การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

ปริญญานิพนธ์

ของ

ยุพร ริมชลการ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา

กันยายน 2543

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ)

คณะกรรมการสอบ

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่ง เจนจิต)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)

วันที่ ...15... เดือน ...กันยายน... พ.ศ. 2543

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความอนุเคราะห์จากผู้ทรงคุณวุฒิและผู้ที่เกี่ยวข้องหลายท่าน ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณท่าน รองศาสตราจารย์ ดร.สุเทพ ทองอยู่ ที่ได้กรุณารับเป็นประธานคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ในตอนแรก และ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม ประธานคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่ได้ชี้แนะให้คำปรึกษา แนะนำ ตรวจและแก้ไขปริญญานิพนธ์ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง จนทำให้ปริญญานิพนธ์สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชค อาจารย์ ดร.นิตติยา ปภาพจน์ รองศาสตราจารย์ ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส คณะผู้เชี่ยวชาญที่ได้สละเวลาแสดงความคิดเห็นและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างดียิ่งต่องานวิจัยนี้ และกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สมพล เล็กสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้คำปรึกษาช่วยเหลือตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยศึกษาอยู่ ขอบคุณรองศาสตราจารย์ ปรีชา เนาว์เย็นผล ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ตลอดจนเพื่อนร่วมรุ่นทุกคนที่ให้กำลังใจเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่งเจนจิต ที่ได้กรุณารับเป็นกรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม ขอบใจนักเรียนทุกคนที่เข้าร่วมโครงการวิจัยครั้งนี้ ขอบคุณอาจารย์ จรรยา ภูอุดม ที่ให้การช่วยเหลือจัดหานักเรียนเพื่อทดสอบหาประสิทธิภาพของเครื่องมือในการวิจัย ขอบคุณอาจารย์และนักเรียนโรงเรียนเลยพิทยาคมที่ให้การช่วยเหลือเพื่อทดลองใช้หลักสูตรก่อนการทดลองภาคสนาม ขอบคุณอาจารย์ผกาวดี ทิพย์พยอม อาจารย์บุญมา วรรธนวลัญช์ ที่ให้การช่วยเหลือจัดหานักเรียนเพื่อเข้าร่วมโครงการวิจัยเพิ่มเติม และขอบคุณ อาจารย์จรีรัตน์ สุวรรณที่ให้การช่วยเหลือในการทดลองใช้หลักสูตร ขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏเลย ที่ให้กำลังใจ ขอบคุณอาจารย์วรพรรณ ทิพรส ที่ให้ความช่วยเหลือตกแต่งภาษาในบทคัดย่อภาษาอังกฤษ ขอบใจคุณจีรวัฒน์ บุตรดีสุวรรณ ที่ได้เสียสละเวลาในการจัดพิมพ์ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ประโยชน์อันพึงมีจากปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ขอมอบแด่ บิดา-มารดา ผู้ให้ชีวิตและทุนทรัพย์ พี่-น้อง หลาน ที่ให้กำลังใจ ครอบครัวมนูศิลป์ทุกท่านที่ให้การช่วยเหลือสนับสนุนทุกเรื่อง ครู-อาจารย์ ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ และผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้สนับสนุนผู้วิจัยจนได้รับความสำเร็จในด้านการศึกษาด้วยดีตลอดมา

ยุพร ริมชลการ

สารบัญ

บทที่ **หน้า**

บัญชีตาราง

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

ที่มาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษานับเป็นปัจจัยที่สำคัญยิ่งในการพัฒนาคุณภาพของผู้คนในประเทศให้สามารถดำเนินชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุข อันจะส่งผลให้ประเทศมีความเจริญก้าวหน้าทั้งในด้านเศรษฐกิจ สังคม การเมือง และความมั่นคงของชาติ ระบบการศึกษาที่ดีควรเอื้ออำนวยต่อการพัฒนาทรัพยากรบุคคลให้เป็นผู้ที่มีความสามารถ มีบุคลิกภาพและเจตคติที่ดี และเหมาะสมสอดคล้องกับสภาพสังคมที่กำลังเปลี่ยนแปลง จึงเป็นหน้าที่ของคณะผู้บริหารประเทศ นักการศึกษา ครู - อาจารย์ และผู้เกี่ยวข้องทุกฝ่ายที่จะต้องตระหนักและรับผิดชอบการจัดการศึกษาของชาติให้บรรลุสู่แนวทางที่ต้องการดังกล่าว

การจัดการศึกษาในศตวรรษที่ 20 จะต้องมีการปฏิรูปให้ดียิ่งขึ้น ด้วยเหตุว่า โลกในปัจจุบันมีความเจริญก้าวหน้าทั้งในด้านเทคโนโลยี คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ดังนั้นการเสริมสร้างบุคคลที่มีทักษะและความสามารถเฉพาะทางเพื่อช่วยเหลือสังคมจึงเป็นสิ่งที่จำเป็นต้องกระทำ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะต้องได้รับคำแนะนำและสนับสนุนส่งเสริมอย่างเหมาะสมตามความสามารถเฉพาะด้านการให้การศึกษาแก่เด็กที่มีความสามารถพิเศษจะต้องดำเนินการอย่างรัดกุมรอบคอบด้วยการเปิดโอกาสและจัดโปรแกรมการเรียนที่สนองตอบตามความต้องการและความสามารถพิเศษด้านต่าง ๆ ของเด็กเหล่านั้น การจัดการศึกษาที่มีประสิทธิภาพควรมุ่งเน้นให้ทุกคนมีโอกาสพัฒนาตนให้บรรลุถึงศักยภาพสูงสุดที่มีอยู่ ต้องพัฒนาการเรียนรู้ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถระดับต่าง ๆ ได้ใช้ความสามารถอย่างเต็มกำลัง ไม่ว่าจะเป็นผู้ที่มีปัญหาด้านสติปัญญาหรือผู้ที่มีปัญญาเลิศก็ตาม การจัดการศึกษาที่ดำเนินอยู่ในประเทศขณะนี้เป็นหลักสูตรที่สร้างขึ้นโดยถือเกณฑ์ความสามารถในการเรียนของเด็กปานกลาง แม้ว่าจะมีข้อกำหนดเกี่ยวกับการจัดให้มีกิจกรรมซ่อมเสริมในหลักสูตร ซึ่งดูเหมือนว่าจะให้โอกาสนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษอยู่ด้วยแต่ในทางปฏิบัติแล้วส่วนใหญ่จะมุ่งแก้ปัญหาให้กับเด็กที่เรียนอ่อนโดยละเลยที่จะให้การดูแลเด็กที่เฉลียวฉลาดเพราะคิดว่าเด็กเก่งเหล่านี้ช่วยตัวเองได้และสามารถพัฒนาไปสู่ความสำเร็จได้ด้วยตัวของเขาเอง แต่จากการวิจัยจำนวนมากพบว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเพียงบางคนเท่านั้นที่มีโอกาสประสบความสำเร็จ เนื่องจากมีผู้ใกล้ชิดคนใดคนหนึ่งให้การช่วยเหลือและส่งเสริมให้กำลังใจอย่างต่อเนื่องจึงทำให้ศักยภาพในตัวของเขาแสดงออกมา ยังมีเด็กอีกเป็นจำนวนมากที่มีศักยภาพสูงแต่ถูกระบบการศึกษาและสังคมทอดทิ้งทำให้เด็กที่มีสติปัญญาดีสูญเสียโอกาสในการพัฒนาต้องชะลอตัวเองให้ค่อย ๆ ก้าวไปพร้อม ๆ กับเพื่อน ๆ ในกลุ่มซึ่งอาจทำให้เด็กส่วนหนึ่งในกลุ่มนี้เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน หันไปสนใจสิ่งอื่นที่บางครั้งก็กลับกลายเป็นการสร้างปัญหาให้กับครูหรือผู้ปกครอง ตราบใดที่ยังไม่เล็งเห็นความสำคัญของการพัฒนาเด็กปัญญาเลิศสังคมจะขาดโอกาสที่จะได้ผลงานเชิงสร้างสรรค์ของเขาเพื่อการพัฒนาให้สังคมก้าวหน้ายิ่งขึ้น หรือมิฉะนั้นเด็กเหล่านี้ก็จะกลายเป็นเด็กที่

มีความสามารถปานกลางหรือต่ำ ไปอย่างน่าเสียดายทั้ง ๆ ที่โดยแท้จริงแล้วทรัพยากรบุคคลที่มีความสามารถสูงจะสามารถนำประเทศไปสู่ความก้าวหน้าและมั่นคงในท่ามกลางกระแสโลกาภิวัตน์ (โครงการ "การศึกษาไทยในยุคโลกาภิวัตน์" . 2539) ยิ่งไปกว่านั้นการทอดทิ้งเด็กที่มีความสามารถสูงอาจทำให้สังคมได้รับพิษภัยที่เกิดขึ้นจากพฤติกรรมที่เบี่ยงเบนไปของเด็กกลุ่มนี้ บ่อยครั้งที่พบว่าอาชญากรรมที่ร้ายแรงซึ่งถูกก่อขึ้นและไม่สามารถนำคนผิดมาลงโทษได้เป็นการกระทำของบุคคลที่มีสติปัญญาเฉียบแหลมมากทอฟเฟลอร์ (Toffler. 1970 : 6) ให้ความเห็นว่าเราต้องทุ่มเทความพยายามในการคัดแยก ให้การฝึกอบรมและหาทางใช้ประโยชน์บุคคลที่มีความสามารถพิเศษ มิฉะนั้นโลกอาจจะต้องมาเผชิญกับการล้างผลาญแทน

ยังมีความเชื่ออีกอย่างหนึ่งในกลุ่มนักการศึกษา ครู-อาจารย์บางกลุ่มที่คิดว่าเด็กเก่งมีจำนวนน้อยจึงไม่ได้สนใจที่จะส่งเสริม โดยมีแนวคิดว่าควรให้การส่งเสริมและพัฒนากับกลุ่มเด็กที่มีเป็นจำนวนมากคือพวกเด็กปานกลางจะดีกว่า แต่จากผลพวงของการศึกษาทางด้านจิตวิทยา ประสาทวิทยาเกี่ยวกับการทำงานของสมองมนุษย์ โครงสร้างทางสติปัญญา ทางพันธุกรรม และ ทางการศึกษาในช่วงหลัง ๆ ทำให้ทราบถึงข้อมูลที่น่าสนใจหลายประการ เช่น ข้อมูลจาก "Equity in Excellence T.A.R.G.A.T.E. (Toward a Rewarding # Gifted and Talented # Education) โดย เรดแลนด์ (อุษณีย์ โพธิสุข. 2536 : 20 ; อ้างอิงมาจาก Redlands. n.d. ; สุมณฑา พรหมบุญ. 2536 : 1)และจากแหล่งข้อมูลอื่น ๆ พบว่าเด็กที่เกิดมามีศักยภาพที่จะเป็นคนเก่งเด่นดังได้มีจำนวนมากกว่า 36% ของเด็กทั้งหมดซึ่งมีไม่น้อยเลย และ 19 % ของเด็กที่ทิ้งการเรียนกลางคันคือพวกที่เรียนเก่งระดับสูงสุด 5 % ของชั้นเรียน และ 53 % ของเด็กที่ทิ้งการเรียนกลางคันเป็นเด็กที่มีความฉลาดเกินเด็กปกติ อัจฉริยบุคคลเสพสิ่งเสพติดมึนเมาถึง 63 % นักโทษคดีอุกฉกรรจ์ถึง 19 % มี IQ เกิน 145 กลุ่มที่ฆ่าตัวตายมากที่สุดคือ ผู้ที่มีความฉลาดกว่าคนทั่วไปและมักจะเป็นเพศชาย 78 % ของอัจฉริยะบุคคลมีความบกพร่องทางการเรียนรู้ (learning disability) ในขณะที่ประชากรโลกเพิ่มทางด้านปริมาณ กลไกที่จะพัฒนาประชากรในแง่คุณภาพยังไม่เปลี่ยนแปลง คาดกันว่าใน 1 ปีเราได้สูญเสียอัจฉริยบุคคลไปจำนวนหลายล้านคน (อุษณีย์ โพธิสุข. 2536) เด็กที่สามารถจะเป็นเด็กเก่งได้มีจำนวนไม่น้อยกว่า 36 % ของจำนวนเด็กทั้งหมดถ้าหากได้รับการส่งเสริมตั้งแต่เยาว์วัยแต่เด็กเหล่านี้เมื่อเติบโตขึ้นผ่านการศึกษาสูงขึ้นกลับกลายเป็นคนเก่งเพียงไม่กี่คนนับเป็นเปอร์เซนต์ก็ไม่ถึง 1 %นั้นแสดงว่าเราไม่ได้พัฒนาทรัพยากรอันล้ำค่าของเราเท่าที่ควร เป็นการสูญเสียทรัพยากรบุคคลที่มีค่าไปอย่างน่าเสียดาย ฉะนั้นผู้ที่มีหน้าที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาควรตระหนักถึงความจำเป็นที่จะต้องจัดให้มีการส่งเสริมและพัฒนาเด็กปัญญาเลิศเป็นการเฉพาะ ด้วยเหตุผลหลายประการดังที่ เกรียงศักดิ์ เจริญวงศ์ศักดิ์(2539 : 133) กล่าวว่าเด็กปัญญาเลิศเป็นทรัพยากรที่มีค่าของประเทศชาติ หลักสูตรทั่ว ๆ ไปไม่สามารถพัฒนาศักยภาพเด็กปัญญาเลิศได้เต็มที่หากทิ้งเด็กปัญญาเลิศให้เรียนแบบปกติเขาอาจจะเลิกเรียนกลางคัน จากการวิจัยในหลายประเทศ เช่น สหรัฐอเมริกา อังกฤษ พบว่าเด็กเหล่านี้จะเลิกเรียนกลางคัน เพราะเกิดความรู้สึกเบื่อหน่ายในชั้นเรียน และเด็กปัญญาเลิศจะไม่ช่วยให้เด็กปกติเรียนเก่งขึ้นจากการวิจัยของ ชูง(Schunk. 1987 : 149) พบว่าหากเอาเด็กเก่งและเด็กไม่เก่งเรียนรวมกันเด็กเก่งจะไม่มีอิทธิพลในทางบวกที่ทำให้เด็กไม่เก่งอยากเรียนรู้และทำ

ตาม ในทางกลับกันเด็กเก่งทำให้เด็กไม่เก่งรู้สึกสั่นคลอนเมื่อต้องเรียนอยู่ด้วยกัน เพื่อสร้างกำลังปัญญาของประเทศ สร้างโอกาสแสวงหาความร่วมมือและสร้างสถานะในเวทีโลก การที่สังคมจะได้คนเก่งดังกล่าวมาเป็นกำลังของชาติจำเป็นต้องมีการจัดระบบการศึกษาและวางแผนที่ถูกต้อง(สดศรี วงศ์ถ้วยทอง. 2538 : 19) ต้องเข้าใจองค์ประกอบที่ช่วยพัฒนาความสามารถอันเป็นเลิศให้เด็กระดับหัวกะทิทั้งหลายได้มีโอกาสได้รับการส่งเสริมสนับสนุนตั้งแต่เยาว์วัยมิฉะนั้นเด็กเหล่านี้จะกลับกลายเป็นเด็กน่าสงสารเพราะหาคนที่เข้าใจเขาไม่ได้ (ประเวศ วะสี. 2537 : 8) การช่วยให้คนเก่งได้บรรลุตามศักยภาพของตนโดยการหายุทธวิธีช่วยให้คนเก่งแก้ปัญหาความเครียดอันเนื่องมาจากความสามารถส่วนตัวและการจำกัดแรงกดดันทางด้านวัฒนธรรม เมื่อให้คนเก่งและคนปัญญาเลิศได้บรรลุศักยภาพเต็มที่ของตนแล้วคนเก่งย่อมทำสิ่งที่เด่นให้กับสังคมได้แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าคนเก่งมีปัญหาในการบรรลุตามศักยภาพสูงสุดของตนแล้วคนเก่งจะผละหนีจากแบบแผนของสังคมและสังคมจะสูญเสียประโยชน์ที่พึงได้จากความสามารถของคนเก่งไปอย่างน่าเสียดาย (Torrance. 1975 : 3-4)

การจัดการศึกษาเพื่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ เป็นการให้โอกาสทางการศึกษาที่สำคัญยิ่งสำหรับเยาวชนซึ่งจะเป็นผู้นำด้านต่าง ๆ ของประเทศเป็นการจัดการทรัพยากรที่มีค่ายิ่งของชาติอย่างมีทิศทางและมีประสิทธิภาพมากกว่าการจัดการศึกษาตามปกติ เพื่อผลประโยชน์ในการพัฒนาประเทศในอนาคตทั้งระยะสั้นและระยะยาวหลาย ๆ ประเทศมีการตื่นตัวที่จะจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ มีการประชุมทางวิชาการทางการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษในประเทศเอเชีย-แปซิฟิก (การประชุมทางวิชาการทางการศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศในประเทศเอเชีย-แปซิฟิก. 2536 : 1-3) มีประเทศเข้าร่วมประชุมหลายประเทศ เช่น ออสเตรเลีย ฮ่องกง อินเดีย อินโดนีเซีย ญี่ปุ่น เกาหลี มาเลเซีย ฟิลิปินส์ นิวซีแลนด์ สิงคโปร์ ไต้หวัน และไทย มีการบรรยายสนทนาแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและประสบการณ์ถึงความเป็นไปได้ในการจัดการศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศ และจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องการการศึกษาที่เอื้อให้เขาได้ใช้ความสามารถเต็มตามศักยภาพ ควรเป็นหลักสูตรพิเศษเฉพาะที่ต่างไปจากหลักสูตรปกติ (ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา. 2531 ; อุษณีย์ โพธิสุข. 2537 : 58 ; Dehann and Havighurst. 1987 Tuttle and Becker. 1983 ; Swassing. 1984 : 365 ; Gallagher. 1993 : 755-770)โดยทั่วไปมี 2 ลักษณะคือ การสอนเสริม (Enrichment) กับการสอนเร่ง (Acceleration) (Dehann and Havighurst.1987 : 84-111 ; Ridge and Renzulli. 1981 : 216-222 ; Hallahan and Kauffman. 1982 : 426-427 ; Tuttle and Becker. 1983 : 28-30 ; Swassing. 1984 : 379-382 ; Clark and Zimmerman.1987 : 11-13 ; Gallagher. 1993) ประเทศไทยเรามีหน่วยงานของรัฐหลายหน่วยงานพยายามหาทางพัฒนาเด็กเก่ง เช่น โครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้ที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท) โรงเรียนกีฬา โครงการส่งเสริมและพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษในการเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย (สพพ) โครงการสอบแข่งขันโอลิมปิกวิชาการ โรงเรียนวิทยาศาสตร์ โครงการส่งเสริมความสามารถพิเศษทางวิชาการ โรงเรียนสาธิตต่าง ๆ คณะศึกษาศาสตร์และคณะ

วิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้พยายามจัดโปรแกรมช่วยเหลือเด็กเก่ง ซึ่งนับว่าเป็นจุดเริ่มต้นที่ดีสำหรับประเทศเราแต่ถ้านำโครงการเหล่านี้ไปเทียบกับประเทศอื่นหลาย ๆ ประเทศในแถบเอเชียด้วยกัน เช่น ไต้หวัน ฮ่องกง สิงคโปร์ แล้วเรายังอยู่ห่างไกลจากเขาอยู่มาก

โลกก้าวไปสู่ยุคเทคโนโลยีมากยิ่งขึ้นทุกขณะ ประเทศไทยมีความจำเป็นที่จะต้องก้าวไปให้ทันโลก สังคมไทยยังต้องการผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจำนวนมากและเป็นที่ยอมรับกันว่า ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่โดดเด่นเป็นสิ่งจำเป็นและเป็นตัวการสำคัญในการรักษาความเป็นผู้นำในโลกแห่งเทคโนโลยี แต่ก็พบว่านักเรียนที่ถูกละเลยมากที่สุดในแง่ของการพัฒนาให้เกิดศักยภาพสูงสุดคือเด็กอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ (NCTM . 1980 : 18) ในประเทศไทยถึงแม้จะมีโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้ที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีหรือโครงการส่งเสริมและพัฒนาเด็กนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ในการเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายแต่ก็เป็นเพียงการบูรณาการเนื้อหาวิชาในหลักสูตรปกติในการเร่งรัดเวลาเรียนให้สั้นลง ส่วนโครงการสอบแข่งขันโอลิมปิกวิชาการ แม้ว่าจะช่วยเพิ่มศักยภาพให้แก่เด็กเก่งแต่ก็มีเป้าหมายที่การแข่งขันมากกว่า ทางที่ดีที่สุดควรจัดหลักสูตรเพื่อพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษประมาณปลายชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และขึ้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (Ridge and Renzulli. 1981 : 210 ; citing Fox. 1976) เพราะนักเรียนระดับดังกล่าวอยู่ในช่วงที่กำลังเข้าสู่ขั้นพัฒนาความคิดเชิงนามธรรมของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษตามมาตรฐาน Brentwood Experiment (Colins. 1969) ด้วยนักเรียนขั้นนี้จะสามารถอธิบายแนวคิดทางการแก้ปัญหาโดยใช้ตรรกวิทยาได้ ด้วยเหตุนี้การที่จะส่งเสริมอัจฉริยะภาพทางคณิตศาสตร์ของเด็กจึงควรที่จะมีการพัฒนาหลักสูตรเฉพาะสาขา และเป็นหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเพราะผู้ที่มีอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ในระดับดังกล่าวจะมีระบบเชิงประสาทวิทยาเฉพาะตัว ซึ่งส่งผลให้เกิดแบบของความคิดทางคณิตศาสตร์ (mathematical cast of mind) ต่าง ๆ กัน ดังที่ ครูเตฟสกี (Krutetskii. 1976 : 315-329) ได้จำแนกไว้เป็น 3 กลุ่มคือ กลุ่มแนวความคิดเชิงวิเคราะห์ (analytic type) ใช้สำหรับการเรียนรู้เลขคณิตและพีชคณิต กลุ่มแนวคิดเชิงเรขาคณิต (geometric type) ใช้สำหรับการเรียนรู้เรขาคณิต และกลุ่มแนวคิดเชิงผสมผสาน (harmonic type) ซึ่งรวมเอาความสามารถในการเรียนรู้ใน 2 แบบแรกเข้าด้วยกัน

เนื้อหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การวิเคราะห์ พีชคณิต และเรขาคณิต (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ 2537 : 1-8) และจากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยในต่างประเทศพบว่า เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่จัดสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ จะแบ่งเนื้อหาออกเป็นเรื่อง ๆ เช่น หลักสูตรทางด้านเลขคณิตและทฤษฎีจำนวน หลักสูตรทางด้านพีชคณิต และหลักสูตรทางด้านเรขาคณิต (Horse. 1981 : 195-199) จากข้อมูลดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยมีแนวคิดว่า การพัฒนาหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ควรจะแบ่งเป็นเรื่อง เช่น ทฤษฎีจำนวน พีชคณิต และเรขาคณิต และจากการศึกษางานวิจัยในประเทศพบว่า มีการพัฒนาหลักสูตรเสริมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นอยู่ 2 หลักสูตร คือ หลักสูตรทฤษฎีจำนวน (นิตติยา ปภาพจน์. 2540) และหลักสูตรเรขาคณิต (พิชากร แปลงประสพโชค. 2540)เนื้อหาทางด้านพีชคณิตยังไม่มีการพัฒนาเป็นหลักสูตรเสริมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ซึ่งพีชคณิตเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งที่มีความสำคัญ และเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง (real-lifeproblem) เป็นเครื่องมือที่สะดวกสำหรับการเขียนข้อสรุป (generalizations) ของเรื่องราวต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงและวิทยาการอื่น ๆ นอกจากนี้ยังพบว่าวิชาพีชคณิตช่วยพัฒนาการคิดอย่างมีวิจารณญาณของเด็ก (Dessart and Suydam. 1983) ถ้านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ขาดการสนับสนุน ส่งเสริมให้มีความสามารถทางพีชคณิตจะทำให้นักเรียนขาดความสมบูรณ์ในความสามารถ ในการการสรุปความคิดที่เป็นเครื่องมือที่เป็นตัวสื่อสารที่สะดวกที่จะทำให้มองเห็นภาพของความคิด ภาพของกระบวนการในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และประเภทของโครงการสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ (Clark. 1997 : 204-208 ; นุชนาถ สุนทรพันธ์. 2537 : 85-91 ; ผดุง อารยะวิญญู. 2542 : 182-184) แบ่งออกเป็น 3 ประเภทคือ โครงการเฉพาะกลุ่มนักเรียนเก่ง(special group) โครงการเร่งรัด (acceleration) เป็นการให้นักเรียนได้เรียนหลักสูตรใดหลักสูตรหนึ่งเร็วขึ้น และโครงการเสริมการเรียน (enrichment) นอกเหนือจากหลักสูตรปกติ และในการเสริมการเรียน ฮาวเลย์, ฮาวเลย์และเพนดาร์วิส (Colangelo amd Davis. 1991 : 99-100; citing Howley, Howley and Pendarvis. 1986) ได้แบ่งวิธีเสริมการเรียนออกเป็น 3 วิธีคือ เสริมที่เน้นกระบวนการคิด เสริมที่เน้นเนื้อหา และเสริมที่เน้นผลผลิต ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตที่มีลักษณะเป็นการสอนเสริมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นการเสริมสร้างความรู้ความสามารถทางพีชคณิต เพื่อที่จะนำความรู้ทางพีชคณิตไปใช้ตอบคำถามต่างๆ ไม่ใช่โครงการเร่งรัด ไม่ใช่หลักสูตรที่ใช้ปกติ แต่เป็นหลักสูตรนอกเหนือจากหลักสูตรปกติที่เสริมขึ้นมาสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ให้เรียนในช่วงปิดภาคเรียน โดยการสอนเสริมนี้จะเน้นที่กระบวนการคิด การแก้ปัญหา เน้นที่เนื้อหาที่นอกเหนือไปจากหลักสูตรปกติ และเน้นที่ผลผลิต นั่นคือนักเรียนจะมีกระบวนการคิดการแก้ปัญหามากยิ่งขึ้น

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์และทดลองใช้หลักสูตรที่พัฒนาขึ้นพร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของหลักสูตร

สมมุติฐานของการวิจัย

หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ คือผ่านความเห็นชอบของผู้เชี่ยวชาญ และนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนได้

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้หลักสูตรพีชคณิตที่มีประสิทธิภาพเหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. ส่งเสริมเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ให้พัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้สูงยิ่ง ๆ ขึ้น

3. เป็นแนวทางในการพัฒนาหลักสูตรพิเศษสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษสาขาอื่น ๆ ต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มประชากรเป้าหมาย ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทั่วไปที่มีความสามารถสอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย การเสนอชื่อ (nomination) แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ (creative problem solving in mathematics) และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง (high level thinking)

2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่สอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ประมาณ 15 คนแรกที่ได้คะแนนสูงสุด ซึ่งเป็นนักเรียนจากโรงเรียนในเขต กรุงเทพมหานครและปริมณฑล โดยรายชื่อโรงเรียนพิจารณาจากผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่ได้รับรางวัลที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยจัดขึ้นในแต่ละปี และจากงานวิจัยของนิตติยา ปภาพจน์ (2540 : 102) มาเป็นกลุ่มตัวอย่าง

3. เนื้อหาของหลักสูตรพีชคณิตเสริมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย บทนำ ความรู้พื้นฐาน หน่วยที่ 1 การกระจายและการแยกตัวประกอบ หน่วยที่ 2 พหุนาม หน่วยที่ 3 ความสัมพันธ์เวียนเกิด และ หน่วยที่ 4 อสมการ

นิยามศัพท์เฉพาะ

นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่สอบผ่านเกณฑ์การคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย การเสนอชื่อ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง

หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หมายถึง หลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้สอนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เป็นหลักสูตรระยะสั้น ใช้เวลาเรียน 98 ชั่วโมง โดยเนื้อหาจะมุ่งให้นักเรียนได้เรียนรู้มโนมติสำคัญทางพีชคณิตและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาโดยอาศัยศักยภาพความสามารถพิเศษ

การประเมินหลักสูตร หมายถึง กระบวนการในการหาประสิทธิภาพของหลักสูตร ซึ่งแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนคือ การประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ และ การประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตร

ประสิทธิภาพของหลักสูตร หมายถึง ผลจากการพิจารณาโดยผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับความเหมาะสมและความสอดคล้องของ จุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหาของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ การวัดและประเมินผล โดยดูจากค่า $\bar{X}$ S.D. และค่าดัชนีความสอดคล้อง IOC (Index of Objective Congruence) ของผู้เชี่ยวชาญโดยการพิจารณาคะแนนเฉลี่ยความเหมาะสมของผู้เชี่ยวชาญทำโดยเทียบกับเกณฑ์ดังนี้

มากที่สุด	ช่วงคะแนน	4.21 - 5.00
มาก	ช่วงคะแนน	3.41 - 4.20
ปานกลาง	ช่วงคะแนน	2.61 - 3.40
น้อย	ช่วงคะแนน	1.81 - 2.60
น้อยที่สุด	ช่วงคะแนน	1.00 - 1.80

โดยค่า S.D. มีค่าไม่เกิน 1 และความสอดคล้องของผู้เชี่ยวชาญจะพิจารณาค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป (นิตติยา ปภาพจน์. 2540) และผลจากการเปรียบเทียบคะแนนของการทดสอบก่อนเรียนกับการทดสอบหลังเรียนในการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ซึ่งใช้วัดความรอบรู้ในเนื้อหาพีชคณิตหลังการทดลองใช้หลักสูตรและผู้เรียนจะต้องเป็นผู้รอบรู้และมีความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต โดยคำนวณจากคะแนนเฉลี่ยของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ที่ใช้ทดสอบหลังเรียน คือ คะแนนเฉลี่ยที่ได้ต้องมากกว่าหรือเท่ากับคะแนนจุดตัด

คะแนนจุดตัด หมายถึง เกณฑ์ หรือ มาตรฐานที่ใช้ในการตัดสินการรู้ขั้นต่ำของนักเรียนที่ยอมรับว่าเป็นผู้รอบรู้

ผู้เชี่ยวชาญ หมายถึง ผู้ที่มีความรู้ความชำนาญและมีประสบการณ์การทำงานในแต่ละสาขาวิชาเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป ซึ่งประกอบด้วยผู้เชี่ยวชาญสาขา คณิตศาสตร์ การศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ การพัฒนาหลักสูตร และ การวัดผลประเมินผล

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งเป็นความรู้ในการสร้างและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์โดยครอบคลุมด้านต่าง ๆ ดังนี้

1. ความหมายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
2. ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
3. การคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
4. การจัดหลักสูตรและบรรยากาศในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
5. ลักษณะของครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
6. การประเมินหลักสูตร
7. แบบทดสอบอิงเกณฑ์
8. หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
9. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความหมายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

ก่อนที่จะกล่าวถึงความหมายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ผู้วิจัยขอกล่าวถึงคำว่า "ความสามารถพิเศษ" (giftedness or talent) ซึ่งยังไม่มีผู้ให้คำจำกัดความที่แน่นอนตายตัวและมีคำหลายคำที่ใช้ เช่นความฉลาด ความเป็นอัจฉริยะ ความเก่ง ความสามารถพิเศษ ความเป็นผู้มีปัญญาเลิศ เป็นต้น ในความหมายของคำเหล่านี้ไม่แตกต่างกัน (ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา. 2531 : 19) นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมาย หรือคำจำกัดความของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษไว้มากมายดังนี้ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ หมายถึง เด็กที่มีความสามารถเหนือเกณฑ์เฉลี่ย มีการแสดงออกถึงความสามารถอันโดดเด่น มีความมานะมุ่งมั่นต่องาน หรือแสดงให้เห็นถึงศักยภาพที่จะสามารถพัฒนาความสามารถได้อย่างเป็นที่ประจักษ์ มีความสามารถในการเรียนได้เร็วกว่าเวลาที่กำหนด มีความสามารถในด้านการคิดสร้างสรรค์ การใช้เหตุผล มีความสนใจกว้างขวางและมักผลิตผลงานที่มีคุณภาพสูง และความหมายที่เป็นที่ยอมรับของคนทั่วโลกซึ่งกล่าวโดย มาแลนด์ (Marland. 1972 : 191-230) ว่าเด็กเก่งคือเด็กที่มีความสามารถด้านใดด้านหนึ่งหรือมีความสามารถมากกว่าหนึ่งด้านในด้านต่อไปนี้ ภูมิปัญญาทั่วไป (intellectual ability) ความสามารถทางการเรียนสาขาใดสาขาหนึ่ง (specific academic-aptitude) ความคิดสร้างสรรค์สูง(creative thinking) ความสามารถในการเป็นผู้นำ(leadership ability) ความสามารถทางศิลปะ หรือดนตรี (visual and performing arts) ความสามารถในการใช้กล้ามเนื้อและประสาทสัมผัสเป็นความสามารถเชิงทักษะกลไก(psychomotor skills) นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จะเป็นเด็กที่มีแววดีทางใดทางหนึ่งมาตั้งแต่ครั้งยังเป็นเด็กปฐมวัยจนอายุอยู่ในวัยเรียนมัธยมศึกษาและความสามรถเฉพาะทางสามารถที่จะกระตุ้นให้พัฒนาขึ้นได้ และในกรณีที่เรายอมรับ แบบทดสอบชนิดใดชนิดหนึ่ง เช่น แบบทดสอบวัดไอคิว (IQ) เราก็มักจะเอาผลการทดสอบชนิดนั้นมาเป็นเครื่องกำหนดลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ และถ้าหากเราไม่มีแบบทดสอบดังกล่าว ก็อาจกล่าวได้เลยว่าเราคงต้องตัดสินโดยอาศัยความเห็นของผู้เชี่ยวชาญต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และความคิดจินตนาการ (ดุษฎี บริพัตร ณอยุธยา. 2531 : 24 ; อุษณีย์ โพธิสุข. 2537 : 36 ; Abraham. 1958 : 24-27 ; Fleigler and Bish.1959 : 409 ; Marland. 1972 : 191-230 ; Ogilvie. 1973 : 71 ; Dehaan and Havighurst. 1987: 69 ; Renzulli. 1977 : 512-518)

กล่าวโดยสรุป นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ คือเด็กที่มีความสามารถทางสติปัญญาและความถนัดเฉพาะทางอยู่ในระดับสูงเหนือกว่าเด็กปกติและมีผลงานเป็นที่ยอมรับของผู้เชี่ยวชาญในวงการที่เกี่ยวข้องหรือมีผลการทดสอบในระดับสูงไม่ว่าจะวัดจากแบบทดสอบประเภทใดก็ตาม

ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษส่วนใหญ่จะมีลักษณะที่สามารถมองเห็นได้ตั้งแต่เยาว์วัยโดยสังเกตลักษณะนิสัยหรือบุคลิกของเขาซึ่งมีลักษณะแตกต่างจากเด็กปกติดังนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ข้อสังเกตดังนี้

ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา (2531 : 24-26) กล่าวถึงลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเมื่อเยาว์วัยไว้ว่า จะใช้ศัพท์สูงเกินวัยทั้งปริมาณคำและคุณภาพของคำมีมาก ใช้ศัพท์สูงและซับซ้อนกว่าเด็กปกติรวมทั้งการใช้ประโยคได้ยาวกว่าเด็กธรรมดา มีตาแหลมคมรู้จักสังเกตสิ่งต่าง ๆ ได้ถี่ถ้วนและมีความอยากรู้อยากเห็น สามารถจดจำสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็วและง่ายดาย มีสมาธิดีเยี่ยม มีความสนใจอย่างกว้างขวางและลึกซึ้ง มีความสามารถที่จะเข้าใจสิ่งที่ซับซ้อนพิศดาร และเชื่อมโยงกับสิ่งต่าง ๆ มีทักษะสูงในการแยกแยะแจกแจงและมีความโน้มเอียงที่จะเข้มงวดกวดขันกับตนเอง มีความคิดอ่านนอกระเบียบแบบแผนชอบคิดอะไรเล่นสนุกชอบคิดทำอะไรอย่างอิสระมีประสาทความรู้สึกนึกคิดลึกซึ้งประณีตว่องไวเป็นพิเศษ มีความสามารถที่จะอ่านหนังสือในระดับเดียวกับเด็กที่เรียนสูงได้กว่าสองชั้นเรียนเป็นอย่างน้อย มีความถนัดและความสนใจพิเศษ

เฮาส์ (House. 1991 : 8-9) ได้ศึกษาพฤติกรรมด้านต่าง ๆ ที่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแสดงออกโดยจำแนกเป็น 4 ด้าน คือ พฤติกรรมทั่ว ๆ ไป พฤติกรรมการเรียนรู้ พฤติกรรมเชิงสร้างสรรค์ และพฤติกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งพอสรุปสาระสำคัญของพฤติกรรมแต่ละด้านได้ดังนี้

1. พฤติกรรมทั่ว ๆ ไปนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะจดจำสิ่งต่าง ๆ ได้เร็ว อ่านหนังสือคล่องเข้าใจเรื่องที่อ่านอย่างดีอธิบายความนัยต่าง ๆ ได้ดี ทั้งยังใช้ถ้อยคำหรือสิ่งอื่น เป็นผู้ฟังที่ดูกระตือรือร้นและตามติดสืบสาวราวเรื่อง มีความไวในการเรียนรู้ทุ่มเทและสนุกกับสิ่งแปลกใหม่รวมทั้งวิธีการใหม่ ๆ ที่ท้าทาย

สามารถเข้าถึงสิ่งที่เป็นนามธรรม มีสมรรถนะด้านมิติสัมพันธ์ชั้นสูง จดจ่อสนใจกับสิ่งต่าง ๆ หรือทำงานด้วยตัวเองคนเดียวได้นาน ๆ มีความริเริ่มกำกับดูแลตัวเองได้ พยายามให้สิ่งที่ทำได้ผลออกมาดี เป็นนักจัดการ เป็นผู้นำสามารถชักจูงผู้อื่น มีความเที่ยงธรรมและมีอารมณ์ขัน

2. พฤติกรรมการเรียนรู้ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะชื่นชอบกิจกรรมประเทืองปัญญาทั้งหลาย มีศักยภาพสูงส่งในการสังเกตและจับประเด็นสำคัญ สามารถล้วงลึก สังเคราะห์ และสรุปรวบยอดความคิดต่าง ๆ ได้เข้าใจอย่างลึกซึ้งถึงความสัมพันธ์ระหว่างเหตุกับผลที่ได้รับ ช่างซักถามเพื่อค้นหาความรู้ รู้จักใช้แหล่งข้อมูลต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง ช่างสงสัย ช่างคิด และชอบประเมินสิ่งต่าง ๆ ที่ภูมิความรู้กว้างไกล สามารถเข้าใจหลักการสำคัญ ๆ และสร้างข้อสรุปได้ มองเห็นความคล้ายคลึงความแตกต่าง และสิ่งผิดปกติที่เกิดขึ้นในเรื่องราวที่ศึกษา และสามารถแสดงออกซึ่งความคิดอย่างมีประสิทธิภาพ

3. พฤติกรรมเชิงสร้างสรรค์ พฤติกรรมด้านนี้ส่วนหนึ่งเป็นผลสืบเนื่องจากความคิดสร้างสรรค์อันได้แก่ คิดคล่อง คือสามารถมองเห็นความเป็นไปได้หรือผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นซึ่งมีไว้มากมาย มีความยืดหยุ่นในความคิดคือ สามารถหาแนวทางดำเนินการหลายรูปแบบแตกต่างกัน มีความคิดที่เป็นเฉพาะตน คือสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่บังเกิดขึ้น และมีความประณีตในการคิด คือสามารถคิดค้นการตอบสนองชนิดที่ไม่ซ้ำแบบเดิมขึ้นมาใหม่ได้ นอกจากนี้ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษยังเป็นนักเดาและนักตั้งสมมติฐานตัวยง มีความอยากรู้อยากเห็นสูง ใช้สมองและจินตนาการต่าง ๆ แม้ขณะกำลังเล่น ใจร้อน และอ่อนไหวทางอารมณ์ แต่ก็ไวต่อสิ่งที่สุนทรีย์ทั้งหลาย และ เบื่อหน่ายกับงานที่ต้องทำเป็นประจำซ้ำซาก

4. พฤติกรรมทางคณิตศาสตร์ เด็กที่มีศักยภาพพิเศษเหล่านี้ใฝ่รู้และสามารถเข้าใจถึงแง่มุมในเชิงปริมาณของสิ่งต่าง ๆ มีความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุมีผล และคิดในรูปของสัญญลักษณ์ที่เกี่ยวกับสัมพันธภาพเชิงปริมาณและเชิงมิติสัมพันธ์ สามารถรับรู้และสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับรูปแบบ (patterns) โครงสร้าง ความสัมพันธ์ และการดำเนินการ (operations) ทางคณิตศาสตร์ สามารถใช้เหตุผลเชิงวิเคราะห์ นิรนัย และอุปนัย สามารถย่นย่อการให้เหตุผล และ ค้นหาคำตอบที่เป็นเหตุเป็นผลอย่างรวบรัด มีความยืดหยุ่นและย้อนทวนกระบวนการคิดในการทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ สามารถจดจำสัญลักษณ์ความเชื่อมโยงเกี่ยวพันกับวิธีพิสูจน์และวิธีหาคำตอบ สามารถถ่ายโยงความรู้ไปใช้กับสถานการณ์แปลกใหม่ ทุ่มเทและจดจ่อกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีการรับรู้เชิงคณิตศาสตร์สำหรับสิ่งต่าง ๆ รอบตัว

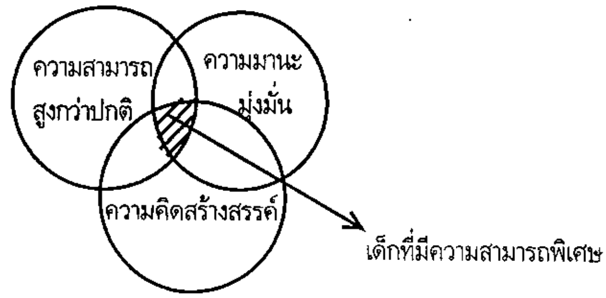
ยอร์จ (ม.ป.ป. : 7-8) กล่าวว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมักจะแสดงลักษณะ เรียนรู้ได้รวดเร็วและง่ายดาย มักเข้าใจสิ่งต่าง ๆ ได้รวดเร็วก่อนจะอธิบาย หรือต้องการเวลาฝึกเล็กน้อยที่จะเรียนรู้และทำกิจกรรมนั้น ๆ ได้ มีความสามารถด้านเหตุผลดีกว่าธรรมดา ความสามารด้านความคิดรวบยอดทางนามธรรมหรือการนำข้อเท็จจริงเฉพาะอย่างไปใช้ หรือสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้ดี มีความอยากรู้อยากเห็นที่ส่อแววเฉลียวฉลาดอย่างมากอยากรู้ว่าสิ่งต่าง ๆ เกิดขึ้นได้อย่างไรและทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ต้องการเสาะแสวงหาคำตอบจากคำถามต่าง ๆ และไม่ค่อยพอใจกับคำอธิบายที่ธรรมดา หรือง่าย ๆ มีความมุมานะอดทนกว่าปกติ มีสมาธิดี ใจจดจ่อกับงานที่ทำได้นาน มีอัตราเร็วในการคิดต่างจากเด็กทั่วไป

และตอบสนองต่อแนวคิดใหม่ได้เร็ว ความจำดี ซึ่งเห็นได้จากการไม่ต้องทบทวนย้ำบ่อย ๆ รู้คำศัพท์กว้างขวางมีความสามารถด้านภาษาสูงเข้าใจความหมายของคำต่าง ๆ ได้ดีรวมถึงคำศัพท์เทคนิคต่าง ๆ ด้วย มีความสามารถในการสังเกตอย่างเฉียบแหลม มีความสนใจรายละเอียด มีจินตนาการกว้างไกล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ชอบทำงานเดี่ยว มีมาตรฐานส่วนตัวสูง มีข้อข้องใจเมื่อไม่อาจประสบความสำเร็จยอดเยี่ยมตามที่ตัวต้องการ เป็นคนต้องการความสมบูรณ์แบบ มีอารมณ์ขัน มีความคิดอเนกนัยมีแนวโน้มที่จะมองหาวิธีแก้ปัญหาในรูปแบบต่าง ๆ มีความอดทน ทั้งกับตนเองและกับคนอื่น แต่มักไม่ทนต่อคนที่มีความสามารถด้อยกว่าตน ไม่พอใจผู้ใหญ่ที่มองเขาเป็นเด็กหรือพูดกับเขาราวกับเขาเป็นเด็ก ๆ อ่อนไหวและมีปฏิกิริยาได้เร็วกับสิ่งที่ไม่ยอมรับ หัวเสียได้ง่ายและรับรู้สิ่งต่าง ๆ ได้ดี มีความรู้กว้างขวางในวิชาต่าง ๆ ชอบคุยกับคนที่มีอายุมากกว่า มีความสนใจอย่างกว้างขวาง มีงานอดิเรกซึ่งแปลกและมีความพึงพอใจในงานนั้น มักเป็นนักสะสมที่ฉลาด ชอบเป็นผู้นำในการเล่นและการทำกิจกรรมกลุ่ม การเตรียมอาชีพจะคำนึงถึงปรัชญาและสิ่งที่เป็นสากล เช่น ธรรมชาติของมนุษย์ ความหมายของชีวิต ความคิดเรื่องอวกาศ ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษบางคนอาจจะไม่แสดงความสามารถพิเศษให้เห็นเด่นชัด เช่น พูดไม่เก่งหรือการเขียนไม่ดี การสะกดคำก็ผิด อยู่ไม่สุข ไม่ตั้งใจ ฝันกลางวัน นอนน้อย ไม่ชอบแสดงความรู้ให้ปรากฏ เมินเฉย ไม่ตั้งใจทำงานในชั้นและไม่ให้ความร่วมมือ ชอบวิพากษ์วิจารณ์ ชอบถามคำถามที่ต้องใช้เหตุผลในการตอบ มองเห็นความไม่สม่ำเสมอของกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้ง่ายและมองเห็นความผิดพลาดด้านตรรกวิทยาของสิ่งต่าง ๆ ได้เร็ว ถอนตัวจากงานกลุ่ม ชอบทำงานตามลำพัง ไม่ชอบถูกประเมิน

เด็กที่จัดว่าเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะมีคุณลักษณะที่แตกต่างไปจากเด็กโดยทั่วไปมิใช่เพียงเก่งทางสติปัญญาเท่านั้น ดังที่นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวไว้ ดังนี้

เรนซูลลี (Renzulli. 1977 : 19) กล่าวถึงหลักทฤษฎีสามห่วง (The Renzulli Enrichment Triad Model) ที่เป็นสิ่งแสดงถึงความเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะต้องประกอบด้วยคุณลักษณะ 3 ประการ คือ

1. ความสามารถสูงกว่าปกติ (above average ability)
2. ความมานะมุ่งมั่น (task commitment)
3. ความคิดสร้างสรรค์ (creativity)



ภาพประกอบ 1 แสดงหลักทฤษฎีสามห่วงของเรนซูลลี

สเตอร์นเบิร์ก (Sternberg. 1983 : 51-57) ได้พัฒนาทฤษฎีเชาว์ปัญญาสามเกลียว (Triarchic Theory) โดยการสังเคราะห์จากเอกสารและงานวิจัยทั้งหมดในสาขาจิตวิทยาทางเชาว์ปัญญา งานของเขาได้ชี้ให้เห็นทิศทางอันหลากหลายทางภูมิปัญญาของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ เช่น ความสามารถที่เด่นชัดในการจัดการกับสิ่งใหม่ ๆ การจัดกระบวนการของความรู้ และการจัดระบบข้อมูลอย่างมีประสิทธิภาพเหนือผู้อื่น จากทฤษฎีของเขาทำให้ทราบว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีความแตกต่างกันในด้านคุณภาพของความคิด

การ์ดเนอร์ (Gardner. 1989 : 1-9) ได้เขียนทฤษฎีพหุเชาวน์ปัญญาที่ได้มาจากการวิเคราะห์ข้อมูลทางเชาวน์ปัญญาในเชิงชีววิทยาของสมองมนุษย์ และวิจัยเกี่ยวกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษในเชิงมนุษยวิทยาในสังคมต่าง ๆ เขายังมีความเห็นสอดคล้องกับ สเตอร์นเบิร์กว่า แบบทดสอบวัดไอคิว วัดได้เฉพาะส่วนน้อยของเชาวน์ปัญญาของมนุษย์ การ์ดเนอร์ กล่าวว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีความสามารถที่เป็นอิสระต่อกันในด้านต่าง ๆ และความเก่งของคนอาจแบ่งได้เป็น 7 ประเภทคือ

1. ด้านภาษา (linguistic) จะเป็นนักพูด นักเขียนที่รู้จักใช้ภาษาได้ดี

2. ด้านดนตรี (musical) มีอารมณ์สุนทรีย์ มีจินตนาการที่สัมพันธ์กับเสียงและความงาม

3. ด้านคณิตศาสตร์ - ตรรกศาสตร์ (logical-mathematical) เป็นคนมีเหตุผลคิดอย่างมีขั้นตอน จะเป็นนักวิทยาศาสตร์ นักประดิษฐ์

4. ด้านมิติสัมพันธ์ (spatial) จะมองและเข้าใจความสัมพันธ์ของรูปทรงและมิติอย่างลึกซึ้ง จะเป็นสถาปนิกวิศวกร

5. ด้านกายลีลา (bodily-kinesthetic) จะเล่นกีฬาเก่ง เป็นนักปั้น นักวาด หรือนักแสดง

6. ด้านมนุษยสัมพันธ์ (interpersonal) สามารถเข้าใจความรู้สึกและความคิดของคนอื่นได้อย่างแม่นยำ จะมีลักษณะเป็นผู้นำ

7. ด้านรู้จักตนเอง (intrapersonal) เข้าใจความคิดของตนเอง และสามารถพัฒนาตนเองอย่างลึกซึ้งซับซ้อน เป็นนักคิด นักปรัชญา

นอกจากนักการศึกษาที่ได้กล่าวถึงข้างต้นแล้วยังมี หน่วยงานทางการศึกษาของสหรัฐอเมริกา USOE (U.S. Office of Education. 1972) ได้ให้เกณฑ์การพิจารณานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษไว้ว่า เป็นบุคคลที่ได้รับการรับรองจากผู้เชี่ยวชาญประจำสาขาว่ามีศักยภาพสูงเยี่ยม ประกอบกับการแสดงออกให้เห็นถึงแววหรือความสามารถเด่นเพียงบางด้านหรือหลาย ๆ ด้านต่อไปนี้ คือ เชาว์ปัญญา ความคิดสร้างสรรค์ ความเป็นผู้นำ สุนทรียภาพทางด้านดนตรีหรือศิลปะและทักษะหรือความถนัดเฉพาะทาง

นักการศึกษาทั้งหลายไม่สามารถที่จะช่วยให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้แสดงออกอย่างเต็มศักยภาพที่มีอยู่นอกเสียจากว่าจะต้องมีความเข้าใจในบุคลิกลักษณะและความต้องการของเด็กเหล่านั้นเสียก่อน นักจิตวิทยาชาวโซเวียตชื่อ ครูเตทสกี เป็นผู้ช่วยให้เกิดความเข้าใจอย่างชัดเจนโดยเขียนไว้ในหนังสือจิตวิทยาว่าด้วยความสามารถของเด็กที่มีความสามารพิเศษทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนความว่าเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์จะมีความสามารถในการใช้ความคิดเชิงตรรกะ มีความเข้าใจในเรื่องที่เป็นนามธรรมและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ สามารถเข้าใจเหตุผลและแก้โจทย์ปัญหาใหม่ ๆ ได้อย่างรวดเร็ว (Krutetskii. 1976 : 302) นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ใช้ความคิดได้อย่างรวดเร็วเสมือนกับไม่ได้เป็นผลมาจากการเรียนรู้แต่เป็นความสามารถและกระบวนการทางสติปัญญาที่เป็นมาโดยกำเนิด (Heid. 1983 : 222) นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์แต่ละคนจะมีความรู้ความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งในด้านความกว้างลุ่มลึกและความรวดเร็วฉับไวซึ่งแตกต่างจากกลุ่มเพื่อนโดยทั่วไป เด็กเหล่านี้มักมุ่งไปสู่การจับประเด็นใจความที่สำคัญและโครงสร้างของปัญหามากกว่าการให้ความสนใจในรายละเอียดปลีกย่อย เป็นเรื่องธรรมดาที่เด็กเหล่านี้สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ทุก ๆ ระดับและมุ่งเน้นในการกำหนดขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาที่ได้รับโดยอาจละทิ้งหรือไม่สนใจรายละเอียดเกี่ยวกับคำตอบ(Heid. 1983 : 223) นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ใช้ความคิดอย่างยืดหยุ่นและเป็นกระบวนการเพื่อพัฒนาไปสู่ความเข้าใจที่แจ่มชัดที่สุด ด้วยความสมเหตุสมผลที่สุด ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดและ ประหยัดเวลา นอกจากนั้นเมื่อไม่สามารถหาคำตอบที่พึงพอใจได้ก็ยังมีความสามารถในการแสวงหาทางเลือกอื่น ๆ เพื่อที่จะสามารถแก้ปัญหาที่ต้องการให้ได้ เด็กเหล่านี้มีความสามารถในการสรุปกระบวนการให้เหตุผล พิสูจน์คณิตศาสตร์ได้ดีเช่นเดียวกันกับกระบวนการพิสูจน์แบบย้อนกลับ เช่นหลังจากที่สามารถพิสูจน์ทฤษฎีได้แล้วก็สามารถพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีนั้นได้อย่างรวดเร็วซึ่งแนวโน้มในความสามารถดังกล่าวจะหาไม่พบในเด็ก ทั่ว ๆ ไป นอกจากนี้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ยังสามารถจดจำเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดีทั้งที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ วิธีการพิสูจน์ ตลอดจนวิธีการ ต่าง ๆ ในการหาคำตอบและความสามารถในการจดจำนั้นจะคงทนเป็นเวลายาวนาน จากการสังเกตพบว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนรู้หรือทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไม่รู้สึกเหน็ดเหนื่อยโดยเฉพาะอย่างยิ่งคือเด็กอายุน้อย

ครูเตทสกี ได้ศึกษาพฤติกรรมของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่เรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนพบว่าสามารถจำแนกเด็กออกได้เป็น 3 กลุ่มคือ กลุ่มที่มีแนวคิดเชิงวิเคราะห์ กลุ่มที่มีแนว

คิดเชิงเรขาคณิต กลุ่มที่มีแนวคิดเชิงผสมผสาน (Krutetskii. 1976 : 315-329)

1. กลุ่มที่มีแนวคิดเชิงวิเคราะห์ จะมีกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม สามารถใช้และพัฒนาความคิดได้เป็นอย่างดีในเรื่องที่เกี่ยวกับข้อความทางตรรกศาสตร์มากกว่าเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นรูปธรรม สามารถปฏิบัติการในสิ่งที่เป็นนามธรรมได้โดยง่ายโดยไม่จำเป็นต้องมีสื่อที่เป็นรูปธรรมเป็นเครื่องช่วย นอกจากนั้นยังยึดถือในข้อเท็จจริง สามารถวิเคราะห์หาวิธีการในการเอาชนะปัญหาที่ยุ่งยากเพื่อนำไปสู่คำตอบหรือผลลัพธ์ได้โดยง่ายรวมทั้งชอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมมีความมุ่งมั่นตั้งใจที่จะเปลี่ยนแปลงโจทย์ปัญหาที่เป็นรูปธรรมไปสู่รูปแบบเชิงนามธรรมเท่าที่จะเป็นไปได้ ในบางครั้งอาจดูเหมือนว่ามีข้อบกพร่องในเรื่องความสามารถด้านมิติสัมพันธ์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการมองความสัมพันธ์ในรูป 3 มิติโดยจะพบเห็นในโรงเรียนทั่ว ๆ ไปว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เหล่านี้จะสามารถเรียนรู้เลขคณิตและพีชคณิตได้อย่างดีเยี่ยมมากกว่าการเรียนรู้เรขาคณิต

2. กลุ่มที่มีแนวคิดเชิงเรขาคณิต จะสามารถพัฒนาความคิดได้เป็นอย่างดีในการสะท้อนความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรมสู่นิพจน์เชิงรูปธรรมซึ่งบางครั้งสามารถสะท้อนออกมาด้วยวิธีการที่ชาญฉลาด แม้ว่าจะสามารถพัฒนาศักยภาพด้านตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ได้อย่างสมบูรณ์แต่ก็ยังมีความเพียรพยายามอยู่เสมอที่จะแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการวิเคราะห์ความหมายและมองโครงสร้างต่าง ๆ ออกมาเป็นภาพเชิงรูปธรรมแม้ว่าจะเป็นสิ่งที่กระทำได้ยาก นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มักจะเข้าใจความสัมพันธ์และวิเคราะห์สูตรหรือกฎต่าง ๆ ได้ด้วยความเข้าใจและมั่นใจเมื่อได้รับการอธิบายความหมายด้วยภาพ หรือ ข้อความที่เป็นรูปธรรม

3. กลุ่มที่มีแนวคิดเชิงผสมผสาน มีความสามารถพัฒนาความสามารถได้เป็นอย่างดีทั้งที่เป็นข้อความทางตรรกศาสตร์ (vabal - logical) และคณิตศาสตร์เชิงรูปธรรมซึ่งเมื่อกำหนดปัญหาให้ก็มักจะสามารถหาคำตอบได้โดยใช้การผสมผสานแนวคิดทั้งสองลักษณะเข้าด้วยกัน แม้ว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่มีแนวคิดแบบผสมผสานนี้จะเป็นผู้มีความสามารถอย่างสมบูรณ์แต่บางส่วนก็มีความโน้มเอียงที่จะชอบในแนวคิดแบบหนึ่งมากกว่าอีกแบบหนึ่ง

ครูเตทสกี (Krutetskii. 1976 : 350-351) ได้สรุปลักษณะนิสัยของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1. มีความสามารถในการกำหนดแบบแผนการรับรู้ สื่อ ข้อความ หรือ กราฟ รวมทั้งเข้าใจโครงสร้างของปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

2. สามารถให้เหตุผลเกี่ยวกับปริมาณ และ มิติสัมพันธ์รวมทั้งมีความสามารถในการใช้ความคิดเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

3. สามารถกำหนดความคิดเกี่ยวกับเนื้อหา ความสัมพันธ์ และการดำเนินการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างรวดเร็วและแจ่มชัด

4. สามารถใช้ความคิดในการสรุปเหตุผลและสรุปโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

5. มีจิตสำนึกในการยึดหยุ่น

6. มีความมุ่งมั่นเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่มีความชัดเจนง่ายต่อความเข้าใจคุ้มค่าและมีเหตุผล

7. มีจิตสำนึกในเรื่องความฉับไวและคิดสร้างสรรค์ รวมทั้งมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แบบย้อนกลับ

8. สามารถจดจำความสำคัญ ลักษณะเฉพาะ แสดงเหตุผล พิสูจน์ หาวิธีการและกำหนดหลักการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

9. มีจิตสำนึกในการคิดคำนวณ

10. มีสมรรถภาพและความเพียรพยายามในการแก้ปัญหา

กล่าวโดยสรุปนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จำแนกได้ในลักษณะที่มีความสามารถพิเศษเฉพาะทาง ทางด้านภาษา ด้านดนตรีและศิลปะ ด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ และด้านความเป็นผู้นำ สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งจัดว่าเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษกลุ่มหนึ่งซึ่งมีสมรรถภาพในด้านความคิดเชิงตรรกะ สามารถเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมต่าง ๆ มักคิดในรูปของสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ สามารถให้เหตุผลอย่างรวบรัดและสามารถหาคำตอบของปัญหาที่แปลกใหม่ได้อย่างรวดเร็ว จากคุณลักษณะดังกล่าวเราสามารถนำแนวคิดในเรื่องความคิดระดับสูง ความคิดวิจารณญาณทั่วไป ความคิดสร้างสรรค์และความสามารถในการแก้ปัญหาเฉพาะทางมากำหนดทิศทางของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเฉพาะทางได้ และเด็กที่มีความคิดสร้างสรรค์สูงมักจะมีพฤติกรรมที่แปลกไปจากเด็กปกติ มีความคิดเป็นของตนเอง ชอบอิสระ การสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนควรเอื้อให้เด็กได้แสดงออกซึ่งความคิดสร้างสรรค์ โดยเฉพาะครูต้องใจกว้าง ทันสมัย ไม่ยึดติดมีความเข้าใจต่อพฤติกรรมของเด็กเหล่านี้

การคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

จากการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยต่าง ๆ พบว่า วิธีการคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ มีวิธีการหลายรูปแบบ ในแต่ละแบบจะมีข้อดีและข้อเสียต่าง ๆ กันไป ก่อนปี ค.ศ.1950 ในสหรัฐอเมริกาจะใช้วิธีคัดแยกคนเก่งตามคะแนนไอคิวและคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งแบบทดสอบวัดไอคิวมาตรฐานที่วัดจะวัดเป็นกลุ่ม เช่น แบบทดสอบวุฒิภาวะทางสมองแคลิฟอร์เนีย แต่ถ้าโครงการใดมีเงินสนับสนุนมากจะใช้แบบทดสอบวัดไอคิวที่วัดเป็นรายบุคคล เช่น เครื่องมือวัดไอคิวของเวคสเลอร์ เครื่องมือวัดไอคิวสแตนฟอร์ดบิเนต์ โดยใช้เกณฑ์ตั้งแต่ 130 ขึ้นไปจัดเป็นคนเก่ง หลังจากนั้นนักการศึกษาและนักวิจัยบางคนหันเหความสนใจจากคะแนนไอคิวและคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไปสู่ความเก่งทางด้านอื่นของเด็ก เช่น กิลฟอร์ด (Guiford. 1967 : 6) ได้วิเคราะห์สติปัญญาของมนุษย์ และโครงสร้างของทฤษฎีเกี่ยวกับสติปัญญา เขาเป็นผู้หนึ่งที่ได้ให้พื้นฐานในการตรวจสอบความสามารถของเด็กนอกเหนือไปจากไอคิว แจคสัน ทอร์แรนซ์ คาทีนา วอลลัชและโคแกน (Jackson. 1977 ; Torrance. 1975; Khatena. 1975 ; Wallach.1976 ; Kogan. 1974) ได้ช่วยกันสร้างและประเมินแบบทดสอบการคิดสร้างสรรค์และวิธีในการค้น

หาความคิดสร้างสรรค์ของเด็กนักเรียนซึ่งแบ่งออกมาได้เป็นหกด้านด้วยกันคือ ความคล่องแคล่ว ความยืดหยุ่น ความมีนวภาพ การขยายแนวความคิด การสังเคราะห์ การชะลอความคิด นอกจากนั้นกลุ่มนักมนุษย์นิยมในปี 1960 ได้ทำให้หลายคนมองหาวิธีคัดเลือกเด็กเก่งในกลุ่มวัฒนธรรมย่อยและกลุ่มที่มีปัญหาทางภาษาให้ยุติธรรมยิ่งขึ้นผลของความพยายามทำให้เกิดเครื่องมือในการวัดแบบใหม่โดยไม่คำนึงว่าทุกคนจะต้องมีพื้นฐานทางวัฒนธรรมเดียวกันหรือพูดภาษาเดียวกัน ในขณะเดียวกันนั้นนักวิจัยหลายคนพยายามคัดเลือกเด็กเก่งและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษโดยใช้แบบสำรวจชีวประวัติ แบบวัดและแบบประเมินพฤติกรรมและการให้ผู้ปกครองเป็นผู้เสนอชื่อเด็กเก่ง ปัจจุบันมีวิธีการคัดเลือกเด็กเก่งนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษหลายแบบดังนี้

1. การใช้แบบทดสอบวัดไอคิวเป็นกลุ่ม แบบทดสอบวัดไอคิวและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นกลุ่มเป็นวิธีที่ใช้กันทั่วไปในการคัดเลือกเด็กเก่ง แต่เนื่องจากข้อทดสอบที่ใช้วัดมักจะไม่ครอบคลุมลักษณะบางอย่างของเด็กเก่ง และข้อสอบเป็นแบบปรนัย คำตอบของนักเรียนจึงถูกจำกัดอยู่เฉพาะการเลือกคำตอบที่ถูกต้องจากตัวเลือกต่าง ๆ ซึ่งคนเก่งมักจะมีความเข้าใจลึกซึ้งและบางครั้งคิดไกลไปกว่าคำตอบที่ผิวเผิน คนเก่งอาจเห็นว่าตัวเลือกทุกตัวผิดหมดก็เป็นได้ และเพดานหรือระดับความยากในการคัดเลือกของข้อสอบมักจะต่ำเกินไปจนไม่เพียงพอที่จะแยกให้เห็นความแตกต่างระหว่างคนจำเก่งกับคนเก่งจริง ๆ ได้

2. การใช้แบบทดสอบวัดไอคิวเป็นรายบุคคล การวัดแบบนี้มีข้อดีกว่าการวัดไอคิวเป็นกลุ่มตรงที่ ผู้ทำการทดสอบอาจบันทึกการสังเกตนักเรียนเป็นการส่วนตัวที่ตอบในแต่ละข้อเพิ่มเติมจากคำตอบที่นักเรียนตอบถูกหรือผิดได้และวิธีการสัมภาษณ์ของข้อสอบไอคิวเป็นรายบุคคลยังสามารถช่วยให้ผู้ทำการทดสอบทำบรรยากาศในการสอบให้เครียดน้อยกว่าการทดสอบแบบเป็นกลุ่มและยังให้ผู้ตอบสามารถตอบได้หลายอย่างทั้งแบบข้อเขียนและไม่เป็นข้อเขียน แต่การใช้แบบทดสอบวัดไอคิวเป็นรายบุคคลต้องเสียเวลาและค่าใช้จ่ายมากทั้งยังต้องใช้นักจิตวิทยาที่ฝึกมาโดยตรงเป็นผู้ทำการทดสอบ

3. การใช้แบบประเมินพฤติกรรม แบบประเมินพฤติกรรมจะเป็นแบบทดสอบที่พิจารณาจากคุณลักษณะของคนเก่ง ซึ่งสามารถให้แนวทางแก่ผู้ปกครองครูและผู้ที่เกี่ยวข้องในการคัดเลือกเด็กเก่งและนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ แบบประเมินนี้เป็นการสังเกตโดยตรงจากพฤติกรรมไม่ใช้อ้างหรือตีความเอาจากผลของคะแนนทดสอบ นักการศึกษาหลายคนเชื่อว่าในการคัดเลือกเด็กเก่งนั้นควรจะใช้แบบประเมินพฤติกรรมเป็นเพียงวิธีหนึ่งที่จะวัดความเก่งที่เครื่องมืออื่นมองข้ามไปเท่านั้น

4. การใช้แบบทดสอบวัดการคิดสร้างสรรค์ มีนักวิจัยหลายคนพยายามค้นหาความคิดสร้างสรรค์ของเด็กนักเรียน และ คาทีนา (Khatena. 1975) รายงานว่าทอร์แรนซ์ได้วิเคราะห์ความสามารถในการคิดสร้างสรรค์ของเด็กออกมาได้เป็นหกด้านด้วยกันคือ

4.1 ความคล่องแคล่ว หมายถึง ความสามารถในการสร้างแนวคิดหลายอย่างต่อสิ่งเร้าได้เร็ว

4.2 ความยืดหยุ่น หมายถึงความสามารถในการสร้างแนวคิดหลายวิธี

4.3 ความมีนวภาพ หมายถึงความสามารถในการสร้างแนวความคิดที่ไม่เหมือนคนอื่น

4.4 การขยายแนวความคิด หมายถึงความสามารถในการเพิ่มรายละเอียดให้กับแนวความคิดอันใดอันหนึ่ง

4.5 การสังเคราะห์ หมายถึงความสามารถในการหาความสัมพันธ์ของตัวเลขหรือรูปภาพตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไปให้เข้ากับหน่วยใหญ่

4.6 การชะลอความคิด หมายถึงความสามารถในการยับยั้งความสมบูรณ์ในการคิดไว้ชั่วคราวเพื่อให้สมองข้ามไปคิดถึงอย่างอื่นที่จะช่วยให้เกิดแนวความคิดเป็นของตนเองหรือคิดอย่างมีนวภาพได้

ข้อทดสอบการคิดสร้างสรรค์อาจใช้เป็นเครื่องมือวัดในด้านความยืดหยุ่นการคิดเป็นนวภาพ ความคล่องแคล่วและการขยายความ ซึ่งแบบทดสอบไอคิวและแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่ได้คำนึงถึงคุณลักษณะเหล่านี้ในเด็กเก่งดังนั้นแบบทดสอบการคิดสร้างสรรค์หรือการคิดแหวกแนวไปจากคนอื่นจึงมีความจำเป็นในการเสาะหาคนเก่งที่เครื่องมือวัดอื่นมองข้าม

5. วิธีเสนอชื่อโดยครู จากการสรุปผลงานวิจัยเกี่ยวกับการเสนอชื่อเด็กเก่งโดยครู เกียร์ (Gear. 1976 : 478-489) กล่าวว่าการเสนอชื่อเด็กเก่งโดยครูที่ไม่ได้รับการฝึกมาโดยตรงจะมีประโยชน์จำกัด แต่ถ้าครูได้รับการฝึกมาโดยตรง ครูจะสามารถเสนอชื่อเด็กเก่งได้อย่างถูกต้อง ครูส่วนใหญ่มักจะคัดเด็กเก่งไม่ได้ดีเพราะไปใช้มาตรฐานของกลุ่มและสภาพห้องเรียนในด้านอื่นที่ไม่เกี่ยวข้อง เช่น ความสะอาดเรียบร้อย การตรงต่อเวลาของนักเรียน การชอบซักถาม ซึ่งไม่ใช่พฤติกรรมของการเป็นคนเก่ง

6. การเสนอชื่อโดยผู้ปกครอง ตามปกติผู้ปกครองมักจะถูกมองข้ามในฐานะเป็นแหล่งคัดเลือกเด็กเก่งเพราะคณะกรรมการคัดเลือกเด็กเก่งมีความรู้สึกว่าผู้ปกครองจะลำเอียงเข้าข้างลูกของตน จาคอบส์ (Jacobs.1971 : 140-142) ได้ศึกษาและยืนยันว่าผู้ปกครองเป็นแหล่งคัดเลือกเด็กเก่งที่เชื่อถือได้ โดยเขาศึกษาจากการใช้เด็กอนุบาลเป็นกลุ่มตัวอย่างและได้เปรียบเทียบการเสนอชื่อโดยผู้ปกครองกับการเสนอชื่อโดยครู แล้วนำเด็กมาทดสอบไอคิวเป็นรายบุคคลพบว่าผู้ปกครองสามารถคัดเลือกเด็กเก่งได้ถูกต้องถึงร้อยละ 61 ในขณะที่ครูคัดเลือกได้ถูกต้องเพียงร้อยละ 9.5

