในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอวิธีการใหม่ โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม (State and Control Variable) เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้ ผลที่ได้สามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อมมาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

ทวิวัชร วีระแก้ว⁽¹⁾ ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุด ของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีในที่จะช่วยอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกขึ้น ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum time problem) นั้นด้วย แนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดมีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือ ปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาน้อยที่สุดสำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้น แต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ทำให้ง่ายที่สุดได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

พลอยไพลิน พิรมโสภา, กิตติพัฒน์ ชัยรุ่งสาปโสภ, ชัยสิทธิ์ พัฒรวรางกุล และทวิวัชร วีระแก้ว (2005) กล่าวถึง การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความถี่ที่น้อยที่สุดในระบบพลศาสตร์โดยใช้หลักการของแคลคูลัส ความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด และจากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาทั้งการใช้พลังงานน้อยที่สุดและการใช้ความถี่ที่น้อยที่สุด จะเห็นได้ว่าปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดจะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น (Linear) แต่ปัญหาของความถี่ที่น้อยที่สุดนั้นไม่สามารถหาคำตอบในรูปแบบของสมการเชิงเส้น เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตมีไม่เพียงพอ จึงได้นำระเบียบวิธีทางตัวเลขที่มีชื่อเรียกว่า Linear Programming มาใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จากการพิจารณาค่าความถี่ที่น้อยที่สุดนั้นมีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด กล่าวคือ ได้ทั้งความถี่ที่น้อยที่สุดและประหยัดพลังงาน

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien., (1998) ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงที่สุดที่เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณ เมื่อนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอ อันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ในบทความฉบับนี้ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจนในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัยได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีตรงและวิธีอ้อม เพื่อ

สามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

ทวิวัชร วีระเกล้า (2004) ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The Minimum Time Problem of Linear Dynamic Optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธี ในการที่ช่วยให้การวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกยิ่งขึ้น ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหาเรื่อง การใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) นั้น ด้วยแนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดมีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum Energy with Free Final Time Problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาที่น้อยที่สุดสำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้น แต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ในตอนท้ายสุดได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Problem Statement)
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)
3. กำหนดสมการ Two Degree of Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring Mass and Damper
4. การรวมปัญหาควณิมนวลที่ต่ำสุดกับปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy Problem)

3.1 การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Derivative Function) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States, Control Input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้คือการหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือควณิมนวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and Fixed end points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad (3.2)$$

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของควณิมนวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างกันดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ อนุพันธ์อันดับที่สามที่เทียบกับเวลา หรือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control Input (u) ดังนั้น Jerk สามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

$$Jerk = \ddot{x} \propto \dot{u} \quad (3.3)$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \quad (3.4)$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n+m}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, t); \quad i = 1, \dots, n+m \quad (3.5)$$

ในที่นี้ $\tilde{u}$ คือค่าตัวแปร Control Input ของระบบพลศาสตร์ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i^2 dt \quad (3.6)$$

ในลักษณะคล้ายกัน เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i^2 dt \quad (3.7)$$

J เป็น Cost Function ของความกระด้าง (Jerks)

3.2 เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)

ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations) หาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงานให้ฟังก์ชันนอลเป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.8)$$

ซึ่ง

$$\phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \quad (3.9)$$

จะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และ สภาวะสุดท้าย (Final States) ของระบบ และ

$$\int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.10)$$

เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของสเตตและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables)

ในการหาค่าความเหมาะสมของฟังก์ชันในระบบพลศาสตร์ได้เพิ่มตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) เข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) จะได้สมการดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.11)$$

ซึ่ง

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i(f_i) \quad (3.12)$$

โดยที่ $\lambda_i(t)$ คือตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้น สมการ (3.11) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} [L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [\dot{x}_i - f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)]] dt \quad (3.13)$$

การเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล ในการศึกษาที่ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and end points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น t_0 และเวลาสุดท้าย t_f รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable Functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u(t_0) = u_0$ and $u(t_f) = u_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_i \leq t \leq t_f$

ให้ฟังก์ชัน $L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ แสดงฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (3.14)$$

ถ้าให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{xj}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{uk}(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_{xj}(t_0) = h_{xj}(t_f) = h_{uk}(t_0) = h_{uk}(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x_1 + h_{x1}, \dots, x_n + h_{xj}, u_1 + h_{u1}, \dots, u_m + h_{uk}] - J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \quad (3.15)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[L \left(t, x_1 + h_{x1}, \dots, x_n + h_{xj}, \dot{x}_1 + \dot{h}_{x1}, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_{xj}, u_1 + h_{u1}, \dots, u_m + h_{uk}, \dot{u}_1 + \dot{h}_{u1}, \dots, \dot{u}_m + \dot{h}_{uk} \right) - L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) \right] dt \quad (3.16)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher Order Terms) ทิ้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{xj} dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{uk} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_i} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_i} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $h_{xj}|_{t_f} = h_{xj}|_{t_i} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่าง ๆ ของสมการ (3.17) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad (3.18)$$

และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (3.19)$$

สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$.

สมการ (3.18) และ สมการ (3.19) เป็นเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่จะนำไปแก้ปัญหาร่วมกับตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$, และ Control Inputs $u_k(t)$ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเนสเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้หลายทาง
สำหรับ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

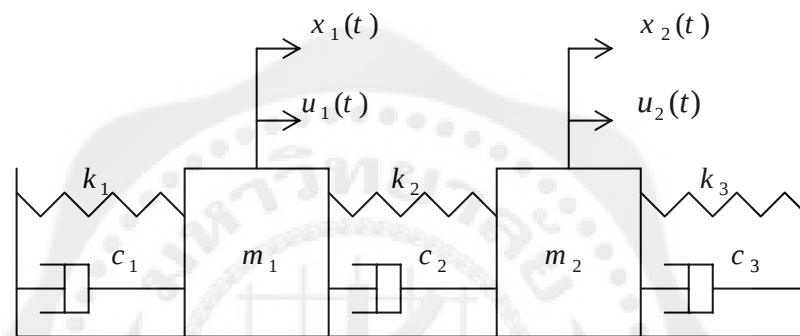
เนสเซสซอรีคอนดิชัน (necessary conditions) ของสมการ (3.20)

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

จาก เนสเซสซารีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และ สมการพีชคณิต (Differential and Algebraic Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขของเขตสองจุด (TPBVP : Two Point Boundary Valued Problem)

3.3 กำหนดสมการ Two Degree of Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring Mass and Damper



ภาพประกอบ 2 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper System

ในงานศึกษาวิจัยนี้สำหรับการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของ สปริง ก้อนมวล และ ตัวหน่วง (A Spring Mass Damper System) ของการเคลื่อนที่ Two Degree of Freedom ซึ่งจะได้สมการดังนี้

$$A\dot{x} = Bu \quad (3.23)$$

จัดรูปให้อยู่ในเมตริกซ์ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

จัดรูปเมทริกซ์ของ M , C และ K เป็น

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

จากสมการ (3.23) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$$m_1 = m_2 = 1.0, c_1 = c_3 = 1.0, c_2 = 2.0, k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$$

เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)

$$x(t_0) = (1200)^T \quad \text{และ} \quad x(t_f) = (0000)^T$$

$$\text{ที่} \quad t_0 = 0 \quad \text{และ} \quad t_f = 1.0$$

3.4 ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem)

Cost Function ของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 \ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 dt \quad (3.29)$$

การกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3.29) ทำการมิไนม์ (Minimized) โดยใช้ แคลคูลัสของฟาริเอชันส์ (Calculus of Variations) หาดั้วแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมา

3.5 ปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problem)

Cost Function ของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 u_1^2 + u_2^2 dt \quad (3.30)$$

การกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3.30) ทำการมิไนม์ (Minimized) โดยใช้ แคลคูลัสของฟาริเอชันส์ (Calculus of Variations) หาดั้วแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมา

3.6 ปัญหาการรวมความนิ่มนวลที่สุดกับพลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy Problem)

Cost Function ของการรวมค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีตรงกับค่าพลังงานน้อยที่สุด

$$J = \int_0^1 \ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + u_1^2 + u_2^2 dt \quad (3.31)$$

บทที่ 4

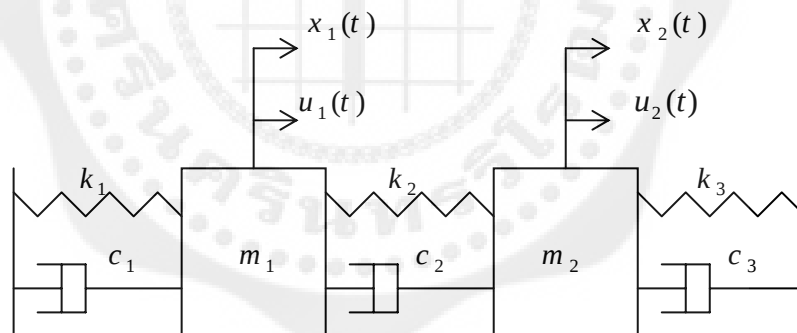
ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากการรวมปัญหาความนิ่มนวลที่สุดกับปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy Problem) เพื่อทำการทดสอบหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น (Linear of Dynamic Systems) ซึ่งผู้วิจัยได้นำเสนอผลงานตามลำดับ ดังนี้

4.1 ผลการทดสอบ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำมาเป็นตัวกำหนดสำหรับการวิจัยครั้งนี้ โดยกำหนดให้ระบบการเคลื่อนที่มี 2 องศาอิสระ (Two Degree of Freedom) ประกอบด้วยมวล 2 ก้อน, สปริงและตัวหน่วง (Spring Mass and Damper) กำหนดสมการอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Derivative) ของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น (Linear of Dynamic Systems)

4.1.1 ผลการทดสอบของการรวมปัญหาความนิ่มนวลที่สุดกับปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy Problem)



ภาพประกอบ 3 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems

กำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$$m_1 = m_2 = 1.0, c_1 = c_3 = 1.0, c_2 = 2.0, k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$$

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \quad (4.1)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \quad (4.2)$$

เขียนในรูปแบบของปริภูมิสเตท (state space) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1 \quad \text{โดยกำหนดให้ } u_1 = x_5 \text{ จะได้}$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + x_5 \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_5 = \tilde{u}_1 \quad (4.7)$$

Combine Minimum Energy (x_5) and Minimum Jerk ($\tilde{u}_1$)

$$\text{คอสฟังก์ชัน } J = \int_0^1 x_5^2 + \tilde{u}_1^2 dt \quad (4.8)$$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations)

$$F = x_5^2 + \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_3 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_4 - \dot{x}_2) + \lambda_3(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + x_5 - \dot{x}_3) \\ + \lambda_4(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 - \dot{x}_4) + \lambda_5(\tilde{u}_1 - \dot{x}_5) \quad (4.9)$$

$$F = x_5^2 + \tilde{u}_1^2 + \lambda_1 x_3 - \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_4 - \lambda_2 \dot{x}_2 - 3\lambda_3 x_3 + 2\lambda_3 x_4 - 6\lambda_3 x_1 + 3\lambda_3 x_2 \\ + \lambda_3 x_5 - \lambda_3 \dot{x}_3 + 2\lambda_4 x_3 - 3\lambda_4 x_4 + 3\lambda_4 x_1 - 6\lambda_4 x_2 - \lambda_4 \dot{x}_4 + \lambda_5 \tilde{u}_1 - \lambda_5 \dot{x}_5 \quad (4.10)$$

โดยใช้วิธีการของสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n = \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad (4.12)$$

$$-6\lambda_3 + 3\lambda_4 - \frac{d}{dt}(-\lambda_1) = 0 \\ -6\lambda_3 + 3\lambda_4 + \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_1 = 6\lambda_3 - 3\lambda_4 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} &= 0 \\
3\lambda_3 - 6\lambda_4 - \frac{d}{dt}(-\lambda_2) &= 0 \\
3\lambda_3 - 6\lambda_4 + \dot{\lambda}_2 &= 0 \\
\dot{\lambda}_2 &= -3\lambda_3 + 6\lambda_4
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} &= 0 \\
\lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 - \frac{d}{dt}(-\lambda_3) &= 0 \\
\lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 + \dot{\lambda}_3 &= 0 \\
\dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_4} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_4} &= 0 \\
\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 - \frac{d}{dt}(-\lambda_4) &= 0 \\
\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 + \dot{\lambda}_4 &= 0 \\
\dot{\lambda}_4 &= -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_5} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_5} &= 0 \\
\lambda_3 - \frac{d}{dt}(-\lambda_5) &= 0 \\
\lambda_3 + \dot{\lambda}_5 &= 0 \\
\dot{\lambda}_5 &= -\lambda_3 - 2x_5
\end{aligned} \tag{4.17}$$

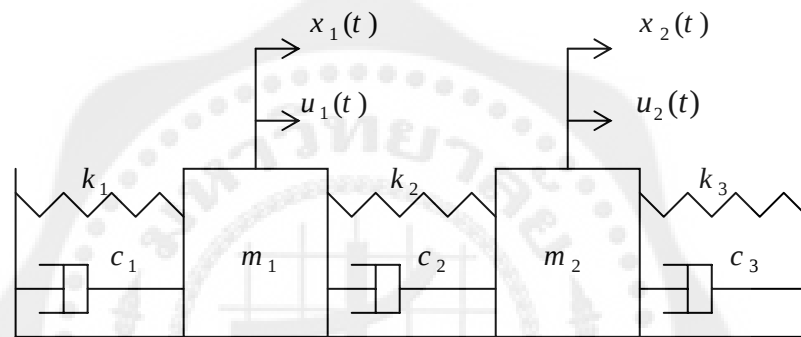
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\tilde{u}}_1} &= 0 \\
2\tilde{u}_1 + \lambda_5 &= 0 \\
\tilde{u}_1 &= -\lambda_5/2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Condition) มีดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= 6\lambda_3 - 3\lambda_4 \\
\dot{\lambda}_2 &= -3\lambda_3 + 6\lambda_4 \\
\dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 \\
\dot{\lambda}_4 &= -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_5 &= -\lambda_3 - 2x_5 \\
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + x_5 \\
 \dot{x}_4 &= 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