7. การศึกษาประวัติเด็กเก่ง การศึกษาประวัติและการสำรวจความสนใจของเด็กเป็นรายบุคคลมีข้อดีในการให้ความกระจ่างที่เครื่องมืออื่นไม่สามารถให้ได้ และแบบสำรวจแต่ละข้ออาจนำไปใช้แยกกันได้ตามความสนใจที่เกี่ยวข้องกับโครงการที่จัดสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษเฉพาะด้าน

8. การใช้แบบทดสอบที่มีความยุติธรรมทางด้านวัฒนธรรม ข้อทดสอบที่มีความยุติธรรมทางวัฒนธรรมจะพยายามตัดปัญหาที่ข้อทดสอบวัดความสามารถทางสติปัญญาซึ่งเป็นแบบปรนัยมักจะมีความลำเอียงทางด้านวัฒนธรรมเพราะข้อสอบแบบปรนัยถือว่าทุกคนมีพื้นฐานทางวัฒนธรรมเหมือนกันหรือพูดภาษาเดียวกันทำให้เกิดความไม่ยุติธรรมสำหรับผู้ที่มีปัญหาทางด้านภาษาโดยแบบทดสอบที่มีความยุติธรรมจะเน้นข้อคำถามที่ไม่เป็นภาษาเขียนและให้ความยุติธรรมทางด้านวัฒนธรรมให้มากที่สุด

จากวิธีการคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่ได้กล่าวมาแล้วอาจมองได้เป็นกระบวนการสองขั้นตอนคือในตอนแรกเป็นการคัดเด็กโดยใช้แบบทดสอบเป็นกลุ่ม การเสนอชื่อโดยครู การเสนอชื่อโดยผู้ปกครอง และการมีข้อมูลอื่นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะช่วยให้การคัดเลือกเด็กเก่งสอดคล้องกับโครงการที่จะจัดทำสำหรับเด็กเก่ง ขั้นตอนที่สองเป็นการคัดเด็กเป็นรายบุคคลโดยพิจารณาจากสิ่งที่เด็กทำคะแนนได้ดีที่สุด แต่เด็กที่ควรจะได้รับการพิจารณาเป็นพิเศษคือเด็กที่อยู่ขอบหรืออยู่รอบนอกของเด็กส่วนใหญ่ ซึ่งได้แก่เด็กที่มีภูมิหลังต่างจากคนอื่น เด็กที่มีปัญหาทางด้านภาษา และเด็กที่มีประวัติการเรียนไม่ดีมาก่อนเป็นต้น ในการคัดเลือกตามขั้นตอนที่สองนี้ควรจะให้เด็กแต่ละคนมีโอกาสได้แสดงความสามารถพิเศษในด้านต่าง ๆ ตามที่โครงการส่งเสริมเด็กเก่งต้องการพิจารณา (ทัตเติล. 2530 : 8-15)

ในงานวิจัยที่เกี่ยวกับการพัฒนาหลักสูตรสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เรื่องเรขาคณิต ของ พิชากร แปลงประสพโชค (2540) เรื่องทฤษฎีจำนวน ของ นิตติยา ปภาพจน์ (2540) ได้ใช้เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย แบบเสนอชื่อ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง โดยแบบเสนอชื่อจะเป็นแบบสอบถามที่ให้ครูแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับลักษณะพฤติกรรมของนักเรียนที่ได้รับการเสนอชื่อ เป็นพฤติกรรมที่บ่งชี้ถึงคุณลักษณะของเด็กเกี่ยวกับ ความสนใจ ความต้องการ ลักษณะนิสัย และความสามารถ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการวัดพฤติกรรมในด้านการแก้ปัญหาและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีเนื้อหาทางด้านเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูงแบ่งออกเป็น 7 ตอนซึ่งประกอบด้วยอุปมาอุปไมย เหตุผลเชิงนิรนัย ส่วนของเหตุที่หายไป การสังเคราะห์ลำดับ การใช้คำถามในการไขปริศนา การวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องกับการตอบปัญหา และการวิเคราะห์คุณลักษณะ (พิชากร แปลงประสพโชค. 2540 : 161-205) ซึ่งเป็นวิธีการคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่มีกระบวนการสองขั้นตอน คือ ตอนแรกเป็นการสอบถามความสนใจ ความสมัครใจ จากนักเรียน และให้ครูเสนอชื่อ หรือนักเรียนเสนอชื่อตัวเอง ช่วยให้การคัดเลือกนักเรียนสอดคล้องกับโครงการที่จะจัดทำสำหรับนักเรียน และขั้นตอนที่สองเป็นการทดสอบความรู้ความสามารถเฉพาะทาง นักเรียนที่มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์เท่านั้นที่จะสามารถสอบผ่านเกณฑ์ เป็นขั้นตอนการคัดเลือกนักเรียนเข้าโครงการที่น่าสนใจ เพราะมีความสะดวก เสียค่าใช้จ่ายไม่มากนัก ใช้เวลาน้อย และแบบทดสอบที่ใช้วัดในขั้นตอนที่สองเป็นข้อสอบที่เปิดกว้างให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการคิดหาคำตอบ ทำให้ง่ายต่อการคัดเลือก เพราะเห็นความแตกต่างระหว่างคนเก่งและคนไม่เก่ง

กล่าวโดยสรุป วิธีการคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ มีวิธีการหลายรูปแบบ เช่น ใช้แบบทดสอบวัดไอคิว แบบประเมินพฤติกรรม แบบทดสอบวัดการคิดอย่างสร้างสรรค์ วิธีเสนอชื่อโดยครูหรือผู้ปกครอง การศึกษาประวัติเด็กเก่ง ซึ่งจะมีลักษณะของการตรวจสอบคุณลักษณะพฤติกรรมความสามารถใน

ด้านต่าง ๆ ที่บ่งชี้ถึงความสามารถพิเศษ และถ้าเป็นการคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์จะมีแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูงทางคณิตศาสตร์ จากข้อมูลดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะใช้เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย แบบเสนอชื่อ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง

การจัดหลักสูตรและบรรยากาศในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

การจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

จากลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทำให้มองเห็นและเข้าใจนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมากขึ้นว่า หลักสูตร กระบวนการสอน ความเข้าใจของสังคมที่มีต่อเด็กเหล่านี้ยังผิดพลาดอยู่มาก นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแท้ที่จริงมีอยู่ระหว่าง 36 - 60 % จากงานวิจัยทั่วโลกมิใช่ 1-2 % ดังที่เคยคิด (อุษณีย์ โพธิสุข. 2536) พวกเขาเป็นเด็กที่ด้อยโอกาส ทำให้เราได้เห็นอัจฉริยบุคคลเพียงน้อยนิด มีปัญหาเกิดกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษหลายอย่างดังนี้

1. คนทั่วไปเข้าใจผิดว่าพวกเขาไม่ต้องการความช่วยเหลือใด ๆ เพราะช่วยตัวเองได้อยู่แล้ว จริงอยู่เด็กที่มีศักยภาพของความเป็นเลิศอยู่ในตัว บางคนมีโอกาสประสบความสำเร็จมีชื่อเสียงเพราะบังเอิญมีผู้ใกล้ชิดคนใดคนหนึ่งสนับสนุนช่วยเหลืออย่างต่อเนื่อง แต่เด็กส่วนใหญ่ถูกทิ้งขว้างอย่างน่าเสียดาย

2. ขาดความเข้าใจในศักยภาพอันมีค่าของตนเอง ทำให้เด็กจำนวนมากใช้เวลากับชีวิตของตนเองให้สูญเปล่าอย่างน่าเสียดาย

3. การไม่ได้รับการศึกษาที่เหมาะสมกับพวกเขา เพราะหลักสูตรส่วนใหญ่เขียนไว้มิใช่เพื่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ แต่เป็นหลักสูตรที่พยายามคำนึงถึงสิ่งที่วัดได้ ในทางพฤติกรรมภายนอกที่สามารถแสดงออกได้ ความสามารถพิเศษของเด็กนั้นส่วนใหญ่เป็นสิ่งที่วัดไม่ได้จากแบบทดสอบ

4. ขาดองค์กรที่ให้การสนับสนุนและศึกษาเด็กพวกนี้อย่างจริงจังเพราะมีเหตุผลมาจากปัญหาข้อ 1

5. เด็กมีความคับข้องใจ สิ้นหวังกับระบบการศึกษา จึงพบว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษส่วนมากเลิกเรียนกลางคัน เด็กที่อยู่ในระดับอัจฉริยะส่วนใหญ่เรียนไม่จบชั้นมัธยมศึกษาสูงสุด จะเห็นได้ว่าเด็กยิ่งฉลาดเท่าใดยิ่งหนีไปจากระบบโรงเรียน

6. ขาดการชี้นำที่ดี เด็กมักกลายเป็นคนสร้างปัญหาให้กับสังคม ติดสิ่งเสพติดมึนเมาเพื่อบรรเทาความล้มเหลวและสับสน เด็กหลายคนไม่ได้ใช้พรสวรรค์ในตัวให้ถูกทาง เก่งทางหนึ่งแต่ไปทำอีกทางหนึ่ง

7. เด็กส่วนใหญ่ถูกสอนให้มุ่งมั่นอยู่แต่วิชาการ สอบไล่ให้ได้คะแนนเป็นเยี่ยมระดับเกียรตินิยม ให้ได้รับเหรียญตรา เกียรติยศทางการศึกษา ข้อสอบ บทเรียน และวิธีเรียน เน้นแต่เนื้อหา และข้อมูลซึ่งต้องอาศัยการลอกจำ คนส่วนใหญ่จึงเข้าใจผิดคิดว่าคนปัญญาเลิศคือคนที่เรียนดีเยี่ยม สอบได้คะแนนดีมีคะแนนเชาว์ปัญญาสูงมีความจำเป็นหนึ่งไม่มีสองที่จริงแล้วเด็กเรียนดีอาจไม่เป็นเด็กปัญญาเลิศแต่เด็กสอบตก

ซ้ำแล้วซ้ำอีกอาจเป็นอัจฉริยบุคคล

8. ขาดบุคลากรที่เข้าใจในเรื่องนี้อย่างแท้จริง โรงเรียนควรให้ผู้ปกครองมามีส่วนร่วมในการจัดการศึกษาของลูกด้วย

นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีความต้องการหลายอย่าง เช่น

1. ต้องการเรียนการสอนที่ท้าทายต่อศักยภาพและความสามารถของเขา

2. ต้องการงานที่ซับซ้อนและยากกว่าระดับปกติ

3. ต้องการใช้เวลาในสิ่งที่เขาเชี่ยวชาญน้อยกว่าเด็กคนอื่น ๆ และเขาสามารถทำเสร็จเร็วกว่า แต่ต้องการเวลาที่เหลือหรือเวลานอกเหนือไปจากนั้นทุ่มเทให้กับสิ่งลึกซึ้งกว่าที่สอนอยู่ทั่ว ๆ ไป

4. ต้องการการยอมรับจากคนอื่น ๆ

5. ต้องการคบหาเพื่อนวัยเดียวกัน และเพื่อนต่างวัยที่มีความสามารถทางสติปัญญาทัดเทียมกันหรือคบคนที่สูงกว่า หรือคนที่มีความสนใจในเรื่องเดียวกับเขา

6. ต้องการโอกาสที่จะได้แสดงออกซึ่งความสามารถภายใน

7. ต้องการโอกาสที่จะพัฒนาความสามารถพื้นฐานและสิ่งที่ตนเองสนใจ

8. ต้องการคำปรึกษาจากผู้ที่เป็นที่พึ่งได้ (ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา. 2531)

มีนักการศึกษาหลายคนพยายามศึกษาเพื่อหาหนทางสร้างระบบการศึกษาที่ตอบสนองความต้องการของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ เช่น Pressey (1964) ผู้ที่ถือว่าเป็นบิดาแห่ง Gifted Education ของสหรัฐอเมริกาคนหนึ่ง ให้ข้อสรุปถึงองค์ประกอบที่ส่งผลต่อความสามารถอันเป็นเลิศของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษดังนี้ คือ มีโอกาสที่จะพัฒนาความเก่งตั้งแต่เยาว์วัย โดยความช่วยเหลือของพ่อแม่หรือเพื่อน ได้รับคำแนะนำอย่างเยี่ยมยอดหรือได้คนสอนที่เก่งกาจ มีโอกาสได้รับการฝึกฝนพรสวรรค์เฉพาะทางของตนอย่างสม่ำเสมอบ่อย ๆ จนมีความก้าวหน้าขึ้นเรื่อยๆ มีโอกาสสนิทสนมกับคนที่มีความสามารถระดับใกล้เคียงกัน มีโอกาสแสดงออกตามความสามารถของเขา และได้ทำงานที่ท้าทายขึ้นเรื่อย ๆ พยายามหาโอกาสที่จะประสบผลสำเร็จอันยิ่งใหญ่และก็ได้รับการยอมรับ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยอีกมากมายในเรื่องการจัดรูปแบบการศึกษาให้เหมาะกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษซึ่งเกิดจากสภาพความต้องการของเด็กเหล่านี้ที่เป็นจุดกระตุ้นให้เกิดการจัดการศึกษาและเป็นแนวทางในการหารูปแบบในการศึกษาให้สอดคล้องกับความต้องการของเด็กดังกล่าว (อุษณีย์ โพธิสุข. 2537 : 24)

แต่ก่อนมีความเชื่อว่าพันธุกรรมเป็นตัวกำหนดความสามารถและสติปัญญา ต่อมาในยุคหลังมีการเปลี่ยนแปลงไป มีทฤษฎีที่เชื่อกันว่าความเก่งไม่ได้ขึ้นอยู่กับพันธุกรรมเท่านั้น สิ่งแวดล้อมก็มีอิทธิพลเพราะเชื่อว่าคนถึงจะเก่งโดยกำเนิดแต่หากไม่ถูกค้นพบ ถ้าไม่ได้รับการสนับสนุนก็มองไม่เห็นและไม่เป็นที่รู้จัก ในการส่งเสริมให้เด็กได้แสดงความสามารถที่สูงที่สุดตามศักยภาพที่เขามีอยู่จึงเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงถึง หลักสูตรเป็นสิ่งหนึ่งที่ต้องให้ความสำคัญ การจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องคำนึงถึงลักษณะพิเศษ ความสนใจ ความต้องการ และความสามารถของเด็กเป็นเกณฑ์ จึงจะสามารถวางเป้าหมาย

จัดเนื้อหาได้อย่างเหมาะสม ยอร์จ (ม.ป.ป. : 54) กล่าวว่าในการจัดทำหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีสิ่งที่ควรคำนึงถึงอยู่ 3 ประการ คือ การมุ่งที่จะส่งเสริมกระบวนการพัฒนาทางสติปัญญาในชั้นสูง ปรับกลวิธีในการสอนที่เป็นการสนับสนุนให้เด็กเรียนรู้เนื้อหาวิชาและรูปแบบการเรียนรู้และการจัดกลุ่มพิเศษให้เหมาะสมเฉพาะกลุ่มของเด็ก แนวการสร้างหลักสูตรของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ผดุง อารยะวิญญู (2533 : 157) กล่าวว่า จะต้องมีลักษณะ ส่งเสริมให้เด็กได้มีโอกาสเต็มที่ในการพัฒนาศักยภาพและความสามารถพิเศษของเขา ส่งเสริมให้เด็กได้พัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยใช้ความรู้ ความสามารถ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์โดยให้เด็กเป็นต้นคิด ส่งเสริมบรรยากาศการเรียนรู้ของเด็ก เปิดโอกาสให้เด็กได้เรียนรู้โดยเน้นการทดลองในลักษณะต่าง ๆ รวมทั้งการวิจัยเพื่อให้เด็กรู้จักเสาะแสวงหาความรู้ตามวิธีวิทยาศาสตร์ สำหรับรูปแบบการจัด ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา(2531 : 110-112)ได้อธิบายเกี่ยวกับองค์ประกอบของรูปแบบการจัดหลักสูตรว่า หลักสูตรเป็นผลผลิตผสมผสานกันระหว่างเนื้อหาและวิธีการนำเสนอเนื้อหาให้แก่เด็ก มีการเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาและวิธีการเพื่อให้เกิดประสบการณ์การเรียนรู้อย่างแท้จริง วิธีการพัฒนาหลักสูตรที่สำคัญมีอยู่ 3 วิธีคือ ยึดขยายหลักสูตรเดิมให้กว้างขวางและละเอียดพิสดารกว่าเดิม สร้างหลักสูตรอยู่บนพื้นฐานของความต้องการ ความสนใจ และลักษณะนิสัยทั่ว ๆ ไปของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษและศักยภาพของเด็กด้วย พัฒนาส่วนประกอบต่าง ๆ เช่น เนื้อหา วิธีการ ในการถ่ายทอดเนื้อหาให้แก่เด็ก จะต้องมีการพัฒนาวิธีการถ่ายทอด ได้แก่ วิธีสอน วิธีการเสนอหลักสูตร วิธีการเสนอผลงาน และเมคเกอร์ (2540 : 2-5) ได้กล่าวถึงการนำรูปแบบต่าง ๆ ไปสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษนั้นจะต้องนำไปปรับเข้ากับสถานการณ์จริงโดยยึดเกณฑ์ 4 ด้าน คือ

1. ปรับเนื้อหา เนื้อหาควรจะยืดหยุ่นหลากหลาย ซับซ้อน เพิ่มเติมให้กว้างขวางลึกซึ้งมีการศึกษาเรื่องเกี่ยวกับมนุษย์มากขึ้น ศึกษาแนวทางหรือหลักเกณฑ์ของวิชาแต่ละสาขา

2. การปรับกระบวนการเรียนการสอน วิธีการสอนต้องเปิดกว้างและกระตุ้นให้เกิดความคิดระดับสูงอย่างมีทิศทางเป็นขั้นเป็นตอน ควรส่งเสริมการศึกษาสำรวจด้วยตนเอง การค้นหาความรู้ความจริงด้วยตนเอง การฝึกด้วยสถานการณ์จำลองและการปรับระยะเวลาเรียนให้ยืดหยุ่นตามความจำเป็น

3. การปรับผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยการปรับทิศทางในการเรียนรู้ให้ชัดเจนให้มองเห็นได้โดยให้ผู้เรียนมีโอกาสได้สัมผัสได้ศึกษาสาขาอาชีพต่าง ๆ หรือได้มีโอกาสประเมินผลการเรียนรู้ของตนเองตามทิศทางที่วางไว้

4. การปรับสภาพแวดล้อมในโรงเรียน ทั้งด้านกายภาพและทางด้านกระบวนการหรือทางจิตใจให้เกิดบรรยากาศแห่งการเรียนรู้

สุรศักดิ์ หลาบมาลา (2532 : 12-13) กล่าวว่าหลักสูตรที่เหมาะสำหรับสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษควรจะมีความกว้างมากพอที่เด็กจะพบสิ่งที่ตนสนใจได้ และควรมีหลักการดังนี้

1. เนื้อหาวิชาควรเป็นแบบแกน ที่จะทำให้เด็กเรียนไปได้อย่างรวดเร็วจากง่ายไปหายาก

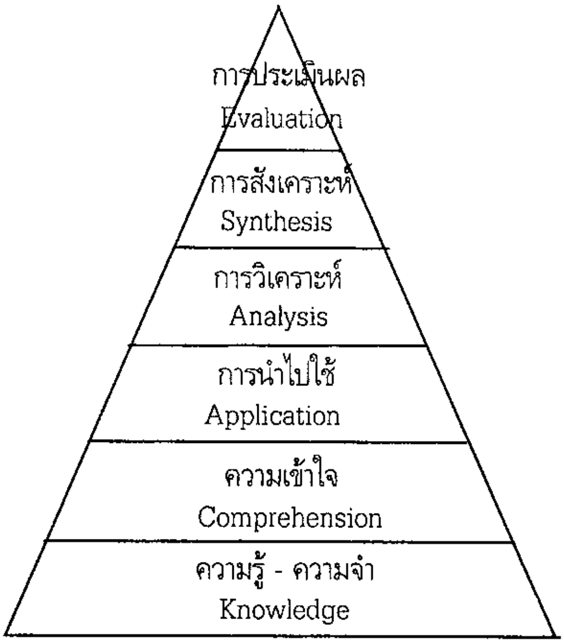
2. หลักสูตร ควรมีเนื้อหาในลักษณะกระบวนการ-ผลลัพธ์-แง่มุมของการวิจัย ที่ให้โอกาสเด็กค้น

ลึกลงไปว่าเรื่องนี้ทำอย่างไรได้ผลอะไร มีวิธีการศึกษาอย่างไร

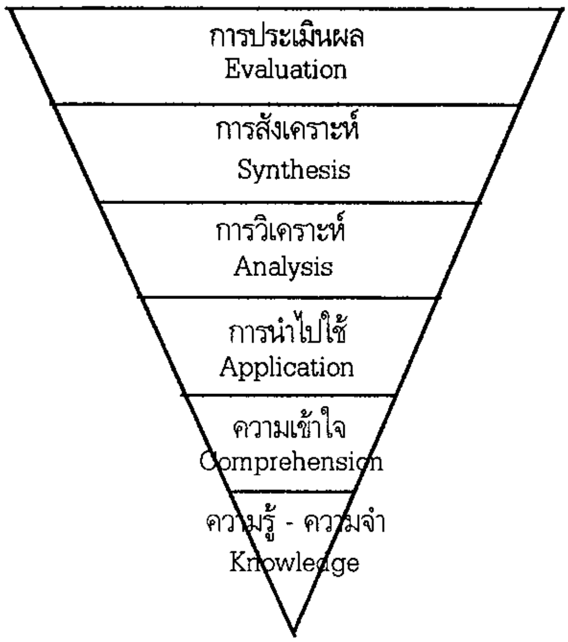
3. หลักสูตรรายวิชา ควรให้โอกาสเด็กค้นคว้าศึกษาได้ทุกวิชาที่เรียนในหลักสูตรไม่ใช่เฉพาะวิชาที่เรียนในชั่วโมงนั้นเท่านั้น และควรชี้ให้เห็นว่าเกี่ยวพันกับชีวิตมนุษย์อย่างไร

4. หลักสูตร ควรเน้นแนวความคิด หลักการและทฤษฎี แล้วจึงลงไปสู่รายละเอียดและข้อปลีกย่อยอื่น ๆ ตลอดทั้งการนำแนวคิดเหล่านี้ไปใช้ประโยชน์ด้วย

บลูม (Bloom. 1956 : 1-12) ได้กล่าวถึงการจัดการเรียนการสอนที่ดีจะต้องสร้างองค์ความรู้ความเข้าใจเป็นพื้นฐานเสียก่อนเมื่อมีความเข้าใจก็นำไปสู่การวิเคราะห์ สังเคราะห์ประเมินผลตามลำดับขั้น แต่ในการเรียนการสอนที่โรงเรียนส่วนใหญ่จัดจะวนเวียนอยู่กับทักษะพื้นฐานความรู้ความเข้าใจขั้นที่ 1 และขั้นที่2 เท่านั้น ดังแสดงให้เห็นในภาพประกอบ 2-3 ซึ่งแสดงความแตกต่างของลำดับขั้นการเรียนในชั้นปกติกับรูปแบบการสอนที่มุ่งความคิดระดับสูง



ภาพประกอบ 2 แสดงรูปแบบการสอนที่ใช้ในชั้นเรียนปกติของ Bloom



ภาพประกอบ 3 แสดงรูปแบบการสอนที่มุ่งความคิดระดับสูงและท้าทายสติปัญญาเด็กของ Bloom

จากภาพประกอบ 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่าเด็กปกติจะมีลักษณะการเรียนรู้จากระดับขั้นที่ 1-6 ซึ่งจะเรียงลำดับในการเรียนรู้จากมากไปหาน้อยส่วนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะมีลักษณะการเรียนรู้จากระดับขั้น1-6 ซึ่งเรียงลำดับการเรียนรู้จากน้อยไปหามาก ในนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะมีการวิเคราะห์ การสังเคราะห์และการประเมินผลมากกว่าขั้นอื่น ๆ

การจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเป็นการจัดการศึกษาแบบผสมผสานหลายรูปแบบอาจจะจัดรวมกับเด็กปกติ หรือจัดชั้นพิเศษให้โดยเฉพาะ การเพิ่มพูนความรู้ในชั้นเรียนโดยการสอนเสริม(enrichment) การสอนเร่ง (acceleration) แนวคิดในการจัดการศึกษาดังกล่าวจะอยู่ภายใต้ขอบข่ายของแนวคิดในการจัดการศึกษา 2 แบบ คือ

1. การเรียนรวม (integrated classroom)
2. การแยกชั้นเรียน (separte setting or special educational grouping)

ประเภทของโครงการสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ (Clark. 1997 : 204-208 ; นุชนาถ สุนทรพันธุ์. 2537 : 85-91 ; ผดุง อารยะวิญญู. 2542 : 182-184) แบ่งออกเป็น 3 ประเภทคือ

1. โครงการเฉพาะกลุ่มเด็กเก่ง (special group or ability grouping) เป็นการแยกชั้นเรียนและหลักสูตรสำหรับเด็กเก่งต่างหากจากเด็กปกติ การจัดกลุ่มจะต้องมีเกณฑ์ที่แน่นอน มีวัตถุประสงค์เฉพาะการจัดกลุ่มไม่ว่าจะใช้เกณฑ์ใดจะต้องส่งเสริมการเรียนรู้และความสามารถของเด็ก ทั้งนี้จะพิจารณาความ

สามารถ ความสนใจ และความถนัดประกอบโครงการนี้ได้รับความนิยมอย่างมากในสหรัฐอเมริกา ยุโรป ออสเตรเลีย แคนาดา ฯลฯ นอกจากโครงการจัดแยกเป็นโรงเรียนสำหรับเด็กเก่งโดยเฉพาะแล้วยังจัดเป็นสถาบันภาคฤดูร้อน และสถาบันสุดสัปดาห์ ตัวอย่างโครงการดังกล่าวที่จัดในประเทศสหรัฐอเมริกา มีดังนี้ โรงเรียนเกียรตินิยมแห่งนครเมืองบัฟฟาโล รัฐนิวยอร์ค โรงเรียนฮันเตอร์แผนกประถมและมัธยม โรงเรียนวิทยาศาสตร์บรองซ์ในนิวยอร์คซิตี้ โรงเรียนศิลปะการแสดงในรัฐเทกซัส โครงการในคลีฟแลนด์ รัฐโอไฮโอ โครงการเอ-ทู เมืองบรอคตัน รัฐแมสซาชูเสทส์ โครงการวิทยาศาสตร์เมืองแทลคอดเมาน์เทนรัฐคอนเน็คติกัต เป็นโครงการสำหรับเด็กเก่งวิทยาศาสตร์ที่จัดขึ้นในวันสุดสัปดาห์ โรงเรียนโกเวอร์เนอร์ รัฐนอร์ธคาโรไลนา จัดโครงการภาคฤดูร้อนสำหรับเด็กเก่ง โดยคัดเด็กเก่งที่มีความสามารถเฉพาะด้าน

แนวการจัดการศึกษาเฉพาะกลุ่มเด็กเก่ง (ผดุง อารยะวิญญู. 2542 : 183) เสนอแนวการจัดกลุ่มเด็กตามความสามารถเป็น 1) จัดชั้นพิเศษ จัดชั้นเด็กเก่งไว้ต่างหาก เช่น ห้องคิง ห้อง A ห้อง ม.1/1 เด็กเรียนทุกอย่างเหมือนชั้นอื่นในระดับเดียวกัน 2) จัดกลุ่มพิเศษจัดกลุ่มปัญญาเลิศไว้เป็นกลุ่มเล็ก ๆ จำนวน 8-15 คน แล้วสอนแบบเข้ม เนื้อหาแตกต่างไปจากชั้นอื่นในระดับเดียวกัน 3) จัดเป็นโรงเรียนพิเศษเป็นโรงเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษโดยเฉพาะ

การจัดโครงการเฉพาะกลุ่มเด็กเก่ง จะทำให้เด็กเก่งประสบความสำเร็จเป็นอย่างมาก แม้ว่าการจัดโครงการดังกล่าวจะท้าทายความสามารถของผู้จัดก็ตาม แต่หากผู้จัดมีความตั้งใจจริง ประกอบกับมีความพร้อมในด้านต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นการจัดเตรียมหลักสูตร วิธีการสอน อุปกรณ์การเรียน ผู้สอนและงบประมาณแล้ว ผลลัพธ์ที่ได้คือ การจัดให้เด็กเก่งได้เรียนรวมกันจะได้ผลดีกว่าการจัดให้เด็กเก่งเรียนปนกับเด็กปกติ

2. โครงการเร่งรัด (acceleration) เป็นการให้เด็กได้เข้าเรียนหลักสูตรใดหลักสูตรหนึ่งเร็วขึ้น หรือได้เรียนไปตามหลักสูตรได้เร็วตามความสามารถของตน จึงทำให้เด็กเหล่านี้เรียนจบหลักสูตรใดหลักสูตรหนึ่งซึ่งใช้เวลาน้อยกว่าเด็กปกติ เป็นการสอนเด็กในระดับที่สูงขึ้น ทั้งในลักษณะของเนื้อหาวิชา และระดับชั้นเรียนที่สูงกว่าเด็กวัยเดียวกัน ซึ่งอาจกระทำได้หลายรูปแบบ ดังเช่น 1) การเรียนข้ามชั้น เช่น ในเทอมสองให้นักเรียนเลื่อนชั้นจาก ป.3 ไปเรียนชั้น ป.4 2) การเข้าเรียนก่อนเกณฑ์อายุ 3) การจัดให้เรียนวิชาในระดับมหาวิทยาลัย เช่น เปิดสอนวิชาต่าง ๆ ที่นิสิตปี 1 หรือ 2 เรียนในระดับชั้น ม.6 ในโรงเรียนมัธยมศึกษา แต่สิ่งสำคัญก็คือจะต้องป้องกันไม่ให้เกิดช่องว่างระหว่างพัฒนาการทางวิชาการกับพัฒนาการทางร่างกาย อารมณ์และสังคมของเด็ก ควรมีการศึกษาถึงความสามารถและความต้องการ ตลอดจนจุดบกพร่องของเด็กแต่ละคนโดยละเอียดก่อนการจัดการศึกษาให้แก่เด็ก

3. โครงการเสริมการเรียน (enrichment) เป็นการจัดการศึกษาให้แก่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษให้ได้รับความรู้และประสบการณ์ทางวิชาการทั้งในแนวกว้างและแนวลึก สามารถจัดทำได้ทั้งในรูปหลักสูตรหรือโปรแกรมการเรียน หลักสูตรดังกล่าวเป็นสิ่งช่วยเพิ่มให้เด็กมีความรู้มากขึ้นมีประสบการณ์ในหลาย ๆ

ด้านมากขึ้นเป็นหลักสูตรที่พัฒนาเพิ่มเติมเนื้อหารวมทั้งยุทธศาสตร์ในการสอนเพื่อให้สอดคล้องเหมาะสมกับเด็ก เน้นให้เด็กได้มีโอกาสเสาะแสวงหาความรู้ หาความสัมพันธ์โดยใช้วิธีวิเคราะห์ และสังเคราะห์ การค้นหาความจริงโดยใช้วิธีทางวิทยาศาสตร์

ฮาวเลย์ , ฮาวเลย์ และ เพนดาร์วิส (Colangelo and Davis. 1991 : 99-100 ; citing Howley, Howley and Pendarvis. 1986.) กล่าวว่าเราสามารถนำกระบวนการเรียนรู้เพื่อเสริมการเรียนได้ 3 วิธี คือ เสริมด้วยกระบวนการคิด เสริมด้วยเนื้อหา และ เสริมด้วยผลผลิต

1. โปรแกรมเสริมที่เน้นกระบวนการคิด เป็นการเสริมให้เกิดพัฒนาการทางกระบวนการคิด ซึ่งนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษอาจได้รับการสอนเพื่อให้บรรลุตามลำดับขั้นของพฤติกรรมการเรียนรู้ของบลูม การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของปาร์น บรรลุตามโครงสร้างทางสติปัญญาของกิลฟอร์ด รวมทั้งบรรลุยุทธศาสตร์ในการคิดและยุทธวิธีฝึกการใช้ความรู้สึกของวิลเลียมส์ วิธีการเหล่านี้จำเป็นและควรกระตุ้นให้ใช้ทักษะ เป้าหมาย โดยผ่านการเรียนรู้ที่ใช้ศูนย์การเรียน การเข้าร่วมอภิปรายหาเหตุผล หรือการเปิดโอกาสให้เรียนรู้อย่างอิสระภายใต้หัวข้อที่เขาสนใจ สิ่งหนึ่งที่จะช่วยส่งเสริมกระบวนการคิดคือ การสอนหรือให้ใช้ทักษะการคิดบ่อย ๆ หรือให้โอกาสฝึกคิดเกี่ยวกับประเด็นที่อยู่นอกเนื้อหาหรือบทเรียน ในบางครั้งการเสนอเกมต่าง ๆ ที่จะต้องอาศัยการวางแผนในการเล่น หรือ อาศัยการแก้ปัญหา จะเป็นการ "สอนการคิด" ให้เด็ก การสอนให้เด็กรู้จักกระบวนการคิดเป็นสิ่งที่สำคัญที่สุด

2. โปรแกรมเสริมที่เน้นเนื้อหา เป็นการนำเสนอเนื้อหาในสาขาต่าง ๆ นอกเหนือไปจากเนื้อหาในหลักสูตรโดยทั่วไป เช่น คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาศาสตร์ ศิลปะ หรือสังคมศาสตร์ ซึ่งต้องเสริมให้แก่เด็กทั้งในแนวกว้างและแนวลึก โดยอาจให้เด็กเรียนรู้ด้วยมินิคอร์ส ศึกษาจากพิพิธภัณฑ์ ศูนย์วิทยาศาสตร์และแหล่งความรู้อื่น ๆ

3. โปรแกรมเสริมที่เน้นผลผลิต เป็นการเสริมผลผลิตเพื่อเน้นถึงคุณภาพของผลที่ได้รับจากการจัดการเรียนการสอนนอกเหนือจากเนื้อหาและกระบวนการคิด อาจเป็นสิ่งที่สัมผัสได้ เช่น รายงาน ภาพวาด เรื่องสั้นหรือผลงานอื่น ๆ รวมทั้งสิ่งที่สัมผัสไม่ได้ เช่น สุขภาพ ความสามารถในการปรับตัว และอื่น ๆ ผลผลิตเหล่านี้เป็นสิ่งที่สะท้อนออกมาจากประสบการณ์ความรู้ความเข้าใจที่ได้รับจากกระบวนการเรียนการสอน ดังนั้นการเสริมทั้งทางด้านกระบวนการคิด เนื้อหาและผลผลิตในหลักสูตรจึงเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2529 : 56) ได้กล่าวถึงการเสริมการเรียนว่าสามารถทำได้ 3 ลักษณะคือ

1. เสริมการเรียนในแนวลึก หมายถึง ให้ศึกษาเนื้อหาวิชาในหลักสูตรอย่างลึกซึ้งและเข้มข้นกว่าเด็กปกติอื่น ๆ

2. เสริมการเรียนในแนวกว้าง หมายถึง ให้ศึกษาเนื้อหาวิชาในหลักสูตรในแนวกว้างด้วยการนำไปสัมพันธ์กับเรื่องอื่น ๆ เพื่อขยายความรู้ในเรื่องนั้นให้กว้างขวางขึ้น

3. เสริมการเรียนเรื่องที่ทันสมัย หมายถึง ให้ศึกษาเรื่องราวของสิ่งต่าง ๆ รอบตัวที่เกิดขึ้นในขณะนั้นตามความสามารถ และความสนใจของเด็ก

แนวการจัดการศึกษาในการสอนเสริม ผดุง อารยะวิญญู (2542 : 183-184) ได้เสนอไว้ดังนี้

1. การศึกษาอิสระ ให้เด็กศึกษาหาความรู้ และค้นหาคำตอบด้วยตัวเองโดยใช้วิธีการวิจัย

2. ใช้ชุดการสอน เป็นชุดการสอนที่จัดให้เด็กโดยเฉพาะให้เด็กเรียนเอง และหาคำตอบเอง

3. สอนเร่งในบางวิชา โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์ ให้เด็กเรียนลึกและเรียนนอกเหนือไปจากที่กำหนดไว้ในตำรา

4. สอนเป็นทีม นักเรียนที่สนใจวิชาหนึ่งไปเรียนกับครูที่เชี่ยวชาญด้านหนึ่ง ส่วนนักเรียนที่สนใจวิชาอื่นไปเรียนกับครูที่เชี่ยวชาญด้านอื่นทางโรงเรียนได้ใช้ความสามารถของครูเต็มที่

5. สอนเป็นกลุ่มเล็ก ๆ จัดสัมมนาย่อยสำหรับนักเรียนกลุ่มเล็ก ๆ และเรียนลึกไปในเนื้อหาเฉพาะด้าน

6. บรรยาย สาธิตโดยผู้ชำนาญพิเศษ เชิญผู้เชี่ยวชาญเฉพาะด้านมาบรรยายพิเศษสำหรับผู้สนใจ

ฟอกซ์ (Colangelo and Davis. 1991 : 102 ; citing Fox. 1979) มีความเชื่อว่า การเร่งการเรียนรู้ หมายถึงการปรับระยะเวลาในการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับสมรรถภาพในการเรียนรู้และการปรับนั้นจะนำไปสู่ความสามารถในการคิดเชิงนามธรรมที่สูงขึ้น ความคิดสร้างสรรค์ที่สูงขึ้น ความรอบรู้ในเนื้อหาที่ยากขึ้น แวน (Van Tassel Baska. 1981) กล่าวว่า การเสริมการเรียนรู้ จะไม่มีความหมายสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษถ้าปราศจากการฝึกเร่งการเรียนรู้ที่ดี ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ เดวิส และ ริม(Davis and Rimm. 1989) จึงเห็นอย่างชัดเจนว่า การเสริมการเรียนรู้และการเร่งการเรียนรู้เป็นองค์ประกอบที่ส่งเสริมซึ่งกันและกันเพื่อทำให้ความกว้างขวางและครอบคลุมของหลักสูตรสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษ

ผดุง อารยะวิญญู (2533 : 161-162) ได้กล่าวถึงกลยุทธในการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีดังนี้คือ การระดมความคิด การสัมมนา การอภิปราย การศึกษานอกสถานที่ การโต้วาที การให้คำแนะนำปรึกษา การลงมือปฏิบัติจริง การสืบสวน การใช้สื่อผสม การแก้ปัญหา การศึกษาด้วยวิธีวิทยาศาสตร์ การใช้สถานการณ์จำลอง

รูปแบบการเรียนการสอน (teaching-learning model) เป็นโครงสร้างที่ใช้เป็นแนวในการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนและจัดสิ่งแวดล้อมที่เอื้อต่อการเรียนการสอน ซึ่งมีสิ่งที่ควรเน้นคำนึง คือ ระบุเป้าหมายหรือจุดมุ่งหมายของเนื้อหาที่จะสอน มีหลักการหรือสมมุติฐานเกี่ยวกับลักษณะของผู้เรียนและกระบวนการเรียนการสอน มีแนวทางในการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนแต่ละวัน มีรูปแบบที่แน่นอนและชัดเจนในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน มีการวิจัยหรือประเมินประสิทธิภาพของรูปแบบนั้น ๆ สนับสนุน รูปแบบการเรียนการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีหลายรูปแบบด้วยกัน ดังนี้

1. รูปแบบการเรียนการสอนของบลูมและคราธโวล (Benjamin Bloom and David Krathwohl : The Cognitive and Affective Taxonomies)

ลักษณะและองค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอนของบลูม จะแบ่งตามลำดับขั้นตอนของการรู้ (cognitive domain) ออกเป็น 6 ขั้นคือ

1. การรู้จำข้อมูลเนื้อหา (knowledge)
2. การเข้าใจ (comprehension)
3. การนำไปใช้ (application)
4. การวิเคราะห์ (analysis)
5. การสังเคราะห์ (synthesis)
6. การประเมินผล (evaluation)

ลักษณะและองค์ประกอบของรูปแบบการเรียนการสอนของคราธโวล จะเป็นเรื่องของความรู้สึกหรือจิตพิสัย (affective domain) แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นรับรู้ (receiving)
2. ขั้นแสดงออก (responding)
3. ขั้นนิยมชมชอบ (valuing)
4. ขั้นเป็นหมวดหมู่ระบบค่านิยม (organization)
5. ขั้นเป็นคุณลักษณะพิเศษเป็นค่านิยมเฉพาะตน (characterization by a value or a value system)

รูปแบบการเรียนการสอนของบลูมและคราธโวลจะดำเนินไปด้วยกันดังนี้ คือ ขั้นรับรู้ทางความรู้สึกจะสัมพันธ์กับการรู้จำข้อมูลเนื้อหา ขั้นแสดงออกของความรู้สึกจะสัมพันธ์กับการเข้าใจ ขั้นนิยมชมชอบจะสัมพันธ์กับการนำไปใช้ ขั้นสร้างความคิดรวบยอดและระบบของค่านิยมจะสัมพันธ์กับการวิเคราะห์และสังเคราะห์

หลักการของรูปแบบการเรียนการสอนของบลูมและคราธโวล มีหลักใหญ่ว่า การเรียนรู้จะมีลำดับขั้นตอน การจะขึ้นไปสู่ขั้นที่สูงจะต้องผ่านหรือทำขั้นต้นได้ก่อนและไม่มีการข้ามขั้น (เมคเกอร์. 2540 : 8-18)

2. รูปแบบการเรียนการสอนของบรูนเนอร์ (Jerome Bruner : The Basic Structure of Discipline)

รูปแบบการเรียนการสอนของบรูนเนอร์จะกล่าวถึง 5 สิ่งต่อไปนี้

1. ความสำคัญของโครงสร้างของวิชา (the importance of structure)
2. ความพร้อมในการเรียน (readiness for learning)
3. การคิดแบบหยั่งรู้และแบบวิเคราะห์ (intuitive and analytic thinking)
4. แรงจูงใจในการเรียน (motives for learning)

5. สื่อช่วยเรียนรู้ (aids to learning)

รูปแบบการเรียนการสอนของบรูนเนอร์จะเน้นที่กระบวนการเรียนรู้ของแต่ละวิชา มิได้เน้นที่เนื้อหารายละเอียด สำหรับเนื้อหานั้นบรูนเนอร์มีความเห็นว่า ผู้เรียนควรจะได้เข้าใจความคิดมโนมติที่สำคัญของวิชานั้นจากกระบวนการหาความรู้ในวิชานั้น และจากการคิดทั้งแบบวิเคราะห์และแบบหยั่งรู้ อนึ่งจากการฝึกกระบวนการหาความรู้ผู้เรียนจะได้ค้นพบสิ่งที่ได้ค้นพบมาแล้วด้วยความเข้าใจดียิ่งขึ้น และสามารถที่จะค้นหาความรู้ใหม่ ๆ ได้อีกต่อไป (เม็คเกอร์. 2540 : 19-27)

3. รูปแบบการเรียนการสอนของกิลฟอร์ด (J.P.Guilford : The Structure of Intellect)

รูปแบบการเรียนการสอนของกิลฟอร์ดจะเป็นรูปแบบโครงสร้างของปัญญาซึ่งประกอบด้วย 3 มิติคือ

1. มิติของกระบวนการ8bf (operation) มี 5 ประเภทคือ การรู้ การจำ การคิดแบบเอกนัย การคิดแบบอเนกนัย และการคิดแบบประเมินค่า

2. มิติของเนื้อหาหรือข้อมูลความคิด (content) มี 4 ประเภทคือ รูปภาพ สัญลักษณ์ ภาษา และพฤติกรรม

3. มิติของผลผลิตหรือผลลัพธ์ (product) มี 6 ประเภทคือ หน่วย จำพวก ความสัมพันธ์ ระบบ การแปลงรูป และการนำไปใช้

เมื่อรวมทั้ง 3 มิติเข้าด้วยกันแล้ว แบบจำลองแสดงโครงสร้างของปัญญาตามทฤษฎีของกิลฟอร์ดจะประกอบด้วย 120 แบบ กิลฟอร์ดไม่เชื่อในลักษณะปัญญาที่เป็นกลุ่มก้อนเดียวและมีลักษณะทั่วไป เขามีความเห็นว่า ความคิดสร้างสรรค์เป็นส่วนหนึ่งของปัญญา ความสามารถในการคิดสร้างสรรค์จะเป็นกระบวนการคิดแบบอเนกนัย ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ประเภทคือ 1) ความคิดริเริ่ม (originality) หมายถึงความคิดที่มีลักษณะใหม่ ๆ ซึ่งไม่มีผู้ใดคิดมาก่อน หรืออาจจะเป็นความคิดที่ดัดแปลงมาจากความคิดเดิมมีลักษณะแตกต่างจากความคิดทั่วไป 2) ความคิดคล่องแคล่ว (fluency) หมายถึงความคิดหลากหลายในเรื่องเดียวกันเกิดขึ้นโดยไม่ซ้ำกันเลย มีความคล่องแคล่วในการใช้ถ้อยคำ การโยงความสัมพันธ์ การแสดงออก และการคิด 3) ความคิดยืดหยุ่น (flexibility) หมายถึงลักษณะของความคิดที่ไม่คงที่ สามารถปรับเปลี่ยนได้ มีความคิดยืดหยุ่นแบบอิสระ มีความคิดยืดหยุ่นแบบดัดแปลง 4) ความคิดละเอียดลออ (elaboration) หมายถึงการประสานและช่วยเสริมความคิดอเนกนัยทั้ง 3 ประเภท ซึ่งได้แก่ ความคิดริเริ่ม ความคิดคล่องแคล่วและความคิดยืดหยุ่นให้เกิดผลสำเร็จหรือผลผลิตตามต้องการ และผลที่ได้คือ การได้ปรับปรุงเปลี่ยนแปลงสร้างของใหม่จากของเดิม ดังนั้นแนวคิดของกิลฟอร์ดจะเน้นถึงการได้ทราบถึงความสามารถพิเศษด้านต่าง ๆ ของเด็ก เพื่อจัดโปรแกรมการเรียนให้เหมาะสม (เมคเกอร์. 2540 : 28-43)

4. รูปแบบการเรียนการสอนของ ซิดนีย์ ปาร์น (Sidney Parnes : Creative Problem Solving)

รูปแบบการเรียนการสอนของปาร์น เป็นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ มี

โครงสร้างของกระบวนการที่ใช้จินตนาการ รูปแบบการแก้ปัญหาจะแตกต่างกับรูปแบบอื่น ๆ ตรงที่ ปาร์นจะเน้นถึงการคิดหาทางเลือกหลาย ๆ แบบก่อนที่จะเลือกนำไปใช้แก้ปัญหา และในแต่ละขั้นของกระบวนการห้าขั้น ผู้ที่จะแก้ปัญหาจะต้องไม่ประเมินหรือตัดสินแนวคิดที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ เพราะต้องการให้คิดหาทางเลือกให้แปลกใหม่ประหลาดมากที่สุด การประเมินหรือตัดสินทางเลือกจะทำให้ไม่เกิดความคิดที่แปลกพิสดาร การประเมินหรือตัดสินทางเลือกจะมีในขั้นตอนที่สมควร โดยผู้เรียนจะต้องเรียนตามลำดับขั้นตอน ซึ่งแบ่งเป็น 5 ขั้นดังนี้

1. การหาข้อมูล
2. แสวงหาตัวปัญหา
3. แสวงหาแนวคิด
4. แสวงหาคำตอบ
5. แสวงหาการยอมรับ

รูปแบบการเรียนการสอนของปาร์น มีจุดมุ่งหมายดังนี้

1. เพื่อให้ผู้แก้ปัญหาที่ตั้งต้นด้วยความยุ่งเหยิง สับสน ไปสู่การแก้ไขที่สร้างสรรค์และมีประสิทธิภาพ

2. เพื่อส่งเสริมบุคคลให้มีพฤติกรรมที่สร้างสรรค์ ปาร์นให้คำจำกัดความของพฤติกรรมที่สร้างสรรค์ว่าเป็น "รูปแบบของปฏิกริยาตอบสนองที่มีต่อสิ่งเร้าต่าง ๆ ซึ่งอาจเป็นสิ่งของ คำพูด สัญลักษณ์ ฯลฯ แล้วบังเกิดเป็นผลรวมของปฏิกริยาตอบสนองซึ่งมีลักษณะพิเศษ" พฤติกรรมที่สร้างสรรค์เป็นการปฏิบัติการของความรู้ จินตนาการ การประเมิน ซึ่งมีผลเป็นผลผลิตใหม่ ความคิดใหม่ที่เป็นประโยชน์และมีคุณค่าต่อบุคคลและสังคม

ด้านการสอน ครูผู้สอนจะเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนพัฒนาความคิดและผลงานของตนเอง ส่งเสริมให้เด็กแสดงออกอย่างอิสระ และครูจะเป็นผู้ฟังมากกว่าเป็นผู้พูด ในการสร้างบรรยากาศที่ทำให้เกิดความสร้างสรรค์นั้น ครูจะต้อง 1) สร้างบรรยากาศในห้องเรียนให้นักเรียนรู้สึกปลอดภัยที่จะแสดงความคิดเห็นอย่างเสรี 2) ครูส่งเสริมความขี้เล่นของนักเรียน 3) ให้เวลาสำหรับการฟักตัวของความคิด และ 4) ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นให้ได้มาก ๆ และให้ได้ความคิดที่มีคุณภาพ

ในกระบวนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ 5 ขั้นตอนนี้ เทคนิคที่สำคัญคือการส่งเสริมให้ทุกคนแสดงความคิดให้มากที่สุด จะไม่มีการวิจารณ์ตัดสินจนกว่าจะถึงขั้นที่ 3 มีบรรยากาศที่อบอุ่นไม่ทำให้เกิดความกลัวหรือความเครียด ใช้เทคนิคการระดมพลังสมอง การมีเวลาฝึกเพียงพอ การยอมรับความคิดทุกความคิด การเขียนรายการความคิด การให้เวลาในการบ่มความคิด เทคนิคหรือกลยุทธเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนได้ข้อมูลจากความคิดความจำที่เกี่ยวเนื่องกับสถานการณ์ปัญหา อันอาจจะนำไปใช้ในการแก้ปัญหา การไม่วิจารณ์ตัดสินข้อคิดต่าง ๆ ที่เสนอขึ้นมา จะช่วยให้นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็นมากขึ้น และทักษะที่สำคัญในทุก

ขั้นตอนคือ ทักษะการตั้งคำถามอย่างสร้างสรรค์ที่ช่วยให้คิดหาคำตอบ หรือการแก้ปัญหาที่แปลกพิสดาร (เมคเกอร์. 2540 : 59-71)

5. รูปแบบการเรียนการสอนของเรนซูลลี (Joseph S. Renzuli : The Enrichment Triad)

รูปแบบการเรียนการสอนของเรนซูลลีเป็นรูปแบบของการเสริมสร้างทวีปัญญา 3 ขั้นคือ 1) Type I เป็นกิจกรรมสำรวจทั่วไป 2) Type II เป็นกิจกรรมฝึกหัดเป็นกลุ่ม 3) Type III เป็นการศึกษาค้นคว้าแก้ปัญหาจริง ๆ เป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มเล็ก (เมคเกอร์. 2540 : 72-91)

สำหรับรูปแบบการสอนจะมีแนวทางดังนี้

1. การใช้เวลาส่วนใหญ่จะเป็นการให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเรียนเนื้อหาเรื่องราวที่สนใจอย่างกว้างขวางและใช้วิธีการเรียนด้วยตนเอง

2. บทบาทของครู คือ ช่วยเด็กแต่ละคน โดย 1) จัดหาปัญหาที่เป็นจริงและแก้ไขได้ ซึ่งตรงกับความสนใจของเด็กให้เด็กแต่ละคน 2) ให้ความรู้ความชำนาญในทักษะการศึกษาค้นคว้า และ แหล่งความรู้ที่จะช่วยให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษสามารถแก้ปัญหาได้

3. ให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแต่ละคนได้มีวิธีการสร้างผลงานของตน

6. รูปแบบการเรียนการสอนของทาบา (Hilda Taba : Teaching Strategies Program)

รูปแบบการเรียนการสอนของทาบา เป็นยุทธวิธีการสอนที่มีองค์ประกอบยุทธวิธีการสอนที่เกี่ยวเนื่องสัมพันธ์กัน 4 อย่างคือ 1) การพัฒนาความคิดรวบยอด 2) การแปลความหมายของข้อมูล 3) การนำเอาข้ออ้างสรุปไปใช้ 4) การตกลงยุติปัญหาขัดแย้ง (เมคเกอร์. 2540 : 92-125)

ในการใช้ยุทธวิธีการสอนของทาบา ครูจะต้องวางแผนงานอย่างละเอียดถี่ถ้วน ถ้าจะให้การสอนมีประสิทธิภาพ ควรมีการกำหนดสิ่งเหล่านี้ในแผนงานคือ

1. จุดมุ่งหมายของเนื้อหาและกระบวนการของเนื้อเรื่องทั้งหมด
2. วิธีการก่อนดำเนินการอภิปรายและสื่อ
3. จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของแต่ละขั้นตอน
4. คำถามสำหรับทุกขั้นตอน
5. กระบวนการสนับสนุนของแต่ละขั้นตอน
6. แผนผังความรู้ที่นักเรียนควรจะได้ในแต่ละขั้นตอน

7. รูปแบบการเรียนการสอนของเทเลอร์ (Calvin Taylor : Multiple Talent Approach)

รูปแบบการเรียนการสอนของเทเลอร์เป็นรูปแบบของการพัฒนาความสามารถพิเศษหลายด้าน โดยเขาได้จัดประเภทความสามารถพิเศษออกเป็น 6 ด้าน คือ วิชาการ ความคิดสร้างสรรค์ การตัดสินใจ การวางแผน การทำนายคาดการณ์ล่วงหน้า และการสื่อสาร ในการจัดการเรียนการสอนจะมีการส่งเสริมความสามารถไปทั้งหกด้าน มิใช่เน้นความสามารถทางวิชาการอย่างเดียว ในการพัฒนาความสามารถแต่ละด้านจะมี

องค์ประกอบของกระบวนการต่างกัน สามารถศึกษารูปแบบในการพัฒนาความสามารถดังกล่าวได้จากรูปแบบการเรียนการสอนของเทเลอร์จาก เมคเกอร์ (2540 : 126-146)

ในการนำรูปแบบของเทเลอร์มาใช้นั้น ควรตั้งต้นที่การออกแบบประสบการณ์การเรียนในลักษณะความสามารถพิเศษต่าง ๆ ครูสังเกตการมีส่วนร่วมของนักเรียน จุดอ่อนและจุดเด่นของนักเรียน

ลักษณะนิสัยของความสามารถพิเศษด้านต่าง ๆ จะเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถพิเศษในด้านนั้นๆ ให้แก่นักเรียน โดยการเรียนจะเน้นการใช้ข้อมูลมากกว่าการแสวงหาข้อมูล นักเรียนจะต้องเป็นผู้กระทำ มิใช่ผู้รับเฉย ๆ เช่น ความสามารถพิเศษทางด้านการวางแผน นักเรียนจะต้องฝึกปฏิบัติวางแผนในสถานการณ์จำลอง ความสามารถพิเศษทางการสื่อสารนักเรียนก็จะต้องแสดงความคิดเป็น สื่อสารให้ผู้อื่นเข้าใจ ความสามารถพิเศษอื่น ๆ ก็เช่นกันนักเรียนจะต้องฝึกใช้ข้อมูลในลักษณะต่าง ๆ

8. รูปแบบการเรียนการสอนของเทรฟฟิงเกอร์ (Donald J. Treffinger : Self-Directed Learning)

รูปแบบการเรียนการสอนของเทรฟฟิงเกอร์ เป็นรูปแบบการเรียนรู้แบบนำทางตนเอง โดยการสอนจะมีลำดับขั้นตอน 4 ขั้น คือ

1. การแสวงหาหรือการตั้งจุดหมายหรือวัตถุประสงค์
2. ประเมินพฤติกรรมก่อนเรียน
3. แสวงหาวิธีการและกระบวนการเรียนที่เหมาะสม และดำเนินการเรียนการสอน
4. ประเมินผลงานและพฤติกรรม

โดยครูจะให้โอกาสนักเรียนแต่ละคนได้มีส่วนในการตัดสินใจทั้ง 4 ขั้นตอน เช่น ในขั้นที่หนึ่ง การตั้งจุดมุ่งหมาย ครูจะมีทางเลือกหลาย ๆ ทางให้นักเรียน ในขั้นที่สองครูให้นักเรียนพิจารณาหาทางเลือก ในขั้นที่สามนักเรียนจะดำเนินการเรียนรู้ด้วยตนเอง ครูจะเป็นผู้จัดหาวัสดุอุปกรณ์และอำนวยความสะดวก ในขั้นที่สี่ประเมินผล ครูและนักเรียนจะประเมินร่วมกัน ครูจะเปลี่ยนบทบาทจากการเป็นผู้สอน ผู้ตัดสินใจ เป็นผู้เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ ให้ความสะดวก ให้คำปรึกษา และแนะนำให้รู้จักแหล่งวิชาการอื่น ๆ (เมคเกอร์. 2540 : 147-174)

9. รูปแบบการเรียนการสอนของวิลเลียมส์ (Frank E. Williams : Teaching Strategies for Thinking and Feeling)

รูปแบบการเรียนการสอนของวิลเลียมส์เป็นยุทธวิธีการสอนเพื่อให้คิดและรู้สึกซึ่งมีส่วนคล้ายกับรูปแบบของกิลฟอร์ด รูปแบบของวิลเลียมส์มี 3 มิติที่มีปฏิสัมพันธ์ซึ่งกันและกันในสถานการณ์การเรียนการสอน

มิติที่ 1. หลักสูตร ได้แก่ เนื้อหาวิชาต่าง ๆ ที่สอนในโรงเรียน

มิติที่ 2. ยุทธวิธีการสอน ได้แก่ สถานการณ์ เทคนิคและวิธีสอนที่ครูใช้ในการสอนยุทธวิธีการสอนของวิลเลียมส์มี 18 วิธีคือ การใช้พาราดอกซ์ (paradox) การใช้คุณสมบัติ (attribute)

การใช้อุปมาอุปไมย (analogies) ชี้ให้เห็นจุดบอด(discrepancies) ตั้งคำถามที่ยั่วยุ (ask provocative questions) ให้ตัวอย่างของการเปลี่ยนแปลง(change) ใช้ตัวอย่างของนิสัยความเคยชิน(habit) ใช้การค้นหาโดยมีโครงสร้าง (organized random search) สอนทักษะของการค้นหา (skills of search) สร้างความอดทนต่อสิ่งคลุมเครือ (tolerance for ambiguity) ส่งเสริมการคิดเชิงญาณ (intuitive expression) สอนเพื่อให้เกิดการพัฒนา(development)ไม่ใช่เพื่อการปรับตัว(adjust) ศึกษาบุคคลที่สร้างสรรค์และกระบวนการสร้างสรรค์(creative people and creative processes) ส่งเสริมให้นักเรียนประเมินสถานการณ์(evaluate situations) พัฒนาทักษะการอ่านอย่างสร้างสรรค์(creative readding) พัฒนาทักษะในการฟังอย่างสร้างสรรค์(creative listening) พัฒนาทักษะในการเขียนอย่างสร้างสรรค์ (creative writing) และพัฒนาทักษะในการจินตนาการมองเห็นภาพ(skills in visualization) ยุทธวิธีทั้ง 18 วิธีนี้ วิลเลียมส์กล่าวว่าใช้ได้ผลในการสอนเด็กที่มีความสามารถพิเศษ แต่วิธีที่ได้ผลมากคือ ยุทธวิธีสำรวจจุดบอด ยุทธวิธีตั้งคำถามยั่วยุ ยุทธวิธีการให้ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลง และ นิสัย ยุทธวิธีพัฒนาทักษะการค้นหา ยุทธวิธีการสร้างความอดทนต่อสิ่งคลุมเครือ ยุทธวิธีการสอนเพื่อให้เกิดการพัฒนาไม่ใช่เพื่อการปรับตัว และยุทธวิธีการประเมินสถานการณ์

มิติที่ 3. พฤติกรรมของนักเรียน ซึ่งเป็นผลจากการใช้ยุทธวิธีการสอนตามรูปแบบของวิลเลียมส์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ *กลุ่มพฤติกรรมการคิด* ได้แก่ มีความคล่องในการคิด มีความยืดหยุ่นในการคิดมีความแปลกใหม่ในการคิด มีการคิดขยายตกแต่งเพิ่มเติม *กลุ่มพฤติกรรมความรู้สึก* ได้แก่ มีลักษณะนิสัยปกติคือช่างสังเกต และ ใฝ่รู้ มีลักษณะนิสัยช่างคิดฝันหรือคิดจินตนาการ มีลักษณะนิสัยชอบสิ่งที่ยากลำบากและท้าทาย และมีลักษณะนิสัยกล้าเสี่ยงและกล้าเดา

การนำรูปแบบของวิลเลียมส์ไปใช้ ผู้ใช้ควรตอบคำถามต่อไปนี้เสียก่อนคือ

1. ท่านต้องการให้นักเรียนทำอะไร (กิจกรรมของนักเรียน)
2. กิจกรรมเหล่านั้นจะนำเด็กไปสู่อะไร (พฤติกรรมของนักเรียน)
3. ท่านจะทำอย่างไรเพื่อให้เกิดพฤติกรรมนั้น ๆ (ยุทธวิธีการสอนของครู)
4. กิจกรรมเหล่านั้นอยู่ในวิชาอะไร มีข้อมูลใดบ้างที่ต้องการ กิจกรรมเหล่านี้สัมพันธ์กับหลักสูตรอย่างไร (เมคเกอร์. 2540 : 175-199)

10. รูปแบบการเรียนการสอนแบบ ALM (The Autonomous Learner Model for the Gifted and Talented)

ALM เป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้นเพื่อค้นหาความสามารถทางสติปัญญา ลักษณะอารมณ์และความต้องการทางสังคมอันหลากหลายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษในระดับมัธยมศึกษา ซึ่งเป้าหมายของ โปรมแกรมที่สร้างขึ้นก็เพื่อที่จะเตรียม ให้โอกาสและเปิดประสบการณ์ที่จะเรียนรู้อย่างอิสระ ซึ่งนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเหล่านี้ไม่เพียงแต่จะเรียนรู้เพื่อจะพัฒนาสติปัญญา อารมณ์และสังคมของตน

อย่างอิสระเท่านั้น แต่จะต้องได้รับการพัฒนาให้เป็นผู้มีสุขภาพดีสามารถปรับตัวและทำหน้าที่พลเมืองดีของสังคมอีกด้วย

หลักการพื้นฐานของ ALM

1. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องได้รับการส่งเสริมให้มีความเป็นอิสระในตนเอง สามารถกำหนดแนวทางในการเรียนรู้ของตนเอง มีความสามารถและมีเจตคติที่ดีทั้งในด้านการเรียนรู้ อารมณ์และสังคม

2. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องได้รับการพัฒนาให้มีเจตคติที่ดีและมีความเชื่อมั่นในตนเอง เพราะเป็นองค์ประกอบสำคัญที่จะทำให้มีความสุข ประสบผลสำเร็จ มีความเจริญก้าวหน้าและสามารถบรรลุในสิ่งที่แต่ละคนต้องการ

3. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องได้รับการพัฒนาให้มีทักษะทางสังคม เพราะผู้ที่จะสามารถดำรงชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุขต้องสามารถในการติดต่อสื่อสารทำความเข้าใจกับผู้อื่น รู้จักรับฟังและรู้จักนำเสนออย่างเหมาะสม

4. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะต้องได้รับโอกาสในการเรียนรู้เนื้อหาหรือข้อมูลพื้นฐานและข่าวสารต่าง ๆ ที่สนใจ

5. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษควรได้รับการสนับสนุนหรือการจัดเตรียมประสบการณ์ในการแสดงเหตุผล ข้อคิดในลักษณะเปิดกว้างอย่างเต็มที่

6. นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้รับโอกาสที่จะเรียนรู้ตลอดชีวิต

7. ครูต้องมีบทบาทในฐานะเป็นผู้สนับสนุน ส่งเสริม จัดเตรียมและชี้แนะให้เด็กรู้จักวิธีการที่จะเรียนรู้ มิใช่มีบทบาทในการสอนหรือบอกเนื้อหา

8. ขอบข่ายของเนื้อหาและระยะเวลาในการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องได้รับการจัดเตรียมอย่างเหมาะสม

การวางกรอบแยกลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษของ ALM

หลังจากที่พัฒนาโครงการไปแล้ว 10 ปี ได้มีการสังเกตและทำวิจัยเชิงคุณภาพ โดย เบทส์ และนิฮาท (Betts and Neihart. 1988) ที่จะอธิบายลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเป็นแบบต่าง ๆ ได้ 6 แบบดังนี้

1. *successful* เป็นเด็กที่มีผลการเรียนดี ประสบความสำเร็จในห้องเรียน เป็นคนโปรดของครูและสามารถสอบผ่านการทดสอบการเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ แต่ยังไม่ได้รับการพัฒนาความสามารถ และทัศนคติเต็มที่ตามที่เขาต้องการเพื่อทำให้เป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษอย่างแท้จริง

2. *challenging* เป็นเด็กที่ชอบความท้าทาย มีความคิดสร้างสรรค์ เป็นตัวของตัวเอง ชอบอิสระเบื่อง่าย และหงุดหงิดต่อระบบการเรียนที่ไม่เหมาะกับพวกเขา บ่อยครั้งที่เด็กเหล่านี้ไม่สามารถสอบผ่านการทดสอบการเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

3. *underground* เป็นเด็กที่ไม่เชื่อมั่นในตัวเอง ชอบปกปิดความสามารถของตนเอง มีความต้อง

การการเป็นเจ้าของแบบสุดกู่ และชอบทำตัวเหมือนกับคนอื่น ๆ

4. *dropouts* เป็นเด็กที่ลาออกกลางคัน แม้ว่าผู้ให้การศึกษาจะเข้าใจว่าเด็กที่ลาออกกลางคันเป็นเด็กที่ไม่มีความสามารถในการเรียน แต่ก็ยังไม่มีเครื่องชี้วัดว่าเด็กเหล่านั้นเรียนไม่ได้ แท้จริงแล้วในจำนวนนี้มีนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษลาออกกลางคันอยู่ด้วย แต่ยังไม่มีสถิติ หรือ สัดส่วนของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่ลาออกกลางคัน

5. *double - labeled* เป็นเด็กพิเศษ คือพวกเด็กพิการไม่สมประกอบ แต่ประสบความสำเร็จอย่างสูงและอาจมีอิทธิพลต่อสังคมอย่างมาก

6. *producers of knowledge* เป็นเด็กที่มีความสามารถเด่นเป็นพิเศษ ใฝ่รู้สามารถเรียนรู้ได้ด้วยตัวเอง มีความต้องการฝึกทักษะ ความคิด ทัศนคติในการเรียนรู้ตลอดชีวิต

การคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเข้าเรียนในรูปแบบ ALM

นักการศึกษาได้พยายามปรับปรุงวิธีการในการคัดเลือก เพื่อให้ได้เด็กหรือวัยรุ่นที่มีความสามารถพิเศษเป็นกลุ่มขนาดเล็กเพื่อเข้าเรียนแบบ ALM กระบวนการคัดเลือกมีความยืดหยุ่นและเปิดโอกาสให้แก่เด็กมากขึ้น เด็กสามารถเข้าเรียนแบบ ALM ตลอดหลักสูตร หรืออาจเลือกเรียนเพียง 1 หรือ 2 ระดับแล้วตัดสินใจที่จะเลือกหรือไม่เลือกเรียนต่อก็ได้ ในการคัดเลือก ครู ผู้บริหารโรงเรียน ผู้ปกครอง และ คณะกรรมการโรงเรียนเป็นผู้มีส่วนร่วมในกระบวนการคัดเลือก โดยมีลำดับขั้นในการคัดเลือกดังนี้

1. *การกำหนดคุณสมบัติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ* (definition of giftedness) การกำหนดคุณสมบัติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่เข้าเรียนหลักสูตรแบบ ALM จะพิจารณาความสามารถพิเศษ 3 ด้านคือ ความสามารถพิเศษด้านสติปัญญา (intellectually gifted) ความสามารถพิเศษด้านความคิดสร้างสรรค์ (creatively gifted) และ ความเป็นผู้มีความสามารถพิเศษ (talented)

2. *การตั้งคณะกรรมการติดตามและพัฒนาโปรแกรม* (ongoing staff development) คณะกรรมการต้องตอบคำถามเหล่านี้อยู่เสมอ เช่น ใครคือนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จะนิยามความเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษโดยใช้กรอบอะไร วิธีการคัดเลือกทำอย่างไร อะไรเป็นสิ่งที่จะต้องเตรียมการเป็นพิเศษสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเหล่านี้ บทบาทของคณะกรรมการพัฒนาคืออะไร อะไรคือสิ่งที่ ALM สามารถสนองตอบนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเหล่านั้น คำถามเหล่านี้คณะกรรมการต้องนำไปคิดทบทวนอยู่เสมอ

3. *กิจกรรมในชั้นเรียนและในโรงเรียน* (classroom/school activity) การคัดเลือกเด็กจะมีความถูกต้องก็ต่อเมื่อมีการค้นคว้าหรือตรวจสอบด้านอื่น ๆ อีกนอกเหนือจากคะแนนจากการทดสอบและข้อเสนอแนะของครูผู้สอน การ์ดเนอร์ (Gardner. 1986) อธิบายว่า นักเรียนอาจถูกเลือกโดยใช้กิจกรรมพิเศษที่จัดให้ในขณะที่กำลังเรียนอยู่ในชั้นเรียนทั่ว ๆ ไป การปฏิบัติกิจกรรมจะช่วยในการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับนักเรียนสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ความสามารถในการคิดสร้างสรรค์และความสามารถในการใช้ทักษะความคิดระดับสูงจากการทำกิจกรรมพิเศษเหล่านั้นนักเรียนต้องทำได้ดีเท่ากับการทำกิจกรรมที่ส่งเสริมความสามารถในการเรียนรู้อย่างอิสระ และความสามารถในการเรียนรู้ด้วยตนเองซึ่งเรียนอยู่ในชั้นเรียนทั่ว ๆ ไป

4. *การอภิปรายเกี่ยวกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษและกระบวนการคัดเลือก* (discussions

of giftedness and the sellection process) กระบวนการในการคัดเลือกควรเริ่มจากปีการศึกษาแรกที่นักเรียนเข้าเรียน สิ้นสุดลงเมื่อจบการเรียนในปีการศึกษาสุดท้าย โดยหลังจากการประชุมของคณะกรรมการพัฒนาโปรแกรม หลังจากการเรียนในชั้นเรียนและหลังจากการทำกิจกรรมพิเศษที่โรงเรียนจัดให้แล้ว คณะกรรมการคัดเลือกต้องมีการอภิปรายร่วมกันถึงกระบวนการในการคัดเลือกนักเรียนซึ่งการอภิปรายดังกล่าวจะทำให้เกิดข้อยุติและเกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ต่อกระบวนการคัดเลือกของคณะกรรมทุกคน