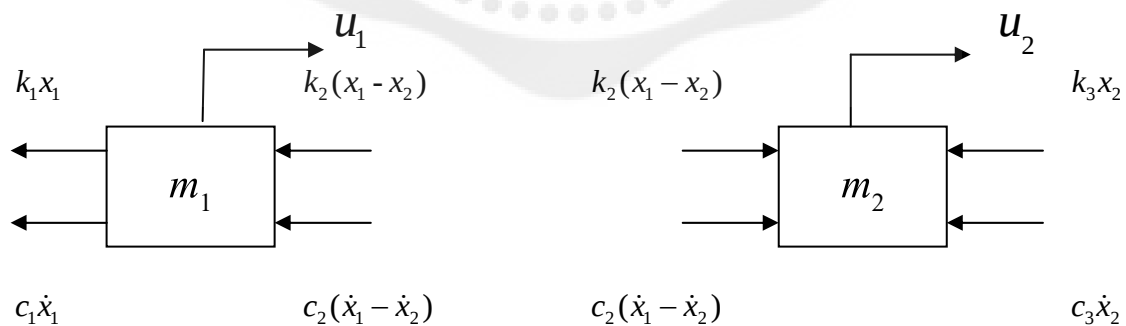
4.1.2 ผลการทดสอบของการแก้ปัญหาความถี่สูงสุดทางตรง (Minimum Direct Jerk)



ภาพประกอบ 4 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

$$x_1 > x_2$$



จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Law)

$$\sum F = ma \tag{4.20}$$

$$\sum F = m\ddot{x} \tag{4.21}$$

คิดที่มวล m_1

$$u_1 - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (4.22)$$

คิดที่มวล m_2

$$k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (4.23)$$

จากสมการ (4.31)

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = u_1 \quad (4.24)$$

จากสมการ (4.32)

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = u_2 \quad (4.25)$$

กำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$$m_1 = m_2 = 1.0, c_1 = c_3 = 1.0, c_2 = 2.0, k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion : EOM) ของระบบ Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper System ดังนี้

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \quad (4.26)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \quad (4.27)$$

ปัญหาของความไม่แน่นอนที่สุดในรูปแบบของปัญหานี้จะต้องเขียนใหม่ให้มี Jerk อยู่ในระบบจากสมการอนุพันธ์อันดับสองให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยรูปแบบ ปริภูมิสแตต (State Space : st - sp) ได้หสมการคือ

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (4.28)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \ddot{x}_3 = \dot{x}_5 = -3\dot{x}_3 + 2\dot{x}_4 - 6\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + \tilde{u}_1 \\
&= -3(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1) + 2(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + u_2) \\
&\quad - 6x_3 + 3x_4 + \tilde{u}_1 \\
&= 9x_3 - 6x_4 + 18x_1 - 9x_2 - 3u_1 + 4x_3 - 6x_4 + 6x_1 - 12x_2 \\
&\quad + 2u_2 - 6x_3 + 3x_4 + \tilde{u}_1 \\
\dot{x}_5 &= 7x_3 - 9x_4 + 24x_1 - 21x_2 - 3u_1 + 2u_2 + \tilde{u}_1
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= \ddot{x}_4 = \dot{x}_6 = 2\dot{x}_3 - 3\dot{x}_4 + 3\dot{x}_1 - 6\dot{x}_2 + \tilde{u}_2 \\
&= 2(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1) - 3(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + u_2) \\
&\quad + 3x_3 - 6x_4 + \tilde{u}_2 \\
&= -6x_3 + 4x_4 - 12x_1 + 6x_2 + 2u_1 - 6x_3 + 9x_4 - 9x_1 + 18x_2 \\
&\quad - 3u_2 + 3x_3 - 6x_4 + \tilde{u}_2 \\
\dot{x}_6 &= -9x_3 + 7x_4 - 21x_1 + 24x_2 + 2u_1 - 3u_2 + \tilde{u}_2
\end{aligned} \tag{4.33}$$

กำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and Fixed end points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือ เวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือ เวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

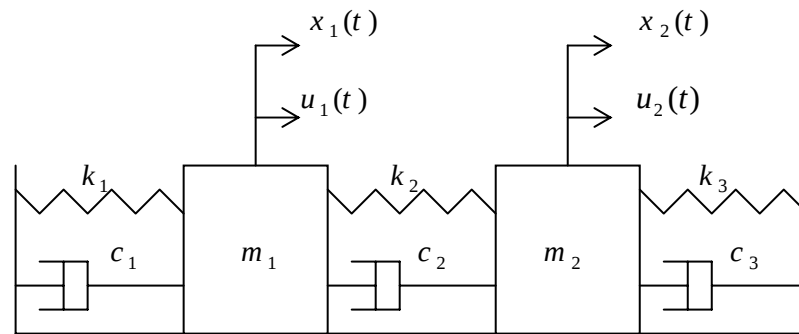
Boundary Condition

$$\begin{array}{ll}
t_0 = 0 & t_f = 1 \\
x_1(0) = 1 & x_1(1) = 0 \\
x_2(0) = 2 & x_2(1) = 0 \\
x_3(0) = 0 & x_3(1) = 0 \\
x_4(0) = 0 & x_4(1) = 0
\end{array} \tag{4.34}$$

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป สมการดังนี้

$$J = \int_0^1 \ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 dt \tag{4.35}$$

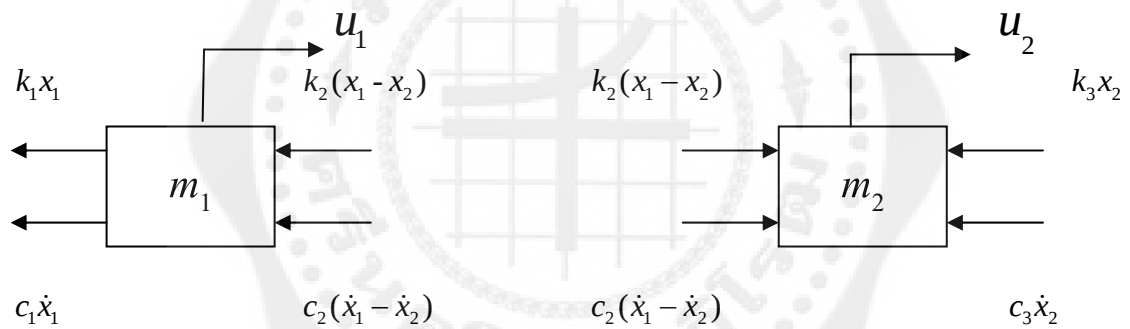
4.1.3 ผลการทดสอบของการแก้ปัญหาลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy)



ภาพประกอบ 5 Two Degree of Freedom of Spring Mass and Damper Systems

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

$$x_1 > x_2$$



$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \quad (4.36)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \quad (4.37)$$

เขียนในรูปแบบของ ปริภูมิสถานะ (state - space) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (4.38)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (4.39)$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + x_4 - 2x_1 + x_2 + u_1 \quad (4.40)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 - 2x_4 + x_1 - 2x_2 + u_2 \quad (4.41)$$

กำหนด Fixed end time and Fixed end points

$$\begin{array}{ll}
 t_0 = 0 & t_f = 1 \\
 x_1(0) = 2 & x_1(1) = 0 \\
 x_2(0) = 1 & x_2(1) = 0 \\
 x_3(0) = 0 & x_3(1) = 0 \\
 x_4(0) = 0 & x_4(1) = 0
 \end{array}$$

$$J = \int_0^1 u_1^2 + u_2^2 dt \quad (\text{Minimum Energy})$$

$$\begin{aligned}
 F = & u_1^2 + u_2^2 + \lambda_1(x_3 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_4 - \dot{x}_2) + \lambda_3(-2x_3 + x_4 - 2x_1 + x_2 + u_1 - \dot{x}_3) \\
 & + \lambda_4(x_3 - 2x_4 + x_1 - 2x_2 + u_2 - \dot{x}_4)
 \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
 F = & u_1^2 + u_2^2 + \lambda_1 x_3 - \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_4 - \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 x_4 - 2\lambda_3 x_3 - 2\lambda_3 x_1 + \lambda_3 x_2 \\
 & - \lambda_3 u_1 - \lambda_3 \dot{x}_3 + \lambda_4 x_3 - 2\lambda_4 x_4 + \lambda_4 x_1 - 2\lambda_4 x_2 + \lambda_4 u_2 - \lambda_4 \dot{x}_4
 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.44)$$

เข้าไปแก้สมการ (4.37) จึงได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\
 -2\lambda_3 + \lambda_4 + \dot{\lambda}_1 &= 0 \\
 \dot{\lambda}_1 &= 2\lambda_3 - \lambda_4
 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} &= 0 \\
 \lambda_3 - 2\lambda_4 - \dot{\lambda}_2 &= 0 \\
 \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_3 + 2\lambda_4
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

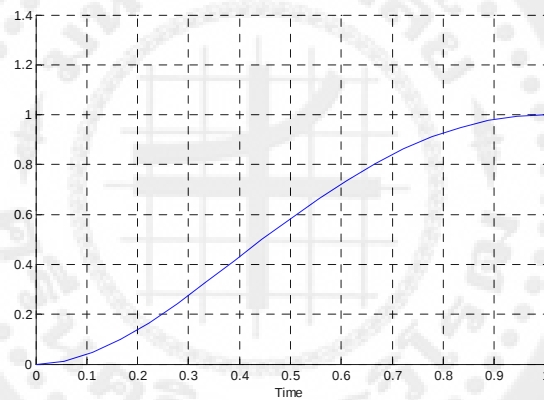
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_3} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} &= 0 \\
 \lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_4 + \dot{\lambda}_3 &= 0 \\
 \lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 + \dot{\lambda}_3 &= 0 \\
 \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 + 2\lambda_3 - \lambda_4
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_4} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_4} &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 + \dot{\lambda}_4 &= 0 \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4\end{aligned}\quad (4.48)$$

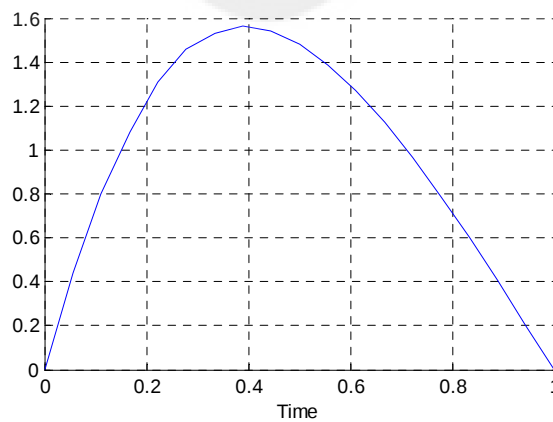
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1} &= 0 \\ 2u_2 + \lambda_4 &= 0 \\ u_2 &= -\lambda_4/2\end{aligned}\quad (4.49)$$

4.1.4 ผลการทดสอบโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

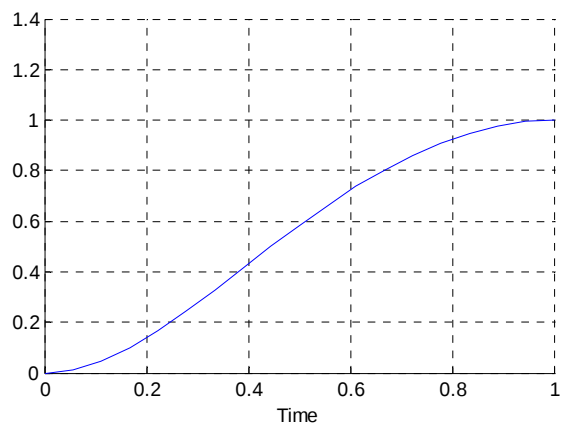
ผลการทดสอบการเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk), วิธีการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) และวิธีการรวมค่าความนิ่มนวลสูงที่สุดกับการใช้พลังงานน้อย



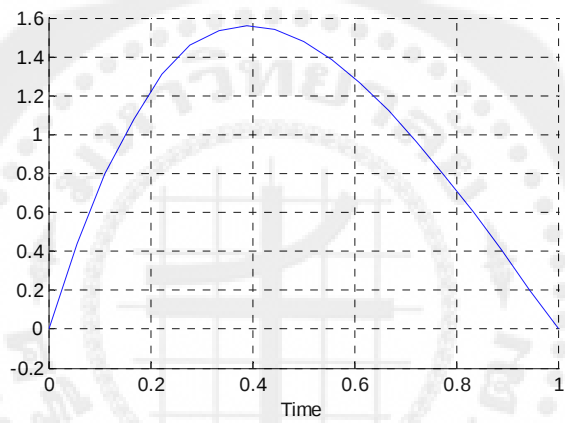
ภาพประกอบ 6 Solutions of $x_1(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.



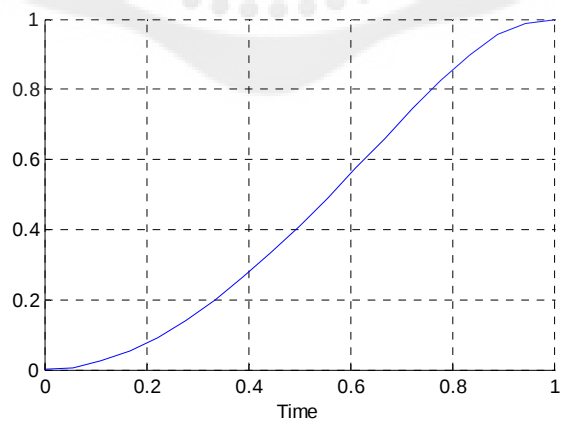
ภาพประกอบ 7 Solutions of $\dot{x}_1(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.



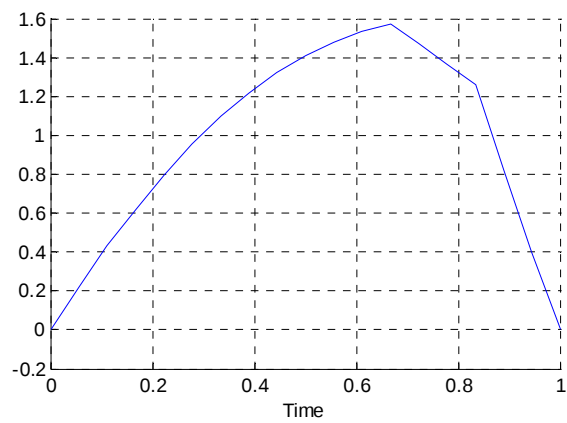
ภาพประกอบ 8 Solutions of $x_2(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.