5. *การเสนอชื่อ* (nomination) การเสนอรายชื่อเด็กที่จะเข้าเรียนแบบ ALM นั้นทำได้โดยรวบรวมรายชื่อมาจากหลายส่วน เช่น จากการเสนอชื่อโดยครูภายในโปรแกรม ผู้ปกครอง คะแนนจากการทดสอบ การเสนอชื่อจากสังคมหรือชุมชน การเสนอชื่อกลุ่มเพื่อน ตลอดจนการแจ้งความจำนงของเด็กเองจากทุกกรณีข้างต้น การเสนอชื่อโดยครูมีความถูกต้องแม่นยำที่สุดเพราะนักเรียนมีโอกาศทดสอบความสามารถในหลักสูตรพิเศษ

6. *การพิจารณาอย่างรอบคอบและการประเมิน* (reflection and assessment) สิ่งแรกที่คณะกรรมการคัดเลือกจะต้องตระหนักคือ รู้จักนักเรียนที่ได้รับการเสนอชื่อเพียงใด มีข้อมูลต่าง ๆ เกี่ยวกับนักเรียนเหล่านั้นมากพอตามที่ต้องการหรือไม่ ดังนั้นจึงต้องแสวงหาและสะสมข้อมูลให้มากพอเพื่อใช้ประโยชน์ในการประเมินในลำดับต่อไป ข้อมูลดังกล่าวอาจเกี่ยวกับกิจกรรมทางสติปัญญาซึ่งอาจเป็นคะแนนทดสอบสติปัญญาของแต่ละบุคคล หรือ ทดสอบเป็นกลุ่ม รวมทั้งการวัดพฤติกรรมด้านความคิดสร้างสรรค์เป็นต้น

7. *การสัมภาษณ์* (interviews) การสัมภาษณ์เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญมากในการคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จะมีประโยชน์ในระดับสูงเมื่อเป็นการสัมภาษณ์เดียว (หรือสัมภาษณ์เป็นกลุ่มเล็ก ๆ ในกรณีที่เป็นเด็กเล็ก ๆ) ซึ่งจะทำให้ได้ข้อมูลมากยิ่งขึ้น อาจมีเด็กบางคนที่ไม่ปฏิสัมพันธ์เท่าที่ควรต่อการสัมภาษณ์ ดังนั้น คณะกรรมการคัดเลือกต้องไตร่ตรองและมีความรอบคอบในการสัมภาษณ์เพื่อจะได้มาซึ่งข้อมูลเกี่ยวกับ ทักษะ มโนมติ ตลอดจนเจตคติของเด็กซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการต่อการคัดเลือกในขั้นสุดท้าย

8. *การหาข้อมูลเพิ่มเติม* (additional information) ผู้ปกครอง และ คณะผู้คัดเลือกในชุมชนสามารถมีส่วนในการสัมภาษณ์เด็กได้เช่นกัน รวมทั้งจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งถ้าจะประชุมและอภิปรายร่วมกับครูเพื่อรวบรวมข้อมูลเพิ่มเติม ซึ่งเป็นการช่วยเหลือคณะกรรมการการคัดเลือกได้เป็นอย่างดี และต้องตระหนักเสมอว่ามีข้อผิดพลาดเกี่ยวกับการดำเนินการที่ผ่านมาหรือไม่ มีสิ่งใดหรือพฤติกรรมใดที่ถูกปกปิดอยู่หรือไม่ เด็กมีความรู้สึกต่อต้านกระบวนการคัดเลือกที่เป็นอยู่หรือไม่ ข้อมูลต่าง ๆ ต้องตอบครอบคลุมสิ่งเหล่านี้

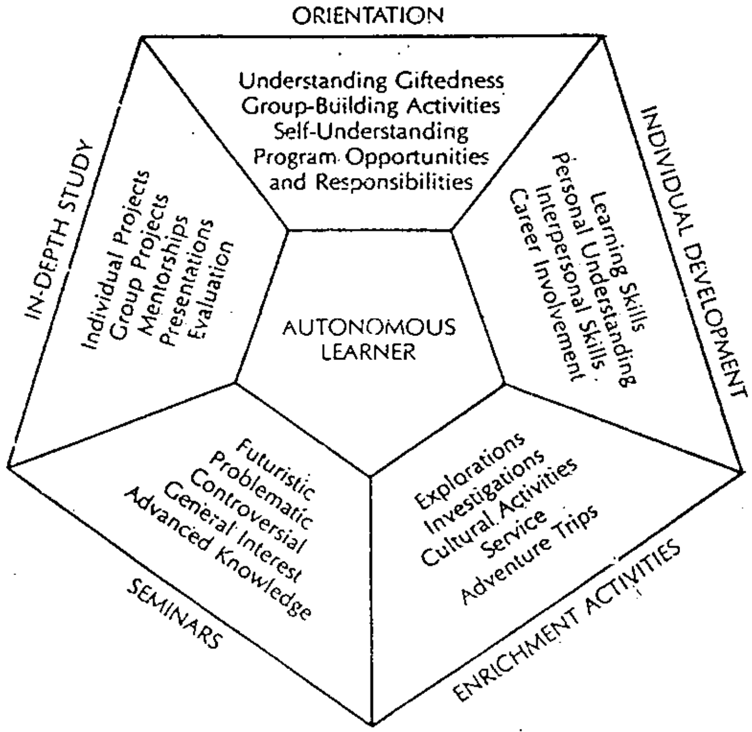
9. *การคัดเลือกและการประกาศผล* (selection and notification) คณะกรรมการคัดเลือกจะต้องเริ่มกระบวนการคัดเลือกด้วยความระมัดระวังโดยเฉพาะอย่างยิ่งการประเมินความต้องการของเด็กที่มีต่อองค์ประกอบและข้อเลือกต่าง ๆ ของโปรแกรม ALM คณะกรรมการต้องประชุมและคัดเลือกเด็กเข้าเรียนในโปรแกรมซึ่งไม่ใช่ตัดสินใจบนพื้นฐานของข้อมูลที่มีลักษณะผูกติดกรอบตายตัว แต่จะต้องเป็นข้อมูลทั้งหมดทุกแง่มุมที่ถูกรวบรวมไว้ สิ่งสำคัญอีกประการหนึ่งคือ จะต้องคัดแยกประเภทต่าง ๆ ของความสามารถพิเศษที่ได้นิยามไว้แล้ว ซึ่งจะต้องมีความกว้างขวางครอบคลุมทั้งเด็กที่อยู่ในเกณฑ์และต่ำกว่าเกณฑ์ของความเป็นผู้มีความสามารถพิเศษ ครอบคลุมเกี่ยวกับเรื่องความคิดสร้างสรรค์ และท้ายที่สุดจะต้องปิดประกาศผล

การตัดสินใจเพื่อให้ผู้ปกครอง ครู ผู้มีอุปการคุณต่อโรงเรียนและคณะผู้บริหารโรงเรียนได้รับทราบ

10. *การร้องทุกข์ การพัฒนากระบวนการค้นหาและคัดเลือก* (appeal and ongoing search / selection)กระบวนการคัดเลือกของเราอาจไม่แม่นยำพอ บุคลากรท้องถิ่นอาจมองข้ามเด็กเก่งไป เด็กที่ไม่ได้รับการคัดเลือกมีสิทธิ์เขียนคำร้องต่อเจ้าหน้าที่ท้องถิ่นเพื่อจะทำการประเมินตัวเขาเพิ่มเติม แม้จะคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้แล้ว แต่กระบวนการในการคัดเลือกก็ไม่ได้สิ้นสุดเพียงเท่านี้ จะต้องมีการประเมินผลตามระยะพัฒนาการของนักเรียน และใช้เทคนิคกิจกรรมใหม่ ๆ เพื่อปรับปรุงกระบวนการคัดเลือกให้ดียิ่งขึ้นต่อไปในอนาคต

11. *ความเจริญก้าวหน้าและการขยายขอบเขตของโปรแกรม* ALM (ongoing and programmig expansions) การกำหนดความเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษไม่ใช่เพียงพิจารณาจาก I.Q. และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากการสอบเท่านั้น แต่ยังมีองค์ประกอบอื่น ๆ อีกหลายส่วนที่ทำให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีความแตกต่างกัน ดังนั้นโปรแกรม ALM จะต้องจัดทางเลือกกิจกรรมหรือหัวข้อต่าง ๆ เพิ่มเติมขึ้นเพื่อสนองตอบความต้องการของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเหล่านั้น ดังนั้นการประชุมประจำปีของคณะผู้บริหารโรงเรียนจะช่วยให้ตัดสินใจได้ว่า อะไรคือสิ่งที่จะต้องปรับปรุง เพิ่มเติมหรือคงไว้ในโปรแกรม ALM สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

รูปแบบของ ALM มีองค์ประกอบหลักอยู่ 5 มิติ ซึ่งองค์ประกอบทั้งห้าได้รับการออกแบบและตระเตรียมไว้เพื่อเสริมสร้างประสบการณ์ที่เหมาะสมและส่งเสริมให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษสามารถพัฒนาการเรียนรู้ด้วยตนเอง แต่ละองค์ประกอบจะจัดเตรียมข้อมูล ประสบการณ์ เจตคติ ทักษะและความคิดรวบยอดต่าง ๆ ที่จำเป็น ดังนี้

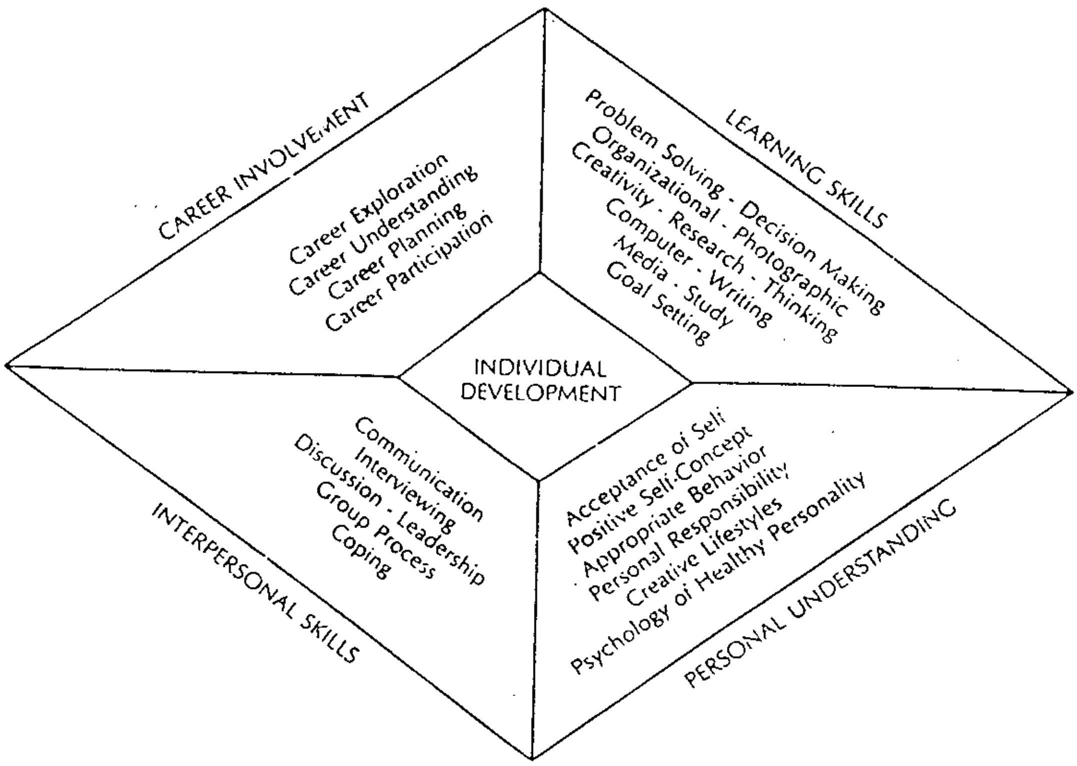


ภาพประกอบ 4 รูปแบบการเรียนการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแบบ ALM

มิติที่1. *ด้านการปฐมนิเทศ* (Orientation Dimension) แบ่งขอบข่ายที่จะนำเสนอแก่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษออกเป็น 4 ส่วนคือ ความเข้าใจต่อความเป็นอัจฉริยะ โดยให้เด็กได้มีโอกาสพบกับบุคคลที่มีความเป็นอัจฉริยะในด้านต่าง ๆ การสร้างกิจกรรมกลุ่ม การศึกษาเรียนรู้ตนเอง และความเหมาะสมของโปรแกรมรวมทั้งความรับผิดชอบของโปรแกรม เป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับเด็กและผู้ปกครองที่จะต้องทำความเข้าใจต่อความเหมาะสมและภาระความรับผิดชอบของโปรแกรม ALM ที่จัดไว้เพื่อให้บริการแก่เด็กที่เข้าร่วม ผู้จัดโปรแกรมจะต้องเน้นให้ผู้ปกครองมีความเชื่อมั่นและเข้าใจว่าเด็กจะได้รับการพัฒนาอย่างสมบูรณ์ได้อย่างไร และภารกิจใดที่จะต้องดำเนินการต่อไปในอนาคต

มิติที่ 2. *ด้านการพัฒนาเฉพาะบุคคล* (Individual Development Dimension) กิจกรรมสำหรับเด็กได้ถูกจัดเตรียมไว้โดยความเห็นชอบร่วมกันระหว่างเด็กและครูเพื่อเป็นการพัฒนาทักษะต่าง ๆ ความคิดรวบยอดและเจตคติที่ดีและจำเป็นต่อการเรียนรู้ตลอดชีวิต ซึ่งประกอบด้วย การเรียนรู้ทักษะต่าง ๆ เพื่อมุ่งเน้นความก้าวหน้าและพัฒนาทักษะการเรียนรู้ ความสามารถในการสร้างสรรค์ ทักษะการคิด ทักษะการจัดระบบและทักษะการวิจัย การพัฒนาความเข้าใจส่วนบุคคล เพื่อให้เกิดเจตคติและความคิดรวบยอดที่ดีต่อตน

เอง การสร้างทักษะในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล ให้สามารถสื่อสารกับเพื่อน ๆ ครู ผู้ปกครอง หรือบุคคลอื่นได้ รวมถึงทักษะในการอภิปราย การประกอบอาชีพ ให้เด็กได้สำรวจและทำความเข้าใจเกี่ยวกับอาชีพต่าง ๆ เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถของตนเอง วางแผนและฝึกฝนตนเองให้สอดคล้องกับอาชีพที่สนใจ



ภาพประกอบ 5 ด้านการพัฒนาเฉพาะบุคคล

มิติที่ 3. *ด้านกิจกรรมเสริมการเรียน* (Enrichment Activities Dimension) จัดให้มีกิจกรรมเสริมการเรียน เพื่อให้เด็กเรียนรู้มากขึ้นในส่วนที่เกี่ยวกับชุมชนของตนและโลกกว้าง เด็กจะต้องได้รับโอกาสที่จะเรียนรู้และตัดสินใจที่จะเลือกหัวข้อหรือเนื้อหาที่จะเรียนรู้และเลือกวิธีการที่จะเรียนรู้ด้วยตนเอง เนื้อหาที่สำคัญจะต้องผ่านการประชุมพิจารณาจากคณะผู้บริหารโรงเรียน ผู้บริหารโรงเรียนและครู

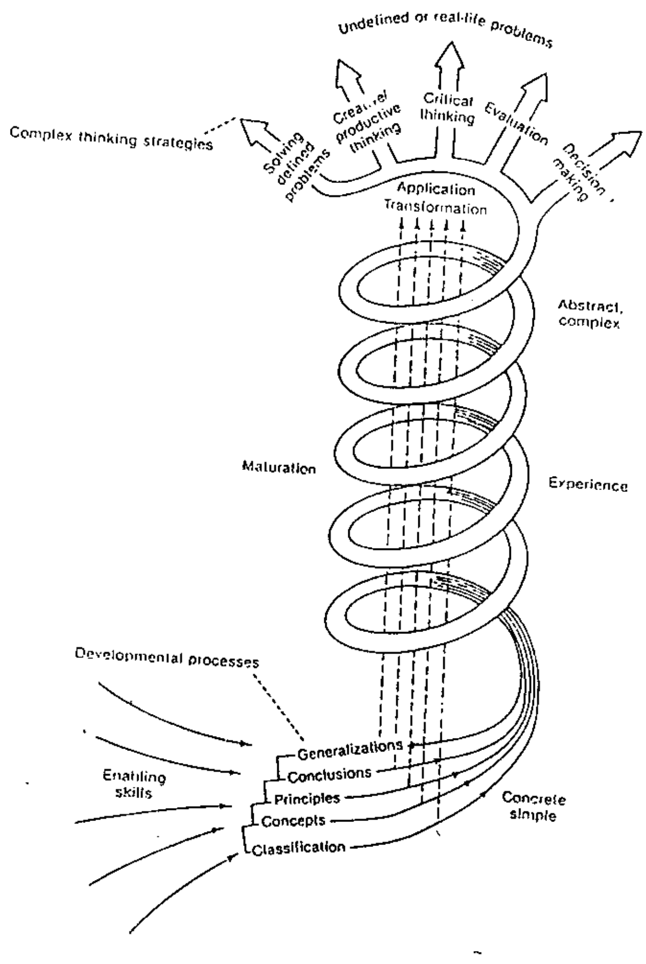
มิติที่ 4. *ด้านการศึกษาค้นคว้าอิสระ* (Seminar Dimension) เปิดโอกาสให้เด็กวิจัยอย่างอิสระเพื่อเป็นการเน้นย้ำให้ได้มาซึ่งผลผลิตของการศึกษาค้นคว้าตามแนวคิดหรือหัวข้อที่ตนสนใจอย่างหลากหลาย เป็นอิสระและเปิดกว้าง

มิติที่ 5. *การศึกษาในแนวลึก* (In-Depth Study) เป็นองค์ประกอบสุดท้ายที่เป็นเป้าหมายหลักที่เด็กแต่ละคนต้องการบรรลุผล และเป็นสิ่งที่เป็นความมุ่งหวัง อย่างยิ่งของ ALM ที่ต้องการให้เด็กได้พัฒนาตนเอง การศึกษาในแนวลึกอาจเป็นการศึกษาอิสระเพียงคนเดียวหรือกลุ่มย่อยประมาณ 2 ถึง 3 คน โดยศึกษาอย่างลึกซึ้งโดยมีการกำหนดหัวข้อ รายละเอียดของเนื้อหา วิธีการศึกษา วัสดุอุปกรณ์และกิจกรรม ข้อคำถาม กลุ่มบุคคลและเครื่องมือ ทรัพยากร แผนงานแสดงความก้าวหน้าและวิธีการนำเสนอผลการดำเนินงาน เป็นการศึกษาค้นคว้าระดับสูงที่ต้องอยู่ภายใต้คำแนะนำอย่างใกล้ชิดของครูเพื่อให้ได้มาซึ่งผลของความรู้ที่ถูกต้องและลึกซึ้ง (Colangelo and Davis. 1991 : 142-152)

รูปแบบการเรียนการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแบบ ALM เป็นประเด็นที่น่าสนใจในการจัดหลักสูตรของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ แต่ต้องมีคณะทำงานเป็นโครงการใหญ่ ใช้เวลามาก ดังนั้นผู้วิจัยจะยังไม่ใช้รูปแบบนี้ในการวิจัย แต่จะนำแนวคิดสำคัญ ๆ เช่น การมุ่งเน้นความก้าวหน้าและพัฒนาทักษะการเรียนรู้ ความสามารถในการสร้างสรรค์ ทักษะการคิด การพัฒนาความเข้าใจตนเองเพื่อให้เกิดเจตคติและความคิดรวบยอดที่ดีต่อตนเอง การสร้างทักษะในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลให้สามารถสื่อสารกับเพื่อน ๆ หรือบุคคลอื่นได้ และพัฒนาเด็กให้เป็นผู้มีความสามารถในการเรียนรู้ด้วยตนเอง

นอกจากรูปแบบการเรียนการสอนแล้วยังมีรูปแบบบันไดเวียนของการคิด (The Spiral Model of Thinking) ชีฟเวอร์ (Colangelo and Davis. 1991 : 103-105 ; citing Schiever. 1990) ได้พัฒนารูปแบบของการคิด เพื่อตรวจสอบบทบาทของการพัฒนาหลักสูตรการเสริมการเรียนรู้และการเร่งการเรียนรู้ ชีฟเวอร์ จินตนาการทักษะการคิดและพัฒนาการของการคิดว่ามีความต่อเนื่องเชื่อมโยงกันของทักษะ วุฒิภาวะและประสบการณ์ที่มีลักษณะเช่นเดียวกับเกลียวหมุนวนของบันไดเวียน พัฒนาการของการคิดเริ่มจากมนุษย์ต้องมีทักษะในการคิด(Enabling skill) มีกระบวนการพัฒนาความคิด(Developmental processes) ยุทธศาสตร์การคิดที่ซับซ้อน (Complex thinking strategies) จนถึงการแก้ปัญหาที่คลุมเครือ หรือปัญหาในชีวิตจริง (Undefined or real-life problems) ในบันไดเวียน การสร้างความรู้เบื้องต้นต้องอาศัยทักษะในการคิด ทักษะเหล่านี้จะเป็นแรงขับเคลื่อนให้เกิดการสร้างความคิดในแง่มุมต่าง ๆ ที่เป็นไปได้แล้วส่งผ่านไปสู่กระบวนการพัฒนาความคิด ส่งต่อไปผ่านยุทธศาสตร์การคิดที่ซับซ้อนและนำไปสู่การแก้ปัญหาที่คลุมเครือหรือปัญหาในชีวิตจริง การพัฒนากระบวนการคิดจากทักษะการคิดง่าย ๆ ชัดเจนไปสู่กระบวนการคิดที่ซับซ้อนขึ้น เช่น การจัดหมวดหมู่ (classification) การสร้างความคิดรวบยอด (concept) การสร้างหลักการ (principles) การสรุป (conclusions) และการกำหนดนัยทั่วไป (generalizations) ซึ่งการพัฒนาบางกระบวนการคิดจะถ่ายโอนหรือประยุกต์ไปสู่ความคิดที่ซับซ้อนขึ้นได้ดีเพียงใดย่อมขึ้นอยู่กับระดับวุฒิภาวะและประสบการณ์ของบุคคลนั้น ๆ ด้วยเช่นกัน เช่นเด็กเล็กอาจสามารถจัดหมวดหมู่วัตถุตามรูปร่าง หรือ สีของวัตถุนั้น เพื่อสร้างแบบแผนหรือแก้ปัญหา ในขณะที่เมื่อมีวุฒิและประสบการณ์มากขึ้นเขาก็จะเก็บสะสมความรู้ที่มีอยู่นำไปสู่การจัดหมวดหมู่ในระดับสูงที่เป็นนามธรรม และมีความซับซ้อนยิ่งขึ้นได้ เช่น มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความรัก ความไม่เห็นแก่ตัว หรือสภาพอนันต์เป็นต้น

การบรรลุผ่านลำดับชั้นของกระบวนการพัฒนาความคิดและประสบการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตเปรียบเหมือนเกลียวของบันไดเวียนที่หมุนวนอย่างค่อยเป็นค่อยไปขึ้นสู่ความคิดในระดับการถ่ายโอน และการประยุกต์ เพื่อนำไปสู่ขั้นยุทธศาสตร์การคิดที่ซับซ้อน ซึ่งประกอบด้วย 1) การนิยามปัญหา (Defined problem) 2) การตัดสินใจสั่งการ (Decision making) 3) การคิดอย่างมีวิจารณญาณ (critical thinking) 4) ความคิด/ผลงานสร้างสรรค์ (Creative/Productive thinking) และ 5) การประเมินผล (Evaluation) ดังแสดงไว้ในภาพประกอบ 6 ยุทธศาสตร์การคิดที่ซับซ้อนเหล่านี้เป็นสิ่งสำคัญในการนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ซับซ้อนคลุมเครือตลอดจนปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริงทั้งหลาย



ภาพประกอบ 6 รูปแบบบันไดเวียนของการคิด

เกณฑ์ในการเลือกรูปแบบการเรียนการสอนที่จะนำไปใช้ มีดังนี้

1. *ความเหมาะสมกับสถานการณ์* (appropriate to the situation) กล่าวคือเหมาะสมกับสภาพโรงเรียน ห้องเรียน ปรัชญาของโรงเรียน ความคาดหวังของพ่อแม่ และลักษณะพิเศษของครูผู้สอน

2. *ความครอบคลุม* (comprehensiveness) รูปแบบที่เลือกใช้ควรครอบคลุมเนื้อหาวิชา วิธีสอน

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สภาพแวดล้อมทางการเรียน ถ้าไม่ครอบคลุมยังขาดในด้านใด จะสามารถเสริมหรือปรับปรุงได้หรือไม่

3. *ความยืดหยุ่นหรือการนำไปปรับใช้* (flexibility or adaptability) รูปแบบที่เลือกนี้สามารถนำไปปรับใช้กับวิชาอื่น ๆ ได้เพียงไรสามารถปรับใช้ในระบบโครงสร้างการบริหารและหลักสูตรที่มีอยู่ได้หรือไม่ สามารถปรับใช้ร่วมกับรูปแบบอื่นได้หรือไม่ สามารถปรับใช้กับเด็กระดับวัยต่าง ๆ ได้หรือไม่ สามารถปรับเพื่อสนองความแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคนได้หรือไม่

4. *การปฏิบัติ* (practicality) รูปแบบที่เลือกนี้มีวัสดุอุปกรณ์ที่พอจะนำมาใช้หรือผลิตขึ้นได้ ค่าใช้จ่ายไม่สูงเกินไป การอบรมครูเพื่อใช้รูปแบบพอจะทำได้ และการนำรูปแบบไปใช้ในสถานการณ์ที่เป็นอยู่พอจะทำได้

5. *ความเที่ยงตรง* (validity) กล่าวคือรูปแบบการสอนใช้วิธีการพัฒนาเหมาะสมเพียงใดมีผลการวิจัยที่สนับสนุนประสิทธิผลของวิธีสอนรูปแบบนั้นหรือไม่ และได้นำไปใช้ในการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแล้วอย่างไร เป็นต้น

ขั้นสุดท้ายของการเลือกและนำรูปแบบการเรียนการสอนไปใช้ คือ การพิจารณาว่าจะนำรูปแบบใดไปใช้ในการสอนเรื่องใด ระดับชั้นใด และอายุเท่าไร อนึ่งการผสมผสานของรูปแบบหลายรูปแบบก็อาจจำเป็นในการสอนบางสถานการณ์ ในบางเรื่องอาจจะใช้รูปแบบหนึ่งแต่อีกเรื่องอาจจะใช้รูปแบบอื่นก็ได้ ตัวอย่างเช่น รูปแบบของบรูนเนอร์ ซึ่งเน้นการสอนมโนมติที่สำคัญ วิธีสอนอาจจะใช้วิธีการค้นพบ ถึงแม้รูปแบบของเขาจะเน้นเนื้อหาก็ตาม ส่วนรูปแบบของบลูมและคราธโวลจะมุ่งเน้นกระบวนการคิดมิได้เน้นเนื้อหาวิชา รูปแบบของกิลฟอร์ดถึงแม้จะครอบคลุมทั้งเนื้อหา วิธีสอนและผลสัมฤทธิ์แต่ก็สามารถจะนำรูปแบบของผู้อื่นเข้ามาผสมผสานได้ รูปแบบของเรนซูลลีก็อาจจะนำรูปแบบของบลูม ทาบา เทเลอร์ โคลเบอร์ก และคราธโวลเข้าไปผสมผสานได้อย่างดี (เมคเกอร์. 2540 : 6-7)

สำหรับงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะเน้นการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของ ซิดนีย์ ปาร์น เพราะรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์มีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่พัฒนาขึ้น คือ เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาศักยภาพของตนเองให้ได้ขีดสูงสุดในด้านการเรียนรู้ การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ และการใช้ความคิดระดับสูงทางพีชคณิต ลงมือปฏิบัติงานในระดับที่ทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างจริงจัง โดยนักเรียนจะหาความรู้ทางพีชคณิตด้วยตนเอง เกิดความเชื่อมั่นในตนเองและสามารถสื่อความหมายในสาขาคณิตศาสตร์ได้ ผู้สอนจะทำหน้าที่เพียงสังเกต ชี้ประเด็นความคิด และแก้สถานการณ์ตามความจำเป็นแบบพี่เลี้ยง โดยผู้วิจัยได้จัดทำหลักสูตรพีชคณิตที่ประกอบ ไปด้วยจุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ การวัดและประเมินผล มี กิจกรรมการเรียนการสอนเป็นไปตามลำดับขั้นของการเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ คือ ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาตัวอย่างในหลักสูตร ให้ปัญหานักเรียนเพื่อใช้กระบวนการแก้ปัญหา กล่าวคือ แสวงหาแนวคิดโดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมกันคิด แสวงหาคำตอบ เลือกทางเลือกที่จะทำให้สามารถแก้ปัญหาได้ดีที่สุด และ

แสวงหาการยอมรับ ฝึกนักเรียนให้มีทักษะในการระดมพลังสมอง โดยนักเรียนต้องวางแผนปฏิบัติงานการแก้ปัญหาให้เป็นที่ยอมรับของทุกคน โดยนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละปัญหาหน้าชั้นเรียน

บรรยากาศในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

เป็นที่เข้าใจกันโดยทั่วไปว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ สามารถเรียนรู้ได้อย่างง่ายดายด้วยตนเองโดยครูเป็นเพียงผู้อำนวยความสะดวกในการจัดการเรียนการสอนและการวัดผลประเมินผล ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นสิ่งที่นักการศึกษาทางคณิตศาสตร์ได้ใช้ความพยายามในการพัฒนาให้เกิดแก่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษตลอดมา และเป็นสิ่งที่จะกระทำต่อไปในทศวรรษหน้า ทั้งนี้เพราะการเรียนรู้ด้วยวิธีแก้ปัญหา (problem solving) เป็นสิ่งที่ยอมรับโดยทั่วกันอย่างกว้างขวางว่ามีความสำคัญต่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ถือได้ว่าเป็นสิ่งที่มีผลต่อความสามารถทางคณิตศาสตร์ (NCTM. 1980 : 2) การฝึกแก้ปัญหาเป็นการเน้นย้ำเพื่อให้เกิดทักษะการใช้ความคิดในระดับสูงขึ้น การจัดสภาพแวดล้อมในชั้นเรียนจะต้องมีลักษณะท้าทาย ส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้ และเสริมสร้างให้เกิดความเชี่ยวชาญ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะต้องเรียนรู้ภายในสภาพแวดล้อมที่ได้รับการนำเสนอปัญหาที่มีความหมาย และได้ใช้เวลาอย่างพอเพียงในการใช้ความคิดโดยปราศจากการรบกวน ภายในสภาพแวดล้อมดังกล่าว สิ่งที่มีความสำคัญเป็นอันดับแรกคือ จะต้องมีครูที่มีคุณภาพและมีความเชี่ยวชาญอย่างยิ่งเป็นผู้ให้คำแนะนำมิใช่ให้เด็กอยู่ตามลำพัง ปัญหา โครงงาน และเกมเสริมการเรียนที่ได้รับจะต้องมีความเหมาะสมสนองตอบความเชี่ยวชาญของเด็กเหล่านั้น เดวิดสัน (Davidson. 1990 : 52-53) กล่าวถึงการเรียนคณิตศาสตร์ว่า โดยปกติแล้วเป็นลักษณะที่ผู้เรียนแยกตัวอิสระ เป็นการเรียนรู้รายบุคคลหรืออาจมีลักษณะเป็นการแข่งขัน โดยนักเรียนนั่งคนเดียวและพยายามทำความเข้าใจสื่อ บทเรียน หรือแก้ปัญหาที่กำหนด กระบวนการดังกล่าวทำให้ผู้เรียนรู้สึกโดดเดี่ยว และไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน เมื่อไม่ประสบผลสำเร็จก็จะเกิดความเบื่อหน่าย ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนกลัวและมีความวิตกกังวลในการเรียนคณิตศาสตร์ เดวิสันเชื่อว่ามีนักเรียนเก่งเพียงเล็กน้อยเท่านั้นที่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ และวิธีการหนึ่งที่จะแก้ไขข้อบกพร่องเหล่านี้ก็คือการใช้ วิธีการแบ่งกลุ่มเรียนแบบร่วมมือ (cooperative groups) ในการแก้โจทย์ปัญหา เด็กหลาย ๆ คนจะรู้สึกมีอิสระในการคิดและพูดเมื่อเรียนกลุ่มย่อยมากกว่าเรียนในชั้นเรียนรวม การเรียนโดยวิธีแก้ปัญหาในกลุ่มย่อยจะทำให้เกิดการแลกเปลี่ยนประสบการณ์ พัฒนามโนมติของตนเอง รับฟังความคิดเห็น รวมทั้งความเข้าใจและซาบซึ้งในแนวคิดต่าง ๆ ของสมาชิกภายในกลุ่ม อาจมีนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษต้องการได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลือจากครูเมื่อเกิดความผิดพลาดในการคิดแก้ปัญหา และมักจะเกิดเจตคติที่ไม่ดีต่อตนเองเมื่อเกิดความผิดพลาดขึ้น เขาต้องการสภาพแวดล้อมในการเรียนที่เอื้ออำนวยให้มีอิสระที่จะเรียนรู้จากข้อผิดพลาดเหล่านั้น และนอกเหนือจากการจัดชั้นเรียนโดยทั่ว ๆ ไปครูจะต้องจัดเตรียมสื่อต่าง ๆ เพื่อฝึกทักษะทางตรรกศาสตร์ ฝึกทักษะในการมองภาพและฝึกปฏิสัมพันธ์ระหว่างกลุ่ม สภาพชั้นเรียนต้องมีความแตกต่างจากเดิมที่เคยเน้นบทบาทของครูเป็นจุดศูนย์กลางหรือครูเป็นผู้สั่งการ มาสู่การเรียนแบบร่วมมือ

(cooperative learning) เป็นการเรียนที่ผู้เรียนทำการแก้ปัญหาร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ทำงานร่วมกันเพื่อให้บรรลุเป้าหมาย โดยสมาชิกในกลุ่มต้องพูดอธิบายแนวคิดกัน ช่วยเหลือกันให้เกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหา ครูมีบทบาทเป็นผู้คอยให้ความช่วยเหลือ จัดหาและชี้แนะแหล่งข้อมูลในการเรียนรู้ของนักเรียน ตัวนักเรียนเองจะเป็นแหล่งความรู้ซึ่งกันและกันในกระบวนการเรียนรู้ (Artzt and Newman. 1990 : 448-449 ; Ajose and Joyner. 1990 : 198) ลักษณะของชั้นเรียน เป็นชั้นเรียนเปิดมีความสะดวกสบายเอื้อให้เกิดความมีอิสระในการเรียนรู้และต้องประกอบด้วยหลักสูตรที่จัดให้เฉพาะสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ การจัดสภาพแวดล้อมในชั้นเรียนจะทำให้การเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษประสบความสำเร็จ คลาร์กและ แคปแลน (Clark. 1987 ; Kaplan. 1974 : 8) ได้กล่าวไว้สรุปได้ดังนี้ สภาพชั้นเรียนควรมีลักษณะเป็นห้องปฏิบัติการ ซึ่งต้องมีสื่อและวัสดุที่มากพอที่สามารถเพิ่มพูนสติปัญญาส่งเสริมการฝึกฝนความคิดและการสร้างความเข้าใจด้วยตนเองและเน้นการเรียนด้วยการหาผลลัพธ์จากการทดลอง จัดประสบการณ์ที่เหมาะสมโดยเฉพาะอย่างยิ่งบรรยากาศการเรียนรู้แบบร่วมมือ คำนึงถึงหลักจิตวิทยาและความต้องการทางสังคมของเด็ก หลักสูตรจะต้องเปิดโอกาสให้เด็กมีทางเลือก ท้าทาย ขอบเขตเนื้อหากว้างขวางในขณะเดียวกันต้องเน้นให้เกิดบรรยากาศการเรียนรู้อย่างอิสระ สามารถตอบปัญหา ประยุกต์และสร้างความรู้ใหม่ขึ้นได้ในชั้นเรียน ควรมีบรรยากาศของความเชื่อถือ ไว้วางใจ การยอมรับและนับถือจะต้องระมัดระวังไม่ให้สภาพชั้นเรียนอยู่ในลักษณะขาดการวางระบบที่ดีและเคร่งครัดระเบียบแบบแผนเกินไปแต่ต้องมีความรู้สึกอบอุ่น ปลอดภัย เป็นอิสระ ควรหลีกเลี่ยงการเรียนแบบบรรยายหรือให้มีน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ แต่เน้นการค้นพบ หรือแนะแนวทางให้เกิดการค้นพบด้วยการร่วมกันอภิปราย ครูต้องมีความระมัดระวังในการแบ่งช่วงเวลาที่เหมาะสมในการเตรียมทักษะและมโนมติพื้นฐานที่จำเป็นและเนื้อหาสำคัญ ๆ ต่าง ๆ ที่อาจถูกละเลยเมื่อเด็กเกิดความเบื่อหน่าย หรือขัดขืนในการเรียนรู้แบบกระทำซ้ำ เป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งที่ครูผู้สอนจะต้องใช้ความนุ่มนวลที่จะชี้ให้เห็นถึงความจำเป็นที่จะต้องปรับปรุงแก้ไขโดยไม่ให้กระทบการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์ของเด็ก การสร้างแรงจูงใจโดยการให้เด็กมองเห็นถึงคุณค่าของการเรียนรู้และการฝึกปฏิบัติด้วยสื่อต่าง ๆ จะเป็นสิ่งช่วยขจัดความเบื่อหน่ายเหล่านั้น

กล่าวโดยสรุปในการจัดหลักสูตรและบรรยากาศในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษควรยึดหลักสำคัญ 3 ประการ คือ ยึดขยายหลักสูตรเดิมให้กว้างขวางและละเอียดพิสดารกว่าเดิม สร้างหลักสูตรอยู่บนพื้นฐานธรรมชาติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ และพัฒนาส่วนประกอบต่าง ๆ เช่น เนื้อหา วิธีการในการถ่ายทอดเนื้อหาให้แก่นักเรียน ควรแยกชั้นเรียนโดยจัดเฉพาะกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ และไม่ควรจัดเป็นหลักสูตรเร่งรัด เพราะการจัดหลักสูตรเร่งรัดมีข้อจำกัดที่ต้องระมัดระวัง เช่น การเกิดช่องว่างระหว่างพัฒนาการทางวิชาการกับพัฒนาการทางร่างกาย อารมณ์ และสังคมของเด็ก ถ้าจะจัดหลักสูตรเร่งรัดควรมีการศึกษาถึงความสามารถและความต้องการ ตลอดจนจุดบกพร่องของเด็กแต่ละคนโดยละเอียดก่อนการจัดการศึกษาให้แก่เด็ก ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ยุ่งยาก ต้องใช้เวลาและความสามารถเชิงจิตวิทยามาเกี่ยวข้อง ต่างจากการจัดหลักสูตรเสริมการเรียนซึ่งทำได้ง่ายกว่า ไม่ต้องใช้เวลามาก เป็นหลักสูตรที่ช่วยเพิ่ม

ให้นักเรียนมีความรู้มากขึ้น มีประสบการณ์ในหลาย ๆ ด้านมากขึ้น เป็นหลักสูตรที่พัฒนาเพิ่มเติมเนื้อหารวมทั้งยุทธศาสตร์ในการสอนให้สอดคล้องกับธรรมชาติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะพัฒนาหลักสูตรเสริมการเรียนให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ให้ได้เรียนรู้เรื่องพีชคณิตนอกเหนือจากหลักสูตรปกติ โดยให้เรียนในช่วงวันหยุดปิดภาคเรียน รูปแบบการจัดการเรียนการสอนจะเน้นการแก้ปัญหาซึ่งเป็นธรรมชาติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่ชอบแก้ปัญหาที่ท้าทาย และส่งเสริมให้นักเรียนพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาต่าง ๆ

ลักษณะของครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

คุณลักษณะพิเศษของครูมีส่วนช่วยในการเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จากการศึกษางานวิจัยและเอกสารที่เกี่ยวข้องกับครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษพบว่า เมคเกอร์ คลาร์ก โพลยา โรเจอร์(Maker. 1975 :41 ; Clark. 1983 : 365 ; Polya. 1981 : 116-117 ; Roger. 1986 : 15) ได้เสนอแนะว่าคุณลักษณะของครูที่ดีสำหรับสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมีดังนี้

1. มีเชาวน์ปัญญาสูง
2. มีความยืดหยุ่นและการคิดสร้างสรรค์
3. มีความเชื่อมั่นตนเอง
4. มีความสนใจหลายด้าน
5. มีอารมณ์ขัน
6. มีความเข้าใจปัญหาของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
7. มีความเข้าใจตนเอง
8. มีความรักในการเรียนรู้
9. มีความเป็นผู้อำนวยความสะดวกในการเรียน

เมคเกอร์ กล่าวว่าคุณลักษณะดังกล่าวนี้เป็นที่ต้องการสำหรับครูทุกคนแต่มีความต้องการมากเป็นพิเศษสำหรับครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จากคุณสมบัติทั้งหมดนี้ เมคเกอร์ได้เน้นคุณลักษณะที่สำคัญอยู่สามประการ คือ 1) การมีเชาว์ปัญญาสูง 2) การมีความรู้ในเนื้อหาวิชา และ 3) การมีวุฒิภาวะทางอารมณ์ เนื่องจากนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมักจะมีใจจดจ่อในการเสาะแสวงหาความรู้และมักจะตอบคำถามผิดพลาดได้ง่าย ครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเหล่านี้จึงควรเป็นผู้ที่มีเชาวน์ปัญญาเป็นเลิศที่จะคอยให้คำตอบหรือทิศทางที่ถูกต้องได้ และเป็นผู้มีวุฒิภาวะทางอารมณ์ที่สามารถยอมรับเมื่อตนหาคำตอบให้เด็กไม่ได้

บิชอพ (Bishop. 1968 : 317-325)ได้สำรวจคุณลักษณะของครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษคัดเลือกว่าเป็นครูสอนดี ข้อค้นพบของบิชอพส่วนมากจะเสริมในสิ่งที่เมคเกอร์กล่าวไว้แล้วดังนี้

1. มีวุฒิภาวะทางอารมณ์
2. มีความพอใจในการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ
3. มีเชาวน์ปัญญาเหมือนคนอื่น
4. มีความกระตือรือร้นในวิชาที่สอน
5. มีความสนใจด้านวรรณคดีและวัฒนธรรม
6. มีพฤติกรรมเป็นคนเอาการเอางานเมื่ออยู่ในห้องสอน
7. มีความรักในการจัดกิจกรรมการศึกษาพิเศษสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

แมคนารี (McNary. 1967 : 42) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคุณลักษณะของครูกับการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับการคิดกว้างไกล (โดยให้เลือกคำตอบถูกได้หลายตัว) และการคิดแคบ (โดยให้เลือกคำตอบถูกได้เพียงตัวเดียว) ของเด็กทำให้พบคุณลักษณะด้านบุคลิกภาพ เช่น การมีวุฒิภาวะทางอารมณ์ การมีพลังในการทำงาน และการมีสมาธิเป็นองค์ประกอบสำคัญในการทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในด้านการคิดกว้างไกล สำหรับการคิดแคบนั้น พบว่าการยอมทำตาม การพึ่งพาคนอื่น การตื่นตัวอยู่เสมอ และความอบอุ่นเป็นองค์ประกอบสำคัญ โซลาโน (Solano. 1976 : 42) ได้พบว่าถ้าครูไม่มีประสบการณ์เกี่ยวกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษมาบ้างหรือไม่ได้เรียนวิชาเกี่ยวกับเด็กที่มีความสามารถพิเศษมาก่อนมักจะมีทัศนะต่อเด็กที่มีความสามารถพิเศษไปต่าง ๆ นานา ทัศนะเหล่านี้มักจะเป็นไปในทางลบสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่เป็นผู้ชาย และในทางบวกสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่เป็นผู้หญิง

ในทำนองเดียวกันสมิดเซนส์และเซลลินได้ศึกษาในเรื่องคล้ายกันและยังได้เน้นความต้องการในการฝึกอบรมและการบริการพิเศษเพื่อปลี่ยนแปลงครูที่สอนในชั้นเรียนปกติให้เป็นครูสอนเด็กที่มีความสามารถพิเศษให้ได้ (ทัตเติล. 2530 : 41-42)

กล่าวโดยสรุปถึงคุณลักษณะของครูที่มีความสำคัญในการคัดเลือกมาเป็นครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ลักษณะที่สำคัญที่สุดคือการมีวุฒิภาวะอารมณ์ การมีเชาวน์ปัญญาสูง การมีความสนใจรอบด้าน และการมีความต้องการทำงานกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จะต้องมีความรู้และความสนใจจริงในการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ คุณลักษณะข้อนี้มีความสำคัญทั้งในการพัฒนาหลักสูตรและเจตคติในทางที่ดีและเสริมสร้างให้คงอยู่ตลอดไปสำหรับครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

การประเมินหลักสูตร

1. แนวคิดการประเมินหลักสูตร

การประเมินหลักสูตรนับว่าเป็นสิ่งสำคัญในการพัฒนาหลักสูตร เพราะเหตุว่าการประเมินหลักสูตรจะช่วยให้คำตอบเกี่ยวกับหลักสูตรที่พัฒนาขึ้นนั้นเป็นหลักสูตรที่ดี ไม่ดี มีจุดดี และจุดด้อยที่ใด ทั้งนี้ แนวคิดในการประเมินทั่วไป สตัฟเฟิลบีม (Stufflebeam) และคณะให้ไว้ว่า "การประเมิน คือกระบวนการในการ

หาข้อมูล เก็บข้อมูล เพื่อที่จะนำมาใช้ในการตัดสินหาทางเลือกอื่นที่ดีกว่าของเดิม" และโดยทั่ว ๆ ไปของการประเมินหลักสูตรใด ๆ ก็ตามมีจุดมุ่งหมายอยู่ 3 ประการ(ทิศนา แขมมณี. 2528 : 113-114) ได้แก่

1.1 เพื่อหาคุณค่าของหลักสูตรนั้น โดยดูว่า หลักสูตรที่จัดขึ้นสามารถสนองตามวัตถุประสงค์ที่หลักสูตรนั้นต้องการหรือไม่

1.2 เพื่อตัดสินว่า การวางเค้าโครงและรูปแบบของหลักสูตร ตลอดจนการบริหารงานและการสอนตามหลักสูตร เป็นไปในทางที่ถูกต้องแล้วหรือไม่

1.3 เพื่อวัดผลดูว่า ผลผลิตคือผู้เรียนนั้นเป็นอย่างไร

2. ประเภทการประเมินหลักสูตร

การประเมินหลักสูตรแบ่งออกเป็น 3 ประเภทตามระยะเวลาและจุดมุ่งหมายของการประเมินได้ดังนี้ (สมหวัง พิธิยานุวัฒน์. 2528 : 95,นิศา ชูโต. 2531 : 36-39)

2.1 การประเมินก่อนนำหลักสูตรไปใช้หรือการประเมินในระหว่างการร่างหลักสูตรเป็นการประเมินเพื่อศึกษาความเป็นไปได้ของการใช้หลักสูตร ตรวจสอบคุณภาพของหลักสูตรเพื่อหาข้อมูลในส่วนที่ไม่สมบูรณ์อันจะนำไปสู่การปรับแก้ก่อนนำหลักสูตรไปใช้

2.2 การประเมินในระหว่างการใช้หลักสูตร ในช่วงระยะการใช้หลักสูตร เพื่อเป็นการให้แน่ใจว่าหลักสูตรจะมีการดำเนินไปอย่างถูกต้อง จึงต้องมีการประเมินเป็นระยะเพื่อดูความก้าวหน้าการใช้หลักสูตรและเพื่อควบคุมแก้ไขปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้นในขณะใช้หลักสูตร

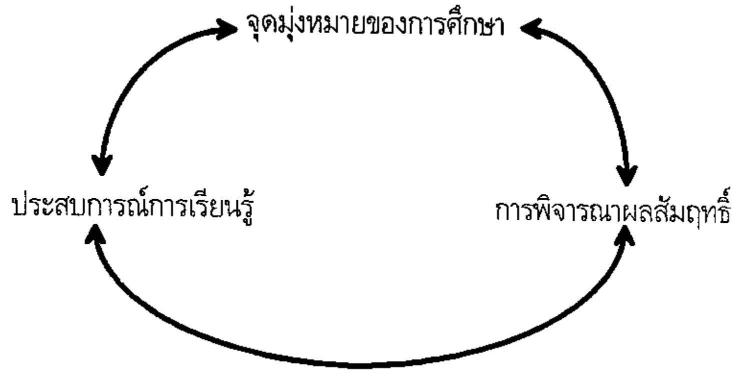
2.3 การประเมินหลังจากเสร็จสิ้นการใช้หลักสูตร เป็นการประเมินเพื่อสรุปผลการใช้หลักสูตรว่าบรรลุตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะสำหรับการพัฒนาหลักสูตรต่อไป

3. รูปแบบการประเมินหลักสูตร

รูปแบบการประเมินหลักสูตรมีผู้เสนอไว้หลายรูปแบบ แต่ละรูปแบบมีจุดเน้นแตกต่างกันออกไปตามลักษณะการใช้ ซึ่งจะนำเสนอ 2 รูปแบบดังนี้

3.1 รูปแบบการประเมินของไทเลอร์ (Tyler's Model of Evaluation)

ไทเลอร์ เป็นผู้ที่วางรากฐานการประเมินผลหลักสูตรนับตั้งแต่ปี ค.ศ.1930 และได้ให้คำนิยามของการศึกษาว่า การศึกษา คือ การเปลี่ยนพฤติกรรม ดังนั้นการประเมินหลักสูตรจึงเป็นการเปรียบเทียบว่าพฤติกรรมที่เปลี่ยนแปลงไปเป็นไปตามจุดมุ่งหมายที่ได้ตั้งไว้หรือไม่ (Worthen and Anders. 1973 : 211) นอกจากนี้ ไทเลอร์มีความเห็นว่ากระบวนการจัดการศึกษานั้นประกอบไปด้วยองค์ประกอบ 3 อย่างคือ จุดมุ่งหมายของการศึกษา ประสบการณ์การเรียนรู้ และการพิจารณาผลสัมฤทธิ์ซึ่งทั้งสามส่วนนี้จะมีความ สัมพันธ์กัน (Tyler. 1949 : 110-125) ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบทางการศึกษาตามแนวคิดของไทเลอร์

ตามแนวคิดดังกล่าวนี้ พื้นฐานของการจัดหลักสูตรก็คือ ผู้จัดทำหลักสูตรจะต้องสามารถวางจุดมุ่งหมายที่ชัดเจนว่าต้องการให้ผู้เรียนเปลี่ยน หรือมีพฤติกรรมเป็นอย่างไร และพยายามจัดประสบการณ์การสอนเพื่อช่วยผู้เรียนให้เปลี่ยนพฤติกรรมไปตามที่ต้องการ บทบาทของการประเมินหลักสูตรจึงอยู่ที่การดูผลผลิตของหลักสูตรว่าตรงตามจุดมุ่งหมายหรือไม่ แนวคิดของไทเลอร์ ยึดความสำเร็จของจุดมุ่งหมายเป็นหลัก

จุดมุ่งหมายของการประเมินหลักสูตรของไทเลอร์ถือว่าการประเมินหลักสูตรเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอนและเป็นส่วนหนึ่งของการพัฒนาหลักสูตรซึ่งจะได้เสนอขั้นการเรียนการสอนและการประเมินผลดังนี้

1. กำหนดจุดมุ่งหมายอย่างกว้าง ๆ โดยการวิเคราะห์ทรัพยากรของจุดมุ่งหมาย (goal sources) คือ นักเรียน สังคม เนื้อหาสาระ จิตวิทยาการเรียนรู้ และปรัชญาการศึกษา

2. กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมอย่างชัดเจน เฉพาะเจาะจง ซึ่งจะเป็นพฤติกรรมที่ต้องการวัดในภายหลัง

3. กำหนดเนื้อหาหรือประสบการณ์ทางการศึกษาเพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้

4. เลือกวิธีการเรียนการสอนที่เหมาะสมที่จะทำให้เนื้อหา หรือประสบการณ์ที่วางไว้ประสบความสำเร็จ

5. ประเมินผลโดยการตัดสินด้วยการวัดผลทางการศึกษา หรือการทดสอบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน

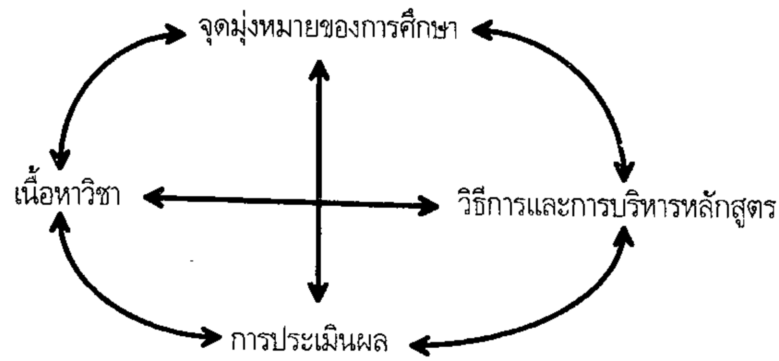
6. ถ้าไม่บรรลุจุดมุ่งหมายที่วางไว้ก็จะต้องมีการตัดสินใจที่จะยกเลิกหรือปรับปรุงหลักสูตรนั้น แต่ถ้าบรรลุตามจุดมุ่งหมายก็อาจจะใช้ผลสะท้อนกลับ ของหลักสูตรนั้นเป็นข้อมูลในการปรับปรุงการกำหนดจุดมุ่งหมาย หรือใช้เป็นข้อมูลในการพัฒนาคุณค่าของหลักสูตร

การประเมินตามขั้นตอนของไทเลอร์จึงเป็นกระบวนการเวียนซ้ำ นอกจากนั้นการเปลี่ยนแปลงข้อแก้ไขหรือปรับปรุงจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่ประเมินนั้นก็จะส่งผลให้เกิดการปรับปรุงวิธีการในการประเมินด้วย

(Worthen and Sanders. 1973 : 156) การประเมินผลแบบนี้จึงมีลักษณะเป็นการประเมินผลสรุป

3.2 รูปแบบการประเมินของทาบา (Taba's Model of Evaluation)

ทาบา (Taba. 1962 : 413-444) เสนอรูปแบบการพัฒนาหลักสูตรโดยให้ชื่อว่า "A Conceptual Framework for Curriculum Design" รูปแบบนี้อธิบายการประเมินผลว่าเป็นการพิจารณาขั้นตอนต่าง ๆ ของการพัฒนาหลักสูตรว่าสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของการศึกษาที่ตั้งไว้หรือไม่ เช่นเดียวกับของ ไทเลอร์ แต่ได้แยกพิจารณาองค์ประกอบต่าง ๆ ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของทาบา

ในการประเมินหลักสูตร แม้ว่าจะมีรูปแบบการประเมินต่าง ๆ นานา แต่ก็มิได้ขัดแย้งกัน ส่วนใหญ่จะแตกต่างกันที่รายละเอียดซึ่งต้องประเมิน แต่อย่างไรก็ดีสามารถสรุปได้ว่าการประเมินหลักสูตร มีจุดร่วมที่จะต้องประเมิน ได้แก่ ประเมินโครงร่างหลักสูตร เพื่อดูความสอดคล้องของจุดมุ่งหมาย เนื้อหา กิจกรรม และวิธีสอน สื่อการสอน การวัดและประเมินผล ประเมินผู้ใช้หลักสูตร (ครู ผู้บริหาร) ประเมินผู้รับผลโดยตรงจากหลักสูตร (นักเรียน) และผู้รับผลกระทบจากหลักสูตร (ผู้ปกครอง ชุมชน) แต่สำหรับการประเมินหลักสูตรที่จัดสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ จะมีความซับซ้อนและยุ่งยากมากกว่าทั้งนี้สืบเนื่องจากรูปแบบหลักสูตรซึ่งมีเอกลักษณ์เฉพาะ ประกอบกับธรรมชาติที่หลากหลายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ โรเจอร์ (House. 1991 : 40-41; citing Rogers. 1986) ได้สรุปประเด็นสำคัญ ๆ ในการประเมินหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษซึ่งแตกต่างจากการประเมินหลักสูตรปกติไว้ 6 ประการดังนี้

1. ไม่อาจชี้ประสิทธิภาพของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจากการแสดงให้เห็นว่าเด็กพิเศษกลุ่มนี้มีผลสัมฤทธิ์ของการเรียนสูงกว่าเพื่อน ๆ ที่อยู่ในกลุ่มอายุเดียวกัน ทั้งนี้เพราะนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษเมื่อเรียนในหลักสูตรปกติก็มีผลสัมฤทธิ์สูงกว่าอยู่แล้ว จึงมีเหตุผลที่น่าเชื่อได้ว่าในเด็กวัยเดียวกันแล้วไม่ว่าจะเรียนหลักสูตรใดก็ตาม นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษย่อมมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่าเสมอ

2. ไม่อาจพิสูจน์ยืนยันประสิทธิภาพของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษโดยการเปรียบเทียบผลจากการทดสอบก่อนและหลังเรียน เพราะถึงแม้จะสังเกตพบความงอกงามที่พอกพูนขึ้นอย่าง

รวดเร็ว แต่ก็มิได้มีการพิสูจน์มาก่อนว่า เด็กพิเศษเหล่านี้จะไม่สามารถทำได้ดีขนาดนั้น เมื่อเรียนตามหลักสูตรปกติ

3. ไม่อาจชี้ประสิทธิภาพของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ โดยการขอความเห็นจากผู้ที่เกี่ยวข้องกับหลักสูตร เช่น ครู ผู้ปกครอง และ นักเรียน เว้นแต่ว่า ความเห็นเหล่านั้นมีมาตรวัดตามจุดประสงค์ (objective measures)

4. ไม่อาจชี้ผลที่เกิดขึ้นจากการใช้หลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจากการเปรียบเทียบนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่ได้ใช้หลักสูตรฯ กับเด็กอื่น ๆ ที่อยู่ในระดับชั้นเดียวกัน เพราะว่าผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ อาจจะมิได้ขึ้นอยู่กับหลักสูตรเพียงอย่างเดียว แต่เนื่องมาจากความแตกต่างอย่างมากที่มีอยู่ตั้งแต่แรกของเด็กทั้งสองกลุ่มนี้

5. ไม่อาจชี้ผลที่เกิดขึ้นจากการใช้หลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจากการจัดให้มีกลุ่มควบคุม ซึ่งมีระดับเชาวน์ปัญญาเท่าเทียมกับกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่ใช้หลักสูตรฯ ทั้งนี้เพราะยังมีองค์ประกอบที่สำคัญ ๆ อีกมากมาย เช่น แรงจูงใจ ซึ่งเป็นตัวบ่งชี้ความก้าวหน้า

6. ถ้าเครื่องมือวัดต่าง ๆ ไม่เหมาะกับธรรมชาติของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษแล้ว ก็ไม่สามารถทำการประเมินหลักสูตรนั้นได้

จากประเด็นต่าง ๆ ในการประเมินหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษดังกล่าว ผู้วิจัยมีแนวคิดในการประเมินหลักสูตรฯ ออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ ด้วยการสร้างแบบประเมินความคิดเห็นเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรฯ ซึ่งมีมาตรวัดตามจุดประสงค์ และประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตรด้วยการนำหลักสูตรไปทดลองสอนจริงกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อเปรียบเทียบคะแนนของการทดสอบก่อนเรียนกับการทดสอบหลังเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ซึ่งใช้วัดความรอบรู้ในเนื้อหาพีชคณิต และนำคะแนนทดสอบหลังเรียนมาคำนวณหาค่าเฉลี่ยเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับคะแนนจุดตัด ซึ่งเป็นเกณฑ์ในการตัดสินการรู้ขั้นต่ำของนักเรียนที่ยอมรับว่าเป็นผู้รอบรู้

แบบทดสอบอิงเกณฑ์

การทดสอบอิงเกณฑ์ (criterion-referenced testing) เป็นการทดสอบซึ่งแปลความหมายของผลการสอบโดยนำเอาผลการสอบของผู้สอบไปเทียบกับมาตรฐานที่แท้จริง (absolute standard) ว่าอยู่ในระดับใด ถึงมาตรฐานที่ยอมรับหรือไม่

ความหมายของแบบทดสอบอิงเกณฑ์ที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป คือ ของเกลเซอร์และนิทโก (Glaser and Klaus. 1962 : 519-521) ซึ่งได้ให้ความหมายไว้ว่า แบบทดสอบอิงเกณฑ์ หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นอย่างพิถีพิถันเพื่อการวัดผลซึ่งสามารถที่จะแปลความหมายได้โดยตรงตามมาตรฐานของความสามารถที่กำหนดไว้และอีกความหมายหนึ่งของ โพแฟมและฮูเซค (Popham and Husek. 1969 : 1-9) กล่าวไว้ว่า แบบทดสอบอิงเกณฑ์ หมายถึง แบบทดสอบซึ่งใช้เพื่อวัดสภาพที่แน่นอนของแต่ละบุคคล โดยอาศัยเกณฑ์

บางอย่าง เช่นมาตรฐานของความสามารถหรือพฤติกรรมที่ได้นิยามไว้อย่างดีแล้ว

แบบทดสอบอิงเกณฑ์ (criterion-referenced test) เป็นแบบทดสอบที่บรรจุเนื้อหาสาระที่เฉพาะเจาะจงสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนการสอนและมีคะแนนจุดตัดหรือคะแนนเกณฑ์สำหรับใช้เป็นเครื่องตัดสินว่าผู้สอบมีความรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้หรือไม่ สาเหตุที่เกิดการวัดผลและการใช้แบบทดสอบอิงเกณฑ์ขึ้นมาก็เนื่องจากความต้องการข้อสนเทศที่ได้จากคะแนนซึ่งเป็นผลจากการสอบของนักเรียนมาประกอบการพิจารณาตัดสินว่านักเรียนที่สอบไปแล้วนั้นมีความรอบรู้หรือไม่ โดยการวัดผลดังกล่าวจะครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนการสอน (Hambleton, Swaminathan, Algena and Coulson. 1978 : 1) กระบวนการทดสอบอิงเกณฑ์จะแปลความหมายคะแนนโดยนำผลการสอบไปเทียบกับมาตรฐานที่แท้จริง ซึ่งเป็นเกณฑ์ภายนอกที่กำหนดเอาไว้อย่างรอบคอบโดยจะไม่เปรียบเทียบผลการสอบดังกล่าวกับผู้สอบคน อื่น ๆ ในกลุ่ม ดังนั้นผลงานของนักเรียนจะอยู่ในระดับมาตรฐานหรือไม่ก็ต้องพิจารณาหรือเปรียบเทียบกับเกณฑ์หรือมาตรฐานที่แท้จริงเท่านั้นและการรายงานผลการสอบจะรายงานในรูปของการอ้างอิงไปยังมาตรฐานที่กำหนดเอาไว้ล่วงหน้าซึ่งอาจเสนอในพจน์ของจำนวนเปอร์เซ็นต์การตอบถูกของแต่ละบุคคล ซึ่งจะเป็นดัชนีบ่งชี้ว่าจำนวนเปอร์เซ็นต์นั้นบรรลุมาตรฐานการปฏิบัติที่กำหนดเอาไว้หรือไม่ นอกจากนั้นคะแนนอาจจะอยู่ในรูปของจำนวนเวลาที่ทำงานนั้นเสร็จสมบูรณ์ (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527: 14)

การวิเคราะห์ข้อกระทงแบบอิงเกณฑ์

กระบวนการในการวิเคราะห์ข้อกระทงแบบอิงเกณฑ์ พิจารณา 4 ลักษณะด้วยกันคือ

1. ความสอดคล้องของข้อกระทงกับจุดประสงค์ (item-objective congruence)
2. ค่าสถิติของข้อกระทง (item-statistics)
3. การคัดเลือกข้อกระทง (item- selection)
4. การปรับปรุงข้อกระทง (item-revision)

ความสอดคล้องของข้อกระทงกับจุดประสงค์

ลักษณะของข้อกระทงที่สำคัญที่สุดคือ ความสอดคล้องของข้อกระทงกับจุดประสงค์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับขอบเขตของข้อกระทงวัดได้ตามจุดประสงค์ที่มุ่งหมายให้ข้อกระทงวัด ความสอดคล้องกันนี้ใช้กระบวนการพิจารณาตัดสิน โดยปกติข้อกระทงสร้างมาจากความสัมพันธ์ตามรายการของจุดประสงค์การสอน จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและตารางลักษณะเฉพาะของมวลความรู้ (table of domain specification) มีเกณฑ์อยู่ 3 ประการที่จะพิจารณาความสอดคล้องกันหรือการจับคู่กันระหว่างข้อกระทงและจุดประสงค์ คือ พฤติกรรม เนื้อหา และการแบ่งแยกตามลำดับชั้น (hierarchical classification)

ในการสร้างข้อกระทง พฤติกรรม และเนื้อหาที่รวมกันเป็นจุดประสงค์ ควรจะสะท้อนถึงรูปแบบและเนื้อหาของข้อกระทง ความสอดคล้องในเกณฑ์ 2 ข้อแรก คือ พฤติกรรม และเนื้อหา สร้างขึ้นมาเพื่อให้เป็นแบบอย่างในระหว่างขั้นตอนการสร้างข้อกระทง อย่างไรก็ตามลักษณะของความสอดคล้องกันยังคงต้องนำมาพิจารณาก่อนการบริหารการสอบ ความสามารถในการแปลความหมายของแบบทดสอบ จะขึ้นอยู่กับความ

สอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ หรือความตรงเชิงเนื้อหานั่นเอง

การวิเคราะห์ความตรงเชิงเนื้อหาของข้อกระทงแบบอิงเกณฑ์จำแนกได้เป็น 2 วิธีดังนี้ (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 68 ; อ้างอิงมาจาก Hambleton et al. 1978 : 34-37)

1. อาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชา

2. อาศัยเทคนิคการตรวจสอบจากการทดลองหรือเทคนิคเชิงประจักษณ์ (empirical techniques)

การวิเคราะห์ความตรงเชิงเนื้อหาโดยอาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาตัดสิน เป็นการพิจารณา ว่าข้อกระทงกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หรือลักษณะเฉพาะของมวลความรู้ที่ต้องการวัดมีความสอดคล้องกันหรือไม่ การพิจารณาเช่นนี้ต้องมั่นใจเสียก่อนว่าจุดประสงค์หรือลักษณะเฉพาะของมวลความรู้เขียนไว้ชัดเจนแล้ว โดยใช้การตรวจสอบกับตารางเฉพาะที่ได้จากการวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์ การวิเคราะห์ความตรงเชิงเนื้อหาโดยอาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาตัดสินนี้ โรวิเนลลีและแฮมเบิลตันได้เสนอไว้ 3 วิธีดังนี้ คือ ใช้ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ ใช้ดัชนีความเหมาะสมระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ และใช้ดัชนีการจับคู่ระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกใช้ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์โดยการตัดสินของผู้เชี่ยวชาญ คำนวณได้จากสูตร IOC ในการแปลความหมายดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ ถ้าดัชนีที่คำนวณได้มีมากกว่าหรือเท่ากับ0.5 แสดงว่าข้อกระทงวัดหรือเป็นตัวแทนจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อนี้ ถ้าค่าดัชนีน้อยกว่า 0.5 แสดงว่าข้อกระทงไม่วัดหรือไม่เป็นตัวแทนจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อนั้น คัดเลือกข้อที่มีความตรงเชิงเนื้อหาไว้ ผู้วิจัยจะตัดข้อกระทงที่ขาดความตรงเชิงเนื้อหา หรือไม่ก็ปรับแต่งข้อกระทงใหม่

ค่าสถิติของข้อกระทง

เมื่อพิจารณาความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์แล้ว ผู้สร้างแบบทดสอบควรจะวางแผนนำข้อกระทงไปสอบกับกลุ่มของนักเรียน ข้อมูลที่ได้จากการตอบของนักเรียนสามารถจะนำมาประเมินประสิทธิภาพของข้อกระทงว่า ข้อกระทงเหล่านั้นมีลักษณะต่าง ๆ ที่เราตั้งใจไว้หรือไม่ ขั้นตอนต่าง ๆ ประกอบไปด้วย การเลือกกลุ่มที่เป็นเกณฑ์ การรวบรวมผลย้อนกลับของนักเรียน การคำนวณค่าความยากและค่าอำนาจจำแนก และการคำนวณค่าความเป็นเอกพันธ์

การเลือกกลุ่มที่เป็นเกณฑ์ การเลือกกลุ่มขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายของแบบทดสอบและประโยชน์ที่จะได้รับเนื่องจากแบบทดสอบอิงเกณฑ์ส่วนมากใช้คัดแยกว่า การรอบรู้และไม่รอบรู้ของนักเรียนในจุดประสงค์ข้อหนึ่ง คำถามก็คือครูและนักประเมินต้องการจะตอบคำถามว่าใครควรจะสามารถตอบข้อกระทงอย่างถูกต้องและใครควรจะตอบข้อกระทงไม่ถูกต้อง กลุ่มของนักเรียนจะประกอบไปด้วยนักเรียนที่มีความรู้กับพวกที่ไม่มีความรู้หลังจากที่ได้รับการสอนแล้ว เหมือนกับว่าก่อนการสอนนักเรียนส่วนมากแต่ไม่ทั้งหมดจะทำข้อกระทงไม่ถูกต้อง ถ้าการกระทำแบบนี้ไม่เกิดขึ้น ข้อกระทงจะผิดพลาดในหน้าที่ที่คาดหวังไว้ หรือจุดประสงค์ได้ถูกสอนมาก่อนแล้ว เมื่อจุดประสงค์ได้สอนไปแล้วก็พิจารณาการสอนในจุดประสงค์นั้นและเมื่อทดสอบหลังจากได้สอนเรียบร้อยแล้ว นักเรียนส่วนมากแต่ไม่ทั้งหมดควรจะตอบข้อกระทงอย่างถูกต้อง การนิยามกลุ่มที่เป็น

เกณฑ์มี 3 วิธีคือ

1. วิธีสอบกับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว โดยสอบก่อนสอนและสอบหลังสอน (preinstruction-postinstruction)

2. วิธีสอบกับกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม โดยสอบกับกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนและกลุ่มที่ได้รับการสอน (uninstruction-instruction groups)

3. วิธีสอบกับกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว โดยพิจารณาจากคะแนนจุดตัด

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกวิธีสอบกับกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มเนื่องจากมีข้อจำกัดเรื่องเวลาจึงไม่เลือกแบบที่ 1. และแบบที่ 3 มีข้อเสียคือยังไม่มีวิธีกำหนดจุดตัดได้ถูกต้องในการแบ่งแยกผู้รอบรู้และไม่รอบรู้วิธีสอบกับกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม โดยสอบกับกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนและกลุ่มที่ได้รับการสอนเป็นรูปแบบของ Known-groups technique ที่ใช้หาความตรงของแบบทดสอบบุคลิกภาพแล้วนำมาประยุกต์ใช้ในการวัดแบบอิงเกณฑ์ เกี่ยวกับการทดสอบนักเรียนสองกลุ่มที่แตกต่างกันในเวลาเดียวกัน กลุ่มแรกไม่ได้รับการสอนและกลุ่มที่สองได้รับการสอน

ข้อมูลย้อนกลับของนักเรียน หลังจากที่สอบเสร็จแล้วผู้สร้างแบบทดสอบควรจะรวบรวมข้อมูลย้อนกลับจากนักเรียนซึ่งประกอบไปด้วยการวิเคราะห์ที่ไม่เป็นค่าสถิติและก็ควรทำกับนักเรียนที่ได้รับการสอนเท่านั้นกระบวนการที่จะให้ได้ข้อมูล เช่น การอภิปรายในชั้นเรียนหลังจากสอบเสร็จ หรือการสัมภาษณ์รายบุคคลเพื่อที่จะค้นหาปฏิกิริยาของนักเรียนในการทำแบบทดสอบ ข้อมูลย้อนกลับนี้จะเป็นประโยชน์มากในการปรับปรุงแบบทดสอบ เช่นความคลุมเครือของข้อกระทง คำตอบผิด คำศัพท์ไม่เหมาะสมและคำสั่งไม่ชัดเจน คำถามที่ผู้สร้างแบบทดสอบจะถามนักเรียน เช่น มีข้อกระทงข้อใดบ้างที่ทำให้นักเรียนสับสน นักเรียนพบข้อกระทงที่มีคำตอบไม่ถูกหรือมีคำตอบถูกมากกว่าหนึ่งข้อหรือไม่ คำศัพท์คำใดที่นักเรียไม่รู้หรือยากที่จะเข้าใจ คำถามเหล่านี้จะทำให้ได้ข้อมูลที่ผู้สร้างแบบทดสอบนำไปประกอบกับค่าสถิติในการวิเคราะห์ข้อกระทง

ค่าความยากของข้อกระทง (item difficulty) ค่าความยากของข้อกระทง คือ เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนซึ่งตอบข้อกระทงอย่างถูกต้อง คำนวณโดยใช้สูตร

$$\text{ค่าความยาก} = \frac{C}{N} \times 100$$

เมื่อ C คือ จำนวนนักเรียนซึ่งตอบข้อกระทงอย่างถูกต้อง

N คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมด

ในการแปลความหมายค่าความยาก ค่าความยากก่อนสอนควรอยู่ระหว่าง 0 - 50% และค่าความยากหลังสอนควรอยู่ระหว่าง 70 - 100% (Berk. 1980 : 66)

ค่าอำนาจจำแนกของข้อกระทง (item discrimination) ค่าอำนาจจำแนกวัดการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากการปฏิบัติจากการสอบก่อนสอนและสอบหลังสอน หรือความแตกต่างของกลุ่มที่ได้รับการสอนกับกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอน ในการทดสอบอิงเกณฑ์ค่าอำนาจจำแนกควรจะสูงสุดระหว่างกลุ่มที่เป็นเกณฑ์และค่าอำนาจ

จำแนกต่ำสุดภายในกลุ่มเดียวกัน ความแตกต่างที่เกิดขึ้นระหว่างกลุ่มที่เป็นเกณฑ์เนื่องมาจากผลของการสอน การแปลความหมายค่าอำนาจจำแนกที่ได้ในพจน์ของโปรแกรมการสอน จะเรียกว่า ความไวในการสอน (instruction sensitivity) วิธีวิเคราะห์ค่าอำนาจจำแนก เมื่อพิจารณาจากจำนวนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนและจำนวนครั้งของการสอบแล้วอาจแบ่งได้ 4 วิธีดังนี้ (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 83)

1. วิธีสอบครั้งเดียวจากกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว
2. วิธีสอบครั้งเดียวจากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม
3. วิธีสอบซ้ำจากกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียวหรือเรียกว่าวิธีสอบก่อนและหลังสอน
4. วิธีสอบครั้งเดียวหรือสอบซ้ำจากกลุ่มตัวอย่างเดียว โดยอาศัยแบบจำลองคุณลักษณะแฝง (Latent trait model)

การหาค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีสอบครั้งเดียวจากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม เครเฮน (Crehen. 1974 : 257) ได้ดัดแปลงดัชนีบีของเบรนนอนมาใช้กับกลุ่มรอบรู้และไม่รอบรู้ที่นิยามจากกลุ่มได้รับการเรียนรู้ตามจุดประสงค์และกลุ่มที่ไม่ได้เรียนรู้ตามจุดประสงค์

$$B = \frac{U}{N_1} - \frac{L}{N_2}$$

B คือดัชนีเบรนนอนหรือดัชนีอำนาจจำแนก

N_1 คือจำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ได้รับการเรียนรู้ตามจุดประสงค์

N_2 คือจำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ไม่ได้รับการเรียนรู้ตามจุดประสงค์

U คือจำนวนนักเรียนกลุ่ม N_1 ตอบข้อกระทงถูก

L คือจำนวนนักเรียนกลุ่ม N_2 ตอบข้อกระทงถูก

ความเป็นเอกพันธ์ของข้อกระทง (item homogeneity) การวัดความเป็นเอกพันธ์เพื่อจะพิสูจน์ว่าความสอดคล้องของข้อกระทงกับจุดประสงค์เหมือนกันหรือไม่โดยสอบเพียง 1 ครั้ง หรือการสอบซ้ำ มีข้อตกลงอยู่ว่า ข้อกระทงควรจะมีค่าความยากเหมือนกัน ซึ่งข้อตกลงนี้ยังเป็นสิ่งที่น่าสงสัยอยู่ ดังนั้นจุดประสงค์เฉพาะหรือจุดประสงค์ทั่วไปอาจจะไม่จำเป็นต้องพิจารณาค่าสถิติความเป็นเอกพันธ์

การคัดเลือกข้อกระทง

การคัดเลือกข้อกระทง กระบวนการรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูลทั้งหมดที่กล่าวมา จะนำมาใช้ในการพิจารณาคุณภาพหรือประสิทธิภาพของข้อกระทงว่าข้อกระทงมีคุณสมบัติตามจุดมุ่งหมายที่สร้างหรือไม่ ข้อกระทงที่ได้วิเคราะห์ความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกแล้วจะนำมาพิจารณา 3 กรณีคือ นำข้อกระทงไปรวมเป็นแบบสอบขั้นสุดท้าย ปรับปรุงก่อนนำไปรวมเป็นแบบสอบ หรือตัดทิ้งไปแล้วสร้างขึ้นมาใหม่ ลักษณะของข้อกระทงที่มีน้ำหนักมากที่สุดในการคัดเลือกคือ ความสอดคล้องระหว่างข้อกระทงกับจุดประสงค์ ค่าความยากและค่าอำนาจจำแนก การพิจารณาอาจจะแยกจากกันหรือรวมกันก็ได้

การปรับปรุงข้อกระทง

การปรับปรุงข้อกระทง เมื่อข้อมูลย้อนกลับหรือการวิเคราะห์ทางสถิติพบว่าข้อกระทงมีความผิดพลาด ผู้สร้างแบบทดสอบควรจะวิเคราะห์ข้อกระทงเพื่อหาข้อผิดพลาดนั้น โดยพิจารณาจากการตอบของนักเรียนทั้งก่อนสอนและหลังสอน (หรือพิจารณาจากกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนกับกลุ่มที่ได้รับการสอน) ข้อกระทงเหล่านี้จะมีค่าอำนาจจำแนกต่ำเป็นศูนย์หรือมีค่าอำนาจจำแนกเป็นลบ

ในการสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์ จะต้องมีความพิถีพิถัน กระบวนการในการสร้างต้องมีการวิเคราะห์ข้อกระทง 4 ด้านด้วยกันคือ ความสอดคล้องของข้อกระทงกับจุดประสงค์ หาค่าสถิติของข้อกระทง คัดเลือกข้อกระทง และการปรับปรุงข้อกระทง เพื่อจะได้แบบทดสอบอิงเกณฑ์ซึ่งสามารถที่จะแปลความหมายได้ตรงตามมาตรฐานของความสามารถที่กำหนดไว้

หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

พีชคณิต (Algebra) เป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งพัฒนาโดยตรงจากเลขคณิตโดยใช้สัญญลักษณ์แทนตัวแปร ต่อจากนั้นได้พัฒนาในแง่เป็นกรณีทั่วไปของเลขคณิตและในที่สุดได้พัฒนาในเชิงนามธรรม พีชคณิตมีความสำคัญดังนี้

1. มีประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง เพราะเป็นเครื่องมือในการสร้างแบบจำลองของปัญหา อธิบายและตอบปัญหาในโลกที่เป็นจริง

2. เป็นเครื่องมือที่สะดวกสำหรับการเขียนข้อสรุปของเรื่องราวต่าง ๆ

3. เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงและวิทยาการอื่น ๆ

การศึกษาพีชคณิตจำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับสิ่งที่เป็นนามธรรม จึงควรให้มีบูรณาการกับคณิตศาสตร์สาขาอื่น เพื่อประโยชน์ทั้งในด้านที่ทำความเข้าใจสาระทางพีชคณิตและใช้พีชคณิตสำหรับเรียนรู้คณิตศาสตร์แขนงอื่น การจัดหลักสูตรพีชคณิตให้แก่เด็กจะต้องคำนึงถึงความสามารถในการคิดและสอดคล้องกับวุฒิภาวะในการเรียนรู้ของเด็กในแง่มุมต่าง ๆ เช่น ขั้นตอนในการทำความเข้าใจตัวแปร มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับลำดับขั้นของการเรียนรู้ (Kuchemann. 1981 ; Hart. 1980 ; Booth. 1984) พบว่าจำแนกได้ 6 ขั้นคือ 1) *letter evaluated* เป็นขั้นหาค่าของตัวอักษรในโจทย์ เช่น เมื่อกำหนดปัญหา " ถ้า 5+2x = 13 แล้ว x มีค่าเท่าไร " ในขั้นนี้เด็กจะตอบว่า x = 4 หรือ x = 6 โดยรับรู้เพียงว่า x เป็นค่า ๆ หนึ่งโดยไม่สนใจความหมายใด ๆ 2) *letter not used* เป็นขั้นที่เด็กสามารถหาค่าได้โดยไม่ต้องรู้ค่าอักษรแต่ละตัว เช่น จากปัญหา A+B+2 = ? เมื่อกำหนดว่า A+B = 25 เด็กสามารถตอบคำถามได้ทันทีว่า A+B+2 = 27 โดยไม่สนใจว่า A และ B หมายถึงอะไร 3) *letter used as an object* เป็นขั้นที่เข้าใจถึงความหมายและวัตถุประสงค์ของการใช้ตัวอักษร เช่น จากประโยค " แอปเปิลสามลูกและแอปเปิลเจ็ดลูก " ซึ่งสามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ 3A+7A เด็กจะสามารถเข้าใจได้ว่า A เป็นสิ่งที่สื่อถึงแอปเปิล 4) *letter used as a specific unknown* เป็นขั้นที่เด็กสามารถใช้ตัวอักษรแทนสิ่งที่มีค่าเฉพาะเจาะจงสิ่งหนึ่งซึ่งยังไม่ทราบค่า เช่น เมื่อพิจารณาค่า R จากเงื่อนไข R = S+T และ R+S+T = 30 ซึ่งเด็กจะมีความเข้าใจว่า R เป็นค่าเฉพาะที่เท่ากับ S+T เท่านั้น

จะเป็นค่าอื่นไม่ได้ 5) *letter used as a generalized number* เป็นขั้นใช้อักษรแทนจำนวนทั่วไป เด็กสามารถสรุปได้ว่า มีจำนวนมากมายที่แตกต่างกันซึ่งนำมาแทนค่าตัวอักษรตัวหนึ่งได้ เช่น เมื่อต้องการหาค่า Q จากข้อความ Q+R = 10 โดยเด็กที่มีประสบการณ์เพียงพอจะสามารถสรุปได้ว่า มีจำนวน 0 หรือจำนวนเต็มบวกมากกว่า 1 ตัวที่เป็นค่าของ Q ซึ่งแม้จะมีหลายค่าแต่ก็มีเงื่อนไขจำกัดว่าจะต้องรวมกับ R แล้วได้ 10 เท่านั้น และ 6) letter used as a variable เป็นขั้นใช้ตัวอักษรแทนตัวแปร เด็กสามารถสรุปความหมายในลักษณะที่เป็นตัวแปรอย่างแท้จริง ซึ่งตัวแปรจะมีค่าไม่เฉพาะเจาะจง มีความสัมพันธ์ที่เป็นระบบ พิจารณาคำถาม 3k = ? หรือ k+3 = ? เด็กสามารถเข้าใจได้ว่า 3k หรือ k+3 มีค่าเท่าใดก็ได้เนื่องจากสามารถแทนค่า k ด้วยจำนวนใด ๆ (Osborne and Patricia . 1988 : 386-387) นอกจากนี้การพัฒนาศักยภาพบางอย่างเช่นความถนัดในการมองเห็น(visual aptitude) ก็มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ ดังที่ บรูนนิงได้วิจัยพบว่าความถนัดในการมองเห็นกับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์มีสหสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญ (Bruning. 1975) ฉะนั้นจึงเป็นสิ่งที่ดีสำหรับครูที่สอนพีชคณิตในอันที่จะจัดกิจกรรมซึ่งช่วยพัฒนาความถนัดดังกล่าวรวมเข้าไปในกิจกรรมการสอนพีชคณิต (NCTM. 1983)โดยทั่วไปความคิดของเด็กจะมีโครงสร้างทางพีชคณิตแบบเบื้องต้นปรากฏอยู่ในตรรกะที่ว่าด้วยการจัดกลุ่มหรือการจำแนก (Copeland. 1979) นอกจากนี้ยังพบว่าวิชาพีชคณิตช่วยพัฒนาการคิดอย่างมีวิจารณญาณของเด็กโดยเฉพาะเมื่อสอนแบบให้ค้นพบด้วยตนเอง (Dessart and Suydam. 1983)

ในแง่ของการจัดหลักสูตร หรือโปรแกรมเฉพาะทางคณิตศาสตร์ เดวิส และคณะ (Davis et al. 1978 : 1-320) ซึ่งได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการทางปัญญาเพื่อการเรียนรู้พีชคณิตได้ให้ความเห็นว่าหลักสูตรเฉพาะสำหรับการพัฒนาเด็กเก่งทางคณิตศาสตร์แทบไม่มีเลย หลักสูตรที่มีอยู่ไม่ท้าทายเด็กและค่อนข้างช้าเกินไป (NCTM. 1983 ; citing Davis. 1978 : 78) ข้อคิดเห็นดังกล่าวมีส่วนกระตุ้นให้มีการพัฒนาหลักสูตรเฉพาะทางพีชคณิตขึ้นมาบ้าง เช่น เฮาส์ (House. 1981 : 195-199) ได้พัฒนาหลักสูตรสำหรับเด็กปัญญาเลิศในวิชาพีชคณิตแก่เด็กระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในลักษณะการเร่งเนื้อหา โดยให้เรียนเนื้อหาพีชคณิตชั้นปีที่ 1 และ2 ภายในเวลาหนึ่งปี จุดเน้นของหลักสูตรอยู่ที่การให้เด็กได้ศึกษาอย่างอิสระ การมอบหมายงานให้ทำในชั้นเรียนและขอให้เด็กจัดเวลาเรียนเองที่บ้านด้วยเพื่อทำงานที่มอบหมาย

จากการศึกษาตำราและเอกสารที่เกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ เนื้อหา และโจทย์ปัญหาต่าง ๆ จะเห็นได้ว่า สมการและอสมการพหุนามเป็นความรู้หลักใหญ่ประการหนึ่งในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ผู้วิจัยจึงเห็นว่าพหุนามเป็นเรื่องที่มีความสำคัญในการชักนำให้ผู้เรียนได้มองเห็นภาพของปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เป็นเครื่องมือที่สะดวกสำหรับการเขียนข้อสรุปของเรื่องราว และเป็นพื้นฐานในการสร้างความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง ผู้วิจัยจึงศึกษาเนื้อหาที่มาเกี่ยวข้องกับพหุนาม เพื่อจัดทำเป็นหลักสูตรเสริมให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้เรียนในระหว่างปิดภาคเรียน โดยเนื้อหาที่ผู้วิจัยเลือกมาจัดลงในหลักสูตรพีชคณิตประกอบไปด้วย

1. การกระจายและการแยกตัวประกอบ (expansion and factorization)

2. ลำดับและอนุกรม (sequence and series)

3. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relations)

4. ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)

5. พหุนาม (polynomial)

6. สมการพหุนาม (polynomial equation)

7. อสมการ (inequalities)

หลักสูตรพีชคณิตดังกล่าวจะกำหนดโครงสร้างหลักสูตรโดยมีองค์ประกอบดังนี้คือ 1) จุดมุ่งหมายของหลักสูตร 2) เนื้อหา 3) กิจกรรมการเรียนการสอน 4) สื่อ 5) การวัดและประเมินผล 6) เอกสารหลักสูตร องค์ประกอบต่าง ๆ ข้างต้นจะสร้างและพัฒนาโดยประมวลเอาแนวคิดที่ได้จากการศึกษาเกี่ยวกับลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ สาระสำคัญของพีชคณิต แนวทางการจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ และลักษณะที่เหมาะสมของหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ เช่น การนำเสนอในลักษณะ ใช้ปัญหานำ (problem-oriented) การนำเสนอสิ่งที่เป็นทั้งตัวอย่าง (example)และ มิใช่ตัวอย่าง (non-example) เป็นต้น ประกอบกับการขอคำปรึกษาและคำแนะนำจากผู้เชี่ยวชาญด้านต่าง ๆ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มาติสัน และ ดัน (สุปาณี สนธิรัตน. ม.ป.ป. : 317 ; อ้างอิงมาจาก Martinson and Dunn. 1963) ได้ศึกษาโปรแกรมการศึกษาและการบริการโปรแกรมต่าง ๆในชั้นพิเศษในการให้การศึกษาแก่นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษผลการประเมินปรากฏว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษประสบความสำเร็จด้านการศึกษาและการปรับตัวทางสังคมสามารถพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาโดยการใช้สื่อการสอน และครูผู้สอนสามารถนำเข้าสู่บทเรียนด้วยปัญหาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ชังค์ (Schunk. 1987 : 149) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่เรียนอยู่ในชั้นเรียนปกติเพื่อเป็นแบบอย่างที่ดีต่อเด็กอื่น ๆ เพื่อคอยกระตุ้นหรือสร้างแรงจูงใจให้เด็กที่มีความสามารถต่ำกว่าให้เป็นเด็กเก่งขึ้น จากผลการวิจัยเกี่ยวกับการเลียนแบบพฤติกรรมในชั้นเรียนปรากฏว่าเด็กไม่เก่งจะไม่สนใจเลียนรูปแบบจากเด็กเก่งหรืออยากเรียนเร็วขึ้นแต่อย่างใด พวกเขาจะเลียนแบบจากกลุ่มที่มีความสามารถใกล้เคียงกันกับความสามารถของเขาและจากงานวิจัยได้ชี้แนะว่าเด็กไม่เก่งบางคนมีความหวาดหวั่นเมื่อมีเด็กเก่งเรียนด้วยแต่เมื่อเด็กเก่งไม่อยู่พวกเขาจะรู้สึกเบิกบานสบายใจ

ฮัตชิงสัน (Huchingson. 1990 : 231) ได้ศึกษาเปรียบเทียบระหว่างพฤติกรรมของนักเรียนในโรงเรียนรัฐบาลกับเด็กในโรงเรียนวอลดอร์ฟในลักษณะของ "พฤติกรรมปัญญาเลิศ"ของ เรนซูลลี จุดมุ่งหมายของการศึกษาเพื่อศึกษาความคล้ายคลึงกันระหว่างพฤติกรรมของเด็กปัญญาเลิศของเรนซูลลี การแสดงความคิดแบบบูรณาการ ความยินดี ในโรงเรียนวอลดอร์ฟกับโรงเรียนรัฐบาล ในกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มใช้แบบทด

สอบประเมินค่า 3 ชุด การศึกษาดำเนินการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมของนักเรียนที่เรียนในหลักสูตรบูรณาการของวอลดอร์ฟ และพฤติกรรมของนักเรียนที่ลงเรียนในโรงเรียนรัฐบาลสำหรับเด็กปัญญาเลิศ การศึกษานี้เพื่อที่จะขยายความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการจัดโปรแกรมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ โดยให้มีความไว้วางใจต่อหลักสูตรที่มีแนวโน้มการคิดเชิงสร้างสรรค์และเชิงศิลป์ในการพัฒนาเด็กปัญญาเลิศเชิงวิชาการ ผลการศึกษาพบว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

พิชากร แปลงประสพโชค (2540 : บทคัดย่อ) ได้พัฒนาหลักกสูตรพิเศษทางเรขาคณิตเสริมสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์โดยศึกษาว่านักเรียนที่มีความสามารถพิเศษดังกล่าวสามารถเรียนรู้เนื้อหาเรขาคณิตในหลักสูตรได้ภายใน 70 ชั่วโมงหรือไม่ หลักสูตรจะไม่เน้นรายละเอียดแต่จะเน้นความคิดหลักก้าวไกลไปถึงเรขาคณิตระดับปริญญาตรี รูปแบบกิจกรรมใช้กิจกรรมสามเส้าของเรนซูลลีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ในกรุงเทพและปริมณฑล จำนวน 10 คนที่ผ่านการคัดเลือกจากนักเรียน 72 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนทุกคนสามารถเรียนได้ครบหลักสูตรและสอบผ่านข้อสอบอิงเกณฑ์ทุกฉบับภายใน 70 ชั่วโมง ได้คะแนนเพิ่มจากการสอบก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ปัญหาในการทดลองใช้หลักสูตร พบว่า มีปัญหาความวิตกกังวลเชิงคณิตศาสตร์ ด้วยนักเรียนไม่มีเวลาที่ใช้ย่อยทบทวนความรู้ เพราะต้องเรียนต่อเนื่องแทบทุกวัน (ยกเว้นวันอาทิตย์) เนื้อหาที่ย่อยไม่ทันทำให้นักเรียนส่วนมากต้องทำการศึกษาอีกครั้งหนึ่งและซ่อมเสริม และอับอายเพื่อน

นิตติยา ปภาพจน์ (2540 : บทคัดย่อ) ได้พัฒนาหลักสูตรทฤษฎีจำนวนเสริมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเลือกสรรเนื้อหา วิธีการจัดกิจกรรมและประสบการณ์การเรียนรู้ เวลา และการวัดประเมินผล บนพื้นฐาน ความต้องการ ความสนใจ ลักษณะนิสัยและศักยภาพของผู้เรียน หลักสูตรประกอบด้วยเนื้อหา 8 หน่วย โดยแต่ละหน่วยจะมีเนื้อหา โจทย์ปัญหาเสริมแบบฝึกการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ แบบฝึกทักษะการคิด เวลาที่ใช้ตลอดหลักสูตรคือ 25 วัน วันละ 6 ชั่วโมงกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านกระบวนการคัดเลือกจำนวน 17 คน ผลปรากฏว่าคะแนนที่ได้จากการทดสอบก่อนและหลังเรียนหลักสูตรมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .0005 และได้คะแนนเฉลี่ยของการทดสอบหลังเรียนหลักสูตรเท่ากับ 62 ซึ่งมีค่ามากกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ปัญหาในการทดลองใช้หลักสูตร พบว่า เวลาที่ใช้ในการทดลองใช้หลักสูตรกระชั้น ไม่มีวันหยุด นักเรียนต้องมาเรียนทุกวันทำให้นักเรียนบางคนเหนื่อยเกินไปจนไม่สามารถรับความรู้ที่ให้ได้ และ เด็กที่ถูกคัดเลือกเป็นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองใช้หลักสูตรมีบางคนยังไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเป็นเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพอสรุปได้ว่าการจัดการศึกษาที่มีคุณภาพควรจะจัดให้สนองความแตกต่างระหว่างบุคคล ควรจัดหลักสูตรเฉพาะสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษให้แยกเรียนจากเด็กปกติ การจัดการศึกษาควรมีรูปแบบที่ส่งเสริมความคิดระดับสูง ความคิดสร้างสรรค์ หรือการจัดรูป

แบบการเรียนรู้แบบบูรณาการก็สามารถที่จะช่วยพัฒนาความคิดนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้ และใน การจัดการเรียนการสอนควรมีวันหยุดที่เพียงพอที่จะให้เด็กได้ทบทวนความรู้ มีเวลาในการคิดแก้ปัญหา และ ศึกษาหาความรู้ด้วยตนเองมากขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนา (research and development) ที่ประกอบด้วย การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และการทดลองใช้หลักสูตร เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร โดยมีขั้นตอนดังนี้

กลุ่มประชากรเป้าหมาย

กลุ่มประชากรเป้าหมาย ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทั่วไปที่มีความสามารถสอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย การเสนอชื่อ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่สอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ จำนวน 17 คน ซึ่งได้มาโดยการคัดเลือกตามขั้นตอนดังนี้

1. ส่งหนังสือเชิญเข้าร่วมโครงการวิจัยไปยังโรงเรียนในเขตกรุงเทพมหานคร และปริมณฑล โดยรายชื่อโรงเรียนพิจารณาจากผลการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่ได้รับรางวัล ที่สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยจัดขึ้นในแต่ละปี และรายชื่อโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการวิจัยของนิตติยา ปภาพจน์ (2540 : 102) แล้วให้ครูประจำวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ,2 หรือ ปีที่ 3 คัดเลือกเด็กนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์โรงเรียนละ 5 คน พร้อมตอบแบบเสนอชื่อเด็กที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นแบบสอบถามกรอกรายการ โดยครูเป็นผู้ตอบแล้วส่งกลับมาถึงผู้วิจัย จากนั้นผู้วิจัยได้ดำเนินการแปลงแบบเสนอชื่อให้เป็นคะแนนเพื่อหาผลรวมของคะแนน จัดลำดับคะแนนจากมากไปน้อย ใช้เกณฑ์ตัดสินว่าเด็กจะผ่านคือ 2.5 คูณจำนวนข้อคำถามของแบบเสนอชื่อ

2. เชิญนักเรียนที่ได้รับการคัดเลือกจากขั้นตอนที่ 1 มาทำการทดสอบความสามารถด้วยแบบทดสอบ 2 ฉบับ คือ แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง จากนั้นผู้วิจัยทำการตรวจข้อสอบให้คะแนน เพื่อคัดเลือกนักเรียนที่ได้คะแนนผ่านเกณฑ์ของข้อสอบทั้ง 2 ชุดซึ่งใช้เกณฑ์ในการตัดสินว่าผ่านคือ

แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ใช้คะแนนจุดตัด 14 คะแนน ซึ่งเป็นคะแนนจุดตัดที่ผู้วิจัยวิเคราะห์จากการใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัดวิธีของเบอร์ ซึ่งแสดงรายละเอียดไว้ในตาราง 3

แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง ใช้คะแนน 80% ของคะแนนเต็ม

80 % ของคะแนนเต็มของแบบทดสอบวัดความคิดระดับสูงใช้เกณฑ์ความรอบรู้ของบลูม (พิชากร แปลงประสพโชค. 2540 : 52 ; อ้างอิงมาจาก Bloom. n.d.)

จากนั้นผู้วิจัยดำเนินการปรับคะแนนจากการทำข้อสอบทั้ง 2 ชุดของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ให้มีคะแนนเต็มเท่ากัน แล้วหาผลรวมของคะแนน 2 ชุดที่ปรับแล้ว นำคะแนนมาเรียงลำดับจากมากไปน้อย เพื่อคัดเลือกนักเรียนไว้ 17 คนแรกที่มีคะแนนสูงสุดเป็นกลุ่มตัวอย่าง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

1. เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
2. หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
3. แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต
4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาเพื่อพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

ตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ตอนที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและหาคุณภาพของเครื่องมือ

ตอนที่ 3 ประเมินหลักสูตร

ตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

การศึกษาข้อมูลพื้นฐานจะช่วยให้ผู้วิจัยพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตได้เหมาะสมกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์โดยศึกษาจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ตลอดจนหาประสบการณ์ด้วยการเข้าร่วมสังเกตการอบรมเด็กปัญญาเลิศ และทดลองสอนเด็กในโครงการส่งเสริมนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งขอความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งแบ่งเนื้อหาที่ต้องศึกษามีดังนี้

1. ศึกษาเกี่ยวกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยศึกษาในหัวข้อต่อไปนี้

   1.1 ความหมายของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

   1.2 ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

   1.3 การคัดแยกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

   1.4 การจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

1.5 ลักษณะของครูสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

1.6 สังเกตการอบรมเด็กปัญญาเลิศในโครงการ

1.7 ร่วมทดลองสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในโครงการส่งเสริมนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจัดในช่วงวันที่ 22 มีนาคม - 28 พฤษภาคม 2542 โดยความรับผิดชอบโครงการของหน่วยงาน 4 แห่ง คือ 1) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ 2 สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2) สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ 3) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 4) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย เพื่อหาประสบการณ์ตรงในการจัดบทเรียน กิจกรรม รวมทั้งการวัดและประเมินผล ซึ่งได้สัมผัสกับการกำกับดูแลชั้นเรียนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ก่อนลงมือทดลองใช้หลักสูตรในการวิจัย

2. ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

2.1 การจัดหลักสูตรสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

2.2 หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

2.3 การประเมินหลักสูตรที่จัดสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ

3. ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ โดยแบบประเมินจะสำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญในด้านของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตซึ่งประกอบด้วย

3.1 จุดมุ่งหมายของหลักสูตร

3.2 เนื้อหาของหลักสูตร

3.3 กิจกรรมการเรียนการสอน

3.4 สื่อ

3.5 การวัดและประเมินผล

4. ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์

ตอนที่ 2 สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและหาคุณภาพของเครื่องมือ

ในการวิจัยผู้วิจัยใช้เครื่องมือ 4 อย่างซึ่งดำเนินการสร้างดังนี้

1. เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

1.1 แบบเสนอชื่อ ผู้วิจัยใช้แบบเสนอชื่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ของ พิชากร แปลงประสพโชค มานะ เอกจริยวงศ์ และ นิตติยา ปภาพจน์ (2540 :105-106) ที่ร่วมกันพัฒนาซึ่งแบบเสนอชื่อฉบับนี้เป็นแบบสอบถามกรอกรายการแบบ rating scale มี 4ระดับ จำนวน 25 ข้อโดยข้อคำถามจะถามเกี่ยวกับคุณลักษณะพฤติกรรมของเด็กนักเรียน

1.2 แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยศึกษาแบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของ พิชากร แปลงประสพโชค มานะ เอกจริยวงศ์ และนิตติยา ปภาพจน์ (2540 : 107-116) ที่ร่วมกันพัฒนา และศึกษาลักษณะโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จากเอกสารเช่น All the Best from the Australian Mathematics Competition ปี 1978-1984 เพื่อที่จะจัดทำเป็นแบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 36 ข้อเป็นข้อสอบแบบให้เติมคำตอบ แล้วนำไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้องของภาษาที่ใช้เพื่อปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้อง แล้วให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบด้านความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยมีประเด็นพิจารณาคือ 1) ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยดูว่าข้อคำถามแต่ละข้ออยู่ภายใต้กรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จริงหรือไม่ 2) ความเที่ยงตรงเชิงแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ โดยดูว่าข้อคำถามแต่ละข้อต้องใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาหรือไม่ จากนั้นนำผลการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญมาวิเคราะห์หาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ระหว่าง 0.66-1 ในทั้งสองประเด็นเลือกไว้ 30 ข้อ แล้ววิเคราะห์คะแนนจุดตัด และวิเคราะห์ค่าความเชื่อมั่น ซึ่งแสดงความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง โดยใช้วิธี known group ที่ใช้ฐานจากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มคือ กลุ่มนักเรียนที่เข้าร่วมโครงการส่งเสริมนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์เป็นกลุ่มที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่างที่จะศึกษา และอีกกลุ่มหนึ่งซึ่งเป็นนักเรียนปกติ ได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นโรงเรียนดอนเมืองจาตุรจินดา แล้วนำผลจากการวิเคราะห์มาปรับปรุงข้อสอบให้มีคุณภาพมากยิ่งขึ้นจนได้แบบทดสอบฉบับสมบูรณ์

1.3 แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูงที่ พิชากร แปลงประสพโชค มานะ เอกจริยวงศ์ และ นิตติยา ปภาพจน์ (2540 : 117-139) ร่วมกันพัฒนา ซึ่งแบบทดสอบจะประกอบด้วย 7 ตอน ดังนี้

1.3.1 อุปมาอุปไมย (Analogies)

1.3.2 เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive reasoning)

1.3.3 ส่วนของเหตุที่หายไป (Missing premises)

1.3.4 การสังเคราะห์ลำดับ (Sequential synthesis)

1.3.5 การใช้คำถามในการไขปริศนา (Questioning strategies)

1.3.6 การวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องกับการตอบปัญหา (Analysis of relevant and irrelevant information)

1.3.7 การวิเคราะห์คุณลักษณะ (Analysis of attributes)

2. หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตาสตร์

การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้ศึกษาในตอนที่ 1 มาเป็นแนวทางในการสร้างหลักสูตรซึ่งตั้งอยู่บนพื้นฐานของความต้องการ ความสนใจ ลักษณะนิสัย และศักยภาพของนักเรียนที่มีความ

สามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์มากำหนดจุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหาของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ การวัดและประเมินผลโดยมีแนวทางในการกำหนดส่วนต่าง ๆ ดังนี้

2.1 **จุดมุ่งหมายของหลักสูตร** ผู้วิจัยศึกษา เนื้อหาพีชคณิต การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ความต้องการ ความสนใจ ลักษณะนิสัย และศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ มากำหนดเป็นจุดมุ่งหมายของหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ จากนั้นนำจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่ได้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความเหมาะสม ความเป็นไปได้ในแต่ละประเด็น และความถูกต้องของภาษา แล้วนำข้อเสนอแนะไปดำเนินการปรับปรุงแก้ไข นำจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่แก้ไขแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คนแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม นำข้อคิดเห็นดังกล่าวมาพิจารณาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งเพื่อจัดทำเป็นจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่สมบรูณ์

2.2 **เนื้อหาของหลักสูตรพีชคณิต** แนวทางในการกำหนดเนื้อหาพีชคณิตผู้วิจัยศึกษา จุดมุ่งหมายของหลักสูตร ศึกษาเนื้อหาพีชคณิต ศึกษาโจทย์ปัญหาทางพีชคณิตจากตำราและเอกสารต่าง ๆ ทั้งในประเทศและต่างประเทศ ศึกษาประเด็นต่าง ๆ ในการสร้างเนื้อหาของหลักสูตร สอบถามความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญ และคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ เพื่อขอคำแนะนำเกี่ยวกับการกำหนดเนื้อหาในหลักสูตร แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปกำหนดหัวข้อและเค้าโครงของเนื้อหาพีชคณิต ซึ่งประกอบไปด้วยเนื้อหาที่เป็นความรู้พื้นฐานการเรียนพีชคณิต เช่น เรื่องเซต ระบบจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน หลักการนับ หลักการพิสูจน์เบื้องต้นและเนื้อหาพีชคณิต เช่น การกระจายและการแยกตัวประกอบ ทฤษฎีบททวินาม พหุนาม สมการพหุนาม ลำดับและอนุกรม ความสัมพันธ์เวียนเกิด อสมการ โดยเนื้อหาจะเน้นในลักษณะที่ท้าทายความสามารถ และความสนใจของผู้เรียน มีแนวทางในการศึกษาด้วยตนเองได้และมีการศึกษาเนื้อหาหลัก ๆ ที่จำเป็นให้เข้าใจอย่างลึกซึ้ง มีโจทย์ปัญหาที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนได้ใช้ความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา เมื่อได้เค้าโครงของเนื้อหาพีชคณิตแล้ว นำเค้าโครงของเนื้อหาไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความเหมาะสมในการจัดลำดับของเนื้อหา ความเป็นไปได้ ความถูกต้องของเนื้อหา ภาษาที่ใช้ จากนั้นนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไข แล้วกำหนดรายละเอียดของเนื้อหาในแต่ละเรื่อง นำไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา ลำดับการเขียนของเนื้อหา พร้อมทั้งขอข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขให้เกิดความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

2.3 **กิจกรรมการเรียนการสอน** ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการศึกษาสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ รูปแบบการเรียนการสอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ตลอดจนกระบวนการเรียนการสอน โดยผู้วิจัยเลือกใช้รูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ของ ซิดนีย์ ปาร์น ซึ่งเป็นวิธีที่เอื้อต่อความมีอิสระของความคิด การสื่อความหมาย ตนเองเป็นผู้นำตนเอง และเป็นการจัดกิจกรรมที่ยึดผู้เรียนเป็นสำคัญ แล้วจัดทำแผนการสอน โดยกำหนดจุดประสงค์ เนื้อหา สื่อการเรียน

กิจกรรมการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล เป็นรายวัน ในแต่ละวันจะมีกิจกรรมตอนเช้าและตอนบ่าย ช่วงละ 3 ชั่วโมง (รายละเอียดดูในภาคผนวก ฉ) จากนั้นนำแผนการสอนไปให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินเพื่อดูความเหมาะสมของการแบ่งเนื้อหา การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนว่าเหมาะสมในการนำไปปฏิบัติจริงหรือไม่เพียงใด และมีการสัมภาษณ์เพิ่มเติมเพื่อขอคำแนะนำต่าง ๆ แล้วปรับปรุงแก้ไขและนำไปทดลองสอนกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษกลุ่มย่อยจำนวน 5 คน เพื่อตรวจสอบความสมบูรณ์ในการจัดกิจกรรมก่อนนำไปทดลองสอนกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 **สื่อการเรียน** ในการจัดสื่อการเรียนการสอนสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ พิจารณาจากธรรมชาติของเด็กว่าต้องการอะไร มีสิ่งใดที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถบางแล้วนำไปจัดเตรียมซึ่งประกอบด้วย แบบเรียนเนื้อหาพีชคณิต แบบฝึกทักษะการคิดที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น เกมฝึกสมองเพื่อใช้ผ่อนคลายจากการเรียน โดยหาจากหนังสือเกมคณิตศาสตร์ทั่วไป หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร (รายชื่อหนังสือดูในภาคผนวก ค)

2.5 **การวัดและประเมินผล** จากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ พบว่า ในการวัดและประเมินผล ถ้ามีการทดสอบย่อยในแต่ละหน่วยการเรียนหรือมีการทดสอบย่อยบ่อยครั้งจะส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้นเพราะเป็นการประเมินผลการเรียนเป็นระยะทำให้นักเรียนทราบจุดบกพร่องของตนเองแล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข ดังนั้นในการวัดและประเมินผลผู้วิจัยใช้แนวทางในการวัดและประเมินผลซึ่งประกอบด้วยการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต มีการทดสอบท้ายหน่วยทุกหน่วยการเรียนแต่ไม่นำผลมาวิเคราะห์ มีการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ซักถามนักเรียน และการให้นักเรียนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของตนเอง โดยจะเน้นการวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และความชำนาญในการคิดระดับสูง

การกำหนดส่วนต่าง ๆ ของหลักสูตร เมื่อกำหนดได้แล้วผู้วิจัยนำไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ผู้เชี่ยวชาญ ได้ตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสมและประเด็นต่าง ๆ พร้อมทั้งขอข้อเสนอแนะเพื่อนำมาปรับปรุงให้ได้หลักสูตรที่สมบูรณ์ จากนั้นนำไปทดลองใช้กับเด็กนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นโรงเรียนเลยพิทยาคมที่ได้เกรดเฉลี่ยคณิตศาสตร์ 3.5 ขึ้นไปโดยครูผู้สอนคณิตศาสตร์เป็นผู้เสนอชื่อและสอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งเป็น 2 ครั้ง ครั้งแรกเป็นกลุ่มย่อยจำนวน 2 คน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และกลุ่มหลังจำนวน 5 คน เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ในแง่การนำไปปฏิบัติจริง โดยพิจารณาความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ เวลาที่ใช้ในการเรียน สื่อ กิจกรรมการเรียนการสอน ความยากง่ายของเนื้อหา ความท้าทายของโจทย์ปัญหา แล้วนำผลที่ได้จากการทดลองมาปรับปรุงแก้ไข ให้มีคุณภาพดียิ่งขึ้น แล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน ตรวจสอบดูความเหมาะสมโดยใช้แบบสอบถามแบบมาตราส่วนประมาณค่า เพื่อหาดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของผู้เชี่ยวชาญและดูความคิดเห็นเพิ่มเติม นำผลที่ได้มาวิเคราะห์ เพื่อปรับปรุงแก้ไขจนได้หลักสูตรพีชคณิตที่สมบูรณ์พร้อมที่จะนำไปใช้จริง

3. แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่ได้จากตอนที่ 1 มากำหนดประเด็นต่าง ๆ และเขียนเป็นข้อคำถาม สร้างแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต เพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญได้พิจารณาประเมินความเหมาะสมและความสอดคล้องของ จุดมุ่งหมายของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ และการวัดและประเมินผล แล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญและคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบประเด็นต่าง ๆ ของการประเมิน ลักษณะของข้อคำถาม และภาษาที่ใช้ เพื่อนำมาปรับปรุงจนได้แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตที่สมบูรณ์

4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์และหลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมาวิเคราะห์แล้วดำเนินการสร้างข้อสอบ โดยมีลักษณะเป็นแบบทดสอบที่ให้แสดงวิธีการคิด เมื่อได้แบบทดสอบแล้วนำแบบทดสอบไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ผู้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา และความถูกต้องเหมาะสมของภาษา แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข หลังจากนั้นนำไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในข้อ 2 และนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในโครงการส่งเสริมนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์รอบพิเศษซึ่งจัดในเดือนตุลาคม 2542 ที่มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย เพื่อตรวจสอบความเหมาะสม วิเคราะห์หาความเชื่อมั่น และอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ เวลาที่ใช้สอบ ภาษา แล้วนำมาปรับปรุงจนได้แบบทดสอบที่เหมาะสมในการที่จะนำไปใช้ทดสอบจริง แล้วกำหนดคะแนนจุดตัดที่ยอมรับได้ของแบบทดสอบ

ตอนที่ 3 ประเมินหลักสูตร

การประเมินหลักสูตร กระทำเพื่อชี้ให้เห็นว่าหลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้นเป็นหลักสูตรที่มีประสิทธิภาพสามารถนำไปใช้สอนนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งการประเมินเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

1. **ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ** หลังจากที่ผู้วิจัยสร้างหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เสร็จแล้วดำเนินการนำหลักสูตรและแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตไปให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินเพื่อนำผลมาวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของหลักสูตรต่อไป

2. **ประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตร** หลังจากหลักสูตรผ่านการประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญแล้ว ได้ดำเนินการนำหลักสูตรพีชคณิตที่พัฒนาแล้วไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างในช่วงปิดภาคเรียนและทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิแบบอิงเกณฑ์ เพื่อนำผลการสอบก่อนเรียน และหลังเรียนมาวิเคราะห์เปรียบ

เทียบกัน และนำคะแนนสอบหลังเรียนมาหาค่าเฉลี่ยแล้วนำไปเปรียบเทียบกับคะแนนจุดตัดเพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตรว่ามีประสิทธิภาพเพียงใดยังมีข้อบกพร่องที่ต้องปรับปรุงในส่วนใดอีกหรือไม่

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการเก็บรวบรวมข้อมูลผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1. นำหลักสูตรพีชคณิตที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้ว และแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญประเมิน หลังจากนั้นนำผลการประเมินมาวิเคราะห์หาความเหมาะสมของโครงร่างของหลักสูตร ความสอดคล้องของโครงร่างของหลักสูตรและความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับหลักสูตร

2. ทดลองใช้หลักสูตร ในการทดลองใช้หลักสูตร ผู้วิจัยดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.1 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิตที่ผ่านการวิเคราะห์และปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อเก็บคะแนนเป็นคะแนนก่อนเรียน

2.2 ทดลองสอน ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนกลุ่มตัวอย่างด้วยตนเอง โดยดำเนินการในช่วงปิดภาคเรียน ใช้เวลา 98 ชั่วโมงตลอดโครงการ ในระหว่างทดลองสอนมีการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ซักถามนักเรียน และให้นักเรียนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของตนเอง

2.3 หลังจากการเรียนการสอนสิ้นสุดลง นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิตที่ผ่านการวิเคราะห์และปรับปรุงแก้ไขเรียบร้อยแล้วไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง เก็บคะแนนเป็นคะแนนหลังเรียน เพื่อนำไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของหลักสูตรต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัย ผู้วิจัยใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. **การหาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา** (content validity) ของหลักสูตร และของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิแบบอิงเกณฑ์ โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้องของผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC คือ ดัชนีความสอดคล้องของผู้เชี่ยวชาญ

$\sum R$ คือ ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ โดยค่า R จำแนกเป็น -1 , 0 , 1 ซึ่งแทน **ไม่เห็นด้วย** **ไม่แน่ใจ** และ **เห็นด้วย** ตามลำดับ

N คือ จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2. **การหาความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง** (construct validity)

จะหาความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ที่ใช้คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เพื่อดูว่าข้อสอบนั้นสามารถใช้วัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ได้จริงหรือไม่ โดยใช้วิธี known group technique สถิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบใช้ t-test แบบ Independent ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$t = \frac{\bar{X}_s - \bar{X}_f}{\sqrt{\frac{S_s^2}{N_s} + \frac{S_f^2}{N_f}}}$$

เมื่อ t คือ ค่าที่ใช้พิจารณาการแจกแจงความถี่

$\bar{X}_s$ คือ คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่มีลักษณะตรงกับที่ต้องการศึกษา

$\bar{X}_f$ คือ คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่มีลักษณะไม่ตรงกับที่ต้องการศึกษา

S_s^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มที่มีลักษณะตรงกับที่ต้องการศึกษา

S_f^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มที่มีลักษณะไม่ตรงกับที่ต้องการศึกษา

N_s คือ จำนวนคนในกลุ่มที่มีลักษณะตรงกับที่ต้องการศึกษา

N_f คือ จำนวนคนในกลุ่มที่มีลักษณะไม่ตรงกับที่ต้องการศึกษา

3. **การหาคะแนนจุดตัด** ใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัดโดยวิธีของเบอร์ก (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 190 - 197 ; อ้างอิงมาจาก Berk. 1976 : 4 - 9) ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\phi_{vc} = \frac{P(TM) - BR(SR)}{\sqrt{BR(1 - BR)\,SR(1 - SR)}}$$

เมื่อ ϕ_{vc} คือ สัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัด

(ดูรายละเอียดการนำไปใช้ในการคำนวณที่ภาคผนวก ซ)

คะแนนจุดตัดที่เหมาะสม จะเป็นคะแนนที่สัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัดมีค่าสูงสุด และเกิดขึ้นเมื่อ BR = SR

4. **การหาความเชื่อมั่น (reliability)**

จะหาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ซึ่งมีการกำหนดคะแนนจุดตัดไว้แล้วและจะหาความเชื่อมั่นของข้อสอบที่มีต่อคะแนนจุดตัดค่านั้น ๆ โดยใช้สูตรของคาร์เวอร์ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$P = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

เมื่อ a คือ จำนวนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ภายนอกและสอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนจุดตัด

b คือ จำนวนผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ภายนอกแต่สอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับคะแนนจุดตัด

c คือ จำนวนผู้ที่ผ่านเกณฑ์ภายนอกและสอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับคะแนนจุดตัด

d คือ จำนวนผู้ที่ผ่านเกณฑ์ภายนอกแต่สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนจุดตัด

5. **การทดสอบความแตกต่างของคะแนนการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน** ใช้การทดสอบค่า t แบบ dependent ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$t = \frac{\Sigma D}{\sqrt{\frac{N\Sigma D^2 - (\Sigma D)^2}{N-1}}} \quad ; \quad df = N - 1$$

เมื่อ t คือ ค่าที่ใช้พิจารณาการแจกแจง

D คือ ความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียน

ΣD คือ ผลรวมของความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียน

N คือ จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบ

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัยออกเป็น 4 ด้านดังนี้

1. ผลการสร้างเครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
2. ผลการสร้างและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
3. ผลการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์
4. ผลการประเมินหลักสูตร

1. ผลการสร้างเครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

เครื่องมือคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

1. แบบเสนอชื่อ
2. แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์
3. แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง

ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. แบบเสนอชื่อ ผู้วิจัยใช้แบบเสนอชื่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ของพิชากร แปลงประสพโชค มานะ เอกจริยวงศ์ และนิตติยา ปภาพจน์ ที่ร่วมกันพัฒนา โดยมีผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะพฤติกรรมของเด็กโดยผู้เชี่ยวชาญ มีความคิดเห็นสอดคล้องกันมีค่าระหว่าง 0.5 - 1.0 และคะแนนแต่ละข้อคำถามมีค่าสหสัมพันธ์กับคะแนนรวมทั้งฉบับสูงโดยสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 (นิตติยา ปภาพจน์. 2540 : 49)

2. แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบได้แบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 4 ตอนดังนี้

2.1 หาค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบ วิเคราะห์ข้อมูลโดยนำแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบข้อสอบแต่ละข้อว่าอยู่ภายในกรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จริงหรือไม่ และข้อสอบแต่ละข้อต้องใช้ความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์หรือไม่ แล้วนำมาวิเคราะห์หาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ถ้าค่า IOC มีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปแสดงว่าข้อคำถามนั้นสอดคล้องนำไปใช้ได้ ซึ่ง ได้ผลดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงผลการวิเคราะห์ค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบข้อที่	ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับกรอบความรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1		ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับการใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา	
	IOC	ความหมาย	IOC	ความหมาย
1	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
2	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
3	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
4	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
5	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
6	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
7	1	สอดคล้อง	0.66	สอดคล้อง
8	1	สอดคล้อง	0.66	สอดคล้อง
9	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
10	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
11	1	สอดคล้อง	0.66	สอดคล้อง
12	1	สอดคล้อง	0.66	สอดคล้อง
13	0.66	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
14	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
15	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
16	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
17	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
18	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
19	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
20	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
21	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
22	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
23	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
24	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง

ตาราง 1 (ต่อ)

แบบทดสอบ ข้อที่	ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับกรอบความรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1		ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับการใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา	
	IOC	ความหมาย	IOC	ความหมาย
25	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
26	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
27	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
28	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
29	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง
30	1	สอดคล้อง	1	สอดคล้อง

จากตาราง 1 ผลการวิเคราะห์ค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ปรากฏว่า ประเด็นต่าง ๆ ของข้อสอบแต่ละข้อ มีค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับกรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีค่าระหว่าง 0.66 - 1 มีค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับการใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหามีค่าระหว่าง 0.66 - 1 ดังนั้นข้อสอบฉบับนี้มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

2.2 หาค่าความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างของแบบทดสอบ วิเคราะห์ข้อมูลโดยนำแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ไปทดสอบกับกลุ่มนักเรียน 2 กลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา อีกกลุ่มเป็นนักเรียนที่ไม่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทั้งสอง ว่ามีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ แล้ววิเคราะห์หาคุณภาพของแบบทดสอบซึ่งได้ผลดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงผลการวิเคราะห์ค่าความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบ	กลุ่มที่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา		กลุ่มที่ไม่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา		t
	$\bar{x}_s$	S_s^2	$\bar{x}_f$	S_f^2	
การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์	21.378	11.131	2.166	2.752	18.01**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 2 ผลการเปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ระหว่างกลุ่มที่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษากับกลุ่มที่ไม่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา ปรากฏว่า มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 แสดงว่าแบบทดสอบฉบับนี้มีความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างสูง

2.3 หาคะแนนจุดตัด เป็นการกำหนดเกณฑ์หรือมาตรฐานที่ใช้ในการตัดสินความสามารถขั้นต่ำของนักเรียนที่ยอมรับว่าเป็นผู้มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัดวิธีของเบอร์ก ซึ่งได้ผลดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงผลการวิเคราะห์คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

คะแนนจุดตัด	ความน่าจะเป็นในการตัดสิน		ϕ_{vc}
	ถูก	ผิด	
14	.99*	0*	1*
17	.96	.03	.94
18	.91	.08	.84
19	.88	.11	.80

จากตาราง 3 ผลการวิเคราะห์คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ปรากฏว่า คะแนน 14 คะแนนมีค่าความน่าจะเป็นของการตัดสินถูกมีค่าสูงสุด ความน่าจะเป็นในการตัดสินใจผิดมีค่าต่ำสุด และมีค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงสูงสุด ดังนั้นคะแนนจุดตัดที่เหมาะสมของแบบทดสอบฉบับนี้มีค่าเท่ากับ 14 คะแนน

2.4 หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้สูตรของคาร์เวอร์ ได้ค่าเท่ากับ 1.0 นั่นคือแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์มีความเชื่อมั่นสูง (รายละเอียดเสนอไว้ในภาคผนวก ซ.)

3. แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูงของพิชากร แปลงประสพโชค มานะ เอกจริยวงศ์ และนิตติยา ปภาพจน์ ที่ร่วมกันพัฒนา โดยมีผลการประเมินการเปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทดสอบความสามารถในการใช้ความคิดระดับสูง ระหว่างกลุ่มที่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษากับกลุ่มที่ไม่มีลักษณะตามที่ต้องการศึกษา มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 (นิตติยา ปภาพจน์. 2540 : 50) มีคะแนนจุดตัด 51 คะแนน ค่าความเชื่อมัน 0.98 (พิชากร แปลงประสพโชค. 2540 : 58)

2. ผลการสร้างและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

การสร้างและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิต ผู้วิจัยได้นำข้อมูลพื้นฐานมาเป็นแนวทางในการสร้างหลักสูตรที่สอดคล้องกับความต้องการ ความสนใจ ลักษณะนิสัยและศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์โดยกิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ การวัดและประเมินผล และแผนการสอน จากนั้นได้นำหลักสูตรไปทดลองสอนกลุ่มเด็ก นำไปให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินโครงร่างหลักสูตร เพื่อปรับปรุงแก้ไขให้ได้หลักสูตรที่มีคุณภาพดียิ่งขึ้น แล้วนำไปทดลองสอนเด็กระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร ซึ่งได้ผลการสร้างและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิต ดังนี้

หลักสูตรพีชคณิต

สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

หลักการและเหตุผล

โลกในปัจจุบันมีความเจริญก้าวหน้าทั้งในด้านเทคโนโลยี คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ประเทศไทยมีความจำเป็นที่จะต้องก้าวไปให้ทันโลก สังคมไทยยังต้องการผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจำนวนมาก และเป็นที่ยอมรับกันว่าความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่โดดเด่นเป็นสิ่งจำเป็นและเป็นตัวการสำคัญในการรักษาความเป็นผู้นำในโลกแห่งเทคโนโลยี ดังนั้นการเสริมสร้างบุคคลที่มีทักษะและความสามารถเฉพาะทางเพื่อช่วยเหลือสังคม จึงเป็นสิ่งที่จำเป็นต้องกระทำ นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษจะต้องได้รับคำแนะนำและสนับสนุนส่งเสริมอย่างเหมาะสมตามความสามารถเฉพาะด้าน พัฒนาการเรียนรู้และใช้ความสามารถอย่างเต็มกำลัง

การจัดการศึกษาเพื่อนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ เป็นการให้โอกาสทางการศึกษาที่สำคัญยิ่งสำหรับเยาวชนซึ่งจะเป็นผู้นำด้านต่าง ๆ ของประเทศเป็นการจัดการทรัพยากรที่มีค่ายิ่งของชาติอย่างมีทิศทางและมีประสิทธิภาพมาก เพื่อผลประโยชน์ในการพัฒนาประเทศในอนาคตทั้งระยะสั้นและระยะยาว

โดยทั่วไปการจัดการเรียนการสอนในโรงเรียนมีข้อจำกัดซึ่งไม่เอื้ออำนวยให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ได้ศึกษาเนื้อหาเพื่อพัฒนาศักยภาพของตนเองได้อย่างเต็มที่ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้พัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาตร์ โดยเป็นหลักสูตรเสริมที่มุ่งพัฒนาความรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต ความสนใจ ความต้องการของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ คำนึงถึงบรรยากาศการเรียนรู้อย่างอิสระเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดค้น และสร้างสรรค์ให้เกิดภูมิปัญญาด้วยตนเอง โดยนักเรียนจะได้รับการฝึกในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางพีชคณิต ฝึกให้มีความสามารถในการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง เพิ่มพูนประสบการณ์ และพัฒนาความรู้ความสามารถของตนเองให้เต็มตามศักยภาพ เพื่อเป็นทรัพยากรที่มีค่ายิ่งของประเทศชาติต่อไป

จุดมุ่งหมายของหลักสูตร

1. เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาพีชคณิต

2. เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาศักยภาพของตนให้ได้ขีดสูงสุดในด้านการเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และการใช้ความคิดระดับสูงทางพีชคณิต

เนื้อหาของหลักสูตรพีชคณิต

บทนำ ความรู้พื้นฐาน

1. เซต
2. หลักการพิสูจน์เบื้องต้น

หน่วยที่ 1 การกระจาย และ การแยกตัวประกอบ

1.1 การกระจายและการแยกตัวประกอบที่ควรรู้
1.2 ทฤษฎีบททวินาม
1.3 การแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

หน่วยที่ 2 พหุนาม

2.1 พหุนาม
2.2 พหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อน
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม
2.4 การหารากของสมการกำลังสอง กำลังสาม กำลังสี่

หน่วยที่ 3 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

3.1 ลำดับและอนุกรม
3.2 อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
3.3 อนุกรมอื่น ๆ ที่ควรทราบ
3.4 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

หน่วยที่ 4 อสมการ

4.1 อสมการ
4.2 อสมการสามเหลี่ยม
4.3 อสมการ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต - เรขาคณิต

กิจกรรมการเรียนการสอน

แนวทางในการจัดกิจกรรมและวิธีสอนในเนื้อหาแต่ละหน่วย จะเน้นรูปแบบการเรียนการสอนของ ซิดนีย์ ปาร์น ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ครูจะเป็นเพียงผู้ชี้แนะและจะกล่าวเฉพาะความคิดหลัก ๆ และให้คำแนะนำเฉพาะกรณีที่นักเรียนเกิดปัญหาเท่านั้น เน้นให้นักเรียนศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง เป็นอิสระ ตนเองเป็นผู้นำตนเอง มีการฝึกทักษะการคิดและแก้ปัญหา นำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

สื่อการเรียน

สื่อการเรียนประกอบด้วย แบบเรียนเนื้อหาพีชคณิต แบบฝึกทักษะการคิด หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร (รายละเอียดเสนอไว้ในภาคผนวก ค.) และมีเกมฝึกสมองให้นักเรียนเล่นเพื่อผ่อนคลายจากการเรียน

การวัดและประเมินผล

การวัดและประเมินผลพิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วย การทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

3. ผลการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ประกอบด้วย

ชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

ชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต

ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

3.1 หาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา วิเคราะห์โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อข้อคำถามแต่ละข้อกับหัวข้อเนื้อหาในแต่ละหน่วย โดยพิจารณาจากค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปเป็นข้อคำถามที่ใช้ได้ ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ดังตาราง 4

ตาราง 4 แสดงผลการวิเคราะห์ค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ชุดที่ 1

ข้อที่	เนื้อหาหน่วยที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่างข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	ความหมาย
1	1	1	สอดคล้อง
2	1	1	สอดคล้อง
3	2	1	สอดคล้อง
4	2	1	สอดคล้อง
5	3	1	สอดคล้อง
6	3	1	สอดคล้อง
7	4	1	สอดคล้อง
8	4	1	สอดคล้อง
9	4	1	สอดคล้อง
10	4	1	สอดคล้อง

จากตาราง 4 ผลการประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ชุดที่ 1 ปรากฏว่า ประเด็นต่าง ๆ ของแต่ละข้อคำถามกับเนื้อหาในแต่ละหน่วยมีความสอดคล้องกันโดยมีค่า IOC เป็น 1.00 แสดงว่า แบบทดสอบฉบับนี้ มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

ตาราง 5 แสดงผลการวิเคราะห์ค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ชุดที่ 2

ข้อที่	เนื้อหาหน่วยที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่างข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	ความหมาย
1	1	1	สอดคล้อง
2	1	1	สอดคล้อง
3	1	1	สอดคล้อง
4	2	0.66	สอดคล้อง
5	2	1	สอดคล้อง

ตาราง 5 (ต่อ)

ข้อที่	เนื้อหาหน่วยที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่างข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	ความหมาย
6	2	1	สอดคล้อง
7	2	1	สอดคล้อง
8	2	1	สอดคล้อง
9	2	1	สอดคล้อง
10	2	1	สอดคล้อง
11	3	1	สอดคล้อง
12	3	1	สอดคล้อง
13	3	0.66	สอดคล้อง
14	4	1	สอดคล้อง
15	4	1	สอดคล้อง
16	4	1	สอดคล้อง
17	4	1	สอดคล้อง
18	4	1	สอดคล้อง
19	4	1	สอดคล้อง
20	4	0.66	สอดคล้อง

จากตาราง 5 ผลการประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ชุดที่ 2 ปรากฏว่า ประเด็นต่าง ๆ ของแต่ละข้อคำถามกับเนื้อหาในแต่ละหน่วยมีความสอดคล้องกัน โดยมีค่า IOC อยู่ระหว่าง 0.66 - 1 แสดงว่าแบบทดสอบฉบับนี้มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

3.2 หาคะแนนจุดตัด เป็นการกำหนดเกณฑ์หรือมาตรฐานที่ใช้ในการตัดสินการเรียนรู้ขั้นต่ำของนักเรียนที่ยอมรับว่าเป็นผู้รอบรู้ในเนื้อหาพีชคณิต โดยใช้ เทคนิคของแองกอฟ โดยนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาพีชคณิตจำนวน 3 ท่านตรวจสอบดูว่าความน่าจะเป็นที่คิดว่านักเรียนที่มีสมรรถภาพขั้นต่ำสุดจะสามารถตอบข้อคำถามแต่ละข้อถูกต้องเป็นเท่าไรแล้วทำการวิเคราะห์ข้อมูล ได้ผลดังตาราง 6

ตาราง 6 แสดงผลการวิเคราะห์คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

แบบทดสอบ	ความน่าจะเป็นในการตอบถูก			ความน่าจะเป็นทั้งฉบับ	คะแนนเต็ม	คะแนนจุดตัด
	คนที่1	คนที่2	คนที่3			
ชุดที่ 1	0.52	0.54	0.20	0.42	40	17
ชุดที่ 2	0.53	0.54	0.25	0.44	80	35
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	0.52	0.54	0.22	0.43	120	52

จากตาราง 6 ผลการประเมินความน่าจะเป็นในการตอบข้อคำถามแต่ละข้อถูกต้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ปรากฏว่า ความน่าจะเป็นเฉลี่ยของแบบทดสอบทั้งฉบับคือ 0.43 ดังนั้น คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ คือ 52 คะแนน (คะแนนเต็ม 120 คะแนน)

3.3 หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้สูตรของคาร์เวอร์ โดยแบบทดสอบชุดที่ 1 ได้ค่าเท่ากับ 0.81 แบบทดสอบชุดที่ 2 ได้ค่าเท่ากับ 0.80 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งฉบับได้ค่าเท่ากับ 0.78 นั่นคือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์มีความเชื่อมั่นสูง (รายละเอียดเสนอไว้ในภาคผนวก ช.)