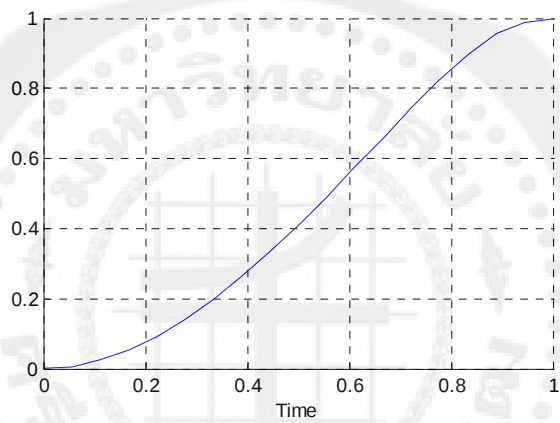
ภาพประกอบ 9 Solutions of $\dot{x}_2(t)$ from minimum direct jerk and combining minimum jerk and energy.



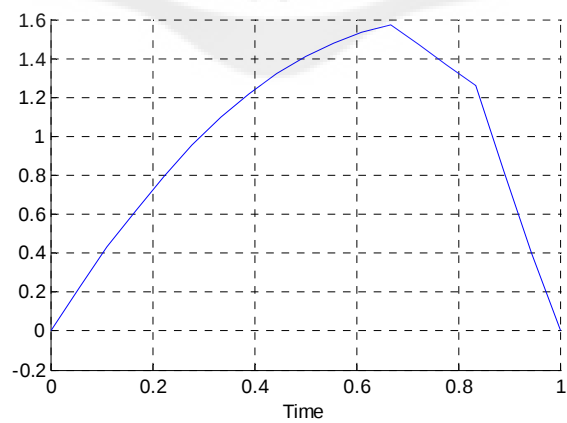
ภาพประกอบ 10 Solutions of $x_1(t)$ from minimum energy.



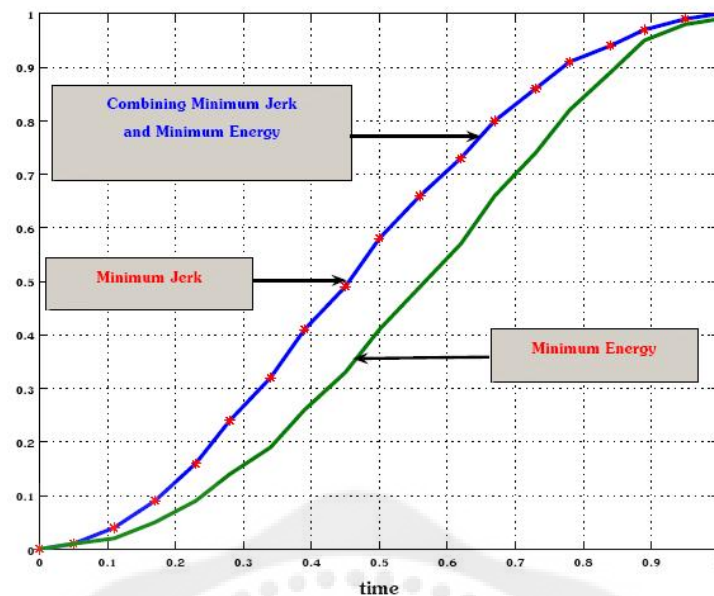
ภาพประกอบ 11 Solutions of $\dot{x}_1(t)$ from minimum energy.



ภาพประกอบ 12 Solutions of $x_2(t)$ from minimum energy.



ภาพประกอบ 13 Solutions of $\dot{x}_2(t)$ from minimum energy.



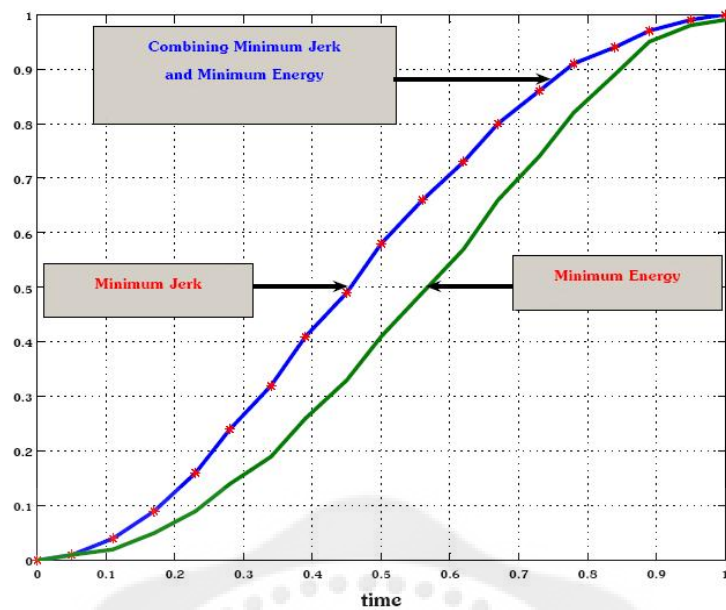
ภาพประกอบ 14 Solutions of the First State Variables $x_1(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

จากกราฟ แสดงความสัมพันธ์ของค่า x_1 กับเวลาที่เปลี่ยนไป กรณีต่าง ๆ

1. การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) เส้นกราฟต่อเนื่อง ณ เวลาจุดเดียวกัน ตั้งแต่ 0 – 1 sec ค่า state variables น้อยกว่า Minimum Jerk และ Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

2. การใช้ค่าความไม่แน่นอนมากที่สุด (Minimum Jerk) และการรวมระหว่างการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความไม่แน่นอนมากที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) เข้าด้วยกัน ค่า state variables เพิ่มขึ้นต่อเนื่อง จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ ทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน และเส้นกราฟต่อเนื่องตลอด ทับกันพอดี

3. เงื่อนไขทั้งสามกรณีคือ Fixed end time and fixed end point โดยเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ และเวลาสุดท้ายที่ $t = 1$ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two point boundary value condition)



ภาพประกอบ 15 Solutions of the Second State Variables $x_2(t)$ from Minimum Energy,

Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

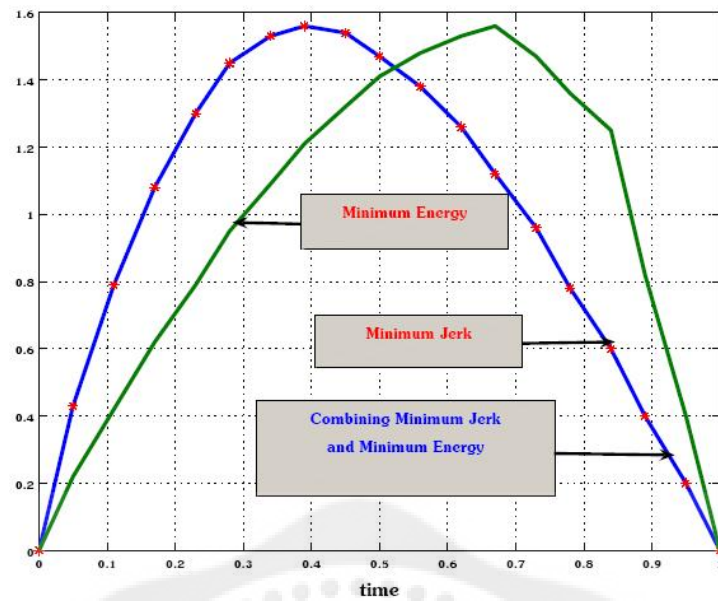
จากกราฟ แสดงความสัมพันธ์ของค่า x_2 กับเวลาที่เปลี่ยนไป กรณีต่าง ๆ

1. การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) เส้นกราฟต่อเนื่อง ณ เวลาจุดเดียวกัน ตั้งแต่ 0 – 1 sec ค่า state variables น้อยกว่า Minimum Jerk และ Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

2. การใช้ค่าความนิ่มนวลมากที่สุด (Minimum Jerk) และการรวมระหว่างการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) เข้าด้วยกัน ค่า state variables เพิ่มขึ้นต่อเนื่อง จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ ทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน และเส้นกราฟต่อเนื่องตลอด ทับกันพอดี

3. เงื่อนไขทั้งสามกรณีคือ Fixed end time and fixed end point โดยเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ และเวลาสุดท้ายที่ $t = 1$ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two point boundary value condition)

สรุปผลที่ได้จากกราฟทั้งสองข้างต้นความสัมพันธ์ระหว่าง x_1 และ x_2 เทียบกับเวลาที่เปลี่ยนไป มีค่าเท่ากัน



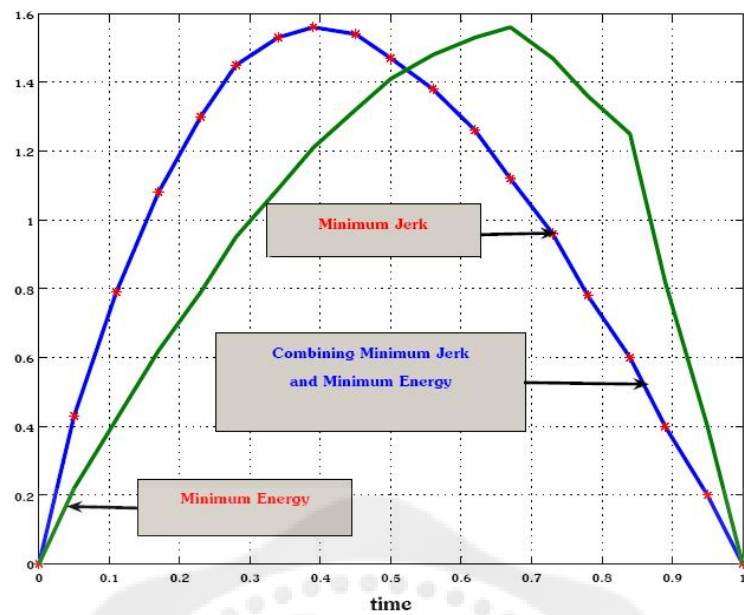
ภาพประกอบ 16 Solutions of the First Derivative of the First State Variables $\dot{x}_1(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

จากกราฟ แสดงความสัมพันธ์ของค่า $\dot{x}_2$ กับเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป กรณีต่าง ๆ

1. การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) เส้นกราฟต่อเนื่อง แต่มีค่า velocity ในช่วงเวลา 0 – 0.4 sec น้อยกว่า Minimum Jerk และ Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

2. การใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด (Minimum Jerk) และการรวมระหว่างการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) เข้าด้วยกัน จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ ทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน และเส้นกราฟต่อเนื่องตลอดทับกันพอดี โดยในช่วงเวลา 0 – 0.4 sec ความเร็วจะเพิ่มขึ้น และเริ่มลดลงอย่างต่อเนื่องหลังจากเวลาผ่านไป 0.4 sec

3. เงื่อนไขทั้งสามกรณีคือ Fixed end time and fixed end point โดยเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ และเวลาสุดท้ายที่ $t = 1$ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two point boundary value condition)



ภาพประกอบ 17 Solutions of the First Derivative of the Second State Variables $\dot{x}_2(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

จากกราฟ แสดงความสัมพันธ์ของค่า $\dot{x}_2$ กับเวลาที่เปลี่ยนไป กรณีต่าง ๆ

1. การใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy) เส้นกราฟต่อเนื่อง แต่มีค่า velocity ในช่วงเวลา 0 – 0.4 sec น้อยกว่า Minimum Jerk และ Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

2. การใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด (Minimum Jerk) และการรวมระหว่างการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) เข้าด้วยกัน จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ ทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน และเส้นกราฟต่อเนื่องตลอดทั้งกันพอดี โดยในช่วงเวลา 0 – 0.4 sec ความเร็วจะเพิ่มขึ้น และเริ่มลดลงอย่างต่อเนื่องหลังจากเวลาผ่านไป 0.4 sec

3. เงื่อนไขทั้งสามกรณีคือ Fixed end time and fixed end point โดยเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ และเวลาสุดท้ายที่ $t = 1$ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two point boundary value condition)

สรุปผลที่ได้จากกราฟทั้งสองข้างต้นความสัมพันธ์ระหว่าง $\dot{x}_1$ และ $\dot{x}_2$ เทียบกับเวลาที่เปลี่ยนไป มีค่าเท่ากัน

ตาราง 1 แสดง Solutions of the First State Variables $x_1(t)$ from Minimum Energy,
Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

Time	Minimum Energy	Time	Minimum Jerk	Time	Combining Minimum Energy +Jerk
0.0000	3.33E-16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0555	0.0061	0.0555	0.0124	0.0555	0.0124
0.1111	0.0242	0.1111	0.0471	0.1111	0.0471
0.1666	0.0535	0.1666	0.0996	0.1666	0.0996
0.2222	0.0929	0.2222	0.1662	0.2222	0.1662
0.2777	0.1416	0.2777	0.2435	0.2777	0.2435
0.3333	0.1988	0.3333	0.3268	0.3333	0.3268
0.3888	0.2632	0.3888	0.4129	0.3888	0.4129
0.4444	0.334	0.4444	0.4994	0.4444	0.4994
0.5000	0.4101	0.5000	0.5835	0.5000	0.5835
0.5555	0.4906	0.5555	0.6633	0.5555	0.6633
0.6111	0.5744	0.6111	0.7372	0.6111	0.7372
0.6666	0.6607	0.6666	0.8038	0.6666	0.8038
0.7222	0.7452	0.7222	0.8619	0.7222	0.8619
0.7777	0.8242	0.7777	0.9106	0.7777	0.9106
0.8333	0.8973	0.8333	0.9493	0.8333	0.9493
0.8888	0.955	0.8888	0.9773	0.8888	0.9773
0.9444	0.9889	0.9444	0.9943	0.9444	0.9943
1.000	0.9999	1.000	1.0000	1.000	1.0000

ตาราง 2 แสดง Solutions of the Second State Variables $x_2(t)$ from Minimum Energy,
Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