4. ผลการประเมินหลักสูตร

การประเมินหลักสูตร เป็นการประเมินเพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น ซึ่งแบ่งการประเมินเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1. ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ
2. ประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตร

ได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเหมาะสมและความสอดคล้องขององค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตรพีชคณิตพร้อมทั้งแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นของหลักสูตร ได้ผลการวิเคราะห์ดังนี้

1.1 ประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต โดยให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินองค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตรว่ามีความเหมาะสมมากน้อยเพียงใด โดยใช้เปรียบเทียบมาตรในแบบสอบถามด้วยวิธีการแปลงเป็นคะแนนดังนี้

เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนนเป็น	5
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนนเป็น	4
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนนเป็น	3
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนนเป็น	2
เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนนเป็น	1

จากนั้นนำคะแนนผลการประเมินของผู้เชี่ยวชาญมาหาค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) โดยค่า S.D.มีค่าไม่เกิน 1.00 แสดงว่าข้อคำถามนั้นมีความเหมาะสม แล้วพิจารณาคะแนนเฉลี่ยความเหมาะสมของผู้เชี่ยวชาญโดยใช้เกณฑ์ดังนี้

มากที่สุด	ช่วงคะแนน	4.21 - 5.00
มาก	ช่วงคะแนน	3.41 - 4.20
ปานกลาง	ช่วงคะแนน	2.61 - 3.40
น้อย	ช่วงคะแนน	1.81 - 2.60
น้อยที่สุด	ช่วงคะแนน	1.00 - 1.80

ได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 7

ตาราง 7 แสดงผลการประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

ประเด็นการประเมิน	$\bar{x}$	S.D.	ความหมาย
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร			
1.1 ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ใช้ความสามารถอย่างแท้จริง	4.67	0.47	มากที่สุด
1.2 พัฒนาความสามารถด้านการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และความคิดระดับสูง	4.67	0.47	มากที่สุด
1.3 สร้างเสริมผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์	5.00	0.00	มากที่สุด
1.4 ปฏิบัติจริง	4.33	0.94	มากที่สุด
1.5 ส่งเสริมการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง	4.33	0.47	มากที่สุด
1.6 ส่งเสริมการสร้างสรรค์ผลงานตามความสามารถและความสนใจของผู้เรียน	4.00	0.00	มาก
1.7 พัฒนาศักยภาพของผู้เรียนให้ได้ขีดสูงสุด	4.33	0.47	มากที่สุด

ตาราง 7 (ต่อ)

ประเด็นการประเมิน	$\bar{x}$	S.D.	ความหมาย
1.8 ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจ ในเนื้อหาหลัก ๆ ทางพีชคณิต	4.67	0.47	มากที่สุด
2. เนื้อหาของหลักสูตร			
2.1 เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนซึ่งเป็นเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์	4.00	0.81	มาก
2.2 นำไปปฏิบัติได้จริง	4.00	0.81	มาก
2.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน	4.00	0.81	มาก
2.4 การกำหนดหัวข้อของเนื้อหาในหลักสูตรมีความเหมาะสม	4.00	0.81	มาก
2.5 การกำหนดเนื้อหาในแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม	3.67	0.47	มาก
2.6 มีการจัดเรียงลำดับอย่างเหมาะสม	4.67	0.47	มากที่สุด
2.7 มีความเหมาะสมกับระยะเวลาที่กำหนด	3.67	0.47	มาก
3. กิจกรรมการเรียนการสอน			
3.1 ในแผนการสอนแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม	3.67	0.47	มาก
3.2 เหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษ ทางคณิตศาสตร์	4.00	0.81	มาก
3.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน	4.00	0.81	มาก
3.4 ส่งเสริมด้านการคิดด้านการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์	4.33	0.47	มากที่สุด
3.5 ส่งเสริมการคิดระดับสูง	4.67	0.47	มากที่สุด
3.6 เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร	4.67	0.47	มากที่สุด
3.7 เหมาะสมกับเนื้อหาของแต่ละหน่วย			
หน่วยที่ 1	4.67	0.47	มากที่สุด
หน่วยที่ 2	4.67	0.47	มากที่สุด

ตาราง 7 (ต่อ)

ประเด็นการประเมิน	x̄	S.D.	ความหมาย
หน่วยที่ 3	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 4	3.67	0.47	มาก
3.8 มีความเหมาะสมกับการเรียนรู้ของเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์	3.67	0.47	มาก
3.9 เหมาะสมในการนำไปปฏิบัติจริง	3.67	0.47	มาก
3.10 ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเอง	4.00	0.00	มาก
3.11 ส่งเสริมให้ผู้เรียนศึกษาหาความรู้ตามความสามารถและความสนใจ	3.67	0.47	มาก
3.12 ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีโอกาสลงมือปฏิบัติงานในระดับที่ทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างจริงจัง	4.00	0.00	มาก
4. สื่อการเรียน			
4.1 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร	4.00	0.00	มาก
4.2 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน	4.00	0.00	มาก
4.3 เหมาะสมกับการส่งเสริมการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง	4.00	0.00	มาก
4.4 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน	3.67	0.47	มาก
5. การวัดและประเมินผล			
5.1 เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร	4.67	0.47	มากที่สุด
5.2 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร	4.33	0.94	มากที่สุด
5.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน	4.33	0.94	มากที่สุด
5.4 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน	4.33	0.94	มากที่สุด
5.5 เหมาะสมกับการวัดความสามารถที่แท้จริงของผู้เรียน	3.67	0.47	มาก
5.6 เหมาะสมกับการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และความคิดระดับสูง	4.00	0.00	มาก
5.7 เหมาะสมกับการวัดความรอบรู้ในเนื้อหาทางพีชคณิต	3.67	0.47	มาก

ตาราง 7 (ต่อ)

ประเด็นการประเมิน	$\bar{X}$	S.D.	ความหมาย
6. แผนการสอน			
6.1 ส่วนประกอบ (เวลา เนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม แนวทางการจัดกิจกรรมและวิธีสอน สื่อการเรียน และ การวัดและประเมินผล) ในแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 3	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 4	3.67	0.47	มาก
6.2 รายละเอียดในแต่หน่วยมีความเหมาะสม			
หน่วยที่ 1	4.00	0.00	มาก
หน่วยที่ 2	4.00	0.00	มาก
หน่วยที่ 3	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 4	3.67	0.47	มาก
6.3 ในแต่ละหน่วยเหมาะกับการนำไปปฏิบัติจริง			
หน่วยที่ 1	4.00	0.00	มาก
หน่วยที่ 2	4.00	0.00	มาก
หน่วยที่ 3	3.67	0.47	มาก
หน่วยที่ 4	3.67	0.47	มาก

จากตาราง 7 ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตโดยผู้เชี่ยวชาญปรากฏว่า ประเด็นต่าง ๆ ขององค์ประกอบในหลักสูตร มีค่าเฉลี่ยระหว่าง 3.67 - 5.00 และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่าง 0.00 - 0.94 นั่นคือ องค์ประกอบในหลักสูตรมีความเหมาะสมมาก กับ มากที่สุด

1.2 ประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตโดยให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินองค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตรว่ามีความสอดคล้องกันหรือไม่ ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังตาราง 8

ตาราง 8 แสดงผลการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

ประเด็นการประเมิน	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	ความหมาย
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับเนื้อหาของหลักสูตร	1	สอดคล้อง
2. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับกิจกรรมและวิธีสอน	1	สอดคล้อง
3. เนื้อหาของหลักสูตรกับจำนวนหน่วยการเรียน	1	สอดคล้อง
4. เนื้อหาแต่ละหน่วยการเรียนกับเวลา		
หน่วยที่ 1	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	1	สอดคล้อง
5. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับกิจกรรมและวิธีการสอน		
หน่วยที่ 1	.66	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	.66	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	.66	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	.66	สอดคล้อง
6. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับสื่อการเรียน		
หน่วยที่ 1	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	1	สอดคล้อง
7. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับการวัดและประเมินผล		
หน่วยที่ 1	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	1	สอดคล้อง

ตาราง 8 (ต่อ)

ประเด็นการประเมิน	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	ความหมาย
8. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับแผนการเรียน		
หน่วยที่ 1	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	1	สอดคล้อง
9. กิจกรรมและวิธีสอนกับสื่อการเรียนในแต่ละหน่วย		
หน่วยที่ 1	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 2	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 3	1	สอดคล้อง
หน่วยที่ 4	1	สอดคล้อง
10. กิจกรรมและวิธีสอนกับการวัดและประเมินผล	.66	สอดคล้อง
11. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแผนการเรียนกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร	.66	สอดคล้อง

จากตาราง 8 ผลการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตโดยผู้เชี่ยวชาญ ปรากฏว่า ประเด็นต่าง ๆ ขององค์ประกอบในหลักสูตรมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่าง .66 - 1 นั่นคือ องค์ประกอบในหลักสูตรมีความสอดคล้องกัน

1.3 ความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับหลักสูตรพีชคณิตเป็นการแสดงความคิดเห็นและให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ โดยผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งมีประเด็นต่าง ๆ ดังนี้

1.3.1 จุดมุ่งหมายของหลักสูตร ส่วนมากเห็นว่าเหมาะสม และมีบางท่านเห็นว่าน่าจะเพิ่มจุดมุ่งหมายเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษได้ทำและได้คิดในสิ่งที่ตนถนัดและชอบ

1.3.2 เนื้อหาของหลักสูตร ส่วนมากเห็นว่าเหมาะสมดีแล้ว และมีบางท่านเห็นว่าน่าจะแยกเนื้อหาออกจากโจทย์ปัญหา

1.3.3 การจัดกิจกรรมและวิธีสอน ส่วนมากเห็นว่ากิจกรรมที่จัดไว้เหมาะสมแล้ว ถ้าจะเพิ่มกิจกรรมอื่นก็ควรต้องเพิ่มเวลาด้วย

1.3.4 สื่อการเรียนการสอน ส่วนมากเห็นว่าเหมาะสมดี มีบางท่านเสนอว่าควรมี

เอกสารประกอบอื่น ๆ เช่นหนังสือหรือวารสารวิชาการที่มีหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในหลักสูตรเพิ่มเติม และมีเกมทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเพื่อผ่อนคลายความเครียด

1.3.5 วิธีการวัดและประเมินผล ส่วนมากเห็นว่าเหมาะสมดี มีบางท่านเสนอว่าควรจัดให้มีเวทีที่นักเรียนมีโอกาสได้ใช้ความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่นจัดแบ่งกลุ่มให้มีการแข่งขันกัน

1.3.6 แผนการเรียน ส่วนมากเห็นว่าเหมาะสมดีกับระยะเวลา มีบางท่านเห็นว่าแผนการเรียนที่วางไว้มีลักษณะเหมือนการติวเข้มในทางพีชคณิตเพื่อเตรียมตัวในการสอบแข่งขันเป็นการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิต

1.3.7 ความคิดเห็นเพิ่มเติม อื่น ๆ มีผู้เชี่ยวชาญบางท่านเห็นว่า โจทย์ปัญหาบางข้อที่ยาก ๆ ควรให้มีครูผู้สอนหรือนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงกว่า เช่นระดับมัธยมปลายร่วมคิดร่วมแก้ปัญหาด้วยเพื่อนักเรียนจะได้ถ่ายทอดแนวคิดในการแก้ปัญหาบางอย่างจากผู้ที่มีประสบการณ์มากกว่า และน่าจะจัดการแข่งขันคณิตศาสตร์โดยมีลักษณะการแข่งขันเป็นทีมเหมือนการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิก แต่เป็นการจัดการแข่งขันระดับประเทศหรือการจัดให้มีการร่วมมือกันจัดการแข่งขันระดับอาเซียนก็จะดี คือให้มีลักษณะเหมือนการแข่งขันกีฬาที่มีระดับอาเซียนและระดับโอลิมปิก ถ้าทำเช่นนี้ได้ก็อาจจะช่วยให้นักคณิตศาสตร์มีอาชีพเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งอาชีพเหมือนพวกนักกีฬาที่ปัจจุบันก็เกือบถือเป็นอาชีพได้เช่นกัน

2. ประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตร เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลโดยการนำหลักสูตรไปทดลองสอนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 17 คน ซึ่งเป็นนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตกรุงเทพมหานครและปริมณฑล ที่ผ่านการคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ด้วยการทดสอบความแตกต่างของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ก่อนเรียนกับหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต และเปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตกับคะแนนจุดตัดซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ดังนี้

2.1 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ก่อนเรียนกับหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตวิเคราะห์โดยใช้ค่า t-test ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ดังตาราง 9

ตาราง 9 แสดงผลการวิเคราะห์จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต

ผู้เรียนคนที่	แบบทดสอบชุดที่ 1 (40 คะแนน)		แบบทดสอบชุดที่ 2 (80 คะแนน)		แบบทดสอบทั้งฉบับ (120 คะแนน)	
	ก่อนเรียน	หลังเรียน	ก่อนเรียน	หลังเรียน	ก่อนเรียน	หลังเรียน
1	5	20	9	38	14	58
2	7	21	14	50	21	71
3	9	21	7	51	16	72
4	3	20	6	33	9	53
5	3	23	12	53	15	76
6	8	17	18	33	26	50
7	4	19	5	28	9	47
8	2	25	7	47	9	72
9	8	24	13	50	21	74
10	6	25	12	40	18	65
11	5	15	17	45	22	60
12	1	14	6	39	7	53
13	5	16	6	37	11	53
14	5	17	6	18	11	35
15	1	21	7	35	8	56
16	0	9	5	39	5	48
17	4	22	10	40	14	62
ค่า t ที่คำนวณได้	t = 14.67**		t = 14.78**		t = 17.54**	

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 9 ผลการวิเคราะห์คะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต ปรากฏผลดังนี้

แบบทดสอบชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ปรากฏว่า คะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ชุดที่ 1 ก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต มีความแตกต่าง

กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งหมายความว่า นักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางพีชคณิตสูงขึ้น

แบบทดสอบชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต ปรากฏว่า คะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ชุดที่ 2 ก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งหมายความว่า นักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความรอบรู้ทางพีชคณิตสูงขึ้น

2.2 เปรียบเทียบคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตกับคะแนนจุดตัด วิเคราะห์โดยหาค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตเพื่อตรวจสอบดูว่าคะแนนเฉลี่ยที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับคะแนนจุดตัดหรือไม่ ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ดังตาราง 10

ตาราง 10 แสดงผลการวิเคราะห์คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตกับคะแนนจุดตัด

แบบทดสอบ	คะแนนหลังเรียน		คะแนนจุดตัด
	$\bar{x}$	S.D.	
ชุดที่ 1	19.35	4.14	17
ชุดที่ 2	39.76	8.84	36
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	59.11	11.06	52

จากตาราง 10 ผลการวิเคราะห์คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตกับคะแนนจุดตัด ปรากฏผลดังนี้

แบบทดสอบชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางพีชคณิต ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ชุดที่ 1 หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต มีค่าเท่ากับ 19.35 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด แสดงว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางพีชคณิตในระดับที่ยอมรับได้

แบบทดสอบชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ชุดที่ 2 หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต มีค่าเท่ากับ 39.76 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัดแสดงว่านักเรียนมีความรอบรู้ทางพีชคณิตในระดับที่ยอมรับได้

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งฉบับ ปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งฉบับ หลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 59.11 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัดแสดงว่านักเรียนมีความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิตในระดับที่ยอมรับได้

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

จากการวิจัย เรื่อง การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์และทดลองใช้หลักสูตรที่พัฒนาขึ้นพร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของหลักสูตร

สมมุติฐานของการวิจัย

หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ คือผ่านควาเห็นชอบของผู้เชี่ยวชาญ และนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนได้

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตกรุงเทพมหานครและปริมณฑลที่สอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์จำนวน 17 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

1. เครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
2. หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์
3. แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต
4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาข้อมูลพื้นฐาน เป็นการศึกษาข้อมูลพื้นฐานเพื่อช่วยให้ผู้วิจัยพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตได้

เหมาะสมกับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยศึกษาเกี่ยวกับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ การพัฒนาหลักสูตรสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ การสร้างแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ การสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์รวมทั้งหาประสบการณ์ด้วยการเข้าร่วมสังเกตการอบรมเด็กปัญญาเลิศและทดลองสอนเด็กในโครงการส่งเสริมนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งขอความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญ

2. สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและหาคุณภาพของเครื่องมือ ได้แก่ เครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

3. ประเมินหลักสูตรโดยผู้เชี่ยวชาญ หลังจากผู้เชี่ยวชาญประเมินหลักสูตรแล้วผู้วิจัยนำผลการประเมินหลักสูตรมาวิเคราะห์หาประสิทธิภาพและปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

4. ทดลองใช้หลักสูตรด้วยการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 17 คน โดยให้กลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งสองชุด จากนั้นทดลองสอนตามแผนการสอน เมื่อสอนเสร็จให้กลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบหลังเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งสองชุด เพื่อนำคะแนนก่อนและหลังเรียนไปวิเคราะห์

5. นำคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มตัวอย่างจำนวน 17 คนไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกันด้วยค่า t-test และนำคะแนนสอบหลังเรียนมาหาค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับคะแนนจุดตัดในการหาประสิทธิภาพของหลักสูตรต่อไป

จากการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ได้ข้อสรุปดังนี้

1. หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เป็นหลักสูตรเสริมระยะสั้น ใช้เวลาเรียน 98 ชั่วโมง ประกอบด้วย หลักการและเหตุผล จุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน การวัดและประเมินผล แผนการสอน โดยเนื้อหาของหลักสูตรจะแบ่งออกเป็น บทนำ เป็นเรื่องของความรู้พื้นฐาน และแบ่งเป็นหน่วยอีก 4 หน่วยในแต่ละหน่วยประกอบด้วย เนื้อหา โจทย์ปัญหา และแบบทดสอบท้ายหน่วย หลักสูตรที่พัฒนาขึ้นนี้เป็นหลักสูตรเสริมเพื่อการเพิ่มพูนประสบการณ์ให้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ด้วยการจัดกลุ่มพิเศษแยกเรียนจากเด็กปกติ

2. ประเมินหลักสูตรพีชคณิต

2.1 ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตในประเด็นต่าง ๆ ขององค์ประกอบในหลักสูตรมีค่าเฉลี่ยระหว่าง 3.67 - 5.00 และมีค่าเบี่ยงเบน

มาตรฐานระหว่าง 0.00 - 0.94 นั่นคือองค์ประกอบต่าง ๆ ในหลักสูตรมีความเหมาะสมมากกับมากที่สุด และผลการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่าง 0.66 - 1.00 นั่นคือองค์ประกอบในหลักสูตรมีความสอดคล้องกัน

2.2 ประเมินโดยการทดลองใช้หลักสูตร ผลการวิเคราะห์คะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผลการวิเคราะห์คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 59.11 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด (52 คะแนน) แสดงว่านักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความรอบรู้และความสามารถในการแก้ปัญหาทางพีชคณิตสูงขึ้นในระดับที่ยอมรับได้ เมื่อพิจารณาการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แต่ละชุด ปรากฏผลดังนี้

ชุดที่ 1 แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางพีชคณิต ผลการวิเคราะห์คะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผลการวิเคราะห์คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 19.35 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด (17 คะแนน) แสดงว่านักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางพีชคณิตสูงขึ้นในระดับที่ยอมรับได้

ชุดที่ 2 แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต ผลการวิเคราะห์คะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผลการวิเคราะห์คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 37.76 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด (36 คะแนน) แสดงว่านักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความรอบรู้ทางพีชคณิตสูงขึ้นในระดับที่ยอมรับได้

นั่นคือ หลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ เหมาะสมที่จะใช้สอนเด็กระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

อภิปรายผลการวิจัย

จากการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ มีข้ออภิปรายดังต่อไปนี้

1. การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนและกระบวนการพัฒนาหลักสูตรด้วยการสำรวจและศึกษาข้อมูลพื้นฐานจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากการสอบถามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ทำให้ได้หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหลักสูตรเสริมการเรียนให้เด็กได้เรียนรู้เพิ่มเติมนอกเหนือจากหลักสูตรปกติ เนื้อหาในหลักสูตรลึกซึ้งและเข้มข้นกว่าหลักสูตรปกติ โดยให้เรียนในช่วงวันหยุดปิดภาคเรียน รูปแบบการจัดการเรียนการสอนจะเน้นการแก้ปัญหา การระดมความคิด การลงมือปฏิบัติจริง และการให้คำแนะนำปรึกษา ส่งเสริมให้เด็กพัฒนาทักษะในการแก้

ปัญหาต่าง ๆ โดยใช้ความรู้ ความสามารถ และความคิดสร้างสรรค์ ฝึกฝนความคิดและการสร้างความเข้าใจด้วยตนเองครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะ ซึ่งเป็นไปตามกระบวนการพัฒนาหลักสูตรสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษ (ผดุง อารยะวิญญู. 2533 : 157 ; 161-162 ; ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา. 2531 : 110-112 ; สุรศักดิ์ หลาบมาลา. 2532 : 12-13 ; ดวงเดือน อ่อนน่วม. 2529 : 54-56 ; ยอร์จ เดวิด. ม.ป.ป. : 54 ; เมคเกอร์ , ซี . จูน. 2540 ; Bloom. 1956 : 1-12)

2. การหาคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ เป็นสิ่งที่สำคัญเพราะการทดสอบแบบอิงเกณฑ์จำเป็นต้องอาศัยเกณฑ์หรือมาตรฐานไว้สำหรับแปลความหมายคะแนนผลการสอบ และคะแนนจุดตัดยังมีความสำคัญเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบอื่น ๆ อีก เช่น การหาค่าความเชื่อมั่น และค่าความแม่นตรง จึงจำเป็นอย่างยิ่งในการกำหนดคะแนนจุดตัดที่แน่นอนสมเหตุสมผลให้มากที่สุด ในการกำหนดคะแนนจุดตัดมีวิธีการหาหลายวิธีซึ่งมีนักวัดผลบางท่านได้สำรวจรวบรวมไว้ (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 156-173 ; อ้างอิงมาจาก Millman. 1973 : 205-216 ; Glass. 1978 : 237-261) ในแต่ละวิธีมีผลดีผลเสียในแง่มุมต่าง ๆ กันซึ่งตัดสินไม่ได้ว่าวิธีใดดีที่สุด วิธีที่ผู้วิจัยสนใจนำมาใช้ในการกำหนดคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ คือ การกำหนดคะแนนจุดตัดจากสมรรถภาพขั้นต่ำ เทคนิคของแองกอฟ (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 171-173 ; อ้างอิงมาจาก Angoff. 1971) โดยอาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาจำนวน 3 ท่านพิจารณาเนื้อหาข้อสอบและความยากแล้วพิจารณาต่อไปว่านักเรียนที่มีสมรรถภาพขั้นต่ำสุดที่ยอมรับว่าเป็นผู้มีความรอบรู้จะมีความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบแต่ละข้อถูกเป็นเท่าไร จากนั้นนำไปหาค่าเฉลี่ยของความน่าจะเป็นและกำหนดคะแนนจุดตัดจากค่าเฉลี่ย ซึ่งได้คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งฉบับเป็น 52 คะแนน โดยแบบทดสอบชุดที่ 1 มีคะแนนจุดตัดเป็น 17 คะแนน ชุดที่ 2 มีคะแนนจุดตัดเป็น 35 คะแนน นอกจากนี้ผู้วิจัยยังหาคะแนนจุดตัดด้วยการใช้ค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงของจุดตัดโดยวิธีของเบอร์ก (บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2527 : 190-197 ; อ้างอิงมาจาก Berk. 1976) ด้วยการนำแบบทดสอบไปทดสอบกับกลุ่มนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีลักษณะไม่ตรงตามที่ต้องการศึกษาและกลุ่มนักเรียนในโครงการส่งเสริมนักเรียนที่มีความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ (รอบพิเศษ) จัดในช่วงเดือนตุลาคม 2542 ที่มหาวิทยาลัยหอการค้าไทยเป็นกลุ่มที่มีลักษณะตรงกับที่ต้องการศึกษา ได้คะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้งฉบับเป็น 26 คะแนน โดยแบบทดสอบชุดที่ 1 มีคะแนนจุดตัดเป็น 9 คะแนน ชุดที่ 2 มีคะแนนจุดตัดเป็น 16 คะแนน (รายละเอียดเสนอไว้ในภาคผนวก ซ) ซึ่งมีคะแนนต่ำกว่าวิธีที่ใช้เทคนิคของแองกอฟ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้คะแนนจุดตัดที่ได้จากการกำหนดคะแนนจุดตัดจากเทคนิคของแองกอฟ และผลการวิจัยพบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง (ชุดที่ 1 เป็น 19.35 ชุดที่ 2 เป็น 39.76 และทั้งฉบับเป็น 59.11) สูงกว่าคะแนนจุดตัด จึงทำให้สรุปได้ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความรอบรู้และมีความสามารถในเนื้อหาพีชคณิตอยู่ในระดับที่ยอมรับได้สูงเมื่อเทียบกับคะแนนจุดตัดที่คำนวณได้โดยวิธีของเบอร์กหรือสูงกว่าคะแนนค่าเฉลี่ยในการทดสอบของกลุ่มนักเรียนในโครงการส่งเสริมนักเรียนที่มีความเป็นเลิศทาง

คณิตศาสตร์ (รอบพิเศษ) ซึ่งมีคะแนนค่าเฉลี่ยชุดที่ 1 เป็น 14.06 ชุดที่ 2 เป็น 26.62 และทั้งฉบับเป็น 42.56 (รายละเอียดเสนอไว้ในภาคผนวก ซ)

3. การประเมินหลักสูตรพีชคณิตโดยผู้เชี่ยวชาญ ได้รับการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาพีชคณิต 1 ท่าน ด้านการพัฒนาหลักสูตรสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ 1 ท่าน และอีก 1 ท่านเป็นผู้ที่เชี่ยวชาญทั้งด้านเนื้อหาพีชคณิตและด้านการศึกษาสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ โดยผู้เชี่ยวชาญได้แสดงความคิดเห็นต่อความเหมาะสมขององค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตรไม่แตกต่างกันมากนักผลประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเฉลี่ยระหว่าง 3.67 - 5.00 และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่าง 0.00 - 0.94 และผลการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตมีความสอดคล้องกันมากโดยมีค่าดัชนีความสอดคล้องเป็น 1 ถึง 23 ประเด็น เป็น 0.66 อีก 6 ประเด็น และในการแสดงความคิดเห็นว่าความน่าจะเป็นที่คิดว่านักเรียนที่มีสมรรถภาพขั้นต่ำสุดที่ยอมรับว่าเป็นผู้รอบรู้ในเนื้อหาพีชคณิตจะสามารถตอบข้อคำถามแต่ละข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ถูกต้อง มีผู้เชี่ยวชาญ 2 ท่านที่มีความคิดเห็นใกล้เคียงกัน อีก 1 ท่านเห็นต่างออกไป จึงเป็นเหตุให้คะแนนจุดตัดของการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์มีค่าไม่ถึง 50 % ของคะแนนเต็ม

4. การประเมินหลักสูตรโดยการทดลองใช้หลักสูตร ในการคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เพื่อเข้าโครงการทดลองใช้หลักสูตร ผู้วิจัยพบว่ามีเด็กบางคนที่ได้รับการคัดเลือกยังไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเป็นเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ อาจเนื่องมาจากผู้วิจัยต้องคัดเลือกเด็กเข้าโครงการถึงสองรอบ ด้วยเหตุว่าเด็กที่คัดไว้ในรอบแรกมีจำนวนจำกัดและมีจำนวนหนึ่งได้รับการคัดเลือกเข้าโครงการอบรมเด็กปัญญาเลิศที่จัดโดย สสวท. ทำให้เด็กดังกล่าวสละสิทธิ์ ผู้วิจัยจึงต้องคัดเลือกเด็กรอบสอง อาจเป็นไปได้ว่ามีเด็กบางคนที่สอบผ่านการคัดเลือกเข้าโครงการวิจัยในรอบสองรู้ข้อสอบก่อนสอบทำให้สอบผ่านการคัดเลือก ซึ่งความสามารถที่แท้จริงอาจยังไม่เพียงพอที่จะเป็นเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ จึงส่งผลให้เด็กดังกล่าวได้คะแนนสอบหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตต่ำกว่าคะแนนจุดตัด แต่ถ้าเทียบกับคะแนนจุดตัดที่คำนวณได้โดยวิธีของเบอร์กคะแนนสอบหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทุกคนสูงกว่าคะแนนจุดตัดที่คำนวณได้โดยวิธีของเบอร์ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นสูงกว่าคะแนนจุดตัดที่คำนวณได้โดยใช้เทคนิคของแองกอฟ จึงอาจวิเคราะห์ได้ว่า คะแนนจุดตัดที่คำนวณได้โดยใช้เทคนิคของแองกอฟที่ได้มาจากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการตอบข้อคำถามแต่ละข้อถูกต้องที่ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน มีค่าสูงเกินไป ส่วนเวลาที่ใช้ในการทดลองไม่ค่อยเหมาะสมถึงแม้ว่าจะมีวันหยุดเสาร์และอาทิตย์ก็ตาม เด็กมีเวลาทบทวนในสิ่งที่เรียนไปแล้วน้อยมาก เรียนของใหม่ลืมของเก่า ถ้าเด็กมีเวลาทบทวนมากกว่านี้จะทำให้เด็กมีความรู้ความเข้าใจสามารถพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในแบบทดสอบได้ดีกว่านี้สังเกตจากการทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 ในการทดลองวันที่ 9 ซึ่งเป็นวันจันทร์ มีการทดสอบในช่วงเช้าเด็กมีเวลากลับไปทบทวนบทเรียนที่บ้านถึงสองวันส่งผลให้คะแนนทดสอบครั้งนั้นสูง ดังนั้นในการใช้หลักสูตรครั้งต่อไปควรมีวันหยุดให้นักเรียนได้ทบทวนเนื้อหาหลังเรียนจบในแต่ละหน่วยและควรมีวันหยุดหลังเรียนจบหลัก

สูตรก่อนที่จะทดสอบหลังเรียนหลักสูตร เพื่อนักเรียนจะได้มีเวลาย่อยเนื้อหา พัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ดีขึ้น

ข้อเสนอแนะ

จากการพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และการทดลองใช้หลักสูตร ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยได้พัฒนาเป็นหลักสูตรที่มีประสิทธิภาพผ่านการประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญและผ่านการทดลองใช้มาแล้วว่าใช้ได้ผลจริงสามารถพัฒนานักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ให้มีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาพีชคณิต ส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาศักยภาพของตนให้ได้ขีดสูงสุดในด้านการเรียนรู้ การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ และ การใช้ความคิดระดับสูงทางพีชคณิต จึงมีข้อเสนอแนะในการนำหลักสูตรที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นไปใช้ดังนี้

1. ควรมีการทดลองใช้หลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยพัฒนากับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ทั่วไปไม่จำกัดเฉพาะในเขตกรุงเทพมหานครและปริมณฑล
2. ควรมีการเผยแพร่หลักสูตรพีชคณิตที่ผู้วิจัยพัฒนาโดยการจัดอบรมครูที่สนใจจะนำหลักสูตรพีชคณิตไปใช้ให้เข้าใจถึงโครงสร้างหลักสูตร การจัดการเรียนการสอนที่คำนึงถึงธรรมชาติของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และบทบาทหน้าที่ของครูผู้สอน เพื่อให้เกิดการเผยแพร่อย่างจริงจัง
3. ในการนำหลักสูตรไปใช้ควรมีความยืดหยุ่นในการจัดกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสามารถของผู้เรียน มีการเว้นช่วงให้หยุดพักเพื่อให้นักเรียนได้ย่อยความรู้นำไปสู่การพัฒนาทางความคิดและความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ไม่ควรสอนติดต่อกันทุกวัน

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เพื่อจะได้มีหลักสูตรคณิตศาสตร์สำหรับพัฒนาศักยภาพของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย

2. ควรมีการวิจัยและพัฒนาในการหาแนวทางที่จะสร้างให้นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์มีความรู้ความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์อย่างแท้จริง

3. ควรมีการวิจัยและพัฒนาเครื่องมือในการคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพสูง ๆ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

การประชุมทางวิชาการทางการศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศในประเทศเอเชีย - แปซิฟิก. กรุงเทพฯ : โรงเรมซาลิน่า, 2536.

กาญจนา โกศระกูล. ความรู้เกี่ยวกับการศึกษาพิเศษ. เอกสารประกอบการบรรยาย. ม.ป.ท., ม.ป.ป. อัดสำเนา.

คณะกรรมการคณะวิทยาศาสตร์. โครงการพัฒนาอัจฉริยภาพของเด็กและเยาวชน. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, ม.ป.ป.

คณะกรรมการโครงการ. "การศึกษาไทยในยุคโลกาภิวัตน์," ยุทธศาสตร์การศึกษาไทยในยุคโลกาภิวัตน์. กรุงเทพฯ : บมจ.ธนาคารกสิกรไทย, 2539.

ดวงเดือน อ่อนน่วม. การจัดการศึกษาสำหรับเด็กสามารถพิเศษ. กรุงเทพฯ : คณะครุศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2529.

ดุษฎี บริพัตร ณ อยุธยา, หม่อม. เด็กปัญญาเลิศ. กรุงเทพฯ : ปาณยา, 2531.

ทัตเติล เฟรเดริค, บี. ครูสอนเด็กเก่ง. แปลจาก What Research says to the Teacher : Gifted and Talented Students. โดย สุนทร โคตรบรรเทา. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2530.

นิตติยา ปาภาพจน์. การพัฒนาหลักสูตรทฤษฎีจำนวนเสริมสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2540. อัดสำเนา.

ทิศนา แขมมณี. "การประเมินผลหลักสูตร," รวมบทความทางการประเมินโครงการ. บรรณาธิการโดยสมหวัง พิธิยานุวัฒน์. หน้า 112-130. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

นิศา ชูโต. การประเมินโครงการ. กรุงเทพฯ : มาสเตอร์เพรส, 2531.

บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. การทดสอบอิงเกณฑ์ : แนวคิดและวิธีการ. กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์, 2527.

ประเวศ วะสี. การพัฒนาความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของเด็กและเยาวชน. เอกสารประกอบคำบรรยายเนื่องในการอบรมเชิงปฏิบัติการคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2537. อัดสำเนา.

สุปาณี สนธิรัตน. จิตวิทยาเด็กพิเศษ. กรุงเทพฯ : คณะสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, ม.ป.ป. อัดสำเนา.

สุรศักดิ์ หลาบมาลา. "การศึกษาสำหรับเด็กเรียนเก่ง," การศึกษากรุงเทพมหานคร. 14(1) : 11-13 ; ตุลาคม 2532.

สุมณฑา พรหมบุญ. ท่านอาจเข้าใจผิดเกี่ยวกับเด็กปัญญาเลิศ. (เอกสาร การประชุมทางวิชาการทางการศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศในประเทศเอเชีย - แปซิฟิก). ม.ป.ท., 2536.

อุษณีย์ โพธิสุข. จริงหรือเปล่าที่เด็กฉลาดไม่ต้องการความช่วยเหลือ. (เอกสาร การประชุมทางวิชาการทางการศึกษาสำหรับเด็กปัญญาเลิศในประเทศ เอเชีย - แปซิฟิก). ม.ป.ท., 2536.

______. สร้างลูกให้เป็นอัจฉริยะ. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ผู้จัดการ, 2537.

______. วิธีสอนเด็กปัญญาเลิศ. เอกสารประกอบคำสอน กพ 554. กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษาพิเศษ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2537. อัดสำเนา.

Abraham, W. Commonsense about the Gifted Children. New York : Harper & Brothers Publishers, 1958.

Ajose, Sunday A. and Virginia G. Joyner. " Cooperative Learning : The Rebirth of an Effective Teaching Strategy," Educational Horizons. 197-201 ; Summer, 1990.

Alan Osborne and Patricia S. Wilson. "Moving to Algebraic Thought," Teaching Mathematics in Grades K-8 Research Based Mathods. p.384-405. Allyn and Bacon Inc., 1988.

Alexander, David William. "A Clinical Diagnostic Investigation of Fundamental Reasons for Conceptual Difficulties with Algebra," Dissertation Abstracts International. 39A : 764 ; August, 1978.

Artino, Ralph A., Anthony M. Gaglione and Niel. Shell. The Contest Problem Book IV. Washington : Mathematical Association of America, 1982.

Artzt, Alice F. and Claire M. Newman. " Cooperative Learning," The Mathematics Teacher. 83(6) : 448-452 ; September, 1990.

Ball, Geoff, Keith Hamann and Andrei Storozhev. Polya Student Notes. The Australian Mathematics Trust. 1997.

Barbeau, E.J. Polynomiats. New York : Springer-Verlag New York Inc., 1989.

Berk, R.A. "Item Analysis," In Criterion-Referenced Measurement : The State of the Art. ed. R.A. Berk, Baltimor and London : The Johns Hopkins University Press, 1980.

Bishop, A.J. "Spatial Abilities and Mathematics Achievement-A Review," in Educational Studies in Mathematics. p.257-269. 1980.

Bishop, William. "Successful Teachers of the Gifted," Exceptional Children. 34 : 317-325 ; January, 1968.

Bloom, B.S. Mastery Learning : Theory and Practice. New York : David Mc Kay Company Inc., 1976.

Bloom, B.S. and others. Taxonomy of Education Objectives : The Classification of Educational Goals-Handbook I, Cognitive Domain. New York : David Mckay, 1956.

Borensen, Henry. "Mathematical Research in the Honors Classroom," Mathematics Teacher. 76 : 238-244 ; April, 1983.

______. "Promoting Mathematical Creativity in the Classroom," Education Forum. 45 : 471-476 ; 1981.

Brown, Maurem Dupree. " The Relationship between Traditional Instructional Methods, Contract Activity Packages, and Math Achievement of Fourth Grade Gifted Students (fourth-grade)," Dissertation Abstracts International-A. 52(2) : 1999 ; December, 1991.

Bruning, Wayne Allen. "Visual Aptitude as It Related to Student Achievement in Reading and Mathematics," Dissertation Abstracts International. 35A : 5212 ; February, 1975.

Butts, Thomas. Problem Solving in Mathematics Elemantary Number Theory and Arithmetic. Illinois : Scott, Foresman and Company, 1973.

Chance, P.L. " A Model for Gifted Education in Middle School," Dissertation Abstracts International. 1992.

Charles, Randall, Frank Lester and Phares O'Daffer. How to Evaluate Progress in Problem Solving. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1987.

Clark, Barbara. Growing Up Gifted. Columbus, Ohio : Charles E. Merrill Publishing Co., 1983.

Clark, Cilbert and Enid Zimmirman. "Tending the Special Spark : Accelerated and Enriched Curricula for Highly Talented Art Students," A Journal on Gifted Education. 10(1) : 10-23 ; September, 1987.

Colangelo, Nicholas and Gaiy A. Davis. Handbook of Gifted Education. Allyn and Bacon, 1991.

Colins, D. "Mathematics," in Gifted Children and the Brentwood Experiment. edited by S.A. Bridges. London : Pitman & Sons, 1969.

Copeland, Richard W. How Children Learn Mathematics. New York : Macmillan Publishing Co., Inc., 1979.

Crehen, K.D. "Item Anslysis for Teacher-Made Mastery tests," Journal of Education Measurement 11 : 255-262 ; 1974.

Davidson, Neil. " Small-Grorp Cooperative Learning in Mathematics," in Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. 1990 yearbook. edited by Thomas J. Cooney and Christian R. Hirsch. p.52-61. Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Davis, Robert B., Elizabeth Jockusch and Curtis Mcknight. "Cognitive Processes in Learning Algebra," Journal of Children's Mathematical Behaviors. 21 : 1-320 ; Spring, 1978.

Dehann, R.F. and R. Havighursts. Education Gifted Children. Chicago : University of Chicago Press, 1987.

Dessart, J. Donald and Marilyn N. Suydam. Classroom Ideas From Research on Secondary School Mathematics. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1983.

Edward, Josephine D., Declan J. King and Peter J. O'Halloran. All the best from the Australian Mathematics Competition. Canberra : Australian Mathematics Competition, 1986.

Evans, Michael and Bruce Henry. Euler Series Student Notes. The Australian Mathematics Trust, 1996.

Feldhusen, J.F., S.M. Moon and P.J. Rifner. "Educating the Gifted and Talented," Educational Perspectives. 26 (12) : 1989.

Fleigler, L.A. and C.F. Bish. Gifted and Talented. Review of Educational Research, 1959.

Gallagher, James J. "Current Status of Gifted Education in United States," in International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent. edited by Kurt A. Heller, Franz J. Monks and A. Harry Passow, p.755-770. Great Britain : Pergamon Press Ltd., 1993.

Gardner, H. and T. Hatch. "Multiple Intelligences Go to School : Education Implications of the Theory of Multiple Intelligences," Education Researcher. 18(8) : 1-9 : 1989.

Gear, Gayle. "Accuracy of Teacher Judgement in Identifying Intellectually Gifted Children : A Review of the Literature," Gifted Child Quarterly. 20 : 478-489 ; Winter, 1976.

Glaser, R. and D.J. Klaus. "Proficiency Measurement : Assessing Human Performance," Psychological Principles in Systems Development. ed. R.M. Gagene New York : Holl, Rine hart and Winston, 1962.

Guilford, J.P. The Nature of Human Intelligence. New York : McGraw-Hill Book Co.,1967.

Hallahan, Daniel P. and James M. Kauffman. Exceptional Children : Introduction to Special Education. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1982.

Halmos, Paul. Problems for Mathematicians, Young and Old. The Mathematical Association of America, 1991.

Hambleton, R.K. and others. "Criterion-Referenced Testing and Measurement : A Review of Technical Issues and Development," Review of Education Research. 48 : 1-47; 1978.

Heid, M. Kathleen," Characteristics and Special Needs of the Gifted Students in Mathematics," Mathematics Teacher. 76 : 221-226 ; April, 1983.

House, Peggy A. " One Small Step for the Mathematical Gifted," School Science and Mathematics. 81 : 195-199 ; March, 1981.

______. Providing Opportunities for the Mathematical Gifted, K-12. Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1987.

Housr, Cherryl Ann. "Effects of Group Counseling on the Self-Esteem, Creative Thinking and Problem-Solving Skills of Gifted Tenth and Eleventh-Grade Students," Dissertation Abstracts International-A. 49(11) : 3269 ; May, 1989.

Huchingson, Robert, III. "A Comparative Study Between the Behaviors of Students in A Public School Program for the Gifted and Those in Waldorf Schools in Terms of Renzulli's "Gifted Behaviors" (Art-Oriented Education, Steiner)," Dissertation Abstracts International. 51(6) : 1985-A ; 1990.

Jackson and Robinson, "Early Identification of Intellectually Advanced Children," Child Development Research Group, University of Washington. Paper presented at the Annual Convention of the National Association for Gifted Children. San Diego, Calif., October, 1977.

Jacobs, J.C. "Effectiveness of Teacher and Parent Identification of Gifted Children as a Function of School Levels," Psychology in the schools. 8 : 140-142 ; 1971.

Kaplan, Sandra N. Providing Programs for the Gifted and Talented : A Handbook. Ventura, Calif.: Office of the Bentura County Superintendent of Schools, 1974.

Khatena, Joe. "Education the Gifted Child : Challenge and Response in the U.S.A," ED 117 928. Paper presented at the World Conference on Gifted and Talented London, England ; September, 1975.

Klamkin, Murray S. International Mathematical Olympiad, 1978-1985 and Forty Supplementary Problems. The Mathematical Association of America, 1986.

Kogan, Nathan and Ethel Pankove. "Long-Term Predictive Validity of Divergent Thinking Tests : Some Negative Evidence," Journal of Educational Psychology. 66 : 802-801 ; December, 1974.

Krutetskii, V.A. The Psychology of Mathematical Abilities in School-children. edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup. Chicago : University of Chicago Press, 1976.

Lozansky, Edward. and Cecil Rousseau. Wining Solutions An Introduction to Mathematical Competition. Washington : National Center for Excellence in Education, 1988.

Lucito, J. Leonard. " Gifted Children," in Exceptional Children in the School. p.179-237. Holt Rinehart and Winston, 1963.

Maker, C.J. Teaching Models in Education of the Gifted. Rockville, MD : Aspen System Corp., 1982.

______. "Training Teachers for the Gifted and Talented : A Teacher Comparison of Models," ED 119 453. Reston, Va. : Council for Exceptional Children, Information Services and Publication, 1975.

Mallis, J. and A Heinemann. Reaching for the Stars, Book 10 : Providing guidance and Counseling for the Gifted and Talented. Texas : Multimedia Arts, 1979.

Marland, S.P. (Submitter). Education of the Gifted and alented. Washington, D.C. : U.S. office of Education, 1972.

McNary, Shirley R. "The Relationships Between Certain Teacher Characteristics and Achievement and Creativity of Gifted Elementary School Students," ED 015 787. Syracuse, N.Y. : Syracuse University, April, 1967.

NCTM. (National Council of Teachers of Mathematics). An Agenda for Action. Reston, Va. : The Council, 1980.

______ . Mathematics Teacher. 76 ; April, 1983.

Ogilvie, E. Gifted Children in Primary Schools. London:Macmillan Ducation Ltd., 1973.

Parnes, S.J. "Guiding Creative Action," Gifted Child Quarterly. 21 : 460-472 ; 1977.

Payne, Joseph L. "The Mathematics Curriculim for Talented Students," Arithmetic Teacher. 28(6) : 18-21 ; February, 1981.

Polya, George. Mathematical Discovery. vol.2. New York : John Wiley & Sons, 1981.

Popham, W.J. and T.R. Husek "Implication of Criterion-Referenced Measurement," Journal of Educational Measurement. 6 : 1-9 ; 1969.

Pranesachar, C.R. and others. Mathematical Challenges From Olympiads. Michigan : Interline Publishing Pvt. Ltd., 1995.

Reis, S.M. "Reflections on Policy Affecting the Education of Gifted and Talented Students : Post and Future Perspectives," American Psychologist. 44 : 399-408 ; 1989.

Renzulli, Joseph S. The Enrichment Triad Model : A Guild for Developing Defensible Programs for the Gifted and Talented. Wethersfield, Conn. : Creative Learning Press, 1977.

______. "Two Approaches to Identification to Gifted Students," Exceptional Children. 43 : 512-518 ; 1977.

______. "What Makes Giftedness? Re-examining a Definition," Phi Delta Kappan. 60 : 180-184 ; November, 1978.

Ridge, Laurence H. and Joseph S. Renzulli. "Teaching Mathematics to the Talented and Gifted," in The Mathematical Education of Exceptional Children and Youth. p.191-266. Virginia : NCTM, 1981

Rogers, Karen. Review of Research on the Education of Intellectually and Academically Talented Students. St. Paul : Minnesota Department of Education, 1986.

Schunk, Dale A. "Peer Models and Children's Behavioral Change," in Review of Educational Research. 57 : 149 ; 1987.

Shiffer, Victor. A Problem Book in Algebra. Moscow : Mir Publishers, 1978.

Soifer, Alexander. Mathematics as Problem Solving. Colorado : Centor for Excellence in Mathematical Education, 1987.

Solano, Cecelia H. "Precocity and Adult Failure : Shattering the Myth," ED 137 667. Paper presented at the Annual Convention of the National Association for Gifted Children, Kansas City, Mo., October, 1976.

Sternberg, R.J. and J.E. Davidson. Insight in the Gifted Educational Psychologist. 18 : 51-57; 1983.

Swassing, Raymond H. "Gifted and Talented Children," in Exceptional Children. 2nd edition. edited by William L. Heward and Michael O. orlansky. Columbus, Ohio : Bell and Howell Company, 1984.

Taba, Hilda. Curriculum Development : Theory and practice. New York : Harcorb. Bracc and World, Inc., 1962.

Tempest, N. Teaching Clever Children. London : Routledge, 1974.

Terman, L.M. and B.H. Oden. The Gifted Child Grows up. Stanford California : Stanford University Press, 1959.

Texas Education Agency. Myth-Conception about the Gifted and Talented. Austin, Tex. : Texas Education Agency, 1979.

Toffler, Alvin. Future Shock. New York : Random House, 1970.

Torrance, E. Paul. "Four Promising Practices for Teaching Gifted Disadvantaged Students," Promising Practices : Teaching the Disadvantaged Gifted. Ventura, Ca. : Ventura County Superintendent of Schools, 1975.

Tuttle, F.B. and L.A. Becker. Program Design and Development for Gifted and Talented Students. 2nd ed. Washington, D.C. : National Education Association, 1983.

Tyler, R.W. Basic Principles of Curriculum and Instruction. Chicago : U. of Chicago Press, 1949.

U.S. Office of Education. Education of the Gifted and Talented. Washington, D.C. : Government Printed Office, 1972.

Vaughn, V.J. Feldhusen and J. Asher. "Meta Analysis and Review of Research on Pull out Programs in Gifted Children," Gifted Child Quarterly. 35(2) : 92-98 ; 1991.

Wallach, Michael. "Tests Tell Us Little about Talent," American Scientist. 64 : 57-63; January-February, 1976.

Weimer, John Frederick. "The Effect of a Program for the Academically and Cognitively Talented Upon Creative Problem-Solving Ablities of Seventh and Eighth Grade Gifted Students, " Dissertation Abstracts International-A. 49(8) : 2066 ; 1989.

Williams, F.E. Classroom Ideas for Encouraging Thinking and Feeling. Buffalo, New York : D.O.K. Publishers, 1970.

Worthen, B.R. and J.R. Sanders. Educational Evaluation : Theory and Practice. Ohio : Charles A. Jones, 1973.

ภาคผนวก

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

ตรวจสอบคุณภาพของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

1. ผศ.ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชคภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏพระนคร
2. รศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. ดร.นิตติยา ปภาพจน์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

ตรวจสอบคุณภาพแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

1. รศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. ดร.นิตติยา ปภาพจน์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย
3. รศ.ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ตรวจสอบโครงร่างหลักสูตร

1. รศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. ดร.นิตติยา ปภาพจน์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย
3. รศ.ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

รายชื่อนักเรียนที่เข้าร่วมโครงการวิจัย

1.	ธนวรรณ	อภิบุณโยภาส	โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ บดินทร์เดชา
2.	ทศพร	เอกปรีชากุล	โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ บดินทร์เดชา
3.	เปล่งฉัตร	ตริยาวธัญญ	โรงเรียนสาธิต มศว. ปทุมวัน
4.	ฟ้างาม	เจริญผล	โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
5.	ภรพัสุ	ศิริกุรุรัตน์	โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
6.	เบญจพร	ชินประทีป	โรงเรียนสาธิต มศว. ประสานมิตร
7.	ณรัณ	อัศวรุจานนท์	โรงเรียนสาธิต มศว. ประสานมิตร
8.	กวิน	ดุชุกานนท์ชัย	โรงเรียนสาธิต มศว. ประสานมิตร
9.	สุรีย์มาศ	นิติกาญจนา	โรงเรียนสตรีวิทยา
10.	พิชัย	ชัยนันท์ฤทธิกุล	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
11.	กวิน	ชิตชูตระกูล	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
12.	กลยุทธ์	เศรษฐการ	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
13.	กานต์	กมลนรเทพ	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
14.	ทิวัตถ์	พงศ์ถาวรกมล	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
15.	จินตวีร์	อุเทนพิทักษ์	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
16.	วิทยา	ตระกูลมงคล	โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย
17.	ศราวุธ	เตชะสัตยา	โรงเรียนเบญจมราชูทิศ ราชบุรี

ภาคผนวก ข

เครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

คำแนะนำในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 30 ข้อ ให้ทำแบบทดสอบนี้ให้เสร็จภายในเวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที
2. ให้เติมคำตอบลงในกรอบสี่เหลี่ยมท้ายข้อ
3. ให้คิดและทดได้ในส่วนที่ว่างของแบบทดสอบ
4. กรุณาเขียน ชื่อ-สกุล อายุ ชั้น โรงเรียน และที่อยู่ของนักเรียนลงในช่องว่างที่กำหนดข้างล่างนี้

ชื่อ.. สกุล...

อายุ.................... ปี ชั้น.................. โรงเรียน...

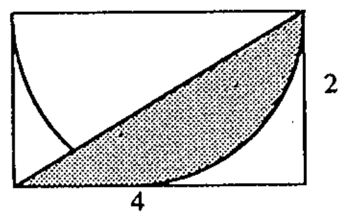
ที่อยู่ปัจจุบัน...

....

เบอร์โทรศัพท์..

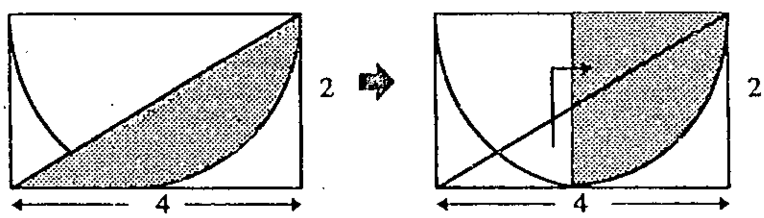
คำชี้แจง

ในแบบทดสอบฉบับนี้ นักเรียนจะพบปัญหาที่แปลกใหม่ต่าง ๆ ซึ่งในการแก้ปัญหาเหล่านี้นักเรียนจำเป็นต้องใช้ความสามารถในหลาย ๆ ด้าน ซึ่งรวมไปถึง การสังเกต การหารูปแบบ การแปลงสภาพปัญหาให้อยู่ในลักษณะที่นักเรียนรู้จัก และการคิดค้นวิธีการใหม่ที่มีประสิทธิภาพ เพื่อแก้ปัญหาให้สะดวกและรวดเร็ว ขอให้ศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้



จากรูปครึ่งวงกลมบรรจุอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้าง 2 ซ.ม. และด้านยาว 4 ซ.ม. ต้องการหาพื้นที่ส่วนที่แลเงา

แนวคิด



เมื่อลากรัศมีของวงกลมให้ตั้งฉากกับด้านยาวที่เป็นเส้นสัมผัสจะพบว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมส่วนที่แรเงา ด้านล่างเท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งทางด้านขวาบน ดังนั้นพื้นที่ส่วนที่แรเงาที่ต้องการหาจึงเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ของพื้นที่รูปวงกลมที่มีรัศมียาว 2 ซ.ม. ฉะนั้น

พื้นที่ส่วนแรเงา $= \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2$ ตร.ซม.

$= \pi$ ตร.ซม.

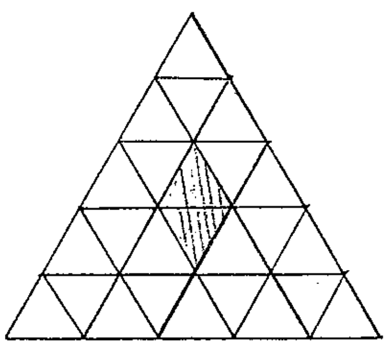
ขอให้นักเรียนใช้ความสามารถอย่างเต็มที่ในการทำแบบทดสอบ

แบบทดสอบ
การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

1. จงหาค่าของ $100^{25} - 25$ เมื่อนำตัวเลขโดดแต่ละตัวบวกกันมีค่าเท่ากับเท่าไร

ตอบ..

2. จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดจากรูปที่กำหนดให้ โดยไม่นับส่วนที่แรเงา



ตอบ..

3. ถ้าสามารถเขียน $\frac{37}{13}$ ในรูปของ $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\frac{1}{z}}}$ ได้ โดย x,y,z มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกเท่ากับเท่าไร

ตอบ..

4. ถ้า a + b = 7, b + c = 9 และ a + c = 8 แล้ว abc จะมีค่าเป็นเท่าไร

ตอบ..

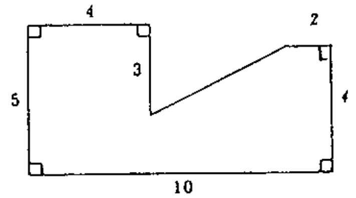
5. ถ้าผลบวกของจำนวนเต็มบวกสามจำนวน X,Y,Z, มีค่าเท่ากับผลคูณของสามจำนวนดังกล่าว และ $x \leq y \leq z$ แล้วจะมี X,Y,Z, ที่เป็นคำตอบที่แตกต่างกันได้กี่แบบอะไรบ้าง

ตอบ...

6. ถ้า * เป็นการกระทำที่กำหนดให้ว่า a * b = ab - a + b และ 5 * x = 17 จงหาค่าของ x

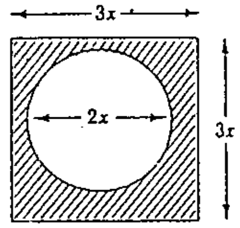
ตอบ...

7. จากภาพจงหาพื้นที่ทั้งหมด



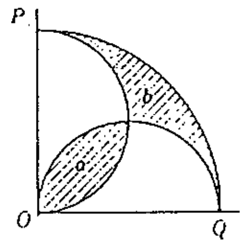
ตอบ...

8. จากภาพ พื้นที่ที่แรเงามีค่าเท่าไร



ตอบ...

9. จากภาพ จงหาพื้นที่ที่แรเงา a : b



ตอบ..

10. ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x + y + xy = 34$ แล้ว $x + y$ จะมีค่าเท่าไร

ตอบ..

11. ถ้า $x + \frac{1}{x} = 3$ แล้ว $x^3 + \frac{1}{x^3}$ มีค่าเท่าไร

ตอบ..

12. ถ้า $(x-3)(2x+1) = 0$ แล้ว $2x+1$ จะมีค่าเป็นเท่าไรได้บ้าง

ตอบ..

13. ถ้า $a + b = 1$ และ $a^2 + b^2 = 2$ แล้ว $a^4 + b^4$ จะมีค่าเป็นเท่าไร

ตอบ..

14. ถ้า $ab = 12$,$bc = 20$,$ac = 15$ และ a เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว abc จะมีค่าเป็นเท่าไร

ตอบ..

15. แบบทดสอบฉบับหนึ่งมี 10 ข้อ ในการให้คะแนนแต่ละข้อ ถ้าทำถูกจะได้ข้อละ 5 คะแนน แต่ถ้าทำผิดจะถูกหักคะแนนข้อละ 2 คะแนน นิติทำข้อสอบทุกข้อ ได้คะแนนรวม 29 คะแนน อยากทราบว่านิติทำข้อสอบถูกกี่ข้อและผิดกี่ข้อ

ตอบ..

16. พิจารณากลุ่มของจำนวนนับต่อไปนี้ (1) , (2,3) , (4,5,6) , (7,8,9,10) ,...
จงหาจำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายของกลุ่มที่ 100

ตอบ..

17. จงหาค่าของ $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-...+99^2-100^2$

ตอบ..

18. กำหนดให้ $a * b = \frac{1}{ab}$ จงหาค่าของ $a * (b*c)$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

ตอบ..

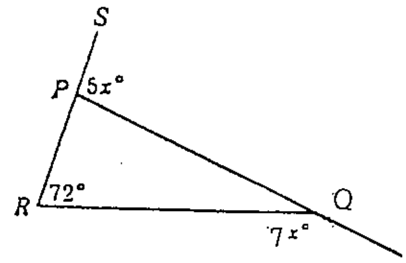
19. สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ซึ่งกำหนดให้ $a*b = a^b + b^a$ ถ้า $2 * x = 100$ แล้ว x จะมีค่าเป็นเท่าไร

ตอบ..

20. ถ้า $x - y > x$ และ $x + y < y$ แล้ว x และ y มีค่าเท่ากับเท่าไร

ตอบ..

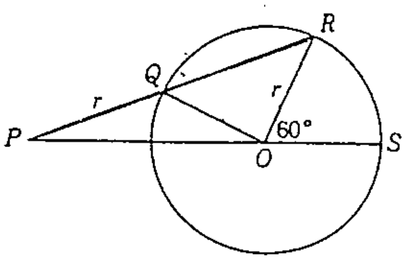
21.



จากภาพจงหาขนาดของมุม QPS

ตอบ..

22.



จากภาพ P,O,S เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีรัศมียาว r เซนติเมตร และ P,Q,R อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดย PR ยาว r เซนติเมตร ถ้า มุม ROS กาง 60 องศา จงหาขนาดของมุม OPQ

ตอบ..

23. ถ้าแต่ละด้านของทรงลูกบาศก์มีความยาวเพิ่มขึ้น 60% แล้วพื้นที่ผิวของทรงลูกบาศก์จะเพิ่มขึ้นกี่เปอร์เซนต์

ตอบ..

24. มีสินค้า 3 ชนิดคือ x,y และ z โดยสินค้า x ขายในราคา 8 ชิ้นต่อ 1 บาท สินค้า y ราคา ชิ้นละ 1 บาท สินค้า z ราคาชิ้นละ 10 บาท ถ้าต้องการซื้อสินค้าทั้ง 3 ชนิดด้วยเงิน 100 บาท โดยให้ได้สินค้า 100 ชิ้น จะต้องซื้อสินค้า y จำนวนกี่ชิ้น

ตอบ..

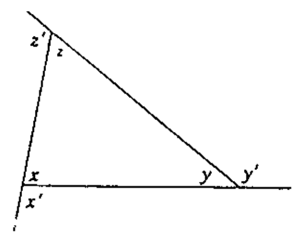
25. มีเทียนอยู่ 2 แท่ง ขนาดเท่ากัน เทียนแท่งที่ 1 จะไหม้หมดภายใน 4 ชั่วโมง เทียนแท่งที่ 2 จะไหม้หมดภายใน 5 ชั่วโมง อยากทราบว่าถ้าจุดเทียนทั้ง 2 แท่งพร้อมกัน เวลาผ่านไปนานเท่าไรจึงจะทำให้เทียนแท่งหนึ่งยาวเป็นสามเท่าของเทียนอีกแท่งหนึ่ง

ตอบ..

26. 5^{1981} หารด้วย 10 เหลือเศษเท่าไร

ตอบ..

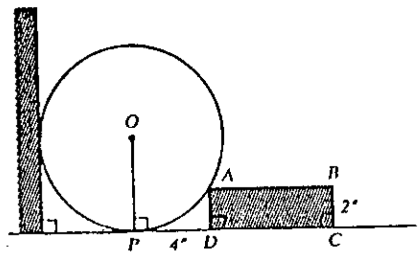
27.



ถ้าอัตราส่วนของมุมภายนอก $x' : y' : z'$ เป็น 4 : 5 : 6 แล้วอัตราส่วนของมุมภายใน $x : y : z$ จะเป็นเท่าไร

ตอบ..

28.



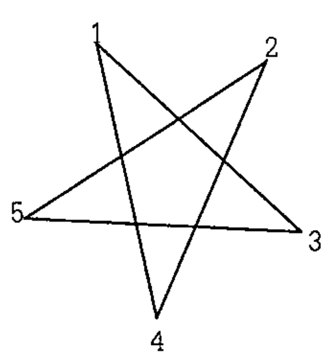
จากรูป วงล้อจักรยานมีท่อนไม้ยันไว้ ถ้าท่อนไม้หนา 2 นิ้ว และระยะ PD เท่ากับ 4 นิ้วแล้ววงล้อจักรยานวงนี้จะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวกี่นิ้ว

ตอบ..

29. $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 99 \times 100$ ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มที่ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

ตอบ..

30. จากภาพ ผลบวกของมุมทั้งห้ารวมกันได้กี่องศา



ตอบ..

ภาคผนวก ค
รายชื่อหนังสือในมุมความรู้

รายชื่อหนังสือในมุมความรู้

คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติจัดแปลและจัดพิมพ์, 2540.

แบบเรียนคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ค 011 - ค 016 จัดทำโดย สสวท, 2540.

ระบบจำนวน ของ รศ. สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2533.

คณิตศาสตร์ทางด้านวิธีจัดหมู่เบื้องต้น ของ รศ.ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2533.

ทฤษฎีสมการเบื้องต้น ของ รศ. มานัส บุญยัง มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2534.

ทฤษฎีสมการพหุนาม ของ มัลลิกา ถาวรอธิวาสน์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2535.

ทฤษฎีสมการ ของ ประทีป ประพันธ์พจน์ สถาบันราชภัฏเลย, ม.ป.ป.

วารสารคณิตศาสตร์ จัดทำโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย

คู่มือ - เตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4 - ม.6 ของ รศ.ดร.สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และ รศ.ดร.สุเทพ ทองอยู่

Problem in combinatorics and Graph theory. by Robert A. Melter, 1985.

Polynomials. by Edward J. Barbeau, 1989.

Problem-Solving strategies. by Arthur Engel, 1998.

Mathematics Challenge for Young Australians. by Polya George 1887 - 1985.

Mathematics Challenge for Young Australians. by Euler Series 1707 - 1783.

V.A. Krechmar A Problem Book in Algebra. translated from the Russian by Victor Shiffer, 1978.

Winning Solutions An Introduction to Mathematical Competitions. by Edward D. Lozandky and Cecil C. Rousseau, 1988.

Problem Solving in Mathematics. by Scott, Foresman and Company, 1973.

Problem for Mathematicians Young and Old. by Paul Halmos, 1991.

Mathematics as Problem Solving. by Alexander Soifer, 1987.

Revision Course in Additional Pure MAthematics. by C.C.Ting, 1986.

ภาคผนวก ง

เนื้อหาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
ที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

บทนำ

ความรู้พื้นฐาน

ในการศึกษาเรื่องพีชคณิต มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง เซต ระบบจำนวนจริง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หลักการนับ และ หลักการพิสูจน์เบื้องต้น เพื่อนำไปใช้อ้างอิง โดยจะกล่าวถึงเนื้อหาที่เป็นความรู้พื้นฐานโดยสังเขป ส่วนรายละเอียดของเนื้อหาต่าง ๆ ผู้เรียนสามารถหาอ่านเพิ่มเติมได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไปที่เขียนเรื่องดังกล่าว เช่น หนังสือแบบเรียน หรือ หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ในบทนำนี้จะเขียนไว้ 2 เรื่องคือ เซต กับ หลักการพิสูจน์เบื้องต้น ส่วนเรื่องอื่น ๆ จะกล่าวถึงในคราวที่จะใช้เพื่ออำนวยความสะดวกกับผู้เรียนในการนำไปใช้อ้างอิง

1. เซต (Sets)

เซต เป็นอนิยาม ในทางคณิตศาสตร์ใช้ เซต เพื่อทำให้เกิดมโนภาพของการอยู่ร่วมกันเป็นกลุ่มโดยบอกได้แน่นอนว่าสิ่งนั้นสิ่งนี้อยู่ในกลุ่มที่กล่าวถึงหรือไม่ เรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า สมาชิก (element)

นิยมใช้อักษรตัวใหญ่ A , B , C , ... แทนชื่อเซตและอักษรตัวเล็ก a , b , c , ... แทนสมาชิกในเซต

ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทน "เป็นสมาชิกของ"

$\notin$ แทน "ไม่เป็นสมาชิกของ"

ตัวอย่าง 1 A เป็นเซตของจำนวนคู่บวกจะได้

$2 \in A$, $-2 \notin A$, $3 \notin A$, $18 \in A$

การเขียนเซต

การเขียนเซต มี 2 วิธีคือ

แบบแจกแจงสมาชิก เขียนสมาชิกทุกตัวลงในวงเล็บปีกกา และมีเครื่องหมาย " , " คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

เซตของจำนวนเต็มบวกมีค่าไม่เกิน 5

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ในกรณีที่เซตนั้นมีสมาชิกมากมายไม่สามารถแจกแจงสมาชิกให้ครบทุกตัวสามารถใช้สัญลักษณ์ "..." แทนสมาชิกจำนวนมากเหล่านั้นได้ เช่น

เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน 500

$B = \{1, 2, 3, \ldots, 499, 500\}$

ข้อสังเกต

1. สมาชิกในเซตอาจจะเป็นเซตได้ เช่น {a , {b} , {c , d} , e}
2. ลำดับก่อนหลังของสมาชิกไม่มีความสำคัญ เช่น {1 , 2 , 3} = {3 , 1 , 2}
3. เซตใดมีสมาชิกตัวเดียวกันปรากฏมากกว่าหนึ่งครั้งให้ถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดียวกัน เช่น
   {1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 4 , 5} = {1 , 2 , 3 , 4 , 5}

แบบบอกเงื่อนไข เขียนตัวแปรแทนสมาชิกในเซต โดยที่หลังตัวแปรมีเครื่องหมาย "|" หรือ ":" ตามด้วยการบอกคุณสมบัติของตัวแปร ซึ่งทั้งหมดนี้อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา เช่น

กำหนดให้ N = {1 , 2 , 3 , ...}

เขียนแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

N = {x | x เป็นจำนวนนับ}

ชนิดของเซต

เซตจำกัด (finite sets) เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ โดยที่จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A จะแทนด้วยสัญลักษณ์ n(A) เช่น

กำหนดให้ A = {0 , 2 , 4 , ... , 10}

B = { $x \in I \mid x^2 = 3$ } (I คือเซตของจำนวนเต็ม)

จะได้ว่า A เป็นเซตจำกัด และ n(A) = 6

B เป็นเซตจำกัด และ n(B) = 0

เซตอนันต์ (infinite sets) หมายถึง เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด เช่น

A = {1 , 2 , 3 , ...}

B = {x | x เป็นจำนวนคู่}

เซตว่าง (empty set) หมายถึง เซตซึ่งมีจำนวนสมาชิก เท่ากับศูนย์สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตว่าง คือ ϕ หรือ { } เช่น

{x | x เป็นสระในคำว่า "นนทกร"}

{$x \in I \mid 2x - 1 = 0$}

ข้อสังเกต

1. เซตว่างเป็นเซตจำกัด
2. $\{\phi\} \neq \phi$ และ $\{\{\ \}\} \neq \phi$
3. $\{\phi\} = \{\{\}\}$

เอกภพสัมพัทธ์ (relative universe) คือเซตที่กำหนดขอบเขตของสมาชิกของเซตที่เราต้องการศึกษา แทนด้วยสัญลักษณ์ U

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

เซตที่เท่ากัน (equal sets)

เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองต่างมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว และมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน เช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x \in I \mid x < 6\}$

ดังนั้น เซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

ถ้าเซต C ไม่เท่ากับเซต D เขียนแทนด้วย $C \neq D$

เซตที่เทียบเท่ากัน (equvivalent sets)

เซต A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกของเซต A และเซต B สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสมาชิกของทั้งสองเซตได้พอดี เช่น

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ ดังนั้น A เทียบเท่ากับ B

ข้อสังเกต

1. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด เซต A จะเทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อเซต A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
2. ถ้า $A = B$ แล้วเซต A เทียบเท่ากับเซต B
3. ถ้าเซต A เทียบเท่ากับเซต B แล้ว สรุปไม่ได้ว่า $A = B$

สับเซต (subsets)

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

เซต A ไม่เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกของ A อย่างน้อย 1 ตัวซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

เช่น กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 3, 1\}$ $C = \{1, 2, 4\}$

จะได้ $A \subset A$, $B \subset A$, $C \subset A$

$A \subset B$, $B \subset B$, $C \subset B$

$A \subset C$, $B \subset C$, $C \subset C$

ถ้า $A \subset B$ และ $A \neq B$ เรียกว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B

การดำเนินการบนเซต
Operation of Sets

การดำเนินการบนเซตเป็นการสร้างเซตใหม่จากเซตที่กำหนดให้มี 4 แบบคือ

ยูเนียน (union) ถ้ากำหนด A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ยูเนียนของ A และ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A หรือ B

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

ตัวอย่าง 2 ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$, $C = \{a, c\}$

จะได้ $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d\}$

$B \cup C = \{a, b, c, d\}$

สมบัติของยูเนียน

ให้ A , B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จะได้ว่า

1. $A \cup B = B \cup A$ (สมบัติการสลับที่)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
3. $A \cup A = A$
4. $A \cup \phi = A$ และ $\phi \cup A = A$
5. $A \cup U = U$ และ $U \cup A = U$
6. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$
7. $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$
8. ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cup C$
9. ถ้า $A \subset C$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \cup B \subset C$
10. $A \cup B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ และ $B = \phi$

อินเตอร์เซกชัน (intersection) ถ้ากำหนด A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U อินเตอร์เซกชันของ A และ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A และ B

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 4, 5\}$

จะได้ $A \cap B = \{2\}$

$A \cap C = \{1\}$

$B \cap (A \cap C) = \phi$

$B \cap C = \{4\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$

สมบัติของอินเตอร์เซกชัน

ให้ A , B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จะได้ว่า

1. $A \cap B = B \cap A$ (สมบัติการสลับที่)
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
3. $A \cap A = A$
4. $A \cap \phi = \phi$ และ $\phi \cap A = \phi$
5. $A \cap U = A$ และ $U \cap A = A$
6. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
7. $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$
8. ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$
9. ถ้า $A \subset C$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \cap B \subset C$
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (สมบัติการแจกแจง)

ผลต่างของเซต (different) ถ้ากำหนด A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ผลต่างของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ A - B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ แต่ } x \notin B\}$$

คอมพลีเมนต์ (complement) ถ้ากำหนด A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U คอมพลีเมนต์ของเซต A เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ A' คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

ข้อสังเกต $A' = U - A$

สมบัติของผลต่างของเซต

ให้ A , B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U.

1. $A - B \subset A$
2. $A - B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \phi$
3. $A - B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$
4. $A - A = \phi$
5. $A - A = A \cap A'$
6. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
7. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
8. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
9. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
10. $A - \phi = A$ และ $\phi - A = \phi$
11. $A' - B' = B - A$

สมบัติของคอมพลีเมนต์

1. $(A')' = A$
2. $\phi' = U$
3. $U' = \phi$
4. $A \cap A' = \phi$
5. $A \cup A' = U$
6. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ กฎของเดอมอร์แกน (de Morgan's Law)

   $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$
8. $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

2. หลักการพิสูจน์เบื้องต้น

2.1 ตรรกวิทยา

ประพจน์ (Proposition) เป็นประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง

เช่น $5 - 3 = 2$ เป็นประพจน์ เป็นจริง (T)

$4 + 7 = 10$ เป็นประพจน์ เป็นเท็จ (F)

$x + 3 > 2$ ไม่เป็นประพจน์

ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปรอยู่ด้วย เช่น $x + 3 > 2$ หรือ $x = 3$ หรือ $x + 3 < 2$ ประโยคเหล่านี้ไม่เป็นประพจน์ และเราเรียกประโยคดังกล่าวว่า **ประโยคเปิด**

ในการศึกษาลักษณะประพจน์ โดยทั่ว ๆ ไปใช้อักษร p , q , r , .. แทนประพจน์

นิเสธของประพจน์ นิเสธของประพจน์ใด เป็นประโยคที่ปฏิเสธว่าประพจน์นั้นเป็นจริง เช่น

ประพจน์ $5 - 3 = 2$

นิเสธของประพจน์ คือ ไม่จริงที่ว่า $5 - 3 = 2$ หรือ $5 - 3 \neq 2$

ใช้ $\sim p$ แทนนิเสธของ p

การเชื่อมประพจน์ การเชื่อมประพจน์เป็นการนำประพจน์กับประพจน์มาเชื่อมด้วยตัวเชื่อมทำให้ได้ประพจน์ใหม่ที่ซับซ้อนขึ้น และในทางคณิตศาสตร์เราใช้ตัวเชื่อม และ ($\wedge$) , หรือ ($\vee$) , ถ้า...แล้ว ($\rightarrow$) , ก็ต่อเมื่อ ($\leftrightarrow$) เป็นตัวเชื่อม และการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมจะกำหนดค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมในกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ ดังตารางต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

สัจนิรันดร์ ประพจน์ใดที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรียกประพจน์นั้นว่า สัจนิรันดร์

ประพจน์ที่สมมูลกัน ประพจน์ 2 ประพจน์ใดจะเรียกว่าสมมูลกัน เมื่อประพจน์ทั้งสองนี้มีค่าจริงเหมือนกันทุกกรณี เช่น

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \rightarrow q$	$p \vee q$	$\sim p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$\sim(\sim p)$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	F	T	T

จะพบว่า $(p \wedge q) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

$\sim p \rightarrow q$ สมมูลกับ $p \vee q$

$\sim(\sim p)$ สมมูลกับ p

$\sim p \vee q$ สมมูลกับ $p \rightarrow q$ และสมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$

วลีบอกปริมาณ วลีบอกปริมาณจะใช้ควบกับประโยคเปิดเมื่อใช้วลีบอกปริมาณครอบคลุมทุกตัวแปรในประโยคเปิดจะทำให้ประโยคเปิดเป็นประพจน์ เพราะทราบค่าความจริง และใช้สัญลักษณ์ดังนี้

วลีบอกปริมาณ $\forall x$ แทน สำหรับทุก ๆ x

$\exists x$ แทน สำหรับบาง x หรือ มี x

$P(x)$ แทน ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร

ค่าความจริงของประโยคเปิดที่มีวลีบอกปริมาณ

1. $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ ถ้าแทน x ด้วยสมาชิก a ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้ว $P(a)$ เป็นจริง
2. $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มี a บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ซึ่ง $P(a)$ เป็นเท็จ
3. $\exists x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี a บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่ง $P(a)$ เป็นจริง
4. $\exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ ถ้าแทน x ด้วยสมาชิก a ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้ว $P(a)$ เป็นเท็จ

2.2 การใช้ตรรกวิทยาในการพิสูจน์วิชาคณิตศาสตร์

ต่อไปนี้เราจะได้ศึกษาการนำตรรกวิทยา มาอธิบายลักษณะของทฤษฎีบท และโจทย์ทางคณิตศาสตร์ โดยเราจะจัดลักษณะของทฤษฎีบท และ โจทย์ที่มีการพิสูจน์ ได้ 7 แบบ ดังนั้นเมื่อพบโจทย์ปัญหาในทางคณิตศาสตร์ เราจะต้องพยายามจัดให้ได้ว่าโจทย์ปัญหานั้นอยู่ในแบบใด แล้วก็ทำการแก้ปัญหานั้นตามลักษณะพื้นฐานของแต่ละเรื่องนั้น ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างประกอบการพิสูจน์ทั้ง 7 แบบ ที่จะเป็นแนวทางให้นักเรียนนำไปใช้ได้

1. การพิสูจน์ประโยค $p \rightarrow q$ โดยทางตรง

ถ้าต้องการพิสูจน์ประโยค $p \rightarrow q$ หมายความว่ากำหนดให้ p เป็นจริงแล้วให้พิสูจน์ q ว่าเป็นจริงด้วย โดยใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท ที่ผ่านมาแล้ว ตลอดจนสัจพจน์ต่าง ๆ แล้วสรุปให้ได้ว่าประโยค $p \rightarrow q$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่า กำลังสองของจำนวนเต็มคู่จะเป็นจำนวนเต็มคู่

แนวคิด ก่อนอื่นเขียนโจทย์ใหม่ให้อยู่ในรูป Implication ก่อนจะได้ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a^2 จะเป็นจำนวนเต็มคู่" ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูป $p \to q$

โดย $p : a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

$q : a^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

การพิสูจน์ก็เริ่มจาก p เป็นจริงแล้วพิสูจน์ให้ได้ q เป็นจริง

พิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่ (p เป็นจริง) แล้วจะต้องแสดงให้เห็นว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคู่ $\to a = 2k,\ \exists k \in I$

$\to a^2 = 4k^2,\ \exists k^2 \in I$

$\to a^2 = 2(2k^2)$

$\to a^2 = 2m$ ให้ $m = 2k^2 \in I$

$\to a^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

2. การพิสูจน์ประโยค $p \to q$ โดยทางอ้อม

จากความรู้ทางตรรกศาสตร์ เราทราบว่า $(p \to q)$ สมมูลกับ $(\sim q \to \sim p)$ ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์ประโยค $(p \to q)$ โดยใช้ $(\sim q \to \sim p)$ แทนได้

ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น บางครั้งไม่สามารถพิสูจน์ประโยค $(p \to q)$ โดยตรงได้ เราก็จะใช้การพิสูจน์ประโยค $(\sim q \to \sim p)$ แทน ซึ่งเราเรียกว่าการพิสูจน์โดยทางอ้อม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคู่ด้วย

แนวคิด จากโจทย์เป็นการพิสูจน์ประโยค $p \to q$ เราพบว่าถ้าพิสูจน์ทางตรงจะแก้ปัญหาไม่ออก ดังนั้นจะต้องพิสูจน์ประโยค $(\sim q \to \sim p)$ แทน

โดย $\sim q : a$ ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น a เป็นจำนวนเต็มคี่

$\sim p : a^2$ ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

การพิสูจน์ก็เริ่มจาก ~q เป็นจริงแล้วพิสูจน์ให้ได้ ~p เป็นจริง

พิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ จะต้องพิสูจน์ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคี่ $\to a = 2k + 1,\ \exists k \in I$

$\to a^2 = (2k + 1)^2$

$\to a^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\to a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\to a^2 = 2m + 1$ ให้ $m = 2k^2 + 2k \in I$

$\rightarrow a^2$ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ด้วย ซึ่งทำให้เราได้ความจริงว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคู่

3. การพิสูจน์ประโยค $p \leftrightarrow q$

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ดังนั้น เราสามารถพิสูจน์ประโยค $p \leftrightarrow q$ ได้ โดยการพิสูจน์ประโยค $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ แทน ซึ่งจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ตอนคือ

ตอนที่ 1 : จะต้องพิสูจน์ประโยค $p \rightarrow q$ เป็นจริง และ

ตอนที่ 2 : จะต้องพิสูจน์ประโยค $q \rightarrow p$ เป็นจริง

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนเต็มคู่ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่

แนวคิด จากโจทย์เป็นการพิสูจน์ประโยค $p \leftrightarrow q$ ดังนั้นเราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ตอนคือ

(1) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่

และ (2) ถ้า a + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคู่ $\rightarrow a = 2k,\ \exists k \in I$

$\rightarrow a + 2 = 2k + 2$

$\rightarrow a + 2 = 2(k + 1)$

$\rightarrow a + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

(2) เนื่องจาก a + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่ $\rightarrow a + 2 = 2m,\ \exists m \in I$

$\rightarrow a + 2 - 2 = 2m - 2$

$\rightarrow a = 2(m - 1)$

$\rightarrow a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มคู่ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่

4. การพิสูจน์ประโยค $p \rightarrow (q \vee r)$

การพิสูจน์ประโยคแบบนี้เราพิจารณาว่าการที่ q หรือ r จะเป็นจริงนั้นค่าใดค่าหนึ่งจะต้องเป็นจริง ดังนั้นจึงแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 : ให้ ~q เป็นจริง แล้วแสดงให้ได้ว่า r เป็นจริง

และ ตอนที่ 2 : ให้ ~r เป็นจริง แล้วแสดงให้ได้ว่า q เป็นจริง

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $(a + b)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a หรือ b จะเป็นจำนวนเต็มคู่

แนวคิด ถ้าให้ p : $(a + b)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่

q : a เป็นจำนวนเต็มคู่

r : b เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์ ตอนที่ 1 สมมุติให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ $(\sim q)$ จะได้ว่า $a = 2k + 1$, $\exists k \in I$

เนื่องจาก $(a + b)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $(a + b)$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ดังนั้น $a + b = 2m + 1$, $\exists m \in I$

$b = 2m - 2k$

$b = 2(m - k)$

ดังนั้น b เป็นจำนวนคู่

ตอนที่ 2 พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

สรุปจากตอนที่ 1 และ 2 จะได้ว่า $(a + b)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่

5. การพิสูจน์ประโยค $(p \vee q) \rightarrow r$

เป็นการพิสูจน์ประโยคที่มีชื่อเรียกว่า Proof by cases ซึ่งจะต้องพิสูจน์สองกรณีคือ

กรณีที่ 1 : ต้องแสดงว่า $p \rightarrow r$

และ กรณีที่ 2 : ต้องแสดงว่า $q \rightarrow r$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a^2 + a$ จะเป็นจำนวนเต็มคู่

แนวคิด การที่ a เป็นจำนวนเต็มนั้น a อาจเป็นจำนวนเต็มคู่หรือจำนวนเต็มคี่ก็ได้ ดังนั้น

ให้ p : a เป็นจำนวนเต็มคู่

q : a เป็นจำนนเต็มคี่

r : $a^2 + a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จากโจทย์จะต้องพิสูจน์ว่า $(p \vee q) \rightarrow r$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 จะต้องพิสูจน์ $p \rightarrow r$ เป็นจริง

ให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่ $\rightarrow a = 2k$, $\exists k \in I$

$\rightarrow a^2 = 4k^2$

$\rightarrow a^2 + a = 4k^2 + 2k$

$\rightarrow a^2 + a = 2(2k^2 + k)$

$\rightarrow a^2 + a = 2m$ ให้ $m = 2k^2 + k \in I$

ดังนั้น $a^2 + a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

กรณีที่ 2 จะต้องพิสูจน์ $q \rightarrow r$

ให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ $\rightarrow a = 2n + 1,\ \exists n \in I$

$$\rightarrow a^2 = (2n + 1)^2$$

$$\rightarrow a^2 + a = (4n^2 + 4n + 1) + (2n + 1)$$

$$\rightarrow a^2 + a = 2(2n^2 + 3n + 1)$$

$$\rightarrow a^2 + a = 2b \text{ ให้ } b = 2n^2 + 3n + 1 \in I$$

ดังนั้น $a^2 + a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

สรุป จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ว่าถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนเต็มคู่

6. การพิสูจน์ขัดแย้ง (Contradiction)

เราทราบว่าจะมี $p \vee \sim p$ เป็นจริงเสมอ ดังนั้นการพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์ประโยคหนึ่งให้เป็นจริง เราจึงสมมุติให้นิเสธของมันเป็นจริง แล้วแสดงให้เห็นว่าเป็นไปไม่ได้ เราจึงสรุปว่า p เป็นจริง

7. การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน (Counter example)

การสรุปผลทางคณิตศาสตร์ออกมาเป็นประโยคโดยที่ประโยคดังกล่าวไม่เป็นจริงทุกกรณี เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ที่ผิด ประโยคที่ถือว่าถูกนั้นต้องเป็นประโยคที่มีความหมายว่าประโยคนั้นเป็นจริงทุกกรณี การที่เราจะแสดงว่าประโยคทางคณิตศาสตร์ประโยคหนึ่งผิดนั้นเราเพียงยกตัวอย่าง 1 ตัวอย่างที่ขัดแย้งกับประโยคนั้น วิธีการนี้เราถือว่าเป็นการพิสูจน์อย่างหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า วิธีการพิสูจน์แบบ counter example หรือวิธี Disprove

หน่วยที่ 1

การกระจายและการแยกตัวประกอบ

(Expansion and Factorization)

ในหน่วยนี้ เราจะกล่าวถึง การกระจาย การแยกตัวประกอบ ทฤษฎีบททวินาม และการแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาเนื้อหาในหน่วยต่อ ๆ ไป เรื่องดังกล่าวจะต้องอาศัยสมบัติการแจกแจง (distributive property) เป็นพื้นฐาน

สมบัติการแจกแจง ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว

$$a(b+c) = ab + ac$$

และ $(b+c)a = ba + ca$

1.1 การกระจายและการแยกตัวประกอบที่ควรรู้

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำเป็นต้องใช้การดำเนินการเบื้องต้น เช่น การบวก ลบ คูณ หาร การยกกำลัง พหุนาม เป็นส่วนประกอบนอกจากนั้นยังต้องใช้ความรู้เรื่องการกระจายและการแยกตัวประกอบในการแก้ปัญหาต่าง ๆ

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการกระจายและการแยกตัวประกอบที่ควรรู้ ภายใต้สมมุติฐานว่า $xy = yx$

$$x(x+y) \underset{\text{แยกตัวประกอบ}}{\overset{\text{กระจาย}}{\rightleftarrows}} x^2 + xy$$

$$(x+y)^2 \longleftrightarrow x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 \longleftrightarrow x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)(x-y) \longleftrightarrow x^2 - y^2$$

$$(a+b)(c+d) \longleftrightarrow ac + ad + bc + bd$$

เพื่อความเข้าใจขอให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) = 1 + (a + b + c + d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (abc + abd + acd + bcd) + abcd$

ข้อสังเกต รูปแบบและวิธีการได้มาของพจน์ต่าง ๆ

พจน์ที่มี 1 ตัวแปร เช่น $a \times 1 \times 1 \times 1$, $1 \times b \times 1 \times 1$,...

พจน์ที่มี 2 ตัวแปร เช่น $a \times b \times 1 \times 1$, ...

พจน์ที่มี 3 ตัวแปร เช่น $a \times b \times c \times 1$, ...

พจน์ที่มี 4 ตัวแปร เช่น $a \times b \times c \times d$, ...

การใช้กฎการกระจาย เรามีข้อสังเกตว่า พจน์แต่ละพจน์ในรูปของการกระจายเกิดจากผลคูณของพจน์ในแต่ละวงเล็บ ๆ ละ 1 พจน์ นั่นคือ ถ้ามี 4 วงเล็บคูณกัน แต่ละวงเล็บมี 2 พจน์ จะกระจายได้เป็น $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ พจน์

ตัวอย่างที่ 2

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + ba + bc + ca + cb\end{aligned}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)\end{aligned}$$

ปัญหาที่ 1 จงเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจาย

(1) $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ = ...

....

(2) $(1 + x)^3$ = ...

....

....

(3) $(a + b + c)^3$ = ...

....

....

(4) $(a + b)^4$ = ...

....

....

ปัญหาที่ 2 จงเขียนให้อยู่ในรูปของการแยกตัวประกอบ

(1) $a - b$ = ...

(2) $x + 2\sqrt{xy} + y$ = ...

(3) $a^6 - b^6$ = ...

ปัญหาที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $(a + b)^2 - c^2$ = ...

(2) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ = ...

(3) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ = ...

(4) $x^4 + 3x^2 + 4$ = ...

(5) $x^4 - 15x^2y^2 + 9y^4$ = ...

(6) $a^2 - 2a - b^2 + 1$ = ...

ปัญหาที่ 4 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 10(x + y + z)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 5 จงเขียน $2(a - b)(a - c) + 2(b - c)(b - a) + 2(c - a)(c - b)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 6 ถ้า $x + 3$ หาร $3x^2 + x + k$ ลงตัว จงหาค่าของ k

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $1 + y(1 + x)^2(1 + xy)$

แนวคิด ....

....

....

(2) $1 - b - a^2 + a^3b + a^2b^3 - a^3b^3$

แนวคิด ....

....

....

1.2 ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

รูปแบบที่เรียกว่า ทวินาม เป็นรูปแบบที่ประกอบด้วยพจน์สองพจน์ เช่น $x + y$, $5a + b$, $2x - 3$, $x^2 + 3x$ และ **ทฤษฎีบททวินาม** เป็นการกล่าวถึงการกระจายรูปแบบ $(x + a)^n$ เมื่อ x , a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการหาผลของการกระจาย $(x + a)^n$ และเราจะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินาม ก่อนอื่นเราจะพิจารณาเมื่อ n มีค่าน้อย ๆ เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ ดังนี้

การกระจายของตัวประกอบทวินาม

$(x + a) \quad = \quad x + a$

$(x + a)(x + b) \quad = \quad x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + a)(x + b)(x + c) \quad = \quad x^3 + (\ldots\ldots\ldots\ldots)x^2 + (\ldots\ldots\ldots\ldots)x + \ldots\ldots$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) \quad = \quad x^4 + (\ldots\ldots\ldots\ldots)x^3 + (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)x^2$

$\qquad + (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)x + (\ldots\ldots) \qquad \ldots\ldots(1)$

จาก (1) ขอให้พิจารณาและตอบคำถามต่อไปนี้

1. จำนวนพจน์ของการกระจายที่ได้.......................................
2. กำลังสูงสุดของ x จะเท่ากับ..
3. x^4 มีสัมประสิทธิ์เป็น..
4. x^3 มีสัมประสิทธิ์เป็น..
5. x^2 มีสัมประสิทธิ์เป็น..
6. x มีสัมประสิทธิ์เป็น..
7. พจน์ที่ไม่มี x (พจน์สุดท้าย) คือ ....

เพื่อความสะดวกในการหาสัมประสิทธิ์ทวินาม เราควรทราบถึงวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (Linear Permutation) นั่นคือการจัดลำดับสิ่งของในแนวเส้นตรง และวิธีจัดหมู่ (Combination) ซึ่งคือการจัดสิ่งของโดยไม่ถือลำดับเป็นสำคัญ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ถ้ามีตัวเลขอยู่ 3 ตัวคือ 1, 2 และ 3 จะมีวิธีเรียงตัวเลขเหล่านี้ในแนวเส้นตรงได้ดังนี้ 123 132 213 231 312 321 แต่ละวิธีถือว่าต่างกันเพราะเราคำนึงถึงลำดับของสิ่งของ จึงจัดเรียงได้ 6 วิธี มีวิธีคิดดังนี้

ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2	ตำแหน่งที่ 3
3	2	1

ตำแหน่งที่ 1 มีตัวเลขให้เลือกจัด 3 ตัว ซึ่งจัดได้ 3 วิธี
ตำแหน่งที่ 2 จะเหลือตัวเลขให้เลือกจัด 2 ตัว ซึ่งจัดได้ 2 วิธี
ตำแหน่งที่ 3 จะเหลือตัวเลขให้เลือกจัด 1 ตัว ซึ่งจัดได้ 1 วิธี
ดังนั้น จะจัดตัวเลขวางทั้ง 3 ตำแหน่งได้ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 ถ้ามีตัวเลขอยู่ 9 ตัว คือ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 นำมาจัดเรียงเป็นเลข 3 หลัก จะมีวิธีจัดได้กี่แบบ โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

แนวคิด

ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2	ตำแหน่งที่ 3
9	8	7

ดังนั้น ถ้ามีตัวเลข 9 ตัว นำมาจัดคราวละ 3 ตัวจะจัดได้ $9 \times 8 \times 7$ วิธี

จากตัวอย่างดังกล่าว จะได้ข้อสรุปว่า ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่ต่างกัน นำมาจัดอันดับคราวละ r สิ่ง จะจัดได้ $n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1)$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6 มีหนังสืออยู่ 9 เล่ม คือเล่มที่ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 นำมาจัดหมู่ละ 3 เล่มเพื่อให้เพื่อนยืม (ถือว่าชุดที่มีเลขหนังสือเหมือนกันแต่สลับตำแหน่งกันเป็นแบบเดียวกัน เช่น 123 132 213 231 312 321 เป็น 1 วิธี) จะมีวิธีให้เพื่อนยืมได้กี่วิธี

แนวคิด ตัวเลข 9 ตัว นำมาจัดคราวละ 3 ตัว จะจัดได้ $9 \times 8 \times 7$ วิธี
ตัวเลข 3 ตัว นำมาจัดคราวละ 3 ตัว จะจัดได้ $3 \times 2 \times 1$ วิธี
ดังนั้นการจัดตัวเลข 9 ตัว นำมาจัดหมู่ละ 3 ตัว จะจัดได้ $\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$ วิธี

จากตัวอย่างดังกล่าวจะได้ข้อสรุปว่า ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่ต่างกัน นำมาจัดหมู่ละ r สิ่งจะจัดได้

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...1} \text{ วิธี}$$

ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ ${}_nC_r$ แทนจำนวนวิธีการจัดหมู่ของของ n สิ่งเลือกมาคราวละ r สิ่ง

นั่นคือ $${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...1}$$ สำหรับ $r > 0$ และ $n > r$

และตกลงให้ ${}_nC_0 = 1$

เช่น $${}_{11}C_4 = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = 330$$

$${}_nC_n = 1$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ ${}_nC_r$ ในหนังสือบางเล่มอาจใช้ ${}^nC_r$ หรือ $\binom{n}{r}$ หรือ C (n,r)

พิจารณาผลคูณของ $(x + a_1)(x + a_2) ... (x + a_n)$ ซึ่งมีอยู่ n วงเล็บเมื่อกระจายแล้วจะได้ n + 1 พจน์และ

x^n มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 $= S_0$

x^{n-1} มีสัมประสิทธิ์เป็น $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ $= S_1$

x^{n-2} มีสัมประสิทธิ์เป็น $(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n)$ $= S_2$

⋮

x^{n-r} มีสัมประสิทธิ์เป็น S_r ซึ่ง S_r คือ ผลบวกของผลคูณของ a_i คราวละ r ตัวเมื่อ

$i = 1 , 2 , ... n$

พจน์สุดท้ายของการกระจายคือพจน์ที่ไม่มี $x = S_n$ ซึ่ง S_n คือผลคูณของ a_i คราวละ n ตัว

เมื่อ $i = 1 , 2 , ... , n$ จะได้ว่า

$$(x + a_1)(x + a_2) ... (x + a_n) = S_0x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + ... + S_{n-1}x + S_n$$

ถ้าให้ $a_1 = a_2 = ... = a_n$ จะได้

$$S_0 = 1 = {}_nC_0a^0$$

$$S_1 = \underbrace{a+a+...+a}_{{}_nC_1 \text{ ตัว}} = {}_nC_1a^1$$

$$S_2 = \underbrace{a^2+a^2+...+a^2}_{{}_nC_2 \text{ ตัว}} = {}_nC_2a^2$$

$$S_3 = \underbrace{a^3+a^3+...+a^3}_{{}_nC_3 \text{ ตัว}} = {}_nC_3a^3$$

⋮

$$S_r = \underbrace{a^r + a^r + \ldots + a^r}_{{}_nC_r \text{ ตัว}} = {}_nC_r a^r$$

$\vdots$

$$S_n = \underbrace{a^n}_{{}_nC_n \text{ ตัว}} = {}_nC_n a^n$$

นั่นคือ $(x+a)^n = {}_nC_0 x^n a^0 + {}_nC_1 x^{n-1} a^1 + {}_nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + {}_nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + {}_nC_n x^0 a^n$

ข้อสังเกต

1. การกระจาย $(x + a)^n$ จะได้ผลบวกของพจน์ทั้งหมด $n + 1$ พจน์

   คือ พจน์ที่ 1 $= {}_nC_0 x^n a^0$

   พจน์ที่ 2 $= {}_nC_1 x^{n-1} a^1$

   $\vdots$

   พจน์ที่ $r + 1 = {}_nC_r x^{n-r} a^r$

2. ในแต่ละพจน์ของการกระจาย $(x + a)^n$ จะประกอบด้วยส่วนสำคัญ 3 ส่วน เช่น

   พจน์ที่ $r + 1 = \underbrace{{}_nC_r}_{\text{ส.ป.ส.ทวินาม}} \cdot \underbrace{x^{n-r}}_{\text{พจน์หน้า}} \cdot \underbrace{a^r}_{\text{พจน์หลัง}}$

ปัญหาที่ 8 จงแสดงว่า ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ เมื่อ $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

(หมายเหตุ : $n!$ อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล)

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 9 กำหนดให้ $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \ldots + {}_nC_n x^n$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้

1) ${}_nC_0 + 2({}_nC_1) + 4({}_nC_2) + \ldots + 2^n({}_nC_n) = 3^n$

2) ${}_nC_0 - 2({}_nC_1) + 4({}_nC_2) - \ldots + (-1)^n 2^n({}_nC_n) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ -1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

แนวคิด 1)..

....

....

แนวคิด 2) ....

....

....

ปัญหาที่ 10 จงแสดงว่า ${}_nC_r = \frac{(n-r+1)}{r} \times {}_nC_{r-1}$ และหาค่าของ r ซึ่งทำให้ ${}_nC_r$ มีค่ามากที่สุด

แนวคิด ....

....

....

จงกระจายต่อไปนี้

$(x + a)^0$ = ...

$(x + a)^1$ = ...

$(x + a)^2$ = ...

$(x + a)^3$ = ...

$(x + a)^4$ = ...

$(x + a)^5$ = ...

$(x + a)^6$ = ...

จากการกระจายพบสมบัติการกระจาย $(x + a)^n$ เมื่อ x , a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. พจน์แรกของการกระจายจะมีกำลังสูงสุดเท่ากับ...... ... .
2. พจน์ที่ 2 คือ ....
3. เลขชี้กำลังของ x และ a มีลักษณะเป็นอย่างไร เมื่อพิจารณาจากพจน์แรกไปจนถึงพจน์สุดท้าย..
4. จำนวนพจน์ที่กระจายได้..
5. พจน์ที่ n คือ..
6. พจน์ที่ n + 1 คือ ....
7. ผลบวกของเลขชี้กำลังของ x และ a ในแต่ละพจน์เท่ากับ.......................

ในการกระจาย $(x + a)^n$ เราจะพบว่า สัมประสิทธิ์ทวินามของแต่ละพจน์คือ ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$ ... , ${}_nC_n$ ตามลำดับ เมื่อนำสัมประสิทธิ์ทวินามมาเขียนเรียงลำดับลงมาจะเกิดรูปแบบที่เป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า **รูปสามเหลี่ยมของปาสกาล** โดยตั้งชื่อเพื่อให้เป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ คือ เบลส ปาสคาล (Blaise Pascal) ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ. 1623 - 1662

$(x + a)^n$												สัมประสิทธิ์ทวินาม											
n = 0												1											
n = 1											1		1										
n = 2										1		2		1									
n = 3									1		3		3		1								
n = 4								1		4		6		4		1							
⋮							⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮						

ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินาม

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์ จะได้ว่า

$(1 + x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + ... + {}_nC_nx^n$ .... (*)

ถ้าแทน x ด้วย 1 จะได้ว่า

$(1 + 1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + ... + {}_nC_n$

2^n = ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามทั้งหมดของการกระจาย $(x + a)^n$

ดังนั้น

ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามทั้งหมด = 2^n

จากสมการ (*) ถ้าแทน x ด้วย -1 จะได้ว่า

$(1 + (-1))^n = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + ... + (-1)^n\,{}_nC_n$

นั่นคือ $0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + ... + (-1)^n\,{}_nC_n$

ข้อสังเกต

สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ในตำแหน่งเลขคู่เป็นลบ สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ในตำแหน่งเลขคี่เป็นบวก เมื่อนำสัมประสิทธิ์ทั้งหมดรวมกันจะได้เป็น 0 สรุปได้ว่า ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ในตำแหน่งเลขคู่ เท่ากับ ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ในตำแหน่งเลขคี่ จะได้ว่า

ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์ = 2^n
ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ตำแหน่งเลขคู่ = ...
ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ตำแหน่งเลขคี่ = ...

การกระจาย $(x - a)^n$

ถ้า x และ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(x - a)^n = (x + (-a))^n$$
$$= x^n + {}_nC_1x^{n-1}(-a) + {}_nC_2x^{n-2}(-a)^2 + \ldots + (-a)^n$$
$$= x^n - {}_nC_1x^{n-1}a + {}_nC_2x^{n-2}a^2 + \ldots + (-1)^n a^n$$

เมื่อเปรียบเทียบ $(x + a)^n$ กับ $(x - a)^n$

$$(x + a)^n = x^n + {}_nC_1x^{n-1}a + {}_nC_2x^{n-2}a^2 + {}_nC_3x^{n-3}a^3 + \ldots + a^n$$

$$(x - a)^n = x^n - {}_nC_1x^{n-1}a + {}_nC_2x^{n-2}a^2 - {}_nC_3x^{n-3}a^3 + \ldots + (-1)^n a^n$$

จะพบว่า 1. **พจน์ในตำแหน่งเลขคี่เท่ากัน**

2. **พจน์ในตำแหน่งเลขคู่เป็นจำนวนตรงข้ามกัน** (มีเครื่องหมายต่างกัน)

ดังนั้น

$(x + a)^n + (x - a)^n$ = ...

$(x + a)^n - (x - a)^n$ = ...

ปัญหาที่ 11 จงแสดงว่า ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ r กับพจน์ที่ r + 1 ในการกระจาย $(1 + x)^n$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ r + 1 ในการกระจาย $(1 + x)^{n+1}$ และเชื่อมโยงผลลัพธ์ดังกล่าวกับสามเหลี่ยมปาสคาลได้อย่างไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 12 จงกระจาย $(x^2 + \frac{3}{x^4})^{12}$ และหา

(1) พจน์ที่ 9

แนวคิด ....

....

....

(2) สัมประสิทธิ์ของ x^6

แนวคิด ....

....

....

(3) พจน์ที่ไม่มีตัวแปร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 13 จงหาค่าของ

(1) $(2 + 3x)^5 - (2 - 3x)^5$

แนวคิด ....

....

....

(2) $(1 - 2y)^4 (1 + 2y)^3$

แนวคิด ....

....

....

ตัวอย่างที่ 7 จงหาวิธีการแสดงการหาพจน์ที่มีค่ามากที่สุดในการกระจาย $(x + a)^n$

แนวคิด การหาพจน์ที่มีค่ามากที่สุดในการกระจาย $(x + a)^n$ เมื่อไม่คิดเครื่องหมายว่าเป็นบวกหรือลบ มีวิธีการดังนี้

$$(x + a)^n = x^n(1 + \frac{a}{x})^n$$

พจน์ที่มีค่ามากที่สุดในการกระจาย $(x + a)^n$ คือพจน์ที่มีค่ามากที่สุดในการกระจาย $(1 + \frac{a}{x})^n$ คูณด้วย x^n

ในการกระจาย $(1 + \frac{a}{x})^n$

$$\text{พจน์ที่ } r + 1 = {}_nC_r(\frac{a}{x})^r$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-r+2)(n-r+1)}{1\times 2\times ...\times r}(\frac{a}{x})^r$$

$$\text{พจน์ที่ } r = {}_nC_{r-1}(\frac{a}{x})^{r-1}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1\times2\times\ldots(r-1)}(\frac{a}{x})^{r-1}$$

ดังนั้น พจน์ที่ $r + 1$ = (พจน์ที่ r) $\cdot\frac{(n-r+1)}{r}\cdot\frac{a}{x}$

พิจารณา $\frac{n-r+1}{r}$ จะมีค่าลดลงเมื่อ r มีค่าเพิ่มขึ้น

ดังนั้น พจน์ที่ $r + 1$ จะมีค่ามากกว่าพจน์ที่ r ก็ต่อเมื่อ $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$ มีค่ามากกว่า 1

นั่นคือ $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x} > 1$

$$\frac{n+1}{r} - 1 > \frac{x}{a}$$

$$\frac{n+1}{r} > \frac{x}{a} + 1$$

$$\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1} > r$$

$$\frac{a(n+1)}{x+a} > r$$

นั่นคือทุก ๆ ค่า r ที่น้อยกว่า $\frac{a(n+1)}{x+a}$ พจน์ที่ $r + 1$ จะมีค่ามากกว่าพจน์ที่ r ดังนั้น r ตัวที่มีค่ามากที่สุดที่น้อยกว่า $\frac{a(n+1)}{x+a}$ จะทำให้ พจน์ที่ $r + 1$ มีค่ามากที่สุดในการกระจาย $(x + a)^n$

ถ้า $\frac{a(n+1)}{x+a} = r$

จะได้ว่า $(\frac{n+1}{r} - 1)\cdot\frac{a}{x} = 1$

ทำให้ พจน์ที่ $r + 1$ = พจน์ที่ r และมีค่ามากกว่าพจน์อื่น ๆ

นั่นคือ จะมีพจน์ที่มากที่สุดอยู่ 2 พจน์คือพจน์ที่ $r + 1$ และพจน์ที่ r

ปัญหาที่ 14 จงหาพจน์ที่มากที่สุดในการกระจาย $(3 - 2x)^{10}$ เมื่อ $x = 1$

แนวคิด $(3 - 2x)^{10} = 3^{10}(1 - \frac{2x}{3})^{10}$

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 15 สัมประสิทธิ์ของ x^{99} ของพหุนาม (x-1)(x-2)...(x-100) เท่ากับเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 16 ถ้า 3 พจน์แรกจากการกระจาย $(1 + ax + bx^2)^6$ คือ $1 - 12x + 78x^2$ จงหาค่าของ a และ b

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 17 จงแสดงว่า $(2 + \sqrt{3})^4$ มีค่าระหว่าง 193 กับ 194

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 18 ถ้าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ x^3 จากการกระจาย $(3 + ax)^9$ มีค่าเท่ากัน จงหาค่าของ a

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 19 ในการกระจาย $(1 + x)^n$ จะได้ 3 พจน์แรกคือ 1 + 3 + 4 + ... จงหาค่าของ x และ n

แนวคิด ....

....

....

1.3 การแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ โดยพิจารณาเมื่อ n มีค่าต่าง ๆ จากน้อยไปมากดังนี้

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$
$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$
$$\vdots$$

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$

ซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดยการหาผลคูณของตัวประกอบแล้วตรวจสอบกลับ แต่การแยกตัวประกอบ $x^n + y^n$ จะมีผลลัพธ์ที่ต่างออกไปดังนี้

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$
$$x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$$
$$\vdots$$
$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่

ปัญหาที่ 20 จงหาสูตรในการหาผลบวกของ

$1 + x + x^2 + ... + x^n$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 21 จงแยกตัวประกอบ

(1) $a^6 - b^6$ ให้เป็นผลคูณของสี่วงเล็บ

แนวคิด ....

....

....

(2) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 22 ถ้า $(a - \frac{1}{a})^2 = 3$ และ $a > 0$ จงหาค่าของ $a^3 - \frac{1}{a^3}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 23 จงอธิบายว่าทำไม

(1) $5^{39} - 2^{39}$ หารด้วย 3 ลงตัว

แนวคิด ....

....

....

(2) $2^{99} + 3^{99}$ หารด้วย 5 ลงตัว

แนวคิด ....

....

....

หน่วยที่ 2

พหุนาม (Polynomial)

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์โดยทั่ว ๆ ไปเรามักจะพบและเกี่ยวข้องกับพหุนามและสมการพหุนามอยู่เสมอ ไม่ว่าจะเป็นการเรียนพีชคณิตเบื้องต้น หรือ แคลคูลัส ด้วยเหตุว่า ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันที่ง่ายและมีสมบัติพิเศษหลายอย่าง นอกจากนั้นยังเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับสูงต่อไป

ในหน่วยนี้ จะแนะนำ บทนิยาม ทฤษฎีบทที่น่าสนใจ ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการ กฎของเครื่องหมายของเดส์การ์ตส์ พหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อน การแก้สมการกำลังสอง กำลังสาม กำลังสี่ และประเด็นที่น่าสนใจจากพหุนาม โดยให้คำจำกัดความของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ดังนี้

2.1 พหุนาม

บทนิยาม 1 พหุนาม $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ คือพหุนาม ดีกรี (degree) n ของตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง $a_0, a_1, \dots, a_n$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เราเรียกสัมประสิทธิ์ a_n ว่า **สัมประสิทธิ์นำ** (leading coefficient) ในกรณีที่ $a_n = 1$ เรียก P(x) ว่า **monic polynomial**

บทนิยาม 2 เมื่อ P(x) เป็นพหุนามดีกรี n จะเรียก $P(x) = 0$ ว่า **สมการพหุนามดีกรี n** และเมื่อแทนค่า x ด้วยจำนวนคงค่า r และ $P(r) = 0$ จะเรียก r ว่า **รากของสมการ** $P(x) = 0$

ให้
$$P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$$
$$Q(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$$
เป็นพหุนามคู่หนึ่ง เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $m \geq n$ ซึ่งจะใช้ในบทนิยามต่อ ๆ ไป

บทนิยาม 3 **การเท่ากันของพหุนาม**

$P(x) = Q(x)$ เมื่อ $n = m$ และ $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$

บทนิยาม 4 **การบวกและการลบพหุนาม**

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_mx^m$$
$$P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n - b_{n+1}x^{n+1} - \dots - b_mx^m$$

บทนิยาม 5 การคูณพหุนาม

$$P(x)Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0)x^k + \ldots + a_nb_mx^{n+m}$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $P(x) = 3x^4 - 10x^2 + 5x + 1$

และ $Q(x) = 6x^3 + 12x - 4$ จะได้

$P(x) + Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 17x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 7x + 5$

$$P(x)Q(x) = (3 \cdot 6)x^7 + (3 \cdot 12 + (-10)6)x^5 + (3(-4) + 5 \cdot 6)x^4 + ((-10)12 + 1 \cdot 6)x^3 + ((-10)(-4) + 5 \cdot 12)x^2 + (5 \cdot (-4) + 1 \cdot 12)x + 1(-4)$$

$$P(x)Q(x) = 18x^7 - 24x^5 + 18x^4 - 114x^3 + 100x^2 - 8x - 4$$

บทนิยาม 6 การหารพหุนาม

ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้ามีพหุนาม $S(x)$ และ $R(x)$ ซึ่งทำให้

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

โดยที่ $R(x) = 0$ หรือ $\deg R(x) < \deg Q(x)$

จะเรียก $S(x)$ ว่า ผลหาร และ $R(x)$ ว่า เศษเหลือ จากการหาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$

(หมายเหตุ $\deg R(x)$ หมายถึง ดีกรีของ $R(x)$)

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจในทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารพหุนาม ให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารในระบบจำนวนเต็ม ซึ่งมีลักษณะคล้ายคลึงกันดังนี้

ทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารในระบบจำนวนเต็ม

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียว ซึ่ง $a = bq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |b|$

พิสูจน์ การพิสูจน์แบ่งเป็น 2 ตอนดังนี้

1. จะแสดงว่ามี q และ r ที่ทำให้ $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$
2. จะแสดงว่ามี q และ r เพียงคู่เดียวที่ทำให้ $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$

1. พิจารณา อสมการ $a - bx \geq 0$ ว่ามีคำตอบเป็นจำนวนเต็มหรือไม่

ถ้า $\mathbf{b > 0}$ จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x \leq \frac{a}{b}$ ที่ทำให้ $a - bx \geq 0$

ถ้า $\mathbf{b < 0}$ จะมีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x \geq \frac{a}{b}$ ที่ทำให้ $a - bx \geq 0$

นั่นคือ อสมการ $a - bx \geq 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น กำหนดให้ $x = q$ และ r เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$r = a - bx \geq 0$ หรือ $r = a - bq \geq 0$

นั่นคือ มี q และ r ซึ่งทำให้ $a = bq + r$, $r \geq 0$

จะแสดงว่า $r < |b|$

ให้ $r \geq |b|$ ดังนั้น $r - |b| \geq 0$

แต่ $r - |b| = a - bq - |b| = a - (bq + |b|) = a - b(q \pm 1)$ ซึ่งอยู่ในรูปของ $a - bx \geq 0$

แต่ $r - |b| < r$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ r เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้ $r = a - bq \geq 0$

ดังนั้น $r < |b|$

2. จะแสดงว่ามี q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้น

สมมุติว่ามี q_1 และ r_1 เป็นจำนวนเต็มอีกคู่หนึ่งที่ทำให้

$$a = bq_1 + r_1 \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq r_1 < |b|$$

ดังนั้น $bq_1 + r_1 = bq + r$

$$r_1 - r = (q - q_1)\, b$$

แสดงว่า b หาร $r_1 - r$ ลงตัว

แต่ $|r_1 - r| < |b|$

ดังนั้น $r_1 - r = 0$ นั่นคือ $r_1 = r$

และจาก $r_1 - r = (q - q_1)\, b$, $b \neq 0$

ดังนั้น $q - q_1 = 0$ จะได้ $q = q_1$

นั่นคือ มี q และ r อยู่เพียงคู่เดียว #

ทฤษฎีบทที่ 1 **ทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหาร** (division algorithm)

ให้ P(x) และ Q(x) เป็นพหุนามใด ๆ ซึ่ง $Q(x) \neq 0$ แล้ว จะมีพหุนาม S(x) และ R(x) เพียงคู่เดียว ซึ่ง $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$

โดยที่ $R(x) = 0$ หรือ $\deg R(x) < \deg Q(x)$

พิสูจน์ ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ , } b_m \neq 0$$

ถ้า $\deg P(x) < \deg Q(x)$ จะได้ว่า

$$P(x) = 0 \cdot Q(x) + P(x) \quad \text{สอดคล้องกับทฤษฎีบท}$$

ถ้า $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ นั่นคือ $n \geq m$

เอา Q(x) หาร P(x) ผลลัพธ์จะเป็น $c_{n-m}x^{n-m}$ และ เศษเหลือคือ $P_1(x)$ เมื่อ $c_{n-m} = \dfrac{a_n}{b_m}$

นั่นคือ $P(x) = c_{n-m}x^{n-m} \cdot Q(x) + P_1(x)$ .... (1)

โดย $\deg P_1(x) = n_1 < n$ หรือ $P_1(x) = 0$

ถ้า $P_1(x) = 0$ หรือ $n_1 < m$ จะให้ $S(x) = c_{n-m}x^{n-m}$

และ $R(x) = P_1(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท

แต่ถ้า $P_1(x) \neq 0$ และ $n_1 > m$ จะหาร $P_1(x)$ ด้วย $Q(x)$ ต่อไป

นั่นคือ $P_1(x) = c_{n_1-m}x^{n_1-m} \cdot Q(x) + P_2(x)$ .... (2)

โดยที่ $\deg P_2(x) = n_2 < n_1$ หรือ $P_2(x) = 0$

แทนค่า $P_1(x)$ ในสมการ (1) จะได้

$$P(x) = c_{n-m}x^{n-m} \cdot Q(x) + c_{n_1-m}x^{n_1-m} \cdot Q(x) + P_2(x)$$

$$P(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n_1-m}x^{n_1-m})\,Q(x) + P_2(x)$$

ถ้า $P_2(x) = 0$ หรือ $n_2 < m$ จะให้ $S(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n_1-m}x^{n_1-m})$

และ $R(x) = P_2(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท

แต่ถ้า $P_2(x) \neq 0$ และ $n_2 > m$ จะหาร $P_2(x)$ ด้วย $Q(x)$ ต่อไป

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงครั้งที่ k ซึ่ง

$P_k(x) = 0$ หรือ $\deg P_k(x) = n_k < m$ จะได้ว่า

$P(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n_1-m}x^{n_1-m} + \dots + c_{n_{k-1}-m}x^{n_{k-1}-m})\,Q(x) + P_k(x)$

โดยที่ $n > n_1 > n_2 > \dots > n_{k-1} \geq m$

นั่นคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$ คือ

$(c_{n-m}x^{n-m} + c_{n_1-m}x^{n_1-m} + \dots + c_{n_{k-1}-m}x^{n_{k-1}-m})$ เศษเหลือคือ $P_k(x)$

ถ้าเราให้ $S(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + c_{n_1-m}x^{n_1-m} + \dots + c_{n_{k-1}-m}x^{n_{k-1}-m})$

และ $R(x) = P_k(x)$ จะได้ว่า

$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$

โดยที่ $\deg R(x) = n_k < m$ หรือ $R(x) = 0$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่ามี $S(x)$ และ $R(x)$ เพียงคู่เดียว

สมมุติว่ามี $S_1(x)$ และ $R_1(x)$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$P(x) = S_1(x)Q(x) + R_1(x)$$

โดยที่ $\deg R_1(x) < m$ หรือ $R_1(x) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$S_1(x)Q(x) + R_1(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

$$(S_1(x) - S(x))Q(x) = R(x) - R_1(x)$$

แต่ $\deg (R(x) - R_1(x))$ น้อยกว่า $\deg Q(x)$

ดังนั้น $S_1(x) - S(x) = 0$ และทำให้ได้ว่า $R(x) - R_1(x) = 0$

นั่นคือ $S_1(x) = S(x)$ และ $R(x) = R_1(x)$ #

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $P(x) = 6x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 10x + 1$ และ $Q(x) = x^2 - x + 3$ จงหาผลหารและ เศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$

วิธีทำ เพื่อความสะดวกในการหาร เราสามารถเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{rrr|rrrrrrl}
 & & & 6 & 2 & -14 & -21 & & & \leftarrow S(x) \\
\hline
1 & -1 & 3 & 6 & -4 & 2 & -1 & 10 & 1 & \\
 & & & \underline{6} & \underline{-6} & \underline{18} & & & & \leftarrow 6x^3 \cdot Q(x) \\
 & & & & 2 & -16 & -1 & 10 & 1 & \leftarrow P_1(x) \\
 & & & & \underline{2} & \underline{-2} & \underline{6} & & & \leftarrow 2x^2 \cdot Q(x) \\
 & & & & & -14 & -7 & 10 & 1 & \leftarrow P_2(x) \\
 & & & & & \underline{-14} & \underline{14} & \underline{-42} & & \leftarrow -14x \cdot Q(x) \\
 & & & & & & -21 & 52 & 1 & \leftarrow P_3(x) \\
 & & & & & & \underline{-21} & \underline{21} & \underline{-63} & \leftarrow -21 \cdot Q(x) \\
 & & & & & & & \underline{31} & \underline{64} & \leftarrow R(x)
\end{array}
$$

ผลหาร คือ $6x^3 + 2x^2 - 14x - 21$ เศษเหลือคือ $31x + 64$

ยังมีวิธีการหารที่ดีอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า **การหารสังเคราะห์** (Synthetic Divison) เป็นวิธีการหาผลลัพธ์และเศษเหลือของการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนคงค่า และประยุกต์ใช้ในการหาค่าของพหุนามที่จำนวนคงค่า c ใด ๆ ได้รวดเร็ว

กำหนดให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

และ $Q(x)$ เป็นผลลัพธ์จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$

ดังนั้น $\quad Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

โดยที่ $\quad P(x) = (x - c)Q(x) + P(c)$

$$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \dots + (b_1 - cb_2)x^2 + (b_0 - cb_1)x + P(c) - cb_0$$

ซึ่งมีผลทำให้ $a_n = b_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} &= b_{n-2} - cb_{n-1} \\
&\vdots \\
a_1 &= b_0 - cb_1 \\
a_0 &= P(c) - cb_0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + cb_{n-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$b_1 = a_2 + cb_2$

$b_0 = a_1 + cb_1$

$P(c) = a_0 + cb_0$

สามารถจัดความสัมพันธ์ได้เป็น

$$
\begin{array}{cccccc|cl}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & c & \ldots(1) \\
 & cb_{n-1} & \cdots & cb_2 & cb_1 & cb_0 & & \ldots(2) \\
\hline
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 & \multicolumn{1}{|c|}{P(c)} & & \ldots(3) \\
\hline
\end{array}
$$

(1) เป็นสัมประสิทธิ์ของ $P(x)$ เรียงตามลำดับกำลังของ x จากมากไปน้อย

จาก (3) ได้ $b_{n-1} = a_n$

นำ c คูณ b_{n-1} ไปใส่ใน (2) ได้ $b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$

นำ c คูณ b_{n-2} ไปใส่ใน (2) ได้ $b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2}$

ทำเช่นนี้ไปจนถึงขั้นสุดท้าย จะได้

$$P(c) = a_0 + cb_0$$

จะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์ (1) , (2) และ (3) ที่ได้ จะได้ผลลัพธ์และเศษเหลือ เราเรียกการกระทำดังกล่าวว่า **การหารสังเคราะห์**

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $x^3+2x^2-13x+10$ ด้วย $x-3$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -13 & 10 & 3 \\
 & 3 & 15 & 6 & \\
\hline
1 & 5 & 2 & \multicolumn{1}{|c|}{16} & \rightarrow P(3) \\
\hline
\end{array}
$$

$1x^2 + 5x + 2$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + 2x^2 - 13x + 10 \\
&= (x - 3)(x^2 + 5x + 2) + 16
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $P(x)$ หารด้วย $x - 3$ ได้ผลลัพธ์เป็น $x^2 + 5x + 2$ เหลือเศษ 16

ปัญหาที่ 1 จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ ด้วย $2x - 1$

แนวคิด ....

....

....

นั่นคือ เมื่อหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(ax - b)$ จะพบว่าในการหาร $P(x)$ ด้วย $(x - \frac{b}{a})$ ได้ผลลัพธ์เป็น $Q(x)$ และเศษเหลือ r จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \frac{b}{a})\,Q(x) + r \\ &= (ax - b)\,\frac{Q(x)}{a} + r \end{aligned}$$

นั่นคือ ในการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(ax - b)$ จะได้ผลลัพธ์เป็น $\frac{Q(x)}{a}$ เศษเหลือ $r = P(\frac{b}{a})$

ปัญหาที่ 2 ให้ $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 7$ จงหาค่า $P(2)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 3 ให้ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 47x - 210$

จงหาผลลัพธ์ และเศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x^2 - x - 42$

แนวคิด ....

....

....

บทนิยาม 7 กล่าวว่าพหุนาม $Q(x)$ หารพหุนาม $P(x)$ ลงตัว เมื่อเศษเหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$ เป็น 0 กล่าวคือ $P(x) = S(x)Q(x)$

ทฤษฎีบทที่ 2 **ทฤษฎีบทเศษเหลือ** (remainder theorem)

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามของ x ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x - c$ จะเหลือเศษเท่ากับ $P(c)$ เมื่อ c เป็นจำนวนคงค่า

พิสูจน์ กำหนดให้เศษเหลือคือ r และผลหารคือ $S(x)$

ดังนั้น $P(x) = S(x)(x - c) + r$

แทน $x = c$ จะได้ $P(c) = S(c)(c - c) + r = r$

ดังนั้น เศษเหลือคือ $P(c)$ #

ทฤษฎีบทที่ 3 **ทฤษฎีบทตัวประกอบ** (factor theorem)

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามของ x และ c เป็นจำนวนคงค่า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

พิสูจน์ ($\rightarrow$) ให้ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

จะได้ว่า $x - c$ หาร $P(x)$ ลงตัว

นั่นคือจะมี $Q(x)$ โดยที่

$$P(x) = (x - c)Q(x) + 0$$

โดยทฤษฎีบทเศษเหลือจะได้ว่า $P(c) = 0$

($\leftarrow$) ให้ $P(c) = 0$

มี $Q(x)$ และ $R(x)$ โดยที่ $P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$

โดยทฤษฎีบทเศษหลือ $R(x) = P(c) = 0$

ดังนั้น $P(x) = (x - c)Q(x)$

นั่นคือ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

เนื่องจาก $P(c) = 0$ หมายความว่า c เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ดังนั้น $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ c เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ #

ปัญหาที่ 4 (1) จงแสดงว่า $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

แนวคิด ....

....

....

(2) จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

แนวคิด ....

....

....

(3) จงหาคำตอบของสมการ $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 5 จงหาผลหารและเศษ เมื่อ

(1) $x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ หารด้วย $(x + 1)(x - 3)$

แนวคิด ....

....

....

(2) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 11$ หารด้วย $x^2 + 5x + 4$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 6 จงแสดงว่า

(1) สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว $(x - 1)$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$

แนวคิด ....

....

....

(2) สำหรับจำนวนคี่บวก n ทุกตัว

(i) $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $x^n + 1$

แนวคิด ....

....

....

(ii) $(x^m + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $x^{mn} + 1$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

แนวคิด ....

....

....

(3) สำหรับจำนวนคู่บวก n ทุกตัว

(i) $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$

แนวคิด ....

....

....

(ii) $(x^m + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $x^{mn} - 1$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

แนวคิด ....

....

(4) $(x + 2)$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - 16$

แนวคิด ....

....

....

(5) $(x + 3)$ เป็นตัวประกอบของ $x^5 + 243$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 7 ถ้าพหุนามดีกรีสาม $P(x)$ เมื่อแทนค่า $x = a$, $x = b$ และ $x = c$ มีค่าเท่ากัน และสัมประสิทธิ์ของ x^3 มีค่าเท่ากับ 1 จงแสดงว่า

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) + k$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 8 จงหาพหุนาม $P(x)$ ที่มีดีกรี 3 ซึ่งเมื่อแทนค่า $x = 1$, 2 , 3 แล้วมีค่าเท่ากัน และ $P(0) = 1$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 9 ถ้า $ax^3 + bx + c$ มี $x^2 + px + 1$ เป็นตัวประกอบ จงแสดงว่า $a^2 - c^2 = ab$ และแสดงว่า $ax^3 + bx + c$ และ $cx^3 + bx^2 + a$ มีพหุนามดีกรีสองเป็นตัวประกอบร่วมกัน

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 10 กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $P(a) - P(b) = 1$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า a และ b ไม่เท่ากับ 1 พร้อมกัน

แนวคิด ....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a_n \neq 0$ คำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $P(x) = 0$ จะต้องอยู่ในรูป $\frac{r}{s}$ โดยที่ r และ s เป็นจำนวนเต็มที่ r หาร a_0 ลงตัว และ s หาร a_n ลงตัว

หมายเหตุ (1) ทฤษฎีบทที่ใช้พิสูจน์บทข้างต้นมี 2 ทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า a หาร bc ลงตัว และ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว a หาร c ลงตัว

ทฤษฎีบท กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ห.ร.ม. ของ a และ b^n จะเท่ากับ 1

(2) $\frac{r}{s}$ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x - \frac{r}{s}$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ก็ต่อเมื่อ มี $Q(x)$ ซึ่งทำให้ $P(x) = (x - \frac{r}{s})Q(x)$

ก็ต่อเมื่อ $P(x) = s(x - \frac{r}{s})\frac{1}{s}Q(x)$

$= (sx - r)\,A(x)$ โดยที่ $A(x) = \frac{1}{s}Q(x)$

พิสูจน์ สมมุติว่ามีจำนวนตรรกยะ d ซึ่ง $P(d) = 0$ จะมีจำนวนเต็ม r และ s , $s \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ r และ s เท่ากับ 1 และ $d = \frac{r}{s}$

แทนค่า $x = \frac{r}{s}$ ในสมการ $P(x) = 0$

จะได้ $0 = a_n(\frac{r}{s})^n + a_{n-1}(\frac{r}{s})^{n-1} + ... + a_1\frac{r}{s} + a_0$

$0 = \frac{1}{s^n}[\,a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1}s + ... + a_1rs^{n-1} + a_0s^n\,]$

เนื่องจาก $\frac{1}{s^n} \neq 0$ ดังนั้น

$0 = a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1}s + ... + a_1rs^{n-1} + a_0s^n$ .... (1)

$-a_nr^n = s\,[a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1rs^{n-2} + a_0s^{n-1}\,]$

ดังนั้น s หาร a_nr^n ลงตัว

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ r และ s เท่ากับ 1 ดังนั้น ห.ร.ม. ของ s และ r^n เท่ากับ 1 ด้วยเพราะฉะนั้น s หาร a_n ลงตัว

ในทำนองเดียวกันจาก (1) จะได้ว่า

$$-a_0s^n = r[a_nr^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}s + \ldots + a_1s^{n-1}]$$

ดังนั้น r หาร a_0s^n ลงตัว

เนื่องจาก ห.ร.ม. ของ r และ s เท่ากับ 1 ดังนั้น ห.ร.ม. ของ r และ s^n เท่ากับ 1 ด้วยเพราะฉะนั้น r หาร a_0 ลงตัว

นั่นคือ $\frac{r}{s}$ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $sx - r$ เป็นตัวประกอบของ$P(x)$ #

พิจารณาทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $a_n = 1$ เนื่องจากจำนวนเต็ม s ที่หาร 1 ลงตัว คือ 1 และ -1 เท่านั้น ดังนั้นคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $P(x) = 0$ ในกรณีนี้จะต้องเป็นจำนวนเต็ม r ซึ่งหาร a_0 ลงตัว เราจึงมีบทแทรกข้างล่าง

บทแทรกที่ 5 กำหนด $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม คำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $P(x) = 0$ จะต้องเป็นจำนวนเต็ม r ที่หาร a_0 ลงตัว

ปัญหาที่ 11 จงแก้สมการ $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 12 จงหาคำตอบของสมการ $2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 13 จงหาค่าของ p เมื่อ

1) $(x + 2)$ เป็นตัวประกอบของ $(x + 1)^{11} + (2x + p)^3$

แนวคิด ....

....

....

2) $x^3 - 2x^2 - 3x - 11$ และ $x^3 - x^2 - 9$ หารด้วย $x + p$ เหลือเศษเท่ากัน

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 14 จงหาค่าของ p และ q เมื่อ $px^3 + qx^2 + 8x + 7$ หารด้วย $(x - 2)(x + 1)$ เหลือเศษ $15x + 9$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 15 จงหารากของสมการ $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 16 ให้ a และ b เป็นรากของสมการพหุนาม $P(x) = 0$ ดังนั้นจะมีพหุนาม $U(x)$ และ $V(x)$ ซึ่ง $P(x) = (x - a)U(x) = (x - b)V(x)$
จงแสดงว่า สำหรับ $c \neq a$, $c \neq b$ ใด ๆ ที่ทำให้ $P(c) = 0$, c จะเป็นคำตอบของสมการ $U(x) - V(x) = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 17 ในการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(x - c)$ จะหาเศษจากการหารได้โดยใช้สูตร $P(c)$ จงหาว่า ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $(x - a)(x - b)$ จะหาเศษจากการหารได้จากสูตรอะไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 18 พหุนาม $P(x)$ เมื่อถูกหารด้วย $x - 2$ เหลือเศษ 1 เมื่อถูกหารด้วย $x - 3$ จะเหลือเศษ 5 จงหาเศษเมื่อหารด้วย $(x - 2)(x - 3)$

แนวคิด ....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 6 กำหนด $P(x) = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี n ที่สัมประสิทธิ์ของ x^n คือ a ถ้า $P(x) = 0$ มีรากคือ r_1 ดังนั้น

$$P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$$

เมื่อ $Q_1(x) = ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}$ เป็นผลลัพธ์จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - r_1$ ถ้า $Q_1(x) = 0$ มีรากแล้วรากนั้นจะเป็นรากของ $P(x) = 0$ และทุกรากของ $P(x) = 0$ ที่ต่างจาก r_1 จะเป็นรากของ $Q_1(x) = 0$ ด้วย

พิสูจน์ ให้ $Q_1(x) = 0$ มีรากคือ r_2

ดังนั้น $Q_1(x) = (x - r_2)\,Q_2(x)$ เมื่อ $Q_2(x)$ เป็นผลลัพธ์จากการหาร $Q_1(x)$ ด้วย $x - r_2$

ทำให้ $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$ และ r_2 เป็นรากของ $P(x) = 0$

สรุปได้ว่ารากของ $Q_1(x) = 0$ เป็นรากของ $P(x) = 0$

ถ้าให้ c เป็นรากของ $P(x) = 0$ และ $c \neq r_1$

จะได้ว่า $0 = P(c) = (c - r_1)Q_1(c)$ โดยที่ $c - r_1 \neq 0$

ดังนั้น $Q_1(c) = 0$ ทำให้ c เป็นรากของ $Q_1(x) = 0$

สรุปได้ว่ารากของ $P(x) = 0$ ที่ต่างจาก r_1 เป็นรากของ $Q_1(x) = 0$ #

บทนิยาม 8 เรียก $Q_1(x) = 0$ ในทฤษฎีบทข้างต้นว่า **สมการดีเพรส** ของ $P(x) = 0$

ประโยชน์ของสมการดีเพรสนั้นจะเห็นได้ว่า เมื่อต้องการทราบรากอื่น ๆ ของ $P(x) = 0$ แทนที่จะพิจารณาโดยการทดลองแทนค่าจาก $P(x) = 0$ โดยตรง ก็จะหารากของสมการดีเพรส ซึ่งมีดีกรีต่ำกว่า $P(x)$ ซึ่งตัวเลขและความยุ่งยากในการคำนวณจะลดลง และรากที่ได้นั้นก็คือ รากของ $P(x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$ มีราก n รากที่แตกต่างกัน คือ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ แล้ว $P(x)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$$

พิสูจน์ เมื่อ $Q_1(x) = 0$ เป็นสมการดีเพรสของ $P(x) = 0$ ซึ่ง $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$ โดยทฤษฎีบทที่ 6

จะได้ $r_2, \ldots, r_n$ จะเป็นรากของ $Q_1(x) = 0$ และ $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$

$Q_2(x) = 0$ เป็นสมการดีเพรสของ $Q_1(x) = 0$ ซึ่งหาได้จากการหาร $Q_1(x)$ ด้วย $x - r_2$

ทำให้ $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\,Q_2(x)$

$r_3, r_4, \ldots, r_n$ เป็นรากของ $Q_2(x) = 0$ และ $Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x)$

เมื่อ $Q_3(x)$ คือผลลัพธ์จากการหาร $Q_2(x)$ ด้วย $x - r_3$

ทำให้ $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)Q_3(x)$

จะทำการหาสมการดีเพรสเรื่อยไป

ขั้นตอนจะจบลงเมื่อถึงการพิจารณา

r_n เป็นรากของ $Q_{n-1}(x) = 0$

และ $Q_{n-1}(x) = (x - r_n)Q_n(x)$ เมื่อ $Q_n(x) = a_n$

ทำให้ $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$ #

ทฤษฎีบทที่ 8 สมการพหุนามดีกรี n จะมีรากได้ไม่เกิน n รากที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ สมมุติว่า $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

มีราก n + 1 รากที่ต่างกัน คือ $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$

จากทฤษฎีบทที่ 7 ทำให้

$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$

แทน x ด้วย r จะได้

$P(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n) = 0 \quad \ldots *$

เพราะ $P(r) = 0$ เนื่องจาก r เป็นรากของ P(x)

จาก $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ แตกต่างกันและ $a_n \neq 0$

ดังนั้น $(r - r_1) \neq 0, (r - r_2) \neq 0, \ldots, (r - r_n) \neq 0$

ทำให้ $a_n(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n) \neq 0$ ขัดแย้งกับ ....*

สรุปได้ว่า สมการ $P(x) = 0$ มีรากได้ไม่เกิน n รากที่ต่างกัน #

บทนิยาม 9 เมื่อ P(x) เป็นพหุนามที่มี $(x - r)^m$ เป็นตัวประกอบร่วม

นั่นคือ $P(x) = (x - r)^m Q(x)$ โดยที่ r ไม่เป็นรากของ $Q(x) = 0$ แล้วจะเรียก r

ว่า**รากซ้ำอันดับ m** (root of multiplicity m) ของ $P(x) = 0$

สมการพหุนามบางสมการไม่มีรากเป็นจำนวนจริง เช่น สมการ $x^2 + 2x + 2 = 0$ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงพหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อนเพื่อให้ครอบคลุมรากของสมการพหุนาม ซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไป

2.2 พหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อช่วยในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของรากและหารากของสมการพหุนาม

พิจารณา เมื่อ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $r^2 \geq 0$ เสมอ ทำให้สมการ $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 10 กำหนดให้ $\pm i$ เป็นรากของสมการ $x^2 + 1 = 0$ ดังนั้น $i^2 = -1$

และสำหรับจำนวนจริง $p > 0$ รากของสมการ $x^2 = -p$ คือ $\pm\sqrt{p}\,i$

สร้างจำนวนจาก จำนวนจริง a , b และจำนวน i ให้อยู่ในรูป $z = a + bi$ เรียก z ว่า **จำนวนเชิงซ้อน** และถ้า $b \neq 0$ จะเรียก $a + bi$ ว่า **จำนวนจินตภาพ** (imaginary number)

บทนิยาม 11 กำหนด $z = a + bi$ จะเรียก $a - bi$ ว่า **สังยุค** (conjugate) ของ z ใช้สัญลักษณ์ $\bar{z}$

บทนิยาม 12 กำหนด $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ แล้ว $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

บทนิยาม 13 กำหนด a,b,c,d เป็นจำนวนจริง จะนิยามการบวก ลบ คูณจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

การบวก $(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$

การลบ $(a + bi) - (c + di) = (a-c) + (b-d)i$

การคูณ $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

เมื่อ $c + di \neq 0$ จะนิยามการหารดังนี้

การหาร
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

ทฤษฎีบทที่ 9 (ทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต)

กำหนด $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n , a_{n-1} , \ldots , a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีจำนวนเชิงซ้อน c ซึ่ง $P(c) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 10 (ทฤษฎีบทตัวประกอบ)

กำหนด $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n , a_{n-1} , \ldots , a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ c เป็นจำนวนเชิงซ้อน $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

จากทฤษฎีบทตัวประกอบจะได้ว่า

$P(x) = (x - c_1)\,G(x)$ โดยที่ $G(x)$ เป็นพหุนาม ดีกรี $n - 1$

เนื่องจาก $G(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนและมี ดีกรี $n - 1$

ถ้า $\mathbf{n - 1 \geq 1}$ สมการ $G(x) = 0$ จะมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน c_2 ดังนั้น จะมี $x - c_2$ เป็นตัวประกอบ เพราะฉะนั้น

$$P(x) = (x - c_1)(x - c_2)\,H(x)$$

โดยที่ $H(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน และมีดีกรี $n - 2$

ถ้า $\mathbf{n - 2 \geq 1}$ จะมี $x - c_3$ เป็นตัวประกอบ ฯลฯ ผลสุดท้ายเราจะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 11 กำหนด $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n , a_{n-1} , \dots , a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีจำนวนเชิงซ้อน $c_1 , c_2 , \dots , c_n$ โดยที่

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

นั่นคือ พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น และถ้าไม่ถือเรื่องลำดับ ก็จะมีได้วิธีเดียวเท่านั้น

หมายเหตุ จำนวนเชิงซ้อน $c_1 , c_2 , \dots , c_n$ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ และอาจจะซ้ำกันได้เราสามารถเขียน $P(x) = a(x-c_1)^{m_1}\,(x-c_2)^{m_2} \dots (x-c_k)^{m_k}$ โดยที่ $c_1 , c_2 , \dots , c_k$ แตกต่างกัน $m_1 , m_2 , \dots , m_k$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m_1 + m_2 + \dots + m_k =$ ดีกรีของ $P(x)$ เรากล่าวว่า c_i เป็น**รากซ้ำ** (multiplicity) m_i ครั้ง ถ้าคำตอบที่ซ้ำ m ครั้ง นับเป็นคำตอบ ของ $P(x) = 0$ m ครั้ง เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 12 กำหนด $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n , a_{n-1} , \dots , a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อน n คำตอบ

ทฤษฎีบทที่ 13 กำหนด $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n , a_{n-1} , \dots , a_0$ เป็นจำนวนจริง $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ แล้ว สังยุคของ z คือ $\bar{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ด้วย

พิสูจน์ $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

เนื่องจาก z เป็นคำตอบของ $P(x) = 0$ ดังนั้น

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = 0$$

จากคุณสมบัติเกี่ยวกับสังยุค ของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n}\ \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\ \bar{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n} \bar{z}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\ \bar{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$ (เพราะ a_i เป็นจำนวนจริง)

ดังนั้น $P(\bar{z}) = 0$

นั่นคือ สังยุคของ z เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ #

ข้อสังเกต เนื่องจากคำตอบที่เป็นจำนวนจินตภาพ ($a + bi$, $b \neq 0$) ของสมการ $P(x) = 0$ เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงมีเป็นคู่ ๆ (ทฤษฎีบท 13) ดังนั้น

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็น**จำนวนจริง**และมีดีกรีเป็นจำนวนคี่ จะได้ว่าสมการ $P(x) = 0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 คำตอบ

ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและดีกรี $n \geq 1$ โดยทฤษฎีบทที่ 11 จะสามารถเขียน $P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$

โดยที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (ซึ่งบางตัวอาจเป็นจำนวนจริง)

ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า $P(x) = a_n(x - c_1)$ โดยที่ c_1 เป็นจำนวนจริง

ถ้า $n = 2$ จะได้ว่า $P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)$ โดยที่ c_1 , c_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

กรณีที่ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)$ โดยที่ c_1 , c_2 เป็นจำนวนจริง

กรณีที่ c_1 หรือ c_2 เป็นจำนวนจินตภาพ จะได้ว่า $c_1 = \overline{c_2}$

ให้ $c_1 = a + bi$ โดยที่ $a, b \in R$ และ $b \neq 0$

จะได้ว่า $c_2 = a - bi$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}(x - c_1)(x - c_2) &= x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1c_2 \\ &= x^2 - 2ax + (a + bi)(a - bi) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $(x - c_1)(x - c_2)$ เขียนได้ในรูปพหุนามดีกรีสอง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

นอกจากนี้ เนื่องจาก $(-2a)^2 - 4(1)(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$ สรุปได้ว่ากรณีนี้ $P(x)$ เขียนได้ในรูปพหุนามดีกรี 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ถ้า $n \geq 3$ จาก $P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$ โดยที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งบางตัวอาจเป็นจำนวนจริง สำหรับพวกที่เป็นจำนวนจินตภาพ จะแยกได้เป็นคู่ ๆ คือ จำนวนจินตภาพกับสังยุคของจำนวนนั้น ซึ่งแต่ละคู่สามารถเขียนได้ในรูปพหุนามดีกรี 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง (ดังกรณี $n = 2$)

จากที่กล่าวมาเราสรุปได้เป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 14 พหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรี $n \geq 1$ เป็นพหุนาม สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของพหุนามดีกรี 1 หรือดีกรี 2 ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และพหุนามดีกรี 2 ดังกล่าวไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามดีกรี 1 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ 1. ในทฤษฎีบทที่ 14 การเขียนอาจอยู่ในรูป

(a) ผลคูณของพหุนามดีกรี 1 ทั้งหมด

หรือ (b) ผลคูณของพหุนามดีกรี 2 ทั้งหมด

หรือ (c) ผลคูณของพหุนามดีกรี 1 และดีกรี 2

2. พหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรี $n > 1$ ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของพหุนาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์จำนวนจริง และดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 เรียกว่า **พหุนามที่ลดทอนไม่ได้** (irreducible polynomial) บนระบบจำนวนจริง

3. พหุนามดีกรี 2 ในทฤษฎีบทที่ 14 เป็นพหุนามที่ลดทอนไม่ได้บนระบบจำนวนจริง โดยทั่วไปพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงเป็นพหุนามที่ลดทอนไม่ได้บนระบบจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

บทนิยาม 14 **จำนวนเชิงพีชคณิต** (algebraic number) คือจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากของพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ และ เรียกจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนเชิงพีชคณิตว่า **จำนวนอดิศัย** (transcendental number)

จากบทนิยาม 14 เราพบว่า จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนเชิงพีชคณิต และ สำหรับ n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ และ a เป็นจำนวนตรรกยะ เราทราบว่า $\sqrt[n]{a}$ คือรากหนึ่งของสมการ

$x^n - a = 0$ ดังนั้น $\sqrt[n]{a}$ ก็เป็นจำนวนเชิงพีชคณิตทั้งสิ้น

แม้ว่าเราจะทราบว่าจำนวนอดิศัย คือจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนเชิงพีชคณิต และมีมากมายแต่การพิจารณาว่าจำนวนเชิงซ้อนใดเป็นจำนวนอดิศัย โดยทั่ว ๆ ไปค่อนข้างยาก แต่จะแนะนำจำนวนอดิศัยบางจำนวนให้รู้จักได้แก่ e , π, $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$

ปัญหาที่ 19 ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $a + \sqrt{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $b > 0$ และ b ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ จงแสดงว่า $a - \sqrt{b}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ด้วย

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 20 กำหนด $2 + 2\sqrt{3}\,i$ และ $4i$ เป็นคำตอบของสมการพหุนามกำลังสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ จงหาค่าของ $a+b+c+d$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 21 กำหนด $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ จงเขียน $P(x)$ ในรูปผลคูณของตัวประกอบที่ลดทอนไม่ได้บนระบบจำนวนจริง

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 22 กำหนด $P(x) = x^5 + 1$ จงแสดงว่า -1 เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ที่ไม่ซ้ำ

แนวคิด ....

....

....