Time	Minimum Energy	Time	Minimum Jerk	Time	Combining Minimum Energy +Jerk
0.0000	3.33E-16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0555	0.0061	0.0555	0.0124	0.0555	0.0124
0.1111	0.0242	0.1111	0.0471	0.1111	0.0471
0.1666	0.0535	0.1666	0.0996	0.1666	0.0996
0.2222	0.0929	0.2222	0.1662	0.2222	0.1662
0.2777	0.1416	0.2777	0.2435	0.2777	0.2435
0.3333	0.1988	0.3333	0.3268	0.3333	0.3268
0.3888	0.2632	0.3888	0.4129	0.3888	0.4129
0.4444	0.334	0.4444	0.4994	0.4444	0.4994
0.5000	0.4101	0.5000	0.5835	0.5000	0.5835
0.5555	0.4906	0.5555	0.6633	0.5555	0.6633
0.6111	0.5744	0.6111	0.7372	0.6111	0.7372
0.6666	0.6607	0.6666	0.8038	0.6666	0.8038
0.7222	0.7452	0.7222	0.8619	0.7222	0.8619
0.7777	0.8242	0.7777	0.9106	0.7777	0.9106
0.8333	0.8973	0.8333	0.9493	0.8333	0.9493
0.8888	0.955	0.8888	0.9773	0.8888	0.9773
0.9444	0.9889	0.9444	0.9943	0.9444	0.9943
1.000	0.9999	1.000	1.0000	1.000	1.0000

ตาราง 3 แสดง Solutions of the First Derivative of the First State Variables $\dot{x}_1(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

Time	Minimum Energy	Time	Minimum Jerk	Time	Combining Minimum Energy +Jerk
0.0000	-4.44E-16	0.0000	-4.99E-16	0.0000	-4.99E-16
0.0555	0.2200	0.0555	0.4375	0.0555	0.4375
0.1111	0.4299	0.1111	0.7975	0.1111	0.7975
0.1666	0.6209	0.1666	1.0800	0.1666	1.0800
0.2222	0.7954	0.2222	1.3084	0.2222	1.3084
0.2777	0.9564	0.2777	1.4580	0.2777	1.4580
0.3333	1.0971	0.3333	1.5317	0.3333	1.5317
0.3888	1.2190	0.3888	1.5614	0.3888	1.5614
0.4444	1.3257	0.4444	1.5431	0.4444	1.5431
0.5000	1.4124	0.5000	1.4796	0.5000	1.4796
0.5555	1.4810	0.5555	1.3877	0.5555	1.3877
0.6111	1.5340	0.6111	1.2685	0.6111	1.2685
0.6666	1.5689	0.6666	1.1245	0.6666	1.1245
0.7222	1.4730	0.7222	0.9638	0.7222	0.9638
0.7777	1.3694	0.7777	0.7886	0.7777	0.7886
0.8333	1.2587	0.8333	0.6012	0.8333	0.6012
0.8888	0.8225	0.8888	0.4058	0.8888	0.4058
0.9444	0.4010	0.9444	0.2046	0.9444	0.2046
1.000	-7.10E-15	1.000	0.0000	1.000	0.0000

ตาราง 4 แสดง Solutions of the First Derivative of the Second State Variables $\dot{x}_2(t)$ from Minimum Energy, Minimum Jerk and Combining Minimum Jerk and Minimum Energy

Time	Minimum Energy	Time	Minimum Jerk	Time	Combining Minimum Energy +Jerk
0.0000	-4.44E-16	0.0000	-4.99E-16	0.0000	-4.99E-16
0.0555	0.2200	0.0555	0.4375	0.0555	0.4375
0.1111	0.4299	0.1111	0.7975	0.1111	0.7975
0.1666	0.6209	0.1666	1.0800	0.1666	1.0800
0.2222	0.7954	0.2222	1.3084	0.2222	1.3084
0.2777	0.9564	0.2777	1.4580	0.2777	1.4580
0.3333	1.0971	0.3333	1.5317	0.3333	1.5317
0.3888	1.2190	0.3888	1.5614	0.3888	1.5614
0.4444	1.3257	0.4444	1.5431	0.4444	1.5431
0.5000	1.4124	0.5000	1.4796	0.5000	1.4796
0.5555	1.4810	0.5555	1.3877	0.5555	1.3877
0.6111	1.5340	0.6111	1.2685	0.6111	1.2685
0.6666	1.5689	0.6666	1.1245	0.6666	1.1245
0.7222	1.4730	0.7222	0.9638	0.7222	0.9638
0.7777	1.3694	0.7777	0.7886	0.7777	0.7886
0.8333	1.2587	0.8333	0.6012	0.8333	0.6012
0.8888	0.8225	0.8888	0.4058	0.8888	0.4058
0.9444	0.4010	0.9444	0.2046	0.9444	0.2046
1.000	-7.10E-15	1.000	0.0000	1.000	0.0000

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปร $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)$, จากปัญหาทั้งสามแบบคือการเปรียบเทียบวิธีการหาค่าโดยรวมความนิ่มนวลที่สุด กับการใช้พลังงานน้อยที่สุด เปรียบเทียบกับกรณีใช้ ค่าความนิ่มนวลที่สุด และการใช้พลังงานน้อยที่สุดเพียงอย่างเดียวของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น สังเกตได้จากภาพประกอบ 6 – 17 และข้อมูลจากตาราง 1 – 4 ที่เปรียบเทียบปัญหาทั้งสามวิธีโดยกำหนดให้ตัวแปร States คือ $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)$ และ Control Input คือ $u_1(t)$, $u_2(t)$ เทียบกับเวลา โดยพล็อตกราฟให้มีตัวแปรค่าเดียวกัน จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นกราฟของวิธีการรวมค่าความนิ่มนวลที่สุดกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด มีค่าเท่ากับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดเพียงอย่างเดียว สังเกตได้จากวิถีเส้นกราฟทับกันพอดี

จากภาพประกอบ 16 และ 17 ความเร็วเริ่มต้นจนถึงจุดสูงสุด กรณีใช้ความนิ่มนวลที่สุดและกรณีการรวมความนิ่มนวลที่สุดกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด ใช้เวลาน้อยกว่ากรณีหาค่าตอบด้วยวิธีการใช้พลังงานน้อยที่สุดและจากจุดสูงสุดของกราฟมายังจุดต่ำสุด (ที่เวลา $t = 0$) ทั้งสองกรณีแรก ลักษณะกราฟจะลดลงอย่างต่อเนื่องสังเกตได้จากความชันของกราฟ แสดงว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความนิ่มนวลกว่ากรณีใช้พลังงานน้อยที่สุด

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ทำการพัฒนาโดย พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระแก้ว มาแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของการรวมความน้มนวลที่สุดกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) เปรียบเทียบกับกรณีการใช้ค่าความน้มนวลที่สุดและการใช้พลังงานน้อยที่สุดเพียงอย่างเดียว ในงานวิจัยนี้ได้แนะนำระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่มีชื่อว่า Linear Programming ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่ใช้ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการ

จากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของการรวมความน้มนวลที่สุดกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) ง่ายกว่า รวดเร็ว และให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกันกับปัญหาความน้มนวลที่สุด แต่ทั้งสองกรณีไม่เท่ากับวิธีการใช้พลังงานน้อยที่สุดเพียงอย่างเดียว จากผลลัพธ์ที่ได้ แสดงว่าการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการใช้ความน้มนวลที่สุด (Minimum Jerk) สามารถแทน การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการรวมความน้มนวลที่สุดกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ที่รวดเร็วกว่า เนื่องจากจำนวนตัวแปรที่น้อยกว่า

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากผลงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการใช้ความน้มนวลที่สุด (Minimum Jerk) ให้ผลลัพธ์เท่ากับ การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีการรวมความน้มนวลที่สุดกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Combining Minimum Jerk and Minimum Energy) แสดงว่าทั้งสองกรณีใช้แทนกันได้ แต่การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความน้มนวลที่สุด อาจจะสะดวกเร็วกว่าเพราะปัญหาไม่ซับซ้อน ของจำนวนตัวแปร ที่เป็นระบบพลศาสตร์เชิงเส้น (Linear Dynamic Systems) อย่างไรก็ตามในปัญหาของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Dynamic Systems) อาจจะทำให้เปรียบเทียบผลต่อไป ส่วนการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด ด้วยวิธีการใช้พลังงานน้อยที่สุด ไม่สามารถแทนทั้งสองกรณี แต่การนำวิธีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด ด้วยวิธีการรวมความน้มนวลที่สุดกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดสามารถทำได้ ซึ่งผลลัพธ์คือได้ทั้งความน้มนวลและการประหยัดพลังงาน



บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กนต์ธร ชำนิประศาสน์ , วิศว.ร.อ.ดร.; และ ไชยภักดิ์ ช่างการ. (2550). *คู่มือการใช้ MATLAB สำหรับงานทางวิศวกรรม*. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี : สำนักวิศวกรรมศาสตร์
- ธนัญชัย ลีภักดิ์ปรีดา. (2543). *การหาค่าเหมาะสมที่สุด: หลักการพื้นฐานและขั้นตอนวิธีการ*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- สุธรรม ศรีเกษม, วิศว.ร.อ.ดร.; เมธีนทร์ ทองชัยกุล, วิศว.ร.อ.; และสง่า ศรีสุขปรีดา, วิศว.ร.อ.. *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.
- Pirosopa, P.; et al. (2005). *A Study on the Comparison between Minimum Jerk and Minimum Energy of Dynamic Systems*. Proceedings of the 2005 International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, and International Conference Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce.
- Sunil K. Agrawal ,Veeraklaew, T., Fabien, B.C., 1998, "Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations," Optimal Control Applications and Methods, Vol. 19, pp.393-410.
- Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, *New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems*, AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic Vol.24 No.2 pp.228 - 236, 2544
- M.C. Renolds, P.H.Meckl, *Composite Optimization Scheme for time Optimal Control*.
- Kirk, DE. (1970). *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Sunil K. Agrawal, T.Veerakleaw, *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constrian Using Higher – Order Method with Penalty Function*, WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics) Vol.1,2541
- Veeraklaew, T.; & Salaluk, P. (2005). *The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems*. The 19th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.

อภิธานศัพท์



อภิธานศัพท์

Algebraic Equations

สมการทางพีชคณิต

Automobile

รถยนต์

Boundary Condition

เงื่อนไขขอบเขต

Calculus of Variation

แคลคูลัสความแปรปรวน

Constrains

เงื่อนไขบังคับ

Continuous Derivatives

อนุพันธ์ต่อเนื่อง

Continuous Time

เวลาต่อเนื่อง

Combining

การรวม

Dynamic Optimization Problem

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์

Differential Equation

แบ่งแยกกันของฟังก์ชัน

Direct Method

วิธีตรง

Dynamics Constraints

ขอบเขตทางพลศาสตร์

Dynamic Equation

สมการทางพลศาสตร์

Dynamic System

ระบบพลศาสตร์

Displacement

การเคลื่อนที่

Equality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ

Extremize

คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

Extremum

ค่าเหมาะสมสูงสุด

Final Time

เวลาสุดท้าย

First Order Condition

เงื่อนไขอันดับหนึ่ง

First Order Forms

รูปแบบของลำดับที่หนึ่ง

Independent Variable

ตัวแปรอิสระ

Inequality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ

Initial Condition

เงื่อนไขเริ่มต้น

Initial Time

เวลาเริ่มต้น

Interval

ช่วงเวลา

Initial Guess

ค่าเริ่มต้น

Indirect Method

วิธีอ้อม

Jerk

ความหยวบกระด้างหรือความนิ่มนวลน้อยที่สุด

Jacobian Matrix

จาโคเบียนเมตริกซ์

Lagrange Method

วิธีของลากรางจ์

Lagrange Multipliers

ตัวคูณลากรางจ์

Linear Dynamics

พลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

Maximum Trajectories

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าสูงสุด

Minimum Trajectories

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าต่ำสุด

Minimum Direct Jerk

ความนิ่มนวลที่สุดทางตรง

Minimum Indirect Jerk

ความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อม

Minimum Energy

พลังงานน้อยที่สุด

Minimum Principle

หลักการหาค่าที่ต่ำที่สุด

Mobile Robot

หุ่นยนต์ชนิดที่เคลื่อนที่ได้

Necessary Condition

เงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด

Nonlinear Dynamics

พลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Nonlinear Programming

โปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Nonlinear Systems

ระบบไม่ใช่เชิงเส้น

Numerical Method

วิธีการเชิงตัวเลข

Objective

เป้าหมายที่ต้องการ

Objective Function

ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ

Optimality Conditions

สภาวะที่เหมาะสมที่สุด

Optimization

ออฟติไมเซชัน

Optimum

ค่าที่เหมาะสมที่สุด

Sufficient Condition

สภาวะที่เพียงพอ

Second Variation

ความแปรปรวนที่สอง

State Equation

สมการแสดงสถานะ

Terminal Condition

สภาวะที่ปลายทาง

Time Variant

ฟังก์ชันของเวลา

Time Derivative

อนุพันธ์ของเวลา





ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	จ.ส.อ.จำนงค์ ผายสระน้อย
วันเดือนปีเกิด	3 เมษายน 2510
สถานที่เกิด	อ.ปักธงชัย จ.นครราชสีมา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	109/1 บ้านนกออก ต.นกออก อ.ปักธงชัย จ.นครราชสีมา 30150
ตำแหน่งหน้าที่การงาน	วิศวกร ห้องปฏิบัติการวิศวกรรมยานยนต์
สถานที่ทำงาน	ศูนย์เครื่องมือวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อ.เมือง จ.นครราชสีมา
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2528	มัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนปักธงชัยประชานิรมิต อ.ปักธงชัย จ.นครราชสีมา
พ.ศ. 2531	โรงเรียนช่างฝีมือทหาร กรุงเทพฯ
พ.ศ. 2539	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.ช่างยนต์) วิทยาลัยเทคนิค ศรีสะเกษ จ.ศรีสะเกษ
พ.ศ. 2546	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. เครื่องกล) สถาบันเทคโนโลยีราชมงคลภาคตะวันออกเฉียงเหนือ จ.นครราชสีมา
พ.ศ. 2551	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