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม

พิจารณา $P(x) = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$ มีรากคือ r_1, r_2, r_3

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

$P(x) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$

โดยเอกลักษณ์ของพหุนาม ได้ว่า

$r_1 + r_2 + r_3 = -c_1$

$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = c_2$

$r_1r_2r_3 = -c_3$

จะเห็นได้ว่า รากของสมการ $p(x) = 0$ มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ของ $P(x) = 0$ คือ

ผลบวกของราก = - สัมประสิทธิ์ของ x^2

ผลบวกของผลคูณทีละคู่ของราก = สัมประสิทธิ์ของ x^1

ผลคูณของรากทั้งสาม = - สัมประสิทธิ์ของ x^0

ดังนั้น เมื่อ $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ มีรากคือ $r_1, \ldots, r_n$

จะได้ $(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

และ $(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-1} - \ldots + (-1)^n s_n$

เมื่อ *.......... $s_1 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$

= ผลบวกของราก

$s_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n$

= ผลบวกของผลคูณทีละคู่ของราก

$s_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n$

= ผลบวกของผลคูณของ 3 ราก

$\vdots$

$s_n = r_1r_2r_3 \ldots r_n$

= ผลคูณของรากทั้งหมด

และมีผลให้ $s_1 = -a_{n-1}$, $s_2 = a_{n-2}$, $s_3 = -a_{n-3}$, ... , $s_n = (-1)^n a_0$

ในกรณีที่ $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_0$ และ $a_n \neq 1$, $a_n \neq 0$

นำ a_n หาร $P(x)$ ได้ $x^n + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}, \ldots, \frac{a_0}{a_n} = 0$

มีรากเช่นเดียวกับ $P(x) = 0$

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างราก และ $\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, \frac{a_0}{a_n}$ เป็นดัง *

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ เมื่อกำหนดรากหนึ่งเป็นสองเท่าของอีกรากหนึ่ง

วิธีทำ ให้ a , b และ 2a เป็นรากของสมการ

ดังนั้น $3a + b = 7$ .... (1)

และ $3ab + 2a^2 = a(3b + 2a) = 0$ .... (2)

เนื่องจาก 0 ไม่เป็นรากของสมการ

ดังนั้น $a \neq 0$ จากสมการ (2) จะได้ว่า

$3b + 2a = 0$ .... (3)

จาก (1) และ (3) ได้ $a = 3$ และ $b = -2$

มีผลให้รากของ $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ คือ 3 , -2 และ 6

ทฤษฎีบทที่ 15 กำหนด $P(x) = a_nx^n + ... + a_0$, $a_0 , a_1 , ... , a_n$ เป็นจำนวนเต็ม $a_n \neq 0$ และ d เป็นตัวประกอบร่วมของ a_0 จะได้ว่า ถ้ามีจำนวนเต็ม m ซึ่ง d - m หาร P(m) ไม่ลงตัวแล้ว d จะไม่เป็นรากของ $P(x) = 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ d - m หาร P(m) ไม่ลงตัว

ถ้า d เป็นรากของ p(x)

จะได้ $p(x) = (x - d)Q(x)$

เมื่อ Q(x) เป็นผลลัพธ์จากการหาร P(x) ด้วย x - d

พบว่า Q(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $P(m) = (m - d)Q(m)$

นั่นคือ d - m หาร P(m) ลงตัว ขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้

ทำให้สรุปได้ว่า d ไม่เป็นรากของ $P(x) = 0$ #

ปัญหาที่ 25 กำหนด $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$

$a_0 , a_1 , ... , a_n$ เป็นจำนวนเต็ม $a_n \neq 0$

ถ้า b เป็นรากที่เป็นจำนวนเต็มของ $P(x) = 0$

จงแสดงว่า b หาร $a_i + \frac{a_{i-1}}{b} + \frac{a_{i-2}}{b^2} + ... + \frac{a_0}{b^i}$ ลงตัว

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 26 จงแสดงว่า 3 ไม่เป็นรากของ $P(x) = ax^n + \ldots + rx^3 + 2x^2 + 4x + 15 = 0$ ซึ่ง $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 27 เมื่อ $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_0 , a_1 , \ldots , a_n$ เป็นจำนวนเต็ม $a_n \neq 0$ และ $0 \neq \frac{s}{d}$ เป็นรากตรรกยะของ $P(x) = 0$ และ ห.ร.ม. ของ s , d คือ 1 แล้ว d จะต้องหาร a_n , $\frac{a_ns}{d} + a_{n-1}$, $\frac{a_ns^2}{d^2} + \frac{a_{n-1}s}{d} + a_{n-2}$, ... ลงตัว

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 28 จงตรวจสอบว่า $\frac{1}{3}$ เป็นรากของ $P(x) = 96x^7 - 16x^6 - rx^5 + sx^4 + x^3 + 1 = 0$ หรือไม่

แนวคิด ....

....

....

บทนิยาม 15 เรียก A ว่า**ขอบเขตบนของราก** ที่เป็นจำนวนจริงของ $P(x) = 0$ เมื่อ $P(x) > 0$ ทุกค่า $x \geq A$ หรือ $A \geq r$ ทุกค่า r ที่เป็นรากของ $P(x) = 0$

ปัญหาที่ 29 จงแสดงว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามดีกรี n เป็นบวกทั้งหมด หรือ เป็นลบทั้งหมด แล้วสมการจะไม่มีรากเป็นจำนวนจริงบวก

แนวคิด ....

....

....

กฎของเครื่องหมายของเดส์การ์ตส์ (Descartes' Rule of signs)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เกี่ยวกับคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ข้อความในทฤษฎีบทเราเรียง**พจน์ของพหุนามจากกำลังมากไปหาน้อย พจน์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 0 จะไม่เขียนและค่าคงตัวไม่เป็นศูนย์** เรากล่าวว่ามีการแปรผันของเครื่องหมาย (variation of sign) ใน $P(x)$ เมื่อสัมประสิทธิ์ที่เรียงติดกันมีเครื่องหมายต่างกัน เช่น $P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$ มีการแปรผันเครื่องหมาย 3 ครั้ง ครั้งที่หนึ่งจาก $2x^5$ ไป $-7x^4$ ครั้งที่สองจาก $-7x^4$ ไป $3x^2$ และครั้งที่สามจาก $6x$ ไป -5

$$P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$$

$$+ \quad - \quad + \qquad + \quad -$$

$$1 \quad 2 \qquad\quad 3$$

ทฤษฎีบทที่ 16 **(กฎของเครื่องหมายของเดส์การ์ตส์)** (Descartes' Rule of Signs)

กำหนด P(x) เป็นพหุนาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็น**จำนวนจริง**และ**ค่าคงตัวไม่เท่ากับศูนย์**

(1) จำนวนคำตอบที่เป็น**จำนวนจริงบวก**ของสมการ P(x) = 0 จะเท่ากับจำนวนการแปรผันของเครื่องหมายใน P(x) หรือน้อยกว่าจำนวนนั้น โดยจำนวนคู่

(2) จำนวนคำตอบที่เป็น**จำนวนจริงลบ**ของสมการ P(x) = 0 จะเท่ากับจำนวนการแปรผันของเครื่องหมายใน P(-x) หรือน้อยกว่าจำนวนนั้น โดยจำนวนคู่

ตัวอย่างที่ 5 $P(x) = 18x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 8x - 5$

$$+ \quad - \quad + \qquad + \quad -$$

ดังนั้นคำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ P(x) = 0 จะมี 3 คำตอบหรือ 1 คำตอบ

$$P(-x) = 18x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 8x - 5$$

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad -$$

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงลบของสมการ P(x) = 0 จะมี 1 คำตอบ

ตัวอย่างที่ 6 $P(x) = 3x^5 + 4x^3 + 2x - 5$

$$+ \quad + \quad + \quad -$$

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ P(x) = 0 มี 1 คำตอบ

$$P(-x) = -3x^5 - 4x^3 - 2x - 5$$

ดังนั้นสมการ P(x) = 0 ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงลบ

เพราะฉะนั้นสมการ P(x) = 0 มีคำตอบหนึ่งเป็นจำนวนจริงบวก และอีก 4 คำตอบเป็นจำนวนจินตภาพ

ตัวอย่างที่ 7 $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x$

$= x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5)$

ดังนั้น 0 เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ พิจารณา

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

$+ \quad - \quad + \quad -$

จะได้ว่า คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $Q(x) = 0$ มี 3 คำตอบหรือ 1 คำตอบ ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $P(x) = 0$ มี 3 คำตอบ หรือ 1 คำตอบด้วย

$Q(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x - 5$

ดังนั้น $Q(x) = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงลบ เพราะฉะนั้น $P(x) = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงลบด้วย

ปัญหาที่ 30 กำหนด $P(x) = 4x^3 + 2x^2 + 1$ จงระบุว่าคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ มีที่เป็นจำนวนจริงบวก จำนวนจริงลบ และจำนวนจินตภาพอย่างละกี่ตัว

แนวคิด ....

....

....

2.4 การหารากของสมการกำลังสอง กำลังสาม กำลังสี่

สมการกำลังสอง กำลังสาม และกำลังสี่ สมการทั้ง 3 ประเภทนี้มีสูตรทั่วไปในการหาราก ซึ่งสมการพหุนามดีกรีสูงกว่านี้จะไม่สามารถหาสูตรทั่วไปได้ โดยมีทฤษฎีกาลัวส์ (Galois theory) ซึ่งพิสูจน์โดยชาวฝรั่งเศสชื่อ กาลัวส์ ในปี ค.ศ. 1830 แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวเฉพาะวิธีการหาสูตรของรากของสมการทั้ง 3 ประเภทดังนี้

สมการกำลังสอง (quadratic equations)

สมการกำลังสอง มีสมการในรูปทั่วไปเป็น

$$ax^2 + bx + c = 0$$

เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนคงค่า และ $a \neq 0$

ทฤษฎีบทที่ 17 สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ จะมีรากคือ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

เรียก $b^2 - 4ac$ ว่า **ดีสคริมิแนนต์ (discriminant)** ของ $ax^2 + bx + c = 0$

พิสูจน์ รากของ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

และรากของ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$ เป็นรากเดียวกัน

พิจารณา $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = (x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} = 0$

ดังนั้น $(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$$= \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

จะได้ $x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ทำให้ $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ #

ข้อสังเกต

1. สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ มี 2 รากคือ

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. ผลบวกของราก $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

ผลคูณของราก $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

ซึ่งสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ สามารถเขียนได้เป็น

x^2 - (ผลบวกของราก) x + (ผลคูณของราก) = 0

3. รากของสมการกำลังสองพิจารณาได้จากค่าของ $b^2 - 4ac$ ซึ่งเรียกว่า ดีสคริมิแนนต์ (discriminant) ของพหุนามกำลังสอง ใช้สัญลักษณ์ Δ แทน

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ รากจะเป็นจำนวนจริงซึ่งมีค่าต่างกัน

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ รากจะเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากัน

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ รากจะไม่ใช่จำนวนจริงและมีค่าต่างกัน

เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$ รากทั้งสองจะเท่ากับ $-\frac{b}{2a}$

สำหรับพหุนามกำลังสองใด ๆ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ถ้า $x = -\frac{b}{2a}$ แล้ว

$$f(x) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c$$

$$= \frac{4ac-b^2}{4a}$$

จุด $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ จะเป็นจุดยอดของกราฟ $y = f(x)$

4. ขอบเขตของค่าของฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง

ฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ และ ดีสคริมิแนนต์ คือ $b^2 - 4ac$

หรือ $y = ax^2 + bx + c$

พิจารณา $ax^2 + bx + c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$

ดังนั้น $y = a((x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$

ถ้า **$a > 0$** $y \geq a(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) = c - \frac{b^2}{4a}$

และ $y = c - \frac{b^2}{4a}$ เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$

นั่นคือ $y \geq c - \frac{b^2}{4a}$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

ถ้า **$a < 0$** $y \leq a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$

และ $y = c - \frac{b^2}{4a}$ เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$

นั่นคือ $y \leq c - \frac{b^2}{4a}$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

ดังนั้น 1. $f(x)$ จะมีค่าสูงสุดถ้า $a < 0$ และ $f(x)$ จะมีค่าต่ำสุดถ้า $a > 0$

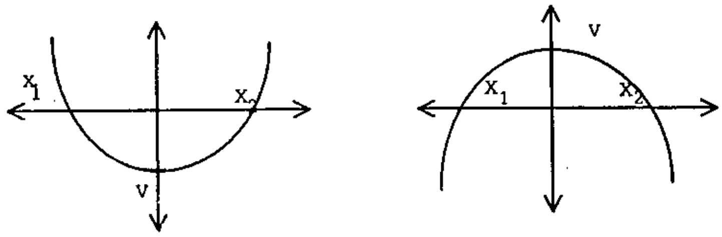
2. ให้ x_1 และ x_2 เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ จะได้ว่า

$f(x)$ จะมีค่าตรงข้ามกับ a ถ้า $x_1 < x < x_2$

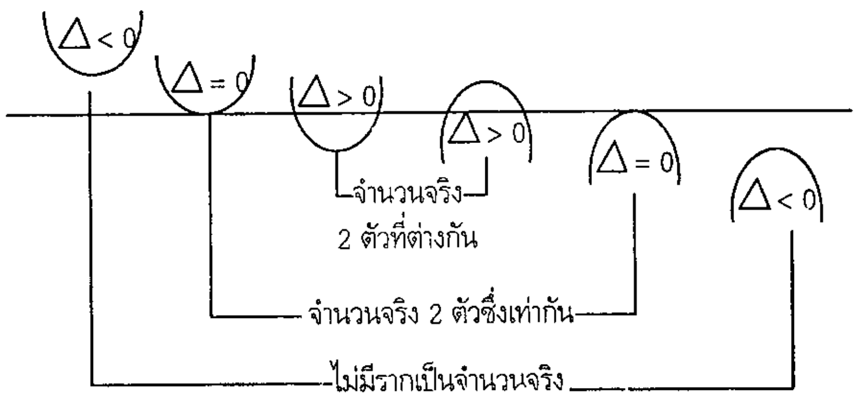
$f(x) = 0$ ถ้า $x = x_1$ หรือ $x = x_2$

$f(x)$ จะมีค่าเหมือน a (เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบเหมือนกัน) เมื่อ $x < x_1$ หรือ $x > x_2$

กราฟของ $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะมีลักษณะดังนี้



และกราฟที่อาจเกิดขึ้นได้ ดังภาพด้านล่าง



5. ประโยชน์อื่น ๆ จากฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

ค่าของ $f(x)$ จะเป็นค่าใดค่าหนึ่งคือ

(i) ค่าต่ำสุดเป็น $\frac{4ac-b^2}{4a}$ เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ และ $a > 0$

และ (ii) ค่าสูงสุดเป็น $\frac{4ac-b^2}{4a}$ เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$ และ $a < 0$

ปัญหาที่ 31 ถ้าคำตอบของสมการ $x^2 + px + q = 0$ เป็นกำลังสามของคำตอบของสมการ $x^2 + mx + n = 0$ จงหาค่าของ p และ q ในรูปของ m และ n

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 32 ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ จงแสดงว่าสมการ $x^2 + 2ax + 2b = 0$ มีรากไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 33 ถ้ารากทั้งสองของสมการ $x^2 + bx + c = 0$ บวกกันได้ 4.5 คูณกันได้ 2 จงหาค่าของ b และ c พร้อมกันนั้นให้หารากทั้งสองด้วย

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 34 ให้ $\frac{1}{2}$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $2x^2 + 7x + c = 0$ จงหาค่าของ c และรากที่เหลือ

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 35 ให้ $2 - i$ และ $2 + i$ เป็นรากของสมการ $x^2+bx+c = 0$ แล้ว b กับ c มีค่าเท่ากับเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 36 จงหาค่าที่ต่ำที่สุดของ $2x^2 - 3x + 4$ และ x มีค่าเท่าไรในขณะนั้น

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 37 1) สมการกำลังสอง $kx^2 + 2(k + a)x + (k + b) = 0$
มีรากสองรากที่เท่ากันจงหาค่า k ในรูปของ a และ b

แนวคิด ....

....

....

2) สมการกำลังสอง $(p + 1)x^2 + 2px + (p + 2) = 0$
มีรากเป็นจำนวนจริงจงหาขอบเขตของค่า p

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 38 จงแสดงว่ารากของสมการ $x^2 + (2a - 1)x + a^2 = 0$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $a \leq \frac{1}{4}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 39 ให้ $3x + 2y = 5$ จงเขียนสมการ $3x^2 + 2y^2 = k$ ให้เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับ x และ k พร้อมทั้งแสดงว่า x จะไม่เป็นจำนวนจริง ถ้า $k < 5$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 40 ให้ 1 และ $\frac{-1}{2}$ เป็นรากของสมการ $x^2 + px + q = 0$ แล้ว $p+q+4$ มีค่าเป็นเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 41 กำหนดให้ α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + 41 = 0$ โดย a, b, α, β เป็นจำนวนเต็ม $\alpha \neq \beta$ และ $a > 0$, $b < 0$ จงหาค่าของ $a + b$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 42 ถ้า α กับ β เป็นรากของสมการ $x^2 - 2x - 1 = 0$ และ α^2 กับ β^2 เป็นรากของสมการ $y^2 + py + q = 0$ จงหาค่าของ $p + q$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 43 ให้ α และ β เป็นรากของสมการ $3x^2 - 5x - 1 = 0$ จงหาค่าของ $\frac{2\alpha^2}{3\beta-5} + \frac{2\beta^2}{3\alpha-5}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 44 ถ้า $\frac{x^2-11x}{x^2-1} + 2 + \frac{5}{x-1} = 0$ จงหาค่าของ x

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 45 จงหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้รากหนึ่งของสมการกำลังสอง $ax^2+bx+c = 0$ เป็นกำลังสองของอีกรากหนึ่ง

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 46 ให้ $p(t)$ เป็น monic quadratic polynomial จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $p(n)\,p(n+1) = p(k)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 47 จงพิสูจน์ว่า ถ้ารากของสมการ $x^2 + px + q = 0$ เป็นจำนวนจริงแล้วรากของสมการ $x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$ จะเป็นจำนวนจริงด้วย เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 48 จงแสดงว่า ถ้า $x^2 + px + q = 0$ และ $px^2 + qx + 1 = 0$ มีรากร่วมกันแล้ว $p + q + 1 = 0$ หรือ $p^2 + q^2 + 1 = pq + p + q$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 49 จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่ทำให้สมการ

$$a_{n+1}x^2 - 2x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n+1}^2} + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0$$

มีรากเป็นจำนวนจริงเมื่อ $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ เป็นจำนวนจริง

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 50 ถ้าเส้นตรง $y = mx + c$ เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ จงแสดงว่า $a^2m^2 = b^2 + c^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 51 ให้ m และ n เป็นรากของสมการ $t^2 + bt + c = 0$ จงแสดงว่า b และ c เป็นรากของสมการ $t^2 + (m + n - mn)t - mn(m + n) = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 52 ให้ a_i, b_i เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ $(1 \le i \le n)$ ฟังก์ชัน $\sum_{i=1}^{n}(a_it + b_i)^2$ เป็นพหุนามที่มี t เป็นตัวแปรจะอธิบายอย่างไรว่า ดีสคริมิแนนต์ ไม่เป็นบวก

แนวคิด ....

....

....

สมการกำลังสาม (Cubic Equation)

สมการกำลังสาม มีสมการในรูปทั่วไปเป็น

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

เมื่อ a , b , c และ d เป็นจำนวนคงค่า $a \neq 0$

บทนิยาม 16 กำหนดสมการกำลังสาม $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ให้ $x = y - \frac{b}{3}$ แทนค่า x ลงในสมการกำลังสาม จะได้

$y^3 + py + q = 0$ โดยที่

$p = c - \frac{b^2}{3}$ และ $q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$

จะเรียก $y^3 + py + q = 0$ ว่า**สมการกำลังสามลดรูป** (reduced cubic equation)

ทฤษฎีบทที่ 18 ถ้า y_1 , y_2 , y_3 เป็นรากของสมการลดรูป $y^3 + py + q = 0$ จะได้ว่า

$x_1 = y_1 - \frac{b}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{b}{3}$ และ $x_3 = y_3 - \frac{b}{3}$

เป็นรากของสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

พิสูจน์ จากบทนิยาม 16 จะเห็นได้โดยง่ายว่า $x_1 = y_1 - \frac{b}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{b}{3}$, $x_3 = y_3 - \frac{b}{3}$

เป็นรากของสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ โดยการแทนค่า

ดังนั้น ถ้าต้องการหารากของสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

สามารถหาได้จากรากของสมการกำลังสามลดรูป $y^3 + py + q = 0$ #

วิธีหารากของสมการกำลังสามลดรูป $y^3 + py + q = 0$

พิจารณา $(y - (A + B))(y - (\varpi A + \varpi^2 B))(y - (\varpi^2 A + \varpi B)) = y^3 - 3ABy - A^3 - B^3$

เมื่อ $\varpi^3 = 1$, $\varpi \neq 1$ ดังนั้น $\varpi^3 - 1 = 0$

$$(\varpi - 1)(\varpi^2 + \varpi + 1) = 0$$

$$\varpi^2 + \varpi + 1 = 0$$

$$\varpi^2 + \varpi = -1$$

ϖ คือรากที่ 3 ของ 1 ที่ไม่ใช่ 1 , $\varpi = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

ให้ $p = -3AB$, $q = -(A^3 + B^3)$

จะได้ y คือ $A + B$, $\varpi A + \varpi^2 B$ และ $\varpi^2 A + \varpi B$ เป็นรากของสมการ

$$y^3 + py + q = 0$$

พิจารณา

$$(t - A^3)(t - B^3) = t^2 - (A^3 + B^3)t + A^3B^3$$
$$= t^2 + qt - (\tfrac{P}{3})^3 \qquad (q = -(A^3 + B^3),\ P = -3AB)$$

ดังนั้น $t = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{R}$

เมื่อ $R = (\frac{P}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$

แต่ $t = A^3, B^3$

ดังนั้น $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$

ค่า y เหล่านี้มีชื่อว่า **สูตรของคาร์ดาน** (Cardan's Formula) คาร์ดานได้ตีพิมพ์สูตรความสัมพันธ์นี้ลงในอาร์สแมกนา (Ars Magna)

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $y^3 + 9y - 6 = 0$

วิธีทำ $p = 9$, $q = -6$

จะได้ $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{(\frac{9}{3})^3 + (\frac{-6}{2})^2}} = \sqrt[3]{3+6} = \sqrt[3]{9}$

และ $B = \sqrt[3]{3 - \sqrt{(\frac{9}{3})^3 + (\frac{-6}{2})^2}} = \sqrt[3]{3-6} = \sqrt[3]{-3}$

รากของสมการคือ

$y_1 = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{-3}$

$y_2 = \varpi \sqrt[3]{9} + \varpi^2 \sqrt[3]{-3}$

$y_3 = \varpi^2 \sqrt[3]{9} + \varpi^3 \sqrt{-3}$

ปัญหาที่ 53 จงเขียนสมการกำลังสาม $x^3 + 6x^2 + x + 5 = 0$ ให้เป็นสมการกำลังสามลดรูป

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 54 จงแก้สมการ $x^3 + 6x^2 + x + 5 = 0$

แนวคิด ....

....

....

บทนิยาม 17 เรียกผลคูณของกำลังสองของผลต่างของรากของ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ว่า **ดีสคริมิแนนต์** (Discriminant) และใช้สัญลักษณ์ Δ แทน

ตัวอย่างที่ 9 ให้ y_1, y_2, y_3 เป็นรากของ $y^3 + py + q = 0$ จะได้ว่า

$\Delta = (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_2)^2$

จากสูตรของคาร์ดาน จะได้ว่า

$y_1 - y_2 = (1 - \varpi)(A - \varpi^2 B)$

$y_1 - y_3 = (1 - \varpi^2)(A - \varpi B)$

$y_2 - y_3 = (\varpi - \varpi^2)(A - B)$

เนื่องจาก $\varpi^3 = 1$, $\varpi^2 + \varpi + 1 = 0$

ดังนั้น $(1 - \varpi)(1 - \varpi^2) = 1 - \varpi^2 - \varpi + \varpi^3 = 3$

และ $\varpi - \varpi^2 = \sqrt{3}\, i$

จาก 1 , ϖ , ϖ^2 เป็นรากที่ 3 ของ 1

ทำให้ $(x - 1)(x - \varpi)(x - \varpi^2)$ สมมูล (equivalent) กับ $x^3 - 1$ แทนค่า $x = \frac{A}{B}$

จะได้ $(A - B)(A - \varpi B)(A - \varpi^2 B) = A^3 - B^3 = 2\sqrt{R}$

ดังนั้น $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = 6\sqrt{3}\,\sqrt{R}\, i$

และ $\Delta = (36)(3)\ R(i)^2 = -108R$

$\Delta = -108\,((\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2) = -4p^3 - 27q^2$

นั่นคือ ดีสคริมิแนนต์ของ $y^3 + py + q = 0$ คือ $-4p^3 - 27q^2$

ปัญหาที่ 55 จงหาดีสคริมิแนนต์ของ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

วิธีทำ โดยนิยาม 15 จะได้ว่า $y^3 + py + q = 0$ เป็นสมการกำลังสามลดรูปของสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เมื่อ $p = c - \frac{b^2}{3}$ และ $q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$

....

....

....

$\Delta = 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2$

ข้อสังเกต สมการ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ สมมูลกับสมการ

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

จะได้ $a^4\Delta = 18abcd - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2 + b^2c^2$

เมื่อ Δ เป็นดิสครีมิแนนต์ของ $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ ด้วยการแทนค่า

b, c, d ในตัวอย่างที่แล้ว ด้วย $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$

เรียก $\Delta_a = a^4\Delta$ ว่าดีสคริมิแนนต์ของ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ปัญหาที่ 56 กำหนดสมการกำลังสาม $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาค่าดีสคริมิแนนต์แล้วตอบคำถามดังนี้

1. ถ้า $\Delta_a > 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร
2. ถ้า $\Delta_a = 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร
3. ถ้า $\Delta_a < 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร

แนวคิด ให้ x_1, x_2, x_3 เป็นรากของสมการ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ และ

Δ เป็นผลคูณของกำลังสองของผลต่างของราก

และ $a^4\Delta = \Delta_a$ ซึ่ง $a^4 \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง a

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 57 จงหาค่าของดีสคริมิแนนต์ และจำนวนของรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$y^3 - 2y - 6 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 58 จงแสดงว่าสมการ $x^3 + ax + 2 = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริงทั้งสามราก ก็ต่อเมื่อ

$a \leq -3$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 59 จงแสดงว่าจุดตัดระหว่าง $y = x^2$ กับ $xy + 8x + 4y + 3 = 0$ เป็นจำนวนจริง

แนวคิด ....

....

....

สมการกำลังสี่ (biquadratic equations)

สมการกำลังสี่ มีสมการในรูปทั่วไปเป็น

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

เมื่อ a , b , c , d , e เป็นจำนวนคงค่า $a \neq 0$

วิธีการหารากของสมการกำลังสี่วิธีหนึ่ง

กำหนดสมการ

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad \text{.......................} \qquad (1)$$

จะหารากของสมการโดยการเปลี่ยนรูปสมการเป็น

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$$

บวกทั้งสองข้างด้วย $\frac{1}{4}b^2x^2$ จะได้

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e \qquad \text{..................} \qquad (2)$$

พิจารณาสมการ (2) ได้ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $(\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e$ อยู่ในรูป $(mx + n)^2$ จะได้

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx)^2 = (mx + n)^2$$

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx)^2 - (mx + n)^2 = 0$$

$$(x^2 + (\frac{1}{2}b + m)x + n)(x^2 + (\frac{1}{2}b - m)x - n) = 0$$

สามารถหารากโดยใช้สูตรของสมการกำลังสอง จะได้ราก 4 ค่า

กรณีที่ 2 ถ้า $(\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e$ ไม่อยู่ในรูป $(mx + n)^2$

นำ $(x^2 + \frac{1}{2}bx)y + \frac{1}{4}y^2$ บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c + y)x^2 + (\frac{1}{2}by - d)x + \frac{1}{4}y^2 - e \text{ ....}(3)$$

ถ้า $(\frac{1}{2}by - d)^2 - 4(\frac{1}{4}b^2 - c + y)(\frac{1}{4}y^2 - e) = 0$ ....(4)

จะได้ทางขวามือของ (3) อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ $(mx + n)^2$

สมการ (4) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0 \qquad \text{.............} \ (5)$$

สมการ (5) มีชื่อเรียกว่า **สมการคิวบิครีโซลเวนท์** (resolvent cubic equation) เมื่อหาค่า y ซึ่งเป็นรากของสมการคิวบิครีโซลเวนท์ได้นำไปแทนค่า (3) จะได้

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y)^2 = (mx + n)^2 \qquad \text{............ (6)}$$

สามารถหารากโดยใช้สูตรของสมการกำลังสองจะได้ราก 4 ค่า

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

วิธีทำ จะได้ $b = 0$, $c = -3$, $d = 6$, และ $e = -2$

และ $(\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx + e$ ไม่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

ดังนั้น ต้องหาสมการคิวบิครีโซลเวนท์ ซึ่งได้สมการเป็น

$$y^3 + 3y^2 + 8y - 12 = 0$$

และ 1 เป็นรากของสมการ $y^3 + 3y^2 + 8y - 12 = 0$

ดังนั้น สมการ (3) ข้างต้น คือ

$$(x^2 + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$$

$$(x^2 + \frac{1}{2})^2 = (2x - \frac{3}{2})^2$$

$$(x^2 + \frac{1}{2})^2 - (2x - \frac{3}{2})^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

จะได้ $x = 1 + i$, $1 - i$, $-1 + \sqrt{2}$ และ $-1 - \sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

ปัญหาที่ 60 สมการกำลังสี่ ต่อไปนี้มีรากจริงและรากจินตภาพกี่ราก

1) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$

แนวคิด ....

....

....

2) $x^4 - 7x^2 + 2x + 2 = 0$

แนวคิด ....

....

....

พิจารณาสมการ (5)

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0 \qquad \text{..............(5)}$$

ให้ y_1 , y_2 , y_3 เป็นรากของสมการ (5)

ให้ x_1 , x_2 เป็นรากของสมการ

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1 = mx + n$$

และ x_3 , x_4 เป็นรากของสมการ

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1 = -mx - n$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการ

จะได้ $x_1x_2 = \frac{1}{2}y_1 - n$

$$x_3x_4 = \frac{1}{2}y_1 + n$$

ทำให้ $x_1x_2 + x_3x_4 = y_1$

ทำนองเดียวกัน y_2 , y_3 เป็นรากที่เหลือของสมการ (5)

x_1 , x_2 , x_3 , x_4 จะมีความสัมพันธ์กับ y_2 , y_3 ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยความรู้เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรากกับสัมประสิทธิ์ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 19 เมื่อ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 เป็นรากของ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ และ y_1 , y_2 , y_3 เป็นรากของสมการคิวบิครีโซลเวนท์ จะได้ว่า

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$$

และ $$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

บทนิยาม 18 ดีสคริมิแนนต์ของ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ คือผลคูณของกำลังสองของผลต่างของราก ใช้สัญลักษณ์ Δ แทน

ดังนั้น $\Delta = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$

เมื่อ x_1 ,x_2 ,x_3 ,x_4 คือรากของสมการ

ทฤษฎีบทที่ 20 ดีสคริมิแนนต์ของ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ จะเท่ากับดีสคริมิแนนต์ของสมการคิวบิครีโซลเวนท์

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 19

จะได้ $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$

$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$

$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$

ทำให้ $y_1 - y_2 = x_1x_2 - x_1x_3 + x_3x_4 - x_2x_4$

$= (x_2 - x_3)x_1 - (x_2 - x_3)x_4$

$= (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$

$y_1 - y_3 =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$y_2 - y_3 =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$(y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 =$ ....

ดีสคริมิแนนต์ของสมการคิวบิครีโซลเวนท์ = ... #

จากตัวอย่างที่ 9 และบทนิยาม 16

ดีสคริมิแนนต์ของสมการคิวบิครีโซลเวนท์ $= -4p^3-27q^2$

เมื่อ $p = bd - 4e - \frac{1}{3}c^2$, $q = -b^2e + \frac{1}{3}bcd + \frac{8}{3}ce - d^2 - \frac{2}{27}c^2$

ปัญหาที่ 61 จงหาค่าดีสคริมิแนนต์ของ $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + 1 = 0$ และแสดงว่าสมการมีรากซ้ำอันดับ 2

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 62 กำหนดสมการ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาค่าดีสคริมิแนนต์แล้วตอบคำถามดังนี้

1) ถ้า $\Delta > 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร

แนวคิด ....

....

....

2) ถ้า $\Delta = 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร

แนวคิด ....

....

....

3) ถ้า $\Delta < 0$ รากของสมการจะเป็นอย่างไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 63 จงแสดงว่า $x^4 - 3x^2 - 10x - 6 = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง 2 รากโดยอาศัยผลจากปัญหาที่ 62

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 64 จงหาจุดตัดที่เป็นจำนวนจริงของสมการพาราโบลา $y = x^2$ และ $ax^2 + y^2 - xy - x - (a + 5)y - 6 = 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 65 จงแก้สมการ $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 360$

แนวคิด ....

....

....

หน่วยที่ 3
ความสัมพันธ์เวียนเกิด
(Recurrence relation)

ในหน่วยนี้จะกล่าวถึง ลำดับ และ อนุกรม ความสัมพันธ์เวียนเกิด ในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อการสร้างความเข้าใจในบทนิยามของลำดับ จะกล่าวถึงเรื่องของความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชันโดยสังเขป ดังนี้

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ตัวอย่างของความสัมพันธ์

$r = \{ (1,a) , (2,b) , (2,c) \}$

$s = \{ (1,2) , (2,3) , (3,4) , (12,2) \}$

$t = \{ (1,3) , (2,8) , (3,9) \}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย D_r

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย R_r

จากตัวอย่างที่ 1 จะได้

$D_r = \{ 1,2 \}$ $R_r = \{ a,b,c \}$

$D_s = \{1,2,3,12 \}$ $R_s = \{ 2,3,4 \}$

$D_t = \{ 1,2,3 \}$ $R_t = \{ 3,8,9 \}$

ฟังก์ชัน

เรียกความสัมพันธ์ f ว่าฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ $f \neq \varnothing$ แต่ละสมาชิกในโดเมนจับคู่หรือ มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ได้เพียงสมาชิกเดียว

จากตัวอย่างที่ 1 ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน ได้แก่ s และ t

r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ 2 เป็นสมาชิกในโดเมนที่จับคู่กับ b และ c ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

ในกรณีที่ ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน เรียกโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นั้นว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ตามลำดับ

ยังมีรายละเอียดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันอีกมากที่ไม่ได้กล่าวถึง นักเรียนสามารถหาอ่านได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไปที่กล่าวถึงเรื่อง ความสัมพันธ์ และ ฟังก์ชัน เช่นในหนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3.1 ลำดับและอนุกรม (Sequences and Series)

บทนิยาม 1 ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือ โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

เรียก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก ว่า **ลำดับจำกัด** (finite sequence)

และ เรียก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ว่า **ลำดับอนันต์** (infinite sequence)

การเขียนลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไป เช่น

{ (1,3) , (2,6) ,(3,9) } เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก 3 ตัวแรก

ดังนั้น ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นลำดับที่เขียนได้เป็น 3 , 6 , 9

กล่าวคือ ถ้า a_n เป็นลำดับจำกัด จะเขียนแทนด้วย $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$

ถ้า a_n เป็นลำดับอนันต์ จะเขียนแทนด้วย $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

$\vdots$

a_n ว่า พจน์ที่ n หรือ พจน์ทั่วไป (general term) ของลำดับ

ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะลำดับจำกัด และ ลำดับที่กล่าวถึงจะเป็นลำดับของจำนวนจริงเท่านั้น

บทนิยาม 2 ให้ $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ เป็นลำดับจำกัด เรียก ผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด** (finite series)

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

$\vdots$

a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

โดยทั่วไปจะเขียนสัญลักษณ์ $\sum_{i=1}^{n} a_i$ แทน $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

หรืออาจใช้สัญลักษณ์ S_n แทนผลบวก n พจน์ของอนุกรม นั่นคือ

$$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

Σ เป็นอักษรกรีก อ่านว่า **ซิกมา** (sigma)

โดย $\sum_{i=1}^{n} a_i$ เป็นสัญลักษณ์ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ S_n ที่ใช้แทน "ผลรวม" ซึ่งสัญลักษณ์ดังกล่าวมีความหมาย คือ ผลบวกของ a_i เมื่อ i มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n

ปัญหาที่ 1 ถ้า $S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n$

1) พจน์ที่ 10 ของอนุกรมคืออะไร

2) S_5 มีค่าเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 2 จงเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจาย

1) $\sum_{i=1}^{4} x_i^2$ 2) $\sum_{i=1}^{5} (-1)^i\ i$ 3) $\sum_{i=1}^{7} (i)^2$ 4) $\sum_{i=1}^{4} (i+2)(i+3)$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 3 พิจารณาอนุกรม $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ซึ่งสร้างเป็นตารางได้ดังนี้

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	1	3	6	10	.	.	.

จงหาค่าของ S_n ในรูปของ n

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 4 พิจารณา $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{n-1}$ แล้วเติมค่าของ S_n ลงในตาราง ข้างล่างให้สมบูรณ์

1	+	2	+	4	+	8	+	16	+	32	+	64	+	...
$\boxed{1}$		$\boxed{3}$		$\boxed{7}$		$\boxed{15}$		$\boxed{}$		$\boxed{}$		$\boxed{}$		

แล้วหาค่าของ S_n ในรูปของ n

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 5 จงหาสูตรทั่วไปของ S_n เมื่อ $S_n = 1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^{n-1}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 6 จงหาสูตรทั่วไปของ S_n เมื่อ $S_n = 1 + 4 + 16 + 64 + ... + 4^{n-1}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 7 ให้ใช้ผลลัพธ์จากปัญหาที่ 4 , 5 และ 6 ช่วยในการหาสูตรทั่วไปของ $S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + ... r^{n-1}$ ในรูปของ n

(หมายเหตุ : อนุกรมนี้เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต)

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 8 โดยทั่วไปจะเขียนอนุกรมเรขาคณิตดังนี้ $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$ เมื่อ a เป็นพจน์ที่ 1 และ r เป็นอัตราส่วนร่วม จงหาผลบวกของอนุกรมโดยเขียนในรูปของ a , r และ n โดยแบ่งเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ $r = 1$ และ กรณีที่ $r \neq 1$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 9 ถ้าผลบวกของ 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตเท่ากับสามสิบสามเท่าของผลบวกของ 5 พจน์แรก จงหาค่าของอัตราส่วนร่วมของอนุกรมนี้

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 10 ให้ $S_n = 3^n - 1$ จงหา 4 พจน์แรกของอนุกรมนี้

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 11 จงแสดงว่า ถ้า $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ เมื่อ $x \neq 1$ แล้ว

$$S_n = \frac{-(x^n-1)}{(x-1)^2} + \frac{nx^n}{(x-1)}$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 12 จงหาผลบวกของ n พจน์ของอนุกรม $S_n = 1\cdot x+2\cdot x^2+3\cdot x^3+\ldots+n\cdot x^n$

แนวคิด ....

....

....

3.2 อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

กำหนดอนุกรม $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

ในการพิจารณาว่าอนุกรมดังกล่าวเป็น อนุกรมเลขคณิต หรือ อนุกรมเรขาคณิต ให้พิจารณาตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3 **อนุกรมเลขคณิต** (arithmetic series) คืออนุกรมที่ผลต่างของพจน์ที่ n+1 กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่ และเรียก ค่าคงที่นั้นว่า **ผลต่างร่วม** (common difference)

ถ้า d แทนผลต่างร่วม จะได้ $d = a_{n+1} - a_n$ หรือ $a_{n+1} = a_n + d$

อนุกรมเรขาคณิต (geometric series) คืออนุกรมที่อัตราส่วนของพจน์ที่ n+1 กับพจน์ที่ n มีค่าคงที่ และ เรียก ค่าคงที่นั้นว่า **อัตราส่วนร่วม** (common ratio)

ถ้า r แทนอัตราส่วนร่วม จะได้ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

เช่น อนุกรม $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \ldots + 4n\text{-}1$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็น 4 ในการหา S_n ของอนุกรมดังกล่าวซึ่งมีผลต่างร่วมเป็น 4

พิจารณา

$$a_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$$
$$a_2 = 4 \times 2 - 1 = 7$$
$$a_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$$
$$\vdots$$
$$a_n = 4 \times n - 1 = 4n - 1$$

พิจารณา

$$S_2 = 3 + 7 = 2 \times \frac{3+7}{2} = 10$$
$$S_3 = 3 + 7 + 11 = 3 \times \frac{3+11}{2} = 21$$
$$S_4 = 3 + 7 + 11 + 15 = 4 \times \frac{3+15}{2} = 36$$
$$S_5 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 = 5 \times \frac{3+19}{2} = 55$$
$$\vdots$$

และ $S_n = 3 + 7 + \ldots + 4n - 1 = n \times \dfrac{3+(4n-1)}{2} = n \times \dfrac{4n+2}{2} = n(2n+1)$

การพิจารณาดังกล่าวจะใช้เวลานาน ดังนั้น ถ้าจะใช้เวลาให้น้อยลงลองพิจารณาดังนี้

ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ เป็นอนุกรมเลขคณิตแล้ว

(i) ผลต่างร่วมจะเท่ากับ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$

(ii) $S_n = n \times \dfrac{a_1+a_n}{2}$ จะเข้าใจได้เมื่อตอบปัญหาที่ 13

ปัญหาที่ 13 จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ เป็นอนุกรมเลขคณิต แล้ว $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 14 ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็น d จะเขียนพจน์ที่ n ในรูปของ a_1 , n , d ได้อย่างไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 15 จงหาพจน์ที่ n ของอนุกรมต่อไปนี้

1) $7 + 13 + 19 + 25 + \dots$

แนวคิด ....

....

....

2) $17 + 13 + 9 + 5 + 1 - 3 \dots$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 16 จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $7 + 13 + 19 + 25 + \dots + 115$

แนวคิด ....

....

....

2) $17 + 13 + 9 + 5 + 1 - 3 - \dots - 107$

แนวคิด ....

....

....

3) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99$

แนวคิด ....

....

....

4) $1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + \dots + 1998 - 1999$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 17 จงหาค่าของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{100}$ เมื่อ $a_1 = 1$, $a_2 = 2 + 3$, $a_3 = 4 + 5 + 6$, $a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$, ...

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 18 ถ้า a + b + c + d เป็นอนุกรมเลขคณิตซึ่ง $a + b + c + d = 8$, $ad + bc = -2$ จงหาค่าของ a , b , c และ d

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 19 จงแสดงว่า ถ้า k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่า kn ซึ่ง k หารไม่ลงตัว มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}k(k - 1)n^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 20 ถ้า a + b + c เป็นอนุกรมเลขคณิต ซึ่งแต่ละพจน์มีค่ามากกว่า 0 จงแสดงว่า

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 21 ถ้า a เป็นพจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและ b เป็นพจน์ที่ n ของอนุกรม จงหาพจน์ที่ r ของอนุกรมดังกล่าว

แนวคิด ....

....

....

3.3 อนุกรมอื่น ๆ ที่ควรทราบ

อนุกรมที่ควรทราบ

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

แนวการพิสูจน์หาอ่านได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไปที่เขียนเรื่อง ลำดับ และ อนุกรม เช่นในหนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์ ค 015 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ปัญหาที่ 22 ถ้า $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ จงหาสูตรทั่วไปของ S_n ในรูปของ n

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 23 ถ้า $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ จงแสดงว่า $S_n = \frac{1}{4}(n)(n+1)(n+2)(n+3)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 24 จงหาจำนวนลูกเทนนิสทั้งหมดที่นำมาเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ต่าง ๆ โดยเริ่มจากรูปที่มีความยาวด้านละ 1 ลูก ไปจนถึงรูปที่มีความยาวด้านละ 10 ลูก

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 25 จงหาจำนวนลูกกอล์ฟทั้งหมดที่นำมาเรียงกันเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยเริ่มจากรูปที่มีความยาวด้านละ 1 ลูก ไปจนถึงรูปที่มีความยาวด้านละ 12 ลูก

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 26 1) จงแสดงว่า $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

แนวคิด ....

....

....

2) จงเขียน 5 พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

แนวคิด ....

....

....

3) ใช้ความรู้ในข้อ (1) แสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

แนวคิด ....

....

....

4) จงหาค่าของ $\frac{1}{5\times6} + \frac{1}{6\times7} + \frac{1}{7\times8} + \ldots + \frac{1}{20\times21}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 27 จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^n(n-1)^2 + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 28 จงเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\left(\frac{1\times2\times4 + 2\times4\times8 + \ldots + n\times2n\times4n}{1\times3\times9 + 2\times6\times18 + \ldots + n\times3n\times9n}\right)^{1/3}$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 29 ถ้า $S_n = n^2 + 3n$ จงหาพจน์ที่ n ของลำดับดังกล่าว

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 30 จงหาผลบวกของอนุกรม

1) $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$

แนวคิด ....

....

....

2) $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 31 จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}n$

แนวคิด ....

....

....

2) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2$

แนวคิด ....

....

....

3) $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \ldots + (4n-3)^2 - (4n-1)^2$

แนวคิด

....

....

....

4) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1)n^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 32 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

แนวคิด ....

....

....

2) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 33 จงหาผลรวมของ

$$S = \frac{1^4}{1\cdot3}+\frac{2^4}{3\cdot5}+\frac{3^4}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 34 สำหรับอนุกรมเลขคณิตซึ่ง $S_p = S_q$ เมื่อ $p \neq q$ จงแสดงว่า $S_{p+q} = 0$

แนวคิด ....

....

....

อนุกรมที่ได้จากพหุนาม

พิจารณาพหุนาม

$P(x) = x$, $P(x) = x^2$, $P(x) = x^3$, $P(x) = x^4$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ซึ่งแสดงไว้ดังตารางต่อไปนี้

x =	0	1	2	3	4	5
$P(x) = x$	0	1	2	3	4	5
$P(x) = x^2$	0	1	4	9	16	25
$P(x) = x^3$	0	1	8	27	64	125
$P(x) = x^4$	0	1	16	81	256	625

นำข้อมูลมาจัดใหม่ โดยให้ D_1 เป็นผลต่างสืบเนื่องของค่าของ $P(x)$ ในลำดับที่ 1 และ D_n เป็นผลต่างสืบเนื่องในลำดับที่ n ซึ่งจะหาค่าผลต่างต่อเนื่องกันไปจนทุกค่ามีค่าเท่ากัน ดังนี้

x	$P(x) = x$	D_1	$P(x) = x^2$	D_1	D_2	$P(x) = x^3$	D_1	D_2	D_3
0	0	1	0	1	2	0	1	6	6
1	1	1	1	3	2	1	7	12	6
2	2	1	4	5	2	8	19	18	6
3	3	1	9	7	2	27	37	24	
4	4	1	16	9		64	61		
5	5		25			125			

สังเกตได้ว่า ผลต่างสืบเนื่องลำดับที่ n ของ $P(x) = x^n$ จะเป็นค่าคงที่ซึ่งไม่ต่างกันและเป็นจริงทุก ๆ ค่าของพหุนามดีกรี n

ปัญหาที่ 35 จงสร้างตารางแสดงถึงผลต่างสืบเนื่องของ $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ โดยให้ $x = 0, 1, 2, 3, 4$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับซึ่งไม่ทราบรูปทั่วไป และเชื่อมโยงค่าที่แตกต่างกันดังตารางที่กล่าวมาแล้ว โดยให้ b เป็นผลต่างสืบเนื่องในลำดับที่หนึ่ง c เป็นผลต่างสืบเนื่องในลำดับที่สองต่อไปเรื่อย ๆ ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & \\ & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & \\ & & & d_1 & & d_2 & & & \end{array}$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าเรารู้ค่าของ $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ เราจะสามารถหารูปทั่วไปของ a_n ได้ในที่สุด

ดังนี้

$a_2 = a_1 + b_1$ จาก $b_1 = a_2 - a_1$

$a_3 = a_2 + b_2 = (a_1 + b_1) + (b_1 + c_1) = a_1 + 2b_1 + c_1$

$a_4 = a_3 + b_3 = (a_1 + 2b_1 + c_1) + (b_2 + c_2)$

$= (a_1 + 2b_1 + c_1) + (b_1 + c_1) + (c_1 + d_1)$

$= a_1 + 3b_1 + 3c_1 + d_1$

$a_5 = a_4 + b_4 = a_1 + 4b_1 + 6c_1 + 4d_1 + e_1$

$a_6 = a_5 + b_5 = a_1 + 5b_1 + 10c_1 + 10d_1 + 5e_1 + f_1$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์จะเป็นจำนวนของสามเหลี่ยมปาสกาล

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\boxed{a_n = a_1 + {}_{n-1}C_1 b_1 + {}_{n-1}C_2 c_1 + {}_{n-1}C_3 d_1 + \ldots}$$

ซึ่งเป็นสูตรในการหาค่าทั่วไปของลำดับ a_n และยังสามารถใช้หาค่าของ S_n ซึ่งเป็นผลบวกของทุกพจน์ของลำดับ ดังนี้

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 & & \ldots & & s_n \\ & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \ldots & & a_n & \\ & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \ldots & & b_n & & \end{array}$$

และ $s_1 = a_1$

$s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + b_1) = 2a_1 + b_1$

$s_3 = s_2 + a_3 = (2a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)$

$= (2a_1 + b_1) + (a_1 + b_1) + (b_1 + c_1)$

$= 3a_1 + 3b_1 + c_1$

นั่นคือ

$$\boxed{s_n = {}_nC_1a_1 + {}_nC_2b_1 + {}_nC_3c_1 + {}_nC_4d_1 + \ldots}$$

ตัวอย่างที่ 2 (1) จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 4 , 10 , 18 , 28 , ...

(2) จงหาผลบวก n พจน์ ของลำดับ 4 , 10 , 18 , 28 , ...

โดยเชื่อมโยงค่าที่แตกต่างดังนี้

4 10 18 28

6 8 10

2 2

0

$a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $c_1 = 2$, $d_1 = 0$

แนวคิด (1) $a_n = 4 + ({}_{n-1}C_1)6 + ({}_{n-1}C_2)2 + ({}_{n-1}C_3)0$

$= 4 + 6(n-1) + (n-1)(n-2)$

$= n^2 + 3n$

ดังนั้น $a_n = n(n+3)$

ตรวจสอบ $a_1 = 1 \times 4 = 4$, $a_2 = 2 \times 5 = 10$, $a_3 = 3 \times 6 = 18$,

$a_4 = 4 \times 7 = 28$

แนวคิด (2) $s_n = ({}_nC_1)\,4 + ({}_nC_2)\,6 + ({}_nC_3)\,2 + ({}_nC_4)\,0$

$= 4n + 3n(n-1) + \frac{1}{3}(n-2)$

ดังนั้น $s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

ตรวจสอบ

$s_1 = \frac{1}{3}\times 1 \times 2 \times 6 = 4$, $s_2 = \frac{1}{3}\times 2 \times 3 \times 7 = 14$,

$s_3 = \frac{1}{3}\times 3 \times 4 \times 8 = 32$, $s_4 = \frac{1}{3}\times 4 \times 5 \times 9 = 60$

ปัญหาที่ 36 ในแต่ละลำดับข้างล่างนี้ มีรูปทั่วไปที่ได้จากพหุนาม $P(n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้พร้อมตรวจสอบ

(1) $0, 10, 34, 78, 148, \ldots$

แนวคิด ....

....

....

(2) $3, 5, 33, 135, 383, 873, 1725, \ldots$

แนวคิด ....

....

....

(3) $-5, -11, -9, 7, 43, \ldots$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 37 จงหาค่าของ

(1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

แนวคิด ....

....

....

(2) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

แนวคิด ....

....

....

(3) $1 + 8 + 27 + \ldots + n^3$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 38 จงแสดงว่า

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

แนวคิด ....

....

3.4 ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relations)

ปัญหาจำนวนมากเกี่ยวกับการนับมักเกี่ยวข้องกับการคำนวณหาลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เมื่อ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับ และบ่อยครั้งที่เราพบรูปแบบความสัมพันธ์ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมาชิกที่อยู่ข้างหน้า และ ลำดับที่จะพิจารณาในหัวข้อนี้ เป็นลำดับซึ่งพจน์ที่ n สามารถนิยามหรือให้คำจำกัดความได้ในรูปของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า เราเรียกความสัมพันธ์เช่นนี้ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังจะแสดงแนวคิดด้วยปัญหาตัวอย่าง และ บทนิยาม ดังนี้

ปัญหาที่ 39 พิจารณาลำดับต่อไปนี้

1) 1 , 3 , 9 , 27 , ...

พจน์ต่อ ๆ ไปคืออะไร ....

ให้พจน์ที่ n เขียนแทนด้วย a_n แล้ว a_{1999} = ...

2) 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , ...

พจน์ต่อ ๆ ไปคืออะไร ....

และ a_{1999} = ...

3) 0 , 1 , 3 , 7 , 15 , ...

พจน์ต่อ ๆ ไปคืออะไร ....

และ a_{1999} = ...

ตัวอย่างที่ 3 ชายคนหนึ่งฝากเงิน 1,000 บาท แบบประจำได้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี (ดอกเบี้ยทบต้นปีละ1 ครั้ง) ถ้า A_n แทนจำนวนเงินเมื่อฝากครบ n ปี จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง A_n กับ A_{n-1}

แนวคิด เมื่อฝากครบ n - 1 ปี จะได้เงินจำนวน A_{n-1} หลังจากนั้นอีก 1 ปี เราจะได้เงินจำนวน A_{n-1} บวกดอกเบี้ย

ดังนั้น $A_n = A_{n-1} + (0.08)A_{n-1}$

$A_n = (1.08)A_{n-1}$

ตัวอย่างที่ 3 เป็นการแสดงให้เห็นความจริงที่ว่า ลำดับชุดหนึ่งสามารถนิยามได้ด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดรวมกับเงื่อนไขเริ่มต้น

ปัญหาที่ 40 สมมติว่ารหัสของบัตรเครดิตประเภทหนึ่งประกอบด้วยเลขฐานสองซึ่งมีความยาว n หลัก และไม่มีเลข 1 อยู่ติดกันเลย อยากทราบว่าจะมีจำนวนรหัสที่แตกต่างกันเป็นจำนวนเท่าใด

แนวคิด
$n = 1$ จะได้ 0 , 1

$n = 2$ จะได้ 00 , 01 , 10

$n = 3$ จะได้ 000 , 001 , 010 , 100 , 101

$n = 4$ จะได้ 0000 , 0001 , 0010 , 0100 , 1000 , 0101 , 1010 , 1001

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 41 วาดรูปวงรี n รูปบนแผ่นกระดาษโดยมีเงื่อนไขว่าวงรีแต่ละรูปจะต้องตัดวงรีอื่น ๆ เป็นจำนวน 2 จุด (ตัดน้อยกว่า 2 จุดไม่ได้) และสมมติว่าไม่มีวงรี 3 รูปใด ๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน อยากทราบว่าวงรีเหล่านี้แบ่งพื้นที่บนแผ่นกระดาษออกเป็นกี่ส่วน

แนวคิด ....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 42 สุนัขตัวหนึ่งกระโดดขึ้นบันไดซึ่งมีทั้งหมด n ขั้น แต่ละครั้งที่สุนัขกระโดดจะกระโดดได้ 1 ขั้นหรือ 2 ขั้นเท่านั้น อยากทราบว่าสุนัขกระโดดขึ้นบันได n ขั้นได้แตกต่างกันกี่วิธี

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

บทนิยาม 4 ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับ $a_0 , a_1 , ..., a_n , ...$ คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพจน์ a_n กับพจน์ที่มาก่อน $a_0 , a_1 , ... , a_{n-1}$ ในรูปแบบที่แน่นอน

จากตัวอย่างและปัญหาดังกล่าว จะพบว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิดยังขาดความสะดวกในการหาพจน์ที่ n เนื่องจากจะทราบพจน์ที่ n ต้องทราบพจน์ที่ n - 1 หรือพจน์ที่มาก่อนในลำดับติดกัน เพื่อการง่ายในการหาพจน์ที่ n จะต้องแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยให้ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดอยู่ในรูป $a_n = f(n)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ n และสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น ๆ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในลำดับต่อไป

ปัญหาที่ 43 ให้ C_n แทนจำนวนของอาณาบริเวณที่เราแบ่งระนาบโดยใช้เส้นตรง n เส้น โดยมีเงื่อนไขว่าเส้นตรงแต่ละคู่พบกันที่จุดจุดหนึ่งและไม่มี 3 เส้นใดพบกันที่จุดเดียว จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับ $C_1 , C_2 , ...$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

ลำดับฟิโบนักชี (Fibonacci Sequence)

หนึ่งในบรรดาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เก่าแก่ที่สุดคือ ลำดับฟิโบนักชี ลำดับนี้พบในหนังสือของฟิโบนิกชี ชื่อ Liber Abaci (ค.ศ. 1745) เมื่อฟิโบนักชีตั้งคำถามว่า "หลังจาก 1 ปี จะมีกระต่ายกี่คู่ ถ้าเมื่อตอนเริ่มต้นปีมีกระต่ายเพียงคู่เดียว (ต่างเพศกัน กระต่ายผู้ใหญ่) แต่ละคู่จะให้กำเนิดกระต่ายคู่ใหม่ (ต่างเพศ) ทุกเดือน ลูกกระต่ายคู่ใหม่จะกลายเป็นกระต่ายผู้ใหญ่ใน 2 เดือน ซึ่งจะถึงเวลาที่มันจะให้กำเนิดกระต่ายคู่ใหม่ต่อไป สมมติว่าไม่มีการตายเกิดขึ้น"

แนวคิด ถ้าให้ F_k แทนจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อตอนต้นเดือนที่ k

ตารางแสดงการเกิดของกระต่าย

เดือนที่ k	จำนวนคู่ (ผู้ใหญ่) เมื่อเริ่มต้นของเดือนที่ k	จำนวนคู่ของกระต่ายอายุ 1 เดือน เมื่อเริ่มต้นของเดือนที่ k	จำนวนคู่ของลูกเกิดใหม่เมื่อเริ่มต้นเดือนที่ k	จำนวนคู่ของกระต่ายทั้งหมด (F_k)
1	1	0	0	1
2	1	0	1	2
3	...	...	...	...
4	...	...	...	...
5	...	...	...	...
6	...	....	...	...

ข้อสังเกต ....

....

....

....

F_0 = ...

F_1 = ...

F_2 = ...

F_3 = ...

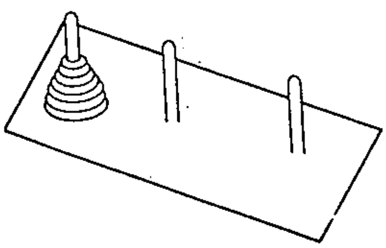
⋮

F_k = ...

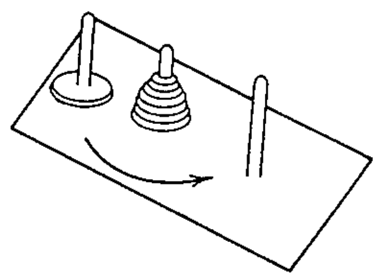
หอคอยฮานอย (Towers of Hanoi)

หอคอยฮานอยเป็นปัญหาชวนคิดที่ประกอบด้วยเสา 3 เสาปักบนกระดานแผ่นหนึ่ง และมีแผ่นกลมขนาดต่าง ๆ กัน n แผ่นที่มีรูตรงกลางวางสวมอยู่ เราตั้งกติกาไว้ว่า ถ้าย้ายแผ่นกลมจากเสาหนึ่งแล้วต้องไปสวมอีกเสาหนึ่งและห้ามนำแผ่นใหญ่กว่าสวมทับบนแผ่นเล็กกว่า

กำหนดให้แผ่นกลมทั้งหมดวางสวมซ้อนกันบนเสาเสาหนึ่ง ดังรูปที่ 1 ปัญหาคือ การย้ายแผ่นกลมทั้งหมดจากเสาหนึ่งไปไว้อีกเสาหนึ่งโดยเคลื่อนย้ายแผ่นกลมได้ครั้งละแผ่น และวางตามกติกาที่ตั้งไว้ (อาจต้องเคลื่อนย้ายแผ่นกลมบางแผ่นไปไว้เสาอีกเสาหนึ่งที่เหลือชั่วคราว ต้องไม่ลืมว่าต้องวางในลักษณะตามกติกาเสมอ) จะต้องทำการเคลื่อยย้ายอย่างน้อยกี่ครั้ง



รูปที่ 1



รูปที่ 2

สมมติว่าเรามีแผ่นกลมขนาดต่าง ๆ กัน n แผ่นบนเสาที่ 1 (ดังรูปที่ 1) ต้องการย้ายไปเสาที่ 3

แนวคิด ให้ a_n แทนจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายแผ่นวงกลม n แผ่นจากเสาหนึ่งไปยังอีกเสาหนึ่งจะได้ว่า

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 =$ ....

$a_3 =$ ....

ในการย้ายแผ่นกลม a_{n-1} ครั้ง ทำให้เราสามารถย้ายแผ่นกลม n - 1 แผ่นไปไว้เสาที่ 2 (ดังรูปที่ 2) ระหว่างการย้ายนี้ แผ่นกลมล่างสุดในเสาที่ 1 คงอยู่ที่เดิม ต่อไปเราต้องย้ายแผ่นกลมที่เหลือนี้จากเสาที่ 1 ไปไว้ในเสาที่ 3 และเราต้องการย้ายแผ่นกลม n - 1 แผ่นจากเสาที่ 2 ไปเสาที่ 3 ต้องย้าย ....ครั้ง

ดังนั้น

$a_n =$ ....

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $a_1 = 1$

บทนิยาม 5 ถ้า C_i เป็นค่าคงตัวสำหรับ $i = 1, 2, \ldots, k$ และ $C_k \neq 0$ แล้วเราจะเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$$

ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับที่ k ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ถ้า $f(n) = 0$ เราจะเรียกความสัมพันธ์

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์

ตัวอย่างที่ 4 เช่น

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่ 2

$$a_n = 3a_{n-1}^2 + a_{n-2}$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะกำลังของ a_{n-1} ไม่เท่ากับ 1

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ไม่เป็นเอกพันธุ์เพราะ $f(n) = 3$ ไม่เท่ากับ 0

การแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิด (solving recurrence relations)

การแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกี่ยวข้องกับลำดับ $a_0, a_1, \ldots$ คือการหาสูตรสำหรับพจน์ทั่วไปของ a_n ในที่นี้ จะกล่าวถึงวิธีการแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบการทำซ้ำ (iteration) และวิธีเฉพาะที่ใช้กับสมการความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (linear recurrence relations with constant coefficients)

แบบการทำซ้ำ

การแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกี่ยวข้องกับลำดับ $a_0, a_1, \ldots$ โดยการทำซ้ำนั้นเราเขียนพจน์ที่ n ใด ๆ a_n ในรูปของตัวที่มาก่อนหน้า $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ แล้วใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดแทนแต่ละพจน์ $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ ด้วยพจน์ที่มาก่อนหน้านั้น ทำซ้ำ ๆ กันจนกระทั่งได้สูตรเด่นชัดออกมา

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$

แนวคิด โดยการทำซ้ำ

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} \\ &= 2(2a_{n-2}) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ปัญหาที่ 44 จงหาสูตรเด่นชัดสำหรับ a_n ซึ่งคือจำนวนครั้งของการเคลื่อนย้ายแผ่นกลมขนาดต่าง ๆ กัน n แผ่นของปัญหาหอคอยฮานอย

แนวคิด ....

....

....

....

....

การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(solution of linear recurrence relations with constant coefficients)

เป็นที่ทราบกันว่า ไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดใด ๆ แต่สำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดบางประเภทเรามีวิธีเฉพาะสำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีลักษณะเฉพาะนั้น ๆ ในที่นี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบคือ

1. **การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (solution of linear homogeneous recurrence relations with constant coefficients)**

รูปทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว คือ

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k} \qquad \text{.......................... (1)}$$

ในการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์นั้นเราใช้วิธีตรวจสอบดังนี้

สมมติให้ $a_n = x^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1)

ดังนั้น เมื่อแทน a_n ด้วย x^n ใน (1) เราจะได้

$$x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_kx^{n-k}$$

เมื่อหารด้วย x^{n-k} ทั้งสองข้างจะได้

$$x^k = c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \dots + c_k$$

หรือ $$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_k = 0 \qquad \text{.......................... (2)}$$

แสดงว่า ถ้า r เป็นรากของสมการ (2) แล้ว r^n จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) เราจะเรียกสมการ (2) ว่า**สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) และเรียกรากของสมการนี้ว่า**รากลักษณะเฉพาะ** (characteristic root)

ทฤษฎีบท 1 ถ้า r เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $a_n = r^n$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) ก็ต่อเมื่อ r เป็นรากลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิด

เราทราบว่าสมการ (2) จะมีรากได้ k ราก ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องแตกต่างกันทั้งหมด อาจจะมีบางตัวซ้ำกัน นอกจากนี้อาจจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ และรากแต่ละรากจะไม่เท่ากับ 0 เนื่องจาก $c_k \neq 0$ ดังนั้นจึงพิจารณาได้เป็น 2 กรณีต่อไปนี้คือ

กรณีที่ 1 เมื่อรากลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $r_1, r_2, \ldots, r_k$ เป็นรากลักษณะเฉพาะ ซึ่งแตกต่างกันของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) แล้ว $\mathbf{a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n}$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด(1) เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(เราเรียกผลเฉลยดังกล่าวว่าผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) โดยสามารถหาค่า $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ได้โดยใช้เงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดให้ สร้างระบบสมการแล้วหาผลเฉลยของระบบสมการที่ได้)

พิสูจน์ จาก $r_1, r_2, \ldots, r_k$ เป็นรากลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1)

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) จะได้

$$r_1^n = c_1r_1^{n-1} + c_2r_1^{n-2} + \ldots + c_kr_1^{n-k}$$

$$r_2^n = c_1r_2^{n-1} + c_2r_2^{n-2} + \ldots + c_kr_2^{n-k}$$

$$\vdots$$

$$r_k^n = c_1r_k^{n-1} + c_2r_k^{n-2} + \ldots + c_kr_k^{n-k}$$

เมื่อนำ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ แต่ละตัวคูณกับแต่ละสมการตามลำดับจะได้

$$A_1r_1^n = A_1c_1r_1^{n-1} + A_1c_2r_1^{n-2} + \ldots + A_1c_kr_1^{n-k}$$

$$A_2r_2^n = A_2c_1r_2^{n-1} + A_2c_2r_2^{n-2} + \ldots + A_2c_kr_2^{n-k}$$

$$\vdots$$

$$A_kr_k^n = A_kc_1r_k^{n-1} + A_kc_2r_k^{n-2} + \ldots + A_kc_kr_k^{n-k}$$

นำทุกสมการมาบวกกันจะได้

$$\begin{aligned} A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n = {} & c_1[A_1r_1^{n-1} + A_2r_2^{n-1} + \ldots + A_kr_k^{n-1}] \\ & + c_2[A_1r_1^{n-2} + A_2r_2^{n-2} + \ldots + A_kr_k^{n-2}] \\ & \vdots \\ & + c_k[A_1r_1^{n-k} + A_2r_2^{n-k} + \ldots + A_kr_k^{n-k}] \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (1) #

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนักชี

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

วิธีทำ สมมติให้ $a_n = x^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
ดังนั้น เมื่อแทน a_n ด้วย x^n ใน $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เราจะได้

$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ เมื่อหารด้วย x^{n-2} ทั้งสองข้างจะได้

สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - x - 1 = 0$

ซึ่งมีรากลักษณะเฉพาะ คือ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$a_n = A_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n + A_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

ค่าคงตัว A_1 และ A_2 สามารถคำนวณหาได้จากเงื่อนไขเบื้องต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$a_0 = 1 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 1 = A_1\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] + A_2\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

รากทั้งสองของระบบสมการข้างบนนี้คือ

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \quad \text{และ } A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1}$$

กรณีที่ 2 เมื่อรากลักษณะเฉพาะซ้ำกัน

ในที่นี้ขอกล่าวเฉพาะความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง ความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1$, $a_1 = 6$

จะพบว่าสมการลักษณะเฉพาะ คือ $x^2 - 6x + 9 = 0$ หรือ $(x - 3)^2 = 0$

รากของสมการนี้มี 2 ค่า โดยทั้งคู่มีค่าเท่ากันคือ 3

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า 3 เป็นรากซ้ำกัน 2 ครั้ง

ทฤษฎีบท 3 ถ้า r เป็นรากลักษณะเฉพาะซ้ำกัน 2 ครั้งของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ แล้ว $\mathbf{a_n = A_1r^n + A_2nr^n}$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิสูจน์ จาก r เป็นรากลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ r^n เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

เราจะแสดงว่า nr^n จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$

จาก r เป็นรากซ้ำของสมการลักษณะเฉพาะ $x^2 - c_1x - c_2 = 0$

ดังนั้น $x^2 - c_1x - c_2 = (x-r)^2$

จะได้ $c_1 = 2r$ และ $c_2 = -r^2$

พิจารณา

$$c_1[(n-1)r^{n-1}]+c_2[(n-2)r^{n-2}] = 2r(n-1)r^{n-1} - r^2(n-2)r^{n-2} = r^n[2(n-1)-(n-2)] = nr^n$$

ดังนั้น nr^n เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$

โดยทฤษฎีบทที่ 2 จะได้

$a_n = A_1r^n + A_2nr^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ #

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ด้วยเงื่อนไขเบื้องต้น $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

แนวคิด สมมติให้ $a_n = x^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

ดังนั้น เมื่อแทน a_n ด้วย x^n ใน $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ เราจะได้

$x^n = 4x^{n-1} - 4x^{n-2}$ เมื่อหารด้วย x^{n-2} ทั้งสองข้างจะได้

สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - 4x + 4 = 0 = (x-2)^2$

รากลักษณะเฉพาะคือ 2 ซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ 2

ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$a_n = A_1(2)^n + A_2n(2)^n$

ค่าคงตัว A_1 และ A_2 สามารถคำนวณหาได้จากเงื่อนไขเบื้องต้น $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

$a_0 = 1 = A_1(2)^0$ ดังนั้น $A_1 = 1$

$a_1 = 2 = 2A_1 + 2A_2$ ดังนั้น $A_2 = 0$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = 2^n$

ปัญหาที่ 45 ถ้าความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ มีผลเฉลยทั่วไปเป็น $a_n = A_1(3)^n + A_2(6)^n$ จงหาค่าของ c_1 และ c_2

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

2. การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธุ์

(solutions of inhomogeneous recurrence relations)

ความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธุ์

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$ เมื่อ $f(n) \neq 0$ .... (3)

เช่น $a_n = a_{n-1} + n$

$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$

ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธุ์จะประกอบด้วยผลเฉลย 2 ส่วน ส่วนหนึ่งเรียกว่า**ผลเฉลยเอกพันธุ์** (homogeneous solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดส่วนที่เป็นเอกพันธุ์นั่นคือผลเฉลยของ

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ ซึ่งจะแทนด้วย $a_n^{(h)}$

ผลเฉลยอีกส่วนหนึ่งคือ**ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$ ซึ่งจะแทนด้วย $a_n^{(p)}$

นั่นคือ $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (3)

เราพอจะสรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (3) ได้เป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

1. หาผลเฉลยเอกพันธ์ $a_n^{(h)}$
2. หาผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$
3. หาผลรวม $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของ (3)
4. ใช้เงื่อนไขเบื้องต้นที่กำหนดให้ คำนวณหาค่าคงตัวที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ใน $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n \quad (n \geq 1)$......(4)

เมื่อ $a_1 = -4$

แนวคิด ขั้นแรกจะต้องหาผลเฉลยเอกพันธุ์ นั่นคือหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธุ์

$a_n + 3a_{n-1} = 0$ จะพบว่าผลเฉลยเอกพันธุ์คือ $a_n^{(h)} = A(-3)^n$

ขั้นต่อไปจะต้องหาผลเฉลยเฉพาะ เนื่องจาก $f(n) = 4n^2 - 2n$ เป็นพหุนามดีกรี 2

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะจะต้องเป็นพหุนามดีกรี 2

สมมติให้ $Bn^2 + Cn + D$ เป็นผลเฉลยเฉพาะเมื่อ B,C และ D เป็นค่าคงตัวที่จะต้อง

คำนวณหา ถ้าพหุนามนี้เป็นผลเฉลยของ (4) นั่นคือ $a_n = Bn^2 + Cn + D$

เราจะได้ $[Bn^2+Cn+D]+3[B(n-1)^2+C(n-1)+D] = 4n^2 - 2n$

หรือ $4Bn^2 + (4C-6B)n + (3B-3C+4D) = 4n^2 - 2n$

พหุนามทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ของของพจน์เหมือนเท่ากัน นั่นคือ

$$4B = 4$$

$$4C - 6B = -2$$

$$3B - 3C + 4D = 0$$

แก้สมการหาค่า B,C และ D จะได้ $B = 1$, $C = 1$ และ $D = 0$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $a_n^{(p)} = n^2 + n$

รวมผลเฉลยเอกพันธุ์และผลเฉลยเฉพาะเข้าด้วยกันจะได้

$a_n = A(-3)^n + n^2 + n$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (3)

หาค่า A โดยใช้เงื่อนไขเบื้องต้น $a_1 = -4$ จะได้

$-4 = A(-3)^1 + 1^2 + 1 = -3A + 2$

ดังนั้น $A = 2$ และ $a_n = 2(-3)^n + n^2 + n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด (3)

เราได้เห็นวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธุ์ ซึ่งหัวใจสำคัญของการหาผลเฉลยคือการหาผลเฉลยเฉพาะในขั้นตอนที่ 2 ดังได้กล่าวแล้วในตอนต้นว่าเราไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดทุกปัญหา แต่เรามีเทคนิคบางอย่างที่ใช้ได้กับกลุ่มปัญหาที่มีลักษณะเฉพาะ รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$ จะแตกต่างกันตามลักษณะของ f(n) และรากลักษณะเฉพาะซึ่งพอจะสรุปได้ดังตาราง

ตาราง

f(n)	$a_n^{(p)}$
1. $A_kn^k+A_{k-1}n^{k-1}+...+A_1n+A_0$	
(1.1) 1 ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	$(B_kn^k+B_{k-1}n^{k-1}+...+B_1n+B_0)$
(1.2) 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากค่าซ้ำเท่ากับ m	$n^m(B_kn^k+B_{k-1}n^{k-1}+...+B_1n+B_0)$
2. Ar^n	
(2.1) r ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	Br^n
(2.2) r เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากค่าซ้ำเท่ากับ m	Bn^mr^n
3. An^kr^n	
(3.1) r ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ	$(B_kn^k+B_{k-1}n^{k-1}+...+B_1n+B_0)r^n$
(3.2) r เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากค่าซ้ำเท่ากับ m	$n^m(B_kn^k+B_{k-1}n^{k-1}+...+B_1n+B_0)r^n$

ปัญหาที่ 46 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ $(n \geq 1)$ เมื่อ $a_0 = 1$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 47 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เมื่อ $a_1 = 1$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 48 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3(2)^n$ เมื่อ $a_1 = 8$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

หน่วยที่ 4

อสมการ (Inequalities)

เมื่อกล่าวถึง อสมการ คนโดยทั่วไปจะคิดว่าเป็นการศึกษาการแก้อสมการ ที่จริงแล้วอสมการมีแง่มุมที่น่าสนใจให้ศึกษามากกว่าการแก้อสมการเพื่อหาคำตอบ ซึ่งได้รวบรวมไว้พอสมควรในหน่วยนี้ โดยจะกล่าวถึง อสมการ อสมการสามเหลี่ยม อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต และอสมการในรูปแบบต่าง ๆ แต่ก่อนจะศึกษาเรื่องอสมการ เพื่อการสร้างความเข้าใจให้ง่ายขึ้น จะกล่าวถึงระบบจำนวนจริงที่ควรทราบดังนี้

ระบบจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริงประกอบด้วย

1. เซตของจำนวนจริง เซตของจำนวนจริงมีสับเซตแท้ที่สำคัญซึ่งแสดงโดยแผนผังข้างล่างนี้

- จำนวนจริง (R)
  - จำนวนอตรรกยะ
  - จำนวนตรรกยะ (Q)
    - จำนวนเต็ม (I)
      - จำนวนเต็มลบ (I)
      - ศูนย์
      - จำนวนเต็มบวก (I^+)
    - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม

2. ความสัมพันธ์ ได้แก่ การเท่ากันและการไม่เท่ากัน
3. โอเปอเรชัน ได้แก่ การบวก การคูณ
4. สมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับการบวกและการคูณ ดังนี้

สมบัติของการเท่ากันของจำนวนจริง กำหนด a , b และ c เป็นจำนวนจริง

1. สมบัติสะท้อน $a = a$
2. สมบัติสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
4. สมบัติการบวกด้วยจำนวนจริงเดียวกัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนจริงเดียวกัน ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สัจพจน์ในระบบจำนวนจริง

1. สมบัติปิด

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b$ และ ab ต่างก็เป็นจำนวนจริง

2. **สมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

3. **สมบัติการมีเอกลักษณ์**

มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $0 + a = a = a + 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a

มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $1a = a = a1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a

4. **สมบัติการมีอินเวอร์ส**

สำหรับจำนวนจริง a แต่ละจำนวนจะมีจำนวนจริง -a ซึ่ง

$$-a + a = 0 = a + (-a)$$

สำหรับจำนวนจริง a แต่ละจำนวนซึ่งไม่เท่ากับ 0 จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{a}$ ซึ่ง

$$\frac{1}{a} \cdot a = 1 = a \cdot \frac{1}{a}$$

5. **สมบัติการสลับที่**

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

6. **สมบัติการแจกแจงทางซ้าย**

$$a(b + c) = ab + ac$$

7. **กฎไตรวิภาค**

มีสับเซต R^+ ของ R ซึ่งสำหรับสมาชิกทุกตัวของ R สมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $a \in R^+$

(2) $a = 0$

(3) $-a \in R^+$

ถ้า $a \in R^+$ เรียก a ว่าจำนวนจริงบวก

ถ้า $-a \in R^+$ เรียก a ว่าจำนวนจริงลบ

8. ถ้า $a \in R^+$ และ $b \in R^+$ แล้ว $a + b \in R^+$ และ $ab \in R^+$

9. **สัจพจน์ความบริบูรณ์**

ถ้า S เป็นสับเซตของ R, $S \neq \phi$ และ S มีขอบเขตบนแล้ว S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

นอกจากสมบัติดังกล่าวยังมีทฤษฎีบทต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงอีกมากแต่ในที่นี้จะขอกล่าวบางทฤษฎีบทเท่าที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาเรื่องอสมการ โดยไม่ได้แสดงการพิสูจน์ นักเรียนสามารถหาอ่านการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ตลอดจนรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนจริงได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ที่เขียนเรื่อง

ระบบจำนวนจริง เช่น หนังสือระบบจำนวนที่เขียนโดย สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ หรือหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ทฤษฎีบท

1. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า
    1. $a(-b) = -(ab)$
    2. $(-a)b = -(ab)$
    3. $(-a)(-b) = ab$
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์แล้ว a^2 เป็นจำนวนจริงบวก

นอกจากนั้นอสมการที่เราจะศึกษามีรูปแบบของเลขยกกำลังและรากจึงขอกล่าวถึงเลขยกกำลังและรากโดยสังเขปดังนี้

เลขยกกำลังและราก

บทนิยาม

1. ถ้า $a \in R$ แล้ว $a^1 = a$
2. ถ้า $a \in R$ และ $n \in I^+$ แล้ว $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ จำนวน}}$
3. ถ้า $a \in R$ และ $a \neq 0$ แล้ว $a^0 = 1$
4. ถ้า $a \in R$, $a \neq 0$ และ $n \in I^+$ แล้ว $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5. ถ้า x และ a เป็นจำนวนจริง $n \in I^+$ และ $n \geq 2$ แล้ว x เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $x^n = a$
6. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ หมายถึงรากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนจริงบวก
7. ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่แล้ว $\sqrt[n]{a}$ หมายถึงรากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนจริงลบ
8. $\sqrt[n]{0} = 0$
9. ถ้า $a \in R$, $n \in I^+$ และ $\sqrt[n]{a} \in R$ แล้ว $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
10. ถ้า $a \in R$, $m \in I$, $n \in I^+$ และ $\sqrt[n]{a} \in R$ แล้ว

    $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$

    เมื่อ $m \neq 0$ หรือเมื่อ $m = 0$ แต่ $a \neq 0$

ทฤษฎีบท ถ้าตัวแปรทั้งหลายสอดคล้องกับนิยามที่กล่าวมาแล้วจะได้ว่า

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

5. $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7. $(\sqrt[n]{a})^n = a$

8. $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

9. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

10. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

11. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

12. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

13. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

14. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

หมายเหตุ เงื่อนไขในแต่ละทฤษฎีบทมิได้บ่งไว้โดยชัดเจน ณ ที่นี้ ขอให้จดจำและพึงระวังในการใช้ แต่ ถ้า $a > 0$, $b > 0$ สามารถใช้ได้ทันที

เรื่อง ระบบจำนวนจริง เลขยกกำลังและราก เป็นส่วนประกอบที่จะช่วยให้นักเรียนศึกษาเรื่อง อสมการในหน่วยที่ 4 ได้เร็วขึ้น ถ้านักเรียนคนใดเข้าใจเรื่องระบบจำนวนจริง เลขยกกำลังและราก แล้วก็ไปศึกษาในหัวข้อ 4.1 อสมการ และเรื่องต่อ ๆ ไปได้เลย

4.1 อสมการ

จะพบว่ามีการใช้สัญลักษณ์ $>, \geq, <, \leq$ ในทางคณิตศาสตร์อยู่บ่อย ๆ และเราจะเรียกประโยคที่เชื่อมด้วย $>, \geq, <$, หรือ $\leq$ ว่า อสมการ ซึ่งมีกฎข้อบังคับที่ต้องปฏิบัติตาม

บทนิยาม 1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

1. $a < b$ (หรือ $b > a$) ก็ต่อเมื่อ $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก
2. $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ หรือ $a = b$
3. $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ $a > b$ หรือ $a = b$

ปัญหาที่ 1 a, b, c, d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $c > d$, $a < d$, $a > b$ จงเขียนจำนวนดังกล่าวโดยเรียงจากน้อยไปหามาก

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 2 x, y, z เป็นจำนวนจริงและ $x > y > 0$, $z > 0$ จงเติมเครื่องหมาย $<, >$ หรือ $=$ ในข้อความข้างล่างให้ถูกต้อง

1) $x + z$ .... $y + z$
2) xz ...>........ yz
3) x^2 ...?...... y^2
4) $\frac{1}{x}$ ....<... $\frac{1}{y}$

ปัญหาที่ 3 จงเติมเครื่องหมาย $>$ หรือ $<$ ในข้อความข้างล่างให้ถูกต้อง

1) ถ้า $x > y$ และ $z < 0$ แล้ว $x + z$ .... $y + z$
2) ถ้า $x > y$ และ $z < 0$ แล้ว xz .... yz
3) ถ้า $x < y < 0$ แล้ว x^2 ...... y^2
4) ถ้า $0 < x < 1$ และ $0 < y < 1$ แล้ว xy 1
5) ถ้า $x > y$ แล้ว $x - y$ 0
6) ถ้า $x > y > 0$ แล้ว $\frac{x}{y}$ 1
7) ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว x^3 .... x^2
8) ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $(a - b)^2$ 0

ปัญหาที่ 4 ให้ a , b , c , d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > b$, $c - d < b - a$, $a + b = c + d$ จงเขียนจำนวนดังกล่าวโดยเรียงจากน้อยไปหามาก

แนวคิด ....

ปัญหาที่ 5 ถ้า $a > b > 0$ และ $c > d > 0$ จงให้เหตุผลว่าทำไม $\frac{b}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{d}$

แนวคิด ....

....

....

หลักเกณฑ์บางประการของการไม่เท่ากันของจำนวนจริง

1. สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว $a^2 \geq 0$
2. ถ้า $b > 0$ และ $\frac{a}{b} > 1$ แล้ว $a > b$
3. การแสดงว่า $x > y$ สามารถแสดงได้ 2 แบบ อย่างใดอย่างหนึ่งคือ
   (i) $x - y > 0$ หรือ
   (ii) $\frac{x}{y} > 1$ เมื่อ $y > 0$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x \neq y$ จงแสดงว่า $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) &= x^2(x - y) + y^2(y - x)\\ &= (x - y)(x^2 - y^2)\\ &= (x - y)(x + y)(x - y)\\ &= (x - y)^2(x + y) > 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x - y)^2$ และ $(x + y)$ เป็นบวกทั้งคู่

ดังนั้น $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$ #

ปัญหาที่ 6 จากตัวอย่างที่ 1 ทำไมต้องให้ $x \neq y$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 7 จงแสดงว่า $x^3 - y^3 \geq x^2y - xy^2$ เมื่อ $x \geq y$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 8 จงแสดงว่า $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$ สำหรับจำนวนบวก x , y ใด ๆ

แนวคิด ....

....

....

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $x > y > 0$ แล้ว $4x(x + y) > x^2 - y^2$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} 4x(x + y) - (x^2 - y^2) &= 4x(x + y) - (x + y)(x - y) \\ &= (x + y)(4x - (x - y)) \\ &= (x + y)(3x + y) > 0 \end{aligned}$$

เพราะ $(x + y)$ และ $(3x + y)$ เป็นบวกทั้งคู่

ดังนั้น $4x(x + y) > x^2 - y^2$ #

ปัญหาที่ 9 จงแสดงว่า ถ้า $x > y > 0$ แล้ว $x(x - y) > y^2 - x^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 10 จงแสดงว่า ถ้า $x > y > 0$ แล้ว $x(3y - x) < x^2 + y^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 11 x , y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่า $9x(x - y) \geq y(3x - 4y)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 12 จงแสดงว่า

1) $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ สำหรับจำนวนจริง x , y ใด ๆ

แนวคิด ....

....

....

2) $x^2 + y^2 \geq xy$ สำหรับจำนวนจริง x , y ใด ๆ

แนวคิด ....

....

....

3) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ เมื่อ a , b ไม่เป็นจำนวนลบ

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 13 1) ถ้า $a + b = 16$ จงหาค่าของ ab ที่มีค่ามากที่สุด

แนวคิด ....

....

....

2) ถ้า $x^2 + y^2 = 200$ จงหาค่าของ xy ที่มีค่ามากที่สุด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 14 จงแสดงว่า $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ และ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ และเมื่อใดที่ทำให้ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

แนวคิด ....

....

....

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า x , y เป็นจำนวนจริงและ $x \neq y$ จงแสดงว่า $x^2 + y^2 > 2xy$

แนวคิด

$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 > 0$

$x^2 + y^2 - 2xy > 0$

$x^2 + y^2 > 2xy$

ปัญหาที่ 15 จากตัวอย่างที่ 3 เมื่อใดที่ $x^2 + y^2 = 2xy$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 16 ถ้า a และ b เป็นจำนวนบวก จงแสดงว่า $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 17 ถ้า a , b เป็นจำนวนบวก ซึ่ง $a + b = 1$ จงแสดงว่า

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 4$

แนวคิด ....

....

....

2) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

แนวคิด ....

....

....

3) $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) \geq 9$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 18 ถ้า a , b ไม่เป็นจำนวนลบ จงแสดงว่า $\frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$ และเมื่อใดที่ทำให้ทั้งสองค่าเท่ากัน

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 19 ถ้า $a > b > 0$ จงแสดงว่า $4b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < 4a$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 20 ถ้า a และ b เป็นจำนวนบวก จงแสดงว่า $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 21 จงแสดงว่า $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 22 ถ้า $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ จงแสดงว่า $ac + bd \leq 1$ และเมื่อใดที่ทำให้ $ac + bd = 1$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 23 ถ้า x เป็นจำนวนบวก จงแสดงว่า $\frac{x^3-1}{3} \geq \frac{x^2-1}{2} \geq x - 1$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 24 สำหรับจำนวนจริงบวก a , b , c ซึ่ง $a \geq b \geq c$ และ $a + b + c \leq 1$ จงแสดงว่า $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$

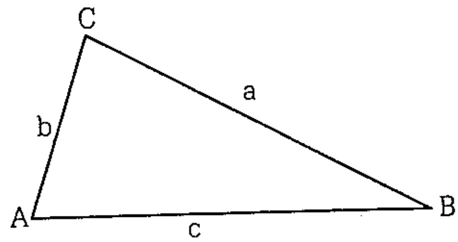
แนวคิด ....

....

....

4.2 อสมการสามเหลี่ยม (The triangle inequality)

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ และด้านตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย ด้านตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย และด้านตรงข้ามมุม C ยาว c หน่วยดังรูป



จะได้ว่า $a, b, c > 0$ และ

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

ปัญหาที่ 25 คุณสามารถสร้างสามเหลี่ยมให้มีความยาวด้านทั้งสามเป็น 8 ซม. , 10 ซม. และ 19 ซม. ได้หรือไม่

ไม่ได้

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 26 ถ้าต้องการสร้างสามเหลี่ยมให้มีความยาวของเส้นรอบรูปยาว 12 ซม. โดยความยาวแต่ละด้านต้องเป็นจำนวนเต็ม จะสามารถสร้างสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันได้กี่รูป อะไรบ้าง

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 27 จงแสดงว่า $a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq 0$ เมื่อ a, b, c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม และ $p + q + r = 0$

แนวคิด ....

....

....

4.3 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต - เรขาคณิต (The Arithmetic - Geometric Mean Inequality)

จากปัญหาที่ 12 ข้อ (3) จะพบว่าสำหรับจำนวนจริง x , y ซึ่งไม่เป็นจำนวนลบ

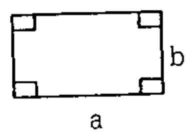
$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

$\frac{1}{2}(x+y)$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต (AM) ของ x และ y

$\sqrt{xy}$ เป็นค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (GM) ของ x และ y

ตัวอย่างที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแบบใดที่จะให้พื้นที่มากที่สุดเมื่อมีความยาวรอบรูปคงที่

แนวคิด ให้ความยาวของรูปเป็น L



จะได้ว่า $L = 2a + 2b$

$$\frac{L}{2} = a + b$$

$$\frac{L}{4} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

และ $(\frac{L}{4})^2$ คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้น ในบรรดาสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความยาวเส้นรอบรูปคงที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีพื้นที่มากที่สุด

ปัญหาที่ 28 ให้ a , b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a+bx^4}{x^2} \geq \sqrt{ab}$ และ x มีค่าเป็นเท่าไรที่ทำให้ $\frac{a+bx^4}{x^2}$ มีค่าน้อยที่สุด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 29 ให้ a , b , c ไม่เป็นจำนวนลบ จงแสดงว่า

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 30 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ เมื่อ a , b , c , d $\geq$ 0 และจะเท่ากันเมื่อใด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 31 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ เมื่อ a , b , c $\geq$ 0 และจะเท่ากันเมื่อใด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 32 ถ้ามีพื้นที่ผิวคงที่ แล้วต้องทำเป็นกล่องให้มีปริมาตรมากที่สุดจะต้องทำกล่องรูปแบบใด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 33 $x^2 + \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ จะมีค่าต่ำสุดเป็นเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 34 $\frac{a+b+c+d+e}{5}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับเท่าไร เมื่อ a , b , c , d , e $\geq$ 0

แนวคิด ให้ $A = \frac{a+b+c+d+e}{5}$

$a + b + c + d + e + A + A + A \geq 8\sqrt[8]{abcdeA^3}$

$5(\frac{a+b+c+d+e}{5}) + 3A \geq 8\sqrt[8]{abcdeA^3}$

....

....

....

ปัญหาที่ 35 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ เมื่อ $a_1 , a_2 , ... , a_n \geq 0$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 36 ให้ a , b เป็นจำนวนบวกและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

1) $\frac{a+2b}{3} \geq \sqrt[3]{ab^2}$

แนวคิด ....

....

....

2) $\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$

แนวคิด ....

....

....

3) $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 37 ถ้า a , b , c เป็นจำนวนจริงบวกที่ต่างกัน จงแสดงว่า

$bc(b + c) + ca(a + c) + ab(a + b) \geq 6abc$

แนวคิด ....

....

....

ตัวอย่างที่ 5 สำหรับ a_1 , a_2 , b_1 , b_2 เป็นจำนวนจริง

จงแสดงว่า $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ และจะเท่ากันเมื่อใด

(เรียกอสมการดังกล่าว ว่า **Cauchy-Schwarz inequality**)

แนวคิด จาก $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $ab \in R$

จะได้ว่า $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2} + \frac{b_1^2}{b_1^2+b_2^2}\right)$ (1)

และ $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \cdot \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2} + \frac{b_2^2}{b_1^2+b_2^2}\right)$ (2)

เอา (1) + (2)

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

ดังนั้น $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$

จะมีค่าเท่ากันเมื่อ

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \text{ และ } \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

นั่นคือ $a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ เมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ หรือ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

ปัญหาที่ 38 จงแสดงว่า $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 39 จงแสดงว่า $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$
และจะเท่ากันเมื่อใด

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 40 จงแสดงว่า $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

แนวคิด ....

....

....

ตัวอย่างที่ 6 จงแสดงว่า $\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2}$

แนวคิด
$$\begin{aligned}(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 &= x_1^2+2x_1y_1+y_1^2+x_2^2+2x_2y_2+y_2^2\\ &= x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2(x_1y_1+x_2y_2)\\ &\leq x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}\\ &= \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^2\end{aligned}$$

นั่นคือ $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^2$

ดังนั้น $\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

ปัญหาที่ 41 จงแสดงว่า

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 42 จงแสดงว่า

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 43 เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ แล้วผลคูณของ $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับเท่าไร

(เรียกว่า Arithmetic mean - Harmonic mean inequality)

แนวคิด ....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 44 จงหาค่าสูงสุดของ $2x + 3y + 6z$ เมื่อ (x, y, z) สอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

แนวคิด ....

....

....

....

ปัญหาที่ 45 จงหาค่าสูงสุดของ $(1 - x)^5(1 + x)(1 + 2x)^2$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 46 จงพิสูจน์ว่า $|x + y| \le |x| + |y|$ (โดยทราบว่า $|x|^2 = x^2$)

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 47 ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2)$$

แนวคิด ....

....

....

....

....

....

ปัญหาที่ 48 ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ แล้ว

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}$$ จะมีค่าต่ำสุดเป็นเท่าไร

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 49 จงแสดงว่า $n[(n + 1)^{\frac{1}{n}} - 1] < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

แนวคิด ....

....

....

ปัญหาที่ 50 จงแสดงว่า $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) < n^n$ เมื่อ $n > 1$

แนวคิด ....

....

....

ภาคผนวก จ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต

ชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

ชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต

ชุดที่ 1

แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลาทำ 3 ชั่วโมง
2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้ออย่างละเอียด

ชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

1. กำหนดให้ $x > 0$ และ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ จงหาค่าของ $x^5 + \frac{1}{x^5}$

2. สัมประสิทธิ์ของ x^{54} ในอนุกรม $\{1 + (1 + x^2) + (1 + x^2)^2 + \ldots + (1 + x^2)^{50}\}$ เท่ากับเท่าไร

3. ให้ $q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ จงหาเศษจากการหาร $q(x^{12})$ ด้วย $q(x)$

4. จงหาเงื่อนไขที่จำเป็นของสัมประสิทธิ์ของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ที่ทำให้รากหนึ่งของสมการเท่ากับกำลังสองของอีกรากหนึ่ง

5. จงหาผลบวก n จำนวนของ 1 , 11 , 111 , 1111 , ...

6. ถ้า $S_n = \frac{1}{(1)(4)} + \frac{1}{(4)(7)} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ จงหา S_n ในรูปของ n

7. จงแสดงว่า $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \geq \dfrac{a_1}{a_n} \cdot \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ สำหรับจำนวนบวก $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$

8. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_1 , a_2 , \ldots , a_m$ เป็นจำนวนที่แตกต่างกันซึ่งผลต่างมีค่าเป็นจำนวนในเซต $\{1 , 2 , \ldots ,n\}$ ในแต่ละ $a_i + a_j \leq n$ สำหรับบาง i , j ซึ่ง $1 \leq i \leq j \leq m$ จะมี k $1 \leq k \leq m$ ซึ่ง $a_i + a_j = a_k$ จงแสดงว่า $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m} \geq \dfrac{n+1}{2}$

9. จงแก้อสมการต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง

$$\sqrt{x^2-6x-1} + \sqrt{x^2-6x-3} + \sqrt{x^2-6x-5} + \sqrt{x^2-6x-7} \geq 5$$

10. สำหรับจำนวนจริง a,b,c ซึ่ง $a \geq b \geq c > 0$ จงแสดงว่า

$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a-4b+c$$

ชุดที่ 2

แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 20 ข้อ ใช้เวลา 4 ชั่วโมง

2. ให้นักเรียนแสดงวิธีทำในแต่ละข้ออย่างละเอียด

ชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต

1. จงอธิบายว่าทำไม

   (1) $2^{98} + 3^{98}$ หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

   (2) $2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ หารด้วย 7 ลงตัว

2. ถ้า $a+b+c=0$ แล้ว $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right)$ มีค่าเท่าไร

3. ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาคำตอบของสมการที่เป็นไปได้ทั้งหมด $x^2 - 871 = y^6$

4. กำหนดให้ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6$ และ $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8$ จงหาค่าของ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

5. จงหาค่าของ a ซึ่งทำให้รากของสมการ $x^2 - (3a + 1)x + (2a^2 - 3a - 2) = 0$ เป็นจำนวนจริงและผลบวกของกำลังสองของรากมีค่าน้อยสุด

6. จงหาคำตอบของสมการ $2x^3 + (k + 2)x^2 + (2k - 2)x + 1 - k = 0$ เมื่อผลบวกของคำตอบของสมการทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{2}$

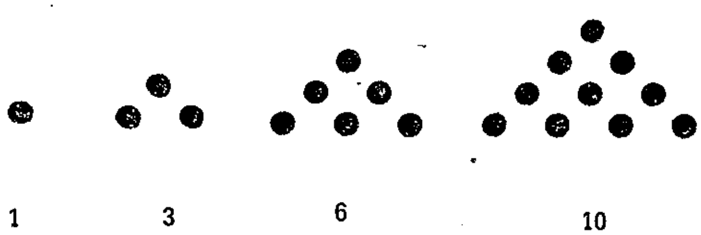
7. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวกและ m , n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x + 3$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ ลงตัว และ $x - 1$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ เหลือเศษ 4 แล้ว m , n มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ให้ a เป็นจำนวนจริง สมการกำลังสอง $x^2 - ax + 12 = 0$ มีรากเป็นจำนวนเต็มที่อยู่ติดกัน จงหารากที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสมการดังกล่าว

9. ถ้าคำตอบของสมการ $x^3 + 3x^2 - 6x + k = 0$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว k มีค่าเท่ากับข้อใด

10. สมการ $x^2 + ax + (b + 2) = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง จงหาค่าต่ำสุดของ $a^2 + b^2$

11. จำนวน 1 , 3 , 6 , 10 เป็น 4 พจน์แรกของจำนวนสามเหลี่ยมดังภาพ



จงหาพจน์ที่ n ของลำดับดังกล่าว

12. ถ้าวาดรูปวงรี 10 รูปบนแผ่นกระดาษ โดยมีเงื่อนไขว่าวงรีแต่ละรูปจะต้องตัดวงรีอื่น ๆ เป็นจำนวน 2 จุด (ตัดน้อยกว่า 2 จุดไม่ได้) และสมมุติว่าไม่มีวงรี 3 รูปใด ๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน จงหาว่าวงรีทั้ง 10 รูปจะแบ่งพื้นที่บนแผ่นกระดาษออกเป็นกี่ส่วน

13. ให้ $S_n = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$ จงหา S_n ในรูปของ x กับ n

14. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า
$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

15. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$

16. จงแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $(a + \frac{1}{a})^3 \geq 8$

17. สำหรับจำนวนเต็มบวก n จงแสดงว่า $n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \ldots + n^{\frac{1}{2n+1}} \geq n\sqrt[n]{2}$

18. ถ้า a , b , c เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงแสดงว่า
$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

19. ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนบวก จงแสดงว่า $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3$

20. ให้ a , b , c , d เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) \geq 16\,abcd$

ภาคผนวก ฉ

แผนการสอน

แผนการสอน

หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

วันที่ 1 8.00 - 11.00 น. ประเมินผลก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ชุดที่ 1

11.00 - 12.00 น. พักรับประทานอาหาร

12.00 - 16.00 น. ประเมินผลก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ชุดที่ 2

แจก บทนำ เรื่องความรู้พื้นฐานให้นักเรียนนำกลับไปอ่านเองที่บ้าน

วันที่ 2 - 3

หน่วยที่ 1

เรื่อง การกระจายและการแยกตัวประกอบ

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถ

1. นำความรู้เรื่องการกระจายและการแยกตัวประกอบไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องทฤษฎีบททวินามไปใช้ได้
3. นำความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกไปใช้ได้

เนื้อหา

1.1 การกระจายและการแยกตัวประกอบที่ควรรู้

1.2 ทฤษฎีบททวินาม

1.3 การแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สื่อการเรียน

แบบเรียนเนื้อหา 1.1 , 1.2 และ 1.3 แบบฝึกทักษะการคิดประกอบด้วยโจทย์ปัญหา 23 ข้อ แบบทดสอบท้ายหน่วยที่ 1 จำนวน 11 ข้อ หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเน้นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของ ซิดนีย์ ปาร์น โดยนักเรียนจะเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ตามลำดับขั้น คือ 1) หาข้อมูล ด้วยการศึกษาเนื้อหา ตัวอย่างในหลักสูตร 2) แสวงหาตัวปัญหาด้วยการวิเคราะห์ปัญหา 3) แสวงหาแนวคิด 4) แสวงหาคำตอบ และ 5) แสวงหาการยอมรับ

วันที่ 2 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 1.1 เรื่องการกระจายและการแยกตัวประกอบที่ควรรู้ โดยนักเรียนจะต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของการกระจายและการแยกตัวประกอบด้วยการศึกษาจากตัวอย่างที่ 1 - 3 โดยครู

เป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 1 - 7 เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 1.2 เรื่องทฤษฎีบททวินาม โดยนักเรียนจะต้องหาผลของการกระจาย $(x \pm a)^n$ เมื่อ n , a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้ และเห็นถึงความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินามด้วยการศึกษาจากตัวอย่างที่ 4 - 6 และครูสนทนาซักถามนักเรียนจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ศึกษาจากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 8 - 19 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "เครื่องตวงเหล้า" เพื่อผ่อนคลาย (relax)

วันที่ 3 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 1.3 เรื่องการแยกตัวประกอบ $x^n \pm y^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยนักเรียนจะต้องแยกตัวประกอบดังกล่าวได้ จากนั้นให้นักเรียนตอบปัญหาที่ 20 - 23 ตามอัธยาศัย โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย และให้นักเรียน สรุป-ทบทวนเนื้อหาเพื่อเตรียมตัวสอบในตอนบ่าย

13.00 - 16.00 น.

ทดสอบท้ายหน่วยที่ 1 จำนวน 11 ข้อ

แจกเอกสารหน่วยที่ 2 ให้นักเรียนนำกลับไปอ่านที่บ้าน

การวัดและประเมินผล

พิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วยที่ 1

วันที่ 4 - 6

หน่วยที่ 2

เรื่อง พหุนาม

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถ

1. นำความรู้เรื่องพหุนามไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องพหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ได้
3. นำความรู้เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนามไปใช้ได้

เนื้อหา

2.1 พหุนาม

2.2 พหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อน

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม

สื่อการเรียน

แบบเรียนเนื้อหา 2.1 , 2.2 และ 2.3 แบบฝึกทักษะการคิดประกอบด้วยโจทย์ปัญหา 30 ข้อ แบบทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 จำนวน 10 ข้อ หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเน้นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของ ซิดนีย์ ปาร์น โดยนักเรียนจะเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ตามลำดับขั้น คือ 1) หาข้อมูล ด้วยการศึกษาเนื้อหา ตัวอย่างในหลักสูตร 2) แสวงหาตัวปัญหาด้วยการวิเคราะห์ปัญหา 3) แสวงหาแนวคิด 4) แสวงหาคำตอบ และ 5) แสวงหาการยอมรับ

วันที่ 4 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.1 เรื่องพหุนาม ซึ่งประกอบด้วยบทนิยาม 1 - 6 ว่าด้วย พหุนาม สมการพหุนาม การเท่ากัน การบวก การลบ การคูณ และ การหาร พหุนาม ทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหาร การหารสังเคราะห์ โดยครูอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่นักเรียนไม่เข้าใจในการพิสูจน์ทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหารและการหารสังเคราะห์ จากนั้นให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 - 3 พร้อมทั้งตอบปัญหาที่ 1 - 3 ศึกษาบทนิยาม 7 ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบ โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 4 - 10 เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "สามเกลอ" เพื่อผ่อนคลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทที่ 4 และบทแทรกที่ 5 โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนาซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนไม่เข้าใจการพิสูจน์ จากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 11 - 18 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย และให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทที่ 6 -8 และบทนิยาม 8 -9 และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 5 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.2 เรื่องพหุนามในระบบจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งประกอบด้วยบทนิยาม 10 - 13 ว่าด้วยจำนวนเชิงซ้อน สังยุค การเท่ากัน การบวก การลบ การคูณ และ การหาร จำนวนเชิงซ้อน และศึกษาทฤษฎีบทที่ 9 - 13 และ บทนิยาม 14 โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาไม่เข้าใจการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ จากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 19 - 24 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "วางเหรียญ" เพื่อผ่อนคลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาที่ 19 - 24 แต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 6 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.3 เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรากและสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม โดยครูซักถามเพิ่มเติมหลังจากที่นักเรียนศึกษาเนื้อหาแล้วจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจ จากนั้นให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 4 ทฤษฎีบทที่ 15 และบทนิยาม 15 แล้วตอบปัญหาที่ 25 - 29 แล้วศึกษากฎของเครื่องหมายของเดส์การ์ตส์ และตอบปัญหาที่ 30 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย และ สรุป-ทบทวนเนื้อหาเพื่อเตรียมตัวสอบในตอนบ่าย

13.00 - 16.00 น.

ทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 จุดประสงค์ที่ 1 จำนวน 10 ข้อ

การวัดและประเมินผล

พิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 จุดประสงค์ที่ 1

วันที่ 7 - 9

หน่วยที่ 2

เรื่อง พหุนาม (ต่อ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถนำความรู้เรื่อง การแก้สมการกำลังสอง กำลังสาม กำลังสี่ ไปใช้ได้

เนื้อหา

2.4 การหารากของสมการกำลังสอง กำลังสาม กำลังสี่

สื่อการเรียน

แบบเรียนเนื้อหา 2.4 แบบฝึกทักษะการคิดประกอบด้วยโจทย์ปัญหา 35 ข้อ แบบทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 จำนวน 15 ข้อ หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเน้นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของ ซิดนีย์ ปาร์น โดยนักเรียนจะเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ตามลำดับขั้น คือ 1) หาข้อมูล ด้วยการศึกษาเนื้อหา ตัวอย่างในหลักสูตร 2) แสวงหาตัวปัญหาด้วยการวิเคราะห์ปัญหา 3) แสวงหาแนวคิด 4) แสวงหาคำตอบ และ 5) แสวงหาการยอมรับ

วันที่ 7 9.00 - 12.00 น. และ 13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.4 เรื่องการหารากของสมการกำลังสอง ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎีบทที่ 17 ว่าด้วยสูตรการหารากของสมการกำลังสองและข้อสังเกตต่าง ๆ ของสมการพหุนามกำลังสอง โดยครูอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่นักเรียนไม่เข้าใจ จากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 31 - 52 ตามอัธยาศัย โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "ข้ามฟาก" และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 8 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.4 เรื่องการหารากของสมการกำลังสาม ซึ่งประกอบด้วย บทนิยาม 16

สมการกำลังสามลดรูป ทฤษฎีบทที่ 18 รากของสมการกำลังสาม และ วิธีหารากของสมการกำลังสามลดรูป แล้วครูสนทนาซักถามเพิ่มเติมจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจ และให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 8 - 9 พร้อมทั้งจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 53 - 59 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย เปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 2.4 เรื่องการหารากของสมการกำลังสี่ ซึ่งประกอบด้วย วิธีการหารากของสมการกำลังสี่รูปแบบหนึ่ง แล้วครูสนทนาซักถามนักเรียนจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจและให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 10 จากนั้นให้นักเรียนตอบปัญหาที่ 60 ศึกษาทฤษฎีบทที่ 19 - 20 และพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 20 ส่วนที่เหลือ โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนาซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ นักเรียนจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 61 - 65 เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จแล้วให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย

วันที่ 9 9.00 - 12.00 น.

ทดสอบท้ายหน่วยที่ 2 จำนวน 15 ข้อ

การวัดและประเมินผล

พิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วยที่ 2

วันที่ 9 - 12

หน่วยที่ 3

เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถ

1. นำความรู้เรื่องลำดับ และ อนุกรมไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิตไปใช้ได้
3. นำความรู้เรื่องอนุกรมอื่น ๆ ที่ควรทราบไปใช้ได้
4. นำความรู้เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้ได้

เนื้อหา

3.1 ลำดับ และ อนุกรม

3.2 อนุกรมเลขคณิต และ อนุกรมเรขาคณิต

3.3 อนุกรมอื่น ๆ ที่ควรทราบ

3.4 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

สื่อการเรียน

แบบเรียนเนื้อหา 3.1 , 3.2 , 3.3 และ 3.4 แบบฝึกทักษะการคิดประกอบด้วยโจทย์ปัญหา 48 ข้อ แบบทดสอบท้ายหน่วยที่ 3 จำนวน 10 ข้อ หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเน้นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของ ซิดนีย์ ปาร์น โดยนักเรียนจะเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ตามลำดับขั้น คือ 1) หาข้อมูล ด้วยการศึกษาเนื้อหา ตัวอย่างในหลักสูตร 2) แสวงหาตัวปัญหาด้วยการวิเคราะห์ปัญหา 3) แสวงหาแนวคิด 4) แสวงหาคำตอบ และ 5) แสวงหาการยอมรับ

วันที่ 9 13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และเนื้อหา 3.1 เรื่องลำดับและอนุกรม และครูสนทนาซักถามนักเรียนจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ศึกษา จากนั้นให้นักเรียนจับคู่เพื่อตอบปัญหาที่ 1 - 12 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "ตัวคิง" และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 10 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 3.2 เรื่องอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต พร้อมตอบปัญหาที่ 13 - 21 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา 3.3 เรื่องอนุกรมอื่น ๆ ที่ควรทราบ และ อนุกรมที่ได้จากพหุนาม โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ ให้นักเรียนจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 22 - 38 เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จแล้วให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้

เห็นแนวคิดที่หลากหลาย มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "เหรียญปลอม" และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 11 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนตอบปัญหาที่ 39 จากนั้นศึกษาตัวอย่างที่ 3 แล้วให้นักเรียนจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 40 - 43 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย จากนั้นให้นักเรียนศึกษาลำดับฟีโบนักชี และเติมช่องว่างให้สมบูรณ์ ศึกษาหอคอยฮานอยพร้อมเติมช่องว่างให้สมบูรณ์ โดยครูสนทนาซักถามถึงสิ่งที่เติม จนได้ความสมบูรณ์ถูกต้อง

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาบทนิยาม 5 และ ตัวอย่างที่ 4 และศึกษาการแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบการทำซ้ำ จากตัวอย่างที่ 5 พร้อมกับเติมช่องว่างในตัวอย่างที่ 5 ให้สมบูรณ์และตอบปัญหาที่ 44 จากนั้นให้นักเรียนศึกษาการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว จากทฤษฎีบท 1 - 3 และตัวอย่างที่ 6 - 7 โดยครูสนทนาซักถามนักเรียนและอธิบายเพิ่มเติมจนแน่ใจว่านักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ศึกษา ให้นักเรียนตอบปัญหาที่ 45 พร้อมนำเสนอหน้าชั้นเรียน

วันที่ 12 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธุ์ โดยครูเป็นผู้อธิบายพร้อมยกตัวอย่างที่ 8 และให้นักเรียนศึกษาตารางแสดงรูปแบบของผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดพร้อมทั้งตอบปัญหาที่ 46 - 48 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย และ สรุป-ทบทวนเนื้อหาเพื่อเตรียมตัวสอบในตอนบ่าย

13.00 - 16.00 น.

ทดสอบท้ายหน่วยที่ 3 จำนวน 10 ข้อ

แจกเอกสารหน่วยที่ 4 ให้นักเรียนนำกลับไปอ่านที่บ้าน

การวัดและประเมินผล

พิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วยที่ 3

วันที่ 13 - 15

หน่วยที่ 4

เรื่อง อสมการ

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบแล้วนักเรียนสามารถ

1. นำความรู้เรื่องอสมการไปใช้ได้
2. นำความรู้เรื่องอสมการสามเหลี่ยมไปใช้ได้
3. นำความรู้เรื่องอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตไปใช้ได้

เนื้อหา

4.1 อสมการ

4.2 อสมการสามเหลี่ยม

4.3 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต

สื่อการเรียน

แบบเรียนเนื้อหา 4.1 , 4.2 และ 4.3 แบบฝึกทักษะการคิดประกอบด้วยโจทย์ปัญหา 50 ข้อ แบบทดสอบท้ายหน่วยที่ 4 จำนวน 10 ข้อ หนังสือและเอกสารต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาของหลักสูตร

กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเน้นรูปแบบการเรียนการสอนการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ของ ซิดนีย์ ปาร์น โดยนักเรียนจะเรียนรู้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ตามลำดับขั้น คือ 1) หาข้อมูล ด้วยการศึกษาเนื้อหา ตัวอย่างในหลักสูตร 2) แสวงหาตัวปัญหาด้วยการวิเคราะห์ปัญหา 3) แสวงหาแนวคิด 4) แสวงหาคำตอบ และ 5) แสวงหาการยอมรับ

วันที่ 13 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาเรื่องระบบจำนวนจริง และ อสมการ พร้อมทั้งตอบปัญหาที่ 1 - 5 ตามอัธยาศัย โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วยการสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จแล้ว ให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน จากนั้นให้นักเรียนศึกษาหลักเกณฑ์บางประการของการไม่เท่ากันของจำนวนจริง ตัวอย่างที่ 1 แล้วจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่6 - 14 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 3 แล้วจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 15 - 24 โดยครูเป็นเพียงผู้ชี้แนะด้วย

การสนทนา ซักถามเพิ่มเติมในกรณีที่นักเรียนมีปัญหาต้องการความช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนตอบปัญหาเสร็จแล้วให้ส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน มีการสอดแทรกเกมฝึกสมอง "ใครคือพลซับ" และเปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นได้คิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 14 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาอสมการสามเหลี่ยม แล้วตอบปัญหาที่ 25 - 27 ตามอัธยาศัย แล้วส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน จากนั้นให้นักเรียนศึกษาเรื่อง อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต - เรขาคณิต จากตัวอย่างที่ 4 แล้วจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 28 - 37 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย

13.00 - 16.00 น.

ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 5 และ ตัวอย่างที่ 6 แล้วจับคู่กันเพื่อตอบปัญหาที่ 38 - 50 โดยครูจะให้การช่วยเหลือชี้แนะในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ จากนั้นให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาแต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย เปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิดเพื่อผ่อนคลาย

วันที่ 15 9.00 - 12.00 น.

ให้นักเรียนส่งตัวแทนนำเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาที่ 38 - 50 (ต่อ) แต่ละข้อหน้าชั้นเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีรูปแบบการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันได้นำเสนอเพื่อให้เห็นแนวคิดที่หลากหลาย เปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอเกมฝึกสมองให้เพื่อนคนอื่นคิด และ สรุป-ทบทวนเนื้อหาเพื่อเตรียมตัวสอบในตอนบ่าย

13.00 - 16.00 น.

ทดสอบท้ายหน่วยที่ 4 จำนวน 10 ข้อ

การวัดและประเมินผล

พิจารณาจากพฤติกรรมของนักเรียน การซักถามพูดคุยกับนักเรียน การเสนอรูปแบบการแก้ปัญหาของนักเรียน การทดสอบท้ายหน่วยที่ 4

วันที่ 16 8.00 - 11.00 น. ประเมินผลหลังเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ชุดที่ 1

11.00 - 12.00 น. พักรับประทานอาหาร

12.00 - 16.00 น. ประเมินผลหลังเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ชุดที่ 2

หมายเหตุ

1. ครูควรศึกษาเนื้อหาและแก้โจทย์ปัญหาทุกข้อให้ได้ก่อนที่จะไปทำการสอนเพื่อจะได้ทราบรายละเอียดของเนื้อหา วิธีการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อและพร้อมที่จะให้การช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา

2. การดำเนินการสอนอาจมีการยืดหยุ่นและปรับเปลี่ยนแผนการสอนได้ตามความเหมาะสม

3. การนำเสนอรูปแบบการแก้โจทย์ปัญหาแต่ละข้อของนักเรียนที่มีวิธีการที่แตกต่างกัน ถ้าเวลาไม่พอที่จะให้นักเรียนนำเสนอทุกรูปแบบหน้าชั้นเรียนอาจใช้วิธีนำเสนอด้วยการจัดบอร์ด

4. ในการทดสอบท้ายหน่วย นักเรียนทุกคนควรทำได้ไม่น้อยกว่า 50 % กรณีที่นักเรียนทำได้ไม่ถึง 50 % ไม่ถือเป็นสาระว่าห้ามเรียนหน่วยต่อไปและไม่มีการซ่อมเสริม เพราะการซ่อมเสริมเป็นการทำให้นักเรียนรู้สึกอับอาย และโดยธรรมชาติของเด็กเก่งจะมีความพยายามในการแก้โจทย์ปัญหาให้ได้อยู่แล้ว

ภาคผนวก ช

แบบประเมินความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญ

แบบประเมินโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

แบบประเมินฉบับนี้เป็นแบบประเมินโครงร่างหลักสูตร จัดทำขึ้นเพื่อให้ท่านซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญได้กรุณาประเมินความเหมาะสม และสอดคล้องระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตร โดยการทำเครื่องหมาย / ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุด และเขียนข้อเสนอแนะอื่น ๆ

แบบประเมินมีอยู่ทั้งหมด 3 ตอนคือ

1. แบบประเมินความหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต
2. แบบประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต
3. แบบสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับหลักสูตรพีชคณิต

ข้อมูลส่วนตัว

ผู้เชี่ยวชาญสาขา..

ประสบการณ์ในการทำงาน..................................ปี

สถานที่ทำงาน...

....

ตอนที่ 1 : แบบประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

คำชี้แจง : หลังจากพิจารณาหลักสูตรแล้วขอให้ท่านพิจารณาว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตรใน ข้อต่อไปนี้มีความเหมาะสมมากน้อยเพียงใด

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร					
1.1 ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ใช้ความสามารถอย่างแท้จริง					
1.2 พัฒนาความสามารถด้านการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และความคิดระดับสูง					
1.3 สร้างเสริมผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์					
1.4 ปฏิบัติจริง					
1.5 ส่งเสริมการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง					
1.6 ส่งเสริมการสร้างสรรค์ผลงานตามความความสามารถและความสนใจของผู้เรียน					
1.7 พัฒนาศักยภาพของผู้เรียนให้ได้ขีดสูงสุด					
1.8 ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาหลัก ๆ ทางทฤษฎีจำนวน					
2. เนื้อหาของหลักสูตร					
2.1 เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียนซึ่งเป็นเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์					
2.2 นำไปปฏิบัติได้จริง					
2.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
2.4 การกำหนดหัวข้อของเนื้อหาในหลักสูตรมีความเหมาะสม					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
2.5 การกำหนดเนื้อหาในแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม					
2.6 มีการจัดเรียงลำดับอย่างเหมาะสม					
2.7 มีความเหมาะสมกับระยะเวลาที่กำหนด					
3. กิจกรรมการเรียนการสอน					
3.1 ในแผนการสอนแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม					
3.2 เหมาะสมกับศักยภาพของเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์					
3.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
3.4 ส่งเสริมด้านการคิดด้านการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์					
3.5 ส่งเสริมการคิดระดับสูง					
3.6 เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร					
3.7 เหมาะสมกับเนื้อหาของแต่ละหน่วย					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
3.8 มีความเหมาะสมกับการเรียนรู้ของเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์					
3.9 เหมาะสมในการนำไปปฏิบัติจริง					
3.10 ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเอง					
3.11 ส่งเสริมให้ผู้เรียนศึกษาหาความรู้ตามความสามารถและความสนใจ					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
3.12 ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีโอกาสลงมือปฏิบัติงานในระดับที่ทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างจริงจัง					
4. สื่อการเรียน					
4.1 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร					
4.2 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน					
4.3 เหมาะสมกับการส่งเสริมการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง					
4.4 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
5. การวัดและประเมินผล					
5.1 เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร					
5.2 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร					
5.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
5.4 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน					
5.5 เหมาะสมกับการวัดความสามารถที่แท้จริงของผู้เรียน					
5.6 เหมาะสมกับการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์และความคิดระดับสูง					
5.7 เหมาะสมกับการวัดความรอบรู้ในเนื้อหาทางพีชคณิต					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
6. แผนการสอน					
6.1 ส่วนประกอบ (เวลา เนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม แนวทางการจัดกิจกรรมและวิธีสอน สื่อการเรียน และการวัดและประเมินผล) ในแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
6.2 รายละเอียดในแต่หน่วยมีความเหมาะสม					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
6.3 ในแต่ละหน่วยเหมาะกับการนำไปปฏิบัติจริง					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					

ตอนที่ 2 : แบบประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต

คำชี้แจง : ให้ท่านพิจารณาว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของหลักสูตร (จุดมุ่งหมาย เนื้อหา กิจกรรมและวิธีสอน สื่อการสอน การวัดและประเมินผล และแผนการสอน) มีความสอดคล้องกันหรือไม่

ประเด็นการประเมิน	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับเนื้อหาของหลักสูตร			
2. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับกิจกรรมและวิธีสอน			
3. เนื้อหาของหลักสูตรกับจำนวนหน่วยการเรียน			
4. เนื้อหาแต่ละหน่วยการเรียนกับเวลา			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
5. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับกิจกรรมและวิธีการสอน			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
6. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับสื่อการเรียน			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			

ประเด็นการประเมิน	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
7. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับการวัดและประเมินผล			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
8. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนกับแผนการเรียน			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
9. กิจกรรมและวิธีสอนกับสื่อการเรียนในแต่ละหน่วย			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
10. กิจกรรมและวิธีสอนกับการวัดและประเมินผล			
11. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมในแผนการเรียนกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร			

ตอนที่ 3 : แบบสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติมเกี่ยวกับหลักสูตรพีชคณิต

คำชี้แจง : โปรดแสดงความคิดเห็นหรือให้ข้อเสนอแนะอื่น ๆ เพื่อผู้วิจัยจะได้ปรับปรุงแก้ไขโครงร่างหลักสูตรให้ดีขึ้น ก่อนที่จะนำไปทดลองใช้ต่อไป

1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไรและคิดว่ามีจุดใดควรแก้ไขบ้าง

....

....

....

....

2. เนื้อหาของหลักสูตร ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไรและคิดว่ามีจุดใดควรแก้ไขบ้าง (กรุณาช่วยพิจารณาการเขียนเนื้อหาในแต่ละหน่วย พร้อมทั้งช่วยแก้ไขและเสนอแนะลงในเอกสารหลักสูตร)

....

....

....

....

3. การจัดกิจกรรมและวิธีสอน ท่านคิดว่ามีจุดใดควรแก้ไขเพิ่มเติมบ้าง

....

....

....

....

4. ท่านคิดว่าสื่อการเรียนการสอนควรมีอะไรเพิ่มเติมบ้าง

....

....

....

....

5. ท่านคิดว่าวิธีการวัดและประเมินผลควรมีส่วนแก้ไขเพิ่มเติมอย่างไรบ้าง

....

....

....

....

6. แผนการเรียน ท่านคิดว่ามีส่วนใดควรแก้ไขเพิ่มเติมบ้าง (กรุณาช่วยพิจารณาการเขียนแผนการเรียนใน แต่ละหน่วย พร้อมทั้งช่วยแก้ไขและเสนอแนะลงในเอกสารหลักสูตร)

....

....

....

....

7. ความคิดเห็นเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นของหลักสูตร

....

....

....

....

8. อื่น ๆ

....

....

....

....

คำชี้แจง

แบบทดสอบฉบับนี้ พัฒนาขึ้นเพื่อนำไปใช้ทดสอบกับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ (ที่ผ่านกระบวนการคัดเลือก) ก่อนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิต เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยก่อนและหลังเรียนหลักสูตร ซึ่งเป็นการตรวจสอบดูว่านักเรียนได้เกิด "การรอบรู้" ตามเนื้อหาที่สอนหรือไม่ และใช้สำหรับพิจารณาความก้าวหน้าของผู้เรียนหลักสูตรนี้ พร้อมทั้งตรวจว่าผู้เรียนได้คะแนนผลการทดสอบหลังเรียนมากกว่าหรือเท่ากับเกณฑ์ที่ผู้วิจัยกำหนดไว้หรือไม่

1. ขั้นตอนการหาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ของแบบทดสอบฉบับนี้

ขอให้ผู้เชี่ยวชาญแสดงความคิดเห็นโดยพิจารณาว่าข้อคำถามแต่ละข้อกับหัวข้อเนื้อหาในแต่ละหน่วยที่กำหนดมีความสอดคล้องกันหรือไม่

โปรดแสดงความคิดเห็นโดยทำเครื่องหมาย / ในช่อง 1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นกับหัวข้อเนื้อหาที่กำหนดมีความสอดคล้องกัน

0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นกับหัวข้อเนื้อหาที่กำหนดมีความสอดคล้องกัน

-1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นกับหัวข้อเนื้อหาที่กำหนดไม่มีความสอดคล้องกัน

2. ขั้นตอนการหาเกณฑ์มาตรฐาน (คะแนนจุดตัด) ของแบบทดสอบฉบับนี้

ขอให้ท่านผู้เชี่ยวชาญ ช่วยพิจารณาข้อคำถามแต่ละข้อของแบบทดสอบฉบับนี้ โดยแสดงความคิดเห็นว่าค่าความน่าจะเป็นที่ท่านคิดว่านักเรียน (นักเรียนที่ผ่านการเรียนหลักสูตรพีชคณิต) ที่มีสมรรถภาพขั้นต่ำสุด จะสามารถตอบข้อสอบแต่ละข้อได้ถูกต้องเป็นเท่าไร

ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญมีค่ายิ่งต่อการพัฒนาเครื่องมือ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ แบบอิงเกณฑ์ วัดความรอบรู้และความสามารถในเนื้อหาพีชคณิต สำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ชุดที่ 1 : แบบทดสอบวัดการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

ข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	พิจารณาความสอดคล้องระหว่าง ข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา			ความน่าจะเป็นในการตอบถูกตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ	
	1	0	-1	ข้อ	ความน่าจะเป็น
ข้อ 1 กับเนื้อหา หน่วยที่ 1				1	
ข้อ 2 กับเนื้อหา หน่วยที่ 1				2	
ข้อ 3 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				3	
ข้อ 4 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				4	
ข้อ 5 กับเนื้อหา หน่วยที่ 3				5	
ข้อ 6 กับเนื้อหา หน่วยที่ 3				6	
ข้อ 7 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				7	
ข้อ 8 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				8	
ข้อ 9 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				9	
ข้อ 10 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				10	

ความคิดเห็นเพิ่มเติม

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ชุดที่ 2 : แบบทดสอบวัดความรอบรู้ทางพีชคณิต

ข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	พิจารณาความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา			ความน่าจะเป็นในการตอบถูกตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ	
	1	0	-1	ข้อ	ความน่าจะเป็น
ข้อ 1 กับเนื้อหา หน่วยที่ 1				1	
ข้อ 2 กับเนื้อหา หน่วยที่ 1				2	
ข้อ 3 กับเนื้อหา หน่วยที่ 1				3	
ข้อ 4 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				4	
ข้อ 5 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				5	
ข้อ 6 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				6	
ข้อ 7 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				7	
ข้อ 8 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				8	
ข้อ 9 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				9	
ข้อ 10 กับเนื้อหา หน่วยที่ 2				10	
ข้อ 11 กับเนื้อหา หน่วยที่ 3				11	
ข้อ 12 กับเนื้อหา หน่วยที่ 3				12	
ข้อ 13 กับเนื้อหา หน่วยที่ 3				13	
ข้อ 14 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				14	
ข้อ 15 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				15	
ข้อ 16 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				16	
ข้อ 17 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				17	
ข้อ 18 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				18	
ข้อ 19 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				19	
ข้อ 20 กับเนื้อหา หน่วยที่ 4				20	

ความคิดเป็นเพิ่มเติม

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

คำชี้แจง

แบบทดสอบฉบับนี้ พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ (Creative problem - solving) ทางคณิตศาสตร์ ภายใต้กรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ในขั้นตอนของการหาคุณภาพแบบทดสอบฉบับนี้ประกอบไปด้วย

1. ขั้นตอนการหาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ของแบบทดสอบฉบับนี้

ขอให้ผู้เชี่ยวชาญแสดงความคิดเห็นโดยพิจารณาว่าข้อคำถามแต่ละข้ออยู่ภายใต้กรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จริงหรือไม่ และได้โปรดแสดงความคิดเห็น โดยทำเครื่องหมาย / ในช่อง 1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในกรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้น ม. 1
0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในกรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้น ม. 1
-1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นไม่อยู่ในกรอบความรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้น ม. 1

2. ขั้นตอนการความเที่ยงตรงเชิงแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์

ขอให้ผู้เชี่ยวชาญแสดงความคิดเห็นด้วยการพิจารณาข้อคำถามแต่ละข้อว่าต้องใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาหรือไม่ และได้โปรดแสดงความคิดเห็น โดยทำเครื่องหมาย / ในช่อง 1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา
0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา
-1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อคำถามนั้นไม่ใช้ความสามารถอย่างสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหา

ข้อที่	ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา			ความเที่ยงตรงเชิงแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์		
	1	0	-1	1	0	-1
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						

ข้อที่	ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา			ความเที่ยงตรงเชิงแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์		
	1	0	-1	1	0	-1
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						

ความคิดเห็นเพิ่มเติม

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

หมายเหตุ

ความคิดสร้างสรรค์ (creative thinking) หมายถึง ความสามารถในการคิดสิ่งที่แปลกใหม่ (novelty) ในแง่มุมต่าง ๆ และเป็นความคิดที่มีประโยชน์และมีคุณค่า ซึ่งความสามารถในการคิดนี้ประกอบด้วย 1) ความคล่องตัว (fluency) 2) ความหยืดหยุ่น (flexibility) 3) ความริเริ่ม (initiation) 4) ความละเอียดลออ (elaboration)

การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ (creative problem solving) หมายถึงกระบวนการที่ซับซ้อนทางสมองซึ่งเกี่ยวข้องกับการหยั่งเห็นการจินตนาการ การจัดกระทำ และการรวบรวมความคิด โดยอาศัยความสามารถในการคิดอย่างสร้างสรรค์ แล้วนำมาแก้ปัญหาใหม่ที่ประสบ

ภาคผนวก ซ

การคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

การคำนวณคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์โดยวิธีของเบอร์ก

การคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

การคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์

การหาความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ โดยใช้สูตรของคาร์เวอร์

แบบทดสอบชุดที่ 1	แบบทดสอบชุดที่ 2	แบบทดสอบทั้งฉบับ
คะแนนจุดตัด 17 คะแนน	คะแนนจุดตัด 35 คะแนน	คะแนนจุดตัด 52 คะแนน
a = 45	a = 45	a = 45
b = 0	b = 0	b = 0
c = 5	c = 4	c = 3
d = 11	d = 12	d = 13

$$p = \frac{45 + 5}{45 + 0 + 5 + 11} = 0.81 \qquad p = \frac{45 + 4}{45 + 0 + 4 + 12} = 0.80 \qquad p = \frac{45 + 3}{45 + 0 + 3 + 13} = 0.78$$

ดังนั้นคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ โดยใช้เทคนิคของแองกอฟ มีค่าความเชื่อมั่นที่ใช้สูตรของคาร์เวอร์ ดังนี้

แบบทดสอบชุดที่ 1	คะแนนจุดตัด 17 คะแนน	มีค่าความเชื่อมั่นเป็น 0.81
แบบทดสอบชุดที่ 2	คะแนนจุดตัด 35 คะแนน	มีค่าความเชื่อมั่นเป็น 0.80
แบบทดสอบทั้งฉบับ	คะแนนจุดตัด 52 คะแนน	มีค่าความเชื่อมั่นเป็น 0.78

หมายเหตุ

1. ผลการสอบของนักเรียนกลุ่มที่ไม่ผ่านเกณฑ์ภายนอกที่สอบด้วยข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ จำนวน 45 คน ปรากฏว่า ทุกคนได้คะแนน 0 คะแนน
2. ผลการสอบของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ภายนอก แสดงในตาราง ก.

ตาราง ก ผลการสอบของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ (รอบพิเศษ)ที่สอบด้วยข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ (กลุ่มรอบรู้)

คนที่	แบบทดสอบ ชุดที่1	แบบทดสอบ ชุดที่ 2	แบบทดสอบ ทั้งฉบับ
1	4	10	14
2	0	5	5
3	1	7	8
4	5	6	11
5	5	6	11
6	1	6	7
7	5	10	15
8	6	12	18
9	8	13	21
10	2	7	9
11	4	5	9
12	3	12	15
13	3	6	9
14	9	7	16
15	7	14	21
16	5	9	14
คะแนนเฉลี่ย	4.25	8.43	12.68

ตาราง ข ผลการสอบของนักเรียนกลุ่มที่ไม่มีความรอบรู้ (กลุ่มไม่รอบรู้)

คนที่	แบบทดสอบ ชุดที่1	แบบทดสอบ ชุดที่ 2	แบบทดสอบ ทั้งฉบับ
1	4	10	14
2	0	5	5
3	1	7	8
4	5	6	11
5	5	6	11
6	1	6	7
7	5	10	15
8	6	12	18
9	8	13	21
10	2	7	9
11	4	5	9
12	3	12	15
13	3	6	9
14	9	7	16
15	7	14	21
16	5	9	14
คะแนนเฉลี่ย	4.25	8.43	12.68

การคำนวณคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์โดยวิธีของเบอร์ก

เกณฑ์ภายนอก

	กลุ่มรอบรู้	กลุ่มไม่รอบรู้
สูงกว่าหรือเท่ากับคะแนนจุดตัด	TM	FM
ต่ำกว่าคะแนนจุดตัด	FN	TN

$P(TM) = TM / (M+N)$

$P(FM) = FM / (M+N)$

$P(TN) = TN / (M+N)$

$P(FN) = FN / (M+N)$

$BR = P(FN) + P(TM)$

$SR = P(TM) + P(FM)$

ความน่าจะเป็นของการตัดสินถูก $= P(TM) + P(TN)$

ความน่าจะเป็นของการตัดสินผิด $= P(FM) + P(FN)$

สัมประสิทธิ์ความแม่นตรง $\varnothing_{vc} = \dfrac{P(TM) - BR(SR)}{\sqrt{BR(1-BR)SR(1-SR)}}$

คะแนนจุดตัด ชุดที่ 1	ความน่าจะเป็นในการตัดสิน ถูก	ผิด	สัมประสิทธิ์ความแม่นตรง
9	.96*	.03*	.93*
10	.96	.03	.93
11	.84	.15	.72

คะแนนจุดตัด ชุดที่ 2	ความน่าจะเป็นในการตัดสิน ถูก	ผิด	สัมประสิทธิ์ความแม่นตรง
16	1*	0*	1*
20	.93	.06	.88
21	.87	.12	.77

คะแนนจุดตัด ทั้งฉบับ	ความน่าจะเป็นในการตัดสิน ถูก	ผิด	สัมประสิทธิ์ความแม่นตรง
26	1*	0*	1*
29	.96	.03	.93
30	.93	.06	.88

ดังนั้นคะแนนจุดตัดของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ โดยวิธีของเบอร์กมีค่า ดังนี้

แบบทดสอบชุดที่ 1 คะแนนจุดตัด 9 คะแนน มีค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงเป็น .93

แบบทดสอบชุดที่ 2 คะแนนจุดตัด 16 คะแนน มีค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงเป็น 1

แบบทดสอบทั้งฉบับ คะแนนจุดตัด 26 คะแนน มีค่าสัมประสิทธิ์ความแม่นตรงเป็น 1

การคำนวณค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

ตาราง A ผลการสอบของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ (กลุ่มพิเศษ) และนักเรียนกลุ่มปกติที่สอบด้วยแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์

นักเรียนกลุ่มพิเศษ		นักเรียนกลุ่มปกติ	
คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน
1	20	1	3
2	23	2	0
3	28	3	4
4	21	4	1
5	17	5	1
6	19	6	2
7	17	7	1
8	25	8	6
9	20	9	2
10	21	10	5
11	17	11	2
12	18	12	2
13	24	13	0
14	19	14	2
15	28	15	2
16	22	16	2
17	23	17	4
18	24	18	0
19	23	19	3
20	26	20	0
21	22	21	3
22	26	22	3
23	24	23	0
24	20	24	4
25	14	25	3
26	22	26	2

ตาราง A (ต่อ)

นักเรียนกลุ่มพิเศษ		นักเรียนกลุ่มปกติ	
คนที่	คะแนน	คนที่	คะแนน
27	14	27	0
28	23	28	4
29	22	29	4
30	23	30	0
31	20	31	1
32	24	32	0
33	22	33	0
34	22	34	0
35	18	35	0
36	21	36	1
37	19	37	2

การหาความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรของคาร์เวอร์ ที่มีคะแนนจุดตัด 14 คะแนน

$a = 37 \qquad b = 0 \qquad c = 37 \qquad d = 0$

$$p = \frac{37 + 37}{37 + 0 + 37 + 0} = 1$$

ดังนั้น แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ มีความเชื่อมั่นเป็น 1 ที่คะแนนจุดตัด 14 คะแนน

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นางสาวยุพร ริมชลการ
เกิด	8 มีนาคม 2504
สถานที่เกิด	อำเภอหันคา จังหวัดชัยนาท
ที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 633 หมู่ 6 ต.หนองไผ่ อ.หนองไผ่ จ.เพชรบูรณ์ 67140
ตำแหน่ง	อาจารย์ 2
สถานที่ทำงาน	โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏเลย

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2523	ม.ศ.5 (วิทยาศาสตร์)	จากโรงเรียนหนองไผ่ จ.เพชรบูรณ์
พ.ศ. 2525	ป.กศ.สูง (คณิตศาสตร์)	จากวิทยาลัยครูเพชรบูรณ์
พ.ศ. 2527	ศษ.บ. (คณิตศาสตร์)	จากมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ. 2534	ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์)	จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
พ.ศ. 2543	กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา)	จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
ที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

บทคัดย่อ

ของ

ยุพร ริมชลการ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา
กันยายน 2543

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายของการวิจัย เพื่อพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และทดลองใช้หลักสูตรที่พัฒนาขึ้นพร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของหลักสูตร

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในเขตกรุงเทพมหานครและปริมณฑลจำนวน 17 คนที่สอบผ่านเกณฑ์คัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ด้วยเครื่องมือคัดเลือกเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 1) แบบเสนอชื่อ 2) แบบทดสอบการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ และ 3) แบบทดสอบวัดความคิดระดับสูง จากนักเรียนที่ได้รับการเสนอชื่อจำนวน 97 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย 1) แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรพีชคณิต 2) หลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ 3) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลโดย 1) นำหลักสูตรพีชคณิตและแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงร่างหลักสูตรไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านประเมิน จากนั้นนำผลการประเมินมาวิเคราะห์หาความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตร ความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ $\bar{X}$, S.D. และดัชนีความสอดคล้อง IOC 2) ทดลองใช้หลักสูตร โดยให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทดสอบก่อนเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้ง 2 ชุด จากนั้นทดลองสอนตามแผนการสอนโดยใช้เวลาตลอดหลักสูตร 98 ชั่วโมง แล้วทดสอบหลังเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ทั้ง 2 ชุด จากนั้นนำคะแนนก่อนและหลังเรียนมาวิเคราะห์หาค่า t - test และนำคะแนนหลังเรียนมาหาค่า $\bar{X}$ และ S.D.

ผลการวิจัยปรากฏดังนี้

1. การประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรพีชคณิตโดยผู้เชี่ยวชาญ ปรากฏว่า องค์ประกอบในหลักสูตรมีความเหมาะสมมากกับมากที่สุด โดยมีค่า $\bar{X}$ ระหว่าง 3.67 - 5.00 ค่า S.D. ระหว่าง 0.00 - 0.94 และการประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร ปรากฏว่า องค์ประกอบในหลักสูตรมีความสอดคล้องกัน โดยมีค่าดัชนีความสอดคล้อง IOC ระหว่าง 0.66 - 1.00

2. การวิเคราะห์คะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบอิงเกณฑ์ ปรากฏว่า คะแนนที่ได้จากการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยคะแนนหลังเรียนสูงกว่าคะแนนก่อนเรียน และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนหลักสูตรพีชคณิตมีค่าเท่ากับ 59.11 ซึ่งมีค่ามากกว่าคะแนนจุดตัด (52 คะแนน)

THE DEVELOPMENT OF ALGEBRA PROGRAM FOR SECONDARY MATHEMATICALLY TALENTED STUDENTS

AN ABSTRACT

BY

YUPORN RIMCHOLAKARN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Doctor of Education degree in Mathematics Education
at Srimakharinwirot University
S
september 2000

The purposes of this research were to develop the algebra program for secondary mathematically talented students, to try out the developed program and to find out the efficient program.

The experimental group was 17 secondary school students in Bangkok and in the surrounded areas which passed the mathematically talented test. The tests consisted of 1) the nomination form 2) the tests on creative problem solving in mathematics and 3) the high level of thinking tests of 97 students whose names were nominated.

The research instruments were 1) the thinking assessment forms of the experts about the algebra program structures 2) the algebra program for secondary mathematically talented students and 3) the criterion standard achievement test. The researcher collected data by 1) the criterion standard achievement of the algebra program structures was evaluated by 3 experts and then brought the students of evaluation to analyse the appropriation of algebra program structures. The earned data were computerized for finding means ($\overline{X}$), standard deviations (S.D.) and index of objective congruent (IOC) 2) the 17 experimental group students approached by pre-tests of criterion standard achievement test then the researcher taught 98 periods and the post-tests were administered during the final period. The pre-tests and post-tests were analysed by the method of t-test and post-tests were analysed fo find out the means ($\overline{X}$) and standard deviations. (S.D.)

The result indicated that 1) the appropriation evaluation of program structures by the experts were appropriated by means ($\overline{X}$) were between 3.76-5.00 and the standard deviations (S.D.) were between 0.00-0.94 . The congruent evaluation of program structures was agreeable by index of objective congruent (IOC) were between 0.66-1.00 2) the analysis by using the criterion standard achievement test indicated that, the points of pre-tests and post-tests after learning the algebra program were significantly statistical different at the level ..01. The results of post-tests were higher than pre-tests and the average points after learning algebra program were 59.11 which was more than the criterion for effectiveness of the program. (52 points)